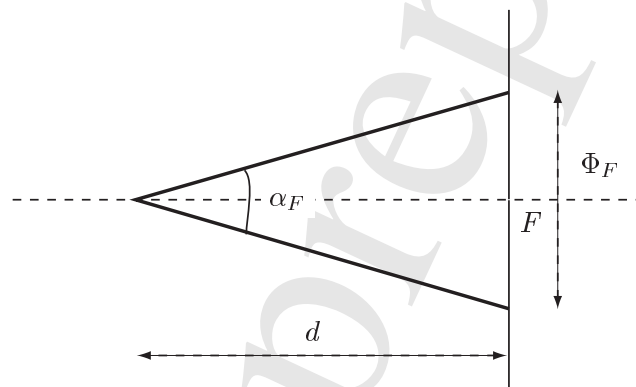


Microscopie

Première partie
OEil1

1.1. Champ latéral et champ en profondeur

1.1.1.



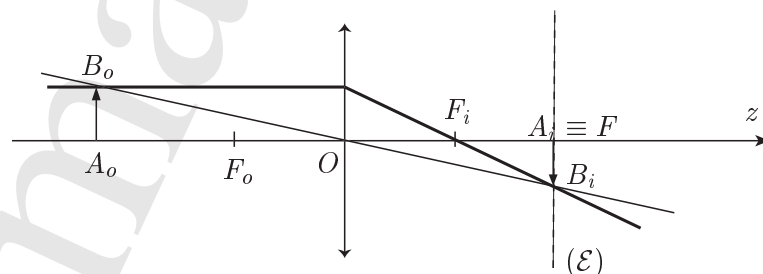
$$\tan\left(\frac{\Phi_F}{2}\right) = \frac{\alpha_F}{2d} \Rightarrow \Phi_F = 2d \tan\left(\frac{\alpha_F}{2}\right)$$

Application numérikuz : $\Phi_F =$

1.1.2.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{f_i} ; \quad p = \overline{A_o O} = -\overline{O A_o} ; \quad \text{et} ; \quad p = \overline{O A}$$

Pour que $\overline{A_o B_o}$ soit vu nettement, il faut que A (image de A_o) coïncide avec F ($\in (\mathcal{E})$); soit : $\overline{O A} = d$

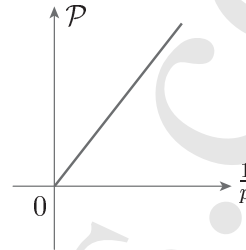
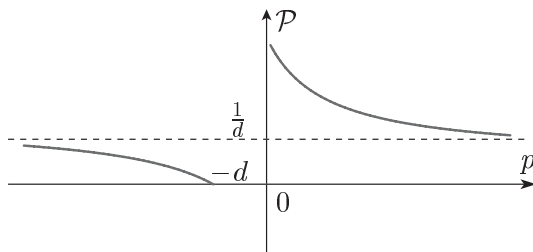


La relation de conjugaison avec origine au centre appliquée à (\mathcal{L}) :

$$\frac{1}{f_i} = \frac{1}{OA_o} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p}$$

soit :

$$\mathcal{P}(p) = \frac{1}{d} + \frac{1}{p}$$



1.1.3. Punctum proximum

$$\mathcal{P}_{max} = \mathcal{P}(P_p) ; P_p = -\overline{OP_p}$$

soit :

$$\mathcal{P}_{min} = \frac{1}{d} + \frac{1}{P_p}$$

Application numérique : $\mathcal{P}_{max} = 62,8 \delta$

1.1.4. Punctum remotum

$$\mathcal{P}_{min} = \mathcal{P}(P_r) ; P_p = -\overline{OP_p} \sim \infty$$

soit :

$$\mathcal{P}_{min} = \frac{1}{d}$$

Application numérique : $\mathcal{P}_{min} = 58,8 \delta$

1.1.5. Amplitude maximale d'accommodation A

$$A = \mathcal{P}_{max} - \mathcal{P}_{min} = \frac{1}{P_p}$$

Application numérique : $A = 4 \delta$

1.2. Défaut de l'oeil et correction

1.2.1. Myopie

$$d_m = 17,5 \text{ mm}$$

1.2.1.1. Position de l'image d'un objet très éloigné

$$\mathcal{P}_{min} = \frac{1}{d}$$

\Rightarrow

$$d = \frac{1}{\mathcal{P}_{min}} = 17 \text{ mm} < d_m = 17,5 \text{ mm}$$

L'oeil myope n'est, donc, pas capable de former l'image de tel objet sur la rétine (l'image se forme avant la rétine).

1.2.1.2.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p} \quad ; \quad \text{on pose : } \begin{cases} |\overline{OP_p}| = p_p \\ |\overline{OP_r}| = p_r \end{cases}$$

$$\mathcal{P}'_{max} = \frac{1}{p_p} + \frac{1}{p} = \mathcal{P}_{max} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'_{min} = \frac{1}{p_r} + \frac{1}{p} = \mathcal{P}_{min}$$

$$\text{Soit : } \boxed{p_p = \frac{d_m}{d_m \mathcal{P}_{max} - 1} \quad \text{et} \quad p_r = \frac{d_m}{d_m \mathcal{P}_{min} - 1}}$$

Applications numériques : $p_p = 17,7 \text{ cm}$ et $p_r = 60,3 \text{ cm}$

1.2.1.3.

Absence d'anomalie si et seulement si : $\mathcal{P}_{min}^{tot} = \frac{1}{d_m}$

$\mathcal{P}^{tot} = \mathcal{P} + \mathcal{P}^m$ avec $\mathcal{P}^m = \frac{1}{f_m}$ le signe de f_m détermine le type de lentille

$$\mathcal{P}_{min}^{tot} = \mathcal{P}_{min} + \mathcal{P}_{min}^m = \frac{1}{d_m} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathcal{P}_{min}^m = \frac{1}{d_m} - \mathcal{P}_{min}}$$

Application numérique : $\mathcal{P}^m = -1,68 \delta < 0$ et $\boxed{f_m = \overline{OF_{im}} = -59,5 \text{ cm} < 0}$
Il s'agit, donc, d'une lentille divergente.

