

CHAPITRE 1: SIGNAUX PERIODIQUES

Introduction

Tout signal périodique est décomposable en une somme d'harmonique, nom donné aux signaux sinusoïdaux. Dès lors, un signal périodique peut être décrit par la donnée de l'ensemble de ses composantes harmoniques. Tout traitement qui lui conserve son caractère périodique, consiste soit à lui ajouter de nouvelles composantes (enrichissement du spectre de fréquence), soit à lui en retirer (appauvrissement du spectre).

1. Signaux périodiques

1.1. Représentation temporelle d'un signal périodique

Un signal de tension ou de courant (Fig 1) qui évolue en fonction du temps peut être caractérisé par une relation mathématique du type : $t \rightarrow x(t)$ où $x(t)$ représente la valeur du signal pour chaque valeur du temps t qui passe. Il est d'usage de lui donner le nom de **valeur instantanée**.

Un signal $x(t)$ est **périodique** quand la relation suivante est vérifiée : $x(t + T_0) = x(t)$.

Le signal se reproduit identiquement à lui-même au cours du temps. L'intervalle de temps qui sépare 2 instants où le signal reprend exactement les mêmes caractéristiques s'appelle la **période** T_0 .

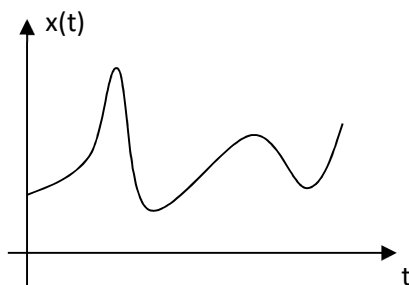


Fig 1 : signal de tension ou de courant

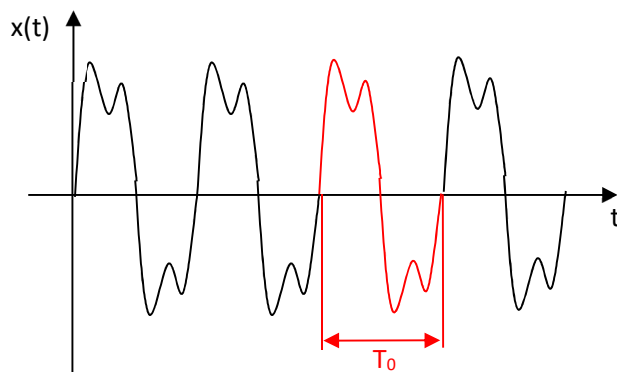
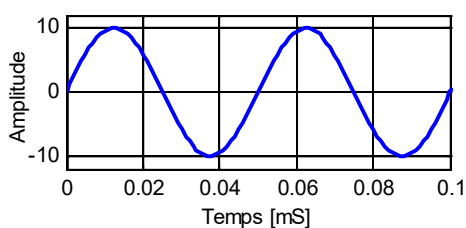


Fig 2 : signal périodique

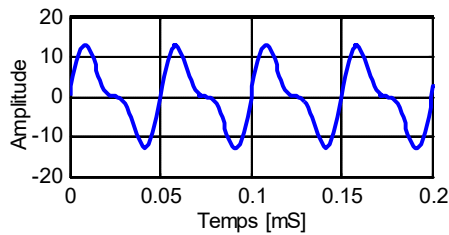
Une façon naturelle de connaître un signal est d'observer son allure en fonction du temps : c'est la représentation temporelle, donnée par un oscillogramme.

1.1.1. Signaux périodiques usuels

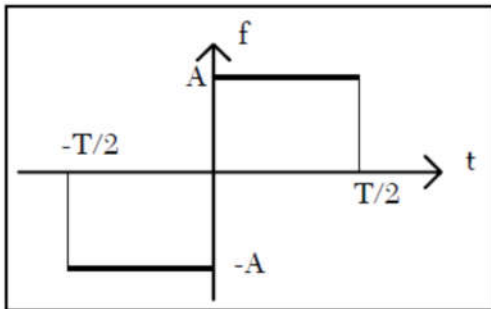
1.1.1.1 Signal sinusoïdal : $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t)$



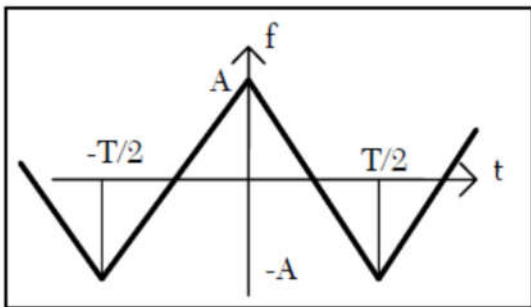
1.1.1.2 Signal composite : $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t) + 5 \sin(2\pi 40000t)$



1.1.1.3 Signal carré symétrique $x(t)=f(t)$



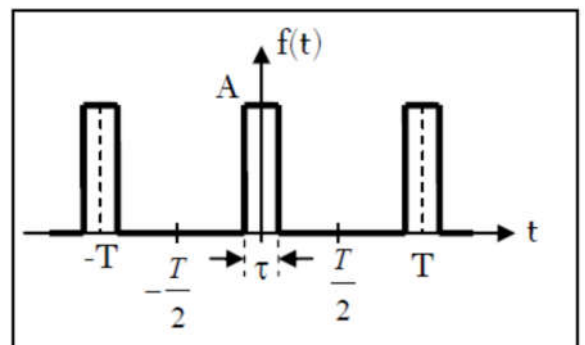
1.1.1.4 Signal triangulaire symétrique $x(t)=f(t)$



1.1.1.5 Impulsion rectangulaire récurrente $x(t)=f(t)$

Signal rectangulaire périodique d'amplitude A et de rapport cyclique $\alpha = \frac{\tau}{T}$ tel que :

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2} + kT; \frac{\tau}{2} + kT\right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



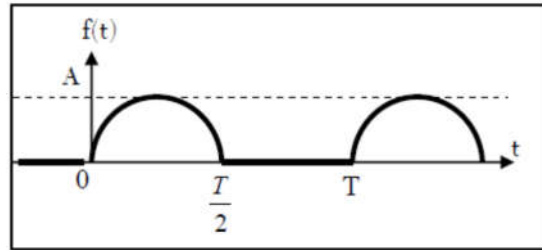
1.1.1.6. Impulsion de Dirac $x(t)=f(t)$

On a l'impulsion de Dirac quand $\tau \rightarrow 0$

1.1.1.7 Redressement « mono alternance »

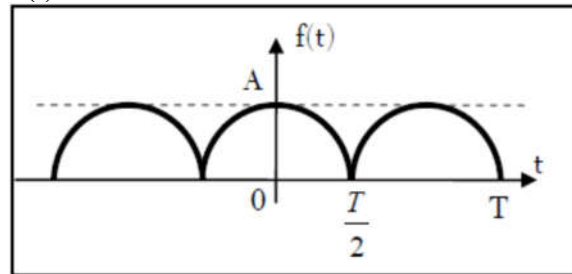
Soit le signal :

$$f(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t) & \text{si } t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}; T\right] \end{cases}$$



1.1.1.8. Redressement « double alternance » $x(t)=f(t)$

$$f(t) = A|\cos(\omega t)|$$



1.2. Représentation fréquentielle d'un signal

1.2.1. Décomposition en série de Fourier

L'objectif de la transformation de Fourier est de trouver une nouvelle représentation du signal autre que l'espace amplitude - temps qui nous aide à la compréhension du contenu physique du signal. Prenant par exemple un signal de musique qui consiste en un mélange d'harmoniques. La visualisation de ce signal à l'aide d'un oscilloscope « espace amplitude-temps » ne nous donne aucune information qu'on peut exploiter pour étudier ce signal. Par contre l'espace fréquence – amplitude nous permettra de connaître les fréquences émises par ce signal de musique.

1.2.1.1. Principe

Sous certaines conditions de régularité dont la démonstration relève d'un cours de mathématiques et qui seront toujours satisfaites en physique, une fonction x (de la variable t), périodique de période T_0 et de pulsation $\omega_0 = 2\pi/T_0$ est décomposable en une série de fonctions sinusoïdales de pulsations $n.\omega_0$, avec n entier naturel et d'amplitudes déterminées, sous la forme :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

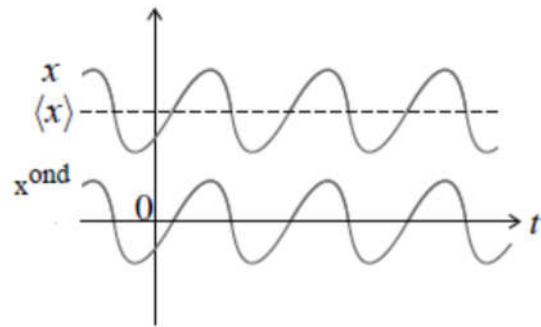
Les coefficients a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction x .

Le terme de pulsation ω_0 est le **fondamental**.

Le terme constant représente la valeur moyenne de x , $a_0 = \langle x \rangle$ (Ce qui représente l'amplitude de la **composante continue** du signal $x(t)$).

Les termes de pulsation $n\omega_0$ ($n \geq 2$) sont les harmoniques de rang n .

On peut écrire $x(t) = \langle x(t) \rangle + x^{ond}$ où $\langle x(t) \rangle$ est la **composante continue** et x^{ond} est la **partie variable** (C'est un signal de même forme que $x(t)$ mais qui est centré autour de 0).



1.2.1.2. Propriétés

La série de Fourier converge vers $x(t)$ partout où x est continue et vers $(x(t^+) + x(t^-))/2$ en chaque point où x admet une discontinuité de première espèce.

Les bornes d'intégration peuvent être modifiées à condition d'intégrer sur tout intervalle de longueur T_0 .

Si le signal est **pair**, $x(t) = x(-t)$, $b_n = 0$,
$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Si le signal est **impair**, $x(t) = -x(-t)$, $a_n = 0$,
$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Symétrie de glissement : Lorsqu'une fonction de période T est changée en son opposé par translation d'une demi-période, son D.S.F. ne comporte que des harmoniques impaires.

