Convergence d'une suite numérique

Exercice 1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.

Posons $m = \dfrac{\ell+\ell'}{2}$. On a $u_n \to \ell < m$ et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < m$ et $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, v_n > m$.
Pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a $u_n < m < v_n$.

Exercice 2 Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Si (u_n) est stationnaire, il est clair que cette suite converge.
Inversement, supposons que (u_n) converge et notons ℓ sa limite.
Montrons $\ell \in \mathbb{Z}$. Par l'absurde, si $\ell \notin \mathbb{Z}$ alors $E(\ell) < \ell < E(\ell)+1$ donc à partir d'un certain rang $E(\ell) < u_n < E(\ell)+1$. Or $u_n \in \mathbb{Z}$. Absurde. Ainsi $\ell \in \mathbb{Z}$.
Puisque $u_n \to \ell$ et $\ell - 1 < \ell < \ell + 1$, à partir d'un certain rang $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$.
Or $u_n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = \ell$. Finalement (u_n) est stationnaire égale à ℓ.

Exercice 3 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$
Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

$a \geq u_n = u_n + v_n - v_n \geq u_n + v_n - b$ et $u_n + v_n - b \to a$ donc $u_n \to a$.
De plus $v_n = (u_n + v_n) - u_n \to (a+b) - a = b$.

Exercice 4 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Supposons $u_n + v_n \to \ell$ et $u_n - v_n \to \ell'$.
$u_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) + \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) \to \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ et de même $v_n \to \dfrac{\ell - \ell'}{2}$.

Exercice 5 Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \max(u_n, v_n)$.

$\max(u_n, v_n) = \dfrac{1}{2}\left(|u_n + v_n| + |u_n - v_n|\right) \to \max(\lim u_n, \lim v_n)$.

Exercice 6 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$.
Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \to 0$. Ainsi $u_n + v_n \to 0$ puis
$u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \to 0$ et donc $u_n^2 + v_n^2 \to 0$ qui permet de conclure $u_n, v_n \to 0$.

Exercice 7 Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leq u_n, v_n \leq 1$ et $u_n v_n \to 1$.
Que dire de ces suites ?

$u_n v_n \leq u_n, v_n \leq 1$. Par le théorème des gendarmes : $\lim u_n = \lim v_n = 1$.

Calculs de limites

Exercice 8 Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$

c) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$ d) $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$

e) $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$ f) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

a) $u_n = \mathrm{e}^{n(\ln(1+1/n))}$ or $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par suite $u_n \to \mathrm{e}$.

b) $u_n = \frac{1-(-2/3)^n}{1+(-2/3)^n} \to 1$.

c) $u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to 1$.

d) $u_n = \frac{1-\sqrt{1+1/n^2}}{1+\sqrt{1+1/n^2}} \to 0$.

e) $u_n = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}$

f) $u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$ car $\frac{\ln n}{n} \to 0$.

Exercice 9 Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ b) $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ c) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

a) $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(\sin\frac{1}{n})}$ or $\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \to 0$ donc $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1$.

b) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}$ or $n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \to -2$ donc $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-2}$.

c) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$ or $\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1} = n+o(n)+n \sim 2n$

d'où $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} \to 1$.

Exercice 10 Déterminer par comparaison, la limite des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$ b) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ c) $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

d) $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}$ e) $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$ f) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

g) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$ h) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ i) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$.

a) $|u_n| \le \frac{1}{n-1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

b) $0 \le u_n \le \frac{1.2\ldots n}{n.n\ldots n} \le \frac{1}{n} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

c) $\dfrac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{n-1}$ avec $\dfrac{n-1}{n+1}, \dfrac{n+1}{n-1} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

d) $0 \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{1}\dfrac{\mathrm{e}}{2} \times 1 \times \cdots \times 1 \times \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

e) $1 \leq u_n \leq \sqrt[n]{3} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

f) $u_n \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.

g) $0 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{n}{n^2+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

h) $u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.

i) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+1}$ donc $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$ puis $u_n \to 1$.