1.2.2. Hypermétrope

$$d_h = 16,5 \text{ mm}$$

1.2.2.1. $d_h > 17 \text{ mm}$: L'image se forme au delà de la rétine, d'où possibilité d'accommodation.

$$\text{La puissance : } \boxed{\mathcal{P}_n = \frac{1}{d_h} = 606,06 \delta}$$

1.2.2.2. Cf. 1.2.1.2

$$\boxed{p_p = \frac{d_h}{d_h \mathcal{P}_{max} - 1} \quad \text{et} \quad p_r = \frac{d_h}{d_h \mathcal{P}_{min} - 1}}$$

1.2.2.3.

$$\mathcal{P}_{min}^{tot} = \mathcal{P}_{min} + \mathcal{P}_{min}^h = \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{min} + \frac{1}{f_h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_h = \frac{1}{\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{min}}}$$

Application numérique : $f_h = \overline{OF_{ih}} = +59,5 \text{ cm}$ il s'agit, donc, d'une lentille convergente .

1.2.3. Presbytie

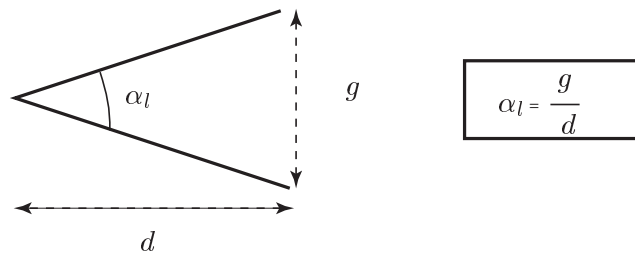
$$\mathcal{P}_{max}^{\text{presbytie}} = 1,14 \delta$$

vision sans accommodation : $\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p_p}$

$$\text{ou : } \mathcal{P}_{max}^{\text{presbytie}} = \frac{1}{d_{min}^{\text{presbytie}}} + \frac{1}{p_p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{min}^{\text{presbytie}} = \frac{p_p}{p_p \mathcal{P}_{max}^{\text{presbytie}} - 1} = 85,94 \text{ cm}}$$

1.3. Limite de résolution angulaire de l'oeil

1.3.1.


 Application numérique : $\alpha_l = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$

 1.3.2. Soit : $p_o = \overline{OA_o}$ la position de l'objet.

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{p_o} + \frac{1}{d} \Rightarrow \boxed{p_o = \frac{d}{d\mathcal{P}_{max} - 1} = -25,14 \text{ cm}}$$

Deuxième partie

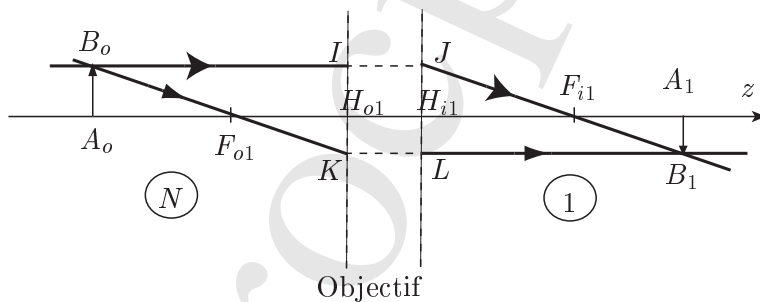
Microscope composé

2.1. Mise au point

2.1.1. Conditions de GAUSS L'approximation de GAUSS consiste à ce que les rayons incidents, arrivant sur un instrument optique, soient : (rayon paraxiaux !)

- faiblement inclinés par rapport à l'axe optique de l'instrument.
- peu inclinés sur l'axe optique

 2.1.2. L'objectif du microscope ne fonctionne pas dans les conditions de GAUSS, car les rayons sont loin d'être faiblement inclinés sur l'axe optique ($\alpha_m = 70^\circ$).

 2.1.3. Grandissement transversal G_{t1}


- Considérons les triangles : $(F_{i1}A_1B_1)$ et $(F_{i1}H_{i1}J)$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1F_{i1}}} = \frac{\overline{H_{i1}J}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} = \frac{\overline{A_oB_o}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} \Rightarrow \boxed{G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{f_{i1}}}$$

- Considérons les triangles : $(F_{o1}A_oB_o)$ et $(F_{o1}H_{o1}I)$

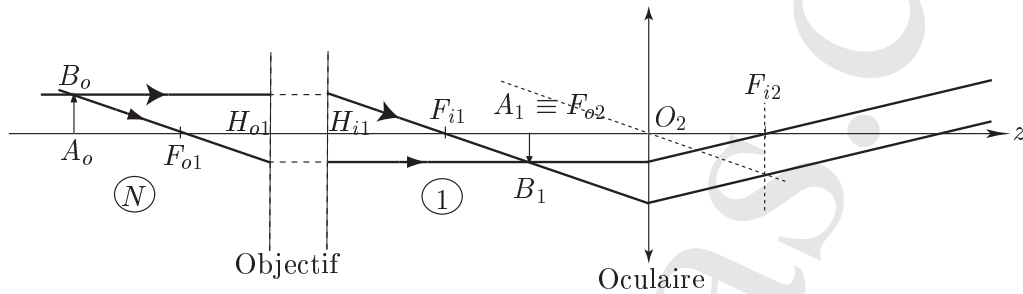
$$\frac{\overline{A_oB_o}}{\overline{A_oF_{o1}}} = \frac{\overline{H_{o1}I}}{\overline{H_{o1}F_{o1}}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{H_{o1}F_{o1}}} \Rightarrow \boxed{G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{H_{o1}F_{o1}}}{\overline{A_oF_{o1}}} = \frac{f_{o1}}{\overline{A_oF_{o1}}}}$$

En utilisant les deux expressions du grandissement G_{t1} , on retrouve la relation de conjugaison avec origine aux foyers pour deux points conjugués par l'objectif (Relation de NEWTON) ; soit :

$$G_{t1} = \frac{\overline{A_1 F_{i1}}}{f_{i1}} = \frac{f_{o1}}{\overline{A_o F_{o1}}} \Rightarrow \boxed{\overline{F_{o1} A_o} \overline{F_{i1} A_1} = f_{o1} f_{i1}}$$

2.1.4. Pour une observation sans accommodation, l'image définitive doit se trouver à l'infini. Pour que cette condition soit réalisée il faut, donc, que l'image intermédiaire $A_1 B_1$ se trouve dans le lan focale objet de l'oculaire.

