

Suites

Exercice 1 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Allez à : **Correction exercice 1 :**

Exercice 2 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]1,2]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Allez à : **Correction exercice 2 :**

Exercice 3 :

Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ lorsque $a = 1$? Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particulier de la question 1.
3. Dans le cas général, calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0, a et b .
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k}, n \in \mathbb{N}^*$$

5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

6. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}$$

7. On suppose dans cette question que $a > 1$ et que $au_0 + b > u_0$. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
8. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0 .

Allez à : **Correction exercice 3 :**

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de u_0

1.

1.1. Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite est monotone.

1.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

2.

2.1. Montrer que si $u_0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.

2.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

3.

3.1. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0 . Retrouver le résultat des deux premières questions.

3.3. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n}$$

Allez à : [Correction exercice 4 :](#)

Exercice 5 :

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$u_n = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général v_n défini par

$$v_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$$

Allez à : [Correction exercice 5 :](#)

Exercice 6 :

1. On pose que $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2. On pose que $v_n = \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 6 :](#)

Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2. Calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

Allez à : [Correction exercice 7 :](#)

Exercice 8 :

On considère la suite de nombre réel définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 8](#) :

Exercice 9 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \dots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 9](#) :

Exercice 10 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 10](#) :

Exercice 11 :

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

A l'aide de la question 1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 11](#) :

Exercice 12 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite à valeurs réelles définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soient $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suite à valeurs réelles définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire une expression de v_n en fonction de n , de u_0 et de u_1 .
2. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de w_n en fonction de n , de u_0 et de u_1 .
3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n , de u_0 et de u_1 .
4. Selon les valeurs de u_0 et de u_1 déterminer si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et le cas échéant déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 12](#) :

Exercice 13 :

On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme $u_0 = \frac{11}{4}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 13](#) :

Exercice 14 :

1. Calculer, si cette limite existe.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2}$$

2. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de :

$$0 < u_0 < 1 \quad \text{et} \quad u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2$$

Allez à : [Correction exercice 14](#) :

Exercice 15 :

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

Allez à : [Correction exercice 15](#) :

Exercice 16 :

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Allez à : [Correction exercice 16](#) :

Exercice 17 :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 17](#) :

Exercice 18 :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E(\sqrt{n})$$

Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Allez à : [Correction exercice 18](#) :

Exercice 19 :

1. Montrer que la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{5}(1 - \sqrt{1 - u_n})$ et la donnée initiale $u_0 = \frac{1}{5}$ permet de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que la suite est décroissante.

3. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 19](#) :

Exercice 20 :

Pour tout entier $n > 0$, on considère la fonction $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
 - a) La fonction f_n est-elle strictement monotone ?
 - b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
 - c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
 - a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 - b) En déduire que la suite est convergente, on notera α sa limite.
 - c) supposons que $\alpha < 1$.
 - i) Montrer qu'alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$$

- ii) A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $1 - \alpha = 0$, conclure.

Allez à : [Correction exercice 20](#) :

Exercice 21 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de nombres réels définie par

$$u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\frac{1}{2}$.

Allez à : [Correction exercice 21](#) :

Exercice 22 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite l vérifie

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$

Allez à : [Correction exercice 22](#) :

Exercice 23 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{3 + |\sin(1)|\sqrt{1}} + \frac{1}{3 + |\sin(2)|\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{3 + |\sin(n)|\sqrt{n}}$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Allez à : [Correction exercice 23](#) :

Exercice 24 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} + 4u_n^2$$

Montrer qu'elle est croissante, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 24](#) :

Exercice 25 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| < \frac{3}{4}$$

2. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 25](#) :

Exercice 26 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2 + 2} e^{-u_n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : [Correction exercice 26](#) :

Exercice 27 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - 3 + e^{u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.
3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Allez à : [Correction exercice 27](#) :

Exercice 28 :

Pour chacune des assertions ci-dessus :

- Si vous estimez qu'elle est vraie, donner en justification.
 - Si vous estimez qu'elle est fausse, justifiez-le en exhibant un contre-exemple.
1. Si une partie B de \mathbb{R} est non vide et minorée, sa borne inférieure est un élément de B
 2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la limite de u_n en $+\infty$ est $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
 3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels, alors est bornée.
 4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ne vérifiant pas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$$

Alors elle est bornée.

Allez à : [Correction exercice 28](#) :

Exercice 29 :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

On pourra montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Allez à : **Correction exercice 29 :**

Exercice 30 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$$

a) Montrer que,

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

c) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et précisez sa limite.

Allez à : **Correction exercice 30 :**

Exercice 31 :

1. Soit (H_p) la proposition suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

Montrer (H_p) par récurrence sur p .

2. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite.

On pourra montrer que cette suite est une suite de Cauchy.

Allez à : **Correction exercice 31 :**

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]0,1]$ donc $u_0 > 0$. Montrons que $u_n > 0$ entraîne que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} > 0$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in [0,1]$ donc $u_0 \leq 1$. Montrons que $u_n \leq 1$ entraîne que $u_{n+1} \leq 1$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{(1)^2}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

3. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n)$$

Comme $0 < u_n \leq 1$, on a $-2 \leq -2 + u_n \leq -1 < 0$, par conséquent

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n) < 0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante.

