CHAPITRE 5 : Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

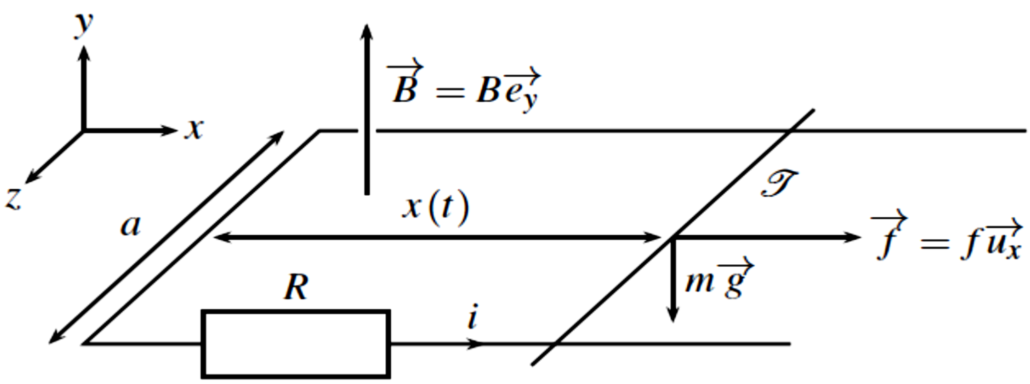
Les convertisseurs électromécaniques (générateurs et moteurs électriques) utilisent des circuits électriques en mouvement dans un champ magnétique. Le circuit électrique mobile est soumis à des actions de Laplace. Il est généralement le siège d'une force électromotrice induite. On appelle transducteur ou convertisseur électromécanique, un dispositif qui convertit la puissance mécanique en puissance électrique (générateur) ou la puissance électrique en puissance mécanique (moteur). Dans ce chapitre on étudie des phénomènes d'induction dans des circuits mobiles dans un champ magnétique variable. Les dispositifs modèles présentés fonctionnent soit en générateur, quand ils transforment une puissance mécanique en puissance électrique, soit en moteur quand ils transforment une puissance électrique en puissance mécanique.

1. Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

1.1. Rails de Laplace générateurs

1.1.1. Présentation

Une tige T, de masse m, conductrice, glisse sans frottement sur deux rails conducteurs, à la vitesse $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$. Elle est tirée par une force $\vec{f} = f\,\vec{u}_x$ constante. La tige T reste parallèle à $\vec{u}_z$ pendant son mouvement. Les rails sont dans le plan horizontal (xOz). L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\,\vec{u}_y$, orthogonal au plan des rails.



1.1.2. Analyse physique

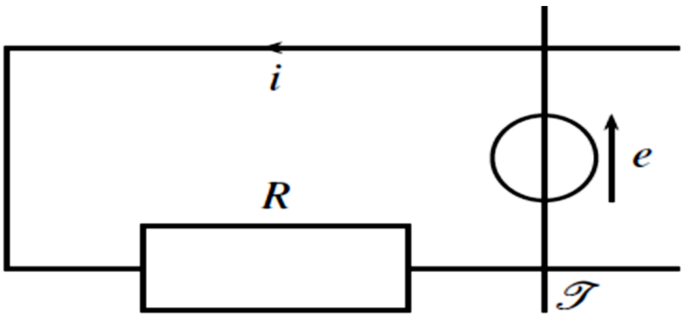
La mise en équation d'un problème d'électromécanique doit toujours etre précédée d'une analyse quantitative :

- La tige T est mise en mouvement par la force $\vec{f}$; elle est alors mobile dans le champ $\vec{B}$ stationnaire : il apparait dans ce conducteur une f.é.m. induite e.
- Le circuit, constitué des rails et de T, est fermé et conducteur : un courant induit i circule, créant avec $\vec{B}$ une force de Laplace $\vec{f}_L$.

1.1.3. F.é.m induite et équation électrique

Le vecteur de surface $\vec{S}$ du circuit est orienté par la règle de la main droite ; il est donc porté par $\vec{u}_y$: $\vec{S} = S\,\vec{u}_y$ où $S = a\,x(t)$ est la surface du circuit. Comme la surface S varie avec $x(t)$, le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit varie : $\varphi = \vec{B}.\vec{S} = B\,\vec{u}_y.\,a\,x(t)\vec{u}_y = B\,a\,x(t)$, a étant l'écart entre les rails. Dans l'expression de φ, seul le flux extérieur est pris en compte. Le circuit ne contenant qu'une seule spire, son coefficient d'auto-induction dans le cas du dispositif des rails de Laplace est très faible (de l'ordre μH), ce qui permet de négliger le flux propre devant le flux extérieur. La f.é.m. induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav(t)$$



La résistance R des rails et la tige T est supposée constante quelle que soit la position de T.

On a : $e - Ri = 0 \quad \Rightarrow i = \frac{e(t)}{R} = -\frac{Bav(t)}{R} \qquad (5-1)$.