2.1.5.



2.1.6. Position de l'objet $A_o B_o$

La relation de newton appliquée aux conjugués A_o et $A_1 \equiv F_{o2}$ par l'objectif (Cf. la relation (4) en 2.1.3), donne :

$$\overline{F_{o1} A_o} \overline{F_{i1} F_{o2}} = f_{o1} f_{i1} \quad \text{avec :} \quad \begin{aligned} \overline{F_{i1} F_{o2}} &= \Delta \\ f_{o1} &= -N f_{i1} \end{aligned} \Rightarrow \overline{F_{o1} A_o} = \frac{f_{o1} f_{i1}}{\Delta}$$

soit :

$$\boxed{\overline{F_{o1} A_o} = -\frac{f_{i1}^2}{\Delta} N}$$

2.1.7. Grandissement transversal G_{t1}

$$\text{D'après la question : 2.1.3} \quad G_{t1} = -\frac{f_{o1}}{\overline{F_{o1} A_o}} = \frac{\overline{A_1 F_{o1}}}{f_{i1}} = N \frac{f_{i1}}{\overline{F_{o1} A_o}}$$

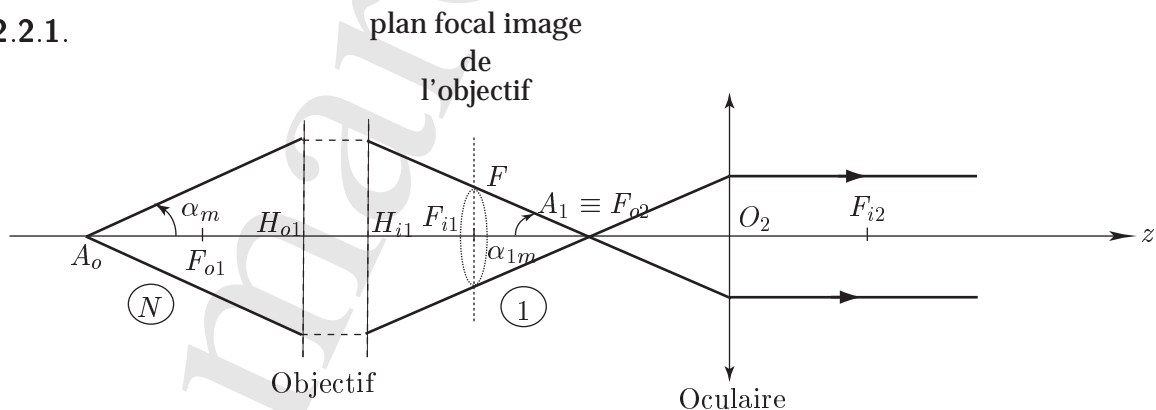
soit :

$$\boxed{G_{t1} = -\frac{\Delta}{f_{i1}}}$$

2.1.8. Application numérique : $\overline{F_{o1} A_o} = -0,12 \text{ mm}$ et $G_{t1} = -50$

2.2. Cercle oculaire

2.2.1.



2.2.2. Expression du rayon R

$$R = |\overline{F_{i1}F}| \quad \text{tel que : } \tan \alpha_{1m} = \frac{\overline{F_{i1}F}}{\Delta} \sim \alpha_{1m}$$

L'objectif du microscope est rigoureusement stigmatique : tout rayon issu de A_o émerge en passant par A_1 . Ces rayons sont, donc, délimités par le cercle de rayon R centré sur F_{i1} .

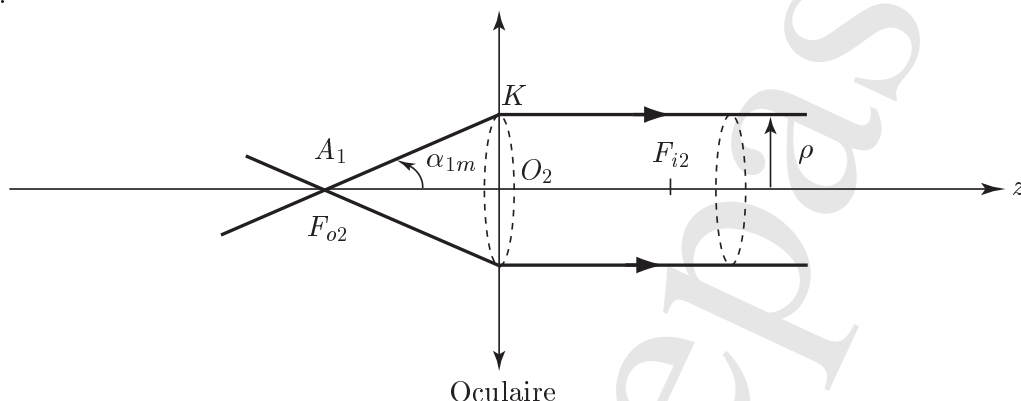
la condition d'aplanétisme pour l'objectif : $N \overline{A_o B_o} \sin \alpha_m = \overline{A_1 B_1} \alpha_{1m} = \overline{A_1 B_1} \frac{\overline{F_{i1}F}}{\Delta}$

$$\Rightarrow \overline{F_{i1}F} = N \Delta \frac{\overline{A_o B_o}}{\overline{A_1 B_1}} = \Omega_n \frac{\Delta}{G_{t1}} = -\Omega_n f_{i1} \quad (\Omega_n = N \sin \alpha_m)$$

soit :

$$R = |\overline{F_{i1}F}| = \Omega_n f_{i1}$$

2.2.3.