Exemple :

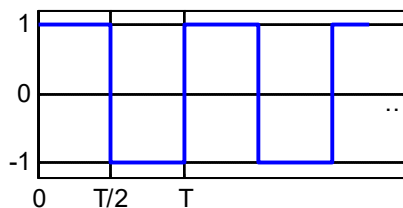


Figure 1

Le signal est centré, sa valeur moyenne est nulle, donc $a_0 = 0$. De même le signal est impair, donc $a_n = 0$.

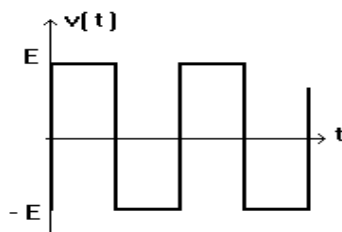
$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T_0} \left\{ \int_0^{T_0/2} 1 \sin(n\omega_0 t) dt - \int_{T_0/2}^{T_0} \sin(n\omega_0 t) dt \right\} = \frac{2}{T_0 n \omega_0} \left\{ [-\cos(n\omega_0 t)]_0^{T_0/2} + [\cos(n\omega_0 t)]_{T_0/2}^{T_0} \right\} \\
 &= \frac{2}{T_0 n 2\pi / T_0} \left\{ \left[-\left(\cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{2}\right) - 1\right) \right] + \left[\cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} T_0\right) - \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{2}\right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{n\pi} \{ [1 - \cos(n\pi)] + [1 - \cos(n\pi)] \}
 \end{aligned}$$

- Si n est pair, $b_n = 0$
- Si n est impair, $b_n = \frac{4}{n\pi} = \frac{4}{(2p+1)\pi}, \forall p \in \mathbb{N}$

Donc :

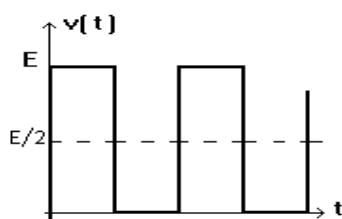
$$x(t) = \frac{4}{\pi} \times \left(\sin \omega_0 t + \frac{\sin 3\omega_0 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_0 t}{5} + \dots + \frac{\sin n\omega_0 t}{n} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)\omega_0 t]$$

1.2.1.3. D'autres exemples de signaux périodiques et leur DSF:



Pour une tension alternative rectangulaire :

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{4E}{\pi} \times \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots + \frac{\sin n\omega t}{n} \right) = \\
 v(t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)\omega t] \quad \text{où } n \text{ est un entier impair.}
 \end{aligned}$$



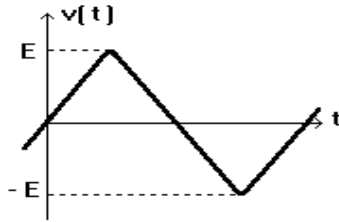
Pour un signal en créneaux positifs :

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \times \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots + \frac{\sin n\omega t}{n} \right) = \\
 v(t) &= \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2E}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)\omega t]
 \end{aligned}$$

où n est un entier impair. On remarquera la différence qui existe entre ce signal rectangulaire-là et le premier : la composante continue est en pointillé !!!

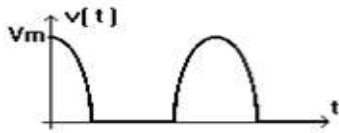
Signal alternatif triangulaire :

$$v(t) = \frac{8E}{\pi^2} \times \left(\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega t}{5^2} - \dots \right)$$



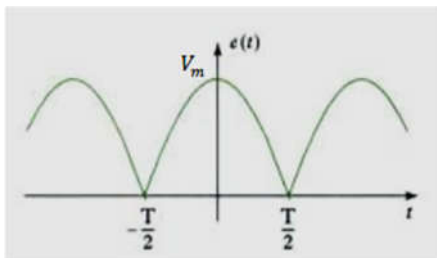
Pour un signal triangulaire positif il suffit de rajouter la valeur moyenne.

Tension redressée mono-alternance :



$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} \times \left(1 + \frac{\pi}{2} \times \cos \alpha t + \frac{2}{2^2 - 1} \times \cos 2\alpha t - \frac{2}{4^2 - 1} \times \cos 4\alpha t + \frac{2}{6^2 - 1} \times \cos 6\alpha t - \dots \right)$$

Tension redressée double-alternance :



$$\begin{cases} a_0 = \frac{2V_m}{\pi} \\ a_{2p} = \frac{4V_m}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{(4p^2 - 1)} \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{2V_m}{\pi} \times \left(1 + \frac{2}{2^2 - 1} \times \cos 2\alpha t - \frac{2}{4^2 - 1} \times \cos 4\alpha t + \frac{2}{6^2 - 1} \times \cos 6\alpha t - \dots \right)$$

Il est possible de connaître la décomposition de Fourier de n'importe quel signal périodique. Il existe des outils mathématiques complexes qui permettent de retrouver les différents harmoniques.

Pour un signal où les a_n et les b_n sont non nuls, on a besoin de deux représentations fréquentielles (notion de spectre, plus loin), l'une en cosinus, l'autre en sinus. Pour regrouper les deux représentations en une seule, on utilise d'autres développements dont la représentation unilatérale.

1.2.2. Représentation unilatérale

A partir de l'équation $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$, on peut écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Avec : $A_0 = a_0$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\Rightarrow \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$.

1.2.3. Série de Fourier en notation complexe

Le développement en série de Fourier du signal périodique $x(t)$,

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$, peut s'écrire en notation complexe :

$$\underline{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} + b_n e^{j(n\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}, \quad \text{soit} \quad \underline{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} - j b_n e^{jn\omega_0 t} =$$

$$\underline{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - j b_n) e^{jn\omega_0 t}; \text{ soit en posant } \underline{A}_0 = a_0 \text{ et } \underline{A}_n = a_n - j b_n \text{ avec } (n > 0).$$

<p>Ainsi, il vient $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ avec $\begin{cases} \underline{A}_n = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \\ A_n = \underline{A}_n \text{ et } \varphi_n = \arg \underline{A}_n. \end{cases}$</p>

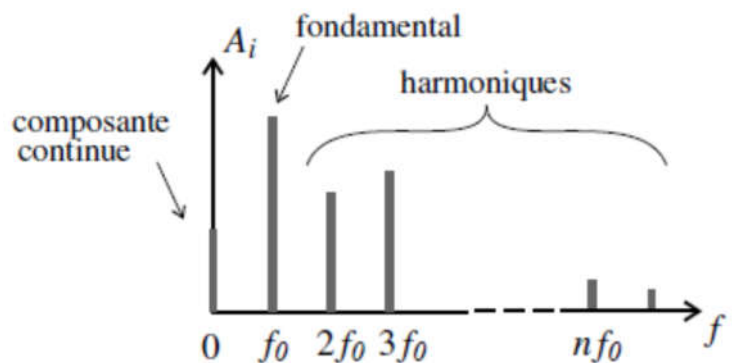
1.2.4. Spectre de fréquence

1.2.4.1. Définition

Considérons un signal périodique dont la décomposition en série de Fourier est écrite sous la forme

$$: x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

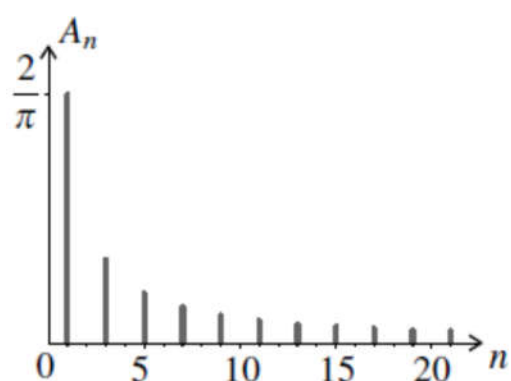
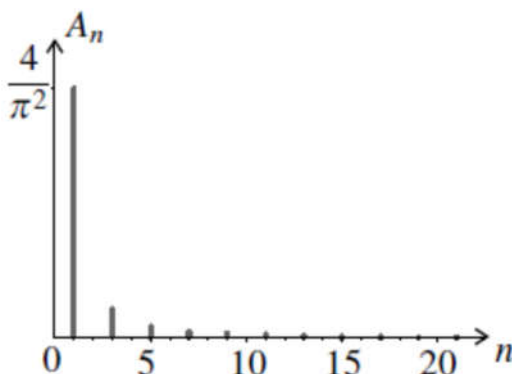
L'ensemble des amplitudes A_n ($n \in \mathbb{N}$) forme le spectre de fréquence du signal $x(t)$. Il est représenté par un diagramme en bâtons, spectre de raies, obtenu en représentant les amplitudes A_n en fonction des pulsations $n\omega_0$, ou des fréquences $n f_0$ ou encore des rangs n . On peut obtenir un spectre :



- Par voie analogique en utilisant un analyseur de spectre ;
- Par voie numérique (échantillonnage du signal puis algorithme de la transformée de Fourier rapide : FFT (Fast Fourier Transform)) ;
- Par calcul direct des coefficients A_n en s'aidant éventuellement d'un logiciel de calcul formel (par exemple avec Maple ou Matlab).

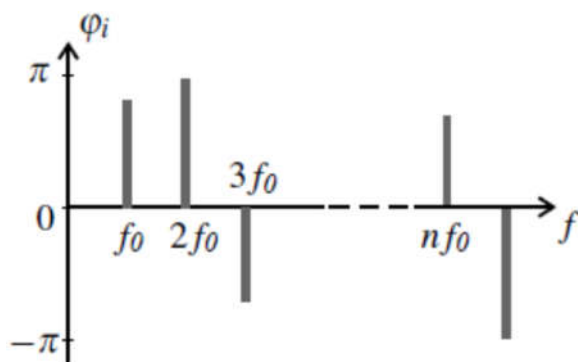
1.2.4.2. Propriétés :

Plus une fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier tendent rapidement vers zéro à



l'infini : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$.

