# TD Equations de Maxwell

## Exercice 1 : Equations de Maxwell

On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courant est donné par l'expression suivante :

$$\vec{E}(M,t) = f(z)\exp(-\alpha t)\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = g(z)\exp(-\alpha t)\vec{u}_y$$

**1.** Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux sont-elles vérifiées ?

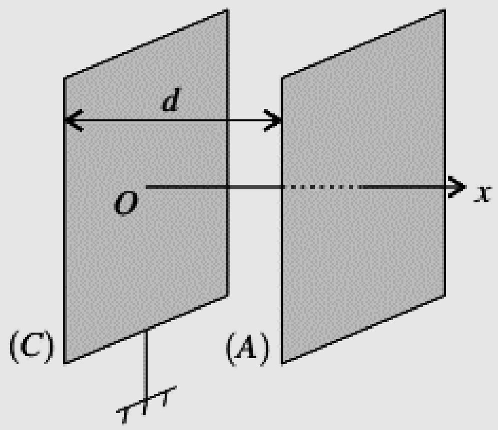
**2.** Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une expression de $g(z)$ en fonction de $f'(z)$.

**3.** Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une expression de $f(z)$ en fonction de $g'(z)$.

**4.** En déduire $f(z)$ supposant que $f(z)$ est pair et que $\vec{E}(0,0) = E_0\vec{u}_x$. Donner l'expression du champ électromagnétique.

## Exercice 2 : Diode à vide

Une diode à vide est constituée de deux plaques métalliques planes parallèles $(C)$ et $(A)$, de même surface $S$ et distantes de $d$, entre lesquelles a été fait le vide. La cathode $(C)$ est maintenue au potentiel 0. Elle émet des électrons de vitesse négligeable qui se dirigent vers l'anode $(A)$ qui est portée au potentiel $U > 0$. On admet pour simplifier que les trajectoires des électrons sont rectilignes perpendiculaires aux plaques. On se place en régime permanent. L'intensité passant de $(A)$ à $(C)$ est appelée $I$.




On note $V(x)$ le potentiel électrostatique, $\rho(x)$ la densité volumique de charge et $v(x)$ la vitesse des électrons entre les plaques à la distance $x$ de $(C)$.

**1.** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $v(x)$ en fonction de $V(x)$ et des caractéristiques d'un électron (masse $m$, charge $-e$).

**2.** Montrer que $\rho(x)v(x) =$ constante et exprimer la constante en fonction de $I$ et $S$.

**3.** Exprimer $\rho(x)$ en fonction de $V(x)$, $\alpha = \dfrac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$ et $\varepsilon_0$.

**4.** Écrire une équation différentielle vérifiée par $V(x)$.

**5.** On admet que le champ électrique est nul en $x = 0$. Intégrer l'équation précédente après l'avoir multipliée par $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ pour obtenir $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ en fonction de $V(x)$.

**6.** En déduire $I$ en fonction de $U$, pour $U > 0$. Que dire de $I$ si $U < 0$ ?

**Exercice 3 : Potentiel électrique autour d'une particule colloïdale**

Une solution colloïdale est une suspension dans de l'eau de particules de dimensions de l'ordre de $10^{-6}$ à $10^{-8}$ m, petite à l'échelle macroscopique et grande à l'échelle moléculaire. En dehors des particules colloïdales, la solution contient des ions de charge $\pm e$ qui seront considérés comme ponctuels.

On considère une particule colloïdale sphérique, de centre $O$ et rayon $R$, portant une charge $Q$. On suppose que le potentiel électrique autour de cette particule ne dépend que de $r = OM$. Si $V(M) = V(r)$ : $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2(rV(r))}{\mathrm{d}r^2}$. D'autre part, la densité numérique $N_+$ des cations et la densité numérique $N_-$ des anions suivent la loi de Boltzmann et s'écrivent :

$$N_+(r) = N_0 \exp\left(\frac{-eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad N_-(r) = N_0 \exp\left(\frac{+eV(r)}{k_B T}\right)$$

où $N_0$ est une constante, $V(M)$ le potentiel électrostatique, $k_B$ la constante de Boltzmann et $T$ la température absolue.

**1.** Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction de $V(r)$. Dans toute la suite on supposera que $|eV(r)| \ll k_B T$ ; simplifier alors l'expression précédente.

**2.** Quelle équation différentielle vérifie la fonction $U(r) = rV(r)$ ?

Montrer que $V(r) = \dfrac{A}{r}\exp\left(-\dfrac{r}{\lambda}\right)$ où $A$ est une constante encore indéterminée et $\lambda$ une longueur caractéristique à exprimer en fonction des données.

**3.** Exprimer le champ électrique autour de la particule colloïdale. Déterminer la constante $A$.

**4.** Quelle est la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de rayon $r$ et de centre $O$ ? Déterminer $\lim_{r\to\infty} Q(r)$ et commenter le résultat.

**5.** Pourquoi dit-on que l'interaction électrostatique entre particules colloïdale est « écrantée » par les ions ?