Exercice 11 Déterminer les limites de :

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. b) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k^2}$

c) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k!$ d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

a) $S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$.

b) $0 \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{n}{(n+1)^2} \to 0$.

c) $S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \cdots + (-1)^n$. Par regroupement de termes.
Si n est pair alors $S_n \geq n! - (n-1)!$ et si n est impair $S_n \geq n! - (n-1)! - 1$.
Puisque $n! - (n-1)! = (n-1).(n-1)! \to +\infty$, on a $S_n \to +\infty$.

d) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ par le théorème des gendarmes : $S_n \to 1$.

Exercice 12 Comparer $\lim\limits_{m\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{m\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m = 1^m$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m = 1$.

$\lim\limits_{m\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{m\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m = 0$.

$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 13 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
c) Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

a) Soit $\rho = \dfrac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.
Comme $\sqrt[n]{u_n} \to \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel $\sqrt[n]{u_n} \leq \rho$ donc $0 < u_n \leq \rho^n$. On a alors $u_n \to 0$.

b) Même démarche mais par minoration.
c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 14 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
c) Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

a) Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \rho$.

On a alors $0 \le u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N}u_N \le \rho^{n-N}u_N \to 0$ donc $u_n \to 0$.
b) Même démarche mais par minoration.
c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) Etablir que pour tout $p > 1$, $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \frac{1}{p} \le \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$. En déduire la limite de (S_n).

b) Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

a) $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{1}{p}$ car la fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ est majorée par $\frac{1}{p}$ sur $[p, p+1]$.

$\int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x} \ge \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{1}{p}$ car la fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ est minorée par $\frac{1}{p}$ sur $[p-1, p]$.

Pour $n \ge 1$, $\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \frac{1}{n+k} \le \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ donne en sommant $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le S_n \le \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Or $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{2n+1}{n+1} \to \ln 2$ et $\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2$ donc $S_n \to \ln 2$.

b)
$$\begin{aligned} S'_{2n} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = S_n \end{aligned}$$

Par suite $S'_{2n} \to \ln 2$. De plus $S'_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2$ donc $S'_n \to \ln 2$.

Exercice 16 Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k}$.

Montrer que $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n = \frac{1}{2^n}\sin a$ et déterminer $\lim\limits_{n\infty} P_n$.

$\sin\frac{a}{2^n}P_n = \sin\frac{a}{2^n}\cos\frac{a}{2^n}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{n-1}}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{a}{2} = \ldots = \frac{1}{2^n}\sin a$.
Si $a = 0$ alors $P_n = 1 \to 1$.

Si $a \ne 0$ alors, pour n assez grand, $\sin\frac{a}{2^n} \ne 0$ et $P_n = \frac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}} \to \frac{\sin a}{a}$ car $2^n \sin\frac{a}{2^n} \sim 2^n\frac{a}{2^n} = a$.

Exercice 17 Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \binom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

b) Montrer par récurrence $S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1})$.

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.

d) En déduire $\lim S_n$ en fonction de p.

a) $\binom{n+p+2}{n+2} = \frac{n+p+2}{n+2}\binom{n+p+1}{n+1}$ d'où la relation.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Pour $n=1$: $S_1 = \frac{1}{\binom{p+1}{1}}$ et $\frac{1}{p-1}(1-(p+2)\frac{2}{(p+2)(p+1)}) = \frac{1}{p+1}$ ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \underset{HR}{=} \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1-(n+2)u_{n+1}) = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+2)u_{n+2})$.

Récurrence établie.

c) $0 \leq v_n = \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} \leq \frac{p!}{n+1} \to 0$.

d) Par opérations : $S_n \to \frac{1}{p-1}$.

Suites monotones et bornées

Exercice 18 Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose $v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

a) Montrer que (v_n) est croissante.

b) Etablir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.

c) En déduire que $v_n \to \ell$.

a) $v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0$ donc (v_n) est croissante.

b) $v_{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}$.

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ell$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $\ell' \leq \ell$.

La relation précédente, passée à la limite, donne $2\ell' \geq \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $S_n \to 1$.

Exercice 19 Soit (u_n) une suite réelle convergente. Etudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_n$.

(u_n) converge donc (u_n) est bornée. La suite (v_n) est donc bien définie et elle-même bornée.

On a $v_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante et donc converge.

Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.

$v_n \geq u_n$ donc à la limite $\ell' \geq \ell$.

Si $\ell' > \ell$ alors $\ell' > \dfrac{\ell'+\ell}{2} > \ell$.

