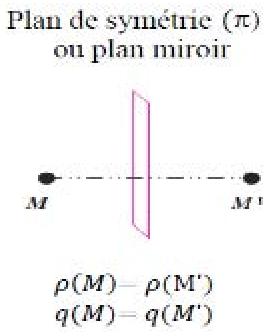
3. Propriétés de symétrie

En électrostatique, la cartographie du champ reflète la géométrie de la distribution de charges au sein du système. Il est donc indispensable de procéder à une analyse de la symétrie du système de charges avant toute détermination de grandeurs électriques. Les propriétés de symétrie permettent de prévoir la symétrie des champs électrostatiques crées par le système. Les opérations de symétrie concernent les cas où la distribution de charges présente un plan de symétrie, un plan d'antisymétrie, une invariance par translation parallèlement à un axe et une invariance par rotation autour d'un axe.

3.1. Symétries et invariances des distributions de charges

3.1.1. Symétrie plane



Soit un plan (π) et la symétrie S_π par rapport à ce plan. Une distribution de charges D est symétrique par rapport au plan (π) si et seulement si :

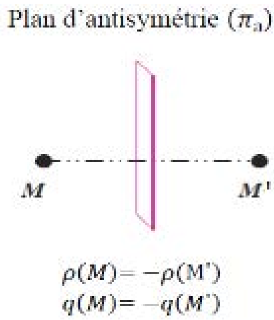
$\forall$ M $\in$ D, M' = S_π(M) $\in$ D et ρ(M') = ρ(M) (Valable pour tout type de distribution).

Pour les charges q(M') = q(M). distribution de charges)

Une transformation par un plan de symétrie laisse inchangée une grandeur scalaire.

- Exemple : La distribution de charges D est symétrique par rapport au plan (xOy) $\Leftrightarrow$ ρ(x,y,-z) = ρ(x,y,z) pour tout point M(x,y,z) et son symétrique M'(x,y,-z) de D.

3.1.2. Antisymétrie plane



Soit un plan (π_a) et la symétrie $S_{\pi a}$ par rapport à ce plan. Une distribution de charges D est antisymétrique par rapport au plan (π_a) si et seulement si :

$\forall$ M $\in$ D, M' = $S_{\pi a}$(M) $\in$ D et $\rho(M') = -\rho(M)$

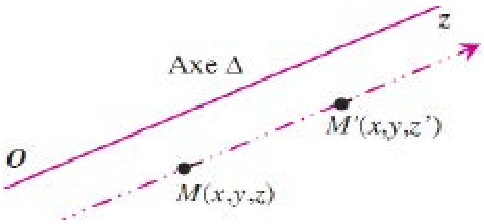
Pour les charges : $q(M') = -q(M)$

Une transformation par un plan d'antisymétrie change une grandeur scalaire en son opposé.

- Exemple1 : La distribution de charges D est antisymétrique par rapport au plan (xOy) $\Leftrightarrow$ $\rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$ pour tout point M(x,y,z) et son symétrique M'(x,y,-z) de D.
- Exemple 2 : La distribution de charges constituées de deux petites sphères chargées, l'une avec la charge +Q, l'autre avec la charge −Q admet le plan médiateur des deux sphères comme plan d'antisymétrie.

3.1.3. Invariance par translation

Il y a invariance par translation parallèlement à un axe Δ si la densité de charges reste inchangée lorsqu'on passe d'un point M à un point M' translaté de M parallèlement à l'axe Δ.



La distribution de charges D est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ si et seulement si:

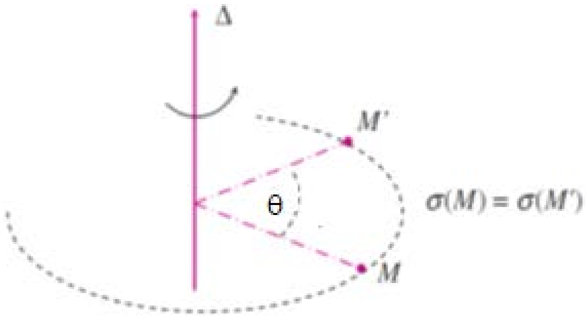
$$\forall\, M \in D, M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M) \in D \text{ et } \rho(M') = \rho(M)$$

- Exemple, distribution de charge D invariante par la translation de vecteur $\vec{a} = a\vec{u}_x \ (a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$ $\rho(x,y,z) = \rho(x+a,y,z)\ \forall\ M(x,y,z)$ et $M'(x + a,y,z) \in D$.

