CHAPITRE 4 : Circuit fixe dans un champ magnétique variable

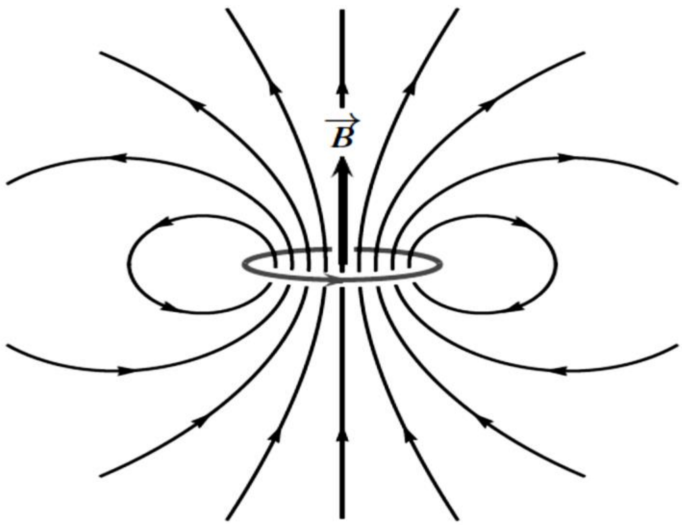
Dans ce chapitre on étudie des phénomènes d'induction dans des circuits fixes mettant en jeu des champs magnétiques variant dans le temps.

1. Phénomène d'auto-induction

Lors de l'étude de l'induction dans un circuit électrique, on appelle champ propre le champ magnétique créé par ce circuit. Le champ magnétique créé par d'autres sources (autres circuits ou aimants) est appelé champ extérieur. Le champ magnétique total qui règne au voisinage d'un circuit est : $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{propre}$.

1.1. Flux propre et inductance propre

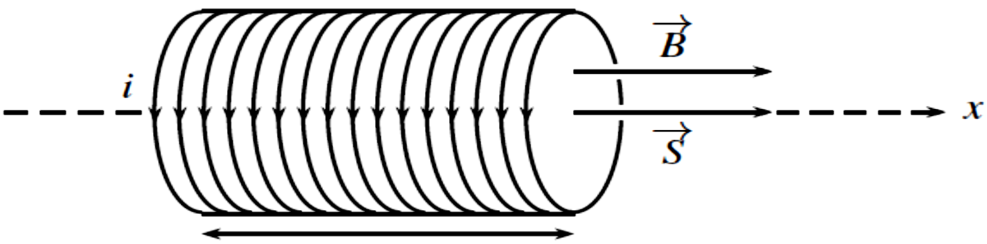
Un circuit filiforme (par exemple une spire) parcouru par un courant i crée un champ magnétique $\vec{B}$ dans l'espace (loi de Biot et Savart). Comme les lignes de champ s'enroulent autour de leurs sources, ces lignes traversent donc le circuit qui leur a donné naissance et créent aussi un flux magnétique à travers ce circuit ; ce flux magnétique est appelé 'flux propre', noté φ_p .



L'expression de φ_p est en général difficile à établir car le champ n'est pas nécessairement uniforme sur toute la surface du circuit. Mais dans tous les cas, φ_p est proportionnel à la norme de $\vec{B}$, qui est elle-même proportionnelle à l'intensité i du courant ; φ_p est donc proportionnel à i . φ_p est le flux du champ magnétique créé par le circuit à travers lui-même ; il s'écrit : $\varphi_p = Li$ $\quad (4-1)$. i est l'intensité du courant dans le circuit et L le coefficient de proportionnalité (toujours positif) entre φ_p et i est appelé coefficient d'auto-induction du circuit ou inductance propre du circuit ; il dépend de la géométrie du circuit. L s'exprime en Henry (H).

1.2. Calcul de l'induction propre dans le cas d'une bobine de longueur ℓ

On veut établir l'expression de L d'une bobine longue de longueur ℓ, nommée solénoïde, constituée de N spires circulaires, chacune parcourue par un courant d'intensité i, de surface S. On a alors $n=\dfrac{N}{\ell}$, le nombre de spire par unité longueur de la bobine.



Le champ magnétique créé par une telle bobine a pour expression $\vec{B}=\mu_0 ni\,\vec{u}_x=\mu_0\dfrac{N}{\ell}i\,\vec{u}_x$

Le flux de ce champ à travers une seule spire est : $\varphi_{1spire}=\vec{B}.\vec{S}=\mu_0\dfrac{N}{\ell}iS$.

