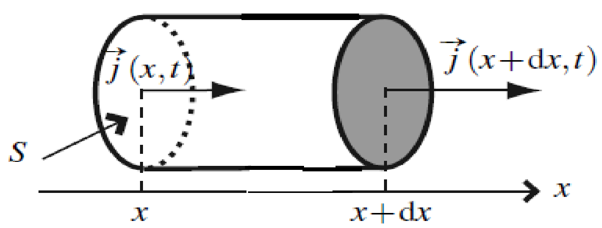
CHAPITRE 1 : EQUATIONS DE MAXWELL

À partir de ce chapitre, on ne se place plus en régime stationnaire. Les champs dépendront désormais a priori de la position M dans l'espace et de l'instant t. Il apparaît alors un lien entre le champ électrique et le champ magnétique qui oblige à considérer une nouvelle entité physique : le champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$.

Dans ce chapitre on va s'intéresser aux propriétés locales du champ électromagnétique et aux liens entre ce champ avec ses sources qui sont la densité volumique de charge ρ(M,t) et la densité volumique de courant $\vec{j}$(M,t).

1. Equation locale de la conservation de la charge

1.1. Equation locale dans le cas unidimensionnel



Considérons des charges électriques en mouvement dans un conducteur de volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée, caractérisées par une densité volumique de charge *ρ(M,t)* et un vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ ne dépendant que d'une seule coordonnées d'espace x. $\rho(M,t) = \rho(x,t)$ *et* $\vec{j}(M,t) = j(x,t)\vec{u}_x$. Bilan des charges électriques à l'intérieur du cylindre de section S, de longueur dx et de volume $d\mathcal{V} = Sdx$ (voir figure ci-dessus), entre les instants t et t + dt est $\delta Q = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} dxSdt$. Entre les instants t et t + dt, la charge électrique contenue dans le volume $d\mathcal{V}$ varie de : $dQ = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dtSdx$. Principe de conservation de la charge : $dQ = \delta Q \Longrightarrow \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dtSdx = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} dxSdt$. On aboutit finalement à l'équation locale de conservation de la charge à une dimension : $\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0}}$

1.2. Généralisation

On généralise cette équation au cas à trois dimensions en remarquant qu'à une dimension, $\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}$ = div$\vec{j}$. On obtient ainsi l'équation locale générale de conservation de la charge : $\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + div\vec{j}(M,t) = 0}}$

➢ **Cas du régime stationnaire**

En régime stationnaire, les densités de charge et de courant ne dépendent pas du temps : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{div\vec{j} = 0}}$

2. Equations de Maxwell

2.1. Notion de champ électromagnétique

2.1.1. Les sources de champ électromagnétique

Supposant qu'en un point P de l'espace existe une distribution de charges électriques de densité volumique dépendant du point et du temps $\rho(P,t)$. Cette distribution de charges crée en tout point M de l'espace un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ fonction du point et du temps. D'après l'équation locale de conservation de la charge, il apparaît un vecteur densité de courant $\vec{j}(P,t)$ lié à cette densité de charge. La distribution de courant de densité $\vec{j}(P,t)$ qui en résulte, crée au point M un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ fonction du point et du temps. Réciproquement l'existence de $\vec{j}(P,t)$ entraîne celle de $\rho(P,t)$. Les densités de charges et de courant variable dans le temps et l'espace sont donc sources de champs électrique et magnétique fonction du temps et de l'espace. L'ensemble des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ constitue un champ électromagnétique.

2.1.2.Définition du champ électromagnétique

Dans un référentiel $\mathfrak{R}$, une particule de charge q en mouvement dans un champ électromagnétique animée d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathfrak{R}}(t)$ subit en un point M à l'instant t, la force de Lorentz :

$\vec{F} = q\left(\vec{E}_{/\mathfrak{R}}(M,t) + \vec{v}_{/\mathfrak{R}}(t) \wedge \vec{B}_{/\mathfrak{R}}(M,t)\right)$. Cette force définit le champ électromagnétique $\left(\vec{E}_{/\mathfrak{R}}(M,t), \vec{B}_{/\mathfrak{R}}(M,t)\right)$ dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Le champ électromagnétique est ainsi défini par son action sur une charge ponctuelle q.

