Devoir Surveillé n° 4 (4h)

Correction du problème – Groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$.

Questions préliminaires

1. Soit $t_0 \in [0,1]$, et $\varepsilon > 0$. Il existe donc δ tel que pour tout $t \in\in [0,1]$,
$$|t - t_0| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$
Soit donc $t \in [0,1]$ tel que $|t - t_0| < \delta$. Par l'inégalité triangulaire, on a alors
$$||f(t)| - |f(t_0)|| < |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$
Ainsi, $\boxed{t \mapsto |f(t)| \text{ est bien continue en } t_0}$, et ceci pour tout $t_0 \in [0,1]$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $(t_0, x_0) \in [0,1]^2$.
   - On note $J = \{i \in I \mid (t_0, x_0) \in F_i\}$ et $K = \{i \in I \mid (t_0, x_0) \notin F_i\}$.
   - Comme F_i est fermé, si $i \in K$, il existe $\delta_i > 0$ tel que $B((t_0, x_0), \delta_i) \cap F_i = \varnothing$.
   Par ailleurs, par continuité de $H_{|F_i}$, pour tout $i \in J$, il existe δ_i tel que pour tout $(t,x) \in [0,1]$, si $(t,x) \in F_i$,
   $$\|(t,x) - (t_0,x_0)\| < \delta_i \Longrightarrow |H(t,x) - H(t_0,x_0)| < \varepsilon.$$
   On définit $\delta = \min_{i \in I} \delta_i$.
   - Soit $(t,x) \in [0,1]^2$ tel que $\|(t,x) - (t_0,x_0)\| < \delta$. Par hypothèse, il existe $i_0 \in I$ tel que $(t,x) \in F_{i_0}$. Puisque $\delta < \delta_i$, on ne peut pas avoir $i_0 \in K$ (cela contredirait la définition de δ_i), donc $i_0 \in J$. Comme $\delta < \delta_{i_0}$, on en déduit que
   $$|H(t,x) - H(t_0,x_0)| < \varepsilon.$$
   Ainsi, $\boxed{H \text{ est continue}}$.

Partie I – Lacets, homotopie et groupe fondamental

1. **Produit de lacets**
   - L'application $t \mapsto \gamma_1(2t)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ (composée de fonctions continues), et coïncide sur l'ouvert $]-\infty, \frac{1}{2}[$ avec $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. Donc $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ est continue sur l'intersection de son domaine et de $]-\infty, \frac{1}{2}[$, donc sur $]0, \frac{1}{2}[$.
   - De même, l'application $t \mapsto \gamma_2(2t-1)$ est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et coïncide sur l'ouvert $]\frac{1}{2}, +\infty[$ avec $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. Ainsi, $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ est continue sur $]\frac{1}{2}, +\infty[\cap [0,1] =]\frac{1}{2}, 1[$.
   - On détermine la continuité en $\frac{1}{2}$ en considérant les limites à gauche et à droite, qu'on trouve grâce à la continuité de γ_1 en 1 et de γ_2 en 0 :
     * $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}^-} \gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}^-} \gamma_1(2t) = \lim\limits_{t \to 1^-} \gamma_1(t) = \gamma_1(1) = z_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2(z_0)$
     * $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}^+} \gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}^+} \gamma_2(2t-1) = \lim\limits_{t \to 0^+} \gamma_2(t) = \gamma_2(0) = z_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2(z_0)$.

     Ainsi, $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ est continue en $\frac{1}{2}$.

   On en déduit que $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ est continue, et $\gamma_1 \cdot \gamma_2(0) = \gamma_1 \cdot \gamma_2(1) = z_0$, donc $\boxed{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \mathcal{L}_{z_0}}$.

2. **La relation d'homotopie**

   (a) On définit H par :
   $$\forall (t,x) \in [0,1]^2, \quad H(t,x) = (\gamma(t), x).$$

- L'application H est continue en chacune de ses coordonnées, donc d'après les résultats rappelés, H est continue sur $[0,1]^2$.
- Pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,0) = \gamma(t)$
- Pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,1) = \gamma(t)$
- Pour tout $x \in [0,1]$, $H(0,x) = \gamma(0) = z_0$ et $H(1,x) = \gamma(1) = z_0$.

Ainsi, H est bien une homotopie de γ sur lui-même, donc $\boxed{\gamma \underset{H}{\sim} \gamma}$.

(b) Soit γ_0 et γ_1 homotopes, et H une homotopie de γ_0 à γ_1. On définit H' par :

$$\forall (t,x) \in [0,1]^2, \quad H'(t,x) = H(t, 1-x).$$

- D'après la propriété de composition admise dans l'énoncé, H' est bien continue sur $[0,1]^2$.
- Pour tout $t \in [0,1]$, $H'(t,0) = H(t,1) = \gamma_1(t)$
- Pour tout $t \in [0,1]$, $H'(t,1) = H(t,0) = \gamma_0(t)$
- Pour tout $x \in [0,1]$, $H'(0,x) = H(0,1-x) = z_0$ et $H'(1,x) = H(1,1-x) = z_0$.

