

## Compléments sur la modélisation des systèmes

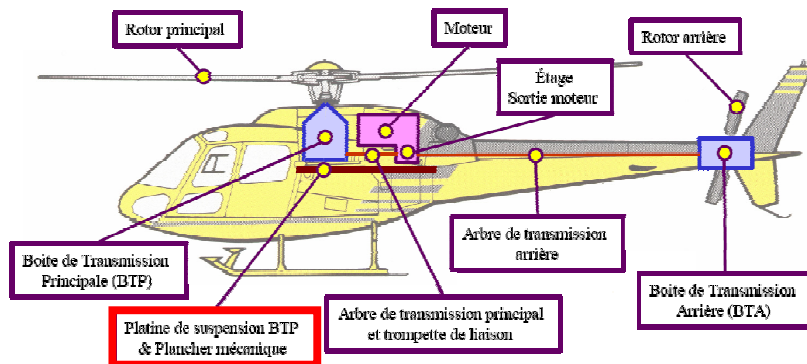
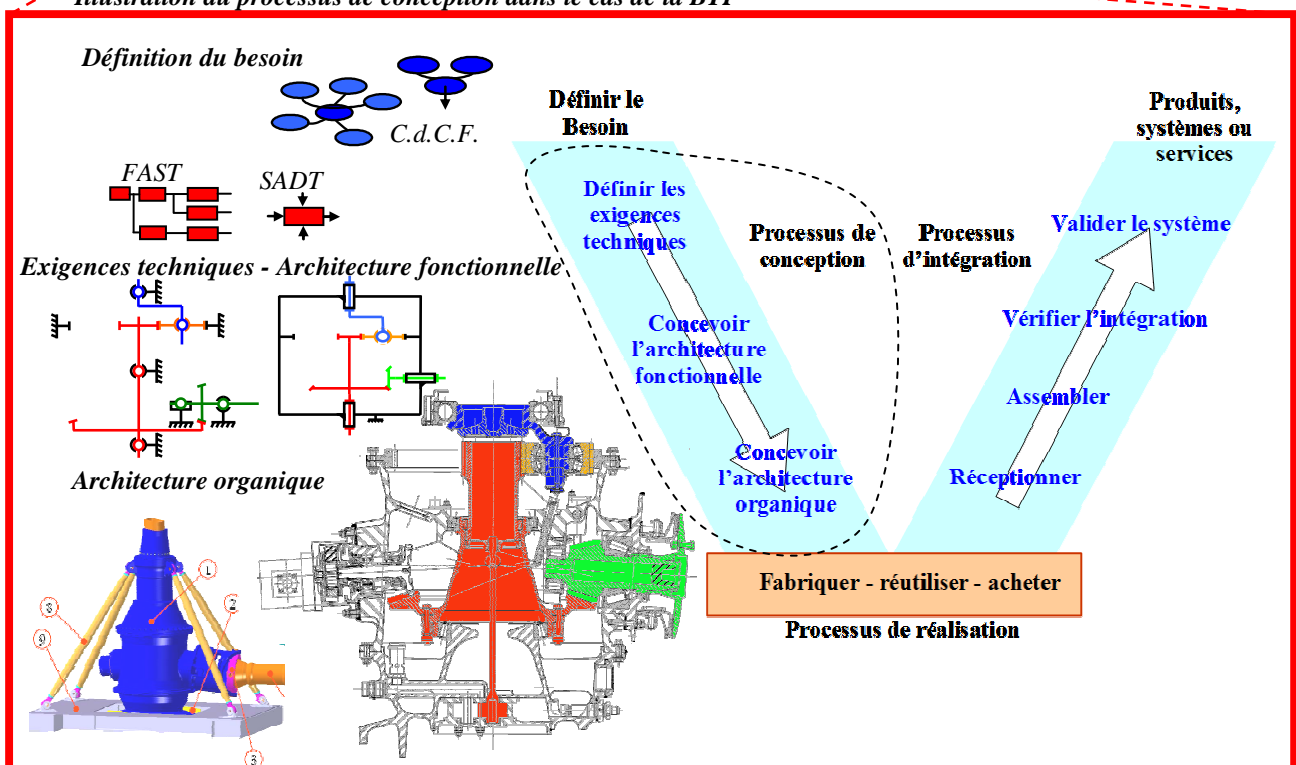


Illustration du processus de conception dans le cas de la BTP



### Exemples de systèmes mécaniques

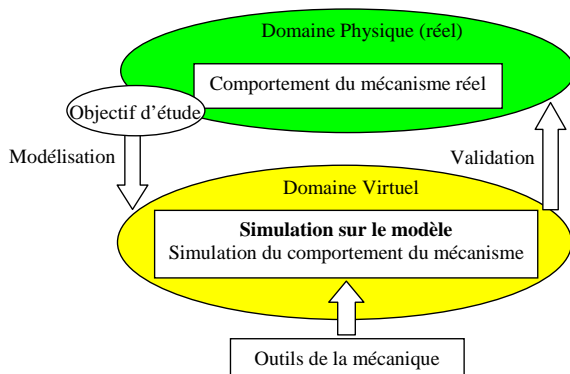
#### SYSTEMES EQUIPANT UN HELICOPTERE MODELE ECUREUIL

L'ingénieur doit constamment procéder à des choix lors des différentes étapes du processus de conception afin d'améliorer les performances des systèmes. Cette amélioration passe nécessairement par l'optimisation de l'architecture des constituants des systèmes et donc, dans ce cadre, un des problèmes essentiel de l'ingénieur est de choisir les meilleures solutions technologiques pour réaliser les liaisons. Pour l'aider dans ces choix technologiques, l'ingénieur s'appuie obligatoirement sur des modèles plus ou moins détaillés car seuls les modèles permettent de simuler le comportement du produit et d'appréhender le réel.

L'objectif de ce cours est donc de **compléter les connaissances sur la modélisation des systèmes** qui permettront ensuite d'**introduire la théorie des mécanismes**. La théorie des mécanismes est un outil préliminaire dans le processus de conception qui a pour finalité de **maîtriser la mobilité et l'hyperstaticité d'un mécanisme modélisé par des liaisons théoriques**.

## 1. Rappel de la démarche de modélisation

L'objectif de l'ingénieur est de comprendre, analyser, améliorer ou valider un mécanisme. Pour cela, il le modélise pour appliquer ensuite les outils de la mécanique.



Le choix du modèle dépend :

- de l'étude que l'on cherche à mener,
- du degré de précision demandé pour cette étude,
- des moyens de calcul disponibles.

Le domaine de validité des lois de la mécanique implique la **mise en place d'hypothèses simplificatrices** lors de la phase de modélisation.

Plus le modèle est proche du système réel, plus les résultats obtenus seront satisfaisants.

