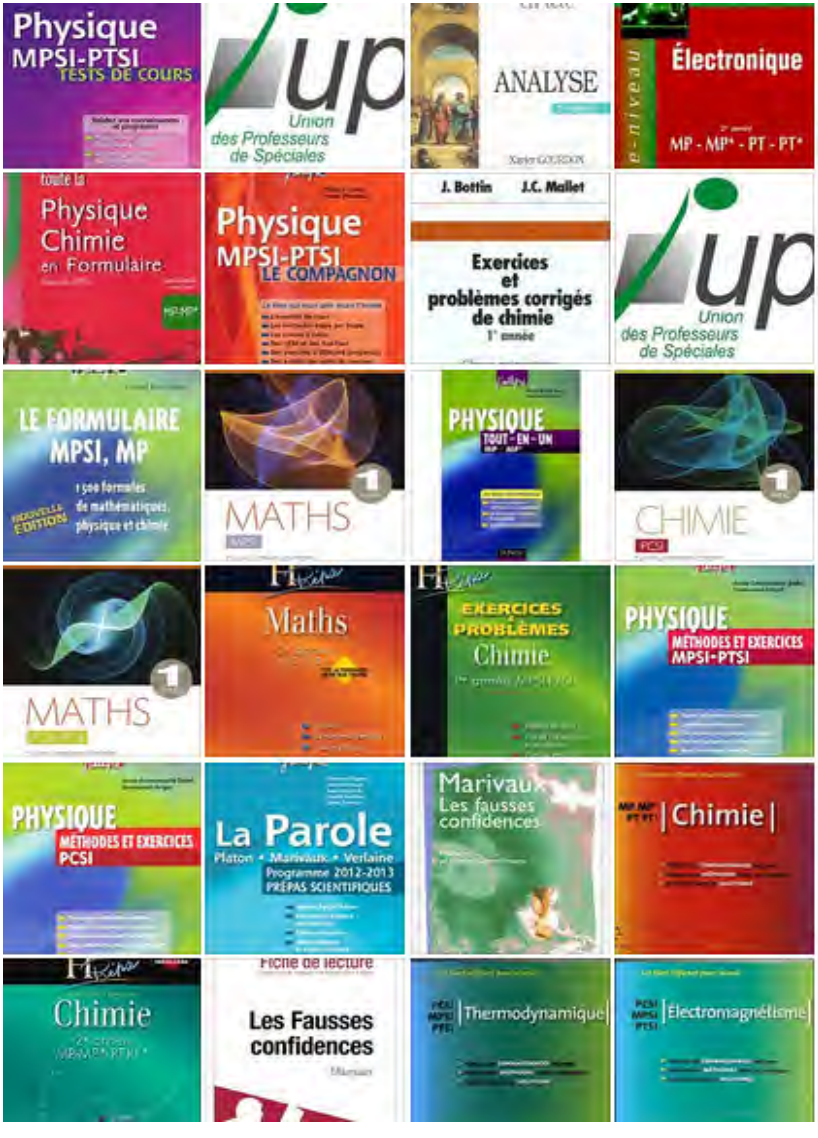
BIBLIOTHQUE ELECTRONIQUE DES CLASSES PREPA

partager le savoir gratuitement



pour plus de livres gratuit et exclusive visiter nous sur :

page facebook :

https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa

ou sur le forum :

http://prepa-book.forummaroc.net/

****

* © bibliothéque electronique des classes prepa™ ® *

****

Physique PSI

J'évalue mon niveau en 500 questions

François Clausset
Professeur en MP*
au lycée du Parc à Lyon
Docteur de l'université Paris VI

Anne Muller-Clausset
Ancien professeur en PCSI au lycée
La Martinière-Monplaisir à Lyon
Agrégée de l'université

DUNOD

Illustration de couverture :
© puentes – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-058645-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Formulaire mathématique ix

PARTIE 1

ÉLECTRONIQUE DES SIGNAUX

CHAPITRE 1 • **RÉPONSE D'UN CIRCUIT LINÉAIRE** 2

CHAPITRE 2 • **DÉCOMPOSITION DE FOURIER - FILTRAGE D'UN SIGNAL** 9

CHAPITRE 3 • **COMMANDE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE - GÉNÉRATION DE SIGNAUX PÉRIODIQUES** 15

Corrigés 23

PARTIE 2

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE 4 • **ÉQUATIONS DE MAXWELL** 52

CHAPITRE 5 • **INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE** 57

Corrigés 66

PARTIE 3

MÉCANIQUE DES FLUIDES

CHAPITRE 6 • **CINÉMATIQUE DES FLUIDES** 88

CHAPITRE 7 • **ÉTUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DES FLUIDES RÉELS** 93

CHAPITRE 8 • **ÉQUATIONS LOCALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES** 98

CHAPITRE 9 • **BILANS DYNAMIQUES ET THERMODYNAMIQUES** 105

Corrigés 113

PARTIE 4
ONDES

CHAPITRE 10 • **GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES** 144

CHAPITRE 11 • **ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE** 151

CHAPITRE 12 • **ONDES EM - APPLICATIONS** 157

CHAPITRE 13 • **RÉFLEXION ET RÉFRACTION D'UNE ONDE PLANE** 166

CHAPITRE 14 • **ONDES SONORES DANS LES FLUIDES** 170

Corrigés 178

PARTIE 5
OPTIQUE

CHAPITRE 15 • **INTERFÉRENCES À DEUX ONDES** 228

CHAPITRE 16 • **COHÉRENCE TEMPORELLE ET SPATIALE DE 2 ONDES** 236

CHAPITRE 17 • **DIFFRACTION DE FRAUNHOFER ET RÉSEAUX** 243

CHAPITRE 18 • **INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON** 251

Corrigés 257

PARTIE 6

CONVERSION DE PUISSANCE

CHAPITRE 19 • **MILIEUX MAGNÉTIQUES - CONVERSION ÉLECTROMAGNÉTIQUE STATIQUE** 296

CHAPITRE 20 • **CONVERSION ÉLECTROMÉCANIQUE - MOTEURS** 302

CHAPITRE 21 • **CONVERSION ÉLECTRONIQUE - HACHEURS** 309

Corrigés 314

PARTIE 7

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE 22 • **CONDUCTION THERMIQUE** 338

CHAPITRE 23 • **DIFFUSION DE PARTICULES** 345

Corrigés 350

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Formulaire mathématique

1 Les opérateurs

On donne les expressions des opérateurs s'appliquant à une grandeur scalaire V ou à un vecteur $\overrightarrow{a}$.

1.1 Coordonnées cartésiennes

Les vecteurs de base sont notés $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$.

$$\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \tag{1}$$

$$div\,\overrightarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} \tag{3}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{4}$$

$$\Delta\overrightarrow{a} = \Delta a_x\overrightarrow{u_x} + \Delta a_y\overrightarrow{u_y} + \Delta a_z\overrightarrow{u_z} \tag{5}$$

1.2 Vecteur nabla en coordonnées cartésiennes

Le vecteur nabla est noté $\overrightarrow{\nabla}$.

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \tag{6}$$

Les différents opérateurs s'expriment en coordonnées cartésiennes avec les expressions suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \overrightarrow{\nabla} V \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{a} \tag{8}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{a} \tag{9}$$

$$\Delta V = \vec{\nabla}^2 V \tag{10}$$

$$\Delta \vec{a} = \vec{\nabla}^2 a_x + \vec{\nabla}^2 a_y + \vec{\nabla}^2 a_z \tag{11}$$

1.3 Coordonnées cylindriques

Les notations utilisées sont définies sur la figure 1.

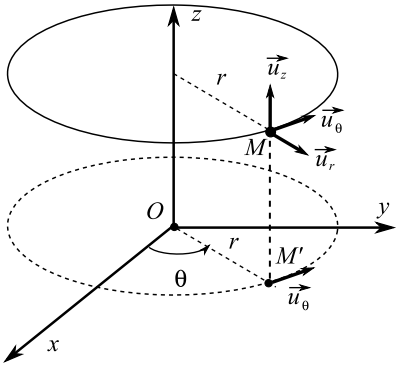


Figure 1

$$\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z} \tag{12}$$

$$div\, \vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z} \tag{14}$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{15}$$

$$\Delta \vec{a} = \begin{cases} \Delta a_r - \dfrac{1}{r^2}\left(a_r + 2\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) \\ \Delta a_\theta - \dfrac{1}{r^2}\left(a_\theta - 2\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta}\right) \\ \Delta a_z \end{cases} \tag{16}$$

1.4 Coordonnées sphériques

Les notations utilisées sont définies sur la figure 2.

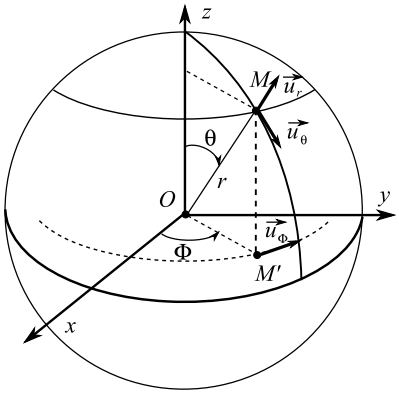


Figure 2

$$\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\overrightarrow{u_\phi} \tag{17}$$

$$div\,\overrightarrow{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(r^2\sin\theta\, a_r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\, sin\theta\, a_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(r\, a_\phi\right)}{\partial\phi}\right) \tag{18}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} = \begin{cases} \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\left(\dfrac{\partial\left(\sin\theta\, a_\phi\right)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial\phi}\right)\overrightarrow{u_r} \\ \left(\dfrac{1}{r\,\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial\phi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(r\, a_\phi\right)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\left(r\, a_\theta\right)}{\partial r} - \dfrac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{u_\phi} \end{cases} \tag{19}$$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \tag{20}$$

2 Relations avec les opérateurs

$$\overrightarrow{grad}\,(UV) = V\,\overrightarrow{grad}\,U + U\,\overrightarrow{grad}\,V \tag{21}$$

$$div\left(U\,\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{grad}\,U + U\,div\,\overrightarrow{a} \tag{22}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

$$\overrightarrow{rot}\left(U\,\vec{a}\right) = \overrightarrow{grad}\,U \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{a} + U\,\overrightarrow{rot}\,\vec{a} \tag{23}$$

$$div\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{rot}\,\vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{rot}\,\vec{b} \tag{24}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,U\right) = \vec{0} \tag{25}$$

$$div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right) = 0 \tag{26}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{a}\right) - \Delta\vec{a} \tag{27}$$

$$\left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\,a^2 + \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right) \wedge \vec{a} \tag{28}$$

Partie 1

Électronique des signaux

1 Réponse d'un circuit linéaire

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La réponse d'un système linéaire à un signal sinusoïdal.
- La fonction de transfert et sa représentation de Bode.
- La réponse d'un système linéaire à un échelon.

Notations. Le schéma d'étude est celui de la figure 1.1 avec un signal $e(t)$ appliqué à l'entrée d'un système (S) qui donne en sortie un signal $s(t)$.

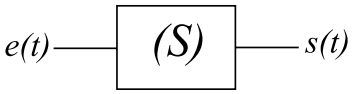


Figure 1.1

On utilisera la notation $p = j\omega$ dans la fonction de transfert où ω est une pulsation.

Tous les systèmes considérés dans ce chapitre sont linéaires.

On définit la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$: $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ sous réserve que l'intégrale converge.

La tension à l'entrée inverseuse d'un amplificateur opérationnel sera notée V^- et celle à l'entrée non inverseuse V^+.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 23**.

1 ❒ V ❒ F On note a_k et b_ℓ des coefficients constants. Un système est linéaire si $e(t)$ et $s(t)$ sont reliées par une équation différentielle du type :

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{\ell=0}^{L} b_\ell \frac{\mathrm{d}^\ell e(t)}{\mathrm{d}t^\ell}$$

2 ❒ V ❒ F Le régime transitoire est solution de l'équation :

$$\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell \frac{\mathrm{d}^\ell e(t)}{\mathrm{d}t^\ell} = 0$$

3 ❒ V ❒ F Un système est stable si la solution transitoire tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

4 ❒ V ❒ F Pour un système stable, une fois passé le régime transitoire, si le signal d'entrée est triangulaire, le signal de sortie l'est aussi.

5 ❒ V ❒ F Le régime libre correspond à la solution de

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = E$$

6 ❒ V ❒ F La réponse indicielle est la réponse du système à un échelon.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 24**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

7 Un système linéaire donne d'un signal d'entrée sinusoïdal $e_1(t)$, un signal de sortie s_1. Ce même système donne $s_2(t)$ pour un signal d'entrée $e_2(t)$ (redressé monoalternance de $e_1(t)$). Déterminer le signal de sortie correspondant au redressement bialternance $e_3(t) = |e_1(t)|$.

❒ **a.** $s_3 = s_1 + s_2$

❒ **b.** $s_3 = -s_1 + s_2$

❒ **c.** $s_3 = -s_1 + 2s_2$

❒ **d.** $s_3 = 2s_1 - s_2$

8 Les coefficients a_k et b_ℓ sont ceux définis précédemment. Un système linéaire est stable si :

❒ **a.** Les racines de l'équation $\sum_{k=0}^{K} a_k r^k = 0$ ont une partie réelle négative.

❒ **b.** Les racines de l'équation $\sum_{k=0}^{K} a_k r^k = 0$ ont une partie réelle positive.

❒ **c.** Les racines de l'équation $\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell r^\ell = 0$ ont une partie réelle négative.

❒ **d.** Les racines de l'équation $\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell r^\ell = 0$ ont une partie réelle positive.

9 Pour le système régi par l'équation différentielle définie à la question 1, les fonctions de transfert en sinusoïdal $\underline{H}(j\omega)$ et en signal quelconque $H(p)$ sont :

❒ **a.** $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k}{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell (j\omega)^\ell}$

❒ **b.** $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell (j\omega)^\ell}{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k}$

❒ **c.** $H(p) = \dfrac{\sum_{k=0}^{K} a_k p^k}{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell p^\ell}$

❒ **d.** $H(p) = \dfrac{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^{K} a_k p^k}$

10 On s'intéresse au schéma de la figure (1.2). Déterminer la fonction de transfert puis l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.

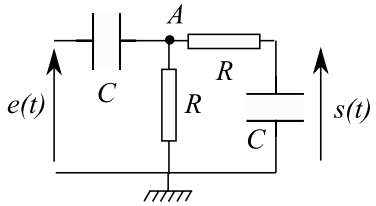


Figure 1.2

❒ **a.** $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{jRC\omega}{-(RC\omega)^2 + 2jRC\omega}$

❒ **b.** $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{jRC\omega}{-1 - (RC\omega)^2 + 2jRC\omega}$

❒ **c.** $(RC)^2 \dfrac{d^2\underline{s}}{dt^2} + 3RC\dfrac{d\underline{s}}{dt} + \underline{s} = RC\dfrac{d\underline{e}}{dt}$

❒ **d.** $-(RC)^2 \dfrac{d^2\underline{s}}{dt^2} + 3RC\dfrac{d\underline{s}}{dt} + \underline{s} = RC\dfrac{d\underline{e}}{dt}$

Cet énoncé concerne les questions 11 à 15 :
Cette série de questions étudie les principales fonctions linéaires réalisées avec des montages à amplificateurs opérationnels. Dans tous les montages, les amplificateurs seront considérés comme idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

11 On considère les montages amplificateurs inverseur (figure 1.3) et non inverseur (figure 1.4) de fonctions de transfert respectives H_1 et H_2. Exprimer H_1 et H_2.

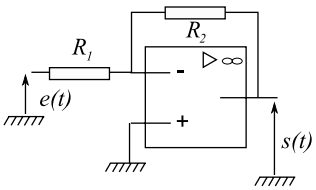


Figure 1.3 Amplificateur inverseur

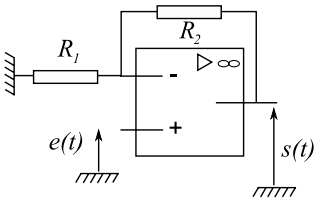


Figure 1.4 Amplificateur non inverseur

❒ **a.** $H_1 = -\dfrac{R_1}{R_2}$

❒ **b.** $H_1 = -\dfrac{R_2}{R_1}$

❒ **c.** $H_2 = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$

❒ **d.** $H_2 = \dfrac{R_2}{R_1}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

12 On considère les montages intégrateur (figure 1.5) et pseudo-intégrateur (figure 1.6) de fonctions de transfert respectives $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$. Exprimer $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$.

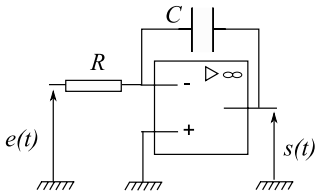


Figure 1.5 Intégrateur

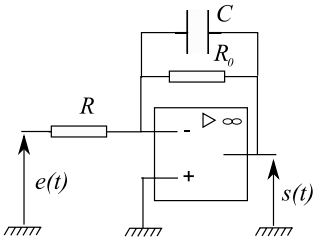


Figure 1.6 Pseudo-intégrateur

❒ **a.** $\underline{H_1} = -\dfrac{1}{jRC\omega}$

❒ **b.** $\underline{H_1} = -\dfrac{R}{jC\omega}$

❒ **c.** $\underline{H_2} = -\dfrac{R}{R_0 + jC\omega}$

❒ **d.** $\underline{H_2} = -\dfrac{R_0}{R}\dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

13 On considère les montages dérivateur (figure 1.7) et pseudo-dérivateur (figure 1.8) de fonctions de transfert respectives $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$. Exprimer $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$.

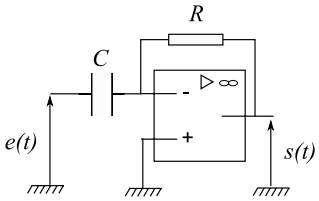


Figure 1.7 Dérivateur

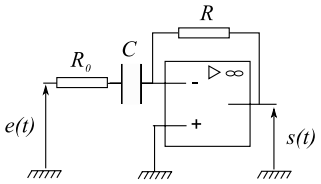


Figure 1.8 Pseudo-dérivateur

❒ **a.** $\underline{H_1} = -jRC\omega$

❒ **b.** $\underline{H_1} = -\dfrac{jC\omega}{R}$

❒ **c.** $\underline{H_2} = -\dfrac{R_0}{R}(1 + jRC\omega)$

❒ **d.** $\underline{H_2} = -\dfrac{jRC\omega}{1 + jR_0C\omega}$

14 On considère le montage déphaseur de la figure 1.9. Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

❒ **a.** $\underline{H} = \dfrac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}$

❒ **b.** $\underline{H} = 1$

❒ **c.** $\underline{H} = -1$

❒ **d.** $\underline{H} = \dfrac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

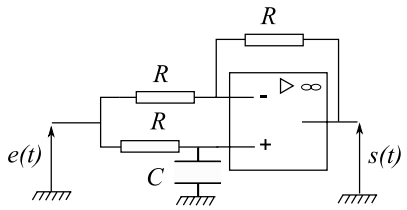


Figure 1.9 Déphaseur

15 On considère les montages sommateur (figure 1.10) et soustracteur (figure 1.11) de signaux de sortie respectifs $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Exprimer s_1 et s_2.

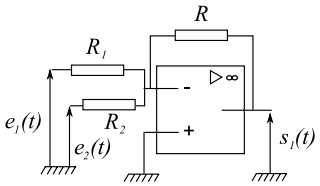


Figure 1.10 Sommateur

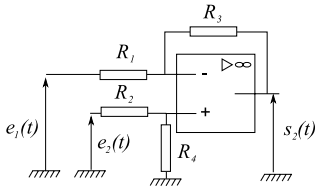


Figure 1.11 Soustracteur

❒ **a.** $s_1 = -\dfrac{R}{R_1}e_1 + \dfrac{R}{R_2}e_2$

❒ **b.** $s_1 = -\dfrac{R}{R_1}e_1 - \dfrac{R}{R_2}e_2$

❒ **c.** $s_2 = \dfrac{R_4(R_1+R_3)}{R_1(R_2+R_4)}e_2 - \dfrac{R_3}{R_1}e_1$

❒ **d.** $s_2 = \dfrac{R_3(R_1+R_4)}{R_1(R_2+R_3)}e_2 - \dfrac{R_4}{R_1}e_1$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :
On s'intéresse dans cette série de questions à l'amplificateur opérationnel réel (noté A.O.). En boucle ouverte, le gain différentiel μ tel que $\underline{s} = \underline{\mu}(\underline{V}^+ - \underline{V}^-)$ est une fonction passe-bas du premier ordre : $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$.

16 Déterminer la(les) réponse(s) juste(s) parmi les propositions suivantes.

❒ **a.** Une tension $V^+ - V^- \simeq 150\ \mu$V suffit à faire saturer l'A.O.

❒ **b.** $\mu_0 \simeq 100$

❒ **c.** $f_c \simeq 100$ Hz

❒ **d.** $f_c \simeq 100$ kHz

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

17 Dans le montage amplificateur non inverseur (figure 1.4), on tient compte maintenant de la réponse de l'A.O. réel. En mettant la fonction de transfert sous la forme $\underline{H} = \dfrac{H'_0}{1 + j\dfrac{f}{f'_c}}$, déterminer H'_0 et f'_c . On pose $\lambda = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

❒ **a.** $H'_0 = \mu_0$

❒ **b.** $H'_0 = \dfrac{\mu_0}{1 + \lambda\mu_0}$

❒ **c.** $f'_c = f_c$

❒ **d.** $f'_c = f_c(1 + \lambda\mu_0)$

18 On reprend le montage déphaseur (figure 1.9) en tenant compte de la réponse de l'amplificateur. On pose $\tau = RC$. Déterminer la relation entre $\underline{e}$ et $\underline{s}$.

❒ **a.** $\underline{s} = \dfrac{\underline{\mu}}{2 + \underline{\mu}} \dfrac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}\underline{e}$

❒ **b.** $\underline{s} = \dfrac{-\underline{\mu}}{2 - \underline{\mu}} \dfrac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}\underline{e}$

❒ **c.** $\underline{s} = \dfrac{\underline{\mu}}{1 + \underline{\mu}} \dfrac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}\underline{e}$

❒ **d.** $\underline{s} = \dfrac{\underline{\mu}}{2 - \underline{\mu}} \dfrac{3 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}\underline{e}$

19 On écrit $\underline{\mu}$ sous la forme $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + j\omega\tau_c}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ et la réponse à un échelon de tension de hauteur E. On posera $\tau'_c = \dfrac{2}{\mu_0 + 2}\tau_c$.

❒ **a.** $\tau\tau'_c \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + (\tau + \tau'_c)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{\mu_0}{2 + \mu_0}\left(e - \tau\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **b.** $\tau\tau'_c \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + (\tau + \tau'_c)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{\mu_0}{2 + \mu_0}\left(e + \tau\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **c.** $s(t) = A\exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right) + B\exp\left(\dfrac{t}{\tau'_c}\right) + \dfrac{\mu_0}{2 + \mu_0}E$

❒ **d.** $s(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + B\exp\left(-\dfrac{t}{\tau'_c}\right) + \dfrac{\mu_0}{2 + \mu_0}E$

Voir les corrigés du chapitre 1 page 23.

2

Décomposition de Fourier - Filtrage d'un signal

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La décomposition de Fourier d'un signal périodique.
- Le contenu spectral d'un signal.
- Les notions de fondamental et d'harmoniques.
- L'effet d'un filtre linéaire sur le spectre et la forme d'un signal.
- Les circuits dérivateur et intégrateur.

Notations. Sauf indication contraire, la décomposition de Fourier d'un signal périodique $s(t)$ de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ sera écrite sous les deux formes suivantes :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 32**.

1 ❒ V ❒ F La composante continue de $s(t)$ est A_0.

2 ❒ V ❒ F Si $s(t)$ est pair, tous les coefficients B_k sont nuls.

3 ❒ V ❒ F Plus un signal est proche d'une sinusoïde, plus son spectre est riche en harmoniques.

4 ❒ V ❒ F Un signal créneau a plus d'harmoniques qu'un signal triangle.

5 ❒ V ❒ F L'amplitude des harmoniques d'un signal triangulaire décroît comme $\frac{1}{k}$.

6 ❒ V ❒ F Le résultat du filtrage d'un signal créneau par un filtre passe-bande est aussi un créneau.

7 ❒ V ❒ F Un filtre linéaire peut transformer un signal sinusoïdal en signal triangulaire.

8 ❒ V ❒ F Un filtre passe-bas du deuxième ordre ne peut être intégrateur.

9 ❒ V ❒ F Un filtre passe-bande du deuxième ordre peut être intégrateur ou dérivateur.

10 ❒ V ❒ F Le signal R.M.S. d'un signal s est tel que $S_{RMS}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_k C_k^2$

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 34**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

11 On s'intéresse au signal (figure 2.1). Son amplitude est a et sa période T. Déterminer sa décomposition de Fourier.

❒ **a.** $s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\cos(2p+1)\omega t}{2p+1}$

❒ **b.** $s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$

❒ **c.** $s(t) = \frac{2a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$

❒ **d.** $s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(p)\omega t}{p}$

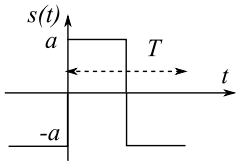


Figure 2.1

12 On s'intéresse au signal (figure 2.2). Son amplitude est a et sa période T. Déterminer sa décomposition de Fourier.

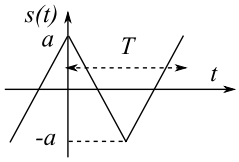


Figure 2.2

❒ **a.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)}$

❒ **b.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$

❒ **c.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2p+1)\omega t}{p^2}$

❒ **d.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$

Cet énoncé concerne les questions 13 à 17 :
Un signal S_e (figure 2.3) est filtré par cinq filtres d'ordre 2 qu'on demande de retrouver par une analyse qualitative des signaux de sortie.

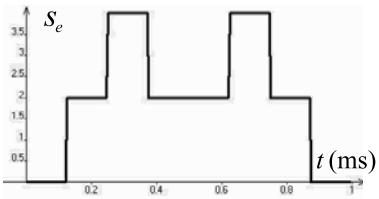


Figure 2.3

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

13 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.4).

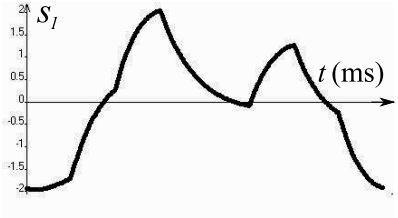


Figure 2.4

❒ **a.** Filtre passe-bande à large bande.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-bas.

❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

14 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.5).

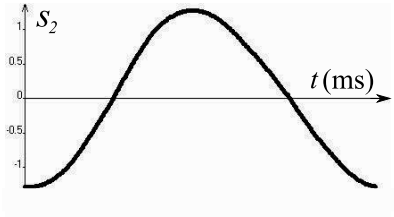


Figure 2.5

❒ **a.** Filtre passe-bande à large bande.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-haut.

❒ **d.** Filtre passe-bas.

15 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.6).

❒ **a.** Filtre passe-bas.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-haut.

❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

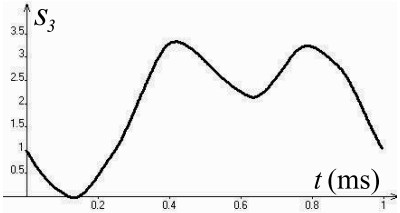


Figure 2.6

16 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.7).

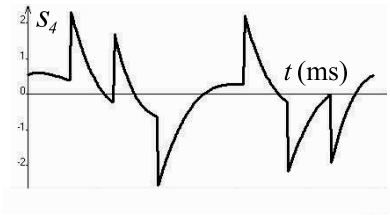


Figure 2.7

❒ **a.** Filtre passe-bas.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-haut.

❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

17 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.8).

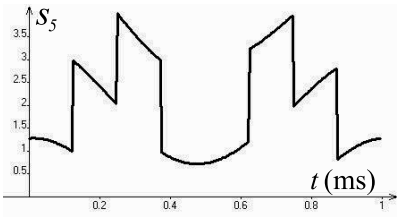


Figure 2.8

❒ **a.** Filtre passe-bas.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-haut.

❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

18 On considère un signal électrique $e(t) = E_0 + \sum_k E_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$ à l'entrée d'un filtre linéaire de fonction de transfert $\underline{H(j\omega)} = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$. Quelle est l'expression du signal de sortie $s(t)$?

❒ **a.** $s(t) = H(\omega)e(t)$

❒ **b.** $s(t) = H(0)E_0 + \sum_k H(k\omega)E_k \cos(k\omega t + \alpha_k + \phi(k\omega))$

❒ **c.** $s(t) = H(0)E_0 + \sum_k H(\omega)E_k \cos(k\omega t + \alpha_k + \phi(\omega))$

❒ **d.** $s(t) = H(0)E_0 + \sum_k H(k\omega)E_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$

Cet énoncé concerne les questions 19 à 20 :

On envoie un signal d'entrée créneau pair $e(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\cos(2p+1)\omega_1 t}{2p+1}$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ à l'entrée d'un filtre passe-bande $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. On choisit le filtre tel que $\omega_0 = \omega_1$ et $Q = 10$.

19 Déterminer l'amplitude du terme fondamental S_1 du signal de sortie $s(t)$.

❒ **a.** $S_1 = 0$

❒ **b.** $S_1 = \frac{1}{1 + j10\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}\frac{4a}{\pi}$

❒ **c.** $S_1 = \frac{4a}{\pi}$

❒ **d.** $S_1 = 1$

20 Déterminer l'amplitude du premier harmonique non nul du signal de sortie $s(t)$.

❒ **a.** 0

❒ **b.** $\frac{3}{3 + j80}\frac{4a}{\pi}$

❒ **c.** $\frac{4a}{\pi}$

❒ **d.** $\frac{12a}{\pi\sqrt{6409}}$

Voir les corrigés du chapitre 2 page 32.

3

Commande d'un système linéaire - Génération de signaux périodiques

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La fonction de transfert d'un système bouclé.
- La stabilité d'un système bouclé.
- Différents cas de chaîne directe.
- Les oscillateurs quasi sinusoïdaux.
- Les comparateurs à hystérésis.
- La génération d'un signal triangulaire.

Notations. Le schéma fonctionnel d'un système bouclé est celui de la figure 3.1 avec un signal $e(t)$ appliqué à l'entrée qui donne en sortie un signal $s(t)$. On appelle $r(t)$ le signal de retour et $\mathscr{E}(t)$ le signal d'erreur.

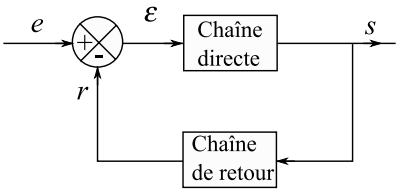


Figure 3.1

La chaîne directe a pour transmittance A et la chaîne retour B.

On utilisera la notation $p = j\omega$ dans la fonction de transfert où ω est une pulsation.

On définit la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$: $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ sous réserve que l'intégrale converge.

La tension à l'entrée inverseuse d'un amplificateur opérationnel sera notée V^- et celle à l'entrée non inverseuse V^+.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 38**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

1 Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système bouclé.

❒ **a.** $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$

❒ **b.** $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

❒ **c.** $H(p) = \dfrac{1}{A(p)} + B(p)$

❒ **d.** $H(p) = A(p)B(p)$

2 On suppose que la chaîne directe fluctue de dA sans que la chaîne de retour soit affectée. Déterminer la variation relative de la transmittance $\left|\dfrac{\mathrm{d}H}{H}\right|$.

❒ **a.** $\left|\dfrac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}A}{A}\right| \left|\dfrac{1}{1 + AB}\right|$

❒ **b.** $\left|\dfrac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}A}{A}\right|$

❒ **c.** $\left|\dfrac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}A}{A}\right| \left|\dfrac{1 + 2AB}{1 + AB}\right|$

❒ **d.** $\left|\dfrac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}A}{1 + AB}\right|$

3 On considère une chaîne directe à grand gain. Parmi les propositions suivantes, choisir la(les) réponse(s) juste(s).

❒ **a.** Les variations de la chaîne directe ont un effet important sur le système bouclé.

❒ **b.** Les variations de la chaîne directe ont peu d'effet sur le système bouclé.

❒ **c.** $H(p) \simeq A(p)$

❒ **d.** $H(p) \simeq \dfrac{1}{B(p)}$

4 On considère une chaîne directe à grand gain. On suppose qu'une perturbation P apparaît en sortie de la chaîne directe et s'ajoute à S.

❒ **a.** Cette perturbation est atténuée.

❒ **b.** $S = \dfrac{A}{1 + AB}E + \dfrac{P}{1 + AB}$

❒ **c.** Cette perturbation est amplifiée.

❒ **d.** $S = \dfrac{A}{1 + AB}E + AP$

Cet énoncé concerne les questions 5 à 7 :

On envisage dans cette série de questions une chaîne directe d'ordre 1 $A(p) = \dfrac{A_0}{1 + \tau_c p}$ et une chaîne de retour de transmittance B réelle avec $A_0 B > 0$.

5 Déterminer la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes.

❒ **a.** La largeur de bande passante du système bouclé est plus petite que celle de la chaîne directe.

❒ **b.** Le temps de réponse du système bouclé est plus grand que celui de la chaîne directe.

❒ **c.** Le gain en continu du système bouclé est plus petit que celui de la chaîne directe.

❒ **d.** Le produit gain-bande passante est conservé.

6 On reprend le montage amplificateur non inverseur réel (figure 3.2) pour lequel on veut identifier la chaîne directe et la chaîne de retour.

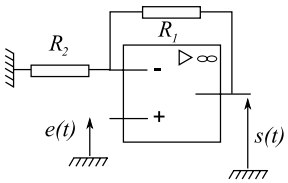
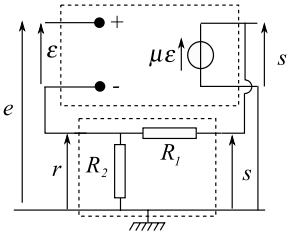


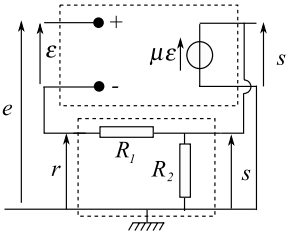
Figure 3.2

On écrit le gain différentiel de l'A.O. sous la forme $\mu = \dfrac{\mu_0}{1 + \tau_c p}$. On suppose que l'impédance d'entrée de l'A.O. est infinie et que son impédance de sortie est nulle. Déterminer quel montage est correct parmi les suivants.

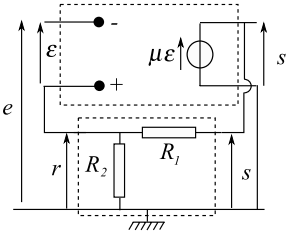
❒ **a.**



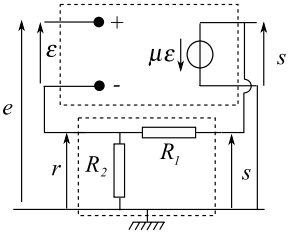
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



7 Déterminer les fonctions de transfert A et B des deux blocs du montage non inverseur.

❒ **a.** $A = \mu\mathscr{E}$

❒ **b.** $A = \mu$

❒ **c.** $B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$

❒ **d.** $B = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 On inverse les branchements sur les bornes du montage non inverseur. On posera $B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$. Déterminer l'équation différentielle du montage et conclure.

❒ **a.** $\dfrac{\tau_c}{1+\mu_0 B}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{\tau_c}{1+\mu_0 B}e$

❒ **b.** $\dfrac{\tau_c}{1-\mu_0 B}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{-\tau_c}{1-\mu_0 B}e$

❒ **c.** Le système devient instable.

❒ **d.** La tension de sortie est multipliée par « -1 ».

9 On étudie un premier comparateur à hystérésis, dit comparateur non inverseur. Déterminer les valeurs de la tension d'entrée provoquant le basculement de la tension de sortie entre les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ pour le montage représenté figure 3.3. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. On pose $\lambda = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

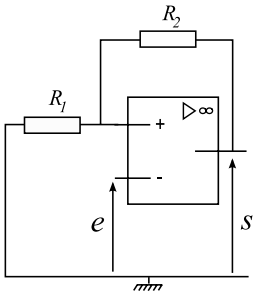


Figure 3.3

❒ **a.** Dans le sens montant la tension de basculement est $V_B = \lambda V_{sat}$.

❒ **b.** Dans le sens montant la tension de basculement est $V'_B = -\lambda V_{sat}$.

❒ **c.** Dans le sens descendant la tension de basculement est $V_B = \lambda V_{sat}$.

❒ **d.** Dans le sens descendant la tension de basculement est $V'_B = -\lambda V_{sat}$.

Cet énoncé concerne les questions 10 à 12 :
On étudie le circuit représenté figure 3.4.

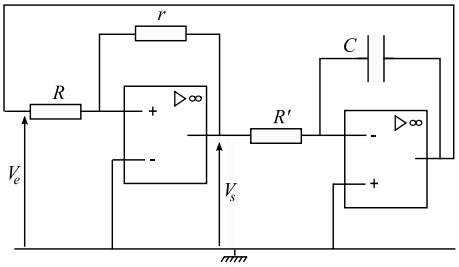


Figure 3.4

Les deux amplificateurs opérationnels sont idéaux.

10 Déterminer la valeur de la tension d'entrée provoquant le basculement de la tension de sortie du premier montage de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$.

❒ **a.** Dans le sens montant, la tension de basculement est $V_B = \frac{R}{r}V_{sat}$.

❒ **b.** Dans le sens montant, la tension de basculement est $V'_B = -\frac{R}{r}V_{sat}$.

❒ **c.** Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V_B = \frac{R}{r}V_{sat}$.

❒ **d.** Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V'_B = -\frac{R}{r}V_{sat}$.

11 Examiner si :

❒ **a.** la tension V_e est triangulaire

❒ **b.** la tension V_e est en créneau

❒ **c.** la tension V_s est triangulaire

❒ **d.** la tension V_s est en créneau

12 Déterminer la période de la tension V_e en fonction de R, C, r et R'.

❒ **a.** $T = \frac{4rR'C}{R}$

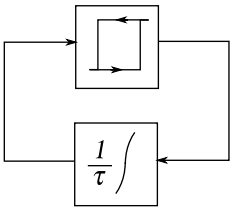
❒ **b.** $T = \frac{4RR'C}{r}$

❒ **c.** $T = \frac{2rR'C}{R}$

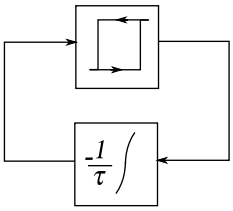
❒ **d.** $T = \frac{2RR'C}{r}$

13 Parmi ces quatre schémas de principe, déterminer celui(ceux) qui permet(tent) de réaliser un générateur de signaux créneaux.

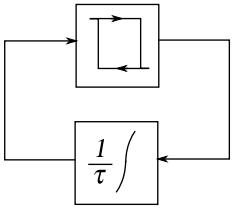
❒ **a.**



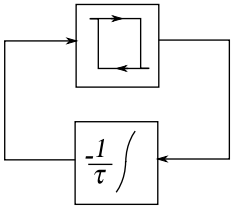
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



Cet énoncé concerne les questions 14 à 21 :
Nous allons étudier un oscillateur de type quasi sinusoïdal, constitué d'un filtre d'ordre 2 et d'un montage amplificateur utilisant un amplificateur opérationnel.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

14 On commence par étudier le filtre de Wien (figure 3.5) avec $R = 10\ \text{k}\Omega$ et $C = 47\ \text{nF}$.

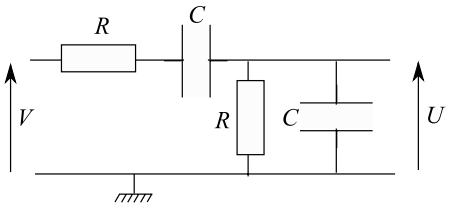


Figure 3.5

Calculer la fonction de transfert du circuit.

❒ **a.** $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

❒ **b.** $\underline{H} = \dfrac{1}{2 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

❒ **c.** $\underline{H} = \dfrac{1}{3 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

❒ **d.** $\underline{H} = \dfrac{1}{4 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

15 De quel type de filtre s'agit-il ?

❒ **a.** passe-bas

❒ **b.** passe-haut

❒ **c.** passe-bande

❒ **d.** coupe-bande

16 Mettre la fonction de transfert sous forme canonique puis déterminer le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

❒ **a.** $Q = \dfrac{1}{3}$

❒ **b.** $Q = 3$

❒ **c.** $\omega_0 = \dfrac{1}{3RC}$

❒ **d.** $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

17 À partir de cette question, on couple le filtre de Wien et un amplificateur non inverseur (figure 3.6). La tension de sortie du filtre de Wien est la tension d'entrée de l'amplificateur.

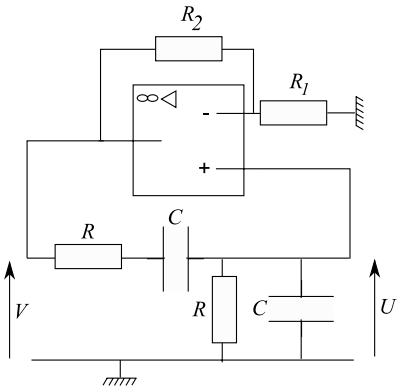


Figure 3.6

On suppose que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire et on ne tient pas compte de sa réponse fréquentielle. Cela revient à supposer que les fréquences d'étude sont très inférieures à la fréquence de coupure haute.

En utilisant la relation imposée à U et V par l'amplificateur non inverseur, et l'équation différentielle du filtre de Wien, établir les équations différentielles pour U et pour V.

❒ **a.** $\ddot{U} + \omega_0\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **b.** $\ddot{U} + \omega_0\left(3 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **c.** $\ddot{V} + \omega_0\left(2 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{V} + \omega_0^2 V = 0$

❒ **d.** $\ddot{V} + \omega_0\left(3 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{V} + \omega_0^2 V = 0$

18 Déterminer la valeur de $\rho = R_2/R_1$ correspondant au cas où U vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique (on notera cette valeur ρ_c). Quelle est alors la période T_0 de l'oscillation ?

❒ **a.** $\rho = 1,5$

❒ **b.** $\rho = 2$

❒ **c.** $T_0 = \dfrac{RC}{2\pi}$

❒ **d.** $T_0 = 2\pi RC$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

19 En fait, on ne peut en pratique obtenir exactement $\rho = \rho_c$. Pour observer des oscillations, on doit avoir un système instable, donc $\rho > \rho_C$. On suppose dans la suite que $\rho = 2,3$.

Établir les expressions générales de V et de U en fonction du temps. Déterminer le temps caractéristique τ de croissance des oscillations ainsi que la pseudo-période T.

❒ **a.** $\tau = \dfrac{16RC}{3}$

❒ **b.** $\tau = \dfrac{20RC}{3}$

❒ **c.** $T = \dfrac{4\pi RC}{\sqrt{3.91}}$

❒ **d.** $T = \dfrac{4\pi RC}{\sqrt{1.21}}$

20 Le moindre parasite conduit à la saturation. On se place dans le cas où V croît jusqu'à $+V_{sat}$. Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par U lorsque $V = +V_{sat}$.

❒ **a.** $\ddot{U} + 4\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **b.** $\ddot{U} + 3\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **c.** $\ddot{U} + 2\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **d.** $\ddot{U} + \omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

21 Pour que le système sorte de la saturation, il faut que U décroisse. Est-ce le cas ? Déterminer l'équation vérifiée par U (et par V) si le système peut sortir de la saturation .

❒ **a.** U s'amortit pour tout ρ.

❒ **b.** U ne s'amortit que si $\rho < 2\rho_c$.

❒ **c.** $\ddot{U} + \omega_0 (1 - \rho)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **d.** $\ddot{U} + \omega_0 (2 - \rho)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

Voir les corrigés du chapitre 3 page 38.

1 Réponse d'un circuit linéaire

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F On note a_k et b_ℓ des coefficients constants. Un système est linéaire si $e(t)$ et $s(t)$ sont reliées par une équation différentielle du type :

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{\ell=0}^{L} b_\ell \frac{\mathrm{d}^\ell e(t)}{\mathrm{d}t^\ell}$$

Il faut que $e(t)$ et $s(t)$ soient reliées par **une équation différentielle linéaire à coefficients constants**, ce qui est le cas dans la proposition ; cela inclut le cas particulier des fonctions affines.

2 ❒ V ☒ F Le régime transitoire est solution de l'équation :

$$\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell \frac{\mathrm{d}^\ell e(t)}{\mathrm{d}t^\ell} = 0$$

On cherche une solution pour la sortie $s(t)$, l'entrée $e(t)$ étant imposée. Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, la solution est la somme de deux termes $s(t) = s_h(t) + s_p(t)$ où le régime transitoire $s_h(t)$ est solution de l'équation homogène $\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = 0$. Le terme $s_p(t)$ est une solution particulière de l'équation totale. Si le système ne sature pas, la forme de $s_p(t)$ est imposée en général par la forme du signal d'entrée : on parle alors de régime forcé.

3 ☒ V ❒ F Un système est stable si la solution transitoire tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Un système est stable si le signal de sortie ne diverge pas, donc nécessairement, le signal transitoire ne doit pas diverger. En fait si un système est instable, le signal atteint la saturation.

4 ❒ V ☒ F Pour un système stable, une fois passé le régime transitoire, si le signal d'entrée est triangulaire, le signal de sortie l'est aussi.

Après le régime transitoire, les deux seuls cas où la forme du signal est conservée sont le régime sinusoïdal et le régime continu. Si $e(t)$ est sinusoïdale, alors $s_h(t)$ est aussi sinusoïdale de même fréquence : on parle de régime sinusoïdal forcé par le signal d'entrée. Si $e(t) = cte$, alors $s_h(t)$ est aussi constante voire nulle. Dans le cas du triangle, il faut décomposer le signal en somme de signaux sinusoïdaux (voir chapitre ultérieur).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

5 ❒ V ☒ F Le régime libre correspond à la solution de

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = E$$

Le régime libre correspond à la solution de l'équation homogène $s_h(t)$ soit dans le cas unique $E = 0$, sinon il s'agit d'un régime forcé continu.

6 ❒ V ☒ F La réponse indicielle est la réponse du système à un échelon.

Il s'agit bien de la réponse à un échelon mais de valeur unité $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = 1$ pour $t \geq 0$. Ainsi grâce à la linéarité, si $s_i(t)$ est la réponse indicielle, la réponse à un échelon de hauteur E sera $s(t) = Es_i(t)$.

QCM

7 Un système linéaire donne d'un signal d'entrée sinusoïdal $e_1(t)$, un signal de sortie s_1. Ce même système donne $s_2(t)$ pour un signal d'entrée $e_2(t)$ (redressé monoalternance de $e_1(t)$). Déterminer le signal de sortie correspondant au redressement bialternance $e_3(t) = |e_1(t)|$.

❒ **a.** $s_3 = s_1 + s_2$

❒ **b.** $s_3 = -s_1 + s_2$

☒ **c.** $s_3 = -s_1 + 2s_2$

❒ **d.** $s_3 = 2s_1 - s_2$

Pour un système linéaire, la combinaison linéaire $\lambda e_1 + \mu e_2$ à l'entrée donne en sortie $\lambda s_1 + \mu s_2$. Or :

- Si $e_1(t) > 0$ alors $e_2 = e_1$ et $e_3 = e_1$.
- Si $e_1(t) < 0$ alors $e_2 = 0$ et $e_3 = -e_1$.

On en déduit : $e_3 = 2e_2 - e_1$ donc $s_3 = 2s_2 - s_1$.

8 Les coefficients a_k et b_ℓ sont ceux définis précédemment. Un système linéaire est stable si :

☒ **a.** Les racines de l'équation $\sum_{k=0}^{K} a_k r^k = 0$ ont une partie réelle négative.

❒ **b.** Les racines de l'équation $\sum_{k=0}^{K} a_k r^k = 0$ ont une partie réelle positive.

❒ **c.** Les racines de l'équation $\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell r^\ell = 0$ ont une partie réelle négative.

❒ **d.** Les racines de l'équation $\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell r^\ell = 0$ ont une partie réelle positive.

Le signal s_h du régime transitoire est solution de $\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = 0$. On cherche des fonctions exponentielles du type $s_h = Ae^{rt}$ où r est racine de l'équation caractéristique $\sum_{k=0}^{K} a_k r^k = 0$. Pour que ces fonctions ne divergent pas en $t \to +\infty$, il faut que les parties réelles des solutions r soient négatives.

Pour les systèmes d'ordre 1 et 2, on peut montrer que c'est le cas si les coefficients de l'équation caractéristique sont tous de même signe. Cette propriété importante est à retenir.

9 Pour le système régi par l'équation différentielle définie à la question 1, les fonctions de transfert en sinusoïdal $\underline{H}(j\omega)$ et en signal quelconque $H(p)$ sont :

❒ **a.** $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k}{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell (j\omega)^\ell}$

☒ **b.** $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell (j\omega)^\ell}{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k}$

❒ **c.** $H(p) = \dfrac{\sum_{k=0}^{K} a_k p^k}{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell p^\ell}$

☒ **d.** $H(p) = \dfrac{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^{K} a_k p^k}$

Pour déterminer $\underline{H}(j\omega)$, on cherche les solutions forcées pour une entrée sinusoïdale $e(t) = E\cos\omega t$ donnant une sortie sinusoïdale de même pulsation $s(t) = S\cos(\omega t + \phi)$. On utilise les représentations complexes associées $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$ et $\underline{s}(t) = S\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi)}$. Dans ce cas on a $\frac{\mathrm{d}^\ell \underline{e}(t)}{\mathrm{d}t^\ell} = (j\omega)^\ell \underline{e}(t)$ et $\frac{\mathrm{d}^k \underline{s}(t)}{\mathrm{d}t^k} = (j\omega)^k \underline{s}(t)$. L'équation différentielle peut alors s'écrire :

$$\left(\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k\right)\underline{s} = \left(\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell (j\omega)^\ell\right)\underline{e} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \underline{H}(j\omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell (j\omega)^\ell}{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k}$$

On considère deux signaux quelconques $e(t)$ et $s(t)$ de transformées de Laplace respectives $E(p)$ et $S(p)$. L'application de la transformée de Laplace à la dérivée $\frac{\mathrm{d}^k \underline{s}(t)}{\mathrm{d}t^k}$ a pour résultat $p^k S(p)$ si le système est au repos initialement. On a un résultat équivalent pour $e(t)$. La transformée de Laplace appliquée à l'équation différentielle donne le résultat :

$$\left(\sum_{k=0}^{K} a_k p^k\right) S(p) = \left(\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell p^\ell\right) E(p) \Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{\ell=0}^{L} b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^{K} a_k p^k}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 On s'intéresse au schéma de la figure (1.2). Déterminer la fonction de transfert puis l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.

❒ **a.** $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{jRC\omega}{-(RC\omega)^2 + 2jRC\omega}$

❒ **b.** $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{jRC\omega}{-1 - (RC\omega)^2 + 2jRC\omega}$

☒ **c.** $(RC)^2 \dfrac{d^2\underline{s}}{dt^2} + 3RC\dfrac{d\underline{s}}{dt} + \underline{s} = RC\dfrac{d\underline{e}}{dt}$

❒ **d.** $-(RC)^2 \dfrac{d^2\underline{s}}{dt^2} + 3RC\dfrac{d\underline{s}}{dt} + \underline{s} = RC\dfrac{d\underline{e}}{dt}$

On applique le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V_A} = \frac{jC\omega\underline{e} + \dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{2}{R} + jC\omega} = \frac{jRC\omega\underline{e} + \underline{s}}{2 + jRC\omega}$$

D'autre part, on a un diviseur de tension entre $\underline{V_A}$ et $\underline{s}$: $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + R}\underline{V_A} = \dfrac{1}{1 + \underline{Y_C}R}\underline{V_A}$ soit $\underline{s} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}\underline{V_A}$.

On élimine $\underline{V_A}$ entre les deux expressions, ce qui donne :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}$$

Aucune réponse ne convient pour $\underline{H}$.

Pour déterminer l'équation différentielle, on effectue le produit en croix puis on remplace $j\omega$ par $\dfrac{d}{dt}$. Attention au signe «-» de $-\omega^2$, il faut se souvenir qu'il vient de j^2. On obtient :

$$\underline{s} - (RC\omega)^2\underline{s} + 3jRC\omega\underline{s} = jRC\omega\underline{e} \Rightarrow (RC)^2\frac{d^2\underline{s}}{dt^2} + 3RC\frac{d\underline{s}}{dt} + \underline{s} = RC\frac{d\underline{e}}{dt}$$

Cet énoncé concerne les questions 11 à 15 :
Cette série de questions étudie les principales fonctions linéaires réalisées avec des montages à amplificateurs opérationnels. Dans tous les montages, les amplificateurs seront considérés comme idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

11 On considère les montages amplificateurs inverseur (figure 1.3) et non inverseur (figure 1.4) de fonctions de transfert respectives H_1 et H_2. Exprimer H_1 et H_2.

❒ **a.** $H_1 = -\dfrac{R_1}{R_2}$

☒ **b.** $H_1 = -\dfrac{R_2}{R_1}$

☒ **c.** $H_2 = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$

❒ **d.** $H_2 = \dfrac{R_2}{R_1}$

Pour l'amplificateur inverseur, on applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $V^- = \dfrac{\dfrac{e}{R_1} + \dfrac{s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$. Pour un A.O. idéal en fonctionnement linéaire, on a $V^+ = V^-$ donc ici $V^- = 0$ soit finalement $H_1 = \dfrac{s}{e} = -\dfrac{R_2}{R_1}$.

Pour l'amplificateur non inverseur, on applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $V^- = \dfrac{\dfrac{0}{R_1} + \dfrac{s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$. Avec $V^- = V^+ = e$ soit finalement $H_1 = \dfrac{s}{e} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$.

12 On considère les montages intégrateur (figure 1.5) et pseudo-intégrateur (figure 1.6) de fonctions de transfert respectives $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$. Exprimer $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$.

☒ **a.** $\underline{H_1} = -\dfrac{1}{jRC\omega}$

❒ **b.** $\underline{H_1} = -\dfrac{R}{jC\omega}$

❒ **c.** $\underline{H_2} = -\dfrac{R}{R_0 + jC\omega}$

☒ **d.** $\underline{H_2} = -\dfrac{R_0}{R}\dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

Pour le montage intégrateur, on applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $V^- = \dfrac{\dfrac{\underline{e}}{R} + jC\omega\underline{s}}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}$. Pour un A.O. idéal en fonctionnement linéaire, on a $V^+ = V^-$ donc ici $V^- = 0$ soit finalement $\underline{H_1} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\dfrac{1}{jRC\omega}$. Ce montage est intégrateur quelle que soit la fréquence mais expérimentalement, il ne fonctionne pas seul en raison de la charge du condensateur par les courants de polarisation pour les plus anciens A.O. ou par la tension de décalage d'entrée.

Pour le montage pseudo-intégrateur, on applique de nouveau le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $V^- = \dfrac{\dfrac{\underline{e}}{R} + \underline{Y_{eq}}\underline{s}}{\dfrac{1}{R} + \underline{Y_{eq}}}$ avec $\underline{Y_{eq}} = jC\omega + \dfrac{1}{R_0}$ l'admittance équivalente au condensateur en parallèle avec la résistance R_0. Pour un A.O. idéal en fonctionnement linéaire, on a $V^+ = V^-$ donc ici $V^- = 0$ soit finalement :

$$\underline{H_2} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-\dfrac{R_0}{R}}{1 + jR_0C\omega}$$

Ce montage est un passe-bas du premier ordre, intégrateur pour $\omega \geq \omega_c\left(= \dfrac{1}{R_0C}\right)$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

13 On considère les montages dérivateur (figure 1.7) et pseudo-dérivateur (figure 1.8) de fonctions de transfert respectives $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$. Exprimer $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$.

☒ **a.** $\underline{H_1} = -jRC\omega$

❒ **b.** $\underline{H_1} = -\dfrac{jC\omega}{R}$

❒ **c.** $\underline{H_2} = -\dfrac{R_0}{R}(1 + jRC\omega)$

☒ **d.** $\underline{H_2} = -\dfrac{jRC\omega}{1 + jR_0C\omega}$

Pour le montage dérivateur, on applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $\underline{V^-} = \dfrac{\dfrac{\underline{s}}{R} + jC\omega\underline{e}}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}$. Pour un A.O. idéal en fonctionnement linéaire, on a $V^+ = V^-$ donc ici $V^- = 0$ soit finalement $\underline{H_1} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = -jRC\omega$. Ce montage est dérivateur quelle que soit la fréquence mais expérimentalement, il fonctionne mal car il est très sensible aux parasites hautes fréquences.

Pour le montage pseudo-dérivateur, on applique de nouveau le théorème de Millman à l'entrée inverseuse : $\underline{V^-} = \dfrac{\dfrac{\underline{e}}{\underline{Z_{eq}}} + \dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} + \dfrac{1}{R}}$ avec $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{1}{jC\omega} + R_0$ l'impédance équivalente au condensateur en série avec la résistance R_0. Pour un A.O. idéal en fonctionnement linéaire, on a $V^+ = V^-$ donc ici $V^- = 0$ soit finalement :

$$\underline{H_2} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-jRC\omega}{1 + jR_0C\omega}$$

Ce montage est un passe-haut du premier ordre, dérivateur pour $\omega \leq \omega_c\left(= \dfrac{1}{R_0C}\right)$.

14 On considère le montage déphaseur de la figure 1.9. Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

❒ **a.** $\underline{H} = \dfrac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}$

❒ **b.** $\underline{H} = 1$

❒ **c.** $\underline{H} = -1$

☒ **d.** $\underline{H} = \dfrac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

On applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse et un diviseur de tension à l'entrée non inverseuse :

$$\underline{V^-} = \frac{\dfrac{\underline{e}}{R} + \dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R}} \quad \text{et} \quad \underline{V^+} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}$$

En fonctionnement linaire, on égale ces deux tensions ce qui donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Le module de la fonction de transfert est 1 donc indépendant la pulsation. En revanche son argument dépend de ω d'où le nom de montage déphaseur.

15 On considère les montages sommateur (figure 1.10) et soustracteur (figure 1.11) de signaux de sortie respectifs $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Exprimer s_1 et s_2.

❒ **a.** $s_1 = -\dfrac{R}{R_1}e_1 + \dfrac{R}{R_2}e_2$

☒ **b.** $s_1 = -\dfrac{R}{R_1}e_1 - \dfrac{R}{R_2}e_2$

☒ **c.** $s_2 = \dfrac{R_4(R_1+R_3)}{R_1(R_2+R_4)}e_2 - \dfrac{R_3}{R_1}e_1$

❒ **d.** $s_2 = \dfrac{R_3(R_1+R_4)}{R_1(R_2+R_3)}e_2 - \dfrac{R_4}{R_1}e_1$

Pour le montage sommateur, on applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse :

$$V^- = \frac{\dfrac{e_1}{R_1} + \dfrac{e_2}{R_2} + \dfrac{s_1}{R}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R}}$$

Pour un A.O. idéal en fonctionnement linéaire, on a $V^+ = V^-$ donc ici $V^- = 0$ soit finalement $s_1 = -\dfrac{R}{R_1}e_1 - \dfrac{R}{R_2}e_2$. Dans le cas où les trois résistances sont semblables, alors $s_1 = -(e_1 + e_2)$ est l'opposé de la somme des tensions d'entrée. On appelle ce montage sommateur inverseur.

Pour le montage soustracteur, on applique de nouveau le théorème de Millman à l'entrée inverseuse et un diviseur de tension à l'entrée non inverseuse :

$$V^- = \frac{\dfrac{e_1}{R_1} + \dfrac{s_2}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}} \quad \text{et} \quad V^+ = \frac{R_4}{R_2+R_4}e_2$$

Puisque le fonctionnement est linéaire, $V^+ = V^-$ donc on égale les deux expressions. On obtient après calculs :

$$s_2 = \frac{R_4(R_1+R_3)}{R_1(R_2+R_4)}e_2 - \frac{R_3}{R_1}e_1$$

Dans le cas où les résistances sont égales, on obtient $s_2 = e_2 - e_1$, d'où le nom de montage soustracteur.

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :
On s'intéresse dans cette série de questions à l'amplificateur opérationnel réel (noté A.O.). En boucle ouverte, le gain différentiel μ tel que $\underline{s} = \underline{\mu}(\underline{V}^+ - \underline{V}^-)$ est une fonction passe-bas du premier ordre : $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

16 Déterminer la(les) réponse(s) juste(s) parmi les propositions suivantes.

☒ **a.** Une tension $V^+ - V^- \simeq 150\,\mu$V suffit à faire saturer l'A.O.

❒ **b.** $\mu_0 \simeq 100$

☒ **c.** $f_c \simeq 100$ Hz

❒ **d.** $f_c \simeq 100$ kHz

L'amplificateur opérationnel courant est dans sa zone de fréquence d'utilisation un circuit passe-bas d'amplification statique (à $f = 0$ Hz) de l'ordre de 10^5 voire même supérieure à cette valeur. Pour un A.O. qui sature en sortie à 15 V, on s'aperçoit qu'il suffit d'une tension de $\dfrac{15}{10^5} = 150\,\mu$V pour faire saturer l'A.O. en boucle ouverte, ce qui est généralement le cas.

La fréquence de coupure basse f_c (à retenir) est effectivement très basse : un A.O. s'utilise avec un bouclage pour pouvoir fonctionner en linéaire.

17 Dans le montage amplificateur non inverseur (figure 1.4), on tient compte maintenant de la réponse de l'A.O. réel. En mettant la fonction de transfert sous la forme $\underline{H} = \dfrac{H'_0}{1 + j\dfrac{f}{f'_c}}$, déterminer H'_0 et f'_c . On pose $\lambda = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

❒ **a.** $H'_0 = \mu_0$

☒ **b.** $H'_0 = \dfrac{\mu_0}{1 + \lambda\mu_0}$

❒ **c.** $f'_c = f_c$

☒ **d.** $f'_c = f_c(1 + \lambda\mu_0)$

On ne peut plus utiliser $V^+ = V^-$ en régime linéaire, mais les expressions de $V^+ = \underline{e}$ et $V^- = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\underline{s} = \lambda\underline{s}$ calculées précédemment sont encore valables. On a alors :

$$\underline{s} = \underline{\mu}(\underline{V}^+ - \underline{V}^-) = \underline{\mu}(\underline{e} - \lambda\underline{s}) \Rightarrow \underline{s} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \lambda\underline{\mu}}\underline{e}$$

En développant $\underline{\mu}$ dans l'expression précédente, on obtient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}\,\frac{1}{1 + \dfrac{\lambda\mu_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}} = \frac{\mu_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c} + \lambda\mu_0} = \frac{\mu_0}{1 + \lambda\mu_0}\,\frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f'_c}} = \frac{H'_0}{1 + j\dfrac{f}{f'_c}}$$

avec $f'_c = f_c(1 + \lambda\mu_0)$.

On peut remarquer qu'on obtient une fonction passe-bas du premier ordre. Le fait d'effectuer un bouclage a fortement augmenté la fréquence de coupure : pour un facteur $R_2/R_1 = 100$, on a $\lambda \simeq 10^{-2}$ et $f'_c \simeq 10$ kHz. En revanche le gain en continu diminue puisqu'il vaut $H'_0 \simeq 100$.

On remarquera aussi que le gain en basse fréquence est le même que celui du montage idéal. Pour $f \ll f'_c$, c'est comme si l'A.O. était idéal.

18 On reprend le montage déphaseur (figure 1.9) en tenant compte de la réponse de l'amplificateur. On pose $\tau = RC$. Déterminer la relation entre $\underline{e}$ et $\underline{s}$.

☒ **a.** $\underline{s} = \dfrac{\underline{\mu}}{2+\underline{\mu}}\dfrac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\underline{e}$

❒ **b.** $\underline{s} = \dfrac{-\underline{\mu}}{2-\underline{\mu}}\dfrac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\underline{e}$

❒ **c.** $\underline{s} = \dfrac{\underline{\mu}}{1+\underline{\mu}}\dfrac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\underline{e}$

❒ **d.** $\underline{s} = \dfrac{\underline{\mu}}{2-\underline{\mu}}\dfrac{3+j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\underline{e}$

On utilise les expressions des tensions $\underline{V}^-$ et $\underline{V}^+$ toujours valables :

$$\underline{V}^- = \frac{\dfrac{\underline{e}}{R}+\dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}} = \frac{\underline{e}+\underline{s}}{2} \quad \text{et} \quad \underline{V}^+ = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{e} = \frac{\underline{e}}{1+j\tau\omega}$$

On en déduit :

$$\underline{s} = \underline{\mu}(V^+ - V^-) = \underline{\mu}\left(\frac{\underline{e}+\underline{s}}{2} - \frac{\underline{e}}{1+jRC\omega}\right) \Rightarrow \underline{s} = \frac{\underline{\mu}}{2+\underline{\mu}}\frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\underline{e}$$

19 On écrit $\underline{\mu}$ sous la forme $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1+j\omega\tau_c}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ et la réponse à un échelon de tension de hauteur E. On posera $\tau'_c = \dfrac{2}{\mu_0+2}\tau_c$.

☒ **a.** $\tau\tau'_c\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + (\tau+\tau'_c)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{\mu_0}{2+\mu_0}\left(e - \tau\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **b.** $\tau\tau'_c\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + (\tau+\tau'_c)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{\mu_0}{2+\mu_0}\left(e + \tau\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **c.** $s(t) = A\exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right) + B\exp\left(\dfrac{t}{\tau'_c}\right) + \dfrac{\mu_0}{2+\mu_0}E$

☒ **d.** $s(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + B\exp\left(-\dfrac{t}{\tau'_c}\right) + \dfrac{\mu_0}{2+\mu_0}E$

On développe l'expression précédente reliant $\underline{e}$ et $\underline{s}$:

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{1+j\omega\tau_c}\,\frac{1}{2+\dfrac{\mu_0}{1+j\omega\tau_c}}\,\frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau} = \frac{\mu_0}{2+2j\omega\tau_c+\mu_0}\,\frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

On trouve finalement :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{2+\mu_0}\,\frac{1}{1+j\omega\tau'_c}\,\frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau} = \frac{\mu_0}{2+\mu_0}\,\frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega(\tau+\tau'_c)+(j\omega)^2\tau\tau'_c}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

L'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ est donc :

$$\tau\tau'_c\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + (\tau + \tau'_c)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \frac{\mu_0}{2+\mu_0}\left(e - \tau\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)$$

Pour un échelon de tension, on obtient l'équation suivante en divisant par $\tau\tau'_c$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'_c}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\tau'_c}\,s = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\tau'_c}\frac{\mu_0}{2+\mu_0}E$$

Les racines de l'équation caractéristique de la solution homogène sont $-\dfrac{1}{\tau}$ et $-\dfrac{1}{\tau'_c}$. La solution particulière est $\dfrac{\mu_0}{2+\mu_0}E$, donc la solution générale est :

$$s(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B\exp\left(-\frac{t}{\tau'_c}\right) + \frac{\mu_0}{2+\mu_0}E$$

Si $\tau'_c \ll \tau$, ce qui est le cas en général, le temps de réponse de l'amplificateur opérationnel peut être négligé.

2 Décomposition de Fourier - Filtrage d'un signal

Vrai/Faux

1 ☒ V ☐ F La composante continue de $s(t)$ est A_0.

Si on calcule la valeur moyenne de $s(t)$ sur une période T du signal, tous les termes en cosinus et sinus, dont la période est T/k, sont nuls. En effet on détermine leur valeur moyenne sur k fois leur période, donc sur un nombre entier de périodes. A_0 représente bien la valeur moyenne du signal, qui est aussi la composante continue.

2 ☒ V ☐ F Si $s(t)$ est pair, tous les coefficients B_k sont nuls.

Si s(t) est pair, $s(-t) = s(t)$, ce qui donne :

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\cos(k\omega t) - \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\sin(k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\sin(k\omega t)$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} B_k\sin(k\omega t) = 0$. Pour que cette condition soit vérifiée quel que soit t, il faut que tous les coefficients B_k soient nuls.

Il ne reste donc dans la décomposition que $s(t) = A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_k\cos(k\omega t)$.

3 ☐ V ☒ F Plus un signal est proche d'une sinusoïde, plus son spectre est riche en harmoniques.

Un signal sinusoïdal pur ne comporte qu'un seul terme dans sa décomposition : $s(t) = C\sin(\omega t + \phi)$, il n'a pas d'harmoniques. Si un signal est proche d'une sinusoïde, son spectre est pauvre en harmoniques.

4 ❒ V ☒ F Un signal créneau a plus d'harmoniques qu'un signal triangle.

Tous les deux ont une infinité d'harmoniques, tous les termes d'ordre impair. Mais leur amplitude décroît plus vite pour un signal triangulaire, plus proche d'une sinusoïde qu'un signal créneau.

5 ❒ V ☒ F L'amplitude des harmoniques d'un signal triangulaire décroît comme $\frac{1}{k}$.

Elle décroît comme $\frac{1}{k^2}$.

6 ❒ V ☒ F Le résultat du filtrage d'un signal créneau par un filtre passe-bande est aussi un créneau.

Un filtre passe-bande a pour effet d'atténuer les harmoniques dont la fréquence est éloignée de la fréquence de résonance : la forme du signal de sortie est par conséquent différente de celle du signal d'entrée. Si le facteur de qualité est grand et la fréquence propre du filtre voisine de la fréquence du créneau, le signal de sortie sera proche d'une sinusoïde.

7 ❒ V ☒ F Un filtre linéaire peut transformer un signal sinusoïdal en signal triangulaire.

Un filtre linéaire peut modifier l'amplitude d'harmoniques existant déjà dans un signal, mais pas en faire apparaître d'autres : il ne peut donc pas transformer un signal pauvre en harmoniques (sinusoïde) en signal riche (triangle). Par contre, un filtre passe-bande bien réglé pourrait transformer un signal triangulaire en signal sinusoïdal.

8 ☒ V ❒ F Un filtre passe-bas du deuxième ordre ne peut être intégrateur.

On reconnaît un intégrateur grâce à une pente de −20 dB/dec dans le tracé du diagramme de Bode pour le gain. Les asymptotes d'un filtre passe-bas du deuxième ordre ont pour pentes 0 dB/dec à basse fréquence et −40 dB/dec à haute fréquence. Il ne peut pas être intégrateur.

9 ☒ V ❒ F Un filtre passe-bande du deuxième ordre peut être intégrateur ou dérivateur.

Le diagramme de Bode pour le gain d'un filtre passe-bande du deuxième ordre comporte une asymptote de pente −20 dB/dec et une asymptote de pente +20 dB/dec. Il est intégrateur aux basses fréquences (par rapport à sa fréquence propre) et dérivateur aux hautes fréquences.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 ☒ V ❒ F Le signal R.M.S. d'un signal s est tel que $S_{RMS}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_k C_k^2$

Par définition, $S_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(A_0 + \sum C_k \cos(k\omega t + \phi_k)\right)^2 dt.$

L'intégrale peut s'écrire comme la somme des quatre intégrales suivantes en développant le carré :

$$\int_0^T A_0^2 \mathrm{d}t = A_0^2 T$$

$$\int_0^T 2A_0 \sum_k C_k \cos(k\omega t + \phi_k)\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^T \sum_k C_k^2 \cos^2(k\omega t + \phi_k)\mathrm{d}t = \frac{C_k^2 T}{2}$$

$$\int_0^T \sum_{k\neq p} C_k C_p \cos(k\omega t + \phi_k)\cos(p\omega t + \phi_p)\mathrm{d}t = 0$$

La deuxième intégrale est nulle car la valeur moyenne d'un cosinus sur un nombre entier de fois sa période est nulle. Pour calculer la troisième, on linéarise $\cos^2(k\omega t + \varphi_k)$ en $\frac{\cos[2(k\omega t + \phi_k)] + 1}{2}$. Dans ce calcul, il apparaît à nouveau la valeur moyenne d'un cosinus sur un nombre entier de fois sa période, et donc il ne reste que le terme $\frac{1}{2}\sum_k C_k^2$. Enfin pour la dernière, on linéarise le produit de cosinus en :

$$\frac{1}{2}\cos\left((k+p)\omega t + \phi_k + \phi_p\right) + \frac{1}{2}\cos\left((k-p)\omega t + \phi_k - \phi_p\right)$$

Étant donné que $p \neq k$, les valeurs moyennes de ces deux termes sont nulles.

QCM

11 On s'intéresse au signal (figure 2.1). Son amplitude est a et sa période T. Déterminer sa décomposition de Fourier.

❒ **a.** $s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\cos(2p+1)\omega t}{2p+1}$

☒ **b.** $s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$

❒ **c.** $s(t) = \frac{2a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$

❒ **d.** $s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(p)\omega t}{p}$

$s(t)$ étant un signal impair, il se décompose en une somme de sinus. Le coefficient B_k se calcule par la relation $B_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\ \sin(k\omega t)\ \mathrm{d}t$.

Ici, $B_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} a\sin(k\omega t)\ \mathrm{d}t - \dfrac{2}{T}\int_{T/2}^{T} a\sin(k\omega t)\ \mathrm{d}t$. L'intégration donne :

$$B_k = -\frac{2a}{T}\left[\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^{T/2} + \frac{2a}{T}\left[\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\right]_{T/2}^{T}$$

soit

$$B_k = \frac{-a}{\pi k}\left(\cos(k\pi) - 1 - \cos(2k\pi) + \cos(k\pi)\right) = \frac{2a}{\pi k}\left(1 - \cos(k\pi)\right) = \frac{2a}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)$$

Soit k est pair et alors $B_k = 0$;

Soit k est impair et alors $B_k = B_{2p+1} = \dfrac{4a}{\pi(2p+1)}$.

12 On s'intéresse au signal (figure 2.2). Son amplitude est a et sa période T. Déterminer sa décomposition de Fourier.

❒ **a.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)}$

❒ **b.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$

❒ **c.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)\omega t}{p^2}$

☒ **d.** $s(t) = \dfrac{8a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$

$s(t)$ étant un signal pair, il se décompose en une somme de cosinus.

La valeur moyenne du signal est nulle, donc $A_0 = 0$.

Le coefficient A_k se calcule par la relation $A_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\ \cos(k\omega t)\ \mathrm{d}t$ ou encore $A_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\ \cos(k\omega t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{4}{T}\int_0^{T/2} s(t)\ \cos(k\omega t)\ \mathrm{d}t$ avec entre $t = 0$ et $t = T/2$, $s(t) = a - 4at/T$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On intègre par parties : $A_k = \frac{4}{T}\left(\left[\frac{a}{k\omega}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\sin(k\omega t)\right]_0^{T/2} + \frac{4a}{Tk\omega}\int_0^{T/2}\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t\right)$ donc $A_k = \frac{4}{T}\left(-\frac{a}{k\omega}\sin\left(k\omega\frac{T}{2}\right) - \frac{4a}{Tk\omega}\left[\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^{T/2}\right) = \frac{16a}{(Tk\omega)^2}(1-\cos(k\pi))$. Si k est pair, $A_k = 0$ et si k est impair, $A_k = A_{2p+1} = \frac{8a}{(2p+1)^2\pi^2}$.

Cet énoncé concerne les questions 13 à 17 :
Un signal S_e (figure 2.3) est filtré par cinq filtres d'ordre 2 qu'on demande de retrouver par une analyse qualitative des signaux de sortie.

13 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.4).

☒ **a.** Filtre passe-bande à large bande.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-bas.

❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

Le signal de sortie a une composante continue beaucoup plus faible que le signal d'entrée, il ne peut pas s'agir d'un filtre passe-bas. Sa période est celle du signal d'entrée, mais il y a beaucoup d'harmoniques puisqu'il est très éloigné d'un signal sinusoïdal. Le filtre est un passe-bande à large bande.

14 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.5).

❒ **a.** Filtre passe-bande à large bande.

☒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-haut.

❒ **d.** Filtre passe-bas.

Ici encore il ne peut pas s'agir d'un filtre passe-bas, le continu ayant quasiment disparu. La période du signal de sortie est celle du signal d'entrée, et il est proche d'un signal sinusoïdal. Le filtre est un passe-bande à bande étroite.

15 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.6).

☒ **a.** Filtre passe-bas.

❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.

❒ **c.** Filtre passe-haut.

❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

Le signal de sortie a une composante continue importante, le filtre laisse donc passer les basses fréquences ; par contre les variations rapides ont été lissées. C'est un passe-bas.

16 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.7).

- ❒ **a.** Filtre passe-bas.
- ❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.
- ☒ **c.** Filtre passe-haut.
- ❒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

La composante continue a été éliminée par le filtre, contrairement aux variations rapides. Il s'agit d'un passe-haut.

17 Déterminer le filtre correspondant au signal de sortie (figure 2.8).

- ❒ **a.** Filtre passe-bas.
- ❒ **b.** Filtre passe-bande à bande étroite.
- ❒ **c.** Filtre passe-haut.
- ☒ **d.** Filtre réjecteur de bande.

Ce dernier filtre a laissé passer aussi bien le continu que les variations rapides. Qualitativement, son effet semble complémentaire de celui du passe-bande. C'est donc un réjecteur de bande.

18 On considère un signal électrique $e(t) = E_0 + \sum_k E_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$ à l'entrée d'un filtre linéaire de fonction de transfert $\underline{H(j\omega)} = H(\omega)\mathrm{e}^{j\phi(\omega)}$. Quelle est l'expression du signal de sortie $s(t)$?

- ❒ **a.** $s(t) = H(\omega)e(t)$
- ☒ **b.** $s(t) = H(0)E_0 + \sum_k H(k\omega)E_k \cos(k\omega t + \alpha_k + \phi(k\omega))$
- ❒ **c.** $s(t) = H(0)E_0 + \sum_k H(\omega)E_k \cos(k\omega t + \alpha_k + \phi(\omega))$
- ❒ **d.** $s(t) = H(0)E_0 + \sum_k H(k\omega)E_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$

Si on envisage le signal $s(t)$ comme généré par la mise en série de sources de tension de fréquences différentes, on peut appliquer le théorème de superposition pour déterminer le signal de sortie : il est égal à la somme des signaux obtenus lorsque, successivement et isolément, on garde chaque source de tension sinusoïdale. Par exemple, pour la composante $e_k(t) = E_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$, en sortie $s_k(t) = S_k \cos(k\omega t + \beta_k)$ avec $\underline{s_k} = \underline{H}(k\omega)\underline{e_k} = H(k\omega)e^{j\phi(k\omega)}\underline{e_k}$ donc $S_k = H(k\omega)E_k$ et $\beta_k = \alpha_k + \phi(k\omega)$.

La composante comtinue du signal d'entrée est à multiplier par le gain statique $H(0)$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 19 à 20 :

On envoie un signal d'entrée créneau pair $e(t) = \dfrac{4a}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\dfrac{\cos(2p+1)\omega_1 t}{2p+1}$ de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ à l'entrée d'un filtre passe-bande $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$. On choisit le filtre tel que $\omega_0 = \omega_1$ et $Q = 10$.

19 Déterminer l'amplitude du terme fondamental S_1 du signal de sortie $s(t)$.

❒ **a.** $S_1 = 0$

❒ **b.** $S_1 = \dfrac{1}{1 + j10\left(\dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega_1}{\omega}\right)}\dfrac{4a}{\pi}$

☒ **c.** $S_1 = \dfrac{4a}{\pi}$

❒ **d.** $S_1 = 1$

Comme expliqué à la question précédente, $S_1 = H(\omega)E_1$ avec $E_1 = \dfrac{4a}{\pi}$ et $H(\omega) = 1$.

20 Déterminer l'amplitude du premier harmonique non nul du signal de sortie $s(t)$.

❒ **a.** 0

❒ **b.** $\dfrac{3}{3 + j80}\dfrac{4a}{\pi}$

❒ **c.** $\dfrac{4a}{\pi}$

☒ **d.** $\dfrac{12a}{\pi\sqrt{6409}}$

De même, $S_3 = H(3\omega)E_3$ avec $E_3 = \dfrac{4a}{3\pi}$ et $H(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2(3 - 1/3)^2}}$.

Or $\sqrt{1 + 10^2\left(3 - \dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 100 \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{9 + 6400}$ donc $S_3 = \dfrac{12a}{\pi\sqrt{6409}}$.

3 Commande d'un système linéaire - Génération de signaux périodiques

QCM

1 Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système bouclé.

❒ **a.** $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$

☒ **b.** $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

❒ **c.** $H(p) = \dfrac{1}{A(p)} + B(p)$

❒ **d.** $H(p) = A(p)B(p)$

Pour la chaîne directe, $S(p) = A(p)\mathscr{E}(p)$ et pour la chaîne de retour $R(p) = B(p)S(p)$. Or le signal d'erreur s'écrit $\mathscr{E}(p) = E(p) - R(p)$, soit :

$$S(p) = A(p)(E(p) - R(p)) = A(p)E(p) - A(p)B(p)S(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

2 On suppose que la chaîne directe fluctue de dA sans que la chaîne de retour soit affectée. Déterminer la variation relative de la transmittance $\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\right|$.

☒ **a.** $\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}A}{A}\right|\left|\frac{1}{1+AB}\right|$

❒ **b.** $\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}A}{A}\right|$

❒ **c.** $\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}A}{A}\right|\left|\frac{1+2AB}{1+AB}\right|$

❒ **d.** $\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}A}{1+AB}\right|$

On effectue la différentielle logarithmique de H sachant que $\mathrm{d}B = 0$ puisque la chaîne de retour ne varie pas :

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{\mathrm{d}A}{A} - \frac{\mathrm{d}(AB)}{1+AB} = \mathrm{d}A\left(\frac{1}{A} - \frac{B}{1+AB}\right) = \frac{\mathrm{d}A}{A}\frac{1}{1+AB}$$

3 On considère une chaîne directe à grand gain. Parmi les propositions suivantes, choisir la(les) réponse(s) juste(s).

❒ **a.** Les variations de la chaîne directe ont un effet important sur le système bouclé.

☒ **b.** Les variations de la chaîne directe ont peu d'effet sur le système bouclé.

❒ **c.** $H(p) \simeq A(p)$

☒ **d.** $H(p) \simeq \frac{1}{B(p)}$

D'après ce qui précède ; si $|A| \gg 1$:

$$H = \frac{A}{1+AB} \simeq \frac{A}{AB} \simeq \frac{1}{B}$$

La fonction de transfert est déterminée par la seule chaîne de retour. Le choix de B est primordial.

D'autre part :

$$\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}A}{A}\right|\left|\frac{1}{1+AB}\right| \ll \left|\frac{\mathrm{d}A}{A}\right|$$

Les variations de la chaîne directe ont peu d'effet sur le système bouclé.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

4 On considère une chaîne directe à grand gain. On suppose qu'une perturbation P apparaît en sortie de la chaîne directe et s'ajoute à S.

☒ **a.** Cette perturbation est atténuée.

☒ **b.** $S = \dfrac{A}{1+AB}E + \dfrac{P}{1+AB}$

❒ **c.** Cette perturbation est amplifiée.

❒ **d.** $S = \dfrac{A}{1+AB}E + AP$

On a par la chaîne directe $S = A\mathscr{E} + P$ avec $\mathscr{E} = E - BS$, soit :

$$S = A(E - BS) + P \Rightarrow S = \frac{A}{1+AB}E + \frac{P}{1+AB}$$

donc la perturbation est fortement atténuée dans le cas où $|A| \gg 1$.

Cet énoncé concerne les questions 5 à 7 :

On envisage dans cette série de questions une chaîne directe d'ordre 1 $A(p) = \dfrac{A_0}{1+\tau_c p}$ et une chaîne de retour de transmittance B réelle avec $A_0 B > 0$.

5 Déterminer la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes.

❒ **a.** La largeur de bande passante du système bouclé est plus petite que celle de la chaîne directe.

❒ **b.** Le temps de réponse du système bouclé est plus grand que celui de la chaîne directe.

☒ **c.** Le gain en continu du système bouclé est plus petit que celui de la chaîne directe.

☒ **d.** Le produit gain-bande passante est conservé.

La fonction de transfert du système bouclé s'écrit :

$$H(p) = \frac{A}{1+AB} = \frac{A_0}{1+\tau_c p}\,\frac{1}{1+\dfrac{A_0 B}{1+\tau_c p}} = \frac{A_0}{1+\tau_c p + A_0 B} = \frac{A_0}{1+A_0 B}\,\frac{1}{1+\tau'_c p}$$

avec $\tau'_c = \dfrac{\tau_c}{1+A_0 B}$. Il apparaît la pulsation de coupure du système bouclé $\omega'_c = \dfrac{1}{\tau'_c}$, soit $\omega'_c = (1+A_0 B)\omega_c$ où $\omega_c = \dfrac{1}{\tau_c}$ est la pulsation de coupure de la chaîne directe.

- La largeur de bande passante ω'_c du système bouclé est plus grande que celle de la chaîne directe ω_c.
- Le temps de réponse τ'_c du système bouclé est plus petit que celui de la chaîne directe τ_c.
- Le gain en continu $\dfrac{A_0}{1+A_0 B}$ du système bouclé est plus petit que celui de la chaîne directe A_0.
- Le produit gain bande passante est conservé : $A_0\omega_c = \dfrac{A_0}{1+A_0 B}\omega'_c$.

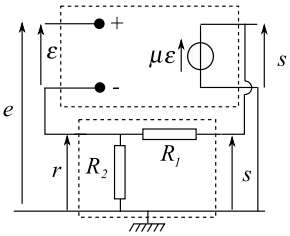
Pour se convaincre que τ_c et τ'_c sont les temps de réponse, il suffit d'écrire les équations différentielles pour la chaîne directe seule et pour le système bouclé :

$$\tau_c \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = A_0 e \quad \text{et} \quad \tau'_c \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \frac{A_0}{1 + A_0 B} e$$

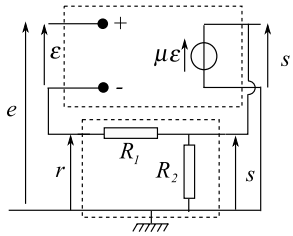
6 On reprend le montage amplificateur non inverseur réel (figure 3.2) pour lequel on veut identifier la chaîne directe et la chaîne de retour.

On écrit le gain différentiel de l'A.O. sous la forme $\mu = \dfrac{\mu_0}{1 + \tau_c p}$. On suppose que l'impédance d'entrée de l'A.O. est infinie et que son impédance de sortie est nulle. Déterminer quel montage est correct parmi les suivants.

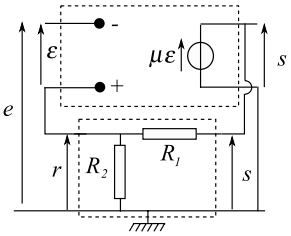
☒ **a.**



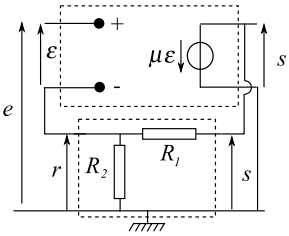
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



Il suffit de comparer les montages.

- La tension e est appliquée à l'entrée non inverseuse.
- La résistance R_1 est entre la sortie et l'entrée inverseuse.
- La résistance R_2 est entre l'entrée inverseuse et la masse.
- La tension $s(t)$ est égale à $\mu(V^+ - V^-)$.

Seul le schéma **a.** convient.

7 Déterminer les fonctions de transfert A et B des deux blocs du montage non inverseur.

❒ **a.** $A = \mu\mathscr{E}$

☒ **b.** $A = \mu$

☒ **c.** $B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$

❒ **d.** $B = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

On a $V^+ = e$ et $V^- = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} s$, or V^- est la tension de retour donc $B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$. D'autre part $s = \mu(V^+ - V^-)$ donc $A = \mu$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 On inverse les branchements sur les bornes du montage non inverseur. On posera $B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$. Déterminer l'équation différentielle du montage et conclure.

❒ **a.** $\dfrac{\tau_c}{1 + \mu_0 B}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{\tau_c}{1 + \mu_0 B}e$

☒ **b.** $\dfrac{\tau_c}{1 - \mu_0 B}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \dfrac{-\tau_c}{1 - \mu_0 B}e$

☒ **c.** Le système devient instable.

❒ **d.** La tension de sortie est multipliée par « -1 ».

On a alors $V^- = e$ et $V^+ = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}s = Bs$ soit avec $s = \mu(V^+ - V^-)$:

$$S(p) = \frac{\mu_0}{1 + \tau_c p}(BS(p) - E(p)) \Rightarrow S(p)((1 - \mu_0 B)) + \tau_c p S(p) = -\mu_0 E(p)$$

d'où l'équation différentielle

$$\frac{\tau_c}{1 - \mu_0 B}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \frac{-\mu_0}{1 - \mu_0 B}e$$

Étant donnée la forte valeur de μ_0, on a en général $1 - \mu_0 B < 0$. Donc la solution de l'équation homogène est de la forme $s(t) = \alpha \exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)$ avec $\tau' = \dfrac{\tau_c}{1 - \mu_0 B} < 0$. Le signal $s(t)$ diverge, donc le système est instable ; en fait il va évoluer jusqu'à la saturation.

9 On étudie un premier comparateur à hystérésis, dit comparateur non inverseur. Déterminer les valeurs de la tension d'entrée provoquant le basculement de la tension de sortie entre les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ pour le montage représenté figure 3.3. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. On pose $\lambda = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

❒ **a.** Dans le sens montant la tension de basculement est $V_B = \lambda V_{sat}$.

☒ **b.** Dans le sens montant la tension de basculement est $V'_B = -\lambda V_{sat}$.

☒ **c.** Dans le sens descendant la tension de basculement est $V_B = \lambda V_{sat}$.

❒ **d.** Dans le sens descendant la tension de basculement est $V'_B = -\lambda V_{sat}$.

Du fait de l'absence de liaison entre l'entrée et la sortie, ce montage fonctionne en comparateur. Le basculement de la sortie a lieu quand $V^+ - V^-$ change de signe. Or en utilisant un diviseur de tension (les courants d'entrée sont nuls pour un AO idéal), $V^+ = s\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, donc $V^+ - V^- = s\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} - e$.

Soit $s = V_{sat}$: il faut que $V^+ > V^-$; c'est possible si $\dfrac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} > e$.

Soit $s = -V_{sat}$: il faut que $V^+ < V^-$; c'est possible si $\dfrac{-R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} < e$.

Posons $V_B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.

Pour une tension d'entrée vérifiant $-V_B < e < V_B$ les deux états de la sortie sont possibles : pour savoir lequel sera effectivement observé il faut tenir compte de l'évolution antérieure du système, en partant d'une valeur de la tension d'entrée pour laquelle l'état de la sortie est parfaitement connu.

Par exemple, si $e > \dfrac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2}$ la seule possibilité pour la sortie est que $s = -V_{sat}$, et donc $V^+ < V^-$. Quand e diminue, $V^+ - V^-$reste négatif tant que $\dfrac{-R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} < e$. Le passage par cette valeur provoque le basculement de la sortie de $s = -V_{sat}$ à $s = V_{sat}$ donc :
$V'_B = -V_B = \dfrac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ est la tension de basculement dans le sens montant $-V_{sat} \to V_{sat}$.

On montrerait de même que $V_B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ est la tension de basculement dans le sens descendant $V_{sat} \to -V_{sat}$. Il s'agit d'un comparateur à hystérésis.

Cet énoncé concerne les questions 10 à 12 :
On étudie le circuit représenté figure 3.4.

Les deux amplificateurs opérationnels sont idéaux.

10 Déterminer la valeur de la tension d'entrée provoquant le basculement de la tension de sortie du premier montage de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$.

☒ **a.** Dans le sens montant, la tension de basculement est $V_B = \dfrac{R}{r} V_{sat}$.

☐ **b.** Dans le sens montant, la tension de basculement est $V'_B = -\dfrac{R}{r} V_{sat}$.

☐ **c.** Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V_B = \dfrac{R}{r} V_{sat}$.

☒ **d.** Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V'_B = -\dfrac{R}{r} V_{sat}$.

Il s'agit comme dans la question précédente d'un montage type comparateur. Le raisonnement se mène de nouveau en partant de l'état de la sortie.

Soit $V_s = V_{sat}$; c'est le cas si $V^+ > V^-$. Or l'entrée inverseuse est liée à la masse, la condition est : $V^+ > 0$. En écrivant le théorème de Millman sur l'entrée non inverseuse :

$$V^+ = \frac{\dfrac{V_e}{R} + \dfrac{V_s}{r}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

donc $V^+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)=\frac{V_e}{R}+\frac{V_s}{r}$. Finalement $V^+>0$ pour $V_e>-\frac{RV_s}{r}$ et comme $V_s=V_{sat}$ la condition est $V_e>-\frac{RV_{sat}}{r}$. Il y a donc basculement de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$ pour $V'_B=-\frac{R}{r}V_{sat}$.

En partant de $V_s=-V_{sat}$, un raisonnement similaire conduit à $V_B=\frac{R}{r}V_{sat}$.

11 Examiner si :

☒ **a.** la tension V_e est triangulaire

❒ **b.** la tension V_e est en créneau

❒ **c.** la tension V_s est triangulaire

☒ **d.** la tension V_s est en créneau

L'AO de droite peut fonctionner en mode linéaire grâce à la liaison entre l'entrée inverseuse et la sortie. Sa tension de sortie est égale à la tension d'entrée de celui de gauche. L'entrée non inverseuse étant reliée à la masse, l'entrée inverseuse est une masse virtuelle, on retrouve donc V_s aux bornes de la résistance R' et V_e aux bornes du condensateur.

Grâce à une loi des nœuds sur l'entrée inverseuse, $\frac{V_s}{R'}=-\frac{d}{dt}(CV_e)$ donc $\frac{dV_e}{dt}=-\frac{V_s}{R'C}$.

Comme V_s ne peut prendre que les valeurs $\pm V_{sat}$, $\frac{dV_e}{dt}=-\frac{(\pm V_{sat})}{R'C}$. La tension $V_e(t)$ est donc linéaire par morceaux, et comme il s'agit de la tension aux bornes d'un condensateur c'est une fonction continue, avec des pentes alternativement égales à $\frac{V_{sat}}{R'C}$ et $\frac{-V_{sat}}{R'C}$: il s'agit d'une fonction de forme triangulaire.

La tension $V_s(t)$, elle, est en créneau : elle vaut tantôt V_{sat}, tantôt $-V_{sat}$.

12 Déterminer la période de la tension V_e en fonction de R, C, r et R'.

❒ **a.** $T=\frac{4rR'C}{R}$

☒ **b.** $T=\frac{4RR'C}{r}$

❒ **c.** $T=\frac{2rR'C}{R}$

❒ **d.** $T=\frac{2RR'C}{r}$

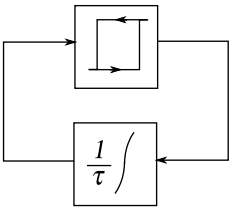
On choisit comme début de l'étude un instant où le condensateur est déchargé et où $V_s=V_{sat}$: alors $\frac{dV_e}{dt}=-\frac{(+V_{sat})}{R'C}$ et donc $V_e(t)=-\frac{(+V_{sat})}{R'C}t$ jusqu'à ce que la sortie bascule, c'est-à-dire quand V_e atteint la valeur $V_e=-\frac{RV_{sat}}{r}$. Ensuite $\frac{dV_e}{dt}=-\frac{(-V_{sat})}{R'C}$ donc $V_e(t)=\frac{V_{sat}}{R'C}t+cste$ jusqu'à ce que la sortie bascule à nouveau, pour $V_e=\frac{RV_{sat}}{r}$, etc.

Pendant une demi-période du triangle, V_e passe de $-\frac{RV_{sat}}{r}$ à $\frac{RV_{sat}}{r}$ avec une pente $\frac{V_{sat}}{R'C}$.

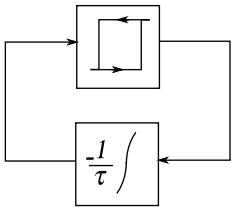
On en déduit que $\frac{V_{sat}}{R'C}=\frac{\Delta V_s}{\Delta t}=\frac{2RV_{sat}}{r}\frac{2}{T}$ et donc $T=\frac{4RR'C}{r}$.

13 Parmi ces quatre schémas de principe, déterminer celui(ceux) qui permet(tent) de réaliser un générateur de signaux créneaux.

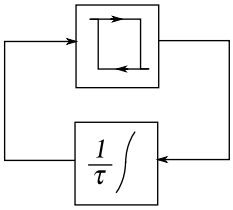
❒ **a.**



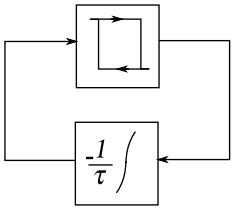
☒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



On examine les différents cas :

- Pour le cas **a.**, lorsque la tension délivrée par la chaîne directe est positive, la chaîne de retour renvoie en entrée de la chaîne directe une tension croissante avec le temps : la tension de basculement négative ne sera jamais atteinte. Ce système ne fonctionne pas.
- Pour le cas **b.**, lorsque la tension délivrée par la chaîne directe est positive, la chaîne de retour renvoie en entrée de la chaîne directe une tension décroissante avec le temps : la tension de basculement négative pourra être atteinte. Ce système fonctionne.
- Pour le cas **c.**, lorsque la tension délivrée par la chaîne directe est positive, la chaîne de retour renvoie en entrée de la chaîne directe une tension croissante avec le temps : la tension de basculement positive pourra être atteinte. Ce système fonctionne.
- Pour le cas **d.**, lorsque la tension délivrée par la chaîne directe est positive, la chaîne de retour renvoie en entrée de la chaîne directe une tension décroissante avec le temps : la tension de basculement négative ne pourra pas être atteinte. Ce système ne fonctionne pas.

Cet énoncé concerne les questions 14 à 21 :
Nous allons étudier un oscillateur de type quasi sinusoïdal, constitué d'un filtre d'ordre 2 et d'un montage amplificateur utilisant un amplificateur opérationnel.

14 On commence par étudier le filtre de Wien (figure 3.5) avec $R = 10\ \text{k}\Omega$ et $C = 47$ nF.

Calculer la fonction de transfert du circuit.

