Bernard Randé
Franck Taïeb

Les clefs pour l'X

Calvage & Mounet

Bernard Randé & Franck Taïeb

Les clefs pour l'X

Calvage & Mounet

FRANCK TAÏEB, ancien élève de l'ENS, est professeur en classe de MP* au lycée Pasteur de Neuilly et membre du comité de rédaction de la RMS. Il est auteur d'un livre de problèmes corrigés (éditions Springer).

BERNARD RANDÉ, ancien élève de l'ENS de Saint-Cloud, est professeur en classe de MP* au lycée Louis-le-Grand. Il est membre du comité de rédaction de la RMS, auteur de livres d'exercices (éditions Vuibert), de problèmes corrigés et *des Carnets indiens de Srinivasa Ramanujan* (éditions Cassini).

ISBN 978-2-91-635209-1

9 782916 352091

♾ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2008

à nos élèves

Préface

En mathématiques, il y a deux façons d'embrasser les contenus : soit en apprenant, soit en comprenant. Mais il n'y en a qu'une de les mettre en œuvre : en faisant des exercices. On conviendra en effet que la résolution d'exercices permet de tisser petit à petit les liens invisibles par lesquels tiennent les idées en mathématiques. Les exercices donnent chair aux théorèmes ; en incarnant ses hypothèses, l'exercice met en évidence la puissance du théorème mais, de façon paradoxale, il souligne parfois son inadéquation à la résolution d'un problème particulier : il faut alors créer soi-même le petit bout de chemin qui permette d'aller jusqu'à la théorie générale. Les hypothèses aussi sont souvent cachées : les mettre en évidence est en soi un travail qui est loin d'être facile.

Au travers de la pratique des exercices, l'étudiant développe le processus mental de la résolution : l'accumulation d'expériences, la création de moteurs d'analogie, la mise en place d'un réseau de communication entre les concepts, et ainsi de suite. La pratique régulière d'exercices aboutit à terme à ce que l'étudiant sépare automatiquement les aspects techniques des concepts plus profonds : libéré de la crainte de la technicité, l'activité de réflexion se concentre alors sur la compréhension et la démonstration, et par extension sur la relation avec l'examinateur.

Une difficulté souvent sous-estimée, c'est de mesurer... la difficulté d'un exercice. Cela se comprend bien : savoir d'un exercice qu'il est difficile, c'est avoir presque instantanément exploré les voies faciles qui mènent à sa solution. Le rôle de la pratique préalable des exercices est de faire ce travail avec une rapidité souvent déconcertante pour le sujet lui-même : un peu comme un maître des échecs ne pense même pas aux deux prochains coups, mais peut se projeter dans la stratégie qui va guider les coups suivants. Bien sûr, l'intérêt de cette capacité est évident : si l'exercice tombe sous le coup d'une méthode éprouvée, elle sera reconnue sans peine et sans fatigue, ce qui permettra de se concentrer sur les difficultés techniques, s'il y en a. S'agissant de l'X, il n'est pas improbable que l'exercice soit ardu, mais ce

serait une erreur que de le postuler. La méthode est toujours d'examiner froidement le problème afin d'aider son cerveau à se mettre en position de faire les essais nécessaires. Si l'exercice est difficile, le cerveau se placera de lui-même dans la configuration la plus apte pour le résoudre.

Tout cela suppose une pratique régulière et sérieuse. Cet ouvrage est fait pour cela. Nous avons choisi des exercices de millésimes récents en général, mais pas exclusivement : des exercices vieux de dix ans à l'X réapparaissent de temps à autre. Les exercices sont classés en grands chapitres, ce qui permet de les mettre plus facilement en parallèle avec la progression du cours. Ils ne sont en revanche pas classés par difficulté croissante. Tous les exercices ont été effectivement posés lors de l'oral du concours. Du point de vue de l'efficacité, cela permettra à l'étudiant de se familiariser avec les spécificités du concours de l'X, qui sont réelles, comme on s'en aperçoit par exemple en regardant le chapitre « Géométrie ».

En ce qui concerne la solution, nous l'avons rédigée en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'exercices d'oral et non de problèmes d'écrit. Elle est parfois assortie de commentaires composés en italique. Elle est toujours détaillée, et rédigée pour en faire apparaître les ressorts fondamentaux.

Un conseil pour travailler ces exercices : le faire tout au long de l'année. Résoudre un exercice est loin d'être un pensum. C'est au contraire une source de plaisir. Bien sûr, la recherche infructueuse peut être cause d'une souffrance, mais cette souffrance (toute relative !) s'évanouit dès que l'on franchit avec succès les obstacles posés par l'énoncé. Le sentiment de triomphe ressenti la première fois que l'on résout un exercice difficile ne s'oublie pas.

Une dernière idée : chercher un exercice un jour et, en cas d'insuccès, laisser passer une nuit pour se remettre au travail sur le même exercice le lendemain. En cas de nouvel insuccès seulement, consulter la solution.

Il va de soi qu'il ne faut pas hésiter à varier les niveaux de difficulté et faire régulièrement, même en visant l'X, des exercices provenant des Mines ou de Centrale, par exemple. On en trouve aisément des annales mais nous ne saurions trop vous conseiller de consulter la RMS (Revue de la filière MathématiqueS), qui publie d'une année sur l'autre un millier d'exercices posés aux concours l'année précédente. C'est l'occasion pour nous d'en remercier le Comité de rédaction qui nous a donné son accord pour prélever dans les pages de cette revue les énoncés qui nous convenaient.

Puisque nous en sommes aux remerciements, que Raphaël Beuzart-Plessis, Françoise Fontanez, Imad Lahoud et Charles Torossian, dévoués relecteurs des épreuves de ce livre, acceptent ceux que nous leur adressons accompagnés de notre chaleureuse reconnaissance.

Table des matières

1. Algèbre générale, arithmétique 1

2. Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes 41

3. Espaces euclidiens, géométrie 71

4. Topologie, fonctions de plusieurs variables 107

5. Analyse élémentaire, suites, séries 135

6. Analyse fonctionnelle, suites et séries de fonctions 169

7. Intégration, équations différentielles 195

Avant-propos

L'ouvrage est constitué de sept chapitres qui distribuent un total de 144 exercices répartis selon leurs ressorts principaux : algèbre générale ; algèbre linéaire et réduction ; espaces euclidiens et géométrie ; topologie et fonctions de plusieurs variables ; suites, séries et analyse élémentaire ; analyse fonctionnelle, suites et séries de fonctions ; intégration et équations différentielles.

Les exercices ne sont pas classés selon leur difficulté. Chacun est constitué d'un énoncé, auquel ont été parfois intégrées les indications de l'examinateur rapportées par le candidat, et d'une solution détaillée. Les commentaires sont en italiques. Ils font état de remarques non intégrées au corrigé et tentent de replacer l'exercice dans son contexte.

Chapitre 1

Algèbre générale

Exercice corrigé 1

Posé en 2003

Soient n et m des entiers naturels. Montrer que $\dfrac{(2n)!\,(2m)!}{n!\,m!\,(n+m)!} \in \mathbb{N}$.

Solution

Nous pouvons transformer la question en : vérifier que $n!\,m!\,(n+m)!$ divise $(2n)!\,(2m)!$. En arithmétique, pour démontrer une relation de divisibilité, on a essentiellement le choix entre trois techniques : déterminer le quotient (et vérifier qu'il est entier !), effectuer des calculs modulaires, et étudier les exposants des facteurs premiers dans les deux termes.

On aurait pu envisager d'exprimer le quotient comme un produit de coefficients binomiaux. C'est une technique qui marche par exemple pour prouver que

$$\frac{(3n)!}{n!\,n!\,n!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \times \frac{(3n)!}{(2n)!\,n!}$$

est entier, car c'est un produit de deux coefficients binomiaux. Dans le cas présent, après plusieurs essais infructueux, nous n'y arrivons pas. En fait, on ne peut pas y arriver, mais ce serait un exercice trop difficile[1].

[1] Il serait déjà difficile de déterminer un énoncé ! « Montrer que tel nombre n'est pas un produit de coefficients binomiaux » est impossible, puisque tout entier est un coefficient binomial...

Oubliez les calculs modulaires. Ils sont éventuellement valables modulo un petit nombre, ou bien modulo un nombre premier.

Il nous reste à comparer les exposants des nombres considérés. On notera $\nu_p(k)$ la valuation p-adique de l'entier k, c'est-à-dire l'exposant de p dans la décomposition de k en facteurs premiers. L'exercice se ramène à prouver que

$$\forall p \text{ premier}, \quad \nu_p(n!\,m!\,(n+m)!\,) \leqslant \nu_p\big((2n)!\,(2m)!\,\big).$$

Fixons donc un nombre premier p. Nous allons démontrer, puis utiliser, la formule de Legendre :

$$\nu_p(k!\,) = \sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{k}{p^j}\Big),$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Remarquons tout d'abord que la somme est en réalité finie, puisque $\dfrac{k}{p^j} < 1$ pour j assez grand. Notons $\mathbf{1}_A$ la fonction qui vaut 1 si la propriété A est vraie, et 0 si la propriété A est fausse. On a alors :

$$\nu_p(k!\,) = \sum_{i=1}^{k} \nu_p(i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{p^j|i}.$$

En effet, les puissances de p qui divisent i sont exactement $p, p^2, \ldots, p^{\nu_p(i)}$. On échange les sommes par le théorème de Fubini, et on obtient :

$$\nu_p(k!\,) = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{p^j|i} = \sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{k}{p^j}\Big),$$

car parmi les entiers dans $[\![1,k]\!]$, il y en a exactement $E\Big(\dfrac{k}{p^j}\Big)$ qui sont divisibles par p^j. Ceci prouve la formule de Legendre. Il nous reste maintenant à démontrer que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{n}{p^j}\Big) + \sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{m}{p^j}\Big) + \sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{n+m}{p^j}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{2n}{p^j}\Big) + \sum_{j=1}^{+\infty} E\Big(\frac{2m}{p^j}\Big).$$

Pour cela, il nous suffit de vérifier que pour tous réels x, y on a :

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leqslant E(2x) + E(2y).$$

Posons $x = E(x) + r_x$ avec $r_x \in [0,1[$ et de même $y = E(y) + r_y$. On a alors $2x = 2E(x) + 2r_x$, donc $E(2x) = 2E(x) + E(2r_x)$ car $2E(x)$ est un entier. De même, $E(2y) = 2E(y) + E(2r_y)$. Enfin,

$$E(x+y) = E(x) + E(y) + E(r_x + r_y).$$

L'inégalité voulue devient $E(r_x + r_y) \leqslant E(2r_x) + E(2r_y)$. Cette dernière

inégalité est vraie : si $E(r_x + r_y) \neq 0$, alors $E(r_x + r_y) = 1$ et $r_x + r_y \geqslant 1$. Ceci implique que r_x ou r_y est supérieur à $\frac{1}{2}$. Selon le cas, on a alors $E(2r_x) = 1$ ou $E(2r_y) = 1$, ce qui prouve le résultat recherché.

Exercice corrigé 2

Posé en 2006

Soient A et B dans $\mathbb{R}[X]$, non tous deux constants. On pose $P := A + iB$ et on suppose que les racines complexes de P sont de partie imaginaire strictement négative.

a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est réel si et seulement si $|P(z)| = |P(\bar{z})|$.

b. En déduire que si λ et μ sont des réels non tous deux nuls, les racines de $\lambda A + \mu B$ sont toutes réelles.

Solution

a. Comme P est scindé dans $\mathbb{C}$, on écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ où les z_k sont de partie imaginaire strictement négative. Prenons un complexe z de partie imaginaire strictement positive, et vérifions que $|z - z_k| > |\bar{z} - z_k|$. Pour cela, on peut raisonner géométriquement et remarquer que l'ensemble des complexes a tels que $|a - z| = |a - \bar{z}|$ est la médiatrice de $[z\bar{z}]$, c'est-à-dire l'axe des réels. Du côté de $\bar{z}$, c'est-à-dire pour un complexe a de partie imaginaire strictement négative, on a $|a - z| > |a - \bar{z}|$, c'est le cas pour $a = z_k$.

Comme tous les $|z - z_k|$ sont strictement positifs, on dispose de l'inégalité $\prod_{k=1}^{n} |z - z_k| > \prod_{k=1}^{n} |\bar{z} - z_k|$, qui s'écrit $|P(z)| > |P(\bar{z})|$. Par symétrie, on a $|P(z)| < |P(\bar{z})|$ si la partie imaginaire de z est strictement négative.

Conclusion, en contraposant : si $|P(z)| = |P(\bar{z})|$, alors z est réel. La réciproque est immédiate.

b. Prenons une racine complexe z de $\lambda A + \mu B$. Pour montrer que z est forcément réel, il suffit de vérifier que $|P(z)| = |P(\bar{z})|$. Calculons :

$$\begin{aligned}
|P(z)|^2 - |P(\bar{z})|^2 &= |A(z) + iB(z)|^2 - |A(\bar{z}) + iB(\bar{z})|^2 \\
&= (A(z) + iB(z))(A(\bar{z}) - iB(\bar{z})) \\
&\qquad -(A(\bar{z}) + iB(\bar{z}))(A(z) - iB(z)) \\
&= 2i(B(z)\overline{A(z)} - A(z)\overline{B(z)}) = 4\,\mathfrak{Im}(A(z)\overline{B(z)}).
\end{aligned}$$

Mais comme $\lambda A(z) + \mu B(z) = 0$, alors $A(z)$ et $B(z)$ sont colinéaires, et donc $A(z)\overline{B(z)}$ est réel, ce qui entraîne que sa partie imaginaire est nulle. Ainsi $|P(z)| = |P(\bar{z})|$ et z est réel d'après la première question.

Rappelons une règle générale : lorsque vous travaillez sur un complexe z, ne posez $z = x + iy$ qu'en cas d'absolue nécessité...

À titre d'exercice, vous pouvez montrer que, réciproquement, si $\lambda A + \mu B$ est scindé dans $\mathbb{R}$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $A+iB$ a toutes ses racines de partie imaginaire strictement positive ou bien $A + iB$ a toutes ses racines de partie imaginaire strictement négative.

Exercice corrigé 3

Posé en 2007

On définit par l'égalité $\Phi_n(X) := \prod_{k \wedge n = 1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ le polynôme cyclotomique d'ordre n , le produit portant sur les entiers $k \in [\![1, n]\!]$ premiers avec n.

a. Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$, le produit ne portant que sur les diviseurs positifs de n.

b. Montrer que Φ_n est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Solution

a. Lorsque k varie entre 1 et n, le pgcd de k et n, noté $k \wedge n$, prend pour valeurs tous les diviseurs de n.

Soit d un diviseur de n. Les entiers k tels que $k \wedge n = d$ sont exactement les entiers qui s'écrivent dk', avec $k' \in [\![1, n/d]\!]$ et $k' \wedge \dfrac{n}{d} = 1$. Ainsi

$$\prod_{k \wedge n = d} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k \wedge \frac{n}{d} = 1} \left(X - e^{\frac{2idk\pi}{n}}\right) = \Phi_{n/d}(X).$$

Comme $d \longmapsto \dfrac{n}{d}$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs de n dans lui-même, on a

$$\prod_{d|n} \Phi_d(X) = \prod_{d|n} \Phi_{n/d}(X) = \prod_{d|n} \prod_{k \wedge n = d} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = X^n - 1.$$

On voit que $\deg \Phi_d = \varphi(d)$, *puisque c'est le nombre d'entiers de* $[1, n]$ *premiers avec* d. *Par considération du degré de chacun des membres de l'égalité précédente, on (re)trouve à la formule*

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

b. Nous allons procéder par récurrence forte sur n. On a $\Phi_1 = X - 1$ et $\Phi_2 = X + 1$. Puis

$$\Phi_n = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n, d<n} \Phi_d}.$$

L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que le dénominateur est dans $\mathbb{Z}[X]$. Toutefois, rien ne dit que le quotient de deux polynômes à coefficients entiers soit à coefficients entiers. Par exemple, $\dfrac{X^2}{2X}$ n'est pas dans $\mathbb{Z}[X]$, même s'il s'agit quand même d'un polynôme. Mais ici nous sommes dans une situation plus favorable car les deux polynômes sont unitaires. Prouvons le résultat plus général suivant :

Lemme. — *Soit* A *un polynôme unitaire (de coefficient dominant* 1*) dans* $\mathbb{Z}[X]$. *Alors pour tout polynôme* $B \in \mathbb{Z}[X]$, *le quotient et le reste dans la division euclidienne* $B = AQ + R$ *sont dans* $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur le degré de B, en suivant l'algorithme de division euclidienne. Notons d le degré de A. Le résultat est vrai pour tout polynôme B de degré strictement inférieur à d. Supposons la propriété vraie pour tout polynôme de degré $< n$, et considérons un polynôme $B \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \geqslant d$. On écrit $B = \alpha X^n + C$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $C \in \mathbb{Z}[X]$.

Alors $D := B - \alpha X^{n-d} A \in \mathbb{Z}[X]$, mais son degré est strictement inférieur à n. Donc par hypothèse de récurrence, D s'écrit $D = AQ + R$ avec Q et R dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\deg R < d$. On a alors $B = (\alpha X^{n-d} + Q)A + R$. *cqfd*

Ce résultat nous permet alors d'affirmer que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Les polynômes cyclotomiques sont des objets classiques de la théorie des corps. On les calcule à l'aide de l'égalité du **a**. *Ainsi,* $X^9 - 1 = \Phi_1 \Phi_3 \Phi_9$. *Comme* $\Phi_1 \Phi_3 = X^3 - 1$ *d'après la même formule,*

$$\Phi_9 = \frac{X^9 - 1}{X^3 - 1} = X^6 + X^3 + 1.$$

Lorsque p est premier, $\Phi_p(X) = \dfrac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + \cdots + X + 1$. On verra dans l'exercice 10, page 13, l'exemple du polynôme Φ_5 dont on montre dans l'exercice en question qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On peut montrer plus généralement que $\Phi_n(X)$ est toujours irréductible, mais c'est autrement difficile.

Exercice corrigé 4

Posé en 2004

Soient p un nombre premier et E un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension n.

a. Quel est le nombre de droites vectorielles de E ?

b. Quel est le nombre de bases de E ?

c. Quel est le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension r ?

Solution

a. L'espace E est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, donc E est de cardinal p^n. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites de E, et f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} E\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathscr{D} \\ x & \longmapsto & \mathrm{vect}(x). \end{array}\right.$ Cette application est naturellement surjective, et pour toute droite vectorielle D, $f^{-1}(D)$ est de cardinal $p-1$, puisque $\mathrm{vect}(x) = \mathrm{vect}(y)$ si et seulement s'il existe λ non nul tel que $y = \lambda x$.

Par le principe des bergers, $\mathrm{card}\,\mathscr{D} = \dfrac{p^n - 1}{p - 1}$.

Le principe des bergers consiste à dire que, si un troupeau de quadrupèdes possède $4n$ pattes, il contient n bêtes.

b. On va étendre le résultat et compter pour tout r le nombre α_r de familles libres de cardinal r. Pour construire une famille $(x_1, \ldots, x_r)$ libre, on doit d'abord construire une famille $(x_1, \ldots, x_{r-1})$ libre, puis choisir x_r dans $E \setminus \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_{r-1})$, qui est de cardinal $p^n - p^{r-1}$.

Ainsi, $\alpha_r = (p^n - p^{r-1})\alpha_{r-1}$.

On en déduit que $\alpha_r = \displaystyle\prod_{j=0}^{r-1}(p^n - p^j)$ (si $r \geqslant n+1$, on retrouve bien que $\alpha_r = 0$). Attention, deux familles constituées des mêmes vecteurs, mais dans un ordre différent, sont considérées comme différentes. Si jamais ce n'était pas le cas, alors il suffirait de diviser le résultat par $(r!)$.

En particulier, il y a $\prod_{j=0}^{n-1}(p^n - p^j)$ familles libres de cardinal n, donc autant de bases de E.

Au passage, on a démontré que $r!$ divisait $(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{r-1})$, ce qui n'a rien d'évident par ailleurs.

c. Soit F_r l'ensemble des familles libres de cardinal r, et $\mathscr{G}_r$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension r. L'application

$$h : \begin{cases} F_r & \longrightarrow \mathscr{G}_r \\ (x_1, \ldots, x_r) & \longmapsto \operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_r) \end{cases}$$

est surjective, et pour tout sous-espace vectoriel G de dimension r, $h^{-1}(G)$ est de cardinal $\prod_{j=0}^{r-1}(p^r - p^j)$. Ainsi le cardinal de $\mathscr{G}_r$ est

$$\frac{\prod_{j=0}^{r-1}(p^n - p^j)}{\prod_{j=0}^{r-1}(p^r - p^j)} = \frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-r+1}-1)}{(p^r-1)(p^{r-1}-1)\cdots(p-1)}.$$

À titre de prolongement, nous vous invitons à calculer le nombre d'endomorphismes $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u^2 = 0$ (fixer $\operatorname{Ker} u$ et un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ puis dénombrer les applications linéaires envoyant ce supplémentaire dans $\operatorname{Ker} u$; le résultat final fait intervenir une somme finie).

Exercice corrigé 5

Posé en 2000

On pose $P := X^3 - X^2 - 2X + 1$.

a. Montrer que P possède trois racines réelles θ_i pour $i = 1, 2, 3$.

b. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

c. Pour θ racine de P, on pose $\mathbb{Q}[\theta] := \{a + b\theta + c\theta^2\}_{(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\theta]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

d. Montrer que, si θ est racine de P, $2 - \theta^2$ est racine de P.

e. Comparer les $\mathbb{Q}[\theta_i]$.

Solution

a. On constate que $P(0) = 1$ et que $P(1) = -1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, P s'annule dans $]-\infty, 0[$, dans $]0, 1[$ et dans $]1, +\infty[$.

b. Soit $\dfrac{p}{q}$ un rationnel écrit sous forme irréductible (avec $q > 0$). Supposons que $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$. Alors $p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3 = 0$, donc q divise p^3. Comme q est premier avec p^3, $q = 1$. De même, p divise 1, donc $p = \pm 1$ et $\dfrac{p}{q} = \pm 1$. Mais ni 1 ni -1 n'est racine de P. Donc P n'admet pas de racine rationnelle.

C'est un cas particulier d'un résultat classique : si

$$P = a_nX^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X],$$

et que le rationnel irréductible $\dfrac{p}{q}$ est racine de P, alors q divise a_n et p divise a_0. La démonstration de ce résultat est similaire à celle qui vient d'être faite.

c. Il résulte de la question **b** que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En effet, dans le cas contraire, il serait produit de plusieurs polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 1 ou 2, dont l'un au moins aurait le degré 1, et par conséquent aurait une racine rationnelle.

▷ Par définition, $\mathbb{Q}[\theta]$ est le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\{1, \theta, \theta^2\}$. Montrons que $\mathbb{Q}[\theta] = \{S(\theta)\}_{S \in \mathbb{Q}[X]}$. Il suffit pour cela de montrer qu'un réel de la forme $S(\theta)$ est dans $\mathbb{Q}[\theta]$, puisque l'appartenance inverse est évidente. Divisons S par P en écrivant $S = PQ + R$, avec $R \in \mathbb{Q}[X]$ et $\deg R \leqslant 2$. Par évaluation en θ, $S(\theta) = P(\theta)Q(\theta) + R(\theta) = R(\theta)$, ce qui montre que $S(\theta) \in \mathbb{Q}[\theta]$. En particulier, puisque $S_1(\theta)S_2(\theta) = (S_1S_2)(\theta)$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\theta]$ est stable par produit. Comme il contient 1, c'est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

▷ Pour montrer que c'est un corps, il reste à montrer que tout élément non nul x de $\mathbb{Q}[\theta]$ admet un inverse dans $\mathbb{Q}[\theta]$. Considérons l'application $y \mapsto xy$. Elle est linéaire, va de $\mathbb{Q}[\theta]$ dans $\mathbb{Q}[\theta]$ car $\mathbb{Q}[\theta]$ est stable par produit, et est injective car $x \neq 0$. Comme $\mathbb{Q}[\theta]$ est de dimension finie, elle est surjective : il existe donc $y \in \mathbb{Q}[\theta]$ tel que $xy = 1$. C'est dire que $y = x^{-1}$ est dans $\mathbb{Q}[\theta]$.

▷ En dernier lieu, on sait déjà que $(1, \theta, \theta^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{Q}[\theta]$ sur $\mathbb{Q}$. Montrons que c'est une famille libre. L'égalité $a + b\theta + c\theta^2 = 0$ entraîne que le polynôme $S = a + bX + cX^2$ annule θ. Supposons $S \neq 0$ par l'absurde. Alors P ne divise pas S à cause des degrés et, étant irréductible, est premier avec S. L'égalité de Bézout permet d'écrire $AP + BS = 1$,

donc $0 = 1$ par évaluation en θ. C'est absurde, et par conséquent, $S_i = 0$ et $a = b = c = 0$. Ainsi, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\theta] = 3$.

d. Calculons

$$\begin{aligned} P(2-X^2) &= (2-X^2)^3 - (2-X^2)^2 - 2(2-X^2) + 1 \\ &= -X^6 + 5X^4 - 6X^2 + 1 \\ &= -(X^3 - X^2 - 2X + 1)(X^3 + X^2 - 2X - 1). \end{aligned}$$

En évaluant en θ, on obtient bien $P(2-\theta^2) = 0$.

e. Soit θ_1 une racine de P. Alors $2-\theta_1^2$ est une autre racine de P, car l'égalité $2 - \theta_1^2 = \theta_1$ est rendue impossible par la liberté de la famille $(1, \theta_1, \theta_1^2)$. Posons $\theta_2 = 2 - \theta_1^2$. Comme $\mathbb{Q}[\theta_2] \subset \mathbb{Q}[\theta_1]$, l'égalité des dimensions montre que $\mathbb{Q}[\theta_2] = \mathbb{Q}[\theta_1]$. Enfin, l'égalité $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ permet d'affirmer que $\theta_3 = 1 - \theta_1 - (2 - \theta_1^2) \in \mathbb{Q}[\theta_1]$, donc l'inclusion $\mathbb{Q}[\theta_3] \subset \mathbb{Q}[\theta_1]$ et l'égalité grâce aux dimensions.

En général, il n'est pas vrai que les sous-corps de $\mathbb{C}$ engendrés par chacune des trois racines d'un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 3 soient égaux. Cette situation se produit ici à cause de la condition très spéciale obtenue dans la question **d**. *On pourra étudier le cas où $Q = X^3 - 2$ pour obtenir un contre-exemple.*

Exercice corrigé 6

Posé en 2006

a. Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 1$. Minorer $(x-1)(y-1)(z-1)$.

b. Soient des entiers premiers p, q et r tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Montrer que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{41}{42}$.

Solution

a. L'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique donne

$$\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}.$$

Par conséquent, grâce à une nouvelle application de la même inégalité,

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \geqslant 3\,.$$

Ainsi, $x+y+z \geqslant 9$. Il en résulte que

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy+yz+zx) + (x+y+z) - 1 \geqslant 8\,,$$

car $xyz \geqslant xy+yz+zx$ grâce à l'hypothèse. Comme cette inégalité est une égalité lorsque $x=y=z=3$, on ne peut remplacer 8 par une constante plus grande.

b. On suppose sans restriction que $p \leqslant q \leqslant r$. Grâce à la question **a**, on sait que $(p-1)(q-1)(r-1) \geqslant 8$.

▷ Supposons d'abord que $p=2$. Le cas $q=2$ est exclu par l'inégalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$. Donc $q \geqslant 3$.

• Premier cas : $q=3$. Le cas $r \leqslant 6$ est exclu par $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$. Donc $r \geqslant 7$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} = \frac{41}{42}$.

• Deuxième cas : $q \geqslant 5$. Alors $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leqslant \frac{9}{10} \leqslant \frac{41}{42}$.

▷ Supposons à présent $p \geqslant 3$. Alors $q \geqslant 3$. Puisque les trois nombres ne peuvent être égaux à 3, on a donc $r \geqslant 5$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leqslant \frac{13}{15} \leqslant \frac{41}{42}$.

Cet exercice peut sembler gratuit mais l'on rencontre ce genre d'inégalités dans la recherche des polyèdres réguliers, par exemple.

Exercice corrigé 7

Posé en 2003

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi interne associative, notée multiplicativement. Montrer qu'il existe dans E un élément tel que $e^2 = e$.

Solution

Lorsque $a \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donner un sens à a^n en vertu de la seule associativité de la loi interne et l'on a alors, pour n et m supérieurs ou égaux à 1, $a^n a^m = a^{n+m}$, et aussi $(a^n)^m = a^{nm}$. Il est à noter cependant que a^0 n'est pas a priori défini, faute de neutre.

Soit $a \in E$. La suite $(a^n)_{n\geqslant 1}$ n'étant pas injective (car E est fini), il existe n et p, supérieurs ou égaux à 1, tels que $a^{n+p} = a^n$. Donc pour tout

$k \in \mathbb{N}$ on a $a^{n+k+p} = a^{n+k}$, ce qui montre que la suite est périodique de période p à partir du rang n. Soit $m = kp$ un multiple de p plus grand que n. Alors $a^{m+kp} = a^m$, donc $a^{2m} = a^m$: l'élément a^m est égal à son carré.

Il n'existe pas forcément de neutre dans E. Cependant, pour tout élément $y = ex$, on a $ey = e^2x = ex = y$. Autrement dit, e joue le rôle de neutre pour ces éléments. On peut aussi en déduire qu'un sous-ensemble fini de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication, contient au moins un projecteur, éventuellement nul ou égal à I_n.

Exercice corrigé 8

Posé en 2007

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, d_n le nombre des permutations d'un ensemble à n éléments qui n'ont aucun point fixe. On prend $d_0 = 1$.

a. Exprimer à l'aide de la suite d le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui ont exactement k points fixes.

b. Calculer d_n.

c. Quelle est la limite de $\dfrac{d_n}{n!}$?

d. Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation sur un ensemble à n éléments ?

Solution

a. Les permutations ayant k points fixes peuvent être partitionnées en celles dont l'ensemble des points fixes est un sous-ensemble donné à k éléments. Il y a donc $\binom{n}{k}$ classes de partition. Dans chaque classe, il y a exactement d_{n-k} permutations, puisqu'elles coïncident sur le complémentaire de l'ensemble des points fixes avec une permutation sans point fixe. Le nombre cherché est donc

$$\binom{n}{k} d_{n-k}.$$

b. Puisqu'au total il y a $n!$ permutations, on obtient l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$$

qu'il s'agit d'inverser. La matrice T du système obtenu pour les $n+1$ premières valeurs entières est triangulaire inférieure (matrice de Pascal des

coefficients binomiaux) :

$$T := \begin{pmatrix} t_{0,0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,0} & \cdots & t_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ où } t_{kj} = \binom{k}{j}.$$

Il est plus facile d'inverser ${}^tT$. Pour cela, remarquons que, dans la base $(1, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, ${}^tT$ est la matrice de l'application linéaire qui envoie X^k sur $(1+X)^k$, donc le polynôme $P(X)$ sur $P(1+X)$. Son inverse est évidemment $P(X) \mapsto P(X-1)$. En transposant à nouveau, on voit que T^{-1} est la matrice de terme général $t'_{i,j} = (-1)^{i+j} t_{i,j}$. Par conséquent,

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Une autre façon de calculer d_n est d'introduire la série entière appelée « génératrice » $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. La question a montre que, par produit de Cauchy, $f(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Par conséquent,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

et un nouveau produit de Cauchy, suivi d'une identification des coefficients, conduit à l'expression de d_n. Les permutations sans point fixe sont nommées dérangements. Par exemple, pour $n = 4$, la formule établie donne $d_4 = 9$. Les 9 permutations sans points fixes sont les 6 cycles d'ordre 4 et les trois « doubles transpositions » telles que (12)(34).

c. On reconnaît un développement en série entière, et $\frac{d_n}{n!} \to e^{-1}$.

La convergence de $\frac{d_n}{n!}$ vers e^{-1} est très rapide, en $O(\frac{1}{n!})$ comme le montre le critère de Leibniz des séries alternées.

d. Nous allons dénombrer le nombre moyen de points fixes d'une permutation σ en introduisant la fonction caractéristique, notée $\mathbf{1}_{\sigma(k)=k}$, de l'en-

semble des permutations σ telles que $\sigma(k) = k$:

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\sigma(k)=k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{1}_{\sigma(k)=k}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{card}\{\sigma\in S_n, \sigma(k)=k\} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(n-1)! = 1.$$

Le nombre moyen de points fixes est donc 1.

Exercice corrigé 9

Posé en 2007

Soit X un ensemble. Montrer qu'il est infini si et seulement si quelle que soit la fonction f de X dans X, il existe une partie A de X, distincte de $\emptyset$ et de X, stable par f.

Solution

On appelle partie stricte une partie non vide et différente de l'ensemble de référence.

▷ On suppose que X est infini. Soit f une fonction quelconque de X dans X. Soit $a \in X$. L'ensemble des itérés $\{f^n(a)\}_{n\geqslant 1}$ est stable par f. Si c'est une partie stricte de X, on a obtenu ce que l'on veut. Sinon, c'est que cet ensemble est égal à X, donc que a y appartient. Il existe $p \geqslant 1$ tel que $f^p(a) = a$. L'ensemble $\{a, f(a), \ldots, f^{(p-1)}(a)\}$ est différent de X, car fini, et clairement stable par f.

▷ On suppose à présent que X est fini, de cardinal n ; par contraposition, il s'agit de trouver f ne laissant stable aucune partie différente de $\emptyset$ et de X. Si $n \leqslant 1$, il suffit de prendre l'identité. Si $n \geqslant 2$, considérons f, une permutation circulaire des n éléments de X. Il est clair que f ne laisse stable aucune partie stricte de X.

Exercice corrigé 10

Posé en 2007

Quelle est la dimension du sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré dans $\mathbb{C}$ par l'ensemble des racines 5e de l'unité ?

Solution

▷ Soit $\omega := e^{\frac{2i\pi}{5}}$. C'est une racine de

$$X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1),$$

donc de $P(X) := X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Décomposons ce dernier polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en posant $Y = X + \frac{1}{X}$, d'où $Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2}$. Il vient

$$P(X) = X^2(Y^2 - 2 + Y + 1) = X^2(Y^2 + Y - 1) = X^2(Y - \alpha)(Y - \beta),$$

avec $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Finalement,

$$P(X) = (X^2 - \alpha X + 1)(X^2 - \beta X + 1).$$

Il s'agit bien de la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$, puisque P n'a pas de racine réelle. Si P admettait un facteur non trivial dans $\mathbb{Q}[X]$, ce serait un facteur de $\mathbb{R}[X]$ donc l'un des deux précédents. Or ni α ni β n'est rationnel, puisque $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Il en résulte que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

▷ Soit alors $V := \mathrm{vect}(1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les racines 5e de l'unité. Puisque $\omega^4 = -\omega^3 - \omega^2 - \omega - 1$, on a aussi $V = \mathrm{vect}(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$. Montrons que la famille précédente est libre. Si $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i \omega^i = 0$, le polynôme $A(X) := \sum_{i=0}^{3} \lambda_i X^i$ annule ω. Supposons que ce polynôme n'est pas nul. Il est donc premier avec le polynôme irréductible P car non nul et de degré strictement plus petit que $\deg P$. D'après Bézout, il existe U et V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + PV = 1$. Évaluant cette égalité en ω, il vient $0 = 1$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $A = 0$, donc ses coefficients sont nuls.

Finalement, $\dim V = 4$.

On pouvait aussi remarquer que l'ensemble des polynômes $A \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $Q(\omega) = 0$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, de la forme $\mu\mathbb{Q}[X]$ par conséquent. Il en résulte que μ divise P donc, par irréductibilité de P, que $\mu = P$ à une constante multiplicative près. Autrement dit, P est le « polynôme minimal » de ω sur $\mathbb{Q}$. Que $\dim V = 4$ est alors un résultat facile, voire connu.

Exercice corrigé 11

Posé en 2007

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \cos \frac{(2k+1)\pi}{19}$.

Solution

Posons $\omega := e^{i\frac{\pi}{19}}$. La somme à calculer est la partie réelle de

$$S := \sum_{k=0}^{8} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{19}} = \sum_{k=0}^{8} \omega^{2k+1} = \omega \frac{\omega^{18}-1}{\omega^2-1} = \frac{\omega^{19}-\omega}{\omega^2-1} = \frac{\omega+1}{1-\omega^2} = \frac{1}{1-\omega}.$$

Donc

$$S = \frac{e^{-i\frac{\pi}{38}}}{e^{-i\frac{\pi}{38}} - e^{i\frac{\pi}{38}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{38}}}{-2i\sin\frac{\pi}{38}}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{8} \cos \frac{(2k+1)\pi}{19} = \mathfrak{Re}\, S = \frac{1}{2}.$$

Exercice corrigé 12

Posé en 2007

Montrer que $x \mapsto \cos(12 \arctan x)$ est une fonction rationnelle.

Solution

Il existe un polynôme de Tchebychev T_6 tel que $\cos 6\theta = T_6(\cos\theta)$ pour tout réel θ. Donc

$$\cos(12\arctan x) = T_6(\cos(2\arctan x)) = T_6(2\cos^2 z - 1)$$

où $z := \arctan x$, soit $x = \tan z$. Or $1 + x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 z}$, donc

$$\cos(12\arctan x) = T_6\Big(\frac{2}{1+x^2} - 1\Big) = T_6\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big),$$

ce qui définit bien une fonction rationnelle.

L'existence de T_n est bien classique. On peut bien entendu l'expliciter ici, ce qui n'est guère plus long que de montrer le résultat général :

$$\cos 6y = 4\cos^3 2y - 3\cos 2y = 4(2\cos^2 y - 1)^3 - 3(2\cos^2 y - 1),$$

donc $T_6(X) = 4(2X^2-1)^3 - 3(2X^2-1)$.

Rappelons tout de même que l'égalité

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta$$

conduit à la relation de récurrence $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ *qui, jointe à l'initialisation* $T_0(x) = 1$ *et* $T_1(x) = x$, *montre que les* T_n *sont des polynômes.*

Exercice corrigé 13

Posé en 2007

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.

a. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.

b. On pose $A(X) := \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X-a_j)$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$.

Solution

a. Il s'agit d'une simple illustration des polynômes interpolateurs de Lagrange. Soit $P(X) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$. C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(a_k) = 1$ pour tout k. Le polynôme $P(X)-1$ s'annule donc en n points distincts et est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Il est donc nul et $P = 1$.

b. Décomposons en éléments simples $\dfrac{1}{A(X)}$. On obtient

$$\frac{1}{A(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X-a_i},$$

avec $\lambda_i = \dfrac{1}{A'(a_i)}$. Multiplions par X, évaluons en x et faisons tendre x vers $+\infty$. Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{x}{A(x)} \to 0$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Lorsque $n = 1$, la somme vaut 1.

Pour traiter le **b**, *on peut aussi constater que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$ *n'est rien d'autre que le coefficient de* X^n *dans le polynôme* P *du* **a**.

Exercice corrigé 14

Posé en 2007

a. Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que P divise $P\big(X + Q(X)P(X)\big)$.

b. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples. Trouver les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que P^2 divise $P\big(X + Q(X)P(X)\big)$.

c. Même question avec P^3.

Solution

On va utiliser les congruences polynomiales, définies de la même façon que les congruences entre entiers : on écrit $A \equiv B\,[C]$ lorsque C divise $B - A$, ce qui se lit « A est congru à B *modulo* C ». On vérifie facilement les trois propriétés suivantes :

- si $A_1 \equiv B_1\,[C]$ et $A_2 \equiv B_2\,[C]$, alors $A_1 + A_2 \equiv B_1 + B_2\,[C]$;
- si $A_1 \equiv B_1\,[C]$ et $A_2 \equiv B_2\,[C]$, alors $A_1 \times A_2 \equiv B_1 \times B_2\,[C]$;
- si $A_1 \equiv B_1\,[C]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda A_1 \equiv \lambda B_1\,[C]$.

En termes plus conceptuels, on peut considérer les classes d'équivalence modulo C comme constituant un ensemble que l'on munit d'une somme et d'un produit interne. On obtient alors un anneau, l'anneau « quotient » $\mathbb{C}[X]/C\mathbb{C}[X]$. Tous les calculs pourraient se faire dans cet anneau.

a. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Pour tout k on a $(X + QP)^k \equiv X^k\,[P]$, donc

$$P(X + QP) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X + QP)^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P \equiv 0\,[P],$$

et ainsi P divise $P(X + QP)$.

b. Raisonnons cette fois-ci modulo P^2. On commence le développement par la formule du binôme :

$$(X + QP)^k \equiv X^k + kX^{k-1}QP\,[P^2].$$

On en déduit que

$$P(X + QP) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k + kX^{k-1}QP) = P + P'QP\,[P^2].$$

Ainsi, P^2 divise $P(X + QP)$ si et seulement si P divise $1 + P'Q$. Comme P n'a que des racines simples $z_1, \ldots, z_n$, il faut et il suffit que ces complexes

soient aussi racines de $1 + P'Q$. Cela est équivalent à

$$Q(z) = -\frac{1}{P'(z)} \text{ pour toute racine } z \text{ de } P.$$

Si Q_0 est le seul polynôme de degré inférieur à $n-1$ satisfaisant à ces conditions, polynôme que l'on peut obtenir par exemple par interpolation de Lagrange, alors les polynômes solution sont les éléments de $Q_0 + P\mathbb{C}[X]$.

Remarquons aussi que si P admet une racine double z, alors z ne peut être racine de $1 + P'Q$, et donc il n'y a pas de polynôme Q qui convienne.

De façon plus générale, on peut aussi travailler dans un corps (commutatif) $\mathbb{K}$ quelconque, et transformer la condition sur les racines simples de P pour retenir uniquement que P et P' sont premiers entre eux. Le polynôme Q_0 s'obtient alors à l'aide d'une relation de Bézout entre P et P'.

c. En développant modulo P^3, on obtient cette fois-ci que Q est solution si et seulement si P^2 divise $A := 1 + QP' + \dfrac{Q^2PP''}{2}$. Comme P est scindé à racines simples, il est équivalent que $A(z) = A'(z) = 0$ pour toute racine z de P.

- La condition $A(z) = 0$ est équivalente à $1 + Q(z)P'(z) = 0$
- La condition $A'(z) = 0$ est équivalente à

$$Q'(z)P'(z) + Q(z)\left(P''(z) + \frac{Q(z)P'(z)}{2}P''(z)\right) = 0,$$

soit encore $Q'(z) = \dfrac{P''(z)}{2(P'(z))^2}$.

Ces $2n$ conditions portant sur les valeurs de $Q(z)$ et $Q'(z)$ conduisent par interpolation d'Hermite (similaire à l'interpolation de Lagrange) à un unique polynôme Q_0 de degré inférieur à $2n-1$. L'ensemble des solutions sera alors $Q_0 + P^2\mathbb{C}[X]$.

Les formules explicites pour l'interpolation d'Hermite sont beaucoup plus compliquées que celles pour l'interpolation de Lagrange. On note donc que la réponse à cet exercice nous indique davantage la forme de l'ensemble des solutions que les solutions explicites. Il faut pouvoir interpréter la réponse à une question en fonction des résultats auxquels on aboutit.

Exercice corrigé 15

Posé en 2007

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}$.

Solution

Pour cet exercice, il faut penser à introduire des racines de l'unité, puis à utiliser les relations entre coefficients et racines.

Posons $S := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}$. Grâce à la symétrie $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, on a

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 - \cos \dfrac{2k\pi}{2n+1}}.$$

Posons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. L'avantage d'avoir dupliqué l'angle est de calculer facilement le polynôme

$$P(X) := \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k) = \frac{X^{2n+1} - 1}{X - 1}.$$

Alors

$$S = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_k + \frac{1}{\omega_k}}{2}} = -2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{\omega_k}{(\omega_k - 1)^2}.$$

Posons $z_k = \omega_k - 1$. On a

$$Q(X) := \prod_{k=1}^{2n} (X - z_k) = P(X+1) = \frac{(X+1)^{2n+1} - 1}{X} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} X^k.$$

Ainsi $S = -2 \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z_k^2} \right)$. Notons, suivant l'usage, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n}$ les fonctions symétriques élémentaires des racines de Q. Comme Q est unitaire,

on a $\sigma_{2n-k} = (-1)^{2n-k}\binom{2n+1}{k+1}$, donc

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z_k} = \frac{\sigma_{2n-1}}{\sigma_{2n}} = -\frac{\binom{2n+1}{2}}{\binom{2n+1}{1}} = -n,$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z_k^2} = \left(\frac{\sigma_{2n-1}}{\sigma_{2n}}\right)^2 - 2\frac{\sigma_{2n-2}}{\sigma_{2n}} = n^2 - 2\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = n^2 - \frac{2n(2n-1)}{3}.$$

On obtient ainsi, après simplification, $S = \frac{2}{3}(n^2+n)$.

On peut prolonger l'exercice de sorte de retrouver le résultat classique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Il faut pour cela démontrer à l'aide d'un développement limité que la fonction* $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ *est bornée au voisinage de 0, puis utiliser l'encadrement obtenu.*

Exercice corrigé 16

Posé en 2005

Soient p un nombre premier et $S_p := \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \frac{u_p}{v_p}$, avec $\operatorname{pgcd}(u_p, v_p) = 1$.

a. Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

b. Si $p > 2$, montrer que $u_p \equiv 0 \mod p$.

c. Si $p > 3$, montrer que $u_p \equiv 0 \mod p^2$.

Solution

La première question n'est autre que la partie non triviale du théorème de Wilson.

a. Puisque p est premier, l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est en fait un corps ; on notera $\dot{k}$ la classe modulo p de l'entier k. Considérons le polynôme $Q = X^{p-1} - \dot{1}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On sait que, si $\operatorname{pgcd}(a,p) = 1$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Autrement dit, si $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\dot{k}^{p-1} = \dot{1}$. Cela signifie que le polynôme Q admet pour racines les $p-1$ éléments $\dot{k}$, $k \in [\![1, p-1]\!]$. Comme

Q est unitaire de degré $p-1$, on a, d'après une propriété des polynômes à coefficients dans un corps (commutatif),

$$Q = \prod_{k=1}^{p-1} (X - k).$$

La considération du coefficient constant fournit en particulier la relation

$$(-1)^{p-1}(p-1)! \equiv -1 \mod p,$$

donc $(p-1)! \equiv -1 \mod p$, puisque $(-1)^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

b. Posons, pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

$$\Pi_k := \prod_{j \in [[1,p-1]]-\{k\}} j = \frac{(p-1)!}{k}.$$

C'est un entier, et $(p-1)!S_p = \sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k$.

Pour $p-1 > 1$, la considération du terme de degré 1 de Q montre que

$$(-1)^{p-2}\Big(\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k\Big) \equiv 0 \mod p.$$

On peut donc écrire $\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k = pq$ avec q entier. Puisque $S_p = \dfrac{\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k}{(p-1)!}$, il en résulte que $S_p = \dfrac{pq}{(p-1)!} = \dfrac{u_p}{v_p}$, d'où $pqv_p = (p-1)!u_p$. Comme p est premier avec $(p-1)!$, p divise u_p.

c. Posons, pour $1 \leqslant k \neq l \leqslant p-1$,

$$\Pi_{k,l} := \prod_{j \in [[1,p-1]]-\{k,l\}} j = \frac{(p-1)!}{kl}.$$

C'est bien sûr un entier et, pour $p-1 > 2$, la considération du terme de degré 2 de Q conduit à

$$(-1)^{p-3}\Big(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant p-1} \Pi_{k,l}\Big) \equiv 0 \mod p$$

et donc à la congruence

$$\sum_{1 \leqslant k \neq l \leqslant p-1} \Pi_{k,l} \equiv 0 \mod p.$$

Nous avons, grâce à un changement d'indice,

$$\Pi_k = \prod_{j\in[[1,p-1]]-\{k\}} j = \prod_{j\in[[1,p-1]]-\{p-k\}} (p-j).$$

Comme p est impair,

$$\Pi_k = -\prod_{j\in[[1,p-1]]-\{p-k\}} (j-p).$$

Par développement du produit, on obtient

$$\Pi_k \equiv -\Pi_{p-k} + p\sum_{l\neq p-k} \Pi_{p-k,l} \mod p^2.$$

En sommant sur k, il vient

$$\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k + \sum_{k=1}^{p-1} \Pi_{p-k} \equiv p\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l\neq p-k} \Pi_{p-k,l} \mod p^2,$$

soit encore, grâce à une réindexation dans deux des sommes,

$$2\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k \equiv p\sum_{k}\sum_{l\neq k} \Pi_{k,l} \mod p^2.$$

Compte tenu de ce qui a été fait précédemment, $2\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k \equiv 0 \mod p^2$. Comme p est impair, on obtient que $\sum_{k=1}^{p-1} \Pi_k \equiv 0 \mod p^2$, puis que $p^2 r v_p = (p-1)!\, u_p$, donc que p^2 divise u_p.

Exercice corrigé 17

Posé en 2007

Soient G un groupe abélien, $a \in G$ d'ordre n et $b \in G$ d'ordre m. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre $\mathrm{ppcm}(m,n)$.

Solution

On utilisera la notation multiplicative, de neutre 1. On note $\omega(z)$ l'ordre d'un élément z. Rappelons que, par définition,

$$\{k \in \mathbb{Z}, z^k = 1\} = \omega(z)\mathbb{Z}.$$

Soit p^α un facteur primaire de $\mu := \text{ppcm}(n, m)$, c'est-à-dire la plus grande puissance d'un nombre premier p divisant μ. C'est un diviseur de n ou de m, par exemple de n et on peut écrire $n = p^\alpha q$, où $\text{pgcd}(q, p) = 1$. Posons $x = a^q$. Alors

$$x^k = 1 \iff a^{kq} = 1 \iff n \mid kq \iff \frac{n}{q} \mid k.$$

Par conséquent, $\omega(x) = \dfrac{n}{q} = p^\alpha$.

Posons $\mu = \prod_p p^{\alpha_p}$, décomposition en facteurs premiers de μ. Pour chaque p (il y en a un nombre fini), il existe x_p d'ordre p^{α_p}. Il nous suffit de montrer que, si $\text{pgcd}\big(\omega(y), \omega(z)\big) = 1$, alors $\omega(yz) = \omega(y)\omega(z)$. En effet, il en résultera par récurrence que $\omega\Big(\prod_p x_p\Big) = \prod_p p^{\alpha_p} = \mu$.

Posons $r = \omega(y)$ et $s = \omega(z)$. Tout d'abord, $(yz)^{rs} = y^{rs}z^{rs} = 1$, donc $t := \omega(yz) \mid rs$. On a $(yz)^t = 1$, donc $(yz)^{rt} = 1$, soit $z^{rt} = 1$. Il en résulte que $s \mid rt$, donc $s \mid t$ puisque $\text{pgcd}(r, t) = 1$. De même, $r \mid t$ et finalement $rs \mid t$, donc $t = rs$.

Par récurrence, on obtient le fait que, dans un groupe abélien fini, il existe un élément a dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments du groupe. En d'autres termes, l'ordre de tout élément divise celui de a. L'entier $\omega(a)$ est appelé **exposant** *du groupe. Par exemple, l'exposant de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est égal à 12. En effet, $(\bar{1}, \bar{1})$ est un élément d'ordre 12, et tous les éléments sont d'ordre un diviseur de 12. Bien entendu, l'hypothèse de commutativité du groupe est essentielle.*

À titre d'illustration, considérons un corps (commutatif) et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^{\text{inv}}$. Soit n son exposant. Les éléments G sont donc racines de $X^n - 1$, polynôme qui admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$. Donc $|G| \leqslant n$. Comme il existe x d'ordre n dans G, G est cyclique : les sous-groupes finis du groupe des éléments non nuls d'un corps sont tous cycliques.

Exercice corrigé 18

Posé en 2007

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Trouver les polynômes A de $\mathbb{K}[X]$ tels qu'existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A' divise A^p.

Solution

On suppose que $A \neq 0$. Bien sûr, A ne peut alors être constant.

Soit $A' = \lambda \prod_P P^{v_P}$ la décomposition de A' en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$, avec $v_P \geqslant 1$. Chaque P divise A^p, donc A. Écrivons $A = P^m Q$ avec $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$. Alors

$$A' = mP^{m-1}Q + P^m Q' = P^{m-1}(mQ + PQ').$$

Comme P divise PQ' et ne divise pas mQ, il ne divise pas $mQ + PQ'$. Ainsi $m - 1 = v_P$ et A est divisible par P^{v_P+1}. Il en résulte que A est divisible par $\prod_P P^{v_P+1}$ et donc que $\deg A \geqslant \sum_{P|A'} (v_P + 1) \deg P$. Comme $\deg A = 1 + \deg A' = 1 + \sum_{P|A'} v_P \deg P$, on a $1 \geqslant \sum_P \deg P$, donc il n'y a qu'un polynôme irréductible P et il est de degré 1. Cela permet d'écrire $A' = \lambda(X - \alpha)^k$ et $A = \mu(X - \alpha)^{k+1}$.

Réciproquement, si $A = \mu(X - \alpha)^{k+1}$, $A' = \mu(k + 1)(X - \alpha)^k$ divise A. Les solutions sont donc les polynômes $\mu(X - \alpha)^{k+1}$ avec $k \geqslant 0$.

On a utilisé l'hypothèse sur la caractéristique de $\mathbb{K}$ à deux endroits. Une première fois pour assurer que $mQ \neq 0$, une seconde fois pour affirmer que $\deg A = \deg A' + 1$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $A := X^2 + X$ est tel que $A' = 1$ divise A. Le résultat démontré ne s'étend donc pas aux corps de caractéristique non nulle.

Exercice corrigé 19

Posé en 2003

Soit p un nombre premier de la forme $3q + 1$.

a. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ tel que $a^q \neq 1$.

b. En déduire que -3 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c. Étudier la réciproque.

Solution

Nous allons pour la rapidité utiliser le théorème de Lagrange suivant, qui n'est pas au programme : dans un groupe fini, l'ordre d'un élément divise

le cardinal du groupe. On note aussi $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\text{inv}}$ *le groupe multiplicatif des éléments inversibles, c'est-à-dire non nuls, du corps* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

a. Le polynôme $X^q - 1$, à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, admet au plus q racines. Il existe donc parmi les $3q$ éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ un élément a tel que $a^q \neq 1$.

b. L'ordre multiplicatif $\omega(a)$ de a divise $3q$, puisque $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\text{inv}}$ est un groupe multiplicatif à $3q$ éléments. C'est donc ou bien un diviseur r de q, ou bien un entier de la forme $3r$ avec r diviseur de q. Le premier cas est exclu puisque $a^q \neq 1$. Donc $\omega(a) = 3r$. Considérons $j := a^r$ et notons $n := \omega(j)$. Puisque

$$j^k = 1 \iff a^{rk} = 1 \iff 3r \mid rk \iff 3 \mid k,$$

on a $\omega(j) = 3$. Ainsi, j est un élément différent de 1 tel que $j^3 = 1$.

