Nouveau cours de mathématiques
Tome 2

Jean-Marie MONIER

ANALYSE 2

cours et 600 exercices corrigés

1re année MPSI . PCSI . PTSI

occasion
GIBERT JEUNE

PRÉPAS SCIENTIFIQUES

DUNOD

Cours de mathématiques - 2

ANALYSE 2

cours et 600 exercices corrigés

1re année MPSI . PCSI . PTSI

Cours de mathématiques - 2

ANALYSE 2

cours et 600 exercices corrigés

1re année MPSI . PCSI . PTSI

Jean-Marie Monier
Professeur en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon

2e édition
conforme aux nouveaux programmes
(B.O.E.N. 27 juillet 1995)

DUNOD

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 3 rue Hautefeuille, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 1996
© Dunod, Paris 1994 pour la 1re édition
ISBN 2 10 003076 0

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relative à la reproduction par reprographie.

Préface

Jeune lycéen, j'avais, pour les manuels scolaires, une vénération quasi-religieuse. Que représentaient pour moi ces livres qu'une main zélée avait soigneusement recouverts en début d'année ? Je ne saurais le dire avec précision : ils contenaient, sans doute, la Vérité. A mon sens, par exemple, un théorème ne pouvait être énoncé que dans le scrupuleux respect des termes de l'ouvrage; approximative, la restitution n'était pas valable. L'utilisation, par les professeurs, des polycopiés (rappels et compléments de cours, énoncés de problèmes ...) n'était pas, alors, habituelle; je pense, aujourd'hui, que cela était dû bien plus aux difficultés de reprographie qu'à un non-désir de ces professeurs d'imprimer leur griffe personnelle par le choix d'exercices originaux. Ils se référaient constamment aux manuels, en suivaient fidèlement la progression, y puisaient les exercices. Je me souviens, d'ailleurs, d'avoir été troublé quand, en Terminale, mon professeur de Math., que je révérais aussi, se permettait parfois quelques critiques à l'égard d'un ouvrage qu'il nous avait pourtant conseillé ! Quant aux auteurs de ces livres, ils restaient énigmatiques : qui étaient ces demi-dieux détenteurs du Savoir ?

Plus tard, mes rapports d'étudiant avec les manuels didactiques ont, évidemment, évolué, mais je crois avoir, naïvement sans doute, conservé cette approche faite d'envie et de respect qui m'empêche, par exemple, de porter des annotations en marge – je ne jouerai pas la farce d'un Pierre de Fermat ! – et cet a priori favorable qui me rendrait difficile la rédaction d'une critique objective.

Heureusement, tel n'est pas mon propos aujourd'hui ! Mais j'ai voulu, par ces quelques mots, souligner l'importance capitale – même dans le subconscient de chacun – de ces livres de cours sur lesquels vous travaillez durant vos études et qui vous accompagnent toute votre vie.

Aucun professeur, fût-il auteur de manuels, ne songerait à conseiller un livre en remplacement d'un enseignement vivant et vécu. Mais, le cours imprimé, s'il est fidèle à la lettre et à l'esprit du programme d'une classe, peut aider, de façon très importante, l'étudiant consciencieux. Celui-ci, surtout lorsqu'il est débutant, trouvera la sécurité dont il a besoin dans un plan clair, précis, rigoureux, dans une présentation particulièrement soignée où les diverses polices de caractères sont judicieusement alternées, dans la vision d'ensemble des questions dont traite l'ouvrage. Il y recherchera, avec la certitude de les obtenir, telle démonstration qu'il n'a pas bien comprise, tel exemple ou contre-exemple qui l'aidera à mieux assimiler une notion, la réponse à telle question qu'il n'a pas osé poser sinon à lui-même...

Pour que le livre joue ce rôle d'assistant – certes passif mais constamment disponible – il doit, je pense, être proche des préoccupations immédiates de l'étudiant, ne pas exiger, pour sa lecture, un savoir qui n'a pas encore été acquis, ne pas rebuter par

l'exposé trop fréquent de notions trop délicates; mais il doit, cependant, contenir une substance suffisante pour constituer les solides fondations sur lesquelles s'échafaude la pyramide du savoir scientifique.

On l'imagine, dès lors, aisément : l'écriture d'un tel manuel, à l'intention des étudiants des classes préparatoires ou d'un premier cycle universitaire, demande, à côté de la nécessaire compétence, des qualités pédagogiques certaines, affinées par une longue expérience professionnelle dans ces sections, une patience et une minutie rédactionnelles inouïes.

Jean-Marie Monier a eu le courage de se lancer dans ce gigantesque travail et les ouvrages qu'il nous propose aujourd'hui – après les recueils d'exercices qui ont eu le succès que l'on sait – montrent qu'il a eu raison : il a, me semble-t-il, pleinement atteint le but qu'il s'était fixé, à savoir rédiger des livres de cours complets à l'usage de tous les étudiants et pas seulement des polytechniciens en herbe. Les nombreux ouvrages d'approfondissement ou de spécialité seront, évidemment, lus et savourés plus tard, ... par ceux qui poursuivront. Pour l'instant, il faut, à l'issue de la Terminale, assimiler complètement les nouvelles notions de base (la continuité, la convergence, le linéaire,...); le lecteur est guidé, pas à pas, par une main sûre qui le tient plus fermement dès qu'il y a danger : les mises en garde contre certaines erreurs sont le fruit de l'observation répétée de celles-ci chez les élèves.

A tout instant, des exercices sont proposés qui vont l'interpeler : il sera heureux de pouvoir, quelques dizaines de pages plus loin, soit s'assurer que, par une bonne démarche il est parvenu au bon résultat, soit glaner une précieuse indication pour poursuivre la recherche : le livre forme un tout, efficace et cohérent.

J'ai dit quel rôle majeur dans la formation d'un jeune esprit scientifique peut jouer un manuel qui lui servira de référence pendant longtemps. Sa conception, sa rédaction, sa présentation sont, alors, essentielles : on ne peut que viser à la perfection !

C'est tout le sens du travail effectué par J.-M. Monier avec une compétence, un goût, une constance admirables, depuis le premier manuscrit jusqu'aux ultimes corrections, dans les moindres détails, avant la version définitive.

Ces ouvrages qui répondent à un réel besoin aujourd'hui, seront, j'en suis persuadé, appréciés par tous ceux à qui ils s'adressent – par d'autres aussi sans doute – ceux-là mêmes qui, plus tard, diront : «Ma formation mathématique de base, je l'ai faite sur le MONIER !».

H. DURAND

Professeur en Mathématiques Spéciales PT
au lycée La Martinière Monplaisir à Lyon

Avant-propos

Ce nouveau Cours de Mathématiques avec exercices corrigés s'adresse aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles (1re et 2e années, toute filières), aux étudiants du premier cycle universitaire scientifique et aux candidats aux concours de recrutement de professeurs.

Le plan en est le suivant :

Tome 1 : Analyse 1
Tome 2 : Analyse 2 } ***Analyse*** en 1re année (2e édition, juin 1996)

Tome 3 : Analyse 3
Tome 4 : Analyse 4 } ***Analyse*** en 2e année (2e édition, juin 1997)

Tome 5 : Algèbre 1 : ***Algèbre*** en 1re année

Tome 6 : Algèbre 2 : ***Algèbre*** en 2e année

Tome 7 : Géométrie : ***Géométrie*** en 1re et 2e année (à paraître en 1997).

Pour vérifier sa bonne compréhension du cours, le lecteur trouvera dans chaque chapitre des exercices tous résolus et dont les solutions sont regroupées en fin de volume et qui sont, à de rares exceptions près, différents de ceux figurant dans les cinq recueils d'exercices déjà parus.

Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments corrigés.

J'accueillerai avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien me faire parvenir aux bons soins de Dunod, éditeur, 15, rue Gossin, 92513 Montrouge Cedex.

Jean-Marie Monier

Table des matières du tome 2

Première partie – Cours

Chapitre 7. – Fonctions usuelles 3

7.1. Logarithme népérien 3

7.2. Exponentielle 5

7.3. Logarithmes et exponentielles de base a 6
7.3.1. Logarithme de base a 6
7.3.2. Exponentielle de base a 8

7.4. Puissances 10

7.5. Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles 12

7.6. Fonctions hyperboliques directes 13

7.7. Supplément : fonctions hyperboliques réciproques 17
7.7.1. Argsh 17
7.7.2. Argch 18
7.7.3. Argth 19
7.7.4. Argcoth 20

7.8. Fonctions circulaires directes 22

7.9. Fonctions circulaires réciproques 27
7.9.1. Arcsin 27
7.9.2. Arccos 28
7.9.3. Arctan 29

7.10 Exponentielle complexe 33

Compléments 36

Chapitre 8. – Comparaison locale des fonctions 39

8.1. Prépondérance, domination 39
8.1.1. Définitions 39
8.1.2. Opérations relatives à la prépondérance et à la domination 41
8.1.3. Exemples usuels 43

8.2. Equivalence 44
8.2.1. Définition 44
8.2.2. Opérations relatives à l'équivalence 46

8.2.3. Equivalents usuels 48
8.2.4. Exemples d'utilisation d'équivalents 50

8.3. Développements limités 52
8.3.1. Généralités 52
8.3.2. Le théorème de Taylor-Young 55
8.3.3. Dérivation et primitivation pour un $DL(0)$ 57
8.3.4. Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$ 60
8.3.5. Exemples d'utilisation de développements limités 67

8.4. Notion de développement asymptotique 70
8.4.1. Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ 70
8.4.2. Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 71
8.4.3. Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles 71

8.5. Etude pratique d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, représentation graphique 74

Chapitre 9. – Calculs de primitives 79

9.1. Préambule 79

9.2. Changement de variable 81

9.3. Primitivation par parties 83

9.4. Liste des primitives usuelles 88

9.5. Primitivation des fonctions rationnelles 90

9.6. Primitivation de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles 94
9.6.1. Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$ 94
9.6.2. Fonctions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ 99
9.6.3. Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ 100
9.6.4. Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 101
9.6.5. Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 102

Chapitre 10. – Intégration sur un intervalle quelconque 107

10.1. Fonctions continues intégrables à valeurs réelles positives ou nulles 107
10.1.1. Définition 107
10.1.2. Propriétés algébriques 110
10.1.3. Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert 113

10.2. Fonctions continues intégrables à valeurs complexes 120
10.2.1 Généralités 120
10.2.2 Propriétés 123
10.2.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert 126

Chapitre 11. – Equations différentielles (1re étude) 135

11.1. Equations différentielles linéaires du premier ordre 135
11.1.1. Généralités 135
11.1.2. Résolution de l'équation sans second membre 136
11.1.3. Résolution de l'équation avec second membre 139

11.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme 147
11.2.1. Généralités 147
11.2.2. Résolution de l'équation sans second membre 148
11.2.3. Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme 151

11.3. Exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du premier ordre 156
11.3.1. Généralités 156
11.3.2. Equations différentielles à variables séparables 158
11.3.3. Equations homogènes 159
11.3.4. Equations de Bernoulli 162
11.3.5. Equations de Riccati 163
11.3.6. Equations incomplètes en x 164
11.3.7. Equations incomplètes en y 165
11.3.8. Equations de Lagrange et de Clairaut 166

Chapitre 12. – Notions sur les fonctions de deux variables réelles 169

12.1. Espace $\mathbb{R}^2$, suites dans $\mathbb{R}^2$ 169
12.1.1. Espace $\mathbb{R}^2$ 169
12.1.2. Parties ouvertes, parties fermées 173
12.1.3. Suites dans $\mathbb{R}^2$ 174

12.2. Limites, continuité 177
12.2.1. Limites 177
12.2.2. Continuité 177
12.2.3. Continuité partielle 181

12.3. Dérivées partielles premières 184
12.3.1. Définitions 184
12.3.2. Applications de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ 185

12.4. Dérivées partielles successives 192
12.4.1. Généralités 192
12.4.2. Applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ 193
12.4.3. Interversion des dérivations 194

12.5. Extremums des fonctions numériques de deux variables réelles 196
12.5.1. Définitions 196
12.5.2. Etude à l'ordre 1 197
12.5.3. Extremums globaux 198

12.6. Fonctions implicites 199
12.6.1. Le problème des fonctions implicites 199
12.6.2. Cas de deux variables réelles liées par une relation 200

12.7. Formes différentielles 206
12.7.1. Définitions 206
12.7.2. Formes différentielles exactes 206
12.7.3. Formes différentielles fermées 207
12.7.4. Plan d'étude d'une forme différentielle, exemples 209
12.7.5. Application à certaines équations différentielles du premier ordre 216

12.8. Analyse vectorielle 218
12.8.1. Définitions 218
12.8.2. Formules d'analyse vectorielle 219
12.8.3. Potentiel scalaire 219

Chapitre 13. – Compléments de calcul intégral (1re étude) 221

13.1. Intégrales curvilignes 221
13.1.1. Arcs orientés, courbes orientées 221
13.1.2. Définition de l'intégrale curviligne 223
13.1.3. Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne 225
13.1.4. Intégrale curviligne et forme différentielle exacte 229
13.1.5. Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée 232
13.1.6. Calculs d'aires planes 233

13.2. Intégrales doubles 237
13.2.1. Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$ 237
13.2.2. Définition de l'intégrale double 241
13.2.3. Propriétés élémentaires de l'intégrale double 244
13.2.4. Théorème de Fubini 245
13.2.5. Changement de variables dans une intégrale double 249
13.2.6. Formule de Green-Riemann 253

13.3. Intégrales triples 254
13.3.1. Parties cubables de $\mathbb{R}^3$ 254
13.3.2. Définition de l'intégrale triple 254
13.3.3. Propriétés élémentaires de l'intégrale triple 254
13.3.4. Théorème de Fubini 255
13.3.5. Changement de variables dans une intégrale triple 256

13.4. Masses, centres d'inertie, moments d'inertie 259
13.4.1. Systèmes matériels 259
13.4.2. Masse d'un système matériel 259
13.4.3. Centre d'inertie d'un système matériel 262
13.4.4. Moments d'inertie d'un système matériel 266

Deuxième partie
Indications et réponses des exercices

Chap. 7, **273**; Chap. 8, **293**; Chap. 9, **313**; Chap. 10, **325**; Chap. 11, **345**; Chap. 12, **357**; Chap. 13, **371** .

Index des notations 391

Index alphabétique 393

Table des matières du tome 1

Première partie – Cours

Chapitre 1. – Les nombres réels 3

1.1. Préambule 3

1.2. Nombres réels 4
1.2.1. Existence et unicité de $\mathbb{R}$ 4
1.2.2. Propriétés élémentaires des nombres réels 6
1.2.3. Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ 12

1.3. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ 20
Compléments 21

Chapitre 2. – Les nombres complexes 23

2.1. Préambule 23

2.2. Corps des nombres complexes 23
2.2.1. Définition 23
2.2.2. Conjugaison, partie réelle, partie imaginaire 25
2.2.3. Module 27
2.2.4. Arguments 29

2.3. Interprétation géométrique des nombres complexes 30
2.3.1. Plan complexe 30
2.3.2. Interprétation géométrique de l'addition dans $\mathbb{C}$ 31
2.3.3. Interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$ 31
2.3.4. Applications $z \mapsto az + b$ 32
2.3.5. CNS d'alignement de trois points du plan complexe 32
2.3.6. CNS de cocyclicité ou alignement de quatre points du plan complexe 33

2.4. Puissances et racines 34
2.4.1. Exponentielle d'un imaginaire pur 34
2.4.2. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul 34
2.4.3. Racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 37
2.4.4. Groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 38

2.5. Applications trigonométriques des nombres complexes 39
2.5.1. Développement de cos $n\theta$, sin $n\theta$, tan $n\theta$ 39
2.5.2. Linéarisation de cos $^p\theta$, sin $^p\theta$, cos $^p\theta$ sin $^q\theta$ 39
Compléments 42

Chapitre 3. – Suites numériques 43

3.1. Convergence, divergence 43
3.1.1. Définitions 43
3.1.2. Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes 46
3.1.3. Propriétés algébriques des suites convergentes 48
3.1.4. Exemples élémentaires de suites 54

3.2. Monotonie 59
3.2.1. Suites réelles monotones 59
3.2.2. Suites adjacentes 62

3.3. Suites extraites 65

3.4. Quelques types usuels de suites 68
3.4.1. Suites récurrentes affines du 1er ordre à coefficients constants 68
3.4.2. Suites récurrentes linéaires du 2e ordre à coefficients constants 68
3.4.3. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 72
Compléments 78

Chapitre 4. – Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle 83

4.1. Algèbre des fonctions 83
4.1.1. Algèbre $\mathbb{K}^X$ 83
4.1.2. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}^X$ 86
4.1.3. Parité 88
4.1.4. Périodicité 89
4.1.5. Applications en escalier sur un segment 91
4.1.6. Applications polynomiales, applications rationnelles 92
4.1.7. Monotonie 92
4.1.8. Applications majorées, minorées, bornées 94

4.2. Limites 97
4.2.1. Notion de limite 97
4.2.2. Ordre et limite 100
4.2.3. Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite 102
4.2.4. Cas des fonctions monotones 106

4.3. Continuité 109
4.3.1. Définitions 109
4.3.2. Opérations algébriques sur les applications continues 111
4.3.3. Continuité sur un intervalle 114
4.3.4. Continuité sur un segment 116
4.3.5. Application réciproque 118
4.3.6. Continuité uniforme 121
4.3.7. Applications lipschitziennes 123

Chapitre 5. – Dérivation 125

5.1. Dérivées 125
5.1.1. Dérivée en un point 125
5.1.2. Propriétés algébriques des fonctions dérivables en un point 128
5.1.3. Application dérivée 132
5.1.4. Dérivées successives 135
5.1.5. Classe d'une fonction 138
5.1.6. Différentielle 141

5.2. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis 142
5.2.1. Théorème de Rolle 142
5.2.2. Théorème des accroissements finis 143

5.3. Variations des fonctions 147
5.3.1. Etude de la monotonie pour une fonction dérivable 147
5.3.2. Etude des extremums pour une fonction dérivable 151

5.4. Fonctions convexes 154
5.4.1. Définition 154
5.4.2. Utilisation de dérivées dans l'étude de la convexité 158
5.4.3. Inégalités de convexité 160

Chapitre 6. – Intégration 163

6.1. Intégration des applications en escalier sur un segment 163
6.1.1. Algèbre des applications en escalier sur un segment 163
6.1.2. Intégrale d'une application en escalier sur un segment 165

6.2. Intégration des applications continues par morceaux sur un segment 168
6.2.1. Algèbre des applications continues par morceaux sur un segment 168
6.2.2 Approximation d'une application continue par morceaux sur un segment par des applications en escalier 169
6.2.3. Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment 170
6.3.4. Propriétés algébriques 172

6.3.5. Propriétés relatives à l'ordre 174
6.3.6. Relation de Chasles 178
6.3.7. Sommes de Riemann 180

6.3 Extension aux fonctions à valeurs complexes 183

6.4. Intégration et dérivation 185
6.4.1. Intégrale fonction de la borne d'en haut 185
6.4.2. Primitives 188
6.4.3. Changement de variable 190
6.4.4. Intégration par parties 191
6.4.5. Formule de Taylor avec reste intégral 193
6.4.6. Approximation d'une intégrale, méthode des rectangles, méthodes des trapèzes 195

Deuxième partie
Indications et réponses des exercices

Chap. 1, **203**; Chap. 2, **221**; Chap. 3, **233**; Chap. 4, **255**; Chap. 5, **263**; Chap. 6, **279**.

Index des notations 293

Index alphabétique 295

Cours

Chapitre 7

Fonctions usuelles

7.1 Logarithme népérien

◆ **Définition** On appelle **logarithme népérien**, et on note ln, l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On dit aussi que $\ln x$ est le logarithme népérien de x.

On a $\ln 1 = 0$; ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ceci montre que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

◆ **Théorème**

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b.$

Preuve :

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(ax) \end{array}$. L'application φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} = \ln'(x).$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \ln x + \lambda$.

Alors $\lambda = \varphi(1) = \ln a$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ax) = \ln a + \ln x$. ■

On déduit aisément du théorème les propriétés suivantes :

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- en particulier : $\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln(a_i)$

(démonstration immédiate par récurrence).

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln(a^n) = n \ln a.$

◆ **Proposition 1**

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$

Preuve :

1) Puisque ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ln admet en $+\infty$ une limite finie ou égale à $+\infty$.

S'il existait $L \in \mathbb{R}$ tel que $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$, alors $\ln(2x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$

et $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2 + L$, d'où $\ln 2 = 0$, contradiction avec $\ln 2 > \ln 1 = 0$.

Ceci montre : $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x = -\ln \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ d'après *1)*.

◆ **Proposition 2**

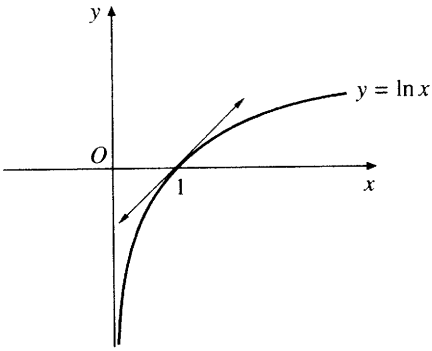
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Preuve :

ln est dérivable en 1 et $\dfrac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1.$ ■

Puisque ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0)$, ln est concave.

Nous verrons dans 7.5 Prop. 1 p. 12 que $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$; donc la courbe représentative de ln admet une branche parabolique de direction asymptotique $(x'x)$.



Exercices

◇ **7.1.1** Montrer pour tout (a,b) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\ln \frac{a+b}{4} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14\,ab.$$

◇ **7.1.2** Montrer : $\forall x \in]-1;1[-\{0\}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant -\dfrac{\ln(1-|x|)}{|x|}$.

7.2 Exponentielle

Puisque $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, et que $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$, l'application ln admet une application réciproque (cf. 4.3.5 Théorème, Tome 1, p. 119), appelée **exponentielle**, notée $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.

On a ainsi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp x \Longleftrightarrow x = \ln y$.

Souvent, on appelle aussi exp l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp x \end{array}$.

Les propriétés suivantes se déduisent de celles relatives au logarithme :

- l'application exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf. 5.3 Théorème 3, Tome 1, p. 149) et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp x.$$

Il est alors clair que exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- $\exp 0 = 1$, puisque $\ln 1 = 0$

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a+b) = (\exp a)(\exp b)$,

car $\ln(\exp(a+b)) = a + b = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = \ln((\exp a)(\exp b))$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exp(-b) = \frac{1}{\exp b}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (\exp a_i)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, \exp(na) = (\exp a)^n.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1.$

◆ **Proposition**

$\exp 1 = \mathrm{e}$.

Preuve :

Rappelons que e est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ (cf. 3.2.2 Exemple *1)*, Tome 1, p. 62).

Appliquons le théorème de Taylor avec reste intégral à exp sur $[0; 1]$ à l'ordre n :

$$\exp 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(x)\, \mathrm{d}x = u_n + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n \exp x \, \mathrm{d}x.$$

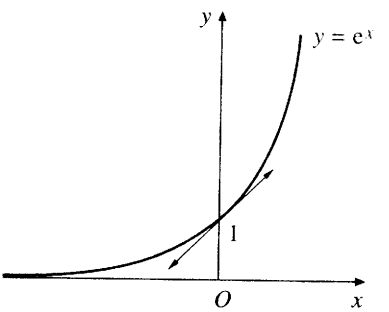
Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \exp x \, dx \leqslant \dfrac{\exp 1}{n!}$, on déduit $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \exp 1$, et donc $\exp 1 = e$.

■

La notation e^t a été définie jusqu'à maintenant lorsque $t \in \mathbb{Z}$ ou $t = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (cf. 1.2.3 2), Tome 1, p. 14). Dans ces deux cas, on voit que $\exp t$ coïncide avec e^t.
On peut donc prolonger la notation e^t au cas où $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t = \exp t.$$

Dorénavant, nous noterons e^t au lieu de $\exp t$.
Le courbe représentative de $x \longmapsto e^x$ est symétrique de celle de ln par rapport à la première bissectrice (dans un repère orthonormé).



Exercice

◇ **7.2.1** Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$. (Utiliser l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111).

7.3 Logarithmes et exponentielles de base a

Dans tout ce § 7.3, a désigne un réel fixé de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

7.3.1 Logarithme de base a

◆ **Définition** On appelle **logarithme de base** a, et on note $\log_a$, l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

On dit aussi que $\log_a x$ est le logarithme en base a de x.
En particulier : $\log_e = \ln$.

Les propriétés suivantes se déduisent aisément de celles du logarithme népérien :

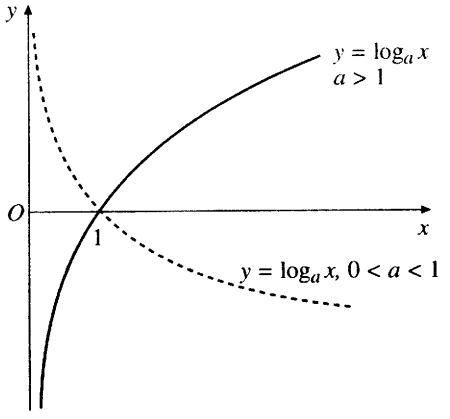
- $\log_a$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

- $\log_a 1 = 0$.
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- $\forall (a,b) \in (]0;1[\cup]1;+\infty[)^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

(formule de changement de base)

- $\forall a \in]0;1[\cup]1;+\infty[, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$.



Exercices

◇ **7.3.1** Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$; résoudre l'équation $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

◇ **7.3.2** Déterminer l'ensemble des $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a.$$

◇ **7.3.3** Trouver toutes les applications $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

(Utiliser l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111).

7.3.2 Exponentielle de base a

◆ **Définition** On appelle **exponentielle de base** a, et on note $\exp_a$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ réciproque de $\log_a$.

On a ainsi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, (y = \exp_a x \iff x = \log_a y)$.

◆ **Proposition**

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

Preuve : $x = \log_a(\exp_a x) = \dfrac{\ln(\exp_a x)}{\ln a}$, d'où $\ln(\exp_a x) = x \ln a$ puis $\exp_a x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

Les propriétés suivantes se déduisent aisément de celles de l'exponentielle (cf. 7.2 p. 5) ou du logarithme en base a (cf. 7.3.1 p. 7) :

- $\exp_a$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp_a)'(x) = (\ln a)(\exp_a x).$$

- $\exp_a(0) = 1$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$.
- $\forall a \in]0;1[\cup]1;+\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, \exp_{\frac{1}{a}}(x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$.

La notation a^x a été définie jusqu'à maintenant lorsque ($a \in \mathbb{R}_+^*$ et ($x \in \mathbb{Z}$ ou $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}^*$)) ou lorsque $a = \mathrm{e}$. Dans ces cas (et pour $a \neq 1$), on a :

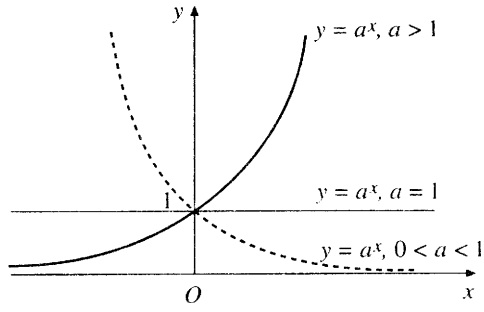
$\begin{cases} \ln(a^x) = x \ln a \\ \ln(\exp_a x) = x \ln a \end{cases}$, d'où $a^x = \exp_a(x)$.

On peut donc prolonger la notation a^x au cas $x \in \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = \exp_a x$.

Dorénavant, nous noterons a^x au lieu de $\exp_a x$.

On définit aussi : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, 1^x = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0^x = 0 \\ 0^0 = 1 \end{cases}$.

Les courbes représentatives de $x \longmapsto a^x$ et $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à $(y'y)$.



En récrivant les propriétés de $\exp_a$ avec la notation a^x, on obtient :

- $\forall a \in \mathbb{R}_+, a^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, 1^x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0^x = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a^x a^y = a^{x+y}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (a^x)^y = a^{xy}$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in \mathbb{R}, (ab)^x = a^x b^x$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Exercices

◇ **7.3.4** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^{2x} - 34 \cdot 15^{x-1} + 5^{2x} = 0$ *b)* $x^x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}, x > 0$

c) $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}, x > 0.$

◇ **7.3.5** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x^{x+y} = y^4 \\ y^{x+y} = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}.$

◇ **7.3.6** Montrer : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \left(\begin{cases} a^a = b \\ b^b = a \end{cases} \Longrightarrow a = b = 1 \right)$.

◇ **7.3.7** Résoudre dans $(\mathbb{R}_+)^3$: $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \cdot 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$.

◇ **7.3.8** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(f\left(\frac{x+y}{2} \right) \right)^2 = f(x) f(y).$$

(Utiliser l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111).

◇ **7.3.9*** Déterminer $\operatorname*{Sup}_{x \in]0;+\infty[} (2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}})$.

7.4 Puissances

◆ **Définition** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on appelle **puissance d'exposant** α l'application, notée ici p_α, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $p_\alpha(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

Si $\alpha > 0$, alors $\mathrm{e}^{\alpha \ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, et on peut donc compléter p_α par continuité à droite en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

D'autre part, p_0 peut être complétée par continuité en 0 par $p_0(0) = 1$.

L'application p_α est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \begin{cases} p'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \alpha \, \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha x^{\alpha-1} \\ p''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{cases}.$$

On en déduit le tableau de variations de p_α et le sens de la concavité de la courbe représentative de p_α.

Si $\alpha > 1$, p_α est dérivable en 0 et $p'_\alpha(0) = 0$.

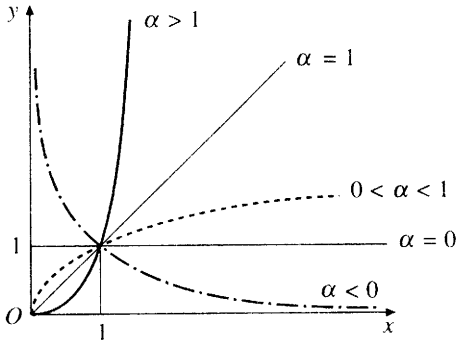
Si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0 et $p'_\alpha(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Cas $\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$p'_\alpha(x)$		$-$	
$p_\alpha(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Cas $\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$p'_\alpha(x)$		$+$	
$p_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Représentation graphique de $x \mapsto x^\alpha$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les applications $\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^\alpha\end{array}$ et $\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^{1/\alpha}\end{array}$ sont réciproques l'une de l'autre. En particulier, pour tout (n,x) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Remarque : L'usage veut que, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note a^{b^c} pour $a^{(b^c)}$.

Exercices

◇ **7.4.1** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} < 2\sqrt[n]{n}$.

◇ **7.4.2** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 7$: $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$.

◇ **7.4.3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1$

b) $\sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{x-13} = 4$.

◇ **7.4.4** Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $(1+x)^{1/4} \geqslant 1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x^2}{32}$.

◇ **7.4.5** Trouver toutes les applications $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in (]0; +\infty[)^2, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

(Utiliser l'exercice 7.2.1 p. 6).

7.5 Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles

◆ **Proposition 1**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Preuve :

Pour tout x de $]1;+\infty[$, on a : $0 < \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2(\sqrt{x}-1) < 2\sqrt{x}$,

d'où $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, et donc, par le théorème d'encadrement : $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

◆ **Proposition 2**

$$\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

Preuve : $\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\dfrac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ d'après la Prop. 1 et $x^{\frac{\beta}{\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

On dit que les puissances du logarithme sont *négligeables* devant les puissances d'exposant > 0 de la variable en $+\infty$.

◆ **Proposition 3**

$$\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x\to0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

Preuve :

Il suffit d'effectuer le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ (ce qui revient à une composition de fonctions) pour se ramener à la Prop. 2 : $x^\beta|\ln x|^\alpha = X^{-\beta}(\ln X)^\alpha = \dfrac{(\ln X)^\alpha}{X^\beta}$.

On dit que les puissances du logarithme sont *négligeables* devant les puissances d'exposant > 0 de la variable en 0.

◆ **Proposition 4**

$$\forall a \in]1;+\infty[, \forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

Preuve :

Le changement de variable $y = \mathrm{e}^x$ nous ramène à la Prop. 2 :

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln a}}{x^\alpha} = \frac{y^{\ln a}}{(\ln y)^\alpha}, \text{ et } \ln a > 0.$$

On dit que les exponentielles de bases > 1 *l'emportent* sur les fonctions puissances en $+\infty$.

◆ **Proposition 5**

$\forall a \in]1;+\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0.$

Preuve :

Le changement de variable $t = -x$ nous ramène à la Prop. 4 :

$$a^x |x|^\alpha = a^{-t} t^\alpha = \left(\frac{a^t}{t^\alpha}\right)^{-1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

On dit que les exponentielles de bases > 1 l'*emportent* sur les fonctions puissances en $-\infty$.

Exemples de calculs de limites utilisant la comparaison entre logarithmes, puissances, exponentielles :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$? $\quad x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ et $x \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, donc $x^x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$? $\quad \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$? $\quad \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}} = \dfrac{(\sqrt{x})^6}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 x^4 \mathrm{e}^{-x}$? $\quad (\ln x)^2 x^4 \mathrm{e}^{-x} = \left(\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)(x^5 \mathrm{e}^{-x}) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$

7.6 Fonctions hyperboliques directes

◆ **Définition 1** On appelle :

sinus hyperbolique l'application $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

cosinus hyperbolique l'application $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

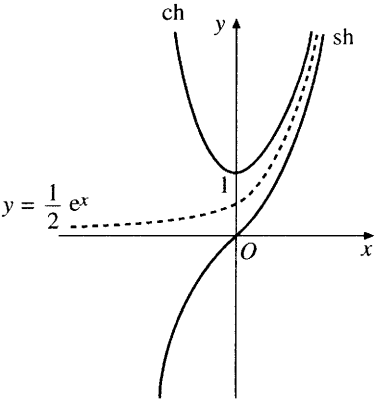
Les applications sh et ch sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et : $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$; sh est impaire et ch est paire. On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x > 0$
- $\mathrm{sh}\, 0 = 0, \mathrm{ch}\, 0 = 1$
- $\mathrm{sh}' 0 = 1, \mathrm{ch}' 0 = 0.$

On en déduit les tableaux de variations :

x	0		$+\infty$
$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$	1	$+$	
sh	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		$+\infty$
$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$	0	$+$	
ch	1	$\nearrow$	$+\infty$



La proposition suivante est immédiate :

◆ **Proposition**

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$

On en déduit une représentation paramétrique de l'hyperbole (H) d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est fixé) : $\begin{cases} x = \varepsilon a\, \mathrm{ch}\, t \\ y = b\, \mathrm{sh}\, t \end{cases}$, $(\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$, ce qui justifie le terme «hyperbolique» pour ces fonctions.

◆ **Définition 2** On appelle :

tangente hyperbolique l'application

$$\mathrm{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

cotangente hyperbolique l'application

$$\coth : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \coth x = \frac{1}{\mathrm{th}\, x} = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}.$$

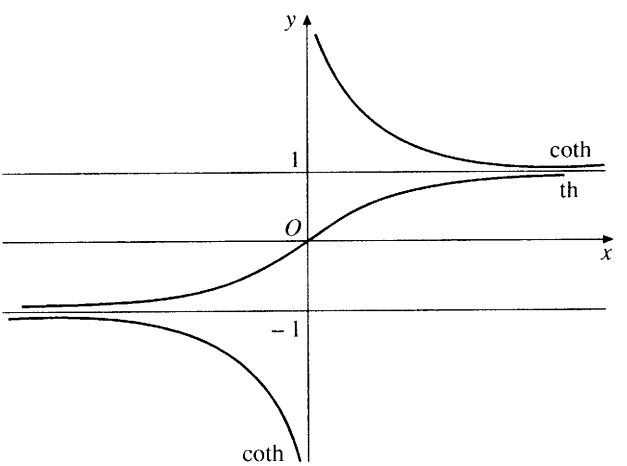
- Les applications th et coth sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement, et

$$\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$$
$$\coth' = -\frac{1}{\text{sh}^2} = 1 - \coth^2$$

- th et coth sont impaires
- $\lim\limits_{+\infty} \text{th} = 1$, $\lim\limits_{+\infty} \coth = 1$.

x	0		$+\infty$
$\text{th}'x$	1	$+$	
$\text{th}\, x$	0	$\nearrow$	1

x	0		$+\infty$
$\coth' x$	$\Vert$	$-$	
$\coth x$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1



Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On obtient aisément les formules suivantes, pour tous x, a, b, p, q de $\mathbb{R}$:

- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
- $\text{ch}(a+b) = \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b$

  $\text{ch}(a-b) = \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b - \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b$

  $\text{sh}(a+b) = \text{sh}\, a\, \text{ch}\, b + \text{ch}\, a\, \text{sh}\, b$

  $\text{sh}(a-b) = \text{sh}\, a\, \text{ch}\, b - \text{ch}\, a\, \text{sh}\, b$

  $$\text{th}(a+b) = \frac{\text{th}\, a + \text{th}\, b}{1 + \text{th}\, a\, \text{th}\, b}$$

  $$\text{th}(a-b) = \frac{\text{th}\, a - \text{th}\, b}{1 - \text{th}\, a\, \text{th}\, b}.$$

- $\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$

  $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$

  $\operatorname{th} 2a = \dfrac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}.$

- $\operatorname{ch}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}, \operatorname{sh}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}.$

- $\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{ch} \dfrac{p-q}{2}$

  $\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{sh} \dfrac{p-q}{2}$

  $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{ch} \dfrac{p-q}{2}$

  $\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{ch} \dfrac{p+q}{2} \operatorname{sh} \dfrac{p-q}{2}.$

Nous verrons dans le Tome 3 que les fonctions réelles ch, sh, cos, sin peuvent être prolongées aux complexes par les formules :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} \operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), & \operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \\ \cos z = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & \sin z = \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{cases},$$

et nous aurons alors : $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \cos iz = \operatorname{ch} z \\ \sin iz = i \operatorname{sh} z \end{cases}.$

Pour obtenir le formulaire de trigonométrie hyperbolique à partir du formulaire de trigonométrie circulaire (mieux connu), il suffit donc de remplacer cos par ch et sin par ish (et donc tan par ith).

Par exemple : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

donne : $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - (i \operatorname{sh} x)(i \operatorname{sh} y)$

c'est-à-dire : $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$

Exercices

◇ **7.6.1** Pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2 \operatorname{ch}(2^k x) - 1)$.

◇ **7.6.2** Pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((k+1)x)}$, après avoir remarqué :

$\operatorname{th}((k+1)x) - \operatorname{th}(kx) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((k+1)x)}.$

◇ **7.6.3** Pour $(a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f_a : x \longmapsto e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$.

◇ **7.6.4** Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation $\operatorname{ch} x + \cos a = 2 \operatorname{sh} x + \sin a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

◇ **7.6.5** Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{25}{12} \end{cases}$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7.7 Supplément : fonctions hyperboliques réciproques

7.7.1 Argsh

L'application sh : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, et $\lim\limits_{-\infty} \text{sh} = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \text{sh} = +\infty$; l'application sh admet donc une application réciproque, notée Argsh : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

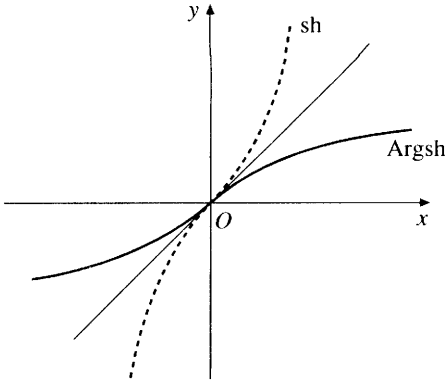
On a ainsi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (y = \text{Argsh}\, x \iff x = \text{sh}\, y)$.

Argsh est impaire.

Puisque sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall y \in \mathbb{R}, \text{sh}'\, y = \text{ch}\, y \geqslant 1)$, Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}\, x)} = \dfrac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}\, x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il en résulte que Argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

x	0		$+\infty$
$\text{Argsh}'\, x$	1	$+$	
$\text{Argsh}\, x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Expression logarithmique de Argsh x

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$y = \text{Argsh}\, x \iff x = \text{sh}\, y \iff x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\right) \iff \mathrm{e}^{2y} - 2x\mathrm{e}^y - 1 = 0.$$

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ (d'inconnue $Y \in \mathbb{R}$) admet deux solutions réelles $x - \sqrt{1+x^2}$ (< 0) et $x + \sqrt{1+x^2}$ (> 0). Comme $\mathrm{e}^y > 0$, on obtient : $y = \text{Argsh}\, x \iff \mathrm{e}^y = x + \sqrt{1+x^2}$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

On peut d'ailleurs ainsi retrouver la valeur de la dérivée de Argsh :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Argsh}'\, x = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7.7.2 Argch

L'application ch : $[0;+\infty[\longrightarrow [1;+\infty[$ est continue, strictement croissante, et $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$; l'application ch admet donc une application réciproque, notée Argch : $[1;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$.

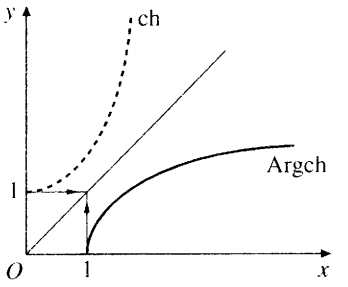
On a ainsi : $\forall (x,y) \in [1;+\infty[\times[0;+\infty[, \quad (y = \mathrm{Argch}\, x \iff x = \mathrm{ch}\, y)$.

Puisque ch est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $(\forall y \in]0;+\infty[, \mathrm{ch}'\, y = \mathrm{sh}\, y > 0)$, Argch est dérivable sur $]1;+\infty[$ et :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{Argch}\, x)} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Il en résulte que Argch est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$\mathrm{Argch}'\, x$	$\Vert$ $+\infty$	$+$	
$\mathrm{Argch}\, x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Expression logarithmique de Argch x

Pour tout (x,y) de $[1;+\infty[\times[0;+\infty[$, on a :

$$y = \mathrm{Argch}\, x \iff x = \mathrm{ch}\, y \iff x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) \iff \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^y + 1 = 0.$$

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ (d'inconnue $Y \in \mathbb{R}$) admet deux solutions réelles (si $x > 1$) $Y_1 = x - \sqrt{x^2-1}$, $Y_2 = x + \sqrt{x^2-1}$. Puisque $y \geqslant 0$, on a : $\mathrm{e}^y \geqslant 1$.

D'autre part : $0 \leqslant Y_1 \leqslant 1 \leqslant Y_2$, puisque $Y_1 Y_2 = 1$ et $Y_1 + Y_2 = x \geqslant 0$.

On déduit : $y = \mathrm{Argch}\, x \iff \mathrm{e}^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2-1}$.

Ainsi : $\forall x \in [1;+\infty[, \mathrm{Argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

On retrouve : $\forall x \in]1;+\infty[, \mathrm{Argch}'\, x = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7.7.3 Argth

L'application th : $\mathbb{R} \longrightarrow]-1;\,1[$ est continue, strictement croissante, et $\lim\limits_{-\infty} \text{th} = -1$, $\lim\limits_{+\infty} \text{th} = 1$; l'application th admet donc une application réciproque, notée Argth : $]-1;\,1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

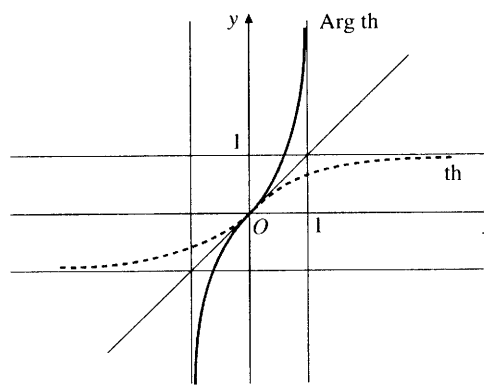
On a ainsi : $\forall (x,y) \in]-1;\,1[\times\mathbb{R},\ (y = \text{Argth}\, x \iff x = \text{th}\, y)$.

Argth est impaire.

Puisque th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall y \in \mathbb{R},\ \text{th}'\, y = 1 - \text{th}^2\, y > 0)$, Argth est dérivable sur $]-1;\,1[$ et : $\forall x \in]-1;\,1[$, $\text{Argth}'x = \dfrac{1}{\text{th}'(\text{Argth}\, x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Il en résulte que Argth est de classe C^∞ sur $]-1;\,1[$.

x	0		1
$\text{Argth}'\, x$	1	$+$	
$\text{Argth}\, x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Expression logarithmique de Argth

Pour tout (x,y) de $]-1;\,1[\times\mathbb{R}$, on a :

$$y = \text{Argth}\, x \iff x = \text{th}\, y \iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \iff x(e^{2y}+1) = e^{2y} - 1$$
$$\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \iff y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Ainsi : $\forall x \in]-1;\,1[$, $\text{Argth}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

On retrouve : $\forall x \in]-1 : 1[$, $\text{Argth}'x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7.7.4 Argcoth

L'application coth : $]\infty; 0[\cup]0; +\infty[\longrightarrow]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ est continue, strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et $\lim\limits_{-\infty} \coth = -1$, $\lim\limits_{0^-} \coth = -\infty$, $\lim\limits_{0^+} \coth = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \coth = 1$; l'application coth admet donc une application réciproque, notée Argcoth : $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\longrightarrow]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

On a ainsi : $\forall (x,y) \in (]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[) \times \mathbb{R}^*$,

$(y = \text{Argcoth}\, x \iff x = \coth y)$.

Argcoth est impaire.

Puisque coth est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et que

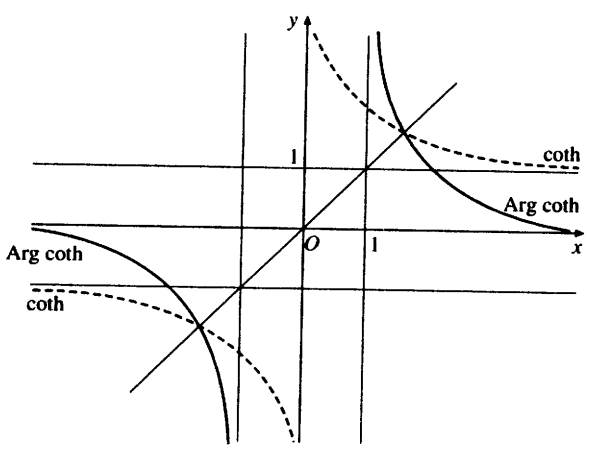
$(\forall x \in \mathbb{R}^*, \coth' x = 1 - \coth^2 x < 0)$,

Argcoth est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \quad \text{Argcoth}'(x) = \frac{1}{\coth'(\text{Argcoth}\, x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Il en résulte que Argcoth est de classe C^∞ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

x	1		$+\infty$
Argcoth′ x	‖	$-$	
Argcoth x	‖ $+\infty$	↘	0



Expression logarithmique de Argcoth x

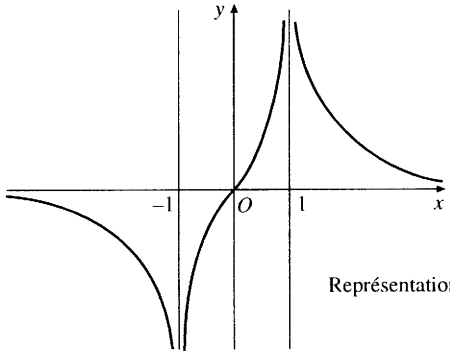
Pour tout x de $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, on a :

$$\text{Argcoth}\, x = \text{Argth}\, \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Ainsi : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $\operatorname{Argcoth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

Remarque : On peut «regrouper» les applications Argth et Argcoth en une seule, l'application $f : \mathbb{R} - \{-1; 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ et : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.



Représentation graphique de f

Exercices

◇ **7.7.1** Etudier les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules suivantes (variable x; transformer l'expression) :

a) $\operatorname{ch}(2\operatorname{Argth} x)$ *b)* $\operatorname{th}(3\operatorname{Argth} x)$ *c)* $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Argch} x\right)$

d) $\operatorname{Argth}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *e)* $\operatorname{Argth}\dfrac{1+3\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}$.

◇ **7.7.2** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\operatorname{Argch} x = \operatorname{Argsh}(2-x)$ *b)* $\operatorname{Argch}(4x^3 - 3x) - \operatorname{Argch}(2x^2 - 1) = 1$.

◇ **7.7.3** Pour x, y réels, transformer :

a) $\operatorname{Argsh} x + \operatorname{Argsh} y$ *b)* $\operatorname{Argch} x + \operatorname{Argch} y$

c) $\operatorname{Argth} x + \operatorname{Argth} y$ *d)* $\operatorname{Argcoth} x + \operatorname{Argcoth} y$.

◇ **7.7.4** Etudier les composées $g \circ f$ où $f \in \{\operatorname{Argsh}, \operatorname{Argch}, \operatorname{Argth}, \operatorname{Argcoth}\}$ et $g \in \{\operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \operatorname{th}, \operatorname{coth}\}$.

◇ **7.7.5** Montrer que la loi $*$ définie par :
$x * y = \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} + xy$ est interne dans $[1; +\infty[$.
Est-ce que $([1; +\infty[, *)$ est un groupe ?

◇ **7.7.6** Mêmes questions qu'en 7.7.5 pour $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ dans $]-1; 1[$.

◇ **7.7.7** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1; 1[$ continues telles que :
$\forall (x,y) \in (]-1; 1[)^2$, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
(Utiliser les exercices 4.3.3, Tome 1, p. 111 et 7.7.3 *c)*).

◇ **7.7.8** CNS sur $a \in \mathbb{R}$ pour que les courbes d'équations $y = \operatorname{sh} x$, $y = 2x + a$ aient trois points communs distincts.

7.8 Fonctions circulaires directes

Nous supposons connues la définition et les propriétés usuelles des fonctions circulaires directes sin, cos, tan, cotan. Le lecteur trouvera dans C 7.1 p. 36 une construction élémentaire de ces fonctions, et pourra se reporter au Tome 3 pour une construction classique utilisant des séries entières.

Rappelons :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$

- sin, cos, tan, cotan sont de classe C^∞ sur leurs ensembles de définition et :

  $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin' x = \cos x, \cos' x = -\sin x)$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \operatorname{cotan}' x = -(1 + \operatorname{cotan}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

- Formules d'addition :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{cases} \quad \text{lorsque ces éléments sont définis.}$$

- Formules de linéarisation :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \end{cases}.$$

- Transformation de sommes en produits :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p-q}{2} \sin \dfrac{p+q}{2} \end{cases}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right), \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

- En notant $t = \tan \dfrac{x}{2}$, on a : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, lorsque ces éléments sont définis.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \end{cases}.$

- sin est 2π-périodique, impaire et, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

- cos est 2π-périodique, paire et, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

- tan est π-périodique, impaire et, pour tout x de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cotan}\, x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}\, x.$$

- Pour tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$:

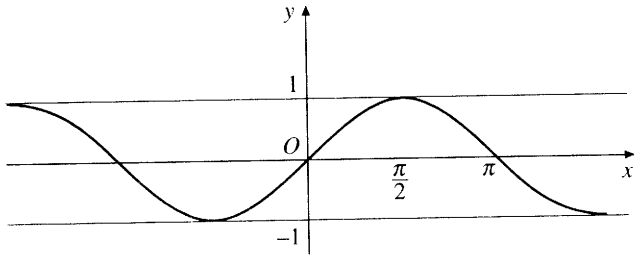
$$\cos b = \cos a \iff \left| \begin{array}{l} b \equiv a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ b \equiv -a \quad [2\pi] \end{array} \right. ,$$

$$\sin b = \sin a \iff \left| \begin{array}{l} b \equiv a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ b \equiv \pi - a \quad [2\pi] \end{array} \right. .$$

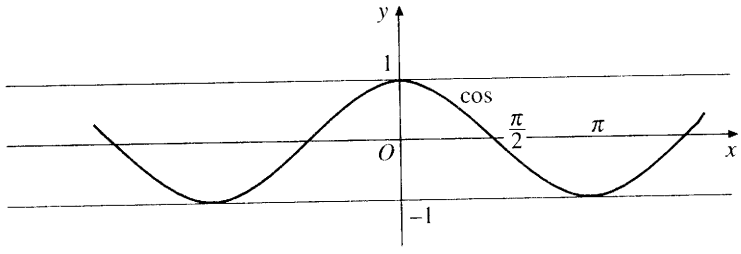
Pour tout (a,b) de $\left(\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)^2$: $\tan b = \tan a \iff b \equiv a \quad [\pi]$.

- Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta_0 \in [-\pi\,;\pi[$ unique tel que :

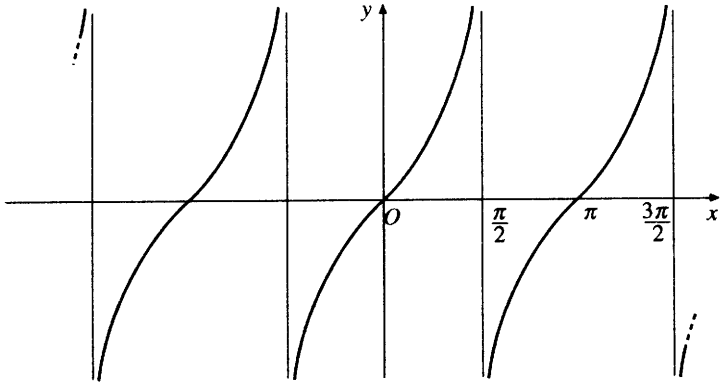
$$\left\{ \theta \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{array} \right. \right\} = \theta_0 + 2\pi\ \mathbb{Z}.$$



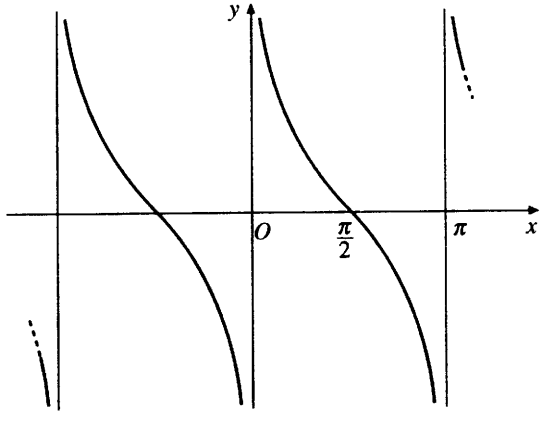
Représentation graphique de sin



Représentation graphique de cos



Représentation graphique de tan



Représentation graphique de cotan

Exercices

◇ **7.8.1** Calculer ou simplifier, lorsqu'elles sont définies, les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\sin x + \sin(nx) + \sin((2n-1)x)}{\cos x + \cos(nx) + \cos((2n-1)x)}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x)$ (on supposera : $\forall k \in \{0,\ldots,n+1\}, 2^k x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$)

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$

d) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{\cos(2^k x)}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tan(kx)\tan((k+1)x)$

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) + \cos\left(\frac{y}{2^k}\right)\right)$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\sin((k+1)x)$ (utiliser l'exercice 2.5.1, Tome 1, p. 41)

h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k x \cos(kx)$ (utiliser l'exercice 2.5.4, Tome 1, p. 41)

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cos^3(3^k x)}{3^k}$.

◇ **7.8.2** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos a_k.$$

◇ **7.8.3** Etablir : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, |\sin(nx)| < n|\sin x|$.

◇ **7.8.4** Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) > 0?$$

◇ **7.8.5** Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3$.

◇ **7.8.6** Montrer : $\forall (x,y) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin(\sqrt{xy}) \geqslant \sqrt{\sin x \sin y}$.

◇ **7.8.7** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1$ *b)* $\sin x + \sin 2x < \sin 3x$.

◇ **7.8.8** Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)$.

Vérifier, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$\operatorname{th}\frac{f(x)}{2} = \tan\frac{x}{2}$, $\operatorname{th} f(x) = \sin x$, $\operatorname{ch} f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{sh} f(x) = \tan x$.

◇ **7.8.9** Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.
Montrer : $(x,y,z) \in (]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[)^3 \cup ([-1; 1]^3)$.

7.9 Fonctions circulaires réciproques

7.9.1 Arcsin

L'application sin : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1]$ est continue, strictement croissante, et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; l'application sin admet donc une application réciproque, notée Arcsin : $[-1; 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a ainsi : $\forall (x, y) \in [-1; 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $(y = \operatorname{Arcsin} x \Longleftrightarrow x = \sin y)$.

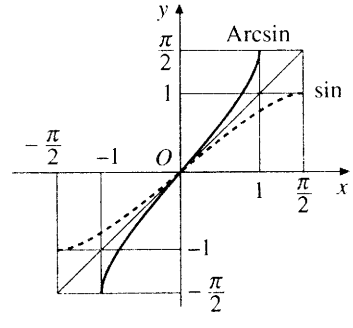
Arcsin est impaire.

Puisque sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et que $(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \sin' y = \cos y \neq 0)$, Arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1; 1[$.

x	-1		1
$\operatorname{Arcsin}' x$	$\Vert\ +\infty$	$+$	$+\infty\ \Vert$
$\operatorname{Arcsin} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



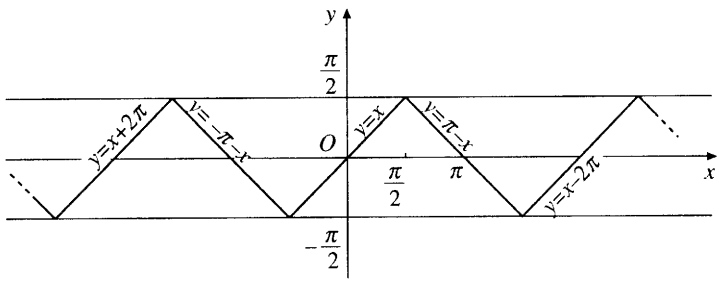
Représentation graphique de Arcsin

Remarques :

1) $\forall x \in [-1;\,1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.

2) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x) \end{array}$; f est 2π-périodique, impaire, et

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$



Représentation graphique de Arcsin o sin

7.9.2 Arccos

L'application $\cos : [0;\,\pi] \longrightarrow [-1;\,1]$ est continue, strictement décroissante, et $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$; l'application cos admet donc une application réciproque, notée $\operatorname{Arccos} : [-1;\,1] \longrightarrow [0;\,\pi]$.

On a ainsi :

$$\forall (x, y) \in [-1;\,1] \times [0;\,\pi], \quad (y = \operatorname{Arccos} x \Longleftrightarrow x = \cos y).$$

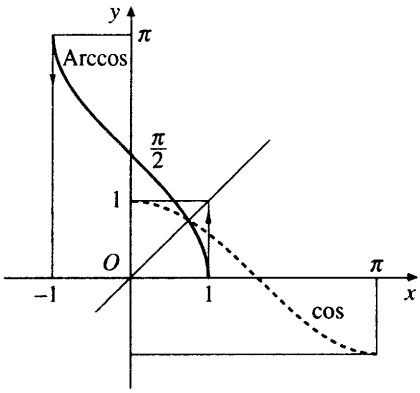
Arccos n'est ni paire ni impaire.

Puisque cos est dérivable sur $[0;\,\pi]$ et que $(\forall y \in]0;\,\pi[, \cos' y = -\sin y \neq 0)$, Arccos est dérivable sur $]-1;\,1[$ et :

$$\forall x \in]-1;\,1[, \quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que Arccos est de classe C^∞ sur $]-1;\,1[$.

x	-1		1
$\operatorname{Arccos}' x$	$\Vert\ -\infty$	$-$	$-\infty\ \Vert$
$\operatorname{Arccos} x$	π	$\searrow$	0

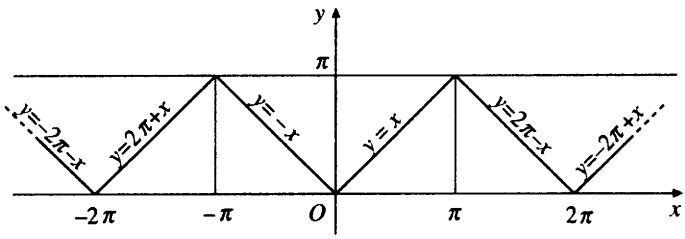


Représentation graphique de Arccos

Remarques :

1) $\forall x \in [-1;\, 1]$, $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$.

2) Soit $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{Arccos}(\cos x) \end{array}$; g est 2π-périodique, paire, et : $\forall x \in [0;\, \pi]$, $g(x) = x$.



Représentation graphique de Arccos o cos

3) On a : $\forall x \in [-1;\, 1]$, $\text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x$, car $\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x \in [0;\, \pi]$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x\right) = \sin(\text{Arcsin}\, x) = x$.

Ceci permet de ramener l'étude de Arccos à celle de Arcsin. La courbe représentative de Arccos se déduit de celle de Arcsin par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{4}$ et de direction $(y'y)$.

7.9.3 Arctan

L'application $\tan : \left]-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, et $\lim\limits_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan = -\infty$, $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan = +\infty$; l'application tan admet donc une application réciproque, notée $\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On a ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad (y = \operatorname{Arctan} x \Longleftrightarrow x = \tan y).$$

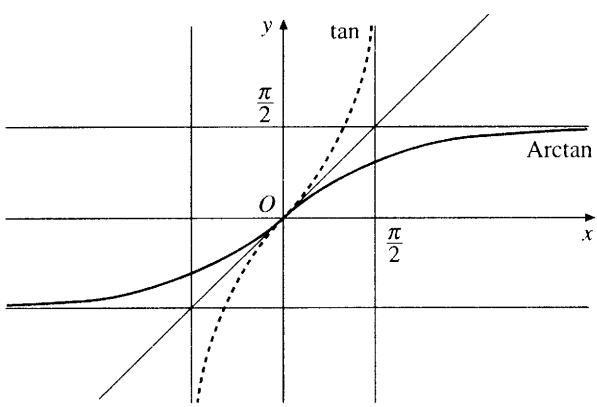
Arctan est impaire.

Puisque tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et que $(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \tan' y = 1+\tan^2 y \neq 0)$, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il en résulte que Arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

x	0		$+\infty$
$\operatorname{Arctan}' x$	1	$+$	
$\operatorname{Arctan} x$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

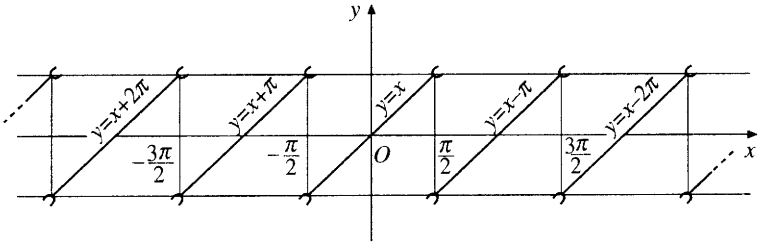


Représentation graphique de Arctan

Remarques :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.

2) La fonction $h : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$ est définie sur $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, π-périodique, impaire et : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[, h(x) = x$.



Représentation graphique de Arctan o tan

◆ **Proposition**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

Preuve :

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \frac{1}{\tan(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{x}$;

il en résulte : $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$.

Raisonner de façon analogue lorsque $x \in \mathbb{R}_-^*$ (ou utiliser un argument de parité).

La fonction signe, notée sgn, est définie par : $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Exercice : étude de Arctan a + Arctan b

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = \operatorname{Arctan} a$, $\beta = \operatorname{Arctan} b$. On a : $(\alpha,\beta) \in \left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)^2$ et, si, $\alpha + \beta \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ dans lequel se trouve $\alpha + \beta$.

Déjà : $-\pi < \alpha + \beta < \pi$.

On a : $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \iff \left| \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \text{ou } \left(\alpha > 0 \text{ et } \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \text{ou } \left(\alpha < 0 \text{ et } \beta > -\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{array} \right.$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou } \left(a > 0 \text{ et } b < \frac{1}{a}\right) \\ \text{ou } \left(a < 0 \text{ et } b > \frac{1}{a}\right) \end{cases} \iff ab < 1.$$

Nous pouvons maintenant discuter :

- Si $ab < 1$, alors $\alpha + \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, et donc $\alpha + \beta = \operatorname{Arctan}(\tan(\alpha + \beta))$

$= \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab}$.

- Si $(ab > 1$ et $a > 0)$, alors $\alpha + \beta \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, et donc $\alpha + \beta = \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi$.
- Si $(ab > 1$ et $a < 0)$, alors $\alpha + \beta \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$, et donc $\alpha + \beta = \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} - \pi$.
- Le cas $ab = 1$ a été étudié, Prop. p. 31.

Finalement :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a & \text{si } ab = 1 \\ \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi \operatorname{sgn} a & \text{si } ab > 1 \end{cases}.$$

Pour une autre méthode, voir exercice 7.9.1.

Exercices

◇ **7.9.1** Retrouver le résultat relatif à $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ (cf. 7.9.3) en étudiant, pour a fixé, la fonction $f_a : x \longmapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{a+x}{1-ax}$.

◇ **7.9.2** Etudier les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules suivantes (variable x ; transformer l'expression) :

a) $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$ *b)* $\tan(3 \operatorname{Arctan} x)$

c) $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} x\right)$ *d)* $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

e) $\operatorname{Arccos} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *f)* $2 \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{Arcsin} 2x\sqrt{1-x^2}$

g) $\operatorname{Arccos}(2x^2 - 1)$.

◇ **7.9.3** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{3} + \operatorname{Arccos} \frac{1}{4}$ *b)* $\operatorname{Arcsin}(\tan x) = x$

c) $2 \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos}(|2x^2 - 1|)$ *d)* $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1 - x)$

e) $\operatorname{Arctan} x + 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$ *f)* $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 2x = \frac{\pi}{4}$.

◇ **7.9.4** Montrer :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)| = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$ *b)* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$.

◇ **7.9.5** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \text{Arcsin}\, y = 2\,\text{Arcsin}\, x \\ 2\,\text{Arccos}\, y = \text{Arccos}\, x \end{cases}$.

◇ **7.9.6** Etudier les composées $g \circ f$ où $f \in \{\text{Arcsin}, \text{Arccos}, \text{Arctan}\}$ et $g \in \{\sin, \cos, \tan\}$.

◇ **7.9.7** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}\, x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

◇ **7.9.8** Pour $(a,b,x) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < x < b$, comparer $\text{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$ et $\text{Arctan}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.

◇ **7.9.9** Montrer que la loi $*$ définie par : $x * y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ est interne dans $[-1;1]$, et que $([-1;1],*)$ est un groupe.

7.10 Exponentielle complexe

◆ **Définition** Pour $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'**exponentielle de** z, notée $\exp(z)$, par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

L'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie prolonge l'application $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en 7.2 p. 5, ainsi que l'application $\mathrm{i}\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ vue en 2.4.1, Tome 1, p. 34.

On peut donc noter e^z au lieu de $\exp(z)$.

◆ **Théorème 1**

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Preuve :

En notant $z = x + \mathrm{i}y$, $z' = x' + \mathrm{i}y'$, $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+z'} &= \mathrm{e}^{x+x'}(\cos(y+y') + \mathrm{i}\sin(y+y')) \\ &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{x'}((\cos y\cos y' - \sin y\sin y') + \mathrm{i}(\sin y\cos y' + \cos y\sin y')) \\ &= (\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y))(\mathrm{e}^{x'}(\cos y' + \mathrm{i}\sin y')) = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}. \end{aligned}$$ ■

On déduit :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}, \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{z_k}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \left(\mathrm{e}^z \neq 0 \text{ et } \mathrm{e}^{-z} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^z}\right)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, (\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$.

On remarquera que la notation $(\mathrm{e}^z)^n$ (pour z complexe quelconque) n'est définie, jusqu'à maintenant, que lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

◆ **Théorème 2** L'application $\varepsilon : \theta \longmapsto e^{i\theta}$ est une bijection continue de $]-\pi\,;\pi[$ sur $\mathbb{U} - \{-1\}$, et l'application réciproque de ε est continue sur $\mathbb{U} - \{-1\}$.

Preuve : (pouvant être omise en première lecture) :

1) Il est clair que : $\forall \theta \in]-\pi\,;\pi[, \quad \varepsilon(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{U} - \{-1\}$.

2) Soit $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$. En notant $x = \text{Ré}(z)$, $y = \text{Im}(z)$, on a : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x^2 + y^2 = 1$.
Il existe donc $\theta \in [-\pi\,;\pi[$ (unique) tel que : $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ (cf. 7.8 p. 24). De plus : $\theta \neq -\pi$.
Ainsi, $z = e^{i\theta} = \varepsilon(\theta)$, ce qui montre la surjectivité de ε.

3) Si $(\theta_1\theta_2) \in]-\pi\,;\pi[^2$ et $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, alors $\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\theta_1 = \theta_2$, d'où l'injectivité de ε.

4) Puisque cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$, l'application $\varepsilon : \theta \longmapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ est continue sur $]-\pi\,;\pi[$.

5) Soit $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$; notons $x = \text{Ré}(z)$, $y = \text{Im}(z)$.
Il existe $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ unique tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, et $\theta = \varepsilon^{-1}(z)$ (cf. *2)*). Alors $x \neq -1$ et :

$$\frac{y}{1+x} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on déduit : $\dfrac{\theta}{2} = \text{Arctan}\dfrac{y}{1+x}$, et donc $\varepsilon^{-1}(z) = \theta = 2\,\text{Arctan}\dfrac{y}{1+x}$, ce qui montre que ε^{-1} est continue sur $\mathbb{U} - \{-1\}$ (comme composée : $z \longmapsto (x,y) \longmapsto 2\,\text{Arctan}\dfrac{y}{1+x}$, faisant intervenir une fonction de deux variables).

◆ **Théorème 3** **(Théorème de relèvement d'une application de classe C^1 de I dans $\mathbb{U}$)**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ une application de classe C^1.

1) Il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\varphi(t)}.$$

On dit que φ est **un relèvement** de f.

2) Si φ_1, φ_2 sont deux relèvements de f, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Preuve : (pouvant être omise en première lecture) :

1) L'application $g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto -i\dfrac{f'(t)}{f(t)} \end{array}$ est continue sur I (puisque f ne s'annule pas et que f est de classe C^1 sur I), donc admet au moins une primitive sur I.
Si f est constante égale à -1, la propriété voulue est triviale (φ est l'application constante π, par exemple).

Supposons donc $f \neq -1$; il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) \in \mathbb{U} - \{-1\}$.
D'après le Th. 2, il existe $\theta_0 \in]-\pi ; \pi[$ tel que $f(t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$.
Considérons la primitive φ de g sur I telle que $\varphi(t_0) = \theta_0$; autrement dit :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} -\mathrm{i}\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Notons $H : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)} \end{array}$. Puisque f et φ sont de classe C^1 sur I, H l'est aussi et :

$$\forall t \in I, \quad H'(t) = f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)} + f(t)\big(-\mathrm{i}\varphi'(t)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)} = \big(f'(t) - \mathrm{i}f(t)\varphi'(t)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)} = 0.$$

Ceci montre que H est constante.
De plus : $H(t_0) = f(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t_0)} = 1$.
Ainsi : $H = 1$, et donc : $\forall t \in I, \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$.
De plus, puisque $\big(\forall t \in I, |f(t)| = 1\big)$, φ est à valeurs réelles.

2) Soient $\varphi_1, \varphi_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(t)}.$$

On a alors : $\forall t \in I, \quad \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$.
Comme $\varphi_1 - \varphi_2$ est continue sur I, l'image $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (théorème des valeurs intermédiaires, Tome 1, 4.3.3 Th. p. 114). Puisque cet intervalle $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ est inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$, on conclut que $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ est un singleton, c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

◆ **Corollaire** Pour toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ de classe C^p ($p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$) les relèvements de f sont tous de classe C^p sur I.

Preuve :
Supposons $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ de classe C^p.
Avec les notations de la preuve précédente, un relèvement de f est $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} -\mathrm{i}\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $-\mathrm{i}\,\dfrac{f'}{f}$ est de classe C^{p-1}, φ est de classe C^p (intégrale fonction de la borne d'en haut).
Enfin, les relèvements de f diffèrent de φ par des constantes, donc sont tous de classe C^p sur I.

Compléments

◇ C 7.1 Une construction des fonctions circulaires

1) On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que φ est impaire, strictement croissante, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et concave sur $\mathbb{R}_+$.

b) Etablir : $\forall x \in [1; +\infty[, \varphi(x) \leqslant 1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, et en déduire que φ admet une limite L en $+\infty$, telle que $L > 0$. On note $\pi = 2L$.

c) En déduire que la restriction de φ à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ pour l'arrivée est bijective, donc admet une application réciproque. On note alors tan : $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application π-périodique définie par : $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan y = \varphi^{-1}(y)$.

2) Montrer que tan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \tan' x = 1 + \tan^2 x$.

3) a) On note cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique, paire, définie par :

$$\cos x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}.$$

Montrer que cos est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On note sin : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique, impaire, définie par :

$$\sin x = \begin{cases} \dfrac{|\tan x|}{\sqrt{1+\tan^2 x}} & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Montrer que sin est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

4) Montrer que cos et sin sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que : $\cos' = -\sin, \sin' = \cos$.

◇ C 7.2 Irrationalité de $\tan r$ lorsque $r \in \mathbb{Q}^*$

A) Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on note $I_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n \cos t \, dt$.

1) Etablir pour tout (n,x) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$: $I_{n+1}(x) = 2(2n+1)I_n(x) - 4x^2 I_{n-1}(x)$.

2) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un couple de polynômes (C_n, S_n), à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degrés au plus n, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_n(x) = C_n(x)\cos x + S_n(x)\sin x.$$

B) Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$; on se propose de montrer : $\tan r \notin \mathbb{Q}$. Puisque $\pi \notin \mathbb{Q}$ (cf. J.-M. Monier, *Analyse 1*, 6.6.33 p. 119), on a : $r \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, et donc $\tan r$ existe.

1) a) En notant $r = \dfrac{a}{b}$, $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\tan r = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad qb^n C_n\left(\frac{a}{b}\right) + pb^n S_n\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{I_n(r)}{\cos r}\, qb^n.$$

b) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Longrightarrow I_n(r) = 0)$.

Nous allons maintenant obtenir une contradiction, en montrant que $I_n(r)$ est non nul à partir d'un certain rang.

2) Montrer que, si $r \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n(r) > 0$.

3) On suppose ici : $r \in \left]\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$.

a) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{r} (r^2 - t^2)^n \cos t \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \left(r - \dfrac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \dfrac{\pi^2}{4}\right)^n$, et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - t^2)^n \cos t \, \mathrm{d}t \geqslant \dfrac{r^n}{2(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \dfrac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right)$.

b) En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_1 \Longrightarrow I_n(r) > 0)$.

◇ C 7.3 Corps des nombres algébriques

Un réel α est dit **algébrique** si et seulement s'il existe un polynôme P (dépendant de α), à coefficients rationnels tel que : $P \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$. On note ici $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

1) Vérifier : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

2) Montrer qu'un réel α est algébrique si et seulement si la famille des réels $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée sur $\mathbb{Q}$.

*3)** Démontrer : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{A}^2$, $\alpha\beta \in \mathbb{A}$.

4) Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{A} - \{0\}$, $\dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{A}$.

5) Soient $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{A} - \{0\}) \times \mathbb{A}$ et $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

a) Montrer : $1 + \gamma \in \mathbb{A}$.

b) En déduire : $\alpha + \beta \in \mathbb{A}$.

On a ainsi montré que $\mathbb{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

*6)** Montrer que $\mathbb{A}$ est dénombrable (cf. C 1.2, Tome 1, p. 21).

◇ C 7.4* Transcendance de e

Un nombre réel non algébrique (cf. C 7.3) est dit **transcendant**.

Puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (cf. C 1.2, Tome 1, p. 21) et que $\mathbb{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et est dénombrable, l'ensemble des nombres transcendants, qui est $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ est non dénombrable, donc non vide.

Nous allons montrer que e est transcendant.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note

$$I_p(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} P(u)\, \mathrm{d}u.$$

a) Montrer, en notant $d = \deg(P)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad I_p(t) = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{d} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{d} P^{(j)}(t).$$

b) Montrer, en notant $\widetilde{P}$ le polynôme obtenu en remplaçant dans P chaque coefficient par sa valeur absolue :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |I_p(t)| \leqslant |t|\mathrm{e}^{|t|}\, \widetilde{P}(|t|).$$

Raisonnons par l'absurde : supposons $\mathrm{e} \in \mathbb{A}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tels que : $a_0 \neq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^k = 0$.

Considérons un nombre premier p (qu'on précisera plus loin), le polynôme

$P = X^{p-1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X-k)^p$, $m = pn + (p-1) = \deg(P)$, et $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k I_p(k)$.

2) Montrer : $\displaystyle J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(j)}(k)$.

3) *a)** Démontrer, pour tout (j,k) de $\{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} p! & \text{divise } P^{(j)}(k) \text{ si } (j,k) \neq (p-1,0) \\ (p-1)! & \text{divise } P^{(p-1)}(0) \\ p! & \text{ne divise pas } P^{(p-1)}(0) \text{ si } p > n \end{cases}.$$

b) En déduire que, si $p > n$ et $p > |a_0|$, alors J est un entier divisible par $(p-1)!$ et non divisible par $p!$, et donc $|J| \geqslant (p-1)!$.

4) D'autre part, montrer : $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\widetilde{P}(k) \leqslant (2n)^m$, et en déduire qu'il existe un réel C, indépendant de p, tel que : $|J| \leqslant C^p$.

5) Conclure.

En adaptant la méthode précédente, on peut aussi démontrer que π est transcendant.

(Référence : Alan Baker, *Transcendantal number theory*, Cambridge University Press, 1979, p. 4).

Chapitre 8

Comparaison locale des fonctions

Les fonctions utilisées dans ce chapitre sont, sauf mention contraire, définies au voisinage d'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$, sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles. Les définitions et propositions s'étendront aisément :

- aux fonctions à valeurs complexes, et, plus généralement, aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé
- aux fonctions numériques définies au voisinage de a sauf peut-être en a (par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ avec $a = 0$)
- aux suites réelles (ou complexes), qui sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), ∞ jouant ici le rôle de a
- aux fonctions numériques définies au voisinage à droite de a (ou à gauche de a).

8.1 Prépondérance, domination

8.1.1 Définitions

◆ **Définition 1** Soient $f, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$; on suppose : $\forall x \in I - \{a\}, \varphi(x) \neq 0$.
On dit que f est **négligeable devant** φ (ou : φ est **prépondérante devant** f, ou : φ **l'emporte sur** f) au voisinage de a si et seulement s'il existe une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x) \\ \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\ll} \varphi$ (notation de Hardy) ou $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ (notation de Landau).

Remarques sur les notations

1) Pour alléger les écritures, et à condition que cela n'entraîne pas de confusions, on note $f \ll \varphi$, $f = o(\varphi)$, au lieu de $f \underset{a}{\ll} \varphi$, $f = \underset{a}{o}(\varphi)$; mais on ne perdra pas alors de vue que cette propriété ($f \ll \varphi$) est relative à a («locale en a»).

2) Plusieurs fonctions différentes $f_1, f_2, \ldots$ pouvant être négligeables devant φ en a, nous serons amenés à écrire : $f_1 = o(\varphi)$, $f_2 = o(\varphi)$, ..., bien que $f_1 \neq f_2$. Pour éviter cet emploi incorrect du symbole d'égalité, on pourrait écrire $f \in o(\varphi)$ (au lieu de $f = o(\varphi)$), $o(\varphi)$ désignant alors **l'ensemble** des fonctions négligeables devant φ au voisinage de a. Mais cette notation d'appartenance contrarierait les habitudes de calcul acquises.

3) En pratique, les fonctions utilisées sont souvent définies à l'aide de la valeur $f(x)$ de l'image d'un élément variable x. Par abus, nous noterons alors $f(x) \underset{x \to a}{\ll} \varphi(x)$, $f(x) \ll \varphi(x)$, $f(x) = \underset{x \to a}{o}(\varphi(x))$, $f(x) = o(\varphi(x))$, au lieu de $f \underset{a}{\ll} \varphi$, $f \ll \varphi$, $f = \underset{a}{o}(\varphi)$, $f = o(\varphi)$.

Par exemple :

- au voisinage de $+\infty$: $x = o(x^2)$
- au voisinage de 0 : $(\sin x)^3 = o(x)$.

Remarques :

1) On a : $f = \underset{a}{o}(\varphi) \iff \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\longrightarrow} 0 \\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \end{cases}$.

2) $f = \underset{a}{o}(1) \iff \lim\limits_{a} f = 0$.

◆ **Définition 2** Soient $f, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$; on suppose : $\forall x \in I - \{a\}$, $\varphi(x) \neq 0$.
On dit que f est **dominée par** φ au voisinage de a si et seulement s'il existe une application $C : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = C(x)\varphi(x) \\ C \text{ est bornée au voisinage de } a. \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi$ (notation de Hardy) ou $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ (notation de Landau).

Les mêmes remarques sur les notations que celles qui suivent la Définition 1 p. 39 sont ici valables.

EXEMPLES :

- au voisinage de $+\infty$: $2x^2 = O(x^2)$
- au voisinage de $+\infty$: $\sin x = O(1)$
- au voisinage de 0 : $x^2 = O(x)$ (et aussi $x^2 = o(x)$).

Remarques :

1) $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ si et seulement si $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a.

2) $f = \underset{a}{O}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

8.1.2 Opérations relatives à la prépondérance et à la domination

Toutes les relations de comparaison utilisées dans ce § 8.1.2 se situent en un élément fixé a de $\overline{\mathbb{R}}$ (sauf pour les propriétés *9)* à *13*)). On désigne ici par :

$f, g, \varphi, \psi, u, v$: des fonctions définies au voisinage de a et à valeurs réelles

λ : un réel fixé

h : une fonction définie au voisinage d'un élément b de $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs réelles.

◆ **Proposition 1**

1) $f = o(\varphi) \Longrightarrow f = O(\varphi)$

2) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ g = o(\varphi) \end{cases} \Longrightarrow f + g = o(\varphi)$

3) $f = o(\varphi) \Longrightarrow \lambda f = o(\varphi)$

4) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = O(\varphi) \end{cases} \Longrightarrow f + g = O(\varphi)$

5) $f = O(\varphi) \Longrightarrow \lambda f = O(\varphi)$

6) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = O(\psi) \end{cases} \Longrightarrow fg = O(\varphi\psi)$

7) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \Longrightarrow fg = o(\varphi\psi)$

8) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \Longrightarrow fg = o(\varphi\psi)$

9) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \Longrightarrow f = O(u)$

10) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \Longrightarrow f = o(u)$

11) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = o(u) \end{cases} \Longrightarrow f = o(u)$

12) $\begin{cases} f = \underset{a}{o}(\varphi) \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Longrightarrow f \circ h = \underset{b}{o}(\varphi \circ h)$

13) $\begin{cases} f = \underset{a}{O}(\varphi) \\ \lim\limits_{b} h = a \end{cases} \Longrightarrow f \circ h = \underset{b}{O}(\varphi \circ h).$

Preuve : Les propriétés précédentes se démontrent aisément à partir des définitions. Par exemple, pour *10)* :

si $\dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[a]{} 0$ et si $\dfrac{\varphi}{u}$ est bornée au voisinage de a, alors $\dfrac{f}{u} = \dfrac{f}{\varphi} \cdot \dfrac{\varphi}{u} \xrightarrow[a]{} 0$.

Remarque : On peut transcrire les propriétés précédentes sous la forme abusive :

1) $o(\varphi) = O(\varphi)$

2) $o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi)$

$\vdots$

6) $O(\varphi)O(\psi) = O(\varphi\psi)$

$\vdots$

9) $O(O(u)) = O(u)$

$\vdots$.

◆ **Proposition 2** **(Comparaison logarithmique)**

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites de nombres réels strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors : $u_n = O(v_n)$.

Preuve :

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

On a alors, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n > N$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}, \quad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \frac{v_{N+1}}{v_N},$$

d'où, par multiplication et simplification : $\dfrac{u_n}{u_N} \leqslant \dfrac{v_n}{v_N}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leqslant \dfrac{u_N}{v_N} v_n$,

et donc : $u_n = O(v_n)$.

EXEMPLE : $u_n = \dfrac{4^n}{C_{2n}^n}$ (> 0), $v_n = \sqrt{n}$ (> 0) $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+1} \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Un calcul élémentaire montre : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{2n+2}{2n+1} \leqslant \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$, donc : $u_n = O(v_n)$,

c'est-à-dire : $\dfrac{4^n}{C_{2n}^n} = O(\sqrt{n})$.

8.1.3 Exemples usuels

- *1)* $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta) \quad \Longleftrightarrow \alpha < \beta\right).$

  2) $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(x^\alpha = \underset{x\to 0^+}{o}(x^\beta) \quad \Longleftrightarrow \alpha > \beta\right).$

- D'après 3.1.4, *5)*, Tome 1, p. 56, on a : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a^n = o(n!)$ (lorsque n tend vers l'infini).

- D'après 7.5 p. 12, on a :

  1) $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$

  2) $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta)$

  3) $\forall(\alpha,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*, \quad |\ln x|^\alpha = \underset{x\to 0^+}{o}(x^\gamma)$

  4) $\forall(a,\alpha) \in]1;+\infty[\times\mathbb{R}, \quad x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(a^x)$

  5) $\forall(a,\alpha) \in]1;+\infty[\times\mathbb{R}, \quad a^x = \underset{x\to-\infty}{o}(|x|^\alpha).$

Exercices

◇ **8.1.1** Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites à éléments dans $\mathbb{R}_+^*$, telles que $u_n = o(v_n)$.
Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ à éléments dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

◇ **8.1.2** Comparer, au voisinage de $+\infty$: $f : x \longmapsto (\ln(\ln x))^{x^{\ln x}}$ et $g : x \longmapsto (\ln x)^{x^{\ln(\ln x)}}$.

8.2 Equivalence

8.2.1 Définition

◆ **Définition** Soient $f, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I - \{a\}, \quad f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \neq 0.$$

On dit que f est **équivalente** à φ au voisinage de a si et seulement s'il existe une application $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = \lambda(x)\varphi(x) \\ \lambda(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1. \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} \varphi$ ou, par abus, $f \sim \varphi$, $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$, $f(x) \sim \varphi(x)$.

Remarques :

1) $f \underset{a}{\sim} \varphi \iff \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \end{cases}$.

2) $f \underset{a}{\sim} \varphi \iff f - \varphi = \underset{a}{o}(\varphi) \iff \varphi - f = \underset{a}{o}(f)$.

EXEMPLE : $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$.

◆ **Proposition 1**

$$f \sim \varphi \Longrightarrow \begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = O(f) \end{cases}.$$

Preuve :

Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$, alors $\dfrac{f}{\varphi}$ et $\dfrac{\varphi}{f}$ admettent une limite finie (égale à 1) en a, donc sont bornées au voisinage de a.

Remarque : La réciproque de la propriété précédente est fausse ; par exemple, pour $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto 1 \end{array}$, $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto 2 \end{array}$, $a = 0$, on a $f = O(\varphi)$ et $\varphi = O(f)$, mais on n'a pas $f \sim \varphi$.

◆ **Proposition 2** La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a et ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf peut-être en a.

Preuve :

• *Réflexivité* : $f - f = 0 = o(f)$.

• *Symétrie* : Supposons $f \sim \varphi$. D'après la prop. 1, on a $f - \varphi = o(\varphi)$ et $\varphi = O(f)$, donc (cf. 8.1.2 Prop. *10)* p. 41) : $f - \varphi = o(f)$. Alors $\varphi - f = o(f)$, c'est-à-dire $\varphi \sim f$.

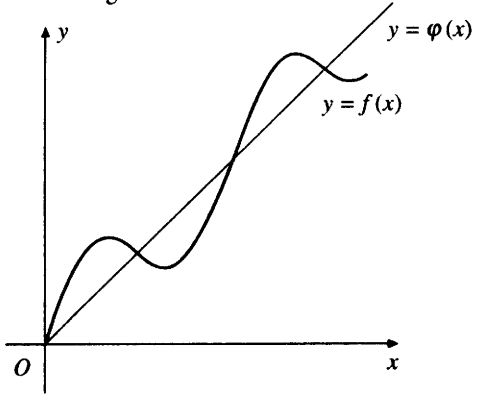
• *Transitivité* : Supposons $f \sim \varphi$ et $\varphi \sim u$. Puisque $f - \varphi = o(\varphi)$ et $\varphi = O(u)$, on a : $f - \varphi = o(u)$ (cf. 8.1.2 Prop. *10)* p. 41). Alors : $\begin{cases} f - \varphi = o(u) \\ \varphi - u = o(u) \end{cases}$, d'où $f - u = o(u)$ (cf. 8.1.2 Prop. *2)* p. 41), c'est-à-dire $f \sim u$.

Remarques :

1) Soit $l \in \mathbb{R} - \{0\}$; on a : $f \underset{a}{\sim} l \iff f \xrightarrow[a]{} l$.

2) L'écriture $f \underset{a}{\sim} 0$ est aberrante, puisque les fonctions manipulées ici ne doivent s'annuler en aucun point de $I - \{a\}$.

3) Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et si, au voisinage de a, $\varphi(x) > 0$, alors, au voisinage de a, $f(x) > 0$. En effet, puisque $\dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[a]{} 1$, on a, au voisinage de a, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$, d'où $f(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\,\varphi(x) > 0$. Ainsi, l'éventuelle positivité de φ au voisinage de a se transmet aux fonctions équivalentes à φ au voisinage de a.



4) En revanche, l'éventuelle monotonie de φ au voisinage de a ne se transmet pas aux fonctions équivalentes à φ au voisinage de a. Par exemple, notant $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 2\sin x \end{array}$ et $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto x \end{array}$ on a : $f \underset{+\infty}{\sim} \varphi$, φ est croissante, f n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$.

Nous retrouverons cette question dans l'étude des séries à termes réels «de signes variables» dans le Tome 3.

5) Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et si $f(a)$ et $\varphi(a)$ existent, alors : $f(a) = 0 \iff \varphi(a) = 0$.

Ainsi, deux fonctions définies sur un voisinage de a et équivalentes au voisinage de a sont simultanément nulles en a ou simultanément non nulles en a.

8.2.2 Opérations relatives à l'équivalence

Les notations sont celles du § 8.1.2 p. 41.

◆ **Proposition 1**

1) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ g \sim \psi \end{cases} \Longrightarrow fg \sim \varphi\psi$

2) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Longrightarrow f^n \sim \varphi^n$
(où f^n désigne $f \cdot \ldots \cdot f$ avec n facteurs)

3) $f \sim \varphi \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{\varphi}$

4) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ \varphi \sim \psi \end{cases} \Longrightarrow f = o(\psi).$

5) $\begin{cases} f \sim \varphi \\ \varphi = o(u) \end{cases} \Longrightarrow f = o(u)$

6) Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$, si φ est à valeurs > 0 au voisinage de a (sauf peut-être en a) et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} \varphi^\alpha$ (où φ^α désigne l'application $x \longmapsto (\varphi(x))^\alpha$)

7) (Composition à droite) Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et si $\lim\limits_{b} h = a$, alors $f \circ h \underset{b}{\sim} \varphi \circ h$.

Preuve : Comme pour la Prop. de 8.1.2 p. 41, les propriétés précédentes sont immédiates. Par exemple, pour *1)* :

$$\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \\ \dfrac{g}{\psi} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{fg}{\varphi\psi} = \frac{f}{\varphi} \cdot \frac{g}{\psi} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \Longrightarrow fg \underset{a}{\sim} \varphi\psi.$$

◆ **Proposition 2** **(Composition par l'exponentielle)**

$$\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^\varphi \Longleftrightarrow f - \varphi \underset{a}{\longrightarrow} 0.$$

On note ici e^f l'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{f(x)}$, qu'on peut aussi noter $\exp \circ f$.

Preuve : Il suffit de remarquer : $\dfrac{\mathrm{e}^f}{\mathrm{e}^\varphi} = \mathrm{e}^{f-\varphi}$.

Remarque : Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$, on ne peut pas déduire $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^\varphi$. Par exemple : $x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, mais $\mathrm{e}^{x+1} \underset{x \to +\infty}{\nsim} \mathrm{e}^x$. On peut exprimer cela par : on n'a pas le droit de composer les équivalents par l'exponentielle sans explication.

◆ **Proposition 3** **(Composition par le logarithme)**

Supposons que φ soit à valeurs > 0 au voisinage de a (sauf peut-être en a). Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et si φ admet en a une limite l dans $\overline{\mathbb{R}}_+ - \{1\}$, alors $\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ \varphi$.

Preuve : Distinguons trois cas.

1) $l = +\infty$. Au voisinage de a : $\varphi(x) > 1$, et donc $\ln(\varphi(x)) \neq 0$, d'où :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(\varphi(x))} - 1 = \frac{\ln\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)}{\ln \varphi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0, \text{ puisque } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \text{ et } \ln \varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty.$$

2) $l = 0$. On se ramène au cas précédent en considérant $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{\varphi}$.

3) $l \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. $\begin{cases} \ln f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ln l \neq 0 \\ \ln \varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ln l \neq 0 \end{cases}$, donc $\ln f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ln l \underset{x \to a}{\sim} \ln \varphi(x)$.

Remarque : Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et si $\varphi \xrightarrow[a]{} 1$, on ne peut pas conclure $\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ \varphi$. Par exemple : $1 + x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + 2x$, mais $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\not\sim} \ln(1 + 2x)$ (puisque $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, cf. 7.1 Prop. 2) p. 4, ou 8.2.3 p. 48, $\ln(1 + 2x) \underset{x \to 0}{\sim} 2x$, $x \underset{x \to 0}{\not\sim} 2x$).

Etude de l'addition

• On n'a pas le droit d'additionner les équivalents sans explication; c'est-à-dire que $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases}$ n'entraîne pas $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$. Par exemple :

$$\begin{cases} x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x \\ -x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} -x \end{cases}, \text{ mais } (x+x^2)+(-x+x^3) = x^2+x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x^2 \underset{x \to 0}{\not\sim} 0 = x+(-x).$$

Ce défaut de mécanisme dans l'utilisation des équivalents est une cause importante d'erreurs.

• Cependant, sous certaines hypothèses, nous pourrons «additionner les équivalents». Les propriétés suivantes sont d'usage fréquent :

1) $f = o(\varphi) \Longrightarrow f + \varphi \underset{a}{\sim} \varphi$.

Par exemple : $x^2 + \sin x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.

2) Si $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} \varphi \\ g \underset{a}{\sim} \psi \end{cases}$ et si φ et ψ sont à valeurs > 0 au voisinage de a, alors $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$. En effet :

$(f + g) - (\varphi + \psi) = (f - \varphi) + (g - \psi)$, $f - \varphi = o(\varphi) = o(\varphi + \psi)$, $g - \psi = o(\psi) = o(\varphi + \psi)$, d'où $(f + g) - (\varphi + \psi) = o(\varphi + \psi)$, c'est-à-dire $f + g \sim \varphi + \psi$.

3) Supposons qu'il existe $(\lambda,\mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x^\alpha$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mu x^\beta$.

On dit, dans ce cas, que f et φ admettent une **partie principale dans l'échelle des puissances réelles de** x (au voisinage de $+\infty$).

- D'après *1)* : $\begin{cases} \text{si } \alpha < \beta, & \text{alors } f(x)+\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mu x^\beta \\ \text{si } \alpha > \beta, & \text{alors } f(x)+\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x^\alpha \end{cases}$.

- Si $\alpha = \beta$ et $\lambda + \mu \neq 0$, alors :

$$\frac{f(x)+\varphi(x)}{(\lambda+\mu)x^\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1,$$

et donc $f(x)+\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\lambda+\mu)x^\alpha$.

- Si $\alpha = \beta$ et $\lambda + \mu = 0$, les hypothèses ne permettent pas de déduire un équivalent simple de $f+\varphi$; en particulier, on ne peut pas déduire $f+\varphi \underset{+\infty}{\sim} 0$. Par exemple : $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, $-x^2+3x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$, mais $(x^2+x)+(-x^2+3x) = 4x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 0$.

En résumé, on a $\begin{cases} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x^\alpha \\ \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mu x^\beta \end{cases} \Longrightarrow f(x)+\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x^\alpha + \mu x^\beta$ sauf si la somme des parties principales est nulle ($\alpha = \beta$ et $\lambda + \mu = 0$).

8.2.3 Equivalents usuels

1) Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors, comme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$, on a : $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$. On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} & e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x, & \ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x, & \\ \sin x \underset{x\to0}{\sim} x, & \operatorname{sh} x \underset{x\to0}{\sim} x, & \tan x \underset{x\to0}{\sim} x, & \operatorname{th} x \underset{x\to0}{\sim} x, \\ & \operatorname{Arcsin} x \underset{x\to0}{\sim} x, & \operatorname{Arctan} x \underset{x\to0}{\sim} x, & \\ & (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x & \text{(pour } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé).} & \end{array}}$$

2) En remarquant $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ et $\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}$, on obtient :

$$\boxed{1-\cos x \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$$

3) Puisque $\operatorname{Arccos} x \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$, on a :

$$\operatorname{Arccos} x \underset{x \to 1^-}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

4) Tout polynôme non nul est équivalent, en $+\infty$ et en $-\infty$, à son terme de plus haut degré.

5) Tout polynôme non nul est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

6) Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente, en $+\infty$ et en $-\infty$, au quotient de ses termes de plus haut degré.

7) Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en 0 au quotient de ses termes de plus bas degré.

EXEMPLES : $x^3 + 2x^2 - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3$, $x^4 + x^2 + 2x \underset{x \to 0}{\sim} 2x$, $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{2x^4 - x^2 + x}{x^2 - 1} \underset{x \to 0}{\sim} -x$.

Remarque : Comme la plupart des équivalents usuels sont donnés au voisinage de 0, il pourra être utile d'effectuer un changement de variable pour s'y ramener. Par exemple, déterminons la partie principale de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + x - 6}$ au voisinage de 2 (dans l'échelle des fonctions $x \longmapsto (x-2)^n$, $n \in \mathbb{Z}$). En notant $t = x - 2$, on a :

$$f(x) = f(2+t) = \frac{(2+t)^3 + 2(2+t)}{(2+t)^2 + (2+t) - 6} = \frac{12 + 14t + 6t^2 + t^3}{5t + t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{12}{5t}.$$

Ainsi : $f(x) \underset{x \to 2}{\sim} \dfrac{12}{5}(x-2)^{-1}$.

8.2.4 Exemples d'utilisation d'équivalents

L'utilisation correcte d'équivalents peut permettre d'obtenir rapidement certaines limites se présentant sous une forme indéterminée.

EXEMPLES :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$?

$$\begin{cases} \ln(1+2\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\tan x \underset{x\to 0}{\sim} 2x \\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \end{cases}, \text{d'où } \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} 2, \text{et donc } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} = 2.$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$?

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\,\frac{1}{x} = 1, \text{ donc } \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

puis, par continuité de exp en 1, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\operatorname{cotan} 4x}$?

