Rationnels et irrationnels

Exercice 1 Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Soit x un rationnel et y un irrationnel.
Par l'absurde : Si $z = x + y$ est rationnel alors $y = z - x$ est rationnel par différence de deux nombres rationnels. Or y est rationnel. Absurde.

Exercice 2 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p,q \in \mathbb{N}^*$ et, quitte à simplifier, p et q de parités différentes. On a alors $2q^2 = p^2$.
p est nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.
Mais alors q est pair. Par suite p et q ont même parité. Absurde.

Exercice 3 Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels $a,b > 0$ tels que a^b soit rationnels.

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est gagné avec $a = b = \sqrt{2}$. Sinon, on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que $\forall x,y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.
b) Calculer $f(0)$.
c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.
d) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
e) On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

a) La relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.
b) Pour $x = y = 0$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.
c) Pour $y = -x$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ donne $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.
d) Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$.
Pour $n \in \mathbb{Z}^-, n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$.
e) On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$ or $a = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$ donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$ puis $f(x) = \frac{ap}{q} = ax$.

Nombres réels

Exercice 5 Montrer $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

$(a-b)^2 \geq 0$ donne $2ab \leq a^2 + b^2$

Exercice 6 Montrer $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Sachant $2xy \leq x^2 + y^2$: $ab + bc + ca \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}(b^2+c^2) + \frac{1}{2}(c^2+a^2) = a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 7 Soit $a \in [1,+\infty[$. Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Posons $x=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
On a $x^2=2a+2\sqrt{a-1}+2\sqrt{a^2-4(a-1)}=2a+2\sqrt{(a-2)^2}$.
Si $a\in[1,2]$ alors $x^2=2a+2(2-a)=4$ donc $x=2$.
Si $a\in[2,+\infty[$ alors $x^2=4(a-1)$ puis $x=2\sqrt{a-1}$.

Exercice 8 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application telle que : $\begin{cases} 1) & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y) \\ 2) & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=f(x)f(y) \\ 3) & \exists x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0 \end{cases}$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
b) Déterminer $f(x)$ pour $x\in\mathbb{Z}$ puis pour $x\in\mathbb{Q}$.
c) Démontrer que $\forall x\geq 0, f(x)\geq 0$. En déduire que f est croissante.
d) Conclure que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

a) $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ donc $f(0)=0$.
$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(1.x)=f(1)f(x)$. Comme f est non nulle, on a $f(1)=1$.
$f(1)+f(-1)=f(0)=0$ donc $f(-1)=-1$.
b) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: $f(n)=n$. De plus $f(-n)=f((-1)\times n)=f(-1)\times f(n)=-f(n)=-n$ donc $\forall x\in\mathbb{Z}, f(x)=x$. Pour $x\in\mathbb{Q}$, $x=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*$, $f(x)=f(p\times\frac{1}{q})=f(p)\times f(\frac{1}{q})$. Or $f(p)=p$ et $1=f(1)=f(q\times\frac{1}{q})=f(q)\times f(\frac{1}{q})=q\times f(\frac{1}{q})$ donc $f(\frac{1}{q})=\frac{1}{q}$. Par suite $f(x)=x$.
c) $\forall x\geq 0, f(x)=f(\sqrt{x}\sqrt{x})=\left(f(\sqrt{x})\right)^2\geq 0$.
Pour $x,y\in\mathbb{R}$, si $x\leq y$ alors $f(y)=f(x+y-x)=f(x)+f(y-x)\geq f(x)$. Ainsi f est croissante.
d) Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$: $\frac{E(nx)}{n}\leq x<\frac{E(nx)+1}{n}$
Comme f est croissante : $f(\frac{E(nx)}{n})\leq f(x)<f(\frac{E(nx)+1}{n})$ puis $\frac{E(nx)}{n}\leq f(x)<\frac{E(nx)+1}{n}$.
A la limite, quand $n\to+\infty$, on obtient $x\leq f(x)\leq x$ i.e. $f(x)=x$. Finalement $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Partie entière

Exercice 9 Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Soit $x\leq y\in\mathbb{R}$. $E(x)\leq x$ donc $E(x)\leq y$ or $E(x)\in\mathbb{Z}$ donc $E(x)\leq E(y)$ car $E(y)$ est le plus grand entier inférieur à y.