A partir d'un certain rang $v_n > \dfrac{\ell+\ell'}{2}$ et $u_n < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$. Impossible. Il reste $\ell' = \ell$.

Exercice 20 Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose $v_n = \sup\limits_{p\geq n} u_n$ et $w_n = \inf\limits_{p\geq n} u_n$.

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) possèdent chacune une limite dans $\mathbb{R}$ et comparer celles-ci.

En déduire que de toute suite réelle on peut extraire une suite convergente.

On a $v_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante. On a $w_{n+1} \geq w_n$ donc (w_n) est croissante. De plus $w_n \leq v_n$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par w_0 donc elle converge vers une limite ℓ.

De même la suite (w_n) converge vers une limite m. Enfin $w_n \leq v_n$ donne à la limite $m \leq \ell$.

Exercice 21 Somme harmonique :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\infty} H_n = +\infty$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$.

Si (H_n) converge vers ℓ alors $H_{2n} - H_n \to \ell - \ell = 0$. Ceci est impossible puisque $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Par suite (H_n) diverge, et puisque (H_n) est croissante, (H_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 22 On pose $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$.

a) Exprimer u_n à l'aide de factoriels.

b) Montrer que (u_n) converge.

c) Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge. Déterminer $\lim u_n$.

a) $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \leq 1$ donc (u_n) est décroissante.

Or (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge.

c) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+2}{n+1}\dfrac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \dfrac{n+2}{n+1}\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2$ or $(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 = -3n-2 < 0$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$. (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.

Nécessairement $\lim u_n = 0$ car sinon $v_n = (n+1)u_n^2 \to +\infty$.

Suites adjacentes

Exercice 23 Soit $\theta \in \left]0, \pi/2\right[$, $u_n = 2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}$, $v_n = 2^n \tan\dfrac{\theta}{2^n}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Via $\sin 2a = 2\sin a\cos a$, $u_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \le u_{n+1}$.

Via $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ donc $v_n = 2^{n+1}\dfrac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1-\tan^2(\theta/2^{n+1})} \ge v_{n+1}$.

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u_n \to \theta$ et $v_n \to \theta$ d'où $v_n - u_n \to 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite commune égale à θ.

Exercice 24 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ et $S'_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

$S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $S'_{n+1} - S'_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)} \le 0$ et $S'_n - S_n = \dfrac{1}{n} \to 0$.

Exercice 25 Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz.

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \le 0$, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \ge 0$ et $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$.

Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) étant adjacentes elles convergent vers une même limite et par suite (S_n) converge aussi vers cette limite.

Exercice 26 Irrationalité du nombre de Néper.

Soit $a_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n.n!} = a_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $a_q < \mathrm{e} < b_q$ puis obtenir une absurdité.

a) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (a_n) est strictement croissante.

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!} = \dfrac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc (b_n) est strictement décroissante.

Enfin $b_n - a_n = \dfrac{1}{n.n!} \to 0$.

b) On a $a_q < a_{q+1} \le \mathrm{e} \le b_{q+1} < b_q$.

Par suite $a_q < \dfrac{p}{q} < a_q + \dfrac{1}{q.q!}$ puis $q.q!a_q < p.q! < q.q!a_q + 1$.

Or $p.q!\in\mathbb{Z}$ et $q.q!.a_q = q\sum_{k=0}^{n}\dfrac{q!}{k!}\in\mathbb{Z}$. Absurde.

Exercice 27 Moyenne arithmético-géométrique.

a) Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^{+2}$, établir : $2\sqrt{ab} \le a+b$.

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a, v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

d) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.

e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

---

a) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ donne l'inégalité demandée.

b) Pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} \leq \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = v_n$ en vertu de a.

$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq \dfrac{2v_n}{2} = v_n$.

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ.

La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante est minorée par u_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ'.

En passant la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$.

d) Si $b = a$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à a et donc $M(a,a) = a$.

Si $b = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à 0 et donc $M(a,0) = 0$.

e) Notons (u_n') et (v_n') les suites définies par le procédé précédent à partir de $u_0' = \lambda a$ et $v_0' = \lambda b$.