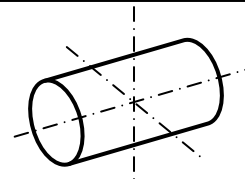
## 2. Liaisons simples

Un mécanisme bien conçu doit comporter des liaisons qui peuvent se fabriquer facilement, qui permettent de transmettre des mouvements et qui sont mécaniquement résistante (usure, fatigue, ...).

Les différentes **liaisons simples** d'un mécanisme s'effectuent à partir de **surfaces élémentaires**.

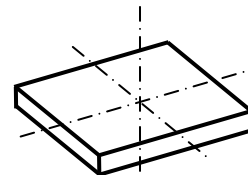
Le **cylindre de révolution** (tournage, perçage, alésage)

Modèle : cylindricité parfaite (circularité du profil et rectitude), état de surface parfait, diamètre et longueur sans tolérance



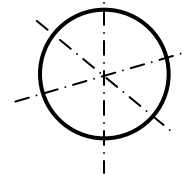
Le **plan** (fraisage, tournage, lamage)

Modèle : planéité, rugosité et dimensions parfaites

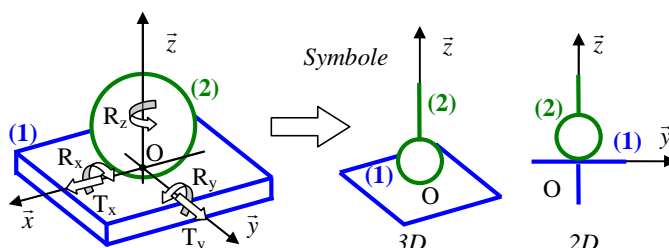


La **sphère** (tournage)

Modèle : rugosité, dimensions parfaites



L'association de ces surfaces élémentaires permet d'obtenir les liaisons simples.



(2)/(1) : **Contact sphère/plan** :  
Ponctuelle en O de normale  $(O, \vec{z})$

On supprime 1 degré de liberté :  
 $\mathcal{R}_z$

	<p>(2)/(1) : <b>Contact cylindre/plan</b> :            Linéaire rectiligne d'axe <math>(O, \vec{x})</math> de normale <math>(0, \vec{z})</math></p> <p>On supprime 2 degrés de liberté :  <math>\cancel{T_z} \cancel{R_y}</math></p>
	<p>(2)/(1) : <b>Contact sphère/cylindre</b> :            Linéaire annulaire d'axe <math>(O, \vec{x})</math></p> <p>On supprime 2 degrés de liberté :  <math>\cancel{T_y} \cancel{T_z}</math></p>
	<p>(2)/(1) : <b>Contact plan/plan</b> :            Appui plan de normale <math>(O, \vec{z})</math></p> <p>On supprime 3 degrés de liberté :  <math>\cancel{T_z} \cancel{R_x} \cancel{R_y}</math></p>
	<p>(2)/(1) : <b>Contact sphère/sphère</b> :            Rotule en O</p> <p>On supprime 3 degrés de liberté :  <math>\cancel{T_x} \cancel{T_y} \cancel{T_z}</math></p>
	<p>(2)/(1) : <b>Contact cylindre/cylindre</b> : Pivot glissant d'axe <math>(O, \vec{x})</math></p> <p>On supprime 4 degrés de liberté :  <math>\cancel{T_y} \cancel{T_z} \cancel{R_y} \cancel{R_z}</math></p>

### 3. Modélisation cinématique et statique des liaisons

#### 3.1. Modélisation cinématique des liaisons

Pour caractériser les mouvements relatifs entre deux solides (1) et (2) constituant une liaison, on utilise l'outil torseur cinématique.

Dans une base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  donnée, il prend la forme générale :  $\{C_{1/2}\} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_{x_{12}} & v_{x_{12}} \\ \Omega_{y_{12}} & v_{y_{12}} \\ \Omega_{z_{12}} & v_{z_{12}} \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

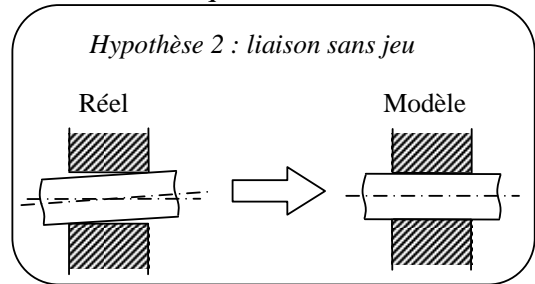
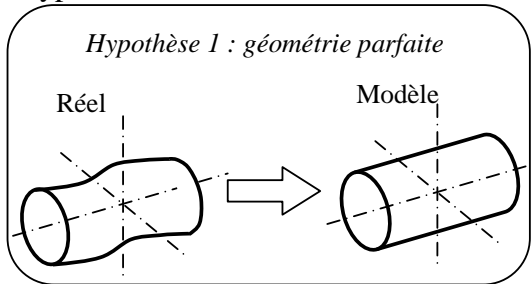
On appelle  $N_C$  le nombre de degré de liberté d'une liaison, il correspond au **nombre de paramètres de position relatifs indépendants**.



$$0 \leq N_C \leq 5$$

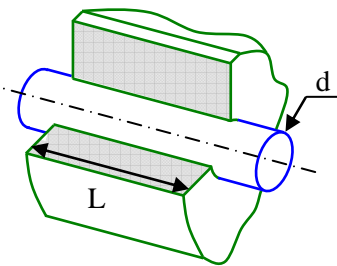
$N_C = 0$  correspond à la liaison encastrement et l'existence même d'une liaison impose  $N_C \neq 6$  puisqu'un solide sans liaison possède 6 degrés de liberté.

Deux hypothèses sont nécessaires à la mise en place du modèle cinématique d'une liaison.



### Conséquences sur la modélisation du contact cylindre/cylindre et plan/plan :

Suivant la longueur du contact cylindre/cylindre, le modèle à retenir peut changer :

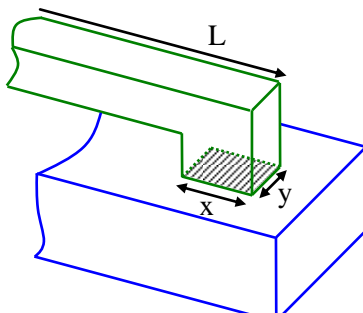


$\frac{L}{d} \leq 0,5$  ou  $0,5 \leq \frac{L}{d} \leq 1,5$  + jeu important  $\rightarrow$  Liaison linéaire annulaire

$\frac{L}{d} \geq 1,5$  ou  $0,5 \leq \frac{L}{d} \leq 1,5$  + jeu faible  $\rightarrow$  Liaison pivot glissant

Ces bornes sont des valeurs moyennes, elles dépendent bien sur de l'ajustement du guidage. Le choix de la modélisation dépend également de l'objectif d'étude.