Exercice 10 Montrer que $\forall x,y\in\mathbb{R}, E(x)+E(y)\leq E(x+y)\leq E(x)+E(y)+1$.

$E(x)+E(y)\leq x+y$ donc $E(x)+E(y)\leq E(x+y)$.
$E(x+y)\leq x+y<E(x)+1+E(y)+1$ donc $E(x+y)\leq E(x)+E(y)+1$.

Exercice 11 Montrer que, pour $x,y\in\mathbb{R}$, $E(x)+E(x+y)+E(y)\leq E(2x)+E(2y)$.

Si $E(x)\leq x<E(x)+1/2$ et $E(y)\leq y<E(y)+1/2$ alors
$E(x+y)=E(x)+E(y), E(2x)=2E(x)$ et $E(2y)=2E(y)$ puis la relation voulue.
Si $E(x)+1/2\leq x<E(x)+1$ et $E(y)\leq y<E(y)+1/2$ alors

$E(x+y) \le E(x)+E(y)+1, E(2x)=2E(x)+1$ et $E(2y)=2E(y)$ puis la relation voulue
Si $E(x) \le x < E(x)+1/2$ et $E(y)+1/2 \le y < E(y)+1$: idem.
Si $E(x)+1/2 \le x < E(x)+1$ et $E(y)+1/2 \le y < E(y)+1$ alors
$E(x+y) = E(x)+E(y)+1, E(2x)=2E(x)+1$ et $E(2y)=2E(y)+1$ puis la relation voulue.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

On a $E(nx) \le nx$ puis $\frac{E(nx)}{n} \le x$, or $x \mapsto E(x)$ est croissante donc $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \le E(x)$.
$E(x) \le x$ donc $nE(x) \le nx$ puis $nE(x) \le E(nx)$ car $nE(x) \in \mathbb{Z}$.
Par suite $E(x) \le \frac{E(nx)}{n}$ puis $E(x) \le E(\frac{E(nx)}{n})$ et finalement $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.

Exercice 13 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Posons $m = E(nx)$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m = nq+r$ avec $0 \le r \le n-1$.
On a $nq+r \le nx < nq+r+1$ donc pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$: $q+\frac{k+r}{n} \le x+\frac{k}{n} < q+\frac{k+r+1}{n}$
Si $k+r<n$ alors $E\left(x+\frac{k}{n}\right) = q$ et si $k+r \ge n$ alors $E\left(x+\frac{k}{n}\right) = q+1$.
Par suite $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-r-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=n-r}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = nq+r = m = E(nx)$.

Exercice 14 Soit $a \le b \in \mathbb{R}$. Etablir $\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b)+E(1-a)$.

Si $a \notin \mathbb{Z}$ alors $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \{E(a)+1, E(a)+2, \dots, E(b)\}$ donc $\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b)-E(a)$.
Or $E(1-a) = 1+E(-a) = -E(a)$ car $a \notin \mathbb{Z}$ donc $\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b)+E(1-a)$
Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a+1, \dots, E(b)\}$ donc $\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b)-a+1 = E(b)+E(1-a)$ car $1-a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n \ge 1$.
$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n = (2+\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$
avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que $3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1$.
Récurrence établie.
b) $a_n - 1 \le b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \le (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$ donc $E((2+\sqrt{3})^n) = 2a_n - 1$.

Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 16 Soit $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$.
Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

$\forall n\in\mathbb{N}, -1\le(-1)^n+\dfrac{1}{n+1}\le 2$ donc A est bornée.