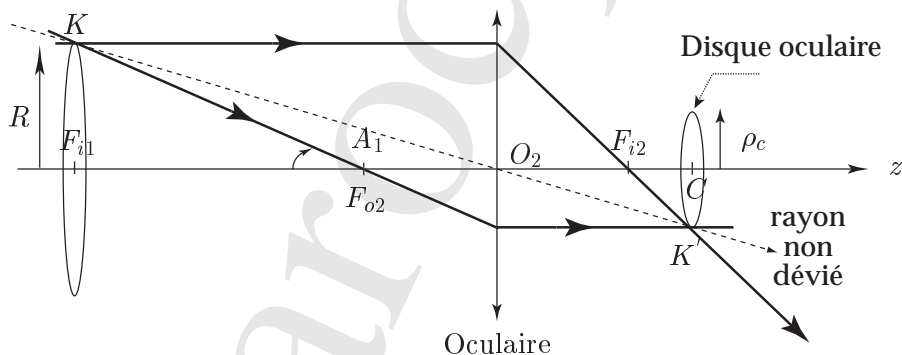
$$\tan \alpha_{1m} = \frac{\overline{O_2 K}}{\overline{F_{o2} O_2}} = \frac{\overline{O_2 K}}{f_{i2}} \sim \alpha_{1m} \quad \text{et} \quad |\alpha_{1m}| = \frac{R}{\Delta} \Rightarrow \rho = |\overline{O_2 K}| = f_{i2} \frac{R}{\Delta}$$

Soit :

$$\rho = \Omega_n \frac{f_{i1} f_{i2}}{\Delta}$$

2.2.4.

2.2.4.1.



- C est l'image de F_{i1} à travers l'oculaire. La relation de conjugaison de NEWTON entre C et F_{i1} par l'oculaire :

$$\overline{F_{o2} F_{i1}} \overline{F_{i2} C} = f_{o2} f_{i2} = -f_{i2}^2 \quad \text{avec} \quad \overline{F_{o2} F_{i1}} = \Delta$$

Soit :

$$\overline{F_{i2} C} = \frac{f_{i2}^2}{\Delta}$$

- Le *disque oculaire* centré sur C est l'image du disque centré sur F_{i1} à travers l'oculaire.
- ρ_c est, donc, l'image de R à travers l'oculaire. La relation de grandissement entre ρ_c et R par l'oculaire :

$$|G_{t2}| = \left| \frac{\overline{F_{i1}F}}{\overline{CK'}} \right| = \frac{\rho_c}{R} \implies \rho_c = R|G_{t2}|$$

$$G_{t2} = \frac{\overline{F_{i2}C}}{f_{i2}} \quad \text{Cf. 2.1.3}$$

Soit :

$$\rho_c = R \frac{\overline{F_{i2}C}}{f_{i2}} = R \frac{f_{i2}}{\Delta} = \Omega_n \frac{f_{i1}f_{i2}}{\Delta} = \rho$$

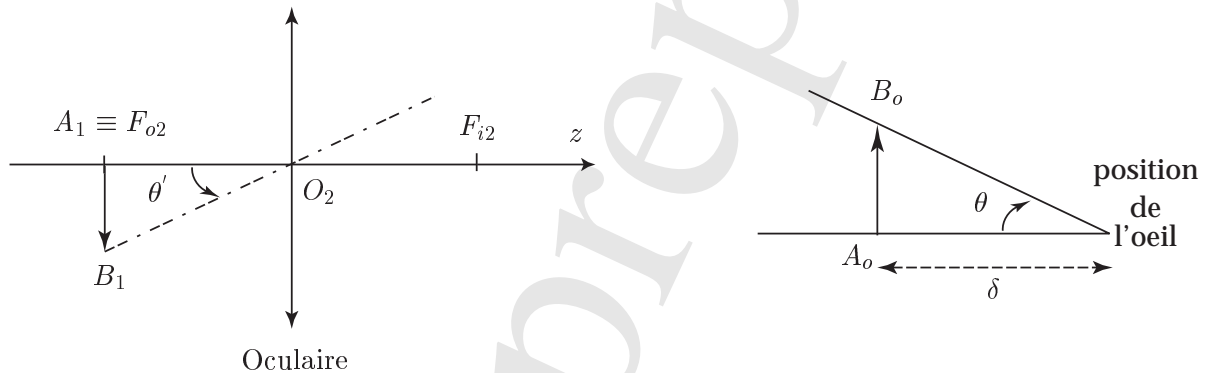
Pour recevoir le maximum de lumière, on doit placer l'oeil au point C : centre du *disque oculaire*.

2.2.4.2. Application numérique : $\rho_c = 0,569 \text{ mm}$ et $\overline{F_{i2}C} = 2 \text{ mm}$

2.3. Grossissement G

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \quad \text{avec :} \quad \begin{array}{l} \theta' : \text{L'angle sous lequel l'objet est vu à travers le microscope} \\ \theta : \text{L'angle sous lequel l'objet est vu à l'oeil nu} \end{array}$$

2.3.1.



$$\theta' \sim \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{F_{i2}O_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_{i2}} \quad \text{et} \quad \theta \sim \frac{\overline{A_oB_o}}{\delta}$$

Soit :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = G_{t1} \frac{\delta}{f_{i2}} = -\frac{\delta \Delta}{f_{i2}f_{i1}}$$

Application numérique : $G = -625$

2.3.2. Rayon du cercle oculaire ρ_c

$$\rho_c = \Omega_n \frac{f_{i1}f_{i2}}{\Delta}$$

et

$$G = -\frac{\delta \Delta}{f_{i2}f_{i1}}$$

\implies

$$\rho_c = -\Omega_n \frac{\delta}{G}$$

2.3.3. ρ_o : rayon de la pupille de l'oeil.