C'est avec intention que nous avons noté j l'élément précédent. En effet, dans $\mathbb{C}$, il est connu que $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, donc que $i\sqrt{3} = 2j + 1$. Calculons donc, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$$(2j+1)^2 = 4j^2 + 4j + 1 = -3\,,$$

car $j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1) = 0$. Nous avons bien trouvé une racine carrée à -3.

c. Nous supposons que $p \neq 2$ et $p \neq 3$. Si réciproquement -3 est de la forme b^2, posons $j := \dfrac{-1+b}{2}$, ce qui a un sens car p est impair. Alors

$$1 + j + j^2 = 1 + \frac{-1+b}{2} + \frac{b^2 - 2b + 1}{4} = \frac{-2b - 2 - 2 + 2b + 4}{4} = 0\,.$$

Donc $j^3 = 1$ et $j \neq 1$ (car $3 \neq 0$), autrement dit $\omega(j) = 3$. Il en résulte que 3 divise le cardinal de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\text{inv}}$, donc que $p \equiv 1 \mod 3$.

Lorsque $p = 2$, $-3 = 1$ est un carré, et lorsque $p = 3$, $-3 = 0$ est encore un carré.

Nous n'avons utilisé le théorème de Lagrange que dans le cadre d'un groupe abélien, c'est l'occasion d'en fournir une démonstration vraiment simple. Si $(G, \cdot)$ *est un tel groupe abélien de cardinal* n, *soit* a *un élément quelconque de* G. *Alors* $\prod_{g \in G} g = \prod_{g \in G} ag$, *parce que* $g \mapsto ag$ *réalise une bijection de* G *sur* G *et que l'on peut permuter les éléments. Cela se récrit* $\prod_{g \in G} g = a^n \prod_{g \in G} g$ *et donne, après simplification,* $a^n = 1$.

Exercice corrigé 20

Posé en 2006

Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ des éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & \dots & a_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A$.

Solution

C'est un bon exercice sur les anneaux et corps de caractéristique p. Rappelons que, dans un anneau de caractéristique p, si $ab = ba$, alors $(a+b)^p = a^p + b^p$, ce qui provient du fait que $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Soit J la matrice de permutation qui envoie e_k sur e_{k-1}, lorsque la base est numérotée par les éléments $0, 1, \dots, p-1$ considérés *modulo* p. Ainsi,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice du même type que A dans laquelle tous les a_k sont nuls sauf a_1 qui vaut 1. On constate alors que

$$A = a_0 I_p + a_1 J + \dots + a_{p-1} J^{p-1}.$$

Comme $J^p = I_p$ puisque e_k est envoyé sur e_k par J^p, on a aussi $(J - I_p)^p = 0$ du fait que $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est de caractéristique p (et que J et I_p commutent). Posons $J - I_p = N$. La matrice N est nilpotente. Remplaçons J par $I_p + N$. Il vient

$$A = (a_0 + \dots + a_{p-1}) I_p + \alpha_1 N + \dots + \alpha_{p-1} N^{p-1},$$

avec $\alpha_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1}, \dots, \alpha_{p-1} = a_{p-1}$ grâce à la formule du binôme de Newton utilisée pour développer $(I_p + N)^k$.

Donc $A = sI_p - M$, où $s = a_0 + \dots + a_{p-1}$ et M est nilpotente. Comme le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de taille n est X^n, on a

$$\det(sI_p - M) = s^p = s,$$

la dernière égalité étant due au fait que $s^p = s$ lorsque $s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On peut s'interroger sur le résultat utilisé, à savoir que le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de taille n est X^n. Ce résultat est clairement dans le programme lorsqu'on l'applique à un sous-corps de $\mathbb{C}$, puisqu'il résulte par exemple de la triangulation. Montrons-le dans le cas général. Si $M^k = 0$,

$$\det(XI_n - M)\det(X^{k-1}I_n + MX^{k-2} + \cdots + M^{k-1}) = \det(X^k I_n) = X^{kn}.$$

Par conséquent, $\det(XI_n - M)$ divise X^{kn} et, comme c'est un polynôme de degré n, c'est X^n.

Une matrice du type de A est appelée matrice circulante. Elle s'exprime comme un polynôme en la matrice J.

Exercice corrigé 21

Posé en 2006

Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle sans pôle entier, et telle que $R(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Montrer que $R \in \mathbb{Q}[X]$.

Solution

Il s'agit ici d'un problème d'interpolation sur des fractions rationnelles qui n'a rien de facile.

Il y a deux façons de prouver le résultat : soit on prouve d'abord que $R \in \mathbb{C}[X]$ puis que R est à coefficients rationnels ; soit on prouve que $R \in \mathbb{Q}(X)$ puis que R est un polynôme.

▷ **Première méthode.** Montrons d'abord que R est forcément un polynôme. Pour cela, considérons l'opérateur linéaire Δ défini sur $\mathbb{C}(X)$ par

$$\Delta(S) = S(X+1) - S(X).$$

Nous allons juste vérifier que pour toute fraction S on a

$$\deg \Delta(S) \leqslant \deg S - 1\,.$$

Écrivons $S = \dfrac{P}{Q}\cdot$ On a $\Delta(S) = \dfrac{P(X+1)Q(X) - Q(X+1)P(X)}{Q(X)Q(X+1)}\cdot$ Le degré du dénominateur est $2\deg Q$, et celui du numérateur est inférieur à $\deg P + \deg Q$. Mais comme le coefficient dominant de $P(X+1)$ (resp.

$Q(X+1))$ est le même que celui de $P(X)$ (resp. $Q(X)$), les coefficients dominants de $P(X+1)Q(X)$ et de $Q(X+1)P(X)$ sont les mêmes, et donc le degré de $P(X+1)Q(X) - Q(X+1)P(X)$ est **strictement** inférieur à $\deg P + \deg Q$. On en déduit finalement que

$$\deg \Delta(S) \leqslant (\deg P + \deg Q - 1) - 2\deg Q = \deg S - 1\,.$$

Revenons à R et remarquons que si $R(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors $\Delta(R)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Ainsi, à supposer que $\deg R \geqslant 0$, on a $\Delta^{\deg R+1}(R)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, en notant $\overline{R} = R$ si $\deg R < 0$, et $\overline{R} = \Delta^{\deg R+1}(R)$ dans le cas contraire, on a :

$$\overline{R}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ et } \deg \overline{R} < 0\,.$$

Comme $\deg \overline{R} < 0$, alors $\overline{R}(n) \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, mais comme cette limite concerne une suite d'entiers, alors $\overline{R}(n) = 0$ pour tout n assez grand. Cette fraction admet une infinité de racines, donc elle est nulle. On a donc prouvé le résultat suivant portant sur R : *il existe un entier d tel que $R \in \operatorname{Ker} \Delta^d$*. Nous allons maintenant vérifier que $\cup \operatorname{Ker} \Delta^d = \mathbb{C}[X]$.

Considérons d'abord $S \in \operatorname{Ker} \Delta$. On a alors $S(X+1) = S(X)$, donc la fraction $S(X) - S(0)$ prend des valeurs nulles sur tout $\mathbb{N}$, donc est nulle, et ainsi $\operatorname{Ker} \Delta$ est l'espace des polynômes constants.

Considérons le cas où S est un polynôme. Alors les itérés de Δ sur S sont tous des polynômes, et la décroissance stricte de la suite des degrés prouve que pour d assez grand, $\Delta^d(S) = 0$.

Considérons enfin le cas où $\deg S < 0$. Alors $S \notin \operatorname{Ker} \Delta$ donc $\Delta(S)$ est non nul et de degré strictement négatif. Cet argument se répète par récurrence pour établir que $\Delta^n(S)$ n'est jamais nul.

Conclusion partielle : on écrit $R = E + \overline{R}$, où E est la partie entière de R (un polynôme) et $\overline{R}$ est de degré strictement négatif. Le fait qu'il existe d tel que $\Delta^d(R) = 0$ justifie d'après les arguments précédents que $\overline{R} = 0$ et donc que R soit un polynôme.

Maintenant que nous savons que R est un polynôme, notons d son degré. Nous pouvons récupérer R à l'aide des valeurs de $R(0), R(1), \ldots, R(d)$ grâce aux formules d'interpolation de Lagrange :

$$R = \sum_{k=0}^{d} R(k) L_k(X) \text{ où } L_k = \prod_{j \neq k} \frac{X-j}{k-j} \in \mathbb{Q}[X].$$

▷ **Deuxième méthode.** La deuxième méthode est à la fois un peu plus difficile et moins astucieuse. Elle ne nécessite pas de faire intervenir l'opérateur Δ précédent. Nous prenons les arguments dans le sens inverse, et

montrons grâce à des techniques d'interpolation que R est à coefficients rationnels, puis des arguments simples d'arithmétique nous permettront de conclure que R est un polynôme.

Écrivons $R = \dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont premiers entre eux et Q unitaire (il y a unicité d'une telle écriture). Soient d_P et d_Q les degrés respectifs de P et Q. Supposons alors que $\dfrac{A}{B}$ soit une fraction vérifiant $\deg A \leqslant d_P$ et B unitaire de même degré que Q. Alors

$$R - \frac{A}{B} = \frac{PB - AQ}{BQ},$$

et le dénominateur est de degré inférieur ou égal à $\deg P + \deg Q$. Ainsi, cette fraction sera nulle dès qu'elle aura strictement plus de $\deg P + \deg Q$ zéros. Il résulte de cela que, si $\dfrac{A}{B}$ coïncide avec R en strictement plus de $n = \deg P + \deg Q$ points, alors $R = \dfrac{A}{B}\cdot$ La propriété d'unicité permet d'affirmer que (P, Q) est la seule solution du système d'équations

$$(\mathscr{S}) : \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad A(k) = R(k)B(k).$$

Comprenons bien que les inconnues du système d'équations sont les $\deg P + 1$ coefficients de A et les $\deg Q$ coefficients de B (le coefficient dominant n'est pas compté, B étant supposé unitaire). Ainsi, ce système d'équations est un système de Cramer, et le plus intéressant est que les coefficients du système sont tous entiers ! Les formules de Cramer permettent donc d'établir que les solutions du système sont des rationnels. Ainsi, $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $R \in \mathbb{Q}(X)$.

Le plus dur est fait, on écrit maintenant $R = E + \overline{R}$ avec E polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\overline{R}$ de degré strictement négatif. Si m est le ppcm des dénominateurs des coefficients de E, on a $mR = mE + m\overline{R}$, où $mE \in \mathbb{Z}[X]$. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad m\overline{R}(k) \in \mathbb{Z}.$$

Or (même argument que précédemment), si $\overline{R} \neq 0$, on aurait $m\overline{R}(k)$ qui tendrait vers 0 sans s'annuler lorsque $k \to \infty$, ce qui est contradictoire.

En fait, maintenant que l'on sait que R est un polynôme, c'est un exercice classique que de donner la forme générale de R : c'est une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes

$$\binom{X}{n} = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

Ce résultat se montre par la résolution d'un système linéaire.

Exercice corrigé 22

Posé en 2004

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Un *n-cycle* de P est une suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ périodique, de plus petite période n, et telle que $x_{i+1} = P(x_i)$ pour tout i.

a. Dans cette question, on suppose que $P = X^2 + c$, et que $(x_i)_{i\geqslant 1}$ est un n-cycle avec $n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) + x_i) = 1$.

b. On suppose que le polynôme P est unitaire de degré $d \geqslant 2$, et que $(x_i)_{i\geqslant 1}$ et $(w_i)_{i\geqslant 1}$ sont deux cycles distincts pour P, de périodes respectives n_1 et n_2. Soient n un multiple commun de n_1 et n_2, et $y_{i,1}, \ldots, y_{i,d}$ les d antécédents comptés avec multiplicité de x_{i+1} par P, avec $y_{i,d} = x_i$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d-1}(w_i - y_{i,j}) = 1$.

Solution

a. Nous allons fournir deux solutions.

▷ Une première approche consiste à trouver une fonction f, ne s'annulant pas en les x_i, telle que

$$P(x_i) + x_i = \frac{f(P(x_i))}{f(x_i)}.$$

On aurait alors, en utilisant le fait que $x_{n+1} = x_1$,

$$\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) + x_i) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f(x_{i+1})}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f(x_i)} = 1.$$

Cherchons si par hasard une fonction polynomiale f vérifie l'équation

$$P(X) + X = \frac{f(P(X))}{f(X)}.$$

Si f est de degré r, alors $f(P(X))$ est de degré $2r$, et la fraction $\dfrac{f(P(X))}{f(X)}$ est de degré r, donc il faut que $r = 2$. Par ailleurs, remplacer f par λf conduit à la même fraction, donc on peut chercher f unitaire, sous la forme

$f(X) = X^2 + aX + b$. En reportant dans l'équation, il faut donc que

$$(X^2 + aX + b)(X^2 + X + c) = (X^2 + c)^2 + a(X^2 + c) + b.$$

En identifiant les termes en X^3 et en X, on obtient successivement

$$a + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad ac + b = 0\,,$$

soit donc $f(X) = X^2 - X + c$. Réciproquement, on a bien

$$(X^2 - X + c)(X^2 + X + c) = (X^2 + c)^2 - (X^2 + c) + c.$$

Il reste à vérifier que $f(x_i) \neq 0$ pour tout i. À supposer que $f(x_i) = 0$, on aurait alors $P(x_i) = x_i$, et cela contredirait le fait que le cycle soit de longueur supérieure à 2. Donc on a bien $f(x_i) \neq 0$ pour tout i.

▷ La deuxième approche est inspirée de la réponse à la deuxième question, mais elle est plus astucieuse.

Pour tout i on a $P(x_i) \neq x_i$ pour les raisons évoquées plus haut. On a

$$\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) + x_i)\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(P(x_i)^2 - x_i^2) = \prod_{i=1}^{n}(x_{i+1}^2 - x_i^2).$$

Mais $x_i^2 = x_{i+1} - c$, donc il vient

$$\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) + x_i)\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(x_{i+2} - x_{i+1}).$$

Par périodicité, $\prod_{i=1}^{n}(x_{i+2} - x_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(P(x_i) - x_i)$. Comme ce terme est non nul, on peut diviser et on obtient

$$\prod_{i=1}^{n}(P(x_i) + x_i) = 1\,.$$

Cette méthode est difficile à trouver sans indication.

b. Notons $A := \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d-1}(w_i - y_{i,j})$. Remarquons que s'il existait un i tel que $x_i = w_i$, alors on aurait par récurrence $x_{i+k} = w_{i+k}$ pour tout $k \geqslant 0$, puis par périodicité $x_k = w_k$ pour tout k. Comme les cycles sont supposés distincts, on a donc $x_i \neq w_i$ pour tout i.

On peut alors considérer $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d}(w_i - y_{i,j}) = A \times \prod_{i=1}^{n}(w_i - x_i)$. Comme les complexes $y_{i,1}, \ldots, y_{i,d}$ sont les racines de $P(X) - x_{i+1}$ et que P est

unitaire, on a

$$\prod_{j=1}^{d}(w_i - y_{i,j}) = P(w_i) - x_{i+1} = w_{i+1} - x_{i+1}.$$

Ainsi, $A \times \prod_{i=1}^{n}(w_i - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(w_{i+1} - x_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n}(w_i - x_i)$ par périodicité.

Comme par la première remarque, $\prod_{i=1}^{n}(w_i - x_i)$ est non nul, on peut diviser et il reste

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d-1}(w_i - y_{i,j}) = 1.$$

Exercice corrigé 23

Posé en 2003

Soit A un anneau. Un élément u de A est dit inversible à droite lorsqu'il existe $v \in A$ tel que $uv = 1$; il est dit diviseur de 0 à gauche lorsqu'il existe w non nul tel que $uw = 0$.

a. Un élément de A peut-il être inversible à droite et diviseur de 0 à droite ? À gauche ?

b. Soit u un élément de A inversible à droite et diviseur de 0 à gauche. Montrer qu'il existe une infinité d'éléments w de A tels que $uw = 0$.

Solution

a. ▷ Si $uv = 1$, l'égalité $wu = 0$ entraîne $wuv = w = 0$. Donc u ne peut être diviseur de 0 à droite.

▷ Considérons l'anneau $A = \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$. Poser $u(X^n) = X^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $u(1) = 0$ permet de définir un élément u de $\mathscr{L}(E)$ par l'image d'une base. Si $v(X^n) = X^{n+1}$, on a $uv = \mathrm{Id}_A$. Cependant, si $w(P) = P(0)$, $uw = 0$. Un élément inversible à droite peut donc être diviseur de 0 à gauche.

b. Soit u un élément de A inversible à droite. Il existe donc v tel que $uv = 1$. Notons I l'ensemble des w tels que $uw = 0$ et supposons I fini. L'application $w \longmapsto wu$ va de I dans I (car $uw = 0 \Rightarrow uwu = 0$) et est injective :

$$wu = w'u \Longrightarrow wuv = w'uv \Longrightarrow w = w'.$$

Elle est donc surjective en vertu du caractère fini de I. Considérons en particulier l'élément $vu - 1$. Il est dans I car $u(vu - 1) = uvu - u = 0$. Il existe par conséquent un élément w de I tel que $vu - 1 = wu$, soit $(v - w)u = 1$. Ainsi, u est inversible à gauche et, en particulier, $I = \{0\}$.

Par contraposition, si $I \neq \{0\}$, alors I est infini.

Lorsque deux ensembles finis ont même cardinal, on utilise très fréquemment le fait qu'une injection de l'un dans l'autre est surjective et moins fréquemment le fait qu'une surjection de l'un sur l'autre est injective.

Exercice corrigé 24

Posé en 2006

Soit p un nombre premier impair.

a. Donner deux groupes de cardinal $2p$ non isomorphes.

b. Montrer qu'un groupe fini G dont tout élément x vérifie $x^2 = 1$ a pour cardinal une puissance de 2.

c. Déterminer, à isomorphisme près, les groupes de cardinal $2p$.

Solution

Afin de ne pas alourdir la rédaction, on utilise dans cette solution le théorème de Lagrange qui affirme que, dans un groupe fini de cardinal n, l'ordre d'un élément divise n.

a. Le groupe $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, cyclique de cardinal $2p$, est un premier exemple. Considérons d'autre part un polygone régulier $A_0A_1 \dots A_{p-1}$ (les indices sont dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) à p côtés, de centre O et soit $\mathbb{D}_p$ le groupe des isométries fixant O et laissant ce polygone stable. Il contient la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{p}$, donc $\mathrm{Id}, r, \dots, r^{p-1}$, ainsi que les réflexions par rapport aux droites passant par O et le milieu d'un segment A_iA_j, que nous appellerons (abusivement lorsque $i = j$) médiatrices des A_iA_j. Celles-ci sont au nombre de p. En effet, la médiatrice de A_iA_j est la droite faisant l'angle $\frac{i+j}{2p}2\pi$ avec Ox, et $\frac{i+j}{2p}2\pi$ prend exactement p valeurs *modulo* π. Il ne contient pas d'autre élément ; en effet, une rotation de $\mathbb{D}_p$ envoie A_0 sur A_i, donc est égale à r^i. Une réflexion qui envoie A_0 sur A_i est la réflexion par rapport à la médiatrice de A_0A_i.

Les deux groupes $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}_p$ ne sont pas isomorphes, puisque le premier est commutatif alors que le deuxième ne l'est pas.

b. Si $x^2 = 1$ pour tout x dans G, $(xy)^2 = 1 = x^2y^2$, ce qui donne après simplification $yx = xy$. Donc G est abélien. Il est loisible de noter la loi additivement et, comme c'est plus commode, nous le faisons. Ainsi, $2x = 0$ pour x dans G. Munissons G d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel en définissant $\dot{0}.x = 0$ et $\dot{1}.x = 1$. On vérifie sans peine les identités

$$\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x, \quad \dot{1}.x = 1, \quad \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y.$$

Quant à l'identité $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$, elle est évidente dans trois cas sur quatre. Et lorsque $\lambda = \mu = \dot{1}$, c'est l'hypothèse.

Puisque G est fini, il admet, comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, une famille génératrice finie et donc est de dimension finie n sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Étant alors isomorphe à l'espace $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$, il est de cardinal 2^n.

c. Nous allons montrer qu'un groupe de cardinal $2p$ est ou bien cyclique, donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}, +)$, ou bien isomorphe à $\mathbb{D}_p$. Soit G un groupe multiplicatif de cardinal $2p$. L'ordre d'un élément divise $2p$. D'après la question **b**, il existe un élément tel que $x^2 \neq 1$. L'ordre de cet élément est ou p ou $2p$. Dans le second cas, G est cyclique, donc isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}, +\right)$.

▷ Supposons que G ne soit pas isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}, +\right)$. Il admet donc au moins un élément R d'ordre p. Soit N le nombre de ses sous-groupes de cardinal p. Deux tels sous-groupes se coupent selon un sous-groupe dont le cardinal est 1 ou p, donc 1. Par conséquent, $(p-1)N \leqslant 2p-1$, ce qui entraîne que $N = 1$ ou 2.

▷ Si $N = 2$, G contient exactement un élément S d'ordre 2. Or RSR^{-1} est encore d'ordre 2, donc $RSR^{-1} = S$. Autrement dit, R et S commutent. Soit alors k l'ordre de RS. On a $(RS)^k = 1$, donc $(RS)^{2k} = 1$, soit $R^{2k} = 1$ car R et S commutent. Par conséquent, p divise $2k$, donc k. De même, $(RS)^{pk} = 1$, donc 2 divise k. Ainsi, $2p$ divise k, donc $2p = k$, ce qui entraîne que G est cyclique, cas écarté.

▷ À ce stade, nous avons montré que G admet exactement un sous-groupe H de cardinal p. Tous les éléments de H sauf 1 sont d'ordre p. Les p éléments restants sont d'ordre 2.

Soit R un élément d'ordre p et S un élément d'ordre 2 dans G (ces lettres sont choisies avec intention, R devant jouer le rôle d'une rotation et S celui d'une symétrie par rapport à une droite). On peut définir sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ une application $(\dot{\alpha}, \overline{\beta}) \mapsto S^\alpha R^\beta$, grâce aux ordres de S et de R. Cette application est injective car l'égalité $S^\alpha R^\beta = S^{\alpha'} R^{\beta'}$ entraîne que $S^a = R^b$ (où $a = \alpha - \alpha'$ et $b = \beta - \beta'$), donc que $\dot{a} = 0$ et $\overline{b} = 0$ à cause des ordres de

R et de S. Elle est donc bijective en vertu de la cardinalité des ensembles de départ et d'arrivée.

D'autre part, RS ne peut appartenir à H, donc RS est d'ordre 2, ce qui se traduit par l'égalité $RS = SR^{-1}$, ou si l'on veut $RS^\alpha = S^\alpha R^\varepsilon$, avec $\varepsilon(\alpha) = -1$ lorsque $\alpha = 1$ et $\varepsilon(\alpha) = 1$ lorsque $\alpha = 0$. Si $X = S^\alpha R^\beta$ et $Y = S^{\alpha_1} R^{\beta_1}$, on a donc nécessairement

$$XY = S^\alpha R^\beta S^{\alpha_1} R^{\beta_1} = S^{\alpha+\alpha_1} R^{\beta\varepsilon(\alpha_1)+\beta_1}.$$

Mais ce que nous avons fait est valable pour un groupe de cardinal $2p$ et non cyclique quelconque, donc en particulier pour $\mathbb{D}_p$. Cela montre bien que $\mathbb{D}_p$ et G sont isomorphes ; pour détailler l'argument (à la fin d'un exercice pourtant très long), on choisit r et s d'ordre p et 2 dans $\mathbb{D}_p$, et l'on pose $\Phi(S^\alpha R^\beta) = s^\alpha r^\beta$: ce qui précède montre exactement que Φ est un isomorphisme de groupes.

Le groupe $\mathbb{D}_p$ est appelé groupe diédral. Par exemple, si $p = 3$, l'exercice précédent montre que que S_3 est isomorphe à $\mathbb{D}_3$, puisque S_3 est un groupe de cardinal 6 non cyclique. Les deux cycles d'ordre 3 correspondent aux rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$, les trois transpositions aux trois symétries par rapport aux médiatrices des côtés.

Exercice corrigé 25

Posé en 2006

Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que P et Q d'une part, $P-1$ et $Q-1$ d'autre part, ont mêmes racines. Montrer que $P = Q$.

Solution

Notons n le degré de P, p_0 le nombre des racines de P et p_1 celui des racines de $P-1$. Notons aussi (m_i) la suite des multiplicités des racines de P et (m'_i) celle des multiplicités des racines de $P-1$, et posons $\Delta_0 := \operatorname{pgcd}(P, P')$, $\Delta_1 := \operatorname{pgcd}(P-1, P')$. Alors Δ_0 et Δ_1 sont premiers entre eux puisqu'ils divisent, respectivement, P et $P-1$ qui sont premiers entre eux. Comme ils divisent chacun P', leur produit $\Delta_0\Delta_1$ divise aussi P'. Donc $\deg \Delta_0\Delta_1 \leqslant n-1$. Mais $\deg \Delta_0 = \sum_i (m_i - 1) = n - p_0$ et

$\deg \Delta_1 = \sum_i (m'_i - 1) = n - p_1$. Ainsi,

$$2n - p_0 - p_1 \leqslant n - 1\,,$$

soit $p_0 + p_1 \geqslant n + 1$.

Appliqué à Q, ce résultat montre que $p_0 + p_1 \geqslant m + 1$ lorsque $m = \deg Q$. Comme $P - Q = (P - 1) - (Q - 1)$ s'annule en les racines de P et de $P - 1$, soit sur un ensemble de cardinal supérieur ou égal à $1 + \max(m, n)$, et que $\deg(P - Q) \leqslant \max(m, n)$, le polynôme $P - Q$ est nul.

Exercice corrigé 26

Posé en 2005

a. Montrer qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène est dense dans $\mathbb{R}$.

b. Soit x un irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

c. Montrer la divergence de la suite u définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n \sin n}$.

Solution

La question **a** *est extrêmement classique, mais il convient d'en connaître la démonstration. Pour la question* **c**, *on utilisera sans démonstration le fait que π est un nombre irrationnel.*

a. Soit G un sous-groupe non monogène de $(\mathbb{R}, +)$. En particulier, il n'est pas réduit à 0, donc contient un élément strictement positif, car il est stable par passage à l'opposé. Soit α la borne inférieure de l'ensemble non vide et minoré $X = G \cap]0, +\infty[$. Supposons par l'absurde que $\alpha \in X$. En particulier, $\alpha \in G$, de sorte que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Mais, comme $\alpha > 0$, si $g \in G$, on peut écrire $g = n\alpha + r$ avec $r \in [0, \alpha[$ et $n \in \mathbb{Z}$. Donc $r = g - n\alpha \in G$ et, par définition de la borne inférieure, $r \notin X$. Donc $r = 0$. Cela signifie que $G \subset \alpha\mathbb{Z}$, donc que $G = \alpha\mathbb{Z}$, contrairement à l'hypothèse faite sur G.

Ainsi, $\alpha \notin X$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe un élément x de X dans $[\alpha, \alpha + \varepsilon[$, élément nécessairement différent de α. De même, il existe $y \in X \cap]\alpha, x[$. Posons $\beta = x - y$. Alors $\beta \in G$ et $0 < \beta < \varepsilon$. Soit alors a un réel quelconque. On peut écrire $a = n\beta + r$ avec $r \in [0, \beta[$,

ce qui entraîne que $|a - n\beta| \leqslant \varepsilon$. Comme $n\beta \in G$, on a bien montré que G est dense dans $\mathbb{R}$.

b. Soit N un entier naturel strictement positif. Considérons les $N+1$ réels $\{kx\}$ de $[0,1[$, lorsque k décrit $[\![0,N]\!]$. Rappelons que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ (partie fractionnaire de x). Deux d'entre eux sont dans un même intervalle $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$, puisque $[0,1[$ est l'union de N tels intervalles. On a donc $|\{lx\} - \{kx\}| \leqslant \frac{1}{N}$ pour au moins deux indices k et l tels que $0 \leqslant k < l \leqslant N$. Posons $q_N := l - k$ et $p_N := \lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor$. Alors

$$|q_N x - p_N| \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{q_N},$$

puisque $1 \leqslant q_N \leqslant N$. Cela donne l'existence d'un couple (p_N, q_N) répondant à la question. Comme $q_N x - p_N$ n'est pas nul puisque x est irrationnel, on peut considérer M tel que $\frac{1}{M} < |q_N x - p_N|$. Il en résulte que $|q_M x - p_M| < |q_N x - p_N|$, donc que $(p_M, q_M) \neq (p_N, q_N)$. Par une récurrence immédiate, on peut construire une infinité de tels couples (p, q).

c. ▷ Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons $n_k := \lfloor 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rfloor$. Alors

$$n_k \in [2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}],$$

puisque $\frac{\pi}{2} - 1 \geqslant \frac{\pi}{6}$. Par conséquent, $\sin n_k \geqslant \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant u_{n_k} \leqslant \frac{1}{2n_k}$. Puisque (n_k) est clairement strictement croissante, 0 est valeur d'adhérence de la suite u. Cela entraîne que, si u converge, elle converge vers 0.

▷ Appliquons à présent la question **b** au nombre $\frac{1}{2\pi}$, dont on sait qu'il est irrationnel. On peut alors trouver une infinité de couples (p, q) tels que $|q - 2\pi p| \leqslant \frac{2\pi}{q}$. En particulier, l'ensemble des q tels qu'existe un p vérifiant la relation précédente est infini : dans le cas contraire, l'ensemble des q serait borné et l'inégalité $2\pi|p| \leqslant q + 2\pi$ montre que l'ensemble des p le serait aussi, donc serait fini.

On peut donc construire une suite (q_k) strictement croissante d'entiers naturels telle qu'existe pour chaque k un entier relatif p_k satisfaisant à $|q_k - 2\pi p_k| \leqslant \frac{2\pi}{q_k}$. Il en résulte que

$$|\sin q_k| = |\sin(q_k - 2\pi p_k)| \leqslant |q_k - 2\pi p_k| \leqslant \frac{2\pi}{q_k}.$$

Donc $|u_{q_k}| \geqslant \frac{1}{2\pi}$, et u ne peut converger vers 0, donc diverge.

Le **b** *fait démontrer un résultat substantiel, quoique très élémentaire, en matière d'approximation d'un réel par des rationnels, résultat connu sous le nom de théorème de Dirichlet.*

Exercice corrigé 27

Posé en 2007

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et δ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\delta(P) := P(X+1) - P(X)$.

a. Montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui commute avec δ, on peut trouver une suite (a_n) de scalaires telle que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta^n.$$

b. Quelle est la suite (a_n) lorsque f est la dérivation ?

Solution

a. La question posée doit être entendue comme la suivante : « montrer que pour tout P, $f(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta^n(P)$ », la somme du second membre étant en réalité presque nulle.

Posons $P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-1)\cdots(X-k+1)$ pour $k \geqslant 0$, et $P_{-1} = 0$. On vérifie aisément que

$$\begin{aligned}
\delta(P_k) &= P_k(X+1) - P_k(X) \\
&= \frac{1}{k!}(X+1)X\cdots(X-k+2) - \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+1) \\
&= \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+2)\big((X+1)-(X-k+1)\big) = P_{k-1}.
\end{aligned}$$

Introduire cette famille de polynômes peut sembler artificiel, mais il faut remarquer qu'il est assez naturel de le faire lorsque l'on cherche une base dans laquelle la matrice de δ, restreint à $\mathbb{K}_n[X]$, admet la forme « de Jordan »

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ car $\deg P_k = k$. Comme $\delta^m(P_k) = P_{k-m}$, on voit que δ^{n+1} est nulle sur $\mathbb{K}_n[X]$. D'ailleurs, si réciproquement $P \in \operatorname{Ker} \delta^{n+1}$, alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$ puisque la coordonnée d'indice $k \geqslant n+1$ de P dans la base des P_k est alors nulle.

L'égalité demandée équivaut à

$$\forall k \geqslant 0 \quad f(P_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta^n(P_k) = \sum_{n=0}^{k} a_n P_{k-n} = \sum_{n=0}^{k} a_{k-n} P_n.$$

Cela montre d'ailleurs l'unicité de la suite (a_k) puisque, nécessairement, a_k est la coordonnée de $f(P_k)$ sur P_0.

Montrons l'existence. Tout d'abord, $\delta^{k+1}(f(P_k)) = f(\delta^{k+1}(P_k)) = 0$, donc $f(P_k) \in \mathbb{K}_k[X]$. On peut donc écrire

$$f(P_k) = \sum_{n=0}^{k} b_{n,k} P_n.$$

Appliquons δ à cette égalité. Il vient

$$\delta(f(P_k)) = \sum_{n=0}^{k} b_{n,k} P_{n-1} = \sum_{n=0}^{k-1} b_{n+1,k} P_n.$$

Comme d'autre part

$$\delta(f(P_k)) = f(\delta(P_k)) = f(P_{k-1}) = \sum_{n=0}^{k-1} b_{n,k-1} P_n,$$

il vient, par unicité de la décomposition sur une base, que $b_{n+1,k} = b_{n,k-1}$ pour $n \in [\![0, k-1]\!]$, ou encore $b_{n,k} = b_{n-1,k-1}$ pour $n \in [\![1, k]\!]$. Par récurrence, $b_{n,k} = b_{0,k-n}$. Posons $a_p = b_{0,p}$, ce qui définit une suite $(a_p)_{p \geqslant 0}$ de scalaires. On obtient que

$$f(P_k) = \sum_{n=0}^{k} b_{n,k} P_n = \sum_{n=0}^{k} a_{k-n} P_n = \sum_{j=0}^{k} a_j P_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \delta^j(P_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta^j(P_k).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $k \geqslant 0$, on a bien

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \delta^j.$$

b. Appliquons la formule de Taylor au polynôme P. Il vient que

$$P(X+1) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{P^{(j)}(X)}{j!},$$

ce qui s'écrit

$$\mathrm{Id} + \delta = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^j}{j!}$$

lorsque f désigne ici l'opérateur de dérivation. Pour inverser cette formule, il est tentant de s'appuyer sur l'analogie avec les séries entières. Si l'on

note e^f le second membre, on aimerait prouver que $f = \ln(\mathrm{Id} + \delta) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\delta^k}{k}$.

Nous allons en fait montrer que cette égalité est vraie sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui nous permettra de transformer le symbole de somme en un symbole de somme sur un ensemble fixe d'indices. En effet, si l'on note abusivement δ et f les endomorphismes induits sur $\mathbb{R}_n[X]$ (qui est bien stable), on a $\delta^{n+1} = f^{n+1} = 0$. Par conséquent,

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^j}{j!} = \varphi(f).$$

Nous allons calculer

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \delta^j = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \varphi^j\Big)(f) = \psi(f).$$

Les polynômes φ et ψ s'annulent en 0.

Pour x réel, on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j = \ln(1+x) + o(x^n),$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \varphi(x)^j &= \ln\big(1 + \varphi(x)\big) + o\big(\varphi(x)^n\big) \\ &= \ln\big(e^x + o(x^n)\big) + o(x^n) = x + o(x^n).\end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche est un polynôme, on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \varphi(X)^j = X + X^{n+1} R(X),$$

avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Évaluons cette égalité en l'opérateur f. Il vient

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \varphi(f)^j = f + f^{n+1} R(f) = f,$$

soit encore

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \delta^j = f.$$

C'est la formule attendue.

Pour résoudre la question **a**, *on pourrait aussi chercher les matrices qui commutent avec la matrice de Jordan. Il ne faudrait alors pas oublier de vérifier que les coefficients trouvés ne dépendent pas de $\mathbb{K}_n[X]$. Les polynômes P_k sont particulièrement commodes d'emploi lorsqu'intervient l'opérateur δ de différence discrète.*

Chapitre 2

Algèbre linéaire, réduction

Exercice corrigé 28

Posé en 1998

Soient $n \geqslant 2$, $m \in \mathbb{R}^*$ et $A = (a_{ij})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $a_{i,j} = m^{j-i}$ si $j \neq i$ et $a_{ii} = 0$.

a. Trouver le polynôme minimal de A.

b. Prouver que A est inversible et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution

a. La diagonale de A n'a pas la même définition que A, c'est dommage. Posons plutôt $B = (b_{i,j}) = A + I_n$. Alors $b_{i,j} = m^{j-i}$ pour tous i, j et comme B est un polynôme en A et que A est un polynôme en B, les polynômes minimaux de l'un et de l'autre doivent bien avoir un rapport.

Calculons B^2 : fixons i, j, on a

$$(B^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m^{k-i} m^{j-k} = \sum_{k=1}^{n} m^{j-i} = n m^{j-i}.$$

Ainsi, $B^2 = nB$ et donc $(A + I_n)^2 = n(A + I_n)$, ce qui donne

$$A^2 - (n-2)A - (n-1)I_n = 0\,.$$

On a déjà un polynôme annulateur de A, mais il s'agit bien du polynôme minimal car celui-ci doit être de degré au moins 2, A n'étant pas une

homothétie. Donc :

$$\mu_A(X) = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1)).$$

b. Comme 0 n'est pas racine du polynôme minimal, A est inversible. Par ailleurs, pour calculer A^k on peut la diagonaliser : A admet -1 et $n-1$ comme valeurs propres, mais comme la trace de A est nulle, la valeur propre -1 est répétée $n-1$ fois. Donc on peut trouver une matrice inversible P telle que

$$A = P\,\mathrm{diag}(-1,\ldots,-1,n-1)P^{-1}.$$

Ainsi, si $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$A^k = P\,\mathrm{diag}((-1)^k,\ldots,(-1)^k,(n-1)^k)P^{-1} = \alpha_k A + \beta_k I_n,$$

où α_k et β_k sont réglés de sorte que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\alpha_k + \beta_k & = & (-1)^k \\ (n-1)\alpha_k + \beta_k & = & (n-1)^k. \end{array}\right.$$

On résout aisément ce système d'équations : $\alpha_k = \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right)$ et $\beta_k = \alpha_k + (-1)^k$.

Ainsi,

$$A^k = \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right)A + \left(\frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right) + (-1)^k\right)I_n.$$

On aurait pu tout aussi bien écrire que $A^k = R(A)$, où R est le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme minimal de A. On peut alors calculer R à partir des valeurs prises en les racines de μ_A. Cela revient au même que la méthode employée.

On peut remarquer que

$$\mathrm{diag}(1,m,\ldots,m^{n-1})J\,\mathrm{diag}(1,m^{-1},\ldots,m^{-n+1}) = I_n + A,$$

où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Donc $I_n + A$ est semblable à une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable, de valeurs propres 0 à l'ordre $n-1$ et n d'ordre 1. Cela éclaire la matrice P de la question **b** *(bien que son expression soit inutile).*

Exercice corrigé 29

Posé en 2006

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$;

(ii) $f^2 = 0$ et il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $hf + fh = \mathrm{Id}$.

Solution

▷ Montrons d'abord le sens ii)$\Longrightarrow$i). Ce sens est plus facile que l'autre, car il n'y a pas de construction à faire. Supposons donc que $hf + fh = \mathrm{Id}$ et que $f^2 = 0$. Déjà, le fait que $f^2 = 0$ permet d'affirmer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Par ailleurs, si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$x = (hf + fh)(x) = f(h(x)) \in \operatorname{Im} f,$$

donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$.

▷ Montrons maintenant le sens i)$\Longrightarrow$ii). On suppose donc que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont égaux. Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, on a tout de suite $f^2 = 0$ et on va maintenant construire h.

Pour cela, nous allons raisonner matriciellement et considérer une base adaptée à f : on prend un supplémentaire E' du noyau $\operatorname{Ker} f$. Comme E' est de même dimension que $\operatorname{Im} f$, E' est de même dimension que $\operatorname{Ker} f$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E' (avec $p = n/2$) ; comme f est injective sur E', la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une famille libre. Comme ce sont des vecteurs du noyau (car $f^2 = 0$) et que le noyau est de dimension p, il s'agit d'une base du noyau. Comme enfin E' et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires, on en déduit que la famille $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est bien une base de E.

Dans cette base, la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Considérons maintenant la matrice $H := \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul simple montre que $AH + HA = I_n$ et donc que l'application h dont la matrice est H dans la base $\mathscr{B}$ convient.

Ce type d'exercice, concernant la construction d'applications linéaires en dimension finie, revient très périodiquement au concours de Polytechnique.

Exercice corrigé 30

Posé en 2003

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$, telle que $u^q = \mathrm{Id}$ pour un certain $q \geqslant 1$. Montrer que

$$\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \mathrm{tr}(u^k).$$

Solution

Le résultat classique d'égalité entre une trace et une dimension concerne les projecteurs : si p est un projecteur, alors $\mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$. Il suffit donc pour prouver le résultat de l'énoncé de vérifier que $p := \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} u^k$ est un projecteur dont l'image est $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Déjà, $p \circ u = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} u^{k+1} = \frac{1}{q} \sum_{k=2}^{q+1} u^k = p$ car $u^{q+1} = u$. On en déduit que $pu^k = pu \circ u^{k-1} = pu^{k-1} = p$ par une récurrence immédiate sur k. Ainsi,

$$p \circ p = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} p \circ u^k = p.$$

Donc p est un projecteur. Il reste à déterminer son image.

Prenons x dans $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$ et pour tout k, $u^k(x) = x$. Il vient donc $p(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} u^k(x) = x$. Donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\, p$.

Maintenant, prenons x tel que $p(x) = x$. Comme p est un polynôme en u, on a $p \circ u = u \circ p = p$. Ainsi $u(x) = u(p(x)) = p(x) = x$. Donc x est un point fixe de u, et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Pour le même travail, on démontre facilement que si G est un sous-groupe fini du groupe linéaire $\mathscr{GL}(E)$, alors $p = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} u$ est un projecteur sur l'espace des points fixes communs à tous les éléments de G.

Exercice corrigé 31

Posé en 2007

Soit $(A_1, \ldots, A_{n^2})$ une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(A_1, \ldots, A_{n^2})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice $P := (\mathrm{tr}(A_i A_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible.

Solution

La dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2, donc la famille $(A_1, \ldots, A_{n^2})$ est une base si elle est, au choix, libre ou génératrice.

▷ Supposons que $(A_1, \ldots, A_{n^2})$ soit liée, et soit $\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i = 0$ une relation de liaison entre ces matrices. Notons L_i la i^e ligne de P et considérons la matrice ligne $\widehat{L} := \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i L_i$. Par linéarité du produit matriciel et de la trace, le j^e coefficient de $\widehat{L}$ vaut

$$\widehat{L}_j = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i \,\mathrm{tr}(A_i A_j) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i A_j\right) = \mathrm{tr}(0) = 0\,.$$

Donc les lignes de la matrice sont liées, et la matrice est non-inversible.

▷ Pour la réciproque, nous allons utiliser globalement le même argument : supposons que la matrice soit non-inversible, alors on peut trouver une relation de liaison entre les lignes, c'est-à-dire des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2}$ non tous nuls, tels que pour tout j,

$$\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i \,\mathrm{tr}(A_i A_j) = \mathrm{tr}(C A_j) = 0\,,$$

où $C := \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i$. Supposons par l'absurde que les A_j forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors par linéarité on a $\mathrm{tr}(CM) = 0$ pour toute matrice M. Il est maintenant classique d'obtenir $C = 0$, résultat que nous allons avoir le plaisir de détailler.

Notons $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et considérons la matrice élémentaire $E_{i,j}$, dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé ligne i et colonne j, et qui vaut 1. Alors

$$\mathrm{tr}(CE_{i,j}) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{m,k} (E_{i,j})_{k,m} = c_{j,i}.$$

On en déduit bien que tous les coefficients de C sont nuls. On a alors

obtenu une relation de liaison entre les A_i, ce qui apporte la contradiction voulue.

Il est légèrement plus classique de vérifier que la liberté des A_i équivaut à l'inversibilité de la matrice dont les coefficients sont les $\mathrm{tr}(A_i{}^t A_j)$. En effet, l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est en fait le produit scalaire canonique). La matrice des produits scalaires est alors appelée matrice de Gram, et son inversibilité provient du fait qu'elle est égale à ${}^tT.T$, où T est la matrice des coefficients des A_i dans une base orthonormée quelconque. Le fait que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans l'énoncé de l'exercice permet d'ailleurs une démonstration expéditive de la dernière proposition de la solution : il suffit d'appliquer l'égalité $\mathrm{tr}\, CM = 0$ à la matrice $M := {}^tC$. Si $\mathbb{K}$ était égal à $\mathbb{C}$, on utiliserait $M := C^* = {}^t\overline{C}$.

Exercice corrigé 32

Posé en 2007

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $n+1$ complexes distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que pour tout i, $A + \lambda_i B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Solution

L'énoncé suggère d'utiliser des résultats relatifs aux polynômes : si deux polynômes P et Q de degrés inférieurs à n coïncident en tous les λ_i, alors ils seront égaux en tout point.

Essayons avec $P(X) := \det(A + XB)$. Comme chaque $A + \lambda_i B$ est nilpotente, donc non inversible, P est un polynôme qui s'annule en tous les λ_i, mais P est de degré inférieur ou égal à n, donc P est nul. En particulier $P(0) = \det(A) = 0$, ce qui prouve que A est non inversible. La conclusion est largement insuffisante, mais l'idée fait son chemin.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si elle vérifie $M^n = 0$. Considérons

$$P(\lambda) := (A + \lambda B)^n.$$

Il est alors clair que P est un « polynôme » en λ de degré $\leqslant n$, i.e. de la forme

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k M_k\,,$$

où les M_k sont des matrices[1]. Ainsi, $P(\lambda)$ est une matrice dont tous les coefficients sont des polynômes en λ de degré inférieur où égal à n. Comme chacun de ces polynômes s'annule en $n+1$ points distincts, tous les coefficients de P sont nuls. Par conséquent,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (A+\lambda B)^n = 0\,.$$

En particulier, pour $\lambda = 0$, on a $A^n = 0$ donc A est nilpotente. Mais on a aussi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\left(\dfrac{A}{\lambda} + B\right)^n = 0$. Lorsque $\lambda \to +\infty$, l'égalité précédente passe à la limite en

$$B^n = 0\,.$$

Donc B est aussi nilpotente.

On peut aussi dire que B^n est le « coefficient de λ^n » dans $P(\lambda)$ et que tous les coefficients de $P(\lambda)$ sont nuls puisque P s'annule sur un ensemble de $n+1$ points. Bien entendu, on peut ramener ce raisonnement aux composantes de $P(\lambda)$ afin de le rendre parfaitement rigoureux.

Exercice corrigé 33

Posé en 2004

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - 2X$, qui est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable, ses valeurs propres étant 0 et 2, et ses espaces propres étant de dimension 1. Considérons deux vecteurs propres e_0 et e_2 relatifs aux valeurs propres 0 et 2.

Si $M^2 + M = A$, alors A est un polynôme en M, donc commute avec M. Ainsi, M stabilise les espaces propres de A. Comme ces espaces propres sont des droites vectorielles, Me_0 est proportionnel à e_0 et Me_2 est proportionnel à e_2. Écrivons $Me_0 = \lambda_0 e_0$ et $Me_2 = \lambda_2 e_2$. Comme $M^2 + M = A$, on a alors

$$\lambda_0^2 + \lambda_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2^2 + \lambda_2 = 2\,,$$

Ce qui revient à $\lambda_0 \in \{-1, 0\}$ et $\lambda_2 \in \{-2, 1\}$. L'image d'une base caractérisant la matrice, il n'y a que 4 solutions au maximum.

[1] Le lecteur rigoureux pourra montrer par récurrence sur k que $(A+\lambda B)^k$ est un polynôme de degré $\leqslant k$.

Si réciproquement on a $Me_0 = \lambda_0 e_0$ et $Me_2 = \lambda_2 e_2$ avec λ_0 et λ_2 vérifiant les conditions précédentes, alors l'égalité $M^2 + M = A$ a lieu sur une base, donc est matriciellement vraie.

Il nous reste à déterminer ces matrices. Pour cela, si on veut éviter des calculs plus ou moins faciles de matrice de passage, nous pouvons chercher la matrice M parmi les polynômes en A. En effet, ces derniers sont tous diagonalisables dans la base (e_0, e_2). Si $M = P(A)$, alors M convient si et seulement si $P(0) \in \{-1, 0\}$ et $P(2) \in \{-2, 1\}$. Le procédé d'interpolation de Lagrange permet alors de trouver dans chaque situation un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui convient. Résumons les résultats dans ce tableau :

$P(0)$	$P(2)$	P	$P(A)$	M
-1	-2	$-\frac{1}{2}X - 1$	$-\frac{1}{2}A - I_2$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
-1	1	$X - 1$	$A - I_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
0	-2	$-X$	$-A$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
0	1	$\frac{1}{2}X$	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice corrigé 34

Posé en 2006

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a. Soient f et g dans E^*. Montrer que si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, alors f et g sont proportionnelles.

b. Soient $g, f_1, \ldots, f_n$ dans E^*. Montrer que si $\operatorname{Ker} g \supset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$, alors g est une combinaison linéaire des f_i.

Solution

a. On peut supposer f et g non nulles. Soit $u \in E$ tel que $f(u) = 1$. Alors $\operatorname{Ker} f \oplus \mathbb{K}u = E$, car $\operatorname{Ker} f \cap \mathbb{K}u = \{0\}$ naturellement, et, d'autre part, un vecteur x de E peut s'écrire $(x - f(x)u) + f(x)u$, et $x - f(x)u \in \operatorname{Ker} f$. Soit $\lambda = g(u)$. Alors $g - \lambda f$ s'annule en u et sur $\operatorname{Ker} f$, donc sur E. Par conséquent, $g = \lambda f$.

b. Nous raisonnons par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ provient de la question précédente.

Supposons donc le résultat vrai pour $n-1$ formes linéaires. Soit à présent g une forme linéaire s'annulant sur $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$. Posons $V = \bigcap_{i=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_i$. La restriction de g à V s'annule sur $V \cap \operatorname{Ker} f_n$, donc cette restriction est proportionnelle à la restriction de f_n à V. En d'autres termes, il existe un scalaire λ tel que, pour tout x de V, $g(x) = \lambda f_n(x)$. Par conséquent, $g - \lambda f_n$ s'annule sur V. L'hypothèse de récurrence entraîne que $g - \lambda f_n$ est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_{n-1}$, ce qui conclut.

La question b *étend à un espace vectoriel quelconque le résultat du cours correspondant qui suppose que l'espace vectoriel est de dimension finie. On peut lui donner une solution assez différente. Considérons en effet l'application de E dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\varphi(x) := (g(x), f_1(x), \ldots, f_n(x))$. L'hypothèse assure que $(1, 0, \ldots, 0) \notin \operatorname{Im} \varphi$, donc que $\operatorname{Im} \varphi$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$ ne contenant pas ce vecteur. Il en résulte l'existence de scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_0 \neq 0$ et tels que $\lambda_0 g + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, ce qui est la conclusion.*

Exercice corrigé 35

Posé en 2002

Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On suppose que $e^A = e^B$. Montrer que $A = B$.

Solution

On utilise, comme souvent, un polynôme interpolateur de Lagrange : la technique utilisée ci-dessous fait comprendre pourquoi.

Soit $X := \operatorname{sp} A \cup \operatorname{sp} B \subset \mathbb{R}$. On écrit $X = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ en utilisant une indexation injective : on ne compte qu'une fois chaque élément. Considérons l'ensemble $e^X = \{e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p}\}$. L'indexation est encore injective car exp est injective sur $\mathbb{R}$.

Soit φ le polynôme interpolateur de Lagrange aux conditions $\varphi(e^{\lambda_k}) = \lambda_k$ pour $k \in [\![1, p]\!]$. Puisque A est diagonalisable, on peut écrire

$$Q^{-1} A Q = D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n).$$

Donc $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{diag}(\varphi(e^{a_1}), \ldots, \varphi(e^{a_n}))$, puisque les a_i

sont des λ_k. Ainsi,

$$D = \varphi\big(\mathrm{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})\big) = \varphi(e^D).$$

Soit

$$Q^{-1}AQ = \varphi(e^{Q^{-1}AQ}) = \varphi(Q^{-1}e^AQ) = Q^{-1}\varphi(e^A)Q\,,$$

en vertu du caractère d'automorphisme continu d'algèbre de $X \mapsto Q^{-1}XQ$ (pour la deuxième égalité, on applique d'abord cet automorphisme aux sommes partielles de la série exponentielle et on passe à la limite).

On a donc montré que $A = \varphi(e^A)$. De même, $B = \varphi(e^B)$. Mais comme $e^A = e^B$, on a $A = B$.

Exercice corrigé 36

Posé en 2007

On pose, pour $n \geqslant 2$, $P_n(X) := X^n - X + 1$.

a. Montrer que P_n admet n racines complexes distinctes $z_1, \dots, z_n$.

b. Calculer le déterminant

$$D := \begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

Solution

a. Il s'agit de montrer que P_n n'a pas de racine commune avec P_n'. En effet, si $P_n(x) = P_n'(x) = 0$, alors on a $nx^{n-1} = 1$, et donc $P_n(x) = \frac{x}{n} - x + 1$, soit encore $x = \frac{n}{n-1}$. Or $n\big(\frac{n}{n-1}\big)^{n-1} \neq 1$, car $n^n > (n-1)^{n-1}$. C'est la contradiction recherchée.

b. Effectuons les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Il vient

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & z_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -z_n & -z_n & \dots & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

Effectuons ensuite les opérations $L_n \leftarrow L_n + \frac{z_n}{z_i} L_i$ pour $n = 1, \dots, n-1$

(les z_i sont non nuls). On obtient

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & z_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 + z_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_n}{z_i} \end{vmatrix}.$$

Puisque le déterminant est triangulaire supérieur,

$$D = z_1 \cdots z_{n-1}\Big(1 + z_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_n}{z_i}\Big) = \Big(\prod_{i=1}^{n} z_i\Big)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\Big).$$

Soit $D = \prod_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} z_j = 2(-1)^n$, grâce aux fonctions élémentaires des racines qui apparaissent comme coefficients du polynôme P_n.

On aurait aussi pu calculer $P(t) = \begin{vmatrix} t + z_1 & t & \dots & t \\ t & t + z_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ t & t & \dots & t + z_n \end{vmatrix}$ *dont on montre que c'est une fonction affine de t, puis que l'on élucide à partir de $P(0)$ et $P'(0)$.*

Ce genre de déterminant intervient dans de nombreuses situations, par exemple dans des problèmes de dénombrement.

Exercice corrigé 37

Posé en 2007

Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

On suppose que $n \geqslant 2$. On constate à première vue que $\operatorname{rg} A = 2$ et aussi que A, comme matrice symétrique réelle, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On peut en particulier prévoir que les valeurs propres sont réelles. Soit $(a, b, 0, \dots, 0)$ la liste des valeurs propres de A. On a déjà $\operatorname{tr} A = a + b = 1$.