1.1.4. Force de Laplace et équation mécanique : vitesse et courant induit

La force de Laplace s'écrit : $\vec{f}_L = i\,\vec{a} \wedge \vec{B} = ia\left(-\vec{u}_z \wedge B\,\vec{u}_y\right) = iaB\left(\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z\right) = iaB\vec{u}_x = i(t)aB\vec{u}_x$

La tige T est soumise au cours de son mouvement à : la force $\vec{f}_L$; la force de traction $\vec{f}$; son poids $m\vec{g}$; la réaction $\vec{R}$ des rails, normale au déplacement car T glisse sans frottement : $\vec{R} = R\,\vec{u}_y$. On applique la RFD à la tige : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = i(t)aB\,\vec{u}_x + \vec{f} + \vec{R} + \vec{P}$

En projection sur $\vec{u}_x$, on a : $m\frac{dv}{dt} = i(t)aB + f \qquad (5-2)$

Les équations électrique (5.1) et mécanique (5.2) sont couplées car toutes deux contiennent $i(t)$ et $v(t)$:

$$\begin{cases} i = -\dfrac{Bav}{R} & (a) \\ m\dfrac{dv}{dt} = i(t)aB + f & (b) \end{cases}$$

$$(b) \quad \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = aB\left(-\frac{Bav}{R}\right) + f = -\frac{a^2B^2}{R}v \quad \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{R}v = f \qquad (5-3)$$

La force de Laplace apparait, dans cette équation différentielle du 1[er] ordre en v, comme une force de frottement fluide ; en effet, la force de Laplace s'oppose au déplacement de la tige, conformément à la loi de Lenz.

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{R}v = f \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{mR}v = \frac{f}{m}$$

On pose $\tau = \dfrac{mR}{a^2B^2}$; τ est la constante de temps caractéristique du système.

En supposant qu'à $t = 0$, $v = 0$, on a :

$$v(t) = \frac{Rf}{(Ba)^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (5-4)$$

$$i(t) = -\frac{f}{Ba}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (5-5)$$

<u>Interprétation qualitative des phénomènes observés</u>

- S'il n'y avait pas de champ magnétique, l'équation de mouvement se réduirait à $m\dfrac{dv}{dt} = f$ et la vitesse $v(t) = \dfrac{f}{m}t$; le graphe $v(t)$ serait une droite passant par l'origine de pente $\dfrac{f}{m}$ elle se confondrait avec la tangente à l'origine. La vitesse tendrait à l'infini.
- En présence du champ magnétique, la barre est soumise à la force de Laplace $\vec{f}_L = i(t)aB\vec{u}_x = -\dfrac{(Ba)^2}{R}v(t)\,\vec{u}_x$. Cette force de type frottement fluide est résistante : elle s'oppose à la vitesse de la tige d'autant plus fort que la vitesse est grande. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz : le mouvement de la tige crée un courant induit *i*, qui à son tour crée la force de Laplace qui tend à s'opposer au

mouvement de la tige. Pendant les premiers instants du mouvement, le courant induit est encore faible et la force de Laplace issue est encore très faible. Le mouvement de la tige est donc le même que s'il n'y avait pas encore de phénomène d'induction : la courbe $v(t)$ se confond donc avec sa tangente à l'origine, d'équation $v(t)=\frac{f}{m}t$ (qui serait la solution du problème $B=0$).

- En régime permanent, $v=v_{\lim}=\frac{Rf}{(Ba)^2}$. Cette vitesse finie est due à la force de Laplace qui compense exactement la force f, car l'équation de mouvement se résume à $f+f_L=0$ lorsque $\frac{dv}{dt}=0$. Les influences de *R*, *B* et *a* sur $v_{\lim}$ peuvent s'interpréter : si la résistance *R* du circuit est grande, le courant induit est faible, la force de Laplace aussi : elle s'oppose peu à f et la vitesse limite $v_{\lim}$ est grande. Si *B* et *a* sont grands, les effets d'induction le sont aussi, donc $\vec{f}_L$ s'oppose beaucoup à *f*, réduisant ainsi $v_{\lim}$.
- Dans la force de Laplace, on a le terme $(Ba)^2$. Donc quelle que soit le signe de *B*, la force de Laplace s'oppose toujours au mouvement, conformément à la loi de modération de Lenz.

1.1.5. Bilan de puissance

Pour établir le bilan de puissance, on multiplie l'équation électrique par *i* et l'équation mécanique par *v* :

$$Ri=-Bav \quad\Rightarrow\quad Ri^2=-Bav\,i=ei \qquad (5-6)$$

$$m\frac{dv}{dt}=f+f_L \quad\Rightarrow m\frac{dv}{dt}=fv+i\,aBv \qquad (5-7)$$

$ei=-Bav\,i$ est la puissance fournie par la f.é.m. induite *e* ; on a la note P_{fe}.

$f_L v=i\,aBv$ est la puissance fournie par la force de Laplace ; on a la note P_{fL}.

On constate que $P_{fe}=-P_{fL}$ $\quad(5-8)$.

<u>Théorème</u> : pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance mécanique fournie au circuit par la force de Laplace induite est l'opposé de la puissance électrique fournie au circuit par la f.é.m. induite : $P_{fe}=-P_{fL}$ $\quad(5-8)$.

La relation (5.8) est à la base du fonctionnement de tous les convertisseurs électromécaniques.

Attention : Ce résultat n'est plus valable si le champ magnétique dépend du temps, car e et i sont modifiés, ce qui change les équations de bilan de puissance ou bilan énergétique.

