TD M2 : Coordonnées polaires et mouvements circulaires

Questions et exercices de cours à savoir refaire

Coordonnées polaires et base mobile

Savoir faire un schéma représentant les coordonnées polaires et cartésiennes, retrouver l'expression des coordonnées polaires et fonction des cartésiennes et réciproquement.

Connaitre la définition des vecteurs de la base polaire et leurs composantes dans la base cartésiennes. Savoir les dériver par rapport au temps.

Donner/savoir calculer l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans la base polaire.

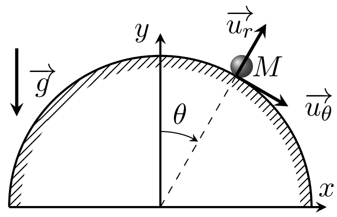
Étudier un mouvement circulaire, uniforme ou non, en coordonnées polaires.

1 Pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une tige sans masse, de longueur ℓ, attachée en O fixe et d'une masse ponctuelle m attachée à l'autre bout de la tige, lâché avec une vitesse initiale orthoradiale v_0 et un angle initial θ_0 par rapport à la verticale descendante. Le système évolue dans un champ de pesanteur uniforme et vertical descendant $\overrightarrow{g}$.

1. Faire un schéma définissant les grandeurs utiles. Quel système de coordonnées va-t-on utiliser ?
2. Effectuer une bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$.
4. On considère de petits mouvements $\theta(t) < 20^\circ$. Linéariser l'équation différentielle puis la résoudre pour obtenir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$. Quelle est la période du mouvement ?
5. Calculer l'expression de la tension T en fonction de l'angle θ.
6. Bonus (***) : On lance le pendule depuis l'angle $\theta = 0$ avec une vitesse angulaire initiales $\dot{\theta}(t=0) = v_0/\ell$ non nulle. Calculer l'expression de la tension $T(\theta)$ et déduire la valeur minimale de ω_0 pour que le pendule fasse un tour complet.

2 Glissade sur un igloo



Un enfant de masse m, assimilé à un point matériel M, glisse sans frottement sur un igloo demi-sphérique de rayon R. L'enfant commence à glisser depuis le sommet à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale. On repère sa position sur l'igloo à l'aide de l'angle $\theta(t)$, mesuré à partir de la verticale. L'accélération de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est verticale descendante.

1. Effectuer un bilan des forces s'appliquant sur l'enfant.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur la base polaire.
3. Intégrer l'équation différentielle $\ddot{\theta} = A \sin\theta$ (on utilisera la grosse astuce). En déduire la relation entre $\dot{\theta}$ et $\cos\theta$.
4. Donner l'expression de la réaction de l'igloo sur l'enfant en fonction de l'angle θ.
5. Pour quel angle θ_{lim} l'enfant décolle-t-il ? Faire l'application numérique en degrés.

Exercices

3 Satellite géostationnaire (*)

Un satellite géostationnaire, assimilé à un point matériel M, est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il ressent une accélération $a = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$ où $R = 6400$km est le rayon de la terre, $g_0 = 9,8$m.s^{-2} et r le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale, puisqu'il est géostationnaire, à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

1. Calculer la la vitesse angulaire ω et en déduire la période T de rotation de la Terre en secondes.
2. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.
3. Déterminer la vitesse du satellite sur sa trajectoire et calculer sa norme.

4 Sur un toboggan (*)

Un jeune enfant, assimilable à un point matériel M, est installé en haut d'un toboggan d'un parc aquatique. À partir de l'instant $t = 0$, les équations horaires de M sont, en coordonnées cartésiennes, $x = R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$ et $z = -bt$ où R, ω et b sont des constantes positives.

1. Déterminer ses coordonnées cylindriques. Quelle est la nature du mouvement ?
2. Déterminer la norme de la vitesse et de l'accélération de M.

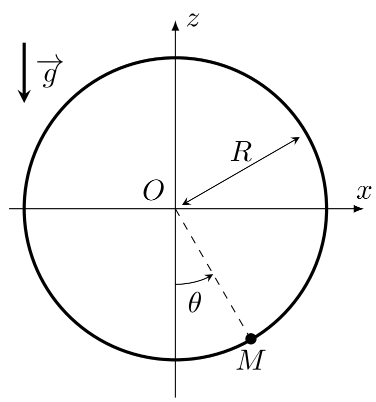
5 Mouvement de rotation en coordonnées polaires (*)

Un point M décrit une courbe plane d'équation polaire $r = a\exp(-t/\tau)$ et $\theta = \omega t$ (où a, τ et ω sont des constantes positives) dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné.

1. Tracer la courbe représentant la trajectoire. Quelle est sa nature ?
2. Calculer la vitesse et l'accélération du point M en coordonnées polaires.
3. Calculer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v})$. Commentaire ?

6 Oscillations d'un anneau sur un cerceau (**)

Un cerceau de centre O et de rayon R est maintenu dans un plan vertical et un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.



1. Qu'est-ce que la condition "sans frottements" implique pour la réaction du cerceau sur l'anneau ?
2. Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans la base choisie.
3. En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.
4. Que vaut la période des oscillations dans l'approximation des petits angles ?

Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite avec une vitesse initiale de norme v_0.

