

Fibres optiques

Première partie

Étude géométrique d'une fibre optique à saut d'indice

1.1. Approximation de l'optique géométrique :

1.1.1. L'approximation de l'optique géométrique consiste à ce que la longueur d'onde utilisée soit négligeable par rapport aux dimensions caractéristiques du dispositif optique. Si cela est vérifié, le phénomène de diffraction est négligeable.

1.1.2. Dans le coeur de la fibre d'indice n_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_o}{n_1} = 1,6 \mu m \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\lambda} \simeq 94$$

On est, donc, à la limite d'une telle approximation. La longueur d'onde λ_o appartient au domaine de l'infra-rouge (I.R.).

1.2.

1.2.1. Lois de SNELL-DESCARTES pour la réfraction :

- Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence (plan contenant le rayon incident).
- Soit i_1 et i_2 , respectivement, l'angle d'incidence et de réfraction sur un diopre optique (D). Soit n_1 et n_2 les indices respectifs des milieux (1) et (2) séparés par (D) :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

On parle de la réflexion totale (aucun rayon réfracté n'est observable) lorsque l'onde lumineuse passe d'un milieu plus réfringent (indice supérieur) à un milieu moins réfringent (indice inférieur). L'angle d'incidence i_1 est, donc, supérieur à un angle limit Λ tel que : $n_1 \sin \Lambda = n_2$; ($i_2 = \pi/2$).

$$\text{soit } \boxed{\sin \Lambda = \frac{n_2}{n_1}}$$

1.2.2. Le rayon incident sur le dioptré entre le coeur et la gaine, de la fibre, est totalement réfléchi si $\theta_i > \Lambda$.

La lumière peut être guidée dans le coeur de la fibre s'elle subie des réflexions successives sur le dioptré séparant la gaine et le coeur. Il faut, donc, se placer dans les conditions de réflexion totale ; soit :

$$\begin{cases} n_o \sin \theta_i = n_1 \sin \theta \\ \text{et } \pi/2 - \theta_i > \Lambda \end{cases}$$

Pour $\theta_i = \theta_a \rightarrow \pi/2 - \theta_i = \Lambda$; soit :

$$\boxed{\sin \theta_a = n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Lambda \right) = n_1 \cos \Lambda = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \Lambda} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

1.2.3. Application numérique : $\boxed{\theta_a = 22^\circ 15'}$

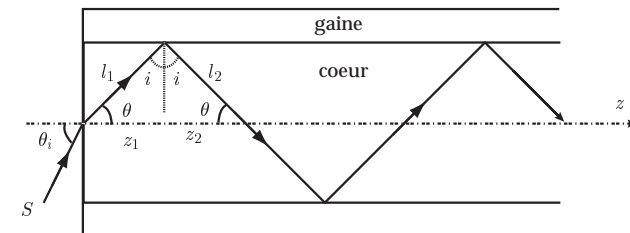
1.2.4. Ouverture numérique :

$$\boxed{ON = \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta}} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}.$$

1.2.5. En utilisant la question 1.2.2, θ_{lim} est tel que : $\boxed{\sin \theta_{lim} = \cos \Lambda = n_1 \sqrt{2\Delta}}$

1.3.

1.3.1.



1.3.2.

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{z_1}{l_1} \\ \cos \theta = \frac{z_2}{l_2} \end{cases} \Rightarrow z_i = l_i \cos \theta \quad \text{et} \quad z = \sum_i z_i = \sum_i l_i \cos \theta = l \cos \theta$$

$$\text{Avec } l = \sum_i l_i \Rightarrow \boxed{l = \frac{z}{\cos \theta}}$$

1.3.3. Le chemin optique c'est le chemin parcouru par la lumière dans le vide pendant la durée de sa propagation dans le milieu considéré :

$$c_o dt = n_1 dl \Rightarrow \int_{(\tau)} c_o dt = \int_{(l)} n_1 dl \Rightarrow c_o \tau(\theta, z) = n_1 l = n_1 \frac{z}{\cos \theta}$$

$$\text{Soit : } \boxed{\tau(\theta, z) = n_1 \frac{z}{c_o \cos \theta}}$$

On pourra utiliser la démarche suivante : $\tau = l/v$ et $v = c/n_1$; d'où le résultat.