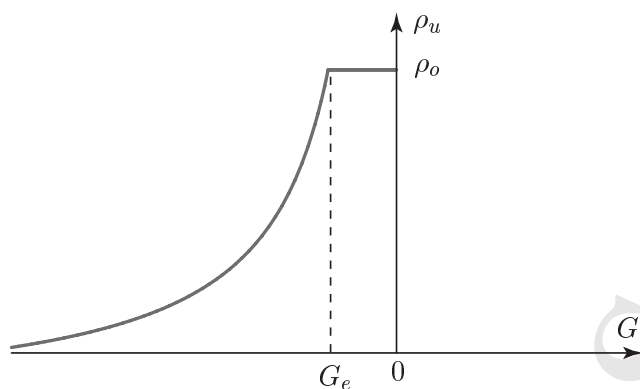
$$\rho_o = -\Omega_n \frac{\delta}{G_e} \implies$$

$$\rho_c = -\Omega_n \frac{\delta}{G} \quad G_e = -\Omega_n \frac{\delta}{\rho_o}$$

Application numérique : $G_e = -142$

2.3.4. Pour recevoir le maximum de lumière, on doit placer l'œil au centre du cercle oculaire (Cf. 2.2.4.1) : le rayon utile ρ_u est, par conséquent, égal à ρ_c ; soit :

$$\rho_u = -\Omega_n \frac{\delta}{G} = -N \sin \alpha_m \frac{\delta}{G}$$



2.4. Pouvoir de résolution

2.4.1. Influence de la diffraction

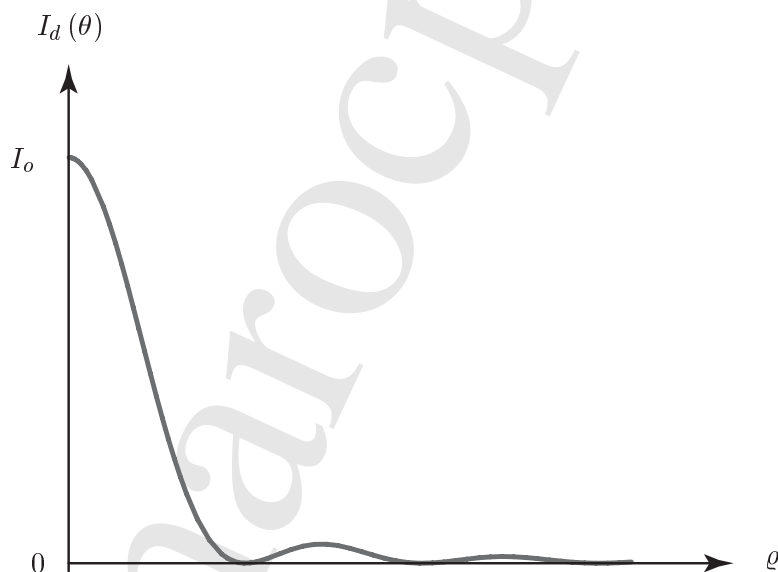
2.4.1.1. Phénomène de diffraction

La diffraction est le phénomène observé lorsqu'on s'écarte de l'approximation de l'optique géométrique. C'est à dire lorsque un faisceau lumineux (de longueur d'onde λ) est masqué par des diaphragmes (pupilles) dont les dimensions voisines de λ (ondes lumineuses matériellement limitées).

2.4.1.2. Intensité lumineuse $I_d(\theta)$

$$I_d(\theta) = a_d^2(\theta) = 4I_o \left(\frac{J_1(2\pi\varrho)}{2\pi\varrho} \right)^2 \quad \text{tels que : } \varrho = \frac{R\theta}{\lambda} \quad \text{et : } I_o = a_o^2$$

2.4.1.3. Figure de diffraction



2.4.1.4. Rayon angulaire

$$\varrho = \frac{R\theta}{\lambda} \Rightarrow \varrho_1 = \frac{R\theta_d}{\lambda} \simeq 0,61 \quad (\text{tache centrale})$$

soit :

$$\theta_d \simeq 0,61 \frac{\lambda}{R} \simeq 0,61 \frac{\lambda}{f_{i1} \Omega_n}$$

2.4.1.5. Critère de RAYLEIGH

Soient :

- d : distance des centres des taches de diffraction.
- r_d : rayon d'une tache de diffraction.
- S_d : plus petite distance de deux points séparables.
- S_d est le conjugué de r_d par l'objectif.

Les deux point objets A_o et B_o sont séparables si : $r_d \sim d$

D'une part, on a :

$$\tan \theta_d \sim \theta_d = \frac{r_d}{\Delta} = 0,61 \frac{\lambda}{f_{i1} \Omega_n} \Rightarrow r_d = 0,61 \frac{\Delta \lambda}{f_{i1} \Omega_n}$$

D'autre part, on a :

$$|G_{t1}| = \frac{r_d}{S_d} = \frac{\Delta}{f_{i1}} \quad \text{Cf. 2.1.7}$$

Soit :

$$S_d = \frac{r_d}{\Delta} f_{i1} = 0,61 \frac{\lambda}{\Omega_n}$$

$$S_d = 0,61 \frac{\lambda}{N \sin \alpha_m} = S_d(\lambda, N, \alpha_m)$$

Améliorer le pouvoir séparateur, c'est agir sur les trois paramètres dont elle dépend S_d . Pour déminuer S_d , il suffit :

- d'augmenter α_m (à λ et N , donnés).
- de déminuer λ (à α_m et N , donnés)..
- d'augmenter N (à λ et α_m , donnés).

2.4.2. Influence pouvoir séparateur de l'oeil

$$\alpha_l = 3 \times 10^{-4}$$

2.4.2.1.

