Récolte 2001

Énoncés d'exercices d'oraux de mathématiques,
récoltés par les élèves des classes préparatoires scientifiques

Compilé et mis en forme par Walter Appel
à l'aide du logiciel $\LaTeX\,2_\varepsilon$ sous GNU-Linux.

L'équipe des professeurs de mathématiques en CPGE remercie les taupins suivants (plus ceux qui sont restés anonymes), qui ont participé aux récoltes d'exercices :

MP*

Côme **Berbain** — Nicolas **Bertrand** — Lynne **Bouchy** — Benoît **Claudon** — Mélanie **Durupt** — François **Klein** — Cyril **Lathuiliere** — Daniel **Malivoir** — Émilie **Mange** — Maryline **Mertz** — Clotaire **Michel** — M. **Pagelot** — Carine **Simon** — Théophane **Weber** — Antoine **Zimmermann** ;

MP

Sabrina **Boulogne** — Nicolas **Deblais** — Alexandre **Fuffa** — Benjamin **Gérard** — Laurent **Gillet** — Jérôme **Grandemange** — Fabien **Guenzi** — Fanny **Jacquemin** — Jérémie **Mercier** — Olivier **Masson** — Soazig **Parouty** — Olivier **Spet** — Virginie **Tihay** ;

PC*

Aurélie **Barbier** — Florence **Darbour** — Antoine **Fourriere** — Nadège **Herment** — Guillaume **Lepesqueux** — Alexa **Leroux** — Lucie **Malosse** — Philippe **Sellenet** ;

PC

Chloé **Ahrweiller** — Émilie **Braun** — Virginie **Casarotto** — Cédric **Chopat** — Véronique **Collet** — Julien **Dupont** — Cécile **Huet** — Maud **Jacquot** — Serge **Lacoste** — Vincent **Meugnot** — Kilian **Pfaab** — Claire **Popovici** — Anne-Catherine **Probst** — Loïc **Rondot** — Cécile **Royal** — Marie **Sauvadet** — Virginie **Sibille** — Jennifer **Simonet** — Sylvain **Tabone** — Nicolas **Verdon** — Hélène **Vogel** — Pierre **Willaume**.

Symbole	signification
$\mathbb{O}$	une matrice nulle
$\stackrel{\perp}{\oplus}$	somme directe orthogonale
$\lVert\cdot\rVert$	norme linéaire sur $\mathscr{L}_c(\mathrm{E})$
$\langle\cdot\vert\cdot\rangle$	produit scalaire
$\chi_{\mathrm{A}}, \chi_f$	polynôme caractéristique de A, de f
$\mathfrak{A}_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices antisymétriques
$\mathcal{B}(a\ ;\ r)$	boule ouverte de centre a de rayon r
$\overline{\mathcal{B}}(a\ ;\ r)$	boule fermée de centre a de rayon r
DSE	développement en série entière
$\mathscr{L}(\mathrm{E})$	e.v. des endomorphismes de E
$\mathscr{L}_c(\mathrm{E})$	s.e.v. des endomorphismes continus de E
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$
$\mathfrak{P}(\mathrm{E})$	ensemble des parties de E

Les 354 exercices récoltés (sans compter les doublons) se répartissent ainsi :

Sujet	$\mathrm{N}^{\underline{\mathrm{bre}}}$	Sujet	$\mathrm{N}^{\underline{\mathrm{bre}}}$
Arithmétique	3	Séries entières	22
Algèbre générale	15	Séries de Fourier	5
Algèbre linéaire	32	Intégrale	15
Réduction d'endomorphismes	43	Intégrale paramétrée	16
Algèbre bilinéaire	45	Équations différentielles	20
Suites	10	Géométrie	19
Espaces vectoriels normés	18	Calcul différentiel	8
Fonctions	15	Intégrales multiples	5
Séries numériques	26	Divers	5
Suites et séries de fonctions	32		

Arithmétique

◆ **ARI.1 — TPE–MP 2001 (réc. M. Mertz)**
Démontrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

◆ **ARI.2 — TPE–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
Résoudre $x^2 - \overline{3}x + k = 0$ dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, où $k \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

◆ **ARI.3 — CCP–MP 2001**
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $y^2 = x(x+1)(x+2)(x+8)$.

Algèbre générale

◆ **ALG.1 — X–ESPCI–PC 2001 (réc. G. Lepesqueux)**
Simplifier $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$.

◆ **ALG.2 — Mines–MP 2001 (réc. C. Michel)**
Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}\right)^{-1}$.

◆ **ALG.3 — Centrale–MP 2001**
On se place dans $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]$. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.

L'assertion $\quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}_3[\mathrm{X}], \quad |\mathrm{P}(1)| \leqslant \alpha \displaystyle\sum_{k=1}^{4} |\mathrm{P}(k \cdot n)| \quad$ est-elle vérifiée ?

◆ **ALG.4 — CCP–PC 2001 (réc. G. Lepesqueux)**
Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathrm{C}_n^k$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)\mathrm{C}_n^k$.

◆ **ALG.5 — TPE–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
On pose, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$: $\mathrm{S}_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k k^p$.

i) Calculer $\mathrm{S}_{n,0}$ et $\mathrm{S}_{n,1}$.

ii) Calculer $\mathrm{S}_{n,p}$ pour $p \in [\![0, n]\!]$. On pourra introduire $t \longmapsto (1 - \mathrm{e}^t)^n$.

Algèbre

◆ **ALG.6 — Centrale–MP 2001 (vis. Appel)**
On pose $\mathscr{A} \overset{\text{déf}}{=} \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}) \; ; \; \exists p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^p = \mathrm{I}_n\}$.

i) Dans cette question, on considère le cas $n = 2$. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le groupe multiplicatif engendré par A et B est-il inclus dans $\mathscr{A}$?

ii) Montrer qu'il existe un nombre fini de polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tels que : • P est unitaire ; • $\deg \mathrm{P} = n$; • toutes les racines de P sont de module 1.

iii) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{A}$, $\mathrm{M}^p = \mathrm{I}_n$.

iv) Montrer que tout sous-groupe multiplicatif de $\mathscr{A}$ est fini.

INDICATION : *Soit* G *un tel sous-groupe, on pose* $p = \dim \mathrm{Vect}(\mathrm{G})$, *et on note* $(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_p)$ *une base de* $\mathrm{Vect}(\mathrm{G})$. *On pose ensuite* $\mathrm{T} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{C}^p, \quad \mathrm{M} \longmapsto \big(\mathbf{tr}(\mathrm{A}_1\mathrm{M}), \dots, \mathbf{tr}(\mathrm{A}_p\mathrm{M})\big)$; *montrer que* T *est injective.* ◇

♦ ALG.7 — TPE–MP 2001

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe. On pose $\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \mathrm{G} \; ; \; \forall x \in \mathrm{G}, \; \alpha \star x = x \star \alpha\}$. Montrer que Γ est un sous-groupe de G.

Polynômes

♦ ALG.8 — ENS Lyon–PC 2001 (réc. L. Malosse)

Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On note $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ les racines de P' et $y_1 < y_2 < \dots < y_q$ celles de Q'. Montrer qu'il y équivalence entre les énoncés :

(a) il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissant tel que $\mathrm{P} \circ f = \mathrm{Q}$;

(b) $p = q$ et $\mathrm{mult}(x_i \; ; \; \mathrm{P}') = \mathrm{mult}(y_i \; ; \; \mathrm{Q}')$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

♦ ALG.9 — Centrale–MP 2001 (réc. D. Malivoir)

On pose $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}, \; \mathrm{P}(x) \geqslant 0\}$.

i) Montrer que F est stable par addition et multiplication. Si $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$, que peut-on dire du degré de P ?

ii) Montrer que tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$ peut s'écrire sous la forme de deux polynômes au carré. (On pourra commencer par une étude dans le cas où $\deg \mathrm{P} = 2$.)

iii) (Avec `Maple`) Exemple de décomposition en carrés d'un polynôme de degré 4 à quatre racines complexes.

♦ ALG.10 — Centrale-Supélec–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)

Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers et à racines de module 1 est fini. *(Cf. exercice **ALG.6**.)*

♦ ALG.11 — Centrale-Supélec–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)

Soit $\mathrm{F} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme, et soit α une racine de ce polynôme. Montrer que $|\alpha| \leqslant 2 \max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} |a_{n-k}|^{1/k}$.

♦ ALG.12 — ENSAI–MP 2001 (réc. S. Parouty)

Donner une CNS sur $p, q, r \in \mathbb{C}$ pour que les trois racines du polynôme $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} + r$ forment un triangle équilatéral.

♦ ALG.13 — INT–MP 2001 (réc. N. Deblais)

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}+n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{k+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}+n-k)$.

♦ ALG.14 — CCP–PC 2001 (réc. N. Verdon)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ un polynôme divisible par $(\mathrm{X}-1)$ et par $(\mathrm{X}-2)$. De plus, le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X}^2 + 1$ vaut 1. Déterminer P.

♦ ALG.15 — CCP–MP 2001

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. On suppose qu'il existe $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{R}$ et $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ sont unitaires. Montrer que $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

◆ **AL.1 — ENS Ulm–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $F_M = \{B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ MB = BM\}$. Montrer que $\dim F_M \geqslant n$.

◆ **AL.2 — ENSAE–MP 2001**
Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. Soit $(F_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels stricts de E.
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} F_i \neq E$.

◆ **AL.3 — Mines–MP 2001 (réc. L. Gillet)**
On note $\mathscr{A} \overset{\text{déf}}{=} \left\{M \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K}) \ ; \ {}^t MJ + JM = 0\right\}$, où $J = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I_n \\ -I_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathscr{A}$ est un espace vectoriel. Calculer sa dimension.

◆ **AL.4 — Mines– 2001**
On pose $J = (J_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ avec $J_{\alpha\beta} = j^{\alpha+\beta-1}$. Déterminer la dimension de

$$\{A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \ ; \ AJ = JA\}.$$

◆ **AL.5 — Mines–MP 2001 (réc. L. Bouchy)**
On pose $A(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 2\operatorname{sh} x & e^{-x} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $G = \left\{A(x) + yB \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

i) Montrer que G est un groupe.

ii) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 d'un espace de dimension 3.

Applications linéaires

◆ **AL.6 — Mines–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $E = \{aI_3 + bA + cA^2 \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

i) Montrer que E est une algèbre.

ii) Justifier que $\exp(xA)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)I_3 + g(x)A + h(x)A^2$.

iii) Trouver un système différentiel vérifié par f, g, h, en déduire f, g, h.

INDICATION : *On remarquera que* $\dfrac{\mathrm{d}\exp(xA)}{\mathrm{d}x} = A \cdot \exp(xA)$. ◇

◆ **AL.7 — Mines–MP 2001 (réc. M. Mertz)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \iff \begin{cases} \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\} \\ \text{et } \dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v. \end{cases}$$

◆ **AL.8 — Mines–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x-a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

♦ **AL.9 — Mines–MP 2000**

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $3n$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 + f = 0$ et $\operatorname{rg} f = 2n$. Montrer que la matrice représentative de f est semblable à $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathrm{I}_n \\ \mathbb{O} & -\mathrm{I}_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

♦ **AL.10 — TPE–MP 2001 (réc. N. Bertrand)**

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$. Trouver tous les endomorphismes de E qui commutent avec f.

♦ **AL.11 — TPE–MP 2001**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'un endomorphisme qui commute avec tous les autres est une homothétie.
Peut-on généraliser à E de dimension infinie ?

♦ **AL.12 — CCP–MP 2001 (réc. M. Mertz)**

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, et soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer l'équivalence :

$$\big(\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v\big) \iff \big(\exists w \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), u = v \circ w\big).$$

♦ **AL.13 — CCP–PC 2001 (réc. C. Royal)**

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 1$). Soit u un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

i) Montrer que $\dim \mathrm{E} = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

ii) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathrm{I}_p \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

♦ **AL.14 — CCP–PC 2001 (réc. N. Herment)**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\dim \operatorname{Ker} u \leqslant 1$. Montrer que $\operatorname{rg}(u^k) \geqslant n - k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Matrices

♦ **AL.15 — X–MP 2001 (réc. M. Pagelot)**

i) Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une CNS pour que M soit inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

ii) Montrer que $\big\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ \exists \mathrm{M} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{Z}),\ (\operatorname{dét} \mathrm{M} = 1) \wedge (\forall p \in [\![1, k]\!], \mathrm{M}^p \neq \mathrm{I}_3) \wedge (\mathrm{M}^k = \mathrm{I}_3)\big\}$ est fini.

iii) Généraliser à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

♦ **AL.16 — Mines–PC 2001 (réc. G. Lepesqueux)**

Soit $(a, b, c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, et on note $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \gamma(n) & \delta(n) \end{pmatrix}$. Existence et calcul de $\lim\limits_{\infty} \alpha/\gamma$ et de $\lim\limits_{\infty} \beta/\delta$. Applications en physique ?

