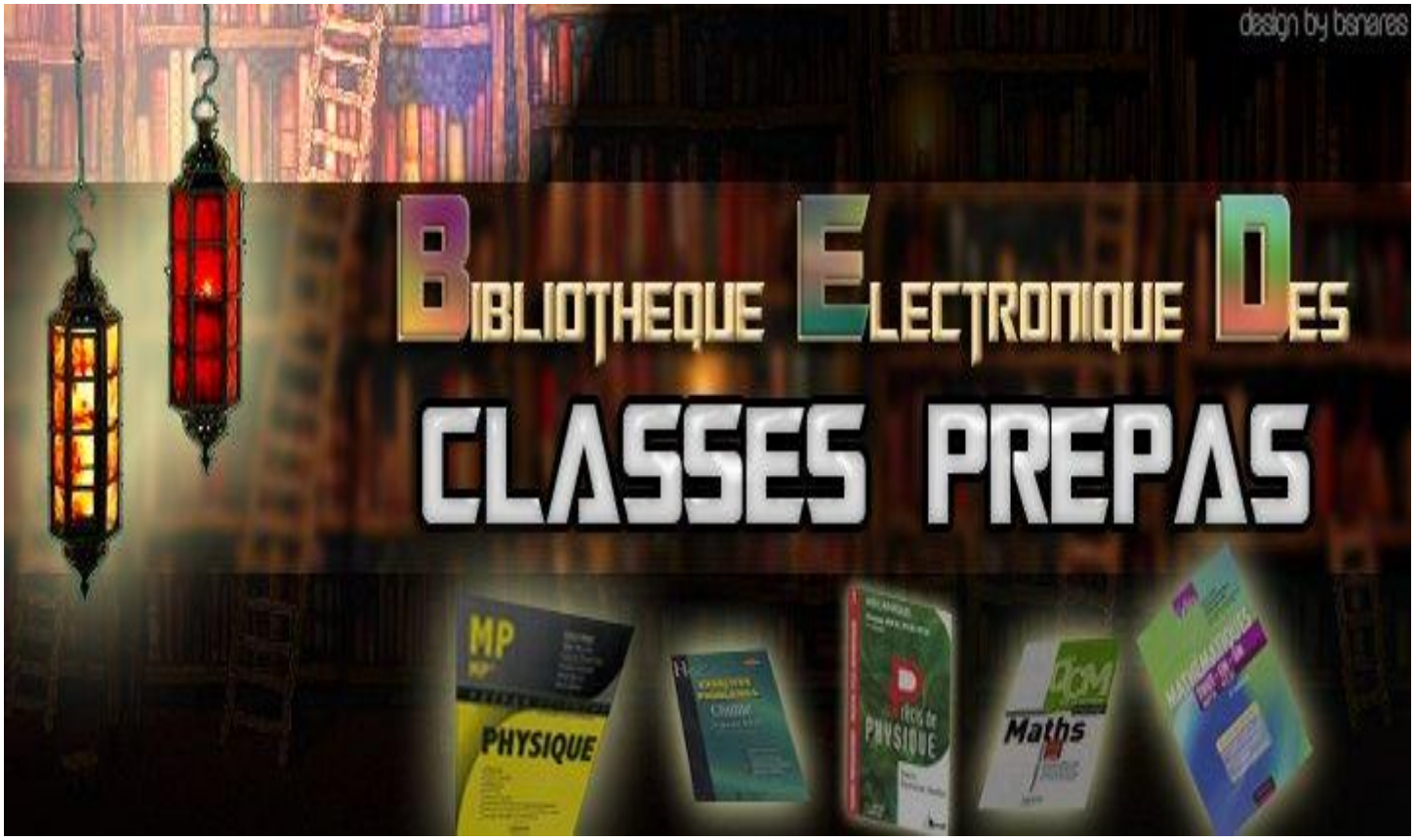


Visiter notre Forum **:** http://prepa-book.forummaroc.net/

Visiter notre page :

https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa
https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/

| Classe | prépa

PC PC*
MP MP*
PSI PSI*
PT PT*

Optique ondulatoire

Pascal Legagneux-Piquemal
Professeur de chaire supérieure
en classes préparatoires
au lycée Hoche à Versailles

© Nathan, *classe prépa*

Nathan

À David, Mathieu, Maëlis
À tous mes élèves, passés, présents et futurs

Cet ouvrage fait partie de la collection « Classe prépa », une collection d'ouvrages simples et accessibles couvrant l'ensemble des programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques.
Élaborée pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés, cette collection est basée sur une approche pragmatique des programmes. Ainsi, chaque chapitre est constitué de cinq rubriques :
• **Retenir l'essentiel** qui reprend les notions indispensables du cours et indique des conseils pour éviter les erreurs les plus fréquentes ;
• **Avant la colle** qui regroupe des QCM et des exercices d'application immédiate pour vérifier les connaissances ;
• **Savoir résoudre les exercices** qui, sur la base d'exercices « classiques », permet aux élèves de développer les méthodes indispensables en prépa : analyse de l'énoncé, démarche à suivre, réflexes à acquérir…
• **S'entraîner** qui regroupe par ordre de difficultés croissantes une batterie d'exercices ;
• **Corrigés** où l'ensemble des exercices sont corrigés en détails et commentés.

© Nathan, *classe prépa*

Crédit photographique
Plats II et III de couverture ; © Sylvain Houard

Coordination éditoriale : Isabelle Ravilly
Composition : Alpha-Edit
Couverture : Marie-Astrid Bailly-Maître
Maquette intérieure : Thierry Méléard

© Nathan, 2007 - ISBN 978-2-09-160328-5

Avant-propos

Il est difficile pour un étudiant de faire la synthèse de ses connaissances et de se les approprier pour les réutiliser à bon escient.

Cet ouvrage est un outil pour l'aider à aller à l'essentiel, à tester ses connaissances et à approfondir progressivement les notions fondamentales de l'optique physique dans un cadre le plus expérimental possible.

La rubrique « Retenir l'essentiel » respecte les nouveaux programmes de deuxième année (2004). « Avant la colle » propose des questions et des exercices qui testent les « réflexes » de l'étudiant. Elle est indispensable et l'étudiant peut ainsi s'assurer qu'il possède les connaissances minimales du chapitre. Il doit avoir retenu l'essentiel du cours et doit répondre vite et de manière concise.

Cette étape franchie, la rubrique « Savoir Résoudre » donne des méthodes et des conseils ; elle privilégie l'analyse qualitative aux calculs. Elle permet d'aborder quelques points délicats de la rubrique « S'entraîner ».

La rubrique « S'entraîner » permet à l'étudiant d'aller plus loin et de se confronter à des exercices, soit plus complets (car faisant appel à plusieurs notions), soit plus difficiles.

Enfin, le dernier chapitre propose des problèmes de concours dont certains ne sont abordables qu'à la fin du cours sur l'optique physique.

Les trois chapitres (3, 6 et 7) relatifs aux TP Cours proposent des exercices plus reliés à l'expérience et ces derniers requièrent d'avoir manipulé en TP auparavant.

Je tiens à remercier tous les collègues physiciens avec qui j'ai pu échanger sur l'optique physique : tout d'abord mes anciens professeurs (l'échange étant alors à sens unique) et plus particulièrement Philippe Fleury pour sa relecture minutieuse et pertinente ; Yves Dulac et Pascal Brasselet pour leur disponibilité à répondre à de multiples questions ; enfin Sylvain Houard qui a généreusement accepté de me prêter certaines de ses photos et d'en faire de nouvelles pour le livre.

Merci à Jean-Michel pour sa patience durant de nombreux week-ends de travail acharné et pour la maintenance du matériel informatique.

Pascale Legagneux-Piquemal

© Nathan, *classe prépa*

Sommaire

Avant-propos 3

1 Introduction à l'optique physique

1 - Rappels d'optique géométrique 7
2 - Sources lumineuses – Modèle scalaire Récepteurs lumineux Intensité – Éclairement 13
3 - Propagation – Chemin optique – Déphasages Théorème de Malus 15
savoir résoudre les exercices 20
s'entraîner 29
corrigés 33

2 Interférences à deux ondes en lumière monochromatique

1 - Problème théorique à deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes 41
2 - Diviseur d'onde : réalisation pratique de deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes 47
savoir résoudre les exercices 51
s'entraîner 58
corrigés 61

3 Interféromètre de Michelson

1 - Principe et description de l'appareil 67
2 - Franges d'interférences et localisation des franges avec une source étendue 72
3 - Étude théorique du réglage du Michelson 76
4 - TP cours 76
savoir résoudre les exercices 83
s'entraîner 92
corrigés 95

4 Interférences à deux ondes en lumière polychromatique

1 - Sources polychromatiques et intensité spectrale 101
2 - Méthodologie : problème théorique à deux sources ponctuelles cohérentes en lumière polychromatique 103
3 - Première modélisation : cas d'un doublet de raies infiniment fines 104
4 - Deuxième modélisation : cas d'une raie rectangulaire 107
5 - Interférences en lumière blanche 109
savoir résoudre les exercices 113
s'entraîner 120
corrigés 123

5 Diffraction

1 - Phénomène – Calculs de déphasage 129
2 - Principe d'Huygens-Fresnel – Amplitude et intensité diffractées par une pupille plane 132
3 - Cas particulier des pupilles opaques ou transparentes 136
4 - Effets sur la figure de diffraction d'une transformation de la pupille – Écrans complémentaires 141

© Nathan, *classe prépa*

5 - Analyse du dispositif des deux fentes d'Young – Nécessité d'une fente source parallèle aux deux fentes 143
6 - Limitation du pouvoir séparateur des instruments d'optique par le phénomène de diffraction 148
savoir résoudre les exercices 152
s'entraîner 158
corrigés 162

6 Interférences à N ondes cohérentes – Réseaux (TP Cours)

1 - Intérêt des interférences à N ondes cohérentes 175
2 - Interférences à N ondes cohérentes, amplitude et intensité diffractées à l'infini 178
3 - Réseaux – Cas particulier du réseau par transmission 180
savoir résoudre les exercices 189
s'entraîner 198
corrigés 201

7 Polarisation

1 - Polarisation – Théorie 207
2 - Polariseurs 211
3 - Lames demi-onde et quart d'onde 213
4 - Polarisations par réflexion vitreuse et par diffusion 218
5 - TP Cours : Production et analyse de lumière polarisée 219
savoir résoudre les exercices 224
s'entraîner 232
corrigés 235

8 Problèmes de concours

1 - Mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie 241
2 - Radioastronomie 253
3 - Holographie 270

Annexe : Éléments de mathématiques 280

1 - Fonctions usuelles en optique 280
2 - Polarisation elliptique 283
3 - Transformée de Fourier 283

Index 285

© Nathan, *classe prépa*

© Nathan, *classe prépa*

1 Introduction à l'optique physique

1 Rappels d'optique géométrique

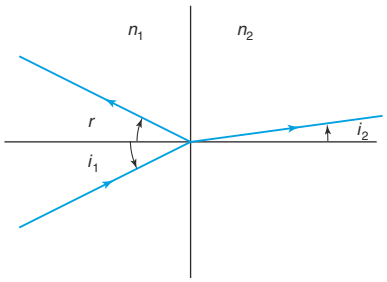
Ces rappels ont pour objectif de préciser les grandes fonctions de quelques composants (miroirs et lentilles) et leurs utilisations courantes dans les exercices d'optique physique et en activités expérimentales.

• **Lois de Descartes**

Première loi : les rayons réfractés et réfléchis appartiennent au plan d'incidence (plan défini par le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence).

Deuxième loi : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ pour la réfraction et $r = -i_1$ pour la réflexion (les angles sont tous orientés par rapport à la normale au dioptre, figure 1).

Fig. 1 *Lois de Descartes*



• Rappelons aussi le principe de retour inverse de la lumière.

Les phénomènes de **réfraction** limite et de **réflexion** totale seront évoqués dans l'exercice n° 3 de « S'entraîner ».

Les rayons lumineux sont rectilignes dans un milieu linéaire, homogène, isotrope d'indice n constant. L'indice n d'un milieu varie avec la longueur d'onde selon la loi de

© Nathan, *classe prépa*

Cauchy $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$. Pour des gaz dilués, $(n-1)$ est proportionnel à la masse volumique donc proportionnel à la pression et inversement proportionnel à la température (loi de Gladstone $n-1$ proportionnel à $\frac{P}{T}$).

1.1. Miroirs sphérique et plan

Pour un miroir sphérique, on définit le centre et le sommet, $\overline{SC}$ est le rayon algébrique du miroir. Remarquons que le foyer objet et le foyer image sont confondus et se situent au milieu de S et C. La distance focale du miroir est égale à la moitié du rayon.

La formule des miroirs sphériques, dans l'approximation de Gauss, conjuguant le point objet A au point image A' (dans un milieu d'indice n constant) est :

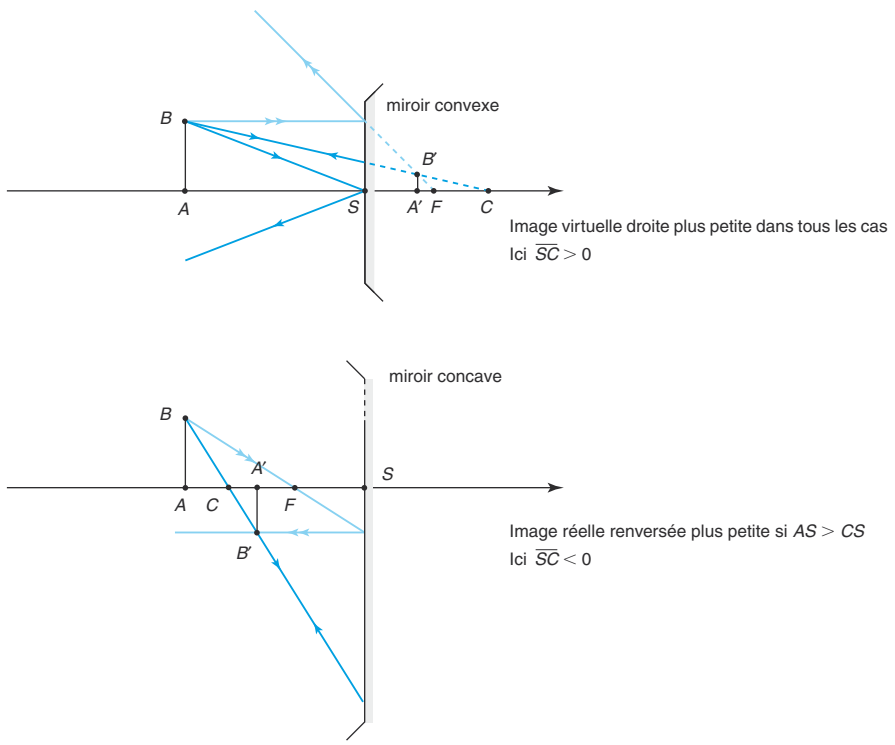
$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}}$$

et le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}.$$

On peut vérifier la formule du grandissement sur la figure 2.

Fig. 2 *Formule des miroirs*

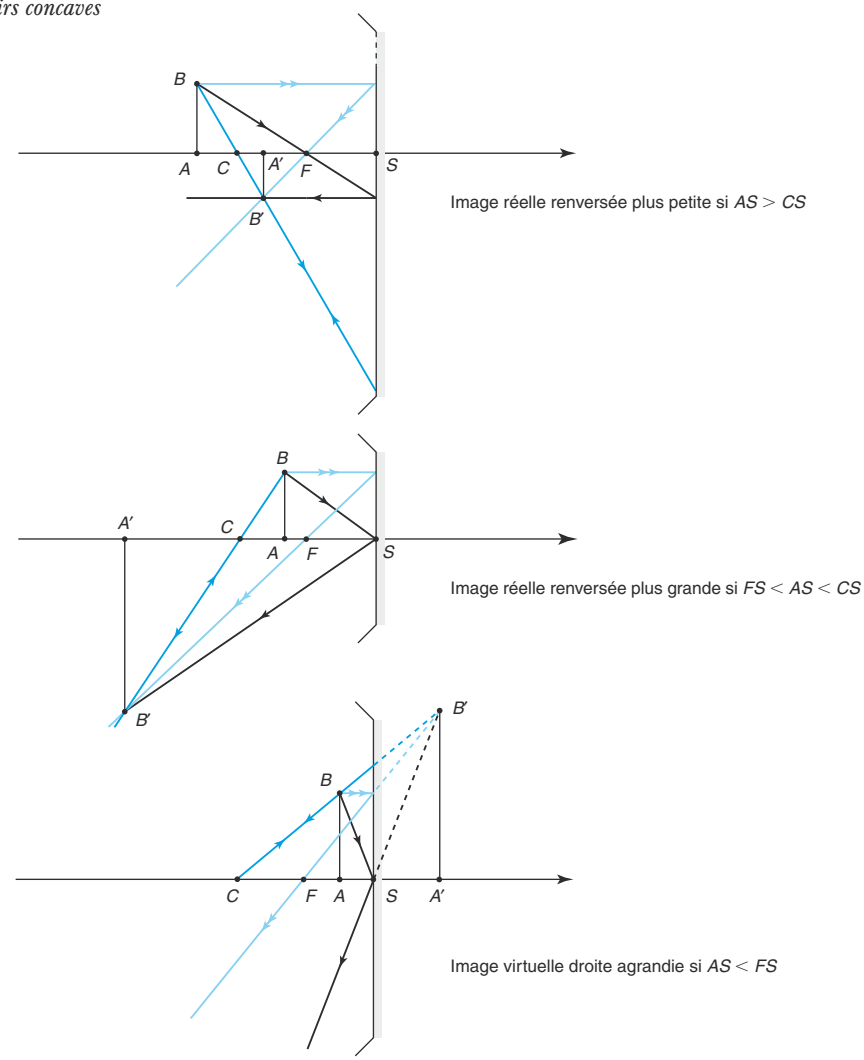


© Nathan, *classe prépa*

• Un **miroir convexe** donne d'un objet réel une image virtuelle droite plus petite et ce, quelle que soit la position de l'objet par rapport au miroir.

• Un **miroir concave** donne d'un objet réel une image virtuelle droite agrandie si l'objet est situé entre le sommet et le foyer du miroir.

Fig. 3 *Miroirs concaves*



Pour le **miroir plan**, le rayon du miroir tend vers l'infini, d'où $\overline{SA'} = -\overline{SA}$. ***A′* est le symétrique de *A* par rapport au miroir plan**. Les constructions sont particulièrement simples et **le grandissement vaut** toujours **1**.

1.2. Lentilles minces convergentes et divergentes

Pour une lentille mince, on définit un centre optique et une distance focale f' telle que $\overline{OF'} = f' = -\overline{OF} = -f$. Les lentilles convergentes sont caractérisées par $f' > 0$ et les lentilles divergentes par $f' < 0$.

© Nathan, *classe prépa*

Attention
Les foyers objet et image sont réels pour la lentille convergente tandis qu'ils sont virtuels pour la lentille divergente.

La formule de Descartes des lentilles minces, dans l'approximation de Gauss, conjuguant le point objet A au point image A' (dans un milieu d'indice n constant) est :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}$$ et le grandissement :

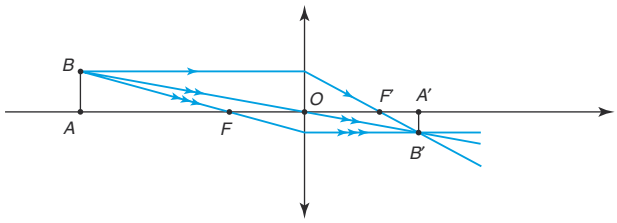
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

La formule de Newton privilégie les foyers objet et image :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{F'O} \cdot \overline{FO} = ff' = -f'^2 \quad \textbf{et} \quad \gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}.$$

On peut vérifier sur la figure 4 : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$.

Fig. 4 *Formule des lentilles*



On appelle vergence V d'une lentille l'inverse de f' exprimée en m^{-1} ou dioptries notée δ.

Une lentille convergente donne toujours d'un objet virtuel une image réelle.
Une lentille divergente donne toujours d'un objet réel une image virtuelle.

• Lentilles convergentes

Quand on désire **projeter un objet réel sur un écran**, donc obtenir une image réelle, il est nécessaire d'utiliser une **lentille convergente** telle que **la distance objet écran D** soit 4 fois plus grande que sa distance focale : $\boldsymbol{D > 4f'}$. Si on désire agrandir, il faut satisfaire à $OA' > OA$ impliquant que la lentille soit plus proche de l'objet que de l'écran.

Attention
On peut photographier un objet virtuel ou le voir à l'œil nu.

Si l'objet est situé entre le plan focal objet de la lentille et la lentille, son image est virtuelle : objet pour l'œil qui observe à travers la lentille.

Une **loupe** est une lentille convergente. D'un objet placé dans son plan focal objet, elle donne une image à l'infini vue sans accommodation par l'œil donc sans fatigue.

• L'œil humain

L'œil humain emmétrope (normal) peut voir des objets situés entre l'infini (*punctum remotum* PR) et le *punctum proximum* PP (d_m est la distance de l'œil au PP, elle est de l'ordre de 10 cm et augmente avec l'âge). L'œil humain est un système optique équivalent à une lentille dont on peut faire varier la distance focale grâce à un muscle (processus d'accommodation) et qui fournit une image réelle des objets sur une surface sensible (la rétine).

Quand l'œil n'accommode pas, il met au point sur l'infini. Au maximum de l'accommodation, l'œil met au point sur le PP.

© Nathan, *classe prépa*

On définit un d_m conventionnel commercial (pour les fabricants d'optique) $d_m = 1/4$ m (25 cm). Le champ en profondeur de l'œil est la distance du PR au PP. Le champ angulaire de l'œil est de 40 à 50 degrés.

L'œil est en fait un récepteur angulaire. Pour voir le mieux possible un « petit objet », on le rapproche le plus possible donc on le place au PP. AB étant un objet biponctuel à la distance d_m de l'œil, on rapproche B de A (donc on diminue l'angle $\alpha_m \approx \frac{AB}{d_m}$). On constate expérimentalement qu'on ne perçoit plus qu'un seul point quand on atteint l'angle $\alpha_{m\ell}$. Cette limite inférieure définit le pouvoir séparateur angulaire de l'œil.

Le pouvoir séparateur angulaire de l'œil est de l'ordre de la minute d'angle soit $3 \cdot 10^{-4}$ rad.

Si $\alpha_m < \alpha_{m\ell}$, on voit un seul point. $d_m \alpha_{m\ell}$ définit le pouvoir séparateur linéïque et donne l'ordre de grandeur du plus petit détail visible à l'œil nu. **Pour $d_m = 25$ cm, le pouvoir séparateur linéïque est de l'ordre de 0,1 mm.**

1.3. Associations intéressantes de deux lentilles

Remarque
Voir exercice n° 9 de « S'entraîner ».

Le **microscope** possède un objectif et un oculaire, l'objectif (petite focale) sert à agrandir l'objet réel (placé en avant du foyer objet mais tout près) et l'oculaire fonctionne en loupe (image réelle intermédiaire dans son plan focal objet). L'image finale est à l'infini, vue sans accomodation par l'œil.

La **lunette astronomique** est un système afocal $(F'_1 = F_2)$ qui permet de grossir si $|G| > 1$ (grandissement angulaire ou grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$).

Remarque
Voir exercice n° 6 de « S'entraîner » pour la démonstration.

La **lunette de Galilée** est composée d'une lentille convergente puis d'une lentille divergente $(f'_2 < 0$ et $f'_1 > |f'_2|)$, elle grossit mais sans renverser.

On peut réaliser un **expanseur de faisceau** avec un doublet afocal formé de deux lentilles convergentes. Le grandissement linéaire γ vaut $-\frac{f'_2}{f'_1}$.

On parle d'accolement de 2 lentilles quand les lentilles sont le plus près possible l'une de l'autre (en théorie, centres optiques confondus), les vergences alors s'ajoutent $V = V_1 + V_2$.

1.4. Milieux inhomogènes

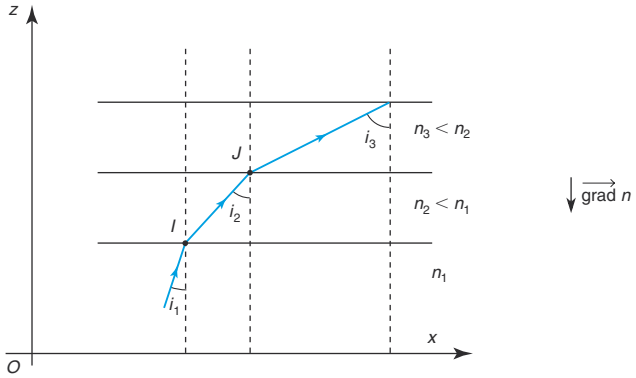
La théorie des milieux d'indice variable est hors programme mais pour comprendre quelques phénomènes qualitativement, nous allons développer le modèle du milieu stratifié.

1.4.1. Milieu stratifié

Il s'agit d'un milieu constitué de couches d'indice différent, n croissant ou décroissant selon une variable d'espace. Sur la figure 5, nous avons choisi $n(z)$ décroissant, d'où le sens indiqué du $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 5 *Milieu stratifié*



On peut tracer le parcours d'un rayon lumineux incident qui appartient au plan d'incidence Ixz et d'angle d'incidence i_1. Les lois de la réfraction indiquant que le rayon réfracté appartient au plan d'incidence nous assurent que le rayon reste dans le plan Ixz au cours des multiples réfractions.

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$ donc $n \sin i =$ constante. Si n décroît avec z alors $\sin i$ augmente et i croît avec z. On constate sur la figure que le rayon s'éloigne de plus en plus de la direction de la normale parallèle à l'axe des z. Il se courbe.

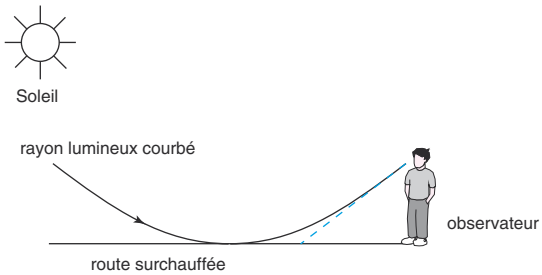
1.4.2. Milieu d'indice variant continûment

Si on considère maintenant un milieu inhomogène avec un indice n variant continûment, on peut utiliser le modèle du milieu stratifié pour comprendre que le rayon lumineux va se courber et tourner sa concavité vers les zones d'indice croissant (sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$).

