Applications linéaires, matrices

Exercice 1.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\beta' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$.

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim\big(Im(f)\big)$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice 4.

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 5.

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Exercice 6.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim\big(Im(f)\big)$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 8.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ \ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3; u(e_3) = 3f_1 - f_3 \ \ et\ \ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

1. Déterminer l'image par u dans vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension de $\ker(u)$.
3. Déterminer une base de $Im(u)$ et sa dimension.

Exercice 9.

Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $Im(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Exercice 10.

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui, à un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associe le vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^4$ définit par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

On admettra que u est une application linéaire.

1. Déterminer une base du noyau de u.
2. Déterminer une base de l'image de u.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(u)$.

Exercice 11.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$
$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$
$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ déterminer $f \circ f(x)$.
2. En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.

Exercice 12.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^4$?

Exercice 13.

Soit l'application $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.

Exercice 14.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 15.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur.
   Déterminer l'image par u du vecteur x. (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$
   Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de E et une base de F.
4. Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 16.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3)$, $f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$ et $f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(u) = u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 17.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soient

$$a = \frac{1}{3}(2,-2,1);\, b = \frac{1}{3}(2,1,-2);\, c = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

Soit $\beta' = (a, b, c)$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$u(e_1) = 3e_1 + e_2 - e_3$$
$$u(e_2) = e_1 + 7e_2$$
$$u(e_3) = -e_1 - e_3$$

1. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, calculer $u(x)$.
3. Montrer que :

$$u(a) = 3a - 3c$$
$$u(b) = 3b + 3c$$
$$u(c) = -3a + 3b + 3c$$

Exercice 18.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$, que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $Im(p)$ et une base de $\ker(p - Id)$, montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p) \oplus Im(p) = \mathbb{R}^3$

Exercice 19.

Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = Id_E$.

On pose $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f + Id_E)$

1. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. Pour tout $x \in E$ écrire $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$ et montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$
3. On suppose que E est de dimension finie et que $f \neq \pm Id_E$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E telle que : $E_1 = Vect(v_1, \dots, v_r)$ et $E_2 = Vect(v_{r+1}, \dots, v_n)$ calculer $f(v_i)$ dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Exercice 20.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et tel que $\dim(\ker(u)) = 1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ en fonction de a.
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Exercice 21.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $\mathrm{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 22.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par :

$$u(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer les dimensions de $\mathcal{Im}(u)$ et de $\ker(u)$.

Exercice 23.

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2\dim\big(Im(u)\big)$

(b) $Im(u) = \ker(u)$

Exercice 24.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers E.

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Exercice 25.

Soit $u: E \to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$
   Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Exercice 26.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p

Soit $u: E \to F$ une application linéaire

1. Montrer que si $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n > p$ alors u n'est pas injective.

Exercice 27.

Soit $f: E \to F$ une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Exercice 28.

Soient f et g deux endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap Im(f)$$

Exercice 29.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $Im(u^2) \subset Im(u)$.

Exercice 30.

Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$

(ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Exercice 31.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 3, q = 2$

   $u(e_1) = f_1 + 2f_2$, $u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$

   a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

   b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$.

   c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 3$ et $q = 3$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

   $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ et $u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$

   a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

   b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

   c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 32.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 2, q = 3$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2)$ par u.
b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$ et $u(e_2)$).
c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 4$, $q = 4$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u.
b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$).
c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 33.

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que u est une application linéaire).
a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).
b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.
c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que u est une application linéaire).
a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).
b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.
c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 34.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Exercice 35.

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 36.

Soit la matrice A de définie par : $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. En déduire A^n, pour tout n entier.

Exercice 37.

Soit A la matrice de définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = O$.
3. En déduire A^{-1}.
4. Retrouver A^{-1} par une autre méthode.

Exercice 38.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 39.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A - 2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Exercice 40.

A tout nombre réel t on associe la matrice : $M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices $M(t_1)$ et (t_2), où t_1 et t_2 sont deux réels quelconques.
2. Montrer que $M(t)$ est inversible, et déterminer $M^{-1}(t)$.