4. La suite est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite notée l , cette limite appartient à $[0,1]$ et cette valeur vérifie

$$l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow 0 = -\frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow -2l + l^2 = 0 \Leftrightarrow l(-2 + l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

Par conséquent $l = 0$.

Allez à : **Exercice 1** :

Correction exercice 2 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]1,2]$ donc $u_0 \geq 1$. Montrons que $u_n > 1$ entraîne que $u_{n+1} > 1$.

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]1,2]$ donc $u_0 \leq 2$. Montrons que $u_n \leq 2$ entraîne que $u_{n+1} \leq 2$.

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{(2)^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \leq 2$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

3. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} - u_n = \frac{1}{4}(u_n^2 - 4u_n + 3) = \frac{1}{4}(u_n - 1)(u_n - 3)$$

Comme $1 < u_n \leq 2$, on a $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 \leq -1 < 0$, par conséquent

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 1)(u_n - 3) < 0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}}{u_n} = \frac{u_n}{4} + \frac{3}{4u_n}$$

Il faut alors étudier la fonction $f:]1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4x^2} = \frac{x^2 - 3}{4}$$

x	1	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{8}$

Cela montre que

$$\forall u_n \in]1,2], f(u_n) < 1$$

Et que donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

4. On note l cette limite, elle appartient à $[1,2]$ et cette valeur vérifie

$$l = \frac{l^2}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{l^2}{4} - l + \frac{3}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 1 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

Par conséquent $l = 1$

Allez à : **Exercice 2 :**

Correction exercice 3 :

- Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b .
Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_{n+1} = au_n$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a .
- Lorsque $a = 1$ alors $u_n = u_0 + nb$
Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_n = a^n u_0$ (remarque, si $a = 1$ cela ne change rien).
-

$$u_1 = au_0 + b$$

$$u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2 u_0 + (a + 1)b$$

$$u_3 = au_2 + b = a(a^2 u_0 + (a + 1)b) + b = a^3 u_0 + (a^2 + a + 1)b$$

- Pour $n = 1$ l'égalité est vérifiée (c'est même la définition de u_1), on peut aussi remarquer que la relation est aussi vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$ d'après 3.

Montrer que l'égalité au rang n entraîne celle au rang $n + 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b = a \left(a^n u_0 + b \sum_{k=0}^n a^{n-k} \right) + b = a \left(a^n u_0 + b(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1) \right) + b \\ &= a^{n+1} u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \dots + a^2 + a) + b \\ &= a^{n+1} u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \dots + a^2 + a + 1) = a^{n+1} u_0 + b \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=0}^n a^{n-k}$$

5.

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k} = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 = 1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Autre méthode, on pose $k' = n - k$, si $k = 1$ alors $k' = n - 1$ et si $k = n$ alors $k' = 0$

$$\sum_{k=1}^n a^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n-1} a^{k'} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}$$

6. D'après 4. Pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n &= a^n u_0 + b \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n u_0 + b \frac{a^n-1}{a-1} = \frac{a^n u_0 (a-1) + b(a^n-1)}{a-1} \\ &= \frac{a^n(u_0 a - u_0 + b) - b}{a-1} = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a-1} \end{aligned}$$

7. Comme $a > 1$, $a^n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $au_0 + b > u_0$ équivaut à $u_1 - u_0 > 0$, on reprend l'expression du 7. Il est clair que $u_n \rightarrow +\infty$

8. Comme $0 < a < 1$, $a^n \rightarrow 0$ donc $a^n(u_1 - u_0) - b \rightarrow -b$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{b}{a-1}$$

Et effectivement cette limite ne dépend pas de u_0 .

Allez à : **Exercice 3** :

Correction exercice 4 :

1.

1.1. Par récurrence $u_0 \leq 2$ et montrons que $u_n \leq 2$ entraîne $u_{n+1} \leq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

1.2. La suite est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{2}l + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l = 1 \Leftrightarrow l = 2$$

2.

2.1 Par récurrence $u_0 \geq 2$ et montrons que $u_n \geq 2$ entraîne $u_{n+1} \geq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

2.2 La suite est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{2}l + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l = 1 \Leftrightarrow l = 2$$

3.

3.1

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.2

On déduit de 3.1. que pour tout $n \geq 0$:

$$v_n = \frac{1}{2^n} v_0 = \frac{1}{2^n} (u_0 - 2)$$

Alors pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = v_n + 2 = \frac{u_0}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_0}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

3.3

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (v_k + 2) = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2) = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 2(n+1) \\ &= v_0 + \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2^2}v_0 + \dots + \frac{1}{2^n}v_0 + 2(n+1) \\ &= v_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + 2(n+1) = v_0 \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + 2(n+1) \\ &= 2v_0 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + 2(n+1) = 2v_0 - \frac{v_0}{2^n} + 2(n+1) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n} = \frac{2v_0 - \frac{v_0}{2^n} + 2(n+1)}{n} = \frac{2v_0 - \frac{v_0}{2^n}}{n} + \frac{2(n+1)}{n} \rightarrow 0 + 2 = 2$$