Le flux total à travers les N spires, c'est-à-dire le flux propre à travers la bobine est : $\varphi_p=N\varphi_{1spire}=\mu_0\dfrac{N^2}{\ell}iS$. Comme $\varphi_p=Li$, on tire $L=\mu_0\dfrac{N^2}{\ell}S$

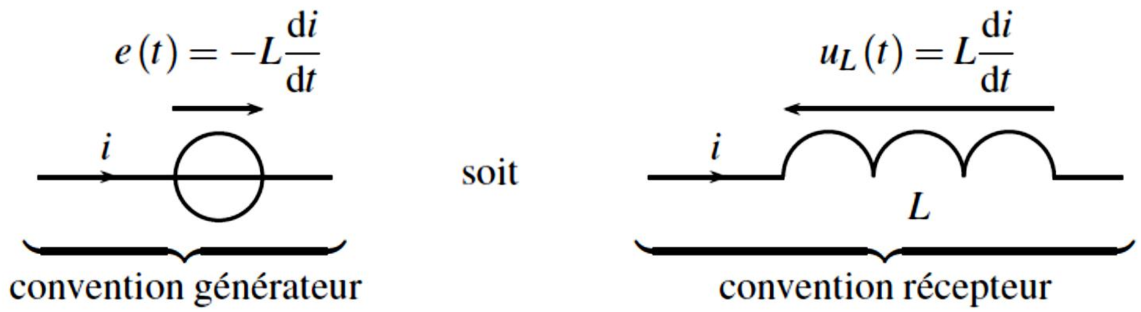
Exemple : $N=1000$, $\ell=10cm$, et $a(\text{rayon de la spire})=3\,cm$, on a :

$$L=4\pi.10^{-7}\frac{(1000)^2}{10.10^{-2}}\pi\left(3.10^{-2}\right)^2=35\,mH$$

1.3. Circuit électrique équivalent

Si l'intensité du circuit varie dans le temps, le champ magnétique qu'il crée varie aussi dans le temps ; le flux propre varie donc aussi dans le temps et il apparait donc une force électromagnétique induite, appelée force électromagnétisme d'auto-induction, qui s'exprime selon la loi de Faraday (3-2) par $e(t)=-\dfrac{d\varphi_p}{dt}=-L\dfrac{di}{dt}$ $\quad(4-2)$ où L reste constante si les caractéristiques géométriques du circuit ne varient pas.

D'après la convention d'algébrisation des sens de $e(t)$ et de $i(t)$, on a les schémas électriques équivalents pour l'auto-induction:



D' après ces schémas, on voit que la f.é.m. induite peut être représentée soit par un générateur de f.é.m. $e(t)$, orienté en convention générateur, soit par le symbole normalisé d'une inductance L, avec une tension $u_L(t)$ à ses bornes, orienté en convention récepteur.

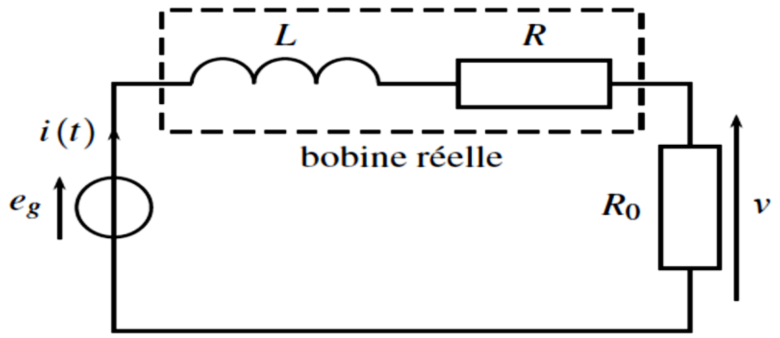
Remarque : dans le cas où le circuit est plongé dans un champ magnétique extérieur, par exemple le champ terrestre, un flux supplémentaire à travers le circuit s'ajoute au flux propre, $\varphi_{tot} = \varphi_p + \varphi_{ext}$. Dans ce cas, la f.é.m. induite est : $e(t) = -L\frac{di}{dt} - \frac{d\varphi_{ext}}{dt}$.