Par récurrence, $u_n' = \lambda u_n$ et $v_n' = \lambda v_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

Suites extraites

Exercice 28 On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

(u_n) étant croissante, elle admet une limite, (u_{2n}) qui en est extraite a la même limite. Puisque (u_{2n}) converge, il en est de même de (u_n).

Exercice 29 Soit (u_n) une suite complexe telle que $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

$u_{2n} \to \ell, u_{2n+1} \to \ell'$ et $u_{3n} \to \ell''$.

(u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et (u_{3n}) donc $u_{6n} \to \ell$ et $u_{6n} \to \ell''$. Par suite $\ell = \ell''$.

(u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) donc $u_{6n+3} \to \ell'$ et $u_{6n+3} \to \ell''$. Par suite $\ell' = \ell''$.

Il en découle $\ell = \ell'$ et donc $u_n \to \ell$.

Exercice 30 Justifier que la suite $(\cos n)$ diverge.

Par l'absurde, supposons que $(\cos(n))$ converge et notons ℓ sa limite.

Puisque $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$, à la limite : $\ell = 2\ell^2 - 1$ donc $\ell = 1$ ou $\ell = -1/2$.

Puisque $\cos(3n) = 4\cos^3 n - 3\cos n$ à la limite $\ell^3 = \ell$ donc $\ell = 1$.

$|\sin n| = \sqrt{1 - \cos^2 n} \to 0$ puis $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$ donne $1 = \cos 1$. Absurde.

Exercice 31 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+p} \leq \dfrac{n+p}{np}$. Montrer que $u_n \to 0$.

$0 \le u_{2n} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0$ et $0 \le u_{2n+1} \le \frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

Comparaison de suites numériques

Exercice 32 Classer les suites, dont les termes généraux, sont les suivants par ordre de négligeabilité :

a) $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln n}$ b) $n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \frac{n^2}{\ln n}$.

a) $\frac{1}{n^2} \ll \frac{\ln n}{n^2} \ll \frac{1}{n\ln n} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n}$. b) $\sqrt{n}\ln n \ll n \ll n\ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll n^2$.

Exercice 33 Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

a) $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$ b) $u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$ c) $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

d) $u_n = (n + 3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$ e) $u_n = \frac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$ f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$

a) $u_n \sim -\frac{1}{2}n \to -\infty$ b) $u_n \sim 2n \to +\infty$ c) $u_n \sim \frac{2\ln n}{n} \to 0$

d) $u_n = \frac{n\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}} \to 0$ e) $u_n \sim \frac{n!}{3^n} \to +\infty$ f) $u_n \sim n^{1/3} \to +\infty$.

Exercice 34 Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ c) $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$

d) $u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e) $u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$ f) $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$.

a) $u_n = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$.

b) $u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c) $u_n = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} \to 0$

d) $u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

e) $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \to 0 \ne 1$ donc $u_n \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n$.

f) $u_n = 2\sin^2\frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$.

Exercice 35 Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$ b) $u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$ c) $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$.

a) $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)\sim\frac{1}{n^2+1}\sim\frac{1}{n^2}$ car $\frac{1}{n^2+1}\to 0$. Par suite $u_n\sim 1\to 1$.

b) $u_n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$ n $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\sim\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\to 1$ puis $u_n\to\mathrm{e}$.

c) $u_n=\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}\ln n-\sqrt{n}\ln(n+1)}$, $\sqrt{n+1}\ln n-\sqrt{n}\ln(n+1)=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n-\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Or $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n=\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\ln n}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\sim\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}=o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$ donc

$\sqrt{n+1}\ln n-\sqrt{n}\ln(n+1)=\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)\to 0$ donc $u_n\to 1$.

Exercice 36 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=0!+1!+2!+\cdots+n!=\sum_{k=0}^{n}k!$. Montrer que $u_n\sim n!$.

$u_n=n!+(n-1)!+\sum_{k=0}^{n-2}k!$.

$\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\to 0$ et $0\le\frac{\sum_{k=0}^{n-2}k!}{n!}=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}\le\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{n!}=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n(n-1)}\le\frac{1}{n}\to 0$ donc

$u_n=n!+(n-1)!+\sum_{k=0}^{n-2}k!=n!+o(n!)\sim n!$.