Effectuons le changement de variable $h = \dfrac{\pi}{4} - x$; $h \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}]{} 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} - h$. Alors :

$$\ln((\tan x)^{\operatorname{cotan} 4x}) = \operatorname{cotan}(\pi - 4h)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - h\right)\right) = -\operatorname{cotan} 4h \quad \ln\frac{1-\tan h}{1+\tan h}.$$

Comme $\begin{cases} \ln(1-\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \sim -h \\ -\ln(1+\tan h) \sim -\tan h \sim -h \end{cases}$ et que la somme des parties principales n'est pas nulle, on déduit $\ln(1-\tan h) - \ln(1+\tan h) \sim -2h$ (cf. 8.2.2 *3)* p. 48).

Ainsi $\ln((\tan x)^{\operatorname{cotan} 4x}) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\operatorname{cotan} 4x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

Exercices

◇ **8.2.1** Donner un exemple de deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ telles que :

$$\begin{cases} u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante} \\ (v_n)_{n\geq 1} \text{ n'est monotone à partir d'aucun rang} \end{cases}$$

◇ **8.2.2** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$: trouver un équivalent simple (du type λn^α, $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}$) de $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$, lorsque n tend vers l'infini.

◇ **8.2.3** Déterminer un équivalent simple de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{1/k}$ lorsque n tend vers l'infini (utiliser le théorème de Césaro, C 3.1, Tome 1, p. 78).

◇ **8.2.4** Soient $f, g, \varphi, \psi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$f \underset{+\infty}{\sim} \varphi, \quad g \underset{+\infty}{\sim} \psi, \quad \lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = 0.$$

Montrer : $e^{(f(x))^2} + e^{(g(x))^2} - 2 \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{(\varphi(x))^2} + e^{(\psi(x))^2} - 2.$

◇ **8.2.5** Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln\left(x \operatorname{sh} \dfrac{1}{x}\right)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\log_x a - \log_a x}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}$, $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ fixé

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - e^x)\sin x}{x^2 + x^3}$ *e)* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(\operatorname{sh}\sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2 - x})$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^x - x}{\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})}$ *g)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos \dfrac{\pi x}{2}}$ *h)* $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$, $a \in \mathbb{R}^*$ fixé

i) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x \sin x}}$ *j)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1}\right)^x$ *k)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)^{\sqrt[3]{x^3+1}}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{\ln(x + 1)}\right)^{x \ln x}$ *m)* $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} (\tan 2x)^{\sin 4x}$ *n)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{x^{\frac{1}{x}}} - x\right)$

o) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln(1 + x))^{\ln(1+x^2)}$ *p)* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(\sin x)^{\operatorname{sh} x} - 1}{(\operatorname{sh} x)^{\sin x} - 1}$.

◇ **8.2.6** Soient $(a_n)_{n \geqslant 0}$, $(b_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites réelles telles que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (a_n > 0 \text{ et } b_n > 0) \\ a_n^n \xrightarrow[n\infty]{} a > 0 \\ b_n^n \xrightarrow[n\infty]{} b > 0 \end{cases}$.

Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p + q = 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\infty} (pa_n + qb_n)^n$.

◇ **8.2.7** Montrer : $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1 + x))^n dx \underset{n\infty}{\sim} \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$.

◇ **8.2.8*** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0; 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$.

Démontrer : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ (raisonner comme dans C 3.1 III 2), Tome 1, p. 79).

◇ **8.2.9*** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0; +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \end{cases}$.

Déterminer la partie principale de u_n dans l'échelle des $n \longmapsto \lambda n^\alpha$, $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$ (considérer u_n^3 et raisonner comme dans C 3.1 III 2), Tome 1, p. 79).

8.3 Développements limités

8.3.1 Généralités

◆ **Définition 1** Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en 0** (abrégé en $DL_n(0)$) si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \text{au voisinage de } 0, \quad f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \end{cases}.$$

Remarque : f admet un $DL_n(0)$ si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients réels et une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}.$$

◆ **Proposition 1** (Unicité de la partie régulière d'un $DL_n(0)$)
Si f admet un $DL_n(0)$, alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ unique tel que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \text{au voisinage de } 0, \quad f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \end{cases}.$$

P est appelé la **partie régulière** du $DL_n(0)$ de f.

Preuve : Supposons qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ convenant. On a alors :

$$\begin{cases} \deg(P_1 - P_2) \leqslant n \\ \text{au voisinage de } 0, \quad P_1(x) - P_2(x) = o(x^n) \end{cases}.$$

Si $P_1 - P_2 \neq 0$, alors en considérant le terme de plus bas degré $\alpha_k X^k$ de $P_1 - P_2$ (donc $\alpha_k \neq 0$), on a : $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ P_1(x) - P_2(x) \underset{x \to 0}{\sim} \alpha_k x^k \end{cases}$, ce qui contredit $P_1(x) - P_2(x) = o(x^n)$.

◆ **Définition 2**

1) Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de a** (en abrégé $DL_n(a)$) si et seulement si l'application $f_0 : \begin{array}{l} I_0 = \{t \in \mathbb{R};\, a + t \in I\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(a+t) \end{array}$ admet un $DL_n(0)$. On appelle **partie régulière** du $DL_n(a)$ de f le polynôme $x \longmapsto P(x-a)$, où P est la partie régulière du $DL_n(0)$ de f_0.

Autrement dit : $\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall t \in I_0, \quad f(a+t) = P(t) + \underset{t \to 0}{o}(t^n) \\ \forall x \in I, \quad f(x) = P(x-a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n) \end{cases}.$

On veillera à exprimer $P(x-a)$ suivant les puissances croissantes de $(x-a)$ et non pas suivant celles de x.

2) Soient I un intervalle non majoré, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de** $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$) si seulement si l'application $f_0 : \begin{array}{l} J_0 = \{t \in \mathbb{R}_+^* ; \frac{1}{t} \in I\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f\left(\frac{1}{t}\right) \end{array}$ admet un $DL_n(0)$. On appelle **partie régulière** du $DL_n(+\infty)$ de f la fonction rationnelle $x \longmapsto P\left(\frac{1}{x}\right)$, où P est la partie régulière du $DL_n(0)$ de f_0.

Autrement dit : $\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall t \in J_0, \quad f_0(t) = P(t) + \underset{t \to 0}{o}(t^n). \\ \forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) \end{cases}$.

Une définition analogue peut être donnée en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Ainsi, lors d'études de développements limités, on se ramènera presque systématiquement au voisinage de 0.

◆ **Proposition 2** **(Troncature d'un $DL(0)$).**

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P, alors, pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, f admet un $DL_k(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant P au degré k, c'est-à-dire en ne prenant dans P que les termes de degrés $\leqslant k$.

Preuve : Notons P_1 le polynôme tronqué de P au degré k ; il existe alors un pôlynôme Q tel que : $P = P_1 + X^{k+1}Q$.

D'où : $\forall x \in I$, $f(x) = P(x) + o(x^n) = P_1(x) + (x^{k+1}Q(x) + o(x^n)) = P_1(x) + o(x^k)$.

◆ **Proposition 3**

1) Pour que f admette un $DL_0(0)$, il faut et il suffit que f soit continue en 0. On a alors : $\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + o(1)$.

2) Pour que f admette un $DL_1(0)$, il faut et il suffit que f soit dérivable en 0. On a alors : $\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$.

Preuve :

1) f est continue en 0 si et seulement si $f(x) - f(0) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, ce qui se traduit bien par :

$$\forall x \in I, f(x) = f(0) + o(1).$$

2) • Supposons que f soit dérivable en 0 : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$. On a donc : $\forall x \in I - \{0\}$, $f(x) - f(0) = x(f'(0) + o(1))$; la relation étant trivialement vraie en 0, on obtient : $\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.

• Réciproquement, supposons que f admette un $DL_1(0)$:

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1 x + o(x).$$

Alors f admet un $DL_0(0)$: $\forall x \in I$, $f(x) = a_0 + o(1)$, donc f est continue et $a_0 = f(0)$ (cf. *1)*).

Puis $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} a_1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Remarques :

1) Nous verrons plus loin (8.3.2 p. 55) que, si f est de classe C^n sur I, alors f admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière fait intervenir les dérivées successives de f en 0 jusqu'à l'ordre n.

2) Il se peut qu'une fonction admette un $DL_n(0)$ ($n \geqslant 2$) sans être n fois dérivable en 0.

Exemples :

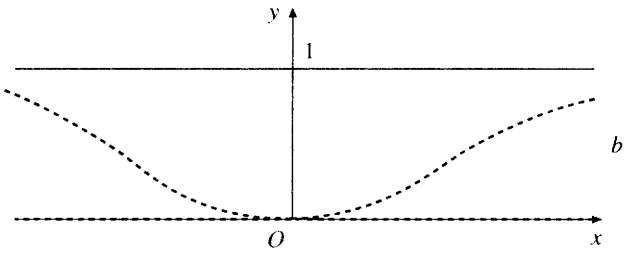
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  a) f admet un $DL_2(0)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$ (puisque $x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$).

  b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} - 2 \cos \dfrac{1}{x^2}. \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

  c) f n'est pas deux fois dérivable en 0, puisque f' n'est pas continue en 0 (f' n'admet pas de limite en 0).

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



a) f admet un $DL_n(0)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ car :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

b) f n'est continue qu'en 0, f n'est dérivable qu'en 0, f'' n'est définie en aucun point de $\mathbb{R}$.

◆ **Proposition 4** Soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$, de partie régulière notée P.

1) Si f est paire, alors P est pair

2) Si f est impaire, alors P est impair.

Preuve : Puisque ($\forall x \in I$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$), on a aussi :
$\forall x \in I$, $f(-x) = P(-x) + o(x^n)$, et $x \longmapsto P(-x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$.

1) Si f est paire, alors, par unicité de la partie régulière du $DL_n(0)$ de f, $P(-X) = P$, et donc P est pair.

2) Si f est impaire, on déduit de même $P(-X) = -P$, et donc P est impair.

Remarque : Les développements limités définis jusqu'ici dans ce § 8.3.1 sont parfois qualifiés de **développements limités faibles** : $\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases}$.

On dit que f admet un $DL_n(0)$ **fort** si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + O(x^{n+1}) \end{cases}.$$

Il est clair que, si f admet un $DL_n(0)$ fort de «partie régulière» P, alors f admet aussi un $DL_n(0)$ faible de partie régulière P aussi.

Une fonction peut admettre un $DL_n(0)$ faible sans admettre un $DL_n(0)$ fort; par exemple : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$ admet un $DL_0(0)$ faible ($f(x) = o(1)$), mais n'admet pas un $DL_0(0)$ fort (on n'a pas : $f(x) = O(x)$).

Mais si une fonction f admet un $DL_{n+1}(0)$ faible, alors elle admet un $DL_n(0)$ fort : il suffit de grouper le terme en x^{n+1} avec $o(x^{n+1})$ pour obtenir un $O(x^{n+1})$.

Ainsi, schématiquement, pour une fonction donnée :

$$DL_{n+1}(0) \text{ faible} \Longrightarrow DL_n(0) \text{ fort} \Longrightarrow DL_n(0) \text{ faible}.$$

En pratique, utiliser un $DL_n(0)$ fort revient souvent à utiliser un $DL_{n+1}(0)$ faible, mais sans exprimer quantitativement le terme en x^{n+1}; c'est un avantage dans l'étude de la nature de certaines séries ou intégrales généralisées (voir Tome 3).

8.3.2 Le théorème de Taylor-Young

◆ **Théorème** (Théorème de Taylor-Young)

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; si f est de classe C^n sur I, alors f admet un $DL_n(a)$, de partie régulière $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$; autrement dit :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \underset{x \to a}{o}((x - a)^n),$$

ou encore : $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \underset{x \to a}{o}((x - a)^n).$$

Preuve : Il est clair qu'on peut supposer $n \geqslant 1$ (cf. 8.3.1 Prop. 3 p. 53). D'après le théorème de Taylor avec reste intégral (6.4.5 Théorème, Tome 1, p. 193), on a, pour tout x de V :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

On a :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)\,\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\mathrm{d}t$$
$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $f^{(n)}$ est continue en a, il existe $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\begin{cases} [a-\eta; a+\eta] \subset I \\ \forall t \in [a-\eta; a+\eta], \quad |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

On a alors, pour tout x de $[a-\eta; a+\eta]$:

$$\left|\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} |f^n(t) - f^{(n)}(a)|\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \varepsilon \left|\int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\right| = \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!}.$$

Ceci montre : $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\,\mathrm{d}t = \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.

Finalement : $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.

◆ **Corollaire** Si f est de classe C^∞ au voisinage de a, alors f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de a, obtenu par application de la formule de Taylor-Young :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Ceci permet d'obtenir les $DL(0)$ de plusieurs fonctions usuelles :

1)
$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

2)
$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \end{aligned}}$$

3)
$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \end{aligned}}$$

4) $$\boxed{\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})}$$

5) $$\boxed{\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$

6) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f_\alpha : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ sur $]-1; +\infty[$, et une récurrence immédiate montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; +\infty[, \ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$.

On déduit :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

En remplaçant α par -1 :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

Puis, en remplaçant x par $-x$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n).}$$

On peut d'ailleurs retrouver ce dernier $DL_n(0)$ par :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

8.3.3 Dérivation et primitivation pour un $DL(0)$

◆ **Proposition** **(Primitivation d'un $DL(0)$)**

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur I et si f' admet un $DL_n(0)$ de partie régulière notée P, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est celle des primitives de P qui vaut $f(0)$ en 0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x P + o(x^{n+1}).$$

Preuve : Il existe une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} \forall x \in I, \quad f'(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$.

Notons $\varphi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \varepsilon(x) \end{array}$; puisque f' et P sont continues sur I et que $\varphi = f' - P$, φ est continue sur I, donc admet des primitives sur I. Celle des primitives de φ sur I qui vaut 0 en 0 est $\phi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \varphi \end{array}$.

On a : $\forall x \in I,\ f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f' = f(0) + \int_0^x (P + \varphi) = \left(f(0) + \int_0^x P \right) + \phi.$

Notons Q le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x P$; il est clair que : $\deg(Q) \leqslant n + 1$.

Il reste à montrer : $\phi(x) = o(x^{n+1})$.

Soit $\alpha > 0$; puisque $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $\begin{cases} [-\eta;\ \eta] \subset I \\ \forall t \in [-\eta;\ \eta],\ |\varepsilon(t)| \leqslant \alpha \end{cases}$.

On a alors, pour tout x de $[-\eta;\ \eta]$: $|\phi(x)| \leqslant \left| \displaystyle\int_0^x |t^n| \alpha \, \mathrm{d}t \right| = \dfrac{\alpha |x|^{n+1}}{n+1}$.

Ceci montre $\dfrac{\phi(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, c'est-à-dire $\phi(x) = o(x^{n+1})$. ■

En appliquant la proposition précédente, on obtient les $DL(0)$ de certaines fonctions usuelles :

1) $$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

2) $$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

3) $$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2p+2}) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \end{aligned}}$$

4) $$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2p+2}) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \end{aligned}}$$

5) L'application $f : \begin{array}{l}]-1;\ 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x \end{array}$ est de classe C^∞ et, pour tout x de $]-1;\ 1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{p!}(-x^2)^p + o(x^{2p+1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots(2p)}x^{2p} + o(x^{2p+1}). \end{aligned}$$

Comme de plus $f(0) = 0$, on déduit :

$$\boxed{\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})}$$

6) De même :

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots \\ &\quad + (-1)^p\frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \end{aligned}}$$

◆ **Corollaire** **(Dérivation d'un $DL(0)$)**

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur I et si f et f' admettent des développements limités d'ordres $n+1$ et n respectivement au voisinage de 0, alors la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' est la dérivée de la partie régulière du $DL_{n+1}(0)$ de f.

Remarque : Il se peut qu'une fonction f soit de classe C^1 sur I, admette un $DL_{n+1}(0)$ et que f' n'admette pas de $DL_n(0)$ ($n \geqslant 1$), comme le montre l'exemple :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} |x|^{n+\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

8.3.4 Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$

◆ **Proposition 1** **(Addition et loi externe)**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P, Q :

$$\begin{cases} \begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall x \in I,\ f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases} \\ \begin{cases} \deg(Q) \leqslant n \\ \forall x \in I,\ g(x) = Q(x) + o(x^n) \end{cases} \end{cases},$$

alors $\lambda f + g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P + Q$:

$$\begin{cases} \deg(\lambda P + Q) \leqslant n \\ \forall x \in I,\ (\lambda f + g)(x) = (\lambda P + Q)(x) + o(x^n) \end{cases}.$$

Preuve : $\lambda P + Q$ est un polynôme de degré $\leqslant n$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ (\lambda f + g)(x) &= \lambda f(x) + g(x) = \lambda\big(P(x) + o(x^n)\big) + \big(Q(x) + o(x^n)\big) \\ &= (\lambda P + Q)(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

Remarque : Soient f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P, et g admettant un $DL_p(0)$ de partie régulière Q (avec $n \leqslant p$ par exemple). Alors $f + g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière obtenue en tronquant $P + Q$ au degré n. Mais il se peut que $f + g$ n'admette pas de $DL_p(0)$, ou que $f + g$ admette un $DL_p(0)$ dont la partie régulière ne soit pas $P + Q$. Autrement dit, quand on additionne des $DL(0)$, il faut que ces DL soient «au même ordre».

◆ **Proposition 2** **(Multiplication)**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P, Q :

$$\begin{cases} \begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \forall x \in I,\ f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases} \\ \begin{cases} \deg(Q) \leqslant n \\ \forall x \in I,\ g(x) = Q(x) + o(x^n) \end{cases} \end{cases},$$

alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant PQ au degré n.

Preuve : Soit A le polynôme obtenu en tronquant PQ au degré n : $\deg(A) \leqslant n$ et il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $PQ = A + X^{n+1}R$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ (fg)(x) &= \big(P(x) + o(x^n)\big)\big(Q(x) + o(x^n)\big) \\ &= A(x) + \big(x^{n+1}R(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^{2n})\big) \\ &= A(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

EXEMPLE : Si $f(x) = 2 - x + x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 3 + 2x - x^2 + o(x^2)$, alors $(fg)(x) = 6 + x - x^2 + o(x^2)$.

Remarques :

1) Avec les notations de la Prop. 2, PQ n'est pas, «en général», la partie régulière de l'éventuel $DL_{2n}(0)$ de fg.

2) Afin d'obtenir le $DL_n(0)$ d'un produit fg, on peut, dans certains cas, utiliser pour f et g des $DL(0)$ à des ordres inférieurs ou égaux à n, en tenant compte des valuations des parties régulières des $DL(0)$ de f et g. Par exemple, si $f(x) = 3x^2 - x^3 + o(x^4)$ et $g(x) = 4x^2 + 3x^3 + o(x^4)$, on obtient par produit un $DL_6(0)$: $(fg)(x) = 12x^4 + 5x^5 + o(x^6)$. Voir aussi l'exercice 8.3.1 *f*) p. 66.

◆ **Proposition 3** **(Composition)**

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, J un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{J}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P, Q et si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré n le polynôme composé $Q \circ P$.

Preuve : Puisque f admet un $DL_0(0)$, f est continue en 0 et il existe un intervalle I_1 tel que $0 \in \overset{\circ}{I_1}$ et $f(I_1) \subset J$; quitte à remplacer I par I_1, on peut donc supposer $f(I) \subset J$, et ainsi $g \circ f$ est définie sur I.

Il existe $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \forall y \in J,\ g(y) = Q(y) + y^n \varepsilon_2(y) \\ \varepsilon_2(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \end{cases} \end{cases}.$$

On a, pour tout x de I :

$$(g \circ f)(x) = Q\big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big) + \big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big)^n \varepsilon_2\big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big).$$

• En notant $Q = b_1 X + \ldots + b_n X^n$ (où $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$), et en développant

$$b_1\big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big) + \ldots + b_n\big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big)^n,$$

on voit qu'il existe $\varepsilon_3 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ Q\big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big) = Q\big(P(x)\big) + x^n \varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}.$$

Puis, en notant T le polynôme tronqué de $Q \circ P$ au degré n, il existe $\varepsilon_4 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ Q\big(P(x)\big) = T(x) + x^n \varepsilon_4(x) \\ \varepsilon_4(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}.$$

• Le cas $n = 0$ se ramène à l'étude de la composée de deux fonctions continues (cf. 4.3.2, Tome 1, Prop. 2 p. 112); on peut donc supposer $n \geqslant 1$.

Puisque $P(0) = f(0) = 0$, il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XP_1$. On a alors :

$$\forall x \in I,\ \big(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\big)^n = x^n \big(P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)\big)^n.$$

En notant $\varepsilon_5 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in I,\ \varepsilon_5(x) = \big(P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)\big)^n \varepsilon_2(f(x)),$$

les théorèmes sur les limites permettent d'affirmer : $\varepsilon_5(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Finalement, il existe $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\varepsilon = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ (g \circ f)(x) = T(x) + x^n \varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}.$$

Donc $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière T.

EXEMPLE : $DL_6(0)$ de $\varphi : x \longmapsto \cos(\sin x)$.

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$, puis

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^6 + o(x^6) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 - \frac{2x^6}{3}\right) - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

En pratique, on développe $(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^k$ (pour $k \in \{1, \ldots, n\}$) en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$. Il peut être commode de remarquer

$$(a_1 x + \ldots + a_n x^n)^k = (a_1 x + \ldots + a_n x^n)^{k-1}(a_1 x + \ldots + a_n x^n)$$

lorsque l'on a besoin de plusieurs puissances successives.

Remarques :

1) Si $f(0) \neq 0$, on fera souvent un changement de variable $(z = y - f(0))$ et on effectuera souvent sur l'expression de $g(f(x))$ une transformation permettant de se ramener au voisinage de 0.

EXEMPLES :

a) $DL_4(0)$ de $\varphi : x \longmapsto \ln(2\cos x + \sin x)$

- $$2\cos x + \sin x = 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$$
$$= 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

- $$\ln(2\cos x + \sin x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$
$$= \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{8}\right) - \frac{1}{4}\frac{x^4}{16} + o(x^4)$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{24}x^3 - \frac{35}{192}x^4 + o(x^4).$$

b) $DL_3(0)$ de $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$

- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

- $$\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$$
$$= \mathrm{e}\left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)\right)$$
$$= \mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right) = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{48}x^3 + o(x^3).$$

2) Il arrive (souvent par parité) que la valuation de la partie régulière du $DL_n(0)$ de f soit $\geqslant 2$: $f(x) = \sum_{k=\nu}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, où $\nu \in \{2, \ldots, n\}$. La preuve de la Prop. 3 p. 61 peut être adaptée; on s'aperçoit alors que, pour g, un $DL(0)$ à un certain ordre m, moins élevé que n, pourra suffire. On détermine m par : $(m+1)\nu \geqslant n+1$.

EXEMPLE : $DL_8(0)$ de $\varphi : x \longmapsto \ln(1 + x^2 \sin x)$. Puisque les $DL(0)$ (d'ordre $\geqslant 3$) de $x \longmapsto x^2 \sin x$ sont de valuation 3, on formera le $DL_8(0)$ de $x \longmapsto x^2 \sin x$ et le $DL_3(0)$ de $u \longmapsto \ln(1+u)$:

- $$x^2 \sin x = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) = x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} + o(x^8)$$

- $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$. (Le $DL_3(0)$ faible suffirait : $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + O(u^3)$).

- $$\text{D'où } \varphi(x) = x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} - \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120}\right)^2 + o(x^8)$$
$$= x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} - \frac{1}{2}\left(x^6 - \frac{x^8}{3}\right) + o(x^8)$$
$$= x^3 - \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{720}x^7 + \frac{1}{6}x^8 + o(x^8).$$

Plus généralement, si on veut un $DL_n(0)$ de $g \circ f$ connaissant des $DL(0)$ de f et de g, et si $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} a_\nu x^\nu$ et $g(y) \underset{y \longrightarrow 0}{\sim} b_\mu y^\mu$ (avec $(\mu,\nu) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $(a_\nu, b_\mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$), alors on formera le $DL_p(0)$ de f et le $DL_q(0)$ de g, où p et q sont les plus petits entiers tels que :

$$\nu \leqslant p, \quad \mu(p+1) \geqslant n+1, \quad \mu \leqslant q, \quad \nu(q+1) \geqslant n+1.$$

EXEMPLE : $DL_6(0)$ de $\varphi : x \longmapsto \operatorname{ch}(1-\cos x)$

- $1 - \cos x = 1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right) + o(x^4) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$
- $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^6) = 1 + \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{48}x^6 + o(x^6).$

◆ **Proposition 4** **(Inverse)**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si g admet un $DL_n(0)$ de partie régulière Q et si $g(0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de 0 et admet un $DL_n(0)$.

Preuve :

Il suffit de remarquer que $\dfrac{1}{g}$ est la composée $\varphi \circ g_1$ où $g_1 : x \longmapsto \dfrac{g(x) - g(0)}{g(0)}$ et $\varphi : y \longmapsto \dfrac{1}{g(0)} \dfrac{1}{1+y}$, puisque $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{g(0)} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{g(x)-g(0)}{g(0)}}$, et d'appliquer la Prop. 3.

■

EXEMPLES :

1) $DL_5(0)$ de tan

- $$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)}$$
$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$
- $$\tan x = \sin x \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

2) $DL_5(0)$ de th

On obtient de même : $\operatorname{th} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5).$

Remarque : Si $g(0) = 0$, on mettra en facteur dans $g(x)$ (et $f(x)$ éventuellement) une puissance convenable de x, pour se ramener ensuite à la Proposition 3.

Exemple : Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$, définie au voisinage de 0 (sauf en 0) peut être prolongée par continuité en 0, et que la fonction ainsi prolongée (notée encore φ) admet un $DL_3(0)$ qu'on calculera.

• $1-\cos x \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $\tan^2 x \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} x^2$, donc $\varphi(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$; on prolonge donc φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$.

• Pour obtenir un $DL_3(0)$ de φ, et puisque les parties régulières des $DL(0)$ de $1-\cos x$ et de $\tan^2 x$ sont de valuation 2, on va former un $DL_5(0)$ de $1-\cos x$ et de $\tan^2 x$.

a) $1-\cos x = 1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)\right) = x^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}+o(x^3)\right)$

b) tan est de classe C^∞ au voisinage de 0 et $\tan x = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o(x^6)$, d'où (cf. 8.3.3 Corollaire p. 59) :

$$1+\tan^2 x = 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5),$$
$$\tan^2 x = x^2\left(1+\frac{2x^2}{3}+o(x^3)\right).$$

Ainsi : $$\varphi(x) = \frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}+o(x^3)}{1+\dfrac{2x^2}{3}+o(x^3)} = \frac{1}{2}-\frac{3}{8}x^2+o(x^3).$$

Remarque : *Utilisation d'une division suivant les puissances croissantes (hors programme)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P,Q et si $g(0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de 0 et admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le quotient de la division de P par Q suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n.

Rappelons (cf. Tome 5) que, si P, Q sont des polynômes à une indéterminée tels que $Q(0) \neq 0$, alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un couple unique de polynômes (U,R) tel que : $\begin{cases} P = QU + X^{n+1}R \\ \deg(U) \leqslant n \end{cases}$.

On dit que U est le quotient de la division de P par Q suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n.

Preuve : Il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \begin{cases} f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x) \end{cases} \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0 \end{cases}.$$

D'autre part, comme $Q(0) = g(0) \neq 0$, il existe un couple unique de polynômes (U,R) tel que : $\begin{cases} P = QU + X^{n+1}R \\ \deg(U) \leqslant n \end{cases}$.

On a : $\forall x \in I,\ f(x) - x^n\varepsilon_1(x) = P(x) = Q(x)U(x) + x^{n+1}R(x)$

$$= \big(g(x) - x^n\varepsilon_2(x)\big)U(x) + x^{n+1}R(x)$$
$$= g(x)U(x) + x^n\big(-\varepsilon_2(x)U(x) + xR(x)\big).$$

L'application g est continue en 0 (car g admet un $DL_0(0)$) et $g(0) \neq 0$; donc, au voisinage de 0 : $g(x) \neq 0$.

On obtient alors, au voisinage de 0 : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = U(x) + x^n\varepsilon(x)$,

où ε est définie par : $\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)U(x) + xR(x)}{g(x)}$.

Il est clair que : $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Ainsi $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière U. ■

Exercices

◇ **8.3.1** Former le développement limité à l'ordre et au voisinage indiqués de la fonction définie par la formule suivante (variable réelle x) :

a) ordre 3, voisinage de 0, $f(x) = (1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^{-1}$

b) 5, 0, $\operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 3x$ *c)* n, 0, $\cos^3 x$ $(n \in \mathbb{N})$ *d)* 4, 0, $\ln \dfrac{\sin x}{x}$ *e)* 3, 0, $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\operatorname{Arcsin} x)^2}$

f) 11, 0, $((\operatorname{ch} x - \cos x)(\operatorname{sh} x - \sin x))^2$ *g)* 3, 0, $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2)$

h) 3, 0, $\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$ *i)* 2, 0, $\ln(e^{ax} + e^{bx})$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

j) 9, 0, $\tan\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}\right)$ *k)* 3, 0, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *l)* 5, 0, $e^{\cos x}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

m) 3, 0, $\operatorname{Arctan}(e^x)$ *n)* 2, 0, $(1 + \operatorname{Arctan} x)^{\frac{x}{\sin^2 x}}$ *o)* 3, 0^+, $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

p) 2, 0, $\left(\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{-\operatorname{cotan} 2x}$ *q)* 4, 0, $\cos(\ln(\cos x))$ *r)* 4, 0, $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

s) 5, 0, $(\cos x)^{\sin x}$ *t)* 4, 0, $\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$ *u)* 8, 0, $\tan^3 x((\cos x)^{x^2} - 1)$

v) 5, 0, $\dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ *w)* 2, 0, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$ *x)* 3, 0, $\ln(2 + x + \sqrt{1+x})$

y) 11, 0, $\sin(x - \operatorname{Arctan} x)$ *z)* 13, 0, $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ *a')* 3, $\dfrac{\pi}{3}$, $\operatorname{Arctan}(2\sin x)$

b') 2, 2π, $\cos\sqrt{x^2 + 5\pi^2}$ *c')* 3, $+\infty$, $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$.

◇ **8.3.2** Montrer que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^{x^2} \end{array}$ admet une réciproque, et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

◇ **8.3.3** Former le $DL_4(0)$ d'une fonction f, définie sur un voisinage V de 0 et telle que : $\begin{cases} \forall x \in V,\ f'(x) = \tan(x + f(x)) \\ f(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

8.3.5 Exemples d'utilisation de développements limités

A) Calculs de limites

Pour calculer certaines limites se présentant sous une forme indéterminée $\left(\frac{0}{0}, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty\right)$, on peut utiliser des développements limités.

EXEMPLES :

1) Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - 2 \operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 3x}{\ln(1 + x + 2x^2) + \sqrt{1 - 2x} - 1 - x^2}$.

- $\operatorname{sh} x - 2 \operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 3x = \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - 2\left(2x + \frac{8x^3}{6}\right) + \left(3x + \frac{27x^3}{6}\right) + o(x^3)$
  $= 2x^3 + o(x^3)$
- $\ln(1 + x + 2x^2) + \sqrt{1 - 2x} - 1 - x^2 = \left((x + 2x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + 4x^5) + \frac{1}{3}x^3\right)$
  $+ \left(1 + \frac{1}{2}(-2x) - \frac{1}{8}(-2x)^2 + \frac{1}{16}(-2x)^3\right) - 1 - x^2 + o(x^3) = -\frac{13}{6}x^3 + o(x^3)$.

La limite demandée vaut donc : $-\dfrac{12}{13}$.

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (2^x + 3^x - 5^x)^{(2^x + 3^x - 2.5^x)^{-1}}$?

En notant $f(x)$ l'expression proposée (f est bien définie au voisinage de 0), on a :

$$\ln f(x) = \frac{\ln(2^x + 3^x - 5^x)}{2^x + 3^x - 2.5^x}.$$

- $2^x + 3^x - 2.5^x = e^{x \ln 2} + e^{x \ln 3} - 2e^{x \ln 5}$
  $= (1 + x \ln 2) + (1 + x \ln 3) - 2(1 + x \ln 5) + o(x) = x \ln \frac{6}{25} + o(x)$
- $2^x + 3^x - 5^x = 1 + x \ln \frac{6}{5} + o(x)$, donc $\ln(2^x + 3^x - 5^x) \sim x \ln \frac{6}{5}$.

D'où $\ln f(x) \sim \dfrac{x \ln \frac{6}{5}}{x \ln \frac{6}{25}}$, et finalement, la limite demandée est : $\exp\left(\dfrac{\ln \frac{6}{5}}{\ln \frac{6}{25}}\right)$.

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$?

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6} \cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

La limite demandée vaut $\dfrac{1}{3}$.

On remarquera que, dans cet exemple, une addition inconsidérée d'équivalents $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} \sim \dfrac{1}{x^2}\right)$ conduit à une absurdité $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \sim 0 : \text{ faux}\right)$.

B) Recherche d'une partie principale dans l'échelle des $x \longmapsto x^n, n \in \mathbb{N}$

Si, par exemple, une fonction f se présente sous forme de différence de deux fonctions équivalentes, il peut être utile de former les $DL(0)$ de ces deux fonctions (s'ils existent) pour en déduire le $DL(0)$ de f et donc (si la partie régulière de ce $DL(0)$ n'est pas nulle) la partie principale de f au voisinage de 0, en prenant le terme de plus bas degré. Cependant, souvent, on ne peut pas «deviner» à quel ordre il faudra développer.

EXEMPLE : Déterminer la partie principale en 0 de $f : x \longmapsto \operatorname{ch}(1-\cos x)+\cos(\operatorname{ch} x-1)-2$.

$1-\cos x = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$ et $\operatorname{ch} x - 1 = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$, d'où :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^2\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^2\right) - 2 + o(x^6)$$

$$= -\frac{x^6}{24} + o(x^6) \quad \text{d'où la réponse : } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{24}.$$

Exercices

◇ **8.3.4** Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(1-x)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\ln\operatorname{ch} x - \ln\cos x)^2}{\sqrt{\operatorname{ch} x} + \sqrt{\cos x} - 2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x^2(1-\cos x))}{(1-\sqrt{\cos x})\ln\dfrac{\sin x}{x}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1+x} - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right)$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right), (a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

o) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{ax^{a+1} - (a+1)x^a + 1}{x^{b+1} - x^b - x + 1}, (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^x - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2x}}{x^{\sin x} - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\sin 2x}}$

q) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ *r)* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ *s)* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^{\ln x}$

t) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{cotan} x}$ *u)* $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \dfrac{3x}{2}\right)^{\tan 3x}$ *v)* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (a^x)^{b^x}$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

w) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{cotan}^2 x}$ *x)* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$

y) $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} (9^x + 10^x - 12^x)^{(4^{x-1}+7^{x-1}-8^{x-1}-1)^{-1}}$ *z)* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \left(\operatorname{th} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{ch} \dfrac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$

a') $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$ *b')* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$

c') $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x \left(\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right)$.

◇ **8.3.5** Calculer la partie principale au voisinage de 0 (dans l'échelle des $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$) de la fonction f, pour laquelle on donne $f(x)$:

a) $x(2+\cos x) - 3\sin x$ *b)* $\ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) - \dfrac{3\sin x}{1+2\cos x}$

c) $\tan x - \sin x - \dfrac{1}{2}\sin^3 x$ *d)* $\operatorname{Arcsin}(x+a) - \operatorname{Arcsin} a$, $a \in [0;\ 1[$

e) $\operatorname{Arctan}(\operatorname{Arcsin} x) - \operatorname{Arcsin}(\operatorname{Arctan} x)$ *f)* $\sin(\tan x) - \tan(\sin x)$

g) $\sin\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) - \left(\sin x - \dfrac{\sin^3 x}{6}\right)$ *h)* $x^x - (\sin x)^x$

i) $(2+\cos x)(2+\operatorname{ch} x) - 9$.

◇ **8.3.6** *a)* Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la partie principale de $x \longmapsto e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}$ au voisinage de 0 soit de degré le plus grand possible.

b) Même question pour $x \longmapsto a\operatorname{th}^2 x + b\tan^2 x + \ln(\cos x)$.

◇ **8.3.7** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[0;\ 1]$, dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et exprimer sa limite.

8.4 Notion de développement asymptotique

8.4.1 Développement asymptotique dans l'échelle des $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$

On dit qu'une fonction f, définie au voisinage 0 (sauf peut-être en 0) admet un **développement asymptotique dans l'échelle des x^n ($n \in \mathbb{Z}$)** si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leqslant n \\ \text{au voisinage de } 0 : \ f(x) = x^{\alpha}(P(x) + o(x^n)) \end{cases}.$$

On dit que l'on a ainsi un **développement asymptotique à la précision $x^{\alpha+n}$**.

EXEMPLES :

1) Développement asymptotique de $x \longmapsto \operatorname{cotan} x$ au voisinage de 0 à la précision x^3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} &= \frac{1}{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3).
\end{aligned}$$

On obtient de même, au voisinage de 0 : $\coth x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + o(x^3)$.

2) Développement asymptotique de $f : x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)^2$ au voisinage de 0 à la précision x.

Puisque $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ et que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^2$, nous aurons besoin d'un $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, donc d'un $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$. On a successivement :

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1+x)} &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^{-1} \\
&= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)
\end{aligned}$$
- $\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{12} + o(x^3)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{12} + o(x)$.

8.4.2 Développement asymptotique dans l'échelle des $x \longmapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle $]0,\eta[$ ($\eta > 0$) admet un **développement asymptotique dans l'échelle des x^α** ($\alpha \in \mathbb{R}$) si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, $(a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \\ \forall x \in]0;\eta[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k x^{\alpha_k} + o(x^{\alpha_p}) \end{cases}.$$

On dit que l'on a ainsi un **développement asymptotique à la précision x^{α_p}**.

EXEMPLE :
Au voisinage de 0^+, développement asymptotique de $f : x \longmapsto \sqrt{x+x^2}$ à la précision $x^{5/2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+x^2} &= x^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\ &= x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}+o\left(x^{\frac{5}{2}}\right).\end{aligned}$$

8.4.3 Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles

1) Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln(x^2+x+2) &= 2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= 2\ln x+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ &= 2\ln x+\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

On obtient un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ dans l'échelle des $x \longmapsto (\ln x)^\alpha x^\beta$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

2) Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{x^2+2x+4}} &= e^{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = e^{x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}\\ &= e^{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{x+1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}\\ &= e^{x+1}e^{\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{x+1}\left(1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= ee^x+\frac{3e}{2}x^{-1}e^x+o\left(x^{-1}e^x\right).\end{aligned}$$

On obtient un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ dans l'échelle des $x \longmapsto x^{\beta}\mathrm{e}^{\gamma x}$, $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$.

3) Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ln(x\ln x+1) &= \ln(x\ln x)+\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}\right)\\ &= \ln x+\ln\ln x+\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x^2(\ln x)^2}+o\left(\frac{1}{x^2(\ln x)^2}\right),\end{aligned}$$

ce qui constitue un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ dans l'échelle des $x \longmapsto (\ln\ln x)^{\alpha}(\ln x)^{\beta}x^{\gamma}$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Exercices

◇ **8.4.1** Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\operatorname{sh}(\operatorname{ch}x)-\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x)\right)$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\operatorname{ch}\sqrt{x+1}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ *d)* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left((\mathrm{e}^x+x)^{\mathrm{e}^x-x^2}-(\mathrm{e}^x+x^2)^{\mathrm{e}^x-x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left((x+1)^{\left((x+1)^{\frac{1}{x+1}}\right)}-x^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}\right)$.

◇ **8.4.2** Former le développement asymptotique de $x \longmapsto \ln\operatorname{sh}x$ au voisinage de $+\infty$ dans l'échelle des $x \longmapsto x^{\alpha}\mathrm{e}^{\beta x}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, à la précision e^{-4x}.

◇ **8.4.3** Former le développement asymptotique de $f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}(1-x)$ au voisinage de 0^+, dans l'échelle des $x \longmapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, à la précision $x^{n+\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

◇ **8.4.4** Trouver un équivalent de $x \longmapsto (\operatorname{sh}x)^{\operatorname{ch}x}$ de la forme $\mathrm{e}^{P(x)\mathrm{e}^x}$, $P \in \mathbb{R}[X]$, au voisinage de $+\infty$.

◇ **8.4.5** *a)* Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet, dans $\left]n\pi\,;\ n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, une solution et une seule, notée x_n.

b) Former le développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$ quand n tend vers l'infini.

◇ **8.4.6** Même question que dans l'exercice 8.4.5 pour l'équation $\tan x = \dfrac{x^2}{1+x}$.

◇ **8.4.7** Former le développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n}$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, quand l'entier n tend vers l'infini.

◇ **8.4.8** Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, qu'on calculera, tel que, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = a+\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

◇ **8.4.9** Trouver la partie principale quand l'entier n tend vers l'infini de $u_n = \sum_{\substack{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$.

◇ **8.4.10** *a)* Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0,1\}$, il existe un élément unique de $\mathbb{R}_+^*$, noté x_n, tel que : $x_n^n = x_n + n$.

b) Montrer : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

c) Déterminer la partie principale de $x_n - 1$ quand n tend vers l'infini.

◇ **8.4.11** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $f_n : \begin{array}{l}]0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + \ln x - n \end{array}$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0;\ +\infty[$, admet une solution et une seule, qu'on notera x_n.

b) Former le développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{\ln n}{n}$, lorsque n tend vers l'infini.

◇ **8.4.12** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{d}(n)$ le nombre de diviseurs $\geqslant 1$ de n. Démontrer

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(k) \underset{n\infty}{\sim} n \ln n.$$

8.5 Etude pratique d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, représentation graphique

Les notions développées dans ce chapitre 8 sur la comparaison locale des fonctions permettent souvent l'étude d'une fonction au voisinage d'un réel (limite, continuité, dérivabilité, concavité locale) ou au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ (étude des branches infinies).

En particulier, s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$, alors la droite (Δ) d'équation $y = \alpha x + \beta$ est **asymptote** à la courbe (C) d'équation $y = f(x)$. De plus, le signe éventuel, au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) de $f(x) - \alpha x - \beta$ permettra souvent de déterminer les positions relatives de (C) et (Δ), localement. Par exemple, si $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\gamma > 0$ (resp. $\gamma < 0$), alors (C) est au-dessus (resp. dessous) de (Δ) au voisinage de $+\infty$.

Dans les exemples suivants, on donne la fonction f par $y = f(x)$, et on demande d'étudier f et de tracer la courbe représentative (C) de f (le plus souvent dans un plan euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$).

EXEMPLES :

1) $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2(x-2))^2}}(3x^2 - 4x).$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$4/3$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$	↗	0	↗	$+\infty$

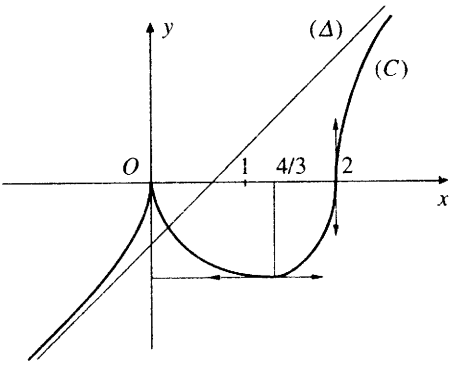
(C) admet en O une demi-tangente portée par Oy' et admet en $(2,0)$ une tangente parallèle à $y'y$.

- Au voisinage de $+\infty$ (et $-\infty$) :

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 1 - \frac{2}{3x} - \frac{4}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

d'où $f(x) = x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Donc (C) admet la droite (Δ) d'équation $y = x - \dfrac{2}{3}$ comme asymptote et, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), (C) est au-dessous (resp. au-dessus) de (Δ).



2) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

- f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Un calcul élémentaire fournit :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad f'(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

Le polynôme $P = X^4 - 3X^3 - X + 1$ admet deux zéros réels et deux seulement, qu'on note α, β ($\alpha < \beta$); un calcul numérique donne : $\alpha \simeq 0{,}564$, $\beta \simeq 3{,}071$.

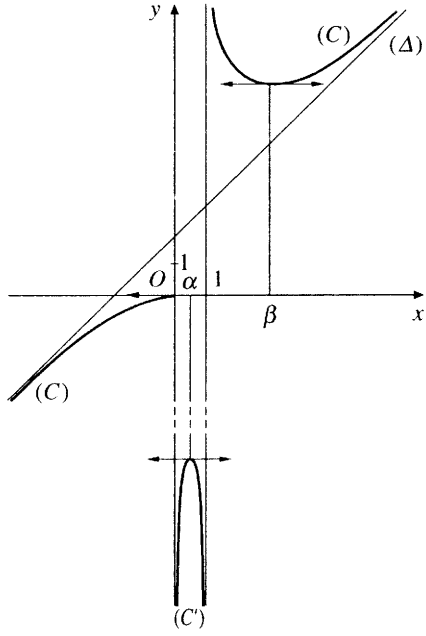
x	$-\infty$		0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

- Etude en $+\infty$ (ou $-\infty$) :

$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x$ (car $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$),

$$f(x) = x\,\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$
$$= x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= x+2+\frac{7}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc (C) admet la droite (Δ) d'équation $y = x+2$ comme asymptote et, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), (C) est au-dessus (resp. dessous) de (Δ).



3) $y = \sqrt{x^3+x-2}$

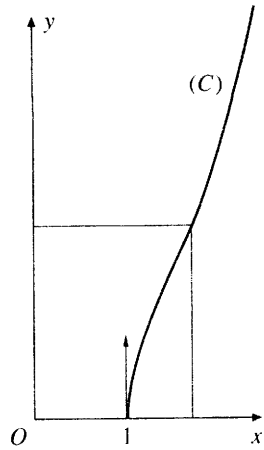
- Def $(f) = [1;\ +\infty[$; f est continue sur $[1;\ +\infty[$, dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et :

$$\forall x \in]1;\ +\infty[,\quad f'(x) = \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x-2}} > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x^{3/2}$; comme $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique $y'y$.

• f'' s'annule et change de signe en un réel et un seul α, $\alpha \simeq 1{,}689$, ce qui donne un point d'inflexion pour (C), de coordonnées approchées $(1{,}689 \quad , \quad 2{,}123)$.



Exercice

◇ **8.5.1** Construire les courbes (C) suivantes, d'équation $y = f(x)$, où on donne $f(x)$:

a) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$ *b)* $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ *c)* $(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

d) $e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ *e)* $\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ *f)* $(x+\sqrt{x})e^{\sqrt{x^2+x}}$

g) $(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$ *h)* $(\cos x)^{\operatorname{cotan}^2 x}$ *i)* $(1-x+x^2)^{\frac{1}{x}}$

j) x^{x-x^2} *k)* $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}$ *l)* $\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arctan} x$

m) $\operatorname{Arctan}(1+\tan x+\tan^2 x)$.

Chapitre 9

Calculs de primitives

9.1 Préambule

Le but de ce chapitre est de dégager des méthodes permettant, lorsque c'est possible, d'exprimer les primitives d'une fonction f donnée elle-même par une formule explicite.

Les intervalles envisagés sont supposés non vides et non réduits à un point.

Rappelons d'abord (cf. 6.4.2, Tome 1, p. 188) :

1) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f, \phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que ϕ est une primitive de f sur I si et seulement si : $\begin{cases} \phi \text{ est dérivable sur } I \\ \phi' = f \end{cases}$

2) On suppose ici que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I. Pour tout x_0 de I, l'application $\begin{array}{l} F : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f \end{array}$ est une primitive de f sur I, et l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F + \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pour toute primitive ϕ de f sur I et tout (a,b) de I^2, on a :

$$\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a) = [\phi(x)]_a^b.$$

Nous notons $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x \end{array}$ l'une quelconque des primitives de f sur I, et nous conservons cette notation dans le cas plus général où l'ensemble de départ de f est une réunion (finie ou infinie) d'intervalles.

La lettre C, utilisée dans des égalités du type :

$$\forall x \in I, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \phi(x) + C,$$

désignera une constante «arbitraire», c'est-à-dire une application constante $\begin{array}{l} C : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto C \end{array}$, lorsque I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Lorsque l'ensemble de départ E de f est une réunion d'intervalles (par exemple : $E = \mathbb{R}^*$, $E =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi, (n+1)\pi[, \ldots$), nous noterons :

$$\forall x \in E, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \phi(x) + C(x),$$

où C désignera une application de E dans $\mathbb{R}$ **localement constante**, c'est-à-dire constante sur chaque intervalle de E. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C(x),$$

où $C : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad x < 0 \\ C_2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Des égalités successives du genre :

$$\int f_1(x)\mathrm{d}x = \int f_2(x)\mathrm{d}x = \int f_3(x)\mathrm{d}x = \ldots$$

sont à comprendre sous la forme suivante : les membres de ces égalités diffèrent entre eux par des constantes (locales).

La constante de primitivation apparaît au moment où le symbole « $\int$ » disparaît. Par exemple :

$$\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C = \sin x \cos x + C.$$

Les définitions, notations et résultats ci-dessus s'étendent sans difficulté à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$; nous serons amenés en particulier (cf. 9.3 p. 85) à utiliser l'exponentielle complexe (cf. 7.10 p. 33).

Certaines primitives ne s'expriment pas à partir des fonctions usuelles par une succession finie d'opérations prises parmi : addition, multiplication, composition. Nous ne pourrons donc pas «calculer» ces primitives; c'est le cas, par exemple, de $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x$. On dit alors que ces primitives sont des **fonctions spéciales**.

Enfin, les logiciels modernes de calcul formel savent calculer les primitives (lorsque celles-ci ne sont pas des fonctions spéciales) et rendent donc vaine toute virtuosité mentale dans le calcul des primitives. Il nous semble cependant qu'il est nécessaire de maîtriser les méthodes et les types classiques de calculs de primitives pour pouvoir aborder avec succès la suite du cours d'Analyse.

9.2 Changement de variable

Rappelons (cf. 6.4.3, Tome 1, p. 190) que, si $\varphi : [\alpha;\ \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et si F est une application continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha;\ \beta])$, alors :

$$\int_\alpha^\beta F(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F(u)\mathrm{d}u.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $u = \varphi(x)$.

On écrira donc : $\displaystyle\int F(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int F(u)\mathrm{d}u$, en précisant : $u = \varphi(x)$.

Pour un calcul de primitives, il conviendra, ayant exprimé $\displaystyle\int F(u)\mathrm{d}u$, de «revenir» à la lettre x, en remplaçant «partout», dans le résultat, u par $\varphi(x)$.

Pour un calcul d'intégrales, on peut soit passer par des primitives, soit «changer» les bornes au fur et à mesure des éventuels changements de variable.

Remarque : Avec les notations précédentes, si φ est seulement de classe C^1 sur $[\alpha;\ \beta[$ (par exemple : $\varphi(x) \xrightarrow[x \to \beta^-]{} +\infty$), l'écriture $\displaystyle\int_\alpha^\beta F(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F(u)\mathrm{d}u$ ferait apparaître des intégrales généralisées : voir 10.2.3, p. 128.

Exemples classiques

- Pour $a \in \mathbb{R}^*$ fixé, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{x}{a}$ (ou $u = \dfrac{x}{|a|}$), on obtient :

1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c(u) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C(x),$$

$$C : \mathbb{R} - \{-a, a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad x < -a \\ C_2 & \text{si} \quad -a < x < a, \\ C_3 & \text{si} \quad a < x \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}),\ C \in \mathbb{R}$$

4) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{|a|}\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

5) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \varepsilon\ln(|x| + \sqrt{x^2-a^2}),\ \varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$$

$$C :]-\infty;\ -|a|[\cup]|a|;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad x < -|a| \\ C_2 & \text{si} \quad x > |a| \end{cases},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

• *1)* $\displaystyle\int \tan \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \underset{u=\cos x}{=} -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + c(u) = -\ln|\cos x| + C(x)$, où C est constante sur chaque $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi\,;\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) De même : $\displaystyle\int \operatorname{cotan} x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C(x)$, où C est constante sur chaque $]n\pi\,;\ (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exercices

◇ **9.2.1** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ *b)* $(\mathrm{e}^x - 1)^2$ *c)* $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$

d) $\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ *e)* $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$ *f)* $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$.

◇ **9.2.2** Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$.

9.3 Primitivation par parties

Rappelons (cf. 6.4.4, Tome 1, p. 191) :

1) Si $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur l'intervalle I, alors :

$\int u'v = uv - \int uv'$, ou encore : $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

2) Si $u, v : [a;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur $[a;\ b]$, alors :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Ainsi, pour calculer les primitives d'un produit de deux facteurs, on fera apparaître l'un des facteurs comme une dérivée (u'), et on ramènera le calcul de $\int u'v$ à celui de $\int uv'$.

Les applications classiques sont les suivantes :

1) Calcul de $\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$, où P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$

1re méthode

Une primitivation par parties donne :

$$\int P(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x.$$

En réitérant, on fera «disparaître» le polynôme.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \int (x^2 - x + 3)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x - 1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x - 1)\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x - 1)\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)\mathrm{e}^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (ou } C \in \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

2ème méthode

La 1re méthode n'est guère pratique, dès que $\deg(P) \geqslant 3$. D'après la 1re méthode, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(Q) = \deg(P) \\ \int P(x)e^{\alpha x}dx = Q(x)e^{\alpha x} + C,\ C \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Précisément : $Q = \dfrac{1}{\alpha}P - \dfrac{1}{\alpha^2}P' + \dfrac{1}{\alpha^3}P'' - \ldots$

En pratique, pour calculer Q, on procède par coefficients indéterminés.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \displaystyle\int (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx$.

Il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\int (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7,$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 3a = 4 \\ 2c + 2b = -2 \\ 2d + c = 7 \end{cases}$.

La résolution de ce système linéaire triangulaire («en cascade») fournit :

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{4},\ c = -\frac{9}{4},\ d = \frac{37}{8}.$$

D'où : $I(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{9}{4}x + \dfrac{37}{8}\right)e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2) Calcul de $\int P(x)\cos\beta x\,dx$ et $\int P(x)\sin\beta x\,dx$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$

1re méthode

Les deux intégrales se traitent de façon analogue. Primitiver par parties pour abaisser le degré du polynôme.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \displaystyle\int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x\,dx$.

$$\begin{aligned} I(x) &= -(x^3 - x^2 + 2x - 3)\cos x + \int (3x^2 - 2x + 2)\cos x\,dx \\ &= -(x^3 - x^2 + 2x - 3)\cos x + (3x^2 - 2x + 2)\sin x - \int (6x - 2)\sin x\,dx \\ &= -(x^3 - x^2 + 2x - 3)\cos x + (3x^2 - 2x + 2)\sin x + (6x - 2)\cos x - 6\int \cos x\,dx \\ &= (-x^3 + x^2 + 4x + 1)\cos x + (3x^2 - 2x - 4)\sin x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2ème méthode

D'après la 1re méthode, il existe deux polynômes A, B de $\mathbb{R}[X]$, de degrés $\leqslant \deg(P)$, tels que :

$$\int P(x)\sin\beta x\mathrm{d}x = A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On écrit $A(x)$, $B(x)$ avec des coefficients indéterminés, on dérive le second membre ci-dessus, et on «identifie» avec $P(x)\sin\beta x$.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x\,\mathrm{d}x$.

$$I(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cos x + (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x + C,\ C \in \mathbb{R},$$

où $a, \ldots, \delta$ sont des réels à calculer. En dérivant :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ &(-(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma))\sin x\\ &+ ((\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + (3ax^2 + 2bx + c))\cos x\\ &= (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x.\end{aligned}$$

Une condition (nécessaire et) suffisante est : $\begin{cases} -a = 1 \\ -b + 3\alpha = -1 \\ -c + 2\beta = 2 \\ -d + \gamma = -3 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + 3a = 0 \\ \gamma + 2b = 0 \\ \delta + c = 0 \end{cases}$.

La résolution de ce système linéaire en cascade (a et α, puis b et β, puis c et γ ...) donne :

$$a = -1,\ \alpha = 0,\ b = 1,\ \beta = 3,\ c = 4,\ \gamma = -2,\ d = 1,\ \delta = -4.$$

D'où : $I(x) = (-x^3 + x^2 + 4x + 1)\cos x + (3x^2 - 2x - 4)\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

La 1re méthode est commode lorsque $\deg(P) \leqslant 2$; la 2ème méthode semble plus rapide si $\deg(P) \geqslant 3$.

3ème méthode

Il se peut que l'on désire calculer simultanément $I(x) = \int P(x)\cos\beta x\ \mathrm{d}x$ et $J(x) = \int P(x)\sin\beta x\,\mathrm{d}x$.

Aux deux méthodes précédentes, on préférera alors l'utilisation de l'exponentielle complexe et la 1re méthode de 1) ci-dessus, p. 83.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \int x^3\cos x\,\mathrm{d}x$ et $J(x) = \int x^3\sin x\,\mathrm{d}x$.

$$I(x) + \mathrm{i}J(x) = \int x^3(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\mathrm{d}x = \int x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + C,$$

$(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ à trouver, $C \in \mathbb{C}$.

En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i}(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) = x^3$,

c'est-à-dire $\begin{cases} \mathrm{i}a = 1 \\ \mathrm{i}b + 3a = 0 \\ \mathrm{i}c + 2b = 0 \\ \mathrm{i}d + c = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a = -\mathrm{i} \\ b = 3 \\ c = 6\mathrm{i} \\ d = -6 \end{cases}$.

Ainsi : $I(x) + \mathrm{i}J(x) = (-\mathrm{i}x^3 + 3x^2 + 6\mathrm{i}x - 6)(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + C$, $C \in \mathbb{C}$, d'où, en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} I(x) = (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + C_1 \\ J(x) = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + C_2 \end{cases}, \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3) Calcul de $\int \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \, \mathrm{d}x$ et $\int \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x \, \mathrm{d}x$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

En notant $I(x) = \int \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \, \mathrm{d}x$ et $J(x) = \int \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x \, \mathrm{d}x$, on a :

$$\begin{aligned} I(x) + \mathrm{i}J(x) &= \int \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x}}{\alpha + \mathrm{i}\beta} + C \\ &= \frac{\alpha - \mathrm{i}\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha x} (\cos \beta x + \mathrm{i} \sin \beta x) + C, \ C \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

D'où, en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} I(x) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) + C_1 \\ J(x) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha x} (-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x) + C_2 \end{cases}, \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4) Calcul de $\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \, \mathrm{d}x$ et $\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x \, \mathrm{d}x$, $P \in \mathbb{R}[X]$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Le plus commode semble être ici de passer par l'exponentielle complexe. En notant $I(x)$ et $J(x)$ les primitives demandées, on a :

$$I(x) + \mathrm{i}J(x) = \int P(x)\mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} \mathrm{d}x,$$

et on utilise la 2ème méthode de 1) p. 84.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \int (x + 3)\mathrm{e}^x \cos 3x \, \mathrm{d}x$.

En posant $J(x) = \int (x+3)\mathrm{e}^x \sin 3x \,\mathrm{d}x$, on a :

$$I(x) + \mathrm{i}J(x) = \int (x+3)\mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})x}\mathrm{d}x = (ax+b)\mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})x} + C,$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ à trouver, et $C \in \mathbb{C}$.

En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+3\mathrm{i})(ax+b) + a = x+3$, c'est-à-dire $\begin{cases} (1+3\mathrm{i})a = 1 \\ (1+3\mathrm{i})b + a = 3 \end{cases}$,

d'où $a = \dfrac{1-3\mathrm{i}}{10}, b = \dfrac{19-42\mathrm{i}}{50}$.

Ainsi : $I(x) = \text{Ré}\left(\left(\dfrac{1-3\mathrm{i}}{10}x + \dfrac{38-84\mathrm{i}}{100}\right)\mathrm{e}^x(\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x)\right) + C$

$$= \mathrm{e}^x\left(\left(\frac{x}{10} + \frac{38}{100}\right)\cos 3x + \left(\frac{3x}{10} + \frac{84}{100}\right)\sin 3x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) Pour tout α de $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\int x^\alpha \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

En particulier : $\int \ln|x| \,\mathrm{d}x = x\ln|x| - x + C(x)$, C constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et constante sur $\mathbb{R}_-^*$.

On peut remarquer aussi que le calcul de $\int x^\alpha \ln x \,\mathrm{d}x$ se ramène, par le changement de variable $u = \ln x$ à celui de $\int \mathrm{e}^{(\alpha+1)u}u \,\mathrm{d}u$, qui relève de 1) p. 83.

Exercices

◇ **9.3.1** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $(x^2-1)\mathrm{e}^{3x}$ *b)* $(x^2-x+3)\sin x$ *c)* $(x^3-1)\mathrm{ch}\,x$

d) $(x^2+1)\mathrm{e}^x\cos x$ *e)* $(x\,\mathrm{sh}\,x)^2$ *f)* $\mathrm{Arcsin}\,x$

g) $\mathrm{Arccos}\,x$ *h)* $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ *i)* $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

j) $\dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(x^\alpha+1)^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *k)* $x^2\ln(x^6-1)$ *l)* $\ln(1+x^2)$

m) $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x+1}{x-2}$ *n)* $\dfrac{x}{\cos^2 x}$ *o)* $\cos x\ln(1+\cos x)$ *p)* $3^{\sqrt{2x+1}}$.

◇ **9.3.2** Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{Arcsin}\,x)^2\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)^{3/2}\mathrm{Arccos}\,(1-2x)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)\mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x$ *d)* $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\tan^2 x - \tan x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ *e)* $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$.

9.4 Liste des primitives usuelles (p. 89)

Dans la 1re colonne figure la fonction f dont on veut donner les primitives (la variable est notée x).

Dans la 2ème colonne se trouve une des primitives F de f.

Enfin, la 3ème colonne contient l'ensemble de validité, qui est un intervalle ou une réunion d'intervalles. Pour obtenir toutes les primitives de f, rajouter à F une application constante sur chaque intervalle inclus dans l'ensemble de validité.

Remarque

Pour tout h de $\mathbb{R}^*$: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+h}} = \ln|x+\sqrt{x^2+h}| + C$ sur les intervalles de validité.

Fonction f $f(x)$	Primitive F $F(x)$	Ensemble de validité
$e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ fixé	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$ $\cos x$ $\sin x$	$\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$ $\sin x$ $-\cos x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$ $\coth x$ $\tan x$ $\operatorname{cotan} x$	$\ln \operatorname{ch} x$ $\ln \lvert\operatorname{sh} x\rvert$ $-\ln \lvert\cos x\rvert$ $\ln \lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ $\mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \coth^2 x - 1$ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$	$\operatorname{th} x$ $-\coth x$ $\tan x$ $-\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ $\mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ x^n, $n \in \mathbb{Z}_- - \{0, -1\}$ x^n, $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{x}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\ln \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{1+x^2}$ $\frac{1}{1-x^2}$ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arctan} x$ $\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$ $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\operatorname{Arcsin} x$ $\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ $\mathbb{R}$ $]-1;\ 1[$ $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$

9.5 Primitivation des fonctions rationnelles

Remarques préalables

1) Cas d'une fonction rationnelle impaire

Si la fonction rationnelle F est impaire, alors il existe deux polynômes P, Q tels que $F = \mathrm{X}\dfrac{P(\mathrm{X}^2)}{Q(\mathrm{X}^2)}$, d'où $\displaystyle\int F(x)\mathrm{d}x = \int \frac{P(u)}{Q(u)}\mathrm{d}u$, par le changement de variable $u = x^2$. Les degrés des polynômes qui interviennent sont donc abaissés.

2) Généralisation de la remarque précédente

S'il existe $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et une fraction rationnelle G tels que $F(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n-1}G(\mathrm{X}^n)$, alors on effectuera le changement de variable $u = x^n$:

$$\int F(x)\mathrm{d}x = \int x^{n-1}G(x^n)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int G(u)\mathrm{d}u.$$

3) En utilisant la linéarité de la primitivation, on peut quelquefois exploiter plusieurs changements de variable.

La méthode générale consiste à décomposer la fraction rationnelle en éléments simples (le plus souvent sur $\mathbb{R}$) (cf. Tome 5, Algèbre), puis à primitiver, chacun de ceux-ci.

1) Primitivation des éléments simples de 1re espèce

Il s'agit de calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$.

a) Dans le cas où $(a,n) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{N} - \{0,1\})$, on a :

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

où
- $C : \begin{array}{l} \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} C_1 & \text{si } x < a \\ C_2 & \text{si } x > a \end{cases} \end{array}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, si $a \in \mathbb{R}$
- $C : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto C \end{array}$, $C \in \mathbb{C}$, si $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

b) Si $n = 1$ et $a \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|x-a| + C$,

où $C : \begin{array}{l} \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} C_1 & \text{si } x < a \\ C_2 & \text{si } x > a \end{cases} \end{array}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Si $n = 1$ et $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, la primitivation «directe» comme ci-dessus nécessiterait un logarithme complexe, notion qui n'est pas abordée dans ce cours. En notant $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x &= \int \frac{(x-a_1)+\mathrm{i}a_2}{(x-a_1)^2+a_2^2}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x-a_1}{(x-a_1)^2+a_2^2}\mathrm{d}x + \mathrm{i}a_2 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a_1)^2+a_2^2}\end{aligned}$$

et on est ramené à primitiver des éléments simples de 2nde espèce (voir ci-dessous).

2) Primitivation des éléments simples de seconde espèce

Il s'agit de calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x$, où λ, μ, a, b, c sont des réels tels que $b^2 - 4ac < 0$, et où $n \in \mathbb{N}^*$.

1re étape : si $\lambda \neq 0$, faire apparaître multiplicativement au numérateur la dérivée du trinôme $ax^2 + bx + c$:

$$\begin{aligned}I(x) &= \frac{\lambda}{2a}\int \frac{2ax + \dfrac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2a}\left(\frac{2a\mu}{\lambda} - b\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}.\end{aligned}$$

La 1re intégrale du dernier membre ci-dessus est aisément calculée, à l'aide du changement de variable $u = ax^2 + bx + c$:

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^n}.$$

2ème étape : ramener le calcul de $J(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$ à celui de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ par un changement de variable affine.

En mettant le trinôme sous forme canonique, et en notant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}\left(1 + \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right).$$

A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, on a :

$$J(x) = \left(\frac{4a}{-\Delta}\right)^n \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

3ème étape : calculer $I_n(t) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$, de proche en proche à l'aide d'une relation de récurrence.

D'abord : $I_1(t) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on obtient, par une primitivation par parties :

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n(I_n(t) - I_{n+1}(t)), \end{aligned}$$

d'où : $\quad 2nI_{n+1}(t) = (2n-1)I_n(t) + \dfrac{t}{(1+t^2)^n}$.

EXEMPLES :

- $2I_2(t) = I_1(t) + \dfrac{t}{1+t^2}$, d'où $I_2(t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} t + \dfrac{t}{2(1+t^2)} + C$
- $4I_3(t) = 3I_2(t) + \dfrac{t}{(1+t^2)}$, d'où $I_3(t) = \dfrac{3}{8}\operatorname{Arctan} t + \dfrac{3t}{8(1+t^2)} + \dfrac{t}{4(1+t^2)^2} + C$.

Remarque : On peut aussi calculer $I_n(t)$ en utilisant le changement de variable $\theta = \operatorname{Arctan} t$ (on a alors $t = \tan\theta$ et $\mathrm{d}t = (1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta$) :

$$I_n(t) = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}} = \int \cos^{2(n-1)}\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

On linéarise $\cos^{2(n-1)}\theta$, puis on primitive, et enfin on revient à la variable t. Par exemple :

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan} t + \frac{t}{1+t^2}\right) + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

EXEMPLES :

1) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x+1)}$.

Une décomposition en éléments simples fournit : $\dfrac{1}{\mathrm{X}^3(\mathrm{X}+1)} = \dfrac{1}{\mathrm{X}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{X}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{X}} - \dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$,

d'où $I(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x} + \ln|x| - \ln|x+1| + C(x)$, où C est constante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$; $]0; +\infty[$.

2) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$, puis $J(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

- D'abord : $\mathrm{X}^3 + 1 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)$; puis, par une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$:

$$\frac{1}{\mathrm{X}^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\mathrm{X}+1} + \frac{-\frac{1}{3}\mathrm{X} + \frac{2}{3}}{\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1}.$$

D'où $I(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}I_1(x)$, où

$$I_1(x) = \int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}I_2(x), \text{ où}$$

$$I_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalement :

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C(x),$$

où C est constante sur chacun des intervalles $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ +\infty[$.

- En utilisant une primitivation par parties (comme dans le calcul de $I_n(t)$ ci-dessus, p. 92), on obtient : $I(x) = \frac{x}{x^3+1} + 3\int \frac{x^3}{(x^3+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x^3+1} + 3(I(x) - J(x))$, d'où

$$J(x) = \frac{1}{3}\left(2I(x) + \frac{x}{x^3+1}\right)$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x}{3(x^3+1)} + C(x),$$

où C est constante sur chacun des intervalles $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ +\infty[$.

Exercices

◇ **9.5.1** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\frac{1}{x(x^2+1)^3}$ *b)* $\frac{x^3}{x^2+2x+2}$ *c)* $\frac{x^2-x+1}{(x^2+4x+5)^2}$

d) $\frac{1}{(x+1)^5-x^5-1}$ *e)* $\frac{1}{(x^2+x+1)^2+1}$.

◇ **9.5.2** Même question que dans l'exercice 9.5.1 :

a) $\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ *b)* $\sqrt[3]{\mathrm{e}^x-1}$ *c)* $\frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

d) $\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{\sqrt{x}}$ *e)* $\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{-x}}}$.

◇ **9.5.3** Calculer : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{Arctan}\,(\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$.

◇ **9.5.4** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a.b) \in \mathbb{R}^2$ pour que les primitives de $x \longmapsto \frac{ax+b}{x^3(x-1)^2}$ (sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$) soient des fonctions rationnelles (à des constantes additives près).

◇ **9.5.5** Même question que dans l'exercice 9.5.4 pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \longmapsto \frac{x^3+a}{x(x^2+1)^2}$.

9.6 Exemples : primitivation de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles

9.6.1 Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Pour calculer $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, où R désigne une «fonction rationnelle de deux variables», on devra effectuer un changement de variable, le plus souvent. On peut «toujours» prendre $t = \tan\dfrac{x}{2}$ (en tenant compte des discontinuités ainsi créées) puisqu'alors :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

et qu'on pourra ainsi se ramener à calculer les primitives d'une fonction rationnelle F de la variable t. Mais les degrés des numérateur et (surtout) dénominateur de F sont souvent excessivement élevés, et rendent les calculs manuels fastidieux. On n'envisagera donc ce changement de variable qu'en dernier recours.

1) Un cas particulier

Remarquons d'abord qu'on pourra calculer assez aisément les primitives de polynômes en $\sin x$ et $\cos x$. Le calcul de ces primitives se ramène à celui de $\displaystyle\int \cos^m x \sin^n x\,\mathrm{d}x$, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

- Si m est impair, on pourra effectuer le changement de variable $u = \sin x$.
- Si n est impair, on pourra prendre $u = \cos x$
- Si m et n sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver. Cette méthode de linéarisation s'applique d'ailleurs aussi aux deux cas précédents.

EXEMPLES :

1) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x\,\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int (1-u^2)u^4\mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2) Calculer $\displaystyle I(x) = \int \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

Linéarisons (cf. Tome 1, 2.5.2 p. 39) :

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\left(\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)\\
&= \frac{1}{16}(1+\cos 2x)(1-\cos 4x)\\
&= \frac{1}{16}\left(1+\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right)\\
&= \frac{1}{32}(2+\cos 2x - 2\cos 4x - \cos 6x),
\end{aligned}$$

d'où

$$I(x) = \frac{1}{32}\left(2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Il resterait éventuellement à exprimer ce dernier résultat (au $\frac{x}{16}$ additif près) sous la forme d'un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$ (cf. Tome 1, 2.5.1 p. 39) :

$$I(x) = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}\sin x \cos x \left(1 + \frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{8}{3}\cos^4 x\right) + C.$$

2) Cas général

L'exemple 1) ci-dessus p. 94 nous montre qu'on peut, dans certains cas, utiliser le changement de variable $u = \sin x$; dans d'autres cas, ce pourra être $u = \cos x$, ou $u = \tan x$.

Lorsqu'on peut utiliser le changement de variable $u = \sin x$, c'est que $R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ peut se mettre sous la forme $F(\sin x)\cos x\ \mathrm{d}x$ (où F est une fonction rationnelle). On s'aperçoit qu'en remplaçant x par $\pi - x$, l'expression $F(\sin x)\cos x\ \mathrm{d}x$ est invariante. Cela nous conduit à envisager les règles suivantes, appelées règles de Bioche.

◆ **Proposition** **(Règles de Bioche)**

Soit à calculer $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, où R est une fonction rationnelle à deux variables ; on note $\omega(x) = R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, appelé **élément différentiel** de la primitive demandée.

1) Si, pour tout x du domaine considéré, on a $\omega(-x) = \omega(x)$, alors on pourra, par le changement de variable $u = \cos x$, se ramener à une primitive d'une fonction rationnelle de la variable u.

2) Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on pourra utiliser $u = \sin x$

3) Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on pourra utiliser $u = \tan x$.

Preuve : Nous allons établir la preuve de *1)*, celles de *2)* et *3)* lui étant analogues.

Puisque ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), il existe quatre polynômes A, B, C, D de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout x de E (E étant le domaine considéré) :

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{A(\cos x) + B(\cos x)\sin x}{C(\cos x) + D(\cos x)\sin x};$$

pour arriver à ce résultat, il suffit de remplacer, «partout» dans $R(\sin x, \cos x)$, $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

Puis, en multipliant numérateur et dénominateur par $C(\cos x) - D(\cos x)\sin x$ (si D n'est pas le polynôme nul), qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points d'un intervalle d'amplitude 2π :

$$\begin{aligned}\frac{A(\cos x) + B(\cos x)\sin x}{C(\cos x) + D(\cos x)\sin x} &= \frac{(A(\cos x) + B(\cos x)\sin x)(C(\cos x) - D(\cos x)\sin x)}{(C(\cos x))^2 - (D(\cos x))^2(1 - \cos^2 x)}\\ &= U(\cos x) + V(\cos x)\sin x,\end{aligned}$$

où U, V sont des fractions rationnelles.

Alors :

$$\left(\forall x \in E,\ \omega(-x) = \omega(x)\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\forall x \in E,\ -(U(\cos x) - V(\cos x)\sin x)\mathrm{d}x = (U(\cos x) + V(\cos x)\sin x)\mathrm{d}x\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\forall x \in E,\ U(\cos x) = 0\right) \Longleftrightarrow U = 0,$$

d'où $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int V(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int V(u)\mathrm{d}u$, où $u = \cos x$.

EXEMPLES :

1) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi;\ (n+1)\pi[.$$

Ici : $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ et on va donc pouvoir poser le changement de variable $u = \sin x$.
On obtient :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u^2) + (1-u^2)^2}{u^2 + u^4}\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{2 - 3u^2 + u^4}{u^2(1+u^2)}\mathrm{d}u = \int \left(1 + \frac{2}{u^2} - \frac{6}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= u - \frac{2}{u} - 6\,\mathrm{Arctan}\,u + c(u) = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\,\mathrm{Arctan}\,(\sin x) + C(x), \end{aligned}$$

où C est constante sur chaque $]n\pi;\ (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R}$.

Ici : $\omega(-x) = \omega(x)$; on posera donc $u = \cos x$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{u^2 - 1}{2 + u}\mathrm{d}u = \int \left(u - 2 + \frac{3}{u+2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{u^2}{2} - 2u + 3\ln|u+2| + C = \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(2 + \cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R}$.

Remarquer $I = I_1 + I_2$, où $\quad I_1(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x \quad$ et $\quad I_2(x) = \displaystyle\int \frac{-\sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Dans $I_1(x)$ (resp. $I_2(x)$), on effectue le changement de variable $u = \sin x$ (resp. $v = \cos x$) :

- $I_1(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{2 - u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + u}{\sqrt{2} - u}\right| + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

- $I_2(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \operatorname{Arctan} v + C_2 = \operatorname{Arctan}(\cos x) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$

Finalement : $I(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \dfrac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x} + \operatorname{Arctan}(\cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

4) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(\sin x - \cos x)}$.

$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R} - \left(\left\{\dfrac{\pi}{4} + m\pi;\ m \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

Ici : $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, d'où le changement de variable $u = \tan x$, ce qui ne supprime pas de point de $\mathrm{Def}(I)$. On a :

$$I(x) = \int \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x}} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \ln|u-1| + c(u) = \ln|\tan x - 1| + C(x),$$

où C est constante sur chaque intervalle de $\mathrm{Def}(I)$.

5) Calcul de $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a+\cos x}$, $a \in]1;\ +\infty[$.

Aucune des règles de Bioche ne s'appliquant, nous sommes conduits à effectuer le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$, ce qui a l'inconvénient d'amener des «discontinuités parasites», les $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$; pour tout x de $]-\pi + 2n\pi;\ \pi + 2n\pi[$, on a :

$$I(x) = \int \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{a + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \mathrm{d}t = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(a+1)+(a-1)t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\, t\right) + C_n,\ C_n \in \mathbb{R}.$$

Il existe ainsi $C_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-\pi + 2n\pi;\ \pi + 2n\pi[,\ I(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \tan\frac{x}{2}\right) + C_n.$$

- Mais, puisque $x \longmapsto \dfrac{1}{a+\cos x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, I est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il nous faut donc «raccorder» les primitives précédentes, en égalant les limites de I en $(\pi + 2n\pi)^-$ et $(\pi + 2n\pi)^+$.

On obtient : $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_n = -\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_{n+1}$, d'où : $C_{n+1} = C_n + \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $C_n = C_0 + \dfrac{2n\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, où $C_0 \in \mathbb{R}$, et on obtient ainsi l'expression de $I(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}} \tan\dfrac{x}{2}\right) + n\pi\right) + C_0 \\ \qquad\qquad \text{si} \quad x \in]-\pi + 2n\pi;\ \pi + 2n\pi[,\ n \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{(2n+1)\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_0 \qquad \text{si} \quad x = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

• Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in]-\pi+2n\pi\,;\,\pi+2n\pi[$. En remarquant $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - n\pi$, on déduit (en notant $\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$) :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\alpha\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) + C_0 \\
&= \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{Arctan}\frac{\alpha\tan\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}}{1+\alpha\tan^2\frac{x}{2}} + C_0
\end{aligned}$$

(cf. 7.9.3 p. 31)

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{Arctan}\frac{2(\alpha-1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{(1+\cos x)+\alpha(1-\cos x)} + C_0 \\
&= \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{Arctan}\frac{(\alpha-1)\sin x}{(1+\alpha)+(1-\alpha)\cos x} + C_0.
\end{aligned}$$

On remarque alors que la valeur en $\pi + 2n\pi$ de la dernière expression est $\frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{a^2-1}} + C_0$. On peut donc conclure par le résultat suivant, dans lequel aucun raccord n'apparait (on obtient une seule expression pour $I(x)$, valable lorsque x décrit $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{Arctan}\frac{(\alpha-1)\sin x}{(1+\alpha)+(1-\alpha)\cos x} + C,$$

$$C \in \mathbb{R} \quad \left(\text{et } \alpha = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right).$$

Remarque : On peut parfois appliquer les règles de Bioche pour le calcul de $\int F(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ lorsque F n'est pas une fraction rationnelle (cf. exercice 9.6.2).

Exercices

◇ **9.6.1** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\sin^4 x$ *b)* $\sin x \sin 2x \sin 3x$ *c)* $\dfrac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

d) $\dfrac{\tan x}{1+\cos x}$ *e)* $\dfrac{1}{\cos x \sin^4 x}$ *f)* $\operatorname{cotan}^3 x$ *g)* $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$.

◇ **9.6.2** Même question que dans l'exercice 9.6.1 :

a) $\dfrac{1}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}$ *b)* $\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos 2x}}$ *c)* $\dfrac{1}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$.

◇ **9.6.3** Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{4}}$ *b)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

9.6.2 Fonctions rationnelles en sh x et ch x

Il s'agit de calculer $I(x) = \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\mathrm{d}x$, où R est une fonction rationnelle de deux variables. En pratique, on considère la primitive J définie par $J(x) = \int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, pour laquelle on essaie d'appliquer une règle de Bioche. Ceci conduirait, pour calculer $J(x)$, à l'utilisation de l'un des changements de variable :

$$u = \cos x, \quad u = \sin x, \quad u = \tan x, \quad u = \tan \frac{x}{2}.$$

On utilise dans notre cas le changement de variable correspondant pour les fonctions hyperboliques, c'est-à-dire respectivement :

$$u = \operatorname{ch} x, \quad u = \operatorname{sh} x, \quad u = \operatorname{th} x, \quad u = \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

On remarquera que, comme $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ s'exprime comme une fonction homographique de e^x $\left(\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{e^x + 1}\right)$, l'utilisation du changement de variable $u = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ revient quasiment à celle de $v = \mathrm{e}^x$ (voir aussi 9.6.3 p. 101).

EXEMPLES :

1) Calculer $I(x) = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x(2\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{ch}^3 x)}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R}$, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x > |\operatorname{sh} x|$.

En notant $\omega(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x(2\sin^3 x + 3\cos^3 x)}\mathrm{d}x$, on a formellement $\omega(\pi + x) = \omega(x)$. Pour calculer $I(x)$, on va donc effectuer le changement de variable $u = \operatorname{th} x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{2\operatorname{th}^3 x + 3}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{th}^2 x(1 - \operatorname{th}^2 x)}{2\operatorname{th}^3 x + 3}\mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{2u^3 + 3}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{6}\ln|2u^3 + 3| + C = \frac{1}{6}\ln(3 + 2\operatorname{th}^3 x) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln(2\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{ch}^3 x) - \frac{1}{2}\ln\operatorname{ch} x + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calculer $I(x) = \int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x(2 + \operatorname{sh}^2 x)}\mathrm{d}x$.

En notant $\omega(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x(2 + \sin^2 x)}\mathrm{d}x$, on a $\omega(-x) = \omega(x)$; on effectue donc le changement de variable $u = \operatorname{ch} x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x(2 + \operatorname{sh}^2 x)}\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{u^2 - 1}{u(u^2 + 1)}\mathrm{d}u = \int \left(-\frac{1}{u} + \frac{2u}{u^2 + 1}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\ln|u| + \ln(u^2 + 1) + C = -\ln\operatorname{ch} x + \ln(2 + \operatorname{sh}^2 x) + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercices

◇ **9.6.4** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh}^2 x}$ *b)* $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^4 x}$ *c)* $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^5 x}$ *d)* $\dfrac{\operatorname{sh} x}{3+\operatorname{sh}^2 x}$

e) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ch}^2 x}$ *f)* $\dfrac{\operatorname{ch} 3x}{1+\operatorname{sh} x}$ *g)* $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 3x - \operatorname{ch} x}$ *h)* $\operatorname{th}^3 x$.

◇ **9.6.5** Calculer les primitives suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A(x) = \int \operatorname{ch}(n+1)x \operatorname{sh}^{n-1} x \, \mathrm{d}x$$

$$B(x) = \int \operatorname{sh}(n+1)x \operatorname{sh}^{n-1} x \, \mathrm{d}x$$

$$C(x) = \int \operatorname{ch}(n+1)x \operatorname{ch}^{n-1} x \, \mathrm{d}x$$

$$D(x) = \int \operatorname{sh}(n+1)x \operatorname{ch}^{n-1} x \, \mathrm{d}x.$$

◇ **9.6.6** Calculer les primitives suivantes, où $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant 3$:

$$I(x) = \int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh}^n x} \mathrm{d}x, \; J(x) = \int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^n x} \mathrm{d}x.$$

9.6.3 Fonctions rationnelles en $\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$

Il s'agit de calculer $I(x) = \displaystyle\int F(\mathrm{e}^{\alpha x})\mathrm{d}x$ où $F \in \mathbb{C}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On effectuera en général le changement de variable $u = \mathrm{e}^{\alpha x}$:

$$I(x) = \frac{1}{\alpha} \int \frac{F(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}$.

$$\begin{aligned} I(x) &\underset{u=\mathrm{e}^x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+2)^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{(u+2)^2} - \frac{1}{u+2}\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln|u| + \frac{2}{u+2} - \ln|u+2|\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(x + \frac{2}{\mathrm{e}^x+2} - \ln(\mathrm{e}^x+2)\right) + C, \; C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarques :

1) Pour calculer $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\mathrm{d}x$ (cf. 9.6.2 p. 99), on peut effectuer le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$, puisqu'il s'agit de primitiver une fonction rationnelle en e^x. Mais, souvent, ce changement de variable conduit à des calculs plus longs que ceux qui apparaissent lorsqu'on peut utiliser une des règles de Bioche.

2) Le même changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ peut quelquefois être utilisé pour calculer $\int F(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$, où F est une fonction non nécessairement rationnelle.

EXEMPLE : Calculer $I(x) = \int \sqrt{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I(x) &\underset{u=\mathrm{e}^x}{=} \int \sqrt{u+1}\frac{1}{u}\mathrm{d}u \underset{v=\sqrt{u+1}}{=} \int \frac{v}{v^2-1}2v\,\mathrm{d}v \\ &= 2\int \frac{v^2}{v^2-1}\mathrm{d}v = 2\int\left(1+\frac{1}{v^2-1}\right)\mathrm{d}v = 2\left(v - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right) + C \\ &= 2\sqrt{\mathrm{e}^x+1} - \ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice

◇ **9.6.7** Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^{\alpha x})^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

9.6.4 Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Les éléments $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$, sont fixés. On effectuera le changement de variable $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ce qui ramènera le calcul de $I(x) = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ (où R est une fonction rationnelle à deux variables) au calcul de $\int F(u)\mathrm{d}u$, où $F \in \mathbb{R}(\mathrm{X})$.

EXEMPLES :

1) Calculer $I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} I(x) &\underset{u=\sqrt[6]{x}}{=} \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\mathrm{d}u = 6\int \frac{u^3}{u+1}\mathrm{d}u \\ &= 6\int\left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = 6\int\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|\right) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Calculer $I(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{Def}(I) = [0;\,1[$.

On a : $I(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$, d'où, par le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (donc $x = \dfrac{u^2}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$) :

$$I(x) = \int (1+u^2)u\frac{2u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$$
$$= 2(u - \mathrm{Arctan}\,u) + C = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercices

◇ **9.6.8** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ *b)* $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$ *c)* $\dfrac{2+x}{1+x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$ *e)* $\dfrac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}$ *f)* $\dfrac{x^2}{(2-x^3)\sqrt{1-x^3}}$.

◇ **9.6.9** Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$ *b)* $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$.

9.6.5 Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer

$$I(x) = \int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$$

(où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et R est une fonction rationnelle à deux variables); certaines de ces méthodes sont liées à la Géométrie (paramétrisation rationnelle des coniques). Nous allons nous contenter d'une méthode «purement calculatoire».

Le cas $a = 0$ est un cas particulier de 9.6.4 p. 101, la méthode consistant alors à effectuer le changement de variable $y = \sqrt{bx+c}$. Nous supposons donc $a \neq 0$. On a alors, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Le cas $\Delta = 0$ est d'étude immédiate (la racine carrée «disparait»). Nous supposons donc $\Delta \neq 0$, et nous séparons en trois cas :

1er cas : $a > 0$ et $\Delta < 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = \dfrac{-\Delta}{4a}\left(1 + \left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)$.

En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, on ramène le calcul de $I(x)$ à celui de $J(t) = \displaystyle\int S(t, \sqrt{1+t^2})\mathrm{d}t$, où S est une fonction rationnelle. Ensuite, le changement de variable $\varphi = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ ramène le calcul de $J(t)$ à celui de $K(\varphi) = \displaystyle\int T(\operatorname{sh}\varphi, \operatorname{ch}\varphi)\mathrm{d}\varphi$, où T est une fonction rationnelle. Enfin, on applique une méthode de 9.6.2 p. 99.

EXEMPLE : calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{Def}(I) = \mathbb{R}$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}\left(1 + \left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$,

d'où, par le changement de variable $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$I(x) = \int \frac{\frac{1}{2}(t\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t\sqrt{3}-1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t.$$

Puis on effectue le changement de variable $\varphi = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$, donc $t = \operatorname{sh}\varphi$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3}\operatorname{sh}\varphi - 1}{\operatorname{ch}\varphi}\operatorname{ch}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}\varphi - \frac{1}{2}\varphi + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C_1 \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} + \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C, \quad C_1, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2ème cas : $a < 0$ et $\Delta > 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = \dfrac{-\Delta}{4a}\left(1 - \left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right)$.

En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$, on ramène le calcul de $I(x)$ à celui de $J(t) = \displaystyle\int S(t, \sqrt{1-t^2})\mathrm{d}t$, où S est une fonction rationnelle. Ensuite le changement de variable $\theta = \operatorname{Arcsin} t$ ramène le calcul de $J(t)$ à celui de $K(\theta) = \displaystyle\int T(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$, où T est une fonction rationnelle. Enfin, on applique une méthode de 9.6.1 p. 94.

EXEMPLE : calculer $I(x) = \displaystyle\int \sqrt{x - x^2}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{Def}(I) = [0;\ 1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - x^2 = -\left(\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}(1 - (2x-1)^2)$,

d'où, par le changement de variable $t = 2x - 1$: $I(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Puis on effectue le changement de variable $\theta = \operatorname{Arcsin} t$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{4}\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{8}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C = \frac{1}{8}\operatorname{Arcsin} t + \frac{1}{8}t\sqrt{1-t^2} + C \\ &= \frac{1}{8}\operatorname{Arcsin}(2x-1) + \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + C. \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3ème cas : $a > 0$ et $\Delta > 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = \dfrac{\Delta}{4a}\left(\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right)$.

En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$, on ramène le calcul de $I(x)$ à celui de $J(t) = \displaystyle\int S(t, \sqrt{t^2-1})\mathrm{d}t$, où S est une fonction rationnelle. Ensuite, le changement de variable $\varphi = \ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1})$ (où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$) ramène le calcul de $J(t)$ à celui de $K(\varphi) = \displaystyle\int T(\operatorname{sh}\varphi, \varepsilon\operatorname{ch}\varphi)\mathrm{d}\varphi$, où T est une fonction rationnelle puisque $t = \varepsilon\operatorname{ch}\varphi$ et $\sqrt{t^2-1} = \operatorname{sh}\varphi$. Enfin, on applique une méthode de 9.6.2 p. 99.

EXEMPLE : calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\mathrm{d}x$.
$\mathrm{Def}(I) =]-\infty;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}((2x-3)^2 - 1),$$

d'où, par le changement de variable $t = 2x - 3$:

$$I(x) = \int \frac{\frac{t+5}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{t^2-1}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t+5}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t.$$

Puis on effectue le changement de variable $\varphi = \ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1})$, où $\varepsilon = \mathrm{sgn}\,(t)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{\varepsilon \operatorname{ch}\varphi + 5}{\operatorname{sh}\varphi}\varepsilon \operatorname{sh}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch}\varphi + 5\varepsilon)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sh}\varphi + \frac{5\varepsilon}{2}\varphi + C_1(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{t^2-1} + \frac{5\varepsilon}{2}\ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1}) + C_2(t) \\ &= \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5\varepsilon}{2}\ln\left(\left|x - \frac{3}{2}\right| + \sqrt{x^2-3x+2}\right) + C(x), \end{aligned}$$

où C est constante sur $]-\infty;\ 1[$ et sur $]2;\ +\infty[$. On peut encore exprimer le résultat sous la forme :

$$I(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2}\ln|2x - 3 + 2\sqrt{x^2-3x+2}| + C_3(x),$$

(où C_3 est constante sur $]-\infty;\ 1[$ et sur $]2;\ +\infty[$).

Remarques :

1) Le cas ($a < 0$ et $\Delta < 0$) ne se présente pas puisqu'alors : $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0$.

2) Dans le cas particulier du calcul de $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\lambda x + \mu)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, il est préférable de commencer par effectuer le changement de variable $y = \dfrac{1}{\lambda x + \mu}$, ce qui ramènera le calcul de $I(x)$ à celui de $J(y) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}}$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3) Les primitives étudiées dans ce paragraphe 9.6.5 sont des cas particuliers d'**intégrales abéliennes** $\displaystyle\int R(x,\varphi(x))\mathrm{d}x$, où R est une fonction rationnelle à deux variables et φ une fonction satisfaisant une relation polynômiale non triviale $P(x,\varphi(x)) = 0$ telle que la courbe (Γ) d'équation $P(x,y) = 0$ soit **unicursale**, c'est-à-dire admette un paramétrage rationnel.

Exercices

◇ **9.6.10** Calculer les primitives des fonctions suivantes (variable x), en indiquant l'ensemble de validité

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ *b)* $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-5x+4}}$ *c)* $\dfrac{1}{(4x-x^2)^{3/2}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ *e)* $\dfrac{1}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$ *f)* $\dfrac{1}{(1+x^2)(x-\sqrt{x^2-1})}$

g) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$ *h)* $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ *i)* $\dfrac{1}{(x-2)^3\sqrt{x^2-4x+3}}$

j) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ *k)* $\dfrac{1}{(x-2)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

◇ **9.6.11** Même question que dans l'exercice 9.6.10 pour :

a) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^\alpha+x^{2\alpha}}}$, $\alpha\in]1;+\infty[$ *b)* $\sqrt{2+\tan^2 x}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{4-(e^x+1)^2}}$ *d)* $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}}$ *e)* $\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

◇ **9.6.12** *a)* Calculer les primitives, sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$, de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x(1-x)|}}$.

b) Montrer que, parmi les primitives du *a)*, il en existe une et une seule, prolongeable par continuité en 0 et 1 et prenant la valeur 0 en $\dfrac{1}{2}$; on note F cette application. Tracer la courbe représentative de F.

◇ **9.6.13** Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos a\cos x}$, $a\in]0;\pi[$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x+\cos x}dx$ *d)* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(1+\cos 2x)\sqrt{1-\tan^2 x}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

◇ **9.6.14** Montrer que l'application $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+x^3}\end{array}$ admet une application réciproque continue $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, et exprimer, sans symbole d'intégrale, $\displaystyle\int \frac{dx}{x+f^{-1}(x)}$ en fonction de x et $f^{-1}(x)$.

◇ **9.6.15** Etablir : $\forall a\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{\sin^2 a} \operatorname{Arcsin}\sqrt{x}\,dx + \int_0^{\cos^2 a} \operatorname{Arccos}\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

◇ **9.6.16** Montrer, pour tout (x,y) de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\times\mathbb{R}$:

$$y=\int_0^x \frac{dt}{\cos t} \Longleftrightarrow x=\int_0^y \frac{du}{\operatorname{ch} u}.$$

Chapitre 10

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce ch. 10, I désigne, sauf mention contraire, un intervalle non vide et non réduit à un point. Les fonctions envisagées sont définies et continues sur I, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (§ 10.1) ou $\mathbb{C}$ (§ 10.2).

10.1 Fonctions continues intégrables à valeurs réelles positives ou nulles

10.1.1 Définition

◆ **Définition 1** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \geqslant 0$. On dit que f est **intégrable** (ou : **sommable**) **sur** I si et seulement s'il existe un élément M de $\mathbb{R}_+$ tel que, pour tout segment J inclus dans I : $\displaystyle\int_J f \leqslant M$.

Rappelons qu'un segment (de $\mathbb{R}$) est un intervalle fermé borné $[\alpha; \beta]$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \leqslant \beta$.

Remarque :
Si I est un segment, et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\geqslant 0$, alors f est intégrable sur I car, pour tout segment J inclus dans I (en notant $I = [\alpha; \beta]$) :

$$\int_J f \leqslant \int_\alpha^\beta f. \qquad \blacksquare$$

Avec les notations précédentes, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable sur I, alors l'ensemble des $\displaystyle\int_J f$ (lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I) est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
D'où la Définition suivante :

◆ **Définition 2** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\geqslant 0$ et intégrable.

On appelle **intégrale de f sur I**, et on note $\displaystyle\int_I f$, la borne supérieure des $\displaystyle\int_J f$ lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I.

Remarques :

1) Avec les hypothèses et notations de la Définition 2 : $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$.

2) Si I est un segment $[\alpha; \beta]$, alors toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I f = \int_\alpha^\beta f$.

3) On convient que, si I est un singleton, alors toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\geqslant 0$ est dite intégrable sur I et que : $\displaystyle\int_I f = 0$.

◆ **Proposition 1**

$$\text{Si } \left\{\begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue et } \geqslant 0 \\ f \text{ est intégrable sur } I \\ \displaystyle\int_I f = 0 \end{array}\right., \text{ alors } f = 0.$$

Preuve :

Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment J, non vide et non réduit à un point, tel que $x_0 \in J \subset I$.

On a alors : $0 \leqslant \displaystyle\int_J f \leqslant \int_I f = 0$, donc $\displaystyle\int_J f = 0$.

D'après Tome 1, 6.2.5 Cor. 4 p. 176, on déduit : $\forall x \in J,\ f(x) = 0$, et en particulier : $f(x_0) = 0$.

On a montré : $\forall x_0 \in I,\ f(x_0) = 0$, c'est-à-dire : $f = 0$.

◆ **Corollaire**

$$1)\ \text{Si } \left\{\begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue} \\ f^2 (= f \cdot f) \text{ est intégrable sur } I \\ \displaystyle\int_I f^2 = 0 \end{array}\right., \text{ alors } f = 0.$$

$$2)\ \text{Si } \left\{\begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est continue} \\ |f| \text{ est intégrable sur } I \\ \displaystyle\int_I |f| = 0 \end{array}\right., \text{ alors } f = 0.$$

Proposition 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\geqslant 0$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est intégrable sur I

(ii) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} f \leqslant M$

(iii) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} f \leqslant M.$$

De plus, si (i), (ii) ou (iii) est satisfaite, on a, pour toute suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I :

$$\int_I f = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f.$$

Ici, $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante signifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n \subset J_{n+1}$.

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons f intégrable sur I et soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de segments telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I.$$

D'après les Définitions 1 et 2, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} f \leqslant \int_I f.$

Le réel $M = \int_I f$ convient.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Il suffit de remarquer qu'il existe au moins une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion soit égale à I, en examinant les types d'intervalles possibles pour I. Par exemple, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$]a;b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a + \frac{b-a}{n}; b\right], \quad [a;+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a;a+n].$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_{J_n} f \leqslant M$.

Soit $J = [\alpha; \beta]$ un segment inclus dans I. Comme $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I$, il existe $(n_1,n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\alpha \in J_{n_1}$ et $\beta \in J_{n_2}$. En notant $n_0 = \mathrm{Max}(n_1,n_2)$, puisque $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on a : $\alpha \in J_{n_0}$, et $\beta \in J_{n_0}$, d'où $J = [\alpha; \beta] \subset J_{n_0}$, puis, comme $f \geqslant 0$: $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_{J_{n_0}} f \leqslant M$.