Exercice 41.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base a.
2. Soient $b = (0,1,1)$ et $c = (1,1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $u(b)$ et $u(c)$.

3. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
7. Donner la relation entre A, P et D.

Exercice 42.

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ et $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β.
3.
   a) Déterminer le noyau et l'image de f.
   b) En déduire que f est inversible.
   c) Déterminer f^{-1} dans la base β, en déduire A^{-1}.
4. Montrer que $A = RH$.
   Où H est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et R est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient $a = e_1 + e_2$ et $b = e_1 - e_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $\beta' = (a, b)$.

5. Montrer que $\beta' = (a, b)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Exercice 43.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
4.
   a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
   b) Calculer R^4
   c) En déduire les valeurs de A^{4n}.

Exercice 44.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$

$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.

2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Exercice 45.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $\ker(u) = vect(c)$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $Im(u) = \ker(u - Id)$
7. Montrer que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 46.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u. On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?
4. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$.
5. Montrer que $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c.
6. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A'.

Exercice 47.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base β est : $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\beta' = (a, b, c, d)$ une famille de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$a = e_1 - e_2$, $b = e_1 - e_2 - e_3$, $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4$ et $d = -e_1 + 2e_2$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Exercice 48.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$a = (-1,1,0,-1)$, $b = (1,-2,-1,1)$, $c = (-2,3,1,-1)$ et $d = (2,-1,0,1)$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β'.
4. Déterminer la matrice T de u dans la base β'.
5. Calculer $N = T + I$, puis N^4 et en déduire $(A + I)^4$.

Exercice 49.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique, $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c et d quatre vecteurs

$$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4; \;\; b = e_2 - e_4; \;\; c = 2e_1 + e_3 + e_4; d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $u(a), u(b), u(c)$ et $u(d)$ dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$
3. En déduire la matrice D de u dans la base β'.
4. Déterminer la matrice P de passage de β à β'.
5. Calculer P^{-1}.
6. Calculer $P^{-1}AP$.

Exercice 50.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1}.
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β'.
4. Déterminer la matrice N de u dans la base β'.
5. Calculer N^4 et en déduire A^4.
6. Donner une base de $\ker(u)$
7. Donner une base de $Im(u)$.

Exercice 51.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a non nul tel que $\ker(u) = vect(a)$
2. Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$
3. Déterminer un vecteur c tel que $u(c) = -c$
4. Soit $d = (-1,0,0,-1)$, montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
5. Calculer $u(d)$ dans la base β'.
6. Déterminer la matrice T de u dans β'.
7. Quel est le rang de A.
8. Soit $f = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4 = (2,-1,-1,1)$
   Calculer $u(f)$, $u^2(f)$, $u^3(f)$ et on admettra que $\beta'' = \left(f, u(f), u^2(f), u^3(f)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
9. Calculer $u^4(f)$ et montrer que $u^4(f) = -2u^3(f) - u^2(f)$
   En déduire la matrice C de u dans la base β''.
10. Montrer que C et T sont deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice R, inversible, telle que $T = R^{-1}CR$

Exercice 52.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base (a, b) de $\ker(u)$.
2. Donner un vecteur c qui engendre $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = x\}$
3. Déterminer un vecteur $d \in \ker((u - id)^2)$ et $d \notin \ker(u - id)$, on pourra calculer $(A - I)^2$, en déduire que d vérifie $u(d) = \lambda c + d$, où λ est un réel qui dépendra du vecteur d que vous avez choisit.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β'. (en fonction de λ)

Exercice 53.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base β est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1}. Déterminer une base (c, d) de E_1.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice de u dans la base β'.

Exercice 54.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrices dans la base canonique est :

$$A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4$ et $c = -e_1 - e_2 - e_3$

On pose $F = Vect(a_1, a_2, a_3)$.