Allez à : **Exercice 4 :**

Correction exercice 5 :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

Première méthode

On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{(2n + \sqrt{4n^2 + 1})(2n - \sqrt{4n^2 + 1})(n - \sqrt{n^2 + 1})}{(n + \sqrt{n^2 + 1})(n - \sqrt{n^2 + 1})(2n - \sqrt{4n^2 + 1})} \\ &= \frac{(4n^2 - (4n^2 + 1))(n - \sqrt{n^2 + 1})}{(n^2 - (n^2 + 1))(2n - \sqrt{4n^2 + 1})} = \frac{-(n - \sqrt{n^2 + 1})}{-(2n - \sqrt{4n^2 + 1})} = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 1}}{-2n + \sqrt{4n^2 + 1}} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une forme encore plus indéterminée que la précédente, il s'agit donc d'une mauvaise idée.

Deuxième méthode

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{2n + \sqrt{4n^2 \left(1 + \frac{1}{4n^2} \right)}}{n + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}} = \frac{2n + 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{n + n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}} \right)}{n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)} \\ &= 2 \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 2$$

2. Le numérateur est une forme indéterminée $+\infty - \infty$ et le dénominateur est une forme indéterminée $+\infty - \infty$, donc v_n est une forme indéterminée.

Première méthode

On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$v_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{(2n - \sqrt{4n^2 + 1})(2n + \sqrt{4n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})}{(n - \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})(2n + \sqrt{4n^2 + 1})}$$

$$= \frac{(4n^2 - (4n^2 + 1))(n + \sqrt{n^2 + 1})}{(n^2 - (n^2 + 1))(2n + \sqrt{4n^2 + 1})} = \frac{-(n + \sqrt{n^2 + 1})}{-(2n + \sqrt{4n^2 + 1})} = \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{2n + \sqrt{4n^2 + 1}} = \frac{1}{u_n}$$

Donc la limite de v_n est $\frac{1}{2}$

Deuxième méthode

$$u_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{2n - \sqrt{4n^2 \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)}}{n - \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{2n - 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{n - n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2n \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}\right)}{n \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$= 2 \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 donc il s'agit d'une forme indéterminée, c'est une mauvaise idée.

Allez à : **Exercice 5 :**

Correction exercice 6 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $p = E(\sqrt{n})$ tel que

$$p \leq \sqrt{n} < p + 1$$

Donc

$$p^2 \leq n < (p + 1)^2$$

D'où l'on déduit que

$$\frac{1}{(p + 1)^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p^2}$$

On multiplie ces dernières inégalités par $p = E(\sqrt{n}) > 0$, car $n \geq 1$

$$\frac{p}{(p + 1)^2} < \frac{p}{n} \leq \frac{p}{p^2} \Leftrightarrow \frac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n}) + 1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{E(\sqrt{n})^2}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $E(\sqrt{n}) \rightarrow +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n} = 0$$

Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 0.

2. Avec les mêmes notations on multiplie les inégalités

$$\frac{1}{(p + 1)^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p^2}$$

Par $p^2 = E(\sqrt{n})^2 \geq 0$

$$\frac{p^2}{(p + 1)^2} < \frac{p^2}{n} \leq \frac{p^2}{p^2} \Leftrightarrow \frac{E(\sqrt{n})^2}{(E(\sqrt{n}) + 1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})^2}{n} \leq 1$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $E(\sqrt{n}) \rightarrow +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{n})^2}{n} = 1$$

Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 1.

Allez à : **Exercice 6 :**

Correction exercice 7 :

1. $u_1 = \frac{1}{6}u_0^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

On va montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ entraîne que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} > 0$$

C'est bien le cas. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

2. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l alors

$$l = \frac{1}{6}l^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow l^2 - 6l + 9 = 0 \Leftrightarrow (l - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 3$$

3. Encore une fois, faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 = 0 < 3$, montrons que $u_n < 3$ entraîne que $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6} \times 9 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

4. Calculons $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} - u_n = \frac{1}{6}(u_n^2 - 6u_n + 9) = \frac{1}{6}(u_n - 3)^2 > 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, comme elle est bornée par 3, elle converge vers la seule valeur qui vérifie $l = \frac{1}{6}l^2 + \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $l = 3$.

Allez à : **Exercice 7 :**

Correction exercice 8 :

On va d'abord voir si la suite est monotone :

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 - u_n + \frac{1}{8}$$

L'équation $2X^2 - X + \frac{1}{8}$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times \frac{1}{8} = 0$, il s'agit donc, à un coefficient près d'une identité remarquable

$$2X^2 - X + \frac{1}{8} = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{16}\right) = 2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 - u_n + \frac{1}{8} = 2\left(u_n - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$$

La suite est croissante, montrons par récurrence, qu'elle est majorée par $\frac{1}{4}$

$$u_0 = 0 < \frac{1}{4}$$

Montrons que $u_n < \frac{1}{4}$ entraîne que $u_{n+1} < \frac{1}{4}$

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8} < 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

La suite est croissante et majorée, elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = 2l^2 + \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2l^2 - l + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\left(l - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$$