Ainsi, pour tout segment J inclus dans I : $\displaystyle\int_J f \leqslant M$. Ceci montre que f est intégrable sur I.

Supposons (i), (ii) ou (iii) satisfaite, et soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de segments dont la réunion est égale à I.

- La suite réelle $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (puisque $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $f \geqslant 0$), majorée par $\displaystyle\int_I f$, donc converge vers un réel noté M_0, et :

$$\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f = M_0 \leqslant \int_I f.$$

- On a vu, dans la preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i) que, pour tout segment J inclus dans I, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $J \subset J_{n_0}$, et donc $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_{J_{n_0}} f \leqslant M_0$. En passant à la borne supérieure lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I, on déduit : $\displaystyle\int_I f \leqslant M_0$.

Finalement : $M_0 = \displaystyle\int_I f$.

10.1.2 Propriétés algébriques

◆ **Proposition 1**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et $\geqslant 0$.
Si f et g sont intégrables sur I, alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I et :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Preuve :

- L'application $\lambda f + g$ est continue et $\geqslant 0$.
- Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \leqslant \lambda \int_I f + \int_I g,$$

donc (cf. 10.1.1 Prop. 2 p. 109), $\lambda f + g$ est intégrable.

De plus, comme $\displaystyle\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f$ et $\displaystyle\int_{J_n} g \xrightarrow[n\infty]{} \int_I g$, on a :

$$\int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \xrightarrow[n\infty]{} \lambda \int_I f + \int_I g,$$

donc : $\displaystyle\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$

◆ **Proposition 2** **(Théorème de domination)**

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.

Si $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant f \leqslant g \\ g \text{ est intégrable sur } I \end{array}\right|$, alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.

Preuve :

Supposons $0 \leqslant f \leqslant g$ et g intégrable sur I.

Pour tout segment J inclus dans I :

$$\int_J f \leqslant \int_J g \leqslant \int_I g.$$

D'après 10.1.1 Définitions 1 et 2, f est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I f = \operatorname*{Sup}_J \int_J f \leqslant \int_I g.$

◆ **Définition**

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$, I' un intervalle (non vide et non réduit à un point) tel que $I' \subset I$.

- On dit que f est **intégrable sur** I' si et seulement si la restriction $f|_{I'}$ est intégrable sur I'.
- Si f est intégrable sur I', on note $\displaystyle\int_{I'} f$ au lieu de $\displaystyle\int_{I'} f|_{I'}$.

◆ **Proposition 3** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$, I' un intervalle tel que $I' \subset I$. Si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I' et : $\displaystyle\int_{I'} f \leqslant \int_I f.$

Preuve :

Supposons f intégrable sur I. Pour tout segment J' inclus dans I' (donc inclus dans I), on a :

$$\int_{J'} f \leqslant \int_I f.$$

Ceci montre (cf. 10.1.1 Déf. 1 et 2) que f est intégrable sur I' et : $\displaystyle\int_{I'} f \leqslant \int_I f.$

◆ **Proposition 4**

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$, $a \in I$.

1) f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $]-\infty; a] \cap I$ et sur $I \cap [a; +\infty[$.

2) De plus, si f est intégrable sur I, alors :

$$\int_I f = \int_{]-\infty;a]\cap I} f + \int_{I\cap[a;+\infty[} f.$$

Preuve :

1) • Si f est intégrable sur I, alors, d'après la Proposition précédente, f est intégrable sur $]-\infty; a] \cap I$ et sur $I \cap [a; +\infty[$.

• Réciproquement, supposons f intégrable sur $]-\infty; a] \cap I$ et sur $I \cap [a; +\infty[$. Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments telles que : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n = I$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, a \in J_n)$, et on a (cf. 10.1.1 Prop. 2 p. 109) : $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $J'_n =]-\infty; a] \cap J_n$, $J''_n = J_n \cap [a; +\infty[$. Il est clair que $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(J''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites croissantes de segments telles que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J'_n =]-\infty; a] \cap I, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J''_n = I \cap [a; +\infty[.$$

D'après 10.1.1 Prop. 2 p. 109 : $\begin{cases} \displaystyle\int_{]-\infty;a]\cap I} f = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J'_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J'_n} f \\ \displaystyle\int_{I\cap[a;+\infty[} f = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J''_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J''_n} f. \end{cases}$

Il en résulte, d'après la relation de Chasles (Tome 1, 6.2.6 Prop. 1 p. 178) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} f = \int_{J'_n} f + \int_{J''_n} f \leqslant \int_{]-\infty;a]\cap I} f + \int_{I\cap[a;+\infty[} f,$$

et donc (10.1.1, Déf. 1 et 2 p. 107), f est intégrable sur I et :

$$\int_I f = \lim_{n\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n\infty} \int_{J'_n} f + \lim_{n\infty} \int_{J''_n} f = \int_{]-\infty;a]\cap I} f + \int_{I\cap[a;+\infty[} f.$$

10.1.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert

◆ **Proposition 1** Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$. Notons $F : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall X \in [a; b], \quad F(X) = \int_a^X f.$$

Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est intégrable sur $[a; b[$

(ii) F est majorée sur $[a; b[$

(iii) F admet une limite finie en b.

De plus, si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, alors :

$$\int_{[a;b[} f = \operatorname*{Sup}_{X \in [a;b[} \int_a^X f = \lim_{X \to b} \int_a^X f.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{[a;b[} f$ est alors aussi notée $\displaystyle\int_a^b f$ (ou : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons f intégrable sur $[a; b[$. Pour tout X de $[a; b[$, comme $[a; X]$ est un segment inclus dans $[a; b[$, on a :

$$F(X) = \int_a^X f = \int_{[a;X]} f \leqslant \int_{[a;b[} f,$$

ce qui montre que F est majorée (par $\displaystyle\int_{[a;b[} f$).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Supposons F majorée sur $[a; b[$. Comme F est croissante (puisque $f \geqslant 0$), il en résulte que F admet une limite finie en b.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons que F admette une limite finie L en b. Comme F est croissante (puisque $f \geqslant 0$), on a : $\forall X \in [a; b[, \quad \displaystyle\int_a^X f = F(X) \leqslant L.$

Soit J un segment inclus dans $[a; b[$; en notant X l'extrémité droite de J, on a :

$$\int_J f \leqslant \int_a^X f = F(X) \leqslant L.$$

Ainsi (cf. 10.1.1 Déf. 1 et 2 p. 107), f est intégrable sur $[a; b[$, et $\displaystyle\int_{[a;b[} f \leqslant L$.

Enfin, sous l'une des hypothèses (i), (ii), (iii), F admet une limite finie L en b.

D'une part : $L \leqslant \displaystyle\int_{[a;b[} f$, car : $\forall X \in [a; b[, \quad F(X) \leqslant \displaystyle\int_{[a;b[} f$.

D'autre part, on a vu : $\displaystyle\int_{[a;b[} f \leqslant L$.

Donc : $\displaystyle\int_{[a;b[} f = L$.

◆ **Corollaire**

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $f :]a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$. Notons $F :]a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall X \in]a; b], \quad F(X) = \int_X^b f.$$

Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est intégrable sur $]a; b]$

(ii) F est majorée sur $]a; b]$

(iii) F admet une limite finie en a.

De plus, si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, alors :

$$\int_{]a;b]} f = \operatorname*{Sup}_{X \in]a;b]} \int_X^b f = \lim_{X \to a} \int_X^b f.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{]a;b]} f$ est alors aussi notée $\displaystyle\int_a^b f$ (ou : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Preuve :

Il suffit d'appliquer la Proposition précédente à la fonction $\begin{array}{l} [a; b[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(a+b-x) \end{array}$ si $a \in \mathbb{R}$, à $\begin{array}{l} [-b; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(-x) \end{array}$ si $a = -\infty$.

EXEMPLES :

1) Pour tout α de $\mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 0$, puisque :

$$\forall X \in [0; +\infty[, \quad \int_0^X \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha X} - 1) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ X & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$$

De plus, pour tout α de $\mathbb{R}_-^*$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha X} - 1) = \frac{1}{-\alpha}.$$

2) L'application $x \longmapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0; 1]$, car :

$$\begin{cases} \forall X \in]0; 1], \quad \displaystyle\int_X^1 -\ln x \,\mathrm{d}x = [x - x\ln x]_X^1 = 1 - X + X\ln X \\ 1 - X + X\ln X \xrightarrow[X \to 0^+]{} 1. \end{cases}$$

De plus : $\displaystyle\int_0^1 -\ln x \,\mathrm{d}x = 1.$

◆ **Théorème 1** **(Exemple de Riemann en $+\infty$)**

Pour tout α de $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

Calculons, pour tout X de $[2; +\infty[$, $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

• Si $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X = \frac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$.

1) Si $\alpha > 1$: $\dfrac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Si $\alpha < 1$: $\dfrac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, donc $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln X \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, donc $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

◆ **Théorème 2** **(Exemple de Riemann en 0)**

Pour tout α de $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve :

1ère méthode : adapter la preuve du Théorème précédent.

2ème méthode : par le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$:

$$\forall X \in]0; 1], \quad \int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{1}{X}} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\,\mathrm{d}u,$$

et $\displaystyle\int_{[1;+\infty[} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}\,\mathrm{d}u$ existe si et seulement si $-\alpha+2 > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$. ■

EXEMPLE :

L'application $x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ car :

- $\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leqslant \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. ■

L'utilisation du changement de variable $u = x - a$ permet de montrer le Corollaire suivant, dont le résultat généralise celui du Théorème précédent :

◆ **Corollaire**

Pour tout (a, c, α) de $\mathbb{R}^3$ tel que $a \neq c$, l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $]a; c]$ (ou $[c; a[$) si et seulement si $\alpha < 1$.

◆ **Proposition 2** **(Théorème d'équivalence)**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f,g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues.
On suppose : $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $f \underset{b}{\sim} g$.

Alors : f est intégrable sur $[a; b[$ si et seulement si g l'est.

Preuve :

Puisque $f \underset{b}{\sim} g$, il existe $c \in [a; b[$ tel que :

$$\forall x \in [c; b[, \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2}\, g(x),$$

et donc : $\forall x \in [c; b[, \quad \dfrac{1}{2}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}\, g(x).$

- Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors f est intégrable sur $[c; b[$ et, comme :

$$\forall x \in [c; b[, \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant 2f(x),$$

g est intégrable sur $[c; b[$, donc sur $[a; b[$.

- Si g est intégrable sur $[a; b[$, alors g est intégrable sur $[c; b[$, et comme :

$$\forall x \in [c; b[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}\, g(x),$$

f est intégrable sur $[c; b[$, donc sur $[a; b[$. ■

EXEMPLE :

Etudier l'intégrabilité de $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right).$$

L'application f est continue, et $f \geqslant 0$ car :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad (x^2 + x + 1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \geqslant 0.$$

On a, pour $x \in [1; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\, \frac{(x^2 + x + 1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4x(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2})} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{3}{8x^2}.$$

Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ (exemple de Riemann, $2 > 1$), $x \longmapsto \dfrac{3}{8x^2}$ l'est aussi, puis, d'après le théorème d'équivalence, f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

◆ **Proposition 3** **(Règle «$x^\alpha f(x)$» en $+\infty$)**

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$.

1) S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, alors f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

2) S'il existe $\alpha \in]-\infty; 1]$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$.

Preuve :

1) Il existe $c \in [a; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [c; +\infty[, \quad 0 \leqslant x^\alpha f(x) \leqslant 1$,

d'où : $\forall x \in [c; +\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$.

On conclut par le théorème de domination (10.1.2 Prop. 2 p. 111) et l'exemple de Riemann en $+\infty$.

2) Il existe $c \in [a; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [c; +\infty[, \quad x^\alpha f(x) \geqslant 1$,

d'où : $\forall x \in [c; +\infty[, \quad f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$.

On conclut par la contraposée du théorème de domination et l'exemple de Riemann en $+\infty$.

EXEMPLE :

Etudier l'intégrabilité de $f : x \longmapsto e^{-\sqrt[3]{x}+\sin x}$ sur $[1; +\infty[$.

Il est clair que f est continue et $\geqslant 0$, et, pour tout α de $\mathbb{R}$:

$$x^\alpha e^{-\sqrt[3]{x}+\sin x} = \exp(\alpha \ln x - \sqrt[3]{x} + \sin x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

En particulier : $x^2 f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $2 > 1$, donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$. ■

On pourra essayer d'appliquer la règle «$x^\alpha f(x)$» lorsque f n'admet apparemment pas d'équivalent «simple» (quand x tend vers $+\infty$).

Remarque :

L'application de la règle «$x^\alpha f(x)$» (en $+\infty$) revient à comparer $f(x)$ et $\dfrac{1}{x^\alpha}$ (au voisinage de $+\infty$), pour un α à choisir convenablement. Certaines fonctions f échappent à cette comparaison, et la règle «$x^\alpha f(x)$» (en $+\infty$) ne permet pas d'étudier l'intégrabilité de f sur $[a; +\infty[$. Par exemple, pour $f : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, on a :
$x \longmapsto \frac{1}{x \ln x}$

$$\begin{cases} \forall \alpha \in]1; +\infty[, \quad x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ \forall \alpha \in]-\infty; 1], \quad x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0, \end{cases}$$

et donc la règle «$x^\alpha f(x)$» ne s'applique pas.

Pour cet exemple, voir ci-après l'exemple de Bertrand. ■

◆ **Proposition 4** (**Règle** «$(x-a)^\alpha f(x)$» **en** a^+)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f :]a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\geqslant 0$.

1) S'il existe $\alpha \in]-\infty;1[$ tel que $(x-a)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} 0$, alors f est intégrable sur $]a;b]$.

2) S'il existe $\alpha \in [1;+\infty[$ tel que $(x-a)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $]a;b]$.

Preuve :

Analogue à celle de la Proposition 1.

On peut aussi se ramener à la Proposition 1 par le changement de variable $u = \dfrac{1}{x-a}$.

EXEMPLE :

L'application $f : x \longmapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0;1]$ car f est continue, $f \geqslant 0$, et $x^{\frac{1}{2}} f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.

On peut aussi montrer que f est intégrable sur $]0;1]$ en remarquant que f est continue, $\geqslant 0$, et que, par une intégration par parties :

$$\int_X^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [-x\ln x]_X^1 + \int_X^1 \mathrm{d}x = X\ln X + 1 - X \xrightarrow[X \to 0^+]{} 1,$$

et en utilisant 10.1.3 Prop. 1 p. 113.

Par cette deuxième méthode, on obtient de plus : $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\,\mathrm{d}x = 1$ (cf. aussi Exemple 2) p. 114).

Exemple de Bertrand en $+\infty$ (hors programme)

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, étudions l'intégrabilité de $f_{\alpha,\beta} : [2;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [2;+\infty[, \quad f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

- Si $\alpha > 1$, en notant $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, on a : $x^\gamma f_{\alpha,\beta}(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln x)^{-\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$,

et donc $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$.

- Si $\alpha < 1$, on a : $x f_{\alpha,\beta}(x) = x^{1-\alpha}(\ln x)^{-\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$,

et donc $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[2;+\infty[$.

- Si $\alpha = 1$, effectuons le changement de variable $u = \ln x$:

$$\forall X \in [2;+\infty[, \quad \int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u.$$

Donc $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$ si et seulement si $u \longmapsto \dfrac{1}{u^\beta}$ est intégrable sur $[\ln 2;+\infty[$, c'est-à-dire si et seulement si $\beta > 1$.

Finalement : $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$ si et seulement si : $\left|\begin{array}{c} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \end{array}\right.$

Exercices

◇ **10.1.1** Etudier l'intégrabilité des applications suivantes (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$), pour lesquelles on donne $f(x)$ et l'intervalle :

a) $e^{-x \operatorname{Arctan} x}$, $[0; +\infty[$

b) $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$, $[1; +\infty[$

c) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, $[1; +\infty[$

d) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$, $[1; +\infty[$

e) $x+1-\sqrt{x^2+2x}$, $[1; +\infty[$

f) $\operatorname{Arctan}(e^{-x})$, $[0; +\infty[$

g) $\dfrac{1}{e^x - \cos x}$, $]0; 1]$

h) $\dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{5/2}}$, $]0; 1]$

i) $\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$, $[2; +\infty[$

j) $(\operatorname{ch}\sqrt{\ln x})^{-2}$, $[2; +\infty[$

k) $\sqrt{-\ln x}$, $]0; 1]$.

◇ **10.1.2** *a)* **Intégrales de Wallis**

(Cf. Tome 1, 6.4.4 Exemple *l)* p. 191).

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

α) Montrer : $I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} I_n$.

β) Démontrer : $I_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

b) **Calcul de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$

α) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; \sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

β) En utilisant *a)*, déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Montrer que $x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} \, dx$

(utiliser le résultat de *b)* β)).

◇ **10.1.3** *a)* Soit $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer :

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{]0;1]} f.$$

b) En déduire : α) $\displaystyle\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}}$ β) $\displaystyle\lim_{n\infty} \prod_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}$.

10.2 Fonctions continues intégrables à valeurs complexes

10.2.1 Généralités

◆ **Définition 1** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On dit que f est **intégrable sur** I si et seulement si $|f|$ (qui est continue et $\geqslant 0$) est intégrable sur I.

Il est clair que cette Définition prolonge celle de 10.1.1 p. 107.

EXEMPLES :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, puisque $|f| : x \longmapsto \dfrac{|\sin x|}{x^2}$ l'est, par théorème de domination $\left(|f|(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}\right)$.

2) Etudions l'intégrabilité de $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $[1; +\infty[$.

Soit $X \in [3; +\infty[$. On a :

$$\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \underset{[y=x-\frac{\pi}{2}]}{=} \int_1^X \frac{|\cos y|}{y+\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}y,$$

d'où :

$$2\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^X \frac{|\cos y|}{y+\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}y \geqslant \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x+\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x+\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} = \ln\left(X+\frac{\pi}{2}\right) - \ln(1+\pi),$$

donc $\displaystyle\int_1^X \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty.$

Ceci montre que $|f|$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, et donc, par définition, f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. ■

◆ **Proposition 1** Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues.
Si f et g sont intégrables sur I, alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I.

Preuve :

Comme $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda|\,|f| + |g|$ et que $|f|$ et $|g|$ sont intégrables sur I, $|\lambda f + g|$ est intégrable sur I (théorème de domination, 10.1.2 Prop. 2 p. 111), et donc $\lambda f + g$ est intégrable sur I.■

Remarque :

L'ensemble des applications intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{C}$-ev (resp. $\mathbb{R}$-ev) pour les lois usuelles. ■

◆ **Proposition 2** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue; f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Rappelons (cf. Tome 1, 4.1.2 Déf. 3 p. 87) que f^+ et f^- sont les applications de I dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} f^+(x) = \operatorname{Sup}\big(f(x), 0\big) \\ f^-(x) = \operatorname{Sup}\big(-f(x), 0\big) \end{cases},$$

et que l'on a : $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

De plus, f étant continue, f^+ et f^- le sont aussi (cf. Tome 1, 4.3.2 Rem. p. 112).

Preuve :

1) Si f est intégrable sur I, alors (par définition) $|f|$ l'est; comme $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, le théorème de domination (10.1.2 Prop. 2 p. 111) montre que f^+ et f^- le sont aussi.

2) Réciproquement, si f^+ et f^- sont intégrables sur I, alors f l'est aussi, puisque $f = f^+ - f^-$ (cf. Prop. 1).

◆ **Définition-Notation 2**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si f est intégrable sur I, on appelle **intégrale de f sur I**, et on note $\displaystyle\int_I f$, le réel :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Il est clair que cette Définition prolonge celle de 10.1.1 p. 109.

Si I est un singleton, alors toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et : $\displaystyle\int_I f = 0$.

◆ **Proposition 3** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue; f est intégrable sur I et seulement si Ré f et Im f le sont.

Preuve :

Remarquons d'abord que, f étant continue, Ré f et Im f le sont aussi (cf. Tome 1, 4.3.2 Prop. 3 p. 112).

1) Supposons f intégrable sur I. Comme $|\text{Ré } f| \leqslant |f|$ et $|\text{Im } f| \leqslant |f|$, le théorème de domination (10.1.2 Prop. 2 p. 111) montre que $|\text{Ré } f|$ et $|\text{Im } f|$ sont intégrables sur I, donc (par définition) Ré f et Im f sont intégrables sur I.

2) Réciproquement, si Ré f et Im f sont intégrables sur I, comme $f = \text{Ré } f + \text{i Im } f$, f est intégrable sur I (cf. Prop. 1 p. 120).

◆ **Définition-Notation 3** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Si f est intégrable sur I, on appelle **intégrale de f sur I** et on note $\int_I f$, le complexe :

$$\int_I f = \int_I \text{Ré}\, f + \text{i} \int_I \text{Im}\, f.$$

Il est clair que cette Définition prolonge celle vue auparavant, p. 121.

Si I est un singleton, alors toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable et : $\int_I f = 0$.

◆ **Proposition 4** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur I.
Pour toute suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I, on a :

$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f.$$

Preuve :

- Si f est à valeurs réelles :

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (f^+ - f^-) = \int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^- \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f^+ - \int_I f^- = \int_I f.$$

- Puis, pour f à valeurs complexes :

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (\text{Ré}\, f + \text{i}\, \text{Im}\, f) = \int_{J_n} \text{Ré}\, f + \text{i} \int_{J_n} \text{Im}\, f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I \text{Ré}\, f + \text{i} \int_I \text{Im}\, f = \int_I f.$$

10.2.2 Propriétés

◆ **Proposition 1** **(Linéarité de l'intégration)**

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et intégrables sur I. Alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I et :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Preuve :

D'après 10.2.1 Prop. 1 p. 120, $\lambda f + g$ est intégrable sur I. Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I. D'après 10.2.1 Prop. 4 p. 122 :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{J_n} (\lambda f + g) \xrightarrow[n\infty]{} \int_I (\lambda f + g) \\ \displaystyle\lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \xrightarrow[n\infty]{} \lambda \int_I f + \int_I g. \end{cases}$$

Comme (cf. Tome 1, 6.3 Prop. 1 p. 183) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g,$$

on en déduit, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g. \qquad \blacksquare$$

Ce résultat prolonge celui de 10.1.2 Prop. 1 p. 110.

◆ **Proposition 2** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

1) f est intégrable sur I si et seulement si $\overline{f}$ l'est.

2) Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$.

Preuve :

1) (f int. sur I) $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ré } f \text{ int. sur } I \\ \text{Im } f \text{ int. sur } I \end{array} \right| \Longleftrightarrow$ ($\overline{f}$ int. sur I).

2) $\displaystyle\int_I \overline{f} = \int_I (\text{Ré } f - \text{i Im } f) = \int_I \text{Ré } f - \text{i} \int_I \text{Im } f = \overline{\int_I \text{Ré } f + \text{i} \int_I \text{Im } f} = \overline{\int_I f}.$

◆ **Proposition 3** **(Croissance de l'intégration)**

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et intégrables sur I. Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.

Preuve :

Supposons f et g continues et intégrables sur I et $f \leqslant g$.

Alors $g - f \geqslant 0$ et $g - f$ est intégrable sur I (cf. 10.2.1 Prop. 1 p. 120). D'après 10.1.1 Rem. *1)* p. 108, on a : $\displaystyle\int_I (g - f) \geqslant 0$.

Alors, en utilisant la Proposition précédente :

$$\int_I g - \int_I f = \int_I (g - f) \geqslant 0, \quad \text{donc} \quad \int_I f \leqslant \int_I g.$$

◆ **Proposition 4** Pour toute $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur I :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Preuve :

Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I. D'après 10.2.1 Prop. 4 p. 122 : $\displaystyle\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f$ et $\displaystyle\int_{J_n} |f| \longrightarrow \int_I |f|$.

Comme (cf. Tome 1, 6.3 Prop. 2 p. 183) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\int_{J_n} f\right| \leqslant \int_{J_n} |f|$,

on en déduit, en passant à la limite quand n tend vers l'infini : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

◆ **Proposition 5** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et I' un intervalle tel que $I' \subset I$. Si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I'.

Preuve :

Schématiquement, en utilisant 10.1.2 Prop. 3 p. 111 :

$$(f \text{ int. sur } I) \Longleftrightarrow (|f| \text{ int. sur } I) \Longrightarrow (|f| \text{ int. sur } I') \Longleftrightarrow (f \text{ int. sur } I').$$

◆ **Proposition 6** **(Relation de Chasles)**

Soient $a \in I$, $I' =]-\infty; a] \cap I$, $I'' = I \cap [a; +\infty[$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

1) Pour que f soit intégrable sur I, il faut et il suffit que f soit intégrable sur I' et sur I''.

2) De plus, si f est intégrable sur I, alors : $\displaystyle\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f$.

Preuve :

1) Résulte de la Prop. 5 et de 10.1.2 Prop. 4 p. 112.

2) Supposons f intégrable sur I.

Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a \in J_n$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{J_n} f = \int_{]-\infty;a]\cap J_n} f + \int_{J_n\cap[a;+\infty[} f$,

et $\displaystyle\int_{J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f$, $\displaystyle\int_{]-\infty;a]\cap J_n} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_{I'} f$, $\displaystyle\int_{J_n\cap[a;+\infty[} f \xrightarrow[n\infty]{} \int_{I''} f$

(car $(]-\infty; a] \cap J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de segments dont la réunion est égale à I', et de même pour I''), d'où : $\displaystyle\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f$. ■

Par exemple, si $a < c < b$, pour que f soit intégrable sur $]a;b[$, il faut et il suffit que f soit intégrable sur $]a;c]$ et sur $[c;b[$, et on a alors :

$$\int_{]a;b[} f = \int_{]a;c]} f + \int_{[c;b[} f. \qquad \blacksquare$$

◆ **Proposition 7** **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.

Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors fg est intégrable sur I et :

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leqslant \left(\int_I f^2\right)\left(\int_I g^2\right).$$

Preuve :

1) En développant $(|f| - |g|)^2 \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant |fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$. Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur I, $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ l'est, puis (théorème de domination, 10.1.2 Prop. 2 p. 111) $|fg|$ l'est, et donc fg est intégrable sur I.

2) Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion égale à I. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales de fonctions continues (par morceaux) sur un segment (cf. Tome 1, 6.2.5 Th. p. 176), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\int_{J_n} fg\right)^2 \leqslant \left(\int_{J_n} f^2\right)\left(\int_{J_n} g^2\right).$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini on obtient le résultat voulu.

◆ **Proposition 8** **(Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que f^2 et g^2 soient intégrables sur I.

Pour que $\left(\int_I fg\right)^2 = \left(\int_I f^2\right)\left(\int_I g^2\right)$, il faut et il suffit que (f,g) soit lié, c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\alpha f + \beta g = 0$.

Preuve :

Raisonner comme dans la preuve de 6.2.5 Prop. 4, Tome 1, p. 176.

10.2.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert

◆ **Proposition 1**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Notons $F : [a; b[\longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall X \in [a; b[, \quad F(X) = \int_a^X f.$$

Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors F admet une limite finie en b, et :

$$\int_{[a;b[} f = \lim_{X \to b} \int_a^X f.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{[a;b[} f$ est alors aussi notée $\displaystyle\int_a^b f$ (ou : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Preuve :

1) **Cas où f est à valeurs réelles**

Supposons f intégrable sur $[a; b[$ et à valeurs réelles. Alors f^+ et f^- sont intégrables sur $[a; b[$ et $\displaystyle\int_{[a;b[} f = \int_{[a;b[} f^+ - \int_{[a;b[} f^-$.

D'après 10.1.3 Prop. 1 p. 113 :

$$\int_a^X f^+ \xrightarrow[X \to b]{} \int_{[a;b[} f^+ \quad \text{et} \quad \int_a^X f^- \xrightarrow[X \to b]{} \int_{[a;b[} f^-.$$

Comme : $\displaystyle\forall X \in [a; b[,\ F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (f^+ - f^-) = \int_a^X f^+ - \int_a^X f^-,$

il en résulte que F admet une limite finie en b et que :

$$\lim_{X \to b} F(x) = \int_{[a;b[} f^+ - \int_{[a;b[} f^- = \int_{[a;b[} f.$$

2) **Cas où f est à valeurs complexes**

Supposons $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable sur $[a; b[$. Alors $\text{Ré}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont intégrables sur $[a; b[$ et

$$\int_{[a;b[} f = \int_{[a;b[} \text{Ré}\, f + \mathrm{i} \int_{[a;b[} \text{Im}\, f.$$

D'après *1)* (cas réel) : $\displaystyle\int_a^X \text{Ré}\, f \xrightarrow[X \to b]{} \int_{[a;b[} \text{Ré}\, f$ et $\displaystyle\int_a^X \text{Im}\, f \xrightarrow[X \to b]{} \int_{[a;b[} \text{Im}\, f$.

Comme : $\displaystyle\forall X \in [a; b[,\ F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (\text{Ré}\, f + \mathrm{i}\, \text{Im}\, f) = \int_a^X \text{Ré}\, f + \mathrm{i} \int_a^X \text{Im}\, f,$

il en résulte que F admet une limite finie en b et que :

$$\lim_{X \to b} F(X) = \int_{[a;b[} \text{Ré}\, f + \mathrm{i} \int_{[a;b[} \text{Im}\, f = \int_{[a;b[} f.$$

Remarques :

1) Ce résultat prolonge celui de 10.1.3 Prop. 1 p. 113 (sauf en ce qui concerne la borne supérieure).

2) On ne peut pas supprimer l'hypothèse « f intégrable sur $[a; b[$ ». En effet, il se peut que F admette une limite finie en b sans que f soit intégrable sur $[a; b[$.

Considérons l'exemple : $a = 1, b = +\infty, f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

- f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ (cf. 10.2.1, Exemple *2)* p. 120).
- À l'aide d'une intégration par parties, on a, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$F(X) = \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, $-\dfrac{\cos X}{X} + \cos 1 \xrightarrow[X \to +\infty]{} \cos 1$.

D'autre part, $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ (par le théorème de domination et l'exemple de Riemann, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$), donc, d'après la Proposition précédente, $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X \to +\infty]{} \int_{[1;+\infty[} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Il en résulte que F admet une limite finie en $+\infty$:

$$F(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \cos 1 - \int_{[1;+\infty[} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

◆ **Corollaire** Soient $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $f :]a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Notons $F :]a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall X \in]a; b], \quad F(X) = \int_X^b f.$$

Si f est intégrable sur $]a; b]$, alors F admet une limite finie en a, et :

$$\int_{]a;b]} f = \lim_{X \to a} \int_X^b f.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{]a;b]} f$ est alors aussi notée $\displaystyle\int_a^b f$ (ou : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Preuve :

Même méthode que pour le Corollaire de la Proposition 1 de 10.1.3 p. 114. $\blacksquare$

Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{[a;b[} f$, on montre **d'abord** que f est intégrable sur $[a;\,b[$, puis on calcule $\displaystyle\lim_{X\to b}\int_a^X f$. Pour ce dernier point, on utilisera le calcul d'intégrales (Tome 1, ch. 6) ou de primitives (ch. 9). Souvent, interviendront des intégrations par parties ou des changements de variable.

◆ **Proposition 2** Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $a<b$, $f:[a;\,b[\longrightarrow\mathbb{C}$ continue et admettant une limite finie l en b.

Alors f est intégrable sur $[a;\,b[$ et, en notant $\widetilde{f}:[a;\,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ le prolongement de f à $[a;\,b]$ par continuité, défini par $\widetilde{f}(x)=\left\{\begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x\in[a;\,b[\\ l & \text{si } x=b\end{array}\right.$, on a :

$$\int_{[a;b[} f=\int_a^b \widetilde{f}.$$

Preuve :

- On a, pour tout segment J inclus dans $[a;\,b[$:

$$\int_J |f|=\int_J |\widetilde{f}|\leqslant\int_a^b |\widetilde{f}|.$$

Ceci montre que $|f|$ est intégrable sur $[a;\,b[$, donc f aussi.

- Puisque $\widetilde{f}$ est continue sur le segment $[a;\,b]$, $\widetilde{f}$ est bornée, et on a, pour tout X de $[a;\,b[$:

$$\left|\int_a^X f-\int_a^b \widetilde{f}\right|=\left|\int_a^X \widetilde{f}-\int_a^b \widetilde{f}\right|=\left|\int_b^X \widetilde{f}\right|\leqslant\int_X^b |\widetilde{f}|\leqslant(b-X)\|\widetilde{f}\|_\infty\xrightarrow[X\to b]{}0,$$

donc : $\displaystyle\int_a^X f\xrightarrow[X\to b]{}\int_a^b \widetilde{f}$.

D'après 10.2.3 Prop. 1 p. 126, on conclut :

$$\int_{[a;b[} f=\int_a^b \widetilde{f}.$$

EXEMPLES :

1) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{[0;+\infty[}\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

- L'application $f:x\longmapsto\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur $[0;\,+\infty[$, $\geqslant 0$, et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$.

D'après le théorème d'équivalence et l'exemple de Riemann ($2>1$), on conclut que f est intégrable sur $[0;\,+\infty[$.

- En utilisant une décomposition en éléments simples, on obtient, pour tout X de $[0;\,+\infty[$:

$$\int_0^X\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=\int_0^X\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=[\ln(x+1)-\ln(x+2)]_0^X$$
$$=\ln(X+1)-\ln(X+2)+\ln 2=\ln\left(2\,\frac{X+1}{X+2}\right)\xrightarrow[X\to+\infty]{}\ln 2.$$

D'où : $\displaystyle\int_{[0;+\infty[}\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$

2) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

• L'application $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0;1[$, $\geqslant 0$, et :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

D'après le théorème d'équivalence et l'exemple de Riemann ($\dfrac{1}{2} < 1$), on conclut que f est intégrable sur $[0;1[$.

• Le changement de variable $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ (suggéré par la présence de $\sqrt{1-x^2}$) donne, pour tout X de $[0;1[$:

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\operatorname{Arcsin} X} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}.$$

Puis, par $t = \tan\theta$:

$$\int_0^{\operatorname{Arcsin} X} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_0^{\frac{X}{\sqrt{1-X^2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\operatorname{Arctan} t\sqrt{2}\Big]_0^{\frac{X}{\sqrt{1-X^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{1-X^2}}.$$

D'où : $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[X\to 1^-]{} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}$.

Finalement : $\displaystyle\int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{[0;+\infty[} \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

• L'application $f : x \longmapsto \dfrac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^3}$.

D'après le théorème d'équivalence et l'exemple de Riemann ($3 > 1$), on conclut que f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

• Le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ donne, pour tout X de $[1;+\infty[$:

$$\int_{\frac{1}{X}}^X \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_X^{\frac{1}{X}} \frac{\frac{1}{y}\operatorname{Arctan}\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{y^2}+1\right)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{X}}^X \frac{y\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} y\right)}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y,$$

d'où : $\displaystyle 2\int_{\frac{1}{X}}^X \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{X}}^X \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_{\frac{1}{X}}^X = \frac{\pi}{4}\frac{X^2-1}{X^2+1}$.

Ainsi : $\displaystyle\int_{\frac{1}{X}}^X \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{8}$.

D'autre part, comme f est continue en 0 : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{X}} \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$.

On déduit : $\displaystyle\int_0^X \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{8}$.

Finalement : $\displaystyle\int_{[0;+\infty[} \frac{x\operatorname{Arctan} x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

4) Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_{[0;+\infty[} e^{zx}\,dx$, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé.

• L'application $f_z : x \longmapsto e^{zx}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

Notons $\alpha = \text{Ré}(z)$, $\beta = \text{Im}(z)$. On a : $\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f_z(x)| = e^{\alpha x}$.

Donc f_z est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $x \longmapsto e^{\alpha x}$ l'est.

On a vu (cf. 10.1.3 Exemple *1)* p. 114) que $x \longmapsto e^{\alpha x}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $\alpha < 0$.

Finalement, f_z est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $\text{Ré}(z) < 0$.

• Supposons $\alpha = \text{Ré}(z) < 0$.

On a, pour tout X de $[0;+\infty[$: $\displaystyle\int_0^X e^{zx}dx = \left[\frac{1}{z}\,e^{zx}\right]_0^X = \frac{1}{z}(e^{zX} - 1)$.

Comme $|e^{zX}| = e^{\alpha X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$, on déduit : $\displaystyle\int_0^X e^{zx}dx \xrightarrow[X\to+\infty]{} -\frac{1}{z}$.

Finalement : $\displaystyle\int_{[0;+\infty[} e^{zx}dx = -\frac{1}{z}$.

De plus, comme $x \longmapsto e^{zx}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$, les parties réelle et imaginaire, $x \longmapsto e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $x \longmapsto e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont intégrables sur $[0;+\infty[$ et :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{[0;+\infty[} e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \text{Ré}\left(\int_{[0;+\infty[} e^{zx}dx\right) = \text{Ré}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{-\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \\ \displaystyle\int_{[0;+\infty[} e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \text{Im}\left(\int_{[0;+\infty[} e^{zx}dx\right) = \text{Im}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

◆ **Proposition 3**

Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$, tel que $a < b$, $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

1) Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est intégrable sur $]a;b[$

(ii) Il existe $c \in]a;b[$ tel que f soit intégrable sur $]a;c]$ et sur $[c;b[$

(iii) Pour tout c de $]a;b[$, f est intégrable sur $]a;c]$ et sur $[c,b[$.

2) Si f est intégrable sur $]a;b[$, alors, pour tout c de $]a;b[$, l'application $F :]a;b[\longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $F(X) = \displaystyle\int_c^X f$, admet des limites finies en a et b, et on a :

$$\int_{]a;b[} f = \lim_{X\to b} F(X) - \lim_{X\to a} F(X).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{]a;b[} f$ est alors aussi notée $\displaystyle\int_a^b f$ (ou : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$).

Preuve :

1) Cf. 10.2.2 Prop. 6 p. 124.

2) D'après la relation de Chasles (10.2.2 Prop. 6) : $\displaystyle\int_{]a;b[} f = \int_{]a;c]} f + \int_{[c;b[} f$.

D'autre part, comme f est intégrable sur $]a;c]$ et sur $[c;b[$, on a, d'après 10.2.3 Prop. 1 p. 126 :

$$F(X) = -\int_X^c f \xrightarrow[X\to a]{} -\int_{]a;c]} f \quad \text{et} \quad F(X) = \int_c^X f \xrightarrow[X\to b]{} \int_{[c;b[} f.$$

On conclut : $\displaystyle\int_{]a;b[} f = \lim_{X\to b} F(X) - \lim_{X\to a} F(X)$.

Exercices

◇ **10.2.1** Soient I, I_1, I_2 des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \cup I_2 = I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur I_1 et sur I_2.

◇ **10.2.2** Soient I_1, I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \cup I_2$ soit un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I_1 \cup I_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $I_1 \cup I_2$.

Montrer que f est intégrable sur I_1, sur I_2, sur $I_1 \cap I_2$, et :

$$\int_{I_1\cup I_2} f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1\cap I_2} f.$$

(On pourra utiliser l'exercice 10.2.1).

◇ **10.2.3** Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue et T-périodique. Montrer que f est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $f = 0$.

◇ **10.2.4** Soient $a \in [0;+\infty]$, $f :]-a;a[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

a) Montrer que, si f est paire, alors f est intégrable sur $]-a;a[$ si et seulement si f est intégrable sur $[0;a[$, et que, dans ce cas :

$$\int_{]-a;a[} f = 2\int_{[0;a[} f.$$

b) Montrer que, si f est impaire, alors f est intégrable sur $]-a;a[$ si et seulement si f est intégrable sur $[0;a[$, et que, dans ce cas : $\displaystyle\int_{]-a;a[} f = 0$.

◇ **10.2.5** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'application constante $\lambda : I \underset{x\longmapsto\lambda}{\longrightarrow} \mathbb{C}$ est intégrable sur I si et seulement si I est borné.

◇ **10.2.6** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur I, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée. Montrer que φf est intégrable sur I et : $\displaystyle\left|\int_I \varphi f\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_I |f|$.

◇ **10.2.7** Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable.

Montrer : $\displaystyle\int_{[X;+\infty[} f \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$.

◇ **10.2.8** Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $[a; +\infty[$ et ayant une limite finie l en $+\infty$.

a) Montrer : $l = 0$.

b) Etablir que, pour tout α de $]1; +\infty[$, l'application $|f|^\alpha : \begin{array}{l}[a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |f(x)|^\alpha\end{array}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$.

◇ **10.2.9** Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante, continue et intégrable. Montrer : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

◇ **10.2.10** Existence et calcul des intégrales suivantes (on montrera l'intégrabilité, puis on calculera l'intégrale; $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne, si elle existe, $\int_{[a;b]} f$ ou $\int_{]a;b]} f$ ou $\int_{]a;b[} f$, suivant l'exemple) :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 3x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right)\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{Arctan} x}}{(x^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$.

◇ **10.2.11** Même question que dans l'exercice 10.2.10 :

a) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$, $(n,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$

(se ramener aux intégrales de Wallis, Tome 1, 6.4.4 Exemple 1, p. 191)

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

d) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2+1)}}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

e) $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{a^2x+2x^3}{\sqrt{x^4-a^4}}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a > |b|$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ **10.2.12** Montrer que $f : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x} \ln x$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ sont intégrables sur $]0;1]$ et que :

$$\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x.$$

◇ **10.2.13** Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x} \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_0^a \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^n \sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+a} \, \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ fixé

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{ax^2} \ln(1+ax^2) \, \mathrm{d}x.$

◇ **10.2.14** Montrer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} + O(1)$, lorsque a tend vers 0^+.

◇ **10.2.15*** Montrer : $\displaystyle\int_0^1 x^{\varepsilon x} \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{27} + O(\varepsilon^3)$, lorsque ε tend vers 0^+.

◇ **10.2.16*** Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable.

a) Montrer que, pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, $\begin{array}{l} f_\varepsilon : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{-\varepsilon x} f(x) \end{array}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.

*b)** Démontrer : $\displaystyle\int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{[0;+\infty[} f.$

◇ **10.2.17** Construire les courbes (C) suivantes, d'équation $y = f(x)$, pour lesquelles on donne $f(x)$:

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{t^2+t}{\sqrt{t^4+1}} \, \mathrm{d}t$ *b)* $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\operatorname{th} t} \, \mathrm{d}t$ *c)* $\displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$

◇ **10.2.18** Existence et calcul des intégrales suivantes (on montrera l'intégrabilité, puis on calculera l'intégrale; $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne, si elle existe $\int_{]a;b[} f(x)\,\mathrm{d}x$) :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^4+3x^2-2}}$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\left(2x-\ln(1+2x+2x^2)\right)\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$

m) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x.$

◇ **10.2.19** Même question que dans l'exercice 10.2.18 :

a) $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\,\mathrm{d}x,\quad 0<a<b$

b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta+\operatorname{ch} x},\quad \theta\in]-\pi;\pi]$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}.$

Chapitre 11

Equations différentielles (1re étude)

Dans tout ce chapitre, le terme «intervalle» désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

11.1.1 Généralités

◆ **Définition 1** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma : I \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications continues, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$, et $y : J \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que y est **une solution sur J de l'équation différentielle du premier ordre**

$$\text{(e)} \qquad \alpha y' + \beta y = \gamma$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} y \text{ est dérivable sur } J \\ \forall x \in J, \quad \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x). \end{cases}$$

On note ici $\mathcal{S}_J$ l'ensemble des solutions de (e) sur J ; **résoudre** (e) c'est déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_J$ pour tout intervalle J tel que $J \subset I$.

En pratique, on suppose souvent que J est ouvert.

◆ **Définition 2** Avec les notations de la Définition 1 et dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle **courbes intégrales** de (e) les courbes représentatives des solutions de (e).

Remarque : Dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, la résolution de (e) revient au calcul des primitives de γ sur I. Notre but est, dans le cas général, d'exprimer les solutions de (e) à l'aide de primitives et de calculer celles-ci, lorsque c'est possible. Il semble utile de s'intéresser au cas particulier $\alpha = 1$, d'où la définition suivante.

◆ **Définition 3** L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\text{(e)} \qquad \alpha y' + \beta y = \gamma$$

est dite **normalisée** (ou : **résolue en y'**) si et seulement si $\alpha = 1$.

Problème des raccords

Lorsque (e) n'est pas normalisée, on se ramène à une équation normalisée en divisant par la fonction α sur tout intervalle sur lequel α ne s'annule pas. Puis on «raccorde» les solutions en les points en lesquels α (éventuellement) s'annule. Supposons, pour simplifier, que $I = \mathbb{R}$ et que α s'annule en un réel et un seul x_0. Une application $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution de (e) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{la restriction } y_1 \text{ de } y \text{ à }]-\infty; x_0[\text{ est solution de (e) sur }]-\infty; x_0[\\ \text{la restriction } y_2 \text{ de } y \text{ à }]x_0; +\infty[\text{ est solution de (e) sur }]x_0; +\infty[\\ y_1 \text{ admet une limite finie } l_1 \text{ en } x_0^- \\ y_2 \text{ admet une limite finie } l_2 \text{ en } x_0^+ \\ l_1 = l_2 \\ \dfrac{y_1(x) - l_1}{x - x_0} \text{ admet une limite finie } l'_1 \text{ quand } x \text{ tend vers } x_0^- \\ \dfrac{y(x) - l_2}{x - x_0} \text{ admet une limite finie } l'_2 \text{ quand } x \text{ tend vers } x_0^+ \\ l'_1 = l'_2 \\ \alpha(x_0)l'_1 + \beta(x_0)l_1 = \gamma(x_0). \end{cases}$$

Nous étudierons cette question en 11.1.3 6) p. 142.

Nous nous intéressons maintenant à l'équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée

$$\text{(E)} \qquad y' + ay = b,$$

où $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

On note

$$(\text{E}_0) \qquad y' + ay = 0,$$

appelée **équation sans second membre associée à** (E) (ou quelquefois : équation homogène associée à (E), au risque d'une confusion avec les équations homogènes étudiées plus loin en 11.3.3 p. 159); l'équation (E) est alors appelée **équation avec second membre**.

11.1.2 Résolution de l'équation sans second membre

Notations :

I un intervalle de $\mathbb{R}$

$a : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue

(E_0) $\quad y' + ay = 0$, où $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue

$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : I \longrightarrow \mathbb{K};\ \begin{cases} y \text{ est dérivable sur } I \\ y' + ay = 0 \end{cases} \right\}$, l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

◆ **Proposition**

$\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve :
Montrons que $\mathcal{S}_0$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^I$ formé des applications de I dans $\mathbb{K}$.

- $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$ car $\mathcal{S}_0$ contient l'application nulle $0 : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$.
- Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors $\lambda y_1 + y_2$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda y_1 + y_2)' + a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1' + a y_1) + (y_2' + a y_2) = 0,$$

donc $\lambda y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_0$.

◆ **Théorème**

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda e^{-\int a(x)\,dx} \end{array} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{S}_0$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto e^{-A(x)} \end{array}$, où A est une primitive (quelconque) de a sur I.

Preuve :
Puisque a est continue sur I, a admet des primitives sur I (cf. 6.4.2, Tome 1, p. 188); notons A une primitive de a sur I, par exemple : $\forall x \in I, \quad A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$, où x_0 est fixé dans I.
Pour toute application $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable, notons $z : I \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = e^{A(x)} y(x).$$

On a donc, pour tout x de I : $\left\{ \begin{array}{l} y(x) = e^{-A(x)} z(x) \\ y'(x) = -a(x) e^{-A(x)} z(x) + e^{-A(x)} z'(x) \end{array} \right.$,

d'où :
$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_0 &\iff \forall x \in I,\ e^{-A(x)} z'(x) = 0 \\ &\iff z' = 0 \\ &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in I, \quad z(x) = \lambda). \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda e^{-A(x)} \end{array} ; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}$.

Remarques :

1) La preuve précédente peut aussi être présentée sous la forme :

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 &\iff (y' + ay)e^A = 0 \iff (ye^A)' = 0 \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}, ye^A = \lambda) \\ &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}, y = \lambda e^{-A}). \end{aligned}$$

2) La méthode de calcul suivante :

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -a \iff \ln|y| = -a + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\ &\iff |y| = \lambda e^{-A} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+) \\ &\iff y = \lambda e^{-A} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

est incorrecte, pour plusieurs raisons :

- la division par y est illicite, car y peut, *a priori*, s'annuler en certains points de I (même si, *a posteriori*, on voit que toute solution non constamment nulle ne s'annule en aucun point)
- le passage de $|y|$ à y nécessite l'emploi clair du théorème des valeurs intermédiaires.

On préférera donc, pour résoudre (E_0), l'usage du Théorème p. 137.

EXEMPLES :

1) Résoudre $y' + y = 0$ (où $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Ici : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{-x} \end{array} ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Résoudre $y' - e^{x^2} y = 0$ (où : $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Ici : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{E(x)} \end{array} \right\}$, où $E(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.

Dans cet exemple, nous ne pouvons pas exprimer les solutions «directement» (sans symbole de primitive).

Exercices

◇ **11.1.1** Résoudre les équations différentielles (où y est à valeurs réelles), sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$:

a) $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$

b) $x^n y' - \alpha y = 0, \quad (n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$.

◇ **11.1.2** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) f(-x) = 1.$$

◇ **11.1.3** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2x f(x) = 3 \int_0^x f(t)\, dt.$$

◇ **11.1.4** Pour $k \in \mathbb{R}$ fixé, trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t f(t)\, dt = kx \int_0^x f(t)\, dt.$$

11.1.3 Résolution de l'équation avec second membre

Notations :

I un intervalle de $\mathbb{R}$
$a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications continues
(E) $\quad y' + ay = b$
$\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur I
(E_0) $\quad y' + ay = 0$
$\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

1) **Liens entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$**

1) $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S}$, $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$,
car $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0$.

2) $\forall y_1 \in \mathcal{S}, \forall y_0 \in \mathcal{S}_0$, $y_1 + y_0 \in \mathcal{S}$,
car $(y_1 + y_0)' + a(y_1 + y_0) = (y_1' + ay_1) + (y_0' + ay_0) = b + 0 = b$.
Les deux résultats ci-dessus montrent que, si $\mathcal{S}$ n'est pas vide, $\mathcal{S}$ est une droite affine dont la direction est la droite vectorielle $\mathcal{S}_0$. En effet, on a, pour tout y_1 de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0; \quad y_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

Autrement dit, la «**solution générale**» de (E) est la somme d'une «**solution particulière**» de (E) et de la «**solution générale**» de (E_0).
On voit ainsi que la résolution de (E) se ramène à la détermination d'au moins une solution de (E), qui sera qualifiée souvent de «solution particulière»; toute solution de (E) est en fait une solution particulière de (E).

2) **Résolution de (E)**

Notons A une primitive de a sur I et $e^A : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto e^{A(x)} \end{array}$.
On a, pour toute application dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$y' + ay = b \Longleftrightarrow (y' + ay)e^A = be^A \Longleftrightarrow (ye^A)' = be^A.$$

Puisque be^A est continue sur I, be^A admet des primitives sur I ; notons B_1 l'une des primitives de be^A sur I. On a alors :

$$\begin{aligned} y' + ay = b &\Longleftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad ye^A = B_1 + \lambda\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad y = B_1 e^{-A} + \lambda e^{-A}\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi : $\quad \mathcal{S} = \{B_1 e^{-A} + \lambda e^{-A}; \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Résumons l'étude :

◆ **Théorème**

1) La solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

2) Une solution particulière de (E) est $B_1 e^{-A}$ où
$$\begin{cases} A \text{ est une primitive de } a \text{ sur } I \\ B_1 \text{ est une primitive de } b e^{A} \text{ sur } I \end{cases}.$$

On voit ainsi que la résolution de (E) revient à deux calculs de primitives.

3) **Méthode pratique de résolution de** (E)

On résout d'abord (E_0) (cf. 11.1.2 Théorème, p. 137). On détermine ensuite une solution particulière de (E) de la façon suivante :

1) Il se peut que (E) admette une solution évidente. Par exemple, si
(E) $\quad y' + x^2 y = x^2$, une solution évidente est $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$.

2) Si le second membre b de (E) se décompose de manière simple en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions de types variés $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, on pourra déterminer, pour chaque équation (E_k) $\quad y' + ay = b_k$ une solution particulière y_k, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E) puisque :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)' + a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(y_k' + ay_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b.$$

Cette propriété s'appelle le **principe de superposition des solutions**.

3) **Méthode de variation de la constante**

En notant y_0 une solution non nulle de (E_0), on cherche une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est la nouvelle fonction inconnue (dérivable sur I). On a :

$$y' + ay = b \Longleftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda y_0' + a\lambda y_0 = b \Longleftrightarrow \lambda' y_0 = b$$

(puisque $y_0' + ay_0 = 0$).

On déduit λ' (par $\lambda' = \dfrac{b}{y_0}$; on sait que y_0 ne s'annule en aucun point), puis λ par une primitivation, et enfin y par $y = \lambda y_0$.

4) EXEMPLES :

1) (E) $y' + xy = x$, $(y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$.

La solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}\end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution (évidente) de (E) est $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1\end{array}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}\end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2) (E) $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$, $(y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$.

La solution générale de l'équation sans second membre est $y_0 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{-x}\end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'après le principe de superposition des solutions, nous cherchons une solution particulière pour chacune des deux équations :

$$(E_1) \qquad y' + y = 2e^x$$
$$(E_2) \qquad y' + y = 4\sin x + 3\cos x.$$

Pour (E_1), une solution évidente est $y_1 : x \longmapsto e^x$.

Pour (E_2) cherchons une solution y_2 de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_2(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_2'(x) + y_2(x) = 4\sin x + 3\cos x$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (-\beta + \alpha)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x = 4\sin x + 3\cos x$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -\beta + \alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 3 \end{array} \right. \iff \left(\alpha = \frac{7}{2}, \beta = -\frac{1}{2}\right).$$

Une solution particulière de (E_2) est donc $y_2 : x \longmapsto \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$.

On en déduit une solution particulière y de (E) :

$$y = y_1 + y_2 : x \longmapsto e^x + \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x.$$

Finalement : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x + \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \lambda e^{-x}\end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3) (E) $y' + \dfrac{x}{x^2+1}\, y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $(y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$.

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$x \longmapsto \lambda e^{-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Aucune solution de (E) n'étant évidente, appliquons la méthode de variation de la constante : cherchons une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$, où $y_0 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{array}$ et $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est inconnue (supposée dérivable). On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \frac{x}{x^2+1}\, y(x) = \frac{1}{x^2+1}$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\Longleftarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Une solution particulière de (E) est donc $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$.

Finalement : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

5) Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale

◆ **Théorème** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a,b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues, (E) $y' + ay = b$, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une solution et une seule y de (E) sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

Preuve :

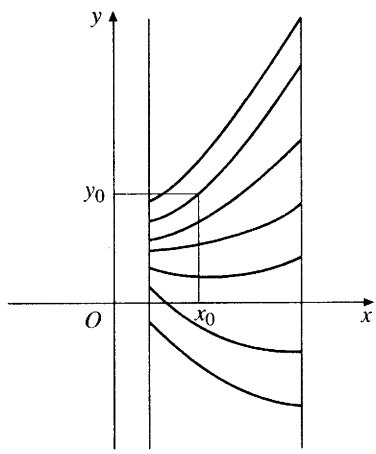
Avec les notations de (11.1.3 2) p. 139), la solution générale de (E) sur I est :

$$y = B_1 e^{-A} + \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

D'où :
$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\Longleftrightarrow B_1(x_0)e^{-A(x_0)} + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda = y_0 e^{A(x_0)} - B_1(x_0). \end{aligned}$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de λ, donc aussi de y.

Remarque : Avec les notations précédentes, pour chaque solution y de (E), notons $C_y = \{(x, y(x)) ; x \in I\}$. La famille $(C_y)_{y \in \mathcal{S}}$ forme une partition de $I \times \mathbb{K}$. On dit aussi que, par un point quelconque (x_0, y_0) de $I \times \mathbb{K}$, il passe une courbe intégrale (C_y) et une seule.



6) Problème des raccords

Revenons à l'équation non normalisée

(e) $$\alpha y' + \beta y = \gamma.$$

Supposons, pour simplifier, que α s'annule en un point et un seul x_0 de I et que x_0 soit dans $\overset{\circ}{I}$.

On résout (e) sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-\infty; x_0[\cap I$ et $I_2 =]x_0; +\infty[\cap I$ (puisque, sur ces intervalles, (e) peut être normalisée); puis on cherche si on peut «raccorder» au point x_0 les solutions précédentes (cf. 11.1.1, Problème des raccords, p. 136).

Remarque :

1) L'ensemble des applications $y : I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur $I - \{x_0\}$ et telles que

$$\forall x \in I - \{x_0\}, \quad \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$$

est un espace affine de dimension 2. C'est précisément l'ensemble des applications $I - \{x_0\} \to \mathbb{K}$ de la forme : $x \longmapsto \begin{cases} y_1(x) + \lambda_1 y_{0,1}(x) & \text{si } x \in I_1 \\ y_2(x) + \lambda_2 y_{0,2}(x) & \text{si } x \in I_2 \end{cases}$, où

- y_1 (resp. y_2) est une solution de (e) sur I_1 (resp. I_2)
- $y_{0,1}$ (resp. $y_{0,2}$) est une solution non nulle de $\alpha y' + \beta y = 0$ sur I_1 (resp. I_2)
- (λ_1, λ_2) décrit $\mathbb{K}^2$.

2) On déduit de la remarque *1)* ci-dessus que l'ensemble des solutions de (e) sur I (toujours lorsque α ne s'annule qu'en x_0) peut être : $\left| \begin{array}{l} \varnothing \\ \text{un singleton} \\ \text{une droite affine} \\ \text{un plan affine} \end{array} \right.$.

3) Pour étudier le raccordement en x_0 par dérivabilité, on peut, suivant l'exemple, étudier une limite de taux d'accroissement, ou une limite de dérivée (lorsque cette dernière limite existe).

EXEMPLE :

Résoudre l'équation différentielle

(e) $$2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$$

sur tout intervalle ouvert de I de $\mathbb{R}$ (la fonction inconnue y étant supposée à valeurs réelles).

Nous allons résoudre l'équation normalisée

(E) $$y' + \frac{1}{2x}\, y = \frac{1}{2x(1+x)},$$

puis étudier les raccords en -1 et 0.

a) **Résolution de** (E)

Supposons $-1 \notin I$ et $0 \notin I$.

La solution générale de (E_0) $y' + \dfrac{1}{2x}\, y = 0$ sur I est

$$\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{-\int \frac{1}{2x}\,dx} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aucune solution évidente de (E) ne nous apparaissant, nous allons appliquer la méthode de variation de la constante : cherchons une solution y de (E) de la forme $y = \lambda y_0$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est la nouvelle fonction inconnue (supposée dérivable sur I), et $y_0 : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \end{array}$. On a ainsi :

$$(E) \Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad \lambda'(x) y_0(x) = \frac{1}{2x(1+x)}.$$

Notons $\varepsilon = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (ε est constant sur I). On obtient :

$$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1+x)}\,dx = \int \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1+x)}\,dx.$$

Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{\varepsilon x}$: $\lambda(x) = \displaystyle\int \frac{du}{1+\varepsilon u^2}$.

Si $\varepsilon = 1$ (c'est-à-dire $I \subset]0; +\infty[$), alors

$$\lambda(x) = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{Arctan} u = \operatorname{Arctan} \sqrt{x}.$$

Si $\varepsilon = -1$ (c'est-à-dire $I \subset]-\infty; 0[$), alors

$$\lambda(x) = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right|.$$

On en déduit l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des solutions de (e) sur I :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } I \subset]0; +\infty[,$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| + \frac{\mu}{\sqrt{-x}}; \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ si } I \subset]-\infty; 0[.$$

b) **Raccords**

α) *Raccord en* 0

Nous supposons ici : $0 \in I$ et $-1 \notin I$.

L'application $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ admet une limite finie en 0^+ si et seulement si $\lambda = 0$, et cette limite est alors 1.

L'application $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| + \dfrac{\mu}{\sqrt{-x}}$ admet une limite finie en 0^- si et seulement si $\mu = 0$, et cette limite est alors 1.

Ainsi, il y a raccord par continuité en 0 si et seulement si $\lambda = \mu = 0$.

Considérons donc l'application $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et étudions la dérivabilité de y en 0.

On obtient, en utilisant des développements limités :

$$\text{pour } x > 0 : \frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\frac{1}{3},$$

$$\text{pour } x < 0 : \frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right) - 2\sqrt{-x} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\frac{1}{3}.$$

Ceci montre que y est dérivable en 0 et que $y'(0) = -\dfrac{1}{3}$.

Enfin, la relation $2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$ est satisfaite pour $x = 0$, puisque $y(0) = 1$.

$$\text{Finalement : } \mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases} \right\}$$

(dans ce cas, $\mathcal{S}_I$ est un singleton).

β) *Raccord en* -1

Nous supposons ici : $0 \notin I$ et $-1 \in I$.

Si (e) admettait au moins une solution y sur I, en remplaçant x par -1 dans (e), on obtiendrait une contradiction. Donc $\mathcal{S}_I = \varnothing$.

γ) *Raccord en* -1 *et* 0

Nous supposons ici : $0 \in I$ et $-1 \in I$.

D'après β) : $\mathcal{S}_I = \varnothing$.

Remarque : nous verrons dans le Tome 4 (Séries entières) que la solution y définie au § *b)* α) est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, car développable en série entière en 0, de rayon 1.

Exercices

◇ **11.1.5** Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes (variable x, fonction inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalle ouvert quelconque de $\mathbb{R}$) :

a) $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y - (x^3 - x^2 + x + 1) = 0$

b) $y' + 2xy - e^{x-x^2} = 0$

c) $x(1+x^2)y' - y = 0$

d) $xy' - 2y - x^4 = 0$

e) $xy' - y - (x^2+1) = 0$

f) $x^2y' + y - 1 = 0$

g) $(x+1)^2(xy' - y) + 2x + 1 = 0$

h) $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$

i) $2x(1+x^2)y' + 2x^2y - 1 = 0$

j) $x(x^2+1)y' + y + x = 0$

k) $(x^2-1)y' + xy + 3(x - x^3) = 0$

l) $2x(1-x)y' + (1-2x)y - 1 = 0$

m) $x(x^2-1)y' + 2y - x^2 = 0$

n) $xy' - y + \ln x = 0$

o) $(x-1)y' + y - \ln|x| = 0$

p) $x^3 \ln|x| y' - x^2 y - (2\ln|x| + 1) = 0$

q) $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y - (3 + 2e^x) = 0$

r) $(\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x)y' + 3(\operatorname{ch}^4 x)y - 1 = 0$

s) $y' + (\cos x)y - \sin x \cos x = 0$

t) $(\sin x)y' - y + 1 = 0$

u) $(\sin x)y' - (\cos x)y - \sin x = 0$

v) $(\sin^3 x)y' - 2(\cos x)y = 0.$

◇ **11.1.6** Résoudre $y' - y - \ln x = 0$ sur $]0; +\infty[$. Existe-t-il des solutions bornées ?

◇ **11.1.7** Déterminer la solution de $xy' - y = x^3$ sur $]0; +\infty[$ telle que $y(1) = 0$.

◇ **11.1.8** Résoudre : $yy' + y^2 = \dfrac{1}{2} e^{-2x}$ (poser $z = y^2$).

◇ **11.1.9** Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que les deux équations différentielles $y' - y = 1 - x$ et $xy' - y = f(x)$ aient au moins une solution commune $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

◇ **11.1.10** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

◇ **11.1.11** Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des courbes intégrales de l'équation différentielle $xy' - 3y - 2x^2 = 0$.

11.2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme

11.2.1 Généralités

On appelle **exponentielle-polynôme** toute application de I dans $\mathbb{K}$ de la forme $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{K}^n$, $(P_1,\ldots,P_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$.

◆ **Définition** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3$, $h : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une exponentielle-polynôme, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$, $y : J \longrightarrow \mathbb{K}$ une application.

On dit que y est **solution sur J de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme**

(e) $$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = h$$

si et seulement si : $\begin{cases} y \text{ est deux fois dérivable sur } J \\ \forall x \in J, \quad \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = h(x). \end{cases}$

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (J,y) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et y une solution sur J de (e).

Notre but est ici d'exprimer les solutions de (e) à l'aide de fonctions usuelles (nous allons montrer que c'est possible).

Si $\alpha = 0$, nous retrouvons une équation différentielle linéaire du premier ordre (voir 11.1 p. 135). Nous supposons dorénavant $\alpha \neq 0$. On se ramène ainsi (en notant $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, $g = \dfrac{h}{\alpha}$) à :

(E) $$y'' + ay' + by = g.$$

Nous considérons **l'équation sans second membre** associée :

(E_0) $$y'' + ay' + by = 0.$$

11.2.2 Résolution de l'équation sans second membre

Notations :

I est un intervalle de $\mathbb{R}$

$(a,b) \in \mathbb{K}^2$

(E_0) : $y'' + ay' + by = 0$, où $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est la fonction inconnue, supposée deux fois dérivable

$\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

1) **Structure de $\mathcal{S}_0$**

◆ **Proposition**

$\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve :

- $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$ car 0 (application nulle) est dans $\mathcal{S}_0$.
- Si $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_0^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda y_1 + y_2$ est deux fois dérivable sur I et :

$$(\lambda y_1 + y_2)'' + a(\lambda y_1 + y_2)' + b(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2) = 0,$$

donc $\lambda y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_0$.

2) **Résolution de (E_0)**

Par analogie avec 3.4.2, Tome 1, p. 68 et 11.1 p. 137, cherchons d'éventuelles solutions de (E_0) de la forme $R : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \end{array}$, où $r \in \mathbb{K}$. On a :

$$\forall x \in I, (R'' + aR' + bR)(x) = (r^2 + ar + b)\mathrm{e}^{rx}.$$

Considérons l'équation $r^2 + ar + b = 0$ (d'inconnue $r \in \mathbb{K}$), appelée **équation caractéristique** de (E_0) ; notons $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

a) Supposons ici que l'équation caractéristique de (E_0) admette au moins une solution ρ ($\rho \in \mathbb{K}$). L'application $R : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{\rho x} \end{array}$ est alors une solution de (E_0) sur I.
Effectuons un changement de fonction inconnue dans (E_0) : notons $z : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto y(x)\mathrm{e}^{-\rho x} \end{array}$
(qui est aussi deux fois dérivable sur I). On a alors, pour tout x de I :

$$\begin{cases} y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\rho x} \\ y'(x) = \rho z(x)\mathrm{e}^{\rho x} + z'(x)\mathrm{e}^{\rho x} \\ y''(x) = \rho^2 z(x)\mathrm{e}^{\rho x} + 2\rho z'(x)\mathrm{e}^{\rho x} + z''(x)\mathrm{e}^{\rho x} \end{cases},$$

d'où $(y'' + ay' + by)(x) = (2\rho + a)z'(x)\mathrm{e}^{\rho x} + z''(x)e^{\rho x}$, puisque $\rho^2 + a\rho + b = 0$.
Nous sommes ainsi ramenés à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (d'inconnue z') : $(2\rho + a)z' + z'' = 0$. La solution générale (en z') est donnée par : $\forall x \in I$, $z'(x) = \lambda \mathrm{e}^{-(2\rho+a)x}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

• Si $2\rho + a \neq 0$, alors : $\forall x \in I$, $z(x) = -\dfrac{\lambda}{2\rho + a}\,\mathrm{e}^{-(2\rho+a)x} + \lambda_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$,

d'où, en notant $\lambda_1 = -\dfrac{\lambda}{2\rho + a}$, la solution générale de (E_0) :

$$y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-(\rho+a)x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\rho x} \end{array} \quad , \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

L'élément $-(\rho + a)$ est la deuxième solution de l'équation caractéristique (puisque la somme de ses solutions vaut $-a$); en notant r_1, r_2 les deux solutions de l'équation caractéristique ($r_1 = \rho$, $r_2 = -(\rho + a)$), on obtient :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{array} \quad ; \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

• Si $2\rho + a = 0$ (c'est-à-dire : si l'équation caractéristique admet ρ pour solution double), alors : $\forall x \in I$, $z(x) = \lambda x + \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$, et donc :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \end{array} \quad ; \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

b) Si l'équation caractéristique de (E_0) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$), on résout l'équation complexifiée associée à (E_0), c'est-à-dire que l'on détermine l'ensemble des applications $Y : I \longrightarrow \mathbb{C}$, deux fois dérivables sur I, telles que $Y'' + aY' + bY = 0$, puis, parmi ces applications Y, on ne conserve que celles qui sont à valeurs réelles. Achevons les calculs dans ce cas.

On a : $\forall x \in I$, $Y(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $r_1 = \dfrac{-a - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2}$, $r_2 = \dfrac{-a + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2} = \overline{r}_1$.

$$\begin{aligned} Y(I) \subset \mathbb{R} &\Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad \overline{\lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x}} = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad \overline{\lambda}_1 \mathrm{e}^{r_2 x} + \overline{\lambda}_2 \mathrm{e}^{r_1 x} = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad (\overline{\lambda}_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{r_1 x} = (\lambda_2 - \overline{\lambda}_1)\mathrm{e}^{r_2 x} \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad \overline{\lambda}_2 - \lambda_1 = (\lambda_2 - \overline{\lambda}_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}x} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\lambda}_2 - \lambda_1 = \lambda_2 - \overline{\lambda}_1 = 0, \end{aligned}$$

car $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}x} \end{array}$ prend au moins deux valeurs distinctes.

Ainsi : $Y(I) \subset \mathbb{R} \Longleftrightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, d'où $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \overline{\lambda}_1 \mathrm{e}^{\overline{r}_1 x} \end{array} ; \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$.

Enfin, en notant $\lambda_1 = u + \mathrm{i}v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a, pour tout x de I :

$$\lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \overline{\lambda}_1 \mathrm{e}^{\overline{r}_1 x} = 2\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \left(u \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\,x\right) - v \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\,x\right)\right).$$

Finalement :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\,x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\,x\right)\right) \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Résumons l'étude par le théorème suivant :

◆ **Théorème** L'ensemble des solutions de (E_0) sur I est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.
Considérons l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ (inconnue $r \in \mathbb{K}$) et son discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

1er cas : L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ deux solutions r_1, r_2 distinctes

$$\text{(c'est-à-dire } \left| \begin{array}{l} (\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta > 0) \\ \text{ou} \\ (\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \Delta \neq 0) \end{array} \right. \text{)}$$

Alors $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} ; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

2e cas : L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ une solution double $\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ (c'est-à-dire : $\Delta = 0$).

Alors $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{-\frac{a}{2} x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

3e cas : L'équation caractéristique n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$).

Alors $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\,\text{Ré}(\lambda_1 e^{r_1 x}) \end{array} ; \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$, où r_1 est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique; ou encore :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-\frac{a}{2} x} \left(A \cos\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right) + B \sin\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right)\right) \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On notera l'analogie de ces résultats avec ceux obtenus lors de l'étude des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants (3.4.2, Tome 1, p. 68).

EXEMPLES :

1) Résoudre : $y'' - 5y' + 6y = 0$ ($y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions distinctes : 2 et 3. Donc :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \end{array} ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Résoudre : $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

L'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles : $i\omega$ et $-i\omega$. Donc : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3) Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = 0$ ($y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$). L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double : 2. Donc : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

4) Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = 0$ ($y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$).

On obtient ici : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.

Exercices

◇ **11.2.1** Déterminer l'ensemble des couples (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tels que toute solution sur $]0;+\infty[$ de $y''+ay'+by=0$ soit bornée.

◇ **11.2.2** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\alpha - x).$$

11.2.3 Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme

Notations :

I un intervalle de $\mathbb{R}$
$(a,b) \in \mathbb{K}^2$
$g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une exponentielle-polynôme
(E) $y''+ay'+by = g$, où $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue, supposée deux fois dérivable
$\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur I
(E_0) l'équation différentielle sans second membre associée : $y''+ay'+by=0$
$\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

1) **Liens entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$**

1) $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S}$, $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$,
car $(y_1-y_2)''+a(y_1-y_2)'+b(y_1-y_2) =$
$(y_1''+ay_1'+by_1)-(y_2''+ay_2'+by_2) = g-g=0.$

2) $\forall y_1 \in \mathcal{S}, \forall y_0 \in \mathcal{S}_0$, $y_1+y_0 \in \mathcal{S}$,
car $(y_1+y_0)''+a(y_1+y_0)'+b(y_1+y_0) =$
$(y_1''+ay_1'+by_1)+(y_0''+ay_0'+by_0) = g+0=g.$

Les deux résultats ci-dessus montrent que, si $\mathcal{S}$ n'est pas vide, $\mathcal{S}$ est un plan affine dont la direction est le plan vectoriel $\mathcal{S}_0$. En effet, on a, pour tout y_1 de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0 ; y_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

Autrement dit, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

On voit ainsi que la résolution de (E) se ramène à la détermination d'au moins une solution de (E), qui sera qualifiée souvent de «**solution particulière**»; toute solution de (E) est en fait une solution particulière de (E).

2) **Principe de superposition des solutions**

Puisque g est une exponentielle-polynôme, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{K}$, $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\forall x \in I, \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x).$$

Pour chaque k de $\{1, \ldots, n\}$, notons y_k une solution de l'équation

$$(E_k) \qquad \forall x \in I, \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = e^{m_k x} P_k(x).$$

Alors $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution de (E) puisque, pour tout x de I :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)''(x) + a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)'(x) + b\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (y_k''(x) + ay_k'(x) + by_k(x)) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x) = g(x).$$

3) **Détermination d'une solution de**
(E_k) $\forall x \in I, y''(x) + ay'(x) + by(x) = e^{m_k x} P_k(x)$

Notons $z : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto y(x)e^{-m_k x} \end{array}$; on a, pour tout x de I :

$$\begin{cases} y(x) = e^{m_k x} z(x) \\ y'(x) = e^{m_k x}(m_k z(x) + z'(x)) \\ y''(x) = e^{m_k x}(m_k^2 z(x) + 2m_k z'(x) + z''(x)) \end{cases},$$

d'où : $y''(x) + ay'(x) + by(x) = e^{m_k x}((m_k^2 + am_k + b)z(x) + (2m_k + a)z'(x) + z''(x))$.
Ainsi, y est solution de (E_k) sur I si et seulement si z est solution sur I de

$$(F_k) \qquad (m_k^2 + am_k + b)z(x) + (2m_k + a)z'(x) + z''(x) = P_k(x).$$

- Si $m_k^2 + am_k + b \neq 0$, on cherche une solution z de (F_k) sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P_k. Le système d'équations qui apparaît alors (dont les inconnues sont les coefficients de z) est un système linéaire triangulaire («en cascade») qui admet une solution et une seule.

- Si $\begin{cases} m_k^2 + am_k + b = 0 \\ 2m_k + a \neq 0 \end{cases}$, on cherche une solution z de (F_k) sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $(1 + \deg(P_k))$.

- Si $\begin{cases} m_k^2 + am_k + b = 0 \\ 2m_k + a = 0 \end{cases}$, on cherche une solution z de (F_k) sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $(2 + \deg(P_k))$.

Résumons l'étude par le théorème suivant :

◆ **Théorème** **(Recherche d'une solution particulière de**
(E) $y'' + ay' + by = g$, **où** $g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x) \end{array}$)

Pour chaque k de $\{1,\ldots,n\}$, il existe une solution y_k de $y'' + ay' + by = g_k$ (où $g_k : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto e^{m_k x} P_k(x) \end{array}$) de la forme $y_k : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto e^{m_k x} Q_k(x) \end{array}$,
où Q_k est un polynôme de degré :

$\deg(P_k)$ si m_k n'est pas solution de l'équation caractéristique

$1 + \deg(P_k)$ si m_k est solution simple de l'équation caractéristique

$2 + \deg(P_k)$ si m_k est solution double de l'équation caractéristique.

Une solution de (E) est alors $\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Remarque : Lorsque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et que le second membre de (E) est du type $g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto P(x)\cos mx + Q(x)\sin mx \end{array}$, où $m \in \mathbb{R}^*$ et P, Q sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, il existe une solution y de (E) de la forme : $y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A(x)\cos mx + B(x)\sin mx \end{array}$, où A, B sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à :

$\mathrm{Max}(\deg P, \deg Q)$ si im n'est pas solution de l'équation caractéristique

$1 + \mathrm{Max}(\deg P, \deg Q)$ si im est solution (nécessairement simple) de l'équation caractéristique.

EXEMPLES :

1) Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x \quad (y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$.

• L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double : 2. La solution générale de l'équation sans second membre est donc : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \end{array}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

• Puisque 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution y de (E) de la forme : $y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Q(x)e^x \end{array}$, où Q est un polynôme de degré 2. En notant $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est à trouver, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x \\ y'(x) = ((2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma))e^x \\ y''(x) = (2\alpha + 2(2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma))e^x \end{cases}.$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^2 + 1)e^x$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ((\alpha x^2 + \beta x + \gamma) - 2(2\alpha x + \beta) + 2\alpha)e^x = (x^2 + 1)e^x$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 4\alpha = 0 \\ \gamma - 2\beta + 2\alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4. \\ \gamma = 7 \end{cases}$$

Donc $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x^2+4x+7)e^x \end{array}$ est une solution de (E).

Finalement : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x^2+4x+7)e^x + (\lambda x + \mu)e^{2x} \end{array} ; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2) Résoudre : $y'' + y = \cos^3 x$ ($y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

L'équation s'écrit : $y'' + y = \dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{1}{4}\cos 3x$ (en linéarisant $\cos^3 x$).

- La solution générale de l'équation sans second membre est $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

- Puisque i est solution de l'équation caractéristique, il existe une solution y_1 de

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$$

de la forme $y_1 : x \longmapsto (\alpha x + \beta)\cos x + (\gamma x + \delta)\sin x$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ à trouver.

On a, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = (\alpha x + \beta)\cos x + (\gamma x + \delta)\sin x \\ y_1'(x) = (\gamma x + (\alpha+\delta))\cos x + (-\alpha x + (\gamma - \beta))\sin x \\ y_1''(x) = (-\alpha x + (2\gamma - \beta))\cos x - (\gamma x + (2\alpha + \delta))\sin x \end{array} \right.$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_1''(x) + y_1(x) = \dfrac{3}{4}\cos x \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $2\gamma\cos x - 2\alpha\sin x = \dfrac{3}{4}\cos x$

$\iff \left(\alpha = 0, \gamma = \dfrac{3}{8}\right)$.

Une solution de (E_1) est donc $y_1 : x \longmapsto \dfrac{3}{8}x\sin x$.

- Puisque 3i n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution y_2 de

$$(\mathrm{E}_2) \qquad y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x$$

de la forme $y_2 : x \longmapsto u\cos 3x + v\sin 3x$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ à trouver. On a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(x) = u\cos 3x + v\sin 3x \\ y_2'(x) = 3v\cos 3x - 3u\sin 3x \\ y_2''(x) = -9u\cos 3x - 9v\sin 3x \end{array} \right. .$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_2''(x) + y_2(x) = \dfrac{1}{4}\cos 3x \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $-8u\cos 3x - 8v\sin 3x = \dfrac{1}{4}\cos 3x$

$\iff \left(u = -\dfrac{1}{32}, v = 0\right)$.

Une solution de (E_2) est donc $x \longmapsto -\dfrac{1}{32}\cos 3x$.

Finalement : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{3}{8}x\sin x - \dfrac{1}{32}\cos 3x + A\cos x + B\sin x \end{array} ; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercices

◇ **11.2.3** Résoudre les équations différentielles suivantes, où $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction inconnue supposée deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (variable x) :

a) $y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{sh}\,x$ *b)* $2y'' + 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{-x}$ *c)* $y'' + 4y' - 5y = 2\mathrm{e}^{x}$

d) $y'' - 4y = 4\mathrm{e}^{-2x}$ *e)* $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^{x}$ *f)* $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{x}$

g) $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{x} + (3x - 1)\mathrm{e}^{2x} + x - 2$ *h)* $y'' + 4y = x\cos^2 x$

i) $y'' + 2y' + y = \sin^2 x$ *j)* $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x$ *k)* $y'' - 2y' + 2y = 2\cos x$

l) $y'' + 2y' + 5y = 2x\,\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$ *m)* $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}\sin x$

n) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{ch}\,x\,\cos x$.

◇ **11.2.4** Résoudre les équations différentielles suivantes (où $m \in \mathbb{R}$ est fixé) :

a) $y'' - 2y' + my = \cos x$ *b)* $y'' + 4y = \sin mx$

c) $my'' - (1 + m^2)y' + my = x\,\mathrm{e}^{x}$.

◇ **11.2.5** Montrer que, pour tout m de $]0; 2[$ l'équation différentielle

(E_m) $y'' + (1 - 2m)y' - 2my = \mathrm{e}^{2x}$

admet une solution et une seule y_m telle que $y_m(0) = y'_m(0) = 0$.

Établir : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_m(x) \xrightarrow[m \to 1]{} y_1(x)$.

◇ **11.2.6** **Equations différentielles d'Euler**

a) Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$, $k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue. Montrer que l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = k$ se ramène, par le changement de variable $t = \ln|x|$, à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

b) Résoudre, sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, les équations différentielles d'Euler suivantes (variable x, fonction inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$) :

$\alpha)$ $x^2y'' - 2y = x$

$\beta)$ $x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$

$\gamma)$ $x^2y'' + xy' + y = x\,\ln|x|$.

◇ **11.2.7** Résoudre les équations différentielles suivantes (inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) :

a) $y'' + y = |x| + 1$ *b)* $y'' + y = \mathrm{Max}(x,0)$

c) $y'' - 4y = |x|$ *d)* $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{|x|}$.

◇ **11.2.8** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = x\mathrm{e}^{x}$.

◇ **11.2.9** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x$.

11.3 Exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du premier ordre

11.3.1 Généralités

◆ **Définition** Soient $U \subset \mathbb{R}^3$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **solution sur I de l'équation différentielle**

$$\text{(e)} \qquad F(x,y,y') = 0$$

toute application $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} y \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I, \quad (x,y(x),y'(x)) \in U \\ \forall x \in I, \quad F(x,y(x),y'(x)) = 0. \end{cases}$$

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (I,y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une solution sur I de (e).

On appelle **courbes intégrales** de (e) les courbes représentatives de solutions de (e).

Comme l'on l'a vu dans l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre (11.1. p. 135), il est souvent utile d'exprimer, dans (e), y' en fonction de x et de y. On peut ainsi, dans certains cas, ramener l'étude de (e) à l'étude d'une équation différentielle **normalisée** (ou : **résolue en** y') :

$$\text{(E)} \qquad y' = f(x,y),$$

où : $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}^2$.

EXEMPLES :

- (e) $(1+x^2)y' - xy^2 + 1 = 0$ se ramène à (E) $y' - \dfrac{x}{1+x^2}\,y^2 + \dfrac{1}{1+x^2} = 0.$
- (e) $(1-x^2)y' - \sin y + x = 0$ se ramène à (E) $y' = \dfrac{\sin y - x}{1-x^2}$ et à l'étude des raccords en -1 et 1.
- (e) $yy'^2 - \sin y' + x^2 + 1 = 0$ ne se ramène pas simplement à une équation normalisée.

Nous étudierons dans le Tome 4 des théorèmes d'existence et d'unicité pour des solutions (dites «maximales») d'une équation différentielle du premier ordre normalisée, vérifiant une «condition initiale».

Dans ce § 11.3 consacré à une première étude de certaines équations différentielles non linéaires du premier ordre, il se pourra que nous soyons amenés à ne déterminer que les solutions y vérifiant des conditions supplémentaires, en apparence peu restrictives, du genre : $\forall x \in I$, $y(x) \neq 0$ (lorsqu'on veut diviser par la fonction y, cf. 11.3.4 2) p. 162).

Utilisation d'un changement de fonction inconnue

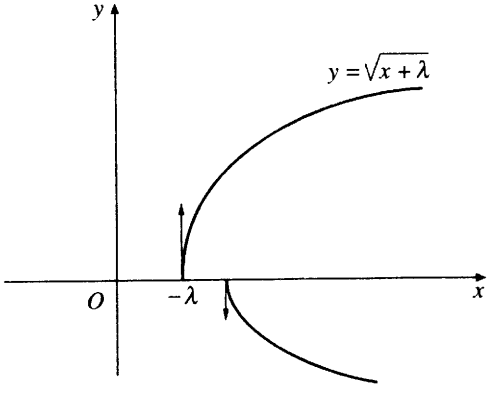
EXEMPLE : résoudre (e) $yy' - \frac{1}{2} = 0$.

Notant $z = y^2$, (e) se ramène à $z' = 1$, c'est-à-dire $z : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + \lambda \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ensuite :

$$(\forall x \in I, \quad (y(x))^2 = x + \lambda) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, x + \lambda \geqslant 0 \\ \forall x \in I, \quad \left| \begin{array}{l} y(x) = -\sqrt{x+\lambda} \\ \text{ou} \\ y(x) = \sqrt{x+\lambda} \end{array} \right. \end{cases}$$

Puisque $I \subset [-\lambda; +\infty[$ et que $x + \lambda$ ne s'annule qu'en $-\lambda$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à y) montre que y garde un signe fixe. Finalement pour qu'un couple (I, y) soit formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une solution y de (e) sur I, il faut et il suffit qu'il existe (λ, ε) dans $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ tel que : $\begin{cases} I \subset]-\lambda; +\infty[\\ \forall x \in I, \quad y(x) = \varepsilon\sqrt{x+\lambda} \end{cases}$.

Les courbes intégrales sont des arcs de paraboles.



Nous verrons des changements de fonction inconnue dans :

11.3.3 (équations homogènes) $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

11.3.4 (équations de Bernoulli) $z(x) = \dfrac{1}{(y(x))^\alpha}$

11.3.5 (équations de Riccati) $z(x) = y(x) - y_0(x)$.

Utilisation d'un changement de variable

La nouvelle variable, notée par exemple u, est liée à l'ancienne (x) par une formule $u = \varphi(x)$, où φ est le plus souvent un C^1-difféomorphisme (entre intervalles à préciser). En fait, on effectue en même temps un changement de fonction inconnue, la nouvelle inconnue, notée par exemple z, étant définie par $z(u) = y(x)$, c'est-à-dire $z = y \circ \varphi^{-1}$. L'équation (e) portant sur la fonction inconnue y et faisant intervenir la variable notée x se ramène à une équation (e') portant sur la fonction inconnue z et faisant intervenir la variable notée u. Voir par exemple les équations différentielles d'Euler (exercice 11.2.6 p. 155).

Remarque : les définitions et notations de ce § 11.3.1 s'appliquent en particulier aux équations linéaires du premier ordre (cf. 11.1 p. 135).

Nous allons maintenant étudier, à titre d'exemples, quelques types d'équations différentielles non linéaires du premier ordre.

11.3.2 Equations différentielles à variables séparables

1) Il s'agit de (e) $a(x) + b(y)y' = 0$, où a,b sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

2) **Méthode de résolution**

Pour qu'une application $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable soit solution de (e) sur I, il faut et il suffit que, en notant respectivement A,B des primitives de a et b, l'application $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A(x) + B(y(x)) \end{array}$ soit constante. On obtient ainsi l'équation cartésienne des courbes intégrales : $A(x) + B(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Souvent, il ne sera pas possible de «tirer» y en fonction de x sous une forme explicite (voir la question des fonctions implicites, 12.6.2 p. 200).

3) **Exemple** : (e) $(1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0$.

(e) $\Longleftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Nécessairement, $C \in]-\pi\,;\pi[$.

Si $C \neq -\dfrac{\pi}{2}$ et $C \neq \dfrac{\pi}{2}$, on peut tirer y sous la forme

$y = \tan(\operatorname{Arctan} x + C) = \dfrac{x+\lambda}{1-\lambda x}$, en notant $\lambda = \tan C$ (λ décrit $\mathbb{R}$).

Si $C = \dfrac{\pi}{2}$, alors $x < 0$ et : $\operatorname{Arctan} y = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(-x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{-x}$,

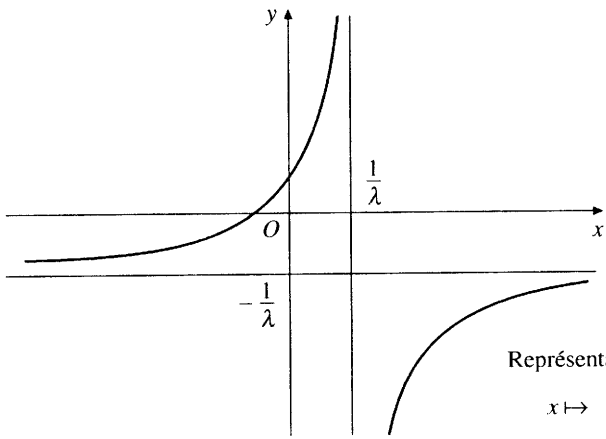
d'où $y = -\dfrac{1}{x}$.

De même, si $C = -\dfrac{\pi}{2}$, alors $x > 0$ et $y = -\dfrac{1}{x}$.

Finalement, les couples (I,y) formés d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une solution y de (e) sur $\mathbb{R}$ sont :

- $\left(I,\ y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x+\lambda}{1-\lambda x} \end{array}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $I \subset \left]-\infty; \dfrac{1}{\lambda}\right[$ ou $I \subset \left]\dfrac{1}{\lambda}; +\infty\right[$
- $\left(I,\ y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}\right)$ où I est quelconque
- $\left(I,\ y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\dfrac{1}{x} \end{array}\right)$ où $I \subset]-\infty; 0[$ ou $I \subset]0; +\infty[$.

Les courbes intégrales sont des arcs d'hyperboles (et des parties de la droite d'équation $y = x$).



Représentation graphique de $x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{1-\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Exercice

◇ **11.3.1** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $x(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0$ *b)* $xy'^2 - 4(1-x)y^2 = 0$

c) $x(x-1)y' - y(y-1) = 0$ *d)* $x(1+x^2)yy' - (1+y^2) = 0$

e) $y' + e^{y-x} = 0$ *f)* $y' \tan x = \operatorname{cotan} y$.

11.3.3 Equations homogènes

1) Il s'agit des équations différentielles homogènes en x et y, du type

$$\text{(e)} \qquad F(x,y,y') = 0$$

où l'application $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie sur une partie U de $\mathbb{R}^3$ et telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x,y,z) \in U, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} (tx,ty,z) \in U \\ F(tx,ty,z) = t^\alpha F(x,y,z) \end{cases}$.

En pratique, on fait souvent apparaître $\dfrac{y}{x}$ dans (e) (ce qui oblige à résoudre séparément sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, puis à étudier les raccords en 0).

2) **Méthode de résolution**

On résout (e) sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, en prenant comme nouvelle fonction inconnue $t : x \longmapsto t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. En notant (abusivement) $t = \dfrac{y}{x}$, on a : $y = tx$, d'où $y' = t'x + t$.

Si l'équation (e) est présentée sous la forme résolue en y' : (E) $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (où φ est une fonction fixée), on a :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Longleftrightarrow t'x + t = \varphi(t) \Longleftrightarrow t'x = \varphi(t) - t,$$

et cette dernière équation (d'inconnue t) est à variables séparables, si on peut diviser par $\varphi(t) - t$.

Si t_0 est un réel tel que $\varphi(t_0) - t_0 = 0$, alors l'application $y : x \longmapsto t_0 x$ est solution de (E) (appelée solution singulière).

En supposant que $t \longmapsto \varphi(t) - t$ ne s'annule pas sur I, on déduit x en fonction de t : $\ln|x| = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\varphi(t) - t}$, puis y par $y = tx$.

On obtient ainsi une représentation paramétrique des courbes intégrales de (E).

Dans cette première étude des équations différentielles non linéaires du premier ordre, le traitement appliqué aux équations homogènes n'est pas rigoureux. Nous compléterons l'aspect calculatoire présenté ici par une étude théorique dans le Tome 4.

3) **Propriété géométrique des courbes intégrales**

Si y est solution sur I d'une équation différentielle homogène (E) $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, alors, pour tout k de $\mathbb{R}^*$, l'application $Y_k : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{k} y(kx) \end{array}$ est aussi solution de (E) sur I car : $\forall x \in I$, $\quad Y_k'(x) = \dfrac{1}{k}\, k y'(kx) = \varphi\left(\dfrac{y(kx)}{kx}\right) = \varphi\left(\dfrac{Y_k(x)}{x}\right)$.

Autrement dit, toute courbe homothétique (dans une homothétie de centre O) d'une courbe intégrale est une courbe intégrale; nous admettrons la réciproque.

Pour déterminer toutes les courbes intégrales, il semble donc suffire de déterminer l'une d'elles.

4) **Exemple** : (E) $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, $y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

En notant $t = \dfrac{y}{x}$, on a $y = tx$, $y' = t'x + t$, et donc :

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow t'x + t = \mathrm{e}^t \Longleftrightarrow t'x = \mathrm{e}^t - t.$$

L'application $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^t - t \end{array}$ ne s'annule en aucun point (étudier les variations de h; on a plus précisément : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) \geqslant 1$). Donc :

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow \frac{t'}{\mathrm{e}^t - t} = \frac{1}{x}.$$

Notons $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u - u}$ (G n'est pas explicitable à l'aide des fonctions usuelles); G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G'(t) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - t} > 0$.

t	$-\infty$		$+\infty$
$G'(t)$		$+$	
$G(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	l

Pour tout t de $]-\infty; -1]$:

$$G(t) = -\int_t^0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u - u} \underset{v=-u}{=} -\int_0^{-t} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{e}^{-v} + v} \leqslant -\int_0^{-t} \frac{\mathrm{d}v}{1+v}$$
$$= -\ln(1-t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty,$$

donc $G(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$.

D'autre part, puisque $u \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^u - u}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, en notant

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u - u},$$

on a : $G(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} l$.

On a : (E) $\Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \ln x = G(t) + C$.

On en déduit une représentation paramétrique des courbes intégrales :

$$\begin{cases} x = \lambda \mathrm{e}^{G(t)} \\ y = \lambda t\, \mathrm{e}^{G(t)} \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé.}$$

Comme G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty; l[$, on peut exprimer y en fonction de x : $y = xG^{-1}\left(\ln \dfrac{x}{\lambda}\right)$, pour x parcourant un intervalle I inclus dans $]0; \lambda \mathrm{e}^l[$.

On remarquera que cet exemple est relativement facile à étudier car l'expression $\varphi(t) - t$ (ici : $\mathrm{e}^t - t$) par laquelle on a voulu diviser ne s'annule en aucun point.

Exercice

◇ **11.3.2** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $(y - x)y' + y = 0$ *b)* $yy'^2 - 2xy' + y = 0$

c) $xy'(2y - x) - y^2 = 0$ *d)* $x^2y' - (x^2 + xy + y^2) = 0$

e) $(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$ *f)* $y' = \dfrac{x}{y} + 1 + \dfrac{y}{x}$.

Dans les types suivants d'équations différentielles (§ § 11.3.4 à 11.3.8), nous nous contenterons d'un traitement non rigoureux (méthode formelle de résolution), les difficultés théoriques sous-jacentes étant importantes.

11.3.4 Equations de Bernoulli

1) Il s'agit de (e) $Ay' + By + Cy^{\alpha} = 0$, où α est un réel fixé ($\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$) et A, B, C des fonctions continues.

2) **Méthode de résolution**

On effectue le changement de fonction inconnue $z = y^{1-\alpha}$. En divisant dans (e) par y^{α}, et en remarquant que $z' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$, on voit que (e) se ramène à $\dfrac{1}{1-\alpha}Az' + Bz + C = 0$, qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en z. On résout celle-ci (cf. 11.1 p. 135), d'où la valeur de $z(x)$, puis celle de $y(x)$.

Remarque :

Pour $\alpha = 2$ par exemple, on posera $z = \dfrac{1}{y}$, ce qui suppose que y ne s'annule en aucun point de I. On n'obtiendra donc que les solutions ne s'annulant en aucun point de I ; d'autres solutions échappent peut-être à notre étude. Nous étudierons cette question dans le Tome 4.

3) **Exemple :** $(e) \quad xy' + y - xy^3 = 0$.

Notons $z = \dfrac{1}{y^2}$, d'où $z' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. Alors :

$$(e) \Longleftrightarrow xz' - 2z + 2x = 0.$$

En supposant $I \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_+^*$, on se ramène à l'équation linéaire du premier ordre normalisée :

$$(E) \qquad z' - \frac{2}{x}z + 2 = 0$$

La solution générale de l'équation sans second membre $z' - \dfrac{2}{x}z = 0$ est $x \longmapsto \lambda x^2$.

Une solution particulière de (E) est $x \longmapsto 2x$.

Donc la solution générale de (E) est : $z : x \longmapsto 2x + \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On déduit la solution générale de (e) sur I (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) :

$$y : x \longmapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x + \lambda x^2}} \quad , \quad (\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}.$$

On remarquera que l'ensemble de définition de y dépend de λ.

Exercice

◇ **11.3.3** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $y'\sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$ *b)* $y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$

c) $y' - \dfrac{4}{x}\, y - x\sqrt{y} = 0$ *d)* $y' - y - x^2y^2 = 0$

e) $2xy' + y + 3x^2y^2 = 0$ *f)* $x^2y' - xy + y^2 = 0$

g) $xy' - y - y^3 = 0$ *h)* $2xy' + y - 2x^2y^{-3} = 0$ *i)* $y' - \dfrac{y}{x} + x^2y^4 = 0.$

11.3.5 Equations de Riccati

1) Il s'agit de (e) $Ay' + By + Cy^2 + D = 0$, où A, B, C, D sont des fonctions continues. Lorsque $D = 0$, c'est un cas particulier d'équation de Bernoulli (11.3.4 p. 162).

2) **Méthode de résolution**

Supposons connue une solution y_0 de (e), et notons $Y = y - y_0$. Alors y est solution de (e) si et seulement si :

$$A(y_0 + Y)' + B(y_0 + Y) + C(y_0 + Y)^2 + D = 0,$$

c'est-à-dire : $AY' + (B + 2Cy_0)Y + CY^2 = 0,$
qui est une équation de Bernoulli (cf. 11.3.4 p. 162).
On notera donc $z = \dfrac{1}{Y}$ pour se ramener à une équation linéaire en z.

3) **Exemple :** (E) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0.$

Une solution évidente (sur $\mathbb{R}$) est $x \longmapsto -1$. Notons $Y = y + 1$, d'où $y = -1 + Y$.
L'équation (E) se ramène alors à $Y' + Y + Y^2 = 0$, c'est-à-dire, en notant $z = \dfrac{1}{Y}$:

$$-z' + z + 1 = 0.$$

La solution générale (en z) est : $z : x \longmapsto -1 + \lambda e^x$, d'où la solution générale de (E) :

$$y : x \longmapsto -1 + \frac{1}{-1 + \lambda e^x} = -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{et } y : x \longmapsto -2).$$

Remarque : l'exemple peut aussi être traité en tant qu'équation incomplète en x (cf. 11.3.6 p. 164).

