

CHAPITRE 5 : Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait – Ondes stationnaires

Dans ce chapitre on étudie la réflexion d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur dans le modèle du conducteur parfait. Conformément au programme, cette partie étudie la réflexion d'une OPPM électromagnétique polarisée rectilignement sur un plan conducteur en incidence normale. Le modèle du conducteur parfait qui permet de traiter simplement ce problème est introduit en s'appuyant sur les résultats du chapitre précédent.

1 Le modèle du conducteur parfait

1.1 Définition et propriétés du conducteur parfait

➤ Définition

Un **conducteur parfait** est un conducteur ohmique à toute fréquence dont la conductivité tend vers l'infini (c'est-à-dire de résistivité pratiquement nulle).

➤ Conséquences

- Puissance volumique cédée par le champ au conducteur est $\mathcal{P}_V(M, t) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2(M, t)$

Si $\vec{E} \neq \vec{0}$, γ tendant vers l'infini, $\mathcal{P}_V(M, t)$ tend vers l'infini, ce qui n'est pas physiquement acceptable. Le champ électrique ne peut donc être que nul à l'intérieur d'un conducteur parfait $\boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}}$

- En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday, on a alors : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{B} = \text{cte} \text{ or } \vec{B} \text{ variable} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{int} = \vec{0}}.$$

Le champ électromagnétique d'une onde ne peut qu'être nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.

- Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation de Maxwell-Ampère donnent en tout point M à

$$\text{l'intérieur d'un conducteur parfait : } \boxed{\rho(M, t) = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = 0 \text{ et } \vec{j}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}}$$

Les densités volumiques de charge et courant sont nulles à l'intérieur d'un conducteur parfait.

1.2 Lien avec la réalité

Comme on l'a vu dans la première partie de ce chapitre, une OPPM de pulsation ω pénètre dans un conducteur réel de conductivité γ finie, jusqu'à une distance de quelques $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ et la densité volumique de courant est non nulle seulement dans une couche d'épaisseur égale à quelques δ . On peut appliquer le modèle du conducteur parfait si l'épaisseur de peau δ est négligeable (δ tend vers 0) c'est-à-dire si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- δ est très petite devant la longueur d'onde dans le vide de l'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ce qui revient à avoir : $\omega \delta \ll c$;
- δ est très petite devant les dimensions géométriques du conducteur.

1.3 Densité surfacique courant

La densité volumique de courant est nulle dans le volume d'un conducteur parfait. Si ce conducteur est traversé par un courant, ce courant doit donc circuler à sa surface et la distribution de courants est alors donnée par une

densité surfacique de courant notée $\vec{j}_s(P, t)$ en un point P de la surface. La densité volumique de charge étant également nulle, la distribution de charge dans le conducteur parfait est aussi surfacique caractérisée par une **densité surfacique de charge** $\sigma(P, t)$ telle que : $\vec{j}_s(P, t) = \sigma(P, t)\vec{v}(P, t)$ où $\vec{v}(P, t)$ est la vitesse moyenne au point P de la surface à l'instant t des porteurs de charge mobiles. Si on considère un conducteur plan d'épaisseur a faible dans la direction de l'axe (Oz), caractérisé par une densité volumique de courant \vec{j} et une densité surfacique \vec{j}_s de courant à sa surface, on a la relation :

$$\vec{j}_s(x, y, z, t) = \int_0^a \vec{j}(x, y, z, t) dz \quad \text{en un point P de coordonnées } x, y, z.$$

Si l'épaisseur a est très faible (si a tend vers 0) alors \vec{j} tend vers \vec{j}_s . Ainsi la densité surfacique de courant \vec{j}_s en un point P de la surface d'un conducteur dans le modèle du conducteur parfait décrit de manière globale les courants circulant dans le conducteur réel sous la surface, au voisinage de P, dans une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de l'épaisseur de peau δ .