Ainsi, H' est une homotopie de γ_1 à γ_0, donc $\boxed{\gamma_1 \underset{H}{\sim} \gamma_0}$

(c) Soit $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ trois lacets dans $\mathcal{L}_{z_0}$, et H_1 une homotopie de γ_0 à γ_1 et H_2 une homotopie de γ_1 à g_2. On définit H sur $[0,1]^2$ par :

$$H(t,x) = \begin{cases} H_1(t, 2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(t, 2x-1) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

- D'après la propriété de composition, les applications $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 2x-1$ étant continues, $H_{|[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]}$ et $H_{|[0,1]\times[\frac{1}{2},1]}$ sont continues. On vérifie qu'on peut bien fermer l'intervalle en $\frac{1}{2}$ pour la deuxième puisque la définition de H par H_2 est aussi valable pour $x = \frac{1}{2}$:

$$H_2\left(t, 2\cdot\frac{1}{2} - 1\right) = H_2(t,0) = \gamma_1(t) = H_1(t,1) = H\left(t, \frac{1}{2}\right).$$

- Les ensembles $[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]$ et $[0,1]\times[\frac{1}{2},1]$ sont fermés (produits d'intervalles fermés, ou via la propriété admise, ces ensembles étant déterminés par les inéquations larges $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ pour la première et $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ pour la deuxième).
  Ainsi, d'après la question préliminaire 2, H est continue sur $[0,1]^2$.
- Pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,0) = H_1(t,0) = \gamma_0(t)$ et $H(t,1) = H_2(t,1) = \gamma_2(t)$
- Pour tout $x \in [0,1]$,
  * $H(0,x) = H_1(0,x) = z_0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$
  * $H(0,x) = H_1(0,x) = z_0$ si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$.
- De même, pour tout $x \in [0,1]$, $H(1,x) = z_0$.

Ainsi, $\boxed{H \text{ est une homotopie de } \gamma_0 \text{ à } \gamma_2}$.

(d) Les trois questions précédentes montrent successivement la réflexivité, la symétrie et la transitivité de $\underset{H}{\sim}$.

Ainsi, c'est une $\boxed{\text{relation d'équivalence}}$.

3. **Le groupe fondamental $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$**

(a) Soit $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0', \gamma_1'$ quatre lacets de $\mathcal{L}_{z_0}$. On suppose $\gamma_0 \underset{H}{\sim} \gamma_0'$ et $\gamma_1 \underset{H}{\sim} \gamma_1'$, et on se donne H_0 une homotopie de γ_0 à γ_0' et H_1 une homotopie de γ_1 à γ_1'.

- On définit H par :

$$\forall (t,x) \in [0,1]^2 \quad H(t,x) = \begin{cases} H_0(2t, x) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_1(2t-1, x) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

  Cette définition n'est pas contradictoire, puisque pour $t = \frac{1}{2}$,

$$H_0(2t, x) = H_0(1,x) = z_0 = H_1(0,x) = H_1(2t-1, x).$$

- Ainsi, les applications $(x,t) \mapsto 2t$ et $(x,t) \mapsto x$ étant continues, par la propriété de composition, $(x,t) \mapsto H_0(2t,x)$ est continue sur $F_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$ et de même, $(x,t) \mapsto H_1(2t-1,x)$ est continue sur $F_2 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$ Par conséquent, $H_{|F_1}$ et $H_{|F_2}$ sont continues. Comme F_1 et F_2 sont fermés (de même que dans la question I-1), et $F_1 \cup F_2 = [0,1]^2$, on déduit de la QP 2 que H est continue sur $[0,1]^2$.

- Pour tout $t \in [0,1]$,

$$H(t,0) = \begin{cases} H_0(2t,0) = \gamma_0(2t) = \gamma_0 \cdot \gamma_1(t) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ H_1(2t-1,0) = \gamma_1(2t-1) = \gamma_0 \cdot \gamma_1(t) & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

  Ainsi, $H(t,0) = \gamma_0 \cdot \gamma_1(t)$.
- On montre de même que $H(t,1) = \gamma_0' \cdot \gamma_1'(t)$.
- Pour tout $x \in [0,1]$,

$$H(0,x) = H_0(0,x) = z_0 \qquad \text{et} \qquad H(1,x) = H_1(1,x) = z_0.$$

On en déduit que $\boxed{H \text{ est une homotopie de } \gamma_0 \cdot \gamma_1 \text{ vers } \gamma_0' \cdot \gamma_1'}$.
Ainsi, le produit des lacets passe au quotient et définit une loi, encore notée $\cdot$, sur $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$.

(b) Soit $\gamma \in \mathcal{L}_{x_0}$ et e le lacet de $\mathcal{L}_0$ constant de valeur z_0.

- Soit H définie sur $[0,1]^2$ par :

$$H(t,x) = \begin{cases} z_0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(1-x) \\ \gamma\left(\frac{2}{x+1}\left(t - \frac{1}{2}(1-x)\right)\right) & \text{si } \frac{1}{2}(1-x) \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

  Cette définition n'est pas contradictoire puisque, lorsque $t = \frac{1}{2}(1-x)$,

$$\gamma\left(\frac{2}{x+1}\left(t - \frac{1}{2}(1-x)\right)\right) = \gamma(0) = z_0.$$

- Ainsi, $(x,t) \mapsto \dfrac{2}{x+1}\left(t - \dfrac{1}{2}(1-x)\right)$ étant continue par propriété admise (fraction rationnelle en t, x, bien définie sur tout le domaine qui nous intéresse), et γ étant continue, la restriction de H est continue sur F_1 défini par les inégalités affines larges $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\frac{1}{2}(x-1) \leqslant t \leqslant 1$ (ce qui assure que F_1 est fermé.
- De même, en considérant F_2 le fermé défini par les inégalités larges $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(x-1)$, $H_{|F_2}$ est continue (puisque constante).
- D'après QP2, on en déduit que H est continue sur $[0,1]^2$.
- Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$,

$$H(t,0) = \begin{cases} z_0 = e(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

  Ainsi, $H(t,0) = e \cdot \gamma(t)$.
- On vérifie facilement que pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,1) = \gamma(t)$.
- Enfin, pour tout $x \in [0,1]$:

$$H(0,x) = z_0 \qquad \text{et} \qquad H(1,x) = \gamma\left(\frac{2}{x+1}\left(1 - \frac{1}{2}(1-x)\right)\right) = \gamma(1) = z_0.$$

Ainsi, H est bien une homotopie de $e \cdot g$ vers g. On en déduit que $\boxed{e \cdot \gamma \underset{H}{\sim} \gamma}$.