Allez à : **Exercice 8 :**

Correction exercice 9 :

Il suffit d'imaginer la tête de u_{n+1} pour être décourager à l'avance de calculer $u_{n+1} - u_n$ pour essayer de montrer la monotonie de cette suite. On va faire autrement, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{3n^2 + n} \leq \frac{1}{3n^2 + k} \leq \frac{1}{3n^2 + 1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{3n^2+n} + \frac{2n+1}{3n^2+n} + \dots + \frac{2n+1}{3n^2+n} &\leq \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \dots + \frac{2n+1}{3n^2+n} \\ &\leq \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+1} + \dots + \frac{2n+1}{3n^2+1} \end{aligned}$$

Les n termes dans le premier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+n}$. Les n termes dans le dernier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} &\leq u_n \leq n \times \frac{2n+1}{3n^2+1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+n} = \frac{2}{3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

Allez à : **Exercice 9 :**

Correction exercice 10 :

Ce genre d'exercice ce traite toujours de la même façon, il faut « sentir » que l'on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)(3n+6)} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)} \times \frac{2n+3}{3n+6} = u_n \times \frac{2n+3}{3n+6}$$

S'il y a une limite l elle vérifie

$$l = l \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{3}\right)l = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

Il reste à montrer que la suite de terme général u_n converge.

Il est plus que clair que $u_n > 0$, la suite est minorée, de plus il suffit de regarder le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour savoir si la suite est monotone (décroissante nous arrangerait bien)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{3n+6} < \frac{2n+4}{3n+6} = \frac{2(n+2)}{3(n+2)} = \frac{2}{3} < 1$$

Donc la suite de terme général u_n est décroissante et minorée donc elle converge, comme on l'a vu plus haut la seule limite possible est 0.

Allez à : **Exercice 10 :**

Correction exercice 11 :

1.

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

2. Première méthode

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k+1$, alors $k=1 \Rightarrow k'=2$ et $k=n \Rightarrow k'=n+1$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$

Ensuite on change k' en k

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1.

Deuxième méthode

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3u_{n+1} - \frac{3}{2}u_{n+2} = 3u_{n+1} - \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1} - u_n\right) = \left(3 - \frac{15}{4}\right)u_{n+1} + \frac{3}{2}u_n = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Donc

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right)$$

2.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}u_{n+2} = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1} - u_n\right) = \left(\frac{15}{4} - \frac{3}{4}\right)u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n \\ &= 3u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n = 2\left(\frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n\right) = 2w_n \end{aligned}$$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2

Donc

$$w_n = 2^n w_0 = 2^n \left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)$$

3. D'une part

$$v_n + w_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1} = \frac{9}{4}u_n$$

D'autre part

$$v_n + w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right) + 2^n \left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)$$

Donc

$$u_n = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right) + 2^n \left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right) \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{4}{3}u_0 - \frac{1}{3}u_1\right) + 2^n \left(-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1\right)$$

4. Comme 2^n tend vers l'infini si $-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 \neq 0$ alors u_n tend vers l'infini donc ne converge pas.

Supposons que $-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 = 0$, comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, alors pour toutes valeurs de $\frac{4}{3}u_0 - \frac{1}{3}u_1$ u_n tend vers 0.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Si la suite de terme général u_n converge vers une limite l alors

$$l = \frac{5}{2} + \sqrt{l - \frac{7}{4}}$$

Il est clair qu'il va falloir élever au carré quelque chose, mais si on élève au carré ces deux expressions on va avoir un double produit où il y aura encore une racine alors il faut modifier légèrement cette égalité

$$l - \frac{5}{2} = \sqrt{l - \frac{7}{4}}$$

On y va

$$\left(l - \frac{5}{2}\right)^2 = l - \frac{7}{4}$$

Mais attention, il faudra faire une réciproque des fois que $l - \frac{5}{2}$ soit négatif.

$$l^2 - 5l + \frac{25}{4} = l - \frac{7}{4} \Leftrightarrow l^2 - 6l + 8 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta = 36 - 4 \times 8 = 4$$

Et donc comme racines

$$l_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

La solution $l = 2$ ne convient pas car

$$2 - \frac{5}{2} \neq \sqrt{2 - \frac{7}{4}}$$

La solution $l = 4$ est la seule possible.

Comme $u_0 < 4$, ce qui nous arrangerait maintenant c'est que la suite de terme général u_n soit croissante et majorée par 4, on pourrait alors conclure que la suite de terme général u_n est convergente et de limite 4. Montrons ce résultat par récurrence.

Pour $u_0 = \frac{11}{4}$ c'est clair $\frac{11}{4} < 4$.

Montrons que $u_n < 4$ entraîne que $u_{n+1} < 4$

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} < \frac{5}{2} + \sqrt{4 - \frac{7}{4}} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 4.