♦ **AL.17 — Mines–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

♦ **AL.18 — TPE–MP 2001**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir de A^2, A et I_3.

♦ **AL.19 — TPE–MP 2001 (réc. L. Gillet)**

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculer A^n en fonction de A^2, A et I.

♦ **AL.20 — CCP–PC 2000 (réc. É. Braun)**

Calculer l'inverse de la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ avec $a_{ii} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $a_{i,i+1} = -a$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

♦ **AL.21 — CCP–PC 2001 (réc. M. Jacquot)**

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sup |a_{ij}| < 1/n$. Montrer que $A + I_n$ est inversible.

♦ **AL.22 — INT–MP 2001**

On pose $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = 1 + \delta_{ij}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Projecteurs

♦ **AL.23 — TPE–MP–PC 2001**

Soit p un projecteur de E, et soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $p \circ g = g \circ p$ si et seulement si g laisse stable $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.

♦ **AL.24 — CCP–MP 2001 (réc. N. Deblais)**

Montrer l'équivalence $\begin{cases} f \circ g = g, \\ g \circ f = f \end{cases} \iff \begin{cases} f,\, g \text{ projecteurs}, \\ \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g \end{cases}$

Formes linéaires

♦ **AL.25 — Centrale–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**

Soient a, b, c trois réels distincts. On définit sur $\mathbb{R}[X]$ les formes $\phi_1 : P \longmapsto P(a)$, $\phi_2 : P \longmapsto P(b)$, $\phi_3 : P \longmapsto P(c)$ et $\phi_4 : P \longmapsto \int_a^b P(t)\,dt$.

i) Montrer que, dans $\mathbb{R}_n[X]^*$ ($n \geqslant 2$), la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est libre.

ii) On pose $n = 3$. Montrer qu'il existe une unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi_4 = \lambda\phi_1 + \mu\phi_2 + \nu\phi_3$.

iii) Que peut-on dire de

$$H_n \stackrel{\text{déf}}{=} \{P \in \mathbb{R}_n[X] \; ; \; \phi_4(P) = \lambda\phi_1(P) + \mu\phi_2(P) + \nu\phi_3(P)\} \; ?$$

♦ **AL.26 — Mines–MP 2001 (vis. Appel)**

Soit $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, et notons, pour $i = 0, \dots, n$, u_i la forme linéaire définie par $u_i : P \longmapsto P(b_i)$. Montrer que la famille $(u_0, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si les b_i sont distincts deux à deux.

♦ **AL.27 — CCP–PC 2001 (réc. A.-C. Probst)**

Montrer qu'il existe n nombres réels $a_1, \dots, a_n$, que l'on déterminera, tels que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a : $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k)$.

Déterminants

♦ **AL.28 — Centrale–MP 2000**
Soit $\mathrm{C} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant : $\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\mathrm{C}+\mathrm{X}) = \det \mathrm{X}$. Montrer que $\mathrm{C} = 0$.

♦ **AL.29 — ICNA–PC 2001 (réc. V. Sibille)**
Soient $x < y < z$ trois réels. Déterminer le signe de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & \mathrm{e}^x \\ 1 & y & \mathrm{e}^y \\ 1 & z & \mathrm{e}^z \end{vmatrix}$.

♦ **AL.30 — CCP–PC 2001 (réc. S. Tabone)**
Discuter et résoudre le système $\begin{cases} x + y + (1+a)z = 2(1+a), \\ (1+a)x - (1+a)y + z = 0, \\ 2x + 2ay + 3z = 2(1+a). \end{cases}$

♦ **AL.31 — CCP–MP 2001 (réc. A. Fuffa, D. Malivoir)**
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{vmatrix}$. Montrer que $\Delta \geqslant 0$.

♦ **AL.32 — CCP–PC 2001 (réc. A. Leroux)**
Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $\det \mathrm{M}$ peut s'écrire sous la forme de la somme de 6 termes, chacun étant constitué du produit de trois coefficients. Montrer que, quelle que soit la répartition des signes des coefficients, au moins un des six termes est négatif.

Réduction d'endomorphismes

♦ **RED.1 — ENS Cachan–MP 2001**
Soit $\mathrm{F} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont la diagonale est nulle. Soit $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathrm{F}+\mathrm{D})$.

i) Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - \lambda_i| \leqslant \sum_{j=1}^n |\mathrm{F}_{ij}|$.

ii) Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on pose $\mathrm{A} = \mathrm{XDX}^{-1}$. Prouver qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$, ne dépendant que de X,, tel que

$$\forall \mathrm{E} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A}+\mathrm{E}), \quad \exists \mu \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A}), \quad |\lambda - \mu| \leqslant k\, |\!|\!| \mathrm{E} |\!|\!| .$$

♦ **RED.2 — X–ESPCI–PC 2001 (réc. L. Malosse)**

i) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $f^n = 0$. Trouver tous les sous-espaces vectoriels $\mathrm{E} \subset \mathbb{C}^n$ tels que $f(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

ii) Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ nilpotents et commutant entre eux. Montrer que $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n = 0$.

♦ **RED.3 — X–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, avec $\mathbb{K}$ un corps. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

♦ **RED.4 — Mines–PC 2001 (réc. Ph. Sellenet)**
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, et posons $\mathrm{A} = \operatorname{AntiDiag}(a_1, \dots, a_n)$. Donner une CNS de diagonalisabilité de A.

♦ **RED.5 — Mines–MP 2000**

Résoudre, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

♦ **RED.6 — Mines–MP 2001 (réc. T. Weber)**

Soit E un espace vectoriel et G un sous-groupe fini de $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$. On note $p = \dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} g$. Montrer que p est un projecteur. Trouver $\operatorname{Im} p$ (on montrera que c'est $\{x \in \mathrm{E}\ ;\ \forall g \in \mathrm{G},\quad g(x) = x\}$) et en déduire $\mathbf{tr}\, p$.

Application : soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \mathbb{O} & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme associé à A. Vérifier que $\langle A \rangle$ est fini. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. *Sans calculer* $\det(A - X\,\mathrm{Id})$, déterminer les polynômes caractéristique et minimal de A. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est-elle diagonalisable ? Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

♦ **RED.7 — Mines–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, stable par u. On appelle v l'endomorphisme induit par u sur F.

i) Montrer que si u est diagonalisable, alors v est diagonalisable.

ii) Montrer que le polynôme caractéristique de v divise celui de u.

♦ **RED.8 — Mines–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.

♦ **RED.9 — Mines–PC 2001 (réc. A. Barbier)**

Soient E un espace vectoriel de dimension n, et p un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. On pose $\Phi : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E}),\quad u \longmapsto p \circ u + u \circ p$. Trouver les valeurs propres de Φ et la dimension des sous-espaces propres.

♦ **RED.10 — Centrale– 2001**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, on pose $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \mathbb{O} & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

i) Montrer que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, on définit $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ par : $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ et a_n, b_n et c_n sont les trois valeurs propres non nulles de M_n. Montrer que a_n, b_n et c_n sont solutions de $x^2 - x - 1 - \dfrac{1}{x-1} = n - 2$.

iii) Donner un équivalent de a_n et c_n lorsque $[n \to \infty]$. Montrer que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

♦ **RED.11 — Centrale–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(r) = A + rB$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.

i) Soit $\mathrm{L} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses valeurs propres. Montrer que si $|\lambda_i| < 1$ pour $i = 1, 2, 3$, alors la suite $(\mathrm{L}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

ii) Montrer que la suite $\big(\mathrm{M}(r)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

◆ **RED.12 — Centrale–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une CNS pour que $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathrm{A} \\ \mathrm{I}_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

◆ **RED.13 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**

Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

i) On suppose A inversible. Calculer $\begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & \mathbb{O} \\ -\mathrm{B} & -\mathrm{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{B} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$. On suppose que A et B commutent ; montrer que dét $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{B} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \text{dét}(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})$.

ii) Étendre ce résultat au cas où A n'est pas inversible.

iii) On note χ_{M} le polynôme caractéristique de M. Calculer χ_{B} en fonction de χ_{A} dans les cas suivants :

(a) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{A} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ (b) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ (c) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 2\mathrm{A} \\ 2\mathrm{A} & 3\mathrm{A} \end{pmatrix}$

et, en fonction de $a, b \in \mathbb{C}$, dans le cas $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

◆ **RED.14 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $\mathrm{A} = (a_i/a_j)_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

◆ **RED.15 — Centrale–MP 2000**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que le commutant de u est l'ensemble des polynômes en u.

◆ **RED.16 — Centrale–MP 2000**

On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

i) Montrer que les valeurs propres de A sont réelles et vérifient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

ii) Calculer la somme et le produit des valeurs propres, ainsi que la somme des carrés des valeurs propres.

iii) On note R_n la plus grande des valeurs propres. Montrer que $\mathrm{R}_n \sim \mathrm{C}n^2$, où C est une constante à déterminer.

♦ RED.17 — Centrale–MP 2001

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

i) On définit $f : E \longrightarrow E, \quad X \longmapsto AX$. Écrire la matrice de f, calculer son polynôme caractéristique, déterminer ses éléments propres.

ii) Même question avec $g : X \longmapsto XA$.

iii) Même question avec $h = f + g$.

♦ RED.18 — Centrale–PC 2001 (réc. Ph. Sellenet)

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $F \in \mathscr{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par : $F(M) = M + \mathbf{tr}(AM)B$ pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

i) Trouver A et B pour que $F = \mathrm{Id}$.

ii) Dans le cas général, déterminer $\mathbf{tr}\,F$.

iii) Donner une CNS de diagonalisabilité de F.

iv) Reconnaître F quand il est diagonalisable.

♦ RED.19 — ICNA–PC 2001 (réc. C. Merio)

On pose $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

i) Les matrices $A(x)$ et $M(x)$ sont-elles inversibles ? Si oui, calculer l'inverse de $A(x)$.

ii) Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad x \longmapsto A(x)$ est un morphisme de groupe.

iii) Diagonalisabilité de $A(x)$?

iv) Calculer $A^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

♦ RED.20 — TPE–MP 2001 (réc. F. Klein)

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$.

♦ RED.21 — CCP–MP 2001 (réc. F. Jacquemin)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & & \mathbb{O} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \mathbb{O} & & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible. Donner son inverse.

♦ RED.22 — CCP–MP 2001 (réc. O. Masson)

On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P) = XP - \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'$.

i) Vérifier que $P \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

ii) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

iii) f est-elle diagonalisable ?

♦ **RED.23 — INT–MP 2001 (réc. O. Spet)**
E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, u et v des endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer que u et v sont diagonalisables dans la même base.

♦ **RED.24 — CCP–MP 2001 (réc. O. Spet, N. Bertrand)**

On pose $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathbb{O} \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathbb{O} & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'ordre n.

i) Calculer le déterminant de A_n.

ii) Trouver les conditions sur n pour que 1 (*resp.* 2, *resp.* 3) soit valeur propre de A_n.

iii) Trouver les valeurs propres de A_5. Espace propre associé à la valeur propre 1 ?

♦ **RED.25 — CCP–PC 2001 (réc. C. Huet)**
Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ des réels. Déterminer le polynôme caractéristique de A et les sous-espaces propres, avec $\mathrm{A} = (a_{ij})_{ij}$ et $a_{1j} = -\alpha_{n-j}$, $a_{ij} = 1$ pour $i - j = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

♦ **RED.26 — CCP–PC 2001 (réc. L. Malosse)**
Montrer qu'il n'existe pas de matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{I} = 0$.

♦ **RED.27 — TPE–MP 2001 (réc. C. Michel)**

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Calculer son polynôme caractéristique. Est-elle diagonalisable ?

ii) Quel est son polynôme minimal ? En déduire une autre étude de la diagonalisabilité de A ?

iii) Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(\mathrm{I} - \mathrm{A})^2 \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{I} + \mathrm{A})^2$.

iv) Montrer que A est semblable à $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

♦ **RED.28 — CCP–PC 2001 (réc. C. Ahrweiller)**
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $(f - b\,\mathrm{Id})^3 = 0$. On suppose que f n'est pas une homothétie.

i) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

ii) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Montrer l'équivalence

$$\big(\mathrm{P}(f) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)\big) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{P}(b) \neq 0\big).$$

♦ **RED.29 — CCP– 2001**
On définit récursivement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. Calculer explicitement u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

♦ RED.30 — CCP–PC 2000 (réc. L. Rondot)
La fonction $f : \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}), \quad \mathrm{X} \longmapsto {}^t\mathrm{X} - \mathrm{X}$ est-elle diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres.