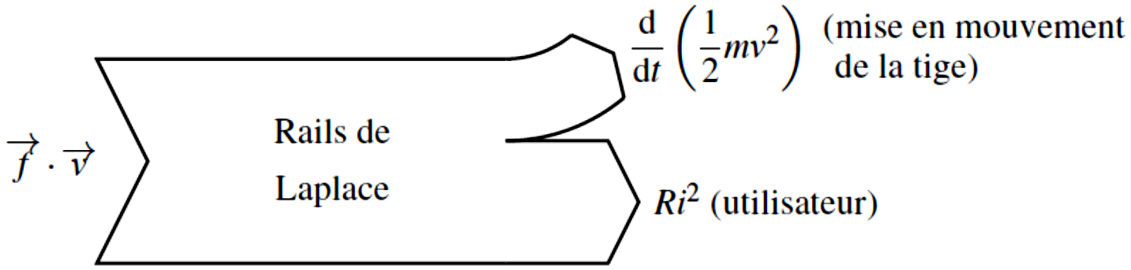
On fait la somme membre à membre des équations (5.5) et (5.6) ; il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+Ri^2=fv \qquad (5-9)$$

La relation (5.9) exprime les transferts de puissance : la force $\vec{f}$ fournit une puissance fv à la tige qui se répartit en :

- Puissance cinétique $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$
- Puissance de l'effet joule Ri^2.

La création du courant $i(t)$ justifie l'adjectif de générateur donné aux rails de Laplace : une puissance mécanique se transforme en puissance électrique, modélisée ici par l'effet joule.



Autre interprétation de la relation (5.9)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+Ri^2=fv$$

- $Ri^2=$ puissance reçue par la résistance R
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=$ variation de l'énergie cinétique de la tige
- $fv=$ puissance fournie à la tige par $\vec{f}$.

La puissance fournie à la tige par $\vec{f}$ sert, d'une part à augmenter l'énergie cinétique de la tige (démarrage du générateur) et, d'autre part, à alimenter électriquement la résistance R (par exemple, une ampoule électrique). En pratique, ce n'est pas le démarrage qui est intéressant, mais le régime permanent, qui se résume à $fv=Ri^2 \qquad (5-10)$. Tous les générateurs électriques reposent sur ce phénomène de conversion électromécanique de puissance : toute la puissance mécanique en entrée est convertie en puissance électrique disponible pour l'utilisateur.

1.2. Freinage par induction

Dans le dispositif des rails de Laplace, la force de Laplace tend à s'opposer au mouvement de la tige, conformément à la loi de modération de Lenz. En l'absence de $\vec{f}\left(\vec{f}=\vec{0}\right)$, le mouvement de la tige se réduit d'après l'équation (5.3) à $\frac{dv}{dt}+\frac{(aB)^2}{mR}v=0 \qquad (5-11)$ avec $\tau=\frac{mR}{a^2B^2}$.

La solution de l'équation (5.11) montre que la vitesse décroit exponentiellement avec un temps caractéristique $\tau=\frac{mR}{a^2B^2}$ qui :

- croît avec la masse m (plus la tige est lourde, plus il lui faut du temps pour s'arrêter : c'est l'inertie mécanique de la tige) ;
- décroit avec le champ magnétique B (un champ magnétique intense donne des effets d'induction plus grands et le freinage par la loi de Lenz est plus intense)

C'est le principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds ; seule la géométrie diffère. Dans un camion, il existe un disque métallique solidaire de l'essieu : ce disque tourne à la même vitesse angulaire que les roues. Un électroaimant peut générer, sur demande du conducteur, un champ magnétique orthogonal au plan du disque. Ainsi lorsque le camion roule, le disque en rotation est mobile dans un champ magnétique permanent : des courants induits prennent naissance dans le volume du disque (c'est l'analogue du courant induit qui apparaît dans la tige mobile des rails de Laplace). Ces courants volumiques induits, appelés courant de Foucault, donnent lieu à des actions de Laplace réparties sur le volume du disque. D'après la loi de modération de Lenz, ces actions de Laplace tendent à ralentir la rotation du disque, donc à freiner le camion. On peut montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire ω des roues du camion est de la même forme que l'équation (5.11) : ω décroit exponentiellement en un temps d'autant plus court que le champ magnétique imposé est intense. Les ralentisseurs électromagnétiques présentent les avantages suivants :

- Les actions de Laplace sont volumiques, donc l'échauffement au freinage est mieux réparti que sur les freins conventionnels où il se fait uniquement dans la zone de frottement entre les plaquettes et le disque ;
- Il n'y a pas d'usure mécanique ;

- Si la roue se bloque intempestivement, le freinage cesse automatiquement (le couple de freinage est proportionnel à ω) et la roue se débloque aussitôt. Il n'y a donc aucun risque de dérapage.

Le couple de freinage électromagnétique, proportionnel à ω, n'est efficace qu'à grande vitesse. Il devient inefficace à faible vitesse. Ainsi les ralentisseurs électromagnétiques ne sont utilisés qu'à grande vitesse et le camion finit de s'arrêter avec des freins mécaniques classiques (mâchoires qui serrent des disques solidaires des roues). Pour cette raison, on parle de ralentisseurs et non freins électromagnétiques.

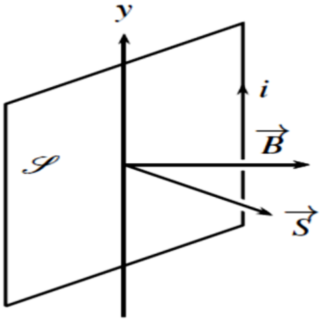
Remarque : Par définition, les courants de Foucauld sont répartis en volume. Leur géométrie est donc complexe et les calculs ne sont pas au programme de CPGE. En particulier, l'utilisation de la loi de Faraday $e = -\frac{d\varphi}{dt}$ n'est pas possible, car on ne peut pas identifier de circuit filiforme pour placer une f.é.m. induite ou calculer le flux magnétique (pas de surface bien définie).

