M.AFEKIR - MARRAKECH

www.marocprepas.com

marocprepas@yahoo.fr

Conduction électrique sous champ magnétique

Première partie
Sonde à effet HALL

1.1. Vecteur courant $\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u}_x \quad \text{et} \quad I_o = \int \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} = jab \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{j} = \frac{I_o}{ab}\overrightarrow{u}_x}$$

1.2. Charge q animée d'une vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_x$

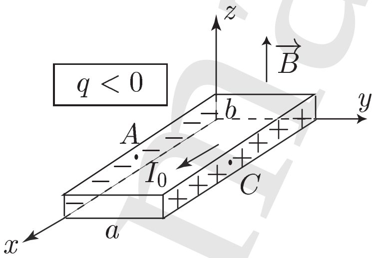
1.2.1. Force de LORENTZ

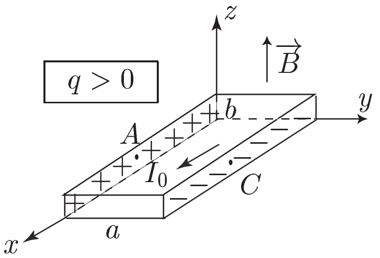
$$\overrightarrow{f}_L = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{f}_L = -qvB\overrightarrow{u}_y}$$

1.2.2. En absence du champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$, un porteur mobile de charge q est soumis à la seule force électrostatique $\overrightarrow{f}_e = q\overrightarrow{E}$ qui est à l'origine du courant électrique I_0.

En présence du champ magnétostatique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$, un porteur mobile de charge q est soumis à la force magnétique $\overrightarrow{f}_L = -qvB\overrightarrow{u}_y$ (q et v étant du même signe Cf. **1.2**) qui infléchit sa trajectoire vers la face de la plaque :

- ◇ située à droite du sens de I_0 pour $q < 0 \implies$ accumulation de charges négatives sur cette face et défaut de charges sur la face opposée.
- ◇ située à gauche du sens de I_0 pour $q > 0 \implies$ accumulation de charges négatives sur cette face et défaut de charges sur la face opposée.





1.2.3. Champ HALL

On en déduit du résultat de la question précédente **1.2.2** les faits suivants :

- Apparaition d'un champ électrostatique (champ HALL noté $\overrightarrow{E}_H$) orienté vers la face située à droite du sens de I_0 (pour $q < 0$) ou vers la face située à gauche du sens de I_0 (pour $q > 0$). Dans les deux cas, un porteur de charge q est soumis à l'action de la force $\overrightarrow{f}_H = q\overrightarrow{E}_H$ (de directin l'axe Oy).
- Le régime permanent (au bout d'un certain temps) est atteint lorsque le champs HALL atteint une valeur suffaisante pour que $\overrightarrow{f}_H + \overrightarrow{f}_L = \overrightarrow{0}$; les lignes de courant redeviennent parallèles au champ $\overrightarrow{E}_H$, d'où :

$$\overrightarrow{f}_L = -q\overrightarrow{E}_h \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E}_h = -\frac{\overrightarrow{f}_L}{q} = vB\overrightarrow{u}_y}$$

1.2.4. Tension HALL

$$V_C - V_A = \int \overrightarrow{E}_h.\overrightarrow{dy} = vBa \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_h = vaB}$$

La tension de HALL est positives et indépendante de la charge q.

1.2.5. Résistance de HALL

$$I_o = jab \qquad et \qquad j = nqv \qquad \Rightarrow \quad \boxed{V_h = \frac{BI_o}{nqb} = R_h\frac{BI_o}{b}}$$

1.3. Applications

1.3.1. La plaque $\mathcal{P}$ est en cuivre métallique

1.3.1.1. Densité particulaire

$$\boxed{n = \frac{mN_A}{MV} = \rho\frac{N_A}{M} = 82{,}40 \times 10^{27}\, m^{-3}}$$

1.3.1.2. Résistance HALL

$$\boxed{R_h = \frac{1}{nq} = -0{,}76 \times 10^{-10}\, m^3A^{-1}s^{-1}}$$

1.3.1.3. Tension HALL

$$\boxed{V_h = -0{,}76 \times 10^{-6}\, kgm^2A^{-1}s^{-3}}$$

1.3.2. Les sondes de HALL utilisées au laboratoire pour mesurer les champs magntiques sont constituées d'un matériau semi-conducteur.