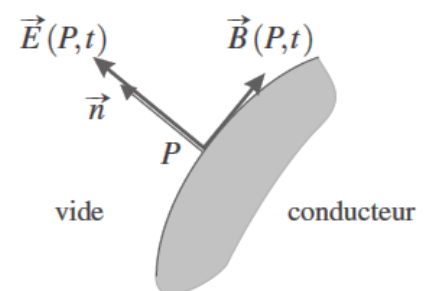
En ordre de grandeur la densité surfacique de courant confinés au voisinage d'une surface S dans une pellicule d'épaisseur δ est relié à la densité volumique de courant par : $\vec{j}_s = \vec{j} \times \delta$. La norme du vecteur densité surfacique de courant s'exprime en $A \cdot m^{-1}$.

1.4 Conditions aux limites à la surface d'un conducteur parfait

Les densités surfaciques de charge $\sigma(P, t)$ et de courant $\vec{j}_s(P, t)$ en un point P de la surface du conducteur parfait sont reliées au champ électromagnétique à l'extérieur du conducteur en ce point par les **conditions aux limites** suivantes :

$$\vec{E}(P, t) = \frac{\sigma(P, t)}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{B}(P, t) = \mu_0 \vec{j}_s(P, t) \wedge \vec{n} \quad \text{où } \vec{n} \text{ est le vecteur}$$

unitaire orthogonal en P au conducteur parfait et dirigé vers l'extérieur du conducteur.



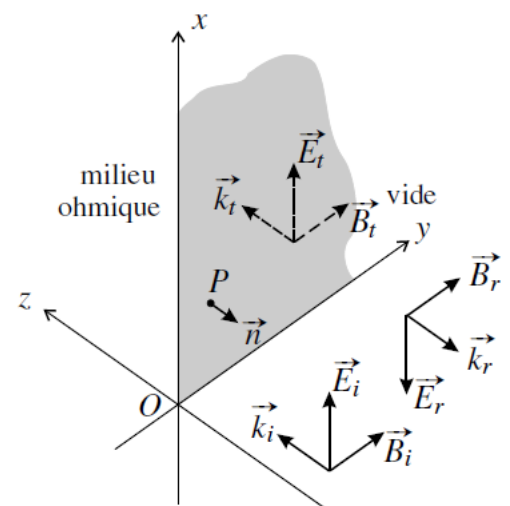
Champ électromagnétique à la surface d'un conducteur parfait

2 Réflexion en incidence normale d'une OPPM sur un conducteur

Lorsqu'une onde se propageant dans le vide arrive sur la surface d'un conducteur, elle donne naissance à une onde réfléchie. Après avoir posé le problème dans le cas d'un conducteur quelconque, on présente le calcul de l'onde réfléchie pour un conducteur parfait.

2.1 Introduction

Le plan $z = 0$ est la surface d'un milieu conducteur ohmique qui occupe tout le demi-espace $z > 0$. Il reçoit une **onde incidente** qui se propage dans le vide (ou dans l'air) dans la direction et le sens du vecteur \vec{u}_z . L'onde incidente donne naissance à une **onde transmise** qui se propage dans le milieu conducteur dans la direction et le sens du vecteur \vec{u}_z et une **onde réfléchie** qui se propage dans le vide dans



la direction et le sens du vecteur $-\vec{u}_z$. La source de cette onde réfléchie est le courant électrique oscillant créé par le champ électromagnétique de l'onde incidente dans le conducteur. Dans le modèle du conducteur parfait, ce courant est surfacique. La linéarité de la loi d'Ohm et des équations de Maxwell confèrent à l'onde réfléchie la même pulsation que l'onde incidente. Pour simplifier les écritures, on considère que l'onde incidente est une OPPM polarisée rectilignement dans la direction de \vec{u}_x . Ses champs en notation complexe sont alors :