1.4. Loi de Lenz

L'expression de la f.é.m. induite (4-2) est cohérente avec la loi de modération de Lenz. En effet, une bobine branchée sur un générateur extérieur qui fait croître le courant dans la bobine donne $\frac{di}{dt} > 0$; on a alors $e(t) = -L\frac{di}{dt} < 0$ et d'après le schéma électrique équivalent, cette f.é.m. induite négative s'oppose à l'augmentation du courant.

1.5. Mesure d'une inductance propre

On mesure expérimentalement la valeur de l'auto-inductance L en l'insérant dans un circuit série comportant un générateur de f.é.m. $e_g(t)$ et une résistance R.



Les fils de cuivre qui constituent la bobine présentent une résistance R. On ajoute au circuit une résistance connue R_0 très supérieure à R ; ainsi l'ensemble donne $R_0 + R \approx R_0$.

On a donc une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} e_g(t) = L\dfrac{di}{dt} + R_0 i(t) \\ v(t) = R_0 i(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{L}{R_0}\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e_g(t)$$

On pose $\tau = \dfrac{L}{R_0}$; τ est la constante de temps, mesurée grâce au temps de montée quand $v(t) \to e_g(t)$. Dans le cas où la tension d'alimentation $e_g(t)$ est un signal créneau de grande période par rapport à τ, on mesure τ grâce au temps de montée à 63%. On en déduit L puisque R_0 est connue.

1.6. Etude énergétique

On reprend le montage précédent. Afin de mener un bilan de puissance, on multiplie la loi des mailles par $i(t)$:

$$e_g(t).i(t) = Li\frac{di}{dt} + R_0 i^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) + R_0 i^2$$

$$\frac{di}{dt}.i(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{i^2}{2}\right) \Rightarrow e_g.i = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) + R_0 i^2$$

Le terme $e_g.i$ représente la puissance délivrée par le générateur, cette puissance se répartit en deux contributions :

- une puissance $R_0 i^2$ dissipée par effet joule dans la résistance R_0.
- une puissance $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Li^2}{2}\right)$, stockée dans la bobine.

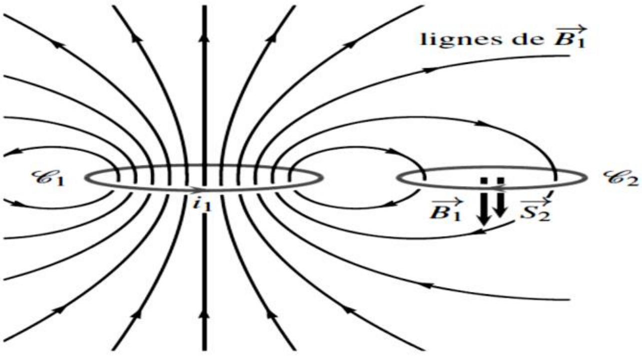
Il apparait donc qu'il y a de l'énergie stockée dans la bobine ; cette énergie s'écrit $\dfrac{1}{2}Li^2 + cte$.

Il s'agit de l'énergie du champ magnétique créé par la bobine. Si le courant i s'annule, le champ magnétique s'annule aussi de même que l'énergie magnétique, la constante est donc égale à 0. **L'énergie magnétique stockée dans un circuit d'auto-inductance L parcouru par un courant i est $E_{mag} = \dfrac{1}{2}Li^2$** $\quad (4-3)$.

2. Deux circuits en interaction (circuits couplés)

2.1. Inductance mutuelle

Un circuit filiforme fermé C_1, parcouru par un courant d'intensité i_1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1$ dont la norme est proportionnelle au courant i_1 qui le parcourt. Un circuit filiforme fermé C_2 est disposé dans le champ magnétique $\vec{B}_1$ dont il intercepte des lignes de champ. Ainsi $\vec{B}_1$ crée un flux magnétique à travers C_2 ; ce flux est noté $\varphi_{1\to 2}$. $\varphi_{1\to 2}$ est le flux envoyé par le circuit C_1 à travers le circuit C_2, il est proportionnel à i_1. De même, si C_2 est parcouru par un courant i_2, il envoie un flux magnétique $\varphi_{2\to 1}$ à travers C_1, qui est proportionnel à i_2.