1. Montrer que $\beta' = (a_1, a_2, a_3, c)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice P de passage de β à β'.
2. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
3. Montrer que pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ en déduire que $v: F \to F$ définie par $v(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F, déterminer la matrice de v dans la base $\beta_a = (a_1, a_2, a_3)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(c)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique couple de vecteurs $(f, g) \in F \times Vect(c)$ tels que : $x = f + g$, calculer $u(x)$.

Exercice 55.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible. Déterminer alors $\ker(A - \lambda I)$.
2. Soit $a = (-3,1,2)$, calculer $u(a)$.
3. Déterminer $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(b) = a - b$, puis $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(c) = b - c$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $T = mat_{\beta'}(u)$.
6. Montrer que $(T + I)^3 = O$ (la matrice nulle). En déduire $(A + I)^3$.
7. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

Exercice 56.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans β.
2. Montrer que $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer a, b deux vecteurs tels que $E_1 = Vect(a)$ et $N_{-1} = Vect\big(b, f(b)\big)$. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On appelle $\beta' = \big(a, b, f(b)\big)$, quelle est la matrice de f dans β'.
6. Quelle est la matrice de f^2 dans β'

Exercice 57.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Partie I

Soit $e_2 = (0,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$

1. Calculer $u(e_2)$, $u^2(e_2)$ et $u^3(e_2)$ et montrer que $\beta' = \left(e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $u^4(e_2)$ dans la base en fonction de $u^2(e_2)$ et e_2. Déterminer la matrice C de u dans la base β'

Partie II

3. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^4$ tel que $u(a) = a$ dont la première composante est 1.
4. Soit $b = (1, -1, 0, 1)$ et $c = e_1 - e_3 + e_4$, montrer que $u(b) = a + b$ et que $u(c) = -c$.
5. Déterminer un vecteur $d \in \mathbb{R}^4$ tel que $u(d) = c - d$.
6. Montrer que $\beta'' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Déterminer la matrice T de u dans la base β''.

Partie III

8. Montrer que les matrices T et C sont semblables.

Exercice 58.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto (X+1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base de noyau de f.

Exercice 59.

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 60.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$, l'application définie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P) = 2P - (X-1)P'$$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer la matrice A de u dans β.
3. Déterminer le noyau de u. On notera P_2 un vecteur directeur du noyau.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Déterminer un polynôme P_1 tel que $u(P_1) = P_1$
6. Montrer que $\beta' = (1, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Exercice 61.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Montrer que $\beta' = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base β'.

Exercice 62.

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit u l'application qui a un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$u(P) = 2XP - X^2P'$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
3. Déterminer la dimension de $\ker(u)$.
4. Déterminer une base et la dimension de $Im(u)$

Exercice 63.

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = P + (1-X)P' + 2P''$$

On appelle $P_1 = 1 - X, P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$

On appelle $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
4. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.

Exercice 64.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par

$$u(P) = \frac{1}{2}(1 - X^2)P'' + XP' - P$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer une base (P_1, P_2) de $\ker(u)$.
3. Déterminer P_3 tel que $Im(u) = Vect(P_3)$.
4. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. Déterminer la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3).

Exercice 65.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto f(P)$$

Où $f(P)(X) = P(X+1) - P(X) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 - (a_0 + a_1X + a_2X^2)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 66.

Partie I

Soit g une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g.

Partie II

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

3. Montrer que h est bijective.

Exercice 67.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Soient a et b les fonctions définies par :

$$a(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pose $H = Vect(a, b)$ et $F = \{f \in H, f(\ln(2)) = 0\}$

1. Déterminer la dimension de H
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit $\varphi: H \to \mathbb{R}^2$ définie pour $f \in H$ par

$$\varphi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$$

   a) Montrer que φ est une application linéaire
   b) Montrer que φ est un isomorphisme.

Exercice 68.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes.

Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = -A$.

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 69.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de ϕ, quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de ϕ. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J, à déterminer tel que $\phi(A) = \lambda J$.