Ce résultat a, en physique, une conséquence très importante : si en théorie, le nombre des harmoniques est infini, il suffit souvent en pratique de calculer seulement les premiers termes. La suite trigonométrique ainsi obtenue donnera une approximation d'autant meilleure de la fonction x que l'amplitude des coefficients de Fourier diminuera plus vite si le rang augmente. Le problème



: A_n .

complet exige la connaissance des deux spectres a_n et b_n , qui équivaut à celle de l'amplitude A_n et de la phase φ_n de l'harmonique de rang n .

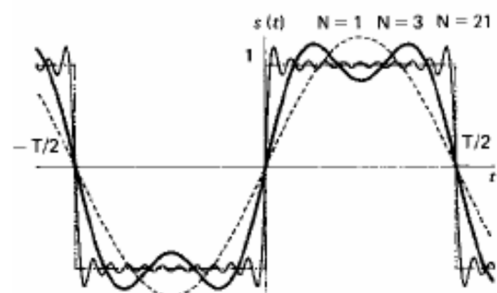
Dans certains cas, la phase ne joue aucun rôle: ainsi, dans un son complexe, l'oreille distingue chaque harmonique par son amplitude et n'est pas sensible à φ_n . Dans de tels cas, on pourra représenter le développement par un seul spectre

Remarques :

Le spectre de fréquence est dit riche s'il comporte de nombreux harmoniques.

La décroissance de l'amplitude des différentes harmoniques du signal carré est lente (varie comme $1/n$). La reconstruction du carré à partir de ses composantes de Fourier nécessite un nombre élevé d'harmoniques, comme l'illustre le graphe ci-contre :

- $n = 1$ (une sinusoïde) en pointillés.
- $n = 1$ à 3 en gras.
- $n = 1$ à 21 en trait léger.



On note que la reconstitution s'améliore avec n ; il subsiste toutefois des oscillations de la série au voisinage des points de discontinuité du signal. Ces oscillations se resserrent au fur et à mesure que n croît, leur amplitude restant finie non nulle. Seule la surface de ce phénomène parasite tend vers zéro si $n \rightarrow \infty$: cet "effet mathématique" est appelé **phénomène de Rünge-Gibbs**.

Les amplitudes des harmoniques décroissent comme $1/n^2$ pour le signal triangulaire : il faudra beaucoup moins d'harmoniques pour reconstituer un signal triangulaire qu'un signal carré.

Plus un signal est de durée brève, plus son spectre fréquentiel est étendu. Plus un signal périodique varie brutalement, plus les harmoniques élevées jouent un rôle important dans son DSF.

Le fondamental et les premières harmoniques contiennent la forme générale du signal. Les harmoniques de rang élevé contiennent les détails fins et les discontinuités éventuelles du signal.

Exemples :

a- spectre d'un signal sinusoïdal : $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t)$

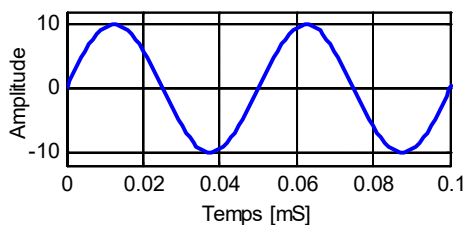


Figure 4

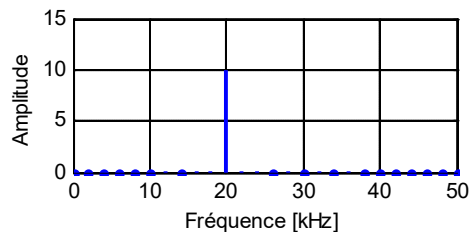


Figure 3

On demandera aux étudiants de représenter le signal $x(t) = 10 + 10 \sin(2\pi 20000t)$ et son spectre (**Rep:** le spectre est le même que ci-dessus, mais la représentation temporelle se fait autour de 10 et non 0).

b- spectre d'un signal composite : $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t) + 5 \sin(2\pi 40000t)$

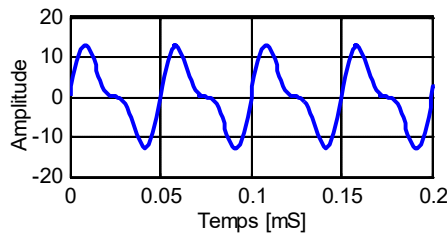


Figure 6

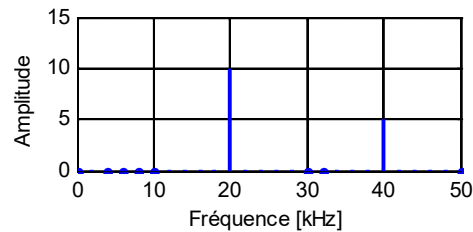


Figure 5

1.2.5. Égalité de Bessel-Parseval (Théorème de Parseval).

Cette égalité relie la valeur moyenne du carré du module de x à ses coefficients de Fourier : $\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x^2(t) dt = c_0^2 + \frac{1}{2} \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \}$, avec $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

1.2.5.1. Valeur efficace.

La valeur efficace X_{eff} d'un signal $x(t)$ T-périodique est sa valeur quadratique moyenne : $X_{eff} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$ (en anglais, cette valeur est appelée R.M.S. pour Root Mean Square).

1.2.5.2. Interprétation énergétique de l'égalité de Parseval :

Dans de très nombreux contextes, l'énergie transportée par un signal est proportionnelle au carré de son amplitude:

- énergie électrique proportionnelle au carré de l'intensité,
- énergie lumineuse proportionnelle au carré du champ électrique,
- énergie cinétique proportionnelle au carré de la vitesse, etc...

Le théorème de Parseval exprime la façon dont l'énergie correspondant au phénomène périodique décrit par x se répartit entre les différents harmoniques : L'énergie moyenne associée à une fonction périodique est égale à la somme des énergies moyennes associées à chacune de ses composantes de Fourier.

Le spectre en puissance du signal est la représentation graphique de cette répartition : chaque barre verticale a une longueur proportionnelle à la puissance transportée par la composante correspondante.

1.2.6. Facteur de forme ; taux d'ondulation ; taux de distorsion.

1.2.6.1. Facteur de forme F : $F = \frac{X_{eff}}{\langle x(t) \rangle}$, où X_{eff} est la valeur efficace du signal $x(t)$. D'après ce

qui précède, on a : $F = \frac{\sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}}{A_0}$.

1.2.6.2. Taux d'ondulation δ_0 : $\delta_0 = \frac{X_{eff}^{ond}}{\langle x(t) \rangle}$ où X_{eff}^{ond} est la valeur efficace de l'ondulation du signal, c'est-à-dire la partie du signal dépendante du temps telle que :

$x(t) = \langle x(t) \rangle + x^{ond}$. D'après ce qui précède, on a : $\delta_0 = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}}{A_0}$. Le facteur de forme et le taux d'ondulation sont liés par : $F^2 = 1 + \delta_0^2$.

Remarque :

Un signal est d'autant mieux redressé que son facteur de forme est voisin de l'unité ou son taux d'ondulation voisin de zéro.

1.2.6.3. Taux de distorsion (harmonique) δ_h :

C'est le rapport de la valeur efficace des harmoniques ($n > 1$) créés par la distorsion à la valeur

efficace du fondamental : $\delta_h = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{A_1}$

Un amplificateur est d'autant plus linéaire que son taux de distorsion harmonique est voisin de zéro.

Exercice

Considérons les spectres unilatéraux d'un signal $x(t)$. Trouver l'expression du signal $x(t)$.

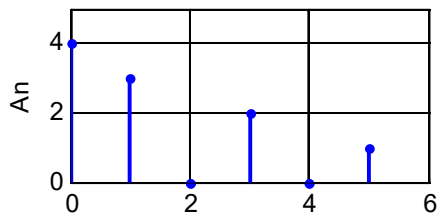


Figure 8

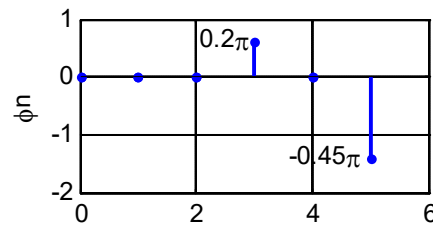


Figure 7

$$x(t) = 4 + 3 \cos(\omega_0 t) + 2 \cos(3\omega_0 t + 0.2\pi) + \cos(5\omega_0 t - 0.45\pi)$$

2. Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la réponse en régime sinusoïdal forcé de circuits électriques. Ce choix, qui semble a priori restrictif, permet en fait d'étudier tous les régimes forcés périodiques, grâce aux séries de Fourier. Ce chapitre va nous conduire à analyser les effets de filtres simples sur des signaux périodiques non sinusoïdaux. Nous choisirons des signaux triangulaires ou en créneaux fournis par la plupart des générateurs basse-fréquence. Pour cela nous allons utiliser le spectre pour interpréter la réponse d'un filtre à un signal périodique et restreindre notre étude de la forme du signal de sortie au cas d'une amplitude importante.

Nous étudierons aussi la réponse de filtres à des signaux de fréquence en dehors de leur bande passante et nous utiliserons principalement la fonction de transfert et l'équation différentielle associée au filtre pour interpréter la forme du signal de sortie.

2.1) Généralités sur les filtres : Action d'un filtre sur un signal périodique sinusoïdal

a) Définition d'un filtre, équation différentielle

Un filtre est un système pour lequel il existe, entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$, une relation de la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s}{dt^m} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n e}{dt^n}$$

où n et m sont des entiers positifs ou nuls tels que $m \geq n$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ sont des constantes.

L'entier m est l'ordre du filtre. Dans le cadre du programme on se limite à $m = 1$ ou 2 . La relation ci-dessus est l'équation différentielle du filtre.