♦ RED.31 — TPE–MP 2001 (réc. A. Fuffa)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,\mathrm{A} \cap \mathrm{Sp}\,\mathrm{B} = \varnothing.$$

♦ RED.32 — TPE–MP 2001 (réc. A. Fuffa)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{dét}(\exp \mathrm{A}) = \exp(\mathbf{tr}\,\mathrm{A})$.

♦ RED.33 — CCP–MP 2001 (réc. S. Boulogne)
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables, on note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. On pose $\widetilde{\mathrm{A}} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}\,\mathrm{Id}_2 & a_{12}\,\mathrm{Id}_2 \\ a_{21}\,\mathrm{Id}_2 & a_{22}\,\mathrm{Id}_2 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{\mathrm{B}} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$, définies par blocs.

i) Montrer que si ${}^t(x_1, x_2)$ est un vecteur propre de A, alors $\mathrm{U}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(x_1, 0, x_2, 0)$ et $\mathrm{U}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(0, x_1, 0, x_2)$ sont des vecteurs propres de $\widetilde{\mathrm{A}}$. Montrer que si ${}^t(x_1', x_2')$ est vecteur propre de B, alors $\mathrm{V}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(x_1', x_2', 0, 0)$ et $\mathrm{V}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(0, 0, x_1', x_2')$ sont des vecteurs propres de $\widetilde{\mathrm{B}}$.

ii) Exprimer $\widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{V}_1$ et $\widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{V}_2$ en fonction de V_1 et V_2. On pose $\mathrm{W}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} x_1\mathrm{V}_1 + x_2 1\mathrm{V}_2$. Montrer que W_1 est vecteur propre commun à $\widetilde{\mathrm{A}}$ et $\widetilde{\mathrm{B}}$. Trouver trois autres vecteurs propres communs à $\widetilde{\mathrm{A}}$ et $\widetilde{\mathrm{B}}$ formant une base de $\mathbb{R}^4$.

iii) Montrer que $\mathrm{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{B} & a_{12}\mathrm{B} \\ a_{21}\mathrm{B} & a_{22}\mathrm{B} \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

♦ RED.34 — TPE–MP 2001 (réc. F. Guenzi)
On pose $\mathrm{M} = \mathrm{antiDiag}(1, \ldots, 1) \in \mathfrak{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable. Calculer ses valeurs et vecteurs propres. Diagonaliser M.

♦ RED.35 — CCP–MP 2001 (réc. F. Guenzi)
On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & c & & \mathbb{O} \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ \mathbb{O} & & b & a \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

♦ RED.36 — CCP–MP 2001 (réc. S. Parouty)
Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ ayant deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme $\mathrm{A}^n = \lambda_1\mathrm{M}_1 + \lambda_2\mathrm{M}_2$ (on explicitera M_1 et M_2).

♦ RED.37 — CCP– 2001
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Trouver l'ensemble S des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ tels que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ 0 & b & z & -y \\ 0 & 0 & a & x \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

♦ **RED.38 — CCP–PC 2001 (réc. J. Dupont)**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{A}_a = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$.
Montrer que A_a et B_a sont semblables pour tout $a \in \mathbb{R}$.

♦ **RED.39 — CCP–PC 2001 (réc. V. Casarotto)**

Calculer la limite de $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}^n$.

♦ **RED.40 — TPE–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{A}(a) = \begin{pmatrix} 0 & \sin a & \sin 2a \\ \sin a & 0 & \sin 2a \\ \sin 2a & \sin a & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS sur a pour que $\mathrm{A}(a)$ soit diagonalisable.

♦ **RED.41 — CCP–MP 2001**

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, avec $a^2 + b^2 \neq 0$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & -d & -c \\ -c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

i) Calculer $\mathrm{M} \cdot {}^t\mathrm{M}$, $\det \mathrm{M}$ et montrer que $\mathrm{rg}\, \mathrm{M} \in \{2, 4\}$.

ii) On pose $\omega^2 = b^2 + c^2 + d^2$, on suppose $\omega^2 \neq 0$. Calculer le spectre de M et montrer que M est diagonalisable.

♦ **RED.42 — CCP–MP 2001 (réc. J. Mercier)**

On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer ses éléments propres. Trouver toutes les matrices $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{B}^3 = \mathrm{A}$.

♦ **RED.43 — CCP–MP 2000**

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $]0,1[$, $]1,2[, \ldots,]n-1, +\infty[$.

Algèbre bilinéaire

♦ **BIL.1 — ENS Cachan–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $V : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ convexe continue, et $z \in E$. On définit, pour $\lambda \geqslant 0$ la fonction $f_\lambda : E \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto \|x-z\|^2 + \lambda V(x)$. Montrer que f_λ admet un unique minimum local.

♦ **BIL.2 — ENS Cachan–MP 2001 (réc. B. Claudon)**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. On note (P) la propriété :

$$(\mathsf{P}) \qquad \forall d, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d, \quad \Big(f\big(\|x_i - x_j\|^2 \big) \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n^+.$$

(La norme sur $\mathbb{R}^d$ est la norme euclidienne canonique.) On suppose que f vérifie (P).

i) Montrer que $\sum_{i,j} f\big(\|x_i - x_j\|^2 \big) \geqslant 0$.

ii) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geqslant 0$.

iii) Soit $h > 0$. On pose $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t) - f(t+h)$. Montrer que g vérifie (P).

♦ **BIL.3 — X–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi(a,a) \neq 0$. On note $A = \langle a \rangle$.

i) On pose $B = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ \phi(y,a) = 0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$.

ii) On pose $G = \big\{ u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \ ; \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \phi\big(u(x), u(y)\big) = \phi(x,y) \big\}$. On définit l'endomorphisme u_0 par $u_0(x) = x$ si $x \in A$ et $u_0(x) = -x$ si $x \in B$. Montrer que $u_0 \in G$.

iii) On pose $G^* = \{v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \ ; \ u_0 \circ v = v \circ u_0\}$. Montrer que, si $v \in G^*$ et $\phi(a,a) \neq 0$, alors il existe $\lambda_a \in \mathbb{R}$ tel que $v(a) = \lambda_a a$.

iv) Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\phi(b,b) \neq 0$ et $\phi(c,c) \neq 0$. Comparer λ_b et λ_c.

v) Montrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x,x) \neq 0 \Longrightarrow v(x) = \lambda x$.

vi) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $v(x) = \lambda x$.

♦ **BIL.4 — X–MP 2001 (réc. B. Claudon)**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

i) Montrer qu'il existe $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^t U A V = D$ avec D diagonale à coefficients positifs. On pose alors $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0)$ avec $r = \operatorname{rg} A$ et $\mu_i > 0$.

ii) On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_r^{-1}, 0, \ldots, 0)$ et $A' = V \Delta {}^t U$, et $M = AA'$, $N = A'A$. Identifier M et N.

iii) En notant $U = (U_1 | \ldots | U_n)$ et $V = (V_1 | \ldots | V_n)$, montrer que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(U_1, \ldots, U_r)$ et $\operatorname{Im} {}^t A = \operatorname{Vect}(V_1, \ldots, V_r)$.

iv) Calculer $AA'A$ et $A'AA'$. Pouvait-on s'y attendre ?

♦ **BIL.5 — X–MP 2001 (réc. B. Claudon)**

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et G un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ tel que $\overline{G} = \mathscr{H}$. Soit $u : G \longrightarrow \mathscr{H}$ linéaire, continue, et telle que $\|u - \mathrm{Id}_G\| < 1$.

i) Montrer que u admet un prolongement $v : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ avec $v \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H}) \cap \mathscr{G}\ell(\mathscr{H})$.

ii) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille orthonormée *complète*, c'est-à-dire que $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\}} = \mathscr{H}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de vecteurs de $\mathscr{H}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille complète.

iii) Montrer que 1 est la meilleure constante.

iv) On montrera le lemme suivant : soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathscr{H}^{\mathbb{N}}$, alors $\overline{\mathrm{Vect}(e_1)+\overline{\mathrm{Vect}(e_k\ ;\ k\geqslant 2)}} = \overline{\mathrm{Vect}(e_k\ ;\ k\geqslant 1)}$.

♦ **BIL.6 — S^t Cyr–MP 2001 (réc. O. Masson)**

On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire usuel, noté « $\cdot$ ». Si $\mathrm{A}\in\mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, on note $\mathrm{A}^o \overset{\text{déf}}{=} \{x\in\mathbb{R}^p\ ;\ \forall y\in\mathrm{A},\ x\cdot y\leqslant 1\}$.

i) Notons B l'image de A par l'homothétie de rapport λ. Que peut-on dire de B^o ?

ii) Trouver A^o dans les différents cas : — A est le disque de centre 0 et de rayon 1 ; — A est le carré de centre 0 et de côté 2 ; — A est un parallélogramme.

♦ **BIL.7 — CCP–MP 2001 (réc. L. Gillet)**

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $v\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\big\langle x\big|v(x)\big\rangle = 0 \quad \forall x\in\mathrm{E}$. Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

♦ **BIL.8 — CCP–MP 2001 (réc. C. Michel)**

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de E telle que $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\quad i\neq j \Longrightarrow \langle x_i|x_j\rangle<0$. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})\in\mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i x_i = 0$.

i) Montrer que si $\mathrm{I}=\big\{i\in[\![1,p-1]\!]\ ;\ \alpha_i>0\big\}$ n'est pas vide, alors $\sum_{i\in\mathrm{I}}\alpha_i x_i = 0$. *(Question bizarre ; montrer plutôt que si* I *n'est pas vide on aboutit à une contradiction. NdW)*

ii) En déduire que la famille $(x_1,\dots,x_{p-1})$ est libre.

♦ **BIL.9 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Michel)**

Énoncé bizarre !

Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A}^t\mathrm{A}$ est symétrique définie positive. En déduire qu'il existe une matrice réelle symétrique définie positive, et Q une matrice orthogonale, telles que $\mathrm{A}=\mathrm{SQ}$.
Qu'en est-il si $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\det\mathrm{A}=0$?
Soient S et S′ deux matrices réelles définies positives telles que $\mathrm{S}'^2=\mathrm{S}^2$. Montrer que $\mathrm{S}=\mathrm{S}'$.
Conclusion ?

♦ **BIL.10 — CCP–PC 2001 (réc. C. Ahrweiller)**

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique est $\mathrm{A}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\2&2&-1\end{pmatrix}$. Montrer que f est une isométrie dont on précisera les caractéristiques.

♦ **BIL.11 — TPE–PC 2001 (réc. Ph. Sellenet)**

Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $|\operatorname{\mathbf{tr}}\mathrm{A}|\leqslant\sqrt{n\operatorname{\mathbf{tr}}\mathrm{A}\cdot{}^t\!\mathrm{A}}$.

♦ **BIL.12 — Centrale–MP 2001 (réc. J. Grandemenge)**
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit p un projecteur. On note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne.

i) Montrer que p est autoadjoint si et seulement si $\|p\| \in \{0, 1\}$.

ii) Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E ; p_{A} (*resp.* p_{B}) désignant le projecteur autoadjoint d'image A (*resp.* B), montrer que $\|p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}}\| \leqslant 1$. Que dire de $\dim \mathrm{A}$ et $\dim \mathrm{B}$ lorsque $\|p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}}\| < 1$?

♦ **BIL.13 — CCP–PC 2001 (réc. L. Rondot)**
Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{\pi} \left(\sin x - ax - bx^2\right)^2 \mathrm{d}x$.

♦ **BIL.14 — TPE–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}\, \mathrm{A} = \mathrm{rg}({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$.

♦ **BIL.15 — INT–MP 2001 (réc. M. Mertz)**
Soit E un e.v. euclidien de dimension n. Soit $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathrm{E}^p$. On considère $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \quad f \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle t|\, a_i\rangle\, a_i$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(a_1, \ldots, a_p)$ pour que f soit bijective.

♦ **BIL.16 — Centrale–MP 2001 (réc. L. Bouchy)**
Quel est le nombre maximal d'éléments d'une famille de vecteurs obtusangle dans un espace de dimension n ?

♦ **BIL.17 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
Soit A une matrice nilpotente, telle que ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A}$. Montrer que $\mathrm{A} = 0$.

Familles orthonormées

♦ **BIL.18 — Centrale–MP 2001 (réc. T. Weber)**
On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et pour tout $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E}$, on pose $\langle \mathrm{P}|\, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{Q}(t)\, \mathrm{e}^{-2t}\, \mathrm{d}t$ lorsque c'est défini.

i) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire. *(Sur la restriction* ad-hoc *de* E *j'imagine, NdW.)*

ii) On pose $\mathrm{L}_n = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x$. Vérifier que la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthonormaux, et que c'est la transformée de la famille $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé de Gram-Schmidt.

iii) Pour tout $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Calculer $\|f_\alpha\|^2$, $\langle f_\alpha|\, \mathrm{L}_n\rangle$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_\alpha|\, \mathrm{L}_n\rangle^2$. Commentaire et interprétation ?