(c) On fait une construction similaire en définissant H de la manière suivante :

$$\forall (t,x) \in [0,1]^2 \quad H(t,x) = \begin{cases} z_0 & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2}(x+1) \\ \gamma\left(\frac{2t}{x+1}\right) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2}(x+1). \end{cases}$$

- La définition n'est pas contradictoire puisque lorsque $t = \frac{1}{2}(x+1)$,

$$\gamma\left(\frac{2t}{x+1}\right) = \gamma(1) = z_0.$$

- Le même argument que dans la question précédente assure la continuité de H

- Pour tout $t \in [0,1]$,
$$H(t,0) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ z_0 & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$
Ainsi, $H(t,0) = \gamma \cdot e(t)$.
- Pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,1) = \gamma(t)$
- Pour tout $x \in [0,1]$, on vérifie facilement $H(0,x) = H(1,x) = z_0$.

Ainsi, H est une homotopie de $\gamma \cdot e$ vers e. Donc $\boxed{\gamma \cdot e \underset{H}{\sim} \gamma}$

(d) - Pour commencer, on décrit $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ en itérant la construction de I-1 :
$$\forall t \in [0,1], \quad (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 = \begin{cases} \gamma_1(4t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1 & \text{si } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$
- De même :
$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \quad \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)\gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$
- On définit cette fois H par :
$$H(t,x) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4t}{x+1}\right) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}(x+1) \\ \gamma_2\left(4t-(x+1)\right) & \text{si } 14(x+1) \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}(x+2) \\ \gamma_3\left(\frac{4}{2-x}\left(t - \frac{1}{4}(x+2)\right)\right) & \text{si } \frac{1}{4}(x+2) \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Je vous laisse faire les vérifications (faciles) du fait que H est bien une homotopie de $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ vers $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot g_3)$. Ainsi :
$$\boxed{(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \underset{H}{\sim} \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot g_3)}.$$

(e) On définit cette fois (c'est la dernière homotopie à décrire !) :
$$\forall (t,x) \in [0,1]^2 \quad H(t,x) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(1-x) \\ \gamma\left(\frac{1}{2}(1-x)\right) = \gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}(1+x)\right) & \text{si } \frac{1}{2}(1-x) \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(1+x) \\ \gamma^{-1}(2t+1) & \text{si } \frac{1}{2}(1+x) \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Là encore une vérification facile du même type de les précédentes montrent que H est une homotopie de $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ sur le lacet e. Donc $\boxed{\gamma \cdot \gamma^{-1} \underset{H}{\sim} e}$

En remarquant que $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$, on a alors aussi $\boxed{\gamma^{-1} \cdot \gamma \underset{H}{\sim} e}$.

(f) Les questions précédentes nous assurent que la loi de $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$ obtenue en passant le produit des lacets au quotient est associative, que $\overline{e}$ est neutre, et que toute classe $\overline{\gamma}$ admet un inverse γ^{-1}. Ainsi, $\boxed{\Pi_1(\mathbb{C}^*) \text{ est un groupe}}$.

Partie II – Théorème de relèvement et indice d'un lacet

1. Théorème de relèvement.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon$. Pour tout $z' \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z'| < \varepsilon$, on a alors
$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')| = |\mathrm{Re}(z - z')| \leqslant |z - z'| < \varepsilon$$
et de même
$$|\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z')| = |\operatorname{Im}(z - z')| \leqslant |z - z'| < \varepsilon$$
Ainsi, $\boxed{z \mapsto \mathrm{Re}(z) \text{ et } z \mapsto \operatorname{Im}(z) \text{ sont continues sur } \mathbb{C}}$.

(b) La réciproque de φ_1 est la fonction argument principale. On sait comment elle s'exprime en fonction de Arctan pour les nombres complexes de partie réelle strictement positive :

$$\forall z \in \mathbb{U}_1, \quad \xi_1(z) = \text{Arctan}\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right).$$

La fonction $z \mapsto \dfrac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{U}_1$ d'après la question précedente. Par ailleurs Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit, par composition, que $\boxed{\xi_1 \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

(c) On fait rapidement de même sur les autres parties de $\mathbb{U}$:

- Sur $\mathbb{U}_2$, $\varphi_2 :]0, \pi[\to \mathbb{U}_2$ est bijective, et sa réciproque s'exprime ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{U}_2, \quad \xi_2(z) = \frac{\pi}{2} + \psi_1\left(\mathrm{e}^{-\frac{pi}{2}}z\right) = \frac{\pi}{2} + \psi_1\left(-\mathrm{i}\, z\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}\right).$$

On obtient la continuité de même que dans le premier cas.

- De même, $\varphi_3 :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{U}_3$ est bijective et sa réciproque vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{U}_3, \quad \xi_3(z) = \pi + \text{Arctan}\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right),$$

et est donc continue.

- Enfin, $\varphi_4 :]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\to \mathbb{U}_4$ est bijective et sa réciproque vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{U}_4, \quad \xi_4(z) = \frac{3\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}\right)$$

et est donc continue.