Suivant les dimensions  $x$  et  $y$  de la surface plane (inclue dans une liaison de plus grande longueur  $L$ ), le modèle à retenir peut changer :



$x \approx y \rightarrow$  Liaison appui plan

$x \approx 0,1.y$  ou  $y \approx 0,1.x \rightarrow$  Liaison linéaire rectiligne

$x$  et  $y \ll L \rightarrow$  Liaison contact ponctuel

### 3.2. Modélisation statique des liaisons

Pour caractériser l'action mécanique transmissible entre deux solides (1) et (2) constituant une liaison, on utilise l'outil torseur d'action mécanique transmissible.

Dans une base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  donnée, il prend la forme générale :  $\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

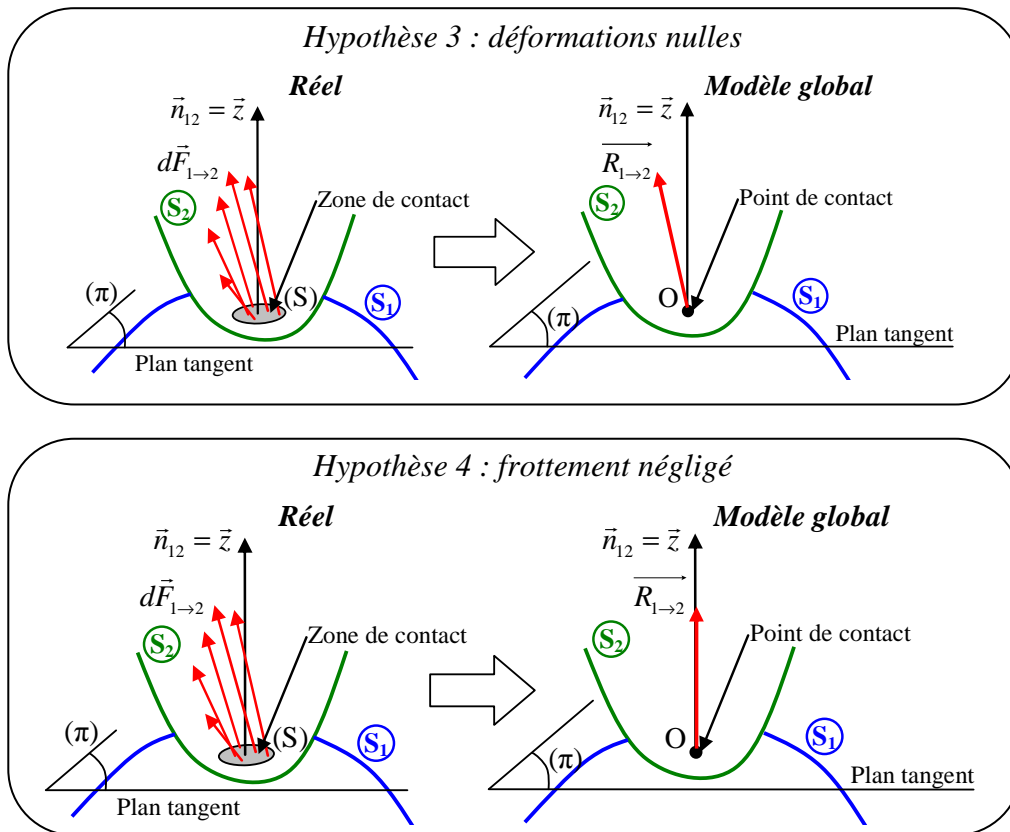
On appelle  $N_S$  le nombre d'inconnues statiques d'une liaison, il correspond au **nombre de composantes non nulles et indépendantes**.



$$1 \leq N_S \leq 6$$

$N_S = 6$  correspond à la liaison encastrement et l'existence d'une liaison impose  $N_S \neq 0$  puisqu'un solide avec liaison possède au minimum 1 inconnue statique.

**Deux hypothèses fondamentales supplémentaires** sont nécessaires à la mise en place du modèle d'action mécanique transmissible.



Lorsque les hypothèses 1, 2, 3 et 4 (géométrie parfaite, liaison sans jeu, déformation nulle et frottement négligé) sont vérifiées, on dit que la **liaison est parfaite** :

- La puissance développée par les actions mécaniques de la liaison est nulle pour tout mouvement compatible avec la liaison.
- Il y a une complémentarité entre le torseur cinématique et le torseur d'action mécanique transmissible :  $N_S + N_C = 6$



A une vitesse linéaire nulle correspond une force

Torseur d'action mécanique transmissible  $\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

Torseur cinématique  $\{C_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x_{12}} \\ 0 & v_{y_{12}} \\ \Omega_{z_{12}} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

A une vitesse angulaire nulle correspond un moment non nul pour le torseur d'action mécanique transmissible



Il est essentiel de garder en mémoire qu'une **liaison réelle n'est jamais parfaite** puisqu'il s'agit d'un **modèle** !

En réalité il ne faudrait pas dire « cette liaison est une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$  » mais plutôt « cette liaison peut être raisonnablement modélisée par une liaison pivot glissant parfaite d'axe  $(O, \vec{x})$  compte tenu de l'objectif fixé ».



