Fonctions élémentaires

Exercice 1.

Déterminer les limites de x^n lorsque $n \to +\infty$ selon les valeurs de x.

Aller à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Déterminer les limites de $(\ln(x))^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n \to +\infty$

Aller à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$x^y = y^x$$

Lorsque x et y sont des entiers strictement positifs.

Aller à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer la limite quand x tend vers 0^+ (avec $x \neq 0$) de :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

(On pourra utiliser une variable auxiliaire bien choisie tendant vers $+\infty$).

Aller à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$

1. Déterminer les limites de f à l'infini.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$$

1. Etudier les variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Puis les limites en $\pm\infty$ de $f(x) - x$, en déduire que le graphe de f admet une asymptote en $\pm\infty$.
4. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\left(u(x)\right)^\alpha$ où u est un polynôme et α un réel.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Aller à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\beta\left(u(x)\right)^\alpha$ où u est un polynôme et α et β sont des réels.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Aller à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Résoudre

$$\ln(\mathrm{ch}(x)) = a$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variation de f sur I.

On admettra qu'il existe un unique $x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ tel que $\cos(x_0)=-\frac{1}{4}$ tel que $\cos(x)\geq-\frac{1}{4}$ si $x\in[0,x_0]$ et $\cos(x)\leq-\frac{1}{4}$ si $x\in[x_0,\pi]$.

Si on connait les fonctions trigonométriques réciproques donner un nom à x_0. (Hors programme)

4. Calculer $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle.
5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Aller à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $f:[-\pi,\pi]\to R$ définie par $f(x)=4x-5\sin(x)$

1. Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
2. Montrer que f' dans l'intervalle $[0,\pi]$ s'annule pour une valeur comprise entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.
4. Tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Aller à : Correction exercice 14

Exercice 15.

On rappelle que $\text{th}:\mathbb{R}\to]-1,1[$ est une bijection.

Déterminer g sa bijection réciproque.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\text{ch}^3(x)-\text{sh}^3(x))$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\text{ch}(x)))$$

Aller à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Calculer
$$A(x)=1+\text{ch}(x)+\text{ch}(2x)+\cdots+\text{ch}(nx)=\sum_{k=0}^{n}\text{ch}(kx)$$

Aller à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$3\,\text{ch}(x)-\text{sh}(x)-3=0$$

Aller à : Correction exercice 18

Exercice 19.

1. Calculer

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$
   Déterminer les solutions de l'équation :

$$2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$

Aller à : Correction exercice 19

Exercice 20.

1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\cos(2t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

2. Montrer que

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^x$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ?
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable, que peut-on en déduire sur le graphe de f en 0 ?
4. Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$. Puis calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer sommairement le graphe de f. (On tracera clairement les tangente(s) et demi-tangente(s) remarquable, ainsi que les asymptotes si nécessaire).

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.

4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$ (l'expression attendue n'utilise pas de fonctions hyperboliques réciproque (Hors programme)).
4. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) + 1}{\mathrm{ch}(x) - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 25

Exercice 26. (Hors programme)

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \mathrm{argth}\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f. Tracer le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soit $\theta \in [\pi, 2\pi]$,

1. Montrer que $0 \leq 2\pi - \theta \leq \pi$
2. Calculer $\arccos(\cos(\theta))$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soient les fonctions $f: x \to \arcsin(\sin(x))$ et $g: x \to \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Aller à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?
3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f.
5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Aller à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ?
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tous les réels pour lesquels cela ne posent pas de problème.
3. Calculer les limites de $f'(x)$ en -1^+, 1^-, ainsi qu'en 0^- et 0^+. Préciser la nature des demi-tangentes en ces points.
4. Déterminer les variations de f.
5. Tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1-2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.

Aller à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(1-2x^4)$

Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$

Aller à : Correction exercice 33

Exercice 34. (Hors programme)

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x :

$$16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2 + 1)P(x)$$

et expliciter ce polynôme.

2. Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \text{argsh}(3x + 4x^3)$$

a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.

b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Aller à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\text{th}(x)) = \arctan(\text{sh}(x))$

On pourra poser

$$f(x) = \arcsin(\text{th}(x)) - \arctan(\text{sh}(x))$$

Aller à : Correction exercice 35

Exercice 36.

1. Écrire sous la forme $\frac{m}{n}$ avec $\in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arccos(\cos(\alpha))$, $\arcsin(\sin(\alpha))$ et $\arctan(\tan(\alpha))$ dans les cas : $\alpha = \frac{118}{10}\pi$, $\alpha = \frac{252}{15}\pi$ et $\alpha = \frac{76}{5}\pi$
2. Calculer

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right)$$

Aller à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x)$

Aller à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$$

Aller à : Correction exercice 38

Exercice 39.

$$\arctan(2x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)$$

1. Montrer que s'il y a des solutions alors elles sont positives.
2. Résoudre cette équation.

On rappelle que

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Aller à : Correction exercice 39

Exercice 40. (Hors programme)

Donner une expression plus simple de :

$$f(x)=\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}}\right)$$

$$g(x)=\operatorname{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$h(x)=\operatorname{argth}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Aller à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Soit f la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan(x)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour tout x réel, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.
3. Que dire de f.

Aller à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Calculer

$$\arccos\left[\cos\left(\frac{89\pi}{15}\right)\right]$$

(On explicitera avec soin le raisonnement qui a conduit à la réponse donnée).

Aller à : Correction exercice 42

Exercice 43.

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=\arctan(\operatorname{sh}(x))$

Calculer $f'(x)$, on simplifiera cette dérivée au maximum.

Aller à : Correction exercice 43

Exercice 44.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

Et g la fonction définie par

$$g(x)=\arctan(e^x)$$

1. Déterminer sur quel ensemble f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer sur quel ensemble f est dérivable.
3. Calculer $g'(x)$
4. Pour tout $x>0$ trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

Aller à : Correction exercice 44

Exercice 45.

Le but de cet exercice est de montrer la formule de John MACHIN (1680-1751) :

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

On rappelle que $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

1. On pose $\theta=\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$, calculer $\tan(2\theta)$, puis $\tan(4\theta)$.
2. Montrer que $0\leq\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\leq\frac{\pi}{6}$ en déduire un encadrement de $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la formule de MACHIN.

Aller à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u)=3\operatorname{ch}(u)-4$ et soit g la fonction définie par

$$g(u)=\arcsin(3\operatorname{ch}(u)-4)$$

1. Montrer que pour tout réel u :
$$u\in[-\ln(3),\ln(3)]\Leftrightarrow f(u)\in[-1,1]$$
2. Déterminer l'ensemble de définition de g, et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3. En précisant son domaine de validité, montrer la formule :
$$g'(u)=\frac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))}}$$
4. Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité.

(Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, on remarquera que $\operatorname{sh}^2(u)=\operatorname{ch}^2(u)-1$.

5. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Dresser le tableau de variations de g puis tracer sommairement son graphe.

Aller à : Correction exercice 46

Corrections

Correction exercice 1.

Si $x<-1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim_{n\to+\infty}|x|^n=+\infty$

Si $x=-1$ alors $x^n=(-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$ alors $\lim_{n\to+\infty}x^n=0$

Si $x=1$ alors $x^n=1$ donc $\lim_{n\to+\infty}x^n=1$

Si $x>1$ alors $\lim_{n\to+\infty}x^n=+\infty$

Profitons de ce petit exercice pour rappeler les équivalences très importantes suivantes :

$-1<x<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow 1-x^2>0$

Aller à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$-1<\ln(x)<1\Leftrightarrow e^{-1}<x<e\Leftrightarrow\frac{1}{e}<x<e$$

Donc

Evidemment $x>0$.

Si $0<x\leq\frac{1}{e}$ alors $\ln(x)<-1$ et $(\ln(x))^n$ n'a pas de limite.

Si $\frac{1}{e}<x<e$ alors $-1<\ln(x)<1$ et $(\ln(x))^n\to 0$

Si $x=e$ alors $\ln(x)=1$ et $(\ln(x))^n=1\to 1$

Si $x>e$ alors $\ln(x)>1$ et $(\ln(x))^n\to+\infty$

Aller à : Exercice 2

Correction exercice 3.

$$x^y=y^x \Leftrightarrow e^{y\ln(x)}=e^{x\ln(y)} \Leftrightarrow y\ln(x)=x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}=\frac{\ln(y)}{y} \Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

Si on pose $f(t)=\frac{\ln(t)}{t}$

$$f'(t)=\frac{\frac{1}{t}t-\ln(t)\times 1}{t^2}=\frac{1-\ln(t)}{t^2}$$

Les variations de cette fonction sont résumées dans le tableau ci-dessous

t	0	1	e	$+\infty$
$f'(t)$	||	$+$	0	$-$
$f(t)$	|| $-\infty$	0 ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

Si $x\leq 1$, il y a une unique solution (x,x).
Si $1<x<e$, il y a deux couples de solutions (x,x) et (x,y) avec $y>e$.
Si $x=e$, il y a une unique solution (e,e)
Si $x>e$, il y a deux couples de solutions (x,x) et (x,y) avec $y<e$.
Maintenant cherchons les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$:
$x=n=1$ donne la solution $(1,1)$.
$x=n=2\in]1,e[$, on cherche l'unique $y=m>e$ tel que $2^m=m^2$ (s'il existe).
$m=3$ ne marche pas, $m=4$ est solution (c'est donc la seule).

Aller à : Exercice 3

Correction exercice 4.

On pose $X=\frac{1}{x}$, si $x\to 0^+$ alors $X\to+\infty$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=X^3e^{-X^2}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée puisque X^3 tend vers l'infini et e^{-X^2} tend vers 0.
La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances (lors d'une forme indéterminée)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim_{X\to+\infty}X^3e^{-X^2}=0$$

Aller à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $x<0$ on pose $x^2=X\Leftrightarrow x=-\sqrt{X}$, donc $f(x)=(-\sqrt{X}+\frac{1}{2})e^{-X}\xrightarrow[X\to+\infty]{}0$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

Si $x>0$ on pose $x^2=X\Leftrightarrow x=\sqrt{X}$, donc $f(x)=(\sqrt{X}+\frac{1}{2})e^{-X}\xrightarrow[X\to+\infty]{}0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.