(d) D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. On peut remarquer que, du fait du chevauchement important entre les ensembles $\mathbb{U}_\ell$, si ε est suffisamment petit, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existera ℓ tel que pour tout $z' \in \mathbb{U}$ tel que $|z' - z| < \varepsilon$, $z' \in \mathbb{U}_\ell$. En effet, on peut trouver ℓ tel que z soit à distance angulaire supérieure à $\frac{\pi}{4}$ du bord de $\mathbb{U}_\ell$ et par connséquent, on peut prendre $\varepsilon = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - 1|$, c'est-à-dire le côté d'un octogone régulier innscrit dans le cercle unité.

Ainsi, en considérant ε de la sorte, et en définissant η un module de continuité uniforme pour f associé à ε, on peut considérer n tel que $\frac{1}{n} < \eta$ et considérer la subdivision définie par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \sigma_k = \frac{1}{n}.$$

On considère, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, U_ℓ une des portions de $\mathbb{U}$ vérifiant la propriété énoncée ci-dessus pour $z = f(\sigma_k)$ et ε. Ainsi, pour tout $t \in [\sigma_k, \sigma_{k+1}]$, puisque $|t - \sigma_k| \leqslant \frac{1}{n} < \eta$, $|f(t) - f(\sigma_k)| < \varepsilon$, et par définition de $\mathbb{U}_\ell$, $f(t) \in \mathbb{U}_\ell$.

On a donc bien trouvé ℓ tel que $\boxed{f([\sigma_k, \sigma_{k+1}]) \subset \mathbb{U}_\ell}$.

(e) On montre par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ l'existence d'un relèvement sur $[0, \sigma_k]$ tel que souhaité.

- Pour $k = 1$, on considère ℓ tel que $[\sigma_0, \sigma_1] \subset \mathbb{U}_\ell$. Puisque $\xi_\ell(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0}) \equiv \theta_0\ [2\pi]$, on peut considérer $a_1 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta_0 = 2a_1\pi + \xi_\ell(f(0)).$$

La fonction $t \mapsto \xi_\ell(f(t))$ est alors un relèvement continu de f sur $[1, \sigma_1]$, d'après la question 1.

- On suppose un relèvement continu $\tilde{f}$ obtenu sur $[0, \sigma_k]$, $k \in [\![1, n-1]\!]$. En particulier,

$$\tilde{f}(\sigma_k) \equiv \arg(f(s_k))\ [2\pi].$$

On considère *ell* tel que $[\sigma_k, \sigma_{k+1}] \subset \mathbb{U}_\ell$. Puisque $\xi_\ell(f(\sigma_k)) \equiv \arg(f(s_k))\ [2\pi]$, il existe $a_k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\tilde{f}(\sigma_k) = \xi_\ell(f(\sigma_k)) + 2a_k\pi.$$

On prolonge $\tilde{f}$ en définissant

$$\forall t \in [\sigma_k, \sigma_{k+1}] \ \ \xi_\ell(f(t)) + 2a_k\pi.$$

La fonction $\tilde{f}$ obtenue est alors continue sur $[0, \sigma_k[$ et à gauche en σ_k (par hypothèse de récurrence), ainsi que sur $]\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ et à droite en σ_k (par continuité de ξ_ℓ). Elle est donc continue, et par définition même de ξ_ℓ (ainsi que par HR pour la première partie du domaine) :

$$\forall t \in [0, \sigma_{k+1}], \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{f}(t)} = f(t).$$

- Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En particulier, pour $k = n$, on obtient $\boxed{\text{l'existence d'un relèvement continue défini sur } [0,1]}$.

(f) Soit $\tilde{f_1}$ et $\tilde{f_2}$ sont deux relèvements continus de f tels que $\tilde{f_1}(0) = \tilde{f_2}(0) = \theta_1$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{f_1}(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{f_2}(t)} = f(t),$$

donc

$$\tilde{f_1}(t) \equiv \tilde{f_2}(t)\ [2\pi].$$

Par conséquent,

$$(\tilde{f_2} - \tilde{f_1})([0,1]) \subset 2\pi\mathbb{Z}$$

Supposons qu'il existe $a \neq 0$ et $t \in [0, 1]$ tel que

$$(\tilde{f_2} - \tilde{f_1})(t) = 2\pi a.$$

Puisque $(\tilde{f_2} - \tilde{f_1})(0) = 0$, et puisque $\tilde{f_2} - \tilde{f_1}$ est continue, d'après le TVI, elle prend toutes les valeurs entre 0 et $2\pi a$, ce qui contredit la description obtenue pour son image.
Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $(\tilde{f_2} - \tilde{f_1})(t) = 0$, donc $\boxed{\tilde{f_1} = \tilde{f_2}}$.

2. **Indice d'un lacet**

(a) D'après la QP1, $z \mapsto |z|$ est continue, donc par composition, $t \mapsto |\gamma(t)|$ est continue sur $[0, 1]$. De plus, elle ne s'anule pas, donc $\frac{1}{|\gamma(t)|}$ est continue aussi. Par propriété de continuité d'un produit, on en déduit que $\boxed{\psi_\gamma \text{ est continue}}$.

(b) Soit $\theta_1 \equiv \theta_0\ [2\pi]$. Alors de façon évidente, si $\tilde{\psi_\gamma}$ désigne le relèvement obtenu avec θ_0, l'application

$$\tilde{\psi_\gamma}' : t \mapsto \tilde{\psi_\gamma}(t) + \theta_1 - \theta_0$$

est un relèvement tel que $\tilde{\psi_\gamma}'(0) = \theta_1$. C'est donc l'unique relèvement de ce type. Or, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi_\gamma}'(1) - \tilde{\psi_\gamma}'(0)) &= \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi_\gamma}(1) + (\theta_1 - \theta_0) - \tilde{\psi_\gamma}(0) - (\theta_1 - \theta_0)) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi_\gamma}(1) - \tilde{\psi_\gamma}(0))\end{aligned}$$

et $\boxed{\text{les deux relèvements définissent bien le même indice}}$.