Calculons

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}.$$

On a donc $\operatorname{tr} A^2 = a^2 + b^2 = 2n - 1$. Ainsi,

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} = 1 - n.$$

Il s'agit ici de retrouver deux réels connaissant leur somme et leur produit. On a donc à résoudre l'équation $X^2 - X + 1 - n = 0$, de discriminant $1 - 4 + 4n = 4n - 3$. Soit

$$a = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \quad ; \quad b = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Cette façon de procéder marche particulièrement bien lorsque l'on connaît $n-2$ valeurs propres d'une matrice de taille n. Si l'on en connaissait $n-3$, il faudrait calculer aussi A^3 et $\operatorname{tr} A^3$, ce qui conduirait à une équation de degré 3. Pour résoudre cet exercice, on peut aussi se contenter de chercher les λ non nuls tels qu'existe un vecteur colonne non nul X vérifiant $AX = \lambda X$. En écrivant les $n-1$ premières équations, on obtient les x_i en fonction de x_n, valeurs qui, reportées dans la dernière équation, conduisent à une équation du second degré en λ.

Exercice corrigé 38

Posé en 2003

Soient E de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)$.

a. On suppose f et g non inversibles. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ non nulle telle que $h \circ f = g \circ h$.

Aboutir à la même conclusion sous la seule hypothèse que f et g ont une valeur propre commune.

b. Soit h de rang r telle que $h \circ f = g \circ h$. Montrer que les polynômes caractéristiques de f et g ont un facteur commun de degré r.

c. Étudier la réciproque.

Solution

a. Prenons donc f et g non inversibles, et construisons une application

$h \in \mathscr{L}(E)$ telle que $h \circ f = g \circ h = 0$. Il suffit pour cela que le noyau de h contienne l'image de f, et que l'image de h soit dans le noyau de g.

Considérons un hyperplan H de E contenant $\operatorname{Im} f$. Il en existe bien car f n'est pas inversible, donc non surjective (d'après le théorème du rang). Soit $\operatorname{vect}(x)$ un supplémentaire de H et y un vecteur non nul pris dans le noyau de g (qui existe car g est non inversible donc non injective). Alors si $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de H, on obtient une base de E en rajoutant x, et on définit h sur cette base en posant $h(e_k) = 0$ et $h(x) = y$. L'application h est non nulle, son noyau contient $\operatorname{Im} f$, et son image $\operatorname{vect}(y)$ est incluse dans le noyau de g.

On peut aussi utiliser des résultats de dualité : si G est la matrice de g, F celle de f, on prend Y tel que $GY = 0$ et X tel que ${}^tXF = 0$. Alors $H = Y{}^tX$ convient.

Pour la deuxième partie de la question, à supposer que λ soit une valeur propre commune à f et à g, alors on utilise le résultat précédent pour construire h telle que $h \circ (f - \lambda \mathrm{Id}) = (g - \lambda \mathrm{Id}) \circ h$ et en développant on obtient bien $h \circ f = g \circ h$.

b. Pour la majorité des questions portant sur le polynôme caractéristique, il est raisonnable de prendre un point de vue matriciel. Notons A la matrice de f et B celle de g. Commençons par étudier le cas le plus simple, lorsque la matrice de h est $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On suppose donc que $AJ_r = J_rB$.

Écrivons $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. On a

$$AJ_r = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_rB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que $A_1 = B_1$, $A_3 = 0$ et $B_2 = 0$. Ainsi $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. Par conséquent, les polynômes caractéristiques de A et B sont tous deux divisibles par χ_{A_1}.

Venons-en au cas général. Comme H est de rang r, alors on peut écrire $H = PJ_rQ$ où P et Q sont inversibles, et il vient

$$APJ_rQ = PJ_rQB.$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par Q^{-1}, on obtient

$$(P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1}).$$

Il nous suffit maintenant de remarquer que A et $P^{-1}AP$ sont semblables, donc ont même polynôme caractéristique, et de même pour B et QBQ^{-1}. D'après ce qui a été fait précédemment, les polynômes caractéristiques de $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} ont un facteur commun de degré r, ce qui termine la démonstration.

c. Considérons donc deux endomorphismes f et g, et soit r le degré du pgcd de leurs polynômes caractéristiques respectifs. Peut-on trouver un endomorphisme h de rang r tel que $f \circ h = h \circ g$? La réponse est oui si $r = 1$, puisque dans ce cas f et g ont une valeur propre commune, d'après la première question.

Montrons sur un exemple que la réciproque est fausse lorsque $r \geqslant 2$. Pour cela, on considère f dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $g = \mathrm{Id}$. Si h est telle que $f \circ h = h \circ g$, alors $(f - \mathrm{Id}) \circ h = 0$, donc $\operatorname{rg} h \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 1$. Donc on ne peut avoir h de rang supérieur à 1, alors que les polynômes caractéristiques de f et g sont égaux.

Exercice corrigé 39

Posé en 2007

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $E_n := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \exists m \in \mathbb{N}^*, A^m = I_n\}$. Montrer qu'il existe un entier m tel que $A^m = I_n$ pour **toutes** les matrices $A \in E_n$.

Solution

Considérons A dans E_n, et tentons de déterminer le plus petit entier k supérieur ou égal à 1 tel que $A^k = I_n$. Comme il existe m tel que $A^m = I_n$ et que le polynôme $X^m - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, alors A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont toutes de module 1. On a alors $A^k = I_n$ si et seulement si $\lambda^k = 1$ pour tout $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$. On en déduit que le plus petit $k \geqslant 1$ tel que $A^k = I_n$ ne dépend que du spectre, et donc du polynôme caractéristique de A. Par ailleurs, les racines de ce polynôme caractéristique sont forcément des racines de l'unité.

Notons $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des polynômes caractéristiques des matrices A de E_n. Tout polynôme $P \in \mathscr{P}_n$ n'admet comme racines que des complexes

de module 1. Par ailleurs, comme P est le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, $P \in \mathbb{Z}[X]$. Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme montrent que le terme de P en X^{n-k} est (au signe près) la somme de $\binom{n}{k}$ produits de racines, chaque produit étant de module 1. Par inégalité triangulaire, ce coefficient est en module inférieur à $\binom{n}{k}$. Comme il est entier, il y a un nombre fini de choix. Conséquence : $\mathscr{P}_n$ est un ensemble fini.

Pour chaque $P \in \mathscr{P}_n$ on considère un entier k_P tel que pour tout λ racine de P, $\lambda^{k_P} = 1$. Il suffit maintenant de poser $m := \prod_{P \in \mathscr{P}_n} k_P$. Si $A \in E_n$, alors $A^{k_{\chi(A)}} = I_n$ et donc $A^m = I_n$ car m est un multiple de $k_{\chi(A)}$.

Pour aller plus loin, vous pouvez montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et que toutes ses valeurs propres sont de module 1, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = I_n$.

Exercice corrigé 40

Posé en 2007

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A^m) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

Solution

De nombreux exercices sont posés chaque année sur le rapport entre la trace et les valeurs propres d'une matrice. Nous donnons deux solutions de cet exercice, l'une avec des éléments d'algèbre, et l'autre avec des éléments d'analyse.

▷ Commençons par la solution analytique. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A, et $n_1, \ldots, n_p$ les ordres de multiplicité associés. La condition de l'énoncé est alors équivalente à :

$$\sum_{k=1}^{p} n_k \lambda_k^m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Supposons que les λ_k soient rangés par module décroissant :

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p|.$$

Notre objectif est maintenant de prouver que $|\lambda_1| < 1$. Il s'agit ici d'ex-

traire le comportement de $|\lambda_1|^m$ du comportement général de $\sum_{k=1}^{p} n_k \lambda_k^m$.

Pour cela nous allons utiliser le théorème de Cesàro. Supposons par l'absurde que $|\lambda_1| \geqslant 1$ et posons $\alpha_k = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$. On a alors $\alpha_1 = 1$, tous les α_k sont différents et de module inférieur ou égal à 1. On a de plus :

$$(\star) \qquad n_1 + \sum_{k=2}^{p} n_k \alpha_k^m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

La somme étant finie, on peut alors utiliser le théorème de Cesàro, qui offre :

$$n_1 + \sum_{k=2}^{p} \frac{n_k}{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Or, si $|\alpha_k| < 1$, on a $\alpha_k^j \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\dfrac{n_k}{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si maintenant $|\alpha_k| = 1$, sachant que $\alpha_k \neq 1$ on a

$$\frac{n_k}{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j = \frac{n_k}{m} \frac{\alpha_k - \alpha_k^m}{1 - \alpha_k} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 ,$$

car la suite $\left(\dfrac{\alpha_k - \alpha_k^m}{1 - \alpha_k} \right)_{m \geqslant 0}$ est bornée.

On obtient ainsi $\sum_{k=2}^{p} n_k \alpha_k^m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, en contradiction avec $(\star)$.

▷ Présentons maintenant la solution algébrique. Soit M la matrice de terme général $n_i \lambda_i^{j-1}$ pour $(i,j) \in [1,p]^2$. Cette matrice est inversible car son déterminant, une fois mis en facteurs les n_i, est un déterminant de Vandermonde. Or

$$M \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \vdots \\ \lambda_p^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr} A^k \\ \operatorname{tr} A^{k+1} \\ \vdots \\ \operatorname{tr} A^{k+p-1} \end{pmatrix},$$

puisque $\operatorname{tr} A^j = n_1 \lambda_1^j + \cdots + n_p \lambda_p^j$.

Par conséquent,
$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \vdots \\ \lambda_p^k \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{tr} A^k \\ \operatorname{tr} A^{k+1} \\ \vdots \\ \operatorname{tr} A^{k+p-1} \end{pmatrix}.$$

Le membre de droite tend vers 0 par hypothèse et par continuité du produit matriciel. Par conséquent, pour tout i, $\lambda_i^k \to 0$. Il en résulte que $|\lambda_i| < 1$.

Le fait d'avoir introduit les ordres de multiplicité est nécessité par le désir d'avoir une matrice M inversible.

Exercice corrigé 41

Posé en 1998

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Lorsque X est dans $M_n(\mathbb{C})$, on pose $u(X) = AX - XB$.

a. Montrer que si $\alpha \in \operatorname{sp} A$ et $\beta \in \operatorname{sp} B$, alors $\alpha - \beta \in \operatorname{sp} u$.

b. Soit $\lambda \in \operatorname{sp} u$ et $X \in E_\lambda(u)$. Montrer que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[T]$,
$$Q(A)X = XQ(B + \lambda I_n).$$

En déduire qu'il existe $\alpha \in \operatorname{sp} A$ et $\beta \in \operatorname{sp} B$ tels que $\lambda = \alpha - \beta$.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il existe $X \neq 0$ telle que $AX = XB$.

Solution

De nombreuses variantes de cet énoncé sont posées chaque année au concours de Polytechnique. La solution proposée utilise le théorème de Cayley & Hamilton.

a. Comme X est en facteur à droite, puis à gauche, dans l'expression de $u(X)$, il n'est pas absurde d'utiliser la transposition des matrices, qui permet justement de changer de côté dans un produit. Notons que B et ${}^tB$ ont même polynôme caractéristique, donc que β est aussi valeur propre de ${}^tB$. Soit X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \alpha X$ et Y un vecteur colonne non nul tel que ${}^tBY = \beta Y$. Posons $Z := X{}^tY$. C'est la matrice carrée $[x_i y_j]$, elle admet donc au moins un coefficient non nul. On a
$$u(Z) = AX{}^tY - X{}^tYB = \alpha X{}^tY - \beta X{}^tY = (\alpha - \beta)Z.$$

Donc $\alpha - \beta \in \operatorname{sp} u$.

b. On a $AX - XB = \lambda X$, soit $AX = X(B + \lambda I_n)$. Par conséquent,

$$A^2X = AX(B + \lambda I_n) = X(B + \lambda I_n)^2.$$

Par une récurrence banale, on voit que $A^kX = X(B+\lambda I_n)^k$. Par linéarité, l'égalité $Q(A)X = XQ(B + \lambda I_n)$, ainsi vérifiée lorsque $Q(T) = T^k$, s'étend à un polynôme Q arbitraire.

Appliquons cette égalité au polynôme caractéristique Q de A, que l'on peut écrire $Q(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - \alpha_i)$. Le théorème de Cayley & Hamilton fournit l'égalité $Q(A) = 0$, donc $XQ(B + \lambda I_n) = 0$. Comme X n'est pas la matrice nulle, $Q(B + \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n} \big(B + (\lambda - \alpha_i)I_n\big)$ n'est pas inversible. L'une des matrices $B + (\lambda - \alpha_i)I_n$ n'est donc pas inversible, ce qui entraîne que $\alpha_i - \lambda$ est valeur propre de B. Par conséquent, il existe une valeur propre β_j de B telle que $\lambda = \alpha_i - \beta_j$.

c. Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = XB$ si et seulement si $0 \in \operatorname{sp} u$ donc, d'après les questions **a** et **b**, si et seulement si A et B ont une valeur propre en commun.

Dans la question **b**, *on peut utiliser le polynôme minimal plutôt que le polynôme caractéristique. On sait en effet que les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres.*

Exercice corrigé 42

Posé en 2001

Soient $0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ des réels. Montrer que le déterminant de la matrice $[t_i^{\alpha_j}]$ est strictement positif.

Solution

Considérons t_n comme une variable, que l'on note t et qui décrit $]0, +\infty[$. Il s'agit de montrer que le déterminant $f(t) := \det A(t)$ de la matrice ainsi construite est strictement positif sur $]t_{n-1}, +\infty[$. Grâce à un développement par rapport à la dernière colonne, la fonction f admet l'expression

$$f(t) = D_n t^{\alpha_n} + D_{n-1} t^{\alpha_{n-1}} + \cdots + D_1 t^{\alpha_1},$$

où D_n est, en particulier, le cofacteur de t^{α_n} dans $A(t)$. Grâce à une hypothèse de récurrence dont l'initialisation est évidente, $D_n > 0$. Ainsi, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} D_n t^{\alpha_n}$, de sorte que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par continuité de f, il suffit

de montrer que f ne s'annule pas sur $]t_{n-1}, +\infty[$. Il faut prendre garde au fait que $f(t)$ n'est pas une fonction polynomiale, puisque les α_i ne sont pas nécessairement entiers, ni positifs.

Comme f s'annule évidemment en les réels $t_1, \ldots, t_{n-1}$ (le déterminant admet deux lignes égales), il suffit de montrer qu'une fonction définie par une expression $E(t) := D_n t^{\alpha_n} + D_{n-1} t^{\alpha_{n-1}} + \cdots + D_1 t^{\alpha_1}$ s'annule au plus $n-1$ fois sur $]0, +\infty[$. C'est vrai pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. On a

$$\left(t^{-\alpha_1} E(t)\right)' = (\alpha_n - \alpha_1) D_n t^{\alpha_n - \alpha_1 - 1} + (\alpha_{n-1} - \alpha_1) D_{n-1} t^{\alpha_{n-1} - \alpha_1 - 1} + \cdots + (\alpha_2 - \alpha_1) D_2 t^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\left(t^{-\alpha_1} E(t)\right)'$ admet au plus $n-2$ points d'annulation dans $]0, +\infty[$. Le théorème de Rolle entraîne que $t^{-\alpha_1} E(t)$ s'annule au plus $n-1$ fois dans cet intervalle, donc $E(t)$ aussi.

Le moteur de cet exercice est qu'une expression presque polynomiale du type $D_n t^{\alpha_n} + D_{n-1} t^{\alpha_{n-1}} + \cdots + D_1 t^{\alpha_1}$ admet (si les coefficients ne sont pas tous nuls) au plus n points d'annulation dans $]0, +\infty[$, et cela résulte du théorème de Rolle.

L'énoncé original ajoutait la condition $\alpha_1 \geqslant 0$, mais cette hypothèse supplémentaire est inutile, voire nuisible à la démonstration.

Exercice corrigé 43

Posé en 2002

Soit

$$X := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = I_n\}.$$

Déterminer l'adhérence de X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution

Si $M \in X$, les valeurs propres de M sont des racines p^e de 1, donc sont de module 1. Par conséquent,

$$X \subset Y := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{sp} M \subset \mathbb{U}\}.$$

▷ Montrons que tout élément A de Y est limite d'une suite à valeurs dans X. On sait que A est triangulable, donc qu'il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$, où T est une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A, donc des complexes de module 1.

Posons $t_{k,k} := e^{2i\pi\theta_k}$, avec $\theta_k \in [-1, 1[$. On peut trouver une suite $(r_{k,m})_m$ de rationnels convergeant vers θ_k par valeurs supérieures. Lorsque $\theta_k = \theta_l$

(il n'est pas exclu que certaines valeurs propres soient multiples), on choisit la même suite. On pose ensuite $s_{k,m} = r_{k,m} + k2^{-m}$. La suite $(s_{k,m})_m$ tend encore vers θ_k, et comme $\theta_k \in [-1,1[$, on a aussi $s_{k,m} \in [-1,1[$, tout au moins à partir d'un certain rang. D'autre part, si $k \neq l$, alors $s_{k,m} \neq s_{l,m}$ à partir d'un certain rang ; en effet, c'est clair par construction lorsque $\theta_k = \theta_l$ et c'est vrai sinon par localisation.

Soit alors T_m la matrice triangulaire supérieure dont tous les termes sont égaux à ceux de T à l'exception de ceux de la diagonale, qui sont les $s_{k,m}$. Cette matrice a ses termes diagonaux distincts, donc elle est diagonalisable. D'autre part, (T_m) tend vers T. Enfin, si N_m est un multiple commun à tous les dénominateurs des différents $s_{k,m}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $T_m^{N_m} = I_n$ (puisque T_m est diagonalisable, donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(s_{1,m},\ldots,s_{n,m})$). Ainsi, $T_m \in X$. Il en résulte que $PT_mP^{-1} \in X$. Puisque $PT_mP^{-1} \to PTP^{-1} = A$, on a montré que $\overline{X} \supset Y$.

▷ Montrons à présent que Y est fermé, ce qui montrera alors l'inclusion $\overline{X} \subset \overline{Y} = Y$ et l'égalité souhaitée. L'application qui va de $\mathbb{U}^n$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ et qui à $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ associe $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ est continue. Puisque $\mathbb{U}^n$ est compact comme produit de compacts, l'ensemble E des polynômes unitaires de degré n dont les valeurs propres sont de module 1 est compact. L'application $M \longmapsto \chi\chi_M(X)$, qui va de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$, est continue. Donc $Y = \chi^{-1}(E)$ est fermé.

Il y a deux moyens principaux pour montrer qu'un ensemble est fermé. En général, on montre que c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. On pense moins souvent à exploiter le fait que c'est l'image d'un compact par une fonction continue. C'est notamment utile ici, car il faudrait sinon prouver la continuité d'une application qui à un polynôme associerait ses racines, ce qui est difficile.

Exercice corrigé 44

Posé en 2007

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $\mathscr{I}_1$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(u) = 0$ et $\mathscr{I}_2$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(u)$ est nilpotent.

a. Montrer que $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ sont des idéaux non nuls de $\mathbb{C}[X]$. On note P_1 et P_2 leurs générateurs unitaires respectifs.

b. Quels rapports y a-t-il entre P_1 et P_2 ?

c. Montrer l'existence de $Q \in \mathscr{I}_2$ tel que $u - Q(u)$ soit diagonalisable.

Solution

Cet exercice semble facile du fait que la dernière question est extrêmement classique (décomposition en somme d'un diagonalisable et d'un nilpotent qui commutent), mais le classicisme n'est pas exclusif d'une certaine subtilité. Dans la question b. *on prendra en compte le fait que « rapports » est au pluriel.*

a. On peut bien entendu invoquer le théorème de Cayley & Hamilton, mais pour l'instant on peut se contenter de voir que la famille $(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n^2})$ est une famille de n^2+1 vecteurs de l'espace $\mathscr{L}(E)$, de dimension n^2, donc que c'est une famille liée. Cela montre que $\mathscr{I}_1$ n'est pas nul. Quant à $\mathscr{I}_2$, il contient $\mathscr{I}_1$, donc n'est pas nul non plus.

▷ Montrons que $\mathscr{I}_1$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$. Comme $P \mapsto P(u)$ est linéaire, $\mathscr{I}_1$ est un espace vectoriel. De plus, si $P \in \mathscr{I}_1$, et $R \in \mathbb{C}[X]$, on a alors $(RP)(u) = R(u)P(u) = 0$, donc $\mathscr{I}_1$ est stable par la multiplication externe de $\mathbb{C}[X]$. Ainsi $\mathscr{I}_1$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$. Comme idéal non nul, il admet un unique générateur unitaire P_1.

De façon plus abstraite, on aurait aussi pu remarquer que l'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Alors $\mathscr{I}_1$ est le noyau d'un morphisme d'algèbres, donc un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

▷ Montrons que $\mathscr{I}_2$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$. Si P et Q sont dans $\mathscr{I}_2$, on a $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$ qui reste nilpotent comme somme de deux nilpotents qui commutent : en effet, si $(P(u))^m = (Q(u))^p = 0$,

$$\big(P(u)+Q(u)\big)^{m+p} = \sum_{k=0}^{m+p} \binom{k}{m+p} (P(u))^k (Q(u))^{m+p-k} = 0\,,$$

car chaque terme de la somme contient en facteur ou bien $(P(u))^k$ avec $k \geqslant m$, ou bien $(Q(u))^{m+p-k}$ avec $m+p-k > p$. Si $R \in \mathbb{C}[X]$, on a aussi $\big(R(u)P(u)\big)^m = (R(u))^m (P(u))^m = 0$. Comme idéal non nul, $\mathscr{I}_2$ admet un unique générateur unitaire P_2.

b. De ce que $P_1 \in \mathscr{I}_2$, il résulte que P_2 divise P_1. D'un autre côté, puisque $P_2(u)$ est nilpotent, ses valeurs propres sont nulles, donc son polynôme caractéristique est X^n. Il découle du théorème de Cayley & Hamilton que $(P_2(u))^n = 0$, donc que $P_2^n \in \mathscr{I}_1$. Ainsi, P_1 divise P_2^n.

c. En trigonalisant u, il est clair que $P_2 = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (X - \lambda)$ et que P_1 s'écrit $P_1 = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$ puisque P_1 et P_2 ont les mêmes racines. Sur une base de trigonalisation, si $Q \in \mathscr{I}_2$, alors $u - Q(u)$ est triangulaire supérieure avec le spectre de u sur la diagonale. Donc $u - Q(u)$ est diagonalisable si et seulement si $P_2(u - Q(u)) = 0$. Comme $P_2(u - Q(u)) = P_2(X - Q(X))(u)$, on cherche un polynôme $Q \in \mathscr{I}_2$ tel que P_1 divise $P_2(X - Q(X))$.

Comme $\mathscr{I}_2$ est engendré par P_2, il est équivalent de chercher un polynôme $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_2(X - AP_2(X))$ soit divisible par P_1. Remarquons que

$$P_2(X - AP_2) = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} (X - \lambda - AP_2).$$

Il est donc **suffisant** de trouver A tel que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$,

$$(X - \lambda)^{n_\lambda} \mid (X - \lambda - AP_2).$$

En posant $L_\lambda = \dfrac{P_2}{X - \lambda}$, il est équivalent que

$$(X - \lambda)^{n_\lambda - 1} \mid 1 - AL_\lambda.$$

Plaçons ici une petite digression : soit C un polynôme de degré d, et φ l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}_{d-1}[X]$, qui associe à un polynôme Q le reste de la division euclidienne de Q par C. Alors φ est linéaire : en effet, si $Q_1 = D_1C + \varphi(Q_1)$ et $Q_2 = D_2C + \varphi(Q_2)$, alors on a

$$Q_1 + \lambda Q_2 = (D_1 + \lambda D_2)C + \varphi(Q_1) + \lambda\varphi(Q_2).$$

Comme le degré de $\varphi(Q_1) + \lambda\varphi(Q_2)$ reste strictement inférieur à d, l'unicité du reste de la division euclidienne assure que

$$\varphi(Q_1 + \lambda Q_2) = \varphi(Q_1) + \lambda\varphi(Q_2),$$

ce qui prouve la linéarité de φ. On notera $Q \equiv \varphi(Q)\ [C]$ par analogie avec les congruences arithmétiques (on pourrait aussi bien noter $Q \equiv \varphi(Q) \mod C$).

Il s'agit ici de trouver un polynôme A tel que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$,

$$AL_\lambda \equiv 1\ [(X - \lambda)^{n_\lambda - 1}].$$

Posons $d = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (n_\lambda - 1)$, et soit ψ l'application de $\mathbb{C}_{d-1}[X]$ dans $\prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathbb{C}_{n_\lambda - 2}[X]$ définie par

$$\psi(A) = (AL_\lambda\ [(X - \lambda)^{n_\lambda - 1}])_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}.$$

L'application ψ associe à A les restes des divisions euclidiennes des AL_λ par $(X-\lambda)^{n_\lambda-1}$. D'après la digression précédente, ψ est linéaire, et les espaces de départ et d'arrivée de ψ ont même dimension d. Si $A \in \operatorname{Ker}\psi$, alors chaque $(X-\lambda)^{n_\lambda-1}$ divise AL_λ, mais comme $L_\lambda \wedge (X-\lambda)^{n_\lambda-1} = 1$, le théorème de Gauss prouve que A est divisible par $(X-\lambda)^{n_\lambda-1}$. Comme ces polynômes sont premiers entre eux, alors A est divisible par leur produit qui est de degré d, donc A est nul. L'application ψ est injective entre espaces de même dimension, donc surjective, et il existe A tel que

$$\forall \lambda \in \operatorname{sp}(u), \quad AL_\lambda \equiv 1\ [(X-\lambda)^{n_\lambda-1}].$$

Pour ce polynôme A, on a $u - AP_2(u)$ qui est diagonalisable, car annulé par le polynôme scindé à racines simples P_2.

Cette décomposition est appelée « décomposition de Dunford » de l'endomorphisme u. La preuve proposée n'est pas classique, aussi vous présentons-nous une deuxième preuve de cette décomposition, plus usuelle.

Nous n'allons pas raisonner polynomialement, mais nous allons nous appuyer sur le théorème des noyaux. Nous avons besoin d'un renseignement sur les projecteurs spectraux qui interviennent dans le théorème des noyaux dont nous devons alors reprendre l'étude. Décomposons P_1 dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_1(X) = \prod_i (X-\lambda_i)^{m_i}.$$

Soit $C_i := \operatorname{Ker}(u-\lambda_i)^{m_i}$. Nous savons que $\bigoplus C_i = E$. Écrivons une relation de Bézout entre les $Q_i := \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j}$, qui sont premiers entre eux dans leur ensemble (il n'y a aucune racine commune à tous ces polynômes) :

$$\sum_i U_i(X)Q_i(X) = 1\,.$$

Évaluée en u et appliquée à x, cette égalité conduit à

$$\sum\nolimits_i U_i(u)Q_i(u)(x) = x, \text{ soit } x = \sum\nolimits_i x_i \text{ lorsque } x_i := U_i(u)Q_i(u)(x).$$

Posons $\pi_i = U_i(u)Q_i(u)$, de sorte que $x_i = \pi_i(x)$. Si $j \neq i$, alors on a $\pi_i(x_j) = U_i(u)Q_i(u)U_j(u)Q_j(u)(x) = 0$ car Q_iQ_j annule u. Donc

$$x_i = \pi_i(x) = \pi_i\Big(\sum\nolimits_j x_j\Big) = \pi_i(x_i).$$

En résumé, π_i est l'identité sur C_i et l'application nulle sur $\bigoplus_{j\neq i} C_j$. Il en résulte que π_i est la projection sur C_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} C_j$.

Posons alors $\delta := \sum_i \lambda_i \pi_i$. C'est un élément de $\mathbb{K}[u]$, diagonalisable puisque E est la somme des C_i, sur chacun desquels δ est l'homothétie de rapport λ_i. Enfin, $u - \delta$ est nilpotent. Pour le voir, il est commode de considérer l'induit de $u - \delta$ sur C_i, sous-espace qui est bien stable par u et par δ. Cet induit n'est autre que $u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_i$. Comme par définition $(u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_i)^{m_i} = 0$, cet induit est nilpotent et donc $u - \delta$ est nilpotent, d'indice moindre que $\max_i m_i$. On a pu écrire $u = \delta + \nu$, avec δ diagonalisable et ν nilpotent, et de plus $\delta \in \mathbb{K}[u]$. Il en résulte qu'aussi $\nu \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice corrigé 45

Posé en 2007

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E. Soit S un sous-espace stable par u tel que $E = S + \operatorname{Im} u$. Montrer que $S = E$.

Solution

Soit x un vecteur de E. On peut écrire $x = s_0 + u(x_1)$, avec $s_0 \in S$, par hypothèse. Mais $x_1 = s_1 + u(x_2)$, avec $s_1 \in S$, de sorte que l'on a $x = s_0 + u(s_1) + u^2(x_2)$. Par une récurrence évidente, on peut écrire

$$x = s_0 + u(s_1) + \cdots + u^k(s_k) + u^{k+1}(x_{k+1}).$$

Appliquée à un entier k tel que $u^{k+1} = 0$, cette relation conduit à

$$x = s_0 + u(s_1) + \cdots + u^k(s_k).$$

Comme les s_i sont dans S et que S est stable par u, x est dans S.

Exercice corrigé 46

Posé en 2003

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E tel que $\operatorname{rg} u = n - 1$. Montrer que les sous-espaces stables par u sont les $\operatorname{Ker} u^k$ lorsque k décrit $[\![0, n]\!]$ et qu'il y en a exactement $n+1$.

Solution

Posons $N_k := \operatorname{Ker} u^k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $d_k := \dim N_k$. Les N_k sont clairement stables. L'endomorphisme induit par u sur N_k admet pour noyau $N_k \cap N_1 = N_1$ pour $k \geqslant 1$. Comme $\dim N_1 = n - \operatorname{rg} u = 1$, cet endomorphisme est de rang égal à $\dim N_k - 1$. Comme $u(N_k) \subset N_{k-1}$, on a $d_{k-1} \geqslant d_k - 1$. Par somme, $n \geqslant d_n - d_0$. Mais, comme u est nilpotent, $u^n = 0$, donc $d_n = n$. Il en résulte que toutes les inégalités $d_{k-1} \geqslant d_k - 1$ sont des égalités, ce qui montre que $\dim N_k = n - k$ et que les N_k sont distincts.

Soit à présent V stable par u, de dimension k. L'endomorphisme induit par u sur V est encore nilpotent, donc vérifie $u^k = 0$. Cela signifie que $N_k \subset V$. Et il y a égalité à cause de l'égalité des dimensions.

On a utilisé ici le fait qu'un endomorphisme nilpotent v d'un espace de dimension p vérifie $v^p = 0$. On en trouvera une démonstration générale dans l'exercice 20 (p. 26). Bien entendu, si le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$, cela résulte immédiatement d'une triangulation. On peut enfin constater qu'un endomorphisme nilpotent est triangulable sur n'importe quel corps, puisque son polynôme minimal est scindé.

Exercice corrigé 47

Posé en 2003

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que

$$AX = \lambda X \ ; \ {}^tAY = \lambda Y \ ; \ {}^tYX \neq 0 .$$

On suppose que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$. Montrer que λ est racine simple du polynôme caractéristique.

Solution

Rappelons que l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à la dimension de l'espace propre correspondant, et qu'il peut être strictement plus grand : considérer une matrice nilpotente de rang $n - 1$. Une condition suffisante pour qu'il y ait égalité est que la matrice soit diagonalisable.

Quitte à considérer $A - \lambda I_n$ au lieu de A, on peut supposer que $\lambda = 0$. Montrons tout d'abord que $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$. Soit donc $Z \in \operatorname{Ker} A^2$. On a $AZ \in \operatorname{Ker} A$. Mais X est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} A$, qui est de dimension 1. Par conséquent, $AZ = \mu X$. Multipliant à gauche par ${}^tY$, il vient que $\mu {}^tYX = {}^tYAZ = {}^t({}^tAY)Z = 0$. Comme ${}^tYX \neq 0$, on obtient $\mu = 0$, donc $AZ = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} A^2 \subset \operatorname{Ker} A$.

Soit à présent $T \in \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A$. Alors $T = AU$ et $AT = 0$, donc $U \in \operatorname{Ker} A^2$, donc $U \in \operatorname{Ker} A$, soit $0 = AU = T$. Ainsi, $\operatorname{Im} A$ est en somme directe avec $\operatorname{Ker} A$. Le théorème du rang montre que ces deux sous-espaces sont supplémentaires. En considérant une base adaptée à cette décomposition en somme directe, on voit que la matrice de A a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est donc de la forme $XQ(X)$, où Q est le polynôme caractéristique de B. Mais B est nécessairement inversible, puisque clairement $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A = n-1$. Donc 0 n'est pas racine de Q. Ainsi, 0 est racine simple du polynôme caractéristique.

On retiendra de cette situation que pour montrer qu'un espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ admet un supplémentaire stable, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2$: en effet, dans ce cas, $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est un tel supplémentaire stable.

Exercice corrigé 48

Posé en 2003

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j} \geqslant 0$ pour tous i, j, et telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 .$$

a. Montrer que $|\det M| \leqslant 1$.

b. Étudier le cas d'égalité.

Solution

Les matrices M qui vérifient la propriété de l'énoncé sont appelées matrices stochastiques, elles sont utilisées en probabilités dans l'étude des chaînes de Markov. Les questions posées à ce sujet tournent souvent autour de leurs valeurs propres.

a. Nous allons montrer que toutes les valeurs propres, réelles ou complexes, de M, sont de module inférieur ou égal à 1, ce qui conduira au résultat souhaité. Considérons donc un vecteur propre $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ non nul et la valeur propre λ associée. Soit i tel que $|x_i|$ soit maximal (et donc non nul

puisque $X \neq 0$). On a :

$$\lambda x_i = (MX)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j.$$

En passant au module et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|\lambda||x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{ij}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{ij}|x_i| = |x_i|.$$

Comme $|x_i| \neq 0$ on peut diviser et il reste $|\lambda| \leqslant 1$.

b. Ici, nous allons vérifier que si $|\det M| = 1$, alors M est une matrice de permutation. Pour cela, nous allons utiliser des arguments topologiques. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques dont le déterminant est de module 1.

▷ Il est clair que $\mathscr{S}$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

▷ Vérifions que $\mathscr{S}$ est stable par produit : la propriété sur le déterminant n'est pas un problème, montrons juste que le produit de deux matrices stochastiques reste stochastique. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques, et fixons i. On a

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Big(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \Big) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1\,,$$

ce qui prouve que le produit de deux matrices stochastiques reste stochastique.

▷ Considérons maintenant la suite $(M^k)_{k \geqslant 0}$. Cette suite est à valeurs dans $\mathscr{S}$, donc on peut extraire une suite $\big(M^{\varphi(k)}\big)$ qui converge vers $L \in \mathscr{S}$. Comme $|\det L| = 1$, L est inversible, donc par continuité de l'inversion des matrices, $M^{-\varphi(k)} \to L^{-1}$ et donc

$$M^{\varphi(k+1)-\varphi(k)} \longrightarrow I_n.$$

Ainsi, en multipliant par M^{-1} (rappelons que $\det M \neq 0$), on en déduit que

$$M^{\varphi(k+1)-\varphi(k)-1} \longrightarrow M^{-1},$$

et on obtient de la compacité de $\mathscr{S}$ le résultat principal : M^{-1} est stochastique[2], et donc à coefficients positifs !

[2]On a ici montré que S est un sous-groupe de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$. En fait le résultat est vrai pour tout sous-monoïde compact de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, avec une démonstration analogue.

▷ Il ne nous reste plus qu'à conclure : on exploite le fait que $M \cdot M^{-1} = I_n$. Considérons la ligne d'indice j de M^{-1} et un indice i tel que $(M^{-1})_{ji} \neq 0$, dont l'existence est sûre puisque M^{-1} n'a pas de ligne nulle. Si $k \neq i$ on a

$$(MM^{-1})_{ki} = 0 = \sum_l m_{kl}(M^{-1})_{li}.$$

Tous les coefficients de M et M^{-1} étant positifs, les produits sont tous nuls, et en particulier $m_{kj} = 0$. Ainsi, sur la colonne j de M, il y a au plus un coefficient non nul. Si on note $f(j)$ ce coefficient, le fait qu'aucune ligne de M ne doit être nulle induit que f soit surjective. Comme f va de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, f est une bijection. Donc en particulier chaque ligne contient un seul coefficient non nul, coefficient qui vaut donc 1. On obtient ainsi le résultat final :

si M est une matrice stochastique de déterminant de module 1, alors il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $M_{ij} = 1$ si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

La réciproque est vraie, puisque M est alors clairement stochastique, et que l'action de σ sur les colonnes de M transforme M en l'identité, d'où $\det M = \varepsilon(\sigma) = \pm 1$.

Exercice corrigé 49

Posé en 2007

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Montrer que s'équivalent

(1) M est diagonalisable ;

(2) A est diagonalisable et il existe $X \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = AX - XA$.

Solution

Dans la suite, on pose $[Y, Z] = YZ - ZY$.

▷ Montrons que (2) $\Longrightarrow$ (1) et, pour cela, vérifions d'abord par récurrence sur k que $M^k = \begin{pmatrix} A^k & [A^k, X] \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$, ce que l'on suspecte lorsque l'on calcule M^2 et M^3. C'est vrai lorsque $k = 0$ et $k = 1$. Si l'on suppose que ça l'est pour k, on calcule

$$M^{k+1} = \begin{pmatrix} A & [A, X] \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & [A^k, X] \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A[A^k, X] + [A, X]A^k \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Or $A[A^k, X] + [A, X]A^k = A(A^kX - XA^k) + (AX - XA)A^k = [A^{k+1}, X]$. Soit alors P un polynôme simplement scindé annulant A. Ce qui précède montre, par linéarité, que

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & [P(A), X] \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} = 0.$$

Il en résulte que M est diagonalisable.

▷ Pour traiter l'implication (1)⇒(2), il est préférable de reformuler le problème. Déjà, le polynôme minimal de M est annulateur de A, donc A est diagonalisable. Fixons-nous une matrice A diagonalisable, de polynôme minimal P, et cherchons l'ensemble V des matrices B telles que $M_B = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Soit B dans V. Puisque M_B et la matrice $\operatorname{diag}(A, A)$ sont toutes deux diagonalisables et ont même polynôme caractéristique, elles sont semblables. Comme P est un polynôme annulateur de la seconde, c'est un polynôme annulateur de la première. La réciproque étant claire, on voit que $B \in V$ si et seulement si $P(M_B) = 0$. Posons $P(T) = \sum_k p_k T^k$. On peut écrire

$$P(M_B) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\varphi(B) = p_1 B + p_2(AB + BA) + p_3(A^2B + ABA + BA^2) + \cdots$$

En particulier, φ est linéaire, et V n'est autre que l'ensemble des B telles que $\varphi(B) = 0$. Notamment, V est un espace vectoriel et $\dim V = n^2 - \operatorname{rg}\varphi$.

Nous savons d'après la première implication que V contient l'image de $\psi = [A, \cdot]$ et nous voulons montrer qu'elle lui est égale. Il suffit donc de montrer que $\dim V \leqslant \operatorname{rg}\psi = n^2 - \dim \operatorname{Ker}\psi$, ou encore de vérifier que $\dim \operatorname{Ker}\psi \leqslant \operatorname{rg}\varphi$. Pour cela, nous allons montrer que $\operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Im}\varphi$.

Soit donc $X \in \operatorname{Ker}\psi$; la matrice X commute donc avec A. Posons $B = P'(A)^{-1}X$. Pour que cette égalité définisse bien B, il convient de vérifier que $P'(A)$ est inversible. Mais comme le polynôme P est simplement scindé, il est premier avec P', ce qui entraîne l'existence de U et V tels que $UP + VP' = 1$. Par évaluation en A, on obtient $V(A)P'(A) = I_n$.

Comme X commute avec A, B aussi. Par conséquent,

$$\varphi(B) = p_1 B + 2p_2 AB + 3p_3 A^2 B + \cdots = P'(A)B = X.$$

Cela achève la démonstration.

Chapitre 3

Espaces euclidiens

Exercice corrigé 50

Posé en 2001

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ convexe, symétrique par rapport à 0, bornée, de volume $\mu(A) > 2^n$. Montrer que $|A \cap \mathbb{Z}^n| \geqslant 3$.

Solution

Rappelons que le volume de A est $\mu(A) = \iint_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{x \in A} dx$.

On sait qu'il existe M tel que $A \subset [-M, M]^n$. Puisque A est non vide (à cause de son volume), il contient un point a, donc $-a$, donc le milieu de $[-a, a]$, soit 0. Il suffit donc de montrer qu'il contient un point $b \neq 0$ de $\mathbb{Z}^n$, car il contiendra aussi $-b$.

On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Considérons un vecteur v de $\mathbb{Z}^n$ et A_v le translaté $A + 2v$. Si $v \neq w$, on a $A_v \cap A_w = \emptyset$. En effet, dans le cas contraire, il existerait a et b dans A tels que $a + 2v = b + 2w$, donc $v - w = \dfrac{a + (-b)}{2} \in A$ par convexité, ce qui impliquerait $v - w = 0$. Les A_v sont donc deux à deux disjoints.

Fixons un entier $m > 0$. Considérons les A_v que l'on obtient lorsque v décrit $\mathbb{Z}^n \cap [-m, m]^n$. Alors $A_v \subset [-2m - M, 2m + M]^n$. Il y a $(2m+1)^n$ tels v. On sait que $\mu(A_v) = \mu(A)$ et donc que

$$\mu\left(\bigcup_v A_v\right) = \sum_v \mu(A_v) = (2m+1)^n \mu(A).$$

Comme $\mu([-2m-M, 2m+M]^n) = (4m+2M)^n$, on obtient

$$(2m+1)^n \mu(A) \leqslant (4m+2M)^n.$$

Donc

$$\mu(A) \leqslant \left(\frac{4m+2M}{2m+1}\right)^n.$$

Ceci étant vrai pour tout m, on obtient en faisant tendre m vers $+\infty$ l'inégalité $\mu(A) \leqslant 2^n$ et la contradiction cherchée.

Le résultat démontré est dû à Minkowski. Il entraîne un résultat proche que l'on peut laisser en exercice relativement facile : soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ ***compacte****, convexe, symétrique par rapport à 0, bornée, de volume $\mu(A) \geqslant 2^n$. Alors $|A \cap \mathbb{Z}^n| \geqslant 3$.*

Exercice corrigé 51

Posé en 2005

Soit $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions f continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que la fonction $x \mapsto f^2(x)e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On munit $\mathscr{E}$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt.$$

a. Montrer l'existence et l'unicité d'une famille orthonormée $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes, tels que L_n soit de degré n et de coefficient dominant strictement positif.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe trois réels a_n, b_n, c_n, tels que

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}.$$

Quel est le signe de a_n ?

c. Montrer, pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$(x-y)\sum_{i=0}^{n} L_i(x)L_i(y) = a_n\big(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_{n+1}(y)L_n(x)\big).$$

Solution

a. La famille de polynômes obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique convient. Détaillons un peu.

On vérifie d'abord que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{E}$ et qu'un polynôme P est dans $\mathscr{E}$: en effet, $P^2(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La construction qui suit s'effectue par récurrence sur n et s'appuie sur une hypothèse de récurrence évidente.

Notons $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. Alors $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Son supplémentaire orthogonal est une droite vectorielle D_n, qui contient donc deux vecteurs de norme 1, opposés l'un à l'autre. Les deux sont de degré n car on a $\mathbb{R}_n[X] = D_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'un des deux est donc de coefficient dominant strictement positif, c'est notre candidat pour L_n.

Comme L_n est dans D_n, L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc orthogonal à tous les L_k donnés par l'hypothèse de récurrence, pour $k < n$. Ainsi la famille (L_n) vérifie bien les hypothèses demandées, d'où l'existence.

Pour l'unicité, il suffit de remarquer que L_n doit forcément être dans D_n, puisque $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, orthogonale avec L_n. Or D_n ne contient qu'un seul polynôme de norme 1 et de coefficient dominant positif.

b. Le polynôme XL_n est dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Comme $(L_0, \ldots, L_{n+1})$ est une base orthonormée de cet espace, on a

$$XL_n = \sum_{k=0}^{n+1} \langle XL_n, L_k \rangle L_k.$$

Il s'agit donc de vérifier que $\langle XL_n, L_k \rangle$ est nul pour tout $k \leqslant n-2$. Or, le produit scalaire utilisé ici vérifie une propriété importante : on a pour tous polynômes A, B, C : $\langle A, BC \rangle = \langle AB, C \rangle$, ce qui se vérifie par un jeu d'écriture dans l'intégrale. Ainsi

$$\langle XL_n, L_k \rangle = \langle L_n, XL_k \rangle = 0\,.$$

En effet, XL_k est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et est donc orthogonal à L_n.

Posons donc $a_n = \langle XL_n, L_{n+1} \rangle$, $b_n = \langle XL_n, L_n \rangle$, et $c_n = \langle XL_n, L_{n-1} \rangle$. On obtient a_n en étudiant les termes en X^{n+1} à gauche et à droite de l'égalité. On en déduit que a_n est le quotient des deux coefficients dominants de L_n et L_{n+1}, donc a_n est positif.

c. Nous allons répondre à cette question en utilisant une récurrence. Comme pour toute récurrence il est raisonnable de commencer par vérifier la propagation, l'initialisation ne posant a priori pas de problème particulier.

Supposons donc que

$$(x-y)\sum_{i=0}^{n-1} L_i(x)L_i(y) = a_{n-1}\big(L_n(x)L_{n-1}(y) - L_n(y)L_{n-1}(x)\big).$$

On a

$$\begin{aligned}
xL_n(x)L_n(y) &= a_nL_{n+1}(x)L_n(y) + b_nL_n(x)L_n(y) + c_nL_{n-1}(x)L_n(y),\\
yL_n(x)L_n(y) &= a_nL_{n+1}(y)L_n(x) + b_nL_n(y)L_n(x) + c_nL_{n-1}(y)L_n(x),\\
(x-y)L_n(x)L_n(y) &= a_n\big(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_{n+1}(y)L_n(x)\big)\\
&\qquad + c_n\big(L_{n-1}(x)L_n(y) - L_n(x)L_{n-1}(y)\big).
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned}
(x-y)\sum_{i=0}^{n} L_i(x)L_i(y) &= a_n\big(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_{n+1}(y)L_n(x)\big)\\
&\qquad + (a_{n-1}-c_n)\big(L_n(x)L_{n-1}(y) - L_n(y)L_{n-1}(x)\big).
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à conclure en remarquant que

$$a_{n-1} = \langle XL_{n-1}, L_n\rangle = \langle L_{n-1}, XL_n\rangle = \langle XL_n, L_{n-1}\rangle = c_n,$$

ce qui permet de propager l'hypothèse de récurrence. Vérifions-la maintenant pour $n = 1$. Ce n'est pas si simple, car il faut pour cela calculer L_0, L_1, mais aussi a_1, ce qui nécessite de connaître L_2... On va donc ruser, et vérifier que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n = 0$ en donnant une valeur particulière à a_0. Cela nous permettra de ne calculer que L_0 et L_1. Rappelons que

$$\langle X^k, 1\rangle = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx = \Gamma(k+1) = k!\,.$$

Ainsi, $\langle 1, 1\rangle = 1$ et donc $L_0 = 1$. Le polynôme L_1 est de la forme $\alpha X + \beta$ et les conditions $\langle L_1, L_0\rangle = 0$ et $\langle L_1, L_1\rangle = 1$ conduisent à $\alpha + \beta = 0$ puis $\alpha^2 = 1$, soit $L_1 = X - 1$.

On a alors $(x-y)L_0(x)L_0(y) = (x-y)$ et $L_1(x)L_0(y) - L_1(y)L_0(x) = x - y$, donc la formule est vraie en posant $a_0 = 1$. La preuve précédente fonctionne encore, mais en vérifiant que l'on a bien $c_1 = a_0$, ce qui est le cas, puisque

$$c_1 = \langle XL_1, L_0\rangle = \langle X(X-1), 1\rangle = \langle X^2, 1\rangle - \langle X, 1\rangle = 1\,.$$

Les polynômes orthogonaux étudiés ici sont les polynômes de Laguerre.

Exercice corrigé 52

Posé en 2005

Soient $n \geqslant 2$, A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et q la forme quadratique sur l'espace des colonnes, définie pour toute colonne x par

$$q(x) = \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^t x \\ \hline x & A \end{array} \right).$$

Montrer que q est définie négative.

Solution

Nous allons chercher la forme polaire de q.

Il est assez clair qu'elle est égale à

$$\varphi(x, y) = \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^t y \\ \hline x & A \end{array} \right).$$

En effet, à x fixé, $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses lignes), et φ est symétrique grâce à l'invariance du déterminant par rapport à la transposition (n'oublions pas que A est symétrique).

Calculons alors la matrice de q dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, il s'agit pour cela de préciser la valeur de

$$\varphi(e_i, e_j) = \det \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & A & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right)$$

où les « 1 » sont respectivement à la i^e ligne et j^e colonne. En développant le déterminant suivant la première colonne, puis suivant la première ligne, on obtient

$$\varphi(e_i, e_j) = (-1)^{1+i}(-1)^j [A]_{i,j},$$

où $[A]_{i,j}$ est le déterminant de la matrice extraite de A en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne. Bref, la matrice de q est l'opposée de la comatrice de A.

Or, comme A est symétrique, sa comatrice l'est aussi et l'on a l'égalité $-\mathrm{com}(A) = -\det(A)A^{-1}$. Comme A est définie positive, A^{-1} aussi (il suffit pour voir cela de diagonaliser A en base orthonormée) et $\det(A)$ est

strictement positif. Ainsi, la matrice de q est définie négative, donc q est définie négative.

On aurait aussi pu résoudre cet exercice en commençant par réduire A en base orthonormée. Toutefois, la résolution proposée a l'avantage de permettre assez facilement de voir que toute forme quadratique définie négative peut s'écrire $\det\left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^t x \\ \hline x & A \end{array}\right)$ *avec une matrice A définie positive.*

Exercice corrigé 53

Posé en 2006

Caractériser les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ qui sont produit de deux formes linéaires.

Solution

Cet exercice est facile mais déroutant vu le désert quadratique qu'est devenu le programme. Il nécessite aussi un peu de langage.

À une forme quadratique q, on associe sa forme polaire φ. Étant donnée une base de $\mathbb{R}^n$, on lui associe aussi sa matrice A dans cette base, matrice qui vérifie $\varphi(x,y) = {}^t XAY$ lorsque X et Y sont les vecteurs colonne repérant x et y. Rappelons que l'on pose $\operatorname{rg}\varphi := \operatorname{rg} A$. Cette notion ne dépend que de φ car, si A' est la matrice de φ dans une autre base définie par la matrice de passage P, alors $A' = {}^t PAP$, donc $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$.

▷ Raisonnons par condition nécessaire. Soit $q(x) = \ell_1(x)\ell_2(x)$ avec ℓ_1 et ℓ_2 dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Si ℓ_1 ou ℓ_2 sont nulles, on a $\varphi = 0$. Sinon, supposons d'abord que (ℓ_1, ℓ_2) est liée par $\ell_2 = a\ell_1$. Dans la base préduale d'une base $(\ell_1, \dots)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ complétant (ℓ_1), on a $q(x) = ax_1^2$, donc $A = \operatorname{diag}(a, 0, \dots, 0)$. Il en résulte que $\operatorname{rg}\varphi = 1$. Supposons enfin que (ℓ_1, ℓ_2) est libre. Dans la base préduale d'une base $(\ell_1, \ell_2, \dots)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ complétant (ℓ_1, ℓ_2), on a $q(x) = x_1x_2$, donc $A = \operatorname{diag}(S, 0, \dots, 0)$ avec $S := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\operatorname{rg}\varphi = 2$. Dans tous les cas, $\operatorname{rg}\varphi \leqslant 2$.

Plaçons-nous dans le dernier cas où $\operatorname{rg}\varphi = 2$. Alors, si $(x_1, x_2) = (1, 1)$, $q(x) > 0$ tandis que si $(x_1, x_2) = (1, -1)$, $q(x) < 0$. En résumé, il est nécessaire que $\operatorname{rg}\varphi \leqslant 2$ et que, si $\operatorname{rg}\varphi = 2$, q prenne des valeurs strictement positives et strictement négatives.

▷ Supposons réciproquement ces conditions réalisées.

• Premier cas : $\operatorname{rg}\varphi = 0$. Le résultat attendu est clair (il suffit de prendre $\ell_1 = \ell_2 = 0$).

• Deuxième cas : $\operatorname{rg}\varphi = 1$. La matrice A est symétrique réelle, donc est orthogonalement semblable à $A' = \operatorname{diag}(\alpha, 0, \ldots, 0)$. La formule $A' = {}^tPAP$ montre que, dans une certaine base $(e_1, \ldots, e_n)$, on peut écrire $q(x) = \alpha x_1^2$ donc $q = (\alpha e_1^*)(e_1^*)$.

• Troisième cas : $\operatorname{rg}\varphi = 2$. Cette fois, $A' = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, 0, \ldots, 0)$ avec α et β non nuls. Donc $q(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2$. Si $\alpha\beta > 0$, q garde un signe constant, ce qui n'est pas. Donc, par exemple, $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. On peut donc écrire

$$q = (\sqrt{\alpha} e_1^*)^2 - (\sqrt{-\beta} e_2^*)^2 = \ell_1^2 - \ell_2^2 = (\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 + \ell_2),$$

ce qui donne le résultat cherché.

Exercice corrigé 54

Posé en 2007

Soient $R(a) := \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ et A une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer qu'il existe un entier m et des réels $a_1, \ldots, a_m$ tels que A soit orthogonalement semblable à $\operatorname{diag}\big(R(a_1), \ldots, R(a_m), 0_{n-2m}\big)$.

Solution

Cet exercice permet de classifier les matrices antisymétriques dans la relation d'orthogonale similitude.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ repéré par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On a donc $f^* = -f$.

On raisonne par récurrence forte sur n pour montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée. Le résultat étant vrai pour $n = 1$ (car $f = 0$), on le suppose vrai lorsque la dimension de l'espace est inférieure ou égale à $n - 1$. On considère l'endomorphisme autoadjoint positif f^*f. S'il est nul, c'est que $f = 0$, car $\operatorname{Ker} f^*f = \operatorname{Ker} f$. Le résultat est évident dans ce cas. Sinon, comme f^*f est diagonalisable, il admet une valeur propre $\lambda > 0$. Soit x un vecteur

unitaire tel que $f^*f(x) = \lambda x$; posons $y = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x)$. On a

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle f(x), f(x)\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle x, f^*f(x)\rangle = \|x\|^2 = 1\,.$$

D'autre part,

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle f^*(x), x\rangle = -\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle,$$

donc $\langle x, f(x)\rangle = 0$. La famille (x, y) est donc orthonormée.

