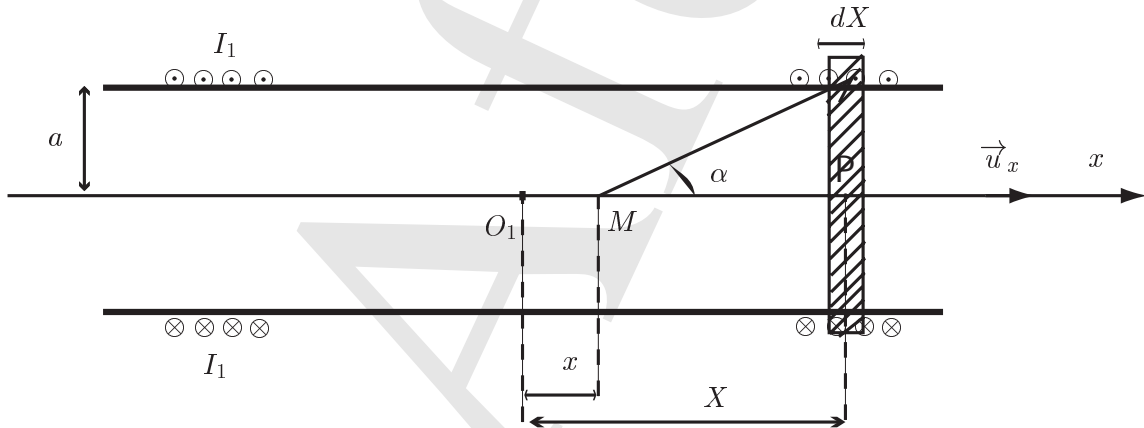


Résonance magnétique nucléaire - RMN -

Première partie Champ magnétique tournant

1.1. Solénoïde (S_1), infiniment long, comportant n spires circulaires, jointives, par unité de longueur.

1.1.1. Solénoïde (S_1) = superposition de n spires circulaires jointives par unité de longueur, on utilisera donc l'expression du champ créé par une spire sur son axe. $OM = x$. Par superposition, le champ $\vec{B}(M)$ créé en un point M de l'axe O_1x est la somme vectorielle des champs produits par chacune des spires (de rayons a) parcourues par le même courant I_1 .



Le champ magnétique créé par une spire en tout point M de son axe : $\vec{b}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_x$

Le champ magnétique élémentaire créé par une tranche d'épaisseur dX vaut, en M :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2a} dn \sin^3 \alpha \vec{u}_x$$

dn désigne le nombre de spires contenues dans la tranche dX :

$$dn = n dX \text{ avec } X = x + a \cotan \alpha \Rightarrow dn = -na \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\text{Donc : } \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I_1}{2} n \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 n I_1 \vec{u}_x}$$

1.1.2. Symétrie

Tout plan contenant Ox est un plan d'antisymétrie pour la distribution du courant, le pseudo-vecteur \vec{B} appartient à un plan d'antisymétrie. \vec{B} , en tout point M de Ox , est donc porté par Ox .

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_x$$

1.1.3. Invariance (coordonnées cylindriques)

- On a invariance de la distribution par rotation autour de Ox . donc $\vec{B}(M)$ est indépendant de θ :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, x) = \vec{B}(r, x)$$

- On a invariance de la distribution le long de l'axe Ox . donc $\vec{B}(M)$ est indépendant de x :