Exercices

◇ **11.3.4** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $2x^2y' + x^2y^2 + 1 = 0$ *b)* $(x^2+1)y' - y^2 + 1 = 0$

c) $x^2y' - xy + x^2y^2 + 1 = 0$, *d)* $(1+x^3)y' + x^2y + 2xy^2 + 1 = 0$

e) $2xy' - y^2 + 1 = 0$ *f)* $(1-x^3)y' + x^2y - y^2 + 2x = 0$

g) $y' - 3y\tan x + y^2 + \tan^2 x - 1 = 0$.

◇ **11.3.5** Soient y_k $(1 \leqslant k \leqslant 4)$ quatre solutions de l'équation de Riccati

(e) $$Ay' + By + Cy^2 + D = 0,$$

où A, B, C, D sont continues sur un intervalle I.

Démontrer qu'il existe «en général» $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y_4 = y_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{y_2 - y_1} + \lambda\left(\dfrac{1}{y_3 - y_1} - \dfrac{1}{y_2 - y_1}\right)}.$$

11.3.6 Equations incomplètes en x

1) Il s'agit de (e) $F(y, y') = 0$, où $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$.

2) **Méthode de résolution**

On paramètre la courbe d'équation $F(u, v) = 0$ sous la forme $\begin{cases} u = \varphi(t) \\ v = \psi(t) \end{cases}$, t parcourant une certaine partie de $\mathbb{R}$. On a alors, si y est solution de (e), $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$, d'où (si ces calculs sont licites) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}$.

On déduit $\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$,

ce qui fournit une représentation paramétrique des courbes intégrales.

3) **Propriété géométrique des courbes intégrales**

Si $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de (e) sur I, alors, pour tout C de $\mathbb{R}$, l'application, translatée de y, $y_C : x \longmapsto y(x + C)$ est solution de (e) sur l'intervalle $I_C = \{x \in \mathbb{R};\ x + C \in I\}$, puisque :

$$\forall x \in I_C, \quad F(y_C(x), y_C'(x)) = F(y(x + C), y'(x + C)) = 0.$$

Donc les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par des translations de vecteur parallèle à $(x'x)$.

4) **Exemple :** (e) $(y+y')^2+(y-y')^3=0$.
Notons $t=\sqrt[3]{y+y'}$, d'où $t^3=y+y'$, puis, si y est solution de (e) :
$(y-y')^3=-(y+y')^2=-t^6$, d'où $y-y'=-t^2$.

Le système d'équations $\begin{cases} y+y'=t^3 \\ y-y'=-t^2 \end{cases}$ fournit $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(t^3-t^2) \\ y'=\dfrac{1}{2}(t^3+t^2) \end{cases}$. Donc :

$$\frac{1}{2}(t^3+t^2)=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(3t^2-2t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\ \text{d'où}\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3t-2}{t(t+1)},\ \text{puis}$$

$$x(t)=\int\frac{3t-2}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t=\int\left(-\frac{2}{t}+\frac{5}{t+1}\right)\mathrm{d}t=-2\ln|t|+5\ln|t+1|+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique des courbes intégrales est donc :

$$\begin{cases} x(t)=-2\ln|t|+5\ln|t+1|+C \\ y(t)=\dfrac{1}{2}(t^3-t^2) \end{cases},\ C\in\mathbb{R}.$$

Exercice

◇ **11.3.6** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $y'=-y(y-1)(y-2)$ *b)* $(y'+y)^3=y'+3y$ *c)* $(y'-y)^2=y(y'+y)^2$

d) $y=y'^2\tan y'$ *e)* $y^2+y'^2=1$.

11.3.7 Equations incomplètes en y

1) Il s'agit de (e) $F(x,y')=0$, où $F:U\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$.

2) **Méthode de résolution**

On peut quelquefois expliciter y' en fonction de x à partir de (e), puis primitiver pour obtenir y. Sinon, on paramètre la courbe d'équation $F(u,v)=0$ sous la forme $\begin{cases} u=\varphi(t) \\ v=\psi(t) \end{cases}$, t parcourant une certaine partie de $\mathbb{R}$. On a alors, si y est solution de (e), $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$, d'où (si ces calculs sont licites) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\psi(t)\varphi'(t)$.

On déduit $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\displaystyle\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+C \end{cases}$, $C\in\mathbb{R}$, ce qui constitue une représentation paramétrique des courbes intégrales.

On remarquera qu'en échangeant les rôles de x et de y (donc, en considérant x comme fonction de y), une équation incomplète en y se ramène à une équation incomplète en x (cf. 11.3.6 p. 164).

3) **Propriété géométrique des courbes intégrales**

Comme dans 11.3.6 3) p. 164, on voit qu'ici les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par des translations de vecteur parallèle à l'axe des ordonnées.

4) **Exemple** (e) $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$

Paramétrons la courbe d'équation $u^3 + v^3 - 3uv = 0$ en posant $t = \dfrac{v}{u}$:

$$u = \frac{3t}{1+t^3}, \quad v = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Ainsi $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y' = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ d'où $\dfrac{3t^2}{1+t^3} = y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$,

donc $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3t^2}{1+t^3}\,\dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \dfrac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}$, puis

$$y = \int \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t \underset{s=1+t^3}{=} 3\int \frac{3-2s}{s^3}\,\mathrm{d}s = 3\left(-\frac{3}{2s^2} + \frac{2}{s}\right) + C$$
$$= \frac{3(4t^3+1)}{2(1+t^3)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique des courbes intégrales :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3(4t^3+1)}{2(1+t^3)^2} + C \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice

◇ **11.3.7** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $xy' - y'^2 - 1 = 0$ *b)* $xy' - \sqrt{1+y'^2} = 0$ *c)* $x = \mathrm{e}^{y'} + y'$.

11.3.8 Equations de Lagrange et de Clairaut

1) On appelle **équation de Lagrange** toute équation différentielle :

(e) $$y = A(y')x + B(y'),$$

où $A, B : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe C^1 sur une partie X de $\mathbb{R}$.
Le cas particulier $A = 1$:

(e) $$y = xy' + B(y')$$

est qualifié d'**équation de Clairaut**.

2) **Méthode de résolution**

On note $t = y'$, d'où $y = A(t)x + B(t)$; puis, en dérivant par rapport à t :

$$tx'(t) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = A'(t)x(t) + A(t)x'(t) + B'(t),$$

ce qui constitue une équation différentielle linéaire du premier ordre (inconnue x, variable t).

On en déduit $x(t)$ en fonction de t, puis $y(t)$ par $y(t) = A(t)x(t) + B(t)$.

3) **Exemple** (e) $xy' + y + y'^2 = 0$

On pose $t = y'$, d'où $y = -xy' - y'^2 = -xt - t^2$, puis $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{dx}{dt}t - x - 2t$.

D'autre part $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{dx}{dt}$, d'où : $2tx'(t) + x(t) + 2t = 0$, qui est une équation différentielle linéaire du 1er ordre. La solution générale de l'équation sans second membre (sur un intervalle ne contenant pas 0) est $t \longmapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est $t \longmapsto -\dfrac{2}{3}t$.

La solution générale de l'équation avec second membre est $x : t \longmapsto -\dfrac{2}{3}t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On en déduit une représentation paramétrique des courbes intégrales (paramètre noté t) :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}} \\ y = -xt - t^2 = -\dfrac{1}{3}t^2 - \dfrac{\lambda t}{\sqrt{|t|}} \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice

◇ **11.3.8** Résoudre les équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $xy' + y - y'^2 = 0$ *b)* $y = xy' + y' - y'\ln|y'|$ *c)* $y = xy'^2 + y'^3$.

Chapitre 12

Notions sur les fonctions de deux variables réelles

12.1 Espace $\mathbb{R}^2$, suites dans $\mathbb{R}^2$

12.1.1 Espace $\mathbb{R}^2$

◆ **Définition 1** On appelle **norme** sur $\mathbb{R}^2$ toute application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$

2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

3) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$

Remarque : Si N est une norme sur $\mathbb{R}^2$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^2, N(x) \geqslant 0$.

En effet : $\begin{cases} N(0) = N(x + (-x)) \leqslant N(x) + N(-x) = 2N(x) \\ N(0) = N(0 \cdot 0) = 0 \cdot N(0) = 0 \end{cases}$. ■

Une norme sur $\mathbb{R}^2$ est souvent notée $\| \cdot \| : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{array}$.

◆ **Proposition 1** **(Inégalité triangulaire renversée)**

Si $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad \|x - y\| \geqslant \big| \|x\| - \|y\| \big|.$$

Preuve :

$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$, d'où $\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$.

En échangeant x et y :

$$\|x - y\| = \|y - x\| \geqslant \|y\| - \|x\| = -(\|x\| - \|y\|).$$

Finalement : $\|x - y\| \geqslant \text{Max}\big(\|x\| - \|y\|, -(\|x\| - \|y\|)\big) = \big| \|x\| - \|y\| \big|$.

◆ **Notation-Proposition 2** **(les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$)**

Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on note :

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2|, \quad ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad ||x||_\infty = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|).$$

Les applications $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$, appelées **normes usuelles** sur $\mathbb{R}^2$; $||\cdot||_2$ est appelée la **norme euclidienne usuelle** sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

En notant $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ des éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1) • $||x||_1 = 0 \iff |x_1| + |x_2| = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = 0$

• $||\lambda x||_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda|(|x_1| + |x_2|) = |\lambda|\, ||x||_1$

• $||x + y||_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leqslant |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = ||x||_1 + ||y||_1$

2) • $||x||_2 = 0 \iff x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = 0$

• $||\lambda x||_2 = \left((\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2(x_1^2 + x_2^2)\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\, ||x||_2$

• $||x + y||_2 \leqslant ||x||_2 + ||y||_2 \iff (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leqslant \left((x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} + (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2$

$\iff x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \left((x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)\right)^{\frac{1}{2}} \Longleftarrow (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$

$\iff 2x_1y_1x_2y_2 \leqslant x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \iff (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0$

(on peut aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, cf. Tome 1, 1.2.2 p. 9)

3) • $||x||_\infty = 0 \iff \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|) = 0 \iff |x_1| = |x_2| = 0 \iff x = 0$

• $||\lambda x||_\infty = \mathrm{Max}(|\lambda x_1|, |\lambda x_2|) = |\lambda|\,\mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|) = |\lambda|\, ||x||_\infty$

• $||x + y||_\infty = \mathrm{Max}(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leqslant \mathrm{Max}(|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|)$
$\leqslant \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|) + \mathrm{Max}(|y_1|, |y_2|) = ||x||_\infty + ||y||_\infty$.

Remarque : Les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont des cas particuliers de **normes de Hölder** $||\cdot||_p$, $p \in [1; +\infty[$ (cf. Tome 1, 5.4.3 2) p. 161) ; la notation $||\cdot||_\infty$ est justifiée par :
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $||x||_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} ||x||_\infty$ (cf. Tome 1, exercice 3.1.7*a)* p. 57, où le résultat est établi lorsque $p \in \mathbb{N}^*$; l'étude est analogue pour $p \in]1; +\infty[$).

◆ **Définition 2** Soient $||\cdot||$ une norme sur $\mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

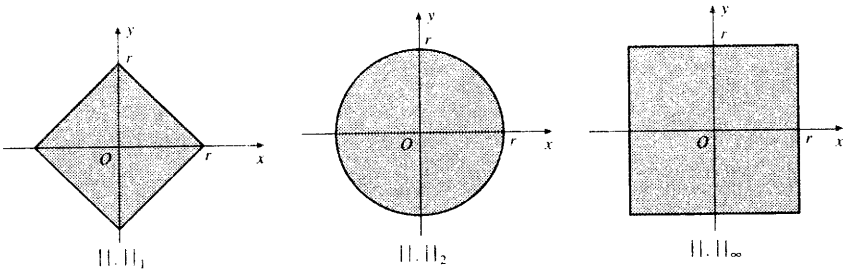
a) On appelle **boule ouverte de centre *a* et de rayon *r*** l'ensemble $B(a; r)$ défini par : $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; ||x - a|| < r\}$.

b) On appelle **boule fermée de centre *a* et de rayon *r*** l'ensemble $B'(a; r)$ défini par : $B'(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; ||x - a|| \leqslant r\}$.

c) On appelle **sphère de centre *a* et de rayon *r*** l'ensemble $S(a; r)$ défini par :

$$S(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; ||x - a|| = r\}.$$

Représentations graphiques (dans le plan euclidien) des boules fermées de centre $O(0,0)$ et de rayon r, pour les trois normes usuelles :



◆ **Définition 3** Soient N, N' deux normes sur $\mathbb{R}^2$; on dit que N est **équivalente à** N' si et seulement si :

$$\exists(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x).$$

On note $N \sim N'$ pour : N est équivalente à N'.

◆ **Proposition 3** La relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des normes sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

1) **Réflexivité** : évidente

2) **Symétrie** : si $N \sim N'$, il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha N \leqslant N' \leqslant \beta N$, d'où $\dfrac{1}{\beta} N' \leqslant N \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N'$, et donc $N' \sim N$.

3) **Transitivité** : si $N \sim N'$ et $N' \sim N''$, il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tel que $\begin{cases} \alpha N \leqslant N' \leqslant \beta N \\ \gamma N' \leqslant N'' \leqslant \delta N' \end{cases}$, d'où $\alpha\gamma N \leqslant \gamma N' \leqslant N'' \leqslant \delta N' \leqslant \delta\beta N$, et donc $N \sim N''$.

◆ **Proposition 4**

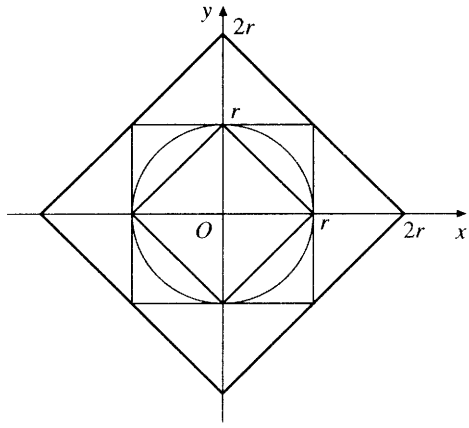
Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Preuve :

Pour tout x de $\mathbb{R}^2$, on a : $\begin{cases} \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_\infty \end{cases}$

Ces inégalités se traduisent graphiquement par des inclusions de boules (ouvertes, par exemple) pour les trois normes usuelles :

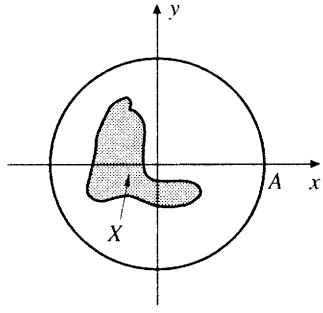
$$B_{||\cdot||_1}(0;r) \subset B_{||\cdot||_2}(0;r) \subset B_{||\cdot||_\infty}(0;r) \subset B_{||\cdot||_1}(0;2r).$$



Remarque : Nous montrerons dans le Tome 3 (ch. 1) que, dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

◆ **Définition 4** Une partie X de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** si et seulement si :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, ||x||_2 \leqslant A.$$



Remarque :

Puisque $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes, une partie X de $\mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement si :

$$\exists B \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \quad ||x||_1 \leqslant B,$$

ou encore : $$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \quad ||x||_\infty \leqslant C.$$

Ainsi, une partie X de $\mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement si on peut l'inclure dans une boule (de centre O) pour l'une quelconque des trois normes usuelles.

12.1.2 Parties ouvertes, parties fermées

◆ **Définition 1** Une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\quad B_{||\cdot||_\infty}(x;r) \subset \Omega.$$

On dit aussi que Ω est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Remarques :

1) Dans la Déf. précédente, r dépend de x et peut être noté r_x.

2) Puisque $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes, on peut remplacer $||\cdot||_\infty$ par $||\cdot||_2$ dans la Définition ci-dessus (ce qui modifie r).

EXEMPLES :

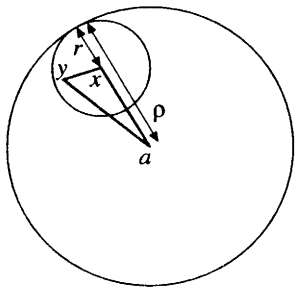
$]-1;1[\times]-2;3[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$]-1;1]^2$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

◆ **Proposition 1**

Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :



Utilisons l'une des normes usuelles, notée $||\cdot||$.

Soient $(a,\rho) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ et $x \in B(a;\rho)$.

Notons $r = \rho - ||x-a||$, qui est un réel > 0.

Pour tout y de $B(x;r)$:

$$||y-a|| \leqslant ||y-x|| + ||x-a|| < r + ||x-a|| = \rho$$

Ceci prouve : $B(x;r) \subset B(a;\rho)$ et finalement $B(a;\rho)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

◆ **Définition 2** Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si et seulement si $\complement_{\mathbb{R}^2}(F)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. On dit aussi que F est un **fermé** (de $\mathbb{R}^2$).

EXEMPLES :

$[0;+\infty[\times[1;+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

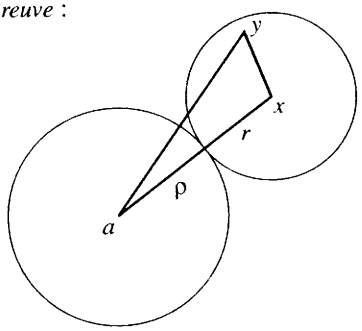
$\{(0,0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

$]0;1]^2$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

◆ **Proposition 2**

Toute boule fermée de $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :



Utilisons l'une des normes usuelles, notée $||\cdot||$.
Soient $(a,\rho) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \complement_{\mathbb{R}^2}(B'(a;\rho))$.
Notons $r = ||x-a|| - \rho$, qui est un réel > 0.
Pour tout y de $B(x;r)$:

$$||y-a|| \geqslant \big|\, ||y-x|| - ||x-a||\,\big|$$
$$= ||x-a|| - ||y-x|| > ||x-a|| - r = \rho.$$

Ceci prouve : $B(x;r) \subset \complement_{\mathbb{R}^2}(B'(a;\rho))$.

Ainsi, $\complement_{\mathbb{R}^2}(B'(a;\rho))$ est une partie ouverte, et on conclut que $B'(a;\rho)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

12.1.3 Suites dans $\mathbb{R}^2$

◆ **Définition 1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $l \in \mathbb{R}^2$; on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geqslant N \Longrightarrow ||u_n - l||_\infty \leqslant \varepsilon).$$

2) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

3) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

◆ **Proposition 1** (**«Unicité de la limite, si elle existe»**)

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ converge vers l_1 et converge vers l_2, alors $l_1 = l_2$.

Preuve :
Comme dans Tome 1, 3.1.1 Prop. 1 p. 44. ■

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on dit que l est la **limite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$, ou $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$.

◆ **Définition 2** Soient $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$; on dit que x est **adhérent à** A (ou : est un **point adhérent à** A) si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

◆ **Proposition 2**

Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est fermée si et seulement si tout point adhérent à F appartient à F.

Preuve :

1) Supposons F fermée, et soit x un point adhérent à F; il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} x$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \notin F$. Alors $x \in \complement_{\mathbb{R}^2}(F)$, donc, comme $\complement_{\mathbb{R}^2}(F)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $B(x;r) \subset \complement_{\mathbb{R}^2}(F)$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe en particulier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $||u_n - x|| < r$.

On a alors $u_n \in B(x;r)$, donc $u_n \notin F$, contradiction.

Ceci prouve : $x \in F$.

2) Réciproquement, supposons que tout point adhérent à F appartienne à F.

Raisonnons par l'absurde : supposons F non fermée, c'est-à-dire $\complement_{\mathbb{R}^2}(F)$ non ouvert.

Il existe donc $x \in \complement_{\mathbb{R}^2}(F)$ tel que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad B(x;r) \not\subset \complement_{\mathbb{R}^2}(F).$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B\left(x;\dfrac{1}{n}\right) \cap F \neq \varnothing$.

Il existe donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B\left(x;\dfrac{1}{n}\right)$.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in F)$ et que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} x$, x est adhérent à F.

D'après l'hypothèse, il s'ensuit $x \in F$, contradiction.

Ceci prouve que F est fermée. ■

◆ **Proposition 3** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$ et $l \in \mathbb{R}^2$.

Notons, pour chaque n de $\mathbb{N}$, $(x_n, y_n) = u_n$, et $(\alpha,\beta) = l$.

Alors : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \iff \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta \end{cases}$.

Preuve :

Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$: $||u_n - l|| = |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$, on a :

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} l \iff \mathrm{Max}(|x_n - \alpha|, |y_n - \beta|) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

$$\iff \left.\begin{cases} |x_n - \alpha| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ |y_n - \beta| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases}\right| \iff \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha \\ y_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta \end{cases}.$$

EXEMPLE :

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right) \xrightarrow[n\infty]{} (0,1), \quad \text{car} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{n^2-1}{n^2+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1.$$

◆ **Théorème** **(Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

Toute suite bornée de $\mathbb{R}^2$ admet une suite extraite convergente.

Preuve : (hors programme)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^2$; notons, pour tout n de $\mathbb{N}$: $(x_n, y_n) = u_n$.

Les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} |x_n| \leqslant \mathrm{Max}(|x_n|, |y_n|) = ||u_n||_\infty \\ |y_n| \leqslant \mathrm{Max}(|x_n|, |y_n|) = ||u_n||_\infty. \end{cases}$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (3.3 Th. p.66), il existe une extractrice $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, vers un réel noté α.

De même, puisque $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une extractrice $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\left(y_{\sigma(\tau(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, vers un réel noté β.

En notant $\rho = \sigma \circ \tau$ (qui est une extractrice), on a alors $x_{\rho(n)} \xrightarrow[n\infty]{} \alpha$, car $(x_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α, et $y_{\rho(n)} \xrightarrow[n\infty]{} \beta$, donc :

$$u_{\rho(n)} = \left(x_{\rho(n)}, y_{\rho(n)}\right) \xrightarrow[n\infty]{} (\alpha, \beta).$$

12.2 Limites, continuité

12.2.1 Limites

Nous avons étudié limites et continuité pour les fonctions d'une variable réelle, cf. Tome 1, 4.2 et 4.3 p. 97; il s'agit d'étudier les questions analogues pour les fonctions de deux variables réelles.

◆ **Définition** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, a un point adhérent à X, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet** l **pour limite en** a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (||x - a||_\infty \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon).$$

2) On dit que f **admet** $+\infty$ **pour limite en** a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (||x - a||_\infty \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A).$$

3) On dit que f **admet** $-\infty$ **pour limite en** a si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a.

Lorsque f admet une limite l en a ($l \in \mathbb{R}$), on dit que f **admet une limite finie en** a.

◆ **Proposition** (**«Unicité de la limite, si elle existe»**)

Si f admet l et l' pour limites en a, alors $l = l'$.

Preuve :

Comme dans le Tome 1, 4.2.1 Prop. 1 p. 98. ■

Si f admet l pour limite en a, on dit que l est la limite de f en a, et on note : $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, ou $l = \lim\limits_{a} f$, ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, ou $f \xrightarrow[a]{} l$.

Les propriétés vues dans le Tome 1, 4.2.2 et 4.2.3 pp. 100-106 peuvent être transcrites pour des applications de X ($\subset \mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}$. Par exemple (cf. 4.2.2 Prop. 3, Tome 1, p. 101), on dispose du «théorème d'encadrement» :

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ h(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ \forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \end{array} \right|, \quad \text{alors } g \text{ admet } l \text{ pour limite en } a.$$

Ce résultat est souvent utilisé dans le cas $f = 0, l = 0$.

12.2.2 Continuité

◆ **Définition 1** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. On dit que f est **continue en** a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (||x - a||_\infty \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon).$$

La Proposition suivante est immédiate.

◆ **Proposition 1** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que f admette $f(a)$ pour limite en a.

◆ **Proposition 2** **(Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)**

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$; f est continue en a si et seulement si : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers a, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(a)$.

Preuve :

Comme dans le Tome 1, 4.3.1 *1)* Prop. 3 p. 109. ■

◆ **Définition 2** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue sur** X si et seulement si f est continue en tout point de X.

On note $C(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{R}$.

◆ **Proposition 3**

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Si f est continue sur X, alors $|f| : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |f(x)| \end{array}$ est continue sur X

2) Si f et g sont continues sur X, alors $f + g$ est continue sur X

3) Si f est continue sur X, alors λf est continue sur X

4) Si f et g sont continues sur X, alors fg est continue sur X

5) Si f et g sont continues sur X et si $(\forall x \in X,\ g(x) \neq 0)$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur X.

Preuve :

Comme dans le Tome 1, 4.3.2 *2)* Prop. 1 p. 112. ■

Comme $C(X,\mathbb{R}) \neq \varnothing$ et en utilisant les propriétés *2), 3), 4)* ci-dessus, on voit que $C(X,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^X$ pour les lois usuelles, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 \in C(X,\mathbb{R}) \quad (\text{où } 1 : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}) \\ C(X,\mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev pour l'addition et la loi externe} \\ C(X,\mathbb{R}) \text{ est stable pour la multiplication.} \end{cases}$$ ■

Les notions de limite et de continuité étudiées jusqu'ici s'étendent aisément au cas d'une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (où $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$). Par exemple, par définition, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continue en a ($a \in X$) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X, \quad (||x - a||_\infty \leqslant \eta \Longrightarrow ||f(x) - f(a)||_\infty \leqslant \varepsilon).$$

Pour l'étude d'une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, on se ramènera souvent aux applications composantes de f, c'est-à-dire aux applications $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in X,\ f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$.

Par exemple, il est clair que f est continue en a ($a \in X$) si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a.

◆ **Proposition 4** Soient $X, Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(X) \subset Y$; on note abusivement $g \circ f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g\big(f(x)\big) \end{array}$. Si f est continue sur X et si g est continue sur Y, alors $g \circ f$ est continue sur X.

Preuve :

Comme dans le Tome 1, 4.3.2 *2)* Prop. 2 p. 113. ■

Nous admettons la Proposition suivante, dont la démonstration ne peut être donnée ici, à cause de la limitation à un intervalle, dans le programme officiel, pour l'étude de la continuité d'une fonction d'une variable réelle. Le lecteur trouvera un résultat plus général, et démontré, dans le Tome 3.

◆ **Proposition 5** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si X est fermée bornée et non vide, et si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes. ■

◆ **Proposition 6** Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $\{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \geqslant \alpha\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

2) $\{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) = \alpha\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

3) $\{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) > \alpha\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

1) Nous allons montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \geqslant \alpha\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}^2$ (cf. 12.1.3 Prop. 2 p. 175).

Soit x un point adhérent à F ; il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$.

Puisque f est continue (en x), il en résulte : $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$.

Comme ($\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \geqslant \alpha$), le théorème de passage à la limite dans les inégalités pour les suites réelles permet de déduire $f(x) \geqslant \alpha$, c'est-à-dire : $x \in F$. Ainsi, F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2) Même méthode qu'en *1)*.

3) D'après *1)* (appliqué à $-f$ et $-\alpha$), $\{x \in \mathbb{R}^2;\ (-f)(x) \geqslant -\alpha\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, donc $\{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) > \alpha\} = \complement_{\mathbb{R}^2}(\{x \in \mathbb{R}^2;\ -f(x) \geqslant -\alpha\})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLES :

1) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 + x_2 \geqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

2) $\left\{\left(t, \dfrac{1}{t}\right);\ t \in \mathbb{R}^*\right\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1x_2 = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

3) $\left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 > \dfrac{1}{x_1^2+1}\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercices

◇ **12.2.1** *Exemples d'équations fonctionnelles*

Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y+z) = f(x+y,z) \end{cases}$

c) $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad f(x,y) + f(z,t) = f(x,z) + f(y,t) \end{cases}$

d) $\begin{cases} f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \quad f(x^2,y)f(y^2,z)f(z^2,x) = (xyz)^3. \end{cases}$

◇ **12.2.2** Etudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x^2+y^2 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

◇ **12.2.3*** Etudier la continuité de $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{q_1+q_2}$ si $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$, $x = \dfrac{p_1}{q_1}$, $y = \dfrac{p_2}{q_2}$, $(p_1,p_2) \in \mathbb{N}^2$, $(q_1,q_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\text{pgcd}(p_1,q_1) = \text{pgcd}(p_2,q_2) = 1$, et $f(x,y) = 0$ sinon.

◇ **12.2.4** Soient $f,g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications bornées et $M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x,y) = \operatorname*{Sup}_{t \in [0;1]} (xf(t) + yg(t)).$$

Montrer que M est continue sur $\mathbb{R}^2$.

12.2.2 Continuité partielle

◆ **Définition-Notation** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Pour tout β de $\mathbb{R}$, on note $f(\bullet,\beta)$ l'application $x \longmapsto f(x,\beta)$, qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x,\beta) \in X$.

2) Pour tout α de $\mathbb{R}$, on note $f(\alpha,\bullet)$ l'application $y \longmapsto f(\alpha,y)$, qui est définie sur l'ensemble des réels y tels que $(\alpha,y) \in X$.

Les applications $f(\bullet,\beta)$ et $f(\alpha,\bullet)$ sont appelées des **applications** (ou **fonctions**) **partielles**.

EXEMPLE :

Si $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x+3y \end{array}$, alors $f(4,\bullet) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto 8+3y \end{array}$.

Autrement dit : $\left| \begin{array}{l} f(\bullet,\beta) \text{ est obtenue en fixant la } 2^{\text{ème}} \text{ variable égale à } \beta \\ f(\alpha,\bullet) \text{ est obtenue en fixant la } 1^{\text{ère}} \text{ variable égale à } \alpha. \end{array} \right.$

Remarque :

Pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la donnée des deux applications partielles $f(\bullet,0)$ et $f(0,\bullet)$ revient à la donnée de la restriction de f à la «croix» $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. À partir de $f(\bullet,0)$ et $f(0,\bullet)$, on ne peut pas, en général, «reconstruire» f. ■

◆ **Proposition** Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $a = (\alpha,\beta) \in I \times J$. Si f est continue en a, alors les fonctions partielles de f en a (c'est-à-dire $f(\bullet,\beta) : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x,\beta) \end{array}$ et $f(\alpha,\bullet) : \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(\alpha,y) \end{array}$) sont continues en α et β respectivement.

Preuve :

L'application partielle $f(\bullet,\beta)$ est composée d'applications $\begin{array}{l} I \longrightarrow I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x,\beta) \longmapsto f(x,\beta) \end{array}$ continues.

De même pour $f(\alpha,\bullet)$. ■

Remarque :

La réciproque de la Proposition précédente est fausse, comme on va le voir sur les deux exemples qui suivent, et où une étude de limite est plus naturelle qu'une étude de continuité.

EXEMPLES

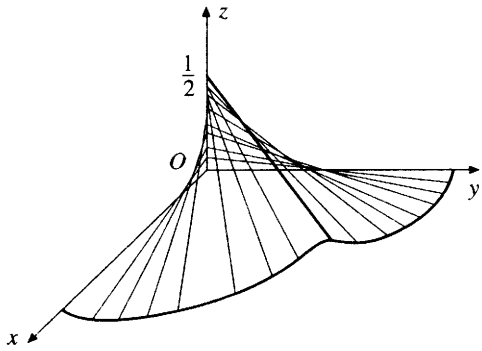
1) Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Les applications partielles en (0,0)

$$f(\cdot,0) : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(0,\cdot) : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 0 \qquad\qquad\qquad\qquad y \longmapsto 0$$

admettent 0 pour limite en 0.

Cependant, f n'admet pas de limite en (0,0); en effet, les applications $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,0) = 0$ et $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ n'ont pas la même limite en 0. Si f admettait une limite l en (0,0), alors, par composition, les deux fonctions précédentes admettraient aussi l pour limite en 0.



La surface (S) représentative de f, définie par $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x,y)\}$ contient les deux droites d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = x \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, privées de (0,0); on voit sur le schéma que, si on s'approche de (0,0) en restant sur la droite $y = 0$, alors le point (x,y,z) tend vers (0,0,0), tandis que, si on s'approche de (0,0) en restant sur la droite $y = x$, alors le point (x,y,z) tend vers $(0,0,\dfrac{1}{2})$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 - B_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, où $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\}$.
$(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x+y}$

Les fonctions partielles $f(\cdot,0)$ et $f(0,\cdot)$ admettent 0 pour limite en 0, mais, pour tout x de $\mathbb{R} - \{0\}$: $f(x,-x+x^2) = \dfrac{x(-x+x^2)}{x^2} = -1 + x \xrightarrow[x \to 0]{} -1$.

Ceci montre que f n'a pas de limite en (0,0).

On remarquera que, dans les deux exemples précédents, on a montré que f n'admet pas de limite en (0,0) en trouvant deux fonctions $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (on dit aussi : deux *chemins*) telles que $f \circ \varphi$ et $f \circ \psi$ admettent des limites différentes en 0.

Exercices

◇ **12.2.5** Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) pour les fonctions f suivantes, pour lesquelles on donne $f(x,y)$:

a) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ *b)* $\dfrac{x^5y^3}{x^6+y^4}$ *c)* $\dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$

d) $\dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$ *e)* $\dfrac{((x-1)^2+y^2)\ln((x-1)^2+y^2)}{|x|+|y|}$

f) $\dfrac{\sin(x^4)+\sin(y^4)}{\sqrt{x^4+y^4}}$ *g)* $\dfrac{\sin^4 x+(1-\cos y)^2}{4x^4+y^4}$ *h)* $\dfrac{\sin x-y}{x-\sin y}$

i) $\dfrac{\sin^3 x}{\operatorname{ch} x-\cos y}$ *j)* $\dfrac{\operatorname{ch}(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2}$ *k)* $\dfrac{xy}{\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} y}$

l) $\dfrac{\operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y}{|x|+|y|}$.

◇ **12.2.6** La fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{\cos^3 x}{\cos^2 x+y^2\sin^2 x}$ a-t-elle une limite en $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$? Si oui, quelle est cette limite ?

◇ **12.2.7** Déterminer l'ensemble de continuité des applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leqslant x^2 \end{cases}$.

12.3 Dérivées partielles premières

12.3.1 Définitions

1) Dérivées partielles premières en un point

◆ **Définition 1** **(dérivée suivant un vecteur)**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. On dit que f **admet une dérivée première en** a **suivant le vecteur** v si et seulement si l'application $\varphi_v : t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. Si c'est le cas, on appelle **dérivée première de** f **en** a **suivant le vecteur** v, et on note $D_v f(a)$, le réel $\varphi_v'(0)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(a+tv) - f(a)\big)$.

◆ **Définition 2** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in U$. On dit que f est **dérivable en** a **par rapport à la 1re** (resp. 2e) **place** si et seulement si f admet une dérivée première en a suivant le vecteur $(1,0)$ (resp. $(0,1)$). Si c'est le cas, on appelle **dérivée partielle première de** f **en** a **par rapport à la 1re** (resp. **2e**) **place** la dérivée première de f en a suivant le vecteur $(1,0)$ (resp. $(0,1)$). Ces dérivées partielles premières sont notées respectivement $D_1 f(a)$, $D_2 f(a)$.

Ainsi, sous réserve d'existence :

$$D_1 f(a) = \big(f(\cdot,\beta)\big)'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(\alpha+h,\beta) - f(\alpha,\beta)\big),$$

en notant $(\alpha,\beta) = a$.

NOTATIONS : Souvent, l'application f est donnée par l'image d'un élément générique de U, par exemple : $f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}$.

Si f admet en a une dérivée partielle première par rapport à la 1re place, on note alors celle-ci sous l'une des formes suivantes : $D_1 f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$, $f_x'(a)$.

Notations analogues pour l'autre place : $D_2 f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, $f_y'(a)$.

Remarque : La dérivée partielle première en a (si elle existe) de f par rapport à la 1re place est la dérivée d'une fonction d'une variable réelle : $D_1 f(a) = \big(f(\cdot,\beta)\big)'(\alpha)$, en notant $(\alpha,\beta) = a$.

Les propriétés acquises lors de l'étude de la dérivation des fonctions d'une variable réelle (cf. 5.1.2, Tome 1, p. 128) sont donc ici applicables. Par exemple, si f,g admettent des dérivées partielles premières en a par rapport à la 1re place, alors $f+g$ aussi et :

$$D_1(f+g)(a) = D_1 f(a) + D_1 g(a).$$

2) Fonctions dérivées partielles premières

◆ **Définition** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle **fonctions dérivées partielles premières** les deux fonctions : $D_1 f : a \longmapsto D_1 f(a)$, $D_2 f : a \longmapsto D_2 f(a)$, qui sont définies sur des parties de U.

EXEMPLE :

L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + xy \end{array}$ admet, en tout point de $\mathbb{R}^2$, des dérivées partielles premières par rapport à chacune des deux places, et :

$$D_1 f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x + y \end{array}$$

$$D_2 f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x \end{array}.$$

En pratique, la valeur de $D_1 f(x,y)$ est obtenue en fixant «mentalement» y, et en dérivant par rapport à x.

12.3.2 Applications de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

1) Généralités

◆ **Définition 1** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **de classe C^1 sur** U si et seulement si, pour tout v de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, l'application $x \longmapsto D_v f(x)$ est définie et continue sur U.

◆ **Théorème** (**«Théorème fondamental»**)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si les dérivées partielles premières de f existent et sont continues sur U, alors :

1) Pour tout $a = (\alpha,\beta)$ de U, en notant $U_0 = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 ; (\alpha+h,\beta+k) \in U\}$, il existe une application $\varepsilon : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (h,k) \in U_0,\ f(\alpha+h,\beta+k) = f(a) + \left(h\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right) + ||(h,k)||\varepsilon(h,k) \\ \varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0. \end{cases}$$

On dit que f **admet un développement limité à l'ordre 1 en** a.

2) f est de classe C^1 sur U, et, pour tout a de U et tout $v = (v_1,v_2)$ de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a :

$$D_v f(a) = D_1 f(a) v_1 + D_2 f(a) v_2.$$

Ici $||\cdot||$ désigne l'une quelconque des trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve : (pouvant être omise en 1ère lecture)

1) Soient $a = (\alpha,\beta) \in U$, $U_0 = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2;\ (a+h, b+k) \in U\}$. Notons $\varepsilon : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

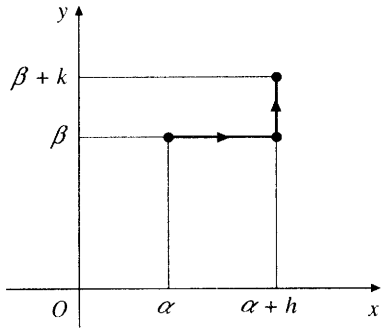
$$\varepsilon(h,k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|(h,k)\|}\left(f(\alpha+h,\beta+k) - \left(f(a) + h\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\right) & \text{si } (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (h,k) = (0,0). \end{cases}$$

Notre but et de montrer que ε est continue en $(0,0)$.

Soit $(h,k) \in U_0 - \{(0,0)\}$.

Nous allons «passer» du point $a = (\alpha,\beta)$ au point $(\alpha+h,\beta+k)$ par l'intermédiaire du point $(\alpha+h,\beta)$:

$$\begin{aligned} f(\alpha+h,\beta+k) - f(\alpha,\beta) &= \big(f(\alpha+h,\beta+k) - f(\alpha+h,\beta)\big) \\ &\quad + \big(f(\alpha+h,\beta) - f(\alpha,\beta)\big). \end{aligned}$$



On remarquera que le point $(\alpha+h,\beta)$ est bien dans U, pour $\|(h,k)\|$ assez petit, puisque, U étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a;r) \subset U$.

En appliquant le théorème des accroissements finis (Tome 1, 5.2.2 Th. p. 143) à $f(\alpha+h,\bullet)$ et $f(\bullet,\beta)$, on obtient l'existence de θ_1,θ_2 dans $[0;1]$ tels que :

$$\begin{cases} f(\alpha+h,\beta+k) - f(\alpha,\beta) = k\big(f(\alpha+h,\bullet)\big)'(\beta+\theta_2 k) = k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha+h,\beta+\theta_2 k) \\ f(\alpha+h,\beta) - f(\alpha,\beta) = h\big(f(\bullet,\beta)\big)'(\alpha+\theta_1 h) = h\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1 h,\beta). \end{cases}$$

D'où :

$$\varepsilon(h,k) = \frac{h}{\|(h,k)\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1 h,\beta) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\right) + \frac{k}{\|(h,k)\|}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha+h,\beta+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)\right).$$

D'une part : $\left|\dfrac{h}{\|(h,k)\|}\right| \leqslant 1$ et $\left|\dfrac{k}{\|(h,k)\|}\right| \leqslant 1$.

D'autre part, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U (donc en a) et que θ_1 et θ_2 sont dans $[0;1]$ (θ_1,θ_2 dépendent de h,k), on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1 h,\beta) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha+h,\beta+\theta_2 k) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit : $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$.

2) Soient $a \in U$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. D'après *1)*, il existe une application ε_1, définie au voisinage de 0, telle que, pour $|t|$ assez petit :

$$\begin{cases} f(a+tv) = f(a) + tv_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + tv_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + |t|\varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_1(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $t \neq 0$ et $|t|$ assez petit :

$$\frac{1}{t}\big(f(a+tv) - f(a)\big) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{|t|}{t}\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t \to 0]{} v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a),$$

ce qui montre que f admet une dérivée suivant le vecteur v et que :

$$D_v f(a) = D_1 f(a) v_1 + D_2 f(a) v_2.$$

Pour $v = (v_1, v_2)$ fixé dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, comme $D_1 f$ et $D_2 f$ sont continues sur U, par combinaison linéaire, $D_v f$ est continue sur U, et donc f est de classe C^1 sur U. ■

On peut utiliser une notation o analogue à celle employée pour les fonctions d'une variable réelle :

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(a) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|(h,k)\|).$$

◆ **Corollaire**

Si f est de classe C^1 sur U, alors f est continue sur U.

Preuve :

D'après le Th. précédent :

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(a) + \Big(h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k) \to (0,0)]{} f(a). \quad ■$$

Remarque :

La réciproque du Corollaire précédent est évidemment fausse; par exemple, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |x| \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puisque f n'admet pas de dérivée partielle première en $(0,0)$ par rapport à la 1ère place (on dit aussi : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas).

◆ **Définition 2** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. On appelle **gradient** de f, et on note $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, l'application :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{array}.$$

◆ **Proposition** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. On a alors :

$$D_v f(a) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)\right).v$$

(où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$).

Preuve :

En notant $a = (\alpha,\beta)$, $v = (v_1,v_2)$, on a, d'après le Théorème fondamental :

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2 = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)\right).v.$$

◆ **Définition 3** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. Pour tout a de U, l'application linéaire $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{array}$ est appelée **application linéaire tangente à f en a**, ou **différentielle de f en a**, et notée $\mathrm{d}_a f$ (ou $\mathrm{d}f(a)$).

Ainsi, si f est de classe C^1 sur un voisinage de a, on a :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathrm{d}_a f)(h,k) = h\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

• Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et, en notant $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & ux + vy \end{array}$ où $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & u \end{array} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & v \end{array}$$

et donc : $\forall a \in \mathbb{R}^2, \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathrm{d}_a f)(h,k) = hu + kv = f(h,k)$.

Ainsi : $\forall a \in \mathbb{R}^2, \mathrm{d}_a f = f$.

Puisque, lorsque f est linéaire, $\mathrm{d}_a f$ ne dépend pas de a, on peut noter abusivement $\mathrm{d}f$ au lieu de $\mathrm{d}_a f$.

• En particulier, considérons les deux projections canoniques :

$$\mathrm{pr}_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \mathrm{pr}_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

qui sont des applications linéaires. Un usage (regrettable) consistant à confondre une fonction et l'image par cette fonction d'un élément «générique», nous pouvons être amenés à noter x (resp. y) au lieu de pr_1 (resp. pr_2). Alors : $\mathrm{d}x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & h \end{array}$; on pourrait d'ailleurs, poursuivant logiquement les abus d'écriture, noter $\mathrm{d}x = h$.

• Soit maintenant $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application (non nécessairement linéaire) de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On a défini, pour tout a de U, la différentielle de f en a : $\begin{array}{rcl} \mathrm{d}_a f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (h,k) & \longmapsto h\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{array}$.

Avec les notations dégagées ci-dessus : $\mathrm{d}_a f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{pr}_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{pr}_2$,

ou encore : $\mathrm{d}_a f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}y$.

On omet souvent d'indiquer le point a, et on arrive ainsi à la formule pratique suivante :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y}.$$

2) Propriétés algébriques

◆ **Proposition** Soient $f,g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. Alors $f+g$ et fg sont de classe C^1 sur U ; en particulier, pour tout λ de $\mathbb{R}$, λf est de classe C^1 sur U. Si de plus ($\forall a \in U$, $g(a) \neq 0$), alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^1 sur U.

Preuve :

Les preuves étant analogues, nous allons traiter, par exemple, le cas de la somme.

Puisque f et g sont de classe C^1 sur U, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sont définies sur U ; donc $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x}$ est définie sur U, et $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}$ (cf. 12.3.1 1) p. 184). Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sont continues sur U, $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x}$ l'est aussi.

De même pour l'autre place. Donc $f+g$ est de classe C^1 sur U. ■

Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\lambda f) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \end{cases}.$$

3) Composition

◆ **Proposition** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $u,v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, telles que :

$$\forall t \in I, \quad (u(t),v(t)) \in U.$$

On note $g : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(u(t),v(t)) \end{array}$.

Si $\left\{\begin{array}{l} u,v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } I \\ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \end{array}\right.$, alors g est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t),v(t)\big)u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t),v(t)\big)v'(t).$$

Preuve :

Soit $t \in I$; notons $I_0 = \{h \in \mathbb{R} ; t + h \in I\}$.

Puisque u, v sont de classe C^1 sur I, u, v admettent des développements limités à l'ordre 1 au point t (cf. 8.3.2 Cor. p. 56) :

$$\forall h \in I_0, \quad \begin{cases} u(t+h) = u(t) + hu'(t) + o(h) \\ v(t+h) = v(t) + hv'(t) + o(h) \end{cases}.$$

On a alors, pour tout h de I_0, d'après 12.3.2 1) Théorème p. 185, en notant $a(t) = \big(u(t), v(t)\big)$:

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f\big(u(t) + h\big(u'(t) + o(1)\big), v(t) + h\big(v'(t) + o(1)\big)\big) \\ &= f\big(a(t)\big) + h\big(u'(t) + o(1)\big)\frac{\partial f}{\partial x}\big(a(t)\big) + h\big(v'(t) + o(1)\big)\frac{\partial f}{\partial y}\big(a(t)\big) \\ &\quad + \Big\|\big(h\big(u'(t) + o(1)\big), h\big(v'(t) + o(1)\big)\big)\Big\| o(1). \\ &= g(t) + hu'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(a(t)\big) + hv'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(a(t)\big) + o(h). \end{aligned}$$

Ceci montre que g admet un développement limité à l'ordre 1 au point t, donc est dérivable en t (cf. 8.3.1 Prop. 3, p. 53) et :

$$g'(t) = u'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(a(t)\big) + v'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(a(t)\big).$$

Enfin, sur cette dernière expression de g', on voit que g' est continue (somme, produit, composées d'applications continues). ■

Nous verrons dans le Tome 4 le cas «général» de la composition de fonctions de plusieurs variables, où nous utiliserons les notions de différentielle et de matrice jacobienne.

EXEMPLE :

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors l'application $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto f\left(\mathrm{e}^t + t, t^2 - 3t\right) \end{array}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mathrm{e}^t + t, t^2 - 3t\right)(\mathrm{e}^t + 1) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\mathrm{e}^t + t, t^2 - 3t\right)(2t - 3).$$

Nous verrons dans le Tome 4 :

- l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de plusieurs variables, et ses applications,
- des exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre,
- l'étude des C^1-difféomorphismes et le problème du changement de variables.

Exercices

◇ **12.3.1** Pour les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, étudier la continuité de f, et l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *d)* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4}-e^{y^4}}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *g)* $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

h) $f(x,y) = x^2|y|$ *i)* $f(x,y) = |x-y|$ *j)* $f(x,y) = |x^2-y^2|$.

◇ **12.3.2** Etudier et simplifier la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \operatorname{Arccos}\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$.

◇ **12.3.3** Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \int_0^y (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières de f.

◇ **12.3.4** Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, $f : I^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in I^2,\ f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \varphi$.

Montrer que f est de classe C^1 sur I^2 et calculer les dérivées partielles premières de f.

◇ **12.3.5*** Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

12.4 Dérivées partielles successives

12.4.1 Généralités

◆ **Définition** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

1) Soit $(i,j) \in \{1,2\}^2$.

On dit que f **admet une dérivée partielle seconde en** a **par rapport aux places numéros** i **et** j **successivement** si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \text{ existe sur un voisinage de } a \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a) \text{ existe.} \end{cases}$$

Dans ce cas, le réel $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$ est noté $(D_{ij}f)(a)$, ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, ou $f''_{x_i x_j}(a)$, et appelé **dérivée partielle seconde de** f **en** a **par rapport aux places numéros** i, j.

Plus généralement, soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1,\ldots,i_k) \in \{1,2\}^k$.

2) On dit que f admet une **dérivée partielle** $k^{\text{ème}}$ **en** a **par rapport aux places numéros** $i_1,\ldots,i_k$ **successivement** si et seulement si :

$$\begin{cases} \bullet\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}}\left(\ldots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\ldots\right)\right) \text{ existent} \\ \text{sur un voisinage de } a \\ \bullet\ \dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\ldots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\ldots\right)\right)(a) \text{ existe.} \end{cases}$$

Dans ce cas, le réel $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\ldots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\ldots\right)(a)$ est noté $D_{i_1,\ldots,i_k}f(a)$, ou $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}(a)$, ou $f^{(k)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}}(a)$, et appelé **dérivée partielle** $k^{\text{ème}}$ **de** f **en** a **par rapport aux places numéros** $i_1,\ldots,i_k$.

Il s'agit donc d'une définition par récurrence, analogue à celle des dérivées successives d'une fonction d'une variable réelle (5.1.4, Tome 1, p. 135).

3) L'application $a \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}(a)$ (qui est définie sur une partie de U) est appelée **fonction dérivée partielle** $k^{\text{ème}}$ **de** f **par rapport aux places numéros** $i_1,\ldots,i_k$, et notée $D_{i_1,\ldots,i_k}f$, ou $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}}$, ou $f^{(k)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}}$.

Remarque : L'ordre des dérivations successives n'est pas toujours celui adopté ici. Le lecteur pourra rencontrer dans d'autres ouvrages $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ au lieu de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $f''_{x_j x_i}$ au lieu de $f''_{x_i x_j}$.
Nous verrons plus loin que, grâce au théorème de Schwarz (12.4.3 p. 194), la diversité des conventions d'écriture n'a, en pratique, aucune conséquence fâcheuse.

12.4.2 Applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

◆ **Définition** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on dit que f est **de classe C^k sur** U si et seulement si f admet des dérivées partielles successives sur U jusqu'à l'ordre k inclus par rapport à toutes les places et si ces dérivées partielles successives sont continues sur U.

2) On dit que f est **de classe C^∞ sur** U si et seulement si f admet des dérivées partielles successives sur U à tout ordre par rapport à toutes les places et si ces dérivées partielles successives sont continues sur U.

Il est clair que f est de classe C^∞ sur U si et seulement si f est de classe C^k sur U pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

◆ **Proposition 1** Soient $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k sur U. Alors $f + g$ et fg sont de classe C^k sur U ; en particulier, pour tout λ de $\mathbb{R}$, λf est de classe C^k sur U. Si de plus ($\forall a \in U$, $g(a) \neq 0$), alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^k sur U.

Preuve :

Par récurrence sur k (pour $k \in \mathbb{N}^*$) en utilisant la Proposition de 12.3.2 2) p. 189. Traitons, par exemple, le cas du produit.

La propriété est vraie pour $k = 1$ (cf. 12.3.2 2), Proposition, p. 189). Supposons-la vraie pour un k de $\mathbb{N}^*$, et soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k+1} sur U. Alors fg est de classe C^1 sur U et $\dfrac{\partial}{\partial x}(fg) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, g + f\, \dfrac{\partial g}{\partial x}$ (et de même pour l'autre place). Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, g, f, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sont de classe C^k sur U, l'hypothèse de récurrence et l'étude du cas de l'addition montrent que $\dfrac{\partial (fg)}{\partial x}$ est de classe C^k sur U ; finalement, fg est de classe C^{k+1} sur U.
Le cas $k = +\infty$ se déduit aisément.

◆ **Proposition 2** Soient $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(I) \subset U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application ; on note (abusivement) $f \circ \varphi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(\varphi(t)) \end{array}$. Si φ est de classe C^k sur I et si f est de classe C^k sur U, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^k sur I.

Preuve :

Récurrence sur k (pour $k \in \mathbb{N}^*$).

Le cas $k = 1$ a été étudié en 12.3.2 3) p. 189. Supposons la propriété vraie pour un k de $\mathbb{N}^*$, et supposons φ et f de classe C^{k+1}.

Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^1 et, en notant $(u(t), v(t)) = \varphi(t)$, on a (cf. 12.3.2 3) p. 189) :

$$(f \circ \varphi)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi\right) u' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi\right) v'.$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, φ, u', v' sont de classe C^k, l'hypothèse de récurrence et la proposition précédente montrent que $(f \circ \varphi)'$ est de classe C^k, c'est-à-dire que $f \circ \varphi$ est de classe C^{k+1}.

Le cas $k = +\infty$ se déduit du résultat relatif à $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout k.

12.4.3 Interversion des dérivations

◆ **Théorème** (Théorème de Schwarz)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ f''_{xy} \text{ et } f''_{yx} \text{ existent sur } U \\ f''_{xy} \text{ et } f''_{yx} \text{ sont continues en } a \end{array}\right|$, alors $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$.

Preuve : (hors programme)

Notons $(\alpha, \beta) = a$.

- Puisque $f''_{yx}(a) = (f'_y)'_x(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \left(f'_y(\alpha + h, \beta) - f'_y(\alpha, \beta)\right)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \lim_{k \to 0} \left(\frac{1}{k}\big(f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha + h, \beta)\big) - \frac{1}{k}\big(f(\alpha, \beta + k) - f(\alpha, \beta)\big)\right),$$

nous allons nous intéresser à l'application

$$\delta : (h,k) \longmapsto \frac{1}{hk}\big(f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta + k) + f(\alpha, \beta)\big),$$

qui est définie sur $V = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 ; hk \neq 0 \text{ et } (\alpha + h, \beta + k) \in U\}$.

- L'application $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) = f(\alpha + th, \beta + k) - f(\alpha + th, \beta)$$

est de classe C^1 sur $[0; 1]$; d'après le théorème des accroissements finis (5.2.2, Tome 1, p. 143), il existe donc $\theta_1 \in [0; 1]$ tel que :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1) = h\big(f'_x(\alpha + \theta_1 h, \beta + k) - f'_x(\alpha + \theta_1 h, \beta)\big).$$

Puis, l'application $\psi : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall u \in [0; 1]$, $\psi(u) = f'_x(\alpha + \theta_1 h, \beta + uk)$ est continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ (puisque f'_x est continue sur U et que $(f'_x)'_y$ existe sur U) ; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_2 \in [0; 1]$ tel que :

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta_2) = k(f'_x)'_y(\alpha + \theta_1 h, \beta + \theta_2 k).$$

Ainsi : $hk\delta(h,k) = \varphi(1) - \varphi(0) = h(\psi(1) - \psi(0)) = hkf''_{xy}(\alpha + \theta_1 h, \beta + \theta_2 k)$.

On obtient un résultat analogue en échangeant les rôles de x et y.

- Puisque f''_{xy} et f''_{yx} sont continues en a, on déduit : $\delta(h,k) \xrightarrow[\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}]{} f''_{xy}(a)$ et $\delta(h,k) \xrightarrow[\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}]{} f''_{yx}(a)$.

Comme $(0,0)$ est adhérent à V, on déduit, par unicité de la limite : $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$.

◆ **Corollaire 1** Si f est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, alors : $f''_{xy} = f''_{yx}$.

◆ **Corollaire 2** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k sur U. Pour tout l de $\{2,\ldots,k\}$, tout $(i_1,\ldots,i_l)$ de $\{1,2\}^l$, et toute permutation σ de $\{1,\ldots,l\}$, on a :

$$f^{(l)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_l}} = f^{(l)}_{x_{i_{\sigma(1)}}\ldots x_{i_{\sigma(l)}}}.$$

Preuve :

Le résultat s'obtient en appliquant de façon réitérée le théorème de Schwarz. ■

Autrement dit, lorsque f est de classe C^k, dans le calcul des dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre k, l'ordre des dérivations n'a pas d'importance. Il est d'usage de grouper alors les indices valant 1, puis 2. Par exemple, si f est de classe C^7 : $f^{(7)}_{x_2x_2x_2x_1x_2x_1x_1} = f^{(7)}_{x_1^3x_2^4}$.

Nous verrons dans le Tome 4 :

- le théorème de Taylor-Young pour les fonctions de plusieurs variables réelles de classe C^2,
- l'étude des C^k-difféomorphismes,
- des exemples d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2.

Exercices

◇ **12.4.1** *Dénombrement des dérivées $k^{\text{èmes}}$ sans ou avec le théorème de Schwarz.*

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^{*2}$.

a) Combien y a-t-il de k-uplets formés d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$?

b) Combien y a-t-il de n-uplets $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de $\mathbb{N}^n$ tels que : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$?

◇ **12.4.2** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer :

a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

b) f admet des dérivées partielles secondes croisées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

12.5 Extremums des fonctions numériques de deux variables réelles

$\mathbb{R}^2$ est ici muni de l'une des trois normes usuelles.

12.5.1 Définitions

◆ **Définitions** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in X$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) On dit que f **admet un maximum local en** a si et seulement si :

$$\exists\, r > 0, \quad \forall x \in X \cap B(a;r), \quad f(x) \leqslant f(a).$$

2) On dit que f **admet un minimum local en** a si et seulement si :

$$\exists\, r > 0, \quad \forall x \in X \cap B(a;r), \quad f(x) \geqslant f(a).$$

3) On dit que f **admet un maximum local strict en** a si et seulement si :

$$\exists\, r > 0, \quad \forall x \in \big(X \cap B(a;r)\big) - \{a\}, \quad f(x) < f(a).$$

4) On dit que f **admet un minimum local strict en** a si et seulement si :

$$\exists\, r > 0, \quad \forall x \in \big(X \cap B(a;r)\big) - \{a\}, \quad f(x) > f(a).$$

5) On dit que f **admet un extremum local en** a si et seulement si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a.

6) On dit que f **admet un extremum local strict en** a si et seulement si f admet un maximum local strict en a ou un minimum local strict en a.

Comparer avec les définitions de 5.3.2, Tome 1, p. 151 : l'ensemble de départ était là une partie de $\mathbb{R}$ et est ici une partie de $\mathbb{R}^2$.

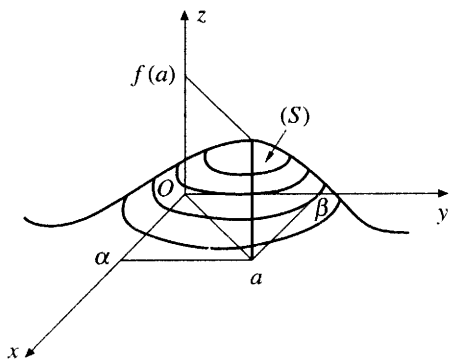
On trouve aussi le qualificatif «relatif» à la place de «local».

EXEMPLES

1) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |x| + |y| \end{array}$ admet en (0,0) un minimum local strict.

2) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |x| \end{array}$ admet en (0,0) un minimum local mais n'admet pas en (0,0) un minimum local strict.

Interprétation graphique



Pour $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, l'existence d'un maximum local (par exemple) en $a = (\alpha,\beta)$ signifie qu'au voisinage de a, la surface (S) d'équation $z = f(x,y)$ est située au-dessous du plan d'équation $z = f(\alpha,\beta)$.

Remarque : En remplaçant f par $-f$, les études d'un minimum local ou d'un maximum local se ramènent l'une à l'autre.

12.5.2 Etude à l'ordre 1

◆ **Théorème** Soient $U \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \left\{\begin{array}{l} U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ f \text{ admet en } a \text{ un extremum local} \\ \text{les dérivées partielles premières de } f \text{ en } a \text{ existent} \end{array}\right.,$$

alors $f'_x(a) = f'_y(a) = 0$.

Preuve :

Notons $(\alpha, \beta) = a$.

L'application partielle $f(\cdot, \beta)$ est définie sur un voisinage de α, admet un extremum local en α, et est dérivable en α. D'après 5.3.2, Tome 1, Th. p. 152, on déduit $(f(\cdot, \beta))'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f'_x(a) = 0$. De même pour l'autre place.

Remarques :

1) Aucune des trois conditions figurant dans l'hypothèse ne doit être omise. Le théorème précédent tombe en défaut si U n'est pas ouvert, ou si une des dérivées partielles premières de f en a n'existe pas. Par exemple :

- $f : \begin{array}{l} [0;1]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 \end{array}$ admet un maximum local en $(1,1)$ et les dérivées partielles premières de f existent en $(1,1)$; cependant $f'_x(1,1) = 2 \neq 0$, $f'_y(1,1) = 2 \neq 0$. En fait (cf. 12.3 p. 184) nous n'avons défini les dérivées partielles premières d'une fonction f en a que dans le cas où f est définie au moins sur un ouvert contenant a.
- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |x| + |y| \end{array}$ admet un minimum local en $(0,0)$, et les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ n'existent pas.

2) Le théorème précédent ne donne qu'une implication. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si les dérivées partielles de f en a existent et sont nulles, on ne peut pas déduire que f admette un extremum local en a. Par exemple, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 - y^2 \end{array}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$; cependant, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$, puisque :

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x,0) > f(0,0) \\ \forall y \in \mathbb{R}^*, & f(0,y) < f(0,0) \end{array}\right..$$

◆ **Définition** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un **point critique pour** (ou : **de**) f si et seulement si les dérivées partielles premières de f en a existent et sont nulles.

Le théorème précédent indique que, si f admet des dérivées partielles premières sur U, alors les points en lesquels f admet un extremum local sont parmi les points critiques de f. En pratique, on résoudra le système de deux équations à deux inconnues (inconnues x, y) : $\left\{\begin{array}{l} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{array}\right.$.

Nous verrons dans le Tome 4 une étude plus approfondie, utilisant des dérivées partielles secondes et permettant d'obtenir une condition suffisante d'extremum local.

12.5.3 Extremums globaux

◆ **Définition** Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in X$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) On dit que f admet en a un **maximum global** si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant f(a).$$

2) On dit que f admet en a un **minimum global** si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \geqslant f(a).$$

3) On dit que f admet en a un **extremum global** si et seulement si f admet en a un maximum global ou un minimum global.

EXEMPLES :

1) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 \end{array}$ admet en $(0,0)$ un minimum global.

2) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{array}$ n'admet pas d'extremum global; en effet, f n'est ni majorée ni minorée, puisque $f(x,x) = x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f(x,-x) = -x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

Remarque : Si f admet en a un maximum (resp. minimum) global, alors f admet en a un maximum (resp. minimum) local. La réciproque est fausse; par exemple, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - x^4 - y^4 \end{array}$ admet en $(0,0)$ un minimum local car, pour tout (x,y) de $[-1;1]^2$, $f(x,y) = x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) \geqslant 0 = f(0,0)$, mais pas de minimum global (car $f(x,0) = x^2 - x^4 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$).

Exercices

◇ **12.5.1** Déterminer les extremums locaux et globaux des applications f suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image $f(x,y)$ de (x,y) :

a) $\mathbb{R}^2$, $x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$ *b)* $\mathbb{R}^2$, $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$

c) $\mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 + x^4 + y^4$ *d)* $\mathbb{R}^2$, $2x^4 - 3x^2y + y^2$ *e)* $\mathbb{R}^2$, $x^2y + \ln(1+y^2)$.

◇ **12.5.2** Déterminer les extremums globaux de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$, où $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \leqslant 0, y \leqslant 0, x + y \geqslant -3\}$.

◇ **12.5.3** Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2(1+y)^3 + y^4 \end{array}$; montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, admet un point critique et un seul, en lequel f admet un minimum local, mais que f n'a pas de miminum global.

(Référence : Revue de Mathématiques Spéciales, 101e année, n° 8, p. 443).

12.6 Fonctions implicites

12.6.1 Le problème des fonctions implicites

1) Position du problème

Soient E, F, G trois ensembles, γ un élément fixé de G, $f : E \times F \longrightarrow G$ une application. Le problème des fonctions implicites consiste à «décrire», pour chaque x de E, l'ensemble $\{y \in F, f(x,y) = \gamma\}$. Il s'agit donc de la résolution d'une équation à une inconnue (y) et à un paramètre (x). Si, pour chaque x de E, l'équation $f(x,y) = \gamma$ (d'inconnue $y \in F$) admet une solution et une seule, on dit que la relation $f(x,y) = \gamma$ **définit implicitement** y **en fonction de** x : il existe une application $\varphi : E \longrightarrow F$, unique, telle que : $\forall x \in E,\ f\big(x,\varphi(x)\big) = \gamma$; φ est appelée une **fonction implicite**.

Dans cette première étude, nous examinons le cas où E est une partie de $\mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $\gamma = 0$, f vérifiant des hypothèses que nous préciserons.

Nous étudierons dans le Tome 4 le cas où E, F, G sont trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

2) Un exemple simple

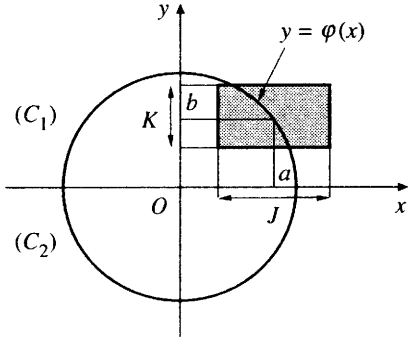
Considérons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{array}$.

Notons, pour chaque x de $\mathbb{R}$, $\Phi(x) = \{y \in \mathbb{R};\ f(x,y) = 0\}$. On a facilement :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } |x| > 1 \\ \{0\} & \text{si } |x| = 1 \\ \{-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\} & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

La courbe $(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 0\}$ (cercle de centre O et de rayon 1) peut être ici séparée en deux «morceaux» (demi-cercles) :

$$(C_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0\}$$
$$(C_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad y \leqslant 0\}.$$



La courbe (C) n'est pas la courbe représentative d'une fonction d'une variable réelle. Mais, pour tout (a,b) de (C) tel que $b \neq 0$, il existe deux intervalles ouverts J, K, de centres respectifs a, b tels que $(C) \cap (J \times K)$ soit la courbe représentative d'une fonction, la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ (resp. $x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$) si $b > 0$ (resp. $b < 0$).

Nous avons pu ici expliciter localement $\varphi : x \longmapsto y$.

Dans le § 12.6.2 nous allons dégager des conditions suffisantes pour que, au voisinage d'un point (a,b) tel que $f(a,b) = 0$, la relation $f(x,y) = 0$ définisse implicitement y en fonction de x.

12.6.2 Cas de deux variables réelles liées par une relation

◆ **Théorème** (**Théorème des fonctions implicites**)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $A = (a,b) \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

On suppose : $\begin{cases} f(A) = 0 \\ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0. \end{cases}$

Il existe alors deux intervalles ouverts J, K centrés respectivement en a et b tels que $J \times K \subset U$ et satisfaisant à la condition suivante : il existe $\varphi : J \longrightarrow K$ de classe C^1, et une seule, telle que :

$$\forall (x,y) \in J \times K, \quad \big(f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)\big).$$

Preuve : (hors programme)

Supposons, par exemple, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) > 0$ (le cas $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) < 0$ s'y ramène en considérant $-f$ au lieu de f).

• **Définition de** J, K, φ.

Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur U et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) > 0$, il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que, en notant $V = [a-\alpha; a+\alpha] \times [b-\beta; b+\beta]$, on ait :

$$\begin{cases} V \subset U \\ \forall (x,y) \in V, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0 \end{cases}.$$

Pour tout x_0 de $[a-\alpha; a+\alpha]$, l'application partielle $f(x_0,\bullet) : y \longmapsto f(x_0,y)$ est de classe C^1 sur $[b-\beta; b+\beta]$ et :

$$\forall y \in [b-\beta; b+\beta], \quad (f(x_0,\bullet))'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) > 0\,;$$

cette application $f(x_0,\bullet)$ est donc strictement croissante sur $[b-\beta; b+\beta]$.

En particulier, $f(a,\bullet)$ est strictement croissante sur $[b-\beta; b+\beta]$; comme $f(a,b) = 0$, et que $b \in]b-\beta; b+\beta[$, il s'ensuit : $f(a,b-\beta) < 0$ et $f(a,b+\beta) > 0$.

Puisque $f(\bullet,b-\beta)$ et $f(\bullet,b+\beta)$ sont continues sur U, on en déduit qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\begin{cases} [a-\alpha_1; a+\alpha_1] \times [b-\beta; b+\beta] \subset U \\ \forall x \in [a-\alpha_1; a+\alpha_1], \begin{cases} f(x,b-\beta) < 0 \\ f(x,b+\beta) > 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Notons $\alpha' = \mathrm{Min}(\alpha,\alpha_1)$ (> 0) et soit $x_0 \in [a - \alpha'; a + \alpha']$. On dispose alors du tableau de variation de $f(x_0,\bullet)$ sur $[b - \beta; b + \beta]$:

y	$b - \beta$	y_0	$b + \beta$
$f(x_0,\bullet)$	< 0	0	> 0

La continuité de $f(x_0,\bullet)$ sur l'intervalle $[b - \beta; b + \beta]$ et la stricte monotonie de $f(x_0,\bullet)$ sur $[b - \beta; b + \beta]$ montrent respectivement l'existence et l'unicité de y_0 dans $[b - \beta; b + \beta]$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$.

En notant $J =]a - \alpha'; a + \alpha'[$ et $K =]b - \beta; b + \beta[$, on a bien : $J \times K \subset U$, et :

$$\forall x_0 \in J, \quad \exists! y_0 \in K, \quad f(x_0, y_0) = 0.$$

Notons $\varphi : J \to K$ l'application qui, à chaque x_0 de J associe l'unique y_0 de K tel que $f(x_0, y_0) = 0$.

- **Continuité de φ**

Soient $x_0 \in [a - \alpha'; a + \alpha']$ et $y_0 = \varphi(x_0)$. On peut appliquer l'étude précédente au couple (x_0, y_0) au lieu de (a,b) : il existe $(\alpha'_{x_0}, \beta_{x_0}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\begin{cases} [x_0 - \alpha'_{x_0}; x_0 + \alpha'_{x_0}] \times [y_0 - \beta_{x_0}; y_0 + \beta_{x_0}] \subset U \\ \text{Pour tout } x \text{ de } [x_0 - \alpha'_{x_0}; x_0 + \alpha'_{x_0}], \text{ l'application } f(x,\bullet) \text{ est strictement croissante} \\ \quad \text{sur } [y_0 - \beta_{x_0}; y_0 + \beta_{x_0}] \text{ et va d'une valeur } < 0 \text{ à une valeur } > 0. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon \in]0; \beta_{x_0}]$; on a donc $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ et $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$. Puisque $f(\bullet, y_0 - \varepsilon)$ et $f(\bullet, y_0 + \varepsilon)$ sont continues sur $[x_0 - \alpha'_{x_0}; x_0 + \alpha'_{x_0}]$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta], \quad \begin{cases} f(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \\ f(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \end{cases}.$$

Par définition de $\varphi(x)$, on a alors : $y_0 - \varepsilon < \varphi(x) < y_0 + \varepsilon$, c'est-à-dire $|\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$.

On a prouvé ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in J, \quad (|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon)$, c'est-à-dire : φ est continue sur J.

- **φ est de classe C^1 sur J**

Soient $x_0 \in J$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 + h \in J$. En appliquant le théorème des accroissements finis (Tome 1, 5.2.2 p. 143), on voit qu'il existe θ_1 dans $[0; 1]$ et c entre $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_0 + h)$ tels que :

$$f\big(x_0 + h, \varphi(x_0)\big) - f\big(x_0, \varphi(x_0)\big) = h\big(f(\bullet, \varphi(x_0))\big)'(x_0 + \theta_1 h) = h\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(x_0 + \theta_1 h, \varphi(x_0)\big)$$

et $f\big(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)\big) - f\big(x_0 + h, \varphi(x_0)\big) = \big(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\big)\big(f(x_0 + h, \bullet)\big)'(c)$

$$= \big(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)\big)\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0 + h, c).$$

Comme on l'a vu au début de la démonstration : $\begin{cases} J \times K \subset U \\ \forall (x,y) \in J \times K, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0 \end{cases}.$

Comme de plus $f\big(x_0+h,\varphi(x_0+h)\big)=0$ et $f\big(x_0,\varphi(x_0)\big)=0$, on déduit

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x_0+\theta_1 h,\varphi(x_0)\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,c)}.$$

Puisqu'enfin $\theta_1\in[0,1]$ et c est entre $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_0+h)$, que φ est continue en x_0, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $\big(x_0,\varphi(x_0)\big)$, et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x_0,\varphi(x_0)\big)\neq 0$, on déduit :

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x_0,\varphi(x_0)\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x_0,\varphi(x_0)\big)}.$$

Ceci montre que φ est dérivable en x_0 et : $\varphi'(x_0)=-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x_0,\varphi(x_0)\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x_0,\varphi(x_0)\big)}$.

Cette dernière formule établit aussi, puisque φ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues, que φ' est continue, c'est-à-dire que φ est de classe C^1 sur J.

Remarques :

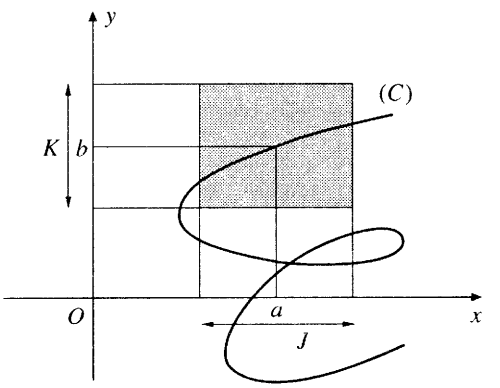
1) La formule donnant $\varphi'(x)$ peut être retrouvée, sachant que φ est de classe C^1, en dérivant (par rapport à x) dans la relation $f(x,\varphi(x))=0$; on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big)1+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)=0.$$

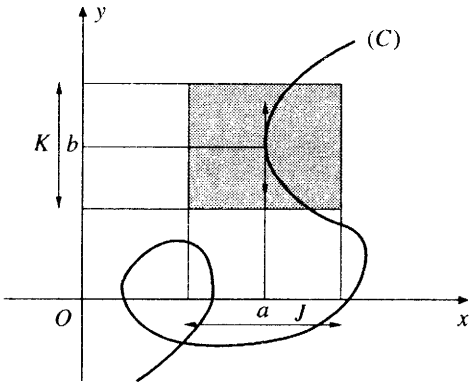
2) Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\neq 0$, on peut échanger les rôles de x et y dans le théorème précédent.

Interprétation graphique

1) Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, l'intersection de la courbe $(C)=\{(x,y)\in U;\ f(x,y)=0\}$ et $J'\times K$ est la courbe représentative d'une fonction φ de classe C^1.



2) Remplaçons, dans le théorème des fonctions implicites, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0$ par : $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0$ (en gardant les autres hypothèses). En échangeant les rôles de x et y, on voit que la courbe (C) admet en $A(a,b)$ une tangente parallèle à $(y'y)$.



Ainsi, si une courbe (C) a pour équation $f(x,y) = 0$, où f est de classe C^1 au voisinage d'un point $A(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$ et si $f(A) = 0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0\right)$, alors (C) admet en A une tangente d'équation cartésienne :

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(A) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

◆ **Proposition** Sous les hypothèses et avec les notations du théorème des fonctions implicites, si f est de classe C^k sur U ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), alors φ est de classe C^k sur J'.

Preuve :

Récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$).

La propriété est acquise pour $k = 1$ (théorème des fonctions implicites).

Supposons-la vraie pour un k de $\mathbb{N}^*$ et (sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites) supposons que f soit de classe C^{k+1} sur U. D'après l'hypothèse de récurrence, φ est de classe C^k sur J'. Comme :

$$\forall x \in J', \quad \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))},$$

et que φ, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^k, on en déduit (par composition et quotient) que φ' est de classe C^k sur J', c'est-à-dire que φ est de classe C^{k+1} sur J'.

Le cas $k = +\infty$ s'en déduit aisément.

Remarque : En particulier, sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites et si f est de classe C^∞ sur U, alors φ est de classe C^∞ sur J', donc φ admet un développement limité à tout ordre en a (théorème de Taylor-Young, 8.3.2 p. 55). Pour calculer le développement limité de φ, on procédera le plus souvent par «coefficients indéterminés».

EXEMPLE :

Montrer que la relation $\sin(x+y)+\cos(x-y)-1=0$ définit y comme fonction implicite de x au voisinage de $(0,0)$ et former le $DL_4(0)$ de la fonction implicite $\varphi : x \longmapsto y$ obtenue.

L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \sin(x+y)+\cos(x-y)-1 \end{array}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, $f(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe deux intervalles ouverts J,K centrés en 0 tels que :

$$\forall x \in J,\ \exists! y \in K,\quad f(x,y)=0.$$

La relation $f(x,y)=0$ définit donc implicitement y comme fonction de x au voisinage de $(0,0)$. Puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, d'après la proposition précédente, φ est de classe C^∞ sur J'; donc φ admet un développement limité à tout ordre en 0. En particulier, il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\in\mathbb{R}^5$ tel que, pour tout x de J' :

$$\varphi(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

Déjà $\alpha=\varphi(0)=0$.

On a, par des calculs de développements limités, pour tout x de J' :

$$\begin{aligned}
0=f\big(x,\varphi(x)\big)&=\sin\big((1+\beta)x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+o(x^4)\big)\\
&\quad+\cos\big((1-\beta)x-\gamma x^2-\delta x^3-\varepsilon x^4+o(x^4)\big)-1\\
&=(1+\beta)x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4-\frac{1}{6}\big((1+\beta)^3x^3+3(1+\beta)^2\gamma x^4\big)\\
&\quad-\frac{1}{2}\big((1-\beta)^2x^2-2\gamma(1-\beta)x^3+(\gamma^2-2(1-\beta)\delta)x^4\big)+\frac{1}{24}(1-\beta)^4x^4+o(x^4),
\end{aligned}$$

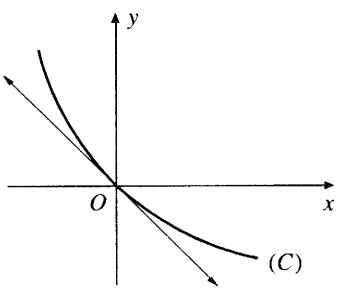
d'où, par unicité du $DL_4(0)$ de la fonction nulle :

$$\begin{cases}
1+\beta=0\\
\gamma-\dfrac{1}{2}(1-\beta)^2=0\\
\delta-\dfrac{1}{6}(1+\beta)^3+\gamma(1-\beta)=0\\
\varepsilon-\dfrac{1}{2}(1+\beta)^2\gamma-\dfrac{1}{2}\big(\gamma^2-2(1-\beta)\delta\big)+\dfrac{1}{24}(1-\beta)^4=0.
\end{cases}$$

On déduit les valeurs des coefficients «en cascade» : $\beta=-1$, $\gamma=2$, $\delta=-4$, $\varepsilon=\dfrac{28}{3}$.

Finalement : $\varphi(x)=-x+2x^2-4x^3+\dfrac{28}{3}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$.

Remarque : L'obtention d'un développement limité de φ en a permet en général de décrire l'allure de la courbe (C) d'équation $f(x,y)=0$ au voisinage de (a,b). Dans l'exemple précédent, (C) passe par O, la tangente en O à (C) est la deuxième bissectrice, et (C) tourne sa concavité (au voisinage de O) vers les y positifs.



Allure de (C) au voisinage de $(0,0)$

Exercices

◇ **12.6.1** Montrer que la relation proposée définit implicitement y en fonction de x au voisinage du couple (a,b) indiqué et former le développement limité à l'ordre n indiqué, au voisinage de a, de la fonction implicite $\varphi : x \longmapsto y$:

a) $x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$, $(0,1)$, 3

b) $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + y = 0$, $(0,0)$, 5

c) $xy^4 - x^3 + y = 0$, $(0,0)$, 17

d) $y \ln x + x \ln y - \ln 2 = 0$, $(1,2)$, 2

e) $x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x - 1 = 0$, $(0,1)$, 3

f) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, $(1,0)$, 3

g) $\operatorname{Arctan}(xy) - \mathrm{e}^{x+y} + 1 = 0$, $(0,0)$, 3.

◇ **12.6.2** Les variables réelles x et y étant liées par $\mathrm{e}^{x-y} = 1 + x + y$, on les «fait tendre» vers 0; montrer que $\frac{y}{x^2}$ admet une limite finie qu'on calculera.

◇ **12.6.3** Montrer que la fonction implicite $\varphi : x \longmapsto y$, définie par $-x + 2y + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y = 0$ au voisinage de $(0,0)$, admet un maximum local strict en 0.

◇ **12.6.4** Montrer que la relation proposée définit implicitement y en fonction de x sur $\mathbb{R}$, et que l'application $\varphi : x \longmapsto y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$:

a) $y^3 + x^2y - \mathrm{e}^x = 0$ *b)* $\mathrm{e}^{x+y} - x + y = 0$ *c)* $x^2 - x + y + \sin y = 0$.

12.7 Formes différentielles

L'étude précédente portant sur les fonctions de deux variables réelles s'étend aisément au cas des fonctions de trois variables réelles. En vue de l'étude des formes différentielles et de l'Analyse vectorielle, nous supposons que cette extension est effectuée.

12.7.1 Définitions

◆ **Définitions**

1) Cas de deux variables réelles.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle **forme différentielle sur** U toute application $\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle qu'il existe deux applications $P,Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \omega(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

2) Cas de trois variables réelles.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On appelle **forme différentielle sur** U toute application $\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ telle qu'il existe trois applications $P,Q,R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

Rappelons (12.3.2 2) p. 188) que (pour le cas de deux variables réelles par exemple), $\mathrm{d}x$ désigne l'application linéaire $\mathrm{d}x : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) \longmapsto h \end{array}$; $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

12.7.2 Formes différentielles exactes

◆ **Définition**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle sur U. On dit que ω est **exacte sur** U (ou : ω **admet des primitives sur** U) si et seulement s'il existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telle que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \mathrm{d}_{(x,y)}F = \omega(x,y).$$

Une telle application F, si elle existe, est appelée **une primitive de** ω **sur** U.

Définition analogue pour trois variables réelles.

En utilisant les composantes P, Q de ω :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \omega(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

la relation $\mathrm{d}_{(x,y)}F = \omega(x,y)$ est équivalente à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \end{cases}$$

Dans des cas simples, une forme différentielle peut apparaître comme exacte de manière évidente.

EXEMPLES :

- $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$
- $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(xy)$
- $\dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$.

Pour calculer les primitives d'une forme différentielle exacte, voir plus loin 12.7.4 1) p. 209.

Supposons que ω admette une primitive F sur U. Le système de relations précédent montre que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sont de classe C^1, c'est-à-dire que F est de classe C^2 sur U. D'après le théorème de Schwarz (12.4.3 p. 194), il en résulte :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

ce qui nous amène à l'étude du § 12.7.3 suivant.

Remarque : Nous verrons dans le Tome 4 que, si ω est exacte sur un ouvert «connexe», alors les primitives de ω diffèrent toutes entre elles par des constantes.

12.7.3 Formes différentielles fermées

◆ **Définition 1**

1) Cas de deux variables réelles.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle sur U, définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \omega(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

On dit que ω est **fermée sur** U si et seulement si : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Cas de trois variables réelles.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et ω une forme différentielle sur U, définie par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

On dit que ω est **fermée sur** U si et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Le résultat de la fin de 12.7.2 p. 207, utilisant le théorème de Schwarz, permet d'énoncer :

◆ **Théorème 1**

Toute forme différentielle exacte est fermée.

◆ **Définition 2** Soit $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$ (ou $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$).

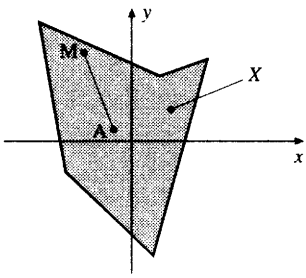
1) Soit $A \in X$; on dit que X est **étoilée par rapport à** A si et seulement si :

$$\forall M \in X, \quad [AM] \subset X,$$

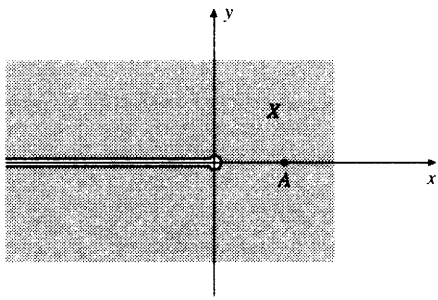
où $[AM]$ désigne le segment joignant A et M, c'est-à-dire

$$[AM] = \{P \in \mathbb{R}^3;\ \exists \lambda \in [0;1],\ \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AM}\}.$$

2) On dit que X est **étoilée** si et seulement s'il existe $A \in X$ tel que X soit étoilée par rapport à A.



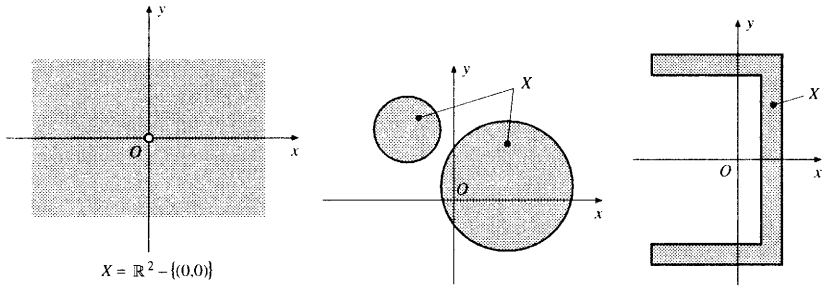
X est étoilée par rapport à A



$X = \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_- \times \{0\})$

X est étoilée par rapport à A (1,0)

Exemples de parties de $\mathbb{R}^2$ étoilées



Exemples de parties de $\mathbb{R}^2$ non étoilées

Une partie X de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$) est dite **convexe** si et seulement si :

$$\forall (M,N) \in X^2, \quad [MN] \subset X.$$

Il est clair qu'une partie X est convexe si et seulement si elle est étoilée par rapport à chacun de ses points. En particulier, toute partie convexe (non vide) est étoilée. Mais la réciproque en est fausse (voir les deux premiers schémas ci-dessus p. 208).

◆ **Théorème 2** **(Théorème de Poincaré)**

Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$) et ω une forme différentielle sur U. Pour que ω soit exacte sur U, il faut et il suffit que ω fermée sur U.

Preuve :

Un sens a déjà été établi (cf. Théorème 1 p. 208). Nous admettrons ici l'autre implication (fermée sur ouvert étoilé $\Rightarrow$ exacte), qui sera prouvée dans le Tome 4 en utilisant le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

12.7.4 Plan d'étude d'une forme différentielle, exemples

Soit ω une forme différentielle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$), souvent donnée explicitement par ses coefficients :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

1) Si ω est fermée sur U et si U est étoilé, le théorème de Poincaré montre que ω admet des primitives. On est donc amené à chercher les applications $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que : $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = R & (3). \end{cases}$

Il s'agit de résoudre un «système linéaire d'équations aux dérivées partielles, du 1er ordre, à coefficients constants». En pratique, on «intègre» par exemple dans (1) par rapport à x, et on obtient ainsi (si x varie dans un intervalle) :

$$F(x,y,z) = \int P(x,y,z)\mathrm{d}x + G(y,z)$$

où G est une application quelconque de classe C^1 sur $\{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ \exists x \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in U\}$. Les primitives $\int P(x,y,z)\mathrm{d}x$ sont le plus souvent (en pratique) calculables.

En reportant dans (2), on se ramène à une équation $\dfrac{\partial G}{\partial y} = S$, où S est une fonction que l'on calcule (deux variables : y,z). On «intègre» dans cette égalité par rapport à y, et on obtient ainsi (si y varie dans un intervalle) : $G(y,z) = \int S(y,z)\mathrm{d}y + H(z)$, où H est une application de classe C^1.

En reportant enfin dans (3), on est amené à résoudre $H' = T$, où T est connue (une variable : z), d'où H, puis F.

EXEMPLE : Etudier la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\mathrm{d}y.$$

En notant P, Q les coefficients de ω, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3(x^2 + y^2) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3(x^2 + y^2) \end{cases},$$

donc ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, il en résulte (théorème de Poincaré) que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$. Nous allons, par un calcul élémentaire, montrer que ω admet des primitives sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer celles-ci, ce qui rend d'ailleurs inutile l'application du théorème de Poincaré à cet exemple.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1; F est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x + y^3 & (1) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 2y & (2). \end{cases}$$

La relation (1) équivaut à l'existence d'une application $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \int (3x^2y + 2x + y^3)\mathrm{d}x + G(y) = x^3y + x^2 + y^3x + G(y).$$

En reportant dans (2) :

$$\begin{aligned}(2) &\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^3 + 3y^2x + G'(y) = x^3 + 3xy^2 - 2y \\ &\iff \forall y \in \mathbb{R}, \quad G'(y) = -2y \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad G(y) = -y^2 + C.\end{aligned}$$

Finalement, ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ et les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$ sont les applications $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^3y + y^3x + x^2 - y^2 + C\end{array}$, $C \in \mathbb{R}$.

2) Si ω est fermée sur U et si U n'est pas étoilé, il se peut que ω ne soit pas exacte sur U. En pratique, on recouvrira U par une réunion d'un nombre fini d'ouverts étoilés (si c'est possible); ou bien on déterminera un nombre fini d'ouverts étoilés dont la réunion soit U privé d'une «courbe simple» (souvent une droite ou une demi-droite), puis on essaiera de raccorder les primitives le long de cette courbe.

Nous verrons plus loin (13.1.4 p. 230) que, si ω est exacte sur U et si Γ est un chemin fermé (ou : «lacet») de classe C^1 par morceaux inclus dans U, alors $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 0$ (intégrale curviligne); ceci permettra, par contraposition, de montrer que certaines formes différentielles, bien que fermées, ne sont pas exactes.

EXEMPLE :

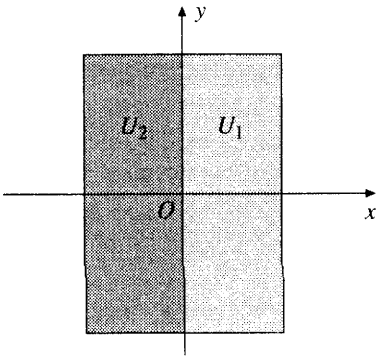
Etudier la forme différentielle ω définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

• En notant P, Q les coefficients de ω, on a : $\forall (x,y) \in U$, $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{array}\right.$,

et donc ω est fermée sur U.

•



On ne peut pas appliquer le théorème de Poincaré puisque U n'est pas étoilé. Notons $U_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $U_2 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$; puisque ω est fermée sur U, il est clair que ω est fermée sur U_1 et sur U_2 (il s'agit en fait des restrictions de ω à U_1 et à U_2).

Puisque U_1 et U_2 sont étoilés (car convexes), ω est exacte sur U_1 et sur U_2 (théorème de Poincaré).

Nous allons déterminer explicitement les primitives de ω sur U_1 et sur U_2.

• Une application $F_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur U_1, est une primitive de ω sur U_1 si et seulement si : $\begin{cases} \forall (x,y) \in U_1, \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} & (1) \\ \forall (x,y) \in U_1, \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} & (2). \end{cases}$

La relation (1) équivaut à l'existence d'une application $G_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in U_1, \quad F_1(x,y) = \int -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx + G_1(y) = \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} + G_1(y)$.

On remarquera ici l'intérêt d'avoir enlevé à U la droite $(y'y)$, ce qui permet de diviser par x.
En reportant dans (2) :

$$\begin{aligned} (2) &\iff \forall (x,y) \in U_1, \quad \frac{x}{x^2+y^2} + G_1(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ &\iff \forall y \in \mathbb{R}, \quad G_1'(y) = 0 \\ &\iff \exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad G_1(y) = C_1. \end{aligned}$$

Ainsi, les primitives de ω sur U_1 sont les applications $\begin{array}{l} F_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (x,y) \longmapsto \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} + C_1 \end{array}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

De même, les primitives de ω sur U_2 sont les applications $\begin{array}{l} F_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (x,y) \longmapsto \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} + C_2 \end{array}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

• Si ω admet une primitive F sur U, alors les restrictions de F à U_1 et U_2 sont respectivement des primitives de ω sur U_1 et U_2. Voyons donc maintenant si on peut «raccorder» F_1 et F_2 le long de $(y'y) - \{O\}$ de manière à obtenir une application de classe C^1 sur U.
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

1) Si $y_0 > 0$, alors : $F_1(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in U_1}]{} \dfrac{\pi}{2} + C_1$ et $F_2(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in U_2}]{} -\dfrac{\pi}{2} + C_2$,

d'où nécessairement $\dfrac{\pi}{2} + C_1 = -\dfrac{\pi}{2} + C_2$.

2) Si $y_0 < 0$, alors : $F_1(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in U_1}]{} -\dfrac{\pi}{2} + C_1$ et $F_2(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in U_2}]{} \dfrac{\pi}{2} + C_2$,

d'où nécessairement $-\dfrac{\pi}{2} + C_1 = \dfrac{\pi}{2} + C_2$.

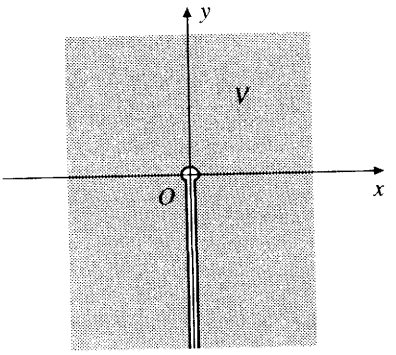
Mais les deux conditions obtenues sur C_1 et C_2 ne sont pas compatibles; autrement dit, on ne peut raccorder F_1 et F_2 par continuité le long de $(y'y) - \{O\}$.

Finalement : ω n'est pas exacte sur U.

Interprétation graphique

En raccordant F_1 et F_2 le long de la demi-droite ouverte Oy, on obtient, par exemple, l'application $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ où $V = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}_-)$.

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



D'après l'étude précédente, F est de classe C^1 sur $U_1 \cup U_2$ et :

$\forall (x,y) \in U_1 \cup U_2,\ \mathrm{d}_{(x,y)}F = \omega(x,y)$.

Mais aussi (cf. 7.9.3 Prop. p. 31), on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ F(x,y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{x}{y}.$$

Ceci montre que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et (par un calcul immédiat) :

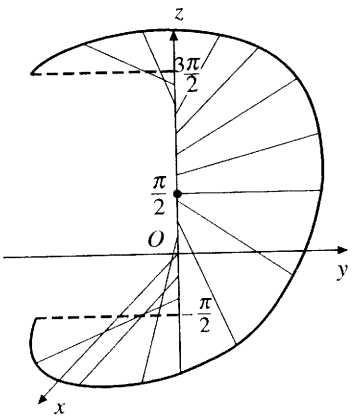
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\quad \mathrm{d}_{(x,y)}F = \omega(x,y).$$

Puisque les trois *ouverts* U_1, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, U_2 recouvrent U, on en déduit aisément que F est de classe C^1 sur $V = U_1 \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cup U_2$ et est une primitive de ω sur V.

Ainsi, ω est exacte sur V.

L'application F n'a de limite en aucun point de $\{0\} \times \mathbb{R}_-$. Plus précisément :

- F n'a pas de limite en $(0,0)$
- pour tout y_0 de $\mathbb{R}_-^*$, F admet «à gauche» et «à droite» de $(0,y_0)$ des limites différentes (qui diffèrent exactement de 2π).



La surface

$$(S) = \{(x,y,z) \in V \times \mathbb{R};\ z = F(x,y)\}$$

est réunion de demi-droites ouvertes issues d'un point de $(z'z)$, horizontales, et tournant «régulièrement» autour de (zz').

(S) est une surface «hélicoïdale» et les deux «lèvres» de (S) ne peuvent être recollées.

3) Si ω n'est pas fermée sur U, on cherchera un **facteur intégrant pour** ω, c'est-à-dire une application φ non nulle (et si possible, ne s'annulant en aucun point) et de classe C^1 telle que la forme différentielle $\omega_1 : (x,y,z) \longmapsto \varphi(x,y,z)\omega(x,y,z)$ soit fermée sur U, ou soit fermée sur un ouvert U_1 inclus dans U et différant «peu» de U.

La détermination de φ se ramène à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre, problème non abordé dans ce Tome 2. L'énoncé donnera donc une indication sur φ permettant de ramener le problème à la résolution d'une équation différentielle (le plus souvent : linéaire du premier ordre sans second membre). La «nouvelle» forme différentielle ω_1 est alors fermée sur U (ou U_1) et on est ramené au 1) ou au 2).

EXEMPLE :

Etudier la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x,y) = 2y^2\,\mathrm{d}x + 3xy\,\mathrm{d}y,$$

en cherchant un facteur intégrant ne dépendant que de xy.

- ω est définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$; en notant P, Q les coefficients de ω, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 3y \end{cases},$$

donc ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

- Cherchons un facteur intégrant pour ω, c'est-à-dire une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, telle que la forme différentielle ω_1, définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \omega_1(x,y) = \varphi(x,y)\omega(x,y)$$

soit fermée sur $\mathbb{R}^2$.

L'énoncé indique de chercher φ de façon que $\varphi(x,y)$ ne dépende que de xy, c'est-à-dire que l'on cherche une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(xy) \end{array}$

soit un facteur intégrant pour ω.

On remarquera que φ est une fonction de *deux* variables réelles, mais que f est une fonction d'*une seule* variable réelle.

Notons P_1, Q_1 les coefficients de ω_1 : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} P_1(x,y) = 2y^2 f(xy) \\ Q_1(x,y) = 3xyf(xy) \end{cases}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} &\Longleftrightarrow \forall (xy) \in \mathbb{R}^2, \quad 4yf(xy) + 2y^2xf'(xy) = 3yf(xy) + 3xy^2f'(xy) \\ &\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy^2f'(xy) = yf(xy) \\ &\Longleftarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad tf'(t) = f(t) \\ &\Longleftarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = t. \end{aligned}$$

En pratique, on ne détermine qu'un seul facteur intégrant; dans notre exemple, $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{array}$ est un facteur intégrant pour ω.

- La forme différentielle ω_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \omega_1(x,y) = xy\omega(x,y) = 2xy^3\,\mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y$$

est fermée sur $\mathbb{R}^2$; puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, ω_1 est alors exacte sur $\mathbb{R}^2$.