1.3.2.1. Dans un semi-conducteur et à température usuelle, la densité particulaire des porteurs majoritaires (électrons ou positrons "trous") est de l'ordre de $10^{22}\, m^{-3}$: plus faible que dans un conducteur, donc l'effet HALL est plus important.

1.3.2.2. Dans la prtique, on mesure une tension (tension HALL). Cette dérnière étant proportionnelle au champ B, simple étalonnage (détermination du coefficient de proportionnalité) permet, donc, l'accèe à B. exemple : utilisation en teslamètre, appelé aussi sonde à effet HALL.

Deuxième partie
loi d'OHM anisotrope

2.1. τ est homogène à un temps ; son unité est, donc, la seconde (s).

2.2.

$$\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$$

2.3. Deuxième loi de NEWTON

$$m\overrightarrow{a} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = \frac{1}{nq}\overrightarrow{j}$$

En régime permanent :

$$q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v} = q\left(\overrightarrow{E} + \frac{1}{nq}\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\right) - \frac{m}{nq\tau}\overrightarrow{j} = 0$$

$$\text{ou :} \qquad \overrightarrow{E} = \frac{m}{nq^2\tau}\overrightarrow{j} + \frac{1}{nq}\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{j}$$

$$\text{soit :} \quad \boxed{\overrightarrow{E} = \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{j} + R_h\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{j}} \quad (2) \quad \text{avec} \quad \boxed{\sigma = n\frac{q^2\tau}{m} \quad \text{et} \quad R_h = \frac{1}{nq}}$$

2.4. L'axe Oz est choisi tel que $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$

2.4.1. Projection de l'équation vectorielle (2)

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} + R_h\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{j_x}{\sigma} - R_hBj_y \\ \dfrac{j_y}{\sigma} + R_hBj_x \\ \dfrac{j_z}{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\text{Soient :} \quad \begin{cases} j_x = \dfrac{\sigma E_y - \sigma^2 R_h B E_x}{1+\sigma^2R_h^2B^2} \\ j_y = \dfrac{\sigma E_x + \sigma^2 R_h B E_y}{1+\sigma^2R_h^2B^2} \\ j_z = \sigma E_z \end{cases} \quad \text{ou :} \quad \boxed{\begin{cases} j_x = \dfrac{\sigma}{1+\tau^2\omega_c^2}\left(E_y - \tau\omega_c E_x\right) \\ j_y = \dfrac{\sigma}{1+\tau^2\omega_c^2}\left(E_x + \tau\omega_c E_y\right) \\ j_z = \sigma E_z \end{cases}}$$

2.4.2. $\overrightarrow{j} = j_x\overrightarrow{u}_x + j_y\overrightarrow{u}_y + j_z\overrightarrow{u}_z$

$$\text{D'où :} \quad \overrightarrow{j} = \overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{E} \qquad \text{avec :} \quad \boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\sigma}{1+\tau^2\omega_c^2}\begin{pmatrix} 1 & \tau\omega_c & 0 \\ -\tau\omega_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\tau^2\omega_c^2 \end{pmatrix}} \quad (3)$$

2.4.3. les vecteurs $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ ne sont pas collinéaires $\Longrightarrow$ le milieu est anisotrope.