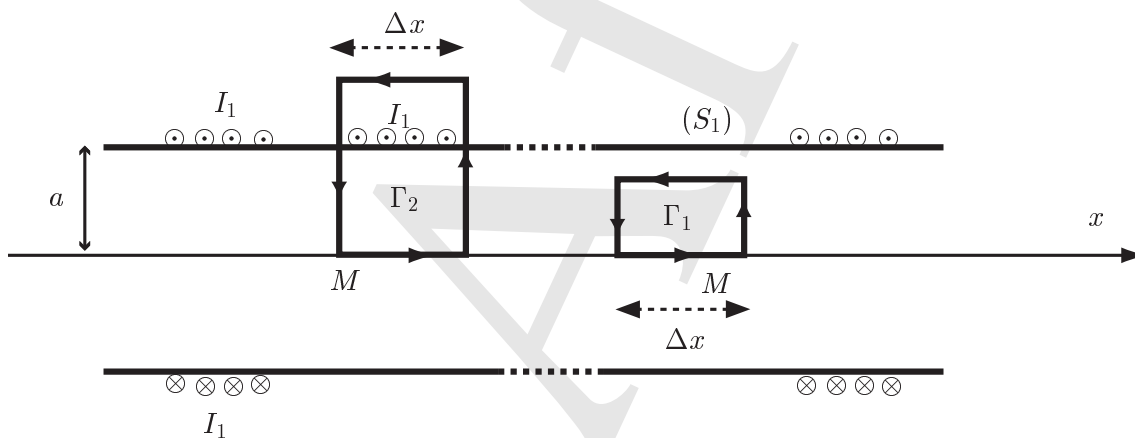
$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, x) = \vec{B}(r)$$

D'où : le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M de l'axe Ox du solénoïde ne dépend que de la coordonnée radiales du système de coordonnées cylindriques.

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_x$$

1.1.4. Théorème D'AMPÈRE

- Symétrie et invariance : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_x$
- Choix du contour : On choisit un contour rectangulaire (d'un côté $r = 0$ où $\vec{B}(M)$ connu, et l'autre à une distance r où $\vec{B}(M)$ est à déterminer).



Théorème d'Ampère : Soit $M \in \Gamma_i$ tel que $B_1(M) = \mu_0 n I_1$

$$\text{D'où : } \oint_{(\Gamma_i)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlaccée par le contour } (\Gamma_i)}$$

$$\begin{cases} r < a : \oint_{(\Gamma_1)} \vec{B}(M) = B_1 \Delta x - B_{\text{int}} \Delta x = \mu_0 I_{\text{enlaccées}} = 0 \Rightarrow B_{\text{int}} = B_1 \\ r > a : \oint_{(\Gamma_2)} \vec{B}(M) = B_1 \Delta x - B_{\text{ext}} \Delta x = \mu_0 I_{\text{enlaccées}} = \mu_0 n I_1 \Rightarrow B_{\text{ext}} = 0 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\begin{cases} \text{A l'intérieur de } (S_1) : \vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}_1(M) = \mu_0 n I_1 \vec{u}_x \\ \text{A l'extérieur de } (S_1) : \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{cases}$$

1.1.5. Coefficient d'inductance propre de (S_1) Le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ est uniforme à l'intérieur du solénoïde (S_1) . Le flux de ce champ à travers la section (S) de (S_1) :

$$\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot \vec{S} = \mu_o n I_1 \pi a^2 = \Lambda I_1 \implies \boxed{\Lambda = \mu_o n \pi a^2}$$

1.2. Solénoïdes croisés

1.2.1. $i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi_1)$

En notation complexe :
$$\begin{cases} \underline{u}(t) = R \underline{i}_1(t) + L \frac{d\underline{i}_1(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \underline{i}_1(t) \\ \underline{i}_1(t) = I_1 \sqrt{2} \exp j \left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U \sqrt{2} \exp j \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(-\varphi_1) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$$

1.2.2. $i_2(t) = I_2 \sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi_2)$

En notation complexe :
$$\begin{cases} \underline{u}(t) = R \underline{i}_2(t) + L \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} = (R + jL\omega) \underline{i}_2(t) \\ \underline{i}_1(t) = I_2 \sqrt{2} \exp j \left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U \sqrt{2} \exp j \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(-\varphi_2) = \frac{L\omega}{R}}$$

1.2.3. cas où $\varphi_2 = -\varphi_1$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = -L\omega \quad \text{ou} \quad \boxed{2LC\omega^2 = 1}$$

1.2.4. $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_2) \tan(\varphi_1) = -1 \quad \text{ou} \quad \boxed{L^2 \omega^2 - \frac{L}{C} = -R^2}$$

1.2.5. Dans les conditions **1.2.3** et **1.2.4** :

$$L\omega = R \quad \text{soit :} \quad \boxed{I_2 = \frac{L\omega}{R} I_1 = I_1 = \frac{U}{R\sqrt{2}}}$$

1.2.6. Dans le cadre de l'ARQP (Approximation des Régimes Quasi-Permanents : le courant déplacement est négligeable devant le courant de conduction), les équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j} \quad (MA) \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (MF)$$

On retrouve, ainsi, la forme des équations de maxwell (MA et MF) en régime magnétostatique ; par conséquent les résultats utilisés en **1.1** restent valables dans le cadre de l'ARQP.