1.4.3. Mirages optiques

L'été, quand la route goudronnée est surchauffée (sol plus chaud que l'air), on a l'impression de voir des flaques d'eau sur la route. L'explication est la suivante : le sol étant plus chaud que l'air, il s'établit un gradient de température dans l'air au-dessus de la route dirigé selon la verticale descendante. Quand la température augmente, l'indice du milieu air diminue et un gradient d'indice s'établit selon la verticale ascendante. Le rayon lumineux va alors se courber en tournant sa concavité vers les zones d'indice croissant (figure 6). La flaque d'eau n'est qu'un reflet du ciel sur la route surchauffée.

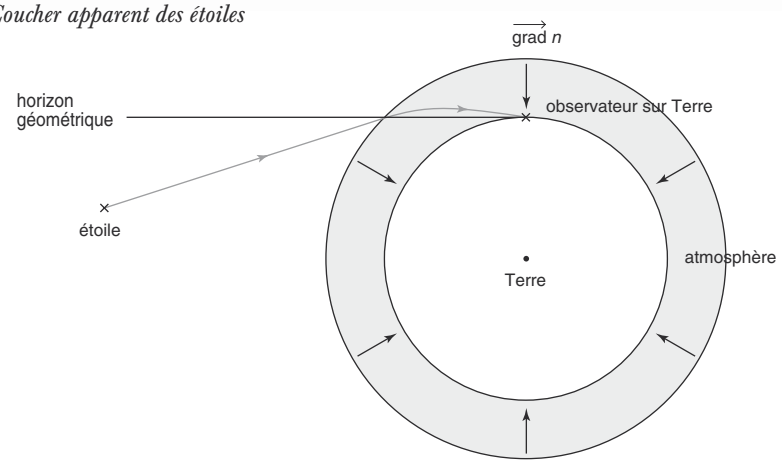
Fig. 6 *Mirage optique*



De la même façon, le gradient d'indice dans l'atmosphère étant dirigé vers la verticale descendante, on peut voir une étoile (et le Soleil) bien qu'elle soit en dessous de l'horizon géométrique.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 7 *Coucher apparent des étoiles*

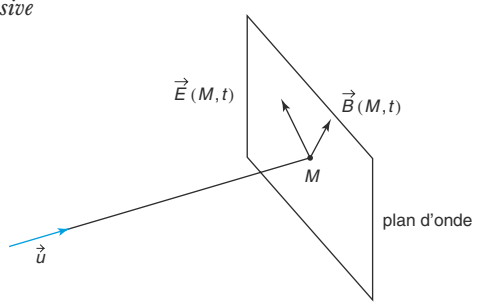


2 Sources lumineuses – Modèle scalaire Récepteurs lumineux – Intensité – Éclairement

La lumière est une onde électromagnétique ; il s'agit de la propagation des champs électrique et magnétique, grandeurs vectorielles. Les **ondes électromagnétiques planes progressives** dans le vide (célérité c) ou dans un milieu linéaire, homogène, isotrope d'indice n constant (célérité c/n) ont une structure **transversale**.

Les champs électrique et magnétique en M à t (voir figure 8) sont perpendiculaires à la direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{SM}}{SM}$ (avec S point source et $SM \gg \lambda = cT$ avec T la période du signal). Ils sont situés dans un plan appelé le plan d'onde. Dans ce plan, ils sont perpendiculaires entre eux, $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre orthogonal direct.

Fig. 8 *Structure onde plane progressive*



Remarque
Un polariseur, une lame demi-onde ou quart d'onde sont des milieux anisotropes. Voir le chapitre 7

La direction du champ électrique dans le plan d'onde est appelée direction de polarisation. Pour la lumière naturelle, cette direction varie de manière aléatoire et très rapidement si on compare au temps de réponse des récepteurs usuels. Les récepteurs ne sont donc pas sensibles à la direction du champ électrique. **On peut traiter la lumière comme une onde scalaire**

© Nathan, *classe prépa*

tant que les milieux traversés sont isotropes. La lumière naturelle (Soleil, lampes usuelles) est dite non polarisée. Ainsi utiliserons-nous le modèle scalaire pour une vibration lumineuse émise à la source S de pulsation ω avec une amplitude constante $s(t) = a_{0S}\cos\omega t$.

2.1. Sources lumineuses – Intensité lumineuse

2.1.1. Sources usuelles

Remarque
Les lampes blanches à incandescence de TP ont un rayonnement type corps noir donc un spectre continu.

Dans la vie courante, nous utilisons des lampes à incandescence (filament chauffé), des tubes à néon (décharge électrique dans un gaz raréfié). En TP, nous utilisons des lampes spectrales (décharge électrique dans un gaz, mercure, sodium, cadmium) et des lasers (sources cohérentes voir chapitre **2**).

2.1.2. Spectre du visible – Ordres de grandeur

Remarque
Raie jaune du sodium doublet : $\lambda = 589{,}0$ nm et $\lambda = 589{,}6$ nm.
Raie rouge du laser He-Ne : $\lambda = 632{,}8$ nm.
Raie verte du mercure : $\lambda = 546$ nm.

L'œil est sensible à l'intervalle de longueurs d'onde [400 nm, 750 nm] ; c'est le domaine du visible. Dans ce domaine, les fréquences sont de l'ordre de quelques 10^{14} s^{-1}, les périodes sont de l'ordre de quelques 10^{-15} s.

L'œil a son maximum d'acuité visuelle dans le jaune.

2.1.3. Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse émise par une source est proportionnelle à la moyenne temporelle du carré du signal lumineux au point M. $I(M) = K\langle s^2(M, t)\rangle$.

Elle est homogène à une puissance surfacique (énergie qui traverse l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation par unité de temps).

Si le signal n'est pas périodique, on fait la moyenne sur un temps caractéristique des variations de $s(M, t)$.

Cette définition est cohérente avec l'électromagnétisme. La moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting à travers l'unité de surface perpendiculaire en M à la direction de propagation représente la puissance moyenne surfacique rayonnée au point M à travers l'unité de surface : $P_{\text{surf moy}} = K\langle E^2(M, t)\rangle$.

2.2. Récepteurs lumineux

2.2.1. Temps de réponse

Remarque
Pour une photodiode, le temps de réponse est de 10^{-6} s et pour une pellicule photo, de l'ordre de 10^{-4} s à 10^{-2} s, ce qui correspond au temps d'exposition de la pellicule à la lumière.

Les récepteurs lumineux (photocellules, pellicules photo, œil, etc.) ont des temps de réponse très grands devant la période des ondes lumineuses dans le visible. Le temps de réponse de l'œil est de l'ordre de 0,1 s.

Les récepteurs sont sensibles à la puissance lumineuse reçue sur toute la surface du détecteur donc au carré du signal reçu sur toute la surface, mais étant donné les ordres de grandeur des temps de réponse des récepteurs, ils mesurent une grandeur proportionnelle à la moyenne temporelle du carré de la vibration lumineuse.

2.2.2. Postulat des récepteurs

On postule que l'impression au point M sur une plaque photo, ou l'éclairement au point M d'un écran, ou la réponse au point M d'un photodétecteur, est proportionnelle à l'intensité reçue au point M. La constante de proportionnalité n'est pas accessible mais on pourra prendre une référence : par exemple, on pourra se référer à l'éclairement maximal sur l'écran.

© Nathan, *classe prépa*

3 Propagation – Chemin optique – Déphasages Théorème de Malus

3.1. Propagation – Retard dû à la propagation

Soit un signal émis au point source S, $s(t) = a_{0S}\cos\omega t$; il se propage dans le milieu d'indice n constant, soit $v = c/n$ la vitesse de propagation des ondes lumineuses. Le retard temporel dû à la propagation du signal d'une source S jusqu'en un point M est $SM/v = n\,SM/c$.

> Le signal au point M reproduit le signal au point S avec ce retard et vaut $s(M, t) = s(S, t - SM/v)$.

Ici, $s(M, t) = a_0\cos\omega(t - SM/v)$, l'amplitude est considérée constante. En effet, en toute rigueur $a_{0M} = \dfrac{a_{0S}}{SM}$ mais les distances de la source au point M étant très grandes devant la longueur d'onde dans le vide $\lambda = cT = c\dfrac{2\pi}{\omega}$ et les dimensions de la surface utile du récepteur, on peut considérer que, dans une petite zone autour du point M, la distance à la source ne varie pas.

On préfère utiliser le chemin optique noté (SM) avec $(SM) = n\,SM$ et écrire :
$s(M, t) = a_0\cos\omega(t - (SM)/c) = a_0\cos(\omega t - \omega(SM)/c)$.

3.2. Chemin optique

> Pour un milieu quelconque, on définit le chemin optique sur un rayon lumineux curviligne quelconque de A à B par $L = (AB) = \displaystyle\int_A^B n(M)\,\mathrm{d}s_M$.

$L = (AB) = \displaystyle\int_A^B n(M)\,\mathrm{d}s_M = \int_{t_A}^{t_B} n(M)v(M)\,\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} c\,\mathrm{d}t = c(t_B - t_A)$. On peut donc interpréter le chemin optique comme le chemin parcouru dans le vide pendant la durée réelle mise pour aller de A à B dans le milieu d'indice n.

3.3. Déphasages

3.3.1. Calcul du déphasage entre deux points situés sur un même rayon lumineux

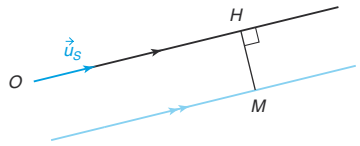
Dans un milieu d'indice n constant, le trajet effectivement suivi par la lumière est rectiligne. On parle de rayon lumineux ; il est issu de la source S et atteint O avant d'atteindre M donc le déphasage n'est pas le même en ces deux points.

Le retard dû à la propagation induit un déphasage du signal en M par rapport au signal en O. Ce déphasage vaut $\phi_{M/O} = \phi_{M/S} - \phi_{O/S} = \omega(OM)/c = \dfrac{2\pi(OM)}{\lambda} = \dfrac{2\pi n\,OM}{\lambda}$. Si on introduit le vecteur d'onde $\vec{k} = \dfrac{2\pi n}{\lambda}\vec{u}$ avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire donnant la direction et le sens du rayon lumineux. On peut alors écrire le déphasage $\phi_{M/O} = \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}$.

© Nathan, *classe prépa*

3.3.2. Calcul du déphasage entre deux points situés sur deux rayons lumineux parallèles

Fig. 9 *Rayons parallèles*



Il s'agit d'une source S à l'infini de direction de droite $\vec{u}_S$. Elle correspond à un faisceau parallèle de rayons lumineux. Soit O un point situé sur un rayon et M un point situé sur un rayon parallèle, $\phi_{M/S} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{SM}$ et $\phi_{O/S} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{SO}$ d'où $\phi_{M/O} = \phi_{M/S} - \phi_{O/S} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$ (voir figure 9).
Remarquons que si on introduit H, projection orthogonale de M sur le rayon passant par O, on obtient : $\phi_{H/O} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = \phi_{M/O}$.

En conclusion, que O et M soient sur le même rayon ou sur deux rayons parallèles, le déphasage vaut :
$\phi_{M/O} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{k} = \dfrac{2\pi n}{\lambda}\vec{u}_S$ et $\vec{u}_S$ le vecteur unitaire du rayon lumineux.

3.4. Surfaces d'onde – Ondes planes et sphériques Théorème de Malus

On appelle surface d'onde d'une source S, à l'instant t, l'ensemble des points M de phase $\phi_{M/S}$ constante ; pour une onde monochromatique, c'est l'ensemble des points M à égal chemin optique de la source S, $(SM) =$ constante. Dans un milieu d'indice n constant, cela correspond à la surface $SM =$ constante donc à une sphère de centre S. On a une infinité de surfaces d'onde. On parle d'**onde sphérique**.

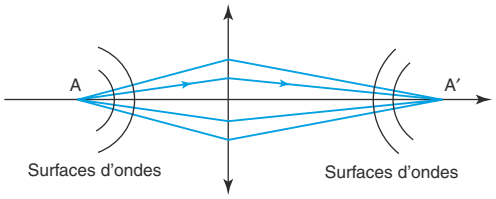
Quand M est à très grande distance de la source, dans une zone proche de M, on peut assimiler les surfaces d'onde sphériques à des plans, on parle de plans d'onde et d'**onde plane**. On peut aussi dire que la source est à l'infini.

Théorème de Malus. Les normales aux surfaces d'onde sont les rayons lumineux pour une onde quelconque (non nécessairement monochromatique).

Pour une onde sphérique, les rayons lumineux sont des demi-droites issues de la source. Pour une onde plane, les rayons lumineux sont parallèles entre eux et perpendiculaires aux surfaces d'onde.
En optique géométrique, les formules dites de conjugaison expriment que le point objet A est conjugué du point image A' dans l'approximation de Gauss, c'est-à-dire que quel que soit le rayon lumineux incident issu de A, il émerge en passant par A'. Le chemin optique est donc conservé : $(AA') =$ constante. Deux points appartenant à la même surface d'onde de la source A (ou A' par principe du retour inverse de la lumière) sont à même chemin optique de A (ou de A') (figure 10).

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 10 *A et A′ conjugués*



3.5. Déphasages supplémentaires

On admet que, dans le cas d'une réflexion sur un métal dite réflexion métallique, l'onde réfléchie se déphase de π en plus par rapport à l'onde incidente.
On admet que, dans le cas d'une réflexion d'un milieu d'indice n_1 sur un milieu d'indice plus élevé $n_2 > n_1$, l'onde réfléchie se déphase de π en plus par rapport à l'onde incidente tandis que l'onde transmise reste en phase avec l'onde incidente.

Cela se démontre dans le cadre de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs et diélectriques parfaits.

* * *

Point maths. Formules trigonométriques indispensables en optique

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 33*

1 Les récepteurs usuels dans le visible sont sensibles :

- ☐ **a.** au carré de la moyenne temporelle du signal reçu ;
- ☐ **b.** à la moyenne temporelle du carré du signal reçu ;
- ☐ **c.** à la moyenne temporelle du signal reçu.

2 Le chemin optique noté (AB), pour un rayon lumineux rectiligne allant de A vers B dans un milieu d'indice n, est :

- ☐ **a.** nAB ;
- ☐ **b.** la distance parcourue par la lumière dans le milieu ;
- ☐ **c.** la distance parcourue par la lumière dans le vide.

3 Pour une source ponctuelle S, les surfaces d'onde sont :

- ☐ **a.** planes à courte distance de la source ;
- ☐ **b.** des demi-droites issues de S ;
- ☐ **c.** sphériques.

4 Pour agrandir un objet réel et le projeter sur un écran, je choisis une lentille :

- ☐ **a.** convergente telle que la distance objet écran $D > 4f'$;
- ☐ **b.** divergente positionnée à grande distance de l'objet ;
- ☐ **c.** convergente de focale la plus petite possible.

5 Un miroir de maquillage est :

- ☐ **a.** un miroir concave avec votre visage entre le centre et le foyer ;
- ☐ **b.** un miroir concave avec votre visage entre le sommet et le foyer ;
- ☐ **c.** un miroir convexe avec votre visage le plus près possible du sommet.

6 Un rétroviseur est :

- ☐ **a.** un miroir concave avec l'objet entre l'infini et le centre ;
- ☐ **b.** un miroir convexe, l'image est virtuelle et agrandie ;
- ☐ **c.** un miroir convexe, l'image est virtuelle et plus petite.

7 Soit un objet réel AB de 10 cm de hauteur avec A sur l'axe optique, placé à 1,50 m d'une lentille mince convergente de distance focale $f' = 50$ cm. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

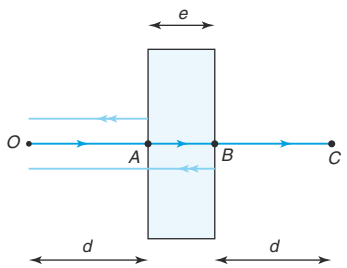
- ☐ **a.** L'image $A'B'$ est inversée et plus grande que l'objet.
- ☐ **b.** Si on rapproche AB de la lentille, l'image se rapproche de la lentille et grandit.
- ☐ **c.** Pour une nouvelle position de AB toujours réel, la lentille convergente donne une image réelle de 2,5 cm de hauteur, la distance objet-lentille est alors égale à 5 fois la distance focale de la lentille.
- ☐ **d.** Pour un objet réel situé à 40 cm de la lentille, l'image est virtuelle à 2 m de la lentille.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 33*

1 Calculer les déphasages $\phi_{B/O}$, $\phi_{C/O}$, $\phi_{O\text{retour}/O}$ pour la réflexion en A et $\phi_{A\text{retour}/O}$ et $\phi_{O\text{retour}/O}$ pour la réflexion en B. La lame d'épaisseur e est d'indice n. Les autres trajets sont dans l'air.



2 Que vaut la moyenne temporelle de $\cos(2\omega t)$, $\cos^2(2\omega t)$ sur une durée $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$?

Que vaut la moyenne temporelle de $\cos(n\omega t)$, $\cos^2(n\omega t)$ avec n entier strictement positif sur une durée $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$?

3 On considère un miroir sphérique convexe de 1,2 m de rayon. Un objet lumineux AB (A est sur l'axe du miroir) de 3 cm de hauteur est placé à 40 cm devant le miroir. Déterminer la position, la nature et la taille de l'image $A'B'$ de AB.

4 Soit une lentille convergente L_1 de focale $f_1 = 10$ cm, un objet de hauteur 24 m est placé à 1 200 m de la lentille. Calculer la position et la taille de l'image. On place ensuite une lentille divergente L_2 de focale $f_2 = 4$ cm à 6,5 cm derrière L_1. Calculer la position et la taille de l'image.

© Nathan, *classe prépa*

1 – Addition de signaux

1 Soient deux signaux de même pulsation, de même amplitude mais déphasés : $s_1(t) = a_0\cos(\omega t)$ et $s_2(t) = a_0\cos(\omega t - \phi)$. Que vaut le signal somme ? Calculer la moyenne temporelle du signal somme au carré.

2 Soient deux signaux de pulsation différente mais de même amplitude : $s_1(t) = a_0\cos(\omega_1 t)$ et $s_2(t) = a_0\cos(\omega_2 t - \phi)$. Que vaut le signal somme $s(t)$? Tracer le graphe $s(t)$ si les 2 pulsations sont proches.

3 Reprendre la question **1** en utilisant les complexes.

4 Soient quatre signaux de même pulsation, de même amplitude mais déphasés : $s_1(t) = a_0\cos(\omega t)$, $s_2(t) = a_0\cos(\omega t - \phi)$, $s_3(t) = a_0\cos(\omega t - 2\phi)$ et $s_4(t) = a_0\cos(\omega t - 3\phi)$. Que vaut le signal somme ? Calculer la moyenne temporelle du signal somme au carré.

résolution méthodique

On peut utiliser deux méthodes de calcul.

• *Première méthode* : on utilise les formules trigonométriques. Cette méthode n'est applicable que dans les cas simples donc elle est limitée à l'addition de deux signaux.

• *Deuxième méthode* : on introduit le formalisme complexe (abordé en première année en électricité). Si $s(t) = a_0\cos(\omega t + \phi)$ alors le complexe associé est $\underline{s}(t) = a_0 e^{i(\omega t + \phi)}$.
Il suffit de prendre la partie réelle du signal pour revenir à la solution réelle physique.
Le calcul de la moyenne temporelle $\langle s^2(t)\rangle$ donne, en complexes, $\frac{1}{2}\underline{s}(t)\underline{s}^*(t)$.

1 Le signal somme vaut $s(t) = a_0\cos(\omega t) + a_0\cos(\omega t - \phi)$. On peut utiliser une des formules trigonométriques.

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\boxed{s(t) = 2a_0\cos\frac{\phi}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right)}$$

Le signal somme a même pulsation mais son amplitude n'est pas le double de celle des signaux initiaux en raison du déphasage.

Calculons la moyenne temporelle du carré du signal somme :

$$\boxed{\langle s^2(t)\rangle = 2a_0^2\cos^2\frac{\phi}{2}}$$

Quand on fait la moyenne temporelle sur une période $\frac{2\pi}{\omega}$:

$\langle\cos^2(\omega t + \phi)\rangle = \langle\sin^2(\omega t + \phi)\rangle = \frac{1}{2}$.

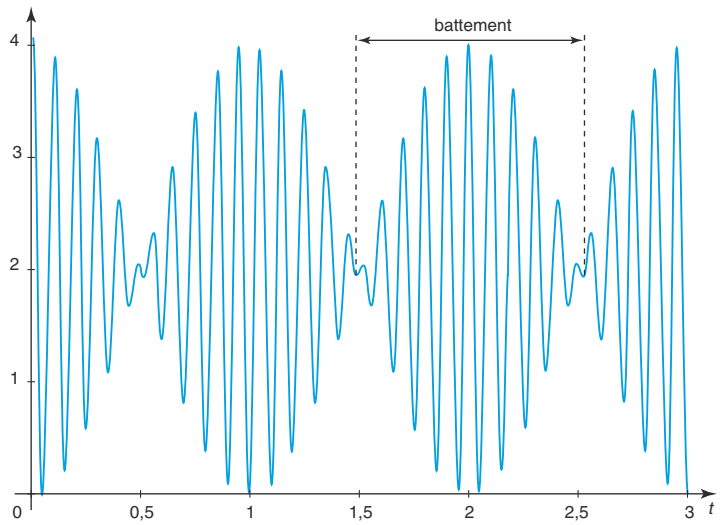
© Nathan, *classe prépa*

2 Le signal somme vaut $s(t) = a_0\cos(\omega_1 t) + a_0\cos(\omega_2 t - \phi)$.

$$\boxed{s(t) = 2a_0\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\phi}{2}\right)}$$

On ne peut rien dire de particulier sur le signal somme sauf si les deux pulsations sont proches. Dans ce cas, on peut introduire la pulsation moyenne $\omega_{\text{moyen}} = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ et la différence de pulsation $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{\text{moyen}}$.

Le produit des deux signaux est facile à analyser car les deux cosinus ont des périodes temporelles très différentes, $\cos\left(\omega_{\text{moyen}}t - \dfrac{\phi}{2}\right)$ est un signal rapide de période $\dfrac{2\pi}{\omega_{\text{moyen}}}$ tandis que $\cos\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}t + \dfrac{\phi}{2}\right)$ est un signal lent de période $\dfrac{4\pi}{\Delta\omega} \gg \dfrac{2\pi}{\omega_{\text{moyen}}}$.



On obtient un phénomène dit de battements. Le signal rapide a son amplitude modulée par le signal lent. Il apparaît une période nouvelle, celle des battements, moitié de celle du signal lent.

3 $\underline{s}_1 = a_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{s}_2 = a_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ d'où $\underline{s}(t) = a_0 e^{i\omega t} + a_0 e^{i(\omega t - \phi)}$.

$\underline{s}(t) = a_0(1 + e^{-i\phi})e^{i\omega t}$.

On repasse en réels et on trouve $s(t) = a_0\cos\omega t(1+\cos\phi) + a_0\sin\omega t\sin\phi$.

Comparons à

$$s(t) = 2a_0\cos\frac{\phi}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) = 2a_0\cos\frac{\phi}{2}\cos(\omega t)\cos\frac{\phi}{2} + 2a_0\cos\frac{\phi}{2}\sin(\omega t)\sin\frac{\phi}{2}.$$

$s(t) = 2a_0\cos^2\dfrac{\phi}{2}\cos(\omega t) + 2a_0\cos\dfrac{\phi}{2}\sin\dfrac{\phi}{2}\sin(\omega t)$ ce qui donne bien le même résultat.

© Nathan, *classe prépa*

Calculons la moyenne temporelle du signal somme au carré :

$$\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\underline{s}(t)\,\underline{s}^*(t) = \frac{1}{2}a_0(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}a_0(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{1}{2}a_0^2(2+2\cos\phi)$$

$$\boxed{\langle s^2(t)\rangle = 2a_0^2\cos^2\frac{\phi}{2}}$$

Pour l'addition de deux signaux, l'utilisation des complexes n'est pas plus rapide mais pour le calcul de l'intensité ou pour l'addition de N signaux avec $N > 2$, l'utilisation des complexes s'avère particulièrement efficace.

4 $\underline{s}(t) = a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\phi)} + a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-2\phi)} + a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-3\phi)}$

$= a_0(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\phi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$

La parenthèse est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$.

$$\underline{s}(t) = a_0\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\phi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = a_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$= a_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\phi}{2}}\left(\frac{\sin 2\phi}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Calculons la moyenne temporelle du signal somme :

$$\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\underline{s}(t)\,\underline{s}^*(t) = \frac{1}{2}a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\phi}{2}}\left(\frac{\sin 2\phi}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)a_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\phi}{2}}\left(\frac{\sin 2\phi}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a_0^2\left(\frac{\sin 2\phi}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)^2$$

Pour le calcul de la moyenne temporelle du carré du signal, il est aussi avantageux de calculer le signal réel $s(t)$.

On trouve : $\boxed{s(t) = \mathrm{Re}(\underline{s}(t)) = a_0\cos\left(\omega t - \frac{3\phi}{2}\right)\left(\frac{\sin 2\phi}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)}$

il est alors immédiat que $\boxed{\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}a_0^2\left(\frac{\sin 2\phi}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)^2.}$

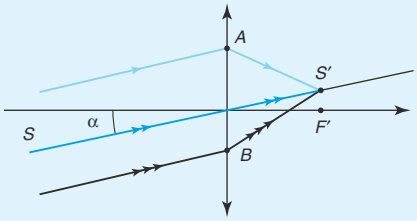
en conclusion

Il faut connaître les formules trigonométriques et prendre garde aux déphasages. Pour sommer des signaux de même pulsation mais déphasés, il vaut mieux utiliser les complexes.

© Nathan, *classe prépa*

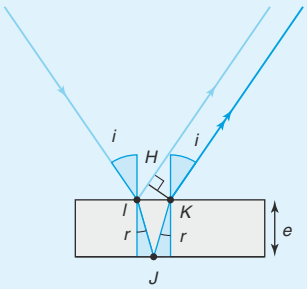
2 – Calculs de chemins optiques

1 Soient une source S à l'infini et une lentille convergente, l'image de la source est en S' dans le plan focal image de la lentille. Calculer la différence de chemin optique $(SA)-(SB)$ puis $(AS')-(BS')$ en fonction de l'angle α et de la distance AB. Les points A et B sont situés à l'entrée de la lentille (milieu d'indice n).