1.3. Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme : alternateur

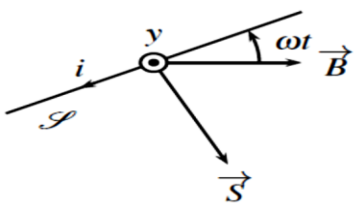
1.3.1. Description

Un alternateur sert à transformer une puissance mécanique en une puissance électrique. Ce dispositif est par exemple utilisé sur les vélos, dont une roue entraîne en rotation l'alternateur qui alimente des ampoules ou une batterie.

L'alternateur est modélisé ici par une spire rectangulaire $\mathcal{S}$, de surface $a.b$, conductrice de résistance électrique R. elle est en rotation autour de l'axe (Oy) à la vitesse angulaire ω constante. Son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) est noté J. La spire est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ perpendiculaire à (Oy), crée par un environnement extérieur.



Vue de profil



Vue de dessus

1.3.2. Analyse physique

- La spire $\mathcal{S}$ est entraînée en rotation ;
- $\mathcal{S}$ est alors un circuit mobile dans le champ magnétique stationnaire $\vec{B}$: il apparait dans ce conducteur une f.é.m. e ;
- $\mathcal{S}$ est un circuit électrique fermé et conducteur : un courant induit i circule
- i et $\vec{B}$ créent un moment des forces de Laplace qui s'oppose à la rotation de la spire d'après la loi de Lenz.

1.3.3. Choix des orientations

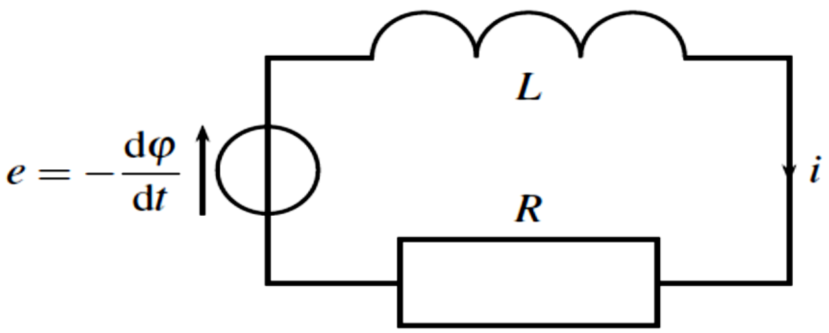
Le sens du courant est arbitrairement choisi comme sur la figure ci-dessus. Ce sens impose le sens du vecteur surface $\vec{S}$ d'après la règle de la main droite.

1.3.4. F.é.m. induite et équation électrique

La spire $\mathcal{S}$ tourne autour de (Oy); son orientation par rapport à $\vec{B}$ varie. Le flux magnétique de $\vec{B}$ à travers $\vec{S}$ est : $\varphi = \vec{B}.\vec{S} = B\,S\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = B\,S\sin(\omega t)$

La f.é.m. induite est $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -B\,S\omega\cos(\omega t)$.

La f.é.m. fait circuler un courant $i(t)$, qui crée son propre champ magnétique. Le flux de champ, flux propre $\varphi_p = Li$ (L est le coefficient d'auto-induction). La constitution des alternateurs est telle que la variation de ce flux propre n'est, en général, pas négligeable devant la variation du flux champ magnétique $\vec{B}$ extérieur. Le phénomène d'auto-induction est pris en compte dans le circuit électrique équivalent par l'inductance propre L.



Loi des mailles : $-\frac{d\varphi}{dt} - L\frac{di}{dt} - Ri = 0 \qquad (5-12)$.

1.3.5. Moment des forces de Laplace et équation mécanique

Le moment résultant des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire S est : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B}$ ($\vec{M} = i.\vec{S}$ est le moment magnétique de la spire)

$$\vec{\Gamma}(t) = iSB\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)\vec{u}_y = iSB\cos(\omega t)\vec{u}_y$$

La spire est entraînée en rotation sans l'effet d'un couple extérieur $\vec{\Gamma}_{ext} = \Gamma_{ext}\vec{u}_y$. Ce couple est nécessaire pour avoir une vitesse de rotation constante malgré le couple magnétique. Les liaisons pivot sont supposées parfaites donc sans frottement ; elles exercent donc un moment nul par rapport à l'axe. Le poids s'applique au centre de gravité du cadre ; son moment par rapport à l'axe (Oy) est donc nul. Les seuls moments qui comptent sont donc $\vec{\Gamma}(t)$ et $\vec{\Gamma}_{ext}$.

En appliquant le théorème du moment cinétique à la spire en projection sur l'axe (Oy), on a :

$$\Gamma + \Gamma_{ext} = J\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (5-13) \qquad (\omega = cte)$$

1.3.6. Bilan de puissance

En combinant les équations électrique (5.12) et mécanique (5.13), on a :

$L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{d\varphi}{dt} = -B\,S\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = -B\frac{S\omega}{L}\cos(\omega t)$ avec $\tau = \frac{L}{R} =$ constante de temps caractéristique du circuit.

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$i(t) = -\frac{\omega}{1+(\tau\omega)^2}\frac{BS}{R}\left[\cos(\omega t) + \tau\omega\sin(\omega t)\right]$$

$$\Gamma + \Gamma_{ext} = 0 \Rightarrow \Gamma_{ext} = -\Gamma = -i(t)SB\cos(\omega t) = \frac{\omega}{1+(\tau\omega)^2}\frac{(BS)^2}{R}\left[\cos^2(\omega t) + \tau\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right]$$

La moyenne dans le temps de $\cos^2(\omega t)$ vaut $\frac{1}{2}$ et la moyenne de $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0$ ce qui implique que la moyenne dans le temps du couple Γ_{ext} est $\langle\Gamma_{ext}\rangle = \frac{\omega}{1+(\tau\omega)^2}\frac{(BS)^2}{R}$.