1.2.6.1. Théorème de superposition pour le champ magnétique \vec{B}

Le champ résultant $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ avec \vec{B}_i : champ créée, en O par le solénoïde S_i
D'après ce qui précède :

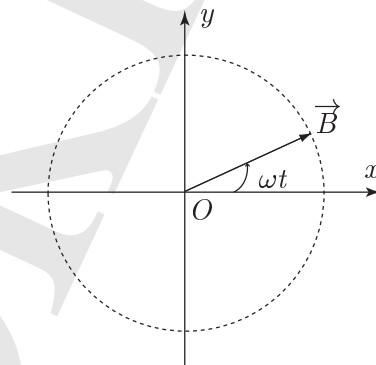
$$\vec{B} = \mu_0 n i_1(t) \vec{u}_x + \mu_0 n i_2(t) \vec{u}_y = \mu_0 n \frac{U}{R} (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t - \phi_1 + \phi_2) \vec{u}_y)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{Soit : } \boxed{\vec{B} = \mu_0 n \frac{U}{R} (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y)}$$

1.2.6.2.

Il s'agit du champ magnétique de module constant B tournant, à la vitesse angulaire ω , dans le plan (xOy) et dans le sens trigonométrique.

$$B = \mu_0 n \frac{U}{R}$$



1.2.6.3. Applications numériques :

$$I_1 = I_2 = 7mA \quad ; \quad C = 400nF \quad ; \quad L = 0,32mH \quad \text{et} \quad B = 1,25.10^{-5}T$$

1.2.7. Le rôle du condensateur est d'introduire le déphasage entre les courants d'intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

1.2.8. Pour inverser le sens de rotation du champ magnétique \vec{B} total, on doit brancher le condensateur en série avec le solénoïde S_2 , l'expression de \vec{B} et telle que :

$$\vec{B} = \mu_0 n \frac{U}{R} \left(\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_x + \cos(\omega t) \vec{u}_y \right) = \mu_0 n \frac{U}{R} (\sin(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t) \vec{u}_y)$$

Deuxième partie Théorie élémentaire de la RMN

2.1. $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$)

2.1.1. Théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel R

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right)_R = \vec{M} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B}_0}$$

2.1.2. D'après l'équation précédente :

Projection suivant \vec{m} : $\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt} \Rightarrow \boxed{\|\vec{m}\| \text{ est constante}}$

Projection suivant \vec{u}_z : $\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = 0 = \frac{dm_z}{dt} \Rightarrow \boxed{m_z \text{ est constante}}$

2.1.3. Soit α , l'angle entre \vec{m} et \vec{B}_o :

$$\vec{m} \cdot \vec{B}_o = m_z B_o = \|\vec{m}\| B_o \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{m_z}{\|\vec{m}\|} \Rightarrow \boxed{\alpha \text{ est constant}}$$

2.1.4. Par projection, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, de l'équation établie en 2.1.1, on a :

$$\begin{pmatrix} \frac{dm_x}{dt} \\ \frac{dm_y}{dt} \\ \frac{dm_z}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_o \end{pmatrix} = \gamma B_o \begin{pmatrix} m_y \\ -m_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dm_x}{dt} - \gamma B_o m_y = 0 \\ \frac{dm_y}{dt} + \gamma B_o m_x = 0 \\ \frac{dm_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

On pose : $\underline{m} = m_x + jm_y$

\Rightarrow

$$\boxed{\frac{d\underline{m}}{dt} + j\gamma B_o \underline{m} = 0}$$

Solution : $\underline{m} = m_o \exp j\gamma B_o t$

d'où :

$$\begin{cases} m_x(t) = m_o \cos(\gamma B_o t) \\ \text{et} \\ m_y(t) = -m_o \sin(\gamma B_o t) \end{cases}$$