<u>Remarque</u> : Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté on notera simplement $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$ le champ électromagnétique au point M à l'instant t dans le référentiel $\mathfrak{R}$.

2.2. Equations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide, au nombre de quatre, rendent compte des variations locales des champs électrique et magnétique en relation avec leurs sources, ainsi que de leur variation temporelle. Les deux premières traduisent les propriétés intrinsèques des champs électrique et magnétique. Les deux autres relient ces champs à leurs sources $\rho(M,t)$ et $\vec{j}(M,t)$.

2.2.1. Equation de Maxwell-Faraday

a) Formulation locale

$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}}$ ***Equation de Maxwell – Faraday (M.F.)***

b) Forme intégrale – contenu physique

$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}(M,t).\vec{dl} = -\frac{d\phi_{\vec{B}}(t)}{dt}}$ **L'équation de Maxwell-Faraday montre qu'un champ magnétique variable dans le temps est la source d'un champ électrique à circulation non conservative** (contrairement au champ électrostatique). Cette équation rend donc compte du phénomène de l'induction électromagnétique.

2.2.2.Equation du flux magnétique (ou de Maxwell-Thomson)

a) Formulation locale

En régime variable, on montre que le champ magnétique est également à flux conservatif.

$\boxed{div\vec{B}(M,t) = 0}$ $équation\ de\ Maxwell - flux\ (M.\phi)$ L'équation de Maxwell-flux est aussi appelée équation de Maxwell-Thomson

b) Forme intégrale – contenu physique

$\boxed{div\vec{B}(M,t) = 0 \Leftrightarrow \oiint_{(S)} \vec{B}(M,t).\vec{dS} = 0}$ **L'équation de Maxwell-flux exprime le caractère conservatif du flux magnétique.** Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul.

2.2.3.Equation de Maxwell-Gauss

a) Formulation locale

Cette équation relie le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ à sa source, la densité volumique de charge $\rho(M,t)$:

$\boxed{div\vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}}$ $équation\ de\ Maxwell - Gauss\ (M.G.)$

b) Forme intégrale – contenu physique

$\boxed{div\vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}(M,t).\vec{dS} = \frac{Q^{int}(t)}{\varepsilon_0}}$ **L'équation de Maxwell-Gauss exprime la validité du théorème de Gauss qui reste donc valable en régime variable.**

2.2.4.Equation de Maxwell-Ampère

a) Formulation locale

L'équation de Maxwell-Ampère relie le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ à sa source la densité de courant $\vec{j}(M,t)$ ainsi qu'à la dérivée de $\vec{E}(M,t)$ par rapport au temps :

$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu_0\left(\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}\right)}$ $équation\ de\ Mawxell - Ampère\ (M.A.)$

Le terme $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ qui s'ajoute au vecteur densité de courant de conduction $\vec{j}$ dans l'équation (M.A.) est donc homogène à une densité de courant, il est noté $\vec{j}_D$ et est appelé courant de déplacement.

b) Forme intégrale – contenu physique

$(M.A.) \Longrightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M,t).\vec{dl} = \mu_0 i_{enl} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\phi_{\vec{E}}(S,t)}{dt}}$ $équation\ intégrale\ de\ (M.A.)$

C'est le théorème d'Ampère généralisé. La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté quelconque, est liée à l'intensité du courant traversant une surface s'appuyant sur ce contour et au flux électrique à travers cette surface. En conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu_0\left(\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}\right) \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M,t).\vec{dl} = \mu_0 i_{enl} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\phi_{\vec{E}}(S,t)}{dt}}$$

Le terme de courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère signifie qu'un champ électrique variable dans le temps est au même titre qu'un courant source de champ magnétique.