1.3.4. Expression de $\Delta \tau$:

$$\begin{cases} \text{Pour } \theta = 0 \text{ le temps de détection : } t_o = \tau(0, z) = n_1 \frac{z}{c_o} \\ \text{Pour } \theta = \theta_{lim} \text{ le temps de détection : } t_1 = \tau(\theta_{lim}, z) = t_o + \Delta \tau = n_1 \frac{z}{c_o \cos \theta_{lim}} \end{cases}$$

$$\text{Ce qui donne : } \boxed{\Delta \tau = \Delta t = t_1 - t_o = n_1 \frac{z}{c_o} \left(\frac{1}{\cos \theta_{lim}} - 1 \right)}$$

1.4.

1.4.1.

1.4.2. Expression de la valeur minimale T_m :

$$T_m = \Delta\tau \text{ et } \cos\theta_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \sin^2\theta_{\text{lim}}} = \frac{n_2}{n_1} \text{ Cf. 1.2.5}$$

$$\Rightarrow T_m = n_1 \frac{z}{c_o} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$$

A grande distance, il y a risque de chevauchement des signaux.

1.4.3. Application numérique :

$$T_m = 0,17 \mu s$$

Le débit maximal :

$$D_{\text{max}} \frac{1}{T_m} = 6 \times 10^6 \text{ impulsions par seconde}$$

Faible distance - Grand débit !!

Deuxième partie Modes d'une fibre optique

2.1. Théorème de MALUS-DUPIN

Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux plans d'onde.

2.2. Déphasage $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_1}{\lambda} P_i P_{i+1} = \frac{8\pi}{\lambda_o} a \sin\theta$$

2.3. La condition d'interférences constructives est telle que la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde ou le déphasage est un multiple de 2π .

$$\Delta\varphi = 2\pi m \lambda \quad (m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda_o}{4n_1 a}$$

2.4. L'ordre m existe si $|\sin\theta_m| \leq \sqrt{2\Delta}$; soit :

$$a \geq \frac{|m| \lambda_o}{4n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

2.5. Nombre N de modes :

D'après ce qui 2.4 :

$$|m| \leq \frac{4an_1}{\lambda_o} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = k \Rightarrow \begin{cases} N = 2E(k) + 1 \\ E(k) : \text{partie entière de } k \end{cases}$$

Application numérique $N = 195$ 2.6. Non, la détection est *indépendante* du signe de $m \in \mathbb{Z}$.2.7. Pour une fibre monomode ($N = 1$), d'où la quantité $E(k) = 0$ ou $|m| < 1$; d'où le résultat suivant :

$$a < a_{\text{max}} = \frac{\lambda_o}{4an_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

2.8. Application numérique :

$$a_{\text{max}} = 1,02 \mu m$$

2.9. Pour une telle fibre (monomode), la valeur de a est faible, ce qui correspond à un faible élargissement des impulsions, d'où transmission de maximum d'énergie (informations).

Troisième partie Gyromètre optique

3.1. Effet Sagnac

3.1.1. L'interféromètre étant au repos. Le temps δt_o que mettent les ondes (1) et (2) pour faire un tour, à la vitesse c_o , vaut :

$$\delta t_o = \frac{2\pi R}{c_o}$$

3.1.2. L'interféromètre est en rotation. Le rayon (1) parcourant dans le sens de rotation voit son chemin rallongé avant d'arriver à l'écran (E) : en effet, pendant qu'il effectue un tour, le détecteur en (E) s'est déplacé d'une longueur :

$$d_1 = R\Omega\delta t_o = \frac{2\pi R^2}{c_o}\Omega$$

Il faut, donc, parcourir cette distance supplémentaire par rapport à l'interféromètre (immobile). Le rayon (2) doit parcourir tout le chemin *moins* cette distance ((2) voit le détecteur se rapprocher et déplacé d'une longueur $d_2 = -d_1$). La différence de marche Δl est donc :

$$\Delta l = 2d_1 = \frac{2\pi R^2}{c_o}\Omega$$

3.1.3. Les deux ondes (1) et (2) partent au même instant de (S_p). L'onde (1) (*sens de rotation*) va voir un parcours plus long, alors que l'onde (2) va avoir un parcours plus court. Considérons par δt_1 et δt_2 les durées de propagations respectives des trajets des deux ondes (1) et (2).