Les différents flux créés sont :

$\varphi_{1\to 1} = \iint_{C_1} \vec{B}_1 \overrightarrow{dS}_1$ (flux propre à travers C_1)

$\varphi_{1\to 2} = \iint_{C_2} \vec{B}_1 \overrightarrow{dS}_2$ (flux crée par C_1 à travers C_2 : flux induit)

$\varphi_{2\to 2} = \iint_{C_2} \vec{B}_2 \overrightarrow{dS}_2$ (flux propre à travers C_2)

$\varphi_{2\to 1} = \iint_{C_1} \vec{B}_2 \overrightarrow{dS}_1$ (flux crée par C_2 à travers C_1 : flux induit)

$\varphi_{1\to 1} = L_1\, i_1 = \varphi_{1p}$; $\varphi_{2\to 2} = L_2\, i_2 = \varphi_{2p}$

$\varphi_{1\to 2} = M_{1\to 2}\, i_1$; $\varphi_{2\to 1} = M_{2\to 1}\, i_2$

Théorème de Neumann : les coefficients de proportionnalité $M_{1\to 2}$ et $M_{2\to 1}$ sont égaux et notés M ; M est appelé coefficient d'induction mutuelle ou inductance mutuelle entre les deux circuits (M s'exprime en H).

NB : l'intensité du courant qui apparait dans l'expression de ces flux est à chaque fois l'intensité dans le circuit qui crée le champ magnétique.

2.2. Circuits électriques équivalents

On considère l'ensemble des deux circuits C_1 et C_2 de la figure précédente.

$$\varphi_{1p} = L_1\, i_1 \quad ; \quad \varphi_{2p} = L_2\, i_2 \quad ; \quad \varphi_{1\to 2} = M\, i_1 \quad et \quad \varphi_{2\to 1} = M\, i_2$$

Flux total à travers C_1 : $\varphi_1 = \varphi_{1p} + \varphi_{2\to 1} = L_1\, i_1 + M\, i_2$

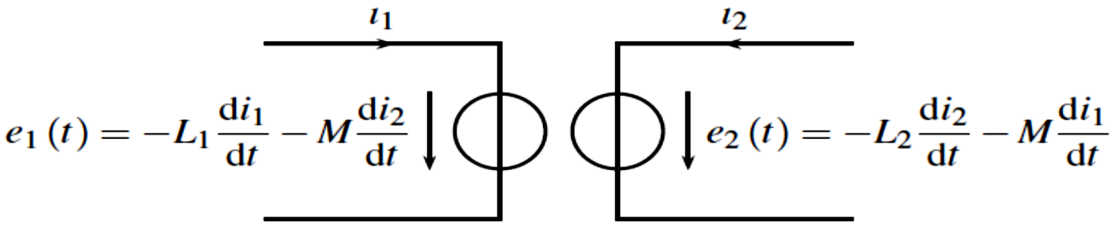
F.é.m. induite dans C_1 : $e_1(t) = -\dfrac{d\varphi_1}{dt} = -L\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt}$

De même au niveau de C_2, on a

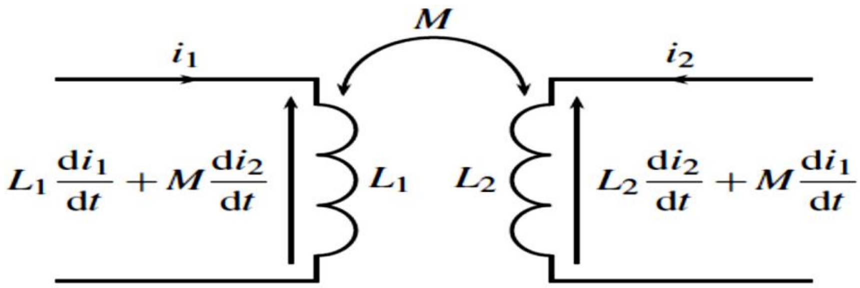
$$\varphi_2 = \varphi_{2p} + \varphi_{1\to 2} = L_2\, i_2 + M\, i_1 \quad \text{et} \quad e_2(t) = -\frac{d\varphi_2}{dt} = -L\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

On en déduit les circuits électriques équivalents aux spires :