2. $f'(x)=e^{-x^2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2}=(-2x^2-x+1)e^{-x^2}$

Le polynôme $-2X^2-X+1$ admet $X_1=-1$ et $X_2=\frac{1}{2}$ comme racines donc

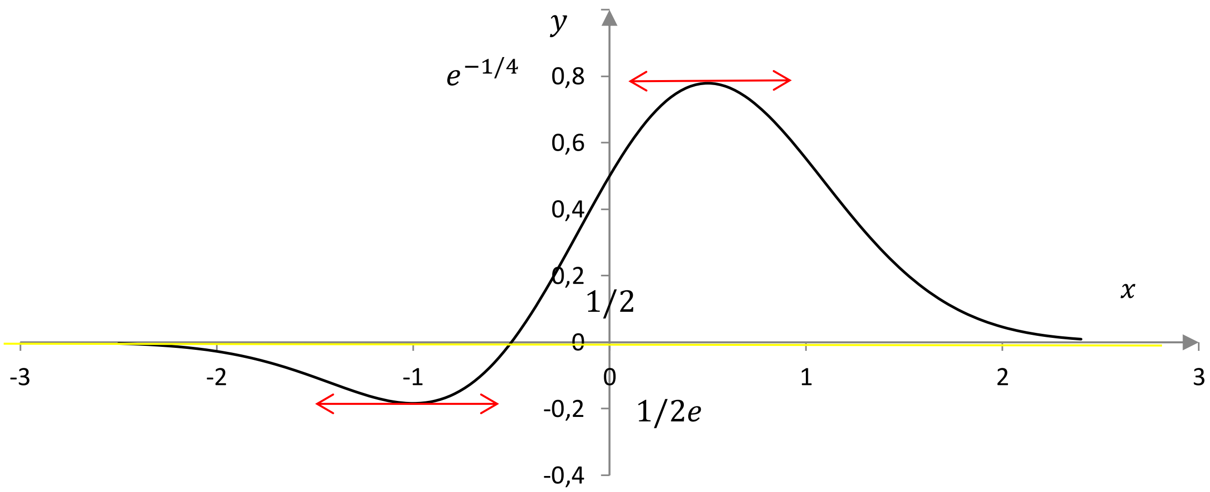
$-2X^2-X+1=-2(X+1)(X-\frac{1}{2})$

Donc $f'(x)=-2(x+1)(x-\frac{1}{2})e^{-x^2}$

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2e}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

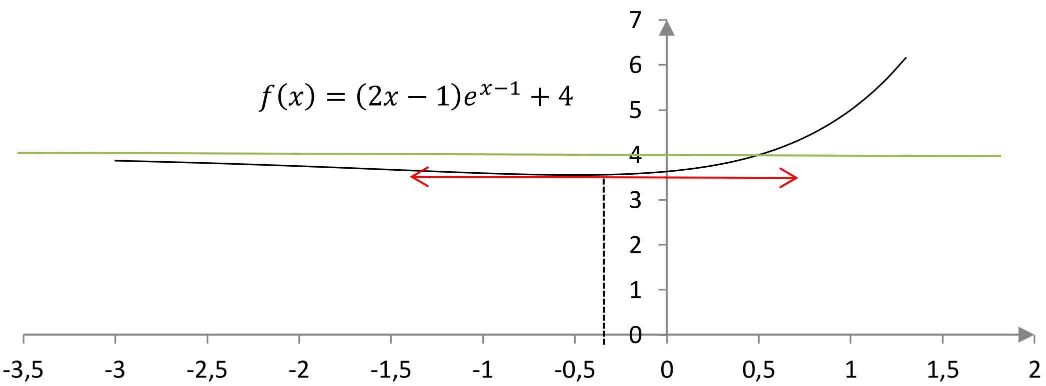
3. $\frac{-1}{2e} \approx -0{,}2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}8$ en gros.



Aller à : Exercice 5

Correction exercice 6.

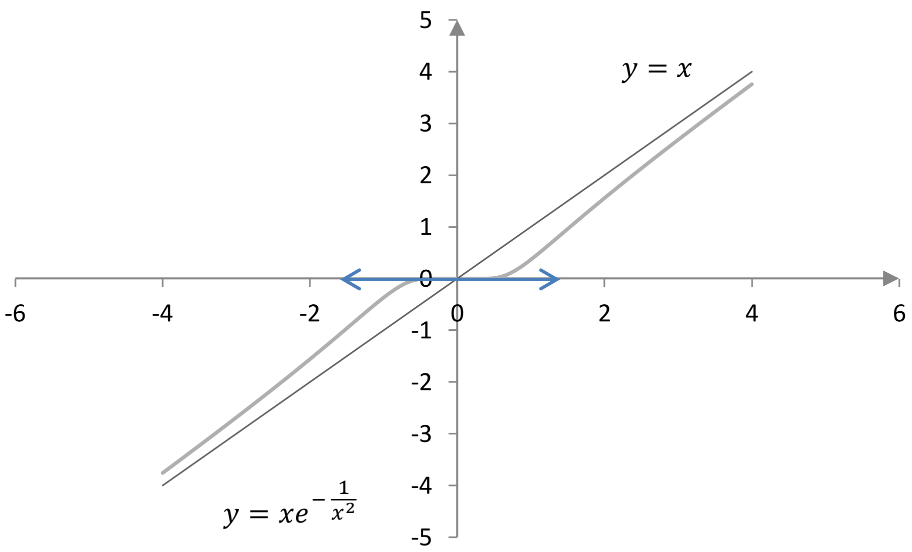
1. f est évidemment définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{x-1} = e^x \times e^{-1} = \frac{1}{e} e^x$ on a
$$f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4 = \frac{1}{e}(2x-1)e^x + 4$$
$$f'(x) = 2e^{x-1} + (2x-1)e^{x-1} = e^{x-1}(2 + 2x - 1) = e^{x-1}(2x+1)$$
Comme $e^{x-1} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$
Si $x < -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est négative et f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.
Si $x > -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est positive et f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. L'exponentielle l'emporte sur les fonction polynômes donc
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
3.



Aller à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Si $x \neq 0$ f est la composée et le produit de fonction continue et dérivable, donc f est dérivable.
$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$
f est continue en 0.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2. Pour tout $x \neq 0$
La dérivée de $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ est $-(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$,
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x \times \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}(x^2+2) > 0$$
Comme $f'(0) = 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3.
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$
$$f(x)-x = xe^{-\frac{1}{x^2}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x^2}}-1\right) = \frac{1}{X}\left(e^{-X^2}-1\right) = \frac{e^{-X^2}-1}{X-0}$$
Il s'agit du taux de variation de la fonction $\varphi: X \to e^{-X^2}$ en 0, sa limite est $\varphi'(0)$
$$\varphi'(X) = -2Xe^{-X^2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{X\to 0}\frac{e^{-X^2}-1}{X-0} = \varphi'(0) = 0$$
La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.
4.



Aller à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -x\le |x| \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad -x\le\sqrt{x^2}\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad -x<\sqrt{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad 0<x+\sqrt{x^2+1}$$

Ce qui montre que f est définie sur $\mathbb{R}$. (et même continue et dérivable sur $\mathbb{R}$).

2. La dérivée de $g: x\to x+\sqrt{x^2+1}=x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ est

$$g'(x)=1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x\to+\infty$ alors $x+\sqrt{x^2+1}\to+\infty$ et $f(x)\to+\infty$

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

Si $x\to-\infty$ alors $x-\sqrt{x^2+1}\to-\infty$ et alors

$$\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\to 0^+$$

Donc

$$f(x)=\ln\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)\to-\infty$$

Aller à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Nécessairement $x^2\ge 1$, soit $x\le -1$, soit $x\ge 1$, mais si $x\le -1$ alors $x-\sqrt{x^2-1}<0$ donc f n'est pas définie.
   Si $x>1$

$$x^2-1\le x^2\Rightarrow\sqrt{x^2-1}\le |x|=x\Rightarrow x-\sqrt{x^2-1}>0$$

f est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Remarque :
Un raisonnement qui ressemble plus ou moins à çà est faux

$$x-\sqrt{x^2-1}>0\Leftrightarrow x>\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^2>x^2-1$$

Il a deux problèmes majeurs, d'abord on oublie que x^2-1 doit être positif et je rappelle que $a=b\Rightarrow a^2=b^2$ et que si l'on veut qu'il y ait équivalence il faut que a et b soit de même signe. Dans notre exercice $x>\sqrt{x^2-1}$ est évidemment faux pour un $x<0$.

2. La dérivée de $g: x\to x-\sqrt{x^2-1}=x+(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ est

$$g'(x)=1-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}=-(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x\to+\infty$ alors $\sqrt{x^2-1}\to+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

Si $x\to+\infty$ alors $x+\sqrt{x^2-1}\to+\infty$ et alors

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\to 0^+$$

Donc

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\to-\infty$$

Aller à : Exercice 9

Correction exercice 10.

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=a\Leftrightarrow \operatorname{ch}(x)=e^a\Leftrightarrow\frac{e^x+e^{-x}}{2}=e^a\Leftrightarrow e^x+\frac{1}{e^x}=2e^a$$

On pose $X=e^x$

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=a\Leftrightarrow X+\frac{1}{X}=2e^a\Leftrightarrow X^2+1=2Xe^a\Leftrightarrow X^2-2e^aX+1=0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta=4e^{2a}-4=4(e^{2a}-1)>0$$

Les racines sont

$$X_1=\frac{2e^a-2\sqrt{e^{2a}-1}}{2}=e^a-\sqrt{e^{2a}-1}\qquad\text{et}\qquad X_2=e^a+\sqrt{e^{2a}-1}$$

On notera que $e^{2a}>e^{2a}-1$ et que donc $e^a>\sqrt{e^{2a}-1}$, ce qui montre que $X_1>0$, pour X_2 c'est évident.

Donc les solutions de $\ln(\operatorname{ch}(x))=a$ sont :

$$x_1=\ln\left(e^a-\sqrt{e^{2a}-1}\right)\qquad et\qquad x_2=\ln\left(e^a+\sqrt{e^{2a}-1}\right)$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. f est définie (continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0,\pi]$, par parité on connaitra les variation de f sur $[0,2\pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
2.

$$f'(x)=2\cos(x)+2\cos(2x)=2(\cos(x)+2\cos^2(x)-1)=2(2\cos^2(x)+\cos(x)-1)$$

Le polynôme $2X^2+X-1$ admet $X_1=-1$ et $X_2=\frac{1}{2}$ comme racine donc

$2X^2+X-1=2(X+1)(X-\frac{1}{2})$, on en déduit que $f'(x)=4(\cos(x)+1)(\cos(x)-\frac{1}{2})$

Dressons un tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x)+1$		$+$		$+$	0
$\cos(x)+\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

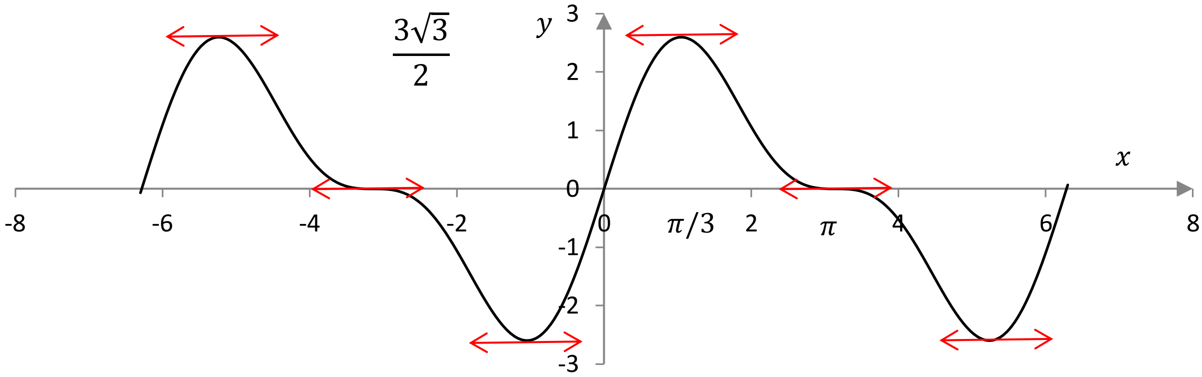
f est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

3. On en déduit le tableau de variation de f.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4°)



Aller à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0,\pi]$
2. $f'(x)=2\cos(x)\sin(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=2\sin(x)\left(\cos(x)-\frac{1}{4}\right)$

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x)=0\\ \cos(x)=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0,\pi]$, ce sont 0 et π.