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x \text{ et } \vec{B}_i = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_i = \frac{1}{c} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}, \text{ l'onde se propageant}$$

dans le vide ; son vecteur d'onde est $\vec{k}_i = k \vec{u}_z$. On admet que l'onde réfléchie est aussi une OPPM de même polarisation : $\vec{E}_r = \underline{r} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = -\frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_r = -\frac{1}{c} \underline{r} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y$ où \underline{r} est le

coefficient de réflexion pour le champ électrique et $\vec{k}_r = -k \vec{u}_z$ est le vecteur d'onde de l'onde réfléchie qui se propage suivant $-\vec{u}_z$. L'onde transmise est aussi une OPPM de même polarisation mais se propageant dans

$$\text{le milieu ohmique : } \vec{E}_t = \underline{t} \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_x,$$

$$\vec{B}_t = \frac{1-i}{\omega \delta} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_t = \frac{1-i}{\omega \delta} \underline{t} \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \text{ où } \underline{t} \text{ est le } \mathbf{coefficient de transmission} \text{ pour le}$$

champ électrique.

Pour déterminer les coefficients de réflexion \underline{r} et \underline{t} , on doit utiliser les conditions de continuité du champ électromagnétique à la surface du milieu conducteur (plan $z = 0$). Ces conditions sont appelées **conditions de passage**.

2.2 Réflexion dans le cas du conducteur parfait

➤ Coefficients de réflexion et de transmission

Dans le cas d'un conducteur parfait il n'y a pas d'onde transmise (champs nul à l'intérieur d'un conducteur parfait) donc : $\underline{t} = 0$. Les **conditions de passage** découlent des conditions aux limites et sont les suivantes :

$$\vec{E}(P, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \text{ est orthogonal à la surface du conducteur et ,}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s(P, t) \wedge \vec{n} \text{ est parallèle à la surface du conducteur,}$$

en tout point P du plan $z = 0$. Le champ électromagnétique devant vérifier ces conditions est le champ *total* existant dans le vide, c'est-à-dire la superposition des champs des ondes incidente et réfléchie. Ainsi, il faut :

$$\vec{E}_i(z = 0, t) + \vec{E}_r(z = 0, t) \text{ dirigé suivant } \vec{u}_z, \text{ et } \vec{B}_i(z = 0, t) + \vec{B}_r(z = 0, t) \text{ perpendiculaire à } \vec{u}_z .$$

La deuxième condition est automatiquement vérifiée car le champ magnétique est porté par \vec{u}_y donc perpendiculaire à \vec{u}_z . En revanche le champ électrique est porté par \vec{u}_x et la première condition impose alors qu'il soit nul. Ainsi : $\underline{E}_0 \exp(i(\omega t)) + \underline{r} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t)) = 0 \Rightarrow \underline{r} = -1$

En $z = 0$ les champs électriques des ondes incidente et réfléchie sont donc de même amplitude et en opposition de phase. Pour l'onde réfléchie en posant $\underline{E}_0 = E_0 \exp(i\varphi)$, on a alors :

$$\vec{E}_r = -\underline{E}_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_r = \frac{1}{c} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y \Rightarrow \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{u}_y$$

➤ Aspect énergétique

On peut exprimer les vecteurs de Poynting moyens des deux ondes : $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} R_e(\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*) = \frac{1}{2\mu_0} |E_0|^2 \vec{u}_z$

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{1}{2\mu_0} R_e(\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r^*) = -\frac{1}{2\mu_0} |r E_0|^2 \vec{u}_z = -\frac{|r|^2}{2\mu_0} |E_0|^2 \vec{u}_z.$$

On définit le **coefficient de réflexion en énergie** comme le rapport de la puissance moyenne réfléchie par le plan conducteur à la puissance qu'il reçoit, soit : $R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-\vec{u}_z)}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{u}_z} = |r|^2 = 1$

Dans le cas où le conducteur est parfait : $R = 1$, ce qui signifie que toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Il en est ainsi parce qu'il n'y a pas de perte d'énergie par effet Joule dans le conducteur.