2.4.4. Oui, le milieu reste linéaire en présence du champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

2.4.5. En absence du champ magnétique $\overrightarrow{B}$, l'équation (3) s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}}$$

On retrouve, ainsi, la loi d'ohm pur un milieu isotrope.
Conclusion : les phénomènes liés à l'anisotropie précédente (Cf. **2.4.3**) sont plus importants dans les semi-conducteurs et ils dépendent de la géométrie du système étudié ! !

Troisième partie
Effet CORBINO

3.1. Cas d'un champ magnétique $B = 0$

3.1.1. Le conducteur compris entre les deux cylindres n'est pas en équilibre électrostatique.

3.1.2. En M le champ $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r,\theta,z)$
Invariance :
$\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ sont supposés suffisamment longs, la distribution entre les deux cylindres est, donc, *invariante par translation* le long de l'axe Oz $\Rightarrow$ E indépendant de la coordonnée axiale z.

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r,\theta)$$

la distribution entre les deux cylindres est *invariante par rotation* autour de l'axe Oz $\Rightarrow$ $\overrightarrow{E}$ indépendant de la coordonnée orthoradiale θ.

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r)$$

Symétrie :
Le plan $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution entre les deux cylindres $\Rightarrow$ $\overrightarrow{E}$ $\in$ à ce plan
Le plan $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution entre les deux cylindres $\Rightarrow$ $\overrightarrow{E}$ $\in$ à ce plan
Le champ $\overrightarrow{E}$ appartient, donc, à l'intersection des deux plan, sout : $\overrightarrow{u}_r$

$$\text{Soit :} \quad \boxed{\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{u}_r}$$

3.1.3. Expression de $E(r)$

$$\text{Théorème de GAUSS :} \quad \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{q_{\text{intérieur à }(\Sigma)}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_a}{\varepsilon_0}$$

(Σ) surface de GAUSS : cylindre de section πr^2 et de hauteur h

$$\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = 2\pi r h E(r) \quad \text{et} \quad Q_a = 2\pi a h \rho_a^s \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{\rho_a^s a}{\varepsilon_0 r}}$$

3.1.4. En $r = a$

$$\boxed{E_a = \frac{\rho_a^s}{\varepsilon_o}}$$

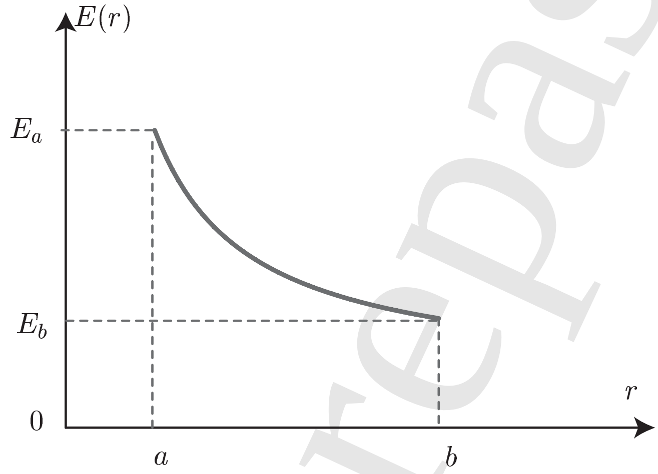
3.1.5. La circulation du champ $\overrightarrow{E}$:

$$\int_{\mathcal{C}_a}^{\mathcal{C}_b} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dr} = \int_a^b E(r)dr = V_a - V_b \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_a^s a}{\varepsilon_o} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = V_a - V = V_{ab}$$

D'où : $$\boxed{\rho_a^s = \frac{\varepsilon_o V_{ab}}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

3.1.6. Champ $\overrightarrow{E}$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{\varepsilon_o V_{ab}}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \overrightarrow{u}_r}$$