Pour $x\in[0,\pi]$ $\cos(x)=\frac{1}{4}$ équivaut à $x=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

x	0		$\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)+\frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $\left[0,\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

f est décroissante sur $\left[\arccos\left(\frac{1}{4}\right),\pi\right]$

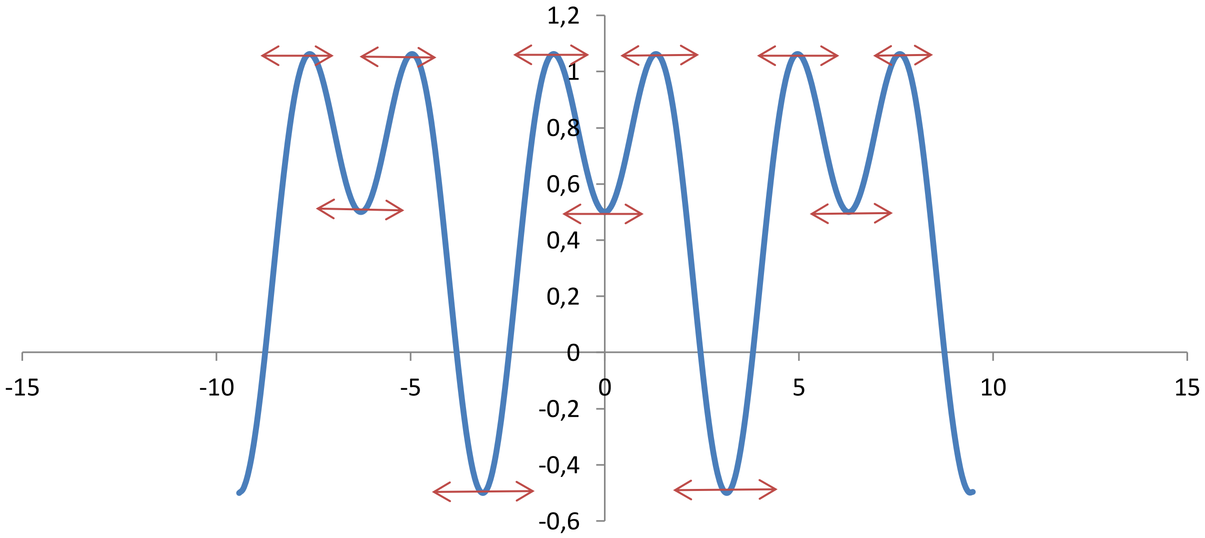
3.

$$f(0)=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\sin^2\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)=1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$
$$=1-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{16-1+2}{16}=\frac{17}{16}$$

$$f(\pi)=-\frac{1}{2}$$

x	0		$\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$



Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.

$$f(x+2\pi)=\frac{1}{3}\cos\big(3(x+2\pi)\big)-\frac{3}{4}\cos\big(2(x+2\pi)\big)=\frac{1}{3}\cos(3x+6\pi)-\frac{3}{4}\cos(2x+4\pi)$$
$$=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est 2π périodique.

$$f(-x)=\frac{1}{3}\cos(-3x)-\frac{3}{4}\cos(-2x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est paire (et 2π périodique) donc on étudie f sur $[0,\pi]$.

2.

$$\cos(3x)+i\sin(3x)=e^{3ix}=\left(e^{ix}\right)^3=(\cos(x)+i\sin(x))^3$$
$$=\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)$$
$$=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)+i(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))$$

Voir cours pour plus de détails. Puis on égalise les parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos(3x)=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)\\ \sin(3x)=3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)\end{cases}$$
$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

C'est une formule connue.

3.

$$f'(x)=-\sin(3x)+\frac{3}{2}\sin(2x)=-(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))+3\sin(x)\cos(x)$$
$$=\sin(x)\left(-3\cos^2(x)+\sin^2(x)+3\cos(x)\right)$$
$$=\sin(x)\left(-3\cos^2(x)+1-\cos^2(x)+3\cos(x)\right)$$
$$=\sin(x)\left(-4\cos^2(x)+3\cos(x)+1\right)$$

Soit P le polynôme $P=-4X^2+3X+1$, il admet 1 et $-\frac{1}{4}$ comme racine. On déduit que

$$P=-4(X-1)\left(X+\frac{1}{4}\right)$$

Et que

$$-4\cos^2(x)+3\cos(x)+1=-4(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$$

Et la dérivée vaut

$$f'(x)=-4\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$$

Faisons un tableau de signe pour trouver le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x\in[0,\pi]$

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)-1$	0	$-$		$-$	
$\cos(x)+\frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $[0,x_0]$ et décroissante sur $[x_0,\pi]$

En fait $x_0=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ (Hors programme), c'est l'unique valeur de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $-\frac{1}{4}$.

4.

$$f(0)=\frac{1}{3}\cos(0)-\frac{3}{4}\cos(0)=-\frac{5}{12}$$

$$f(\pi)=\frac{1}{3}\cos(3\pi)-\frac{3}{4}\cos(2\pi)=-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{13}{12}$$

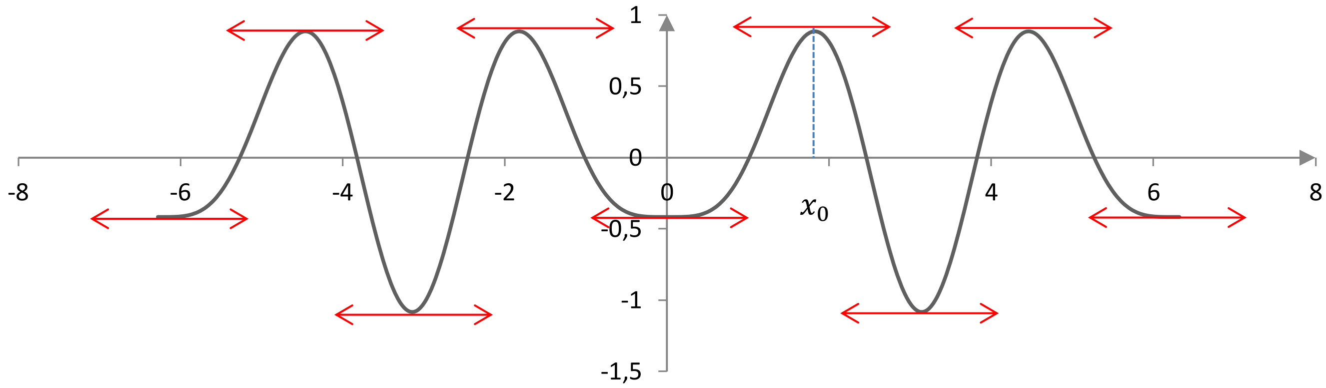
$$\begin{aligned}f(x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)&=\frac{1}{3}(\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x))-\frac{3}{4}(2\cos^2(x)-1)\\&=\frac{1}{3}(\cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))-\frac{3}{4}(2\cos^2(x)-1)\\&=\frac{4}{3}\cos^3(x)-\frac{3}{2}\cos^2(x)-\cos(x)+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Sachant que $\cos(x_0)=-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}f(x_0)&=\frac{4}{3}\cos^3(x_0)-\frac{3}{2}\cos^2(x_0)-\cos(x_0)+\frac{3}{4}=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{48}-\frac{3}{32}+1\\&=\frac{-2-9+96}{96}=\frac{85}{96}\end{aligned}$$

5.

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{85}{96}$	$\searrow$	$-\frac{13}{12}$



Aller à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. $f'(x) = 4 - 5\cos(x)$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ car $x \in [0, \pi]$, cos est une fonction décroissante donc

   Si $x \in \left[0, \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right[$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

   Si $x \in \left]\arccos\left(\frac{4}{5}\right), \pi\right]$, $f'(x) > 0$ et f est croissante.

2. $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est trivial en élevant au carré. Comme arccos est une fonction décroissante :

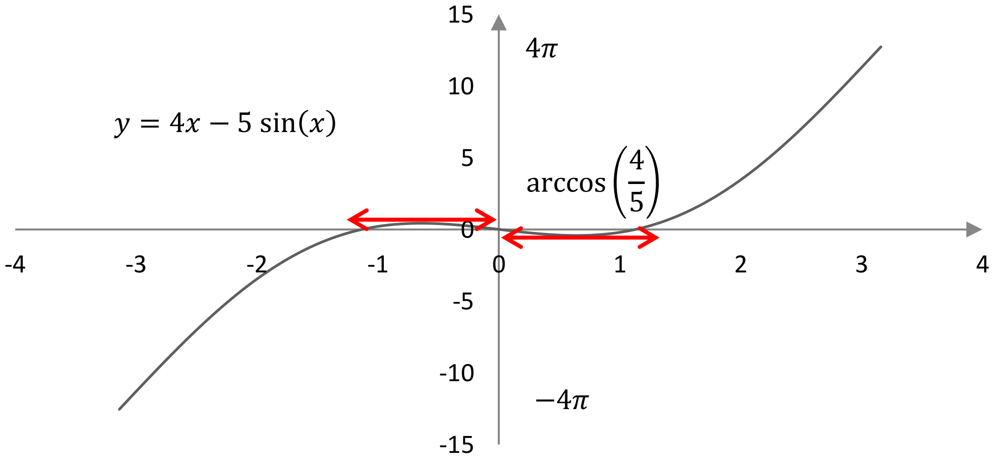
$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \arccos\left(\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} > \arccos\left(\frac{4}{5}\right) > \frac{\pi}{6}$$

3.

x	0	$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 3$	↗ 4π

$$f\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 5\sin\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 5\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 4\arccos\left(\frac{4}{5}\right) - 3$$

4. f est impaire donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine.



Aller à : Exercice 14

Correction exercice 15.

$$y=\operatorname{th}(x)\Leftrightarrow y=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{X^2-1}{X^2+1}$$

En posant $X=e^x$

$$y=\operatorname{th}(x)\Leftrightarrow y=\frac{X^2-1}{X^2+1}\Leftrightarrow y(X^2+1)=X^2-1\Leftrightarrow yX^2+y=X^2-1\Leftrightarrow yX^2-X^2=-1-y$$

$$\Leftrightarrow X^2(y-1)=-(1+y)\Leftrightarrow X^2=-\frac{1+y}{y-1}=\frac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow e^x=X=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\Leftrightarrow x$$

$$=\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$g:]-1,1[\to\mathbb{R}$ est définie par

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

$$e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x)-\operatorname{sh}^3(x))=e^{-x}\left(\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3\right)$$

$$=\frac{e^{-x}}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}-(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x})\right)$$

$$=\frac{e^{-x}}{8}(6e^x+2e^{-3x})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x))-\operatorname{sh}^3(x))=\frac{3}{4}$$

$$x-\ln(\operatorname{ch}(x))=x-\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=x-\ln\left(e^x\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)=x-\ln(e^x)-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{2}=\frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch}(x)))=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$$

Aller à : Exercice 16

Correction exercice 17.