Soit $V = \mathrm{vect}(x, y)$. Puisque

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f^2(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f^*f(x) = -\sqrt{\lambda}x,$$

V est stable par f. Donc $V^\perp$ est stable par $f^* = -f$, donc par f. Comme l'induit de f sur $V^\perp$ reste évidemment antisymétrique d'après la définition de l'adjoint, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver dans $V^\perp$ une base orthonormée $\mathscr{B}$ telle que la matrice de l'induit soit de la forme $\mathrm{diag}\big(R(a_2), \ldots, R(a_m), 0_{n-2m-2}\big)$.

Si l'on pose $a_1 = \sqrt{\lambda}$, on voit que, dans la base orthonormée $x, y, \mathscr{B}$, la matrice de f a la forme $\mathrm{diag}\big(R(a_1), \ldots, R(a_m), 0_{n-2m}\big)$.

Exercice corrigé 55

Posé en 2003

a. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice B de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

b. Montrer que la correspondance $A \mapsto B$ est continue.

Solution

L'unicité montrée dans la question **a** *est décalquée de l'exercice* 35 *(p.* 49*).*

a. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T DP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Les λ_i sont les valeurs propres de A, donc sont des réels positifs. Si l'on pose $B = P^T \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P$, on a $B^2 = A$ et B est symétrique positive. Cela montre l'existence.

En ce qui concerne l'unicité, tout revient à montrer que si B et B' sont dans $S_n^+(\mathbb{R})$ et si $B^2 = B'^2$, alors $B = B'$.

Soit $X := \operatorname{sp} B \cup \operatorname{sp} B' \subset \mathbb{R}$. On écrit $X = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ en utilisant une indexation injective : on ne compte qu'une fois chaque élément. Considérons l'ensemble $Y = \{{\lambda_1}^2, \ldots, {\lambda_p}^2\}$. L'indexation est encore injective car l'élévation au carré est injective sur $\mathbb{R}$.

Soit φ le polynôme interpolateur de Lagrange aux conditions $\varphi({\lambda_k}^2) = \lambda_k$ pour $k \in [\![1, p]\!]$. Puisque B est diagonalisable, on peut écrire $B = Q^{-1}DQ$ avec $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ où les a_i sont des λ_k. Donc

$$\varphi(B^2) = Q^{-1}\varphi(D^2)Q = Q^{-1}\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)Q = B.$$

Ainsi, $B = \varphi(A)$ et de même $B' = \varphi(A)$. Donc $B = B'$.

b. Notons $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne. Nous savons que, pour une matrice symétrique positive A, $\|A\| = \rho(A)$ où $\rho(A)$ désigne la plus grande des valeurs propres de A. Notons $\sqrt{A}$ l'unique matrice positive dont le carré est égal à A. D'après la façon dont on a construit une solution, $\rho(\sqrt{A}) = \sqrt{\rho(A)}$ et donc $\|\sqrt{A}\| = \sqrt{\|A\|}$.

Soit à présent (A_k) une suite de matrices symétriques positives convergeant vers la matrice symétrique positive A. Alors la suite $(\|A_k\|)$ est bornée, donc la suite $(\|\sqrt{A_k}\|)$ aussi. Soit B une valeur d'adhérence de cette suite. C'est nécessairement une matrice symétrique, et elle est positive car, pour tout X, ${}^tX\sqrt{A_k}X \geqslant 0$, donc ${}^tXBX \geqslant 0$ par passage à la limite. D'autre part, $B^2 = A$ par passage à la limite dans les égalités $(\sqrt{A_k})^2 = A_k$. Donc $B = \sqrt{A}$ grâce à l'unicité de cette racine carrée. Il en résulte que la suite bornée $(\|\sqrt{A_k}\|)$ admet l'unique valeur d'adhérence $\sqrt{A}$, donc qu'elle converge vers $\sqrt{A}$. Cela montre bien la continuité de la fonction « racine carrée ».

Un raisonnement assez semblable montre que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice corrigé 56

Posé en 2007

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 4x - 5y + 2$.

a. Préciser la nature de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$.

b. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \leqslant 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D dx\,dy$ par deux méthodes différentes.

Solution

Très proche du cours, cet exercice n'est pas très difficile.

a. La ligne de niveau considérée est une conique. Comme la forme quadratique $q(x,y) = x^2 - xy + y^2$ est définie positive (car $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ est de trace et de déterminant strictement positifs), la conique est de type ellipse. Nous avons donc trois possibilités : l'ensemble vide, le point, et l'ellipse.

Pour lever l'indétermination, on étudie l'intersection avec la droite $x = 0$. Les points $(0, y)$ sont dans la ligne de niveau lorsque $y^2 - 5y + 2 = 0$. Le discriminant de cette équation étant strictement positif, on trouve ainsi au moins deux points : l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est donc une vraie ellipse.

b. L'ensemble D est donc l'intérieur (fermé) de l'ellipse précédente. Nous allons calculer son aire de deux façons différentes.

▷ Tout d'abord, à x fixé, le domaine D est non vide si et seulement si l'inéquation

$$(\star) \qquad y^2 - y(5+x) + x^2 + 4x + 2 \leqslant 0.$$

admet des solutions, donc si et seulement si son discriminant $\Delta_1(x)$ est positif. On a

$$\Delta_1(x) = -3x^2 - 6x + 17 = -3\left(x^2 + 2x - \frac{17}{3}\right) = -3(x - x_1)(x - x_2)$$

où $x_1 = -1 - \sqrt{\frac{20}{3}}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{\frac{20}{3}}$. Lorsque x est fixé dans $[x_1, x_2]$, le point $(x, y) \in D$ si et seulement si $y \in [y_1(x), y_2(x)]$, où ce segment est l'ensemble des solutions de l'inéquation $(\star)$. On a alors

$$\begin{aligned}\iint_D dx\,dy &= \int_{x_1}^{x_2} \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\Delta_1(x)}dx = \sqrt{3}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{|(x-x_1)(x-x_2)|}dx.\end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto \sqrt{|(x-x_1)(x-x_2)|}$ est la hauteur au point d'abscisse x du cercle de diamètre $[(x_1, 0); (x_2, 0)]$. Donc l'intégrale est la demi-aire de ce cercle. Ainsi

$$\iint_D dx\,dy = \sqrt{3}\frac{\pi}{2}r^2,$$

où r, rayon du cercle, vaut $\frac{x_2 - x_1}{2} = \sqrt{\frac{20}{3}}$. On obtient donc une aire de $\frac{10\pi}{\sqrt{3}}$.

▷ Pour cette deuxième méthode, nous allons utiliser des arguments plus géométriques. On sait que l'aire d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b vaut πab. On va donc rechercher une équation réduite de l'ellipse, que l'on notera $\mathscr{E}$.

Pour cela, la symétrie de la forme quadratique en x et y conduit à effectuer une rotation de repère orthonormé d'angle $\frac{\pi}{4}\cdot$ On pose donc $x = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$, et on a alors

$$\mathscr{E}: \frac{1}{2}\big((X^2+Y^2)-(X^2-Y^2)+(X^2+Y^2)\big)+\frac{4}{\sqrt{2}}(X+Y)-\frac{5}{\sqrt{2}}(X-Y)+2=0.$$

On simplifie cette équation, qui n'a plus de termes en XY, en

$$\Big(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2+3\Big(Y-\frac{3\sqrt{2}}{2}\Big)^2=10\,,$$

soit encore $\dfrac{(X-X_0)^2}{a^2}+\dfrac{(Y-Y_0)^2}{b^2}=1$, avec $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{\dfrac{10}{3}}\cdot$ On retrouve alors l'aire de l'ellipse :

$$\pi ab = \frac{10\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Exercice corrigé 57

Posé en 1997

Soit $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$\gamma_a(t) := \big((2+\sin a\cos t)\cos 2t, (2+\sin a \sin t)\sin 2t, \sin a \sin t\big).$$

On pose aussi $\Gamma_a := \gamma_a([-\pi,\pi])$.

a. Reconnaître Γ_0.

b. Quand a-t-on $\Gamma_a = \Gamma_{a'}$?

c. Pour quelles valeurs de a la courbe Γ_a est-elle plane ?

Solution

On veillera à ne pas confondre Γ_a, qui est un ensemble de points, avec γ_a, qui est une fonction.

a. On a $\gamma_0(t) = (2\cos 2t, 2\sin 2t, 0)$. La courbe Γ_0 est donc le cercle inclus dans le plan (Oxy), de centre $(0,0,0)$ et de rayon 2.

b. Attention au fait que l'égalité $\Gamma_a = \Gamma_{a'}$ revient à l'égalité d'ensembles $\gamma_a([-\pi,\pi]) = \gamma_{a'}([-\pi,\pi])$ et pas à l'égalité de fonctions $\gamma_a(t) = \gamma_{a'}(t)$. Par ailleurs, γ_a ne dépend que de $\sin a$, donc on a clairement $\gamma_a = \gamma_{a'}$ (et $\Gamma_a = \Gamma_{a'}$ par conséquent) dès que $\sin a = \sin a'$.

Supposons donc que $a \neq a' \in [-\pi/2, \pi/2]$ (et ainsi $\sin a \neq \sin a'$) mais que $\Gamma_a = \Gamma_{a'}$. En particulier, l'ensemble des valeurs prises par la troisième composante de $\gamma_a(t)$ est $[-|\sin a|, +|\sin a|]$. On a donc $|\sin a| = |\sin a'|$. Comme a et a' sont différents dans $[-\pi/2, \pi/2]$, on a forcément $a' = -a$.

Maintenant, cette condition est suffisante, puisque

$$\gamma_a(\pi+t) = \big((2-\sin a\cos t)\cos 2t, (2-\sin a\sin t)\sin 2t, -\sin a\sin t\big) = \gamma_{-a}(t).$$

Ainsi $\Gamma_a = \gamma_a(\mathbb{R}) = \gamma_{-a}(\mathbb{R}) = \Gamma_{-a}$. Finalement,

$$\Gamma_a = \Gamma_{a'} \iff |\sin a| = |\sin a'|.$$

c. Supposons que la courbe Γ_a soit incluse dans le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(2+\sin a\cos t)\cos 2t + \beta(2+\sin a\sin t)\sin 2t + \gamma\sin a\sin t = 0\,.$$

Prise en 0, l'égalité devient $\alpha(2+\sin a) = 0$, et donc $\alpha = 0$ (car on a toujours $2+\sin a \neq 0$). Prise en $\frac{\pi}{2}$, l'égalité devient $\gamma\sin a = 0$. Puis en $\frac{\pi}{4}$, on a $\beta\Big(2+\frac{\sin a}{\sqrt{2}}\Big) = 0$ et donc $\beta = 0$.

Donc si la courbe est plane, on doit pouvoir trouver (α,β,γ) non simultanément nuls, ce qui ne peut arriver que lorsque $\sin a = 0$.

Réciproquement, on a vu à la première question que lorsque $a \in \pi\mathbb{Z}$, Γ_a est un cercle inclus dans le plan $z = 0$.

Exercice corrigé 58

Posé en 1997

Soit $S = (\Omega, M)$ une nappe paramétrée régulière, avec Ω ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$, dont les normales sont concourantes. Montrer que son image est incluse dans une sphère.

Solution

Cet exercice semble ardu, mais il est en fait très facile.

Écrivons $M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Nous allons d'abord exprimer le fait que la normale au point $M(u,v)$ passe par le point $A(a,b,c)$. Le plan tangent est dirigé par $\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial u}}$ et $\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial v}}$, donc sa normale passe par A si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à ces deux vecteurs. Cela se traduit par les deux équations :

$$(x-a)\frac{\partial x}{\partial u} + (y-b)\frac{\partial y}{\partial u} + (z-c)\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$
$$(x-a)\frac{\partial x}{\partial v} + (y-b)\frac{\partial y}{\partial v} + (z-c)\frac{\partial z}{\partial v} = 0\,.$$

Considérons maintenant la fonction φ définie sur Ω par l'égalité $\varphi(u,v) := ||\overrightarrow{AM(u,v)}||^2$. On a donc

$$\varphi(u,v) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Les équations précédentes conduisent immédiatement à $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$. Comme l'ouvert Ω est connexe par arcs, cela implique que φ est constante, et donc que l'image de S est incluse dans une sphère de centre A.

Exercice corrigé 59

Posé en 2006

Soient E un espace euclidien et S la sphère unité. Soit $f : E \mapsto E$ une application affine telle que $f(S) = S$. Montrer que f est une isométrie fixant O.

Solution

Cet exercice est assez facile, à condition de savoir ce qu'est une application affine...

Comme S est symétrique par rapport à O, et que f est une application affine, alors $f(S)$ est symétrique par rapport à $f(O)$. On imagine bien qu'une sphère n'est symétrique que par rapport à son centre, mais il convient d'éviter une preuve du type « ça se voit ». Supposons donc par l'absurde que

$f(O) \neq O$, et soient s_O et $s_{f(O)}$ les symétries centrales de centres respectifs O et $f(O)$. Comme ces deux symétries laissent globalement invariant S, leur composée aussi. Mais on sait que $s_{f(O)} \circ s_O$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{Of(O)}$.

Comme par hypothèse $\overrightarrow{v}$ est non nul, on peut prendre n dans $\mathbb{N}$ tel que $||n\overrightarrow{v}|| > 2$. La translation de vecteur $n\overrightarrow{v}$ est censée laisser globalement invariante S, mais ce n'est pas possible car S et son image par cette translation sont disjoints !

On déduit des arguments précédents que $f(O) = O$, et donc que f est en réalité linéaire. On a alors

$$\forall x \in E, ||x|| = 1 \Longrightarrow ||f(x)|| = ||x||.$$

Par homogénéité de l'application linéaire f, la propriété s'étend à tout vecteur : f est une isométrie linéaire.

Il est tout à fait possible de raisonner aussi matriciellement. On écrit $f(x) = Ax + b$, on prend un vecteur x de norme 1, et comme on sait que $||Ax+b||^2 = ||-Ax+b||^2$, on en déduit que $\langle Ax, b\rangle = 0$. On justifie alors que A est inversible pour démontrer d'abord que $b = 0$, puis que A est orthogonale.

Exercice corrigé 60

Posé en 2007

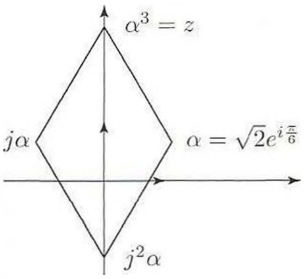
Déterminer les complexes z tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme du plan complexe.

Solution

Soit α l'une des racines cubiques de z, supposé non nul. Les deux autres sont $j\alpha$ et $j^2\alpha$. Si $z = \alpha^3$ est un sommet contigu à α, ce qu'il est toujours possible de supposer en adaptant α, la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points forment un parallélogramme est que

$$\alpha^3 - \alpha = j\alpha - j^2\alpha \text{ ou } \alpha^3 - \alpha = j^2\alpha - j\alpha,$$

ce qui exprime que deux côtés opposés sont (vectoriellement) égaux.



Compte tenu que $1 + j + j^2 = 0$, on déduit que

$$\alpha^2 = -2j^2 \text{ ou } \alpha^2 = -2j.$$

Comme $-j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\alpha = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ dans le premier cas. Dans le second, $\alpha = \pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Ces quatre valeurs conviennent car nous avons raisonné par condition nécessaire et suffisante. En ce qui concerne z, on obtient $z = \alpha^3 = \pm 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \pm 2\sqrt{2}i$ ou $z = \alpha^3 = \pm 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \pm 2\sqrt{2}i$. Il y a donc deux solutions.

Exercice corrigé 61

Posé en 2007

Déterminer l'image par $z \longmapsto fz^2$ du carré plein C de sommets $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

Solution

On peut traiter cet exercice de multiples façons. Bien que ce ne soit pas la méthode proposée, celle qui consiste à faire des calculs en coordonnées polaires est très agréable.

Il est naturel de commencer par déterminer l'image des côtés du carré. Le côté paramétré par $z = 1 + iy$, avec $y \in [-1, 1]$ s'envoie sur l'ensemble des Z de la forme $z^2 = (1 - y^2) + 2iy = X + iY$, soit

$$\begin{cases} X &= 1 - y^2 \\ Y &= 2y\,. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un arc de la parabole $X = 1 - \dfrac{Y^2}{4}$ limité à $Y \in [-2, 2]$.

De même, le côté $z = i + x$ s'envoie sur l'arc de la parabole $X = \dfrac{Y^2}{4} - 1$ limité à $Y \in [-2, 2]$. Par parité de f, les deux autres côtés s'envoient sur l'un des arcs précédents.

Il est plausible que C s'envoie sur la lentille L limitée par ces deux arcs de parabole, c'est-à-dire

$$L = \{(X, Y)\ ;\ 1 - \frac{Y^2}{4} \geqslant X \geqslant \frac{Y^2}{4} - 1\}.$$

Soit $z = x + iy \in C$. Alors $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY$, soit

$$\begin{cases} X &= x^2 - y^2 \\ Y &= 2xy\,. \end{cases}$$

On a donc

$$X + \frac{Y^2}{4} - 1 = x^2 - y^2 + x^2y^2 - 1 = (x^2 - 1)(y^2 + 1) \leqslant 0$$

et $X - \dfrac{Y^2}{4} + 1 = x^2 - y^2 - x^2y^2 + 1 = (x^2 + 1)(-y^2 + 1) \geqslant 0$. Ainsi, $f(C) \subset L$.

Soit réciproquement $X + iY \in L$. Le système

$$\begin{cases} X &= x^2 - y^2 \\ Y &= 2xy \end{cases}$$

équivaut, pour $Y \neq 0$, à $y = \dfrac{Y}{2x}$ et $4x^4 - 4x^2X - Y^2 = 0$. Cette dernière équation en x^2 admet une racine réelle strictement positive, donc l'équation en x admet une unique racine réelle $x_0 > 0$. Pour $x = 1$, le polynôme prend la valeur $4 - 4X - Y^2 \geqslant 0$. Donc $x_0 \leqslant 1$. On pose alors $y_0 = \dfrac{Y}{2x_0}$. Par le même procédé, on voit que $y_0 \in [-1, 1]$.

Lorsque $Y = 0$, on prend $y_0 = 0$ et $x_0 = \sqrt{X}$ si $X \geqslant 0$, $x_0 = 0$ et $y_0 = \sqrt{-X}$ si $X < 0$. On a bien $x_0 + iy_0 \in C$ puisque $X \in [-1, 1]$.

En résumé, $f(C) = L$.

Exercice corrigé 62

Posé en 2007

Soit $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de complexes. On suppose que le polygone $z_1 \dots z_n$ est convexe. Donner son aire en fonction des z_i.

Solution

Prenons un point a quelconque à l'intérieur du polygone. Le polygone est l'union disjointe (aux côtés près) des triangles az_iz_{i+1}, lorsque $z_{n+1} = z_1$. En outre, tous ces triangles ont même orientation, par exemple directe.

On sait que $[u, v] = \mathfrak{Im}\, \overline{u}v$. Par conséquent, l'aire algébrique du triangle (qui ici est positive par choix du sens direct) est donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \text{aire}(az_iz_{i+1}) &= \frac{1}{2}\, \mathfrak{Im}(\overline{z_i} - \overline{a})(z_{i+1} - a)) = \\ &= \frac{1}{2}\, \mathfrak{Im}(\overline{z_i}z_{i+1} - \overline{a}z_{i+1} + |a|^2 - \overline{z_i}a) = \frac{1}{2}\, \mathfrak{Im}(\overline{z_i}z_{i+1} - \overline{a}z_{i+1} - \overline{z_i}a). \end{aligned}$$

Par somme, l'aire S cherchée est donnée par

$$S = \frac{1}{2}\, \mathfrak{Im}\Big(\sum_i \overline{z_i}z_{i+1} - \overline{a}\sum_i z_{i+1} - a\overline{\sum_i z_i}\Big).$$

Comme $\sum_i z_{i+1} = \sum_i z_i$, la somme des deux derniers termes est réelle et il reste

$$S = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Im}\sum_i \overline{z_i}z_{i+1} = \frac{1}{4i}\sum_k (\overline{z_k}z_{k+1} - z_k\overline{z_{k+1}}).$$

Bien entendu, si le polygone est indirect, on obtient par cette formule l'opposé de l'aire.

Comme on pouvait s'y attendre, le résultat obtenu ne dépend pas du point a, que l'on pouvait même choisir à l'extérieur du polygone, avec cependant une difficulté supplémentaire dans l'interprétation du calcul. Il n'est pas utile de supposer le polygone convexe à condition toutefois qu'il ne soit pas croisé.

Exercice corrigé 63

Posé en 2007

Soit T un triangle de $\mathbb{R}^2$. Établir l'existence d'une ellipse tangente aux trois côtés de T en leur milieu.

Solution

Ici, le problème est entièrement affine en cela que les notions de milieu, de tangence, d'ellipse et évidemment de triangle sont invariantes par une transformation affine f bijective quelconque. Ainsi, l'image d'une ellipse par f reste une ellipse, les images par f de deux arcs tangents en M sont deux arcs tangents en $f(M)$, l'image d'un triangle est un triangle, l'image du milieu de MP est le milieu de $f(M)f(P)$.

Considérons alors un triangle équilatéral $T' = A'B'C'$ et son cercle inscrit Γ. Il est clairement tangent aux côtés de T' en leur milieu. Soit $T = ABC$ un triangle non aplati. Il existe une unique application affine f qui envoie A' sur A, B' sur B et C' sur C. En effet, il existe une unique application linéaire φ qui envoie $\overrightarrow{A'B'}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sur $\overrightarrow{AC}$. On la compose avec une translation qui envoie A' sur A pour obtenir f. Ce qui a été dit précédemment montre que $f(\Gamma)$ est une ellipse qui répond à la question.

De façon générale, étant données deux familles de $n+1$ points de $\mathbb{R}^n$ dont la première forme un repère affine, il existe une unique application affine qui envoie les points de la première sur les points correspondants de la seconde.

Exercice corrigé 64

Posé en 2007

Soient A, B, C et D quatre points du plan euclidien. Montrer que

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Solution

L'inégalité à démontrer s'appelle l'inégalité de Ptolémée.

Associons au point A son affixe a dans le plan complexe et de même pour les autres. Quitte à effectuer une translation, il n'est pas restrictif de supposer que $a = 0$. Il s'agit de montrer que

$$|c||d-b| \leqslant |b||d-c| + |d||c-b|. \tag{1}$$

Or (1) s'écrit

$$|cd - cb| \leqslant |cd - db| + |db - cb|,$$

ce qui est vrai grâce à l'inégalité triangulaire.

Le cas d'égalité se produit lorsque $cd - db = \lambda(db - cb)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit

$$\frac{c-b}{c-d} = \lambda \frac{b}{d}$$

dans le cas où $d(c-d) \neq 0$. Cela se traduit par le fait que l'angle $\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD} \rangle$ est égal à l'angle $\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD} \rangle$, ce qui entraîne que les points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.

Exercice corrigé 65

Posé en 2007

Soit q une forme quadratique non nulle sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $q(AB) = q(A)q(B)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que q est nulle sur le complémentaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, puis que q est le déterminant.

Solution

Vérifions déjà que le déterminant convient : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ est bien une forme quadratique, comme fonction polynomiale homogène de degré 2, sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}^4$. Naturellement, la relation $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ est vérifiée.

Prenons maintenant une forme quadratique q ayant la propriété de l'énoncé. Comme q est une forme quadratique, on a naturellement $q(0) = 0$. Si maintenant on a $AB = 0$, alors $q(A) = 0$ ou bien $q(B) = 0$. En particulier, si $A^2 = 0$ alors $q(A) = 0$.

Prenons A de rang 1. Alors A est équivalente à $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'il existe deux matrices inversibles Q et P telles que $A = PE_{12}Q$. On a alors $q(A) = q(P)q(E_{12})q(Q) = 0$ car E_{12} est nilpotente. Ainsi, $q(A) = 0$ pour toute matrice de rang 0 ou 1, c'est-à-dire sur le complémentaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Intéressons-nous maintenant à $q(I_2)$, où I_2 est la matrice identité. On obtient $q(I_2) = q(I_2)^2$, donc $q(I_2) = 0$ ou 1. Mais dans le cas où $q(I_2) = 0$, on aurait alors $q(A) = q(A)q(I_2) = 0$ pour toute matrice A, ce qui est impossible car q est non nulle. Donc $q(I_2) = 1$. On en déduit que si $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, alors $q(M)q(M^{-1}) = 1$, donc $q(M)$ est non nulle.

Maintenant, prenons une matrice M, et considérons

$$q(M + \lambda I_2) = q(M) + 2\lambda\varphi_q(M, I_2) + \lambda^2$$

où φ_q est la forme polaire de q. De même, on a

$$\det(M + \lambda I_2) = \det(M) + \lambda\varphi_{\det}(M, I_2) + \lambda^2.$$

Or ces deux polynômes de degré 2 ont exactement les mêmes zéros d'après le résultat précédent. Comme ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux, et $q(M) = \det(M)$.

Citons au passage un résultat plus fort : si f est une fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $f(AB) = f(A)f(B)$ pour toutes matrices A et B, alors soit f est constante égale à 0 ou à 1, soit f s'écrit $f(M) = |\det(M)|^\alpha$ avec $\alpha > 0$, soit f s'écrit $f(M) = \mathrm{sgn}(\det(M)) \cdot |\det(M)|^\alpha$, où $\mathrm{sgn}(x)$ vaut $+1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.

Pour prouver ce deuxième résultat, il faut un peu plus de travail, et utiliser le fait que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections.

Exercice corrigé 66

Posé en 2003

Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels strictement positifs. On pose

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{a_i b_j + a_j b_i}.$$

Montrer que q est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$.

Solution

Comme polynôme homogène de degré 2, q est une forme quadratique. Écrivons

$$\frac{x_i x_j}{a_i b_j + a_j b_i} = \frac{\dfrac{x_i}{a_i}\dfrac{x_j}{a_j}}{\dfrac{b_i}{a_i} + \dfrac{b_j}{a_j}}.$$

On reconnaît

$$\left(\frac{b_i}{a_i} + \frac{b_j}{a_j}\right)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{b_i}{a_i}t} e^{-\frac{b_j}{a_j}t}\,dt,$$

de sorte que

$$q(x) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i x_j}{a_i b_j + a_j b_i} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i}{a_i}\frac{x_j}{a_j}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{b_i}{a_i}t} e^{-\frac{b_j}{a_j}t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i}{a_i}\frac{x_j}{a_j} e^{-\frac{b_i}{a_i}t} e^{-\frac{b_j}{a_j}t}\,dt = \int_0^{+\infty} \left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{x_i}{a_i} e^{-\frac{b_i}{a_i}t}\right|^2 dt.$$

Il en résulte que $q(x) \geqslant 0$.

Exercice corrigé 67

Posé en 2006

Soit $P = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique strictement positive, avec A matrice carrée de taille p.

a. Montrer que

$$\det P \leqslant \det A \det C.$$

b. Montrer que $\det P \leqslant \prod_{i=1}^{n} p_{i,i}$.

Solution

On utilise la terminologie suivante : deux matrices symétriques A et B sont dites congruentes lorsqu'il existe P inversible telle que $B = {}^tPAP$. Deux matrices congruentes représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes.

a. L'hypothèse entraîne que les matrices A et C sont elles aussi symétriques strictement positives (A par exemple représente la restriction de la forme quadratique q_P au sous-espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs de base). On peut donc écrire $A = D^2$ et $C = E^2$, où D et E

sont symétriques strictement positives (prendre une forme diagonale orthogonalement semblable à A par exemple et les racines carrées des termes diagonaux). Donc

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & D^{-1}BE^{-1} \\ E^{-1}{}^tBD^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = P.$$

Posons $Q := \begin{pmatrix} I_p & D^{-1}BE^{-1} \\ E^{-1}{}^tBD^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & F \\ {}^tF & I_{n-p} \end{pmatrix}$. C'est encore une matrice symétrique strictement positive (elle est congruente à P) et

$$\det P = (\det D)^2 (\det E)^2 \det Q = \det A \det C \det Q.$$

Il suffit donc de montrer que $\det Q \leqslant 1$. Or

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -{}^tF & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & F \\ {}^tF & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -F \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} - {}^tFF \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $I_{n-p} - {}^tFF$ sont de la forme $1 - \lambda$ avec λ valeur propre de ${}^tFF$, qui est une matrice positive. Donc $1-\lambda \leqslant 1$. Comme d'autre part $I_{n-p} - {}^tFF$ est positive, $1 - \lambda \geqslant 0$. Il en résulte $\det(I_{n-p} - {}^tFF) \leqslant 1$, ce qui donne le résultat.

b. Lorsque l'on applique le résultat précédent à $p = 1$, on obtient l'inégalité $\det P \leqslant p_{1,1} \det P_1$, où P_1, matrice extraite de P en bas et à droite, est encore strictement positive. Une hypothèse de récurrence conclut.

Cet exercice est assez classique, mais d'ordinaire les deux questions sont inversées. On montre d'abord l'inégalité du **b.**, *par exemple en utilisant une racine carrée de P, puis on en déduit l'inégalité de la première question.*

Exercice corrigé 68

Posé en 2007

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathscr{O}_m(\mathbb{R})$ telles que tous les coefficients de UMV soient nuls, à l'exception éventuelle des termes « diagonaux », d'indices (i, i) pour $i \leqslant \min(n, m)$.

Solution

Cet exercice est très classique et digne d'intérêt. Il revient à montrer que, si f est une application linéaire, il existe une base orthonormée dont l'image par f est une famille orthogonale.

On note M^* la matrice transposée de la matrice M. La matrice M^*M, qui est dans $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$, est symétrique positive, donc il existe une famille $(E_1, \ldots, E_m)$ de vecteurs colonnes de taille m, orthonormée pour le produit scalaire canonique, telle que $M^*ME_i = \lambda_i E_i$, où les λ_i sont réels positifs ou nuls. On les réordonne : d'abord les $\lambda_i > 0$, jusqu'à l'indice r, puis ceux d'indices $r+1, \ldots, m$, qui sont nuls.

On a $(ME_i)^*ME_j = E_i^*M^*ME_j = \lambda_j E_i^*E_j = \lambda_j \delta_{i,j}$. Par conséquent, la famille $(ME_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale. De plus, $\|ME_i\| = \sqrt{\lambda_i}$.

Posons, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $U_i = \dfrac{ME_i}{\sqrt{\lambda_i}}$; la famille $(U_1, \ldots, U_r)$ est orthonormée. On la complète en une base orthonormée $(U_1, \ldots, U_n)$ de vecteurs colonnes, de sorte que

$$V := \operatorname{vect}(U_{r+1}, \ldots, U_n) = \Big(\operatorname{vect}(U_1, \ldots, U_r)\Big)^{\perp}.$$

Mais $\operatorname{vect}(U_1, \ldots, U_r)$ n'est autre que $\operatorname{Im} M = \operatorname{vect}(ME_1, \ldots, ME_n)$. Donc $V = (\operatorname{Im} M)^{\perp} = \operatorname{Ker} M^*$, de sorte que $M^*U_i = 0$ lorsque $i \in [\![r+1, n]\!]$.

Par construction, $M^*U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} M^*ME_i = \sqrt{\lambda_i} E_i$ pour $i \in [\![1, r]\!]$.

On a ainsi

$$M^*[U_1, \ldots, U_n] = [M^*U_1, \ldots, M^*U_n] = [\sqrt{\lambda_1}E_1, \ldots, \sqrt{\lambda_r}E_r, 0, \ldots, 0],$$

et donc

$$M^*[U_1, \ldots, U_n] = [E_1, \ldots, E_m] \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \ldots, 0).$$

Le « diag » est abusif, puisque il s'agit d'une matrice plutôt cryptodiagonale ; mais l'on aura compris. Posons alors

$$U := [U_1, \ldots, U_n]^* \text{ et } V := [E_1, \ldots, E_m].$$

Si $D = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \ldots, 0)$, on a

$$M^*U^* = VD, \text{ donc } UM = D^*V^*, \text{ soit } UMV = D^*.$$

Exercice corrigé 69

Posé en 2007

À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les trois réels α, β, γ existe-t-il un triangle ABC pour lequel les trois égalités $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \beta$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \gamma$ soient vérifiées ?

Solution

Cet exercice assez élémentaire nécessite quand même quelques connaissances d'algèbre linéaire.

Procédons par analyse et synthèse.

▷ Supposons qu'un tel triangle ABC existe. Alors on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = ||\overrightarrow{AB}||^2,$$

et de même, par permutation des variables :

$$||\overrightarrow{AB}||^2 = \alpha + \beta, \quad ||\overrightarrow{AC}||^2 = \alpha + \gamma, \quad ||\overrightarrow{BC}||^2 = \beta + \gamma.$$

On obtient donc une première condition nécessaire :

$$(C1) \qquad \alpha + \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \gamma \geqslant 0, \quad \beta + \gamma \geqslant 0.$$

Par ailleurs, la longueur d'un côté du triangle doit être inférieure à la somme des deux autres longueurs, donc on doit avoir de plus :

$$(C2) \qquad \begin{cases} \sqrt{\alpha+\beta} \leqslant \sqrt{\alpha+\gamma} + \sqrt{\beta+\gamma} \\ \sqrt{\alpha+\gamma} \leqslant \sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\beta+\gamma} \\ \sqrt{\beta+\gamma} \leqslant \sqrt{\alpha+\gamma} + \sqrt{\alpha+\beta}. \end{cases}$$

▷ Montrons que ces deux conditions sont suffisantes. Remarquons d'abord que la transformation φ définie par $\varphi(x, y, z) = (x+y, x+z, y+z)$ est telle que pour tout triangle ABC,

$$\varphi\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = \left(||\overrightarrow{AB}||^2, ||\overrightarrow{AC}||^2, ||\overrightarrow{BC}||^2\right).$$

Supposons maintenant que les inéquations $(C2)$ (et donc $(C1)$) soient vérifiées. D'après $(C2)$, il existe alors un triangle ABC tel que $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\alpha+\beta}$, $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{\alpha+\gamma}$, et $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{\beta+\gamma}$. Comme φ est un endomorphisme clairement bijectif de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que forcément

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha, \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \beta, \text{ et } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \gamma.$$

Nous vous invitons à vérifier que l'on peut aussi exprimer cette CNS par le fait que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha & -\beta \\ \alpha & \alpha+\gamma & \gamma \\ -\beta & \gamma & \beta+\gamma \end{pmatrix}$ *est positive.*

Exercice corrigé 70

Posé en 1997

Trouver la nature de l'ensemble des points équidistants de deux droites non concourantes données de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

Solution

Au-delà de l'équation cartésienne de l'ensemble considéré, il s'agira de reconnaître l'objet géométrique associé : c'est une quadrique.

Nous allons résoudre analytiquement cette question. Il nous faut d'abord trouver un repère orthonormé de l'espace dans lequel les droites auront des équations agréables. Pour cela, considérons d'abord le cas où les deux droites (appelons-les $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$) ne sont pas parallèles. Elles ont alors une unique perpendiculaire commune Δ, qui les recoupe en deux points A_1 et A_2. Si les deux droites sont parallèles, on garde l'existence, mais plus l'unicité, d'une telle perpendiculaire commune.

Plaçons-nous dans un repère orthonormé, centré au milieu de $[A_1A_2]$, et dans lequel la droite Δ est exactement l'axe (Oz). Notons $a > 0$ la demi-distance entre A_1 et A_2. Puis tournons le repère autour de l'axe Δ, de sorte que les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ aient alors pour équation :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} z = +a \\ x\cos\theta + y\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} z = -a \\ x\cos\theta - y\sin\theta = 0\,. \end{cases}$$

Si M est un point de l'espace de coordonnées (x, y, z), alors on a

$$\begin{cases} d^2(M, \mathscr{D}_1) = (z-a)^2 + (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 \\ d^2(M, \mathscr{D}_2) = (z+a)^2 + (x\cos\theta - y\sin\theta)^2. \end{cases}$$

Donc l'ensemble recherché admet pour équation cartésienne :

$$\mathscr{P} : az = xy\sin\theta\cos\theta.$$

Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique (d'un plan dans le cas particulier où $\cos\theta\sin\theta = 0$, qui correspond à deux droites parallèles).

Exercice corrigé 71

Posé en 2003

Soient E l'ellipse de paramétrage $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ avec $a > b > 0$ et, pour $k \in [\![1, 4]\!]$, M_k le point de E de paramètre t_k. Montrer que les quatre points M_k sont cocycliques si et seulement si $\sum_{k=1}^{4} t_k \equiv 0 \mod 2\pi$.

Solution

Cet exercice suppose une certaine aisance, voire une aisance certaine, dans les calculs.

La condition de cocyclicité équivaut à l'existence de réels A, B et C tels que, pour $k \in [\![1,4]\!]$,

$$a^2\cos^2 t_k + b^2\sin^2 t_k + Aa\cos t_k + Bb\sin t_k + C = 0\,.$$

Passons en exponentielle complexe. Il vient

$$(a^2-b^2)e^{2it_k} + (a^2-b^2)e^{-2it_k}$$
$$+ (2Aa - 2iBb)e^{it_k} + (2Aa + 2iBb)e^{-it_k} + 2a^2 + 2b^2 + 4C = 0.$$

Posons $z = e^{it}$. La relation précédente s'écrit

$$\alpha z^4 + \beta z^3 + \gamma z^2 + \delta z + \alpha = 0$$

avec $\alpha = a^2 - b^2$, $\beta = 2Aa - 2iBb$, $\gamma = 2a^2 + 2b^2 + 4C$ et $\delta = 2Aa + 2iBb$.

Le polynôme de degré 4 ainsi construit admet les quatre racines e^{it_k}, dont le produit vaut 1. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} t_k \equiv 0 \mod 2\pi$.

Supposons réciproquement cette relation vérifiée. Considérons le polynôme $(a^2-b^2)\displaystyle\prod_{k=1}^{4}(z - e^{it_k})$, que l'on écrit $\alpha z^4 + \beta z^3 + \gamma z^2 + \delta z + \alpha$ avec $\alpha = a^2 - b^2$. Les relations $\beta = 2Aa - 2iBb$ et $\delta = 2Aa + 2iBb$ déterminent A et B (car $a^2 - b^2 \neq 0$), puis l'égalité $\gamma = 2a^2 + 2b^2 + 4C$ détermine C. Ainsi, l'égalité

$$(a^2-b^2)e^{2it_k} + (a^2-b^2)e^{-2it_k} +$$
$$(2Aa - 2iBb)e^{it_k} + (2Aa + 2iBb)e^{-it_k} + 2a^2 + 2b^2 + 4C = 0$$

est vérifiée, ce qui indique que, pour tout k,

$$a^2\cos^2 t_k + b^2\sin^2 t_k + Aa\cos t_k + Bb\sin t_k + C = 0\,.$$

Il n'est pas certain que A, B et C soient réels mais, par prise de la partie réelle, on a une relation analogue avec des nombres réels. Les quatre points M_k sont bien cocycliques.

Exercice corrigé 72

Posé en 2006

Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.

a. Montrer que pq est diagonalisable.

b. Vérifier que les valeurs propres de pq sont comprises entre 0 et 1.

c. Les résultats précédents sont-ils toujours vrais lorsque p et q ne sont plus orthogonaux ?

Solution

Cet exercice n'est pas facile, car la notion de diagonalisabilité passe mal au produit.

Prenons d'abord un exemple. On se place dans le plan canoniquement euclidien $\mathbb{R}^2$, et on note $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(u_0)$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(u_\theta)$. Alors $q(u_{\theta+\pi/2}) = 0$ donc $u_{\theta+\pi/2}$ est vecteur propre de pq associé à la valeur propre 0. Puis $q(u_0) = (u_0|u_\theta)u_\theta$ et $pq(u_0) = (u_0|u_\theta)^2 u_0 = \cos^2(\theta)u_0$. On obtient bien que pq est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont dans $[0, 1]$.

a. Il s'agit de démontrer qu'un endomorphisme est diagonalisable sans rien pouvoir dire des valeurs propres, comme le laisse présager l'exemple traité précédemment. On dispose classiquement de deux types d'arguments pour cela : soit on trouve un polynôme annulateur scindé à racines simples (mais dans ce cas on connaîtrait les valeurs propres), soit on montre que l'endomorphisme est symétrique.

Le problème ici, c'est que pq n'est pas symétrique, même si p et q le sont. En effet, l'adjoint de pq est alors qp, et rien n'indique que les deux projecteurs commutent entre eux. Nous allons élaborer une autre stratégie : on va chercher des sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ stables par $h = pq$, sur lesquels la restriction de h est symétrique. On pourra alors trouver pour chaque F_i une base de vecteurs propres. Si la somme des F_i vaut E, alors on aura une famille génératrice constituée de vecteurs propres de h, dont on pourra extraire une base.

Cherchons des espaces stables par h et, classiquement, commençons par l'image et le noyau. L'image de h est incluse dans l'image de p, donc $\mathrm{Im}\, p$ est stable par h. Si x et y sont dans $\mathrm{Im}\, p$, on a, compte-tenu de $p(x) = x$

et $p(y) = y$,

$$\langle pq(x)|y\rangle = \langle q(x)|p(y)\rangle = \langle q(x)|y\rangle = \langle qp(x)|y\rangle = \langle x|pq(y)\rangle$$

car qp est l'adjoint de pq. Ainsi h est bien symétrique sur $\operatorname{Im} p$.

Le noyau de h contient celui de q : sur $\operatorname{Ker} q$, $h = 0$ est bien diagonalisable.

Notons maintenant F le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ (ces deux sous-espaces ne sont pas forcément en somme directe). Alors on écrit $F = (\operatorname{Im} p)^{\perp} \cap (\operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$ car p et q sont des projecteurs orthogonaux. Sur F, on a donc $h(x) = pq(x) = p(x) = 0$, donc la restriction de h à F est bien diagonalisable.

Récapitulons : on peut trouver des vecteurs propres de h de sorte à construire une base de $\operatorname{Im} p$, une base de $\operatorname{Ker} q$, et une base de F. Comme $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + F$, on peut extraire une base de E constituée de vecteurs propres pour h.

> *Remarque : comme $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} q$ n'ont aucune raison d'être des espaces orthogonaux, la base obtenue ne sera pas forcément orthogonale. Ceci se comprend puisque h n'est pas a priori symétrique.*

b. Soient donc λ une valeur propre de pq et x un vecteur propre de norme 1. On a alors $\lambda = \langle pq(x)|x\rangle$. Supposons que $\lambda \neq 0$ (sinon il n'y a rien à montrer), on a alors $x \in \operatorname{Im} p$. Comme p est un projecteur orthogonal, c'est un endomorphisme symétrique, donc

$$\langle pq(x)|x\rangle = \langle q(x)|p(x)\rangle = \langle q(x)|x\rangle.$$

Or, grâce à une propriété bien connue des projecteurs orthogonaux, on a $\langle q(x)|x\rangle \geqslant 0$ et $\langle q(x)|x\rangle \leqslant ||x||^2 = 1$. Ainsi, $\lambda \in [0, 1]$.

c. Les résultats précédents sont faux lorsque p et q ne sont plus orthogonaux. En effet, on peut alors construire p et q de sorte que pq soit nilpotent non nul, donc non diagonalisable. Considérons E de dimension 2, et (e_1, e_2) une base de E.

Soit q le projecteur de noyau $\operatorname{vect}(e_1)$ et d'image $\operatorname{vect}(e_2)$. Il nous suffit maintenant de construire un projecteur p tel que $p(e_2) = e_1$, par exemple le projecteur d'image $\operatorname{vect}(e_1)$ et de noyau $\operatorname{vect}(e_2 - e_1)$. On a bien $p(e_2) = e_1$ puisque $e_2 = e_1 + (e_2 - e_1)$.

Finalement, $pq(e_1) = 0$ et $pq(e_2) = p(e_2) = e_1$, donc pq est bien nilpotent et non nul.

Exercice corrigé 73

Posé en 1995

a. Soit H une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice K, symétrique positive, telle que $K^2 = H$.

b. Soient H et K des matrices symétriques positives. Montrer que les valeurs propres de HK sont réelles positives.

c. Soient H, K et L des matrices symétriques positives. On suppose HKL symétrique. Montrer qu'elle est positive.

Solution

L'énoncé original a été modifié pour tenir compte du fait que les matrices hermitiennes ont entre temps disparu du programme. La question **c** *est difficile.*

a. Il est plus commode de raisonner en termes d'endomorphismes autoadjoints. Soit donc v un endomorphisme autoadjoint positif d'un espace euclidien E. On sait que E est la somme directe orthogonale des espaces propres $E_\lambda(v)$ et que les λ sont positifs ou nuls.

▷ Nous raisonnons d'abord par condition nécessaire. Soit u un endomorphisme autoadjoint positif tel que $u^2 = v$. Puisque u commute avec v, chaque $E_\lambda(v)$ est stable par u. Notons u_λ l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(v)$. Il est encore autoadjoint positif et vérifie $u_\lambda^2 = \lambda \mathrm{Id}_\lambda$ (où Id_λ désigne l'identité de $E_\lambda(u)$, c'est-à-dire v_λ). Une valeur propre μ de u_λ vérifie $\mu^2 = \lambda$. Comme $\mu \geqslant 0$, on a nécessairement $\mu = \sqrt{\lambda}$. Mais, l'endomorphisme u_λ étant diagonalisable, il est égal à $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_\lambda$. En d'autres termes, u est unique sur chacun des $E_\lambda(v)$, dont la somme est égale à E. Il existe donc au plus un tel u.

On trouvera une démonstration très différente de l'unicité de la racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif dans l'exercice 55 *(p.* 78*).*

▷ Il suffit de vérifier que l'endomorphisme u défini par $u(x) = \sqrt{\lambda}x$ lorsque $x \in E_\lambda(v)$ répond à la question. Il est bien autoadjoint puisqu'il admet une base orthonormée de vecteurs propres, positif puisque ses valeurs propres sont positives, et l'égalité $u^2 = v$, vérifiée sur chaque $E_\lambda(v)$, l'est par linéarité sur tout l'espace.

b. ▷ Supposons d'abord que H est strictement positive. On peut donc écrire $H = L^2$ avec L symétrique positive, et même strictement positive car, comme H, elle est inversible. Ainsi, $HK = L^2K = L(LKL)L^{-1}$. Par conséquent, HK est semblable à la matrice $LKL = {}^tLKL$. Mais ${}^tLKL$ et K représentent la même forme quadratique dans deux bases : pour toute colonne X on a

$$\langle {}^tLKLX, X\rangle = \langle K(LX), (LX)\rangle \geqslant 0\,.$$

Elles sont donc toutes deux symétriques positives. Par conséquent, le polynôme caractéristique de LKL est scindé à racines réelles positives.

▷ Dans le cas général où H n'est que positive, il existe U orthogonale telle que ${}^tUHU = \mathrm{diag}(0, H_1)$ avec H_1 symétrique strictement positive. Posons ${}^tUKU = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ {}^tK_2 & K_3 \end{pmatrix}$. Alors

$${}^tU(HK)U = ({}^tUHU)({}^tUKU) = \begin{pmatrix} 0_p & 0 \\ H_1{}^tK_2 & H_1K_3 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la forme triangulaire par blocs de la matrice, on a l'égalité $\chi_{HK}(T) = (-T)^p\chi_{H_1K_3}(T)$. Mais K_3 est symétrique positive, car elle représente la restriction, à l'espace vectoriel engendré par les derniers vecteurs d'une certaine base, de la forme quadratique représentée par K. Il résulte du premier cas que le polynôme caractéristique de HK est scindé dans $\mathbb{R}$ et à racines positives ou nulles.

> *On peut aussi démontrer le cas général par densité, en remarquant la positivité pour tout $\varepsilon > 0$ de $(H + \varepsilon I_n)K$, et en démontrant qu'une limite de polynômes unitaires à racines réelles positives reste à racines réelles positives.*

c. ▷ Supposons d'abord H strictement positive. En écrivant $H = M^2$ avec M symétrique strictement positive, on obtient

$$HKL = M(MKLM^{-1})M = {}^tM(MKLM^{-1})M\,.$$

Comme HKL est symétrique, $MKLM^{-1}$ l'est aussi. Il suffit de montrer qu'elle est positive, car alors HKL le sera aussi. Mais elle est semblable à KL, qui d'après le **b** a toutes ses valeurs propres réelles et positives. Cela emporte la conclusion.

▷ Dans le cas où H n'est que positive, on ne peut pas procéder exactement comme dans la question **b**. Par le choix d'une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,H \cap \mathrm{Ker}\,L$, complétée en une base orthonormée de E, on peut écrire ${}^tUHU = \mathrm{diag}(0_p, H_1)$ avec U orthogonale et H_1 symétrique positive, ainsi que ${}^tULU = \mathrm{diag}(0_p, L_1)$, la matrice L_1 étant elle aussi symétrique positive.

Posons enfin ${}^tUKU = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ {}^tK_2 & K_3 \end{pmatrix}$. Il vient

$$ {}^tU(HKL)U = ({}^tUHU)({}^tUKU)({}^tULU) = \operatorname{diag}(0_p, H_1K_3L_1). $$

Comme HKL est symétrique, la matrice $H_1K_3L_1$ est symétrique. D'autre part, si $\varepsilon > 0$, la matrice $H_1 + \varepsilon L_1$ est symétrique strictement positive. En effet, lorsque $Y \in \mathscr{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$ est non nul,

$$ {}^tY(H_1 + \varepsilon L_1)Y > 0 $$

comme somme de deux termes positifs qui ne peuvent être nuls simultanément : les égalités ${}^tYH_1Y = {}^tYL_1Y = 0$ entraînent d'après le lemme ci-après que $H_1Y = L_1Y = 0$ puisque H_1 et L_1 sont symétriques positives, et donc que $\begin{pmatrix} 0_p \\ Y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} H \cap \operatorname{Ker} L$. On en déduit que $Y = 0$ puisque les éléments de $\operatorname{Ker} H \cap \operatorname{Ker} L$ ont leurs $n-p$ dernières composantes nulles par construction.

Lemme. Si A est une matrice symétrique positive et X est un vecteur colonne tel que ${}^tXAX = 0$, alors $AX = 0$.

Démonstration. L'on sait que l'inégalité de Cauchy & Schwarz s'applique à la forme bilinéaire positive $(X, Y) \mapsto {}^tYAX$. Par conséquent,

$$ ({}^tYAX)^2 \leqslant ({}^tYAY)({}^tXAX). $$

Donc, pour tout Y, ${}^tYAX = 0$. Appliquée aux différents vecteurs Y de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cette inégalité montre que $AX = 0$. *cqfd*

Considérons alors $(H_1 + \varepsilon L_1)K_3L_1 = H_1K_3L_1 + \varepsilon L_1K_3L_1$. C'est une matrice symétrique (car $H_1K_3L_1$ et $L_1K_3L_1$ le sont) qui est donc positive d'après le premier cas. Donc ${}^tYH_1K_3L_1Y + \varepsilon {}^tYL_1K_3L_1Y \geqslant 0$ pour tout Y. Faisant tendre ε vers 0, on obtient ${}^tYH_1K_3L_1Y \geqslant 0$ et le résultat.

Exercice corrigé 74

Posé en 2007

a. Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine euclidien. Soit Γ un cercle tangent aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ en, respectivement, A', B' et C'. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

b. Soient $A_0, \ldots, A_n$, $n+1$ points affinement indépendants d'un espace affine euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe une unique sphère tangente intérieurement aux faces du polyèdre.

Solution

Cet exercice n'est pas aussi facile que son énoncé élémentaire pourrait le laisser supposer.

a. Nous allons nous appuyer sur les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère (A, B, C). Considérons $M := \mathrm{bar}(A(\alpha), B(\beta), C(\gamma))$ où $\alpha + \beta + \gamma = 1$. On suppose que la droite (AM) coupe la droite (BC) en A'. Alors $A' = \mathrm{bar}\big(A(1-\lambda), M(\lambda)\big)$. Par associativité du barycentre,

$$\begin{aligned} A' &= \mathrm{bar}(A(1-\lambda), A(\lambda\alpha), B(\lambda\beta), C(\lambda\gamma)) \\ &= \mathrm{bar}(A(1-\lambda+\lambda\alpha), B(\lambda\beta), C(\lambda\gamma)). \end{aligned}$$

Comme $A' \in (BC)$, le coefficient de A est nul et $A' = \mathrm{bar}(B(\lambda\beta), C(\lambda\gamma))$. Il en résulte que $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$, ce qui s'écrit

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

Considérons à présent $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que (AA') et (BB') sont concourantes en M. Supposons en outre que

$$(\star) \qquad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Ce qui précède montre que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta} \text{ et } \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

À présent, la droite (CM), supposée non parallèle à (AB), coupe (AB) en un point C'' qui, toujours d'après le premier résultat, vérifie

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Cela montre que C' et C'' ont mêmes coordonnées barycentriques dans le repère (A, B) de la droite (AB), donc que $C' = C''$. En d'autres termes, (CC') passe par M ou, de façon équivalente, les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Vérifions que nous sommes dans les conditions d'application du résultat $(\star)$. Les droites (AA') et (BB') sont bien concourantes et (CC') n'est pas parallèle à (AB). Surtout, on a $AB' = AC' = a$ car les longueurs des

tangentes au cercle inscrit issues de A sont égales. De façon identique, $BC' = BA' = b$ et $CA' = CB' = c$. Vu la position de A', on a $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{c}{b}$ et, de même,

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{a}{c} \ ; \ \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{a}{b}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1,$$

donc que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

b. ▷ Appelons F_k l'espace affine engendré par tous les A_i sauf A_k. Il admet une équation de la forme $\varphi_k(M) = c_k$, où $\varphi_k(M) = \overrightarrow{B_kM}.\overrightarrow{u_k}$ avec $\overrightarrow{u_k}$ de norme 1. La distance $d_k(M)$ d'un point M à F_k est égale à $|\varphi_k(M) - c_k|$. Dans T, qui est le tétraèdre plein, c'est-à-dire l'enveloppe convexe des A_i, $\varphi_k - c$ garde un signe constant que l'on suppose sans restriction positif et donc d_k est affine. Considérons alors $D = (d_0, \ldots, d_k)$. C'est une fonction affine de T dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donc $D(T)$ est encore convexe. D'autre part, $d_k(A_k) = \delta_k > 0$, puisque $A_k \notin F_k$, tandis que $d_i(A_k) = 0$ lorsque $i \neq k$. Il en résulte que $D(a_k) = (0, \ldots, 0, \delta_k, 0, \ldots, 0)$. Mais tout point de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k D(a_k)$ est dans $D(T)$, lorsque les λ_k sont positifs et de somme 1. Si l'on pose $S := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\delta_i}$ et $\lambda_k := \dfrac{1}{S\delta_k}$, on obtient que $(\dfrac{1}{S}, \cdots, \dfrac{1}{S}) \in D(T)$. Il existe par conséquent un point O de T équidistant des faces du tétraèdre, ce qui montre l'existence d'une sphère inscrite.