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante on aura besoin de montrer, au préalable que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > \frac{5}{2}$, pour ce genre de récurrence on peut dire que c'est trivial, on vérifie au passage que la suite de terme général u_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $u_n > \frac{5}{2} \Rightarrow u_n - \frac{7}{4} > 0$

Regardons maintenant si la suite est monotone :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} - u_n = \frac{5}{2} - u_n + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} = \frac{\left(\frac{5}{2} - u_n + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}\right)\left(\frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}\right)}{\frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{2} - u_n\right)^2 - \left(u_n - \frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}} = \frac{u_n^2 - 6u_n + 8}{\frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 4)}{\frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}} \\ &\quad \frac{5}{2} < u_n \Rightarrow u_n - 2 > 0 \end{aligned}$$

$$u_n < 4 \Rightarrow u_n - 4 < 0$$

$$\frac{5}{2} < u_n \Rightarrow \frac{5}{2} - u_n < 0 \Rightarrow \frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} < 0$$

Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est croissante

C'est fait, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers la seule limite possible $l = 4$.

Allez à : **Exercice 13 :**

Correction exercice 14 :

1. Il s'agit d'une forme indéterminée, on met en facteur, au numérateur et au dénominateur les termes qui tendent le plus vite vers l'infini

$$\frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2} = \frac{n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{2}{n}} = -\frac{1}{1} = -1$$

2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l , celle-ci vérifie

$$l = l - l^2 \Leftrightarrow l = 0$$

Regardons si la suite est monotone, pour tout $n \geq 1$

$$u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1})^2 \leq 0$$

Donc la suite est décroissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_0 < 1$, puis montrons que pour tout $n \geq 1$ $0 < u_{n-1} < 1$ entraîne que $0 < u_n < 1$.

$$u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2 = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$$

$0 < u_{n-1} < 1$ entraîne que $0 < 1 - u_{n-1} < 1$ et le produit de deux nombres compris entre 0 et 1 est compris entre 0 et 1, donc $0 < u_n < 1$. En particulier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0, comme elle est décroissante, elle converge vers la seule limite possible $l = 0$.

Allez à : **Exercice 14 :**

Correction exercice 15 :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = \frac{n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} + \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}}$$

$$= \frac{2n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

Donc cette expression admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

Allez à : **Exercice 15 :**

Correction exercice 16 :

Nous allons utiliser le théorème sur les suites adjacentes

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} - \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + n^2(n+1) - (n+1)^3}{(n+1)^3 n^2} \\ &= \frac{n^2 + n^3 + n^2 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3 n^2} = -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3 n^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

$$v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

Donc les deux suites convergent vers une même limite.

Allez à : **Exercice 16 :**

Correction exercice 17 :

1. $1 < u_0$, montrons que $1 < u_n$ entraîne que $1 < u_{n+1}$

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} > \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$$

Cela montre que la suite est bien définie car si $u_n < \frac{1}{2}$ alors u_{n+1} n'est pas défini.

2.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} = -\frac{u_n^2 + 2u_n + 1}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} - \frac{(u_n + 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \sqrt{2l - 1}$$

$l > 0$ et $\sqrt{2l - 1} > 0$ donc

$$l = \sqrt{2l - 1} \Leftrightarrow l^2 = 2l - 1 \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow (l - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 1$$

Allez à : **Exercice 17 :**

Correction exercice 18 :

On a

$$E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$$

Donc

$$\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$$

On divise par $\sqrt{n} > 0$

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} < \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \leq 1$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 1$$

Allez à : **Exercice 18 :**

Correction exercice 19 :

1. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0, 0 < u_n < 1$, cela montrer au passage que la suite u_n est bien définie pour tout n (en effet si $u_n \notin]0,1[$ u_{n+1} n'est pas défini).

$u_0 \in]0,1[$, montrons maintenant que $u_n \in]0,1[$ entraîne que $u_{n+1} \in]0,1[$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{1 - u_n} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \sqrt{1 - u_n} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{5} (1 - \sqrt{1 - u_n}) < \frac{1}{5} \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.

2. Nous allons employer la méthode « normale »

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}(1 - \sqrt{1 - u_n}) - u_n = \frac{1}{5} - u_n - \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{5} - u_n - \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}\right)\left(\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}\right)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} = \frac{\left(\frac{1}{5} - u_n\right)^2 - \frac{1}{25}(1 - u_n)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} \\
&= \frac{\frac{1}{25} - \frac{2}{5}u_n + u_n^2 - \frac{1}{25} + \frac{1}{25}u_n}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} = \frac{u_n^2 - \frac{9}{25}u_n}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} = \frac{u_n(u_n - \frac{9}{25})}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}}
\end{aligned}$$

Et là cela coince, au numérateur, on connaît bien le signe de u_n mais pas celui de $u_n - \frac{9}{25}$ et au dénominateur, rien ne nous permet d'affirmer que $\frac{1}{5} - u_n \geq 0$ (cela nous aurait arrangé parce que dans ce cas on aurait pu conclure que le dénominateur est positif). Bref il doit y avoir un « truc ».