♦ **BIL.19 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**
On définit sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'application $\phi : (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \phi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{Q}(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

i) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

ii) Montrer qu'il existe des polynômes $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n$ orthogonaux entre eux, unitaires et tels que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg \mathrm{P}_k = k$.

iii) Montrer que P_k admet exactement k racines, qu'elles sont simples et strictement positives.

iv) Montrer qu'il existe un minimum global de $\psi(a,b,c) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty}(1+at+bt^2+ct^3)^2 e^{-t}\,dt$. Déterminer l'unique triplet où il est atteint.

♦ **BIL.20 (Polynômes de Tchebychef) — Centrale–PC 2001 (réc. C. Royal)**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire ϕ défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \qquad \phi(P,Q) = \int_a^b P(t)\,Q(t)\,w(t)\,dt,$$

où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et où $w \in \mathscr{C}(]a,b[,\mathbb{R})$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto t^n w(t)$ est intégrable.

i) Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et le coefficient dominant de P_k est positif.

ii) On pose $a=-1$, $b=1$ et $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \dfrac{\alpha_n}{2^{n-1}}\cos(n \operatorname{Arc}\cos t)$.

iii) Déterminer les zéros de P_n.

iv) Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal à n et de coefficient dominant égal à 1. Montrer que $\inf\limits_{P\in\mathscr{U}} \displaystyle\int_a^b \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est atteinte pour $P = P_n$.

♦ **BIL.21 — Centrale–MP 2001 (réc. F. Klein)**

On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathbb{R}_1[X]$.

i) Montrer que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$, il existe un unique couple $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall P \in F, \qquad \int_0^{+\infty} P(t)\,dt = AP(\alpha) + BP(\beta).$$

ii) Montrer qu'il existe α, β tels que l'égalité précédente soit vraie pour tout $P \in E$.

iii) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 4 tel que :

$$\forall P \in E, \qquad \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,dt = 0.$$

iv) Montrer que les racines de Q sont réelles et positives.

♦ **BIL.22 — CCP–PC 2001 (réc. A. Barbier)**

On note F l'espace vectoriel des fonction continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

i) Montrer que l'application $(f,g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt$ est un produit scalaire.

ii) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

iii) Quelle est la projection de $x \longmapsto |x|$ sur cette base ?

Adjoint

♦ **BIL.23 — S^t Cyr–MP 2001 (réc. O. Masson)**

Soit E un espace vectoriel hermitien. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

i) Que peut-on dire des valeurs propres de $u^* \circ u$?

ii) Soit λ une valeur propre de u. Montrer que $\alpha \leqslant |\lambda|^2 \leqslant \beta$, où α est la plus petite des valeurs propres de $u^* \circ u$ et β la plus grande.

♦ **BIL.24 — TPE–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, et soit $y \in \mathrm{E}$. On considère l'application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|y - u(x)\|$. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est minimale en } c \Longleftrightarrow u^* \circ u(c) = u^*(y).$$

♦ **BIL.25 — TPE–MP 2001 (réc. M. Mertz)**
Pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\langle \mathrm{A}|\mathrm{B}\rangle \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{tr}({}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})$.

i) Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

ii) En notant $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer l'orthogonale de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

iii) Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit, pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$. Déterminer l'adjoint de F.

♦ **BIL.26 — Mines–MP 2001 (réc. B. Gérard)**
Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice représentative de u est à diagonale nulle.

♦ **BIL.27 — CCP–MP 2001 (réc. M. Durupt)**
Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$.

i) Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

ii) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $g \circ g^* = g^* \circ g$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $(g - a\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2 + b^2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r)$ stables par g et munis de bases $\mathcal{B}_i$ tels que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_i}\, g|_{\mathrm{V}_i} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Calculer $\mathrm{dét}\, g$ et g^{-1} s'il existe.

Endomorphismes orthogonaux

♦ **BIL.28 — X–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**
On définit la relation sur les matrices : $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$ lorsque $\mathrm{B} - \mathrm{A}$ est positive. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices symétriques positives telles que $\mathrm{A}_{n+1} \leqslant \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice symétrique positive.

♦ **BIL.29 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{mat}_\mathcal{B}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est le produit de deux transformations simples que l'on précisera entièrement.

♦ **BIL.30 — TPE–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**
On note $\mathfrak{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients réels. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une application matricielle $\mathrm{A} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{A}_n(\mathbb{R}), \quad t \longmapsto \mathrm{A}(t)$. On considère une application $\mathrm{X} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \longmapsto \mathrm{X}(t)$ vérifiant l'équation différentielle $\mathrm{X}' = \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{X}(t_0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{X}(t) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

♦ **BIL.31 — Mines–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathbf{tr}(AU) \leqslant \mathbf{tr}\, A$.

♦ **BIL.32 — CCP–PC 2001 (réc. K. Pfaab)**
Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $(P)\ :\ x - y - 2z = 0$.

♦ **BIL.33 — Centrale–MP 2001**
(Avec `Maple`.) Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ est une isométrie négative de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si a, b, c sont racines de $P(x) = x^3 + x^2 = p$ avec $p \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$. Étudier en détail le cas $p = \dfrac{2}{27}$.

♦ **BIL.34 — CCP–PC 2001 (réc. S. Lacoste)**
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est orthogonale. Prouver (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par exemple) que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

♦ **BIL.35 — TPE–MP 2001 (réc. N. Deblais)**
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. Réduire la forme bilinéaire $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$.

♦ **BIL.36 — TPE–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
Soient E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.

♦ **BIL.37 — CCP/Mines–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x | y \rangle = 0 \Longrightarrow \big\langle f(x) \big| f(y) \big\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.
(Aux Mines seulement :) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $g \in O(E)$ tel que $f = \alpha g$.

Formes quadratiques

♦ **BIL.38 — ENSAM–PT 2001 (réc. A. Simon)**
On note q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$, et on note ϕ sa forme bilinéaire associée. Trouver une base orthonormée pour ϕ.

♦ **BIL.39 — Centrale–MP 2001**
On pose $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 6yz$.

i) Signature de q ?

ii) Trouver une base orthogonale pour q.

iii) Trouver le sup et l'inf de q sur la sphère euclidienne $\mathscr{S} \overset{\text{déf}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

iv) Quelle est la nature de l'ensemble défini par $q(x, y, z) = 1$?

♦ **BIL.40 — Centrale–MP 2001**

On note Q_a et Q_b les deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad Q_a(X) = 2x^2 - 2xy + 2y^2, \quad Q_b(X) = -x^2 + 2xy.$$

i) Les formes Q_a et Q_b sont-elles définies positives ?

ii) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour l'une de ces formes quadratiques. Décomposer l'autre dans cette base.

iii) Expliquer pourquoi il est possible de trouver une base orthonormée pour les deux formes. Trouver une telle base.

♦ **BIL.41 — Centrale–MP 2001**

On pose $d(x, y, z) = 3x^2 - 2xz + 3z^2 + y^2$ et $n(x, y, z) = 3x^2 - xz + y^2$.

i) Rang et signature de n et d ?

ii) Montrer qu'il existe une base dans laquelle n et d sont diagonales.

iii) Trouver (sous forme matricielle) toutes les bases telles que cette propriété soit vraie.

iv) On pose $F(x, y, z) = \dfrac{n(x, y, z)}{d(x, y, z)}$. Quelles sont les valeurs prises par F ?

♦ **BIL.42 — ENSAE–MP 2001 (réc. L. Bouchy)**

On définit en dimension n la forme multilinéaire symétrique $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} \min(i, j)\, x_i\, x_j$.

Signature de f ?

♦ **BIL.43 — INT–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Pour tout $x \in E$, on pose $Q(x) = \langle u(x) | x \rangle$.

✍ `Question de cours` :que représente Q ?

Montrer qu'il y équivalence entre les énoncés :

(a) $\mathbf{tr}\, u = 0$;

(b) il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\langle u(e_i) | e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

♦ **BIL.44 — ENSAE–MP 2001 (réc. C. Simon)**

Dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i<j} x_i\, x_j$. Trouver le rang et la signature de ϕ, ainsi qu'une base orthogonale pour ϕ.

♦ **BIL.45 — TPE–MP 2000**

Soit E un espace préhilbertien de dimension n. Soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille vérifiant $\langle e_i | e_j \rangle < 0$ pour tout $i \neq j$. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base. Montrer que les coordonnées de e_{n+1} dans $\mathcal{B}$ sont strictement négatives.

Suites

♦ **SUI.1 — X-ESPCI–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**
Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = au_n^3 + bu_n + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tels que $a + b + c = 1$ et $3a + b > 1$.

♦ **SUI.2 — ICNA–PC 2001 (réc. V. Sibille)**
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

♦ **SUI.3 — CCP–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{X}^{2n+1} - \mathrm{X}^{n+1} - 1$.

i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède une unique racine réelle. On note u_n cette racine.

ii) Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(u_n^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(nu_{n-1})_{n\geqslant 2}$.

♦ **SUI.4 — TPE–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit a_n par $\dfrac{\tan a_n}{a_n} = -\dfrac{1}{n}$. Existence, limite et DL en $1/n$ de a_n ?

♦ **SUI.5 — ENSEA–PC 2001 (réc. K. Pfaab)**
On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

i) Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

ii) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)$.

iii) Donner un équivalent de $1/u_n^2$ en $+\infty$.

♦ **SUI.6 — TPE–MP 2001 (réc. N. Deblais)**
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = \int_0^1 (t - u_n)\,\mathrm{d}t$.

♦ **SUI.7 — TPE–MP 2001 (réc. N. Deblais)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent. Est-il suffisant que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réalisent une partition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que cette dernière converge ? Sinon, contre-exemple.

♦ **SUI.8 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**
Donner un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right)$, où E désigne la partie entière.

♦ **SUI.9 — CCP–PC 2001 (réc. J. Simonet)**
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{(1+x_n)^4}$.

♦ **SUI.10 — Centrale-Supélec–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

i) Montrer que l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, notée x_n.

ii) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et trouver sa limite ℓ.

iii) Trouver un équivalent de $(x_n - \ell)_n$.

Espaces vectoriels normés

♦ EVN.1 — ENS Lyon–MP 2001 (vis. Appel)

U étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(0\ ;\ \mathrm{R})$, et $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, on pose $\alpha : [0,\mathrm{R}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \longmapsto \sup\limits_{\|x\|\leqslant r} f(x)$. Montrer que α est lipshitzienne, et déterminer la meilleure constante k telle que α soit k-lipshitzienne.

♦ EVN.2 — ENS Lyon–MP 2001 (réc. B. Claudon, C. Lathuiliere, M. Pagelot)

Soit $\mathrm{R} > 0$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $\overline{\mathcal{B}}(0\ ;\ \mathrm{R}) \subset \mathrm{U}$, et soit $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $r \in [0,\mathrm{R}]$, on pose $\alpha(r) = \sup\limits_{\|x\|\leqslant r} f(x)$.

i) Montrer que α est lipshitzienne sur $[0,\mathrm{R}]$.

ii) Soit $r \in [0,\mathrm{R}]$ et soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend, en décroissant strictement, vers r. On suppose que $\dfrac{\alpha(r_n)-\alpha(r)}{r_n - r} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Montrer que $\ell \geqslant \inf\limits_{\|x\|\leqslant r} \|\mathrm{d}f_x\|$.

iii) *Variante* (C. Lathuiliere, M. Pagelot) : si $r_n > r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les valeurs d'adhérence de $\dfrac{\alpha(r_n)-\alpha(r)}{r_n - r}$ sont toutes supérieures à $\inf\limits_{\|x\|\leqslant r} \|\mathrm{d}f_x\|$

♦ EVN.3 — ENS Lyon–MP 2001

Soit $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

i) Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{F}^{-1}\big(\{c\}\big)$ soit un singleton. Caractériser c.

ii) On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{F}^{-1}\big(\{c\}\big)$ est compact. Montrer que F admet un extremum.

iii) Supposons que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}^{-1}\big(\{c\}\big)$ est compact. Montrer que $\mathrm{F}(x)$ admet une limite quand $[|x| \to \infty]$.

iv) Qu'en est-il pour $\mathrm{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

♦ EVN.4 — ENS Cachan–MP 2001

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Soit $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\mathrm{F} \overset{\text{déf}}{=} \{x \longmapsto \sigma(\omega x + \theta)\ ;\ \omega,\theta \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{E}$ si et seulement si σ n'est pas un polynôme.