Si une distribution de charges est invariante par toute translation de vecteur parallèle à l'axe (Ox) alors la densité de charge ne dépend pas de x.

3.1.4. Invariance par rotation

Il y a invariance par rotation d'angle θ_0 autour d'un axe Δ si cette rotation amène le point M à un point M' en laissant la densité de charges inchangée.



La distribution de charges D est donc invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'angle θ_0 autour de l'axe Δ si et seulement si :

$$\forall\, M \in D, M' = \mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}(M) \in D \text{ et } \rho(M') = \rho(M)$$

La distribution de charges possède alors la symétrie de révolution d'axe Δ (axe de symétrie).

- Exemple, la distribution de charges D est invariante par la rotation d'angle θ_0 autour de l'axe (Oz) si et seulement si $\forall\ M(r,\theta,z) \in D$, $M'(r,\theta+\theta_0,z) \in D$ et $\rho(r,\theta,z) = \rho(r,\theta+\theta_0,z)$.

Si une distribution de charge est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) (symétrie de révolution d'axe (Oz)), alors ρ (M) ne dépend pas de θ.

3.2. Symétries et invariances du champ électrostatique

3.2.1. Principe de Curie

La symétrie des causes se retrouve dans les effets produits. (La réciproque n'est pas toujours vraie). C'est un principe général.

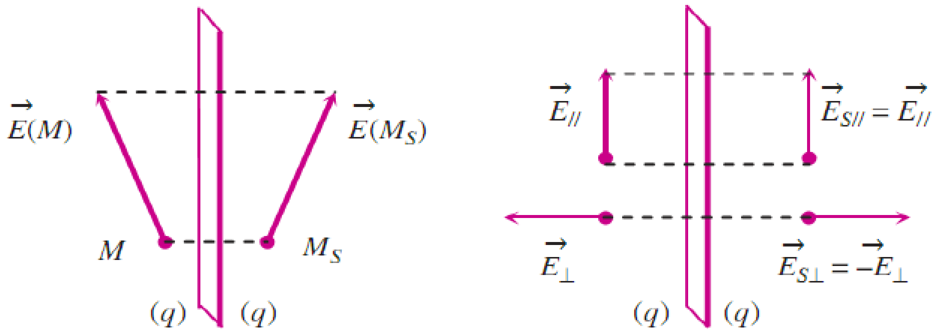
Application au cas de l'électrostatique : la symétrie des distributions de charges se retrouvent dans le champ électrostatique créé.

3.2.2. Opérations de symétrie

a) Symétrie plane

Le vecteur champ électrostatique se transforme comme pour une symétrie plane (comme dans un miroir).

Plan de symétrie (π)



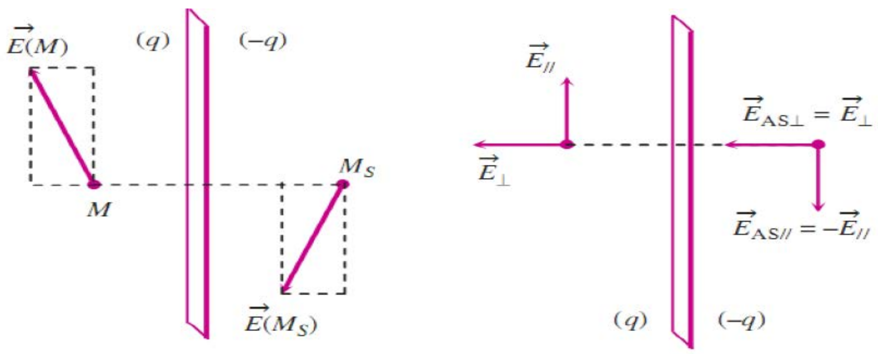
Soit la symétrie S_π par rapport à un plan (π) et $\vec{S}_\pi$ la symétrie vectorielle associée à la symétrie affine S_π. Si une distribution de charges D admet le plan (π) comme plan de symétrie alors pour tout point M et M' = S_π(M), $\vec{E}(M') = \vec{S}_\pi\big(\vec{E}(M)\big)$.

Donc

- Un plan de symétrie pour la distribution de charges :
  - ✓ laisse invariante la composante parallèle au plan du vecteur champ électrostatique
  - ✓ transforme la composante normale au plan du vecteur champ électrostatique en son opposé
- Si *M* appartient au plan de symétrie, il se confond avec son symétrique M' et la composante normale au plan est ainsi nulle. Le vecteur champ électrostatique est donc dans le plan de symétrie.

b) Antisymétrie plane

Plan d'antisymétrie (π)



Soit la symétrie $S_{\pi a}$ par rapport à un plan (π_a) et $\vec{S}_{\pi a}$ sa symétrie vectorielle associée.