Exercice 37 On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Justifier que $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\le\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Déterminer la limite de (S_n).

c) On pose $u_n=S_n-2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.

d) Donner un équivalent simple de (S_n).

a) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\le\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) $S_n\ge\sum_{k=1}^{n}2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=2\sqrt{n+1}-2$ puis $S_n\to+\infty$.

c) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\le 0$ donc (u_n) est décroissante.

Or $u_n=S_n-2\sqrt{n}\ge 2\sqrt{n+1}-2-2\sqrt{n}\ge -2$ donc (u_n) est aussi minorée. Par suite (u_n) converge.

d) $S_n=2\sqrt{n}+u_n=2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})\sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 38 Soit $(u_n),(v_n),(w_n),(t_n)$ des suites de réels strictement positifs tels que $u_n\sim v_n$ et $w_n\sim t_n$.

Montrer que $u_n+w_n\sim v_n+t_n$.

Supposons $u_n\sim v_n$ et $w_n\sim t_n$.

$\left|\frac{u_n+w_n}{v_n+t_n}-1\right|=\left|\frac{(u_n-v_n)+(w_n-t_n)}{v_n+t_n}\right|\le\frac{|u_n-v_n|}{v_n}+\frac{|w_n-t_n|}{t_n}=\left|\frac{u_n}{v_n}-1\right|+\left|\frac{w_n}{t_n}-1\right|\to 0$.

Exercice 39 Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.

b) Donner un équivalent simple de (u_n).

a) (u_n) est décroissante donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Puisque $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n} \to 0^+$, on a $\ell + \ell = 0$ donc $\ell = 0$.

De plus, à partir d'un certain rang : $2u_n \geq u_n + u_{n+1} > 0$

b) $u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$ avec $u_{n+1} + u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $u_{n-1} + u_n \sim \dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$ donc $2u_n \sim \dfrac{1}{n}$ puis $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Etude de suites définies implicitement

Exercice 40 Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.
Etudier la limite de (x_n).

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

f est dérivable et $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante.

$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède une unique solution x_n.

$x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$.

Exercice 41 Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

b) Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \ln x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique $x_n = f^{-1}(n)$.

b) Le tableau de variation de f^{-1} donne $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Par suite $x_n \to +\infty$.

c) $x_n \to +\infty$ donne $\ln x_n = o(x_n)$. La relation $x_n + \ln x_n = n$ donne alors $x_n + o(x_n) = n$ et donc $x_n \sim n$.

Exercice 42 Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \tan x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique $x_n = f^{-1}(n)$.

b) (1) Le tableau de variation de f^{-1} donne $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = \dfrac{\pi}{2}$. Par suite $x_n \to \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $x_n + \tan x_n = n$ donne $x_n = \arctan(n - x_n)$. Or $n - x_n \to +\infty$ car (x_n) bornée donc $x_n \to \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 43 Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

a) Le tableau de variation de $f_n : x \mapsto x^n \ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que de plus $x_n \in [1, +\infty[$.

b) $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) = \dfrac{1}{x_{n+1}} \leq 1 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \leq x_n$ car f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons ℓ sa limite, on a $\ell \geq 1$

Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \ln x_n \geq \ell^n \ln \ell \to +\infty$ ce qui est absurde car $x_n^n \ln x_n = 1$. Il reste $\ell = 1$.

Exercice 44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $x_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

b) Montrer que (x_n) converge.

c) Déterminer la limite de (x_n).

a) $f : x \mapsto x^n + \cdots + x$ est continue, strictement croissante, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Par suite l'équation E_n possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.

$f(1/2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 1$ et $f(1) = n \geq 1$.

b) $x_n^{n+1} + \cdots + x_n^2 + x_n = x_n(x_n^n + \cdots + x_n) + x_n = 2x_n \geq 1$ donc $x_{n+1} \leq x_n$.

La suite (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

c) Posons $\ell = \lim x_n$. Puisque $x_2 < 1$, $x_n \leq x_2$ donne à la limite $\ell < 1$.

$1 = x_n^n + \cdots + x_n = x_n \dfrac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$ donne à la limite $1 = \dfrac{\ell}{1 - \ell}$ car $0 \leq x_n^n \leq \ell^n \to 0$ et finalement $\ell = 1/2$.