2 Calcul du chemin optique pour une lame d'indice n et d'épaisseur e, plongée dans l'air

Soit une lame d'indice n et d'épaisseur e, un rayon incident (angle d'incidence i) soit se réfléchit sur la face d'entrée de la lame et donne le rayon 1 (simple flèche) soit pénètre dans la lame (transmission, angle r) et peut se réfléchir sur la face de sortie et être transmis par la face d'entrée pour donner le rayon 2 (double flèche). Les deux rayons émergents sont parallèles.

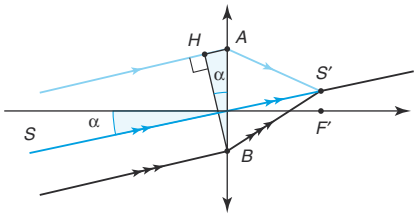


Calculer la différence de marche au point M à l'infini entre les deux parcours dans la lame définie par $\delta = (IM)_2 - (IM)_1$ en fonction de n, e et $\cos r$.
Si la lame est une lame d'air, qu'en concluez-vous ? Que vaut δ ?

résolution méthodique

1 La source S étant à l'infini, elle correspond à une onde plane donc les surfaces d'onde sont des plans (voir figure ci-desous). Calculons $(SA)-(SB)$ dans l'air : $(SA)-(SB) = SA - SB = SH + HA - SB = HA$ car $SH = SB$, H et B appartiennent au même plan d'onde. $HA = AB\sin\alpha$ d'où $(SA)-(SB) = AB\sin\alpha$.

© Nathan, *classe prépa*



Remarquons que $(SAS') = (SBS')$ car la lentille conjugue S avec S'.
$(SA) + (AS') = (SB) + (BS')$
donc $(AS') - (BS') = (SB) - (SA) = SB - SA = -AB\sin\alpha$.

Attention, $(AS') \neq AS'$ car une partie du trajet est dans la lentille d'indice n.

2 Calculons la différence de marche au point M à l'infini :
$\delta = (IM)_2 - (IM)_1 = (IJKM) - (IHM)$.

Attention, les deux réflexions n'étant pas de même nature (une réflexion en I air sur lame et l'autre en J lame sur air avec $n \neq 1$), il faut ajouter un déphasage supplémentaire de π donc $\frac{\lambda}{2}$ dans la différence de marche.

$\delta = nIJ + nJK + KM - IH - HM + \frac{\lambda}{2} = 2nIJ - IH + \frac{\lambda}{2}$ car $IJ = JK$ et $KM = HM$, en effet K et H appartiennent à la même surface d'onde.

$IJ = JK = \frac{e}{\cos r}$ et $IH = IK\sin i = 2e\tan r\sin i$ avec $\sin i = n\sin r$.

$\delta = \frac{2ne}{\cos r} - \frac{2e\sin r\sin i}{\cos r} + \frac{\lambda}{2} = \frac{2ne(1-\sin^2 r)}{\cos r} + \frac{\lambda}{2}$ d'où $\boxed{\delta = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2}}$

Si la lame est d'air, il n'y a plus de réfraction sur les faces de la lame et $i = r$.

$$\boxed{\delta = 2e\cos i}$$

Ce cas paraît sans intérêt. Nous verrons dans le chapitre **3** comment fabriquer une lame d'air.

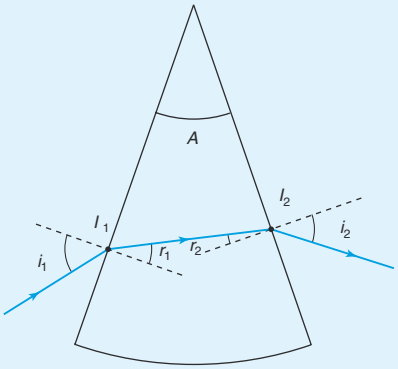
en conclusion

Dans l'air, les chemins optiques s'identifient aux distances. Dans un milieu d'indice n, il faut non seulement tenir compte de l'indice du milieu mais aussi de la réfraction et d'un éventuel chemin optique supplémentaire $\frac{\lambda}{2}$ dû à une réflexion sur un milieu plus réfringent.

© Nathan, *classe prépa*

3 – Mesure de l'indice du verre d'un prisme
(d'après CCP)

On considère un prisme d'angle A, transparent, homogène et isotrope d'indice n plongé dans l'air d'indice 1. Les angles apparaissent sur la figure et correspondent aux conventions usuelles. Le rayon incident vient du côté de la base.
Vue en coupe du prisme perpendiculairement à son arête.



Partie A – Calculs préliminaires

1 Montrer qu'un rayon incident pénètre forcément dans le prisme. Écrire les lois de Descartes aux points I_1 et I_2.

2 Montrer la relation entre A, r_1 et r_2. Définir l'angle de déviation, noté D, et l'exprimer en fonction de A, i_1 et i_2.

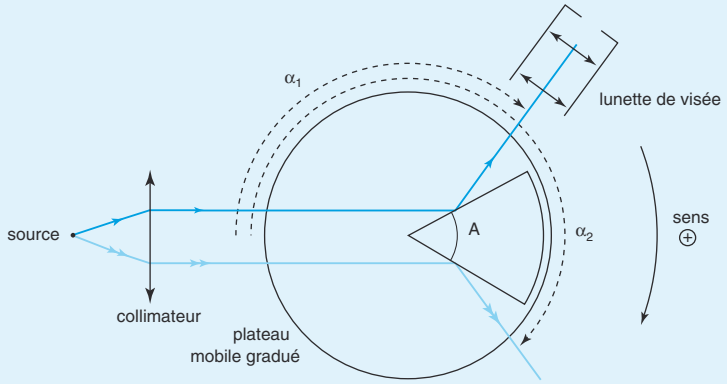
3 On constate expérimentalement que l'angle D prend une valeur minimale D_m lorsqu'on fait varier l'angle d'incidence i_1. Montrer que lorsque $D = D_m$ alors $i_1 = i_2 = i_m$ et $r_1 = r_2$.

Démontrer que l'indice n est donné par la relation $n = \dfrac{\sin \dfrac{A + D_m}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}$.

Partie B – Application à la mesure de l'indice du verre d'un prisme

La technique du minimum de déviation permet de mesurer expérimentalement l'indice du verre d'un prisme. Cette mesure est effectuée à l'aide d'un goniomètre constitué d'un plateau mobile gradué en degrés et en minutes, sur lequel est placé le prisme. Un collimateur, constitué d'une source lumineuse ponctuelle monochromatique, placé au foyer objet d'une lentille convergente, permet d'envoyer sur le prisme un faisceau de rayons lumineux parallèles. Une lunette de visée (autocollimatrice), réglée à l'infini et placée sur un bras mobile, permet l'observation des faisceaux émergent ou réfléchi.

© Nathan, *classe prépa*

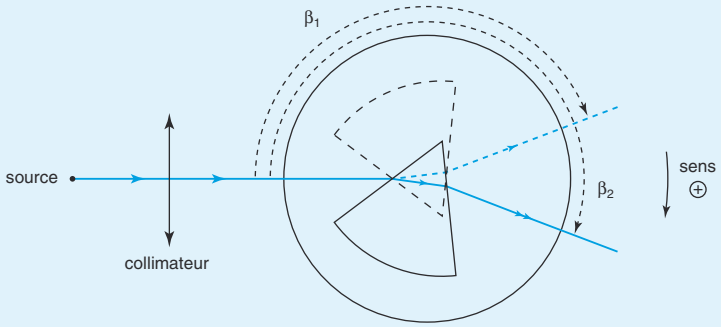


4 *Mesure de l'angle* A *du prisme*

Le prisme est placé vis-à-vis du collimateur de manière à ce que ses deux faces reçoivent à peu près autant de lumière (voir figure ci-dessus). Avec le viseur, on relève les angles α_1 et α_2 des faisceaux réfléchis par les deux faces. Exprimer A en fonction de α_1 et α_2.

Expérimentalement, on relève $\alpha_1 = 119° \, 58'$ et $\alpha_2 = 240° \, 04'$. Calculer A.

5 *Mesure de* D_m



On dispose l'ensemble plateau-prisme de manière à observer le minimum de déviation ; on relève alors l'angle β_1 indiqué sur la figure ci-dessus. On recommence la même opération en faisant entrer le faisceau incident par l'autre face du prisme, on relève alors l'angle β_2 indiqué sur la figure. Exprimer D_m en fonction de β_1 et β_2.

Expérimentalement, on relève $\beta_1 = 218° \, 42'$ et $\beta_2 = 141° \, 16'$. Calculer D_m.

6 *Mesure de l'indice*

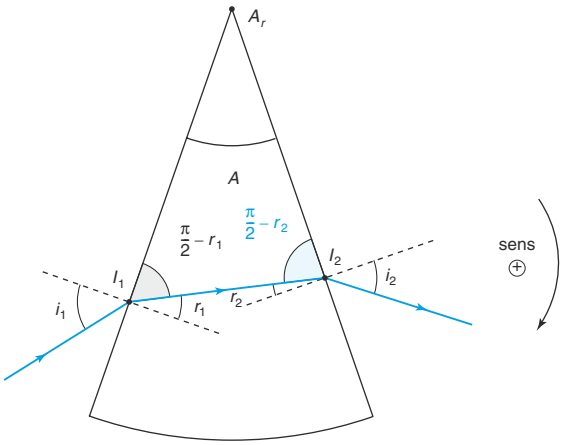
En déduire l'indice n du verre utilisé pour fabriquer le prisme. On considère que l'erreur de mesure est identique pour les angles A et D_m, $\Delta A = \Delta D_m = 2'$. En déduire l'incertitude absolue sur la mesure de n.

© Nathan, *classe prépa*

résolution méthodique

Partie A

1



L'indice du prisme étant supérieur à 1 et $0 \leqslant i_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $n \sin r_1 = \sin i_1$ et pour $i_1 = \frac{\pi}{2}$, $\sin r_1 = \frac{1}{n}$ forcément $0 \leqslant r_1 \leqslant \arcsin \frac{1}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc le rayon pénètre dans le prisme.

On applique les lois de Descartes : $\sin i_1 = n \sin r_1$ et $n \sin r_2 = \sin i_2$.

2 Dans le triangle $I_1 I_2 A_r$ (le point A_r est la projection de l'arête du prisme dans le plan de coupe, voir figure ci-dessus, la somme des angles est $\frac{\pi}{2} - r_1 + \frac{\pi}{2} - r_2 + A = \pi$ d'où $r_1 + r_2 = A$.

Par définition de la déviation, $D = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - A$ avec les conventions de signe de la figure.

Retenir : pour une réfraction, le rayon dévie de $i - r$ avec i l'angle d'incidence et r l'angle réfracté.

3 Le problème est symétrique par rapport aux indices 1 et 2 en vertu du principe du retour inverse de la lumière donc s'il existe un extremum de déviation D_m pour $i_1 = i_m$ alors nécessairement pour $i_2 = i_m$ la déviation est extrémale dans le trajet inverse. Nécessairement $D_{\text{inverse}} = D$ donc cet extremum existe et il est obtenu pour $i_1 = i_2 = i_m$. L'expérience montre que c'est un minimum.

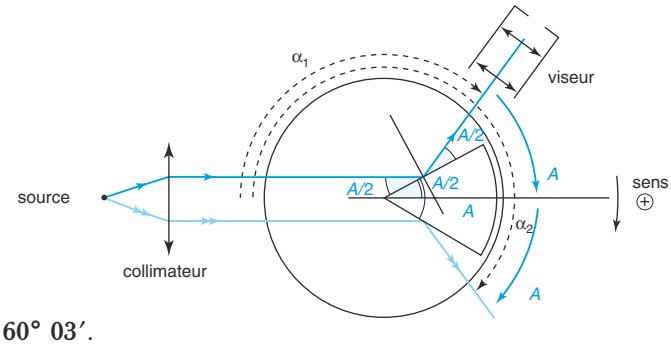
On trouve de suite $i_m = \frac{A + D_m}{2}$ et $r_m = \frac{A}{2}$. Or $\sin i_m = n \sin r_m$:

$$\boxed{n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}}$$

© Nathan, *classe prépa*

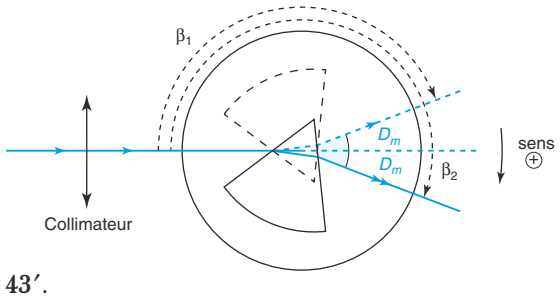
Partie B

4 On voit sur la figure ci-dessous que $\alpha_2 - \alpha_1 = 2A$. Si l'angle d'incidence est $\frac{A}{2} + \varepsilon$, le résultat est inchangé ($\frac{A}{2} - \varepsilon$ sur l'autre face).



A.N. : $A = \mathbf{60° \ 03'}$.

5 On voit sur la figure ci-dessous que $\boxed{\beta_2 - \beta_1 = 2D_m}$



A.N. : $D_m = \mathbf{38° \ 43'}$.

6

$$\boxed{n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}} \qquad \text{A.N. : } n = \mathbf{1{,}517\ 02}.$$

Différentions l'expression de n en fonction des variables A et D_m.

$$\ln n = \ln \sin \frac{A + D_m}{2} - \ln \sin \frac{A}{2}$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\left(\sin \frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin \frac{A + D_m}{2}} - \frac{d\left(\sin \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \left(\frac{\cos \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A + D_m}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}A + \mathrm{d}D_m}{2} - \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}A}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \left(\operatorname{cotan} \frac{A + D_m}{2} - \operatorname{cotan} \frac{A}{2}\right)\frac{\mathrm{d}A}{2} + \left(\operatorname{cotan} \frac{A + D_m}{2}\right)\frac{\mathrm{d}D_m}{2}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \left|\operatorname{cotan} \frac{A + D_m}{2} - \operatorname{cotan} \frac{A}{2}\right|\frac{\Delta A}{2} + \left|\operatorname{cotan} \frac{A + D_m}{2}\right|\frac{\Delta D_m}{2}$$

A.N. : $\frac{\Delta n}{n} = 5 \cdot 10^{-4}$ d'où $\Delta n = 7{,}3 \cdot 10^{-4}$. Finalement, $n = \mathbf{1{,}517\ 0 \pm 0{,}000\ 7}$.

© Nathan, *classe prépa*

1 * 10 min

➤ Corrigé p. 34

Miroir concave

Un miroir sphérique concave de diamètre $d = 40$ cm et de distance focale $f = 1$ cm est éclairé par un disque lumineux de diamètre $d' = 4$ cm placé dans son plan focal. Déterminer la position du point de l'axe qui reçoit des rayons provenant de tous les points du miroir. On suppose que le disque n'empêche pas de voir le miroir.

2 * 10 min

➤ Corrigé p. 34

Lentille

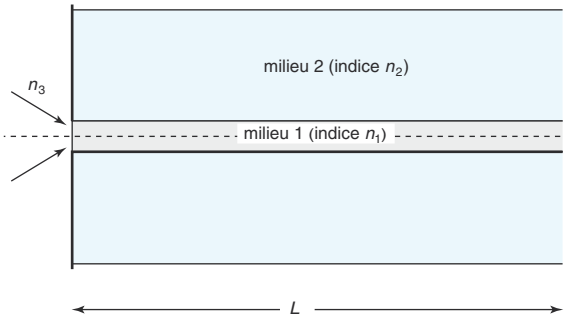
Un système centré donne d'un objet réel AB une image réelle $A'B'$ située sur l'écran perpendiculaire à l'axe du système.
On intercale une lentille entre l'écran et le système. On obtient alors une image $A''B''$ deux fois plus grande et de même sens sur l'écran, qu'il a fallu reculer de d (20 cm).
Déterminer la nature de la lentille, sa position et sa distance focale.

3 * 20 min

➤ Corrigé p. 34

Réflexion totale et réfraction limite Fibres optiques

1. Rappeler les phénomènes de réfraction limite et de réflexion totale.



2. Soit une fibre optique : un milieu d'indice n_1 inséré entre deux milieux d'indice n_2. L'ensemble est placé dans un milieu d'indice n_3 avec la condition $n_1 > n_2 > n_3$. À l'aide d'une lentille L_1, on focalise la lumière émise par une source monochromatique ponctuelle S à l'entrée du milieu 1. On ne considère que les rayons qui entrent dans le milieu 1. Données : $n_1 = 1{,}522\,7$, $n_2 = 1{,}520\,0$ et $n_3 = 1{,}000\,0$; $L = 10{,}00$ cm. Calculer l'angle d'incidence limite i_ℓ d'un rayon à l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2 pour que la lumière ne sorte pas du milieu 1.

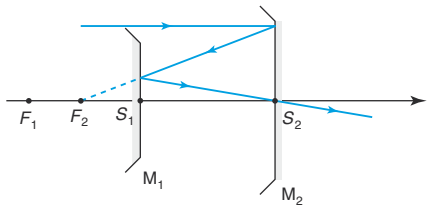
3. En déduire l'angle formé, à l'entrée du milieu 1, par les 2 rayons les plus inclinés par rapport à l'axe et qui seront guidés par ce même milieu. Même question pour les rayons en sortie.

4. Dans le cas où la lumière arrive à l'entrée du milieu 1 sous forme d'impulsions de durée 1 ns, calculer l'allongement de ces impulsions en sortie du guide.

4 ** 30 min

➤ Corrigé p. 35

Télescope de Cassegrain



On associe deux miroirs sphériques comme indiqué sur la figure ; on dit que les deux miroirs sont montés en Cassegrain. Le miroir M_1 convexe a un rayon $R_1 = 4{,}465$ m, le miroir M_2 concave a un rayon $R_2 = 19{,}972$ m et leurs sommets sont distants de $S_1S_2 = 8{,}184$ m (données du télescope du pic du midi).

1. Montrer que pour avoir une image définitive réelle, il faut nécessairement que F_2 soit entre F_1 et S_1. Quelle est l'image d'un objet à l'infini dans une direction parallèle à l'axe par ce système ?

2. À quel élément d'optique simple se ramène un tel système ? Calculer ses caractéristiques. On calculera la taille de l'image définitive pour un objet à l'infini de diamètre angulaire α dans les deux cas. $\alpha = 2''$ arc pour les applications numériques.

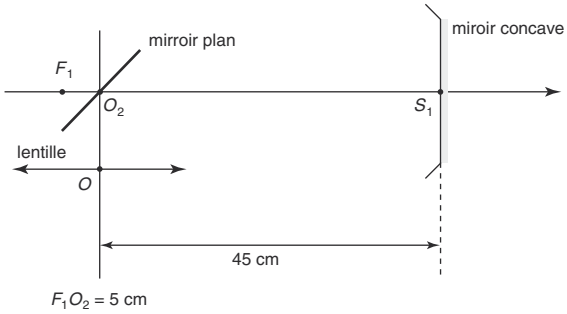
3. Quel est l'avantage d'un tel système par rapport à l'élément d'optique équivalent ?

© Nathan, *classe prépa*

5 ** 20 min

➤ Corrigé p. 35

Télescope de Newton



Il est composé d'un miroir concave M_1 (de sommet S_1 et de distance focale $f_1 = 0{,}5$ m) et d'un miroir plan 2 incliné à 45° par rapport à l'axe optique du miroir M_1, son centre O_2 est à 45 cm de S_1. Enfin, une lentille convergente de centre optique O et de distance focale $f' = 5$ cm avec $OO_2 = 10$ cm. On observe des objets à l'infini dont Jupiter situé à une distance D de la Terre $D = 7 \cdot 10^{11}$ m et de diamètre $d = 1{,}4 \cdot 10^8$ m.

1. Montrer que le système des deux miroirs et de la lentille constitue un système afocal.

2. Quel est le diamètre angulaire de l'image définitive ? On pourra calculer le grossissement du système afocal. L'image est-elle ponctuelle ?

6 ** 30 min

➤ Corrigé p. 36

Grossissement et grandissement linéaire d'un doublet afocal

Donner toutes les associations de deux lentilles minces formant un doublet afocal.
Donner une application pour chaque association. Calculer le grandissement angulaire (ou grossissement) ou le grandissement linéaire selon les cas.

7 ** 40 min

➤ Corrigé p. 37

Viseurs

Un viseur est constitué d'un objectif L_1 (assimilable à une lentille mince convergente de distance focale $f'_1 = 12{,}5$ cm) et d'un oculaire L_2 (assimilable à une lentille mince convergente de distance focale $f'_2 = 4$ cm). La distance D entre les centres optiques O_1 et O_2 des deux lentilles est réglable.

1. On règle D de telle sorte que l'on puisse observer, sans accommodation, les objets à l'infini. Un pinceau lumineux provenant d'un objet à l'infini fait un angle α avec l'axe optique et sort du viseur en faisant un angle α' avec ce même axe. Calculer la distance O_1O_2. Tracer la marche de ce pinceau ; en déduire le grandissement angulaire ou grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$. Que vaut alors le grandissement linéaire γ ? Vérifie-t-on la relation $\gamma G = +1$?

2. On règle maintenant la distance D pour que l'œil d'un observateur, regardant à travers l'oculaire, voit nettement, sans accommoder, un objet AB situé à 20 cm en avant de la face d'entrée de l'objectif. Déterminer la nouvelle valeur de D. L'observateur voit AB sous l'angle α' à travers le viseur. Calculer (en dioptries) la puissance du viseur définie par $P = \dfrac{|\alpha'|}{AB}$.

3. La distance D a la valeur calculée à la question **2.** En accommodant, l'œil peut voir des objets situés au-delà d'une distance minimale $d_m = 20$ cm. Quelle région de l'espace peut voir l'observateur à travers le viseur ? On appellera a la distance entre l'œil et O_2. A.N. pour $a = 0{,}5$ cm, $a = 1$ cm, $a = 2$ cm et le cas limite $a = 0$.

8 ** 40 min

➤ Corrigé p. 37

Appareil photographique

On assimile en première approximation l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente de focale absolue $f' = 50$ mm. Le diamètre du diaphragme correspondant est $\Delta = 2R$. L'ouverture relative de l'objectif est définie par le rapport $\dfrac{\Delta}{f'} = \dfrac{1}{n}$ où n est le numéro de diaphragme.

1. Une bague hélicoïdale permet de faire varier la distance d de l'objectif (L) (de centre optique C) au plan $(\mathcal{P})$ de la pellicule sensible (l'émulsion de la pellicule sensible est de grain $g = 1/100$ mm). Dans quel domaine d doit-il varier pour pouvoir mettre au point depuis l'infini jusqu'à une distance minimale de 1,20 m ?

2. On met au point sur l'infini. Un point objet A sur l'axe, à distance finie AC donne alors sur $(\mathcal{P})$

© Nathan, classe prépa

une tache de diamètre Φ. Calculer la distance minimale A_0C pour que le diamètre de cette tache reste inférieur au grain g de l'émulsion. Calculer A_0C pour $n = 2{,}8$ et $n = 11$.

3. Définir la profondeur de champ. Déterminer la relation des photographes entre profondeur de champ et numéro de diaphragme.

9 ** 60 min

➤ *Corrigé p. 38*

Microscope (d'après CEN)

Un microscope optique permet d'observer des globules sanguins. Il porte les indications suivantes. Sur son objectif : × 40 et sur son oculaire : × 10. La notice constructeur précise : ouverture numérique de l'objectif $\omega_0 = 0{,}65$ et intervalle optique $\Delta = 16$ cm. La signification de ces indications sera précisée dans la suite.
Le microscope sera modélisé par deux lentilles minces convergentes. Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel AB, perpendiculaire à l'axe optique. A étant placé sur l'axe, légèrement en avant du foyer objet de l'objectif. Cette image est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image de l'oculaire. L'œil nu voit nettement des objets situés entre la distance $\delta = 25$ cm et l'infini.

1. Faire un schéma du dispositif (sans respecter l'échelle) et tracer soigneusement la marche de 2 rayons lumineux issus du point B de l'objet AB, l'un émis parallèlement à l'axe optique, l'autre passant par F_1, foyer objet de la lentille L_1 équivalente à l'objectif de centre optique O_1.

a. L'indication portée sur l'oculaire (× 10) est le grossissement commercial, c'est-à-dire le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini d'un objet à travers l'oculaire seul et l'angle sous lequel on voit ce même objet à l'œil nu lorsqu'il est situé à la distance minimale de vision distincte. Déterminer f'_2, distance focale image de l'oculaire.

b. L'intervalle optique correspond à la distance F'_1F_2. La valeur absolue du grandissement de l'objet AB par l'objectif est : × 40. Calculer f'_1, distance focale image de la lentille équivalente à l'objectif. Calculer la distance O_1A permettant de positionner l'objet.

c. Déterminer la latitude de mise au point, c'est-à-dire la variation de la distance O_1A compatible avec une vision nette de l'image finale par l'observateur, dont l'œil est au foyer image de l'oculaire. Interpréter le résultat obtenu.

d. Calculer dans le cas d'une image finale à l'infini le grossissement commercial du microscope.

2. L'ouverture numérique du microscope, ω_0, correspond à $n \sin u$, n indice du milieu dans lequel plonge l'objectif, u angle maximal des rayons issus de A arrivant sur l'objectif. Calculer u pour un objectif plongé dans l'air. Le microscope est-il utilisé dans les conditions de Gauss ? Quel type d'aberrations doit-on corriger ? Quel est l'ordre de grandeur du diamètre de la monture de l'objectif ?

3. Déterminer la position et la taille du cercle oculaire, image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire. Quel est l'intérêt de placer l'œil dans le plan du cercle oculaire ? On serait tenté pour augmenter le grossissement du microscope de prendre un oculaire de grossissement élevé ; est-ce judicieux ? Justifier votre réponse.

4. Pour déterminer le pouvoir séparateur du microscope, on considère que l'objet est un réseau périodique dont la distance entre deux traits est d, éclairé sous incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 586$ nm.

Remarque : Cette question ne peut être abordée qu'après le chapitre **6** « Réseaux ».

a. Établir par des considérations simples la relation donnant les directions dans lesquelles la lumière est transmise par le réseau. Montrer que le premier ordre contient une information sur le pas du réseau utilisé. En déduire une condition sur l'angle maximal du rayon arrivant sur l'objectif pour que cette indication soit transmise par le microscope.
En déduire une relation entre le pouvoir séparateur du microscope, c'est-à-dire la plus petite distance $d_{\min}$ discernable entre deux objets et l'ouverture numérique de l'objectif, pour un objectif plongé dans l'air.

b. Lorsque le pouvoir séparateur est limité par l'objectif, on utilise le critère de Rayleigh qui indique $d_{\min} = 0{,}61\dfrac{\lambda_0}{\omega_0}$. Justifier la différence avec l'expression obtenue précédemment. Quel serait selon vous un moyen d'améliorer le pouvoir séparateur ?