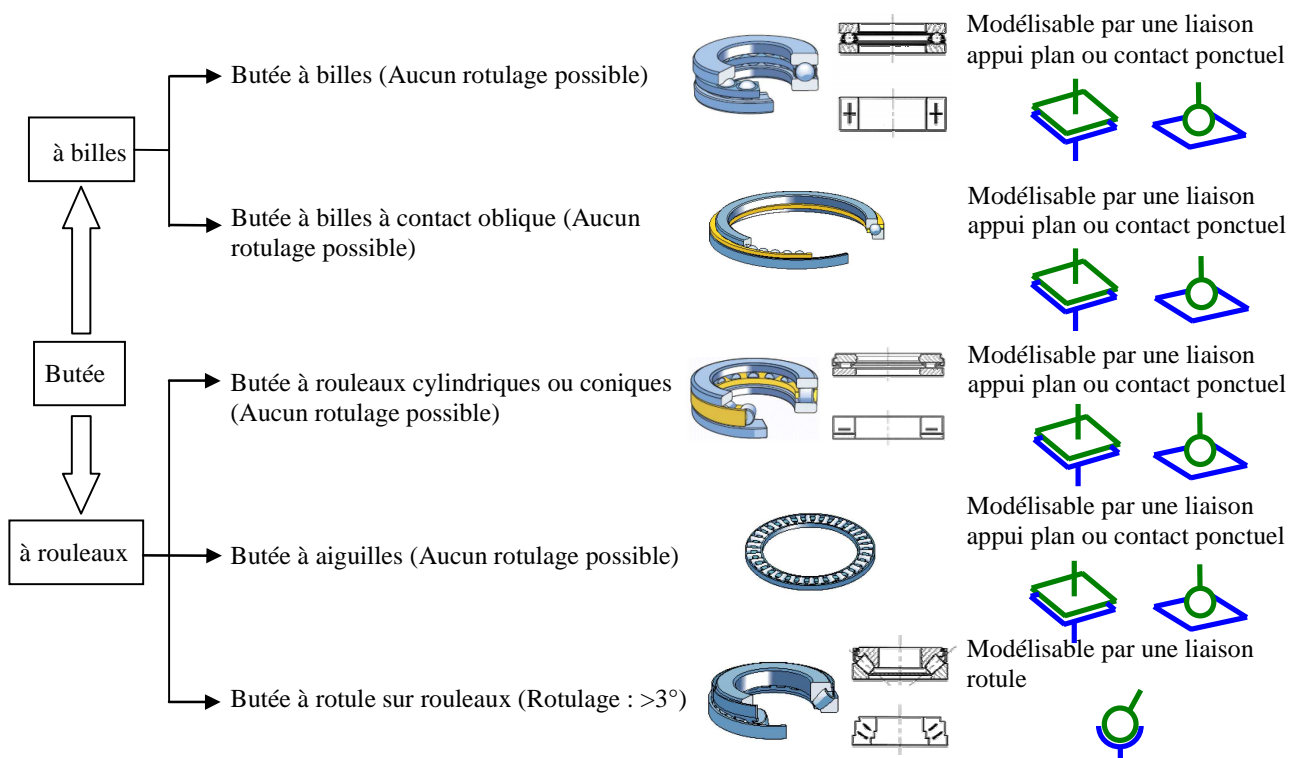
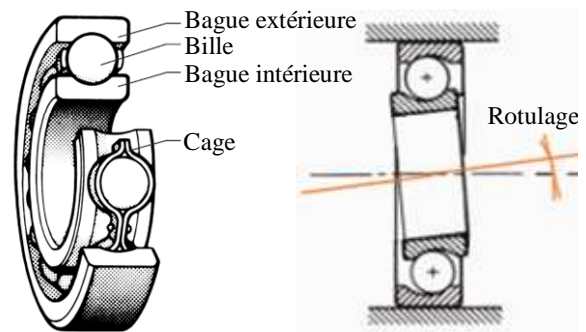
La modélisation par liaisons simples permet de définir et de calculer de façon relativement simple les éléments de réduction des torseurs cinématiques et d'action mécanique transmissible. Les liaisons simples constituent donc un modèle de référence utile et commode. **Un des objectifs du concepteur consiste donc à s'approcher au maximum de ces liaisons simples !**

## 4. Modélisation d'éléments technologiques particuliers

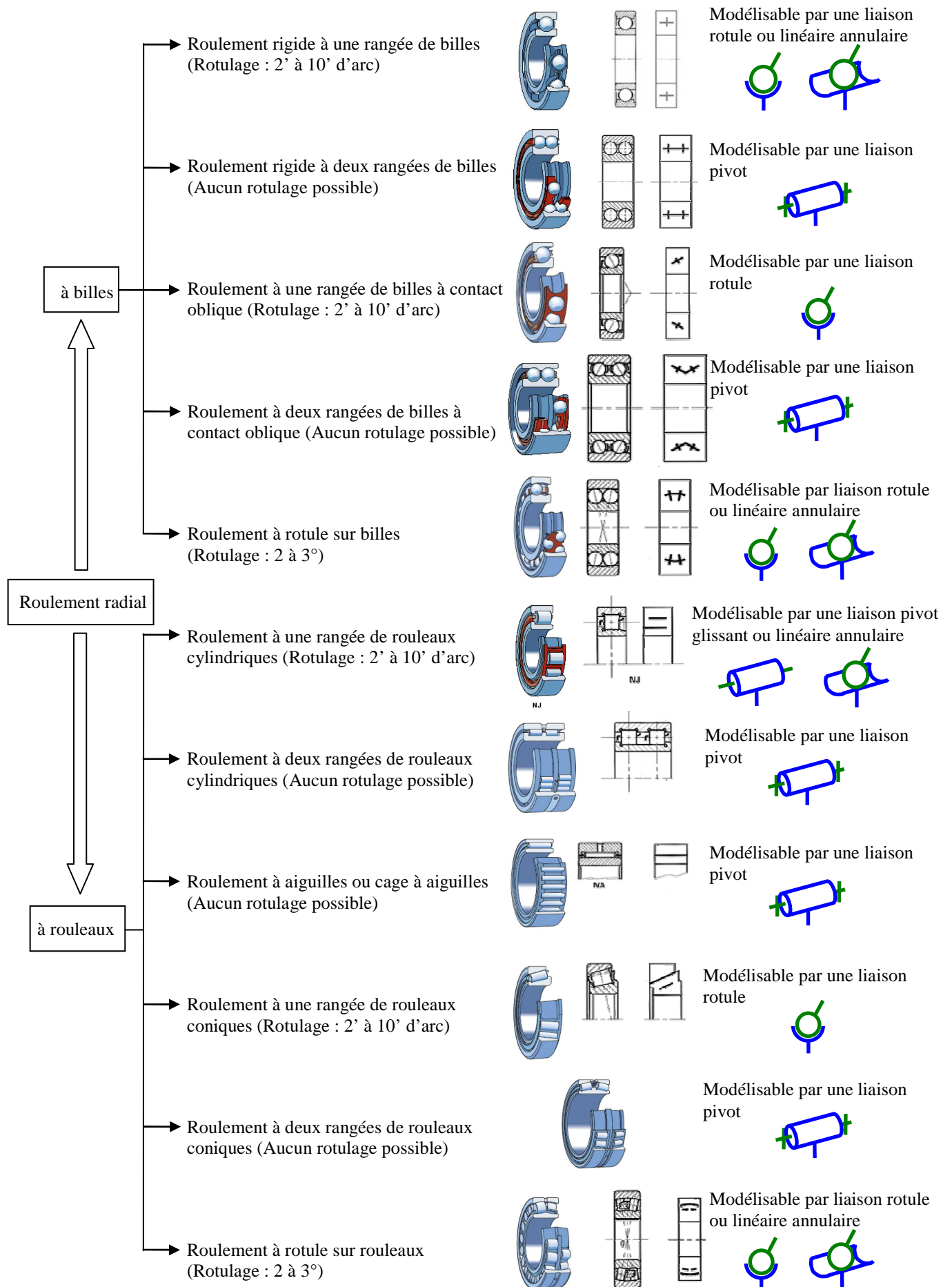
### 4.1. Cas des roulements

Le guidage en rotation par roulements s'effectue presque exclusivement par paires et constitue la solution la plus courante pour réaliser une liaison pivot. Cependant, pour prévoir son dimensionnement, il est nécessaire de déterminer les actions mécaniques transmissibles pour chacun des deux roulements. Il faut donc proposer une modélisation tenant compte, d'une part, des choix de montage réalisés et, d'autre part, de la technologie de chacun des roulements.

Technologiquement, les roulements sont conçus pour permettre la rotation de leur bague extérieure par rapport à leur bague intérieure autour de leur axe de révolution. Mais certains roulements possèdent en plus des possibilités de rotation autour des deux axes perpendiculaires à leur axe de révolution. Lorsque c'est le cas, on dit que le roulement a une possibilité de « rotulage ». Par conséquent en fonction des indications de comportement fournies par les constructeurs, il est possible de proposer des modélisations différentes.