L'équation (M.A.) traduit localement la généralisation en régime variable du théorème d'Ampère de la magnétostatique.

2.2.5. Résumé des équations de Maxwell

En résumé, en un point M à l'instant t, le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ vérifie les quatre équations de Maxwell suivantes, qui constituent le postulat de base de l'électromagnétisme :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(M.F.)} \; ; \; div\vec{B} = 0 \quad \text{(M.}\phi\text{)} \; ; \; div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(M.G.)} \; ; \; \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad \text{(M.A.)}}$$

- Les équations (M.F.) et (M.A.) qui relient un des vecteurs (électrique ou magnétique) du champ électromagnétique aux variations temporelles de l'autre, montrent un couplage entre ces deux champs de vecteur en régime variable qui les rend indissociable.
- Les équations de Maxwell sont des équations linéaires, le champ électromagnétique obéit donc au principe de superposition.

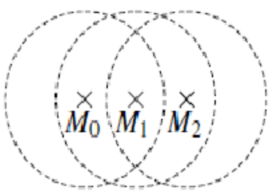
2.3. Cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de conservation de la charge

L'équation (M.A.) s'écrit, en considérant la divergence : $div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \mu_0 div\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$ car pour tout champ de vecteur $\vec{A}$, $div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0$ d'où : $div\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = div\vec{j} + \varepsilon_0 div\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$. Les variables d'espace et de temps étant indépendantes, il vient : $div\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{E}) = 0$. En appliquant l'équation (M.G.), $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on trouve finalement : $\boxed{div\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$. On retrouve ainsi l'équation locale de conservation de la charge. Les équations de Maxwell sont donc conformes à la loi de conservation de la charge électrique.

3. Equation de propagation des champs dans une région vide de charges et courants

3.1. Couplage spatio-temporel entre le champ électrique et le champ magnétique : propagation du champ électromagnétique

Les équations (M.F.) et (M.A.) montrent un couplage entre les variations temporelles du champ magnétique $\vec{B}$ et les variations spatiales du champ électrique $\vec{E}$ (équation de Maxwell-Faraday), ainsi qu'entre les variations temporelles de $\vec{E}$ et les variations spatiales de $\vec{B}$ (équation de Maxwell-Ampère). En effet, considérons qu'en un point M_0 il existe un champ magnétique variable, d'après (M.F.) il existe en tout point M_1 autour de M_0 un champ électrique variable et par conséquent d'après (M.A.) du fait de ce champ électrique variable en M_1, il existe en tout point M_2 autour de M_1 un champ magnétique variable etc. Il en résulte un phénomène de propagation du champ électromagnétique.



Le double couplage entre les variations spatiales de chaque champ et les variations temporelles de l'autre champ présent dans les équations de Maxwell est à l'origine de ce phénomène de propagation.

3.2. Equations de propagation des champs

Soit $\left(\vec{E}(M,t),\vec{B}(M,t)\right)$ le champ électromagnétique créé par les densités de charge $\rho(P,t)$ et de courant $\vec{j}(P,t)$. En utilisant les équations de Maxwell, on établit les équations liant séparément les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans une région dépourvue de charges et de courants, c'est-à-dire dans une région qui n'englobe pas les sources du champ électromagnétique. Dans ce cas $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ et les équations de Maxwell se résument à :

- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (M.F.) ; $div\vec{B} = 0$ (M.ϕ) ; $div\vec{E} = 0$ (M.G.) ; $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (M.A.)

