Entiers naturels

Exercice 1 :
Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

On pourra utiliser la formule du binôme.
Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :
Démontrer que pour tout $n,p,k\in\mathbb{N}$, $n\geq p\geq k$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :
Démontrer par récurrence les assertions suivantes :

1.

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2.

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad 3\text{ divise } n^3-n$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :
On pose

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}k^3=1^3+2^3+\cdots+n^3$$

Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 1$

$$S(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n\geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

On posera $S(n)=\sum_{k=1}^{n} k=1+2+\cdots+n$

2. En déduire la valeur de

$$T(n)=\sum_{k=n+1}^{2n} k=(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)+2n$$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit pour tout entier naturel $n\geq 1$, on pose

$$T_n=\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$$

Montrer que pour tout $n\geq 1$

$$T_n=1+(n-1)2^n$$

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

$$S_n=1\times 2+2\times 3+\cdots+(n-1)\times n$$

Montrer que pour tout $n\geq 2$ on a :

$$S_n=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n} k=\frac{3}{2}n(n+1)$$

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Montrer que pour tout entier $n\geq 1$

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}$$

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soient $m,n\in\mathbb{N}$, $m\leq n$. Montrer sans calculs que

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

En utilisant la formule pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\binom{n-k+1}{m+1}=\binom{n-k}{m}+\binom{n-k}{m+1}$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs augmenté de 1 est le carré d'un entier.

On pourra calculer $n(n+3)$ et $(n+1)(n+2)$.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$. On pourra utiliser la formule du binôme.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k$$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1(1\,!) + 2(2\,!) + \cdots + n(n\,!) = (n+1)\,! - 1$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

On considère la fonction f (fonction d'Ackermann) de deux variables m et n dans $\mathbb{N}$ définie par :

$f(0,n) = n+1$ (1)

$f(m,0) = f(m-1,1)$ pour $m \geq 1$ (2)

$f(m,n) = f(m-1, f(m,n-1))$ pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$ (3)

Montrer que :

1. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(1,k) = k+2$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(2,k) = 2k+3$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(3,k) = 2^{k+3} - 3$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

On considère l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie pour tout (n,m) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$g(n,m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$$

1. Montrer que si deux couples (n_1, m_1) et (n_2, m_2) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant $n_1 + m_1 < n_2 + m_2$, alors on a
$$g\big((n_1, m_1)\big) < g\big((n_2, m_2)\big)$$
2. Montrer que g est injective.
3. Montrer que g est surjective.
4. En déduire que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Allez à : Correction exercice 16 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(p-k)!\,\big((n-k)-(p-k)\big)!}=\frac{n!}{k!}\times\frac{1}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

Et

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p}=\frac{p!}{k!\,(p-k)!}\times\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{1}{k!\,(p-k)!}\times\frac{n!}{(n-p)!}$$

Ce qui montre que pour tout $n,p,k\in\mathbb{N}$, $n\geq p\geq k$.

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}1^k\times 1^{p-k}=\binom{n}{p}(1+1)^p=2^p\binom{n}{p}$$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1. Pour $n=0$,

$$\sum_{k=0}^{0}(k+1)=1=\frac{(0+1)(0+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'égalité est vérifié pour $n=0$.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)+\big((n+1)+1\big)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+(n+2)=\frac{\big((n+1)+2\big)(n+2)}{2}$$

$$=\frac{\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+2\big)}{2}$$

C'est bien le cas donc pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2. Pour $n=0$,

$$\sum_{k=0}^{0}k^2=0^2=0=\frac{0\times(0+1)(2\times 0+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

L'égalité est vérifié pour $n=0$.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)\frac{(n+1)}{6}$$

$$=(2n^2+7n+6)\frac{(n+1)}{6}$$

Première méthode le polynôme du second degré $2X^2+7X+6$ a pour discriminant

$$\Delta=7^2-4\times 2\times 6=49-48=1$$

Et pour racines

$$X_1=\frac{-7-1}{2\times 2}=-2\quad\text{et}\quad X_2=\frac{-7+1}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$$

Donc

$$2X^2+7X+6=2(X+2)\left(X+\frac{3}{2}\right)=(X+2)(2X+3)$$

Ce qui entraine que $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$, par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2=(n+2)(2n+3)\frac{(n+1)}{6}=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$$

Ce qui montre l'égalité au rang $n+1$, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Deuxième méthode

On veut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Et on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2=(2n^2+7n+6)\frac{(n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

On développe $(n+2)(2n+3)$

$$(n+2)(2n+3)=2n^2+3n+4n+6=2n^2+7n+6$$

Ce qui montre l'égalité au rang $n+1$, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Pour $n=0$, 3 divise 0 car il existe $k=0\in\mathbb{N}$ tel que $0=3\times 0$ donc 3 divise $0=0^3-0$

   Montrons que 3 divise n^3-n (c'est-à-dire qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $3k=n^3-n$) entraine que 3 divise $(n+1)^3-(n+1)$

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=n^3+3n^2+2n$$

   Or $3k=n^3-n\Leftrightarrow n^3=3k+n$, donc

$$(n+1)^3-(n+1)=3k+n+3n^2+2n=3(n^2+n+k)$$

   Ce qui montre que 3 divise $(n+1)^3-(n+1)$, on a :

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, 3 divise n^3-n.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

$$S(1)=1^3=1$$

Et

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

L'égalité est vraie au rang 1.

$$S(n+1)=1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=S(n)+(n+1)^3$$

En utilisant l'égalité au rang n

$$S(n+1)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right]=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

L'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$ donc pour tout $n\geq 1$ on a

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. On appelle (H_n) l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n$$

Si $n=1$, $\sum_{k=1}^{1}k=1$ et $\frac{1\times(1+1)}{2}=1$ sont égaux donc (H_1) est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1}k=1+2+\cdots+n+(n+1)=[1+2+\cdots+n]+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$
$$=(n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc (H_n) entraine (H_{n+1}). L'égalité est vraie pour tout $n\geq 1$.

2. On remarque que $S(2n)=1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$

$$T(n)=S(2n)-S(n)=n(2n+1)-\frac{n(n+1)}{2}=n\left[2n+1-\frac{n+1}{2}\right]=\frac{n(3n+1)}{2}$$

Autre correction

$$T(n)=\sum_{k=n+1}^{2n}k=(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n-1)+2n$$
$$=[n+n+\cdots n+n]+[1+2+\cdots+(n-1)+n]=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{2n^2+n(n+1)}{2}=\frac{n(2n+n+1)}{2}=\frac{n(3n+1)}{2}$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

$$T_1=\sum_{k=1}^{1}k2^{k-1}=1\times 2^{1-1}=1=1+(1-1)2^1$$

L'égalité est vraie pour $n=1$.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$.

$$T_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}k2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}+(n+1)2^n=1+(n-1)2^n+(n+1)2^n=1+(n-1+n+1)2^n$$
$$=1+2n2^n=1+(n+1-1)2^{n+1}$$

Donc pour tout $n\geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=1+(n-1)2^n$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

Pour $n = 2$, $S_2 = 1 \times 2 = 2$ et

$$\frac{1}{3}n(n-1)(n+1) = \frac{1}{3} \times 2(2-1)(2+1) = 2$$

L'égalité est vrai pour $n = 2$.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$.

$$S_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n + n \times (n+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) + n(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n-1+3) = \frac{1}{3}(n+1)\big((n+1)-1\big)\big((n+1)+1\big)$$

Donc pour tout $n \geq 2$ on a

$$S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

Pour $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{2\times 0} k = 0$$

Et

$$\frac{3}{2}n(n+1) = \frac{3}{2} \times 0 \times (0+1) = 0$$

Donc l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$.

$$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)} k = \sum_{k=n+1}^{2n+2} k = (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n + (2n+1) + (2n+2)$$

$$= \sum_{k=n}^{2n} k - n + (2n+1) + (2n+2) = \frac{3}{2}n(n+1) + 3n + 3 = \frac{3}{2}n(n+1) + 3(n+1)$$

$$= \frac{3}{2}(n+1)\left(n + \frac{2}{3} \times 3\right) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)$$

L'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2}n(n+1)$$

Autre méthode :

On peut utiliser l'identité

$$\sum_{k=1}^{p} k = \frac{1}{2}p(p+1)$$

$$\sum_{k=n}^{2n} k = \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=n}^{n-1} k = \frac{1}{2}(2n)(2n+1) - \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n\big(2(2n+1) - (n-1)\big)$$

$$= \frac{1}{2}n(4n+2-n+1) = \frac{1}{2}n(3n+3) = \frac{3}{2}n(n+1)$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

Première méthode

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}$$

Deuxième méthode : par récurrence

Pour $n=1$

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Montrons que cette égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$.

$$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{2^k}=-\frac{1}{2^n}+\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+2}}=-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+2}}$$

$$=\frac{-1+2}{2^n}+\frac{-4+2+1}{2^{2n+2}}=\frac{1}{2^n}+\frac{-1}{2^{2n+2}}=\frac{1}{2^{(n+1)-1}}-\frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

Ce qui est bien l'égalité au rang $n+1$.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\binom{n-k+1}{m+1}=\binom{n-k}{m}+\binom{n-k}{m+1}\quad(1)$$

Pour $k=0$

$$\binom{n+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}\quad(2)$$

Pour $k=1$

$$\binom{n+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m+1}$$

Pour $k=2$

$$\binom{n+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m+1}$$

Montrons par récurrence que pour $l\in\{0,\dots,n-m-1\}$ que :

$$\binom{n+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\cdots+\binom{n-l}{m}+\binom{n-l}{m+1}\quad(3)$$

Pour $l=0$ c'est l'égalité (2), (pour visualiser les choses on a écrit les formules pour $l=1$ et $l=2$).

Utilisons l'égalité (1) avec $k=l+1$

$$\binom{n-l}{m+1}=\binom{n-l-1}{m}+\binom{n-l-1}{m+1}$$

Ce que l'on remplace dans le dernier terme de (3)

$$\binom{n+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\cdots+\binom{n-l}{m}+\binom{n-l-1}{m}+\binom{n-l-1}{m+1}\quad(3)$$

Cela achève la récurrence puis on prend $l=n-m-1\Leftrightarrow n-l=m+1$

$$\binom{n+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\cdots+\binom{m+1}{m}+\binom{m+1}{m+1}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\cdots+\binom{m+1}{m}+\binom{m}{m}$$

Car $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \binom{m}{m}$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

$$n(n+3) = n^2 + 3n \text{ et } (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$$

4 entiers consécutifs s'écrivent $n(n+1)(n+2)(n+3)$

Donc

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= [n(n+3)][(n+1)(n+2)] + 1 = [n^2+3n][n^2+3n+2] + 1 \\ &= [(n^2+3n+1) - 1][(n^2+3n+1)+1] + 1 = (n^2+3n+1)^2 - 1 + 1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

$n^2 + 3n + 1$ est un entier donc $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ est le carré d'un entier.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k = C_n^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k$$

Donc $(n+1)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k$, pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k = C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \cdots + C_n^n n^n = n^2 + n^2(C_n^2 + \cdots + C_n^n n^{n-2})$$

Donc n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Première méthode :

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!}$$

On pose $k' = k - 1$, si $k = 1$ alors $k' = 0$ et si $k = n$ alors $k' = n -$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} kC_n^k &= n\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!\,\big((n-1)-k'\big)!} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,\big((n-1)-k\big)!} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\, 1^k 1^{n-k} \\ &= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} \end{aligned}$$

Autre correction sans utiliser les sommes.

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = 1\times C_n^1 + 2\times C_n^2 + 3\times C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$= 1\times\frac{n!}{(n-1)!\,1!} + 2\times\frac{n!}{(n-2)!\,2!} + 3\times\frac{n!}{(n-3)!\,3!} + \cdots + (n-1) + n\frac{n!}{(n-n)!\,n!}$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots$$

$$+ n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} + n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}$$

$$= n\left[\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-1\big)!\,1!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-2\big)!\,2!} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-2)\big)!\,(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-1)\big)!\,(n-1)!}\right]$$

$$= n[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}]$$

$$= n\big[C_{n-1}^0 1^0 1^{(n-1)-0} + C_{n-1}^1 1^1 1^{(n-1)-1} + C_{n-1}^2 1^2 1^{(n-1)-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-2} 1^{n-2} 1^{(n-1)-(n-2)}$$

$$+ C_{n-1}^{n-1} 1^{n-1} 1^{(n-1)-(n-1)}\big] = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Deuxième méthode :

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

On dérive ces deux expressions de f

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \Leftrightarrow n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1}$$

On prend alors $x = 1$

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k 1^{k-1} \Leftrightarrow n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k$$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

On appelle (H_n) l'égalité $1(1\,!) + 2(2\,!) + \cdots + n(n\,!) = (n+1)\,! - 1$

Si $n = 1$ on a $1(1\,!) = (1+1)\,! - 1 = 2\,! - 1 = 1$, l'égalité est vérifiée.