♦ EVN.5 — ICNA–PC 2001 (réc. S. Lacoste)

$(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. On note $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ celui des endomorphismes continus de E.

i) Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est continu si et seulement si il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$\mathrm{M} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x\in\mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

ii) Montrer que $\|\!|\cdot|\!\| : \mathscr{L}_c(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ est une norme.

iii) On suppose que $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est complet. Montrer que $(\mathscr{L}_c(\mathrm{E}), \|\!|\cdot|\!\|)$ est complet.

♦ EVN.6 — CCP–PC 2001 (réc. V. Meugniot)

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la convergence de la série $\sum \mathrm{A}^n$. On notera $\|\mathrm{A}\| = \sup\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

♦ **EVN.7 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Michel)**

Soit K un compact inclus dans un espace vectoriel normé. Soit $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{K}$ une application *faiblement contractante*, c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in \mathrm{K}, \quad x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

i) Montrer que f admet un unique point fixe a.

ii) Soit $u_0 \in \mathrm{K}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

iii) Montrer que $\sin|_{[0,\pi]}$ est faiblement contractante. Conclusion ?

iv) Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est faiblement contractante. Est-ce que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge ? Conclusion ?

♦ **EVN.8 — Mines–MP 2001**

On pose $\mathrm{E} \overset{\text{déf}}{=} \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \ ; \ f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{N}(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) + 2f'(x) + f''(x)|$.

i) Montrer que N est une norme sur E.

ii) On pose $\phi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(1)$. Montrer que ϕ est continue.

iii) Calculer sa norme linéaire $|||\phi|||$.

♦ **EVN.9 — Mines–MP 2001 (vis. Appel)**

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup, et u l'endomorphisme de E qui à $f \in \mathrm{E}$ associe la fonction $g : x \longmapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)$.

i) Montrer que $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ (c'est-à-dire que u est continue). Calculer $|||u|||$.

ii) Quelles sont les fonctions propres associées à la valeur propre $|||u|||$ de u ?

♦ **EVN.10 — ENSAE–MP 2001 (vis. Appel)**

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{E} \overset{\text{déf}}{=} \{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \ ; \ \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

INDICATION : *Commencer par montrer que :* A *non diagonalisable* $\Longrightarrow$E *non fermé. (Traiter d'abord le cas* A *nilpotente, puis le cas général.) Puis démontrer la réciproque.* ◇

♦ **EVN.11 — Centrale–MP 2001**

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

i) On pose $\phi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \quad f \longmapsto \exp \circ f$. L'application ϕ est-elle continue ?

ii) On considère $\mathrm{F} = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathrm{N}(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2}$. Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

♦ **EVN.12 — TPE–MP 2001**

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ telle que $\forall x, y \in \mathrm{E}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On suppose que f est bornée sur la boule unité. Montrer que f est linéaire et continue.

♦ **EVN.13 — TPE–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**

On pose $\mathrm{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ ; \ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$. On pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\mathrm{N}(u) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|\dfrac{u_n}{4^n}\right|$.

i) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

ii) Complétude de (E, N) ?

iii) Compacité de (E, N) et de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

iv) Les boules unité sont-elles compactes ?

♦ **EVN.14 — Mines–MP 2001**

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^{3} |P(k)|$. On pose $f : P(X) \longmapsto P(X+2)$. Calculer $\|\!|f|\!\|$.

♦ **EVN.15 — Centrale–MP 2001**

Soit U un ouvert convexe. Soit $F \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ une application convexe.

i) Montrer que, pour tout $M, M_0 \in U^2$, on a $F(M) \geqslant F(M_0) + dF_{M_0}(\mathbf{M_0M})$.

ii) Montrer que $dF_M = 0 \Longrightarrow F(M)$ est un minimum local.

iii) On pose $E = \{M \in U \; ; \; dF_M = 0\}$. Montrer que E est fermé convexe.

iv) On pose $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M = (x, y) \longmapsto \|\mathbf{OM}\| + ax + by$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Trouver les minimums absolus de F.

♦ **EVN.16 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Leroux)**

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 0$. On note F l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à **support borné**, c'est-à-dire telles que : il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant A \Longrightarrow f(x) = 0$.

i) Montrer que E et F sont deux espaces vectoriels.

ii) On définit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Montrer que N définit une norme sur E.

♦ **EVN.17 — CCP–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**

Pour tout $A = (A_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$.

i) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.

ii) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant k \; \|A\| \cdot \|B\|$, et trouver le plus petit $k \in \mathbb{N}$ vérifiant cette propriété.

♦ **EVN.18 — Mines–MP 2001 (réc. C. Simon)**

On pose $T : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto P(a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de T.

Fonctions

♦ **FON.1 — ENS Ulm–MP 2001 (réc. B. Claudon)**

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

i) On suppose $\int_0^{2\pi} f = 0$. Montrer que f a au moins deux zéros avec changement de signe dans $[0, 2\pi]$.

ii) On suppose $\int_0^{2\pi} f = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt = 0$. Montrer que f a au moins quatre zéros avec changement de signe dans $[0, 2\pi]$.

iii) Généralisation : on suppose $\int_0^{2\pi} f = \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que f a au moins $2n + 2$ zéros avec changement de signe.

♦ **FON.2 — Mines–MP 2001 (réc. O. Spet)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \big(\exp(x^2) - 1\big)/x$ si $x \neq 0$.

i) Montrer que f admet une fonction réciproque g sur $\mathbb{R}$.

ii) Calculer le développement limité de g à l'ordre 5 au voisinage de 0.

♦ **FON.3 — CCP–PC 2001 (réc. C. Huet)**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xf(-x)$.

♦ **FON.4 — ENSAE–MP 2001**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $k \in]0, 1[$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant k$. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto \big(x + f(y), y + f(x)\big)$. Montrer que g est une bijection.

♦ **FON.5 — ENSAE–MP 2001**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^1 (u + x) f(u - x)\,\mathrm{d}u.$$

♦ **FON.6 — CCP–MP 2001 (réc. M. Mertz)**

i) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(x) = c$.

ii) Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1/2]$ tel que $f(x) = f(c + 1/2)$.

iii) Un mobile se déplace à vitesse variable et parcourt une distance d pendant une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt la distance $d/2$.

♦ **FON.7 — TPE–MP 2001 (réc. B. Gérard)**

On considère l'équation $\tan x = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Trouver un DL à l'ordre 2 de la n-ième racine réelle positive.

♦ **FON.8 — CCP–PC 2001 (réc. K. Pfaab)**

Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\ln \cos x} + \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

♦ **FON.9 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**

Soit $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)f''(x) = 0$. On note $\mathrm{Z}(f) = \{x \in [a, b]\ ;\ f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.

i) Montrer, en étudiant la fonction ff', que $\mathrm{Z}(f)$ est réduit à l'ensemble vide, ou bien est un intervalle fermé inclus dans $[a, b]$.

ii) Montrer que f est une fonction affine.

♦ **FON.10 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**

Équivalent en x_0 de $f : x \longmapsto \dfrac{\tan x - \tan x_0}{x - x_0} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

♦ **FON.11 — ENSAE–MP 2001 (réc. C. Simon)**

Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérfiant $f(x + y) + f(x - y) = f(x)\,f(y)$.

♦ **FON.12 — CCP–PC 2001 (réc. M. Sauvadet)**

i) Calculer $\tan \pi/12$.

ii) On considère 13 nombres réels deux à deux distincts $x_1 < x_2 < \cdots < x_{13}$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, 12]\!]$ tel que $0 < \dfrac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1} \cdot x_i} < 2 - \sqrt{3}$.

♦ **FON.13 — Mines–MP 2000**

Chercher toutes les fonctions continues vérifiant $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

♦ **FON.14 — ENS ULC–MP 2001 (réc. M. Pagelot)**

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ véirifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2)$. La fonction g est-elle $\mathscr{C}^\infty$?

♦ **FON.15 — CCP–PC 2001 (réc. F. Darbour)**

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\operatorname{Arc\,tan}(1+x)}{\operatorname{Arc\,tan} x}\right]^{x^2}$.

Séries numériques

Convergence

♦ **SRN.1 — X–MP 2001 (réc. M. Pagelot)**

Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes > 0, si $u_n \sim v_n$ et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n \sim \sum v_n$.

♦ **SRN.2 — CCP–PC 2000 (réc. É. Braun)**

Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{\cos \ln n}{\sqrt{n}}$?

♦ **SRN.3 — CCP–MP 2001 (réc. L. Gillet)**

Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$?

♦ **SRN.4 — Mines–MP 2001 (réc. L. Gillet)**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) \sin x\,\mathrm{d}x$?

♦ **SRN.5 — CCP–PC 2001 (réc. C. Ahrweiller)**

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

♦ **SRN.6 — Centrale– 2001**

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ (convergence et convergence absolue).

♦ **SRN.7 — ENSAI–MP 2001 (réc. S. Parouty)**

Convergence de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

♦ **SRN.8 — CCP–PC 2001 (réc. P. Willaume)**

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$. En posant $\ell \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$, étudier la convergence de la série $\sum(u_n - \ell)$.

♦ **SRN.9 — INT–MP 2001 (réc. M. Mertz)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs strictement positives. Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ une application. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - \phi(n) > a$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

♦ **SRN.10 — Mines–MP 2001 (réc. T. Weber)**
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{\ln(1+\alpha^n n^2)}{n^\beta}$.

♦ **SRN.11 — Centrale–MP 2001 (réc. T. Weber)**
Convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{|\sin n|}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
Convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{|\sin n^\beta|}{n^\alpha}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

♦ **SRN.12 — Centrale–MP 2001 (réc. N. Bertrand)**
Nature des séries de terme général $u_n = \sin\left[2\pi n^2 \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\right]$ et $v_n = \cos\left[\pi n^2 \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right)\right]$

♦ **SRN.13 — Centrale–MP 2001 (réc. L. Bouchy)**
Nature de la série de termes général $u_n = \dfrac{x}{n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ en fonction de x ?
Même question pour $v_n = \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{\pi}{6}$.

♦ **SRN.14 — Mines–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$?

♦ **SRN.15 — CCP–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $u_\mathrm{N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln n}$.

♦ **SRN.16 — Centrale-Supélec–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**
On pose $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$. Étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

♦ **SRN.17 — Centrale–MP 2000**
Nature de la série $u_n = \ln\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$. (Cf. exercice **SRE.22**.)

Calcul de sommes

♦ **SRN.18 — ENS ULC–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere, Anon.)**
Soit $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

♦ **SRN.19 — CCP–MP 2001 (réc. B. Gérard)**
Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

♦ **SRN.20 — CCP–PC 2001 (réc. C. Royal)**
On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2^n}\right)$. Calculer u_n, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.

♦ **SRN.21 — TPE–PC 2001 (réc. Ph. Sellenet)**
Étudier la suite $s_n = \frac{1}{2\cdot\ln 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot\ln n} - \ln(\ln n)$.

♦ **SRN.22 — CCP–PC 2001 (réc. L. Rondot)**
Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\gamma$ pour $[n \to \infty]$.

♦ **SRN.23 — Centrale–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
On pose $u_n : x \longmapsto x^n - \mathrm{E}(x^n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On note $v_n(x) = u_n(x)$ si $0 \leqslant u_n(x) \leqslant 1/2$ et $v_n(x) = 1 - u_n(x)$ sinon. Enfin, on pose

$$\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \sum u_n(x) \text{ converge} \right\} \qquad \text{et} \quad \mathrm{T} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \sum v_n(x) \text{ converge} \right\}.$$

i) Montrer que $\mathbb{N} \subset \mathrm{P} \subset \mathrm{T}$.

ii) On pose $x = a + \sqrt{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ et $\left|a - \sqrt{b}\right| \leqslant 1$. Discuter l'appartenance de x à P ou T.

iii) On pose $x = 1 + \sqrt{2}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$. Même question avec $x = 2 + \sqrt{2}$.

♦ **SRN.24 — TPE–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$.

♦ **SRN.25 — CCP–PC 2001 (réc. A. Leroux)**
On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 2^2}$ pour $n \geqslant 3$. La série converge-t-elle ? Si oui, en calculer la somme.

♦ **SRN.26 — TPE–MP 2000**
Nature et somme de la série de terme général $u_n = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

♦ **SFN.1 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Simon)**
Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}}\,\mathrm{d}t$.

♦ **SFN.2 — CCP–MP 2001 (réc. C. Simon)**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est un polynôme.

♦ **SFN.3 — TPE–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
On considère, sur $\mathbb{R}^{*+}$, la suite de fonction $f_n(x) = (1 + x/n)^{-n} x^{-1/n}$.

i) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

ii) On pose $a_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de convergence dominée.