❒ **a.** $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

❒ **b.** $\underline{H} = \dfrac{1}{2 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

☒ **c.** $\underline{H} = \dfrac{1}{3 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

❒ **d.** $\underline{H} = \dfrac{1}{4 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On appelle $\underline{Z_1}$ l'association série de la résistance et du condensateur et $\underline{Z_2}$ l'association parallèle. Grâce à un diviseur de tension, $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \dfrac{1}{\underline{Z_1}\underline{Y_2} + 1}$ avec $\underline{Z_1} = R + \dfrac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Y_2} = jC\omega + \dfrac{1}{R}$.

Après simplification, $\underline{H} = \dfrac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$.

15 De quel type de filtre s'agit-il ?

- ❒ **a.** passe-bas
- ❒ **b.** passe-haut
- ☒ **c.** passe-bande
- ❒ **d.** coupe-bande

Quand $\omega \ll \dfrac{1}{RC}$ ou $\omega \gg \dfrac{1}{RC}$, $\underline{H} \approx 0$ donc le filtre ne laisse passer ni les basses fréquences, ni les hautes fréquences.

Par contre, pour $\omega = \dfrac{1}{RC}$, $|\underline{H}|$ passe par un maximum. Il s'agit par conséquent d'un passe-bande centré sur la pulsation de résonance $\omega_r = \dfrac{1}{RC}$.

16 Mettre la fonction de transfert sous forme canonique puis déterminer le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

- ☒ **a.** $Q = \dfrac{1}{3}$
- ❒ **b.** $Q = 3$
- ❒ **c.** $\omega_0 = \dfrac{1}{3RC}$
- ☒ **d.** $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

En multipliant numérateur et dénominateur de la fraction par 1/3 on obtient : $\underline{H} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{j}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$. Par identification avec la forme canonique d'un passe-bande : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ on en déduit que $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{3}$.

17 À partir de cette question, on couple le filtre de Wien et un amplificateur non inverseur (figure 3.6). La tension de sortie du filtre de Wien est la tension d'entrée de l'amplificateur.

On suppose que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire et on ne tient pas compte de sa réponse fréquentielle. Cela revient à supposer que les fréquences d'étude sont très inférieures à la fréquence de coupure haute.

En utilisant la relation imposée à U et V par l'amplificateur non inverseur, et l'équation différentielle du filtre de Wien, établir les équations différentielles pour U et pour V.

❒ **a.** $\ddot{U} + \omega_0\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **b.** $\ddot{U} + \omega_0\left(3 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

☒ **c.** $\ddot{V} + \omega_0\left(2 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{V} + \omega_0^2 V = 0$

❒ **d.** $\ddot{V} + \omega_0\left(3 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{V} + \omega_0^2 V = 0$

Pour l'AO idéal en mode linéaire, $V^- = V+ = U$ et comme $i^- = 0$, $U = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}V$ grâce à un diviseur de tension.

Pour le filtre de Wien, en utilisant l'équivalence entre la multiplication par $j\omega$ et la dérivation par rapport au temps, $\dot{V} = RC\ddot{U} + 3\dot{U} + \dfrac{1}{RC}U$. En éliminant V entre les deux équations et en remplaçant $\dfrac{1}{RC}$ par ω_0, on arrive à $\ddot{U} + \omega_0\left(2 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$.

Comme V et U sont liées par une simple relation de proportionnalité, les deux tensions sont solutions de la même équation différentielle.

18 Déterminer la valeur de $\rho = R_2/R_1$ correspondant au cas où U vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique (on notera cette valeur ρ_c). Quelle est alors la période T_0 de l'oscillation ?

❒ **a.** $\rho = 1,5$

☒ **b.** $\rho = 2$

❒ **c.** $T_0 = \dfrac{RC}{2\pi}$

☒ **d.** $T_0 = 2\pi RC$

Pour $\rho = 2$, l'équation différentielle devient $\ddot{U} + \omega_0^2 U = 0$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0, donc de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

19 En fait, on ne peut en pratique obtenir exactement $\rho = \rho_c$. Pour observer des oscillations, on doit avoir un système instable, donc $\rho > \rho_C$. On suppose dans la suite que $\rho = 2,3$.

Établir les expressions générales de V et de U en fonction du temps. Déterminer le temps caractéristique τ de croissance des oscillations ainsi que la pseudo-période T.

❒ **a.** $\tau = \dfrac{16RC}{3}$

☒ **b.** $\tau = \dfrac{20RC}{3}$

☒ **c.** $T = \dfrac{4\pi RC}{\sqrt{3.91}}$

❒ **d.** $T = \dfrac{4\pi RC}{\sqrt{1.21}}$

L'équation différentielle vérifiée par chacune des tensions est $\ddot{x} - \alpha\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\alpha = 0,3$. Le discriminant de l'équation caractéristique vaut $\Delta = \left(\alpha^2 - 4\right)\omega_0^2$. Il est négatif donc les racines sont complexes, de la forme $r = \dfrac{\alpha\omega_0 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$. Les solutions de l'équation différentielle sont $x = Ae^{Re(r)}\cos\left(Im(r) + \phi\right)$

On peut définir un temps caractéristique des oscillations : $\tau = \dfrac{2}{\omega_0\alpha} = \dfrac{20RC}{3}$

et une pseudo-pulsation : $\Omega = \omega_0\dfrac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} = \dfrac{2\pi}{T}$,

d'où une pseudo-période $T = \dfrac{4\pi RC}{\sqrt{4-\alpha^2}} = \dfrac{4\pi RC}{\sqrt{3.91}}$.

20 Le moindre parasite conduit à la saturation. On se place dans le cas où V croît jusqu'à $+V_{sat}$. Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par U lorsque $V = +V_{sat}$.

❒ **a.** $\ddot{U} + 4\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

☒ **b.** $\ddot{U} + 3\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **c.** $\ddot{U} + 2\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

❒ **d.** $\ddot{U} + \omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

Lorsque $V = V_{sat}$, $\dot{V} = 0$ donc U vérifie l'équation $0 = RC\ddot{U} + 3\dot{U} + \dfrac{1}{RC}U$ c'est-à-dire $\ddot{U} + 3\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$.

21 Pour que le système sorte de la saturation, il faut que U décroisse. Est-ce le cas ? Déterminer l'équation vérifiée par U (et par V) si le système peut sortir de la saturation .

☒ **a.** U s'amortit pour tout ρ.

❒ **b.** U ne s'amortit que si $\rho < 2\rho_c$.

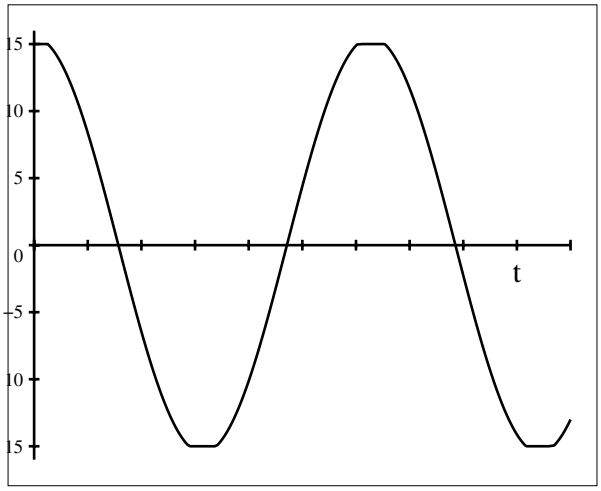
❒ **c.** $\ddot{U} + \omega_0\left(1-\rho\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

☒ **d.** $\ddot{U} + \omega_0\left(2-\rho\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$

L'équation $\ddot{U} + 3\omega_0\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 3\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est positif. Les racines sont réelles négatives, la solution est donc de type amorti, U va décroître. Le rapport ρ n'intervient pas dans l'équation, il n'influe donc pas sur l'évolution de U pendant que V sature.

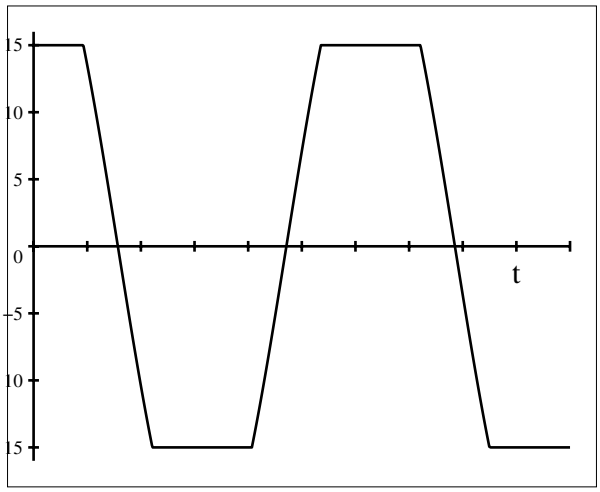
Lorsque le système ne sature plus, on se retrouve dans le premier cas et l'équation différentielle est de nouveau $\ddot{U} + \omega_0 (2 - \rho) \dot{U} + \omega_0^2 U = 0$ (ou $\ddot{V} + \omega_0 (2 - \rho) \dot{V} + \omega_0^2 V = 0$).

On constate alors que V évolue vers $-V_{sat}$ puis de nouveau vers V_{sat} et ainsi de suite. L'allure des oscillations est la suivante :



Le système oscille entre les deux niveaux de saturation, avec des portions sinusoïdales pour passer de l'un à l'autre. Plus ρ est proche de 2, plus le signal se rapproche d'une sinusoïde, mais le signal n'étant pas rigoureusement sinusoïdal, on parle d'oscillateur « quasi sinusoïdal ».

Au contraire, quand ρ s'écarte de 2, sa forme tend vers celle d'un trapèze ou d'un créneau :



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Partie 2
Électromagnétisme

4 Équations de Maxwell

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les équations de Maxwell en régime dépendant du temps.
- La forme intégrale des équations de Maxwell.
- L'approximation des états quasi stationnaires.
- Le vecteur de Poynting et la densité d'énergie électromagnétique.
- Les bilans d'énergie électromagnétique.

Notations. Le vecteur de Poynting sera noté $\vec{\Pi}$.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 66**.

1 ❒ V ❒ F Le théorème de Gauss n'est plus valable en régime dépendant du temps.

2 ❒ V ❒ F La circulation de $\vec{E}$ est conservative.

3 ❒ V ❒ F Par changement de référentiels galiléens, le champ magnétique est conservé.

4 ❒ V ❒ F Par changement de référentiels galiléens, le champ électrique est conservé.

5 ❒ V ❒ F Le vecteur de Poynting correspond à une puissance par unité de surface.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 67**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

6 Cocher la (ou les) équation(s) juste(s) :

❒ **a.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

❒ **b.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

7 La forme locale du théorème de Gauss est :

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{E} = 0$

❒ **b.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

❒ **c.** $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

8 L'équation locale associée au flux nul de $\vec{B}$ à travers une surface fermée S est :

❒ **a.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = 0$

❒ **b.** $\text{div}\,\vec{B} = \vec{0}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

❒ **d.** $\text{div}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

9 La relation liant le champ au potentiel vecteur est :

❒ **a.** $\mathrm{d}A = -\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

❒ **b.** $\mathrm{d}\vec{B} = -\vec{A} \wedge \mathrm{d}\vec{\ell}$

❒ **c.** $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$

❒ **d.** $\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,A$

10 On considère un contour fermé $\mathscr{C}$ sur lequel s'appuie la surface S d'élément $\mathrm{d}\vec{S}$ correctement orienté. La circulation de $\vec{B}$ le long du contour $\mathscr{C}$ s'écrit :

❒ **a.** $\displaystyle\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

❒ **b.** $\displaystyle\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \mu_0\epsilon_0 \oint_{\mathscr{C}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

❒ **c.** $\displaystyle\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \mu_0\epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

❒ **d.** $\displaystyle\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mu_0\epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 En régime dépendant du temps, l'équation de conservation de la charge s'écrit :

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

❒ **b.** $\text{div}\,\vec{j} = 0$

❒ **c.** $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{1}{\epsilon_0}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

❒ **d.** $\text{div}\,\vec{j} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

12 Dans un métal de conductivité γ, l'équation vérifiée par la densité volumique de charge ρ est :

❒ **a.** $\rho = \gamma E$

❒ **b.** $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\epsilon_0}\rho = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

❒ **d.** $\rho = \dfrac{\gamma}{\epsilon_0}E$

13 Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires on peut :

❒ **a.** Écrire $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$.

❒ **b.** Négliger le terme $\vec{j}$ devant $\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

❒ **c.** Écrire $\text{div}\,\vec{E} = 0$.

❒ **d.** Écrire $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

14 Dans l'A.R.Q.S., la forme locale du théorème d'Ampère est :

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

❒ **b.** $\text{div}\,\vec{B} = 0$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

15 La conductivité γ d'un métal est de l'ordre de 10^7 S · m^{-1}. On s'intéresse à un champ harmonique de fréquence $f \ll 10^{14}$ Hz.
On donne $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F · m^{-1}. Quelle(s) proposition(s) est(sont) juste(s) ?

❒ **a.** Le terme $\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant $\vec{j}$.

❒ **b.** Le champ $\vec{E}$ est nul.

❒ **c.** La densité volumique ρ est nulle.

❒ **d.** Le champ $\vec{B}$ est nul.

16 On note $\overrightarrow{\Pi}$ le vecteur de Poynting. Établir le théorème de Poynting ou bilan intégral de puissance :

❒ **a.** $\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \oiint_S \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iiint_\tau \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}\mathrm{d}\tau$

❒ **b.** $\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \oiint_S \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = +\iiint_\tau \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}\mathrm{d}\tau$

❒ **c.** $\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \iiint_\tau \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\mathrm{d}\tau = -\iiint_\tau \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}\mathrm{d}\tau$

❒ **d.** $\iiint_\tau \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \oiint_S \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iiint_\tau \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}\mathrm{d}\tau$

17 Déterminer l'équation locale de bilan de puissance :

❒ **a.** $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = -\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} - \Pi$

❒ **b.** $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} - \overrightarrow{\Pi}$

❒ **c.** $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} - \mathrm{div}\,\overrightarrow{\Pi}$

❒ **d.** $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = -\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} - \mathrm{div}\,\overrightarrow{\Pi}$

Cet énoncé concerne les questions 18 à 21 :
On considère un fil conducteur cylindrique (conductivité σ) de très grande longueur plongé dans un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_z}$ permanent et uniforme. Le fil a pour rayon a et pour axe Oz. On note r la distance d'un point à l'axe et $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur radial.

18 Déterminer le vecteur de Poynting pour $r \leq a$:

❒ **a.** $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$

❒ **b.** $\overrightarrow{\Pi} = -\frac{E^2\sigma r}{2}\overrightarrow{u_r}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\Pi} = \frac{E^2\sigma r}{2}\overrightarrow{u_r}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\Pi} = \frac{E^2\sigma r}{2}\overrightarrow{u_z}$

19 Déterminer le vecteur de Poynting pour $r \geq a$:

❒ **a.** $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$

❒ **b.** $\overrightarrow{\Pi} = -\frac{E^2\sigma a^2}{2r}\overrightarrow{u_r}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\Pi} = \frac{E^2\sigma a^2}{2r}\overrightarrow{u_r}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\Pi} = \frac{E^2\sigma a^2}{2r}\overrightarrow{u_z}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

20 Calculer le flux ϕ du vecteur de Poynting à travers la surface d'un cylindre d'axe Oz, de rayon $r \geq a$ et de hauteur ℓ :

❒ **a.** $\phi = 0$

❒ **b.** $\phi = \dfrac{E^2 a^2 \pi r \sigma \ell}{2}$

❒ **c.** $\phi = -E^2 a^2 \pi \sigma \ell$

❒ **d.** $\phi = E^2 a^2 \pi \sigma \ell$

21 Quelle(s) proposition(s) est(sont) vraie(s) ?

❒ **a.** Le fil cède de l'énergie au champ par effet Joule.

❒ **b.** Le flux de $\overrightarrow{\Pi}$ est entrant dans le fil.

❒ **c.** Le champ cède de l'énergie au fil.

❒ **d.** Le flux est sortant à cause de l'effet Joule.

22 On considère l'interface chargée (densité surfacique σ) entre deux milieux (1) et (2). On note $\overrightarrow{E}_1$ (respectivement $\overrightarrow{E}_2$) le champ en un point M de l'interface dans le milieu (1) (respectivement dans le milieu (2)). On note $\overrightarrow{N_{12}}$, la normale à la surface, orientée du milieu (1) vers le milieu (2). À la traversée de la surface :

❒ **a.** La composante normale du champ $\overrightarrow{E}$ est continue.

❒ **b.** $\overrightarrow{E}_1 - \overrightarrow{E}_2 = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{N_{12}}$

❒ **c.** La composante tangentielle du champ $\overrightarrow{E}$ est continue.

❒ **d.** $\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{N_{12}}$

23 On considère l'interface entre deux milieux (1) et (2) parcourue par une densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$. On note $\overrightarrow{B}_1$ (respectivement $\overrightarrow{B}_2$) le champ en un point M de l'interface dans le milieu (1) (respectivement dans le milieu (2)). On note $\overrightarrow{N_{12}}$, la normale à la surface, orientée du milieu (1) vers le milieu (2). À la traversée de la surface :

❒ **a.** La composante tangentielle du champ $\overrightarrow{B}$ est continue.

❒ **b.** La composante normale du champ $\overrightarrow{B}$ est continue.

❒ **c.** $\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{N_{12}}$

❒ **d.** $\overrightarrow{B}_1 - \overrightarrow{B}_2 = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{N_{12}}$

Voir les corrigés du chapitre 4 page 66.

Induction électromagnétique

5

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de champ électromoteur et de f.e.m. induite.
- Les cas d'induction de Neuman et d'induction de Lorentz.
- La loi de Faraday.
- La loi de Lenz.
- Les notions d'inductances propre et mutuelle.

Notations. Sauf indication contraire, on notera $\overrightarrow{E_m}$ le champ électromoteur induit et e_m la force électromotrice induite.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 74**.

1 ❒ V ❒ F La loi de Lenz stipule que le courant induit crée un champ opposé au champ qui l'a créé.

2 ❒ V ❒ F Une inductance mutuelle est toujours positive.

3 ❒ V ❒ F Un champ électromoteur d'induction est à circulation non conservative.

4 ❒ V ❒ F La force électromotrice d'induction e_{CD} entre deux points C et D d'un conducteur filiforme s'écrit $e_{CD} = \int_C^D \overrightarrow{E_m}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell_M}$.

5 ❒ V ❒ F Dans le cas de Neuman, le champ électromoteur est $\overrightarrow{E_m} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$.

6 ❒ V ❒ F Dans un conducteur se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$, le champ électromoteur est $\overrightarrow{E_m} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

7 ❒ V ❒ F La loi de Faraday s'écrit : $e_m = -\dfrac{d\phi}{dt}$, où ϕ est le flux du champ magnétique à travers le circuit fermé.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 76**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

8 On considère un élément de circuit CD de résistance R_{CD} et soumis à une f.e.m. d'induction e_{CD} (figure 5.1). Déterminer la relation correcte d'après les conventions sur le sens du courant induit i_{CD} et de e_{CD} :

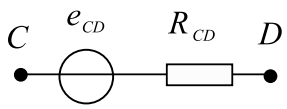


Figure 5.1

❒ **a.** $V_D - V_C = -e_{CD} - R_{CD}i$ ❒ **b.** $V_D - V_C = e_{CD} + R_{CD}i$

❒ **c.** $V_D - V_C = e_{CD} - R_{CD}i$ ❒ **d.** $V_D - V_C = -e_{CD} - R_{CD}i$

Cet énoncé concerne les questions 9 à 11 :

On considère un circuit formé de N spires rectangulaires de côtés a et b soumis au champ magnétique d'un fil très long parcouru par un courant $I = I_0 \cos \omega t$ (figure 5.2). On rappelle que le champ magnétique créé par le fil est $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

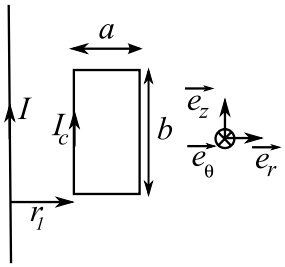


Figure 5.2

9 Le flux ϕ de $\vec{B}$ à travers le circuit est :

❒ **a.** $\phi = -\dfrac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{r_1}\right)$

❒ **b.** $\phi = \dfrac{\mu_0 NIab}{2\pi r_1}$

❒ **c.** $\phi = \dfrac{\mu_0 NIb}{2\pi}\left(\dfrac{1}{(r_1+a)^2}-\dfrac{1}{r_1^2}\right)$

❒ **d.** $\phi = \dfrac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{r_1}\right)$

10 Sachant que le circuit a une résistance R, déterminer l'intensité du courant induit I_c.

❒ **a.** $I_c = \dfrac{N\mu_0 bI_0}{2\pi R}\ln\left(1+\dfrac{a}{r_1}\right)\omega\sin\omega t$

❒ **b.** $I_c = -\dfrac{N\mu_0 bI_0}{2\pi R}\ln\left(1+\dfrac{a}{r_1}\right)\omega\sin\omega t$

❒ **c.** $I_c = \dfrac{\mu_0 NI_0 b}{2\pi R}\left(\dfrac{1}{(r_1+a)^2}-\dfrac{1}{r_1^2}\right)\omega\sin\omega t$

❒ **d.** $I_c = \dfrac{\mu_0 NI_0 abR}{2\pi r_1}\omega\sin\omega t$

11 Déterminer la force instantanée $\vec{F_L}$ exercée par le fil sur le circuit.

❒ **a.** $\vec{F_L} = \vec{0}$

❒ **b.** $\vec{F_L} = \dfrac{N^2\mu_0^2 b^2 I_0^2}{4\pi^2 R}\left(\dfrac{1}{r_1+a}-\dfrac{1}{r_1}\right)\ln\left(1+\dfrac{a}{r_1}\right)\omega\sin\omega t\cos\omega t\,\vec{e}_r$

❒ **c.** $\vec{F_L} = \dfrac{N^2\mu_0^2 b^2 I_0^2}{4\pi^2 R}\left(\dfrac{1}{r_1+a}-\dfrac{1}{r_1}\right)\ln\left(1+\dfrac{a}{r_1}\right)\omega\sin\omega t\cos\omega t\,\vec{e}_\theta$

❒ **d.** $\vec{F_L} = BI_c b\,\vec{e}_\theta$

Cet énoncé concerne les questions 12 à 13 :
On place un cylindre conducteur de conductivité γ (figure 5.3) dans un champ magnétique sinusoïdal $\vec{B} = B_0\cos\omega t\,\vec{u_z}$.

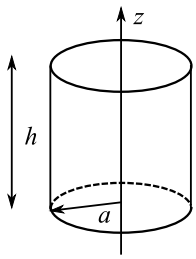


Figure 5.3

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

12 On décompose le cylindre en spires élémentaires de hauteur dz et de rayon compris entre r et $r+\mathrm{d}r$. Déterminer le courant induit $i(t)$ dans une de ces spires avec $\overrightarrow{u_\theta}$ comme sens positif d'orientation.

❒ **a.** $i(t) = \dfrac{r\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z}{2} B_0\omega \sin \omega t$

❒ **b.** $i(t) = -\dfrac{r\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z}{2} B_0\omega \sin \omega t$

❒ **c.** $i(t) = -\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z B_0\omega \sin \omega t$

❒ **d.** $i(t) = \gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z B_0\omega \sin \omega t$

13 Déterminer la puissance moyenne $\mathscr{P}$ dissipée dans le cylindre par induction (courants de Foucault).

❒ **a.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^3 h\pi}{6} B_0^2\omega^2$

❒ **b.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^3 h\pi}{3} B_0^2\omega^2$

❒ **c.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^4 h\pi}{16} B_0^2\omega^2$

❒ **d.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^4 h\pi}{8} B_0^2\omega^2$

14 Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle M entre un solénoïde (S_1) considéré infini (n_1 spires par unité de longueur, section Σ_1) et une bobine S_2 composée de N_2 spires de section Σ_2 (figure 5.4).

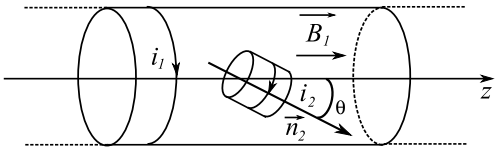


Figure 5.4

❒ **a.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_2 \dfrac{i_1}{i_2} \cos\theta$

❒ **b.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_2 \cos\theta$

❒ **c.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_1 i_1 \cos\theta$

❒ **d.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_2 i_2 \cos\theta$

15 Déterminer le coefficient d'inductance propre L d'un solénoïde de grande longueur ℓ, ayant N_1 spires. On note Σ_1 sa section.

❒ **a.** $L = \mu_0 N_1^2 \Sigma_1$

❒ **b.** $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell^2} \Sigma_1$

❒ **c.** $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell} \Sigma_1 i_1$

❒ **d.** $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell} \Sigma_1$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 17 :
On étudie le système de la figure 5.5 formé de deux circuits couplés par inductance mutuelle M.

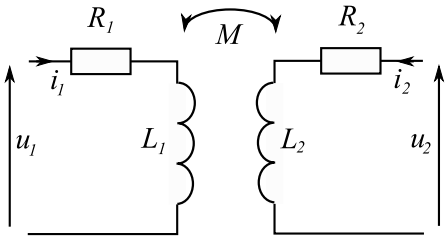


Figure 5.5

16 Écrire les équations des deux circuits.

❒ **a.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \\ u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 - L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = R_2 i_2 - L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M i_2 \\ u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M i_1 \end{cases}$

17 Écrire l'énergie magnétique totale du système.

❒ **a.** $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$ ❒ **b.** $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$

❒ **c.** $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} M i_1 i_2$ ❒ **d.** $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$

Cet énoncé concerne les questions 18 à 20 :

On étudie le circuit de la figure (5.6) appelé « rail de Laplace ». Il est constitué d'un barreau CD pouvant se déplacer sans frottement sur des rails parallèles. On modélise la résistance du circuit par R. L'ensemble est plongé dans un champ

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

$\vec{B} = B\vec{u_z}$ uniforme. À $t = 0$, on lance le barreau depuis la position x_0 (pour son centre) avec la vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. Le barreau reste perpendiculaire aux rails lors de son déplacement. On néglige l'inductance propre du circuit.

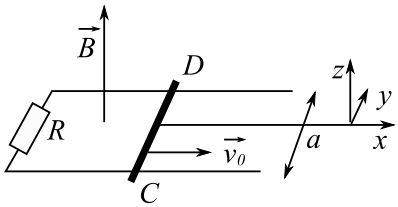


Figure 5.6

18 On choisit l'orientation du courant induit de C vers D. Déterminer l'intensité I dans circuit par la loi de Faraday.

❒ **a.** $I = -\dfrac{Bav_0}{R}$ ❒ **b.** $I = -\dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

❒ **c.** $I = \dfrac{Bav_0}{R}$ ❒ **d.** $I = \dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

19 Déterminer l'équation mécanique de la barre de masse m.

❒ **a.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{B^2a^2\dot{x}}{mR} = 0$ ❒ **b.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{B^2a^2v_0}{mR} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{B^2a^2\dot{x}}{mR} = 0$ ❒ **d.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{B^2a\dot{x}}{mR} = 0$

20 Exprimer la puissance $\mathscr{P}_L$ de la force de Laplace et comparer à la puissance $\mathscr{P}_I$ de la f.e.m. induite e_m.

❒ **a.** $\mathscr{P}_L = -e_m\dfrac{Ba\dot{x}}{R}$ ❒ **b.** $\mathscr{P}_L = e_m\dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

❒ **c.** $\mathscr{P}_L = -\mathscr{P}_I$ ❒ **d.** $\mathscr{P}_L = \mathscr{P}_I$

Cet énoncé concerne les questions 21 à 24 :

On étudie le système de la figure 5.7 appelé « roue de Barlow ». La roue, de rayon a, peut tourner autour de l'axe Oz et l'on note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. La roue est conductrice et l'on admet que tout se passe comme si le courant ne circulait que selon OA. En A le contact est glissant sans frottement. Un point M de OA est repéré par sa distance r à O.

Le champ $\vec{B} = B\vec{u_z}$ est uniforme.

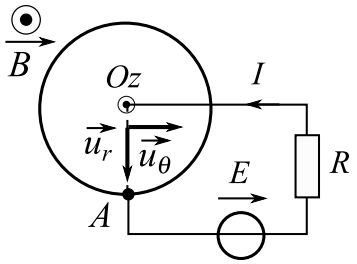


Figure 5.7

21 On note ω la vitesse de rotation de la roue. Déterminer la f.e.m. d'induction due à ce mouvement (on utilisera le champ électromoteur).

❒ **a.** $e_m = \omega B a^2$ ❒ **b.** $e_m = 0$

❒ **c.** $e_m = \omega B a$ ❒ **d.** $e_m = \dfrac{\omega B a^2}{2}$

22 Déduire de la question précédente l'intensité I du courant dans le circuit.

❒ **a.** $I = \dfrac{e_m + E}{R}$ ❒ **b.** $I = \dfrac{-e_m + E}{R}$

❒ **c.** $I = \dfrac{e_m - E}{R}$ ❒ **d.** $I = \dfrac{E}{R}$

23 Déterminer le moment de l'action de Laplace sur le disque.

❒ **a.** $\Gamma_{Oz} = -\dfrac{IBa^2}{2}$ ❒ **b.** $\Gamma_{Oz} = -\dfrac{IBa^2}{4}$

❒ **c.** $\Gamma_{Oz} = -IBa^2$ ❒ **d.** $\Gamma_{Oz} = \dfrac{IBa^2}{2}$

24 Dans les bilans de puissance suivants, déterminer ceux qui sont justes.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{J\omega^2}{2}\right) = RI^2 - EI$ ❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{J\omega^2}{2}\right) = EI - RI^2$

❒ **c.** $e_m I - \omega\Gamma_{Oz} = 0$ ❒ **d.** $e_m I + \omega\Gamma_{Oz} = 0$

Cet énoncé concerne les questions 25 à 29 :
Cette série de questions étudie le fonctionnement du haut-parleur électromagnétique (figure 5.8).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

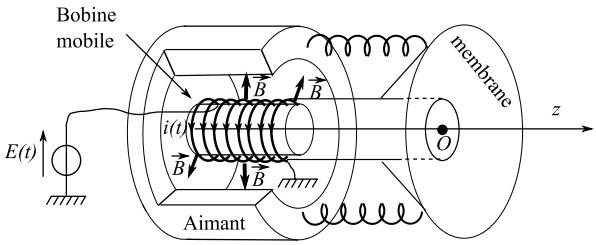


Figure 5.8

Il est constitué :

- d'une bobine de N spires, de rayon a, mobile dans l'entrefer d'un aimant. Cette bobine a une résistance R, une inductance L et une masse m ;
- d'un aimant permanent annulaire, qui assure un champ $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_r}$ au niveau de la bobine ;
- d'une membrane, reliée à la bobine et pouvant effectuer de faibles déplacements selon Oz. Cette membrane est reliée à la partie fixe du haut-parleur par des ressorts : force $\overrightarrow{f} = -kz\overrightarrow{u_z}$ où z est la position du centre de la membrane (en l'absence de courant, la membrane est à sa position d'équilibre et $z = 0$). La membrane subit aussi une force $\overrightarrow{f_a} = -h\dot{z}\overrightarrow{u_z}$ due au frottement de l'air.

25 Après avoir déterminé le champ électromoteur d'induction, conséquence du déplacement de la bobine, établir l'expression de la f.e.m. d'induction dans le circuit.

❒ **a.** $e_m = \dot{z}B2\pi a$ ❒ **b.** $e_m = \dot{z}BN\pi a^2$

❒ **c.** $e_m = \dot{z}BN2\pi a$ ❒ **d.** $e_m = \dot{z}BNa$

26 Déterminer l'équation électrique du circuit.

❒ **a.** $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dot{z}B2\pi Na$ ❒ **b.** $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

❒ **c.** $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \dot{z}B2\pi Na$ ❒ **d.** $E = Ri - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

27 Établir l'équation mécanique du système.

❒ **a.** $m\ddot{z} = -kz - h\dot{z}$ ❒ **b.** $m\ddot{z} = -iB2\pi Na - kz - h\dot{z}$

❒ **c.** $m\ddot{z} = +iB2\pi Na - kz - h\dot{z}$ ❒ **d.** $m\ddot{z} = -iB\pi Na^2 - kz - h\dot{z}$

28 On cherche la réponse du circuit en régime sinusoïdal forcé avec $E(t) = E_0 \cos \omega t$ ou sous forme complexe $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$. On cherche à exprimer l'intensité $\underline{i}$ complexe sous la forme $\underline{E} = \underline{Z}\,\underline{i}$. Exprimer $\underline{Z}$ (on aura intérêt à utiliser les variables $\underline{i}$ et $\underline{v} = \underline{\dot{z}}$).

❒ **a.** $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{(B2\pi Na)^2}{h - \dfrac{k}{j\omega} + jm\omega}$

❒ **b.** $\underline{Z} = R + jL\omega$

❒ **c.** $\underline{Z} = R + jL\omega - \dfrac{(B2\pi Na)^2}{h + \dfrac{k}{j\omega} + jm\omega}$

❒ **d.** $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{(B2\pi Na)^2}{h + \dfrac{k}{j\omega} + jm\omega}$

29 Le haut-parleur est équivalent au circuit de la figure 5.9. Quelle(s) expression(s) est(sont) juste(s) dans les propositions suivantes ?

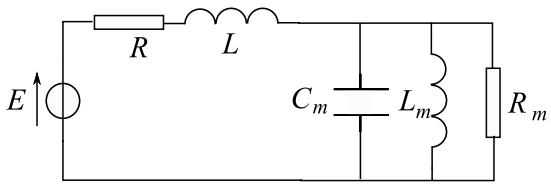


Figure 5.9

❒ **a.** $C_m = \dfrac{m}{(B2\pi Na)^2}$

❒ **b.** $R_m \to \infty$

❒ **c.** $C_m = 0$

❒ **d.** $L_m = \dfrac{(B2\pi Na)^2}{k}$

Voir les corrigés du chapitre 5 page 74.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

4 Équations de Maxwell

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F Le théorème de Gauss n'est plus valable en régime dépendant du temps.

L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ qui est la forme locale du théorème de Gauss est inchangée lorsqu'on passe du régime stationnaire au régime dépendant du temps.

2 ❒ V ☒ F La circulation de $\vec{E}$ est conservative.

Ce n'est vrai qu'en régime statique où l'équation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et donc $\oint \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = 0$. En régime variable l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, donc la circulation s'écrit :.

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S}\right) = -\frac{\mathrm{d}\phi_{\mathscr{C}}}{\mathrm{d}t}$$

où $\phi_{\mathscr{C}}$ est le flux de $\vec{B}$ à travers une surface orientée s'appuyant sur le contour $\mathscr{C}$.

3 ☒ V ❒ F Par changement de référentiels galiléens, le champ magnétique est conservé.

La réponse est commune à la question suivante.

4 ❒ V ☒ F Par changement de référentiels galiléens, le champ électrique est conservé.

Soient $\vec{E}$ et $\vec{B}$ les champs dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ et $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ ceux dans $\mathscr{R}'$ galiléen, en translation à la vitesse $\vec{v_e}$ par rapport à $\mathscr{R}$. On note $\vec{v}$ et $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_e}$ les vitesses d'une charge q dans chaque référentiel. La force de Lorentz exercée par les champs sur cette charge s'écrit $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ dans $\mathscr{R}$ et $\vec{f'} = q(\vec{E}' + \vec{v'} \wedge \vec{B}')$ dans $\mathscr{R}'$. En mécanique classique, la force est indépendante du référentiel. On en déduit :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v'} \wedge \vec{B}' \;\Rightarrow\; (\vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B}) + (\vec{v'} \wedge \vec{B}) = \vec{E}' + \vec{v'} \wedge \vec{B}'$$

L'égalité étant vérifiée quelle que soit $\vec{v'}$, on a $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B} = \vec{B}'$.

5 ☒ V ❒ F Le vecteur de Poynting correspond à une puissance par unité de surface.

Si l'on note $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting, la puissance traversant la surface $\vec{\mathrm{d}S}$ est par définition $\mathrm{d}\mathscr{P} = \vec{\Pi} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$.

QCM

6 Cocher la (ou les) équation(s) juste(s) :

❒ **a.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

☒ **b.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

Les équations de Maxwell (à connaître par cœur) sont :

Maxwell pour le flux : $\text{div}\,\vec{B} = 0$	Maxwell Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$
Maxwell Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

7 La forme locale du théorème de Gauss est :

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{E} = 0$

❒ **b.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

☒ **c.** $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

L'intégration de l'équation (c) sur le volume τ donne $\iiint_\tau \text{div}\,\vec{E}\,\text{d}\tau = \iiint_\tau \dfrac{\rho}{\epsilon_0}\text{d}\tau$, intégrale que l'on peut transformer avec la relation de Green-Ostrogradski en $\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} = \dfrac{\iiint \rho\,\text{d}\tau}{\epsilon_0} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ ce qui démontre le théorème de Gauss. C'est pour cela que l'équation locale porte le nom de Maxwell-Gauss.

8 L'équation locale associée au flux nul de $\vec{B}$ à travers une surface fermée S est :

❒ **a.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = 0$

☒ **b.** $\text{div}\,\vec{B} = \vec{0}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

❒ **d.** $\text{div}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul. On applique le théorème de Green-Ostrogradski : $0 = \oiint_\Sigma \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} = \iiint_V \text{div}\,\vec{B}\,\text{d}\tau$. La relation étant valable quel que soit le volume, $\text{div}\,\vec{B} = \vec{0}$.

9 La relation liant le champ au potentiel vecteur est :

❒ **a.** $\text{d}A = -\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell}$

❒ **b.** $\text{d}\vec{B} = -\vec{A}\wedge\overrightarrow{\text{d}\ell}$

☒ **c.** $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$

❒ **d.** $\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,A$

Le champ magnétique est à divergence nulle, or pour tout champ vectoriel $\vec{C}$, $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{C}\right) = 0$. On en déduit que $\vec{B}$ est lié à un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 On considère un contour fermé $\mathscr{C}$ sur lequel s'appuie la surface S d'élément $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ correctement orienté. La circulation de $\overrightarrow{B}$ le long du contour $\mathscr{C}$ s'écrit :

❒ **a.** $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

❒ **b.** $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \mu_0\epsilon_0 \oint_{\mathscr{C}} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

☒ **c.** $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \mu_0\epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

❒ **d.** $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\mu_0\epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

Le théorème de Stokes permet d'écrire $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$, donc l'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \mu_0\epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

11 En régime dépendant du temps, l'équation de conservation de la charge s'écrit :

☒ **a.** $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

❒ **b.** $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = 0$

❒ **c.** $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

❒ **d.** $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

On prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère sachant que $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0$:

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}) = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) = 0$$

12 Dans un métal de conductivité γ, l'équation vérifiée par la densité volumique de charge ρ est :

❒ **a.** $\rho = \gamma E$

☒ **b.** $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0}\rho = 0$

❒ **c.** $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

❒ **d.** $\rho = \frac{\gamma}{\epsilon_0}E$

Dans le métal, la loi d'Ohm locale s'écrit : $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$, donc $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = \gamma\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}$, soit avec Maxwell-Gauss $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} = \gamma\frac{\rho}{\epsilon_0}$. En remplaçant $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j}$ dans l'équation de conservation de la charge, on trouve la réponse **b**.

13 Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires on peut :

❒ **a.** Écrire $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$.

❒ **b.** Négliger le terme $\vec{j}$ devant $\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

❒ **c.** Écrire $\text{div}\,\vec{E} = 0$.

☒ **d.** Écrire $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Dans l'A.R.Q.S., on néglige les effets de propagation. Dans l'équation de Maxwell-Ampère, c'est le terme $\mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ appelé densité de courant de déplacement qui est responsable de la propagation : on le néglige par rapport à $\vec{j}$.

14 Dans l'A.R.Q.S., la forme locale du théorème d'Ampère est :

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

❒ **b.** $\text{div}\,\vec{B} = 0$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$

☒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Le théorème d'Ampère relie la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé Γ aux courants qui le créent : $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{j} \cdot \vec{dS}$, $\Sigma(\Gamma)$ étant une surface s'appuyant sur le contour Γ.

Or d'après le théorème de Stokes, $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} \cdot \vec{dS}$. Par identification entre les deux relations, valables quel que soit le contour fermé Γ, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

15 La conductivité γ d'un métal est de l'ordre de 10^7 S · m^{-1}. On s'intéresse à un champ harmonique de fréquence $f \ll 10^{14}$ Hz.
On donne $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F · m^{-1}. Quelle(s) proposition(s) est(sont) juste(s) ?

☒ **a.** Le terme $\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant $\vec{j}$.

❒ **b.** Le champ $\vec{E}$ est nul.

☒ **c.** La densité volumique ρ est nulle.

❒ **d.** Le champ $\vec{B}$ est nul.

Pour comparer $\vec{j}$ et $\vec{j_d} = \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on écrit $\|\vec{j}\| = \gamma\|\vec{E}\|$ et $\epsilon_0\|\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| = \epsilon_0\omega\|E\|$ avec $\omega = 2\pi f$.
On a donc :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j_d}\|} \sim \frac{\gamma}{\epsilon_0\omega} \sim \frac{10^7}{2\pi\, 8,85 \cdot 10^{-12} f} \sim \frac{1,8 \cdot 10^{17}}{f} \gg 1$$

La réponse **a.** est donc juste.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On résout l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \;\Rightarrow\; \rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

avec $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\gamma}$. On peut donc considérer $\rho = 0$ au bout de quelques τ et il faut pour cela que la période T du champ excitateur $\vec{E}$ soit grande devant τ soit $\dfrac{\tau}{T} \ll 1$ ou $\dfrac{f\epsilon_0}{\gamma} \ll 1$, ce qu'a vérifié le calcul précédent. On en déduit aussi que div $\vec{j} = 0$.

Ces conditions sont *a fortiori* vérifiées dans le cadre de l'A.R.Q.S.

16 On note $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting. Établir le théorème de Poynting ou bilan intégral de puissance :

☒ **a.** $\displaystyle\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \oiint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$

❒ **b.** $\displaystyle\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \oiint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = +\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$

❒ **c.** $\displaystyle\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \iiint_\tau \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\mathrm{d}\tau = -\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$

❒ **d.** $\displaystyle\iiint_\tau \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau + \oiint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$

On considère un volume τ fermé par une surface S. L'énergie électromagnétique contenue dans le volume τ est $\mathscr{E} = \displaystyle\iiint_\tau \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau$. Sa variation entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\mathscr{E}(t+\mathrm{d}t) - \mathscr{E}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\tau \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = \iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

Cette variation est due à la puissance $\mathscr{P}_J$ cédée à la matière par effet Joule :

$\mathscr{P}_J = \displaystyle\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$ et à la puissance $\mathscr{P}_r$ rayonnée à travers S : $\mathscr{P}_r = \displaystyle\oiint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

Conventionnellement, pour une surface fermée, $\mathrm{d}\vec{S}$ est orientée vers l'extérieur, donc $\mathscr{P}_r > 0$ si la puissance est perdue par τ. Le bilan s'écrit donc :

$$\mathscr{E}(t+\mathrm{d}t) - \mathscr{E}(t) = -\mathscr{P}_r\mathrm{d}t - \mathscr{P}_J\mathrm{d}t$$

ce qui après simplification par dt donne le résultat **a**.

17 Déterminer l'équation locale de bilan de puissance :

❒ **a.** $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\epsilon_0 E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}\right]=-\vec{j}\cdot\vec{E}-\Pi$

❒ **b.** $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\epsilon_0 E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}\right]=\vec{j}\cdot\vec{E}-\vec{\Pi}$

❒ **c.** $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\epsilon_0 E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}\right]=\vec{j}\cdot\vec{E}-\operatorname{div}\vec{\Pi}$

☒ **d.** $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\epsilon_0 E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}\right]=-\vec{j}\cdot\vec{E}-\operatorname{div}\vec{\Pi}$

On transforme l'intégrale donnant $\mathscr{P}_r$ avec la relation de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_\tau \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau$$

La relation intégrale ne contient plus que des intégrales de volume. Elle doit être vérifiée $\forall\tau$, on peut donc supprimer les intégrales ce qui donne la relation **d**.

Cet énoncé concerne les questions 18 à 21 :
On considère un fil conducteur cylindrique (conductivité σ) de très grande longueur plongé dans un champ électrique $\vec{E}=E\vec{u_z}$ permanent et uniforme. Le fil a pour rayon a et pour axe Oz. On note r la distance d'un point à l'axe et $\vec{u_r}$ le vecteur radial.

18 Déterminer le vecteur de Poynting pour $r\leq a$:

❒ **a.** $\vec{\Pi}=\vec{0}$

☒ **b.** $\vec{\Pi}=-\dfrac{E^2\sigma r}{2}\vec{u_r}$

❒ **c.** $\vec{\Pi}=\dfrac{E^2\sigma r}{2}\vec{u_r}$

❒ **d.** $\vec{\Pi}=\dfrac{E^2\sigma r}{2}\vec{u_z}$

La densité volumique de courant dans le fil est $\vec{j}=\sigma\vec{E}$. Le champ magnétique créé par un fil cylindrique est un résultat de magnétostatique. Le champ $\vec{B}$ est orthoradial et on le calcule avec le théorème d'Ampère avec un contour circulaire de rayon r, d'axe Oz, orienté suivant $\vec{u_\theta}$. Pour $r\leq a$ le courant enlacé est $I_{enl}=\pi r^2 j=\pi r^2\sigma E$. La circulation de $\vec{B}$ est égale à $2\pi rB$. On en déduit $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 r\sigma E}{2}\vec{u_\theta}$. Le vecteur de Poynting est donc $\vec{\Pi}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=-\dfrac{r\sigma E^2}{2}\vec{u_r}$.

19 Déterminer le vecteur de Poynting pour $r\geq a$:

❒ **a.** $\vec{\Pi}=\vec{0}$

☒ **b.** $\vec{\Pi}=-\dfrac{E^2\sigma a^2}{2r}\vec{u_r}$

❒ **c.** $\vec{\Pi}=\dfrac{E^2\sigma a^2}{2r}\vec{u_r}$

❒ **d.** $\vec{\Pi}=\dfrac{E^2\sigma a^2}{2r}\vec{u_z}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Pour $r \geq a$, le courant enlacé est $I_{enl} = \pi a^2 \sigma E$, donc $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 a^2 \sigma E}{2r}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{\Pi} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\dfrac{a^2 \sigma E^2}{2r}\overrightarrow{u_r}$.

20 Calculer le flux ϕ du vecteur de Poynting à travers la surface d'un cylindre d'axe Oz, de rayon $r \geq a$ et de hauteur ℓ :

❒ **a.** $\phi = 0$

❒ **b.** $\phi = \dfrac{E^2 a^2 \pi r \sigma \ell}{2}$

☒ **c.** $\phi = -E^2 a^2 \pi \sigma \ell$

❒ **d.** $\phi = E^2 a^2 \pi \sigma \ell$

Le flux s'écrit $\phi = \oiint \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Comme $\overrightarrow{\Pi}$ est radial, le flux sur les deux bases du cylindre est nul et donc :

$$\phi = \oiint -\frac{E^2 \sigma a^2}{2r}\overrightarrow{u_r} \cdot \mathrm{d}S\overrightarrow{u_r} = -\frac{E^2 \sigma a^2}{2r} 2\pi r \ell = -\pi E^2 \sigma a^2 \ell$$

21 Quelle(s) proposition(s) est(sont) vraie(s) ?

❒ **a.** Le fil cède de l'énergie au champ par effet Joule.

☒ **b.** Le flux de $\overrightarrow{\Pi}$ est entrant dans le fil.

☒ **c.** Le champ cède de l'énergie au fil.

❒ **d.** Le flux est sortant à cause de l'effet Joule.

À cause de l'effet Joule, l'énergie électromagnétique a tendance à diminuer dans le fil, et pour la maintenir constante, il faut apporter de la puissance par rayonnement. On constate effectivement que le flux du vecteur de Poynting est entrant (selon $-\overrightarrow{u_r}$). C'est le champ qui cède de l'énergie électromagnétique à la matière par effet Joule, à ne pas confondre avec la chaleur due à l'effet Joule que le fil cède à l'extérieur.

22 On considère l'interface chargée (densité surfacique σ) entre deux milieux (1) et (2). On note $\overrightarrow{E}_1$ (respectivement $\overrightarrow{E}_2$) le champ en un point M de l'interface dans le milieu (1) (respectivement dans le milieu (2)). On note $\overrightarrow{N_{12}}$, la normale à la surface, orientée du milieu (1) vers le milieu (2). À la traversée de la surface :

❒ **a.** La composante normale du champ $\overrightarrow{E}$ est continue.

❒ **b.** $\overrightarrow{E}_1 - \overrightarrow{E}_2 = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{N_{12}}$

☒ **c.** La composante tangentielle du champ $\overrightarrow{E}$ est continue.

☒ **d.** $\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{N_{12}}$

On utilise le théorème de Gauss pour la composante normale et la circulation de $\vec{E}$ pour la composante tangentielle. Pour le théorème de Gauss, on définit une petite surface fermée parallélépipédique (figure 4.1), et pour la circulation un petit contour rectangulaire (figure 4.2).

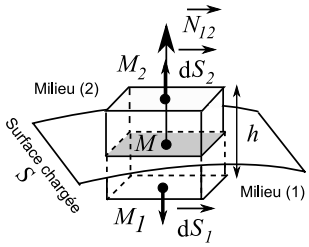


Figure 4.1

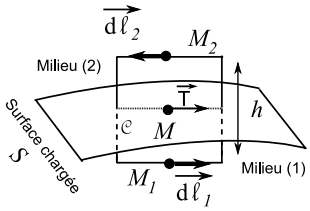


Figure 4.2

Dans le premier cas, le flux du champ à travers la surface est la somme $d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_{lat}$ où $d\phi$ et $d\phi_2$ sont respectivement les flux à travers les surfaces dS_1 et dS_2, et $d\phi_{lat}$ celui à travers les surfaces latérales. On note dS la valeur commune des normes de dS_1 et dS_2. Sachant que la charge intérieure est celle de la surface dS grisée, et que $dS_1 = -dS_2 = -dS\,\overrightarrow{N_{12}}$, le théorème de Gauss donne :

$$\vec{E}(M_1)\cdot\overrightarrow{dS_1} + \vec{E}(M_2)\cdot\overrightarrow{dS_2} + \phi_{lat} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right)\cdot\overrightarrow{N_{12}}dS + \phi_{lat} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}.$$

Lorsqu'on fait tendre M_1 et M_2 vers M, alors $\vec{E}(M_1) \to \vec{E}_1$, $\vec{E}(M_2) \to \vec{E}_2$ et $\phi_{lat} \to 0$. Donc en indiçant par « n » les composantes normales de $\vec{E}$, on a $E_{n2} - E_{n1} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Pour calculer la circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé, on utilise la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday : la circulation dC de $\vec{E}$ le long du contour $\mathscr{C}$ est égale à l'opposée de la dérivée du flux $\phi_{\mathscr{C}}$ de $\vec{B}$ à travers ce contour. On peut écrire :

$$dC = \vec{E}(M_1)\cdot\overrightarrow{d\ell_1} + \vec{E}(M_2)\cdot\overrightarrow{d\ell_2} + dC_{lat} = -\frac{d\phi_{\mathscr{C}}}{dt}$$

où dC_{lat} est la circulation sur les deux côtés latéraux. En notant $\overrightarrow{d\ell_2} = -\overrightarrow{d\ell_1} = d\ell\vec{T}$, on a :

$$dC = \left(\vec{E}(M_1) - \vec{E}(M_2)\right)\cdot\vec{T}d\ell + dC_{lat} = -\frac{d\phi_{\mathscr{C}}}{dt}$$

Lorsqu'on fait tendre M_1 et M_2 vers M, $dC_{lat} \to 0$ et $\phi_{\mathscr{C}} \to 0$. Donc en indiçant par « t » les composantes tangentielles de $\vec{E}$, on a $E_{t2} - E_{t1} = 0$. On retrouve les mêmes équations qu'en statique.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

23 On considère l'interface entre deux milieux (1) et (2) parcourue par une densité surfacique de courant $\vec{j_s}$. On note $\vec{B}_1$ (respectivement $\vec{B}_2$) le champ en un point M de l'interface dans le milieu (1) (respectivement dans le milieu (2)). On note $\overrightarrow{N_{12}}$, la normale à la surface, orientée du milieu (1) vers le milieu (2). À la traversée de la surface :

❒ **a.** La composante tangentielle du champ $\vec{B}$ est continue.

☒ **b.** La composante normale du champ $\vec{B}$ est continue.

☒ **c.** $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \overrightarrow{N_{12}}$

❒ **d.** $\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \overrightarrow{N_{12}}$

Les raisonnements sont semblables à ceux faits pour le champ électrique. L'équation de Maxwell pour le flux donnerait $B_{n2} = B_{n1}$. Pour la circulation, il s'agit d'utiliser l'équation de Maxwell-Ampère. On aurait donc avec le schéma de la figure (4.3) :

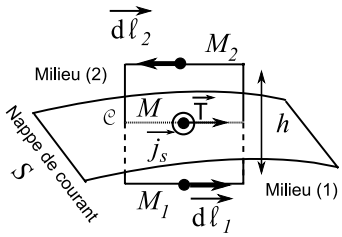


Figure 4.3

$$\left(\vec{B}(M_1) - \vec{B}(M_2)\right) \cdot \vec{T}\,\mathrm{d}\ell + \mathrm{d}C_{lat} = \mu_0 j_s \mathrm{d}\ell + \mu_0 \phi(j_d)$$

où $\phi(j_d)$ est le flux de la densité de courant de déplacement à travers la surface du circuit $\mathscr{C}$. Lorsqu'on fait tendre h vers 0, on trouve $\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \cdot \vec{T} = \mu_0 js$ car $\phi(j_d) \to 0$.

Les deux résultats s'écrivent vectoriellement sous la forme de la réponse **b**. Ce sont les mêmes qu'en statique.

5 Induction électromagnétique

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F La loi de Lenz stipule que le courant induit crée un champ opposé au champ qui l'a créé.

La loi de Lenz est une loi de modération. Lorsque le flux varie, le phénomène d'induction tend à s'opposer à la variation du flux. Par exemple, si l'intensité du champ $\vec{B}$ diminue, le courant induit sera tel qu'il créera un champ de même sens que $\vec{B}$ pour s'opposer à la diminution du flux.

2 ❒ V ☒ F Une inductance mutuelle est toujours positive.

Son signe dépend des sens d'orientation choisis pour les circuits.

3 ☒ V ❒ F Un champ électromoteur d'induction est à circulation non conservative.

Sa circulation est égale à la f.e.m.

4 ☒ V ❒ F La force électromotrice d'induction e_{CD} entre deux points C et D d'un conducteur filiforme s'écrit $e_{CD} = \int_C^D \overrightarrow{E_m}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell_M}$.

C'est la définition de la f.e.m.

5 ☒ V ❒ F Dans le cas de Neuman, le champ électromoteur est $\overrightarrow{E_m} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$.

On retrouve ceci avec l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A})}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \exists V / \overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$$

donc $\overrightarrow{E}$ est la somme du champ électrostatique $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ et du champ électromoteur $\overrightarrow{E_m} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$.

6 ❒ V ☒ F Dans un conducteur se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$, le champ électromoteur est $\overrightarrow{E_m} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

On rappelle que la transformation classique des champs par changement de référentiels galiléens de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ donne :

$$\overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B} \text{ et } \overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$. Le déplacement du conducteur va donc induire un champ électromoteur : $\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

7 ☒ V ❒ F La loi de Faraday s'écrit : $e_m = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$, où ϕ est le flux du champ magnétique à travers le circuit fermé.

Elle se démontre avec l'équation de Maxwell-Faraday. On considère un circuit $\mathscr{C}$ fermé et orienté et une surface S orientée (règle de la main droite) s'appuyant sur le circuit. On peut alors écrire :

$$e_m = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

QCM

8 On considère un élément de circuit CD de résistance R_{CD} et soumis à une f.e.m. d'induction e_{CD} (figure 5.1). Déterminer la relation correcte d'après les conventions sur le sens du courant induit i_{CD} et de e_{CD} :

❒ **a.** $V_D - V_C = -e_{CD} - R_{CD}i$

❒ **b.** $V_D - V_C = e_{CD} + R_{CD}i$

☒ **c.** $V_D - V_C = e_{CD} - R_{CD}i$

❒ **d.** $V_D - V_C = -e_{CD} - R_{CD}i$

On utilise la convention générateur (figure 5.10).

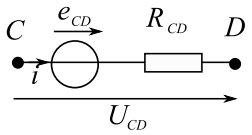


Figure 5.10

On écrit alors : $U_{CD} = V_D - V_C = e_{CD} - R_{CD}i$

Cet énoncé concerne les questions 9 à 11 :
On considère un circuit formé de N spires rectangulaires de côtés a et b soumis au champ magnétique d'un fil très long parcouru par un courant $I = I_0 \cos \omega t$ (figure 5.2). On rappelle que le champ magnétique créé par le fil est $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

9 Le flux ϕ de $\vec{B}$ à travers le circuit est :

❒ **a.** $\phi = -\dfrac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\left(1 + \dfrac{a}{r_1}\right)$

❒ **b.** $\phi = \dfrac{\mu_0 NIab}{2\pi r_1}$

❒ **c.** $\phi = \dfrac{\mu_0 NIb}{2\pi}\left(\dfrac{1}{(r_1 + a)^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right)$

☒ **d.** $\phi = \dfrac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\left(1 + \dfrac{a}{r_1}\right)$

Avec le sens du courant I_c choisi, on trouve avec la règle de la main droite que la normale au circuit est $\vec{e}_\theta$. Le champ $\vec{B}$ étant indépendant de z on choisit comme surface élémentaire $\overrightarrow{dS} = Nb\mathrm{d}r\,\vec{e}_\theta$. Le flux s'écrit alors :

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\int_{r_1}^{r_1+a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{N\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{r_1 + a}{r_1}$$

10 Sachant que le circuit a une résistance R, déterminer l'intensité du courant induit I_c.

☒ **a.** $I_c = \dfrac{N\mu_0 b I_0}{2\pi R} \ln\left(1 + \dfrac{a}{r_1}\right) \omega \sin \omega t$

❒ **b.** $I_c = -\dfrac{N\mu_0 b I_0}{2\pi R} \ln\left(1 + \dfrac{a}{r_1}\right) \omega \sin \omega t$

❒ **c.** $I_c = \dfrac{\mu_0 N I_0 b}{2\pi R} \left(\dfrac{1}{(r_1 + a)^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right) \omega \sin \omega t$

❒ **d.** $I_c = \dfrac{\mu_0 N I_0 a b R}{2\pi r_1} \omega \sin \omega t$

On calcule la f.e.m. induite avec la loi de Faraday :

$$e_m = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{r_1}\right) \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega I_0 \mu_0 N b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{r_1}\right) \sin \omega t$$

Par convention, la f.e.m. est orientée dans le sens choisi pour I_c. La loi des mailles s'écrit :

$$I_c = \frac{e_m}{R} = \frac{\omega I_0 \mu_0 N b}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{r_1}\right) \sin \omega t$$

11 Déterminer la force instantanée $\overrightarrow{F_L}$ exercée par le fil sur le circuit.

❒ **a.** $\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{0}$

☒ **b.** $\overrightarrow{F_L} = \dfrac{N^2 \mu_0^2 b^2 I_0^2}{4\pi^2 R} \left(\dfrac{1}{r_1 + a} - \dfrac{1}{r_1}\right) \ln\left(1 + \dfrac{a}{r_1}\right) \omega \sin \omega t \cos \omega t \overrightarrow{e}_r$

❒ **c.** $\overrightarrow{F_L} = \dfrac{N^2 \mu_0^2 b^2 I_0^2}{4\pi^2 R} \left(\dfrac{1}{r_1 + a} - \dfrac{1}{r_1}\right) \ln\left(1 + \dfrac{a}{r_1}\right) \omega \sin \omega t \cos \omega t \overrightarrow{e}_\theta$

❒ **d.** $\overrightarrow{F_L} = B I_c b \overrightarrow{e}_\theta$

Ce calcul a déjà été effectué dans le chapitre sur les forces de Laplace. On rappelle que les forces exercées sur la branche haute et la branche basse du circuit se compensent. Sur la branche à distance r_1, la force est $\overrightarrow{F_{1L}} = -N b I_c B(r_1) \overrightarrow{e}_r$ et sur celle à distance $r_1 + a$, la force est $\overrightarrow{F_{2L}} = N b I_c B(r_1 + a) \overrightarrow{e}_r$, soit finalement :

$$\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{F_{1L}} + \overrightarrow{F_{2L}} = \frac{\omega I_0^2 \mu_0^2 N^2 b^2}{4\pi^2 R} \ln\left(1 + \frac{a}{r_1}\right) \left(\frac{1}{r_1 + a} - \frac{1}{r_1}\right) \sin \omega t \cos \omega t \overrightarrow{e}_r$$

Cet énoncé concerne les questions 12 à 13 :
On place un cylindre conducteur de conductivité γ (figure 5.3) dans un champ magnétique sinusoïdal $\overrightarrow{B} = B_0 \cos \omega t \overrightarrow{u_z}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

12 On décompose le cylindre en spires élémentaires de hauteur dz et de rayon compris entre r et $r + \mathrm{d}r$. Déterminer le courant induit $i(t)$ dans une de ces spires avec $\overrightarrow{u_\theta}$ comme sens positif d'orientation.

☒ **a.** $i(t) = \dfrac{r\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z}{2} B_0\omega \sin \omega t$

❒ **b.** $i(t) = -\dfrac{r\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z}{2} B_0\omega \sin \omega t$

❒ **c.** $i(t) = -\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z B_0\omega \sin \omega t$

❒ **d.** $i(t) = \gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z B_0\omega \sin \omega t$

Le sens d'orientation de la normale compatible avec l'orientation $\overrightarrow{u_\theta}$ de la spire est $\overrightarrow{u_z}$. Le flux à travers la spire est donc $\phi = \pi r^2 B$ et avec la loi de Faraday : $e_m = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 B_0\omega \sin \omega t$. On utilise l'expression générale de la résistance d'un fil $R = \dfrac{L}{\gamma S}$ avec ici une longueur égale au périmètre de la spire $2\pi r$ et une section égale à drdz, d'où une résistance $\mathrm{d}R = \dfrac{2\pi r}{\gamma \mathrm{d}r\mathrm{d}z}$. On obtient alors le courant induit dans le sens conventionnel $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$i(t) = \frac{e_m}{\mathrm{d}R} = \frac{rB_0\gamma\omega}{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}z \sin \omega t$$

13 Déterminer la puissance moyenne $\mathscr{P}$ dissipée dans le cylindre par induction (courants de Foucault).

❒ **a.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^3 h\pi}{6} B_0^2\omega^2$

❒ **b.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^3 h\pi}{3} B_0^2\omega^2$

☒ **c.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^4 h\pi}{16} B_0^2\omega^2$

❒ **d.** $\mathscr{P} = \dfrac{\gamma a^4 h\pi}{8} B_0^2\omega^2$

La puissance dissipée dans la spire élémentaire est $\mathrm{d}\mathscr{P} = i^2\mathrm{d}R$ soit $\mathrm{d}\mathscr{P} = \dfrac{e_m^2}{\mathrm{d}R}$ ou $\mathrm{d}\mathscr{P} = \dfrac{\pi r^3 B_0^2\omega^2\gamma \sin^2 \omega t}{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}z$. On en déduit :

$$\mathscr{P} = \frac{\pi B_0^2\omega^2\gamma \sin^2 \omega t}{2}\int_0^a r^3\mathrm{d}r \int_0^h \mathrm{d}z = \frac{a^4 h\pi B_0^2\omega^2\gamma \sin^2 \omega t}{8}$$

Avec $\left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle = 1/2$, la valeur moyenne temporelle de $\mathscr{P}$ est donc :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{a^4 h\pi B_0^2\omega^2\gamma}{16}$$

14 Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle M entre un solénoïde (S_1) considéré infini (n_1 spires par unité de longueur, section Σ_1) et une bobine S_2 composée de N_2 spires de section Σ_2 (figure 5.4).

❒ **a.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_2 \dfrac{i_1}{i_2} \cos \theta$

☒ **b.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_2 \cos \theta$

❒ **c.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_1 i_1 \cos \theta$

❒ **d.** $M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_2 i_2 \cos \theta$

Le champ magnétique créé par le solénoïde (S_1) est $\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{u_z}$. Le flux à travers les N_2 spires de la bobine S_2 est :

$$\phi = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{n_2} N_2 \mathrm{d}\Sigma_2 = \mu_0 n_1 i_1 N_2 \Sigma_2 \cos\theta$$

Or $\phi = M i_1$ d'où M.

15 Déterminer le coefficient d'inductance propre L d'un solénoïde de grande longueur ℓ, ayant N_1 spires. On note Σ_1 sa section.

❒ **a.** $L = \mu_0 N_1^2 \Sigma_1$

❒ **b.** $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell^2} \Sigma_1$

❒ **c.** $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell} \Sigma_1 i_1$

☒ **d.** $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell} \Sigma_1$

Supposer que le solénoïde est de grande longueur revient à le considérer infini et négliger les effets de bords. Si l'on appelle son axe Oz, le champ qu'il crée est $\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{u_z}$ avec $n_1 = \dfrac{N_1}{\ell}$. Le flux propre est alors $\phi_p = N_1 B_1 \Sigma_1$. Par définition, $\phi_p = L i_1$ donc $L = \mu_0 \dfrac{N_1^2}{\ell} \Sigma_1$.

Cet énoncé concerne les questions 16 à 17 :
On étudie le système de la figure 5.5 formé de deux circuits couplés par inductance mutuelle M.

16 Écrire les équations des deux circuits.

❒ **a.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 - L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = R_2 i_2 - L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

☒ **c.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M i_2 \\ u_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M i_1 \end{cases}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On a représenté sur la figure 5.11 le circuit électrique équivalent au circuit étudié. Les f.e.m. e_{11} et e_{22} sont celles dues aux inductances propres et e_{21} (respectivement e_{12}) est celle due à l'inductance mutuelle du circuit secondaire sur le circuit primaire (respectivement du circuit primaire sur le circuit secondaire).

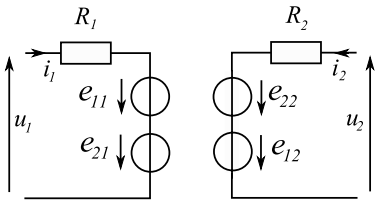


Figure 5.11

On a donc :

$$e_{11} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad e_{22} = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad e_{12} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad e_{11} = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

La loi des mailles pour le circuit (1) s'écrit :

$$u_1 = R_1 i_1 - e_{11} - e_{21} = R_1 i_1 + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

et pour le circuit secondaire

$$u_2 = R_2 i_2 - e_{22} - e_{12} = R_2 i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

17 Écrire l'énergie magnétique totale du système.

☒ **a.** $E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

❒ **b.** $E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$

❒ **c.** $E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + \frac{1}{2}M i_1 i_2$

❒ **d.** $E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2$

Pour le circuit primaire, le bilan de puissance s'écrit :

$$u_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M i_1\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Pour le circuit secondaire, le bilan de puissance s'écrit :

$$u_2 i_2 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M i_2\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

En effectuant la somme on obtient que la puissance totale est :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

avec $\mathscr{P}_g = u_1 i_1 + u_2 i_2$ la puissance fournie par les générateurs, $\mathscr{P}_J = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ la puissance consommée par effet Joule et enfin $\mathscr{P}_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$ la puissance magnétique telle que $\mathscr{P}_m = \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}$.

Cet énoncé concerne les questions 18 à 20 :
On étudie le circuit de la figure (5.6) appelé « rail de Laplace ». Il est constitué d'un barreau CD pouvant se déplacer sans frottement sur des rails parallèles. On modélise la résistance du circuit par R. L'ensemble est plongé dans un champ $\vec{B} = B\vec{u_z}$ uniforme. À $t = 0$, on lance le barreau depuis la position x_0 (pour son centre) avec la vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. Le barreau reste perpendiculaire aux rails lors de son déplacement. On néglige l'inductance propre du circuit.

18 On choisit l'orientation du courant induit de C vers D. Déterminer l'intensité I dans circuit par la loi de Faraday.

❒ **a.** $I = -\dfrac{Bav_0}{R}$

☒ **b.** $I = -\dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

❒ **c.** $I = \dfrac{Bav_0}{R}$

❒ **d.** $I = \dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

Le choix de l'orientation du circuit de C vers D implique une orientation positive de la surface suivant $\vec{u_z}$. On peut calculer la f.e.m. par deux méthodes, soit avec la loi de Faraday soit en déterminant le champ électromoteur puis sa circulation de C à D.

Première méthode demandée dans l'énoncé (loi de Faraday) : la surface du circuit est $S = S_0 + (x - x_0)a$ où S_0 est la surface initiale. La f.e.m. induite est :

$$e_m = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}t} = -Ba\dot{x}$$

Deuxième méthode (champ électromoteur) : le champ électromoteur sur le barreau est $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -\dot{x}B\vec{u_y}$.

La f.e.m. est obtenue par $e_m = \displaystyle\int_C^D \vec{E}_m \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \int_{-a/2}^{a/2} (-\dot{x}B)\mathrm{d}y$. On trouve bien entendu le même résultat.

La loi des mailles dans le circuit donne : $I = \dfrac{-Ba\dot{x}}{R}$.

19 Déterminer l'équation mécanique de la barre de masse m.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{B^2a^2\dot{x}}{mR} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{B^2a^2v_0}{mR} = 0$

☒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{B^2a^2\dot{x}}{mR} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{B^2a\dot{x}}{mR} = 0$

La force Laplace qui s'exerce sur la barre est :

$$\vec{F_L} = I\int_C^D (\mathrm{d}y\vec{u_y}) \wedge \vec{B} = BI\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\ \vec{u_x} = -\frac{B^2a^2\dot{x}}{R}\vec{u_x}$$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la barre, en projection sur Ox s'écrit alors :

$$m\ddot{x} = -\frac{B^2a^2\dot{x}}{R}.$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

20 Exprimer la puissance $\mathscr{P}_L$ de la force de Laplace et comparer à la puissance $\mathscr{P}_I$ de la f.e.m. induite e_m.

❒ **a.** $\mathscr{P}_L = -e_m \dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

☒ **b.** $\mathscr{P}_L = e_m \dfrac{Ba\dot{x}}{R}$

☒ **c.** $\mathscr{P}_L = -\mathscr{P}_I$

❒ **d.** $\mathscr{P}_L = \mathscr{P}_I$

La puissance de la force de Laplace est $\mathscr{P}_L = \overrightarrow{F_L} \cdot \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ soit $\mathscr{P}_L = -\dfrac{B^2a^2\dot{x}^2}{R} = e_m \dfrac{Ba\dot{x}}{R}$.
D'autre part, la puissance de la f.e.m. induite est $\mathscr{P}_I = e_m I = \dfrac{B^2a^2\dot{x}^2}{R}$ donc $\mathscr{P}_L = -\mathscr{P}_I$.
C'est ce qu'on appelle la conversion électromécanique de l'énergie : dans les bilans d'énergie, ces deux puissances se compensent.

Cet énoncé concerne les questions 21 à 24 :
On étudie le système de la figure 5.7 appelé « roue de Barlow ». La roue, de rayon a, peut tourner autour de l'axe Oz et l'on note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. La roue est conductrice et l'on admet que tout se passe comme si le courant ne circulait que selon OA. En A le contact est glissant sans frottement. Un point M de OA est repéré par sa distance r à O.

Le champ $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ est uniforme.

21 On note ω la vitesse de rotation de la roue. Déterminer la f.e.m. d'induction due à ce mouvement (on utilisera le champ électromoteur).

❒ **a.** $e_m = \omega B a^2$

❒ **b.** $e_m = 0$

❒ **c.** $e_m = \omega B a$

☒ **d.** $e_m = \dfrac{\omega B a^2}{2}$

En un point M du segment OA, la vitesse est $\overrightarrow{v(M)} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$. Le champ électromoteur en M s'écrit donc $\overrightarrow{E_m(M)} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \omega r B\overrightarrow{u_r}$. Pour calculer la f.e.m, on détermine la circulation entre O et A :

$$e_m = \int_0^a \overrightarrow{E}_m \cdot \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} = \omega B \int_0^a r\mathrm{d}r = \frac{\omega B a^2}{2}$$

L'erreur à ne pas commettre est de prendre la vitesse du point A dans $\overrightarrow{E}_m$.

22 Déduire de la question précédente l'intensité I du courant dans le circuit.

☒ **a.** $I = \dfrac{e_m + E}{R}$

❒ **b.** $I = \dfrac{-e_m + E}{R}$

❒ **c.** $I = \dfrac{e_m - E}{R}$

❒ **d.** $I = \dfrac{E}{R}$

Avec le sens du courant, qui est cohérent avec le sens conventionnel choisi pour OA, la loi des mailles s'écrit :

$$E + e_m = RI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E + e_m}{R}$$

23 Déterminer le moment de l'action de Laplace sur le disque.

☒ **a.** $\Gamma_{Oz} = -\dfrac{IBa^2}{2}$

❒ **b.** $\Gamma_{Oz} = -\dfrac{IBa^2}{4}$

❒ **c.** $\Gamma_{Oz} = -IBa^2$

❒ **d.** $\Gamma_{Oz} = \dfrac{IBa^2}{2}$

La force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément $\overrightarrow{d\ell} = dr\overrightarrow{u_r}$ autour de M est $\overrightarrow{dF_L} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} = -IBdr\overrightarrow{u_\theta}$. Son moment par rapport à l'axe Oz est : $d\Gamma_{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF_L}\right)\cdot\overrightarrow{u_z}$ soit :

$$d\Gamma_{Oz} = -IBrdr \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{Oz} = -IB\int_0^a rdr = -\frac{IBa^2}{2}$$

24 Dans les bilans de puissance suivants, déterminer ceux qui sont justes.

❒ **a.** $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{J\omega^2}{2}\right) = RI^2 - EI$

☒ **b.** $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{J\omega^2}{2}\right) = EI - RI^2$

❒ **c.** $e_mI - \omega\Gamma_{Oz} = 0$

☒ **d.** $e_mI + \omega\Gamma_{Oz} = 0$

Avec les expressions établies précédemment on a $e_mI + \omega\Gamma_{Oz} = 0$, équation qui traduit la conversion électromécanique de puissance.

L'équation bilan de puissance électrique est $e_mI + EI = RI^2$. L'équation bilan de puissance mécanique est $J\omega\dfrac{d\omega}{dt} = \Gamma_{0z}\omega$ soit $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{J\omega^2}{2}\right) = \Gamma_{0z}\omega$. On peut alors écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = -e_mI = -RI^2 + EI$$

Cet énoncé concerne les questions 25 à 29 :

Cette série de questions étudie le fonctionnement du haut-parleur électromagnétique (figure 5.8).

Il est constitué :

- d'une bobine de N spires, de rayon a, mobile dans l'entrefer d'un aimant. Cette bobine a une résistance R, une inductance L et une masse m ;
- d'un aimant permanent annulaire, qui assure un champ $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_r}$ au niveau de la bobine ;
- d'une membrane, reliée à la bobine et pouvant effectuer de faibles déplacements selon Oz. Cette membrane est reliée à la partie fixe du haut-parleur par des ressorts : force $\overrightarrow{f} = -kz\overrightarrow{u_z}$ où z est la position du centre de la membrane (en l'absence de courant, la membrane est à sa position d'équilibre et $z = 0$).

  La membrane subit aussi une force $\overrightarrow{f_a} = -h\dot{z}\overrightarrow{u_z}$ due au frottement de l'air.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

25 Après avoir déterminé le champ électromoteur d'induction, conséquence du déplacement de la bobine, établir l'expression de la f.e.m. d'induction dans le circuit.

❒ **a.** $e_m = \dot{z}B2\pi a$ ❒ **b.** $e_m = \dot{z}BN\pi a^2$

☒ **c.** $e_m = \dot{z}BN2\pi a$ ❒ **d.** $e_m = \dot{z}BNa$

En un point M de la bobine le champ électromoteur est $\overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ soit $\overrightarrow{E}_m = \dot{z}B(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r}) = B\dot{z}\overrightarrow{u_\theta}$. On a choisi le sens positif pour i (figure 5.8) selon $\overrightarrow{u_\theta}$ d'où la f.e.m. égale à la circulation de $\overrightarrow{E}_m$ le long de toute la bobine :

$$e_m = \int_{\text{bobine}} \overrightarrow{E}_m \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_{\text{bobine}} \dot{z}B\overrightarrow{u_\theta} \cdot (\mathrm{d}\ell\overrightarrow{u_\theta}) = \ell\dot{z}B = N2\pi a\dot{z}B$$

sachant que la longueur ℓ de la bobine est égale à celle de N spires de périmètre $2\pi a$.

26 Déterminer l'équation électrique du circuit.

❒ **a.** $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dot{z}B2\pi Na$ ❒ **b.** $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

☒ **c.** $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \dot{z}B2\pi Na$ ❒ **d.** $E = Ri - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Avec les orientations, l'équation électrique du circuit se déduit du schéma électrique du circuit (figure 5.12) par une loi des mailles.

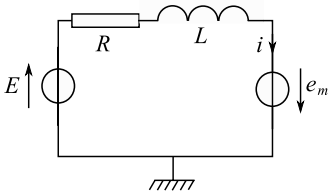


Figure 5.12

On a donc : $E + e_m = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ d'où la réponse **c**.

27 Établir l'équation mécanique du système.

❒ **a.** $m\ddot{z} = -kz - h\dot{z}$ ☒ **b.** $m\ddot{z} = -iB2\pi Na - kz - h\dot{z}$

❒ **c.** $m\ddot{z} = +iB2\pi Na - kz - h\dot{z}$ ❒ **d.** $m\ddot{z} = -iB\pi Na^2 - kz - h\dot{z}$

On calcule d'abord la force de Laplace exercée par le champ de l'aimant sur la bobine. Sur un élément $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell\overrightarrow{u_\theta}$ la force est $\overrightarrow{\mathrm{d}F_L} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}$ soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_L} = i\mathrm{d}\ell B\left(\overrightarrow{u_\theta} \wedge \overrightarrow{u_r}\right) = -iB\mathrm{d}\ell\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F_L} = \int_{\text{bobine}} -iB\mathrm{d}\ell\overrightarrow{u_z} = -N2\pi aiB\overrightarrow{u_z}$$

On applique le théorème de la résultante dynamique à la membrane, en projection sur l'axe Oz :

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} + \overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{u_z} = -iB2\pi Na - kz - h\dot{z}$$

28 On cherche la réponse du circuit en régime sinusoïdal forcé avec $E(t) = E_0 \cos \omega t$ ou sous forme complexe $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$. On cherche à exprimer l'intensité $\underline{i}$ complexe sous la forme $\underline{E} = \underline{Z}\,\underline{i}$. Exprimer $\underline{Z}$ (on aura intérêt à utiliser les variables $\underline{i}$ et $\underline{v} = \underline{\dot{z}}$).

❒ **a.** $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{(B2\pi Na)^2}{h - \dfrac{k}{j\omega} + jm\omega}$

❒ **b.** $\underline{Z} = R + jL\omega$

❒ **c.** $\underline{Z} = R + jL\omega - \dfrac{(B2\pi Na)^2}{h + \dfrac{k}{j\omega} + jm\omega}$

☒ **d.** $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{(B2\pi Na)^2}{h + \dfrac{k}{j\omega} + jm\omega}$

On écrit les équations électrique et mécanique en régime sinusoïdal forcé avec comme variables $\underline{i}$ et $\underline{v} = \underline{\dot{z}}$:

$$E_0 = (R + jL\omega)\,\underline{i} - B2\pi Na\underline{v} \quad \text{et} \quad jm\omega\underline{v} = -\underline{i}B2\pi Na - \frac{k}{j\omega}\underline{v} - h\underline{v}$$

En éliminant $\underline{v}$ entre les deux équations, on en déduit :

$$E_0 = \left[R + jL\omega + \frac{B^2(2\pi Na)^2}{h + \dfrac{k}{j\omega} + mj\omega}\right]\underline{i} = \underline{Zi}$$

29 Le haut-parleur est équivalent au circuit de la figure 5.9. Quelle(s) expression(s) est(sont) juste(s) dans les propositions suivantes ?

☒ **a.** $C_m = \dfrac{m}{(B2\pi Na)^2}$

❒ **b.** $R_m \to \infty$

❒ **c.** $C_m = 0$

☒ **d.** $L_m = \dfrac{(B2\pi Na)^2}{k}$

L'impédance $\underline{Z}$ peut être écrite sous la forme : $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{1}{\underline{Y_m}}$ avec :

$$\underline{Y_m} = \frac{h}{(B2\pi Na)^2} + \frac{k}{j\omega(B2\pi Na)^2} + j\omega\frac{m}{(B2\pi Na)^2} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{j\omega L_m} + j\omega C_m$$

d'où les résultats par identification.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Partie 3

Mécanique des fluides

6 Cinématique des fluides

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les descriptions de Lagrange et Euler.
- La notion de particule fluide.
- La dérivée particulaire d'un champ.
- La notion de débit volumique ou massique.
- Les différentes formes d'écoulement.

Notations. On appellera μ la masse volumique du fluide. La dérivée particulaire d'une grandeur a sera notée $\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t}$ et le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$. On rappelle la définition du vecteur densité de courant de masse $\vec{j_m} = \mu\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse en un point du fluide, celle du débit volumique à travers une surface S : $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ et enfin celle du débit massique à travers une surface S : $D_m = \iint_S \vec{j_m} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 113**.

1 ❒ V ❒ F Le libre parcours moyen ℓ des molécules est petit devant la taille caractéristique L du système étudié.

2 ❒ V ❒ F La notion de particule de fluide se situe à l'échelle microscopique.

3 ❒ V ❒ F La description lagrangienne consiste à suivre le mouvement de la particule de fluide.

4 ❒ V ❒ F Les lignes de courant sont les trajectoires des particules de fluide.

5 ❒ V ❒ F Un écoulement est incompressible si la dérivée particulaire de la masse volumique $\frac{D\mu}{Dt}$ est nulle.

6 ❒ V ❒ F Un écoulement est stationnaire si la dérivée particulaire de la vitesse $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ est nulle.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 113**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

7 L'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique est :

❒ **a.** $\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\mu$

❒ **b.** $\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\mu$

❒ **c.** $\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \cdot (\mu\vec{v})$

❒ **d.** $\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu(\overrightarrow{\text{grad}} \cdot \vec{v})$

8 L'expression de la dérivée particulaire de la vitesse est :

❒ **a.** $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,v$

❒ **b.** $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \cdot \vec{v})\vec{v}$

❒ **c.** $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (v\,\overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v}$

❒ **d.** $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$

9 Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes parmi celles proposées ?

❒ **a.** $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est l'accélération locale.

❒ **b.** $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est l'accélération convective.

❒ **c.** L'accélération locale peut s'écrire : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) \cdot \vec{v}$

❒ **d.** L'accélération convective peut s'écrire : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) \cdot \vec{v}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes parmi celles proposées ?

❒ **a.** Un écoulement est irrotationnel si $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$

❒ **b.** $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

❒ **c.** Si un écoulement est irrotationnel $\exists\phi$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$

❒ **d.** Un écoulement est tourbillonnaire si $\vec{\Omega} = \vec{0}$

11 En l'absence de sources ou de puits, l'équation locale de conservation de la masse peut s'écrire (on pourra utiliser le formulaire) :

❒ **a.** $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} + \text{div}\,\vec{j_m} = 0$

❒ **b.** $\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = 0$

❒ **c.** $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = 0$

❒ **d.** $\frac{\partial\mu}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j_m} = 0$

12 On considère un écoulement stationnaire à travers une conduite de section $S(x)$ variable, d'axe de symétrie Ox (figure 6.1). Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes parmi celles proposées ?

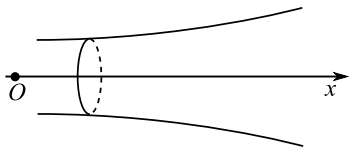


Figure 6.1

❒ **a.** Le débit massique décroît avec x.

❒ **b.** Le débit massique est constant.

❒ **c.** La vitesse est inversement proportionnelle à $S(x)$.

❒ **d.** La vitesse est indépendante de x.

Cet énoncé concerne les questions 13 à 16 :
On considère un écoulement plan pour lequel la vitesse en coordonnées cartésiennes est $\vec{v} = kx\vec{u_x} + b\cos(\omega t)\vec{u_y}$ où k et b sont des constantes positives.

13 Cet écoulement est :

❒ **a.** Stationnaire.

❒ **b.** Incompressible.

❒ **c.** Tourbillonaire.

❒ **d.** Potentiel.

14 Déterminer l'équation des lignes de courant. On note (x_0, y_0) les coordonnées d'un point de référence.

❒ **a.** $y = y_0 + \dfrac{b\cos(\omega t)}{k}\left(\dfrac{1}{x_0^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

❒ **b.** $y = y_0 + \dfrac{k}{2\cos(\omega t)}\left(x^2 - x_0^2\right)$

❒ **c.** $y = y_0 + \dfrac{b\sin(\omega t)}{\omega k x}$

❒ **d.** $y = y_0 + \dfrac{b\cos(\omega t)}{k}\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$

15 Déterminer les coordonnées (X, Y) de la particule de fluide passant par (X_0, Y_0) à $t = 0$.

❒ **a.** $X = X_0 e^{-kt}$

❒ **b.** $X = X_0 e^{kt}$

❒ **c.** $Y = \dfrac{b}{\omega}\sin(\omega t) + Y_0$

❒ **d.** $Y = -\dfrac{b}{\omega}\sin(\omega t) + Y_0$

16 Déterminer l'accélération $\vec{a}$.

❒ **a.** $\vec{a} = k^2 x\vec{u_x} - \omega b\sin(\omega t)\vec{u_y}$

❒ **b.** $\vec{a} = k^2 x\vec{u_x} + \omega b\sin(\omega t)\vec{u_y}$

❒ **c.** $\vec{a} = -\omega b\sin(\omega t)\vec{u_y}$

❒ **d.** $\vec{a} = \omega b\sin(\omega t)\vec{u_y}$

Cet énoncé concerne les questions 17 à 18 :
On modélise une tornade par un écoulement permanent et incompressible. Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega_0}$ supposé uniforme à l'intérieur d'un cylindre (qu'on appelle œil du cyclone), d'axe Oz vertical et de rayon $r \leq a$, et nul à l'extérieur de celui-ci. On utilise les coordonnées cylindriques avec les vecteurs $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

17 Quelles sont les propriétés vérifiées par la vitesse de l'écoulement ?

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{v} = 0$

❒ **b.** $\vec{v} = v(r)\vec{u_\theta}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$

❒ **d.** $\vec{v} = v(r)\vec{u_z}$

18 En appliquant l'équivalent du théorème d'Ampère en magnétostatique, déterminer l'expression de la vitesse.

❒ **a.** Si $r \geq a$, $\vec{v} = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}\vec{u_\theta}$

❒ **b.** Si $r \geq a$, $\vec{v} = \Omega_0 a\vec{u_\theta}$

❒ **c.** Si $r \leq a$, $\vec{v} = \Omega_0 r\vec{u_\theta}$

❒ **d.** Si $r \leq a$, $\vec{v} = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}\vec{u_\theta}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 19 à 22 :
On s'intéresse à l'écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel d'un fluide autour d'un cylindre d'axe Oz et de rayon a. Le cylindre de très grande longueur sera considéré infini. À grande distance, l'écoulement est uniforme de vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z). On rappelle que les expressions des opérateurs sont données dans le formulaire.

19 Quelles sont les propriétés vérifiées par le potentiel des vitesses ϕ ?

❒ **a.** $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \overrightarrow{0}$ ❒ **b.** $\Delta\phi = 0$

❒ **c.** $\phi(r, \theta, z) = \phi(r)$ ❒ **d.** $\phi(r, \theta, z) = \phi(r, \theta)$

20 On cherche le potentiel des vitesses sous la forme $\phi = \dfrac{f(\theta)}{r} + \phi_0$. Déterminer ϕ_0.

❒ **a.** $\phi_0 = v_0 r \sin\theta + cte$ ❒ **b.** $\phi_0 = v_0 \cos\theta + cte$

❒ **c.** $\phi_0 = v_0 \sin\theta + cte$ ❒ **d.** $\phi_0 = v_0 r \cos\theta + cte$

21 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(\theta)$.

❒ **a.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} + f = 0$ ❒ **b.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} - f = 0$

❒ **c.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} - \dfrac{2f}{r^2} = 0$ ❒ **d.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} = 0$

22 En utilisant les conditions aux limites sur le cylindre, déterminer l'expression de la vitesse du fluide.

❒ **a.** $v_r = v_0\left(\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right)\cos\theta$ ❒ **b.** $v_r = v_0\left(-\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right)\cos\theta$

❒ **c.** $v_\theta = -v_0\left(\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right)\sin\theta$ ❒ **d.** $v_\theta = v_0\left(\dfrac{a^2}{r^2} - 1\right)\sin\theta$

Voir les corrigés du chapitre 6 page 113.

7

Étude phénoménologique des fluides réels

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de viscosité d'un fluide.
- Le nombre de Reynolds.
- La distinction entre écoulement laminaire et écoulement turbulent.
- La notion d'écoulement parfait.

Notations. On notera μ la masse volumique du fluide, $P(M)$ la pression en un point M, η la viscosité dynamique, ν la viscosité cinématique et $R_e = \dfrac{VL}{\nu}$ le nombre de Reynolds, où L et V sont respectivement une dimension caractéristique de l'obstacle et V une vitesse caractéristique de l'écoulement.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 119**.

1 ❒ V ❒ F Dans un écoulement parfait, les particules de fluide évoluent de manière adiabatique et réversible.

2 ❒ V ❒ F On considère un volume $\mathscr{V}$ de fluide. La contrainte surfacique exercée par le reste du fluide sur une surface $\mathrm{d}S_M$ autour d'un point M de la surface extérieure entourant $\mathscr{V}$ est $-P(M)\overrightarrow{\mathrm{d}S_M}$ avec les conventions habituelles pour $\overrightarrow{\mathrm{d}S_M}$.

3 ❒ V ❒ F Un écoulement est laminaire dans le cas où R_e est plutôt petit.

4 ❒ V ❒ F C'est en dehors de la couche limite que les effets de la viscosité sont les plus importants.

5 ❒ V ❒ F Dans la configuration du schéma 7.1 et pour un fluide newtonien, la composante tangentielle exercée par le fluide (1) sur le fluide (2) pour la surface $\overrightarrow{dS}$ est $\overrightarrow{dF_t} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial y} dS \overrightarrow{u_x}$.

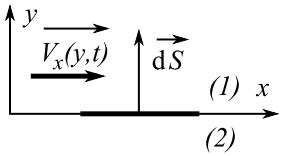


Figure 7.1

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 120**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

6 On choisit l'axe Oz vertical et les axes Ox et O_y horizontaux. Les forces de pression surfaciques sur un volume de fluide sont équivalentes à une force de densité volumique $\overrightarrow{D_{v,P}}$:

❒ **a.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = +\overrightarrow{\text{grad}}\, P$

❒ **b.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = -\frac{dP}{dz}\overrightarrow{u_z}$

❒ **c.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = +\frac{dP}{dz}\overrightarrow{u_z}$

❒ **d.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$

Cet énoncé concerne les questions 7 à 8 :

On s'intéresse à l'écoulement autour d'un objet. On rappelle l'expression de la traînée : $T = \frac{1}{2}\mu C_x S V^2$, où C_x est le coefficient de traînée, S le maître-couple (section transversale de l'objet par rapport à la direction de l'écoulement), et V la vitesse caractéristique de l'écoulement.

On a représenté sur la figure 7.2, l'allure de la courbe $C_x = f(R_e)$ en échelles logarithmiques. La tangente (droite en pointillés) pour les faibles valeurs de R_e a pour équation $\log C_x = -\log R_e + \log 24$.

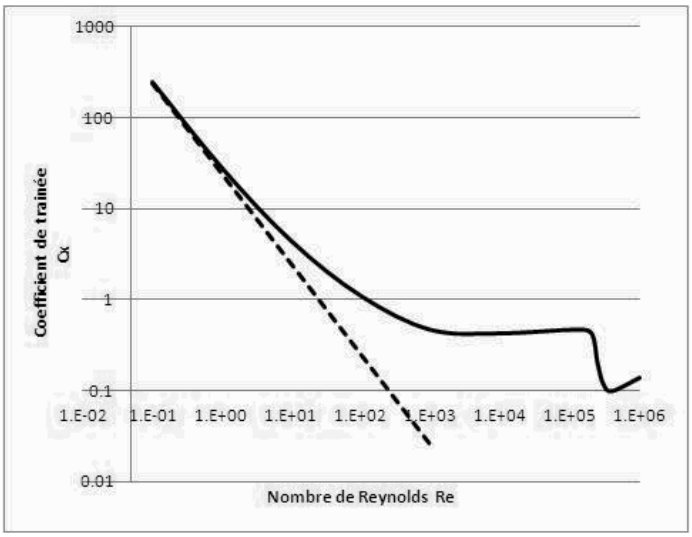


Figure 7.2

7 Déterminer l'expression de la traînée pour $R_e < 1$.

❒ **a.** $T = 12\dfrac{S\mu L}{\nu}V^3$

❒ **b.** $T = 12\dfrac{S\mu\nu}{L}V$

❒ **c.** $T = \dfrac{1}{2}\left(24 - \dfrac{VL}{\nu}\right)S\,V^2$

❒ **d.** $T = \dfrac{\mu\nu}{2L}S\,V$

8 Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes ?

❒ **a.** Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, la traînée est constante.

❒ **b.** Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, la traînée est proportionnelle à V.

❒ **c.** Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, la traînée est proportionnelle à V^2.

❒ **d.** La traînée est plus faible pour $R_e \sim 10^4$ que pour $R_e \sim 10$.

9 On s'intéresse à une particule de fluide de section S et d'épaisseur dy figure 7.3. On se place dans le cas d'un champ de vitesse $\overrightarrow{V} = V_x(y,t)\overrightarrow{u_x}$ avec $V_x(y,t)$ fonction croissante de y. Déterminer l'expression de la densité volumique $\overrightarrow{D_{v,c}}$ de la force de cisaillement s'exerçant sur cette particule de fluide.

❒ **a.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_x}$

❒ **b.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = -\eta\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_x}$

❒ **c.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\overrightarrow{u_y}$

❒ **d.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_y}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

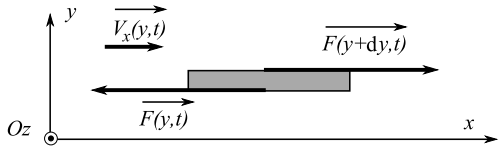


Figure 7.3

10 Écrire dans le cas général l'équation du mouvement du fluide en prenant en compte une densité volumique de force $\overrightarrow{f_v}$.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} - \eta\Delta\overrightarrow{v}$

❒ **b.** $\mu\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} - \eta\Delta\overrightarrow{v}$

❒ **c.** $\mu\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} - \eta\Delta\overrightarrow{v}$

❒ **d.** $\mu\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} + \eta\Delta\overrightarrow{v}$

11 On note τ_c et τ_d les temps caractéristiques de transport de la quantité de mouvement respectivement par convection et diffusion. Quelle(s) est(sont) la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes ?

❒ **a.** $\tau_c \sim \dfrac{L}{V}$

❒ **b.** $\tau_d \sim \dfrac{L^2}{\eta}$

❒ **c.** $\dfrac{\left\|\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v}\right\|}{\nu\|\Delta\overrightarrow{v}\|} \sim \dfrac{\tau_d}{\tau_c}$

❒ **d.** $R_e \sim \dfrac{\tau_c}{\tau_d}$

12 On note δ l'épaisseur de la couche limite laminaire pour l'écoulement autour d'un obstacle. Quelle(s) est(sont) la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes ?

❒ **a.** $\delta \sim L\sqrt{R_e}$

❒ **b.** $\delta \sim \dfrac{L}{\sqrt{R_e}}$

❒ **c.** Un écoulement est assimilable à un écoulement parfait en dehors de la couche limite.

❒ **d.** Les effets de la viscosité sont les plus importants en dehors de la couche limite.

13 On note $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$ les vecteurs tangentiel et normal en un point M d'un obstacle. Pour un fluide parfait, les conditions aux limites s'écrivent :

❒ **a.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle})$

❒ **b.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) = \overrightarrow{0}$

❒ **c.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide})\cdot\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle})\cdot\overrightarrow{u_t}$

❒ **d.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide})\cdot\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle})\cdot\overrightarrow{u_n}$

14 Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, les conditions aux limites pour un fluide réel s'écrivent :

❒ **a.** $\vec{v}(M \in \text{ fluide}) = \vec{v}(M \in \text{ obstacle})$

❒ **b.** $\vec{v}(M \in \text{ fluide}) = \vec{0}$

❒ **c.** $\vec{v}(M \in \text{ fluide}) \cdot \vec{u_t} = \vec{v}(M \in \text{ obstacle}) \cdot \vec{u_t}$

❒ **d.** $\vec{v}(M \in \text{ fluide}) \cdot \vec{u_n} \neq \vec{v}(M \in \text{ obstacle}) \cdot \vec{u_n}$

15 Dans le cas d'un écoulement à faible nombre de Reynolds, l'équation du mouvement obtenue à la question (10) s'écrit :

❒ **a.** $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v} + \eta\Delta\vec{v}$

❒ **b.** $\mu\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v} + \eta\Delta\vec{v}$

❒ **c.** $\mu\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v} + \eta\Delta\vec{v}$

❒ **d.** $\mu\dfrac{\text{D}\vec{v}}{\text{D}t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v}$

Voir les corrigés du chapitre 7 page 119.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 Équations locales de la dynamique des fluides

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les équations d'Euler et de Navier-Stokes.
- Des exemples de résolution dans le cas de fluides visqueux.
- La relation de Bernoulli.
- Des applications de la relation de Bernoulli.

Notations. On notera μ la masse volumique du fluide, $P(M)$ la pression en un point M, η la viscosité dynamique, ν la viscosité cinématique et $R_e = \dfrac{VL}{\nu}$ le nombre de Reynolds, où L et V sont respectivement une dimension caractéristique de l'obstacle et V une vitesse caractéristique de l'écoulement.
L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est uniforme et verticale.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 125**.