2.1.5. Précision de LARMOR

$$\vec{m} = m_o (\cos(\gamma B_o t) \vec{u}_x + \sin(\gamma B_o t) \vec{u}_y) + m_z \vec{u}_z$$

D'où mouvement de précision autour de Oz (ou dans le plan) (xOy) à la pulsation :

$$\boxed{\vec{\omega}_o = -\gamma B_o \vec{u}_z = -\gamma \vec{B}_o} \text{ tel que : } |\vec{\omega}_o| = \gamma B_o$$

2.1.6. Application numérique

$$\omega_o = -2,7 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ et } f_o = \frac{|\omega_o|}{2\pi} = 0,43 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

Cette fréquence f_o se situe dans le domaine Hertzien.

2.2. $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_o \vec{u}_z + \vec{B}_1 \vec{u}_X$ tels que : $0 < B_1 \ll B_o$

2.2.1. En appliquant le résultat de la question 2.1.1

$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)_R = \gamma \vec{m} \wedge (B_o \vec{u}_z + B_1 \vec{u}_X) = -\vec{m} \wedge (\omega_o \vec{u}_z + \omega_1 \vec{u}_X) = -\vec{m} \wedge (\vec{\omega}_o + \vec{\omega}_1)$$

Soit

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)_R = -\vec{m} \wedge (\vec{\omega}_o + \vec{\omega}_1)}$$

2.2.2. R_1 est en rotation par rapport à R . En appliquant le résultat de la dérivée d'un vecteur par rapport au temps dans un changement de référentiels :

$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R/R_1} \wedge \vec{m} = -\vec{m} \wedge (\vec{\omega}_o + \vec{\omega}_1) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{m} \wedge (\vec{\omega} - \vec{\omega}_o - \vec{\omega}_1)$$

Soit
$$\boxed{\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{m} \wedge (\vec{\Omega} - \vec{\omega}_1)}$$

2.2.3. Le moment magnétique \vec{m} effectue, dans R_1 , un mouvement de précession autour de \vec{u} à la pulsation $\vec{\Omega}_1 = \vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ (vecteur rotation instantané autour de \vec{u}) tel que : \vec{u} est collinéaire à $\vec{\Omega}_1$.
Projection suivant Oz :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_1 \cdot \vec{u}_z = \|\vec{\Omega}_1\| \cos \theta \\ \vec{\Omega}_1 \cdot \vec{u}_z = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega} + \vec{\omega}_o) \cdot \vec{u}_z = \omega_o - \omega \\ \|\vec{\Omega}_1\| = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega - \omega_o)^2} = \sqrt{\gamma^2 B_1^2 + (\omega - \omega_o)^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{\omega_o - \omega}{\sqrt{\gamma^2 B_1^2 + (\omega - \omega_o)^2}}}$$

2.2.4. Le mouvement de $\vec{\Omega}_1 = \vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ relativement à R , est celui du repère R_1 par rapport à R (car $\vec{\Omega}_1$ est un vecteur de R_1) : $\vec{\Omega}_1$ est, donc, animé par rapport à R d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz , à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.
Le mouvement du moment magnétique \vec{m} dans R est, donc, une *pécission* et une *rotation*.

2.2.5. On pose : $\vec{m}_z = m_z \vec{u}_z$

2.2.5.1. $\vec{\Omega} = \vec{0}$

D'après **2.2.2** :
$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{R_1} = -\vec{m} \wedge \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{m}$$

La composante \vec{m}_z subit un premier retournement au bout d'un temps Δt telle que :

$$\Delta t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{|\omega_1|} = \frac{\pi}{\gamma B_1}$$

2.2.5.2. Application numérique :

$$\Delta t = 11,6 \text{ ms}$$

2.3. Prise en compte de la relaxation

2.3.1. Relaxation d'un moment magnétique

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{\text{relaxation}} = -\frac{\vec{M} - \vec{M}_o}{\tau}$$

2.3.1.1. τ est homogène à un temps. Son unité dans le (SI) est la *seconde*.