♦ **SFN.4 — TPE–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**
On pose $f_n : t \longmapsto t^n \sin t$ sur $[0,\pi]$. Convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^\pi t^n \sin t \, \mathrm{d}t$. Monotonie et convergence de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
INDICATION : *Utiliser des DSE, Taylor-intégral ; f_n est un reste de série.* ◇

♦ **SFN.5 — TPE–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$, convergeant simplement vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange sur $(m+1)$ distincts de $[a,b]$, montrer que f est un polynôme dont le degré est inférieur ou égal à m, et que la convergence est uniforme.

♦ **SFN.6 — CCP–PC 2001 (réc. J. Dupont)**
Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$. Quel est le domaine de définition ? Y a-t-il convergence simple, normale ? Sur quel ensemble peut-on trouver convergence uniforme ?

♦ **SFN.7 — TPE–MP 2001 (réc. N. Bertrand)**
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_n(x) = x^n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

♦ **SFN.8 — TPE–MP 2001**
On pose $f_n(x) = \dfrac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}$.

i) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
ii) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n = \int_0^1 f_n$ admet une limite.
iii) En utilisant le théorème de convergence dominée, redémontrer le résultat précédent.
iv) Si $\alpha \leqslant 1$, donner directement la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

♦ **SFN.9 — TPE–MP 2001 (réc. M. Durupt)**
On définit la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par $\mathrm{P}_0 = 1$ et $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n + \mathrm{X} - \mathrm{P}_n^2$.

i) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \big(\mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x}\big)\big(1 - \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x}\big)$.
ii) Exprimer de même $\mathrm{P}_{n+1}(x) + \sqrt{x}$ en fonction de $\mathrm{P}_n(x) + \sqrt{x}$.
iii) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} \leqslant \mathrm{P}_{n+1}(x) \leqslant \mathrm{P}_n(x) \leqslant 1$.
iv) Montrer que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$.
v) Donner le sens de variation de $x \longmapsto \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x}$ et celui de $x \longmapsto \mathrm{P}_n(x) + \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.
vi) Montrer que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

♦ **SFN.10 — CCP–PC 2001 (réc. M. Sauvadet)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}}\,\mathrm{d}x$. En effectuant un changement de variable, donner un équivalent de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

♦ **SFN.11 — TPE–MP 2001**
On pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x \,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{1+x}}{(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}$.

◆ **SFN.12 — CCP–PC 2001 (réc. N. Herment)**

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f_n(x) = \dfrac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}$.

i) Discuter l'intégrabilité de f_n sur $[0, +\infty[$.

ii) On pose $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

Séries de fonctions

◆ **SFN.13 — X–ESPCI–PC 2001 (réc. G. Lepesqueux)**

On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{1 - t^n}$, pour $t \in \mathbb{C}$. Ensemble de définition ? Propriété de f ?

◆ **SFN.14 — ICNA–PC 2001 (réc. C. Merio)**

Nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n\mathrm{e}^{-x}x + x^2)^n}\,\mathrm{d}x$?

◆ **SFN.15 — Centrale–PC 2001 (réc. C. Royal)**

On pose $f_n : x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-nx}/n$. Étudier les différents modes de convergence de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

◆ **SFN.16 — Mines–MP 2001 (réc. O. Spet)**

Convergence et somme de $\sum f_n$ avec $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$.

◆ **SFN.17 — CCP–PC 2001 (réc. M. Jacquot)**

Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

◆ **SFN.18 — CCP–MP 2001 (réc. C. Michel)**

On pose $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ et $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-x}$. Déterminer leurs ensembles de définition, montrer leur continuité sur ces ensembles. Étudier leur comportement à l'infini.

◆ **SFN.19 — Centrale– 2001**

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p + x)^2}$.

i) Domaine de définition de f ?

ii) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

iii) Donner un deuxième terme dans le développement de f.

◆ **SFN.20 — Mines–MP 2001 (vis. Appel)**

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(1 - x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x - 1}{x}\right)^n$.

i) Domaine d'existence ? Continuité de f ?

ii) Dérivabilité de f ?

iii) En utilisant $\phi : u \longmapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u^n}{n^2}$, décomposer f en fonctions élémentaires.

♦ **SFN.21 — ENSAI–MP 2001 (vis. Appel)**

On pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}^+$. Étudier la convergence simple et uniforme.

♦ **SFN.22 — Mines–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**

On pose $u_n(t) = t^{n-1} \cos nt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, 2\pi[$.

i) Étudier la série $t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$.

ii) Calculer les sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cette série.

iii) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{S}_n(t)\,\mathrm{d}t$.

iv) En déduire $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos nt}{n}$.

♦ **SFN.23 — CCP–MP 2001 (réc. S. Boulogne)**

On considère la série de terme général $x \longmapsto \frac{x^2 \cos nx}{n^2 + x^2}$.

i) Étudier la convergence absolue.

ii) Étudier la convergence uniforme sur $[-a, a]$, pour $a > 0$.

iii) Calculer la somme de la série.

♦ **SFN.24 — CCP–MP 2001 (réc. S. Parouty)**

On pose $u_n(x) = \cos(nx)/n$ e $v_n(x) = \sin(nx)/n$. Domaine de convergence simple et uniforme de chaque série ? Continuité de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^*$?

♦ **SFN.25 — Mines–MP 2001 (réc. M. Mertz)**

Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t \sin nt}{t}\,\mathrm{d}t$.

♦ **SFN.26 — TPE–MP 2001 (réc. M. Mertz)**

Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Comparer ces réels.

♦ **SFN.27 — Mines–MP 2001 (réc. B. Gérard)**

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

♦ **SFN.28 — TPE–MP 2001 (réc. B. Gérard)**

Existence, continuité, dérivabilité et graphe de $x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + n^4}$.

♦ **SFN.29 — Centrale–MP 2001**

Calculer $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

♦ **SFN.30 — CCP–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**

Montrer l'existence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall x \in]0, \pi[, \quad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin(nx)$.

Étudier la convergence de la série $\sum \lambda_n \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

♦ **SFN.31 — INT–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**
On pose $f_n : x \longmapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$ et on note f la somme de la série $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n$.

i) Quel est le domaine de définition de f ?

ii) Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, et trouver un équivalent de f en 0.

♦ **SFN.32 — Mines–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

Séries entières

Rayon de convergence

♦ **SRE.1 — X–ESPCI–PC 2001 (réc. L. Malosse)**
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} \neq 0$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n \mathrm{P}(n) z^n$?

♦ **SRE.2 — CCP–MP 2001 (réc. O. Spet, N. Bertrand)**
Rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin \frac{n-1}{n}\right) x^n$.

♦ **SRE.3 — CCP–MP 2001 (réc. J. Grandemenge)**
Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2n-1} x^n$. Que se passe-t-il en $-1/4$ et $1/4$?

♦ **SRE.4 — CCP–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1$ et $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$?

♦ **SRE.5 — CCP–PC 2001 (réc. V. Casarotto)**
Calculer le rayon de convergence de $\sum \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} x^{2n+1}$.

♦ **SRE.6 — CCP–PC 2001 (réc. F. Darbour)**
Donner la rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n/n^2$, où a_n représente la n-ième décimale de π.

Étude d'une série entière

♦ **SRE.7 — ENS Cachan–MP 2001 (vis. Appel)**
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions, convergeant uniformément vers une fonction u sur $[0,1]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application u_n s'écrit sous la forme d'une série entière $u_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} x^k$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(a_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite a_k lorsque $[n \to \infty]$. Montrer de plus que $u : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

♦ **SRE.8 — CCP–MP 2001 (réc. F. Klein)**
Étudier la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$, avec $a_n = \sin(1/\sqrt{n})$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\sum a_n x^n = 0$.

♦ **SRE.9 — CCP–MP 2001 (réc. O. Masson)**
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathrm{Card}\left\{(u,v) \in \mathbb{N}^2\ ;\ 2u+3v = n\right\}$.

i) Montrer que la série $\sum a_n z^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries simples.

ii) En déduire a_n.

♦ **SRE.10 — S[t] Cyr–MP 2001 (réc. O. Masson)**
Étude de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{x^n + \operatorname{sh} n}{3^n} y^n$, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

♦ **SRE.11 — CCP–MP 2001 (réc. V. Tihay)**
Les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles simultanément trigonalisables ?

♦ **SRE.12 — TPE–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
Étude de la série entière $z \longmapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^{n!}$.

♦ **SRE.13 — CCP–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}$.

i) Trouver le rayon de convergence de la série $\sum u_n$ et le domaine de convergence.

ii) Montrer que la somme de cette série est continue sur $[0,1]$.

iii) Calculer cette somme, et en déduire $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

♦ **SRE.14 — Centrale–MP 2001**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathcal{N}_n^p$ le nombre de permutations de $[\![0,n]\!]$ laissant p éléments fixes.

i) Donner une relation entre $\mathcal{N}_n^p$ et $\mathcal{N}_{n-p}^0$.

ii) On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathcal{N}_n^0}{n!} x^n$. Montrer que f est définie sur $]-1,1[$. Calculer $f(x)$.

iii) En déduire $\mathcal{N}_n^p$.

iv) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer les limites de $\left(\dfrac{\mathcal{N}_n^p}{n!}\right)_{n\geqslant p}$ (on séparera les cas $p \neq 0$ et $p = 0$).

Comment interpréter le fait que $\dfrac{\mathcal{N}_n^0}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,36$?

v) Déterminer les rayons respectifs R et R_α des séries entières $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathcal{N}_n^p}{n!} x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{\mathcal{N}_n^p}{n!}\right)^\alpha x^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

♦ **SRE.15 — CCP–MP 2001**
Domaine de convergence de $\sum x^{n^2}$? Trouver un équivalent en $[x \to 1^-]$.

♦ **SRE.16 — INT–MP 2001 (réc. N. Deblais)**

On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k a_{n-k}$. On pose ensuite $\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$.
Calculer S et donner son rayon de convergence.
INDICATION : *On pourra montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n/n! \leqslant 1/2^n$. ⋄

♦ **SRE.17 — CCP–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

i) Calcul $a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

iii) Calculer la somme de cette série entière.

♦ **SRE.18 — ENSAE–MP 2001 (réc. L. Bouchy)**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n = o(1/n)$ $[n \to \infty]$. On pose $f(x) = \sum a_n x^n$ et on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$.

Développement en série entière

♦ **SRE.19 — TPE–MP 2001 (réc. F. Klein, Anon.)**

[Également CCP PC-2000] Trouver le DSE de $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2 - x^2} \,\mathrm{d}x$.

♦ **SRE.20 — TPE–MP 2001 (réc. L. Gillet)**

DSE de $f(x) = \sqrt{1 - 2x\cos\theta + x^2}$. Discuter suivant les valeurs de θ.

♦ **SRE.21 — CCP–MP 2001 (réc. J. Mercier)**

Donner un DSE de $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\arctan t}{t} \ln\left(\frac{x}{t}\right) \mathrm{d}t$ pour $0 < |x| < 1$ et $f(0) = 0$.

♦ **SRE.22 — Centrale–MP 2000**

i) Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

ii) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$?

SÉRIES DE FOURIER

♦ **FOU.1 — CCP–MP 2001 (réc. V. Tihay)**

Soit f la fonction 2π-périodiques définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$. Développer f en série de Fourier. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n$.

♦ **FOU.2 — TPE–MP 2001 (réc. M. Mertz)**

On pose $\mathrm{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\mathrm{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. On note f la fonction 2M-périodique définie par : $\forall t \in [-\mathrm{M}, \mathrm{M}],\ f(t) = t^2$.

i) Déterminer la série de Fourier de f.

ii) Quel est le mode de convergence de cette série. Quelle est sa limite ?

iii) Calculer A. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

iv) Calculer B à 10^{-3} près.

◆ **FOU.3 — TPE–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

On définit une fonction f impaire, 2π-périodique, égale à 1 sur $]0, \pi[$, avec $f(0) = f(\pi) = 0$.

i) Développer f en série de Fourier.

ii) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

iii) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◆ **FOU.4 — CCP–PC 2001 (réc. M. Sauvadet)**

On considère la fonction f, 2π-périodique, définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{i}x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-1}}$ pour $0 < |x| < \pi$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $f(0)$ et $f(\pi)$ pour que f soit développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

◆ **FOU.5 — CCP–MP 2000**

Soit a un réel strictement positif. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x$.

i) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n$?

ii) Exprimer $\big(\sin(2n+1)x\big)/\sin x$ sous forme d'exponentielle complexe.

iii) Donner le développement en série de Fourier de la fonction définie par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-ax}$ sur $[0, 2\pi[$ et de période 2π.

Intégrale

◆ **INT.1 — X–ESPCI–PC 2001 (réc. L. Malosse)**

(Pour combler 5 min.) Étude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x$.

◆ **INT.2 — X–ESPCI–PC 2001 (réc. A. Fourriere)**

Que dire de l'intégrabilité de $f_x : t \longmapsto \dfrac{\cos 2\pi x t}{t \ln t}$ sur $]2, +\infty[$ en fonction de x ?