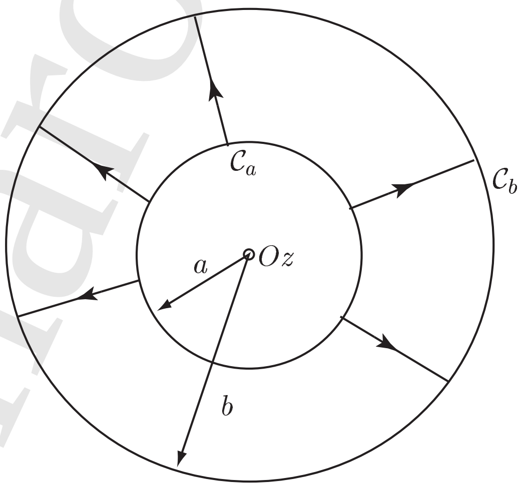
3.1.7. En $r = b$

$$E_b = \frac{\varepsilon_o V_{ab}}{b \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\rho_a^s a}{\varepsilon_o b}$$

Les deux cylindres sont en influence totale $\Longrightarrow$ $Q_a = -Q_b$ ou $\rho_a^s a = \rho_b^s b$

Soit : $$\boxed{E_b = -\frac{\rho_b^s}{\varepsilon_o}}$$

3.1.8.



Les lignes de courant sont des droites radiales.

3.1.9. Intensité du courant électrique I_o

$$I_o = \iint_{(C_h)} \vec{j}.\vec{dS} \quad \text{avec :} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma V_{ab}}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_o = \frac{2\pi h\sigma V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

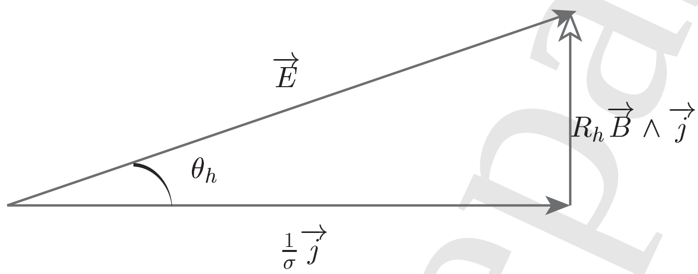
3.1.10. Résistance électrique R_o

$$R_o = \frac{V_a - V_b}{I_o} = \frac{V_{ab}}{I_o} \Rightarrow \quad \boxed{R_o = \frac{1}{2\pi h\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3.2. Étude du milieu en présence d'un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$

3.2.1.

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{j} + R_h\vec{B}\wedge\vec{j}$$ Relation vectorielle de CHASLE



$$E^2 + \frac{j^2}{\sigma^2} - 2\frac{jE}{\sigma}\cos\theta_h = R_h B^2 j^2$$

3.2.2.

$$\boxed{\tan\theta_h = \sigma\frac{||R_h\vec{B}\wedge\vec{j}\,||}{||\,\vec{j}\,||} = \sigma R_h B}$$

3.2.3. Projection de l'équation vectorielle (2) dans la base cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$

$$\begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} + R_h B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} j_r - \sigma R_h B j_\theta \\ j_\theta + \sigma R_h B j_r \\ j_z \end{pmatrix} \text{ ou } \left\{\begin{array}{c} j_r = \sigma E(r) + \sigma R_h B j_\theta \\ j_\theta = -\sigma R_h B j_r \\ j_z = 0 \end{array}\right.$$

L'équation de lma lignede courant : $\vec{j}\wedge\vec{dr} = \vec{0}$

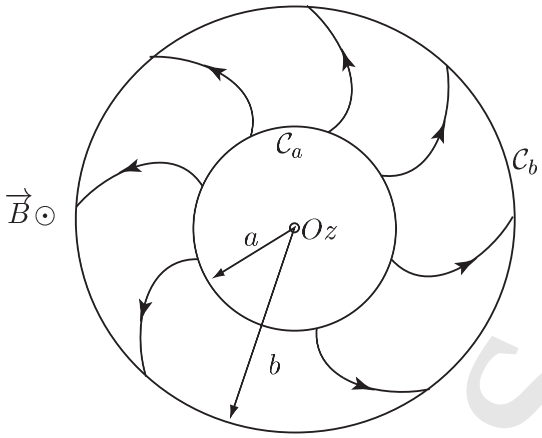
$$\text{donc : } r j_r d\theta = j_\theta dr \;\Rightarrow\; \frac{dr}{r} = \frac{j_r}{j_\theta}d\theta = -\frac{1}{R_h B\sigma}d\theta \quad\Rightarrow\quad \ln r\,(\theta) = -\frac{1}{R_h B\sigma}\theta + k$$

