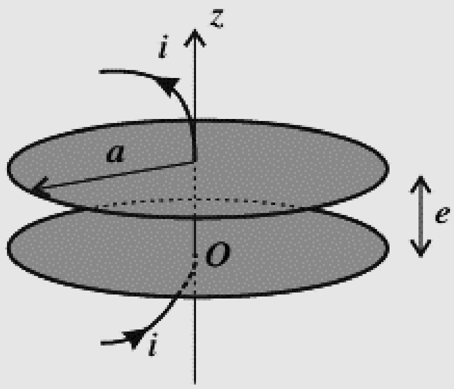
TD Energie du champ électromagnétique

Exercice 1 : Bilan d'énergie d'un condensateur plan en régime lentement variable

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a, distants de e, d'axe Oz. Il est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



1. Exprimer la charge $q(t)$ portée par l'armature inférieure du condensateur en admettant que sa moyenne temporelle est nulle. En déduire la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, en convention récepteur par rapport au courant $i(t)$.

2. Donner l'expression du champ électrostatique, en supposant qu'il est identique au champ d'un condensateur plan en électrostatique sans effets de bords.

3. Montrer qu'il existe un champ magnétique non nul à l'intérieur du condensateur. Calculer ce champ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un cercle quelconque d'axe (Oz).

4. En déduire le vecteur de Poynting. On appelle $\mathscr{S}$ la surface délimitant le condensateur (cylindre de rayon a et hauteur e). Calculer le flux Φ_Π sortant de $\mathscr{S}$. Conclure.

5. Déterminer un critère de validité pour l'expression approchée du champ électrique utilisée dans l'exercice.

Exercice 2 : Cylindre dans un four à induction

Un cylindre de rayon a, hauteur h et d'axe (Oz), constitué d'un métal ohmique de conductivité γ, est plongé dans un champ magnétique uniforme variable : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$, où B_0 et ω sont des constantes. On suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du cylindre.

1. Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre de la forme $\vec{E} = E(r,z,t)\vec{u}_\theta$, en coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe (Oz). En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale à un cercle quelconque d'axe (Oz), déterminer $E(r,z,t)$. En déduire la densité de courant volumique dans le cylindre.

2. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

3. Trouver l'*ordre de grandeur* du champ magnétique créé par les courants qui se développent dans le cylindre. En déduire une condition pour que l'hypothèse faite dans l'énoncé soit valable.

Exercice 3 : Décharge d'un conducteur dans l'air

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R, porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ et initialement localement neutre ($\rho(M, t=0) = 0$ en tout point M à l'extérieur de la boule).

On cherche le champ électromagnétique ($\vec{E}(M,t)$, $\vec{B}(M,t)$) en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre O.

1. Déterminer $\vec{E}(M, t=0)$ à l'extérieur de la boule.

2. Déterminer $\vec{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.

3. En utilisant l'identité de Poynting, $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$, trouver le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.

4. Montrer $\rho(M,t) = 0$ à l'extérieur de la boule.

5. Déterminer la charge $Q(t)$ portée par la boule à l'instant t.

6. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$. Commenter.