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{5}(1 - \sqrt{1 - u_n}) = \frac{1}{5} \frac{(1 - \sqrt{1 - u_n})(1 + \sqrt{1 - u_n})}{1 + \sqrt{1 - u_n}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - (1 - u_n)}{1 + \sqrt{1 - u_n}} \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{u_n}{1 + \sqrt{1 - u_n}} < \frac{1}{5} \times \frac{u_n}{1 + 0} < u_n
\end{aligned}$$

Et voilà le travail, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{5}(1 - \sqrt{1 - l}) \Leftrightarrow 5l = 1 - \sqrt{1 - l} \Leftrightarrow 5l - 1 = -\sqrt{1 - l}$$

Maintenant on peut élever au carré mais on n'aura qu'une implication parce que rien ne garantit que $5l - 1$ soit du même signe que $-\sqrt{1 - l}$, c'est-à-dire négatif (en fait si parce que $u_0 = \frac{1}{5}$ et la suite est décroissante donc $l < \frac{1}{5}$, mettons que l'on ait rien vu).

$$(5l - 1)^2 = 1 - l \Leftrightarrow 25l^2 - 10l + 1 = 1 - l \Leftrightarrow 25l^2 - 9l = 0 \Leftrightarrow 25l\left(l - \frac{9}{25}\right) = 0$$

Il y a deux limites possibles, $l = 0$ convient car $5 \times 0 - 1 = -\sqrt{1 - 0}$, par contre $l = \frac{9}{25}$ ne

convient pas car $5 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{4}{5}$ et $-\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$

Finalement la suite est décroissante, minorée par 0, elle converge vers la seule limite possible $l = 0$.

Allez à : **Exercice 19 :**

Correction exercice 20 :

1. a) f_n est définie, continue et dérivable à dérivée continue sur $[0,1]$.

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2(1-x)(-1) = nx^{n-1} + 2(1-x)$$

Pour $x \in]0,1[$, $x^{n-1} > 0$ et $1 - x > 0$ donc f_n est strictement croissante. On pourrait vérifier que $f'_n(0) > 0$ et que $f'_n(1) > 0$ mais même si ces dérivées avaient été nulle cela n'aurait pas changé la conclusion.

b) $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, d'après 1.a) f_n est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $] -1,1[$, donc $0 \in] -1,1[$ admet un unique antécédent $\alpha_n \in]0,1[$, c'est-à-dire tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

c)

$$\begin{aligned}
f_n(\alpha_n) &= 0 \Leftrightarrow \alpha_n^n - (1 - \alpha_n)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_n^n = (1 - \alpha_n)^2 \\
f_{n+1}(\alpha_n) &= \alpha_n^{n+1} - (1 - \alpha_n)^2 = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha_n - 1) < 0
\end{aligned}$$

Car $\alpha_n^n > 0$ et $1 - \alpha_n < 0$.

2. a) La fonction f_{n+1} est une bijection croissante donc

$$0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$$

Par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) la suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

c) i) La suite est croissante alors

$$0 < \alpha_n \leq \alpha$$

Cela entraîne que

$$0 < \alpha_n^n \leq \alpha^n$$

Or, si $0 \leq \alpha < 1$ alors la limite de α^n est nulle, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^n = 0$$

ii) On a vu au 1. c) que

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n^n = (1 - \alpha_n)^2$$

Ce qui entraîne, d'après 2. c) i) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \alpha_n)^2 = 0$$

Autrement dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$$

Ce qui signifie que $\alpha = 1$, (comme $0 < \alpha_n < 1$ et que $(\alpha_n)_{n \rightarrow +\infty}$ admet une limite α entraîne que $0 \leq \alpha \leq 1$), il y a une contradiction avec l'hypothèse $\alpha < 1$, par conséquent $\alpha = 1$.

Allez à : **Exercice 20 :**

Correction exercice 21 :

$$u_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Si f admet une limite lorsque $x \rightarrow 0$, avec $x \neq 0$ alors cette limite est la même que celle de u_n .

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Première méthode

Règle de L'Hospital, on pose

$$g(x) = \sqrt{1+x} - 1 \quad \text{et} \quad h(x) = x$$

Alors

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad h'(x) = 1$$

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{1}{2}$$

Et alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode

On pose

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Il s'agit du taux de variation, en 0, de la fonction g , sa limite est $g'(0)$. Comme $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = g'(0) = \frac{1}{2}$$

Et alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Troisième méthode

$$n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = n \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = n \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Allez à : **Exercice 21** :

Correction exercice 22 :

1.

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1 - (2n+1)}{(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{-n}{(2n+1)(n+1)} < 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante donc elle converge vers une limite l .

$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\times n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{\times n}$$

Autrement dit

$$\frac{n}{2n} \leq u_n < \frac{n}{n+1}$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

Cela montre que $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Allez à : **Exercice 22** :

Correction exercice 23 :

On va minorer u_n par une suite qui tend vers $+\infty$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, 3 + |\sin(k)|\sqrt{k} < 3 + \sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{n}$$

Ce qui entraîne que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{1}{3 + |\sin(k)|\sqrt{k}} \geq \frac{1}{3 + \sqrt{n}}$$

Donc

$$u_n \geq \underbrace{\frac{1}{3 + \sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{3 + \sqrt{n}}}_{\times n} = \frac{n}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Allez à : **Exercice 23 :**

Correction exercice 24 :

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n^2 - u_n + \frac{1}{16}$$

Transformons le polynôme $4X^2 - X + \frac{1}{16}$

Son discriminant est

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times \frac{1}{16} = 0$$

Donc, à un coefficient près, il s'agit d'une identité remarquable

$$4X^2 - X + \frac{1}{16} = 4\left(X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{64}\right) = 4\left(X - \frac{1}{8}\right)^2$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n^2 - u_n + \frac{1}{16} = 4\left(u_n - \frac{1}{8}\right)^2 \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence qu'elle est majorée par $\frac{1}{8}$.