L'équation différentielle étant linéaire, le filtre est un système linéaire : s'il fournit pour le signal d'entrée $e_1(t)$ le signal de sortie $s_1(t)$ et pour le signal d'entrée $e_2(t)$ le signal de sortie $s_2(t)$, alors il donne pour le signal d'entrée $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ le signal de sortie $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$.

Ainsi, quand on superpose des signaux d'entrée on superpose les signaux de sortie qui leur correspondent.

2.1.1) Filtres réels:

De manière générale, un filtre est un quadripôle dont le module et la phase de la fonction de transfert dépend de la fréquence en régime harmonique.

Dans toute la suite, nous considérerons un signal périodique décomposé en série de Fourier, c'est-à-dire que ce signal présentera des composantes sinusoïdales de fréquences multiples de sa fréquence fondamentale.

Il existe cinq types de filtres fondamentaux (Figure 1):

- Les filtres passe – bas, de bande passante définie par $[0, f_H]$
- Les filtres passe – haut, de bande passante définie par $[f_B, \infty[$
- Les filtres passe – bande, de bande passante définie par $[f_B, f_H]$
- Les filtres coupe – bande de bande coupée définie par $[f_B, f_H]$
- Les filtres passe – tout, caractérisé uniquement par le déphasage qu'ils introduisent.

Nous nous limiterons ici aux trois premiers types de filtres.

Pour étudier ces différents filtres, nous regarderons leur réponse pour une attaque avec un signal sinusoïdal $v_e = V_e \cos(\omega t + \varphi_e)$ ou en notation complexe $\underline{v}_e = V_e e^{j\varphi_e}$.

Par ailleurs, une de leur principale caractéristique sera leur *bande passante* à $-3dB$, c'est-à-dire la zone caractérisée par: $|H| \geq \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire en décibels définis par $G = 20 \log |H|$,

$$G \geq 20 \left(\log \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}} \right) \text{ et donc } G \geq G_{\max} - 3dB.$$

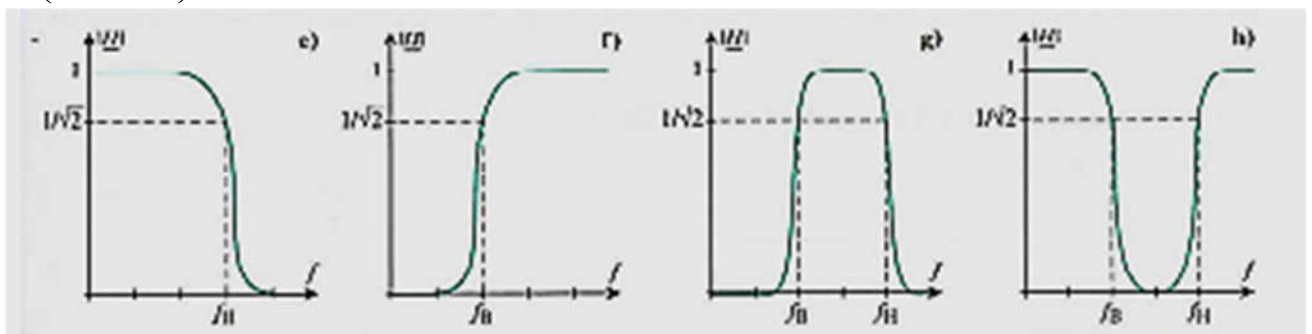


Figure 9 : Quelques exemples de filtres réels

2.1.2) Filtre passe bas:

La réalisation pratique d'un filtre passe bas est la suivante (Figure 2):

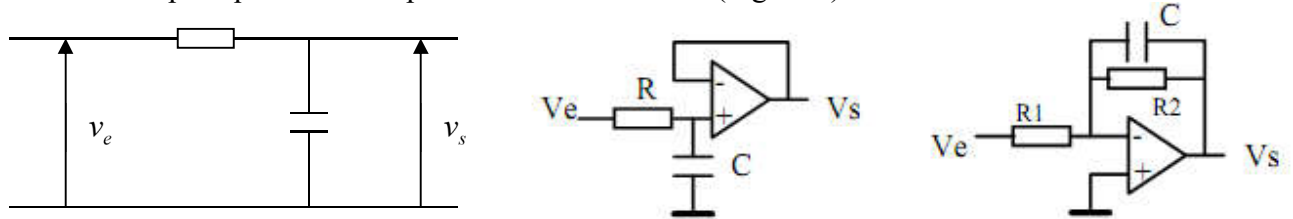


Figure 10 : Les réalisations pratiques d'un filtre passe-bas du premier ordre (passif et actifs)

La fonction de transfert de ce filtre vaut, en notation complexe:

$$H(\omega) = \frac{v_s(\omega)}{v_e(\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}. \quad \text{En sortie, on aura donc un signal donné par}$$

$$v_s = \frac{V_e}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega)), \quad \text{avec } \varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega). \quad \text{On peut également écrire le}$$

$$\text{gain en décibel de ce filtre } G(\omega) = 20 \log(H(\omega)) \text{ soit } G(\omega) = -10 \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \quad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}.$$

Il s'agit bien d'un filtre passe-bas d'ordre 1, car sa bande passante à -3dB vaut $[0, 2\pi f_0]$.

On voit alors que pour des fréquences inférieures à $f_0 = f_H$, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée pour un filtre parfait, et que pour des fréquences supérieures à f_0 , la tension de sortie est nulle.

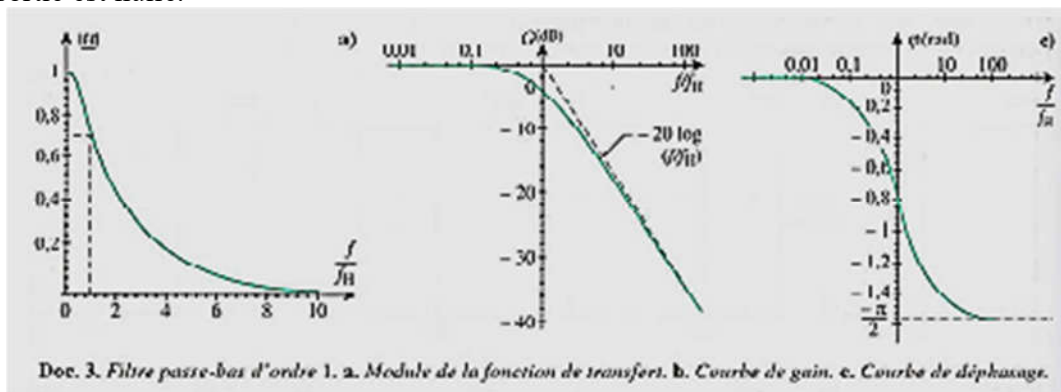


Figure 11 : Les courbes du filtre passe-bas du premier ordre

2.1.3) Filtre passe-haut :

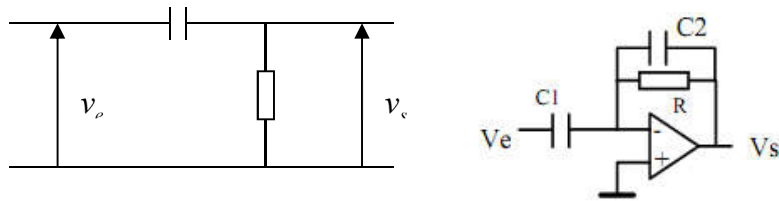


Figure 12 : Les réalisations pratiques d'un filtre passe-haut du premier ordre (passif et actif)

La réalisation pratique d'un filtre passe haut est la suivante (figure 4):

La fonction de transfert de ce filtre vaut:

$$H(\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

C'est bien un filtre passe-haut d'ordre 1 de bande passante à -3dB $[f_0, \infty]$. Le signal de sortie sera donc, en notation réelle: $v_s = \frac{V_e}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$, avec $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$. Le gain en

décibel de ce filtre vaut $G(\omega) = -10\log\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$.

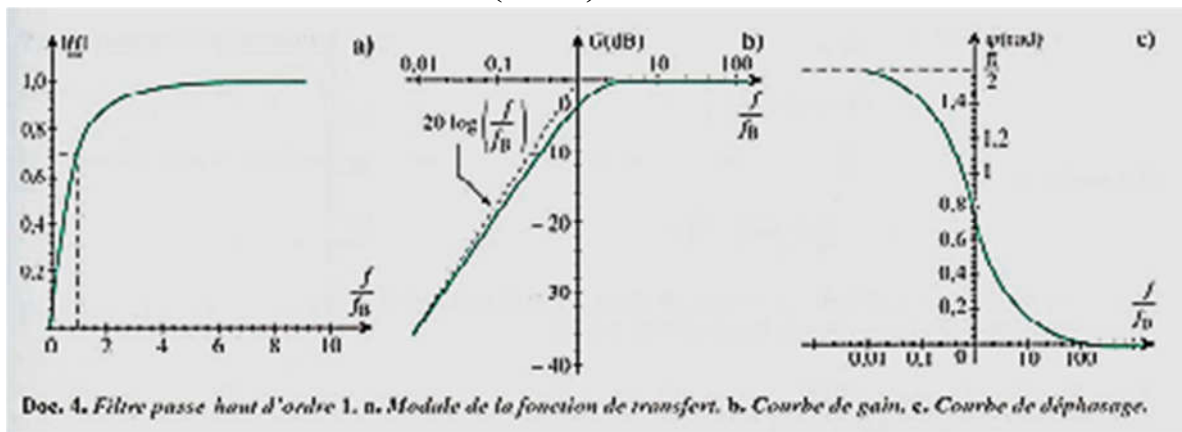
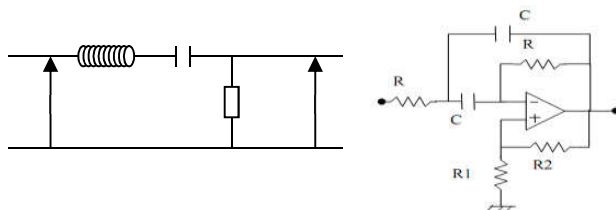


Figure 13 : Les courbes du filtre passe-haut du premier ordre

2.1.4) Filtre passe-bande :



La fonction de transfert de ce filtre vaut :

$$H(\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - \omega^2 LC} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \text{ avec } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \text{ On voit alors}$$

que pour ω petit et ω grand, la fonction de transfert tend vers 0 : c'est donc bien un filtre passe-bande dont le pic se situe à $\omega = \omega_0$ et dont la bande passante à -3dB est délimitée par :

$$\omega_B = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right), \omega_H = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right); \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}. \text{ On voit donc que plus } Q$$

est élevé, et plus la bande passante du filtre est étroite, c'est-à-dire plus le filtre est sélectif. C'est pourquoi le facteur Q est appelé *facteur de qualité du filtre passe-bande*.