- Convention générateur

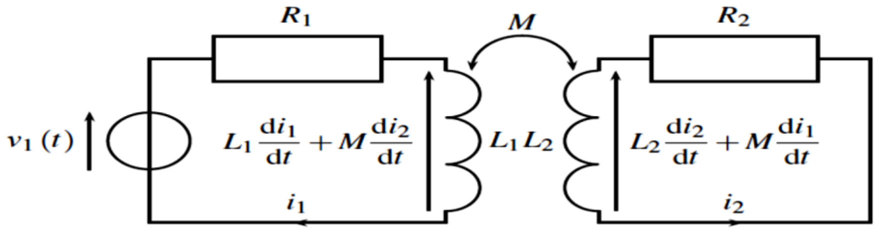


- Convention récepteur



2.3. Etude harmonique

On considère l'ensemble des deux circuits C_1 et C_2, couplés par mutuelle induction. C_1 de résistance électrique R_1, est alimenté par un générateur qui impose la tension $v_1(t) = V_0\cos(\omega t)$. C_2 de résistance R_2, est court-circuité.



Loi des mailles :

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} + R_1 i_1 & (1) \\ 0 = L_2\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} + R_2 i_2 & (2) \end{cases}$$

En régime harmonique de pulsation ω , on a

$$\begin{cases} \underline{v_1}(t) = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i_1}(t) + jM\omega\underline{i_2}(t) & (1') \\ 0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{i_2}(t) + jM\omega\underline{i_1}(t) & (2') \end{cases}$$

$$(2') \Rightarrow \quad \underline{i_2}(t) = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}\underline{i_1}(t)$$

On reporte cette expression dans (1)

$$\Rightarrow \underline{v_1}(t) = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i_1}(t) + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\underline{i_1}(t) = \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\right)\underline{i_1}(t) = \underline{Z}\,\underline{i_1}(t)$$

Le couplage entre les deux circuits est équivalent, vu du circuit C_1, à un unique dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$, dans lequel intervient les caractéristiques de C_2 par le couplage inductif M .

2.4. Etude énergétique

On multiplie les équations (1) et (2) respectivement par i_1 et i_2 :

$$\begin{cases} v_1(t).\,i_1(t) = L_1 i_1(t)\dfrac{di_1}{dt} + M i_1(t)\dfrac{di_2}{dt} + R_1 i_1^2 \\ 0 = L_2 i_2(t)\dfrac{di_2}{dt} + M i_2(t)\dfrac{di_1}{dt} + R_2 i_2^2 \end{cases}$$

On fait la somme membre à membre de ces deux équations :

$$v_1\, i_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2\right) + M i_2\frac{di_1}{dt} + M i_1\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

$$v_1\, i_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2\right) + \frac{d}{dt}(M i_1 i_2) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

$$v_1\, i_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

La puissance $v_1\, i_1$ délivrée par le générateur extérieur se répartit en deux termes :

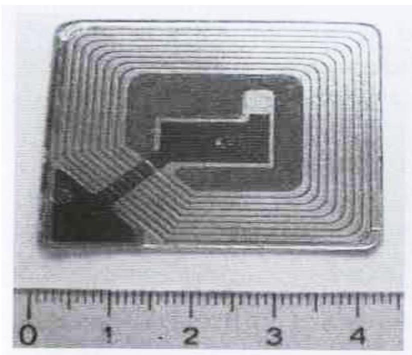
- une puissance $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ perdue par effet joule dans les deux circuits ;
- une puissance magnétique qui dérive d'une énergie magnétique emmagasinée dans le circuit C_1 ($E_{mag1} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$), dans le circuit C_2 ($E_{mag2} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$) et d'une énergie magnétique du couplage entre les deux circuits ($E_{mag\,c} = M i_1 i_2$)

$$E_{mag} = E_{mag1} + E_{mag2} + E_{mag\,c} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \qquad (4-4)$$

E_{mag} **est l'énergie magnétique totale emmagasinée par les deux circuits couplés par mutuelle induction.**

2.5. Exemples d'application des circuits couplés

- Des dispositifs électriques peuvent être chargés à distance (sans contact) par couplage inductif. C'est le cas de certaines voitures électriques de location. Le châssis de la voiture est équipé d'un circuit en forme de boule (bobine) d'axe vertical. Dans le sol, sous la place de parking, se trouve également une bobine alimentée électriquement par le courant alternatif du secteur. Lorsque la voiture est garée sur sa place de parking, les deux bobines se font face, ce qui assure une valeur satisfaisante de leur coefficient d'induction mutuelle. Les variations du courant dans la boucle du sol induisent des courants dans la boucle de la voiture, qui servent à recharger la batterie. Cela évite d'avoir à brancher un câble de raccordement.
- Les cartes RFD (radio frequency identification) sont des 'cartes magnétiques' lues par simple passage à distance devant le détecteur. Le lecteur est un circuit électrique parcouru par un courant variable $i_1(t)$, qui génère un champ magnétique temporellement variable dans son environnement. La carte RFD contient un bobinage.