1 ❒ V ❒ F Dans un écoulement parfait unidirectionnel, la répartition de la pression perpendiculairement aux lignes de courant obéit aux lois de la statique des fluides.

2 ❒ V ❒ F L'effet Venturi correspond à une augmentation de la pression lorsque la vitesse du fluide augmente.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 125**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

3 On note $\overrightarrow{D_v}$ la densité volumique des forces extérieures. L'équation d'Euler pour un fluide parfait peut s'écrire :

❒ **a.** $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v}$

❒ **b.** $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v}$

❒ **c.** $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v}$

❒ **d.** $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f_v}$

4 On note $\vec{T}$ la tangente en un point d'une ligne de courant et $\vec{N}$ la normale dirigée vers le centre de courbure. On rappelle l'expression de la dérivée particulaire dans cette base : $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ où R est le rayon de courbure. En l'absence de forces volumiques :

❒ **a.** La pression augmente lorsqu'on s'approche du centre de courbure.

❒ **b.** La pression ne varie pas lorsqu'on s'approche du centre de courbure.

❒ **c.** La pression diminue lorsqu'on s'approche du centre de courbure.

❒ **d.** La variation de la pression est imprévisible.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 5 à 7 :
En approfondissement, on étudie l'écoulement de Poiseuille cylindrique qui consiste en l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux dans un tuyau cylindrique de rayon a, d'axe Oz horizontal. On néglige les effets de la pesanteur. Le fluide est soumis à une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L$, où P_0 est la pression à l'entrée de la conduite ($z = 0$) et P_L celle à la sortie ($z = L$). On utilise les coordonnées cylindriques.

5 D'après les invariances, les conditions aux limites et le fait que l'écoulement est incompressible, la vitesse en un point du fluide s'écrit :

❒ **a.** $\vec{v} = v(r)\vec{u_z}$ ❒ **b.** $\vec{v} = v(r,z)\vec{u_z}$

❒ **c.** $\vec{v} = v(z)\vec{u_z}$ ❒ **d.** $\vec{v} = v(r)\vec{u_r}$

6 En utilisant l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques (voir formulaire 16), montrer que P est indépendant de r et déterminer la projection de l'équation du mouvement sur Oz.

❒ **a.** $\dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = 0$ ❒ **b.** $\dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = \dfrac{\Delta P}{L}$

❒ **c.** $\eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\dfrac{\Delta P}{L}$ ❒ **d.** $\dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = -\dfrac{\Delta P}{L}$

7 Déterminer l'expression de la vitesse et celle du débit massique D_m.

❒ **a.** $v = \dfrac{\Delta P}{4L\eta}\left(r^2 - a^2\right)$ ❒ **b.** $v = \dfrac{\Delta P}{4L\eta}\left(a^2 - r^2\right)$

❒ **c.** $D_m = \dfrac{\pi\mu a^4}{8L\eta}\Delta P$ ❒ **d.** $D_m = \dfrac{\mu a^3}{6L\eta}\Delta P$

Cet énoncé concerne les questions 8 à 9 :
On reprend l'étude de la tornade effectuée dans le chapitre de cinématique aux questions 17 et 18. On rappelle qu'on modélise une tornade par un écoulement parfait, permanent et incompressible. Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega_0}$ supposé uniforme à l'intérieur d'un cylindre (qu'on appelle œil du cyclone), d'axe Oz vertical et de rayon $r \leq a$, et nul à l'extérieur de celui-ci. On a montré qu'en coordonnées cylindriques $\vec{v} = \Omega_0 r\vec{u_\theta}$ pour $r \leq a$ et $\vec{v} = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}\vec{u_\theta}$ pour $r \geq a$.

8 Déterminer les équations différentielles du mouvement.

❒ **a.** Pour $r \leq a$
$$\begin{cases} \mu\Omega_0^2 r = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

❒ **b.** Pour $r \leq a$
$$\begin{cases} 3\mu\Omega_0^2 r = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

❒ **c.** Pour $r \geq a$
$$\begin{cases} -\mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{r} = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

❒ **d.** Pour $r \geq a$
$$\begin{cases} -\mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{r^3} = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

9 La pression pour l'altitude $z = 0$, loin du centre de la tornade est P_0. Déterminer les expressions de $P(r, z)$ pour les deux zones $r \leq a$ et $r \geq a$.

❒ **a.** $P = P_0 + \mu\dfrac{\Omega_0^2 r^2}{2} - \mu g z$ pour $r \leq a$.

❒ **b.** $P = P_0 + \mu\dfrac{\Omega_0^2}{2}\left(r^2 - 2a^2\right) - \mu g z$ pour $r \leq a$.

❒ **c.** $P = P_0 - \mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{2r^2} - \mu g z$ pour $r \geq a$.

❒ **d.** $P = P_0 - \mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{4r^4} - \mu g z$ pour $r \geq a$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 On étudie un fluide parfait n'étant soumis qu'à la force de pesanteur comme force extérieure. L'écoulement est supposé incompressible et potentiel avec $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.

❒ **a.** L'équation $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = f(t)$ est valable dans tout le fluide.

❒ **b.** L'équation $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = f(t)$ n'est valable que le long d'une ligne de courant.

❒ **c.** L'équation $\dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = cte$ est valable dans tout le fluide.

❒ **d.** L'équation $\dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = cte$ n'est valable que le long d'une ligne de courant.

11 Tube de Pitot. On considère un écoulement incompressible permanent, de vitesse $\vec{V_0}$ à grande distance, parallèle au tube (figure 8.1).

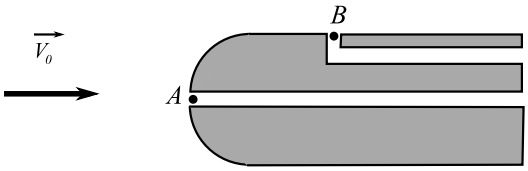


Figure 8.1

On mesure les pressions P_A et P_B :

❒ **a.** $P_A = P_B + \dfrac{\mu V_0^2}{2}$

❒ **b.** $P_A = P_B$

❒ **c.** $P_B = P_A + \dfrac{\mu V_0^2}{2}$

❒ **d.** $P_B + P_A = \dfrac{\mu V_0^2}{2}$

Cet énoncé concerne les questions 12 à 15 :
Cette série de questions étudie une solution au phénomène de cavitation dans une canalisation. On s'intéresse à une conduite forcée de diamètre constant D (figure 8.2). Cette canalisation est reliée à un réservoir en altitude et débouche à l'air libre à son autre extrémité au point A. On suppose que la surface libre de l'eau du réservoir est immobile et reste à l'altitude $z = 0$. On note P_0 la pression atmosphérique en A et B et $\Delta z = z_B - z_A$ le dénivelé.

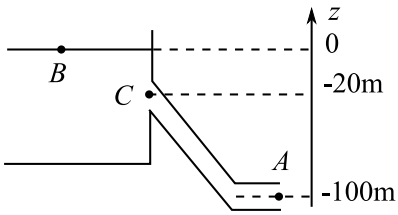


Figure 8.2

12 Déterminer la vitesse v_A de l'eau au point A ainsi que la pression P_M en un point M de la canalisation en fonction de son altitude z_M.

❒ **a.** $v_A = \sqrt{2g(z_C - z_A)}$

❒ **b.** $v_A = \sqrt{2g(z_B - z_A) + \dfrac{P_0}{\mu}}$

❒ **c.** $P_M = P_0 + \mu g(z_A - z_M)$

❒ **d.** $P_M = P_0 + \mu g(z_B - z_M)$

13 La pression de vapeur saturante étant très basse à la température de l'eau, on la considère quasiment nulle. Déterminer la condition pour qu'il y ait formation de bulles dans la canalisation (phénomène de cavitation). On rappelle $P_0 = 1$ bar, $\mu = 10^3$ kg et on prendra $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

❒ **a.** $z_B - z_M > \dfrac{P_0}{\mu g}$

❒ **b.** $z_M - z_A > \dfrac{P_0}{\mu g}$

❒ **c.** $z_M < -90$ m

❒ **d.** $z_M > -90$ m

14 On ajoute à l'extrémité de la canalisation (en A) un embout réducteur en forme de bouteille, de section $d < D$ en sortie (figure 8.3). Déterminer la vitesse en A et en sortie S.

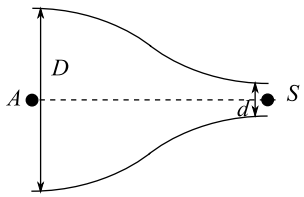


Figure 8.3

❒ **a.** $v_A = \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

❒ **b.** $v_A = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

❒ **c.** $v_S = \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

❒ **d.** $v_S = \left(\dfrac{D}{d}\right)^2 \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

15 Déterminer la condition sur d pour qu'il n'y ait plus cavitation.

❒ **a.** $\dfrac{d}{D} \leq \left(1 + \dfrac{P_0}{\mu g(z_B - z_A)} + \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

❒ **b.** $\dfrac{d}{D} \leq \left(\dfrac{P_0}{\mu g(z_B - z_A)} + \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

❒ **c.** $\dfrac{d}{D} \leq \left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

❒ **d.** $\dfrac{d}{D} \geq \left(1 + \dfrac{P_0}{\mu g(z_B - z_A)} + \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

Voir les corrigés du chapitre 8 page 125.

Bilans dynamiques et thermodynamiques

9

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de surface de contrôle.
- Le passage d'un système ouvert à un système fermé.
- Des bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique pour un fluide en écoulement.
- Des bilans d'énergie et d'enthalpie pour un fluide en écoulement.

Notations. On rappelle que pour faire l'étude d'un fluide en écoulement, **on se ramène à un système fermé** (S) **entre les instants** t **et** $t + \mathrm{d}t$ (figure 9.1).

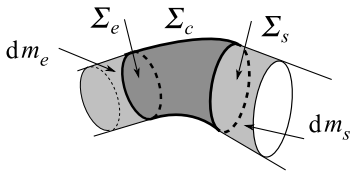


Figure 9.1

On définit **une surface de contrôle** Σ_c qui délimite un volume $\mathscr{V}_c$ appelé **volume de contrôle** (gris foncé sur la figure). Le système fermé (S) est constitué :

- à l'instant t, du fluide dans $\mathscr{V}_c$ et de la masse $\mathrm{d}m_e$ (gris clair à gauche) entrant dans Σ_c entre t et $t + \mathrm{d}t$ à travers Σ_e ;
- à l'instant $t + \mathrm{d}t$, ce système est constitué du fluide dans $\mathscr{V}_c$ et de la masse $\mathrm{d}m_s$ (gris clair à droite) sortant de Σ_c entre t et $t + \mathrm{d}t$ à travers Σ_s.

La variation d'une grandeur extensive A pour (S) entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ sera notée $\mathrm{d}A = A(t + \mathrm{d}t) - A(t)$.

Toutes les grandeurs seront indicées avec un « e » pour $\mathrm{d}m_e$ et un « s » pour $\mathrm{d}m_s$. Les grandeurs extensives massiques seront notées en lettres minuscules (u : énergie interne massique, h : enthalpie massique, s : entropie massique...). On notera z l'altitude, μ la masse volumique du fluide, $P(M)$ la pression en un point M, D_v le débit volumique et D_m le débit massique.

L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est uniforme et verticale.

On se limite à des écoulements unidimensionnels.

Ce chapitre contient essentiellement des exemples d'applications des bilans.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 132**.

1 ❒ V ❒ F Un fluide en écoulement représente un système fermé.

2 ❒ V ❒ F Pour une grandeur extensive A dont la grandeur massique est notée a, le débit convectif est $D_A = aD_m$.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 132**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

3 On s'intéresse à une grandeur extensive A et sa grandeur massique a. Déterminer la variation $\mathrm{d}A$ de A pour le système (S) entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ dans le cas d'un écoulement unidimensionnel.

❒ **a.** $\mathrm{d}A = D_m(a_s - a_e) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

❒ **b.** $\mathrm{d}A = D_m\mathrm{d}t(a_s - a_e) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

❒ **c.** $\mathrm{d}A = D_m\mathrm{d}t(a_e - a_s) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

❒ **d.** $\mathrm{d}A = D_v\mathrm{d}t(a_s - a_e) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

Cet énoncé concerne les questions 4 à 5 :
On étudie dans les questions suivantes le décollage d'une fusée de masse à vide m_0. La fusée emporte au décollage une masse de carburant et comburant m_c. On notera $M(t) = m_0 + m_c(t)$ la masse totale de la fusée à l'instant t. On considère le référentiel terrestre $\mathscr{R}_t$ galiléen et on note $\mathscr{R}_f$ celui de la fusée. Les gaz de propulsion sont éjectés à une vitesse constante $\overrightarrow{u}$ dans $\mathscr{R}_f$ avec un débit massique constant et on note $\overrightarrow{V(t)}$ la vitesse de la fusée à l'instant t dans le référentiel $\mathscr{R}_t$.

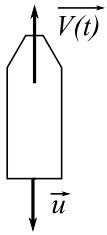


Figure 9.2

4 Après avoir défini le système fermé entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, exprimer les quantités de mouvement de ce système à ces deux instants.

❒ **a.** $\vec{P}(t) = M\vec{V}(t)$

❒ **b.** $\vec{P}(t) = M\left(\vec{V}(t) + \vec{u}\right)$

❒ **c.** $\vec{P}(t + \mathrm{d}t) = (M - D_m\mathrm{d}t)\,\vec{V}(t + \mathrm{d}t) + D_m\mathrm{d}t\,\vec{u}$

❒ **d.** $\vec{P}(t + \mathrm{d}t) = (M - D_m\mathrm{d}t)\,\vec{V}(t + \mathrm{d}t) + D_m\mathrm{d}t\left(\vec{u} + \vec{V}(t + \mathrm{d}t)\right)$

5 En déduire la force de poussée $\vec{F_p}$ due à l'éjection des gaz.

❒ **a.** $\vec{F_p} = -D_m\vec{u}$

❒ **b.** $\vec{F_p} = D_m\vec{u}$

❒ **c.** $\vec{F_p} = -D_m\left(\vec{u} + \vec{V}\right)$

❒ **d.** $\vec{F_p} = D_m\left(\vec{u} + \vec{V}\right)$

Cet énoncé concerne les questions 6 à 8 :

Un liquide incompressible traverse une canalisation coudée (figure 9.3) horizontale. L'écoulement est unidimensionnel et permanent. le liquide entre dans le coude à travers la surface S_1 avec une vitesse $\vec{v_1}$ et ressort du coude à travers la surface S_2 avec une vitesse $\vec{v_2} = v_2\vec{u_X}$, le vecteur unitaire $\vec{u_X}$ faisant un angle α avec l'axe Ox. La pression est P_1 en amont du coude et P_2 en aval.

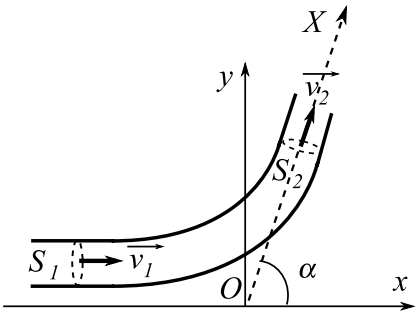


Figure 9.3

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

6 Après avoir défini un volume de contrôle adapté, déterminer la variation de quantité de mouvement du fluide dans le coude entre t et $t + \mathrm{d}t$.

❒ **a.** $\mathrm{d}\vec{p} = D_m(\vec{v_1} - \vec{v_2})\mathrm{d}t$

❒ **b.** $\mathrm{d}\vec{p} = D_m(\vec{v_2} + \vec{v_1})\mathrm{d}t$

❒ **c.** $\mathrm{d}\vec{p} = D_m(v_2 \cos\alpha - v_1)\vec{u_x}\mathrm{d}t$

❒ **d.** $\mathrm{d}\vec{p} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1})\mathrm{d}t$

7 La force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le tuyau s'écrit :

❒ **a.** $\vec{F} = D_m(\vec{v_1} - \vec{v_2})$

❒ **b.** $\vec{F} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) - P_1 S_1 \vec{u_x} + P_2 S_2 \vec{u_X}$

❒ **c.** $\vec{F} = D_m(\vec{v_1} - \vec{v_2}) + P_1 S_1 \vec{u_x} - P_2 S_2 \vec{u_X}$

❒ **d.** $\vec{F} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$

8 Exprimer les composantes F_x et F_y de la force exercée par le fluide sur le tuyau en fonction de P_1, S_1, S_2, D_m μ et α.

❒ **a.** $F_x = P_1(S_1 - S_2 \cos\alpha)$

❒ **b.** $F_x = P_1(S_1 - S_2 \cos\alpha) - \dfrac{D_m^2}{2\mu S_1}\left(\dfrac{S_2}{S_1}\cos\alpha + \dfrac{S_1}{S_2}\cos\alpha - 2\right)$

❒ **c.** $F_y = -P_1 S_2 \sin\alpha - \dfrac{D_m^2}{2\mu S_1}\left(\dfrac{S_2}{S_1} + \dfrac{S_1}{S_2}\right)\sin\alpha$

❒ **d.** $F_y = P_1 S_2 \sin\alpha$

Cet énoncé concerne les questions 9 à 13 :

Les questions suivantes étudient un modèle d'écoulement unidimensionnel autour d'une hélice d'avion qui se déplace à vitesse constante dans le référentiel terrestre galiléen. On se place dans le référentiel lié à l'hélice que l'on suppose lui aussi galiléen. On a dessiné en pointillé la surface de contrôle S_c de l'air en écoulement permanent incompressible qui traverse l'hélice (figure 9.4). Il pénètre dans cette surface par la section S_1 à la vitesse $\vec{v_1}$ (opposée à la vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre) et ressort par la section S_2 à la vitesse $\vec{v_2}$.

On note $\vec{v_h}$ la vitesse de l'air au niveau de l'hélice.

On néglige l'effet de la pesanteur, donc la pression autour de la surface de contrôle est uniforme et égale à la pression atmosphérique P_0.

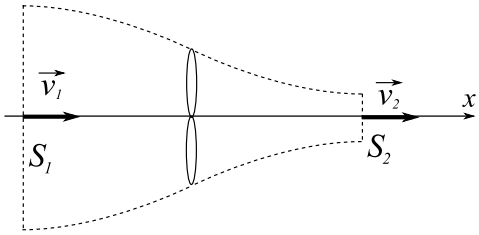


Figure 9.4

9 Exprimer la force horizontale $\vec{F} = F\vec{u_x}$ exercée par l'air sur l'hélice.

❒ **a.** $F_x = D_m(v_2 - v_1)$ ❒ **b.** $F_x = D_m(v_2 - v_1) + P_0(S_1 - S_2)$

❒ **c.** $F_x = D_m(v_1 - v_2)$ ❒ **d.** $F_x = D_m(v_1 - v_2) - P_0(S_1 - S_2)$

10 À l'aide du résultat de la question précédente et d'un bilan d'énergie, déterminer la puissance $\mathscr{P}_r$ reçue par l'hélice de la part de l'air.

❒ **a.** $\mathscr{P}_r = D_m v_h(v_1 - v_2)$ ❒ **b.** $\mathscr{P}_r = D_m(v_2 - v_1)^2$

❒ **c.** $\mathscr{P}_r = \dfrac{D_m}{2}(v_1^2 - v_2^2)$ ❒ **d.** $\mathscr{P}_r = \dfrac{D_m}{2}v_h^2$

11 On note P_{gh} et P_{dh} les pressions de l'air juste avant et juste après l'hélice. Déterminer la vitesse v_h de l'air au niveau de l'hélice ainsi que la différence de pression $\Delta P = P_{gh} - P_{dh}$

❒ **a.** $v_h = \dfrac{v_2 - v_1}{2}$ ❒ **b.** $v_h = \dfrac{v_2 + v_1}{2}$

❒ **c.** $\Delta P = 0$ ❒ **d.** $\Delta P = \dfrac{1}{2}\mu\left(v_1^2 - v_2^2\right)$

12 On appelle S_h la section du volume de contrôle au niveau de l'hélice. Exprimer la composante F_x de la force et la puissance $\mathscr{P}_r$ reçue par l'hélice.

❒ **a.** $F_x = \dfrac{\mu}{2}(v_1^2 - v_2^2)S_h$ ❒ **b.** $F_x = -P_0 S_h$

❒ **c.** $\mathscr{P}_r = \dfrac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)S_h v_h$ ❒ **d.** $\mathscr{P}_r = P_0 S_h v_h$

13 La puissance disponible $\mathscr{P}_d$ est celle qui serait apportée par l'air en l'absence de l'hélice à travers la même surface S_h à la vitesse v_1. En utilisant l'expression de v_h en fonction de v_1 et v_2, déterminer le rendement η de l'hélice.

❒ **a.** $\eta = 4\dfrac{v_h^2}{v_1^2}\left(1 - \dfrac{v_h}{v_1}\right)$ ❒ **b.** $\eta = \dfrac{v_1^2}{4v_h(v_1 - v_h)}$

❒ **c.** $\eta = 2\dfrac{v_h^2}{v_1^2}\left(1 - \dfrac{v_h}{v_1}\right)$ ❒ **d.** $\eta = 4\left(\dfrac{v_1}{v_h} - 1\right)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 14 à 17 :

Cette série de questions étudie le fonctionnement d'un tourniquet (figure 9.5). Il est alimenté par sa base avec un débit massique d'eau constant D_m. Le tube vertical d'axe Oz sera considéré de rayon négligeable. Il alimente deux tubes horizontaux de longueur a terminés par des embouts eux aussi horizontaux, de section de sortie s, faisant un angle α avec la normale aux tubes.

Il est soumis à un couple résistant de moment $-\Gamma$ ($\Gamma > 0$) par rapport à Oz.

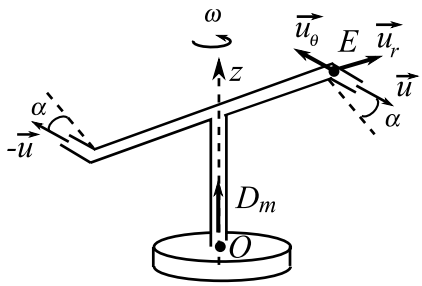


Figure 9.5

Le moment d'inertie J du tourniquet et de l'eau qu'il contient est constant. On utilise les coordonnées cylindriques.

14 Déterminer la vitesse de sortie $\vec{u}$ de l'eau dans le référentiel terrestre par l'embout E.

❒ **a.** $\vec{u} = \dfrac{D_m}{\mu s}\left(\sin\alpha\,\vec{u_r} - \cos\alpha\vec{u_\theta}\right)$

❒ **b.** $\vec{u} = \dfrac{D_m}{\mu s}\left(\cos\alpha\,\vec{u_r} - \sin\alpha\,\vec{u_\theta}\right)$

❒ **c.** $\vec{u} = \dfrac{D_m}{\mu s}\sin\alpha\,\vec{u_r} + \left(\omega a - \dfrac{D_m}{\mu s}\cos\alpha\right)\vec{u_\theta}$

❒ **d.** $\vec{u} = \omega a\,\vec{u_\theta}$

15 Après avoir défini le système étudié, déterminer son moment cinétique L_{Oz} par rapport à l'axe Oz, aux instants t et $t + \mathrm{d}t$.

❒ **a.** $L_{Oz}(t) = J\omega(t)$

❒ **b.** $L_{Oz}(t) = J\omega(t) + D_m\omega a^2\mathrm{d}t$

❒ **c.** $L_{Oz}(t + \mathrm{d}t) = J\omega(t + \mathrm{d}t) - \dfrac{D_m^2}{\mu s}a\cos\alpha\,\mathrm{d}t + D_m\omega a^2\mathrm{d}t$

❒ **d.** $L_{Oz}(t + \mathrm{d}t) = J\omega(t + \mathrm{d}t) - 2\dfrac{D_m^2}{\mu s}a\cos\alpha\,\mathrm{d}t + 2D_m\omega a^2\mathrm{d}t$

16 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ω.

❒ **a.** $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + 2a^2 D_m \omega = \dfrac{2D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha - \Gamma$

❒ **b.** $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + a^2 D_m \omega = \dfrac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha - \Gamma$

❒ **c.** $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha - \Gamma$

❒ **d.** $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + a^2 D_m \omega = \dfrac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha + \Gamma$

17 Déterminer le temps caractéristique τ et la vitesse angulaire ω_∞ en régime permanent.

❒ **a.** $\tau = \dfrac{J}{2D_m a^2}$

❒ **b.** $\tau = \dfrac{D_m a^2}{J}$

❒ **c.** $\omega_\infty = \dfrac{D_m \cos\alpha}{a\mu s} - \dfrac{\Gamma}{a^2 D_m}$

❒ **d.** $\omega_\infty = \dfrac{D_m \cos\alpha}{a\mu s} + \dfrac{\Gamma}{a^2 D_m}$

Cet énoncé concerne les questions 18 à 20 :
Cette série de questions a pour but d'établir un bilan thermodynamique pour un fluide en écoulement dans un organe thermodynamique (turbine, tuyère ...) représenté schématiquement sur la figure 9.6.

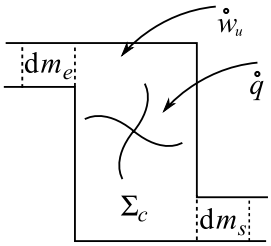


Figure 9.6

Ce système est constitué à l'instant t d'une partie centrale Σ_c dans l'organe, et de la partie $\mathrm{d}m_e$ entrant dans l'organe entre t et $t + \mathrm{d}t$. À l'instant $t + \mathrm{d}t$, ce système est constitué de Σ_c et de la partie $\mathrm{d}m_s$ sortant de l'organe entre t et $t + \mathrm{d}t$.

L'écoulement est unidimensionnel et on notera z l'altitude, c la vitesse du fluide et v les volumes massiques.

Le système reçoit une puissance thermique $\dot{q}$ et une puissance mécanique utile (autres que les forces de pression) $\dot{w}_u$. On notera w_{um} le travail utile massique et q_m le transfert thermique massique correspondants.

Les écoulements seront supposés stationnaires.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

18 On note P_e (respectivement P_s) la pression en amont de l'organe (en aval). Déterminer l'expression du travail δW_p des forces de pression pendant dt

❒ **a.** $\delta W_p = -P\mathrm{d}V$

❒ **b.** $\delta W_p = -D_m\mathrm{d}t(P_e v_e - P_s v_s)$

❒ **c.** $\delta W_p = -D_m\mathrm{d}tP(v_s - v_e)$

❒ **d.** $\delta W_p = D_m\mathrm{d}t(P_e v_e - P_s v_s)$

19 Déterminer le premier principe pour un fluide en écoulement en prenant en compte l'énergie cinétique macroscopique E_c et l'énergie potentielle de pesanteur E_p.

❒ **a.** $D_m\left[\left(h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(h_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right)\right] = \dot{w}_u + \dot{q}$

❒ **b.** $D_m\left[\left(u_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(u_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right)\right] = \dot{w}_u + \dot{q}$

❒ **c.** $\left(u_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(u_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right) = \dot{w}_u + \dot{q}$

❒ **d.** $\left(h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(h_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right) = \dot{w}_u + \dot{q}$

20 Écrire le deuxième principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement en contact avec un thermostat à la température T_{th}. On note σ_c le taux de création d'entropie (ou entropie créée par seconde) dans l'organe.

❒ **a.** $\Delta s = \frac{\dot{q}}{T_{th}} + \sigma_c$

❒ **b.** $D_m\Delta s = \frac{\dot{q}}{T} + \sigma_c$

❒ **c.** $D_m\Delta s = \frac{\dot{q}}{T_{th}} - \sigma_c$

❒ **d.** $D_m\Delta s = \frac{\dot{q}}{T_{th}} + \sigma_c$

21 On s'intéresse à une tuyère indéformable (figure 9.7). La transformation étant très rapide, il n'y a pas d'échange de chaleur et on suppose de plus la transformation réversible. Déterminer la célérité $c(x)$ pour une abscisse x dans la tuyère.

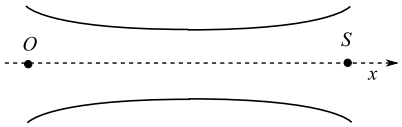


Figure 9.7

❒ **a.** $c(x) = \sqrt{c^2(0) + 2\int_0^x \frac{\mathrm{d}P}{\mu}}$

❒ **b.** $c(x) = \sqrt{c^2(0) - 2\int_0^x \frac{\mathrm{d}P}{\mu}}$

❒ **c.** $c(x) = \sqrt{c^2(0) - 2\int_0^x \mu\mathrm{d}P}$

❒ **d.** $c(x) = \sqrt{-c^2(0) + 2\int_0^x \frac{\mathrm{d}P}{\mu}}$

Voir les corrigés du chapitre 9 page 132.

6 Cinématique des fluides

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Le libre parcours moyen ℓ des molécules est petit devant la taille caractéristique L du système étudié.

Le libre parcours moyen caractérise l'échelle microscopique, alors que la taille caractéristique L (largeur d'une rivière, taille d'un tuyau) se situe à l'échelle macroscopique.

2 ❒ V ☒ F La notion de particule de fluide se situe à l'échelle microscopique.

Elle se situe à l'échelle mésoscopique. La taille d'une particule de fluide est grande devant le libre parcours moyen d'une molécule et petite devant la taille caractéristique du système.

3 ☒ V ❒ F La description lagrangienne consiste à suivre le mouvement de la particule de fluide.

Dans cette description, on suit la particule, contrairement à la description eulérienne qui consiste à étudier ce qui se passe en un point fixe.

4 ❒ V ☒ F Les lignes de courant sont les trajectoires des particules de fluide.

Les lignes de courant sont les lignes tangentes en chaque point au champ des vitesses à l'instant t. Elles sont en général différentes des trajectoires des particules de fluide. Pour un écoulement permanent lignes de courant et trajectoires des particules sont confondues.

5 ☒ V ❒ F Un écoulement est incompressible si la dérivée particulaire de la masse volumique $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t}$ est nulle.

L'écoulement est dit incompressible si les particules de fluides conservent leur volume au cours du mouvement. Comme elles sont de masse constante, μ est constante.

6 ❒ V ☒ F Un écoulement est stationnaire si la dérivée particulaire de la vitesse $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est nulle.

Stationnaire signifie indépendant du temps, donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

QCM

7 L'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique est :

☒ **a.** $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu$

❒ **b.** $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu$

❒ **c.** $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} \cdot (\mu \vec{v})$

❒ **d.** $\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu(\overrightarrow{\mathrm{grad}} \cdot \vec{v})$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Si à l'instant t la particule de fluide est en $\vec{r}$ et à l'instant $t + \mathrm{d}t$ en $\vec{r} + \vec{\mathrm{d}r}$, par définition :

$$\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\mu(\vec{r} + \vec{\mathrm{d}r}, t + \mathrm{d}t) - \mu(\vec{r}, t)}{\mathrm{d}t}$$

Il s'agit de la dérivée par rapport au temps de la fonction $\mu(x(t), y(t), z(t), t)$. Cette fonction dépend explicitement de t, mais aussi implicitement par l'intermédiaire de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Donc :

$$\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial x}v_x + \frac{\partial \mu}{\partial y}v_y + \frac{\partial \mu}{\partial z}v_z + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu$$

puisque la vitesse de la particule de fluide est $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}$.

8 L'expression de la dérivée particulaire de la vitesse est :

❒ **a.** $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v$

❒ **b.** $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} \cdot \vec{v})\vec{v}$

❒ **c.** $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}) \cdot \vec{v}$

☒ **d.** $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$

Pour la dérivée particulaire de la vitesse, on peut utiliser le résultat précédent pour chaque composante du vecteur $\vec{v}$, ce qui donne pour $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$:

$$\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}\vec{u_x} + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}\vec{u_y} + \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}\vec{u_z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v_x)\vec{u_x} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v_y)\vec{u_y} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v_z)\vec{u_z}$$

d'où la réponse **d**.

9 Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes parmi celles proposées ?

☒ **a.** $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est l'accélération locale.

❒ **b.** $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est l'accélération convective.

❒ **c.** L'accélération locale peut s'écrire : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) \cdot \vec{v}$

☒ **d.** L'accélération convective peut s'écrire : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) \cdot \vec{v}$

L'accélération locale est le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et l'accélération convective le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$. On peut montrer en développant les calculs (ce qui a peu d'intérêt) que le terme convectif peut s'écrire aussi avec l'expression **d**.

10 Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes parmi celles proposées ?

❒ **a.** Un écoulement est irrotationnel si $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$

☒ **b.** $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

☒ **c.** Si un écoulement est irrotationnel $\exists\phi$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$

❒ **d.** Un écoulement est tourbillonnaire si $\vec{\Omega} = \vec{0}$

Le vecteur tourbillon est $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ par analogie avec le vecteur rotation d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Par définition, un écoulement est irrotationnel si $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ donc $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et dans ce cas $\exists\phi$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \vec{0}$.

11 En l'absence de sources ou de puits, l'équation locale de conservation de la masse peut s'écrire (on pourra utiliser le formulaire) :

❒ **a.** $\frac{\text{D}\mu}{\text{D}t} + \text{div}\,\vec{j_m} = 0$

❒ **b.** $\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = 0$

☒ **c.** $\frac{\text{D}\mu}{\text{D}t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = 0$

☒ **d.** $\frac{\partial\mu}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j_m} = 0$

On fait un bilan de masse sur un volume τ entouré de la surface fermée S. La différence de masse entre l'instant $t + \text{d}t$ et l'instant t est égale à l'opposé de la masse sortant du volume à travers la surface S. Avec l'orientation des vecteurs $\overrightarrow{\text{d}S}$ vers l'extérieur :

$$m(t+\text{d}t) - m(t) = -\left(\oiint_S \vec{j_m}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}\right)\text{d}t \text{ avec } m(t+\text{d}t) - m(t) = \iiint_\tau (\mu(t+\text{d}t) - \mu(t))\text{d}\tau$$

soit avec un développement au premier ordre et la relation de Green-Ostrograsdky :

$$\iiint_\tau \frac{\partial\mu}{\partial t}\text{d}t\,\text{d}\tau = -\left(\iiint_\tau \text{div}\,\vec{j_m}\text{d}t\right)\text{d}\tau$$

La relation est vraie $\forall\tau$ donc la réponse **d.** est juste.

D'autre part $\text{div}\,\vec{j_m} = \mu\,\text{div}\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu$. On a démontré $\frac{\text{D}\mu}{\text{D}t} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu$, ce qui permet de retrouver la réponse **c**.

12 On considère un écoulement stationnaire à travers une conduite de section $S(x)$ variable, d'axe de symétrie Ox (figure 6.1). Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes parmi celles proposées ?

❒ **a.** Le débit massique décroît avec x.

☒ **b.** Le débit massique est constant.

❒ **c.** La vitesse est inversement proportionnelle à $S(x)$.

❒ **d.** La vitesse est indépendante de x.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Pour un écoulement stationnaire, l'équation de conservation de la masse s'écrit $\text{div}\,\overrightarrow{j_m} = 0$. On forme une surface fermée S_f par deux sections et les parois du tuyau (figure 6.1) qui entoure le volume τ_f.

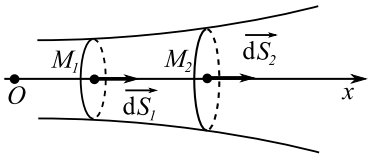


Figure 6.1

On a alors :

$$\iiint_{\tau_f} \text{div}\,\overrightarrow{j_m}\,d\tau = 0 = \oiint_{S_f} \overrightarrow{j_m}\cdot\overrightarrow{dS} = -\iint_{S_1} \overrightarrow{j_m}(M_1)\cdot\overrightarrow{dS_1} + \iint_{S_2} \overrightarrow{j_m}(M_2)\cdot\overrightarrow{dS_2}$$

Le signe « – » pour la première intégrale est dû au fait que $\overrightarrow{dS_1}$ est orienté vers l'intérieur du volume. L'expression précédente entraine $D_m(M_1) = D_m(M_2)$: le débit massique est constant.

On a aussi $D_m = \mu S v$ pour l'écoulement dans le tuyau. N'ayant pas d'information sur μ on ne sait comment varie la vitesse. En revanche, si l'écoulement est incompressible alors v décroît avec x.

Cet énoncé concerne les questions 13 à 16 :
On considère un écoulement plan pour lequel la vitesse en coordonnées cartésiennes est $\overrightarrow{v} = kx\overrightarrow{u_x} + b\cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}$ où k et b sont des constantes positives.

13 Cet écoulement est :

❒ **a.** Stationnaire.
❒ **b.** Incompressible.
❒ **c.** Tourbillonaire.
☒ **d.** Potentiel.

La vitesse dépend du temps donc l'écoulement n'est pas stationnaire.

On a :

$$\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = k \neq 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$$

donc l'écoulement n'est pas incompressible mais il est irrotationnel donc potentiel.

14 Déterminer l'équation des lignes de courant. On note (x_0, y_0) les coordonnées d'un point de référence.

❒ **a.** $y = y_0 + \dfrac{b\cos(\omega t)}{k}\left(\dfrac{1}{x_0^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)$
❒ **b.** $y = y_0 + \dfrac{k}{2\cos(\omega t)}\left(x^2 - x_0^2\right)$
❒ **c.** $y = y_0 + \dfrac{b\sin(\omega t)}{\omega k x}$
☒ **d.** $y = y_0 + \dfrac{b\cos(\omega t)}{k}\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$

Soit un vecteur élémentaire $\overrightarrow{d\ell}$ d'une ligne de champ, on a $\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ d'où $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$. On obtient l'équation différentielle :

$$dy = \frac{b\cos(\omega t)}{k}\frac{dx}{x} \Rightarrow y = y_0 + \frac{b\cos(\omega t)}{k}\ln\frac{x}{x_0}$$

On rappelle qu'on raisonne à un instant t donné donc constant pour l'intégration.

15 Déterminer les coordonnées (X, Y) de la particule de fluide passant par (X_0, Y_0) à $t = 0$.

❒ **a.** $X = X_0 e^{-kt}$

☒ **b.** $X = X_0 e^{kt}$

☒ **c.** $Y = \frac{b}{\omega}\sin(\omega t) + Y_0$

❒ **d.** $Y = -\frac{b}{\omega}\sin(\omega t) + Y_0$

La vitesse de la particule de fluide s'écrit : $\frac{dX}{dt} = kX$ et $\frac{dY}{dt} = b\cos(\omega t)$. Ces deux équations s'intègrent en $X = X_0 e^{kt}$ et $Y = \frac{b}{\omega}\sin(\omega t) + Y_0$ avec les conditions initiales données.

16 Déterminer l'accélération $\overrightarrow{a}$.

☒ **a.** $\overrightarrow{a} = k^2 x\overrightarrow{u_x} - \omega b\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$

❒ **b.** $\overrightarrow{a} = k^2 x\overrightarrow{u_x} + \omega b\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$

❒ **c.** $\overrightarrow{a} = -\omega b\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$

❒ **d.** $\overrightarrow{a} = \omega b\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$

On calcule $\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = -\omega b\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$ et :

$$(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = kx\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial x} + b\cos(\omega t)\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y} = k^2 x\overrightarrow{u_x}$$

La somme des deux termes donne $\overrightarrow{a}$ donc la réponse **a**.

Cet énoncé concerne les questions 17 à 18 :
On modélise une tornade par un écoulement permanent et incompressible. Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega_0}$ supposé uniforme à l'intérieur d'un cylindre (qu'on appelle œil du cyclone), d'axe Oz vertical et de rayon $r \leq a$, et nul à l'extérieur de celui-ci. On utilise les coordonnées cylindriques avec les vecteurs $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.

17 Quelles sont les propriétés vérifiées par la vitesse de l'écoulement ?

☒ **a.** $\text{div}\,\overrightarrow{v} = 0$

☒ **b.** $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

❒ **d.** $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$

L'écoulement est incompressible donc $\text{div}\,\overrightarrow{v} = 0$. Pour $r \leq a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\Omega_0} \neq \overrightarrow{0}$. Il y a invariance par rotation autour de l'axe Oz et translation selon cet axe donc la vitesse ne dépend que de r. Enfin, la vitesse « s'enroule » autour de $\overrightarrow{\Omega_0}$ donc $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$. Ce sont

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

les mêmes propriétés qu'un champ magnétique ($\text{div}\,\vec{v} = 0$ équivalent à $\text{div}\,\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega_0}$ équivalent à $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$).

18 En appliquant l'équivalent du théorème d'Ampère en magnétostatique, déterminer l'expression de la vitesse.

☒ **a.** Si $r \geq a$, $\vec{v} = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}\vec{u_\theta}$

☐ **b.** Si $r \geq a$, $\vec{v} = \Omega_0 a\vec{u_\theta}$

☒ **c.** Si $r \leq a$, $\vec{v} = \Omega_0 r\vec{u_\theta}$

☐ **d.** Si $r \leq a$, $\vec{v} = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}\vec{u_\theta}$

On utilise comme contour $\mathscr{C}$ un cercle de rayon r et d'axe Oz. On note S la surface orientée du contour. On peut écrire :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{v}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$$

Pour $r \leq a$, l'égalité précédente s'écrit : $2\pi r v = 2\pi r^2\Omega_0$ d'où la réponse **c**.

Pour $r \geq a$, on a $2\pi r v = 2\pi a^2\Omega_0$, car entre $r = 0$ et $r = a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega_0}$ et pour $r \geq a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$, d'où la réponse **a**.

Cet énoncé concerne les questions 19 à 22 :
On s'intéresse à l'écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel d'un fluide autour d'un cylindre d'axe Oz et de rayon a. Le cylindre de très grande longueur sera considéré infini. À grande distance, l'écoulement est uniforme de vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z). On rappelle que les expressions des opérateurs sont données dans le formulaire.

19 Quelles sont les propriétés vérifiées par le potentiel des vitesses ϕ ?

☐ **a.** $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \vec{0}$

☒ **b.** $\Delta\phi = 0$

☐ **c.** $\phi(r, \theta, z) = \phi(r)$

☒ **d.** $\phi(r, \theta, z) = \phi(r, \theta)$

L'écoulement est irrotationnel donc on peut définir un potentiel de vitesse ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$. Puisque l'écoulement est incompressible, $\text{div}\,\vec{v} = 0$ donc $\text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \Delta\phi = 0$.

D'autre part, il y a invariance par translation selon Oz mais pas par rotation, donc ϕ dépend de r et de θ.

20 On cherche le potentiel des vitesses sous la forme $\phi = \dfrac{f(\theta)}{r} + \phi_0$. Déterminer ϕ_0.

☐ **a.** $\phi_0 = v_0 r\sin\theta + cte$

☐ **b.** $\phi_0 = v_0\cos\theta + cte$

☐ **c.** $\phi_0 = v_0\sin\theta + cte$

☒ **d.** $\phi_0 = v_0 r\cos\theta + cte$

Le potentiel ϕ_0 correspond au potentiel à l'infini, c'est-à-dire à l'écoulement $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. Par projection sur $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, on obtient les deux équations :

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = v_0\cos\theta \text{ et } \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -v_0\sin\theta$$

L'intégration de la première donne : $\phi = rv_0 \cos\theta + C(\theta)$. On dérive par rapport à θ et on compare à la deuxième, ce qui entraine $C'(\theta) = 0$ soit $C(\theta) = cte$ d'où la réponse **d**.

21 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(\theta)$.

☒ **a.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} + f = 0$ ❒ **b.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} - f = 0$

❒ **c.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} - \dfrac{2f}{r^2} = 0$ ❒ **d.** $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} = 0$

Le laplacien de ϕ en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(\theta)}{r}\right)\right) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2} + \Delta\phi_0 = \frac{1}{r^3}\left(f(\theta) + \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2}\right) + \Delta\phi_0$$

Le calcul de $\Delta\phi_0$ donne 0. On trouve la réponse **a**.

22 En utilisant les conditions aux limites sur le cylindre, déterminer l'expression de la vitesse du fluide.

❒ **a.** $v_r = v_0\left(\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right)\cos\theta$ ☒ **b.** $v_r = v_0\left(-\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right)\cos\theta$

☒ **c.** $v_\theta = -v_0\left(\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right)\sin\theta$ ❒ **d.** $v_\theta = v_0\left(\dfrac{a^2}{r^2} - 1\right)\sin\theta$

La solution de l'équation précédente est $f(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta$, ce qui donne comme expression pour la vitesse :

$$v_r = -\frac{A\cos\theta + B\sin\theta}{r^2} + v_0\cos\theta \text{ et } \frac{-A\sin\theta + B\cos\theta}{r^2} - v_0\sin\theta$$

Sur le cylindre, la vitesse radiale est nulle $\forall\theta$ soit :

$$\forall\theta \quad \left(-\frac{A}{a^2} + v_0\right)\cos\theta - \frac{B}{a^2}\sin\theta = 0 \Rightarrow A = v_0 a^2 \text{ et } B = 0$$

7 Étude phénoménologique des fluides réels

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Dans un écoulement parfait, les particules de fluide évoluent de manière adiabatique et réversible.

Un écoulement est parfait si la viscosité est négligeable. Les transferts thermiques étant aussi négligeables, l'évolution est adiabatique. Toutes les causes d'irréversibilité sont négligées donc l'écoulement est réversible.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

2 ❒ V ☒ F On considère un volume $\mathscr{V}$ de fluide. La contrainte surfacique exercée par le reste du fluide sur une surface $\mathrm{d}S_M$ autour d'un point M de la surface extérieure entourant $\mathscr{V}$ est $-P(M)\overrightarrow{\mathrm{d}S_M}$ avec les conventions habituelles pour $\overrightarrow{\mathrm{d}S_M}$.

Il s'agit uniquement de la composante normale de la contrainte. La composante tangentielle définit la force de cisaillement en M. Elle est liée à la viscosité du fluide.

3 ☒ V ❒ F Un écoulement est laminaire dans le cas où R_e est plutôt petit.

C'est ce qu'on observe expérimentalement, alors que pour des grands nombres de Reynolds on observe des écoulements turbulents.

Dans un écoulement laminaire, les particules de fluide gardent leur individualité. L'écoulement est stable et les lignes de courant sont bien dessinées.

Dans un écoulement turbulent, les particules ne peuvent plus reconstituer des lignes de courant. L'évolution temporelle des grandeurs physiques subit des fluctuations aléatoires.

4 ❒ V ☒ F C'est en dehors de la couche limite que les effets de la viscosité sont les plus importants.

Au contraire, c'est dans la couche limite que la viscosité joue un rôle important. En dehors de la couche limite, on peut considérer le fluide parfait.

5 ☒ V ❒ F Dans la configuration du schéma 7.1 et pour un fluide newtonien, la composante tangentielle exercée par le fluide (1) sur le fluide (2) pour la surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est $\overrightarrow{\mathrm{d}F_t} = \eta\dfrac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}S\,\overrightarrow{u_x}$.

C'est effectivement l'expression de la composante tangentielle de la force appelée force de cisaillement. Elle tend à homogénéiser le champ des vitesses dans le fluide. Une couche rapide tend à accélérer une couche plus lente et réciproquement une couche lente tend à freiner une couche rapide.

QCM

6 On choisit l'axe Oz vertical et les axes Ox et O_y horizontaux. Les forces de pression surfaciques sur un volume de fluide sont équivalentes à une force de densité volumique $\overrightarrow{D_{v,P}}$:

❒ **a.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$

❒ **b.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = -\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{u_z}$

❒ **c.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = +\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{u_z}$

☒ **d.** $\overrightarrow{D_{v,P}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$

On raisonne sur un petit volume parallélépipédique de dimensions dx, dy et dz au voisinage du point $M(x, y, z)$ (figure 7.1).

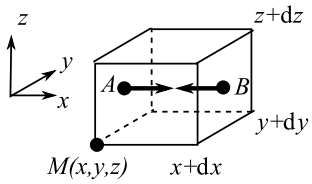


Figure 7.1

Les forces de pression de la part du fluide extérieur s'exercent sur les six faces vers l'intérieur du parallélépipède. La composante suivant x de la résultante est la somme de la force qui s'exerce en A sur la face correspondante soit $\overrightarrow{\mathrm{d}F_A} = P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}$ et de celle qui s'exerce en B sur la face correspondante soit $\overrightarrow{\mathrm{d}F_B} = -P(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. On en déduit la composante $\mathrm{d}F_x$ de la résultante des forces de pression :

$$\mathrm{d}F_x = (P(x, y, z) - P(x + \mathrm{d}x, y, z))\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

En effectuant le même raisonnement pour les autres axes, on trouve que la force de pression est $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P\ \mathrm{d}\tau$, avec $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ le volume du parallélépipède. Ainsi les forces de pression sont équivalentes à une contrainte volumique $\overrightarrow{D_{v,P}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P$.

Cet énoncé concerne les questions 7 à 8 :
On s'intéresse à l'écoulement autour d'un objet. On rappelle l'expression de la traînée : $T = \frac{1}{2}\mu C_x S V^2$, où C_x est le coefficient de traînée, S le maître-couple (section transversale de l'objet par rapport à la direction de l'écoulement), et V la vitesse caractéristique de l'écoulement.

On a représenté sur la figure 7.2, l'allure de la courbe $C_x = f(R_e)$ en échelles logarithmiques. La tangente (droite en pointillés) pour les faibles valeurs de R_e a pour équation $\log C_x = -\log R_e + \log 24$.

7 Déterminer l'expression de la traînée pour $R_e < 1$.

❒ **a.** $T = 12\frac{S\mu L}{\nu}V^3$

☒ **b.** $T = 12\frac{S\mu\nu}{L}V$

❒ **c.** $T = \frac{1}{2}\left(24 - \frac{VL}{\nu}\right)S V^2$

❒ **d.** $T = \frac{\mu\nu}{2L}S V$

Pour $R_e < 1$, on peut confondre la courbe avec la tangente soit :

$$\log C_x = -\log R_e + \log 24 \text{ ou } C_x = \frac{24}{R_e}$$

On reporte dans l'expression de la traînée :

$$T = \frac{1}{2}\mu S V^2\frac{24}{R_e} = \frac{1}{2}\mu S V^2\frac{24\nu}{VL} = T = 12\frac{S\mu\nu}{L}V$$

La traînée est proportionnelle à la vitesse, on parle de frottement visqueux.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 Quelle(s) est(sont) la(les) réponses justes ?

❒ **a.** Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, la traînée est constante.

❒ **b.** Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, la traînée est proportionnelle à V.

☒ **c.** Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, la traînée est proportionnelle à V^2.

❒ **d.** La traînée est plus faible pour $R_e \sim 10^4$ que pour $R_e \sim 10$.

Pour $2 \cdot 10^3 < R_e < 2 \cdot 10^5$, c'est le coefficient C_x qui est constant, donc la traînée est proportionnelle à V^2.

Entre $R_e \sim 10$ et $R_e \sim 10^4$, le coefficient de traînée a environ été divisé par 10 alors que R_e a été multiplié par 1000. Si L et ν sont les mêmes cela signifie que c'est la vitesse qui a été multipliée par 1000, donc la traînée est $10^6/10$ fois plus grande pour $R_e \sim 10^4$.

9 On s'intéresse à une particule de fluide de section S et d'épaisseur dy figure 7.3. On se place dans le cas d'un champ de vitesse $\overrightarrow{V} = V_x(y,t)\overrightarrow{u_x}$ avec $V_x(y,t)$ fonction croissante de y. Déterminer l'expression de la densité volumique $\overrightarrow{D_{v,c}}$ de la force de cisaillement s'exerçant sur cette particule de fluide.

☒ **a.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_x}$

❒ **b.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = -\eta \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_x}$

❒ **c.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\overrightarrow{u_y}$

❒ **d.** $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_y}$

La force qui s'exerce pour la section S est :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \eta \frac{\partial V_x(y+\mathrm{d}y,t)}{\partial y} S\,\overrightarrow{u_x} - \eta \frac{\partial V_x(y,t)}{\partial y} S\,\overrightarrow{u_x} = \eta \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} S\,\mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_x}$$

d'où la réponse **a**.

10 Écrire dans le cas général l'équation du mouvement du fluide en prenant en compte une densité volumique de force $\overrightarrow{f_v}$.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} - \eta\Delta\overrightarrow{v}$

❒ **b.** $\mu\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} - \eta\Delta\overrightarrow{v}$

❒ **c.** $\mu\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} - \eta\Delta\overrightarrow{v}$

☒ **d.** $\mu\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v} + \eta\Delta\overrightarrow{v}$

On généralise l'expression précédente en écrivant que la densité volumique des forces de cisaillement est $\overrightarrow{D_{v,c}} = \eta\Delta\overrightarrow{v}$. On a montré que la densité volumique des forces de pression est $\overrightarrow{D_{v,p}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$. Pour une particule de fluide de volume dτ, le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\mu\mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \overrightarrow{f_v}\mathrm{d}\tau - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau + \eta\Delta\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\tau$$

d'où la réponse **d**.

11 On note τ_c et τ_d les temps caractéristiques de transport de la quantité de mouvement respectivement par convection et diffusion. Quelle(s) est(sont) la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes ?

☒ **a.** $\tau_c \sim \dfrac{L}{V}$

☐ **b.** $\tau_d \sim \dfrac{L^2}{\eta}$

☒ **c.** $\dfrac{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\|}{\nu\|\Delta\vec{v}\|} \sim \dfrac{\tau_d}{\tau_c}$

☐ **d.** $R_e \sim \dfrac{\tau_c}{\tau_d}$

On compare les termes de variation locale de la vitesse $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ et de transport convectif $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\cdot\vec{v}$. Ils sont du même ordre de grandeur sur τ_c soit :

$$\left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \sim \left\|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\cdot\vec{v}\right\| \Rightarrow \frac{V}{\tau_c} \sim \frac{V^2}{L} \Rightarrow \tau_c \sim \frac{L}{V}$$

On procède de la même manière avec le terme de variation locale et le terme diffusif pour déterminer τ_d :

$$\left\|\mu\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \sim \|\eta\Delta\vec{v}\| \Rightarrow \frac{\mu V}{\tau_d} \sim \frac{\eta V}{L^2} \Rightarrow \tau_d \sim \frac{L^2}{\nu}$$

De même :

$$\frac{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\|}{\nu\|\Delta\vec{v}\|} \sim \frac{V^2}{L}\frac{L^2}{\nu V} \sim \frac{LV}{\nu} \sim \frac{\tau_d}{\tau_c}$$

Quant à la réponse **d.**, c'est l'inverse qui est juste. Ainsi on retrouve que pour les grands nombres de Reynolds la convection l'emporte sur la diffusion (puisqu'elle est plus rapide) et pour les petits nombres de Reynolds, c'est la diffusion qui l'emporte.

12 On note δ l'épaisseur de la couche limite laminaire pour l'écoulement autour d'un obstacle. Quelle(s) est(sont) la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes ?

☐ **a.** $\delta \sim L\sqrt{R_e}$

☒ **b.** $\delta \sim \dfrac{L}{\sqrt{R_e}}$

☒ **c.** Un écoulement est assimilable à un écoulement parfait en dehors de la couche limite.

☐ **d.** Les effets de la viscosité sont les plus importants en dehors de la couche limite.

En dehors de la couche limite, l'écoulement peut être considéré parfait. Les effets de la viscosité sont importants au voisinage des obstacles donc dans la couche limite : la réponse **c.** est juste.

L'épaisseur de la couche limite est directement lié à la viscosité. Sur un temps τ caractéristique pour contourner l'obstacle, la viscosité aura un effet sur une épaisseur $\delta \sim \sqrt{\nu\tau}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

autour de l'obstacle (Cf. question précédente). Or pour contourner l'obstacle de dimension caractéristique L à la vitesse V, il faut $\tau \sim \dfrac{L}{V}$. On en déduit : $\delta = \sqrt{\dfrac{\nu L}{V}} = \dfrac{L}{\sqrt{R_e}}$.

13 On note $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$ les vecteurs tangentiel et normal en un point M d'un obstacle. Pour un fluide parfait, les conditions aux limites s'écrivent :

- ❒ **a.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle})$
- ❒ **b.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) = \overrightarrow{0}$
- ❒ **c.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) \cdot \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle}) \cdot \overrightarrow{u_t}$
- ☒ **d.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) \cdot \overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle}) \cdot \overrightarrow{u_n}$

Un fluide parfait ne peut pas entrer dans l'obstacle mais il peut glisser dessus puisqu'il ne présente pas de viscosité. La vitesse tangentielle à l'obstacle est donc quelconque alors que la vitesse normale est celle de la paroi.

14 Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, les conditions aux limites pour un fluide réel s'écrivent :

- ☒ **a.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle})$
- ❒ **b.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) = \overrightarrow{0}$
- ☒ **c.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) \cdot \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle}) \cdot \overrightarrow{u_t}$
- ❒ **d.** $\overrightarrow{v}(M \in \text{ fluide}) \cdot \overrightarrow{u_n} \neq \overrightarrow{v}(M \in \text{ obstacle}) \cdot \overrightarrow{u_n}$

Pour un fluide réel présentant de la viscosité, contrairement au cas du fluide parfait, la vitesse du fluide est celle de la paroi à son contact.

15 Dans le cas d'un écoulement à faible nombre de Reynolds, l'équation du mouvement obtenue à la question (10) s'écrit :

- ❒ **a.** $\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \overrightarrow{f_v} + \eta \Delta \overrightarrow{v}$
- ☒ **b.** $\mu \dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \overrightarrow{f_v} + \eta \Delta \overrightarrow{v}$
- ❒ **c.** $\mu \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \overrightarrow{f_v} + \eta \Delta \overrightarrow{v}$
- ❒ **d.** $\mu \dfrac{\text{D}\overrightarrow{v}}{\text{D}t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \overrightarrow{f_v}$

À faible nombre de Reynolds, le terme de convection $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ est négligeable, d'où l'équation **b**.

8 Équations locales de la dynamique des fluides

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Dans un écoulement parfait unidirectionnel, la répartition de la pression perpendiculairement aux lignes de courant obéit aux lois de la statique des fluides.

On suppose que l'écoulement se fait suivant la direction $\overrightarrow{u_x}$ avec $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$. La dérivée particulaire s'écrit :

$$\frac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v}{\partial t}\overrightarrow{u_x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$$

Si on note $\overrightarrow{f_v}$ la densité volumique des forces extérieures, les projections de l'équation d'Euler sur $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont donc :

$$0 = f_{v,y} - \frac{\partial P}{\partial y} \text{ et } 0 = f_{v,z} - \frac{\partial P}{\partial z}$$

qui sont les équations de la statique des fluides.

2 ❒ V ☒ F L'effet Venturi correspond à une augmentation de la pression lorsque la vitesse du fluide augmente.

C'est le contraire qui se produit : il se produit une dépression lorsque la vitesse augmente (voir les applications de la relation de Bernoulli).

QCM

3 On note $\overrightarrow{D_v}$ la densité volumique des forces extérieures. L'équation d'Euler pour un fluide parfait peut s'écrire :

☒ **a.** $\mu\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v}$

☒ **b.** $\mu\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v}$

❒ **c.** $\mu\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v}$

❒ **d.** $\mu\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_v}$

Pour un fluide parfait, la viscosité est nulle donc le terme $\eta\Delta\overrightarrow{v}$ disparaît de l'équation de Navier-Stokes ce qui donne l'équation d'Euler **a**. L'équation d'Euler peut aussi s'écrire sous la forme **b.** à connaître. Les calculs pour montrer l'équivalence des deux expressions n'ont pas d'intérêt.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

4 On note $\vec{T}$ la tangente en un point d'une ligne de courant et $\vec{N}$ la normale dirigée vers le centre de courbure. On rappelle l'expression de la dérivée particulaire dans cette base : $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ où R est le rayon de courbure. En l'absence de forces volumiques :

❒ **a.** La pression augmente lorsqu'on s'approche du centre de courbure.

❒ **b.** La pression ne varie pas lorsqu'on s'approche du centre de courbure.

☒ **c.** La pression diminue lorsqu'on s'approche du centre de courbure.

❒ **d.** La variation de la pression est imprévisible.

En l'absence de forces volumiques, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{R} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P \cdot \vec{N} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P \cdot \vec{N} < 0$$

Puisque $\vec{N}$ est dirigé vers le centre de courbure, la pression diminue lorsqu'on s'approche de ce centre.

Cet énoncé concerne les questions 5 à 7 :
En approfondissement, on étudie l'écoulement de Poiseuille cylindrique qui consiste en l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux dans un tuyau cylindrique de rayon a, d'axe Oz horizontal. On néglige les effets de la pesanteur. Le fluide est soumis à une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L$, où P_0 est la pression à l'entrée de la conduite ($z = 0$) et P_L celle à la sortie ($z = L$). On utilise les coordonnées cylindriques.

5 D'après les invariances, les conditions aux limites et le fait que l'écoulement est incompressible, la vitesse en un point du fluide s'écrit :

☒ **a.** $\vec{v} = v(r)\vec{u_z}$

❒ **b.** $\vec{v} = v(r, z)\vec{u_z}$

❒ **c.** $\vec{v} = v(z)\vec{u_z}$

❒ **d.** $\vec{v} = v(r)\vec{u_r}$

L'écoulement a lieu suivant l'axe Oz donc $\vec{v} = v\vec{u_z}$. Puisque le tuyau est de section constante, la conservation du débit entraine que la vitesse est indépendante de z. L'invariance par rotation autour de l'axe Oz impose une indépendance vis à vis de θ (ceci est aussi valable pour la pression P).

6 En utilisant l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques (voir formulaire 16), montrer que P est indépendant de r et déterminer la projection de l'équation du mouvement sur Oz.

❒ **a.** $\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0$

❒ **b.** $\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\Delta P}{L}$

❒ **c.** $\eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\Delta P}{L}$

☒ **d.** $\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\Delta P}{L}$

En régime stationnaire et en négligeant la pesanteur, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}$$

soit

$$v\frac{\partial v(r)}{\partial z}\vec{u_z} = \vec{0} = -\frac{\partial P}{\partial r}\vec{u_r} + \left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right)\vec{u_z}$$

La première équation prouve que P est indépendant de r. Dans la deuxième, on a la somme d'une fonction ne dépendant que de z et d'une autre ne dépendant que de r qui est nulle $\forall(r,z)$. Ceci n'est possible que si chacune est constante. On en déduit :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = cte = -\frac{\Delta P}{L}$$

ce qui mène à la réponse **d**.

7 Déterminer l'expression de la vitesse et celle du débit massique D_m.

❒ **a.** $v = \dfrac{\Delta P}{4L\eta}\left(r^2 - a^2\right)$

☒ **b.** $v = \dfrac{\Delta P}{4L\eta}\left(a^2 - r^2\right)$

☒ **c.** $D_m = \dfrac{\pi\mu a^4}{8L\eta}\Delta P$

❒ **d.** $D_m = \dfrac{\mu a^3}{6L\eta}\Delta P$

Une première intégration s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{r\Delta P}{\eta L} \Rightarrow r\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r^2\Delta P}{2\eta L} + k_1 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r\Delta P}{2\eta L} + \frac{k_1}{r}$$

où k_1 est une constante. Finalement on trouve : $v = -\dfrac{r^2\Delta P}{4\eta L} + k_1\ln r + k_2$. Il ne peut pas y avoir de divergence de la vitesse en $r = 0$ donc $k_1 = 0$. D'autre part, la condition sur le tuyau en $r = a$ est $v(a) = 0$ d'où $k_2 = \dfrac{a^2\Delta P}{4\eta L}$.

Le débit massique est obtenu par :

$$D_m = \int_0^a 2\pi r v(r)\mu \mathrm{d}r = \frac{\pi\mu\Delta P}{2\eta L}\int_0^a r(a^2 - r^2)\mathrm{d}r = \frac{\pi\mu a^4\Delta P}{8L\eta}$$

Cet énoncé concerne les questions 8 à 9 :
On reprend l'étude de la tornade effectuée dans le chapitre de cinématique aux questions 17 et 18. On rappelle qu'on modélise une tornade par un écoulement parfait, permanent et incompressible. Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega_0}$ supposé uniforme à l'intérieur d'un cylindre (qu'on appelle œil du cyclone), d'axe Oz vertical et de rayon $r \leq a$, et nul à l'extérieur de celui-ci. On a montré qu'en coordonnées cylindriques $\vec{v} = \Omega_0 r\vec{u_\theta}$ pour $r \leq a$ et $\vec{v} = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}\vec{u_\theta}$ pour $r \geq a$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 Déterminer les équations différentielles du mouvement.

❒ **a.** Pour $r \leq a$
$$\begin{cases} \mu\Omega_0^2 r = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

❒ **b.** Pour $r \leq a$
$$\begin{cases} 3\mu\Omega_0^2 r = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

❒ **c.** Pour $r \geq a$
$$\begin{cases} -\mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{r} = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

☒ **d.** Pour $r \geq a$
$$\begin{cases} -\mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{r^3} = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

Pour $r \leq a$ la dérivée particulaire en régime permanent s'écrit :
$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\overrightarrow{\Omega_0} \wedge \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega_0^2 r^2}{2}\right)\overrightarrow{u_r} + 2\Omega_0^2 r\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = -\Omega_0^2 r\overrightarrow{u_r}$$
Les projections de l'équation d'Euler pour $r \leq a$ s'écrivent donc :
$$-\mu\Omega_0^2 r = -\frac{\partial P}{\partial r} \text{ et } 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \text{ et } 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g$$
Aucune réponse n'est juste.

Pour $r \geq a$, le le vecteur tourbillon est nul, donc la dérivée particulaire en régime permanent s'écrit :
$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\overrightarrow{\Omega_0} \wedge \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega_0^2 a^4}{2r^2}\right)\overrightarrow{u_r} + \vec{0} = -\frac{\Omega_0^2 a^4}{r^3}\overrightarrow{u_r}$$
La réponse **d.** est juste.

9 La pression pour l'altitude $z = 0$, loin du centre de la tornade est P_0. Déterminer les expressions de $P(r, z)$ pour les deux zones $r \leq a$ et $r \geq a$.

❒ **a.** $P = P_0 + \mu\dfrac{\Omega_0^2 r^2}{2} - \mu g z$ pour $r \leq a$.

☒ **b.** $P = P_0 + \mu\dfrac{\Omega_0^2}{2}\left(r^2 - 2a^2\right) - \mu g z$ pour $r \leq a$.

☒ **c.** $P = P_0 - \mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{2r^2} - \mu g z$ pour $r \geq a$.

❒ **d.** $P = P_0 - \mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{4r^4} - \mu g z$ pour $r \geq a$.

La projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$ de l'équation d'Euler prouve que la pression est indépendante de θ. L'intégration de l'équation $-\mu\dfrac{\Omega_0^2 a^4}{r^3} = -\dfrac{\partial P}{\partial r}$ pour $r \geq a$ donne $P = -\dfrac{\mu\Omega_0^2 a^4}{2r^2} + k(z)$. On dérive cette expression par rapport à z et on compare avec l'équation projetée sur Oz, soit :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = k'(z) = -\mu g \;\Rightarrow\; k(z) = -\mu g z + cte$$

On détermine la constante sachant que la pression pour l'altitude $z = 0$, loin du centre de la tornade est P_0 ce qui entraine $P(r, z) = P_0 - \dfrac{\mu\Omega_0^2 a^4}{2r^2} - \mu g z$ pour $r \geq a$.

Pour $r \leq a$, on intègre $-\mu\Omega_0^2 r = -\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ce qui donne $P = \dfrac{\mu\Omega_0^2 r^2}{2} + k(z)$. Comme précédemment la dérivée par rapport à z et la comparaison entraînent $k(z) = -\mu g z + cte$. On détermine la constante par continuité de la pression en $r = a$ ce qui donne la réponse **b**.

10 On étudie un fluide parfait n'étant soumis qu'à la force de pesanteur comme force extérieure. L'écoulement est supposé incompressible et potentiel avec $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.

☒ **a.** L'équation $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = f(t)$ est valable dans tout le fluide.

❒ **b.** L'équation $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = f(t)$ n'est valable que le long d'une ligne de courant.

❒ **c.** L'équation $\dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = cte$ est valable dans tout le fluide.

❒ **d.** L'équation $\dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = cte$ n'est valable que le long d'une ligne de courant.

Dans le cas proposé $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ et l'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\mu}\right) - g\vec{u_z} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz\right) = 0$$

L'expression sous le gradient n'est donc qu'une fonction du temps, donc la réponse **a.** est juste.

La réponse **c.** serait juste dans le cas d'un écoulement irrotationnel permanent, pour lequel $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 0$.

Enfin, dans la cas d'un écoulement permanent, en projetant l'équation d'Euler sur une ligne de courant, le terme en $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$ disparaît et la réponse **d.** serait validée. Les réponses **c.** et **d.** sont l'expression du théorème de Bernoulli.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 Tube de Pitot. On considère un écoulement incompressible permanent, de vitesse $\overrightarrow{V_0}$ à grande distance, parallèle au tube (figure 8.1).

On mesure les pressions P_A et P_B :

☒ **a.** $P_A = P_B + \dfrac{\mu V_0^2}{2}$

❒ **b.** $P_A = P_B$

❒ **c.** $P_B = P_A + \dfrac{\mu V_0^2}{2}$

❒ **d.** $P_B + P_A = \dfrac{\mu V_0^2}{2}$

On raisonne sur deux lignes de courants représentées sur la figure (8.1) et on néglige la différence d'altitude entre les deux points. Le point A est un point d'arrêt, donc le théorème de Bernoulli appliqué sur la ligne de courant arrivant en A s'écrit $P_0 + \mu\dfrac{V_0^2}{2} = P_A$. En ce qui concerne le point B, on suppose qu'il est suffisamment éloigné du début de l'obstacle pour que les lignes de courants soient parallèles. La vitesse du fluide au voisinage de ce fluide (fluide parfait) est $\overrightarrow{V_0}$. L'équation de Bernoulli entraine alors $P_B = P_0$ d'où la réponse **a**.

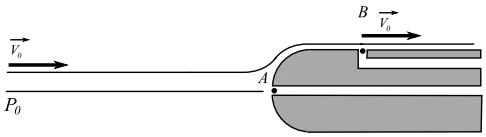


Figure 8.1

Cet énoncé concerne les questions 12 à 15 :
Cette série de questions étudie une solution au phénomène de cavitation dans une canalisation. On s'intéresse à une conduite forcée de diamètre constant D (figure 8.2). Cette canalisation est reliée à un réservoir en altitude et débouche à l'air libre à son autre extrémité au point A. On suppose que la surface libre de l'eau du réservoir est immobile et reste à l'altitude $z = 0$. On note P_0 la pression atmosphérique en A et B et $\Delta z = z_B - z_A$ le dénivelé.

12 Déterminer la vitesse v_A de l'eau au point A ainsi que la pression P_M en un point M de la canalisation en fonction de son altitude z_M.

❒ **a.** $v_A = \sqrt{2g(z_C - z_A)}$

❒ **b.** $v_A = \sqrt{2g(z_B - z_A) + \dfrac{P_0}{\mu}}$

☒ **c.** $P_M = P_0 + \mu g(z_A - z_M)$

❒ **d.** $P_M = P_0 + \mu g(z_B - z_M)$

On applique la relation de Bernoulli sur une ligne de courant partant de la surface libre (point B) jusqu'en A. Pour ces deux points la pression est P_0 et la vitesse en B est supposée nulle donc :

$$P_A + \mu\frac{v_A^2}{2} + \mu g z_A = P_B + \mu\frac{v_B^2}{2} + \mu g z_B \Rightarrow v_A = \sqrt{2g(z_B - z_A)}$$

Aucune réponse proposée n'est juste.

La section de la canalisation est constante, donc par conservation du débit, la vitesse est la même en tout point de la canalisation. Par application de la relation de Bernoulli, on obtient : $P_M + \mu g z_M = P_A + \mu g z_A$ d'où la relation **c**.

13 La pression de vapeur saturante étant très basse à la température de l'eau, on la considère quasiment nulle. Déterminer la condition pour qu'il y ait formation de bulles dans la canalisation (phénomène de cavitation). On rappelle $P_0 = 1$ bar, $\mu = 10^3$ kg et on prendra $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

❒ **a.** $z_B - z_M > \dfrac{P_0}{\mu g}$

☒ **b.** $z_M - z_A > \dfrac{P_0}{\mu g}$

❒ **c.** $z_M < -90$ m

☒ **d.** $z_M > -90$ m

Pour qu'il y ait cavitation , il faut que l'expression de la question précédente donne $P_M < 0$ ce qui entraine la relation **b**. L'application numérique donne la réponse **d**.

14 On ajoute à l'extrémité de la canalisation (en A) un embout réducteur en forme de bouteille, de section $d < D$ en sortie (figure 8.3). Déterminer la vitesse en A et en sortie S.

❒ **a.** $v_A = \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

☒ **b.** $v_A = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

☒ **c.** $v_S = \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

❒ **d.** $v_S = \left(\dfrac{D}{d}\right)^2 \sqrt{2g(z_B - z_A)}$

On applique la relation de Bernoulli entre B et S pour lequel la pression est P_0, ce qui donne : $v_S = \sqrt{2g(z_B - z_S)}$ donc la réponse **c.** puisque $z_S = z_A$. Par conservation du débit : $\pi \dfrac{D^2}{4} v_A = \pi \dfrac{d^2}{4} v_S$ d'où la relation **b**.

15 Déterminer la condition sur d pour qu'il n'y ait plus cavitation.

☒ **a.** $\dfrac{d}{D} \leq \left(1 + \dfrac{P_0}{\mu g(z_B - z_A)} + \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

❒ **b.** $\dfrac{d}{D} \leq \left(\dfrac{P_0}{\mu g(z_B - z_A)} + \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

❒ **c.** $\dfrac{d}{D} \leq \left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

❒ **d.** $\dfrac{d}{D} \geq \left(1 + \dfrac{P_0}{\mu g(z_B - z_A)} + \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_A}\right)^{1/4}$

On écrit de nouveau la relation de Bernoulli entre un point M de la canalisation (vitesse v_A) et le point S (d'altitude z_A) avec les expressions des vitesses obtenues à la question précédente :

$$P_M + \mu \left(\frac{d}{D}\right)^4 g(z_B - z_A) + \mu g z_M = P_0 + \mu g(z_B - z_A) + \mu g z_A$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On cherche à avoir $P_M \geq 0$ pour tout point de la canalisation, sachant que c'est pour le point C que la situation est la plus défavorable. En posant $M = C$, on obtient la condition **a**.

9 Bilans dynamiques et thermodynamiques

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F Un fluide en écoulement représente un système fermé.

C'est un système qui échange de la matière avec l'environnement, il est donc ouvert. Pour pouvoir appliquer les principes de la thermodynamique, il faut se ramener à un système fermé défini dans les notations.

2 ☒ V ❒ F Pour une grandeur extensive A dont la grandeur massique est notée a, le débit convectif est $D_A = aD_m$.

La masse dm qui travers une surface S pendant dt transporte une quantité $\delta A = a\mathrm{d}m$. Or dm est relié au débit massique D_m par $\mathrm{d}m = D_m\mathrm{d}t$, donc $\delta A = aD_m\mathrm{d}t$. Le débit de A est $D_A = aD_m$.

QCM

3 On s'intéresse à une grandeur extensive A et sa grandeur massique a. Déterminer la variation dA de A pour le système (S) entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ dans le cas d'un écoulement unidimensionnel.

❒ **a.** $\mathrm{d}A = D_m(a_s - a_e) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

☒ **b.** $\mathrm{d}A = D_m\mathrm{d}t(a_s - a_e) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

❒ **c.** $\mathrm{d}A = D_m\mathrm{d}t(a_e - a_s) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

❒ **d.** $\mathrm{d}A = D_v\mathrm{d}t(a_s - a_e) + A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - A_{\mathscr{V}_c(t)}$

À l'instant t, le système est constitué du fluide dans le volume de contrôle et de la masse dm_e soit :

$$A(t) = A_{\mathscr{V}_c(t)} + a_e\mathrm{d}m_e = A_{\mathscr{V}_c(t)} + a_eD_m\mathrm{d}t$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, le système est constitué du fluide dans le volume de contrôle et de la masse dm_s soit :

$$A(t + \mathrm{d}t) = A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} + a_s\mathrm{d}m_s = A_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} + a_sD_m\mathrm{d}t$$

La différence $A(t + \mathrm{d}t) - A(t)$ donne le résultat **b**.

Cet énoncé concerne les questions 4 à 5 :
On étudie dans les questions suivantes le décollage d'une fusée de masse à vide m_0. La fusée emporte au décollage une masse de carburant et comburant m_c. On notera $M(t) = m_0 + m_c(t)$ la masse totale de la fusée à l'instant t. On considère le référentiel terrestre $\mathscr{R}_t$ galiléen et on note $\mathscr{R}_f$ celui de la fusée. Les gaz de propulsion sont éjectés à une vitesse constante $\vec{u}$ dans $\mathscr{R}_f$ avec un débit massique constant et on note $\overrightarrow{V(t)}$ la vitesse de la fusée à l'instant t dans le référentiel $\mathscr{R}_t$.

4 Après avoir défini le système fermé entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, exprimer les quantités de mouvement de ce système à ces deux instants.

☒ **a.** $\vec{P}(t) = M\vec{V}(t)$

☐ **b.** $\vec{P}(t) = M\left(\vec{V}(t) + \vec{u}\right)$

☐ **c.** $\vec{P}(t + \mathrm{d}t) = (M - D_m\mathrm{d}t)\,\vec{V}(t + \mathrm{d}t) + D_m\mathrm{d}t\,\vec{u}$

☒ **d.** $\vec{P}(t + \mathrm{d}t) = (M - D_m\mathrm{d}t)\,\vec{V}(t + \mathrm{d}t) + D_m\mathrm{d}t\left(\vec{u} + \vec{V}(t + \mathrm{d}t)\right)$

On prend comme système entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, la fusée et les gaz éjectés dans l'intervalle de temps de durée $\mathrm{d}t$. À l'instant t, les gaz sont contenus dans la masse M de la fusée et ont la même vitesse d'où $\vec{P}(t) = M\vec{V}(t)$.

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, une masse $D_m\mathrm{d}t$ a été éjectée et sa vitesse par rapport au référentiel $\mathscr{R}_t$ est $\vec{u} + \vec{V}(t + \mathrm{d}t)$. La fusée, dont la masse n'est plus que $M - D_m\mathrm{d}t$ a une quantité de mouvement $(M(t) - D_m\mathrm{d}t)\vec{V}(t + \mathrm{d}t)$. En sommant les quantités de mouvement de la fusée et celle des gaz, on obtient :

$$\vec{P}(t + \mathrm{d}t) = (M(t) - D_m\mathrm{d}t)\,\vec{V}(t + \mathrm{d}t) + D_m\mathrm{d}t\left(\vec{u} + \vec{V}(t + \mathrm{d}t)\right)$$

5 En déduire la force de poussée $\vec{F_p}$ due à l'éjection des gaz.

☒ **a.** $\vec{F_p} = -D_m\vec{u}$

☐ **b.** $\vec{F_p} = D_m\vec{u}$

☐ **c.** $\vec{F_p} = -D_m\left(\vec{u} + \vec{V}\right)$

☐ **d.** $\vec{F_p} = D_m\left(\vec{u} + \vec{V}\right)$

Avec les relations qui précèdent, la variation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{P}(t + \mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = M(t)(\vec{V}(t + \mathrm{d}t) - \vec{V}(t)) + D_m\mathrm{d}t\,\vec{u} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M(t)\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + D_m\vec{u}$$

Le théorème de la résultante dynamique s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ext}$, ce qui peut aussi s'écrire :

$$M\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ext} - D_m\vec{u}$$

Le terme $-D_m\vec{u}$ apparaît donc comme une force qui propulse la fusée (vers le haut) appelée force de poussée.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 6 à 8 :
Un liquide incompressible traverse une canalisation coudée (figure 9.3) horizontale. L'écoulement est unidimensionnel et permanent. le liquide entre dans le coude à travers la surface S_1 avec une vitesse $\overrightarrow{v_1}$ et ressort du coude à travers la surface S_2 avec une vitesse $\overrightarrow{v_2} = v_2\overrightarrow{u_X}$, le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_X}$ faisant un angle α avec l'axe Ox. La pression est P_1 en amont du coude et P_2 en aval.

6 Après avoir défini un volume de contrôle adapté, déterminer la variation de quantité de mouvement du fluide dans le coude entre t et $t + \mathrm{d}t$.

❒ **a.** $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_m(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2})\mathrm{d}t$

❒ **b.** $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_m(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1})\mathrm{d}t$

❒ **c.** $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_m(v_2 \cos\alpha - v_1)\overrightarrow{u_x}\mathrm{d}t$

☒ **d.** $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})\mathrm{d}t$

On prend comme volume de contrôle le volume situé entre les surfaces S_1 et S_2 de la figure 9.3. On utilise le résultat de la question 3 pour chaque composante de la quantité de mouvement, ce qui permet de l'appliquer au vecteur $\overrightarrow{p}$ directement. La grandeur massique associée à la quantité de mouvement est la vitesse. On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_m\mathrm{d}t(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) + \overrightarrow{p}_{\mathscr{V}_c(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{p}_{\mathscr{V}_c(t)}$$

En régime stationnaire, le volume de contrôle a la même quantité de mouvement à t et à $t + \mathrm{d}t$, donc les deux derniers termes s'annulent. On trouve donc la réponse **d**.

7 La force $\overrightarrow{F}$ exercée par le fluide sur le tuyau s'écrit :

❒ **a.** $\overrightarrow{F} = D_m(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2})$

❒ **b.** $\overrightarrow{F} = D_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) - P_1S_1\overrightarrow{u_x} + P_2S_2\overrightarrow{u_X}$

☒ **c.** $\overrightarrow{F} = D_m(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) + P_1S_1\overrightarrow{u_x} - P_2S_2\overrightarrow{u_X}$

❒ **d.** $\overrightarrow{F} = D_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué dans un plan horizontal (on ne s'intéresse pas au poids) au système fermé défini dans les notations s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = D_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{F}_{T\to F} + \overrightarrow{F}_{p,amont} + \overrightarrow{F}_{p,aval}$$

avec $\overrightarrow{F}_{T\to F}$ la force exercée par le tuyau sur le fluide (égale à $-\overrightarrow{F}$ recherchée), $\overrightarrow{F}_{p,amont} = P_1S_1\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{F}_{p,aval} = -P_2S_2\overrightarrow{u_X}$ les forces de pression exercées par le reste du fluide sur les section S_1 et S_2. La force $\overrightarrow{F}$ est donc donnée par la réponse **c**.

8 Exprimer les composantes F_x et F_y de la force exercée par le fluide sur le tuyau en fonction de P_1, S_1, S_2, D_m μ et α.

❒ **a.** $F_x = P_1(S_1 - S_2\cos\alpha)$

☒ **b.** $F_x = P_1(S_1 - S_2\cos\alpha) - \dfrac{D_m^2}{2\mu S_1}\left(\dfrac{S_2}{S_1}\cos\alpha + \dfrac{S_1}{S_2}\cos\alpha - 2\right)$

☒ **c.** $F_y = -P_1S_2\sin\alpha - \dfrac{D_m^2}{2\mu S_1}\left(\dfrac{S_2}{S_1} + \dfrac{S_1}{S_2}\right)\sin\alpha$

❒ **d.** $F_y = P_1S_2\sin\alpha$

La conservation du débit s'écrit $S_1v_1 = S_2v_2$. L'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point de S_1 et un point de S_2 entraine $P_2 = P_1 + \dfrac{\mu}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$ ou $P_2 = P_1 + \dfrac{\mu v_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right)$. La projection de $\vec{F}$ sur Ox est :

$$F_x = P_1S_1 - P_2S_2\cos\alpha + D_m(v_1 - v_2\cos\alpha)$$

ou

$$F_x = P_1S_1 - P_1S_2\cos\alpha - \frac{\mu v_1^2}{2}\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)S_2\cos\alpha + D_mv_1\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\cos\alpha\right)$$

En remplaçant v_1 par $\dfrac{D_m}{\mu S_1}$ on obtient la réponse **b**.

La projection sur Oy s'écrit :

$$F_y = -D_mv_2\sin\alpha - P_2S_2\sin\alpha = \left(-\frac{D_m^2}{\mu S_2} - P_1S_2 - \frac{D_m^2S_2}{2\mu S_1^2}\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\right)\sin\alpha$$

Ce qui en regroupant les termes donne la réponse **c**.

Cet énoncé concerne les questions 9 à 13 :

Les questions suivantes étudient un modèle d'écoulement unidimensionnel autour d'une hélice d'avion qui se déplace à vitesse constante dans le référentiel terrestre galiléen. On se place dans le référentiel lié à l'hélice que l'on suppose lui aussi galiléen. On a dessiné en pointillé la surface de contrôle S_c de l'air en écoulement permanent incompressible qui traverse l'hélice (figure 9.4). Il pénètre dans cette surface par la section S_1 à la vitesse $\vec{v_1}$ (opposée à la vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre) et ressort par la section S_2 à la vitesse $\vec{v_2}$.

On note $\vec{v_h}$ la vitesse de l'air au niveau de l'hélice.

On néglige l'effet de la pesanteur, donc la pression autour de la surface de contrôle est uniforme et égale à la pression atmosphérique P_0.

9 Exprimer la force horizontale $\vec{F} = F\vec{u_x}$ exercée par l'air sur l'hélice.

❒ **a.** $F_x = D_m(v_2 - v_1)$

❒ **b.** $F_x = D_m(v_2 - v_1) + P_0(S_1 - S_2)$

☒ **c.** $F_x = D_m(v_1 - v_2)$

❒ **d.** $F_x = D_m(v_1 - v_2) - P_0(S_1 - S_2)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On reprend le système défini dans les notations (air contenu dans le volume de contrôle + $\mathrm{d}m_e$ ou $\mathrm{d}m_s$) et le résultat pour le bilan de quantité de mouvement de la question 3 utilisé dans le problème précédent : $\overrightarrow{\mathrm{d}p} = D_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})\mathrm{d}t$. Les actions s'exerçant sur le système sont : la pression de l'air environnant et la force exercée par l'hélice ($-\overrightarrow{F}$). Le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{F} - \oiint_{S_c} P_0 \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Le signe « – » pour les forces de pression vient de l'orientation de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ vers l'extérieur du volume de contrôle. L'intégrale de la force de pression sur la surface fermée est nulle. On en déduit en projetant sur l'horizontale que $F_x = D_m(v_1 - v_2)$.

10 À l'aide du résultat de la question précédente et d'un bilan d'énergie, déterminer la puissance $\mathscr{P}_r$ reçue par l'hélice de la part de l'air.

☒ **a.** $\mathscr{P}_r = D_m v_h(v_1 - v_2)$

☐ **b.** $\mathscr{P}_r = D_m(v_2 - v_1)^2$

☒ **c.** $\mathscr{P}_r = \dfrac{D_m}{2}(v_1^2 - v_2^2)$

☐ **d.** $\mathscr{P}_r = \dfrac{D_m}{2}v_h^2$

La vitesse de l'air au niveau de l'hélice est $\overrightarrow{v_h}$ et la force subie par l'air est $-\overrightarrow{F}$ donc la puissance reçue par l'air est $-\mathscr{P}_r = -F_x v_h$ soit $\mathscr{P}_r = D_m v_h(v_1 - v_2)$.

Si on applique le théorème de la puissance cinétique au système, on a $-\mathscr{P}_r = \dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$, puisque la puissance reçue par l'air de la part de l'hélice est $-\mathscr{P}_r$. Or d'après le résultat de la question 3, $\mathrm{d}E_c = D_m(e_{c,s} - e_{c,e})$ où $e_{c,e}$ est l'énergie cinétique massique de $\mathrm{d}m_e$ et $e_{c,s}$ celle de $\mathrm{d}m_s$. On a donc : $\mathrm{d}E_c = \dfrac{D_m}{2}(v_2^2 - v_1^2)\mathrm{d}t$ d'où le résultat **c**.

11 On note P_{gh} et P_{dh} les pressions de l'air juste avant et juste après l'hélice. Déterminer la vitesse v_h de l'air au niveau de l'hélice ainsi que la différence de pression $\Delta P = P_{gh} - P_{dh}$

☐ **a.** $v_h = \dfrac{v_2 - v_1}{2}$

☒ **b.** $v_h = \dfrac{v_2 + v_1}{2}$

☐ **c.** $\Delta P = 0$

☒ **d.** $\Delta P = \dfrac{1}{2}\mu\left(v_1^2 - v_2^2\right)$

Les deux expressions de la puissance établies précédemment donnent :

$$\mathscr{P}_r = D_m v_h(v_1 - v_2) = \frac{D_m}{2}(v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow v_h = \frac{v_2 + v_1}{2}$$

On applique le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point à gauche où la pression est P_0 et la vitesse v_1 et un point juste avant l'hélice où la vitesse est v_h et la pression P_{gh}. On peut écrire :

$$P_{gh} + \frac{1}{2}\mu v_h^2 = P_0 + \frac{1}{2}\mu v_1^2$$

De même à droite de l'hélice :

$$P_{dh} + \frac{1}{2}\mu v_h^2 = P_0 + \frac{1}{2}\mu v_2^2$$

En effectuant la différence des deux expressions, on trouve la relation **d**.

12 On appelle S_h la section du volume de contrôle au niveau de l'hélice. Exprimer la composante F_x de la force et la puissance $\mathscr{P}_r$ reçue par l'hélice.

☒ **a.** $F_x = \frac{\mu}{2}(v_1^2 - v_2^2)S_h$ ❒ **b.** $F_x = -P_0 S_h$

☒ **c.** $\mathscr{P}_r = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)S_h v_h$ ❒ **d.** $\mathscr{P}_r = P_0 S_h v_h$

La force horizontale exercée par l'air à gauche de l'hélice est $P_{gh}S_h$ et celle à droite est $-P_{dh}S_h$, soit $F_x = S_h \Delta P$ ce qui donne la réponse **a.** avec l'expression de ΔP obtenue à la question précédente.

On a déjà montré que la puissance reçue par l'hélice est $\mathscr{P}_r = F_x v_h$.

13 La puissance disponible $\mathscr{P}_d$ est celle qui serait apportée par l'air en l'absence de l'hélice à travers la même surface S_h à la vitesse v_1. En utilisant l'expression de v_h en fonction de v_1 et v_2, déterminer le rendement η de l'hélice.

☒ **a.** $\eta = 4\frac{v_h^2}{v_1^2}\left(1 - \frac{v_h}{v_1}\right)$ ❒ **b.** $\eta = \frac{v_1^2}{4v_h(v_1 - v_h)}$

❒ **c.** $\eta = 2\frac{v_h^2}{v_1^2}\left(1 - \frac{v_h}{v_1}\right)$ ❒ **d.** $\eta = 4\left(\frac{v_1}{v_h} - 1\right)$

En l'absence d'hélice, l'air a une vitesse v_1, donc la puissance apportée par l'air à travers la surface S_h est $\mathscr{P}_d = \frac{1}{2}\mu v_1^2 S_h v_1$. On obtient le rendement :

$$\eta = \frac{\mathscr{P}_r}{\mathscr{P}_d} = \frac{\mu(v_1^2 - v_2^2)S_h v_h}{2}\frac{2}{\mu v_1^3 S_h} = \frac{(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)v_h}{v_1^3} = 2\frac{v_h^2(v_1 - 2v_h + v_1)}{v_1^3}$$

où l'on a utilisé $v_h = \frac{v_1 + v_2}{2}$. Le résultat final est la réponse **a**.

Cet énoncé concerne les questions 14 à 17 :
Cette série de questions étudie le fonctionnement d'un tourniquet (figure 9.5). Il est alimenté par sa base avec un débit massique d'eau constant D_m. Le tube vertical d'axe Oz sera considéré de rayon négligeable. Il alimente deux tubes horizontaux de longueur a terminés par des embouts eux aussi horizontaux, de section de sortie s, faisant un angle α avec la normale aux tubes.

Il est soumis à un couple résistant de moment $-\Gamma$ ($\Gamma > 0$) par rapport à Oz.

Le moment d'inertie J du tourniquet et de l'eau qu'il contient est constant. On utilise les coordonnées cylindriques.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

14 Déterminer la vitesse de sortie $\vec{u}$ de l'eau dans le référentiel terrestre par l'embout E.

❒ **a.** $\vec{u} = \dfrac{D_m}{\mu s}\left(\sin\alpha\,\vec{u_r} - \cos\alpha\vec{u_\theta}\right)$

❒ **b.** $\vec{u} = \dfrac{D_m}{\mu s}\left(\cos\alpha\,\vec{u_r} - \sin\alpha\,\vec{u_\theta}\right)$

☒ **c.** $\vec{u} = \dfrac{D_m}{\mu s}\sin\alpha\,\vec{u_r} + \left(\omega a - \dfrac{D_m}{\mu s}\cos\alpha\right)\vec{u_\theta}$

❒ **d.** $\vec{u} = \omega a\,\vec{u_\theta}$

Dans le référentiel lié au tourniquet, la vitesse $\vec{u_t}$ projetée dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est $\vec{u_t} = u_t(\sin\alpha\,\vec{u_r} - \cos\alpha\,\vec{u_\theta})$ (voir figure 9.1). D'autre part, le débit massique est $D_m = \mu s u_t$

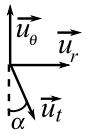


Figure 9.1

Pour obtenir la vitesse dans le référentiel terrestre, on utilise la composition des vitesses. La vitesse d'entraînement de E est $\omega a\vec{u_\theta}$, donc $\vec{u} = \omega a\vec{u_\theta} + \vec{u_t}$ ce qui donne la réponse **c**.

15 Après avoir défini le système étudié, déterminer son moment cinétique L_{Oz} par rapport à l'axe Oz, aux instants t et $t + \mathrm{d}t$.

☒ **a.** $L_{Oz}(t) = J\omega(t)$

❒ **b.** $L_{Oz}(t) = J\omega(t) + D_m\omega a^2\mathrm{d}t$

☒ **c.** $L_{Oz}(t + \mathrm{d}t) = J\omega(t + \mathrm{d}t) - \dfrac{D_m^2}{\mu s}a\cos\alpha\,\mathrm{d}t + D_m\omega a^2\mathrm{d}t$

❒ **d.** $L_{Oz}(t + \mathrm{d}t) = J\omega(t + \mathrm{d}t) - 2\dfrac{D_m^2}{\mu s}a\cos\alpha\,\mathrm{d}t + 2D_m\omega a^2\mathrm{d}t$

À l'instant t, le système est composé du liquide dans les tubes horizontaux, de la masse $\mathrm{d}m_e$ située dans le tube vertical qui entre dans les tubes horizontaux entre t et $t + \mathrm{d}t$ et du tourniquet. À l'instant $t + \mathrm{d}t$, le système est composé du liquide dans les tubes horizontaux, de la masse $\mathrm{d}m_s$ qui est sortie par les embouts du tourniquet entre t et $t + \mathrm{d}t$ et du tourniquet.

À l'instant t, toute l'eau du système est dans le tourniquet donc $L_{Oz}(t) = J\omega(t)$. À $t + \mathrm{d}t$ il faut ajouter le moment cinétique de $\mathrm{d}m_s = D_m\mathrm{d}t$. Pour chaque embout, on a une masse $\mathrm{d}m_s/2$ qui est sortie, que l'on suppose ponctuelle de moment cinétique $a\vec{u_r} \wedge \dfrac{\mathrm{d}m_s}{2}\vec{u}$. Le moment cinétique à $t + \mathrm{d}t$ est donc :

$$J\omega(t + \mathrm{d}t) + 2\frac{\mathrm{d}m_s}{2}a\left(\omega a - \frac{D_m}{\mu s}\cos\alpha\right) = J\omega(t + \mathrm{d}t) + D_m a\left(\omega a - \frac{D_m}{\mu s}\cos\alpha\right)\mathrm{d}t$$

16 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ω.

❒ **a.** $J\dfrac{d\omega}{dt} + 2a^2 D_m \omega = \dfrac{2D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha - \Gamma$

☒ **b.** $J\dfrac{d\omega}{dt} + a^2 D_m \omega = \dfrac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha - \Gamma$

❒ **c.** $J\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha - \Gamma$

❒ **d.** $J\dfrac{d\omega}{dt} + a^2 D_m \omega = \dfrac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha + \Gamma$

On calcule $\lim\limits_{dt\to 0} \dfrac{L_{Oz}(t+dt) - L_{Oz}(t)}{dt}$:

$$\lim_{dt\to 0} \frac{L_{Oz}(t+dt) - L_{Oz}(t)}{dt} = \frac{dL_{Oz}}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} + a^2 D_m \omega - \frac{D_m^2}{\mu s} a\cos\alpha$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit $\dfrac{dL_{Oz}}{dt} = -\Gamma$ d'où la réponse **b**.

17 Déterminer le temps caractéristique τ et la vitesse angulaire ω_∞ en régime permanent.

❒ **a.** $\tau = \dfrac{J}{2D_m a^2}$

❒ **b.** $\tau = \dfrac{D_m a^2}{J}$

☒ **c.** $\omega_\infty = \dfrac{D_m \cos\alpha}{a\mu s} - \dfrac{\Gamma}{a^2 D_m}$

❒ **d.** $\omega_\infty = \dfrac{D_m \cos\alpha}{a\mu s} + \dfrac{\Gamma}{a^2 D_m}$

On met l'équation différentielle du premier ordre sous forme canonique : $\dfrac{d\omega}{dt} + \dfrac{\omega}{\tau} = \dfrac{\omega_\infty}{\tau}$ soit :

$$\tau = \frac{J}{a^2 D_m} \quad \text{et} \quad \omega_\infty = \frac{D_m \cos\alpha}{a\mu s} - \frac{\Gamma}{a^2 D_m}$$

Cet énoncé concerne les questions 18 à 20 :
Cette série de questions a pour but d'établir un bilan thermodynamique pour un fluide en écoulement dans un organe thermodynamique (turbine, tuyère ...) représenté schématiquement sur la figure 9.6.

Ce système est constitué à l'instant t d'une partie centrale Σ_c dans l'organe, et de la partie dm_e entrant dans l'organe entre t et $t + dt$. À l'instant $t + dt$, ce système est constitué de Σ_c et de la partie dm_s sortant de l'organe entre t et $t + dt$.

L'écoulement est unidimensionnel et on notera z l'altitude, c la vitesse du fluide et v les volumes massiques.

Le système reçoit une puissance thermique $\dot{q}$ et une puissance mécanique utile (autres que les forces de pression) $\dot{w}_u$. On notera w_{um} le travail utile massique et q_m le transfert thermique massique correspondants.