2.2) Action d'un filtre sur un signal périodique non sinusoïdal :

2.2.1) Notion de filtre parfait :

Un filtre parfait est un filtre qui:

- transmet, avec un retard éventuel mais sans déformation, les composantes d'un signal dans un domaine de fréquence correspondant à sa bande passante
- élimine les composantes dont les fréquences sont situées hors de sa bande passante.

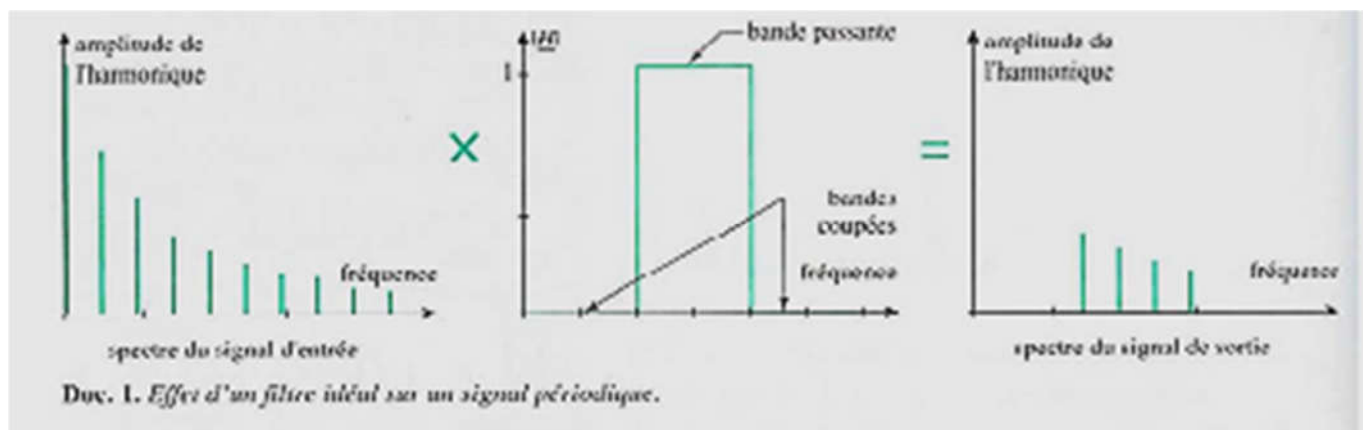


Figure 14 : Effet d'un filtre idéal sur un signal périodique non sinusoïdal

Ceci est vérifié si:

- pour qu'il n'y ait pas déformation, qu'à la fois la phase et le module de la fonction de transfert ne dépendent pas de la fréquence.

En effet, dans ce cas, un signal d'entrée du type $e = \sum_0^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 t}$ va être transformé par le filtre en

un signal $s = \sum_0^{\infty} |H| c_n e^{-i(n\omega_0 t + \varphi)} = |H| e^{-i\varphi} \sum_0^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 t}$, signal qui présentera un retard φ et une atténuation $|H|$, mais qui ayant une décomposition en série de Fourier similaire aura la même allure que le signal d'entrée.

- pour qu'il y ait sélectivité parfaite, que $|H| = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in b.p. \\ 0 & \text{si } \omega \notin b.p. \end{cases}$.

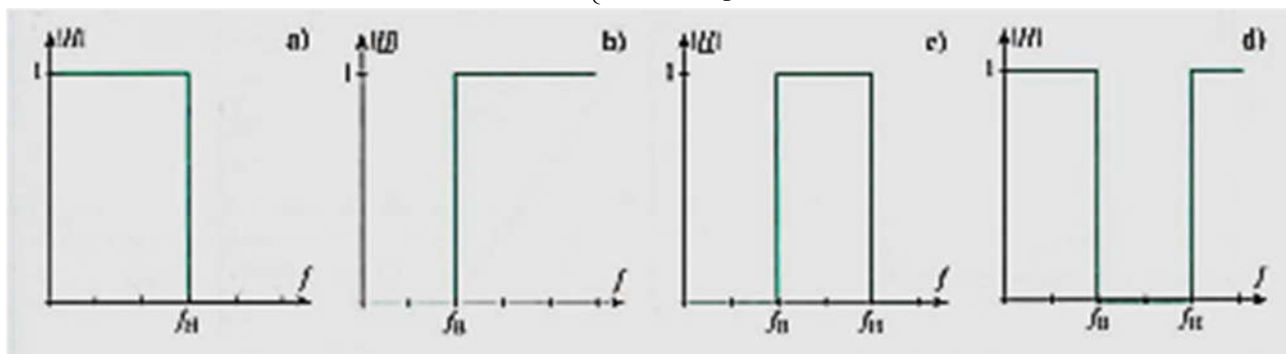


Figure 15 : Quelques exemples de filtres idéaux

Aucun filtre réel n'est parfait. Cependant, plus l'ordre d'un filtre est grand, et plus il se rapprochera de l'idéalité. En effet, le module du gain va tendre d'autant plus vite vers 0 lorsque l'on sort de la bande passante que l'ordre du filtre n est élevé $\propto \frac{1}{\omega^n}$.

2.2.3) Principe et méthodologie de l'action d'un filtre sur un signal périodique non sinusoïdal

Principe du filtrage : On considère un signal périodique non sinusoïdal à l'entrée d'un filtre. Il va ressortir déformé, car toutes ses composantes ne vont pas être transmises avec la même amplitude : le filtre atténue ou amplifie certaines composantes. Connaissant la fonction de transfert complexe du filtre et connaissant la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée, on peut écrire le signal de sortie pour tout signal d'entrée périodique !! (Figure 8)

Méthode : Le rôle d'un filtre électrique consiste à modifier le spectre des signaux qui vont y transiter afin d'obtenir des caractéristiques particulières. Un filtre peut permettre d'amplifier les basses fréquences et laisser passer les hautes fréquences sans modification : dans le domaine du son, ce filtre permettrait par exemple de palier à la déficience des hauts-parleurs en basses fréquences.

Mais attention, les filtres agissent aussi sur la phase des signaux, et cela peut avoir de l'importance même si on se concentre généralement sur leur action vis à vis de l'amplitude. On caractérise donc un filtre électrique par deux courbes qui caractérisent l'action du filtre en amplitude et en phase.

Importance du déphasage : Soit un filtre qui fournit en sortie un signal du type $v_s(t) = V_s \sin(\omega t - \varphi)$. On peut écrire cette expression comme étant $v_s(t) = V_s \sin(\omega(t - \tau))$ avec $\tau = \frac{\varphi}{\omega}$ un temps de retard introduit par le filtre.

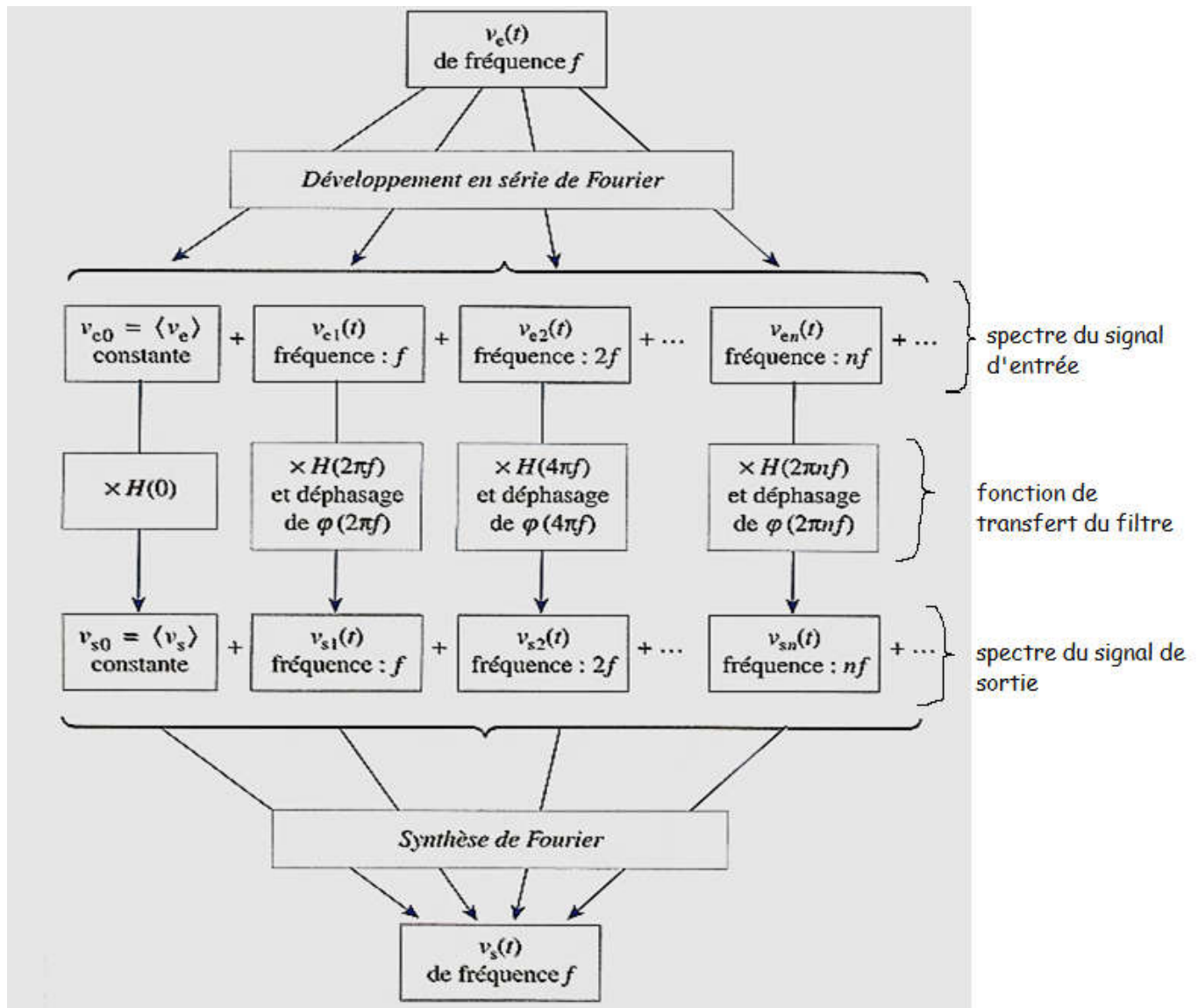


Figure 16 : Méthodologie de l'interprétation de la forme des signaux de sortie

2.2.4) Effet d'un filtre passe-bas sur un signal périodique non sinusoïdal

Nous allons envisager trois cas :

