# Formule de Taylor-Lagrange

Exercice 1.

Soit $x$ un réel strictement positif et $f$ une fonction sur $[0, x]$.

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $f$ sur $[0, x]$ à l'ordre 3 (c'est-à-dire avec un reste où intervient la dérivée troisième de $f$) ? Ecrire cette formule.
2. On pose $f(t) = \ln(1 + t)$. Justifier la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $f$ à l'ordre 3, et écrire cette formule.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $a$ un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
2. Montrer que
$$0 \leq \mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(a)$$
3. En déduire que :
$$\frac{433}{384} \leq \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 de $f$ entre 16 et 17.
2. En déduire que
$$\frac{8317}{4096} < 17^{\frac{1}{4}} < \frac{65}{32}$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. (Hors programme)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ :
$$x \leq \mathrm{argth}(x) \leq x + \frac{x^3}{3}\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 montrer que $10^{-2}$ est une valeur approchée à $5 \times 10^{-5}$ de $\sin(10^{-2})$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

1. Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n + 1$ l'ordre du reste dans la formule.
2. Ecrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, entre 100 et 101 et avec un reste à l'ordre 2.
3. En déduire un nombre décimal qui approche $\frac{1}{\sqrt{101}}$ avec une précision inférieur à $5 \times 10^{-6}$ près.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

1. Montrer que
$$0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3}{6} e^x$$
2. En déduire une valeur approchée de $e^{0,1}$ à $5 \times 10^{-4}$ près.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Montrer que pour tout $t \in I = ]1, +\infty[$,
$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$
On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et $t$.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Enoncé le théorème de Taylor-Lagrange.
2. Soit $f: [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(1+t)$.
   Calculer les dérivées successives de $f$ jusqu'à l'ordre 4.
3. En utilisant Taylor-Lagrange, en déduire l'encadrement de $\ln(2)$ suivant :
$$\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que
$$\left| \cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}$$
2. En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ :
$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Démontrer que
$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right) \right| \leq \frac{3}{9!}$$
En déduire une valeur approchée de $e$ à $10^{-5}$ près.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Inégalités de Kolmogorov

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe $C^2$. On suppose que $f$ et $f''$ sont bornées, et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\,, M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$$

($M_0$ et $M_2$ sont donc des nombres réels tels que, pour tout $x$ réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$. Le but de cet exercice est de prouver que $f'$ est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$ en fonction de $M_0$ et $M_2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à $f$ entre $x$ et $x+h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$
En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$
Ce qui prouve que $f'$ est bornée, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :
3. Etudier la fonction $h \to \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Indication, on pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et $\frac{1}{2}$, puis entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty$ vérifiant la propriété suivante : il existe un polynôme de degré impair tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq |P(x)|$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. En déduire que $f$ est identiquement nulle.
3. Le résultat subsiste-t-il si on suppose que $P$ est de degré pair ?

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ et $\lambda > 0$ vérifiant :
$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq 0 \\ \sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \lambda^n n! \end{cases}$$

1. Montrer que $f = 0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$.
2. Montrer que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$ tel que :
$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)$$

2. Montrer qu'il existe $c_2 \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ tel que :

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_2)$$

3. Montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$$

On utilisera bien sur les questions 1. et 2. et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f'''$.

Allez à : Correction exercice 17

# CORECTIONS

Correction exercice 1.

1. Si $f$ est de classe $C^2$ sur $[0, x]$ et de classe $C^3$ sur $]0, x[$ on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3.

   Il existe $c \in ]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(c)$$

2. $f$ est $C^{+\infty}$ sur $] - 1, +\infty[$ donc sur $[0, x]$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre.

   $f(0) = 0$, $f'(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$ et $f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$

   Il existe $c \in ]0, x[$.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \times \frac{2}{(1+c)^3} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Les dérivées de ch sont

   $\mathrm{ch}'(t) = \mathrm{sh}(t)$, $\mathrm{ch}''(t) = \mathrm{ch}(t)$, $\mathrm{ch}^{(3)}(t) = \mathrm{sh}(t)$, $\mathrm{ch}^{(4)}(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{ch}^{(5)}(t) = \mathrm{sh}(t)$

   ch est une fonction de classe $C^5$(et même $C^\infty$) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, a]$. Il existe $c \in ]0, a[$ tel que :

$$\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(0) + \mathrm{sh}(0)\, a + \mathrm{ch}(0) \frac{a^2}{2!} + \mathrm{sh}(0) \frac{a^3}{3!} + \mathrm{ch}(0) \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5!} \mathrm{sh}(c) = 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + \frac{a^5}{120} \mathrm{sh}(c)$$