Les écoulements seront supposés stationnaires.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

18 On note P_e (respectivement P_s) la pression en amont de l'organe (en aval). Déterminer l'expression du travail δW_p des forces de pression pendant dt

❒ **a.** $\delta W_p = -P\mathrm{d}V$

❒ **b.** $\delta W_p = -D_m\mathrm{d}t(P_e v_e - P_s v_s)$

❒ **c.** $\delta W_p = -D_m\mathrm{d}tP(v_s - v_e)$

☒ **d.** $\delta W_p = D_m\mathrm{d}t(P_e v_e - P_s v_s)$

Il y a deux cas où l'on ne peut pas appliquer la formule $\delta W = -P\mathrm{d}V$: lorsqu'il y a une enceinte vide dans l'état initial et pour un écoulement (cas présent).

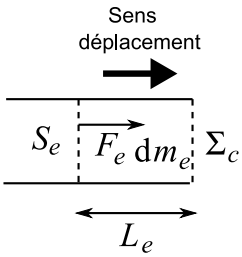


Figure 9.2

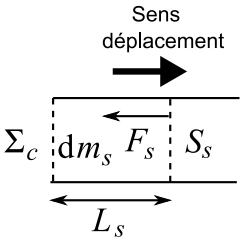


Figure 9.3

Il faut revenir à la définition mécanique du travail. Pour la partie dm_e en aval de Σ_c (figure 9.2), la force de pression exercée par le fluide à gauche est $F_e = P_e S_e$ et à droite il s'agit d'une force intérieure puisqu'exercée par Σ_c. Le travail des forces de pression extérieures sur dm_e est donc :

$$\delta W_{p,e} = F_e L_e = P_e S_e L_e = P_e v_e D_m \mathrm{d}t$$

En effet le travail est moteur ($\overrightarrow{F_e}$ et déplacement de même sens) et $S_e L_e$ est égal au volume de dm_e soit $dm_e v_e$.

De manière similaire pour dm_s (figure 9.3), mais avec un travail résistant cette fois ($\overrightarrow{F_s}$ et déplacement de sens opposé), $\delta W_{p,s} = -P_s v_s D_m \mathrm{d}t$. En sommant les deux termes, on obtient la réponse **d**.

19 Déterminer le premier principe pour un fluide en écoulement en prenant en compte l'énergie cinétique macroscopique E_c et l'énergie potentielle de pesanteur E_p.

☒ **a.** $D_m\left[\left(h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(h_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right)\right] = \dot{w}_u + \dot{q}$

❒ **b.** $D_m\left[\left(u_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(u_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right)\right] = \dot{w}_u + \dot{q}$

❒ **c.** $\left(u_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(u_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right) = \dot{w}_u + \dot{q}$

❒ **d.** $\left(h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + gz_s\right) - \left(h_e + \frac{1}{2}c_e^2 + gz_e\right) = \dot{w}_u + \dot{q}$

On applique le premier principe à (S) dans l'intervalle de temps $[t, t + \mathrm{d}t]$, soit :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = \delta W_p + \delta W_u + \delta Q$$

où δW_u est le travail utile. D'après le résultat de la question (3), on peut écrire $\mathrm{d}U = D_m \mathrm{d}t(u_s - u_e)$, $\mathrm{d}E_c = D_m \mathrm{d}t \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2)$ et $\mathrm{d}E_p = D_m \mathrm{d}t\, g(z_s - z_e)$. En passant l'expression de δW_p dans le membre de gauche, on obtient :

$$D_m \mathrm{d}t \left[\left(u_s + P_s v_s + \frac{1}{2}c_s^2 + g z_s\right) - \left(u_e + P_e v_e + \frac{1}{2}c_e^2 + g z_e\right)\right] = \dot{w}_u \mathrm{d}t + \dot{q}\mathrm{d}t$$

Les termes $u + Pv$ sont égaux aux enthalpies massiques h. Après simplification par $\mathrm{d}t$, on obtient la réponse **a**.

On peut aussi écrire le premier principe pour 1 kg de fluide :

$$\Delta\left(h + \frac{1}{2}c^2 + gz\right) = w_{um} + q_m$$

20 Écrire le deuxième principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement en contact avec un thermostat à la température T_{th}. On note σ_c le taux de création d'entropie (ou entropie créée par seconde) dans l'organe.

❒ **a.** $\Delta s = \dfrac{\dot{q}}{T_{th}} + \sigma_c$

❒ **b.** $D_m \Delta s = \dfrac{\dot{q}}{T} + \sigma_c$

❒ **c.** $D_m \Delta s = \dfrac{\dot{q}}{T_{th}} - \sigma_c$

☒ **d.** $D_m \Delta s = \dfrac{\dot{q}}{T_{th}} + \sigma_c$

Pour le système (S) la variation d'entropie s'écrit $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta q}{T_{th}} + \delta S^c$. Or l'entropie créée δS^c pendant $\mathrm{d}t$ est $\sigma_c \mathrm{d}t$ et $\delta Q = \dot{q}\mathrm{d}t$. En utilisant le résultat de la question (3), $\mathrm{d}S$ s'écrit $D_m \Delta s \mathrm{d}t$, d'où le résultat **d**.

21 On s'intéresse à une tuyère indéformable (figure 9.7). La transformation étant très rapide, il n'y a pas d'échange de chaleur et on suppose de plus la transformation réversible. Déterminer la célérité $c(x)$ pour une abscisse x dans la tuyère.

❒ **a.** $c(x) = \sqrt{c^2(0) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}P}{\mu}}$

☒ **b.** $c(x) = \sqrt{c^2(0) - 2\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}P}{\mu}}$

❒ **c.** $c(x) = \sqrt{c^2(0) - 2\displaystyle\int_0^x \mu \mathrm{d}P}$

❒ **d.** $c(x) = \sqrt{-c^2(0) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}P}{\mu}}$

On écrit le premier principe pour le fluide écoulement entre x et $x + \mathrm{d}x$. Ici l'altitude est la même, donc $\mathrm{d}E_p = 0$, il n' y a pas de pièces mobiles donc $\dot{w}_u = 0$ et la transformation est adiabatique donc $\dot{q} = 0$. Finalement, on a :

$$D_m\left(h(x + \mathrm{d}x) - h(x) + \frac{1}{2}c^2(x + \mathrm{d}x) - \frac{1}{2}c^2(x)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}h = -\frac{1}{2}\mathrm{d}c^2$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

L'identité thermodynamique s'écrit : $\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}P$. Or la transformation est isentropique donc $\mathrm{d}s = 0$. D'autre part $v = 1/\mu$ donc $\mathrm{d}h = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mu}$. Finalement, en intégrant la relation $\mathrm{d}h = -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}c^2$ entre $x = 0$ et x on obtient la relation **b**.

On peut remarquer que pour un fluide incompressible, on retrouve l'équation de Bernoulli.

Partie 4

Ondes

10 Généralités sur les ondes

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les généralités sur les phénomènes propagatoires
- L'établissement et l'utilisation de l'équation de D'Alembert.
- L'obtention de l'équation de D'Alembert pour une corde.
- L'obtention de l'équation de D'Alembert pour une ligne électrique.
- L'étude d'une chaîne infinie d'oscillateurs et l'approximation des milieux continus.
- La notion d'onde plane, progressive, harmonique.
- La notion d'onde stationnaire.

Notations. La célérité de l'onde sera notée c dans tout le chapitre et sera prise positive.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 178**.

1 ❒ V ❒ F Une onde est un phénomène qui dépend du temps et de la position.

2 ❒ V ❒ F Pour une onde, les variables d'espace et de temps sont toujours couplées.

3 ❒ V ❒ F Dans l'équation $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$, c est la célérité de l'onde $s(x,t)$.

4 ❒ V ❒ F Une onde $s(x,t) = f\left(t + \dfrac{x}{c}\right)$ se propage dans le sens des x décroissants.

5 ❒ V ❒ F Une surface d'onde est un lieu de l'espace sur laquelle la grandeur ondulatoire a même valeur à un instant donné.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 178**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

6 On s'intéresse à une onde unidimensionnelle $s(x,t)$ solution de l'équation de D'Alembert $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$. La forme générale de l'onde est :

❒ **a.** $s(x,t) = f^+(x-ct)$

❒ **b.** $s(x,t) = f^-(x+ct)$

❒ **c.** $s(x,t) = f^+(x-ct) + f^-(x+ct)$

❒ **d.** $s(x,t) = f^+\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + f^-\left(t + \dfrac{x}{c}\right)$

7 Pour une onde scalaire $s(\vec{r},t)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, on rappelle l'équation de D'Alembert en trois dimensions :

$$\Delta s - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Quelle est l'expression générale d'une onde sphérique dont les surfaces d'onde sont des sphères de centre O (on se servira de l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques (formule 20)) ?

❒ **a.** $s(r,t) = f^+(r-ct) + f^-(r+ct)$

❒ **b.** $s(r,t) = \dfrac{f^+(r-ct)}{r} + \dfrac{f^-(r+ct)}{r}$

❒ **c.** $s(r,t) = \dfrac{f^+(r-ct)}{r} - \dfrac{f^-(r+ct)}{r}$

❒ **d.** $s(r,t) = \dfrac{f^+(r-ct)}{r^2} + \dfrac{f^-(r+ct)}{r^2}$

8 On cherche l'expression d'une onde plane progressive harmonique (O.P.P.H.), se propageant suivant l'axe x à la célérité c dans le sens des x décroissants, sous la forme complexe $\underline{s(x,t)} = \underline{s_0(x)}\mathrm{e}^{i\omega t}$. Quelle(s) est(sont) la(les) proposition(s) vraie(s) ?

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 \underline{s_0}}{\partial x^2} - \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{s_0} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2 \underline{s_0}}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{s_0} = 0$

❒ **c.** $\underline{s} = \underline{s^+}\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)}$

❒ **d.** $\underline{s} = \underline{s^-}\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

9 On s'intéresse à une onde stationnaire $s(x,t)$ pour laquelle les conditions aux limites sont $s(0,t) = 0$ et $s(\ell,t) = 0\ \forall t$. On cherche la solution sous la forme $s(x,t) = F(x)G(t)$. On notera n un entier strictement positif. La solution pour $s(x,t)$ est :

❒ **a.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n} \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t + \phi_n\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

❒ **b.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n} \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{\ell} + \phi_n\right)$

❒ **c.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n} \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t + \phi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

❒ **d.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n} \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}x + \phi_n\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell} + \phi_n\right)$

Cet énoncé concerne les questions 10 à 15 :
On étudie une ligne sans perte dont les points sont repérés par la variable x. Une cellule élémentaire de cette ligne est représentée sur la figure (10.1).

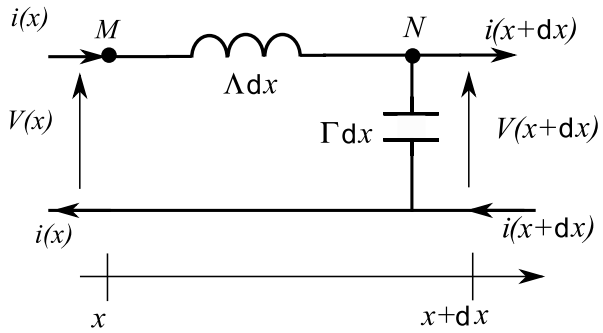


Figure 10.1

10 Par application de la loi des nœuds en N, déterminer l'une des équations suivantes :

❒ **a.** $\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$

❒ **b.** $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$

❒ **c.** $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \mathrm{d}x\frac{\partial V}{\partial t}$

❒ **d.** $\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma V \mathrm{d}x$

11 Par application de la loi des mailles, déterminer l'une des équations suivantes :

❒ **a.** $\frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda\frac{\partial i}{\partial t}$

❒ **b.** $\frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda\frac{\partial i}{\partial t}$

❒ **c.** $\frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda \mathrm{d}x\frac{\partial i}{\partial t}$

❒ **d.** $\frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda i \mathrm{d}x$

12 L'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(x,t)$ est :

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

13 On cherche des solutions de la forme : $V(x,t) = V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)$. Déterminer l'expression de l'intensité $i(x,t)$ correspondante :

❒ **a.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

❒ **b.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

❒ **c.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

❒ **d.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

14 On branche en $x = 0$ un générateur sinusoïdal délivrant une tension $V = V_0\cos(\omega t)$.

L'expression recherchée pour $\underline{V}$ complexe est $\underline{V} = \underline{V_1}e^{i(\omega t - kx)} + \underline{V_2}e^{i(\omega t + kx)}$ où $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$ sont des constantes *a priori* complexes. On ferme la ligne en $x = \ell$ par un court-circuit.

❒ **a.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\sin(k(\ell - x))}{\sin k\ell}$

❒ **b.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\mathrm{sh}(k(\ell - x))}{\mathrm{sh}\, k\ell}$

❒ **c.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\cos(k(\ell - x))}{\cos k\ell}$

❒ **d.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\mathrm{ch}(k(\ell - x))}{\mathrm{ch}\, k\ell}$

15 On souhaite qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie sur la ligne. Pour cela, on branche une impédance Z_c en $x = \ell$. Déterminer Z_c :

❒ **a.** $Z_c = 0$

❒ **b.** $Z_c \to \infty$ (ligne ouverte)

❒ **c.** $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$

❒ **d.** $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :

On s'intéresse au mouvement latéral d'une corde, par exemple excitée à une extrémité par un vibreur et tendue à l'autre par une masse (figure 10.2). Le système considéré est un morceau de corde de longueur $d\ell$, de masse linéique λ (figure 10.3), de centre de gravité G.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

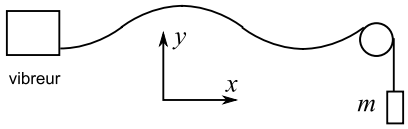


Figure 10.2

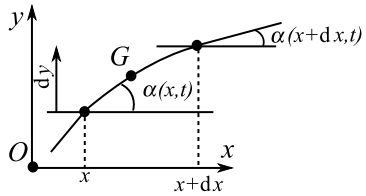


Figure 10.3

16 Parmi les propositions suivantes, lesquelles font partie des hypothèses d'étude du mouvement de la corde vibrante ?

❒ **a.** Les forces à considérer sont le poids et la tension.

❒ **b.** Pas de déplacement suivant Ox.

❒ **c.** Les déplacements suivant Oy sont petits.

❒ **d.** La corde est extensible.

17 On note $T(x)$ la norme de la tension en un point d'abscisse x. Exprimer la relation fondamentale de la dynamique projetée sur les axes Ox et Oy :

❒ **a.** $0 = T(x + \mathrm{d}x)\cos(\alpha(x + \mathrm{d}x)) - T(x)\cos(\alpha(x))$

❒ **b.** $0 = T(x + \mathrm{d}x)\cos(\alpha(x + \mathrm{d}x)) + T(x)\cos(\alpha(x))$

❒ **c.** $\lambda \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + \mathrm{d}x)\sin(\alpha(x + \mathrm{d}x)) + T(x)\sin(\alpha(x))$

❒ **d.** $\lambda \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + \mathrm{d}x)\sin(\alpha(x + \mathrm{d}x)) - T(x)\sin(\alpha(x))$

18 Avec les hypothèses quelle(s) est(sont) la(les) proposition(s) vraie(s) ?

❒ **a.** $\cos\alpha \simeq \dfrac{\partial y}{\partial x}$

❒ **b.** $\sin\alpha \simeq \dfrac{\partial y}{\partial x}$

❒ **c.** $T(x) = m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

❒ **d.** $T(x) = m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

19 Déterminer l'équation vérifiée par les déplacements transversaux y de la corde :

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\lambda}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\lambda}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{T}{\lambda}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{T}{\lambda}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Cet énoncé concerne les questions 20 à 24 :

On modélise un solide par une chaîne infinie d'atomes de masse m reliés par des ressorts identiques de longueur à vide a, de raideur K. L'atome n est repéré par

sa position d'équilibre $x_n^0 = na$ et sa position hors d'équilibre $x_n(t) = na + \xi_n(t)$ avec $|\xi_n(t)| \ll a$.

20 Déterminer l'équation différentielle vérifiées par $\xi_n(t)$.

❒ **a.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(-\xi_{n+1} - \xi_{n-1} + 2\xi_n)$

❒ **b.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(\xi_{n+1} - \xi_{n-1} - 2a)$

❒ **c.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(-\xi_{n+1} + \xi_{n-1} + 2a)$

❒ **d.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n)$

21 On définit une fonction $\xi(x,t)$ de classe C^2, telle que $\xi(x = na, t) = \xi_n(t)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\xi(x,t)$.

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -a^2\dfrac{K}{m}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 2a\dfrac{K}{m}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - 1\right)$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\dfrac{K}{m}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 2a\dfrac{K}{m}\left(-\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + 1\right)$

22 On considère un barreau solide de longueur L et de section S (figure 10.4). Il s'allonge de $\Delta\ell$ lorsqu'il est soumis à une force $\vec{F}$. Déterminer l'expression du module d'Young E.

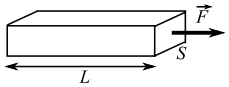


Figure 10.4

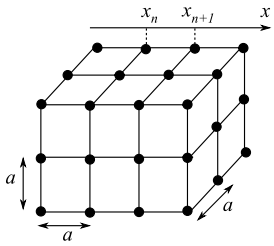


Figure 10.5

❒ **a.** $E = \dfrac{F}{S}\dfrac{\Delta\ell}{L}$

❒ **b.** $E = \dfrac{F}{S}\dfrac{L}{\Delta\ell}$

❒ **c.** $E = \dfrac{S}{F}\dfrac{\Delta\ell}{L}$

❒ **d.** $E = \dfrac{S}{F}\dfrac{L}{\Delta\ell}$

23 On suppose que le solide, de masse volumique μ, est formé de chaînes d'oscillateurs (figure 10.5). Déterminer la force subie par une surface dS du plan x_n de la part des atomes du plan x_{n+1}, toujours en supposant $|\xi_n(t)| \ll a$ et $|\xi(x,t)| \ll a$.

❒ **a.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \dfrac{\mathrm{d}S}{a^2}K(\xi_{n+1} - \xi_n)\overrightarrow{u_x}$

❒ **b.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\dfrac{\mathrm{d}S}{a^2}K(\xi_{n+1} - \xi_n)\overrightarrow{u_x}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \dfrac{\mathrm{d}S}{a}K\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\dfrac{\mathrm{d}S}{a}K\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

24 Déterminer la célérité de l'onde dans le solide.

❒ **a.** $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$

❒ **b.** $c = \sqrt{\frac{\mu}{E}}$

❒ **c.** $c = \frac{E}{\mu}$

❒ **d.** $c = \frac{\mu}{E}$

Voir les corrigés du chapitre 10 page 178.

11

Ondes électromagnétiques dans le vide

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
- La structure de l'onde plane dans le vide.
- L'onde plane progressive harmonique et la notation complexe.
- La propagation de l'énergie électromagnétique.
- Les différentes polarisations d'une onde plane progressive.

Notations. Dans tout le chapitre, les ondes se propagent dans le vide. L'onde plane progressive sera notée O.P.P. et l'onde plane progressive harmonique O.P.P.H. Le vecteur d'onde est noté $\vec{k}$ et la célérité de la lumière c. Le trièdre cartésien direct sera noté (O, x, y, z).

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 188**.

1 ❒ V ❒ F Une O.P. dans le vide est transverse électrique et magnétique.

2 ❒ V ❒ F Pour une O.P., le trièdre $(\vec{B}, \vec{E}, \vec{k})$ est direct.

3 ❒ V ❒ F La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est strictement inférieure à c.

4 ❒ V ❒ F Toutes les ondes sont polarisées.

5 ❒ V ❒ F Dans le cas d'une polarisation circulaire gauche, le champ $\vec{E}$ tourne dans le sens trigonométrique.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 189**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

6 L'équation de propagation du champ B dans le vide est :

❒ **a.** $\Delta\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

❒ **b.** $\Delta\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

❒ **c.** $\Delta\vec{B} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

❒ **d.** $\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

7 On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire correspondant à la direction et au sens de propagation de l'onde plane progressive. La relation de structure de l'onde est :

❒ **a.** $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{E}$

❒ **b.** $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{E} \wedge \vec{u}$

❒ **c.** $\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{B} \wedge \vec{u}$

❒ **d.** $\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{B}$

8 On considère l'onde dont le champ $\vec{E}$ dans le vide (entre deux plans conducteurs) est :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ E_z = \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

Quelles sont les propositions vérifiées par cette onde ?

❒ **a.** L'onde n'est pas plane.

❒ **b.** Elle est transverse.

❒ **c.** Elle se propage dans le sens des z décroissants.

❒ **d.** $\alpha = \frac{i\pi}{ka}$

9 On s'intéresse à une O.P.P.H. en écriture complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ et } \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_0}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent :

❒ **a.** $i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **b.** $i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$

❒ **c.** $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$

❒ **d.** $i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = i\epsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}}$

10 Dans le cas d'une O.P.P.H., la relation de structure de l'onde s'écrit :

❒ **a.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \vec{k}}{\omega}$

❒ **b.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$

❒ **c.** $\underline{\vec{E}} = \dfrac{\underline{\vec{B}} \wedge \vec{k}}{\omega}$

❒ **d.** $\underline{\vec{E}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}}{\omega}$

11 Dans le cas d'une O.P.P.H., l'équation de D'Alembert s'écrit :

❒ **a.** $k^2\underline{\vec{E}} + \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **b.** $-k^2\underline{\vec{E}} - \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **c.** $k\underline{\vec{E}} + \dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **d.** $-k^2\underline{\vec{E}} + \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

12 On note $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)$ le champ électrique réel de l'onde et $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$. Déterminer la densité moyenne d'énergie électromagnétique $< w_e >$ et la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle$.

❒ **a.** $< w_e >= \dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

❒ **b.** $< w_e >= \dfrac{1}{4}\epsilon_0 E^2$

❒ **c.** $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{1}{2}c\epsilon_0 E^2\vec{u}$

❒ **d.** $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{1}{4}c\epsilon_0 E^2\vec{u}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

13 Déterminer les expressions complexes des champs électromagnétiques associés à l'O.P.P.H. polarisée rectilignement dont le champ $\underline{\overrightarrow{E_1}}$ d'amplitude E_0 se propage suivant l'axe Oz dans le sens croissant et fait un angle de 30 ° avec l'axe Ox.

❒ **a.** $$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(\overrightarrow{u_x} + \sqrt{3}\overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

❒ **b.** $$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(-\overrightarrow{u_x} + \sqrt{3}\overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

❒ **c.** $$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

❒ **d.** $$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(-\overrightarrow{u_x} - \sqrt{3}\overrightarrow{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

14 On considère une O.P.P.H. polarisée rectilignement dont le champ $\overrightarrow{E_2}$ d'amplitude E_0 de polarisation rectiligne suivant l'axe Ox se propage dans une direction qui fait, dans le plan yOz, un angle de 45 ° avec l'axe Oy. Déterminer l'expression réelle du champ $\overrightarrow{E_2}$.

❒ **a.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c\sqrt{2}}(y+z)\right)\overrightarrow{u_x}$

❒ **b.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}x\right)\left(\overrightarrow{u_y} + \overrightarrow{u_z}\right)$

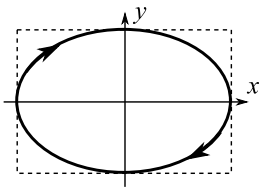
❒ **c.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}z\right)\overrightarrow{u_x}$

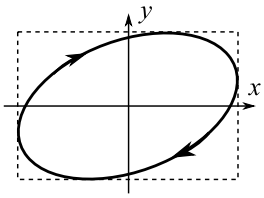
❒ **d.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}(y+z)\right)\overrightarrow{u_x}$

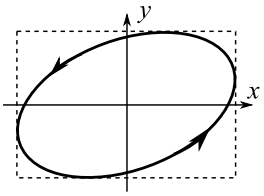
15 On s'intéresse à une O.P.P.H. polarisée elliptiquement, se propageant suivant l'axe Oz dans le sens des z croissants. Le champ électrique dans un plan parallèle à xOy s'écrit :

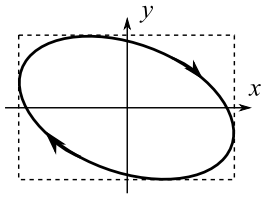
$$\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz - 0,6) \end{cases}$$

avec $E_{0x} > 0$ et $E_{0y} > 0$. Parmi les représentations de l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ au cours du temps, déterminer celle qui correspond au champ précédent.

❒ **a.**


❒ **b.**


❒ **c.**


❒ **d.**


Cet énoncé concerne les questions 16 à 20 :
Cette étude s'intéresse à la superposition de deux ondes polarisées circulairement se propageant suivant l'axe Oz en sens opposés.

16 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) correspond(ent) à une onde circulaire droite se propageant suivant les z croissants ?

❒ **a.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = -E_0\sin(\omega t - kz) \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\sin(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = -E_0\cos(\omega t - kz) \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = E_0\sin(\omega t - kz) \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\sin(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = E_0\cos(\omega t - kz) \end{cases}$

17 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) correspond(ent) à une onde circulaire gauche se propageant suivant les z décroissants ?

❒ **a.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\cos(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = -E_0\sin(\omega t + kz) \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\sin(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = -E_0\cos(\omega t + kz) \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\cos(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = E_0\sin(\omega t + kz) \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\sin(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = E_0\cos(\omega t + kz) \end{cases}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

18 On s'intéresse maintenant à la superposition des deux ondes précédentes. Déterminer le champ électrique résultant $\vec{E}$.

❒ **a.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \left(\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **b.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \cos(\omega t) \left(\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)$

❒ **c.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \left(\sin(\omega t)\vec{u_x} - \cos(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **d.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \left(\cos(\omega t)\vec{u_x} - \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

19 Déterminer le champ magnétique résultant :

❒ **a.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kz \left(-\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **b.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kz \left(\sin(\omega t)\vec{u_x} + \cos(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **c.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \sin kz \left(-\cos(\omega t)\vec{u_x} - \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **d.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \sin kz \left(-\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

20 En déduire le vecteur de Poynting du champ résultant :

❒ **a.** $\vec{\Pi} = 2c\epsilon_0 E_0 \sin kz \cos kz \sin \omega t \cos \omega t \, \vec{u_z}$

❒ **b.** $\vec{\Pi} = \vec{0}$

❒ **c.** $\vec{\Pi} = 2c\epsilon_0 E_0 \sin^2 kz \sin^2 \omega t \, \vec{u_z}$

❒ **d.** $\vec{\Pi} = -2c\epsilon_0 E_0 \sin kz \cos kz \, \vec{u_z}$

Voir les corrigés du chapitre 11 page 188.

12

Quelques exemples d'applications des ondes électromagnétiques

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les milieux dispersifs et la relation de dispersion.
- La vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- La propagation dans un plasma dilué (*questions 1 à 7*).
- La réflexion d'une onde sur un plan métallique (*questions 8 à 14*).
- La propagation guidée (*approfondissement : questions 15 à 21*).
- La propagation dans un métal (*approfondissement : questions 22 à 26*).

Notations. Dans tout le chapitre l'onde plane progressive sera notée O.P.P. et l'onde plane progressive harmonique O.P.P.H. Le vecteur d'onde est noté $\vec{k}$ et la célérité de la lumière c.

On pourra noter les équations de Maxwell par des abréviations : (MG) pour Maxwell-Gauss, (Mϕ) pour Maxwell flux, (MF) pour Maxwell-Faraday et (MA) pour Maxwell-Ampère.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 196**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

Cet énoncé concerne les questions 1 à 7 :
On étudie la propagation d'une O.P.P.H. dans un plasma dilué. L'onde est de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_0}}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

On note $\omega_p = \left(\dfrac{ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2}$ la pulsation plasma, où n est le nombre d'électrons par unité de volume, $-e$ la charge d'un électron et m sa masse.

1 Choisir les hypothèses retenues parmi les suivantes :

❒ **a.** Les électrons sont relativistes.

❒ **b.** On néglige l'interaction des électrons avec les ions.

❒ **c.** On néglige la force magnétique sur les électrons.

❒ **d.** On tient compte du mouvement des ions.

2 L'expression de la densité de courant $\vec{j}$ dans le plasma est :

❒ **a.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}$

❒ **b.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2}{m}\underline{\vec{E}}$

❒ **c.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{-e}{m\omega i}\underline{\vec{E}}$

❒ **d.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2}{m\omega i}\underline{\vec{E}}$

3 Après avoir montré que la densité volumique de charges est nulle dans le plasma, déterminer parmi les équations (Maxwell) suivantes en écriture complexe, laquelle (lesquelles) est(sont) fausse(s) ?

❒ **a.** $-i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$

❒ **b.** $-i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$

❒ **c.** $i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$

❒ **d.** $-i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\omega_p^2}{\omega} - \omega\right)\underline{\vec{E}}$

4 Déterminer l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}$ et la relation de dispersion :

❒ **a.** $\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\dfrac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

❒ **b.** $\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

❒ **c.** $k^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2$

❒ **d.** $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

5 Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et celle de groupe v_g :

❒ **a.** $v_\phi = c$

❒ **b.** $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

❒ **c.** $v_g = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

❒ **d.** $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

6 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) est(sont) exacte(s) ?

❒ **a.** Si $\omega < \omega_p$ l'onde ne se propage pas.

❒ **b.** La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière.

❒ **c.** Deux ondes de pulsations différentes se propagent à la même vitesse.

❒ **d.** L'énergie se propage à la vitesse v_ϕ.

7 L'ionosphère a une fréquence plasma $\nu_p \simeq 3$ MHz. Quelle(s) longueur(s) d'onde λ est(sont) possible(s) pour communiquer avec un satellite depuis la Terre ? (On rappelle que $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.)

❒ **a.** $\lambda = 67$ m

❒ **b.** $\lambda = 107$ m

❒ **c.** $\lambda = 607$ m

❒ **d.** $\lambda = 1007$ m

Cet énoncé concerne les questions 8 à 14 :
On étudie la réflexion d'une O.P.P.H. polarisée suivant $\overrightarrow{u_y}$ se propageant suivant l'axe Ox dans le sens des x croissants. Le demi-espace $x > 0$ est occupé par un conducteur parfait (conductivité $\gamma \to \infty$). Le champ électrique de l'onde incidente est de la forme $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_y}$ et celui de l'onde réfléchie $\underline{\overrightarrow{E_r}} = \overrightarrow{E_{r_0}} e^{i(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{r})}$. On note $\overrightarrow{r_0}$ un vecteur du plan yOz.

8 Écrire les conditions de passage sur le plan yOz pour le champ électrique projetées sur les axes :

❒ **a.** $E_{r_{0x}} e^{i(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{r_0})} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

❒ **b.** $E_{r_{0x}} e^{i(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{r_0})} = 0$

❒ **c.** $E_0 e^{i(\omega t)} - E_{r_{0y}} e^{i(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{r_0})} = 0$

❒ **d.** $E_{r_{0z}} e^{i(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{r_0})} = 0$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

9 L'expression du champ électrique réfléchi est :

❒ **a.** $\underline{\vec{E_r}} = E_0 e^{i(\omega t + kx)}\vec{u_y}$

❒ **b.** $\underline{\vec{E_r}} = -E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u_y}$

❒ **c.** $\underline{\vec{E_r}} = -E_0 e^{i(\omega t + kx)}\vec{u_y}$

❒ **d.** $\underline{\vec{E_r}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u_y}$

10 Déterminer l'expression du champ électrique total $\underline{\vec{E}}$ pour le demi-espace $x \leq 0$:

❒ **a.** $\underline{\vec{E}} = 2E_0 \cos kx\, e^{i\omega t}\vec{u_y}$

❒ **b.** $\underline{\vec{E}} = -2E_0 \sin kx\, e^{i\omega t}\vec{u_y}$

❒ **c.** $\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **d.** $\underline{\vec{E}} = -2E_0 i \sin kx\, e^{i\omega t}\vec{u_y}$

11 Déterminer l'expression du champ magnétique total $\underline{\vec{B}}$ pour le demi-espace $x \leq 0$:

❒ **a.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{-2E_0 i}{c} \sin kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

❒ **b.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

❒ **c.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{2E_0 i}{c} \sin kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

❒ **d.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{-2E_0}{c} \cos kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

12 Déterminer l'expression du vecteur de Poynting pour l'onde résultante :

❒ **a.** $\vec{\Pi} = \dfrac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin kx\ \cos kx\ \sin^2 \omega t\, \vec{u_x}$

❒ **b.** $\vec{\Pi} = \dfrac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin kx\ \cos kx\ \cos^2 \omega t\, \vec{u_x}$

❒ **c.** $\vec{\Pi} = \dfrac{-4E_0^2 i}{c\mu_0} \sin^2 kx\ \sin \omega t\, e^{i\omega t}\, \vec{u_x}$

❒ **d.** $\vec{\Pi} = \dfrac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin kx\ \cos kx\ \sin \omega t\ \cos \omega t\, \vec{u_x}$

13 Quelles sont les propositions fausses parmi les suivantes ?

❒ **a.** L'onde résultante est progressive.

❒ **b.** $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$

❒ **c.** Le plan $x = 0$ correspond à un nœud de $\underline{\vec{B}}$.

❒ **d.** Le plan $x = 0$ correspond à un nœud de $\underline{\vec{E}}$.

14 Déterminer la densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$ dans le plan $x = 0$:

❒ **a.** $\overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{0}$

❒ **b.** $\overrightarrow{j_s} = -\dfrac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\omega t\,\overrightarrow{u_z}$

❒ **c.** $\overrightarrow{j_s} = -\dfrac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\omega t\,\overrightarrow{u_y}$

❒ **d.** $\overrightarrow{j_s} = \dfrac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\omega t\,\overrightarrow{u_y}$

Cet énoncé concerne les questions 15 à 21 :
On s'intéresse aux ondes électromagnétiques se propageant selon l'axe Oz dans le sens des z croissants, dans le vide entre deux milieux parfaitement conducteurs (figure 12.1).

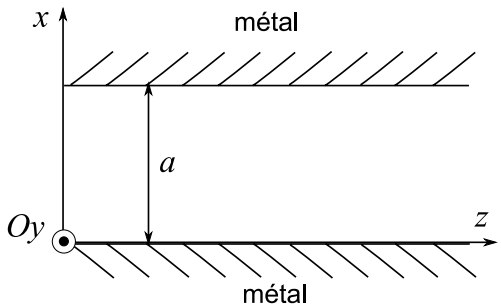


Figure 12.1 Propagation entre deux plans

Les ondes recherchées sont des ondes transverses électriques notée TE telles que $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{u_z}$. L'invariance selon Oy permet d'écrire les champs sous la forme

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}(x)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}}(x)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}$$

On suppose d'autre part que la densité surfacique de charge est nulle sur les conducteurs : on peut montrer alors avec l'équation de Maxwell-Gauss que $\underline{\overrightarrow{E}} = E\overrightarrow{u_y}$.

15 L'équation de propagation du champ s'écrit :

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_0 = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_0 = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)E_0 = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)E_0 = 0$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

16 On note n un entier et A une constante. Déterminer l'expression générale de $E_0(x)$ du mode TE_n imposée par les conditions aux limites :

❒ **a.** $E_0(x) = A \sin n\pi x$

❒ **b.** $E_0(x) = A \cos \dfrac{n\pi x}{a}$

❒ **c.** $E_0(x) = A \sin \dfrac{n\pi x}{a}$

❒ **d.** $E_0(x) = 0$

17 Établir l'équation de dispersion :

❒ **a.** $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$

❒ **b.** $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

❒ **c.** $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} + \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

❒ **d.** $k^2 = -\dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

18 Déterminer les composantes de $\overrightarrow{B_0(x)}$:

❒ **a.** $\begin{cases} -A\dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} -A\dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ iA\dfrac{n\pi}{\omega a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} -A\dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ -iA\dfrac{n\pi}{\omega a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} -\dfrac{iA}{\omega}\dfrac{n\pi}{a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ \dfrac{kA}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \end{cases}$

19 Déterminer les expressions de la vitesse de phase v_ϕ et de la vitesse de groupe v_g :

❒ **a.** $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}}$

❒ **b.** $v_\phi = c$

❒ **c.** $v_g = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}}$

❒ **d.** $v_g = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{n\pi c}{\omega}\right)^2}$

20 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) est(sont) fausse(s) ?

❒ **a.** Si $\omega < \dfrac{n\pi c}{a}$, l'onde ne se propage pas dans le guide.

❒ **b.** L'onde est transverse magnétique.

❒ **c.** Deux ondes de pulsations différentes se propagent à la même vitesse.

❒ **d.** L'énergie se propage à la vitesse v_ϕ.

21 En fait l'onde se propage en « zig-zag » et est la superposition de deux ondes se réfléchissant sur les plans $x = 0$ et $x = a$ (figure 12.2).

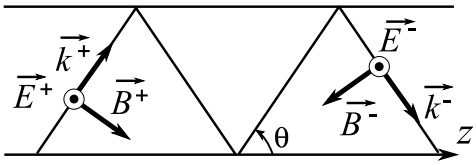


Figure 12.2 Propagation en « zig-zag »

Déterminer l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}^+$:

❒ **a.** $\vec{k}^+ = k\vec{u_x} + k\vec{u_z}$

❒ **b.** $\vec{k}^+ = -\dfrac{n\pi}{a}\vec{u_x} + k\vec{u_z}$

❒ **c.** $\vec{k}^+ = -k\vec{u_x} + k\vec{u_z}$

❒ **d.** $\vec{k}^+ = \dfrac{n\pi}{a}\vec{u_x} + k\vec{u_z}$

Cet énoncé concerne les questions 22 à 26 :

On étudie dans ces questions le rayonnement dipolaire électrique. En O il y a une charge $-q$ immobile et en S une charge $+q$ animée d'un mouvement sinusoïdal $\vec{OS} = z_0 \cos \omega t \vec{u_z}$. On peut définir le moment dipolaire des charges $\vec{p} = q\vec{OS}$ soit $\vec{p} = p_0 \cos \omega t \vec{u_z}$ avec $p_0 = qz_0$. On note $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ la longueur d'onde.

Le but est de déterminer le champ électromagnétique créé en tout point P (figure 12.3) de l'espace par le dipôle. On utilise les coordonnées sphériques avec $\vec{r} = \vec{OP}$.

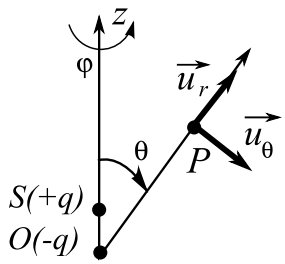


Figure 12.3

22 Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies :

❒ **a.** L'étude se fait dans le cadre de l'approximation dipolaire pour $z_0 \ll r$.

❒ **b.** Le mouvement de S est non relativiste donc $\lambda \ll z_0$.

❒ **c.** Le champ est étudié dans la zone de rayonnement telle que $r \gg \lambda$.

❒ **d.** L'étude se fait dans le cadre de l'A.R.Q.S. donc on néglige le temps de propagation.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

23 L'expression du champ électrique calculée sans faire d'approximation est :

$$\vec{E}(P,t) = \frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2i\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta\vec{u_r} + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{rc^2}\right)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$$

En déduire l'expression approchée du champ avec les hypothèses de l'émission dipolaire dans la zone de rayonnement.

❒ **a.** $\vec{E}(P,t) = \frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\vec{u_r} + \left(\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

❒ **b.** $\vec{E}(P,t) = \frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{2i\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta\vec{u_r} + \left(\frac{i\omega}{r^2 c}\right)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

❒ **c.** $\vec{E}(P,t) = \frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2i\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta\vec{u_r} + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{r^2 c}\right)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

❒ **d.** $\vec{E}(P,t) = \frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(-\frac{\omega^2}{rc^2}\right)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

24 Dans la cadre des hypothèses, quelle(s) est(sont) la(les) propositions justes ?

❒ **a.** L'onde est sphérique.

❒ **b.** L'onde est quasi plane.

❒ **c.** L'onde est plane.

❒ **d.** $\vec{B}(P,t) = -\frac{\omega^2 p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r c^3}\sin\theta\vec{u_\varphi}$

25 Déterminer la puissance moyenne rayonnée par unité d'angle solide $\left\langle\frac{d\mathscr{P}}{d\Omega}\right\rangle$ ainsi que la puissance moyenne $\langle\mathscr{P}\rangle$ rayonnée dans tout l'espace :

❒ **a.** $\left\langle\frac{d\mathscr{P}}{d\Omega}\right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32 r^2\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta$

❒ **b.** $\left\langle\frac{d\mathscr{P}}{d\Omega}\right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta$

❒ **c.** $\langle\mathscr{P}\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$

❒ **d.** $\langle\mathscr{P}\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12 r^2\pi\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta$

26 On utilise le modèle de l'électron élastiquement lié pour décrire la diffusion Rayleigh atmosphérique. Dans un atome, le noyau (point O) est beaucoup plus lourd que les électrons (charge $(-e)$, masse m, point P) : on le supposera immobile. Dans la suite on note $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Lorsqu'une onde rencontre un atome, le mouvement de l'électron va être modifié. On modélise les forces exercées sur l'électron de la manière suivante :

- la force électrique $\vec{F_e} = -e\vec{E}$ exercée par le champ de l'onde. On néglige la force magnétique (c.f. plasma) car $v \ll c$;
- l'électron est écarté de sa position d'équilibre. Il subit une force de rappel type ressort : $\vec{F_r} = -k\vec{r}$;
- l'amortissement est modélisé par une force type frottement visqueux : $\vec{F_v} = -h\vec{v}$.

Sur l'étendue de l'atome, le champ électrique est $\underline{\vec{E}} = \vec{E_0}e^{i\omega t}$. Après avoir défini la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q, déterminer l'expression de $\underline{\vec{r}}$ en régime forcé :

❒ **a.** $\underline{\vec{r}} = -\dfrac{e}{m}\dfrac{e^{i\omega t}\vec{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$

❒ **b.** $\underline{\vec{r}} = \dfrac{e}{m}\dfrac{e^{i\omega t}\vec{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$

❒ **c.** $\underline{\vec{r}} = -\dfrac{e}{m}\dfrac{e^{i\omega t}\vec{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$

❒ **d.** $\underline{\vec{r}} = -\dfrac{e}{m}\dfrac{e^{i\omega t}\vec{E_0}}{\omega_0^2 + \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$

Voir les corrigés du chapitre 12 page 196.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

13 Réflexion et réfraction d'une onde plane

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La réflexion d'une onde à l'interface entre deux diélectriques.
- La réfraction d'une onde à l'interface entre deux diélectriques.
- Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.
- Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance.

Notations. L'onde plane progressive harmonique O.P.P.H. de la forme $\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ où le vecteur d'onde est noté $\vec{k}$. La célérité de la lumière sera notée c et le trièdre cartésien direct (O, x, y, z).

On rappelle que dans un milieu D.L.H.I., on peut écrire $\underline{\vec{k}} = \underline{n}\dfrac{\omega}{c}$ où $\underline{n}$ est l'indice complexe du milieu. Dans ce chapitre, on ne considèrera que des diélectriques parfaits (pas de charges ni de courants libres) et transparents donc d'indice réel.

On utilisera les indices « i », « t » et « r » respectivement pour les grandeurs concernant les ondes incidente, transmise et réfléchie.

L'interface plane entre les deux milieux est le plan xOy.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 209**.

1 ❒ V ❒ F L'onde réfléchie et l'onde transmise ont même pulsation que l'onde incidente.

2 ❒ V ❒ F La composante tangentielle du champ électrique est continue à l'interface entre deux diélectriques.

3 ❒ V ❒ F La composante tangentielle du champ magnétique est discontinue à l'interface entre deux diélectriques.

4 ❒ V ❒ F La composante normale du champ magnétique est continue à l'interface entre deux diélectriques.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 209**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

5 On note $\vec{r_0}$, un vecteur du plan xOy. Les relations vérifiées par les trois vecteurs d'onde sont :

❒ **a.** $\left(\vec{k}_r - \vec{k}_i\right) \cdot \vec{r_0} = 0$ ❒ **b.** $\left(\vec{k}_t + \vec{k}_i\right) \cdot \vec{r_0} = 0$

❒ **c.** $\left(\vec{k}_r - \vec{k}_i\right) \wedge \vec{r_0} = 0$ ❒ **d.** $\left(\vec{k}_t - \vec{k}_i\right) \cdot \vec{r_0} = 0$

6 Les trois vecteurs d'onde étant dans le plan d'incidence, on se place dans la configuration de la figure 13.1. Quelle(s) est(sont) la(les) relation(s) vérifiée(s) parmi les propositions suivantes ?

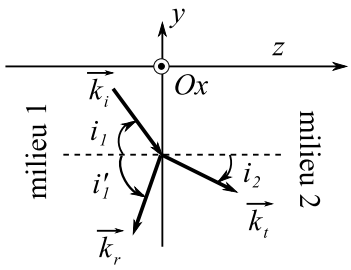


Figure 13.1

❒ **a.** $k_i \sin i_1 = k_r \sin i'_1$ ❒ **b.** $k_i \sin i_1 = k_r \sin i_2$

❒ **c.** $k_i \cos i_1 = k_r \cos i'_1$ ❒ **d.** $k_i \cos i_1 = k_r \cos i_2$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 7 à 11 :
Cette série de questions étudie la réflexion en incidence normale d'une O.P.P.H. polarisée rectilignement suivant Ox : $\underline{\vec{E}_i} = E_{0i}\mathrm{e}^{i(\omega t - k_i z)}\vec{u}_x$ avec $\vec{k}_i = n_1 \dfrac{\omega}{c}\vec{u}_z$ et E_{0i} réel.

7 Écrire les champs magnétiques associés aux champs réfléchi $\underline{\vec{E}_r}$ d'amplitude $\vec{E}_{0r}$ et transmis $\underline{\vec{E}_t}$ d'amplitude $\vec{E}_{0t}$.

❒ **a.** $\underline{\vec{B}_r} = \dfrac{n_1}{c}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0r}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t + k_r z)}$

❒ **b.** $\underline{\vec{B}_r} = -\dfrac{n_1}{c}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0r}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - k_r z)}$

❒ **c.** $\underline{\vec{B}_t} = \dfrac{n_2}{c}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0t}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t + k_t z)}$

❒ **d.** $\underline{\vec{B}_t} = \dfrac{n_2}{c}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0t}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - k_t z)}$

8 Déterminer les relations vérifiées par les amplitudes des champs électriques.

❒ **a.** $\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$

❒ **b.** $\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$

❒ **c.** $n_1\vec{E}_{0i} - n_1\vec{E}_{0r} = n_2\vec{E}_{0t}$

❒ **d.** $n_1\vec{E}_{0i} + n_1\vec{E}_{0r} = n_2\vec{E}_{0t}$

9 Déterminer les amplitudes $\vec{E}_{0r}$ et $\vec{E}_{0t}$.

❒ **a.** $\vec{E}_{0r} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$

❒ **b.** $\vec{E}_{0r} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$

❒ **c.** $\vec{E}_{0t} = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$

❒ **d.** $\vec{E}_{0t} = \dfrac{2n_2}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$

10 Déterminer la valeur moyenne des vecteurs de Poynting associés aux ondes réfléchie et transmise.

❒ **a.** $\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = -\dfrac{n_1}{2\mu_0 c}E_{0r}^2\vec{u}_z$

❒ **b.** $\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = -\dfrac{n_1}{\mu_0 c}E_{0r}^2\vec{u}_z$

❒ **c.** $\left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = \dfrac{n_2}{2\mu_0 c}E_{0t}^2\vec{u}_z$

❒ **d.** $\left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = \dfrac{n_2}{\mu_0 c}E_{0t}^2\vec{u}_z$

11 Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance.

❒ **a.** $R = \left(\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}\right)^2$

❒ **b.** $R = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$

❒ **c.** $T = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 - n_2)^2}$

❒ **d.** $T = \dfrac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2}$

Cet énoncé concerne les questions 12 à 15 :
En approfondissement, on étudie la réflexion et la transmission d'une O.P.P.H. dont le vecteur d'onde incident fait un angle i_1 avec la normale à l'interface entre

les deux milieux (figure 13.2). L'onde incidente est polarisée rectilignement dans le plan d'incidence et elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise elles aussi polarisées dans le plan d'incidence. Le milieu (1) est l'air d'indice $n_1 = 1$ et on note n l'indice n_2.

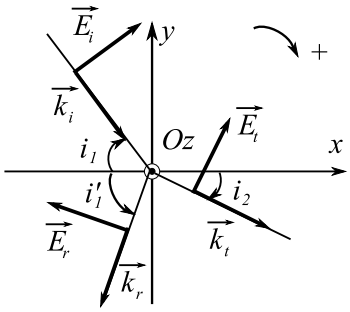


Figure 13.2

12 Écrire les relations entre les amplitudes des champs E_{0i}, E_{0r} et E_{0t} à l'interface.

❒ **a.** $E_{0i} \cos i_1 + E_{0r} \cos i'_1 = E_{0t} \cos i_2$ ❒ **b.** $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

❒ **c.** $E_{0i} \sin i_1 + E_{0r} \sin i'_1 = E_{0t} \sin i_2$ ❒ **d.** $E_{0i} - E_{0r} = nE_{0t}$

13 On note r le coefficient de réflexion en amplitude et t celui de transmission. En utilisant les lois de Descartes, déterminer les relations entre r et t.

❒ **a.** $(1 - r) \sin i_1 = t \sin i_2$ ❒ **b.** $1 + r = t$

❒ **c.** $(1 - r) \sin i_2 = t \sin i_1$ ❒ **d.** $(1 - r) \sin i_1 = t \sin i_2$

14 En déduire r et t.

❒ **a.** $r = \dfrac{\sin i_1 \cos i_2 - \sin i_2 \cos i_1}{\sin i_1 \cos i_2 + \sin i_2 \cos i_1}$ ❒ **b.** $r = \dfrac{\sin i_2 \cos i_2 - \sin i_1 \cos i_1}{\sin i_2 \cos i_2 + \sin i_1 \cos i_1}$

❒ **c.** $t = \dfrac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin i_2 \cos i_2 + \sin i_1 \cos i_1}$ ❒ **d.** $t = \dfrac{2 \sin i_1 \cos i_1}{\sin i_1 \cos i_2 + \sin i_2 \cos i_1}$

15 Quels angles annulent le coefficient r ?

❒ **a.** $i_1 = i_2 = 0$ ❒ **b.** $i_1 + i_2 = \dfrac{\pi}{2}$

❒ **c.** $\tan i_1 = n$ ❒ **d.** $i_1 - i_2 = \dfrac{\pi}{2}$

Voir les corrigés du chapitre 13 page 209.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

14 Ondes sonores dans les fluides

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- L'approximation acoustique et l'équation de D'Alembert dans le cas d'une onde sonore.
- La notion d'impédance acoustique.
- Les coefficients de réflexion et de transmission pour les surpressions.
- Les coefficients de réflexion et de transmission pour les puissances sonores.
- En application la propagation dans deux tuyaux de sections différentes (questions 20 à 23).
- En application la propagation dans un tuyau de section exponentielle (questions 24 à 28).

Notations. Les caractéristiques du fluide au repos sont : une pression uniforme P_0, une masse volumique uniforme μ_0 et une température uniforme T_0. Lors du passage de l'onde, on aura en un point M :

- une pression $P(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$;
- une masse volumique $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$;
- une vitesse particulaire $\overrightarrow{v}(M,t)$.

avec la pression acoustique p_1 (ou surpression) telle que $|p_1| \ll P_0$ et aussi $|\mu_1| \ll \mu_0$. Le fluide sera supposé parfait et on néglige l'effet de la pesanteur. On notera $\chi_s = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S$ la compressibilité isentropique et c la célérité du son.

À partir de la question 12, on supposera (sauf indication contraire) que les ondes sont planes et se propagent suivant un axe Ox.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 214**.

1 ❒ V ❒ F L'approximation acoustique consiste à considérer que p_1, μ_1 et v sont des infiniment petits du premier ordre.

2 ❒ V ❒ F Une onde plane sonore est transverse.

3 ❒ V ❒ F Une onde sonore est un phénomène considéré comme isotherme.

4 ❒ V ❒ F Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation de conservation de la masse s'écrit : $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0$.

5 ❒ V ❒ F Dans le cadre de l'approximation acoustique, on peut écrire : $p_1 = \mu_0 \chi_s \mu_1$.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 215**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

6 En utilisant l'équation d'Euler de la mécanique des fluides, établir une relation entre les différentes grandeurs acoustiques, dans le cadre de l'approximation acoustique.

❒ **a.** $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P_0$

❒ **b.** $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

❒ **c.** $\mu_0 \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

❒ **d.** $\mu \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

7 Déterminer l'équation de propagation de la pression acoustique.

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \mu_0 \chi_s \Delta p_1$

❒ **b.** $\Delta p_1 = -\mu_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \chi_s \Delta p_1$

❒ **d.** $\Delta p_1 = \mu_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 En supposant le gaz parfait de masse molaire M et de rapport des capacités thermiques γ, exprimer la célérité du son c.

❒ **a.** $c = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}$ ❒ **b.** $c = \sqrt{\dfrac{R T_0}{M}}$

❒ **c.** $c = \dfrac{\gamma R T_0}{M}$ ❒ **d.** $c = \sqrt{\dfrac{M}{\gamma R T_0}}$

9 Quelles sont les densités volumiques d'énergie cinétique e_c et d'énergie potentielle e_p ?

❒ **a.** $e_c = \dfrac{1}{2}\mu_1 v^2$ ❒ **b.** $e_c = \dfrac{1}{2}\mu_0 v^2$

❒ **c.** $e_p = \dfrac{1}{2}\chi_s p_1^2$ ❒ **d.** $e_p = \dfrac{1}{2}\chi_s P^2$

10 Après avoir défini le vecteur densité de courant énergétique $\overrightarrow{\Pi}$, déterminer l'équation traduisant le bilan énergétique local. On notera e_s la densité volumique d'énergie de l'onde sonore.

❒ **a.** $\overrightarrow{\Pi} = P_0 \overrightarrow{v}$ ❒ **b.** $\overrightarrow{\Pi} = p_1 \overrightarrow{v}$

❒ **c.** $\operatorname{div} \overrightarrow{\Pi} - \dfrac{\partial e_s}{\partial t} = 0$ ❒ **d.** $\operatorname{div} \overrightarrow{\Pi} + \dfrac{\partial e_s}{\partial t} = 0$

11 On s'intéresse à une onde plane harmonique d'expression complexe pour la surpression $\underline{p_1} = \underline{p_{10}} \exp\left(i\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right)\right)$. Exprimer les relations complexes entre $\underline{\overrightarrow{v}}$ et $\underline{p_1}$.

❒ **a.** $\overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{v}} = -\omega \chi_s \underline{p_1}$ ❒ **b.** $\overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{v}} = \omega \chi_s \underline{p_1}$

❒ **c.** $\mu_0 \omega \underline{\overrightarrow{v}} = \underline{p_1} \overrightarrow{k}$ ❒ **d.** $i\mu_0 \omega \underline{\overrightarrow{v}} = \underline{p_1} \overrightarrow{k}$

12 On s'intéresse à une onde plane progressive harmonique se propageant suivant les x croissant $\underline{p_1} = p_{10} \exp\left(i\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right)\right)$ avec p_{10} réel. Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie et du vecteur $\overrightarrow{\Pi}$.

❒ **a.** $\langle e_s \rangle = \dfrac{p_{10}^2}{2\mu_0 c^2}$ ❒ **b.** $\langle e_s \rangle = \dfrac{p_{10}^2}{\mu_0 c^2}$

❒ **c.** $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \overrightarrow{0}$ ❒ **d.** $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \dfrac{p_{10}^2}{2\mu_0 c} \overrightarrow{u_x}$

13 Pour l'onde précédente, on enregistre une intensité sonore de 50 dB (appareil ménager). On rappelle que l'intensité de référence est $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}. On prendra pour l'air $c = 343$ m · s^{-1} et $\mu_0 = 1,19$ kg · m^{-3}. Déterminer la valeur de p_{10}.

❒ **a.** $p_{10} \simeq 1,61 \cdot 10^{-2}$ Pa ❒ **b.** $p_{10} \simeq 2,02 \cdot 10^{-2}$ Pa

❒ **c.** $p_{10} \simeq 9,03 \cdot 10^{-3}$ Pa ❒ **d.** $p_{10} \simeq 9,03 \cdot 10^{20}$ Pa

14 Pour une onde plane progressive se propageant suivant les x croissant, déterminer l'expression de l'impédance acoustique définie par $Z_a = \dfrac{p_1}{v}$.

❒ **a.** $Z_a = \mu_0 c$ ❒ **b.** $Z_a = -\mu_0 c$

❒ **c.** $Z_a = \dfrac{1}{\mu_0 c}$ ❒ **d.** $Z_a = -\dfrac{1}{\mu_0 c}$

15 On s'intéresse à une onde plane progressive se propageant suivant les x décroissant dans le milieu précédent. Déterminer l'expression de l'impédance acoustique et de $\dfrac{p_1}{v}$.

❒ **a.** $Z_a = \mu_0 c$ ❒ **b.** $Z_a = -\mu_0 c$

❒ **c.** $\dfrac{p_1}{v} = -Z_a$ ❒ **d.** $\dfrac{p_1}{v} = Z_a$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :

Dans cette série de questions on étudie la réflexion et la transmission d'une onde plane progressive se propageant dans un milieu (1) selon Ox et qui arrive sous incidence normale à l'interface plane ($x = 0$) entre ce milieu et un milieu (2) (figure 14.1). Les pressions acoustiques des ondes incidente, réfléchie et transmise sont respectivement $p_i(x,t) = f_i\left(t - \dfrac{x}{c_1}\right)$, $p_r(x,t) = f_r\left(t + \dfrac{x}{c_1}\right)$ et $p_t(x,t) = f_t\left(t - \dfrac{x}{c_2}\right)$.

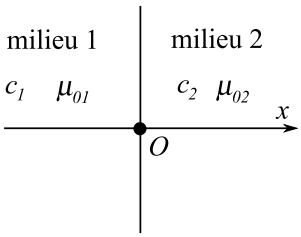


Figure 14.1

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

16 Les grandeurs continues à l'interface sont :

❒ **a.** La vitesse v

❒ **b.** La surpression p_1

❒ **c.** La masse volumique μ

❒ **d.** La célérité de l'onde c

17 On note Z_1 et Z_2 les impédances des deux milieux. Exprimer les relations de continuité dans le plan $x = 0$.

❒ **a.** $f_i(t) - f_r(t) = f_t(t)$

❒ **b.** $f_i(t) + f_r(t) = f_t(t)$

❒ **c.** $\dfrac{1}{Z_1} f_i(t) + \dfrac{1}{Z_1} f_r(t) = \dfrac{1}{Z_2} f_t(t)$

❒ **d.** $\dfrac{1}{Z_1} f_i(t) - \dfrac{1}{Z_1} f_r(t) = \dfrac{1}{Z_2} f_t(t)$

18 Exprimer les coefficients de réflexion $r = \dfrac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$ et de transmission $t = \dfrac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$ en amplitude pour la surpression.

❒ **a.** $r = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$

❒ **b.** $r = -1$

❒ **c.** $t = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$

❒ **d.** $t = 1$

19 Déterminer les coefficients de réflexion $R = \dfrac{|\overrightarrow{\Pi}_r(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}{|\overrightarrow{\Pi}_i(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}$ et de transmission $T = \dfrac{|\overrightarrow{\Pi}_t(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}{|\overrightarrow{\Pi}_i(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}$ pour la puissance sonore.

❒ **a.** $R = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$

❒ **b.** $R = 1$

❒ **c.** $T = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

❒ **d.** $T = \dfrac{Z_1}{Z_2}$

Cet énoncé concerne les questions 20 à 23 :

On considère deux tuyaux de sections différentes S_1 et S_2 (figure 14.2). Une onde plane progressive homogène se propage du milieu (1) vers le milieu (2) : surpression $\underline{p_i}$. À l'interface, cette onde donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) de surpression $\underline{p_r}$ et à une onde transmise dans le milieu (2) de surpression $\underline{p_t}$ de même pulsation ω. Dans le cas de surfaces variables l'expression de l'impédance est différente de ce qui a été défini auparavant : on a $Z = \dfrac{\mu_0 c}{S}$. On note p_{i0}, p_{r0} et p_{t0} les amplitudes des surpressions des ondes incidente, réfléchie et transmise.

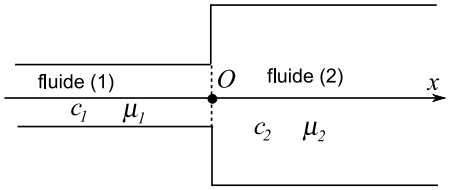


Figure 14.2

20 Exprimer les surpressions et les vitesses pour chaque onde.

❒ **a.** $\begin{cases} \underline{p_i} = p_{i0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\right)} \\ \underline{v_i} = \dfrac{p_{i0}}{Z_1}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\right)} \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} \underline{p_r} = p_{r0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \\ \underline{v_r} = -\dfrac{p_{r0}}{Z_1}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} \underline{p_r} = p_{r0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \\ \underline{v_r} = -\dfrac{p_{r0}}{S_1Z_1}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} \underline{p_t} = p_{t0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right)} \\ \underline{v_t} = \dfrac{p_{t0}}{S_2Z_2}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right)} \end{cases}$

21 Quelles sont les grandeurs continues à l'interface $x = 0$?

❒ **a.** La vitesse $\underline{v}$

❒ **b.** La surpression $\underline{p}$

❒ **c.** Le débit volumique

❒ **d.** Le débit massique

22 Écrire les relations de continuité à l'interface $x = 0$.

❒ **a.** $p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}$

❒ **b.** $p_{i0} - p_{r0} = p_{t0}$

❒ **c.** $\dfrac{p_{i0}}{Z_1} - \dfrac{p_{r0}}{Z_1} = \dfrac{p_{t0}}{Z_2}$

❒ **d.** $\dfrac{p_{i0}}{S_1Z_1} - \dfrac{p_{r0}}{S_1Z_1} = \dfrac{p_{t0}}{S_2Z_2}$

23 Exprimer les coefficients de réflexion $r = \dfrac{p_{r0}}{p_{i0}}$ et de transmission $t = \dfrac{p_{t0}}{p_{i0}}$ en amplitude pour la surpression.

❒ **a.** $r = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$

❒ **b.** $r = \dfrac{S_2Z_2 - S_1Z_1}{S_2Z_2 + S_1Z_1}$

❒ **c.** $t = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$

❒ **d.** $t = \dfrac{2Z_2S_2}{S_1Z_1 + S_2Z_2}$

Cet énoncé concerne les questions 24 à 28 :
On considère la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau de section non constante $S(x)$ et d'axe Ox (figure 14.3). On utilise une description lagrangienne.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On raisonne sur une tranche de fluide se trouvant entre les plans d'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$ au repos et entre les plans d'abscisse $x + \xi(x, t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x + \mathrm{d}x, t)$ au passage de l'onde sonore.

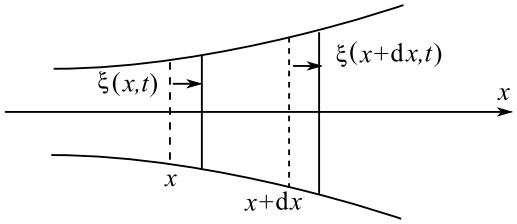


Figure 14.3

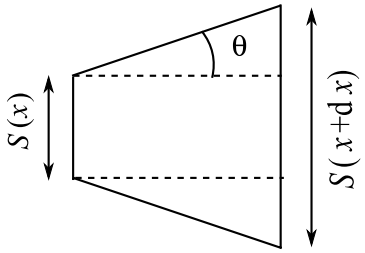


Figure 14.4

24 En écrivant la conservation de la masse dm entre l'immobilité et le passage de l'onde, établir l'une des équations suivantes au premier ordre. On rappelle que $v = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$.

❒ **a.** $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial (v)}{\partial x} = 0$

❒ **b.** $S \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial (S\,v)}{\partial x} = 0$

❒ **c.** $S \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} - \mu_0 \dfrac{\partial (S\,v)}{\partial x} = 0$

❒ **d.** $S \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_1 \dfrac{\partial (S\,v)}{\partial x} = 0$

25 Déterminer l'expression de la force de pression, au premier ordre, exercée sur dm en assimilant le volume à un volume tronconique (figure 14.4).

❒ **a.** $P_0 \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - \dfrac{\partial (p_1 S)}{\partial x}\mathrm{d}x$

❒ **b.** $P_0 \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

❒ **c.** $-\dfrac{\partial p_1}{\partial x} S$

❒ **d.** $-\dfrac{\partial p_1}{\partial x} S\ \mathrm{d}x$

26 En appliquant le théorème de la résultante dynamique à dm, déterminer une relation entre v et p_1 au premier ordre.

❒ **a.** $\mu_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$

❒ **b.** $\mu_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{P_0}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\partial (p_1 S)}{\partial x}$

❒ **c.** $\mu_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial p_1}{\partial x}\mathrm{d}x$

❒ **d.** $\mu_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{P_0}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$

27 En combinant les équations précédentes et la relation $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$, on obtient l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)$$

Exprimer cette relation dans le cas d'un pavillon exponentiel ($S(x) = S_0 \mathrm{e}^{mx}$) dans lequel se propage une onde harmonique $\underline{v}(x,t) = \underline{v_0}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{m}{S_0}\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} + m\underline{v_0} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

28 On cherche $\underline{v_0}(x)$ sous la forme $\underline{v_0}e^{-ikx}$. On pose $\omega_c = \dfrac{mc}{2}$. Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g pour $\omega > \omega_c$.

❒ **a.** $v_\phi = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$

❒ **b.** $v_\phi = c$

❒ **c.** $v_g = c$

❒ **d.** $v_g = \dfrac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$

Voir les corrigés du chapitre 14 page 214.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 Généralités sur les ondes

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Une onde est un phénomène qui dépend du temps et de la position.

Par définition, une onde est une grandeur $f(t, M)$ qui se propage de proche en proche, dépendant du temps t et de la position M.

2 ❒ V ☒ F Pour une onde, les variables d'espace et de temps sont toujours couplées.

C'est vrai si l'onde est progressive, et faux si elle est stationnaire.

3 ❒ V ☒ F Dans l'équation $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$, c est la célérité de l'onde $s(x, t)$.

Si on fait une analyse dimensionnelle, $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ est homogène à s sur un temps au carré, $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ à s sur une distance au carré donc c serait homogène à l'inverse d'une vitesse. Il y a une inversion des dérivées par rapport à l'équation de D'Alembert, $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ où c est alors la célérité de l'onde.

4 ☒ V ❒ F Une onde $s(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ se propage dans le sens des x décroissants.

On note s_1 la valeur de l'onde à l'instant t_1 en x_1, soit $s_1 = f\left(t_1 + \frac{x_1}{c}\right)$. À un instant ultérieur t_2 l'onde aura même valeur en x_2, tel que $t_2 + \frac{x_2}{c} = t_1 + \frac{x_1}{c}$ soit $x_2 = c(t_1 - t_2) + x_1 < x_1$: l'onde se propage donc suivant les x décroissants.

5 ☒ V ❒ F Une surface d'onde est un lieu de l'espace sur laquelle la grandeur ondulatoire a même valeur à un instant donné.

C'est la définition.

QCM

6 On s'intéresse à une onde unidimensionnelle $s(x, t)$ solution de l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$. La forme générale de l'onde est :

❒ **a.** $s(x, t) = f^+(x - ct)$

❒ **b.** $s(x, t) = f^-(x + ct)$

☒ **c.** $s(x, t) = f^+(x - ct) + f^-(x + ct)$

☒ **d.** $s(x, t) = f^+\left(t - \frac{x}{c}\right) + f^-\left(t + \frac{x}{c}\right)$

On pose $X = x + ct$ et $Y = x - ct$. On cherche si des fonctions de la forme $s(x,t) = S(X,Y)$ sont solutions de l'équation. Le calcul des dérivées donne comme résultat :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 S}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\right)$$

L'équation de D'Alembert s'écrit alors $4\dfrac{\partial^2 S}{\partial X \partial Y} = 0$. En intégrant une première fois par rapport à X, on trouve que $\dfrac{\partial S}{\partial Y}$ est une constante pour X mais dépendant de Y que l'on note $G(Y) = \dfrac{\partial S}{\partial Y}$. On intègre une nouvelle fois, ce qui donne $S(X,Y) = \displaystyle\int G(Y)\mathrm{d}Y + cte(X)$. La fonction $S(X,Y)$ solution de l'équation de D'Alembert est donc de la forme $S(X,Y) = f(X) + g(Y)$ qui est la réponse **c**. Les exposants « + » et « – » correspondent à la propagation dans le sens des x croissants (« + ») et décroissants (« – »). La réponse **d.** est une écriture équivalente à la réponse **c**.

7 Pour une onde scalaire $s(\vec{r},t)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, on rappelle l'équation de D'Alembert en trois dimensions :

$$\Delta s - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Quelle est l'expression générale d'une onde sphérique dont les surfaces d'onde sont des sphères de centre O (on se servira de l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques (formule 20)) ?

❒ **a.** $s(r,t) = f^+(r-ct) + f^-(r+ct)$

☒ **b.** $s(r,t) = \dfrac{f^+(r-ct)}{r} + \dfrac{f^-(r+ct)}{r}$

❒ **c.** $s(r,t) = \dfrac{f^+(r-ct)}{r} - \dfrac{f^-(r+ct)}{r}$

❒ **d.** $s(r,t) = \dfrac{f^+(r-ct)}{r^2} + \dfrac{f^-(r+ct)}{r^2}$

L'onde ne dépend spatialement que de la variable r donc $\Delta s = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rs)}{\partial r^2}$. L'équation de D'Alembert peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rs)}{\partial t^2} = 0$$

La fonction $s_1(r,t) = rs(r,t)$ est donc solution d'une équation de D'Alembert à une dimension dont la variable d'espace est r. D'après ce qui précède :

$$s_1(r,t) = f^+(r-ct) + f^-(r+ct) \quad \Rightarrow \quad s(r,t) = \frac{f^+(r-ct)}{r} + \frac{f^-(r+ct)}{r}$$

8 On cherche l'expression d'une onde plane progressive harmonique (O.P.P.H.), se propageant suivant l'axe x à la célérité c dans le sens des x décroissants, sous la forme complexe $\underline{s(x,t)} = \underline{s_0(x)}\mathrm{e}^{i\omega t}$. Quelle(s) est(sont) la(les) proposition(s) vraie(s) ?

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 \underline{s_0}}{\partial x^2} - \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{s_0} = 0$

☒ **b.** $\dfrac{\partial^2 \underline{s_0}}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{s_0} = 0$

❒ **c.** $\underline{s} = \underline{s^+}\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)}$

☒ **d.** $\underline{s} = \underline{s^-}\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On injecte $\underline{s}$ dans l'équation de D'Alembert ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{s_0(x)}}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{i\omega t} - \frac{(i\omega)^2}{c^2}\underline{s_0(x)}\mathrm{e}^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{s_0(x)}}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{s_0(x)} = 0$$

Les solutions sont harmoniques en x : $\underline{s_0(x)} = \underline{A}\mathrm{e}^{i\frac{\omega x}{c}} + \underline{B}\mathrm{e}^{-i\frac{\omega x}{c}}$. La solution générale pour $\underline{s}$ est :

$$\underline{s(x,t)} = \underline{s_0(x)}\mathrm{e}^{i\omega t} = \underline{A}\mathrm{e}^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} + \underline{B}\mathrm{e}^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

Le premier terme correspond à une onde plane progressive se propageant suivant les x décroissants et le second à une onde plane progressive se propageant suivant les x croissants. La solution demandée par l'énoncé est donc le premier terme en posant $\underline{A} = \underline{s^-}$.

9 On s'intéresse à une onde stationnaire $s(x,t)$ pour laquelle les conditions aux limites sont $s(0,t) = 0$ et $s(\ell,t) = 0\ \forall t$. On cherche la solution sous la forme $s(x,t) = F(x)G(t)$. On notera n un entier strictement positif. La solution pour $s(x,t)$ est :

❒ **a.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n}\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t + \phi_n\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

❒ **b.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n}\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{\ell} + \phi_n\right)$

☒ **c.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n}\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t + \phi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

❒ **d.** $s(x,t) = \sum_n s_{0n}\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}x + \phi_n\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell} + \phi_n\right)$

On injecte la solution cherchée dans l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}x^2}G(t) - \frac{1}{c^2}F(x)\frac{\mathrm{d}^2G(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F(x)}\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{G(t)}\frac{\mathrm{d}^2G(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

On a donc une fonction de x uniquement qui est égale à une fonction de t uniquement $\forall(x,t)$, ces deux fonctions sont donc égales à une constante K. On obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}x^2} - K\,F(x) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\mathrm{d}^2G(t)}{\mathrm{d}t^2} - Kc^2\,G(t) = 0$$

On cherche pour $F(x)$ une solution périodique puisqu'elle s'annule en $x = 0$ et $x = \ell$. Il faut donc choisir $K < 0$ pour avoir une équation d'oscillateur harmonique. En effet $K = 0$ donne une solution affine et $K > 0$ une solution hyperbolique ; ces deux solutions ne peuvent qu'être identiquement nulles si elles sont nulles en deux points. Ainsi $F(x) = A\cos\sqrt{-K}x + B\sin\sqrt{-K}x$. Pour $x = 0$, on a $F(x) = 0$ d'où $A = 0$. La condition en $x = \ell$ s'écrit $B\sin\sqrt{-K}\ell = 0$. Le choix $B = 0$ n'a aucun intérêt, en revanche le choix $\sqrt{-K} = \frac{n\pi}{\ell}$

convient. On peut alors résoudre l'équation pour $G(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2G(t)}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 G(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(t) = B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t + \phi_n\right)$$

On obtient alors une solution nommée mode propre $s_n(x,t) = s_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t + \phi_n\right)$. La solution générale est la superposition de ces modes propres, les coefficients s_{0n} étant déterminés par les conditions initiales.

Cet énoncé concerne les questions 10 à 15 :
On étudie une ligne sans perte dont les points sont repérés par la variable x. Une cellule élémentaire de cette ligne est représentée sur la figure (10.1).

10 Par application de la loi des nœuds en N, déterminer l'une des équations suivantes :

❒ **a.** $\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$

☒ **b.** $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$

❒ **c.** $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \mathrm{d}x\frac{\partial V}{\partial t}$

❒ **d.** $\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma V \mathrm{d}x$

L'intensité partant de N et passant dans le condensateur est $i' = \Gamma \mathrm{d}x\frac{\partial V(x+\mathrm{d}x)}{\partial t}$. La loi des nœuds s'écrit donc :

$$i(x+\mathrm{d}x,t) = i(x,t) - \Gamma \mathrm{d}x\frac{\partial V(x+\mathrm{d}x)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x = -\Gamma\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$$

Après simplification par $\mathrm{d}x$, on trouve l'équation **b**. Pour justifier qu'on trouve à la fin $\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$, il faut penser que le calcul précédent revient à calculer des limites lorsque $\mathrm{d}x \to 0$:

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = \lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{i(x+\mathrm{d}x,t) - i(x,t)}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{\partial V(x+\mathrm{d}x)}{\partial t}$$

11 Par application de la loi des mailles, déterminer l'une des équations suivantes :

❒ **a.** $\frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda\frac{\partial i}{\partial t}$

☒ **b.** $\frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda\frac{\partial i}{\partial t}$

❒ **c.** $\frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda \mathrm{d}x\frac{\partial i}{\partial t}$

❒ **d.** $\frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda i \mathrm{d}x$

La loi des mailles s'écrit :

$$V(x,t) = \Lambda \mathrm{d}x\frac{\partial i}{\partial t} + V(x+\mathrm{d}x,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x = -\Lambda \mathrm{d}x\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

d'où la réponse **b.** après simplification par $\mathrm{d}x$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

12 L'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(x,t)$ est :

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

☒ **d.** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

On dérive par rapport à x l'équation obtenue dans la question précédente soit $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\Lambda\dfrac{\partial^2 i}{\partial x\ \partial t}$ et avec la première équation on a $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}$. On trouve finalement l'équation **d**.

13 On cherche des solutions de la forme : $V(x,t) = V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)$. Déterminer l'expression de l'intensité $i(x,t)$ correspondante :

❒ **a.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

❒ **b.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

☒ **c.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

❒ **d.** $i(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}\left(V_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + V_2\left(t + \dfrac{x}{c}\right)\right)$

D'après l'équation de D'Alembert établie précédemment, la célérité de l'onde est $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$. Pour trouver l'expression de i, on utilise l'une des équations différentielles reliant i et V :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda\frac{\partial i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{c\Lambda}\left(-V_1'\left(t - \frac{x}{c}\right) + V_2'\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

On a donc :

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\left(V_1'\left(t - \frac{x}{c}\right) - V_2'\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \Rightarrow i(x,t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\left(V_1\left(t - \frac{x}{c}\right) - V_2\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

On a pris une constante d'intégration nulle, car on ne s'intéresse pas à une éventuelle intensité statique.

14 On branche en $x = 0$ un générateur sinusoïdal délivrant une tension $V = V_0\cos(\omega t)$.

L'expression recherchée pour $\underline{V}$ complexe est $\underline{V} = \underline{V_1}e^{i(\omega t - kx)} + \underline{V_2}e^{i(\omega t + kx)}$ où $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$ sont des constantes *a priori* complexes. On ferme la ligne en $x = \ell$ par un court-circuit.

☒ **a.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\sin(k(\ell - x))}{\sin k\ell}$

❒ **b.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\mathrm{sh}(k(\ell - x))}{\mathrm{sh}\, k\ell}$

❒ **c.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\cos(k(\ell - x))}{\cos k\ell}$

❒ **d.** $\underline{V(x,t)} = V_0 e^{i\omega t}\dfrac{\mathrm{ch}(k(\ell - x))}{\mathrm{ch}\, k\ell}$

En complexe, la tension en $x = 0$ s'écrit : $\underline{V} = V_0 e^{i\omega t}$. On en déduit $V_0 = \underline{V_1} + \underline{V_2}$. D'autre part, la ligne est court-circuitée en $x = \ell$, donc $\underline{V}(\ell, t) = 0$. On a donc une deuxième équation reliant $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$: $\underline{V_1} e^{-ik\ell} + \underline{V_2} e^{ik\ell} = 0$. Les solutions sont :

$$\underline{V_1} = -V_0 \frac{e^{2ik\ell}}{1 - e^{2ik\ell}} \quad \text{et} \quad \underline{V_2} = V_0 \frac{1}{1 - e^{2ik\ell}}$$

soit :

$$\underline{V}(x, t) = V_0 e^{i\omega t} \frac{-e^{ik(2\ell - x)} + e^{ikx}}{1 - e^{2ik\ell}} = V_0 e^{i\omega t} \frac{\sin(k(\ell - x))}{\sin k\ell}$$

La dernière expression est obtenue en mettant en facteur $e^{ik\ell}$ au numérateur et au dénominateur.

15 On souhaite qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie sur la ligne. Pour cela, on branche une impédance Z_c en $x = \ell$. Déterminer Z_c :

❒ **a.** $Z_c = 0$

❒ **b.** $Z_c \to \infty$ (ligne ouverte)

☒ **c.** $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$

❒ **d.** $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$

S'il n'y a pas d'onde réfléchie, alors $\underline{V_2} = 0$. Pour exprimer l'intensité, on utilise les résultats précédents soit $\underline{i} = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}} \underline{V_1} e^{i(\omega t - kx)}$. On a alors $Z_c = \dfrac{\underline{V}(\ell, t)}{\underline{i}(\ell, t)} = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$. On remarquera que quelle que soit l'abscisse sur la ligne, l'impédance est la même.

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :
On s'intéresse au mouvement latéral d'une corde, par exemple excitée à une extrémité par un vibreur et tendue à l'autre par une masse (figure 10.2). Le système considéré est un morceau de corde de longueur $d\ell$, de masse linéique λ (figure 10.3), de centre de gravité G.

16 Parmi les propositions suivantes, lesquelles font partie des hypothèses d'étude du mouvement de la corde vibrante ?

❒ **a.** Les forces à considérer sont le poids et la tension.

☒ **b.** Pas de déplacement suivant Ox.

☒ **c.** Les déplacements suivant Oy sont petits.

❒ **d.** La corde est extensible.

Les hypothèses sont les suivantes :

- la corde est inextensible ;
- pas de déplacement suivant Ox ;
- les déplacements suivant Oy sont petits ;
- l'influence du poids est négligeable.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

17 On note $T(x)$ la norme de la tension en un point d'abscisse x. Exprimer la relation fondamentale de la dynamique projetée sur les axes Ox et Oy :

☒ **a.** $0 = T(x+\mathrm{d}x)\cos(\alpha(x+\mathrm{d}x)) - T(x)\cos(\alpha(x))$

☐ **b.** $0 = T(x+\mathrm{d}x)\cos(\alpha(x+\mathrm{d}x)) + T(x)\cos(\alpha(x))$

☐ **c.** $\lambda \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha(x+\mathrm{d}x)) + T(x)\sin(\alpha(x))$

☒ **d.** $\lambda \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha(x+\mathrm{d}x)) - T(x)\sin(\alpha(x))$

On a représenté les tensions en x et $x + \mathrm{d}x$ sur le morceau de corde de longueur $\mathrm{d}\ell$ (figure 10.4).

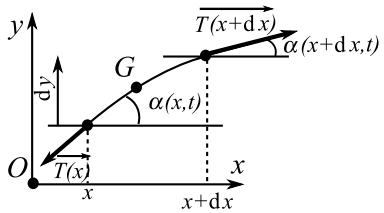


Figure 10.4

On applique le théorème de la résultante cinétique au morceau de corde :
$\mathrm{d}m\,\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{T(x)} + \overrightarrow{T(x+\mathrm{d}x)}$. Comme il n'y a pas de déplacement selon x, on a $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$.
D'autre part $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}\ell$ avec $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \simeq \mathrm{d}x$ puisque $|\mathrm{d}y| \leq \mathrm{d}x$. En projection, on obtient :

$$0 = T(x+\mathrm{d}x)\cos(\alpha(x+\mathrm{d}x)) - T(x)\cos(\alpha(x))$$

et

$$\lambda \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha(x+\mathrm{d}x)) - T(x)\sin(\alpha(x))$$

18 Avec les hypothèses quelle(s) est(sont) la(les) proposition(s) vraie(s) ?

☐ **a.** $\cos\alpha \simeq \dfrac{\partial y}{\partial x}$

☒ **b.** $\sin\alpha \simeq \dfrac{\partial y}{\partial x}$

☐ **c.** $T(x) = m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

☐ **d.** $T(x) = m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Puisque les déplacements selon Oy sont petits, les angles α le sont aussi. On effectue un D.L. à l'ordre 1 de l'équation projetée sur Ox, ce qui donne $T(x+\mathrm{d}x) = T(x)$: la tension est constante le long de la corde et on la note T.

Au premier ordre $\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$. D'autre part, $\tan\alpha$ est par définition la pente de la courbe en x donc $\tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $\sin\alpha \simeq \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

19 Déterminer l'équation vérifiée par les déplacements transversaux y de la corde :

☒ **a.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\lambda}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\lambda}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{T}{\lambda}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{T}{\lambda}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Avec les résultats précédents, l'équation projetée sur Oy s'écrit :

$$\lambda \mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left(\sin(\alpha(x+\mathrm{d}x)) - \sin(\alpha(x))\right) = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+\mathrm{d}x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)\right) = T\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Après simplification par $\mathrm{d}x$ on trouve l'équation **a**.

Cet énoncé concerne les questions 20 à 24 :
On modélise un solide par une chaîne infinie d'atomes de masse m reliés par des ressorts identiques de longueur à vide a, de raideur K. L'atome n est repéré par sa position d'équilibre $x_n^0 = na$ et sa position hors d'équilibre $x_n(t) = na + \xi_n(t)$ avec $|\xi_n(t)| \ll a$.

20 Déterminer l'équation différentielle vérifiées par $\xi_n(t)$.

❒ **a.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(-\xi_{n+1} - \xi_{n-1} + 2\xi_n)$

❒ **b.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(\xi_{n+1} - \xi_{n-1} - 2a)$

❒ **c.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(-\xi_{n+1} + \xi_{n-1} + 2a)$

☒ **d.** $\ddot{\xi}_n = \dfrac{K}{m}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n)$

On a représenté la chaîne d'atome à l'équilibre et hors d'équilibre sur la figure 10.5.

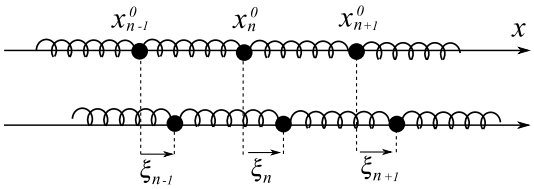


Figure 10.5

On applique la relation fondamentale de la dynamique à l'atome n :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = -K(x_n^0 + \xi_n - (x_{n-1}^0 + \xi_{n-1}) - a) + K(x_{n+1}^0 + \xi_{n+1} - (x_n^0 + \xi_n) - a)$$

soit en remplaçant les positions à l'équilibre par leurs expressions :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = K(-na - \xi_n + (n-1)a + \xi_{n-1} + a + (n+1)a + \xi_{n+1} - na - \xi_n - a)$$

ce qui donne la réponse **d.** après simplification.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

21 On définit une fonction $\xi(x,t)$ de classe C^2, telle que $\xi(x = na, t) = \xi_n(t)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\xi(x,t)$.

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -a^2\dfrac{K}{m}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

❒ **b.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 2a\dfrac{K}{m}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - 1\right)$

☒ **c.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\dfrac{K}{m}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 2a\dfrac{K}{m}\left(-\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + 1\right)$

La fonction ξ permet d'écrire ;

$$\xi_n = \xi(na,t) = \xi(x,t)$$
$$\xi_{n+1} = \xi(na+a,t) = \xi(x+a,t)$$
$$\xi_{n-1} = \xi(na-a,t) = \xi(x-a,t)$$

On suppose que ξ varie très peu à l'échelle de a, ce qui permet de remplacer $\xi(x+a,t)$ et $\xi(x-a,t)$ par leur développement au deuxième ordre (on s'apercevra *a posteriori* que le développement au premier ordre ne suffit pas).

$$\xi_{n-1} \simeq \xi(x,t) - a\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}$$

et

$$\xi_{n+1} \simeq \xi(x,t) + a\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}$$

En reportant dans l'équation, on obtient :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\frac{K}{m}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

On trouve une équation de D'Alembert avec une célérité $c = \sqrt{\dfrac{Ka^2}{m}}$.

22 On considère un barreau solide de longueur L et de section S (figure 10.4). Il s'allonge de $\Delta\ell$ lorsqu'il est soumis à une force $\vec{F}$. Déterminer l'expression du module d'Young E.

❒ **a.** $E = \dfrac{F}{S}\dfrac{\Delta\ell}{L}$

☒ **b.** $E = \dfrac{F}{S}\dfrac{L}{\Delta\ell}$

❒ **c.** $E = \dfrac{S}{F}\dfrac{\Delta\ell}{L}$

❒ **d.** $E = \dfrac{S}{F}\dfrac{L}{\Delta\ell}$

Le module d'Young E d'un solide est aussi appelé coefficient d'élasticité longitudinale ; il caractérise l'allongement du solide sous l'action d'une force extérieure.

Si un échantillon de section S et de longueur L s'allonge de $\Delta\ell$ sous l'action d'une force $\vec{F}$ exercée dans le sens de la longueur, le module d'Young E est donné par la relation : $\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta\ell}{L}$ d'où la réponse **b**.

23 On suppose que le solide, de masse volumique μ, est formé de chaînes d'oscillateurs (figure 10.5). Déterminer la force subie par une surface dS du plan x_n de la part des atomes du plan x_{n+1}, toujours en supposant $|\xi_n(t)| \ll a$ et $|\xi(x,t)| \ll a$.

☒ **a.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \dfrac{\mathrm{d}S}{a^2}K(\xi_{n+1} - \xi_n)\overrightarrow{u_x}$

❒ **b.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\dfrac{\mathrm{d}S}{a^2}K(\xi_{n+1} - \xi_n)\overrightarrow{u_x}$

☒ **c.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \dfrac{\mathrm{d}S}{a}K\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\dfrac{\mathrm{d}S}{a}K\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$

Chaque atome du plan x_n subit de la part de son voisin du plan x_{n+1} une force :

$$\overrightarrow{F}_{n+1\to n} = K(x_{n+1}^0 - x_n^0 - a)\overrightarrow{u_x} = K((n+1)a + \xi_{n+1} - na - \xi_n - a)\overrightarrow{u_x} = K(\xi_{n+1} - \xi_n)\overrightarrow{u_x}$$

Un élément de surface dS dans le plan d' abscisse x_n contient $\dfrac{\mathrm{d}S}{a^2}$ atomes jouant le même rôle. La surface dS du plan x_n subit donc une force $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \dfrac{\mathrm{d}S}{a^2}K(\xi_{n+1} - \xi_n)\overrightarrow{u_x}$ de la part du plan x_{n+1} (réponse **a.**). Avec un développement, on a $\xi_{n+1} - \xi_n \simeq a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ d'où la réponse **c**.

24 Déterminer la célérité de l'onde dans le solide.

☒ **a.** $c = \sqrt{\dfrac{E}{\mu}}$

❒ **b.** $c = \sqrt{\dfrac{\mu}{E}}$

❒ **c.** $c = \dfrac{E}{\mu}$

❒ **d.** $c = \dfrac{\mu}{E}$

D'après les questions précédentes :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{K}{a^2}(\xi_{n+1} - \xi_n) = \frac{E\Delta\ell}{L}$$

Avec $\Delta\ell = \xi_{n+1} - \xi_n$ et $L = a$, on en déduit $E = \dfrac{K}{a}$.

La célérité de l'onde trouvée précédemment est $c = \sqrt{\dfrac{Ka^2}{m}}$. En remplaçant K par son expression et en utilisant la masse volumique $\mu = \dfrac{m}{a^3}$, on obtient la réponse **a**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 Ondes électromagnétiques dans le vide

Vrai/Faux

1 ☒ V ☐ F Une O.P. dans le vide est transverse électrique et magnétique.

Dans le vide $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$. Si l'on choisit l'axe Ox selon la direction de propagation de l'onde plane, les champs ne dépendent que de x et t. L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide donne div $\vec{E} = 0$ soit $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0$. L'équation de Maxwell-flux donne div $\vec{B} = 0$ soit $\dfrac{\partial B_x}{\partial x} = 0$. Les projections des deux autres équations sur Ox s'écrivent :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \text{ (M.F) et } \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \text{ (M.A)}$$

Puisque $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indépendants de y et z on en déduit : $\dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ et $\dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0$. Les composantes E_x et B_x sont donc des constantes que l'on prend nulles dans le cas de l'étude du phénomène ondulatoire.

2 ☐ V ☒ F Pour une O.P., le trièdre $(\vec{B}, \vec{E}, \vec{k})$ est direct.

C'est dans le cas d'une O.P.P. qu'il est direct. En effet, si on prend par exemple l'onde $\vec{E}(x-ct)$ et $\vec{B}(x-ct)$ et que l'on définit la variable $X = x-ct$ avec $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial X}$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} = -c\dfrac{\partial}{\partial X}$. Les projections de l'équation de Maxwell-Faraday sur les axes Oy et Oz :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial E_z}{\partial X} = c\dfrac{\partial B_y}{\partial X} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial X} = c\dfrac{\partial B_z}{\partial X} \end{cases}$$

En intégrant ces deux dernières équations avec des constantes d'intégration nulles (on ignore les phénomènes statiques), on trouve $B_y = -\dfrac{1}{c}E_z$ et $B_z = \dfrac{1}{c}E_y$ soit $\vec{B} = \dfrac{\vec{u_x} \wedge \vec{E}}{c}$. Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u_x})$ est alors direct.

3 ☐ V ☒ F La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est strictement inférieure à c.

Dans le vide, la vitesse de propagation de l'énergie est égale à la célérité de l'onde.

4 ❒ V ☒ F Toutes les ondes sont polarisées.

La lumière naturelle est non polarisée. La lumière solaire après traversée de l'atmosphère est polarisée partiellement.

5 ☒ V ❒ F Dans le cas d'une polarisation circulaire gauche, le champ $\vec{E}$ tourne dans le sens trigonométrique.

Pour déterminer le sens de rotation du champ, il faut regarder l'onde venir vers soi. Dans ce cas, par définition, le champ $\vec{E}$ tourne dans le sens trigonométrique pour une onde gauche et horaire pour une onde droite.

QCM

6 L'équation de propagation du champ B dans le vide est :

❒ **a.** $\Delta\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

☒ **b.** $\Delta\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

❒ **c.** $\Delta\vec{B} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

☒ **d.** $\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

On prend le $\overrightarrow{\text{rot}}$ de l'équation de Maxwell-Ampère puis on utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{B} - \Delta\vec{B} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Avec $\text{div}\,\vec{B} = 0$, on trouve l'équation de D'Alembert **b.** pour la propagation de $\vec{B}$ et avec la forme générale **d.**, on trouve que la célérité de l'onde dans le vide est $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$. Un raisonnement analogue conduit à la même équation pour $\vec{E}$.

7 On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire correspondant à la direction et au sens de propagation de l'onde plane progressive. La relation de structure de l'onde est :

☒ **a.** $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{E}$

❒ **b.** $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{E} \wedge \vec{u}$

❒ **c.** $\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{B} \wedge \vec{u}$

❒ **d.** $\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{B}$

La démonstration a été faite dans le vrai-faux (question 2).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 On considère l'onde dont le champ $\vec{E}$ dans le vide (entre deux plans conducteurs) est :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ E_z = \alpha E_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

Quelles sont les propositions vérifiées par cette onde ?

☒ **a.** L'onde n'est pas plane.

☐ **b.** Elle est transverse.

☐ **c.** Elle se propage dans le sens des z décroissants.

☒ **d.** $\alpha = \dfrac{i\pi}{ka}$

Le terme de propagation est $\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}$ donc l'onde est progressive selon l'axe Oz dans le sens des z croissants. Elle n'est pas plane car son amplitude dépend de y et donc n'est pas constante dans un plan perpendiculaire à Oz. L'onde a une composante E_z non nulle donc elle n'est pas transverse.

Le champ $\vec{E}$ dans le vide doit vérifier $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, soit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left(-\frac{\pi}{a} - ik\alpha\right) E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} = 0$$

d'où $\alpha = -\dfrac{\pi}{iak} = \dfrac{i\pi}{ak}$.

9 On s'intéresse à une O.P.P.H. en écriture complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_0}} \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent :

☐ **a.** $i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \vec{0}$

☒ **b.** $i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$

☒ **c.** $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$

☐ **d.** $i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = i\epsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}}$

On calcule par exemple la divergence dans le cas de $\vec{E}$ sachant que $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$:

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = -ik_x \underline{E_x} - ik_y \underline{E_y} - ik_z \underline{E_z} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

Ce résultat permet d'obtenir l'expression du vecteur $\vec{\nabla}$, car $\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}}$ soit $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$. D'autre part, on en déduit $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$.

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent alors :

Maxwell pour le flux : $-i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$	Maxwell Ampère : $-i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = i\omega\mu_0\epsilon_0\underline{\vec{E}}$
Maxwell Gauss : $-i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$	Maxwell Faraday : $-i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$

10 Dans le cas d'une O.P.P.H., la relation de structure de l'onde s'écrit :

❒ **a.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{E}}\wedge\vec{k}}{\omega}$

☒ **b.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$

❒ **c.** $\underline{\vec{E}} = \dfrac{\underline{\vec{B}}\wedge\vec{k}}{\omega}$

❒ **d.** $\underline{\vec{E}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}}{\omega}$

La relation de structure est donnée par l'équation de Maxwell-Faraday (question précédente).

11 Dans le cas d'une O.P.P.H., l'équation de D'Alembert s'écrit :

❒ **a.** $k^2\underline{\vec{E}} + \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **b.** $-k^2\underline{\vec{E}} - \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

❒ **c.** $k\underline{\vec{E}} + \dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

☒ **d.** $-k^2\underline{\vec{E}} + \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

Soit l'on exprime $\Delta\underline{\vec{E}} = \vec{\nabla}^2\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$ et l'on remplace dans l'équation de D'Alembert :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad\Rightarrow\quad -k^2\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

Soit l'on reporte l'expression de $\underline{\vec{B}}$ de la relation de structure dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$-i\vec{k}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = \frac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \;\Rightarrow\; (\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}})\vec{k} - k^2\underline{\vec{E}} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\underline{\vec{E}}$$

avec $\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$ (Maxwell-Gauss).

12 On note $\vec{E} = \vec{E}_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)$ le champ électrique réel de l'onde et $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$.

Déterminer la densité moyenne d'énergie électromagnétique $< w_e >$ et la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle$.

☒ **a.** $< w_e >= \dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

❒ **b.** $< w_e >= \dfrac{1}{4}\epsilon_0 E^2$

☒ **c.** $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{1}{2}c\epsilon_0 E^2\vec{u}$

❒ **d.** $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{1}{4}c\epsilon_0 E^2\vec{u}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On revient aux champs réels. Le champ $\vec{B}$ s'exprime $\dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}_0}{c} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction de propagation. La densité d'énergie électromagnétique moyenne s'écrit :

$$< w_e >= \frac{\epsilon_0}{2}\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle + \frac{1}{2\mu_0}\left\langle \vec{B}^2 \right\rangle = \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)\right\rangle$$

En utilisant $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et $\left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)\right\rangle = \dfrac{1}{2}$, on trouve la réponse **a**. Le vecteur de Poynting s'exprime :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\vec{E}_0 \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{E}_0\right)\right)\cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)$$

La valeur moyenne est donc :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)\right\rangle \vec{u} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}\vec{u}$$

13 Déterminer les expressions complexes des champs électromagnétiques associés à l'O.P.P.H. polarisée rectilignement dont le champ $\underline{\vec{E_1}}$ d'amplitude E_0 se propage suivant l'axe Oz dans le sens croissant et fait un angle de $30\,°$ avec l'axe Ox.