- la fréquence f du signal très inférieure à celle de la fréquence de coupure haute f_H ;
- la fréquence f du signal est de l'ordre de celle de la fréquence de coupure haute f_H ;
- la fréquence f du signal très supérieure à celle de la fréquence de coupure haute f_H ;

2.2.4.1) Observations

- *composante continue* : la composante continue du signal est intégralement transmise avec une amplification unité. Le signal de sortie ne présente jamais de discontinuité.

- *composante variable* :

$f < f_H$: le signal triangulaire est transmis avec une légère déformation au niveau de la rupture de pente alors que le signal créneau est transmis avec une déformation plus sensible au niveau de la discontinuité.

$f \approx f_H$: les signaux transmis par les deux filtres sont très déformés.

$f > f_H$: l'amplitude du signal variable est très faible pour le filtre du premier ordre et pratiquement nulle pour le filtre du deuxième ordre.

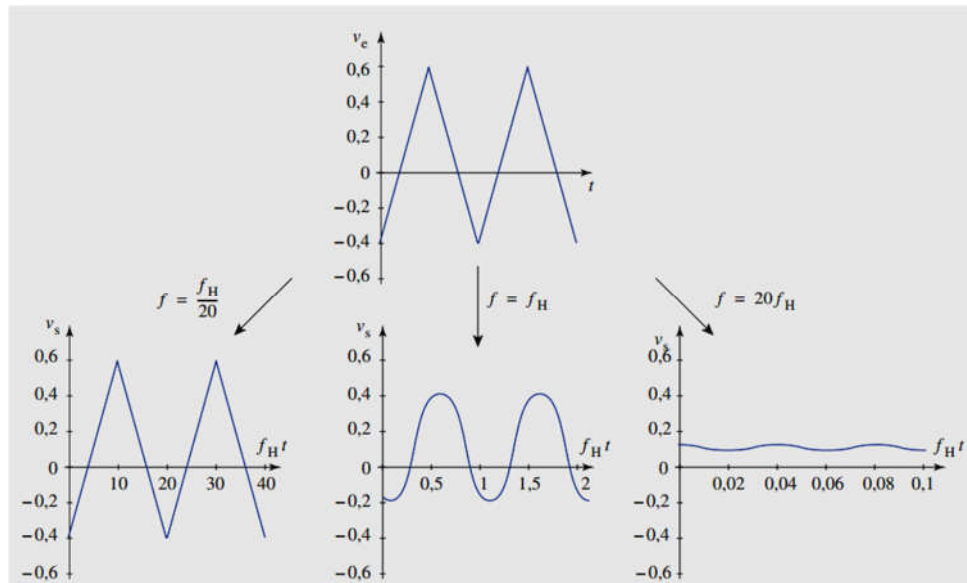


Figure 17 : Réponse d'un signal triangulaire d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_B et $20f_B$, superposé à une composante continue de 0,1V

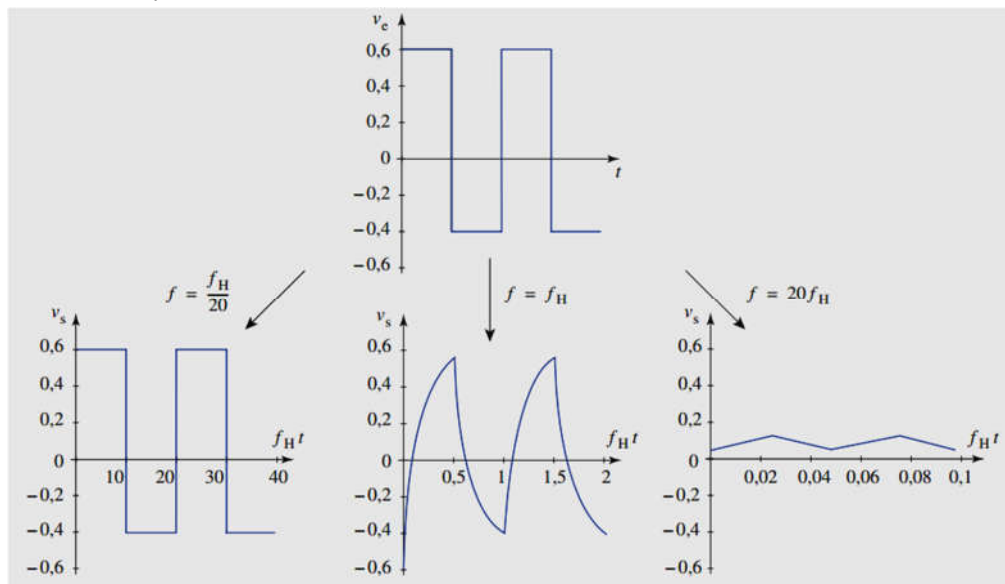


Figure 18 : Filtre du 1^{er} ordre : Réponse d'un signal créneaux d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_B et $20f_B$, superposé à une composante continue de 0,1V

2.2.4.2) Interprétation

$f < f_H$: Une grande partie des harmoniques du signal est transmise sans modification. Le signal de sortie est voisin du signal d'entrée. La déformation du signal du signal de sortie au niveau des discontinuités provient de l'élimination des harmoniques de rang élevé ($n > f_H/f$). Comme le filtre du deuxième ordre les élimine plus efficacement, la déformation qu'il introduit est plus sensible.

$f \approx f_H$: le fondamental et quelques harmoniques sont transmis, les autres harmoniques sont éliminés. Le signal de sortie ne ressemble pas au signal d'entrée.

$f > f_H$: seule la composante continue est transmise sans atténuation. Les différents harmoniques sont très atténués pour le filtre du premier ordre et pratiquement éliminés pour celui du second ordre.

2.2.5) Effet d'un filtre passe-haut sur un signal périodique non sinusoïdal

Nous allons envisager trois cas :

- la fréquence f du signal très inférieure à celle de la fréquence de coupure haute f_B ;
- la fréquence f du signal est de l'ordre de celle de la fréquence de coupure haute f_B ;
- la fréquence f du signal très supérieure à celle de la fréquence de coupure haute f_B ;

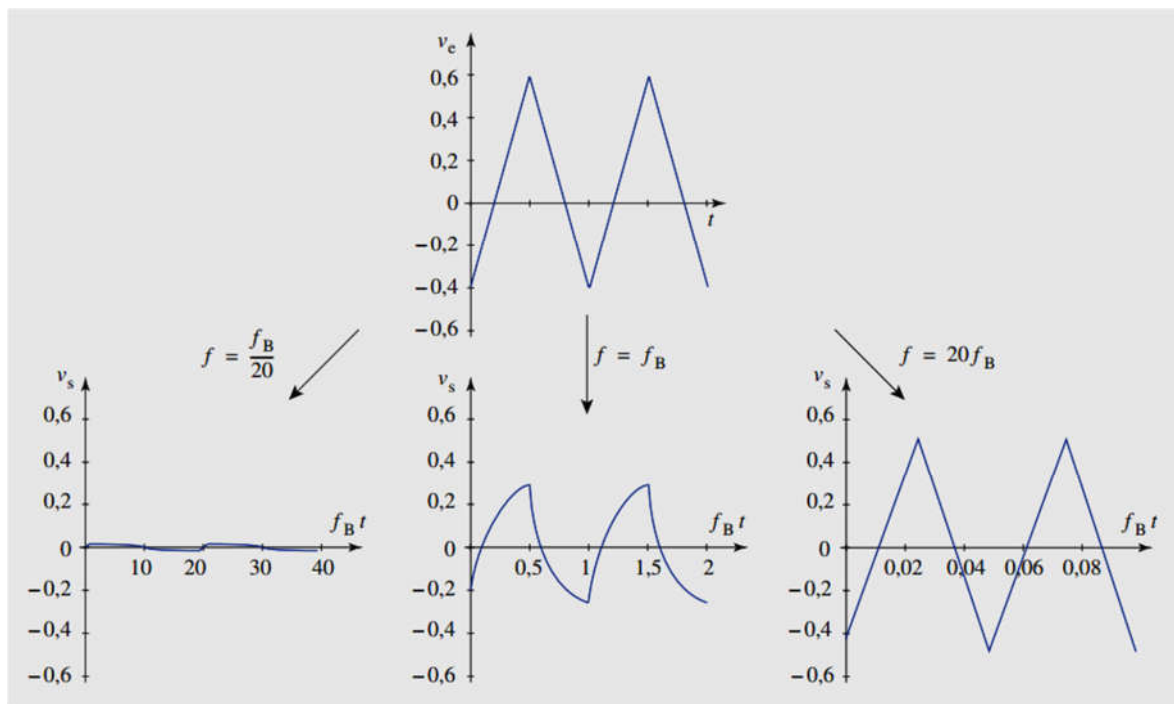


Figure 19 : Filtre du 1^{er} ordre : Réponse d'un signal triangulaire d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_B et $20f_B$, superposé à une composante continue de 0,1V