▷ Soit réciproquement $I \in T$ le centre d'une sphère inscrite dans T, de rayon r. On doit avoir I équidistant des différentes faces ou, de façon équivalente, tel que

$$\forall k \ \varphi_k(I) - c_k = r.$$

Si l'intersection de ces hyperplans contenait plus de deux points de T, elle contiendrait une droite qui couperait l'une des faces de T. En ce point, la distance commune à toutes les faces serait nulle, ce qui est impossible. Il y a donc unicité du centre.

Notons S_i l'aire de la face d'indice i et V le volume total du tétraèdre. Alors rS_i est le volume du tétraèdre de sommets I et tous les A_k sauf A_i, de sorte que

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n} rS_i = V.$$

Il est donc nécessaire que

$$r = \frac{V}{\sum_{i=0}^{n} S_i},$$

ce qui montre l'unicité du rayon.

Dans la question **a**, *on démontre en fait une partie du théorème de Céva, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que trois droites issues des sommets d'un triangle soient concourantes (ou parallèles). Cette condition est, avec les notations de la solution, que*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1\,.$$

On pouvait cependant procéder autrement en se contentant d'écrire les équations des droites dans le repère affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. *Les calculs se faisaient alors un peu à l'aveugle.*

Exercice corrigé 75

Posé en 2003

On considère l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et, en un point M_0 de cet ellipse, le cercle osculateur, c'est-à-dire le cercle de centre $M_0 + R\vec{n}$ passant par M_0, lorsque $\vec{n}$ désigne le vecteur normal et R le rayon de courbure au point M_0.

Donner le nombre de points d'intersection entre l'ellipse et ce cercle osculateur

Solution

Voilà un exercice extrêmement calculatoire !

L'idée est que le cercle osculateur approche très bien l'ellipse au point M_0. Un cercle tangent à l'ellipse en M_0 a une intersection au moins « double » en ce point. Parmi les cercles tangents, c'est le cercle osculateur qui approche le mieux l'ellipse et le contact sera « d'ordre » au moins 3. Comme une ellipse coupe un cercle en quatre points au plus, on peut penser qu'outre M_0, qui compte pour 3, il y aura un autre point exactement (éventuellement confondu avec M_0 si celui-ci compte pour 4). Ces idées sont très difficiles à rendre précises, mais elles sont nécessaires si l'on veut avoir le courage

de mener les calculs qui suivent, dont il faut au moins être convaincu qu'ils vont aboutir.

On paramètre l'ellipse par $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. On pose $c = \cos t$ et $s = \sin t$ pour abréger.

On a donc $\overrightarrow{OM} = (ac, bs)$; $\vec{t} = \dfrac{1}{N}(-as, bc)$ avec $N := \sqrt{a^2s^2 + b^2c^2}$; $\vec{n} = r_{\pi/2}(\vec{t}) = \dfrac{1}{N}(-bc, -as)$. On a aussi

$$\frac{1}{R} = \frac{[\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}, \overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}]}{\left\|\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}\right\|^3} = \frac{ab(c^2+s^2)}{N^3}.$$

Donc $R = \dfrac{N^3}{ab}$.

Plaçons-nous dans le repère $(M_0, \vec{t}, \vec{n})$, avec de nouvelles coordonnées X et Y données par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -as & -bc \\ bc & -as \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ac \\ bs \end{pmatrix}.$$

Dans ce repère, l'équation de l'ellipse devient

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{N}(asX + bcY) - ac\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{N}(bcX - asY) + bc\right)^2 = 1.$$

Après développement, on obtient l'équation

$$a^2b^2X^2 + (b^4c^2 + a^4s^2)Y^2 + 2XYabcs(b^2 - a^2) - 2N^3abY = 0. \qquad (1)$$

Le cercle osculateur, quant à lui, a dans ce repère l'équation

$$X^2 + (Y - R)^2 = R^2, \text{ soit } X^2 + Y^2 - 2\frac{N^3}{ab}Y = 0. \qquad (2)$$

Multiplions (2) par a^2b^2 et soustrayons à (1). Il vient

$$(b^4c^2 + a^4s^2 - a^2b^2)Y^2 + 2XYabcs(b^2 - a^2) = 0.$$

L'égalité $Y = 0$ conduit à $X = 0$ grâce à (1), ce qui fournit le point M_0. Sinon,

$$Y = \lambda X \text{ avec } \lambda = \frac{abcs(a^2 - b^2)}{b^4c^2 + a^4s^2 - a^2b^2}.$$

Reportant dans (1), on obtient en général une unique valeur de Y, donc un seul point M_1. Mais il reste à vérifier quelques détails. D'abord, si $c = 0$

ou $s = 0$, on retrouve $Y = 0$, donc le point M_1 coïncide avec M_0. Supposons $cs \neq 0$. Il faut étudier à part le cas $b^4c^2 + a^4s^2 - a^2b^2 = 0$: on obtient $X = 0$ et les deux équations compatibles

$$Y = \frac{2N^3ab}{b^4c^2 + a^4s^2} = \frac{2N^3}{ab}.$$

Cela correspond à un point M_1 distinct de M_0 qui a la particularité de se trouver sur la normale en M_0.

Finalement, si M_0 n'est pas l'un des sommets, il y a deux points d'intersection (M_0 et un autre point), et si M_0 est un des sommets de l'ellipse, le cercle osculateur ne recoupe pas l'ellipse.

Chapitre 4

Topologie, fonctions de plusieurs variables

Exercice corrigé 76

Posé en 2007

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $|f'(x)| \leqslant k < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit g sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) := (x + f(y), y + f(x)).$$

Montrer que g est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

Nous allons, comme on peut s'y attendre, appliquer l'important théorème d'inversion globale.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$, sa matrice jacobienne en (x, y) vaut $\begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice vaut $1 - f'(x)f'(y) \neq 0$, donc le théorème d'inversion globale permet d'affirmer que si g est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, alors g est bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Commençons par l'injectivité de g : supposons que $g(x, y) = g(x', y')$. Alors $f(y) - f(y') = x' - x$ et $f(x) - f(x') = y' - y$. Or, f est k-lipschitzienne par le théorème des accroissements finis, donc on a :

$$|x - x'| \leqslant k|y - y'| \text{ et } |y - y'| \leqslant k|x - x'|.$$

Comme $k < 1$, on déduit que $|x - x'| = |y - y'| = 0$ et donc que g est injective.

La partie plus difficile concerne la surjectivité de g. On va pour cela utiliser un argument de type point fixe. Fixons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et tâchons de transformer l'équation $g(x, y) = (\alpha, \beta)$ en une équation de point fixe :

$$g(x,y) = (\alpha, \beta) \iff \begin{cases} x + f(y) = \alpha \\ y + f(x) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} -f(y) + \alpha = x \\ -f(x) + \beta = y. \end{cases}$$

Considérons donc $h(x, y) := (-f(y) + \alpha, -f(x) + \beta)$, et munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $||(x, y)|| = \max(|x|, |y|)$. Alors comme f est k-lipschitzienne, h est aussi k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Nous sommes ici dans les hypothèses du théorème du point fixe, mais comme il n'est pas au programme, nous allons le démontrer dans ce cas particulier.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = (0, 0)$ et $u_{n+1} = h(u_n)$. Alors

$$||u_{n+2} - u_{n+1}|| = ||h(u_{n+1}) - h(u_n)|| \leqslant k||u_{n+1} - u_n||.$$

On en déduit immédiatement que $||u_{n+1} - u_n|| \leqslant k^n ||u_1 - u_0||$ et donc que la série $\sum_{n \geqslant 0} ||u_{n+1} - u_n||$ converge. Mais la série dont le terme général est $u_{n+1} - u_n$ converge absolument, donc converge puisque $\mathbb{R}^2$ est complet (car de dimension finie). Ainsi (u_n) converge. La limite l de (u_n) est alors un point fixe de h, car h est continue. Par construction on a alors $g(l) = (\alpha, \beta)$ et g est surjective.

On peut aussi se passer du théorème du point fixe de la façon suivante. On a l'équivalence

$$\begin{cases} x + f(y) = \alpha \\ y + f(x) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha - f(y) \\ y + f(\alpha - f(y)) = \beta. \end{cases}$$

Il suffit donc de montrer que l'équation $\varphi(y) := y + f(\alpha - f(y)) = \beta$ admet une solution. On vérifie aisément que $|\varphi(z) - \varphi(y)| \geqslant (1 - k^2)|z - y|$, ce qui entraîne que φ est injective, donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle tend vers des infinis de signes opposés en $\pm\infty$. Elle est donc surjective.

Exercice corrigé 77

Posé en 2007

On munit $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions monotones qui appartiennent à E. Montrer que $\mathscr{M}$ est un fermé d'intérieur vide de E.

Solution

▷ Pour montrer que $\mathscr{M}$ est d'intérieur vide, prenons une fonction $f \in \mathscr{M}$, choisissons $\varepsilon > 0$, et montrons que l'on peut trouver une fonction g ni croissante ni décroissante telle que $||g - f|| \leqslant \varepsilon$.

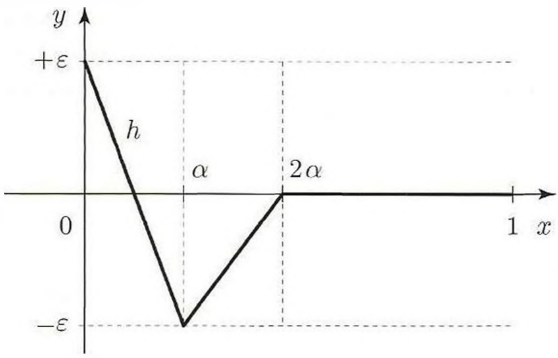
Pour cela, supposons par exemple f croissante (sinon on s'intéressera à $-f$), et cherchons g sous la forme $g = f + h$, avec h à la fois petite en taille et grande en variations. Utilisons la continuité de f en 0 pour justifier de l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que

$$f(0) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(2\alpha) < f(0) + \varepsilon.$$

Considérons h affine par morceaux sur $[0, 1]$ vérifiant

$$h(0) = +\varepsilon, \quad h(\alpha) = -\varepsilon, \quad h(2\alpha) = 0,$$

h étant nulle entre 2α et 1.



Posons donc $g = f + h$. On a $g(0) - g(\alpha) > \varepsilon$ et $g(2\alpha) - g(\alpha) \geqslant \varepsilon$, donc g n'est pas monotone. Pourtant, on a $||g - f|| \leqslant \varepsilon$, donc $\mathscr{M}$ est d'intérieur vide.

▷ Il est clair que $\mathscr{M}$ est fermé. En effet, une limite simple (*a fortiori* une limite uniforme) de fonctions croissantes est croissante, et une limite simple de fonctions décroissantes est décroissante. Donc les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ qui contiennent respectivement les fonctions croissantes et les fonctions décroissantes, sont tous deux fermés. La réunion de deux fermés est un fermé, donc $\mathscr{M}$ est fermé.

Exercice corrigé 78

Posé en 2007

Soit T le triangle $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \leqslant x\}$, et Φ continue de T dans $\mathbb{R}$. On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme uniforme. Pour $f \in E$, soit $A(f)$ la fonction

$$A(f) := x \longmapsto \int_0^x \Phi(x,y)f(y)dy.$$

a. Montrer que A est un endomorphisme continu de E.

b. On note $A_n = A \circ A \circ \cdots \circ A$, la composée n^e de A. Montrer l'existence de Φ_n continue de T dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout f,

$$A_n(f) = x \longmapsto \int_0^x \Phi_n(x,y)f(y)dy.$$

c. Étudier la convergence uniforme de (Φ_n).

Solution

a. La première propriété à vérifier est que $A(f)$ est bien dans E. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres n'aime pas que les paramètres soient aussi dans les bornes. Par le changement de variable $y = xt$, on obtient

$$A(f)(x) = x\int_0^1 \Phi(x,tx)f(tx)dt.$$

Comme Φ est continue sur le compact T, on est fondé à considérer le réel $M := \sup\limits_{a\in T} |\Phi(a)|$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique ici, puisque pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,tx)f(tx)$ est continue sur $[0,1]$, que pour tout x, l'intégrande est continue sur le segment $[0,1]$, et que l'on a la domination

$$|\Phi(x,tx)f(tx)| \leqslant M||f||_\infty$$

par une fonction intégrable sur $[0,1]$, et indépendante du paramètre x. Donc l'intégrale dans la définition de A est continue par rapport à x, et $A(f)$ est une fonction continue.

La linéarité de A est évidente, et avec les notations précédentes,

$$||A(f)||_\infty \leqslant M||f||_\infty.$$

Ainsi A est continue.

b. Supposons construite la fonction Φ_n, continue sur T. On a alors

$$\begin{aligned} A \circ A_n(f)(x) &= \int_0^x \Phi(x,y) A_n(f)(y) dy \\ &= \int_{y=0}^x \int_{t=0}^y \Phi(x,y)\Phi_n(y,t) f(t) dt\, dy \\ &= \int_{t=0}^x f(t) \int_{y=t}^x \Phi(x,y)\Phi_n(y,t) dy\, dt \\ &= \int_{t=0}^x f(t)\Phi_{n+1}(x,t) dt, \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue en posant

$$\Phi_{n+1}(x,t) = \int_{y=t}^x \Phi(x,y)\Phi_n(y,t) dy.$$

On a aussi $\Phi_1 = \Phi$.

On a utilisé ici un résultat d'interversion entre deux intégrales, qui est valable puisque l'on intègre la fonction $(y,t) \mapsto \Phi(x,y)\Phi_n(y,t)f(t)$, qui est continue, sur la partie élémentaire $\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant t \leqslant y\}$.

Il reste à vérifier que Φ_{n+1} est continue sur T. Pour cela on considère le changement de variable affine $y = t + u(x-t)$, qui présente l'intérêt de rendre les bornes indépendantes de x et t. On a :

$$\Phi_{n+1}(x,t) = (x-t) \int_{u=0}^1 \Phi(x, t+u(x-t))\Phi_n(t+u(x-t),t) du.$$

Sous cette forme, le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique : comme $|\Phi|$ et $|\Phi_n|$ sont continues sur le compact T, elles sont majorées, respectivement par M_1 et M_n. On va donc vérifier les hypothèses du théorème.

- Pour tout $u \in [0,1], (x,t) \mapsto \Phi(x, t+u(x-t))\Phi_n(t+u(x-t),t)$ est continue sur T.
- Pour tout $(x,t) \in T$, la fonction $u \mapsto \Phi(x, t+u(x-t))\Phi_n(t+u(x-t),t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$
- Pour tout $(x,t) \in T$, on a $|\Phi(x, t+u(x-t))\Phi_n(t+u(x-t),t)| \leqslant M_1 M_n$, qui est intégrable sur $[0,1]$.

Le théorème de continuité assure donc que

$$(x,t) \longmapsto \int_{u=0}^1 \Phi(x, t+u(x-t))\Phi_n(t+u(x-t),t) du$$

est continue sur T, on en déduit la continuité de Φ_{n+1}.

c. Comme on intègre sur un segment inclus dans $[0, x]$, la fonction Φ_2 est petite lorsque x est petit. En réincorporant dans la définition de Φ_3, cette fonction sera encore plus petite au voisinage de 0. Bref, on a l'impression que Φ_n a tendance à être de plus en plus petite. Tentons une majoration pour montrer que Φ_n converge uniformément vers 0.

Posons $M = \sup\limits_{(x,t)\in T} |\Phi|$. On montre par récurrence sur n que :

$$\forall x \in [0,1], \forall t \in [0,x], |\Phi_n(x,t)| \leqslant \frac{M^n}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

La propriété est vraie au rang 1, supposons-la vraie au rang n. Alors

$$|\Phi_{n+1}(x,t)| \leqslant \int_t^x M.\frac{M^n}{(n-1)!} y^{n-1} dy \leqslant M^{n+1} \int_0^x \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy = \frac{M^{n+1}}{n!} x^n.$$

La propriété se propage donc par récurrence. On en déduit la majoration $||\Phi_n||_\infty \leqslant \dfrac{M^n}{(n-1)!}$, la borne supérieure étant prise sur T, ce qui prouve la convergence uniforme vers 0.

Il est assez classique que les exercices sur les intégrales doubles portent sur les opérateurs à noyau, comme celui qui est étudié ici.

Exercice corrigé 79

Posé en 2007

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique. Montrer qu'il existe une application linéaire antisymétrique A et un vecteur b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.

Solution

L'exercice est une application du théorème de Schwarz.

Posons $f = (f_1, \ldots, f_n)$. L'hypothèse est que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Dérivons partiellement cette identité par rapport à x_k. Cela donne

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Cela s'écrit symboliquement $[i,k,j] = -[j,k,i]$. On peut aussi permuter les deux derniers indices en conservant l'égalité, et ce en vertu du théorème de Schwarz. Il en résulte, en appliquant plusieurs fois ces permutations, que

$$[i,k,j] = -[j,k,i] = -[j,i,k] = [k,i,j] = [k,j,i] = -[i,j,k] = -[i,k,j].$$

Donc $[i,k,j] = 0$, soit $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0$ pour tout (i,j,k). Il en résulte que, pour tout (i,j), il existe une constante réelle $c_{i,j}$ telle que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = c_{i,j}$. De même, il existe une constante réelle b_i telle que

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_j + b_i.$$

En effet, les n dérivées partielles de la différence des deux membres sont nulles, donc cette différence est constante (bien sûr, $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs).

Finalement,

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j + b.$$

L'application qui à x associe $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j C_j$ est linéaire. Appelons-la A. On a donc $f(x) = Ax + b$. Par différentiation, $df(x) = A$ donc, en évaluant en un point quelconque, A est antisymétrique.

Exercice corrigé 80

Posé en 2007

Soient E un espace euclidien et K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant K.

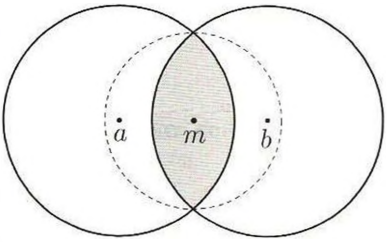
Solution

Traduisons d'abord l'énoncé : si A est l'ensemble des rayons des boules fermées qui contiennent K, alors A admet un plus petit élément r. De plus, il existe une unique boule de rayon r qui contient K. La compacité de K n'intervient presque pas ! Il suffira juste d'utiliser le caractère borné de K et son caractère non vide.

Commençons par le premier point. L'ensemble A est non vide car K est borné, donc il existe une boule fermée qui contient K. Comme A est minoré par 0, A admet une borne inférieure que nous noterons r. On ne peut à ce stade affirmer que A contient sa borne inférieure, mais en tous cas il existe une suite (r_n) à valeurs dans A telle que $r_n \to r$. Considérons la suite (u_n) des centres des boules associées.

Choisissons x dans l'ensemble non vide K. Alors $||u_n - x|| \leqslant r_n$ donc $||u_n|| \leqslant r_n + ||x||$ et la suite (u_n) est donc bornée dans E. Comme E est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique et on peut extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge, disons vers u. Pour tout n on a $||x - u_{\varphi(n)}|| \leqslant r_{\varphi(n)}$, et cette inégalité passe à la limite en $||x - u|| \leqslant r$. Ainsi, la boule fermée de centre u et de rayon r contient K, donc r est dans A : on a montré l'existence d'une boule de rayon minimal contenant K.

Passons à l'unicité : supposons que K soit contenu dans deux boules de rayon r, respectivement centrées en a et en b. Supposons que $a \neq b$, et considérons le dessin ci-contre. Tout K est inclus dans la partie grisée, qui semble incluse dans une boule centrée en $m := \dfrac{a+b}{2}$ et de rayon inférieur à r. Vérifions-le : soit x dans K. On a alors $||x-a||^2 \leqslant r^2$ et $||x-b||^2 \leqslant r^2$. Or



$$\begin{aligned}
||x-a||^2 + ||x-b||^2 &= ||x-m+m-a||^2 + ||x-m+m-b||^2 \\
&= 2||x-m||^2 + ||m-a||^2 + ||m-b||^2 \\
&\qquad +2\langle x-m, (m-a)+(m-b)\rangle \\
&= 2||x-m||^2 + \frac{1}{2}||a-b||^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $||x-m|| \leqslant \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}||a-b||^2}$ et K est inclus dans une boule de centre m et de rayon r' strictement inférieur à r, ce qui apporte la contradiction voulue (on a utilisé le fait que $K \neq \emptyset$ pour assurer que $r' \geqslant 0$).

L'hypothèse que E est de dimension finie est en fait superflue. En suivant les grandes lignes de la solution précédente, on peut remarquer que la suite (u_n) des centres est une suite de Cauchy. Il suffit donc de supposer que E est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un Hilbert.

Exercice corrigé 81

Posé en 2005

Soient E un espace euclidien et K une partie compacte de E. On pose

$$L_K := \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u(K) \subset K\}.$$

a. On suppose que K contient une boule ouverte. Montrer qu'alors L_K est compacte.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur K pour que L_K soit compacte.

Solution

a. On suppose donc que K contient la boule de centre a et de rayon r. Comme K est compact, K est borné, disons par M. Si $y \in B(0,r)$, alors $\|u(a+y)\| \leqslant M$, donc $\|u(y)\| \leqslant M + \|u(a)\|$. Par homogénéité, il vient donc immédiatement

$$|||u||| \leqslant \frac{M + \|u(a)\|}{r}.$$

On obtient donc que L_K est borné. Comme $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie, il ne nous reste plus qu'à montrer que L_K est fermé.

Soit donc une suite (u_n) d'éléments de L_K, convergeant vers $u \in \mathscr{L}(E)$. On va montrer que $u \in L_K$. Soit $a \in K$. Comme $u_n(a) \in K$ et que $u_n(a) \to u(a)$, le caractère fermé de K prouve que $u(a) \in K$. Ainsi $u \in L_K$, et donc L_K est compact.

b. Dans la preuve précédente, on voit que le caractère fermé de L_K est indépendant de toute condition supplémentaire sur K. On doit finalement chercher une condition nécessaire et suffisante pour que L_K soit borné. Pour cela, on va tâcher d'arranger les arguments précédents.

Supposons que $\mathrm{vect}(K) = E$. Alors, par le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base de E (non forcément orthonormée) constituée de vecteurs de K. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une telle base. Alors si $u \in L_K$, les vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_n)$ appartiennent à K, donc sont forcément bornés et l'argument précédent justifie que L_K est toujours borné.

Supposons maintenant que $\mathrm{vect}(K)$ soit strictement inclus dans E, et montrons qu'alors L_K n'est pas borné. Soient H un hyperplan contenant K et a un vecteur normal à H. Alors toute application $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que la restriction u_H soit égale à Id_H est dans L_K. Mais si u est définie sur $\mathrm{vect}(a)$ par $u_{\mathrm{vect}(a)} = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{vect}(a)}$, alors cette famille d'applications linéaires est non bornée lorsque λ tend vers $+\infty$, ce qui prouve que L_K n'est pas borné.

Exercice corrigé 82

Posé en 1996

Soient Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et f une fonction réelle continue et non constante sur Ω. On suppose que f est majorée et réalise son maximum M sur Ω. Montrer qu'il existe une boule fermée $B'(a,r)$ incluse dans Ω, de rayon r strictement positif, telle qu'existe $x_0 \in B'$ vérifiant $f(x_0) = M$ et $f(x) < M$ pour tout $x \in B'(a,r) - \{x_0\}$.

Solution

Les exercices de topologie se font rares ces derniers temps, ils n'en sont que plus intéressants.

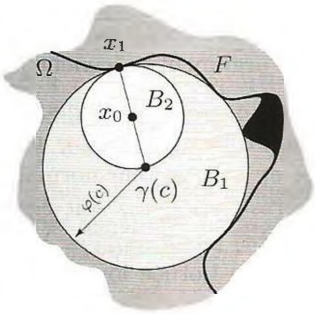
Soient $F = f^{-1}(\{M\})$ et G le complémentaire de Ω, éventuellement vide. L'objectif est de construire un point a dans Ω, tel que

- la distance de a à F, appelée r, est atteinte en un point exactement,
- la distance de a à G est strictement supérieure à r (rappelons que la distance à l'ensemble vide est $+\infty$).

Comme f est non constante, qu'elle atteint son maximum, et que Ω est connexe par arcs, on peut considérer un arc γ continu de $[0,1]$ dans Ω tel que $f(\gamma(0)) < M$ et $f(\gamma(1)) = M$. Notons Γ l'image de cet arc γ. Alors $d(\Gamma, G) = \varepsilon > 0$. C'est évident si G est vide et, dans le cas contraire, la fonction $t \mapsto d(\gamma(t), G)$ est une fonction continue à valeurs réelles qui ne s'annule pas sur le compact $[0,1]$, dont le minimum ε est donc strictement positif.

Considérons à présent la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) := d(\gamma(t), F)$. On a $\varphi(0) > 0$, car F est fermé comme image réciproque d'un singleton par une fonction continue, et $\varphi(1) = 0$. Par continuité de φ, il existe $c \in [0,1]$ tel que $0 < \varphi(c) < \varepsilon$: c'est évident si $\varphi(0) < \varepsilon$ et, dans le cas contraire, c'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

La boule fermée B_1 de centre $\gamma(c)$ et de rayon $\varphi(c)$ est incluse dans Ω (car $\varphi(c) < \varepsilon$). Puisque $d(\gamma(c), F) = \varphi(c)$, il existe un point de F qui est à la distance $\varphi(c)$ de $\gamma(c)$; en effet, soit (y_n) une suite à valeurs dans F telle que $d(\gamma(c), y_n) \to \varphi(c)$. Cette suite est nécessairement bornée et, quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers un point x_1, qui appartient à F car F est fermé. On a donc trouvé un point x_1 de F qui est dans



B_1. On peut ajouter que les x de $F \cap B_1$ sont tous sur la frontière de B_1, compte-tenu de la définition de $\varphi(c)$.

Soit x_0 le milieu entre x_1 et $\gamma(c)$. Soit B_2 la boule fermée de centre x_0 et de rayon $\dfrac{\varphi(c)}{2}$. Alors B_2 est incluse dans B_1, donc dans Ω. Puis B_2 contient x_1 donc touche F. Mais par stricte convexité de la norme euclidienne, B_2 ne rencontre la frontière de B_1 qu'en x_1, et donc ne contient aucun autre point de la frontière de B_1, donc aucun autre point de F. La boule B_2 répond donc à la question.

Cet exercice utilise de façon cruciale la stricte convexité de la norme euclidienne. Le résultat est faux si l'on considère une norme non strictement convexe, comme par exemple la norme $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

Exercice corrigé 83

Posé en 2001

Soit $E := \{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})\ ;\ f(0) = f(1) = 0\}$.

a. Pour $f \in E$, on pose $N(f) := \|f''\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E. La comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

b. L'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est-il complet ? Et l'espace normé (E, N) ?

Solution

a. ▷ Soit $f \in E$. Puisque f'' est continue sur $[0,1]$, elle y est bornée, donc $\|f''\|_\infty$ est bien définie. L'inégalité triangulaire et l'absolue homogénéité résultent des propriétés analogues vérifiées par la norme uniforme et de la linéarité de la dérivation. Reste la propriété de séparation. Si $f'' = 0$, f est affine sur $[0,1]$. Comme elle s'annule en 0 et en 1, elle est nulle.

▷ Soit $x \in [0,1]$. Pour montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$, nous allons exprimer f à l'aide de f''. Il s'agit simplement d'une double intégration :

$$f(x) = \int_0^x f'(u)du = \int_0^x \int_0^u f''(t)dt\,du + Cx.$$

La condition $f(1) = 0$ fournit $C = -\displaystyle\int_0^1 \int_0^u f''(t)dt\,du$. Finalement,

$$f(x) = \int_0^x \int_0^u f''(t)dt\,du + C.$$

En prenant le module de chaque membre et en majorant grossièrement, on obtient

$$\|f\|_\infty \leqslant 2N(f).$$

▷ Pour montrer que N est strictement plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constante K telle que $N \leqslant K\|\cdot\|_\infty$), posons $f_n(t) := (1-t)t^n$. Ainsi, $f_n \in E$. Il est clair que $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$. D'autre part,

$$f_n''(t) = nt^{n-2}\big(n-1-(n+1)t\big),$$

donc $N(f_n) \geqslant |f_n''(1)| = 2n$. Il n'existe donc pas de constante K telle que, pour toute f de E, $N(f) \leqslant K\|f\|_\infty$ puisque la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée alors que la suite $(N(f_n))$ ne l'est pas.

b. Notons F l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et rappelons que, muni de la norme uniforme, c'est un espace de Banach.

▷ Considérons la fonction définie par $g(t) := \sqrt{t(1-t)}$. Elle appartient à F et est, d'après le théorème de Weierstrass, limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite (P_n) de fonctions polynômes. Posons

$$Q_n(t) := P_n(t) - tP_n(1) - (1-t)P_n(0).$$

Comme $P_n(0) \to g(0) = 0$ et que $P_n(1) \to g(1) = 0$, la suite (Q_n) converge uniformément vers g. Mais $Q_n \in E$ alors que $g \notin E$ (g n'est pas dérivable en 0). Il en résulte que E n'est pas fermé dans F muni de la norme uniforme, donc que l'espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

▷ Montrons qu'au contraire (E, N) est complet. Soit (h_n) une suite de Cauchy à valeurs dans cet espace. D'après l'inégalité

$$\|h_n - h_m\|_\infty \leqslant N(h_n - h_m),$$

la suite (h_n) est de Cauchy pour la norme uniforme. Elle admet donc une limite h qui est continue sur $[0,1]$. Par convergence ponctuelle, il vient que $h(0) = h(1) = 0$. En outre,

$$|h_n'(x) - h_m'(x)| = \left|\int_0^x \big(h_n''(t) - h_m''(t)\big)dt\right| \leqslant N(h_n - h_m),$$

ce qui conduit à la majoration $\|h_n' - h_m'\|_\infty \leqslant N(h_n - h_m)$. La suite (h_n') est de Cauchy pour la norme uniforme, et converge donc uniformément vers une fonction $h^{(1)}$. Quant à la suite (h_n''), elle est aussi de Cauchy pour la norme uniforme, et converge donc uniformément vers une fonction $h^{(2)}$. Les hypothèses du théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions sont donc vérifiées, ce qui permet d'affirmer que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur

$[0,1]$. En outre, $h'' = h^{(2)}$, donc (h_n) tend vers h pour la norme N. On a bien montré que (E, N) est un espace vectoriel normé complet.

Une autre méthode pour résoudre le **a** *consiste à étudier, x étant fixé dans $]0,1[$, la fonction $t \mapsto f(t) - \dfrac{t(t-1)}{x(x-1)} f(x)$. Elle s'annule trois fois sur $[0,1]$ donc, par Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f''(c) = \dfrac{2}{x(x-1)} f(x)$. Donc $\|f\|_\infty \leqslant \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{x(x-1)}{2} N(f) \leqslant \dfrac{1}{8} N(f)$. On obtient alors la meilleure majoration possible, réalisée lorsque $f(x) := x(x-1)$.*

La construction du début de la question **b** *s'explique par la remarque qu'une limite uniforme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ peut ne pas être de classe $\mathscr{C}^1$.*

Exercice corrigé 84

Posé en 2003

Soit $(E, |\cdot|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe et φ une forme linéaire non nulle continue sur E, dont la norme d'opérateur est notée $\|\varphi\|$.

a. Soit $x_0 \notin \operatorname{Ker}\varphi$. Montrer l'égalité

$$\|\varphi\| = \frac{|\varphi(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker}\varphi)}.$$

b. Montrer l'équivalence

$$\exists a \in E - \{0\} \ \|\varphi\| = \frac{\varphi(a)}{|a|} \iff \exists b \in \operatorname{Ker}\varphi \ \ |x_0 - b| = d(x_0, \operatorname{Ker}\varphi).$$

c. Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{C})$, que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t)dt - \int_{-1}^0 x(t)dt.$$

Montrer que φ est linéaire et continue. Calculer $\|\varphi\|$. Cette norme est-elle réalisée sur la sphère unité de E ?

Solution

Cet exercice permet de revoir à la fois les notions fondamentales sur la norme d'un opérateur et les formes linéaires continues.

a. Posons $V = \operatorname{Ker}\varphi$. Tout vecteur de E s'écrit $\alpha x_0 - v$ avec $v \in V$. Donc

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{(\alpha,v)\in\mathbb{R}\times V\\ |\alpha x_0 - v|=1}} |\varphi(\alpha x_0 - v)| = |\varphi(x_0)| \sup_{\substack{(\alpha,v)\in\mathbb{R}\times V\\ |\alpha x_0 - v|=1}} |\alpha|.$$

Dans le supremum précédent, on peut se limiter à $\alpha \neq 0$. Donc

$$\|\varphi\| = |\varphi(x_0)| \sup_{\substack{(\alpha,v)\in\mathbb{R}^*\times V\\ |x_0 - \frac{v}{\alpha}|=\frac{1}{|\alpha|}}} |\alpha| = |\varphi(x_0)| \sup_{\substack{(\beta,v)\in\mathbb{R}^*\times V\\ |x_0 - \beta v|=|\beta|}} \frac{1}{|\beta|}$$

Pour une famille (x_i) de réels strictement positifs, $\sup\limits_i \dfrac{1}{x_i} = (\inf\limits_i x_i)^{-1}$. Donc

$$\|\varphi\| = |\varphi(x_0)| \Big(\inf_{\substack{(\beta,v)\in\mathbb{R}^*\times V\\ |x_0 - \beta v|=|\beta|}} |\beta| \Big)^{-1} = |\varphi(x_0)| \frac{1}{d(x_0, V)}.$$

La dernière égalité provient du fait, évident, que, si $w \in V$ et $|x_0 - w| = \beta$, on peut écrire $w = \beta v$ avec $v \in V$.

b. Il nous suffit d'examiner les égalités précédentes afin d'étudier les cas d'égalité.

($\Rightarrow$) Supposons que

$$\exists a \in E - \{0\} \ \|\varphi\| = \frac{\varphi(a)}{|a|}.$$

On peut, quitte à considérer $\dfrac{a}{|a|}$, supposer a de norme 1. On l'écrit alors $a = \alpha x_0 - v$, avec $v \in V$. Posons $b := \dfrac{1}{\alpha} v \in V$. Alors

$$|x_0 - b| = |x_0 - \frac{1}{\alpha} v| = \frac{1}{\alpha} |a| = \frac{1}{\alpha}.$$

Or $\|\varphi\| = \varphi(a) = \alpha\varphi(x_0)$, donc

$$|x_0 - b| = \frac{1}{\alpha} = \frac{\varphi(x_0)}{\|\varphi\|} = d(x_0, V)$$

d'après la question précédente.

($\Leftarrow$) Supposons que $b \in V$ vérifie $|x_0 - b| = d(x_0, V)$. Posons maintenant $\beta := |x_0 - b| = d(x_0, V) > 0$ (car $x_0 \notin V$ et V est fermé), $v := \dfrac{1}{\beta} b \in V$ et $a := \dfrac{1}{\beta} x_0 - v$. On a donc

$$\varphi(a) = \frac{1}{\beta}\varphi(x_0) = \frac{\varphi(x_0)}{d(x_0, V)} = \|\varphi\|$$

et $|a| = 1$, ce qui conclut.

c. La linéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. De plus,

$$|\varphi(x)| \leqslant 2|x|_\infty,$$

donc φ est continue et $\|\varphi\| \leqslant 2$.

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la fonction continue x qui vaut 1 sur $[\varepsilon, 1]$, qui est affine sur $[0, \varepsilon]$ avec la condition $x(0) = 0$, et que l'on prolonge par imparité. Alors

$$\varphi(x) = 2\int_0^1 x(t)dt \geqslant 2(1-\varepsilon).$$

Comme $|x|_\infty = 1$, on a $\|\varphi\| \geqslant 2(1-\varepsilon)$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\|\varphi\| = 2$.

Supposons par l'absurde que $|\varphi|$ réalise son maximum 2 sur la sphère unité en une fonction x. On a

$$\begin{aligned} 2 = |\varphi(x)| &= \left|\int_0^1 x(t)dt - \int_{-1}^0 x(t)dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^1 x(t)dt\right| + \left|\int_{-1}^0 x(t)dt\right| \leqslant \int_0^1 |x(t)|dt + \int_{-1}^0 |x(t)|dt \leqslant 2. \end{aligned}$$

Il y a donc égalité partout et, en particulier, $\displaystyle\int_0^1 |x(t)|dt = 1$. Comme $1 - |x(t)| \geqslant 0$, $|x(t)| = 1$ sur $[0,1]$ et de même sur $[-1,0]$. Mais l'égalité $\left|\displaystyle\int_0^1 x(t)dt\right| = 1$ montre que x prend ses valeurs dans une demi-droite. En effet, posons $\displaystyle\int_0^1 x(t)dt = e^{i\theta}$. Il vient

$$\int_0^1 e^{-i\theta}x(t)dt = 1\,.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{Re}(e^{-i\theta}x(t))dt = 1$ et comme $1 - \mathfrak{Re}(e^{-i\theta}x(t)) \geqslant 0$, on a $\mathfrak{Re}(e^{-i\theta}x(t)) = 1$ sur $[0,1]$. Comme $|e^{-i\theta}x(t)| = 1$, on en déduit que $e^{-i\theta}x(t) = 1$, donc $x(t) = e^{i\theta}$ sur $[0,1]$. De même, $x(t) = e^{i\psi}$ sur $[-1,0]$. Par évaluation en 0, on voit que x est constante sur $[-1,1]$ et, dans ce cas $\varphi(x) = 0$, ce qui est une contradiction.

Exercice corrigé 85

Posé en 2006

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}$.

a. Étudier la régularité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^2$?

Solution

On simplifie énormément la solution en se ramenant aux fonctions d'une seule variable.

a. ▷ Posons $g(t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nt}}{n^2+\sqrt{n}}$. La série de fonctions définissant g converge normalement sur $[0,+\infty[$: en posant $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+\sqrt{n}}$, on a

$$||g_n||_{\mathbb{R}^+} = \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}.$$

De plus, la série dérivée va converger normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$: on a $g_n'(x) = -\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}e^{-nx}$ et donc $||g_n'(x)||_{[a,+\infty[} = \frac{ne^{-na}}{n^2+\sqrt{n}}$. Ainsi :

- la série dérivée converge normalement sur $[a,+\infty[$;
- la série $\sum g_n$ converge simplement en a ;
- chacune des fonctions g_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.

On peut en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$. Par ailleurs, la convergence normale de la série de fonctions $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}^+$ établit la continuité de g sur $\mathbb{R}^+$.

Les mêmes arguments portés sur $g_n^{(k)}(x) = \frac{(-n)^k e^{-nx}}{n^2+\sqrt{n}}$ montrent la convergence normale de la série dérivée k^e, sur tout intervalle $[a,+\infty[$. On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,+\infty[$, ce pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $a>0$. Ainsi, g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Comme $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

▷ Étudions maintenant la régularité de f au voisinage de $(0,0)$. Posons

$f_n(x,y) = \dfrac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}$ et tâchons d'utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions.

On a $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{2nxe^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}} = h_n(x,y)$. Vérifions que la série $\sum h_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, cela garantira que f admet une dérivée partielle par rapport à x. On a

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}|x|e^{-nx^2}}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant 2\frac{\sqrt{n}K}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant 2\frac{K}{n^{3/2}},$$

où K est le supremum sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $u \mapsto ue^{-u^2}$, supremum qui est bien défini par le fait que la fonction considérée est continue et tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi la série de fonctions $\sum h_n(x,y)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à x qui vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{2nxe^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}.$$

La convergence normale de cette suite de fonctions établit de même le caractère continu de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Les mêmes arguments (par symétrie) prouvent que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue, et donc que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, $df(0) = 0$.

▷ En revanche, f n'est pas deux fois différentiable en 0. Si cela était le cas, $x \mapsto \dfrac{f(0,0)-f(x,0)}{x^2}$ admettrait une limite finie lorsque x tend vers 0. Or on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(0,0)-f(x,0)}{x^2} \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\times\frac{1-e^{-nx^2}}{x^2}.$$

Mais comme $\dfrac{1-e^{-nx^2}}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} n$, on en déduit que

$$\frac{f(0,0)-f(x,0)}{x^2} \geqslant \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}\right) - 1$$

pour x assez proche de 0. Prenons $A \in \mathbb{R}$; comme la série définissant le terme de droite de l'inégalité diverge, on peut trouver N tel que

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}\right) - 1 \geqslant A.$$

Alors pour x assez proche de 0, on a $\dfrac{f(x,0)}{x^2} \geqslant A$, ce qui prouve que

$$\frac{f(x,0)}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty,$$

et donc que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ n'existe pas.

b. Puisque la série de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, elle converge uniformément sur le disque fermé $D(0,R^2)$. Par conséquent,

$$\iint_{D(0,R^2)} f(x,y)dxdy = \sum_{n=1}^{+\infty} \iint_{D'(0,R^2)} f_n(x,y)dxdy.$$

Grâce à un passage en coordonnées polaires,

$$\iint_{D(0,R^2)} f_n(x,y)dxdy = \frac{2\pi}{n^2+\sqrt{n}} \int_0^R e^{-nr^2} r dr \leqslant \frac{2\pi}{2n(n^2+\sqrt{n})}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} re^{-nr^2}dr = \frac{1}{2n}\cdot$ Par conséquent,

$$\iint_{D(0,R^2)} f(x,y)dxdy \leqslant C := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n(n^2+\sqrt{n})}\cdot$$

Comme tout pavé P est inclus dans un certain disque $D(0,R^2)$, on a par positivité de f

$$\iint_P f(x,y)dxdy \leqslant C.$$

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice corrigé 86

Posé en 2006

Soit f de classe $\mathscr{C}^3$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0)=0$ et $df(0)=0$. Montrer qu'il existe une fonction h de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f(x) = \langle h(x)x, x\rangle$.

Solution

En dimension 1, il s'agirait de l'égalité de Taylor & Lagrange, à laquelle nous allons nous ramener en paramétrant le segment $[0,x]$. Il faudra aussi montrer la régularité du relèvement h.

Un bon moyen de montrer une égalité de type « Taylor » est de passer par la formule de Taylor avec reste intégral. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et considérons la fonction réelle $g(t) := f(tx)$, définie sur $\mathbb{R}$. On a $g(1) = x$, et $g(0) = 0$. Par ailleurs, $g'(0) = df_0(x) = 0$, donc par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x) = g(1) = \int_0^1 (1-t)g''(t)dt.$$

Il nous reste à calculer $g''(t)$. On a déjà $g'(t) = df_{tx}(x)$, puis en redérivant, $g''(t) = \langle Hf_{xt}x, x\rangle$, où Hf_a est la matrice Hessienne de f en a : c'est la matrice des dérivées secondes au point a, symétrique d'après le théorème de Schwarz (licite : f est $\mathscr{C}^2$). Il vient ainsi :

$$f(x) = \int_0^1 \langle (1-t)Hf_{xt}x, x\rangle dt = \langle h(x)x, x\rangle$$

où l'on a posé $h(x) := \displaystyle\int_0^1 (1-t)Hf_{xt}dt$. Reste à voir que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, ce qui utilise les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral. En effet, si l'on s'intéresse au coefficient de $h(x)$ à l'indice (i,j), celui-ci vaut

$$h_{i,j}(x) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(xt)dt.$$

Plaçons-nous sur la boule B de centre 0 et de rayon R. Pour tout t dans $[0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(xt)$ admet $t\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(xt)$ comme dérivée partielle par rapport à la variable x_k. Comme $tx \in B$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in B$, cette dérivée partielle est bornée de façon indépendante du paramètre x par $K = \sup\limits_{y \in B} \left| \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(y) \right|$, fonction constante évidemment intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de dérivabilité sous le signe intégral assure alors que $h_{i,j}$ admet des dérivées partielles sur B et que

$$\frac{\partial h_{i,j}}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 t(1-t)\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(xt)dt.$$

Cette formule est valable pour tout x de norme inférieure à R, et ce pour tout R, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Cela n'est pas encore suffisant pour établir le caractère $\mathscr{C}^1$ de h, il nous faut maintenant remarquer que la même domination permet d'établir (via le théorème de continuité des intégrales

à paramètres) que

$$x \longmapsto \frac{\partial h_{i,j}}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 t(1-t)\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(xt)dt$$

est une fonction continue par rapport à x, sur toute boule $B(0,R)$, donc sur $\mathbb{R}^n$: h est bien de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice corrigé 87

Posé en 2002

a. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 1$, d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une application réelle α, de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, telle que $f = e^{i\alpha}$.

b. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 2$, d'un ouvert étoilé I de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une application réelle α, de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, telle que $f = e^{i\alpha}$.

Solution

La question **a** *est une question de cours. L'indication suivante est fournie pour la question* **b** *: utiliser le théorème de Poincaré.*

a. Raisonnons par condition nécessaire. On doit avoir $f'(t) = i\alpha'(t)e^{i\alpha(t)}$, donc $\alpha' = \dfrac{f'}{if}$.

Fixons un point t_0 de I. Il existe un réel α_0 tel que $f(t_0) = e^{i\alpha_0}$. Posons

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{if(u)}du,$$

ce qui a bien un sens en vertu de la continuité de $\dfrac{f'}{if}$. On a donc $\alpha' = \dfrac{f'}{if}$. Cette équation différentielle linéaire en f admet pour solution générale $f(t) = Ce^{i\alpha(t)}$. Pour $t = t_0$, on obtient $f(t_0) = Ce^{i\alpha_0}$, donc $C = 1$. Ainsi, $f = e^{i\alpha}$. Enfin, α est nécessairement à valeurs réelles d'après cette dernière égalité.

b. Nous allons procéder de façon tout à fait analogue. En effectuant cette fois une dérivation partielle, on voit qu'une condition nécessaire est que

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = i\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_j}e^{i\alpha}$, puis que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = \frac{1}{if}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Or $g_j := \dfrac{1}{if}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \frac{1}{if}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{1}{if^2}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

d'après le théorème de Schwarz à l'intention de la fonction f qui est de classe $\mathscr{C}^2$. On peut donc appliquer le théorème de Poincaré sur l'ouvert étoilé I, qui nous dit que $(g_1, \ldots, g_n)$ est un champ de gradient. Soit α une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ telle que, pour tout j,

$$g_j = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}.$$

On sait que α est définie à une constante additive près. Fixons un point a de I et une valeur α_0 telle que $f(a) = e^{i\alpha_0}$, et imposons à α de vérifier $\alpha(a) = \alpha_0$. Considérons la fonction $fe^{-i\alpha}$. Par dérivation partielle,

$$\frac{\partial (fe^{-i\alpha})}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}e^{-i\alpha} - if\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}e^{-i\alpha} = 0.$$

Donc $f = Ce^{i\alpha}$ et $C = 1$ par évaluation en a.

Exercice corrigé 88

Posé en 2007

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $a \in E$ et $f \in \mathscr{C}^1(E, E)$ tels que $df(a)$ soit inversible. Montrer qu'il existe un voisinage de a auquel la restriction de f soit injective.

Solution

Cet exercice possède la particularité de faire démontrer un résultat qui, joint au théorème d'inversion globale, permet de montrer le théorème d'inversion locale qui s'énonce comme suit : si $f \in \mathscr{C}^1(E, E)$ est telle que $df(a)$ est inversible, il existe un voisinage ouvert V de a tel que f réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur $F(V)$. Cependant, d'un strict point de vue mathématique, c'est une incongruité, puisque la démonstration du

théorème d'inversion global, qui est admis dans le programme des classes préparatoires, s'appuie en réalité sur la démonstration préalable du théorème d'inversion locale. On consultera par ailleurs l'exercice 91 (p. 131) à titre de comparaison.

On note $|\cdot|$ une norme sur E et $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur associée sur $\mathscr{L}(E)$.

▷ On commence par étudier le cas où $df(a) = \mathrm{Id}_E$. Pour cela, on pose $\varphi(x) := f(x) - x$. On a alors $d\varphi(a) = 0$. Il existe donc $r > 0$ tel que, si $x \in B(a,r)$, $\|d\varphi(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour $(x,y) \in B(a,r)^2$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ et on en déduit alors que $|f(x) - f(y)| \geqslant \frac{1}{2}|x-y|$. La restriction de f à $B(a,r)$ est donc bien injective.

▷ Dans le cas général, on pose $g(x) := df(a)^{-1}(f(x))$. Comme $df(a)^{-1}$ est linéaire, on a $dg(x) = df(a)^{-1} \circ df(x)$. En particulier, $dg(a) = \mathrm{Id}_E$. Le premier cas montre que g est injective sur $B(a,r)$, ce qui entraîne que f l'est aussi.

Exercice corrigé 89

Posé en 2005

Soient $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ une fonction bornée sur $[0, +\infty[$ telle que $x'(t) = \nabla f(x(t))$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $x'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution

▷ Si $\varphi(t) := f(x(t))$, alors $\varphi'(t) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t) = \|x'(t)\|^2$. Donc φ est croissante. Comme la fonction x est bornée sur $[0, +\infty[$, elle prend ses valeurs dans une boule compacte $B'(0,R)$ (le signe « prime » indique que la boule est fermée). Sur cette boule, f est bornée et φ l'est par voie de conséquence. Il en résulte que φ est majorée sur $[0, +\infty[$, donc qu'elle admet en $+\infty$ une limite ℓ.

▷ Pour la même raison, $x'(t) = \nabla f(x(t))$ est bornée sur $[0, +\infty[$. Enfin, $x''(t) = d(\nabla f)(x(t))(x'(t))$ est bornée sur $[0, +\infty[$ par continuité de $(u,v) \mapsto d(\nabla f)(u)(v)$ sur un produit de compacts (puisque x et x' prennent leurs valeurs dans des compacts de $\mathbb{R}^n$). Il en résulte que x' est lipschitzienne, donc que φ' est M-lipschitzienne grâce à l'égalité $\varphi'(t) = \|x'(t)\|^2$: le carré d'une fonction lipschitzienne bornée est une fonction lipschitzienne.

Nous allons montrer que cela implique que $\varphi'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque φ admet une limite réelle en $+\infty$, il existe A tel que, pour t et t' supérieurs à A, $|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant \varepsilon^2$. C'est en particulier vrai lorsque $t' = t + \varepsilon$. Or

$$\left|\varphi'(t) - \frac{\varphi(t+\varepsilon) - \varphi(t)}{\varepsilon}\right| = \left|\varphi'(t) - \varphi'(c)\right| \leqslant M\varepsilon.$$

Donc $|\varphi'(t)| \leqslant \varepsilon + M\varepsilon = (M+1)\varepsilon$ lorsque $t > A$. On a bien montré que $\varphi'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

▷ L'égalité $\varphi'(t) = \|x'(t)\|^2$ montre à présent que $x'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La démonstration du second alinéa conduit à énoncer que, si f a une intégrale convergente en $+\infty$ et si f est lipschitzienne au voisinage de $+\infty$, alors $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: il suffit d'appliquer la démonstration à une primitive de f. En modifiant légèrement la démonstration, on se rend compte qu'il suffit de supposer que f est uniformément continue au voisinage de $+\infty$ et que f peut prendre des valeurs vectorielles plutôt que réelles.

Exercice corrigé 90

Posé en 2007

On note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des polynômes homogènes de $\mathbb{R}[X, Y]$ de degré n, $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathscr{E}_n$ de laplacien nul, et $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathscr{E}_n$ divisibles par $X^2 + Y^2$. Montrer que $\mathscr{E}_n = \mathscr{A}_n \oplus \mathscr{H}_n$.

Solution

Cet exercice offre une bonne occasion pour découvrir l'étude des polynômes à deux indéterminées. Ici, la solution passe par un changement d'indéterminées.

L'ensemble $\mathscr{E}_n$ est l'espace vectoriel engendré par les polynômes X^kY^{n-k} pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, il est donc de dimension $n+1$.

Rappelons que le laplacien de P est défini par $\Delta P := \dfrac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial Y^2}$. Le laplacien d'un polynôme homogène de degré n est un polynôme homogène de degré $n-2$. Ainsi, le laplacien est une application linéaire de $\mathscr{E}_n$ dans $\mathscr{E}_{n-2}$. Par le théorème du rang, son noyau est forcément de dimension supérieure ou égale à 2.

La multiplication par X^2+Y^2 est une application linéaire injective de $\mathscr{E}_{n-2}$ dans $\mathscr{E}_n$. Donc la dimension de $\mathscr{H}_n$ est exactement $n-1$. Comme $\dim \mathscr{A}_n \geqslant 2$, l'exercice se ramène à vérifier que $\mathscr{A}_n \cap \mathscr{H}_n = \{0\}$.

Il n'est pas facile de voir si un polynôme de $\mathscr{E}_n$ est dans $\mathscr{H}_n$ ou non. Pour mieux le voir, nous allons passer dans $\mathbb{C}$. On notera respectivement $\mathscr{E}_n(\mathbb{C})$, $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ les polynômes complexes homogènes, respectivement de degré n, de degré n et multiples de X^2+Y^2, et de degré n et de laplacien nul.

On a $X^2+Y^2=(X+iY)(X-iY)$. Posons $Z=X+iY$ et $T=X-iY$. Alors on a $X=\dfrac{Z+T}{2}$ et $Y=\dfrac{Z-T}{2i}$. Comme pour tout k, $X^kY^{n-k}=\dfrac{(Z+T)^k(Z-T)^{n-k}}{2^n i^{n-k}}$ est dans $\operatorname{vect}(Z^qT^{n-q})_{0\leqslant q\leqslant n}$, la famille $(Z^qT^{n-q})_{0\leqslant q\leqslant n}$ est génératrice de $\mathscr{E}_n(\mathbb{C})$, donc une base par dimension. Par ailleurs, $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})=\operatorname{vect}(Z^qT^{n-q})_{1\leqslant q\leqslant n-1}$.

On calcule $\Delta(Z^qT^{n-q})$: on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}(Z^qT^{n-q})=q(q-1)Z^{q-2}T^{n-q}+2q(n-q)Z^{q-1}T^{n-q-1}\\ +(n-q)(n-q-1)Z^qT^{n-q-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2}(Z^qT^{n-q})=-q(q-1)Z^{q-2}T^{n-q}+2q(n-q)Z^{q-1}T^{n-q-1}\\ -(n-q)(n-q-1)Z^qT^{n-q-2}$$

$$\Delta(Z^qT^{n-q})=4q(n-q)Z^{q-1}T^{n-q-1}.$$

Ainsi, Z^n et T^n sont dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$, mais le laplacien envoie la famille $(Z^qT^{n-q})_{1\leqslant q\leqslant n-1}$ sur une base de $\mathscr{E}_{n-2}(\mathbb{C})$, donc son noyau est réduit à $\operatorname{vect}(Z^n,T^n)$. On a donc prouvé que $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{E}_n(\mathbb{C})$.