Expression du terme général d'une suite récurrente

Exercice 45 Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$

b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

a) Posons $v_n = u_n + 1$. (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \to +\infty$.

b) Posons $v_n = u_n - 1$. (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n} \to 1$.

Exercice 46 Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

On a $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$ donc $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n z_0$. Or $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| < 1$ donc $z_n \to 0$ puis $x_n, y_n \to 0$.

Exercice 47 Soit (z_n) une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z_n})$.

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Introduisons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = -\dfrac{y_n}{3}$.

$x_n \to x_0$ et $y_n \to 0$ donc $z_n \to \mathrm{Re}(z_0)$.

Exercice 48 Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$.

a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

b) Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

c) Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

a) $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$ et $u_0 - v_0 = -1$ donc $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1.

b) $v_n = u_n + 1$ donc $u_{n+1} = 5u_n + 2$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

c) $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$. Pour $a = -1/2$, $(u_n - a)$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $3/2$. Ainsi $u_n = \dfrac{3.5^n - 1}{2}$ et $v_n = \dfrac{3.5^n + 1}{2}$.

Exercice 49 Soit $\rho > 0$ et $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

a) Exprimer z_n sous forme d'un produit.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

a) $z_1 = \rho \dfrac{1 + e^{i\theta}}{2} = \rho \cos\dfrac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$, $z_2 = \rho \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4} e^{i\frac{\theta}{4}}$,..., $z_n = \rho \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\theta}{2^k} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.

b) $e^{i\frac{\theta}{2^n}} \to 1$, $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\theta}{2^k} = \dfrac{\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}} \sim \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ donc $z_n \to \rho \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Exercice 50 Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.

$u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$

Exercice 51 Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

a) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

b) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

c) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

a) $u_n = 2^n(1 - n)$ b) $u_n = -3 + 2^{2-n}$ c) $u_n = 2\cos\dfrac{(n-1)\pi}{3}$.

Exercice 52 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0$.

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique : $r^2 + 2\cos\theta r + 1 = 0$ de solutions $r = e^{i\theta}$ et $r = e^{-i\theta}$. Par suite il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta$.

$n=0$ donne $\alpha=1$ et $n=1$ donne $\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=1$ donc $\beta=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin^2\theta/2}{\sin\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\cos n\theta+\tan\dfrac{\theta}{2}\sin n\theta$.

Etude de suites récurrentes

Exercice 53 Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$. On définit une suite (u_n) par $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}u_k}$.

a) Déterminer la limite de (u_n).

b) Déterminer la limite de $u_{n+1}-u_n$.

a) Pour $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}u_k}-\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}u_k}=\dfrac{u_n}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n}u_k}+\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}u_k}}\geq 0$ donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Supposons $u_n\to\ell\in\mathbb{R}$. On a $\ell\geq u_1=\sqrt{a}>0$

En passant la relation précédente à la limite : $0=\dfrac{\ell}{\ell+\ell}=\dfrac{1}{2}$. C'est absurde.

Par suite $u_n\to+\infty$.

b) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{u_{n+1}+u_n}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1=\dfrac{1}{u_{n+1}+u_n}\to 0$. Par suite $u_{n+1}\sim u_n$ et $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_{n+1}/u_n+1}\to\dfrac{1}{2}$.

Exercice 54 On considère la suite (u_n) définie pour $n\geq 1$ par $u_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}$.

a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Montrer que $u_n\leq n$ puis que $u_n\leq\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}$.

d) Donner un équivalent simple de (u_n).

e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-\sqrt{n}$.

a) $u_n\geq\sqrt{n}\to+\infty$.

b) $u_{n+1}=\sqrt{(n+1)+u_n}$.

c) Montrons par récurrence sur $n\geq 1$ que $u_n\leq 2\sqrt{n}$.

Pour $n=1$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$.

$u_{n+1}=\sqrt{(n+1)+u_n}\underset{HR}{\leq}\sqrt{(n+1)+n}\leq n+1$.

Récurrence établie.