L'alternateur délivre en sortie une puissance électrique moyenne $\langle Ri^2\rangle$:

$$\langle Ri^2\rangle = \frac{\omega^2}{1+(\tau\omega)^2}\frac{(BS)^2}{R} \qquad (5-14)$$

Il faut donc lui fournir en entrée une puissance mécanique identique ; c'est la puissance mécanique du couple $\vec{\Gamma}_{ext}$:

$$\langle \Gamma_{ext}.\omega \rangle = \frac{\omega^2}{1+(\tau\omega)^2}\frac{(BS)^2}{R} \qquad (5-15)$$

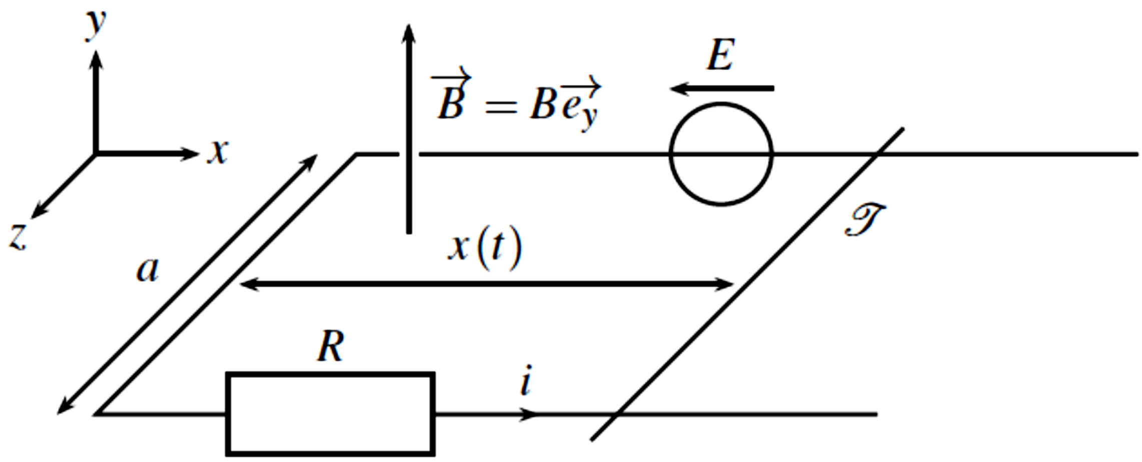
En régime établi, l'intégralité de la puissance mécanique injectée dans l'alternateur est convertie en puissance électrique.

2. Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

2.1. Rails de Laplace moteurs

2.1.1. Présentation

Le dispositif des rails de Laplace peut aussi être utilisé pour convertir une puissance électrique en puissance mécanique, mais les conditions d'utilisation sont différentes : un générateur extérieur impose une tension E.

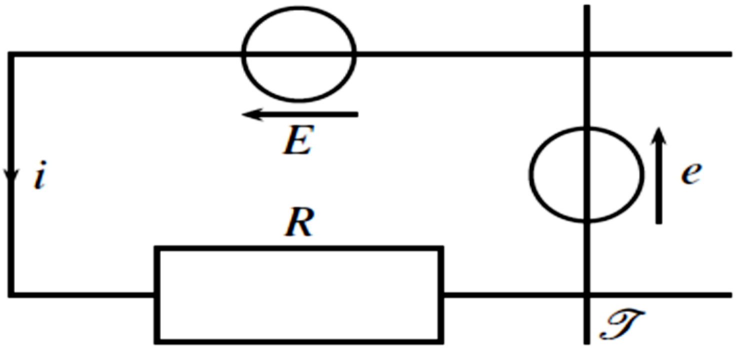


2.1.2. Analyse physique

- Le générateur impose la tension E et fait circuler un courant i dans le circuit fermé formé par les rails et la tige T
- i et $\vec{B}$ créent une force de Laplace $\vec{f}_L$
- La tige T est mise en mouvement par la force $\vec{f}_L$
- La tige T dévient un circuit mobile dans le champ $\vec{B}$ stationnaire : il apparaît dans ce conducteur une f.é.m. induite e qui s'oppose à la tension E du générateur (Loi de Lenz)

2.1.3. F.é.m induite et équation électrique

Le calcul de la f.é.m. induite e et les justifications de la validité de la loi de Faraday ne sont pas modifiés par rapport à l'étude faite dans la partie I de ce chapitre : $e = -Bav(t)$ (Expression 5.1). Le schéma électrique équivalent est le suivant :



La loi des mailles donne : $e(t)+E-Ri(t)=0 \quad \Rightarrow i(t)=\dfrac{E+e}{R}=\dfrac{E-Bav(t)}{R}$ $\quad (5-16)$

Comme précédemment, on néglige le flux propre devant le flux de $\vec{B}$.

2.1.4. Force de Laplace et équation mécanique

La force de Laplace qui s'exerce sur la tige est : $\vec{f}_L = i\,\vec{a}\wedge\vec{B} = i(t)aB\,\vec{u}_x$.