Pour $x\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq 1\Leftrightarrow e^{-x}\neq 1$

$$\begin{aligned}A(x) &= 1+\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}+e^{2x}+e^{-2x}+\cdots+e^{nx}+e^{-nx}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\left(1+e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}\right)+\left(1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{x}}+\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{\left(1-e^{(n+1)x}\right)\left(1-e^{-x}\right)-\left(1-e^{-(n+1)x}\right)\left(1-e^{x}\right)}{\left(1-e^{x}\right)\left(1-e^{-x}\right)}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{1-e^{-x}-e^{(n+1)x}+e^{nx}-\left(1-e^{x}--e^{-(n+1)x}+e^{-nx}\right)}{1-e^{-x}-e^{x}+1}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{e^{x}-e^{-x}-\left(e^{(n+1)x}-e^{-(n+1)x}\right)+e^{nx}-e^{-nx}}{2-\left(e^{x}+e^{-x}\right)}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{sh}(x)-\operatorname{sh}\left((n+1)x\right)+\operatorname{sh}(nx)}{1-\operatorname{ch}(x)}\end{aligned}$$

Si $x=0$, $A(0)=n+1$

Aller à : Exercice 17

Correction exercice 18.

On pose $X=e^{x}$

$$3\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)-3=0\Leftrightarrow 3\frac{X+\frac{1}{X}}{2}-\frac{X-\frac{1}{X}}{2}-3=0\Leftrightarrow 3(X^2+1)-(X^2-1)-6X=0$$

$$\Leftrightarrow 2X^2-6X+4=0\Leftrightarrow X^2-3X+2=0\Leftrightarrow X=1\ \text{ ou }\ X=2\Leftrightarrow x=0\ \text{ ou }\ x=\ln(2)$$

Aller à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1.

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}+e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}=\frac{e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}-e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}=\frac{e^{\sqrt{3}}-e^{-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.

$$2\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)=\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sh}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{sh}(x)=\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)+x\right)=\operatorname{ch}(5x)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(3)+x=5x\\ \frac{1}{2}\ln(3)+x=-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\frac{1}{2}\ln(3)\\ 6x=-\frac{1}{2}\ln(3)\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{1}{8}\ln(3),-\frac{1}{12}\ln(3)\right\}$$

Aller à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1. $1 > \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, comme arccos est décroissante,

$$\arccos(1) < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ce qui équivaut à

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. D'après la première question

$$0 < 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \in [0, \pi]$$

Et bien sûr

$$\arccos(x) \in [0, \pi]$$

On en déduit que

$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x = \cos\left(2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

$$\frac{1-\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{1-\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \frac{\cos^2(t)-\sin^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$

2.

$$\cos\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9-1}{9+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Comme

$$0 < \frac{1}{3}$$

Et comme arctan est croissante

$$\arctan(0) < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \pi$$

On en déduit alors que

$$\cos\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

Allez à : Exercice 21

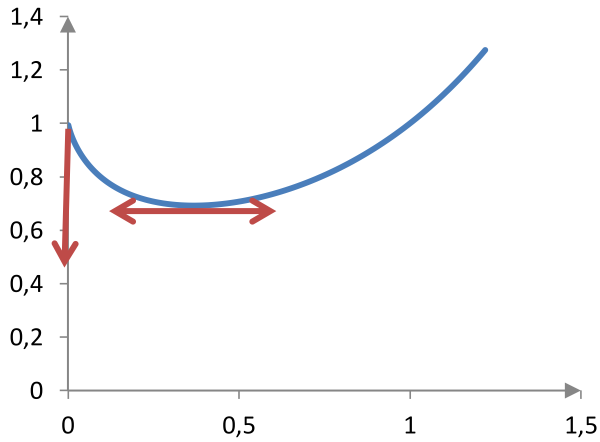
Correction exercice 22.

1.

$$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$$

Donc f est définie et continue sur $]0, +\infty[$

2. On a
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$
Donc
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$$
Autrement dit f est prolongeable par continuité en 0, par $f(0) = 1$.
3.
$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$$
f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$
Donc f n'est pas dérivable en 0 et le graphe admet une demi-tangente verticale en 0.
4. Le signe de la dérivée est le même que celui de $\ln(x) + 1$.
$$\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
$$0 < x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0$$
De même
$$x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0$$
En résumé f est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
Clairement
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
5. $f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} = e^{\frac{1}{e}}$ et $f(0) = 1$



Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $4e^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \neq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$
2.
En $-\infty$,
$$\lim_{x\to -\infty} (4e^x - 3) = -3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

En $+\infty$

On pose $X = e^x$

$$f(x) = \frac{8\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = \frac{8\dfrac{X + \frac{1}{X}}{2}}{4X - 3} = \frac{8(X^2 + 1)}{2X(4X - 3)} = \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X}$$

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{8X^2 + 8}{8X^2 - 6X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{8X^2}{8X^2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-$, $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-} (4e^x - 3) = 0^-$$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-} \frac{\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = -\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+$, $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+} (4e^x - 3) = 0^+$$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^+} \frac{\operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3} = +\infty$$

3.

$$f'(x) = 8\frac{\operatorname{sh}(x)\,(4e^x - 3) - 4\operatorname{ch}(x)\,e^x}{(4e^x - 3)^2} = 8\frac{4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x)}{(4e^x - 3)^2}$$

On pose $X = e^x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow 4X\left(\frac{X - \frac{1}{X}}{2} - \frac{X + \frac{1}{X}}{2}\right) - 3\frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4X\big((X^2 - 1) - (X^2 + 1)\big) - 3(X^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 8X(-2) - 3X^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3X^2 - 8X + 3 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (-8)^2 + 4 \times 3 \times 3 = 64 + 36 = 100$$

Les racines sont

$$X_1 = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{1}{3}$$

Et

$$X_2 = \frac{8 + 10}{-6} = -3$$

Or $X = e^x > 0$ donc $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution $e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$

Il reste à déterminer le signe de $4e^x(\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)) - 3\,\mathrm{sh}(x)$, cette fonction est continue et ne s'annule qu'en $-\ln(3)$, on prends une valeur simple 0, $4e^0(\mathrm{sh}(0) - \mathrm{ch}(0)) - 3\,\mathrm{sh}(0) = -4 < 0$

Donc pour tout $x < -\ln(3)$ $4e^x(\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)) - 3\,\mathrm{sh}(x) < 0$ et pour tout $x > -\ln(3)$, $4e^x(\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)) - 3\,\mathrm{sh}(x) > 0$, il faut quand même faire attention au fait que f n'est pas définie en $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Comme $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ alors $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, on déduit de tout cela que :

Pour tout $x \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right[$, f est décroissante.

Pour tout $x \in \left]\ln\left(\frac{1}{3}\right), \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right[$, f est croissante.

Pour tout $x \in \left]\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right[$, f est croissante.

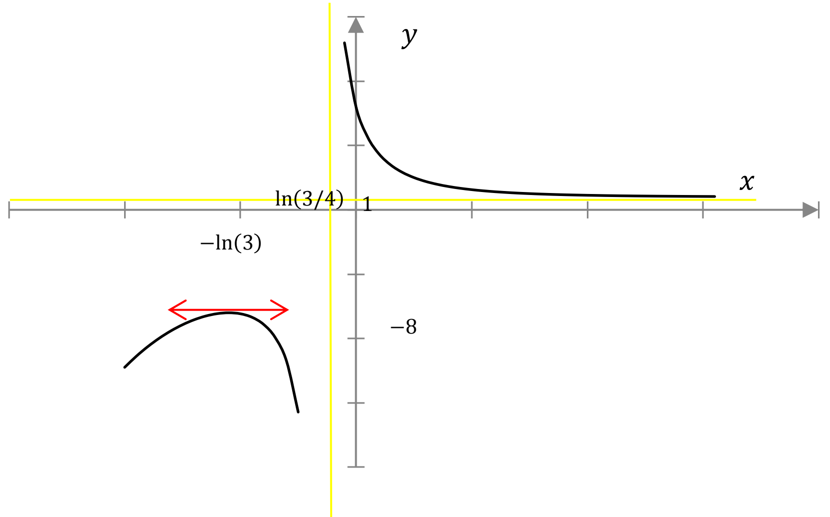
4.

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1

Car

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{8\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{4e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 3} = 4\frac{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}{\frac{4}{3} - 3} = 4\frac{\frac{1}{3} + 3}{-\frac{5}{3}} = \frac{40}{-5} = -8$$

5.



Aller à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. $u \to 3 + 4\,\mathrm{sh}(u)$ est définie sur $\mathbb{R}$. $\mathrm{ch}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et ch est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2.

Première méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} = \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} + 4\,\mathrm{th}(u)$$

$\lim_{u\to+\infty} \mathrm{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim_{u\to+\infty} \frac{3}{\mathrm{ch}(u)} = 0$ et $\lim_{u\to+\infty} \mathrm{th}(u) = 1$ donc $\lim_{u\to+\infty} f(u) = 4$

$\lim_{u\to-\infty}\operatorname{ch}(u)=+\infty$ donc $\lim_{u\to-\infty}\frac{3}{\operatorname{ch}(u)}=0$ et $\lim_{u\to-\infty}\operatorname{th}(u)=-1$ donc $\lim_{u\to+\infty}f(u)=-4$

Deuxième méthode

$$f(u)=\frac{3+4\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}=\frac{3+4\frac{e^u-e^{-u}}{2}}{\frac{e^u+e^{-u}}{2}}=\frac{6+4(e^u-e^{-u})}{e^u+e^{-u}}=\frac{6e^u+4(e^{2u}-1)}{e^{2u}+1}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 2, puis par e^u.

On pose $X=e^u$,

$$f(u)=\frac{6X+4(X^2-1)}{X^2+1}=\frac{4X^2+6X-4}{X^2+1}$$

si $u\to+\infty$ alors $X\to+\infty$

$$\lim_{u\to+\infty}f(u)=\lim_{X\to+\infty}\frac{4X^2+6X-4}{X^2+1}=\lim_{X\to+\infty}\frac{4X^2}{X^2}=4$$

si $u\to-\infty$ alors $X\to 0$

$$\lim_{u\to-\infty}f(u)=\lim_{X\to 0}\frac{4X^2+6X-4}{X^2+1}=-4$$

3.

