Intégrale double

Exercice 1 Calculer $I=\iint_{\mathcal{D}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0 \text{ et } x+y\leq 1\right\}$.

Exercice 2 Calculer $I=\iint_{\mathcal{D}} \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x,y\geq 0 \text{ et } x+y\leq \pi\right\}$.

Exercice 3 Calculer $I=\iint_{\mathcal{D}} yx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq 1, y\geq 0 \text{ et } y^2\leq x\right\}$.

Exercice 4 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}$ est l'intérieur de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Intégration en coordonnées polaires

Exercice 5 Calculer $I=\iint_{\mathcal{D}} \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}$ est le disque de centre O et de rayon R.

Exercice 6 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}$ désigne le disque de centre O et de rayon $\sqrt{\pi}$.

Exercice 7 Calculer $I=\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}$ est le quart de disque unité inclus dans $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$.

Exercice 8 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}$ désigne le domaine borné délimité par la cardioïde d'équation polaire $\rho=1+\cos\theta$.

Exercice 9 Calculer $I=\iint_{\mathcal{D}} x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}$ est l'intérieur de la boucle de la lemniscate d'équation polaire $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$ obtenue pour $\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$.

Exercice 10 Soit $r>0$. On note $A_r=[0,r]\times[0,r]$ et $B_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{+2} / 0\leq x^2+y^2\leq r\right\}$.

On pose $f(r)=\iint_{A_r} \exp(-(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $g(r)=\iint_{B_r} \exp(-(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

a) Montrer que $g(r)\leq f(r)\leq g(r\sqrt{2})$.

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^r \exp(-t^2)\mathrm{d}t$.

Exercice 11 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2-x\leq 0\right\}$.

Exercice 12 Calculer $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}=\left\{(x,y) / x^2+y^2-x\leq 0, x^2+y^2-y\leq 0, y\geq 0\right\}$.

Application du théorème de Fubini

Exercice 13 a) Observer que $\ln(1+x)=\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}y}{1+xy}$ sur $[0,1]$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr