TD ELECTROMAGNETISME : ONDES ELECTROMAGNETIQUES

EXERCICE 1 : SUPERPOSITON DE DEUX ONDES PLANES SYNCHRONES

Deux ondes électromagnétiques planes sinusoïdales (1) et (2) de même fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, se propage dans le vide dans le plan xOy suivant deux directions symétrique par rapport à Ox et faisant respectivement les angles $\theta \;\; et \; -\theta$ avec l'axe Ox.
Les champs électriques $\vec{E}_1 \;\; et \;\; \vec{E}_2$ de ces deux ondes sont parallèles à Oz, ont même amplitude E_0 et vibre en phase en O.
On donne la célérité c de la lumière dans le vide et on posera $k = \frac{\omega}{c}$ (norme du vecteur d'onde de chaque onde). L'espace est rapporté au référentiel Oxyz orthonormé de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

1. Calculer pour l'onde résultante en tout point M(x,y,z), à l'instant t, en notations réelles :
a. Le champ électrique $\vec{E}(M,t)$;
b. Le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$.
2. Caractériser l'onde $(\vec{E},\vec{B})$ résultante, puis exprimer la vitesse de phase v_φ et la période spatiale p de l'onde résultante en fonction de $f_0, \theta \;\; et \;\; c$.
   A.N : $f_0 = 10\; MH_z, \theta = 30°, \;\; c = 3.10^8 m.s^{-1}$. Calculer v_φ et p.
3. Montrer qu'en disposant convenablement des plans métalliques parfaits, la répartition des champs $\vec{E} \; et \; \vec{B}$ n'est pas modifiée :
   calculer la distance minimale Y entre les deux plans métalliques.
4. Calculer en fonction de $\mu_0, \;\; c, E_0, \theta \; et \; S$, la puissance moyenne dans le temps transportée par l'onde résultante $(\vec{E},\vec{B})$ à travers une surface rectangulaire d'aire S, parallèle au plan yOz.

5.a. En déduire la vitesse de groupe v_g ou vitesse de propagation de l'énergie de l'onde résultante. Vérifier la relation $v_\varphi . v_g = \; c^2$.
5.b. Représenter les graphes $v_\varphi(\theta) \; et \;\; v_g(\theta)$ pour $0 \leq \;\; \theta \leq \frac{\pi}{2} \; rad.$

EXERCICE 2 : PROPAGATION DES ONDES PLANES DANS UN PLASMA

On considère un milieu matériel neutre comprenant, par mètre cube :

a. n ions (charge +e) immobile ;

b. n électrons (charge –e, masse m) susceptibles de se déplacer à partir de leur position d'équilibre, et ramener vers celle-ci par une force $\vec{f} = -m\omega_0^2\vec{r}$ quand ils s'en sont écartés du vecteur $\vec{r}$ (le milieu sera de plus, supposé caractérisé une perméabilité magnétique égale à celle du vide μ_0).

1. Dans le milieu existe un champ électrique : $\vec{E} = \vec{E_0} exp(-i\omega t)$

Donner l'équation du mouvement d'un électron ; l'intégrer en supposant le mouvement sinusoïdal. Calculer la vitesse de l'électron, la densité du courant $\vec{J}$ induit par le champ $\vec{E}$, et la conductivité du milieu. (Ici, comme dans la suite du problème, on supposera que le mouvement des électrons est uniquement dû à la force exercé sur eux par le champ électrique extérieur. Quelles autres forces néglige-t-on ce faisant ?).

2. Une onde électromagnétique plane se propage dans le milieu considérer, où elle crée un champ électrique :

$$\vec{E} = \vec{E_0} expi(kx - \omega t)$$

a. En tenant compte de la présence dans le milieu d'un courant de densité $\vec{J}$, écrire les équations satisfaites par $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ qui l'accompagne.

b. En déduire les conditions imposées à l'orientation des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$, le rapport des modules de ces vecteurs et la relation entre k et ω.

3. Montrer que pour $\omega_0 < \omega < \omega_c$ (ω_c : fréquence de coupure que l'on calculera en fonction des données en faisant intervenir la grandeur $\omega_p = \left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{\frac{1}{2}}$, où ε_0 est la constante diélectrique du vide), des ondes planes du type considéré plus haut ne peuvent plus se propager dans le milieu étudié. Donner alors la forme générale du champ électromagnétique pour $x > 0$, en supposant que sa dépendance en temps reste sinusoïdale et de pulsation ω, et qu'il n'est par ailleurs fonction que la coordonnée d'espace x.

Pour x = 0, le champ électrique sera pris de la forme

$$\vec{E}(0,t) = \vec{E}_0 exp(-i\omega t) \ \ avec\ \vec{E}_0\ parallèle\ à\ l'axe\ Oy$$

Application numérique : Calculer ω_c pour ω_0 tel que $\hbar\omega_0 = 1\ eV$

($\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 10^{-34}\ M.K.S.A,$ où h est la contante de Planck), e = $1{,}6.10^{-19}$ C,

m = $0.9.10^{-30}$ kg, n = 10^{26} électrons par mètre cube, h = $6{,}626.10^{-34}$ J.s.

4. Le milieu étudié aux questions précédentes rempli tout le demi-espace $x > 0$.

L'autre demi-espace est vide. Une onde électromagnétique plane de pulsation ω polarisé parallèlement à Oy et dont le champ électrique a pour amplitude E_0 se propage dans le vide dans la direction de Ox et tombe sur la surface de séparation des deux milieux.

a. Rappeler les conditions de continuité satisfaites par les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en une telle surface de séparation.
b. En déduire les champs électrique et magnétique pour $x > 0\ \ et\ \ x < 0$.
c. Donner l'expression en fonction de ω, *du pouvoir de reflexion R du*

milieu contenant des électrons mobiles par rapport au vide (R est défini comme le rapport de l'intensité de l'onde réfléchie à celle de l'onde incidente). Tracer la courbe $R(\omega)$.

EXERCICE 3 : ONDE STATIONNAIRE-ONDE MODULE

1. ONDE STATIONNAIRE

Deux ondes planes de même pulsation ω, de même amplitude E_m et polarisées rectilignement selon Oz, se propagent dans le vide selon une même direction Ox, mais en sens inverse. On note φ leur déphase relatif en O à l'instant d'origine.

a. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ résultant. Montrer que celui-ci présente des amplitudes maximales pour certaines positions fixes particulières.
b. Déduire la valeur du champ magnétique résultant $\vec{B}$ à partir des champs associés aux deux ondes initiales. Retrouver directement cette valeur à partir de l'expression de $\vec{E}$. Commenter la variation spatiale de $\vec{B}$ par rapport à celle de $\vec{E}$.
c. Calculer le vecteur de Poynting ainsi que sa valeur moyenne dans le temps.
d. Calculer l'énergie volumique et sa valeur moyenne. Justifier l'appellation onde stationnaire.

2. ONDE MODULE

Deux ondes planes de même amplitude E_m, polarisées rectilignement selon Oz, se propagent dans le vide selon Ox, dans le sens des x croissants. Leurs pulsations $\omega_1 et\ \omega_2$ sont voisines :

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \ll \omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

Ces deux ondes sont supposées en phase en O.

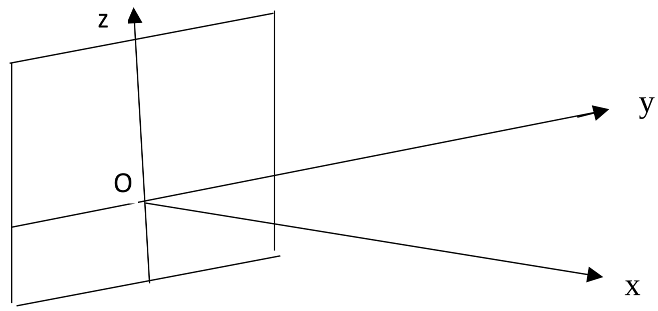
a. Calculer le champ électrique résultant. Montrer que celui-ci décrit une onde plane progressive dont l'amplitude varie lentement dans l'espace et dans le temps.
b. Comparer l'évolution d'une telle onde avec celle d'une onde stationnaire. Pour cela on pourra représenter les variations de $E_2(x,0)$ et de $E_2(x,\tau)$ dans les deux cas. $\tau = \frac{T}{4}$ (T étant la période).
c. Calculer le champ magnétique résultant.
d. En déduire le vecteur de Poynting associé. L'onde résultant est reçue par un détecteur en énergie dont la durée de réponse τ_d est très grande devant la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ mais faible devant la période de modulation $T_{mod} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. Que mesure ce détecteur. Commenter.

EXERCICE 4 : REEFLEXION D'UNE ONDE PLANE SUR UN CONDUCTEUR

Un conducteur occupe le demi-espace $x > 0$. Une onde électromagnétique plane, monochromatique, se propage suivant l'axe Ox positif et est polarisée rectilignement suivant Oz. C'est l'onde incidente pour laquelle on écrira :

$$\vec{E_i} = E_0 cos[kx - \omega t]\vec{e}_3$$

Où $\vec{e}_3$ est vecteur unitaire dirigé suivant Oz.



1. Déterminer l'onde réfléchie et les expressions des champs (totaux) $\vec{E}\ et\ \vec{B}\ pour\ x \leq 0$. Montrer que ce champ électromagnétique correspond à une onde stationnaire.
2. On suppose que le champ électromagnétique pénètre à l'intérieur du métal sur une faible épaisseur a : pour x = 0, $\vec{B}$ a l'expression calculé à la question 1 et pour $x \geq a$, le vecteur $\vec{B} = \vec{0}\,.Pour\ 0 \leq x \leq a$, on prendra : $\vec{B} = B_y(x,t)\vec{e}_2$

Où $B_y(x,t)$ est une certaine fonction de x et de t que nous n'aurons pas à déterminer complètement.

Calculer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ pour $0 \leq x \leq a$ en fonction de $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ (on négligera le courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$). En déduire la force qui s'exerce sur un élément de volume dxdydz.

3. Intégrer cette expression sur x variant de 0 à **a**. En déduire que la force moyenne $\langle d\vec{F}\rangle$ qui s'exerce sur un élément de surface dS du métal a pour expression :

$$\langle d\vec{F}\rangle = pd\vec{S}$$

Où p est la pression de radiation dont on donnera l'expression ; préciser le sens de cette force.

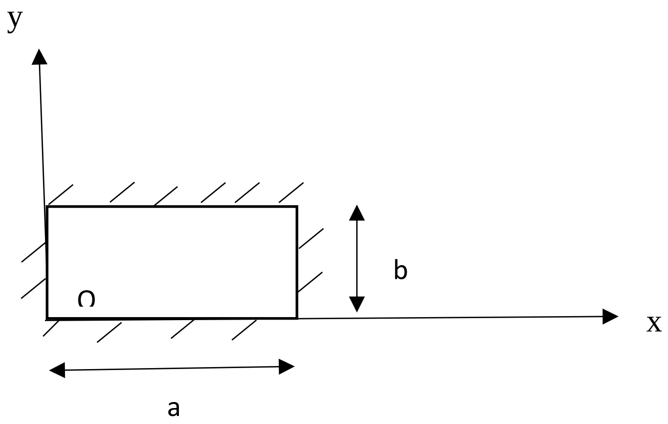
4. Comparer p à la densité moyenne d'énergie $\langle \mu \rangle$ correspondant aux champ électromagnétique pour $x \leq 0$.

EXERCICE 5 ; Propagation dans un guide d'onde rectangulaire

Un guide d'onde est constitué d'un tube métallique de section rectangulaire et de génératrice parallèle à Oz. On étudie une onde se propageant suivant les z croissant.

On appelle mode TE une onde dans laquelle le champ électrique est transverse ($\vec{E}$ est dans le plan Oxy). Dans ces conditions :

$$\vec{E} \quad \begin{cases} E_x(x,y)expj(kz-\omega t) \\ E_y(x,y)expj(kz-\omega t) \\ 0 \end{cases}$$



1. Ecrire les conditions de passage pour E_x et E_y à la surface du guide.
2. Montrer que le champ caractériser par

$$E_y(x,y) = E_0 sin\frac{\pi xn}{a}\, cos\frac{\pi ym}{b}$$

Peut satisfaire l'équation de Maxwell-Gauss à condition de bien choisir E_x. Calculer E_x(x,y).

Vérifier les conditions limites.

On appelle ce mode TE_{mn}.

3. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde. A-t-on $\vec{E}.\vec{B} = 0$? Différences avec l'onde plane ?
4. En utilisant l'équation de propagation du vecteur $\vec{E}$, trouver la relation de dispersion. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure (pulsation ω_c) et une longueur λ_c au-delà de laquelle l'onde ne peut se propager. calculer ω_c et λ_c en fonction de n, m, a et b.
5. Décrire la situation dans le cas du mode TE_{01}. En particulier

- Présenter $\vec{E}$ dans une section du guide.
- Calculer λ_0 (vide) ; λ_c ; λ_g (guide).

A.N : $f_0 = 9\ GH_z$, $a = 22{,}85\ mm,\ c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.

6. Calculer le vecteur de Poynting, puis sa valeur moyenne au cours du temps. Conclusion ?

EXERCICE 6 ; Propagation des ondes radioélectrique dans l'ionosphère.

- L'ionosphère est un plasma neutre qui contient à la fois des ions positifs M et de charge +e et des électrons de masse $m \ll M$ et de charge –e. Il y a N électrons et N ions par unité de volume. Une onde plane polarisée suivant $\overrightarrow{Ox}$ est définie par

$$E_x = Eexpj(kz-\omega t)\ et\ \ B_y = Bexpj(kz-\omega t)$$

Où ω est la pulsation et $\vec{k}$ le vecteur d'onde. Cette onde se propage suivant la direction $\overrightarrow{Oz}$.

1. Ecrire les composantes suivant $\vec{x}$, $\vec{y}, \vec{z}$ de la force électromagnétique due à l'onde agissant sur un ion ou un électron. Montrer que si les vitesses des ions et des électrons sont petites devant celle de la lumière, la seule force notable à laquelle sont soumis les ions et les électrons est celle due au champ électrique. Dans ce cas, écrire les équations de la dynamique ; les intégrer pour obtenir les vitesses des ions et des électrons (solution de régime permanent). En déduire la densité de courant $\vec{\imath}$ due aux mouvements des ions et des électrons. Montrer que l'on peut négliger la contribution des ions.

Montrer que l'on peut définir une conductivité σ de l'ionosphère telle que $\sigma = \frac{jNe^2}{m\omega}$. σ est imaginaire pure. Quelle est la signification de cette remarque.

2. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère peut ici s'écrire

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \varepsilon\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Avec une permittivité de l'ionosphère ε que l'on calculera en fonction de ω.

3. En introduisant ε dans les équations de Maxwell, trouver l'équation de propagation des ondes dans l'atmosphère ionisée, en supposant que la perméabilité magnétique est celle du vide μ_0.

a. Quelle est la vitesse de V des ondes ? Montrer que cette vitesse est supérieure à c (vitesse de la lumière dans le vide). Montrer que V dépend de ω, c'est-à-dire que le milieu est dispersif.

b. Montrer qu'il existe une pulsation

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Correspondant à une fréquence de coupure ν_c en deçà de laquelle il n'y a pas de propagation. A.N : $e = 1{,}6.10^{-19}C$, $m = 9{,}1.10^{-31}kg$, $N = 1{,}225.10^{12}\ électrons.m^{-3}$

Calculer ν_c et la longueur d'onde λ_c correspondante dans le vide.

4. Quelle situation obtient-on pour $\omega < \omega_p$?
5. Calculer l'indice de l'ionosphère n pour $\omega > \omega_p$.

Montrer qu'une onde électromagnétique arrivant de l'atmosphère (n = 1) sur l'ionosphère peut subir une réflexion totale. Calculer le domaine de fréquence ν pour lesquelles il y a réflexion totale pour une incidence i. Quelles sont les longueurs d'onde correspondantes dans le vide ?

A.N : $i = 45^0$.