Pour $u_0 = 0$ c'est vrai. Montrons que $u_n < \frac{1}{8}$ entraîne que $u_{n+1} < \frac{1}{8}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} + 4u_n^2 < \frac{1}{16} + 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{64} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{1}{8}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{8}$ donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{16} + 4l^2 \Leftrightarrow 4l^2 - l + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow 4\left(l - \frac{1}{8}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{8}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la seule limite possible $\frac{1}{8}$.

Allez à : **Exercice 24 :**

Correction exercice 25 :

1.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| + \left| \frac{\sin(n^2)}{2} \right| = \frac{1}{n} + \left| \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$$

La suite de terme général $\frac{1}{n}$ est décroissante et pour tout $n \geq 5$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

Donc pour tout $n \geq 5$

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2. Pour tout $n \geq 5$

$$0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Allez à : **Exercice 25 :**

Correction exercice 26 :

$$u_1 = \frac{1}{3} e^{-u_0} > 0$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ que $u_n > 0$

Pour $n = 1$ c'est vrai. Montrons que $u_n > 0$ entraîne que $u_{n+1} > 0$

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2 + 2} e^{-u_n} > 0$$

C'est une grosse évidence.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$

$$0 < u_{n+1} = \frac{n}{n^2 + 2} e^{-u_n} < \frac{n}{n^2 + 2}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 2} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Allez à : **Exercice 26 :**

Correction exercice 27 :

1.

$$u_{n+1} - u_n = -3 + e^{u_n}$$

Pour montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante il va falloir montrer que

$$-3 + e^{u_n} < 0 \Leftrightarrow e^{u_n} < 3 \Leftrightarrow u_n < \ln(3)$$

Montrons cela par récurrence que $u_n < \ln(3)$

$e < 3 \Rightarrow \ln(e) < \ln(3) \Rightarrow u_0 = 1 < \ln(3)$ pour $n = 0$ c'est vrai.

Montrons que $u_n < \ln(3)$ entraîne que $u_{n+1} < \ln(3)$

$$u_{n+1} = u_n - 3 + e^{u_n} < \ln(3) - 3 + e^{\ln(3)} = \ln(3) - 3 + 3 = \ln(3)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ln(3)$

Cela montre que $u_{n+1} - u_n < 0$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite l alors

$$l = l - 3 + e^l \Leftrightarrow 0 = -3 + e^l \Leftrightarrow e^l = 3 \Leftrightarrow l = \ln(3)$$

Or la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0 < \ln(3)$ donc elle ne peut pas converger vers $\ln(3)$.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, si cette suite est minorée, elle converge or ce n'est pas le cas, donc elle n'est pas minorée. Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Allez à : **Exercice 27 :**

Correction exercice 28 :

1. C'est faux, par exemple $B =]0,1]$ est minorée, sa borne inférieure est 0 et $0 \notin]0,1]$.

2. C'est faux, par exemple la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définit par :

$$u_n = n + (-1)^n \sqrt{n}$$

En transformant u_n , pour $n > 0$:

$$u_n = n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} - (n + (-1)^n\sqrt{n}) = 1 + (-1)^{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$$

Donc pour $n = 2p$, $u_{2p+1} < u_{2p}$, ce qui montre que la suite n'est pas croissante même à partir d'un certain rang. En fait la suite augmente entre u_{2p-1} et u_{2p} et elle diminue un peu moins entre u_{2p} et u_{2p+1} .

3. Une suite de Cauchy à valeurs réelle converge vers une limite l donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \epsilon$$

Prenons $\epsilon = 1$ (n'importe quelle valeur convient) alors $|u_n - l| < 1$ ce qui équivaut à

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, -1 < u_n - l < 1$$

Ou encore à

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, l - 1 < u_n < l + 1$$

Ensuite l'ensemble $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ est un ensemble fini, il admet donc un minimum et un maximum, notons les respectivement u_{n_0} et u_{n_1} , ce qui signifie que

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}, u_{n_0} \leq u_n \leq u_{n_1}$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min(l - 1, u_{n_0}) \leq u_n \leq \max(l + 1, u_{n_1})$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque : cela signifie nullement que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un maximum et un minimum, cela peut être le cas ou pas.

4. On fait comme si on n'avait rien vu.

Commençons par écrire ce que signifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n| > A$$

Puis écrivons la négation de cette proposition, attention, il y a un piège, la négation de « $n > N, |u_n| > A$ » est « $n \leq N$ ou $|u_n| \leq A$ »

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } |u_n| \leq A \quad (1)$$

Car la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$ est : (P) et non (Q)

Là, il ne faut pas s'enthousiasmer en se disant que $|u_n| \leq A$ veut bien dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Rappelons ce que signifie qu'une suite est bornée

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A \quad (2)$$

Ou strictement inférieure à A si on veut.