2.3.1.2. Résolution de l'équation différentielle

De l'équation : $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{\text{relaxation}} + \frac{\vec{M}}{\tau} = \frac{\vec{M}_o}{\tau}$, on en déduit que : $\vec{M}(t) = \vec{M}_o + \vec{C} \exp - \frac{t}{\tau}$

Compte tenu des considération expérimentale citée :
$$\begin{cases} \vec{M}(t_0) = 0 \\ \vec{C} = -\vec{M}_o \exp \frac{t_0}{\tau} \end{cases}$$

Soit :
$$\vec{M}(t) = \vec{M}_o \left(1 - \exp - \frac{t - t_0}{\tau} \right) ; \quad \text{d'où le résultat !}$$

2.3.2. Équations de Bloch

2.3.2.1. En utilisant les questions 2.2.2 et 2.3.1, ainsi que l'hypothèse admise en 2.3 :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_1} = \vec{M} \wedge (\vec{\Omega} - \vec{\omega}_1) + \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{relaxation}} = \vec{M} \wedge (\vec{\Omega} - \vec{\omega}_1) - \frac{\vec{M}}{\tau} + \frac{\vec{M}_o}{\tau}$$

Soit l'équation :
$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_1} + \frac{\vec{M}}{\tau} - \vec{M} \wedge (\Omega \vec{u}_z - \omega_1 \vec{u}_X) = \frac{M_o}{\tau} \vec{u}_z$$

2.3.2.2. Équations de BLOCH

$$\vec{M}_{(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_z)} \begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{M} \wedge (\Omega \vec{u}_z - \omega_1 \vec{u}_X) = \begin{pmatrix} \Omega M_Y \\ -\omega_1 M_Z - \Omega M_X \\ M_Y \omega_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dM_X}{dt} = \Omega M_Y - \frac{M_X}{\tau} = M_o \left(\Omega v - \frac{u}{\tau} \right) \\ \frac{dM_Y}{dt} = -\omega_1 M_Z - \Omega M_X - \frac{M_Y}{\tau} = -\omega_1 M_Z - M_o \left(\Omega u + \frac{v}{\tau} \right) \\ \frac{dM_Z}{dt} = M_Y \omega_1 - \frac{M_Z}{\tau} + \frac{M_o}{\tau} = -\frac{M_Z}{\tau} + M_o \left(\omega_1 v + \frac{1}{\tau} \right) \end{cases}$$

D'où les équations de bloch :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \Omega v \\ \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -\omega_1 \frac{M_Z}{M_o} - \Omega u \\ \frac{dM_Z}{dt} + \frac{M_Z}{\tau} = M_o \left(\omega_1 v + \frac{1}{\tau} \right) \end{cases}$$

2.3.3. Régime permanent dans le référentiel R₁

2.3.3.1.

En régime permanent :

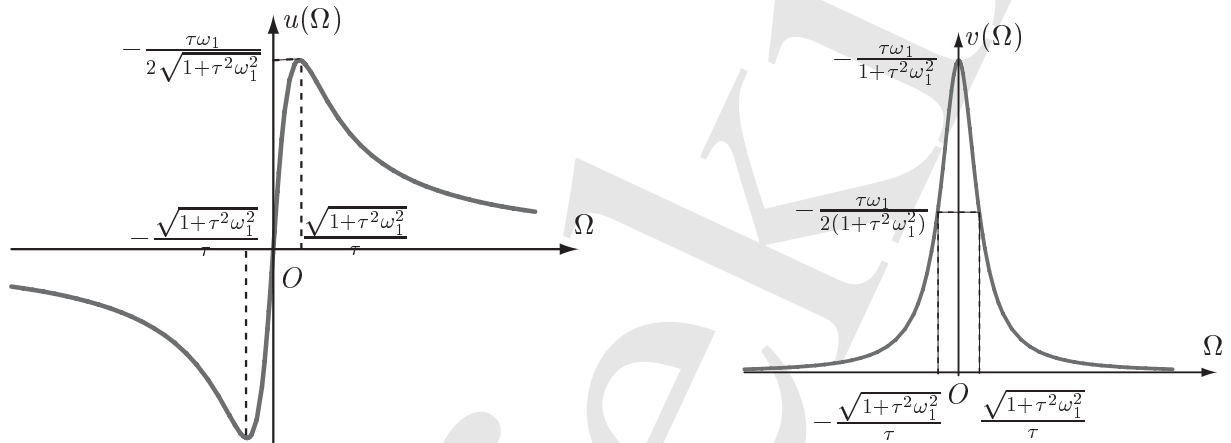
$$\begin{cases} \frac{u}{\tau} = \Omega v & (1) \\ v = -\tau \left(\omega_1 \frac{M_Z}{M_o} + \Omega u \right) & (2) \\ \frac{M_Z}{M_o} = \tau \left(\omega_1 v + \frac{1}{\tau} \right) & (3) \end{cases}$$