2. D'après la question précédente

$$\mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24} = \frac{a^5}{120} \mathrm{sh}(c)$$

   Or sh est une fonction croissante sur $[0, a]$, donc $\mathrm{sh}(0) < \mathrm{sh}(c) < \mathrm{sh}(a)$

   Donc, puisque $a > 0$ :

$$\frac{a^5}{120} \mathrm{sh}(0) < \frac{a^5}{120} \mathrm{sh}(c) < \frac{a^5}{120} \mathrm{sh}(a) \Leftrightarrow 0 < \mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24} < \frac{a^5}{120} \mathrm{sh}(a)$$

   On a même des inégalités strictes.

3. On prend $a = \frac{1}{2}$.

$$0 < \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} < \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) < 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}=\frac{384+48+1}{384}=\frac{433}{384}$$

Et

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}=\frac{1}{32\times 120}=\frac{1}{3840}$$

De plus

$$\frac{1}{2}<\ln(2)\Rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\operatorname{sh}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}<1$$

Donc

$$\frac{433}{384}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow f(16)=(16)^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Rightarrow f'(16)=\frac{1}{4}\times(2^4)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times 2^{-3}=\frac{1}{32}$$

$$f''(x)=-\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}\Rightarrow f''(c)=-\frac{3}{16}c^{-\frac{7}{4}}$$

Il existe $c\in\,]16,17[$ tel que

$$f(17)=f(16)+f'(16)(17-16)+f''(c)\frac{(17-16)^2}{2!}\Leftrightarrow 17^{\frac{1}{4}}=2+\frac{1}{32}-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}$$

2.

$$16<c<17\Rightarrow 2<c^{\frac{1}{4}}<17^{\frac{1}{4}}\Rightarrow 2^7<c^{\frac{7}{4}}<17^{\frac{7}{4}}\Rightarrow 17^{-\frac{7}{4}}<c^{-\frac{7}{4}}<2^{-7}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{32}2^{-7}<-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<-\frac{3}{32}\times 17^{-\frac{7}{4}}\Rightarrow -\frac{3}{32\times 128}<-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<0$$

$$\Rightarrow 2+\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}<2+\frac{1}{32}-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<2+\frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{8192+128-3}{4096}<17^{\frac{1}{4}}<\frac{65}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{8317}{4096}<17^{\frac{1}{4}}<\frac{65}{32}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4. (Hors programme)

argth est une fonction de classe $C^2$ sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3. Pour $x>0$

$f(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1-t)$, d'où $f(0)=0$

Donc $f'(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{-1}+\frac{1}{2}(1-t)^{-1}$, d'où $f'(0)=1$

$f''(t)=-\frac{1}{2}(1+t)^{-2}+\frac{1}{2}(1-t)^{-2}$ d'où $f''(0)=0$

$f^{(3)}(t)=(1+t)^{-3}+(1-t)^{-3}$, d'où

$f^{(3)}(c)=\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{1}{(1-c)^3}=\frac{(1+c)^3+(1-c)^3}{(1-c^2)^3}=\frac{1+3c+3c^2+c^3+1-3c+3c^2-c^3}{(1-c^2)^3}=2\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$

Il existe $c$ dans l'intervalle $]0,x[$ tel que :

$$\operatorname{argth}(x)=x+\frac{x^3}{6}2\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}=x+\frac{x^3}{3}\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$$

$0 < c < x$ donc $0 < c^2 < x^2$ d'où $1 + 3c^2 < 1 + 3x^2$

Et $0 < 1 - x^2 < 1 - c^2 < 1$ entraine que $1 < \frac{1}{1-c^2} < \frac{1}{1-x^2}$ et que donc $1 < \frac{1}{(1-c^2)^3} < \frac{1}{(1-x^2)^3}$

On en déduit que $0 < \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3} < \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$

On multiplie ces inégalité par $\frac{x^3}{3} > 0$, $0 < \frac{x^3}{3}\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3} < \frac{x^3}{3}\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$, il ne reste qu'à ajouter $x$ à ces inégalités pour conclure.