On applique la RFD sur la tige : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{f}_L+\vec{R}+\vec{P}$; en projection sur $\vec{u}_x$

On a

$$m\frac{dv}{dt}=i\,aB=aB\left[\frac{E-Bav}{R}\right] \qquad (5-17)$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt}+\frac{(aB)^2}{R}v=aBE \quad \Rightarrow v=v(t)=\frac{E}{aB}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

où $\tau=\dfrac{mR}{a^2B^2}$ est la constante de temps caractéristique du système.

En supposant qu'à $t=0$, $v=0$; $\quad i(t)=\dfrac{E-Bav(t)}{R}=\dfrac{E}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

2.1.5. Bilan de puissance et d'énergie

- **<u>Bilan de puissance</u>**

On multiplie l'équation électrique (5.16) par i et l'équation mécanique (5.17) par v :

$$\begin{cases} Ei+ei=Ri^2 \\ m\dfrac{dv}{dt}=f_Lv=i\,aBv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ei-i\,aBv=Ri^2 & (5-18) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)=i\,aBv & (5-19) \end{cases}$$

Dans les équations (5.18) et (5.19), on retrouve la relation (5.8)

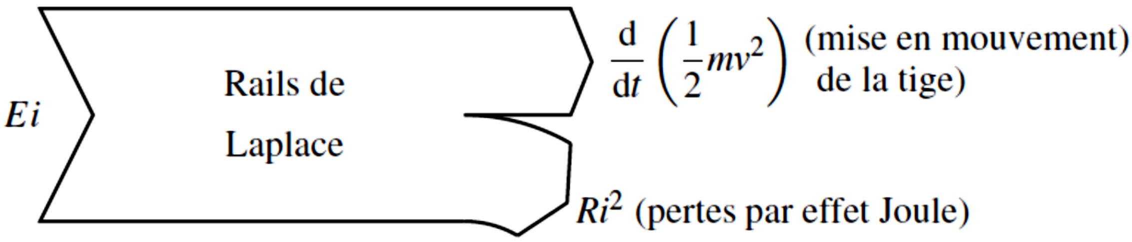
$$(5\text{-}18) \Rightarrow i\,aBv=Ei-Ri^2$$

$$(5\text{-}19) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Ei - Ri^2 \Rightarrow Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 \qquad (5-20)$$

La relation (5.20) exprime les transferts de puissance : le générateur fournit une puissance électrique Ei à la tige qui se répartit en :

- Puissance cinétique $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$
- Puissance de l'effet joule Ri^2 qui représente ici une perte puisqu'on souhaite obtenir la puissance mécanique.

La mise en mouvement de la tige T sous l'effet du générateur électrique justifie l'adjectif de moteur donné aux rails de Laplace : une puissance électrique se transforme en une puissance mécanique.



Autre interprétation de la relation (5.20)

- $Ri^2 =$ puissance reçue par la résistance R
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) =$ variation de l'énergie cinétique de la tige
- $Ei =$ puissance fournie par le générateur de f.é.m. E

La puissance électrique fournie par le générateur à la tige T sert à échauffer la résistance d'une part, et à accroitre l'énergie cinétique de la tige (objet de masse m à mettre en mouvement) d'autre part. Comme son nom l'indique, le but du moteur est de mettre la tige en mouvement et non chauffer une résistance. On a donc intérêt à diminuer le plus possible Ri^2 dans le bilan énergétique en utilisant des fils de résistance très faible.

❖ **Bilan d'énergie**

On multiplie l'expression (5.20) par dt :

$$Eidt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 dt$$

Le bilan énergie s'obtient en faisant le bilan de puissance pendant l'intervalle de temps dt, on multiplie donc le bilan de puissance (5.20) par dt ;

$$Eidt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2dt \qquad (5-21)$$

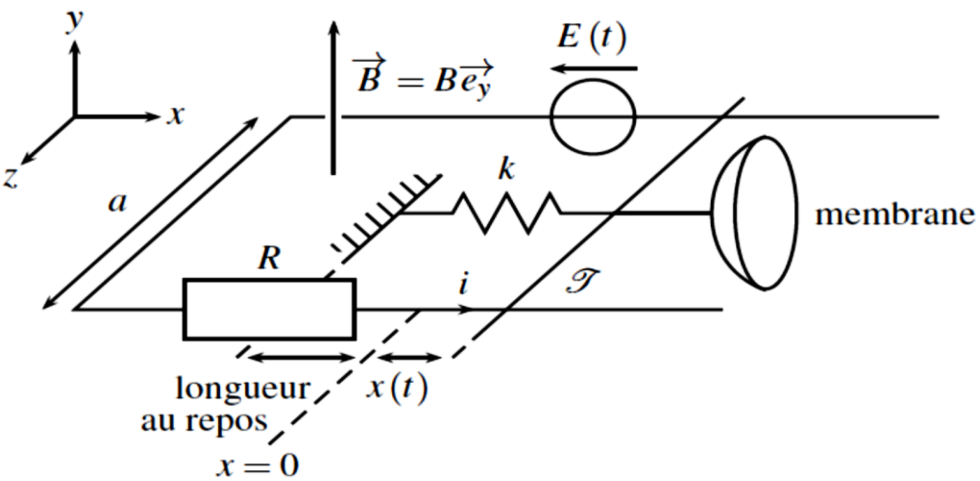
$Eidt$ est l'énergie élémentaire fournie à la tige pendant dt ; elle se décompose en énergie cinétique élémentaire $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ reçue par la tige et énergie élémentaire Ri^2dt dissipée ou perdue par effet joule.

Les précédents commentaires relatifs au bilan de puissance restent les mêmes pour le bilan d'énergie.