Que dire de la convergence de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{\cos(2\pi n x)}{n \ln n}$?

◆ **INT.3 — CCP–PC 2001 (réc. S. Tabone)**

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $w_n = n \left[\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t - v_n\right]$.

Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}\big[f(1) - f(0)\big].$$

INDICATION : *On utilisera* $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, \mathrm{d}t$. ◇

♦ **INT.4 — CCP–PC 2001 (réc. L. Malosse)**

Existence et calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arc}\sin\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

♦ **INT.5 — TPE–MP 2001 (réc. C. Michel)**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+\mathrm{i}ax)}$.

♦ **INT.6 — CCP–PC 2001 (réc. G. Lepesqueux)**

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t}$.

♦ **INT.7 — CCP– 2001**

Convergence et calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arc}\tan x}{x(x^2+1)\operatorname{Arc}\tan x}\,\mathrm{d}x$.

♦ **INT.8 — Centrale–PC 2001 (réc. Ph. Sellenet)**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ continue, et $\mathrm{M} = \max\limits_{[a,b]} f$.

i) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \int_a^b f^n \leqslant 2\eta(\mathrm{M}-\varepsilon)^n$.

ii) En déduire la limite de $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$.

♦ **INT.9 — Centrale–MP 2001 (vis. Appel)**

Soit $\phi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction T-périodique ($\mathrm{T} > 0$). On pose $\mathrm{M}(\phi) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \phi(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, tel que $f, f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Sous réserve d'existence, on pose $\lambda = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\phi(xt)\,\mathrm{d}t$.

i) On suppose $\mathrm{M}(\phi) = 0$. Montrer que $\lambda = 0$.

ii) On suppose $\mathrm{M}(\phi)$ quelconque. Déterminer λ.

♦ **INT.10 — CCP–PC 2001 (réc. C. Chopat)**

Étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Calculer sa limite quand $[x \to 1]$.

Même question avec $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$.

♦ **INT.11 — TPE–MP 2001**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \mathrm{E}(t)}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f existe sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer f.

♦ **INT.12 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Berbain)**

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

♦ **INT.13 — Centrale–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une application continue. On pose $\mathrm{A} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une subdivision $\sigma_n = \big(0 = x_0 < x_1 \cdots < x_n = 1\big)$ de $[0,1]$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x^k} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{A}}{n}$.

ii) Étudier le comportement de $\delta(\sigma_n) = \max\limits_k (x_k - x_{k-1})$ (diamètre de la subdivision).

iii) Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g(x_k)$. Étudier la convergence de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◆ **INT.14 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Leroux)**
Trouver une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

◆ **INT.15 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Simon)**
Calculer la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-n)}}$.

Intégrale paramétrée

◆ **IP.1 — X–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**
On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\left|x+u^2\right|}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

i) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$.

iii) Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$.

◆ **IP.2 — INT–MP 2001 (réc. O. Spet)**
Intégrabilité et calcul de $\int_0^1 x^{k-1} \ln x \,\mathrm{d}x$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$.

◆ **IP.3 — CCP–PC–MP 2001 (réc. H. Vogel, Anon.)**
On définit, lorsqu'elles existent, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

i) Montrer que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que $f + g^2 = \mathrm{C}^{\underline{\mathrm{te}}}$.

iii) En déduire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

◆ **IP.4 — Mines–MP 2001 (réc. L. Gillet)**
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$. Domaine de définition ? Continuité ? La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$? Trouver une équation différentielle vérifiée par f. En déduire f. À partir de l'expression initiale, trouver $\lim\limits_{+\infty} f$.

◆ **IP.5 — Mines–PC 2001 (réc. G. Lepesqueux)**
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t$. Nombre d'annulations de f sur $[\pi/2, \pi]$?

◆ **IP.6 — Centrale–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

i) Montrer que ϕ est définie pour $x > 0$.

ii) Continuité et dérivabilité de ϕ ?

iii) Calculer $\phi(1)$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

iv) On pose $f : x \longmapsto \phi(x) + \phi(1/x)$. Calculer f'. En déduire f.

INDICATION : *Pour la question ii, effectuer le changement de variable $t = ux$.* ◇

◆ **IP.7 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt$.

i) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

ii) Montrer que f et g vérifient $y'' + y = 1/x$.

iii) Montrer que f et g sont continues en 0.

iv) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$.

◆ **IP.8 — Centrale–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x t\,dt$.

i) Domaine de définition, continuité, dérivabilité de f ?

ii) On pose $\phi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que ϕ est 1-périodique.

iii) Montrer que $x \longmapsto \phi(x)/x$ est décroissante.

iv) Montre que ϕ est constante.

v) Équivalent de f en -1^+ et en $+\infty$.

◆ **IP.9 — Mines–MP 2001 (réc. Anon., A. Fourriere)**

On définit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et on pose $k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

ii) On pose $h(x) = ke^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$. Montrer que $f = h$.

iii) Calculer k.

◆ **IP.10 — ENSEA–PC 2001 (réc. K. Pfaab)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}\cos xt}{t}\,dt$.

i) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine à préciser.

ii) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. Calculer $f'(0)$.

iii) Calculer f.

◆ **IP.11 — Centrale–MP 2001 (réc. N. Bertrand)**

Exprimer $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ à l'aide des fonctions usuelles.

◆ **IP.12 — INT–MP 2001**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,dt$. Montrer que f est DSE. Montrer que f ne s'annule qu'une seule fois sur $[\pi/2, \pi]$?

◆ **IP.13 — IIE–MP 2001 (réc. N. Deblais)**

On pose $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^3+a^3}$ et $\mathrm{J}(a) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3+a^3}$. Domaines de définition, équivalents et limites en 0 et $+\infty$ de I et J.

♦ **IP.14 — Mines–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**
On définit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

i) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

ii) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

iii) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\cos(x-t)\,dt + \frac{\pi}{4}\cos x + \frac{\ln 2}{2}\sin x$, où g est une fonction que l'on déterminera.

♦ **IP.15 — Mines–PC 2001 (réc. A. Barbier)**
On pose $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}\,dt$. Domaine de définition et valeur de $I(a)$?

♦ **IP.16 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Simon)**
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2 - x^2/t^2}\,dt$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en déduire une expression de f.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

♦ **EDO.1 — ENS ULC–MP 2001 (vis. Appel)**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telle que, pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) = 1$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note u l'unique solution, sur $\mathbb{R}^+$, de l'équation différentielle $u'' = \alpha f u$, et vérifiant $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

i) Quel est le nombre de zéros de u ?

ii) On note x_1 le premier zéro de u strictement positif. Que vaut $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+} x_1$?

iii) Équivalent de x_1 ?

♦ **EDO.2 — ENS ULC–MP 2001 (réc. B. Claudon)**
Montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ vérifiant (on note $u = (u_1, u_2, u_3)$) :

$$\begin{cases} u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3) \\ u_0 = U_0 \quad \text{avec} \quad \|U_0\| = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

INDICATION : *u est de norme constante.* ◇
Trouver une équation vérifiée par u_3 ; en déduire

$$\langle U_0 | e_3 \rangle > 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \big\langle u(t) \big| e_3 \big\rangle > 0, \quad u_3 > 0.$$

Quelle est la limite de u en $[t \to \infty]$?

♦ **EDO.3 — CCP–PC 2001 (réc. A.-C. Probst)**
Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x \operatorname{ch} x - x^2$.

♦ **EDO.4 — Centrale–PC 2001 (réc. C. Royal)**
Intégrer l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. Solutions développables en séries entières ?

♦ **EDO.5 — CCP–PC 2001 (réc. V. Meugniot)**
Soit y_n la fonction définie par $y_n'' + n^2 y_n = e^{-nx}$ avec $y_n'(0) = 0$ et $y_n(0) = 0$.

i) Déterminer y_n.

ii) Tracer le graphe de y_n.

iii) Étudier la série $\sum y_n$.

♦ **EDO.6 — TPE–MP 2001 (réc. L. Gillet)**
Résoudre $(x+2y)y' + y + 2x = 0$. Montrer que les solutions sont représentées par des arcs de coniques dont on précisera la nature.

♦ **EDO.7 — Mines–MP 2001 (réc. C. Michel)**
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \dfrac{tx}{1+t^2} + \dfrac{y}{1+t^2} - \dfrac{3t}{1+t^2}, \\ y' = \dfrac{ty}{1+t^2} - \dfrac{x}{1+t^2} + \dfrac{2t^2-1}{1+t^2}. \end{cases}$$

♦ **EDO.8 — ENSAM–PT 2001 (réc. A. Simon)**
(Avec `Maple`) On considère l'équation différentielle : $x(1+x^2)y' + (1-x^2)y = 1-3x^2$. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$. Tracer quelques courbes intégrales. Existe-t-il une solution continue sur $\mathbb{R}$? Montrer que toutes les tangentes aux courbes intégrales à l'abscisse 2 ont un point d'intersection commun.

♦ **EDO.9 — Centrale–MP 2001 (réc. J. Grandemenge)**
Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

i) Montrer qu'il existe une unique solution F bornée à l'équation $y' - y + f = 0$.

ii) Étudier le comportement de F en $+\infty$ et en $-\infty$.

iii) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comparer $\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

iv) Les propriétés précédentes sont-elles vraies en remplaçant l'hypothèse « f intégrable sur $\mathbb{R}$ » par l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to-\infty}} \displaystyle\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t$?

♦ **EDO.10 — CCP–PC 2000 (réc. L. Rondot)**
Étudier $(\operatorname{Arc}\sin x)y' + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

♦ **EDO.11 — TPE–MP 2001 (réc. A. Fuffa)**
Trouver l'ensemble des fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = 0$.

♦ **EDO.12 — CCP–PC 2001 (réc. C. Popovici)**
Trouver les solutions développables en série entière de $x^2y'' + xu' + (x^2 - n^2)y = 0$, avec $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de ces séries ?

♦ **EDO.13 — CCP–PC 2001 (réc. N. Verdon)**
Résoudre $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ en cherchant une solution DSE.

♦ **EDO.14 — TPE–MP 2001 (réc. B. Gérard)**
Résoudre $\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

♦ **EDO.15 — Mines–MP 2001 (réc. C. Berbain)**
On considère l'équation différentielle $2y'' = \mathrm{e}^y$.

i) On suppose $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Trouver la solution maximale.

ii) On suppose $y(0) = y'(0) = 0$. Montrer que la solution maximale est paire. La déterminer.

♦ **EDO.16 — TPE–MP 2001 (réc. N. Bertrand)**
On considère (E) $\quad (1 - x^2)y' - xy = 1$.

i) Trouver la solution DSE de (E) telle que $f(0) = 0$.

ii) Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

♦ **EDO.17 — TPE–MP 2001**
Résoudre $(y + 2x)y + (2x + y)y' = 0$.

♦ **EDO.18 — CCP–PC 2001 (réc. S. Lacoste)**
On considère l'équation $y' - 2xy + 1 = 0$.

i) Démontrer qu'il existe une solution telle que $f(0) = 0$.

ii) Donner f sous la forme d'une intégrale.

iii) Développer f en série entière.

♦ **EDO.19 — Mines–MP 2001 (réc. L. Bouchy)**
Résoudre $y'' + \lambda y = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. (On effectuera des hypothèses sur la série $\sum a_n \cos nx$.)

♦ **EDO.20 — CCP–PC 2001 (réc. A. Barbier)**
Résoudre les équations différentielles suivantes : $xy' + y = (\ln x)/x^3$, $y'\cos x + y \sin x = \tan x$, et $y'' - 2y' + y = \operatorname{sh} x$.

GÉOMÉTRIE

♦ **GÉO.1 — CCP–PC 2001 (vis. S. Tabone)**
Réduire la conique $\mathscr{C} \quad : \quad 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$.

♦ **GÉO.2 — CCP–PC 2001**
On définit l'arc paramétré $\Gamma \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t), \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$. Étudier et tracer Γ. Points stationnaires ? Points d'inflexion ? Branches infinies ?

♦ **GÉO.3 — CCP–MP 2001 (réc. F. Klein)**
Étudier la courbe $\rho = 1/\sin(\theta/\sqrt{2})$.

♦ **GÉO.4 — CCP–PC 2001 (réc. V. Collet)**
On considère la transformation qui à un point M du plan associe le point I(M) tel que : O, M et I(M) sont alignés, et $\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OI(M)}} = k \in \mathbb{R}^*$. Que décrit I(M) lorsque M décrit une droite ? un cercle passant pas 0 ? Un cercle quelconque ? Une ellipse ?

♦ **GÉO.5 — CCP–PC 2001 (réc. H. Vogel)**
Étude de la courbe $\rho = 1 + \cos\theta$. Vecteur dérivé ? Tangentes ?