2.4.2.2. Distance minimale S_s

$$\text{le grossissement } G = \frac{\alpha_l}{\alpha_o} \quad \text{tel que : } \alpha_o = \frac{S_s}{\delta} \quad \text{Cf. 2.3.1}$$

soit :

$$S_s = \frac{\alpha_l}{G} \delta$$

2.4.3. Discussion

2.4.3.1. Valeur minimale G_d de G

$$\text{le grossissement minimal } G_d = \frac{\alpha_l}{\alpha_o} \quad \text{tel que : } \alpha_o = \frac{S_d}{\delta}$$

soit :

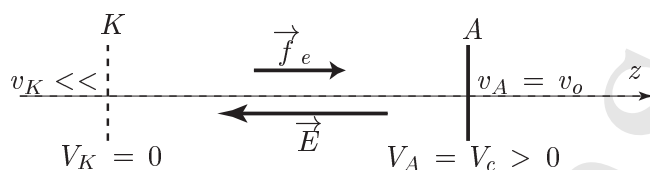
$$G_d = \frac{\alpha_l}{S_d} \delta = \frac{\alpha_l \Omega_n}{0,61 \lambda} \delta$$

2.4.3.2. application numérique : $S_d = 0,21 \mu m$ et $S_s = 0,12 \mu m$

$S_s < S_d \implies$ La diffraction limite le pouvoir de résolution du microscope étudié !

Troisième partie Microscope électronique

3.1. Principe



3.1.1. Vitesse v_o des électrons accélérés

des forces subies par chaque électron : $\begin{aligned} \vec{P} &= m_e \vec{g} \\ \vec{f}_e &= -e \vec{E} \end{aligned}$ telles que : $|\vec{P}| \ll |\vec{f}_e|$

$$\vec{f}_e = -e \vec{E} = +e \overrightarrow{\text{grad} V}$$

Théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron :

$$\Delta_K^A E_c = W(\vec{f}_e) \text{ avec : } \begin{cases} \Delta_K^A E_c = \frac{1}{2} m_e (v_A^2 - v_K^2) \approx \frac{1}{2} m_e v_o^2 \\ W(\vec{f}_e) = \int_{(K)}^{(A)} \vec{f}_e \cdot d\vec{z} = +e \int_{(K)}^{(A)} \overrightarrow{\text{grad} V} \cdot d\vec{z} = +e \int_{(K)}^{(A)} dV = e(V_K - V_A) = eV_c \end{cases}$$

soit : $\frac{1}{2} m_e v_o^2 = +e V_c$

ou

$$v_o = \sqrt{\frac{2eV_c}{m_e}}$$

3.1.2. Longueur d'onde associée à l'électron

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_o} = \frac{h}{\sqrt{2m_e V_c}}$$

3.1.3. Application numérique : $v_o = 5,77 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ et $\lambda_e = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$

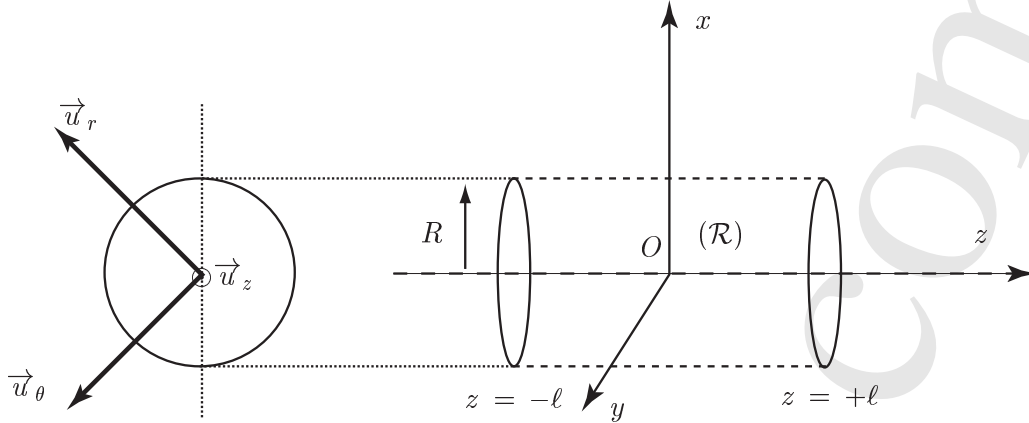
3.1.4. Les limites en longueur d'onde du spectre de la lumière visible sont telles que :

$$0,4 \mu m \leq \lambda_{\text{visible}} \leq 0,8 \mu m$$

On remarque que la longueur d'onde associée à l'électron $\lambda_e < \lambda_{\text{visible}}$: le pouvoir de résolution du microscope électronique est, donc, meilleur à celui du microscope optique !

3.2. Lentille électrostatique

3.2.1. Champ électrostatique dans la lentille



3.2.1.1. En un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , le champ électrostatique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, z)$$

- Invariance de \vec{E}

La source du champ est invariante par rotation autour de l'axe Oz : \vec{E} est, donc, indépendant de θ .

$$\vec{E} = \vec{E}(r, z)$$

- Symétrie de \vec{E}

Tout plan contenant l'axe Oz et la point M (soit (\vec{u}_r, \vec{u}_z)) est un plan de symétrie pour la source du champ : \vec{E} appartient, donc, à ce plan.

$$\vec{E} = (\vec{u}_r \cdot \vec{E}(r, z)) \vec{u}_r + (\vec{u}_z \cdot \vec{E}(r, z)) \vec{u}_z$$

On pose :

$$\begin{aligned} F(r, z) &= \vec{u}_r \cdot \vec{E}(r, z) \\ G(r, z) &= \vec{u}_z \cdot \vec{E}(r, z) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r, z) = F(r, z) \vec{u}_r + G(r, z) \vec{u}_z}$$

3.2.1.2. Le plan $z = 0$ (soit $\Pi_o \equiv (xOy)$) est, aussi, un plan de symétrie pour la source du champ électrostatique : en tout point N de ce plan, le champ électrostatique appartient, donc, à l'intersection de Π_o et le plan (\vec{u}_r, \vec{u}_z) définit en 3.2.1.1, et contenant N . L'intersection entre ces deux plans est \vec{u}_r , soit :

$$\boxed{\vec{u}_z \cdot \vec{E}(r, z = 0) = G(r, z = 0) = 0}$$

3.2.1.3. Équations locales vérifiées par \vec{E} (Équations de MAXWELL en régime électrostatique)