(c) Par définition du relèvement et du fait que γ est un lacet :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi_\gamma}(0)} = \psi_\gamma(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0} = \psi_\gamma(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi_\gamma}(1)}.$$

Ainsi,

$$\tilde{\psi_\gamma}(0) \equiv \tilde{\psi_\gamma}(1) \quad [2\pi],$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi_\gamma}(1) - \tilde{\psi_\gamma}(0)) \in \mathbb{Z}}.$$

(d) Puisque γ est à valeurs dans $\mathbb{U}$, $\gamma = \psi_\gamma$. De plus, $\gamma(0) = 1$. On peut donc prendre $\theta_0 = 0$. Ainsi, par définition même d'un relèvement, $\tilde{\psi_\gamma} : t \mapsto 2\pi n t$ est le relèvement de ψ_γ s'annulant en 0. Par conséquent,

$$\mathrm{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(2\pi n - 0) \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\mathrm{Ind}(\gamma) = n}.$$

Partie III – Invariance de l'indice par homotopie

1. Soit $x_0 \in [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque H est continue sur le carrée fermé $[0,1]^2$, d'après le résultat admis (généralisation du théorème de Heine), H est uniformément continue. On en déduit qu'il existe η tel que pour tous (x,t) et (x',t') dans $[0,1]^2$,

$$\|(x,t)-(x',t')\| < \eta \Longrightarrow |H(x,t)-H(x',t')| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $x \in [0,1]$ tel que $|x-x_0| < \eta$, on aura :

$$\forall t \in [0,1], \|(x,t)-(x_0,t)\| = |x-x_0| < \eta,$$

et par conséquent,

$$|H(x,t)-H(x_0,t)| < \varepsilon \qquad \text{soit:} \qquad |\gamma_x(t)-\gamma_{x_0}(t)| < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [0,1]$, en passant au sup, on obtient :

$$d_\infty(\gamma_x, \gamma_{x_0}) < \varepsilon.$$

Cela prouve bien la $\boxed{\text{continuité de } x \mapsto \gamma_x}$ sur $[0,1]$.

2. On utilise les notations de la partie II.

(a) Soit γ et ζ deux lacets de $\mathcal{L}_{z_0}$, et soit $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|\psi_\gamma(t)-\psi_\zeta(t)| &= \left|\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} - \frac{\zeta(t)}{|\zeta(t)|}\right| \\
&= \left|\frac{\gamma(t)|\zeta(t)| - \zeta(t)|\gamma(t)|}{|\gamma(t)\zeta(t)|}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|\gamma(t)\zeta(t)|}\left(|\gamma(t)-\zeta(t)|\cdot|\zeta(t)| + ||\zeta(t)|-|\gamma(t)||\cdot|\zeta(t)|\right) \\
&\leqslant \boxed{\frac{1}{|\gamma(t)|}\big(|\gamma(t)-\zeta(t)| + \big||\zeta(t)|-|\gamma(t)|\big|\big)},
\end{aligned}$$

l'avant dernière inégalité étant obtenue en ajoutant et retranchant $\zeta(t)|\zeta(t)|$ et en utilisant l'inégalité triangulaire.

(b) L'application $t \mapsto |\gamma(t)|$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc, d'après le théorème de compacité, elle admet un minimum m_0. Comme ce minimum est atteint et que γ ne s'annule pas, $m_0 > 0$. On a alors, par définition de m_0 et par inégalité triangulaire :

$$\forall t \in [0,1], \quad |\psi_\gamma(t)-\psi_\zeta(t)| \leqslant \frac{2}{m_0}|\zeta(t)-\gamma(t)| \leqslant \frac{2}{m_0} d_\infty(\zeta,\gamma).$$

Soit maintenant γ fixé et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{m_0\varepsilon}{2}$. Pour tout ζ tel que $d_\infty(\zeta,\gamma) < \delta$, on a donc

$$\forall t \in [0,1], \quad |\psi_\gamma(t)-\psi_\zeta(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{donc:} \qquad d_\infty(\psi_\gamma,\psi_\zeta) \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve bien $\boxed{\text{la continuité de l'application } \gamma \mapsto \psi_\gamma}$.

3. (a) Un petit calcul de géométrie élémentaire montre qui si $\delta < \pi$ et si $[AB]$ est une corde du cercle trigonométrique définissant un angle au centre de δ, alors la longueur de $[AB]$ est $2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$.
Ainsi, lorsque $\delta < \pi$, si A et B sont deux points du cercle tels que $[AB] < 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$, ils sont tous deux sur un même arc d'angle au centre δ. Ainsi, leurs arguments diffèrent d'au plus δ modulo 2π.
Cela équivaut à dire que

$$\boxed{|\tilde{\psi}_2(t) - \tilde{\psi}_1(t)| \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi-\delta, 2k\pi+\delta[}$$

(b) Soit alors $\psi_1 \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{U})$, et $0 < \varepsilon < 2\pi$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ et $\eta = 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) > 0$. On se donne ψ_2 telle que $d_\infty(\psi_1,\psi_2) < \eta$. On a donc, d'après la question précédente, pour tout $t \in [0,1]$

$$|\tilde{\psi}_2(t) - \tilde{\psi}_1(t)| \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi-\delta, 2k\pi+\delta[.$$