Si $x = 0$ les égalités sont vérifiées trivialement.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

$$f(t) = \sin(t) \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(t) = \cos(t) \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(t) = -\sin(t)$$

$f$ est $C^1$ sur $[0,10^{-2}]$ et $C^2$ sur $]0,10^{-2}[$ car $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il existe $c \in ]0,10^{-2}[$

$$\sin(10^{-2}) = \sin(0) + (10^{-2} - 0)\cos(0) + \frac{(10^{-2} - 0)^2}{2}(-\sin(c)) \Leftrightarrow \sin(10^{-2})$$
$$= 10^{-2} - \frac{10^{-4}}{2}\sin(c) \Leftrightarrow \sin(10^{-2}) - 10^{-2} = -5 \times 10^{-5}\sin(c)$$
$$\Rightarrow |\sin(10^{-2}) - 10^{-2}| = 5 \times 10^{-5}|\sin(c)| \Rightarrow |\sin(10^{-2}) - 10^{-2}| \leq 5 \times 10^{-5}$$

Donc $10^{-2}$ est une valeur approchée de $\sin(10^{-2})$ à $5 \times 10^{-5}$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1. Si $f$ est une application de classe $C^n$ sur $[a,b]$ et de classe $C^{n+1}$ sur $]a,b[$ alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
2.
$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(100) = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$
$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{t\sqrt{t}} \Rightarrow f'(100) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{100 \times \sqrt{100}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1000} = -\frac{1}{2000}$$
$$f''(t) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right)t^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{t^2\sqrt{t}} \Rightarrow f''(c) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$
Il existe $c \in ]100,101[$
$$\frac{1}{\sqrt{101}} = \frac{1}{10} + (101 - 100) \times \left(-\frac{1}{2000}\right) + \frac{(101-100)^2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{c^2\sqrt{c}} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2000} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$
3.
$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2000}\right| = \frac{3}{8} \times \frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$
$$100 < c < 101 \Leftrightarrow 100^2\sqrt{100} < c^2\sqrt{c} < 101^2\sqrt{101} \Rightarrow 10^5 < c^2\sqrt{c} \Rightarrow \frac{1}{c^2\sqrt{c}} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{3}{8} \times \frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$
$$< \frac{3}{8} \times 10^{-5} < 5 \times \frac{3}{40} \times 10^{-5} < 5 \times \frac{4}{40} \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-6}$$
Donc
$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2000}\right| < 5 \times 10^{-5}$$

Une valeur approchée à $5\times 10^{-5}$ de $\frac{1}{\sqrt{101}}$ est
$$\frac{1}{10}-\frac{1}{2000}=\frac{199}{2000}=0{,}0995$$
Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. L'exponentielle est une fonction $C^\infty$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c\in\left]0,x\right[$ tel que :
$$e^x=e^0+xe^0+\frac{x^2}{2!}e^0+\frac{x^3}{3!}e^c=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^c$$
$$0<e^c<e^x\Rightarrow 0<\frac{x^3}{6}e^c<\frac{x^3}{6}e^x$$
Car l'exponentielle est croissante et que $x>0$, par conséquent
$$1+x+\frac{x^2}{2}<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^c<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^x$$
Ce qui entraine que
$$1+x+\frac{x^2}{2}<e^x<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^x$$
Soit encore
$$0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2}<\frac{x^3}{6}e^x$$
2. On pose $x=0{,}1=10^{-1}$
$$0<e^{0,1}-1-\frac{1}{10}-\frac{1}{200}<\frac{10^{-3}}{6}e^{0,1}<\frac{10^{-3}}{6}\times 3=0{,}5\times 10^{-3}=5\times 10^{-4}$$
Donc
$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=1+0{,}1+0{,}005=1{,}105$$
Est une valeur approchée de $e^{0,1}$ à $5\times 10^{-4}$ près.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t>1$ dit qu'il existe $c\in]1,t[$ tel que
$$\ln(t)=\ln(1)+(t-1)\ln'(1)+\frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c)\Leftrightarrow \ln(t)=t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$1<c<t\Leftrightarrow 1<c^2<t^2\Leftrightarrow \frac{1}{t^2}<\frac{1}{c^2}<1\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2}<\frac{(t-1)^2}{2c^2}<\frac{(t-1)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2}<-\frac{(t-1)^2}{2c^2}<-\frac{(t-1)^2}{2t^2}\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}<t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$
$$\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$
Comme $t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<t-1$, on a bien
$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$
Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Si $f$ est une application de classe $C^n$ sur $[a,b]$ et de classe $C^{n+1}$ sur $]a,b[$ alors il existe $c\in\left]a,b\right[$ tel que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}=(1+t)^{-1}$$
$$f''(t)=-(1+t)^{-2}=-\frac{1}{(1+t)^2}$$
$$f'''(t)=-(-2)(1+t)^{-3}=\frac{2}{(1+t)^3}$$
$$f^{(4)}(t)=2(-3)(1+t)^{-4}=-\frac{6}{(1+t)^4}$$