❒ **a.** $\begin{cases} \underline{\vec{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\vec{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(\vec{u_x} + \sqrt{3}\vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$

☒ **b.** $\begin{cases} \underline{\vec{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\vec{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(-\vec{u_x} + \sqrt{3}\vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} \underline{\vec{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\vec{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} \underline{\vec{E_1}} = \dfrac{E_0}{2}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ \underline{\vec{B_1}} = \dfrac{E_0}{2c}\left(-\vec{u_x} - \sqrt{3}\vec{u_y}\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$

Le champ $\underline{\vec{E_1}}$ se propageant suivant l'axe z et selon les z croissants s'écrit $\underline{\vec{E_1}} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}$ avec $k = \omega/c$. Si l'onde est polarisée rectilignement la direction de $\vec{E}_0$ est constante et $\vec{E}_0 = E_0(\cos 30° \vec{u_x} + \sin 30° \vec{u_y})$. Le vecteur $\underline{\vec{B_1}}$ est obtenu avec la relation de structure $\underline{\vec{B_1}} = \dfrac{\vec{u_z} \wedge \underline{\vec{E_1}}}{c}$.

14 On considère une O.P.P.H. polarisée rectilignement dont le champ $\overrightarrow{E_2}$ d'amplitude E_0 de polarisation rectiligne suivant l'axe Ox se propage dans une direction qui fait, dans le plan yOz, un angle de 45 ° avec l'axe Oy. Déterminer l'expression réelle du champ $\overrightarrow{E_2}$.

☒ **a.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c\sqrt{2}}(y+z)\right)\overrightarrow{u_x}$

❒ **b.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}x\right)\left(\overrightarrow{u_y} + \overrightarrow{u_z}\right)$

❒ **c.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}z\right)\overrightarrow{u_x}$

❒ **d.** $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}(y+z)\right)\overrightarrow{u_x}$

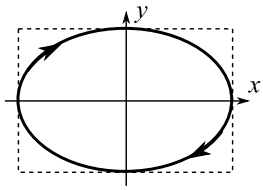
L'onde est polarisée suivant Ox donc $\overrightarrow{E_2} = E_0 \cos(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{u_x}$ avec $k = \omega/c$. Le vecteur d'onde est dans le plan yOz et fait un angle de 45° avec Oy donc $\overrightarrow{k} = \dfrac{k}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{u_y} + \overrightarrow{u_z}\right)$ d'où $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} = \dfrac{\omega}{c\sqrt{2}}(y+z)$.

15 On s'intéresse à une O.P.P.H. polarisée elliptiquement, se propageant suivant l'axe Oz dans le sens des z croissants. Le champ électrique dans un plan parallèle à xOy s'écrit :

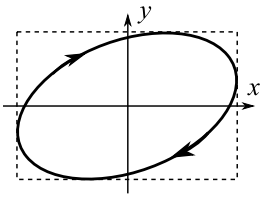
$$\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz - 0,6) \end{cases}$$

avec $E_{0x} > 0$ et $E_{0y} > 0$. Parmi les représentations de l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ au cours du temps, déterminer celle qui correspond au champ précédent.

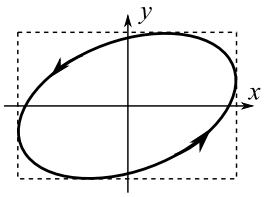
❒ **a.**



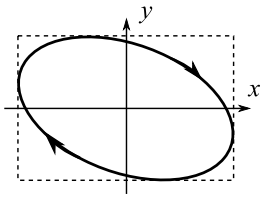
❒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



On cherche le contact avec le côté droit du rectangle ce qui correspond à E_x maximum soit $\omega t - kz = 2m\pi$ avec m entier. On a alors :
$E_y = E_{0y}\cos(2m\pi - 0,6) = E_{0y}\cos(0,6) = 0,82\ E_{0y}$; comme $E_y > 0$ il s'agit du cas **b.** ou **c**. Il faut maintenant déterminer si la polarisation est droite ou gauche. Pour cela on

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

détermine $\dfrac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}t} = -E_y\omega\sin(\omega t - kz - 0,6)$ au point de contact. En ce point on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}t} = -E_y\omega\sin(2m\pi - 0,6) = E_y\omega\sin(0,6) = 0,56\,E_y\omega > 0$$

Ainsi E_y croît en ce point, donc la polarisation est gauche (résultat **c.**).

Cet énoncé concerne les questions 16 à 20 :
Cette étude s'intéresse à la superposition de deux ondes polarisées circulairement se propageant suivant l'axe Oz en sens opposés.

16 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) correspond(ent) à une onde circulaire droite se propageant suivant les z croissants ?

☒ **a.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = -E_0\sin(\omega t - kz) \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\sin(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = -E_0\cos(\omega t - kz) \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = E_0\sin(\omega t - kz) \end{cases}$

☒ **d.** $\begin{cases} E_{x_1} = E_0\sin(\omega t - kz) \\ E_{y_1} = E_0\cos(\omega t - kz) \end{cases}$

On peut raisonner de deux manières. Par définition du cosinus et du sinus avec le cercle trigonométrique, un vecteur de coordonnées $a\cos(\omega t - kz)$ selon x et $a\sin(\omega t - kz)$ selon y, avec $a > 0$, verra son extrémité décrire un cercle au cours du temps dans le sens trigonométrique dans un plan $z = cte$. On en déduit donc que la réponse **a.** correspond à une onde droite (signe « – » pour E_y) et la réponse **c.** à une onde gauche. La réponse **b.** s'obtient en ajoutant $-\dfrac{\pi}{2}$ aux arguments de cosinus et sinus de la réponse **c.** ce qui change l'origine des temps mais pas le sens de la polarisation : la réponse **b.** est gauche. Enfin la réponse **d.** est obtenue en ajoutant $-\dfrac{\pi}{2}$ aux arguments de cosinus et sinus de la réponse **a.**, donc elle est droite.

Autre raisonnement possible, déterminer les sens de croissance de E_y au point où E_x est maximal.

17 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) correspond(ent) à une onde circulaire gauche se propageant suivant les z décroissants ?

☒ **a.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\cos(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = -E_0\sin(\omega t + kz) \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\sin(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = -E_0\cos(\omega t + kz) \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\cos(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = E_0\sin(\omega t + kz) \end{cases}$

☒ **d.** $\begin{cases} E_{x_2} = E_0\sin(\omega t + kz) \\ E_{y_2} = E_0\cos(\omega t + kz) \end{cases}$

Il est faux ici de répondre **b.** et **c.** en utilisant les raisonnements de la question précédente. En effet, l'onde se propage selon les z décroissants donc les raisonnements doivent être inversés. Toujours se rappeler que pour déterminer la polarisation, il faut regarder l'onde venir vers soi.

18 On s'intéresse maintenant à la superposition des deux ondes précédentes. Déterminer le champ électrique résultant $\vec{E}$.

❒ **a.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \left(\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **b.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \cos(\omega t) \left(\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)$

❒ **c.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \left(\sin(\omega t)\vec{u_x} - \cos(\omega t)\vec{u_y}\right)$

☒ **d.** $\vec{E} = 2E_0 \cos kz \left(\cos(\omega t)\vec{u_x} - \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

On somme les champs des réponses **a.** en appliquant le théorème de superposition :

$$E_x = E_0(\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)) = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kz)$$

et

$$E_y = -E_0(\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz)) = -2E_0 \sin(\omega t) \cos(kz)$$

On remarque que les termes de temps et d'espace ne sont plus couplés. L'onde ne se propage plus, c'est une onde stationnaire.

19 Déterminer le champ magnétique résultant :

❒ **a.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kz \left(-\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **b.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kz \left(\sin(\omega t)\vec{u_x} + \cos(\omega t)\vec{u_y}\right)$

❒ **c.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \sin kz \left(-\cos(\omega t)\vec{u_x} - \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

☒ **d.** $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \sin kz \left(-\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}\right)$

Attention, l'onde résultante n'est plus progressive, donc on ne peut appliquer une quelconque relation de structure à cette onde. En revanche, on peut utiliser la relation de structure pour chacune des ondes puis superposer les champs magnétiques. Pour l'onde se propageant suivant les z croissants :

$$\vec{B}^+ = \frac{\vec{u_z} \wedge \vec{E}^+}{c} = \frac{E_0}{c}\left(\sin(\omega t - kz)\vec{u_x} + \cos(\omega t - kz)\vec{u_y}\right)$$

et pour celle se propageant suivant les z décroissants :

$$\vec{B}^- = \frac{-\vec{u_z} \wedge \vec{E}^-}{c} = \frac{E_0}{c}\left(-\sin(\omega t + kz)\vec{u_x} - \cos(\omega t + kz)\vec{u_y}\right)$$

La somme donne :

$$B_x = -\frac{2E_0}{c}\sin(kz)\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad B_y = \frac{2E_0}{c}\sin(kz)\sin(\omega t)$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

20 En déduire le vecteur de Poynting du champ résultant :

❒ **a.** $\overrightarrow{\Pi} = 2c\epsilon_0 E_0 \sin kz \cos kz \sin \omega t \cos \omega t \, \overrightarrow{u_z}$

☒ **b.** $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$

❒ **c.** $\overrightarrow{\Pi} = 2c\epsilon_0 E_0 \sin^2 kz \sin^2 \omega t \, \overrightarrow{u_z}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\Pi} = -2c\epsilon_0 E_0 \sin kz \cos kz \, \overrightarrow{u_z}$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$ est nul : il n' y a plus propagation de l'énergie.

12 Quelques exemples d'applications des ondes électromagnétiques

QCM

Cet énoncé concerne les questions 1 à 7 :
On étudie la propagation d'une O.P.P.H. dans un plasma dilué. L'onde est de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})} \quad \underline{\overrightarrow{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})}$$

On note $\omega_p = \left(\dfrac{ne^2}{m\epsilon_0}\right)^{1/2}$ la pulsation plasma, où n est le nombre d'électrons par unité de volume, $-e$ la charge d'un électron et m sa masse.

1 Choisir les hypothèses retenues parmi les suivantes :

❒ **a.** Les électrons sont relativistes.

☒ **b.** On néglige l'interaction des électrons avec les ions.

☒ **c.** On néglige la force magnétique sur les électrons.

❒ **d.** On tient compte du mouvement des ions.

Les électrons ont une vitesse v petite devant celle de la lumière : ils sont non relativistes.

On suppose le plasma dilué, donc de faible concentration en ions et électrons, qui sont alors assez éloignés les uns des autres. Les interactions entre eux sont négligeables devant la force due à l'onde électromagnétique.

Il faut comparer la force magnétique et la force électrique sachant que pour une onde dans le vide $B \sim \dfrac{E}{c}$ (en fait dans un plasma $B \leq \dfrac{E}{c}$ lorsqu'il y a propagation). Il vient :

$$\frac{\|\overrightarrow{f_B}\|}{\|\overrightarrow{f_E}\|} \sim \frac{evB}{eE} \sim \frac{v}{E}\frac{E}{c} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

Enfin, un proton est environ 2000 fois plus lourd qu'un électron, donc un ion a une masse très grande devant celle d'un électron : on néglige le mouvement des ions.

2 L'expression de la densité de courant $\underline{\vec{j}}$ dans le plasma est :

❒ **a.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}$

❒ **b.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2}{m}\underline{\vec{E}}$

❒ **c.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{-e}{m\omega i}\underline{\vec{E}}$

☒ **d.** $\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2}{m\omega i}\underline{\vec{E}}$

La relation fondamentale de la dynamique pour un électron s'écrit $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$. On cherche pour $\vec{v}$ une solution complexe $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ en régime forcé soit finalement $\underline{\vec{v}} = \dfrac{-e}{im\omega}\underline{\vec{E}}$. Avec n électrons par unité de volume, le vecteur densité de courant s'écrit $\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}}$. On obtient pour $\underline{\vec{j}}$ la réponse **d**.

3 Après avoir montré que la densité volumique de charges est nulle dans le plasma, déterminer parmi les équations (Maxwell) suivantes en écriture complexe, laquelle (lesquelles) est(sont) fausse(s) ?

❒ **a.** $-i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$

❒ **b.** $-i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$

☒ **c.** $i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$

☒ **d.** $-i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\omega_p^2}{\omega} - \omega\right)\underline{\vec{E}}$

Tout d'abord, il faut montrer que dans le plasma $\rho = 0$. L'équation de Maxwell-Gauss $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{\underline{\rho}}{\epsilon_0}$ entraine, avec la relation entre $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{j}}$: $\mathrm{div}\,\underline{\vec{j}} = \dfrac{ne^2\underline{\rho}}{\epsilon_0 m\omega i}$. L'équation de conservation de la charge s'écrit (toujours dans le cas du régime forcé) : $\mathrm{div}\,\underline{\vec{j}} = -\dfrac{\partial\underline{\rho}}{\partial t} = -i\omega\underline{\rho}$. Ces deux équations reliant $\mathrm{div}\,\underline{\vec{j}}$ à $\underline{\rho}$ ne sont compatibles que si $\underline{\rho} = 0$.

Dans le cas du type de solutions recherchées, on a $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$. Les quatre équations de Maxwell s'écrivent :

- (MG) : $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = 0 \;\Rightarrow\; -i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$
- (Mϕ) : $\mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = 0 \;\Rightarrow\; -i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$
- (MF) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} \;\Rightarrow\; -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$
- (MA) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}} - \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} \;\Rightarrow\; -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\dfrac{i}{c^2}\left(\dfrac{\omega_p^2}{\omega} - \omega\right)\underline{\vec{E}}$

4 Déterminer l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}$ et la relation de dispersion :

☒ **a.** $\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\dfrac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

❒ **b.** $\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

❒ **c.** $k^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2$

☒ **d.** $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On injecte l'expression de $\underline{\vec{B}}$ de (MF) dans (MA) sachant que $\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega} - \omega\right)\underline{\vec{E}} = \vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\left((\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}})\vec{k} - k^2\underline{\vec{E}}\right) = -\frac{k^2}{\omega}\underline{\vec{E}}$$

L'équation pour $\underline{\vec{E}}$ s'écrit donc :

$$-k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} - i\omega\mu_0\underline{\vec{j}} = \vec{0}$$

Sachant que $-k^2\underline{\vec{E}} = \Delta\underline{\vec{E}}$, que $-\omega^2\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$ et $i\omega\underline{\vec{j}} = \dfrac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t}$, on obtient l'équation de propagation **a**.

En factorisant les termes en facteur de $\underline{\vec{E}}$ qui est non nul on en déduit l'équation de dispersion **d**.

Une autre solution est de prendre le rotationnel de (MF) puis d'utiliser (MA) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} - \Delta\underline{\vec{E}} = -\Delta\underline{\vec{E}}$.

5 Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et celle de groupe v_g :

❒ **a.** $v_\phi = c$

☒ **b.** $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

❒ **c.** $v_g = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

☒ **d.** $v_g = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{k}$ donc ici, dans le cas où l'onde se propage $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$. La vitesse de groupe correspondant à la vitesse de propagation de l'énergie est $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$, or si on différentie la relation de dispersion, on obtient $2k\mathrm{d}k = \dfrac{2\omega\mathrm{d}\omega}{c^2}$ soit $v_g = c^2\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v\phi} = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

6 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) est(sont) exacte(s) ?

☒ **a.** Si $\omega < \omega_p$ l'onde ne se propage pas.

☒ **b.** La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière.

❒ **c.** Deux ondes de pulsations différentes se propagent à la même vitesse.

❒ **d.** L'énergie se propage à la vitesse v_ϕ.

Pour $\omega < \omega_p$, le vecteur d'onde est complexe : $\underline{k} = \pm i \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ et on le notera $\underline{k} = \pm i k_i$.
En l'absence de source à l'intérieur du plasma, l'onde ne peut être qu'atténuée d'où le choix physique pour le signe de k. En effet, si on choisit par exemple l'axe z selon la direction de propagation, le champ $\underline{\vec{E}}$ s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} e^{i(\omega t - \pm i k_i z)} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{\pm k_i z}\, e^{i\omega t}$$

seul le signe « – » pour k correspond à une solution physique : on observe une atténuation exponentielle de l'onde qui ne se propage plus.

Dans le cas où l'onde se propage ($\omega > \omega_p$), l'expression de la vitesse de phase démontrée dans la question précédente donne une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Cependant , il faut se rappeler que l'énergie de l'onde se propage à une vitesse égale à la vitesse de groupe qui elle est inférieure à c.

La vitesse de phase dépend de ω donc deux ondes de pulsations différentes se propagent à des vitesses différentes : on dit que le milieu est **dispersif**.

7 L'ionosphère a une fréquence plasma $\nu_p \simeq 3$ MHz. Quelle(s) longueur(s) d'onde λ est(sont) possible(s) pour communiquer avec un satellite depuis la Terre ? (On rappelle que $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.)

☒ **a.** $\lambda = 67$ m

❒ **b.** $\lambda = 107$ m

❒ **c.** $\lambda = 607$ m

❒ **d.** $\lambda = 1007$ m

Pour pouvoir communiquer avec un satellite depuis la Terre, il faut que les ondes traversent l'ionosphère, donc leur fréquence doit être supérieure à la fréquence plasma de l'ionosphère. Sachant que la longueur d'onde vérifie $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, il faut que $\lambda \leq \dfrac{c}{\nu_p}$. L'application numérique donne $\lambda \leq 100$ m, donc seule la réponse **a.** convient.

Cet énoncé concerne les questions 8 à 14 :
On étudie la réflexion d'une O.P.P.H. polarisée suivant $\vec{u_y}$ se propageant suivant l'axe Ox dans le sens des x croissants. Le demi-espace $x > 0$ est occupé par un conducteur parfait (conductivité $\gamma \to \infty$). Le champ électrique de l'onde incidente est de la forme $\underline{\vec{E_i}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u_y}$ et celui de l'onde réfléchie $\underline{\vec{E_r}} = \underline{\vec{E_{r_0}}} e^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})}$. On note $\vec{r_0}$ un vecteur du plan yOz.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

8 Écrire les conditions de passage sur le plan yOz pour le champ électrique projetées sur les axes :

☒ **a.** $E_{r_{0x}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

☐ **b.** $E_{r_{0x}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = 0$

☐ **c.** $E_0\mathrm{e}^{i(\omega t)} - E_{r_{0y}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = 0$

☒ **d.** $E_{r_{0z}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = 0$

La condition de passage pour le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(x = 0^-) - \underline{\vec{E}}(x = 0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(-\vec{u_x})$$

Le métal étant parfait $\underline{\vec{E}}(x = 0^+) = \vec{0}$. En effet, si $\underline{\vec{E}} \neq \vec{0}$, $\|\vec{j}\| \to \infty$ ce qui entrainerait une énergie cédée par effet Joule infinie. Le champ en $x = 0^-$ est la superposition du champ incident et du champ réfléchi : $\underline{\vec{E}}(x = 0^-) = E_0\mathrm{e}^{i(\omega t)}\vec{u_y} + \vec{E_{r_0}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})}$, soit en projection :

$$\begin{cases} E_{r_{0x}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0} \\ E_0\mathrm{e}^{i(\omega t)} + E_{r_{0y}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = 0 \\ E_{r_{0z}}\mathrm{e}^{i(\omega_r t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = 0 \end{cases}$$

9 L'expression du champ électrique réfléchi est :

☐ **a.** $\underline{\vec{E_r}} = E_0\mathrm{e}^{i(\omega t + kx)}\vec{u_y}$

☐ **b.** $\underline{\vec{E_r}} = -E_0\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}\vec{u_y}$

☒ **c.** $\underline{\vec{E_r}} = -E_0\mathrm{e}^{i(\omega t + kx)}\vec{u_y}$

☐ **d.** $\underline{\vec{E_r}} = E_0\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}\vec{u_y}$

La projection suivant Oz donne $E_{r_{0z}} = 0$. L'équation projetée sur Oy est vraie $\forall t$ donc $\omega_r = \omega$ et $\|\vec{k_r}\| = \|\vec{k}\|$. Elle est vraie aussi $\forall\vec{r_0}$ en particulier $\vec{r_0} = \vec{0}$ donc $E_{r_{0y}} = -E_0$. On obtient donc $\mathrm{e}^{i\vec{k_r}\cdot\vec{r_0}} = 1 \quad \forall\vec{r_0}$. : la seule solution physique est $\vec{k_r}\cdot\vec{r_0} = 0$ (une solution $\vec{k_r}\cdot\vec{r_0} = m2\pi$ avec $m \neq 0$ signifierait que $\vec{k_r}$ dépend de la position $\vec{r_0}$). Ainsi puisque l'onde est réfléchie et $\vec{k_r}\perp\vec{r_0}$, on peut écrire $\vec{k_r} = -k\vec{u_x}$. L'onde réfléchie est une O.P.P.H. dans le vide, donc transverse ce qui impose $\underline{\vec{E_r}} \perp \vec{k_r}$ donc $\underline{\vec{E_r}} \perp \vec{u_x}$. On en déduit $E_{r_{0x}} = 0$ et $\sigma = 0$. Comme l'onde se propage suivant les x décroissants, c'est la solution **c.** qui convient.

10 Déterminer l'expression du champ électrique total $\underline{\vec{E}}$ pour le demi-espace $x \leq 0$:

☐ **a.** $\underline{\vec{E}} = 2E_0\cos kx\ \mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u_y}$

☐ **b.** $\underline{\vec{E}} = -2E_0\sin kx\ \mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u_y}$

☐ **c.** $\underline{\vec{E}} = \vec{0}$

☒ **d.** $\underline{\vec{E}} = -2E_0 i\sin kx\ \mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u_y}$

Le champ électrique total est :

$$\underline{\vec{E}} = \left(E_0 e^{i(\omega t - kx)} - E_0 e^{i(\omega t + kx)}\right)\vec{u_y} \Rightarrow \underline{\vec{E}} = 2E_0\, e^{i\omega t}\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)\vec{u_y}$$

d'où la réponse **d**. Les variables d'espace et de temps ne sont plus couplées : l'onde est stationnaire.

11 Déterminer l'expression du champ magnétique total $\underline{\vec{B}}$ pour le demi-espace $x \leq 0$:

❒ **a.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{-2E_0 i}{c} \sin kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

☒ **b.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

❒ **c.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{2E_0 i}{c} \sin kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

❒ **d.** $\underline{\vec{B}} = \dfrac{-2E_0}{c} \cos kx\, e^{i\omega t}\vec{u_z}$

L'onde n'étant plus progressive, on ne peut appliquer une relation de structure pour calculer $\underline{\vec{B}}$. En revanche, on peut appliquer la relation de structure individuellement à l'onde incidente et à l'onde réfléchie :

$$\underline{\vec{B_i}} = \frac{\vec{u_x} \wedge \underline{\vec{E_i}}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)}\vec{u_z} \quad et \quad \underline{\vec{B_r}} = \frac{-\vec{u_x} \wedge \underline{\vec{E_r}}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kx)}\vec{u_z}$$

Le champ résultant est :

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_i}} + \underline{\vec{B_r}} = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t}\left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right)\vec{u_z} = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \cos kx\, \vec{u_z}$$

12 Déterminer l'expression du vecteur de Poynting pour l'onde résultante :

❒ **a.** $\vec{\Pi} = \dfrac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin kx\, \cos kx\, \sin^2 \omega t\, \vec{u_x}$

❒ **b.** $\vec{\Pi} = \dfrac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin kx\, \cos kx\, \cos^2 \omega t\, \vec{u_x}$

❒ **c.** $\vec{\Pi} = \dfrac{-4E_0^2 i}{c\mu_0} \sin^2 kx\, \sin \omega t\, e^{i\omega t}\, \vec{u_x}$

☒ **d.** $\vec{\Pi} = \dfrac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin kx\, \cos kx\, \sin \omega t\, \cos \omega t\, \vec{u_x}$

La réponse **c.** utilise les champs complexes ce qu'on ne doit pas faire pour calculer $\vec{\Pi}$; il faut repasser en champs réels $\vec{E} = \Re(\underline{\vec{E}}) = 2E_0 \sin \omega t\, \sin kx\, \vec{u_y}$ et $\vec{B} = \Re(\underline{\vec{B}}) = \dfrac{2E_0}{c} \cos \omega t\, \cos kx\, \vec{u_z}$. On calcule donc $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kx\, \cos kx\, \sin \omega t\, \cos \omega t\, \vec{u_y} \wedge \vec{u_z} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kx\, \cos kx\, \sin \omega t\, \cos \omega t\, \vec{u_x}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

13 Quelles sont les propositions fausses parmi les suivantes ?

☒ **a.** L'onde résultante est progressive.

❒ **b.** $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$

☒ **c.** Le plan $x = 0$ correspond à un nœud de $\underline{\vec{B}}$.

❒ **d.** Le plan $x = 0$ correspond à un nœud de $\underline{\vec{E}}$.

On a déjà remarqué que l'onde est plane et stationnaire donc non progressive.

Comme $\langle \cos \omega t \ \sin \omega t \rangle = \dfrac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$ alors $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$.

En $x = 0$, $\vec{B} = \dfrac{2E_0}{c} \cos \omega t \, \vec{u_z}$, donc le plan $x = 0$ correspond à un ventre de $\vec{B}$.

En $x = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$, donc le plan $x = 0$ correspond à un nœud de $\vec{E}$.

14 Déterminer la densité surfacique de courant $\vec{j_s}$ dans le plan $x = 0$:

❒ **a.** $\vec{j_s} = \vec{0}$

❒ **b.** $\vec{j_s} = -\dfrac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \, \vec{u_z}$

❒ **c.** $\vec{j_s} = -\dfrac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \, \vec{u_y}$

☒ **d.** $\vec{j_s} = \dfrac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \, \vec{u_y}$

On utilise la condition de passage pour $\vec{B}$ en $x = 0$:

$$\vec{B}(x = 0^-) - \vec{B}(x = 0^+) = \mu_0 \vec{j_s} \wedge (-\vec{u_x})$$

car la normale est $-\vec{u_x}$. Dans le métal $\vec{B}(x = 0^+) = \vec{0}$, donc finalement $\vec{B}(x = 0^-) = -\mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{u_x}$. On forme le produit vectoriel avec $\vec{u_x}$, sachant que $\vec{u_x} \cdot \vec{j_s} = 0$:

$$\vec{u_x} \wedge \vec{B}(x = 0^-) = -\mu_0 \vec{u_x} \wedge \left(\vec{j_s} \wedge \vec{u_x} \right) = -\mu_0 \vec{j_s} \quad \Rightarrow \quad \vec{j_s} = \frac{-2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \, \vec{u_y}$$

Cet énoncé concerne les questions 15 à 21 :
On s'intéresse aux ondes électromagnétiques se propageant selon l'axe Oz dans le sens des z croissants, dans le vide entre deux milieux parfaitement conducteurs (figure 12.1).

Les ondes recherchées sont des ondes transverses électriques notée TE telles que $\vec{E} \perp \vec{u_z}$. L'invariance selon Oy permet d'écrire les champs sous la forme

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}(x) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_0}}(x) \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}$$

On suppose d'autre part que la densité surfacique de charge est nulle sur les conducteurs : on peut montrer alors avec l'équation de Maxwell-Gauss que $\underline{\vec{E}} = E\vec{u_y}$.

15 L'équation de propagation du champ s'écrit :

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_0 = 0$

☒ **b.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_0 = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) E_0 = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) E_0 = 0$

Entre les deux plans, le champ vérifie l'équation de D'Alembert : $\Delta\underline{\vec{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = 0$, soit en projection sur Oy :

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_0(x)}{\partial x^2} - k^2 E_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_0 = 0$$

16 On note n un entier et A une constante. Déterminer l'expression générale de $E_0(x)$ du mode $\mathrm{TE_n}$ imposée par les conditions aux limites :

❒ **a.** $E_0(x) = A \sin n\pi x$

❒ **b.** $E_0(x) = A \cos \dfrac{n\pi x}{a}$

☒ **c.** $E_0(x) = A \sin \dfrac{n\pi x}{a}$

❒ **d.** $E_0(x) = 0$

Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$ imposent E_0 nul. En effet, le champ électrique dans le conducteur est nul, donc par continuité de la composante tangentielle du champ électrique $E_y(x = 0^+) = E_y(x = a^-) = 0$. On cherche donc pour E_0 une solution ayant des conditions aux limites périodiques, l'équation vérifiée par E_0 doit alors se mettre sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2} + \Omega^2 E_0 = 0$ avec $\Omega^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 > 0$. Les solutions de cette équation sont $E_0 = A_1 \cos \Omega x + A_2 \sin \Omega x$.

Pour $x = 0$, $E_0 = 0$ ce qui entraine $A_1 = 0$. En $x = a$, $E_0 = A_2 \sin \Omega a$. Soit $A_2 = 0$ ce qui n'a aucun intérêt, soit $\Omega = \dfrac{n\pi}{a}$ avec n entier. Donc pour le mode $\mathrm{TE_n}$, c'est la solution **c.** qui convient avec $A_2 = A$.

17 Établir l'équation de dispersion :

❒ **a.** $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$

☒ **b.** $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

❒ **c.** $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} + \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

❒ **d.** $k^2 = -\dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$

On reprend la solution $\Omega = \dfrac{n\pi}{a}$ de la question précédente. Avec la définition de Ω, on peut écrire la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

18 Déterminer les composantes de $\overrightarrow{B_0(x)}$:

❒ **a.** $\begin{cases} -A\dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

☒ **b.** $\begin{cases} -A\dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ iA\dfrac{n\pi}{\omega a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} -A\dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ -iA\dfrac{n\pi}{\omega a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} -\dfrac{iA}{\omega}\dfrac{n\pi}{a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ \dfrac{kA}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \end{cases}$

On ne peut pas appliquer la relation de structure $\dfrac{\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{E}}{c}$ car l'onde n'est pas plane. On utilise l'équation de (MF) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ 0 = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ikA\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) = -i\omega B_{0x} \\ 0 = -i\omega B_{0y} \\ A\dfrac{n\pi}{a}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) = -i\omega B_{0z} \end{cases}$$

d'où la réponse **b**.

19 Déterminer les expressions de la vitesse de phase v_ϕ et de la vitesse de groupe v_g :

☒ **a.** $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}}$

❒ **b.** $v_\phi = c$

❒ **c.** $v_g = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}}$

☒ **d.** $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{n\pi c}{\omega}\right)^2}$

La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}}$. On constate que la vitesse de phase est supérieure à c.

La vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ avec $\omega = c\sqrt{k^2+\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2}$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{ck}{\sqrt{k^2+\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2}} = \frac{ck}{\dfrac{\omega}{c}} = \frac{c^2}{v\phi} = c\sqrt{1-\left(\frac{n\pi c}{\omega}\right)^2}$$

La vitesse de groupe (vitesse de propagation de l'énergie) est inférieure à la vitesse de propagation de la lumière et il faut remarquer que $v_\phi v_g = c^2$.

20 Parmi les propositions suivantes, laquelle(lesquelles) est(sont) fausse(s) ?

❒ **a.** Si $\omega < \dfrac{n\pi c}{a}$, l'onde ne se propage pas dans le guide.

☒ **b.** L'onde est transverse magnétique.

❒ **c.** Deux ondes de pulsations différentes se propagent à la même vitesse.

❒ **d.** L'énergie se propage à la vitesse v_ϕ.

Si $\omega < \dfrac{n\pi c}{a}$, le vecteur d'onde k est imaginaire pur d'après l'équation de dispersion soit $\underline{k} = \pm i k_i$ avec $k_i = \sqrt{\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2}$. Il apparaît dans l'expression du champ un terme $\mathrm{e}^{(-i(\pm i k_i z))}$. Puisqu'il n'y a pas de source de champ dans le guide, la seule solution physique est une atténuation $\mathrm{e}^{(-k_i z)}$ donc l'onde ne se propage plus.

D'après ce qui précède, le champ $\overrightarrow{B}$ a une composante suivant Oz donc l'onde n'est pas transverse magnétique.

Le milieu est dispersif puisque v_ϕ dépend de ω, donc deux ondes de pulsations différentes ne se propagent pas à la même vitesse.

L'énergie se propage à la vitesse de groupe.

21 En fait l'onde se propage en « zig-zag » et est la superposition de deux ondes se réfléchissant sur les plans $x = 0$ et $x = a$ (figure 12.2).

Déterminer l'expression du vecteur d'onde $\overrightarrow{k^+}$:

❒ **a.** $\overrightarrow{k^+} = k\overrightarrow{u_x} + k\overrightarrow{u_z}$

❒ **b.** $\overrightarrow{k^+} = -\dfrac{n\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + k\overrightarrow{u_z}$

❒ **c.** $\overrightarrow{k^+} = -k\overrightarrow{u_x} + k\overrightarrow{u_z}$

☒ **d.** $\overrightarrow{k^+} = \dfrac{n\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + k\overrightarrow{u_z}$

Le champ $\underline{\overrightarrow{E}}$ peut s'écrire :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \frac{A}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi x}{a}} - e^{-i\frac{n\pi x}{a}}\right)e^{i(\omega t - kz)} = \frac{A}{2i}\left(e^{i(\omega t - \overrightarrow{k^-}\cdot\overrightarrow{r})} - e^{i(\omega t - \overrightarrow{k^+}\cdot\overrightarrow{r})}\right)$$

avec $\overrightarrow{k^+} = \dfrac{n\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + k\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{k^-} = -\dfrac{n\pi}{a}\overrightarrow{u_x} + k\overrightarrow{u_z}$. On remarque qu'avec l'équation de dispersion, on trouve $\|\overrightarrow{k^+}\| = \|\overrightarrow{k^-}\| = \dfrac{\omega}{c}$ qui correspond à la norme d'un vecteur d'onde d'une O.P.P.H. dans le vide.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 22 à 26 :
On étudie dans ces questions le rayonnement dipolaire électrique. En O il y a une charge $-q$ immobile et en S une charge $+q$ animée d'un mouvement sinusoïdal $\overrightarrow{OS} = z_0 \cos \omega t \overrightarrow{u_z}$. On peut définir le moment dipolaire des charges $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{OS}$ soit $\overrightarrow{p} = p_0 \cos \omega t \overrightarrow{u_z}$ avec $p_0 = qz_0$. On note $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ la longueur d'onde.

Le but est de déterminer le champ électromagnétique créé en tout point P (figure 12.3) de l'espace par le dipôle. On utilise les coordonnées sphériques avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$.

22 Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies :

☒ **a.** L'étude se fait dans le cadre de l'approximation dipolaire pour $z_0 \ll r$.

☐ **b.** Le mouvement de S est non relativiste donc $\lambda \ll z_0$.

☒ **c.** Le champ est étudié dans la zone de rayonnement telle que $r \gg \lambda$.

☐ **d.** L'étude se fait dans le cadre de l'A.R.Q.S. donc on néglige le temps de propagation.

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, l'étendue du dipôle est petite devant la distance d'étude donc $z_0 \ll r$. La réponse **a.** est juste.

Le mouvement de la charge est non relativiste donc $\|\overrightarrow{v}\| \ll c$. Le calcul de $\overrightarrow{v}$ donne $\overrightarrow{v} = -z_0\omega \sin \omega t\, \overrightarrow{u_z}$. On peut donc écrire :

$$\|\overrightarrow{v}\| \ll c \quad \Rightarrow \quad z_0\omega \ll c \quad \Rightarrow \quad z_0\omega \ll \frac{\omega\lambda}{2\pi} \quad \text{ou} \quad z_0 \ll \lambda$$

La réponse **b.** est fausse.

L'étude se fait dans le zone de rayonnement qui par définition est telle que $r \gg \lambda$. C'est une condition qui est contraire à celle de l'A.R.Q.S : on prend en compte la propagation. La réponse **c.** est juste et la **d.** est fausse.

23 L'expression du champ électrique calculée sans faire d'approximation est :

$$\overrightarrow{E}(P,t) = \frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2i\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{rc^2}\right)\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$$

En déduire l'expression approchée du champ avec les hypothèses de l'émission dipolaire dans la zone de rayonnement.

☐ **a.** $\overrightarrow{E}(P,t) = \dfrac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\dfrac{2}{r^3}\right)\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \left(\dfrac{1}{r^3}\right)\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$

☐ **b.** $\overrightarrow{E}(P,t) = \dfrac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\dfrac{2i\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \left(\dfrac{i\omega}{r^2 c}\right)\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$

☐ **c.** $\overrightarrow{E}(P,t) = \dfrac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\dfrac{2}{r^3} + \dfrac{2i\omega}{r^2 c}\right)\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \left(\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{i\omega}{r^2 c}\right)\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$

☒ **d.** $\overrightarrow{E}(P,t) = \dfrac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(-\dfrac{\omega^2}{rc^2}\right)\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$

Les différents ordres de grandeur à comparer sont $\frac{1}{r^3}$, $\frac{\omega}{r^2c}$ et $\frac{\omega^2}{rc^2}$. Sachant que $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ et en omettant le facteur 2π, on peut écrire :

$$\frac{1}{r^3} \sim \frac{1}{r^3} \quad \frac{\omega}{r^2c} \sim \frac{1}{r^2\lambda} \quad \frac{\omega^2}{rc^2} \sim \frac{1}{r\lambda^2}$$

Dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$, donc on ne garde que les termes d'ordre de grandeur $\frac{1}{r\lambda^2}$ ou $\frac{\omega^2}{rc^2}$.

24 Dans la cadre des hypothèses, quelle(s) est(sont) la(les) propositions justes ?

❒ **a.** L'onde est sphérique.

☒ **b.** L'onde est quasi plane.

❒ **c.** L'onde est plane.

☒ **d.** $\overrightarrow{B}(P,t) = -\frac{\omega^2 p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r c^3} \sin\theta \overrightarrow{u_\varphi}$

On ne donne pas ici l'expression complète de $\overrightarrow{B}$ qui permettrait de déterminer son expression approchée. Il faut cependant retenir que localement l'onde a quasiment une structure d'onde plane (on parle d'onde quasi-plane) mais que le champ est en $\frac{1}{r}$. L'onde n'est donc pas plane et elle n'est pas sphérique non plus car son amplitude dépend de θ. Pour déterminer l'expression de $\underline{\overrightarrow{B}}$, on peut donc utiliser la relation de structure d'une onde plane dans le vide :

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{u_r} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{c} = -\left(\frac{\omega^2}{rc^3}\right)\frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}) = -\left(\frac{\omega^2}{rc^3}\right)\frac{p_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \overrightarrow{u_\phi}$$

25 Déterminer la puissance moyenne rayonnée par unité d'angle solide $\left\langle \frac{d\mathscr{P}}{d\Omega} \right\rangle$ ainsi que la puissance moyenne $\langle \mathscr{P} \rangle$ rayonnée dans tout l'espace :

❒ **a.** $\left\langle \frac{d\mathscr{P}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32 r^2 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta$

☒ **b.** $\left\langle \frac{d\mathscr{P}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta$

☒ **c.** $\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$

❒ **d.** $\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12 r^2 \pi\epsilon_0 c^3} \sin^2\theta$

Pour déterminer la valeur moyenne de la puissance, on doit utiliser les expressions réelles des champs ou calculer l'expression de $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\underline{\overrightarrow{E}} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}^\star}{\mu_0}\right)$. On a donc :

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{\omega^4}{r^2c^3}\frac{p_0^2}{32\pi^2\epsilon_0} \sin^2\theta \overrightarrow{u_r} \text{ et } \langle d\mathscr{P} \rangle = \left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\omega^4}{r^2c^3}\frac{p_0^2}{32\pi^2\epsilon_0} \sin^2\theta r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On a utilisé $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$ et en coordonnées sphériques $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\overrightarrow{u_r}$. L'expression de l'angle solide élémentaire étant $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$, on en déduit que l'expression de $\left\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\Omega} \right\rangle$ est donnée par la réponse **b**. La puissance moyenne totale rayonnée est :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

26 On utilise le modèle de l'électron élastiquement lié pour décrire la diffusion Rayleigh atmosphérique. Dans un atome, le noyau (point O) est beaucoup plus lourd que les électrons (charge $(-e)$, masse m, point P) : on le supposera immobile. Dans la suite on note $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$.

Lorsqu'une onde rencontre un atome, le mouvement de l'électron va être modifié. On modélise les forces exercées sur l'électron de la manière suivante :

- la force électrique $\overrightarrow{F_e} = -e\overrightarrow{E}$ exercée par le champ de l'onde. On néglige la force magnétique (c.f. plasma) car $v \ll c$;
- l'électron est écarté de sa position d'équilibre. Il subit une force de rappel type ressort : $\overrightarrow{F_r} = -k\overrightarrow{r}$;
- l'amortissement est modélisé par une force type frottement visqueux : $\overrightarrow{F_v} = -h\overrightarrow{v}$.

Sur l'étendue de l'atome, le champ électrique est $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}$. Après avoir défini la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q, déterminer l'expression de $\underline{\overrightarrow{r}}$ en régime forcé :

☒ **a.** $\underline{\overrightarrow{r}} = -\frac{e}{m} \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}\overrightarrow{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

❒ **b.** $\underline{\overrightarrow{r}} = \frac{e}{m} \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}\overrightarrow{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

❒ **c.** $\underline{\overrightarrow{r}} = -\frac{e}{m} \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}\overrightarrow{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega\omega_0}{Q}}$

❒ **d.** $\underline{\overrightarrow{r}} = -\frac{e}{m} \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}\overrightarrow{E_0}}{\omega_0^2 + \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

On écrit la relation fondamentale de la dynamique pour un électron pour laquelle on cherche des solutions en régime sinusoïdal forcé $\underline{\overrightarrow{r}} = \underline{\overrightarrow{r_0}}e^{i\omega t}$:

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\underline{\overrightarrow{E}} - k\overrightarrow{r} - h\overrightarrow{v} \Rightarrow (-m\omega^2 + i\omega + k)\underline{\overrightarrow{r}} = -e\underline{\overrightarrow{E}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{r}} = \frac{-e}{m}\frac{e^{i\omega t}\overrightarrow{E_0}}{\frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{i\omega h}{m}}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$, on trouve la réponse **a**.

13 Réflexion et réfraction d'une onde plane

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F L'onde réfléchie et l'onde transmise ont même pulsation que l'onde incidente.

On peut faire le raisonnement qualitatif suivant : l'onde incidente met en mouvement les charges du milieu par l'intermédiaire de son champ électrique. Ces charges oscillent donc à la fréquence de l'onde incidente et émettent une onde (l'onde réfléchie) à la même fréquence. Cela peut aussi se montrer avec les relations de passage des champs.

2 ☒ V ❒ F La composante tangentielle du champ électrique est continue à l'interface entre deux diélectriques.

Les charges de polarisation surfaciques n'interviennent *a priori* que sur la composante normale du champ à l'image des charges libres.

3 ❒ V ☒ F La composante tangentielle du champ magnétique est discontinue à l'interface entre deux diélectriques.

Les milieux sont isolants donc les courants surfaciques sont nuls. La composante tangentielle de $\vec{B}$ est continue.

4 ☒ V ❒ F La composante normale du champ magnétique est continue à l'interface entre deux diélectriques.

Cette propriété vient de div $\vec{B} = 0$ qui est toujours vrai pour les diélectriques.

QCM

5 On note $\vec{r_0}$, un vecteur du plan xOy. Les relations vérifiées par les trois vecteurs d'onde sont :

☒ **a.** $\left(\vec{k}_r - \vec{k}_i\right) \cdot \vec{r_0} = 0$

❒ **b.** $\left(\vec{k}_t + \vec{k}_i\right) \cdot \vec{r_0} = 0$

❒ **c.** $\left(\vec{k}_r - \vec{k}_i\right) \wedge \vec{r_0} = 0$

☒ **d.** $\left(\vec{k}_t - \vec{k}_i\right) \cdot \vec{r_0} = 0$

On écrit la relation de continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ (ou d'une composante de $\vec{B}$ sur le plan xOy) :

$$E_{t,i}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r_0})} + E_{t,r}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = E_{t,r}\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r_0})}$$

On remarque au passage que pour que l'égalité soit vraie $\forall t$, il faut que les trois fonctions sinusoïdales du temps aient la même pulsation. La relation précédente peut s'écrire :

$$E_{t,i} + E_{t,r}\mathrm{e}^{i((\vec{k_i} - \vec{k_r})\cdot\vec{r_0})} = E_{t,r}\mathrm{e}^{i((\vec{k_i} - \vec{k_t})\cdot\vec{r_0})}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cette relation est vraie $\forall \overrightarrow{r_0}$, donc :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_r}) \cdot \overrightarrow{r_0} = cte_1 \\ (\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_t}) \cdot \overrightarrow{r_0} = cte_2 \end{cases}$$

Pour déterminer les deux constantes, on écrit la relation pour un autre vecteur $\overrightarrow{r_1}$ quelconque du plan xOy. En effectuant la différence entre les expressions, on obtient

$$\begin{cases} (\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_r}) \cdot (\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) = 0 \\ (\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_t}) \cdot (\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) = 0 \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}$ est aussi un vecteur quelconque du plan xOy : les constantes cte_1 et cte_2 sont donc nulles. Les vecteurs $\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_t}$ sont donc colinéaires au vecteur normal au plan xOy donc $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ sont dans le plan formé par $\overrightarrow{k_i}$ et la normale au plan, c'est-à-dire dans le plan d'incidence.

6 Les trois vecteurs d'onde étant dans le plan d'incidence, on se place dans la configuration de la figure 13.1. Quelle(s) est(sont) la(les) relation(s) vérifiée(s) parmi les propositions suivantes ?

❒ **a.** $k_i \sin i_1 = k_r \sin i'_1$

☒ **b.** $k_i \sin i_1 = k_r \sin i_2$

❒ **c.** $k_i \cos i_1 = k_r \cos i'_1$

❒ **d.** $k_i \cos i_1 = k_r \cos i_2$

Si l'on prend pour $\overrightarrow{r_0}$ un vecteur unitaire, les relations vectorielles donnent :

$$\begin{cases} k_i \sin i_1 - k_r(-\sin i'_1) = 0 \\ k_i \sin i_1 - k_t \sin i_2 = 0 \end{cases}$$

$i'_1 < 0$: on retrouve les lois de Descartes.

Cet énoncé concerne les questions 7 à 11 :
Cette série de questions étudie la réflexion en incidence normale d'une O.P.P.H. polarisée rectilignement suivant Ox : $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_{0i} e^{i(\omega t - k_i z)} \overrightarrow{u_x}$ avec $\overrightarrow{k}_i = n_1 \dfrac{\omega}{c} \overrightarrow{u_z}$ et E_{0i} réel.

7 Écrire les champs magnétiques associés aux champs réfléchi $\underline{\overrightarrow{E_r}}$ d'amplitude $\overrightarrow{E}_{0r}$ et transmis $\underline{\overrightarrow{E_t}}$ d'amplitude $\overrightarrow{E}_{0t}$.

❒ **a.** $\underline{\overrightarrow{B_r}} = \dfrac{n_1}{c}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E}_{0r}\right) e^{i(\omega t + k_r z)}$

❒ **b.** $\underline{\overrightarrow{B_r}} = -\dfrac{n_1}{c}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E}_{0r}\right) e^{i(\omega t - k_r z)}$

❒ **c.** $\underline{\overrightarrow{B_t}} = \dfrac{n_2}{c}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E}_{0t}\right) e^{i(\omega t + k_t z)}$

☒ **d.** $\underline{\overrightarrow{B_t}} = \dfrac{n_2}{c}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E}_{0t}\right) e^{i(\omega t - k_t z)}$

D'après les lois de Descartes, les vecteurs d'onde sont colinéaires à $\overrightarrow{u_z}$ ($i_1 = i'_1 = i_2 = 0$). et de la forme :

$$\overrightarrow{k}_r = -n_1 \frac{\omega}{c} \overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \overrightarrow{u_z}$$

Les relations de structure sont :

$$\underline{\vec{B}_r} = \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}_r}}{\omega} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}_t} = \frac{\vec{k}_t \wedge \underline{\vec{E}_t}}{\omega}$$

d'où aucune réponse juste pour le champ réfléchi (la relation **b.** n'est pas bonne car le champ réfléchi se propage dans le sens des z décroissant) et la réponse **d.** juste pour le champ transmis.

8 Déterminer les relations vérifiées par les amplitudes des champs électriques.

☒ **a.** $\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$ ❒ **b.** $\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$

☒ **c.** $n_1\vec{E}_{0i} - n_1\vec{E}_{0r} = n_2\vec{E}_{0t}$ ❒ **d.** $n_1\vec{E}_{0i} + n_1\vec{E}_{0r} = n_2\vec{E}_{0t}$

Les ondes sont planes donc les champs électriques transverses perpendiculaires à l'axe Oz. Dans le plan xOy, les champs électriques sont donc tangentiels. Dans ce plan, pour $z = 0$, la continuité s'écrit : $\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$.

La continuité du champ magnétique dans ce plan s'écrit :

$$\frac{1}{c}\vec{u_z} \wedge \left(n_1\vec{E}_{0i} - n_1\vec{E}_{0r}\right) = \frac{1}{c}\vec{u_z} \wedge n_2\vec{E}_{0t} \Rightarrow \vec{u_z} \wedge \left(n_1\vec{E}_{0i} - n_1\vec{E}_{0r} - n_2\vec{E}_{0t}\right) = \vec{0}$$

Le vecteur formé par la combinaison linéaire des champs est perpendiculaire à $\vec{u_z}$; l'expression précédente implique qu'il est nul d'où la réponse **c**.

9 Déterminer les amplitudes $\vec{E}_{0r}$ et $\vec{E}_{0t}$.

❒ **a.** $\vec{E}_{0r} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$ ☒ **b.** $\vec{E}_{0r} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$

☒ **c.** $\vec{E}_{0t} = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$ ❒ **d.** $\vec{E}_{0t} = \dfrac{2n_2}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i}$

La résolution du système précédent donne :

$$\begin{cases} \vec{E}_{0r} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i} \\ \vec{E}_{0t} = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1}\vec{E}_{0i} \end{cases}$$

10 Déterminer la valeur moyenne des vecteurs de Poynting associés aux ondes réfléchie et transmise.

☒ **a.** $\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = -\dfrac{n_1}{2\mu_0 c}E_{0r}^2\vec{u_z}$ ❒ **b.** $\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = -\dfrac{n_1}{\mu_0 c}E_{0r}^2\vec{u_z}$

☒ **c.** $\left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = \dfrac{n_2}{2\mu_0 c}E_{0t}^2\vec{u_z}$ ❒ **d.** $\left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = \dfrac{n_2}{\mu_0 c}E_{0t}^2\vec{u_z}$

On utilise les expressions réelles des champs :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = -\frac{n_1}{\mu_0 c}E_{0r}^2\cos^2\left(\omega t + \frac{n_1\omega}{c}z\right)\vec{u_z} \Rightarrow \left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = -\frac{n_1}{2\mu_0 c}E_{0r}^2\vec{u_z}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

et

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{n_2}{\mu_0 c} E_{0t}^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{n_2 \omega}{c} z\right)\vec{u_z} \Rightarrow \left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = \frac{n_2}{2\mu_0 c} E_{0t}^2 \vec{u_z}$$

11 Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance.

❒ **a.** $R = \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}\right)^2$

☒ **b.** $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$

❒ **c.** $T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 - n_2)^2}$

❒ **d.** $T = \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2}$

On a besoin de la valeur moyenne du vecteur de Poynting incident :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{0i}^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{n_1 \omega}{c} z\right)\vec{u_z} \Rightarrow \left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c} E_{0i}^2 \vec{u_z}$$

Alors :

$$R = \frac{\left|\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle \cdot \vec{u_z}\right|}{\left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle \cdot \vec{u_z}} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

Il s'agit de la réponse **b**. On calcule T :

$$T = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle \cdot \vec{u_z}}{\left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle \cdot \vec{u_z}} = \frac{n_2 E_{0t}^2}{n_1 E_{0i}^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Aucune réponse juste.

Cet énoncé concerne les questions 12 à 15 :
En approfondissement, on étudie la réflexion et la transmission d'une O.P.P.H. dont le vecteur d'onde incident fait un angle i_1 avec la normale à l'interface entre les deux milieux (figure 13.2). L'onde incidente est polarisée rectilignement dans le plan d'incidence et elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise elles aussi polarisées dans le plan d'incidence. Le milieu (1) est l'air d'indice $n_1 = 1$ et on note n l'indice n_2.

12 Écrire les relations entre les amplitudes des champs E_{0i}, E_{0r} et E_{0t} à l'interface.

☒ **a.** $E_{0i} \cos i_1 + E_{0r} \cos i'_1 = E_{0t} \cos i_2$

❒ **b.** $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

❒ **c.** $E_{0i} \sin i_1 + E_{0r} \sin i'_1 = E_{0t} \sin i_2$

☒ **d.** $E_{0i} - E_{0r} = nE_{0t}$

On écrit la continuité de la composante tangentielle du champ électrique pour un vecteur $\vec{r_0}$ du plan $x = 0$:

$$E_{0i} \cos i_1 \, \mathrm{e}^{-i\vec{k_i}\cdot\vec{r_0}} + E_{0r} \cos i'_1 \, \mathrm{e}^{-i\vec{k_r}\cdot\vec{r_0}} = E_{0t} \cos i_2 \, \mathrm{e}^{-i\vec{k_t}\cdot\vec{r_0}}$$

Grâce aux lois de Descartes, les termes exponentiels se simplifient et l'on trouve la réponse **a**.

Pour obtenir une autre relation, il faut calculer les champs magnétiques qui sont tous selon Oz :

$$\underline{\vec{B_i}} = \frac{\vec{k_i} \wedge \underline{\vec{E_i}}}{\omega} = \frac{1}{c} E_{0i}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r})} \vec{u_z}$$

$$\underline{\vec{B_r}} = \frac{\vec{k_r} \wedge \underline{\vec{E_r}}}{\omega} = -\frac{1}{c} E_{0r}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})} \vec{u_z}$$

$$\underline{\vec{B_t}} = \frac{\vec{k_t} \wedge \underline{\vec{E_t}}}{\omega} = \frac{n}{c} E_{0t}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r})} \vec{u_z}$$

La continuité du champ magnétique dans le plan $x = 0$ entraine :

$$\frac{1}{c} E_{0i}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r_0})} - \frac{1}{c} E_{0r}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = \frac{n}{c} E_{0t}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r_0})}$$

Après simplification des exponentielles, on trouve la réponse **d**.

13 On note r le coefficient de réflexion en amplitude et t celui de transmission. En utilisant les lois de Descartes, déterminer les relations entre r et t.

❒ **a.** $(1 - r)\sin i_1 = t \sin i_2$

❒ **b.** $1 + r = t$

☒ **c.** $(1 - r)\sin i_2 = t \sin i_1$

❒ **d.** $(1 - r)\sin i_1 = t \sin i_2$

Grâce aux lois de Descartes, on remplace n par $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}$ et $\cos i'_1$ par $\cos i_1$. On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} (E_{0i} + E_{0r})\cos i_1 = E_{0t}\cos i_2 \\ (E_{0i} - E_{0r})\sin i_2 = E_{0t}\sin i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 + r)\cos i_1 = t\cos i_2 \\ (1 - r)\sin i_2 = t\sin i_1 \end{cases}$$

14 En déduire r et t.

❒ **a.** $r = \dfrac{\sin i_1 \cos i_2 - \sin i_2 \cos i_1}{\sin i_1 \cos i_2 + \sin i_2 \cos i_1}$

☒ **b.** $r = \dfrac{\sin i_2 \cos i_2 - \sin i_1 \cos i_1}{\sin i_2 \cos i_2 + \sin i_1 \cos i_1}$

☒ **c.** $t = \dfrac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin i_2 \cos i_2 + \sin i_1 \cos i_1}$

❒ **d.** $t = \dfrac{2 \sin i_1 \cos i_1}{\sin i_1 \cos i_2 + \sin i_2 \cos i_1}$

La résolution du système précédent donne les réponses **b.** et **c**.

15 Quels angles annulent le coefficient r ?

❒ **a.** $i_1 = i_2 = 0$

☒ **b.** $i_1 + i_2 = \dfrac{\pi}{2}$

☒ **c.** $\tan i_1 = n$

❒ **d.** $i_1 - i_2 = \dfrac{\pi}{2}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Il faut annuler le numérateur. Le cas $i_1 = i_2 = 0$ semble convenir, mais dans ce cas le dénominateur aussi est nul. Il s'agit du cas d'incidence normale déjà traité et $r \neq 0$.

L'autre cas correspond à :

$$\sin i_2 \cos i_2 = \sin i_1 \cos i_1 \Rightarrow \sin(2i_2) = \sin(2i_1)$$

Dans le cas présent, cela entraine $i_2 = i_1$ ce qui correspond à l'incidence normale exclue, ou $2i_2 = \pi - 2i_1$ soit $i_1 + i_2 = \dfrac{\pi}{2}$. L'incidence i_1 correspondante permet donc de supprimer l'onde dont le champ est dans le plan d'incidence : cette propriété est utilisée pour polariser une onde de polarisation quelconque perpendiculairement au plan d'incidence.

On a aussi :

$$\sin i_1 = n \sin i_2 = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = n \cos i_1 \Rightarrow \tan i_1 = n$$

14 Ondes sonores dans les fluides

Vrai/Faux

1 ☒ V ☐ F L'approximation acoustique consiste à considérer que p_1, μ_1 et v sont des infiniment petits du premier ordre.

On étudie l'onde sonore comme une petite perturbation par rapport à l'état d'équilibre.

2 ☐ V ☒ F Une onde plane sonore est transverse.

Les variations de la pression ou de la masse volumique ont lieu dans la direction de propagation de l'onde. De même la vitesse du fluide est colinéaire à la célérité de l'onde. L'onde est longitudinale.

3 ☐ V ☒ F Une onde sonore est un phénomène considéré comme isotherme.

L'air est un mauvais conducteur de la chaleur : l'évolution du fluide est considérée comme adiabatique au passage de l'onde sonore.

4 ☒ V ☐ F Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation de conservation de la masse s'écrit : $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0$.

L'équation de conservation de la masse est $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v})$. Puisque μ_0 est constant, le premier terme est égal à $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t}$. Pour le second terme, que l'on développe $\mu_0 \vec{v}$ est du premier ordre alors que $\mu_1 \vec{v}$ est du second ordre. Dans l'approximation acoustique, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu_0 \vec{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

5 ❒ V ☒ F Dans le cadre de l'approximation acoustique, on peut écrire : $p_1 = \mu_0 \chi_s \mu_1$.

On effectue un développement au premier ordre de $\mu(P)$, soit $\mu(P) = \mu(P_0) + \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{P_0} (P - P_0)$. Par identification avec $\mu = \mu_0 + \mu_1$ et sachant que $P = P_0 + p_1$, on en déduit $\mu_1 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{P_0} p_1$. La transformation étant adiabatique, $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{P_0} = \mu \chi_s$ et $\mu_1 = \mu \chi_s p_1$, soit au premier ordre $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$.

QCM

6 En utilisant l'équation d'Euler de la mécanique des fluides, établir une relation entre les différentes grandeurs acoustiques, dans le cadre de l'approximation acoustique.

❒ **a.** $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P_0$

☒ **b.** $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

❒ **c.** $\mu_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

❒ **d.** $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

On développe l'équation d'Euler sans pesanteur :

$$(\mu_0 + \mu_1)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\mu_0 + \mu_1)(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_0 + p_1) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$$

Ordre des différentes termes :

Terme	Ordre
$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$	1
$\mu_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$	2
$\mu_0(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$	2
$\mu_1(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$	3
$-\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$	1

On ne garde que les termes d'ordre 1 ce qui donne le résultat **b**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

7 Déterminer l'équation de propagation de la pression acoustique.

❒ **a.** $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \mu_0 \chi_s \Delta p_1$

❒ **b.** $\Delta p_1 = -\mu_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

❒ **c.** $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \chi_s \Delta p_1$

☒ **d.** $\Delta p_1 = \mu_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

On dérive par rapport au temps l'équation de conservation et on utilise l'équation précédente pour éliminer $\overrightarrow{v}$, soit :

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{div} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \mu_0 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p_1) = \Delta p_1$$

D'autre part $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$ d'où l'équation **d**.

8 En supposant le gaz parfait de masse molaire M et de rapport des capacités thermiques γ, exprimer la célérité du son c.

☒ **a.** $c = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}$

❒ **b.** $c = \sqrt{\dfrac{R T_0}{M}}$

❒ **c.** $c = \dfrac{\gamma R T_0}{M}$

❒ **d.** $c = \sqrt{\dfrac{M}{\gamma R T_0}}$

D'après la question précédente, la célérité du son est $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$. Pour un gaz parfait, l'équation de Laplace s'écrit $P\mu^{-\gamma} = cte$, donc en utilisant les différentielles logarithmiques : $\dfrac{\mathrm{d}P}{P} = \gamma \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}\right)_{P_0} = \dfrac{\mu_0}{\gamma P_0}$. Pour un gaz parfait, l'équation d'état s'écrit $P_0 = \dfrac{\mu_0 R T_0}{M}$ d'où :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

9 Quelles sont les densités volumiques d'énergie cinétique e_c et d'énergie potentielle e_p ?

❒ **a.** $e_c = \dfrac{1}{2}\mu_1 v^2$

☒ **b.** $e_c = \dfrac{1}{2}\mu_0 v^2$

☒ **c.** $e_p = \dfrac{1}{2}\chi_s p_1^2$

❒ **d.** $e_p = \dfrac{1}{2}\chi_s P^2$

Pour l'énergie cinétique, on utilise la particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$. Son énergie cinétique est $\mathrm{d}E_c = \dfrac{1}{2}\mu v^2 \mathrm{d}\tau$ soit au premier ordre $\mathrm{d}E_c = \dfrac{1}{2}\mu_0 v^2 \mathrm{d}\tau$, ce qui donne la réponse **b.** pour $e_c = \dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}\tau}$. Pour la densité d'énergie potentielle, dans le cadre du programme, on admet le résultat qui est lié au travail des efforts de pression.

10 Après avoir défini le vecteur densité de courant énergétique $\overrightarrow{\Pi}$, déterminer l'équation traduisant le bilan énergétique local. On notera e_s la densité volumique d'énergie de l'onde sonore.

❒ **a.** $\overrightarrow{\Pi} = P_0\overrightarrow{v}$

☒ **b.** $\overrightarrow{\Pi} = p_1\overrightarrow{v}$

❒ **c.** $\operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} - \dfrac{\partial e_s}{\partial t} = 0$

☒ **d.** $\operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} + \dfrac{\partial e_s}{\partial t} = 0$

On appelle $\mathrm{d}\mathscr{P}$ la puissance transmise par l'onde sonore à travers une surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. On définit le vecteur $\overrightarrow{\Pi}$ par $\mathrm{d}\mathscr{P} = \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Dans le cadre du programme , il est admis que $\overrightarrow{\Pi} = p_1\overrightarrow{v}$.

Pour faire un bilan, on considère une surface fermée S entourant un volume τ. Les éléments de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ de S sont orientés vers l'extérieur, donc l'énergie sonore perdue par V entre t et $t + \mathrm{d}t$ est $\oiint_S \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t$. Par conservation de l'énergie, la variation d'énergie $\mathscr{E}$ de τ dans le même intervalle de temps est telle que :

$$\mathscr{E}(t+\mathrm{d}t) - \mathscr{E}(t) = -\oiint_S \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\oiint_S \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$$

Par utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\tau e_s\mathrm{d}\tau = \iiint_\tau \frac{\partial e_s}{\partial t}\mathrm{d}\tau = -\iiint_\tau \operatorname{div}\overrightarrow{\Pi}\mathrm{d}\tau$$

Cette équation est valable quel que soit le volume τ, on peut donc supprimer les intégrales. On trouve alors la réponse **d**.

On retrouve des équations similaires à celles de l'électromagnétisme.

11 On s'intéresse à une onde plane harmonique d'expression complexe pour la surpression $\underline{p_1} = \underline{p_{10}}\exp\left(i\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right)\right)$. Exprimer les relations complexes entre $\underline{\overrightarrow{v}}$ et $\underline{p_1}$.

❒ **a.** $\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{v}} = -\omega\chi_s\underline{p_1}$

☒ **b.** $\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{v}} = \omega\chi_s\underline{p_1}$

☒ **c.** $\mu_0\omega\underline{\overrightarrow{v}} = \underline{p_1}\overrightarrow{k}$

❒ **d.** $i\mu_0\omega\underline{\overrightarrow{v}} = \underline{p_1}\overrightarrow{k}$

On cherche $\overrightarrow{v}$ de forme similaire à p_1 soit $\underline{\overrightarrow{v}} = \underline{\overrightarrow{v}_{10}}\exp\left(i\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right)\right)$. L'équation de conservation de la masse s'écrit $\chi_s\dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\operatorname{div}\underline{\overrightarrow{v}} = -\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}$. La dérivée temporelle est équivalente à une multiplication par $i\omega$. Quant au vecteur $\overrightarrow{\nabla}$:

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z} = -ik_x\overrightarrow{u_x} - ik_y\overrightarrow{u_y} - ik_z\overrightarrow{u_z} = -i\overrightarrow{k}$$

Finalement, l'équation précédente devient :

$$\chi_s i\omega p_1 = -\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v} = i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{v}} = \omega\chi_s\underline{p_1}$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

L'équation tirée de l'équation d'Euler $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$ devient :

$$\mu_0 i\omega \vec{v} = -\vec{\nabla} p_1 \Rightarrow \mu_0 i\omega \vec{v} = i\vec{k}\, p_1 \Rightarrow \mu_0 \omega \vec{v} = \vec{k}\, p_1$$

12 On s'intéresse à une onde plane progressive harmonique se propageant suivant les x croissant $\underline{p_1} = p_{10} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right)$ avec p_{10} réel. Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie et du vecteur $\vec{\Pi}$.

☒ **a.** $\langle e_s \rangle = \dfrac{p_{10}^2}{2\mu_0 c^2}$

❒ **b.** $\langle e_s \rangle = \dfrac{p_{10}^2}{\mu_0 c^2}$

❒ **c.** $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$

☒ **d.** $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{p_{10}^2}{2\mu_0 c} \vec{u_x}$

La densité volumique d'énergie moyenne s'écrit : $\langle e_s \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\mu_0 \left\langle v^2 \right\rangle + \chi_s \left\langle p_1^2 \right\rangle\right)$. Pour calculer la valeur moyenne, il faut revenir aux grandeurs réelles. Pour p_1 on obtient $p_1 = p_{10} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$ car p_{10} est réel, soit $\left\langle p_1^2 \right\rangle = \dfrac{p_{10}^2}{2}$.

Les relations de la question précédente permettent de déterminer $\vec{v} = \dfrac{p_1}{\mu_0 \omega} \vec{k}$ et par combinaison $k^2 = \omega^2 \chi_s \mu_0 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$. On peut alors écrire :

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{k^2}{(\mu_0 \omega)^2} \left\langle p_1^2 \right\rangle = \frac{\chi_s}{\mu_0} \frac{p_{10}^2}{2} = \frac{\chi_s}{\mu_0} \frac{p_{10}^2}{2}$$

En introduisant les expressions de $\left\langle v^2 \right\rangle$ et $\left\langle p_1^2 \right\rangle$ dans $< e_s >$ et avec $c^2 \mu_0 \chi_s = 1$, on trouve la réponse **a**.

On détermine la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$:

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \langle p_1 v \rangle \vec{u_x} = \frac{p_{10}^2 k}{\mu_0 \omega} \left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right\rangle \vec{u_x} = \frac{p_{10}^2}{2\mu_0 c} \vec{u_x}$$

13 Pour l'onde précédente, on enregistre une intensité sonore de 50 dB (appareil ménager). On rappelle que l'intensité de référence est $I_0 = 10^{-12}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. On prendra pour l'air $c = 343\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\mu_0 = 1,19\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Déterminer la valeur de p_{10}.

❒ **a.** $p_{10} \simeq 1,61 \cdot 10^{-2}$ Pa

❒ **b.** $p_{10} \simeq 2,02 \cdot 10^{-2}$ Pa

☒ **c.** $p_{10} \simeq 9,03 \cdot 10^{-3}$ Pa

❒ **d.** $p_{10} \simeq 9,03 \cdot 10^{20}$ Pa

La définition de l'intensité en dB est : $I_{dB} = 10 \log \dfrac{\left\| \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle \right\|}{I_0}$. On peut écrire :

$$I_{dB} = 50\ \text{dB} \Rightarrow \frac{p_{10}^2}{2\mu_0 c} = 10^5 I_0 \Rightarrow p_{10} = \sqrt{2 \cdot 10^5 \mu_0 c I_0} = 9,03 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa}$$

14 Pour une onde plane progressive se propageant suivant les x croissant, déterminer l'expression de l'impédance acoustique définie par $Z_a = \dfrac{p_1}{v}$.

☒ **a.** $Z_a = \mu_0 c$ ❒ **b.** $Z_a = -\mu_0 c$

❒ **c.** $Z_a = \dfrac{1}{\mu_0 c}$ ❒ **d.** $Z_a = -\dfrac{1}{\mu_0 c}$

Cette onde est du type $p_1 = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$. On projette l'équation $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$ sur $\vec{u_x}$:

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow v = \frac{1}{c\mu_0} f\left(t - \frac{x}{c}\right) + cte$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux phénomènes propagatoires dépendant du temps, on choisit une constante d'intégration nulle. On obtient alors :

$$Z_a = \frac{p_1}{v} = \frac{\mu_0 c f\left(t - \frac{x}{c}\right)}{f\left(t - \frac{x}{c}\right)} = \mu_0 c$$

15 On s'intéresse à une onde plane progressive se propageant suivant les x décroissant dans le milieu précédent. Déterminer l'expression de l'impédance acoustique et de $\dfrac{p_1}{v}$.

☒ **a.** $Z_a = \mu_0 c$ ❒ **b.** $Z_a = -\mu_0 c$

☒ **c.** $\dfrac{p_1}{v} = -Z_a$ ❒ **d.** $\dfrac{p_1}{v} = Z_a$

L'expression de l'impédance est définie pour la propagation dans le sens des x croissant, c'est donc la même qu'à la question précédente. Dans ce cas, le raisonnement est le même que dans la question précédente mais avec une onde du type $p_1 = f\left(t + \dfrac{x}{c}\right)$. On projette l'équation $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$ sur $\vec{u_x}$:

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{1}{c} f'\left(t + \frac{x}{c}\right) \Rightarrow v = -\frac{1}{c\mu_0} f\left(t + \frac{x}{c}\right) + cte$$

On choisit de nouveau une constante d'intégration nulle. On obtient alors :

$$\frac{p_1}{v} = -\frac{\mu_0 c f\left(t + \frac{x}{c}\right)}{f\left(t + \frac{x}{c}\right)} = -\mu_0 c = -Z_a$$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :
Dans cette série de questions on étudie la réflexion et la transmission d'une onde plane progressive se propageant dans un milieu (1) selon Ox et qui arrive sous incidence normale à l'interface plane ($x = 0$) entre ce milieu et un milieu (2) (figure 14.1). Les

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

pressions acoustiques des ondes incidente, réfléchie et transmise sont respectivement $p_i(x,t) = f_i\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$, $p_r(x,t) = f_r\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$ et $p_t(x,t) = f_t\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$.

16 Les grandeurs continues à l'interface sont :

☒ **a.** La vitesse v

☒ **b.** La surpression p_1

❒ **c.** La masse volumique μ

❒ **d.** La célérité de l'onde c

À l'interface, il n'y a pas de vide donc continuité du débit volumique, donc continuité de la vitesse.

Si l'on place une fine membrane à l'interface, le théorème de la résultante dynamique appliquée à une surface S (masse M_s) de la membrane s'écrit :
$M_s\vec{a} = (p_1(x = 0^-) - p_1(x = 0^+))S$. Lorsqu'on fait tendre la masse M_s vers 0 (pas de membrane), les surpressions doivent être égales pour que l'accélération ne soit pas infinie.

17 On note Z_1 et Z_2 les impédances des deux milieux. Exprimer les relations de continuité dans le plan $x = 0$.

❒ **a.** $f_i(t) - f_r(t) = f_t(t)$

☒ **b.** $f_i(t) + f_r(t) = f_t(t)$

❒ **c.** $\frac{1}{Z_1}f_i(t) + \frac{1}{Z_1}f_r(t) = \frac{1}{Z_2}f_t(t)$

☒ **d.** $\frac{1}{Z_1}f_i(t) - \frac{1}{Z_1}f_r(t) = \frac{1}{Z_2}f_t(t)$

La surpression pour $x = 0^-$ est $p(x = 0^-) = f_i(t) + f_r(t)$ et pour $x = 0^+$, $p_r(x = 0^+) = f_t(t)$. La continuité de la surpression valide la réponse **b**.

D'après ce qui précède, en raison du sens de propagation, les expressions des vitesses sont :

$v_i(x,t) = \frac{1}{Z_1}p_i(x,t)$ (milieu (1) sens x croissant)

$v_r(x,t) = -\frac{1}{Z_1}p_r(x,t)$ (milieu (1) sens x décroissant)

$v_t(x,t) = \frac{1}{Z_2}p_t(x,t)$ (milieu (2) sens x croissant)

La continuité des vitesses s'écrit : $v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$, ce qui avec les relations précédentes donne la réponse **d**.

18 Exprimer les coefficients de réflexion $r = \frac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$ et de transmission $t = \frac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$ en amplitude pour la surpression.

☒ **a.** $r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$

❒ **b.** $r = -1$

☒ **c.** $t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$

❒ **d.** $t = 1$

Le coefficient de réflexion est $r = \dfrac{f_r(t)}{f_i(t)}$ et celui de transmission $t = \dfrac{f_t(t)}{f_i(t)}$. Les deux équations obtenues dans la question précédente divisées par $f_i(t)$ mènent au système :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ Z_2(1 - r) = Z_1 t \end{cases}$$

La résolution du système donne les réponses **a.** et **c**.

On vérifie que si le milieu est le même, $Z_2 = Z_1$, alors il n'y a pas d'onde réfléchie ($r = 0$) et toute l'onde est transmise ($t = 1$).

19 Déterminer les coefficients de réflexion $R = \dfrac{|\overrightarrow{\Pi}_r(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}{|\overrightarrow{\Pi}_i(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}$ et de transmission $T = \dfrac{|\overrightarrow{\Pi}_t(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}{|\overrightarrow{\Pi}_i(0,t) \cdot \overrightarrow{u_x}|}$ pour la puissance sonore.

☒ **a.** $R = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$ ❒ **b.** $R = 1$

☒ **c.** $T = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$ ❒ **d.** $T = \dfrac{Z_1}{Z_2}$

On détermine les différents vecteurs $\overrightarrow{\Pi}$ en $(0, t)$:

$$\overrightarrow{\Pi}_i(0,t) = p_i(0,t)v_i(0,t)\overrightarrow{u_x} = \frac{1}{Z_1}f_i^2(t)\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{\Pi}_r(0,t) = p_r(0,t)v_r(0,t)\overrightarrow{u_x} = -\frac{1}{Z_1}f_r^2(t)\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{\Pi}_t(0,t) = p_t(0,t)v_t(0,t)\overrightarrow{u_x} = \frac{1}{Z_2}f_t^2(t)\overrightarrow{u_x}$$

d'où

$$R = \frac{Z_1 f_r(t)^2}{Z_1 f_i(t)^2} = \frac{f_r(t)^2}{f_i(t)^2} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$

et

$$T = \frac{Z_1 f_t(t)^2}{Z_2 f_i(t)^2} = \frac{Z_1}{Z_2}t^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Cet énoncé concerne les questions 20 à 23 :

On considère deux tuyaux de sections différentes S_1 et S_2 (figure 14.2). Une onde plane progressive homogène se propage du milieu (1) vers le milieu (2) : surpression $\underline{p_i}$. À l'interface, cette onde donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) de surpression $\underline{p_r}$ et à une onde transmise dans le milieu (2) de surpression $\underline{p_t}$ de même pulsation ω. Dans le cas de surfaces variables l'expression de l'impédance est différente de ce qui a été défini auparavant : on a $Z = \dfrac{\mu_0 c}{S}$. On note p_{i0}, p_{r0} et p_{t0} les amplitudes des surpressions des ondes incidente, réfléchie et transmise.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

20 Exprimer les surpressions et les vitesses pour chaque onde.

❒ **a.** $\begin{cases} \underline{p_i} = p_{i0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\right)} \\ \underline{v_i} = \dfrac{p_{i0}}{Z_1}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\right)} \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} \underline{p_r} = p_{r0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \\ \underline{v_r} = -\dfrac{p_{r0}}{Z_1}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \end{cases}$

☒ **c.** $\begin{cases} \underline{p_r} = p_{r0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \\ \underline{v_r} = -\dfrac{p_{r0}}{S_1Z_1}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right)} \end{cases}$

☒ **d.** $\begin{cases} \underline{p_t} = p_{t0}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right)} \\ \underline{v_t} = \dfrac{p_{t0}}{S_2Z_2}\mathrm{e}^{\left(i\omega\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right)} \end{cases}$

Les relations entre les vitesses et les pressions pour chaque onde sont les mêmes en fonction de μ_0 et c que dans les problèmes précédents, soit :

$$\frac{p_i}{v_i} = \mu_0 c_1 = Z_1 S_1 \ ; \ \frac{p_r}{v_r} = -\mu_0 c_1 = -Z_1 S_1 \ ; \ \frac{p_t}{v_t} = \mu_0 c_2 = Z_2 S_2$$

Il n'y a pas de réponse juste pour l'onde incidente.

Pour l'onde réfléchie, c'est la réponse **c**. On vérifie que le terme de propagation correspond bien à une onde dans le sens des x décroissant.

Pour l'onde transmise, c'est la réponse **d**. On vérifie que le terme de propagation correspond bien à une onde dans le sens des x croissant.

21 Quelles sont les grandeurs continues à l'interface $x = 0$?

❒ **a.** La vitesse $\underline{v}$

☒ **b.** La surpression $\underline{p}$

☒ **c.** Le débit volumique

❒ **d.** Le débit massique

Comme dans le cas des tuyaux de même section les grandeurs continues sont la surpression et le débit volumique.

22 Écrire les relations de continuité à l'interface $x = 0$.

☒ **a.** $p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}$

❒ **b.** $p_{i0} - p_{r0} = p_{t0}$

☒ **c.** $\dfrac{p_{i0}}{Z_1} - \dfrac{p_{r0}}{Z_1} = \dfrac{p_{t0}}{Z_2}$

❒ **d.** $\dfrac{p_{i0}}{S_1Z_1} - \dfrac{p_{r0}}{S_1Z_1} = \dfrac{p_{t0}}{S_2Z_2}$

Continuité de la surpression :

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}$$

Continuité du débit :

$$S_1 v_{i0} + S_1 v_{r0} = S_1 v_{t0} \Rightarrow \frac{p_{i0}}{Z_1} - \frac{p_{r0}}{Z_1} = \frac{p_{t0}}{Z_2}$$

23 Exprimer les coefficients de réflexion $r = \dfrac{p_{r0}}{p_{i0}}$ et de transmission $t = \dfrac{p_{t0}}{p_{i0}}$ en amplitude pour la surpression.

☒ **a.** $r = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$

❒ **b.** $r = \dfrac{S_2 Z_2 - S_1 Z_1}{S_2 Z_2 + S_1 Z_1}$

☒ **c.** $t = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$

❒ **d.** $t = \dfrac{2Z_2 S_2}{S_1 Z_1 + S_2 Z_2}$

On a les mêmes équations que pour les tuyaux de même section, donc on trouve les mêmes résultats.

Cet énoncé concerne les questions 24 à 28 :
On considère la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau de section non constante $S(x)$ et d'axe Ox (figure 14.3). On utilise une description lagrangienne. On raisonne sur une tranche de fluide se trouvant entre les plans d'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$ au repos et entre les plans d'abscisse $x + \xi(x, t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x + \mathrm{d}x, t)$ au passage de l'onde sonore.

24 En écrivant la conservation de la masse $\mathrm{d}m$ entre l'immobilité et le passage de l'onde, établir l'une des équations suivantes au premier ordre. On rappelle que $v = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$.

❒ **a.** $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial (v)}{\partial x} = 0$

☒ **b.** $S \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial (S v)}{\partial x} = 0$

❒ **c.** $S \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} - \mu_0 \dfrac{\partial (S v)}{\partial x} = 0$

❒ **d.** $S \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_1 \dfrac{\partial (S v)}{\partial x} = 0$

Au repos la masse contenue dans la tranche $\mathrm{d}x$ est $\mathrm{d}m = \mu_0 S \mathrm{d}x$. Au passage de l'onde, cette même masse est comprise entre $x + \xi(x, t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x + \mathrm{d}x, t)$:

$\mathrm{d}m_1 = \mu(x) S(x)\,(x + \mathrm{d}x - (x + \xi(x, t)))$ pour la masse entre $x + \xi(x, t)$ et $x + \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}m_2 = \mu(x + \mathrm{d}x) S(x + \mathrm{d}x) \xi(x + \mathrm{d}x, t)$ pour la masse entre $x + \mathrm{d}x$ et $x + \xi(x + \mathrm{d}x, t)$.

On a donc :

$$\mu_0 S(x)\mathrm{d}x = \mu(x) S(x) \xi(x, t) - \mu(x + \mathrm{d}x) S(x + \mathrm{d}x) \xi(x + \mathrm{d}x, t) - \mu(x) S(x) \mathrm{d}x$$

On voit apparaître une dérivée dans le second membre :

$$\mu_0 S(x)\mathrm{d}x = -\frac{\partial (S \mu \xi)}{\partial x}\mathrm{d}x - \mu(x) S(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\partial (S \mu \xi)}{\partial x} = (\mu_0 - \mu(x)) S(x) = -\mu_1(x) S(x)$$

On garde dans le premier membre le terme d'ordre 1 puis on dérive par rapport au temps, ce qui donne :

$$\mu_0 \frac{\partial (S \xi)}{\partial x} = -\mu_1(x) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(S \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = -S(x) \frac{\partial \mu_1}{\partial t}$$

ce qui, avec $v = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$, donne la réponse **b**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

25 Déterminer l'expression de la force de pression, au premier ordre, exercée sur dm en assimilant le volume à un volume tronconique (figure 14.4).

❒ **a.** $P_0 \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - \dfrac{\partial(p_1 S)}{\partial x}\mathrm{d}x$

❒ **b.** $P_0 \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

❒ **c.** $-\dfrac{\partial p_1}{\partial x}S$

☒ **d.** $-\dfrac{\partial p_1}{\partial x}S\ \mathrm{d}x$

Par symétrie la résultante des forces de pression exercées sur le fluide dans le volume de contrôle est selon Ox. On ne s'intéresse qu'aux projections des forces sur cet axe. Les forces de pression se décomposent en trois termes :

- celle exercée par le fluide de gauche $F_{dx} = (P_0 + p_1(x,t))S(x)$;
- celle exercée par le fluide de droite $F_{gx} = -(P_0 + p_1(x+\mathrm{d}x,t))S(x+\mathrm{d}x)$;
- celle exercée par les parois dont la composante sur Ox est $F_{lat,x} = (P_0 + p_1)S_{lat}\sin\theta$ où S_{lat} est la surface latérale du volume de contrôle. Or $S_{lat}\sin\theta = S(x+\mathrm{d}x) - S(x)$.

Finalement, la somme des deux premières forces s'écrit :

$$F_{dx} + F_{gx} = P_0(S(x) - S(x+\mathrm{d}x)) - (p_1(x+\mathrm{d}x,t)S(x+\mathrm{d}x) - p_1(x,t)S(x))$$

Soit, au au premier ordre :

$$F_{dx} + F_{gx} = -\left(P_0\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial(p_1 S)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

D'autre part :

$$F_{lat,x} = (p_1 + P_0)(S(x+\mathrm{d}x) - S(x)) = (p_1 + P_0)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

En effectuant la somme, on trouve :

$$F_{px} = -\frac{\partial(p_1 S)}{\partial x}\mathrm{d}x + p_1\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

ce qui en développant donne le résultat **d**.

26 En appliquant le théorème de la résultante dynamique à dm, déterminer une relation entre v et p_1 au premier ordre.

☒ **a.** $\mu_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$

❒ **b.** $\mu_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{P_0}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\partial(p_1 S)}{\partial x}$

❒ **c.** $\mu_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial p_1}{\partial x}\mathrm{d}x$

❒ **d.** $\mu_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{P_0}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse dm, projeté sur Ox, au premier ordre donne :

$$\mu_0 S\,\mathrm{d}x\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}S\ \mathrm{d}x \Rightarrow \mu_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

27 En combinant les équations précédentes et la relation $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$, on obtient l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)$$

Exprimer cette relation dans le cas d'un pavillon exponentiel ($S(x) = S_0 \mathrm{e}^{mx}$) dans lequel se propage une onde harmonique $\underline{v}(x,t) = \underline{v_0}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{m}{S_0}\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

☒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\dfrac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x} + m\underline{v_0} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = 0$

Le calcul de $\dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ donne m. Finalement, on a :

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\underline{v_0} = \frac{\mathrm{d}^2\underline{v_0}}{\mathrm{d}x^2} + m\frac{\mathrm{d}\underline{v_0}}{\mathrm{d}x}$$

28 On cherche $\underline{v_0}(x)$ sous la forme $\underline{v_0}e^{-ikx}$. On pose $\omega_c = \dfrac{mc}{2}$. Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g pour $\omega > \omega_c$.

☒ **a.** $v_\phi = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$

❒ **b.** $v_\phi = c$

❒ **c.** $v_g = c$

☒ **d.** $v_g = \dfrac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$

On injecte l'expression de $\underline{v_0}(x)$ dans l'expression :

$$\left(-k^2 - imk + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{v_0} = 0 \Rightarrow k^2 + imk - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = -m^2 + \dfrac{4\omega^2}{c^2} > 0$ pour $\omega > \dfrac{mc}{2}$. Les solutions de cette équation sont après mise en forme : $\underline{k} = -i\dfrac{\omega_c}{c} \pm \dfrac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$. Le terme de propagation correspond à la partie réelle k_r de k (signe « + ») pour une propagation selon les x croissant. La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{k_r}$ soit la réponse **a**. Le vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_r}$, obtenue par différentiation de k_r^2 :

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \Rightarrow k_r \mathrm{d}k_r = \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{c^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_r} = \frac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Ne pas commettre l'erreur d'écrire $v_\phi = \dfrac{\omega}{|k|}$, seule la partie correspondant à la propagation est à prendre en compte.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Partie 5
Optique

15 Interférences à deux ondes

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Chemin optique et différence de marche.
- Théorème de Malus.
- Interférences de deux ondes en optique.
- Systèmes classiques d'interféromètres à division du front d'onde.

Notations. Sauf indication contraire, on appellera λ_0 la longueur d'onde dans le vide, et la propagation a lieu dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Une onde lumineuse monochromatique émise par une source ponctuelle S a pour expression réelle en un point M :

$$s(M,t) = s_0 \cos\left(\omega t - \phi_0 - \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0}\right)$$

avec (SM) le chemin optique de S à M et $\lambda_0 = \dfrac{c}{2\pi\omega}$.

On notera $< s >_t$ la moyenne temporelle d'une grandeur s et c la célérité de la lumière dans le vide. On utilisera la différence de marche $\delta_{2/1} = (S_2M) - (S_1M)$.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 257**.

1 ❒ V ❒ F Le chemin optique (AB) dans un milieu d'indice n est la distance parcourue par le lumière dans le vide pendant la même durée qu'elle met pour se propager de A à B dans le milieu.

2 ❒ V ❒ F Lors d'une réflexion sur un miroir, l'onde lumineuse se déphase de π.

3 ❒ V ❒ F Pour deux points conjugués par un système optique, le chemin optique dépend de la trajectoire du rayon lumineux.

4 ❒ V ❒ F Les rayons lumineux sont tangents aux surfaces d'onde.

5 ❒ V ❒ F Un déphasage de π correspond à une différence de marche égale à λ_0.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 258**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

6 Une source S_1 émet une onde $s_1 = s_{1m}\cos(\omega t - \phi_{01})$. Une source S_2 émet une onde $s_2 = s_{2m}\cos(\omega t - \phi_{02})$. On note $\mathscr{E}_0$ l'éclairement en un point M d'un écran pour chaque source seule S_1 ou S_2. Quel est l'éclairement $\mathscr{E}$ résultant en M issu des deux sources ?

❒ **a.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{02} - \phi_{01}\right)\right\rangle_t\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{02} - \phi_{01}\right)\right\rangle_t\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{02} + \phi_{01}\right)\right\rangle_t\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{01} - \phi_{02}\right)\right\rangle_t\right)$

7 Sauf indication contraire, on se place dans la suite dans le cas où les deux sources précédentes émettent des ondes telles que $\phi_{02} - \phi_{01} = 0$. Dans l'espace, les lieux d'égal éclairement sont :

❒ **a.** Des ellipsoïdes de foyers S_1 et S_2.

❒ **b.** Des droites parallèles.

❒ **c.** Des anneaux concentriques d'axe S_1S_2.

❒ **d.** Des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2.

Cet énoncé concerne les questions 8 à 10 :
On se place dans le cas particulier où l'écran est placé parallèlement à S_1S_2 à une distance $D \gg S_1S_2$ (figure 15.1).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

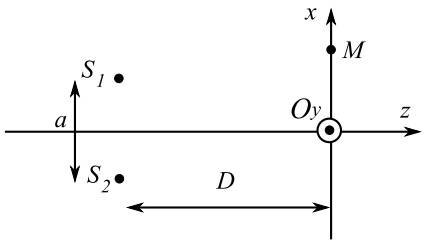


Figure 15.1

8 La différence de marche $\delta_{2/1}$ en un point M de coordonnées (x, y, D) sur l'écran avec $x \ll D$ et $y \ll D$ est :

❒ **a.** $\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{D}$ ❒ **b.** $\delta_{2/1} = -\dfrac{ax}{D}$

❒ **c.** $\delta_{2/1} = \dfrac{2ax}{D}$ ❒ **d.** $\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{2D}$

9 Les franges sont :

❒ **a.** Rectilignes. ❒ **b.** Circulaires

❒ **c.** Parallèles à Oy. ❒ **d.** Parallèles à Ox.

10 L'interfrange i est :

❒ **a.** $i = \dfrac{2\lambda_0 D}{a}$ ❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{2a}$

❒ **c.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$ ❒ **d.** $i = \dfrac{a}{\lambda_0 D}$

Cet énoncé concerne les questions 11 à 12 :
On se place dans le particulier où l'écran est placé perpendiculairement à S_1S_2. On note $D = OO'$ la distance du milieu O de S_1S_2 à l'écran avec $D \gg S_1S_2$ (figure 15.2). On note r la distance $O'M$ avec $r \ll D$.

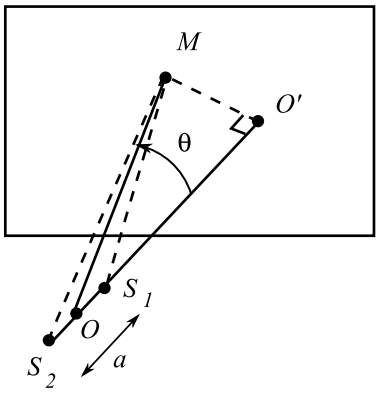


Figure 15.2

11 La différence de marche $\delta_{2/1}$ en M est :

❒ **a.** $\delta_{2/1} = a$

❒ **b.** $\delta_{2/1} = a\cos\theta$

❒ **c.** $\delta_{2/1} = a\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^2\right)$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = \frac{ar}{D}$

12 L'ordre d'interférence en O' est noté p_0 et on l'écrit $p_0 = m + \epsilon$ où m est entier et $0 < \epsilon \leq 1$. Déterminer, en partant du centre, le rayon r_k du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant.

❒ **a.** $r_k = D\sqrt{\frac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon - k - 1}$

❒ **b.** $r_k = D\sqrt{\frac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon + k + 1}$

❒ **c.** $r_k = D\sqrt{\frac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon + k}$

❒ **d.** $r_k = D\sqrt{\frac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon + k - 1}$

Cet énoncé concerne les questions 13 à 15 :
On s'intéresse à un dispositif de fentes d'Young parallèles à Oy. On note (F_1, F_2) leurs traces dans le plan xOz. Une source ponctuelle S se trouve à une distance b au-dessus de l'axe Oz (figure 15.3). Les différentes distances sont telles que $a \ll D$, $a \ll d$, $b \ll D$ et $b \ll d$.

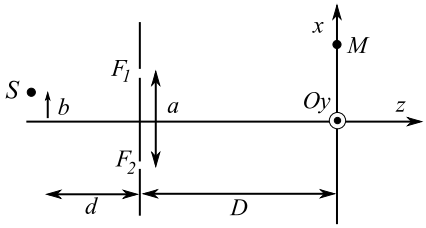


Figure 15.3

13 Déterminer l'éclairement sur l'écran au point M. On note $\mathscr{E}_0$ l'éclairement sur l'écran lorsqu'on place un cache devant l'une des fentes.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{b}{d} - \frac{x}{D}\right)\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{x}{D}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{x}{d} + \frac{x}{D}\right)\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{b}{d} + \frac{x}{D}\right)\right)$

14 La frange « centrale » correspondant à une différence de marche nulle est à la position :

❒ **a.** $x = \frac{bD}{d}$

❒ **b.** $x = -\frac{bD}{d}$

❒ **c.** $x = 0$

❒ **d.** $x = -\frac{bd}{D}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

15 L'interfrange i est alors :

❒ **a.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$

❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0 d}{a}$

❒ **c.** $i = \dfrac{\lambda_0 d}{b}$

❒ **d.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{2a}$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :

On s'intéresse à un dispositif de fentes d'Young parallèles à Oy espacées d'une distance a. On note (F_1,F_2) leurs traces dans le plan xOz. Ces fentes sont éclairées par un faisceau de lumière parallèle (source ponctuelle S à l'infini) faisant un angle α_0 avec l'axe Oz (figure 15.4). On place un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente (distance focale image f') placée après les fentes (plan $xF'y$).

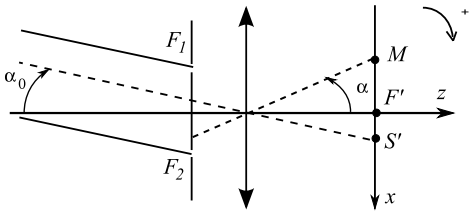


Figure 15.4

16 La différence de marche au point M est :

❒ **a.** $\delta_{2/1} = a(\sin\alpha_0 + \sin\alpha)$

❒ **b.** $\delta_{2/1} = a(\tan\alpha_0 + \tan\alpha)$

❒ **c.** $\delta_{2/1} = a(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = a(\tan\alpha_0 - \tan\alpha)$

17 Dans le cadre de l'approximation de Gauss, déterminer l'expression de l'éclairement sur l'écran, en notant $\mathscr{E}_0$ l'éclairement donné par l'une des fentes seule.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha_0 - \dfrac{x}{f'}\right)\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\dfrac{x}{f'}\right)\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha_0 - \dfrac{f'}{x}\right)\right)$

18 Où se trouve la frange « centrale » ?

❒ **a.** En $x = 0$

❒ **b.** En $x = \alpha_0 f'$

❒ **c.** En $x = -\alpha_0 f'$

❒ **d.** À la position de l'image géométrique de S.

19 Déterminer l'interfrange i.

❒ **a.** $i = -\dfrac{\lambda_0 f'}{a}$ ❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0 a}{f'}$

❒ **c.** $i = f'\alpha_0$ ❒ **d.** $i = \dfrac{\lambda_0 f'}{a}$

Cet énoncé concerne les questions 20 à 23 :
On s'intéresse au dispositif appelé « miroirs de Fresnel » (figure 15.5) pour observer des interférences en un point M de l'espace. On note S_1 et S_2 les sources secondaires correspondant à la source ponctuelle monochromatique S et on n'observe que la lumière provenant de ces sources secondaires. L'arête entre les deux miroirs est notée A et l'angle α est petit. Enfin, on note $d = 1$ m la distance SA.

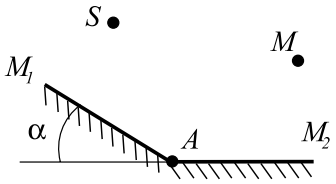
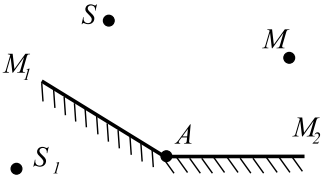


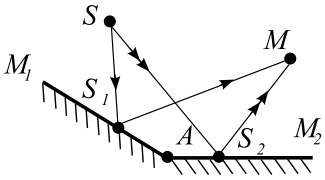
Figure 15.5

20 Déterminer la position des sources secondaires ainsi que le champ d'interférences. Sur les figures seule une partie du champ d'interférences, limité par deux traits noir, a été grisée.

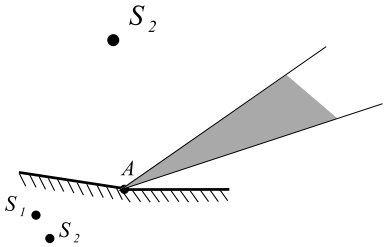
❒ **a.**



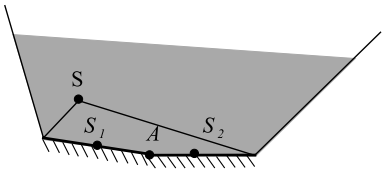
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



21 La distance a entre les deux sources secondaires est :

❒ **a.** $a = d\alpha$ ❒ **b.** $a = 2d\alpha$

❒ **c.** $a = d$ ❒ **d.** $a = 2\alpha$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

22 On place un écran parallèle à S_1S_2 à une distance $d' = 1,5$ m de A. La longueur d'onde est $\lambda_0 = 0,5\mu$m et l'angle $\alpha = 20'$. Déterminer l'interfrange i.

❒ **a.** $i \simeq 6,4 \cdot 10^{-5}$ m ❒ **b.** $i \simeq 4,3 \cdot 10^{-5}$ m

❒ **c.** $i \simeq 3,1 \cdot 10^{-8}$ m ❒ **d.** $i \simeq 1,1 \cdot 10^{-4}$ m

23 Déterminer le nombre N de franges visibles sur l'écran.

❒ **a.** $N \simeq 5,6.10^5$ ❒ **b.** $N \simeq 158$

❒ **c.** $N \simeq 270$ ❒ **d.** $N \simeq 406$

Cet énoncé concerne les questions 24 à 26 :
On s'intéresse au dispositif appelé « miroir de Lloyd ». Un miroir plan est éclairé par une source ponctuelle S située à une distance $a/2 = 1$ mm au-dessus du miroir (figure 15.6). La source S est monochromatique ($\lambda = 0,5\ \mu$m). On observe les interférences en un point M d'un écran. On note S_1 et S_2 les sources secondaires correspondant à la source ponctuelle monochromatique S.