Revenons au cas où le corps de base est $\mathbb{R}$. Si P est dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\cap\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$, alors P est en particulier dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})\cap\mathscr{H}_n(\mathbb{C})=\{0\}$. C'est ce que l'on voulait montrer.

Voici une façon très différente de procéder. Notons ∂_X et ∂_Y les opérateurs de dérivation partielle sur $\mathbb{R}[X,Y]$. Si $P\in\mathbb{R}[X,Y]$, on peut utiliser naturellement l'opérateur $P(\partial_X,\partial_Y)$ car ces dérivations partielles commutent. Posons alors

$$(P\mid Q):=P(\partial_X,\partial_Y)(Q)(0,0).$$

On définit ainsi une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}[X,Y]$. On a

$$(X^iY^j\mid X^kY^l)=i!\,j!\,\delta_{i,k}\,\delta_{j,l}.$$

Il en résulte aisément que l'on a affaire à un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X,Y]$. On vérifie alors que

$$(\Delta P \mid Q) = (P \mid (X^2+Y^2)Q).$$

Pour ce faire, on se limite d'abord à $P = X^iY^j$ et $Q = X^kY^l$, puis on étend l'égalité par bilinéarité.

Il en résulte que Δ et la multiplication par X^2+Y^2 sont des opérateurs adjoints l'un de l'autre. Si l'on se restreint désormais à $\mathscr{E}_n$, l'égalité $\operatorname{Ker}\Delta = (\operatorname{Im}\Delta^*)^\perp$ montre que $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{H}_n$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice corrigé 91

Posé en 2005

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et l'on suppose que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $df(x) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$. On suppose en outre que $f(0) = 0$. Montrer que f est une isométrie linéaire de $\mathbb{R}^n$.

Solution

Comme le théorème d'inversion locale n'est pas au programme, il sera nécessaire de le faire découler du théorème d'inversion globale qui, lui, est au programme.

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur associée sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons procéder de la façon suivante. D'abord, montrer grâce à l'égalité des accroissements finis sous forme intégrale que f est localement injective ; par application (locale) du théorème d'inversion globale, en déduire que f réalise localement un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Puis montrer, par application directe de l'inégalité des accroissements finis, que f diminue les distances et, en appliquant ceci à un inverse local, que f augmente, donc conserve localement les distances. Montrer ensuite que f coïncide localement avec une isométrie affine et enfin, par différentiation, que f est globalement un automorphisme orthogonal.

▷ Remarquons tout de suite que si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert convexe Ω, telle que $dg(x) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ pour tout x dans Ω, l'inégalité des accroissements finis montre que $|g(x)-g(y)| \leqslant |x-y|$ pour tout (x,y) pris dans Ω^2.

▷ Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Il existe $r > 0$ tel que, si x appartient à $B(a,r)$, alors $\|df(x) - df(a)\| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$ Pour x et y dans $B(a,r)$, on a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + t(y-x))(y-x)dt.$$

Or $|df(x+t(y-x))(y-x) - df(a)(y-x)| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)-df(a)(y-x)| &= \left|\int_0^1 \big(df(x+t(y-x))(y-x)-df(a)(y-x)\big)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |df(x+t(y-x))(y-x) - df(a)(y-x)|dt \leqslant \frac{1}{2}|y-x|,\end{aligned}$$

et il en résulte que

$$|f(y) - f(x)| \geqslant |df(a)(y-x)| - \frac{1}{2}|y-x| = \frac{1}{2}|y-x|$$

puisque $df(a) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$. La restriction $\tilde{f}$ de f à $B(a,r)$ est ainsi injective.

▷ Comme d'autre part $df(x)$ est inversible lorsque $x \in B(a,r)$, on peut appliquer à $\tilde{f}$ le théorème d'inversion (globale) : $\tilde{f}$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert $B(a,r)$ sur un ouvert ω' contenant $f(a)$.

Soit $r' > 0$ tel que $B(f(a),r') \subset \omega'$. La restriction de $\tilde{f}$ à l'ouvert $\omega = \tilde{f}^{-1}(B(f(a),r'))$ est toujours notée $\tilde{f}$, et cette application réalise toujours un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert ω sur $B(f(a),r')$. On sait déjà que, si x et y sont dans $B(a,r)$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$. Mais, si $g = \tilde{f}^{-1}$ et si $g(x') = x$, alors $dg(x') = df(x)^{-1} \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$. On peut donc appliquer à g et à l'ouvert convexe $B(f(a),r')$ l'inégalité $|g(x') - g(y')| \leqslant |x'-y'|$, qui entraîne que $|f(x) - f(y)| \geqslant |x-y|$ lorsque x et y sont dans ω. Finalement, lorsque x et y sont dans ω, on a $|f(x) - f(y)| = |x-y|$.

▷ Montrons à présent que, si $B(a,r)$ est incluse dans ω, alors f coïncide sur cette boule avec une isométrie affine. Quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(x+a) - f(a)$, qui conserve encore les distances au voisinage de 0, on se permet de supposer que $a = 0$ et que $f(0) = 0$. Si $|x| < r$ et $|y| < r$, alors $|f(x) - f(y)|^2 = |x-y|^2$. Par développement, et compte-tenu que $|f(x)| = |x|$ et $|f(y)| = |y|$, on obtient que $f(x)\cdot f(y) = x \cdot y$.

Considérons une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ incluse dans $B(a,r)$, telle que tous les vecteurs e_i aient même norme $\rho < r$. Ce qui précède montre que $\big(f(e_i)\big)$ est une famille orthogonale formée de vecteurs de norme ρ. Considérons alors l'application linéaire φ telle que $\varphi(e_i) = f(e_i)$. C'est un automorphisme orthogonal. Si $x \in B(0,r)$, on a

$$f(x)\cdot f(e_i) = x \cdot e_i = \varphi(x)\cdot\varphi(e_i) = \varphi(x)\cdot f(e_i).$$

Par conséquent, $f(x) - \varphi(x)$ est orthogonal aux vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^n$, donc est nul.

▷ Puisque f est, sur $B(a,r)$, une isométrie affine, on a $df(x) = df(a)$ pour tout x dans $B(a,r)$. Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, et ses dérivées partielles d'ordre 2 sont nulles. Il en résulte que f est une application affine et, comme $f(0) = 0$, que c'est une application linéaire. En outre, $df(0) = f$, donc $f \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'exercice est beaucoup plus facile. On écrit en effet que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ pour tout (i,j), ce qui traduit le fait que $df(x) \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$. On dérive partiellement par rapport à x_k l'identité précédente, ce qui fournit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x).$$

En utilisant le théorème de Schwarz et en faisant tourner les indices un nombre impair de fois, on obtient que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0\,.$$

Cette égalité montre que le vecteur $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x)$ est orthogonal à une base orthonormée, donc est nul. On conclut alors aisément.

Chapitre 5

Analyse élémentaire, suites, séries

Exercice corrigé 92

Posé en 2007

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé dans $\mathbb{R}$ et à racines simples. Montrer que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Solution

Rappelons un argument très classique.

Lemme. — *Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.*

Démonstration. Notons $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de P. Par le théorème de Rolle (valable car $x \mapsto P(x)$ est infiniment dérivable), P' admet une racine dans chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc P' admet déjà $n-1$ racines distinctes. Comme P' est justement de degré $n-1$, P' est complètement factorisé et ses $n-1$ racines sont des racines simples. *cqfd*

Ce résultat se propage par une récurrence immédiate.

Lemme. — *Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors $P^{(k)}$ est scindé à racines simples pour tout $k < \deg P$.*

Supposons maintenant que P soit scindé à racines simples, de degré n, et que ses coefficients en X^k et X^{k+1} soient simultanément nuls (avec $k \leqslant n-2$ bien sûr). Alors $P^{(k)}$ est scindé à racines simples, mais ses deux premiers coefficients, en X^0 et en X^1, sont nuls. Donc 0 est racine double de $P^{(k)}$ et on obtient la contradiction voulue.

Avec des arguments similaires, nous vous invitons à démontrer que si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors P admet moins de $n - (r-1)$ racines réelles distinctes, lorsque P admet r coefficients nuls consécutifs.

Exercice corrigé 93

Posé en 2004

Trouver une fonction f qui vérifie, lorsque x tend vers $+\infty$:

- $f(x) \in o(x^a)$ pour tout réel $a > 0$,
- $(\ln x)^a \in o(f(x))$ pour tout réel $a > 0$.

Solution

Pour simplifier le problème, on cherche f sous la forme $f(x) = e^{g(x)}$. Pour obtenir les relations de comparaison souhaitées, il **suffit** que

- g soit négligeable devant $a\ln(x)$ pour tout $a > 0$, donc devant $\ln(x)$;
- g soit prépondérante sur $a\ln(\ln(x))$ pour tout $a > 0$, donc sur $\ln(\ln(x))$.

On cherche donc une fonction qui soit « coincée » entre $\ln(\ln(x))$ et $\ln(x)$. Il suffit ici de prendre la « moyenne » des deux, mais seule la moyenne géométrique répond aux exigences : on pose

$$g(x) := \sqrt{\ln(x)\ln\ln(x))}$$

et on a $g(x) \in o(\ln(x))$ et $\ln(\ln(x)) \in o(g(x))$. Ainsi,

$$f(x) := \exp\left(\sqrt{\ln(x)(\ln\ln(x))}\right)$$

répond à la question.

D'autres fonctions conviennent bien sûr : nous vous laissons vérifier par exemple que la fonction $\exp\left(\sqrt{\ln(x)}\right)$ est aussi une solution du problème.

Exercice corrigé 94

Posé en 2007

a. Montrer que $\dfrac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)}$ est réel.

b. En déduire une façon d'obtenir une valeur approchée de π.

Solution

a. On a successivement

$(5+i)^2=24+10i=2(12+5i)$; $(5+i)^4=4(119+120i)$; $(239+i)(1+i)=238+240i$

et donc

$$\frac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)} = 2\,.$$

b. Soit $\theta_1 := \arctan \dfrac{1}{5}$ et $\theta_2 := \arctan \dfrac{1}{239}\cdot$ On a alors $5+i = r_1 e^{i\theta_1}$ avec $r_1 > 0$ puisque ce complexe est dans le premier quadrant. De même, on a $239+i = r_2 e^{i\theta_2}$. Il résulte de la question **a** que $4\theta_1 - \theta_2 - \dfrac{\pi}{4} = 0\,[\pi]$, puis que $4\theta_1 - \theta_2 - \dfrac{\pi}{4} = 0$ car θ_1 et θ_2 sont dans $]0, \dfrac{\pi}{4}[$. Ainsi

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}\cdot$$

Or il est facile de calculer ces arctan avec une bonne précision. Le développement

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

permet en effet, pour $x \in [0,1[$, de donner une valeur approchée de $\arctan x$: la série précédente satisfait au critère de Leibniz (connu aussi sous le nom de critère spécial aux séries alternées), et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ fournit une valeur approchée de $\arctan x$ à la précision $\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot$ La valeur $\dfrac{1}{5}$ (et *a fortiori* $\dfrac{1}{239}$) étant petite par rapport à 1, de faibles valeurs de n seront suffisantes.

Supposons par exemple que nous veuillons calculer π à la précision 10^{-10}. Prenons $n = 6$. Alors

$$\frac{1}{15}\left(\frac{1}{5}\right)^{15} \leqslant 3 \cdot 10^{-12}$$

De même, en prenant $n = 1$, on obtient $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 \leqslant 10^{-11}$.

Finalement, on obtiendra une approximation de π à une précision meilleure que $48.10^{-12} + 4.10^{-11} \leqslant 10^{-10}$ en remplaçant les arctan par les sommes partielles indiquées.

Cette formule est connue sous le nom de formule de Machin. Elle permet un calcul (manuel) de π avec une approximation correcte. Rien à voir bien entendu avec les méthodes modernes.

Exercice corrigé 95

Posé en 2003

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de réels strictement positifs. Comparer

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}} \text{ à } \big((a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Solution

Cette inégalité exhale un fort parfum de convexité. Raisonnons par équivalence en partant de l'inégalité

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \big((a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\big)^{\frac{1}{n}}. \quad (1)$$

Utilisons l'homogénéité de la formule et divisons par $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$:

$$(1) \iff 1 + \left(\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left((1+\frac{b_1}{a_1})(1+\frac{b_2}{a_2})\cdots(1+\frac{b_n}{a_n})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Posons $\frac{b_i}{a_i} = e^{\alpha_i}$. Il vient

$$(1) \iff 1 + e^{\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}} \leqslant \left((1+e^{\alpha_1})\cdots(1+e^{\alpha_n})\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\iff f\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(\alpha_1)+\cdots+f(\alpha_n)}{n}$$

lorsque $f(x) = \ln(1+e^x)$. Or $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$, fonction manifestement croissante. Ainsi, f est convexe, ce qui valide la dernière inégalité et donc l'inégalité (1).

Exercice corrigé 96

Posé en 2002

On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sqrt[4]{n + \sqrt[4]{n-1 + \cdots + \sqrt[4]{2 + \sqrt[4]{1}}}}.$$

Trouver un équivalent de u_n, puis un développement asymptotique à deux termes.

Solution

Une indication pour cet exercice particulièrement facile a été supprimée.

▷ Il revient au même de définir (u_n) comme la suite positive qui satisfait la relation de récurrence $u_{n+1}^4 = n + 1 + u_n$, avec $u_0 = 0$. Montrons d'abord par récurrence que $u_n \leqslant n$. C'est vrai pour $n = 1$. Si $u_n \leqslant n$, alors

$$u_{n+1}^4 \leqslant 2n + 1 \leqslant (n+1)^4,$$

puisque, par développement, le membre de droite contient le terme $4n + 1$. Donc $u_{n+1} \leqslant n + 1$, ce qui clôt la récurrence.

Il en résulte que $u_{n+1}^4 \leqslant 2n + 1$, donc que $u_n = O(\sqrt[4]{n})$. Par conséquent,

$$u_{n+1}^4 = n + O(\sqrt[4]{n}) \sim n,$$

soit $u_{n+1} \sim \sqrt[4]{n}$, puis $u_n \sim \sqrt[4]{n-1} \sim \sqrt[4]{n}$.

▷ Comme $u_{n-1} \sim \sqrt[4]{n-1} \sim \sqrt[4]{n}$,

$$u_n = (n + u_{n-1})^{\frac{1}{4}} = (n + n^{\frac{1}{4}} + o(n^{\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}}\left(1 + n^{-\frac{3}{4}} + o(n^{-\frac{3}{4}})\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= n^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}} + o(n^{-\frac{3}{4}})\right) = n^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Exercice corrigé 97

Posé en 2007

Montrer que, si $n \geqslant 3$, le polynôme $P_n := X^n - nX + 1$ admet une unique racine u_n dans $]0, 1[$. Donner la limite, puis un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Solution

Puisque $P_n(0) > 0$ et $P_n(1) < 0$, P_n admet une racine dans $]0,1[$; et comme $P_n'(X) = n(X^{n-1} - 1)$ est strictement négative sur $]0,1[$, cette racine est unique.

On a $u_n = \dfrac{u_n^n + 1}{n}$. Cela montre d'abord que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$, donc que $u_n \to 0$, soit

$$u_n = \frac{1}{n}(1 + \varepsilon_n),$$

où $\varepsilon_n := u_n^n \to 0$. Il vient ensuite

$$u_n^n = \frac{1}{n^n} e^{n \ln(1+\varepsilon_n)}.$$

Or $n \ln(1 + \varepsilon_n) \sim n\varepsilon_n = nu_n^n = o(1)$, en vertu de $u_n^n = O\Big(\big(\frac{2}{n}\big)^n\Big)$. Par conséquent, $u_n^n \sim \dfrac{1}{n^n}$, ce qui entraîne que

$$u_n = \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{1}{n^n} + o\big(\frac{1}{n^n}\big)\Big).$$

Exercice corrigé 98

Posé en 2007

Soit u une suite réelle tendant en croissant vers $+\infty$, mais qui est telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que l'ensemble $A := \{u_n - \lfloor u_n \rfloor\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$.

Solution

Il suffit de montrer que l'ensemble A est dense dans $]0,1[$, puisque ce dernier ensemble est lui-même dense dans $[0,1]$. Soient donc $x \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$. On prend en outre $\varepsilon < x$. Il existe N tel que, si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} - u_n \leqslant \varepsilon$. Soit M un entier tel que $M + x \geqslant u_N$. Introduisons le maximum m des entiers n tels que $M + x \geqslant u_n$, maximum bien défini puisque la suite u tend vers $+\infty$. En particulier, $m \geqslant N$. Alors on obtient $u_{m+1} > M + x \geqslant u_m$. Il en résulte que

$$M + 1 > M + x \geqslant u_m \geqslant u_{m+1} - \varepsilon > M + x - \varepsilon > M.$$

Cet encadrement a deux conséquences. La première, que $\lfloor u_m \rfloor = M$. La seconde, que

$$x \geqslant u_m - M > x - \varepsilon$$

et donc que $|x - (u_m - \lfloor u_m \rfloor)| < \varepsilon$. On a bien trouvé un élément de A qui approche x à ε près.

Le raisonnement n'utilise pas vraiment la croissance de la suite u. Cet exercice se trouve souvent posé avec une suite u particulière. Montrons par exemple que $\{\sin \ln n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[-1,1]$. Posons $u_n = \dfrac{1}{2\pi}\ln n$. Alors $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0,1]$, donc $\{2\pi u_n - 2\pi\lfloor u_n \rfloor\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0,2\pi]$. Comme $\sin$ est 2π-périodique et continue, $\{\sin 2\pi u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice corrigé 99

Posé en 2007

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = A \cdot P(A)$.

Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = B \cdot Q(B)$.

Solution

Première solution.

▷ Supposons que Q existe. Alors on a $A = A \cdot P(A)Q(A \cdot P(A)) = R(A)$, où R est le polynôme $R(X) := XP(X)Q\big(XP(X)\big)$. Supposons que A soit nilpotente d'indice p, c'est-à-dire que $A^p = 0$ mais $A^{p-1} \neq 0$. Alors le polynôme minimal de A est X^p : en effet, il divise X^p, donc est de la forme X^d et $d = p$ d'après la définition de p. Comme $R(X) - X$ est annulateur de A, on obtient alors

$$X^p \mid X\Big(1 - P(X)Q\big(XP(X)\big)\Big),$$

ce qui se traduit en $XP(X)Q\big(XP(X)\big) = X + X^pU$ pour un certain polynôme U. Posons $T = XP(X)$, on aurait alors, par abus de notation, $Q(T) \simeq T^{-1}$, où T^{-1} est la « réciproque » de T (en fait, la « réciproque à X^p près »). C'est totalement abusif, d'autant plus que T n'est pas bijectif et que sa réciproque, même locale, n'est pas un polynôme. Toutefois, cela conduit quand même à la solution.

▷ Posons $f(x) := xP(x)$. La fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, il existe un voisinage $[-a,a]$ de 0 sur lequel f induit un C^∞-difféomorphisme croissant d'image un certain intervalle J, voisinage de $f(0) = 0$. Soit g définie sur J comme la réciproque de f ; g est alors $\mathscr{C}^\infty$ de J dans $[-a,a]$.

On a de plus $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, donc le développement limité à l'ordre $p-1$ de $g(x)$, qui existe d'après la formule de Taylor & Young, s'exprime à l'aide d'un polynôme Q de degré $\leqslant p-2$, vérifiant $Q(0) = 1$ et tel que

$$g(x) = xQ(x) + o(x^{p-1}).$$

Comme $f(x)$ tend vers 0, on a

$$x = g(f(x)) = f(x)Q(f(x)) + o\left(f(x)^{p-1}\right).$$

Mais $f(x) \sim x$, donc $x = xP(x)Q(xP(x)) + o(x^{p-1})$. Comme il s'agit de polynômes, on peut alors affirmer que $X^p \mid X - XP(X)Q(XP(X))$. Comme X^p est le polynôme minimal de A, on en déduit que

$$A = A \cdot P(A)Q(A \cdot P(A)) = BQ(B).$$

Deuxième solution.

La matrice B est un polynôme en A commençant par A, donc pour tout k, B^k est un polynôme en A commençant par A^k. Comme A est nilpotente, à supposer que $A^{p+1} = 0$, on a

$$\forall k \leqslant p, \quad B^k = A^k + \sum_{j=k+1}^{p} \lambda_{k,j} A^j.$$

Posons aussi $\lambda_{j,j} = 1$, et soit T la matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sont les $\lambda_{i,j}$. On a envie de dire que T envoie le « vecteur » ${}^t(A, \ldots, A^p)$ sur le « vecteur » ${}^t(B, \ldots, B^p)$ et donc que T^{-1} devrait effectuer l'action réciproque. En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} [T^{-1}]_{1,j} B^j &= \sum_{j=1}^{p} [T^{-1}]_{1,j} \sum_{k=1}^{p} [T]_{j,k} A^k \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} [T^{-1}]_{1,j} [T]_{j,k} A^k \\
&= \sum_{k=1}^{p} [I_p]_{1,k} A^k = A.
\end{aligned}$$

Donc A est bien un polynôme en B qui est de la forme $XQ(X)$, avec

$$Q(X) := \sum_{j=1}^{p} [T^{-1}]_{1,j} X^{j-1}.$$

Dans la seconde solution, on a en somme inversé un système triangulaire à coefficients réels dans lequel les inconnues sont des vecteurs (des matrices) et non des scalaires. Le secret de cet exercice réside dans le fait qu'une k-algèbre locale de dimension n, de corps résiduel k et dont l'idéal maximal est engendré par un élément nilpotent est isomorphe à $k[X]/(X^n)$.

Exercice corrigé 100

Posé en 2005

Soient I un intervalle ouvert et (f_n) une suite de fonctions convexes sur I, qui converge simplement vers une fonction f.

Justifier que f est convexe, et montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans I.

Solution

Montrons d'abord que f est bien convexe. Fixons x et y dans I, et soit $\lambda \in [0,1]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y).$$

Mais comme (f_n) converge simplement, les deux termes de l'inégalité passent à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ en

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

et donc f est convexe.

Comme chaque f_n est convexe, ses taux d'accroissements sont croissants. Fixons un segment $[a,b]$ inclus dans I. Soit a' et b' deux éléments de I tels que $a' < a < b < b'$. La croissance des pentes conduit à l'encadrement

$$\frac{f_n(a) - f_n(a')}{a - a'} \leqslant \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \leqslant \frac{f_n(b') - f_n(b)}{b' - b},$$

valable pour tous x et y de $[a,b]$.

Les quantités encadrantes convergent, donc sont bornées. Par conséquent, il existe M tel que, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$ et pour tout n,

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| \leqslant M.$$

Considérons alors $(x_i)_{i \in [0,p]}$ une subdivision de $[a,b]$ de pas moindre que $\dfrac{\varepsilon}{M}$. Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a

$$|f_n(x) - f_n(x_i)| \leqslant \varepsilon.$$

Par passage à la limite, on a aussi $|f(x) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$. Donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon + |f_n(x_i) - f(x_i)|.$$

Il ne reste qu'à prendre n assez grand pour que tous les $|f_n(x_i) - f(x_i)|$

soient moindres que ε pour obtenir

$$\forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Il s'agit d'une variante du deuxième théorème de Dini, qui affirme qu'une suite de fonctions croissantes qui converge simplement sur un segment vers une fonction continue f converge uniformément vers f sur ce segment.

Exercice corrigé 101

Posé en 2001

a. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes tels que $P_n(0) = 0$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

b. Soit F l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,+\infty[$ et tendant vers 0 en $+\infty$, muni de la norme uniforme.

Montrer que $V := \mathrm{vect}\{x \mapsto e^{-nx}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans F.

c. Pour $x \geqslant 0$, on pose $f_n(x) := e^{-x} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

d. En déduire que $W := \{x \mapsto e^{-x}P(x)\}_{P\in\mathbb{R}[X]}$ est dense dans F.

Solution

a. Le théorème de Weierstrass assure que f est, sur $[0,1]$, limite uniforme d'une suite (Q_n) de polynômes. Posons $P_n := Q_n - Q_n(0)$. Alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - Q_n(x)| + |Q_n(0) - f(0)| \leqslant 2\|f - Q_n\|_\infty.$$

Par conséquent, $\|f - P_n\|_\infty \leqslant 2\|f - Q_n\|_\infty$ et la suite (P_n) répond à la question.

b. Soit $f \in F$. Posons $g(t) := f(-\ln t)$ pour $t \in]0,1]$. Alors g tend vers 0 en 0, ce qui permet de prolonger g en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant $g(0) = 0$. D'après la question **a**, il existe une suite (P_n) de polynômes tels que $P_n(0) = 0$ convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$. Posons $h_n(x) := P_n(e^{-x})$ pour $x \geqslant 0$. Alors h_n est une combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto e^{-kx}$ avec $k \geqslant 1$. De plus, puisque $x \mapsto e^{-x}$ réalise une bijection entre $[0,+\infty[$ et $]0,1]$ (d'inverse $t \mapsto -\ln t$), la suite (h_n) converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

c. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et s'annule en 0. D'autre part,

$$R_n(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = e^{-x} - S_n(x),$$

quand $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. De ce que S_n est un polynôme, on déduit que

$$f_n(x) = e^{-x} R_n(x) = e^{-2x} - e^{-x} S_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En résumé, f_n est dans F.

▷ D'après l'inégalité de Taylor & Lagrange (ici avec majoration du reste), on peut écrire

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c \in [-x, 0]} e^c.$$

Donc $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, soit

$$|f_n(x)| \leqslant e^{-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Posons $\varphi(x) := e^{-x} \frac{x^n}{n!}$. Puisque $\varphi(0) = 0$ et que φ tend vers 0 en $+\infty$, φ réalise son maximum sur $[0, +\infty[$ en un point y où sa dérivée s'annule. Comme $\varphi'(x) = e^{-x}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}\right)$, on a $y = n$ et $\|\varphi\|_\infty = e^{-n} \frac{n^n}{n!}$. Par conséquent,

$$\|f_{n-1}\|_\infty \leqslant e^{-n} \frac{n^n}{n!}.$$

L'équivalent de Stirling fournit $e^{-n} \frac{n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Il en résulte que $\|f_n\|_\infty \to 0$.

d. Montrons par récurrence sur p qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $|P(x)e^{-x} - e^{-px}| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant 0$. Le résultat a été démontré lorsque $p = 2$, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q \in \mathbb{R}[X] \ \forall x \geqslant 0 \ |Q(x)e^{-x} - e^{-2x}| \leqslant \varepsilon.$$

On le suppose vrai au rang $p - 1$, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists R \in \mathbb{R}[X] \ \forall x \geqslant 0 \ |R(x)e^{-x} - e^{-(p-1)x}| \leqslant \varepsilon'.$$

En appliquant la première relation à $px/2$ et la seconde à $x/2$, il vient

$$|Q(px/2)e^{-px/2} - e^{-px}| \leqslant \varepsilon \text{ et } |R(x/2)e^{-x/2} - e^{-(p-1)x/2}| \leqslant \varepsilon'.$$

Multipliant la seconde inégalité par $e^{-x/2}$, on obtient

$$|R(x/2)e^{-x} - e^{-px/2}| \leqslant \varepsilon' e^{-x/2}.$$

D'où

$$|e^{-px} - Q(px/2)R(x/2)e^{-x}| \leqslant |e^{-px} - Q(px/2)e^{-px/2}| +$$
$$|Q(px/2)e^{-px/2} - Q(px/2)R(x/2)e^{-x}| \leqslant \varepsilon + |Q(px/2)|e^{-x/2}\varepsilon'.$$

Le choix de ε détermine celui de Q. La fonction $x \mapsto Q(px/2)e^{-x/2}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ puisque elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$. Il existe donc $\varepsilon' > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|Q(px/2)|e^{-x/2}\varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Cet ε' étant ainsi déterminé, on choisit le polynôme R et alors

$$|e^{-px} - Q(px/2)R(x/2)e^{-x}| \leqslant 2\varepsilon.$$

La dernière question est, malgré son apparence anodine, assez difficile, car sans indication il est un peu hasardeux de procéder comme il l'a été fait.

Exercice corrigé 102

Posé en 2006

a. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées. Montrer que f' est bornée et que

$$\|f'\|_\infty^2 \leqslant 2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty.$$

b. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées. Peut-on borner les dérivées intermédiaires à l'aide de $\|f\|_\infty$ et de $\|f^{(n)}\|_\infty$?

Solution

a. Soient x un réel et $h > 0$. La formule de Taylor & Lagrange avec majoration du reste fournit

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}R_1, \text{ avec } |R_1| \leqslant \|f''\|_\infty$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}R_2, \text{ avec } |R_2| \leqslant \|f''\|_\infty.$$

Par différence, $f(x+h)-f(x-h) = 2hf'(x)+\frac{h^2}{2}(R_1-R_2)$ et par conséquent $h|f'(x)| \leqslant \|f\|_\infty+\frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$. Donc $\|f\|_\infty+\frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty-h\|f'\|_\infty \geqslant 0$. Cette inégalité exprime qu'un trinôme du second degré ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$ (le cas où $\|f''\|_\infty = 0$ est celui d'une fonction affine qui n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si elle est constante, et donc pour laquelle $\|f'\|_\infty = 0$). Par conséquent, son discriminant est négatif ou nul, ce qui conduit à l'inégalité cherchée.

Écrire les inégalités de Taylor & Lagrange en $x+h$ et $x-h$ relève d'une astuce. Toutefois, en ne considérant que l'une des deux inégalités, on obtient un résultat similaire, avec une constante plus grande que 2.

b. Considérons $n-1$ réels distincts fixés a_i pour $i = 1,\dots,n-1$, par exemple $a_i = i$. La formule de Taylor & Lagrange avec majoration du reste fournit les égalités

$$f(x+i)-f(x) = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{i^j}{j!}f^{(j)}(x)+\frac{i^n}{n!}R_i, \text{ avec } |R_i| \leqslant \|f^{(n)}\|_\infty.$$

On peut encore les écrire

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{i^j}{j!}f^{(j)}(x) = A_i, \text{ avec } |A_i| \leqslant 2\|f\|_\infty+\frac{i^n}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

Soit M la matrice telle que $M(i,j) = \frac{i^j}{j!}\cdot$ Son déterminant est non nul car égal à $\Big(\prod_{j=1}^{n-1} j!\Big)^{-1} \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(j-i)$ (déterminant de Vandermonde). Soient $P := M^{-1}$, X la matrice colonne des $f^{(j)}(x)$ et A la matrice colonne des A_j. L'égalité $MX = A$ conduit à $X = PA$, donc

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n-1}P(i,j)A_j.$$

Il en résulte que $\|f^{(i)}\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{n-1}|P(i,j)|\big(2\|f\|_\infty+\frac{j^n}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty\big)$.

Dans la première question, on peut même remarquer que la constante 2 est optimale.

Considérons un réel $a > 2$ et la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{a(a-1)}{2}x^2-x^a-\frac{(a+1)(a-2)}{2}\cdot$ Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. Comme $f'(0) = 0$, elle se prolonge par parité en une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$. Comme $f(1) = f''(1) = 0$, elle se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,3]$ par symétrie ponctuelle par rapport au

point $(1,0)$. *Les symétries permettent enfin de la prolonger en une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *par 4-périodicité.*

Les normes uniformes de f, f' *et* f'' *sur* $\mathbb{R}$ *sont les mêmes que sur* $[0,1]$. *On a* $f'(x) = ax(a-1-x^{a-2})$, *qui ne s'annule qu'en* 0. *Donc* f *croît sur* $[0,1]$ *et, comme* $f(0) = -\dfrac{(a+1)(a-2)}{2}$ *tandis que* $f(1) = 0$, *on en déduit que* $\|f\|_\infty = \dfrac{(a+1)(a-2)}{2}$. *De plus,* $f''(x) = a(a-1)(1-x^{a-2})$, *donc* f' *croît et* $\|f'\|_\infty = a(a-2)$. *Enfin,* $\|f''\|_\infty = a(a-1)$. *Ainsi,*

$$\frac{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}{\|f'\|_\infty^2} = \frac{a^2-1}{2(a^2-2a)}.$$

La quantité de droite tendant vers $\dfrac{1}{2}$ *lorsque* $a \to +\infty$, *la constante* 2 *est bien optimale.*

Il se peut d'autre part que l'exercice attende une autre solution qui s'appuierait sur la première question et que nous donnons à présent. Montrons par récurrence que, lorsque f *et* $f^{(n)}$ *sont bornées, alors*

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|^{\frac{k}{n}}.$$

Lorsque $n = 2$ *et* $k = 1$, *c'est exactement le résultat de la première question. Supposons donc le résultat vrai au rang* n. *On dispose, grâce à l'hypothèse au rang* 2, *de l'inégalité*

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\, \|f^{(n-1)}\|_\infty \, \|f^{(n+1)}\|_\infty .$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\|f^{(n-1)}\|_\infty \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} \|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} \|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{n-1}{n}}.$$

Il résulte des deux dernières inégalités que

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant 2^{\frac{1}{2}+\frac{n-1}{4}} \|f\|_\infty^{\frac{1}{2n}} \|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{n-1}{2n}} \|f^{(n+1)}\|^{\frac{1}{2}}.$$

On divise par $\|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{n-1}{2n}}$ *en supposant cette quantité non nulle, ce qui conduit dans ce cas à la majoration souhaitée. Lorsque* $\|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{n-1}{2n}} = 0$, f *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* $n-1$, *ce qui lui impose d'être constant puisqu'il est borné sur* $\mathbb{R}$.

Exercice corrigé 103

Posé en 2007

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

a. On suppose que, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

b. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et qu'il existe un réel M tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \left|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\right| \leqslant My^2.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution

a. Montrons tout d'abord par récurrence sur n que si k est un entier tel que $\lambda := k2^{-n}$ est dans $[0, 1]$ alors, pour tout (x, y) dans I^2,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Un tel λ est appelé nombre dyadique.

Ce résultat est vrai pour $n = 1$ par hypothèse. Supposons-le vrai au rang $n-1$ et soit $\lambda := k2^{-n}$. On peut supposer k impair sinon l'hypothèse de récurrence s'applique directement. Posons $k = 2m+1$. Alors $0 \leqslant 2m+1 \leqslant 2^n$, de sorte que $0 \leqslant m + \frac{1}{2} \leqslant 2^{n-1}$. Il en résulte que $0 \leqslant m < m+1 \leqslant 2^{n-1}$. Posons $\alpha := m2^{-n+1}$ et $\beta := (m+1)2^{-n+1}$. Alors $\lambda = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f\left(\frac{\alpha x + \beta x + (1-\alpha)y + (1-\beta)y}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f(\beta x + (1-\beta)y)}{2} \\ &\leqslant \frac{\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) + \beta f(x) + (1-\beta)f(y)}{2} \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

On a d'abord utilisé l'hypothèse sur f, puis l'hypothèse de récurrence.

Soit à présent λ un réel de $[0, 1]$. Par troncature du développement en base 2 de λ, on peut trouver une suite (λ_k) à valeurs dans les réels dyadiques de $[0, 1]$ convergeant vers λ. D'après ce qui précède,

$$f(\lambda_k x + (1-\lambda_k)y) \leqslant \lambda_k f(x) + (1-\lambda_k)f(y).$$

Par continuité de f, on obtient en faisant tendre k vers $+\infty$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Une indication accompagne la deuxième question : utiliser $x \mapsto f(x) \pm \frac{M}{2}x^2$.

b. Appliquons l'hypothèse à $x = \dfrac{u+v}{2}$ et $y = \dfrac{u-v}{2}$. Il vient

$$2f\left(\frac{u+v}{2}\right) - M\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \leqslant f(u)+f(v) \leqslant 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + M\left(\frac{u-v}{2}\right)^2.$$

Soit $g(z) := f(z) + \dfrac{M}{2}z^2$. La première inégalité se récrit

$$2g\left(\frac{u+v}{2}\right) - M\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 - M\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \leqslant g(u)+g(v) - \frac{M}{2}u^2 - \frac{M}{2}v^2,$$

ou encore

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant \frac{g(u)+g(v)}{2}.$$

La fonction g est donc convexe. Elle admet une dérivée à droite $g'_d(z)$ et une dérivée à gauche $g'_g(z)$ en chaque point z de $\mathbb{R}$. De même, si $h(z) := f(z) - \dfrac{M}{2}z^2$, h est concave et admet en chaque point z une dérivée à droite $h'_d(z)$ et une dérivée à gauche $h'_g(z)$. De plus,

$$g'_d(z) - g'_g(z) \geqslant 0 \text{ et } h'_d(z) - h'_g(z) \leqslant 0\,.$$

Or on a

$$g'_d(z) = f'_d(z) + Mz, \quad g'_g(z) = f'_g(z) + Mz,$$
$$h'_d(z) = f'_d(z) - Mz, \quad h'_g(z) = f'_g(z) - Mz.$$

Cela entraîne que

$$g'_d(z) - g'_g(z) = h'_d(z) - h'_g(z).$$

Les signes de ces quantités montrent qu'elles sont toutes deux nulles, donc que g est dérivable. Il en va donc de même de f.

Nous donnons du **a** *une autre solution, assez différente de celle proposée ci-dessus.*

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ et x et y dans I tels que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Considérons la composante connexe $]\alpha, \beta[$ de λ dans l'ensemble

$$\{t \in]0,1[\ ;\ \varphi(t) := f\big((1-t)x + ty\big) - (1-t)f(x) - tf(y) > 0\}.$$

C'est un intervalle ouvert de $]0,1[$ par continuité de φ, et $\varphi(\alpha) = 0$: c'est clair si $\alpha = 0$ et, sinon, c'est dû aux faits que $\varphi(\alpha) \geqslant 0$ par limite à droite en α et que α n'appartient pas à l'ensemble considéré. De même, $\varphi(\beta) = 0$.

Ainsi, $\varphi > 0$ sur $]\alpha, \beta[$ et $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Mais φ vérifie l'hypothèse satisfaite par f, puisque $t \mapsto (1-t)x + ty$ est affine, donc conserve le milieu. Cela contredit l'inégalité $\varphi\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$.

En ce qui concerne le **b**, *on peut aussi, une fois montrée la dérivabilité à droite et à gauche de g, donc de f, remarquer que*

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right| \leqslant M|h|$$

comme récriture de l'hypothèse, puis faire tendre h vers 0 ce qui donne de suite $f'_d(x)-f'_g(x)=0$.

On a utilisé systématiquement le fait qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est dérivable à gauche et à droite en chaque point x, avec $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$. Le schéma de la démonstration est le suivante : la croissance des taux d'accroissements montre que

$$m_x(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant \frac{f(x)-f(x-k)}{k},$$

pour tous h et k strictement positifs. La fonction m_x est croissante, minorée par le second membre (on fixe k), donc admet une limite lorsque h tend vers 0. Par passage à la limite, $f'_d(x) \geqslant \dfrac{f(x)-f(x-k)}{k}$. Il ne reste qu'à faire tendre k vers 0 pour conclure de façon analogue.

Exercice corrigé 104

Posé en 2003

a. Soit $P(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique d'ordre inférieur ou égal à n qui s'annule en $2n+1$ points de $[0, 2\pi[$. Montrer que tous les a_k sont nuls.

b. Soit $P(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique d'ordre inférieur ou égal à $n \geqslant 1$ et à valeurs réelles. On suppose que

$$P'(0) = \|P'\|_\infty > n\|P\|_\infty$$

et l'on pose $Q(x) := \dfrac{\|P'\|_\infty}{n} \sin nx - P(x)$. Montrer que Q s'annule $2n$ fois sur $[0, 2\pi]$, puis que Q' s'annule $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi]$. Qu'en déduire sur Q'' ? Montrer que les hypothèses initiales sont contradictoires.

c. Soit $P(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique d'ordre inférieur ou égal à n à valeurs réelles. Montrer que

$$\|P'\|_\infty \leqslant n\|P\|_\infty.$$

Solution

a. Si (x_p) sont les points donnés d'annulation de P, les e^{ix_p} sont des complexes distincts, au nombre de $2n+1$, où s'annule $\sum_{k=-n}^{n} a_k t^k$, soit encore $\sum_{k=0}^{2n} a_{k-n} t^k$. Ce polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$ est donc le polynôme nul.

b. Posons $x_p := \dfrac{(2p+1)\pi}{2n}$ pour $p \in \mathbb{Z}$. On a

$$Q(x_p) = \frac{\|P'\|_\infty}{n}(-1)^p - P(x_p).$$

Comme par hypothèse $\left|\dfrac{\|P'\|_\infty}{n}(-1)^p\right| > \|P\|_\infty \geqslant |P(x_p)|$, $Q(x_p)$ a le signe strict de $(-1)^p$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q s'annule $2n$ fois sur $]x_0, x_{2n}[$, dont $2n-1$ fois sur $]x_1, x_{2n}[$. Si le $(2n)^e$ point d'annulation est dans $]x_{2n-1}, 2\pi]$, le compte est bon ; sinon, il est dans $]2\pi, x_{2n}[$ et par 2π-périodicité Q s'annule sur $]0, x_{2n} - 2\pi[$, soit $]0, x_0[$.

Le théorème de Rolle assure que Q' s'annule $2n-1$ fois sur $]0, 2\pi[$. Elle s'annule aussi en 0 par hypothèse, donc aussi en 2π. Par conséquent, Q' s'annule $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi]$ et donc Q'' s'annule $2n$ fois sur $]0, 2\pi[$. N'oublions d'autre part pas que P' réalise en 0 son maximum absolu, donc que $P''(0) = 0$ et, par conséquent, que $Q''(0) = 0$. Ainsi, Q'' s'annule $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi[$. La question **1** assure que $Q'' = 0$. Donc Q est affine et, comme fonction périodique, constante, donc nulle car s'annulant au moins deux fois. De l'identité $\dfrac{\|P'\|_\infty}{n} \sin nx = P(x)$ résulte $\|P\|_\infty = \dfrac{\|P'\|_\infty}{n}$, en contradiction avec l'hypothèse.

c. Supposons par l'absurde que $\|P'\| > n\|P\|_\infty$. La fonction $|P'|$, comme fonction continue périodique, réalise son maximum au point a. Quitte à considérer $x \mapsto P(x-a)$, qui est toujours un polynôme trigonométrique d'ordre inférieur ou égal à n, on peut supposer que $|P'|$ réalise son maximum en 0. Quitte à changer P en $-P$, on peut supposer que $P'(0) = \|P'\|$. On est alors sous les hypothèses de la question **b**, d'où la contradiction lorsque $n \geqslant 1$. Lorsque $n = 0$, le résultat est évident.

L'inégalité démontrée est due à Bernstein

Exercice corrigé 105

Posé en 2005

Soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante et tendant vers 0. On suppose que la suite de terme général

$$v_n := \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big) - nu_n$$

est bornée. Montrer que la série de terme général u_n converge. Étudier la réciproque.

Solution

Nous en proposons deux solutions différentes.

▷ **Première solution.**

• Nous supposons que (v_n) est bornée. Pour étudier cette situation, sachant que l'on a une information sur (v_n), on va retrouver une information sur (u_n) en « dérivant »(v_n). En effet, on dispose de deux opérations assez utiles sur les suites : l'intégration $(u_n) \mapsto \Big(\sum_{k\leqslant n} u_k\Big)$ et la dérivation $(u_n) \mapsto (u_n - u_{n-1})$. Ici on a

$$v_n - v_{n-1} = u_n - nu_n + (n-1)u_{n-1} = (n-1)(u_{n-1} - u_n).$$

Comme (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante, et donc convergente puisqu'elle est bornée. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1}(n-1)(u_{n-1} - u_n)$, à termes positifs, converge. Notons

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)(u_{k-1} - u_k)$$

son reste d'ordre n. On sait alors que $R_n \to 0$. Mais comme tous les termes sont positifs,

$$R_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} n(u_{k-1} - u_k) = nu_n \geqslant 0.$$

Par le critère de majoration, nu_n tend vers 0 et donc, par différence, la série de terme général u_n converge.

• La réciproque est évidente : si $\sum u_n$ converge, l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant v_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_n) \geqslant 0$$

montre que (v_n) est bornée.

▷ **Seconde solution.**

• On récrit (v_n) en $v_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_n) \geqslant 0$.

Supposons que (v_n) soit bornée par M, et fixons p. Pour $n \geqslant p$, on a alors

$$M \geqslant \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_n),$$

et le terme de droite tend vers $\sum_{k=1}^{p} u_k$. La série $\sum u_k$ est donc une série à termes positifs dont toutes les sommes partielles sont bornées par M, elle converge donc.

• Démontrons une réciproque un peu plus forte ; on pose $f_n(k) = u_k - u_n$ si $k \leqslant n$, et $f_n(k) = 0$ sinon. Les fonctions f_n sont toutes positives, et pour tout n, $f_n(k) \leqslant u_k$. La suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction $k \mapsto u_k$. Par ailleurs,

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)$$

converge normalement, donc le théorème de double limite s'applique, et v_n converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, ce qui est plus fort que « être bornée ».

▷ Remarquons en dernier lieu qu'une fois montrée l'équivalence proposée, il est facile de voir que $nu_n \to 0$. En effet, par différence, $nu_n \to \ell$, et forcément $\ell = 0$, faute de quoi la série de terme général u_n divergerait. On retrouve alors le résultat précédent. Les candidats érudits pouvaient aussi se rappeler que, si la série de terme général u_n converge et que (u_n) décroît, alors, assez classiquement, $nu_n \to 0$. Cela mérite tout de même une justification, que nous laissons aux bons soins du lecteur.

À titre d'exercice, nous vous invitons à montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$, et si la fonction $x \mapsto \left(\int_0^x f\right) - xf(x)$ est bornée, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice corrigé 106

Posé en 2007

Étudier la suite définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}\sqrt{u_n}$.

Solution

Chaque année, de nombreux exercices sont construits autour d'une perturbation d'un système dynamique classique. Nous proposons deux méthodes pour résoudre cet exercice.

▷ **Première solution.** La récurrence de l'énoncé est une perturbation de la récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n}$. Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$, et considérons une suite (v_n) vérifiant la récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$. Comme f est croissante, (v_n) est monotone. Par ailleurs, f admet les deux points fixes que sont 0 et $\frac{1}{4}$, et l'on a $f(x) > x$ sur $]0, \frac{1}{4}[$, et $f(x) < x$ sur $]\frac{1}{4}, +\infty[$. Des arguments classiques du cours permettent alors de conclure que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

Considérons maintenant, pour $a > 0$, la fonction $f_a(x) = a\sqrt{x}$. L'étude d'une suite (v_n) définie par la récurrence $v_{n+1} = f_a(v_n)$ suit le même cheminement pour conclure à une convergence vers a^2 dès que $v_0 > 0$.

Notons à partir de maintenant f_a^n la composée n^e de la fonction f_a par elle-même. On sait alors que $f_a^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a^2$ pour tout $x > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit N tel que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a alors par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant N, \quad f_{\frac{1}{2}}^{n-N}(u_N) \leqslant u_n \leqslant f_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{n-N}(u_N).$$

La suite de gauche tend vers $\frac{1}{4}$ et celle de droite vers $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2$, donc pour n assez grand,

$$\frac{1}{4} - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2 + \varepsilon.$$

On en déduit donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

▷ **Seconde solution.** Nous présentons une deuxième solution radicalement différente : nous allons calculer la valeur de u_n pour tout n. Il est clair que $u_n > 0$ pour tout n, nous sommes donc fondés à poser $v_n = \ln u_n$. Posons $a_n = \frac{n+1}{2n}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \ln a_n.$$

On reconnaît ici une récurrence linéaire du premier ordre, que l'on va

résoudre par la méthode de variation de la constante. La suite $z_n = \frac{1}{2^n}$ est solution de la récurrence sans second membre $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n$, nous nous intéressons donc à $\frac{v_n}{z_n} = 2^n v_n$. On a

$$2^{n+1} v_{n+1} - 2^n v_n = 2^{n+1} \ln a_n.$$

On peut alors sommer en « télescopant » l'égalité pour obtenir

$$2^n v_n - 2v_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \ln a_k.$$

Comme la série $\sum_{k \geqslant 1} 2^{k+1} \ln a_k$ est à termes négatifs et diverge, le théorème de comparaison des sommes partielles des séries divergentes donne l'équivalent :

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \ln a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \ln 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} -2^{n+1} \ln 2.$$

Il vient alors que $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -2 \ln 2$, et donc que $u_n = \exp v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

Exercice corrigé 107

Posé en 2007

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

Solution

▷ **Première solution.** Nous présentons une première solution fondée sur l'importante méthode de comparaison d'une série et d'une intégrale. Posons $f(x) := \frac{e^{i\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, et soit $F(x) := \int_1^x f(t)dt$ une primitive de f. On peut calculer F ; on a

$$F(x) = \left[-2i \cdot e^{i\sqrt{t}}\right]_1^x = -2i \cdot e^{i\sqrt{x}} + Cte.$$

La suite $F(n)$ est une suite divergente, on peut alors subodorer que la série $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ diverge également, par proximité avec l'intégrale $\int_1^n f(t)dt$.

Pour cela, il nous faut expliciter cette proximité.

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$F(n+1) - F(n) = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt.$$

La série de terme général $F(n+1) - F(n)$ diverge, donc si l'on prouve que la série de terme général $\int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt$ converge, on pourra conclure que $\sum f(n)$ diverge. Or, $f'(x) = \dfrac{i \cdot e^{i\sqrt{x}}}{2x} - \dfrac{e^{i\sqrt{x}}}{2x^{3/2}}$, et la seule majoration raisonnable que l'on peut faire du reste intégral est

$$\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt \right| \in O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc on ne peut pas ainsi prouver la convergence de la série des restes intégraux. Qu'à cela ne tienne, nous allons pousser le développement de Taylor un cran plus loin :

$$F(n+1) - F(n) = f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} f''(t)dt.$$

Cette fois on a $f''(t) \in O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, d'où l'on déduit que

$$\left| \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} f''(t)dt \right| \in O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et donc que la série des termes intégraux converge. D'un autre côté, on utilise la relation

$$f(n+1) - f(n) = f'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t)dt,$$

et comme la convergence vers 0 de $(f(n))$ implique celle de la série de terme général $f(n+1) - f(n)$, et que la série des termes intégraux converge absolument, alors la série $\sum_{n \geqslant 1} f'(n)$ converge.

On a donc prouvé que l'écart entre $F(n+1) - F(n)$ et $f(n)$ est le terme général d'une série convergente, donc que la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ diverge.

▷ **Seconde solution.** Nous ne résistons pas à l'envie de vous présenter une deuxième preuve, à la fois plus courte et plus astucieuse.

Considérons l'ensemble A_k des entiers n tels que

$$2k\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant \sqrt{n} \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Si $n \in A_k$, on a $\cos\sqrt{n} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et donc

$$\sum_{n\in A_k} \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|A_k|\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}.$$

Or

$$n \in A_k \iff \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)^2 \leqslant n \leqslant \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Donc $|A_k| \geqslant \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 1 = 2k\pi^2 - 1$. Ainsi,

$$\sum_{n\in A_k} \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(2k\pi^2 - 1)\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

La quantité minorante étant ultimement minorée par une constante strictement positive, $\displaystyle\sum_{n\in A_k} \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui nie la condition nécessaire de convergence donnée par le critère de Cauchy.

Exercice corrigé 108

Posé en 2007

Étudier la série de terme général $(-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$.

Solution

Posons $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$. La présence de $(-1)^n$ nous incite à regrouper les termes deux par deux :

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{\sin(\ln 2n)}{2n} - \frac{\sin(\ln(2n+1))}{2n+1} = f(2n) - f(2n+1)$$

lorsque $f(x) := \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$. On a

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x^2} + \frac{\cos(\ln x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent, $f(2n) - f(2n+1) = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Il en résulte que la série de terme général $u_{2n} + u_{2n+1}$ est absolument convergente, donc convergente. Nous sommes dans un cas où l'on peut en déduire que la série de terme général u_n converge ; en effet, la suite définie par $S_{2n-1} := \displaystyle\sum_{k=2}^{2n-1} u_k$ est convergente, et $S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n}$ admet la même limite, puisque manifestement $u_n \to 0$. Donc (S_n) converge vers la limite commune.

On aurait pu aussi effectuer une transformation d'Abel qui aurait conduit à des calculs analogues, mais plus compliqués.

Exercice corrigé 109

Posé en 2007

Soit (u_n) une suite positive telle que la série associée soit convergente.

a. On pose $w_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{w_n}{n(n+1)}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{w_k}{k(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

b. On pose $v_n := (u_1 \cdots u_n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que la série de terme général v_n converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Solution

a. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{w_k}{k} - \frac{w_k}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{k} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{w_{k-1}}{k} = w_1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{w_k - w_{k-1}}{k} - \frac{w_N}{N+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} u_k - \frac{w_N}{N+1} \leqslant \sum_{k=1}^{N} u_k.
\end{aligned}$$

La majoration des sommes partielles montre la convergence de la série de terme général $\dfrac{w_n}{n(n+1)}$. Par différence entre les sommes partielles de

la série de terme général u_n et de la série de terme général $\dfrac{w_n}{n(n+1)}$, cela montre aussi que $\dfrac{w_N}{N+1} \to l$. Si, par l'absurde, $l \neq 0$, alors $\dfrac{w_N}{N(N+1)} \sim \dfrac{l}{N}$, ce qui contredit la convergence de la série. Donc $l = 0$ et, par passage à la limite,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{w_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

b. Nous allons tâcher d'utiliser la question précédente et, pour cela, nous écrivons, grâce à l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique,

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} k u_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{n} = \frac{w_n}{n}.$$

Donc

$$v_n \leqslant \frac{w_n}{n(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Montrons l'inégalité $(n!)^{\frac{1}{n}} \geqslant \dfrac{n+1}{e}$, équivalente à $\alpha_n := \dfrac{n!e^n}{(n+1)^n} \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = ne\dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^n} = e\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-n}$. Grâce à l'inégalité $\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \leqslant \dfrac{1}{n}$, on obtient que $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \geqslant 1$, donc que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ croît. Comme $\alpha_1 = \dfrac{e}{2} \geqslant 1$, on a bien $\alpha_n \geqslant 1$. Finalement,

$$v_n \leqslant \frac{e w_n}{n(n+1)}.$$

Par somme, $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{w_k}{k(k+1)} = e\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

L'inégalité ainsi démontrée s'appelle inégalité de Carleman. En fait, e est la meilleure constante possible dans cette inégalité. Pour le voir, il suffit de considérer une suite qui réalise l'égalité dans l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique utilisée, à savoir $u_k = \dfrac{1}{k}$. Comme cette série diverge, on la tronque jusqu'à $k = N$ et on la prend nulle après. Pour une telle suite, une inégalité $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k \leqslant C\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ se traduit par

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k!)^{\frac{1}{k}}} \leqslant C\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Grâce à la formule de Stirling, on voit que $\dfrac{1}{(k!)^{\frac{1}{k}}} \sim \dfrac{e}{k}$. Il en résulte que $\dfrac{C}{e} \geqslant 1$, donc que $C \geqslant e$.