Remarque :

Il est très maladroit de dériver ces fonctions comme des quotients et donc d'utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$, il est bien préférable de s'apercevoir que ces fonctions sont de la forme $u^\alpha$ et que leur dérivée sont de la forme $\alpha u^{\alpha-1}u'$.

3. On va utiliser la formule avec $a=0$, $b=1$ et $n=3$ (donc le reste est à l'ordre 4)
   Il existe $c\in ]0,1[$

$$f(1)=f(0)+(1-0)f'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}f''(1)+\frac{(1-0)^3}{3!}f'''(0)+\frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(c)$$
$$\ln(2)=\ln(1)+1+\frac{1}{2!}\times(-1)+\frac{1}{3!}\times 2+\frac{1}{4!}\times\left(-\frac{6}{(1+c)^4}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}$$
$$=\frac{6-3+2}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}$$
$$0<c<1\Rightarrow 1<1+c<2\Rightarrow 1<(1+c)^4<2^4=16\Rightarrow\frac{1}{16}<\frac{1}{(1+c)^4}<1\Rightarrow\frac{1}{64}<\frac{1}{4(1+c)^4}<\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow-\frac{1}{4}<-\frac{1}{(1+c)^4}<-\frac{1}{64}\Rightarrow\frac{5}{6}-\frac{1}{4}<\frac{5}{6}-\frac{1}{(1+c)^4}<\frac{5}{6}-\frac{1}{64}$$
$$\Rightarrow\frac{10-3}{12}<\ln(2)<\frac{5\times 32}{6\times 32}-\frac{3}{64\times 3}\Rightarrow\frac{7}{12}<\ln(2)<\frac{157}{192}$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. cos est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $a>0$ avec un reste à l'ordre 5. On pose $f(t)=\cos(t)$
   Il existe $c\in ]0,a[$ tel que :

$$f(a)=f(0)+af'(0)+\frac{a^2}{2!}f''(0)+\frac{a^3}{3!}f^{(3)}(0)+\frac{a^4}{4!}f^{(4)}(0)+\frac{a^5}{5!}f^{(5)}(c)$$
$$f(0)=\cos(0)=1$$
$$f'(t)=-\sin(t)\Rightarrow f'(0)=0$$
$$f''(t)=-\cos(t)\Rightarrow f''(0)=-1$$
$$f^{(3)}(0)=\sin(t)\Rightarrow f^{(3)}(0)=0$$
$$f^{(4)}(t)=\cos(t)\Rightarrow f^{(4)}(0)=1$$
$$f^{(5)}(t)=-\sin(t)$$
$$\cos(a)=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\frac{a^5}{5!}\sin(c)$$

Ce qui entraine que

$$\cos(a)-1+\frac{a^2}{2!}-\frac{a^4}{4!}=-\frac{a^5}{5!}\sin(c)$$

Maintenant on peut prendre la valeur absolue puis majorer la valeur absolu du sinus par 1.

$$\left|\cos(a)-1+\frac{a^2}{2!}-\frac{a^4}{4!}\right|=\left|-\frac{a^5}{5!}\sin(c)\right|=\frac{a^5}{5!}|\sin(c)|\leq\frac{a^5}{5!}$$

2. On prend bien sur $a=\frac{1}{2}$

$$\left|\cos\left(\frac{1}{2}\right)-1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}\right|\leq\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}\Leftrightarrow-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}\leq\cos\left(\frac{1}{2}\right)-1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}\leq\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}\leq\cos\left(\frac{1}{2}\right)\leq1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$

Il reste à simplifier les fractions

$$1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{16\times24}=\frac{384-48+1}{384}=\frac{337}{384}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}=\frac{1}{32\times120}=\frac{1}{3840}$$

$$\frac{337}{384}-\frac{1}{3840}\leq\cos\left(\frac{1}{2}\right)\leq\frac{337}{384}+\frac{1}{3840}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