© Nathan, *classe prépa*

c. Quel est l'ordre de grandeur des objets observés ? Le microscope utilisé est-il adapté à l'observation des globules sanguins ? Commenter l'affirmation suivante : « Le microscope est vis-à-vis de la fréquence spatiale l'analogue d'un filtre passe-bas utilisé en électronique » ; quelle serait la fréquence de coupure ?

10 *** 30 min

➤ *Corrigé p. 39*

Arc-en-ciel

Un rayon de lumière monochromatique pénètre dans une boule homogène d'indice n sous l'incidence i, il subit p réflexions partielles à l'intérieur de la boule avant de sortir.

1. Calculer la déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident pour $p = 1$ et généraliser au cas $p > 1$.

2. Montrer que D passe par un extremum quand i varie si $2 > n > 1$, pour $p \geqslant 1$. Calculer la déviation minimale D_m et l'angle i_m correspondant. Application numérique : $n = 4/3$ et $p = 1$.

3. Justifier l'existence de l'arc-en-ciel en prenant une goutte d'eau sphérique et préciser les conditions d'observation : position relative du Soleil et de l'observateur, conditions atmosphériques. Justifier les couleurs de l'arc-en-ciel et leur ordre dans l'arc. Pour $p = 2$, qu'observera-t-on ?

11 *** 10 min

➤ *Corrigé p. 40*

Trois miroirs formant un dièdre

On dispose trois miroirs plans de telle sorte que l'on forme un trièdre rectangle $Oxyz$. Que devient un rayon lumineux après trois réflexions successives sur chacun des trois miroirs ?

© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 Réponse **b.** Les récepteurs usuels dans le visible sont sensibles à la moyenne temporelle du carré du signal reçu à ne pas confondre avec le carré de la moyenne temporelle.

2 Réponse **a.** nAB. La réponse **b.** est fausse car c'est la distance AB. La réponse **c.** est imprécise. Le chemin optique est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant la durée réelle mise pour aller de A vers B.

3 Réponse **c.** Les surfaces d'onde sphériques peuvent être assimilées localement à des plans à très grande distance de la source. Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde donc sont des demi droites issues de S.

4 Réponse **a.** La lentille doit être convergente telle que la distance objet écran $D > 4f'$. Cette condition satisfaite, pour agrandir le plus possible, l'objet doit être le plus près possible du foyer objet mais en avant $\gamma = \dfrac{f'}{f' + \overline{OA}}$ avec $|\overline{OA}| \geqslant f'$. La lentille ne peut pas être divergente car l'objet et l'image sont réels.

5 Réponse **b.** On veut agrandir notre visage, il faut une image virtuelle droite agrandie donc le miroir est concave avec l'objet visage entre le sommet et le foyer (image au *punctum proximum* de l'œil donc les miroirs de maquillage sont conçus pour placer le visage à environ 10 cm du miroir). Voir 1.1.

6 Réponse **c.** On veut une image virtuelle droite **quelle que soit la position de l'objet** donc le miroir est convexe et l'image plus petite. Voir 1.1.

7 L'affirmation **a.** est fausse, l'image est bien inversée mais elle est plus petite. Les calculs donnent un grandissement de $-0{,}5$ ($\gamma = \dfrac{f'}{f' + \overline{OA}}$ avec $\overline{OA} = -1{,}5$ m).
L'affirmation **b.** est fausse. Au fur et à mesure que AB approche de la lentille tant que $|\overline{OA}| \geqslant f'$, l'image $A'B'$ s'éloigne de la lentille.
L'affirmation **c.** est vraie. Pour un grandissement de $-\dfrac{2{,}5}{10} = -\dfrac{1}{4}$, $\gamma = \dfrac{f'}{f' + \overline{OA}}$ avec $\overline{OA} = -5f'$.
L'affirmation **d.** est vraie. Avec $\overline{OA} = -0{,}4$ m
$\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA}f'}{f' + \overline{OA}} = -2$ m donc l'image est bien virtuelle.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 $\phi_{B/O} = \dfrac{2\pi}{\lambda}(d + ne)$ et $\phi_{C/O} = \dfrac{2\pi}{\lambda}(2d + ne)$.
Pour la réflexion en A : $\phi_{O\text{retour}/O} = \dfrac{2\pi}{\lambda}(2d) + \pi$ car la réflexion d'un milieu 1 sur un milieu $n > 1$ introduit un déphasage supplémentaire.
Pour la réflexion en B : $\phi_{A\text{retour}/O} = \dfrac{2\pi}{\lambda}(d + 2ne)$ car la réflexion d'un milieu $n > 1$ sur un milieu d'indice 1 n'introduit pas de déphasage supplémentaire.
De même, $\phi_{O\text{retour}/O} = \dfrac{2\pi}{\lambda}(2d + 2ne)$.

2 La période de $\cos(2\omega t)$ et $\cos^2(2\omega t)$ est :
$T' = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{T}{2}$ donc on fait la moyenne temporelle sur deux périodes du signal, le résultat est le même que sur une période du signal.

$$\boxed{\langle \cos(2\omega t)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \cos^2(2\omega t)\rangle = \frac{1}{2}}$$

La période de $\cos(n\omega t)$, $\cos^2(n\omega t)$, avec n entier strictement positif, est $\dfrac{2\pi}{n\omega} = \dfrac{T}{n}$ donc on fait la moyenne temporelle sur n périodes du signal, le résultat est le même que sur une période du signal.

$$\langle \cos(n\omega t)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \cos^2(n\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$$

3 $\overline{SA} = -0{,}4$ m, $\overline{SC} = 1{,}2$ m et $\overline{AB} = 0{,}3$ m.
$\overline{SA'} = 0{,}24$ m avec la formule des miroirs et $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = 0{,}6$. L'image est donc virtuelle, droite et plus petite $\overline{A'B'} = 0{,}18$ m. On retrouve le rétroviseur.

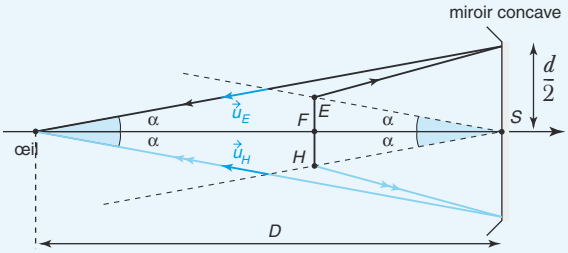
4 $\overline{O_1A} = -1\,200$ m d'où $\overline{O_1A'} = \dfrac{\overline{O_1A}f_1}{f_1 + \overline{O_1A}} = 0{,}1$ m. A' est quasi confondu avec F'.

$\gamma = \dfrac{f_1}{f_1 + \overline{O_1A}} = -8{,}3 \cdot 10^{-5}$, l'image est très petite, renversée, de taille 2 mm. Pour la lentille divergente, l'objet A' est virtuel car $\overline{O_2A'} = 3{,}5$ cm donc $\overline{O_2A''} = \dfrac{\overline{O_2A'}f_2'}{f_2' + \overline{O_2A'}} = 28$ cm et $\gamma = 8$, la taille de l'image finale est de **16 mm**. Elle est toujours renversée. Attention, $f_2' < 0$.

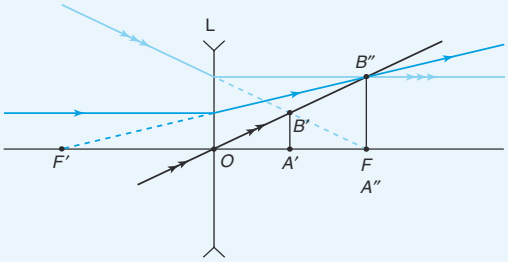
S'entraîner

1 Nous supposons que le disque n'empêche pas de voir le miroir si l'œil est suffisamment loin. Nous construisons l'image des deux extrémités E et H (d'un diamètre du disque) par le miroir concave. Comme le disque est situé dans son plan focal, cela correspond à deux directions de droite $\vec{u}_E$ et $\vec{u}_H$. Chacune fait un angle α avec l'axe optique et $\tan\alpha = \dfrac{d'}{2f}$.

Nous construisons les rayons extrêmes issus de E et H qui se réfléchissent sur les bords du miroir. Nous avons donc $\tan\alpha = \dfrac{d}{2D}$ pour observer toute la surface du miroir éclairée. $D = \dfrac{df}{d'}$. A.N. : $D = \mathbf{10}$ m.



2 $\overline{A''B''} = 2\overline{A'B'}$ d'après l'énoncé et $\overline{A'A''} = d = 20$ cm puisqu'il a fallu reculer l'écran. $\gamma = \dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = 2$ et $\overline{OA''} - \overline{OA'} = d$ d'où $\overline{OA'} = d = 20$ cm et $\overline{OA''} = 40$ cm. L'image $A''B''$ est bien réelle (visible sur un écran) tandis que $A'B'$ est un objet virtuel pour la lentille ajoutée.



La lentille est de distance focale $f' = \dfrac{\overline{OA''}\,\overline{OA'}}{\overline{OA'} - \overline{OA''}}$.

A.N. : $f' = \mathbf{-40\ cm}$. Il s'agit donc bien d'une lentille divergente. On remarque que A'' est confondu avec le foyer objet de la lentille.

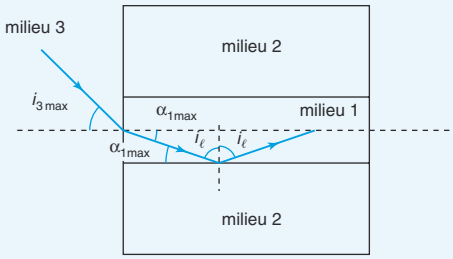
3 **1.** $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Si $n_1 > n_2$, il y a **réflexion totale** pour tout angle d'incidence i_1 tel que $\sin i_1 \geqslant \dfrac{n_2}{n_1}$ ou $i_1 \geqslant i_\ell$, $\arcsin i_\ell = \dfrac{n_2}{n_1}$.

On parle de **réfraction limite** pour l'angle d'incidence i_ℓ car $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Un milieu d'indice n_1 est inséré entre deux milieux d'indice n_2. L'ensemble est placé dans un milieu d'indice n_3 avec la condition $n_1 > n_2 > n_3$. La lumière ne doit pas sortir du milieu. Le phénomène de réflexion totale doit avoir lieu, ce qui est possible si $n_1 > n_2$. A.N. : $i_\ell = \mathbf{1{,}5\ rad = 86{,}6°}$. L'onde peut alors être guidée dans la fibre.

3. $n_3 \sin i_3 = n_1 \sin\alpha_1$ à l'entrée du guide et soit $2i_{3\max}$ l'angle que font les deux rayons les plus inclinés par rapport à l'axe. $\alpha_{1\max} = \dfrac{\pi}{2} - i_\ell$ et $\sin\alpha_{1\max} = \cos i_\ell = \sqrt{1 - \dfrac{n_2^2}{n_1^2}}$

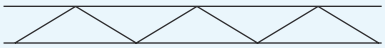
ce qui implique $\sin i_{3\max} = \dfrac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_3}$.



© Nathan, *classe prépa*

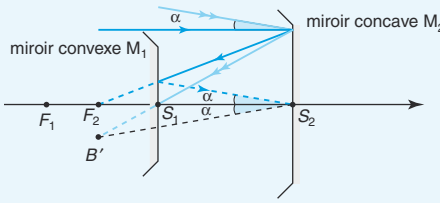
A.N. : $i_{3\max} = 5{,}2°$ donc l'angle formé par les deux rayons les plus inclinés est $2i_{3\max} = \mathbf{10{,}4°}$.
Pour les rayons en sortie, le raisonnement est le même et l'angle formé vaut aussi 10,4°.

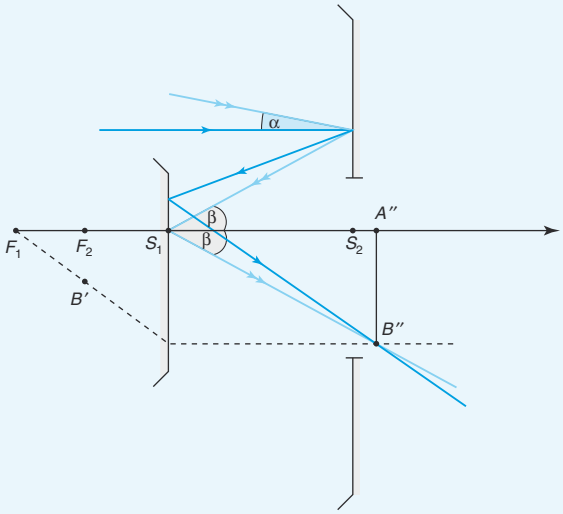
4. L'allongement des impulsions est dû au trajet de longueur variable dans le milieu 1 suivant l'angle α_1 à l'entrée : $0 < \alpha_1 < \alpha_{1\max}$. La durée minimale est pour un trajet L dans la fibre avec $\alpha_1 = 0$: $T_{\min} = \dfrac{n_1 L}{c}$.



La durée maximale est pour un trajet $L_{\max} = \dfrac{L}{\cos\alpha_{1\max}}$ dans la fibre avec $\alpha_{1\max}$: $T_{\max} = \dfrac{n_1 L}{c\cos\alpha_{1\max}}$ d'où un écart temporel $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$.
A.N. : $\alpha_{1\max} = 3{,}4°$, $\Delta T = \mathbf{9 \cdot 10^{-13}\ s} \ll 1$ ns. On peut donc négliger l'allongement de l'impulsion.

4





1. La connaissance des miroirs permet de répondre de manière efficace à la première question. L'objet est réel, à l'infini, dans une direction parallèle à l'axe, donc l'image intermédiaire A' est le foyer F_2 du miroir concave 2. Pour le miroir convexe 1, l'objet doit être virtuel entre F_1 et S_1 afin d'obtenir une image réelle définitive. Nécessairement, F_2 est entre F_1 et S_1.

En effet, la formule des miroirs donne $\dfrac{1}{\overline{SA'}} + \dfrac{1}{\overline{SA}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$. On remarque que, pour un miroir convexe ($\overline{SC} > 0$) et un objet virtuel ($\overline{SA} > 0$), $\overline{SA'} = \dfrac{\overline{SA}\cdot\overline{SC}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}$ donc l'image ne sera réelle que si $\overline{SA'} < 0$, ce qui implique $2\overline{SA} < \overline{SC}$ donc $\overline{SA} < \overline{SF}$.
L'objet virtuel doit être situé entre le sommet et le foyer du miroir convexe.
$A' = F_2$ (voir figure). L'image A'' est telle que : $\dfrac{1}{\overline{S_1A''}} + \dfrac{1}{\overline{S_1F_2}} = \dfrac{2}{\overline{S_1C_1}}$. Attention, le miroir 1 a beau être convexe, étant donné l'orientation des axes, $\overline{S_1C_1} < 0$. Le miroir 2 est concave avec $\overline{S_2C_2} < 0$.
A.N. : $\overline{S_1A''} = \mathbf{9{,}344\ m}$.

2. Le télescope se ramène à une lentille convergente dont il nous faut déterminer la distance focale. Calculons la taille de l'image finale. Le miroir 2 donne $A'B' = f_2\alpha = \dfrac{R_2\alpha}{2}$ et le miroir 1 a un grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$ $\gamma = -\dfrac{\overline{S_1A''}}{\overline{S_1A'}}$. $\overline{S_1A'} = \overline{S_1F_2} = -1{,}802$ m

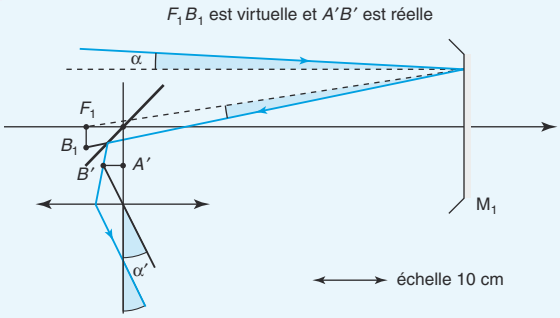
$\gamma = 5{,}19$ $\alpha = 2''\text{arc} = 2\dfrac{\pi}{180\times60\times60} = 9{,}7\cdot10^{-6}$ rad,

Conseil : cette conversion est à savoir faire sans hésitation. $A''B'' = \gamma f_2\alpha = 0{,}5$ mm.

Pour la lentille équivalente, $A''B'' = f'\alpha$ donc une distance focale $f' = 51{,}778$ m. Le centre optique O de la lentille équivalente est tel que $\overline{OA''} = f'$ donc $\overline{S_1O} = \overline{S_1A''} + \overline{A''O} = -42{,}434$ **m**.

3. L'avantage du télescope est un encombrement réduit par rapport à la lentille et l'absence d'aberrations chromatiques (pour une lentille, la distance focale dépend de l'indice du milieu donc de la longueur d'onde tandis que pour le miroir, la distance focale est la même pour toutes les longueurs d'onde).

5



© Nathan, *classe prépa*

1. Le miroir 1 donne d'un objet à l'infini de diamètre angulaire α une image dans son plan focal de taille $f_1\alpha$. $F_1O_2 = A'O_2 = 5$ cm. Le miroir plan 2 fait le symétrique de cette image donc un objet $A'B'$ de taille $f_1\alpha$ situé à 5 cm de la lentille donc dans son plan focal objet. L'image finale est à l'infini. Il s'agit en effet d'un système afocal. On peut remarquer que la lentille joue le rôle d'une loupe dans ce télescope et le miroir plan permet d'observer à 90° de la direction moyenne du faisceau incident.

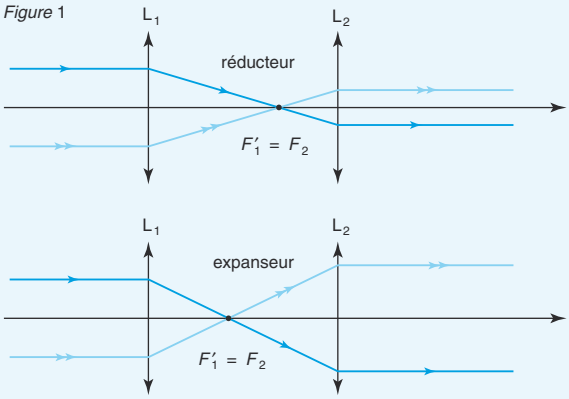
2. Calculons le diamètre angulaire de l'image finale. On a l'objet $A'B'$ de taille $f_1\alpha$ pour la lentille et dans son plan focal objet, l'image finale est vue sous l'angle $\alpha' = \dfrac{f_1\alpha}{f'}$.

Le grossissement est donc $\dfrac{f_1}{f'}$ qui vaut 10. Le diamètre angulaire de Jupiter vaut $\dfrac{1{,}4 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{11}} = 2 \cdot 10^{-4}$ rad donc le diamètre angulaire de l'image finale vaut **$2 \cdot 10^{-3}$ rad** $> 3 \cdot 10^{-4}$ rad et l'œil verra une image non ponctuelle.

6 Pour réaliser un doublet afocal avec deux lentilles L_1 et L_2, il faut que $F'_1 = F_2$.

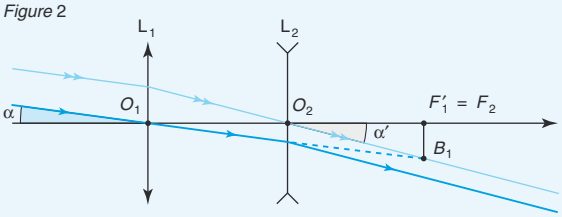
On peut associer deux lentilles convergentes (voir figure 1) avec $O_1O_2 = f'_1 + f'_2$, l'utilisation pratique est l'expanseur ou réducteur de faisceau selon les valeurs de focale. Sur la figure, on voit que le grandissement vaut en valeur absolue $\dfrac{f'_2}{f'_1}$. Cette association renverse les objets et les angles.

Figure 1



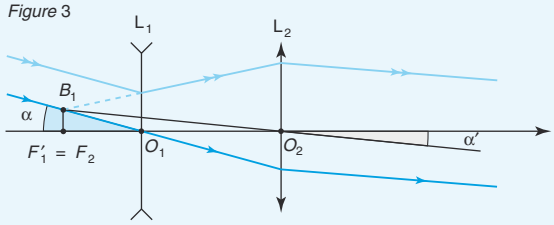
On peut associer une lentille convergente et une lentille divergente. Si la lentille convergente est en premier (association 1 avec $O_1O_2 = f'_1 + f'_2$ et $f'_2 < 0$), le grossissement sera supérieur à 1 et si la lentille convergente est en second (association 2 avec $O_1O_2 = f'_1 + f'_2$ et $f'_1 < 0$), il sera inférieur à 1. L'association 1 correspond à la lunette de Galilée qui grossit sans renverser (voir figure 2). L'association 2 ne renverse pas mais ne grossit pas (voir figure 3) donc n'a aucun intérêt comme lunette astronomique.

Figure 2



La lentille de Galilée grossit mais ne renverse pas.

Figure 3



Cette lunette ne renverse pas mais ne grossit pas.

Enfin, l'association de deux lentilles divergentes ne peut pas réaliser un doublet afocal car $F'_1 \neq F_2$.

Intéressons-nous à la réalisation d'une lunette de Galilée. Nous avons construit sur la figure les rayons émergents correspondant à deux incidents venant de l'infini et faisant un angle α avec l'axe optique (objet à l'infini). Les rayons émergents font un angle α' avec l'axe optique et correspondent bien sûr à une image à l'infini car le doublet est afocal.

Explication de la construction : le rayon simple flèche passe par le centre optique de L_1 et n'est donc pas dévié. L'image de B à l'infini par L_1 est B_1, intersection du rayon avec le plan focal image de L_1. Le rayon double flèche doit entre L_1 et L_2 converger vers B_1. Après L_2, comment avoir la direction des rayons émergents ? On a choisi le rayon double flèche passant par O_2 et B_1, il n'est donc pas dévié par L_2. On obtient ainsi la direction α' des rayons émergents.

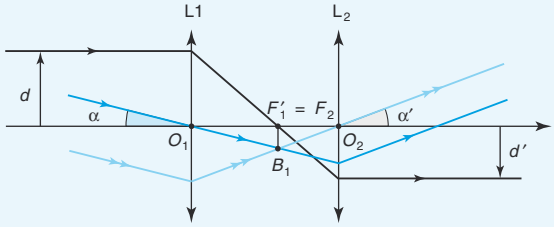
Pour calculer le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f'_1}{f'_2}$, utilisons les triangles $O_1F'_1B_1$ et $O_2F'_1B_1$. $G = \dfrac{\dfrac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}}{\dfrac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}}} = -\dfrac{f'_1}{f'_2}$.

Conclusion : quelle que soit l'association :

$$\boxed{\gamma = -\frac{f'_2}{f'_1} \text{ et } G = -\frac{f'_1}{f'_2}}$$

© Nathan, *classe prépa*

7



1. On a forcément $D = O_1O_2 = f'_1 + f'_2$ pour réaliser un doublet afocal (voir figure ci-dessus). Sur la figure, on peut calculer $G = \dfrac{\dfrac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}}{\dfrac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}}} = -\dfrac{f'_1}{f'_2}$. Quant au grandissement linéaire, il ne peut être défini que pour un objet à distance finie de taille d. On retrouve le montage réducteur ou expanseur de faisceau :

$\gamma = \dfrac{d'}{d} = -\dfrac{f'_2}{f'_1}$. Voir la figure 1 de l'exercice 6.

On vérifie $\gamma G = +1$.

2. L'œil d'un observateur, regardant à travers l'oculaire, voit nettement, sans accommoder, un objet AB situé à 20 cm en avant de la face d'entrée de l'objectif. On a donc réglé $D = O_1O_2$ de telle sorte que l'image finale $A'B'$ soit à l'infini et l'image intermédiaire A_1B_1 (antécédent de $A'B'$) soit conjugué et de l'objet initial AB. $A_1 = F_2$, $\overline{O_1A} = -20$ cm et $\overline{O_1A_1} = D - f'_2$.

$\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{\overline{O_1F'_1}} = \dfrac{1}{f'_1}$, on en déduit

$\overline{O_1A_1} = D - f'_2 = 33{,}3$ cm et $D = 37{,}3$ cm.

Le grandissement de la première lentille vaut

$\gamma = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = -1{,}66$.

$P = \dfrac{|\alpha'|}{AB}$ avec $|\alpha'| = \dfrac{A_1B_1}{f'_2}$. $\boxed{P = \dfrac{\gamma}{f'_2}}$

A.N. : P = **41,6 δ**.

3. Quelle région de l'espace peut voir l'observateur à travers le viseur ? Appelons O l'œil, notons $a = O_2O$. L'oeil peut voir les antécédents donnant des images finales entre le *punctum proximum* (à d_m) et le *punctum remotum* (à l'infini). On part de $\overline{O_2A'}$ pour en déduire $\overline{O_2A_1}$ puis $\overline{O_1A_1}$ et enfin $\overline{O_1A}$. A' est virtuel.

$a - d_m < \overline{O_2A'} < \infty$, il en résulte que :

$-f'_2 < \overline{O_2A_1} < \overline{O_2A_0}$ et que $D - f'_2 < \overline{O_1A_1} < \overline{O_1A_0}$;

A_0 étant l'antécédent de A'_0 tel que $a - d_m = \overline{O_2A'_0}$. Remarquons que A'_0 est virtuel car $a < d_m$.

$\dfrac{1}{\overline{O_2A'_0}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_{1,0}}} = \dfrac{1}{\overline{O_2F'_2}} = \dfrac{1}{f'_2}$ ce qui donne

$\overline{O_2A_{1,0}} = \dfrac{f'_2(a - d_m)}{f'_2 - a + d_m}$ d'où $\overline{O_1A_1} = \overline{O_2A_1} + D$.

A.N. : Pour $a = 0{,}5$ cm, $\overline{O_2A_{1,0}} =$ **−3,32 cm** et $\overline{O_1A_{1,0}} =$ **34,01 cm**.

$\overline{O_1A_0} = \dfrac{f'_1\overline{O_1A_1}}{f'_1 - \overline{O_1A_1}}$, $\overline{O_1A_0} =$ **−19,76 cm**.

Pour $a = 1$ cm, $\overline{O_2A_{1,0}} =$ **−3,30 cm** et $\overline{O_1A_{1,0}} =$ **34,03 cm**. $\overline{O_1A_0} =$ **−19,76 cm**.