La ligne de courant passe par le point de coordonnées (r_o,θ_o,z_o) donc : $k = \ln r\,(\theta_o) + \frac{1}{R_h B\sigma}\theta_o$

$$\text{soit : } \boxed{r\,(\theta) = r_o\exp[f\,(\theta)]} \quad (4) \quad \text{avec} \quad \boxed{f\,(\theta) = \frac{1}{R_h B\sigma}(\theta_o - \theta)}$$

En absece du champ $(\vec{B} = \vec{0})$, $\vec{j} = j_r\vec{u}_r = \sigma E(r)\vec{u}_r$ et $\boxed{r \to \infty}$: les lignes de courant sont *radiales*.

Commentaire : En présense du champ $\overrightarrow{B}$, les ligne de courant sont des spirales logarithmiques avec le terme $-1/R_hB\sigma$ est positif car $R_h = -1/ne < 0$. Les porteurs de charges parcourent, donc, une distance plus grande en présence du champ $\overrightarrow{B}$ et les spirales sont d'autant plus (incurvées) que le champ $\overrightarrow{B}$ est plus intense.



3.2.4. Équation (2)

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{j} + R_h\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{j}$$

3.2.4.1. D (2) on a :

$$\sigma\overrightarrow{E} = \overrightarrow{j} + \sigma R_h\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{j} \quad \Rightarrow \quad (\sigma E)^2 = j^2 + (\sigma R_h B j)^2 \quad \text{ou} \quad j_o^2 = j^2\left(1+\sigma^2B^2R_h^2\right)$$

soit : $$\boxed{j = \frac{j_o}{\sqrt{1+\sigma^2B^2R_h^2}}}$$

3.2.4.2. Expression de j_r

$$j_r = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{u}_r = j\cos\theta_h \quad \text{avec} \quad \cos\theta_h = \frac{j}{\sigma E(r)} = \frac{j}{j_o} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2B^2R_h^2}}$$

soit : $$\boxed{j_r = \frac{j_o}{1+\sigma^2B^2R_h^2}}$$

3.2.5. Intensité de courant I traversant la section cylindruque $\mathcal{C}_h$

3.2.5.1.

$$I = \iint_{(C_h)} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} = 2\pi rhj_r = \frac{2\pi rhj_o}{1+\sigma^2B^2R_h^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{I_o}{1+\sigma^2B^2R_h^2}}$$

3.2.5.2. Résistance électrique R en présence du champ magnétique $\overrightarrow{B}$:Magnétorésistance

$$I = \frac{I_o}{1+\sigma^2B^2R_h^2} = \frac{V_{ab}}{R_o\left(1+\sigma^2B^2R_h^2\right)} = \frac{V_{ab}}{R}$$

soit : $$\boxed{R = R_o\left(1+\sigma^2B^2R_h^2\right)}$$

3.2.5.3. Vaiation relative de résistance

$$\boxed{\delta = \frac{R-R_o}{R_o} = R_h^2B^2\sigma^2}$$

3.2.5.4. ! ! ! !

3.2.5.5. Application numérique : (conducteur)

$$\delta = 1{,}76 \times 10^{-5}$$

La valeur de δ est faible, cepenant elle est mesurable !

3.2.5.6. Application numérique : (semi-conducteur)

$$\delta = 4{,}9 \times 10^{-1}$$

Dans le cas d'un semi-conducteur, l'effet de magnétorésistance est considérable comparé à un conducteur !