Soit $x>0$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+t}}=(1+t)^{-\frac{1}{3}}$$

Pour $t>-1$ cette fonction est $C^\infty$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre $0$ et $x>0$ avec un reste à l'ordre $3$. Il existe $c\in]0,x[$ tel que :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(c)$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+t}}=(1+t)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)(1+t)^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{3}$$

$$f''(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(1+t)^{-\frac{7}{3}}\Rightarrow f''(0)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$f^{(3)}(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+t)^{-\frac{10}{3}}\Rightarrow f^{(3)}(c)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$=-\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$(1+t)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\times\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\times\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}=1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$0<c<x\Rightarrow1<1+c<1+x\Rightarrow1<(1+c)^{\frac{10}{3}}<(1+x)^{\frac{10}{3}}\Rightarrow(1+x)^{-\frac{10}{3}}<(1+c)^{-\frac{10}{3}}<1$$

$$\Rightarrow-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}>-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}<\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}<1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

Car

$$-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}<0$$

Si $x=0$ alors les trois termes de ces inégalités sont nuls et dans ce cas il y a égalité. Pour tout $x\geq 0$

$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

$f: t\to e^t$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $1>0$ avec un reste à l'ordre 9.

Il existe $c\in]0,1[$ tel que :

$$f(1)=f(0)+(1-0)f'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}f''(0)+\frac{(1-0)^3}{3!}f^{(3)}(0)+\frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(0)+\frac{(1-0)^5}{5!}f^{(5)}(0)+\frac{(1-0)^6}{6!}f^{(6)}(0)+\frac{(1-0)^7}{7!}f^{(7)}(0)+\frac{(1-0)^8}{8!}f^{(8)}(0)+\frac{(1-0)^9}{9!}f^{(9)}(c)$$

Or pour tout $k\geq 0$, $f^{(k)}(t)=e^t$ donc $f^{(k)}(0)=1$, on a donc

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}e^c$$

Ce qui entraine que

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)=\frac{1}{9!}e^c$$

Puis on prend la valeur absolue et on majore $e^c$ par $e^1=e$, puis $e$ par 3

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)\right|=\left|\frac{1}{9!}e^c\right|=\frac{1}{9!}e^c<\frac{1}{9!}e<\frac{3}{9!}$$

$$\frac{3}{9!}=\frac{3}{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}=\frac{1}{2\times4\times5\times6\times7\times8\times9}=\frac{1}{2\times5}\times\frac{1}{4\times6}\times\frac{1}{7\times8\times9}<\frac{1}{10}\times\frac{1}{20}\times\frac{1}{7\times8\times9}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{100}\times\frac{1}{7\times8\times9}=10^{-3}\times\frac{5}{7\times8\times9}=10^{-3}\times\frac{5}{504}<10^{-3}\times\frac{5}{500}=10^{-3}\times\frac{1}{100}=10^{-5}$$

Par conséquent

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$$

Est une valeur approchée de $e$ à $10^{-5}$ près.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2.
   Il existe $c\in]x,x+h[$ tel que :

$$f(x+h)=f(x)+(x+h-x)f'(x)+\frac{(x+h-x)^2}{2!}f''(c)\Leftrightarrow f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(c)$$

2. D'après 1. :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(c)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right)$$

$$\Rightarrow |f'(x)|=\frac{\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|}{h}=\frac{\left|f(x+h)+\left(-f(x)\right)+\left(-\frac{h^2}{2}f''(c)\right)\right|}{h}$$

$$\leq\frac{|f(x+h)|+|-f(x)|+\left|-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|}{h}=\frac{|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(c)|}{h}$$

$$\leq\frac{M_0+M_0+\frac{h^2}{2}M_2}{h}=\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$$

Franchement j'ai fait des chichis parce que l'on peut très bien écrire directement que :

$$\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|\leq|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(c)|$$

On rappelle l'inégalité triangulaire

$$|A+B+C|\leq|A|+|B|+|C|$$

On rappelle que l'inégalité suivante est en générale très fausse

$$|A-B|\leq|A|-|B|$$

Et puisqu'on est dedans rappelons que

$$\big||A|-|B|\big|\leq|A-B|$$

3. Posons $g(h)=\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$, pour $h>0$.

$$g'(h)=-\frac{2M_0}{h^2}+\frac{M_2}{2}=\frac{-4M_0+h^2M_2}{2h^2}=\frac{M_2}{2h^2}\left(h^2-\frac{4M_0}{M_2}\right)=\frac{M_2}{2h^2}\left(h-2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)\left(h+2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)$$