Exercice corrigé 110

Posé en 2004

Soient $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé de degré d et Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé, tel que Q n'admet aucune racine dans $]0, d[$. Montrer que le polynôme $\sum_{k=0}^{d} a_k Q(k) X^k$ est scindé.

Solution

Commencez par justifier qu'il suffit d'étudier le cas où Q est de degré 1, c'est un exercice d'algèbre. Vérifiez-le lorsque $\deg Q = 1$, cela devient un exercice d'analyse.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit d'étudier le cas où Q et P sont unitaires. Notons $Q \star P$ le polynôme $\sum_{k=0}^{d} a_k Q(k) X^k$. L'opération $\star$ n'est pas symétrique, toutefois

$$(Q_1 Q_2) \star P = \sum_{k=0}^{d} Q_1(k) a_k Q_2(k) X^k = Q_1 \star (Q_2 \star P).$$

Cette propriété nous conduit à envisager une démonstration par récurrence sur le degré de Q : supposons que, quel que soit le polynôme P scindé et quel que soit le polynôme Q de degré $n-1$, scindé, sans racine dans $]0, \deg P - 1[$, le résultat annoncé soit vrai, et admettons un instant l'initialisation lorsque $\deg Q = 1$. Soit $Q = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$, avec les $\lambda_j \notin]0, d[$. Notons $\tilde{Q} = \prod_{j=1}^{n-1} (X - \lambda_j)$. Alors par hypothèse de récurrence au rang $n-1$, le polynôme $\tilde{P} = \tilde{Q} \star P$ est scindé, et au vu de la formule définissant $\star$, il est de degré $\leqslant d$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au rang 1, et $Q \star P = (X - \lambda_n) \star \tilde{P}$ est scindé.

Il nous suffit donc de prouver le résultat pour un polynôme P scindé de degré d, et le polynôme $Q = X - \lambda$, où $\lambda \notin]0, d[$. Notons R le polynôme $(X - \lambda) \star P$. On a

$$R = -\sum_{k=0}^{d} \lambda a_k X^k + \sum_{k=0}^{d} k a_k X^k = XP' - \lambda P.$$

Pour montrer qu'un polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$, deux arguments d'analyse peuvent être utilisés : le théorème de Rolle, qui affirme qu'entre deux racines d'un polynôme on peut trouver une racine du polynôme dérivé, et le théorème des valeurs intermédiaires, qui affirme qu'à chaque variation de signe de P on peut trouver une racine de P. Ici, le polynôme R est de degré d si $\lambda \neq d$, et au plus $d-1$ lorsque $\lambda = d$.

On va tenter d'exprimer R à l'aide d'une dérivée. On utilisera alors des arguments de type Rolle. Supposons pour l'instant que $\lambda \neq 0$, et que P ne s'annule pas en 0. Posons $f(x) := \dfrac{P(x)}{|x|^\lambda}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On a

$$f'(x) = \frac{R(x)}{|x|^{\lambda+1}} \text{ si } x > 0, \quad f'(x) = -\frac{R(x)}{|x|^{\lambda+1}} \text{ si } x < 0\,.$$

Notons $P(x) = \prod_{j=1}^{r} (X - x_j)^{n_j}$, où $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$. Alors si $n_j \geqslant 2$, R admet aussi x_j pour racine, d'ordre de multiplicité exactement $n_j - 1$. Puis le théorème de Rolle assure que f', donc R, s'annule sur $]x_j, x_{j+1}[$, du moins si $0 \notin]x_j, x_{j+1}[$. Au plus un de ces intervalles contient 0, donc le polynôme R :

- admet au moins $r-2$ racines $z_1, \ldots, z_{r-2}$ dans les intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ qui ne contiennent pas 0,
- admet aussi les x_j comme racines lorsque $n_j \geqslant 2$, avec comme ordre de multiplicité $n_j - 1$.

On a ainsi trouvé un facteur scindé de R de degré $\sum_{j=1}^{r} (n_j - 1) + r - 2 = d - 2$. Il nous manque deux racines pour affirmer que R est scindé. En fait il ne nous en manque qu'une seule, car alors R admettrait un facteur scindé de degré $d-1$, ce qui est suffisant (le facteur restant est forcément scindé). Ici, nous allons discuter suivant λ.

- Si $\lambda > d$, alors $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Une généralisation du théorème de Rolle permet d'affirmer que f' s'annule entre $-\infty$ et x_1, et entre x_r et $+\infty$, du moins dans celui des deux intervalles qui ne contient pas 0. Cela fournit une racine supplémentaire pour R.
- Si $\lambda = d$, alors R est de degré inférieur ou égal à $d-1$, on a assez de racines.
- Si $\lambda < 0$, alors f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ceci fournit une autre valeur d'annulation de f, et le théorème de Rolle, qui ne nécessite pas la dérivabilité de la fonction aux extrémités du segment, fournit alors une ou deux autres racines pour R.

Il nous reste encore à étudier le cas où $\lambda = 0$, mais dans ce cas $R = XP'$, et comme il est classique que P' soit scindé lorsque P l'est, R est scindé.

Terminons notre étude par le cas où P s'annule en 0. On écrit alors $P = X^r Q$, avec $r \geqslant 1$ et Q de degré $d - r$. On a alors

$$R = XP' - \lambda P = X^r(XQ' - (\lambda - r)Q).$$

L'étude précédente prouve alors que R est scindé dès que $\lambda - r \notin]0, d-r[$, donc dès que $\lambda \notin]r, d[$. En particulier, R est scindé lorsque $\lambda \notin]0, d[$.

Exercice corrigé 111

Posé en 2003

Soit (a_n) une suite réelle décroissant vers 0.

a. Montrer la convergence de la série de terme général $a_n \sin nx$.

b. Montrer que s'équivalent

(1) $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$;

(2) la série de terme général $a_n \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution

a. Il faut bien entendu effectuer une transformation d'Abel. Posons donc $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \sin kx$. Pour $n \geqslant 1$, $S_n(x) - S_{n-1}(x) = \sin nx$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} a_k \sin kx &= \sum_{k=p}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=p}^{n} a_k S_{k-1}(x)\\ &= \sum_{k=p}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=p-1}^{n-1} a_{k+1} S_k(x)\\ &= a_n S_n(x) - a_p S_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k(x).\end{aligned}$$

Calculons, pour $\sin \frac{x}{2} \neq 0$,

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \mathfrak{Im} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \mathfrak{Im}\, \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\\ &= \mathfrak{Im}\, \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2} = \sin nx/2 \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2}.\end{aligned}$$

En particulier, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\sin x/2|}$. Par conséquent,

$$|(a_k - a_{k+1})S_k(x)| = (a_k - a_{k+1})|S_k(x)| \leqslant \frac{a_k - a_{k+1}}{\sin x/2}.$$

Par télescopage, la série majorante converge. Donc la série de terme général $(a_k - a_{k+1})S_k(x)$ converge. Comme $a_n S_n(x) \to 0$, on obtient la convergence de la série initiale et l'égalité, pour tout p,

$$\sum_{k=p}^{+\infty} a_k \sin kx = -a_p S_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x),$$

expression du reste qui nous sera utile. Ces formules sont également valables pour $x \equiv 0 \mod 2\pi$.

b. ▷ Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (2). Il nous suffit par 2π-périodicité et imparité de montrer que le reste de la série converge uniformément vers 0 sur $[0, \pi]$. Soit donc $x \in [0, \pi]$. Soit n assez grand pour que $ka_k \leqslant \varepsilon$ lorsque $k \geqslant n$.

Écrivons le reste de la série sous la forme

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sin kx = \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k \sin kx + \sum_{k=n+p}^{+\infty} a_k \sin kx = A_n(x) + B_n(x),$$

où p (qui dépend de x) est défini par $p := \lfloor \frac{\pi}{x} \rfloor$. On a donc $p \leqslant \frac{\pi}{x} < p + 1$. Nous bornons $A_n(x)$ directement grâce à l'inégalité $|\sin kx| \leqslant kx$:

$$|A_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} ka_k x \leqslant \varepsilon p x \leqslant \varepsilon \pi.$$

Quant à $B_n(x)$, nous utilisons son expression donnée par la transformation d'Abel et nous le bornons à l'aide de l'inégalité de concavité $\sin \frac{x}{2} \geqslant \frac{x}{\pi}$, qui montre que $|S_k(x)| \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant p + 1$:

$$\begin{aligned} |B_n(x)| &= \left| -a_{n+p} S_{n+p-1}(x) + \sum_{k=n+p}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) \right| \\ &\leqslant 2(p+1)a_{n+p} \leqslant 2(n+p)a_{n+p} \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in]0, \pi]$,

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 2)\varepsilon.$$

Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$, ce qui montre bien que le reste converge uniformément vers 0 sur $[0, \pi]$.

▷ Montrons que (2) $\Longrightarrow$ (1). On doit avoir

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin kx \Big\|_\infty \to 0\,.$$

Évaluons cette « tranche de Cauchy » au point $x_n = \dfrac{\pi}{4n}\cdot$ On a alors $\dfrac{\pi}{4} \leqslant kx_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sin kx_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ Par conséquent, puisque (a_n) décroît,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin kx_n \geqslant na_{2n}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Donc $2na_{2n} \to 0$. Comme $a_{2n+1} \leqslant a_{2n}$, on a aussi $(2n+1)a_{2n+1} \to 0$, et finalement $na_n \to 0$.

L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) de la question b *est particulièrement subtile et ne peut guère être traitée sans une réflexion approfondie ce qui, dans le cadre limité en temps d'un oral, équivaut à une indication.*

Exercice corrigé 112

Posé en 2007

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n(n-k)}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot$

Solution

L'énoncé est assez déroutant. Nous allons voir comment construire une solution, en établissant d'abord des inégalités asymptotiques puis en les rendant effectives.

Posons $u_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n(n-k)}$. On reconnaît dans cette somme le terme $\dfrac{n^k}{k!}$ qui est le terme général de la série exponentielle e^n. Commençons par majorer le terme $e^{-n(n-k)}$ par sa plus grande valeur, obtenue en $k = n-1$. On obtient :

$$u_n \leqslant e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \leqslant e^{-n}e^n = 1\,.$$

Cette première majoration est insuffisante, nous allons tenter de l'améliorer. En fait, la majoration $e^{-n(n-k)} \leqslant e^{-n}$ est très grossière pour tout $k \leqslant n-2$, nous allons donc séparer le dernier terme (pour $k = n-1$) des autres. Posons :

$$v_n := \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^k}{k!} e^{-n(n-k)}.$$

Alors tous les termes $e^{-n(n-k)}$ sont inférieurs à e^{-2n}, donc

$$v_n \leqslant e^{-2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^k}{k!} \leqslant e^{-2n} e^n = e^{-n}.$$

Voici une majoration qui est nettement plus petite que $\frac{1}{\sqrt{n}}$, en tout cas lorsque $n \to +\infty$. Regardons le terme restant dans la série u_n :

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-n} = \frac{n^n}{n!} e^{-n} \underset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Comme v_n est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$, on a $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Ainsi, $u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour n assez grand. Cette conclusion pourrait suffire, mais l'énoncé suggère que l'on montre cette inégalité pour tout n, ou du moins que l'on compare les deux suites pour toute valeur de n. Ici, il s'agit de rendre une inégalité asymptotique *effective*, c'est-à-dire d'expliciter une valeur n_0 telle que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Si on dispose de cette valeur, il nous suffira alors d'étudier un nombre fini de cas pour déterminer tous les entiers n qui vérifient cette propriété. Pour cela, il nous faut étudier la suite $w_n := \sqrt{n} \frac{n^n}{n!} e^{-n}$, qui converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, et donc

$$\ln \frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ce dernier équivalent est obtenu grâce à un développement limité de $\ln(1+h)$ à l'ordre 3 en h. Il nous prouve que $\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$ pour n assez grand. En transformant ce développement limité en une inégalité (une minoration), on obtiendra notre valeur effective de n. Pour cela, on écrit :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + R(h),$$

où $R(h) := \displaystyle\int_0^h \frac{(h-t)^4}{24} \ln^{(5)}(t)dt$ est le reste intégral du développement de Taylor, qui est positif lorsque $h > 0$ car la dérivée 5e de $\ln(1+h)$ est positive. Donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}.$$

En reportant dans la valeur de $\ln \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ on obtient

$$\ln \frac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant \frac{1}{12n^2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2}\right).$$

Conclusion : $w_{n+1} \geqslant w_n$ pour tout $n \geqslant 2$! On vérifie aisément que $w_2 = 2\sqrt{2}e^{-2} \geqslant e^{-1} = w_1$. Ainsi, $w_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit la majoration suivante de u_n, valable pour tout n :

$$u_n \leqslant e^{-n} + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Il ne reste plus qu'à rendre effective la majoration $e^{-n} \in o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Pour cela on pose $z_n = \dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$. On a facilement $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{e} < 1$ pour toute valeur de $n \geqslant 1$, donc la suite (z_n) est décroissante, et

$$e^{-n} \leqslant \frac{z_1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{e\sqrt{n}}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Cela conduit à la majoration

$$u_n \leqslant \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

pour tout n, car $\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0,767 \leqslant 1$.

Chapitre 6

Analyse fonctionnelle

Exercice corrigé 113

Posé en 2006

On pose, pour $x \geqslant 0$, $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

a. Justifier la définition de f.

b. Montrer que f est dérivable.

c. Trouver un équivalent de f en 0.

d. Montrer que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

e. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Solution

a. Posons $u_n(x) := \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$. La suite $(u_n(x))$ est décroissante et tend vers 0. On peut donc appliquer à la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n(x)$ le critère de Leibniz, aussi appelé critère des séries alternées, et cette série converge.

b. On a $u_n'(x) = \frac{1}{x+n}$, ce qui définit encore une suite qui tend vers 0 en décroissant. On peut à nouveau appliquer le critère de Leibniz, ce qui montre que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n'(x)$ converge mais aussi que

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n'(x)\right| \leqslant |u_N'(x)| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Il en résulte que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n'(x)$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$, donc que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}.$$

c. En particulier,

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2\,.$$

Cette égalité est classique et comme l'énoncé demande de démontrer un résultat qui la contient dans la question suivante, nous la considérons comme acquise. Il résulte alors de la formule de Taylor & Young et du fait que $f(0)=0$, que $f(x) \underset{0}{\sim} x\ln 2$.

d. Partons de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$, qui porte sur une fonction continue. On peut écrire, pour $t \in [0,1[$,

$$\frac{t^x}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x+k} + R_n(t),$$

avec $R_n(t) := (-1)^{n+1}\dfrac{t^{x+n+1}}{1+t}$. Donc, l'intégrale étant considérée comme l'intégrale sur $[0,1[$,

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} + \int_0^1 R_n(t)dt.$$

Or

$$\left|\int_0^1 R_n(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{x+n+2},$$

après majoration de $\dfrac{1}{1+t}$ par 1. Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

ou encore

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}.$$

On a procédé de cette façon parce que le théorème d'interversion directe de la série et de l'intégrale ne s'appliquait pas ici, faute de convergence

de la série de terme général $\dfrac{1}{x+k+1}$. *Cependant, on aurait pu quand même appliquer le théorème de convergence dominée.*

On note qu'appliquée à $x = 0$, cette égalité répond au résultat utilisé dans la question **c**.

Par changement d'indice, on voit que, finalement,

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt.$$

e. Nous allons d'abord chercher un équivalent de f'. On pourrait utiliser le changement de variable $u = t^x$ et invoquer le théorème de convergence dominée. Mais il existe un argument plus joli : on a

$$f'(x) + f'(x+1) = \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}.$$

D'autre part, grâce à son expression intégrale, on voit que f' décroît. Par conséquent,

$$\frac{1}{x+1} = f'(x) + f'(x+1) \leqslant 2f'(x) \leqslant f'(x) + f'(x-1) = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que $f'(x) \sim \dfrac{1}{2x}$. On peut appliquer le théorème de primitivation des équivalents puisque $\dfrac{1}{2x}$ est une fonction positive d'intégrale divergente en $+\infty$. Il vient ainsi

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\ln x.$$

Exercice corrigé 114

Posé en 2007

On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par leur premier terme u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - v_n \qquad v_{n+1} = u_n - 2v_n.$$

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n z^n$.

Solution

On peut écrire matriciellement cette relation de récurrence. Posons pour cela $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$; on a alors $X_{n+1} = A.X$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi $X_n = A^n X_0$; on pourrait envisager de diagonaliser A, en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0, puis déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières. Nous allons plutôt essayer une approche plus économe en calculs (même s'il doit en rester quelques-uns...).

▷ Tout d'abord, considérons une norme $||\cdot||$ quelconque sur $\mathbb{R}^2$, et notons aussi $||\cdot||$ la norme matricielle associée. Par multiplicativité de cette norme, on a alors pour tout n, $||X_n|| \leqslant ||A||^n ||X_0||$, et en particulier

$$u_n \in O(||A||^n) \qquad \text{et} \qquad v_n \in O(||A||^n).$$

Par conséquent, $(u_n z^n)$ et $(v_n z^n)$ sont bornées lorsque $|z| \leqslant \dfrac{1}{||A||}$, donc les séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont un rayon de convergence strictement positif, supérieur à $\dfrac{1}{||A||}$. Notons

$$f(z) := \sum_{n \geqslant 0} u_n z^n \qquad \text{et} \qquad g(z) := \sum_{n \geqslant 0} v_n z^n.$$

Soit $R > 0$ tel que les deux séries entières convergent pour tout $|z| < R$. On considère un tel z pour lequel on a

$$u_{n+1} z^{n+1} = z\,(u_n z^n - v_n z^n), \qquad v_{n+1} z^{n+1} = z\,(u_n z^n - 2 v_n z^n).$$

On peut sommer ces égalités sur $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir :

$$\begin{cases} f(z) - f(0) = z f(z) - z g(z) \\ g(z) - g(0) = z f(z) - 2z g(z) \end{cases} \iff \begin{cases} (1-z) f(z) + z\, g(z) & = u_0 \\ -z\, f(z) + (1+2z) g(z) & = v_0. \end{cases}$$

Résolvons ce système par les formules de Cramer. Le déterminant du système est $D(z) = -z^2 + z + 1$, qui ne s'annule pas sur un voisinage de 0. Sur ce voisinage de 0, on a alors

$$f(z) = \frac{u_0(1+2z) + v_0 z}{-z^2 + z + 1}, \qquad g(z) = \frac{u_0 z + v_0(1-z)}{-z^2 + z + 1}.$$

▷ On a donc trouvé la valeur des sommes. On va maintenant en déduire les rayons de convergence des séries associées. Intéressons-nous d'abord à $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} u_n z^n$. Soient z_1 et z_2 les deux racines de l'équation $z^2 - z - 1 = 0$.

On a $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La fraction rationnelle $f(z)$ admet une décomposition en éléments simples

$$f(z) = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} = \frac{-A/z_1}{1 - \frac{z}{z_1}} + \frac{-B/z_2}{1 - \frac{z}{z_2}}.$$

La formule précédente est valable sur un voisinage de 0, donc par unicité des coefficients des séries entières, on a

$$u_n = -\frac{A}{z_1^{n+1}} - \frac{B}{z_2^{n+1}}.$$

Remarquons que $\frac{1}{|z_2|} > \frac{1}{|z_1|}$. On en déduit que :

- si $A = B = 0$, le rayon est infini. Cela correspond au cas où on a $u_0 = v_0 = 0$ (pas très intéressant) ;
- si $A \neq 0$ et $B = 0$, le rayon de $f(z)$ vaut $|z_1| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cela correspond au cas où z_2 est un faux pôle de la fraction, i.e. lorsque $u_0(1+2z_2) + v_0 z_2 = 0$ mais $(u_0, v_0) \neq (0,0)$;
- si $B \neq 0$, alors $u_n \sim -\frac{B}{z_2^{n+1}}$ et le rayon de convergence est alors $|z_2| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Cela correspond au cas où $u_0(1+2z_2) + v_0 z_2 \neq 0$.

Le même travail peut être mené avec $g(z) = \sum_{n \geqslant 0} v_n z^n$ et on obtient que :

- le rayon est infini lorsque $u_0 = v_0 = 0$;
- le rayon de $g(z)$ vaut $|z_1| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lorsque $u_0 z_2 + v_0(1-z_2) = 0$ mais $(u_0, v_0) \neq (0,0)$;
- le rayon de $g(z)$ est $|z_2| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ lorsque $u_0 z_2 + v_0(1-z_2) \neq 0$.

Remarquons alors que les formules rationnelles donnent la valeur des sommes des séries entières non plus au voisinage de 0, mais sur tout le domaine de convergence.

Il est classique que lorsque les coefficients d'une série entière vérifient une équation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants, la somme de la série entière est une fraction rationnelle. Tout le travail consistant à décomposer la série entière en éléments simples peut être considéré comme adhérent au cours et donc être omis sauf demande contraire de l'examinateur.

Une façon un peu différente de dire les choses est la suivante. Il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)P,$$

les λ_i étant les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n A^n = P^{-1}\operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-\lambda_1 z}, \frac{1}{1-\lambda_2 z}\right)P.$$

On en déduit aisément que f et g sont des fractions rationnelles du type indiqué, que l'on peut calculer exactement par cette méthode.

Exercice corrigé 115

Posé en 2005

On pose, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$: $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$.

a. Étudier la convergence de la série de fonctions définissant g.

b. Soient $c > 2$ un réel et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x).$$

Montrer que $f = 0$.

c. Déduire des questions précédentes que $g(x) = \frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2}$.

Solution

Cet exercice nécessite un peu de soin, mais il n'est pas difficile.

a. Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, alors $\frac{1}{(x-n)^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$ et lorsque n tend vers $-\infty$. Donc les deux séries

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(x-n)^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(x-(-n))^2}$$

sont absolument convergentes, ce qui établit la convergence simple (et même absolue) de la série de fonctions définissant g. La convergence est normale sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. En effet, un tel segment est inclus dans un intervalle du type $[k+\varepsilon, k+1-\varepsilon]$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$, et en posant $g_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2}$, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b], |g_n(x)| &\leqslant \max\left(\frac{1}{(\varepsilon+|n-k|)^2}, \frac{1}{(\varepsilon+|n-(k+1)|)^2}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{(\varepsilon+|n-k|)^2} + \frac{1}{(\varepsilon+|n-(k+1)|)^2}.\end{aligned}$$

On a ainsi majoré $||g_n||_{[a,b]}$ par le terme général d'une série convergente, d'où la convergence normale. Comme les g_n sont continues sur $[a, b]$, on obtient ainsi la continuité de g sur tout intervalle de type $[a, b]$, et donc sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (vu que la continuité est une notion locale).

Vous pouvez même montrer que la convergence est uniforme sur tout ensemble du type $[-M, M] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$. En effet, pour $n \geqslant M+1$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{(n-M)^2}$.

b. Préférons l'égalité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{c} f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On peut interpréter celle-ci : $f(x)$ est la somme pondérée de deux autres valeurs de f, et la pondération $\frac{1}{c} + \frac{1}{c} < 1$ fait que $f(x)$ est plus petite (en valeur absolue bien sûr) que d'autres valeurs prises par f.

Considérons un segment $[-M, M]$. Si $M \geqslant 1$, la propriété suivante est vraie :

$$\forall x \in [-M, M], \quad \frac{x}{2} \text{ et } \frac{x+1}{2} \in [-M, M].$$

On supposera cette propriété vérifiée par la suite. Considérons la borne supérieure $\alpha := \sup_{x \in [-M,M]} |f(x)|$, dont l'existence est garantie par la continuité de f. Alors pour tout $x \in [-M, M]$, on déduit de l'égalité précédente que

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{c} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \frac{1}{c} \left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \leqslant \frac{2\alpha}{c}.$$

Cette inégalité passe à la borne supérieure en $\alpha \leqslant \frac{2}{c}\alpha$. Comme $\frac{2}{c} < 1$, cela conduit immédiatement à $\alpha = 0$, donc f est nulle sur $[-M, M]$. Le résultat étant valable pour tout $M \geqslant 1$, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

c. Posons $f(x) = g(x) - \dfrac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2}$. On est tenté de prouver que f vérifie les hypothèses de la question précédente pour en déduire que f est nulle. Le premier problème provient de la non-définition de f aux points de $\mathbb{Z}$. On va d'abord montrer que f est prolongeable par continuité en tout $x \in \mathbb{Z}$.

Remarquons au préalable que g est 1-périodique : en effet,

$$g(x+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+1-n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-(n-1))^2} = g(x).$$

Comme il est clair que $x \mapsto \dfrac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2}$ est aussi 1-périodique, f est encore 1-périodique. Il nous suffit donc de montrer que f admet une limite au voisinage de 0. Plaçons-nous sur $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En reprenant la notation $g_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2}$, on a $||g_n||_I = \dfrac{1}{(|n| - \frac{1}{2})^2}$ dès que $n \neq 0$. Ainsi, la série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x-n)^2}$$

converge normalement sur I et sa somme définit donc une fonction $\tilde{g}$ conti-

nue sur I. Si $x \neq 0$ est dans I, on a donc

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{g}(x).$$

Par ailleurs, on a le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2} &= \frac{\pi^2}{\left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{\pi^2 x^2 \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right)} = \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).\end{aligned}$$

On en déduit donc que $f(x)$ tend vers $\tilde{g}(0) - \frac{\pi^2}{3}$ lorsque x tend vers 0. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Montrons maintenant que f vérifie une équation fonctionnelle du type de celle de la deuxième question. Posons $h(x) = \frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2}$. On a, pour tout x tel que $x \notin \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{\left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^2} + \frac{\pi^2}{\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \\ &= \pi^2 \frac{\left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^2 \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2}{(\sin \pi x)^2} = 4h(x).\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour un réel x satisfaisant toujours $x \notin \mathbb{Z}$,

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x-2n)^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(x-(2n-1))^2} = 4g(x).$$

Donc $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Comme cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$, l'égalité précédente se propage à tout $\mathbb{R}$. On est alors dans les hypothèses de la question **b** et on peut affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2}.$$

Une façon de faire, certainement plus naturelle, consiste à introduire l'outil des séries de Fourier. La technique est très différente, quoique de facture absolument classique. Le point de départ est le développement en série de Fourier de $\cos \alpha t$ considéré sur $[-\pi, \pi]$ et prolongé par 2π-périodicité.

Exercice corrigé 116

Posé en 2007

Déterminer la limite de $S(n) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Solution

Regardons d'abord l'ordre de grandeur des différents termes de la somme. Il y a de plus en plus de termes, qui sont de plus en plus petits, c'est une forme indéterminée. Les plus grandes contributions à la somme correspondent aux indices les plus proches de n. Il ne s'agit pas d'une série, puisque le terme dans la somme dépend à la fois de k et de n.

Commençons par faire un changement d'indice ($k \leftrightarrow n-k$) qui mettra les plus gros contributeurs en premier. On a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

Posons $f_k(n) := \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ si $n > k$, et 0 si $n \leqslant k$, de sorte que l'on écrit $S(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Fixant k, on a

$$f_k(n) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-k).$$

Notons aussi que par l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, on a $f_k(n) \leqslant e^{-k}$ pour tout n. En posant $||f||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} ||f_k||_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}$ qui converge : la série de fonctions définissant $S(n)$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. Comme chacune des fonctions f_k admet une limite en $+\infty$, le théorème d'interversion de limite sous convergence normale (ou théorème de la double limite) établit alors que

$$S(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

On a pu calculer la dernière somme car il s'agit d'une série géométrique.

Cet exercice est un grand classique.

Exercice corrigé 117

Posé en 2005

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de complexes, telle que $\sum |a_n|^2$ converge.

On pose $f(t) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{t-n}$.

a. Préciser le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.

c. Montrer que si f est nulle sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors la suite (a_n) est nulle.

Solution

La présence d'une somme de carrés de modules fait irrésistiblement penser à l'inégalité de Cauchy & Schwarz...

a. Déjà, $f(t)$ n'est pas définie pour $t \in \mathbb{N}^*$. Prenons $t \notin \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité de Schwarz, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{|t-n|} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|t-n|^2}\Big)^{1/2}.$$

Les deux séries dont les sommes partielles sont à droite de l'inégalité convergent, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{t-n}$ est absolument convergente, convergente par conséquent. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^*$.

b. Commençons par répondre de façon formelle, c'est-à-dire sans nous préoccuper de la moindre notion de convergence. On a

$$\frac{a_n}{n-t} = \frac{a_n}{n} \frac{1}{1-\frac{t}{n}} = \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{n^k} \; ; \tag{1}$$

$$f(t) = -\sum_{n\geqslant 1} \sum_{k\geqslant 0} \frac{a_n}{n} \frac{t^k}{n^k} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^{k+1}}\Big) t^k. \tag{2}$$

Justifions maintenant les deux formules. La première est valable lorsque $\left|\frac{t}{n}\right| < 1$, donc lorsque $t \in \,]-1, 1[$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La deuxième formule provient d'une interversion de sommations. Nous utilisons pour cela le théorème de Fubini, que nous rappelons ci-après.

Si $(u_{n,k})$ est une suite double de nombres complexes telle que pour tout n, la série $\sum_k |u_{n,k}|$ converge, et si la série $\sum_n \left(\sum_k |u_{n,k}|\right)$ converge, alors on en déduit que pour tout k, la série $\sum_n |u_{n,k}|$ converge, et les séries

$$\sum_n \left(\sum_k u_{n,k}\right) \quad \text{et} \quad \sum_k \left(\sum_n u_{n,k}\right)$$

convergent et ont même somme.

Ici, on a $u_{n,k} = \dfrac{a_n}{n}\dfrac{t^k}{n^k}$. La série $\sum_{k\geqslant 0} |u_{n,k}|$ converge et sa somme vaut $\dfrac{|a_n|}{n-t}$ (t est pris dans $]-1,1[$ et $n \geqslant 1$). De plus, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{|a_n|}{n-t}$ converge d'après les arguments de type Cauchy & Schwarz développés à la première question. Ceci justifie donc l'interversion d'intégrales et la formule (2).

Ainsi, f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et on a

$$f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^{k+1}}\right)t^k,$$

pour tout $t \in]-1,1[$.

c. Si f s'annule sur un voisinage de 0, alors toutes ses dérivées s'annulent en 0, donc les coefficients de son développement en série entière, qui s'expriment à l'aide de ces dérivées, sont nuls. Ainsi,

$$\forall k \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^k} = 0.$$

Lorsque k est grand, les termes $\dfrac{1}{n^k}$ sont très petits, sauf lorsque $n = 1$. Utilisons cette propriété : on a

$$a_1 = -\sum_{n\geqslant 2}\frac{a_n}{n^k}, \text{ donc } |a_1| \leqslant \sum_{n\geqslant 2}\frac{|a_n|}{n^k}.$$

Or, pour $n \geqslant 2$ on a $n^k = n \cdot n^{k-1} \geqslant n \cdot 2^{k-1}$, donc

$$|a_1| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|a_n|}{n}$$

(rappelons que $\sum \dfrac{|a_n|}{n}$ converge). L'inégalité précédente passe à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ et permet d'en déduire que $a_1 = 0$.

Tâchons de poursuivre cette technique de raisonnement. On procède par récurrence en supposant que $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ sont nuls. Alors

$$\frac{a_p}{p^k} = -\sum_{n \geqslant p+1} \frac{a_n}{n^k}.$$

Donc $|a_p| \leqslant p \sum_{n \geqslant p+1} \left(\frac{p}{n}\right)^{k-1} \frac{|a_n|}{n} \leqslant p\left(\frac{p}{p+1}\right)^{k-1} \sum_{n \geqslant p+1} \frac{|a_n|}{n}$ et ce dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui conduit à $a_p = 0$. La propriété se propage, donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = 0.$$

Exercice corrigé 118

Posé en 2000

Soit (a_n) une suite de complexes telle que $na_n \to 0$.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. On pose $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque $x \in]-1, 1[$.

b. On suppose que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que la série de terme général a_n converge et est de somme ℓ.

Solution

L'hypothèse peut se traduire par le fait que la suite (ε_n) définie par $\varepsilon_n := \sup_{k \geqslant n} k|a_k|$ tend vers 0. Cette suite est décroissante.

a. Puisque $a_n = O(1)$, le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série de terme général x^n, qui est égal à 1.

b. On veut montrer que $\ell - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On ne sait qu'une chose sur ℓ, c'est que si (x_n) est une suite de $[0, 1[$ et de limite 1, alors $f(x_n) \to \ell$. Il suffit donc de trouver une suite (x_n) tendant vers 1

telle que, de plus, $f(x_n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \to 0$. On a

$$f(x_n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x_n^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x_n^k - 1).$$

On peut borner la première somme en écrivant

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k x_n^k\right| \leqslant \varepsilon_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k} \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} x_n^k \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} x_n^k = \frac{\varepsilon_n}{n} \frac{1}{1-x_n}.$$

Il suffit donc pour majorer convenablement cette somme que la suite de terme général $n(1-x_n)$ soit minorée par une constante strictement positive. Prenons $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

La deuxième somme peut alors être bornée par le biais de l'inégalité $1 - t^k \leqslant k(1-t)$ pour $t \in [0,1]$. En effet,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k (x_n^k - 1)\right| \leqslant (1 - x_n) \sum_{k=0}^{n-1} k|a_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k|a_k|,$$

et la quantité majorante tend vers 0 comme moyenne de Cesàro d'une suite tendant vers 0.

On voit quelle est la nature du théorème démontré : si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite en 1^-, alors la série de terme général a_n converge. Le problème est qu'un résultat aussi général n'existe pas. Par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ tend vers $\frac{1}{2}$ en 1^-, bien que la série de terme général $(-1)^n$ diverge. Il faut donc faire de toutes façons une hypothèse supplémentaire sur les a_n, ici que $a_n = o(1/n)$.

Le résultat démontré est connu sous le nom de théorème de Tauber. C'est donc une réciproque partielle du théorème d'Abel qui affirme que, si la série de terme général a_n converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite en 1^-, d'ailleurs égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$. Ce théorème s'obtient, comme son nom l'indique, à l'aide d'une transformation d'Abel.

Exercice corrigé 119

Posé en 2004

Trouver deux réels λ et μ tels que, pour toute application f de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on ait

$$\int_0^1 f^2 \leqslant \lambda \int_0^1 f'^2 + \mu \left(\int_0^1 f \right)^2 .$$

Solution

Dans l'inégalité demandée, les termes de gauche et de droite s'expriment très bien à l'aide des coefficients de Fourier de la fonction f. Sauf que f n'est pas 2π-périodique. On pourrait utiliser les coefficients de Fourier pour une fonction 1-périodique, mais la relation facile entre les coefficients de Fourier de f' et ceux de f est valable pour une fonction périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et surtout continue. Or, comme $f(1) \neq f(0)$ a priori, on ne peut prolonger f par 1-périodicité. On va donc prolonger f par parité, puis par 2-périodicité. On obtient bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On introduit les coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\pi n t} dt.$$

La formule d'intégration par parties donne ici $c_n(f') = i\pi n c_n(f)$, et la formule de Parseval donne :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'^2(t) dt = \pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2.$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t) dt = 2c_0(f)$. On a donc

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(t) dt \leqslant \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 f'^2(t) dt + \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 f \right)^2 .$$

En usant de la parité de f, on a alors

$$\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'^2 + \left(\int_0^1 f \right)^2 .$$

Les deux coefficients sont optimaux : si f est constante, on voit que μ ne peut être inférieur à 1. Si $f(x) := \cos(\pi x)$, on voit que λ ne peut être inférieur à $\dfrac{1}{\pi^2}$.

Exercice corrigé 120

Posé en 2007

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, somme sur $\mathbb{C}$ d'une série entière de rayon infini.

a. On suppose qu'existent un réel K et un entier N tels que

$$|f(z)| \leqslant K(|z|^N + 1)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme.

b. Aboutir à la même conclusion en supposant seulement que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{Re}(f(z)) \leqslant K(|z|^N + 1).$$

Solution

a. On peut retrouver les coefficients a_k à partir de la formule de Cauchy : pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $k \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ik\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n e^{i(n-k)\theta} d\theta \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-k)\theta} d\theta \\ &= 2\pi a_k r^k.\end{aligned}$$

L'interversion série-intégrale est ici licite puisque la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{2\pi} \left|a_n r^n e^{i(n-k)\theta}\right| d\theta = \sum_{n\geqslant 0} 2\pi |a_n| r^n$$

est convergente, vu que la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon infini. On en déduit que

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \leqslant K \frac{r^N + 1}{r^k}.$$

Supposons que k soit strictement supérieur à N. Alors l'inégalité précédente passe à la limite lorsque $r \to \infty$ en $|a_k| \leqslant 0$. Donc tous les coefficients d'indice trop grand sont nuls : f est polynomiale.

b. Posons $g(z) = \Re\mathfrak{e}(f(z))$. Alors $g(z) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}(a_n z^n + \overline{a_n}\,\overline{z}^n)$. La série

$$g\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}(a_n r^n e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n e^{-in\theta})$$

converge normalement (car $\sum |a_n| r^n$ converge), donc on va pouvoir intervertir série et intégrale dans :

$$\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) e^{-ik\theta} d\theta = \pi r^k a_k,$$

sauf si $k = 0$, où $\displaystyle\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi\,\Re\mathfrak{e}(a_0)$.

La même majoration qu'à la question précédente aboutit à

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{\pi r^k}\int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

On ne dispose pas d'un contrôle de la valeur absolue de g. Pour cela, on va utiliser une astuce qui va permettre de majorer l'intégrale. Nous écrivons $g(z) = g^+(z) - g^-(z)$, notation classique où $g^+(z) = \max(g(z), 0)$ et $g^-(z) = -\min(g(z), 0)$ (parties positive et négative de $g(z)$). On vient de voir que

$$\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi\,\Re\mathfrak{e}(a_0),$$

d'où l'on tire que $\displaystyle\int_0^{2\pi} g^+\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi\,\Re\mathfrak{e}(a_0) + \int_0^{2\pi} g^-\left(re^{i\theta}\right) d\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta &= \int_0^{2\pi} g^+\left(re^{i\theta}\right) d\theta + \int_0^{2\pi} g^-\left(re^{i\theta}\right) d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} g^+\left(re^{i\theta}\right) d\theta - 2\pi\,\Re\mathfrak{e}(a_0) \\ &\leqslant -2\pi\,\Re\mathfrak{e}(a_0) + 4\pi K(r^N + 1).\end{aligned}$$

On a ici utilisé l'inégalité $g^+\left(re^{i\theta}\right) d\theta \leqslant K(r^N + 1)$, qui est valable pour deux raisons différentes suivant que $g(re^{i\theta})$ est positif (c'est l'énoncé) ou négatif (car dans ce cas $g^+(re^{i\theta}) = 0 \leqslant K(r^N + 1)$). On peut maintenant revenir aux arguments de la première question, et justifier que $a_k = 0$ dès que $k > N$.

Si le premier résultat est classique, le deuxième l'est moins.

Exercice corrigé 121

Posé en 2003

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction définie par $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ est-elle somme d'une série entière sur $\mathbb{C}$?

Solution

Nous allons montrer que la réponse est « oui ».

Notons $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, encore somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

▷ Soit $r > 0$. Posons $f_r(\theta) := f(re^{i\theta})$ et $g_r(\theta) := \dfrac{1}{f_r(\theta)}$ pour θ réel. Alors f_r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f_r'(\theta) = rie^{i\theta} f'(re^{i\theta})$; en effet, la série de terme général $ina_n r^n e^{in\theta}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de dériver terme à terme dans l'expression de f_r. Il en résulte que g_r est elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g_r'(\theta) = -rie^{i\theta} \dfrac{f'(re^{i\theta})}{f^2(re^{i\theta})}$.

▷ Nous aurons aussi besoin de calculer $\dfrac{d}{dr} g_r(\theta)$. Un calcul analogue au précédent montre que

$$\frac{d}{dr} f_r(\theta) = e^{i\theta} f'(re^{i\theta}).$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dr} g_r(\theta) = -e^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f^2(re^{i\theta})} = -\frac{1}{ri} g_r'(\theta).$$

Comme g_r est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$, le théorème de Dirichlet entraîne que

$$g_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g_r) e^{in\theta},$$

avec

$$c_n(g_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

▷ Montrons que $c_n(g_r) r^{-n}$ ne dépend pas de r. On a

$$\frac{d}{dr}\left(c_n(g_r) r^{-n}\right) = \frac{d}{dr}\left(c_n(g_r)\right) r^{-n} - n r^{-n-1} c_n(g_r).$$

Or

$$\frac{d}{dr}\left(c_n(g_r)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} g_r(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi ri}\int_0^{2\pi} g_r'(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi ri}\left[e^{-in\theta}g_r(\theta)\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi ri}\int_0^{2\pi} g_r(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{n}{r}c_n(g_r)$$

au travers d'une intégration par parties. Par conséquent, $\frac{d}{dr}\left(c_n(g_r)r^{-n}\right)$ est nulle et $c_n(g_r)r^{-n}$ ne dépend pas de $r > 0$. Notons γ_n cette valeur constante, de sorte que $c_n(g_r) = \gamma_n r^n$. L'expression intégrale de $c_n(g_r)$ montre qu'elle définit une fonction continue de r sur $[0, +\infty[$, donc que $\gamma_n = 0$ pour $n < 0$. Finalement,

$$g(z) = g_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

pour tout complexe z.

Cet exercice difficile utilise un résultat assez naturel, à savoir que si φ est une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, alors $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$ lorsque $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n z^{n-1}$. La notation f' s'impose donc, même si l'on ne connaît pas la dérivabilité d'une fonction de la variable complexe. Un autre ingrédient de la solution est le rapport existant entre séries entières et séries trigonométriques : $f(re^{i\theta})$, pour r fixé, est en effet une fonction périodique qui apparaît directement comme la somme d'une série de Fourier. Cela permet d'appliquer les puissantes techniques de l'analyse de Fourier aux séries entières ou, à défaut, de s'en inspirer.

Exercice corrigé 122

Posé en 1995

Soit p_n le nombre d'entiers $k \geqslant 1$ tels que $k!$ divise n. On pose $c_n := \frac{p_n}{n}$.

a. Donner le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_n x^n$.

b. Soit r un rationnel et $x = e^{2i\pi r}$. Étudier la convergence de la série entière au point x.

c. Soit $x = e^{2i\pi e}$. Étudier la convergence de la série entière au point x.

Solution

Il n'est pas exagéré de dire que cet exercice est très difficile.

a. On a clairement $p_n \leqslant n$, donc $c_n \leqslant 1$. Il en résulte que $R \geqslant 1$. Comme d'autre part $c_n \geqslant \frac{1}{n}$, $R \leqslant 1$ et $R = 1$.

b. Nous allons transformer les sommes

$$S_{p,q} := \sum_{p \leqslant n \leqslant q} c_n x^n$$

et nous utiliserons cette expression dans les deux questions suivantes :

$$S_{p,q} = \sum_{p \leqslant n \leqslant q} \sum_{k!l \mid n} \frac{x^n}{n} = \sum_{p \leqslant n \leqslant q} \sum_{k!l = n} \frac{1}{k!l} x^{k!l}$$
$$= \sum_{p \leqslant k!l \leqslant q} \frac{1}{k!l} x^{k!l} = \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l}.$$

Supposons d'abord $x = e^{2i\pi r}$ avec $r = \frac{s}{t}$ rationnel. Nous avons besoin d'une majoration préalable. Soit z un complexe de module 1 et différent de 1. Posons $T_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$. Alors $T_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, donc $|T_n| \leqslant \frac{2}{|1 - z|} = M$. Par une transformation d'Abel, si $m \leqslant n$ sont deux entiers,

$$\sum_{l=m}^{n} \frac{z^l}{l} = \sum_{l=m}^{n} \frac{T_l - T_{l-1}}{l} = \sum_{l=m}^{n} \frac{T_l}{l} - \sum_{l=m-1}^{n-1} \frac{T_l}{l+1}$$
$$= \frac{T_m}{m} - \frac{T_{n-1}}{n} + \sum_{l=m}^{n-1} T_l \Big(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \Big).$$

Par conséquent,

$$\Big| \sum_{l=m}^{n} \frac{z^l}{l} \Big| \leqslant \frac{M}{m} + \frac{M}{n} + \sum_{l=m}^{n-1} M \Big(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \Big)$$
$$= \frac{M}{m} + \frac{M}{n} + \frac{M}{m} - \frac{M}{n} = \frac{2M}{m} \leqslant 2M.$$

Soit alors $I := \{k \ ; \ x^{k!} \neq 1\}$. C'est un ensemble fini puisqu'inclus dans $[0, t-1]$. Si $k \in I$,

$$\Big| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \Big| \leqslant 2M_k,$$

avec $M_k := \dfrac{2}{|1-x^{k!}|}\cdot$ Par conséquent,

$$\left|\sum_{k\in I}\frac{1}{k!}\sum_{\frac{p}{k!}\leqslant l\leqslant\frac{q}{k!}}\frac{x^{k!l}}{l}\right|\leqslant\sum_{k\in I}\frac{2M_k}{k!}=C.$$

D'autre part,

$$\sum_{k\notin I}\frac{1}{k!}\sum_{\frac{1}{k!}\leqslant l\leqslant\frac{q}{k!}}\frac{x^{k!l}}{l}=\sum_{k\notin I}\frac{1}{k!}\sum_{\frac{p}{k!}\leqslant l\leqslant\frac{q}{k!}}\frac{1}{l}\cdot$$

Il en résulte qu'en considérant un terme particulier de cette somme de termes positifs, correspondant à $k=t$, on obtient la minoration

$$|S_{1,q}|\geqslant O(1)+\frac{1}{t!}\sum_{\frac{1}{t!}\leqslant l\leqslant\frac{q}{t!}}\frac{1}{l}\cdot$$

La quantité minorante tend manifestement vers $+\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|S_{1,q}|\to+\infty$, donc que la série diverge.

c. On commence par écrire que

$$e=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}+\frac{e^c}{(k+1)!},$$

avec $c\in[0,1]$. Par conséquent,

$$k!e=n_k+\alpha_k,$$

avec n_k entier et $\dfrac{e}{k+1}\geqslant\alpha_k\geqslant\dfrac{1}{k+1}\cdot$ Nous avons vu dans la question **b** que, pour $z=e^{2i\pi k!e}=e^{2i\pi\alpha_k}$,

$$\left|\sum_{l=m}^{n}\frac{z^l}{l}\right|\leqslant\frac{4}{m|1-z|}\cdot$$

Or

$$|1-z|=2|\sin\pi\alpha_k|\geqslant 4\alpha_k,$$

d'après l'inégalité de concavité $\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$ lorsque $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Ainsi,

$$\left|\sum_{l=m}^{n}\frac{z^l}{l}\right|\leqslant\frac{1}{m\alpha_k}\leqslant\frac{k+1}{m}\leqslant k+1\,.$$

Dans ces conditions,

$$|S_{p,q}| \leqslant \left| \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right| \leqslant$$

$$\sum_{k!<p} \frac{1}{k!} \left| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right| + \sum_{k!\geqslant p} \frac{1}{k!} \left| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right|.$$

Dans la seconde somme, on utilise la majoration

$$\left| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right| \leqslant k+1,$$

qui fournit

$$\sum_{k!\geqslant p} \frac{1}{k!} \left| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right| \leqslant \sum_{k!\geqslant p} \frac{k+1}{k!}.$$

Dans la première, on utilise la majoration

$$\left| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right| \leqslant \frac{k+1}{p/k!},$$

qui conduit à

$$\sum_{k!<p} \frac{1}{k!} \left| \sum_{\frac{p}{k!} \leqslant l \leqslant \frac{q}{k!}} \frac{x^{k!l}}{l} \right| \leqslant \sum_{k!<p} \frac{k+1}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k!<p} (k+1).$$

Soit N le plus grand entier tel que $N! < p$. On a clairement $\sum_{k!<p} (k+1) \leqslant N^2$ pour p assez grand. Donc

$$\sum_{k!<p} (k+1) \leqslant \frac{N^2}{p} \leqslant \frac{N^2}{N!} \leqslant \varepsilon$$

dès que p est assez grand. Comme la série de terme général $\frac{k+1}{k!}$ converge, $\sum_{k!\geqslant p} \frac{k+1}{k!} \leqslant \varepsilon$ pour p assez grand. Le critère de Cauchy montre la convergence de la série initiale.

Exercice corrigé 123

Posé en 2000

Soit f une application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout x et tout y réels, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}.$$

a. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel h, on ait

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \sin^2 nh \leqslant K|h|^{2\alpha}.$$

b. On suppose que $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa somme ?

Solution

L'hypothèse entraîne que f est continue, donc que ses coefficients de Fourier sont bien définis.

a. Une somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n|^2$ fait irrésistiblement penser à l'égalité de Parseval, appliquée à une fonction g telle que $c_n(g) = \gamma_n$. Cherchons donc g telle que

$$\begin{aligned} c_n(g) = c_n(f)\sin nh &= \frac{e^{inh} - e^{-inh}}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t-h)}dt - \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t+h)}dt \\ &= \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t+h)e^{-int}dt - \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t-h)e^{-int}dt. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction g définie par $g(t) := \dfrac{f(t+h) - f(t-h)}{2i}$ répond à la question. On peut appliquer l'égalité de Parseval à cette fonction continue, obtenant ainsi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \sin^2 nh &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t-h)|^2 dt \\ &\leqslant 4^{\alpha-1}M^2|h|^{2\alpha} = K|h|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

b. La norme uniforme de $t \mapsto c_n(f)e^{int}$ est égale à $|c_n(f)|$. Il s'agit donc de montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. Or nous ne disposons que d'une majoration portant sur les $|c_n(f)|^2$. Nous devrons donc utiliser l'inégalité de Cauchy & Schwarz, qui permet d'écrire, lorsque A est une partie finie de $\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n\in A} |c_n(f)| \leqslant \sqrt{|A| \sum_{n\in A} |c_n(f)|^2}.$$

D'autre part, il nous faut choisir h tel que $|c_n(f)|^2 \leqslant K_1 |c_n(f)|^2 \sin^2 nh$. On peut imposer par exemple la minoration $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |\sin nh|$ en exigeant d'avoir $\frac{\pi}{4} \leqslant |n|h < \frac{\pi}{2}$. Pour h fixé, on note A_h l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'encadrement précédent. Ainsi, en majorant une somme partielle par la somme totale,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A_h} |c_n(f)| &\leqslant \sqrt{|A_h| \sum_{n\in A_h} |c_n(f)|^2} \\ &\leqslant \sqrt{2|A_h| \sum_{n\in A_h} |c_n(f)\sin nh|^2} \leqslant \sqrt{2K|A_h|}|h|^\alpha.\end{aligned}$$

La première inégalité est une application de l'inégalité de Cauchy & Schwarz. Reste à choisir des h qui permettent de majorer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Il faut exprimer $\mathbb{Z}$ comme union de différents A_h. Considérons $h = \pi 2^{-k}$. L'ensemble A_h est constitué des entiers n tels que $2^{k-2} \leqslant |n| < 2^{k-1}$. Donc, puisque $|A_h| = 2(2^{k-1} - 2^{k-2})$, que l'on majore par 2^k,

$$\sum_{2^{k-2}\leqslant|n|<2^{k-1}} |c_n(f)| \leqslant \sqrt{2K2^k}\pi^\alpha 2^{-\alpha k} \leqslant L\left(2^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^k.$$

La suite majorante est géométrique de raison $2^{\frac{1}{2}-\alpha} < 1$. Par conséquent, la série de terme général $\sum_{2^{k-2}\leqslant|n|<2^{k-1}} |c_n(f)|$ est convergente, ce qui entraîne que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$.

Lorsque f est continue, le fait que la série de terme général $t \mapsto c_n(f)e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, uniformément, entraîne que f est la somme de sa série de Fourier. En effet, poser $h(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$

Exercice corrigé 123

Posé en 2000

Soit f une application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout x et tout y réels, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}.$$

a. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel h, on ait

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \sin^2 nh \leqslant K|h|^{2\alpha}.$$

b. On suppose que $\alpha > \dfrac{1}{2}\cdot$ Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa somme ?

Solution

L'hypothèse entraîne que f est continue, donc que ses coefficients de Fourier sont bien définis.

a. Une somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n|^2$ fait irrésistiblement penser à l'égalité de Parseval, appliquée à une fonction g telle que $c_n(g) = \gamma_n$. Cherchons donc g telle que

$$\begin{aligned} c_n(g) = c_n(f)\sin nh &= \frac{e^{inh} - e^{-inh}}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t-h)}dt - \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t+h)}dt \\ &= \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t+h)e^{-int}dt - \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} f(t-h)e^{-int}dt. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction g définie par $g(t) := \dfrac{f(t+h) - f(t-h)}{2i}$ répond à la question. On peut appliquer l'égalité de Parseval à cette fonction continue, obtenant ainsi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \sin^2 nh &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t-h)|^2 dt \\ &\leqslant 4^{\alpha-1}M^2|h|^{2\alpha} = K|h|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

b. La norme uniforme de $t \mapsto c_n(f)e^{int}$ est égale à $|c_n(f)|$. Il s'agit donc de montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. Or nous ne disposons que d'une majoration portant sur les $|c_n(f)|^2$. Nous devrons donc utiliser l'inégalité de Cauchy & Schwarz, qui permet d'écrire, lorsque A est une partie finie de $\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n\in A} |c_n(f)| \leqslant \sqrt{|A| \sum_{n\in A} |c_n(f)|^2}.$$

D'autre part, il nous faut choisir h tel que $|c_n(f)|^2 \leqslant K_1 |c_n(f)|^2 \sin^2 nh$. On peut imposer par exemple la minoration $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |\sin nh|$ en exigeant d'avoir $\frac{\pi}{4} \leqslant |n|h < \frac{\pi}{2}\cdot$ Pour h fixé, on note A_h l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'encadrement précédent. Ainsi, en majorant une somme partielle par la somme totale,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A_h} |c_n(f)| &\leqslant \sqrt{|A_h| \sum_{n\in A_h} |c_n(f)|^2} \\ &\leqslant \sqrt{2|A_h| \sum_{n\in A_h} |c_n(f)\sin nh|^2} \leqslant \sqrt{2K|A_h|}|h|^\alpha.\end{aligned}$$

La première inégalité est une application de l'inégalité de Cauchy & Schwarz. Reste à choisir des h qui permettent de majorer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Il faut exprimer $\mathbb{Z}$ comme union de différents A_h. Considérons $h = \pi 2^{-k}$. L'ensemble A_h est constitué des entiers n tels que $2^{k-2} \leqslant |n| < 2^{k-1}$. Donc, puisque $|A_h| = 2(2^{k-1} - 2^{k-2})$, que l'on majore par 2^k,

$$\sum_{2^{k-2}\leqslant |n| < 2^{k-1}} |c_n(f)| \leqslant \sqrt{2K2^k}\pi^\alpha 2^{-\alpha k} \leqslant L\big(2^{\frac{1}{2}-\alpha}\big)^k.$$

La suite majorante est géométrique de raison $2^{\frac{1}{2}-\alpha} < 1$. Par conséquent, la série de terme général $\sum_{2^{k-2}\leqslant |n| < 2^{k-1}} |c_n(f)|$ est convergente, ce qui entraîne que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$.