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0}}$$

3.2.1.4. Équations aux dérivées partielles

$$\text{rot } \vec{E}(r, z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(r, z) = \left(\frac{\partial F(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial G(r, z)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta$$

et

$$\text{div } \vec{E}(r, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rF(r, z))}{\partial r} + \frac{\partial (G(r, z))}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rF(r, z))}{\partial r} + \frac{\partial (rG(r, z))}{\partial z} \right)$$

D'après les équations locales établie en 3.2.1.3, on en déduit les équations suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial F(r,z)}{\partial z} - \frac{\partial G(r,z)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial (rF(r,z))}{\partial r} + \frac{\partial (rG(r,z))}{\partial z} = 0 \end{cases}} \quad (8)$$

3.2.1.5. La source du champ électrostatique impose :

$$F(r,z) = \beta r = \frac{2U_o}{R} r$$

D'après la question précédente : $\frac{\partial (rF(r,z))}{\partial r} = - \frac{\partial (rG(r,z))}{\partial z} = - \frac{4U_o}{R} r$

$$\Rightarrow G(r,z) = - \frac{4U_o r}{R} z + \frac{1}{r} f(r)$$

Or la fonction $G(r,z) = 0$ dans le plan $z = 0$ d'où : $f(r) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{G(r,z) = - \frac{4U_o r}{R} z = \beta' z \quad \text{avec} \quad \beta' = -2\beta}$$

3.2.1.6. Potentiel électrostatique Φ

$$\vec{E}(r,z) = F(r,z) \vec{u}_r + G(r,z) \vec{u}_z = \beta r \vec{u}_r - 2\beta z \vec{u}_z$$

Le potentiel Φ est tel que : $\vec{E}(r,z) = -\vec{\text{grad}}\Phi$ ou $\vec{E}(r,z) \cdot d\vec{r} = -d\Phi$

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(r,z) \cdot d\vec{r} = \beta r dr - 2\beta z dz = d\left(\beta \frac{r^2}{2} - \beta z^2 + C\right)$$

soit : $\boxed{\Phi(r,z) = -\beta \frac{r^2}{2} + \beta z^2 + C \quad ; \quad C : \text{constante d'intégration}}$

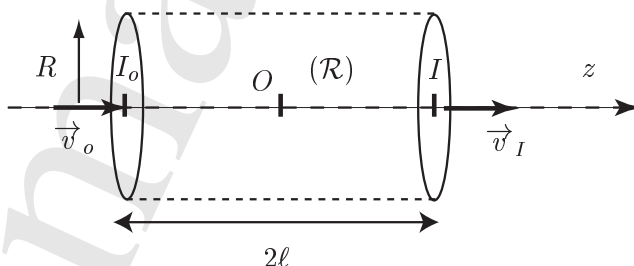
ou : $\boxed{\Phi(r,z) = 2 \frac{U_o}{R^2} \left(-\frac{r^2}{2} + z^2\right) + C \quad ; \quad C : \text{constante d'intégration}}$

3.2.1.7. Surface équipotentielle

Le potentiel de la surface passant par l'origine est : $\Phi_o = \Phi(0,0) = C$. Donc l'équation de cette surface équipotentielle est telle que :

$$-\frac{r^2}{2} + z^2 = 0 \Rightarrow \boxed{r = z\sqrt{2}}$$

3.2.2. Mouvement de l'électron dans la lentille



3.2.2.1. Théorème du moment cinétique

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$r = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{p} = m_e \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \right)$$

$$\vec{\sigma} = m_e \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ r \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zr \frac{d\theta}{dt} \\ z \frac{dr}{dt} - r \frac{dz}{dt} \\ r^2 \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \quad (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'électron dans le repère d'étude :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{M}(\vec{f}_e) = \vec{r} \wedge \vec{f}_e = (zF(r,z) - rG(r,z)) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d(\vec{u}_z \cdot \vec{\sigma})}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_z \cdot \vec{\sigma} = \text{constante} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

soit : $r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_o^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \text{constante}}$

3.2.2.2. Théorème de la résultante cinétique

$$\vec{f}_e = -e \vec{E}(r,z) = +e \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(r,z) = -e (r\beta \vec{u}_r - 2\beta) \vec{u}_z$$

La composante :

$$f_{ez} = \vec{f}_e \cdot \vec{u}_z = 2e\beta \vec{u}_z$$

Pour que le mouvement de l'électron soit confiné au voisinage de l'axe Oz , il faut que :

$$\beta > 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{U_o > 0}$$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'électron dans le repère d'étude :

$$\vec{f}_e = m_e \vec{a} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z \quad \text{car} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Par projection, de l'équation vectorielle ainsi obtenue, suivant \vec{u}_r et \vec{u}_z ; on obtient deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{e\beta}{m_e} r = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{2e\beta}{m_e} z = 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - 2\omega^2 z = 0 \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \omega = \sqrt{\frac{e\beta}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eU_o}{m_e R^2}}}$$

3.2.2.3. Expression de $z(t)$

L'équation différentielle en $z(t)$: $\frac{d^2 z}{dt^2} - 2\omega^2 z = 0$

Solution $z(t) = A \cosh(\omega\sqrt{2}t) + B \sinh(\omega\sqrt{2}t)$

A et B : constantes d'intégration ; \sinh et \cosh sont le sinus et le cosinus hyperbolique respectifs tels que :

$$\begin{cases} \cosh x = \frac{1}{2} (\exp(x) + \exp(-x)) \\ \sinh x = \frac{1}{2} (\exp(x) - \exp(-x)) \end{cases}$$

Conditions initiales : $z(t=0) = -\ell$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0 \Rightarrow A = -\ell$ et $B = \frac{v_o}{\omega\sqrt{2}}$

soit :
$$z(t) = -\ell \cosh(\omega\sqrt{2}t) + \frac{v_o}{\omega\sqrt{2}} \sinh(\omega\sqrt{2}t)$$

3.2.2.4. On suppose satisfaite la condition $\omega\ell \ll v_o$

$$z(t) \sim \frac{v_o}{\omega\sqrt{2}} \sinh(\omega\sqrt{2}t)$$

or $|z| \leq \ell \Rightarrow \sinh(\omega\sqrt{2}t) \leq \frac{\ell\omega}{v_o\sqrt{2}} \ll 1 \Rightarrow \omega\sqrt{2}t \ll 1 \Rightarrow \sinh(\omega\sqrt{2}t) \sim \omega\sqrt{2}t$

Complément mathématique : la fonction \sinh est strictement croissante dans \mathbb{R} !!