Cette dérivée s'annule pour

$$h_0=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$$

Elle négative pour

$$0<h<h_0$$

Et positive pour

$$h>h_0$$

Elle admet un minimum en $h_0$

$$g(h_0)=\frac{2M_0}{h_0}+\frac{h_0M_2}{2}=\frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}+\frac{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}M_2}{2}=\sqrt{M_0M_2}+\sqrt{M_0M_2}=2\sqrt{M_0M_2}$$

On déduit de cela que pour tout $h$

$$g(h)\leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Or $|f'(x)|\leq g(h)$ donc pour tout $x$

$$|f'(x)|\leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Par conséquent

$$M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre 0 et $\frac{1}{2}$

Il existe $c_1 \in ]0, h[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) f'(0) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2}{2!} f''(c_1)$$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} f''(c_1)$$

$f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre $\frac{1}{2}$ et 1

Il existe $c_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) f'(1) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}{2!} f''(c_2)$$

On rappelle que la formule « marche » aussi si $b = \frac{1}{2} < a = 1$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{8} f''(c_2)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{8} f''(c_1) = 1 + \frac{1}{8} f''(c_2)$$

D'où

$$f''(c_1) - f''(c_2) = 8$$

Si $-4 < f''(c_1) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_1)| < 4$ et $-4 < f''(c_2) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_2)| < 4$ alors $-4 < -f(c_2) < 4$ et $-8 < f''(c_1) - f''(c_2) < 8$, l'inégalité de droite contredit $f''(c_1) - f''(c_2) = 8$, par conséquent soit $|f''(c_1)| \geq 4$, soit $|f''(c_2)| \geq 4$, il existe bien une valeur $c \in ]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. $P$ est un polynôme de degré impair donc $P$ admet une racine réelle (c'est une conséquent quasi-évidente du théorème des valeurs intermédiaire puisque les limites en $\pm\infty$ d'un polynôme sont $\pm\infty$ et que les polynômes sont des fonctions continues), appelons $a$ cette racine
$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq |P(a)| = 0$$
2. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre $n+1$, sur $]a, x[$ ou $]x, a[$, selon que $a < x$ ou que $x < a$, intervalle que l'on nomme $I$, il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$
$$= \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$
Donc
$$|f(x)| = \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} |P(c)|$$
L'inégalité vient de l'hypothèse de l'énoncé. Puis comme $P$ est une fonction continue sur un intervalle fermé borné, il existe $M$ tel que pour tout $c \in I$, $|P(x)| \leq M$, par conséquent
$$|f(x)| \leq \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Et enfin on fait tendre $n$ vers l'infini, comme $M$ ne dépend pas de $n$, $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$ tend vers 0, on en déduit que $f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3. Non, il suffit de prendre une fonction à dérivée bornée comme $f=\cos$ , les dérivées successives de cette fonction sont $\pm\cos$ et $\pm\sin$ donc
$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq 1$$
1 étant le polynôme constant égal à 1 (il s'agit donc d'un polynôme de degré pair), et pourtant $f\neq 0$.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre $n$, sur $]0,x[$ ou $]x,0[$, selon que $0<x$ ou que $x<0$, intervalle que l'on nomme $I$, il existe $c\in I$ tel que
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(c)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)$$
On prend $x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[\Leftrightarrow |x|<\frac{1}{\lambda}$
$$|f(x)|=\left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)\right|=\frac{|x|^n}{n!}\left|f^{(n)}(c)\right|\leq\frac{|x|^n}{n!}\sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right|\leq(\lambda|x|)^n$$
Comme $\lambda|x|\in]0,1[$,
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda|x|)^n=0$$
Cela montre que $f(x)=0$ pour tout $x\neq 0$. Comme $f^{(0)}=f$ la première condition entraine que $f(0)=0$. On aurait peut conclure aussi en invoquant la continuité de $f$ en 0.
2. Soit
$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{2\lambda}\right)$$
$$g^{(n)}(x)=f^{(n)}\left(x+\frac{1}{2\lambda}\right)$$
C'est évident, il faut quand même noter que la dérivée de $g$ est la dérivée composée de $f$ avec la fonction $x\to x+\frac{1}{2\lambda}$, dont la dérivée est 1, et que donc que $g'(x)=f'\left(x+\frac{1}{2\lambda}\right)\times 1$, les dérivées suivantes s'en déduisent par une récurrence bien évidente.
Reprenons
$$g^{(n)}(0)=f^{(n)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=0$$
Car $\frac{1}{2\lambda}\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, en utilisant la question 1°) pour $g$ (au lieu de $f$) $g=0$ sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, comme
$$-\frac{1}{\lambda}<x<\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{1}{2\lambda}<x+\frac{1}{2\lambda}<\frac{3}{2\lambda}$$
On en déduit que $f=0$ sur $\left]-\frac{1}{2\lambda},\frac{3}{2\lambda}\right[$, et donc sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{3}{2\lambda}\right[$, ce qui signifie que l'on a « agrandi » l'intervalle où $f$ est nulle de $\frac{1}{2\lambda}$ à droite. Cela doit vous convaincre qu'en recommençant on pourra agrandir l'intervalle autant qu'on le souhaite à droite, et évidemment on peut faire pareil à gauche. Pour cela considérons les fonctions
$$g_p(x)=f\left(x+\frac{p}{2\lambda}\right),p\in\mathbb{N}$$
Et faisons un raisonnement par récurrence
$$H_p:\forall x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+2}{2\lambda}\right[,f(x)=0$$
$H_0$ est vraie c'est le 1°), $H_1$, c'est ce que nous venons de montrer.
Montrons que pour $p\geq 0$, $H_p\Rightarrow H_{p+1}$
Comme ci-dessus