- ◇ (1) et (3) dans (2) donne : $v (M_o + \Omega^2 \tau^2 + \omega_1^2 \tau^2) = -\tau \omega_1$ (4)
- ◇ (4) dans (1) donne : $u (M_o + \Omega^2 \tau^2 + \omega_1^2 \tau^2) = -\tau^2 \Omega \omega_1$
- ◇ (4) dans (3) donne : $(M_Z - M_o) (M_o + \Omega^2 \tau^2 + \omega_1^2 \tau^2) = -M_o \tau^2 \omega_1^2$

Soient :

$$\begin{cases} u = -\frac{\tau^2 \omega_1 \Omega}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ v = -\frac{\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ M_z = M_o - M_o \frac{(\tau \omega_1)^2}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \end{cases} \quad (7)$$

2.3.3.2. Allures des courbes $u(\Omega)$ et $v(\Omega)$



2.3.3.3. Largeur à mi-hauteur $\Delta\Omega$ de la courbe $v(\Omega)$:

$$v(\Omega) = \frac{v_{max}}{2} \iff -\frac{\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} = -\frac{\tau \omega_1}{2(1 + (\tau \omega_1)^2)} \implies \Omega_{12} = \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}}$$

soit : $\Delta\Omega = 2\sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}}$

2.3.4. Dans la pratique , le champ \vec{B}_1 est remplacé par $\vec{B}_2 = 2B_1 \cos(\omega' t) \vec{u}_x$ ($\omega' > 0$).

2.3.4.1. Décomposition du champ \vec{B}_2

$$\vec{B}_2 = B_1 \cos(\omega' t) \vec{u}_x + B_1 \cos(\omega' t) \vec{u}_x = B_1 \cos(\omega' t) \vec{u}_x + B_1 \cos(\omega' t) \vec{u}_x + B_1 \sin(\omega' t) \vec{u}_y - B_1 \sin(\omega' t) \vec{u}_y$$

On pose :

$$\vec{B}_2^+ = B_1 \left(\cos(\omega' t) \vec{u}_x + \sin(\omega' t) \vec{u}_y \right) \text{ et } \vec{B}_2^- = B_1 \left(\cos(\omega' t) \vec{u}_x - \sin(\omega' t) \vec{u}_y \right)$$

Soit : $\vec{B} = \vec{B}_2^+ + \vec{B}_2^-$

2.3.4.2. On pose : $\vec{\Omega} = \vec{\omega}' - \vec{\omega}_o$

A la résonance : $\vec{\Omega} = \vec{0} \implies \vec{\omega}' = \vec{\omega}_o = -\gamma B_o \vec{u}_z = \omega' \vec{u}_z \quad (\omega' < 0)$

C'est, donc, la composante \vec{B}_2^- qui permet d'atteindre cette résonance $\implies \vec{B}_2(t) = \vec{B}_2^-$

Le vecteur rotation instantané de cette composante est $\vec{\omega}'_- = -\omega' \vec{u}_z$

2.3.4.3. !!!!!