Première méthode

$$f'(u)=\frac{4\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(u)-(3+4\operatorname{sh}(u))\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}=\frac{4\operatorname{ch}^2(u)-3\operatorname{sh}(u)-4\operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}$$
$$=\frac{4(\operatorname{ch}^2(u)-\operatorname{sh}^2(u))-3\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}=\frac{4-3\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}$$

$$f'(u_0)=0\Leftrightarrow 4-3\operatorname{sh}(u_0)=0\Leftrightarrow \operatorname{sh}(u_0)=\frac{4}{3}\Leftrightarrow u_0=\operatorname{argsh}\left(\frac{4}{3}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}+\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}+1}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{25}{9}}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)=\ln(3)$$

Deuxième méthode

$$\operatorname{sh}(u_0)=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{e^{u_0}-e^{-u_0}}{2}=\frac{4}{3}$$

On pose $X_0=e^{u_0}$

$$\operatorname{sh}(u_0)=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{X_0-\frac{1}{X_0}}{2}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow X_0-\frac{1}{X_0}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow X_0^2-1=\frac{8}{3}X_0\Leftrightarrow X_0^2-\frac{8}{3}X_0-1=0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta=\frac{64}{9}+4=\frac{100}{9}=\left(\frac{10}{3}\right)^2$$
$$X_{0,1}=\frac{\frac{8}{3}-\frac{10}{3}}{2}=-\frac{1}{3}<0$$
$$X_{0,2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{10}{3}}{2}=3$$

Donc

$$e^{u_0}=3\Leftrightarrow u_0=\ln(3)$$

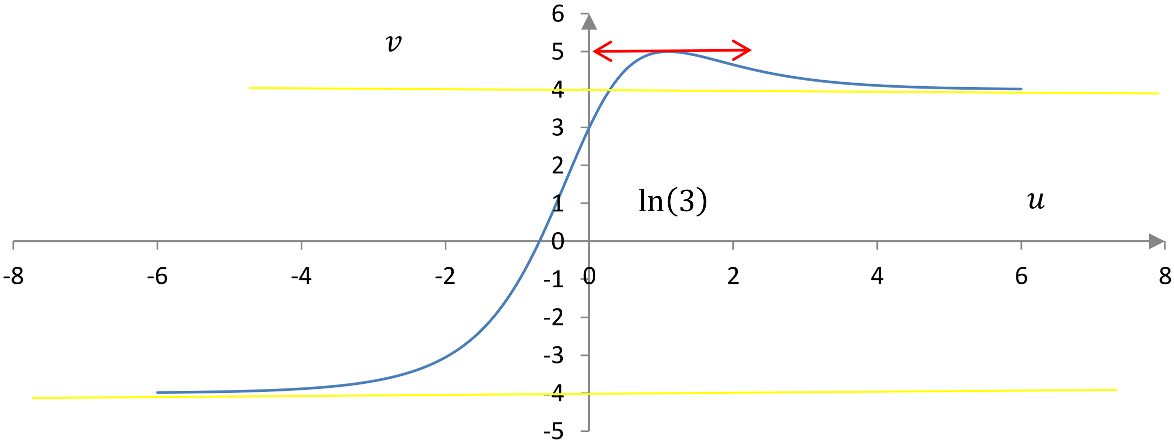
u	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4

$$\mathrm{ch}(\ln(3))=\frac{e^{\ln(3)}+e^{-\ln(3)}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{3}$$

$$f(\ln(3))=\frac{3+4\times\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=5$$

4.

Graphe de $v=f(u)$



Aller à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $\mathrm{ch}(x)-1\neq 0$, autrement dit si et seulement si $x\neq 0$.

$$Df=\mathbb{R}*$$

2. On pose $X=e^x$

$$f(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)+1}{\mathrm{ch}(x)-1}=\frac{\frac{X+\frac{1}{X}}{2}+\frac{X-\frac{1}{X}}{2}+1}{\frac{X+\frac{1}{X}}{2}-1}=\frac{X^2+1+X^2-1+2X}{X^2+1-2X}=\frac{2X^2+2X}{X^2-2X+1}=\frac{2X(X+1)}{(X-1)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}X=0$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to 0}\frac{2X^2+2X}{X^2-2X+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}X=+\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to+\infty}\frac{2X^2+2X}{X^2-2X+1}=\lim_{X\to+\infty}\frac{2X^2}{X^2}=2$$

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)+1)=2$$

$$\lim_{x\to 0^\pm}(\mathrm{ch}(x)-1)=0^+$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$$

3.

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(x))(\operatorname{ch}(x)-1)-(\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)+1)\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{ch}(x)-\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)-\operatorname{sh}^2(x)-\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$
$$= \frac{1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x)-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)=0 \\ \operatorname{ch}(x)-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{X+\frac{1}{X}}{2}-\left(X-\dfrac{1}{X}\right)=0 \\ x\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X-(X^2+1)-2(X^2-1)=0 \\ X\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3X^2+2X+1=0 \\ X\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow X=-\frac{1}{3}$$

Or $X=e^x>0$ donc il n'y a pas de solution à $f'(x)=0$.

$1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)$ a le même signe que $-3X^2+2X+1=-3(X-1)\left(X+\frac{1}{3}\right)=-3(e^x-1)\left(e^x+\frac{1}{3}\right)$

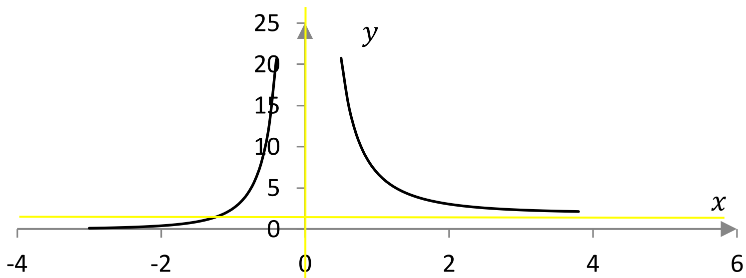
Si $x<0$, $e^x-1<0$ donc $1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)>0$, Si $x>0$, $e^x-1>0$ donc $1-\operatorname{ch}(x)-2\operatorname{sh}(x)<0$,

Sur $]-\infty,0[$, f est croissante, sur $]0,+\infty[$, f est décroissante.

4.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	2

5.



Aller à : Exercice 25

Correction exercice 26. (Hors programme)

1. On pose $X=\frac{2x}{x^2+1}$

$$1-X^2=1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$$

argth(X) est définie pour

$$-1<X<1 \Leftrightarrow X^2<1 \Leftrightarrow 1-X^2>0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2>0$$

Ce qui est toujours le cas sauf pour $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Comme argth est continue et dérivable sur son ensemble de définition, f est continue et dérivable sur

$$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

2. Si $f(x) = \operatorname{argth}\big(u(x)\big)$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{1-\left(u(x)\right)^2}$

   Ici $u(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ donc $u'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ et $1-\big(u(x)\big)^2 = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$, voir calcul ci-dessus.

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$f'(x) = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \times \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 = \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

3. Pour tout $x \neq \pm 1$, $-1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1$

   donc

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x^2+1} = -1^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x^2+1} = -1^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2+1} = 1^- \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2+1} = 1^- \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = +\infty$$

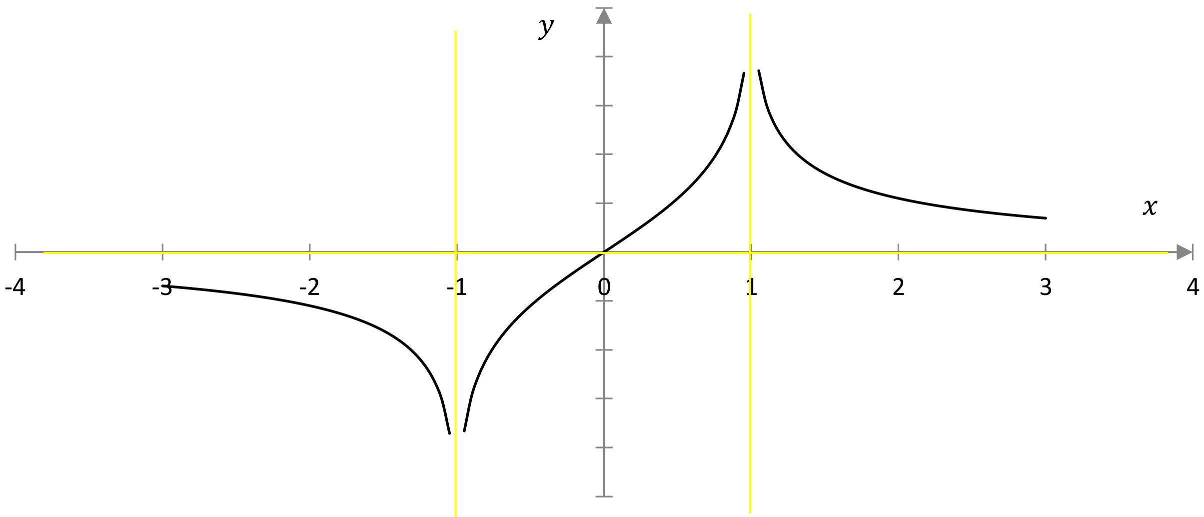
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \operatorname{argth}(0) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \operatorname{argth}(0) = 0$$

   $f'(x) = \frac{2}{1-x^2} < 0$ si $x < -1$ ou si $x > 1$ et $f'(x) = \frac{2}{1-x^2} > 0$ si $-1 < x < 1$.

   On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$	



Aller à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1.

$$\pi \le \theta \le 2\pi \Leftrightarrow -2\pi \le -\theta \le -\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\pi - \theta \le \pi$$

2. D'après 1.

$$\arccos(\cos(2\pi-\theta))=2\pi-\theta$$

Car $2\pi-\theta\in[0,\pi]$. D'autre part

$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos(\theta)$$

Par conséquent

$$\arccos(\cos(\theta))=2\pi-\theta$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. Si $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ alors $\arcsin(\sin(x))=x$,

   Donc si $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le x-2k\pi\le\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

   Alors $\sin(x)=\sin(x-2k\pi)$ donc $\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(x-2k\pi))=x-2k\pi$

   Si $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2}\le -x\le -\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le\pi-x\le\frac{\pi}{2}$, comme $\sin(x)=\sin(\pi-x)$

   Alors $\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$

   Si $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\le x-2k\pi\le\frac{3\pi}{2}$ alors

   $\sin(x)=\sin(x-2k\pi)$ donc $\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(x-2k\pi))=\pi-(x-2k\pi)=-x+(2k+1)\pi$

   Remarque (inutile), pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ ou $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$

   g est 2π périodique et paire, on étudie g sur $[0,\pi]$.

   g est définie, continue si et seulement si $1+\cos(x)\neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x\neq\pi$,

$$g(x)=\arctan\big(u(x)\big)$$

   Avec $u(x)=\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}=\sqrt{v(x)}$ avec $v(x)=\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$

$$v'(x)=\frac{\sin(x)\,(1+\cos(x))-(1-\cos(x))(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}=\frac{2\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

$$u'(x)=\frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}=\frac{2\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}=\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$$

$$1+\big(u(x)\big)^2=1+\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=\frac{1+\cos(x)+1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=\frac{2}{1+\cos(x)}$$

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}=\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\times\frac{1+\cos(x)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\times\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}\times\sqrt{1-\cos(x)}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$$

   En 0 g n'est pas dérivable.

   Sur $]0,\pi[$, $\sin(x)>0$ et donc $|\sin(x)|=\sin(x)$ entraine que $g'(x)=\frac{1}{2}$

   Sur $]0,\pi[$, $g(x)=\frac{x}{2}+K$, comme g est continue en 0 :

$$g(0)=\lim_{x\to 0^+}g(x)\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2}+K\right)=\frac{0}{2}+K\qquad(1)$$

   La formule est donc vraie en 0 donc sur $[0,\pi[$.

On reprend (1) pour trouver K. $g(0)=\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(0)}{1+\cos(0)}}\right)=\arctan(0)=0$ donc $K=0$.

$$g(x)=\frac{x}{2}$$

g est paire, donc pour $x\in]-\pi,0]$, $g(x)=g(-x)=\frac{-x}{2}$ car $-x\in[0,\pi[$.

Pour arranger les choses

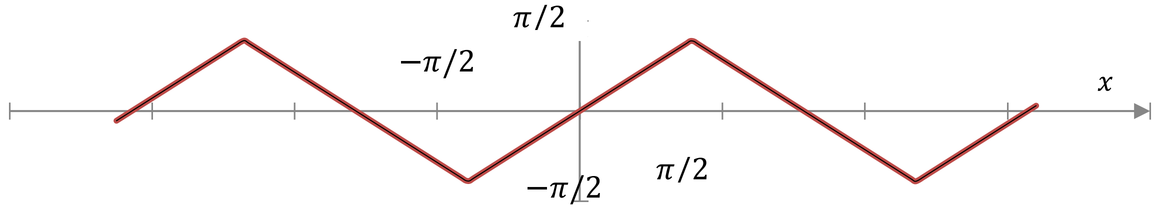
$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\qquad g(x)=\left|\frac{x}{2}\right|$$

Ensuite on remarque que g est 2π périodique donc $(x)=g(x-2k\pi)$ $k\in\mathbb{Z}$.