$$g_{p+1}^{(n)}(x)=f^{(n)}\left(x+\frac{p+1}{2\lambda}\right)$$

Par conséquence

$$g_{p+1}^{(n)}(0)=f^{(n)}\left(\frac{p+1}{2\lambda}\right)=0$$

Car $\frac{p+1}{2\lambda}\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+2}{2\lambda}\right[$ et d'après l'hypothèse de récurrence.

En utilisant le 1°) pour la fonction $g_{p+1}$ au lieu de la fonction $f$

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[,g_{p+1}(x)=0$$

Ce qui entraine que

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[,f\left(x+\frac{p+1}{2\lambda}\right)=0$$

$$-\frac{1}{\lambda}<x<\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{1}{\lambda}+\frac{p+1}{2\lambda}<x+\frac{p+1}{2\lambda}<\frac{1}{\lambda}+\frac{p+1}{2\lambda}\Leftrightarrow\frac{p-1}{2\lambda}<x+\frac{p+1}{2\lambda}<\frac{p+3}{2\lambda}$$

On en déduit que $f$ est nulle sur $\left]\frac{p-1}{2\lambda},\frac{p+3}{2\lambda}\right[$, comme $f$ était déjà nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+2}{2\lambda}\right[$, $f$ est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+3}{2\lambda}\right[$$

C'est bien la proposition $H_{p+1}$.

Ceci étant vraie pour tout $p$ on en déduit que $f$ est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda},+\infty\right[$$

Par un raisonnement analogue on en déduit que $f$ est nulle sur $\left]-\infty,\frac{1}{\lambda}\right[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1.

$f$ est $C^2$ sur $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ et $C^3$ sur $\left]\frac{a+b}{2},b\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(b-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_1)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)$$

2. $f$ est $C^2$ sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ et $C^3$ sur $\left]a,\frac{a+b}{2}\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(a-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_2)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^3}{48}f'''(c_2)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)$$

3.

$$\begin{aligned}
f(b)-f(a)&\\
&=\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)\right)\\
&-\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)\right)\\
&=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}\big(f'''(c_1)+f'''(c_2)\big)\\
&=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\times\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}
\end{aligned}$$

$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est le milieu de $f'''(c_1)$ et de $f'''(c_2)$ donc $\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est compris entre $f'''(c_1)$ et $f'''(c_2)$, autrement dit

Si $f'''(c_1)<f'''(c_2)$

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_1),f'''(c_2)\right[$$

Et si $f'''(c_2)<f'''(c_1)$

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_2),f'''(c_1)\right[$$

Comme $f'''$ est continue sur $[a,b]$ donc sur $[c_1,c_2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe $c\in[c_1,c_2]$ tel que

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}=f'''(c)$$

Par conséquent

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

Je n'ai pas traité le cas où $f'''(c_1)=f'''(c_2)$, mais dans ce cas $c=c_1$ ou $c=c_2$ convient de manière évidente.

Allez à : Exercice 17