Un calcul élémentaire fournit les primitives de ω_1 sur $\mathbb{R}^2$; ce sont les applications $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2y^3 + C \end{array}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercices

◇ **12.7.1** Etudier les formes différentielles suivantes, à deux variables : ω est-elle fermée? exacte? Si oui, calculer les primitives de ω; si ω n'est pas fermée, chercher un facteur intégrant $\varphi : (x,y) \longmapsto \varphi(x,y)$, de façon que $\omega_1 : (x,y) \longmapsto \varphi(x,y)\omega(x,y)$ soit fermée; ω_1 est-elle exacte? Si oui, calculer les primitives de ω_1.

a) $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}\,dy$ *b)* $\left(y+\dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x+\dfrac{1}{y}\right)dy$

c) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)dx + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\,dy$

d) $y\,dx + dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de x

e) $y\,dx + (y-x)dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de y

f) $(y^2 - x^2 - 2xy)\,dx - (y^2 - x^2 + 2xy)\,dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de x^2+y^2

g) $\dfrac{2x^2+xy-2y^2}{y}dx + \dfrac{3x^2+2xy}{y}dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de $\dfrac{y}{x}$

h) $(1+e^{-y})dx + (x-2)dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de y

i) $\dfrac{xy-1}{x}dx + \dfrac{1+\ln x}{y}dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de y.

◇ **12.7.2** Trouver tous les couples (f,g) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, tels que la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x,y) = e^x\big(f(y)\,dx + g(y)\,dy\big)$$

soit exacte, et déterminer alors les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$.

◇ **12.7.3** CNS sur $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ pour que la forme différentielle ω définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x,y) = xy^p\,dx + x^q y\,dy$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2$ et, dans ce cas, déterminer les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$.

◇ **12.7.4** Même question que dans l'exercice 12.7.1, à trois variables :

a) $\dfrac{a}{z}dx - \dfrac{b}{z}dy + \dfrac{by-ax}{z^2}dz$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

b) $\dfrac{1}{(cz-ax)^2}((ay-bz)dx + (cz-ax)dy + (bx-cy)dz)$, $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$

c) $2yz\,dx - 2xz\,dy + (x^2-y^2)dz$, $\varphi(x,y,z)$ ne dépendant que de $x+y$

d) $\dfrac{1}{yz}dx + \dfrac{1}{zx}dy + \dfrac{1}{xy}dz$, $\varphi(x,y,z)$ ne dépendant que de xyz.

◇ **12.7.5** CNS sur $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ pour que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{(y+z)^2}\left((y+z)dx + b(z-x)dy + c(x+y)dz\right)$$

soit fermée. Dans ce cas, calculer les primitives de ω.

◇ **12.7.6** Trouver une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 pour que la forme différentielle ω définie par $\omega(x,y,z) = (yz + x^2y^3)dx + (xz + x^3y^2)dy + f(x,y)dz$ soit fermée, puis, dans ce cas, calculer les primitives de ω sur $\mathbb{R}^3$.

12.7.5 Application à certaines équations différentielles du premier ordre

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1, ω la forme différentielle définie sur U par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \omega(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Supposons que ω soit exacte sur U, c'est-à-dire qu'il existe une application $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telle que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \mathrm{d}_{(x,y)}F = \omega(x,y).$$

Considérons l'équation différentielle (en général non linéaire) du premier ordre :

$$\text{(e)} \qquad P(x,y) + Q(x,y)y' = 0,$$

où x est la variable (réelle) et y la fonction inconnue (à valeur réelles).
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur I, telle que : $\forall x \in I$, $(x, y(x)) \in U$.
On a, pour tout x de I :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x,y(x)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))y'(x)\\ &= P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x).\end{aligned}$$

Donc, pour que y soit solution de (e) sur I, il faut et il suffit que l'application $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x,y(x)) \end{array}$ soit constante. On obtient donc l'équation cartésienne des courbes intégrales de (e) : $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Il reste à voir, suivant l'exemple, si on peut «tirer» explicitement ou implicitement (cf. 12.6.2, p. 200) y en fonction de x.

EXEMPLE :
Résoudre l'équation différentielle

$$\text{(e)} \qquad (1 + xy')\mathrm{e}^y + (y + y')\mathrm{e}^x = 0.$$

Considérons la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x,y) = (\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\mathrm{e}^y + (y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y,$$

obtenue à partir du premier membre de (e) en remplaçant y' par $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et en «chassant» le dénominateur $\mathrm{d}x$. En notant P, Q les coefficients de ω, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x \end{cases}, \text{ ce qui montre que } \omega \text{ est fermée sur } \mathbb{R}^2.$$

Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, le théorème de Poincaré permet de déduire que ω est exacte. Mais par ailleurs, un calcul élémentaire établit que ω admet des primitives, l'une d'elles étant

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x \end{array}.$$

L'équation cartésienne des courbes intégrales de (e) est donc : $x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x = C$, $C \in \mathbb{R}$. On ne peut pas ici expliciter y en fonction de x.

Exercice

◇ **12.7.7** Résoudre les équations différentielles suivantes (on se contentera de fournir l'équation cartésienne des courbes intégrales) :

a) $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x})y' + (\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x})y - 1 = 0$

b) $(\mathrm{e}^y \operatorname{sh} x + 1)y' + (\mathrm{e}^y \operatorname{ch} x - 1) = 0$

c) $\dfrac{xy-1}{x} + \dfrac{1+\ln x}{y}\, y' = 0$ (utiliser l'exercice 12.7.1 *i)* p. 215)

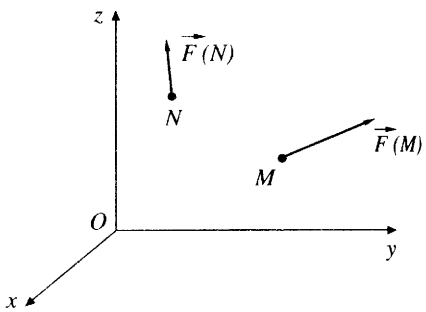
d) $xy' \ln|x| + (\ln|x| - 1)y + y^2 = 0$, y ne prenant pas la valeur 0.

12.8 Analyse vectorielle

12.8.1 Définitions

L'usage veut que l'on appelle **champ scalaire** toute application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}$ et **champ de vecteurs** (ou : **champ vectoriel**) toute application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) dans $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

Pour un champ de vecteurs, les éléments de l'ensemble de départ U sont considérés comme des points et les éléments de l'arrivée comme des vecteurs. Un champ de vecteurs $\overrightarrow{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ peut être représenté graphiquement en «attachant» à chaque point M de U un bipoint d'origine M et représentant le vecteur $\overrightarrow{F}(M)$:



◆ **Définition**

1) • Soit f un champ scalaire de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. On appelle **gradient** de f le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ défini sur U par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

(cette définition figure déjà en 12.3.2 1) p. 187).

• Soit f un champ scalaire de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. On appelle **laplacien** de f le champ scalaire Δf défini sur U par : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

2) Soit $\overrightarrow{F}$ un champ vectoriel de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{F} : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \end{array},$$

où $P, Q, R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont trois champs scalaires de classe C^1 sur U.

• On appelle **divergence de** $\overrightarrow{F}$ le champ scalaire div $\overrightarrow{F}$ défini sur U par :

$$\text{div}\, \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

• On appelle **rotationnel de** $\overrightarrow{F}$ le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{F}$ défini sur U par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

12.8.2 Formules d'analyse vectorielle

On montre aisément les formules qui suivent.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des champs scalaires de classe C^1, $\vec{F}, \vec{G} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ des champs vectoriels de classe C^1. On dispose des formules :

- $\overrightarrow{\text{grad}}(f + \lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g$
  $\text{div}(\vec{F} + \lambda \vec{G}) = \text{div}\, \vec{F} + \lambda\, \text{div}\, \vec{G}$
  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F} + \lambda \vec{G}) = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} + \lambda\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{G}$
  (on dit que $\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$ sont des opérateurs linéaires)

- $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f$
  $\text{div}(f\vec{F}) = f\, \text{div}\, \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{F}$
  $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{F}) = f\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \vec{F}$

- $\text{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{G})$.

Si de plus, les champs utilisés sont de classe C^2, on a :

- $\Delta(f + \lambda g) = \Delta f + \lambda \Delta g$
- $\Delta(fg) = f\, \Delta g + 2\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\, \Delta f$

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \vec{0}$
  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F}) = 0$
  $\overrightarrow{\text{rot}}(f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g) = (\overrightarrow{\text{grad}}\, f) \wedge (\overrightarrow{\text{grad}}\, g)$.

12.8.3 Potentiel scalaire

◆ **Définition** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. On dit que $\vec{F}$ **dérive d'un potentiel scalaire** (ou : $\vec{F}$ admet un potentiel scalaire) si et seulement s'il existe un champ scalaire $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$; s'il existe, un tel champ scalaire f est appelé un **potentiel scalaire de** $\vec{F}$.

◆ **Théorème** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $\vec{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U.

1) Si $\vec{F}$ admet un potentiel scalaire, alors $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$.

2) Réciproquement, si $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$ et si U est étoilé, alors $\vec{F}$ admet un potentiel scalaire.

Preuve :

Notons $(P,Q,R) = \overrightarrow{F}$; $\overrightarrow{F}$ admet un potentiel scalaire si et seulement s'il existe $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telle que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = R$.

En notant ω la forme différentielle définie sur U par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

la condition précédente équivaut à : ω admet f pour primitive sur U. Le théorème à prouver se déduit alors du théorème de 12.7.3 p. 208, et du théorème de Poincaré (12.7.3 p. 209).

Exercices

◇ **12.8.1** *Calcul du Laplacien (à deux variables) en coordonnées polaires*

Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2,\ F(\theta,\rho) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Calculer $\Delta f(x,y)$ en fonction de θ, ρ, F et des dérivées partielles de F.

◇ **12.8.2** Soient I, J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Trouver tous les couples (u,v) d'applications $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I et J respectivement, tels que, en notant $\begin{array}{l} f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \longmapsto u(x)v(y) \end{array}$, f soit *harmonique* sur $I \times J$, c'est-à-dire : $\Delta f = 0$.

◇ **12.8.3**

a) Montrer que le champ vectoriel $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 - (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(-\frac{2xz^3}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{2yz^3}{(x^2+y^2)^2},\ 1 + \frac{3z^2}{x^2+y^2}\right)$$

dérive d'un potentiel scalaire et calculer celui-ci.

b) Même question pour $\overrightarrow{F} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longmapsto (x^2 - yz,\ y^2 - zx,\ z^2 - xy) \end{array}$.

Chapitre 13

Compléments de calcul intégral (1re étude)

L'objectif de ce chapitre est l'acquisition de techniques efficaces de résolution de problèmes issus de la Physique.

L'étude se situe

- soit dans le (un) plan euclidien orienté $\mathcal{E}_2$ muni éventuellement d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les axes étant nommés $(x'x)$, $(y'y)$
- soit dans l'(un) espace euclidien orienté $\mathcal{E}_3$ de dimension 3 muni éventuellement d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les axes étant nommés $(x'x)$, $(y'y)$, $(z'z)$.

On confond souvent $\mathcal{E}_2$ et $\mathbb{R}^2$, en munissant $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel et de la base canonique, ainsi que $\mathcal{E}_3$ et $\mathbb{R}^3$.

13.1 Intégrales curvilignes

13.1.1 Arcs orientés, courbes orientées

Nous traitons ici le cas de $\mathbb{R}^3$; l'étude relative à $\mathbb{R}^2$ est analogue et peut être obtenue en remplaçant la 3e coordonnée par 0.

◆ **Définition 1** On appelle **arc orienté de classe C^1 par morceaux** toute application $\varphi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $x, y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe C^1 par morceaux.

Nous abrégerons ici arc orienté de classe C^1 par morceaux en : **arc orienté**.

◆ **Définition 2** On dit qu'un arc orienté $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est **équivalent à** un arc orienté $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ si et seulement s'il existe une application $\theta : I \longrightarrow J$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi = \psi \circ \theta \\ \theta \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } I \\ \theta \text{ est croissante} \\ \theta \text{ est bijective} \\ \theta^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } J. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\theta} & J \\ & \varphi \searrow \quad \swarrow \psi & \\ & \mathbb{R}^3 & \end{array}$$

Remarque : Sous les hypothèses précédentes, et en notant $[a;b] = I$, $[\alpha;\beta] = J$, on a :

$$\begin{cases} \theta(a) = \alpha, \quad \theta(b) = \beta \\ \forall t \in [a;b] - E, \theta'(t) > 0 \end{cases}$$

(où E désigne l'ensemble des points de $[a;b]$ en lesquels θ' n'est pas définie).

◆ **Proposition** La relation «est équivalent à» est une relation d'équivalence dans l'ensemble des arcs orientés de $\mathbb{R}^3$.

Preuve :

1) **Réflexivité :** prendre $\theta = \mathrm{Id}_I$.

2) **Symétrie :** si θ convient pour (φ,ψ), alors θ^{-1} convient pour (ψ,φ).

3) **Transivité :** si θ_1 convient pour (φ,ψ) et θ_2 convient pour (ψ,χ) (où $\chi : K \longrightarrow \mathbb{R}^3$), alors $\theta_2 \circ \theta_1$ convient pour (φ,χ) car :

$$\begin{cases} \varphi = \psi \circ \theta_1 = (\chi \circ \theta_2) \circ \theta_1 = \chi \circ (\theta_2 \circ \theta_1) \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } I \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ est croissante} \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ est bijective} \\ (\theta_2 \circ \theta_1)^{-1} \quad (= \theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-2}) \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } K. \end{cases}$$

◆ **Définition 3** On appelle **courbe orientée de classe C^1 par morceaux** toute classe d'équivalence d'un arc orienté de classe C^1 par morceaux.

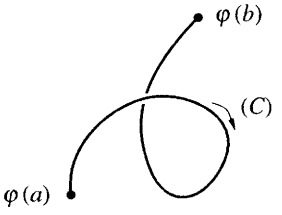
Nous abrégerons ici courbe orientée de classe C^1 par morceaux en : courbe orientée. Soit (C) la classe d'équivalence d'un arc orienté $\varphi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(t),y(t),z(t)) \end{array}$.

• On dit que (C) admet pour **représentation paramétrique** : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in I; \\ z = z(t) \end{cases}$

on dit que φ est un **paramétrage** de (C).

• On confond souvent la courbe orientée (C) avec l'ensemble des points M de coordonnées $(x(t),y(t),z(t))$ lorsque t décrit I (cet ensemble est indépendant du paramétrage choisi). On écrit même : $(C) = \{(x,y,z) \in \mathcal{E}_3; \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in I \\ z = z(t) \end{cases}\}$.

• $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ (qui ne dépendent pas du choix de φ) s'appellent respectivement **l'origine** et l'**extrémité** de φ, ou de (C); on dit aussi que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont les **extrémités** de φ, ou de (C).



• Comme, pour tous intervalles fermés bornés $[a;b]$ et $[\alpha;\beta]$ (tels que $a < b$ et $\alpha < \beta$) il existe un C^1-difféomorphisme (cf. 5.3.1, Tome 1, p. 149) de l'un dans l'autre (par exemple : $t \longmapsto \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}(t-a)+\alpha$), on peut en pratique choisir I dans lequel varie le paramètre t permettant de décrire la courbe (C).

13.1.2 Définition de l'intégrale curviligne

Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^3$

ω : $U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $(x,y,z) \longmapsto P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ une forme différentielle, où $P,Q,R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe C^1 sur U

$J = [\alpha,\beta]$ $(\alpha \leqslant \beta)$

ψ : $J \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (x(t),y(t),z(t))$ un arc orienté tel que $\psi(J) \subset U$.

Considérons l'intégrale

$$E_\psi = \int_\alpha^\beta \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t,$$

où l'expression sous le signe d'intégrale est obtenue en remplaçant, dans ω, x,y,z en fonction de t.

Soient $I = [a;b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ $(a \leqslant b)$

θ : $I \longrightarrow J$ une application de classe C^1 par morceaux sur I, bijective, croissante, telle que θ^{-1} soit de classe C^1 par morceaux sur J

$\varphi = \psi \circ \theta$, $X = x \circ \theta$, $Y = y \circ \theta$, $Z = z \circ \theta$.

Effectuons dans l'intégrale E_ψ le changement de variable $t = \theta(u)$ (on décompose $[a;b]$ en intervalles successifs correspondant aux éventuelles discontinuités de x', y', z') :

$$\begin{aligned}E_\psi &= \int_a^b \Big(P\big(x(\theta(u)),y(\theta(u)),z(\theta(u))\big)x'(\theta(u))\\ &\quad + Q\big(x(\theta(u)),y(\theta(u)),z(\theta(u))\big)y'(\theta(u))\\ &\quad + R\big(x(\theta(u)),y(\theta(u)),z(\theta(u))z'(\theta(u))\Big)\theta'(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_a^b \big(P(X(u),Y(u),Z(u))X'(u) + Q(X(u),Y(u),Z(u))Y'(u)\\ &\quad + R(X(u),Y(u),Z(u))Z'(u)\big)\,\mathrm{d}u = E_\varphi,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que E_ψ ne dépend pas de ψ, mais dépend seulement de la classe d'équivalence de ψ.

Résumons l'étude :

◆ **Proposition-Définition**

Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^3$

ω une forme différentielle sur U :

$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$, où

$P,Q,R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur U

(C) une courbe orientée de $\mathbb{R}^3$

$\varphi : \begin{array}{l}[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3\\ t \longmapsto (x(t),y(t),z(t))\end{array}$ une représentation paramétrique de (C).

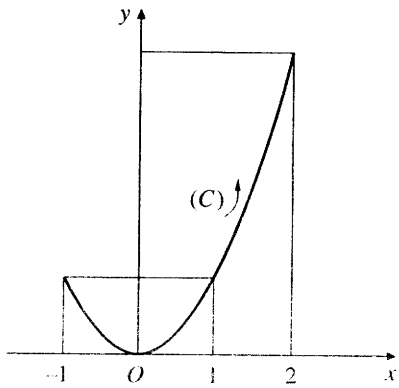
L'intégrale

$$\int_a^b \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

ne dépend pas du choix de φ (représentant (C)), est appelée l'**intégrale curviligne de ω le long de** (C) et est notée $\displaystyle\int_{(C)} \omega$.

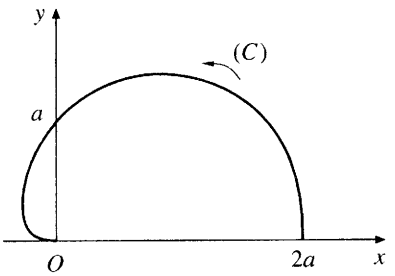
EXEMPLES :

1) Calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où $\omega = xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$ et (C) est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$, x variant de -1 à 2.



$$\begin{aligned}\int_{(C)} \omega &= \int_{-1}^{2} (x^3 + (x+x^2)2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4\right]_{-1}^{2} = \frac{69}{4}.\end{aligned}$$

2) Calculer $\int_{(C)} \omega$ où $\omega = -xy^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ et (C) est la demi-cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ ($a > 0$ fixé), θ variant de 0 à π.



(C) admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases},$$

d'où $\int_{(C)} \omega$

$$= \int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\cos\theta\,\sin\theta\Big(-a(1+\cos\theta)\sin\theta(-a(\sin\theta+\sin 2\theta))$$
$$+a(1+\cos\theta)\cos\theta(a(\cos\theta+\cos 2\theta))\Big)\mathrm{d}\theta$$
$$= a^4\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3\cos\theta\,\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\,\sin 2\theta+\cos\theta\,\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= a^4\int_0^\pi (1+\cos\theta)^4\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$\underset{t=\cos\theta}{=} a^4\int_{-1}^1 (1+t)^4 t\,\mathrm{d}t \underset{u=1+t}{=} a^4\int_0^2 u^4(u-1)\,\mathrm{d}u = a^4\left[\frac{u^6}{6}-\frac{u^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{15}a^4.$$

13.1.3 Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne

1) Linéarité

◆ **Proposition** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, ω_1, ω_2 des formes différentielles définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, (C) une courbe orientée incluse dans U ; on a :

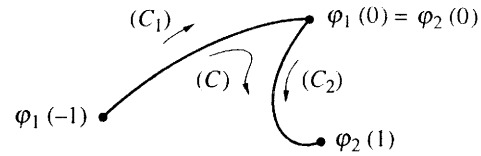
$$\int_{(C)} (\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda\int_{(C)} \omega_1 + \int_{(C)} \omega_2.$$

Preuve :
immédiate en revenant à la définition (cf. 13.1.2 p. 224).

2) Relation de Chasles

Soient (C_1), (C_2) deux courbes orientées telles que l'extrémité de (C_1) soit l'origine de (C_2). Soit $\varphi_1 : [-1;0] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (resp. $\varphi_2 : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$) une représentation paramétrique de (C_1) (resp. (C_2)).

L'application $\varphi : [-1;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in [-1;\,0] \\ \varphi_2(t) & \text{si } t \in]0;\,1] \end{cases}$ est de classe C^1 par morceaux, donc définit une courbe orientée (C).



Remarquons que (C) ne dépend pas du choix des représentations paramétriques φ_1 et φ_2 de (C_1) et (C_2) car, si $\psi_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\psi_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont des représentations paramétriques de (C_1) et (C_2), il existe $\theta_1 : [-1;\,0] \longrightarrow J_1$ et $\theta_2 : [0;\,1] \longrightarrow J_2$ telles que : $\left|\begin{array}{l} \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont de classe } C^1 \text{ par morceaux} \\ \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont croissantes} \\ \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont bijectives} \\ \theta_1^{-1} \text{ et } \theta_2^{-1} \text{ sont de classe } C^1 \text{ par morceaux} \end{array}\right|$, et on voit alors aisément que $\theta : [-1;\,1] \longrightarrow J_1 \cup J_2$, $t \longmapsto \begin{cases} \theta_1(t) & \text{si } t \in [-1;\,0] \\ \theta_2(t) & \text{si } t \in]0;\,1] \end{cases}$ est de classe C^1 par morceaux, croissante, bijective et telle que θ^{-1} soit de classe C^1 par morceaux (remarquer que l'extrémité de J_1 est l'origine de J_2).

La courbe orientée (C) ne dépend donc que de (C_1) et (C_2). Elle est formée de la «succession» de (C_1) et de (C_2); on la note souvent (abusivement) $(C_1) \cup (C_2)$, ou $(C_1) + (C_2)$.

◆ **Proposition 1** **(Relation de Chasles pour les intégrales curvilignes)**

Soient ω une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, et (C_1), (C_2) deux courbes orientées incluses dans U telles que l'extrémité de (C_1) soit l'origine de (C_2). On a : $\displaystyle\int_{(C_1)\cup(C_2)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega$.

Preuve :

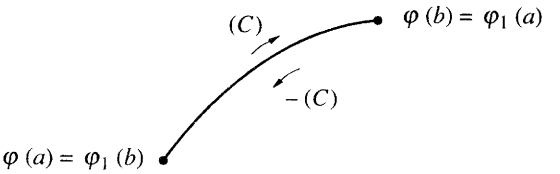
Avec les notations précédentes et $(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = \varphi_1(t)$, $(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = \varphi_2(t)$, $(x(t), y(t), z(t)) = \varphi(t)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{(C_1)\cup(C_2)} \omega &= \int_{-1}^{1} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t) \Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(P\big(x_1(t),y_1(t),z_1(t)\big)x_1'(t) + Q\big(x_1(t),y_1(t),z_1(t)\big)y_1'(t) + R\big(x_1(t),y_1(t),z_1(t)\big)z_1'(t) \Big)\mathrm{d}t \\
&+ \int_{0}^{1} \Big(P\big(x_2(t),y_2(t),z_2(t)\big)x_2'(t) + Q\big(x_2(t),y_2(t),z_2(t)\big)y_2'(t) + R\big(x_2(t),y_2(t),z_2(t)\big)z_2'(t) \Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega.
\end{aligned}$$

■

Soit (C) une courbe orientée, de représentation paramétrique $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$; considérons l'application $\begin{array}{l}\varphi_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad t \longmapsto \varphi(a+b-t)\end{array}$. Si $\psi : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est équivalente à φ, alors on voit aisément que $\begin{array}{l}\psi_1 : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad u \longmapsto \psi(\alpha+\beta-u)\end{array}$ est équivalente à φ_1. Ceci montre que la classe d'équivalence de φ_1 ne dépend que de (C) et non de la représentation paramétrique choisie pour (C). On note $-(C)$ la courbe orientée représentée paramétriquement par φ_1.

$-(C)$ est ainsi obtenue en considérant (C) «en sens inverse».



Le changement de variable $u = a + b - t$ dans l'intégrale définissant $\int_{(C)} \omega$ permet de déduire le résultat suivant :

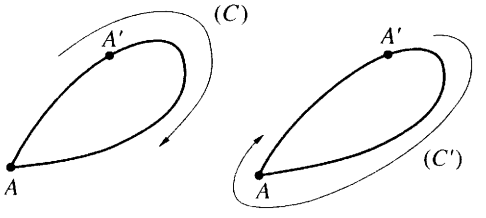
◆ **Proposition 2** Soient ω une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) une courbe orientée incluse dans U; on a : $\int_{(-C)} \omega = -\int_{(C)} \omega$.

On appelle **lacet** toute courbe orientée (C) dont l'origine et l'extrémité sont égales.

◆ **Proposition 3**

Si ω est une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) un lacet inclus dans U, alors $\int_{(C)} \omega$ ne dépend pas de l'origine du lacet.

Preuve :



Notons A l'origine de (C); soit A' un point quelconque de (C), et notons (C') le lacet coïncidant avec (C) et issu de A'. Notons (C_1) la courbe orientée de A vers A' sur (C), et (C_2) celle de A' vers A, de sorte que

$(C) = (C_1) \cup (C_2)$ et $(C') = (C_2) \cup (C_1)$.

On a : $\int_{(C)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega = \int_{(C_2)} \omega + \int_{(C_1)} \omega = \int_{(C')} \omega$.

Exercice

◇ **13.1.1** Calculer les intégrales curvilignes $\int_{(C)} \omega$ dans les exemples suivants :

a) $\omega = x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$

(C) est la demi-ellipse $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ parcourue dans le sens indirect

b) $\omega = y \sin x \mathrm{d}x + x \cos y\,\mathrm{d}y$

(C) est le segment de droite OA de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$

c) $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

(C) est le contour du carré $ABCD$, où $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$

d) $\omega = x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$

(C) est l'ellipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, parcourue une fois dans le sens direct

e) $\omega = xy^2\,\mathrm{d}y - yx^2\,\mathrm{d}x$

(C) est le cercle $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru une fois dans le sens direct

f) $\omega = y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$

(C) est le contour du domaine défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0 \end{cases}$, parcouru une fois dans le sens direct

g) $\omega = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$

(C) admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t\sqrt{\cos 2t} \\ y = a\sin t\sqrt{\cos 2t} \end{cases}$, t allant de $-\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}$ ($a > 0$ fixé)

h) $\omega = y\,\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$

$(C) : x = \cos t,\ y = \cos t,\ z = \sin t$, t allant de 0 à 2π

i) $\omega = \dfrac{1}{x^2+y^2}\Big((y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\Big)$

$(C) : x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = ht$, t allant de 0 à 2π, $(r,h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ fixé

j) $\omega = y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$

(C) est le cercle $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ parcouru une fois dans le sens positif défini par le vecteur normal $\vec{u}\,(1,1,0)$

k) $\omega = x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x$

$(C) : x = \cos t + 1,\ y = \cos t - 1,\ z = \sin t$, t allant de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

13.1.4 Intégrale curviligne et forme différentielle exacte

◆ **Théorème**

Soient :

U un ouvert de $\mathbb{R}^3$

ω une forme différentielle sur U

$(A,B) \in U^2$

(C) une courbe orientée incluse dans U, d'origine A et d'extrémité B.

Si ω est exacte sur U, alors, en notant f une primitive de ω sur U, on a :

$$\int_{(C)} \omega = f(B) - f(A).$$

Preuve :

Notons φ : $\begin{array}{l} [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(t),y(t),z(t)) \end{array}$ une représentation paramétrique de (C) et P,Q,R les coefficients de ω. Supposons x,y,z de classe C^1. On a, pour tout t de $[a;b]$:

$$\begin{aligned} & P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f(x(t),y(t),z(t))\Big). \end{aligned}$$

D'où : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \Big[f(x(t),y(t),z(t))\Big]_a^b = f(B) - f(A).$

On adapte aisément l'étude précédente au cas où x,y,z sont de classe C^1 par morceaux. ■

Ainsi, si ω est exacte sur U et si $(C) \subset U$, alors $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ ne dépend que des extrémités de (C) et non de (C) «toute entière». En particulier, on peut alors calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ en remplaçant (C) par une autre courbe orientée, de mêmes extrémités que (C).

EXEMPLES :

1) Calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où $\omega = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ et (C) est la demi-cardioïde d'équation polaire $\rho = (1+\cos\theta)$, θ allant de 0 à π.

En notant $P : (x,y) \longmapsto x+y$, $Q; (x,y) \longmapsto x-y$, on a $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, donc ω est fermée sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme de plus $\mathbb{R}^2$ est étoilé, le théorème de Poincaré nous dit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$; mais nous allons tout simplement calculer une primitive f de ω sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y & (1) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-y & (2). \end{cases}$$

La relation (1) équivaut à l'existence de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + g(y).$$

En reportant dans (2) : $\forall y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = -y$. Ainsi $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + xy - \dfrac{y^2}{2} \end{array}$

est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$ (ce qu'on aurait pu remarquer dès la donnée de ω).

D'après le théorème précédent, puisque (C) a pour origine $A(2,0)$ et pour extrémité $B(0,0)$, on a : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = f(B) - f(A) = -2$.

2) Calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où

$$\omega = \frac{(y-z)(yz-x^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}\mathrm{d}x + \frac{(z-x)(zx-y^2)}{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}\mathrm{d}y + \frac{(x-y)(xy-z^2)}{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}\mathrm{d}z$$

(somme de trois termes obtenus par permutation circulaire)

et $(C) : x = \cos^2 t$, $y = 2\cos^4 t$, $z = 1 + \dfrac{t}{\pi}$, t allant de $-\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}$.

Un calcul élémentaire fournit : $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, et deux relations analogues par permutation circulaire.

Donc ω est fermé sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^3$ (qui contient (C)); comme $(\mathbb{R}_+^*)^3$ est étoilé, le théorème de Poincaré permet de déduire que ω est exacte sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Dans cet exemple, on pourrait calculer une primitive de ω sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, mais assez péniblement. Nous allons plutôt remplacer (C) par le segment de droite AB, représenté paramétriquement par : $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = u$, u allant de $\dfrac{3}{4}$ à $\dfrac{5}{4}$. On obtient : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_{AB} \omega = \int_{3/4}^{5/4} 0\,\mathrm{d}z = 0$.

◆ **Corollaire** Soient ω une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) un lacet inclus dans U. Si ω est exacte sur U, alors $\displaystyle\int_{(C)} \omega = 0$.

Preuve :

En notant A l'origine de (C) (qui est confondue avec l'extrémité) et f une primitive de ω sur U, on a : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = f(A) - f(A) = 0$. ■

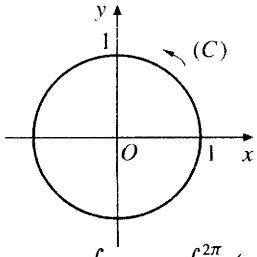
Le corollaire précédent peut être utilisé, par contraposition, pour montrer dans certains exemples, qu'une forme différentielle (bien que fermée) peut ne pas être exacte.

EXEMPLE :

Montrer que la forme différentielle ω, définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par

$\omega = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ est fermée mais n'est pas exacte.

En notant P, Q les coefficients de ω, on a : $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, et donc ω est fermée sur U.



Soit (C) le cercle de centre O, de rayon 1, parcouru une fois dans le sens direct (c'est un lacet); une représentation paramétrique de (C) est :

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi].$$

Puisque $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} \left((-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi \neq 0$, ω n'est pas exacte sur U.

Exercice

◇ **13.1.2** Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ dans les exemples suivants :

a) $\omega = (x^2 - y)\mathrm{d}x + (y^2 - x)\mathrm{d}y$

(C) est la boucle de la courbe d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, parcourue une fois dans le sens direct

b) $\omega = (y + z)\mathrm{d}x + (z + x)\mathrm{d}y + (x + y)\mathrm{d}z$

(C) est le cercle $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ parcouru une fois dans le sens positif défini par le vecteur normal $\vec{u}(1,1,1)$

c) $\omega = 2xy^2z\ \mathrm{d}x + 2x^2yz\ \mathrm{d}y + (x^2y^2 - 2z)\ \mathrm{d}z$

$(C) : x = \cos t,\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ z = \dfrac{1}{2}\sin t,\ t \in [0; 2\pi]$

d) $\omega = y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y$

(C) est l'arc de parabole $y = x^2$ de $O(0,0)$ vers $A(2,4)$

e) $\omega = \dfrac{-2xy\ \mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\ \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$

(C) est le quart de cercle $x^2 + y^2 - y = 0$, de $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ vers $B(0,1)$.

f) $\omega = (y^3 - 6xy^2)\mathrm{d}x + (3xy^2 - 6x^2y)\mathrm{d}y$

(C) est le demi-cercle supérieur de diamètre AB de $A(1,2)$ vers $B(3,4)$

g) $\omega = (x^2 + y)\mathrm{d}x + (2x + y^2)\mathrm{d}y$

(C) est le carré $ABCD$ où $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$, $D(1,2)$, parcouru une fois dans le sens direct

h) $\omega = (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$

(C) est le triangle OAB où $A(1,0)$, $B(0,1)$, parcouru une fois dans le sens direct

i) $\omega = 2(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x + y)^2\mathrm{d}y$

(C) est le triangle ABC où $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, parcouru une fois dans le sens direct

j) $\omega = (\mathrm{e}^x \cos y + xy^2)\mathrm{d}x - (\mathrm{e}^x \sin y + x^2y)\mathrm{d}y$

(C) est l'arc de la lemniscate d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, θ allant de 0 à $\dfrac{\pi}{4}$.

13.1.5 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée

◆ **Définition**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$

(C) une courbe orientée incluse dans U

$$\overrightarrow{F} : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \end{array}$$

un champ de vecteurs de classe C^1.

On appelle **circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ le long de** (C) l'intégrale $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où ω est la forme différentielle définie sur U par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \omega(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

Remarque : Toute intégrale curviligne $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ peut être considérée comme la circulation du champ de vecteurs $(x,y,z) \longmapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ (où P, Q, R sont les coefficients de ω) le long de (C).

En notant (abusivement) $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ et en utilisant le produit scalaire usuel $\cdot$ sur $\mathbb{R}^3$, la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de (C) est : $\displaystyle\int_{(C)} \overrightarrow{F}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$.

On a vu (12.8.3 p. 219) que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si ω est exacte. On déduit donc de 13.1.4 Théorème p. 229 le résultat suivant :

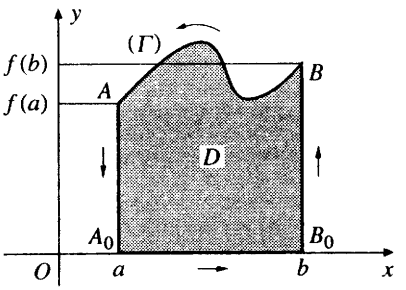
◆ **Proposition** Soient $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) une courbe orientée incluse dans U, d'origine A et d'extrémité B.
Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire f, alors la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de (C) vaut $f(B) - f(A)$.

13.1.6 Calculs d'aires planes

Nous nous situons dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthornormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Nous supposons connues du lecteur les notions usuelles de Géométrie relatives aux courbes, coordonnées polaires, aire d'un «domaine» plan (voir aussi 13.2.3 Prop. 1 p. 244).

1) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $[a; b]$. On a vu (6.2.3, Tome 1, p. 172) que l'aire (algébrique) $\mathcal{A}(D)$ du domaine D limité par $(x'x)$, les droites d'équation $x = a, x = b$, et la courbe (Γ) représentative de f vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Notons $A_0(a,0)$, $B_0(b,0)$, $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ et (C) la courbe orientée formée de la succession des segments de droite AA_0, A_0B_0, B_0B et $-(\Gamma)$. Ainsi, D est limité par (C) et (C) est orientée en sens direct. Puisque :

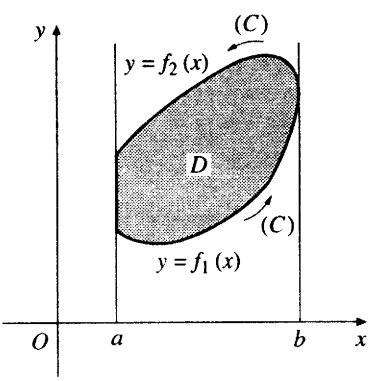
$$\begin{cases} \text{sur le segment } A_0B_0 : \; -y\,\mathrm{d}x = 0 \quad (\text{car } y = 0) \\ \text{sur les segments } AA_0 \text{ et } B_0B : \; -y\,\mathrm{d}x = 0 \quad (\text{car } x \text{ est constant}) \end{cases},$$

on a : $\displaystyle\int_{(C)} -y\,\mathrm{d}x = \int_{-(\Gamma)} -y\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Donc : $\displaystyle\mathcal{A}(D) = -\int_{(C)} y\,\mathrm{d}x.$

2) Considérons une partie D du plan telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et deux applications $f_1, f_2 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\; a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}.$$



L'aire algébrique de D est la différence de deux aires de domaines calculées au *1)* :

$$\mathcal{A}(D) = -\int_{(C_2')} y\,\mathrm{d}x + \int_{(C_1')} y\,\mathrm{d}x = \int_{(C)} -y\,\mathrm{d}x,$$

où (C_1'), (C_2') sont obtenues à partir de f_1, f_2 comme au *1)*, et (C) est le bord de D (souvent noté ∂D) parcouru une fois dans le sens direct.

3) Une étude analogue à celles de *1)* et *2)* montre que si (C) est le bord d'un domaine D du plan, orienté dans le sens direct : $\mathcal{A}(D) = \int_{(C)} x \, \mathrm{d}y$.

4) Puisque $\mathcal{A}(D) = -\int_{(C)} y \, \mathrm{d}x = \int_{(C)} x \, \mathrm{d}y$, on déduit aussi :

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2} \int_{(C)} (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x).$$

Concluons :

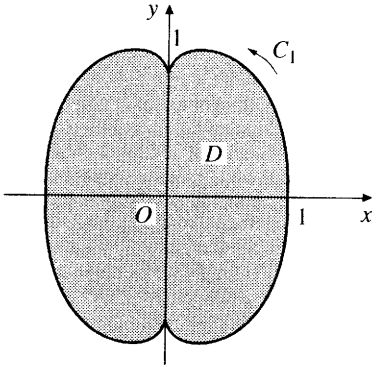
◆ **Théorème** Soit D un domaine du plan, limité par une courbe fermée (C) orientée dans le sens direct. L'aire algébrique $\mathcal{A}(D)$ de D est donnée par :

$$\mathcal{A}(D) = -\int_{(C)} y \, \mathrm{d}x = \int_{(C)} x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{(C)} (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x).$$

EXEMPLE :

Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos t (1 + \sin^2 t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



Commencer par tracer approximativement (C) (voir le Tome de Géométrie).

Par symétries :

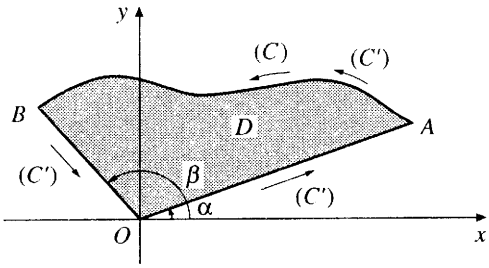
$\mathcal{A}(D) = 4 \, \frac{1}{2} \int_{(C_1)} (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x)$, où (C_1) est la partie de (C) correspondant à t allant de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

Sur (C_1) :

$$\begin{aligned} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x &= \left(\sin^3 t (-\sin t (1 + \sin^2 t) + 2 \sin t \cos^2 t) - \cos t (1 + \sin^2 t) 3 \sin^2 t \cos t \right) \mathrm{d}t \\ &= (-3 \sin^2 t + \sin^4 t) \mathrm{d}t = \left(-3 \, \frac{1 - \cos 2t}{2} + \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= \left(-\frac{5}{4} + \cos 2t + \frac{1}{4} \cos^2 2t \right) \mathrm{d}t = \left(-\frac{9}{8} + \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{A}(D) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{9}{8} + \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) \mathrm{d}t = \frac{9\pi}{8} \simeq 3{,}534.$ ■

Examinons maintenant le cas où (C) est définie en coordonnées polaires : $\rho = \rho(\theta)$, θ décrivant un intervalle $[\alpha; \beta]$ $(\alpha < \beta)$.



Considérons la courbe fermée (C') formée successivement de (C) et des deux segments joignant O aux extrémités A, B de (C). D'après le théorème précédent :

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C')} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Mais ici, (C) est paramétrée par : $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [\alpha; \beta]$.

Comme $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \rho\cos\theta(\mathrm{d}\rho\sin\theta + \rho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - \rho\sin\theta(\mathrm{d}\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = \rho^2\,\mathrm{d}\theta$, on a : $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C')} \rho^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{(C)} \rho^2\,\mathrm{d}\theta$, puisque θ est constant sur les segments BO et OA. Ainsi :

◆ **Proposition**

Soit (C) une courbe orientée définie en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$, d'origine A, d'extrémité B. L'aire du secteur D limité par (C), OA, OB vaut :

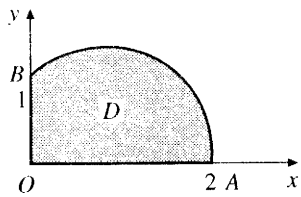
$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C)} \rho^2 \mathrm{d}\theta.$$

En particulier, si (C) est fermée, l'aire du domaine D limité par (C) est donnée par :

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_{(C)} \rho^2\,\mathrm{d}\theta.$$

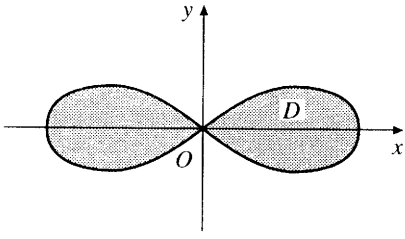
EXEMPLES :

1) Aire du secteur limité par les deux demi-axes Ox, Oy et la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.



$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3\pi}{8} + 1 \simeq 2{,}178.
\end{aligned}$$

2) Aire du domaine intérieur à la lemniscate d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$.



Par symétries :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D) &= 4\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 1.\end{aligned}$$

Exercice

◇ **13.1.3** Calculer les aires suivantes (des intégrales généralisées peuvent intervenir) :

a) aire de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \forall t \in [0;\,1],\ |x + yt + t^2| \leqslant 1\}$

b) aire de la boucle de $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$

c) aire limitée par la courbe $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t\,(1 + \sin t) \end{cases}$

d) aire de la boucle de la strophoïde droite $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

e) aire de la boucle de $\rho = \sqrt{\sin^3\theta}$

f) aire limitée par $\rho = \dfrac{1}{2 + \cos 4\theta}$

g) aire limitée par $\rho = \cos^3\theta - \sin^3\theta$

h) aire de la boucle de $\rho = \dfrac{\cos\theta}{1 - \cos\theta}$

i) aire de la boucle de $\rho = 1 + \tan\dfrac{\theta}{2}$

j) aire comprise entre les deux boucles du limaçon de Pascal $\rho = 2\cos\theta - 1$.

13.2 Intégrales doubles

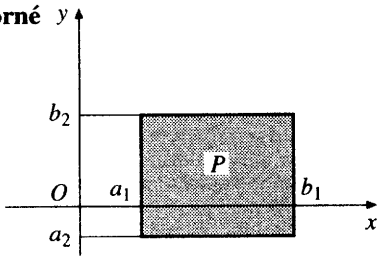
Conformément au programme et dans un but d'allègement, nous ne donnons pas de démonstration dans ce § 13.2, essentiellement destiné aux applications à la Physique. Le lecteur pourra le plus souvent rétablir aisément les preuves; cependant, l'établissement du théorème de Fubini (13.2.4 p. 245) et du théorème de changement de variables (13.2.5 p. 249) est délicat. On trouvera une étude complète et approfondie dans le *Cours de mathématiques* de J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse (Tome 3, pp. 267 à 370).

13.2.1 Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$

1) Pavés

◆ **Définition 1** On appelle **pavé fermé borné** (de $\mathbb{R}^2$) toute partie P de $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe $(a_1,b_1,a_2,b_2) \in \mathbb{R}^4$

tel que : $\begin{cases} a_1 \leqslant b_1 \\ a_2 \leqslant b_2 \\ P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \end{cases}$.



Plus généralement, on appelle **pavé** de $\mathbb{R}^2$ tout produit cartésien $I \times J$ où I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

L'étude du cas $a_1 = b_1$ ou $a_2 = b_2$ étant généralement évidente, nous supposerons, sauf indication contraire, $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. La donnée d'un pavé fermé borné P détermine de façon unique les réels a_1, b_1, a_2, b_2.

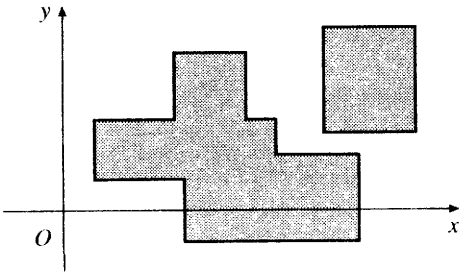
◆ **Définition 2** Soit $P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ un pavé fermé borné.

1) On appelle **aire de** P le réel, noté $\mathcal{A}(P)$, défini par : $\mathcal{A}(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

2) On appelle **intérieur de** P, et on note $\overset{\circ}{P}$, la partie $]a_1; b_1[\times]a_2; b_2[$ de $\mathbb{R}^2$.

2) Parties pavables

◆ **Définition 1** On appelle **partie pavable** (de $\mathbb{R}^2$) toute réunion d'un nombre fini de pavés fermés bornés de $\mathbb{R}^2$.



Exemple de partie pavable de $\mathbb{R}^2$

Remarques :

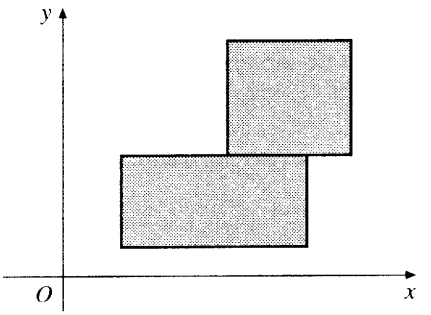
1) $\varnothing$ est pavable.

2) Tout pavé fermé borné est une partie pavable.

3) Toute partie pavable est fermée bornée dans $\mathbb{R}^2$.

◆ **Définition 2** Deux pavés fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ sont dits **quasi-disjoints** si et seulement si leurs intérieurs sont disjoints.

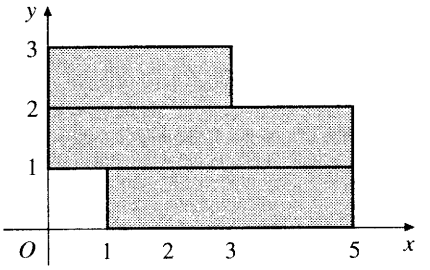
Exemple de deux pavés quasi-disjoints



◆ **Proposition 1** Toute partie pavable est réunion d'un nombre fini de pavés fermés bornés quasi-disjoints.

EXEMPLES :

La partie $B = ([0; 3] \times [1; 3]) \cup ([1; 5] \times [0; 2])$ est pavable (par définition) et peut se décomposer (par exemple) en $B = ([1; 5] \times [0; 1]) \cup ([0; 5] \times [1; 2]) \cup ([0; 3] \times [2; 3])$, où les trois pavés qui interviennent sont deux à deux quasi-disjoints.

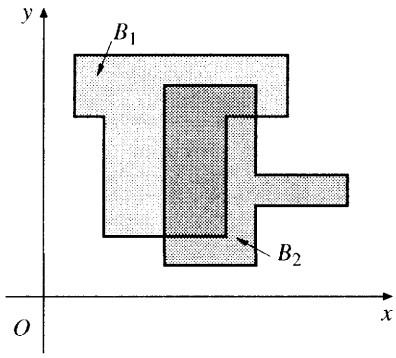


◆ **Proposition-Définition 2** Soit B une partie pavable de $\mathbb{R}^2$; si $P_1, \ldots, P_N$ sont des pavés fermés bornés deux à deux quasi-disjoints tels que $B = \bigcup_{i=1}^{N} P_i$, le réel $\sum_{i=1}^{N} \mathcal{A}(P_i)$ ne dépend pas de $(P_1, \ldots, P_N)$; ce réel est appelé l'**aire** de B, et noté $\mathcal{A}(B)$.

Remarque : La notion d'aire d'une partie pavable du plan prolonge celle d'aire d'un pavé fermé borné (cf. 13.2.1 1) p. 237).

◆ **Proposition 3** Soient B_1, B_2 deux parties pavables de $\mathbb{R}^2$.

1) $B_1 \cup B_2$ et $B_1 \cap B_2$ sont pavables et $\mathcal{A}(B_1 \cup B_2) + \mathcal{A}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{A}(B_1) + \mathcal{A}(B_2)$.



2) Si $B_1 \subset B_2$, alors $B_2 - \overset{\circ}{B_1}$ est pavable et $\mathcal{A}(B_2 - \overset{\circ}{B_1}) = \mathcal{A}(B_2) - \mathcal{A}(B_1)$.

3) Partie quarrables

◆ **Définition 1** Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. On note :

- $\mathcal{A}^-(D)$ la borne supérieure des aires des parties pavables de $\mathbb{R}^2$ contenues dans D
- $\mathcal{A}^+(D)$ la borne inférieure des aires des parties pavables de $\mathbb{R}^2$ contenant D.

On dit que D est **quarrable** si et seulement si $\mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D)$; dans ce cas, on appelle **aire de** D, et on note $\mathcal{A}(D)$, le réel défini par :

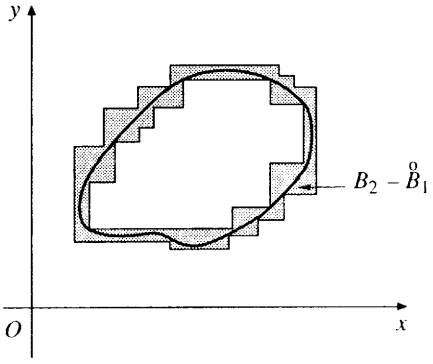
$$\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D).$$

Remarques :

1) • $\mathcal{A}^+(D)$ existe; en effet, puisque D est bornée, il existe un pavé fermé borné (donc pavable) P tel que $D \subset P$.

• $\mathcal{A}^-(D)$ existe car $\varnothing$ est une partie pavable de $\mathbb{R}^2$ incluse dans D et l'ensemble des aires des parties pavables de $\mathbb{R}^2$ contenues dans D est majoré par l'aire $\mathcal{A}(P)$ d'un pavé contenant D.

2) Pour qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ soit quarrable, il faut et il suffit que, pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, il existe deux parties pavables B_1, B_2 de $\mathbb{R}^2$ telles que : $\begin{cases} B_1 \subset D \subset B_2 \\ \mathcal{A}(B_2 - B_1) < \varepsilon \end{cases}$.



3) Il existe des parties bornées de $\mathbb{R}^2$ non quarrables : $D = [0;\ 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ par exemple, où $\mathcal{A}^-(D) = 0$ et $\mathcal{A}^+(D) = 1$.

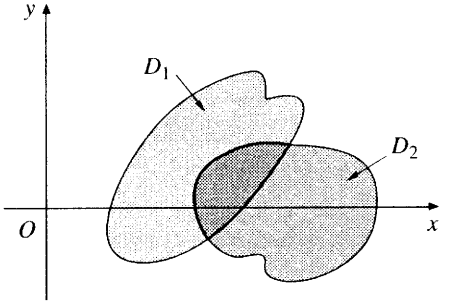
◆ **Proposition 1** Si D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, alors $\overline{D}$ (ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ adhérents à D) et $\overset{\circ}{D}$ (intérieur de D dans $\mathbb{R}^2$) sont quarrables et :

$$\mathcal{A}(\overline{D}) = \mathcal{A}(\overset{\circ}{D}) = \mathcal{A}(D).$$

(L'intérieur $\overset{\circ}{D}$ de D est défini par : $\complement_{\mathbb{R}^2}(\overset{\circ}{D})$ est l'ensemble des points adhérents à $\complement_{\mathbb{R}^2}(D)$).

◆ **Proposition 2** Soient D_1, D_2 deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$. Alors $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$, $D_1 - D_2$ sont quarrables et :

$$\mathcal{A}(D_1 \cup D_2) + \mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2).$$



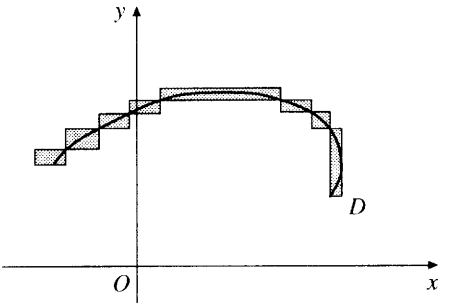
◆ **Proposition 3** Si D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et θ une isométrie affine de $\mathbb{R}^2$, alors $\theta(D)$ est quarrable et : $\mathcal{A}(\theta(D)) = \mathcal{A}(D)$.

Autrement dit, l'aire est invariante par isométrie.

Le résultat précédent est aussi une conséquence du théorème de changement de variables (13.2.5 2) Théorème p. 249).

◆ **Définition 2** Une partie quarrable D de $\mathbb{R}^2$ est dite **négligeable** si et seulement si $\mathcal{A}(D) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie pavable B de $\mathbb{R}^2$ telle que : $D \subset B$ et $\mathcal{A}(B) < \varepsilon$.

◆ **Proposition 4** Toute courbe de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 par morceaux est quarrable et négligeable (une telle courbe étant l'image d'une application $[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont les deux coordonnées sont de classe C^1 par morceaux).



Remarque : Il existe des «courbes» de $\mathbb{R}^2$ continues (mais non C^1 par morceaux) remplissant $[0; 1]^2$ (**courbe de Péano**); une telle courbe est quarrable, mais son aire vaut 1, ce qui peut paraître surprenant.

◆ **Proposition 5** Toute partie bornée de $\mathbb{R}^2$, limitée par une courbe de classe C^1 par morceaux, est quarrable.

Le cas le plus fréquent (pour le calcul des intégrales doubles) est celui où D est défini par des inégalités du type : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \end{cases}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a \leqslant b)$ et $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications (cf. 13.2.4. p. 245).

On dispose plus généralement du théorème suivant, où la frontière de D est définie par : $\mathrm{Fr}(D) = \overline{D} \cap \overline{\complement_{\mathbb{R}^2}(D)}$ et $\overline{X}$ désigne l'ensemble des points adhérents à X.

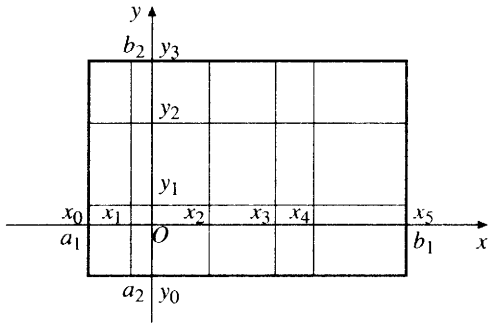
◆ **Théorème** Pour qu'une partie bornée D de $\mathbb{R}^2$ soit quarrable, il faut et il suffit que sa frontière $\mathrm{Fr}(D)$ soit négligeable.

13.2.2 Définition de l'intégrale double

1) Intégration des applications en escalier sur un pavé fermé borné

◆ **Définition 1** Soit $P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$. On appelle **subdivision** de P toute famille finie σ de points de P telle qu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a_1; b_1]$ et une subdivision $(y_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ de $[a_2; b_2]$ telles que $\sigma = ((x_i, y_j))_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}}$.

Rappelons (cf. 6.1.1, Tome 1, p. 163) qu'une subdivision de $[a_1; b_1]$ est une famille $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de $[a_1; b_1]$ telle que : $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b_1$.
On appelle **cellules** de la subdivision σ de P les pavés fermés bornés $[x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]$, $(i,j) \in \{0,\ldots,p-1\} \times \{0,\ldots,q-1\}$.



Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de P.

◆ **Définition 2** Soit P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $e : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée; on dit que e est **en escalier** sur P si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que e soit constante sur l'intérieur de chaque cellule de σ, c'est-à-dire : il existe une subdivision $((a_i, b_j))_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}}$ de P et une famille de réels $(\lambda_{i,j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant q-1}}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{0,\ldots,p-1\} \times \{0,\ldots,q-1\}, \quad \forall (x,y) \in]x_i; x_{i+1}[\times]y_j; y_{j+1}[,$$
$$e(x,y) = \lambda_{i,j}.$$

2) Soient $e : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application en escalier et $\sigma \in \mathcal{S}$; on dit que σ est **adaptée à** e si et seulement si e est constante sur l'intérieur de chaque cellule de σ.

◆ **Proposition-Définition 3** Soient P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $e : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application en escalier sur P, $\sigma = ((x_i, y_j))_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}}$ une subdivision de P adaptée à e, $\lambda_{i,j}$ la valeur de e sur $]x_i; x_{i+1}[\times]y_j; y_{j+1}[$.
Le réel $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant q-1}} (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_j)\lambda_{i,j}$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à e; ce réel est appelé **l'intégrale de** e **sur** P, et notée $\displaystyle\iint_P e$ ou $\displaystyle\iint_P e(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

On remarquera que $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ est l'aire du pavé $[x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]$.

2) Cas des applications définies sur un pavé fermé borné

◆ **Définition 1** Soient P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée.

On dit que f est **intégrable sur** P si et seulement s'il existe deux suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur P telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f - e_n| \leqslant \varphi_n \\ \displaystyle\iint_P \varphi_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \end{cases}.$$

Tout couple $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ vérifiant la condition précédente est dit **associé à** f.

◆ **Proposition-Définition 2** Soient P un pavé fermé borné, $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable sur P. Pour tout couple $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ associé à f, la suite $\left(\displaystyle\iint_P e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, et sa limite ne dépend pas du choix du couple $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ associé à f. Cette limite s'appelle l'**intégrale (double) de** f **sur** P et est notée $\displaystyle\iint_P f$, ou $\displaystyle\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3) Cas des applications définies sur une partie quarrable

Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée.

◆ **Proposition** Pour tout pavé fermé borné P contenant D, notons

$$\begin{array}{rcl} f_P : P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases} \end{array}.$$

S'il existe un pavé fermé borné P contenant D tel que f_P soit intégrable sur P, alors pour tout pavé fermé borné Q contenant D, f_Q est intégrable sur Q et

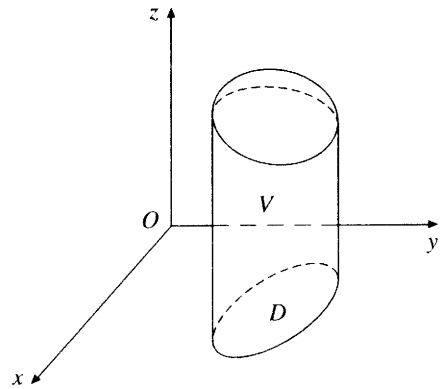
$$\iint_P f_P = \iint_Q f_Q.$$

◆ **Définition 3** On dit que f est **intégrable sur** D si et seulement s'il existe un pavé fermé borné P contenant D tel que f_P soit intégrable sur P, et on appelle alors **intégrable (double) de** f **sur** D le réel, noté $\displaystyle\iint_D f$, défini par :

$$\iint_D f = \iint_P f_P.$$

◆ **Théorème** Toute application $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue sur une partie quarrable D de $\mathbb{R}^2$ est intégrable sur D.

Ce théorème assure l'existence de la plupart des intégrales doubles que le lecteur sera amené à envisager, dans le cadre des programmes.



En supposant $f \geqslant 0$, $\iint_D f$ représente le volume de la partie E suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{ x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \end{cases} \right\}.$$

13.2.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale double

◆ **Proposition 1** Si D est quarrable, alors $\iint_D 1 = \mathcal{A}(D)$.

◆ **Proposition 2** Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée; pour que $\iint_D f$ existe, il faut et il suffit que $\iint_{\overline{D}} f$ existe ou que $\iint_{\mathring{D}} f$ existe, et on a dans ce cas : $\iint_{\overline{D}} f = \iint_{\mathring{D}} f = \iint_D f$.

La Prop. 2 montre qu'on peut, en pratique, se ramener au cas où D est fermée ou ouverte.

◆ **Proposition 3** (**«Linéarité de l'intégrale double»**)

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur la partie quarrable D, alors $\lambda f + g$ est intégrable sur D et : $\iint_D (\lambda f + g) = \lambda \iint_D f + \iint_D g$.

◆ **Proposition 4** Soient D_1, D_2 deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$, $f : D_1 \cup D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $f|_{D_1}$ et $f|_{D_2}$ soient intégrables sur D_1 et D_2 respectivement. Alors f est intégrable sur $D_1 \cup D_2$ et :

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f.$$

On appliquera souvent la Prop. 4 au cas où $\mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = 0$ (auquel cas on a $\iint_{D_1 \cap D_2} f = 0$).

◆ **Proposition 5** Soient D_1, D_2 deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$ telles que $D_1 \subset D_2$, et $f : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable sur D_2. Alors $f|_{D_1}$ est intégrable sur D_1.

◆ **Proposition 6** («**Positivité et croissance de l'intégrale double**»)

Soient D, D_1, D_2 des parties quarrables de $\mathbb{R}^2$.

1) Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D et si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\iint_D f \geqslant 0$.

2) Si $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur D et si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\iint_D f \leqslant \iint_D g$.

3) Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D, alors

$$\mathcal{A}(D)\,\mathrm{Inf}(f) \leqslant \iint_D f \leqslant \mathcal{A}(D)\,\mathrm{Sup}(f).$$

4) Si $D_1 \subset D_2$, $f : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D_2 et $f \geqslant 0$, alors

$$\iint_{D_1} f \leqslant \iint_{D_2} f.$$

5) Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D, alors $|f|$ est intégrable sur D et :

$$\left|\iint_D f\right| \leqslant \iint_D |f|.$$

◆ **Proposition 7** («**Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales doubles**»)

Si $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur la partie quarrable D, alors fg, f^2, g^2 sont intégrables sur D et :

$$\left(\iint_D fg\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f^2\right)\left(\iint_D g^2\right).$$

13.2.4 Théorème de Fubini

◆ **Théorème** (**Théorème de Fubini**)

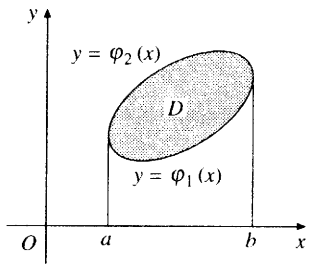
Soient • $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$

- $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$
- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors • D est quarrable

- f est intégrable sur D
- $\displaystyle\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

Nous retrouverons l'étude de fonctions du type $x \longmapsto \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ dans le Tome 3 (intégrales dépendant d'un paramètre).



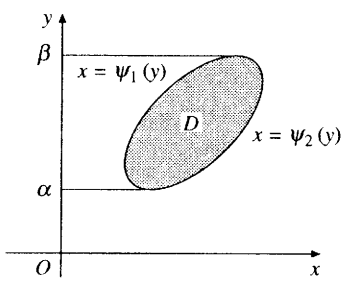
Remarques :

1) Toute partie convexe, fermée et bornée D de $\mathbb{R}^2$ est de la forme précédente.

2) Le théorème de Fubini montre qu'une intégrale double (sur un domaine du type indiqué) se ramène à deux intégrales simples emboîtées.

3) En échangeant les rôles des coordonnées, on voit que, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \alpha \leqslant y \leqslant \beta$ et $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ (où $\psi_1, \psi_2 : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et telles que $\psi_1 \leqslant \psi_2$), alors (D est quarrable, f est intégrable sur D et) :

$$\iint_D f = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$



Cette possibilité d'interversion des coordonnées par le théorème de Fubini permet d'obtenir certaines égalités faisant intervenir des intégrales simples.

◆ **Corollaire 1** (Un cas particulier du théorème de Fubini)

Soient • $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$

- $D = [a; b] \times [c; d]$
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors f est intégrable sur D et :

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

◆ **Corollaire 2** (Un cas particulier du Corollaire 1)

Soient • $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$

- $D = [a; b] \times [c; d]$
- $u : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
- $v : [c; d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors l'application $f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto u(x)v(y) \end{array}$ (quelquefois notée $u \otimes v$) est intégrable sur D et :

$$\iint_D u(x)v(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d v(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

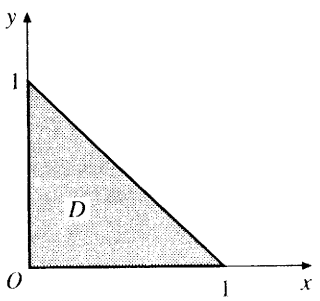
Le cas précédent :

$\begin{cases} \text{le «domaine d'intégration» est un pavé} \\ \text{et} \\ \text{la fonction à intégrer est «produit d'une fonction de } x \text{ et d'une fonction de } y\text{»} \end{cases}$

est très fréquent en pratique; on s'y ramène par exemple en passant en coordonnées polaires dans certains cas (cf. 13.2.5 2) exemples p. 251).

EXEMPLES :

Calculer $I = \iint_D f$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$ et $f(x,y) = x^2 + y^2$.



D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercices

◇ **13.2.1** Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les exemples suivants, où l'on donne les conditions définissant D puis $f(x,y)$:

a) $\begin{cases} [0;\pi]^2 \\ (x+y)\sin x \sin y \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1 \\ xy(x+y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1 \\ \ln(1+x+y) \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy+x+y \leqslant 1 \\ xy \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ x+y \leqslant 4 \\ \dfrac{1}{(x+y)^4} \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} y \geqslant 0,\ x-y+1 \geqslant 0,\ x+2y-4 \leqslant 0 \\ x \end{cases}$

g) $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y \leqslant 1 \\ \ln(1+x^2+y) \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} y \geqslant x^2,\ x \geqslant y^2 \\ xy \end{cases}$.

◇ **13.2.2** Calculer

$$\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

◇ **13.2.3** On note E l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute f de E et tout λ de $\mathbb{R}$, on note $g_\lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad g_\lambda(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(t-x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer : $g_\lambda \in E$.

On définit ainsi une application $T_\lambda : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto g_\lambda \end{array}$.

b) Etablir : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\quad T_\mu - T_\lambda = (\lambda-\mu)T_\lambda \circ T_\mu$.

13.2.5 Changement de variables dans une intégrale double

1) C^1-difféomorphismes

Nous allons utiliser ici des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$; l'étude en sera reprise et généralisée dans le Tome 4.

◆ **Définition** Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\Phi : U \longrightarrow V$ une application, $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$\forall (x,y) \in U,\ \Phi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

1) On dit que Φ est **de classe** C^1 sur U si et seulement si P et Q sont de classe C^1 sur U. Dans ce cas, pour tout (x,y) de U, on appelle **matrice jacobienne** de Φ en (x,y) la matrice carrée d'ordre 2, note $J_\Phi(x,y)$ définie par :

$$J_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

et on appelle **jacobien** (ou : **déterminant jacobien**) de Φ en (x,y) le déterminant de $J_\Phi(x,y)$, c'est-à-dire : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

2) On dit que Φ est un **C^1-difféomorphisme** si et seulement si :

$$\begin{cases} \Phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \Phi \text{ est bijective} \\ \Phi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V \end{cases}.$$

Nous verrons dans le Tome 4 que, si $\Phi : U \longrightarrow V$ et $\Psi : V \longrightarrow W$ sont de classe C^1, alors $\Psi \circ \Phi$ est de classe C^1 et :

$\forall (x,y) \in U,\ J_{\Psi\circ\Phi}(x,y) = J_\Psi(\Phi(x,y)) \cdot J_\Phi(x,y)$.

En particulier, si Φ est un C^1-difféomorphisme, alors, pour tout (x,y) de U, la matrice $J_\Phi(x,y)$ est inversible et : $J_{\Phi^{-1}}(\Phi(x,y)) = (J_\Phi(x,y))^{-1}$.

2) Changement de variables dans une intégrale double

◆ **Théorème** Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\Phi : U \longrightarrow V$ un C^1-difféomorphisme, Δ une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ incluse dans U, $f : \Phi(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- $\Phi(\Delta)$ est quarrable
- $\displaystyle\iint_{\Phi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\Phi(u,v))\,|\det(J_\Phi(u,v))|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

Les cas les plus fréquents en pratique sont les suivants :

a) Changement de variables affine

$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $ad - bc \neq 0$.

Ici : $\det\big(J_\Phi(u,v)\big) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; on remplacera donc $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par $|ad - bc|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

En particulier, on peut quelquefois utiliser une symétrie simultanée de D et de f pour réduire le calcul de $\iint_D f$.

EXEMPLE :

Calculer $I = \iint_D f$, où $D = [-1;\,1]^2$ et $f : (x,y) \longmapsto x$.

Le domaine d'intégration D est symétrique par rapport à $(y'y)$ et :

$\forall (x,y) \in D,\ f(-x,y) = -f(x,y)$.

Ceci nous amène à effectuer le changement de variables défini par :

$x = -X,\ y = Y$.

On obtient : $I = \iint_D (-X)|-1|\mathrm{d}X\mathrm{d}Y = -I$, d'où $I = 0$.

b) Passage en polaires

Avec les notations usuelles : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$,

d'où, en notant $\Phi : (\theta,\rho) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$:

$$\det(J_\Phi(\theta,\rho)) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\rho.$$

On admettra (les hypothèses du théorème précédent ne sont pas réunies) que, pour calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en envisageant l'utilisation des coordonnées polaires, on remplace :

- D par le domaine des (θ,ρ) correspondant (ne pas hésiter à tracer une figure)
- $f(x,y)$ par $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$
- $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par $|\rho|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$.

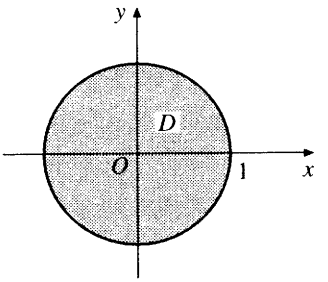
Le plus souvent, ρ sera positif ou nul.

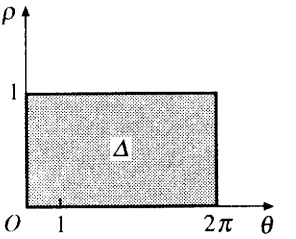
EXEMPLES :

1) Calculer $I = \iint_D f$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et $f : (x,y) \longmapsto x^2y^2$.

En passant en coordonnées polaires et en notant $\Delta = [0; 2\pi] \times [0; 1]$, on a :

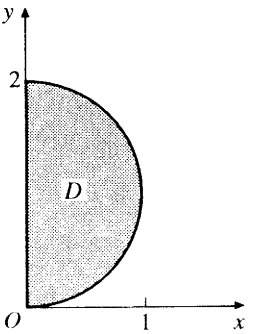
$$I = \iint_\Delta (\rho \cos\theta)^2 (\rho \sin\theta)^2 \rho \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^5 \mathrm{d}\rho\right)$$
$$= \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{48}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{24}.$$

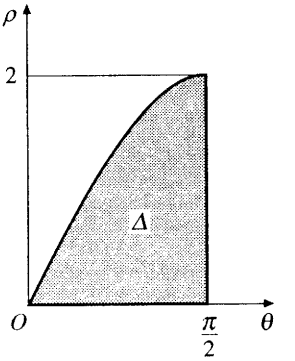




2) Calculer $I = \iint_D f$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geqslant 0,\ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\}$, $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$.

Pour $\rho > 0$: $x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0 \iff \rho^2 - 2\rho \sin\theta \leqslant 0 \iff \rho \leqslant 2 \sin\theta$.





En notant $\Delta = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 2 \sin\theta\}$, on a donc :

$$I = \iint_\Delta \rho^3 \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \, \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Exercices

◇ **13.2.4** Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les exemples suivants, où l'on donne les conditions définissant D puis $f(x,y)$:

a) $\begin{cases} x \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1 \\ \dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^4+y^4+x^2-y^2 \leqslant 1 \\ 2x(x^2+y^2) \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1 \\ |x-y| \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x,\ x^2+y^2 \leqslant 1 \\ xy\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ fixé} \\ x^2+y^2 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ fixé} \\ x^3+y^3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y \geqslant 0,\ x^2+y^2-2x \leqslant 0 \\ x^2y \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} x \geqslant 1,\ x^2+y^2-2x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1,\ x^2+y^2-2y \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ *k)* $\begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leqslant 1 \\ x^2-y^2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^2+y^2-Rx \leqslant 0,\ R \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé} \\ \sqrt{R^2-x^2-y^2} \end{cases}$ *m)* $\begin{cases} y \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x+y \end{cases}$

n) $\begin{cases} |x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \end{cases}$ *o)* $\begin{cases} y \geqslant 0,\ x^2+y^2-x \leqslant 0,\ x^2+y^2-y \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} (x^2+y^2)^2 \leqslant 2xy \\ \sqrt{xy} \end{cases}$ *q)* $\begin{cases} |\rho| \leqslant \sqrt{\cos\theta} \text{ (en polaires)} \\ x^2 \end{cases}$ *r)* $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1 \\ (x+y)^2 e^{x^2-y^2} \end{cases}$

s) $\begin{cases} 0 \leqslant x+y \leqslant 4,\ x \leqslant y,\ xy \geqslant 1 \\ (x^2-y^2)\cos(xy) \end{cases}$ *t)* $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^3+y^3 \leqslant 1 \\ x^2y^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3} \end{cases}$

u) $\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \leqslant 1 \\ xy \end{cases}$ *v)* $\begin{cases} y^2-2px \leqslant 0,\ x^2-2py \leqslant 0,\ p \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé} \\ \exp\dfrac{x^3+y^3}{xy} \end{cases}$

(utiliser le changement $x = u^2v$, $y = uv^2$)

w) $\begin{cases} a \leqslant xy \leqslant b,\ y \geqslant x \geqslant 0, y^2-x^2 \leqslant 1,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixé tel que } 0 < a < b \\ (y^2-x^2)(x^2+y^2) \end{cases}$

(utiliser le changement $u = xy$, $v = y^2-x^2$).

◇ **13.2.5** Soit D la partie du demi-plan $y > 0$ limitée par les quatre paraboles :
$P_1 : y^2 = 4x+4$, $P_2 : y^2 = 2x+1$, $P_3 : y^2 = 9-6x$, $P_4 : y^2 = 4-4x$,
et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Calculer $I = \iint_D f$ en utilisant le changement de variables défini par : $x = u^2-v^2$, $y = 2uv$, $u > 0$, $v > 0$.

◇ **13.2.6** Soient A, a,b,c des réels tels que $A > 0$, $a > 0$, $b^2 - ac < 0$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant A\}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \exp(-(ax^2 + 2bxy + cy^2))$. Calculer $I = \iint_D f$.

◇ **13.2.7** Soient $a \in \mathbb{R}_+$, $f : [-a; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et paire, $D = [0; a]^2$. Montrer :

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^a (a-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

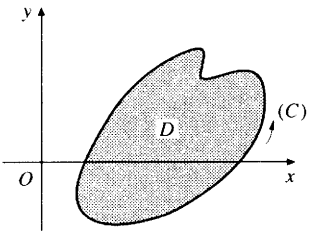
◇ **13.2.8*** Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a > b$, (E) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ les foyers de (E) ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$), D la partie fermée bornée limitée par (E). Calculer $\iint_D (MF + MF')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (où $M(x,y)$) en décomposant D en ellipses homofocales à (E) (c'est-à-dire : ayant les mêmes foyers que (E)).

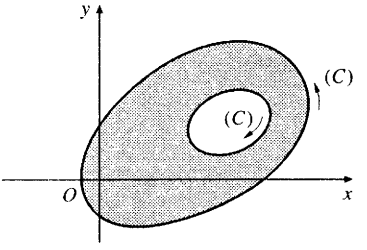
13.2.6 Formule de Green-Riemann

◆ **Théorème** **(Formule de Green-Riemann)**

Soient
- D un compact «simple» de $\mathbb{R}^2$, limité par une courbe fermée (C) de classe C^1 par morceaux, orientée dans le sens direct
- U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D
- $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.

Alors : $\displaystyle\int_{(C)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$





Remarques :

1) Si ω est fermée et U étoilé, on retrouve $\displaystyle\int_{(C)} \omega = 0$ (cf. 13.1.4 p. 230).

2) Si ($P = -y$, $Q = 0$) ou ($P = 0, Q = x$), on retrouve l'expression d'une aire plane à l'aide d'une intégrale curviligne (13.1.6, p. 234) ou d'une intégrale double (13.2.3 Prop. 1 p. 244).

Exercice

◇ **13.2.9** Soient D une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, limitée par une courbe fermée (C) de classe C^1 orientée dans le sens direct, $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. Montrer :

$$\iint_D u(x,y)\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{(C)} u(x,y)v(x,y)\,\mathrm{d}x - \iint_D \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)v(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(formule ressemblant à l'intégration par parties, 6.4.4, Tome 1, p. 191).

13.3 Intégrales triples

L'étude des intégrales triples est analogue à celle des intégrales doubles. Nous allons brièvement dégager les résultats.

13.3.1 Parties cubables de $\mathbb{R}^3$

Cette étude est similaire à celle des parties quarrables de $\mathbb{R}^2$ (13.2.1 p. 237), en faisant intervenir une 3e coordonnée, notée généralement z. Le vocabulaire est identique sauf :

- **volume** $\mathcal{V}(D)$ à la place d'aire $\mathcal{A}(D)$
- **cubable** à la place de quarrable.

13.3.2 Définition de l'intégrale triple

On reprend la définition de l'intégrale double (13.2.2 p. 243) en remplaçant $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ par $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$.

Il n'y a pas d'interprétation géométrique «tangible» pour $\iiint_D f$.

13.3.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale triple

Comme dans 13.2.3 p. 244, on obtient, sous des hypothèses analogues (de cubabilité et d'intégrabilité) :

1) $\iiint_D 1 = \mathcal{V}(D)$

2) $\iiint_{\overline{D}} f$ existe si et seulement si $\iiint_D f$ existe, et dans ce cas :

$$\iiint_{\overline{D}} f = \iiint_D f.$$

3) $\iiint_D (\lambda f + g) = \lambda \iiint_D f + \iiint_D g.$

4) Si $f|_{D_1}$ et $f|_{D_2}$ sont intégrables sur D_1 et D_2 respectivement, alors f est intégrable sur $D_1 \cup D_2$ et :

$$\iiint_{D_1 \cup D_2} f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f - \iiint_{D_1 \cap D_2} f.$$

5) Si f est intégrable sur D_2 et $D_1 \subset D_2$, alors $f|_{D_1}$ est intrégrable sur D_1.

6) $f \geqslant 0 \Longrightarrow \iiint_D f \geqslant 0.$

7) $f \leqslant g \Longrightarrow \iiint_D f \leqslant \iiint_D g.$

8) $\mathcal{V}(D)\,\mathrm{Inf}(f) \leqslant \iiint_D f \leqslant \mathcal{V}(D)\,\mathrm{Sup}(f).$

9) $(f \geqslant 0 \text{ et } D_1 \subset D_2) \Longrightarrow \iiint_{D_1} f \leqslant \iiint_{D_2} f.$

10) $\left|\iiint_D f\right| \leqslant \iiint_D |f|.$

11) $\left(\iiint_D fg\right)^2 \leqslant \left(\iiint_D f^2\right)\left(\iiint_D g^2\right).$

13.3.4 Théorème de Fubini

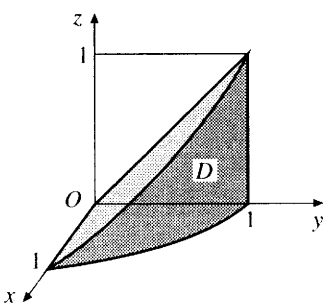
◆ **Théorème** (**Théorème de Fubini**)

Soient
- $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$
- $\varphi_1, \varphi_2 : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$
- $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$
- $g_1, g_2 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $g_1 \leqslant g_2$
- $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \\ g_1(x,y) \leqslant z \leqslant g_2(x,y) \end{cases}\right\}$
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors
- D est cubable
- f est intégrable sur D
- $\displaystyle\iiint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

EXEMPLE :

Calculer $I = \iiint_D f$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ z \leqslant y,\ x^2 + y \leqslant 1\}$
et $f(x,y,z) = xyz$.



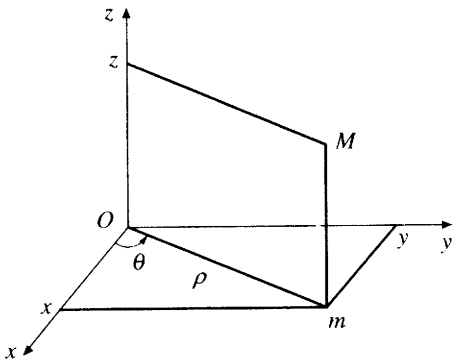
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^y xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \frac{1}{2}xy^3\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x\,\frac{(1-x^2)^4}{4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{80}(1-x^2)^5\right]_0^1 = \frac{1}{80}.$$

13.3.5 Changement de variables dans une intégrale triple

◆ **Théorème** Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \longrightarrow V$ un C^1-difféomorphisme, Δ une partie cubable de $\mathbb{R}^3$ incluse dans U, $f : \Phi(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- $\Phi(\Delta)$ est cubable
- $\displaystyle\iiint_{\Phi(\Delta)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} f(\Phi(u,v,w))\,|\det(J_\Phi(u,v,w))|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$

1) Passage en cylindriques



Un point $M(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ est repéré par un **système de coordonnées cylindriques** (θ,ρ,z) où (θ,ρ) est un système de coordonnées polaires de la projection orthogonale m de M sur le plan xOy. On a ainsi les formules de changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

On admettra que la conclusion du théorème précédent est valable ici, bien que les hypothèses n'en soient pas réunies.

Ici : $\det(J_\Phi(\theta,\rho,z)) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \rho\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$

On retiendra :

> Pour passer en coordonnées cylindriques dans une intégrale triple, on remplace $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ par $|\rho|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$.

EXEMPLE :

Calculer $I = \displaystyle\iiint_D f$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leqslant z \leqslant 1, x^2+y^2 \leqslant z\}$, $f(x,y,z) = |x^2-y^2|$.

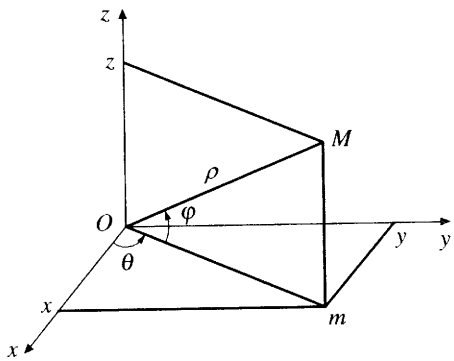
En passant en coordonnées cylindriques :

$$(x,y,z) \in D \iff (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 1, \rho^2 \leqslant z, \rho \geqslant 0),$$

d'où, en notant $\Delta = \{(\theta,\rho,z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 1, 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{z}\}$:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Delta |\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)|\,|\rho|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos^2\theta - \sin^2\theta|\mathrm{d}\theta\right)\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}z = \left(\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta|\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{z^2}{4}\,\mathrm{d}z\right) \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} |\cos u|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2) Passage en sphériques



Un point $M(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ est repéré par un **système de coordonnées sphériques** (θ,ρ,φ) où $\rho = OM$ et θ est l'angle polaire de la projection orthogonale m de M sur le plan xOy, et où φ est l'angle entre le plan xOy (orienté directement) et $\overrightarrow{OM}$. On impose classiquement : $\theta \in [0; 2\pi]$ (ou $\theta \in [-\pi; \pi]$) et $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a ainsi les formules de changement de variables : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$.

On admettra que la conclusion du théorème précédent est valable ici, bien que les hypothèses n'en soient pas réunies.

$$\text{Ici : } \det(J_\Phi(\theta,\rho,\varphi)) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= -\rho^2(\sin^2\theta\cos^3\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi + \cos^2\theta\cos^3\varphi)$$
$$= -\rho^2(\sin^2\theta\cos\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi) = -\rho^2\cos\varphi.$$

On retiendra :

> Pour passer en coordonnées sphériques dans une intégrale triple, on remplace $dxdydz$ par $\rho^2|\cos\varphi|\,d\theta d\rho d\varphi$.

EXEMPLE :

Calculer $I = \iiint_D f$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ et $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

En passant en coordonnées sphériques et en notant $\Delta = [0; 2\pi] \times [0; 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$I = \iiint_\Delta \rho^2\rho^2|\cos\varphi|d\theta d\rho d\varphi$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right) = \frac{4\pi}{5}.$$

Exercices

◇ **13.3.1** Calculer les intégrales triples $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dans les exemples suivants, où l'on donne les conditions définissant D puis $f(x,y,z)$:

a) $\begin{cases} [0;1]^3 \\ x^2 y e^{xyz} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 1 \\ z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ z^2 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ x^2 z \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, \quad R \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé}, a > R \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2+y^2-y \leqslant 0; \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ x^2+y^2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, \quad R \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé} \\ (x+y+z)^2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 1 \leqslant \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 4, \quad (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ fixé} \\ x^2+y^2+z^2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \text{ fixé} \\ xyz \end{cases}$

k) $\begin{cases} 9x^2+4y^2+z^2 \leqslant 1 \\ (3x+2y+z)^2 \end{cases}$ *l)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ \sqrt{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$ *m)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ \dfrac{1-(x^2+y^2+z^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)} \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant z^2, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0 \\ z \end{cases}$

Dans les exemples *o)*, *p)*, utiliser le changement de variables défini par :
$x+y+z=u,\ y+z=uv,\ z=uvw.$

o) $\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1 \\ xyz \end{cases}$ *p)* $\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{(1+y+z)^2} \end{cases}$

q) $\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, ax+by+cz \leqslant d, \quad (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4 \text{ fixé} \\ \sqrt{xyz} \end{cases}$

◇ **13.3.2** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, $D = [a;b]^2$, $E = [a;b]^3$, $f_1, f_2, f_3 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.
On note $I = \iiint_E |f_1(x,y) f_2(x,z) f_3(y,z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,dz$

et, pour chaque i de $\{1,2,3\}$, $J_i = \iint_D |f_i(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Démontrer : $I^2 \leqslant J_1 J_2 J_3$.

13.4 Masses, centres d'inertie, moments d'inertie

13.4.1 Systèmes matériels

◆ **Définitions 1**

1) On appelle **fil** tout couple (C,σ) où C est une courbe de classe C^1 par morceaux et $\sigma : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue; σ est appelée la **densité (linéaire)** du fil (C,σ).

2) On appelle **plaque plane** tout couple (D,σ) où D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $\sigma : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue; σ est appelée la **densité (superficielle)** de la plaque (D,σ).

3) On appelle **solide** tout couple (S,σ) où S est une partie cubable de $\mathbb{R}^3$ et $\sigma : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue; σ est appelée la **densité (spatiale)** du solide (S,σ).

On désigne ici par «courbe de classe C^1 par morceaux» l'image d'un arc $\begin{array}{l}[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(t),y(t),z(t))\end{array}$ où x,y,z sont de classe C^1 par morceaux.
Nous verrons dans le Tome 4 l'étude des plaques gauches, nécessitant l'utilisation d'intégrales de surface.

◆ **Définition 2** On appelle **systèmes matériels** les fils, plaques planes, solides. Lorsque σ est constante, on dit que le système matériel (E,σ) est **homogène**.

13.4.2 Masse d'un système matériel

Si C est une courbe de classe C^1 par morceaux, image d'un arc $t \longmapsto (x(t),y(t),z(t))$ on note s l'abscisse curviligne sur C, définie à l'orientation de C près et à une origine des abscisses curvilignes près, par : $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$ (voir le Tome de Géométrie).

◆ **Définitions**

1) On appelle **masse** d'un fil (C,σ) le réel μ défini par : $\mu = \displaystyle\int_C \sigma(M)\,\mathrm{d}s$, où M décrit C.

2) On appelle **masse** d'une plaque plane (D,σ) de $\mathbb{R}^2$ le réel μ défini par :

$$\mu = \iint_D \sigma(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \text{où } M(x,y) \text{ décrit } D.$$

3) On appelle **masse** d'un solide (S,σ)le réel μ défini par :

$$\mu = \iiint_S \sigma(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \text{où } M(x,y,z) \text{ décrit } S.$$

EXEMPLES :

1) Calculer la masse du fil (C,σ) où C est représentée paramétriquement par $\begin{cases} x = t - \dfrac{t^3}{3} \\ y = t^2 \\ z = t + \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$,

$t \in [0;1]$, et où $\sigma(x,y,z) = t^2$.

On a ici : $\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = (1-t^2)^2 + (2t)^2 + (1+t^2)^2 = 2(1+t^2)^2$,

d'où, en orientant C dans le sens des t croissants $\mathrm{d}s = \sqrt{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, la masse μ de (C,σ) est donnée par : $\mu = \displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{8\sqrt{2}}{15}$.

2) Calculer la masse d'une plaque carrée (D,σ) dont la densité σ est définie en tout point M de D par $\sigma(M) = kOM$, O étant le centre de D ($k \in \mathbb{R}_+^*$, fixé).

Le carré D et la densité σ présentant des symétries par rapport aux médianes de D et aux diagonales de D, la masse μ de (D,σ) vaut $8\mu_1$, où μ_1 est la masse du triangle D_1 de $\mathbb{R}^2$ défini par $(0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant x)$ muni de σ (en notant $2a$ le côté du carré D)

$$\mu_1 = \iint_{D_1} k\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,dy.$$

Passons en coordonnées polaires; notons $\Delta_1 = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \text{ et } 0 \leqslant \rho \leqslant \dfrac{a}{\cos\theta}\}$.

D'après le théorème de changement de variables dans une intégrale double (13.2.5 p. 249) :

$$\mu_1 = \iint_{\Delta_1} k\rho\,\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{k}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{\cos^3\theta}\,\mathrm{d}\theta, \text{ d'où } \mu = \frac{4ka^3}{3}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)),$$

après calculs.

3) Calculer la masse μ d'une boule S de centre O et de rayon R, la densité σ étant définie en tout point M de S par : $\sigma(M) = \left(1 + \dfrac{OM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Passons en coordonnées sphériques $\mu = \displaystyle\iiint_\Delta \sqrt{1+\frac{\rho}{R}}\,\rho^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$, où

$\Delta = \{(\theta,\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant R, -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\}$.

D'où $\mu = \left(\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \sqrt{1+\frac{\rho}{R}}\,\rho^2\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)$.

Pour calculer la deuxième intégrale, utilisons le changement de variable $u = \sqrt{1+\dfrac{\rho}{R}}$:

$$\int_0^R \sqrt{1+\frac{\rho}{R}}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \int_1^{\sqrt{2}} 2R^3u^2(u^2-1)^2\,\mathrm{d}u.$$

Finalement : $\mu = \dfrac{16(11\sqrt{2}-4)}{105}\,\pi R^3$.

Remarque : La masse d'un système matériel homogène vaut :

$l(C)\sigma$ s'il s'agit d'un fil (C,σ)

$\mathcal{A}(D)\sigma$ s'il s'agit d'une plaque plane (D,σ)

$\mathcal{V}(S)\sigma$ s'il s'agit d'un solide (S,σ).

Exercices

◇ **13.4.1** Calculer la masse μ des fils (C,σ) suivants ($a > 0, R > 0$ fixés) :

a) $\begin{cases} C = [0;a] \\ \sigma(M) = \dfrac{OM^2}{a^2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} C \text{ est le demi-cercle de centre } O\text{, de rayon } R\text{, situé dans le demi-plan } y \geqslant 0 \\ \sigma(M) = \dfrac{y}{R} \end{cases}$

◇ **13.4.2** Calculer la masse μ des plaques planes (D,σ) suivantes de $\mathbb{R}^2$ ($R > 0$ fixé) :

a) $\begin{cases} D \text{ est le disque de centre } O\text{, de rayon } R \\ \sigma(M) = \dfrac{OM^2}{R^2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} D \text{ est le disque de centre } O\text{, de rayon } R \\ \sigma(M) = \dfrac{y+R}{R} \quad (y \text{ ordonnée de } M) \end{cases}$

◇ **13.4.3** Calculer la masse μ des solides (S,σ) suivants (a,b,c,d,D,h,k,R,λ fixés dans $\mathbb{R}_+^*$) :

a) $\begin{cases} S \text{ est la boule de centre } O\text{, de rayon } R \\ \sigma(M) = D + \dfrac{OM}{R}(d-D) \end{cases}$

b) $\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant h\} \\ \sigma(M) = \left(1 + \dfrac{Om^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \ m \text{ étant la projection orthogonale de } M \text{ sur } xOy \end{cases}$

c) $\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\} \\ \sigma(M) = \lambda OM^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-2ax \leqslant 0, z^2 \leqslant k^2(x^2+y^2)\} \\ \sigma \text{ constante.} \end{cases}$

13.4.3 Centre d'inertie d'un système matériel

Les systèmes matériels envisagés dans ce § 13.4.3 sont supposés de masse $\neq 0$.

◆ **Définitions**

1) Le **centre d'inertie** d'un fils (C,σ) est le point G de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(C,\sigma)} \int_C \sigma(M)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}s,$$

où M décrit C, s est l'abscisse curviligne de M sur C, et $\mu(C,\sigma)$ est la masse de (C,σ).

2) Le **centre d'inertie** d'une plaque plane (D,σ) de $\mathbb{R}^2$ est le point G de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(D,\sigma)} \iint_D \sigma(M)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $M(x,y)$ décrit D et $\mu(D,\sigma)$ est la masse de (D,σ).

3) Le **centre d'inertie** d'un solide (S,σ) est le point G de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(S,\sigma)} \iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

où $M(x,y,z)$ décrit S et $\mu(S,\sigma)$ est la masse de (S,σ).

Remarques :

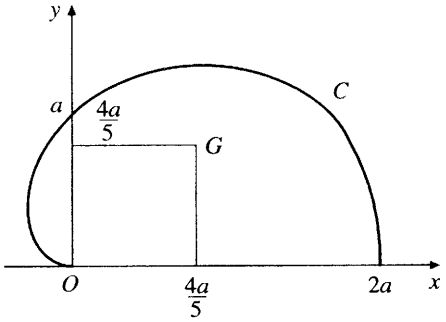
1) Les intégrales précédentes portent sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ce qui dépasse le cadre des § § 13.1, 13.2, 13.3; on se ramènera en pratique à des fonctions à valeurs réelles en passant aux coordonnées.

2) Les définitions précédentes prolongent à certains ensembles infinis la notion de *barycentre* d'un système fini de points pondérés (voir le Tome de Géométrie).

Dans le cas d'un système matériel homogène, le centre d'inertie est aussi appelé **centre de gravité**. On pourra souvent utiliser des **symétries matérielles**, c'est-à-dire des symétries simultanées pour l'objet géométrique définissant le système matériel et pour la densité. Par exemple, si le système matériel est symétrique par rapport à une droite, le centre d'inertie est situé sur cette droite.

EXEMPLES :

1) Déterminer le centre d'inertie G du fil homogène (C,σ) formé par la demi-cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ($a > 0$ fixé).



L'abscisse curviligne s'exprime en coordonnées polaires par :

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2\\ &= (a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2)(\mathrm{d}\theta)^2\\ &= 2a^2(1+\cos\theta)(\mathrm{d}\theta)^2\\ &= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}(\mathrm{d}\theta)^2.\end{aligned}$$

En orientant (C) dans le sens des θ croissants, on obtient : $\mathrm{d}s = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$.

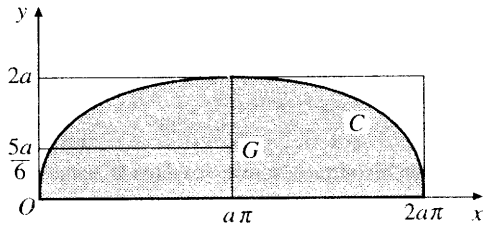
La masse μ de (C,σ) est donnée par : $\mu = \displaystyle\int_C \sigma\,\mathrm{d}s = 2a\sigma\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 4a\sigma$.

Puis on calcule les coordonnées x_G, y_G :

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{\mu}\int_C \sigma x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4a}\int_0^\pi (a(1+\cos\theta)\cos\theta)\left(2a\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{a}{2}\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2a\int_0^1 (1-u^2)(1-2u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{4a}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{1}{\mu}\int_C \sigma y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4a}\int_0^\pi (a(1+\cos\theta)\sin\theta)\left(2a\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{a}{2}\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2a\int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^1 2v^4\,\mathrm{d}v = \frac{4a}{5}.\end{aligned}$$

2) Déterminer le centre d'inertie G de la plaque plane homogène (D,σ) de $\mathbb{R}^2$ limitée par $x'x$ et l'arche de cycloïde définie par $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$ ($a > 0$ fixé).



Par raison de symétrie matérielle :

$$x_G = \pi a.$$

Calculons la masse μ de (D,σ), en utilisant la formule de Green-Riemann (cf. 13.2.6 p. 253) :

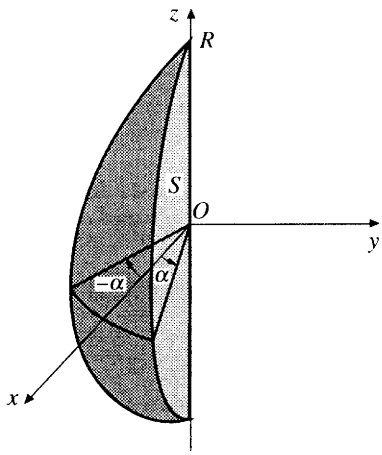
$$\mu = \iint_D \sigma \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sigma \int_C y \, \mathrm{d}x = -\sigma \left(\int_0^{2\pi a} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{2\pi}^0 (a(1-\cos t))^2 \, \mathrm{d}t \right)$$
$$= \sigma a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2} \right) \mathrm{d}t = 3\pi\sigma a^2.$$

Puis :

$$\mu y_G = \iint_D \sigma y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sigma \int_C \frac{y^2}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2} \int_0^{2\pi} (a(1-\cos t))^3 \mathrm{d}t$$
$$= \frac{\sigma a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) \mathrm{d}t$$
$$= \sigma a^3 \int_0^{\pi} (1 + 3\cos^2 t) \mathrm{d}t = \sigma a^3 \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) \right) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{5}{2} \pi\sigma a^3,$$

d'où $y_G = \dfrac{5a}{6}$.