D'où :
$$z(t) \sim v_o t \quad \text{ou :} \quad \frac{dz}{dt} = v_o$$

La durée t_1 est telle que : $z(t_1) = 2\ell$

soit :
$$t_1 = 2 \frac{\ell}{v_o}$$

3.2.2.5. Expression de $r(t)$

L'équation différentielle en $r(t)$: $\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0$

Solution $r(t) = A_o \cos(\omega t) + B_o \sin(\omega t)$

A_o et B_o : constantes d'intégration

Conditions initiales : $r(t=0) = r_o$ et $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = 0 \Rightarrow A_o = r_o$ et $B_o = 0$

soit :
$$r(t) = r_o \cos(\omega t)$$

Par hypothèse, la coordonnée r_o de I_o (Cf.3.2.2) est telle que $r_o \ll R$: par conséquent la trajectoire de l'électron reste au voisinage de l'axe Oz . Cette conséquence a pour correspondance en optique l'approximation de GAUSS dont on s'intéresse aux rayons paraxiaux ! (Cf.2.1.1)

3.2.2.6. Composantes de \vec{v}_I On rappelle l'expression du vecteur vitesse, en coordonnées cylindriques, de l'électron dans le repère d'étude :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad (\theta = \text{constante})$$

Compte tenu des résultats obtenus en **3.2.2.4** et **3.2.2.5**, le vecteur vitesse pourra s'écrire sous la forme :

$$\vec{v} = -r_o \omega \sin(\omega t) \vec{u}_r + v_o \vec{u}_z$$

$$\text{En } I, t = t_1 = 2 \frac{\ell}{v_o} \implies \vec{v}_I = \vec{v}(t_1) = -r_o \omega \sin\left(\frac{2\ell\omega}{v_o}\right) \vec{u}_r + v_o \vec{u}_z$$

La condition $\ell\omega \ll v_o$ étant encore satisfaite, d'où : $\vec{v}_I = -r_o \omega \left(\frac{2\ell\omega}{v_o}\right) \vec{u}_r + v_o \vec{u}_z$

soit :

$$\vec{v}_I \begin{pmatrix} -\frac{2\ell r_o}{v_o} \omega^2 \\ 0 \\ v_o \end{pmatrix} (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$$

3.2.2.7. Principe d'inertie

En dehors de la région (R) :

- le champ électrostatique \vec{E} est nul, par conséquent $\vec{f}_e = -e \vec{E}$ est également nulle.
- le poids \vec{P} de l'électron est toujours négligeable.
- la résultante des forces auxquelles es soumis l'électrons dans le référentiel d'étude est, donc, nulle.

D'où le système (électron de masse m_e) est *isolé*. D'après le principe d'inertie ($v_o \neq 0$), le mouvement de l'électron est *rectiligne uniforme*.

Énoncé : Dans un repère GALILÉEN, tout système isolé, est : soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

3.2.2.8. Intersection de la trajectoire de l'électron avec l'axe Oz dans la région $z > \ell$

$$\vec{v}_I = -r_o \omega \left(\frac{2\ell\omega}{v_o}\right) \vec{u}_r + v_o \vec{u}_z$$

Équation de la trajectoire de l'électron dans la région $z > \ell$:

$$\vec{v}_I = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \implies \begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\frac{2\ell r_o}{v_o} \omega^2 \\ \text{et} \\ \frac{dz}{dt} = v_o \end{cases} \implies \begin{cases} r(t) = -\frac{2\ell r_o}{v_o} \omega^2 t + r_o \\ \text{et} \\ z(t) = v_o t + \ell \end{cases}$$

soit :

$$r(z) = -\frac{2\ell r_o}{v_o^2} \omega^2 (z - \ell) + r_o$$

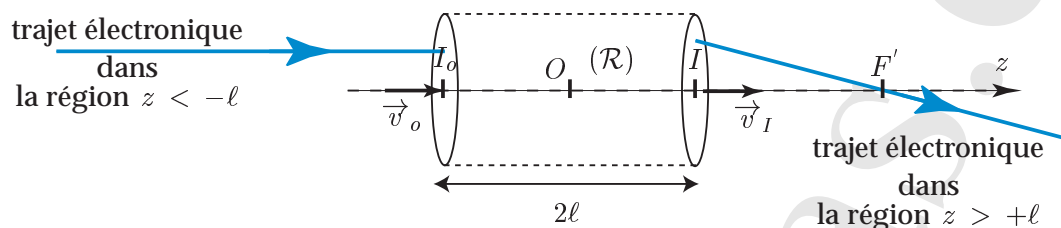
La trajectoire est, donc dans le plan (r, z) , une droite de pente *négative*. Le point d'intersection F' de coordonnée $z_{F'}$ est tel que : $r(z_{F'}) = 0$.

soit : $z_{F'} - \ell = \frac{v_o^2}{2\ell\omega^2}$ ou :

$$z_{F'} = \ell + \frac{v_o^2}{2\ell\omega^2} = \ell + \frac{m_e R^2}{4\ell e U_o} v_o^2$$

$z_{F'}$ est indépendant de la coordonnée r_o : par conséquent F' est indépendant de I_o . La puissance de la lentille électrostatique :

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{z_{F'}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lentille convergente}$$



Le point F' semble être le confugé d'un objet à l'infini : d'où la nomination du foyer donnée à F' ; la distance focale est $z_{F'} = \overline{OF'}$

$$z_{F'} = \ell + \frac{R^2 V_c}{2\ell U_o}$$

La distance focale dépend de quatre paramètres : R, ℓ, V_c , et U_o

Application numérique : $z_{F'} = 0,5 \text{ m}$