Or, ces intervalles sont disjoints et séparés (il existe des réels entre deux intervalles). Ainsi, puisque $t \mapsto |\tilde{\psi}_2(t) - \tilde{\psi}_1(t)|$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$, son image est entièrement contenue dans l'un des intervalles $[2k\pi - \delta, 2k\pi + \delta[$ (le contraire contredirait le TVI, par un argument similaire à celui de la question II-1(f)). Ainsi, la longueur de cet intervalle étant $2\delta = \varepsilon$,

$$\forall t \in [0,1], \quad |\tilde{\psi}_2(t) - \tilde{\psi}_1(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{donc:} \qquad d_\infty(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) \leqslant \varepsilon.$$

Cela montre bien la $\boxed{\text{continuité de l'application qui à } \psi \text{ associe son relèvement}}$.

4. On remarque pour terminer que

$$d_\infty(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) < \varepsilon \Longrightarrow |\tilde{\psi}_2(1) - \tilde{\psi}_1(1)| < \varepsilon.$$

Ainsi $\tilde{\psi} \mapsto \tilde{\psi}(1)$ est aussi continue. Et comme $\tilde{\psi}(0) = \theta_0$ est constante (tous nos lacets sont basés sur le même point),

$$\tilde{\psi} \mapsto \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi}(1) - \tilde{\psi(0)})$$

est continue. Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est continue}}$ en tant que composée de fonctions continues : $x \mapsto \gamma_x$, $\gamma \mapsto \psi_\gamma$, $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi} \mapsto \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi}(1) - \tilde{\psi(0)})$.

5. On utilise un argument similaire à celui de II-1(f) : d'après le TVI, l'application Φ définie sur l'intervalle $[0,1]$ étant continue, et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est nécessairement constante. On en déduit que $\Phi(0) = \Phi(1)$, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1)}$.

Partie IV – Groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$

Ainsi, Ind *passe au quotient et définit une application* $\alpha : \Pi_1(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{Z}$.

1. La $\boxed{\text{surjectivité}}$ provient de la question 2(d).
2. Pour montrer que α est un morphisme de groupe, il faut montrer que si γ_1 et γ_2 sont deux lacets,

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \mathrm{Ind}(\gamma_1) + \mathrm{Ind}(\gamma_2).$$

Or, soit $\tilde{\psi}_{\gamma_1}$ un relèvement continu de ψ_{γ_1} et $\tilde{\psi}_{\gamma_2}$ un relèvement continu de ψ_{γ_2}. On considère alors :

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{\gamma_1}(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{\psi}_{\gamma_2}(2t-1) + 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

L'application $\tilde{\psi}$ est bien continue sur $[0,1] \backslash \{\frac{1}{2}\}$, et elle admet des limites à gauche et à droite en $\frac{1}{2}$ égales à $\theta_0 + 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1)$, qui est également la valeur au point. Elle est donc continue sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall t \in [0,1], \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi}(t)} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi}_{\gamma_1}(2t)} = \psi_{\gamma_1}(2t) = \frac{\gamma_1(2t)}{|\gamma_1(2t)|} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi}_{\gamma_2}(2t-1) + 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1)} = \psi_{\gamma_2}(2t-1) = \frac{\gamma_2(2t-1)}{|\gamma_2(2t-1)|} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

On a donc bien

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_{\gamma_1 \cdot \gamma_2},$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) &= \tilde{\psi}(1) - \tilde{\psi}(0) \\ &= \tilde{\psi}_{\gamma_2}(1) + 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1) - \tilde{\psi}_{\gamma_1}(0) \\ &= \tilde{\psi}_{\gamma_2}(1) - \theta_0 + 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1) \\ &= 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_2) + 2\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1). \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \mathrm{Ind}(\gamma_1) + \mathrm{Ind}(\gamma_2)$, donc $\boxed{\alpha \text{ est un morphisme de groupes}}$.

3. Soit γ d'indice nul, et $\tilde{\psi}$ le relèvement associé à de γ, vérifiant donc $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(1) = \theta_0$. On considère alors l'homotopie (et non, il y en avait encore une, je vous avais menti, et même encore deux autres dans la partie V) :
$$H(t,x) = \big((1-x)|\gamma(t)| + x|\gamma(0)|\big) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)(\tilde{\psi}(t)-\theta_0)+\theta_0}$$
La fonction H est clairement continue sur $[0,1]^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et :
   - pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,0) = |\gamma(t)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi}(t)} = |\gamma(t)|\psi(t) = \gamma(t)$;
   - pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,1) = |\gamma(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0} = z_0 = e(t)$
   - pour tout $x \in [0,1]$, $H(0,x) = |\gamma(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)\cdot 0+\theta_0} = z_0$
   - pour tout $x \in [0,1]$, $H(0,x) = |\gamma(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)\cdot 0+\theta_0} = z_0$, car $\tilde{\psi}(1) = \theta_0$, puisque $\mathrm{Ind}(\gamma) = 0$. C'est pour ce point qu'on utilise l'hypothèse. De l'importance de faire toutes les vérifications !

   Ainsi, H est une homotopie de γ sur le lacet constant e. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma) = 0 \text{ si et seulement si } \gamma \underset{H}{\sim} e}$.