$$1(1\,!) + 2(2\,!) + \cdots + n(n\,!) + (n+1)(n+1)\,! = [1(1\,!) + 2(2\,!) + \cdots + n(n\,!)] + (n+1)(n+1)\,!$$
$$= [(n+1)\,! - 1] + (n+1)(n+1)\,! = (n+1)\,!\,(1+n+1) - 1 = (n+2)\,! - 1$$

Donc (H_n) entraine (H_{n+1}), donc (H_n) est vraie pour tout $n > 0$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. On appelle (H_k) l'égalité $f(1,k) = k+2$

$$f(1,0) = f(0,1) = 1+1 = 2 = 0+2$$

La première égalité vient de (2) et la seconde vient de (1)

On suppose que l'on a (H_k)

$f(1,k+1) = f(0,k+2) = k+2+1 = k+3 = (k+1)+2$ donc (H_k) entraine (H_{k+1})

Donc (H_k) est vraie pour tout k.

2. On appelle (H'_k) l'égalité $f(2,k) = 2k+3$.

$$f(2,0) = f(1,1) = 1+2 = 3 = 2\times 1+1$$

La première égalité vient de (2), la seconde du 1)

Donc (H_1') est vraie.

$$f(2,k+1)=f\big(1,f(2,k)\big)=f(1,2k+3)=2k+3+2=2(k+1)+3$$

La première égalité vient de (3), la seconde de l'hypothèse de récurrence et la troisième du 1).

Donc (H_k') entraine (H_{k+1}'), l'égalité est vraie pour tout $k\geq 0$.

3. On appelle (H_k'') l'égalité $f(3,k)=2^{k+3}-3$

$$f(3,0)=f(2,1)=2\times 2+1=5=8-3=2^3-3$$

La première égalité vient de (2), la seconde vient du 2).

Donc (H_1'') est vraie.

$$f(3,k+1)=f\big(2,f(3,k)\big)=f(2,2^{k+3}-3)=2(2^{k+3}-3)+3=2^{k+4}-6+3=2^{(k+1)+3}-3$$

La première égalité vient de (3), la seconde de l'hypothèse de récurrence et la troisième du 2).

Donc (H_k'') entraine (H_{k+1}''), l'égalité est vraie pour tout $k\geq 0$.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

$$\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}=1+2+\cdots+(n+m)=\sum_{k=1}^{n+m}k$$

1. Pour faire une démonstration propre il faut faire deux cas

$$n_1+m_1+1<n_2+m_2$$

$$g\big((n_2,m_2)\big)-g\big((n_1,m_1)\big)=1+2+\cdots+(n_2+m_2)+m_2-\big(1+2+\cdots+(n_1+m_1)\big)-m_1$$
$$=\sum_{k=1}^{n_2+m_2}k+m_2-\sum_{k=1}^{n_1+m_1}k-m_1$$

$$g\big((n_2,m_2)\big)-g\big((n_1,m_1)\big)$$
$$=1+2+\cdots+(n_1+m_1)+\cdots+(n_2+m_2)-\big(1+2+\cdots+(n_1+m_1)\big)+m_2-m_1$$
$$=\sum_{k=n_1+m_1+1}^{n_2+m_2}k+m_2-m_1$$

$$g\big((n_2,m_2)\big)-g\big((n_1,m_1)\big)=(n_1+m_1+1)+\cdots+(n_2+m_2)+m_2-m_1$$
$$=\sum_{k=n_1+m_1+1}^{n_2+m_2}k+m_2-m_1$$

$$g\big((n_2,m_2)\big)-g\big((n_1,m_1)\big)=(n_1+1)+\cdots+(n_2+m_2)+m_2$$
$$=\sum_{k=n_1+m_1+2}^{n_2+m_2}k+n_1+m_1+1+m_2-m_1$$

$$g\big((n_2,m_2)\big)-g\big((n_1,m_1)\big)=(n_1+1)+\cdots+(n_2+m_2)+m_2=\sum_{k=n_1+m_1+2}^{n_2+m_2}k+n_1+1+m_2>0$$

Donc $g\big((n_2,m_2)\big)>g\big((n_1,m_1)\big)$

Deuxième cas

$$n_1+m_1+1=n_2+m_2$$

$$g\big((n_2,m_2)\big)-g\big((n_1,m_1)\big)=1+2+\cdots+(n_2+m_2)+m_2-\big(1+2+\cdots+(n_1+m_1)\big)-m_1$$
$$=\sum_{k=1}^{n_2+m_2}k+m_2-\sum_{k=1}^{n_1+m_1}k-m_1$$

$$g\big((n_2,m_2)\big) - g\big((n_1,m_1)\big) = (n_1 + m_1 + 1) + m_2 - m_1 = n_1 + 1 + m_2 > 0$$