Lorsque f est continue, le fait que la série de terme général $t \mapsto c_n(f)e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, uniformément, entraîne que f est la somme de sa série de Fourier. En effet, poser $h(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$

permet de définir sur $\mathbb{R}$ une fonction h, 2π-périodique et continue. De plus,

$$c_p(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-ipt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{i(n-p)t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}dt = c_p(f).$$

L'interversion est rendue possible par la convergence normale sur $[0, 2\pi]$ de la série de fonctions de terme général $t \mapsto c_n(f)e^{i(n-p)t}$. Enfin, puisque $c_p(f-h) = 0$ pour tout p, on a $f - h = 0$ d'après l'égalité de Parseval et la continuité de $f - h$.

Un cas particulier de cette situation est celui où $\alpha = 1$: la fonction est alors supposée lipschitzienne. Lorsque $\alpha > 0$ est arbitraire, on dit que f est höldérienne d'exposant α. On a ainsi démontré qu'une fonction höldérienne d'exposant $\alpha > \frac{1}{2}$ est limite de ses sommes de Fourier et que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice corrigé 124

Posé en 2007

Déterminer les couples (x, y) de réels tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = 0\,.$$

Solution

Cet exercice nécessite une peu d'imagination (ou de mémoire).

La série donnée est absolument convergente car son terme général est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Linéarisons le numérateur :

$$\sin nx \sin ny = \frac{1}{2}\big(\cos n(x-y) - \cos n(x+y)\big).$$

L'équation donnée équivaut donc à

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n(x-y)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n(x+y)}{n^2}.$$

Posons $f(u) := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nu}{n^2}$. Avec cette notation, il s'agit de ré-

soudre l'équation $f(x-y) = f(x+y)$. Nous allons calculer explicitement f en cherchant une fonction dont le développement en série de Fourier est $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nu}{n^2}$. Pour cela, nous remarquons que la dérivée terme à terme de la série précédente est

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nu}{n} = -\,\mathfrak{Im}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{inu}}{n},$$

que l'on note $-\,\mathfrak{Im}\,L(1+e^{iu})$, où L ressemble fort à un logarithme. Comme $1+e^{iu} = 2e^{\frac{iu}{2}}\cos\frac{u}{2}$, on aurait

$$-\,\mathfrak{Im}\,L(1+e^{iu}) = -\,\mathfrak{Im}\Big(L(2)+\frac{iu}{2}+L(\cos\frac{u}{2})\Big) = -\frac{u}{2},$$

si les propriétés de L étaient celles que l'on attend d'un logarithme complexe. Nous allons à présent partir de la fonction définie par $g(u) := -\frac{u}{2}$ lorsque $u \in\ ]-\pi,\pi[$, prolongée par 2π-périodicité et normalisée. On obtient ainsi une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit h une primitive de g sur $]-\pi,\pi[$. On a par exemple $h(u) = -\frac{u^2}{4}$, que l'on prolonge par 2π-périodicité (elle est alors continue par parité). On obtient, pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{\pi}{2}a_n(h) = -\int_0^{\pi}\frac{u^2}{4}\cos nu\,du = -\Big[\frac{u^2}{4n}\sin nu\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{u}{2n}\sin nu\,du$$
$$= -\Big[\frac{u}{2n^2}\cos nu\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{2n^2}\cos nu\,du = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{2n^2}.$$

Donc $a_n(h) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ comme escompté. Le théorème de Dirichlet montre que, pour tout u dans $]-\pi,\pi[$,

$$f(u) = -a_0(h) - \frac{u^2}{4}.$$

La continuité de f, due à la convergence normale de la série qui la définit, entraîne que cette formule est vraie aussi en $-\pi$ et π (ce qui fournit d'ailleurs la valeur de $a_0(h)$, qui nous sera inutile). Résolvons l'équation $f(x+y) = f(x-y)$. Procédons d'abord par conditions nécessaires. Il existe des entiers relatifs k et l tels que $x+y-2k\pi \in [-\pi,\pi]$ et $x-y-2l\pi \in [-\pi,\pi]$. On doit alors avoir $x+y-2k\pi = \pm(x-y-2l\pi)$, soit, successivement

$$x+y-2k\pi = x-y-2l\pi \iff y = n\pi$$

ou

$$x+y-2k\pi = -x+y+2l\pi \iff x = m\pi.$$

Réciproquement, si x ou y est dans $\pi\mathbb{Z}$, (x,y) est bien solution.

Bien entendu, il aurait été possible de parachuter la fonction h ou une autre analogue afin de calculer f. Mais trouver une telle fonction h sans l'avoir mémorisée relève de la magie. C'est pourquoi nous avons fait ce détour par la fonction L. Il serait en revanche très malvenu de justifier rigoureusement les calculs sur L, qui ne sont là que pour nous permettre de deviner la fonction h.

Chapitre 7

Intégration, équations différentielles

Exercice corrigé 125

Posé en 2007

Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$ et la calculer.

Solution

Posons $f(t) := \dfrac{\ln t}{1-t^2}$. Cette fonction f est continue sur $]0,1[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim \ln t$, qui est intégrable. Au voisinage de 1,

$$f(t) = -\frac{\ln t - \ln 1}{t-1} \times \frac{1}{t+1} \to -\frac{1}{2},$$

en reconnaissant le nombre dérivé de la fonction ln en 1. Donc f est intégrable aussi au voisinage de 1.

On ne peut pas trouver de primitive élémentaire de $\dfrac{\ln t}{1-t^2}$. En revanche, on peut développer $\dfrac{1}{1-t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, et calculer facilement $\displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t\,dt$. En effet, si $a > 0$, une intégration par parties fournit

$$\int_a^1 t^{2k} \ln t\,dt = \left[\frac{t^{2k+1}\ln t}{2k+1}\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^{2k}}{2k+1}\,dt.$$

Le crochet admet pour limite 0 lorsque a tend vers 0, donc l'égalité passe

à la limite en

$$\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt = -\int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Formellement, c'est-à-dire sans nous préoccuper ni de convergence ni de la validité de l'interversion,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Il nous faut à présent justifier cette interversion série-intégrale. Posons $f_k(t) := t^{2k} \ln t$. Toutes les fonctions f_k sont continues et intégrables sur $]0,1]$. Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_k(t)| dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ converge,}$$

donc les hypothèses du théorème d'interversion sont vérifiées et on obtient

$$\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \Big) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Il nous reste à calculer la somme de cette série. Posons $S := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} S \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$, en utilisant la valeur bien connue $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Il vient finalement

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice corrigé 126

Posé en 2007

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui admet une limite finie l au voisinage de $-\infty$. On suppose de plus que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ existe. On considère deux réels $a < b$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x+a) - f(x+b)\big) \, dx$ existe, et calculer sa valeur.

Solution

La notion d' « existence » d'une intégrale est une notion assez floue, qui ne revient pas forcément à l'intégrabilité de la fonction étudiée. Il s'agit ici de semi-intégrabilité.

L'énoncé demande de montrer que

$$\int_0^M \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-M}^0 \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx$$

admettent des limites lorsque M tend vers $+\infty$, puis de calculer la somme de ces limites.

▷ Déjà, à l'aide de changements de variable affines,

$$\int_0^M \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx = \int_a^{M+a} f - \int_b^{M+b} f \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^{+\infty} f - \int_b^{+\infty} f = \int_a^b f,$$

ce qui prouve la convergence de l'intégrale en $+\infty$. On obtient aussi la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx = \int_a^b f.$$

▷ Maintenant, occupons-nous de la limite en $-\infty$. On a

$$\int_{-M}^0 \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx = \int_{a-M}^a f - \int_{b-M}^b f = \int_{a-M}^{b-M} f - \int_a^b f.$$

Or $\displaystyle\int_{a-M}^{b-M} f = \int_a^b f(x-M)dx$. Mais comme $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$, la fonction $f_M(x) = f(x-M)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction constante l.

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x-M)dx \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b l = l(b-a)$. On en déduit que

$$\int_{-M}^0 \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} l(b-a) - \int_a^b f.$$

Donc l'intégrale converge et

$$\int_{-\infty}^0 \big(f(x+a)-f(x+b)\big)\,dx = l(b-a) - \int_a^b f.$$

En combinant les deux résultats, on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x+a) - f(x+b)\big)\, dx = l(b-a).$$

Si l'hypothèse avait été la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, *hypothèse d'ailleurs ni plus forte ni plus faible que celle de l'énoncé, on aurait obtenu en scindant l'intégrale en 2 et en effectuant dans chacune des deux intégrales obtenues une translation sur la variable le résultat*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x+a) - f(x+b)\big)\, dx = 0\,.$$

Exercice corrigé 127

Posé en 2003

Soit $f(x) := x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+1}}\, dt$. Donner le domaine de définition de f, puis la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Solution

La fonction sous le signe de l'intégrale est continue par rapport à t. En $+\infty$, on a $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+1}} = O(e^{-tx})$ et donc l'intégrale est convergente pour $x > 0$. Si $x \leqslant 0$, $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$ qui est une fonction positive d'intégrale divergente. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+1}}\, dt$ diverge pour $x \leqslant 0$. Le domaine de définition de f est donc $]0, +\infty[$.

▷ Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $u = xt$. Il vient

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\dfrac{u}{x}+1}}\, du.$$

Lorsque $x \to 0$, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{\dfrac{u}{x}+1}} \xrightarrow[]{\text{CS}}_{]0,+\infty[} 0$. Comme on dispose de la condition de domination $0 \leqslant \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{\dfrac{u}{x}+1}} \leqslant e^{-u}$, le théorème de convergence dominée montre que $f(x) \to 0$.

▷ Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{\dfrac{u}{x}+1}} \underset{]0,+\infty[}{\overset{\text{CS}}{\longrightarrow}} e^{-u}$. La condition de domination est inchangée, et donc $f(x) \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}du = 1$.

En toute rigueur, le théorème de convergence dominée tel qu'il figure dans le programme ne s'applique qu'à des suites de fonctions et non des fonctions dépendant d'un paramètre continu. Si l'on veut vraiment s'y ramener, il convient de considérer une suite quelconque (x_n) tendant vers 0 (ou vers $+\infty$) et d'appliquer le théorème à la suite des fonctions définies par $t \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{\dfrac{u}{x_n}+1}}$.

Exercice corrigé 128

Posé en 2007

Trouver les fonctions $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $y'' + |y| = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Solution

Soit y une solution de cette équation. Tâchons de déterminer des informations sur le signe de y, de sorte que l'on puisse enlever la valeur absolue.

▷ Déjà, $y'' = -|y| \leqslant 0$ donc y est concave, et y' est décroissante. Comme $y'(0) = 1$, on en déduit que y est croissante sur $]-\infty, 0]$, et donc que y est négative sur $]-\infty, 0]$. Sur cet intervalle, on a donc $y'' - y = 0$; il existe ainsi deux constantes A et B telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}^-, \quad y(t) = Ae^{-t} + Be^{t}.$$

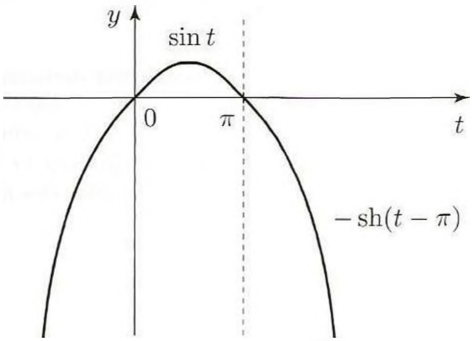
Les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ conduisent à $y(t) = \operatorname{sh} t$ sur $\mathbb{R}^-$.

▷ Intéressons-nous au comportement sur $\mathbb{R}^+$. Au voisinage de 0^+, on a $y(t) > 0$ puisque $y'(0) = 1$. Supposons par l'absurde que $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Alors on a $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Avec les conditions initiales, cela devient $y(t) = \sin t$, ce qui contredit l'hypothèse sur la positivité de y.

Ainsi, il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $y(t_0) = 0$. Comme y est concave, on peut comparer y avec la corde passant par $(0,0)$ et $(t_0, 0)$: on en déduit que $y \geqslant 0$ sur $[0, t_0]$ et $y \leqslant 0$ sur $[t_0, +\infty[$.

Sur $[0, t_0]$, on a $y'' = -y$, donc $y(t) = \sin t$. On en déduit que $t_0 = \pi$ et $y'(\pi) = -1$.

Sur $[\pi, +\infty[$, on a $y'' = y$. Avec les conditions initiales $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = -1$, on obtient $y(t) = -\operatorname{sh}(t - \pi)$.



Réciproquement, la fonction ainsi construite convient : en effet, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $y'' + |y| = 0$ sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$, $]0, \pi[$, $]\pi, +\infty[$. Par ailleurs, le théorème de raccordement s'applique puisque

$$\lim_{0^-} y = \lim_{0^+} y = 0, \quad \lim_{0^-} y' = \lim_{0^+} y' = 1, \quad \lim_{0^-} y'' = \lim_{0^+} y'' = 0$$

et on a aussi l'égalité des limites en π. Ainsi la fonction construite est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En revanche, on a

$$\lim_{0^-} y^{(3)} \neq \lim_{0^+} y^{(3)},$$

donc la fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de 0 (ni au voisinage de π d'ailleurs).

Si l'on avait pu appliquer le théorème de Cauchy & Lipschitz, la résolution aurait été plus simple : il aurait suffi de donner la fonction et de vérifier qu'elle est bien solution de l'équation différentielle avec les bonnes conditions initiales. Mais, dans le cadre du programme officiel, il aurait fallu que l'équation s'écrive sous la forme $y'' = f(y, y')$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice corrigé 129

Posé en 2007

Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \frac{1}{6} \int_0^x (x - t)^3 f(t) dt.$$

Solution

Osons une résolution à la louche de cet exercice : l'équation vérifiée par f ressemble à la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = x + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} f^{(4)}(t)dt$$

avec $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$. En identifiant, il vient $f = f^{(4)}$ avec des conditions initiales. On résout facilement cette équation linéaire.

Évidemment, tout n'est pas si simple... Tentons de rendre rigoureux les arguments précédents. Soit f une solution de l'équation.

▷ D'abord, f est a priori uniquement continue. Peut-on la dériver ? Bien sûr, puisque en développant, on obtient que

$$f(x) = x + \frac{x^3}{6}\int_0^x f(t)dt - \frac{x^2}{2}\int_0^x tf(t)dt + \frac{x}{2}\int_0^x t^2 f(t)dt - \frac{1}{6}\int_0^x t^3 f(t)dt.$$

Ainsi, par la régularité de l'intégrale dépendant de la borne, on démontre successivement que f est de classe $\mathscr{C}^1$, puis $\mathscr{C}^2$, puis $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme f est bornée au voisinage de 0, on a alors $\int_0^x (x-t)^3 f(t)dt \in O(x^4)$, et donc l'unicité du développement limité donne

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = f^{(3)}(0) = 0\,.$$

▷ Maintenant, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, qui fournit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x (x-t)^3 \left(f(t) - f^{(4)}(t)\right) dt = 0\,.$$

Soit g une fonction continue telle que $g^{(4)} = f$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, $g - f$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3. Ainsi, sa dérivée quatrième est nulle et $f = f^{(4)}$.

L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(4)} = y$ est engendré par les fonctions cos, sin, ch, sh. La seule solution avec les conditions initiales voulues est

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \operatorname{sh} x).$$

La réciproque est immédiate, c'est la formule de Taylor.

Exercice corrigé 130

Posé en 2005

Soit g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et à valeurs strictement positives. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{g}$ diverge. Soit (I,y) une solution maximale de l'équation $y' = g(y)$ avec $y(0) = 0$. Montrer que $I = [0,+\infty[$.

Solution

L'équation étudiée est à variables séparables et s'écrit si l'on veut

$$\frac{dy}{g(y)} = dx.$$

Entrons dans les détails. Tout d'abord, comme $y(0) = 0$ et $y'(0) = g(0) > 0$, une solution de l'équation (I,y) de l'équation (où I est l'intervalle de définition) doit être telle que $I \subset [0,+\infty[$. Donc I doit être de la forme $[0,\alpha]$ ou $[0,\alpha[$, avec $\alpha \in [0,+\infty]$.

Supposons que y soit solution de l'équation sur l'intervalle I. Alors, si $x \in I$, on a

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int_0^x 1\,dt = x.$$

Or, par le changement de variable $u = y(t)$ (licite car y est $\mathscr{C}^1$ et $y' > 0$: y est un difféomorphisme), on a

$$\int_0^{y(x)} \frac{du}{g(u)} = x.$$

Posons $G(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{du}{g(u)}$. Comme $\dfrac{1}{g}$ est strictement positive et non intégrable, on sait que $G(z) \underset{z\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $G(0) = 0$. Par ailleurs, $G'(z) > 0$ donc G est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, on a nécessairement

$$G(y(x)) = x \Longrightarrow y(x) = G^{-1}(x).$$

Réciproquement, considérons la fonction $y(x) = G^{-1}(x)$, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Alors on a $y(0) = 0$ et $G(y(x)) = x$. Cette dernière égalité se dérive en $y'(x)G'(y(x)) = 1$, donc $\dfrac{y'(x)}{g(y(x))} = 1$. Ainsi, y est une solution, forcément maximale, du problème de Cauchy $y' = g(y)$ et $y(0) = 0$.

Le théorème de Cauchy & Lipschitz, d'ailleurs inutile ici, ne s'applique en toute rigueur pas, puisque la fonction $(x,y) \mapsto g(y)$ n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur un ***ouvert*** *de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice corrigé 131

Posé en 2003

a. Montrer que l'équation (E)

$$xy'' + y' + xy = 0$$

admet des solutions non nulles développables en série entière que l'on explicitera.

b. Soit $g(x) := \int_0^\pi \cos(x \sin t)dt$. Montrer que g est solution de (E) et que g est développable en série entière autour de 0. Déterminer les coefficients de ce développement.

Solution

Cet exercice étudie une fonction de Bessel définie classiquement, soit comme solution d'équation différentielle, soit comme somme d'une série entière, soit comme une intégrale dépendant d'un paramètre.

a. Posons $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Nécessairement, si y est solution de (E) sur $]-r, r[$ pour un certain $r > 0$,

$$x \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\,,$$

soit

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0\,.$$

Par conséquent, $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$ si $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$. Il en résulte que $a_n = 0$ lorsque n est impair. Lorsque $n = 2p$,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} a_0\,.$$

Puisque $\dfrac{a_{2p}}{a_{2p-2}} \to 0$, le rayon de convergence de la série calculée est $+\infty$ et donc

$$y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p}$$

constitue une base de l'espace vectoriel, de dimension 1, des solutions de (E) qui sont somme d'une série entière.

b. Montrons directement que g est somme d'une série entière en écrivant

$$g(x) = \int_0^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \sin^{2p} t \, dt.$$

Nous aurons besoin de calculer $A_p := \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2p} t \, dt$. Cette intégrale de Wallis est trop classique pour que nous en redonnions le calcul complet. On obtient $A_0 = \pi$ et $A_p = \dfrac{2p-1}{2p} A_{p-1}$ grâce à une intégration par parties, donc

$$A_p = \frac{(2p-1)\cdots 3\cdot 1}{(2p)\cdots 4\cdot 2}\pi = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\pi.$$

Pour intervertir l'intégrale et la série, calculons

$$\int_0^{\pi} \left|(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \sin^{2p} t\right| dt = \pi \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p}.$$

Il s'agit de la valeur absolue du terme général de la série de la question **a**, qui est bien absolument convergente. On peut donc intervertir, et le même calcul montre que $g(x) = \pi y_0(x)$. Il en résulte que g est solution de (E).

On n'oubliera pas, dans la recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle, de vérifier que le rayon de convergence est non nul.

Pour traiter le **b**, *on aurait pu être tenté de montrer que g est solution de (E), ce qu'il n'est pas difficile de faire en dérivant sous le signe de l'intégrale. Mais il n'est pas donné que g est somme d'une série entière, information nécessaire pour en déduire que g est proportionnelle à y_0.*

Exercice corrigé 132

Posé en 2006

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et croissantes sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geqslant \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt.$$

Solution

L'inégalité dont il est question s'appelle « inégalité du réordonnement ».

Commençons par interpréter cette inégalité. Supposons que f soit strictement positive, alors

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt}{\displaystyle\int_0^1 f(t)dt}$$

est la moyenne des valeurs de g, pondérée par les valeurs de f : un poids important quand f est grande, un poids plus faible quand f est petite. Comme f est croissante, le poids de $g(t)$ dans la moyenne est d'autant plus important que t est proche de 1, et donc que $g(t)$ est grand. La moyenne obtenue sera alors plus grande que la moyenne de g, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.

Restons sur cette idée de valeur moyenne, et généralisons alors l'inégalité sur $[0, x]$. Soit à démontrer que, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)g(t)dt \geqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt \int_0^x g(t)dt,$$

ce qui est équivalent à

$$x\int_0^x f(t)g(t)dt \geqslant \int_0^x f(t)dt \int_0^x g(t)dt\,.$$

Posons

$$\varphi(x) := x\int_0^x f(t)g(t)dt \;-\; \int_0^x f(t)dt \int_0^x g(t)dt.$$

Cette fonction est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Sachant que $\varphi(0) = 0$, il suffit de montrer que $\varphi'(x) \geqslant 0$ là où la dérivée est définie. Or

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= xf(x)g(x) + \int_0^x fg - f(x)\int_0^x g - g(x)\int_0^x f \\ &= \int_0^x (f(x) - f(t))(g(x) - g(t))dt \quad \geqslant 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité du réordonnement.

Exercice corrigé 133

Posé en 2007

Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, et soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$. Montrer pour tout $n \geqslant 1$ l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

Solution

Soit $M := \|f\|_\infty$. On a $\left|\dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \dfrac{nM}{1+n^2x^2}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$ est continue et bornée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$, le théorème de comparaison nous permet d'affirmer que l'intégrale donnant I_n est bien définie.

Étudions tout d'abord la limite simple de $f_n(x) := \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$. Si $x > 0$, alors $f_n(x) \to 0$. Si on arrive à se mettre dans les hypothèses du théorème de convergence dominée (il manque ici la domination), alors on pourra affirmer que I_n tend vers 0. Pour cela, étudions, à $x > 0$ fixé, la fonction $g_x(t) := \dfrac{Mt}{1+t^2x^2}$. La fonction majorante sera $h : x \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} g_x(t)$, qui majore tous les $|f_n(x)| \leqslant g_x(n)$.

Une rapide étude de fonction montre que g_x atteint son maximum en $t = \dfrac{1}{x}$, et on a $h(x) = \dfrac{1}{2x}$. Manque de chance, h n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Dans un tel cas, on commence à suspecter que le résultat du théorème de convergence dominée ne va pas fonctionner. Pour y voir plus clair, déterminons I_n lorsque f est une fonction constante, disons $f := 1$. On a alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2},$$

après le changement de variable $u = nx$. Donc effectivement, on ne pourra pas trouver de domination convenable.

En revanche, conservons le changement de variable qui nous a servi précédemment. En posant $u = nx$, on a

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}\,du.$$

On va pouvoir ici utiliser le théorème de convergence dominée : la suite de

fonctions $\left(\dfrac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}\right)$ converge simplement vers $\dfrac{f(0)}{1+u^2}$ (car f est continue en 0), et on a la domination :

$$\left|\frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}\right| \leqslant \frac{M}{1+u^2}.$$

Résultat : $I_n \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}du = \frac{f(0)\pi}{2}$.

Exercice corrigé 134

Posé en 2007

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.

Solution

Cet exercice nécessite de passer par une transformation intégrale assez classique : on sait que $\dfrac{1}{a+1} = \displaystyle\int_0^1 x^a dx$.

Remarquons d'abord que le terme général étant positif et équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$, la série converge. Par une décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1/2}{4k+1} - \frac{1/2}{4k+3}.$$

Ainsi, en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$, on a

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^{2k} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^{4n+4}}{1+x^2}dx.$$

On peut ici invoquer le théorème de convergence dominée, mais il est plus simple de majorer directement

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2}dx \leqslant \int_0^1 x^{4n+4}dx = \frac{1}{4n+5}$$

pour en déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}$.

Exercice corrigé 135

Posé en 2007

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) := f\big(x - \frac{1}{x}\big)$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Solution

La notion d'intégrabilité sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas stricto sensu *au programme, il faut la comprendre comme l'intégrabilité à la fois sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$.*

Définissons la fonction $\varphi(x) := x - \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. On a la minoration $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 1$, donc φ est un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Si J est un segment inclus dans $]0, \infty[$, le changement de variable $u = \varphi(x)$ donne

$$\int_J |g(x)|dx = \int_J |f(\varphi(x))|dx = \int_{\varphi(J)} \frac{|f(u)|}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} du \leqslant \int_{\varphi(J)} |f(u)|du.$$

Donc l'intégrale de $|g|$ sur tout segment est majorée par $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|$: g est intégrable sur $]0, +\infty[$. De la même façon, en posant $\psi(x) = x - \frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$, on a pour tout segment $J \subset]-\infty, 0[$,

$$\int_J |g(x)|dx = \int_J |f(\psi(x))|dx = \int_{\psi(J)} \frac{|f(u)|}{\psi'(\psi^{-1}(u))} du \leqslant \int_{\psi(J)} |f(u)|du,$$

et g est intégrable aussi sur $]-\infty, 0[$. Ici, nous sommes revenus à la définition de l'intégrabilité par majoration sur les segments, car un argument de comparaison ne serait pas applicable : même si $x - \frac{1}{x}$ est équivalent à x en $+\infty$, $f\big(x - \frac{1}{x}\big)$ n'est pas forcément équivalent à $f(x)$. Il suffit pour s'en convaincre de considérer une fonction f qui s'annule régulièrement.

Notons $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la réciproque de φ, et $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-^*$ la réciproque de ψ. Alors, pour tout u, les réels $h_1(u)$ et $h_2(u)$ sont les solutions respectivement positive et négative de l'équation

$$x - \frac{1}{x} = u \Longleftrightarrow x^2 - ux - 1 = 0\,.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} f(\varphi(x))dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)h_1'(u)du$, en utilisant le changement de variable $x = h_1(u)$. De même, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g = \int_{\mathbb{R}} f(u)h_2'(u)du$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^*} g = \int_{\mathbb{R}} f(u)\big(h_1'(u) + h_2'(u)\big)du.$$

Mais comme $h_1(u)$ et $h_2(u)$ sont les solutions d'une équation du second degré, les relations coefficients-racines nous donnent $h_1(u)+h_2(u) = u$ pour tout u, relation qui se dérive en $h_1'(u) + h_2'(u) = 1$!

Donc on a bien $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^*} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Exercice corrigé 136

Posé en 2006

Soit f une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, +\infty[$. On suppose que f et f''^2 sont intégrables sur $[0, +\infty[$. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

Solution

Posons $F(x) := \displaystyle\int_0^x f$, de sorte que $F'(x) = f(x)$. La formule de Taylor avec reste sous forme intégrale permet d'écrire

$$F(x+1) - F(x) = f(x) + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}\int_x^{x+1} (x+1-t)^2 f''(t)dt.$$

Comme $F(x+1)-F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f$, alors $F(x+1)-F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, l'inégalité de Cauchy & Schwarz permet d'écrire

$$\left|\int_x^{x+1} (x+1-t)^2 f''(t)dt\right| \leqslant \int_x^{x+1} |f''(t)|dt \leqslant \left(\int_x^{x+1} |f''(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

et la quantité majorante tend aussi vers 0.

Par conséquent, $f(x) + \dfrac{1}{2}f'(x) = o(1)$. De même, en remplaçant $x+1$ par $x-1$, on obtient que $-f(x) + \dfrac{1}{2}f'(x) = o(1)$. Il en résulte que $f'(x) = o(1)$.

Exercice corrigé 137

Posé en 2006

Si $x > 1$, on pose $f(x) := \int_1^{+\infty} e^{it^x}\,dt$.

a. Montrer que f est bien définie.

b. Montrer que f est continue.

c. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Solution

a. La fonction à intégrer est continue sur $[1, +\infty[$. Effectuons le changement de variable $u = t^x$. On obtient

$$\int_1^A e^{it^x}\,dt = \frac{1}{x}\int_1^{A^x} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-1}du.$$

Grâce à une intégration par parties,

$$\int_1^{A^x} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-1}du = -i\left[e^{iu}u^{\frac{1}{x}-1}\right]_1^{A^x} + i\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{A^x} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}du.$$

Comme $\frac{1}{x}-2 < -1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}du$ est absolument convergente. Quant au crochet, sa partie supérieure tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$. Il en résulte que $\int_1^{A^x} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-1}du$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, ce qui montre que f est bien définie. En outre,

$$\int_1^{+\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-1}du = ie^i + i\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{+\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}du.$$

b. Puisque

$$f(x) = \frac{i}{x}e^i + \frac{i}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{+\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}du,$$

la continuité de f résultera de celle de $x \mapsto \int_1^{+\infty} e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}du$. Or, cette fonction dépendant du paramètre x est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ tel que $a > 1$, grâce à la domination

$$\left|e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}\right| \leqslant u^{\frac{1}{a}-2},$$

et bien sûr grâce à la continuité pour chaque u de $x \mapsto e^{iu}u^{\frac{1}{x}-2}$.

c. La condition de domination précédente est valable pour $a = 2$ en particulier. Ainsi, lorsque $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{iu} u^{\frac{1}{x}-2} du$ tend vers $C := \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{iu} u^{-2} du$. Par conséquent,

$$f(x) = \frac{i}{x} e^i + \frac{i}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)(C + o(1)) = \frac{1}{x}\left(ie^i - iC + o(1)\right).$$

Que $f(x)$ soit équivalent à $\frac{i}{x}(e^i - C)$ dépend de la non-nullité de la constante $D := e^i - C$. C'est le cas, car

$$e^i - C = \int_1^{+\infty} e^i u^{-2} du - \int_1^{+\infty} e^{iu} u^{-2} du = e^i \int_1^{+\infty} \left(1 - e^{i(u-1)}\right) u^{-2} du,$$

et la partie réelle de la dernière intégrale est $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(u-1)}{u^2} du$, intégrale d'une fonction positive continue non identiquement nulle.

Finalement, D est bien non nul et l'on a $f(x) \sim \dfrac{iD}{x}$.

Exercice corrigé 138

Posé en 1999

Pour $r > 0$ et $x > 0$, on pose $f_r(x) := \dfrac{1}{\Gamma(r)} e^{-x} x^{r-1}$

a. On pose, pour r et s strictement positifs fixés et $z > 0$,

$$K(z) := \int_0^z f_r(x) f_s(z - x) dx.$$

Montrer l'existence de $C(r, s)$ tel que $K(z) = C(r, s) e^{-z} z^{r+s-1}$.

b. Soit $r > 1$ et $s > 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} K(z) dz = 1$.

c. En déduire que, si $r > 0$ et $s > 0$,

$$\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} du = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

Solution

Le principal intérêt de cet exercice est de permettre l'application du théorème d'interversion de deux intégrales sur des intervalles quelconques, mais il est à noter que cela n'est possible que dans une certaine mesure et qu'il est nécessaire de trouver un biais pour montrer la formule voulue dans toute sa généralité.

a. L'intégrale $K(z)$ a bien un sens : la fonction à intégrer est continue sur $]0,z[$; on a $f_r(x)f_s(z-x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{e^{-z}z^{s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)}x^{r-1}$ et, comme $r>0$, on a bien convergence de l'intégrale en 0. Il en va de même en z. D'autre part,

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_0^z e^{-x}x^{r-1}e^{x-z}(z-x)^{s-1}dx \\ &= \frac{e^{-z}}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_0^z x^{r-1}(z-x)^{s-1}dx. \end{aligned}$$

Grâce au changement de variable $x=zt$,

$$K(z) = \frac{e^{-z}z^{r+s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt = C(r,s)e^{-z}z^{r+s-1}.$$

b. Nous allons d'abord effectuer le calcul sans nous préoccuper de justifications. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} K(z) &= \int_{z=0}^{+\infty}\int_{x=0}^{z} f_r(x)f_s(z-x)dx\,dz \\ &= \int_{x=0}^{+\infty} f_r(x)\int_{z=x}^{+\infty} f_s(z-x)dz\,dx \\ &= \int_{x=0}^{+\infty} f_r(x)\int_{u=0}^{+\infty} f_s(u)du\,dx\,, \end{aligned}$$

en utilisant dans la deuxième intégrale le changement de variable $u=z-x$. Par définition de Γ, on a

$$\int_0^{+\infty} f_r(x)dx = \int_0^{+\infty} f_s(u)du = 1\,.$$

On obtient donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} K(z)dz = 1$. Dans un cadre plus général de théorie de l'intégration, il nous aurait suffi d'invoquer la positivité de f_r et f_s pour justifier l'interversion, pour toutes valeurs de r et s. Nous allons plutôt utiliser le théorème de Fubini tel qu'énoncé dans le programme officiel avec la fonction

$$f(x,z) := \begin{cases} f_r(x)f_s(z-x) & \text{si } 0<x<z \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous utilisons la propriété que $r,s>1$ pour justifier que f est continue sur $]0,+\infty[^2$. Il nous faut encore justifier que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$, que pour tous $x,y\in\,]0,+\infty[$ les fonctions $f(x,\cdot)$ et $f(\cdot,y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et que leurs intégrales sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ (rien que ça !).

▷ **Intégrabilité de f.** Soient J et J' deux segments inclus dans $]0,+\infty[$. On a

$$\iint_{J\times J'} f = \int_{x\in J} f_r(x) \int_{\substack{z\in J'\\ z>x}} f_s(z-x)dz\, dx.$$

Mais $\displaystyle\int_{\substack{z\in J'\\ z>x}} s(z-x)dz \leqslant 1$ et $\displaystyle\int_{x\in J} f_r(x)dx \leqslant 1$, donc $\displaystyle\iint_{J\times J'} f \leqslant 1$. La fonction positive f est intégrable.

▷ **Intégrabilité des sommes.** Fixons $x \in]0,+\infty[$. Alors la fonction $z \mapsto f(x,z) = f_r(x)f_s(z-x)$ pour $z \in]x,+\infty[$, est intégrable sur $]x,+\infty[$ car f_s est intégrable, et elle est aussi intégrable sur $[0,x]$. De plus,

$$g(x) := \int_{z=0}^{+\infty} f(x,z)dz = f_r(x)\int_x^{+\infty} f_s(z)dz = f_r(x)$$

est continue et intégrable.

Fixons $z \in]0,+\infty[$. Alors $x \mapsto f(x,z) = f_r(x)f_s(z-x)$ pour $x \in]0,z[$ et 0 pour $x \geqslant z$, est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, de plus

$$h(z) := \int_{x=0}^{+\infty} f(x,z)dx = K(z)$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la première question.

c. Supposons toujours $r > 1$ et $s > 1$. Alors

$$\int_0^{+\infty} K(z)dz = C(r,s)\int_0^{+\infty} e^{-z}z^{r+s-1}dz = C(r,s)\Gamma(r+s) = 1\,,$$

ce qui fournit

$$B(r,s) := \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

Reste à vérifier cette relation pour $r > 0$ et $s > 0$. Pour cela, on va chercher une équation fonctionnelle vérifiée par B. On a

$$B(r+1,s) = \int_0^1 t^r(1-t)^{s-1}dt = -\frac{1}{s}\left[t^r(1-t)^s\right]_0^1 + \frac{r}{s}B(r,s+1) = \frac{r}{s}B(r,s+1).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} B(r+1,s) &= \int_0^1 t^r(1-t)^{s-1}dt \\ &= \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}(t-1+1)dt = B(r,s) - B(r,s+1). \end{aligned}$$

Donc

$$B(r,s) = B(r+1,s) + B(r,s+1) = \frac{r+s}{s} B(r,s+1) = \frac{r+s}{r} B(r+1,s).$$

En appliquant à nouveau cette formule,

$$B(r,s) = \frac{r+s}{r} B(r+1,s) = \frac{r+s}{r} \frac{r+s+1}{s} B(r+1,s+1).$$

D'après la question **b**, $B(r+1,s+1) = \dfrac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}$. Donc

$$\begin{aligned} B(r,s) &= \frac{r+s}{r} \times \frac{r+s+1}{s} \times \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} \\ &= \frac{r+s}{r} \times \frac{r+s+1}{s} \times \frac{rs}{(r+s+1)(r+s)} \times \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}. \end{aligned}$$

La fonction B (lire « grand bêta ») est une fonction classique étroitement liée à la fonction Γ, comme le montre cet exercice dont la solution est malheureusement compliquée par la difficulté à appliquer le théorème de Fubini compte tenu des hypothèses limitatives du programme.

Exercice corrigé 139

Posé en 2005

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t(1+t^2)}\,dt$ et calculer cette intégrale.

Solution

Cet exercice paraît simple, mais les dérivations successives sous le signe de l'intégrale conduisent à de petites difficultés.

▷ Posons $f(x,t) = \dfrac{\sin tx}{t(1+t^2)}$. La fonction $f(x,\cdot)$ est, pour chaque x réel, une fonction continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de $t=0$, $f(x,t) \to x$, donc l'intégrale converge en 0. Au voisinage de $+\infty$, $f(x,t) = O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, donc l'intégrale converge en $+\infty$. Ainsi,

$$\varphi(x) := \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

est définie sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction impaire, que nous calculons pour $x \geqslant 0$.

Nous utiliserons les égalités

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos tx}{1+t^2} \ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{t\sin tx}{1+t^2}.$$

Nous allons chercher une équation différentielle vérifiée par φ, mais il faut noter que l'on va rencontrer une difficulté. Dérivons pour l'instant formellement sous le signe de l'intégrale. On obtiendrait

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \ ; \quad \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$$

et donc, $-\varphi''(x)+\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,dt$, et cette dernière intégrale, semi-convergente, est notoirement constante : par le changement de variable $u = xt$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Notons C la valeur de cette intégrale. On a alors pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) - \varphi''(x) = C$, donc il existe deux réels A et B tels que

$$\varphi(x) = Ae^x + Be^{-x} + C.$$

Cette égalité est encore vraie pour $x = 0$, puisque φ est continue en 0 d'après le théorème de continuité avec la condition de domination

$$|f(x,t)| \leqslant \frac{|x|}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2},$$

due à l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$, et valable pour $x \in [-1,1]$. Par conséquent,

$$A + B + C = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt$. Donc, en évaluant en 0,

$$\varphi'(0) = \frac{\pi}{2} = A - B.$$

Enfin, $|\varphi'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, donc φ' est bornée au voisinage de $+\infty$, ce qui impose que $A = 0$. Ainsi, $B = -\dfrac{\pi}{2}$ et $C = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ D'où, pour $x \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x}).$$

▷ Il nous faut maintenant justifier les dérivations sous l'intégrale. Comme $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, qui est intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de Leibniz

garantit la dérivabilité de φ et assure la formule $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt$.

En revanche, nous ne pourrons pas utiliser ce théorème une fois de plus, car la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\dfrac{t\sin tx}{1+t^2}$ n'est pas intégrable. L'intégrale qui va fournir $\varphi''(x)$ n'est que semi-convergente. Pour se ramener à une situation plus gérable, il convient d'utiliser l'intégration par parties pour obtenir des fonctions intégrables. En s'autorisant pour plus de lisibilité à intégrer par parties sur $]0,+\infty[$ (on pourrait aussi procéder sur des segments et passer à la limite), on a

$$\varphi'(x) = \left[\frac{1}{x}\,\frac{\sin tx}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t\sin tx}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Le crochet est nul, et sur cette forme, le théorème de Leibniz donne

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{2t\sin tx}{(1+t^2)^2}\,dt + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\cos tx}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Par ailleurs,

$$-\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{2t\sin tx}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{1}{x}\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt.$$

Ainsi, $\varphi''(x) = -\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\right)\cos tx\;dt$. Or, toujours par intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} -\frac{t\sin tx}{1+t^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{x}\,\frac{t\cos tx}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\right)\cos tx\;dt = \varphi''(x)$$

car le dernier crochet est encore nul. Ceci valide tous les calculs précédents.

Exercice corrigé 140

Posé en 2007

Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^1([0,a],\mathbb{C})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer l'inégalité

$$2\int_0^a |ff'| \leqslant a\int_0^a |f'|^2,$$

et étudier le cas d'égalité.

Solution

▷ Posons $g(x) := \int_0^x |f'|$. On a

$$|f(x) - f(0)| = \left|\int_0^x f'\right| \leqslant \int_0^x |f'|,$$

soit encore $|f| \leqslant g$. Par conséquent,

$$2\int_0^a |ff'| \leqslant 2\int_0^a gg' = g^2(a).$$

Mais

$$g^2(a) = \left(\int_0^a |f'|\right)^2 \leqslant \int_0^a |f'|^2 \int_0^a 1 = a\int_0^a |f'|^2$$

grâce à l'inégalité de Cauchy & Schwarz, ce qui donne l'inégalité souhaitée.

▷ S'il y a finalement égalité, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy & Schwarz, donc $|f'| = c$. On ne peut avoir $c = 0$ que si $f' = 0$ donc que si f est constante, donc nulle. Écartons ce cas. On doit aussi avoir $|ff'| = gg'$, soit $(g - |f|)|f'| = 0$. Donc $|f| = g$, ou encore, pour tout $x \in [0, a]$,

$$\left|\int_0^x f'\right| = \int_0^x |f'|.$$

Cette égalité implique que f' est à valeurs dans une demi-droite du plan complexe. Nous renvoyons pour cela à l'exercice 84 (p. 119), question **c**. Il en résulte que f', étant de module constant, est constante, donc que $f(x) = kx$ puisque $f(0) = 0$. Réciproquement, si $f(x) = kx$, on vérifie que f réalise bien l'égalité.

Exercice corrigé 141

Posé en 2007

Déterminer les fonctions réelles y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Solution

Remarquons que cette équation différentielle ne relève pas du théorème de Cauchy & Lipschitz.

Écrivons d'abord l'équation différentielle sous une forme plus maniable. On ajoute à la dernière colonne la somme des deux autres, ce qui permet

d'écrire

$$(y+y'+y'')\begin{vmatrix} y' & y'' & 1 \\ y'' & y & 1 \\ y & y' & 1 \end{vmatrix} = -(y+y'+y'')(y^2+y'^2+y''^2-yy'-yy''-y'y'')$$
$$= -\frac{1}{2}(y+y'+y'')\big((y-y')^2+(y'-y'')^2+(y-y'')^2\big) = 0.$$

En chaque point t, on a donc

$$y(t)+y'(t)+y''(t)=0 \quad \text{ou} \quad y(t)=y'(t)=y''(t).$$

Supposons d'abord qu'il existe t_0 tel que $y(t_0)+y'(t_0)+y''(t_0)\neq 0$. Comme $y+y'+y''$ est une fonction continue, l'ensemble Ω des t en lesquels elle ne s'annule pas est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit I la composante connexe par arcs de t_0 dans Ω. C'est un intervalle ouvert, le plus grand intervalle qui soit inclus dans Ω et qui contienne t_0. Supposons par l'absurde que $I\neq\mathbb{R}$. Alors par exemple $\sup I=\alpha\in\mathbb{R}$. Mais $\alpha\notin I$, donc $y(\alpha)+y'(\alpha)+y''(\alpha)=0$ (car $I\cup\{\alpha\}$ est un intervalle inclus dans Ω et contenant t_0 qui contient I strictement). Sur I, $y+y'+y''$ ne s'annule pas, donc $y=y'=y''$ et $y(t)=ae^t$. Par limite en α, $3ae^\alpha=0$, ce qui donne $a=0$ et une contradiction avec $y(t_0)+y'(t_0)+y''(t_0)\neq 0$. Ainsi, dans ce cas, $I=\mathbb{R}$ et $y(t)=ae^t$ sur $\mathbb{R}$.

Si $y(t_0)+y'(t_0)+y''(t_0)\neq 0$ n'est réalisé pour aucun t_0, c'est donc que $y+y'+y''=0$ sur $\mathbb{R}$ et que, sur $\mathbb{R}$,

$$y(t)=e^{-t/2}\Big(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big).$$

On a résolu l'équation linéaire à coefficients constants en introduisant son équation caractéristique $r^2+r+1=0$, de racines $j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice corrigé 142

Posé en 2006

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, vérifiant $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Déterminer

$$\inf_{f\in E}\int_0^1 |f'-f|.$$

Solution

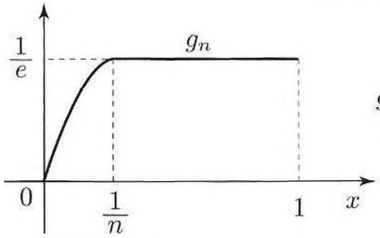
On peut simplifier $f' - f$ en écrivant $f(x) = g(x)e^x$. On obtient alors $f' - f = g'(x)e^x$. Notons donc F l'ensemble des fonctions g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et telles que $g(0) = 0$ et $g(1) = \frac{1}{e}\cdot$ Il est clair que $f \in E$ si et seulement si $g \in F$. Le problème posé se ramène donc à trouver

$$\inf_{f\in E} \int_0^1 |f' - f| = \inf_{g\in F} \int_0^1 |g'(x)|e^x dx.$$

On a naturellement

$$\int_0^1 |g'(x)|e^x dx \geqslant \int_0^1 |g'(x)|dx \geqslant \int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0) = \frac{1}{e}\cdot$$

Pour qu'il y ait égalité dans la succession d'inégalités précédentes, il faudrait que g' soit positive, et qu'en plus, $e^x = 1$ en tout point où $g'(x) \neq 0$. Cette dernière condition ne peut se produire : il ne peut pas y avoir égalité. Pourtant nous allons construire une suite (g_n) de fonctions de F telles que $\displaystyle\int_0^1 |g_n'(x)|e^x dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}\cdot$ Il nous suffit pour cela d'avoir des fonctions croissantes, $\mathscr{C}^1$, telles que $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}$ et donc que g_n soit constante sur $\left[\frac{1}{n},1\right]$. Attention, le raccord en $\frac{1}{n}$ doit être $\mathscr{C}^1$. Posons :



$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{e}x\left(\dfrac{2}{n} - x\right) & \text{sur } \left[0,\dfrac{1}{n}\right] \\ \dfrac{1}{e} & \text{sur } \left[\dfrac{1}{n},1\right]. \end{cases}$$

Le caractère $\mathscr{C}^1$ du raccord provient du fait que les dérivées à gauche et à droite en $\frac{1}{n}$ sont égales. Pour cette suite de fonctions (g_n), on a

$$\int_0^1 |g_n'(x)|e^x dx = \int_0^{\frac{1}{n}} g_n'(x)e^x dx \leqslant e^{1/n} \int_0^{\frac{1}{n}} g_n'(x) = \frac{e^{1/n}}{e}\cdot$$

Ainsi, l'inégalité $\displaystyle\inf_{g\in F} \int_0^1 |g'(x)|e^x dx \leqslant \int_0^1 |g_n'(x)|e^x dx \leqslant \frac{e^{1/n}}{e}$ passe à la limite en

$$\inf_{f\in E} \int_0^1 |f' - f| = \inf_{g\in F} \int_0^1 |g'(x)|e^x dx = \frac{1}{e}\cdot$$

Exercice corrigé 143

Posé en 2007

On pose, pour $x > 0$, $f(x) := \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin\sqrt{t}\, dt$.

a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner sa limite en $+\infty$.

b. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre.

c. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Solution

a. ▷ La fonction $t \mapsto e^{-xt} \sin\sqrt{t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Comme de plus $e^{-xt} \sin\sqrt{t} \underset{+\infty}{=} O(e^{-xt})$, son intégrale converge en $+\infty$, de sorte que $f(x)$ est bien défini pour $x > 0$. En outre,

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, $f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

▷ Pour la commodité ultérieure, effectuons le changement de variable $t = u^2$, puis une intégration par parties. Il vient

$$f(x) = 2\int_0^{+\infty} u e^{-xu^2} \sin u\, du$$

$$= -\frac{1}{x}\left[e^{-xu^2} \sin u\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2} \cos u\, du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2} \cos u\, du.$$

Soit $a > 0$ et $x \geqslant a$. On dispose de la domination

$$|-u^2 e^{-xu^2} \cos u| \leqslant u^2 e^{-au^2}.$$

La fonction majorante étant intégrable et indépendante de x, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe de l'intégrale

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2} \cos u\, du = -\int_0^{+\infty} u^2 e^{-xu^2} \cos u\, du,$$

qui nous dit aussi que $x \mapsto \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xu^2} \cos u\, du$ est continue sur $[a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$. Par conséquent, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xu^2} \cos u\, du$ est de

classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}\cos u\,du - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-xu^2}\cos u\,du$$
$$= -\frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-xu^2}\cos u\,du.$$

b. Par parties,

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-xu^2}\cos u\,du$$
$$= -\frac{1}{2x}\left[e^{-xu^2}u\cos u\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}(\cos u - u\sin u)\,du$$
$$= \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}\cos u\,du - \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}u\sin u\,du$$
$$= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{4x}f(x).$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{2x}f(x) + \frac{1}{4x^2}f(x) = \left(-\frac{3}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)f(x).$$

c. La résolution de l'équation précédente conduit à

$$f(x) = \frac{C}{x^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4x}}.$$

Pour déterminer C, cherchons un équivalent de f en $+\infty$. Le changement de variable $u\sqrt{x} = v$ conduit à l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}\cos u\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\cos\frac{v}{\sqrt{x}}\,dv.$$

Grâce à la domination $|e^{-v^2}\cos\frac{v}{\sqrt{x}}| \leqslant e^{-v^2}$, on a que

$$\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\cos\frac{v}{\sqrt{x}}\,dv \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} I := \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\,dv.$$

Donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme d'autre part $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{x^{\frac{3}{2}}}$, on obtient que $C = I$. Finalement,

$$\forall x > 0\,, \quad f(x) = \frac{I}{x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{4x}}\,.$$

Il est connu que $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice corrigé 144

Posé en 2006

On considère $E := \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, et tout réel τ, on note f_τ la fonction $f_\tau(x) := f(x + \tau)$. On note V_f l'espace vectoriel engendré par toutes les fonctions f_τ, et on cherche à quelle condition V_f est de dimension finie.

a. On suppose que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Montrer que V_f est de dimension finie.

b. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe un segment $I \subset \mathbb{R}$ tel que $||f||_I = \sup\limits_{t \in I} |f(t)|$ soit une norme sur V.

c. Montrer que si V_f est de dimension finie, alors $f' \in V_f$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace V_f soit de dimension finie.

Solution

a. Supposons que $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)}(x)$. Alors comme $(f^{(k)})_\tau = (f_\tau)^{(k)}$, toutes les translatées f_τ vérifient la même équation différentielle. Ainsi, V_f est inclus dans le sous-espace vectoriel des solutions de $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$, qui est notoirement de dimension n. Donc V_f est de dimension finie inférieure à l'ordre de l'équation différentielle.

b. Si I est un segment, la borne supérieure de $|f|$ sur I est bien définie en vertu du caractère continu de f. L'application $||\cdot||_I$ vérifie immédiatement les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire, seule la séparation n'est pas évidente, puisque le fait que $f(x) = 0$ sur I n'implique pas que f soit la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Considérons φ_n l'application linéaire définie sur V par $\varphi_n(f) = f_{[-n,n]}$, restriction de f à $[-n, n]$, et soit K_n le noyau de φ_n. Si on peut trouver m tel que $K_m = \{0\}$, alors toute fonction de V nulle sur $[-m, m]$ est nulle sur $\mathbb{R}$, et donc $||\cdot||_{[-m,m]}$ sera une norme sur V.

Or (K_n) est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de V, donc par un argument de dimension, cette suite stationne : il existe m tel que pour tout $n \geqslant m$, $K_n = K_m$. Ainsi, une fonction nulle sur $[-m, m]$ est nulle sur tous les intervalles $[-n, n]$ avec $n \geqslant m$, donc est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $K_m = \{0\}$, ce que l'on voulait.

c. Comme f est dérivable, la famille de fonctions $\dfrac{f_h - f}{h}$ converge simplement vers f', quand h tend vers zéro. Supposons V_f de dimension finie, et soit $I = [a, b]$ tel que $||\cdot||_{[a,b]}$ soit une norme sur V_f. Pour tout $x \in [a, b]$, et tout $h \in]0, 1]$, on a par l'inégalité de Taylor & Lagrange :

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| \leqslant \frac{h}{2} \sup_{t \in [a, b+1]} |f''(t)|.$$

La suite de fonctions définie par $g_n := n(f_{\frac{1}{n}} - f)$ converge donc vers f' au sens de $||\cdot||_{[a,b]}$. Comme V_f est de Banach (pour n'importe quelle norme), il est fermé dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc $f' \in V_f$.

On prend maintenant g quelconque dans V_f. Comme g est combinaison linéaire de translatées de f, et que $f' \in V_f$, alors $g' \in V_f$. On en déduit ainsi que toutes les dérivées successives de f restent dans V_f. Comme V_f est de dimension finie, les fonctions $f, f', \ldots, f^{(n)}$ sont liées pour n assez grand : f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, ce qui est la condition nécessaire et suffisante recherchée.

À titre d'exercice, on pourra reprendre la question **c** *en supposant seulement que V_f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et en montrant que ses éléments sont nécessairement dérivables.*

Les Clefs pour l'X est destiné aux élèves des classes préparatoires scientifiques qui préparent le concours d'entrée à l'École polytechnique, ou des concours d'un niveau voisin (Centrale, les Mines). Au-delà de l'apprentissage du cours et de l'entraînement sur des exercices d'application, il est important que les futurs candidats se mettent assez tôt dans l'ambiance authentique du concours en travaillant des exercices qui ont été réellement posés à l'X, et de préférence d'un millésime récent. C'est ce que leur proposent Bernard Randé et Franck Taïeb, tous deux professeurs de mathématiques spéciales MP*. Grâce à leur grande expérience, ils fournissent des corrigés qui allient pédagogie et efficacité. En travaillant sur ce choix d'exercices, les élèves acquerront une expertise qui devrait leur permettre d'affronter en confiance l'épreuve de l'oral.

Franck Taïeb est professeur au Lycée Pasteur de Neuilly, Bernard Randé est professeur au Lycée Louis-le-Grand. Tous deux sont membres du comité de rédaction de la RMS, revue destinée aux classes préparatoires. Ils ont tous deux publié des livres de corrigés de problèmes destinés aux classes préparatoires. Bernard Randé est aussi l'auteur des *carnets indiens de Srinivisa Ramanujan*, paru chez Cassini.

Collection.– Im-et-Ker

Calvage & Mounet

www.calvage-et-mounet.fr

ISBN 978-2-91-635209-1

9 782916 352091

Prix : 25 €