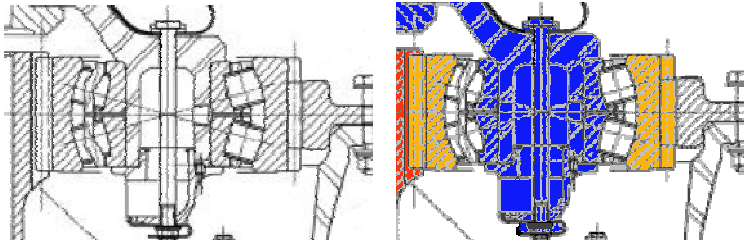


Il faut rappeler qu'une modélisation ne vaut que pour ce l'on en fait, c'est pourquoi, si l'on prend l'exemple du roulement à une rangée de rouleaux cylindriques, il peut être modélisable soit par une liaison pivot glissant, soit par une liaison linéaire annulaire.

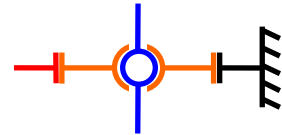
### Applications : Exemples de modélisation sur la boîte de transfert principale.

#### Modélisation du guidage en rotation satellites/porte satellites

Réel

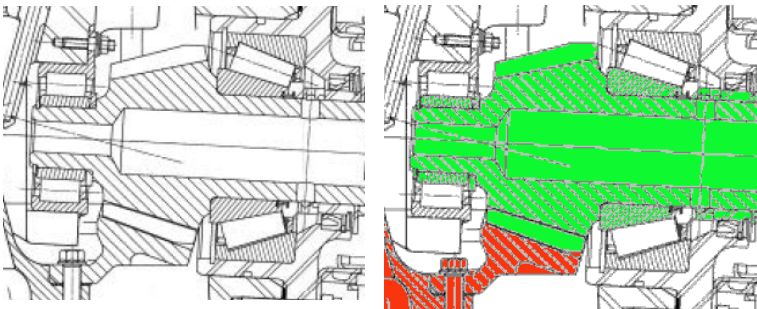


Modèle (schéma d'architecture)

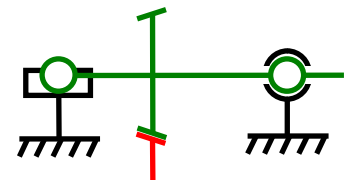


#### Modélisation du guidage arbre d'entrée/bâti

Réel

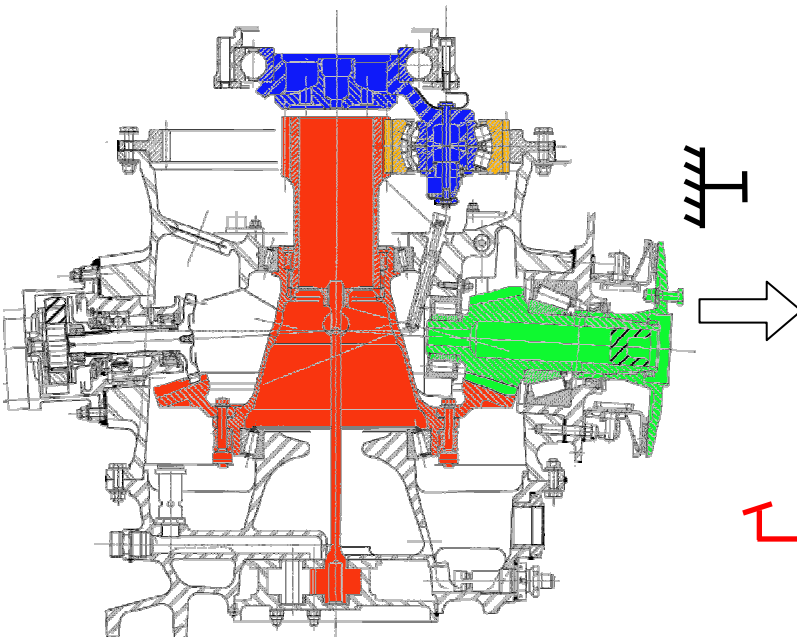


Modèle (schéma d'architecture)

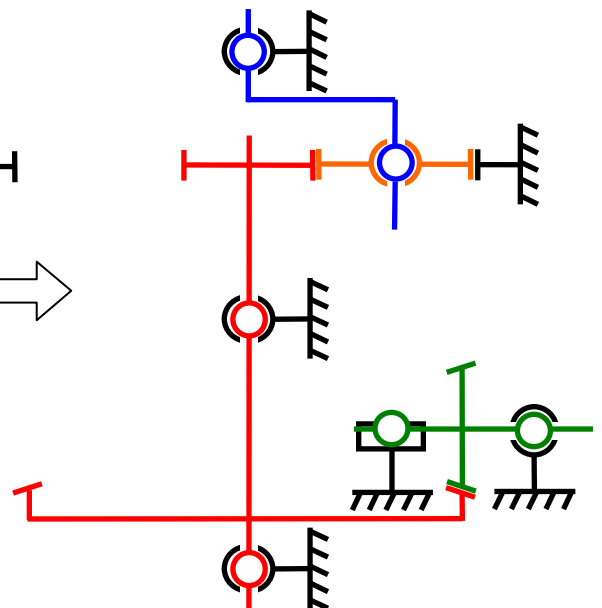


#### Modélisation de la BTP en schéma d'architecture

Réel



Modèle (schéma d'architecture)