5. En déduire l'équation horaire du mouvement dans le cas des "petits angles". À quelle condition sur v_0 cette condition est-elle vérifiée ?
6. À quelle condition sur v_0 l'anneau sera-t-il capable de faire un tour ? Que dire du signe de la réaction à la limite ?

7 Trajectoire elliptique paramétrique (***)

Un satellite décrit une trajectoire elliptique dont l'équation en coordonnées polaires est $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ où p et $e < 1$ sont deux paramètres constants (paramètre et excentricité de l'ellipse) et $\theta \in [0, 2\pi]$

1. Calculer la dérivée temporelle de $r(\theta(t))$ et exprimer le résultat en fonction de r, $\dot{\theta}$, e, p et $\sin\theta$.
2. Déterminer la vitesse du satellite en tout point en coordonnées polaires.
3. On suppose que la grandeur $r^2\dot{\theta} = K$ est une constante en fonction du temps (loi des aires). Exprimer $\dot{r}$ en fonction de K et $\sin\theta$, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de K et r.
4. En déduire l'accélération.

8 Chaussette séchant dans un sèche linge (**)

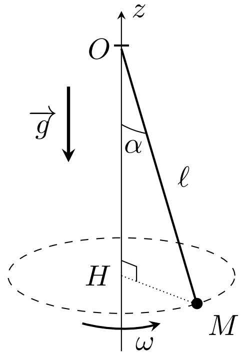
Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe le mouvement en deux phases d'une chaussette : dans une première phase, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation circulaire uniforme et, dans un deuxième temps, elle retombe en chute libre. L'observation montre qu'à chaque tour elle décolle du tambour au même angle, que l'on cherche à déterminer.

On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25$ cm tournant à 50 tour.min^{-1}. On assimile la chaussette à un point matériel M de masse m. On étudie la première phase du mouvement durant laquelle elle est entrainée dans un mouvement circulaire uniforme à la même vitesse que le tambour et où elle reste collée aux parois du tambour.

1. Faire un schéma.
2. Déterminer l'accélération de la chaussette.
3. Effectuer un bilan des forces et appliquer le PFD.
4. En déduire les valeurs des deux composantes de la réaction du tambour sur la chaussette.
5. Déterminer l'angle pour lequel la réaction normale s'annule.
6. Que se passe-t-il ensuite ? Quelle sera la forme du mouvement ultérieur ?

9 Pendule conique (***)

On considère une masse m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible, sans masse, de longueur ℓ et dont l'autre extrémité est fixée en un point O. Un dispositif met en rotation ce pendule autour de l'axe (Oz) de sorte à ce que la masse soit en mouvement circulaire uniforme dans le plan (Hxy) à la vitesse angulaire ω constante. Pour une valeur ω donnée, le fil OM garde un angle α constant par rapport à la verticale.



1. Quel système de coordonnées utiliser ?
2. Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.
3. Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter.
4. En déduire une relation entre ω, ℓ, α et g. Montrer que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.
5. Que dire du cas où ω devient très grande ?
6. Application numérique : calculer α pour $\ell = 20$ cm et $\omega = 3$ tour.s^{-1}.

10 Formule de Borda pour la période non-linéaire du pendule (***)

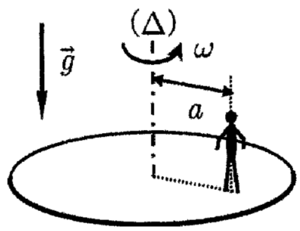
L'équation différentielle du pendule simple est $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ et il est courant de la linéariser en effectuant l'approximation des "petits angles" $\sin\theta \simeq \theta$.

Il est possible de pousser ce raisonnement un peu plus loin en effectuant un développement limité du sinus à l'ordre 3 : $\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3$. L'équation différentielle devient alors $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \dfrac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0$. Il s'agit toujours d'une équation différentielle non-linéaire.

On se propose de chercher des solutions sinusoïdales de cette équation, de la forme $\theta = \theta_0\cos(\omega t)$. On cherchera à exprimer la nouvelle pulsation ω en fonction de ω_0 et θ_0.

1. Exprimer $\cos^3(\omega t)$ en fonction de $\cos(\omega t)$ et $\cos(3\omega t)$.
2. Utiliser ce résultat dans l'équation différentielle et la réécrire sous la forme $\lambda\cos\omega t + \mu\cos 3\omega t = 0$ où λ et μ sont a exprimer en fonction de ω_0, θ_0 et ω.
3. Pour que la fonction précédente soit identiquement nulle, il faut que $\lambda = 0$. En déduire l'expression de ω en fonction de ω_0 et θ_0.
4. Retrouver la formule de Borda : $T = T_0\left(1 + \dfrac{\theta_0^2}{16}\right)$ où $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. On utilisera le résultat $(1+x)^{-1/2} \underset{x\ll 1}{\simeq} 1 - \frac{1}{2}x$.

11 Résolution de problème : frottements solides sur un manège en rotation uniforme



La plateforme en forme de disque horizontal d'un manège tourne autour de son axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante $\omega = 10$ tour.min^{-1}.
À quelle condition portant sur le frottement une personne peut-elle rester debout sans déraper lorsqu'elle se situe à une distance $a = 3,0$ m de l'axe (Δ) ?