3) Déterminer le centre d'inertie G du solide homogène (S,σ) où S est la tranche de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ ($R > 0$ fixé) définie en coordonnées sphériques par : $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$, où $\alpha \in]0;\pi]$ est fixé.



Passons en coordonnées sphériques. Notons

$$\Delta = \left\{ (\theta,\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^3 ; -\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha, \; 0 \leqslant \rho \leqslant R, -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

La masse μ de (S,σ) est donnée par :

$$\mu = \iiint_S \sigma \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \sigma \iiint_\Delta \rho^2 \cos\varphi \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$= \sigma \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right)$$
$$= \frac{4\alpha R^3}{3} \sigma.$$

Par raison de symétrie matérielle : $y_G = z_G = 0$. Puis :

$$\mu x_G = \iiint_S \sigma x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \iiint_\Delta (\rho\cos\theta\cos\varphi)(\rho^2\cos\varphi) \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$= \sigma \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^R \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right) = \frac{\pi R^4 \sin\alpha}{4} \sigma,$$

d'où $x_G = \dfrac{3\pi}{16} R \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Les *théorèmes de Guldin*, relatifs à des solides de révolution, seront vus dans le Tome 4.

Exercices

◇ **13.4.4** Déterminer le centre de gravité G des fils homogènes (C,σ) suivants (a,h,r fixés dans $\mathbb{R}_+^*$) :

a) C est la réunion d'un quart de cercle de centre O, d'extrémités A,B et des deux segments OA et OB.

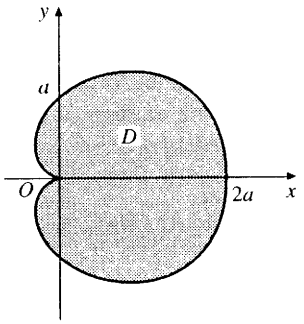
b) C est l'arche de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $t \in [0; 2\pi]$.

c) C est le morceau d'hélice circulaire à pas constant $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ht$, $t \in [0; a]$.

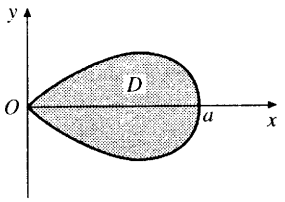
◇ **13.4.5** Déterminer le centre de gravité G des plaques planes homogènes (D,σ) suivantes ($a > 0$ fixé) :

a) $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ; x^{2/3} + y^{2/3} \leqslant a^{2/3}\}$

b) D est limité par la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$



c) D est limité par la boucle de la strophoïde droite d'équation polaire $\rho = a\left(2\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$.



◇ **13.4.6** Déterminer le centre de gravité G des solides homogènes (S,σ) suivants (h,p fixés dans $\mathbb{R}_+^*$) :

a) $S = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ *b)* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 \leqslant 2pz, 0 \leqslant z \leqslant h\}$.

13.4.4 Moments d'inertie d'un système matériel

◆ **Définitions 1** Soit H un point ou une droite ou un plan de $\mathbb{R}^3$; pour tout M de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{d}(M,H)$ la distance de M à H.

1) Le **moment d'inertie** d'un fil (C,σ) **par rapport à** H est le réel I_H défini par :

$$I_H = \int_C \sigma(M)(\mathrm{d}(M,H))^2 \,\mathrm{d}s,$$

où M décrit C et s est l'abscisse curviligne de M sur C.

2) Le **moment d'inertie** d'un solide (S,σ) **par rapport à** H est le réel I_H défini par :

$$I_H = \iiint_S \sigma(M)(\mathrm{d}(M,H))^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

où $M(x,y,z)$ décrit S.

◆ **Définition 2** Soit H un point ou une droite de $\mathbb{R}^2$; pour tout M de $\mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{d}(M,H)$ la distance de M à H. Le **moment d'inertie** d'une plaque plane (D,σ) de $\mathbb{R}^2$ **par rapport à** H est le réel I_H défini par :

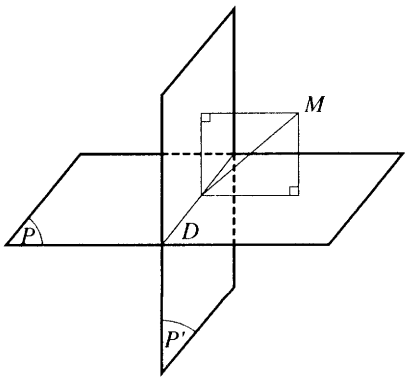
$$I_H = \iint_D \sigma(M)(\mathrm{d}(M,H))^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $M(x,y)$ décrit D.

Nous verrons l'étude des moments d'inertie d'une plaque de $\mathbb{R}^3$ dans le Tome 4.

Soit (E,σ) un système matériel.

1) Soient P, P' deux plans perpendiculaires, $D = P \cap P'$.



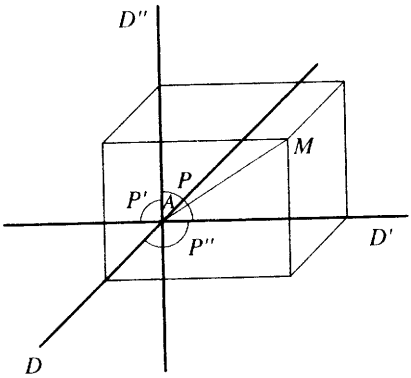
Puisque, pour tout M de $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{d}(M,D))^2 = (\mathrm{d}(M,P))^2 + (\mathrm{d}(M,P'))^2,$$

on déduit : $I_D = I_P + I_{P'}$.

Le moment d'inertie d'un système matériel (E,σ) par rapport à une droite D est égal à la somme des moments d'inertie de (E,σ) par rapport à deux plans passant par D et perpendiculaires.

2) Soient P, P', P'' trois plans deux à deux perpendiculaires et se coupant en un point A.



Puisque, pour tout M de $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{d}(M,A))^2 = (\mathrm{d}(M,P))^2 + (\mathrm{d}(M,P'))^2 + (\mathrm{d}(M,P''))^2,$$

on déduit : $I_A = I_P + I_{P'} + I_{P''}$.

Le moment d'inertie d'un système matériel (E,σ) par rapport à un point A est égal à la somme des moments d'inertie de (E,σ) par rapport à trois plans passant par A et deux à deux perpendiculaires.

3) Soient $A \in \mathbb{R}^3$, D, D', D'' trois droites passant par A et deux à deux perpendiculaires. En notant P (resp. P', resp. P'') le plan contenant D' et D'' (resp. D et D'', resp. D et D'), on a, d'après *1)* et *2)* :
$I_D = I_{P'} + I_{P''}$, $I_{D'} = I_P + I_{P''}$, $I_{D''} = I_P + I_{P'}$, $I_A = I_P + I_{P'} + I_{P''}$,
d'où $2I_A = I_D + I_{D'} + I_{D''}$.
Le moment d'inertie d'un système matériel (E,σ) par rapport à un point A est égal à la demi-somme des moments d'inertie de (E,σ) par rapport à trois droites passant par A et deux à deux perpendiculaires.

EXEMPLES :

1) Calculer le moment d'inertie par rapport à O du fil (C,σ) où :

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \operatorname{ch} t \end{cases}, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \text{ et } \sigma(M) = \operatorname{sh} t.$$

On a : $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sh}^2 t)(\mathrm{d}t)^2 = \operatorname{ch}^2 t(\mathrm{d}t)^2$ d'où, en orientant C dans le sens des t croissants : $\mathrm{d}s = \operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t$. On déduit le moment cherché :

$$I_O = \int_C \sigma(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh} t(1+\operatorname{ch}^2 t)\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t$$
$$= \int_1^{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} (1+u^2)u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{ch}^4\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}.$$

2) Calculer les moments d'inertie par rapport à $x'x, y'y$, O de la plaque plane homogène (densité constante σ) D formée du disque de centre O et de rayon R ($R > 0$ fixé).

En passant en coordonnées polaires et notant $\Delta = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \rho \leqslant R\}$, on a :

- $I_{x'x} = \iint_D \sigma y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \iint_\Delta \rho^3 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \sigma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \rho^3 \, \mathrm{d}\rho\right)$
  $= \dfrac{\pi}{4} R^4\sigma,$
- $I_{y'y} = I_{x'x}$ par raison de symétrie matérielle
- $I_O = I_{x'x} + I_{y'y} = \dfrac{\pi}{2} R^4\sigma.$

3) Calculer les moments d'inertie par rapport aux plans de coordonnées et par rapport aux axes de coordonnées, du solide homogène (S,σ) où S est l'ellipsoïde plein défini par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ ($a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ fixés).

Pour calculer les intégrales triples définissant ces moments, passons en *coordonnées ellipsoïdales*, définies par : $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ z = C\rho\sin\varphi \end{cases}$ $\theta \in [-\pi;\pi], \rho \in [0;1], \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right].$

Ce changement de variables peut être considéré comme composé du passage en coordonnées sphériques et du changement de variables affine défini par : $x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$.

En notant $\Delta = [-\pi;\pi] \times [0;1] \times \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

- $I_{xOy} = \iiint_S \sigma z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \iiint_\Delta (c^2\rho^2\sin^2\varphi)(abc\rho^2\cos\varphi) \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$
  $= \sigma abc^3 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4 \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi\right) = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc^3.$

On a aussi $I_{xOy} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma ab^3c$, $I_{yOz} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma a^3bc$, par raisons de symétrie et permutation de lettres.

- $I_{Oz} = I_{xOz} + I_{yOz} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc(a^2+b^2).$

  $I_{Ox} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc(b^2+c^2)$, $I_{Oy} = \dfrac{4\pi}{15}\sigma abc(a^2+c^2).$

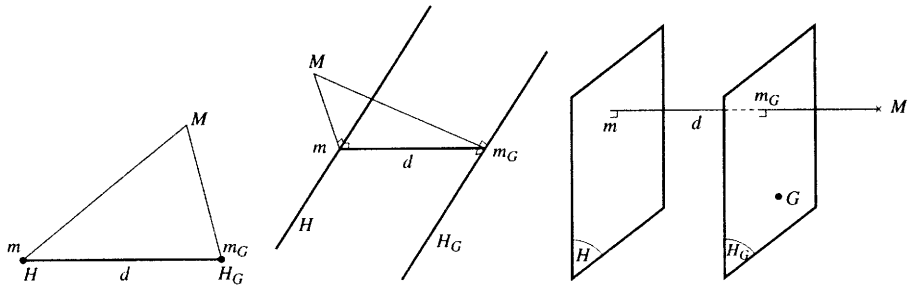
◆ **Théorème (Formule de Huygens)**

Soient (E,σ) un système matériel
G le centre d'inertie de (E,σ)
H un point ou une droite ou un plan
H_G parallèle à H et passant par G
d la distance de H à H_G
μ la masse de (E,σ)
I_H (resp. I_{H_G}) le moment d'inertie de (E,σ) par rapport à H (resp. H_G).

On a : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2.$

Preuve :

Nous allons traiter le cas d'un solide (S,σ), les deux autres cas (fil, plaque plane) lui étant analogues.



Pour tout M de S, notons m (resp. m_G) la projection orthogonale de M sur H (resp. H_G).

On a :

$$(\mathrm{d}(M,H))^2 = \overrightarrow{Mm}^2 = (\overrightarrow{Mm_G} + \overrightarrow{m_Gm})^2 = \overrightarrow{Mm_G}^2 + 2\overrightarrow{Mm_G}\cdot\overrightarrow{m_Gm} + \overrightarrow{m_Gm}^2$$
$$= (\mathrm{d}(M,H_G))^2 + 2\overrightarrow{Mm_G}\cdot\overrightarrow{m_Gm} + d^2.$$

D'où : $$I_H = I_{H_G} + \iiint_S \sigma(M)2\overrightarrow{Mm_G}\cdot\overrightarrow{m_Gm}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + d^2\iiint_S \sigma(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= I_{H_G} + 2\left(\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{mM_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d} + \mu d^2,$$

en notant $\vec{d}$ le vecteur orthogonal à H et tel que H_G soit translaté de H par $\vec{d}$.

Puis $\left(\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{Mm_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d}$
$$= \left(\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{Gm_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d} - \left(\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\cdot\vec{d}.$$

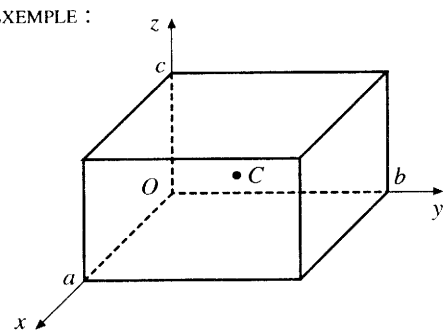
D'une part, $\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{Gm_G}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est parallèle à H_G, donc orthogonal à $\vec{d}$.

D'autre part, par définition de G :

$$\iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_S \sigma(M)\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(\iiint_S \sigma(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\overrightarrow{OG} = \vec{0}.$$

Finalement : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2$.

EXEMPLE :



Calculer les moments d'inertie d'un parallélépipède rectangle plein homogène de côtés a,b,c par rapport à : une face, une arête, un sommet, le centre.

1) $I_{xOy} = \iiint_S \sigma z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^c z^2 \, \mathrm{d}z\right) = \frac{1}{3}\sigma abc^3.$

De même pour les autres faces : $I_{xOz} = \frac{1}{3}\sigma ab^3c$, $I_{yOz} = \frac{1}{3}\sigma a^3bc$.

2) $I_{Ox} = I_{xOy} + I_{xOz} = \frac{1}{3}\sigma abc(b^2 + c^2).$

Résultats analogues les autres arêtes.

3) $I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{1}{3}\sigma abc(a^2 + b^2 + c^2).$

Résultats analogues les autres sommets.

4) En utilisant le théorème de Huygens et en notant C le centre :

$I_O = I_C + \mu d^2$, $\mu = \sigma abc$, $d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, d'où $I_C = \frac{1}{12}\sigma abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

Exercices

◇ **13.4.7** Calculer le moment d'inertie du fil homogène (C,σ) où C admet la représentation paramétrique $(x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4b\cos\frac{t}{2},\ t \in [0; 2\pi])$ par rapport à xOy $(a,b \in \mathbb{R}_+^*$ fixés).

◇ **13.4.8** Calculer le moment d'inertie de la plaque plane homogène (D,σ) par rapport à H dans les exemples suivants $(a,b \in \mathbb{R}_+^*$ fixés) :

a) $\begin{cases} D \text{ est un triangle équilatéral de côté } a \\ H \text{ est un sommet de } D \end{cases}$

b) $\begin{cases} D \text{ est un rectangle de côtés } 2a,\ 2b \\ H \text{ est une diagonale de } D \end{cases}$

c) $\begin{cases} D \text{ est un triangle rectangle de côtés } a,b \\ H \text{ est le sommet droit de } D \end{cases}$

d) $\begin{cases} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0.x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\} \\ H = x'x \end{cases}$.

◇ **13.4.9** Calculer le moment d'inertie du solide (S,σ) par rapport à H dans les exemples suivants $(a,b,h,R \in \mathbb{R}_+^*$ fixés) :

a) $\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant h\} \\ H = zz' \end{cases}$

b) $\begin{cases} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant h\} \\ H \text{ est le plan d'équation } y = R \end{cases}$.

Indications et réponses

Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 7

7.1.1 $\ln \dfrac{a+b}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{4}\right)^2 = ab \Longleftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 16ab.$

7.1.2
- Il y a égalité lorsque $x \in]-1;\ 0[$
- Pour $x \in]0;\ 1[$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \Longleftrightarrow \ln(1+x)+\ln(1-x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow 1-x^2 \leqslant 1.$

7.2.1 Soit f convenant, telle que $f \neq 0$.

• Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$, contradiction. Ceci montre : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$, puis : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$.

• On peut donc considérer $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(f(x)) \end{array}$; g est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = g(x) + g(y)$.

D'après l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda x$, d'où :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = (\mathrm{e}^{\lambda})^x$.

Réciproque immédiate.

◇ **Réponse :** $\{0\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x} \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

7.3.1 En notant $y = \ln x$ et $\alpha = \ln a$:

$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4} \Longleftrightarrow \dfrac{y}{\alpha} - \dfrac{y}{2\alpha} + \dfrac{y}{4\alpha} = \dfrac{3}{4} \Longleftrightarrow y = \alpha \Longleftrightarrow x = a.$

◇ **Réponse :** $\{a\}$.

7.3.2 ◇ **Réponse :** $c + b > 0,\ c + b \neq 1,\ c - b > 0,\ c - b \neq 1,\ (a = 1 \text{ ou } c^2 = a^2 + b^2)$.

7.3.3 Soit f convenant ; considérons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(\mathrm{e}^t) \end{array}$.

L'application g est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ g(t+u) = f(\mathrm{e}^{t+u}) = f(\mathrm{e}^t\mathrm{e}^u) = f(\mathrm{e}^t) + f(\mathrm{e}^u) = g(t) + g(u)$.

D'après l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \lambda t$; d'où :

$\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f(x) = g(\ln x) = \lambda \ln x$.

Réciproque immédiate.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{l}]0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda \ln x \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, ou encore $\left\{ \begin{array}{l}]0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log_a x \end{array} ;\ a \in]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[\right\} \cup \{0\}$.

7.3.4 *a)* L'équation se ramène à : $(5.3^x - 3.5^x)(3.3^x - 5.5^x) = 0$.

◇ **Réponse :** $\{-1, 1\}$.

b) et *c)*
Etudier les variations de $f : x \longmapsto x \ln x$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

◇ **Réponses :** *b)* $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, *c)* $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

7.3.5 *a)* ◇ **Réponse :** $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$.

b) Déduire : $((x+y)^2 - 4)\ln x \ln y = 0$.

◇ **Réponse :** $\{(1, 1)\}$.

c) ◇ **Réponse :** $\left\{\left(\frac{\ln 5 + 3\ln 2}{7\ln 2}, \frac{4\ln 5 - 9\ln 2}{14\ln 2}\right)\right\}$.

7.3.6 $a = b^b = (a^a)^{a^a} = a^{a^{a+1}}$, d'où $a^{a+1} = 1$ ou $\ln a = 0$, et finalement $a = 1, b = 1$.

7.3.7 Examiner d'abord les cas $z = 0, x = 0$.
Lorsque $z > 0$ et $x > 0$, déduire $z = y^2$ puis $y^2 = 2x + 1$, et enfin résoudre $3y^2 + 2y - 33 = 0$.

◇ **Réponse :** $\{(0, 15, 1), (4, 3, 9)\}$.

7.3.8 Soit f convenant telle que $f \neq 0$.

• Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = f(x_0)f(2x - x_0) = 0$, contradiction. Ceci montre : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Comme f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de déduire : $f > 0$ ou $f < 0$. Si f convient, alors $-f$ aussi; on peut donc se ramener au cas $f > 0$.

• L'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(f(x)) \end{array}$ est continue et : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$.

• L'application $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) - g(0) \end{array}$ est continue, $h(0) = 0$ et :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(h(x) + h(y))$.

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}h(x)$. D'où : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) = h(x) + h(y)$.

D'après l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \lambda x$.

En notant $\mu = g(0)$, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{g(x)} = e^{\lambda x + \mu}$.

Réciproque immédiate.

◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ae^{\lambda x}; \ (a, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right\}$.

7.3.9 Notons $f : \begin{array}{l}]0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}} \end{array}$.

Déjà : $\lim\limits_{0^+} f = 1$, $f(1) = 1$, et $\forall x \in [1;\ +\infty[$, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrons maintenant : $\forall x \in]0;\ 1]$, $f(x) \leqslant 1$.

L'application f est dérivable sur $]0;\ 1]$ et : $\forall x \in]0;\ 1]$, $f'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} + \dfrac{\ln 2}{x^2} \cdot 2^{-\frac{1}{x}}$.

Supposons que f atteigne son maximum en un point c de $]0\ 1[$; on a alors $f'(c) = 0$, c'est-à-dire $c^2 2^{-c} = 2^{-\frac{1}{c}}$, d'où $f(c) = 2^{-c} + 2^{-\frac{1}{c}} = (1 + c^2)2^{-c}$.

Etudier les variations de $g : \begin{array}{l} [0;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (1 + x^2)2^{-x} \end{array}$ pour déduire : $\forall x \in]0;\ 1[$, $g(x) < 1$.

En particulier, $f(c) < 1$; contradiction.

◇ **Réponse :** 1.

7.4.1 Utiliser la concavité de $x \longmapsto x^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.4.2 $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \iff \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$.

Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[\mathrm{e}^2;\ +\infty[$. De plus, vérifier par un calcul numérique : $f(7) \simeq 0{,}735\,485 > f(8) \simeq 0{,}735\,194$.

7.4.3 *a)* Poser $t = \sqrt{x-4}$ et se ramener à $|t-2| + |t-3| = 1$.

◇ **Réponse :** $[8;\ 13]$.

b) $x \longmapsto \sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{x-13}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque $\sqrt[3]{}$ l'est.

◇ **Réponse :** $\{14\}$.

7.4.4 En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral (cf. 6.4.5, Théorème, Tome 1, p. 193) à $f : t \longmapsto (1+t)^{1/4}$ sur $[0;\ x]$ à l'ordre 2, on obtient :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\mathrm{d}t.$$

Et $f'''(t) = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\left(-\dfrac{7}{4}\right)(1+t)^{-\frac{11}{4}} \geqslant 0$.

7.4.5 Soit $f :]0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ convenant, telle que $f \neq 0$.

L'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(\mathrm{e}^t) \end{array}$ est continue et :

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ g(t+u) = f(\mathrm{e}^t\mathrm{e}^u) = f(\mathrm{e}^t)f(\mathrm{e}^u) = g(t)g(u).$$

D'après l'exercice 7.2.1, p. 6, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

D'où : $\forall x \in]0;\ +\infty[$, $f(x) = g(\ln x) = \mathrm{e}^{\lambda \ln x} = x^\lambda$.

Réciproque immédiate.

◇ **Réponse :** $\{0\} \cup \left\{ \begin{array}{l}]0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\lambda \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

7.6.1 Remarquer : $\forall t \in \mathbb{R},\ 2\operatorname{ch} t - 1 = \dfrac{2\operatorname{ch}(2t)+1}{2\operatorname{ch} t + 1}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{2\operatorname{ch}(2^{n+1}x)+1}{2\operatorname{ch} x + 1}$.

7.6.2 $\operatorname{th}((k+1)x) - \operatorname{th}(kx) = \dfrac{\operatorname{sh}((k+1)x)\operatorname{ch}(kx) - \operatorname{sh}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}{\operatorname{ch}((k+1)x)\operatorname{ch}(kx)} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$,

d'où, si $\operatorname{sh} x \neq 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)} = \frac{1}{\operatorname{sh} x}\sum_{k=0}^{n}(\operatorname{th}((k+1)x) - \operatorname{th}(kx))$.

◇ **Réponse :** $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{th}(n+1)x}{\operatorname{sh} x} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

7.6.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \dfrac{1}{2}(e^{x\operatorname{ch} a + x\operatorname{sh} a} + e^{x\operatorname{ch} a - x\operatorname{sh} a}) = \dfrac{1}{2}(e^{xe^a} + e^{xe^{-a}})$,

d'où, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$f_a^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}((e^a)^n e^{xe^a} + (e^{-a})^n e^{xe^{-a}}) = \dfrac{1}{2}(e^{x\operatorname{ch} a + x\operatorname{sh} a + na} + e^{x\operatorname{ch} a - x\operatorname{sh} a - na})$.

◇ **Réponse :** $f_a^{(n)}(x) = e^{x\operatorname{ch} a}\operatorname{ch}(x\operatorname{sh} a + na)$.

7.6.4 **Réponse :** $\ln(\cos a - \sin a + \sqrt{4 - \sin 2a})$.

7.6.5 En notant $X = e^x$, $Y = e^y$:

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{25}{12} \end{cases} \iff \begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{60}{12} = 5 \\ e^{-x} + e^{-y} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = \dfrac{5}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases}$$

$\iff (X = 2,\ Y = 3)$, à l'ordre près.

◇ **Réponse :** $\{(\ln 2, \ln 3), (\ln 3, \ln 2)\}$.

7.7.1 *a)* ◇ **Réponse :** $\forall x \in]-1;\ 1[,\ \operatorname{ch}(2\operatorname{Argth} x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

b) ◇ **Réponse :** $\forall x \in]-1;\ 1[,\ \operatorname{th}(3\operatorname{Argth} x) = \dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}$.

c) En notant $\varphi = \operatorname{Argch} x$, on a : $\begin{cases} \varphi \in [0;\ +\infty[\\ \operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{ch}\varphi - 1}{2} = \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$.

◇ **Réponse :** $\forall x \in [1;\ +\infty[,\ \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Argch} x\right) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$.

d) Poser $\varphi = \operatorname{Argsh} x$.

◇ **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argth}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Argsh} x$.

e) **1re méthode.**

En notant $f : x \longmapsto \operatorname{Argth}\dfrac{1 + 3\operatorname{th} x}{3 + \operatorname{th} x}$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{8(1 - \operatorname{th}^2 x)}{(3 + \operatorname{th} x)^2 - (1 + 3\operatorname{th} x)^2} = 1$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + f(0)$, et $f(0) = \operatorname{Argth}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

2ème méthode.

$$\text{Argth}\,\frac{1+3\,\text{th}\,x}{3+\text{th}\,x} = \text{Argth}\,\frac{\frac{1}{3}+\text{th}\,x}{1+\frac{1}{3}\,\text{th}\,x} = \text{Argth}\left(\text{th}\left(\left(\text{Argth}\,\frac{1}{3}\right)+x\right)\right),$$ cf. exercice 7.7.3 *c)* p. 21.

◇ **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{1}{2}\ln 2.$

7.7.2 *a)* Pour tout x de $[1;\ 2]$:

$\text{Argch}\,x = \text{Argsh}\,(2-x) \iff \text{sh}\,(\text{Argch}\,x) = \text{sh}\,(\text{Argsh}\,(2-x)) \iff \sqrt{x^2-1} = 2-x.$

◇ **Réponse :** $\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

b) Montrer d'abord : $\begin{cases} 4x^3-3x \geqslant 1 \\ 2x^2-1 \geqslant 1 \end{cases} \iff x \geqslant 1.$

En notant $\varphi = \text{Argch}\,x$, on a : $4x^3-3x = 4\,\text{ch}^3\varphi - 3\,\text{ch}\,\varphi = \text{ch}\,3\varphi$ et $2x^2-1 = \text{ch}\,2\varphi$, d'où :

$$\text{Argch}\,(4x^3-3x) - \text{Argch}\,(2x^2-1) = 1 \iff 3\varphi - 2\varphi = 1 \iff \varphi = 1.$$

◇ **Réponse :** $\{\text{ch}\,1\}$.

7.7.3 ◇ **Réponses :**

a) $\text{Argsh}\,(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) $\text{Argch}\,(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}),\ (x,y) \in [1;\ +\infty[^2$

c) $\text{Argth}\,\frac{x+y}{1+xy},\ (x,y) \in]-1;\ 1[^2$

d) $\begin{cases} \text{Argcoth}\,\frac{1+xy}{x+y} & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y = 0 \end{cases},\ (x,y) \in (]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[)^2.$

7.7.4 ◇ **Réponse :**

g \ f	Argsh	Argch	Argth	Argcoth
sh	x	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\lvert x\rvert}{x\sqrt{x^2-1}}$
ch	$\sqrt{1+x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2-1}}$
th	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
coth	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{x}$	x

Calculons, par exemple, $\text{sh}\,(\text{Argth}\,x)$, $x \in]-1;\ 1[$; en notant $\varphi = \text{Argth}\,x$, on a : $x = \text{th}\,y$, $\frac{1}{\text{ch}^2\varphi} = 1 - \text{th}^2\varphi = 1 - x^2$, d'où $\text{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, puis $\text{sh}\,\varphi = \text{ch}\,\varphi\,\text{th}\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7.7.5 • Soit $(x,y) \in [1;\ +\infty[^2$, notons $a = \operatorname{Argch} x$, $b = \operatorname{Argch} y$. On a :

$$x * y = \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} + xy = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b + \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch}(a+b)$$

donc $x * y \in [1;\ +\infty[$.

• Le calcul ci-dessus montre que ch : $[0;\ +\infty[\longrightarrow [1;\ +\infty[$ est un morphisme bijectif de $([0;\ +\infty[,\ +)$ dans $([1;\ +\infty[,\ *)$. Mais $([0;\ +\infty[,\ +)$ n'est pas un groupe, puisqu'il manque les opposés des éléments de $]0;\ +\infty[$.

◇ **Réponse :** $([1;\ +\infty[,\ *)$ n'est pas un groupe.

7.7.6 ◇ **Réponse :** $*$ est interne dans $]-1;\ 1[$, et $(]-1;\ 1[,\ *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R},\ +)$, à l'aide de th : $\mathbb{R} \longrightarrow]-1;\ 1[$; $(]-1;\ 1[,\ *)$ est donc un groupe commutatif.

7.7.7 L'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Argth}(f(x)) \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = \operatorname{Argth}(f(x+y)) = \operatorname{Argth}\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \operatorname{Argth}(f(x)) + \operatorname{Argth}(f(y))$$

$$= g(x) + g(y), \text{ cf. exercice 7.7.3 } c) \text{ p. 21.}$$

D'après l'exercice 4.3.3, Tome 1, p. 111, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda x$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

Réciproque immédiate.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]-1;\ 1[\\ x \longmapsto \operatorname{th}(\lambda x) \end{array};\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

7.7.8 Former le tableau des variations de $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \operatorname{sh} x - 2x - a$; on a noté $x_0 = \operatorname{Argch} 2 \simeq 1{,}317$.

x	$-\infty$		$-x_0$		x_0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{cases} f_a(-x_0) > 0 \\ f_a(x_0) < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \operatorname{sh} x_0 - 2x_0 < a < -\operatorname{sh} x_0 + 2x_0.$$

◇ **Réponse :** $|a| < 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$.

7.8.1 *a)* $\sin x + \sin((2n-1)x) + \sin(nx) = 2\sin(nx)\cos((n-1)x) + \sin(nx)$
$= \sin(nx)(2\cos((n-1)x) + 1)$.

Traiter de même le dénominateur.

L'expression est définie si et seulement si : $\cos(nx) \neq 0$ et $\cos((n-1)x) \neq -\frac{1}{2}$.

◇ **Réponse :** $\tan(nx)$.

Dans les exemples *b)* à *g)*, et *i)*, décomposer le terme général de la somme (ou du produit) en différence (ou quotient) de manière à obtenir des simplifications; on dit qu'il s'agit de sommes (ou de produits) télescopiques.

b) Remarquer $\tan x = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$, d'où, pour tout k de $\{0,\ldots,n\}$:

$$2^k \tan(2^k x) = \frac{2^k}{\tan(2^k x)} - \frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1}x)}.$$

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2^{n+1}}{\tan(2^{n+1}x)}$.

c) $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$; si $x \in \pi\mathbb{Z}$, il existe $(m_1, n_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ unique tel que $x = 2^{m_1}(2n_1+1)\pi$, et le produit demandé vaut : $\begin{cases} 1 & \text{si} \quad m_1 \geqslant n+1 \\ -1 & \text{si} \quad m_1 = n \\ 0 & \text{si} \quad m_1 < n \end{cases}$.

d) $1 + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x} \tan 2x = \dfrac{\tan 2x}{\tan x}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\tan(2^n x)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$, sauf cas particuliers.

e) $\tan x = \tan(((k+1)-k)x) = \dfrac{\tan(k+1)x - \tan kx}{1 + \tan kx \tan(k+1)x}$, d'où

$$\tan kx \tan(k+1)x = \frac{\tan(k+1)x - \tan kx}{\tan x} - 1.$$

◇ **Réponse :** $\dfrac{\tan(n+1)x}{\tan x} - (n+1)$, sauf cas particuliers.

f) $\cos\dfrac{x}{2^k} + \cos\dfrac{y}{2^k} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2^k} - \cos^2\frac{y}{2^k}}{\cos\frac{x}{2^k} - \cos\frac{y}{2^k}} = \dfrac{\cos\frac{x}{2^{k-1}} - \cos\frac{y}{2^{k-1}}}{2\left(\cos\frac{x}{2^k} - \cos\frac{y}{2^k}\right)}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\cos 2x - \cos 2y}{2^{n+1}\left(\cos\frac{x}{2^n} - \cos\frac{y}{2^n}\right)}$, sauf cas particuliers.

g) $\sin kx \sin(k+1)x = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos(2k+1)x)$.

◇ **Réponse :** $\begin{cases} \dfrac{n+1}{2}\cos x - \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin 2(n+1)x}{\sin x} & \text{si} \quad x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$.

h) ◇ **Réponse :** $\begin{cases} 1 + \operatorname{cotan} x \cos^n x \sin nx & \text{si} \quad x \notin \pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si} \quad x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$.

i) $$\frac{(-1)^k}{3^k}\cos^3(3^k x) = \frac{(-1)^k}{3^k}\,\frac{\cos(3^{k+1}x) + 3\cos(3^k x)}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^k\cos(3^{k+1}x)}{3^k} - \frac{(-1)^{k-1}\cos(3^k x)}{3^{k-1}}\right).$$

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{4\cdot 3^n}\left((-1)^n\cos(3^{n+1}x) + 3^{n+1}\cos x\right)$.

7.8.2 Récurrence sur n.

La propriété est immédiate lorsque $n = 1$. Si elle est vraie pour un entier n, alors :

$$\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \cos\left(\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_k a_k\right)$$
$$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n}} \left(\cos\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k\right) + a_{n+1}\right) + \cos\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k\right) - a_{n+1}\right)\right)$$
$$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{n}} 2\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k\right)\cos a_{n+1}$$
$$= 2\left(2^n\prod_{k=1}^{n}\cos a_k\right)\cos a_{n+1} = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\cos a_k.$$

7.8.3 Récurrence sur n.

- $|\sin 2x| = 2|\sin x|\,|\cos x| < 2|\sin x|$ car $|\sin x| > 0$ et $|\cos x| < 1$.
- $|\sin(n+1)x| \leqslant |\sin nx|\,|\cos x| + |\sin x|\,|\cos nx| \leqslant |\sin nx| + |\sin x| < (n+1)|\sin x|$.

7.8.4 Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\sin kx$.

Si $f > 0$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; mais $g(0) = g(\pi) = 0$, contradiction.

◇ **Réponse :** non.

7.8.5 Raisonner par l'absurde. S'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) \geqslant 3$, alors $\cos(x^2) = 1$, $\cos(y^2) = 1$, $\cos(xy) = -1$. Il existe donc $(m,n,p) \in \mathbb{Z}^3$ tel que :

$x^2 = 2m\pi$, $y^2 = 2n\pi$, $xy = (2p+1)\pi$.

Alors $\dfrac{x^2y^2}{\pi^2} = 4mn = (2p+1)^2$, contradiction sur la parité.

7.8.6 On peut supposer $x > 0$ et $y > 0$. Par le changement de variables $t = \ln x$, $u = \ln y$, l'inégalité demandée se ramène à :

$$\forall (t,u) \in \left]-\infty;\ \ln\frac{\pi}{2}\right]^2,\ f\left(\frac{t+u}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(f(t)+f(u))$$

où $f : \left]-\infty;\ \ln\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$.
$t \longmapsto \ln(\sin(e^t))$

Montrer que f est concave (calculer f'').

7.8.7 *a)* $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1 \iff \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqslant \frac{1}{2} \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} \leqslant x + \frac{\pi}{6} - 2k\pi \leqslant \frac{5\pi}{3}\right)$.

◇ **Réponse :** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$.

b) $\sin x + \sin 2x < \sin 3x \iff \sin 2x < \sin 3x - \sin x \iff 2\sin x\cos x < 2\sin x\cos 2x$
$\iff \sin x(\cos 2x - \cos x) > 0 \iff \sin\frac{x}{2}\sin x\sin\frac{3x}{2} < 0$.

Remarquer que 2π est période.

◇ **Réponse :** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \pi+2k\pi\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}+2k\pi;\ 2\pi+2k\pi\right[\right)$.

7.8.8 Notons $y = f(x)$.

• $e^y = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$, d'où $\tan\frac{x}{2} = \dfrac{e^y-1}{e^y+1} = \operatorname{th}\frac{y}{2}$.

• $\operatorname{th} y = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{y}{2}}{1+\operatorname{th}^2\frac{y}{2}} = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \sin x$.

• $\operatorname{ch} y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 y}} = \dfrac{1}{|\cos x|} = \dfrac{1}{\cos x}$.

7.8.9 $(z+xy)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$, $(x+yz)^2 = (1-y^2)(1-z^2)$, $(y+zx)^2 = (1-z^2)(1-x^2)$.

• Cas $|x| < 1$.

On a alors $1-y^2 \geqslant 0$, $1-z^2 \geqslant 0$, donc $|y| \leqslant 1$ et $|z| \leqslant 1$. On peut remarquer que, dans ce cas, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \cos(\alpha+\beta)$ ou $z = -\cos(\alpha-\beta)$.

• Cas $|x| > 1$.

On a alors $|y| \geqslant 1$ et $|z| \geqslant 1$. Il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\varepsilon,\eta) \in \{-1, 1\}^2$ tels que : $x = \varepsilon\operatorname{ch}\alpha$, $y = \eta\operatorname{ch}\beta$, $z = -\varepsilon\eta\operatorname{ch}(\alpha+\beta)$ ou $z = -\varepsilon\eta\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$.

• L'étude des cas $x = 1$, $x = -1$ est immédiate.

7.9.1 On peut supposer $a \neq 0$; l'application f_a est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{a}\right\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{a}\right\},\ f_a'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;\ \frac{1}{a}\right[, & f_a(x) = \operatorname{Arctan} x + \lambda \\ \forall x \in \left]\frac{1}{a};\ +\infty\right[, & f_a(x) = \operatorname{Arctan} x + \mu \end{cases}$.

En prenant les limites en $-\infty$ ou $+\infty$, on déduit : $\lambda = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{a}$, $\mu = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{a}$.

Si $a > 0$: $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;\ \frac{1}{a}\right[, & f_a(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} a \\ \forall x \in \left]\frac{1}{a};\ +\infty\right[, & f_a(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} a - \pi \end{cases}$.

Si $a < 0$: $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;\ \frac{1}{a}\right[, & f_a(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} a + \pi \\ \forall x \in \left]\frac{1}{a};\ +\infty\right[, & f_a(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} a \end{cases}$.

7.9.2 Pour les exemples *e), f), g)*, on peut utiliser un changement de variable (suggéré par la forme de l'énoncé) ou étudier la dérivée de la fonction proposée. Comparer aussi avec les exemples de l'exercice 7.7.1, p. 21.

a) ◇ **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

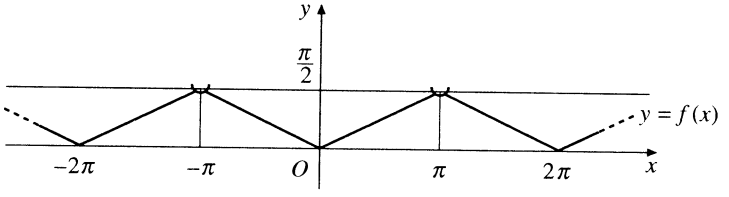
b) ◇ **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\tan(3 \operatorname{Arctan} x) = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

c) ◇ **Réponse :** $\forall x \in [-1;\ 1]$, $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x\right) = (\operatorname{sgn} x)\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

d) $\operatorname{Def}(f) = \mathbb{R} - (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, f est paire et 2π-périodique. Pour tout x de $[0;\ \pi[$:

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = \operatorname{Arctan}\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}, \text{ car } \frac{x}{2} \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

◇ **Réponse :** $f(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in [0;\ \pi[$, f est paire, 2π-périodique.



e) **1re méthode.**

$\operatorname{Def}(f) = \mathbb{R}$, f est paire, et, en notant $\theta = \operatorname{Arctan} x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) = \operatorname{Arccos}(|\cos\theta|) = \operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta, \text{ car } \theta \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

2ème méthode.

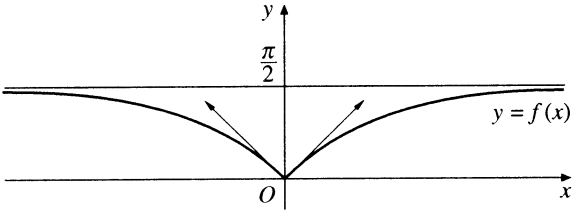
Def $(f) = \mathbb{R}$, f est paire, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+x^2}}}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}2x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \operatorname{Arctan} x + \lambda$.

En prenant la valeur en 0, on déduit $\lambda = 0$.

◇ **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |\operatorname{Arctan} x|$.



f) Def $(f) =]-1;\ 1[$ et f est impaire. Pour $x \in [0;\ 1[$, en notant $\theta = \operatorname{Arcsin} x$, on a :

$$\operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arctan}(\tan\theta) = \theta, \text{ car } \theta \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[,$$

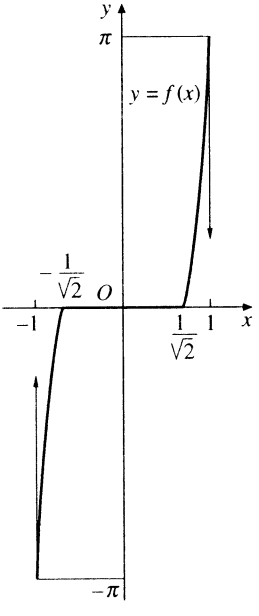
et $\quad 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.

Si $\theta \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ (c'est-à-dire $x \in \left[0;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$), alors $\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\theta$.

Si $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ (c'est-à-dire $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right[$), alors $\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) = \pi - 2\theta$.

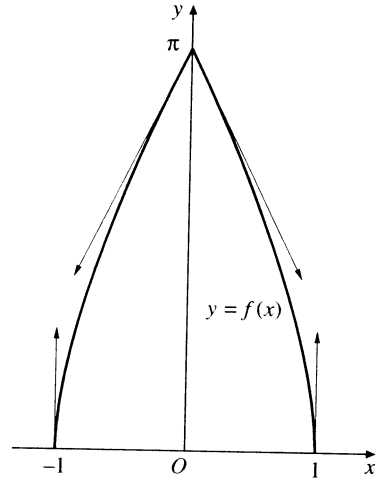
◇ **Réponse :** Def $(f) =]-1;\ 1[$ et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 4\operatorname{Arcsin} x - \pi & \text{si } \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x < 1 \end{cases}.$$



g) **Réponse :** $\mathrm{Def}(f) = [-1;\ 1]$ et

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{Arccos}\,x & \text{si} \quad x \in [0;\ 1] \\ 2\pi - 2\,\mathrm{Arccos}\,x & \text{si} \quad x \in [-1;\ 0] \end{cases}.$$



7.9.3 *a)* Appliquer la fonction cos aux deux membres de l'égalité, en remarquant que ces deux membres se trouvent dans $[0;\ \pi]$.

◇ **Réponse :** $\left\{\dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}\right\}$.

b) $\mathrm{Arcsin}\,(\tan x) = x \Longrightarrow \tan x = \sin x \Longleftrightarrow \sin x\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}.$

◇ **Réponse :** $\{0\}$.

c) D'abord : $x \in [-1;\ 1]$. En notant $\theta = \mathrm{Arccos}\,x$, on a :

$$2\,\mathrm{Arccos}\,x = \mathrm{Arccos}\,(|2x^2 - 1|) \Longleftrightarrow \mathrm{Arccos}\,(|\cos 2\theta|) = 2\theta.$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\lvert\cos 2\theta\rvert$	$\cos 2\theta$	$-\cos 2\theta$	$-\cos 2\theta$	$\cos 2\theta$	
$\mathrm{Arccos}\,(\lvert\cos 2\theta\rvert)$	2θ	$\pi - 2\theta$	$2\theta - \pi$	$2\pi - 2\theta$	
Equation	$2\theta = 2\theta$	$\pi - 2\theta = 2\theta$	$2\theta - \pi = 2\theta$	$2\pi - 2\theta = 2\theta$	

Ainsi : $\mathrm{Arccos}\,(|\cos 2\theta|) = 2\theta \Longleftrightarrow \theta \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

◇ **Réponse :** $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$.

d) D'abord : $x \in [0;\ 1]$; appliquer ensuite sin.

◇ **Réponse :** $\{0,\ 1\}$.

e) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{Arctan} x + 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$.
En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

◇ **Réponse :** $\mathbb{R}$.

f) ◇ **Réponse :** $\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}\right\}$.

7.9.4 *a)* **1re méthode.**

Les applications $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)\end{array}$ et $g : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\end{array}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x}\operatorname{ch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}}\,\frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{ch} x}.$$

De plus : $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} g = \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = g(x)$.
Enfin, f est impaire et g est paire.

2ème méthode.

On peut supposer $x \in \mathbb{R}_+$. Alors : $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$;
donc $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

b) Même méthode qu'en *a)*.

7.9.5 En notant $\alpha = \operatorname{Arcsin} x$, $\beta = \operatorname{Arcsin} y$, le système proposé se ramène à :

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}.$$

◇ **Réponse :** $\left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

7.9.6

g \ f	Arcsin	Arccos	Arctan
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
tan	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x

Calculons, par exemple, $\tan(\operatorname{Arccos} x)$, pour $x \in [-1;\ 1] - \{0\}$.

En notant $\theta = \operatorname{Arccos} x$, on a : $\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \dfrac{1-x^2}{x^2}$, d'où $|\tan\theta| = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

De plus, $\tan\theta$ et $\cos\theta$ sont du même signe, puisque $\theta \in [0;\ \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

D'où : $\tan(\operatorname{Arccos} x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

7.9.7 Etudier les variations de $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arctan} x - \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$.

7.9.8 En notant $\alpha = \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$ et $\beta = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$, on a $(\alpha,\beta) \in \left]0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[^2$

et $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}}{\sqrt{1-\dfrac{x-a}{b-a}}} = \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} = \tan\beta$.

◇ **Réponse :** $a < x < b \Longrightarrow \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.

7.9.9 L'application $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;\ 1]$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $([-1;\ 1], *)$. Ainsi, $([-1;\ 1], *)$ est un groupe isomorphe au groupe-quotient $\mathbb{R}/\operatorname{Ker}(\sin)$, c'est-à-dire $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

C.7.1 *1) a)* • $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = -\varphi(x)$.

• φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \leqslant 0$.

b) • Pour tout x de $[1;\ +\infty[$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, et $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \leqslant 1$.

• Puisque φ est croissante et majorée sur $[1;\ +\infty[$, φ admet une limite finie L en $+\infty$; de plus : $L \geqslant \varphi(1) > 0$.

c) L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right[\\ x \longmapsto \varphi(x) \end{array}$ est continue, strictement croissante, et $\lim\limits_{-\infty} \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) > 0)$, l'application tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan' x = \frac{1}{\varphi'(\tan x)} = 1 + \tan^2 x.$$

3) a) $|\tan x| \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} +\infty$, donc $\cos x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} 0 = \cos\frac{\pi}{2}$.

b) analogue à *a)*.

4) • cos est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \cos' x = -\frac{1}{2}(1 + \tan^2 x)^{-\frac{3}{2}} 2\tan x(1 + \tan^2 x) = -\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = -\sin x.$$

De même pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ainsi cos est continue sur $[0; \pi]$, dérivable sur $[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, et $\cos' x = -\sin x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} -1$; d'après le théorème limite de la dérivée (cf. 5.2.2, Corollaire, Tome 1, p. 144), cos est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et $\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Ceci montre que la restriction de cos à $[0; \pi]$ est de classe C^1 ; comme $\cos' 0 = \cos' \pi = 0$ et que cos est paire et 2π-périodique, on en déduit que cos est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\cos' = -\sin$.

• Raisonner de manière analogue pour montrer que sin est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\sin' = \cos$.

C.7.2 **A.** *1)* Intégrer par parties deux fois :

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n+1}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left([(x^2 - t^2)^{n+1}\sin t]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x}(n+1)(x^2 - t^2)^n(-2t)\sin t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{n!}\int_{-x}^{x}(t(x^2 - t^2)^n)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{n!}\left([t(x^2 - t^2)^n(-\cos t)]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x}((x^2 - t^2)^n - 2nt^2(x^2 - t^2)^{n-1})(-\cos t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{n!}\left(\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^n\cos t\,\mathrm{d}t - 2n\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n-1}t^2\cos t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{n!}\left(\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^n\cos t\,\mathrm{d}t + 2n\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n-1}((x^2 - t^2) - x^2)\cos t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{n!}\left((2n+1)\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^n\cos t\,\mathrm{d}t - 2nx^2\int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)^{n-1}\cos t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2(2n+1)I_n(x) - 4x^2 I_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

2) Récurrence (à deux pas) sur n.

• $n = 0$: $I_0(x) = 2\sin x$, $C_0 = 0$, $S_0 = 2$.

• $n = 1$: $I_1(x) = \int_{-x}^{x}(x^2 - t^2)\cos t\,\mathrm{d}t = [(x^2 - t^2)\sin t]_{-x}^{x} + \int_{-x}^{x} 2t\sin t\,\mathrm{d}t = 2[\sin t - t\cos t]_{-x}^{x}$
$= -4x\cos x + 4\sin x$, $C_1 = -4\mathrm{X}$, $S_1 = 4$.

Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et n ($n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé). On a alors, d'après *1)* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{n+1}(x) = 2(2n+1)\Big(C_n(x)\cos x + S_n(x)\sin x\Big) - 4x^2\Big(C_{n-1}(x)\cos x + S_{n-1}(x)\sin x\Big)$$
$$= C_{n+1}(x)\cos x + S_{n+1}(x)\sin x,$$

où $C_{n+1} = 2(2n+1)C_n - 4\mathrm{X}^2C_{n-1}$, $S_{n+1} = 2(2n+1)S_n - 4\mathrm{X}^2S_{n-1}$, qui sont bien des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degrés $\leqslant n+1$.

B *1) a)* $qb^nC_n\left(\frac{a}{b}\right) + pb^nS_n\left(\frac{a}{b}\right) = qb^n\left(C_n(r) + \frac{p}{q}S_n(r)\right) = \frac{qb^n}{\cos r}(C_n(r)\cos r + \sin r S_n(r))$
$= \frac{I_n(r)}{\cos r}qb^n$.

b) Puisque, pour tout n de $\mathbb{N}$, C_n et S_n sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degrés $\leqslant n$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $qb^nC_n\left(\frac{a}{b}\right) + pb^nS_n\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|I_n(r)| \leqslant \frac{1}{n!}\int_{-r}^{r}(r^2 - t^2)^n\mathrm{d}t \leqslant \frac{2rr^{2n}}{n!}$,

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{I_n(r)}{\cos r}qb^n\right| \leqslant \frac{2rr^{2n}qb^n}{n!\cos r}$. Comme $n!$ l'emporte sur les exponentielles (cf. 3.1.4 *5)*, Tome 1, p. 56), on déduit : $\frac{I_n(r)}{\cos r}qb^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Ainsi (cf. exercice 3.1.1, Tome 1, p. 56), $\left(\frac{I_n(r)}{\cos r}qb^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, sur la valeur 0.

2) Si $r \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, l'application $t \longmapsto (r^2 - t^2)^n\cos t$ est continue, $\geqslant 0$, et $\neq 0$.

3) a) • $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{r}(r^2 - t^2)^n\cos t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{r}(r^2 - t^2)^n|\cos t|\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{r}(r^2 - t^2)^n\mathrm{d}t \leqslant \left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n$.

• $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r^2 - t^2)^n\cos t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}}(r^2 - t^2)^n\cos t\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(r^2 - t^2)^n\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(r^2 - rt)^n\mathrm{d}t$
$$= \frac{r^n}{2}\left[-\frac{(r-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{r^n}{2(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right).$$

b) D'après *a)*, on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$n!I_n(r) = 2\int_0^r(r^2 - t^2)\cos t\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{r^n}{4(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right) - \left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n$$

et donc $(n+1)!I_n(r)r^{-(2n+1)} \geqslant \alpha_n$, où $\alpha_n = 1 - \left(\frac{r - \frac{\pi}{3}}{r}\right)^{n+1} - \frac{2(n+1)\left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n}{r^{2n+1}}$.

Comme $\alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$, on déduit qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_1 \Longrightarrow \alpha_n > 0 \Longrightarrow I_n(r) > 0)$.
Mais ceci contredit *B 1) b)*.

Finalement : $\tan r \notin \mathbb{Q}$.

C.7.3 *1)* Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, α annule le polynôme $X - \alpha$ de $\mathbb{Q}[X]$.

2) $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0,\ldots,\lambda_N) \in \mathbb{Q}^{N+1}$ tels que :

$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \alpha^k = 0$ et $(\lambda_0,\ldots,\lambda_N) \neq (0,\ldots,0)$.

C'est dire qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que : $P(\alpha) = 0$ et $P \neq 0$.

3) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{A}^2$.

Puisque $\alpha \in \mathbb{A}$, il existe $P \in \mathbb{Q}[X] - \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. En isolant le terme de plus haut degré, et en divisant par son coefficient, on en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ ($m = \deg(P)$) tel que $\alpha^m \in E_{\alpha,m}$, où $E_{\alpha,m}$ désigne le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par $\{1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{m-1}\}$.

On en déduit, par récurrence sur k : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k \geqslant m \Longrightarrow \alpha^k \in E_{\alpha,m})$.

Comme déjà $(\forall k \in \{0,\ldots,m-1\}, \alpha^k \in E_{\alpha,m})$, on conclut : $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha^k \in E_{\alpha,m}$.

De même : $\forall l \in \mathbb{N}, \beta^l \in E_{\beta,n}$.

Il est alors clair que : $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \alpha^k\beta^l \in F$, où F désigne le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les $\alpha^i\beta^j$ lorsque (i,j) décrit $\{0,\ldots,m-1\} \times \{0,\ldots,n-1\}$.

Ainsi, les $(\alpha\beta)^i$ $(i \in \mathbb{N})$ sont tous dans F, qui est de dimension finie ($\dim(F) \leqslant mn$); donc $((\alpha\beta)^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est liée, c'est-à-dire : $\alpha\beta \in \mathbb{A}$.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{A} - \{0\}$; il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ tels que : $a_n \neq 0$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k = 0$.

En notant $Q = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$, on a alors : $Q \in \mathbb{Q}[X] - \{0\}$ et $Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k = 0$.

Autrement dit, pour obtenir un polynôme annulateur de $\frac{1}{\alpha}$, on renverse l'ordre des coefficients d'un polynôme annulateur de α.

5) a) $\gamma = \beta\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{A}$, d'après *3)* et *4)*. Il existe donc $P \in \mathbb{Q}[X] - \{0\}$ tel que $P(\gamma) = 0$.

En notant $Q = P(X-1)$, on a alors : $Q \in \mathbb{Q}[X] - \{0\}$ et $Q(1+\gamma) = P(\gamma) = 0$, ce qui montre : $1 + \gamma \in \mathbb{A}$.

b) $\alpha + \beta = \alpha(1+\gamma) \in \mathbb{A}$, cf. *3)* et *5)a)*.

6) Par définition, $\mathbb{A}$ est l'ensemble des zéros (dans $\mathbb{R}$) des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ autres que le polynôme nul : $\mathbb{A} = \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X]-\{0\}} P^{-1}(\{0\})$.

Pour chaque P de $\mathbb{Q}[X] - \{0\}$, $P^{-1}(\{0\})$ est un ensemble fini (et $\mathrm{Card}\,(P^{-1}(\{0\})) \leqslant \deg(P)$).

D'autre part, $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$, où $\mathbb{Q}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels et de degré $\leqslant n$.

Pour chaque n de $\mathbb{N}$, l'application $\begin{array}{rcl}\mathbb{Q}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_n[X] \\ (a_0,\ldots,a_n) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_kX^k\end{array}$ est bijective et $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dénombrable, donc $\mathbb{Q}_n[X]$ l'est aussi.

Alors $\mathbb{Q}[X]$ apparaît comme réunion dénombrablement indexée d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable, puis $\mathbb{A}$, réunion dénombrablement indexée d'ensembles finis, est dénombrable.

C.7.4 *1) a)* Intégrer par parties :

$$I_P(t) = [-\mathrm{e}^{t-u}P(u)]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{t-u}P'(u)\mathrm{d}u = (\mathrm{e}^t P(0) - P(t)) + I_{P'}(t),$$

puis réitérer.

b) • Si $t \geqslant 0$: $|I_p(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{t-u}\widetilde{P}(|u|)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{t-u}\widetilde{P}(|t|)\mathrm{d}u \leqslant t\mathrm{e}^t\widetilde{P}(|t|)$.

• Si $t \leqslant 0$: $|I_p(t)| = \left|\displaystyle\int_t^0 \mathrm{e}^{t-u}P(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_t^0 \mathrm{e}^{t-u}\widetilde{P}(|u|)\mathrm{d}u \leqslant (-t)\widetilde{P}(|t|) \leqslant (-t)\mathrm{e}^{-t}\widetilde{P}(|t|)$.

2) D'après *1) a)*

$$J = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\mathrm{e}^k\sum_{j=0}^{m}P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m}P^{(j)}(k)\right) = \left(\sum_{k=0}^{m}a_k\mathrm{e}^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m}P^{(j)}(0)\right) - \left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_kP^{(j)}(k)\right)$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{e}^k = 0$.

3) a) • $\mathbf{j \leqslant p-1}$ et $\mathbf{k \geqslant 1}$.

Alors $(\mathrm{X}-k)^{p-j}$ divise $P^{(j)}$, donc $P^{(j)}(k) = 0$.

• $\mathbf{j \geqslant p}$ et $\mathbf{k \geqslant 1}$.

P s'écrit : $P = A(\mathrm{X}-k)^p$, où $A \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$; par la formule de Leibniz :

$$P^{(j)} = \sum_{i=0}^{j}\mathrm{C}_j^i A^{(j-i)}((\mathrm{X}-k)^p)^{(i)},$$

d'où $P^{(j)}(k) = \mathrm{C}_j^p A^{(j-p)}(k)p!$, et donc $p!$ divise $P^{(j)}(k)$.

• $\mathbf{j \leqslant p-2}$ et $\mathbf{k = 0}$.

Alors X^{p-1-j} divise $P^{(j)}$, donc $P^{(j)}(k) = 0$.

• $\mathbf{j \geqslant p}$ et $\mathbf{k = 0}$.

P s'écrit : $P = B^p\mathrm{X}^{p-1}$, où $B \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. On a : $P^{(j)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\mathrm{C}_j^i(B^p)^{(j-i)}(\mathrm{X}^{p-1})^{(i)}$, d'où

$$p^{(j)}(0) = \mathrm{C}_j^{p-1}(B^p)^{(j-p+1)}(0)(p-1)! = \mathrm{C}_j^{p-1}p!(B^{p-1}B')^{(j-p)}(0).$$

Ceci montre que $p!$ divise $P^{(j)}(k)$.

• $\mathbf{j = p-1}$ et $\mathbf{k = 0}$.

En notant, comme ci-dessus, $B = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-k)$, on a :

$$P^{(p-1)}(0) = (B^p)(0)(p-1)! = ((-1)^n n!)^p(p-1)!.$$

Puisque $1 \leqslant n < p$ et que p est premier, p ne divise pas $(-1)^n n!$. On déduit que $(p-1)!$ divise $P^{(p-1)}(0)$ et que $p!$ ne divise pas $P^{(p-1)}(0)$.

b) D'après *a)*, $p!$ divise tous les termes $a_kP^{(j)}(k)$ de J, sauf peut-être $a_0P^{(p-1)}(0)$.

Comme $p > n$ et $p > |a_0|$, $(p-1)!$ divise ce terme $a_0P^{(p-1)}(0)$, mais $p!$ ne le divise pas. Ainsi : $(p-1)!|J$ et $p! \nmid J$.

Donc J est un multiple non nul de $(p-1)!$, donc $|J| \geqslant (p-1)!$.

4) • $\widetilde{P} = X^{p-1}\prod_{j=1}^{n}(X+j)^p$, donc

$$\widetilde{P}(k) = k^{p-1}\prod_{j=1}^{n}(k+j)^p \leqslant (2n)^{p-1+np} = (2n)^m.$$

• D'après *1) b)* et *4)* ci-dessus :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\},\ |I_p(k)| \leqslant k\mathrm{e}^k\,\widetilde{P}(k) \leqslant n\mathrm{e}^n(2n)^m,$$

d'où $|J| \leqslant \sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|I_p(k)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)n\mathrm{e}^n(2n)^m \leqslant C^p$, où $C = \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)n\mathrm{e}^n(2n)^{n+1}$.

5) Nous avons montré qu'il existe un entier N ($N = \mathrm{Max}\,(n, |a_0|)$) et un élément C de $\mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout nombre premier p tel que $p > N$, on ait : $(p-1)! \leqslant C^p$, ou encore : $\dfrac{C^p}{(p-1)!} \geqslant 1$. Comme l'ensemble des nombres premiers est infini, on obtient, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, une contradiction avec la prépondérance de la factorielle sur les exponentielles.

Finalement : e est transcendant.

Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 8

8.1.1 En prenant $w_n = \sqrt{u_n v_n}$, on a : $\dfrac{u_n}{w_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $\dfrac{w_n}{v_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

8.1.2 On a, pour x assez grand : $\begin{cases} \ln\ln f(x) = (\ln x)^2 + \ln\ln\ln\ln x \\ \ln\ln g(x) = (\ln\ln x)(\ln x) + \ln\ln\ln x \end{cases}$,

d'où $\ln\ln g(x) = o(\ln\ln f(x))$, puis $\ln g(x) = o(\ln f(x))$, et enfin $g(x) = o(f(x))$.

◇ **Réponse :** $g = \underset{+\infty}{o}(f)$.

8.2.1 ◇ **Réponse :** $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n}$.

8.2.2 Pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $kx - 1 < \mathrm{E}(kx) \leqslant kx$, d'où en sommant ($k$ variant de 1 à n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(n+1)}{2}\, x - n < \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\, x.$$

◇ **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx) \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^2 x}{2}$.

8.2.3 Comme $k^{1/k} = \mathrm{e}^{\frac{1}{k}\ln k} \xrightarrow[k\infty]{} 1$, le théorème de Césaro montre $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{1/k} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

◇ **Réponse :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{1/k} \underset{n\infty}{\sim} n$.

8.2.4 Appliquer le résultat de 8.2.2, Etude de l'addition, *2)* p. 47 (cas des fonctions > 0) pour pouvoir affirmer :

$$(\mathrm{e}^{(f(x))^2} - 1) + (\mathrm{e}^{(g(x))^2} - 1) \sim (f(x))^2 + (g(x))^2 \sim (\varphi(x))^2 + (\psi(x))^2 \sim (\mathrm{e}^{(\varphi(x))^2} - 1) + (\mathrm{e}^{(\psi(x))^2} - 1).$$

8.2.5 *a)* $x \operatorname{sh}\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \neq 1$,

$$\ln\left(x \operatorname{sh}\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln\left(\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

◇ **Réponse :** 1.

b) $\ln(\cos 3x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos 3x - 1 \sim -\dfrac{9}{2}x^2$, $\sin^2 2x \underset{x\to 0}{\sim} 4x^2$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{9}{8}$.

c) $\log_x a - \log_a x = \dfrac{(\ln a - \ln x)(\ln a + \ln x)}{\ln a \ln x} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{2\ln a}{(\ln a)^2}(\ln a - \ln x) = -\dfrac{2}{\ln a}\ln\dfrac{x}{a}$

$\sim -\dfrac{2}{\ln a}\left(\dfrac{x}{a} - 1\right) = -\dfrac{2}{a\ln a}(x-a)$

et $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a = 2\operatorname{sh}\dfrac{x-a}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x+a}{2} \underset{x\to a}{\sim} (x-a)\operatorname{ch} a$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{2}{a\ln a\operatorname{ch} a}$.

d) ◇ **Réponse** : -1.

e) $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}-x} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}} \sim \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$,

puisque $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

De même : $\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

◇ **Réponse :** $\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}$.

f) Par le changement de variable $h = x - 1$:

$$x^x - x = x(x^{x-1} - 1) \underset{x\to 1}{\sim} \mathrm{e}^{(x-1)\ln x} - 1 = \mathrm{e}^{h\ln(1+h)} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} h\ln(1+h) \sim h^2$$

et $\ln(1+\sqrt{x^2-1}) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{h(2+h)} \sim \sqrt{2h}$.

◇ **Réponse :** 0.

g) Par le changement de variable $h = x - 1$:

$$\mathrm{e}^{x^2+x} - \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2+3h+h^2} - \mathrm{e}^{2+2h} = \mathrm{e}^{2+2h}(\mathrm{e}^{h+h^2} - 1) \underset{h\to 0}{\sim} \mathrm{e}^2(h+h^2) \sim \mathrm{e}^2 h$$

et $\cos\dfrac{\pi x}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi h}{2}\right) = -\sin\dfrac{\pi h}{2} \sim -\dfrac{\pi h}{2}$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{2\mathrm{e}^2}{\pi}$.

h) ◇ **Réponse :** $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

i) $\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x\sin x}}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x\sin x}\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}(\cos x - 1) \sim \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

◇ **Réponse :** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

j) ◇ **Réponse :** e^3 *k)* ◇ **Réponse :** e^2.

l) $x\ln x\ln\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right) = -x\ln x\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = -x\ln x\ln\left(\dfrac{\ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$

$= -x\ln x\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln x\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x} \sim -x\ln x\dfrac{1}{x\ln x} = -1$.

◇ **Réponse :** e^{-1}.

m) En notant $f(x) = (\tan 2x)^{\sin 4x}$ et en utilisant le changement de variable $h = x - \dfrac{\pi}{4}$:

$$\ln f(x) = \sin 4x \ln(\tan 2x) = -\sin 4h \ln(-\operatorname{cotan} 2h) \underset{h\to 0^-}{\sim} -4h \ln\left(-\frac{1}{2h}\right) \sim 4h \ln(-h) \xrightarrow[h\to 0^-]{} 0.$$

◇ **Réponse :** 1.

n) $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x = xg(x)$, où $g(x) = \mathrm{e}^{(x^{\frac{1}{x}}-1)\ln x} - 1$.

Et $(x^{\frac{1}{x}} - 1)\ln x = (\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} - 1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln x)^2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (x^{\frac{1}{x}} - 1)\ln x \sim \dfrac{(\ln x)^2}{x}$,

puis $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x \sim (\ln x)^2$.

◇ **Réponse :** $+\infty$.

o) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$ car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \neq 1$, d'où

$\ln((\ln(1+x))^{\ln(1+x^2)}) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^2 \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

◇ **Réponse :** 1.

p) $(\sin x)^{\operatorname{sh} x} - 1 = \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x \ln(\sin x)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \operatorname{sh} x \ln(\sin x) \sim x \ln x$.

◇ **Réponse :** 1.

8.2.6 D'abord $n \ln a_n = \ln a_n^n \xrightarrow[n\infty]{} \ln a$, donc $\ln a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$, et de même $b_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

D'où $pa_n + qb_n \xrightarrow[n\infty]{} p+q = 1$, puis $n\ln(pa_n+qb_n) \underset{n\infty}{\sim} n((pa_n+qb_n)-1) = n(p(a_n-1)+q(b_n-1))$.

Mais $n(a_n - 1) \sim n \ln a_n = \ln a_n^n \xrightarrow[n\infty]{} \ln a$, d'où $n(p(a_n-1)+q(b_n-1)) \xrightarrow[n\infty]{} p\ln a + q\ln b$.

◇ **Réponse :** $(pa_n + qb_n)^n \xrightarrow[n\infty]{} a^p b^q$.

8.2.7 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n \mathrm{d}x$.

• À l'aide d'une intégration par parties :

$$I_n = [(1+x)(\ln(1+x))^n]_0^1 - \int_0^1 n(\ln(1+x))^{n-1}\mathrm{d}x = 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}.$$

• $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+x}(\ln(1+x))^n \mathrm{d}x = 2\left[\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 2\,\frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$, d'où $I_n = o((\ln 2)^n)$.

Alors $nI_{n-1} = 2(\ln 2)^n - I_n \underset{n\infty}{\sim} 2(\ln 2)^n$.

8.2.8 En notant $x_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$, on a : $x_n = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{1}{1-u_n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Le théorème de Césaro (C 3.1, Tome 1, p. 78) permet de déduire : $\dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Mais $\dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_1}\right)$, d'où $\dfrac{1}{nu_{n+1}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, $u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

8.2.9 • $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, car $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_n^2}>0$, et divergente puisque, si $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l\in\mathbb{R}$, alors $l=l+\dfrac{1}{l^2}$, contradiction. Ceci montre : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

• Notons, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n=u_n^3$; on a : $v_{n+1}-v_n=\left(u_n+\dfrac{1}{u_n^2}\right)^3-u_n^3=3+\dfrac{3}{u_n^3}+\dfrac{1}{u_n^6}\underset{n\infty}{\sim}3$.

D'après le théorème de Césaro (C 3.1, Tome 1, p. 78), on déduit $\dfrac{v_n}{n}\xrightarrow[n\infty]{}3$, puis $v_n\underset{n\infty}{\sim}3n$.

◇ **Réponse :** $u_n\underset{n\infty}{\sim}3^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

8.3.1 *a)* **Réponse :** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{36}x^2+o(x^3)$.

b) Linéariser : $\operatorname{ch}2x\operatorname{sh}3x=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh}5x+\operatorname{sh}x)$.

◇ **Réponse :** $3x+\dfrac{21}{2}x^3+\dfrac{521}{40}x^5+o(x^5)$.

c) Linéariser : $\cos^3x=\dfrac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$.

◇ **Réponse :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{(-1)^k(3^{2k}+3)}{4((2k)!)}x^{2k}+o(x^n)$.

d) ◇ **Réponse :** $-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^4}{180}+o(x^4)$.

e) ◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}x^2+o(x^3)$.

f) $\operatorname{ch}x-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}x^2$, $\operatorname{sh}x-\sin x\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^3}{3}$, donc $((\operatorname{ch}x-\cos x)(\operatorname{sh}x-\sin x))^2\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^{10}}{9}$.
Conclure par un argument de parité.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{9}x^{10}+o(x^{11})$.

g) ◇ **Réponse :** $-2x^2-x^3+o(x^3)$.

h) ◇ **Réponse :** $x^2-x^3+o(x^3)$.

i) ◇ **Réponse :** $\ln 2+\dfrac{a+b}{2}x+\dfrac{(a-b)^2}{8}x^2+o(x^2)$.

j) $$\tan\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)=\tan\left(\operatorname{Arctan}x-\frac{x^9}{9}+o(x^9)\right)=\frac{x-\tan\left(\dfrac{x^9}{9}+o(x^9)\right)}{1+x\tan\left(\dfrac{x^9}{9}+o(x^9)\right)}$$

$$=\frac{x-\dfrac{x^9}{9}+o(x^9)}{1+o(x^9)}=x-\frac{x^9}{9}+o(x^9).$$

◇ **Réponse :** $x-\dfrac{x^9}{9}+o(x^9)$.

k) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \dfrac{1}{x}\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$.

d'où
$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}\\ &= \mathrm{e}\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + o(x^3)\right).\end{aligned}$$

◇ **Réponse :** $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}x + \dfrac{11\mathrm{e}}{24}x^2 - \dfrac{7\mathrm{e}}{16}x^3 + o(x^3)$.

l) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ quand x tend vers 0.

◇ **Réponse :** $\mathrm{e}\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)\right)$.

m) L'application $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)\end{array}$ est de classe C^1 et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

Former le $DL_2(0)$ de f', puis primitiver (cf. 8.3.3 Prop. p. 57).

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$.

n) ◇ **Réponse :** $\mathrm{e}\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{11x^2}{24}\right) + o(x^2)$.

o) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)} = \dfrac{|x|}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2)}$
$$= \frac{x}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right).$$

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{8\sqrt{2}}x^3 + o(x^3)$.

p) ◇ **Réponse :** $\mathrm{e}^{-1}\left(1 + \dfrac{2x^2}{3} + o(x^2)\right)$.

q) ◇ **Réponse :** $1 - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$.

r) ◇ **Réponse :** $\mathrm{e}\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{24}x^2 - \dfrac{3}{16}x^3 + \dfrac{139}{1152}x^4 + o(x^4)\right)$.

s) ◇ **Réponse :** $1 - \dfrac{x^3}{2} + o(x^5)$.

t) ◇ **Réponse :** $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{24}x^2 - \dfrac{1}{8}x^3 + \dfrac{251}{2880}x^4 + o(x^4)$.

u) • $\tan^3 x \underset{x\to 0}{\sim} x^3$, on développera donc $(\cos x)^{x^2} - 1$ à l'ordre 5, c'est-à-dire à l'ordre 4 compte tenu de ce que $x \longmapsto (\cos x)^{x^2} - 1$ est paire.

• $(\cos x)^{x^2} - 1 = \mathrm{e}^{x^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)} - 1 = \mathrm{e}^{-\frac{x^4}{2} + o(x^5)} - 1 = -\dfrac{x^4}{2} + o(x^5)$.

• $\tan^3 x((\cos x)^{x^2} - 1) = (x^3 + o(x^4))\left(-\dfrac{x^4}{2} + o(x^5)\right)$.

◇ **Réponse** : $-\dfrac{x^7}{2} + o(x^8)$.

v) En notant $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$, on a $f = \dfrac{1}{2}\,(u^2)'$, où $u(x) = \operatorname{Arcsin} x$. Ainsi :

$u(x) = x + \dfrac{1}{6}\,x^3 + \dfrac{3}{40}\,x^5 + o(x^5)$, $(u(x))^2 = x^2 + \dfrac{1}{3}\,x^4 + \dfrac{8}{45}\,x^6 + o(x^6)$,

$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(2x + \dfrac{4}{3}\,x^3 + \dfrac{8\cdot 6}{45}\,x^5 + o(x^5)\right)$ (cf. 8.3.3 Corollaire p. 59).

◇ **Réponse :** $x + \dfrac{2}{3}\,x^3 + \dfrac{8}{15}\,x^5 + o(x^5)$.

w) ◇ **Réponse :** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{x^2}{60}\right) + o(x^2)$.

x) ◇ **Réponse :** $\ln 3 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$.

y) ◇ **Réponse :** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} - \dfrac{19x^9}{162} + \dfrac{101x^{11}}{990} + o(x^{11})$.

z) L'application $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et (cf. 6.4.1 Corollaire 2, Tome 1, p. 187) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^8+x^4+1}} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^{12}+x^6+1}}.$$

En déduire le $DL_{12}(0)$ de f', puis le $DL_{13}(0)$ de f par primitivation (cf. 8.3.3 p. 57).

◇ **Réponse** $x^2 - x^3 - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^9}{6} - \dfrac{x^{10}}{40} + o(x^{13})$.

a') En utilisant le changement de variable $h = x - \dfrac{\pi}{3}$, former le $DL_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ de f', puis primitiver.

◇ **Réponse :** $f(x) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{4}\,h - \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\,h^2 + \dfrac{3}{16}\,h^3 + o(h^3)$, $h = x - \dfrac{\pi}{3}$.

b') Effectuer d'abord le changement de variable $h = x - 2\pi$.

◇ **Réponse :** $f(x) = -1 + \dfrac{2}{9}\,h^2 + o(h^2)$, $h = x - 2\pi$.

c') Par le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$: $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+t}{1+3t}}$.

L'application $g : t \longmapsto \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+t}{1+3t}}$ est de classe C^1 au voisinage de 0; former le $DL_2(0)$ de g', puis primitiver pour obtenir celui de g.

◇ **Réponse :** $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{25}{12x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

8.3.2 L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2} > 0$; de plus, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Ceci montre que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Comme de plus f est de classe C^∞, il s'ensuit que f^{-1} est aussi de classe C^∞ (cf. 5.3.1 Th. 4, Tome 1, p. 149), donc admet un $DL_5(0)$.

D'autre part, f étant impaire, f^{-1} l'est aussi. Il existe alors $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$f^{-1}(y) = \alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5).$$

En reportant dans la relation $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x e^{x^2} + \beta(xe^{x^2})^3 + \gamma(xe^{x^2})^5 + o(x^5) = \alpha x\left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) + \beta x^3(1+3x^2) + \gamma x^5 + o(x^5) \\ &= \alpha x + (\alpha+\beta)x^3 + \left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta + \gamma\right)x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Par unicité de la partie régulière du $DL_5(0)$ de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on déduit $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \dfrac{\alpha}{2} + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

On remarquera que le système d'équations obtenu (inconnue $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$) est linéaire, plus facile à résoudre que le système algébrique que l'on aurait obtenu en considérant $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

◇ **Réponse :** $f^{-1}(y) = y - y^3 + \dfrac{5}{2}y^5 + o(y^5)$.

8.3.3 En notant, pour abréger, $y = f(x)$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} y' &= \tan(x+y), \\ y'' &= (1+\tan^2(x+y))(1+y') = (1+y'^2)(1+y') = 1 + y' + y'^2 + y'^3, \\ y''' &= y''(1+2y'+3y'^2) \\ y^{(4)} &= y'''(1+2y'+3y'^2) + y''^2(2+6y'). \end{aligned}$$

En prenant les valeurs en 0 : $f'(0) = 1$, $f''(0) = 4$, $f^{(3)}(0) = 24$, $f^{(4)}(0) = 272$.
Appliquer enfin le théorème de Taylor-Young (8.3.2 p. 55).

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{4} + x + 2x^2 + 4x^3 + \dfrac{34}{3}x^4 + o(x^4)$.

8.3.4 ◇ **Réponses :**

a) $\dfrac{1}{3}$ *b)* $\dfrac{3}{2}$ *c)* -2 *d)* $\dfrac{1}{6}$ *e)* 2 *f)* -48 *g)* -12

h) -1 *i)* $\dfrac{1}{8}$ *j)* $-\dfrac{1}{2}$ *k)* 1 *l)* $\dfrac{1}{12}$ *m)* $\dfrac{1}{6}$ *n)* $\dfrac{a-b}{2}$

o) $\dfrac{a(a+1)}{2b}$ *p)* 1 *q)* $-\dfrac{e}{2}$ *r)* $e^{\frac{1}{3}}$ *s)* 1 *t)* 1 *u)* e^{-1}

v) $\begin{cases} 0 & \text{si } (a < 1 \text{ et } b \geqslant 1) \\ 1 & \text{si } (0 < b < 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b \geqslant 1)) \\ +\infty & \text{si } (a > 1 \text{ et } b \geqslant 1) \end{cases}$ *w)* $e^{-\frac{1}{6}}$ *x)* $(2^4 \cdot 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}$

y) $\exp\left(\dfrac{9^3 \ln 9 + 10^3 \ln 10 - 12^3 \ln 12}{4^2 \ln 4 + 7^2 \ln 7 - 8^2 \ln 8}\right)$ *z)* 1 *a')* $\dfrac{1}{4}$ *b')* 1 *c')* 1.

8.3.5 ◇ **Réponses :**

a) $\frac{1}{60}x^5$ *b)* $\frac{1}{180}x^5$ *c)* $\frac{3}{8}x^5$ *d)* $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}x$ *e)* $\frac{1}{30}x^7$

f) $-\frac{1}{30}x^7$ *g)* $-\frac{1}{360}x^7$ *h)* $\frac{1}{6}x^3$ *i)* $\frac{1}{2016}x^8$.

8.3.6 *a)* $\mathrm{e}^x - \frac{1+ax}{1+bx} = (1-a+b)x + \left(\frac{1}{2} + ab - b^2\right)x^2 + o(x^2)$.

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 1-a+b=0 \\ \frac{1}{2}+ab-b^2=0 \end{cases}$.

◇ **Réponse :** $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

b) ◇ **Réponse :** $a = \frac{3}{16}, b = \frac{5}{16}$.

8.3.7 Soit $\varepsilon > 0$ fixé; puisque $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$, il existe $\eta \in]0;1[$ tel que :

$$\forall x \in]0;\eta], \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Notons $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\eta}\right) + 1$. On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \eta \Longrightarrow \left(\forall k \in \{1,\dots,n\}, \frac{1}{n+k} \leqslant \eta\right)$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad \left|f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k}f'(0)\right| \leqslant \frac{1}{n+k}\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|u_n - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)f'(0)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k}f'(0)\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)\varepsilon \leqslant \frac{n}{n+1}\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$, d'après l'étude des sommes de Riemann (cf. 6.2.7 Corollaire, Tome 1, p. 182).

◇ **Réponse :** $f'(0)\ln 2$.

8.4.1 ◇ **Réponses :**

a) $+\infty$ *b)* $+\infty$ *c)* e *d)* $-\infty$ *e)* 1.

8.4.2 ◇ **Réponse :** $x - \ln 2 - \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x} + o(\mathrm{e}^{-4x})$.

8.4.3 L'application $\varphi : [0;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \operatorname{Arccos}(1-t^2)$ est dérivable sur $]0;\,1]$ et :

$$\forall t \in]0;\,1],\ \varphi'(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-(1-t^2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}}.$$

Comme $\varphi'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \sqrt{2}$ et que φ est continue en 0, le théorème «limite de la dérivée» (5.2.2 Corollaire, Tome 1, p. 144) permet de déduire que φ est de classe C^1 sur $[0;\,1]$ et que : $\forall t \in [0;\,1],\ \varphi'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}}$.

L'expression de φ' montre que φ' est de classe C^∞ sur $[0;\,1]$, donc admet un $DL(0^+)$ à tout ordre. Il en résulte que φ admet aussi un $DL(0^+)$ à tout ordre, obtenu en intégrant celui de φ'. On a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0;\,1],\ \varphi'(t) &= \sqrt{2}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k\right) + o(t^{2n}) \\
&= \sqrt{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k k!}\,t^{2k}\right) + o(t^{2n}) = \sqrt{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^2}\,t^{2k}\right) + o(t^{2n}).
\end{aligned}$$

Comme de plus $\varphi(0) = 0$, on déduit :

$$\forall t \in [0;\,1],\quad \varphi(t) = \sqrt{2}\left(t+\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^2(2k+1)}\,t^{2k+1}\right) + o(t^{2n+1}).$$

◇ **Réponse :** $\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^{3k}(k!)^2(2k+1)}\,x^k\sqrt{x}\right) + o(x^{n+\frac{1}{2}})$.

8.4.4 ◇ **Réponse :** $(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\left(\frac{x}{2}-\frac{\ln 2}{2}\right)}\,\mathrm{e}^x$.

8.4.5 *a)* L'application $f : x \longmapsto \tan x - x$ est dérivable sur chaque $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2};\,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$, et de dérivée $x \longmapsto f'(x) = \tan^2 x \geqslant 0$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	$\ldots$	$n\pi-\frac{\pi}{2}$		$n\pi+\frac{\pi}{2}$	$\ldots$
$f'(x)$		‖	$+$	‖	
$f(x)$		‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	

Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de f sur $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2};\,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ montrent qu'il existe un élément x_n et un seul de cet intervalle tel que $f(x_n) = 0$. Comme $f(n\pi) = -n\pi < 0$, on déduit : $n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

b) 1) Puisque $n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, on a déjà $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\infty}{\sim} n\pi$, ou encore $x_n = n\pi + o(n)$.

2) Considérons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\alpha_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - x_n$. Puisque $\alpha_n \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

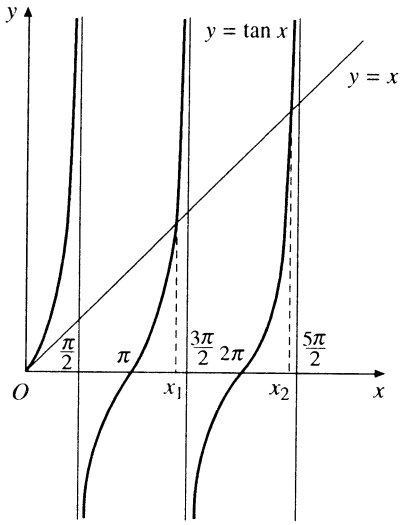
$$\alpha_n = \operatorname{Arctan}(\tan \alpha_n) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{cotan} x_n) = \frac{1}{x_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}.$$

On obtient donc maintenant : $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3) Considérons $\beta_n = x_n - \left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi}\right)$; on a déjà $\beta_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\beta_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, d'où :

$$\beta_n \underset{n\infty}{\sim} \tan \beta_n = -\frac{1}{\tan\left(x_n + \dfrac{1}{n\pi}\right)} = -\frac{1 - x_n \tan \dfrac{1}{n\pi}}{x_n + \tan \dfrac{1}{n\pi}}$$

$$= -\frac{1 - \left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)\right)\left(\dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)}{n\pi + o(n)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi n^2}.$$



◇ **Réponse :** $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi n} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

8.4.6 ◇ **Réponse :** $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi n} + \dfrac{\pi - 2}{2\pi^2 n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

8.4.7 *1)* $0 \leqslant 1 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$, donc $I_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

2) Par une intégration par parties : $1 - I_n = \left[\dfrac{x}{n}\ln(1 + x^n)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n}\ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x$, et $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

◇ **Réponse :** $I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

8.4.8 Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in [0;\,1],\ |e^t - 1 - t| \leqslant Mt^2$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;\,1],\ 0 \leqslant \dfrac{1}{n}\ln(1+x^2) \leqslant \dfrac{x^2}{n} \leqslant 1$.

D'où, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(1+\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant M\int_0^1 \left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)^2 \mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer enfin $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

◇ **Réponse :** $a = 1,\ b = \ln 2 + \dfrac{\pi}{2} - 2$.

8.4.9 *1)* $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

2) D'autre part, montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, par exemple en remarquant $\dfrac{1}{i+1} \leqslant \displaystyle\int_i^{i+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{i}$, d'où, en sommant $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} \leqslant \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, et donc $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Nous retrouverons cette comparaison entre sommes partielles de séries et intégrales partielles d'intégrales généralisées (pour une fonction monotone) dans l'étude des séries (Tome 3).

◇ **Réponse :** $\dfrac{2}{n}\ln n$.

8.4.10 *a)* Etudier les variations de $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - x - n$.

b) Remarquer : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ x_n > 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $f_n(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n - (1+\varepsilon) - n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$,

et que f est croissante sur $[1;\,+\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geqslant N \Longrightarrow f_n(1+\varepsilon) > 0 \Longrightarrow x_n \leqslant 1+\varepsilon).$$

On conclut : $x_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

c) Notons $y_n = x_n - 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$; on a donc $y_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\ln(1+y_n) = \ln(n+1+y_n).$$

Mais $n\ln(1+y_n) \underset{n\infty}{\sim} ny_n$, et $\ln(n+1+y_n) \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, d'où $y_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

◇ **Réponse :** $x_n - 1 \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

8.4.11 *a)* Etudier les variations de f_n.

b) • Remarquer $n = x_n + \ln x_n \leqslant 2x_n$, donc $x_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, puis $n = x_n + \ln x_n \sim x_n$.

• Considérons donc $y_n = x_n - n$; on a déjà $y_n = o(n)$. Alors : $y_n = -\ln(n + y_n) \underset{n\infty}{\sim} -\ln n$.

• Notons $z_n = x_n - n + \ln n$; on a déjà $z_n = o(\ln n)$. Puis

$$z_n = -\ln\left(\frac{n - \ln n + z_n}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n - z_n}{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

◇ **Réponse :** $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

8.4.12 Puisque tout entier m de $\{1, 2, \ldots, n\}$ apparaît comme diviseur de m, $2m$, $3m$, ..., on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(k) = n + \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(\frac{n}{n}\right)$.

En déduire : $n\mathrm{H}_n - n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(k) \leqslant n\mathrm{H}_n$, où $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Utiliser $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, obtenu, en comparant H_n, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $1 + \displaystyle\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

8.5.1 *a)* $\mathrm{Def}(f) =]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et f peut être complétée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$; f est dérivable sur $\mathrm{Def}(f)$ et : $\forall x \in \mathrm{Def}(f)$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)(\ln x)^2}$, où $g(x) = x\ln x - (x+1)\ln(x+1)$.

L'application g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et : $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \ln x - \ln(x+1) < 0$.

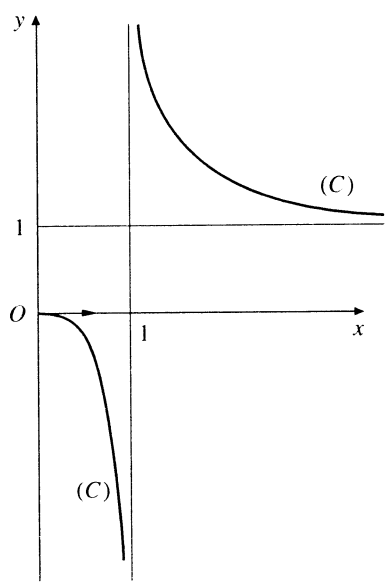
Donc g est strictement décroissante; comme de plus $\lim\limits_{0^+} g = 0$, on conclut : $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) < 0$.

On en déduit les variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 1	

(C) admet les droites d'équations $x = 1$, $y = 1$ pour asymptotes.

Enfin $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.



b) $\mathrm{Def}(f) =]-1;0[\cup]0;+\infty[$; f est dérivable sur $\mathrm{Def}(f)$ et : $\forall x \in \mathrm{Def}(f)$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(\ln(1+x))^2}$,

où $g(x) = -\dfrac{x^2}{1+x} + \ln(1+x)^2$.

L'application g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{h(x)}{1+x}$

où $h(x) = -\dfrac{2x+x^2}{1+x} + 2\ln(1+x)$.

L'application h est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et : $\forall x \in]-1;+\infty[$, $h'(x) = -\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$.

En déduire les variations de h, puis celles de g, et enfin celles de f.

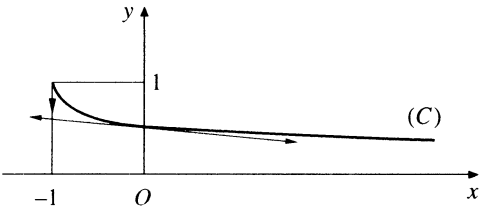
- Etude en 0

À l'aide de $DL(0)$, montrer $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$, puis $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{12}$.

On peut ainsi compléter f par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$, et (C) admet en le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ une tangente de pente $-\dfrac{1}{12}$.

- $f'(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



c) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}^*$; f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

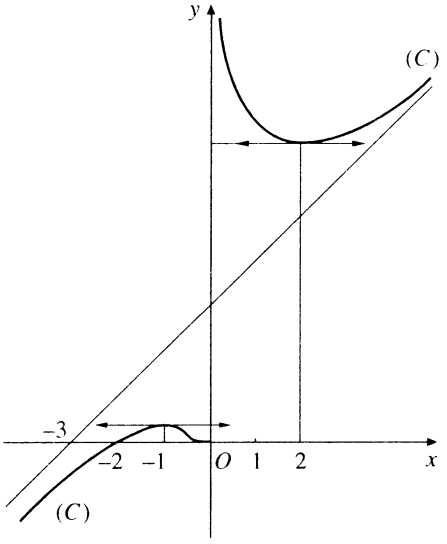
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0 || $+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Etude en 0^- : $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$.

Etude en $\pm\infty$:

$f(x) = (x+2)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc (C) admet la droite (D) d'équation $y = x + 3$ pour asymptote et, lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) (C) est au-dessus (resp. dessous) de (D).

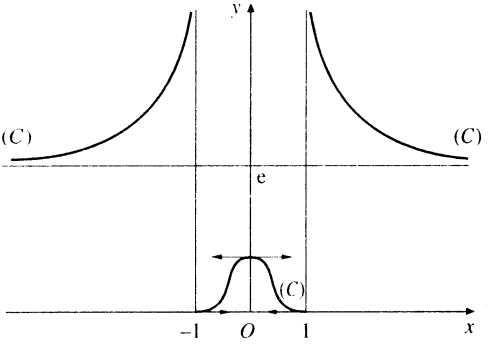
Point d'inflexion : f'' s'annule et change de signe en $-\frac{2}{5}$.



d) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et f est paire ; f est dérivable sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ et :

$\forall x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[,\ f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}\, e^{\frac{x^2}{x^2-1}} < 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0 ‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	e



e) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}^*$; f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\, g(x)$,

où $g(x) = -\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right) + \dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}$.

En déduire les variations de g et, comme $g(0) = 0$, conclure sur le signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	e

Etude en $-\infty$:

$\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right) \sim \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$.

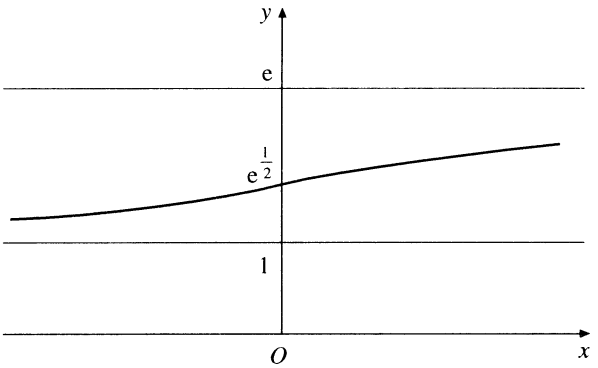
Etude en 0 :

Montrer, à l'aide de $DL(0)$: $f(x) = e^{\frac{1}{2}} + \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{8}\, x + o(x)$.

Ainsi f peut être complétée par continuité en 0 en posant $f(0) = e^{1/2}$, et alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{8}$.

Etude en $+\infty$:

$\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right) \sim \dfrac{1}{x}\ln(e^x) = 1$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$ (cf. 8.2.2 Proposition 3 p. 47 pour la composition par le logarithme sur des équivalents)

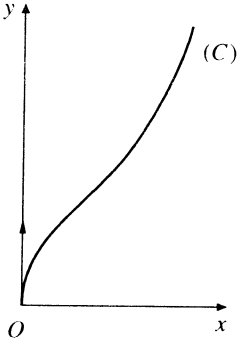


f) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}_+$: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}} + (x + \sqrt{x})\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}} > 0.$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$
- $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$



g) • $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R} - \left(\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}\right)$

- f est 2π-périodique et ($\forall x \in \mathrm{Def}(f),\ f(\pi - x) = f(x)$) ; on étudiera donc f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[\cup\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- f est dérivable sur $\mathrm{Def}(f)$ et : $\forall x \in \mathrm{Def}(f),\ f'(x) = f(x)\,\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\,g(\sin x)$,

où $g :]-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par : $\forall t \in]-1;1],\ g(t) = -\ln(1+t) + \dfrac{t}{1+t}$.

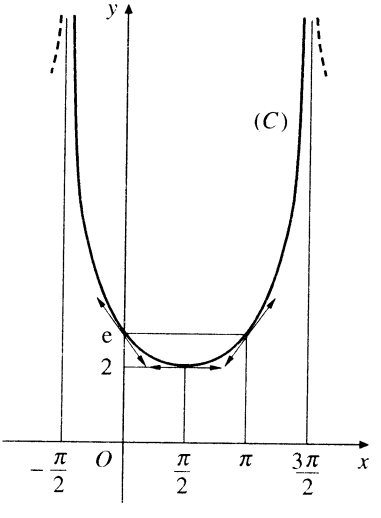
Etudier les variations de g.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e ‖ e	$\searrow$	2

Etude en 0 :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin x}\ln(1+\sin x)}$$
$$= \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x+o(x)} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + o(x);$$

on peut donc prolonger f en 0 par continuité en posant $f(0) = \mathrm{e}$; f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.



h) • $\mathrm{Def}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[- \{2n\pi\}\right)$

- f est 2π-périodique et paire
- f est dérivable sur $\left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x \in \left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = -f(x)\,\dfrac{\operatorname{cotan} x}{\sin^2 x}\, g(x)$, où $g : \left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2\ln\cos x + \sin^2 x$.

Etudier les variations de g.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1 ‖

Etude en 0^+ :

$$\ln f(x) = \operatorname{cotan}^2 x \ln\cos x = \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{(x + o(x^2))^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = -\frac{1}{2} + o(x), \text{ donc}$$

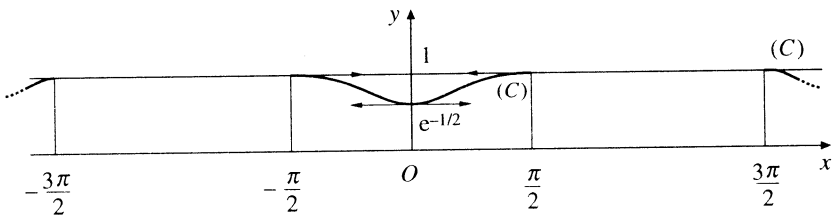
$f(x) = e^{-\frac{1}{2}+o(x)} = e^{-\frac{1}{2}}(1 + o(x)) = e^{-\frac{1}{2}} + o(x)$. Ainsi f peut être complétée par continuité en 0 en posant $f(0) = e^{-\frac{1}{2}}$; alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Etude en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$:

Par le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, on a :

$$\ln f(x) = \tan^2 t \ln\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t^2 \ln t = o(t),$$

donc $f(x) = e^{o(t)} = 1 + o(t)$. Ainsi f peut être complétée par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; alors f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.



i) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}^*$; f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\, g(x)$,

où $g(x) = -\ln(1 - x + x^2) + \dfrac{x(2x-1)}{1 - x + x^2}$.

Etudier les variations de g $\quad \left(g'(x) = \dfrac{-x(2x^2 - 2x - 1)}{(1 - x + x^2)^2}\right)$.

En déduire que g s'annule exactement en 0 et deux autres réels, notés α, β : $\alpha \simeq -0{,}604$, $\beta \simeq 3{,}301$; $f(\alpha) \simeq 0{,}328$, $f(\beta) \simeq 1{,}919$.

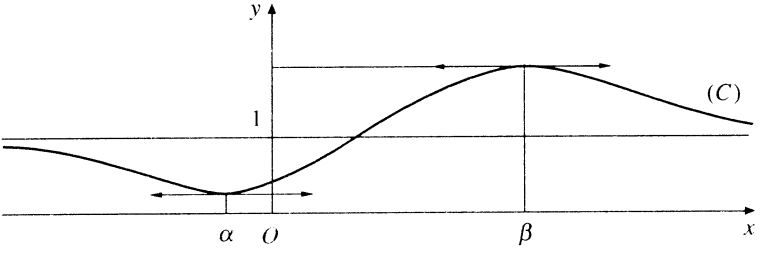
x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	1

Etude en $\pm\infty$:

$\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(1 - x + x^2) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$.

Etude en 0 :

$\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(1 - x + x^2) = -1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{2\mathrm{e}}x + o(x)$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0 et posant $f(0) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$; f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.



j) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}_+^*$; f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f(x)\Big((1 - 2x)\ln x + (1 - x)\Big)$.

Etudier les variations de g : $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \ln x + \frac{1 - x}{1 - 2x}$$

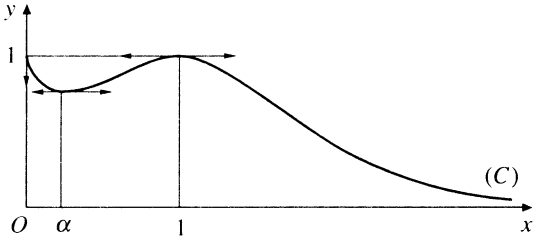
En déduire que g s'annule en deux réels α ($\alpha \simeq 0{,}236$) et 1 ; $f(\alpha) \simeq 0{,}771$.