Si $x\in]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[$, $x-2k\pi\in]-\pi,\pi[$,

$$g(x)=g(x-2k\pi)=\left|\frac{x-2k\pi}{2}\right|$$

2. Graphe de f



Graphe de g, c'est le même à la différence près que sur l'axe des abscisses on divise par deux le « x ».

Aller à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$, $x\to\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1,1[$ donc f est définie et continue sur $]-1,1[$.
2.

$$f(x)=\arcsin(x)-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$\forall x\in]-1,1[$,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-x\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

f est dérivable sur $]-1,1[$.

3. $\forall x\in]-1,1[$, $f'(x)<0$, donc f est décroissante sur $]-1,1[$. Comme $f(0)=\arcsin(0)-\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$

Si $x<0$ alors $f(x)>f(0)=0$ et si $x>0$ alors $f(x)<f(0)=0$.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1.

$$1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}=\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0$$

Donc

$$\forall x\in\mathbb{R},-1\leq\frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$u'(x) = \frac{(-2x)(1+x^2) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{2|x|}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2|x|} = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}$$

f est dérivable pour tout $x \neq 0$.

En 0^-. $x < 0$ donc $|x| = -x$ et

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2$$

En 0^+, $x > 0$ donc $|x| = x$ et

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$$

f n'est pas dérivable en 0.

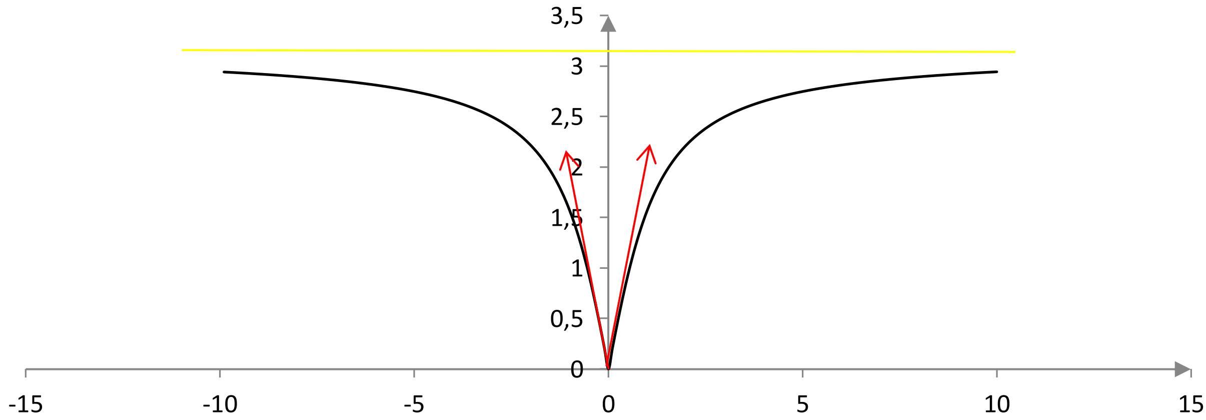
3.

$$\lim_{x\to -\infty} u(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

$$\lim_{x\to +\infty} u(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

4.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-2 \,\|\|\, 2$	$+$	
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π



5. Si $x < 0$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = -2\arctan(x) + K_1$$

On prend $x = -1$

$$\arccos(0) = -2\arctan(-1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = K_1 \Rightarrow K_1 = 0$$

Et

$$f(x) = -2\arctan(x)$$

Si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = 2\arctan(x) + K_2$$

On prends $x = 1$

$$\arccos(0) = 2\arctan(1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

Et

$$f(x) = 2\arctan(x)$$

Aller à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. f est définie et continue si et seulement

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \in [-1,1] \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(1-x^2) \geq 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1,1]$$

2.

$$f'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

3.

Il y a deux demi-tangentes verticales

Pour $x < 0$, $|x| = -x$ et

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$$

Il y a une demi-tangente verticale

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$$

Il y a une demi-tangente oblique

Pour $x > 0$, $|x| = x$ et

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$$

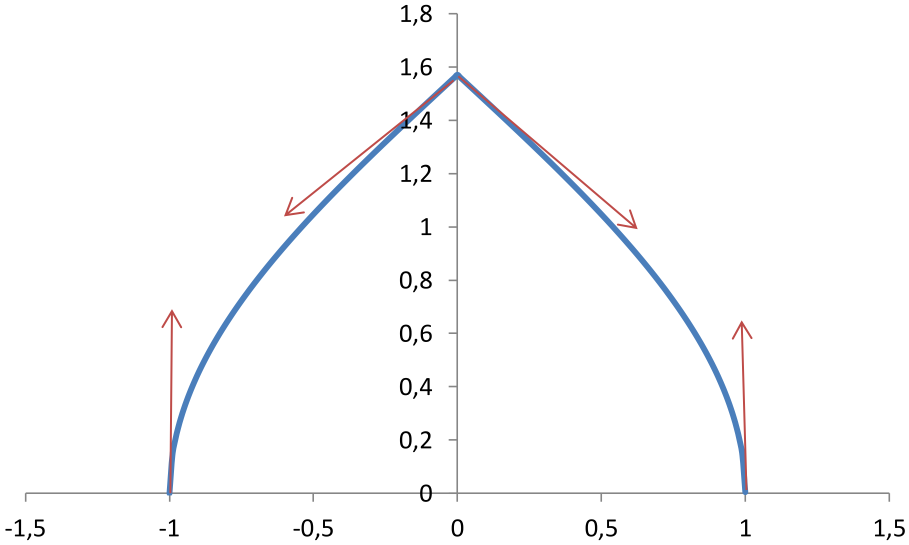
Il y a une demi-tangente oblique

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$$

Il y a une demi-tangente verticale

4. Si $x \in [0,1]$ la fonction est croissante, si $x \in [0,1]$ la fonction est décroissante.
5.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\Vert +\infty$	$+$	$1 \Vert -1$	$-$	$-\infty \Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. On pose $X = 1 - 2x^2$

$$1 - X^2 = 1 - (1 - 2x^2)^2 = 1 - (1 - 4x^2 + 4x^4) = 4x^2 - 4x^4 = 4x^2(1 - x^2)$$

f est définie et continue si et seulement si

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow (1 - 2x^2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 - X^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2(1 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$$

Bref f est définie et continue sur $D_f = [-1,1]$

2. Si $f(x) = \arccos\big(u(x)\big)$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

$u'(x) = -4x$ et $1 - \big(u(x)\big)^2 = 1 - X^2 = 4x^2(1 - x^2)$ donc

$$f'(x) = -\frac{-4x}{\sqrt{4x^2(1 - x^2)}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$$

Si $|x|\sqrt{1 - x^2} \neq 0$, c'est-à-dire si $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, f est dérivable.

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en ± 1.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = 2$$

f n'est pas dérivable en 0.

3. Si $x \in]-1,0[$ alors $|x| = -x$ donc $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} < 0$

Si $x \in]0,1[$ alors $|x| = x$ donc $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} > 0$

$$f(-1) = \arccos(1 - 2(-1)^2) = \arccos(-1) = \pi$$
$$f(1) = \arccos(1 - 2 \times 1^2) = \arccos(-1) = \pi$$
$$f(0) = \arccos(1 - 2 \times 0^2) = \arccos(1) = 0$$
$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en -1.

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en 1.

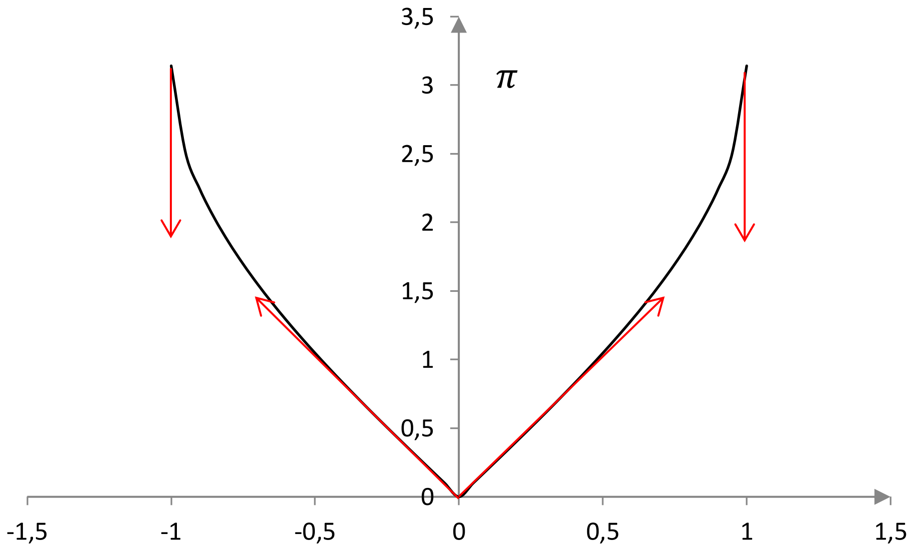
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^-.

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = 2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^+.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\|\|$ $-\infty$		-2 $\|\|$ 2		$+\infty$ $\|\|$
$f(x)$	π	↘	0	↗	π



4. Sur $]-1,0[$, $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$

A priori on ne peut pas prendre la valeur -1, ni la valeur 0 car cette relation n'est valable que sur $]-1,0[$.

On peut prendre la valeur $x = -\frac{1}{2}$. On peut faire autrement, comme f est continue en 0 (ou en -1), on écrit :

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Or pour $x > -1$ $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$ donc

$$\arccos(1 - 2 \times 1^2) = \lim_{x \to -1^+} (2\arccos(x) + K_1) \Leftrightarrow \arccos(-1) = 2\arccos(-1) + K_1$$
$$\Leftrightarrow K_1 = -\arccos(-1) = -\pi$$

La continuité en 0 permet de conclure que :

$$\forall x \in [-1,0], \quad f(x) = 2\arccos(x) - \pi$$

Remarque : on aurait pu utiliser que $\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -2\arcsin(x) + K$ et on trouve alors $K = 0$.

Sur $]0,1[$, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2\arcsin(x) + K_2$

Pour changer de méthode, je prends $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + K_2$, donc

$$K_2 = \arccos\left(1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

La continuité de f en 0 et 1 permet d'affirmer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 2\arcsin(x)$$

Aller à : Exercice 32

Correction exercice 33.

f est définie et continue si et seulement si

$$-1 \leq 1 - 2x^4 \leq 1 \Leftrightarrow 1 - (1 - 2x^4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - 4x^4 + 4x^8) \geq 0 \Leftrightarrow 4x^4(1 - x^4) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$f'(x) = -\frac{8x^3}{\sqrt{1 - (1 - 2x^4)^2}} = -\frac{8x^3}{\sqrt{4x^4(1 - x^4)}} = -\frac{8x^3}{2x^2\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{4x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

f' est définie sur $]-1,1[$ et f est continue sur cette intervalle donc f est dérivable sur $]-1,1[$

Remarque :

J'ai mis cet exercice parce que l'on pourrait croire que f est dérivable si et seulement si $-1 \leq 1 - 2x^4 \leq 1 \Leftrightarrow 1 - (1 - 2x^4)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - 4x^4 + 4x^8) > 0 \Leftrightarrow 4x^4(1 - x^4) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,0[\cup]0,1[$, mais c'est faux, f est bien dérivable en 0. Ce qui est vrai c'est :

Si $-1 < 1 - 2x^4 < 1$ alors f est dérivable, la réciproque peut-être fausse.