A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée donc $\inf A$ et $\sup A$ existent.

n	0	1	2	3	…
$(-1)^n+\dfrac{1}{n+1}$	2	$-1+\dfrac{1}{2}$	$1+\dfrac{1}{3}$	$-1+\dfrac{1}{4}$	…

.

2 est plus grand élément de A et donc $\sup A=\max A=2$.

A est clairement minorée par -1 et $(-1)^{2p+1}+\dfrac{1}{2p+2}\to -1$ donc il existe une suite d'éléments de A qui converge vers -1 donc $\inf A=-1$.

Exercice 17 Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A\subset B$.
Comparer $\inf A,\sup A,\inf B$ et $\sup B$.

A et B sont des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ donc les bornes sup et inf considérées existent.
$\forall a\in A$, on a $a\in B$ donc $a\le\sup B$. $\sup B$ majore A donc $\sup A\le\sup B$.
$\forall a\in A$, on a $a\in B$ donc $\inf B\le a$. $\inf B$ minore A donc $\inf B\le\inf A$.
Enfin, puisque $A\neq\varnothing$, $\inf A\le\sup A$.

Exercice 18 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall(a,b)\in A\times B,\ a\le b$.
Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A\le\inf B$.

$\forall b\in B$ on a $\forall a\in A$, $a\le b$ donc A est majorée par b.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par b donc $\sup A$ existe et $\sup A\le b$.
B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $\sup A$ donc $\inf B$ existe et $\sup A\le\inf B$.

Exercice 19 Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Montrer que $\sup A,\sup B$ et $\sup A\cup B$ existent et $\sup A\cup B=\max(\sup A,\sup B)$.

$A,B,A\cup B$ sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées donc $\sup A,\sup B,\sup A\bigcup B$ existent dans $\mathbb{R}$.
$\forall x\in A\cup B$ on a $x\le\max(\sup A,\sup B)$ donc $\sup(A\cup B)\le\max(\sup A,\sup B)$.
Puisque $A,B\subset A\cup B$ on a $\sup A,\sup B\le\sup A\cup B$ donc $\max(\sup A,\sup B)\le\sup A\cup B$ puis l'égalité.

Exercice 20 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On forme $A+B=\left\{a+b/(a,b)\in A\times B\right\}$.
Montrer que $A+B$ est majorée et $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ et $\sup B$ existent.
$\forall x\in A+B$, on peut écrire $x=a+b$ avec $a\in A$ et $b\in B$.
On a $x=a+b\le\sup A+\sup B$, donc $A+B$ est majorée par $\sup A+\sup B$
$A+B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc $\sup A+B$ existe et $\sup A+B\le\sup A+\sup B$.
$\forall b\in B$, $\forall a\in A$, $a=(a+b)-b\le\sup(A+B)-b$ donc A est majorée par $\sup(A+B)-b$ d'où $\sup A\le\sup(A+B)-b$. Par suite $b\le\sup(A+B)-\sup A$ et B est donc majoré par $\sup(A+B)-\sup A$ et par suite $\sup B\le\sup(A+B)-\sup A$. Finalement $\sup A+\sup B\le\sup A+B$ puis l'égalité.

Exercice 21 Soit (u_n) une suite réelle. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\sup\limits_{p\ge n}u_p$ et $w_n=\inf\limits_{p\ge n}u_p$.
Etudier les monotonies des suites (v_n) et (w_n).

$\left\{u_p\,/\,p\ge n+1\right\}\subset\left\{u_p\,/\,p\ge n\right\}$ donc $v_{n+1}\le v_n$ et $w_{n+1}\ge w_n$.
Ainsi (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante.

Exercice 22 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=x^n(1-x)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}f_n(x)$

f_n est dérivable et $f_n'(x)=nx^{n-1}(1-x)-x^n=nx^{n-1}-(n+1)x^n$.

x	0		x_n		1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	1

avec $x_n=\dfrac{n}{n+1}\in[0,1]$ et $M_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}f_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n\dfrac{1}{n+1}\to 0$.