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Etude en 0^+ :

$\ln f(x) = (x - x^2)\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{}$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

Et $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{x}(e^{(x-x^2)\ln x} - 1) \underset{x\to 0^+}{\sim} (1-x)\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.



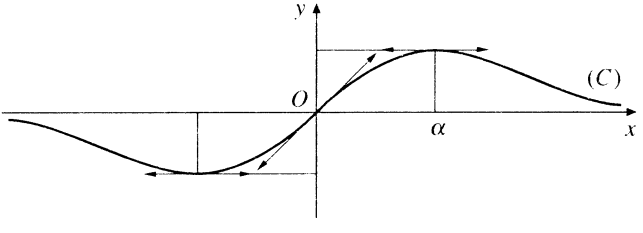
k) f est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\left(\dfrac{1}{2x} - \operatorname{Arctan} x\right)$.

L'application $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{2x} - \operatorname{Arctan} x$ est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{1+x^2} < 0.$$

En déduire que h s'annule et change de signe en un réel α, $\alpha \simeq 0{,}765$; $f(\alpha) \simeq 0{,}412$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0



l) $\mathrm{Def}(f) = [-1; 1]$, f est continue sur $[-1; 1]$, dérivable sur $]-1; 1[$, et paire. On a :

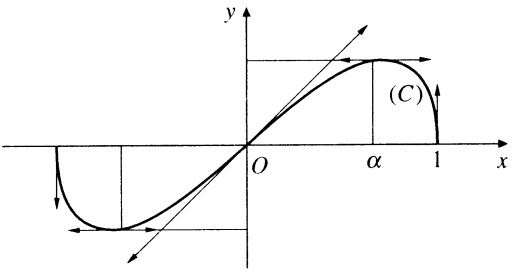
$$\forall x \in]0; 1[,\quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, g(x),$$

où $g :]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x - \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)}$.

L'application g est dérivable sur $]0;\,1[$ et : $\forall x \in]0;\,1[,\ g'(x) = \dfrac{1+5x^2}{x^2(1+x^2)^2} > 0$.

En déduire les variations de g. Il existe $\alpha \in]0;\,1[$ unique, en lequel g s'annule et change de signe; $\alpha \simeq 0{,}664$ et $f(\alpha) \simeq 0{,}438$.

x	0		α		1
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/4$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0



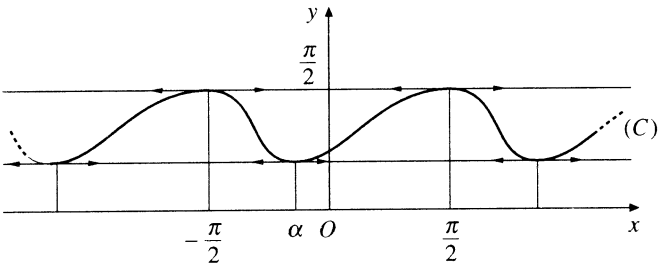
m) $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ et f est π-périodique.

On a : $f(x) \xrightarrow[x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+]{} \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} \dfrac{\pi}{2}$; on complète donc f par continuité en $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ en posant $f\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

L'application f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\quad f'(x) = \dfrac{(1+2\tan x)(1+\tan^2 x)}{1+(1+\tan x+\tan^2 x)^2}$.

On en déduit les variations de f ; on note $\alpha = \mathrm{Arctan}\left(-\dfrac{1}{2}\right) \simeq -0{,}437$, $f(\alpha) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{3}{4} \simeq 0{,}644$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ ‖



Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 9

9.2.1 *a)* ◇ **Réponse :** $\frac{1}{2}(\operatorname{Arcsin} x)^2 + C$, C constante sur $]-1;\ 1[$.

b) ◇ **Réponse :** $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

c) Le changement de variable $u = \sqrt{1+e^{2x}}$ ramène à $\int \frac{du}{u^2-1}$; ou encore, poser $v = e^{-x}$.

◇ **Réponse :** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} + C$, C constante sur $\mathbb{R}$ (ou encore : $-\operatorname{Argsh}(e^{-x}) + C$).

d) Le changement de variable $u = \sqrt{\cos x}$ ramène à $2\int (u^4-1)du$.

◇ **Réponse :** $\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x - 5) + C(x)$, C constante sur chaque $\left]-\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

e) Le changement de variable $u = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ ramène à $12\int u^3(u^3-1)du$.

◇ **Réponse :** $\frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}\left(4\sqrt[4]{x}-3\right) + C$, C constante sur $]0;\ +\infty[$.

f) Le changement de variable $u = x - \frac{1}{x}$ ramène à $\varepsilon\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$.

◇ **Réponse :** $\begin{cases} \ln(x^2-1+\sqrt{x^4-x^2+1}) - \ln x + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\ln(x^2-1+\sqrt{x^4-x^2+1}) + \ln x + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

9.2.2 Le changement de variable $u = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ ramène à $4\int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)du$.

◇ **Réponse :** $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})$.

9.3.1 ◇ **Réponses :**

a) $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}\right)e^{3x} + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

b) $(-x^2+x-1)\cos x + (2x-1)\sin x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

c) $(x^3+6x-1)\operatorname{sh} x - (3x^2+6)\operatorname{ch} x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

d) $\left(\frac{x^2}{2}\cos x + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)\sin x\right)e^x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

e) $\frac{1}{8}(2x^2+1)\operatorname{sh}2x - \frac{1}{4}x\operatorname{ch}2x - \frac{x^3}{6} + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

f) $x\operatorname{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$, C constante sur $]-1;\ 1[$.

g) $x\operatorname{Arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$, C constante sur $]-1;\ 1[$.

h) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

i) $x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1} + C$, C constante sur $[1;\ +\infty[$.

j) $\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha x^\alpha}{x^\alpha+1}\ln x - \ln(x^\alpha+1)\right) + C$, C constante sur $]0;\ +\infty[$.

k) $\frac{x^3}{3}\ln(x^6-1) - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3-1}\right| + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ -1[$ et constante sur $]1;\ +\infty[$.

l) $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan}x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

m) $x\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{x-2} + \frac{3}{4}\ln(2x^2-2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 2[$ et constante sur $]2;\ +\infty[$.

n) $x\tan x + \ln|\cos x| + C(x)$, C constante sur chaque $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{Z}$.

o) $\sin x\ln(1+\cos x) + x - \sin x + C(x)$, C constante sur chaque $]-\pi+2n\pi;\ \pi+2n\pi[$, $n\in\mathbb{Z}$.

p) $\frac{1}{(\ln 3)^2}(\sqrt{2x+1}\ln 3 - 1)3^{\sqrt{2x+1}} + C$, C constante sur $\left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

9.3.2 *a)* Poser $\theta = \operatorname{Arcsin}x$, puis utiliser une méthode de coefficients indéterminés.

◇ **Réponse :** $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

b) En posant $\theta = \operatorname{Arccos}(1-2x)$: $\int_0^1 (x-x^2)^{3/2}\operatorname{Arccos}(1-2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int_0^\pi \theta\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Linéariser $\sin^4\theta$, puis primitiver par parties.

◇ **Réponse :** $\frac{3\pi^2}{256}$.

c) ◇ **Réponse :** $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\ln 2$. *d)* ◇ **Réponse :** $\mathrm{e}^{-\pi}$.

e) Par $u = \ln x$: $\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} u^2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.

◇ **Réponse :** $2((\ln 2)-1)^2$.

9.5.1 *a)* Poser $u = x^2$, puis décomposer en éléments simples.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{4(1+x^2)^2} + \dfrac{1}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|x| + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$.

b) ◇ **Réponse :** $\dfrac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\operatorname{Arctan}(x+1) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

c) Poser $u = x + 2$, puis décomposer en éléments simples.

◇ **Réponse :** $4\operatorname{Arctan}(x+2) + \dfrac{6x+17}{2(x^2+4x+5)} + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

d) $\dfrac{1}{5}((X+1)^5 - X^5 - 1) = X(X^3 + 2X^2 + 2X + 1) = X(X+1)(X^2+X+1)$.

Une décomposition en éléments simples fournit : $\dfrac{1}{(X+1)^5 - X^5 - 1} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{X^2+X+1}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{5}\left(\ln|x| - \ln|x+1| - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C(x)$, C constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 0[$, $]0;\ +\infty[$.

e) Une décomposition en éléments simples fournit :

$$\frac{1}{(X^2+X+1)^2+1} = \frac{1}{(X^2+1)(X^2+2X+2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{-2X+1}{X^2+1} + \frac{2X+3}{X^2+2X+2}\right).$$

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{5}(-\ln(x^2+1) + \operatorname{Arctan} x + \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{Arctan}(x+1)) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

9.5.2 *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} \underset{u=e^x}{=} \int \frac{du}{u(u+1)} = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du.$

◇ **Réponse :** $x - \ln(e^x+1) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{e^x-1}\,dx \underset{u=\sqrt[3]{e^x-1}}{=} 3\int \frac{u^3}{u^3+1}du = 3\int\left(1 - \frac{1}{(u+1)(u^2-u+1)}\right)du$ et décomposer en éléments simples.

◇ **Réponse :** $3\sqrt[3]{e^x-1} - \ln\left(1+\sqrt[3]{e^x-1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{e^x-1}\right)^2 - \sqrt[3]{e^x-1} + 1\right)$

$+\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{e^x-1}-1}{\sqrt{3}}\right) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \underset{u=\sqrt[3]{1+x^2}}{=} \frac{3}{2}\int \frac{u}{u^3-1}du$, puis décomposer en éléments simples.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1\right)$

$+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$.

d) Primitiver par parties, puis poser $u = \sqrt{x}$.

◇ **Réponse :** $2\sqrt{x}\,\text{Arctan}\,x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{2x}}{x+1-\sqrt{2x}} - \sqrt{2}(\text{Arctan}\,(\sqrt{2x}+1) + \text{Arctan}\,(\sqrt{2x}-1)) + C$, C constante sur $]0;\ +\infty[$.

e) $\displaystyle\int \frac{\text{ch}\,x}{\sqrt{2-\text{e}^{-x}}}\,\text{d}x \underset{u=\sqrt{2-\text{e}^{-x}}}{=} \int\left(1+\frac{1}{(2-u^2)^2}\right)\text{d}u.$

Calculer $J_1(u) = \displaystyle\int \frac{\text{d}u}{2-u^2}$ directement, puis par parties pour en déduire $J_2(u)$ (cf calcul de $I_n(t)$, 9.5 3) *2)* p. 92).

◇ **Réponse :** $\left(1+\dfrac{1}{4}\text{e}^x\right)\sqrt{2-\text{e}^{-x}} + \dfrac{\sqrt{2}}{16}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\text{e}^{-x}}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\text{e}^{-x}}} + C$, C constante sur $]-\ln 2;\ +\infty[$.

9.5.3 ◇ **Réponse :** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4}$.

9.5.4 ◇ Calculer la décomposition en éléments simples :

$$\frac{a\text{X}+b}{\text{X}^3(\text{X}-1)^2} = \frac{b}{\text{X}^3} + \frac{a+2b}{\text{X}^2} + \frac{2a+3b}{\text{X}} + \frac{a+b}{(\text{X}-1)^2} - \frac{2a+3b}{\text{X}-1}.$$

◇ **Réponse :** $2a+3b=0$.

9.5.5 Le coefficient de $\dfrac{1}{\text{X}}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{\text{X}^3+a}{\text{X}(\text{X}^2+1)^2}$ est a ; il est donc nécessaire que $a=0$. Mais alors, calculer $\displaystyle\int\frac{x^3}{x(x^2+1)^2}\text{d}x$ et montrer qu'on obtient une fonction non rationnelle.

◇ **Réponse :** aucun a ne convient.

9.6.1 *a)* Linéariser : $\sin^4 x = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 4x$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$;

ou encore : $\dfrac{3}{8}x - \dfrac{5}{8}\sin x\cos x + \dfrac{1}{4}\sin x\cos^3 x + C$.

b) Linéariser : $\sin x\sin 3x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$,...

◇ **Réponse :** $-\dfrac{1}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{16}\cos 4x + \dfrac{1}{24}\cos 6x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$;

poser $u = x - \dfrac{\pi}{4}$, pour se ramener à $\sqrt{2}\displaystyle\int\frac{\cos u}{\cos^2 u(1+2\sin^2 u)}\text{d}u$; puis poser $v = \sin u$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right| + \dfrac{2}{3}\,\text{Arctan}\,(\sin x - \cos x) + C(x)$, C constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $\sin x + \cos x$ ne s'annule pas.

d) Poser $u = \cos x$.

◇ **Réponse :** $\ln(1 + \cos x) - \ln|\cos x| + C(x)$, C constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R} - \left(\{\pi + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + m\pi;\ m \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

e) Poser $u = \sin x$.

◇ **Réponse :** $-\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C(x)$, C constante sur chaque $\left]n\frac{\pi}{2};\ (n+1)\frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) Poser $u = \tan x$.

◇ **Réponse :** $-\frac{1}{2}\operatorname{cotan}^2 x - \ln|\sin x| + C(x)$, C constante sur chaque $]n\pi;\ (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

g) Par parties : $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sin^4 x \cdot \tan x - \int 4\sin^3 x \cos x \tan x\,\mathrm{d}x$.
Utiliser l'exercice 9.6.1 *a)* p. 98.

◇ **Réponse :** $\frac{\sin^5 x}{\cos x} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\sin x \cos x - \sin x \cos^3 x + C(x)$, C constante sur chaque $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

9.6.2 *a)* Poser $u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, puis $v = \sin u$.

◇ **Réponse :** $-\ln\left|\frac{1 + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right) + C(x)$, C constante sur chaque intervalle de $\mathbb{R} - \left(\{n\pi;\ n \in Z\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2m\pi;\ m \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

b) Poser $u = \sqrt{\cos 2x}$.

◇ **Réponse :** $-\operatorname{Arctan}\sqrt{\cos 2x} + C(x)$, C constante sur chaque $\left]-\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

c) Poser $u = \tan\frac{x}{2}$, puis $v = \sqrt{1 - u^2}$.

◇ **Réponse :**

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - \tan^2\frac{x}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \tan^2\frac{x}{2}}}\right| + C_1 & \text{si } x \in \left]2n\pi;\ 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right[,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - \tan^2\frac{x}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \tan^2\frac{x}{2}}}\right| + C_2 & \text{si } x \in \left]2n\pi - \frac{\pi}{2};\ 2n\pi\right[,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

9.6.3 *a)* $\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{4} = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ $= \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$. Poser $u = \tan 2x$.

◇ **Réponse :** $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

b) Poser $\theta = \operatorname{Arccos} x$, puis $\varphi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$.

◇ **Réponse :** $4\sqrt{2} - \pi - 2$.

9.6.4 *a)* Même méthode que pour l'exercice 9.6.1 *g)* p. 98.

◇ **Réponse :** $-\frac{\operatorname{ch}^5 x}{\operatorname{sh} x} + \frac{3}{2}x + \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.

b) Poser $u = \operatorname{th} 2x$.

◇ **Réponse :** $8\coth 2x - \frac{8}{3}\coth^3 2x + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.

c) En primitivant par parties, former une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+2}(x)$, où $I_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^n x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

◇ **Réponse :** $\frac{1}{4}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

d) Poser $u = \operatorname{ch} x$.

◇ **Réponse :** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2}}\right) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

e) Poser $u = \operatorname{th} x$.

◇ **Réponse :** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x}\right) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

f) Poser $u = \operatorname{sh} x$.

◇ **Réponse :** $2\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x + 5\ln|1 + \operatorname{sh} x| + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ \alpha[$ et sur $]\alpha;\ +\infty[$, où $\alpha = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

g) Poser $u = \operatorname{sh} x$.

◇ **Réponse :** $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} + \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)\right) + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$.

h) $\int \operatorname{th}^3 x\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{th} x(1 - \operatorname{th}^2 x)\mathrm{d}x + \int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x$.

◇ **Réponse :** $-\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x + \ln\operatorname{ch} x + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

9.6.5 $A(x) + B(x) = \int e^{(n+1)x}\operatorname{sh}^{n-1}x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}(e^{2x}-1)\right)^{n-1} e^{2x}dx$

$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}(e^{2x}-1)\right)^{n} + C_1 = \frac{1}{n}e^{nx}\operatorname{sh}^n x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

De même $A(x) - B(x) = \frac{1}{n}e^{-nx}\operatorname{sh}^n x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$

En déduire A et B, puis, de la même façon, C et D.

◇ **Réponse :**
$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{n}\operatorname{ch} nx \operatorname{sh}^n x + C_1,\\ B(x) &= \frac{1}{n}\operatorname{sh} nx \operatorname{sh}^n x + C_2,\\ C(x) &= \frac{1}{n}\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}^n x + C_3,\\ D(x) &= \frac{1}{n}\operatorname{sh} nx \operatorname{ch}^n x + C_4, \end{aligned} \qquad (C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4.$$

9.6.6 $I(x) = \int \frac{2\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{n-1}x}dx$, poser $u = \operatorname{sh} x$.

◇ **Réponse :**
$$\begin{cases} I(x) = -\dfrac{2}{(n-2)\operatorname{sh}^{n-2}x} + C_1 \\ J(x) = -\dfrac{2}{(n-2)\operatorname{ch}^{n-2}x} + C_2 \end{cases},$$

C_1 constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$, C_2 constante sur $\mathbb{R}$.

9.6.7 Poser $u = e^{\alpha x}$.

◇ **Réponse :** $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1+e^{\alpha x}} - \ln(1+e^{\alpha x}) + \alpha x\right) + C$, C constante sur $\mathbb{R}$.

9.6.8 *a)* Utiliser une expression conjuguée.

◇ **Réponse :** $\frac{2}{3}((x+1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{x}) + C$, C constante sur $[0;\ +\infty[$.

b) Poser $u = \sqrt{x-1}$.

◇ **Réponse :** $\ln(x + \sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+2\sqrt{x-1}}{\sqrt{3}}\right) + C$, C constante sur $[1;\ +\infty[$.

c) Poser $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

◇ **Réponse :** $-(1-x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$, C constante sur $]-1;\ 1]$.

d) Poser $u = x^2$ puis $v = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$.

◇ **Réponse :** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{x^4+1}) - \frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$.

e) Poser $t = \sqrt{x+2}$, puis $u = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$. On obtient ainsi :

$$\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x = \int \frac{2+\operatorname{sh} u}{1+\operatorname{ch} u} 2\operatorname{ch} u \operatorname{sh} u \,\mathrm{d}u = 2\int \frac{(2+\operatorname{sh} u)(\operatorname{ch} u - 1)}{\operatorname{sh} u}\operatorname{ch} u \,\mathrm{d}u = 4J(u) + 2K(u),$$

où $J(u) = \displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} u\,(\operatorname{ch} u - 1)}{\operatorname{sh} u}\mathrm{d}u$ (poser $v = \operatorname{ch} u$) et $K(u) = \displaystyle\int (\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{ch} u)\mathrm{d}u$ (linéariser).

◇ **Réponse :** $4\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - 4\ln(1+\sqrt{x+2}) + \ln(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}) + C$, C constante sur $[-1;\ +\infty[$.

f) Poser $u = \sqrt{1 - x^3}$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{2}{3}\operatorname{Arctan}(\sqrt{1-x^3}) + C$, C constante sur $\left]1;\ \sqrt[3]{2}\right[$ et constante sur $\left]\sqrt[3]{2};\ +\infty\right[$.

9.6.9 *a)* Poser $u = \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.

◇ **Réponse :** $\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\operatorname{Arctan}\alpha$, où $\alpha = \sqrt{\dfrac{b-a}{b+a}}$.

b) Poser $u = \sqrt{x-1}$.

◇ **Réponse :** $\ln\dfrac{3+\sqrt{2}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

9.6.10 *a)* Poser $\theta = \operatorname{Arcsin} x$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x - \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$, C constante sur $]-1;\ 1[$.

b) Par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x+2}$: $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x^2-5x+4}} = -\varepsilon\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{18y^2-9y+1}}$, où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(y)$. Puis, par $t = 12y - 3$:

$$I(x) = -\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_1\sqrt{2}}{6}\ln(\varepsilon_1 t + \sqrt{t^2-1}),$$

où $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(t)$.

◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\ln\dfrac{3(x-2)-2\sqrt{2}\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2} + C_1 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\ln\dfrac{3(2-x)+2\sqrt{2}\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2} + C_2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}\ln\dfrac{3(x-2)+2\sqrt{2}\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2} + C_3 & \text{si } 4 < x \end{array}\right|$, $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

c) Poser $t = \dfrac{x-2}{2}$, puis $\theta = \operatorname{Arcsin} t$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{4}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} + C$, C constante sur $]0;\ 4[$.

d) Poser $\varphi = \ln(|x| + \sqrt{x^2-1})$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}\ln(\varepsilon x + \sqrt{x^2-1}) + C(x)$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$, C constante sur $]-\infty;\ -1]$ et constante sur $[1;\ +\infty[$.

e) Poser $y = \dfrac{1}{x}$, puis $u = \sqrt{y^2+1}$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln|x| + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$.

f) Poser $\varphi = \ln(\varepsilon x + \sqrt{x^2-1})$ où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$, après avoir utilisé une expression conjuguée.

◇ **Réponse :**

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\ln(x^2+1) - \ln(-x+\sqrt{x^2-1}) + \sqrt{2}\ln\left(-x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}\right) + C_1 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\ln(x^2+1) + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}\right) + C_2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

g) Poser $y = \dfrac{1}{x-1}$.

◇ **Réponse :** $-2\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}} + C$, C constante sur $]1;\ 2[$.

h) Poser $t = 2x-3$, puis $\varphi = \ln(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1})$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(t)$.

◇ **Réponse :** $\left.\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} - \dfrac{5}{2}\ln(3-2x+2\sqrt{x^2-3x+2}) + C_1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \sqrt{x^2-3x+2} + \dfrac{5}{2}\ln(2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}) + C_2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}\right|, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$

i) Poser $u = x-2$, puis $v = \sqrt{u^2-1}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-4x+3} + \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{2(x-2)^2} + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 1[$ et constante sur $]3;\ +\infty[$.

j) Poser $u = \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$.

◇ **Réponse :** $\operatorname{Arcsin}\dfrac{2x-(a+b)}{b-a} + C$, C constante sur $]a;\ b[$.

k) $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2\sqrt{x^2+2x+2}} \underset{y=\frac{1}{x-2}}{=} -\varepsilon \int \frac{y}{\sqrt{10y^2+6y+1}}\mathrm{d}y$, où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(y)$.

Poser ensuite $t = 10y+3$, puis $\varphi = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{10(x-2)} + \varepsilon\dfrac{3\sqrt{10}}{100}\ln\dfrac{3x+4+\varepsilon\sqrt{10}\sqrt{x^2+2x+2}}{x-2} + C(x)$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x-2)$,

C constante sur $]-\infty;\ 2[$ et constante sur $]2;\ +\infty[$.

9.6.11 *a)* Poser successivement $u = x^\alpha$, $v = \dfrac{1}{u}$.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{2+x^\alpha+2\sqrt{1+x^\alpha+x^{2\alpha}}}{\sqrt{3}x^\alpha} + C$, C constante sur $]0;\ +\infty[$.

b) Poser $t = \tan x$, $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$.

◇ **Réponse :** $\ln(\tan x + \sqrt{2+\tan^2 x}) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}\right) + C(x)$, C constante sur chaque

$\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n \in \mathbb{Z}$.

c) Poser successivement $y = \mathrm{e}^x + 1$, $z = \dfrac{1}{y-1}$, $u = \dfrac{3z-1}{2}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(3 - \mathrm{e}^x + \sqrt{3}\sqrt{4-(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) + C$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$.

d) Poser $\theta = \operatorname{Arcsin} x$.

◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{ll} -2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}+C & \text{si} \quad x \in]-1;\ 0] \\ 2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}+C & \text{si} \quad x \in [0;\ 1[\end{array}\right|, \quad C \in \mathbb{R}.$

e) Poser $y = x + \dfrac{1}{x}$.

◇ **Réponse :** $\ln(x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}) - \ln|x| + C(x)$, C constante sur $]-\infty;\ 0[$ et constante sur $]0;\ +\infty[$.

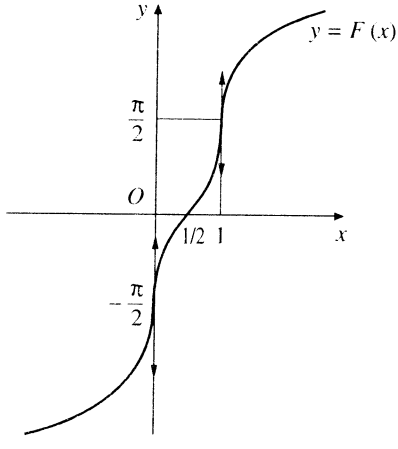
9.6.12 *a)* ◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{ll} -\ln(1-2x+2\sqrt{x^2-x})+C_1 & \text{si } x<0 \\ \operatorname{Arcsin}(2x-1)+C_2 & \text{si } 0<x<1 \\ \ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x})+C_3 & \text{si } x>1 \end{array}\right|, (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$

b) En notant I_1, I_2, I_3 les primitives ci-dessus sur $]-\infty;\ 0[$, $]0;\ 1[$, $]1;\ +\infty[$ respectivement, on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim_{x\to 0^-} I_1(x) = C_1, & \lim_{x\to 0^+} I_2(x) = -\dfrac{\pi}{2}+C_2 \\ \lim_{x\to 1^-} I_2(x) = \dfrac{\pi}{2}+C_2, & \lim_{x\to 1^+} I_3(x) = C_3 \end{array}\right|.$$

Il y a donc raccord par continuité en 0 et en 1 si et seulement si : $C_1 = -\dfrac{\pi}{2} + C_2$ et $C_3 = \dfrac{\pi}{2} + C_2$.

De plus : $I_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = C_2$.



◇ **Réponse :** $F(x) = \left\{\begin{array}{ll} -\ln(1-2x+2\sqrt{x^2-x}) - \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \operatorname{Arcsin}(2x-1) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x}) + \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{array}\right.$.

9.6.13 Souvent, on pourra essayer un changement de variable qui échange (ou conserve) les bornes, en vue d'obtenir une égalité non triviale portant sur l'intégrale demandée (exemples *b), c)*).

a) Poser $u = \tan \dfrac{x}{2}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{a}{\sin a}$.

b) En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, et en notant I l'intégrale demandée, obtenir : $I = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$.

◇ **Réponse :** π.

c) Par $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, obtenir $I = \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} \ln(1 + \sqrt{2})$.

d) Poser $t = \tan x$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{2} - 1)$.

e) Notons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \,\mathrm{d}x$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \sin nx \,\mathrm{d}x$, $A_n = I_n + \mathrm{i}J_n$. On a, pour $n \geqslant 1$:

$$A_n = \int_0^{\pi} (\cos x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1)\right)^{n-1} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1)\right)^{n-1} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}A_{n-1}.$$

En déduire $A_n = \dfrac{1}{2^n} A_0 = \dfrac{\pi}{2^n}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{2^n}$.

9.6.14 • $\begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0;\ +\infty[, \\ \forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + x^3)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3x^2) > 0\ . \\ \lim\limits_{0^+} f = 0,\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \end{cases}$

• $I(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x + f^{-1}(x)} \underset{y = f^{-1}(x)}{=} \int \frac{f'(y)}{f(y) + y}\mathrm{d}y = \ln(f(y) + y) - J(y)$, où $J(y) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y) + y}$.

Pour calculer $J(y)$, poser $z = \sqrt{1 + y}$.

◇ **Réponse :** $\ln\left(x + f^{-1}(x)\right) + \dfrac{1}{\sqrt{1 + f^{-1}(x)} + 1} - \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{\sqrt{1 + f^{-1}(x)} - 1}{\sqrt{1 + f^{-1}(x)} + 1}\right) + C$, C constante sur $]0;\ +\infty[$.

9.6.15 Notons $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ F(a) = \int_0^{\sin^2 a} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\cos^2 a} \operatorname{Arccos} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

• F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall a \in \mathbb{R}$, $F'(a) = 2(\operatorname{Arcsin}|\sin a| - \operatorname{Arccos}|\cos a|)\sin a \cos a$.

En particulier : $\forall a \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $F'(a) = 0$.

• F est π-périodique et : $\forall a \in \mathbb{R}$, $F(\pi - a) = F(a)$.

• $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} + \operatorname{Arccos}\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

9.6.16 Notons $f : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u}, \end{cases}$$

qui sont de classe C^1 et vérifient :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\cos x} > 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} y} > 0, \end{cases}$$

donc sont strictement croissantes.

Montrer, par un calcul de primitives (par exemple) :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right).$$

et en déduire :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \operatorname{ch}\big(f(x)\big) = \frac{1}{\cos x} = f'(x).$$

On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad (g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x) = \frac{f'(x)}{\operatorname{ch}\big(f(x)\big)} = 1.$$

Comme $(g \circ f)(0) = g(0) = 0$, on déduit : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad (g \circ f)(x) = x$.

- Si $y = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = f(x)$, alors $x = (g \circ f)(x) = g(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u}$.

- Si $x = \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u} = g(y)$, alors $g\big(f(x)\big) = x = g(y)$, donc, puisque f est injective (car strictement croissante), $y = f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$.

Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 10

10.1.1 Vérifier d'abord la continuité de f sur un intervalle convenable.

a) $(\forall x \in [1;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-\frac{\pi}{4}x})$ et $x \longmapsto e^{-\frac{\pi}{4}x}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

◇ **Réponse :** f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

b) $0 \leqslant f(x) = \dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{\sqrt{\ln(x+1)}+\sqrt{\ln x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$ et exemple de Bertrand.

◇ **Réponse :** f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

c) Utiliser 8.2.3 *3)* p. 49 : $0 \leqslant \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{x-1}{x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$,

et exemple de Riemann.

◇ **Réponse :** f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

d) $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^{3/2}}$ et règle $x^\alpha f(x)$ (avec $\alpha = \dfrac{4}{3}$, par exemple), ou exemple de Bertrand.

◇ **Réponse :** f est intégrable sur $[1;+\infty[$.

e) $0 \leqslant f(x) = \dfrac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ et exemple de Riemann.

◇ **Réponse :** f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

f) $0 \leqslant \operatorname{Arctan}(e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ et $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.

◇ **Réponse :** f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

g) $0 \leqslant \dfrac{1}{e^x-\cos x} = \dfrac{1}{(1+x+o(x))-(1-o(x))} \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et exemple de Riemann.

◇ **Réponse :** f n'est pas intégrable sur $]0;1]$.

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^{5/2}}\left(\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$ et exemple de Riemann.

◇ **Réponse :** f est intégrable sur $]0;1]$.

i) $f \geqslant 0$ et $x^2 f(x) = e^{2\ln x+(\ln x)^2-x\ln(\ln x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

◇ **Réponse :** f est intégrable sur $[2;+\infty[$.

j) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2}\right)^{-2} = 4e^{-2\sqrt{\ln x}}$ et donc $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{\ln x-2\sqrt{\ln x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

◇ **Réponse :** f n'est pas intégrable sur $[2;+\infty[$.

k) $x^{\frac{1}{2}}\sqrt{-\ln x} = \sqrt{-x\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$

◇ **Réponse :** f est intégrable sur $]0;\,1]$.

10.1.2 *a) α)* On a vu (Tome 1, 6.4.4 Exemple *1)* p. 191) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\,I_{n-1}$,

d'où : $I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} I_{n-1}$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \sin^{n+1}x \leqslant \sin^n x \leqslant \sin^{n-1}x$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$.

On en déduit : $I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} I_n$.

β) On a vu (Tome 1, 6.4.4 Exemple *1)*) que, pour tout p de $\mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

d'où : $I_{2p}I_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4p}$.

Comme $I_{2p+1} \sim I_{2p}$ et $I_{2p} \geqslant 0$, on déduit $I_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, puis $I_{2p+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2p+1)}}$.

Finalement : $I_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

b) α) Etudier les variations de $f_1, f_2 : [0;\,\sqrt{n}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x) = -x^2 - n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \quad \text{et} \quad f_2(x) = -x^2 + n\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right).$$

Variante : Appliquer l'inégalité classique $e^t \geqslant 1 + t$ à $t = -\dfrac{x^2}{n}$, puis à $t = \dfrac{x^2}{n}$.

β) D'après *b) α)* : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \leqslant B_n$,

où : $A_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$.

Dans A_n, le changement de variable $\varphi = \operatorname{Arccos}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ donne $A_n = \sqrt{n}\,I_{2n+1}$, d'où $A_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Dans B_n, le changement de variable $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ donne $B_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta$.

Mais : $0 \leqslant \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n-1)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(I_{2n-2})$,

d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta = I_{2n-2} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta \underset{n\infty}{\sim} I_{2n-2} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

Ceci prouve : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'autre part, comme $(\forall x \in [1;\,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x})$ et que $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1;\,+\infty[$, $x \longmapsto e^{-x^2}$ l'est aussi, et donc $x \longmapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0;\,+\infty[$.

Finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) • L'application $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}$ est continue, $\geqslant 0$, et $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

• Un calcul de primitives sur $]0;+\infty[$ utilisant deux intégrations par parties donne :

$$\int \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{e^{-x^2}}{x}\,\frac{x}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{x}\,\frac{1}{2x^2+1} - \int \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

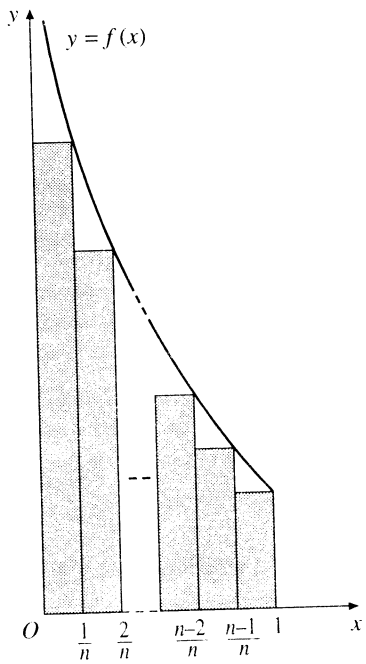
$$= -\frac{e^{-x^2}}{x}\,\frac{1}{2x^2+1} + \left(\frac{e^{-x^2}}{x} + 2\int e^{-x^2}\,dx\right) = \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} + 2\int e^{-x^2}\,dx.$$

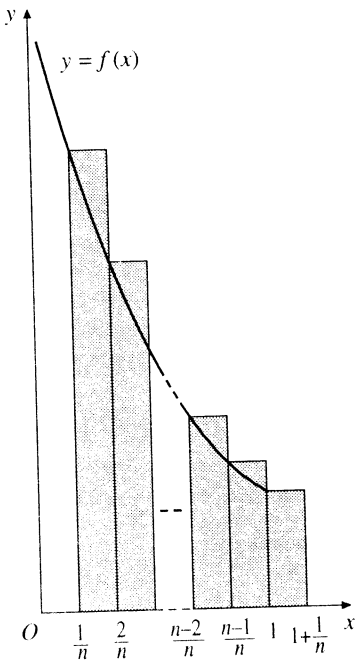
d'où, pour tout X de $[0;+\infty[$: $\displaystyle\int_0^X f(x)\,dx = \frac{2Xe^{-X^2}}{2X^2+1} + 2\int_0^X e^{-x^2}\,dx$,

et donc : $\displaystyle\int_0^X f(x)\,dx \xrightarrow[X\to+\infty]{} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

◇ **Réponse :** $\sqrt{\pi}$.

10.1.3 *a)*





Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$; notons $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

• $\forall k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, d'où, en sommant :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{f(1)}{n},$$

et donc :
$$S_n \geqslant \frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f.$$

• $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f \geqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (pour $k = 1$, l'intégrale est généralisée), donc : $\displaystyle\int_0^1 f \geqslant S_n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\displaystyle\frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f \leqslant S_n \leqslant \int_0^1 f$.

On conclut : $S_n \xrightarrow[n\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f$.

b) α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Appliquer *a)*.

◇ **Réponse :** 2.

β) $\displaystyle\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(kn)}{(n+k)\ln n} = \alpha_n + \beta_n,$

où : $\displaystyle\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\frac{k}{n}}{(n+k)\ln n}$ et $\displaystyle\beta_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\ln n}{(n+k)\ln n}$.

• $f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{-\ln x}{1+x}$ est continue, $\geqslant 0$, décroissante, et intégrable car $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$.

Appliquer *a)* pour déduire : $\displaystyle\alpha_n \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x$, et donc $\alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

• $\displaystyle\beta_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = 2\ln 2.$

On conclut : $\alpha_n + \beta_n \xrightarrow[n\infty]{} 2\ln 2$.

◇ **Réponse :** 4.

10.2.1 $\Longrightarrow$:

Si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I_1 et sur I_2 (cf. 10.2.2 Prop. 5 p. 124).

$\Longleftarrow$:

Supposons f intégrable sur I_1 et sur I_2.

Montrer qu'il existe $a \in I$ tel que : $]-\infty;a] \cap I \subset I_1$ et $I \cap [a;+\infty[\subset I_2$.

D'après 10.2.2 Prop. 5, puisque f est intégrable sur I_1 et sur I_2, f est intégrable sur $]-\infty;a] \cap I$ et sur $I \cap [a;+\infty[$. Puis (10.2.2 Prop. 6 p. 124), f est intégrable sur I.

10.2.2 D'après 10.2.2 Prop. 5 p. 124, f est intégrable sur les intervalles I_1, I_2, $I_1 \cap I_2$ (éventuellement, $I_1 \cap I_2$ est vide ou est un singleton). L'étude du cas ($I_1 \subset I_2$ ou $I_2 \subset I_1$) étant immédiate, on peut supposer $I_1 \not\subset I_2$ et $I_2 \not\subset I_1$. En notant $U = I_1 - (I_1 \cap I_2)$, $V = I_2 - (I_1 \cap I_2)$, U, V sont alors des intervalles et f est intégrable sur U et sur V. De plus, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{I_1} f = \int_U f + \int_{I_1 \cap I_2} f, \quad \int_{I_2} f = \int_V f + \int_{I_1 \cap I_2} f, \quad \int_{I_1 \cup I_2} f = \int_U f + \int_{I_2} f = \int_V f + \int_{I_1} f,$$

d'où : $\displaystyle\int_{I_1 \cup I_2} f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f - \int_{I_1 \cap I_2} f.$

10.2.3 Il est clair que, si $f = 0$, alors f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Réciproquement, supposons f intégrable sur $[0; +\infty[$.

Comme $|f|$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et $|f| \geqslant 0$, on a :

$$\forall X \in [0; +\infty[, \quad \int_0^X |f| \leqslant \int_{[0;+\infty[} |f|.$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{nT} |f| \leqslant \int_{[0;+\infty[} |f|.$

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{nT} |f| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} |f| = n \int_0^T |f|.$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle 0 \leqslant \int_0^T |f| \leqslant \frac{1}{n} \int_{[0;+\infty[} |f|,$

et donc, en passant à la limite quand n tend vers l'infini : $\displaystyle\int_0^T |f| = 0.$

Puisque f est continue, il en résulte ($\forall x \in [0; T]$, $f(x) = 0$), puis, par T-périodicité de f : $f = 0$.

10.2.4 *a)* • Si f est intégrable sur $]-a; a[$, alors f est intégrable sur $[0; a[$ (cf. 10.2.2 Prop. 5 p. 124).

• Réciproquement, supposons f intégrable sur $[0; a[$. Pour tout segment J inclus dans $]-a; 0]$, on a, en notant $\check{J} = \{-x; x \in J\}$:

$$\int_J |f| = \int_{\check{J}} |f| \leqslant \int_{[0;a[} |f|,$$

et donc f est intégrable sur $]-a; 0]$.

Il en résulte que f est intégrable sur $]-a; a[$.

Il est clair que, de plus, lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans $]-a; 0]$, $\check{J}$ décrit l'ensemble des segments inclus dans $[0; a[$ et $\displaystyle\int_J f = \int_{\check{J}} f$, donc : $\displaystyle\int_{]-a;0]} f = \int_{[0;a[} f$, puis :

$$\int_{]-a;a[} f = \int_{]-a,0]} f + \int_{[0;a[} f = 2 \int_{[0;a[} f.$$

b) Même méthode.

10.2.5 Soit J un segment inclus dans I. On a : $\displaystyle\int_J |\lambda| = |\lambda|\mu(J)$, où $\mu(J)$ désigne la *longueur* de J, c'est-à-dire $\mu(J) = b - a$ si $J = [a; b]$.

Pour que la famille $\big(|\lambda|\mu(J)\big)_J$, où J décrit l'ensemble des segments inclus dans I, soit majorée, il faut et il suffit (puisque $|\lambda| > 0$) que I soit borné.

10.2.6 On a : $\forall x \in I, \quad \big|(\varphi f)(x)\big| = |\varphi(x)|\,|f(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty |f(x)|$.

Comme f est intégrable sur I, $|f|$ l'est (par définition), donc $\|\varphi\|_\infty |f|$ aussi. D'après le théorème de domination, φf est intégrable.

De plus, pour tout segment J inclus dans I : $\displaystyle\int_J |\varphi f| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_J |f|$,

d'où, en passant aux bornes supérieures lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I :

$$\int_I |\varphi f| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_I |f|.$$

10.2.7 Puisque f est intégrable sur $[a; +\infty[$, pour tout X de $[a; +\infty[$, f est intégrable sur $[X; +\infty[$, et :

$$\int_{[X;+\infty[} f = \int_{[a;+\infty[} f - \int_{[a;X]} f \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0,$$

puisque $\displaystyle\int_{[a;X]} f \xrightarrow[X\to+\infty]{} \int_{[a;+\infty[} f$ (cf. 10.2.3 Prop. 1 p. 126).

10.2.8 *a)* Raisonnement par l'absurde.

Supposons $l \neq 0$. Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} l$, donc $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |l|$. Comme $x \longmapsto |l|$ n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$, le théorème d'équivalence montre que $|f|$ ne l'est pas et donc, par définition, f n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$, contradiction.

b) Soit $\alpha \in [1; +\infty[$; l'application $|f|^\alpha$ est continue sur $[a; +\infty[$.

Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (cf. *a)*), il existe $b \in [a; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [b; +\infty[, |f(x)| \leqslant 1$.

Alors : $\forall x \in [b; +\infty[, \quad |f(x)|^\alpha = |f(x)|^{\alpha-1}|f(x)| \leqslant |f(x)|$.

Le théorème de domination montre que $|f|^\alpha$ est intégrable sur $[b; +\infty[$, donc sur $[a; +\infty[$.

10.2.9 Puisque f est décroissante, f admet en $+\infty$ une limite finie l ou la limite $-\infty$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, alors $l = 0$ (cf. exercice 10.2.8 *a)*).

- Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, alors, pour x assez grand, $-f(x) \geqslant 1$, et donc (contraposée du théorème de domination), $-f$ n'est pas intégrable, f non plus, contradiction.

10.2.10 *a)* • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^8+1}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^5}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Changement de variable $u = x^4$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{8}$.

b) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Changement de variable $u = \sqrt{x}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{2}$.

c) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Changement de variable $y = \dfrac{1}{x+1}$, puis $t = \dfrac{2y-1}{\sqrt{3}}$.

◇ **Réponse :** $\ln 3$.

d) • $f : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $[0; 1[$.

• Changement de variable $\theta = \operatorname{Arcsin} x$, puis $u = \cos\theta$ $(= \sqrt{1-x^2})$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{2}{3}$.

e) • $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2x^2-1}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}x^2}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, puis $z = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \left(= \dfrac{1}{x\sqrt{2}}\right)$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{4}$.

f) • $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

• En utilisant une expression conjuguée, on a, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = A(X) - B(X),$$

où $A(X) = \displaystyle\int_1^X \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$ (poser $u = \sqrt{x+1}$) et $B(X) = \displaystyle\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{X}-1)$.

D'où, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 2(\sqrt{X+1}-\sqrt{X}) - 2\sqrt{2} - \ln\frac{\sqrt{X+1}+1}{\sqrt{X+1}-1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 2.$$

Passer à la limite lorsque X tend vers $+\infty$.

◇ **Réponse :** $2\ln(\sqrt{2}+1) - 2\sqrt{2} + 2$.

g) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 3x}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2x}$, donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• $\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$, et poser $u = \operatorname{th} x$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

h) • $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}$, est continue, $\geqslant 0$, et, au voisinage de $+\infty$, $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right) - \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{6x^3}$, donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Pour tout X de $[1; +\infty[$, on obtient, par une intégration par parties :

$$\int_1^X \left(\operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[x\left(\operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\right]_1^X - \int_1^X x \left(\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= X \operatorname{Arcsin} \frac{1}{X} - \frac{\pi}{2} + \ln(X + \sqrt{X^2 - 1}) - \ln X.$$

Et : $X \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 1$, $\ln(X + \sqrt{X^2 - 1}) - \ln X = \ln \dfrac{X + \sqrt{X^2 - 1}}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} \ln 2$.

◇ **Réponse :** $1 - \dfrac{\pi}{2} + \ln 2$.

i) • $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x^2} - \dfrac{1}{x(1 + x^2)}$, est continue, et

$|f(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2x^2} + \dfrac{1}{x(1 + x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^2}$, donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Pour tout X de $[1; +\infty[$: $\displaystyle\int_1^X \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2} - \frac{1}{x(1 + x^2)}\right) \mathrm{d}x = -\left[\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right]_1^X$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{4}$.

j) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{Arctan} x}}{(x^2 + 1)^{3/2}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{x^3}$, donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$, puis sur $[0; +\infty[$.

• Poser $\theta = \operatorname{Arctan} x$, et se ramener à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\theta} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta$; appliquer alors 9.3 3) p. 86.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.

k) • $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + x^2}}$, est continue sur le segment $[0; 1]$, donc intégrable sur $[0; 1]$.

• Utiliser une expression conjuguée. Puis, pour tout ε de $]0; 1]$, grâce à une intégration par parties, obtenir :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{2x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2})\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} \varepsilon\right).$$

Faire tendre ε vers 0.

◇ **Réponse :** $\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10.2.11 *a)* • Si $a > 1$, alors $f_{a,n} : x \longmapsto \dfrac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}$ n'est pas continue sur $]0; a[$, donc n'est pas intégrable sur $]0; a[$ (au sens de ce Cours).

• Si $a = 1$, $f_{1,n} : x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ n'est pas intégrable sur $[0; 1[$ (exemple de Riemann).

• Supposons $a < 1$. Alors $f_{a,n} : x \longmapsto \dfrac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}$ est continue sur le segment $[0; a]$ (ou $[a; 0]$, si $a < 0$), donc intégrable sur ce segment.

En notant $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_n(a) = -\frac{a^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\, I_{n-1}(a).$$

En déduire : $\quad (n+1)I_n(a) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k + I_0(a).$

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}$ est intégrable sur $]0; a]$ si et seulement si $a < 1$, et on a alors :

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}.$$

b) • $f : [-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^n\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, est continue, $\geqslant 0$ sur $[0; 1[$, et $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{(1-x)^{1/2}}$, donc f est intégrable sur $[-1; 1[$.

• À l'aide du changement de variable $\theta = \operatorname{Arccos} x$, obtenir $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = J_n + J_{n+1}$, où $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. Séparer les cas n pair, n impair et remarquer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, $J_{2p+1} = 0$.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto x^n\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est intégrable sur $[-1; 1[$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et :

$$\int_{-1}^{1} x^n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\,\pi & \text{si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\[2ex] \dfrac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2}\,\pi & \text{si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

c) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$, donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Poser $\varphi = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, puis $t = \operatorname{th}\varphi \quad \left(= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$ est intégrable sur $[0; \infty[$ pour tout a de $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arccos} a}{a\sqrt{1-a^2}} & \text{si } 0 < a < 1 \\[2ex] 1 & \text{si } a = 1 \\[2ex] \dfrac{\ln(a+\sqrt{a^2-1})}{a\sqrt{a^2-1}} & \text{si } 1 < a. \end{cases}$$

d) • $f : [0; a[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + 1)}}$ est continue, $\geqslant 0$, et

$f(x) \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{a}{\sqrt{2a}\sqrt{a^2 + 1}(a - x)^{1/2}}$, donc f est intégrable sur $[0; a[$.

• Poser $u = x^2$, puis $t = \dfrac{2}{a^2 + 1}\left(u - \dfrac{a^2 - 1}{2}\right)$.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + 1)}}$ est intégrable sur $[0; a[$ pour tout a de $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + 1)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arctan} a.$$

e) • $f :]a; 2a] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{a^2x + 2x^3}{\sqrt{x^4 - a^4}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{3a^3}{\sqrt{4a^3}(x - a)^{\frac{1}{2}}}$, donc f est intégrable sur $]a; 2a]$.

• Poser $u = \dfrac{x^2}{a^2}$.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{a^2x + 2x^3}{\sqrt{x^4 - a^4}}$ est intégrable sur $]a; 2a]$ pour tout a de $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\int_a^{2a} \frac{ax^2 + 2x^3}{\sqrt{x^4 - a^4}}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\ln(4 + \sqrt{15}) + \sqrt{15}\right)a^2.$$

f) • Puisque $a > |b|$, l'application $f : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{a + b\cos x}$ est continue sur le segment $[0; \pi]$, donc intégrable sur $[0; \pi]$.

• Pour tout X de $[0; \pi[$, le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ donne :

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \int_0^{\tan\frac{X}{2}} \frac{2}{(a + b) + (a - b)t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\tan\frac{X}{2}\right).$$

D'où : $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} \xrightarrow[X \to \pi^-]{} \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{1}{a + b\cos x}$ est intégrable sur $[0; \pi]$ (si $a > |b|$) et :

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

g) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^{\frac{1}{n}}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $x^2 f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Poser $u = x^{\frac{1}{n}}$ et utiliser une intégration par parties.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^{\frac{1}{n}}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x = n!.$$

10.2.12 • Les applications f et g sont continues, $\geqslant 0$, et $x^{\frac{1}{2}} f(x) = -\mathrm{e}^{-x} x^{\frac{1}{2}} \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$,

$g(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$, donc f et g sont intégrables sur $]0; 1]$.

• Pour $\varepsilon \in]0; 1]$, effectuons une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^1 -\mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-x} \ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{e}^{-\varepsilon} \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x - \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = (1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon}) \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Comme : $\begin{cases} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x \\ (1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon}) \ln \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\sim} \varepsilon \ln \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0 \\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x, \end{cases}$

on conclut : $\displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x.$

10.2.13 *a)* Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'application $\varphi_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$\varphi_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^n \ln x}{1 + x} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right|$ est continue sur le segment $[0; 1]$, donc intégrable sur $[0; 1]$.

Et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1 + x} \, \mathrm{d}x \right| = \int_0^1 x^{n-1} |\varphi_1(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \|\varphi_1\|_\infty \int_0^1 x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{n}.$$

◇ **Réponse :** 0.

b) • Pour $a > 0$, l'application $f_a : [0; a[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_a(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{a^2 - x^2}}$ est continue, $\geqslant 0$, et

$f_a(x) \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{\sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{2a}(a - x)^{\frac{1}{2}}}$, donc (exemple de Riemann) f_a est intégrable sur $[0; a[$.

• Le changement de variable $\theta = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{a}$ donne :

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1 + x^2}{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

Puis :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta} \, \mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta} - 1) \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta} + 1} \, \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^2}{4},$$

d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta} \, \mathrm{d}\theta \xrightarrow[a \to 0]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}.$

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{2}$.

c) • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n\sqrt{x^2-1}}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$, donc f est intégrable sur $[2; +\infty[$.

• Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. L'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n\sqrt{3}}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [2; +\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{1}{x^n\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x^n\sqrt{3}},$$

d'où : $0 \leqslant \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x^2-1}} \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(n-1)2^{n-1}}$.

◇ **Réponse :** 0.

d) • Pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $f_{n,a} : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_{n,a}(x) = \dfrac{1}{x^n+a}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f_{n,a}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$, donc $f_{n,a}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Pour tout $a > 0$, le changement de variable $u = \dfrac{x}{a^{\frac{1}{n}}}$ donne :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+a} = a^{\frac{1}{n}-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^n+1} \leqslant a^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^n+1} \text{ (car } n \geqslant 2).$$

◇ **Réponse :** 0.

e) • $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue, $\geqslant 0$, et $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Pour tout $x > 0$:

$$0 < \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{[u=t-x]}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2xu-u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2xu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2x}.$$

◇ **Réponse :** 0.

f) • Pour tout $a > 0$, l'application $f_a :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_a(x) = \dfrac{1}{ax^2}\ln(1+ax^2)$ est continue, $\geqslant 0$, et $f_a(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc f_a est intégrable sur $]0; 1]$.

• **1ère méthode**

Montrer qu'il existe $(\alpha, C) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall u \in [0; \alpha], \quad |\ln(1+u) - u| \leqslant Cu^2$.

On déduit, pour tout a de $[0; \alpha]$:

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\,\mathrm{d}x - 1\right| = \left|\int_0^1 \frac{1}{ax^2}(\ln(1+ax^2) - ax^2)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \int_0^1 \frac{1}{ax^2}\left|\ln(1+ax^2) - ax^2\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 Cax^2\,\mathrm{d}x = \frac{Ca}{3}.$$

On conclut : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to 0^+]{} 1$.

2ème méthode

Le changement de variable $u = \sqrt{a}x$ donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Comme l'application $\varphi : [0;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(u) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\ln(1+u^2)}{u^2} & \text{si} \quad u \in]0;\,1] \\ 1 & \text{si} \quad u = 0 \end{array}\right|$

est continue, φ admet des primitives sur $[0;\,1]$, et l'une de celles-ci est $\phi : [0;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall v \in [0;\,1], \quad \phi(v) = \int_0^v \varphi(u)\,\mathrm{d}u.$$

Alors : $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\phi(\sqrt{a})-\phi(0)}{\sqrt{a}} \xrightarrow[a\to 0^+]{} \phi'(0) = \varphi(0) = 1.$

◇ **Réponse :** 1.

10.2.14 • Pour tout $a > 0$, l'application $f_a : [1;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_a(x) = \dfrac{x^{-a}}{1+x}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f_a(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{-a-1}$. donc f_a est intégrable sur $[1;\,+\infty[$.

• Pour tout $a > 0$:

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} x^{-a-1}\,\mathrm{d}x\right| = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = \left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^{+\infty} = \ln 2,$$

et $\displaystyle \int_1^{+\infty} x^{-a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty.$

Ceci prouve : $\displaystyle \int_1^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + \underset{a\to 0^+}{O}(1).$

10.2.15 *1)* Montrer qu'il existe $(\alpha, C) \in]0;\,1] \times \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [-\alpha;\,\alpha], \quad \left|\mathrm{e}^t - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\right| \leqslant C|t|^3.$$

2) L'application $\varphi : [0;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = \left\{\begin{array}{ll} x\ln x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array}\right|$, est continue sur le segment $[0;\,1]$, donc bornée; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [0;\,1], \quad |\varphi(x)| \leqslant M$.

3) En notant $\beta = \dfrac{\alpha}{M+1}$, on a donc : $\forall \varepsilon \in]0;\,\beta[, \quad \forall x \in]0;\,1], \quad |\varepsilon x \ln x| \leqslant \varepsilon M \leqslant \alpha$, d'où :

$$\forall \varepsilon \in]0;\,\beta[,\ \forall x \in]0;\,1], \quad \left|\mathrm{e}^{\varepsilon x \ln x} - \left(1 + \varepsilon x \ln x + \frac{(\varepsilon x \ln x)^2}{2}\right)\right| \leqslant C|\varepsilon x \ln x|^3,$$

et donc (les fonctions envisagées étant intégrables car prolongeables par continuité en 0) :

$$\left|\int_0^1 x^{\varepsilon x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(1 + \varepsilon x \ln x + \frac{(\varepsilon x \ln x)^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 C|\varepsilon x \ln x|^3\mathrm{d}x = C\varepsilon^3 \int_0^1 |\varphi(x)|^3\mathrm{d}x = \underset{\varepsilon\to 0^+}{O}(\varepsilon^3).$$

4) Calculer $\displaystyle \int_0^1 \left(1 + \varepsilon x \ln x + \frac{(\varepsilon x \ln x)^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ en calculant, par une intégration par parties, $\displaystyle \int_0^1 x^m (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

10.2.16 *a)* Soit $\varepsilon > 0$. L'application f_ε est continue sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |f_\varepsilon(x)| = \mathrm{e}^{-\varepsilon x}|f(x)| \leqslant |f(x)|,$$

donc (théorème de domination), f_ε est intégrable sur $[0; +\infty[$.

b) Soient $\varepsilon > 0$, $X \geqslant 0$. On a :

- $$\left|\int_0^X f_\varepsilon - \int_0^X f\right| = \left|\int_1^X (1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon x}) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^X (1 - \mathrm{e}^{\varepsilon x})|f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant (1 - \mathrm{e}^{\varepsilon X}) \int_0^X |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon X}) \int_{[0;+\infty[} |f|$$

- $$\left|\int_{[X;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[X;+\infty[} f\right| = \left|\int_{[X;+\infty[} (f_\varepsilon - f)\right| \leqslant \int_{[X;+\infty[} (|f_\varepsilon| + |f|) \leqslant 2\int_{[X;+\infty[} |f|.$$

D'où : $$\left|\int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[0;+\infty[} f\right| \leqslant \left|\int_0^X f_\varepsilon - \int_0^X f\right| + \left|\int_{[X;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[X;+\infty[} f\right|$$
$$\leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon X}) \int_{[0;+\infty[} |f| + 2\int_{[X;+\infty[} |f|.$$

Choisissons $X = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. On a donc, pour $\varepsilon > 0$:

$$\left|\int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[0;+\infty[} f\right| \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon}}) \int_{[0;+\infty[} |f| + 2\int_{[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};+\infty[} |f|.$$

D'une part, $1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$.

D'autre part, puisque f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et que $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} +\infty$:

$$\int_{[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};+\infty[} |f| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$$

(cf. aussi exercice 10.2.7 p. 131).

D'où : $$\left|\int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon - \int_{[0;+\infty[} f\right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0,$$

et donc : $$\int_{[0;+\infty[} f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_{[0;+\infty[} f.$$

10.2.17 *a)* • $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}$

• f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^4 + 1}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(-1) \simeq -0{,}567, \quad f(0) \simeq -0{,}724.$

• Etude en $+\infty$:

Puisque $\dfrac{t^2 + t}{\sqrt{t^4 + 1}} = 1 + \dfrac{1}{t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, on peut conjecturer que $f(x)$ se comportera de façon analogue à $\displaystyle\int_1^x \left(1 + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$. On a :

$$f(x) - \int_1^x \left(1 + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \int_1^x \left(\frac{t^2 + t}{\sqrt{t^4 + 1}} - \frac{t + 1}{t}\right) \mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{t + 1}{t(t^2 + \sqrt{t^4 + 1})\sqrt{t^4 + 1}} \mathrm{d}t.$$

Puisque $t \longmapsto \dfrac{-(t + 1)}{t(t^2 + \sqrt{t^4 + 1})\sqrt{t^4 + 1}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, on a,

en notant $l = \displaystyle\int_{[1;+\infty[} \frac{-(t + 1)}{t(t^2 + \sqrt{t^4 + 1})\sqrt{t^4 + 1}} \mathrm{d}t$:

$f(x) = \displaystyle\int_1^x \left(1 + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + l + o(1) = (x - 1) + \ln x + l + o(1)$, et donc $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $f(x) - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

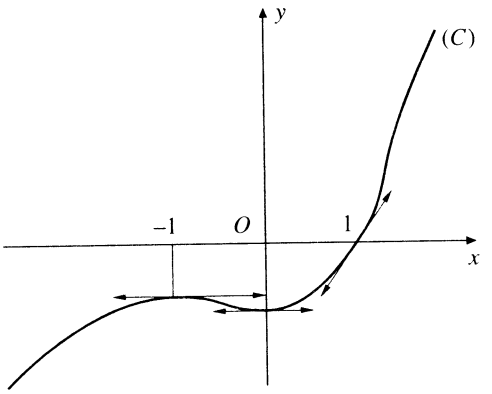
Ceci montre que (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = x$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

• Etude en $-\infty$:

On obtient de façon analogue : $f(x) = x + \ln(-x) - \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2 + t}{\sqrt{t^4 + 1}} \mathrm{d}t + 1 + l' + o(1)$,

où $l' = \displaystyle\int_{]-\infty;-1]} \frac{t + 1}{t\sqrt{t^4 + 1}(t^2 + \sqrt{t^4 + 1})} \mathrm{d}t$.

Ainsi (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = x$ (lorsque x tend vers $-\infty$).



b) • $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}$

• f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{th}\,x} > 0$.

• Etude en $-\infty$:

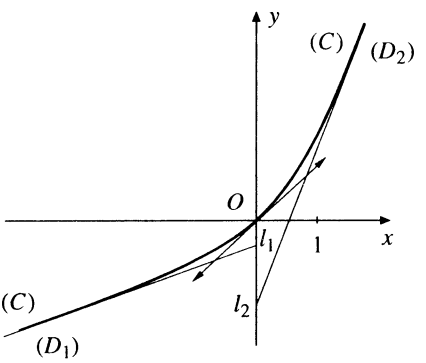
$$f(x) - \int_0^x \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{1+\mathrm{th}\,t} - 1)\mathrm{d}t.$$

Puisque $\mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{1+\mathrm{th}\,t} - 1) \underset{t\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}(1 + \mathrm{th}\,t) = \mathrm{e}^{-1}\dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \sim 2\mathrm{e}^{2t-1}$ (> 0), l'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{1+\mathrm{th}\,t} - 1)$ est intégrable sur $]-\infty; 0]$; notons $l_1 = -\displaystyle\int_{]-\infty;0]} \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}^{1+\mathrm{th}\,t} - 1)\mathrm{d}t$ $(l_1 \simeq -0{,}347)$.

On a alors : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}} + l_1 + o(1)$, donc (C) admet pour asymptote la droite (D_1) d'équation $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}} + l_1$.

• Etude en $+\infty$:

On montre, de façon analogue, que (C) admet pour asymptote la droite (D_2) d'équation $y = \mathrm{e}x + l_2$, où $l_2 = \displaystyle\int_{[0;+\infty[} \mathrm{e}(\mathrm{e}^{\mathrm{th}\,t-1} - 1)\,\mathrm{d}t$ $(l_2 \simeq -1{,}462)$.



c) • $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}$

• f est impaire (changement de variable $u = -t$)

• f est de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$ et :

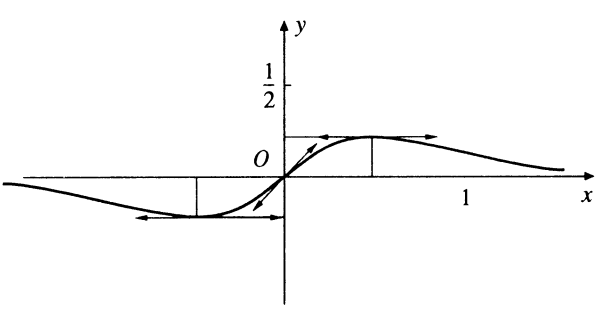
$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}(2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1)$.

$f\left(\sqrt{\dfrac{\ln 2}{3}}\right) \simeq 0{,}286$

x	0		$\sqrt{\dfrac{\ln 2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Etude en $+\infty$:

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.



10.2.18 *a)* • L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Intégrer par parties $\left(u' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2},\ v = -\dfrac{x}{2}\right)$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{2}$.

b) • L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{|x|^3}$, donc (exemple de Riemann) f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Poser $u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, puis $\varphi = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$ (donc $u = \operatorname{sh}\varphi$).

◇ **Réponse :** $\dfrac{8}{3}$.

c) • L'application $f :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$, est continue, de signes fixes aux voisinage de 1 et de $+\infty$, et $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc (exemples de Riemann) f est intégrable sur $]1; +\infty[$.

• Poser $u = \sqrt{x^2-1}$.

◇ **Réponse :** 0.

d) • L'application $f :]1; \sqrt{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{-x^4+3x^2-2}}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$, $f(x) \underset{x\to\sqrt{2}}{\sim} \dfrac{1}{2^{\frac{5}{4}}(\sqrt{2}-x)^{\frac{1}{2}}}$, donc (exemples de Riemann) f est intégrable sur $]1; \sqrt{2}[$.

• Poser $y = \dfrac{1}{x^2}$, puis $u = 4y - 3$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

e) • L'application $f :]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{x}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, donc f est intégrable sur $]0; 1[$.

• Poser $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ puis $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$ (ou : $y = \dfrac{1}{x}$).

◇ **Réponse :** $\ln 2$.

f) • L'application $f :]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{-\frac{2}{3}}$, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (1-x)^{-\frac{1}{3}}$, donc (exemples de Riemann), f est intégrable sur $]0; 1[$.

• Poser $u = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

g) Analogue à *f)*.

◇ **Réponse :** $\pi\sqrt{2}$.

h) • L'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^3}\big(2x - \ln(1 + 2x + 2x^2)\big)$ est continue, (en utilisant des développements limités en 0) $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{4}{3}$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x^2} > 0$, donc f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\ln(1 + 2x + 2x^2)\mathrm{d}x$, en intégrant par parties $\big(u' = \dfrac{1}{x^3},\ v = \ln(1 + 2x + 2x^2)\big)$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi}{2}$.

i) • L'application $f :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, est continue.

Au voisinage de -1 : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} -\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}}$, donc $(1+x)^{\frac{3}{4}} f(x) \xrightarrow[x\to-1]{} 0$.

Au voisinage de 1 : $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, donc $(1-x)^{\frac{3}{4}} f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

On conclut : f est intégrable sur $]-1; 1[$.

• Poser $\theta = \operatorname{Arccos} x$, puis intégrer par parties $\big(u' = \cos^3\theta,\ v = \ln\big(\tan\dfrac{\theta}{2}\big)\big)$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{5\pi}{3}$.

j) • L'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$, est continue, $x^{\frac{1}{2}} f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $x^{\frac{3}{2}} f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc (règles $x^\alpha f(x)$ en 0 et $+\infty$), f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• On a, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \underset{[y=\frac{1}{x}]}{=} \int_{X}^{\frac{1}{X}} \frac{-\ln y}{1+\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = -\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{\ln y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

d'où : $\displaystyle\int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

On conclut en faisant tendre X vers $+\infty$.

◇ **Réponse :** 0.

k) • L'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^2}$ est continue, $x^{\frac{1}{2}} f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc (règles $x^\alpha f(x)$ en 0 et $+\infty$) f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• Par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= x\,\frac{\ln x}{1+x^2} - \int x\,\frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x\ln x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x + 2\int \frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x\ln x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x + 2\int \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où : $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Utiliser le résultat de *j)*.

◇ **Réponse :** $-\dfrac{\pi}{4}$.

l) • L'application $f : \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$, est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $f(x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$, donc f est intégrable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• Poser $u = \sqrt{\tan x}$.

◇ **Réponse :** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

m) • L'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x\sqrt{x}}$ est continue, $\geqslant 0$, et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^{\frac{3}{2}}}$, donc (exemples de Riemann) f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• Intégrer par parties ($u' = x^{-\frac{3}{2}}$, $v = \operatorname{Arctan} x$).

◇ **Réponse :** $\pi\sqrt{2}$.

n) • L'application $f : \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \cos x \ln(\tan x)$ est continue, et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x \leqslant 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$, donc f est intégrable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• Intégrer par parties $\big(u' = \cos x,\ v = \ln(\tan x)\big)$.

◇ **Réponse :** $-\ln 2$.

10.2.19 Montrer d'abord l'intégrabilité.

a) Poser $u = x^2$ pour se ramener à une intégrale abélienne.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ est intégrable sur $]a; b[$, pour tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$, et $\displaystyle\int_a^b \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$.

b) Pour $|\cos\theta| < 1$, poser $u = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos\theta + \operatorname{ch} x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\theta \in]-\pi; \pi[$, et alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta + \operatorname{ch} x} = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\sin\theta} & \text{si } \theta \neq 0 \\ 1 & \text{si } \theta = 0 \end{cases}.$$

c) Poser $u = \dfrac{1}{x}$, puis intégrer par parties.

◇ **Réponse :** $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ est intégrable sur $]-\infty; 0]$ si et seulement si $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$, et alors :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-2}(n-2)!.$$

Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 11

11.1.1 *a)* **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \dfrac{\lambda}{(x^2+1)^2} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

b) La solution générale de l'équation normalisée $y' - \dfrac{\alpha y}{x^n} = 0$ est, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 : $\left| \begin{array}{ll} x \longmapsto \lambda e^{-\frac{\alpha}{(n-1)x^{n-1}}} & \text{si} \quad n \geqslant 2 \\ x \longmapsto \lambda |x|^\alpha & \text{si} \quad n = 1 \end{array} \right.$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Etudier le raccord en 0.

◇ **Réponse :**

- Si $n \geqslant 2$, $\left| \begin{array}{ll} \mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{-\frac{\alpha}{(n-1)x^{n-1}}} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si} \quad 0 \notin I \\ \mathcal{S}_I = \varnothing & \text{si} \quad 0 \in I \end{array} \right.$.

- Si $n = 1$, $\left| \begin{array}{ll} \mathcal{S}_I = \{ x \longmapsto \lambda |x|^\alpha ;\ \lambda \in \mathbb{R} \} & \text{si} \quad 0 \notin I \\ \mathcal{S}_I = \varnothing & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \text{ et } 0 \in I \\ \mathcal{S}_I = \{ x \longmapsto \lambda x ;\ \lambda \in \mathbb{R} \} & \text{si} \quad \alpha = 1 \text{ et } 0 \in I \\ \mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \lambda |x|^\alpha & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \mu x^\alpha & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{si} \quad \alpha > 1 \text{ et } 0 \in I. \end{array} \right.$

11.1.2 Montrer que, si f convient, en notant $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$, g est dérivable et $g' = 0$. Il existe alors $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(-x) = C$.

Montrer $C \neq 0$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{C} f(x)$, d'où l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{\frac{x}{C}}$.

Etudier la réciproque.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; & \lambda \in \mathbb{R}^* \\ \quad x \longmapsto \lambda e^{\frac{x}{\lambda^2}} & \end{array} \right\}$.

11.1.3 En notant $F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f \end{array}$, former une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue F. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$, puis raccorder en 0.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ \quad x \longmapsto \begin{cases} \lambda \sqrt{-x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \mu \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} & \end{array} \right\}$.

11.1.4 En notant $F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f \end{array}$ et $G : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x F \end{array}$, se ramener, à l'aide d'une intégration par parties, à : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1-k)xG'(x) - G(x) = 0$.

En déduire G, F, f. Etudier alors la réciproque.

◇ **Réponse :** $\left| \begin{array}{ll} \{0\} & \text{si} \quad k < \dfrac{1}{2} \text{ ou } k \geqslant 1 \\ \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda |x|^{\frac{2k-1}{1-k}} \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant k < 1 \end{array} \right.$.

11.1.5 *a)* L'équation peut être normalisée sur $\mathbb{R}$.

Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré $\leqslant 1$.

◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto x + \lambda(x^2+1)\mathrm{e}^{-x};\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) ◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto \mathrm{e}^{x-x^2} + \lambda \mathrm{e}^{-x^2};\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

c) Résoudre l'équation normalisée lorsque $0 \notin I$, puis étudier le raccord en 0.

◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \dfrac{\lambda x}{\sqrt{x^2+1}};\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

d) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \frac{x^4}{2} + \lambda x^2;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^4}{2} + \lambda x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^4}{2} + \mu x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad \text{si} \quad 0 \in I$$

e) ◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto x^2 - 1 + \lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

f) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto 1 + \lambda \mathrm{e}^{\frac{1}{x}};\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto 1\} \qquad \text{si} \quad 0 \in I$$

g) Résoudre l'équation normalisée sur tout intervalle ouvert I ne contenant ni -1 ni 0, puis étudier le raccord en -1 et en 0.

◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \frac{1}{x+1} + \lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{si} \quad -1 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \varnothing \qquad \text{si} \quad -1 \in I$$

h) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{1+\lambda(x^2+1)}{x};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto -x\} \quad \text{si} \quad 0 \in I.$$

i) Pour l'étude du raccord en 0, remarquer que le remplacement de x par 0 dans l'équation donne une contradiction.

◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\lambda - \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right);\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \varnothing \quad \text{si} \quad 0 \in I.$$

j) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{1}{x} + \lambda\frac{\sqrt{x^2+1}}{x};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}\right\} \quad \text{si} \quad 0 \in I.$$

k) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto x^2 - 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{|x^2-1|}};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad -1 \notin I \text{ et } 1 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto x^2 - 1\right\} \quad \text{si} \quad -1 \in I \text{ ou } 1 \in I.$$

l) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{\lambda + \ln|2x-1+2\sqrt{x^2-x}|}{2\sqrt{x^2-x}};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad I \subset]-\infty;\ 0[\text{ ou } I \subset]1;\ +\infty[$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{\mu + \operatorname{Arcsin}(2x-1)}{2\sqrt{x-x^2}};\ \mu \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad I \subset]0;\ 1[$$

$$\mathcal{S}_I = \varnothing \quad \text{si} \quad 0 \in I \text{ ou } 1 \in I.$$

m) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{x^2(\lambda + \ln|x|)}{x^2-1};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{si} \quad -1 \notin I,\ 0 \notin I,\ 1 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2\ln|x|}{x^2-1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } |x| = 1 \end{cases}\right\} \quad \text{si} \quad -1 \in I \text{ ou } 1 \in I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2(\lambda + \ln|x|)}{x^2-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2(\mu + \ln x)}{x^2-1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases};\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{si} \quad 0 \in I,\ -1 \notin I,\ 1 \notin I.$$

n) ◇ **Réponse :**

$\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto 1 + \ln x + \lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$

o) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{\lambda + x(\ln|x| - 1)}{x - 1};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I \text{ et } 1 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \varnothing \qquad \text{si} \quad 0 \in I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1 + x(\ln x - 1)}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I \text{ et } 1 \in I.$$

p) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{x^2} + \lambda \ln|x|,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \varnothing \qquad \text{si} \quad 0 \in I.$$

q) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} + 3 + \lambda \mathrm{e}^x}{(x-1)^2};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} + 3 - 5\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{5}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \in I.$$

r) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{\lambda}{\mathrm{sh}^3 x} + \frac{\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,x) - \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}}{2\,\mathrm{sh}^3 x};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,x) - \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}}{2\,\mathrm{sh}^3 x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \in I.$$

s) ◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\sin x} + \sin x - 1;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$

t) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto 1 + \lambda \tan\frac{x}{2};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } I \subset]-\pi + 2n\pi;\ \pi + 2n\pi[$$

$$\mathcal{S}_I = \{x \longmapsto 1\} \qquad \text{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \pi + 2n\pi \in I.$$

u) ◇ **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \sin x\left(\lambda + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right);\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } I \subset]n\pi;\ (n+1)\pi[$$

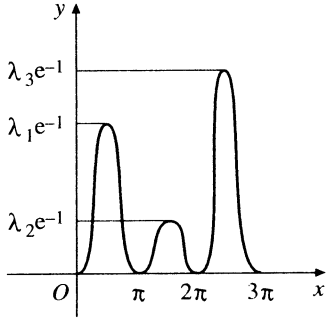
$$\mathcal{S}_I = \varnothing \qquad \text{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n\pi \in I.$$

v) La solution générale sur un intervalle I ne contenant aucun $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) est $y : x \longmapsto \lambda e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Raccord en $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) :

Comme $e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \xrightarrow[x \to n\pi]{} 0$ et $\dfrac{1}{x - n\pi} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \xrightarrow[x \to n\pi]{} 0$, les fonctions précédentes se raccordent par dérivabilité en $n\pi$.

Par exemple, pour $I =]0;\ 3\pi[$,

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} & \text{si} \quad x \in]0;\ \pi[\\ \lambda_2 e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} & \text{si} \quad x \in]\pi;\ 2\pi[\\ \lambda_3 e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} & \text{si} \quad x \in]2\pi;\ 3\pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = \pi \text{ ou } 2\pi \end{cases} ,\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$



$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel «de dimension infinie».

◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \lambda_n e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} & \text{si} \quad x \in]n\pi;\ (n+1)\pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = n\pi \end{cases} ,n \in \mathbb{Z},\ \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$.

11.1.6 On obtient $y : x \longmapsto e^x \left(\lambda + \int_1^x e^{-t} \ln t \, dt \right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si y est bornée, alors, comme $t \longmapsto e^{-t} \ln t$ est continue et intégrable sur $[1;\ +\infty[$, on a nécessairement $\lambda = -\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$, et donc, par une intégration par parties (licite) :

$$y(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -e^x \left([-e^{-t} \ln t]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = -\ln x - e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Comme, pour $x \geqslant 1$: $0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x}$, on déduit : $y(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\ln x$, et donc y n'est pas bornée.

◇ **Réponse :** • $\mathcal{S}_{]0;\ +\infty[} = \left\{ x \longmapsto e^x \left(\lambda + \int_1^x e^{-t} \ln t \, dt \right) ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

- Aucune solution n'est bornée au voisinage de $+\infty$.

11.1.7 La solution générale est $y : x \longmapsto \dfrac{x^3}{2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer λ pour que $y(1) = 0$.

◇ **Réponse :** $y : x \longmapsto \dfrac{x^3 - x}{2}$.

11.1.8 ◇ **Réponse :** $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \varepsilon\sqrt{x+\lambda}\,\mathrm{e}^{-x};\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } I \subset]-\lambda;\ +\infty[,\ \varepsilon \in \{-1;\ 1\}\right\}$.

11.1.9 Résoudre la première équation et déduire $f(x)$ de la seconde.

◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \lambda(x-1)\mathrm{e}^x \end{array};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

11.1.10 **1ère méthode**

1) Soit f convenant. Montrer d'abord $f(0) = 0$. Puis, pour tout (x,h) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + f(x)\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h},$$

ce qui montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^x f'(0) + f(x)$.

En déduire, par résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x$.

2) Etudier la réciproque, en remplaçant f par l'expression trouvée en *1)* dans l'équation fonctionnelle de l'énoncé.

◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \alpha x \mathrm{e}^x \end{array};\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

2ème méthode : $\mathrm{e}^{-(x+y)} f(x+y) = \mathrm{e}^{-x} f(x) + \mathrm{e}^{-y} f(y)$ et utiliser l'exercice 5.3.4 *a)* p. 150 du Tome 1.

11.1.11 Résoudre l'équation proposée; on trouve :

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto -2x^2 + \lambda x^3;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{si} \quad 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \left\{\begin{array}{lll} -2x^2 + \lambda x^3 & \text{si} & x < 0 \\ -2x^2 + \mu x^3 & \text{si} & x > 0 \end{array}\right. ;\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{si} \quad 0 \in I.$$

En notant $y_\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -2x^2 + \lambda x^3 \end{array}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$, montrer que y_λ'' s'annule et change de signe en $\dfrac{2}{3\lambda}$.

On en déduit une représentation paramétrique du lieu des points d'inflexion : $x = \dfrac{2}{3\lambda}$, $y = -\dfrac{16}{27\lambda^2}$.

◇ **Réponse :** La courbe d'équation $y = -\dfrac{4}{3}x^2$, privée de O.

11.2.1 ◇ **Réponse :** $(\mathbb{R}_+)^2 - \{(0,0)\}$.

11.2.2 *1)* Soit f convenant; alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(\alpha - x) = -f(\alpha - (\alpha - x)) = -f(x).$$

Donc f est de la forme $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

2) Etudier la réciproque.

◇ **Réponse :** $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2} + x\right) \end{array};\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

11.2.3 ◇ **Réponses :**

a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{4}e^{-x} + (\lambda x + \mu)e^x$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

b) $y(x) = (x+2)e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}\right)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

c) $y(x) = \frac{1}{3}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-5x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

d) $y(x) = -xe^{-2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

e) $y(x) = x^3e^x + (\lambda x + \mu)e^x$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

f) $y(x) = -\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)e^x + \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

g) $y(x) = e^x + \frac{1}{2}(x^3 - x^2)e^{2x} + \frac{1}{4}(x-1) + (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

h) $y(x) = \frac{x}{8} + \frac{x\cos 2x}{32} + \frac{x^2\sin 2x}{16} + A\cos 2x + B\sin 2x$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

i) $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos 2x - \frac{2}{25}\sin 2x + (\lambda x + \mu)e^{-x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

j) $y(x) = -\frac{1}{8}\sin 2x + (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

k) $y(x) = \frac{2}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x + e^x(A\cos x + B\sin x)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

l) $y(x) = \frac{1}{8}e^{-x}(x\cos 2x + 2x^2\sin 2x) + e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

m) $y(x) = -e^x\sin x + (\lambda x + \mu)e^x$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

n) $y(x) = \frac{1}{16}e^x(\sin x + \cos x) + \frac{1}{4}xe^{-x}\sin x + e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

11.2.4 ◇ **Réponses :**

a) • Si $m < 1$, $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{-2\sin x + (m-1)\cos x}{(m-1)^2+4} + \lambda e^{(1-\sqrt{1-m})x} + \mu e^{(1+\sqrt{1-m})x};\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Si $m = 1$, $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto -\frac{\sin x}{2} + (\lambda x + \mu)e^x;\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Si $m > 1$, $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{-2\sin x + (m-1)\cos x}{(m-1)^2+4} + e^x\left(A\cos(\sqrt{m-1}x) + B\sin(\sqrt{m-1}x)\right);\right.$
$\left.(A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

b) • Si $m \neq 2$ et $m \neq -2$, $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{\sin mx}{4-m^2} + A\cos 2x + B\sin 2x;\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Si $m = 2$, $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{4}x\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x;\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

• Si $m = -2$, $\mathcal{S}_I = \left\{x \longmapsto \frac{1}{4}x\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x;\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

c) • Si $m \neq -1, 0, 1$, $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \dfrac{(-x+1)e^x}{(m-1)^2} + \lambda e^{mx} + \mu e^{\frac{x}{m}} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• Si $m = 0$, $\mathcal{S}_I = \{ x \longmapsto (-x+1)e^x + \lambda ;\ \lambda \in \mathbb{R} \}$

• Si $m = 1$, $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \dfrac{x^3}{6} e^x + (\lambda x + \mu) e^x ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• Si $m = -1$, $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \dfrac{1-x}{4} e^x + (\lambda x + \mu) e^{-x} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

11.2.5 Calculer la solution générale de (E_m) sur $\mathbb{R}$, en séparant en cas $m \in]0;\ 1[\cup]1;\ 2[$, $m = 1$. On obtient :

$$\begin{cases} y_m(x) = \dfrac{e^{-x}}{3(2m+1)} + \dfrac{e^{2mx}}{2(m-1)(2m+1)} + \dfrac{e^{2x}}{6(1-m)} & \text{si} \quad m \neq 1 \\ y_1(x) = \dfrac{1}{3} x e^{2x} + \dfrac{1}{9} e^{-x} - \dfrac{1}{9} e^{2x} \end{cases}$$

Utiliser des développements limités (en posant $h = m - 1$) pour déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_m(x) \xrightarrow[m \to 1]{} y_1(x)$.

11.2.6 En notant $z(t) = y(x)$, on a : $\begin{cases} y(x) = z(t) \\ y'(x) = z'(t) \cdot \dfrac{dt}{dx} = z'(t) \dfrac{1}{x}, \\ y''(x) = z''(t) \dfrac{1}{x^2} - z'(t) \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

d'où : $x^2 y'' + axy' + by = k \iff z'' + (a-1)z' + bz = k(\varepsilon e^t)$ (où : $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$).

b) ◇ **Réponses :**

$\alpha)$ $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\lambda}{x} + \mu x^2 ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ si $0 \notin I$

$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto -\dfrac{x}{2} + \mu x^2 ;\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$ si $0 \in I$

$\beta)$ $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{9} x^2 + \dfrac{1}{x} (\lambda \ln |x| + \mu) ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ si $0 \notin I$

$\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{9} x^2 \right\}$ si $0 \in I$

$\gamma)$ $\mathcal{S}_I = \left\{ x \longmapsto \dfrac{1}{2} x (\ln |x| - 1) + A \cos(\ln |x|) + B \sin(\ln |x|) ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ si $0 \notin I$

$\mathcal{S}_I = \varnothing$ si $0 \in I$.

11.2.7 Résoudre l'équation proposée sur chaque intervalle où la valeur absolue peut être transformée, puis raccorder.

◇ **Réponses :**

a) $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} -x + 1 + A \cos x + B \sin x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x + 1 + A \cos x + (B-2) \sin x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

b) $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} A \cos x + B \sin x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x + A \cos x + (B-1) \sin x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} ;\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

c) $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ -\dfrac{x}{4} + \left(\lambda + \dfrac{1}{8}\right) e^{2x} + \left(\mu - \dfrac{1}{8}\right) e^{-2x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

d) $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{4} e^{-x} + (\lambda x + \mu) e^{x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} x^2 e^{x} + \left(\left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right) x + \left(\mu + \dfrac{1}{4}\right)\right) e^{x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

11.2.8 *1)* Soit f convenant; f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = (x+1)e^{x} + f'(-x) = (x+1)e^{x} + (-xe^{-x} - f(x)).$$

Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de : $y'' + y = (x+1)e^{x} - xe^{-x}$.

En déduire qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} x e^{x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + A \cos x + B \sin x.$$

2) Etudier la réciproque.

◇ **Réponse :** $\left\{ x \longmapsto \dfrac{1}{2} x e^{x} - \dfrac{1}{2}(x+1)e^{-x} + A(\cos x - \sin x);\ A \in \mathbb{R} \right\}$.

11.2.9 **1re méthode.**

Soit f convenant; notons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(-x) \end{array}$.

L'application g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = f''(x) + f(-x) = f''(x) + g(x) \\ -x = f''(-x) + f(x) = g''(x) + f(x) \end{cases}.$$

En notant $u = f + g$, $v = f - g$, u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u''(x) + u(x) = 0 \\ v''(x) - v(x) = 2x \end{cases}$.

On en déduit qu'il existe $(A, B, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u(x) = A \cos x + B \sin x \\ v(x) = -2x + \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x \end{cases}$,

d'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}(u(x) + v(x)) = -x + \dfrac{1}{2}(A \cos x + B \sin x + \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x)$.

Etudier enfin la réciproque.

2ème méthode.

Soit f convenant; f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f''(x) = x - f(-x) \\ f^{(3)}(x) = 1 + f'(-x) \\ f^{(4)}(x) = -f''(-x) = -(-x - f(x)) = x + f(x) \end{cases}.$$

Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de : $y^{(4)} - y = x$.

Cette équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients constants se résout de façon analogue à celles du second ordre. L'équation caractéristique $r^4 - 1 = 0$ admet pour solutions (dans $\mathbb{C}$) $-1, 1, i, -i$, donc f est de la forme :

$$f : x \longmapsto -x + \lambda e^{x} + \mu e^{-x} + A \cos x + B \sin x,\ (\lambda, \mu, A, B) \in \mathbb{R}^4.$$

Etudier enfin la réciproque.

◇ **Réponse :** $\left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x + a\cos x + b\,\mathrm{sh}\,x \end{array} ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Rappelons que, dans cette première étude des équations différentielles non linéaires, le traitement manque de rigueur (division par y, écriture $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, etc.).

11.3.1 ◇ **Réponses :** les équations cartésiennes des courbes intégrales sont :

a) $\mathrm{Arctan}\, y = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\ln|y| = -2\varepsilon\left(\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} + \sqrt{x(1-x)}\right) + \lambda,\ (\varepsilon,\lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$ et $I \subset]0;\ 1[$.

c) $y = \dfrac{\lambda x}{(\lambda-1)x+1},\ \lambda \in \mathbb{R}$ *d)* $y^2 = \dfrac{(\lambda-1)x^2-1}{x^2+1},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

e) $y = -\ln(\lambda - \mathrm{e}^{-x}),\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *f)* $\sin x \cos y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

11.3.2 ◇ **Réponses :** Une représentation paramétrique (paramètre noté t) ou l'équation cartésienne des courbes intégrales est :

a) $x = \dfrac{\lambda}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}},\ y = \lambda\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.

b) $x = \dfrac{y^2+4\lambda^2}{4\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.

c) $x = \dfrac{\lambda}{t^2-t},\ y = \dfrac{\lambda}{t-1},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.

d) $y = x\tan\left(\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)\right),\ x_0 \in \mathbb{R}^*$.

e) $x^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.

f) $x = \dfrac{\lambda\mathrm{e}^t}{t+1},\ y = \dfrac{\lambda t\mathrm{e}^t}{t+1},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.

11.3.3 ◇ **Réponses :**

a) $y = (x + 4\sqrt{x} + 4 + \lambda\mathrm{e}^{\sqrt{x}})^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y = \left(\dfrac{x}{2} + \lambda\mathrm{e}^{-x}\right)^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

c) $y = \left(\dfrac{x^2}{2}(\ln|x| + \lambda)\right)^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

d) $y = (-x^2 + 2x - 2 + \lambda\mathrm{e}^{-x})^{-1},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

e) $y = (x^2 + \lambda\sqrt{|x|})^{-1},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

f) $y = \dfrac{x}{\lambda + \ln|x|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) $y = \varepsilon \dfrac{x}{\sqrt{\lambda - x^2}}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+^*$.

h) $y = \varepsilon \left(x^2 + \dfrac{\lambda}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$.

i) $y = \left(\sqrt[3]{\dfrac{\lambda}{x^3} + \dfrac{x^3}{2}}\right)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11.3.4 ◇ **Réponses :**

a) $y = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{\dfrac{\ln|x|}{2} + \lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y = 1 + \left(-\dfrac{1}{2} + \lambda e^{-2\operatorname{Arctan} x}\right)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $y = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{\ln|x| + \lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $y = \dfrac{1 - \lambda x}{\lambda + x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) $y = \dfrac{\lambda + x}{\lambda - x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) $y = \dfrac{1 - \lambda x^2}{\lambda - x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) $y = \tan x + \left(\cos x \left(\lambda + \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)\right)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11.3.5 Pour chaque $k \in \{1,2,3\}$, notons $z_k = y_k - y_1$.
En utilisant le fait que y_1 et y_k sont solutions de (e), montrer : $Az_k' + (B + 2Cy_1)z_k + Cz_k^2 = 0$.
Notons $u_k = \dfrac{1}{z_k}$; alors : $-Au_k' + (B + 2Cy_1)u_k + C = 0$.
Notons enfin $U = u_3 - u_2$ et $V = u_4 - u_2$; les fonctions U, V satisfont l'équation linéaire du premier ordre sans second membre :

$$-Au' + (B + 2Cy_1)u = 0.$$

Si A ne s'annule pas sur I, on en déduit (cf. 11.1.2 p. 137) que (U, V) est lié, c'est-à-dire (sauf cas particulier $U = 0$) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $V = \lambda U$. On en déduit la relation demandée.

11.3.6 ◇ **Réponses :** Une représentation paramétrique (paramètre noté t) ou l'équation cartésienne des courbes intégrales est :

a) $x = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y-2| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

b) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}\ln|t(t^2-3)^4| + C \\ y = \frac{t^3-t}{2} \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} x = 2\ln|1-t^2| + C \\ y = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$

d) $\begin{cases} x = \ln|\cos t| + t\tan t + C \\ y = t^2\tan t \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$

e) $y = \sin(x+\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$; aussi $y = 1,\ y = -1.$

11.3.7 ◇ **Réponses :** Une représentation paramétrique (paramètre noté t) des courbes intégrales est :

a) $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + C \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$

b) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \\ y = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{\sqrt{1+t^2}-1} + C \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C \end{cases},\ C \in \mathbb{R}.$

11.3.8 ◇ **Réponses :** Une représentation paramétrique (paramètre t) ou l'équation cartésienne des courbes intégrales est :

a) $\begin{cases} x = \frac{2}{3}t + \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}} \\ y = t^2 - 2t - \frac{\lambda t}{\sqrt{|t|}} \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}.$

b) $y = \lambda + \varepsilon e^x,\ (\varepsilon,\lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} x = -t - \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{(1-t)^2} \\ y = -\frac{t^2}{2} + \frac{\lambda t^2}{(1-t)^2} \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 12

12.2.1 *a) 1)* Soit f convenant; en remplaçant z par 0 : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = f(y,0) - f(0,x)$.
Il existe donc $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(y) + \psi(x)$.
En reportant : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (\varphi(x) + \psi(x)) + (\varphi(y) + \psi(y)) + (\varphi(z) + \psi(z)) = 0$, d'où :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = -\varphi(x)$.

2) Réciproquement, vérifier que, pour toute φ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \varphi(y) - \varphi(x) \end{array}$ convient.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \varphi(y) - \varphi(x) \end{array} ;\ \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$.

b) Raisonnement analogue à celui de *a)*.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \varphi(x+y) \end{array} ;\ \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$.

c) 1) Soit f convenant; alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = f(x,0) + f(0,y) - f(0,0)$.
Il existe donc $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$.
En reportant dans l'hypothèse : $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^2,\ \psi(y) - \varphi(y) = \psi(z) - \varphi(z)$.
Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \varphi(x) + C$.
En remplaçant φ par $\varphi + \dfrac{C}{2}$, on obtient : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

2) Vérifier la réciproque.

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \varphi(x) + \varphi(y) \end{array} ;\ \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \right\}$.

d) 1) Soit f convenant; en remplaçant x par $\sqrt{x}$ et z par 1, on obtient :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) f(y^2,1) f(1,\sqrt{x}) = (\sqrt{x}\,y)^3.$$

Ceci montre : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) \neq 0$

et : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{f(1,\sqrt{x})} \dfrac{y^3}{f(y,1)}$.

Il existe donc $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$.
En reportant : $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \big(\varphi(x^2)\psi(x)\big)\big(\varphi(y^2)\psi(y)\big)\big(\varphi(z^2)\psi(z)\big) = (xyz)^3$.

Par $x = y = z = 1$, on déduit $\varphi(1)\psi(1) = 1$; puis, par $y = z = 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) = \dfrac{x^3}{\varphi(x^2)}$.

D'où : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) = \varphi(x) \dfrac{y^3}{\varphi(y^2)}$.

2) Vérifier la réciproque.

Des exemples de solutions sont : $\begin{array}{l}(\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \quad (x,y) \longmapsto y^3\end{array}$ $\begin{array}{l}(\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}. \\ (x,y) \longrightarrow xy\end{array}$

◇ **Réponse :** $\left\{ \begin{array}{l}(\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{\varphi(x)y^3}{\varphi(y^2)}\end{array} ;\ \varphi \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{R}_+^*} \right\}$.

12.2.2 • Notons $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\right\}$; on a clairement $\mathbb{Q}^2 \subset E$, donc E est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Notons $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{Q} \text{ et } \dfrac{y}{\sqrt[3]{2}} \in \mathbb{Q}^*\right\} = \mathbb{Q} \times \left(\sqrt[3]{2}\mathbb{Q}^*\right)$. Montrer que F est dense dans $\mathbb{R}^2$ et que $F \subset \complement_{\mathbb{R}^2}(E)$ (utiliser : $\sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$).

• Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que f soit continue en (x_0,y_0). Comme E et F sont denses dans $\mathbb{R}^2$ et que $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in E}]{} x_0y_0$ et $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in F}]{} 0$, on déduit : $x_0y_0 = 0$.

• Réciproquement, comme, pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in E}]{} 0$ et $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in \mathbb{R}^2-E}]{} 0$,

f est continue en $(x_0,0)$; de même pour $(0,y_0)$.

◇ **Réponse :** L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels f est continue est $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

12.2.3 *1)* Soit $(x_0,y_0) \in (\mathbb{Q}_+)^2$. Puisque $(\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2$ est dense dans $(\mathbb{R}_+)^2$ et que $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2-(\mathbb{Q}_+)^2}]{} 0 \neq f(x_0,y_0)$, on en déduit que f n'est pas continue en (x_0,y_0).

2) Soit $(x_0,y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2$ (on a alors, par exemple, $x_0 \notin \mathbb{Q}_+$). En raisonnant comme dans la solution de l'exercice 4.3.1 *b)*, Tome 1, p. 111, montrer $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in(\mathbb{Q}_+)^2}]{} 0$.

◇ **Réponse :** L'ensemble des points de $(\mathbb{R}_+)^2$ en lesquels f est continue est $(\mathbb{R}_+)^2 - (\mathbb{Q}_+)^2$.

12.2.4 Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

On a, pour tout t de $[0;\ 1]$:

$$(xf(t) + yg(t)) - (x'f(t) + y'g(t)) = (x - x')f(t) + (y - y')g(t) \leqslant |x - x'|\,||f||_\infty + |y - y'|\,||g||_\infty,$$

d'où : $xf(t) + yg(t) \leqslant x'f(t) + y'g(t) + |x - x'|\,||f||_\infty + |y - y'|\,||g||_\infty$.

En passant aux bornes supérieures lorsque t décrit $[0;\ 1]$, on obtient :

$$M(x,y) \leqslant M(x',y') + |x - x'|\,||f||_\infty + |y - y'|\,||g||_\infty.$$

En échangeant les rôles de (x,y) et (x',y'), on conclut à :

$$|M(x,y) - M(x',y')| \leqslant |x - x'|\,||f||_\infty + |y - y'|\,||g||_\infty.$$

Ceci montre que M est continue sur $\mathbb{R}^2$ (et même lipschitzienne de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$).

12.2.5 *a)* Remarquer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leqslant |y|$.

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

b) **1re méthode.**

• $|x| \leqslant |y| \neq 0 \Longrightarrow |f(x,y)| \leqslant \dfrac{y^8}{y^4} = y^4$.

• $|y| \leqslant |x| \neq 0 \Longrightarrow |f(x,y)| \leqslant \dfrac{x^8}{x^6} = x^2$.

D'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leqslant \operatorname{Max}(y^4, x^2) \leqslant y^4 + x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

2ème méthode.

Notons $X = x^3$, $Y = y^2$, d'où $|f(x,y)| = \dfrac{X^{5/3}Y^{3/2}}{X^2+Y^2}$; passons ensuite en coordonnées polaires ($X = \rho\cos\theta$, $Y = \rho\sin\theta$, $\rho > 0$) :

$$|f(x,y)| = \rho^{\frac{5}{3}+\frac{3}{2}-2}|\cos\theta|^{5/3}|\sin\theta|^{3/2} \leqslant \rho^{\frac{7}{6}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

c) $f(x,0) = \dfrac{1+x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et $f(0,y) = \dfrac{1+y}{-y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} -\infty$.

◇ **Réponse :** f n'a pas de limite en $(0,0)$.

d) $f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(t^4,t^3) = \dfrac{1}{2t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$.

◇ **Réponse :** f n'a pas de limite en $(0,0)$.

e) $f(x,0) = \dfrac{2(x-1)^2\ln(|1-x|)}{|x|} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-2x}{|x|}$.