Pour $a = 2$ cm, $\overline{O_2A_{1,0}} =$ **−3,27 cm** et $\overline{O_1A_{1,0}} =$ **34,06 cm**. $\overline{O_1A_o} =$ **−19,75 cm**.

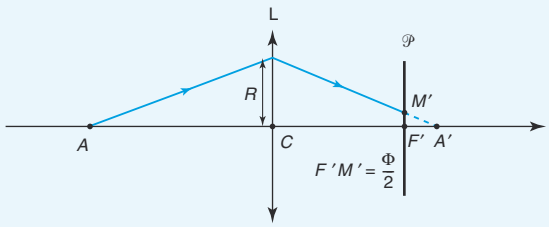
Pour $a = 0$ cm, $\overline{O_2A_{1,0}} =$ **−3,33 cm** et $\overline{O_1A_{1,0}} =$ **34,00 cm** et $\overline{O_1A_0} =$ **−19,77 cm**.

Pour $a = 0$ cm, l'œil est collé à l'oculaire, l'œil peut voir une région qui va de 20 cm à 19,8 cm en avant de la face d'entrée de l'objectif. Cette plage est appelée la latitude de mise au point du viseur. Si $a > 0$ cm, la latitude de mise au point augmente légèrement ce qui n'est pas un avantage. On a intérêt à ce qu'elle soit la plus petite possible afin de minimiser l'erreur de mesure faite quand on effectue des pointés en optique avec un viseur. Le viseur décrit ici est millimétrique. Il existe des viseurs submillimétriques voire micrométriques mais leur prix est nettement plus élevé.

© Nathan, *classe prépa*

8

1. Soit A un point objet, on veut que $-\infty < \overline{CA} < -1{,}20$ m, on en déduit $f' = 5$ cm $< \overline{CA'} < 5{,}2$ cm (calculé avec $\overline{CA'} = \dfrac{f'\overline{CA}}{f' + \overline{CA}}$) donc 5 cm $< d < 5{,}2$ cm.



2. On met au point sur l'infini donc la pellicule ($\mathcal{P}$) est dans le plan focal image de l'objectif. Un point objet A donne un point image A' et cela forme sur la pellicule une tache de diamètre Φ (voir figure ci-dessus).

$$\Phi = 2R\frac{\overline{F'A'}}{\overline{CA'}} = 2R\frac{\overline{CA'} - f'}{\dfrac{f'\overline{CA}}{f' + \overline{CA}}} = 2R\frac{\dfrac{f'\overline{CA}}{f' + \overline{CA}} - \dfrac{f'(f' + \overline{CA})}{f' + \overline{CA}}}{\dfrac{f'\overline{CA}}{f' + \overline{CA}}}$$

$$= -\frac{2Rf'^2}{f'\overline{CA}} = -2R\frac{f'}{\overline{CA}} = 2R\frac{f'}{\overline{AC}}.$$

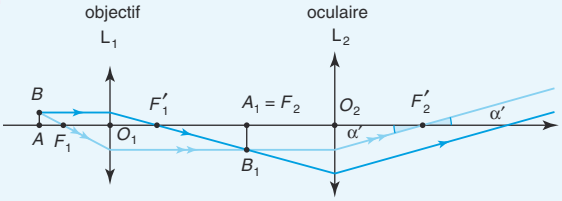
$\Phi < g \Rightarrow AC > A_0C$, $A_0C = 2R\dfrac{f'}{g} = \dfrac{f'^2}{ng}$ en remplaçant $2R$ par $\dfrac{f'}{n}$.

A.N. : pour $n = 2{,}8$, $A_0C =$ **89 m** et pour $n = 11$, $A_0C =$ **22,7 m**.

3. Plus la distance A_0C est petite, meilleure est la profondeur de champ. En effet, quand on met au point sur l'infini, tous les points objets A tels que $AC > A_0C$ seront vus nets sur l'image. $nA_0C = \dfrac{f'^2}{g} =$ constante.

La relation des photographes permet de choisir le numéro de diaphragme en fonction de la profondeur de champ souhaitée. Si on ouvre le diaphragme, R augmente, le numéro n diminue, plus de lumière entre dans l'appareil mais A_0C augmente et cela fait diminuer la profondeur de champ. Inversement, si on souhaite augmenter la profondeur de champ, il faut fermer le diaphragme et moins de lumière entrera dans l'appareil.

9



1. Sur le schéma du dispositif (attention l'échelle n'est pas respectée), commentons la marche des 2 rayons lumineux issus du point B de l'objet AB, l'un émis parallèlement à l'axe optique (simple flèche), l'autre passant par F_1 (double flèche), foyer objet de l'objectif. Le premier émerge en passant par F'_1 tandis que le second émerge parallèlement à l'axe. L'intersection des deux rayons donne l'image intermédiaire A_1B_1. Comme le microscope est réglé pour donner une image à l'infini de l'objet réel, nécessairement $A_1 = F_2$. La direction α' de l'image à l'infini est déterminée par le second rayon. Pour l'oculaire, il est incident parallèle à l'axe optique donc il émerge en passant par F'_2.

a. Avec l'oculaire seul et pour un objet AB, $\alpha_c = \dfrac{AB}{f'_2}$ car l'oculaire fonctionne en loupe ; à l'œil nu, $\alpha_0 = \dfrac{AB}{\delta}$; on peut alors calculer le grossissement commercial de l'oculaire seul $G_0 = \dfrac{\alpha_c}{\alpha_0} = \dfrac{\delta}{f'_2}$. A.N. : $f'_2 =$ **2,5 cm**.

b. L'intervalle optique correspond à la distance F'_1F_2. La valeur absolue du grandissement vaut :

$|\gamma| = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{F'_1F_2}{O_1F'_1} = \dfrac{\Delta}{f'_1}$. A.N. : $f'_1 =$ **4 mm**.

Pour positionner l'objet, il faut calculer la distance O_1A telle que l'image définitive soit à l'infini.

$|\gamma| = \dfrac{O_1A_1}{O_1A} = \dfrac{f'_1 + \Delta}{O_1A}$, il en résulte que :

$$\boxed{O_1A = \frac{(f'_1 + \Delta)f'_1}{\Delta}}$$

A.N. : $O_1A =$ **4,1 mm** et $\overline{O_1A} =$ **– 4,1 mm**.

c. Pour déterminer la latitude de mise au point, il faut déterminer les positions de l'objet donnant une image définitive comprise entre le *punctum proximum* (à δ) et le *punctum remotum* (à l'infini) de l'œil emmétrope (normal). L'œil est situé en F'_2. Pour une image finale à l'infini, A est l'antécédent de F_2 par l'objectif. Pour une image finale à δ, δ étant supérieure à f'_2, l'image est virtuelle et $A'F'_2 = \delta$, ce qui nous permet de déterminer la position de l'antécédent par l'oculaire et ensuite par l'objectif.

Les formules de Newton sont particulièrement efficaces dans ce cas. Rappelons-les :

$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{F'O} \cdot \overline{FO} = ff' = -f'^2$ et appliquons-les au microscope. $\overline{F'_2A'} \cdot \overline{F_2A_1} = \overline{F'_2O_2} \cdot \overline{F_2O_2} = -f'^2_2$ et $\overline{F'_1A_1} \cdot \overline{F_1A} = \overline{F'_1O_1} \cdot \overline{F_1O_1} = -f'^2_1$.

Pour une image finale à l'infini, A est l'antécédent de F_2 par l'objectif donc on peut écrire :

$\overline{F'_1F_2} \cdot \overline{F_1A} = -f'^2_1$ et $\overline{F_1A} = -\dfrac{f'^2_1}{\Delta}$

d'où $\overline{O_1A} = -\dfrac{f'^2_1}{\Delta} - f'_1$. On retrouve bien le résultat de la question **1. b.** avec le signe en plus.

Pour une image finale à δ, A_1 est l'antécédent de A' ($A'F'_2 = \delta$) par l'oculaire donc on peut écrire :

$\overline{F'_2A'} \cdot \overline{F_2A_1} = -f'^2_2$ et $\overline{F_2A_1} = \dfrac{f'^2_2}{\delta}$

ainsi que $\overline{F'_1A_1} = \Delta + \dfrac{f'^2_2}{\delta}$.

A est l'antécédent de A_1 par l'objectif donc on peut écrire $\overline{F'_1A_1} \cdot \overline{F_1A} = \overline{F'_1O_1} \cdot \overline{F_1O_1} = -f'^2_1$ et

$\overline{F_1A} = -\dfrac{f'^2_1}{\Delta + \dfrac{f'^2_2}{\delta}}$ et $\overline{O_1A} = -\dfrac{f'^2_1}{\Delta + \dfrac{f'^2_2}{\delta}} - f'_1$.

A.N. : O_1A varie entre – 4,098 5 cm et – 4,1 cm donc de **1,5 · 10⁻³ mm**. La latitude de mise au point d'un micros-

© Nathan, *classe prépa*

cope est donc très précise. Elle est micrométrique d'où la présence d'une vis micrométrique sur le microscope réel pour réaliser la mise au point.

d. Dans le cas d'une image finale à l'infini, le grossissement commercial du microscope est par définition $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. $\alpha' = \frac{A'B'}{f'_2} = \frac{|\gamma| AB}{f'_2}$ et $\alpha = \frac{AB}{\delta}$.

$$G = \frac{\frac{|\gamma| AB}{f'_2}}{\frac{AB}{\delta}} = \frac{|\gamma|\delta}{f'_2} = |\gamma| G_0. \quad \text{A.N. : } G = \mathbf{400}.$$

2. $n \sin u = \omega_0$. A.N. $u = \mathbf{40{,}5°}$. Le microscope n'est donc pas utilisé dans les conditions de Gauss. Il faudra corriger les aberrations sphériques : les rayons issus du point objet A ne convergent pas exactement tous en A', image de A dans les conditions de Gauss. Le diamètre D de la monture de l'objectif doit être de l'ordre de $2O_1A \tan u$ pour des rayons issus de A c'est-à-dire $D = \mathbf{7\ mm}$.

3. Notons O'_1, la position sur l'axe de l'image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire.

Avec la formule de Descartes $\frac{1}{\overline{O_2O'_1}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1}} = \frac{1}{f'_2}$ et avec

$\overline{O_2O_1} = -(\Delta + f'_1 + f'_2)$, nous obtenons

$\overline{O_2O'_1} = \frac{(\Delta + f'_1 + f'_2)f'_2}{\Delta + f'_1}$. A.N. : $\overline{O_2O'_1} = 2{,}9$ cm.

Quant à la taille du cercle oculaire, elle vaut :

$|\gamma_0| D = D\frac{O_2O'_1}{O_1O_2}$. A.N. : **1,1 mm**.

L'ordre de grandeur de la pupille de l'œil est de quelques mm. Si on place l'œil dans le plan du cercle oculaire, on récupère tous les rayons issus de l'objet initial AB. Il est inutile d'augmenter le grossissement de l'oculaire car d'une part, l'œil ne récupère pas tous les rayons et d'autre part, on est limité par le phénomène de diffraction par la monture de l'objectif quand il s'agit du pouvoir séparateur du microscope. On va aborder ce problème dans la question suivante.

4. a. La lumière est transmise par le réseau si les ondes diffractées par les traits sont en phase donc si le déphasage entre deux ondes diffractées par deux traits consécutifs est un multiple de 2π. La formule des réseaux donne en incidence normale : $nd \sin\theta = p\lambda_0$ avec p entier relatif.

Au premier ordre $p = 1$, $\sin\theta_1 = \frac{\lambda_0}{d}$ dans l'air, ce qui nous renseigne sur d, le pas du réseau.

Pour que le microscope transmette cette information, il faut que $\theta_1 \leqslant u$ ou $n \sin\theta_1 = \frac{\lambda_0}{d} \leqslant n \sin u = \omega_0$.

$\boxed{d_{\min} = \frac{\lambda_0}{\omega_0}}$ A.N. avec $\lambda_0 = 586$ nm : $d_{\min} = \mathbf{0{,}9\ \mu m}$.

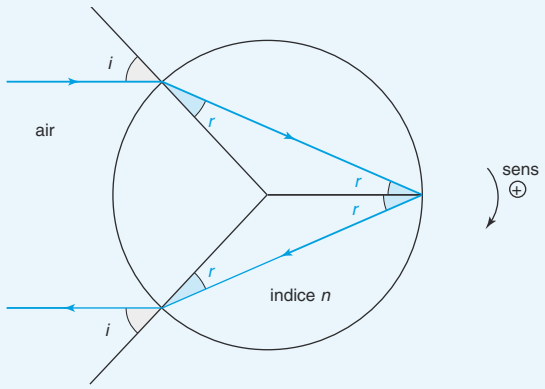
b. Le critère de Rayleigh donne $d_{\min} = 0{,}61\frac{\lambda_0}{\omega_0}$. Il s'agit de la formule de diffraction par une ouverture circulaire. A.N. $d_{\min} = \mathbf{0{,}55\ \mu m}$. En théorie, il faudrait diminuer λ_0 ce qui pose problème dans le visible (on est de toute façon limité à 0,400 µm) et augmenter ω_0 ce qui pose des difficultés techniques, les aberrations sphériques augmentent et cela devient d'autant plus difficile d'y remédier.

c. Un globule sanguin a une taille de l'ordre du µm.

On peut observer des globules sanguins car le pouvoir séparateur est inférieur à leur taille. Le microscope se comporte, en effet, comme un filtre passe-bas pour les fréquences spatiales qui sont l'inverse de longueurs.

On peut définir une fréquence de coupure $\frac{1}{d_{\min}}$ qui correspond à une limite angulaire des rayons entrant dans le microscope par l'objectif. Seuls les rayons peu inclinés (angle $< \theta_1$) entrent dans le microscope.

10



Un rayon de lumière monochromatique pénètre dans une boule homogène d'indice n sous l'incidence i, il subit p réflexions partielles à l'intérieur de la boule avant de sortir.

1. Pour une réflexion partielle à l'intérieur de la boule (voir figure ci-dessus), on va calculer la déviation pas à pas. Compte tenu de l'orientation choisie pour les angles, à l'entrée de la sphère, la réfraction dévie le rayon lumineux de $i - r$. La réflexion à l'intérieur dévie de $\pi - 2r$. La réfraction à la sortie dévie à nouveau de $i - r$. D'où une déviation totale de $D = 2(i - r) + (\pi - 2r)$. Pour p réflexions partielles à l'intérieur de la sphère, la déviation sera $\boxed{D = 2(i - r) + p(\pi - 2r)}$

2. Calculons $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - (p+1)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)$

comme $\sin i = n \sin r$, $\cos i\,\mathrm{d}i = n \cos r\,\mathrm{d}r$

© Nathan, *classe prépa*

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 2\left(1-(p+1)\frac{\cos i}{n\cos r}\right)$$

comme $p \geqslant 1$ et $1 < n < 2$ $\frac{p+1}{n} > 1$.

r est plus petit que i d'où $\cos r > \cos i$; il existe donc une valeur de i qui annule la dérivée.

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{n}{p+1}.$$

Pour calculer la valeur de $i_{m,p}$:

$$\sin^2 i_{m,p} = 1-\cos^2 i_{m,p}$$

$$= 1-\left(\frac{n}{p+1}\right)^2(1-\sin^2 r_{m,p})$$

$$= 1-\left(\frac{n}{p+1}\right)^2+\frac{1}{(p+1)^2}\sin^2 i_{m,p}$$

$$\sin i_{m,p} = \left(\frac{(p+1)^2-n^2}{(p+1)^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où $D_{mp} = p\pi + 2i_{m,p} - 2(p+1)r_{m,p}$

A.N. : Pour $p = 1$, on trouve $i_m = \mathbf{59{,}39°}$ $r_m = \mathbf{40{,}20°}$ $D_m = \mathbf{137{,}98°}$.

3. Après une pluie, on peut considérer que nous avons des gouttes d'eau sphériques dans l'atmosphère. Si le Soleil brille et que l'observateur a le Soleil dans le dos alors on est dans les conditions d'observation d'une déviation minimale. En raison de ce minimum, l'observateur va voir de la lumière concentrée dans un cône de sommet l'œil de l'observateur et de demi-angle au sommet $\pi - D_m$.

Quand la longueur d'onde varie, l'indice du milieu varie en sens inverse donc la déviation sera plus importante pour les grandes longueurs d'onde.

Pour $p = 2$, on peut observer un deuxième arc $(D_2 = 2(i-r)+2(\pi-2r))$ inversé du point de vue des couleurs par rapport au premier (il faut étudier la fonction $D_2(i)$), il est beaucoup moins lumineux mais on l'observe très bien dans de bonnes conditions, c'est-à-dire avec le Soleil en face de l'observateur. Attention, les arcs dits surnuméraires sont dus à des interférences lumineuses.

11 Décomposons le problème. Soit un rayon lumineux de vecteur unitaire $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Pour une réflexion sur le miroir plan Oyz, le rayon réfléchi a pour vecteur unitaire $(-\alpha, \beta, \gamma)$. Pour la deuxième réflexion sur le miroir plan Oxz, le rayon réfléchi a pour vecteur unitaire $(-\alpha, -\beta, \gamma)$. Pour la troisième réflexion sur le miroir plan Oxy, le rayon réfléchi a pour vecteur unitaire $(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -\vec{u}$. Après trois réflexions successives sur les trois miroirs, le rayon repart dans la même direction mais en sens inverse.

Le résultat ne dépend pas de l'ordre des réflexions.

© Nathan, *classe prépa*

2 Interférences à deux ondes en lumière monochromatique

1 Problème théorique à deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

1.1. Deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

Remarque
Le problème primordial de la cohérence temporelle sera abordé au § 2. Le cas de deux signaux de pulsation différente est posé dans l'exercice n° 1 de « S'entraîner ».

Deux sources cohérentes sont **deux sources ponctuelles** (lumineuses en optique) **éternelles de même pulsation ω** notées S_1 et S_2 en relation de **phase constante**.
Elles émettent respectivement deux signaux $s_1(t) = a_{01}\cos\omega t$ et $s_2(t) = a_{02}\cos(\omega t - \phi_0)$ avec le déphasage ϕ_0 constant appelé déphasage à la source de 2 par rapport à 1. Sa constance ainsi que le caractère éternel des deux sources assurent la cohérence temporelle des deux sources de même pulsation.

1.2. Propagation et interférences en un point *M*

Les deux signaux émis par les deux sources se propagent et atteignent le point *M*. Soit c la vitesse de propagation des ondes lumineuses dans le vide, le retard temporel dû à la propagation du signal d'une source *S* jusqu'au point *M* est $\frac{(SM)}{c}$ avec (SM) le chemin optique.
Au point *M*, les deux signaux sont respectivement $s_1(M, t) = a_{01}\cos\omega\left(t - \frac{(S_1M)}{c}\right)$ et $s_2(M, t) = a_{02}\cos\left(\omega\left(t - \frac{(S_2M)}{c}\right) - \phi_0\right)$.
Ils s'additionnent et on obtient un signal d'interférences au point *M* :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = a_{01}\cos\omega\left(t - \frac{(S_1M)}{c}\right) + a_{02}\cos\left(\omega\left(t - \frac{(S_2M)}{c}\right) - \phi_0\right).$$

© Nathan, *classe prépa*

1.3. Formule de Fresnel

L'intensité lumineuse au point M, $I(M)$, et l'éclairement $E(M)$ en M sont proportionnels à la moyenne temporelle du carré de l'amplitude du signal reçu au point M.
On peut utiliser les complexes et ramener toute la différence de phase entre s_1 et s_2 dans le signal s_2 en notant $\boxed{\Phi_{2/1}(M) = \phi_0 + \omega\frac{((S_2M)-(S_1M))}{c}}$ d'où :

$$s(M,t) = a_{01}\cos\omega t + a_{02}\cos(\omega t - \Phi_{2/1}).$$

Remarque
La phase d'un signal n'est pas absolue, elle dépend de la référence choisie. On peut donc choisir s_1 comme référence de phase.

$$I(M) = K\langle s^2(M,t)\rangle = \frac{K}{2}\underline{s}(M,t)\,\underline{s}^*(M,t)$$

$$s(M,t) = a_{01}e^{i\omega t} + a_{02}e^{i(\omega t - \Phi_{2/1})}$$

$$\underline{s}^*(M,t) = a_{01}e^{-i\omega t} + a_{02}e^{-i(\omega t - \Phi_{2/1})}$$

$$I(M) = \frac{K}{2}(a_{01}e^{i\omega t} + a_{02}e^{i(\omega t - \Phi_{2/1})})(a_{01}e^{-i\omega t} + a_{02}e^{-i(\omega t - \Phi_{2/1})})$$

$$I(M) = \frac{K}{2}(a_{01}^2 + a_{02}^2 + 2a_{01}a_{02}\cos\Phi_{2/1})$$

$$I_{01} = \frac{Ka_{01}^2}{2} \quad \text{et} \quad I_{02} = \frac{Ka_{02}^2}{2}$$

$$\boxed{I(M) = I_{01} + I_{02} + 2\sqrt{I_{01}I_{02}}\cos\Phi_{2/1}(M)}$$

$$\boxed{I(M) = 2I_0(1 + \cos\Phi_{2/1}(M)) \text{ si } I_{01} = I_{02} = I_0}$$

Cette formule appelée **formule de Fresnel** fait intervenir I_{01}, intensité reçue au point M avec la seule source S_1, et I_{02}, intensité reçue au point M avec la seule source S_2, le seul terme dépendant de M est le déphasage $\Phi_{2/1}(M)$ entre la vibration lumineuse issue de la source 2 et celle issue de la source 1 arrivant au point M.
Le déphasage est primordial quand on s'intéresse aux interférences entre deux signaux.
On peut aussi noter $\Phi_{2/1}(M) = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\delta_{2/1}(M)$ et faire apparaître **la différence de marche optique au point M** :

$$\boxed{\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)}$$

1.4. Franges d'interférences – Contraste – Forme – Champ d'interférences – Ordre d'interférences

1.4.1. Franges d'interférences dans le champ d'interférences

Remarque
Pour le définir, on construit les rayons marginaux. On le verra dans l'exercice n°6 de « S'entraîner ».

Le **champ d'interférences** est le lieu des points M pouvant être atteints par les deux signaux.
La formule de Fresnel nous permet de comprendre que **l'intensité lumineuse n'est plus répartie uniformément dans l'espace** car elle dépend de la position de M contrairement au cas d'une seule source $I(M) = I_0 = \frac{K}{2}a_0^2$.

Le lieu des points M de même phase est appelé **frange d'interférences**. Pour une même intensité, le lieu des points M est une famille de franges de même phase modulo 2π.
La distance entre deux franges consécutives de même nature est appelée **interfrange**.

© Nathan, *classe prépa*

$\Phi_{2/1}(M)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 2π modulo 2π mais deux cas sont particulièrement intéressants.

- Si $\Phi_{2/1}(M) = 0$ modulo 2π, les interférences sont constructives au point M. L'intensité y est maximale notée I_{max}. On parle de franges brillantes.
- Si $\Phi_{2/1}(M) = \pi$ modulo 2π, les interférences sont destructives au point M. L'intensité y est minimale notée I_{min}. On parle de franges sombres. Si $I_{min} = 0$, on parle de franges noires.

1.4.2. Contraste ou visibilité des franges

Par définition, le contraste ou visibilité des franges est : $\boxed{V = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}}$

$$I_{max} = (\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}})^2 \text{ et } I_{min} = (\sqrt{I_{01}} - \sqrt{I_{02}})^2$$

$$V = 2\frac{\sqrt{\dfrac{I_{02}}{I_{01}}}}{1 + \dfrac{I_{02}}{I_{01}}} \text{ ou } V = 2\frac{\sqrt{\dfrac{I_{01}}{I_{02}}}}{1 + \dfrac{I_{01}}{I_{02}}}$$

Le contraste est maximal et vaut 1 quand $I_{min} = 0$ alors $I_{01} = I_{02}$. Le contraste est nul si $I_{01} \gg I_{02}$ ou $I_{01} \ll I_{02}$.

Conséquence expérimentale : il est primordial d'avoir des intensités I_{01} et I_{02} proches pour conserver un bon contraste donc une bonne visibilité des franges.

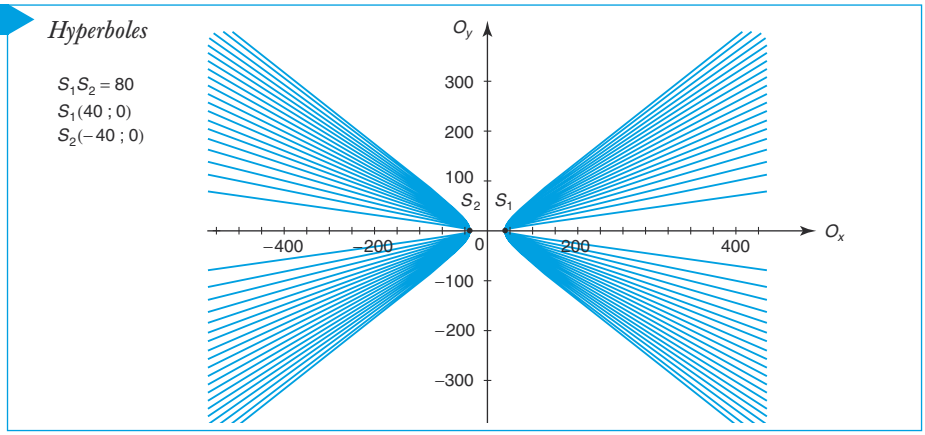
1.4.3. Forme des franges d'interférences

L'équation des franges d'interférences est donnée par $I(M) = \text{constante}$ d'où $\Phi_{2/1}(M) = \text{constante}$ donc $((S_2M) - (S_1M)) = \text{constante}$.

Le système de franges possède la symétrie de révolution par rapport à l'axe S_1S_2. Si le milieu est homogène d'indice n constant, cela correspond à des **hyperboloïdes homofocales de foyers S_1 et S_2**. Dans un plan méridien (donc contenant l'axe S_1S_2), cela correspond à des hyperboles homofocales de foyers S_1 et S_2 (figure 1).

On appelle **frange centrale** la frange qui correspond à $\delta_{2/1}(M) = 0$. La nature de la frange centrale dépend de la valeur de ϕ_0.