♦ **GÉO.6 — CCP–PT 2001 (réc. A. Simon)**
On considère l'arc Γ paramétré par $\alpha(t) = \big(\cos 2t, \sqrt{2}\sin 2t, \cos 2t\big)$ pour $t \in [0, \pi/2]$.

i) Calculer le vecteur tangent, paramétrer normalement Γ, calculer la longueur totale ℓ de l'arc.

ii) Trouver le repère de Frenet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$, calculer la courbure et la torsion.

iii) Trouver le plan osculateur en $s = \ell/4$.

iv) On pose $p(a, 0, -a)$. Calculer la distance de p à la droite tangente à $s(t)$.

♦ **GÉO.7 — Centrale– 2001**
Étudier la courbe paramétrée Γ : $\begin{cases} x(\lambda) = (\lambda+1)\mathrm{e}^{1/\lambda} \\ y(\lambda) = (\lambda-1)\mathrm{e}^{-1/\lambda} \end{cases}$.

♦ **GÉO.8 — CCP–MP 2001 (réc. J. Grandemenge)**
Trouver la perpendiculaire commune Δ aux droites D : $\begin{cases} x = 3z+1, \\ y = 2z-1, \end{cases}$ et D$'$: $\begin{cases} y = x-2, \\ z = 1. \end{cases}$

Déterminer $\mathrm{I} \overset{\text{déf}}{=} \Delta \cap \mathrm{D}$, et $\mathrm{I}' \overset{\text{déf}}{=} \Delta \cap \mathrm{D}'$. Calculer la distance $d(\mathrm{I}\ ;\ \mathrm{I}')$. Aurait-on pu déterminer cette distance autrement ?

♦ **GÉO.9 — TPE–MP 2001 (réc. D. Malivoir)**
Étudier dans $\mathbb{R}^3$ la nappe d'équation $xy + yz + zx = 0$.

♦ **GÉO.10 — Mines–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere, Anon.)**
Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ un triangle rectangle en A. Soit [AH] la hauteur issue de A. Calculer AH^2 en fonction de AB et BC.
Soit $\mathscr{E}$ une ellipse. Soit [MP] une corde de l'ellipse vue sous un angle de $\pi/2$ depuis le centre O de $\mathscr{E}$. Montrer que le point H, projeté orthogonal de O sur (MP), appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

♦ **GÉO.11 — Mines–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**
Soit $p > 0$. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Soit $\mathrm{M}_0 \in \mathscr{P}$. On définit la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en notant M_{n+1} l'intersection de $\mathscr{P}$ et de la normale à $\mathscr{P}$ en M_n. On note $\mathrm{M}_n = (x_n, y_n)$. Nature de la série $\sum y_n$?

♦ **GÉO.12 — Mines–MP 2001 (réc. F. Guenzi)**
On considère quatre plans $\mathscr{P}_i$: $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Montrer que

$$\left\{\begin{array}{c}\text{les plans sont concourants ou} \\ \text{parallèles à une même droite}\end{array}\right\} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

♦ **GÉO.13 — TPE–MP 2001 (réc. B. Gérard)**
Trouver le lieu des centres de courbure de la courbe $\mathscr{C}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

♦ **GÉO.14 — Centrale–MP 2001 (réc. T. Weber)**
On note $\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $\mathscr{C}$ un cercle dont le centre est sur l'axe $\mathscr{O}x$ et passant par $(a, 0)$. On note $e = \mathscr{E} \cap \Delta_{y=y_0}$ et $c = \mathscr{C} \cap \Delta_{y=y_0}$ pour y_0 assez petit, et x_e l'abscisse de e, x_c l'abscisse de c.

i) Trouver un équivalent de $x_x - x_e \quad [y_0 \to 0]$.

ii) Trouver le cercle donnant l'équivalent d'ordre maximal. Interprétation géométrique ?

♦ **GÉO.15 — CCP–MP 2001**

Étudier la courbe $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. Tracer son graphe. Calcul de l'aire entre l'asymptote et la courbe.

♦ **GÉO.16 — TPE–MP 2001 (réc. N. Deblais)**

On note $\mathscr{S}$ la surface engendrée par les points M définis par $x = \operatorname{sh} u$, $y = \operatorname{sh} v$ et $z = u+v$, pour (u,v) parcourant $\mathbb{R}^2$. Montrer que tout point de $\mathscr{S}$ est régulier et calculer le plan tangent en un point $\mathrm{M} \in \mathscr{S}$.

♦ **GÉO.17 — Centrale–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de sommet O, M_0 un point intérieur à $\mathscr{P}$ et P_1, P_2 et P_3 trois points. Montrer que si les normales issues de P_1, P_2 et P_3 se coupent en M_0, alors O, P_1, P_2 et P_3 sont cocycliques.

♦ **GÉO.18 — TPE–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

Soit A, B, C, D quatre points du plan, non alignés trois à trois, et d'affixes respectives dans un repère orthonormé choisi a, b, c et d. On dira que A, B, C, D forment un **schmilblick** si et seulement si $\dfrac{a-c}{b-c} \cdot \dfrac{b-d}{a-d} = 1$.

i) Montrer que cette définition ne dépend pas du repère orthonormé choisi.

ii) Soit J le milieu de $[\mathrm{C},\mathrm{D}]$. On peut supposer $\mathrm{J} = \mathrm{O}$. Montrer que les demi-droites $[\mathrm{JA})$ et $[\mathrm{J}b)$ sont symétriques par rapport à (CD).

♦ **GÉO.19 — Centrale-Supélec–PC 2001 (réc. A. Leroux)**

On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. On note $\mathrm{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ et $\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$.

i) Trouver D_θ (*resp.* Δ_θ), image par la rotation d'angle θ autour de $\boldsymbol{k}$ de D (*resp.* Δ).

ii) Soit $\mathscr{S}$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, D_θ et Δ_θ sont contenues dans $\mathscr{S}$.

iii) Donner l'équation du plan tangent P à $\mathscr{S}$ en $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$.

iv) Montrer que $\mathrm{P} \cap \mathscr{S}$ est réduit à l'intersection de deux droites.

CALCUL DIFFÉRENTIEL

♦ **DIF.1 — ENS Lyon–MP 2001 (réc. T. Weber)**

i) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\max \sum a_i x_i$ avec la contrainte $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

ii) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathrm{d}f_x\| \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $\mathrm{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f_x\big(\mathrm{X}(x)\big) \geqslant 1$.

iii) Soit $r > 0$. Montrer que $\displaystyle\sup_{\|x\| \leqslant r} f(x) - \inf_{\|x\| \leqslant r} \geqslant 2r$.

♦ **DIF.2 — CCP–PC 2001**

On pose $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

i) Continuité de f ?

ii) Existence des dérivées partielles ?

iii) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

♦ **DIF.3 — CCP–PC 2001 (réc. V. Collet)**

On considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0, \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{sinon.} \end{cases}$

i) Étudier la continuité en $(0,0)$ de f. Continuité de $x \longmapsto f(x,y)$ et de $y \longmapsto f(x,y)$?

ii) Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

iii) Calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Conclusion ?

♦ **DIF.4 — Mines–MP 2001 (réc. C. Lathuiliere)**

On pose $f(x,y) = (y-x)^3 + 6xy$, $\Delta = \big\{(x,y)\ ;\ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\big\}$. Montrer qu'il existe un minimum global et un maximum global de f sur Δ. Les calculer.

♦ **DIF.5 — CCP–PC 2001 (réc. P. Willaume)**

Extrema globaux et locaux de $f(x,y) = -(x-1)^2 - (x - \mathrm{e}^y)^2$.

♦ **DIF.6 — Centrale–MP 2001 (réc. C. Berbain)**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $\phi :\ (\mathbb{R}^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad (x,y,z) \longmapsto f\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$. Déterminer les fonctions f telles que $\triangle\phi = 0$.

♦ **DIF.7 — TPE–MP 2001 (réc. C. Berbain)**

On pose $\mathrm{U} \overset{\text{déf}}{=} \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x < y\big\}$.

i) Résoudre sur U : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2$. On utilisera un changement de variable $u = x+y$ et $v = xy$.

ii) Montrer que la fonction suivante est solution :

$$f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)^2 & \text{si } xy < 0, \\ \frac{1}{2}(x+y)^2 + x^2y^2 & \text{si } xy \geqslant 0 \text{ et } x+y < 0, \\ \frac{1}{2}(x+y)^2 - x^2y^2 & \text{si } xy \geqslant 0 \text{ et } x+y > 0. \end{cases}$$

♦ **DIF.8 — Mines–MP 2001 (réc. M. Durupt)**

i) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $x_0 \in \mathrm{U}$. On suppose que f admet un extremum local en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

ii) Généraliser ce résultat aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et le démontrer.

iii) On pose $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\big\}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \big|\sin(x + \mathrm{i}y)\big|^2$. Étudier les extrema de f.

Intégrales multiples

♦ **IM.1 — CCP–MP 2001**

i) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre k, entre 0 et 1.

ii) À l'aide de cette formule, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.

iii) Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} x^p y^q (1 - x - y)^r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

où
$$\mathscr{D} \overset{\text{déf}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0, \ y > 0, x + y < 1\}.$$

♦ **IM.2 — CCP–MP 2001 (réc. F. Jacquemin)**

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\mathscr{D} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\Big\}$.

♦ **IM.3 — TPE–MP 2001 (réc. C. Berbain)**

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}^{*+})$ et $\mathrm{I} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \left(\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right)$.

i) Montrer que $\forall f \in \mathrm{E}, \mathrm{I}(f) \geqslant (b - a)^2$. Étudier l'égalité.

ii) Montrer que $\mathrm{I}(\mathrm{E}) = \big[(b - a)^2, +\infty\big[$.

♦ **IM.4 — CCP–MP 2001 (réc. N. Deblais)**

On pose $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}_k} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où l'on a posé

$$\mathscr{D}_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 - 2ax + y^2 \leqslant 0\big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \geqslant 0, \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \geqslant 0 \end{matrix}\right\}.$$

♦ **IM.5 — CCP–MP 2001 (réc. A. Zimmermann)**

Soit $r > 0$; On pose $\mathscr{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < \frac{1}{2} \text{ et } 0 < y < r\big\}$.

Calculer
$$\iint_{\mathscr{D}} x \cos xy \cos^2 rx \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Divers

♦ **DIV.1 — ENS Ulm–MP 2001**

i) Donner une CNS simple pour que, dans le plan, deux cercles se rencontrent.

ii) Existe-t-il une partition de $\mathbb{R}^2$ en cercles non triviaux ?

iii) Montrer qu'il existe une partition de $\mathbb{R}^3$ en cercles.

INDICATION : *On construira une famille* $(\mathscr{C}_i)_i$ *de cercles disjoints telle que toute sphère non réduite à un point, de centre* O, *rencontre* $\bigcup_i \mathscr{C}_i$ en exactement *deux points.* ◇

◆ **DIV.2 — ENS ULC–MP 2001 (réc. T. Weber)**
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

i) Montrer qu'il existe une unique fonction u telle que $u'' = f$ et $u(0) = u(1) = 0$.

ii) On pose $\mathrm{A}_n = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathbb{O} \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathbb{O} & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{F}_n = \begin{pmatrix} f\left(\frac{1}{n}\right) \\ \vdots \\ f\left(\frac{n-1}{n}\right) \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{U}_n \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_n\mathrm{U}_n = \mathrm{F}_n$.

iii) On définit la fonction v_n par $v_n(0) = v_n(1) = 0$, $v_n(k/n) = \mathrm{U}_n^k$ et v_n affine entre ces points. Montrer que $v_n \xrightarrow{\text{c.v.u.}} u$.

◆ **DIV.3 — ENSAI–MP 2001 (réc. S. Parouty)**
Montrer, au moyen d'un argument simple, que sin n'est pas une fonction polynôme.

◆ **DIV.4 — X–MP 2001 (réc. M. Pagelot)**
Soit C un convexe polygonal fermé de $\mathbb{R}^2$. Pour tout isométrie positive A, on dit que (C, A) est un **pavage** si et seulement si :

i) $\forall a, b \in \mathrm{A}, \quad (a \neq b) \Longrightarrow a(\mathring{\mathrm{C}}) \cap b(\mathring{\mathrm{C}}) = \varnothing$;

ii) $\bigcup_{a \in \mathrm{A}} a(\mathrm{C}) = \mathbb{R}^2$.

Trouver une condition sur C pour qu'il existe une isométrie positive A telle que (A, C) soit un pavage.

◆ **DIV.5 — ENS Ulm–MP 2001 (réc. M. Pagelot)**
Sur un cube unité, étudier le nombre de chemins de longueur donnée n d'un sommet à un autre (formule, équivalent quand $[n \to \infty]$).

Table des sujets