2.2. Haut-parleur électrodynamique

2.2.1. Présentation

Un haut-parleur est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique variable dans un temps en signal mécanique ou sonore (vibration d'une membrane pour émettre le son). C'est un transducteur électromécanique qui utilise les actions de Laplace et met en jeu des phénomènes d'induction. La géométrie des véritables haut-parleurs rend difficile, voire impossible, le calcul du flux à travers le circuit mobile. Cela compromet l'application de la loi de Faraday $e = -\frac{d\varphi}{dt}$. Pour contourner ce problème, on raisonne sur la géométrie simplifiée des rails de Laplace. On obtient des équations électrique et mécanique analogues à celles d'un vrai haut-parleur. Le modèle des rails de Laplace est donc suffisant pour illustrer le principe du haut-parleur.



Comme le montre la figure, une membrane est solidaire de la tige T ; elle sert à émettre une onde sonore. L'équipage mobile, constitué de la tige T et de la membrane, a pour masse m_0.

La tige T est reliée aux bâtis (parties fixes du circuit) par l'intermédiaire d'un ressort de rappel, de constante de raideur k. Le générateur de f.é.m. $E(t)$ délivre le signal électrique à transformer en signal sonore.

2.2.2. Analyse physique

- Le générateur impose la tension $E(t)$ et fait circuler un courant i ;
- i et $\vec{B}$ créent une force de Laplace $\vec{f}_L$;
- la tige T et la membrane vibrent sous l'effet de la force de Laplace $\vec{f}_L$
- la vibration de la membrane émet une onde sonore, image du signal électrique $E(t)$;

La tige T devient un circuit mobile dans le champ $\vec{B}$ stationnaire : il apparait dans ce conducteur une f.é.m. induite e qui s'oppose à la tension $E(t)$ du générateur (Loi de Lenz)

Remarque : le même système peut aussi transformer une puissance mécanique en une puissance électrique : on a alors un microphone.

2.2.3. F.é.m. induite et équation électrique

L'équation électrique de la tige s'écrit :

$$e(t)+E(t)-Ri(t)=0$$

Dans l'équation de $e(t)$, on tient compte du coefficient d'auto-induction L car le circuit d'un vrai haut-parleur est bobiné : $e(t)=-aBv-L\dfrac{di}{dt}$

On a alors : $-aBv-L\dfrac{di}{dt}+E(t)=Ri(t) \qquad (5-22)$

2.2.4. Force de Laplace et équation mécanique

- La force de Laplace est $\vec{f}_L=i(t)aB\vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort est $\vec{f}_R=-kx\,\vec{u}_x$, la position de la tige T étant repérée par rapport à sa position de repos.
- La perte d'énergie de la membrane liée à l'émission de l'onde sonore est modélisée par une force de frottement fluide $\vec{f}_f=-\alpha\vec{v}$

La RFD appliquée à l'équipage mobile constitué de la tige T et de la membrane, en projection sur $\vec{u}_x$ donne l'équation mécanique : $m_0\dfrac{dv}{dt}=i\,aB-kx-\alpha v \qquad (5-23)$.

2.2.5. Bilan énergétique

On multiplie l'équation électrique (5.22) par i et l'équation mécanique (5.23) par v :

$$-aBvi - Li\frac{di}{dt} + Ei = Ri^2 \Rightarrow Ei - aBvi = Li\frac{di}{dt} + Ri^2 \Rightarrow Ei - aBvi = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2$$

$$m_0 v\frac{dv}{dt} = i\,aBv - kxv - \alpha v^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2\right) = i\,aBv - kx\frac{dx}{dt} - \alpha v^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \alpha v^2 = i\,aBv$$

$$\begin{cases} Ei - aBvi = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 & (5-24) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m_0 v^2\right) + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}kx^2\right) + \alpha v^2 = i\,aBv & (5-25) \end{cases}$$

On retrouve dans ces deux équations (5.24) et (5.25) la relation (5.8).

En combinant ces deux équations pour faire disparaître $i\,aBv$, on a :

$$Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) + \alpha v^2 + Ri^2$$

$$Eidt = d\left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) + \alpha v^2 dt + Ri^2 dt \qquad (5-26)$$

$Eidt$ est l'énergie fournie à l'équipage mobile pendant dt ; elle sert à :

- augmenter les différentes formes d'énergie de l'équipage mobile (énergie emmagasinée pour mettre l'équipage en mouvement) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)$
- compenser les pertes par effet joule $Ri^2 dt$
- produire une onde sonore $\alpha v^2 dt$

En régime sinusoïdal permanent ou établi, on fait le bilan des puissances moyennes ;

$$\frac{1}{T}\int_0^T Eidt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \alpha v^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt$$

$$\langle Ei\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)\right\rangle + \langle \alpha v^2\rangle + \langle Ri^2\rangle$$

Les diverses formes d'énergie étant des fonctions périodiques du temps, on a : $\left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)\right\rangle = 0$ et $\langle Ei\rangle = \langle \alpha v^2\rangle + \langle Ri^2\rangle \qquad (5-27)$

En valeur moyenne, la puissance fournie par le générateur est entièrement consommée par les phénomènes dissipatifs. Mais dans le modèle adopté, la puissance de la force de type fluide est en fait la puissance sonore rayonnée : c'est donc la puissance utile. En revanche, la puissance dissipée par effet joule constitue bien une perte. On peut donc définir le rendement du haut-parleur par le rapport suivant : $\eta = \dfrac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle Ei \rangle} = \dfrac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle \alpha v^2 \rangle + \langle Ri^2 \rangle}$ $(5-28)$