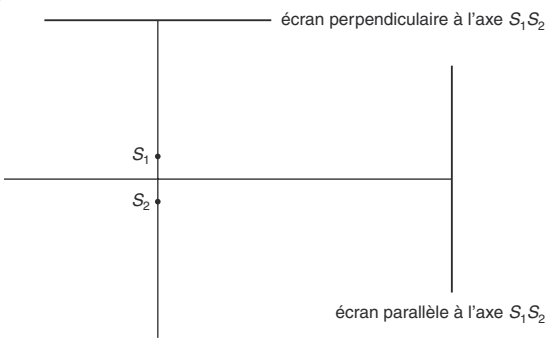
Fig. 1



© Nathan, classe prépa

1.4.4. Projection des franges sur un écran

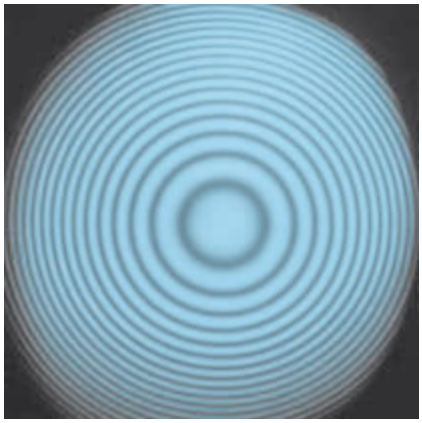
Fig. 2



Si l'écran est perpendiculaire à l'axe S_1S_2, l'intersection des hyperboloïdes avec l'écran est une famille de cercles concentriques d'axe S_1S_2 ; on parle de **franges circulaires ou d'anneaux** (figure 3).

Fig. 3

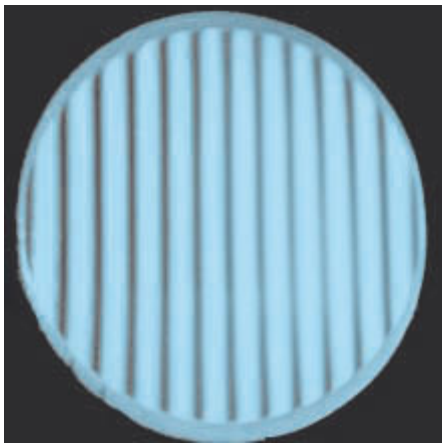
Anneaux



Si l'écran est parallèle à l'axe S_1S_2 mais sans le contenir, l'intersection des hyperboloïdes avec l'écran est une famille d'hyperboles. Mais si la distance de l'écran aux sources est très grande devant la distance S_1S_2 alors ces franges sont pratiquement des segments de droite. On parle de **franges rectilignes** (figure 4).

Fig. 4

Franges rectilignes



© Nathan, *classe prépa*

1.5. Ordre d'interférences au point *M*

On définit l'ordre d'interférences en un point par $\boxed{p(M) = \dfrac{\Phi_{2/1}(M)}{2\pi}}$ L'intérêt est de raisonner avec des nombres entiers ou demi-entiers.

Si $p(M)$ est **entier**, la **frange** d'interférences en M sera **brillante**.

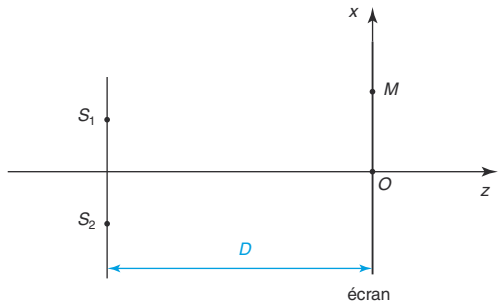
Si $p(M)$ est **demi-entier**, la **frange** d'interférences en M sera **sombre**.

> Pour passer d'une frange à une autre consécutive de même nature, l'ordre varie de ± 1. $\Phi_{2/1}(M)$ varie de $\pm 2\pi$ et $\delta_{2/1}$ varie de $\pm\lambda$. Sur l'écran, on parle d'interfrange.

1.6. Calcul de la différence de marche au point *M*

1.6.1. Deux sources ponctuelles à grande distance *D* de *M*, *M* à la distance *x* du plan médiateur des deux sources

Fig. 5 *Calcul de* δ



$a = S_1S_2$

M a pour coordonnées $(x, y, 0)$ dans le plan de l'écran(voir figure 5).

S_1 a pour coordonnées $\left(\dfrac{a}{2}, 0, -D\right)$ et S_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{-a}{2}, 0, -D\right)$.

Le milieu est homogène d'indice n,

$$\delta_{2/1} = n(S_2M - S_1M) = n\left(\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\right).$$

On fait un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{x}{D}$, $\dfrac{a}{D}$ et $\dfrac{y}{D}$.

> Si $D \gg x, y, a$ avec $a = S_1S_2$ alors $\delta_{2/1} = \dfrac{nax}{D}$.

Remarque
Cette assimilation est possible car $D \gg x$ et a d'où α petit.

Au lieu de faire un développement limité, on peut tracer l'arc de cercle de centre M et de rayon S_1M et assimiler (figure 6) l'arc de cercle à la perpendiculaire à S_2M passant par S_1. Cette perpendiculaire est S_1H. C est le milieu de S_1S_2.

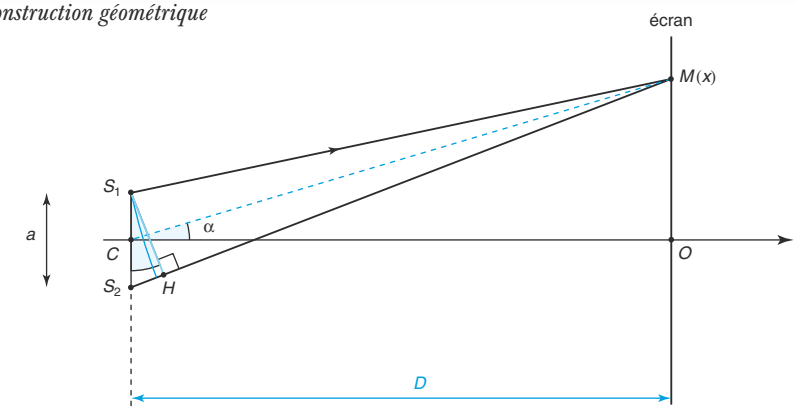
$\widehat{OCM} = \alpha$, $\widehat{S_2S_1H} = \alpha$ $\quad HM \approx S_1M$

$\delta_{2/1}(M) = n(S_2H + HM - S_1M) \approx nS_2H$; $\sin\alpha \approx \alpha \approx \dfrac{S_2H}{a}$; $\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha \approx \dfrac{x}{D}$. $(\mathrm{OM} = x)$.

On en déduit : $\delta_{2/1}(M) \approx na\alpha \approx n\dfrac{ax}{D}$.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 6 *Construction géométrique*



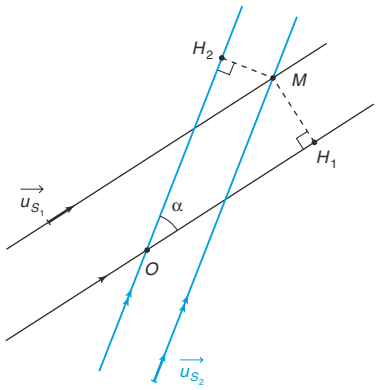
Pour une frange fixée, x est fixé. Les franges de même nature ont même intensité donc même phase modulo 2π donc même $\delta_{2/1}$ modulo λ donc même x modulo $i = n\lambda\dfrac{D}{a}$.
Les franges sont alors des segments de droite perpendiculaires à la direction S_1S_2 équidistants de l'interfrange i.

> Quand $\delta_{2/1}$ varie de $\pm\lambda$ alors x varie de $\pm i$ d'où $i = n\lambda\dfrac{D}{a}$.

1.6.2. Deux sources ponctuelles à l'infini

Soient S_1 et S_2 deux sources à l'infini, elles définissent deux ondes planes de direction $\vec{u}_{S_1}$ et $\vec{u}_{S_2}$ (figure 7), soit O un point de référence commun aux deux ondes, c'est-à-dire un point par lequel peuvent passer les deux ondes au même instant.

Fig. 7 *Deux sources à l'infini*



Sur la figure les rayons provenant de S_1 sont marqués d'une simple flèche tandis que ceux provenant de S_2 sont marqués d'une double flèche.
Pour calculer le déphasage au point M entre les deux rayons issus respectivement de S_1 et S_2 qui se coupent en M, on va introduire deux points H_1 et H_2 tels que $(S_1M) = (S_1H_1)$ et $(S_2M) = (S_2H_2)$, c'est-à-dire que M et H_1 appartiennent au même plan d'onde de la source S_1 ainsi que M et H_2 pour S_2.
On choisit le point O tel que $\Phi_{2/1}(O) = 0$.

© Nathan, *classe prépa*

Le rayon passant par H_1 et celui passant par H_2 passent par O. Nous avons vu au chapitre précédent que $\phi_{M/O} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$ pour deux points appartenant à deux rayons parallèles de direction $\vec{k}$.

$$\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((S_2M) - (S_1M)) = \frac{2\pi}{\lambda}((S_2H_2) - (S_1H_1))$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}((S_2O) - (S_1O) + (OH_2) - (OH_1))$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}((OH_2) - (OH_1)) = (\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM}.$$

$\boxed{\Phi_{2/1}(M) = (\vec{k_2} - \vec{k_1}) \cdot \overrightarrow{OM} \text{ avec } \vec{k_1} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u_{S_1}} \text{ et } \vec{k_2} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u_{S_2}}}$ avec O point de référence aux deux ondes planes tel que $\Phi_{2/1}(O) = 0$.

2 Diviseur d'onde : réalisation pratique de deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

2.1. Émission lumineuse – Trains d'onde – Cohérence temporelle

L'émission lumineuse n'est pas continue. Elle se fait par émission de trains d'onde de durée moyenne τ grande devant la période du signal. Entre deux trains d'onde, l'interruption moyenne est de l'ordre de τ.
Pour les lampes utilisées en TP type lampe à vapeur de mercure ou de sodium, τ est de l'ordre de 10^{-11} s. La période du signal dans le visible est de quelques 10^{-15} s. Pour un laser, $\tau = 10^{-7}$ s.

Remarque
Les raies d'émission sont élargies par effet Doppler et par effet de collision.

Les molécules ou atomes excités émettent des trains d'onde de fréquence ν avec une largeur naturelle $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$ pour une raie d'émission à la fréquence ν avec $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ très petit (voir exercice n° 9 de « S'entraîner »). La raie monochromatique n'existe pas.
Les trains d'onde sont aléatoires entre eux. Deux trains d'onde émis successivement par la même particule ont des déphasages aléatoires.

Les sources lumineuses ne peuvent donc en aucun cas être éternelles.
Quant au déphasage entre deux sources lumineuses S_1 et S_2, il ne peut en aucun cas être constant. N'oublions pas que les détecteurs sont sensibles à la moyenne temporelle du signal au carré. Ainsi sur le temps de réponse du détecteur, la phase ϕ_0 varie un très grand nombre de fois entre 0 et 2π et l'intensité vaut alors $I_{01} + I_{02}$ car le caractère aléatoire de ϕ_0 entraîne $\langle \cos\Phi_{2/1} \rangle = 0$.
Les sources laser sont des sources particulières ; dans de nombreuses expériences, le faisceau laser se comporte comme une source ponctuelle cohérente à l'infini (faisceau laser parallèle, cohérent, très directif et de très faible largeur spatiale et quasi monochromatique). Pour un laser, $\tau = 10^{-7}$s.

© Nathan, *classe prépa*

Deux sources lumineuses indépendantes sont incohérentes entre elles. Elles n'interfèrent pas et $I(M) = I_{01} + I_{02}$.

Pour obtenir un système de franges d'interférences, il faut fabriquer deux **sources secondaires** à partir de la même source dite **primaire**. On parle de **diviseurs d'onde.** Elles seront incohérentes dans le sens où elles ne sont pas éternelles mais leur déphasage restera constant. Elles seront **cohérentes entre elles.**
Il faut que les deux trains d'onde secondaires issus du même train d'onde primaire se recouvrent au point M, ce qui impose à la différence de marche optique $\delta_{2/1}(M) < c\tau = \ell_c$. ℓ_c est appelée longueur de cohérence temporelle.

Remarque
Expérimentalement, cela impose d'observer près de la frange centrale. Le « près » dépend de l'ordre de grandeur de ℓ_c. Pour le laser, $\ell_c \approx 30$ m, alors que pour les lampes spectrales, $\ell_c \approx 3$ mm.

2.2. Dispositifs diviseurs d'onde – Source primaire et sources secondaires

La vibration lumineuse issue de la source primaire S va atteindre le point M par deux chemins différents, la voie 1 et la voie 2. Tout se passera comme s'il y avait deux sources secondaires S_1 et S_2 cohérentes entre elles que l'on pourra localiser. On peut calculer le déphasage.

Le déphasage de la vibration lumineuse qui a cheminé par la voie 2 par rapport à la vibration lumineuse qui a cheminé par la voie 1 vaut :

$$\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((SM)_2 - (SM)_1) = \frac{2\pi}{\lambda}((SS_2) - (SS_1)) + \frac{2\pi}{\lambda}((S_2M) - (S_1M)).$$

2.3. Exemples de diviseur d'onde

À partir d'une source ponctuelle primaire, on peut soit diviser l'amplitude (avec une lame semi-réfléchissante : 50 % d'intensité en réflexion et 50 % d'intensité en transmission, on divise donc l'énergie) soit diviser le front d'onde (ce ne sont pas les mêmes rayons lumineux qui atteignent le point M, il s'agit de division géométrique). On parle de diviseur d'onde symétrique quand les intensités des deux voies sont égales.

2.3.1. Diviseurs du front d'onde

On peut citer les miroirs de Fresnel, les trous d'Young.

• *Exemple 1 : Miroirs de Fresnel*

Deux miroirs plans, M_1 et M_2 forment un dièdre d'angle α (figure 8). Une source ponctuelle S est placée à la distance d de l'arête du dièdre. On fait interférer en M le rayon issu de S et réfléchi par M_1 et celui réfléchi par M_2. Les sources S_1 et S_2 sont les images de S par les miroirs.

N.B. : $\widehat{S_1OS_2} = 2\alpha$.

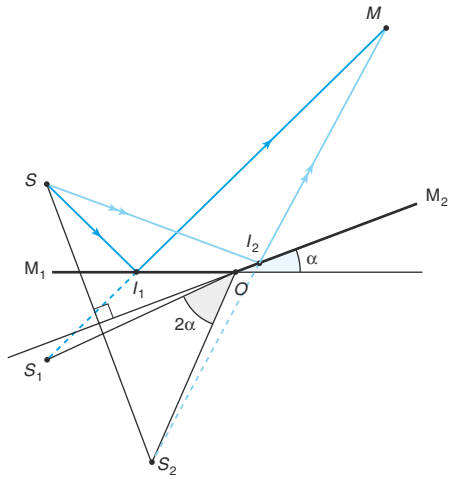
$$\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((SM)_2 - (SM)_1) = \frac{2\pi}{\lambda}((SI_2) + (I_2M) - (SI_1) - (I_1M)) + \pi - \pi$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}((S_2M) - (S_1M)) \text{ car } (SI_2) = (S_2I_2),\ (SI_1) = (S_1I_1).$$

Remarque
Voir l'exercice n° 6 de « S'entraîner ».

N.B. : les déphasages supplémentaires de π dus à la réflexion métallique sur chaque voie s'annulent. $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$. La frange centrale est brillante.

© Nathan, *classe prépa*

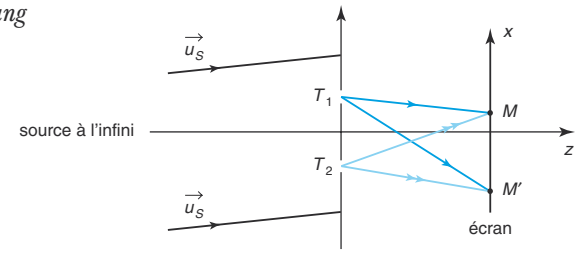
Fig. 8 *Miroirs de Fresnel*



• *Exemple 2 : Trous d'Young*

Une onde émise par une source ponctuelle (à l'infini ou à distance finie) éclaire deux petits trous T_1 et T_2 percés dans une plaque opaque (voir figure 9). T_1 et T_2 sont les sources secondaires (les deux trous diffractent, voir le chapitre 5 « Diffraction »).

Fig. 9 *Trous d'Young*



$$\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}((SS_2) - (SS_1)).$$

Remarque
Voir exercice n° 3 de « Savoir résoudre les exercices ».

2.3.2. Diviseurs d'amplitude

L'archétype est l'interféromètre de Michelson. Il fait l'objet du chapitre 3.

Remarque
Ce problème est abordé dans l'exer-cice n° 3 de « Savoir résoudre les exercices » et dans l'exercice n° 4 de « S'entraîner ». Il sera abordé dans le chapitre « Interféromètre de Michelson » pour la localisation des franges ainsi que dans le chapitre « Diffraction » pour le dispositif fentes d'Young avec une fente source.

2.3.3. Source étendue : surface de localisation des franges

Quand la source est ponctuelle, on observe des franges bien contrastées dans tout le champ d'interférences. On parle de franges délocalisées. Au fur et à mesure que l'on étend spatialement la source, le contraste diminue. Pour les dispositifs diviseurs du front d'onde, le contraste se détériore définitivement tandis que, pour les diviseurs d'amplitude, le contraste reste bon sur une surface dite **surface de localisation**. On dit alors que les franges sont localisées.

© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ Corrigés p. 61

Soit un dispositif interférentiel à deux sources ponctuelles cohérentes, chaque source émet une intensité I_0.

1 Quelle est l'intensité maximale en un point M du champ d'interférences ?

☐ **a.** $2I_0$ ☐ **b.** $4I_0$ ☐ **c.** $6I_0$

2 Quelle est l'intensité minimale en un point M du champ d'interférences ?

☐ **a.** I_0
☐ **b.** $-I_0$
☐ **c.** 0

3 Si on place un écran perpendiculaire à l'axe des deux sources, qu'observe-t-on ?

☐ **a.** Des anneaux
☐ **b.** Des hyperboles
☐ **c.** Des paraboles

4 Si l'axe S_1S_2 est selon Oy, l'axe optique selon Oz, comment sont orientées les franges d'interférences dans le plan (Mxy) situé suffisamment loin ?

☐ **a.** Selon Oy
☐ **b.** Selon Ox
☐ **c.** Selon la première bissectrice

Savoir appliquer le cours

➤ Corrigés p. 61

1 Soient deux sources cohérentes S_1 et S_2, qui émettent dans le vide les signaux suivants :

$s_1(t) = a_{01}\cos(\omega t + \phi_{01})$ et

$s_2(t) = a_{02}\cos(\omega t + \phi_{02})$.

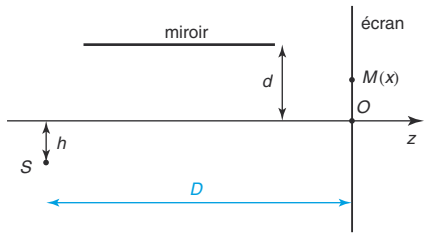
Calculer l'intensité reçue en un point M appartenant au champ d'interférences en fonction du déphasage des signaux en M $\Phi_{2/1}(M)$. Tracer la courbe pour $\Phi_{2/1}(M)$ variant de 0 à 2π.
Examiner les cas $a_{01} \approx a_{02}$ et $a_{01} \gg a_{02}$. Commenter.

2 Calculer la différence de marche optique en un point M d'un écran parallèle au plan contenant les deux sources cohérentes mais placé suffisamment loin. Préciser clairement les conditions d'application.

3 Calculer la longueur de cohérence temporelle d'une source de bande passante $\Delta\lambda = 10$ nm autour de la longueur d'onde $\lambda = 546$ nm. Il s'agit d'une source blanche avec un filtre interférentiel dans le vert.

4 Soient deux lampes spectrales qui émettent la même puissance P_0. Calculer l'intensité reçue en un point M situé à égale distance D des deux sources en fonction de cette distance.

5 Placer sur une figure les deux sources cohérentes qui peuvent interférer au point M. Calculer la différence de marche optique au point M en utilisant la formule du cours de manière adéquate.



© Nathan, classe prépa

1 – Dispositif théorique : deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

Soit le dispositif théorique d'interférences à deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes de même intensité.

Partie A

On observe dans un plan parallèle au plan contenant les deux sources à une distance D des deux sources grande.

1 Qu'observe-t-on sur l'écran ? Préciser l'orientation des franges, l'interfrange.

2 On étudie l'effet d'un déplacement de l'écran. On suppose qu'il s'est incliné d'un angle α petit par rapport à la situation précédente. Calculer la nouvelle différence de marche optique. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

3 On place une lame de verre d'épaisseur e faible sur le trajet de S_1 à M tout près de S_1 (incidence supposée quasi normale sur la lame), calculer la nouvelle différence de marche optique. Quels sont les changements sur l'écran ?

4 On place une cuve de longueur $L = 1$ cm, sur le trajet de S_1 à M, en incidence normale, dans laquelle on a fait le vide, on la remplit progressivement d'air. On observe en un point M fixé. Qu'observe-t-on ? On voit défiler 9 franges au point M en observant avec une caméra CCD, que peut-on en déduire ? On prendra $\lambda = 0{,}546\ \mu\text{m}$.

Partie B

On observe dans un plan perpendiculaire à l'axe des deux sources, les deux sources ont pour milieu C avec $\overrightarrow{S_2S_1} = 2\overrightarrow{CS_1} = a\vec{e}_z$. Les deux sources sont en phase. L'écran diffusant a pour équation $z = h > \frac{a}{2}$.

5 Qu'observe-t-on sur l'écran ? Peut-on définir un interfrange ?

6 On suppose $a = k\lambda$ (k entier naturel strictement positif), préciser le nombre d'anneaux brillants observables sur l'écran.

résolution méthodique

Partie A

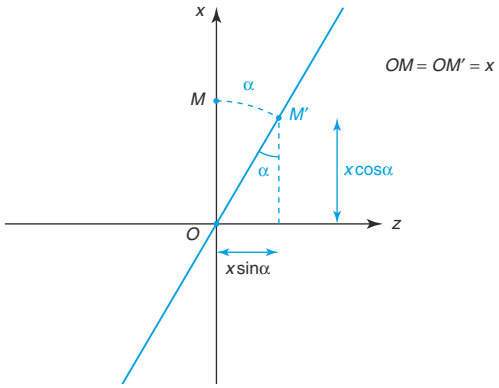
1 Qualitativement les deux sources étant cohérentes, on observe des franges d'interférences sur l'écran. L'écran étant placé parallèlement au plan contenant les deux sources à une distance D des deux sources grande, on observe des franges rectilignes dans une direction perpendiculaire à l'axe S_1S_2.

Quantitativement, il vaut mieux définir un système d'axes. L'écran est le plan Oxy, le rayon moyen définissant l'axe optique est l'axe Oz. Soit x la distance d'un point M de l'écran au

© Nathan, *classe prépa*

plan médiateur des deux sources, si $D \gg x,\ y,\ a$ avec $a = S_1S_2$ alors, l'indice de l'air étant égal à 1, $\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{D}$. Les franges de même nature ont même intensité, même $\delta_{2/1}$ modulo λ, même x modulo $\dfrac{\lambda D}{a}$ donc sont parallèles à Oy équidistantes, d'interfrange $\boxed{i = \dfrac{\lambda D}{a}}$

2 On va évaluer les nouvelles distances D' et x'. On voit sur la figure que $D' = D + x\sin\alpha$ et $x' = x\cos\alpha$. α est un petit angle.



En toute rigueur, il faut refaire le développement limité à l'ordre 2 en α, $\dfrac{x}{D}$, $\dfrac{a}{D}$ et $\dfrac{y}{D}$.

$$\delta_{2/1} = n(S_2M - S_1M)$$

$$= n\left(\sqrt{\left((x\cos\alpha) + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + (D + x\sin\alpha)^2} - \sqrt{\left((x\cos\alpha) - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + (D + x\sin\alpha)^2}\right)$$

d'où : $\boxed{\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{D} \text{ à l'ordre 2}}$

L'observation sur un écran incliné d'un petit angle est inchangée, ce qui est rassurant pour les expériences. On pourrait de même incliner le plan contenant les deux sources d'un petit angle et constater que l'observation est inchangée. En revanche, une grande inclinaison déformerait les franges observées.

3 Quand on place une lame de verre d'épaisseur e faible sur le trajet, le qualificatif faible nous permet de considérer que le décalage entre le rayon à l'entrée de la lame et le rayon à la sortie de la lame est négligeable. On fait aussi l'approximation suivante : l'incidence sur la lame est proche de la normale, les rayons lumineux sont peu inclinés sur l'axe optique. Ainsi nous obtenons un chemin optique ne dans la lame. La différence avec la situation sans lame nous donne $(n-1)e$. Le nouveau chemin optique est $\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{D} - (n-1)e$ car l'introduction de la lame retarde le chemin par la voie 1. Le système de franges est inchangé si ce n'est qu'il se déplace en bloc. Pour faire le calcul de ce déplacement, il suffit de calculer le déplacement de la frange centrale $(\delta_{2/1} = 0)$. Dans la situation sans lame, la frange centrale était située en $x = 0$. Dans la situation avec lame, elle est située en $x = \dfrac{D(n-1)e}{a}$, elle s'est déplacée vers le haut.

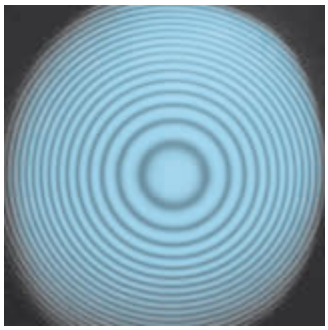
© Nathan, *classe prépa*

Attention, cela ne change pas l'interfrange. Un ajout d'un terme constant dans la différence de marche optique ne peut pas modifier l'interfrange.

4 Calculons la différence de chemin optique entre le cas cuve vide et le cas cuve remplie d'air. Si on considère l'incidence normale comme à la question précédente, la différence est de $(n_{\text{air}} - 1)L$. Au fur et à mesure que la cuve se remplit, le chemin optique varie et la nature de la frange en M varie. Le défilement de 9 franges au point M d'observation prouve que le chemin optique a varié de 9λ, on peut donc en déduire la différence entre l'indice de l'air et celui du vide dans les conditions de l'expérience. Cette différence est certes faible $(n_{\text{air}} - 1)L = 9\lambda$: d'où $n_{\text{air}} = 1{,}000\,491$.

Partie B

5



On observe sur l'écran des franges circulaires ou anneaux (intersection des hyperboloïdes d'axe S_1S_2 avec l'écran). Chaque anneau brillant de rayon ρ correspond à une différence de marche optique multiple de λ.