### Rappel : Différence entre schéma d'architecture et schéma cinématique.

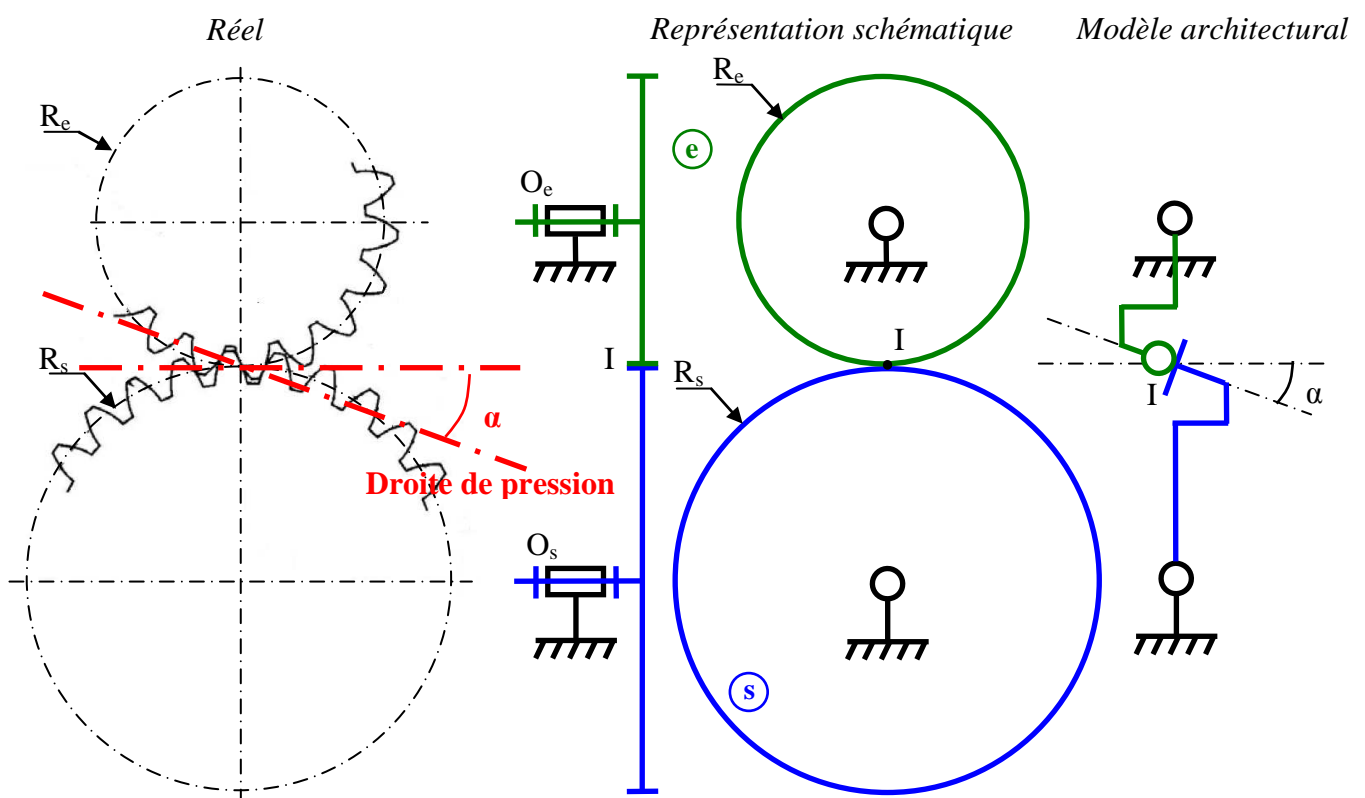


Le **schéma cinématique minimal** permet de modéliser un système réel dans le but de réaliser des **études cinématiques**. Il permet de visualiser les mouvements relatifs des différentes classes d'équivalence cinématique d'un mécanisme et ne tient pas compte de l'agencement des composants technologiques utilisés pour réaliser les différentes liaisons du mécanisme.

Le **schéma d'architecture** permet de visualiser l'architecture d'un système et tient compte des composants technologiques. Il est utilisé pour dimensionner les liaisons et pour la théorie des mécanismes.

### 4.2. Cas des engrenages

Le contact entre dentures d'engrenages est généralement complexe et dépend du type d'engrenage ainsi que des conditions de fabrication. Les modèles couramment utilisés pour les engrenages cylindriques sont la liaison ponctuelle parfaite dans le cas d'engrenages de faibles largeur ou la liaison linéaire rectiligne dans le cas des engrenages de largeur plus importante. Le problème consiste alors à rechercher la normale au contact des dents pour déterminer les relations entre les composantes des efforts.



Dans le cas des engrenages cylindriques à denture droite la normale est la « ligne d'action » (appelée aussi « droite de pression ») inclinée d'un angle  $\alpha$  ( $\alpha$  est généralement autour de  $20^\circ$ ) par rapport à la tangente aux cercles primitifs.



Ces modèles ne sont pas valables dans le cas du système roue-vis sans fin pour lequel les composantes tangentielles d'effort de contact ne peuvent être raisonnablement négligées.

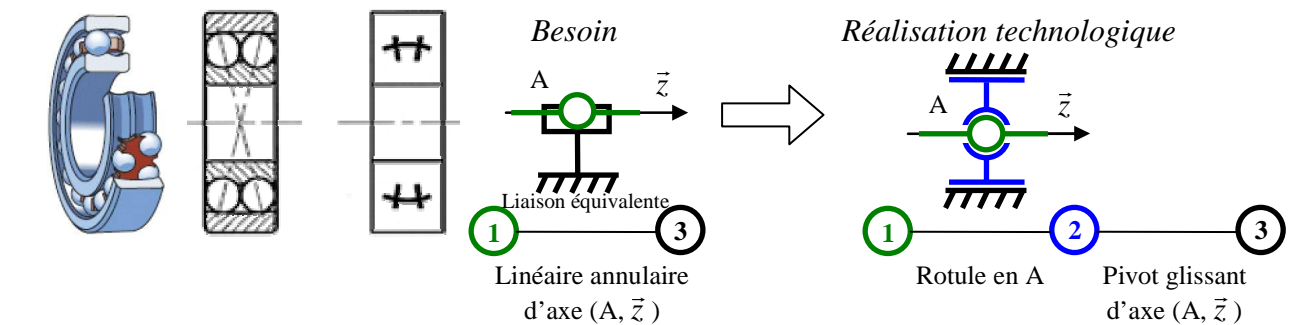
### 4.3. Autres éléments technologiques → en école d'ingénieur

## 5. Nécessité de combinaison des liaisons

Les liaisons simples ne permettent pas toujours à l'ingénieur de traduire un besoin cinématique car deux problèmes apparaissent rapidement lorsque l'on se limite à l'utilisation des liaisons simples définies précédemment :

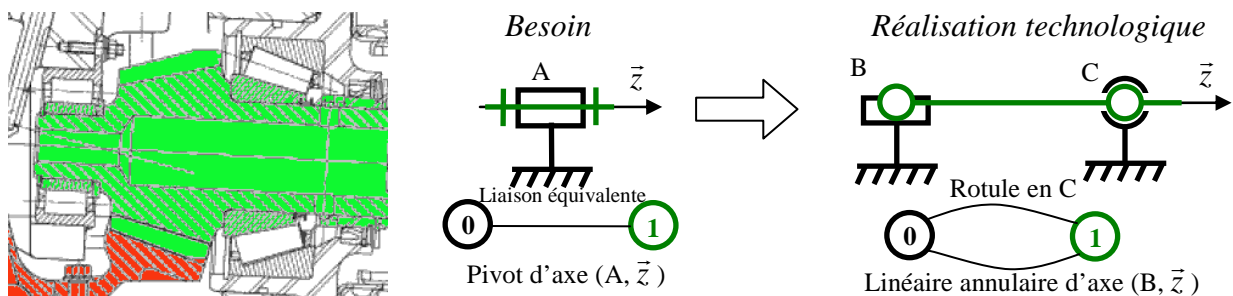
- La notion de pression de contact dans une transmission d'efforts joue un rôle prépondérant et impose le plus souvent des contacts surfaciques. Or, trois liaisons parmi les liaisons simples font intervenir des surfaces de contacts infiniment petites (la liaison ponctuelle, la liaison linéaire rectiligne et la liaison linéaire annulaire). Pour palier ce problème, ces liaisons à forte mobilité peuvent être remplacées par des liaisons surfaciques montées en série dont la mobilité globale est la somme des mobilités des liaisons surfaciques. → Dans ce cas, on parle de **liaisons simples montées en série**.
- Il n'existe pas de liaisons simples permettant une mobilité cinématique nulle ou égale à 1. Au minimum la mobilité cinématique est égale à 2 (liaison pivot glissant) alors que c'est pourtant, dans un grand nombre de mécanismes, la majorité des liaisons rencontrées (liaison pivot, liaison glissière, liaison encastrement) → Dans ce cas, on parle de **liaisons simples montées en parallèle**.