Exercice 23 Déterminer $\inf\left\{(x_1+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)/x_1,\ldots,x_n>0\right\}$.

On exploite $\dfrac{x_i}{x_j}+\dfrac{x_j}{x_i}=\dfrac{x_i^2+x_j^2}{x_ix_j}\geq 2$ pour obtenir $(x_1+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{x_i}{x_j}\geq n^2$.

Puisque que pour $x_1=\ldots=x_n=1$ on obtient $(x_1+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)=n^2$ on peut conclure

$$\inf\left\{(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)/x_1,\ldots,x_n>0\right\}=n^2$$

Equations et systèmes

Exercice 24 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

a) $x=2x-1\ \ [1]$ b) $3x=2-x\ \ [\pi]$ c) $nx=0\ \ [\pi]$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$).

a) $x=2x-1\ \ [1]\Leftrightarrow -x=-1\ \ [1]\Leftrightarrow x=1\ \ [1]$, $\mathcal{S}=\mathbb{Z}$.

b) $3x=2-x\ \ [\pi]\Leftrightarrow 4x=2\ \ [\pi]\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ \ \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{4}/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $nx=0\ \ [\pi]\Leftrightarrow x=0\ \ \left[\dfrac{\pi}{n}\right]$, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{k\pi}{n}/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 25 Observer que $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ est solution d'une équation de la forme $x^3=\alpha x+\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Résoudre cette dernière et déterminer x.

$x^3=6x+40$. 4 est solution apparente de cette équation. $x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10)$

Les solutions de l'équation sont $4,-2+i\sqrt{6},-2-i\sqrt{6}$. On conclut $x=4$.

Exercice 26 Résoudre les systèmes d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases}x^2+2y^2=1\\ x^2+xy=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 2xy=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^2=y\\ y^2=x\end{cases}$

a) Si (x,y) est solution alors $(2)\Rightarrow x(x+y)=0$ donc $x=0$ ou $y=-x$.

Si $x=0$ alors (1) donne $y=\pm1/\sqrt{2}$.

Si $y=-x$ alors (1) donne $x=\pm1/\sqrt{3}$.

Inversement : ok

Finalement : $\mathcal{S}=\left\{(0,1/\sqrt{2}),(0,-1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}),(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\right\}$.

b) Si (x,y) est solution alors $(1)-(2)$ donne $(x-y)^2=0$ d'où $x=y$ puis (1) donne $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S}=\left\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\right\}$.

c) Si (x,y) est solution alors (1) et (2) donnent $x^4=x$ d'où $x=0$ ou $x=1$.

Si $x=0$ alors $y=0$. Si $x=1$ alors $y=1$.

Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S}=\{(0,0),(1,1)\}$.

Exercice 27 Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ xyz=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+3z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$.

a) Si (x,y,z) est solution alors (3) donne $x=0, y=0$ ou $z=0$.

Si $x=0$ alors $y=3, z=5$. Si $y=0$ alors $x=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$. Si $z=0$ alors $x=\frac{5}{3}, y=-\frac{1}{3}$.

Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S}=\left\{(0,3,5),(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},0)\right\}$.

b) $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{8}{9},\frac{7}{9},\frac{4}{9}\right)\right\}$. c) $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{8},\frac{1}{8}\right)\right\}$.

Exercice 28 Résoudre le système $\begin{cases} x-ay+z=2 \\ x+(a+1)z=3 \\ x+ay+3z=4 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.

$\begin{cases} x-ay+z=2 \\ x+(a+1)z=3 \\ x+ay+3z=4 \end{cases}\begin{cases} x-ay+z=2 \\ x+(a+1)z=3 \\ x+2z=3 \end{cases}\begin{cases} x-ay+z=2 \\ x+2z=3 \\ (a-1)z=0 \end{cases}$

Si $a=0$ ou 1 le système n'a pas de solution.

Si $a\neq 1$ et $a\neq 0$ le système a pour solution $x=3, y=1/a, z=0$.