➤ Expression de la densité de courant surfacique

La condition aux limites relative au champ magnétique permet de calculer la densité de courant surfacique à la surface du conducteur puisque : $\mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_z) = \vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t) = \frac{1-r}{c} E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$

$\Rightarrow \vec{j}_s = \frac{2}{\mu_0 c} E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_x$. On a déjà dit que ce courant surfacique est la source de l'onde réfléchie. Il crée aussi une onde qui se propage vers l'intérieur du conducteur et qui est exactement opposée à l'onde incidente, de sorte que l'onde transmise dans le conducteur est nulle.

3 Onde électromagnétique stationnaire

On s'intéresse après réflexion, à l'onde existant dans le vide devant le conducteur qui est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. On considère le cas où le conducteur est parfait.

3.1 Champ électromagnétique résultant

Le champ électromagnétique existant dans le vide est donné par :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t)$$

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \left(\exp(i(\omega t - kz)) - \exp(i(\omega t + kz)) \right) \vec{u}_x = E_0 \left(\exp(-ikz) - \exp(ikz) \right) \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(M, t) = -2iE_0 \sin(kz) \exp(i\omega t) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_i(M, t) + \vec{B}_r(M, t)$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{1}{c} E_0 \left(\exp(i(\omega t - kz)) + \exp(i(\omega t + kz)) \right) \vec{u}_y = \frac{1}{c} E_0 \left(\exp(-ikz) + \exp(ikz) \right) \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{2}{c} E_0 \cos(kz) \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

En notation réelle, en posant : $\underline{E}_0 = E_0 \exp(i\varphi)$:

$$\vec{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_y$$

Cette onde ne se propage pas car il n'y a pas de terme dépendant d'une combinaison $\omega t \mp kz$.

Elle vibre sur place, ce qu'illustre la figure ci-dessous. Il s'agit d'une **onde stationnaire**.

Sur la figure on observe qu'il existe des points où le champ électrique est constamment nul. Ces points sont appelés **nœuds de vibration** électriques. Ils sont situés aux points de cotes z_n tels que :

$$\sin(kz_n) = 0 \Leftrightarrow kz_n = n\pi \Leftrightarrow z_n = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$$

où $n \in \mathbb{Z}$ (les nœuds observés sur la figure correspondent à $n = 0, -1, -2, -3$ et -4). La distance entre deux nœuds consécutifs est égale à la moitié de la longueur d'onde.

Il existe aussi des points pour lesquels l'amplitude de vibration du champ électrique est maximale. Ces points sont appelés **ventres de vibration** électriques. Ils sont situés aux points de cote z'_n tels que :

$$\sin(kz'_n) = \pm 1 \Leftrightarrow kz'_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow z'_n = \frac{\pi}{2k} + n \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \text{ La distance entre}$$

deux ventres consécutifs est égale à $\frac{\lambda}{2}$; un nœud et

un ventre consécutifs sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.

Il existe aussi des nœuds et ventres de vibration magnétiques pour lesquels l'amplitude de vibration du champ magnétique B_z est respectivement nulle et maximale. Les nœuds de vibration magnétiques coïncident avec les ventres de vibration électriques et réciproquement.

Le vecteur de Poynting de l'onde stationnaire est :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{4}{\mu_0 c} E_0^2 \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) \cos(kz) \sin(kz) \vec{u}_z, \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) \sin(2kz) \vec{u}_z$$

Il est nul au niveau des nœuds de \vec{E} et de \vec{B} et, de plus, sa moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$ est nulle en tout point.