$u_n=\sqrt{n+u_{n-1}}\leq\sqrt{2n}$ puis $u_n=\sqrt{n+u_{n-1}}\leq\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}$.

d) $1\leq\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{n-1}}{n}}\to 1$ donc $u_n\sim\sqrt{n}$.

e) $u_n-\sqrt{n}=\dfrac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}}$ or $u_{n-1}\sim\sqrt{n-1}\sim\sqrt{n}$ et $u_n+\sqrt{n}=\sqrt{n}+o(\sqrt{n})+\sqrt{n}\sim 2\sqrt{n}$ donc $u_n-\sqrt{n}\to\dfrac{1}{2}$.

Exercice 55 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

Pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}}$. $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Si (u_n) converge vers ℓ alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell \geq 0$.

Par suite $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$.

Par récurrence on montre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ et par suite (u_n) converge vers α.

Exercice 56 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

On a $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = a^4$, par récurrence $u_n = a^{2^n}$.

Pour $|a| < 1$ alors $u_n \to 0$, pour $|a| = 1$, $u_n \to 1$ et pour $|a| > 1$, $u_n \to +\infty$.

Exercice 57 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

La suite (u_n) est bien définie et supérieure à 1 à partir du rang 1 car la fonction itératrice $f : x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1, +\infty[$.

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geq 0$ car le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$.

La suite (u_n) est croissante.

Si celle-ci converge vers un réel ℓ alors en passant à la limite la relation d'itération : $\ell = \ell^2 + 1$.

Or cette équation ne possède pas de racines réelles. Par suite (u_n) diverge, or elle est croissante, donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 58 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

La suite (u_n) est bien définie et à valeurs strictement supérieure à 1 car sa fonction itératrice $f : x \mapsto 1 + \ln x$ est définie sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$.

Pour $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.

La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = 1 + \ln u_0 - u_0$.

Etudions la fonction $g(x) = x \mapsto 1 + \ln x - x$ définie sur $[1, +\infty[$.

g est dérivable, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 \leq 0$ ne s'annulant quand 1, $g(1) = 0$ donc g est strictement négative sur $]1, +\infty[$.

La suite (u_n) est décroissante. De plus elle est minorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 1$.

En passant la relation d'itération à la limite, on obtient $\ell = 1 + \ln \ell$ i.e. $g(\ell) = 0$.

Par l'étude de la fonction g, on conclut $\ell = 1$.

Finalement (u_n) converge vers 1.

Exercice 59 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.

La suite (u_n) est bien définie car sa fonction itératrice $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.

La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = \mathrm{e}^{u_0} - u_0 - 1$.

Etudions la fonction $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

g est dérivable et $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ du signe de x. $g(0) = 0$ donc g est du signe de x.

Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 1.

Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \mathrm{e}^\ell - 1$ donc $\ell = 0$.

Or (u_n) est minorée par $u_0 > 0$ donc ne peut converger vers 0. Par suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est décroissante et par un raisonnement semblable, (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 60 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{1}{2+u_n}$.

La suite (u_n) est bien définie et strictement positive car de fonction itératrice $f:x\mapsto\dfrac{1}{2+x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell=\dfrac{1}{2+\ell}$ et $\ell\geq 0$ donc $\ell=-1+\sqrt{2}$.

$|u_{n+1}-\ell|=\left|\dfrac{1}{2+u_n}-\dfrac{1}{2+\ell}\right|=\dfrac{|u_n-\ell|}{(2+u_n)(2+\ell)}\leq\dfrac{1}{4}|u_n-\ell|$.

Par récurrence, on montre $|u_n-\ell|=\dfrac{1}{4^n}|u_0-\ell|$ et on conclut $u_n\to\ell$.

Exercice 61 Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0=a\in[-2,2]$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{2-u_n}$

a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[-2,2]$.

b) Quelles sont les limites finies possibles pour (u_n) ?

c) Montrer que $(|u_n-1|)$ converge puis que $\lim|u_n-1|=0$. En déduire $\lim u_n$.

a) L'application $x\mapsto\sqrt{2-x}$ est définie de $[-2,2]$ vers $[0,2]\subset[-2,2]$.

b) Supposons $u_n\to\ell$. Puisque $\forall n\geq 1, u_n\in[0,2]$, à la limite $\ell\in[0,2]$.

La relation $u_{n+1}=\sqrt{2-u_n}$ donne à la limite $\ell=\sqrt{2-\ell}$ donc $\ell^2+\ell-2=0$ d'où $\ell=1$ ou $\ell=-2$.