Si une distribution de charges D admet le plan (π_a) comme plan d'antisymétrie alors pour tout point M et M' = $S_{\pi a}$(M), $\vec{E}(M') = -\vec{S}_{\pi a}\big(\vec{E}(M)\big)$

Donc

- Un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges :
  - ✓ transforme la composante parallèle au plan du vecteur champ électrostatique en son opposé
  - ✓ laisse invariante la composante normale au plan du vecteur champ électrostatique
- Si *M* appartient au plan d'antisymétrie, il se confond avec son symétrique. La composante parallèle au plan est alors nulle et le vecteur champ électrostatique est orthogonal au plan d'antisymétrie.

3.2.3. Invariances du champ électrostatique

a) Invariance par translation

Si une distribution de charges est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ alors pour tout point M et M' = $\mathcal{T}_{\vec{a}}$(M), $\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$ (le vecteur champ électrostatique restent inchangé).

Si la distribution de charges est invariante par toute translation suivant un axe (Oz) alors $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z. $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)}$

b) Invariance par rotation

Si une distribution de charges est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'axe Δ et d'angle θ_0 alors pour tout point M et M' = $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$(M), $\vec{E}(M') = \vec{R}_{\Delta,\theta_0}(\vec{E}(M))$ où $\vec{R}_{\Delta,\theta_0}$ est la rotation vectorielle associée à la rotation affine $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$.

Si la distribution de charges est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) alors, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) les composantes E_r, E_θ et E_z du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de l'angle de θ. $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r, z)}$

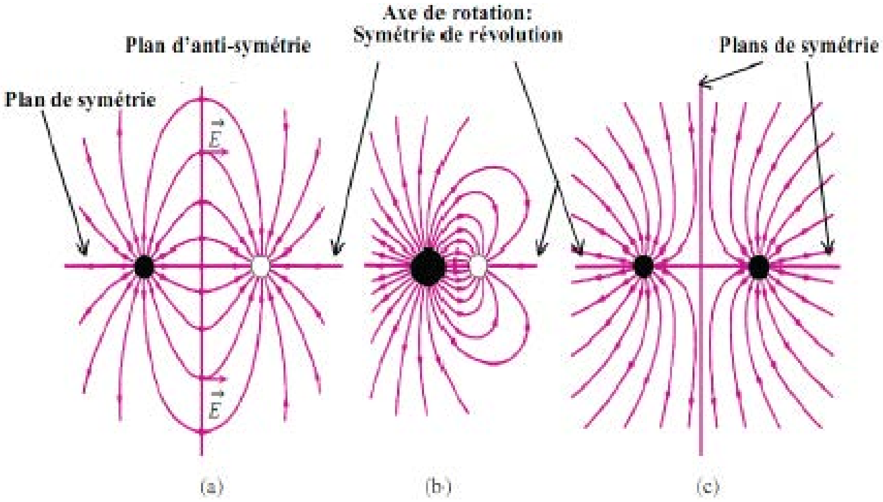
3.3. Exemple d'éléments de symétrie de corps chargés

La figure ci-dessous représente la cartographie du champ électrostatique pour trois systèmes de charges :

(a) : deux charges (+q, -q)

(b) : deux charges (+2q, -q)

(c) : deux charges (+q, +q)



On peut remarquer que tout plan contenant les deux charges est un plan de symétrie : il y a en a une infinité, en particulier le plan de la figure et le plan perpendiculaire à la figure. L'intersection de ces plans de symétrie définit un axe de symétrie de révolution. Dans le cas (a), il existe un plan d'antisymétrie ; le plan médiateur: le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan.

3.4. Récapitulatif

Le champ électrostatique possède les propriétés de symétrie d'un vecteur « vrai » ou vecteur polaire. En particulier :

- le champ électrostatique engendré par une distribution de charges invariante par translation ou de révolution autour d'un axe possède les mêmes invariances que celle-ci.

- lorsqu'une distribution de charges possède un plan de symétrie, le champ électrostatique appartient à ce plan en chacun de ses points.
- lorsqu'une distribution de charges possède un plan d'antisymétrie, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan en chacun de ses points.
- lorsqu'une distribution de charges possède deux plans de symétrie, le champ électrostatique est suivant la droite commune aux deux plans.
- lorsqu'une distribution de charges possède un axe de symétrie, le champ électrostatique est suivant cet axe