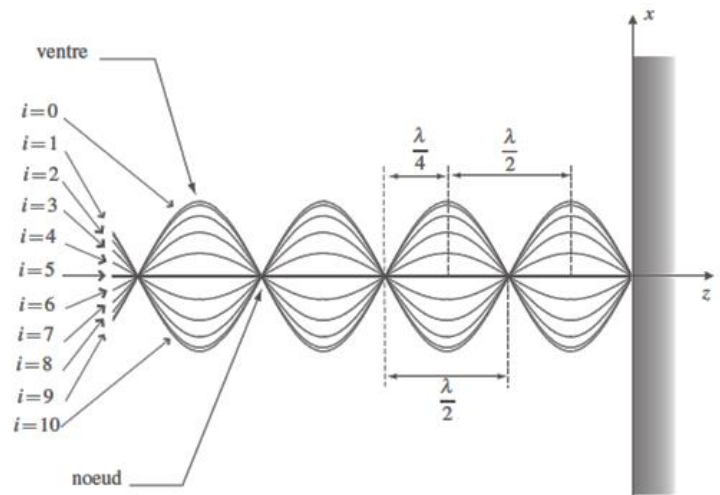
L'onde stationnaire ne propage pas d'énergie.

La densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde stationnaire est :

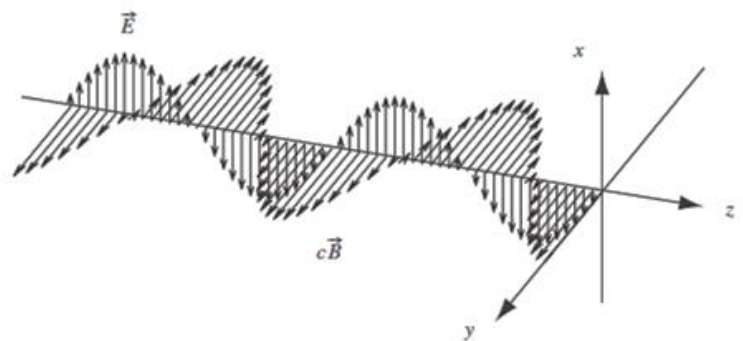
$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t),$$

$$u_{em}(M, t) = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{2}{\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(kz) \cos^2(\omega t + \varphi) \text{ et sa moyenne dans le temps}$$

est $\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) + \frac{1}{\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(kz) = \varepsilon_0 E_0^2$. La densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne de l'onde stationnaire est uniforme.



Champ électrique de l'onde stationnaire résultante : courbes de $E_x(z, t)$ en fonction de z aux instants t_i tels que $\omega t_i + \varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{i}{10}\pi$ avec $i = 0$ à 10 .



Onde résultante à un instant tel que $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{6}$.

3.2 Recherche des ondes stationnaires

➤ Définition générale d'une onde stationnaire

On appelle onde stationnaire toute solution réelle non constante d'une équation de propagation (l'équation de d'Alembert par exemple) de la forme : $\psi(M, t) = f(M)g(t)$ où $f(M)$ est une fonction de l'espace uniquement et $g(t)$ une fonction du temps uniquement. Une onde stationnaire est donc une onde pour laquelle les fonctions d'espace et de temps sont découplées.

➤ Recherche par la méthode de séparation des variables

Cette méthode permet de trouver toutes les ondes planes stationnaires solutions de l'équation de d'Alembert : $\Delta\psi(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial t^2}$.

Dans le cas unidimensionnel pour une dépendance en z de $\psi(M, t)$, on a $\psi(M, t) = f(z)g(t)$ et l'équation de propagation donne : $f''(z)g(t) = \frac{1}{c^2} f'(z)g''(t) \Leftrightarrow \frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{A}{c^2}$ où A est une constante, car dans l'équation, le membre de gauche ne dépend pas de t , et le membre de droite ne dépend pas de z . On a alors $g''(t) = Ag(t)$ dont la solution dépend du signe de A :

- Si $A > 0$, $g(t) = \alpha \exp(\sqrt{A}t) + \beta \exp(-\sqrt{A}t)$ où α et β sont des constantes,
- Si $A = 0$, $g(t) = \alpha t + \beta$,
- Si $A < 0$, $g(t) = \alpha \cos(\sqrt{-A}t) + \beta \sin(\sqrt{-A}t)$.