Carte RFID servant d'antivol sur un article de magasin.

Lorsqu'ils sont proches l'un de l'autre, carte et lecteur sont couplés par induction mutuelle. Les variations temporelles du courant $i_1(t)$ dans le détecteur provoquent, par couplage magnétique, l'apparition d'un courant $i_2(t)$ dans la carte RFID. Ce courant $i_2(t)$ alimente une puce électronique qui le modifie (codage dans i_2 des informations contenues dans la carte). Par couplage magnétique, $i_2(t)$ induit des variations sur $i_1(t)$ dans le lecteur, qui décode ainsi le contenu de la carte. Les cartes RFID peuvent être passives (sans alimentation autonome), car la f.é.m. induite par le champ du lecteur suffit à les alimenter.

- Les puces électriques d'identification mises par les vétérinaires sous la peau des animaux domestiques ne sont autres que des cartes RFID de la taille d'un grain de riz.
- Les plaques de cuisson à induction contiennent une bobine parcourue par un courant temporellement variable et d'amplitude réglable. Une casserole posée sur la plaque joue le rôle d'une seconde bobine. En effet, bien que non filiforme, le disque métallique du fond de la casserole peut être découpé par la pensée en des spires concentriques. Le champ variable créé par la plaque induit un courant dans ces spires fictives, qui s'échauffent par effet joule.

3. Transformateur de tension

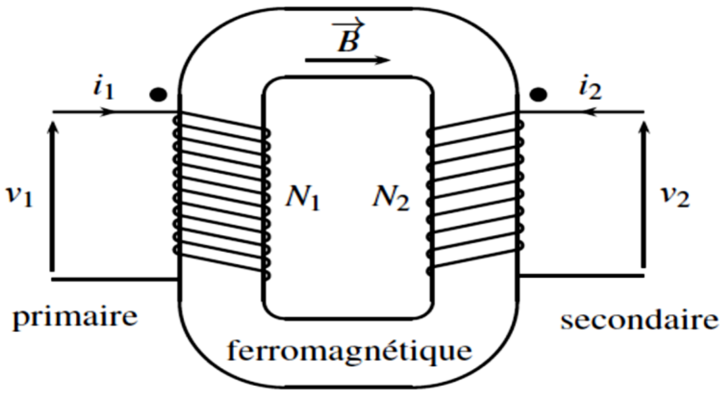
3.1. Définition

Les appareils américains fonctionnent en 110 V alternatif alors que le réseau ivoirien délivre du 220 V alternatif. Pour brancher sans dommages un appareil américain sur le réseau ivoirien, il faut donc transformer le 220 V de la prise électrique en 110 V.

Un transformateur de tension est un dispositif qui convertit une tension alternative en une tension alternative de même fréquence mais de valeur efficace différente. Le fonctionnement du transformateur repose sur le phénomène de couplage par induction mutuelle.

3.2. Constitution

Un transformateur de tension est un quadripôle composé de deux enroulements de fils de cuivre autour d'un tore homogène ferromagnétique de section S. L'enroulement de gauche, constitué de N_1 spires, est appelé enroulement primaire. Celui de droite, constitué de N_2 spires, est l'enroulement secondaire. Le tore ferromagnétique a la propriété de bien canaliser les lignes de champ magnétique : les lignes de champ suivent donc la forme du tore. Ainsi, toute ligne de champ qui traverse le primaire traverse aussi le secondaire : on dit que le couplage magnétique entre les deux enroulements est parfait et donne la plus grande valeur possible (en valeur absolue) du coefficient d'induction mutuelle. Toutefois, la valeur explicite de ce coefficient n'intervient pas dans les calculs ultérieurs.