◇ **Réponse :** f n'a pas de limite en $(0,0)$.

f) Puisque ($\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leqslant |t|$), on a : $|f(x,y)| \leqslant \sqrt{x^4+y^4} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

g) • Puisque $\sin^4 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et $(1-\cos y)^2 \underset{y\to 0}{\sim} \dfrac{y^4}{4}$, on peut conjecturer $f \xrightarrow[(0,0)]{} \dfrac{1}{4}$.

• $\left|f(x,y) - \dfrac{1}{4}\right| \leqslant \dfrac{|\sin^4 x - x^4|}{4x^4+y^4} + \dfrac{\left|(1-\cos y)^2 - \frac{1}{4}y^4\right|}{4x^4+y^4}$.

Puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $\dfrac{\sin^4 x - x^4}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et donc $\dfrac{|\sin^4 x - x^4|}{4x^4+y^4} \leqslant \dfrac{1}{4}\left|\dfrac{\sin^4 x - x^4}{x^4}\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

Traiter de la même façon l'autre terme.

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} \dfrac{1}{4}$.

h) $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $f(x,x) = -1 \xrightarrow[x\to 0]{} -1$.

◇ **Réponse :** f n'a pas de limite en $(0,0)$.

i) • Puisque $\operatorname{ch} x - \cos y = 0 \iff \operatorname{ch} x = \cos y = 1 \iff (x = 0 \text{ et } y \in 2\pi\mathbb{Z})$, f est définie, au moins, sur $V =]-1;1[^2 - \{(0,0)\}$.

• Montrer, pour tout réel t : $|\sin t| \leqslant |t|$, $\operatorname{ch} t \geqslant 1 + \dfrac{t^2}{2}$, $\cos t \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{2}$. D'où :

$$\forall (x,y) \in V, \quad |f(x,y)| \leqslant \frac{2|x|^3}{x^2+y^2} \leqslant 2|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

j) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{ch}(xy) - 1}{(xy)^2} + \dfrac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}$.

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} 1$.

k) $f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\text{et} \quad f(x, -x + x^2) = \frac{-x^2 + x^3}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x - x^2)} = \frac{-x^2 + x^3}{2 \operatorname{sh} \dfrac{x^2}{2} \operatorname{ch}\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

◇ **Réponse :** f n'a pas de limite en $(0,0)$.

l) Montrer que, au voisinage de 0 : $|\operatorname{sh} t| \leqslant 2|t|$.

On a alors : $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{4|xy|}{|x| + |y|} \leqslant 4(|x| + |y|) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

12.2.6 • Puisque $\cos^2 x + y^2 \sin^2 x = 0 \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ y \sin x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$,

f est définie, au moins, sur $V = \left(\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[\times]-1;1[\right) - \{(0,0)\}$.

• $\forall (x,y) \in V, \quad |f(x,y)| = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x} |\cos x| \leqslant |\cos x| \xrightarrow[(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)]{} 0$.

◇ **Réponse :** $f \xrightarrow[\left(\frac{\pi}{2},0\right)]{} 0$.

12.2.7 *a)* Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; séparons en cas :

1) $x_0 y_0 \neq 0$.

Il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, contenant (x_0, y_0), et tel que : $\forall (x,y) \in V,\ xy \neq 0$.

D'après les théorèmes généraux (produit, composée de fonctions continues), f est continue en (x_0, y_0).

2) $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$ (ou, de façon analogue, $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$). Comme l'application partielle

$$f(x_0, \cdot) : y \longmapsto \begin{cases} (x_0^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x_0 y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

n'a pas de limite en 0, f n'a pas de limite en $(x_0, 0)$.

3) $x_0 = y_0 = 0$. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leqslant x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$.

◇ **Réponse :** $(\mathbb{R}^*)^2 \cup \{(0,0)\}$.

b) Notons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > x^2\}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; séparons en cas :

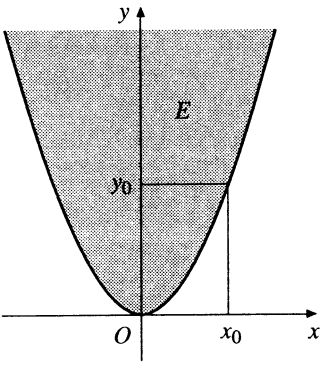
1) $y_0 > x_0^2$

E est un ouvert contenant (x_0, y_0), et $\forall (x,y) \in E,\ f(x,y) = x^4$, donc f est continue en (x_0, y_0).

2) $y_0 < x_0^2$

Analogue à *1)*.

3) $y_0 = x_0^2$



Comme $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ y>x^2}]{} x_0^4$,

$f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ y\leqslant x^2}]{} y_0^2$,

et que $x_0^4 = y_0^2$, on conclut que f est continue en (x_0, y_0).

◇ **Réponse :** $\mathbb{R}^2$.

12.3.1 *a)* Remarquer d'abord que f est symétrique, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(y,x) = f(x,y)$.

1) **Continuité**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (somme, composée, produit de fonctions continues).
- $|f(x,y)| \leqslant x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

2) **Existence des dpp** (dérivées partielles premières)

- f admet sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ des dpp et, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = x\sin\dfrac{1}{|x|} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

3) **Continuité des dpp**

- Les dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{x}{|x|}\cos\dfrac{1}{|x|}$, qui n'a pas de limite quand x tend vers 0; donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- f admet des dpp sur $\mathbb{R}^2$.
- les dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et non continues en $(0,0)$.

b) ◇ **Réponse :** f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

c) ◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- f admet des dpp sur $\mathbb{R}^2$.
- les dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et non continues en $(0,0)$.

d) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) **Continuité**

$|f(x,y)| \leqslant x^4 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$.

2) **Existence des dpp**

- $\left|\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\right| = \dfrac{|x^3|}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.
- $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

3) **Continuité des dpp**

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{6x^5(x^2+(y-x)^2) - x^6(2x-2(y-x))}{(x^2+(y-x)^2)^2}$.

Notons $\nu = \text{Max}\,(|x|, |y|)$. Le numérateur précédent est, en valeur absolue, majoré par $36\nu^7$.

$$\begin{cases} \text{Si } |x| \geqslant |y|, & \text{alors } x^2+(y-x)^2 \geqslant x^2 = \nu^2 \\ \text{Si } |x| \leqslant |y|, & \text{alors } x^2+(y-x)^2 = 2x^2-2xy+y^2 = 2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{2} \geqslant \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{\nu^2}{2} \end{cases}$$

On déduit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 144\nu^3 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

◇ **Réponse :** f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

e) ◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
- les dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

f) ◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ mais non en $(0,0)$.
- $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
- les dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

g) ◇ **Réponse :**

- f est continue en $(0,0)$ seulement.
- $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\big) \cup \{(0,0)\}$, $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \big((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}\big) \cup \{(0,0)\}$.

h) ◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2$, $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\}$.

i) ◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 - B_1$ où $B_1 = \{(x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - B_1$.

j) ◇ **Réponse :**

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $\text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Def}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$ et non continues en tout point de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,0)\}$.

12.3.2 • Montrer $\left|\dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}\right| \leqslant 1$ et qu'il y a égalité si et seulement si $x + y = 0$.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - B_2$, où $B_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\big\}$.

• Un calcul élémentaire fournit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - B_2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\varepsilon}{1 + x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\varepsilon}{1 + y^2} \end{cases}$, où $\varepsilon = \text{sgn}\,(x + y)$.

En déduire qu'il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y + C_1 & \text{si} \quad x + y > 0 \\ -\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y + C_2 & \text{si} \quad x + y < 0 \end{cases}.$$

En utilisant la continuité de f sur B_2 et sa valeur sur B_2, montrer $C_1 = C_2 = 0$.

◇ **Réponse :** $f(x,y) = \varepsilon(\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y)$, où $\varepsilon = \text{sgn}\,(x + y)$.

12.3.3 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\displaystyle\int_0^y \varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^y t\varphi(t)\mathrm{d}t.$

◇ **Réponse :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_0^y \varphi(t)\mathrm{d}t \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)\varphi(y) \end{cases}.$

12.3.4 ◇ **Réponse :** $\forall (x,y) \in I^2,\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\varphi(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y) \end{cases}.$

12.3.5 D'abord, f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - B_1$, où $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) **Existence des dpp**
$\dfrac{f(x_0+h,x_0) - f(x_0,x_0)}{h} = \dfrac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0)}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$, en utilisant le théorème de Taylor-Young. Ceci montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$; de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_0)$ (f est symétrique).

2) **Continuité des dpp**
On a, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-\varphi'(x)(y-x) + \varphi(y) - \varphi(x)}{(y-x)^2} & \text{si } x \neq y \\ \dfrac{1}{2}\varphi''(x) & \text{si } x = y \end{cases}.$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient, si $x \neq y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\varphi''(t)\mathrm{d}t;$$

montrer que ceci tend vers $\dfrac{1}{2}\varphi''(x_0)$ lorsque (x,y) tend vers (x_0,x_0).

12.4.1 *a)* ◇ **Réponse :** n^k.

b) Notons, pour tout (n,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$: $\Gamma_{n,k} = \mathrm{Card}\,\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n;\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k\}$.

• Montrer d'abord : $\Gamma_{1,k} = 1$, $\Gamma_{2,k} = k+1$, $\Gamma_{3,k} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, d'où l'on peut conjecturer $\Gamma_{n,k} = \mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}$.

• Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. L'ensemble des $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ de $\mathbb{N}^{n+1}$ tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} = k$ est la réunion disjointe de l'ensemble E_1 des $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ de $\mathbb{N}^{n+1}$ tels que $\begin{cases} \alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k \end{cases}$, et de l'ensemble E_2 des $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} \alpha_{n+1} \geqslant 1 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + (\alpha_{n+1} - 1) = k-1 \end{cases}$.
Comme $\mathrm{Card}\,(E_1) = \Gamma_{n,k}$ et $\mathrm{Card}\,(E_2) = \Gamma_{n+1,k-1}$, on déduit : $\Gamma_{n+1,k} = \Gamma_{n,k} + \Gamma_{n+1,k-1}$.

• Montrer alors, par récurrence sur $n+k$: $\Gamma_{n,k} = \mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1} (= \mathrm{C}_{n+k-1}^{k})$.

◇ **Réponse :** C_{n+k-1}^{n-1}.

12.4.2 *a)* • f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

• $f(\bullet,0) = 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0; de même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$, d'où, en notant $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2\rho \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Ceci montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, donc, aussi, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

b) • $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

• $\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1$, donc $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$ existe et vaut 1

• $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$ existe et vaut 0.

12.5.1 *a)* • f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

• Le seul point critique de f est $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, et, en notant $h = x - \dfrac{1}{3}$, $k = y - \dfrac{1}{3}$, on a :

$$f(x,y) - f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = h^2 + k^2 + (h+k)^2 \geqslant 0.$$

◇ **Réponse :** f admet un extremum local et un seul, en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$; c'est un minimum et $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.
Il s'agit aussi d'un minimum global, et f n'a pas de maximum global.

b) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

• Le seul point critique est $(0,0)$ et $f(x,0) - f(0,0) = x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ < 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

◇ **Réponse :** f n'admet ni extremum local ni extremum global.

c) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

• Le seul point critique est $(0,0)$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) - f(0,0) \geqslant 0$.

◇ **Réponse :** f admet un extremum local et un seul, en $(0,0)$; c'est un minimum et $f(0,0) = 0$.
Il s'agit aussi d'un minimum global et f n'a pas de maximum global.

d) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

• Le seul point critique est (0,0). On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x,0) = x^4 \\ f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}x^4 \end{cases}$.

◇ **Réponse :** f n'admet ni extremum local ni extremum global.

e) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

• Le seul point critique est (0,0). Comme $\begin{cases} f(x,-x^3) = -x^5 + \ln(1+x^6) \underset{x\to 0}{\sim} -x^5 \\ f(0,y) = \ln(1+y^2) \underset{y\to 0}{\sim} y^2 \end{cases}$, f n'admet pas d'extremum local en (0,0).

• $f(0,y) = \ln(1+y^2) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$, donc f n'est pas majorée.

• $f(1,y) = y + \ln(1+y^2) \xrightarrow[y\to-\infty]{} -\infty$, donc f n'est pas minorée.

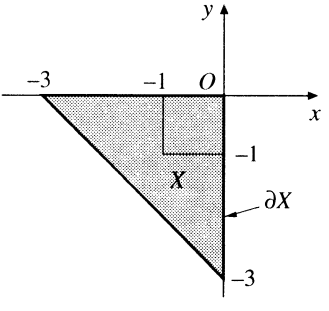
◇ **Réponse :** f n'admet ni extremum local ni extremum global.

12.5.2 • Etudier les extremums locaux de f sur l'intérieur de X, c'est-à-dire

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < 0,\ y < 0,\ x + y > -3\right\},$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On obtient un point critique et un seul $(-1,-1)$, en lequel f admet un minimum local.

Etudier ensuite les restrictions de f à chacun des trois segments qui forment le «bord» ∂X de X.



◇ **Réponse :**
$\begin{cases} \operatorname{Inf} f = -1 & \text{et} \quad f^{-1}(\{-1\}) = \{(-1,-1)\} \\ \operatorname{Sup} f = 6 & \text{et} \quad f^{-1}(\{6\}) = \{(-3,0),\ (0,-3)\} \end{cases}$.

12.5.3 • f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et admet un point critique et un seul : (0,0).

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times [-1;\ +\infty[,\ f(x,y) - f(0,0) = x^2(1+y)^3 + y^4 \geqslant 0,$

donc f admet en (0,0) un minimum local.

• $f(x,x) = x^2(1+x)^3 + x^4 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^5 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, donc f n'admet pas de minimum global.

12.6.1 ◇ **Réponses :**

a) $1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)$

b) $-x^2 - x^3 - x^4 - 2x^5 + o(x^5)$

c) $x^3 - x^{13} + o(x^{17})$

d) $2 - 2\,(2 + \ln 2)(x - 1) + (18 + 10\ln 2 + (\ln 2)^2)(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$

e) $1 - (\mathrm{e} + 1)x + \left(\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^3 + 4\mathrm{e}^2 + \frac{5}{2}\mathrm{e} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$

f) $(x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$

g) $-x - x^2 - x^3 + o(x^3)$.

12.6.2 Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique et que $\varphi : x \longmapsto y$ admet un $DL_2(0)$: $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$.

◇ **Réponse :** $\frac{y}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{4}$.

12.6.3 Même méthode que dans la solution de l'exercice 12.6.2 : $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

12.6.4 • Pour chaque x de $\mathbb{R}$, l'application $f(x,\bullet) : y \longmapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, de limites $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = 0$.
Il existe une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unique telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,\varphi(x)) = 0$.

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; le théorème des fonctions implicites, appliqué en $(x_0,\varphi(x_0))$, montre qu'il existe un intervalle ouvert I_{x_0} centré en x_0 et une application $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall x \in I_{x_0},\ f(x, \varphi_{x_0}(x)) = 0.$$

Par unicité de $\varphi(x)$ (pour x fixé), on voit alors que φ_{x_0} est la restriction de φ à I_{x_0}.
Puisque φ est de classe C^∞ au voisinage de tout x_0 de $\mathbb{R}$, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

12.7.1 ◇ **Réponses :**

a) ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ et les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$ sont les applications $(x,y) \longmapsto \dfrac{e^y - 1}{1+x^2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) ω est exacte sur $U = (\mathbb{R}^*)^2$ et les primitives de ω sur U sont les applications $(x,y) \longmapsto xy + \ln|x| + \ln|y| + \lambda_i$ si $(x,y) \in U_i$, $U_1, \ldots, U_4$ étant les quatre quadrants, et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

c) ω est exacte sur $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et les primitives de ω sur U sont les applications $(x,y) \longmapsto \dfrac{y}{2}\ln(x^2+y^2) - y + x \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} + \lambda_i$, si $(x,y) \in U_i$, U_1, U_2 étant les deux demi-plans, et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

d) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

• Un facteur intégrant est $(x,y) \longmapsto e^x$.

• ω_1 est exacte sur $\mathbb{R}^2$ et les primitives de ω_1 sur $\mathbb{R}^2$ sont les applications $(x,y) \longmapsto e^x y + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

• Un facteur intégrant sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{y^2}$.

• ω_1 est exacte sur U et les primitives de ω_1 sur U sont les applications $(x,y) \longmapsto \dfrac{x}{y} + y + \lambda_i$ si $(x,y) \in U_i$, $U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$, $U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

f) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

• Un facteur intégrant sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est $(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^{-2}$.

• ω_1 est exacte sur U et les primitives de ω_1 sur U sont les applications $(x,y) \longmapsto \dfrac{x+y}{x^2+y^2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

• Un facteur intégrant sur $U = (\mathbb{R}^*)^2$ est $(x,y) \longmapsto \dfrac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}$; on obtient

$$\omega_1(x,y) = \frac{2x^2 + xy - 2y^2}{x} e^{\frac{y}{x}} dx + (3x+2y) e^{\frac{y}{x}} dy,$$

qui est définie sur $V = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

ω_1 est exacte sur V et les primitives de ω_1 sur V sont les applications
$(x,y) \longmapsto (2xy + x^2)e^{\frac{y}{x}} + \lambda_i$ si $(x,y) \in U_i$, $U_1 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$, $U_2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

h) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

• Un facteur intégrant est $(x,y) \longmapsto e^y$.

• ω_1 est exacte sur $\mathbb{R}^2$ et les primitives de ω_1 sur $\mathbb{R}^2$ sont les applications $(x,y) \longmapsto xe^y - 2e^y + x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$.

• Un facteur intégrant sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{y}$.

• ω_1 est exacte sur U et les primitives de ω_1 sur U sont les applications $(x,y) \longmapsto x - \dfrac{1+\ln x}{y} + \lambda_i$ si $(x,y) \in U_i$, $U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$, $U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

12.7.2 ◇ **Réponse :** les couples (f,g) convenant sont les (f,f') où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$; les primitives sont les applications $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto e^x f(y) + \lambda\end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12.7.3 ◇ **Réponse :** $(p,q) = (2,2)$; les primitives sont les $\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2y^2 + \lambda\end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12.7.4 ◇ **Réponses :**

a) ω est exacte sur $U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ et les primitives de ω sur U sont les applications

$$(x,y,z) \longmapsto \frac{ax - by}{z} + \lambda_i \text{ si } (x,y,z) \in U_i,$$

$U_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_-$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_+$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

b) ω est exacte sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 - P$ où P est le plan d'équation $cz - ax = 0$, et les primitives de ω sur U sont les applications

$$(x,y,z) \longmapsto \frac{1}{a}\frac{ay - bz}{cz - ax} + \lambda_i \text{ si } (x,y,z) \in U_i,$$

U_1, U_2 étant les deux demi-espaces limités par P, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

c) • ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^3$.

• Un facteur intégrant sur $U = \mathbb{R}^3 - P$, où P est le plan d'équation $x + y = 0$, est $(x,y,z) \longmapsto \dfrac{1}{(x+y)^2}$.

• ω_1 est exacte sur U et les primitives de ω_1 sur U sont les applications $(x,y,z) \longmapsto \dfrac{(x^2 - y^2)z}{(x+y)^2} + \lambda_i$ si $(x,y,z) \in U_i$, U_1, U_2 étant les deux demi-espaces limités par P, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

d) • ω n'est pas fermée sur $U = (\mathbb{R}^*)^3$.

• Un facteur intégrant sur U est $(x,y,z) \longmapsto xyz$ (évident).

• $\omega_1 : (x,y,z) \longmapsto x\,dx + y\,dy + z\,dz$ est définie sur $\mathbb{R}^3$, exacte sur $\mathbb{R}^3$, et les primitives de ω_1 sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications $(x,y,z) \longmapsto \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12.7.5 ◇ **Réponse :** ω est fermée (sur $U = \mathbb{R}^3 - P$, où P est le plan d'équation $y + z = 0$) si et seulement si : $b = 1$ et $c = -1$. Dans ce cas, les primitives de ω sur U sont les applications $(x,y,z) \longmapsto \dfrac{x - z}{y + z} + \lambda_i$ si $(x,y,z) \in U_i$, U_1 et U_2 étant les deux demi-espaces limités par P, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

12.7.6 ◇ **Réponse :** ω est fermée sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy + C\end{array}$, $C \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, les primitives de ω sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications $(x,y,z) \longmapsto xyz + \dfrac{1}{3}x^3y^3 + Cz + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12.7.7 ◇ **Réponses :**

a) $y(e^x - e^{2x}) - x = C$, $C \in \mathbb{R}$. On peut aussi considérer que l'équation proposée est linéaire, ce qui permet une résolution rigoureuse.

b) $e^y \operatorname{sh} x + y - x = C$, $C \in \mathbb{R}$. *c)* $x - \dfrac{1 + \ln x}{y} = C$, $C \in \mathbb{R}$. *d)* $\dfrac{y + \ln|x|}{xy} = C$, $C \in \mathbb{R}$.

12.8.1

- $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}\rho\sin\theta + \rho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\mathrm{d}x + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\rho = \cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta, & \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} + \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\theta} + \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial\rho} \end{cases}.$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(-\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - \sin\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial\rho}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\rho}\right)$$
$$+\left(\frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\right)\cdot\cos\theta.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \cos\theta\frac{\partial F}{\partial\rho} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial\rho}\right)\frac{\cos\theta}{\rho}$$
$$+\left(-\frac{\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\right)\sin\theta.$$

◇ **Réponse :** $\Delta f = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial\rho}$.

12.8.2 $\Delta f = 0 \Longleftrightarrow (\forall(x,y) \in I \times J,\ u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0)$. Si (u,v) convient et $v \neq 0$, alors il existe $y_0 \in J$ tel que $v(y_0) \neq 0$ et : $\forall x \in I,\ u''(x) + \dfrac{v''(y_0)}{v(y_0)}u(x) = 0$.

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ u''(x) + Cu(x) = 0$.

Alors $\Delta f = 0 \Longleftrightarrow (\forall(x,y) \in I \times J,\ u(x)(v''(y) - Cv(y)) = 0) \Longleftrightarrow \forall y \in J,\ v''(y) - Cv(y) = 0$, en supposant $u \neq 0$.

◇ **Réponse :** $\big\{(x,y) \longmapsto (\lambda_1 x + \mu_1)(\lambda_2 y + \mu_2);\ (\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^4\big\}$

$\cup\big\{(x,y) \longmapsto (A_1\cos\omega x + B_1\sin\omega x)(A_2\operatorname{ch}\omega y + B_2\operatorname{sh}\omega y);\ (A_1,B_1,A_2,B_2) \in \mathbb{R}^4,\ \omega \in \mathbb{R}_+^*\big\}$

$\cup\big\{(x,y) \longmapsto (A_1\operatorname{ch}\omega x + B_1\operatorname{sh}\omega x)(A_2\cos\omega y + B_2\sin\omega y);\ (A_1,B_1,A_2,B_2) \in \mathbb{R}^4,\ \omega \in \mathbb{R}_+^*\big\}$.

12.8.3 ◇ **Réponses :** $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$, où f est définie par :

a) $f(x,y,z) = \dfrac{z^3}{x^2+y^2} + z + C,\ C \in \mathbb{R}$.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Indications et réponses
pour les exercices du chapitre 13

13.1.1 *a)* (C) est paramétrée par : $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, t de π à 0. D'où :

$$\int_{(C)} \omega = \int_0^{\pi} (-4\cos^3 t + 2\sin^3 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left(-(\cos 3t + 3\cos t) + \frac{1}{2}(3\sin t - \sin 3t)\right)\mathrm{d}t.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{8}{3}$.

b) (C) est paramétrée par : $y = x$, x de 0 à 1.

D'où : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^1 x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = [x(-\cos x + \sin x)]_0^1 - \int_0^1 (-\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x.$

◇ **Réponse** : $2\sin 1 - 1$.

c)
$$\begin{aligned}\int_{(C)} \omega &= \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega + \int_{DA} \omega \\ &= \int_1^{-1} \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^{-1} \frac{-1+y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{1+y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 4\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

◇ **Réponse** : 2π.

d) (C) est paramétrée par : $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, t de 0 à 2π.

D'où : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} (12\cos^3 t - 18\sin^3 t)\,\mathrm{d}t.$

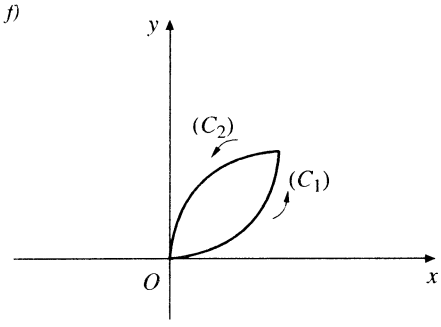
◇ **Réponse** : 0.

e) Le cercle (C) est paramétré par : $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, t de 0 à 2π. D'où :

$$\begin{aligned}\int_{(C)} \omega &= \int_0^{2\pi} \left((1+\sin t)^2\cos^2 t + (1+\sin t)\sin t\cos^2 t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (1+\sin t)(1+2\sin t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t - [\cos^3 t]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{3\pi}{2}$.

f)



$(C_1) : x = \cos t,\ y = 1 + \sin t,\ t$ de $-\dfrac{\pi}{2}$ à 0

$(C_2) : x = 1 + \cos u,\ y = \sin u,\ u$ de $\dfrac{\pi}{2}$ à π.

$$\int_{(C)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-(1 + \sin t)\sin t + 2\cos^2 t \right) \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\sin^2 u + 2(1 + \cos u)\cos u \right) \mathrm{d}u.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{\pi}{2} - 1$.

g) Remarquer : $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = y^2\, d\left(\dfrac{x}{y}\right) = (a^2\sin^2 t\,\cos 2t)\left(-\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t = -a^2\cos 2t\,\mathrm{d}t$, d'où :

$$\int_{(C)} \omega = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -a^2 \sin t\,\cos t\,\cos 2t\,\mathrm{d}t = -\frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t\,\mathrm{d}t.$$

◇ **Réponse** : 0.

h) $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} (-\cos t\,\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\sin 2t + 1\right)\mathrm{d}t.$

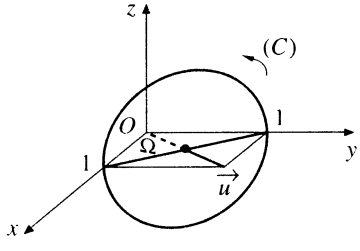
◇ **Réponse** : 2π.

i) $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\left(-(r\sin t + ht)r\sin t + (ht + r\cos t)r\cos t + h^2 t\right)\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} \left(r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + hrt(\cos t - \sin t) + h^2 t\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2\int_0^{2\pi} \cos 2t\,\mathrm{d}t + hr\left([t(\sin t + \cos t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t)\,\mathrm{d}t\right) + 2\pi h^2\right).$$

◇ **Réponse** : $2\pi\,\dfrac{h(h+r)}{r^2}$.

j)



(C) est un cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

En notant $X = x - \dfrac{1}{2}$, $Y = y - \dfrac{1}{2}$, $Z = z$, (C) admet pour équations $\begin{cases} Y = -X \\ 4X^2 + 2Z^2 = 1 \end{cases}$,

d'où la représentation paramétrique :

$X = \dfrac{1}{2}\cos t$, $Y = -\dfrac{1}{2}\cos t$, $Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t$, et donc

$x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos t$, $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos t$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t$,

t allant de 2π à 0 (d'après l'orientation de (C) définie dans l'énoncé).

D'où : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = -\int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\frac{1}{2}\sin t + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\right)\frac{1}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\sin t\cos t\right)\mathrm{d}t.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

k) $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-(\cos t + 1)^2 \sin t + (\cos t - 1)^2 \cos t - \sin^3 t)\mathrm{d}t$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\cos t)\sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 2\cos^2 t + \cos^3 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= [2\cos t + \cos^2 t + \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3t + 3\cos t)\mathrm{d}t.$$

◇ **Réponse** : $-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{3}$.

13.1.2 *a)* ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ et une primitive de ω est $F : (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 - 3xy)$; remarquer alors que (C) vérifie $F(x,y) = 0$.

◇ **Réponse** : 0.

b) ω est exacte ($\omega = \mathrm{d}(xy + xz + yz)$) et (C) est fermée.

◇ **Réponse** : 0.

c) Vérifier que ω est fermée sur $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathbb{R}^3$ est étoilé, ω est alors exacte sur $\mathbb{R}^3$ d'après le théorème de Poincaré (12.7.3 Théorème 2 p. 209) ; d'ailleurs, $\omega = \mathrm{d}(x^2y^2z - z^2)$. Et (C) est fermée.

◇ **Réponse** : 0.

d) $\omega = \mathrm{d}f$ où $f : (x,y) \longmapsto xy$, donc $\displaystyle\int_{(C)} \omega = f(A) - f(O)$.

◇ **Réponse** : 8.

e) En remplaçant $x^2 + y^2$ par y :

$$\int_{(C)} \omega = \int_{(C)} \frac{-2xy\,\mathrm{d}x + (y - 2y^2)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{(C)} (-2x\,\mathrm{d}x + (1 - 2y)\,\mathrm{d}y).$$

En notant $F : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto y - x^2 - y^2\end{array}$, on a donc : $\displaystyle\int_{(C)} \omega = [F(x,y)]_A^B$.

Remarquons qu'ici ω n'est pas exacte, mais qu'il existe une forme différentielle exacte ω_0 coïncidant avec ω sur (C) $\quad(\omega_0 = \mathrm{d}(y - x^2 - y^2))$.

◇ **Réponse** : 0.

f) $\omega = \mathrm{d}F$ où $F(x,y) \longmapsto xy^3 - 3x^2y^2$.

◇ **Réponse** : -236.

g) $\omega = \omega_1 + \omega_2$ où $\omega_1 = (x^2 + y)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy\right)$ et $\omega_2 = x\,\mathrm{d}y$.

Puisque (C) est fermée :

$$\int_{(C)} \omega_1 = 0, \text{ et donc : } \int_{(C)} \omega = \int_{(C)} \omega_2 = \int_{AB} \omega_2 + \int_{BC} \omega_2 + \int_{CD} \omega_2 + \int_{DA} \omega_2 = [2y]_1^2 + [y]_2^1.$$

◇ **Réponse** : 1.

h) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, où $\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}(x^3 - y^3)\right)$ et $\omega_2 = y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$.

Puisque (C) est fermée : $\int_{(C)} \omega_1 = 0$, et donc : $\int_{(C)} \omega = \int_{(C)} \omega_2 = \int_1^0 ((1-x)^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$.

◇ **Réponse** : 0.

i) $\omega = \omega_1 + \omega_2$ où $\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3\right)$ et $\omega_2 = 2y^2\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y$,

d'où $\displaystyle\int_{(C)} \omega = \int_{(C)} \omega_2 = \int_1^2 5x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^1 \left(2(4-x)^2 - (x^2 + 2x(4-x))\right)\mathrm{d}x + \int_3^1 (1 + 2y)\,\mathrm{d}y.$

◇ **Réponse** : $-\frac{4}{3}$.

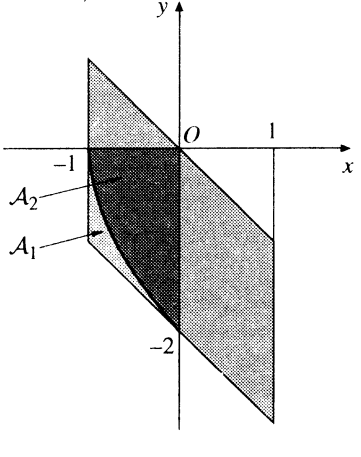
j) $\omega = \omega_1 + \omega_2$ où $\omega_1 = \mathrm{d}F$, $F : (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^x \cos y$ et $\omega_2 = xy(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$.

- $\displaystyle\int_{(C)} \omega_1 = F(0,0) - F(1,0) = 1 - \mathrm{e}$
- Sur (C) : $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = y^2\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = (\rho^2\sin^2\theta)\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$, d'où

$$\int_{(C)} \omega_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{\cos 2\theta}\,\cos\theta)(\sqrt{\cos 2\theta}\,\sin\theta)(-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \left[\frac{1}{12}\cos^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{12}.$$

◇ **Réponse** : $\frac{11}{12} - \mathrm{e}$.

13.1.3 *a)*



Etudier, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les variations de l'application
$[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto |x + yt + t^2|$

En déduire que D est limité par les droites d'équations $x + y = 0$, $x + y = -2$, $x = -1$, $x = 1$ et la parabole d'équation $x = -1 + \frac{y^2}{4}$.

On a : $\mathcal{A}(D) = 4 - \mathcal{A}_1$, puis $\mathcal{A}_1 = 2 - \mathcal{A}_2 - \frac{1}{2}$ (cf. schéma). Enfin : $\mathcal{A}_2 = -\int_{-2}^0 \left(-1 + \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$.

On peut ici ne pas utiliser l'intégrale curviligne.

◇ **Réponse** : $\frac{23}{6}$.

b) $\mathcal{A} = \int_{(C)} x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} (t^2 + t^3)(2t + 3t^2 - 8t^3 - 10t^4)\mathrm{d}t.$

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{84}$.

c) Tracer la courbe limitant D.

$$\mathcal{A}(D) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1 + \sin t)\, 2\cos t \sin t\, \mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t)\sin t \cos^2 t\, \mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{4}{3}\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, \mathrm{d}t.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{\pi}{2}$.

d) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(C)} \rho^2\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2\theta - 4 + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$

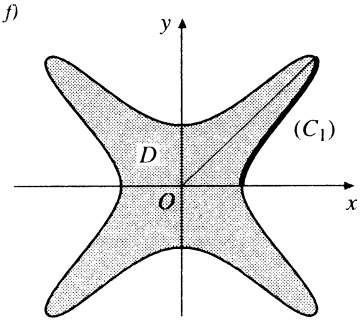
$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta + [\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

◇ **Réponse** : $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

e) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(C)} \rho^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta$; linéariser.

◇ **Réponse** : $\dfrac{2}{3}$.

f)



$$\mathcal{A} = 8\,\frac{1}{2}\int_{(C_1)} \rho^2\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2 + \cos 4\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{(2 + \cos\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{+\infty} \frac{2(1 + t^2)}{(3 + t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\int_0^{+\infty} \frac{1 + 3u^2}{(1 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{3}}{9}(3I_1 - 2I_2),$$

où $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1 + u^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $I_2 = \dfrac{1}{2}I_1$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9} \simeq 1{,}209$.

g) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(C)} \rho^2\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta - \sin^3\theta)^2\mathrm{d}\theta$; développer et linéariser.

◇ **Réponse** : $\dfrac{5\pi}{16}$.

h) $\mathcal{A} = 2\,\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\dfrac{\cos\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta = \int_1^{+\infty} \left(\dfrac{1 - t^2}{2t^2}\right)^2 \dfrac{2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty} \dfrac{(1 - t^2)^2}{t^4(1 + t^2)}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} - \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathrm{d}t.$$

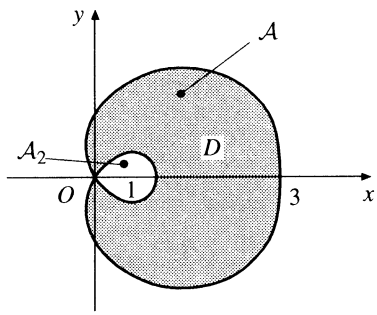
◇ **Réponse** : $\dfrac{3\pi - 8}{6}$.

i) Tracer la courbe.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} (1+t)^2\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= [t+\ln(1+t^2)]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}.$$

◇ **Réponse** : $2\sqrt{2}+2\ln(\sqrt{2}-1)$.

j)



$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \rho^2\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathcal{A}_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2\,\mathrm{d}\theta$.

- $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2\cos\theta - 1)^2\mathrm{d}\theta$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3-4\cos\theta+2\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$
- De même : $\mathcal{A}_2 = \pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

◇ **Réponse** : $\pi + 3\sqrt{3} \simeq 8{,}338$.

13.2.1 *a)* $I = \displaystyle\iint_D x\sin x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D y\sin x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left(\int_0^{\pi} x\,\sin x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right)$.

◇ **Réponse :** 4π.

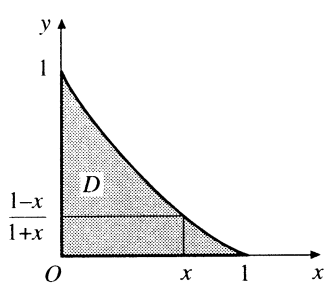
b) $I = \displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1-x} xy(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\frac{x(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{30}$.

c) $I = \displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\ln(1+x+y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$; utiliser des intégrations par parties.

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{4}$.

d)



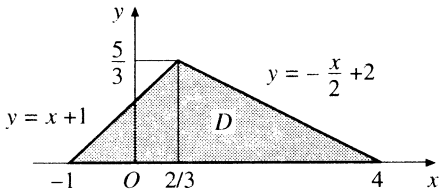
$$I = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)(t-2)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

◇ **Réponse** : $4\ln 2 - \dfrac{11}{4}$.

e) $I = \displaystyle\int_1^3\left(\int_1^{4-x}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^4}\right)\mathrm{d}x = \int_1^3\left[-\frac{1}{3}(x+y)^{-3}\right]_1^{4-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^3\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{4^3}\right)\mathrm{d}x$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{48}$.

f)



$$I = \int_{-1}^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^{x+1} \mathrm{d}y \right) x \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{4} \left(\int_0^{-\frac{x}{2}+2} \mathrm{d}y \right) x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{\frac{2}{3}} x(x+1)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{4} x \left(-\frac{x}{2} + 2 \right) \mathrm{d}x.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{275}{54}$.

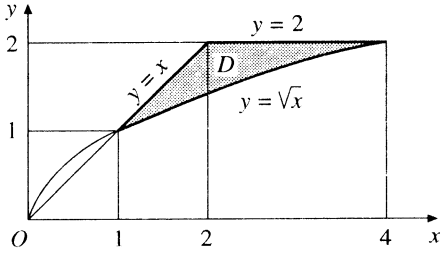
g) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \ln(1 + x^2 + y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$; utiliser des intégrations par parties.

◇ **Réponse** : $\dfrac{2}{3} \ln 2 + \dfrac{8}{9} - \dfrac{\pi}{3}$.

h) $I = \displaystyle\int_0^1 x \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} x(x - x^4) \, \mathrm{d}x.$

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{12}$.

13.2.2



En notant I l'expression à calculer :

$$I = \iint_{D_1 \cup D_2} \sin \frac{\pi x}{2y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ (voir schéma)}$$

$$= \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} \right) \mathrm{d}y \text{ (théorème de Fubini)}$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{2y}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2y} \right]_y^{y^2} \mathrm{d}y$$

$$= -\int_1^2 \frac{2y}{\pi} \cos \frac{\pi y}{2} \, \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{8}{\pi^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} z \cos z \, \mathrm{d}z \text{ et intégrer par parties.}$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{4(\pi + 2)}{\pi^3}$.

13.2.3 *a)* Remarquer : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\mathrm{d}t$, et donc g_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b) On peut supposer $\lambda \neq \mu$. On a, pour tout f de E et tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\Big((T_\lambda \circ T_\mu)(f) \Big)(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(t-x)} \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\mu(u-t)} f(u) \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t = \iint_D \mathrm{e}^{\lambda(t-x)+\mu(u-t)} f(u) \, \mathrm{d}u\mathrm{d}t,$$

où $D = \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant t \leqslant x, 0 \leqslant u \leqslant t\}$.

En appliquant le théorème de Fubini :

$$\Big((T_\lambda \circ T_\mu)(f) \Big)(x) = \int_0^x \left(\int_u^x \mathrm{e}^{\lambda(t-x)+\mu(u-t)} f(u)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u = \int_0^x \mathrm{e}^{\mu u - \lambda x} \left(\int_u^x \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \, \mathrm{d}t \right) f(u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^x \mathrm{e}^{\mu u - \lambda x} (\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)x} - \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)u}) f(u) \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^x (\mathrm{e}^{\mu(u-x)} - \mathrm{e}^{\lambda(u-x)}) f(u) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda - \mu} \Big((T_\mu(f))(x) - (T_\lambda(f))(x) \Big).$$

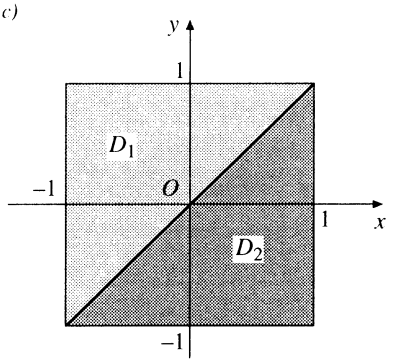
13.2.4 *a)* D est symétrique par rapport à $(x'x)$ et : $\forall (x,y) \in D,\ f(x,-y) = -f(x,y)$.

◇ **Réponse** : 0.

b) D est symétrique par rapport à $(y'y)$ et : $\forall (x,y) \in D,\ f(-x,y) = -f(x,y)$.

◇ **Réponse** : 0.

c)



$I = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$ (cf. schéma) et

$\iint_{D_2} f = \iint_{D_1} f$ par le changement de variables $(x,y) \longmapsto (y,x)$.

Donc $I = 2\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{x}^{1} (y-x)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - 2x + x^2)\, \mathrm{d}x.$

◇ **Réponse** : $\dfrac{8}{3}$.

Dans les exemples *d)* à *q)*, passer en coordonnées polaires, ou elliptiques ($x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$).

d) Avec $\Delta = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \times [0; 1]$: $I = \displaystyle\iint_{\Delta} \rho^3 \cos\theta \sin\theta\ \rho\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta\ \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^4\ \mathrm{d}\rho \right)$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{20}$.

e) $\Delta = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \times [1; 2]$, $I = \displaystyle\iint_{\Delta} \cos\theta \sin\theta\ \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\ \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_1^2 \rho\ \mathrm{d}\rho \right)$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{3}{4}$.

f) $\Delta = [0; 2\pi] \times [0; 1]$,

$I = \displaystyle\iint_{\Delta} ((a\rho\cos\theta)^2 + (b\rho\sin\theta)^2) ab\rho\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = ab \left(\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^3\ \mathrm{d}\rho \right)$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

g) $I = ab \left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3\cos^3\theta + b^3\sin^3\theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^4\ \mathrm{d}\rho \right)$; linéariser.

◇ **Réponse** : $\dfrac{2}{15}ab(a^3 + b^3)$.

h) $\Delta = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos\theta\}$,

$$I = \iint_{\Delta} \rho^3 \cos^2\theta \sin\theta\ \rho\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\ \mathrm{d}\rho \right) \cos^2\theta \sin\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{32}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \sin\theta\ \mathrm{d}\theta.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{4}{5}$.

i) $\Delta = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\cos\theta} \leqslant \rho \leqslant 2\cos\theta\}$,

$$I = \iint_\Delta \frac{1}{\rho^3}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{1}{\rho^3}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2\theta - \frac{1}{4\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{1}{4}[\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

◇ **Réponse** : $\frac{\pi}{8}$.

j) $\Delta = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}, 2\sin\theta \leqslant \rho \leqslant 1\}$,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{2\sin\theta}^{1} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - 8\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta \text{; linéariser.}$$

◇ **Réponse** : $\frac{\pi}{18} - \frac{16}{9} + \sqrt{3}$.

k) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\,\mathrm{d}\theta\right)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$; linéariser.

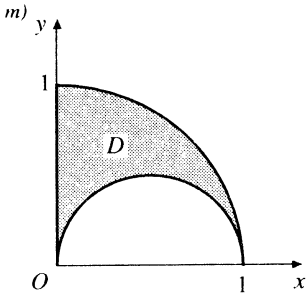
◇ **Réponse** : π.

l) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^3 - (R^2\sin^2\theta)^{3/2})\mathrm{d}\theta$

$= \frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta = \frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta.$

◇ **Réponse** : $\frac{3\pi - 4}{9}R^3$.

m)



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^{1} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)(\cos\theta + \sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3\theta)(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

◇ **Réponse** : $\frac{7}{12} - \frac{\pi}{16}$.

n) Par les changements de variables $(x,y) \longmapsto (-x,y)$ et $(x,y) \longmapsto (x,-y)$, on a :

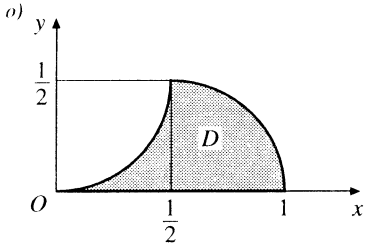
$I = 4\iint_{D_1} f$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Puis : $I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^{1} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1+\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{2+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t.$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}-1)$.

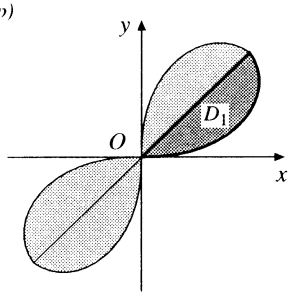
o)



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4\theta - \sin^4\theta) \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \mathrm{d}\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{8} \right]^{\frac{\pi}{4}}.$$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{8}$.

p)



$$I = 4 \iint_{D_1} f \quad \text{(cf. schéma)}$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} \sqrt{\rho^2 \cos\theta \sin\theta} \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{\sin 2\theta})^3 \sqrt{\cos\theta \sin\theta} \, \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

◇ **Réponse** : $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

q) $I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos\theta}} \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \right) \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, \mathrm{d}\theta.$

◇ **Réponse** : $\frac{3\pi}{16}$.

r) Utiliser le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} \frac{1}{2} u^2 \mathrm{e}^{uv} \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^1 (u\mathrm{e}^{u^2} - u\mathrm{e}^{-u^2}) \mathrm{d}u = \frac{1}{4} \left[\mathrm{e}^{u^2} + \mathrm{e}^{-u^2} \right]_0^1.$$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{4}(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - 2) \quad (= \mathrm{sh}^2 \frac{1}{2})$.

s) Utiliser le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$:

$$I = \int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{u^2-4}}^{0} \frac{1}{2} uv \cos\frac{u^2 - v^2}{4} \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = -\int_2^4 u \left[\sin\frac{u^2 - v^2}{4} \right]_{-\sqrt{u^2-4}}^{0} \mathrm{d}u$$
$$= -\int_2^4 u \left(\sin\frac{u^2}{4} - \sin 1 \right) \mathrm{d}u.$$

◇ **Réponse** : $2\cos 4 - 2\cos 1 + 6\sin 1$.

t) Utiliser le changement de variables $X = x^{3/2}$, $Y = y^{3/2}$
($\Delta = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 ; X \geqslant 0, Y \geqslant 0, X^2 + Y^2 \leqslant 1\}$),
puis le passage en coordonnées polaires ($\Delta_1 = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 1\}$:

$$I = \iint_\Delta X^{4/3} Y^{4/3} \sqrt[3]{1 - (X^2 + Y^2)} \, \frac{4}{9} X^{-\frac{1}{3}} Y^{-\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}X\mathrm{d}Y = \frac{4}{9} \iint_{\Delta_1} \rho^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt[3]{1 - \rho^2} \, \rho \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$$
$$= \frac{4}{9} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 \sqrt[3]{1 - \rho^2} \rho^3 \mathrm{d}\rho \right).$$

Pour calculer la dernière intégrale, poser $u = \sqrt[3]{1 - \rho^2}$.

◇ **Réponse** : $\frac{1}{28}$.

u) Utiliser le changement de variables $x = \rho\cos^3\theta$, $y = \rho\sin^3\theta$
$(\Delta = \{(\theta,\rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 1\})$:

$$I = \iint_\Delta \rho^2\cos^3\theta\,\sin^3\theta(3\rho\sin^2\theta\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\,\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho\right)$$
$$= \frac{3}{128}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{256}\int_{-1}^1 (1-u^2)^2\mathrm{d}u.$$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{80}$.

v) $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant u \leqslant (2p)^{1/3}, 0 \leqslant v \leqslant (2p)^{1/3}\}$,

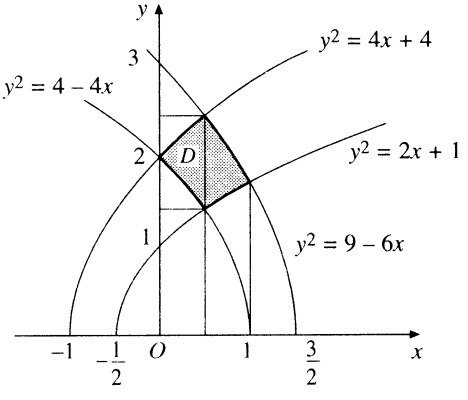
$$I = \iint_\Delta \left(\exp\frac{u^6v^3 + u^3v^6}{u^3v^3}\right)(3u^2v^2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 3\iint_\Delta \mathrm{e}^{u^3}\mathrm{e}^{v^3}u^2v^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\left(\int_0^{(2p)^{1/3}} \mathrm{e}^{u^3}3u^2\,\mathrm{d}u\right)^2.$$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{2p} - 1)^2$.

w) $\Delta = [a; b] \times [0; 1]$, $I = \iint_\Delta v\sqrt{4u^2+v^2}\,\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}u\right)\left(\int_0^1 v\,\mathrm{d}v\right)$.

◇ **Réponse** : $\frac{b-a}{4}$.

13.2.5



On obtient :

$$\begin{cases} y^2 \leqslant 4x+4 \\ y^2 \geqslant 2x+1 \\ y^2 \leqslant 9-6x \\ y^2 \geqslant 4-4x \end{cases} \iff \begin{cases} v^2 \leqslant 1 \\ v^2 \geqslant \frac{1}{2} \\ u^2 \leqslant \frac{3}{2} \\ u^2 \geqslant 1 \end{cases},$$

d'où, en notant $\Delta = \left[1; \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$:

$$I = \iint_\Delta \frac{2uv}{\sqrt{(u^2-v^2)^2 + (2uv)^2}}\,4(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8\iint_\Delta uv\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8\left(\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} u\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 v\,\mathrm{d}v\right).$$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{2}$.

13.2.6 On a : $ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant A \Longleftrightarrow \left(\dfrac{ax+by}{\sqrt{aA}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{aA}}\,y\right)^2 \leqslant 1.$

Effectuer le changement de variables $X = \dfrac{ax+by}{\sqrt{aA}}$, $Y = \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{aA}}\,y$, puis passer en polaires.

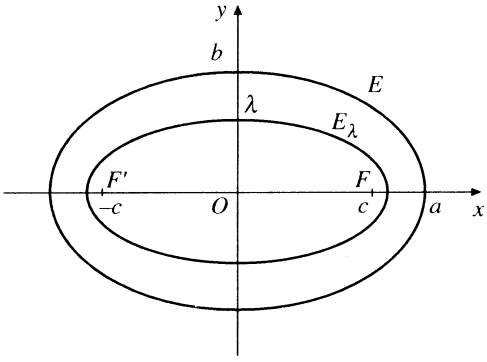
◇ **Réponse** : $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\,(1 - \mathrm{e}^{-A})$.

13.2.7 Par symétrie de D (par rapport à la 1re bissectrice) et parité de f, on a, en notant $D_1 = \{(x,y) \in [0;a]^2, x \geqslant y\}$: $-\displaystyle\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Effectuer ensuite le changement de variables $X = x$, $Y = x - y$ (par lequel D_1 est invariant) :

$$\iint_{D_1} f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(Y)\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Y = \int_0^a \left(\int_Y^a \mathrm{d}X\right) f(Y)\,\mathrm{d}Y = \int_0^a (a-Y)f(Y)\,\mathrm{d}Y.$$

13.2.8



Pour chaque λ de $]0;b]$, une représentation paramétrique de l'ellipse E_λ de foyers F, F' et de demi petit axe λ est : $\begin{cases} x = \sqrt{c^2+\lambda^2}\cos\varphi \\ y = \lambda\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0;2\pi]$.

Pour tout M de E_λ, on a $MF + MF' = 2\sqrt{c^2+\lambda^2}$. L'application $(\lambda,\varphi) \longmapsto (x,y)$ définie plus haut permet un changement de variables; le jacobien est :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{\sqrt{c^2+\lambda^2}}\cos\varphi & -\sqrt{c^2+\lambda^2}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{c^2+\lambda^2}}\cos^2\varphi + \sqrt{c^2+\lambda^2}\sin^2\varphi.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[0;b]\times[0;2\pi]} 2\sqrt{c^2+\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{c^2+\lambda^2}}\cos^2\varphi + \sqrt{c^2+\lambda^2}\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda \\ &= 2\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^b \lambda^2\,\mathrm{d}\lambda\right) + 2\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^b (c^2+\lambda^2)\mathrm{d}\lambda\right). \end{aligned}$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{2\pi}{3}\,b(2b^2+3c^2)$.

13.2.9 En notant $P = uv$ et d'après la formule de Green-Riemann :

$$-\int_{(C)} P\,\mathrm{d}x = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y}\,v + u\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

13.3.1 *a)* $I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y\, e^{xyz}\, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x(e^{xy} - 1) dy \right) dx$

$= \int_0^1 (e^x - x - 1) dx.$

◇ **Réponse** : $e - \frac{5}{2}$.

b) $I = \int_0^1 z \left(\iint_{D(z)} dx dy \right) dz$, où $D(z) = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1 - \sqrt{z}\}$.

On a : $\iint_{D(z)} dx dy = \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} \left(\int_0^{(1-\sqrt{z}-\sqrt{x})^2} dy \right) dx = \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1 - \sqrt{z} - \sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{6}(1-\sqrt{z})^4.$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{840}$.

Dans les exemples *c)* à *f)*, passer en coordonnées cylindriques.

c) ◇ **Réponse** : $\frac{\pi}{3}$

d) ◇ **Réponse** : $\frac{\pi}{24}$.

e) $I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} \right) dz = 2\pi \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz$

$= 2\pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - 2az + a^2} - a + z) dz.$

Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}$.

◇ **Réponse** : $\frac{4\pi R^3}{3a}$.

f) $I = \left(\int_0^1 dz \right) \left(\iint_{D_1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$, où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 - y \leqslant 0\}$.

Terminer comme pour l'exercice 13.2.4 *n)* p. 379.

◇ **Réponse** : $\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \pi$.

Dans les exemples *g)* à *n)*, passer en coordonnées sphériques, ou «ellipsoïdales».

g) $I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi \right).$

◇ **Réponse** : $\frac{8\pi}{15}$.

h) $I = J + 2K$, où $J = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dx dy dz$, $K = \iiint_D (xy + xz + yz) dx dy dz$.

• Pour calculer J, passer en coordonnées sphériques :

$$J = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^4\, d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \right) = \frac{4}{5} \pi R^5.$$

• Pour K, les changements de variables $(x,y,z) \longmapsto (-x,y,z)$, $(x,y,z) \longmapsto (x,-y,z)$, $(x,y,z) \longmapsto (x,y,-z)$ fournissent :

$$K = \iiint_D (-xy - xz + yz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$K = \iiint_D (-xy + xz - yz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$K = \iiint_D (xy - xz - yz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

d'où, en additionnant : $4K = 0$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{4}{5}\pi R^5$.

i) En coordonnées ellipsoïdales $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = c\rho\sin\varphi \end{cases}$ $\left(\theta \in [0;2\pi],\ \rho \in [1;2];\ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$, la valeur absolue du jacobien vaut $abc\rho^2\cos\varphi$, d'où :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{[0;2\pi]\times[1;2]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} \rho^2(a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)abc\rho^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\ &= abc\left(a^2\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) + b^2\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\right. \\ &\quad \left. +2\pi c^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_1^2\rho^4\,\mathrm{d}\rho\right). \end{aligned}$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{124}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$.

j) ◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{48}(abc)^2$.

k) Cf. *h)*.

◇ **Réponse** : $\dfrac{2\pi}{15}$.

l) ◇ **Réponse** : $\dfrac{16\pi(11\sqrt{2}-4)}{105}$.

m) ◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{3}\,2\pi(10-3\pi)$.

n) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant z^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \rho^2\cos^2\varphi \leqslant \rho^2\sin^2\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

d'où $I = \left(\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\displaystyle\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{\pi}{8}$.

o) Puisque $x = u - uv$, $y = uv - uvw$, $z = uvw$, le jacobien vaut : $\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v - vw & u - uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v$.

Le domaine D est remplacé par $\Delta = [0;\ 1]^3$; d'où :

$$I = \iiint_\Delta (u(1-v))(uv(1-w))(uvw)u^2 v \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \left(\int_0^1 u^5 \,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^1 v^3(1-v)\,\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^1 w(1-w)\,\mathrm{d}w\right).$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{720}$.

p) $I = \displaystyle\iiint_\Delta \frac{u^2 v}{(1+uv)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{u^2 v}{(1+uv)^2}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{u}{1+uv} - \frac{u}{(1+uv)^2}\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$

$= \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+u) + \frac{1}{1+u} - 1\right)\mathrm{d}u.$

◇ **Réponse** : $3\ln 2 - 2$.

q) Utiliser le changement de variables affine $X = \dfrac{ax}{d}$, $Y = \dfrac{by}{d}$, $Z = \dfrac{cz}{d}$, puis le changement de variables de *o)*.

◇ **Réponse** : $\dfrac{4\pi}{945}\left(\dfrac{d^3}{abc}\right)^{3/2}$.

13.3.2 Notons $\varphi_1(x,y) = \displaystyle\int_a^b |f_2(x,z) f_3(y,z)|\,\mathrm{d}z$; en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$I^2 = \left(\iint_D \varphi_1(x,y) f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 \leqslant K_1 J_1,$$

où $K_1 = \displaystyle\iint_D (\varphi_1(x,y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Puis, encore par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\varphi_1(x,y))^2 \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b (f_2(x,z))^2\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_a^b (f_3(y,z))^2\mathrm{d}z\right)$,

d'où $K_1 \leqslant \displaystyle\iint_D \left(\int_a^b (f_2(x,z))^2\mathrm{d}z\right)\left(\int_a^b (f_3(y,z))^2\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \left(\int_a^b \left(\int_a^b (f_3(x,z))^2\,dz\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \left(\int_a^b (f_3(y,z))^2\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right) = J_2 J_3.$

13.4.1 *a)* $\mu = \displaystyle\int_C \sigma\,\mathrm{d}s = \int_0^a \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x.$

◇ **Réponse** : $\dfrac{a}{3}$.

b) $\mu = \displaystyle\int_C \sigma\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi \frac{R\sin\theta}{R}\,R\,\mathrm{d}\theta.$

◇ **Réponse** : $2R$.

13.4.2 *a)* $\mu = \iint_D \sigma \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0;2\pi]\times[0;R]} \frac{\rho^2}{R^2} \rho \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \frac{1}{R^2}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \rho^3 \mathrm{d}\rho\right).$

◇ **Réponse** : $\frac{\pi R^2}{2}$.

b) $\mu = \iint_D \sigma \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0;2\pi]\times[0;R]} \frac{\rho \sin\theta + R}{R} \rho \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$

$= \frac{1}{R}\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \rho^2 \, \mathrm{d}\rho\right) + \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \rho \, \mathrm{d}\rho\right).$

◇ **Réponse** : πR^2.

13.4.3 *a)* Passer en sphériques ($\Delta = [0; 2\pi] \times [0; R] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) :

$$\mu = \iiint_S \left(D + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}(d-D)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Delta \left(D + \frac{\rho}{R}(d-D)\right) \rho^2 \cos\varphi \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^R \left(D + \frac{\rho}{R}(d-D)\right)\rho^2 \, \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi\right).$$

◇ **Réponse** : $\frac{1}{3}\pi R^3(3d + D)$.

b) Passer en cylindriques ($\Delta = [0; 2\pi] \times [0; R] \times [0, h]$) :

$$\mu = \iiint_\Delta \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \rho \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = 2\pi h \int_0^R \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \rho \, \mathrm{d}\rho.$$

◇ **Réponse** : $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\pi R^2 h$.

c) ◇ **Réponse** : $\frac{4\pi}{5} \lambda abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

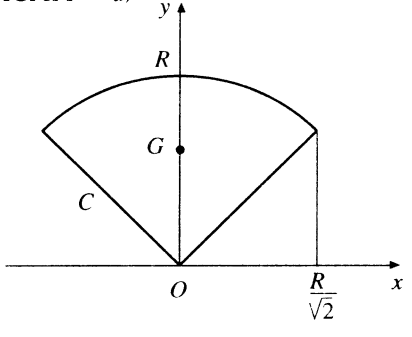
d) Passer en cylindriques ($\Delta = \{(\theta, \rho, z) \in \mathbb{R}^3 ; -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 2a \cos\theta, -k\rho \leqslant z \leqslant k\rho\}$) :

$$\mu = \sigma \iiint_\Delta \rho \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = \sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \left(\int_{-k\rho}^{k\rho} \rho \, \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} 2k\rho^2 \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\theta = \frac{16k\sigma a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

◇ **Réponse** : $\frac{64}{9} k\sigma a^3$.

13.4.4 *a)*



• $\mu = \left(R + R + \frac{\pi R}{2}\right)\sigma = \frac{4+\pi}{2} R\sigma$

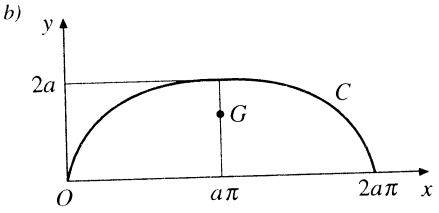
• $x_G = 0$ et $y_G = \frac{\sigma}{\mu} \int y \, \mathrm{d}s$

$= \frac{\sigma}{\mu}\left(\int_{OA} y \, \mathrm{d}s + \int_{\widehat{AB}} y \, \mathrm{d}s + \int_{BO} y \, \mathrm{d}s\right)$

$= \frac{\sigma}{\mu}\left(2\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} y\sqrt{2} \, \mathrm{d}y + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} R \sin t \, R\mathrm{d}t\right).$

◇ **Réponse** : $x_G = 0$, $y_G = \frac{3R\sqrt{2}}{4+\pi}$.

b)



- Par symétrie, $x_G = a\pi$
- $\mu = \int_C \sigma \, \mathrm{d}s$ et $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = 2a^2(1-\cos t)(\mathrm{d}t)^2$, d'où $\mathrm{d}s = 2a \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t$,

$$\mu = \sigma \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = 8a\sigma.$$

- $\frac{\mu}{\sigma} y_G = \int_C y \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \, 2a \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t.$

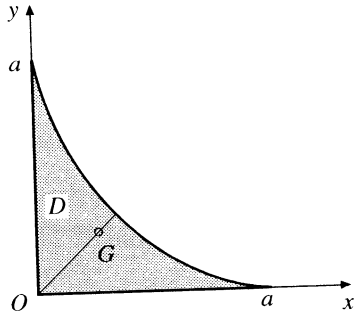
◇ **Réponse** : $x_G = \pi a$, $y_G = \frac{4}{3} a$.

c) • $\mu = \int_C \sigma \, \mathrm{d}s = \int_0^a \sigma \sqrt{r^2+h^2} \, \mathrm{d}t = \sigma a \sqrt{r^2+h^2}.$

- $\frac{\mu}{\sigma} x_G = \int_C x \, \mathrm{d}s = \int_0^a r \cos t \sqrt{r^2+h^2} \, \mathrm{d}t = r\sqrt{r^2+h^2} \sin a.$
- $\frac{\mu}{\sigma} y_G = \int_C y \, \mathrm{d}s = \int_0^a r \sin t \sqrt{r^2+h^2} \, \mathrm{d}t = r\sqrt{r^2+h^2}(1-\cos a).$
- $\frac{\mu}{\sigma} z_G = \int_C z \, \mathrm{d}s = \int_0^a ht\sqrt{r^2+h^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} h\sqrt{r^2+h^2} \, a^2.$

◇ **Réponse** : $x_G = r \frac{\sin a}{a}$, $y_G = r \frac{1-\cos a}{a}$, $z_G = \frac{ha}{2}$.

13.4.5



a) D est limité par $x'x$, $y'y$ et le quart d'astroïde C de représentation paramétrique :

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Utiliser le théorème de Green-Riemann :

- $\mu = \iint_D \sigma \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \int_C x \, \mathrm{d}y$

$$= \sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^3 t \; 3a \sin^2 t \cos t \, \mathrm{d}t = 3a^2 \sigma A,$$

où $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t \, \mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ donne $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u \cos^2 u \, \mathrm{d}u$, d'où :

$$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{16}, \text{ et donc } \mu = \frac{3a^2\sigma\pi}{32}.$$

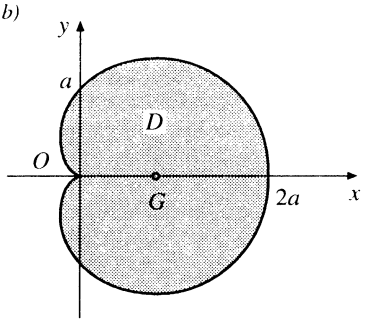
- $x_G = y_G$ par symétrie.

• $\dfrac{\mu}{\sigma}\, x_G = \displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^6 t\; 3a\sin^2 t\,\cos t\,\mathrm{d}t$

$= \dfrac{3a^3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t\,\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3a^3}{2}\int_0^1 (1-u^2)^3 u^2\,\mathrm{d}u.$

◇ **Réponse** : $x_G = y_G = \dfrac{256}{315\pi}\,a \simeq 0{,}259a.$

b)



Par symétrie et en passant en coordonnées polaires :

• $\mu = \sigma\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\sigma\int_0^{\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$

$= a^2\sigma\displaystyle\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi a^2\sigma.$

• $y_G = 0$

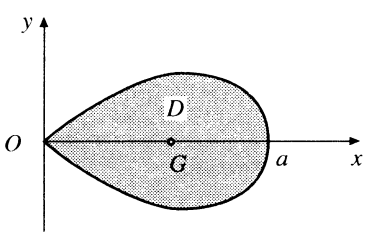
• $\dfrac{\mu}{\sigma}\, x_G = \displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$= \dfrac{a^3}{3}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$= \dfrac{2a^3}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}(3\cos^2\theta + \cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$ et linéariser.

◇ **Réponse** : $x_G = \dfrac{5}{6}\,a,\ y_G = 0.$

c)



Passer en coordonnées polaires.

• $\mu = 2\sigma\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{a(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta})} \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$

$= a^2\sigma\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2\mathrm{d}\theta$

$= a^2\sigma\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(2(1+\cos 2\theta) - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$

$= \left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)a^2\sigma.$

• $y_G = 0.$

• $\dfrac{\mu}{\sigma}\, x_G = 2\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{a\left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\,a^3\int_0^{\pi/4}\left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$= \dfrac{2a^3}{3}\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(8\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 6 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$ et linéariser.

◇ **Réponse** : $x_G = \dfrac{3\pi - 8}{3(4-\pi)}\,a \simeq 0{,}553a,\ y_G = 0.$

13.4.6 *a)* Passer en sphériques.

• $\mu = \displaystyle\iiint_S \sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{\pi}{6}\,\sigma.$

• $x_G = y_G = z_G$ par symétrie.

• $\dfrac{\mu}{\sigma}\, x_G = \displaystyle\iiint_S x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{\pi}{16}.$

◇ **Réponse** : $x_G = y_G = z_G = \dfrac{3}{8}.$

b) Passer en cylindriques.

- $\mu = \sigma \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^h \left(\int_0^{\sqrt{2pz}} \rho \, \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}z\right) = 2\pi\sigma \int_0^h pz \, \mathrm{d}z = \pi\sigma p h^2.$

- $x_G = y_G = 0$ par symétrie.

- $\dfrac{\mu}{\sigma} z_G = \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^h \left(\int_0^{\sqrt{2pz}} \rho \, \mathrm{d}\rho\right) z \, \mathrm{d}z\right) = 2\pi \int_0^h pz^2 \, \mathrm{d}z = \dfrac{2}{3} \pi p h^3.$

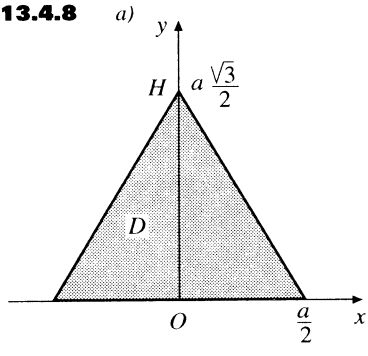
◇ **Réponse** : $x_G = y_G = 0$, $z_G = \dfrac{2}{3} h$.

13.4.7 On a : $(\mathrm{d}s)^2 = \left(a^2(2 - 2\cos t) + 4b^2 \sin^2 \dfrac{t}{2}\right)(\mathrm{d}t)^2 = 4c^2 \sin^2 \dfrac{t}{2} \, (\mathrm{d}t)^2$ en notant $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

D'où $I_{xOy} = \int_C \sigma z^2 \, \mathrm{d}s = \sigma \int_0^{2\pi} 16b^2 \cos^2 \dfrac{t}{2} \, 2c \sin \dfrac{t}{2} \, \mathrm{d}t = 32b^2 c\sigma \int_0^{2\pi} \cos^2 \dfrac{t}{2} \sin \dfrac{t}{2} \, \mathrm{d}t.$

◇ **Réponse** : $\dfrac{128}{3} b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \, \sigma$.

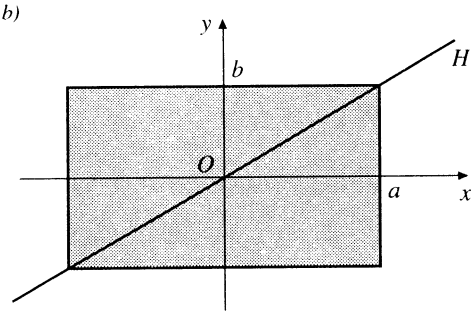
13.4.8 *a)*



$$
\begin{aligned}
I_H &= \sigma \iint_D \left(x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\sigma \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - x\right)} \left(x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\sigma \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - x\right)^3 - \frac{3a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \left(x^2 + \frac{3a^2}{4}\right)\sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - x\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\sigma \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\sqrt{3}u^3 - \frac{3a\sqrt{3}}{2}u^2 + \left(\left(\frac{a}{2} - u\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right)\sqrt{3}u\right) \mathrm{d}u \\
&= 2\sigma \int_0^{\frac{a}{2}} \left(2\sqrt{3}u^3 - \frac{5a\sqrt{3}}{2}u^2 + a^2\sqrt{3}u\right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{5\sqrt{3}}{48} a^4 \sigma$.

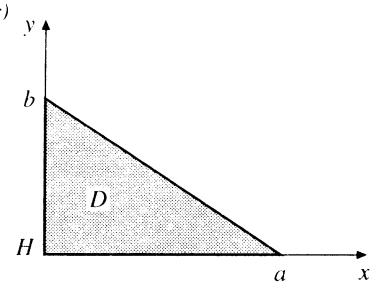
b)



$$
\begin{aligned}
I_H &= \iint_D \sigma \frac{(bx - ay)^2}{a^2 + b^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma}{a^2 + b^2} \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b}^{b} (bx - ay)^2 \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{8}{3} \dfrac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \sigma$.

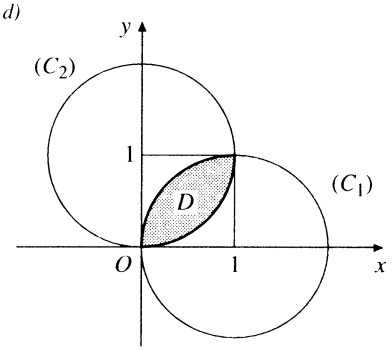
c)



$$I_O = \sigma \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{1}{12}\, ab(a^2 + b^2)\sigma$.

d)



Passer en polaires :

$$\Delta_1 = \left\{ (\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2 \sin\theta \right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{ (\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2 \cos\theta \right\},$$

$$\begin{aligned}
I_{x'x} &= \iint_D \sigma y^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \rho^3 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \\
&= \sigma \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\sin\theta} \rho^3\, \mathrm{d}\rho \right) \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta + \sigma \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\, \mathrm{d}\rho \right) \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta \\
&= 4\sigma \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6\theta\, \mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta \right) = 4\sigma \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6\theta\, \mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\varphi \cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi \right) \\
&= 4\sigma \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta\, \mathrm{d}\theta \text{ et linéariser.}
\end{aligned}$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{3\pi - 8}{8}\, \sigma$.

13.4.9 *a)* Passer en «semi-cylindriques» : $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta,\ z = z \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$; on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{z'z} &= \iiint_S \sigma(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \iiint_\Delta \rho^2 (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) ab\rho\, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \\
&= \sigma abh \left(\int_0^1 \rho^3\, \mathrm{d}\rho \right) \left(a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, \mathrm{d}\theta + b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta \right).
\end{aligned}$$

◇ **Réponse** : $\dfrac{\pi}{4}\, hab(a^2 + b^2)\sigma$.

b) Appliquer le théorème de Huygens : $I_H = I_{H_G} + \mu d^2$; ici $\mu = \sigma\pi R^2 h$, $d = R$, $G \in (z'z)$. Par symétrie matérielle : $I_{H_G} = I_{yOz} = \sigma \iiint_S x^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sigma \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^R \rho^3\, \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^h \mathrm{d}z \right)$.

◇ **Réponse** : $\dfrac{5\pi}{4}\, R^4 h\sigma$.

Index des notations des tomes 1 et 2

TOME 1

$-a, a^{-1}, \leqslant, <, \geqslant$, 4

$\mathbb{R}$, 4

$\mathrm{pge}(A), \mathrm{ppe}(A), \mathrm{Max}(A), \mathrm{Min}(A)$, 5

$\mathrm{Max}(a_1, \ldots, a_n), \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}}\, a_i$, 5

$\mathrm{Min}(a_1, \ldots, a_n), \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Min}}\, a_i$, 5

$\mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(A), \mathrm{Inf}_{\mathbb{R}}(A), \mathrm{Sup}(A), \mathrm{Inf}(A)$, 5

$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$, 6

$[a; b], [a; b[,]a; b],]a; b[$, 6

$]-\infty; a],]-\infty; a[, [a; +\infty[,]a; +\infty[$, 6

$]-\infty; +\infty[$, 6

$\overline{I}, \overset{\circ}{I}$, 6

$|x|$, 7

$\mathrm{d}, \mathrm{d}(x, y)$, 8

$\sqrt[n]{a}, a^{\frac{1}{n}}, \sqrt{a}$, 14

$\mathrm{E}(x), \mathrm{Ent}(x), [x], \lfloor x \rfloor$, 17

$\overline{\mathbb{R}}, -\infty, +\infty$, 20

$+, \cdot, \mathbb{C}$, 23

$\mathrm{i}, \mathbb{C}^*$, 24

$\overline{z}$, 25

$\mathrm{Ré}(z), \mathrm{Im}(z)$, 26

$|z|$, 27

$\mathrm{Arg}(z)$, 29

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathbb{U}$, 34

ω_k, 37

$\mathbb{U}_n, \mathrm{j}$, 38

$u_n, (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 43

$\lim\limits_{n\infty} u_n, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n, u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l, u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, 44

$\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty, u_n \underset{n\infty}{\to} +\infty$, 45

$\lim\limits_{n\infty} u_n = -\infty, u_n \underset{n\infty}{\to} -\infty$, 45

H_n, 58

e, 62

$\mathbb{D}$, 63

$(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, 65

ϕ_n, 70

$\liminf\limits_{n\infty} u_n, \limsup\limits_{n\infty} u_n$, 79

$\mathrm{VA}((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$, 80

$\mathbb{K}^X, f + g, fg, \lambda f$, 83

$\dfrac{1}{g}, \dfrac{f}{g}$, 84

$|f|, \mathrm{Ré}\, f, \mathrm{Im}\, f$, 85

$f \leqslant g, \mathrm{Sup}(f, g), \mathrm{Inf}(f, g)$, 86

$f < g, f^+, f^-$, 87

$P_X, I_X, \check{f}$, 88

$E(a, b)$, 91

$\underset{x \in X}{\mathrm{Sup}}\, f(x), \underset{x \in X}{\mathrm{Inf}}\, f(x), \underset{X}{\mathrm{Sup}}\, f, \underset{X}{\mathrm{Inf}}\, f$, 94

$\mathrm{B}(X; \mathbb{R}), \|f\|_\infty$, 96

$\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{a} f, f(x) \underset{x \to a}{\to} l, f \underset{a}{\to} l$, 98

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x), f(x) \underset{x \to a^-}{\to} l, f(a^-)$, 100

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(x) \underset{x \to a^+}{\to} l, f(a^+)$, 100

$C(I; \mathbb{K})$, 110

$\widetilde{f}, \mathcal{P}, B_1$, 118

$f'(a), (D_1 f)(a), \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, 125

$f'_d(a), f'_g(a)$, 126

$f', D_1 f, \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, 132

$f^{(n)}(a)$, 135

$\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a), f^{(n)}, \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, f'', f'''$, 136

$C^n, C^\infty, C^n(I, \mathbb{K})$, 138

$\mathrm{d}_a f, \mathrm{d}x, \mathrm{d}f$, 141

τ_a, 156

$A(a_1, \ldots, a_n), G(a_1, \ldots, a_n)$, 160

$\mathcal{S}, p(s), \mathcal{F}, \prec, \vee, \wedge$, 163

$\displaystyle\int_a^b e, \int_a^b e(x)\mathrm{d}x$, 165

$\mathcal{CM}$, 168

$\int_a^b f, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 171, 183
$\int_a^b f$(pour $a \geqslant b$), 178
$\int f, \int f(x)\mathrm{d}x, [\phi(x)]_a^b$, 188

TOME 2

ln, 3
exp,e^x, 5
$\log_a$, 6
$\exp_a, a^x$, 8
p_α, x^α, 10
sh,ch, 13
th,coth, 14
Argsh, 17
Argch, 18
Argth, 19
Argcoth, 20
sin,cos,tan,cotan, 22
Arcsin, 27
Arccos, 28
Arctan, 29
$\exp(z), \mathrm{e}^z$, 33
$\mathbb{A}$, 37

$f \underset{a}{\ll} \varphi, f = \underset{a}{o}(\varphi)$, 39
$f(x) \underset{x\to a}{\ll} \varphi(x), f(x) \ll \varphi(x), f \ll \varphi$, 40
$f(x) = \underset{x\to a}{o}(\varphi(x)), f(x) = o(\varphi(x))$, 40
$f = o(\varphi)$, 40
$f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi, f = \underset{a}{O}(\varphi), f(x) \underset{x\to a}{\preccurlyeq} \varphi(x)$, 40
$f \preccurlyeq \varphi, f(x) = \underset{x\to a}{O}(\varphi(x))$, 40
$f(x) = O(\varphi(x)), f = O(\varphi)$, 40
$f \underset{a}{\sim} \varphi, f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x), f \sim \varphi, f(x) \sim \varphi(x)$, 44
$DL_n(0), DL_n(a)$, 52
$DL_n(+\infty), DL_n(-\infty)$, 53

$\int f(x)\mathrm{d}x$, 79

$\int_I f$, 107, 121, 122
$\int_{[a;b[} f, \int_a^b f, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 113, 126
$\int_{]a;b]} f, \int_a^b f, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 114, 127
$\int_{]a;b[} f, \int_a^b f, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 130

$N, ||.||$, 169
$||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$, 170
$||.||_p, B(a;r), B'(a;r), S(a;r)$, 170
$\sim$, 171
$\lim\limits_{n\infty} u_n, u_n \underset{n\infty}{\to} l$, 174
$\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_a f, f(x) \underset{x\to a}{\to} l, f \underset{a}{\to} l$, 177
$f(\alpha,\cdot), f(\cdot,\beta)$, 181
$D_v f(a), D_1 f(a), D_2 f(a)$, 184
$\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, 184
$f'_x(a), f'_y(a)$, 184
$D_1 f, D_2 f$, 185
$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, 187
$\mathrm{d}_a f, \mathrm{d}f(a)$, 188
$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$, 188
$D_{ij} f(a), \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), f''_{x_i x_j}(a)$, 192
$D_{i_1 \dots i_k} f(a), \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a), f^k_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(a)$, 192
$D_{i_1 \dots i_k} f, \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$, 192
C^k, C^∞, 193
$\triangle f$, $\mathrm{div}(\vec{F}), \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F})$, 218

$\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, 221
$\int_{(C)} \omega$, 224
$(C_1) \cup (C_2), (C_1) + (C_2)$, 226
$-(C)$, 227
$\mathcal{A}(P)$, 237
$\mathcal{A}(B)$, 238
$\mathcal{A}(D)$, 239
$\mathcal{S}, \iint_P e, \iint_P e(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 242
$\iint_P f, \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 243
$\iint_D f, \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 243
$C^1, J_\phi(x,y)$, 249
$\iiint_D f, \iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 254
I_H, 266

Index alphabétique des tomes 1 et 2

(Les chiffres en caractères gras indiquent le n° du tome)

A

abélienne (intégrale —), **II**-105
achevée (droite numérique —), **I**-20
accroissement (taux d' —), **I**-125
accroissements finis (théorème des —), **I**-143
accroissements finis généralisés (théorème des —), **I**-146
adaptée (subdivision —), **I**-164; **II**-242
adhérence (— d'un intervalle), **I**-6
adhérents (points —), **II**-174
adjacentes (suites —), **I**-62
adjacentes (parties de $\mathbb{R}$ —), **I**-64
affines (suites récurrentes — du 1er ordre à coefficients constants), **I**-68
affixe (— d'un point du plan complexe), **I**-30
affixe (— d'un vecteur du plan complexe), **I**-30
aire (— d'un pavé), **II**-237
aire (— d'une partie pavable de $\mathbb{R}^2$), **II**-238
aire (— d'une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$), **II**-239
algébrique (nombre —), **II**-37
anguleux (point —), **I**-127
antisymétrique, **I**-4
approximation (— décimale), **I**-63
arc orienté, **II**-221
Arc cosinus, **II**-28
Arc sinus, **II**-27
Arc tangente, **II**-29
ARCHIMÈDE (propriété d' —), **I**-17
archimédien (corps —), **I**-17
argument, **I**-29
Argument cosinus hyperbolique, **II**-18
Argument cotangente hyperbolique, **II**-20
Argument sinus hyperbolique, **II**-17
Argument tangente hyperbolique, **II**-19
arithmético - géométrique (moyenne —), **I**-61
arithmétique (moyenne —), **I**-21
arithmétique (suite —), **I**-54
associative, **I**-4
asymptote, **II**-74
attractif (point fixe —), **I**-75
avec (— second membre), **II**-136, 151

B

base (— des logarithmes népériens), **I**-62
BERNOULLI (équation différentielle de —), **II**-162
BERTRAND (exemple de —), **II**-118
BIOCHE (règles de —), **II**-95
birapport, **I**-33
BOLZANO-WEIERSTRASS (théorème de —), **I**-66; **II**-176
borne (— inférieure), **I**-5, 94
borne (— supérieure), **I**-5, 94
borne supérieure (axiome de la — dans $\mathbb{R}$), **I**-12
bornée (application —), **I**-94
bornée (partie —), **I**-5; **II**-172
bornée (suite —), **I**-44
boule (— fermée), **II**-170
boule (— ouverte), **II**-170

C

canonique (forme — d'un trinôme), **I**-15, 35
caractéristique (équation —), **I**-69; **II**-148
CAUCHY-SCHWARZ (inégalité de —), **I**-9, 176; **II**-125, 245
cellules (— d'une subdivision), **II**-242
centre (— de gravité), **II**-262
centre (— d'inertie), **II**-262
CÉSARO (moyenne de —), **I**-78
champ (— scalaire), **II**-218
champ (— vectoriel), **II**-218
changement (— de variable(s)), **I**-190; **II**-81, 249, 256
CHASLES (relation de —), **I**-179; **II**-124, 225
chemin, **II**-182
circulaires (fonctions — directes), **II**-22
circulaires (fonctions — réciproques), **II**-27
circulation, **II**-232
CLAIRAUT (équation différentielle de —), **II**-166
classe (— C^n), **I**-138; **II**-193
classe (— C^∞), **I**-138; **II**-193
classe (— C^n par morceaux), **I**-139
commutative (loi interne —), **I**-4
complexe (nombre —), **I**-24
complexe (suite —), **I**-43
concave (fonction —), **I**-154

conjugué (complexe —), **I**-25
continuité, **I**-109; **II**-177
continuité (— par morceaux), **I**-110
contractante (application —), **I**-123
convergente (suite numérique —), **I**-43
convergente (suite — dans $\mathbb{R}^2$), **II**-174
convexe (fonction —), **I**-154
convexe (partie —), **I**-154; **II**-209
corps (— commutatif), **I**-4
cosinus, **II**-22
cosinus hyperbolique, **II**-13
cotangente, **II**-22
cotangente hyperbolique, **II**-14
courbe (— intégrale), **II**-135
courbe (— orientée), **II**-222
critique (point —), **II**-197
croissante (application —), **I**-92
croissante (application strictement —), **I**-92
croissante (suite —), **I**-59
croissante (suite strictement —), **I**-59
cubable, **II**-254
curviligne (intégrale —), **II**-224

D

DARBOUX (théorème de —), **I**-146
décimal (nombre —), **I**-63
décimale (approximation —), **I**-63
décroissante (suite —), **I**-59
décroissante (fonction —), **I**-92
décroissante (suite strictement —), **I**-59
décroissante (fonction strictement —), **I**-92
dénombrable (ensemble —), **I**-21
dense (partie — dans $\mathbb{R}$), **I**-18
densité, **II**-259
dérivable (application —), **I**-125
dérivable (— à droite), **I**-126
dérivable (— à gauche), **I**-126
dérivable (n fois —), **I**-135
dérivable (indéfiniment —), **I**-135
dérivée, **I**-125, 132
dérivée (— logarithmique), **I**-135
dérivées (— successives), **I**-135
dérivées (— partielles premières), **II**-184
dérivées (— partielles successives), **II**-192
développement (— asymptotique), **II**-70
développement (— limité), **II**-52, 185
développement (— limité faible), **II**-55
développement (— limité fort), **II**-55
difféomorphisme (C^n- —), **I**-149
difféomorphisme (C^1- —), **II**-249
différentiel (élément —), **II**-95
différentielle, **I**-141; **II**-188
différentielle (forme —), **II**-206
discontinue (fonction —), **I**-109
discontinuité (— de 1ère espèce), **I**-109
discontinuité (— de 2nde espèce), **I**-109
discriminant (— d'un trinôme réel), **I**-14
discriminant (— d'un trinôme complexe), **I**-36
distance (— de deux réels), **I**-8
distance (— usuelle sur $\mathbb{R}$), **I**-8
distance, **I**-8
divergence (— d'un champ vectoriel), **II**-218
divergente (suite —), **I**-43; **II**-174
diviseur (— de zéro), **I**-84
dominée (— par), **II**-40
double (zéro —), **I**-36
double (intégrale —), **II**-243
dyadique (nombre —), **I**-18

E

emboîtés (théorème des segments —), **I**-64
encadrement (théorème d'—), **I**-47, 101
épigraphe, **I**-154
équivalence (théorème d'—), **II**-116
équivalentes (fonctions —), **II**-44
équivalentes (normes —), **II**-171
équivalents (arc orientés —), **II**-221
escalier (lemme de l'—), **I**-78
escalier (applications en —), **I**-91; **II**-242
étoilée (partie —), **II**-208
euclidienne (norme — usuelle), **II**-170
EULER (équation différentielle d'—), **II**-155
exacte (forme différentielle —), **II**-206
exponentielle (— d'un imaginaire pur), **I**-34
exponentielle (— complexe), **II**-33
exponentielle, **II**-5
exponentielle (— de base a), **II**-8
exponentielle – polynôme, **II**-147
extractrice, **I**-65
extraite (suite —), **I**-65
extrémité (— d'un arc), **II**-223
extrémités (— d'un arc), **II**-223
extrémités (— d'un intervalle), **I**-6
extremum (— global), **II**-198
extremum (— local), **I**-151; **II**-196
extremum (— local strict), **I**-151; **II**-196

F

facteur (— intégrant), **II**-213
fermé, **II**-173
fermé (intervalle —), **I**-6
fermée (partie —), **II**-173
fermée (forme différentielle —), **II**-207
FIBONACCI (suite de —), **I**-16, 70
fil, **II**-259
fixe (point —), **I**-73
FUBINI (théorème de —), **II**-245, 255

G

générale (solution —), **II**-139
géométrique (moyenne —), **I**-21, 160
géométrique (suite —), **I**-54
gradient, **II**-187, 218

grand (plus — élément), **I**-5
GREEN-RIEMANN (formule de —), **II**-253
GRONWALL (lemme de —), **I**-189
homographique (suite — réelle), **I**-81
HUYGENS (théorème de —), **II**-268
hyperboliques (fonctions — directes), **II**-13
hyperboliques (fonctions — réciproques), **II**-17

H

HARDY (notation de —), **II**-39, 40
harmonique (fonction —), **II**-220
harmonique (suite —), **I**-16, 58
HEINE (théorème de —), **I**-121
HLAWKA (identité de —), **I**-28
HÖLDER (inégalité de —), **I**-161
HÖLDER (normes de —), **II**-170
homéomorphisme, **I**-120
homogène (équation —), **II**-159
homogène (système matériel —), **II**-259

I

image (— d'un nombre complexe), **I**-30
imaginaire (partie —), **I**-26
imaginaire (— pur), **I**-26
impaire (fonction —), **I**-88
implicites (théorème des fonctions —), **II**-200
incomplète (équation — en x), **II**-164
incomplète (équation — en y), **II**-165
indéterminée (forme —), **I**-53
inégalité (— de convexité), **I**-160
inférieure (limite —), **I**-79
intégrable (application —), **II**-107, 111, 120
intégrable (application — sur un pavé), **II**-243
intégrable (application — sur une partie quarrable), **II**-243
intégrale (— d'une application en escalier), **I**-187; **II**-242
intégrale (— d'une application intégrable), **II**-108, 121, 122
intégrale (— double), **II**-243
intégrale (— d'une application continue par morceaux sur un segment), **I**-171
intègre (anneau —), **I**-84
intérieur (— d'un intervalle), **I**-6
intérieur (— d'un pavé), **II**-237
intermédiaires (théorème des valeurs —), **I**-114
inverse, **I**-4
inversion, **I**-42
irrationnel, **I**-19

J

jacobien, **II**-249
jacobienne (matrice —), **II**-249
JENSEN (inégalité de —), **I**-156

K L

lacet, **II**-227
LAGRANGE (équation différentielle de —), **II**-166
LANDAU (notation de —), **II**-39, 40
laplacien, **II**-218
LEBESGUE (lemme de —), **I**-192
LEIBNIZ (formule de —), **I**-136
L'HOSPITAL (règle de —), **I**-146
limite (— d'une fonction), **I**-97; **II**-177
limite (— d'une suite), **I**-43; **II**-174
limite (— à droite), **I**-100
limite (— à gauche), **I**-100
limite (— finie), **I**-97
limite (théorème — de la dérivée), **I**-144
linéaire (suite récurrente —), **I**-68
lipschitzienne (application k- —), **I**-123
lipschitzienne (application —), **I**-123
localement (fonction — constante), **II**-80
logarithme, **II**-3
logarithme (— de base a), **II**-6
logarithmique (comparaison —), **II**-42

M

majorant (— d'une partie de $\mathbb{R}$), **I**-4
majorant (— d'une suite réelle), **I**-44
majorée (application —), **I**-94
majorée (partie —), **I**-5
majorée (suite —), **I**-44
masse, **II**-259
maximum (— global), **II**-198
maximum (— local), **I**-151; **II**-196
maximum (local strict), **I**-151; **II**-196
minimum (— global), **II**-198
minimum (— local), **I**-151; **II**-196
minimum (— local strict), **I**-151; **II**-196
MINKOWSKI (inégalité de —), **I**-14, 161
minorant (— d'une partie de $\mathbb{R}$), **I**-5
minorant (— d'une suite réelle), **I**-44
minorée (application —), **I**-94
minorée (partie —), **I**-5
minorée (suite —), **I**-44
module (— d'un complexe), **I**-27
module (— d'une subdivision), **I**-163
MOIVRE (formule de —), **I**-34
moment (— d'inertie), **II**-266
monotone (application —), **I**-92
monotone (application strictement —), **I**-92
monotone (suite —), **I**-59
monotone (suite strictement —), **I**-59

N

négligeable (fonction —), **II**-39
négligeable (partie de $\mathbb{R}^2$ —), **II**-241
neutre (élément —), **I**-4
normale (forme —), **I**-24
normalisée (équation —), **II**-135

norme, **II**-169
numérique (suite —), **I**-43

O

opposé, **I**-4
ordonné, **I**-4
ordre, **I**-4
origine (— d'un arc), **II**-223
ouvert (— de $\mathbb{R}^2$), **II**-173
ouvert (intervalle —), **I**-6
ouverte (partie — de $\mathbb{R}^2$), **II**-173

P

paire (fonction —), **I**-88
parallélogramme (identité du —), **I**-28
paramétrage, **II**-222
paramétrique (— représentation), **II**-222
partage, **I**-163
particulière (solution —), **II**-139
partie (— entière), **I**-17
partielles (applications —), **II**-181
parties (intégration par —), **I**-191
partie (primitativation par —), **I**-191
pas, **I**-163
passage (— à la limite), **I**-46, 101
pavable, **II**-237
pavé, **II**-237
période, **I**-89
périodique (fonction T- —), **I**-89
périodique (fonction —), **I**-89
petit (plus — élément), **I**-5
plan (— complexe), **I**-30
plaque (— plane), **II**-259
POINCARÉ (théorème de —), **II**-209
pôle (— d'une inversion), **I**-42
polynomiale (application —), **I**-92
potentiel (— scalaire), **II**-219
prépondérante (fonction — devant), **II**-39
primitive, **I**-188; **II**-206
principale (partie —), **II**-48
puissance (— d'exposant α), **II**-10

Q

quarrable (partie —), **II**-239
quas**I**-disjoints (pavés —), **II**-238

R

raccords, **II**-136
racine (— $n^{\text{ème}}$ d'un réel $\geqslant 0$), **I**-14
racines (— $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe), **I**-34
raison (— d'une suite arithmétique), **I**-54
raison (— d'une suite géométrique), **I**-54
rapport (— d'une inversion), **I**-42
rationnelle (fonction —), **I**-92
rectangles (méthode des —), **I**-197
réel, **I**-4
réelle (partie —), **I**-26
réelle (suite —), **I**-43
réflexive (relation —), **I**-4
règle (— $x^\alpha f(x)$), **II**-117, 118
régulière (partie — d'un DL), **II**-52
régulière (subdivision —), **I**-169
relèvement (théorème de —), **II**-34
renversée (inégalité triangulaire —), **II**-169
représentation (— paramétrique), **II**-222
répulsif (point fixe —), **I**-75
résoudre (— une équation différentielle), **II**-135, 147, 156
RICCATI (équation différentielle de —), **II**-163
RIEMANN (exemple de —), **II**-115
RIEMANN (sommes de —), **I**-180
ROLLE (théorème de —), **I**-142
rotationnel, **II**-218

S

sans (équation — second membre), **II**-136, 147
SCHWARZ (théorème de —), **II**-194
segment, **I**-6, 154
semi-fermé (intervalle —), **I**-6
semi-ouvert (intervalle —), **I**-6
séparables (équation à variables —), **II**-158
signe (fonction —), **I**-186
sinus, **II**-22
sinus hyperbolique, **II**-13
solide, **II**-259
solution (— d'une équation différentielle), **II**-135, 147, 156
sommable (application —), **II**-107
spéciales (fonctions —), **II**-80
sphère, **II**-170
stationnaire (suite —), **I**-44
subdivision (— d'un segment), **I**-163
subdivision (— d'un pavé), **II**-241
supérieure (limite —), **I**-79
superposition (principe de —), **II**-140, 152
symétrie (— matérielle), **II**-262
symétrique (application —), **I**-8
symétrique (partie de $\mathbb{R}$ — par rapport à 0), **I**-88
système (— matériel), **II**-259

T

tableau (— de variations), **I**-148
tangente, **II**-22
tangente (application linéaire —), **II**-188
tangente hyperbolique, **II**-14
TAYLOR (formule de — avec reste intégral), **I**-193
TAYLOR-LAGRANGE (inégalité de —), **I**-194
TAYLOR-YOUNG (théorème de —), **II**-55

TCHEBYCHEV (polynômes de —), **I**-39
tendant (suite réelle — vers $+\infty, -\infty$), **I**-45
terme ($n^{\text{ème}}$ — d'une suite), **I**-43
totale (relation —), **I**-4
transcendant (nombre —), **I**-63
transitive (relation —), **I**-4
trapèzes (méthode des —), **I**-199
triangulaire (inégalité —), **I**-8, 27
trigonométrique (forme —), **I**-29
trinôme, **I**-14
triple (intégrale —), **II**-254
troncature, **II**-53

U

uniformément (application — continue), **I**-121
usuelles (normes —), **II**-170

V

valeur (— absolue d'un réel), **I**-7
valeur (— absolue d'une fonction), **I**-85
valeur (— d'adhérence d'une suite), **I**-80
valeur (— moyenne), **I**-174
variation (taux de —), **I**-125
variation (— de f de a à b), **I**-188
variation (méthode de — de la constante), **II**-140
voisinage (au — de), **I**-97
volume, **II**-244, 254

W X Y Z

WALLIS (intégrales de —), **I**-191
YOUNG (inégalité de —), **I**-195

Imprimé en France. - JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 Paris
N° 240563P. Dépôt légal : Novembre 1996. Dépôt légal 1re édition : 2e trimestre 1994

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1er cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

Accompagné d'exercices corrigés nombreux et variés couvrant tout le **nouveau programme**, il s'adresse à ceux qui souhaitent confronter les théories enseignées à leur pratique.

Le tome 1 contient l'étude des **nombres réels et complexes, les suites numériques** et **les fonctions numériques d'une variable réelle (continuité, dérivation, intégration)**, ce qui correspond à la première partie du programme de l'analyse en première année.

Le tome 2 contient l'étude des **fonctions usuelles, la comparaison locale, les primitives, fonctions intégrables, équations différentielles, fonctions de deux variables et les compléments de calcul intégral**, ce qui correspond à la deuxième partie de l'analyse en première année.

Jean-Marie Monier est professeur en classe de Spéciales au Lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon. Il est l'auteur, chez Dunod, de cinq recueils d'exercices résolus de mathématiques.

J'intègre c'est un objectif qui a donné son nom à une collection d'ouvrages pour les classes préparatoires aux grandes écoles.
Cette collection qui se décline pour les prépas commerciales, les prépas scientifiques et les langues comprend trois types de livres : des *manuels* pour l'acquisition des connaissances fondamentales, des livres *d'exercices et d'annales* régulièrement mis à jour pour la maîtrise des connaissances, et des séries de *QCM* pour l'évaluation et l'entraînement individuels.

REVENDEZ VOS LIVRES TOUTE L'ANNÉE
GIBERT JEUNE
PLACE SAINT-MICHEL & STRASBOURG-ST-DENIS
Prix Net
OCCASION
16,01€
105,02 F
DUNOD 52067
NOUVEAU COURS DE B
03.10.03
2 806212 016017

Code 043076
ISBN 2 10 003076 0

DUNOD
EDITEUR