Donc $g\big((n_2,m_2)\big) > g\big((n_1,m_1)\big)$

2. La contraposée de

$$g\big((n_2,m_2)\big) = g\big((n_1,m_1)\big) \Rightarrow (n_2,m_2) = (n_1,m_1)$$

Est

$$(n_2,m_2) \neq (n_1,m_1) \Rightarrow g\big((n_2,m_2)\big) \neq g\big((n_1,m_1)\big)$$

Premier cas

Si $n_1 + m_1 < n_2 + m_2$ alors $g\big((n_2,m_2)\big) > g\big((n_1,m_1)\big)$ et donc $g\big((n_2,m_2)\big) \neq g\big((n_1,m_1)\big)$

Si $n_1 + m_1 < n_2 + m_2$ alors $g\big((n_2,m_2)\big) < g\big((n_1,m_1)\big)$ et donc $g\big((n_2,m_2)\big) \neq g\big((n_1,m_1)\big)$

Si $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$ avec $n_1 \neq n_2$ et $m_1 \neq m_2$ (en effet $n_1 \neq n_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$ car $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$)

Alors

$$g\big((n_2,m_2)\big) - g\big((n_1,m_1)\big) = m_2 - m_1 \neq 0$$

Donc g est injective.

3. Le problème est le suivant, pour tout $p \in \mathbb{N}$ existe-t-il un couple $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$p = g\big((n,m)\big)$$

Remarque préliminaire :

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2} \leq p < 1 + 2 + \cdots + N + (N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

Car la suite $\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

On pose $m = p - \frac{N(N+1)}{2}$ et $n = N - \left(p - \frac{N(N+1)}{2}\right)$ (Ne me demander pas pourquoi, c'est parce que cela marche, j'espère que vous verrez pourquoi par la suite).

n et m ont été choisi de façon à ce que $n + m = N$

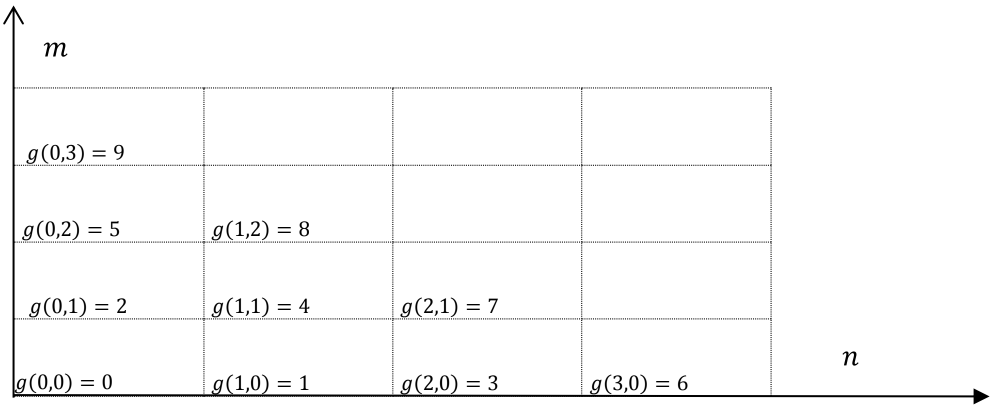
$$g\big((n,m)\big) = g\left(\left(N - \left(p - \frac{N(N+1)}{2}\right), p - \frac{N(N+1)}{2}\right)\right) = \frac{N(N+1)}{2} + p - \frac{N(N+1)}{2} = p$$

Et voilà le travail !

g est surjective.

4. g est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ donc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. On rappelle qu'un ensemble est dénombrable s'il existe une bijection entre lui-même et $\mathbb{N}$.

Remarque : Sur une figure cette fonction g est élémentaire alors que lorsqu'on regarde sa « tête » elle n'est pas très sympathique.



La valeur de $g(n,m)$ se situe en bas à droite des rectangles, on met 0 en $(0,0)$, on revient sur les abscisses en $(1,0)$ on compte en diagonale vers en haut à droite $1,2$, on revient sur les abscisses et on compte $3,4,5 \ldots$Ainsi on voit que l'on peut « compter » tous les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un par un sans en oublier.

Allez à : Exercice 16 :