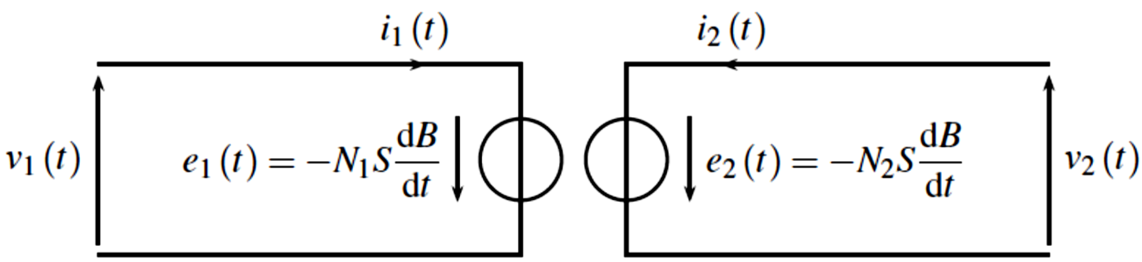
Sur la figure, les deux points désignent les *bornes homologues* : ce sont les extrémités des enroulements qui entrent par la même face du tore, ici la face extérieure. Ces points sont nécessaires pour comprendre le sens des enroulements.

3.3. Principe de fonctionnement – Loi des tensions

Le primaire, soumis à la tension alternatif $v_1(t)$, est parcouru par un courant alternatif $i_1(t)$. Le courant $i_1(t)$ crée un champ magnétique variable canalisé par le ferromagnétique jusqu'au secondaire. Ce champ crée alors un flux variable dans l'environnement secondaire et une f.é.m. y est donc induite. Soit $\vec{B}(t)$ le champ magnétique résultant à l'intérieur du tore. Ce champ étant parfaitement canalisé, son flux $\varphi(t)$ a la même valeur à travers toute section S du tore : $\varphi(t)$ est appelé flux commun. Le flux total à travers les N_1 spires du primaire est $\varphi_1(t) = N_1 SB(t)$ et celui du secondaire est $\varphi_2(t) = N_2 SB(t)$. Les f.é.m. induites au primaire et au secondaire sont alors :

$$e_1(t) = -\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = -N_1 S\frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad e_2(t) = -\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = -N_2 S\frac{dB}{dt}$$

On a alors le schéma électrique équivalent suivant :



Ainsi en négligeant la résistance des fils de cuivre, on a : $v_1 = -e_1$ et $-v_2 = e_2$

$$\begin{cases} v_1(t) = N_1 S \dfrac{dB}{dt} \\ v_2(t) = N_2 S \dfrac{dB}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m \qquad (4-5)$$

$m = \dfrac{N_2}{N_1}$ est le rapport de transformation ou loi des tensions.

Remarque : la relation (4-5) n'est valable que pour les tensions alternatives. En régime indépendant du temps, $v_2 = 0$: un transformateur ne laisse pas passer le continu.

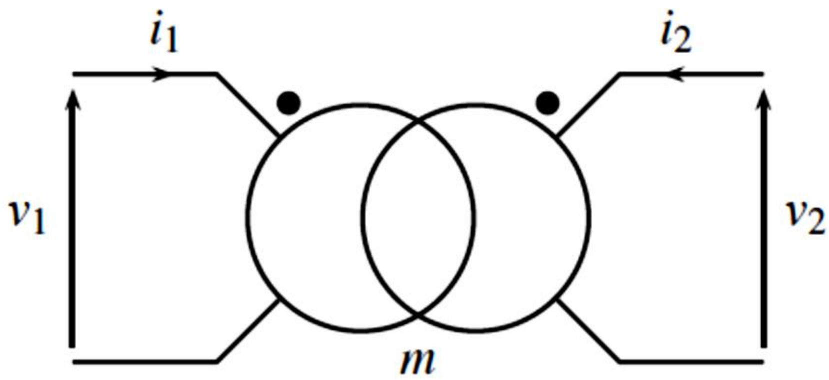
Les tensions primaire et secondaire, dans un transformateur en régime alternatif, sont reliées par le rapport de transformation ou la loi des tensions m (relation 4-5):

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

Pour brancher un appareil américain sur le réseau ivoirien, il suffit donc de prendre un transformateur avec $N_1 = 220$ et $N_2 = 110$, de raccorder le primaire à la prise ivoirienne (v_1 = 220 V) et de brancher l'appareil américain au secondaire du transformateur (v_2 = 110 V).