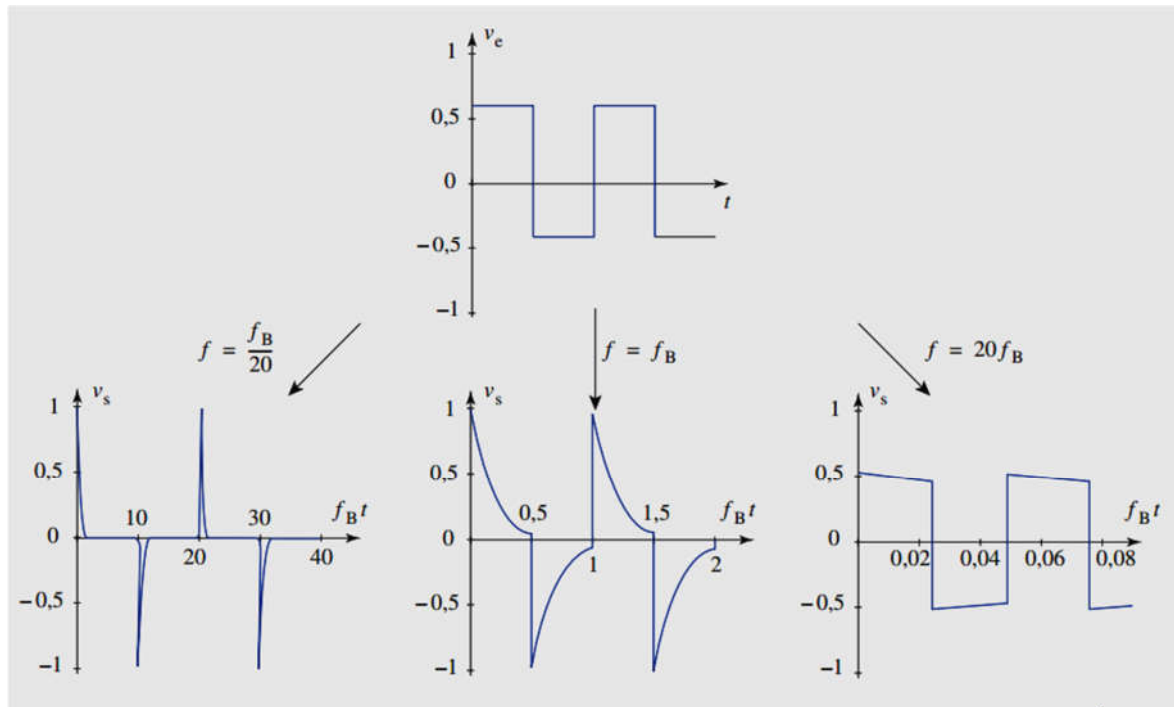


Figure 20 : Filtre du 1^{ère} ordre : Réponse d'un signal crêteaux d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_B et $20f_B$, superposé à une composante continue de 0,1V

2.2.5.1) Observations

- **composante continue** : Le filtre passe-haut transmet sans atténuation les discontinuités de signal et élimine sa composante continue. La réponse à un signal crêteau présente une discontinuité d'amplitude 1V égale donc à celle du signal d'entrée.

- **composante variable** :

$f \ll f_B$: le signal de sortie est d'amplitude faible dans le cas d'un signal triangulaire. En revanche, pour le signal crêteau, il présente deux pics d'amplitude 1V à chaque discontinuité du signal d'entrée.

$f \approx f_B$: les signaux transmis par les deux filtres sont très déformés.

$f \gg f_B$: les signaux de sortie sont proches du signal d'entrée sans sa composante continue.

2.2.5.2) Interprétation

$f \ll f_B$: Une grande partie des harmoniques du signal est atténuée. Seuls les harmoniques de rang n élevé sont transmis : ceux du signal triangulaire sont en $1/n^2$, donc d'amplitude très faible, Le signal de sortie est très faible, ceux du signal crêteau en $1/n$ créent la discontinuité d'amplitude 1V.

$f \approx f_B$: la composante continue et le fondamental sont éliminés, les autres harmoniques sont transmis. Le signal de sortie ne ressemble pas au signal d'entrée.

$f \gg f_B$: seule la composante continue du signal est éliminée. Les différents harmoniques sont transmis par les deux filtres.

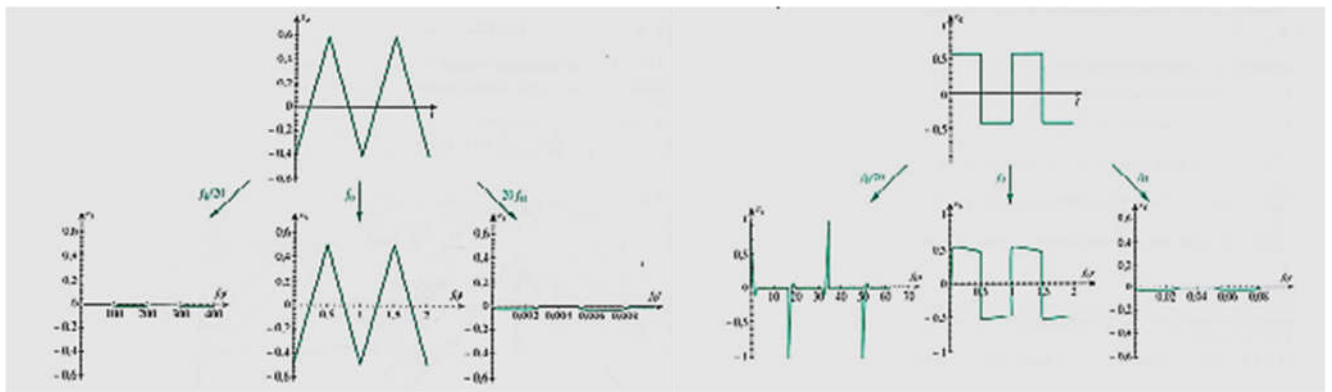
2.2.6) Effet d'un filtre passe-bande sur un signal périodique non sinusoïdal

Nous étudions l'effet d'un filtre passe-bande à large bande ($Q=0,1$), à bande intermédiaire ($Q=1$) et à bande étroite ($Q=10$) dans trois cas particuliers du signal périodique :

- $f < f_B$: la fréquence f du signal est inférieure à la fréquence de coupure basse f_B du filtre ;
- $f_B < f < f_H$: la fréquence f du signal est dans la bande-passante du filtre ;
- $f > f_H$: la fréquence f du signal est supérieure à la fréquence de coupure haute f_H du filtre ;

Dans tous les cas, le filtre passe-bande élimine les discontinuités et la composante continue du signal éliminée.

2.2.6.1) Observation : Cas du filtre à bande large $Q=0,1$

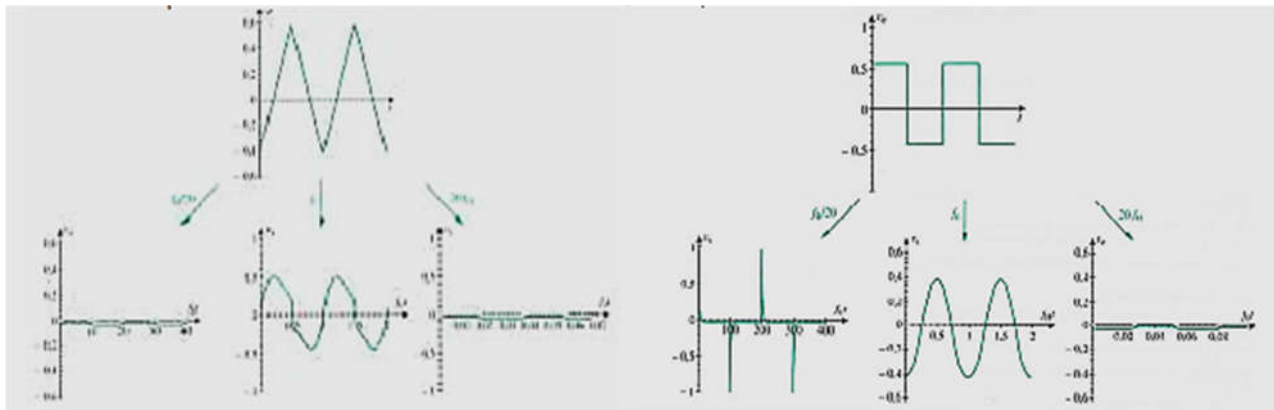


Filtre passe-bande ($Q = 0,1$, $f_B \approx 0,1 f_0$, $f_H \approx 10 f_0$) : réponse à un signal triangulaire et créneau d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_0 et $20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1V.

Figure 17 : Effet d'un filtre passe-bande à bande large sur un signal périodique non sinusoïdal

Il se comporte, pour la composante variable du signal, comme un filtre passe-haut à basse fréquence, passe-bas à haute fréquence et transmet un signal de fréquence f , avec $f_B < f < f_H$ et sans déformation importante.