*Exemple : Modélisation en liaisons séries et liaison équivalente d'un roulement à bille à rotule.*



Pour les systèmes type bras de robot, on cherche une grande mobilité cinématique avec des mouvements indépendants pouvant être pilotés chacun par un actionneur. Dans ce cas, on peut également mettre en évidence la nécessité des liaisons séries.

*Exemple : Modélisation en liaisons parallèles et liaison équivalente d'un montage de roulement.*



## 6. Liaison équivalente

La **liaison équivalente** correspond à la liaison théorique qui a le même comportement que l'association des liaisons en série et/ou parallèle qu'elle remplace. Elle transmet la même action mécanique et elle autorise le même mouvement que l'association de liaisons.



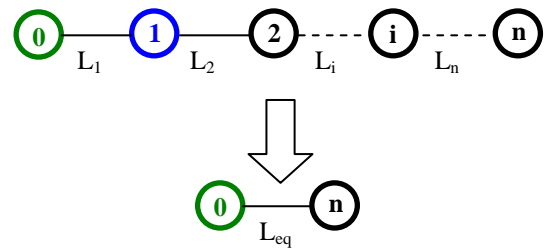
On peut trouver la liaison cinématique équivalente soit par une approche statique soit par une approche cinématique. Dans le cas de liaisons séries, l'approche cinématique est la plus adaptée. Dans le cas de liaisons parallèles, l'approche statique est la plus adaptée.



**La liaison équivalente doit appartenir aux liaisons normalisées !!!**  
**Il n'est pas toujours possible de trouver une liaison équivalente !!!**  
**Seule l'approche cinématique est au programme de MP.**

### 6.1. Recherche de la liaison équivalente dans le cas de liaisons séries

On parle de liaison série si  $n$  liaisons sont disposées en série en chaîne ouverte et si elles sont disposées les unes à la suite des autres par l'intermédiaire de  $n$  solides (le graphe de structure ne comporte donc pas de boucle). Le but de l'étude est de remplacer l'ensemble de ces liaisons simples en série par une liaison cinématiquement équivalente.



Pour déterminer la liaison équivalente on doit traduire le fait que le mouvement équivalent résulte de la composition des mouvements autorisés par chaque maillon de la chaîne ouverte. On utilise donc l'outil torseur cinématique et pour trouver le torseur cinématique de la liaison équivalente, on écrit que le torseur cinématique de la liaison équivalente est la somme des torseurs cinématiques des liaisons en série.

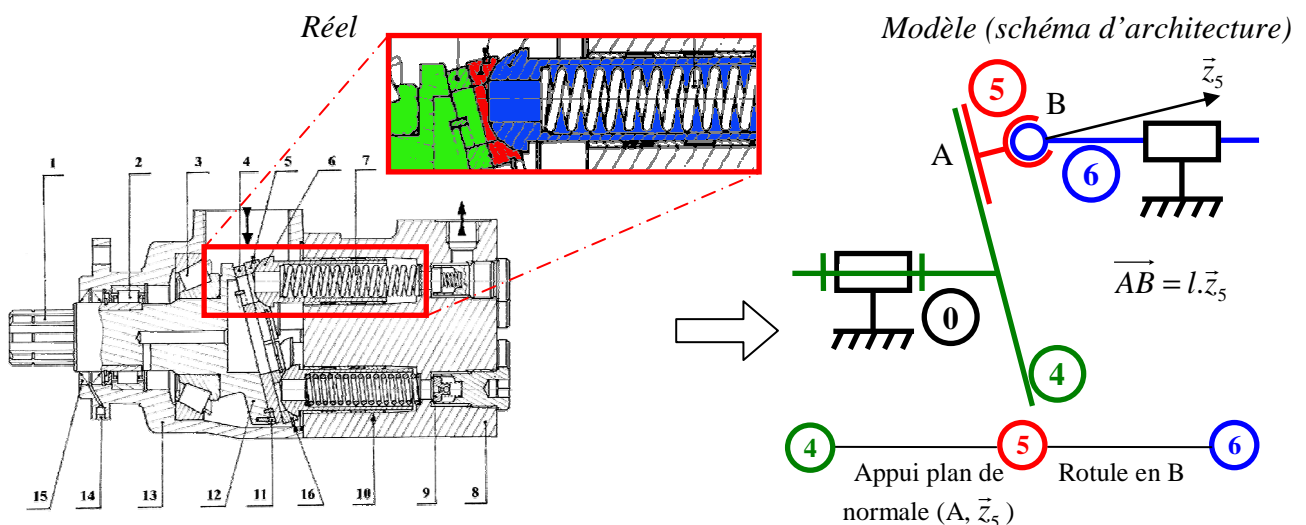
Soit  $\{C_{n/0}\}$  le torseur cinématique de la liaison équivalente et  $\{C_{n/n-1}\}$  les torseurs cinématiques des  $n$  liaisons en série alors :  $\{C_{n/0}\} = \{C_{n/n-1}\} + \dots + \{C_{i/i-1}\} + \dots + \{C_{1/0}\}$

$$\text{Torseur cinématique de la liaison équivalente : } \{C_{n/0}\} = \sum_{i=1}^n \{C_{i/i-1}\}$$



**Les torseurs doivent tous être écrits au même point si l'on veut les sommer !**

*Application : Recherche de la liaison équivalente entre le piston 6 et l'arbre 4 sur une pompe hydraulique équipant l'hélicoptère.*



$$\{C_{6/5}\}_B = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{65}} \\ \Omega_{y_{65}} \\ \Omega_{z_{65}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \quad \text{et} \quad \{C_{5/4}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{z_{54}} \\ v_{x_{54}} \\ v_{y_{54}} \\ 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