Or $\ell\geq 0$ donc $\ell=1$.

c) $|u_{n+1}-1|=\dfrac{|u_n-1|}{1+\sqrt{2-u_n}}\leq|u_n-1|$ donc $(|u_n-1|)$ est décroissante et par suite converge vers $\alpha\geq 0$.

Si $\alpha>0$ alors $1+\sqrt{2-u_n}=\dfrac{|u_{n+1}-1|}{|u_n-1|}\to 1$ donc $\sqrt{2-u_n}\to 0$ puis $u_n\to 2$. C'est impossible.

Nécessairement $|u_n-1|\to 0$ et donc $u_n\to 1$.

Exercice 62 Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $0<|a|<1$ et (u_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2-u_n}$.

Montrer que (u_n) est bien définie et $|u_n|<1$. Etudier la limite de (u_n).

Par récurrence montrons u_n existe et $|u_n|<1$.

Pour $n=0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.

Par HR, u_n existe et $|u_n|<1$ donc $2-u_n\neq 0$ d'où $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2-u_n}$ existe et $|u_{n+1}|\leq\dfrac{|u_n|}{|2-u_n|}\leq\dfrac{|u_n|}{2-|u_n|}<1$.

Récurrence établie.

$|u_{n+1}|\leq\dfrac{|u_n|}{2-|u_n|}\leq|u_n|$ donc $(|u_n|)$ est décroissante d'où $|u_n|\leq|a|$ puis $|u_{n+1}|\leq\dfrac{|u_n|}{2-|a|}$ puis

$|u_n|\leq\left(\dfrac{1}{2-|a|}\right)^n|a|\to 0$. Par suite $u_n\to 0$.

Exercice 63 Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$u_0=a>0, u_1=b>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}u_n=u_{n+1}^2$.

A quelle condition (u_n) converge ?

Par récurrence, on montre que u_n existe et $u_n > 0$.
Posons $v_n = \ln(u_n)$. On a $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$.
(v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre d'équation caractéristique $(r-1)^2 = 0$.
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v_n = \lambda n + \mu$. $v_0 = \ln a$ et $v_1 = \ln b$ donc $\lambda = \ln \frac{b}{a}$ et $\mu = \ln a$.
Par suite : $u_n = \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{n \ln \frac{b}{a} + \ln a} = a\left(\frac{b}{a}\right)^n$. La suite (u_n) converge ssi $b \le a$.

Exercice 64 Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

a) Etudier la convergence de la suite (u_n).

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.

c) Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $\left| u_n - \sqrt{a} \right| \le 2u_0 . v_0^{2^n}$.

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0 . v_0^{2^n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

On peut alors par des calculs élémentaires, déterminer une approximation de $\sqrt{a}$.
Cette méthode était exploitée par les Babyloniens 3000 ans avant notre ère.

La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $\left[\sqrt{a}, +\infty\right[$ à partir du rang 1 car de fonction itératrice

$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\left[\sqrt{a}, +\infty\right[$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$ et $\ell \ge 0$ donc $\ell = \sqrt{a}$.

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| = \frac{1}{2}\left|u_n + \frac{a}{u_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\left|u_n\right|} = \frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{2}\frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{(u_n)}.$$

Pour $n \ge 1$, $\frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{u_n} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \le 1$ donc $\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{a}\right|$.

Par récurrence : $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}\left|u_1 - \sqrt{a}\right|$ donc $u_n \to \sqrt{a}$.

b) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2$ donc $v_n = v_0^{2^n}$.

c) $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \le v_n \left|u_n + \sqrt{a}\right| \le 2u_0 v_n = 2u_0 v_0^{2^n}$.

Exercice 65 On considère l'équation $\ln x + x = 0$ d'inconnue $x > 0$.

a) Montrer que l'équation possède une unique solution α.

b) Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle (u_n) convergeant vers α.

a) $f : x \mapsto \ln x + x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$.
L'équation proposée possède une unique solution $\alpha = f^{-1}(0)$.
b) L'algorithme de Newton, propose de définir la suite (u_n) par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{\ln u_n + u_n}{1/u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{u_n + 1}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ne s'annulent pas.
Pour $u_0 > 0$ tel que $f(u_0) f''(u_0) \geq 0$, la suite converge vers α.