2.4. Détection de la réponse du milieu

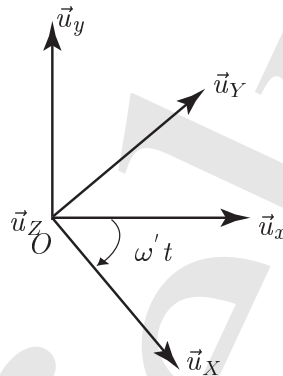
2.4.1. La bobine étant d'axe Oy , les champs \vec{B}_o et \vec{B}_1 sont, respectivement, suivants Oz et Ox ; donc les flux de ces champs à travers la bobine détectrice sont nuls : la présence de ces champs ne perturbent, donc, pas la détection.

2.4.2. Force électromotrice $e(t)$ induite dans la bobine détectrice

$$\vec{B} = K\vec{M} \Rightarrow \Phi = N\vec{B} \cdot S\vec{u}_y = NSK\vec{M} \cdot \vec{u}_y = NSKM_y$$

$$\text{soit : } e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -NSK\frac{dM_y}{dt}$$

$$\text{avec : } M_y = M \cdot \vec{u}_y = M_o(u(\vec{u}_X \cdot \vec{u}_y) + v(\vec{u}_Y \cdot \vec{u}_y)) = M_o(-u \sin(\omega' t) + v \cos(\omega' t))$$



$$\text{soit : } e(t) = NSK\omega' M_o(u \cos(\omega' t) + v \sin(\omega' t))$$

$$\text{ou : } e(t) = V_0 \cos(\omega' t) + V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\omega' t) \quad \text{tels que : } \begin{cases} V_0 = NKS M_o \omega' u \\ V_{\frac{\pi}{2}} = NKS M_o \omega' v \end{cases}$$

2.4.3. On pourra représenter la fonction $\eta(\omega')$, définie par :

$$\eta = \frac{V_0}{V_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{u}{v} = \Omega\tau = (-\omega' + \gamma B_o) \tau$$

$\eta(\omega')$ est une droite de pente $-\tau$, d'où la détermination de cette dernière..

Troisième partie Détection synchrone du signal

3.1. Schéma de principe d'un détecteur synchrone

3.1.1. La constante K_0 est homogène à une tension.

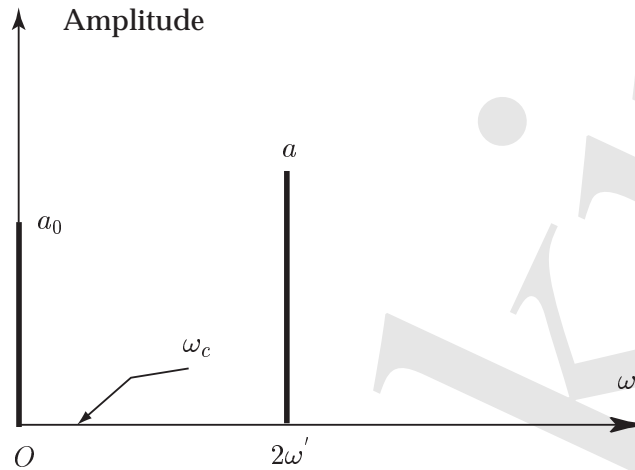
3.1.2. Expression de $v_{MUL}(t)$

$$\begin{aligned} v_{MUL}(t) &= \frac{1}{K_0} x_1(t) x_2(t) \\ &= \frac{1}{K_0} v_{DEP}(t) e(t) \\ &= \frac{V}{K_0} \cos(\omega' t + \Delta\varphi) (V_0 \cos \omega' t + V_{\frac{\pi}{2}} \sin \omega' t) \end{aligned}$$

$$v_{MUL}(t) = \frac{V}{K_0} \cos(\omega' t + \Delta\varphi) (V_0 \cos \omega' t + V_{\frac{\pi}{2}} \sin \omega' t)$$

3.1.3.

$$v_{MUL}(t) = \frac{V}{2K_0} \left(\underbrace{V_0 \cos \Delta\varphi - V_{\frac{\pi}{2}} \sin \Delta\varphi}_{\text{Composantes continues}} + \underbrace{V_0 \cos (2\omega' t + \Delta\varphi) + V_{\frac{\pi}{2}} \sin (2\omega' t + \Delta\varphi)}_{\text{Composantes variables}} \right)$$