Dans l'air, $S_2M - S_1M = \sqrt{\left(h + \frac{a}{2}\right)^2 + \rho_m^2} - \sqrt{\left(h - \frac{a}{2}\right)^2 + \rho_m^2} = m\lambda$ avec m entier relatif.

Les anneaux ne sont pas équidistants ($(\rho_m - \rho_{m-1})$ n'est pas constant quand m varie) et on ne peut plus parler d'interfrange.

6 L'ordre d'interférences au centre O des anneaux est k entier car $p(O) = \dfrac{S_2O - S_1O}{\lambda} = \dfrac{k\lambda}{\lambda}$.

On a donc un point brillant en O. On sait que quand on s'éloigne du centre, l'ordre diminue car δ diminue $|S_2M - S_1M| \leqslant a$. δ tend vers 0 quand on s'éloigne beaucoup.

Donc en comptant le point central (cercle de rayon nul), on verra au maximum k anneaux.

en conclusion

Il faut bien connaître le cours pour être efficace. Pour ne pas se tromper dans les variations de chemin optique, comparer le chemin avant de mettre la lame et après. Retenir la variation de $(n - 1)e$ pour un trajet dans une lame d'épaisseur e en incidence quasi normale.

© Nathan, *classe prépa*

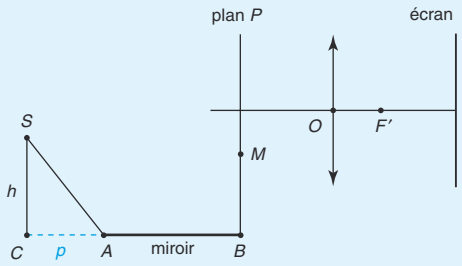
2 – Miroir de Lloyd

Une fente source S est disposée à une hauteur $h = 1{,}5$ mm au-dessus d'un miroir plan dont les bords rectilignes A et B sont parallèles à la fente.

On forme avec un objectif de microscope de focale $f' = 4$ mm une image du plan (P) passant par B perpendiculaire au miroir sur un écran (E) situé à la distance $d = 16$ cm de l'objectif. La fente est éclairée en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}5$ µm.

$AB = \ell = 5$ cm ; $CA = p = 15$ cm.

Décrire complètement le système de franges d'interférence dans le plan de l'écran.



résolution méthodique

Il faut avant toute chose repérer les sources secondaires et ne pas se laisser distraire par la présence d'une lentille qui, vraisemblablement, permet d'agrandir le phénomène d'interférences afin de le visualiser à l'œil nu. Même si l'énoncé pose une seule question, nous allons la décomposer en quatre étapes : repérer les sources secondaires, calculer la différence de marche optique (ou le déphasage), analyser le phénomène dans le plan (P), analyser le rôle de la lentille et en déduire le système de franges dans le plan (E).

1. Repérer les sources secondaires et les éventuels déphasages supplémentaires

La lumière issue de la source peut atteindre le point M par deux voies : soit directement voie 1, soit par réflexion sur le miroir voie 2. La voie 2 va donc déphaser de π en plus en raison de la réflexion métallique. On a deux sources secondaires cohérentes $S_1 = S$ et S_2 symétrique de S par le miroir plan.

2. Calculer la différence de marche optique en M du plan (P)

Dans l'air, $\delta_{2/1} = (SM)_2 - (SM)_1 = (SI_2) + (I_2M) - (SM)_1$.

Or $(SI_2) = (S_2I_2)$ d'où $\delta_{2/1} = (S_2M) - (S_1M) + \dfrac{\lambda}{2}$

$$\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi ax}{D\lambda} + \pi.$$

$\delta_{2/1} = \dfrac{ax}{D} + \dfrac{\lambda}{2}$ avec $a = 2h = 3$ mm, $x = BM$ et $D = p + \ell = 20$ cm.

On vérifie bien que $D \gg a$, condition à l'application de la formule $\dfrac{ax}{D}$.

3. Franges d'interférences dans le plan (P)

© Nathan, *classe prépa*

Le plan (P) (Oxy) est parallèle au plan des deux sources, à grande distance. On observera dans ce plan des franges rectilignes (intersection des hyperboloïdes d'axe S_1S_2 avec l'écran). Les franges sont parallèles à Oy et sont équidistantes. L'interfrange dans le plan (P) vaut $i = \dfrac{\lambda D}{a} = 33\ \mu\text{m}$. La frange centrale est sombre en raison du déphasage supplémentaire.

4. Franges d'interférences dans le plan (E)

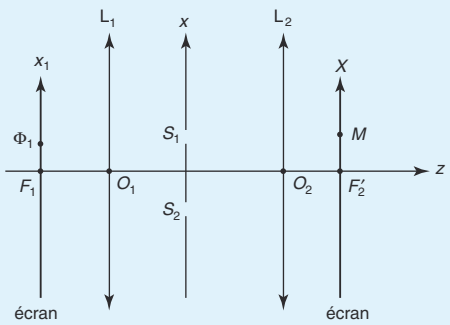
Calculons le grandissement de l'objectif de microscope. $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{d}{\overline{OA}}$ de plus $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$ d'où $\dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{f'-d}{df'}$. $\gamma = \dfrac{f'-d}{f'} = -39$ et la nouvelle interfrange vaut 1,3 mm, ce qui est tout à fait visible à l'œil nu (limite de l'œil $\dfrac{1}{10}$ mm). Le fait que le grandissement soit négatif n'est pas détectable car les franges rectilignes sont inversées, ce qui donne la même figure.

en conclusion

Il faut savoir distinguer dans l'énoncé les détails des points importants. Ces points importants sont : repérer la présence d'un diviseur d'onde, repérer les sources secondaires, calculer la différence de marche optique (ou le déphasage), analyser le phénomène dans le plan d'observation.

© Nathan, *classe prépa*

3 – Dispositif des trous d'Young avec lentilles



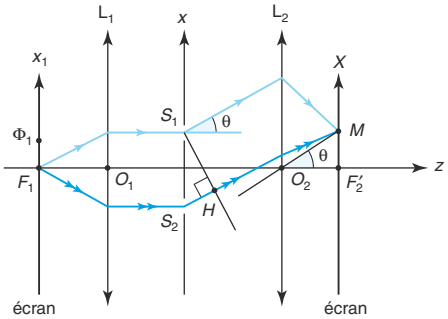
1 On reprend le dispositif des trous d'Young $S_1S_2 = a$ en rajoutant deux lentilles. On utilise d'abord une source ponctuelle monochromatique S en F_1, foyer objet de L_1. Calculer la différence de marche optique au point M de l'écran, plan focal image de L_2. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

2 On déplace la source S en Φ_1. Calculer la nouvelle différence de marche optique au point M. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

3 Supposons maintenant que nous ayons deux sources ponctuelles en F_1 et en Φ_1, qu'observe-t-on ? À quelle condition les franges d'interférences ne se brouillent-elles pas ?

résolution méthodique

1 Ce dispositif est un diviseur d'onde et S_1, S_2 sont deux sources ponctuelles, cohérentes et monochromatiques.



$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M) = (S_2M) - (S_1M)$.
En effet $(SS_2) = (SS_1)$ car $S = F_1$.
La lentille L_2 conjugue la direction de droite θ avec le point M situé dans son plan focal image, H appartenant à la même surface d'onde que S_1 (ici un plan d'onde, rayons parallèles) donc $(HM) = (S_1M)$. Dans l'air, $(S_2M) - (S_1M) = S_2H + HM - S_1M = S_2H = S_1S_2 \sin\theta$.
$\tan\theta = \dfrac{X}{f'_2}$ et pour de petits angles (approximations de Gauss), on peut confondre l'angle avec son sinus et sa tangente.
Finalement, $\delta_{2/1}(M) = a\dfrac{X}{f'_2}$. On observe des franges d'interférences quasi rectilignes, parallèles à l'axe F'_2Y, équidistantes d'interfrange $i = \lambda\dfrac{f'_2}{a}$.

2 Si on déplace S en Φ_1, $(SS_2) - (SS_1) = SS_2 - SS_1 = a\dfrac{x_1}{f'_1}$ en faisant le même raisonnement que précédemment. $\delta = a\dfrac{X}{f'_2} + a\dfrac{x_1}{f'_1}$. On observe la même figure d'interférences mais décalée de $-f'_2\dfrac{x_1}{f'_1}$.

3 Avec deux sources ponctuelles nécessairement incohérentes, on obtient deux systèmes de franges d'interférences qui vont se superposer au point M. Les franges brillantes de chaque système sont décalées de $f'_2\dfrac{x_1}{f'_1}$. Si ce décalage est petit devant l'interfrange, les deux systèmes se renforceront. Sinon, il y aura brouillage. Si on prend pour critère $\left|f'_2\dfrac{x_1}{f'_1}\right| < \dfrac{i}{10}$, il faut que $|x_1| < \lambda\dfrac{f'_1}{10a}$ pour continuer à observer des franges avec un bon contraste.

© Nathan, *classe prépa*

en conclusion

- Il faut savoir calculer des chemins optiques en présence de lentille et retenir que le rôle joué par la distance D est tenu par la distance focale de la lentille : $a\frac{x}{D}$ devient $a\frac{x}{f'}$. $\frac{x}{D}$ est l'angle sous lequel on voit M des deux sources (n'oublions pas que $D \gg a$) et $\frac{x}{f'}$ est l'angle que fait le faisceau parallèle (convergeant au point M grâce à la lentille) avec l'axe optique.
- En présence de deux sources incohérentes, les intensités s'ajoutent et s'il y a un diviseur d'onde, chaque source donne son système d'interférences. Les deux systèmes se superposent mais avec un décalage, ce qui fait chuter le contraste dans le cas général sauf si ce décalage est très petit devant l'interfrange.
- Nous verrons dans le chapitre « Diffraction » pourquoi ce montage est toujours proposé avec des lentilles (montage de Fraunhofer).

© Nathan, *classe prépa*

1 * 10 min

➤ Corrigé p. 62

Cas de deux sources de pulsation différente

On reprend le cas théorique de deux sources cohérentes éternelles mais de pulsation différente :
$s_1(t) = a_{01}\cos\omega_1 t$ et $s_2(t) = a_{01}\cos\omega_2 t$.
Calculer l'intensité reçue en un point M atteint par les deux signaux.

2 * 10 min

➤ Corrigé p. 62

Mesure d'indice

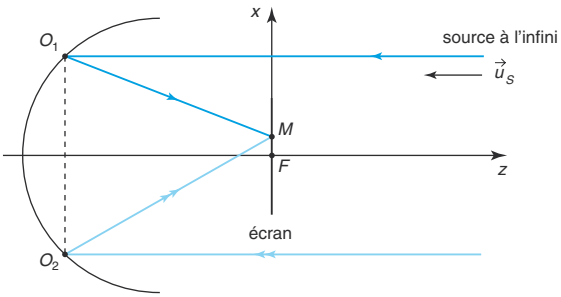
Soit un dispositif d'interférences à deux ondes ($\lambda = 600$ nm), sur les deux trajets on interpose deux cuves identiques de longueur $L = 1$ cm contenant de l'air (éclairage en lumière parallèle sous incidence normale dans les cuves). On repère la frange centrale sur l'écran et on remplace l'air de la cuve du haut par de l'ammoniac. La frange centrale se déplace de 17 interfranges vers le haut, trouver l'indice n de l'ammoniac. Sachant qu'on mesure ce déplacement à un demi-interfrange près, évaluer l'incertitude sur la mesure de n.
On donne $n_{\text{air}} = 1{,}000\,29$.

3 ** 20 min

➤ Corrigé p. 63

Miroir sphérique muni d'un cache percé de deux trous

Soit un miroir sphérique concave muni d'un cache opaque percé de deux petits trous symétriques en O_1 et en O_2, distants de d et éclairés par une source à l'infini dans la direction de l'axe optique. On place un écran dans le plan focal du miroir. Les deux trous diffractent.



1. Qu'observe-t-on sur l'écran au voisinage du point F ? Calculer l'interfrange $\lambda = 0{,}52$ µm, $f' = 7{,}6$ m $\gg d$ et $d = 15{,}2$ cm.

2. On observe avec ce dispositif une étoile double dont les deux composantes (de même intensité) font un angle 2α entre elles. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran situé à la distance x de l'axe optique. Quel est le contraste ? Quel est l'intérêt de faire varier d ?

4 ** 10 min

➤ Corrigé p. 63

Anneaux d'interférence à deux ondes cohérentes. Extension spatiale de la source

On considère le système théorique des deux sources cohérentes S_1 et S_2 en phase, monochromatiques λ, de milieu C avec $\overrightarrow{S_2S_1} = 2\overrightarrow{CS_1} = a\vec{e}_z$ et un autre couple de sources cohérentes S'_1, S'_2, en phase, λ, $\overrightarrow{S'_2S'_1} = 2\overrightarrow{CS'_1} = a\vec{e}_z$ (sur le même axe). Les deux couples sont incohérents entre eux. On observe sur un écran diffusant d'équation $z = h > \frac{a}{2}$.

Qu'observe-t-on dans le plan de l'écran ? Que se passe-t-il si le plan de l'écran est rejeté à l'infini ? Commentaires ?

5 ** 20 min

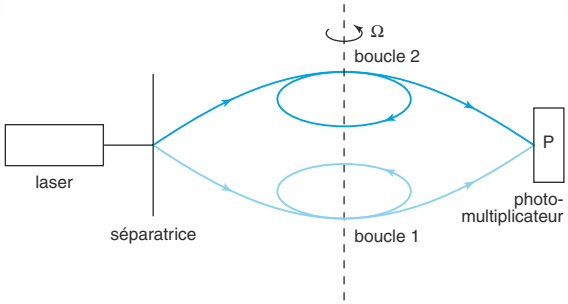
➤ Corrigé p. 63

Gyromètre à fibre optique ou interféromètre tournant

(d'après sélection française IPHO)

Dans un gyromètre à fibre optique, la lumière émise par une diode laser est divisée en 2 et introduite dans 2 fibres optiques identiques, enroulées sur elles-mêmes, de sorte que les fibres soient parcourues en sens inverse (voir figure page suivante). Le temps de parcours des boucles est le même dans les deux sens lorsque le gyromètre est immobile, mais lorsque le gyromètre est en rotation, il existe une différence de temps de parcours Δt entre les 2 signaux lumineux. Ceux-ci sont ensuite recombinés au niveau du photomultiplicateur P qui mesure l'intensité résultante.

© Nathan, classe prépa



On note ω la vitesse de rotation, mesurée par le gyromètre, qui correspond à la vitesse de rotation des boucles autour de leur axe de révolution : D le diamètre des boucles, N le nombre d'enroulements constituant les boucles.

1. Exprimer la relation entre la différence de temps de parcours Δt des 2 signaux et la vitesse de rotation ω. En déduire le déphasage.

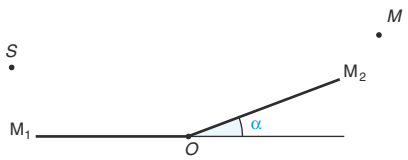
2. La diode laser émet une onde plane, monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ. Qu'enregistre-t-on en P lorsque ω varie ? En déduire la plus petite valeur ω_{min} de la vitesse de rotation que l'on peut ainsi mesurer (correspondant à une intensité nulle). A.N. : $D = 30$ cm ; $N = 1\,000$; $\lambda = 0{,}8$ µm.

6 ** 20 min

➤ Corrigé p. 64

Miroirs de Fresnel éclairés par une source ponctuelle à distance finie

On considère le dispositif des miroirs de Fresnel, constitué des deux miroirs plans M_1 et M_2 se coupant suivant l'arête (passant par O et perpendiculaire à la figure) et faisant un très petit angle entre eux. Ils sont éclairés par une source ponctuelle monochromatique à distance finie, $SO = d$. Soit M un point du plan de la figure suffisamment loin de l'arête des deux miroirs et $\overrightarrow{OM}$ peu incliné par rapport aux miroirs.



Tracer les rayons issus de la source qui interfèrent en M, après réflexion sur chacun des miroirs.

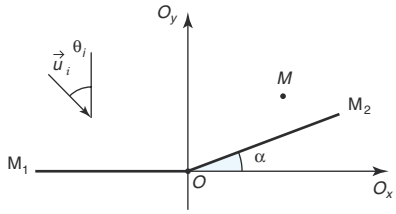
Tracer le champ d'interférences. Qu'observe-t-on sur un écran placé perpendiculairement aux deux miroirs ?

7 ** 10 min

➤ Corrigé p. 64

Miroirs de Fresnel éclairés par une onde plane (source ponctuelle à l'infini)

On considère le dispositif des miroirs de Fresnel, constitué des deux miroirs plans M_1 et M_2 se coupant suivant l'arête Oz. Ils sont éclairés par une source monochromatique (λ) ponctuelle à l'infini ou un faisceau laser, dans la direction $\vec{u}_i$ appartenant au plan xy. Soit M un point du plan Oxy.



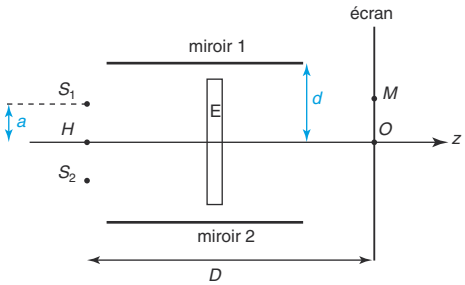
Tracer les rayons issus de la source qui interfèrent en M, après réflexion sur chacun des miroirs. Calculer le déphasage correspondant au point M en fonction de θ_i et α.

8 *** 30 min

➤ Corrigé p. 65

Deux sources et deux miroirs

S_1 et S_2 sont deux sources ponctuelles monochromatiques (λ) incohérentes (de même intensité et symétriques par rapport à l'axe Oz, $HS_1 = HS_2 = a$). On suppose que l'écran opaque E élimine seulement toute la lumière directe.



Qu'observe-t-on sur l'écran en M au voisinage de O tel que $OM = x$? $D = HO \gg d$ ($2d$ distance entre les deux miroirs) ?

© Nathan, classe prépa

9 *** 20 min

➤ *Corrigé p. 65*

Élargissement de raie par effet Doppler

1. Un observateur est placé en O fixe. Un atome S émet un « top » toutes les T_0 secondes. On pose $f_0 = \frac{1}{T_0}$. L'atome se déplace sur l'axe Ox à la vitesse constante v. À chaque top, l'atome émet une vibration lumineuse qui se propage de manière isotrope à la vitesse c dans le référentiel du laboratoire $(Oxyz)$. Quelle est la fréquence d'arrivée en O des « tops » quand S se rapproche ou s'éloigne de O ? Calculer l'écart en fréquence qui en résulte $\Delta f = f_{max} - f_{min}$.

2. En pratique $v \ll c$. Simplifier Δf. On suppose que l'atome émetteur est un atome d'hydrogène, traité comme un gaz parfait monoatomique, en équilibre thermodynamique à la température T. Calculer $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ la largeur relative Doppler si $T = 2\,000$ K.

© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 Réponse **b.** La formule de Fresnel prouve que pour un déphasage nul (modulo 2π), l'intensité maximale est $4I_0$. Ce résultat ne contredit pas la conservation de l'énergie car il ne faut pas oublier que, dans une situation d'interférences, l'énergie n'est plus répartie uniformément : certaines zones ont une intensité minimale voire nulle (interférences destructives) et d'autres zones ont une intensité maximale (interférences constructives).

2 Réponse **c.** Physiquement, quand deux signaux interfèrent en opposition de phase, l'énergie donc l'intensité est minimale. La connaissance de la formule de Fresnel est indispensable : pour un déphasage de π (modulo 2π), l'intensité est minimale (ici nulle avec deux sources de même intensité). La réponse **b.** est absurde, l'intensité ne peut pas être négative.

3 Réponse **a.** On observe l'intersection d'hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 avec l'écran transverse. Ce sont des franges circulaires ou anneaux.

4 Réponse **b.** On observe l'intersection d'hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 avec l'écran parallèle. Ce sont des franges quasi-rectilignes si l'écran est suffisamment loin des sources, franges qui sont toujours orientées perpendiculairement à l'axe S_1S_2.

Savoir appliquer le cours

1 *Remarque* : Cette démonstration est très souvent demandée dans les problèmes de concours. La démonstration doit être efficace. Penser à ramener toute la phase sur un seul des signaux et à travailler en complexes.

$$I(M) = K\langle s^2(M,t)\rangle = \frac{K}{2}\underline{s}(M,t)\,\underline{s}^*(M,t)$$

$$\underline{s}(M,t) = a_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\phi_{01}-\omega\frac{(S_1M)}{c}\right)} + a_{02}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\phi_{02}-\omega\frac{(S_2M)}{c}\right)}$$

Notons

$$\Phi_{2/1}(M) = \phi_{01}-\phi_{02}+\omega\frac{(S_2M)-(S_1M)}{c}$$

$$= \phi_{01}-\phi_{02}+2\pi\frac{\delta_{2/1}(M)}{\lambda}$$

D'où

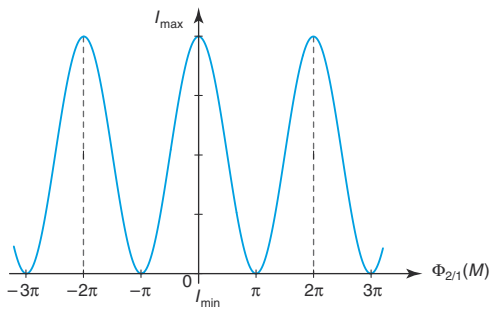
$$\underline{s}(M,t) = a_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+a_{02}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\Phi_{2/1}(M))}$$

$$\underline{s}^*(M,t) = a_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+a_{02}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\Phi_{2/1}(M))}$$

$$I(M) = \frac{K}{2}(a_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+a_{02}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\Phi_{2/1})})(a_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+a_{02}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\Phi_{2/1})})$$

$$I(M) = \frac{K}{2}(a_{01}^2+a_{02}^2+2a_{01}a_{02}\cos\Phi_{2/1})$$

$$I(M) = I_{01}+I_{02}+2\sqrt{I_{01}I_{02}}\cos\Phi_{2/1}(M)$$



Si $a_{01} \approx a_{02}$, notons $I_{01} \approx I_{02} \approx I_0$

$I(M) \approx 2I_0(1+\cos\Phi_{2/1}(M))$

Si $a_{01} \gg a_{02}$, $I(M) \approx I_{01}$, on ne verra plus d'interférences.

2 *Remarque* : Cette démonstration est rarement demandée aux écrits de concours car elle fait appel à un développement limité et beaucoup d'applications permettent de calculer la différence de marche optique sans faire appel à cette formule (exemple : Michelson en coin d'air ou montage des trous d'Young avec lentille). Cependant, elle est fort utile à l'oral et il faut la mémoriser.

Il faut donner les coordonnées des trois points S_1, S_2, M et calculer ensuite $n(S_2M-S_1M)$ en faisant un développement limité à l'ordre 2. Voir la démonstration dans « Retenir l'essentiel » (1.6.1).

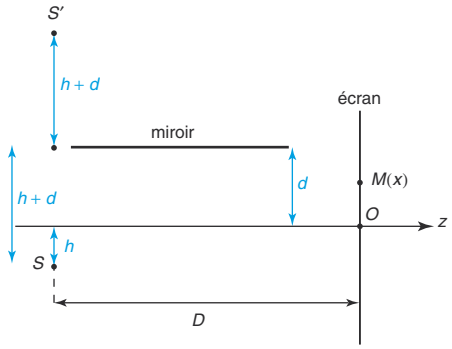
© Nathan, *classe prépa*

3 La longueur de cohérence d'une source est donnée par $\ell_c = c\tau$ avec $\Delta\nu \approx 1/\tau$.

$\lambda = \frac{c}{\nu}$ d'où $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ et $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$. Finalement, $\ell_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$. A.N. : $\ell_c = \mathbf{29{,}8\ \mu m}$.

4 Les deux sources sont incohérentes donc les intensités s'ajoutent au point M. Pour une source de puissance P_0, on obtient à la distance D l'intensité $I_0(M) = \frac{P_0}{4\pi D^2}$ car l'intensité est la puissance reçue par unité de surface. Pour les deux sources fonctionnant simultanément, $\boxed{I(M) = 2I_0(M) = \frac{P_0}{2\pi D^2}}$

5 On construit S' image de S par le miroir plan. Tout se passe comme si M pouvait être atteint par la source S réelle et la source virtuelle S' qui constituent deux sources cohérentes. On n'oublie pas que le miroir induit un déphasage supplémentaire de π. On va utiliser la formule du cours en s'adaptant : la distance entre les deux sources est $2(d+h)$, la distance de M au plan médiateur des deux sources est $d-x$ d'où $\delta_{2/1} = \frac{2(d+h)(d-x)}{D} + \frac{\lambda}{2}$.



S'entraîner

1 Les deux signaux se propagent :

$s_1(M,t) = a_{01}\cos\omega_1(t-(S_1M)/c)$

et $s_2(M,t) = a_{02}\cos\omega_2(t-(S_2M)/c)$.

Ils s'additionnent et on obtient au point M :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t) = a_{01}\cos\omega_1(t-(S_1M)/c) + a_{02}\cos\omega_2(t-(S_2M)/c).$$

$$I(M) = K\langle s^2(M,t)\rangle = \frac{K}{2}a_{01}^2 + \frac{K}{2}a_{01}^2 + K\langle 2a_{01}a_{02}\cos\omega_1(t-(S_1M)/c)\cos\omega_2(t-(S_2M)/c)\rangle.$$

Transformons le produit de cosinus en une somme : $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

Les moyennes sur une période des fonctions sinusoïdales sont nulles.

$\langle\cos((\omega_1+\omega_2)t - \omega_1(S_1M)/c - \omega_2(S_2M)/c)\rangle = 0$

ainsi que

$\langle\cos((\omega_1-\omega_2)t - \omega_1(S_1M)/c + \omega_2(S_2M)/c)\rangle = 0$

quand les pulsations sont différentes.

Finalement $I(M) = I_{01} + I_{02}$. Remarquons qu'on retrouve la formule de Fresnel si les pulsations sont égales à ω avec $\Phi_{2/1}(M) = \omega((S_2M)-(S_1M))/c$:

$$I(M) = I_{01} + I_{02} + 2\sqrt{I_{01}I_{02}}\cos\Phi_{2/1}(M).$$

2 L'information sur la cuve du **haut** et le déplacement des franges vers le **haut** prouve que l'indice de l'ammoniac est supérieur à celui de l'air. En effet le système de franges est décalé vers le haut car le chemin optique a été retardé dans la cuve du haut par rapport à celle du bas. Pour compenser, il faut augmenter le chemin optique de la voie du bas d'où le décalage vers le haut.