- Pendant δt_1 , l'onde (1) parcourt la distance $L_1 = c_o \delta t_1 = 2\pi R + r\Omega \delta t_1$.
- Pendant δt_2 , l'onde (2) parcourt la distance $L_2 = c_o \delta t_2 = 2\pi R - r\Omega \delta t_2$.

Finalement :

$$\delta t_1 = \frac{2\pi R}{c_o} + \frac{R\Omega}{c_o} \delta t_1 \quad \text{et} \quad \delta t_2 = \frac{2\pi R}{c_o} - \frac{R\Omega}{c_o} \delta t_2$$

Ou :

$$\delta t_1 = \delta t_o + \frac{R\Omega}{c_o} \delta t_1 \quad \text{et} \quad \delta t_2 = \delta t_o - \frac{R\Omega}{c_o} \delta t_2$$

$$\Rightarrow \delta t_1 = \frac{\delta t_o}{1 - \frac{R\Omega}{c_o}} \quad \text{et} \quad \delta t_2 = \frac{\delta t_o}{1 + \frac{R\Omega}{c_o}}$$

3.1.4. Différence de phase $\Delta\varphi$:

La différence de phase entre les deux ondes : $\Delta\varphi = \omega_o(\delta t_1 - \delta t_2)$ Soit : (avec ω_o la pulsation de l'onde)

$$\Delta\varphi = \omega_o \left(\frac{4\pi R^2 \Omega}{c_o^2 - R^2 \Omega^2} \right) \approx \omega_o \left(\frac{4S\Omega}{c_o^2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_o} c_o \left(\frac{4S\Omega}{c_o^2} \right) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{8\pi S\Omega}{\lambda_o c_o}$$

3.1.5. Application numérique :

$\Omega (s^{-1})$	10^{-8}	10^{-1}	10^2
$\Delta\varphi (rad)$	$3,3 \times 10^{-11}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-1}$

Les deux premières valeurs de $\Delta\varphi$ sont inexploitable par les instruments de mesure actuels. La troisième valeur est la seule qui pourra être mesurée avec précision.

3.2. Gyromètre à fibre optique

3.2.1. Principe

3.2.1.1. Déphasage $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = N \Delta\varphi = \frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega$$

3.2.1.2. Signal $s(t)$:

$$s(t) = \alpha I(t) = \alpha \frac{I_o}{2} (1 + \cos \Delta\Phi) s_o \left(1 + \cos \left(\frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega \right) \right)$$

3.2.1.3. Déphasage supplémentaire $\pi/2$

$$s'(\Omega) = s \left(\Delta\Phi + \frac{\pi}{2} \right) = s_o \left(1 - \sin \left(\frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega \right) \right)$$

Pour les faibles valeurs de Ω :

$$s'(\Omega) = s_o \left(1 - \frac{8\pi NS}{\lambda_o c_o} \Omega \right)$$

3.2.2. Sensibilité aux effets extérieurs

3.2.2.1.

-
-
-
-

3.2.2.2.

- Avantage : La fibre très longue permet la mesure de faibles vitesses angulaires.
- Inconvénient : La linéarité du signal est limitée.

3.2.2.3.

$\Omega (s^{-1})$	10^{-8}	10^{-1}	10^2
$\Delta\varphi (rad)$	$2,6 \times 10^{-7}$	2,6	$2,6 \times 10^3$

- La linéarité du signal n'est pas valable pour les deux dernières valeurs de Ω .
- La première valeur est mesurable.