3.1.4. La fréquence de coupure ω_c du filtre est très inférieure à ω' : les composantes variables de fréquences $2\omega'$ sont, donc, atténuées et le filtre (d'amplification A) ne laisse passer que les composantes continues. Soit :

$$v_{FPB}(t) = \frac{V}{2K_0} A \left(V_0 \cos \Delta\varphi - V_{\frac{\pi}{2}} \sin \Delta\varphi \right)$$

3.1.5. D'après l'expression précédente, on peut remarquer facilement que :

$$v_{FPB}(t) = \left(\frac{VA}{2K_0} \right) V_0 \quad \text{pour} \quad \Delta\phi = 0$$

et

$$v_{FPB}(t) = - \left(\frac{VA}{2K_0} \right) V_{\frac{\pi}{2}} \quad \text{pour} \quad \Delta\phi = \frac{\pi}{2}$$

Ce qui nous permet d'étudier séparément les termes : V_0 et $V_{\frac{\pi}{2}}$

3.2. Étude du circuit déphaseur

3.2.1. Fonction de transfert

Le théorème de Millmann (Loi des noeuds aux termes du potentiel) donne :

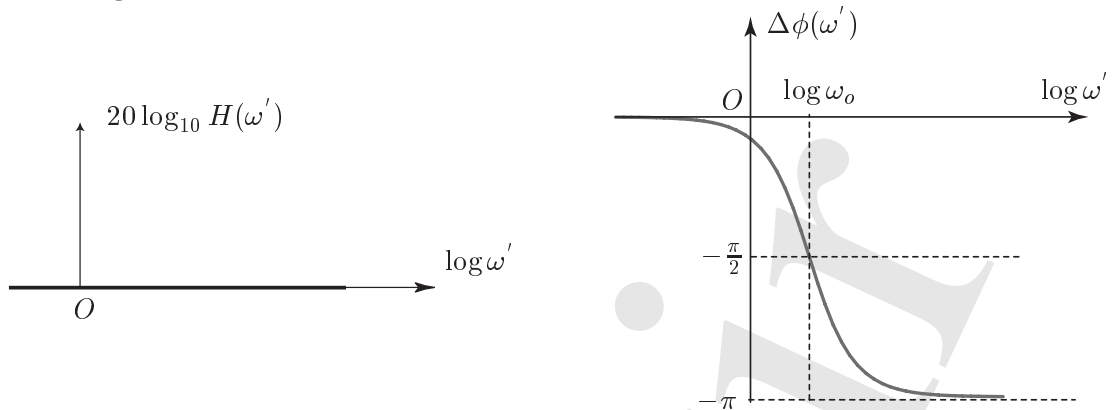
$$\frac{2}{r} \underline{v}^- = \frac{\underline{v}_{REF}}{r} + \frac{\underline{v}_{DEP}}{r} \quad \text{et} \quad \underline{v}^+ \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \right) = \frac{\underline{v}_{REF}}{R}$$

$$\text{Soit :} \quad \underline{H}(j\omega') = \frac{\underline{v}_{DEP}}{\underline{v}_{REF}} = \frac{1 - jRC\omega'}{1 + jRC\omega'}$$

3.2.2. Amplification $H(\omega')$ et déphasage $\Delta\phi$

$$H(\omega') = |\underline{H}(j\omega')| = 1 \quad \text{et} \quad \Delta\phi = \arg \underline{H}(j\omega') = -2 \arctan(RC\omega')$$

3.2.3. Diagramme de BODE


 3.2.4. $v_{FPB}(t) = V_M \cos \omega' t$ et la fréquence $f' = 10 \text{ kHz}$

Le déphasage $\Delta \phi = -\frac{\pi}{2}$ pour $RC\omega' = 1$ avec $\omega' = 2\pi f'$

Soit :

$$R = \frac{1}{2\pi f' C} = 1,6 \text{ k}\Omega$$

3.2.5. pour prélever la tension $v_{REF}(t)$ en phase avec le champ \vec{B}_2 , il suffit d'avoir le déphasage $\Delta \phi$ nul. Ce qui est réalisable pratiquement en prenant une résistance R nulle : ce qui revient à remplacer le circuit *déphaseur* par un *suiveur* !