Avec $d = 20$ cm et $D = 10$ cm on a bien sûr $d \gg a$ et $D \gg a$.

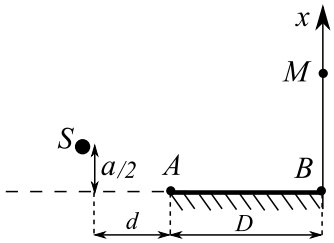
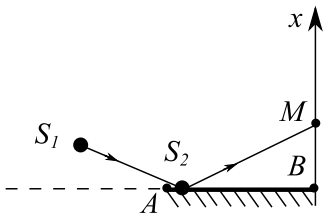


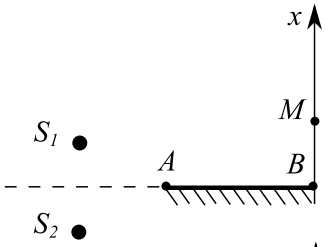
Figure 15.6

24 Déterminer la position des sources secondaires ainsi que le champ d'interférences.

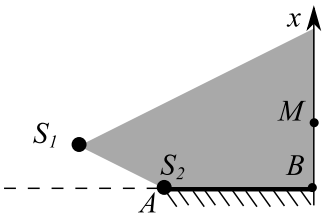
❒ **a.**



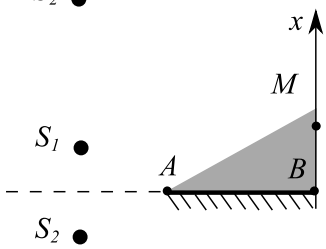
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



25 Déterminer l'éclairement $\mathscr{E}$ sur l'écran. On notera $\mathscr{E}_0$ l'éclairement maximal dû chaque source individuellement.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 - \cos\dfrac{2\pi ax}{\lambda_0(d+D)}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi ax}{\lambda_0(d+D)}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 - \cos\dfrac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$

26 Déterminer le nombre N de franges sombres visibles sur l'écran.

❒ **a.** $N = 5$

❒ **b.** $N = 6$

❒ **c.** $N = 7$

❒ **d.** $N = 8$

Voir les corrigés du chapitre 15 page 257.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

16 Cohérence temporelle et spatiale de deux ondes

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de train d'onde.
- La notion de cohérence temporelle.
- La notion de cohérence spatiale.
- Les figures d'interférences observées pour des sources réelles.

Notations. Sauf indication contraire, on appellera λ_0 la longueur d'onde dans le vide, et la propagation a lieu dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω émise par une source ponctuelle S a pour expression réelle en un point M :

$$s(M,t) = s_0 \cos\left(\omega t - \phi_0 - \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0}\right)$$

avec (SM) le chemin optique de S à M et $\lambda_0 = \dfrac{c}{2\pi\omega}$.

On notera $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1} la célérité de la lumière dans le vide et $\langle s \rangle_t$ la moyenne temporelle d'une grandeur s. On utilisera la différence de marche $\delta_{2/1} = (S_2M) - (S_1M)$.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 267**.

1 ❒ V ❒ F Deux ondes monochromatiques de longueurs d'onde différentes ne peuvent interférer.

2 ❒ V ❒ F Si deux sources sont incohérentes, on peut sommer leurs éclairements.

3 ❒ V ❒ F Une lampe spectrale telle que la lampe au sodium est monochromatique.

4 ❒ V ❒ F Une source laser est monochromatique.

5 ❒ V ❒ F Si la différence de marche est plus petite que la longueur de cohérence, on peut observer des interférences.

6 ❒ V ❒ F Deux points d'émission d'une même source sont incohérents.

7 ❒ V ❒ F Il est possible d'obtenir des interférences avec deux sources différentes de même longueur d'onde. C'est d'autant plus vrai qu'elles sont éloignées l'une de l'autre.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 268**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

8 Quelle serait la longueur de cohérence L_c d'un train d'onde d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ ?

❒ **a.** $L_c \to \infty$ ❒ **b.** $L_c = 0$

❒ **c.** $L_c = \lambda$ ❒ **d.** L_c dépend du milieu de propagation.

9 Pour le doublet jaune du sodium de longueur d'onde moyenne $\lambda = 589,3$ nm, la largeur spectrale est $\Delta\lambda = 0,6$ nm. Déterminer la longueur de cohérence L_c correspondante.

❒ **a.** $L_c \simeq 1,7 \cdot 10^3$ m ❒ **b.** $L_c \simeq 6 \cdot 10^{-10}$ m

❒ **c.** $L_c \simeq 5,8 \cdot 10^{-4}$ m ❒ **d.** $L_c \simeq 5,9 \cdot 10^{-7}$ m

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

10 On observe une figure d'interférence obtenue avec des fentes d'Young espacées de $a = 0,5$ mm, l'écran étant à une distance $D = 1$ m. La source est blanche ($0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,75\mu\text{m}$). On place la fente d'entrée d'un spectroscope à 0,5 cm du centre de la figure d'interférences parallèlement aux franges. Déterminer les longueurs d'onde manquantes.

❒ **a.** $\lambda_1 \simeq 500$ nm ; $\lambda_2 \simeq 625$ nm ; $\lambda_3 \simeq 833$ nm

❒ **b.** $\lambda_1 \simeq 455$ nm ; $\lambda_2 \simeq 556$ nm ; $\lambda_3 \simeq 714$ nm

❒ **c.** $\lambda_1 \simeq 417$ nm ; $\lambda_2 \simeq 500$ nm ; $\lambda_3 \simeq 625$ nm

❒ **d.** $\lambda_1 \simeq 521$ nm ; $\lambda_2 \simeq 658$ nm ; $\lambda_3 \simeq 893$ nm

Cet énoncé concerne les questions 11 à 13 :
Un interféromètre est éclairé par une lampe de Mercure dont on isole le doublet jaune ($\lambda_1 = 0,577$ μm et $\lambda_2 = 0,579$ μm) avec un filtre. On suppose que les composantes du doublet ont même intensité et que chacune donne un éclairement $\mathscr{E}_0$ sur l'écran en l'absence d'interféromètre. On note δ la différence de marche en un point M de l'écran. On notera aussi $\lambda_m = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ la longueur d'onde moyenne et $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ l'écart entre les deux longueurs d'onde.

11 Déterminer l'éclairement sur l'écran.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \sin\left(\dfrac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\Delta\lambda}\right)\right]$

12 La visibilité $\mathscr{V}$ des franges est :

❒ **a.** $\mathscr{V} = \cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{V} = 1$

❒ **c.** $\mathscr{V} = \sin\left(\dfrac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)$

❒ **d.** $\mathscr{V} = \cos\left(\dfrac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)$

13 En faisant croître δ depuis $\delta = 0$, la première disparition des franges a lieu pour :

❒ **a.** $\delta = 0$

❒ **b.** $\delta = \dfrac{\lambda_m}{2}$

❒ **c.** $\delta = \dfrac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$

❒ **d.** $\delta = \dfrac{\Delta\lambda}{2}$

Cet énoncé concerne les questions 14 à 16 :
On éclaire un dispositif interférométrique par une source polychromatique qui émet dans l'intervalle de fréquence $\left[\nu_m - \dfrac{\Delta\nu}{2}, \nu_m + \dfrac{\Delta\nu}{2}\right]$. Le profil spectral est supposé rectangulaire, c'est-à-dire qu'il n' y a pas d'émission en dehors de l'intervalle précédent et que pour l'intervalle $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$, l'éclairement sur l'écran donné par chaque voie de l'interféromètre est $\mathscr{E}_0 \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\Delta\nu}$. On notera δ la différence de marche due à l'interféromètre.

14 L'éclairement élémentaire donné par l'interféromètre pour l'intervalle $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ est :

❒ **a.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\nu\delta}{c}\right)\right)\mathrm{d}\nu$

❒ **b.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu$

❒ **c.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\nu\delta}{c}\right)\right)\mathrm{d}\nu$

❒ **d.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu$

15 L'éclairement observé sur l'écran est :

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta\nu_m}{c}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta\nu_m}{c}\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta\nu_m}{c}\right)\right]$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0$

16 En faisant croître δ depuis $\delta = 0$, le contraste s'annule une première fois pour :

❒ **a.** $\delta = \dfrac{c}{\Delta\nu}$

❒ **b.** $\delta = \dfrac{c}{4\nu_m}$

❒ **c.** $\delta = \dfrac{c}{2\nu_m}$

❒ **d.** Pas d'annulation de contraste.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 17 à 20 :

On s'intéresse à un dispositif constitué d'une lentille mince convergente L_1, de distance focale f' et d'un écran E percé de deux fentes fines et parallèles F_1 et F_2 dont on peut faire varier la distance e.

Le dispositif est éclairé par deux sources ponctuelles monochromatiques S_1 et S_2, de même longueur d'onde λ_0, faisant chacune un angle α_0 avec l'axe optique (figure 16.1).

Les observations se font en un point M du plan focal de la lentille L_1.

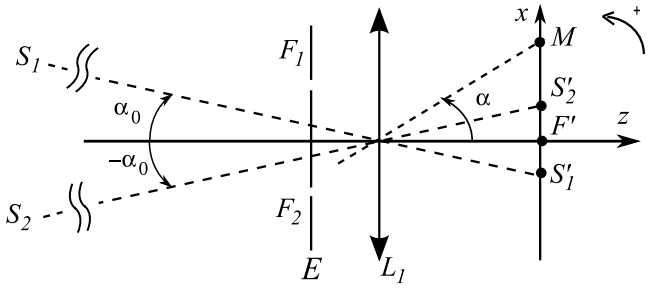


Figure 16.1

17 Qu'observe-t-on de manière générale ?

❒ **a.** Un éclairement uniforme.

❒ **b.** Des franges rectilignes parallèles à $F'x$.

❒ **c.** Des franges rectilignes parallèles à $F'y$.

❒ **d.** Des anneaux.

18 On note $\delta_1 = (S_1F_2M) - (S_1F_1M)$ (resp. $\delta_2 = (S_2F_2M) - (S_2F_1M)$) la différence de marche en M pour la source S_1 (resp. S_2). Déterminer δ_1 et δ_2 dans les conditions de Gauss.

❒ **a.** $\delta_1 = e\left(\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

❒ **b.** $\delta_1 = e\left(-\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

❒ **c.** $\delta_2 = e\left(\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

❒ **d.** $\delta_2 = e\left(-\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

19 Pour quelle plus petite valeur e_m de e observe-t-on un éclairement uniforme ?

❒ **a.** $e_m = 0$

❒ **b.** $e_m = \dfrac{\lambda_0}{2}$

❒ **c.** $e_m = \dfrac{\lambda_0}{4\alpha_0}$

❒ **d.** $e_m = -\dfrac{\lambda_0}{4\alpha_0}$

20 On note $\mathscr{E}_0$ l'éclairement en M dû à une seule des deux sources lorsqu'une des voies de l'interféromètre est obturée. Déterminer l'éclairement total $\mathscr{E}$ observée en M.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e x}{\lambda_0 f'}\right)\cos\left(\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e}{\lambda_0}\left(\alpha_0 + \frac{x}{f'}\right)\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0}\right)\right]$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e x}{\lambda_0 f'}\right)\cos\left(\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0}\right)\right]$

Cet énoncé concerne les questions 21 à 23 :
On étudie la figure donnée par des fentes d'Young éclairées par une fente de largeur b et de très grande longueur L, parallèle à F_1 et F_2. (figure 16.2). Losqu'on cache une voie de l'interféromètre, l'éclairement obtenu sur l'écran, pour une fente source élémentaire de largeur $\mathrm{d}x'$ est $\mathscr{E}_0\frac{\mathrm{d}x'}{b}$.

On suppose que b et a sont petits devant d et D.

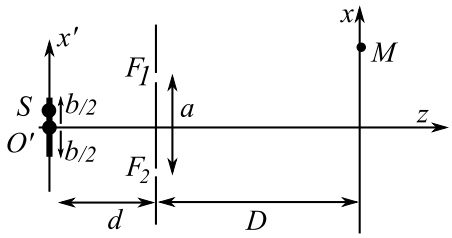


Figure 16.2

21 L'éclairement $\mathrm{d}\mathscr{E}$ donné par l'interféromètre éclairé par la fente élémentaire de largeur $\mathrm{d}x'$ est :

❒ **a.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

❒ **b.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{d}\right)\right)\right]\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

❒ **c.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

❒ **d.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} - \frac{x'}{d}\right)\right)\right]\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

22 L'éclairement total observé $\mathscr{E}$ est :

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 - \dfrac{\sin\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)}{\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}}\cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)}{\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}}\cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]$

23 Si l'on augmente la largeur de la fente à partir de $b = 0$, quelle(s) est(sont) la(les) propositions justes ?

❒ **a.** La frange centrale est sombre pour $\dfrac{\lambda_0 d}{a} < b < 2\dfrac{\lambda_0 d}{a}$.

❒ **b.** La visibilité est nulle pour $b = 0$.

❒ **c.** la visibilité est nulle pour $b = \dfrac{\lambda_0 d}{a}$.

❒ **d.** On observe des franges $\forall b$.

Voir les corrigés du chapitre 16 page 267.

17

Diffraction de Fraunhofer et réseaux

Thèmes abordés

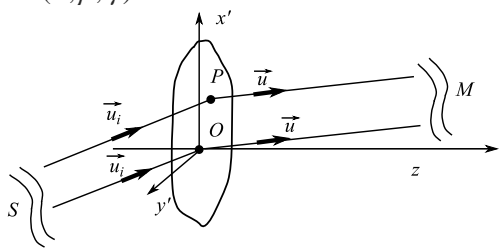
Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Le principe d'Huygens-Fresnel.
- La notion de diffraction de Fraunhofer par une fente, une pupille rectangulaire, ou circulaire.
- L'effet de translation d'une pupille diffractante.
- Le théorème de Babinet ou des écrans complémentaires.
- La figure d'interférences donnée par des fentes parallèles.
- Les réseaux plans en transmission ou en réflexion.

Notations. Sauf indication contraire, on appellera λ_0 la longueur d'onde dans le vide et l'indice de l'air sera pris égal à 1.

L'axe Oz est pris comme axe optique.

La direction de propagation de l'onde plane incidente sur la pupille a pour vecteur unitaire $\overrightarrow{u_i}$ de coordonnées $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ et celle de l'onde diffractée a pour vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (α, β, γ).



On se place dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer. Si l'on note $\underline{t}(x', y')$ la fonction de transmission de la pupille et $\underline{K}$ une constante. L'amplitude complexe en M de l'onde diffractée par une pupille $\underline{a_d}(M, t)$ peut alors s'écrire d'après le principe d'Huygens-Fresnel :

$$\underline{a_d}(M, t) = \underline{K}\mathrm{e}^{-i\omega t} \iint_{x',y'} \underline{t}(x', y')\mathrm{e}^{i\frac{2\pi\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{u_i}-\overrightarrow{u})}{\lambda_0}} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

Enfin on notera $\text{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ la fonction « sinus cardinal » et on rappelle que l'intensité ou l'éclairement pour une amplitude complexe $\underline{a}(M,t)$ sont proportionnels à $\left\langle \underline{a}\,\underline{a}^{\star} \right\rangle_t$.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 276**.

1 ❒ V ❒ F D'après le principe d'Huygens-Fresnel, chaque point d'une surface atteinte par une onde incidente se comporte comme une source secondaire ponctuelle émettant une onde plane.

2 ❒ V ❒ F D'après le principe d'Huygens-Fresnel, les sources secondaires émettent des ondes cohérentes entre elles.

3 ❒ V ❒ F Plus une pupille est de faibles dimensions, plus la figure de diffraction est étendue.

4 ❒ V ❒ F Une fente et un cheveu donnent des figures de diffraction complètement différentes.

5 ❒ V ❒ F Lorsqu'on translate la source, la figure de diffraction est inchangée.

6 ❒ V ❒ F Lorsqu'on translate la pupille dans son plan, la figure de diffraction est inchangée.

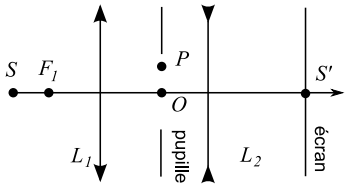
7 ❒ V ❒ F Dans un ordre donné, un réseau dévie plus la lumière rouge que la lumière bleue.

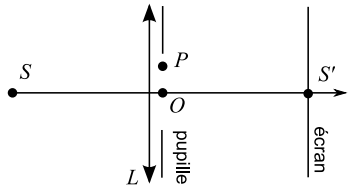
Consignes

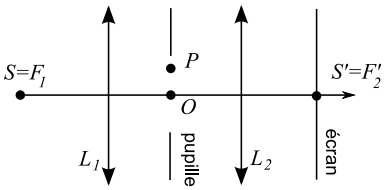
QCM

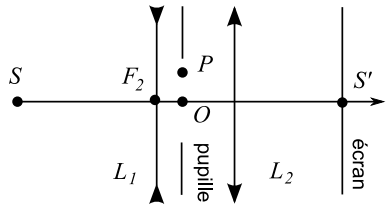
Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 277**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

8 Parmi les montages suivants, lequel(lesquels) permet(permettent) d'observer une figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer ? Dans tous les cas S' est l'image de S par l'ensemble des lentilles.

❒ **a.**


❒ **b.**


❒ **c.**


❒ **d.**


Cet énoncé concerne les questions 9 à 10 :
On s'intéresse à une fente de grande longueur L suivant Oy' et de largeur a symétrique par rapport à l'axe Ox'.

9 L'intensité diffractée par la fente est :

❒ **a.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a(\beta_i - \beta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **b.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{2\pi a(\beta_i - \beta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **c.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{2\pi a(\alpha_i - \alpha)}{\lambda_0}\right)$

❒ **d.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a(\alpha_i - \alpha)}{\lambda_0}\right)$

10 L'incidence étant fixée, le maximum principal pour la figure de diffraction de la fente précédente a pour largeur $\Delta|\alpha|$:

❒ **a.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{\lambda_0}{a}$

❒ **b.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{2\lambda_0}{a}$

❒ **c.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{\lambda_0}{2a}$

❒ **d.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{a}{\lambda_0}$

Cet énoncé concerne les questions 11 à 12 :
On observe la figure de diffraction d'une pupille rectangulaire centrée en O, de dimensions a suivant Ox' et b suivant Oy', éclairée en incidence normale. L'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente (figure 17.1).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

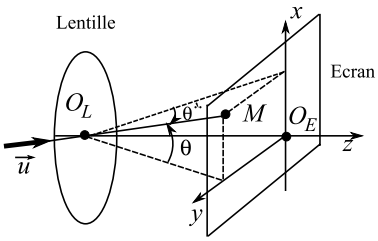


Figure 17.1

11 Déterminer l'éclairement $\mathscr{E}$ sur l'écran.

❒ **a.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b \sin\theta}{\lambda_0}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a \sin\theta'}{\lambda_0}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b \tan\theta}{\lambda_0}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a \tan\theta'}{\lambda_0}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a \tan\theta}{\lambda_0}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b \tan\theta'}{\lambda_0}\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda_0}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b \sin\theta'}{\lambda_0}\right)$

12 La longueur d'onde est $\lambda_0 = 0,5\ \mu$m et la distance focale de la lentille $f' = 1$ m. La taille de la tache centrale sur l'écran est 1,43 cm selon x et 2,86 cm selon y. En déduire a et b.

❒ **a.** $a = 35\ \mu$m et $b = 70\ \mu$m

❒ **b.** $a = 35\ \mu$m et $b = 17,5\ \mu$m

❒ **c.** $a = 70\ \mu$m et $b = 35\ \mu$m

❒ **d.** $a = 17,5\ \mu$m et $b = 35\ \mu$m

13 On considère la diffraction à travers l'ouverture circulaire d'un télescope de rayon $R = 4$ m. Quelle est la largeur angulaire la plus petite pouvant être observée avec $\lambda_0 = 0,5\ \mu$m ?

❒ **a.** $0,016''$

❒ **b.** $0,031''$

❒ **c.** $0,026''$

❒ **d.** $0,013''$

Cet énoncé concerne les questions 14 à 15 :

On prend en compte la diffraction dans l'étude de la figure donnée par des fentes d'Young. Les fentes de largeur a ont leurs centres espacés d'une distance b. Elles sont parallèles à l'axe Oy' et symétriques par rapport à cet axe. Les fentes sont éclairées en incidence normale. On notera $\mathscr{E}_0$ la constante de normalisation pour l'éclairement telle que l'éclairement maximal obtenu sur l'écran soit $2\mathscr{E}_0$.

14 Dans le plan focal image d'une lentille convergente (figure 17.1), l'expression de l'éclairement observé est :

❒ **a.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)$

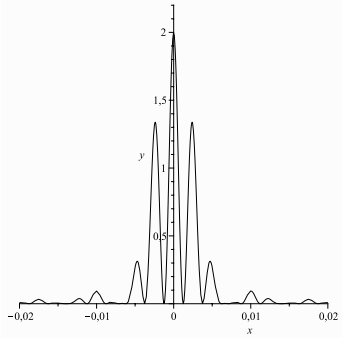
❒ **b.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \text{sinc}\left(\frac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)$

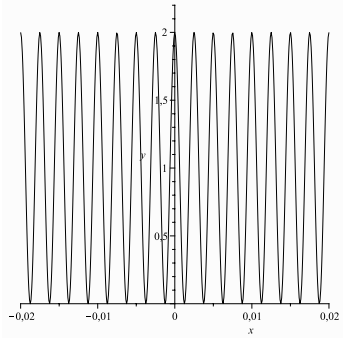
❒ **d.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)$

15 Parmi les figures suivantes, laquelle représente l'éclairement observé ?

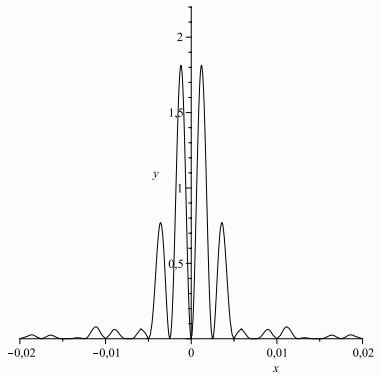
❒ **a.**



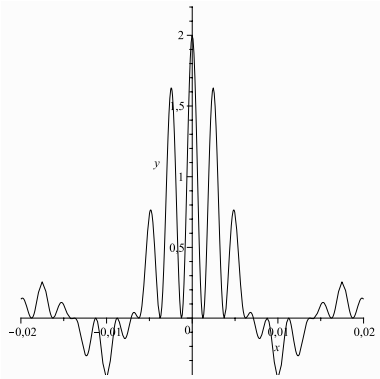
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

16 On étudie un réseau plan en transmission de n traits par unité de longueur, éclairé en lumière parallèle sous incidence θ. On note a l'écart entre deux traits. On observe la figure donnée par le réseau dans l'ordre k (entier) correspondant à l'angle θ'_k (figure 17.2).

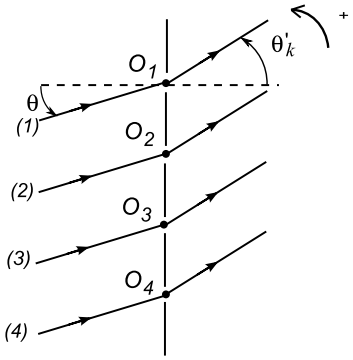


Figure 17.2

La formule du réseau correspondant aux maximas observés est :

❒ **a.** $\sin\theta'_k + \sin\theta = kn\lambda_0$ ❒ **b.** $\sin\theta'_k - \sin\theta = kn\lambda_0$

❒ **c.** $\tan\theta'_k - \tan\theta = kn\lambda_0$ ❒ **d.** $\tan\theta'_k + \tan\theta = kn\lambda_0$

17 On étudie un réseau plan en réflexion de n traits par unité de longueur, éclairé en lumière parallèle sous incidence θ. On observe la figure donnée par le réseau dans l'ordre k (entier) correspondant à l'angle θ'_k (figure 17.3).

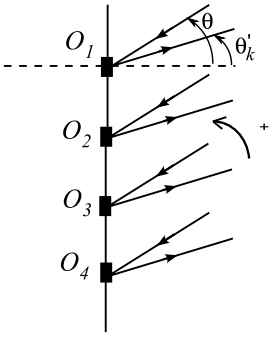


Figure 17.3

La formule du réseau correspondant aux maximas observés est :

❒ **a.** $\sin\theta'_k + \sin\theta = kn\lambda_0$ ❒ **b.** $\sin\theta'_k - \sin\theta = kn\lambda_0$

❒ **c.** $\tan\theta'_k - \tan\theta = kn\lambda_0$ ❒ **d.** $\tan\theta'_k + \tan\theta = kn\lambda_0$

18 On éclaire un des deux réseaux précédents avec une onde plane monochromatique ($\lambda_0 = 0,5$ µm) sous incidence normale. On prend n =600 traits/mm. Déterminer le nombre d'ordres observables.

❒ **a.** 7000 ❒ **b.** 6

❒ **c.** 1 ❒ **d.** 7

19 Dans le cas d'un réseau plan par transmission, la déviation est la différence d'angle entre le rayon diffracté et le rayon incident $D = \theta'_k - \theta$. On note D_m la déviation minimale pour un ordre k. Quelle(s) relation(s) sont vérifiées pour $D = D_m$?

❒ **a.** $\theta'_k = \theta$ ❒ **b.** $\theta'_k = -\theta$

❒ **c.** $\sin\dfrac{D_m}{2} = \dfrac{kn\lambda_0}{2}$ ❒ **d.** $D_m = 0$

20 Dans le cas d'un réseau plan de N traits, on note $a = 1/n$ le pas du réseau et $\phi = \dfrac{2\pi a\alpha}{\lambda_0}$ le déphasage entre deux rayons passant par deux traits successifs avec $\alpha = \sin\theta'_k \pm \sin\theta$ (le signe dépendant du type de réseau) . Les traits ont chacun une largeur b. Déterminer l'intensité diffractée dans la direction θ'_k :

❒ **a.** $I = I_0 \dfrac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ ❒ **b.** $I = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\dfrac{\sin^2\left(\frac{(N-1)\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$

❒ **c.** $I = I_0 \dfrac{\sin^2\left(\frac{(N-1)\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ ❒ **d.** $I = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\dfrac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$

Cet énoncé concerne les questions 21 à 23 :

On s'intéresse à un réseau à échelettes par réflexion. Ce réseau est constitué de N bandes réfléchissantes parallèles, de très grande longueur, de même largeur $2b$, faisant un angle $\alpha > 0$ avec la direction d'ensemble du réseau (figure 17.4). Ce réseau est éclairé par une onde plane monochromatique sous une incidence θ par rapport aux bandes réfléchissantes.

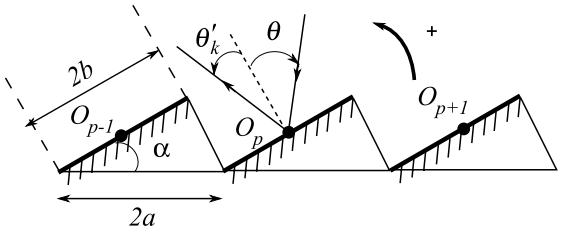


Figure 17.4

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

21 Déterminer l'amplitude $\underline{a_d}$ diffractée par l'une des bandes réfléchissantes dans une direction faisant l'angle θ'_k avec la normale à la surface. On note $\underline{K}$ la constante de normalisation

❒ **a.** $\underline{a_d} = \underline{K}\text{sinc}\left(\dfrac{2\pi b(\sin\theta'_k + \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **b.** $\underline{a_d} = \underline{K}\text{sinc}\left(\dfrac{2\pi b(\sin\theta'_k - \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **c.** $\underline{a_d} = \underline{K}\text{sinc}\left(\dfrac{\pi b(\sin\theta'_k + \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **d.** $\underline{a_d} = \underline{K}\text{sinc}\left(\dfrac{\pi b(\sin\theta'_k - \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

22 Déterminer la différence de marche $\delta_{p+1/p}$ entre deux rayons passant par les centres successifs O_{p+1} et O_p :

❒ **a.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta'_k + \alpha)]$

❒ **b.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta - \alpha) + \sin(\theta'_k + \alpha)]$

❒ **c.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta - \alpha) - \sin(\theta'_k + \alpha)]$

❒ **d.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta + \alpha) - \sin(\theta'_k + \alpha)]$

23 À quelle condition sur θ et α le maximum d'interférence d'ordre k coïncide-t-il avec le maximum central de diffraction d'une facette ?

❒ **a.** $2\cos\theta\cos\alpha = \dfrac{k\lambda_0}{2a}$

❒ **b.** $2\sin\theta\sin\alpha = \dfrac{k\lambda_0}{2a}$

❒ **c.** $2\cos\theta\sin\alpha = \dfrac{k\lambda_0}{2a}$

❒ **d.** $2\cos\theta\sin\alpha = -\dfrac{k\lambda_0}{2a}$

Voir les corrigés du chapitre 17 page 276.

Interféromètre de Michelson

18

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- L'utilisation de l'interféromètre de Michelson en coin d'air.
- L'utilisation de l'interféromètre de Michelson en lame d'air.
- La notion de franges non localisées ou localisées.
- Les franges d'égale épaisseur localisées sur les miroirs.
- Les franges d'égale inclinaison (ou anneaux) localisées à l'infini.

Notations. Sauf indication contraire, on appellera λ_0 la longueur d'onde dans le vide et l'indice de l'air sera pris égal à 1.

Pour l'interféromètre de Michelson que l'on étudiera dans ce chapitre les deux miroirs peuvent bien sûr pivoter, et c'est le miroir noté M_1 qui peut être translaté (figure 18.1).

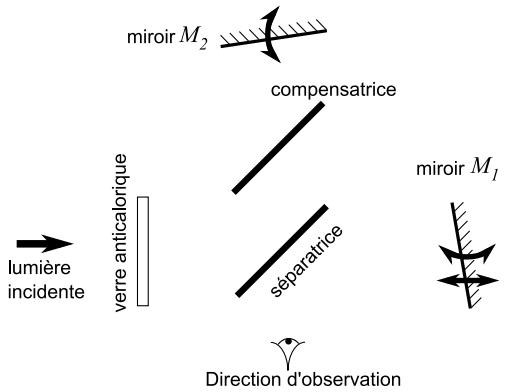


Figure 18.1

On appellera M_1' le miroir équivalent à l'image du miroir M_1 par la séparatrice. Pour le calcul de la différence de marche $\delta_{2/1}$, on prendra comme référence le rayon réfléchi sur le miroir M_1'.

L'angle α entre les miroirs des coins d'air est positif.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 286**.

1 ❒ V ❒ F L'interféromètre de Michelson est à division du front d'onde.

2 ❒ V ❒ F La compensatrice sert à compenser un déphasage dû aux réflexions sur les miroirs.

3 ❒ V ❒ F Si la source est ponctuelle, les interférences ne sont pas localisées.

4 ❒ V ❒ F Si l'interféromètre est réglé en lame d'air, on observe des anneaux.

5 ❒ V ❒ F Si l'interféromètre est réglé en coin d'air, les interférences sont localisées sur le miroir M_2.

6 ❒ V ❒ F En lame d'air, lorsqu'on translate le miroir en se rapprochant du contact optique, les anneaux sortent du centre de la figure.

7 ❒ V ❒ F Lorsqu'on utilise l'interféromètre en coin d'air, on place la source dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

8 ❒ V ❒ F Lorsqu'on utilise l'interféromètre en lame d'air, on place la source avant le plan focal objet d'une lentille convergente.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 287**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

9 Déterminer la différence de marche géométrique $\delta_{2/1}$ du rayon 2 par rapport au rayon 1 (figure 18.2).

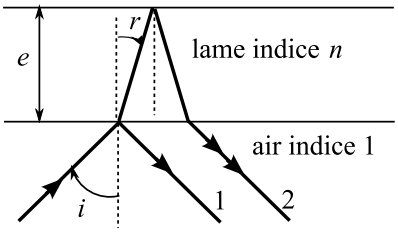


Figure 18.2

❒ **a.** $\delta_{2/1} = 2e(n\cos r - \tan r \sin i)$

❒ **b.** $\delta_{2/1} = \dfrac{2e}{\cos r}(1 - n\sin^2 i)$

❒ **c.** $\delta_{2/1} = 2ne\cos r$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = \dfrac{2e}{\cos r}(1 - n^2\sin^2 i)$

Cet énoncé concerne les questions 10 à 12 :
On considère un coin d'air (figure 18.3) éclairé par une onde plane sous incidence θ. On note $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ les vecteurs d'onde des ondes réfléchies sur les lames (1) et (2), et on définit $\vec{K} = \vec{k_2} - \vec{k_1}$.

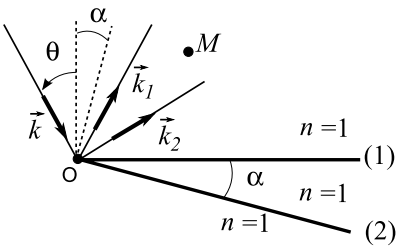


Figure 18.3

10 Déterminer l'intensité en un point M de l'espace, l'intensité maximale étant $2I_0$.

❒ **a.** $I = I_0(1 + \cos(\vec{k_2} + \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

❒ **b.** $I = I_0(1 + \cos(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

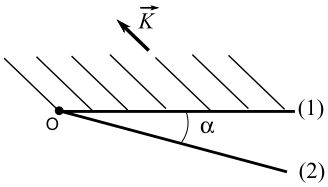
❒ **c.** $I = I_0(1 + 2\cos(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

❒ **d.** $I = I_0(1 + \sin(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

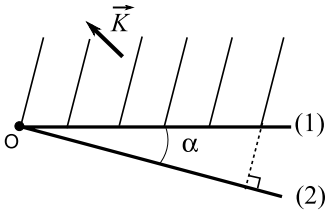
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 Choisir parmi les figures suivantes, celle qui représente les surfaces d'intensité maximale. On a représenté $\vec{K} = \vec{k_2} - \vec{k_1}$.

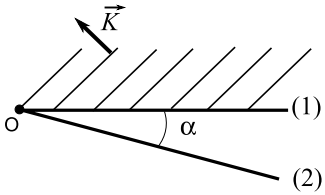
❒ **a.**



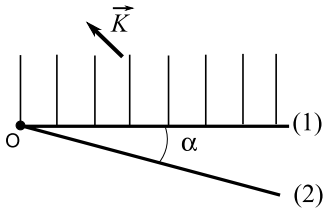
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



12 La distance i entre deux plans successifs d'intensité maximale est :

❒ **a.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)}$

❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)}$

❒ **c.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\cos\alpha}$

❒ **d.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha}$

Cet énoncé concerne les questions 13 à 16 :

À partir du contact optique et des miroirs M_1 et M_2 perpendiculaires, on fait tourner le miroir M_1 d'un angle α, l'interféromètre étant alors réglé en coin d'air. La source, non ponctuelle, est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

On a représenté sur la figure 18.4 le schéma équivalent à l'interféromètre, ainsi que le système de projection de la figure (lentille L_2 et écran).

On note γ le grandissement obtenu par la projection.

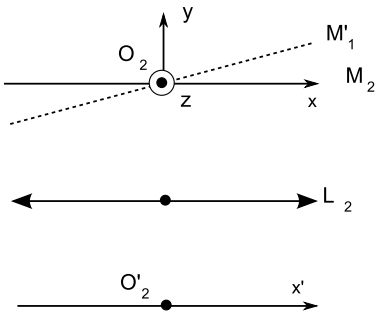


Figure 18.4

13 En travaux pratiques, si l'on dispose d'une table d'environ 2 m, quelle distance focale image f' choisir pour L_2 parmi les valeurs suivantes ?

❒ **a.** $f' = 1000$ mm ❒ **b.** $f' = -250$ mm
❒ **c.** $f' = 10$ mm ❒ **d.** $f' = 250$ mm

14 Déterminer la relation entre l'ordre d'interférence p et la position sur l'écran x'.

❒ **a.** $p = \dfrac{2\alpha x'}{\gamma\lambda_0}$ ❒ **b.** $p = -\dfrac{2\alpha x'}{\gamma\lambda_0}$
❒ **c.** $p = \dfrac{2\alpha x'}{\lambda_0}$ ❒ **d.** $p = -\dfrac{2\alpha x'}{\lambda_0}$

15 On mesure sur l'écran un interfrange $i' = 0,5$ cm. Déterminer l'angle α entre les miroirs sachant que le grandissement est $\gamma = -4$ et que $\lambda_0 = 0,5\ \mu$m.

❒ **a.** $\alpha \simeq 10''$ ❒ **b.** $\alpha \simeq 0,01''$
❒ **c.** $\alpha \simeq 41''$ ❒ **d.** $\alpha \simeq 0,7''$

16 On translate le miroir M_1 d'une distance d. Cela équivaut à déplacer M_1' de $\Delta y = d$. Quel est le déplacement $\Delta x'$ de la frange centrale $p = 0$ sur l'écran ?

❒ **a.** $\Delta x' = \dfrac{\gamma\Delta y}{\alpha}$ ❒ **b.** $\Delta x' = \Delta y$
❒ **c.** $\Delta x' = \gamma\Delta y$ ❒ **d.** $\Delta x' = -\dfrac{\gamma\Delta y}{\alpha}$

Cet énoncé concerne les questions 17 à 21 :
L'interféromètre réglé en lame d'air d'épaisseur e est éclairé par une source non ponctuelle monochromatique. On utilise une lentille L_2 de distance focale image f' pour projeter les anneaux sur un écran.

17 En travaux pratiques, quelle distance focale image f' choisir pour L_2 parmi les valeurs suivantes ?

❒ **a.** $f' = 1000$ mm ❒ **b.** $f' = -250$ mm
❒ **c.** $f' = 10$ mm ❒ **d.** $f' = 250$ mm

18 L'épaisseur de la lame d'air est $e = 0,2$ mm. Quel est l'ordre p_0 au centre pour $\lambda_0 = 0,56\ \mu$m ?

❒ **a.** $p_0 = 0$ ❒ **b.** $p_0 \simeq 714,3$
❒ **c.** $p_0 \simeq 357,1$ ❒ **d.** $p_0 = 2.10^{-4}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

19 On note r_k le rayon du $k^{\text{ième}}$ sur l'écran. On suppose que $p_0 = m + \epsilon$ où m est entier et $1 \geq \epsilon > 0$. Déterminer l'expression de r_k :

❒ **a.** $r_k = f' \sqrt{k + \epsilon} \sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$

❒ **b.** $r_k = f' \sqrt{-k + \epsilon + 1} \sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$

❒ **c.** $r_k = f' \sqrt{k + \epsilon + 1} \sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$

❒ **d.** $r_k = f' \sqrt{k + \epsilon - 1} \sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$

20 On place une lame d'indice n et d'épaisseur d accolée au miroir M_2 (figure 18.5). On note i l'angle d'incidence d'un rayon sur la lame et r l'angle de réfraction dans la lame. Déterminer la différence de marche $\delta_{2/1}$.

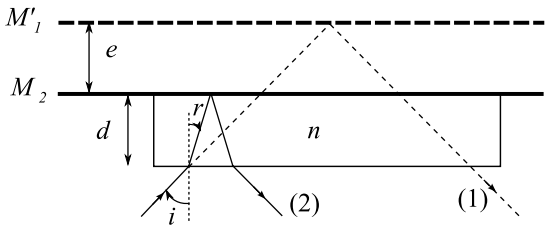


Figure 18.5

❒ **a.** $\delta_{2/1} = -2(e + d)\cos i + 2nd \cos r$

❒ **b.** $\delta_{2/1} = -2n(e + d)\cos i + 2nd \cos r$

❒ **c.** $\delta_{2/1} = -2(e + d)\cos i - 2nd \cos r$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = 2(e + d)\cos i - 2nd \cos r$

21 On se place dans le cas des petits angles. On observe une teinte uniforme sur l'écran lorsque $\delta_{2/1}$ est indépendant de i au deuxième ordre. Avant de placer la lame, on suppose que l'interféromètre est réglé au contact optique. Déterminer la distance e dont on doit déplacer M_1 pour retrouver une teinte uniforme.

❒ **a.** $e = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) d$

❒ **b.** $e = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right) d$

❒ **c.** $e = -d$

❒ **d.** $e = d(n - 1)$

Voir les corrigés du chapitre 18 page 286.

15 Interférences à deux ondes

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Le chemin optique (AB) dans un milieu d'indice n est la distance parcourue par le lumière dans le vide pendant la même durée qu'elle met pour se propager de A à B dans le milieu.

Le temps de parcours de la lumière entre A et B est $\tau = \int_A^B \frac{\mathrm{d}\ell_P}{v(P)}$ où $v(P)$ est la célérité de la lumière en P, un point de la trajectoire du rayon entre A et B. Or, par définition $n(P) = c/v(P)$, soit $\tau = \frac{1}{c}\int_A^B n(P)\mathrm{d}\ell_P$ ou $\tau = \frac{1}{c}(AB)$.

2 ☒ V ❒ F Lors d'une réflexion sur un miroir, l'onde lumineuse se déphase de π.

Voir dans le cours d'électromagnétisme la réflexion en incidence normale d'une onde sur un métal parfait, où le champ électrique de l'onde réfléchie est l'opposé du champ électrique incident (ce qui correspond à un déphasage de π). On admet la généralisation en ce qui concerne le déphasage.

3 ❒ V ☒ F Pour deux points conjugués par un système optique, le chemin optique dépend de la trajectoire du rayon lumineux.

Dans le cadre du programme, on admet que le chemin optique est le même entre deux points conjugués par un système optique, quelle que soit la trajectoire réelle d'un rayon passant par ce système, et bien sûr par les deux points.

4 ❒ V ☒ F Les rayons lumineux sont tangents aux surfaces d'onde.

D'après le théorème de Malus, les rayons sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

5 ❒ V ☒ F Un déphasage de π correspond à une différence de marche égale à λ_0.

Pour une onde monochromatique dans le vide de la forme $s(M,t) = s_0 \cos\left(\omega t - \phi_0 - \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0}\right)$, un déphasage de π entre deux points M et M' correspond à $\frac{2\pi(MM')}{\lambda_0} = \pi$ soit soit une différence de marche $\delta_{MM'} = (MM') = \frac{\lambda_0}{2}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

QCM

6 Une source S_1 émet une onde $s_1 = s_{1m}\cos(\omega t - \phi_{01})$. Une source S_2 émet une onde $s_2 = s_{2m}\cos(\omega t - \phi_{02})$. On note $\mathscr{E}_0$ l'éclairement en un point M d'un écran pour chaque source seule S_1 ou S_2. Quel est l'éclairement $\mathscr{E}$ résultant en M issu des deux sources ?

❒ **a.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{02} - \phi_{01}\right)\right\rangle_t\right)$

☒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{02} - \phi_{01}\right)\right\rangle_t\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{02} + \phi_{01}\right)\right\rangle_t\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \left\langle\cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0} + \phi_{01} - \phi_{02}\right)\right\rangle_t\right)$

L'onde issue de S_1 a pour amplitude en M : $s_1(M,t) = s_{1m}\cos\left(\omega t - \phi_{01} - \frac{2\pi(S_1M)}{\lambda_0}\right)$, celle issue de S_2, $s_2(M,t) = s_{2m}\cos\left(\omega t - \phi_{02} - \frac{2\pi(S_2M)}{\lambda_0}\right)$. L'amplitude totale en M est $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$ et l'éclairement :

$$\mathscr{E} = K\left\langle s(M,t)^2\right\rangle = K\left\langle s_1(M,t)^2\right\rangle + K\left\langle s_2(M,t)^2\right\rangle + 2K\left\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle$$

Le premier terme correspond à l'éclairement par S_1 seule et vaut $\mathscr{E}_0 = K\frac{s_{1m}^2}{2}$. De manière similaire le second terme est l'éclairement de S_2 seule et vaut aussi $\mathscr{E}_0 = K\frac{s_{2m}^2}{2}$. Enfin, après linéarisation, le troisième terme s'écrit :

$$Ks_{1m}s_{2m}\left[\left\langle\cos\left(2\omega t - \phi_{02} - \phi_{01} - \frac{2\pi((S_1M) + (S_2M))}{\lambda_0}\right) + \cos\left(\Delta\phi_0 + \frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0}\right)\right\rangle\right]$$

avec $\Delta\phi_0 = \phi_{02} - \phi_{01}$. Le premier terme est une fonction sinusoïdale du temps de valeur moyenne nulle. Quant au deuxième terme avec $\mathscr{E}_0 = K\frac{s_{1m}^2}{2} = K\frac{s_{2m}^2}{2}$, il vaut $2\mathscr{E}_0\cos\left(\Delta\phi_0 + \frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda_0}\right)$. C'est donc la réponse **b.** qui est valable.

7 Sauf indication contraire, on se place dans la suite dans le cas où les deux sources précédentes émettent des ondes telles que $\phi_{02} - \phi_{01} = 0$. Dans l'espace, les lieux d'égal éclairement sont :

❒ **a.** Des ellipsoïdes de foyers S_1 et S_2.

❒ **b.** Des droites parallèles.

❒ **c.** Des anneaux concentriques d'axe S_1S_2.

☒ **d.** Des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2.

Les lieux d'égal éclairement correspondent à $\delta_{2/1} = cte$. Si on note n l'indice du milieu, on obtient $\dfrac{2\pi n[S_2M - S_1M]}{\lambda_0} = cte$. Il s'agit des surfaces telles que $S_2M - S_1M$ est constant, donc des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2.

Cet énoncé concerne les questions 8 à 10 :
On se place dans le cas particulier où l'écran est placé parallèlement à S_1S_2 à une distance $D \gg S_1S_2$ (figure 15.1).

8 La différence de marche $\delta_{2/1}$ en un point M de coordonnées (x, y, D) sur l'écran avec $x \ll D$ et $y \ll D$ est :

☒ **a.** $\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{D}$

☐ **b.** $\delta_{2/1} = -\dfrac{ax}{D}$

☐ **c.** $\delta_{2/1} = \dfrac{2ax}{D}$

☐ **d.** $\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{2D}$

La distance S_1M est égale à $\left[\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2\right]^{\frac{1}{2}}$. On effectue un développement limité en x/D et y/D au premier ordre :

$$S_1M = D\left[1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{y^2}{D^2}\right]^{\frac{1}{2}} \simeq D\left[1 - \frac{ax}{2D}\right]$$

La distance S_2M étant égale à $\left[\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2\right]^{\frac{1}{2}}$, on obtient au premier ordre $S_2M = D\left[1 + \dfrac{ax}{2D}\right]$. On a donc $\delta_{2/1} = S_2M - S_1M = \dfrac{ax}{D}$.

9 Les franges sont :

☒ **a.** Rectilignes.

☐ **b.** Circulaires

☒ **c.** Parallèles à Oy.

☐ **d.** Parallèles à Ox.

Les lieux d'égal éclairement sur l'écran correspondant à $\delta_{2/1} = cte$ soit $x = cte$. Ce sont des droites parallèles à Oy. Si l'écran était assez grand, on verrait en fait des morceaux d'hyperboles (intersection des hyperboloïdes avec l'écran). Dans ce dernier cas, le D.L. serait à faire à un ordre supérieur.

10 L'interfrange i est :

☐ **a.** $i = \dfrac{2\lambda_0 D}{a}$

☐ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{2a}$

☒ **c.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$

☐ **d.** $i = \dfrac{a}{\lambda_0 D}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

L'interfrange est la distance sur l'écran entre deux franges brillantes ou sombres successives, soit $\dfrac{2\pi\Delta\delta_{2/1}}{\lambda_0} = 2\pi$ ou $\Delta\delta_{2/1} = \lambda_0$. On en déduit $i = \Delta x = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$.

Cet énoncé concerne les questions 11 à 12 :
On se place dans le particulier où l'écran est placé perpendiculairement à S_1S_2. On note $D = OO'$ la distance du milieu O de S_1S_2 à l'écran avec $D \gg S_1S_2$ (figure 15.2). On note r la distance $O'M$ avec $r \ll D$.

11 La différence de marche $\delta_{2/1}$ en M est :

❒ **a.** $\delta_{2/1} = a$

☒ **b.** $\delta_{2/1} = a\cos\theta$

☒ **c.** $\delta_{2/1} = a\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{D}\right)^2\right)$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = \dfrac{ar}{D}$

On écrit la loi de Chasles pour $\overrightarrow{S_2M}$ et on élève au carré :

$$\overrightarrow{S_2M} = \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OM} \quad \Rightarrow \quad S_2M^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{\cos\theta}\right)^2 + aD$$

On effectue un D.L. au premier ordre en $a\cos^2\theta/D$:

$$S_2M = \frac{D}{\cos\theta}\left[1 + \frac{a\cos^2\theta}{D} + \left(\frac{a\cos\theta}{2D}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{D}{\cos\theta}\left[1 + \frac{a\cos^2\theta}{2D}\right]$$

De manière similaire, on obtient $S_1M = \dfrac{D}{\cos\theta}\left[1 - \dfrac{a\cos^2\theta}{2D}\right]$ au premier ordre. Soit $\delta_{2/1} = S_2M - S_1M = a\cos\theta$.

Pour l'expression en fonction de r, on utilise le fait que l'angle θ est petit soit $\tan\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta = \dfrac{r}{D}$. Le développement du $\cos\theta$ au deuxième ordre conduit à :

$$\delta_{2/1} = S_2M - S_1M = a\cos\theta \simeq a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \simeq a\left(1 - \frac{r^2}{2D^2}\right)$$

On remarque que le développement est poussé à un ordre supérieur pour r par rapport à celui en a.

Si l'on veut directement l'expression en r on peut écrire $S_2M = \left[S_2O'^2 + r^2\right]^{\frac{1}{2}}$ soit :

$$S_2M = \left[\frac{a^2}{4} + aD + D^2 + r^2\right]^{\frac{1}{2}} = D\left[1 + \frac{a}{2D} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{ar^2}{4D^3}\right]$$

Il faut effectuer le D.L. jusqu'à l'ordre 3 inclus (a^3 et ar^2) comme on l'a remarqué précédemment. De même :

$$S_1M = \left[\frac{a^2}{4} - aD + D^2 + r^2\right]^{\frac{1}{2}} = D\left[1 - \frac{a}{2D} + \frac{r^2}{2D^2} + \frac{ar^2}{4D^3}\right]$$

La différence $S_2M - S_1M$ donne bien le même résultat que précédemment.

12 L'ordre d'interférence en O' est noté p_0 et on l'écrit $p_0 = m + \epsilon$ où m est entier et $0 < \epsilon \leq 1$. Déterminer, en partant du centre, le rayon r_k du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant.

❒ **a.** $r_k = D\sqrt{\dfrac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon - k - 1}$

❒ **b.** $r_k = D\sqrt{\dfrac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon + k + 1}$

❒ **c.** $r_k = D\sqrt{\dfrac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon + k}$

☒ **d.** $r_k = D\sqrt{\dfrac{2\lambda_0}{a}}\sqrt{\epsilon + k - 1}$

L'ordre d'interférence est $p = \dfrac{a}{\lambda_0} - \dfrac{ar^2}{2D^2\lambda_0}$. L'ordre d'interférence au centre, donc pour $r = 0$ est $p_0 = \dfrac{a}{\lambda_0}$ qui n'est sûrement pas entier et on remarque que p est une fonction décroissante de r. Puisque $\epsilon > 0$, le premier anneau brillant correspond à $p_1 = m$, le second $p_2 = m - 1$ et le k^{ième} à $p_k = m - k + 1$. En utilisant l'expression reliant p_k et r_k, on rouve la solution **d**.

Cet énoncé concerne les questions 13 à 15 :
On s'intéresse à un dispositif de fentes d'Young parallèles à Oy. On note (F_1,F_2) leurs traces dans le plan xOz. Une source ponctuelle S se trouve à une distance b au-dessus de l'axe Oz (figure 15.3). Les différentes distances sont telles que $a \ll D$, $a \ll d$, $b \ll D$ et $b \ll d$.

13 Déterminer l'éclairement sur l'écran au point M. On note $\mathscr{E}_0$ l'éclairement sur l'écran lorsqu'on place un cache devant l'une des fentes.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{b}{d} - \dfrac{x}{D}\right)\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{x}{D}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{x}{d} + \dfrac{x}{D}\right)\right)$

☒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{b}{d} + \dfrac{x}{D}\right)\right)$

On utilise le résultat de la différence de marche dans le cas de l'écran parallèle aux sources. On rappelle qu'utiliser des fentes d'Young donne la même figure d'interférences que les trous d'Young (la différence de marche ne dépendant pas de y) plus lumineuse. On peut donc faire le calcul de la différence de marche en raisonnant dans le plan de la figure. La différence de marche du rayon passant par F_2 par rapport à celui passant par F_1 est :

$$\delta_{2/1} = (SF_2M) - (SF_1M) = [(SF_2) - (SF_1)] + [(F_2M) - (F_1M)]$$

On a déjà calculé $(F_2M) - (F_1M) = \dfrac{ax}{D}$. Par analogie avec ce résultat, $(SF_2) - (SF_1) = \dfrac{ab}{d}$. Le calcul complet s'effectue avec un D.L. comme pour $(F_2M) - (F_1M)$. En utilisant la formule des interférences :

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta_{1/2}}{\lambda_0}\right) = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} + \frac{b}{d}\right)\right)$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

14 La frange « centrale » correspondant à une différence de marche nulle est à la position :

❒ **a.** $x = \dfrac{bD}{d}$

☒ **b.** $x = -\dfrac{bD}{d}$

❒ **c.** $x = 0$

❒ **d.** $x = -\dfrac{bd}{D}$

La différence de marche est nulle pour $\dfrac{x}{D} + \dfrac{b}{d} = 0$ c'est-à-dire pour $x = -\dfrac{bD}{d}$. On remarque que la frange centrale s'est déplacée du coté de F_2 ce qui revient à raccourcir (F_2M) et allonger (F_1M). Cela compense l'allongement de (SF_2) et le raccourcissement de (SF_1) par rapport au cas où S est sur l'axe.

15 L'interfrange i est alors :

☒ **a.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$

❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0 d}{a}$

❒ **c.** $i = \dfrac{\lambda_0 d}{b}$

❒ **d.** $i = \dfrac{\lambda_0 D}{2a}$

L'interfrange correspond à la variation de x pour une variation de phase de 2π ou de différence de marche de λ_0. L'ajout du terme constant $\dfrac{ab}{d}$ ne fait que décaler les franges sans modifier leur épaisseur.

Cet énoncé concerne les questions 16 à 19 :
On s'intéresse à un dispositif de fentes d'Young parallèles à Oy espacées d'une distance a. On note (F_1,F_2) leurs traces dans le plan xOz. Ces fentes sont éclairées par un faisceau de lumière parallèle (source ponctuelle S à l'infini) faisant un angle α_0 avec l'axe Oz (figure 15.4). On place un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente (distance focale image f') placée après les fentes (plan $xF'y$).

16 La différence de marche au point M est :

❒ **a.** $\delta_{2/1} = a(\sin\alpha_0 + \sin\alpha)$

❒ **b.** $\delta_{2/1} = a(\tan\alpha_0 + \tan\alpha)$

☒ **c.** $\delta_{2/1} = a(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = a(\tan\alpha_0 - \tan\alpha)$

On raisonne sur la figure 15.7.

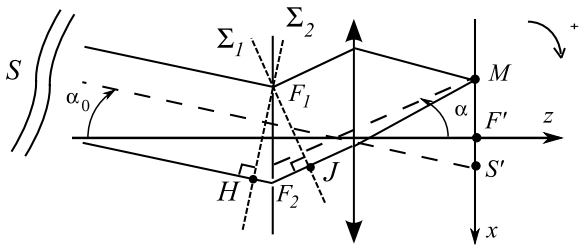


Figure 15.7

On écrit la différence de marche $\delta_{2/1} = (SF_2M) - (SF_1M)$. D'après le théorème de Malus, $(SF_1) = (SH)$ (plan Σ_1) et $(F_1M) = (JM)$ (puisque M est l'image du faisceau parallèle d'angle α). Finalement $\delta_{2/1} = HF_2 + F_2J = a(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$. Le signe « – » est dû au fait que $\alpha < 0$.

17 Dans le cadre de l'approximation de Gauss, déterminer l'expression de l'éclairement sur l'écran, en notant $\mathscr{E}_0$ l'éclairement donné par l'une des fentes seule.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)\right)$

☒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha_0 - \dfrac{x}{f'}\right)\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\dfrac{x}{f'}\right)\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha_0 - \dfrac{f'}{x}\right)\right)$

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on peut écrire $\sin\alpha \simeq \tan\alpha = -\dfrac{x}{f'}$ (attention à l'orientation avec α orienté dans le sens horaire et x vers le bas). D'autre part $\sin\alpha_0 \simeq \alpha_0$. On a donc $\delta_{2/1} = a\left(\alpha_0 - \dfrac{x}{f'}\right)$ et avec la formule des interférences, on trouve la réponse **b**.

18 Où se trouve la frange « centrale » ?

❒ **a.** En $x = 0$

☒ **b.** En $x = \alpha_0 f'$

❒ **c.** En $x = -\alpha_0 f'$

☒ **d.** À la position de l'image géométrique de S.

La frange centrale correspond à $\delta_{2/1} = 0$ soit $x = \alpha_0 f'$, ce qui correspond à l'image géométrique de S par la lentille.

19 Déterminer l'interfrange i.

❒ **a.** $i = -\dfrac{\lambda_0 f'}{a}$

❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0 a}{f'}$

❒ **c.** $i = f'\alpha_0$

☒ **d.** $i = \dfrac{\lambda_0 f'}{a}$

L'interfrange est donné par $\Delta\delta_{21} = \lambda_0$ soit $\Delta\left(a\dfrac{x}{f'}\right) = \lambda_0$ donc $i = \Delta x = \dfrac{f'\lambda_0}{a}$.

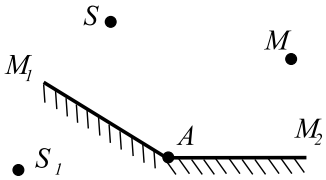
Cet énoncé concerne les questions 20 à 23 :
On s'intéresse au dispositif appelé « miroirs de Fresnel » (figure 15.5) pour observer des interférences en un point M de l'espace. On note S_1 et S_2 les sources secondaires

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

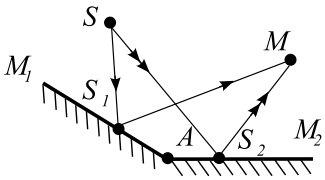
correspondant à la source ponctuelle monochromatique S et on n'observe que la lumière provenant de ces sources secondaires. L'arête entre les deux miroirs est notée A et l'angle α est petit. Enfin, on note $d = 1$ m la distance SA.

20 Déterminer la position des sources secondaires ainsi que le champ d'interférences. Sur les figures seule une partie du champ d'interférences, limité par deux traits noir, a été grisée.

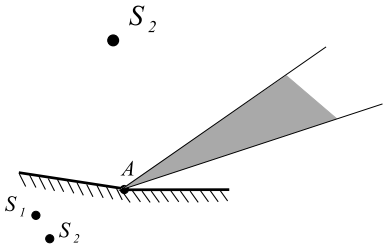
☒ **a.**



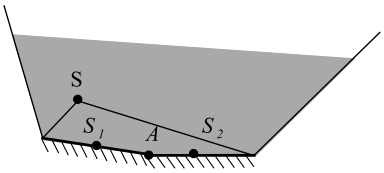
❒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



Les sources secondaires sont les images de la source principale par le système optique (sauf dans le cas des trous d'Young où ce sont les trous eux-mêmes). L'image d'un point source réel S par un miroir plan est virtuel et symétrique de S par rapport au plan du miroir, ce qui correspond à la figure **a.** où S_1 est l'image de S par M_1 et S_2 celle de S par M_2.

Le champ d'interférence est l'intersection des faisceaux issus de chaque source secondaire. On trace sur la figure 15.8 les rayons issus de S_1 et S_2 s'appuyant sur le bord des miroirs.

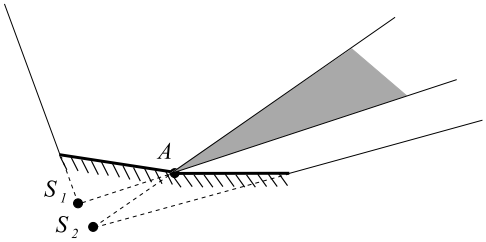


Figure 15.8

21 La distance a entre les deux sources secondaires est :

❒ **a.** $a = d\alpha$

☒ **b.** $a = 2d\alpha$

❒ **c.** $a = d$

❒ **d.** $a = 2\alpha$

On raisonne sur la figure 15.9.

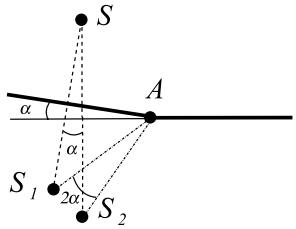


Figure 15.9

Puisque S_1 et S_2 sont symétriques de S par les miroirs, les trois points sont situés sur un cercle de centre A. L'angle $\widehat{S_1SS_2}$ est égal à l'angle entre les miroirs α donc $\widehat{S_1AS_2} = 2\alpha$. Comme l'angle est petit, on peut assimiler l'arc de cercle $\overset{\frown}{S_1S_2}$ au segment S_1S_2 soit $a = S_1S_2 = 2\alpha SA = 2\alpha d$.

22 On place un écran parallèle à S_1S_2 à une distance $d' = 1,5$ m de A. La longueur d'onde est $\lambda_0 = 0,5\mu$m et l'angle $\alpha = 20'$. Déterminer l'interfrange i.

❒ **a.** $i \simeq 6,4 \cdot 10^{-5}$ m
❒ **b.** $i \simeq 4,3 \cdot 10^{-5}$ m
❒ **c.** $i \simeq 3,1 \cdot 10^{-8}$ m
☒ **d.** $i \simeq 1,1 \cdot 10^{-4}$ m

On est dans le cas où l'écran est parallèle à S_1S_2, avec une distance aux sources $D = d + d'$, donc on peut appliquer la formule démontrée précédemment $i = \dfrac{\lambda_0(d+d')}{a}$ soit $i = \dfrac{\lambda_0(d+d')}{2\alpha d}$.

Attention à prendre α en radian soit $\alpha = \left(\dfrac{20}{60}\right)^{\circ}$ donc $\alpha = 5,8 \cdot 10^{-3}$ rad. On en déduit $i = 0,11$ mm.

23 Déterminer le nombre N de franges visibles sur l'écran.

❒ **a.** $N \simeq 5,6.10^5$
☒ **b.** $N \simeq 158$
❒ **c.** $N \simeq 270$
❒ **d.** $N \simeq 406$

La largeur angulaire du champ d'interférence est 2α (figure 15.8), donc sur l'écran le champ d'interférence a une largeur $L = 2\alpha d' = 1,74$ cm soit un nombre de franges $N \simeq \dfrac{L}{i} = 158$.

Cet énoncé concerne les questions 24 à 26 :
On s'intéresse au dispositif appelé « miroir de Lloyd ». Un miroir plan est éclairé par une source ponctuelle S située à une distance $a/2 = 1$ mm au-dessus du miroir (figure 15.6). La source S est monochromatique ($\lambda = 0,5$ μm). On observe les interférences en un

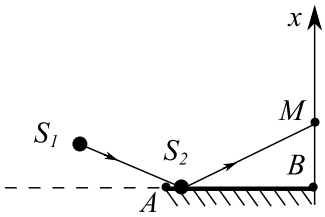
© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

point M d'un écran. On note S_1 et S_2 les sources secondaires correspondant à la source ponctuelle monochromatique S.

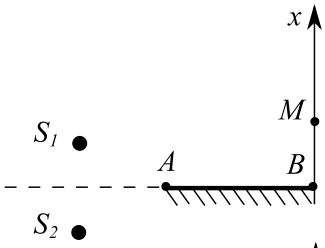
Avec $d = 20$ cm et $D = 10$ cm on a bien sûr $d \gg a$ et $D \gg a$.

24 Déterminer la position des sources secondaires ainsi que le champ d'interférences.

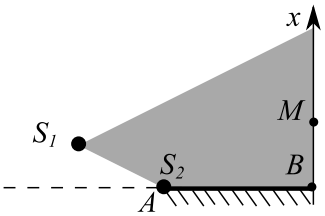
❒ **a.**



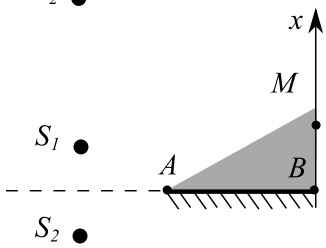
☒ **b.**



❒ **c.**



☒ **d.**



Il s'agit d'un cas particulier où S joue le rôle de source principale mais aussi de source secondaire S_1 puisqu'elle éclaire directement l'écran. La seconde source secondaire S_2 est l'image de S par le miroir, donc symétrique de S par ce dernier.

En ce qui concerne le champ d'interférence, il n'est pas limité par S qui peut éclaire tout l'écran mais par le faisceau issu de S_2 s'appuyant sur les bords du miroir (figure 15.10).

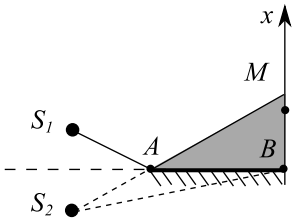


Figure 15.10

25 Déterminer l'éclairement $\mathscr{E}$ sur l'écran. On notera $\mathscr{E}_0$ l'éclairement maximal dû chaque source individuellement.

☒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 - \cos\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0(d+D)}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0(d+D)}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 - \cos\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)$

La distance des sources à l'écran est $d + D$ et $S_1S_2 = a$ donc la différence de marche géométrique est $\delta_g = \dfrac{ax}{d+D}$. En raison de la réflexion sur le miroir le rayon semblant issu de S_2 a un déphasage de π par rapport au rayon direct, il faut donc ajouter $\lambda_0/2$ à la différence de marche géométrique soit :

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos 2\pi\left(\frac{ax}{\lambda_0(d+D)} + \frac{1}{2}\right)\right) = 2\mathscr{E}_0\left(1 - \cos\frac{2\pi ax}{\lambda_0(d+D)}\right)$$

26 Déterminer le nombre N de franges sombres visibles sur l'écran.

❒ **a.** $N = 5$ ❒ **b.** $N = 6$

☒ **c.** $N = 7$ ❒ **d.** $N = 8$

L'interfrange est $i = \dfrac{\lambda_0(d+D)}{a} = 75\ \mu$m. La largeur du champ d'interférences est $\Delta x = \dfrac{Da}{2d} = 0,5$ mm. On a $\Delta x/i = 6,7$. Sachant qu'on observe une frange sombre en $x = 0$ (en raison du déphasage de π), on observera 7 franges sombres sur l'écran, car pour observer la huitième il faudrait 7 interfranges entiers.

16 Cohérence temporelle et spatiale de deux ondes

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Deux ondes monochromatiques de longueurs d'onde différentes ne peuvent interférer.

On considère deux ondes de pulsation ω_1 et ω_2 ayant pour amplitudes respectives en M : $s_1(M,t) = s_{1m}\cos(\omega_1 t - \phi_1(M))$ et $s_2(M,t) = s_{2m}\cos(\omega_2 t - \phi_2(M))$. Les termes $\phi_1(M)$ et $\phi_2(M)$ contiennent la phase initiale des ondes ainsi que celle due à la propagation depuis la source jusqu'à M. L'amplitude totale en M est $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$ et l'éclairement :

$$\mathscr{E} = K\left\langle s(M,t)^2\right\rangle = K\left\langle s_1(M,t)^2\right\rangle + K\left\langle s_2(M,t)^2\right\rangle + 2K\left\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle$$

Le premier terme correspond à l'éclairement pour l'onde s_1 seule et vaut $\mathscr{E}_1$. De manière similaire le second terme est l'éclairement pour l'onde s_2 seule et vaut $\mathscr{E}_2$. Enfin, après linéarisation, le troisième terme s'écrit :

$$Ks_{1m}s_{2m}\left[\langle\cos((\omega_2+\omega_1)t - \phi_2 - \phi_1)\rangle + \langle\cos((\omega_2-\omega_1)t - \phi_2 + \phi_1)\rangle\right]$$

Les deux termes sont des fonctions sinusoïdales du temps de valeur moyenne nulle. On a donc $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

2 ☒ V ❒ F Si deux sources sont incohérentes, on peut sommer leurs éclairements.

On l'a démontré dans la question précédente pour deux sources incohérentes temporellement. Pour deux sources incohérentes spatialement ce sont les phases initiales $\phi_{01}(t)$ et $\phi_{02}(t)$ qui dépendent du temps et ne sont pas corrélées donc on aura aussi $\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\rangle = 0$ et $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$.

3 ❒ V ☒ F Une lampe spectrale telle que la lampe au sodium est monochromatique.

En général une lampe spectrale contient plusieurs raies de couleurs différentes (par exemple la lampe à Mercure). Dans le cas du sodium, il y a deux raies jaunes très proches l'une de l'autre de longueurs d'onde 589 nm et 589,6 nm (on parle de doublet). Enfin, même si on isole une seule raie, celle-ci n'est pas rigoureusement monochromatique, elle a une largeur $\Delta\lambda \ll \lambda$.

4 ❒ V ☒ F Une source laser est monochromatique.

Une source laser a une largeur spectrale bien plus petite qu'une lampe spectrale mais pas nulle ; on parle souvent de source quasi monochromatique.

5 ☒ V ❒ F Si la différence de marche est plus petite que la longueur de cohérence, on peut observer des interférences.

La longueur de cohérence L_c correspond à la longueur des trains d'onde. Soient les deux trains d'ondes cohérents, issus du même train d'onde initial et passant par les deux voies de l'interféromètre, il y a interférence en M si le train d'onde le plus tardif arrive alors que l'autre n'a pas fini d'arriver soit $L_c > \delta$. Deux trains d'onde non issus d'un même train d'onde initial ne sont pas cohérents et ne peuvent donner d'interférences.

6 ☒ V ❒ F Deux points d'émission d'une même source sont incohérents.

Deux points d'une même source sont *a priori* non corrélés, donc incohérents.

7 ❒ V ☒ F Il est possible d'obtenir des interférences avec deux sources différentes de même longueur d'onde. C'est d'autant plus vrai qu'elles sont éloignées l'une de l'autre.

Il en est de même que pour deux points différents d'une même source. Deux sources différentes sont *a priori* non corrélées, donc ne peuvent donner des interférences même si l'on fait passer leur lumière par un filtre très sélectif.

QCM

8 Quelle serait la longueur de cohérence L_c d'un train d'onde d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ ?

☒ **a.** $L_c \to \infty$

❒ **b.** $L_c = 0$

❒ **c.** $L_c = \lambda$

❒ **d.** L_c dépend du milieu de propagation.

La longueur de cohérence est $L_c = c\tau$ où τ est la « durée » du train d'onde (temps de passage du train d'onde en un point), avec $\tau\Delta\nu \sim 1$. Pour une onde idéale monochromatique $\Delta\nu = 0$ donc L_c est infini. Avec une telle onde, on aurait des interférences quelle que soit la différence de marche.

9 Pour le doublet jaune du sodium de longueur d'onde moyenne $\lambda = 589,3$ nm, la largeur spectrale est $\Delta\lambda = 0,6$ nm. Déterminer la longueur de cohérence L_c correspondante.

❒ **a.** $L_c \simeq 1,7 \cdot 10^3$ m

❒ **b.** $L_c \simeq 6 \cdot 10^{-10}$ m

☒ **c.** $L_c \simeq 5,8 \cdot 10^{-4}$ m

❒ **d.** $L_c \simeq 5,9 \cdot 10^{-7}$ m

On relie $\Delta\nu$ à $\Delta\lambda$ en différentiant $\nu = c/\lambda$ ce qui donne $\mathrm{d}\nu = -\dfrac{c\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}$ soit en prenant la valeur absolue $\Delta\nu = \dfrac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$ et $L_c = c\tau = \dfrac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 5,8 \cdot 10^{-4}$ m.

10 On observe une figure d'interférence obtenue avec des fentes d'Young espacées de $a = 0,5$ mm, l'écran étant à une distance $D = 1$ m. La source est blanche ($0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,75\mu\text{m}$). On place la fente d'entrée d'un spectroscope à 0,5 cm du centre de la figure d'interférences parallèlement aux franges. Déterminer les longueurs d'onde manquantes.

❒ **a.** $\lambda_1 \simeq 500$ nm ; $\lambda_2 \simeq 625$ nm ; $\lambda_3 \simeq 833$ nm

☒ **b.** $\lambda_1 \simeq 455$ nm ; $\lambda_2 \simeq 556$ nm ; $\lambda_3 \simeq 714$ nm

❒ **c.** $\lambda_1 \simeq 417$ nm ; $\lambda_2 \simeq 500$ nm ; $\lambda_3 \simeq 625$ nm

❒ **d.** $\lambda_1 \simeq 521$ nm ; $\lambda_2 \simeq 658$ nm ; $\lambda_3 \simeq 893$ nm

Les longueurs d'onde manquantes correspondent à des franges sombres donc telles que la différence de marche $\delta = \left(p + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ avec p entier. Or pour les fentes d'Young $\delta = \dfrac{ax}{D} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ m. On peut écrire :

$$0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,75\mu\text{m} \Rightarrow \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-6}} \leq p + \frac{1}{2} \leq \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{0,4 \cdot 10^{-6}}$$

soit $2,83 \leq p \leq 5,75$; Puisque p est entier il peut prendre les valeurs $\{3, 4, 5\}$. Ensuite on calcule les longueurs d'onde $\delta = \left(p + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$, ce qui donne la série de la réponse **b**.

Cet énoncé concerne les questions 11 à 13 :
Un interféromètre est éclairé par une lampe de Mercure dont on isole le doublet jaune ($\lambda_1 = 0,577$ μm et $\lambda_2 = 0,579$ μm) avec un filtre. On suppose que les composantes du doublet ont même intensité et que chacune donne un éclairement $\mathscr{E}_0$ sur l'écran en l'absence d'interféromètre. On note δ la différence de marche en un point M de l'écran. On notera aussi $\lambda_m = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ la longueur d'onde moyenne et $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ l'écart entre les deux longueurs d'onde.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 Déterminer l'éclairement sur l'écran.

❒ **a.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$

☒ **c.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\Delta\lambda}\right)\right]$

Les ondes de longueurs d'onde différentes sont incohérentes donc on peut ajouter leurs éclairements. Chacune donne un système d'interférence avec $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$ avec δ indépendant de λ dans l'air. L'éclairement total est :

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right)$$

soit

$$\frac{\mathscr{E}}{4\mathscr{E}_0} = \left[1 + \cos\left(\pi\delta\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}\right)\cos\left(\pi\delta\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}\right)\right] = \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)\right]$$

en remplaçant $\lambda_2 - \lambda_1$ par $\Delta\lambda$, $\lambda_2 + \lambda_1$ par $2\lambda_m$, et les λ_1 et λ_2 restants par λ_m.

Pour une source monochromatique, on aurait $\Delta\lambda = 0$ et l'on retrouve l'expression classique de la formule des interférences.

12 La visibilité $\mathscr{V}$ des franges est :

❒ **a.** $\mathscr{V} = \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{V} = 1$

❒ **c.** $\mathscr{V} = \sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)$

☒ **d.** $\mathscr{V} = \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)$

Le contraste ou la visibilité sont définis par $\mathscr{V} = \frac{\mathscr{E}_{max} - \mathscr{E}_{min}}{\mathscr{E}_{max} + \mathscr{E}_{min}}$. On s'intéresse aux maxima et minima locaux donc comme $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \ll \frac{1}{\lambda_m}$, le premier cosinus varie moins rapidement avec δ que le second. On pourra écrire alors $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{max}$ pour $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right) = 1$ et $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{min}$ pour $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right) = -1$ soit :

$$\mathscr{V} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right) - 1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right)$$

13 En faisant croître δ depuis $\delta = 0$, la première disparition des franges a lieu pour :

❒ **a.** $\delta = 0$

❒ **b.** $\delta = \dfrac{\lambda_m}{2}$

☒ **c.** $\delta = \dfrac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$

❒ **d.** $\delta = \dfrac{\Delta\lambda}{2}$

Les disparitions de franges ont lieu pour $\mathscr{V} = 0$, ce qui correspond à un éclairement uniforme, donc pour $\dfrac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2} = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ avec m entier. La première disparition correspond à $m = 0$ soit $\delta = \dfrac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$.

Cet énoncé concerne les questions 14 à 16 :
On éclaire un dispositif interférométrique par une source polychromatique qui émet dans l'intervalle de fréquence $\left[\nu_m - \dfrac{\Delta\nu}{2}, \nu_m + \dfrac{\Delta\nu}{2}\right]$. Le profil spectral est supposé rectangulaire, c'est-à-dire qu'il n' y a pas d'émission en dehors de l'intervalle précédent et que pour l'intervalle $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$, l'éclairement sur l'écran donné par chaque voie de l'interféromètre est $\mathscr{E}_0 \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\Delta\nu}$. On notera δ la différence de marche due à l'interféromètre.

14 L'éclairement élémentaire donné par l'interféromètre pour l'intervalle $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ est :

❒ **a.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\nu\delta}{c}\right)\right)\mathrm{d}\nu$

❒ **b.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu$

☒ **c.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\nu\delta}{c}\right)\right)\mathrm{d}\nu$

❒ **d.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\dfrac{\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu$

Pour une onde monochromatique dont l'éclairement est $\mathscr{E}_0$ en l'absence d'interféromètre, l'éclairement sur l'écran donné par l'interféromètre est $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)$. On généralise à la source quasi-monochromatique de fréquence appartenant à l'intervalle $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ en remplaçant $\mathscr{E}_0$ par $\mathscr{E}_0 \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\Delta\nu}$ et λ par c/ν.

15 L'éclairement observé sur l'écran est :

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta\nu_m}{c}\right)\right]$

☒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta\nu_m}{c}\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}\cos\left(\dfrac{2\pi\delta\nu_m}{c}\right)\right]$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Comme les différentes ondes de l'intervalle sont incohérentes, on peut sommer les éclairements ce qui revient ici à calculer l'intégrale : $\mathscr{E} = \int_{\nu_m - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_m + \frac{\Delta\nu}{2}} \mathrm{d}\mathscr{E}$, soit :

$$\mathscr{E} = \frac{2\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\left[1 + \frac{c}{2\pi\delta}\sin\left(\frac{2\pi\delta\nu}{c}\right)\right]_{\nu_m - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_m + \frac{\Delta\nu}{2}}$$

On en déduit :

$$\mathscr{E} = \frac{2\mathscr{E}_0}{\Delta\nu}\left[\Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta}\left[\sin\left(\frac{2\pi\delta}{c}\left(\nu_m + \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi\delta}{c}\left(\nu_m - \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right)\right]\right]$$

En utilisant la formule $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on trouve la réponse **b**. On vérifie que pour $\Delta\nu = 0$ (onde monochromatique) on retrouve la formule classique car le terme en $\frac{\sin x}{x}$ vaut 1 pour $x = 0$.

16 En faisant croître δ depuis $\delta = 0$, le contraste s'annule une première fois pour :

☒ **a.** $\delta = \frac{c}{\Delta\nu}$

❒ **b.** $\delta = \frac{c}{4\nu_m}$

❒ **c.** $\delta = \frac{c}{2\nu_m}$

❒ **d.** Pas d'annulation de contraste.

Le contraste ou visibilité $\mathscr{V} = \frac{\mathscr{E}_{max} - \mathscr{E}_{min}}{\mathscr{E}_{max} + \mathscr{E}_{min}}$ est obtenu comme précédemment en écrivant les maxima et minima locaux pour $\cos\frac{2\pi\delta\nu_m}{c} = \pm 1$ soit $\mathscr{V} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}\right)}{\frac{\pi\delta\Delta\nu}{c}}$. La fonction $\frac{\sin x}{x}$ s'annule une première fois pour $x = \pi$ soit $\delta = \frac{c}{\Delta\nu}$.

Cet énoncé concerne les questions 17 à 20 :
On s'intéresse à un dispositif constitué d'une lentille mince convergente L_1, de distance focale f' et d'un écran E percé de deux fentes fines et parallèles F_1 et F_2 dont on peut faire varier la distance e.

Le dispositif est éclairé par deux sources ponctuelles monochromatiques S_1 et S_2, de même longueur d'onde λ_0, faisant chacune un angle α_0 avec l'axe optique (figure 16.1).

Les observations se font en un point M du plan focal de la lentille L_1.

17 Qu'observe-t-on de manière générale ?

❒ **a.** Un éclairement uniforme.

❒ **b.** Des franges rectilignes parallèles à $F'x$.

☒ **c.** Des franges rectilignes parallèles à $F'y$.

❒ **d.** Des anneaux.

On a un dispositif de fentes d'Young parallèles à l'axe $F'y$ avec deux sources ponctuelles à l'infini. Chaque source va donner une figure d'interférences formée de franges parallèles à $F'y$ dans le plan focal image de la lentille. À part le cas particulier où les franges sombres pour l'une des sources correspondent exactement aux franges brillantes pour l'autre, on observe donc des franges plus ou moins contrastées suivant la valeur de α_0.

18 On note $\delta_1 = (S_1F_2M) - (S_1F_1M)$ (resp. $\delta_2 = (S_2F_2M) - (S_2F_1M)$) la différence de marche en M pour la source S_1 (resp. S_2). Déterminer δ_1 et δ_2 dans les conditions de Gauss.

❒ **a.** $\delta_1 = e\left(\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

☒ **b.** $\delta_1 = e\left(-\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

☒ **c.** $\delta_2 = e\left(\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

❒ **d.** $\delta_2 = e\left(-\alpha_0 + \dfrac{x}{f'}\right)$

Ce calcul a été réalisé dans le chapitre « Interférences à deux ondes » à la question (16). Les différences sont l'inversion des deux orientations pour les angles et x donc il faut changer α_0 en $-\alpha_0$ et x en $-x$ dans le résultat de la question (16) pour le calcul de δ_1 et garder α_0 pour δ_2. En fait ici $\alpha_0 < 0$.

19 Pour quelle plus petite valeur e_m de e observe-t-on un éclairement uniforme ?

❒ **a.** $e_m = 0$

❒ **b.** $e_m = \dfrac{\lambda_0}{2}$

❒ **c.** $e_m = \dfrac{\lambda_0}{4\alpha_0}$

☒ **d.** $e_m = -\dfrac{\lambda_0}{4\alpha_0}$

L'éclairement est uniforme si les franges sombres pour l'une des sources correspondent exactement aux franges brillantes pour l'autre. Dans les deux cas, l'interfrange vaut $i = \dfrac{\lambda_0 f'}{e}$. Le centre de la figure pour S_1 ($\delta_1 = 0$) est en $x_{10} = \alpha_0 f'$ donc les franges brillantes sont aux positions $x_{1b} = \alpha_0 f' + mi$ avec m entier. Le centre de la figure pour S_2 ($\delta_2 = 0$) est en $x_{20} = -\alpha_0 f'$ donc les franges sombres sont aux positions $x_{2s} = -\alpha_0 f' + \left(p + \dfrac{1}{2}\right) i$ avec p entier. Ainsi, une frange sombre pour S_2 correspondra à une frange sombre pour S_1 si $x_{1b} = x_{2s}$, soit :

$$\alpha_0 f' + m\frac{\lambda_0 f'}{e} = -\alpha_0 f' + \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 f'}{e} \Rightarrow e = \frac{\lambda_0}{2\alpha_0}\left(p - m + \frac{1}{2}\right)$$

Sachant que $\alpha_0 < 0$ et $e > 0$, la plus petite valeur de e_m est pour $p - m = -1$ soit $e = -\dfrac{\lambda_0}{4\alpha_0}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

20 On note $\mathscr{E}_0$ l'éclairement en M dû à une seule des deux sources lorsqu'une des voies de l'interféromètre est obturée. Déterminer l'éclairement total $\mathscr{E}$ observée en M.

☒ **a.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e x}{\lambda_0 f'}\right)\cos\left(\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e}{\lambda_0}\left(\alpha_0 + \frac{x}{f'}\right)\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0}\right)\right]$

❒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e x}{\lambda_0 f'}\right)\cos\left(\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0}\right)\right]$

Les deux sources sont incohérentes donc l'éclairement total est la somme des éclairements donnés par chaque source :

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi e}{\lambda_0}\left(-\alpha_0 + \frac{x}{f'}\right)\right) + 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\frac{2\pi e}{\lambda_0}\left(\alpha_0 + \frac{x}{f'}\right)\right)$$

Avec la formule $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, on trouve la réponse **a**. On vérifie que pour le résultat de la question précédente $\left(e = -\frac{\lambda_0}{4\alpha_0}\right)$ le contraste $\cos\frac{2\pi e \alpha_0}{\lambda_0} = 0$.

Cet énoncé concerne les questions 21 à 23 :
On étudie la figure donnée par des fentes d'Young éclairées par une fente de largeur b et de très grande longueur L, parallèle à F_1 et F_2. (figure 16.2). Losqu'on cache une voie de l'interféromètre, l'éclairement obtenu sur l'écran, pour une fente source élémentaire de largeur $\mathrm{d}x'$ est $\mathscr{E}_0\frac{\mathrm{d}x'}{b}$.
On suppose que b et a sont petits devant d et D.

21 L'éclairement $\mathrm{d}\mathscr{E}$ donné par l'interféromètre éclairé par la fente élémentaire de largeur $\mathrm{d}x'$ est :

❒ **a.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

☒ **b.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{d}\right)\right)\right]\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

❒ **c.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

❒ **d.** $\mathrm{d}\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} - \frac{x'}{d}\right)\right)\right]\frac{\mathrm{d}x'}{b}$

Pour une source ponctuelle ou une fente parallèle à $O'y$ qui donne un éclairement $\mathscr{E}_0$ en l'absence d'interféromètre, l'éclairement sur l'écran donné par l'interféromètre est $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)$. On généralise à la fente source quasi sans épaisseur en remplaçant $\mathscr{E}_0$ par $\mathscr{E}_0\dfrac{\mathrm{d}x'}{b}$. D'autre part , comme démontré au chapitre « Interférences à deux ondes » à la question (13) $\delta = a\left(\dfrac{x'}{d} + \dfrac{x}{D}\right)$ d'où la réponse **b**.

22 L'éclairement total observé $\mathscr{E}$ est :

❒ **a.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]$

❒ **b.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 - \dfrac{\sin\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)}{\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}}\cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]$

❒ **c.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0$

☒ **d.** $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)}{\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}}\cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right]$

Les différentes parties de la source sont incohérentes, donc on peut sommer les éclairements ce qui revient ici à calculer l'intégrale : $\mathscr{E} = \displaystyle\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}\mathscr{E}$, soit :

$$\mathscr{E} = \frac{2\mathscr{E}_0}{b}\left[x' + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{d}\right)\right]_{-b/2}^{b/2}$$

On en déduit :

$$\mathscr{E} = \frac{2\mathscr{E}_0}{b}\left[b + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a}\left(\sin\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} + \frac{b}{2d}\right) - \sin\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\frac{x}{D} - \frac{b}{2d}\right)\right)\right]$$

En utilisant la formule $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$, on trouve la réponse **d**.

23 Si l'on augmente la largeur de la fente à partir de $b = 0$, quelle(s) est(sont) la(les) propositions justes ?

☒ **a.** La frange centrale est sombre pour $\dfrac{\lambda_0 d}{a} < b < 2\dfrac{\lambda_0 d}{a}$.

❒ **b.** La visibilité est nulle pour $b = 0$.

☒ **c.** la visibilité est nulle pour $b = \dfrac{\lambda_0 d}{a}$.

❒ **d.** On observe des franges $\forall b$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

La visibilité est $\mathscr{V} = \dfrac{\sin \frac{\pi ab}{\lambda_0 d}}{\frac{\pi ab}{\lambda_0 d}}$. Cette dernière est nulle pour $\dfrac{\pi ab}{\lambda_0 d} = \pi$ d'où la réponse **c**. D'autre part, pour $\dfrac{\lambda_0 d}{a} < b < 2\dfrac{\lambda_0 d}{a}$, la visibilité est négative donc pour $x = 0$ la frange est sombre.

17 Diffraction de Fraunhofer et réseaux

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F D'après le principe d'Huygens-Fresnel, chaque point d'une surface atteinte par une onde incidente se comporte comme une source secondaire ponctuelle émettant une onde plane.

Chaque point de la surface se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique.

2 ☒ V ❒ F D'après le principe d'Huygens-Fresnel, les sources secondaires émettent des ondes cohérentes entre elles.

C'est l'énoncé du principe.

3 ☒ V ❒ F Plus une pupille est de faibles dimensions, plus la figure de diffraction est étendue.

La largeur angulaire de la tache de diffraction d'une ouverture de dimension a est proportionnelle à λ_0/a.

4 ❒ V ☒ F Une fente et un cheveu donnent des figures de diffraction complètement différentes.

Il s'agit du théorème des écrans complémentaires ou théorème de Babinet. Les figures sont semblables sauf au centre.

5 ❒ V ☒ F Lorsqu'on translate la source, la figure de diffraction est inchangée.

La figure de diffraction est « centrée » autour de l'image géométrique de la source par le système optique. Si on translate la source, son image est *a priori* translatée.

6 ☒ V ❒ F Lorsqu'on translate la pupille dans son plan, la figure de diffraction est inchangée.

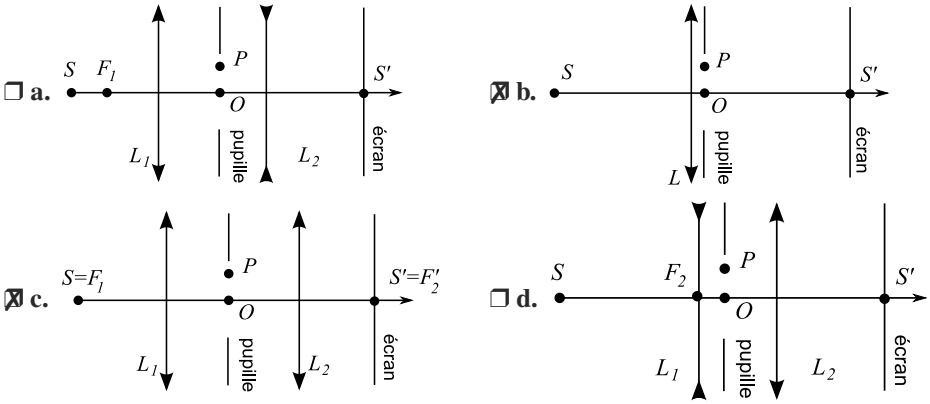
La translation de la pupille ne provoque pas de translation de l'image géométrique de la source.

7 ☒ V ❒ F Dans un ordre donné, un réseau dévie plus la lumière rouge que la lumière bleue.

On verra la formule du réseau plus loin. C'est effectivement le contraire du prisme qui dévie plus le bleu.

QCM

8 Parmi les montages suivants, lequel(lesquels) permet(permettent) d'observer une figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer ? Dans tous les cas S' est l'image de S par l'ensemble des lentilles.



Le diffraction de Fraunhofer est appelée aussi diffraction à l'infini. La pupille est éclairée par un faisceau parallèle et on observe la figure de diffraction à l'infini. Dans le cas de la figure **c.**, la source est au foyer objet de la lentille L_1 **convergente** ce qui donne un faisceau parallèle et l'écran est dans le plan focal image de la lentille L_2 **convergente** ce qui permet d'observer la figure à l'infini donnée par la pupille. Dans les cas **a.** et **d.** les lentilles divergentes ne permettent pas ces observations. Pour le montage **b.**, on admet qu'il convient. On peut qualitativement l'expliquer en pensant qu'on rapproche les deux lentilles jusqu'à les confondre, la lentille L étant proche de la pupille.

Cet énoncé concerne les questions 9 à 10 :
On s'intéresse à une fente de grande longueur L suivant Oy' et de largeur a symétrique par rapport à l'axe Ox'.

9 L'intensité diffractée par la fente est :

❒ **a.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a(\beta_i - \beta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **b.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{2\pi a(\beta_i - \beta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **c.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{2\pi a(\alpha_i - \alpha)}{\lambda_0}\right)$

☒ **d.** $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a(\alpha_i - \alpha)}{\lambda_0}\right)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

La fente étant de très grande longueur suivant y' on peut la considérer comme infinie et raisonner dans le plan $x'Oz$ donc $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{u_i}-\overrightarrow{u}) = x'(\alpha_i-\alpha)$ et $t(x', y') = 1$ pour $-\dfrac{L}{2} \leq y' \leq \dfrac{L}{2}$ et $-\dfrac{a}{2} \leq x' \leq \dfrac{a}{2}$. On écrit alors :

$$\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{e}^{-i\omega t}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{i\dfrac{2\pi(\alpha_i-\alpha)x'}{\lambda_0}}\,\mathrm{d}x' \int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}y'$$

ce qui donne ;

$$\frac{\underline{a_d}}{\underline{K}\mathrm{e}^{-i\omega t}} = L\frac{\lambda_0}{2i\pi(\alpha_i-\alpha)}\left(\mathrm{e}^{i\dfrac{\pi(\alpha_i-\alpha)a}{\lambda_0}} - \mathrm{e}^{i\dfrac{-\pi(\alpha_i-\alpha)a}{\lambda_0}}\right) = aL\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a(\alpha_i-\alpha)}{\lambda_0}\right)$$

L'intensité est proportionnelle à $\underline{a_d}\underline{a_d^\star}$ avec I_0 le maximum pour $\alpha_i - \alpha = 0$, ce qui donne la réponse **d**.

10 L'incidence étant fixée, le maximum principal pour la figure de diffraction de la fente précédente a pour largeur $\Delta|\alpha|$:

❒ **a.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{\lambda_0}{a}$

☒ **b.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{2\lambda_0}{a}$

❒ **c.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{\lambda_0}{2a}$

❒ **d.** $\Delta|\alpha| = \dfrac{a}{\lambda_0}$

La fonction $\mathrm{sinc}(x)$ s'annule pour $x = m\pi$ avec m entier relatif non nul, donc la largeur du maximum central correspond aux annulations en $\pm\pi$ soit $\Delta\left|\dfrac{\pi(\alpha_i-\alpha)a}{\lambda_0}\right| = 2\pi$, d'où puisque α_i est fixé, $\Delta|\alpha| = \dfrac{2\lambda_0}{a}$.

Cet énoncé concerne les questions 11 à 12 :
On observe la figure de diffraction d'une pupille rectangulaire centrée en O, de dimensions a suivant Ox' et b suivant Oy', éclairée en incidence normale. L'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente (figure 17.1).

11 Déterminer l'éclairement $\mathscr{E}$ sur l'écran.

❒ **a.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\sin\theta}{\lambda_0}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a\sin\theta'}{\lambda_0}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\tan\theta}{\lambda_0}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a\tan\theta'}{\lambda_0}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a\tan\theta}{\lambda_0}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\tan\theta'}{\lambda_0}\right)$

☒ **d.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda_0}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\sin\theta'}{\lambda_0}\right)$

Puisque l'incidence est normale $\alpha_i = \beta_i = 0$. De plus $t(x', y') = 1$ si $x' \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ et $y' \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ et $t(x', y')$ est nul sinon. De plus $\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{u}) = -x'\alpha - y'\beta$. L'amplitude diffractée s'écrit :

$$\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{e}^{-i\omega t} \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi\alpha x'}{\lambda_0}} \mathrm{d}x' \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi\beta y'}{\lambda_0}} \mathrm{d}y'$$

Après intégration, on obtient :

$$\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{e}^{-i\omega t} ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda_0}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda_0}\right)$$

Puisqu'on observe dans le plan focal de la lentille, α et β sont respectivement les projections de $\overrightarrow{u}$ sur Ox et Oy, soit $\alpha = \sin\theta$ et $\beta = \sin\theta'$. L'éclairement est proportionnel à $\underline{a_d}\underline{a_d^\star}$ avec $\mathscr{E}_0$ le maximum pour $\alpha = \beta = 0$, ce qui donne la réponse **d**.

12 La longueur d'onde est $\lambda_0 = 0,5\ \mu$m et la distance focale de la lentille $f' = 1$ m. La taille de la tache centrale sur l'écran est 1,43 cm selon x et 2,86 cm selon y. En déduire a et b.

❒ **a.** $a = 35\ \mu$m et $b = 70\ \mu$m
❒ **b.** $a = 35\ \mu$m et $b = 17,5\ \mu$m
☒ **c.** $a = 70\ \mu$m et $b = 35\ \mu$m
❒ **d.** $a = 17,5\ \mu$m et $b = 35\ \mu$m

Dans l'approximation de Gauss $\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{x}{f'}$ et de même $\sin\theta' \simeq \frac{y}{f'}$. La largeur de la tache centrale suivant x correspond à $\Delta\left(\frac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right) = 2\pi$ soit $a = \frac{2\lambda_0 f'}{\Delta x}$. On trouve $a = 70\ \mu$m. De même $b = \frac{2\lambda_0 f'}{\Delta y} = 35\ \mu$m.

13 On considère la diffraction à travers l'ouverture circulaire d'un télescope de rayon $R = 4$ m. Quelle est la largeur angulaire la plus petite pouvant être observée avec $\lambda_0 = 0,5\ \mu$m ?

❒ **a.** $0,016''$
☒ **b.** $0,031''$
❒ **c.** $0,026''$
❒ **d.** $0,013''$

Le diamètre angulaire de la tache d'Airy (tache centrale de diffraction) est $\Delta\theta = 1,22\frac{\lambda_0}{R}$. L'application numérique donne $\Delta\theta = 1,525 \cdot 10^{-7}$ rad soit $\Delta\theta = \frac{1,525 \cdot 10^{-7}}{\pi} \times 180 \times 3600'' = 0,031''$.

Cet énoncé concerne les questions 14 à 15 :
On prend en compte la diffraction dans l'étude de la figure donnée par des fentes

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

d'Young. Les fentes de largeur a ont leurs centres espacés d'une distance b. Elles sont parallèles à l'axe Oy' et symétriques par rapport à cet axe. Les fentes sont éclairées en incidence normale. On notera $\mathscr{E}_0$ la constante de normalisation pour l'éclairement telle que l'éclairement maximal obtenu sur l'écran soit $2\mathscr{E}_0$.