On pose :  $\{C_{eq}\}_A = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{eq}} \\ \Omega_{y_{eq}} \\ \Omega_{z_{eq}} \\ v_{x_{eq}} \\ v_{y_{eq}} \\ v_{z_{eq}} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$

$$\rightarrow \{C_{6/5}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{65}} & 0 \\ \Omega_{y_{65}} & 0 \\ \Omega_{z_{65}} & 0 \end{Bmatrix}_{B(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5)} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{65}} & -l.\Omega_{y_{65}} \\ \Omega_{y_{65}} & l.\Omega_{x_{65}} \\ \Omega_{z_{65}} & 0 \end{Bmatrix}_{A(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5)} \quad \text{avec } \overrightarrow{AB} = l.\vec{z}_5$$

$$\text{D'où } \{C_{eq}\} = \{C_{6/4}\} = \{C_{6/5}\} + \{C_{5/4}\} \text{ d'où : } \begin{cases} \Omega_{x_{eq}} = \Omega_{x_{65}} \\ \Omega_{y_{eq}} = \Omega_{y_{65}} \\ \Omega_{z_{eq}} = \Omega_{z_{65}} + \Omega_{z_{54}} \\ v_{x_{eq}} = v_{x_{54}} - l.\Omega_{y_{65}} \\ v_{y_{eq}} = v_{y_{54}} + l.\Omega_{x_{65}} \\ v_{z_{eq}} = 0 \end{cases}$$

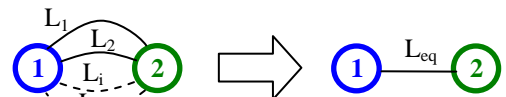
$$\rightarrow \{C_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{x_{65}} & v_{x_{54}} - l.\Omega_{y_{65}} \\ \Omega_{y_{65}} & v_{y_{54}} + l.\Omega_{x_{65}} \\ \Omega_{z_{65}} + \Omega_{z_{54}} & 0 \end{Bmatrix}_{A(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5)} \quad \text{soit une liaison ponctuelle en A de normale } (A, \vec{z}_5).$$



Il est préférable sur ce système de réaliser une liaison ponctuelle par mise en série d'une liaison appui plan et d'une liaison rotule pour limiter la pression de contact. En passant d'un contact ponctuel où la pression est infinie à un contact surfacique, la pression devient admissible pour les matériaux.

## 6.2. Recherche de la liaison équivalente dans le cas de liaisons parallèles

On parle de liaison parallèles entre deux pièces (ou groupes de pièces) si le graphe des liaisons présente deux ou plusieurs traits parallèles qui relient ces deux pièces contiguës. Le but de l'étude est de remplacer l'ensemble de ces liaisons simples en parallèle par une liaison cinématiquement équivalente.

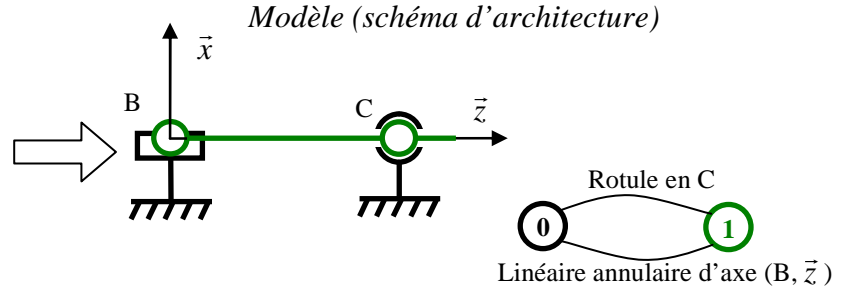
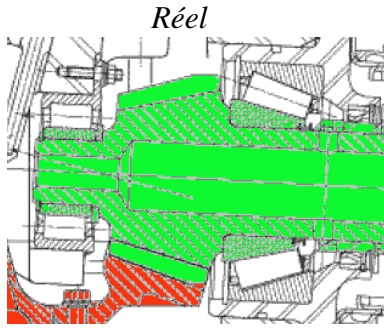


Pour déterminer la liaison équivalente on doit traduire le fait que la liaison équivalente transmet une action mécanique égale à la somme des actions mécaniques transmises par chacune des liaisons en parallèle. On utilise donc l'outil torseur des actions mécaniques transmissibles et pour trouver le torseur statique de la liaison équivalente, on écrit que le torseur statique de la liaison équivalente est égal à la somme des torseurs statiques des liaisons en parallèle.

Soit  $\{F_{1 \rightarrow 2}^{eq}\}$  le torseur d'AM transmissibles de la liaison équivalente et  $\{F_{1 \rightarrow 2}^{Ln}\}$  les torseurs d'AM transmissibles des n liaisons en parallèles alors :  $\{F_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \{F_{1 \rightarrow 2}^{L1}\} + \{F_{1 \rightarrow 2}^{L2}\} + \dots + \{F_{1 \rightarrow 2}^{Li}\} + \dots + \{F_{1 \rightarrow 2}^{Ln}\}$ .

$$\text{Torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente : } \{F_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \sum_{i=1}^n \{F_{1 \rightarrow 2}^{Li}\}$$

*Application : Recherche de la liaison équivalente pour le cas du montage de roulements de l'arbre d'entrée de la BTP.*



$$\{F_{0 \rightarrow 1}^{LA}\}_B = \begin{Bmatrix} X_{01}^{LA} & 0 \\ Y_{01}^{LA} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{et} \quad \{F_{0 \rightarrow 1}^{ROT}\}_C = \begin{Bmatrix} X_{01}^{ROT} & 0 \\ Y_{01}^{ROT} & 0 \\ Z_{01}^{ROT} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \rightarrow \overrightarrow{BC} = l.\bar{z} \rightarrow \{F_{0 \rightarrow 1}^{ROT}\}_B = \begin{Bmatrix} X_{01}^{ROT} & -l.Y_{01}^{ROT} \\ Y_{01}^{ROT} & l.X_{01}^{ROT} \\ Z_{01}^{ROT} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

On pose :  $\{F_{0 \rightarrow 1}^{eq}\}_B = \begin{Bmatrix} X_{01}^{eq} & L_{01}^{eq} \\ Y_{01}^{eq} & M_{01}^{eq} \\ Z_{01}^{eq} & N_{01}^{eq} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$  et  $\{F_{0 \rightarrow 1}^{eq}\} = \{F_{0 \rightarrow 1}^{LA}\} + \{F_{0 \rightarrow 1}^{ROT}\}$  d'où :

$$\begin{cases} X_{01}^{eq} = X_{01}^{LA} + X_{01}^{ROT} \\ Y_{01}^{eq} = Y_{01}^{LA} + Y_{01}^{ROT} \\ Z_{01}^{eq} = Z_{01}^{ROT} \\ L_{01}^{eq} = -l.Y_{01}^{ROT} \\ M_{01}^{eq} = l.X_{01}^{ROT} \\ N_{01}^{eq} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \{F_{0 \rightarrow 1}^{eq}\}_B = \begin{Bmatrix} X_{01}^{LA} + X_{01}^{ROT} & -l.Y_{01}^{ROT} \\ Y_{01}^{LA} + Y_{01}^{ROT} & l.X_{01}^{ROT} \\ Z_{01}^{ROT} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{soit une liaison pivot d'axe } (O, \bar{z}).$$