Dans (1) il y a un « $\exists n \in \mathbb{N}$ » et dans (2) il y a un « $\forall n \in \mathbb{N}$ », cela pose problème parce que l'on ne voit pas bien comment on pourrait faire pour transformer le « il existe » en « pour tout ». Il y a sans doute un truc que l'on a pas vu, et si la proposition 4 était fausse malgré les apparences trompeuses. Si par exemple $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettait une sous-suite tendant vers l'infini et que les autres termes restent bornés, on serait dans le cadre de la proposition 4 et pourtant la suite n'est pas bornée, donnons un exemple d'une telle suite : pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_{2p} = p \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = 0$$

La limite de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette suite n'est pas $+\infty$ car il existe une sous-suite constante (et égale à 0) et pourtant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée car il existe une sous-suite tendant vers l'infini. Et voilà !

Allez à : **Exercice 28 :**

Correction exercice 29 :

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon$$

Ou encore

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Nions cette proposition

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| > \epsilon \quad (1)$$

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} > \underbrace{\frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p}}_{\times p} = \frac{p}{n+p}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u_{n+p} - u_n|$ ne tende pas vers 0, $p = n$ convient

Revenons à (1), prenons $\epsilon = \frac{1}{2}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p = n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que $(u_n)_{n \geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Malheureusement cela ne suffit pas pour montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ tend vers l'infini, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy et elle ne tend pas vers ∞ .

Il faut rajouter que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante. Pour tout $n \geq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

Ce qui entraîne que

$$u_{n+1} > u_n$$

La suite est croissante et elle n'est pas de Cauchy donc elle tend vers $+\infty$.

Remarque :

Si ce résultat ne vous paraît pas évident, démontrons-le, nous savons que si

$(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée alors elle converge, donc c'est une suite de Cauchy.

La contraposée de cette phrase mathématique est

Si $(u_n)_{n \geq 2}$ n'est pas de Cauchy alors elle n'est pas croissante ou elle n'est pas majorée.

Comme elle est croissante, elle n'est pas majorée.

Allez à : **Exercice 29 :**

Correction exercice 30 :

1. Nous allons montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy on va montrer

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| > \epsilon \quad (1)$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+p}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}}_{\times p}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{n+p}}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u_{n+p} - u_n|$ ne tende pas vers 0, $p = n$ convient

$$|u_{n+p} - u_n| > \frac{n}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Revenons à (1), prenons $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p = n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2.

a)

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

D'autre part

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) On applique le 2.a pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Première méthode

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}} < 2(\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) < \frac{1}{\sqrt{1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+1}} < 2(\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

\vdots

$$\frac{1}{\sqrt{(n-1)+1}} < 2(\sqrt{(n-1)+1} - \sqrt{n-1}) < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puis on fait la somme de ces n lignes

$$u_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) < u_n$$

En simplifiant tous les termes qui se simplifient

L'inégalité de droite donne l'inégalité de gauche demandée $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) < u_n$

Et l'inégalité de gauche

$$\begin{aligned} u_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) &\Leftrightarrow u_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2 \\ &= \frac{-1 + 2(n+1)}{\sqrt{n+1}} - 1 = \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} - 1 \end{aligned}$$

Il faudrait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 2n+1 < 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 < 4n^2 + 4n$$

Seulement voilà, c'est faux !

Alors au lieu de faire la somme des n premières lignes on va faire la somme des $n-1$ premières lignes en ne gardant que l'inégalité de gauche.

$$u_n - 1 < 2(\sqrt{n} - 1)$$

Ce qui entraîne que

$$u_n < 2\sqrt{n} - 1$$

Et voilà. On a bien pour tout $n \geq 1$.

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

c) On divise ces inégalités par \sqrt{n}

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}}$$

Ce qui entraîne que

$$2\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$$

Allez à : **Exercice 30** :

Correction exercice 31 :

1. Pour $p = 1$,

$$(H_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Pour montrer cela on va calculer

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{n(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - n - n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} > 0$$

Ce qui montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Montrons que (H_p) entraîne (H_{p+1})

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2}$$

Il faut montrer que cette expression est majorée par

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}$$

Pour cela nous allons calculer la différence

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2} \right) &= -\frac{1}{n+p+1} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{(n+p+1)^2} \\ &= \frac{-(n+p+1)(n+p) + (n+p+1)^2 - (n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2} \\ &= \frac{(n+p+1)[-(n+p) + (n+p+1)] - (n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2} = \frac{(n+p+1) - (n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2} \\ &= \frac{1}{(n+p)(n+p+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}$$

En fait on aurait pu utiliser (H_1) en changeant n en $(n+p)$

Par conséquent

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}$$

Ce qui montre que (H_p) entraîne (H_{p+1}) ,

Et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

2.

On rappelle que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

On choisit un $\epsilon > 0$ quelconque, et N tel que $\frac{1}{N} < \epsilon$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &= \left| 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon \end{aligned}$$

Ce qui montre que cette est une suite de Cauchy, comme il s'agit d'une suite réelle elle converge.

On verra en L2 que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

Allez à : **Exercice 31** :