Le potentiel $V(M)$ est solution de l'équation de Laplace-Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Dans la base cylindrique, on a $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dV(r)}{dr}\right)$ puisque $V(M)$ ne dépend que de r.

- pour $r \le R$, l'équation s'écrit $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dV(r)}{dr}\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dV(r)}{dr}\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}r$ qui

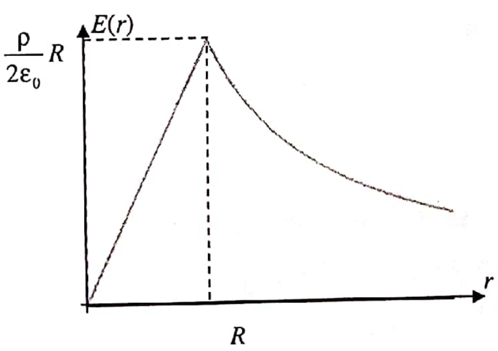
s'intègre en $r\dfrac{dV(r)}{dr} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{2} + C$. On obtient alors $\dfrac{dV(r)}{dr} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{2} + \dfrac{C}{r}$ soit $E(r) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{2} - \dfrac{C}{r}$ pour le champ. Cette expression diverge pour r tendant vers 0 ce qui n'est pas acceptable. Cette condition aux limites impose donc $C = 0$.

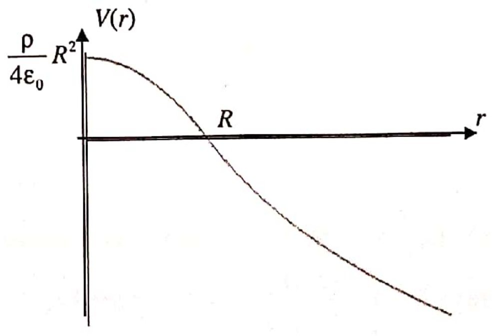
On a alors $\dfrac{dV(r)}{dr} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{2}$ qui s'intègre en $V(r) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{4} + D$. La condition aux limites $\lim\limits_{\substack{r\to R \\ r<R}} V(r) = 0$ posée dans la première méthode conduit à $D = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{4}$ d'où $\boxed{V(r) = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)}$ et $\boxed{E(r) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{2}}$.

- pour $r \ge R$, l'équation s'écrit $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dV(r)}{dr}\right) = 0$ soit $\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dV(r)}{dr}\right) = 0$ qui s'intègre en

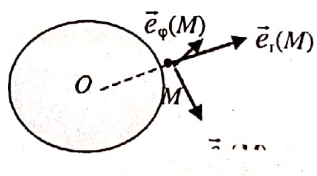
$r\dfrac{dV(r)}{dr} = C$. On obtient alors $\dfrac{dV(r)}{dr} = \dfrac{C}{r}$ soit $E(r) = -\dfrac{C}{r}$ pour le champ. Cette expression ne diverge pas car la valeur $r = 0$ n'appartient pas au domaine de définition. Le modèle de la distribution de charge étant 3D, le champ électrique est une fonction continue en tout point donc $\lim\limits_{\substack{r\to R \\ r>R}} E(r) = \lim\limits_{\substack{r\to R \\ r<R}} E(r)$ ce qui se traduit par $\dfrac{C}{R} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{R}{2}$ ou encore $C = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$. On a donc $\boxed{E(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r}}$ d'où $\dfrac{dV(r)}{dr} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r}$ qui s'intègre en $\boxed{V(r) = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2\ln\left(\dfrac{r}{R}\right)}$ en tenant compte de $V(r = R) = 0$

On obtient évidemment les mêmes résultats que par la première méthode. Les courbes représentatives de $E(r)$ et $V(r)$ sont les suivantes :





V-1) • La distribution de charges est invariante par symétrie par rapport à tous les plans **passant par** M et par O. Il en est de même du champ $\vec{E}(M)$ qui est donc contenu dans l'intersection de tous plans : il est donc radial.



On repère donc le point M dans la base sphérique de centre O indiquée sur la figure. On peut alors écrire $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r(M)$.

- La distribution de charges est invariante par rotation d'un angle θ ou φ