14 Dans le plan focal image d'une lentille convergente (figure 17.1), l'expression de l'éclairement observé est :

❒ **a.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\dfrac{2\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)$

❒ **b.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \text{sinc}\left(\dfrac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\dfrac{2\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)$

❒ **c.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)$

☒ **d.** $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\dfrac{2\pi b x}{\lambda_0 f'}\right)$

On suppose les fentes de très grande longueur suivant Oy' donc on peut raisonner dans le plan $x'Oz$. La fonction de transmission est donc $t(x', y') = 1$ pour $x' \in \left[-\dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{2}\right] \cup \left[\dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{2}\right]$ et $t(x', y') = 0$ sinon. Pour alléger l'écriture on notera $\underline{K'} = \underline{K}\mathrm{e}^{-i\omega t}\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}y'$. L'amplitude diffractée après les fentes est donc :

$$\underline{a_d} = \underline{K'}\left(\int_{-b/2-a/2}^{-b/2+a/2} \mathrm{e}^{-i\dfrac{2\pi\alpha x'}{\lambda_0}}\,\mathrm{d}x' + \int_{b/2-a/2}^{b/2+a/2} \mathrm{e}^{-i\dfrac{2\pi\alpha x'}{\lambda_0}}\,\mathrm{d}x'\right)$$

Pour la première intégrale, on effectue le changement de variable $X' = x' + \dfrac{b}{2}$ et pour la deuxième $X' = x' - \dfrac{b}{2}$ ce qui donne :

$$\underline{a_d} = \underline{K'}\left(\mathrm{e}^{i\dfrac{2\pi\alpha b}{2\lambda_0}}\int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{e}^{-i\dfrac{2\pi\alpha X'}{\lambda_0}}\,\mathrm{d}X' + \mathrm{e}^{-i\dfrac{2\pi\alpha b}{2\lambda_0}}\int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{e}^{-i\dfrac{2\pi\alpha X'}{\lambda_0}}\,\mathrm{d}X'\right)$$

Les deux intégrales correspondent à l'amplitude diffractée par une fente de largeur a, d'où :

$$\underline{a_d} = \underline{K'}a\,\text{sinc}\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda_0}\right)\left(\mathrm{e}^{i\dfrac{2\pi\alpha b}{2\lambda_0}} + \mathrm{e}^{-i\dfrac{2\pi\alpha b}{2\lambda_0}}\right) = 2\underline{K'}a\,\text{sinc}\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha b}{\lambda_0}\right)$$

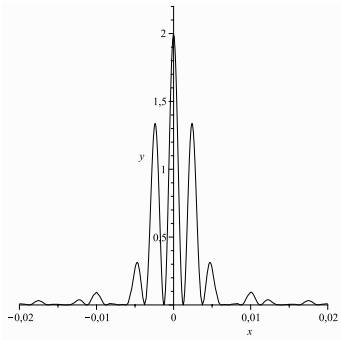
En remplaçant α par x/f' comme déjà fait et en écrivant que $\mathscr{E}$ est proportionnel à $\underline{a_d}\underline{a_d}^\star$, on obtient :

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x b}{\lambda_0 f'}\right) = \mathscr{E}_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi x b}{\lambda_0 f'}\right)$$

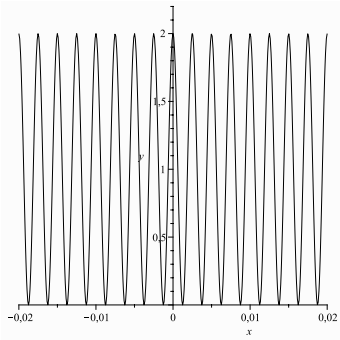
On remarque que le fait de translater une pupille dans son plan d'un vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ revient à multiplier l'amplitude diffractée par : $\exp\left(-i\dfrac{2\pi\vec{u}\cdot\overrightarrow{OO_1}}{\lambda_0}\right)$. Lorsqu'il s'agit d'une pupille seule, ce facteur disparaît dans le calcul de l'éclairement qui est donc inchangé.

15 Parmi les figures suivantes, laquelle représente l'éclairement observé ?

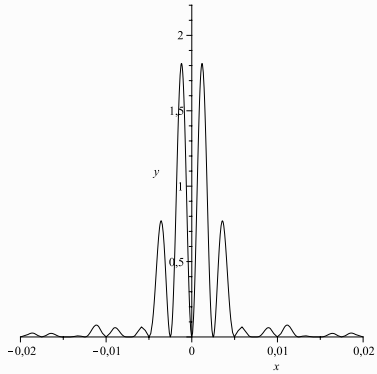
☒ **a.**



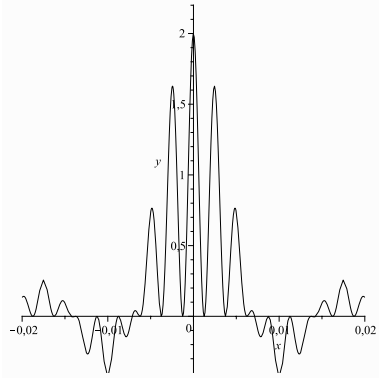
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



La figure **b.** représente la figure d'interférences des fentes d'Young sans tenir compte de la diffraction. La bonne figure est donc la courbe de la figure **b.** multipliée par sinc^2, ce n'est donc pas la **d.** qui a pour enveloppe un sinc. Entre la **a.** et la **c.**, on remarque que $\mathscr{E}(0) = 0$ pour la **c.** alors que l'expression de $\mathscr{E}$ donne une frange brillante en $x = 0$, ce qui est le cas de **a**.

16 On étudie un réseau plan en transmission de n traits par unité de longueur, éclairé en lumière parallèle sous incidence θ. On note a l'écart entre deux traits. On observe la figure donnée par le réseau dans l'ordre k (entier) correspondant à l'angle θ'_k (figure 17.2).

La formule du réseau correspondant aux maximas observés est :

❒ **a.** $\sin\theta'_k + \sin\theta = kn\lambda_0$

☒ **b.** $\sin\theta'_k - \sin\theta = kn\lambda_0$

❒ **c.** $\tan\theta'_k - \tan\theta = kn\lambda_0$

❒ **d.** $\tan\theta'_k + \tan\theta = kn\lambda_0$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Si on généralise le résultat obtenu pour les fentes d'Young, la figure obtenue sera une figure d'interférences pour laquelle intervient le déphasage entre les centres successifs de chaque fente modulée par la courbe de diffraction en sinc^2. Les maxima d'interférences correspondent donc à une différence de marche de $k\lambda_0$ entre deux centres successifs avec k entier. On utilise le théorème de Malus (figure 17.5) avec les deux plans d'onde Σ pour les rayons incidents et Σ' pour les rayons diffractés.

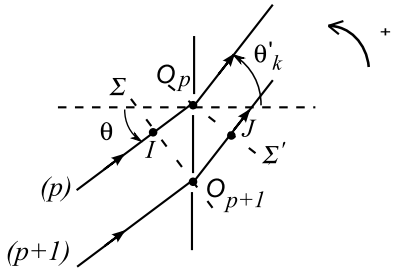


Figure 17.5

Ce raisonnement a déjà été effectué plusieurs fois. La différence de marche entre le rayon $(p+1)$ et la rayon (p) est $\delta = O_{p+1}J - IO_p$. Toutes les grandeurs étant positives sur le schéma, on a $O_{p+1}J = a\sin\theta'_k$ et $IO_p = a\sin\theta$. Avec $\delta = k\lambda_0$ et $n = 1/a$, on trouve la réponse **b**.

17 On étudie un réseau plan en réflexion de n traits par unité de longueur, éclairé en lumière parallèle sous incidence θ. On observe la figure donnée par le réseau dans l'ordre k (entier) correspondant à l'angle θ'_k (figure 17.3).

La formule du réseau correspondant aux maximas observés est :

☒ **a.** $\sin\theta'_k + \sin\theta = kn\lambda_0$

❒ **b.** $\sin\theta'_k - \sin\theta = kn\lambda_0$

❒ **c.** $\tan\theta'_k - \tan\theta = kn\lambda_0$

❒ **d.** $\tan\theta'_k + \tan\theta = kn\lambda_0$

On a représenté sur la figure 17.6, les rayons incidents et les rayons diffractés sur deux schémas différents pour plus de clarté. On utilise de nouveau le théorème de Malus avec les deux plans d'onde Σ pour les rayons incidents et Σ' pour les rayons diffractés.

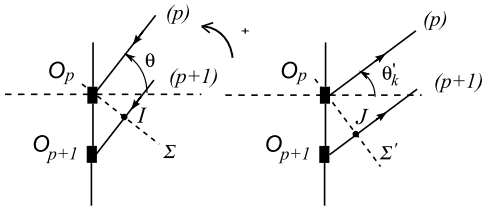


Figure 17.6

La différence de marche entre le rayon $(p+1)$ et la rayon (p) est $\delta = IO_{p+1} + O_{p+1}J$. Toutes les grandeurs étant positives sur le schéma, on a $O_{p+1}J = a\sin\theta'_k$ et $IO_{p+1} = a\sin\theta$. Avec $\delta = k\lambda_0$ et $n = 1/a$, on trouve la réponse **a**.

On remarque que pour $\delta = 0$, on retrouve la loi de Descartes correspondant à la direction de l'optique géométrique.

18 On éclaire un des deux réseaux précédents avec une onde plane monochromatique ($\lambda_0 = 0,5$ µm) sous incidence normale. On prend n =600 traits/mm. Déterminer le nombre d'ordres observables.

❒ **a.** 7000 ❒ **b.** 6

❒ **c.** 1 ☒ **d.** 7

Sous incidence normale $\theta = 0$. D'autre part : $-1 \leq \sin\theta'_k \leq 1$ que l'on peut écrire aussi : $-1 \leq nk\lambda_0 \leq 1$. Avant tout calcul on a intérêt à transformer n en traits par mètre soit $n = 6 \cdot 10^5$ traits/m, d'où $-3,33 \leq k \leq 3,33$. On en déduit $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et qu'il y a sept ordres visibles.

19 Dans le cas d'un réseau plan par transmission, la déviation est la différence d'angle entre le rayon diffracté et le rayon incident $D = \theta'_k - \theta$. On note D_m la déviation minimale pour un ordre k. Quelle(s) relation(s) sont vérifiées pour $D = D_m$?

❒ **a.** $\theta'_k = \theta$ ☒ **b.** $\theta'_k = -\theta$

☒ **c.** $\sin\dfrac{D_m}{2} = \dfrac{kn\lambda_0}{2}$ ❒ **d.** $D_m = 0$

Dans le cas du réseau en transmission, la formule du réseau $\sin\theta'_k - \sin\theta = nk\lambda_0$ s'écrit :

$$2\sin\left(\frac{\theta'_k - \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'_k + \theta}{2}\right) = nk\lambda_0 \;\Rightarrow\; \sin\frac{D}{2} = \frac{nk\lambda_0}{2\cos\left(\dfrac{\theta'_k + \theta}{2}\right)}$$

Ainsi, D est minimal si $\cos\left(\dfrac{\theta'_k + \theta}{2}\right) = 1$, donc si $\theta'_k = -\theta$ et on trouve la réponse **c.** pour D_m.

20 Dans le cas d'un réseau plan de N traits, on note $a = 1/n$ le pas du réseau et $\phi = \dfrac{2\pi a\alpha}{\lambda_0}$ le déphasage entre deux rayons passant par deux traits successifs avec $\alpha = \sin\theta'_k \pm \sin\theta$ (le signe dépendant du type de réseau) . Les traits ont chacun une largeur b. Déterminer l'intensité diffractée dans la direction θ'_k :

❒ **a.** $I = I_0 \dfrac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ ❒ **b.** $I = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\dfrac{\sin^2\left(\frac{(N-1)\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$

❒ **c.** $I = I_0 \dfrac{\sin^2\left(\frac{(N-1)\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ ☒ **d.** $I = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\dfrac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On a vu dans le cas de deux fentes que l'amplitude diffractée par une pupille dont le centre est translaté de O à O' devait être multipliée par un terme de déphasage $\mathrm{e}^{i\phi}$ où $\phi = \pm\dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0}$ et δ est la différence de marche entre les rayons passant par O et ceux par O'. Le signe dans ϕ dépend de la référence prise pour les phases. Donc si $\underline{a_d} = b\underline{K'}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)$ est l'amplitude diffractée par un trait, celle diffractée par le trait suivant est $a_d\mathrm{e}^{i\phi}$ avec le ϕ de l'énoncé correspondant au déphasage des rayons entre les centres de ces deux traits successifs. Puisqu'il y a N traits l'amplitude totale est :

$$\underline{a_{d,t}} = b\underline{K'}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\sum_{p=0}^{N-1}\mathrm{e}^{ip\phi} = b\underline{K'}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\frac{1-\mathrm{e}^{iN\phi}}{1-\mathrm{e}^{i\phi}}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\underline{a_{d,t}} = b\underline{K'}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b\alpha}{\lambda_0}\right)\frac{\mathrm{e}^{iN\phi/2}}{\mathrm{e}^{i\phi/2}}\frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

En écrivant que I est proportionnelle à $\underline{a_{d,t}a_{d,t}}^\star$ et en prenant I_0 comme valeur maximale pour $\alpha = 0$, on trouve la réponse **d**.

Cet énoncé concerne les questions 21 à 23 :
On s'intéresse à un réseau à échelettes par réflexion. Ce réseau est constitué de N bandes réfléchissantes parallèles, de très grande longueur, de même largeur $2b$, faisant un angle $\alpha > 0$ avec la direction d'ensemble du réseau (figure 17.4). Ce réseau est éclairé par une onde plane monochromatique sous une incidence θ par rapport aux bandes réfléchissantes.

21 Déterminer l'amplitude $\underline{a_d}$ diffractée par l'une des bandes réfléchissantes dans une direction faisant l'angle θ'_k avec la normale à la surface. On note $\underline{K}$ la constante de normalisation

☒ **a.** $\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{2\pi b(\sin\theta'_k + \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **b.** $\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{2\pi b(\sin\theta'_k - \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **c.** $\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi b(\sin\theta'_k + \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

❒ **d.** $\underline{a_d} = \underline{K}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi b(\sin\theta'_k - \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$

Pour plus de clarté on a représenté (figure 17.7) sur le schéma de droite les rayons incidents et sur le schéma de gauche les rayons diffractés par O_p et un point P de la facette. On utilise le théorème de Malus avec les plans d'onde Σ pour les rayons incidents et Σ' pour les rayons diffractés.

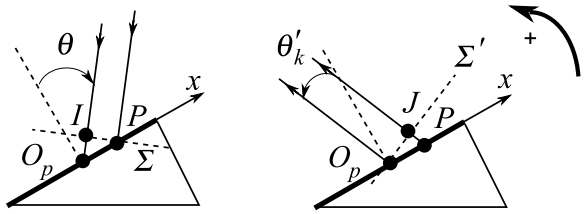


Figure 17.7

La différence de marche entre les rayons passant par P et ceux par O est $\delta_{P/O} = -O_pI + JP$, or en faisant attention aux signes : $O_pI = -x\sin\theta$ et $JP = x\sin\theta'_k$, soit $\delta_{P/O} = x(\sin\theta + \sin\theta'_k)$. L'amplitude diffractée par une facette est donc :

$$\underline{a_d} = \underline{K'}\int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\sin\theta + \sin\theta'_k)x}\,\mathrm{d}x = \underline{K'}2b\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi b(\sin\theta'_k + \sin\theta)}{\lambda_0}\right)$$

soit la réponse **a.** avec $\underline{K} = \underline{K'}2b$.

22 Déterminer la différence de marche $\delta_{p+1/p}$ entre deux rayons passant par les centres successifs O_{p+1} et O_p :

☒ **a.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta'_k + \alpha)]$

❒ **b.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta - \alpha) + \sin(\theta'_k + \alpha)]$

❒ **c.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta - \alpha) - \sin(\theta'_k + \alpha)]$

❒ **d.** $\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta + \alpha) - \sin(\theta'_k + \alpha)]$

Comme dans la question précédente, on a représenté (figure 17.8) sur le schéma de droite les rayons incidents et sur le schéma de gauche les rayons diffractés par O_p et O_{p+1}. On utilise le théorème de Malus avec les plans d'onde Σ pour les rayons incidents et Σ′ pour les rayons diffractés.

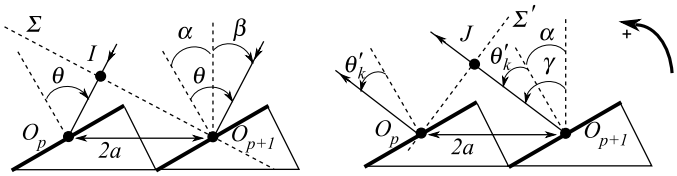


Figure 17.8

La différence de marche des rayons passant par O_{p+1} par rapport à ceux passant par O_p est $\delta_{p+1/p} = -IO_p + O_{p+1}J$. Or $IO_p = -2a\sin\beta$ car $\beta < 0$ et $O_{p+1}J = 2a\sin\gamma$ car $\gamma > 0$. De plus $\beta = \theta + \alpha$ ($\theta < 0$ et $\alpha > 0$) et $\gamma = \alpha + \theta'_k$. On en déduit la réponse **a**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

23 À quelle condition sur θ et α le maximum d'interférence d'ordre k coïncide-t-il avec le maximum central de diffraction d'une facette ?

❒ **a.** $2\cos\theta\cos\alpha = \dfrac{k\lambda_0}{2a}$

❒ **b.** $2\sin\theta\sin\alpha = \dfrac{k\lambda_0}{2a}$

☒ **c.** $2\cos\theta\sin\alpha = \dfrac{k\lambda_0}{2a}$

❒ **d.** $2\cos\theta\sin\alpha = -\dfrac{k\lambda_0}{2a}$

Le maximum d'interférence d'ordre k est tel que $\delta_{p+1/p} = k\lambda_0$, et le maximum de diffraction est obtenu pour l'argument du *sinc* nul soit $\sin\theta'_k + \sin\theta = 0$, ce qui entraine $\theta'_k = -\theta$. Si l'on reporte dans l'autre expression, on obtient :

$$\delta_{p+1/p} = 2a[\sin(\theta+\alpha) + \sin(-\theta+\alpha)] = 4a\ \sin\alpha\ \cos\theta$$

Donc $\delta_{p+1/p} = k\lambda_0$ valide la réponse **c**.

18 Interféromètre de Michelson

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F L'interféromètre de Michelson est à division du front d'onde.

C'est un système à division d'amplitude car la lame semi-réfléchissante oriente vers chaque miroir la moitié de l'énergie incidente, et les sources secondaires sont le résultat des mêmes rayons issus de la source principale. En revanche pour un interféromètre à division du front d'onde type fentes d'Young, l'onde est « coupée » en deux géométriquement, les sources secondaires sont le résultat de rayons différents issus de la source principale.

2 ❒ V ☒ F La compensatrice sert à compenser un déphasage dû aux réflexions sur les miroirs.

Elle sert à compenser le nombre de traversées différent de la séparatrice pour chacune des voies.

3 ☒ V ❒ F Si la source est ponctuelle, les interférences ne sont pas localisées.

Dans le cas idéal d'une source ponctuelle, la cohérence spatiale est parfaite et les interférences ne sont pas localisées. En revanche plus la source est de petite taille, moins la figure est lumineuse.

4 ☒ V ❒ F Si l'interféromètre est réglé en lame d'air, on observe des anneaux.

Il y a symétrie du système par rapport à l'axe optique. Par exemple, dans le cas d'une source principale ponctuelle sur l'axe, les sources secondaires sont aussi sur l'axe et l'écran leur est perpendiculaire, configuration donnant des anneaux.

5 ❒ V ☒ F Si l'interféromètre est réglé en coin d'air, les interférences sont localisées sur le miroir M_2.

La notion de localisation n'apparaît que pour une source étendue. Dans le cas d'une source ponctuelle, comme écrit précédemment, les interférences ne sont pas localisées. Pour observer des franges contrastées sur les miroirs en coin d'air, il faut cependant que la source ne soit pas trop étendue.

6 ❒ V ☒ F En lame d'air, lorsqu'on translate le miroir en se rapprochant du contact optique, les anneaux sortent du centre de la figure.

Lorsqu'on se rapproche du contact optique, les anneaux rentrent par le centre. C'est un résultat à connaître, indispensable pour trouver expérimentalement le contact optique. Pour établir ce résultat, il faut déterminer la relation entre le rayon d'un anneau et la distance e entre les miroirs.

7 ☒ V ❒ F Lorsqu'on utilise l'interféromètre en coin d'air, on place la source dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

Un coin d'air s'éclaire en faisceau quasi-parallèle, obtenu en plaçant la source dans le plan focal d'une lentille convergente.

8 ☒ V ❒ F Lorsqu'on utilise l'interféromètre en lame d'air, on place la source avant le plan focal objet d'une lentille convergente.

On souhaite éclairer les miroirs en lumière convergente, il faut donc placer la source et la lentille en configuration « objet réel-image réelle », donc placer la source avant le foyer objet. Si on place la source entre le foyer objet et la lentille (configuration loupe), le faisceau émergent est divergent.

QCM

9 Déterminer la différence de marche géométrique $\delta_{2/1}$ du rayon 2 par rapport au rayon 1 (figure 18.2).

❒ **a.** $\delta_{2/1} = 2e(n\cos r - \tan r \sin i)$

❒ **b.** $\delta_{2/1} = \dfrac{2e}{\cos r}(1 - n\sin^2 i)$

☒ **c.** $\delta_{2/1} = 2ne\cos r$

❒ **d.** $\delta_{2/1} = \dfrac{2e}{\cos r}(1 - n^2\sin^2 i)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Pour calculer la différence marche on utilise le théorème de Malus avec le plan d'onde Σ pour les ondes réfléchies (figure 18.6). On écrit $\delta_{2/1} = (SM)_2 - (SM)_1 = (IJK) - (IL)$.

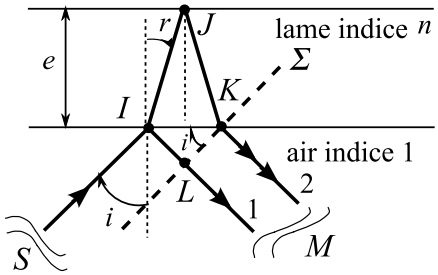


Figure 18.6

Dans le verre d'indice n, le chemin optique (IJK) est égal à $n\dfrac{2e}{\cos r}$. D'autre part, $IL = IK\ \sin i$ et $IK = 2\,e\ \tan r$. Avec la loi de Descartes $\sin i = n \sin r$, on peut écrire :

$$\delta_{2/1} = n\frac{2e}{\cos r} - 2e\tan r \sin i = 2e\left(\frac{n}{\cos r} - n\frac{\sin^2 r}{\cos r}\right) = \frac{2ne}{\cos r}(1 - \sin^2 r) = 2ne\cos r$$

Cet énoncé concerne les questions 10 à 12 :
On considère un coin d'air (figure 18.3) éclairé par une onde plane sous incidence θ. On note $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ les vecteurs d'onde des ondes réfléchies sur les lames (1) et (2), et on définit $\vec{K} = \vec{k_2} - \vec{k_1}$.

10 Déterminer l'intensité en un point M de l'espace, l'intensité maximale étant $2I_0$.

❒ **a.** $I = I_0(1 + \cos(\vec{k_2} + \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

☒ **b.** $I = I_0(1 + \cos(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

❒ **c.** $I = I_0(1 + 2\cos(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

❒ **d.** $I = I_0(1 + \sin(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM})$

Les deux ondes ont même amplitude juste après la réflexion. Elles sont de la forme :

$$\underline{s_1}(M,t) = s_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi(O)} e^{-i\vec{k_1}\cdot\overrightarrow{OM}} \quad \text{et} \quad \underline{s_2}(M,t) = s_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi(O)} e^{-i\vec{k_2}\cdot\overrightarrow{OM}}$$

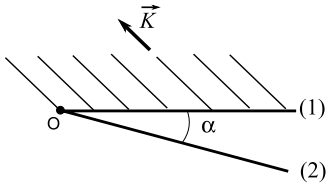
L'intensité s'écrit :

$$I = K(\underline{s_1} + \underline{s_2})(\underline{s_1} + \underline{s_2})^\star = 2Ks_0^2\left(1 + \cos(\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM}\right)$$

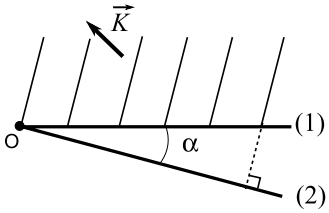
D'où la réponse **b.** avec $I_0 = 2Ks_0^2$.

11 Choisir parmi les figures suivantes, celle qui représente les surfaces d'intensité maximale. On a représenté $\vec{K} = \vec{k_2} - \vec{k_1}$.

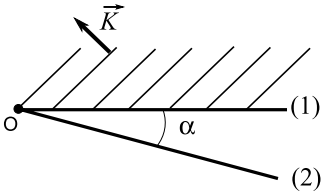
❒ **a.**



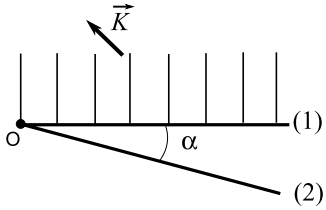
❒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



Les surfaces correspondant à un maximum d'intensité sont telles $\vec{K} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\ [2\pi]$. Cette relation définit une famille de plans parallèles, dont le plus simple correspond au produit scalaire nul, il s'agit du plan d'intensité maximale passant par O et perpendiculaire à $\vec{K}$. Le seul schéma correspondant est celui de la figure **c**.

12 La distance i entre deux plans successifs d'intensité maximale est :

❒ **a.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)}$

❒ **b.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)}$

❒ **c.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\cos\alpha}$

☒ **d.** $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha}$

On a représenté sur la figure 18.7 les vecteurs avec les différents angles. La direction des plans d'intensité maximale (dont deux successifs sont représentés Π_p et Π_{p+1}) est celle de la bissectrice des vecteurs $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$.

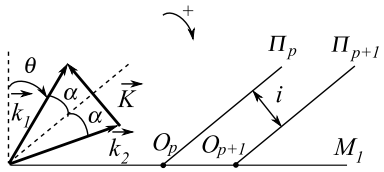


Figure 18.7

Ils font donc un angle $\theta + \alpha$ avec la normale à M_1, qui est l'angle aussi entre $\vec{K}$ et M_1. Puisque les deux plans sont successifs, on peut écrire $\vec{K} \cdot \overrightarrow{O_pO_{p+1}} = 2\pi$. La distance i recherchée est $i = O_pO_{p+1}\cos(\theta+\alpha)$. On en déduit $K\,i = 2\pi$, or $K = 2k_1\sin\alpha = \dfrac{4\pi}{\lambda_0}\sin\alpha$ d'où $i = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha}$. La réponse **a.** correspond à la distance O_pO_{p+1}.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 13 à 16 :
À partir du contact optique et des miroirs M_1 et M_2 perpendiculaires, on fait tourner le miroir M_1 d'un angle α, l'interféromètre étant alors réglé en coin d'air. La source, non ponctuelle, est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

On a représenté sur la figure 18.4 le schéma équivalent à l'interféromètre, ainsi que le système de projection de la figure (lentille L_2 et écran).

On note γ le grandissement obtenu par la projection.

13 En travaux pratiques, si l'on dispose d'une table d'environ 2 m, quelle distance focale image f' choisir pour L_2 parmi les valeurs suivantes ?

❒ **a.** $f' = 1000$ mm
❒ **b.** $f' = -250$ mm
❒ **c.** $f' = 10$ mm
☒ **d.** $f' = 250$ mm

Pour une source étendue, les franges sont localisées au voisinage des miroirs. La lentille doit donc effectuer la projection des miroirs sur l'écran : il faut une lentille convergente. Sachant qu'il faut au minimum une distance de $4f'$ entre l'objet et l'image et si l'on souhaite un grandissement de 4 à 5 en valeur absolue, la lentille $f' = 250$ mm est la plus adaptée.

14 Déterminer la relation entre l'ordre d'interférence p et la position sur l'écran x'.

❒ **a.** $p = \dfrac{2\alpha x'}{\gamma\lambda_0}$
☒ **b.** $p = -\dfrac{2\alpha x'}{\gamma\lambda_0}$
❒ **c.** $p = \dfrac{2\alpha x'}{\lambda_0}$
❒ **d.** $p = -\dfrac{2\alpha x'}{\lambda_0}$

La différence de marche au niveau des miroirs est $\delta_{2/1} = -2\alpha x$ (on rappelle que $\alpha > 0$ et donc avec l'orientation x et $\delta_{2/1}$ sont de signes opposés) ce qui correspond à un ordre d'interférence $p = \dfrac{-2\alpha x}{\lambda_0}$. Sur l'écran un point de coordonnées x' correspond au point x sur le miroir tel que $x' = \gamma x$, d'où la réponse **b**.

15 On mesure sur l'écran un interfrange $i' = 0,5$ cm. Déterminer l'angle α entre les miroirs sachant que le grandissement est $\gamma = -4$ et que $\lambda_0 = 0,5\ \mu$m.

❒ **a.** $\alpha \simeq 10''$
❒ **b.** $\alpha \simeq 0,01''$
☒ **c.** $\alpha \simeq 41''$
❒ **d.** $\alpha \simeq 0,7''$

Un interfrange sur l'écran correspond à $\Delta p = 1$ soit $i' = \Delta x' = \dfrac{|\gamma|\lambda_0}{2\alpha}$. L'application numérique donne $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$ rad ou $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}\dfrac{180 \times 3600}{\pi} \simeq 41''$.

16 On translate le miroir M_1 d'une distance d. Cela équivaut à déplacer M_1' de $\Delta y = d$. Quel est le déplacement $\Delta x'$ de la frange centrale $p = 0$ sur l'écran ?

❒ **a.** $\Delta x' = \dfrac{\gamma \Delta y}{\alpha}$ ❒ **b.** $\Delta x' = \Delta y$

❒ **c.** $\Delta x' = \gamma \Delta y$ ☒ **d.** $\Delta x' = -\dfrac{\gamma \Delta y}{\alpha}$

Un rayon réfléchi par M_1' parcourt un trajet supplémentaire $2\Delta y$ donc la différence de marche devient $\delta_{2/1} = -2\alpha x - 2\Delta y$. La frange centrale $\delta_{2/1} = 0$ sera à la position $x = -\dfrac{\Delta y}{\alpha}$ soit $x' = -\dfrac{\gamma \Delta y}{\alpha}$.

Cet énoncé concerne les questions 17 à 21 :
L'interféromètre réglé en lame d'air d'épaisseur e est éclairé par une source non ponctuelle monochromatique. On utilise une lentille L_2 de distance focale image f' pour projeter les anneaux sur un écran.

17 En travaux pratiques, quelle distance focale image f' choisir pour L_2 parmi les valeurs suivantes ?

☒ **a.** $f' = 1000$ mm ❒ **b.** $f' = -250$ mm

❒ **c.** $f' = 10$ mm ❒ **d.** $f' = 250$ mm

Dans le cas de la lame d'air éclairée par une source étendue, les interférences sont localisées à l'infini. Pour les projeter sur un écran, il faut utiliser une lentille convergente et placer l'écran dans le plan focal image de la lentille. Pour avoir une image la plus grande possible, il faut utiliser la lentille de plus grande distance focale d'où la réponse **a**.

18 L'épaisseur de la lame d'air est $e = 0,2$ mm. Quel est l'ordre p_0 au centre pour $\lambda_0 = 0,56\,\mu$m ?

❒ **a.** $p_0 = 0$ ☒ **b.** $p_0 \simeq 714,3$

❒ **c.** $p_0 \simeq 357,1$ ❒ **d.** $p_0 = 2.10^{-4}$

La différence de marche au centre $\delta_{2/1} = 2e$ soit un ordre $p_0 = \dfrac{2e}{\lambda_0} \simeq 714,3$.

19 On note r_k le rayon du $k^{\text{ième}}$ sur l'écran. On suppose que $p_0 = m + \epsilon$ où m est entier et $1 \geq \epsilon > 0$. Déterminer l'expression de r_k :

❒ **a.** $r_k = f' \sqrt{k+\epsilon}\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$ ❒ **b.** $r_k = f' \sqrt{-k+\epsilon+1}\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$

❒ **c.** $r_k = f' \sqrt{k+\epsilon+1}\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$ ☒ **d.** $r_k = f' \sqrt{k+\epsilon-1}\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{e}}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Pour un rayon d'incidence i la différence de marche est $\delta_{2/1} = 2e\cos i$ soit dans l'approximation de Gauss $\delta_{2/1} = 2e\left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$. En traçant le rayon réfléchi d'angle i par rapport à l'axe optique et passant par le centre de la lentille, on montre qu'il éclaire l'écran en $r = f'\tan i \simeq f'i$ dans l'approximation de Gauss donc l'ordre d'interférence est $p = \frac{2e}{\lambda_0}\left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)$ ou $p = p_0 - \frac{2e}{\lambda_0}\frac{r^2}{2f'^2}$.

On constate que l'ordre d'interférence décroît avec r.

Avec le choix pour ϵ, le premier anneau brillant correspond à $p = m$ donc le $k^{\text{ième}}$ à $p = m-k+1$. Le calcul a déjà été fait dans la chapitre sur les interférences. En écrivant $m-k+1 = p_0 - \frac{2e}{\lambda_0}\frac{r_k^2}{2f'^2}$, on trouve la réponse **d**.

20 On place une lame d'indice n et d'épaisseur d accolée au miroir M_2 (figure 18.5). On note i l'angle d'incidence d'un rayon sur la lame et r l'angle de réfraction dans la lame. Déterminer la différence de marche $\delta_{2/1}$.

☒ **a.** $\delta_{2/1} = -2(e+d)\cos i + 2nd\cos r$

☐ **b.** $\delta_{2/1} = -2n(e+d)\cos i + 2nd\cos r$

☐ **c.** $\delta_{2/1} = -2(e+d)\cos i - 2nd\cos r$

☐ **d.** $\delta_{2/1} = 2(e+d)\cos i - 2nd\cos r$

On utilise les notations de la figure (18.8). On a tracé un plan d'onde pour les rayons réfléchis. Avec le théorème de Malus, on a $\delta_{2/1} = (IJKL) - (IMN) = n\,IJK + KL - IMN$.

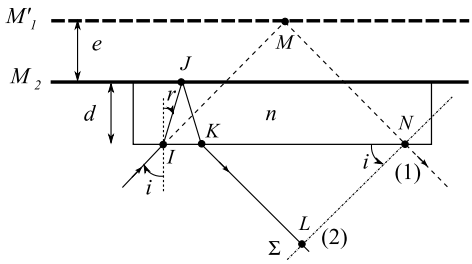


Figure 18.8

On peut écrire $IMN = \frac{2(e+d)}{\cos i}$ et $IJK = \frac{2d}{\cos r}$. D'autre part $KL = KN\sin i$ et $KN = IN - IK = 2(e+d)\tan i - 2d\tan r$. Ainsi :

$$\delta_{2/1} = \frac{2nd}{\cos r} + 2(e+d)\frac{sin^2 i}{\cos i} - 2d\frac{\sin r\sin i}{\cos r} - \frac{2(e+d)}{\cos i}$$

et avec la loi de Descartes $\sin i = n\sin r$:

$$\delta_{2/1} = \frac{2nd}{\cos r}(1 - \sin^2 r) + \frac{2(e+d)}{\cos i}(\sin^2 i - 1) = \frac{2nd}{\cos r}\cos^2 r - \frac{2(e+d)}{\cos i}\cos^2 i$$

d'où la réponse **a**.

21 On se place dans le cas des petits angles. On observe une teinte uniforme sur l'écran lorsque $\delta_{2/1}$ est indépendant de i au deuxième ordre. Avant de placer la lame, on suppose que l'interféromètre est réglé au contact optique. Déterminer la distance e dont on doit déplacer M_1 pour retrouver une teinte uniforme.

❒ **a.** $e = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)d$

☒ **b.** $e = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)d$

❒ **c.** $e = -d$

❒ **d.** $e = d(n - 1)$

Dans le cas des petits angles, on effectue un D.L. à l'ordre 2 en i et r (avec $i = nr$) soit :

$$\delta_{2/1} = -2(e + d)\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) + 2nd\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) = -2(e + d) + 2nd + i^2\left((e + d) - \frac{d}{n}\right)$$

Pour annuler le terme d'ordre 2, il faut $e + d = \dfrac{d}{n}$ soit $e = d\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)$. On constate que $e < 0$ donc M_1' est en avant de M_2.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Partie 6

Conversion de puissance

19 Milieux magnétiques - Conversion électromagnétique statique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les propriétés des milieux magnétiques.
- Les caractéristiques des cycles d'hystérésis.
- Le modèle du transformateur parfait.

Notations. Le vecteur aimantation (ou densité volumique de moment magnétique) est noté $\vec{M}$ et le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$. On appellera $\vec{j}$ la densité volumique de courant libre. Dans tout le chapitre, on se place dans le cadre de l'A.R.Q.S.

Sauf indication contraire, la perméabilité d'un milieu sera notée μ, sa perméabilité relative μ_r, et la permittivité du vide (et de l'air) μ_0.

On appellera $m = \dfrac{N_2}{N_1}$ le rapport de transformation où N_1 est le nombre de spires du primaire et N_2 celui du secondaire.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 314**.

1 ❒ V ❒ F Un milieu doux possède un cycle d'hystérésis large, c'est-à-dire un champ coercitif $\vec{H_c}$ de norme importante.

2 ❒ V ❒ F Les aimants sont fabriqués avec des matériaux durs.

3 ❒ V ❒ F Dans un milieu linéaire homogène isotrope, on peut écrire $\vec{B} = \mu_r \vec{H}$ où μ_r est la perméabilité relative du milieu.

4 ❒ V ❒ F On définit la susceptibilité magnétique χ_m du milieu par la relation $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 314**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

5 Quelles sont les équations de Maxwell valables dans un milieu magnétique ?

❒ **a.** $\text{div}\,\vec{B} = 0$ ❒ **b.** $\text{div}\,\vec{H} = 0$

❒ **c.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ❒ **d.** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \mu_0 \vec{j}$

6 On considère l'interface entre deux milieux (1) et (2), dont la normale en un point M est $\vec{N}_{12}$ orientée du milieu (1) vers le milieu (2). Quelles sont les composantes des champs qui se conservent à l'interface des deux milieux ?

❒ **a.** Composante normale de $\vec{B}$. ❒ **b.** Composante tangentielle de $\vec{B}$.

❒ **c.** Composante normale de $\vec{H}$. ❒ **d.** Composante tangentielle de $\vec{H}$.

Cet énoncé concerne les questions 7 à 10 :
On considère un tore de rayon R à section circulaire S sur lequel sont enroulées N spires parcourues par une intensité i (figure 19.1). Les spires ont un rayon $r \ll R$. Le matériau l.h.i. formant le tore a une perméabilité magnétique relative μ_r. On fait l'hypothèse que les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont orthoradiaux et uniformes dans une section droite du tore.

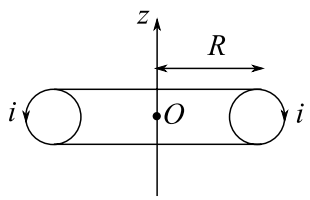


Figure 19.1

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

7 Déterminer le champ $\overrightarrow{H}$ dans le matériau.

❒ **a.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **b.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{\mu N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **c.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **d.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$

8 Déterminer la force électromotrice d'induction e_m dans le bobinage composé des N spires en orientant les spires dans le sens de i.

❒ **a.** $e_m = \dfrac{r^2\mu_0\mu_r N^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

❒ **b.** $e_m = -\dfrac{r^2\mu_0\mu_r N^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

❒ **c.** $e_m = -\dfrac{r^2\mu_0\mu_r N}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

❒ **d.** $e_m = -\dfrac{r^2\mu_0 N^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

9 On effectue une coupure d'épaisseur e (nommée entrefer) dans le matériau ferromagnétique avec $e \ll R$. On admet que la coupure ne modifie pas les lignes de champ et que les interfaces de l'entrefer avec le milieu sont perpendiculaires à ces lignes. Déterminer le champ magnétique dans le matériau et l'entrefer.

❒ **a.** Dans le matériau $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$.

❒ **b.** Dans le matériau $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi(R-e)}\overrightarrow{u_\theta}$.

❒ **c.** Dans l'air $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$.

❒ **d.** Dans l'air $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi R + \mu_r e}\overrightarrow{u_\theta}$

10 On prend $\mu_r = 2 \cdot 10^3$, $e = 0,5$ mm et $R = 5$ cm. Déterminer le rapport des champs magnétiques avec et sans entrefer.

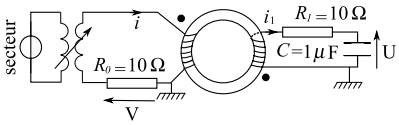
❒ **a.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 2 \cdot 10^3$

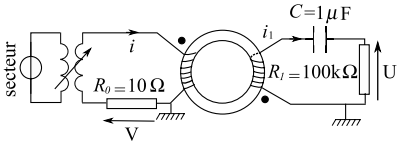
❒ **b.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 1,6$

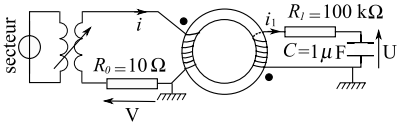
❒ **c.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 0,01$

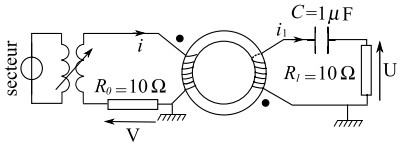
❒ **d.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 0,63$

11 On souhaite tracer un cycle d'hystérésis d'un tore. La mesure de V doit permettre de tracer H et celle de U de tracer B. Le montage primaire possède N spires et le secondaire N_1 spires. Choisir le montage correct parmi les suivants en justifiant.

❒ **a.**


❒ **b.**


❒ **c.**


❒ **d.**


Cet énoncé concerne les questions 12 à 14 :

On considère de nouveau un tore de rayon R à section circulaire S (figure 19.2) sur lequel sont enroulées N_1 spires parcourues par une intensité i_1 (circuit primaire) et N_2 spires parcourues par une intensité i_2 (circuit secondaire). Les spires ont un rayon $r \ll R$. Le matériau l.h.i. formant le tore a une perméabilité magnétique relative μ_r. On fait l'hypothèse que les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont orthoradiaux et uniformes dans une section droite du tore.

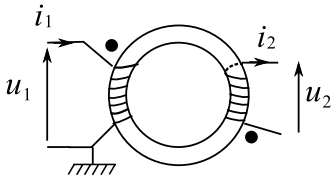


Figure 19.2

12 Déterminer les tensions u_1 et u_2.

❒ **a.** $u_1 = \dfrac{\pi r^2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **b.** $u_1 = -\dfrac{\pi r^2 N_1 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **c.** $u_2 = -\dfrac{\pi r^2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **d.** $u_2 = -\dfrac{\pi r^2 N_2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

13 On modélise le transformateur par ses deux bobines d'inductance L_1 et L_2 et une inductance mutuelle M (figure 19.3). Déterminer L_1, L_2 et M.

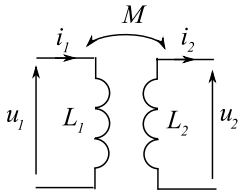


Figure 19.3

❒ **a.** $L_1 = \dfrac{\pi r^2 N_1^2 \mu}{2\pi R}$ et $L_2 = \dfrac{\pi r^2 N_2^2 \mu}{2\pi R}$.

❒ **b.** $L_1 = -\dfrac{\pi r^2 N_1^2 \mu}{2\pi R}$ et $L_2 = -\dfrac{\pi r^2 N_2^2 \mu}{2\pi R}$.

❒ **c.** $M = \dfrac{\pi r^2 N_1 N_2 \mu}{2\pi R}$

❒ **d.** $M = -\dfrac{\pi r^2 N_1 N_2 \mu}{2\pi R}$

14 On veut évaluer les pertes par hystérésis dans le matériau magnétique. On branche un générateur de tension sinusoïdale (période T) au primaire et on laisse le secondaire ouvert. Déterminer la puissance moyenne dissipée dans le matériau $< \mathscr{P}_h >$ par hystérésis.

❒ **a.** $< \mathscr{P}_h >= -\dfrac{2\pi R \pi r^2}{T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

❒ **b.** $< \mathscr{P}_h >= \dfrac{2\pi R \pi r^2}{T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

❒ **c.** $< \mathscr{P}_h >= \dfrac{2\pi R \pi r^2}{N_1 T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

❒ **d.** $< \mathscr{P}_h >= \dfrac{N_1 2\pi R \pi r^2}{T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

15 Pour un transformateur parfait (figure 19.4) de N_1 spires au primaire et N_2 au secondaire, déterminer la(les) proposition(s) juste(s) parmi les réponses suivantes.

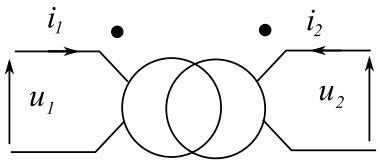


Figure 19.4

❒ **a.** On fait l'hypothèse $\mu_r \to \infty$.

❒ **b.** On fait l'hypothèse $H \to \infty$.

❒ **c.** $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$

❒ **d.** $\dfrac{i_2}{i_1} = \dfrac{N_1}{N_2}$

16 On s'intéresse au circuit de la figure 19.5.

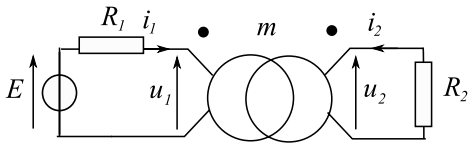
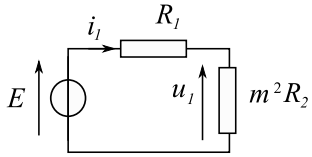


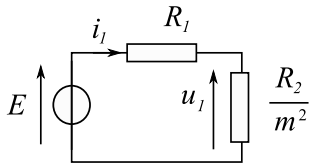
Figure 19.5

Déterminer les circuits équivalents ramenés au primaire et au secondaire.

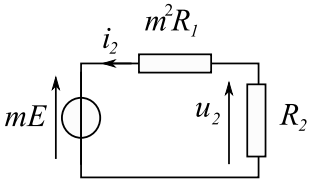
❒ **a.**



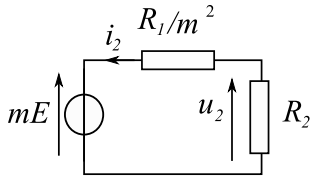
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



Voir les corrigés du chapitre 19 page 314.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

20 Conversion électromécanique - Moteurs

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La conversion électromécanique de puissance.
- Les machines à courant continu.
- La réalisation d'un champ tournant.
- Les machines synchrones.
- Les machines asynchrones en approfondissement (questions 14 à 17).

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 321**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

Cet énoncé concerne les questions 1 à 5 :
Pour établir les équations de la machine à courant continu, on utilisera dans un premier temps le modèle simplifié à une spire représenté sur les figures 20.1 et 20.2.

Au niveau des spires du rotor le champ magnétique est radial. La position du conducteur 1 (M_1M_2) est repérée par l'angle θ par rapport à la ligne neutre.

La vitesse angulaire du rotor sera notée Ω.

On repérera le conducteur 1 par la basse locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ et le conducteur 2 par la base locale $\left(\overrightarrow{u_r}(\theta+\pi), \overrightarrow{u_\theta}(\theta+\pi), \overrightarrow{u_z}\right)$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{u_r}(\theta+\pi)$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\theta+\pi)$ ont tourné de π par rapport à $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

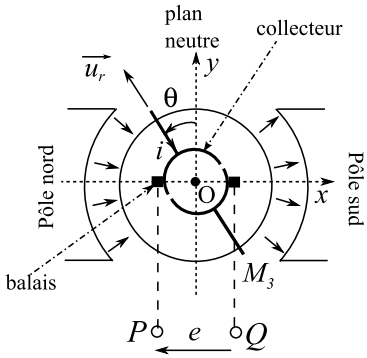


Figure 20.1

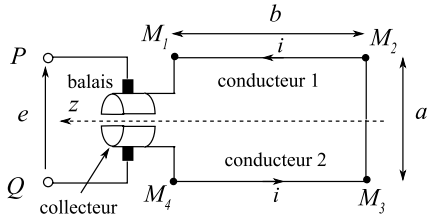
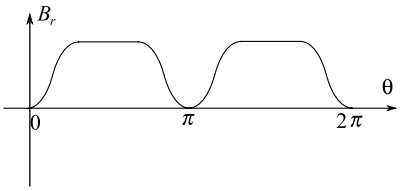


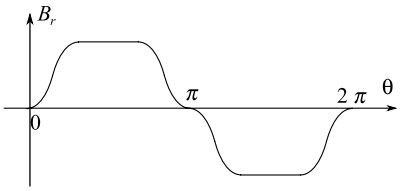
Figure 20.2

1 Déterminer l'allure de la composante B_r ressentie par le conducteur 1 en fonction de l'angle θ.

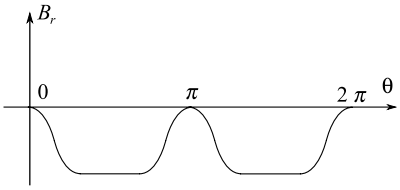
❒ **a.**



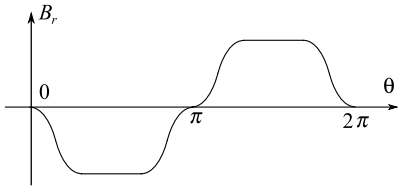
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



2 On note $B(\theta)$ la composante sur $\overrightarrow{u_r}$ de $\overrightarrow{B}$ du côté du conducteur 1. Déterminer la tension e.

❒ **a.** $e = ba\Omega B(\theta)$ ❒ **b.** $e = -ba\Omega B(\theta)$

❒ **c.** $e = 0$ ❒ **d.** $e = -2ba\Omega B(\theta)$

3 Déterminer la force $\overrightarrow{F_1}$ exercée sur le conducteur 1 à la position θ, ainsi que celle $\overrightarrow{F_2}$ exercée sur le conducteur 2.

❒ **a.** $\overrightarrow{F_1} = ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$ ❒ **b.** $\overrightarrow{F_1} = -ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **c.** $\overrightarrow{F_2} = ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$ ❒ **d.** $\overrightarrow{F_2} = -ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

4 Déterminer le moment Γ_z du couple par rapport à l'axe z s'exerçant sur la spire formée des conducteurs 1 et 2.

❒ **a.** $\Gamma_z = -iabB(\theta)$ ❒ **b.** $\Gamma_z = iabB(\theta)$

❒ **c.** $\Gamma_z = i\dfrac{a}{2}bB(\theta)$ ❒ **d.** $\Gamma_z = 0$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

5 Écrire un bilan d'énergie électromécanique. On note $\mathscr{P}_L$ la puissance des actions de Laplace et $\mathscr{P}_{ind}$ la puissance fournie par induction.

❒ **a.** $\mathscr{P}_L = iabB(\theta)\Omega$ ❒ **b.** $\mathscr{P}_{ind} = iba\Omega B(\theta)$

❒ **c.** $\mathscr{P}_{ind} + \mathscr{P}_L = 0$ ❒ **d.** $\mathscr{P}_{ind} - \mathscr{P}_L = 0$

Cet énoncé concerne les questions 6 à 10 :
Dans cette série de questions concernant une machine à courant continu réelle, on notera ϕ_0 la constante de flux caractéristique de la machine telle que la f.c.e.m.(force contre électromotrice) en sortie de la machine à courant continu est $E = \phi_0\Omega$ et le couple électromagnétique (moteur) $\Gamma_m = \phi_0 i$ avec l'orientation de la figure 20.3.

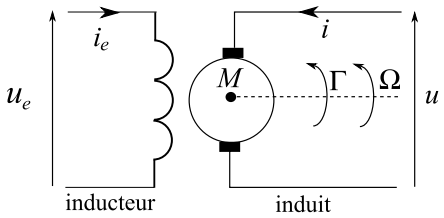


Figure 20.3

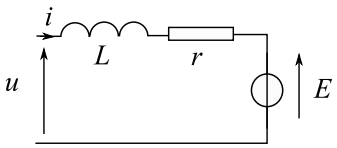


Figure 20.4

6 La résistance de l'induit est r (quelques ohms) et son inductance L. Le circuit équivalent à l'induit est représenté sur la figure 20.4. L'axe du moteur est relié à un système dont le couple résistant est de valeur absolue Γ_r et le moteur est alimenté sous une tension $u = cte$. Déterminer la vitesse angulaire Ω du moteur en régime permanent.

❒ **a.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(u + r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$ ❒ **b.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(u - r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$

❒ **c.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(-u - r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$ ❒ **d.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(-u + r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$

7 Exprimer le rendement η_m dans le cas d'un fonctionnement moteur et le rendement η_g dans le cas d'un fonctionnement en génératrice.

❒ **a.** $\eta_m = \dfrac{Ei - ri^2}{Ei}$ ❒ **b.** $\eta_m = \dfrac{Ei}{Ei + ri^2}$

❒ **c.** $\eta_g = \dfrac{Ei}{Ei - ri^2}$ ❒ **d.** $\eta_g = \dfrac{Ei + ri^2}{Ei}$

8 Le moteur est régime permanent et on veut l'arrêter. On coupe l'alimentation de l'inducteur sans couper celle de l'induit. Que se passe-t'il ?

❒ **a.** Le moteur s'arrête. ❒ **b.** La vitesse angulaire reste constante.

❒ **c.** Le moteur s'emballe. ❒ **d.** La vitesse angulaire décroît lentement.

9 Pour démarrer le moteur, comment doit-on précéder ?

❒ **a.** Appliquer une tension simultanément à l'inducteur et à l'induit.

❒ **b.** Appliquer une tension à l'inducteur, puis progressivement une tension à l'induit.

❒ **c.** Appliquer une tension à l'induit puis ensuite à l'inducteur.

❒ **d.** Appliquer une tension à l'inducteur puis ensuite à l'induit.

10 Pour faire fonctionner le moteur, on propose le montage suivant appelé « shunt » (figure 20.5). Le rhéostat a une résistance R_{th}. On augmente progressivement la tension u. L'axe du moteur est relié à un système dont le couple résistant est de valeur absolue Γ_r et on néglige l'inductance L de l'induit.

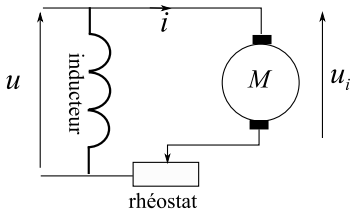


Figure 20.5

❒ **a.** Le moteur démarre immédiatement.

❒ **b.** Le moteur démarre lorsque $u > \dfrac{r\Gamma_r}{\phi_0}$

❒ **c.** Le moteur démarre lorsque $u > \dfrac{(r + R_{th})\Gamma_r}{\phi_0}$

❒ **d.** Le moteur ne peut pas démarrer.

Cet énoncé concerne les questions 11 à 13 :
Cette série de questions étudie l'évolution d'un moment magnétique permanent dans un champ magnétique tournant.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 On cherche à réaliser un champ magnétique tournant de norme constante en un point O, à la vitesse angulaire ω, par rapport à l'axe Oz. On réalise avec deux bobines identiques le montage de la figure 20.6, où les bobines sont à même distance de O. Déterminer les intensités i_1 et i_2 nécessaires pour obtenir le champ désiré en O.

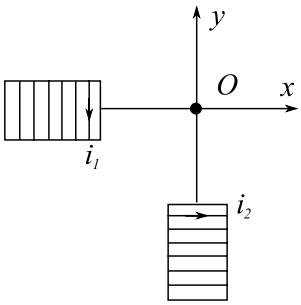


Figure 20.6

❒ **a.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = I_0 \cos \omega t \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = 2I_0 \sin \omega t \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = -I_0 \sin \omega t \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = I_0 \sin \omega t \end{cases}$

12 On note B_0 la norme de $\vec{B}$. On place en O un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ de norme constante. La vitesse angulaire du dipôle par rapport à l'axe Oz est ω_m. À $t = 0$, le champ magnétique fait un angle α avec l'axe Ox, alors que $\vec{M}$ est aligné avec cet axe. On note $\vec{\Gamma}$ le moment du couple exercé par $\vec{B}$ sur $\vec{M}$. Déterminer la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes.

❒ **a.** $\vec{\Gamma} = -MB_0 \sin(\omega t - \omega_m t + \alpha)\,\vec{u_z}$

❒ **b.** $\vec{\Gamma} = MB_0 \sin(\omega t - \omega_m t + \alpha)\,\vec{u_z}$

❒ **c.** Si $\omega \neq \omega_m$ le couple moyen $\left\langle \vec{\Gamma} \right\rangle$ est nul.

❒ **d.** Si $-\pi \leq \alpha \leq 0$, le système peut se comporter en moteur.

13 Le moteur est relié à un système mécanique qui exerce un couple résistant de norme Γ_r. En régime permanent, il y a deux points de fonctionnement (figure 20.7).

❒ **a.** P_1 est stable.

❒ **b.** P_2 est stable.

❒ **c.** Les deux points sont stables.

❒ **d.** La stabilité n'est pas prévisible.

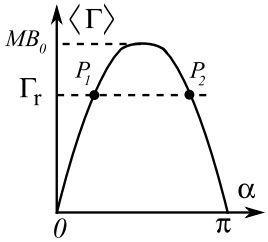


Figure 20.7

Cet énoncé concerne les questions 14 à 17 :
Une bobine de N spires d'aire S, fermée sur elle-même, de résistance R, d'inductance L, peut tourner autour de l'axe Oz (figure 20.8). On note J son moment d'inertie par rapport à Oz. On repère la position de sa normale $\vec{n}$ par rapport à l'axe Ox par l'angle α et on note $\dot{\alpha} = \Omega$.

Cette bobine est soumise à un champ tournant $\vec{B}$ de norme constante et uniforme sur toute la bobine. L'angle que fait le champ $\vec{B}$ avec Ox est β avec $\dot{\beta} = \Omega_0$ où la vitesse angulaire Ω_0 est constante. À $t = 0$, $\alpha = \beta = 0$.

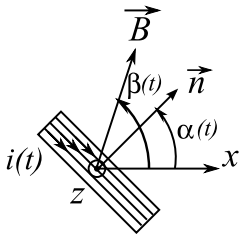


Figure 20.8

On se place dans le cas $\Omega \neq \Omega_0$.

14 Calculer le flux instantané $\phi_e(t)$ à travers la bobine.

❒ **a.** $\phi_e = BS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$ ❒ **b.** $\phi_e = NBS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$

❒ **c.** $\phi_e = N^2BS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$ ❒ **d.** $\phi_e = NBS\sin(\Omega_0 - \Omega)t$

15 On pose pour la suite $\phi_0 = NBS$ et $\omega = \Omega_0 - \Omega$. On veut déterminer le courant induit dans la bobine. On pose $i(t) = I\cos(\omega t + \theta)$, et donc $\underline{i(t)} = \underline{I}e^{j\omega t}$. Déterminer $\underline{I}$.

❒ **a.** $\underline{I} = \dfrac{\phi_0\omega}{L\omega + R}$ ❒ **b.** $\underline{I} = \dfrac{\phi_0\omega}{jL\omega + R}$

❒ **c.** $\underline{I} = \dfrac{j\phi_0\omega}{jL\omega + R}$ ❒ **d.** $\underline{I} = \dfrac{-j\phi_0\omega}{jL\omega + R}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

16 Calculer $\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u_z}$ en fonction de $i(t)$, ϕ_0, ω, puis $\langle\Gamma\rangle$ en fonction de I, θ et ϕ_0.

❒ **a.** $\Gamma = -\phi_0 i \sin \omega t$

❒ **b.** $\Gamma = \phi_0 i \sin \omega t$

❒ **c.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{-\phi_0 I}{2} \sin\theta$

❒ **d.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{\phi_0 I}{2} \sin\theta$

17 En remarquant que $I \sin(\theta) = \mathrm{Im}(\underline{I})$, exprimer $\langle\Gamma\rangle$ en fonction de L, R, ϕ_0 et ω.

❒ **a.** $\langle\Gamma\rangle = -\dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 + (L\omega)^2}$

❒ **b.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0}{R^2 + (L\omega)^2}$

❒ **c.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 - (L\omega)^2}$

❒ **d.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 + (L\omega)^2}$

Voir les corrigés du chapitre 20 page 321.

Conversion électronique-Hacheurs

21

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La fonction de commutation (diode, transistor).
- Les règles de connexion entre sources de tension et de courant.
- Les hacheurs.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 328**.

1 ❒ V ❒ F Pour transformer une source de courant idéale en source de tension idéale, on branche en parallèle un condensateur de grande capacité.

2 ❒ V ❒ F Pour transformer une source de tension idéale en source de courant idéale, on branche en parallèle une bobine de grande inductance.

3 ❒ V ❒ F Pour améliorer une source de courant, on branche en parallèle une bobine de grande inductance.

4 ❒ V ❒ F Pour améliorer une source de tension, on branche en parallèle un condensateur de grande capacité.

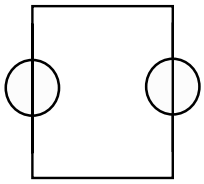
Consignes

QCM

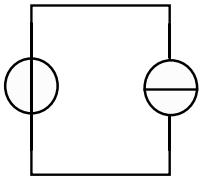
Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 330**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

5 Déterminer les associations possibles entre sources.

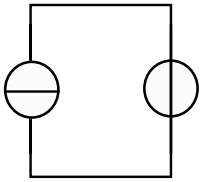
❒ **a.**



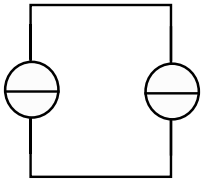
❒ **b.**



❒ **c.**

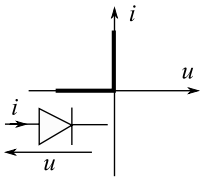


❒ **d.**

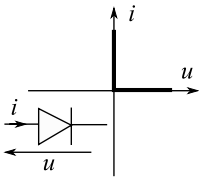


6 Déterminer les caractéristiques des interrupteurs « diode idéale » et « transistor idéal ».

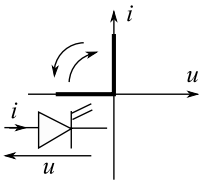
❒ **a.**



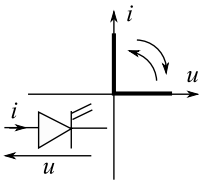
❒ **b.**



❒ **c.**

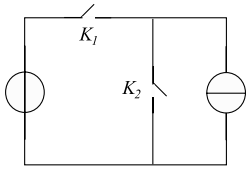


❒ **d.**

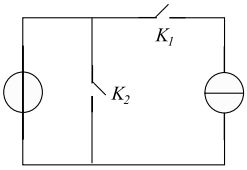


7 Dans les circuits suivants, K_1 et K_2 sont des interrupteurs qui ne sont ni simultanément ouverts, ni simultanément fermés. Déterminer les circuits hacheurs possibles.

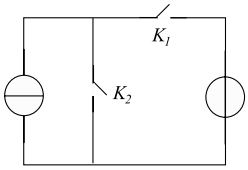
❒ **a.**



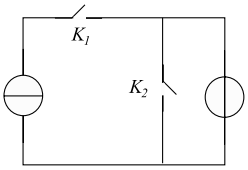
❒ **b.**



❒ **c.**



❒ **d.**



Cet énoncé concerne les questions 8 à 11 :
Cette série de question étudie un hacheur série (figure 21.1). La source de tension a une f.e.m. $E > 0$ et la source de courant, un courant de court-circuit $I > 0$.

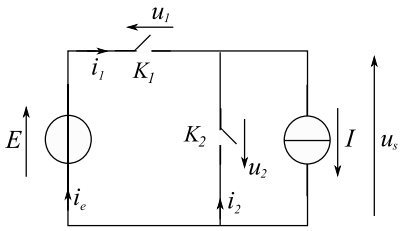


Figure 21.1

- Pour $0 \leq t \leq \alpha T$, l'interrupteur K_1 est fermé et K_2 est ouvert.
- Pour $\alpha T \leq t \leq T$, l'interrupteur K_1 est ouvert et K_2 est fermé.

8 Déterminer les valeurs moyennes de l'intensité i_e et de la tension u_s.

❒ **a.** $< i_e >= (1-\alpha)I$ ❒ **b.** $< i_e >= \alpha I$

❒ **c.** $< u_s >= \alpha E$ ❒ **d.** $< u_s >= (1-\alpha)E$

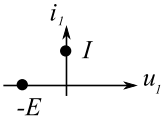
9 Déterminer la puissance moyenne $\mathscr{P}_e$ fournie par la source de tension et la puissance moyenne $\mathscr{P}_s$ reçue par la source de courant.

❒ **a.** $\mathscr{P}_e = (1-\alpha)EI$ ❒ **b.** $\mathscr{P}_e = EI$

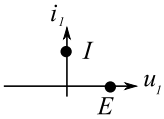
❒ **c.** $\mathscr{P}_s = \alpha I^2$ ❒ **d.** $\mathscr{P}_s = \alpha EI$

10 Déterminer les points de fonctionnements de K_1 et en déduire la nature.

❒ **a.**



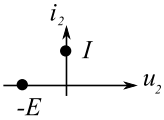
❒ **b.**



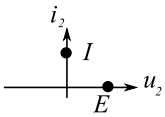
❒ **c.** K_1 est une diode. ❒ **d.** K_1 est un transistor.

11 Déterminer les points de fonctionnements de K_2 et en déduire la nature.

❒ **a.**



❒ **b.**



❒ **c.** K_2 est une diode. ❒ **d.** K_2 est un transistor.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 12 à 17 :
Pour alimenter un moteur à courant continu (f.e.c.m. e, résistance négligeable, constante de flux caractéristique ϕ_0), monté en série avec une inductance L, on utilise le hacheur à quatre interrupteurs de la figure 21.2.

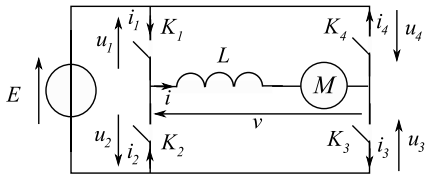


Figure 21.2

La tension d'alimentation est E. L'ouverture des interrupteurs (supposés parfaits) se décompose de la manière suivante (n étant entier et $0 \leq \alpha \leq 1$) :

- pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$: K_1 et K_3 sont fermés et K_2 et K_4 ouverts ;
- pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$: K_1 et K_3 sont ouverts et K_2 et K_4 fermés.

12 Déterminer les valeurs moyennes de v et e.

❒ **a.** $< v >= 0$ ❒ **b.** $< v >= (1-2\alpha)E$

❒ **c.** $< e >= (1-2\alpha)E$ ❒ **d.** $< e >= (2\alpha-1)E$

13 Dans la suite, on suppose que $e =< e >= cte$ et on note I_M la valeur maximale de i et I_m sa valeur minimale. Déterminer l'expression de $i(t)$.

❒ **a.** Pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$: $i(t) = I_m + \dfrac{2(1-\alpha)E}{L}(t-nT)$

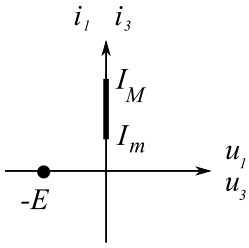
❒ **b.** Pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$: $i(t) = I_M + \dfrac{-2\alpha E}{L}(t-nT)$

❒ **c.** Pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$: $i(t) = I_m + \dfrac{2(1-\alpha)E}{L}(t-(n+\alpha)T)$

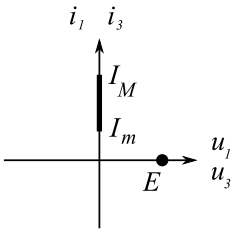
❒ **d.** Pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$: $i(t) = I_M + \dfrac{-2\alpha E}{L}(t-(n+\alpha)T)$

14 Déterminer les zones représentatives des états de K_1 et K_3 sur la caractéristique courant-tension, et le type d'interrupteurs utilisés.

❒ **a.**



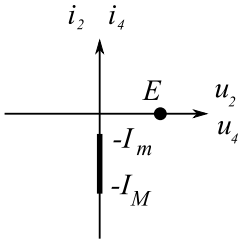
❒ **b.**



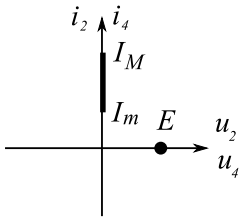
❒ **c.** K_1 et K_3 sont des diodes. ❒ **d.** K_1 et K_3 sont des transistors.

15 De même pour K_2 et K_4, déterminer les zones représentatives du fonctionnement sur la caractéristique courant-tension, et le type d'interrupteurs utilisés.

❒ **a.**



❒ **b.**



❒ **c.** K_2 et K_4 sont des diodes.

❒ **d.** K_2 et K_4 sont des transistors.

16 Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes.

❒ **a.** On peut inverser le sens de rotation de la machine.

❒ **b.** Si $\alpha < \dfrac{1}{2}$, la machine fonctionne en génératrice.

❒ **c.** On peut inverser le couple mécanique.

❒ **d.** La machine ne peut pas fonctionner en génératrice.

17 Déterminer l'ondulation $\Delta I = I_M - I_m$ et le couple (I_M, I_m) en fonction du couple mécanique moyen Γ_m.

❒ **a.** $\Delta I = \dfrac{2E(\alpha - 1)\alpha T}{L}$

❒ **b.** $\Delta I = \dfrac{2E(1 - \alpha)\alpha T}{L}$

❒ **c.** $\begin{cases} I_M = \dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \\ I_m = -\dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} I_M = \dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T - \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \\ I_m = +\dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T - \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \end{cases}$

Voir les corrigés du chapitre 21 page 328.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

19 Milieux magnétiques - Conversion électromagnétique statique

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F Un milieu doux possède un cycle d'hystérésis large, c'est-à-dire un champ coercitif $\overrightarrow{H_c}$ de norme importante.

Au contraire un milieu doux possède un cycle étroit avec un champ coercitif faible ($|H_c| < 100\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$). C'est le cas des alliages fer-silicium ou fer-nickel, des carcasses de transformateurs. Les matériaux durs comme l'acier ont des champs coercitifs supérieurs à $10^3\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$

2 ☒ V ❒ F Les aimants sont fabriqués avec des matériaux durs.

Les aimants doivent posséder un champ coercitif important pour éviter une désaimantation accidentelle s'ils sont exposés à un champ magnétique. Leur champ coercitif est de l'ordre de $5.10^4\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$.

3 ❒ V ☒ F Dans un milieu linéaire homogène isotrope, on peut écrire $\overrightarrow{B} = \mu_r \overrightarrow{H}$ où μ_r est la perméabilité relative du milieu.

Dans un tel milieu, on peut écrire $\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H}$ où μ est la perméabilité du milieu. La perméabilité relative (grandeur sans dimension) est telle que $\mu = \mu_r \mu_0$.

4 ☒ V ❒ F On définit la susceptibilité magnétique χ_m du milieu par la relation $\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$.

On trouve alors la relation entre μ_r et χ_m avec :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{H}) \Rightarrow \mu \overrightarrow{H} = \mu_0(\chi_m + 1)\overrightarrow{H} \Rightarrow \mu_r = \chi_m + 1$$

QCM

5 Quelles sont les équations de Maxwell valables dans un milieu magnétique ?

☒ **a.** $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$

❒ **b.** $\mathrm{div}\,\overrightarrow{H} = 0$

❒ **c.** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$

❒ **d.** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{H} = \mu_0 \overrightarrow{j}$

Les équations à retenir sont $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j}$ donc seule la réponse **a.** est juste.

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday sont inchangées par rapport au vide.

6 On considère l'interface entre deux milieux (1) et (2), dont la normale en un point M est $\overrightarrow{N}_{12}$ orientée du milieu (1) vers le milieu (2). Quelles sont les composantes des champs qui se conservent à l'interface des deux milieux ?

☒ **a.** Composante normale de $\overrightarrow{B}$.
❒ **b.** Composante tangentielle de $\overrightarrow{B}$.
❒ **c.** Composante normale de $\overrightarrow{H}$.
❒ **d.** Composante tangentielle de $\overrightarrow{H}$.

On raisonne par analogie avec les équations de Maxwell dans un milieu non magnétique.

L'équation de Maxwell pour le flux est inchangée ce qui entraîne la continuité de la composante normale de $\overrightarrow{B}$.

Dans un milieu non magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$ entraîne : $\overrightarrow{B}_{t,2} - \overrightarrow{B}_{t,1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{N}_{12}$. L'équation $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j}$ permet d'écrire $\overrightarrow{H}_{t,2} - \overrightarrow{H}_{t,1} = \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{N}_{12}$, donc si les milieux ne sont pas conducteurs, la composante tangentielle de $\overrightarrow{H}$ est continue, sinon elle ne l'est pas.

Pour la composante tangentielle de $\overrightarrow{B}$ et la composante normale de $\overrightarrow{H}$, les équations de Maxwell ne nous donnent pas d'information.

Cet énoncé concerne les questions 7 à 10 :
On considère un tore de rayon R à section circulaire S sur lequel sont enroulées N spires parcourues par une intensité i (figure 19.1). Les spires ont un rayon $r \ll R$. Le matériau l.h.i. formant le tore a une perméabilité magnétique relative μ_r. On fait l'hypothèse que les champs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{H}$ sont orthoradiaux et uniformes dans une section droite du tore.

7 Déterminer le champ $\overrightarrow{H}$ dans le matériau.

❒ **a.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$
❒ **b.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{\mu N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$
☒ **c.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$
❒ **d.** $\overrightarrow{H} = \dfrac{i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$

Le champ est uniforme, donc on applique le théorème d'Ampère sur le cercle $\mathscr{C}$ de rayon R à l'intérieur du matériau :

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = I_{enl} \Rightarrow \oint H\overrightarrow{u_\theta} \cdot \mathrm{d}\ell\overrightarrow{u_\theta} = I_{enl} \Rightarrow 2\pi R H = I_{enl}$$

L'orientation du contour est suivant $\overrightarrow{u_\theta}$, donc pour chaque spire, le courant enlacé traversant le contour suivant le sens de l'axe Oz est positif. Ainsi $I_{enl} = Ni$. Finalement $\overrightarrow{H} = \dfrac{Ni}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$.

8 Déterminer la force électromotrice d'induction e_m dans le bobinage composé des N spires en orientant les spires dans le sens de i.

❒ **a.** $e_m = \dfrac{r^2 \mu_0 \mu_r N^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
☒ **b.** $e_m = -\dfrac{r^2 \mu_0 \mu_r N^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
❒ **c.** $e_m = -\dfrac{r^2 \mu_0 \mu_r N}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
❒ **d.** $e_m = -\dfrac{r^2 \mu_0 N^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On peut écrire dans le matériau : $\overrightarrow{B} = \mu\overrightarrow{H} = \dfrac{\mu N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$. Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers une spire de rayon r est $\phi_1 = \iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ où $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{u_\theta}$ en prenant l'orientation positive des spires dans le sens de i. On obtient $\phi_1 = \pi r^2 B$ pour une spire soit $\phi_t = N\pi r^2 B$ pour les N spires.

On applique ensuite la loi de Faraday qui donne la f.e.m. d'induction dans les N spires :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{r^2\mu_0\mu_r N^2}{2R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

9 On effectue une coupure d'épaisseur e (nommée entrefer) dans le matériau ferromagnétique avec $e \ll R$. On admet que la coupure ne modifie pas les lignes de champ et que les interfaces de l'entrefer avec le milieu sont perpendiculaires à ces lignes. Déterminer le champ magnétique dans le matériau et l'entrefer.

❒ **a.** Dans le matériau $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$.

❒ **b.** Dans le matériau $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi(R-e)}\overrightarrow{u_\theta}$.

❒ **c.** Dans l'air $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi R}\overrightarrow{u_\theta}$.

☒ **d.** Dans l'air $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi R + \mu_r e}\overrightarrow{u_\theta}$

Au passage du milieu à l'air, au niveau de l'entrefer, la composante normale du champ magnétique est conservée, or le champ se réduit à cette composante donc $\overrightarrow{B}$ est le même dans l'air et dans le matériau.

On applique le théorème d'Ampère pour $\overrightarrow{H}$ sur un contour de rayon R, d'axe Oz en notant H_m l'excitation magnétique dans le matériau et H_a celle dans l'air :

$$(2\pi R - e)H_m + eH_a = Ni \Rightarrow (2\pi R - e)\frac{B}{\mu} + e\frac{B}{\mu_0} = Ni \Rightarrow B = \frac{\mu N i}{(2\pi R - e) + \mu_r e}$$

Avec $e \ll R$, on peut écrire $\overrightarrow{B} \simeq \dfrac{\mu N i}{2\pi R + \mu_r e}\overrightarrow{u_\theta}$. Il n'y a donc pas de réponse juste pour le champ dans le matériau.

10 On prend $\mu_r = 2\cdot 10^3$, $e = 0,5$ mm et $R = 5$ cm. Déterminer le rapport des champs magnétiques avec et sans entrefer.

❒ **a.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 2\cdot 10^3$

☒ **b.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 1,6$

❒ **c.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 0,01$

❒ **d.** $\dfrac{B_{sans}}{B_{avec}} \simeq 0,63$

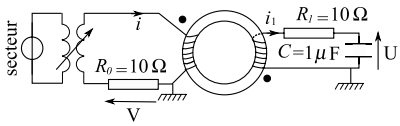
Si on fait le rapport entre le champ avec et sans entrefer, on obtient :

$$\frac{B_{sans}}{B_{avec}} = \frac{2\pi R + \mu_r e}{2\pi R} = 1 + \frac{\mu_r e}{2\pi R} \simeq 1,6$$

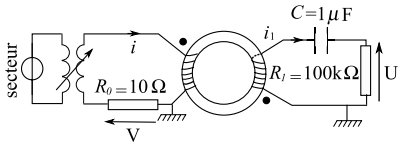
donc en raison de la forte valeur de μ_r, même une faible épaisseur d'entrefer peut entraîner une forte diminution du champ magnétique.

11 On souhaite tracer un cycle d'hystérésis d'un tore. La mesure de V doit permettre de tracer H et celle de U de tracer B. Le montage primaire possède N spires et le secondaire N_1 spires. Choisir le montage correct parmi les suivants en justifiant.

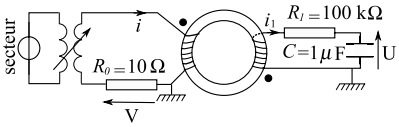
❒ **a.**



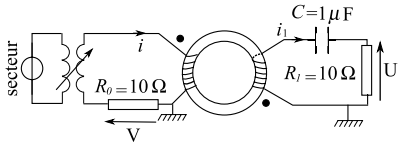
❒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



Si on appelle e_m la tension aux bornes du circuit secondaire (figure 19.1) et S la section du tore, avec la loi de Faraday et les orientations : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -N_1 S \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$.

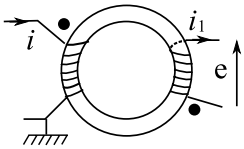


Figure 19.1

Si l'on veut avoir accès à B, il faut un montage intégrateur ce qui exclut les réponses **b.** et **d**. Pour que le montage soit intégrateur, il faut que $\omega \gg \dfrac{1}{RC}$. Avec une fréquence du secteur de 50 Hz, la pulsation est 314 rad $\cdot$ s^{-1}. Pour le montage **a.**, on a $\dfrac{1}{RC} = 10^5$ s^{-1} et pour le **c.** $\dfrac{1}{RC} = 10$ s^{-1} donc ce dernier montage semble convenir pour mesurer U une tension proportionnelle à B.

On vérifie que la tension V permet de mesurer H. Avec le théorème d'Ampère $LH = Ni + N_1 i_1$ en notant L la longueur du tore. Or $R_1 \gg R_0$ donc $i_1 \ll i$ et $LH \simeq Ni$. En mesurant V, on pourra déterminer $H \simeq \dfrac{NV}{R_0 L}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Cet énoncé concerne les questions 12 à 14 :
On considère de nouveau un tore de rayon R à section circulaire S (figure 19.2) sur lequel sont enroulées N_1 spires parcourues par une intensité i_1 (circuit primaire) et N_2 spires parcourues par une intensité i_2 (circuit secondaire). Les spires ont un rayon $r \ll R$. Le matériau l.h.i. formant le tore a une perméabilité magnétique relative μ_r. On fait l'hypothèse que les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont orthoradiaux et uniformes dans une section droite du tore.

12 Déterminer les tensions u_1 et u_2.

❒ **a.** $u_1 = \dfrac{\pi r^2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **b.** $u_1 = -\dfrac{\pi r^2 N_1 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

❒ **c.** $u_2 = -\dfrac{\pi r^2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

☒ **d.** $u_2 = -\dfrac{\pi r^2 N_2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$

On a représenté le sens positif du flux ϕ (flux à travers une section droite) sur la figure 19.2 dans le cas de courants positifs.

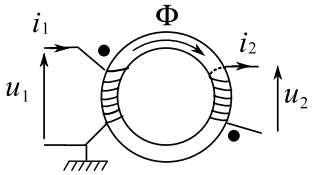


Figure 19.2

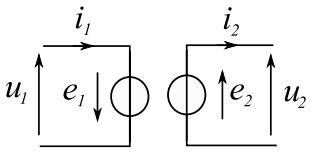


Figure 19.3

Le théorème d'Ampère s'écrit $2\pi RH = N_1 i_1 + N_2 i_2$ d'où $B = \dfrac{\mu}{2\pi R}(N_1 i_1 + N_2 i_2)$. Les deux f.e.m s'écrivent $e_1 = -N_1 \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ et $e_2 = -N_2 \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ où ϕ est le flux de $\vec{B}$ à travers une section droite soit :

$$e_1 = -\frac{\pi r^2 N_1 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right) \text{ et } e_2 = -\frac{\pi r^2 N_2 \mu}{2\pi R}\left(N_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + N_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)$$

Avec les orientations conventionnelles $u_1 = -e_1$ et $u_2 = e_2$ donc aucune réponse ne convient pour u_1 et c'est la réponse **d.** pour u_2.

13 On modélise le transformateur par ses deux bobines d'inductance L_1 et L_2 et une inductance mutuelle M (figure 19.3). Déterminer L_1, L_2 et M.

☒ **a.** $L_1 = \dfrac{\pi r^2 N_1^2 \mu}{2\pi R}$ et $L_2 = \dfrac{\pi r^2 N_2^2 \mu}{2\pi R}$.

❒ **b.** $L_1 = -\dfrac{\pi r^2 N_1^2 \mu}{2\pi R}$ et $L_2 = -\dfrac{\pi r^2 N_2^2 \mu}{2\pi R}$.

☒ **c.** $M = \dfrac{\pi r^2 N_1 N_2 \mu}{2\pi R}$

❒ **d.** $M = -\dfrac{\pi r^2 N_1 N_2 \mu}{2\pi R}$

Le primaire est en convention récepteur donc :

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow L_1 = \frac{\pi r^2 N_1^2 \mu}{2\pi R} \text{ et } M = \frac{\pi r^2 N_1 N_2 \mu}{2\pi R}$$

Le secondaire est en convention générateur donc :

$$u_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \Rightarrow L_2 = \frac{\pi r^2 N_2^2 \mu}{2\pi R} \text{ et } M = \frac{\pi r^2 N_1 N_2 \mu}{2\pi R}$$

On retrouve heureusement la même valeur de M dans les deux équations. On remarque que $M^2 = L_1 L_2$ ce qui est normal puisqu'il n'y a aucune perte.

14 On veut évaluer les pertes par hystérésis dans le matériau magnétique. On branche un générateur de tension sinusoïdale (période T) au primaire et on laisse le secondaire ouvert. Déterminer la puissance moyenne dissipée dans le matériau $< \mathscr{P}_h >$ par hystérésis.

❒ **a.** $< \mathscr{P}_h > = -\dfrac{2\pi R \pi r^2}{T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

☒ **b.** $< \mathscr{P}_h > = \dfrac{2\pi R \pi r^2}{T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

❒ **c.** $< \mathscr{P}_h > = \dfrac{2\pi R \pi r^2}{N_1 T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

❒ **d.** $< \mathscr{P}_h > = \dfrac{N_1 2\pi R \pi r^2}{T} \displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$

On a :

$$u_1 = -e_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 N_1 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

Le générateur fournit au tore et à la bobine une puissance instantanée :

$$\mathscr{P}_h = u_1 i_1 = N_1 \pi r^2 i_1 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 (2\pi R H) \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

en utilisant le théorème d'Ampère $2\pi R H = N_1 i_1$. Cette puissance ne peut être dissipée que dans le matériau magnétique par hystérésis. La puissance moyenne est :

$$< \mathscr{P}_h > = \frac{2\pi R \pi r^2}{T} \int_0^T H \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \frac{2\pi R \pi r^2}{T} \int_0^T H \mathrm{d}B$$

Le terme en facteur $2\pi R \pi r^2$ est égal au volume du tore. Sur une période, tout le cycle d'hystérésis est décrit donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^T H \mathrm{d}B$ est égale à l'aire du cycle d'hystérésis d'où le nom de pertes hystérétiques.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

15 Pour un transformateur parfait (figure 19.4) de N_1 spires au primaire et N_2 au secondaire, déterminer la(les) proposition(s) juste(s) parmi les réponses suivantes.

☒ **a.** On fait l'hypothèse $\mu_r \to \infty$.

❒ **b.** On fait l'hypothèse $H \to \infty$.

☒ **c.** $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$

❒ **d.** $\dfrac{i_2}{i_1} = \dfrac{N_1}{N_2}$

On fait l'hypothèse que le matériau magnétique est très bon, donc μ_r est très grand voire $\mu_r \to \infty$. Puisque $B = \mu H$ et que B est fini, on en déduit $H \simeq 0$.

On note ϕ le flux à travers une section droite du matériau magnétique. Avec les conventions prises sur la figure 19.4, on peut écrire :

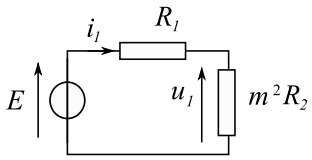
$$u_1 = -e_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad u_2 = -e_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

On applique le théorème d'Ampère : $N_1 i_1 + N_2 i_2 = LH$ avec L la longueur du circuit magnétique. Or $H = 0$ donc $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$ soit $\dfrac{i_2}{i_1} = -\dfrac{1}{m}$.

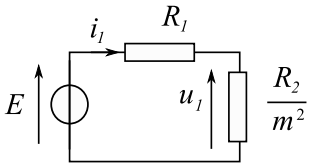
16 On s'intéresse au circuit de la figure 19.5.

Déterminer les circuits équivalents ramenés au primaire et au secondaire.

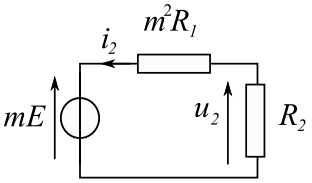
❒ **a.**



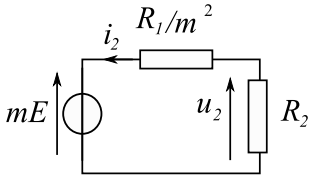
☒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



On écrit la loi des mailles au primaire et au secondaire (attention R_2 est en convention générateur) :

$$E = R_1 i_1 + u_1 \quad \text{et} \quad u_2 = -R_2 i_2$$

On utilise les rapports de transformation pour les tensions et les courants :

$$E = R_1 i_1 + u_1 = R_1 i_1 + \frac{u_2}{m} = R_1 i_1 - \frac{R_2 i_2}{m} = \left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right) i_1$$

et

$$E = R_1 i_1 + u_1 = -R_1 i_2 m + \frac{u_2}{m} \quad \Rightarrow \quad mE = -m^2 R_1 i_2 + u_2$$

Ces résultats correspondent aux schémas **b.** et **c**.

20 Conversion électromécanique - Moteurs

QCM

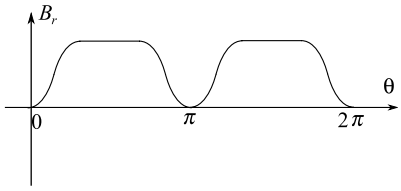
Cet énoncé concerne les questions 1 à 5 :
Pour établir les équations de la machine à courant continu, on utilisera dans un premier temps le modèle simplifié à une spire représenté sur les figures 20.1 et 20.2.

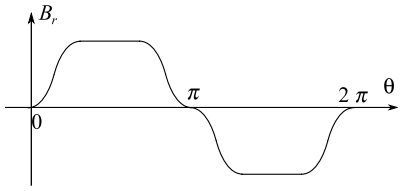
Au niveau des spires du rotor le champ magnétique est radial. La position du conducteur 1 (M_1M_2) est repérée par l'angle θ par rapport à la ligne neutre.

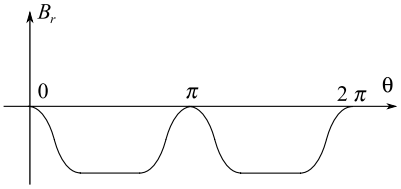
La vitesse angulaire du rotor sera notée Ω.

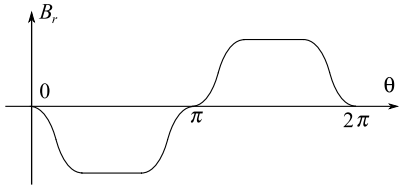
On repérera le conducteur 1 par la basse locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ et le conducteur 2 par la base locale $\left(\overrightarrow{u_r}(\theta+\pi), \overrightarrow{u_\theta}(\theta+\pi), \overrightarrow{u_z}\right)$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{u_r}(\theta+\pi)$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\theta+\pi)$ ont tourné de π par rapport à $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

1 Déterminer l'allure de la composante B_r ressentie par le conducteur 1 en fonction de l'angle θ.

❒ **a.**


❒ **b.**


❒ **c.**


☒ **d.**


Les deux angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ correspondent à la ligne neutre de transition entre le pôle nord et le pôle sud du stator, positions pour lesquelles $B_r = 0$. Pour $0 \leq \theta \leq \pi$, le conducteur 1 est du côté du pôle nord, donc comme on le voit sur la figure 20.1 le champ $\overrightarrow{B}$ est suivant $-\overrightarrow{u_r}$. C'est le contraire pour $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. La réponse juste est la réponse **d**.

2 On note $B(\theta)$ la composante sur $\overrightarrow{u_r}$ de $\overrightarrow{B}$ du côté du conducteur 1. Déterminer la tension e.

❒ **a.** $e = ba\Omega B(\theta)$

☒ **b.** $e = -ba\Omega B(\theta)$

❒ **c.** $e = 0$

❒ **d.** $e = -2ba\Omega B(\theta)$

On suppose dans un premier temps que $0 \leq \theta \leq \pi$, donc le conducteur 1 est en contact avec le point P, et le conducteur 2 avec le point Q. Le conducteur M_2M_3 est colinéaire à $\overrightarrow{B}$ donc le champ électromoteur est nul sur cette partie. Pour M_1M_2, on calcule le champ

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

électromoteur :

$$\overrightarrow{E}_m = \Omega\frac{a}{2}\overrightarrow{u_\theta} \wedge B(\theta)\overrightarrow{u_r} = -\frac{\Omega a B}{2}\overrightarrow{u_z}$$

Avec le sens d'orientation choisi (figure 20.1), on obtient une force électromotrice en calculant la circulation de $\overrightarrow{E}_m$ de M_2 à M_1 soit $e_{21} = \int_{M_2}^{M_1} \overrightarrow{E}_m \cdot \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z} = -\frac{baB(\theta)\Omega}{2}$.

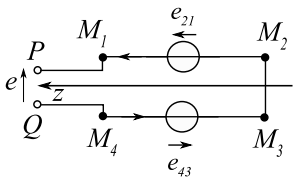


Figure 20.1

Pour M_3M_4, la composante radiale du champ $\overrightarrow{B}$ est opposée à celle pour M_1M_2, donc $\overrightarrow{B} = -B(\theta)\overrightarrow{u_r}(\theta+\pi)$. La vitesse est suivant $\overrightarrow{u_\theta}(\theta+\pi)$ donc le champ électromoteur est :

$$\overrightarrow{E}'_m = -\frac{a}{2}\Omega B(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}(\theta+\pi) \wedge \overrightarrow{u_r}(\theta+\pi) = \frac{\Omega a B(\theta)}{2}\overrightarrow{u_z}$$

et la f.e.m. de M_4 à M_3 est $e_{43} = -\frac{baB(\theta)\Omega}{2}$.

On peut écrire :

$$e = V_P - V_Q = V_{M_1} - V_{M_4} = e_{21} + e_{43} = -ba\Omega B(\theta)$$

Si $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, les rôles des deux conducteurs sont inversés et on trouve $V_{M_1} - V_{M_4} = ba\Omega B(\theta)$, mais P est alors en contact avec M_4 et Q avec M_1, donc $e = V_{M_4} - V_{M_1} = -ba\Omega B(\theta)$. On voit le rôle du collecteur qui permet d'assurer une valeur moyenne de e non nulle.

Étant donné que $B(\theta) < 0$, la tension e est positive.

3 Déterminer la force $\overrightarrow{F_1}$ exercée sur le conducteur 1 à la position θ, ainsi que celle $\overrightarrow{F_2}$ exercée sur le conducteur 2.

☒ **a.** $\overrightarrow{F_1} = ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **b.** $\overrightarrow{F_1} = -ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

❒ **c.** $\overrightarrow{F_2} = ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

☒ **d.** $\overrightarrow{F_2} = -ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

On détermine la force de Laplace sur un élément du conducteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$, soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_1} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge B(\theta)\overrightarrow{u_r} = iB(\theta)\mathrm{d}z\overrightarrow{u_\theta}$$

donc sur la longueur du conducteur $\overrightarrow{F_1} = ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$.

Pour le conducteur 2, on a $\overrightarrow{B} = -B(\theta)\overrightarrow{u_r}(\theta+\pi) = B(\theta)\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$, d'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_1} = i(-\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}) \wedge B(\theta)\overrightarrow{u_r} = -iB(\theta)\mathrm{d}z\overrightarrow{u_\theta} \Rightarrow \overrightarrow{F_2} = -ibB(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$$

4 Déterminer le moment Γ_z du couple par rapport à l'axe z s'exerçant sur la spire formée des conducteurs 1 et 2.

❒ **a.** $\Gamma_z = -iabB(\theta)$

☒ **b.** $\Gamma_z = iabB(\theta)$

❒ **c.** $\Gamma_z = i\dfrac{a}{2}bB(\theta)$

❒ **d.** $\Gamma_z = 0$

Les deux conducteurs étant parallèles à l'axe z, on peut écrire directement :

$$\vec{\Gamma} = \frac{a}{2}\vec{u_r} \wedge \vec{F_1} + \frac{a}{2}(-\vec{u_r}) \wedge \vec{F_2} = iabB(\theta)\vec{u_z}$$

soit $\Gamma_z = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u_z} = iabB(\theta)$.

5 Écrire un bilan d'énergie électromécanique. On note $\mathscr{P}_L$ la puissance des actions de Laplace et $\mathscr{P}_{ind}$ la puissance fournie par induction.

☒ **a.** $\mathscr{P}_L = iabB(\theta)\Omega$

❒ **b.** $\mathscr{P}_{ind} = iba\Omega B(\theta)$

☒ **c.** $\mathscr{P}_{ind} + \mathscr{P}_L = 0$

❒ **d.** $\mathscr{P}_{ind} - \mathscr{P}_L = 0$

Le système est orienté en convention générateur. La puissance électrique fournie par induction est $\mathscr{P}_{ind} = ei = -iba\Omega B(\theta)$.

La puissance des actions de Laplace est : $\mathscr{P}_L = \Gamma_z\Omega = iabB(\theta)\Omega$. On vérifie $\mathscr{P}_{ind} + \mathscr{P}_L = 0$.

Il n'y a donc pas de réponse juste pour $\mathscr{P}_{ind}$.

Cet énoncé concerne les questions 6 à 10 :
Dans cette série de questions concernant une machine à courant continu réelle, on notera ϕ_0 la constante de flux caractéristique de la machine telle que la f.c.e.m.(force contre électromotrice) en sortie de la machine à courant continu est $E = \phi_0\Omega$ et le couple électromagnétique (moteur) $\Gamma_m = \phi_0 i$ avec l'orientation de la figure 20.3.

6 La résistance de l'induit est r (quelques ohms) et son inductance L. Le circuit équivalent à l'induit est représenté sur la figure 20.4. L'axe du moteur est relié à un système dont le couple résistant est de valeur absolue Γ_r et le moteur est alimenté sous une tension $u = cte$. Déterminer la vitesse angulaire Ω du moteur en régime permanent.

❒ **a.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(u + r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$

☒ **b.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(u - r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$

❒ **c.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(-u - r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$

❒ **d.** $\Omega = \dfrac{1}{\phi_0}\left(-u + r\dfrac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$

Comme E est une force contre-électromotrice, elle est opposée au sens conventionnel du courant. La loi des mailles s'écrit :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + \phi_0\Omega$$

En régime permanent $i = cte$ donc $u = ri + \phi_0\Omega$. D'autre part, sachant que le moment résistant est de valeur absolue Γ_r, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_m - \Gamma_r$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

soit en régime permanent $\Gamma_m = \Gamma_r$. Or $\Gamma_m = \phi_0 i$, ce qui permet d'éliminer i dans la loi des mailles soit :

$$u = r\frac{\Gamma_r}{\phi_0} + \phi_0\Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{1}{\phi_0}\left(u - r\frac{\Gamma_r}{\phi_0}\right)$$

7 Exprimer le rendement η_m dans le cas d'un fonctionnement moteur et le rendement η_g dans le cas d'un fonctionnement en génératrice.

❒ **a.** $\eta_m = \dfrac{Ei - ri^2}{Ei}$

☒ **b.** $\eta_m = \dfrac{Ei}{Ei + ri^2}$

❒ **c.** $\eta_g = \dfrac{Ei}{Ei - ri^2}$

☒ **d.** $\eta_g = \dfrac{Ei + ri^2}{Ei}$

On utilise les notations de la figure 20.4 où le moteur est en convention récepteur. Dans le cas d'un fonctionnement moteur, la machine reçoit de l'énergie électrique et fournit de l'énergie mécanique. On a, dans la convention récepteur, $Ei > 0$ et $\Gamma_m\Omega > 0$. La puissance électrique fournie au moteur est $\mathscr{P}_e = ui = Ei + ri^2$ en régime permanent. La puissance mécanique fournie par le moteur est $\mathscr{P}_m = \Gamma_m\Omega = Ei$. Le rendement est donc :

$$\eta_m = \frac{\mathscr{P}_m}{\mathscr{P}_e} = \frac{Ei}{Ei + ri^2}$$

Pour un fonctionnement en génératrice, la machine reçoit de l'énergie mécanique et fournit de l'énergie électrique. On en déduit toujours dans la même convention : $\Gamma_m\Omega < 0$ et $Ei < 0$. La puissance mécanique reçue par la machine est $\mathscr{P}_m = -\Gamma_m\Omega = -Ei$ et la puissance électrique fournie par la machine est $\mathscr{P}_e = -ui = -Ei - ri^2$. Le rendement est donc :

$$\eta_g = \frac{\mathscr{P}_e}{\mathscr{P}_m} = \frac{-Ei - ri^2}{-Ei} = \frac{Ei + ri^2}{Ei}$$

8 Le moteur est régime permanent et on veut l'arrêter. On coupe l'alimentation de l'inducteur sans couper celle de l'induit. Que se passe-t'il ?