L'opérateur rotationnel et la dérivation par rapport au temps étant effectués sur des variables indépendantes, par application des équations locales (M.F.) et (M.A.) on a : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Or $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$ car $div\vec{E} = 0\ (M.G.)$ $\Longrightarrow$ $\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ F.m^{-1} et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} $\Rightarrow \varepsilon_0\mu_0 = \frac{10^{-16}}{9} S.I. \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3.10^8 m.s^{-1} = c \Longrightarrow \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ où c est la vitesse ou célérité de la lumière dans le vide. Le champ électrique vérifie donc l'équation : $\boxed{\boldsymbol{\Delta\vec{E}(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}}}$

De même pour le champ magnétique, par application des équations (M.A.) et (M.F.) : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = \varepsilon_0\mu_0\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ et $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ avec $div\vec{B} = 0\ (M.\phi)$ $\Longrightarrow$ $\Delta\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ Le champ magnétique vérifie donc l'équation : $\boxed{\boldsymbol{\Delta\vec{B}(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}}}$ **.**

Ces équations aux dérivées partielles des champs sont appelées équations de d'Alembert et montrent que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. Ainsi ces équations de propagation prouvent que le champ électromagnétique est une onde se propageant à la vitesse de la lumière et qualifiée d'onde électromagnétique. La lumière est donc une onde électromagnétique.

4. Cas des champs statiques

En régime stationnaire, le champ électromagnétique est créé par une distribution statique de charge et une distribution stationnaire de courant qui ne dépendent donc pas du temps. L'équation locale de conservation de la charge se réduit alors à : $\boldsymbol{div\vec{j} = 0}$ ($\vec{j}$ devient à flux conservatif). Les champs électrique et magnétique ne dépendent plus du temps et deviennent dissociable. C'est le cas de l'électrostatique et de la magnétostatique. Le champ électromagnétique est qualifié de champ électromagnétique permanent.

4.1. Cas électrostatique

$\vec{B}$ ne dépendant plus du temps $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, l'équation de Maxwell-Faraday aboutit alors à : $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{E}\,(M) = \vec{0}}}$ **.** Par application du théorème de Stokes-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{E}\,(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}.\vec{dl} = 0$. Le champ électrostatique est à circulation conservative (résultat déjà établi en électrostatique). L'équation de Maxwell-Gauss n'est pas modifiée sauf que la densité volumique de charge est statique : $\boxed{\boldsymbol{div\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}}$. Par application du théorème de Green-Ostrogradsky, on retrouve le théorème de Gauss :

$$\boxed{div\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}}$$

4.2. Cas magnétostatique

Le champ magnétostatique étant à flux conservatif, l'équation de Maxwell-flux reste : $\boxed{\boldsymbol{div\vec{B}(M) = 0}}$.

$\vec{E}$ ne dépendant plus du temps $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, l'équation de Maxwell-Ampère devient alors : $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{B}(M) = \mu_0\vec{j}(M)}}$

Par application du théorème de Stokes-Ampère, on retrouve le théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}(M) = \mu_0\vec{j}(M,t) \Leftrightarrow \oint_{C} \vec{B}(M).\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enl}$$

4.3. Equations de Maxwell du champ électromagnétique permanent

En résumé, en tout point M le champ électromagnétique permanent $(\vec{E}, \vec{B})$ vérifie les quatre équations de Maxwell suivantes :

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}} \text{ (M.F.) ; } \boldsymbol{div\vec{B} = 0} \text{ (M.}\phi\text{) ; } \boldsymbol{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \text{ (M.G.) ; } \boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}} \text{ (M.A.)}}$$

4.4. Equation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique

4.4.1. Existence d'un potentiel électrostatique

L'équation (M.F.) $\overrightarrow{rot}\vec{E}(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists\ une\ fonction\ scalaire\ V(M)\ appelée\ potentiel\ telle\ \ que$

$\boldsymbol{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)}$, potentiel défini à une constante additive près. La propriété intégrale de la relation locale $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$ est $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$. La différence de potentiel entre deux points A et B est la circulation de $\vec{E}$ entre ces deux points.

4.4.2. Equation de Poisson

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie **l'équation de Poisson** : $\boxed{\boldsymbol{\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0}}$

4.4.3.Equation de Laplace

Dans une région dépourvue de charge, $\rho(M) = 0$, on obtient **l'équation de Laplace** : $\boxed{\boldsymbol{\Delta V(M) = 0}}$