Seul le troisième cas présente un intérêt physique.

Ainsi en posant $A = -\omega^2$, $g(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$.

En posant $k = \frac{\omega}{c}$ on a alors $f''(z) = -k^2 f(z)$ dont la solution est $f(z) = \alpha' \cos(kz) + \beta' \sin(kz)$ où α' et β' sont des constantes. Finalement, les ondes stationnaires planes d'intérêt physique sont toutes de la forme $\psi(z, t) = (\alpha' \cos(kz) + \beta' \sin(kz))(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$, ou encore :

$\psi(z, t) = C \cos(kz + \phi) \cos(\omega t + \varphi)$ où C , ϕ et φ sont des constantes.

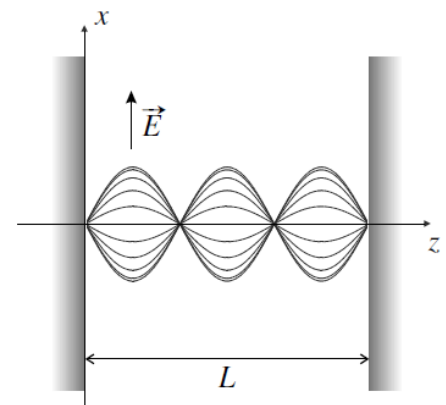
4 Applications aux cavités – Mode d'onde stationnaires

Une cavité électromagnétique est un volume vide délimité par des parois conductrices. Un champ électromagnétique existant à l'intérieur d'une cavité il peut engendrer des ondes stationnaires avec des fréquences propres déterminées par la géométrie et les dimensions de la cavité. La cavité permet de sélectionner dans le spectre émis par la source une fréquence particulière et de produire ainsi une onde monochromatique.

4.1 Introduction

On considère une cavité à une dimension constituée de deux plans conducteurs parallèles supposés parfaits face à face à distance L l'un de l'autre. Pour l'étude, on prend un repère $(Oxyz)$ tel que les plans conducteurs sont les plans $z = 0$ et $z = L$, les demi-espaces $z < 0$ et $z > 0$ étant remplis par la matière conductrice. L'espace $0 < z < L$ est vide de charges et de courants.

On cherche une onde électromagnétique plane, dépendant de z , pouvant exister dans la cavité, entre les deux plans conducteurs.



Cavité à une dimension et mode propre d'ordre $n = 3$.

D'après le paragraphe précédent, l'onde existant dans la cavité est nécessairement une onde stationnaire.

4.2 Recherche des ondes stationnaires pouvant exister dans la cavité

On cherche une onde stationnaire polarisée selon \vec{u}_x ; son champ électrique est de la forme :

$\vec{E}(M, t) = f(z)g(t)\vec{u}_x$. Le champ pourrait aussi avoir une composante suivant \vec{u}_y mais il n'a pas de composante suivant \vec{u}_z . En effet, pour une onde plane ne dépendant que de z et t , dans la cavité vide :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 ; E_z \text{ est indépendant de } z \text{ donc nul car un champ uniforme ne fait pas partie d'une onde.}$$

Dans l'espace vide entre les conducteurs, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

En projection sur \vec{u}_x cette équation donne : $f''(z)g(t) = \frac{1}{c^2} f(z)g''(t) \Rightarrow \frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = A$ où A est une constante. On s'intéresse d'abord à l'équation en $f(z)$. Sa solution est, suivant le signe de A :

- Si $A > 0$, $f(z) = \alpha \exp(\sqrt{A}z) + \beta \exp(-\sqrt{A}z)$ où α et β sont des constantes,
- Si $A = 0$, $f(z) = \alpha z + \beta$,
- Si $A < 0$, $f(z) = \alpha \cos(\sqrt{-A}z) + \beta \sin(\sqrt{-A}z)$.