❒ **a.** Le moteur s'arrête.

❒ **b.** La vitesse angulaire reste constante.

☒ **c.** Le moteur s'emballe.

❒ **d.** La vitesse angulaire décroît lentement.

On sait que ϕ_0 est proportionnel au champ B créé par l'inducteur. Si on coupe l'alimentation de l'inducteur, il ne reste que le champ rémanent beaucoup plus faible, donc ϕ_0 devient petit et d'après l'expression obtenue à la question précédente Ω va croître fortement, donc le moteur s'emballe.

9 Pour démarrer le moteur, comment doit-on précéder ?

❒ **a.** Appliquer une tension simultanément à l'inducteur et à l'induit.

☒ **b.** Appliquer une tension à l'inducteur, puis progressivement une tension à l'induit.

❒ **c.** Appliquer une tension à l'induit puis ensuite à l'inducteur.

❒ **d.** Appliquer une tension à l'inducteur puis ensuite à l'induit.

Au démarrage $\Omega = 0$ donc $E = 0$ et $u = ri$. Étant donné que r est faible il faut appliquer la tension u progressivement pour éviter une surintensité dans l'induit, donc seule la réponse **b.** est valable.

10 Pour faire fonctionner le moteur, on propose le montage suivant appelé « shunt » (figure 20.5). Le rhéostat a une résistance R_{th}. On augmente progressivement la tension u. L'axe du moteur est relié à un système dont le couple résistant est de valeur absolue Γ_r et on néglige l'inductance L de l'induit.

❒ **a.** Le moteur démarre immédiatement.

❒ **b.** Le moteur démarre lorsque $u > \dfrac{r\Gamma_r}{\phi_0}$

☒ **c.** Le moteur démarre lorsque $u > \dfrac{(r + R_{th})\Gamma_r}{\phi_0}$

❒ **d.** Le moteur ne peut pas démarrer.

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_m - \Gamma_r$$

donc pour que le moteur démarre il faut que $\Gamma_m > \Gamma_r$ soit $i > \Gamma_r/\phi_0$. La loi des mailles s'écrit pour l'induit : $u = ri + R_h i + E$; or tant que le moteur n'a pas démarré, $\Omega = 0$ et donc $E = 0$ soit $i = \dfrac{u}{r + R_h}$. Le moteur démarrera lorsque $u > \dfrac{(r + R_{th})\Gamma_r}{\phi_0}$.

Cet énoncé concerne les questions 11 à 13 :
Cette série de questions étudie l'évolution d'un moment magnétique permanent dans un champ magnétique tournant.

11 On cherche à réaliser un champ magnétique tournant de norme constante en un point O, à la vitesse angulaire ω, par rapport à l'axe Oz. On réalise avec deux bobines identiques le montage de la figure 20.6, où les bobines sont à même distance de O. Déterminer les intensités i_1 et i_2 nécessaires pour obtenir le champ désiré en O.

❒ **a.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = I_0 \cos \omega t \end{cases}$

❒ **b.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = 2I_0 \sin \omega t \end{cases}$

❒ **c.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = -I_0 \sin \omega t \end{cases}$

☒ **d.** $\begin{cases} i_1 = I_0 \cos \omega t \\ i_2 = I_0 \sin \omega t \end{cases}$

On sait qu'un solénoïde parcouru par une intensité i crée en un point de son axe un champ magnétique de la forme $B = ki$. Dans le cas de la figure, le champ magnétique en O sera donc de la forme :

$$\vec{B} = k(i_1\vec{u_x} + i_2\vec{u_y})$$

La réponse **a.** donne un champ de direction constante selon la première bissectrice des axes.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

La réponse **b.** donne un champ tournant à la vitesse angulaire ω mais de norme non constante. L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{B}$ décrit une ellipse.

Les deux dernières réponses donnent des champs tournants de norme constante mais la réponse **c.** correspond à un champ ayant une vitesse angulaire $-\omega$.

12 On note B_0 la norme de $\overrightarrow{B}$. On place en O un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{M}$ de norme constante. La vitesse angulaire du dipôle par rapport à l'axe Oz est ω_m. À $t = 0$, le champ magnétique fait un angle α avec l'axe Ox, alors que $\overrightarrow{M}$ est aligné avec cet axe. On note $\overrightarrow{\Gamma}$ le moment du couple exercé par $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{M}$. Déterminer la(les) réponse(s) juste(s) parmi les suivantes.

❒ **a.** $\overrightarrow{\Gamma} = -MB_0 \sin(\omega t - \omega_m t + \alpha)\,\overrightarrow{u_z}$

☒ **b.** $\overrightarrow{\Gamma} = MB_0 \sin(\omega t - \omega_m t + \alpha)\,\overrightarrow{u_z}$

☒ **c.** Si $\omega \neq \omega_m$ le couple moyen $\left\langle \overrightarrow{\Gamma} \right\rangle$ est nul.

❒ **d.** Si $-\pi \leq \alpha \leq 0$, le système peut se comporter en moteur.

Le couple exercé par le champ sur le dipôle est $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$ soit :

$$\begin{cases} M\cos\omega_m t \\ M\sin\omega_m t \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} B_0\cos(\omega t + \alpha) \\ B_0\sin(\omega t + \alpha) \\ 0 \end{cases} = MB_0\sin(\omega t - \omega_m t + \alpha)\,\overrightarrow{u_z}$$

donc $\left\langle \overrightarrow{\Gamma} \right\rangle \neq \overrightarrow{0}$ uniquement si $\omega = \omega_m$, d'où le nom de moteur synchrone. On a alors $\left\langle \overrightarrow{\Gamma} \right\rangle = MB_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$. Pour que le moment magnétique soit entraîné par le champ, il faut $\sin\alpha > 0$ sinon le moment subit un couple résistant. Le système se comporte en moteur si $0 \leq \alpha \leq \pi$.

13 Le moteur est relié à un système mécanique qui exerce un couple résistant de norme Γ_r. En régime permanent, il y a deux points de fonctionnement (figure 20.7).

☒ **a.** P_1 est stable.

❒ **b.** P_2 est stable.

❒ **c.** Les deux points sont stables.

❒ **d.** La stabilité n'est pas prévisible.

En régime permanent, d'après le théorème du moment cinétique, le couple moteur Γ est égal en moyenne au couple résistant, d'où la détermination de P_1 et P_2.

On étudie maintenant leur stabilité en supposant par exemple que la vitesse angulaire du rotor ω_m diminue en raison de frottements (augmentation du couple résistant) : on observe alors une augmentation de l'angle α. Dans le cas de P_1, on voit alors sur la figure que le couple moteur augmente et peut donc s'opposer à l'augmentation du couple résistant, ce qui n'est pas le cas pour P_2.

Cet énoncé concerne les questions 14 à 17 :
Une bobine de N spires d'aire S, fermée sur elle-même, de résistance R, d'inductance L, peut tourner autour de l'axe Oz (figure 20.8). On note J son moment d'inertie par rapport à Oz. On repère la position de sa normale $\vec{n}$ par rapport à l'axe Ox par l'angle α et on note $\dot{\alpha} = \Omega$.

Cette bobine est soumise à un champ tournant $\vec{B}$ de norme constante et uniforme sur toute la bobine. L'angle que fait le champ $\vec{B}$ avec Ox est β avec $\dot{\beta} = \Omega_0$ où la vitesse angulaire Ω_0 est constante. À $t = 0$, $\alpha = \beta = 0$.

On se place dans le cas $\Omega \neq \Omega_0$.

14 Calculer le flux instantané $\phi_e(t)$ à travers la bobine.

❒ **a.** $\phi_e = BS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$
☒ **b.** $\phi_e = NBS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$
❒ **c.** $\phi_e = N^2BS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$
❒ **d.** $\phi_e = NBS\sin(\Omega_0 - \Omega)t$

Le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine est :

$$\phi_e = \iint_{bobine} \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = NBS\cos(\beta - \alpha)$$

or $\dot{\beta} = \Omega_0$ soit $\beta = \Omega_0 t$ puisque $\beta(0) = 0$. De même, $\alpha = \Omega t$. Donc $\phi_e = NBS\cos(\Omega_0 - \Omega)t$.

15 On pose pour la suite $\phi_0 = NBS$ et $\omega = \Omega_0 - \Omega$. On veut déterminer le courant induit dans la bobine. On pose $i(t) = I\cos(\omega t + \theta)$, et donc $\underline{i(t)} = \underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}$. Déterminer $\underline{I}$.

❒ **a.** $\underline{I} = \dfrac{\phi_0\omega}{L\omega + R}$
❒ **b.** $\underline{I} = \dfrac{\phi_0\omega}{jL\omega + R}$
❒ **c.** $\underline{I} = \dfrac{j\phi_0\omega}{jL\omega + R}$
☒ **d.** $\underline{I} = \dfrac{-j\phi_0\omega}{jL\omega + R}$

La loi de Faraday permet de calculer la f.e.m. induite :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi_e}{\mathrm{d}t} = \phi_0\omega\sin\omega t$$

L'équation électrique du circuit s'écrit ;

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e \text{ soit en complexe } (jL\omega + R)\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t} = \phi_0\omega\mathrm{e}^{j(\omega t - \pi/2)}$$

d'où : $\underline{I} = \dfrac{-j\phi_0\omega}{jL\omega + R}$.

16 Calculer $\Gamma = \vec{\Gamma}\cdot\vec{u_z}$ en fonction de $i(t)$, ϕ_0, ω, puis $\langle\Gamma\rangle$ en fonction de I, θ et ϕ_0.

❒ **a.** $\Gamma = -\phi_0 i\sin\omega t$
☒ **b.** $\Gamma = \phi_0 i\sin\omega t$
☒ **c.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{-\phi_0 I}{2}\sin\theta$
❒ **d.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{\phi_0 I}{2}\sin\theta$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Dans le cas où une bobine est dans un champ uniforme, elle se comporte comme un dipôle magnétique donc de moment $\overrightarrow{M} = NSi\overrightarrow{n}$. Le calcul du moment du couple a déjà été effectué pour le moteur synchrone :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B} = NSiB\sin(\beta - \alpha)\overrightarrow{u_z} = NSiB\sin\omega t\,\overrightarrow{u_z} = \phi_0 i \sin\omega t\,\overrightarrow{u_z}$$

En utilisant l'expression de $i(t)$, on obtient :

$$\Gamma = \phi_0 I\cos(\omega t + \theta)\sin(\omega t) = \frac{\phi_0 I}{2}(\sin(2\omega t + \theta) - \sin\theta)$$

On remarque que si $\omega = 0$ alors le couple est nul : ce moteur ne fonctionne que si $\Omega \neq \Omega_0$ d'où le nom de moteur asynchrone. Finalement :

$$\langle\Gamma\rangle = \frac{-\phi_0 I}{2}\sin\theta$$

17 En remarquant que $I\sin(\theta) = \mathrm{Im}(\underline{I})$, exprimer $\langle\Gamma\rangle$ en fonction de L, R, ϕ_0 et ω.

❒ **a.** $\langle\Gamma\rangle = -\dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 + (L\omega)^2}$

❒ **b.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0}{R^2 + (L\omega)^2}$

❒ **c.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 - (L\omega)^2}$

☒ **d.** $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 + (L\omega)^2}$

On calcule la partie imaginaire de $\underline{I}$:

$$\underline{I} = \frac{-j\omega\phi_0}{R^2 + (L\omega)^2}(R - jL\omega) \Rightarrow I\sin\theta = \frac{-R\omega\phi_0}{R^2 + (L\omega)^2}$$

d'où $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{R\omega\phi_0^2}{R^2 + (L\omega)^2}$.

21 Conversion électronique - Hacheurs

Vrai/Faux

1 ☒ V ❒ F Pour transformer une source de courant idéale en source de tension idéale, on branche en parallèle un condensateur de grande capacité.

On a alors la schéma de la figure 21.1.

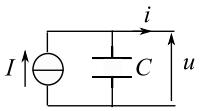


Figure 21.1

On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{I - i}{C}$, donc si C est grande les variations de u sont très faibles ce qui est le propre d'une source de tension.

2 ❒ V ☒ F Pour transformer une source de tension idéale en source de courant idéale, on branche en parallèle une bobine de grande inductance.

Il faut effectivement utiliser une bobine mais en série avec la source (figure 21.2).

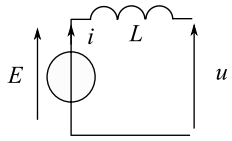


Figure 21.2

On peut écrire $\frac{di}{dt} = \frac{E-u}{L}$, donc si L est grande les variations de i sont très faibles ce qui est le propre d'une source de courant.

3 ❒ V ☒ F Pour améliorer une source de courant, on branche en parallèle une bobine de grande inductance.

Il faut brancher une bobine en série avec la source (figure 21.3).

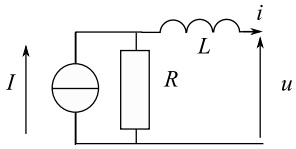


Figure 21.3

L'équation différentielle du circuit est : $L\frac{di}{dt} + Ri = RI - u$. On suppose qu'à l'instant qu'on prend comme origine, il y a une variation brusque de tension Δu alors que toutes les grandeurs étaient constantes. Par continuité du courant dans la bobine $i(0^+) = i(0^-)$ et donc d'après l'équation $\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{\Delta u}{L}$. La variation de i pour $t > 0$ sera d'autant plus atténuée que L sera grand.

4 ☒ V ❒ F Pour améliorer une source de tension, on branche en parallèle un condensateur de grande capacité.

Le raisonnement est du même type qu'à la question précédente sur le circuit de la figure 21.4.

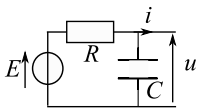


Figure 21.4

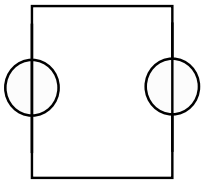
Pour une variation de i égale à Δi, on a $\frac{du}{dt} = -\frac{\Delta i}{C}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

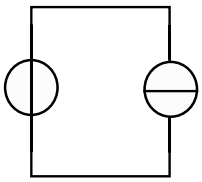
QCM

5 Déterminer les associations possibles entre sources.

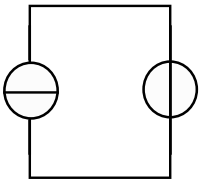
❒ **a.**



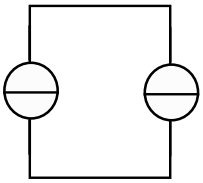
☒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**

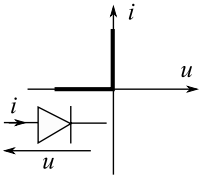


On ne peut associer deux sources de même type car elles ont des caractéristiques courant-tension formées de droites parallèles. Le point de fonctionnement, intersection des caractéristiques, est alors à l'infini. Dans le cas de deux sources de tension, on obtiendra une intensité infinie et dans le cas de deux sources de courant, c'est la tension qui sera infinie.

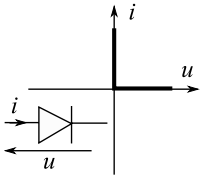
Si les deux sources sont de types différents, les caractéristiques sont perpendiculaires et il existe un point de fonctionnement.

6 Déterminer les caractéristiques des interrupteurs « diode idéale » et « transistor idéal ».

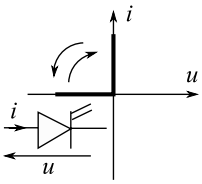
☒ **a.**



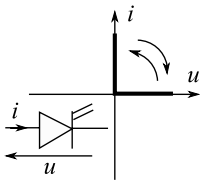
❒ **b.**



❒ **c.**



☒ **d.**

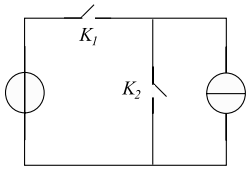


La diode est passante pour $u = 0\ \forall i$ et bloquée pour $u < 0$ et $i = 0$. C'est un interrupteur à commutation spontanée.

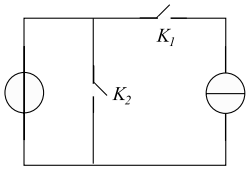
Le transistor est un interrupteur commandé (par le courant de base pour un transistor bipolaire) avec idéalement $i = 0$ et $u > 0$ dans l'état bloqué et $i > 0$ et $u = 0$ dans l'état passant.

7 Dans les circuits suivants, K_1 et K_2 sont des interrupteurs qui ne sont ni simultanément ouverts, ni simultanément fermés. Déterminer les circuits hacheurs possibles.

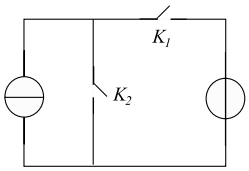
☒ **a.**



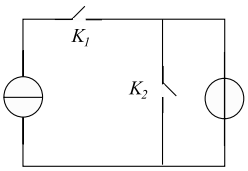
❒ **b.**



☒ **c.**



❒ **d.**



Il faut respecter les deux règles suivantes au cours du fonctionnement : on ne peut court-circuiter une source de tension et on ne peut laisser une source de courant en circuit ouvert.

Dans le cas de la réponse **b.**, lorsque K_1 est ouvert la source de courant est en circuit ouvert, et lorsque K_2 est fermé la source de tension est court-circuitée. Ce circuit est inutilisable. Il en est de même pour le circuit **d**.

Cet énoncé concerne les questions 8 à 11 :
Cette série de question étudie un hacheur série (figure 21.1). La source de tension a une f.e.m. $E > 0$ et la source de courant, un courant de court-circuit $I > 0$.

- Pour $0 \leq t \leq \alpha T$, l'interrupteur K_1 est fermé et K_2 est ouvert.
- Pour $\alpha T \leq t \leq T$, l'interrupteur K_1 est ouvert et K_2 est fermé.

8 Déterminer les valeurs moyennes de l'intensité i_e et de la tension u_s.

❒ **a.** $< i_e >= (1 - \alpha)I$

☒ **b.** $< i_e >= \alpha I$

☒ **c.** $< u_s >= \alpha E$

❒ **d.** $< u_s >= (1 - \alpha)E$

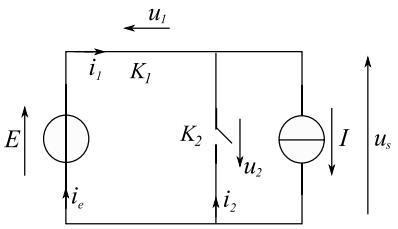


Figure 21.5 Schéma équivalent pour $0 \leq t \leq \alpha T$

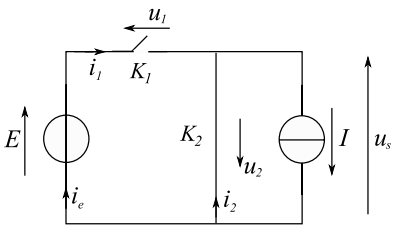


Figure 21.6 Schéma équivalent pour $\alpha T \leq t \leq T$

D'après les schémas équivalents, pour $0 \leq t \leq \alpha T$, $i_e = i_1 = I$ et pour $\alpha T \leq t \leq T$ $i_e = i_1 = 0$. La valeur moyenne de i_e est donc $< i_e >= \dfrac{\alpha T}{T} I = \alpha I$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

En ce qui concerne la tension aux bornes de la source de courant, pour $0 \leq t \leq \alpha T$, $u_s = u_2 = E$ et pour $\alpha T \leq t \leq T$ $u_s = u_2 = 0$. La valeur moyenne de u_s est donc $< u_s >= \dfrac{\alpha T}{T} E = \alpha E$.

9 Déterminer la puissance moyenne $\mathscr{P}_e$ fournie par la source de tension et la puissance moyenne $\mathscr{P}_s$ reçue par la source de courant.

❒ **a.** $\mathscr{P}_e = (1 - \alpha)EI$

❒ **b.** $\mathscr{P}_e = EI$

❒ **c.** $\mathscr{P}_s = \alpha I^2$

☒ **d.** $\mathscr{P}_s = \alpha EI$

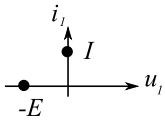
La source de tension ne fournit de la puissance que sur le premier intervalle de temps. La puissance instantanée fournie est Ei_e donc la puissance moyenne $\mathscr{P}_e = E < i_e >= \alpha EI$. Aucune réponse ne convient.

De même, la sortie ne reçoit de la puissance que sur ce même intervalle de temps, soit $\mathscr{P}_s = I < u_s >= \alpha EI$.

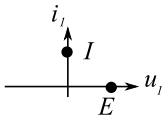
On remarque que $\mathscr{P}_e = \mathscr{P}_s$, ce qui était attendu puisqu'on a considéré les interrupteurs idéaux.

10 Déterminer les points de fonctionnements de K_1 et en déduire la nature.

❒ **a.**



☒ **b.**



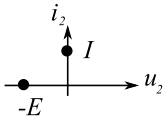
❒ **c.** K_1 est une diode.

☒ **d.** K_1 est un transistor.

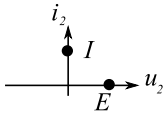
L'interrupteur K_1 est orienté en convention récepteur. Pour le premier intervalle de temps, on a un interrupteur passant avec $u_1 = 0$ et $i_1 = I > 0$. Pour le second intervalle de temps, l'interrupteur est bloqué avec $i_1 = 0$ et $E = u_1 - u_2 = u_1$. Les points de fonctionnement de l'interrupteur K_1 correspondent à la figure **d.** et à la caractéristique d'un transistor idéal.

11 Déterminer les points de fonctionnements de K_2 et en déduire la nature.

☒ **a.**



❒ **b.**



☒ **c.** K_2 est une diode.

❒ **d.** K_2 est un transistor.

L'interrupteur K_2 est orienté en convention récepteur. Pour le premier intervalle de temps, on a un interrupteur ouvert avec $u_2 = -E$ et $i_2 = 0$. Pour le second intervalle de temps, l'interrupteur est passant avec $i_1 = I$ et $u_2 = 0$. Les points de fonctionnement de l'interrupteur K_2 correspondent à la figure **a.** et à la caractéristique d'une diode idéale.

Cet énoncé concerne les questions 12 à 17 :
Pour alimenter un moteur à courant continu (f.e.c.m. e, résistance négligeable, constante de flux caractéristique ϕ_0), monté en série avec une inductance L, on utilise le hacheur à quatre interrupteurs de la figure 21.2.

La tension d'alimentation est E. L'ouverture des interrupteurs (supposés parfaits) se décompose de la manière suivante (n étant entier et $0 \leq \alpha \leq 1$) :

- pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$: K_1 et K_3 sont fermés et K_2 et K_4 ouverts ;
- pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$: K_1 et K_3 sont ouverts et K_2 et K_4 fermés.

12 Déterminer les valeurs moyennes de v et e.

❒ **a.** $< v >= 0$ ❒ **b.** $< v >= (1-2\alpha)E$

❒ **c.** $< e >= (1-2\alpha)E$ ☒ **d.** $< e >= (2\alpha-1)E$

Pour le premier intervalle de temps, le circuit est équivalent à celui de la figure 21.7 et on a $v = E$. Pour le second intervalle de temps à celui de la figure 21.8 et on a $v = -E$. On en déduit la valeur moyenne de v : $< v >= \alpha E - (1-\alpha)E = (2\alpha-1)E$. Aucune réponse ne convient pour $< v >$.

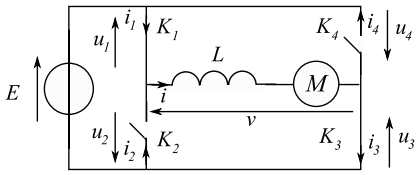


Figure 21.7 Schéma équivalent pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$

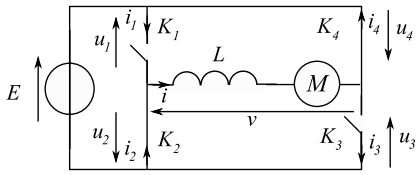


Figure 21.8 Schéma équivalent pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$

Pour obtenir la valeur moyenne de e, on écrit l'équation différentielle dans la branche contenant le moteur et on prend la valeur moyenne :

$$v = e + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow < v >=< e > + \frac{L}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t =< e > + \frac{L}{T}[i((n+1)T) - i(nT)]$$

On aura fait attention à prendre e dans le sens opposé à i et dans le sens de v puisque c'est une force contre électromotrice.

L'intensité i est périodique donc $[i((n+1)T) - i(nT)] = 0$ et $< e >=< v >$.

13 Dans la suite, on suppose que $e =< e >= cte$ et on note I_M la valeur maximale de i et I_m sa valeur minimale. Déterminer l'expression de $i(t)$.

☒ **a.** Pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$: $i(t) = I_m + \dfrac{2(1-\alpha)E}{L}(t - nT)$

❒ **b.** Pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$: $i(t) = I_M + \dfrac{-2\alpha E}{L}(t - nT)$

❒ **c.** Pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$: $i(t) = I_m + \dfrac{2(1-\alpha)E}{L}(t - (n+\alpha)T)$

☒ **d.** Pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$: $i(t) = I_M + \dfrac{-2\alpha E}{L}(t - (n+\alpha)T)$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Pour $nT \leq t \leq (n+\alpha)T$, l'équation différentielle du circuit s'écrit :

$$E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (2\alpha - 1)E \Rightarrow i(t) = i(nT) + \frac{2(1-\alpha)E}{L}(t - nT)$$

Puisque $\alpha \leq 1$, l'intensité est croissante pendant cet intervalle de temps, et on a $I_m = i(nT)$.

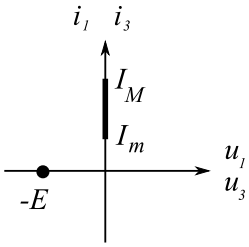
Pour $(n+\alpha)T \leq t \leq (n+1)T$, l'équation différentielle du circuit s'écrit :

$$-E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (2\alpha - 1)E \Rightarrow i(t) = i((n+\alpha)T) + \frac{-2\alpha E}{L}(t - (n+\alpha)T)$$

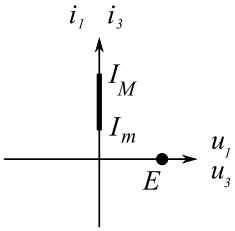
On voit que l'intensité est décroissante pendant cet intervalle de temps, donc on a $I_M = i((n+\alpha)T)$.

14 Déterminer les zones représentatives des états de K_1 et K_3 sur la caractéristique courant-tension, et le type d'interrupteurs utilisés.

❒ **a.**



☒ **b.**



❒ **c.** K_1 et K_3 sont des diodes.

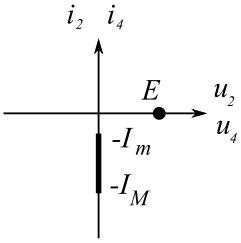
☒ **d.** K_1 et K_3 sont des transistors.

Sur le premier intervalle de temps K_1 et K_3 sont passants donc $u_1 = u_3 = 0$. D'autre part, $i_1 = i = i_3$ et d'après ce qu'on vient d'établir i passe de I_m à I_M.

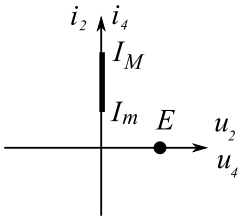
Sur le deuxième intervalle de temps (figure 21.8), comme $u_2 = u_4 = 0$, alors $u_1 = u_3 = E$. Les deux interrupteurs sont bloqués donc $i_1 = i_3 = 0$. La réponse est la réponse **b.** et ce sont des transistors.

15 De même pour K_2 et K_4, déterminer les zones représentatives du fonctionnement sur la caractéristique courant-tension, et le type d'interrupteurs utilisés.

☒ **a.**



❒ **b.**



☒ **c.** K_2 et K_4 sont des diodes.

❒ **d.** K_2 et K_4 sont des transistors.

Le raisonnement est similaire à celui de la question précédente. Sur le premier intervalle de temps K_2 et K_4 sont bloqués donc $i_2 = i_4 = 0$ et $u_2 = u_4 = -E$.

Pour le deuxième intervalle de temps, les deux interrupteurs sont passants donc $u_2 = u_4 = 0$ et $i_2 = i_4 = -i$. La caractéristique correspond à la réponse **a**. Il s'agit donc de diodes orientées comme sur la figure 21.9.

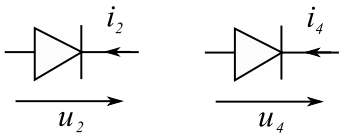


Figure 21.9

16 Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes.

☒ **a.** On peut inverser le sens de rotation de la machine.

☒ **b.** Si $\alpha < \frac{1}{2}$, la machine fonctionne en génératrice.

❒ **c.** On peut inverser le couple mécanique.

❒ **d.** La machine ne peut pas fonctionner en génératrice.

La vitesse angulaire de la machine est reliée à e par $e = \phi_0\Omega$, donc si e change de signe Ω aussi. Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, e et Ω sont positifs et pour $\alpha < \frac{1}{2}$, e et Ω sont négatifs. La réponse **a.** est juste.

Les interrupteurs sont unidirectionnels donc l'intensité du courant i est toujours positive. Si e est positif ($\alpha > \frac{1}{2}$), la puissance électrique ei reçue par la machine est positive, elle fonctionne en moteur ; si $\alpha < \frac{1}{2}$ la puissance est négative et la machine fonctionne en génératrice. La réponse **b.** est juste et la **d.** est fausse.

Le couple mécanique s'écrit $\Gamma = \phi_0 i$ donc comme i il est toujours positif. La réponse **c.** est fausse.

17 Déterminer l'ondulation $\Delta I = I_M - I_m$ et le couple (I_M, I_m) en fonction du couple mécanique moyen Γ_m.

❒ **a.** $\Delta I = \dfrac{2E(\alpha - 1)\alpha T}{L}$

☒ **b.** $\Delta I = \dfrac{2E(1-\alpha)\alpha T}{L}$

☒ **c.** $\begin{cases} I_M = \dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \\ I_m = -\dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \end{cases}$

❒ **d.** $\begin{cases} I_M = \dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T - \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \\ I_m = +\dfrac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T - \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m} \end{cases}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

Pour déterminer l'ondulation, on utilise l'expression de $i(t)$ sachant par exemple que $I_M - I_m = i((n+\alpha)T) - i(nT)$ ce qui donne $\Delta I = \dfrac{2E(1-\alpha)\alpha T}{L}$, d'où l'intérêt d'avoir une grande inductance.

La valeur moyenne de i est $< i >= \dfrac{I_M + I_m}{2}$ (propriété des courbes triangulaires), ce qui donne $\dfrac{I_M + I_m}{2} = \dfrac{\phi_0}{\Gamma_m}$. En utilisant l'expression de ΔI, on trouve :

$$I_M = \frac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + \frac{\phi_0}{\Gamma_m} \quad \text{et} \quad I_m = -\frac{E(1-\alpha)}{L}\alpha T + \frac{\phi_0}{\Gamma_m}$$

Partie 7
Thermodynamique

22 Conduction thermique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La loi de Fourier relative à la conduction thermique.
- L'équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur).
- La notion de résistance thermique.
- La modélisation d'un système thermodynamique par analogie avec un circuit électrique.
- La conducto-convection (loi de Newton).

Notations. Sauf indication contraire, on notera $\overrightarrow{j_{th}}$ le vecteur densité de courant thermique, λ la conductivité thermique supposée constante, ρ la masse volumique, c la capacité thermique massique.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 350**.

1 ❒ V ❒ F L'unité du vecteur densité de courant thermique est le $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

2 ❒ V ❒ F La loi de Fourier s'écrit : $\overrightarrow{j_{th}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$.

3 ❒ V ❒ F Si on note ϕ_{12} le flux thermique passant d'une zone de température T_1 d'un corps à une zone de température T_2, la résistance thermique entre ces deux zones est $R_{th} = \dfrac{\phi_{12}}{T_1 - T_2}$.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 350**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

4 Quels sont les phénomènes qui obéissent à une loi analogue à la loi de Fourier ?

❒ **a.** La diffusion de la lumière
❒ **b.** La diffusion des particules
❒ **c.** La conduction électrique
❒ **d.** La diffusion d'une onde radio.

5 On étudie la diffusion dans le cas d'une dimension, selon l'axe Ox. Pour cela on fait le bilan pour un volume de section S, situé entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ (figure 22.1). On note $\mathscr{P}_v$ la puissance produite par unité de volume. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température T appelée équation de diffusion thermique.

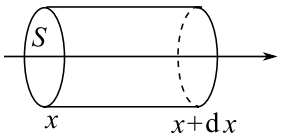


Figure 22.1

❒ **a.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v$
❒ **b.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}x = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v \mathrm{d}x$
❒ **c.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v$
❒ **d.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

6 On considère un milieu dans lequel l'échelle de variation spatiale de la température est L. Quel est le temps caractéristique τ_{th} de la diffusion thermique dans ce milieu ?

❒ **a.** $\tau_{th} = \dfrac{\rho c}{\lambda} L$
❒ **b.** $\tau_{th} = \dfrac{\lambda L^2}{\rho c}$
❒ **c.** $\tau_{th} = \dfrac{\rho c}{\lambda} L^2$
❒ **d.** $\tau_{th} = \dfrac{\lambda}{\rho c} L^2$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

7 On étudie maintenant la diffusion dans le cas d'une symétrie cylindrique, en supposant qu'elle a lieu uniquement suivant $\overrightarrow{u_r}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r)\overrightarrow{u_r}$. Pour cela on fait le bilan pour un volume situé entre les cylindres de rayon r et $r+\mathrm{d}r$ et de hauteur h (figure 22.2). On suppose qu'il n'y a pas de puissance produite dans le volume. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température T.

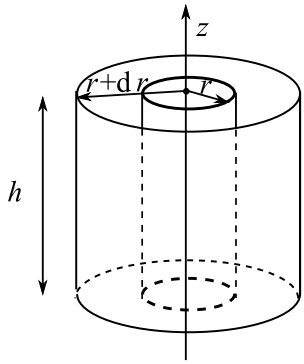


Figure 22.2

❒ **a.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}$

❒ **b.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **c.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **d.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

8 On étudie maintenant la diffusion dans le cas d'une symétrie sphérique, en supposant qu'elle a lieu uniquement suivant $\overrightarrow{u_r}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r)\overrightarrow{u_r}$. Pour cela on fait le bilan pour un volume situé entre les sphères concentriques (centre O) de rayon r et $r+\mathrm{d}r$. On suppose qu'il n'y a pas de puissance produite dans le volume. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température T.

❒ **a.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^3}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^3\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **b.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **c.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **d.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}$

Cet énoncé concerne les questions 9 à 10 :
On étudie enfin la diffusion dans le cas général. On prend en compte un terme source ou puits de puissance de densité volumique $\mathscr{P}_v$.

9 Pour faire le bilan, on considère un volume τ de l'espace, limité par la surface fermée S. On note M un point quelconque du volume τ et $\mathrm{d}\tau_M$ un volume mésoscopique autour de M. On note P un point quelconque de la surface et $\overrightarrow{\mathrm{d}S_P}$ le vecteur surface élémentaire autour de P. Effectuer le bilan d'énergie sur ce volume.

❒ **a.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}\tau_M = -\oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M$

❒ **b.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}\tau_M = -\oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} \mathrm{d}t + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M \mathrm{d}t$

❒ **c.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}\tau_M = \oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M$

❒ **d.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}\tau_M = \oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} \mathrm{d}t + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M \mathrm{d}t$

10 En déduire l'équation de la diffusion thermique. On rappelle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} = \Delta$.

❒ **a.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \mathscr{P}_v$

❒ **b.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \Delta T + \mathscr{P}_v$

❒ **c.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \mathrm{d}t + \mathscr{P}_v \mathrm{d}t$

❒ **d.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \Delta T \mathrm{d}t + \mathscr{P}_v \mathrm{d}t$

11 On souhaite résoudre l'équation de la diffusion dans le cas unidimensionnel stationnaire, par exemple pour un mur d'épaisseur e dont la face $x = 0$ est à la température T_0 et la face $x = e$ à la température T_1. Quelle(s) est(sont) la(les) réponse(s) juste(s) ?

❒ **a.** L'expression de $T(x)$ dépend de λ.

❒ **b.** $j_{th}(x) = -\lambda \dfrac{T_1 - T_0}{e}$

❒ **c.** L'expression de $T(x)$ est indépendante de λ.

❒ **d.** $\overrightarrow{j_{th}} = \overrightarrow{0}$ car le régime est stationnaire.

12 On étudie un double vitrage à l'aide de la notion de résistance thermique. Il est constitué de deux vitres en verre d'épaisseur e_1 et de surface S séparées par une épaisseur e_2 d'argon (figure 22.3). On note λ_a la conductivité de l'argon et λ_v celle du verre. Déterminer la résistance thermique R_{th} de ce double vitrage

❒ **a.** $R_{th} = \dfrac{\lambda_a S}{e_2} + 2\dfrac{\lambda_v S}{e_1}$

❒ **b.** $R_{th} = \dfrac{e_2}{\lambda_a S} + 2\dfrac{e_1}{\lambda_v S}$

❒ **c.** $R_{th} = \left(\dfrac{e_2}{\lambda_a S} + 2\dfrac{e_1}{\lambda_v S}\right)^{-1}$

❒ **d.** $R_{th} = \dfrac{e_2}{\lambda_a S} + \dfrac{e_1}{\lambda_v S}$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

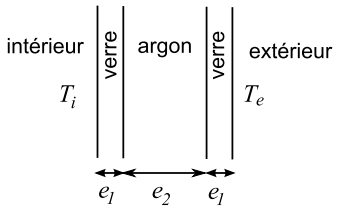
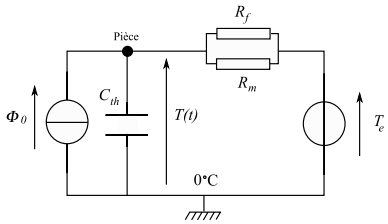
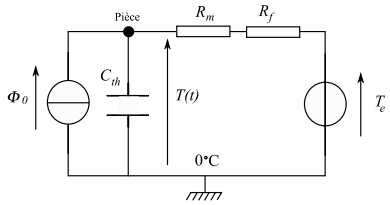


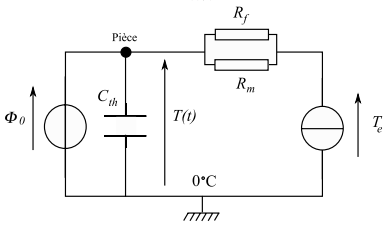
Figure 22.3

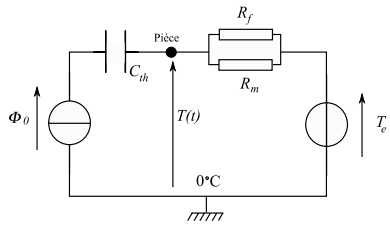
Cet énoncé concerne les questions 13 à 15 :
On souhaite étudier l'évolution de la température d'une pièce en utilisant l'analogie avec un circuit électrique. La pièce a une capacité thermique C_{th}. Elle est chauffée par des radiateurs qui apportent un flux thermique ϕ_0 constant. Le contact avec l'extérieur se fait par l'intermédiaire des murs (résistance thermique totale R_m) et des fenêtres (résistance thermique totale R_f). La température extérieure est constante égale à T_e. Comme dans un circuit électrique (masse à 0 volt), la température de référence est prise égale à 0 °C.

13 Parmi les circuits suivants, lequel correspond au schéma du problème ?

❒ **a.**


❒ **b.**


❒ **c.**


❒ **d.**


14 Établir une(deux) équation(s) vérifiée(s) par la température $T(t)$.

❒ **a.** $C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{T}{R_m + R_f} = \dfrac{T_e}{R_m + R_f} + \phi_0$

❒ **b.** $C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t} + T\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right) = T_e\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right)$

❒ **c.** $\phi_0 = C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ et $\phi_0 = (T - T_e)\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right)$

❒ **d.** $C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t} + T\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right) = T_e\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right) + \phi_0$

15 Déterminer la température T_s en régime stationnaire.

❒ **a.** $T_s = T_e$

❒ **b.** $T_s = T_e + \dfrac{R_m R_f}{R_m + R_f}\phi_0$

❒ **c.** $T_s = T_e + (R_m + R_f)\phi_0$

❒ **d.** $T_s = T_e + \left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right)\phi_0$

Cet énoncé concerne les questions 16 à 18 :
On considère un cylindre de longueur ℓ, de rayon a, d'axe Ox. La température est imposée égale à T_0 en $x = 0$. La température $T(x)$ dans la barre ne dépend que de x. La partie latérale et la face $x = \ell$ sont en contact avec l'air considéré comme un thermostat à la température T_e. Les échanges avec l'air se font par conducto-convection selon la loi de Newton : $j_{cc} = h(T - T_e)$ avec $h > 0$. La conductivité thermique de la barre est λ.

16 Établir en régime stationnaire l'équation différentielle vérifiée par T.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{2h}{a\lambda}T = -\dfrac{2h}{a\lambda}T_e$

❒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{2h}{a\lambda}T_0 = \dfrac{2h}{a\lambda}T_e$

❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{2h}{a\lambda}T = -\dfrac{2h}{a\lambda}T_e$

17 On pose $L^2 = \dfrac{a\lambda}{2h}$. Déterminer l'expression générale de $T(x)$.

❒ **a.** $T = A_1 \cos\dfrac{x}{L} + A_2 \sin\dfrac{x}{L} + T_e$

❒ **b.** $T = \dfrac{T_e - T_0}{L}x^2 + A_1 x + A_2$

❒ **c.** $T = A_1 \exp\dfrac{-x}{L} + A_2 \exp\dfrac{x}{L} + T_e$

❒ **d.** $T = A_1 \exp\dfrac{-x}{L} + A_2 \exp\dfrac{x}{L}$

18 La condition limite en $x = \ell$ s'écrit :

❒ **a.** $T(\ell) = T_e$

❒ **b.** $\lambda\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = h\,(T(\ell) - T_e)$

❒ **c.** $\lambda\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = 0$

❒ **d.** $\lambda\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = h\,(T_e - T(\ell))$

Cet énoncé concerne les questions 19 à 21 :
On veut étudier l'effet dans le sol des variations périodiques d'ensoleillement (quotidiennes, saisonnières...) en fonction de la profondeur de pénétration. On définit un axe Oz descendant, avec $z = 0$ au niveau du sol. La température $T(z, t)$ est une fonction de z et t uniquement. On ne tient pas compte d'éventuelles sources d'énergie dans le sol. Pour modéliser les effets de l'ensoleillement en surface, on suppose qu'en $z = 0$, la température est de la forme $T = T_0 + \theta_0 \cos\omega t$. On pose $K = \dfrac{\lambda}{\rho c}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

19 À une profondeur z on cherche des solutions pour T de la forme $T = T_0 + \theta(z, t)$. On utilisera une forme complexe pour θ soit $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\alpha}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\alpha}$.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} + \dfrac{i\omega}{K}\underline{\alpha} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{\omega}{K}\underline{\alpha} = 0$

❒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{i\omega}{K}\underline{\alpha} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{\omega^2}{K}\underline{\alpha} = 0$

20 La solution générale pour $\underline{\alpha}(x)$ est :

❒ **a.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2K}}(1+i)z\right] + A_2 \exp\left[-\sqrt{\dfrac{\omega}{2K}}(1+i)z\right]$

❒ **b.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2K}}(1+i)z\right] + A_2 \exp\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2K}}(1-i)z\right]$

❒ **c.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{K}}z\right] + A_2 \exp\left[-\sqrt{\dfrac{\omega}{K}}z\right]$

❒ **d.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2K}}(1-i)z\right] + A_2 \exp\left[-\sqrt{\dfrac{\omega}{2K}}(1-i)z\right]$

21 On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2K}{\omega}}$. Déterminer l'expression de $T(z, t)$.

❒ **a.** $T = T_0 + \theta_0 \mathrm{e}^{-z/\delta} \cos \omega t$

❒ **b.** $T = T_0 + \theta_0 \mathrm{e}^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \dfrac{z}{\delta}\right)$

❒ **c.** $T = T_0 + \theta_0 \mathrm{e}^{-z/\delta} \cos\left(\omega t + \dfrac{z}{\delta}\right)$

❒ **d.** $T = T_0 + \theta_0 \mathrm{e}^{z/\delta} \cos\left(\omega t + \dfrac{z}{\delta}\right)$

Voir les corrigés du chapitre 22 page 350.

Diffusion de particules 23

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La loi phénoménologique de Fick.
- Les bilans de particules.
- L'équation de la diffusion et sa résolution, en régime stationnaire ou dépendant du temps.

Notations. On notera dans ce chapitre n la densité volumique de particules, $\vec{j}$ le vecteur densité de courant de particules, D le coefficient de diffusion.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication, puis aller voir le **corrigé page 360**.

1 ❒ V ❒ F La norme du vecteur densité de courant de particules $\vec{j}$ s'exprime en $\mathrm{m^{-3}s^{-1}}$.

2 ❒ V ❒ F La loi de Fick s'écrit : $\vec{j} = D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n$ où n est le nombre de particules par unité de volume et D le coefficient de diffusion (>0).

3 ❒ V ❒ F L'unité du coefficient de diffusion D est le $\mathrm{m^2s^{-1}}$.

4 ❒ V ❒ F À une dimension et en l'absence de « sources » ou de « puits » de particules, l'équation de conservation est de la forme : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial j_x(x,t)}{\partial x}$.

5 ❒ V ❒ F À une dimension et en présence de « sources » ou de « puits » de particules de densité volumique par unité de temps $\sigma(x, t)$, l'équation de diffusion est de la forme : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + \sigma(x, t)$.

Consignes

QCM

Répondre d'abord aux questions suivantes, puis aller voir le **corrigé page 361**. Pour un bloc de questions concernant le même problème, répondre à tout le bloc avant de consulter le corrigé. On rappelle qu'il y a une ou deux réponses exactes par question. Il est nécessaire pour répondre d'écrire quelques lignes au brouillon.

Cet énoncé concerne les questions 6 à 10 :
Les molécules diffusent dans un milieu limité par les plans $x = 0$ et $x = L$ où la concentration est maintenue nulle (on enlève rapidement les molécules qui arrivent en surface). Soit D le coefficient de diffusion supposé constant.

6 On recherche des solutions sous la forme $n(x, t) = f(x)g(t)$. On montre que f et g obéissent à des équations du type :

❒ **a.** $Df'' + Cf = 0$ où C est une constante positive

❒ **b.** $Df'' + Cf = 0$ où C est une constante négative

❒ **c.** $g' + Cg = 0$ où C est une constante positive

❒ **d.** $g' + Cg = 0$ où C est une constante négative

7 Donner les valeurs possibles pour C, m étant un entier ($m \geqslant 1$) et C' étant une constante dépendant de D et L :

❒ **a.** valeurs discrètes de la forme $C_m = mC'$

❒ **b.** valeurs discrètes de la forme $C_m = m^2C'$

❒ **c.** valeurs discrètes de la forme $C_m = C'/m$

❒ **d.** valeurs discrètes de la forme $C_m = C'/m^2$

8 Soit $\tau = \dfrac{L^2}{\pi^2 D}$. Pour m choisi, la constante d'évolution τ_m de $g(t)$ est de la forme :

❒ **a.** $\tau_m = m\tau$

❒ **b.** $\tau_m = m^2\tau$

❒ **c.** $\tau_m = \tau/m$

❒ **d.** $\tau_m = \tau/m^2$

9 La solution générale est combinaison linéaire de ces solutions, les coefficients étant déterminés par la distribution initiale. En déduire $n(x, t)$.

❒ **a.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

❒ **b.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{\frac{t}{\tau_m}} \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

❒ **c.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

❒ **d.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

10 On suppose maintenant qu'il existe une source de particules. Le nombre de particules créées par unité de volume et de temps est égal à An (A>0). Déterminer la condition sur A pour qu'il y ait amplification de n.

❒ **a.** $A \leqslant \frac{\pi D}{L^2}$

❒ **b.** $A \leqslant \frac{\pi^2 D}{L^2}$

❒ **c.** $A \geqslant \frac{\pi D}{L^2}$

❒ **d.** $A \geqslant \frac{\pi^2 D}{L^2}$

Cet énoncé concerne les questions 11 à 14 :
On disperse N particules identiques dans un bécher de section S, rempli d'eau. Les particules sont soumises à leur poids et à une force de frottement, due à la viscosité de l'eau, $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (formule de Stokes). **On oriente l'axe *Oz* vertical vers le haut** et on place l'origine O au fond du bécher. La hauteur totale de liquide est notée H.

11 Déterminer la vitesse limite $\vec{v_L}$ des particules, supposée atteinte très rapidement. Évaluer le nombre de particules dispersées δN_s traversant une section horizontale du bécher entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, en fonction de la densité particulaire $n(z)$.

❒ **a.** $\vec{v_L} = \frac{m}{\alpha}\vec{g}$

❒ **b.** $\vec{v_L} = -\frac{m}{\alpha}\vec{g}$

❒ **c.** $\delta N_s = n(z)\frac{\alpha HS}{m}\mathrm{d}t$

❒ **d.** $\delta N_s = n(z)\frac{mgS}{\alpha}\mathrm{d}t$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

12 Du fait de l'existence d'un gradient de densité, un phénomène de diffusion se superpose. Exprimer le nombre de particules δN_d diffusées à travers une section horizontale entre les instants t et $t + dt$ (coefficient de diffusion D).

❒ **a.** $\delta N_d = \dfrac{DS}{2}\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

❒ **b.** $\delta N_d = DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

❒ **c.** $\delta N_d = \sqrt{2}DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

❒ **d.** $\delta N_d = 2DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

13 En déduire en régime permanent une équation différentielle en n(z). On notera L la distance caractéristique de variation de $n(z)$:

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \dfrac{n(z)}{L} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} - \dfrac{n(z)}{L} = 0$

❒ **c.** $L = \dfrac{\alpha D}{2mg}$

❒ **d.** $L = \dfrac{\alpha D}{mg}$

14 Donner l'expression de la densité particulaire $n(z)$ en fonction de z :

❒ **a.** $\beta = \dfrac{N}{S\,H(\exp\left(\frac{H}{L}\right) - 1)}$

❒ **b.** $\beta = \dfrac{N}{S\,L(\exp\left(\frac{H}{L}\right) - 1)}$

❒ **c.** $\beta = \dfrac{N}{S\,H(1 - \exp\left(-\frac{H}{L}\right))}$

❒ **d.** $\beta = \dfrac{N}{S\,L(1 - \exp\left(-\frac{H}{L}\right))}$

Cet énoncé concerne les questions 15 à 19 :

On considère un milieu dans lequel se produit la diffusion d'une espèce chimique caractérisée en un point de vecteur position $\vec{r}$ par la densité particulaire $n(r, t)$. Un processus de production fait apparaitre σ particules par unité de volume et de temps. Pour $r < a$, σ est une constante non nulle, et $\sigma = 0$ pour $r > a$.

15 Équation de conservation : par un bilan sur deux sphères de rayons r et $r + dr$, établir une relation entre le vecteur densité de courant $\vec{J} = J_r\vec{u_r}$ et n, sans tenir compte du terme source.

❒ **a.** $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial J}{\partial r}$

❒ **b.** $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial J}{\partial r}$

❒ **c.** $r^2\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial(r^2 J)}{\partial r}$

❒ **d.** $r^2\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial(r^2 J)}{\partial r}$

16 En utilisant la loi de Fick, et en tenant compte du terme source pour $r < a$, donner les équations différentielles vérifiées par n.

❒ **a.** si $r < a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \sigma + D\dfrac{\partial^2 n}{\partial r^2}$

❒ **b.** si $r < a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \sigma + \dfrac{D}{r^2}\dfrac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial n}{\partial t}\right)}{\partial r^2}$

❒ **c.** si $r > a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial r^2}$

❒ **d.** si $r > a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{D}{r^2}\dfrac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial n}{\partial t}\right)}{\partial r^2}$

17 Déterminer la forme des solutions $n(r)$ en régime stationnaire. Les k_i sont des constantes d'intégration.

❒ **a.** si $r < a$, $n(r) = k_0 + k_1 r - \sigma\dfrac{r^2}{2D}$

❒ **b.** si $r < a$, $n(r) = k_0 + \dfrac{k_1}{r} - \sigma\dfrac{r^2}{6D}$

❒ **c.** si $r > a$, $n(r) = k_2 + k_3 r$

❒ **d.** si $r > a$, $n(r) = k_2 + \dfrac{k_3}{r}$

18 Y a-t-il une (ou des) constante(s) d'intégration égale(s) à 0 ?

❒ **a.** $k_0 = 0$

❒ **b.** $k_1 = 0$

❒ **c.** $k_2 = 0$

❒ **d.** $k_3 = 0$

19 Déterminer toutes les constantes d'intégration et en déduire la densité de particules au point O.

❒ **a.** $n(O) = \dfrac{\sigma a^2}{2D}$

❒ **b.** $n(O) = \dfrac{\sigma a^2}{D}$

❒ **c.** $n(O) = \dfrac{3\sigma a^2}{2D}$

❒ **d.** $n(O) = \dfrac{2\sigma a^2}{D}$

Voir les corrigés du chapitre 23 page 360.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

22 Conduction thermique

Vrai/Faux

1 ☒ V ☐ F L'unité du vecteur densité de courant thermique est le $W \cdot m^{-2}$.

> La puissance thermique (ou le flux thermique) traversant une surface $\overrightarrow{dS}$ est par définition $d\phi = \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{dS}$ d'où l'unité de $\overrightarrow{j_{th}}$.

2 ☐ V ☒ F La loi de Fourier s'écrit : $\overrightarrow{j_{th}} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.

> Le transfert thermique se fait spontanément de la source chaude vers la source froide, donc à l'opposé du gradient de température. La loi de Fourier, qui est une loi **phénoménologique**, donc qui ne se démontre pas, s'écrit : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.

3 ☐ V ☒ F Si on note ϕ_{12} le flux thermique passant d'une zone de température T_1 d'un corps à une zone de température T_2, la résistance thermique entre ces deux zones est $R_{th} = \dfrac{\phi_{12}}{T_1 - T_2}$.

> C'est l'inverse. La grandeur ϕ_{12} est le flux de $\overrightarrow{j_{th}}$, donc l'analogue de l'intensité en électricité qui est le flux du vecteur densité de courant électrique. La différence de température (grandeur intensive) est l'analogue de la tension. La définition de la résistance thermique est : $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\phi_{12}}$.

QCM

4 Quels sont les phénomènes qui obéissent à une loi analogue à la loi de Fourier ?

☐ **a.** La diffusion de la lumière
☒ **b.** La diffusion des particules
☒ **c.** La conduction électrique
☐ **d.** La diffusion d'une onde radio.

> C'est le fait que l'indice de réfraction $n = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$ dépende de la longueur d'onde qui est responsable de la diffusion de la lumière (loi de Cauchy).
>
> La diffusion des particules obéit à la loi de Fick semblable à la loi de Fourier : $\overrightarrow{j_n} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, n$ où $\overrightarrow{j_n}$ est le vecteur densité de courant de particules et n le nombre de particules par unité de volume. Cette loi explique la diffusion des particules d'un milieu dense vers un milieu moins dense (tache d'encre, dilution de colorant...).
>
> La conduction électrique avec la loi d'Ohm, obéit aussi à une loi du même type que Fourier : $\overrightarrow{j_{el}} = \gamma \overrightarrow{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V$.
>
> La diffusion d'une onde signifie émission et propagation.

5 On étudie la diffusion dans le cas d'une dimension, selon l'axe Ox. Pour cela on fait le bilan pour un volume de section S, situé entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ (figure 22.1). On note $\mathscr{P}_v$ la puissance produite par unité de volume. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température T appelée équation de diffusion thermique.

☒ **a.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v$

❒ **b.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}x = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v \mathrm{d}x$

❒ **c.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v$

❒ **d.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Le système est le volume de section S compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, donc de volume $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}x$. On a représenté sur la figure 22.4 les vecteurs densité de courant thermique en x et $x + \mathrm{d}x$.

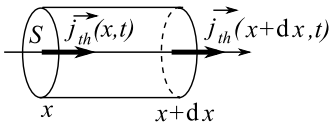


Figure 22.4

La quantité de chaleur entrant dans le volume à l'abscisse x pendant $\mathrm{d}t$ est $\delta Q_e = j_{th}(x) S\,\mathrm{d}t$. La quantité de chaleur sortant du volume à l'abscisse $x + \mathrm{d}x$ pendant $\mathrm{d}t$ est $\delta Q_s = j_{th}(x + \mathrm{d}x) S\,\mathrm{d}t$. La quantité d'énergie produite dans le volume pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathscr{P}_v S\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. Le premier principe appliqué entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

$$U(t + \mathrm{d}t) - U(t) = \delta Q_e - \delta Q_s + \mathscr{P}_v S\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Soit :

$$\rho c S\,\mathrm{d}x\,(T(t + \mathrm{d}t) - T(t)) = (j_{th}(x) - j_{th}(x + \mathrm{d}x))\,S\,\mathrm{d}t + \mathscr{P}_v S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

En passant aux dérivées, et avec la loi de Fourier, on a finalement :

$$\rho c S\,\mathrm{d}x \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}\mathrm{d}x S\,\mathrm{d}t + \mathscr{P}_v S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v$$

6 On considère un milieu dans lequel l'échelle de variation spatiale de la température est L. Quel est le temps caractéristique τ_{th} de la diffusion thermique dans ce milieu ?

❒ **a.** $\tau_{th} = \dfrac{\rho c}{\lambda} L$

❒ **b.** $\tau_{th} = \dfrac{\lambda L^2}{\rho c}$

☒ **c.** $\tau_{th} = \dfrac{\rho c}{\lambda} L^2$

❒ **d.** $\tau_{th} = \dfrac{\lambda}{\rho c} L^2$

On se place dans le cas où $\mathscr{P}_v = 0$. Les dérivées spatiale et temporelle peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau_{th}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{T}{L^2}$$

En reportant dans l'équation de diffusion :

$$\rho c \frac{T}{\tau_{th}} = \lambda \frac{T}{L^2} \quad \text{soit} \quad \tau_{th} = \frac{\rho c}{\lambda} L^2$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

7 On étudie maintenant la diffusion dans le cas d'une symétrie cylindrique, en supposant qu'elle a lieu uniquement suivant $\overrightarrow{u_r}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r)\overrightarrow{u_r}$. Pour cela on fait le bilan pour un volume situé entre les cylindres de rayon r et $r + \mathrm{d}r$ et de hauteur h (figure 22.2). On suppose qu'il n'y a pas de puissance produite dans le volume. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température T.

❒ **a.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}$

❒ **b.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **c.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

☒ **d.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

Le système considéré est compris entre les deux cylindres de rayons r et $r + \mathrm{d}r$, il est donc de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi rh\mathrm{d}r$. En s'inspirant du raisonnement fait pour 1 dimension, la quantité de chaleur entrant effectivement dans le système par la surface latérale du cylindre de rayon r pendant $\mathrm{d}t$ est $\delta Q_e = \iint_{S(r)} \overrightarrow{j_{th}}(r)\cdot(\mathrm{d}S_r\overrightarrow{u_r})\mathrm{d}t$ soit $\delta Q_e = j_{th}(r)S(r)\mathrm{d}t$ où $S(r) = 2\pi rh$. La quantité de chaleur sortant effectivement du système par la surface latérale du cylindre de rayon $r + \mathrm{d}r$ pendant $\mathrm{d}t$ est $\delta Q_s = \iint_{S(r+\mathrm{d}r)} \overrightarrow{j_{th}}(r+\mathrm{d}r)\cdot(\mathrm{d}S_{r+\mathrm{d}r}\overrightarrow{u_r})\mathrm{d}t$ soit $\delta Q_e = j_{th}(r + \mathrm{d}r)S(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}t$ où $S(r + \mathrm{d}r) = 2\pi(r + \mathrm{d}r)h$. Le premier principe s'écrit :

$$U(t + \mathrm{d}t) - U(t) = \delta Q_e - \delta Q_s \Rightarrow \rho c\mathrm{d}\tau\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = -\frac{\partial(S(r)j_{th}(r))}{\partial r}\mathrm{d}t\mathrm{d}r$$

Ce qui donne :

$$\rho c2\pi rh\mathrm{d}r\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi rh\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}r \Rightarrow \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

L'erreur à ne pas commettre serait de considérer la surface $S(r)$ constante comme dans le raisonnement pour 1 dimension.

8 On étudie maintenant la diffusion dans le cas d'une symétrie sphérique, en supposant qu'elle a lieu uniquement suivant $\overrightarrow{u_r}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r)\overrightarrow{u_r}$. Pour cela on fait le bilan pour un volume situé entre les sphères concentriques (centre O) de rayon r et $r + \mathrm{d}r$. On suppose qu'il n'y a pas de puissance produite dans le volume. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température T.

❒ **a.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^3}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^3\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **b.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

☒ **c.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

❒ **d.** $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}$

Le raisonnement est le même que dans la question précédente en changeant $\mathrm{d}\tau$ en $4\pi r^2\mathrm{d}r$ et $S(r)$ en $4\pi r^2$, ce qui donne l'équation **c**.

Cet énoncé concerne les questions 9 à 10 :
On étudie enfin la diffusion dans le cas général. On prend en compte un terme source ou puits de puissance de densité volumique $\mathscr{P}_v$.

9 Pour faire le bilan, on considère un volume τ de l'espace, limité par la surface fermée S. On note M un point quelconque du volume τ et $\mathrm{d}\tau_M$ un volume mésoscopique autour de M. On note P un point quelconque de la surface et $\overrightarrow{\mathrm{d}S_P}$ le vecteur surface élémentaire autour de P. Effectuer le bilan d'énergie sur ce volume.

☒ **a.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau_M = -\oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M$

☐ **b.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau_M = -\oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P}\mathrm{d}t + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M \mathrm{d}t$

☐ **c.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau_M = \oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M$

☐ **d.** $\iiint_\tau \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau_M = \oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P}\mathrm{d}t + \iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M \mathrm{d}t$

La variation d'énergie interne entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

$$U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = \iiint_\tau \rho c(T(t+\mathrm{d}t, M) - T(t, M))\mathrm{d}\tau_M = \left(\iiint_\tau \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau_M\right)\mathrm{d}t$$

La quantité de chaleur reçue pendant $\mathrm{d}t$ est $\delta Q = -\left(\oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P}\right)\mathrm{d}t$ puisque par convention les vecteurs surface sont orientés vers l'extérieur. Enfin la quantité d'énergie produite est $\delta\mathscr{E} = \left(\iiint_\tau \mathscr{P}_v \mathrm{d}\tau_M\right)\mathrm{d}t$. Finalement, le premier principe $U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = \delta Q + \delta\mathscr{E}$ donne la réponse **a**.

10 En déduire l'équation de la diffusion thermique. On rappelle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} = \Delta$.

☒ **a.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \mathscr{P}_v$

☐ **b.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \Delta T + \mathscr{P}_v$

☐ **c.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \mathrm{d}t + \mathscr{P}_v \mathrm{d}t$

☐ **d.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \Delta T \mathrm{d}t + \mathscr{P}_v \mathrm{d}t$

On utilise la relation de Green-Ostrogradski soit $\oiint_S \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_P} = \iiint_\tau \mathrm{div}\,\overrightarrow{j_{th}}\mathrm{d}\tau_M$. On a alors uniquement des intégrales de volume qui sont valables $\forall\tau$; on peut donc les supprimer ce qui donne l'équation locale :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{j_{th}} + \mathscr{P}_v = \lambda\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T + \mathscr{P}_v = \lambda \Delta T + \mathscr{P}_v$$

On a utilisé la loi de Fourier $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ et $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \Delta$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

11 On souhaite résoudre l'équation de la diffusion dans le cas unidimensionnel stationnaire, par exemple pour un mur d'épaisseur e dont la face $x = 0$ est à la température T_0 et la face $x = e$ à la température T_1. Quelle(s) est(sont) la(les) réponse(s) juste(s) ?

❒ **a.** L'expression de $T(x)$ dépend de λ.

☒ **b.** $j_{th}(x) = -\lambda \dfrac{T_1 - T_0}{e}$

☒ **c.** L'expression de $T(x)$ est indépendante de λ.

❒ **d.** $\overrightarrow{j_{th}} = \overrightarrow{0}$ car le régime est stationnaire.

Dans le cas stationnaire sans sources pour une dimension, l'équation à résoudre est $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ soit $T(x) = ax + b$. Les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(e) = T_1$ donnent comme solutions :

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e}x + T_0 \quad \text{et} \quad j_{th} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{T_0 - T_1}{e}$$

La différence de température ne dépend pas de λ, en revanche le flux surfacique est proportionnel à λ : donc plus l'isolation sera grande (λ petit), moins il y aura de pertes d'énergie à travers le mur.

12 On étudie un double vitrage à l'aide de la notion de résistance thermique. Il est constitué de deux vitres en verre d'épaisseur e_1 et de surface S séparées par une épaisseur e_2 d'argon (figure 22.3). On note λ_a la conductivité de l'argon et λ_v celle du verre. Déterminer la résistance thermique R_{th} de ce double vitrage

❒ **a.** $R_{th} = \dfrac{\lambda_a S}{e_2} + 2\dfrac{\lambda_v S}{e_1}$

☒ **b.** $R_{th} = \dfrac{e_2}{\lambda_a S} + 2\dfrac{e_1}{\lambda_v S}$

❒ **c.** $R_{th} = \left(\dfrac{e_2}{\lambda_a S} + 2\dfrac{e_1}{\lambda_v S}\right)^{-1}$

❒ **d.** $R_{th} = \dfrac{e_2}{\lambda_a S} + \dfrac{e_1}{\lambda_v S}$

Les résultats de la question précédente permettent de retrouver l'expression de la résistance R_{th}, pour un milieu d'épaisseur e et de surface S :

$$R_{th} = \frac{T_0 - T_1}{S\, j_{th}} = \frac{1}{\lambda}\frac{e}{S}$$

Dans le cas présent, c'est le même flux $\phi = j_{th}S$ qui traverse les deux épaisseurs de verre et l'épaisseur de gaz. Cela revient à avoir des résistances en série. En effet, si l'on note T_{a1} celle de la face commune à la première plaque et à l'argon, T_{a2} celle de la face commune à la deuxième plaque et à l'argon, on peut écrire :

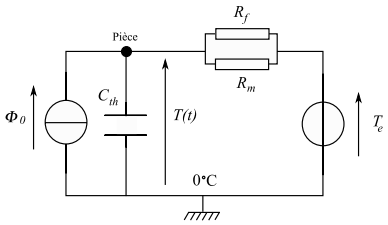
$$R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\phi} = \frac{T_i - T_{a1}}{\phi} + \frac{T_{a1} - T_{a2}}{\phi} + \frac{T_{a2} - T_e}{\phi} = R_{th,v} + R_{th,a} + R_{th,v}$$

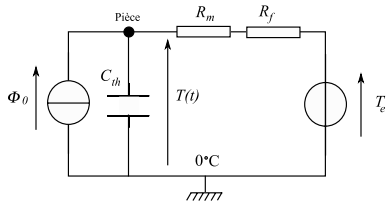
soit $R_{th} = \dfrac{e_2}{\lambda_a S} + 2\dfrac{e_1}{\lambda_v S}$.

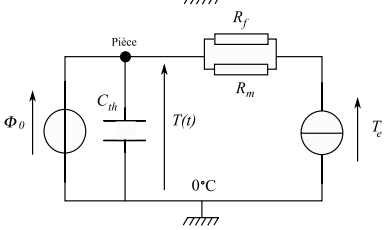
Les lois d'association des résistances thermiques sont les mêmes que celles des résistances électriques.

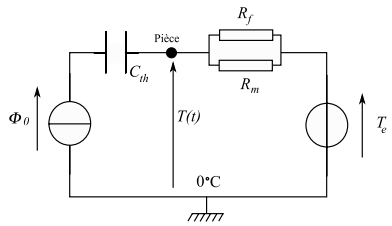
Cet énoncé concerne les questions 13 à 15 :
On souhaite étudier l'évolution de la température d'une pièce en utilisant l'analogie avec un circuit électrique. La pièce a une capacité thermique C_{th}. Elle est chauffée par des radiateurs qui apportent un flux thermique ϕ_0 constant. Le contact avec l'extérieur se fait par l'intermédiaire des murs (résistance thermique totale R_m) et des fenêtres (résistance thermique totale R_f). La température extérieure est constante égale à T_e. Comme dans un circuit électrique (masse à 0 volt), la température de référence est prise égale à 0 °C.

13 Parmi les circuits suivants, lequel correspond au schéma du problème ?

☒ **a.**


❒ **b.**


❒ **c.**


❒ **d.**


L'analogue de la température en thermique est la tension en électricité, et l'analogue du flux thermique est l'intensité. Ainsi la source de flux ϕ_0 est l'analogue d'une source de courant, et la source qui impose une température est l'analogue d'une source de tension : on élimine **c**.

Ce n'est pas le même flux qui traverse les murs et les fenêtres, en revanche leurs faces intérieures sont à la même température T_i et leurs faces extérieures à la même température T_e : les résistances sont en parallèles. En effet :

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{\phi}{T_i - T_e} = \frac{\phi_m + \phi_f}{T_i - T_e} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_v}$$

où ϕ, ϕ_m et ϕ_f sont respectivement, le flux total, le flux traversant les murs et le flux traversant les fenêtres. On exclut la réponse **b**.

Il reste à décider si la source de courant est en série ou en parallèle avec le condensateur (la pièce à chauffer). La source ne peut être en série car cela signifierait que toute la puissance fournie est évacuée vers l'extérieur, donc que dès la mise en route aucune puissance ne sert à chauffer la pièce et qu'instantanément $T = R_{th}\phi_0 + T_e$. La réponse est donc **a**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

14 Établir une(deux) équation(s) vérifiée(s) par la température $T(t)$.

❒ **a.** $C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{T}{R_m + R_f} = \dfrac{T_e}{R_m + R_f} + \phi_0$

❒ **b.** $C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t} + T\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right) = T_e\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right)$

❒ **c.** $\phi_0 = C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ et $\phi_0 = (T - T_e)\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right)$

☒ **d.** $C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t} + T\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right) = T_e\left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right) + \phi_0$

Une loi des nœuds (figure 22.5) appliquée au nœud « pièce » s'écrit $\phi_0 + \phi_p = \phi_t$.

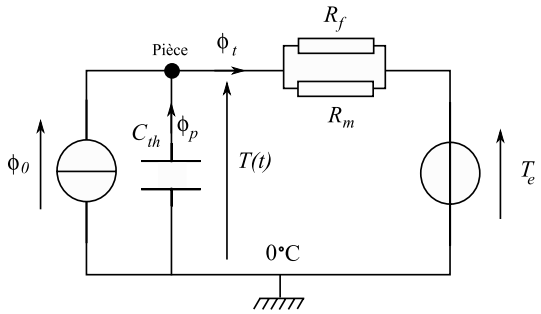


Figure 22.5

Or $\phi_p = -C_{th}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ (convention générateur) et $\phi_t = \dfrac{T - T_e}{R_{th}}$ avec $\dfrac{1}{R_{th}} = \dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}$. Finalement :

$$\phi_0 - C_{th}\frac{\partial T}{\partial t} = (T - T_e)\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_s}\right)$$

ce qui donne la réponse **d**.

On peut retrouver ce résultat par le premier principe appliqué au système « pièce » entre t et $t + \mathrm{d}t$. :

$$U(t + \mathrm{d}t) - U(t) = \phi_0 \mathrm{d}t - \phi_p \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad C_{th}\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = \phi_0 \mathrm{d}t - \frac{T - T_e}{R_{th}}\mathrm{d}t$$

15 Déterminer la température T_s en régime stationnaire.

❒ **a.** $T_s = T_e$

☒ **b.** $T_s = T_e + \dfrac{R_m R_f}{R_m + R_f}\phi_0$

❒ **c.** $T_s = T_e + (R_m + R_f)\phi_0$

❒ **d.** $T_s = T_e + \left(\dfrac{1}{R_m} + \dfrac{1}{R_f}\right)\phi_0$

En régime stationnaire, $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ soit :

$$T_s\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_f}\right) = T_e\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_f}\right) + \phi_0 \quad \Rightarrow \quad T_s = T_e + \phi_0\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_f}\right)^{-1}$$

ce qui donne la réponse **b**.

Cet énoncé concerne les questions 16 à 18 :
On considère un cylindre de longueur ℓ, de rayon a, d'axe Ox. La température est imposée égale à T_0 en $x = 0$. La température $T(x)$ dans la barre ne dépend que de x. La partie latérale et la face $x = \ell$ sont en contact avec l'air considéré comme un thermostat à la température T_e. Les échanges avec l'air se font par conducto-convection selon la loi de Newton : $j_{cc} = h(T - T_e)$ avec $h > 0$. La conductivité thermique de la barre est λ.

16 Établir en régime stationnaire l'équation différentielle vérifiée par T.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{2h}{a\lambda}T = -\dfrac{2h}{a\lambda}T_e$

❒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{2h}{a\lambda}T_0 = \dfrac{2h}{a\lambda}T_e$

☒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{2h}{a\lambda}T = -\dfrac{2h}{a\lambda}T_e$

On fait le bilan en régime stationnaire sur un morceau de la barre situé entre x et $x + \mathrm{d}x$. La surface de contact du morceau avec l'air est $2\pi a\mathrm{d}x$, donc la quantité d'énergie perdue pendant $\mathrm{d}t$ par conducto-convection sur les côtés du morceau est $\delta\mathscr{E} = 2\pi a\mathrm{d}x\, j_{cc}\mathrm{d}t$ soit $\delta\mathscr{E} = 2\pi a\mathrm{d}x\, h\,(T(x) - T_e)\,\mathrm{d}t$. Le bilan s'écrit donc :

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = 0 = \pi a^2\mathrm{d}t\,(j_{th}(x) - j_{th}(x + \mathrm{d}x)) - \delta\mathscr{E} \Rightarrow \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\pi a^2 = 2h\pi a\,(T(x) - T_e)$$

d'où la réponse **d**.

Autre solution : appliquer directement l'équation de diffusion thermique en régime stationnaire $0 = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathscr{P}_v$ avec :

$$\mathscr{P}_v = \frac{\delta\mathscr{E}}{\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t} = \frac{2\pi a\mathrm{d}x\, h\,(T(x) - T_e)}{\pi a^2\mathrm{d}x}$$

17 On pose $L^2 = \dfrac{a\lambda}{2h}$. Déterminer l'expression générale de $T(x)$.

❒ **a.** $T = A_1\cos\dfrac{x}{L} + A_2\sin\dfrac{x}{L} + T_e$

❒ **b.** $T = \dfrac{T_e - T_0}{L}x^2 + A_1x + A_2$

☒ **c.** $T = A_1\exp\dfrac{-x}{L} + A_2\exp\dfrac{x}{L} + T_e$

❒ **d.** $T = A_1\exp\dfrac{-x}{L} + A_2\exp\dfrac{x}{L}$

On peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{T}{L^2} = -\frac{T_e}{L^2} \quad \Rightarrow \quad T(x) = A_1\exp\frac{-x}{L} + A_2\exp\frac{x}{L} + T_e$$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

18 La condition limite en $x = \ell$ s'écrit :

❒ **a.** $T(\ell) = T_e$

☒ **b.** $\lambda\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = h\,(T(\ell) - T_e)$

❒ **c.** $\lambda\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = 0$

❒ **d.** $\lambda\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = h\,(T_e - T(\ell))$

En $x = \ell$, il n'y a pas d'accumulation d'énergie, donc la puissance arrivant par conduction doit être évacuée par conducto-convection par la surface extrême de la barre :

$$j_{th}(x = \ell) = j_{cc}(x = \ell) \quad \Rightarrow \quad \lambda\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{(x=\ell)} = h\,(T(\ell) - T_e)$$

Cet énoncé concerne les questions 19 à 21 :
On veut étudier l'effet dans le sol des variations périodiques d'ensoleillement (quotidiennes, saisonnières...) en fonction de la profondeur de pénétration. On définit un axe Oz descendant, avec $z = 0$ au niveau du sol. La température $T(z, t)$ est une fonction de z et t uniquement. On ne tient pas compte d'éventuelles sources d'énergie dans le sol. Pour modéliser les effets de l'ensoleillement en surface, on suppose qu'en $z = 0$, la température est de la forme $T = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$. On pose $K = \dfrac{\lambda}{\rho c}$.

19 À une profondeur z on cherche des solutions pour T de la forme $T = T_0 + \theta(z, t)$. On utilisera une forme complexe pour θ soit $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\alpha}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\alpha}$.

❒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} + \dfrac{i\omega}{K}\underline{\alpha} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{\omega}{K}\underline{\alpha} = 0$

☒ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{i\omega}{K}\underline{\alpha} = 0$

❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{\omega^2}{K}\underline{\alpha} = 0$

L'équation de la diffusion thermique s'écrit ici $\dfrac{\partial T}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. On injecte la forme de la solution recherchée dans cette équation :

$$\underline{\alpha}(z)i\omega\mathrm{e}^{i\omega t} = K\frac{\mathrm{d}^2\underline{\alpha}(z)}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{e}^{i\omega t}$$

donc après simplification par $\mathrm{e}^{i\omega t}$, on trouve la réponse **c**.

20 La solution générale pour $\underline{\alpha}(x)$ est :

☒ **a.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1+i)z\right] + A_2 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1+i)z\right]$

❒ **b.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1+i)z\right] + A_2 \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1-i)z\right]$

❒ **c.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{K}}z\right] + A_2 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{K}}z\right]$

❒ **d.** $\underline{\alpha} = A_1 \exp\left[\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1-i)z\right] + A_2 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1-i)z\right]$

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 = \frac{i\omega}{K}$ soit $r^2 = \frac{\omega}{K}e^{i\pi/2}$ dont les racines sont $r = \pm\sqrt{\frac{\omega}{K}}e^{i\pi/4}$ où $r = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2K}}(1+i)$. On en déduit que la solution est la réponse **a**.

Ne pas commettre l'erreur d'écrire les solutions de l'équation caractéristique : $r = \sqrt{\frac{\omega}{K}}e^{\pm i\pi/4}$ au lieu de $r = \pm\sqrt{\frac{\omega}{K}}e^{i\pi/4}$.

21 On pose $\delta = \sqrt{\frac{2K}{\omega}}$. Déterminer l'expression de $T(z,t)$.

❒ **a.** $T = T_0 + \theta_0 e^{-z/\delta}\cos\omega t$

☒ **b.** $T = T_0 + \theta_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$

❒ **c.** $T = T_0 + \theta_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)$

❒ **d.** $T = T_0 + \theta_0 e^{z/\delta}\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)$

L'expression de $\underline{\theta}$ est :

$$\underline{\theta}(z,t) = A_1 e^{z/\delta} e^{i(\omega t + z/\delta)} + A_2 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

Le premier terme entraine une divergence de la température, donc la solution physique correspond à $A_1 = 0$.

On en déduit la solution réelle pour θ : $\theta = A_2 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$. En identifiant à la solution pour $z = 0$, on pose $A_2 = \theta_0$. Finalement, on obtient la solution **b**.

On a donc un terme de propagation $\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$ et un terme d'atténuation $e^{-z/\delta}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

23 Diffusion de particules

Vrai/Faux

1 ❒ V ☒ F La norme du vecteur densité de courant de particules $\vec{j}$ s'exprime en $m^{-3}s^{-1}$.

Le nombre de particules traversant par unité de temps une surface $\overrightarrow{dS}$ est par définition $d\phi = \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$ d'où on déduit que l'unité de $\vec{j}$ est le $m^{-2}s^{-1}$.

2 ❒ V ☒ F La loi de Fick s'écrit : $\vec{j} = D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$ où n est le nombre de particules par unité de volume et D le coefficient de diffusion (>0).

Les particules vont toujours du milieu le plus dense vers le milieu le moins dense, donc dans le sens opposé au gradient de densité. La loi de Fick s'écrit : $\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$. C'est une loi phénoménologique, elle ne se démontre pas. Si le gradient de densité est trop fort, des phénomènes non linéaires peuvent apparaître, elle n'est alors plus valable.

3 ☒ V ❒ F L'unité du coefficient de diffusion D est le m^2s^{-1}.

On obtient ce résultat en combinant la loi de Fick et l'unité de $\vec{j}$.

4 ❒ V ☒ F À une dimension et en l'absence de « sources » ou de « puits » de particules, l'équation de conservation est de la forme : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial j_x(x,t)}{\partial x}$.

Soit un tube de section S, d'axe parallèle à Ox. On considère le système compris entre x et $x + dx$, dont le volume est $d\tau = S\,dx$. Le nombre de particules rentrant au niveau de la face d'abcisse x est $\delta N_e = j_x(x)S\,dt$. Le nombre de particules sortant au niveau de la face d'abcisse $x + dx$ est $\delta N_s = j_x(x + dx)S\,dt$. Entre t et $t + dt$, la variation du nombre de particules du système est donc $dN = \delta N_e - \delta N_s = j_x(x)S\,dt - j_x(x + dx)S\,dt$.

D'autre part $dN = S\,dx(n(x, t + dt) - n(x, t))$; en égalant les deux expressions de dN et en divisant par $S\,dx\,dt$, on arrive à :

$$\frac{j_x(x) - j_x(x + dx)}{dx} = \frac{n(t + dt) - n(t)}{dt}$$

Par passage à la limite, on obtient $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_x(x,t)}{\partial x}$.

5 ☒ V ❒ F À une dimension et en présence de « sources » ou de « puits » de particules de densité volumique par unité de temps $\sigma(x, t)$, l'équation de diffusion est de la forme : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + \sigma(x,t)$.

S'il y a création ou disparition de particules, il faut modifier le bilan précédent et ajouter le terme correspondant aux quantités entrantes et sortantes :
$\mathrm{d}N = S\,\mathrm{d}x(n(x,t+\mathrm{d}t) - n(x,t)) = \delta N_e - \delta N_s + \sigma(x,t)S\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$.

En divisant par $S\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$, et en passant à la limite, on arrive à $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_x(x,t)}{\partial x} + \sigma$.

Il reste à combiner cette équation avec la loi de Fick pour trouver l'expression proposée.

QCM

Cet énoncé concerne les questions 6 à 10 :
Les molécules diffusent dans un milieu limité par les plans $x = 0$ et $x = L$ où la concentration est maintenue nulle (on enlève rapidement les molécules qui arrivent en surface). Soit D le coefficient de diffusion supposé constant.

6 On recherche des solutions sous la forme $n(x,t) = f(x)g(t)$. On montre que f et g obéissent à des équations du type :

☒ **a.** $Df'' + Cf = 0$ où C est une constante positive

☐ **b.** $Df'' + Cf = 0$ où C est une constante négative

☒ **c.** $g' + Cg = 0$ où C est une constante positive

☐ **d.** $g' + Cg = 0$ où C est une constante négative

L'équation de diffusion unidimensionnelle, en l'absence de terme source, s'écrit : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$. En remplaçant $n(x,t)$ par son expression, on obtient $g'(t)f(x) = Dg(t)f''(x)$ donc en séparant les variables : $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = D\dfrac{f''(x)}{f(x)}$. Cette équation devant être vérifiée pour toute valeur de x et de t, est forcément égale à une constante k. On a donc $Df''(x) - kf(x) = 0$.

Si k était positive, les solutions seraient de la forme $f(x) = \alpha\exp(rt) + \beta\exp(-rt)$ avec $r = \sqrt{\dfrac{k}{D}}$. Or, vues les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, la seule possibilité serait $\alpha = \beta = 0$, et la solution serait identiquement nulle. On en déduit que k est négative.

En posant $k = -C$, C étant une constante positive, on arrive aux réponses **a.** et **c**.

7 Donner les valeurs possibles pour C, m étant un entier ($m \geqslant 1$) et C' étant une constante dépendant de D et L :

☐ **a.** valeurs discrètes de la forme $C_m = mC'$

☒ **b.** valeurs discrètes de la forme $C_m = m^2C'$

☐ **c.** valeurs discrètes de la forme $C_m = C'/m$

☐ **d.** valeurs discrètes de la forme $C_m = C'/m^2$

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

On résout l'équation $Df'' + Cf = 0$ en tenant compte des conditions aux limites. Si on pose $\frac{D}{C} = \ell^2$, les solutions sont de la forme $f(x) = \alpha\cos(x/\ell) + \beta\sin(x/\ell)$ avec $0 = \alpha$ et $0 = \beta\sin(L/\ell)$. On en déduit que $L/\ell = m\pi$ avec m un entier strictement positif, d'où en remplaçant ℓ par son expression en fonction de C et D : $C = \frac{Dm^2\pi^2}{L^2}$. La constante C est de la forme $C_m = m^2C'$ en posant $C' = \frac{D\pi^2}{L^2}$.

8 Soit $\tau = \frac{L^2}{\pi^2 D}$. Pour m choisi, la constante d'évolution τ_m de $g(t)$ est de la forme :

❒ **a.** $\tau_m = m\tau$

❒ **b.** $\tau_m = m^2\tau$

❒ **c.** $\tau_m = \tau/m$

☒ **d.** $\tau_m = \tau/m^2$

Compte-tenu des questions précédentes, l'équation différentielle vérifiée par $g(t)$ est $g' + m^2C'g = 0$, soit encore $g' + \frac{m^2}{\tau}g = 0$. La constante d'évolution τ_m de $g(t)$ est donc telle que $\frac{1}{\tau_m} = \frac{m^2}{\tau}$ et $g(t)$ est de la forme $\gamma\exp(-t/\tau_m)$.

9 La solution générale est combinaison linéaire de ces solutions, les coefficients étant déterminés par la distribution initiale. En déduire $n(x, t)$.

❒ **a.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

❒ **b.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{\frac{t}{\tau_m}} \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

☒ **c.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

❒ **d.** $n(x,t) = \sum_m k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$

D'après les résultats des questions précédentes, pour m donné, la densité particulaire est de la forme $k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{x}{\ell}\right)$ et $\ell = \sqrt{\frac{D}{m^2C'}} = \sqrt{\frac{D\tau}{m^2}} = \sqrt{D\tau_m}$. Par combinaison linéaire de solutions de ce type, on arrive à $n(x,t) = \sum_m k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau_m}}\right)$.

10 On suppose maintenant qu'il existe une source de particules. Le nombre de particules créées par unité de volume et de temps est égal à An (A>0). Déterminer la condition sur A pour qu'il y ait amplification de n.

❒ **a.** $A \leqslant \dfrac{\pi D}{L^2}$

❒ **b.** $A \leqslant \dfrac{\pi^2 D}{L^2}$

❒ **c.** $A \geqslant \dfrac{\pi D}{L^2}$

☒ **d.** $A \geqslant \dfrac{\pi^2 D}{L^2}$

L'équation de diffusion s'écrit maintenant : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + An(x,t)$ et donc $g'(t)f(x) = Dg(t)f''(x) + Af(x)g(t)$. En séparant les variables : $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = D\dfrac{f''(x)}{f(x)} + A$. En reprenant le même raisonnement qu'à la question 6, $D\dfrac{f''(x)}{f(x)} + A = k'$, k' étant une constante. L'équation vérifiée par $f(x)$ est donc $Df'' + (A - k')f = 0$ et pour satisfaire aux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, il faut que $A - k' = m^2C'$ avec $C' = \dfrac{D\pi^2}{L^2}$. On en déduit les valeurs possibles pour k' : $k' = A - \dfrac{m^2D\pi^2}{L^2}$, et l'équation vérifiée par g(t) : $g'(t) - \left(A - \dfrac{m^2D\pi^2}{L^2}\right)g(t) = 0$. Il y a amplification si $A > \dfrac{m^2D\pi^2}{L^2}$. Quand $A \geqslant \dfrac{D\pi^2}{L^2}$, il y a au moins une solution (celle pour $m = 1$) correspondant à une amplification.

Cet énoncé concerne les questions 11 à 14 :
On disperse N particules identiques dans un bécher de section S, rempli d'eau. Les particules sont soumises à leur poids et à une force de frottement, due à la viscosité de l'eau, $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (formule de Stokes). **On oriente l'axe *Oz* vertical vers le haut** et on place l'origine O au fond du bécher. La hauteur totale de liquide est notée H.

11 Déterminer la vitesse limite $\vec{v_L}$ des particules, supposée atteinte très rapidement. Évaluer le nombre de particules dispersées δN_s traversant une section horizontale du bécher entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, en fonction de la densité particulaire $n(z)$.

☒ **a.** $\vec{v_L} = \dfrac{m}{\alpha}\vec{g}$

❒ **b.** $\vec{v_L} = -\dfrac{m}{\alpha}\vec{g}$

❒ **c.** $\delta N_s = n(z)\dfrac{\alpha HS}{m}\mathrm{d}t$

☒ **d.** $\delta N_s = n(z)\dfrac{mgS}{\alpha}\mathrm{d}t$

Quand la vitesse limite est atteinte, l'accélération est nulle. Le principe fondamental de la dynamique conduit alors à la réponse **a**.

Les particules traversant une section horizontale du bécher entre t et $t + \mathrm{d}t$ se situent au dessus de cette section, à une distance maximale $v_L\mathrm{d}t$ (sinon elles n'ont pas le temps d'arriver jusqu'à la section considérée pendant l'intervalle de temps de durée $\mathrm{d}t$). Elles sont donc contenues dans un cylindre de base S, de hauteur $v_L\mathrm{d}t$, dont le volume est $\delta V = Sv_L\mathrm{d}t$,avec une densité $n(z)$. On en déduit la réponse **d**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

12 Du fait de l'existence d'un gradient de densité, un phénomène de diffusion se superpose. Exprimer le nombre de particules δN_d diffusées à travers une section horizontale entre les instants t et $t + dt$ (coefficient de diffusion D).

❒ **a.** $\delta N_d = \dfrac{DS}{2}\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

☒ **b.** $\delta N_d = DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

❒ **c.** $\delta N_d = \sqrt{2}DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

❒ **d.** $\delta N_d = 2DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$

D'après la loi de Fick, la densité de courant de particules est $\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}\vec{u_z}$, et $\|\vec{j}\|$ représente le nombre de particules traversant perpendiculairement la section par unité de temps et de surface donc $\delta N_d = DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t$.

13 En déduire en régime permanent une équation différentielle en n(z). On notera L la distance caractéristique de variation de $n(z)$:

☒ **a.** $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \dfrac{n(z)}{L} = 0$

❒ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} - \dfrac{n(z)}{L} = 0$

❒ **c.** $L = \dfrac{\alpha D}{2mg}$

❒ **d.** $L = \dfrac{\alpha D}{mg}$

En régime permanent, il y a autant de particules traversant la section horizontale du bécher en se déplaçant vers la haut et vers le bas, donc $\delta N_d = \delta N_s$. En tenant compte du signe de $\dfrac{\partial n}{\partial z}$ (la densité diminue quand z augmente), $n(z)\dfrac{mgS}{\alpha}\mathrm{d}t = DS\left|\dfrac{\partial n}{\partial z}\right| \mathrm{d}t = -DS\dfrac{\partial n}{\partial z}\mathrm{d}t$ et après mise en forme $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \dfrac{mg}{\alpha D}n = 0$.

14 Donner l'expression de la densité particulaire $n(z)$ en fonction de z :

❒ **a.** $\beta = \dfrac{N}{S\,H(\exp\left(\frac{H}{L}\right) - 1)}$

❒ **b.** $\beta = \dfrac{N}{S\,L(\exp\left(\frac{H}{L}\right) - 1)}$

❒ **c.** $\beta = \dfrac{N}{S\,H(1 - \exp\left(-\frac{H}{L}\right))}$

☒ **d.** $\beta = \dfrac{N}{S\,L(1 - \exp\left(-\frac{H}{L}\right))}$

On cherche $n(z)$ sous la forme $n(z) = \beta\exp\left(-\dfrac{z}{L}\right)$. Pour déterminer la constante β on utilise le nombre total de particules dispersées dans le bécher : $N = \displaystyle\int_0^H n(z)S\,\mathrm{d}z$. Le calcul de l'intégrale ne présente pas de difficulté et conduit à la réponse **d**.

Cet énoncé concerne les questions 15 à 19 :
On considère un milieu dans lequel se produit la diffusion d'une espèce chimique caractérisée en un point de vecteur position $\vec{r}$ par la densité particulaire $n(r, t)$. Un processus de production fait apparaitre σ particules par unité de volume et de temps. Pour $r < a$, σ est une constante non nulle, et $\sigma = 0$ pour $r > a$.

15 Équation de conservation : par un bilan sur deux sphères de rayons r et $r+dr$, établir une relation entre le vecteur densité de courant $\overrightarrow{J} = J_r\overrightarrow{u_r}$ et n, sans tenir compte du terme source.

❒ **a.** $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial J}{\partial r}$

❒ **b.** $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial J}{\partial r}$

❒ **c.** $r^2\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial (r^2 J)}{\partial r}$

☒ **d.** $r^2\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial (r^2 J)}{\partial r}$

On considère le système compris entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, dont le volume est $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Le nombre de particules rentrant au niveau de la sphère de rayon r est $\delta N_e = J_r(r)\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}t$, $4\pi r^2$ représentant la surface traversée. Le nombre de particules sortant au niveau de la sphère de rayon $r + \mathrm{d}r$ est $\delta N_s = J_r(r + dr)\cdot 4\pi(r + \mathrm{d}r)^2\mathrm{d}t$. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, la variation du nombre de particules du système est donc :
$\mathrm{d}N = \delta N_e - \delta N_s = 4\pi\left(r^2 J_r(r) - (r + \mathrm{d}r)^2 J_r(r + \mathrm{d}r)\right)\mathrm{d}t$.

Comme d'autre part $\mathrm{d}N = 4\pi r^2 \mathrm{d}r(n(r, t + \mathrm{d}t) - n(r, t))$, en égalant les deux expressions de $\mathrm{d}N$ et en divisant par $4\pi \mathrm{d}r\mathrm{d}t$, on arrive à :

$$\frac{r^2 J_r(r) - (r + \mathrm{d}r)^2\, J_r(r + \mathrm{d}r)}{\mathrm{d}r} = r^2\frac{n(t + \mathrm{d}t) - n(t)}{\mathrm{d}t}$$

Par passage à la limite on obtient la solution **d**.

16 En utilisant la loi de Fick, et en tenant compte du terme source pour $r < a$, donner les équations différentielles vérifiées par n.

❒ **a.** si $r < a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \sigma + D\dfrac{\partial^2 n}{\partial r^2}$

☒ **b.** si $r < a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \sigma + \dfrac{D}{r^2}\dfrac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial n}{\partial t}\right)}{\partial r^2}$

❒ **c.** si $r > a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial r^2}$

☒ **d.** si $r > a$, $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{D}{r^2}\dfrac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial n}{\partial t}\right)}{\partial r^2}$

D'après la loi de Fick, $J_r(r) = -D\dfrac{\partial n}{\partial r}$ en coordonnées sphériques.

En l'absence de terme source, en remplaçant $J_r(r)$ par sa valeur dans le résultat précédent et en divisant par r^2, on obtient la relation **d**.

En présence d'un terme source, le bilan sur les particules du système est :
$\mathrm{d}N = \delta N_e - \delta N_s + \sigma \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$ d'où la relation **b**.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

17 Déterminer la forme des solutions $n(r)$ en régime stationnaire. Les k_i sont des constantes d'intégration.

❒ **a.** si $r < a$, $n(r) = k_0 + k_1 r - \sigma \dfrac{r^2}{2D}$

☒ **b.** si $r < a$, $n(r) = k_0 + \dfrac{k_1}{r} - \sigma \dfrac{r^2}{6D}$

❒ **c.** si $r > a$, $n(r) = k_2 + k_3 r$

☒ **d.** si $r > a$, $n(r) = k_2 + \dfrac{k_3}{r}$

Les relations démontrées à la question précédente s'écrivent en régime indépendant du temps :

$$\frac{D}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t})}{\mathrm{d}r^2} = -\sigma \text{ pour } r < a, \text{ et } \frac{D}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t})}{\mathrm{d}r^2} = 0 \text{ pour } r > a.$$

On les intègre en introduisant des constantes qui seront déterminées grâce aux conditions aux limites, ce qui donne les réponses **b.** et **d**.

18 Y a-t-il une (ou des) constante(s) d'intégration égale(s) à 0 ?

❒ **a.** $k_0 = 0$

☒ **b.** $k_1 = 0$

☒ **c.** $k_2 = 0$

❒ **d.** $k_3 = 0$

La densité de particules ne pouvant pas tendre vers l'infini, ce qui serait physiquement inacceptable, $k_1 = 0$ (sinon la solution diverge pour $r = 0$). Par ailleurs, $n(r)$ doit tendre vers 0 quand r tend vers l'infini, donc $k_2 = 0$.

19 Déterminer toutes les constantes d'intégration et en déduire la densité de particules au point O.

☒ **a.** $n(O) = \dfrac{\sigma a^2}{2D}$

❒ **b.** $n(O) = \dfrac{\sigma a^2}{D}$

❒ **c.** $n(O) = \dfrac{3\sigma a^2}{2D}$

❒ **d.** $n(O) = \dfrac{2\sigma a^2}{D}$

Pour déterminer les constantes k_0 et k_3, il faut utiliser la continuité de $n(r)$ et de $J_r(r)$ pour $r = a$.

La continuité de $n(r)$ fournit la relation $k_0 - \dfrac{\sigma a^2}{6D} = \dfrac{k_3}{a}$.

La continuité de $J_r(r)$ fournit la relation $\dfrac{\sigma a}{3} = \dfrac{Dk_3}{a^2}$ soit $k_3 = \dfrac{\sigma a^3}{3D}$.

On obtient alors $k_0 = \dfrac{\sigma a^2}{2D} = n(O)$.