4. Nous avons déjà montré que α est un morphisme surjectif. Il reste à montrer l'injectivité. La question précédente nnous assure que le noyau de α (c'est-à-dire les éléments envoyés sur l'élément neutre par le morphisme α) est réduit à un unique élément (l'élément neutre du groupe de départ). Nous montrerons plus tard que cela suffit à caractériser l'injectivité. Nous développons une preuve indépendante de ce résultat ici (qui est est fait la démonnstration dans ce cas particulier de la caractérisation générale).
   - Pour commencer, de façon évidente, $\alpha(\overline{e}) = 0$ (cela est un fait général pour un morphisme de groupe : le neutre est envoyé sur le neutre).
   - Soit γ_1 et γ_2 deux lacets tels que $\alpha(\overline{\gamma_1}) = \alpha(\overline{\gamma_2})$. Alors
   $$\alpha(\overline{\gamma_1}) + \alpha(\overline{\gamma_2^{-1}}) = \alpha(\overline{\gamma_2}) + \alpha(\overline{\gamma_2^{-1}}),$$
   donc, α étant un morphisme,
   $$\alpha(\overline{\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}}) = \alpha(\overline{\gamma_2 \cdot \gamma_2^{-1}}) = \alpha(\overline{e}) = 0.$$
   - D'après la question précédente, $\overline{\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}} = \overline{e}$, et donc, en multipliant par $\overline{\gamma_2}$, on obtient $\overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_2}$.

   Ainsi, $\boxed{\alpha \text{ est injective}}$.

Partie V – Application : une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss

Pour tout polynôme R tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $R(z) \neq 0$, on définit : $\gamma_R : t \mapsto \dfrac{R(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t})}{R(1)}$.

1. Le fait que R ne s'annule pas nous assure que γ_R est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Par ailleurs, γ_R est continue, comme composée de fonctions continues, et $\gamma_R(0) = \gamma_R(1) = 1$.
   Ainsi, $\boxed{\gamma_R \text{ est un lacet de } \mathcal{L}_1}$.

2. On note $Q = \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$|Q(z)| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |a_k||z|^k.$$
   Ainsi,
   $$\frac{|Q(z)|}{|z|^n} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |a_k||z|^{k-n} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Par définition de la limite, il existe donc $r_0 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r$,
   $$\frac{|Q(z)|}{|z|^n} < 1 \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{|z^n| > |Q(z)|}.$$
   En particulier, en posant $\boxed{r > r_0}$, cette inégalité est vraie pour tout z de module r.

3. Pour $x \in [0,1]$, on note P_x le polynôme défini par $z \mapsto P_x(z) = P(xrz)$.
   - On remarque pour commencer que P_x est un polynôme ne s'annulant pas, car P ne s'annule pas. Ainsi on peut définit γ_{P_x} pour tout $x \in [0,1]$. C'est donc un lacet de $\mathcal{L}_1$.

- Lorsque $x = 1$, P_0 est le polynôme constant de valeur $P(0) \neq 0$. Ainsi, γ_{P_0} est le lacet constant, donc $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma_0) = 0}$
- L'application
$$(t, x) \mapsto H(t, x) = \gamma_{P_x}(t) = \frac{P(xr\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t})}{P(xr)}$$
est une homotopie de γ_{P_0} à γ_{P_1}. En effet,
  * H est continue d'après son expression explicite
  * $H(\bullet, 0) = \gamma_{P_0}$ par définition, et $H(\bullet, 1) = \gamma_{P_1}$
  * les γ_{P_x} étant des lacets de $\mathcal{L}_1$, pour tout $x \in [0, 1]$,
$$H(0, x) = \gamma_{P_x}(0) = 1 = \gamma_{P_x}(1) = H(1, x).$$
- Ainsi, d'après la partie III, $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma_{P_1}) = \mathrm{Ind}(\gamma_{P_0}) = 0}$.

4. On définit pour tout $x \in [0, 1]$, le polynôme Q_x par : $Q_x(z) = (rz)^n + xQ(rz)$.
   - D'après la question 2, pour tout z de module 1, rz est de module r, donc, pour tout $x \in [0, 1]$,
$$|rz|^n > |Q(rz)| \geqslant x|Q(rz)|, \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{Q(z) = (rz)^n + xQ(rz) \neq 0}.$$
   - Ainsi, γ_{Q_x} est bien définie pour tout $x \in [0, 1]$ et est un lacet de $\mathcal{L}_1$.
   - On définit l'application H par :
$$(t, x) \mapsto H(t, x) = \gamma_{Q_x}(t).$$
   De même que plus haut, on montre sans difficulté que H est une homotopie de γ_{Q_0} à γ_{Q_1}.
   - Or, $Q_0(z) = (rz)^n$, donc pour tout $t \in [0, 1]$,
$$\gamma_{Q_0}(t) = \frac{r^n \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,nt}}{r^n} = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi n}.$$
   D'après la question II-2d, $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma_{Q_0}) = n}$.
   - Puisque γ_{Q_0} et γ_{Q_1} sont homotopes, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma_{Q_1}) = n}$.
5. Or, $P_1 = Q_1$, donc on déduit des questions 3 et 4 que $n = 0$. Ainsi, si P est un polynôme à coefficients complexes sans racine complexe, alors P est de degré 1, c'est-à-dire constant non nul. C'est bien la contraposée du théorème de d'Alembert-Gauss.
   Nous avons donc bien démontré le $\boxed{\text{théorème de d'Alembert-Gauss}}$.