Ici interviennent les **conditions aux limites** que doit vérifier le champ électrique. Elles imposent au champ d'être *orthogonal* aux surfaces des deux conducteurs. Or, par construction, \vec{E} est parallèle aux deux plans conducteurs. La relation de passage impose donc un champ électrique *nul* sur les deux plans $z = 0$ et $z = L$. Il faut pour cela que : $f(0) = f(L) = 0$. Ceci est possible sans que $f(z)$ soit la fonction identiquement nulle, seulement si $A < 0$ et dans ce cas il faut que : $\alpha = 0$ et $\alpha \cos(L\sqrt{-A}) + \beta \sin(L\sqrt{-A}) = 0$.

Pour que $f(z)$ ne soit pas la fonction nulle, il faut obligatoirement $\beta \neq 0$ donc : $\sin(L\sqrt{-A}) = 0$

$\Rightarrow L\sqrt{-A} = n\pi \Rightarrow A = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ où n est un entier naturel. Finalement : $f(z) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$. L'équation différentielle pour $g(t)$ s'écrit maintenant : $g''(t) = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}g(t)$.

Sa solution est : $g(t) = C \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right)$ où C et φ sont des constantes. Finalement, le champ électrique de l'onde pouvant exister dans la cavité est : $\vec{E}(M, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{u}_x$ où E_0 et φ sont des constantes quelconques. Pour connaître l'onde électromagnétique il faut calculer le champ magnétique. Le

plus simple est d'appliquer l'équation de Maxwell-Faraday : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z\right) \wedge (E_x \vec{u}_x) = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y = -\frac{n\pi}{L} E_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{u}_y$ d'où $\vec{B}(M, t) = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{u}_y$. Le

champ électromagnétique est un **mode propre** de la cavité. Il dépend d'un entier n et est appelé mode propre d'ordre n . Dans ce mode propre, il y a $n+1$ nœuds de vibration électriques de cotes tel que: $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{L}z_K = K\pi \Rightarrow z_K = \frac{KL}{n}$, avec $K = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$. $z_0 = 0, z_1 = \frac{L}{n}, z_2 = \frac{2L}{n}, \dots, z_{n-1} = \frac{(n-1)L}{n}, z_n = L$. Les nœuds en z_0 et z_n sont imposés par la présence des parois parfaitement conductrices.

La fréquence de vibration du mode propre d'ordre n est telle que : $\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = 2\pi f_n$, d'où :

$$f_n = n \frac{c}{2L} : \text{fréquences propre de la cavité.}$$

4.3 Energie en mode de vibration

La densité volumique d'énergie électrique est : $u_{el}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} z \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi \right)$.

L'énergie électrique contenue à l'instant t dans la cavité est, en notant S la surface des plans :

$$U_{el}(M, t) = S \int_0^L u_{el}(z, t) dz, U_{el}(M, t) = \frac{S}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi \right) \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} z \right) dz \text{ et}$$

$$U_{el}(M, t) = \frac{SL}{4} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi \right).$$

La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$u_m(M, t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{L} z \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi \right). \text{ L'énergie magnétique contenue à l'instant } t$$

$$\text{dans la cavité : } U_m(M, t) = S \int_0^L u_m(z, t) dz, U_m(M, t) = \frac{S}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi \right) \int_0^L \cos^2 \left(\frac{n\pi}{L} z \right) dz$$

$$U_m(M, t) = \frac{SL}{4} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi \right).$$

On remarque que : $U_{em} = U_{el}(t) + U_m(t) = \frac{SL}{4} \epsilon_0 E_0^2$. L'énergie électromagnétique contenue dans la cavité est constante dans le temps. Elle oscille entre les deux formes d'énergie électrique et magnétique à la fréquence $\frac{nc}{L} = 2f_n$, qui est le double de la fréquence de l'onde.