Je rappelle qu'une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si la limite du taux de variation existe, dans tous les exercices avec les fonctions réciproques qui ne sont pas dérivables en une valeur où elles sont définies, on utilise le théorème suivant :

Si f est continue en x_0 et si $f'(x)$ admet une limite en x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)$ est la limite de $f'(x)$ en x_0.

Aller à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1. $P(x) = (x^2 + 1)(16x^4 + 8x^2 + 1) = (x^2 + 1)(4x^2 + 1)^2$ en faisant une division euclidienne par exemple.
2.
   a) argsh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   b) Si $f(x) = \operatorname{argsh}(u(x))$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u(x))^2}}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

   Ici $u(x) = 3x + 4x^3$ donc $u'(x) = 3 + 12x^2 = 3(1 + 4x^2)$

$$1 + (u(x))^2 = 1 + (3x + 4x^3)^2 = 1 + 9x^2 + 24x^4 + 16x^6 = P(x)$$

$$f'(x) = \frac{3(1 + 4x^2)}{\sqrt{(x^2 + 1)(4x^2 + 1)^2}} = \frac{3(1 + 4x^2)}{(4x^2 + 1)\sqrt{(x^2 + 1)}} = \frac{3}{\sqrt{(x^2 + 1)}}$$

$$f(x) = 3\operatorname{argsh}(x) + K$$

$$f(0) = \operatorname{argsh}(3 \times 0 + 4 \times 0^3) = \operatorname{argsh}(0) = 0$$

   Donc

$$f(x) = 3\operatorname{argsh}(x)$$

Aller à : Exercice 34

Correction exercice 35.

$-1 < \mathrm{th}(x) < 1$ donc f esr définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{|\mathrm{ch}(x)|}{\mathrm{ch}^2(x)} - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = 0$$

Car $\mathrm{ch}(x) > 0$ entraine $|\mathrm{ch}(x)| = \mathrm{ch}(x)$.

Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante.

Et $f(0) = \arcsin(\mathrm{th}(0)) - \arctan(\mathrm{sh}(0)) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0 - 0 = 0$

Donc $\arcsin(\mathrm{th}(x)) - \arctan(\mathrm{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow \arcsin(\mathrm{th}(x)) = \arctan(\mathrm{sh}(x)$

Aller à : Exercice 35

Correction exercice 36.

1.

$$\alpha = \frac{118}{10}\pi = \frac{59}{5}\pi = \frac{60-1}{5}\pi = 12\pi - \frac{\pi}{5}$$

Donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{118}{10}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car cos est paire et $\frac{\pi}{5} \in [0,\pi]$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{118}{10}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

Car $-\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{118}{10}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

Car $-\frac{\pi}{5} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\alpha = \frac{252}{15}\pi = \frac{84}{5}\pi = \frac{80+4}{5}\pi = 16\pi + \frac{4\pi}{5}$$

Donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{252}{15}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}$$

Car $\frac{4\pi}{5} \in [0,\pi]$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{252}{15}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{252}{15}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$$

Car $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ et $-\frac{\pi}{5} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$\frac{76}{5}\pi = \frac{80-4}{5}\pi = 16\pi - \frac{4\pi}{5}$$

Donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}$$

Car cos est paire et $\frac{4\pi}{5} \in [0,\pi]$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Car $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right)=\arctan\left(\tan\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=\frac{\pi}{5}$$

Car $\tan\left(-\frac{4\pi}{5}\right)=\tan\left(-\frac{4\pi}{5}+\pi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2.

$$\frac{76\pi}{5}=\frac{80\pi-4\pi}{5}=16\pi-\frac{4\pi}{5}$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{76}{5}\pi\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\frac{4\pi}{5}$$

Aller à : Exercice 36

Correction exercice 37.

1.

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan(\arctan(2x)+\arctan(x))=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il n'y a pas équivalence car $\tan(A)=\tan(B)$ n'entraine pas que $A=B$ sauf si on peut montrer à l'avance que A et B sont tous les deux dans un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Or

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\quad\text{et}\quad\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Donc

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\tan(\arctan(2x)+\tan(\arctan(x))}{1-\tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(x))}=1$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x))=x$ et donc $\tan(\arctan(2x))=2x$.

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2x+x}{1-2x\times x}=1\Rightarrow\frac{3x}{1-2x^2}=1\Rightarrow 3x=1-2x^2\Rightarrow 2x^2+3x-1=0$$

Le discriminant est $\Delta=9+8=17$, et les racines sont $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Il est clair que $\arctan(2x_1)+\arctan(x_1)<0$ car $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}<0$, donc x_1 n'est pas solution.

Par contre pour x_2, je ne vois pas bien comment vérifier si $\arctan(2x_2)+\arctan(x_2)=\frac{\pi}{4}$

Deuxième méthode :

On remarque que $x>0$ sinon $\arctan(2x)+\arctan(x)<0$, d'où $\arctan(x)>0$

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

$$\arctan(2x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$0<\arctan(x)<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<-\arctan(x)<0\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\arctan(x)<\frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Par conséquent :

$$\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\Leftrightarrow\tan(2x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\arctan(2x)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(\arctan(x))}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(\arctan(x))}\Leftrightarrow 2x=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow 2x(1+x)=1-x\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0$$

On retombe sur les mêmes solutions, on ne garde que la solution positive :

$$x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

2. $\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x)$
Si x est solution alors $-x$ est aussi solution car arcsin est impaire. On peut se contenter de rechercher les solutions positives ou nulle. (D'ailleurs $x = 0$ est évidemment solution).
Par conséquent :
$$0 \le \arcsin(2x) \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le \arcsin(\sqrt{3}x) \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\arcsin(\sqrt{3}x) \le 0$$
Donc
$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) \le \frac{\pi}{2}$$
Et bien sur
$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(x) \le \frac{\pi}{2}$$
D'où l'on tire l'équivalence :
$$\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x) \Leftrightarrow \sin\left(\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x)\right) = \sin(\arcsin(x))$$
Comme $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$$\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x)$$
$$\Leftrightarrow \sin(\arcsin(2x))\cos(\arcsin(\sqrt{3}x) - \cos(\arcsin(2x))\sin\left(\arcsin(\sqrt{3}x)\right) = x$$
$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2} - \sqrt{1-(2x)^2}\sqrt{3}x = x \Leftrightarrow 2x\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3}x = x$$
On simplifie par x et on n'oubliera pas la solution $x = 0$.
$$\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}x) = \arcsin(x) \Leftrightarrow 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-3x^2} - 1 = \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3}$$
Là, je vais élever au carré, mais il faudra faire une réciproque parce que $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$ la réciproque est fausse à moins de vérifier que les deux expressions sont de mêmes signes.
$$2\sqrt{1-3x^2} - 1 = \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} \Rightarrow 4(1-3x^2) - 4\sqrt{1-3x^2} + 1 = 3(1-4x^2) \Rightarrow 2 = 4\sqrt{1-3x^2}$$
$$\Rightarrow 1 = 2\sqrt{1-3x^2} \Rightarrow 1 = 4(1-3x^2) \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
Puisque j'ai pris $x > 0$ au début.
Réciproque :
$$\arcsin\left(2 \times \frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\right) = \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$
J'aurais pu faire la réciproque dans l'expression : $2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{3} = 1$.
L'ensemble des solutions est :
$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Aller à : Exercice 37

Correction exercice 38.

La première idée est de prendre la tangente de ces deux expressions, mais on va avoir un problème de réciproque et puis on ne connait pas $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. Alors on tente autre chose
$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12} - \arctan(x)$$
Et on tente de prendre la tangente de ces deux expressions, là l'ennui c'est que l'on ne connait toujours pas $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
On peut être malin et s'apercevoir que $\frac{7\pi}{12} = \frac{(4+3)\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, puis utiliser la formule $\tan(a + b)$, mais bon, il faut être malin.

Pour résoudre cet exercice il est indispensable d'avoir déjà remarqué que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ et que donc $\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$ (dans le même genre $\frac{\sqrt{3}}{3}=\arctan\left(\frac{\pi}{6}\right)$).
On voit alors que $\arctan(1)+\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$
On étudie alors la fonction :

$$f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\sqrt{3}x\right)$$

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\sqrt{3}}{1+3x^2}>0$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\pi$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pi$$

f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi,\pi[$, comme $\frac{7\pi}{12}\in]-\pi,\pi[$, $\frac{7\pi}{12}$ admet un unique antécédent or $x=1$ est solution, c'est donc le seul.

Aller à : Exercice 38

Correction exercice 39.

1. Si $x\le 0$, $\arctan(2x)\le 0$ et $\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\ge\frac{\pi}{4}$ donc il n'y a pas de solution négative.
2.

$$0<\arctan(x)<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<-\arctan(x)<0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\arctan(x)<\frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Par conséquent :

$$\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\Leftrightarrow\tan(2x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan(x)\right)$$
$$\Leftrightarrow\arctan(2x)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(\arctan(x))}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(\arctan(x))}\Leftrightarrow 2x=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow 2x(1+x)=1-x\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

Comme $x>0$

$$x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

Aller à : Exercice 39

Correction exercice 40. (Hors programme)

$\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}\ge\frac{1+1}{2}=1$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\mathrm{argch}\left(u(x)\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{\left(u(x)\right)^2-1}}$$

Avec

$$u(x)=\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}=\sqrt{v(v)}\Rightarrow u'(x)=\frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

Avec

$$v(x)=\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}$$

$$u'(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}}=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(x)}{4\sqrt{1+\mathrm{ch}(x)}}$$

$$\left(u(x)\right)^2-1=\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}-1=\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{2}$$

Donc

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(x)}{4\sqrt{1+\mathrm{ch}(x)}}}{\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{1+\mathrm{ch}(x)}\times\sqrt{\mathrm{ch}(x)-1}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}$$

Si $x=0$ f n'est pas dérivable.

Si $x>0$ alors $\mathrm{sh}(x)>0$ et donc $|\mathrm{sh}(x)|=\mathrm{sh}(x)$ d'où

$$f'(x)=\frac{1}{2}$$

Ce qui entraine que $f(x)=\frac{1}{2}x+K$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

f est continue en 0 donc

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}x+K\right)=K$$

Or $f(0)=\mathrm{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}\right)=\mathrm{argch}(1)=0$ d'où $K=0$ et $f(x)=\frac{1}{2}x$

Si $x<0$ alors $\mathrm{sh}(x)<0$ et donc $|\mathrm{sh}(x)|=-\mathrm{sh}(x)$ d'où

$$f'(x)=-\frac{1}{2}$$

Ce qui entraine que $f(x)=-\frac{1}{2}x+K'$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$

f est continue en 0 donc

$$f(0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(-\frac{1}{2}x+K')=K'$$

Or $f(0)=\mathrm{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}\right)=\mathrm{argch}(1)=0$ d'où $K'=0$ et $f'(x)=-\frac{1}{2}x$

Pour faire plus joli

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\left|\frac{x}{2}\right|$$

$$g(x)=\mathrm{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)=\mathrm{argsh}\left(u(x)\right)$$

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $2x\sqrt{1+x^2}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que argsh .