Partie VI – Complément : expression intégrale de l'indice d'un lacet de classe $\mathcal{C}^1$

1. Soit $t \in [0, 1]$. On a :
$$\begin{aligned}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} &= \frac{\gamma_r'(t) + \mathrm{i}\,\gamma_i'(t)}{\gamma_r(t) + \mathrm{i}\,\gamma_i(t)} \\ &= \frac{(\gamma_r'(t) + \mathrm{i}\,\gamma_i'(t))(\gamma_r(t) - \mathrm{i}\,\gamma_i(r))}{\gamma_r(t)^2 + \gamma_i(t)^2} \\ &= \frac{\gamma_r'(t)\gamma_r(t) + \gamma_i'(t)\gamma_i(r)}{\gamma_r(t)^2 + \gamma_i(t)^2} + \mathrm{i}\,\frac{\gamma_i'(t)\gamma_r(t) - \gamma_r'(t)\gamma_i(r)}{\gamma_r(t)^2 + \gamma_i(t)^2}\end{aligned}$$
   Ainsi,
$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) = \frac{\gamma_r'(t)\gamma_r(t) + \gamma_i'(t)\gamma_i(t)}{\gamma_r^2(t) + \gamma_i^2(t)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) = \frac{\gamma_r(t)\gamma_i'(t) - \gamma_i(t)\gamma_r'(t)}{\gamma_r^2(t) + \gamma_i^2(t)}}$$
2. La fonction $t \mapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right)$ est définie sur $[0, 1]$, et admet une primitive simple (puisqu'elle est de la forme $\frac{u'}{u}$). Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) &= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln(\gamma_r(t)^2 + \gamma_i(t)^2)\Big]_0^1 \\ &= \ln(|\gamma(1)|^2) - \ln(|\gamma(0)|^2) \\ &= \ln(|z_0|^2) - \ln(|z_0|^2) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) = 0.}$

3. Soit $[a,b] \subset [0,1]$ un intervalle tel que $\psi_\gamma([a,b]) \subset \mathbb{U}_1$. On a alors en particulier $\gamma_r(t) > 0$. Or, pour tout $t \in [0,1]$,
$$\frac{\gamma_r(t)\gamma_i'(t) - \gamma_i(t)\gamma_r'(t)}{\gamma_r^2(t) + \gamma_i^2(t)} = \frac{\gamma_i'(t)\gamma_r(t) - \gamma_i(t)\gamma_r'(t)}{g_r(t)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_i(t)}{\gamma_r(t)}\right)^2},$$
donc
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) &= \Big[\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(t)}{\gamma_r(t)}\right)\Big]_a^b \\ &= \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(b)}{\gamma_r(b)}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(a)}{\gamma_r(a)}\right) \\ &\equiv \boxed{\arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a))\ [2\pi]}\end{aligned}$$
d'après la description de l'argument dans $\mathbb{U}_1$.

4. On peut faire de même sur les autres sous-ensembles de $\mathbb{U}$ définis en partie II :
   - Si $\psi_\gamma([a,b]) \subset \mathbb{U}_2$,
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) &= \int_a^b \frac{\gamma_i'(t)\gamma_r(t) - \gamma_i(t)\gamma_r'(t)}{g_i(t)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_i(t)}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[- \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(t)}{\gamma_r(t)}\right)\Big]_a^b \\ &= -\mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(b)}{\gamma_r(b)}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(a)}{\gamma_r(a)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(b)}{\gamma_r(b)}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\gamma_i(a)}{\gamma_r(a)}\right)\right) \\ &\equiv \boxed{\arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a))\ [2\pi],}\end{aligned}$$
   d'après la formule obtenue en partie II pour l'argument d'un élément de $\mathbb{U}_2$.
   - On démontre de même que si $\psi_\gamma([a,b]) \subset \mathbb{U}_3$ ou si $\psi_\gamma([a,b]) \subset \mathbb{U}_4$, alors
$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) \equiv \arg(\gamma(b)) - \arg(\gamma(a))\ [2\pi].$$

   On considère alors une subdivision $0 = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = 1$ comme en partie II. Soit $x \in [0,1]$, et k_0 tel que $k_0 \leqslant x \leqslant k_0 + 1$. Puisque l'image de chaque $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ par ψ est contenue dans l'un des $\mathbb{U}_i$, ainsi que l'image de $[k_0, x]$, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \mathrm{Im}\left(\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) + \mathrm{Im}\left(\int_{\sigma_{k_0}}^{x} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\ &\equiv \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} \arg(\gamma(\sigma_{k+1})) - \arg(\gamma(\sigma_k))\right) + \arg(\gamma(x)) - \arg(\gamma(\sigma_{k_0})) && [2\pi] \\ &\equiv \arg(\gamma(\sigma_{k_0})) - \arg(\gamma(0)) + \arg(\gamma(x)) - \arg(\gamma(\sigma_{k_0})) && [2\pi] \\ &\equiv \boxed{\arg(\gamma(x)) - \arg(\gamma(0))} && [2\pi].\end{aligned}$$

5. On définit, pour tout $t \in [0,1]$
$$\tilde{\psi}(t) = \theta_0 + \mathrm{Im}\left(\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)}\,\mathrm{d}u\right).$$
L'intégrale étant une primitive de son intégrande, elle est dérivable, donc continue. Ainsi, $\tilde{\psi}$ est continue sur $[0,1]$, et d'après la question précédente,
$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1],\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tilde{\psi}(t)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\gamma(x)) - \mathrm{i}\arg(\gamma(0))} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\gamma(x)) - \mathrm{i}\,\theta_0} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\gamma(x))} = \psi_\gamma(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{\psi}$ est le relèvement continu associé au lacet γ. On en déduit que

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi}(\tilde{\psi}(1) - \tilde{\psi}(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\theta_0 + \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\ \mathrm{d}t - \theta_0\right),\end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement la formule intégrale de l'indice :

$$\boxed{\frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\ \mathrm{d}t}.$$