3.4. Normalisation et orientation des courants

Le schéma normalisé du transformateur est :

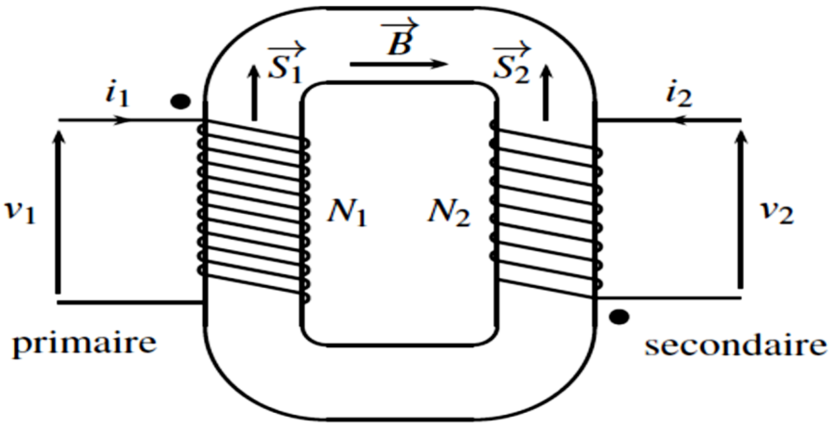


Il apparait ici le besoin de préciser très correctement l'orientation des courants et la signification des points (●) au primaire et au secondaire.

Au primaire, le courant d'intensité i_1 entre par la borne marquée du point. D'après la règle de la main droite, il crée un champ magnétique orienté dans le sens positif, arbitrairement choisi et indiqué sur la figure. De même au secondaire, le courant d'intensité i_2 entre lui aussi par la borne marquée du point et crée pareillement un champ magnétique orienté dans le sens positif.

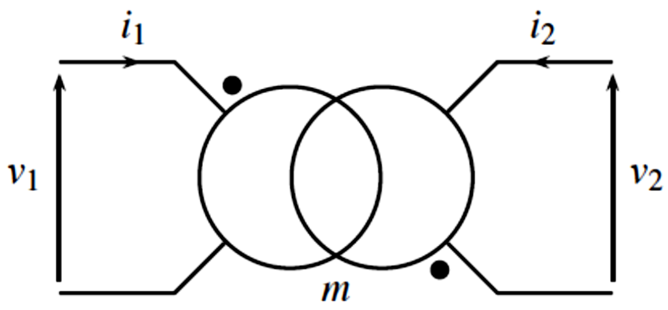
La signification des points est claire : tout courant qui entre par le point (●) crée, dans le matériau ferromagnétique, un champ magnétique orienté dans le sens positif choisi.

Que se passe-t-il quand le courant n'entre pas par le point ?



Le courant d'intensité i_2 n'entre pas par le point. Ce courant oriente les spires du secondaire, donc leur vecteur surface $\vec{S_2}$ d'après la règle de la main droite, de telle manière que le flux au secondaire devient négatif, $\varphi_2(t) = -N_2 S B(t)$. Dès lors, $v_2(t) = -e_2(t) = \dfrac{d\varphi_2(t)}{dt} = -N_2 S \dfrac{dB}{dt}$.

Le lien entre la tension primaire et secondaire devient :



$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = -\frac{N_2}{N_1} = -m$$

Il convient donc de vérifier le câblage du transformateur pour utiliser correctement le lien entre les tensions primaire et secondaire.

3.5. Courants de Foucault

Le matériau ferromagnétique est soumis à un champ magnétique variable. Des f.é.m. sont donc induites dans le volume. Attendu que le matériau est conducteur, des courants induits apparaissent. Ces courants qui circulent dans la masse du ferromagnétique, sont nommées courants de Foucault ou eddy currents en anglais.

Ces courants de Foucault sont responsables des pertes par effet joule. Afin de minimiser, voire supprimer les pertes, on feuillette le matériau ferromagnétique en le constituant de tôles minces, jusqu'à 0,3 mm d'épaisseur, séparées par une couche isolante aussi mince que possible, 10^{-2} mm ou moins. La couche isolante bloque la circulation du courant et prévient les pertes par effet joule.

3.6. Utilisation

La principale utilité des transformateurs est d'abaisser ou d'élever des tensions alternatives. Un transformateur permet aussi d'isoler électriquement deux circuits. On l'utilise en transformateur d'isolement pour lequel le rapport de transformation est $m = 1$. La tension secondaire est une copie conforme de la tension primaire alternative. Les circuits primaire et secondaire n'ont aucun lien électrique. Ils peuvent en particulier avoir deux masses différentes, sans risquer des court-circuits.