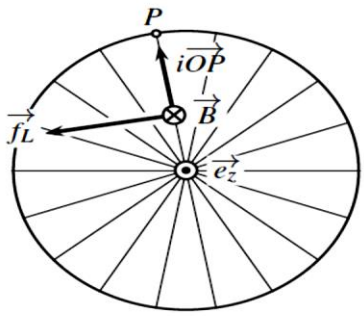
Le rendement η est d'autant plus élevé que α est grand ou R petit

Remarque : les haut-parleurs de 4Ω sont aussi meilleurs que ceux de 8Ω

2.3. Machine à courant continu à l'entrefer plan

2.3.1. Présentation

On considère une roue d'axe (Oz) constitué d'un cercle externe et de rayons, tous conducteurs. Un dispositif, non représenté, permet à un courant électrique de circuler radialement entre le centre et la périphérie, le long des rayons.



L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = -B\,\vec{u}_z$.

3. Analyse physique

Ce dispositif est réversible et fonctionne en générateur ou en moteur.

Dans le cas générateur :

- La roue est entraînée en rotation ;
- Elle devient un circuit mobile dans $\vec{B}$ stationnaire : une f.é.m. e est induite dans chaque rayon ;
- L'ensemble des rayons forme un circuit électrique fermé et conducteur : un courant induit i circule sur chaque rayon ;
- i et $\vec{B}$ créent un moment des forces de Laplace $\vec{M}_L$ qui s'oppose à la rotation de la roue (loi de Lenz).

Dans le cas moteur :

- un générateur extérieur impose la circulation du courant i le long des rayons ;
- i et $\vec{B}$ créent un moment des forces de Laplace $\vec{M}_L$ qui met la roue en rotation ;

- la roue tourne et dévient un circuit mobile dans $\vec{B}$ stationnaire : une f.é.m. e est induite dans chaque rayon, qui s'oppose à la tension du générateur extérieur (loi de Lenz)

4. Mise en équation

On se place en coordonnées cylindriques $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Le sens du courant i est arbitrairement choisi du centre vers la périphérie, comme indiqué sur la figure.

La f.é.m. induite et le moment des forces de Laplace apparaissent dans les deux modes de fonctionnement (générateur ou moteur) ; la mise en équation est donc unique quel que soit le fonctionnement envisagé.

- **Moment de la force de Laplace**

On considère un rayon unique OP. La force de Laplace qui s'exerce sur ce rayon est $\vec{f}_L = i\,\overrightarrow{OP}\wedge\vec{B} = iaB\,\vec{u}_\theta$. On admet que $\vec{f}_L$ s'exerce au milieu H du segment [OP]. Son moment par rapport au point O est alors : $\vec{M}_L = \overrightarrow{OH}\wedge\vec{f}_L = \frac{a}{2}\vec{u}_r \wedge iaB\,\vec{u}_\theta = \frac{iBa^2}{2}\vec{u}_z$ $\quad(5-29)$

$\vec{M}_L = \varphi_0\, i\,\vec{u}_z$ avec $\varphi_0 = \frac{Ba^2}{2}$

- Dans une machine à courant continu (MCC), le couple de Laplace est proportionnel au courant i.

Le moment $\vec{M}_L$ entraîne la roue en rotation autour de $\vec{u}_z$ (fonctionnement moteur) ou s'oppose à sa rotation (fonctionnement générateur).

- **F.é.m. induite**

La loi de Faraday est ici inapplicable ou inopérante. En effet, elle n'est valable, dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, que si le circuit coupe les lignes de champ et qu'on peut définir un flux magnétique $\varphi(t)$ variable ; ce n'est pas le cas ici, car le flux à travers la roue reste constante. On a alors recourt à l'utilisation de l'égalité (5.8). Pour un rayon unique, on a $P_{fe} = -P_{fL} \Rightarrow ei = \vec{M}_L.\vec{\Omega} = -\frac{iBa^2}{2}\vec{u}_z.\omega\vec{u}_z$ où ω est la vitesse angulaire de rotation de la roue donc du rayon considéré autour de $\vec{u}_z$.

Donc $e = -\frac{iBa^2}{2}\omega = -\varphi_0\omega \qquad (5-30)$

- Dans une machine à courant continu (MCC), la f.é.m. induite est proportionnelle à la vitesse angulaire.

5. Utilisation des MCC

Les avantages des MCC à entrefer plan sont :

- Une vitesse très contrôlée et stable, de 1 à 4.10^{-3} $tour.min^{-1}$;
- Une très grande accélération angulaire, jusqu'à environ $150.10^{3} rad.s^{-2}$;
- Un couple indépendant de la vitesse de rotation ;
- Les constantes du temps caractéristiques mécanique τ_m et électrique τ_e sont extrêmement faibles, jusqu'à $\tau_m = 4\,ms$ et $\tau_e < 5.10^{-2}\,ms$.
- L'encombrement est très faible.

Malgré tous ces avantages, la puissance disponible reste limitée à environ 1 kW.

La MCC est utilisée partout où il faut créer un mouvement de rotation soit de précision soit dans un volume limité.

- La géométrie très plate de la MCC est appréciée en motorisation des bicyclettes, des chaises roulantes ;
- La MCC est utilisée dans la précision de la rotation en robotique industrielle, médicale (pourpres à sang, à dialyse, respirateurs), informatique (rotation de disques de stockage), militaire (chargeurs automatiques de munitions, tourelles.)