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1+\left(u(x)\right)^2}}$$

$$u'(x)=2\sqrt{1+x^2}+2x\times\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=2\frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}=2\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(u(x)\right)^2}=\sqrt{1+4x^2(1+x^2)}=\sqrt{4x^4+4x^2+1}=\sqrt{(2x^2+1)^2}=|2x^2+1|=2x^2+1$$

$$g'(x)=2\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1}{2x^2+1}=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\mathbb{R}$ est un intervalle donc

$$g(x)=2\operatorname{argsh}(x)+K$$

$$g(0)=\operatorname{argsh}\left(2\times 0\times\sqrt{1+0^2}\right)=\operatorname{argsh}(0)=0$$

Donc $K=0$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=2\operatorname{argsh}(x)$$

$$h(x)=\operatorname{argth}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\operatorname{argth}\big(u(x)\big)$$

$$1-\big(u(x)\big)^2=1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

Donc h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ car $1-\big(u(x)\big)^2>0\Leftrightarrow\big(u(x)\big)^2<1$

$$u'(x)=\frac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$h'(x)=\frac{u'(x)}{1-\big(u(x)\big)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}\times\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}=-\frac{1}{x}$$

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, $h(x)=-\ln(x)+K$

$$h(1)=\operatorname{argth}(0)=0$$

Et

$$h(1)=-\ln(1)+K=K$$

donc $K=0$ et $h(x)=-\ln(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $h(x)=-\ln(-x)+K'$

$$h(1)=\operatorname{argth}(0)=0$$

Et

$$h(1)=-\ln(1)+K'=K'$$

donc $K'=0$ et $h(x)=-\ln(-x)$

Soit encore

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-\ln|x|$$

Aller à : Exercice 40

Correction exercice 41.

1. $f(0)=2\arctan\left(\sqrt{1+0^2}-0\right)+\arctan(0)=2\arctan(1)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$
2.

$$f'(x)=2\times\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}=2\times\frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2)}+\frac{1}{1+x^2}$$
$$=2\times\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2})}+\frac{1}{1+x^2}$$
$$=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}+\frac{1}{1+x^2}$$
$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

3. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$f(x)=K$$

Or $f(0)=\frac{\pi}{2}$ donc $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Aller à : Exercice 41

Correction exercice 42.

$90=6\times 15-1$ donc $\frac{89\pi}{15}=6\pi-\frac{\pi}{15}$ alors $\cos\left(\frac{89\pi}{15}\right)=\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{15}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$

Or $\frac{\pi}{15}\in[0,\pi]$ donc $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)=\frac{\pi}{15}$

Par suite

$$\arccos\left[\cos\left(\frac{89\pi}{15}\right)\right]=\arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\right]=\frac{\pi}{15}$$

Aller à : Exercice 42

Correction exercice 43.

$$f'(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}=\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

Aller à : Exercice 43

Correction exercice 44.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)\geq 1$ donc $0<\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\leq 1$, par conséquent f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x)=\arcsin\big(u(x)\big)$ alors $f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ avec $u(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

$$u'(x)=-\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$
$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^2}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}}=\frac{|\mathrm{sh}(x)|}{|\mathrm{ch}(x)|}=\frac{|\mathrm{sh}(x)|}{\mathrm{ch}(x)}$$

Car $\mathrm{ch}(x)>0$.

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}=\frac{\mathrm{sh}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}\times\frac{-1}{\mathrm{ch}(x)}$$

f n'est pas dérivable en 0. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

C'est une manière rapide de dire que pour que f soit dérivable en un point, il faut et il suffit que f soit continue en ce point et que f' existe, ici, pour que f soit dérivable, il faut et il suffit que f' existe (car f est définie sur $\mathbb{R}$) et que manifestement la limite à gauche et à droite de 0 n'est pas la même.

Donc le raisonnement suivant :

f est dérivable si et seulement si $-1 < \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} < 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ n'est pas correct.

3. $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. Si $x > 0$ alors $\mathrm{sh}(x) > 0$ et donc

$$f'(x) = -\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} = -\frac{2e^x}{e^{2x}+1} = -2g'(x)$$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$f(x) = -2g(x) + K$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty} \arctan(X) = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$K = \pi$$

Et

$$\forall x > 0, \quad \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) = -2\arctan(e^x) + \pi$$

Aller à : Exercice 44

Correction exercice 45.

1.

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{2\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{144-25} = \frac{120}{119}$$

2. $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est trivial en élevant au carré.

   arctan est une fonction croissante donc :

   $\arctan(0) < \arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow 0 < \arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{6}$

   En multipliant cette inégalité par 4 et en enlevant $\frac{\pi}{4}$ on trouve :

$$-\frac{\pi}{4} < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$$

3.

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan(4\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{119+120} = \frac{1}{239}$$

   $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$ est dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

   D'où

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Aller à : Exercice 45

Correction exercice 46.

1.
$$u\in[-\ln(3),\ln(3)]\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)\le u\le \ln(3)\Leftrightarrow 1\le \operatorname{ch}(u)\le \operatorname{ch}(\ln(3))=\frac{e^{\ln(3)}+e^{-\ln(3)}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}$$
$$=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3\le 3\operatorname{ch}(u)\le 5\Leftrightarrow -1\le 3\operatorname{ch}(u)-4\le 1\Leftrightarrow -1\le f(u)\le 1$$

2. g est définie et continue si et seulement si $-1\le 3\operatorname{ch}(u)-4\le 1$, donc g est définie et continue si et seulement si $u\in[-\ln(3),\ln(3)]$.

3. Si $g(u)=\arcsin\big(f(u)\big)$ alors $g'(u)=\frac{f'(u)}{\sqrt{1-(f(u))^2}}$, $f'(u)=3\operatorname{sh}(u)$ et
$$1-\big(f(u)\big)^2=1-(3\operatorname{ch}(u)-4)^2=1-(9\operatorname{ch}^2(u)-24\operatorname{ch}(u)+16)$$
$$=-9\operatorname{ch}^2(u)+24\operatorname{ch}(u)-15=3(-3\operatorname{ch}^2(u)+8\operatorname{ch}(u)-5)$$
$-3X^2+8X-5=0$ a pour discriminant $\Delta=64-4\times(-3)\times(-5)=4$
Ses racines sont :
$$X_1=\frac{-8-2}{-6}=\frac{5}{3}$$
Et
$$X_2=\frac{-8+2}{-6}=1$$
Donc $-3X^2+8X-5=-3\left(X-\frac{5}{3}\right)(X-1)$
Par conséquent $-3\operatorname{ch}^2(u)+8\operatorname{ch}(u)-5=-3(\operatorname{ch}(u)-1)\left(\operatorname{ch}(u)-\frac{5}{3}\right)=(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))$
On en déduit que :
$$g'(u)=\frac{3\operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))}}$$

4. D'après la première question $\operatorname{ch}(3)=\frac{5}{3}$ donc $\operatorname{ch}(u)=\frac{5}{3}$ admet deux solutions $u=\ln(3)$ et $u=-\ln(3)$
et $\operatorname{ch}(u)=1$ a une unique solution $u=0$.
$$(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))>0\Leftrightarrow 1<\operatorname{ch}(u)<\ln(3)\Leftrightarrow u\in]-\ln(3),0[\cup]0,\ln(3)[$$
On doit donc calculer les limites de $g'(u)$ en $-\ln(3)$, 0 et $\ln(3)$.
En $-\ln(3)^+$.
$\operatorname{sh}(-\ln(3))<0$ et $3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))\to 0^+$ (sinon cela veut dire que l'on s'est trompé et que le terme sous la racine carrée est négatif).
$$\lim_{u\to-\ln(3)^+} g'(u)=-\infty$$
Il y a donc une tangente verticale en $x=-\ln(3)$.
En 0^-.
$$\operatorname{sh}(u)=-\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)-1}=-\sqrt{\operatorname{ch}(u)-1}\times\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}$$
Donc
$$g'(u)=\frac{-3\sqrt{\operatorname{ch}(u)-1}\times\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u)-1)(5-3\operatorname{ch}(u))}}=\frac{-3\sqrt{\operatorname{ch}(u)+1}}{\sqrt{3(5-3\operatorname{ch}(u))}}$$
$$\lim_{u\to0^-} g'(u)=\frac{-3\sqrt{\operatorname{ch}(0)+1}}{\sqrt{3(5-3\operatorname{ch}(0))}}=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3(5-3)}}=-\sqrt{3}$$

En 0^+.

$$\text{sh}(u)=+\sqrt{\text{ch}^2(u)-1}=\sqrt{\text{ch}(u)-1}\times\sqrt{\text{ch}(u)+1}$$

De même

$$\lim_{u\to 0^-} g'(u)=\frac{3\sqrt{\text{ch}(0)+1}}{\sqrt{3(5-3\,\text{ch}(0))}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3(5-3)}}=\sqrt{3}$$

En $\ln(3)^-$.

Comme en $-\ln(3)^+$ ou presque.

$$\lim_{u\to-\ln(3)^-} g'(u)=+\infty$$

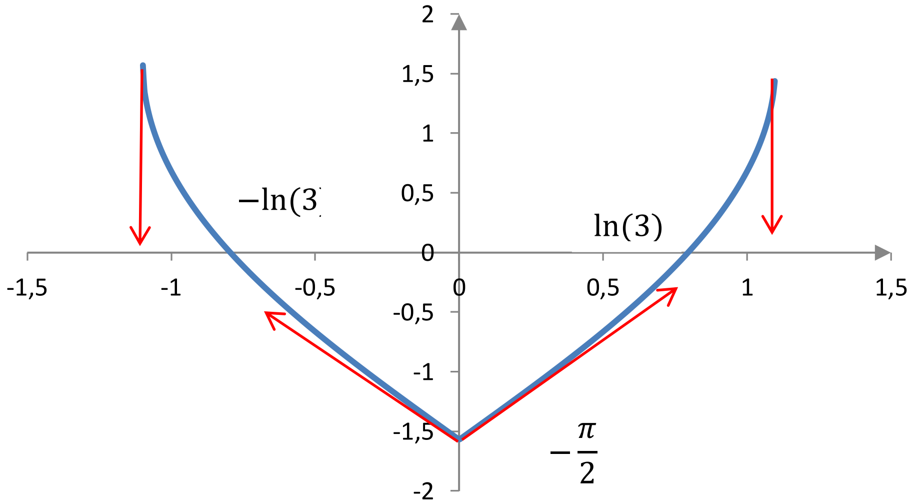
En fait la fonction est paire et la dérivée est impaire.

5. g est continue sur $[-\ln(3),\ln(3)]$ et g' est définie sur $]-\ln(3),0[\cup]0,\ln(3)[$ donc g est dérivable sur $]-\ln(3),0[\cup]0,\ln(3)[$.
6.

u	$-\ln(3)$		0		$\ln(3)$
$g'(u)$	$\Vert\ -\infty$		$-\sqrt{3}\ \Vert\ \sqrt{3}$		$+\infty\ \Vert$
$g(u)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Car $g(0)=\arcsin(3\,\text{ch}(0)-4)=\arcsin(3-4)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ et $g(\ln(3))=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

Et $g'(u)$ est du signe de $\text{sh}(u)$ lorsqu'elle est dérivable.



Aller à : Exercice 46