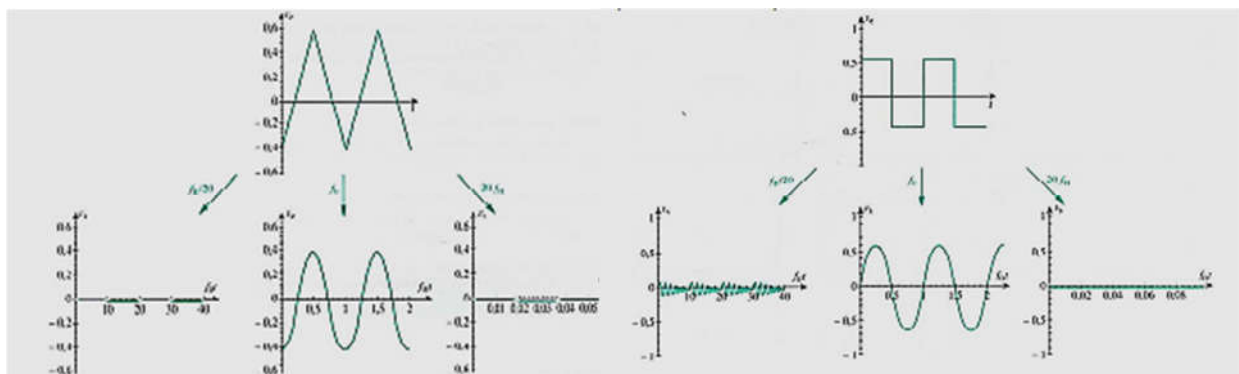
2.2.6.2) Observation : Cas du filtre à bande intermédiaire $Q=1$



Filtre passe-bande ($Q = 1$, $f_B \approx 0,6 f_0$, $f_H \approx 1,6 f_0$) : réponse à un signal triangulaire et créneau d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_0 et $20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1V.

Il atténue fortement les signaux de fréquence très inférieure à f_B ou très supérieure à f_B et déforme fortement le signal de fréquence f_0 .

2.2.6.3) Observation : Cas du filtre à bande étroite $Q=10$



Filtre passe-bande ($Q = 10$, $f_B \approx 0,95 f_0$, $f_H \approx 1,05 f_0$) : réponse à un signal triangulaire et créneau d'amplitude crête à crête 1V, de fréquence $f_B/20$, f_0 et $20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1V.

Un filtre passe-bande à bande étroite ne transmet que les composantes sinusoïdales de fréquence voisine de la fréquence de résonance f_0 du filtre.

Remarques : L'inspection de certaines zones des courbes tracées montrent que ces filtres se comportent comme des filtres intégrateurs ou dérivateurs pour certains domaines de fréquences.

3) Réponses temporelles d'un filtre : caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

2.3.1) Caractère intégrateur d'un filtre :

2.3.1.1) Généralités

Considérons un filtre passe – bas de pulsation de coupure ω_c . Sa fonction de transfert s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{v_s(\omega)}{v_e(\omega)} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}, \text{ soit } v_s + j \frac{\omega}{\omega_c} v_s = v_e, \text{ ce qui se traduit en notation réelle par l'équation}$$

différentielle:

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e(t).$$

Supposons alors que le signal d'entrée ait une pulsation propre telle que $\omega \gg \omega_c$.

Puisque dans l'expression de la fonction de transfert, on aura $j \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$, l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{dv_s}{dt} = \omega_c v_e, \text{ soit } v_s = \frac{1}{RC} \int v_e dt.$$

Le filtre réalise donc une intégration du signal d'entrée. De manière générale, ceci n'est vérifié que pour un domaine de fréquence. On dira alors que le filtre est un filtre *pseudo – intégrateur*.

De manière générale, si on veut qu'un filtre présente un caractère intégrateur, il faut que, pour un signal d'entrée

$$e_\omega(t) = \sum_{n>0}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

il donne un signal de sortie

$$s_\omega(t) = \sum_{n>0}^{+\infty} \frac{A_n}{n\omega} \cos\left(n\omega t + \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right)$$

Il faut donc que dans le domaine de fréquence considéré :

- il y ait un déphasage introduit par le filtre voisin de $-\frac{\pi}{2}$, ou de $\frac{\pi}{2}$ si il y a inversion du signal.
- Un gain en décibel qui vaudra $G(\omega) = 20 \log \frac{\omega_c}{\omega}$, avec une pente de -20dB par décade, où ω_c est une pulsation caractéristique du filtre.

Par exemple, cette condition est vérifiée pour un filtre passe-bande d'ordre 2 si $\omega \gg \omega_c$.

Pratiquement, ceci est vérifié pour tous les filtres si $\omega > 10 \omega_c$.

2.3.1.2) Réalisation d'un intégrateur performant :

Les deux exemples précédents présentent un caractère intégrateur uniquement sur un intervalle fréquentiel donné. Nous voulons ici construire un filtre intégrateur sur toutes les fréquences.

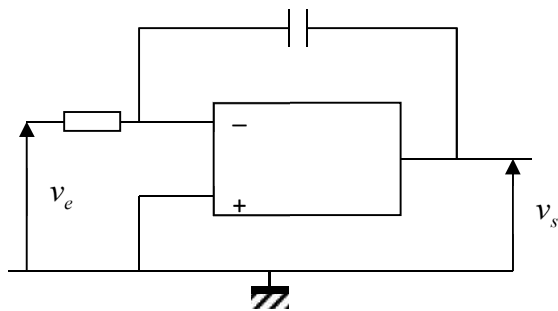


Figure 18

Ecrivons le théorème de Millman en A:

$$\text{On a } 0 = \frac{\frac{v_e}{R} + jC\omega.v_s}{\frac{1}{R} + jC\omega} \text{ soit } v_s = -\frac{1}{jRC\omega} v_e$$

On a donc bien un filtre intégrateur à toutes fréquences, puisqu'il introduit un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ (on aura donc également une inversion) et qu'il présente un gain en décibel de la forme

$$G = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega}.$$

En fait, ce montage n'est que théorique puisqu'il existe des courants de dérive qui chargent le condensateur jusqu'à saturation. Il faut donc pouvoir décharger le condensateur régulièrement. Par ailleurs, le problème posé par une intégration à toutes les fréquences est que, si il subsiste une légère composante continue dans le signal d'entrée, celle-ci va également amener l'A.O. à saturation.

Pour résoudre le premier problème, on place une résistance R' en parallèle du condensateur.

La nouvelle fonction de transfert va alors s'écrire $H' = -\frac{\frac{R'}{1 + R'C\omega}}{R}$. Mais ici on peut prendre R' très grand c'est-à-dire $R' \gg \frac{1}{C\omega}$ pour couvrir un large domaine de fréquence et retrouver alors la fonction de transfert initiale. On voit alors que le second problème est également résolu, puisque pour $\omega=0$, on a $H' = -\frac{R'}{R} \ll 1$ et que les signaux continus ne sont pas intégrés par le filtre.

2.3.2) Caractère dérivateur d'un filtre :

2.3.2.1) Généralités :

Considérons un filtre passe – haut du premier ordre.

Sa fonction de transfert s'écrit $H(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c} + 1}$, ce qui correspond à

l'équation différentielle $\frac{1}{\omega_c} \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{1}{\omega_c} \frac{dv_e}{dt}$. En régime forcé, pour une pulsation $\omega \ll \omega_c$, on

a $v_s = \frac{1}{\omega_c} \frac{dv_e}{dt}$. On a donc un filtre dérivateur.

De manière générale, il faut que, similairement à ce qu'on a dit pour l'intégrateur que :

- le filtre introduise un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$

- que le gain s'écrive $G = 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$.

Cependant, le problème n'est pas aussi simple que pour l'intégrateur.

En effet, la condition pour l'intégrateur était $\omega \gg \omega_c$, et donc toutes les harmoniques d'un signal de pulsation ω satisfaisaient à cette condition est intégré.

Ceci n'est pas le cas pour le dérivateur, puisque ce n'est pas parce que la pulsation du fondamental $\omega \ll \omega_c$ que les autres harmoniques $n\omega$ vérifient cette condition ($n\omega \ll \omega_c$).

Il faut donc que le gain vérifie la condition $G = 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$ pour tous les harmoniques d'amplitude importante du signal d'entrée. Cette condition est vérifiée si $n\omega$ est nettement inférieure à la pulsation de coupure basse ω_c . En pratique, ceci se traduit par $n = 10$ et donc $\omega < \frac{\omega_c}{100}$. La condition de dérivation est donc plus drastique que la condition d'intégration.

En particulier pour un filtre passe – bande du second ordre, $\omega_B = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right)$, et donc il faut que Q soit petit pour que le filtre soit un dérivateur satisfaisant. On retiendra qu'un *filtre passe-bande ne présente un caractère dérivateur à basse fréquence que s'il est peu sélectif*.

2.3.2.2) Réalisation pratique :

Pour les mêmes raisons que pour l'intégrateur, on va chercher à réaliser un dérivateur qui ne soit pas limité aux basses fréquences, surtout qu'ici la condition est assez drastique.

On obtient ce résultat avec le montage suivant :

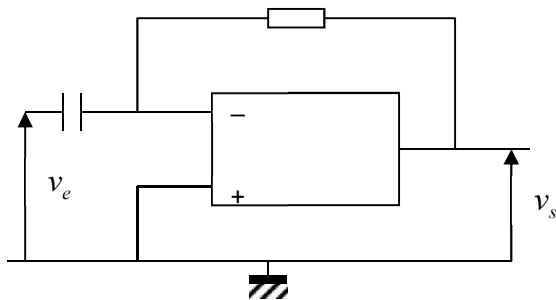


Figure 19

Ici on a $v_s = -jRC\omega.v_e$. On a bien un dérivateur à toutes fréquences. Cependant, ce montage n'est que très théorique puisqu'en réalité l'A.O. présente une bande passante limitée, ce qui implique que le filtre réalisé se comporte comme un filtre passe bande de haut facteur de qualité. Pour amoindrir ce phénomène, il faut diminuer le facteur de qualité du système, et pour ce faire on place une résistance supplémentaire juste avant C , le choix optimal de la résistance se faisant

empiriquement en observant la réponse du filtre à une excitation triangulaire et en jouant sur la résistance pour se rapprocher le plus d'un signal créneau en sortie.

Conclusion sur l'utilisation des filtres. Toutes les fonctions de transfert correspondent à des circuits ouverts. Cependant, lorsqu'on les utilise, les courants de sortie ne sont jamais rigoureusement nuls. C'est pour cela que l'on utilise des filtres actifs :

Ceci sert à effectuer des combinaisons de filtres dont les caractéristiques reproduiront celle du filtre en sortie ouverte.