Le chemin optique entre les deux situations a varié de $(n-n_{air})L$ en prenant n pour l'ammoniac. La frange centrale se déplace de 17 interfranges donc le chemin optique a varié de 17 longueurs d'onde $(n-n_a)L = 17\lambda$. A.N. : $n = \mathbf{1{,}001\ 31}$.

Remarque : il est inutile de connaître la différence de marche optique, seule nous importe sa variation.

Pour calculer l'incertitude sur l'indice, supposons que L et λ sont connues avec une précision suffisante pour pouvoir négliger leur incertitude. Un demi-interfrange correspond à une demi longueur d'onde pour le chemin optique.

$\Delta((n-1)L) = L\Delta n = \frac{\lambda}{2}$ d'où $\Delta n = \frac{\lambda}{2L}$.

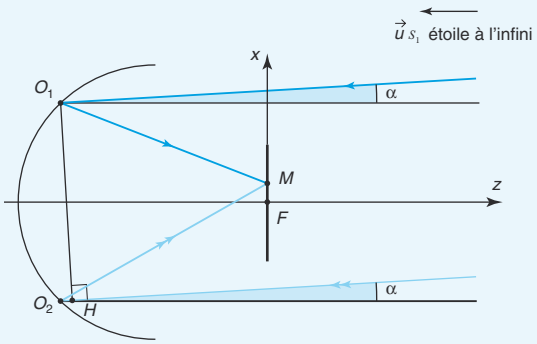
A.N. : $\Delta n = \mathbf{3 \cdot 10^{-5}}$.

$n = 1{,}001\ 31 \pm 0{,}000\ 03$.

© Nathan, *classe prépa*

3 **1.** Ce dispositif est un diviseur d'onde : les deux trous jouent le rôle de sources secondaires cohérentes ; S étant la source à l'infini, on remarque que $(SO_1) = (SO_2)$ donc que les deux sources secondaires sont en phase. On se retrouve dans la situation théorique avec un écran plan parallèle aux deux sources et $f' \gg d = O_1O_2$ et $x = FM$. $S_{2/1}(M) = \frac{dx}{f'}$. Dans le plan focal du miroir où viennent converger les rayons, on observe des franges d'interférences rectilignes parallèles à Fy. Au point F à égale distance des deux sources, la différence de marche optique est nulle.
La frange centrale se situe selon Fy. L'interfrange vaut $\lambda\frac{f'}{d} = 26\ \mu\text{m}$.

2. Les deux composantes d'une étoile double sont incohérentes entre elles, il faut donc additionner les éclairements au point M. Pour une composante S_1 faisant l'angle α avec l'axe optique, calculons la nouvelle différence de marche optique ; (SO_1) n'est plus égal à (SO_2).



$$\delta_{2/1}(M) = (S_1O_2M) - (S_1O_1M)$$
$$= (S_1O_2) - (S_1O_1) + (O_2M) - (O_1M)\ .$$
$$(S_1O_2) - (S_1O_1) = (S_1H) + (HO_2) - (S_1O_1) = (HO_2)$$
$$= d\sin\alpha \approx d\alpha$$

car H et O_1 appartiennent au même plan d'onde.
$(O_2M) - (O_1M) = \frac{dx}{f'}$.
Pour un diviseur d'onde symétrique,
$E_1(M) = 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}d\left(\frac{x}{f'} + \alpha\right)\right)$.
Pour la composante S_2 faisant l'angle $-\alpha$ avec l'axe optique, $E_2(M) = 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}d\left(\frac{x}{f'} - \alpha\right)\right)$.

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) = 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}d\left(\frac{x}{f'} + \alpha\right)\right)$$
$$+ 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}d\left(\frac{x}{f'} - \alpha\right)\right).$$

Utilisons la formule
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$.
$E(M) = 4E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}d\frac{x}{f'}\cos\frac{2\pi}{\lambda}d\alpha\right)$. On peut interpréter le produit des deux cosinus : celui qui dépend de x donc de la position du point M est appelé terme d'interférences, quant à l'autre il est appelé terme de contraste.

En effet, $V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$

avec $E_{\max} = 4E_0\left(1 + \left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}d\alpha\right|\right)$

et $E_{\min} = 4E_0\left(1 - \left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}d\alpha\right|\right)$ d'où $V = \left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}d\alpha\right|$.

Si on fait varier d, on fait varier le contraste. Quand $V = 0$, les franges ne sont plus visibles, elles sont brouillées ce qui est très visible à l'œil nu ou avec un photorécepteur. Cela permet de mesurer l'angle α.

4 Chaque couple donne son propre système d'interférences c'est-à-dire un système d'anneaux alternativement sombres et brillants. Les deux systèmes se superposent car les deux couples sont incohérents et ils sont décalés de $\overrightarrow{CC'}$. Les franges d'interférences vont être brouillées si CC' n'est pas négligeable devant la distance entre deux anneaux consécutifs de même nature.
Si le plan de l'écran est rejeté à l'infini, $h \gg CC'$ alors les deux systèmes se renforcent car les anneaux brillants de l'un coïncident avec les anneaux brillants de l'autre. On peut dire que l'extension spatiale de la source n'affecte pas l'observation des franges à l'infini. Le contraste est mauvais sauf en une surface dite surface de localisation qui est ici le plan de l'infini.
À l'infini, le déphasage est le même pour les deux couples de sources. Ceci est vrai quelle que soit la position relative des deux couples.

5 **1.** Quand le gyromètre est immobile, la lumière parcourt dans chaque fibre optique la distance $N2\pi R = N\pi D$. Le déphasage est donc nul quand les deux signaux se recombinent et l'intensité résultante vaut $I_{\max}$.
Quand le gyromètre tourne à la vitesse angulaire ω, notons t_2 la durée du parcours dans la fibre 2 qui est enroulée en sens inverse du sens de rotation et t_1 la durée du parcours dans la fibre 1 qui est enroulée dans le même sens. Le trajet est donc augmenté dans la fibre 1 et diminué dans la fibre 2. $ct_2 = (2\pi - \omega t_2)NR$ et $ct_1 = (2\pi + \omega t_1)RN$. Il en résulte des durées $t_1 = \frac{2\pi RN}{c - NR\omega}$ et $t_2 = \frac{2\pi RN}{(c + NR\omega)}$,
$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{N^2\pi D^2\omega}{c^2 - R^2\omega^2N^2}$.

© Nathan, *classe prépa*

Comme $c \gg R\omega$, $\Delta t \approx \dfrac{N^2 \pi D^2 \omega}{c^2}$.

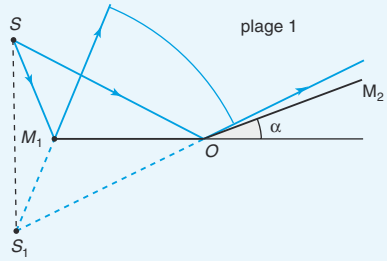
Les deux signaux se recombinent, le déphasage est $\Delta\phi = \dfrac{2\pi c \Delta t}{\lambda} = \dfrac{2\pi^2 N^2 D^2 \omega}{\lambda c}$.

2. Lorsque ω varie, le photomultiplicateur enregistre une intensité résultante qui varie entre I_{min} et I_{max} selon la valeur du déphasage. $I_{min} = 0$ car la lumière est divisée en deux (en intensité) et l'intensité est la même dans les deux fibres.

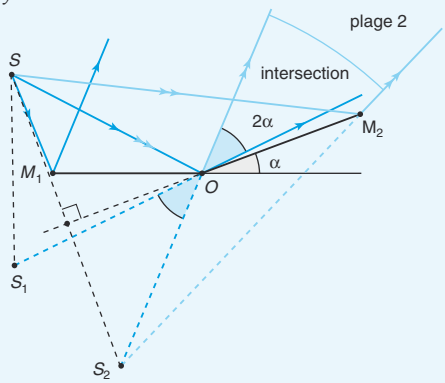
Quand les deux signaux arrivent en opposition de phase, l'intensité résultante est nulle, on peut ainsi mesurer des vitesses de rotation à partir de ω_{min}. ω_{min} est obtenue pour la plus petite valeur du déphasage $\Delta\phi = \pi$, $\omega_{min} = \dfrac{\lambda c}{2N^2\pi D^2}$.

A.N. : $\omega_{min} = \mathbf{4{,}2 \cdot 10^{-4}\ rad \cdot s^{-1}}$.

6 *Rayons marginaux de M_1*



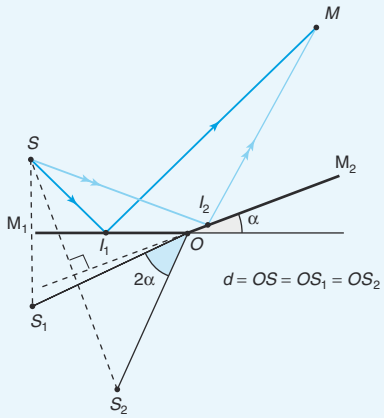
Rayons marginaux de M_2
rayons clairs



On trace sur la figure les symétriques de S par les miroirs M_1 et M_2 : S_1 et S_2. Un rayon issu de S se réfléchit sur le miroir M_1 et atteint M, semblant provenir de S_1. Un rayon issu de S se réfléchit sur le miroir M_2 et atteint M, semblant provenir de S_2. Pour définir le champ d'interférences, on trace les rayons marginaux, c'est-à-dire les rayons issus de S qui se réfléchissent sur les bords des deux miroirs. L'intersection des deux plages donne le champ d'interférences (plage 1 délimitée par les rayons extrêmes sur le miroir 1 notés avec une simple flèche et plage 2 délimitée par les rayons extrêmes sur le miroir 2 notés par des doubles flèches : on remarque sur la figure un rayon commun qui arrive sur l'arête).

Attention, il faut dans le dispositif expérimental empêcher la lumière directe de la source S d'atteindre l'écran d'observation sinon on obtient en plus des interférences de type miroir de Lloyd (voir exercice n° 2 de « Savoir résoudre les exercices »).

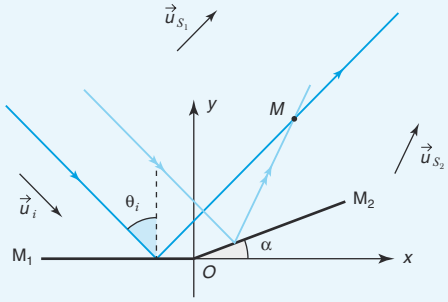
On est ramené au cas théorique de deux sources ponctuelles cohérentes entre elles distantes de $2d\alpha$.



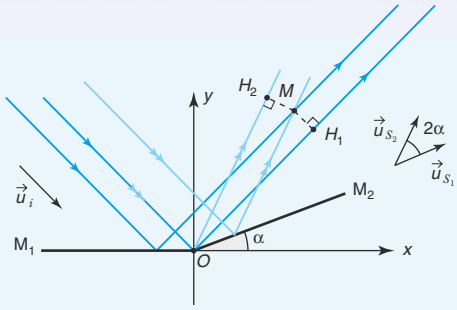
Remarque : il faut garder à l'esprit que l'angle α est exagéré sur la figure et que la situation réelle est : les deux miroirs M_1 et M_2 sont quasi confondus et l'écran est perpendiculaire au plan des deux miroirs.

M peut être contenu dans un plan parallèle à S_1S_2 à la distance $D \approx OM + d$ car α est un petit angle (typiquement quelques 10^{-3} rad) et $\overrightarrow{OM}$ peu incliné. On observera sur un écran parallèle à S_1S_2 des franges quasi rectilignes, parallèles à l'arête des miroirs et équidistantes d'interfrange $i = \lambda \dfrac{OM + d}{2d\alpha}$.

7



© Nathan, *classe prépa*



On peut remarquer sur la figure ci-dessus que les rayons qui se réfléchissent sur le miroir 1 possèdent une flèche simple et que les rayons qui se réfléchissent sur le miroir 2 possèdent une double flèche.

Pour calculer le déphasage au point M entre les deux rayons (issus respectivement de la réflexion sur M_1 et de celle sur M_2) qui se coupent en M, on va introduire deux points H_1 et H_2 tels que M et H_1 appartiennent au même plan d'onde de la source S_1 ainsi que M et H_2 pour la source S_2.

Le rayon passant par H_1 passe aussi par O et le rayon passant par H_2 passe aussi par O.

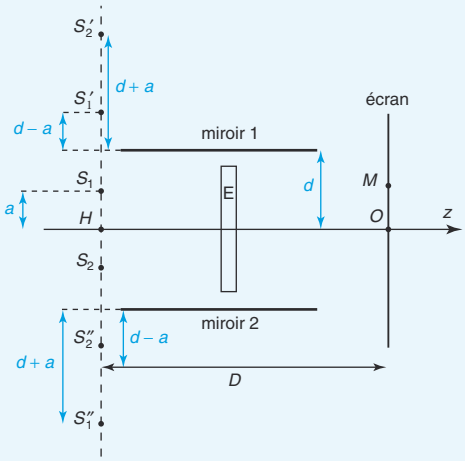
$$\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((SM)_2 - (SM)_1) = \frac{2\pi}{\lambda}((SH_2) - (SH_1))$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}((OH_2) - (OH_1)) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\cdot\overrightarrow{OM}$$

(vu dans l'essentiel 1.6.2)

avec $\vec{u}_{S_1} = \begin{pmatrix}\sin\theta_i\\ \cos\theta_i\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{u}_{S_2} = \begin{pmatrix}\sin(\theta_i - 2\alpha)\\ \cos(\theta_i - 2\alpha)\\ 0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}$

$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_{S_1}$ $\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_{S_2}$.

8



Tout d'abord simplifions le problème, les deux sources S_1 et S_2 sont incohérentes entre elles, donc ne traitons le problème qu'avec une seule source ; on additionnera ensuite les éclairements dues à chaque source. Rappelons-nous la méthode préconisée dans la résolution méthodique de l'exercice n° 2 de « Savoir résoudre les exercices ». Y a-t-il un diviseur d'onde ? Le dispositif des deux miroirs joue le rôle de diviseur d'onde. Il est facile de situer les sources secondaires : pour S_1, notons-les S'_1 et S''_1 images de S_1 par les deux miroirs M_1 et M_2. Tout se passe comme si M était atteint par les rayons issus de S'_1 et S''_1. Il n'y aura pas de déphasage supplémentaire. $S'_1S''_1 = 4d$.

Calculons la différence de marche au point M : $\delta_{S_1}(M) = (S''_1M) - (S'_1M)$. L'écran étant parallèle à l'axe $S'_1S''_1$ et $D = HO \gg d$, on peut utiliser la formule $\delta_{2/1} = \frac{nax}{D}$ avec $n = 1$, $a = 4d$ et remplacer x par $x + a$. En effet le plan médiateur est au milieu des deux sources S'_1 et S''_1. S'_1 est à la distance $2d - a$ du plan $x = 0$ tandis que S''_1 en est à la distance $2d + a$. Leur milieu se situe en $x = -a$.

Finalement, $E_1(M) = 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{4d(x+a)}{D}\right)$.

De même pour la source S_2, notons S'_2 et S''_2 les images de S_2 par les deux miroirs M_1 et M_2. $S'_2S''_2 = 4d$. Leur milieu se situe en $x = a$ d'où :

$$\delta_{S_2}(M) = (S''_2M) - (S'_2M) = \frac{4d(x-a)}{D}.$$

Finalement, $E_2(M) = 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{4d(x-a)}{D}\right)$.

Chaque source S_1 ou S_2 va donner son propre système d'interférences au point M. Les intensités s'ajoutent :

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M)$$
$$= 4E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{4dx}{D}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{4da}{D}\right).$$

On reconnaît le terme d'interférences $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{4dx}{D}$ qui dépend de la position du point M et le terme de contraste $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{4da}{D}\right| < 1$. La présence d'une deuxième source fait chuter le contraste ; selon sa valeur, les franges seront toujours visibles ou brouillées. On retrouve l'influence de l'extension spatiale de la source sur le contraste.

9 **1.** Traitons d'abord le cas où S s'éloigne de O. Prenons pour instant initial, l'instant où est émis le premier top. Il est reçu à l'instant $t_1 = \frac{S_{t=0}O}{c}$ par l'observateur. Le deuxième top est émis à T_0 et est reçu à l'instant :

$$t_2 = T_0 + \frac{S_{t=T_0}O}{c}$$

© Nathan, *classe prépa*

donc l'observateur mesure une période :

$$T = t_2 - t_1 = T_0 + \frac{S_{t=T_0}O}{c} - \frac{S_{t=0}O}{c} = T_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

car $S_{t=T_0}O - S_{t=0}O = vT_0$.

La fréquence ressentie par l'observateur est donc :

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Dans le cas où S s'approche de O,

$S_{t=T_0}O - S_{t=0}O = -vT_0$.

$$T = T_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) \text{ et } f = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}.$$

D'où l'écart en fréquence :

$$\Delta f = f_{max} - f_{min} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{2f_0\frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

2. En pratique, $v \ll c$ et $\Delta f \approx 2f_0\frac{v}{c}$. Pour un gaz parfait monoatomique, en équilibre thermodynamique à la température T, la vitesse quadratique moyenne vaut $u = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ et on prend u pour ordre de grandeur de v avec $m = m_H$.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = 2\frac{v}{c}.$$

A.N : $\boldsymbol{u = 7\,063\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$ et $\boldsymbol{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}}$.

© Nathan, *classe prépa*

3 Interféromètre de Michelson

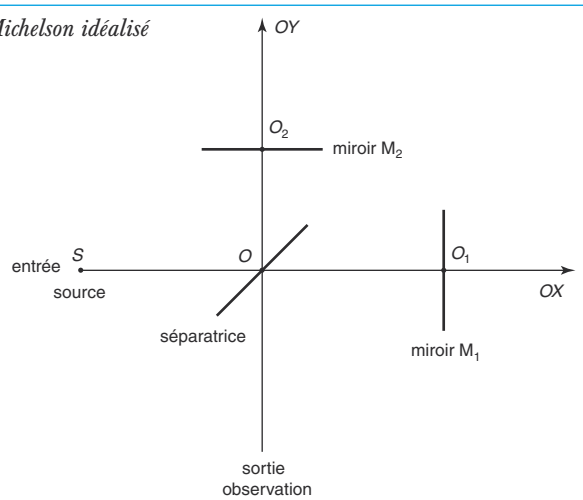
En 1880 Albert Michelson met au point un interféromètre suffisamment sensible pour révéler l'effet supposé du mouvement de la Terre sur la vitesse de la lumière. Le résultat négatif de cette expérience joua un rôle fondamental dans l'émergence de la théorie de la relativité.

1 Principe et description de l'appareil

1.1. Principe

L'interféromètre de Michelson idéalisé est constitué de **deux miroirs plans** (M_1 et M_2) et d'une lame semi-réfléchissante infiniment mince appelée **séparatrice** : 50 % de l'énergie lumineuse est transmise par la séparatrice et 50 % réfléchie (figure 1).

Fig. 1 *Schéma de principe Michelson idéalisé*



© Nathan, *classe prépa*

Par construction, les deux miroirs sont **quasi perpendiculaires** aux directions orthogonales (OX) et (OY). La séparatrice est à $45°$ de (OX). La lumière incidente vient selon la direction moyenne (OX) à l'entrée du Michelson et l'observation se fait selon la direction moyenne (OY) à la sortie du Michelson.

O_1 est l'intersection de (OX) avec le miroir M_1, de même O_2 est l'intersection de (OY) avec le miroir M_2. OO_1 et OO_2 sont appelés **bras du Michelson**. L'ordre de grandeur de la taille des bras est de quelques cm pour les modèles utilisés au lycée.

Sur le schéma de principe, les miroirs ont été dessinés perpendiculaires aux deux bras mais, en réalité, ils peuvent s'écarter d'un petit angle de cette position.

1.1.1. Équivalence à un coin d'air ou lame d'air quelconque

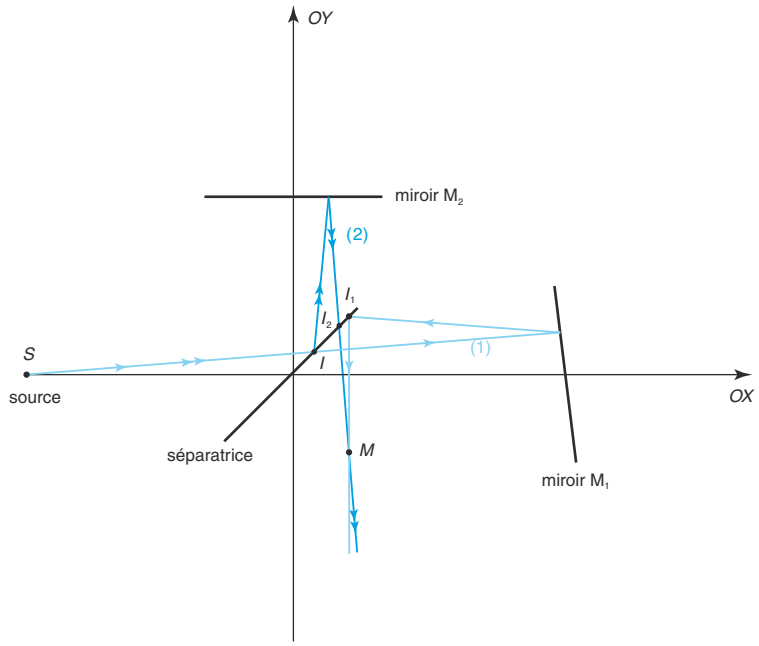
Remarque
Attention, on peut aussi dessiner deux rayons distincts issus de S.

Remarque
On ne s'intéresse pas à la lumière qui revient vers l'entrée mais il est évident que les rayons (1) et (2) se sont redivisés en I_1 et en I_2.

Prenons un point source S et traçons un rayon issu de S (figure 2). Ce rayon atteint la séparatrice en I où il est divisé (il s'agit de division d'énergie ; l'énergie est divisée par 2 donc l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$). Le rayon réfléchi par la séparatrice (noté par une double flèche) va se réfléchir sur le miroir M_2 tandis que le rayon transmis par la séparatrice (noté par une simple flèche) va se réfléchir sur le miroir M_1.
Le rayon (1) va ensuite se réfléchir sur la séparatrice en I_1 (son amplitude sera à nouveau divisée par $\sqrt{2}$ donc l'amplitude est moitié de celle initiale issue de S) tandis que le rayon 2 va traverser la séparatrice en I_2 (amplitude moitié de celle initiale issue de S). On ne s'intéresse qu'à la lumière qui se dirige vers la sortie.

Ces deux rayons se dirigeant vers la sortie du Michelson peuvent interférer s'ils se rencontrent.

Fig. 2 *Rayons Michelson*



© Nathan, *classe prépa*

• En faisant la symétrie du miroir M_1 (et de tous les rayons entre la séparatrice et M_1) par rapport à la séparatrice ainsi que celle de la source S (et des rayons situés entre S et la séparatrice), on obtient la figure 3 appelée montage en coin d'air. Les chemins optiques **ne sont pas changés** car le milieu est d'indice constant et les distances sont conservées par symétrie. S' est le symétrique de S par rapport à la séparatrice et M_1' le symétrique du miroir M_1.

On peut omettre la séparatrice, la source S et les rayons entre S et la séparatrice ainsi que les rayons entre la séparatrice et le miroir M_1. On obtient la figure 4. **L'intérêt de cette figure est de montrer l'équivalence de l'interféromètre de Michelson à un coin d'air ou lame d'air quelconque**. Cette équivalence va nous être très utile : elle simplifiera les schémas et la compréhension du dispositif. Tout se passera **comme si la source était située en S'**, qu'il n'y avait pas de séparatrice et qu'**un coin d'air pouvait réfléchir les rayons lumineux**.

Fig. 3 *Montage en coin d'air*

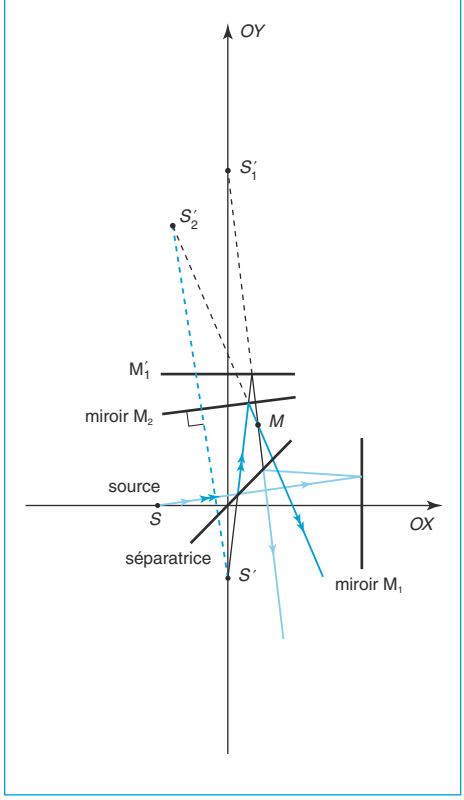
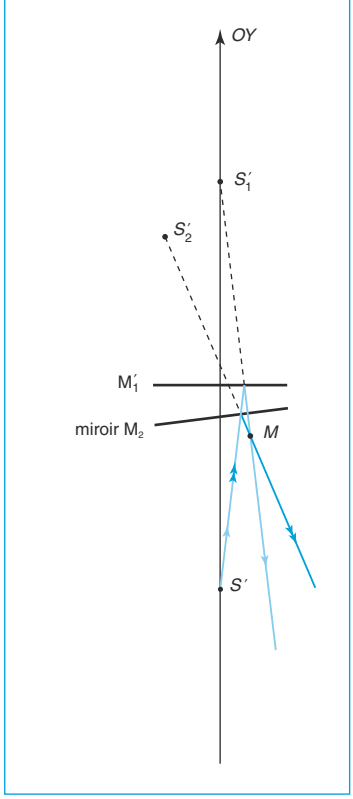


Fig. 4 *Équivalence coin d'air*



Remarque

On dit parfois lame d'air sans préciser mais il vaut mieux être précis pour ne pas confondre avec une lame d'air quelconque ou coin d'air.

Dans les exercices et problèmes, on peut utiliser directement cette équivalence à condition de la justifier un minimum (voir exercice n° 1 de « Savoir résoudre les exercices »). Quand les deux miroirs sont rigoureusement parallèles, cela forme une **lame d'air à faces parallèles** (figures 5 et 6). On remarque que les deux rayons émergents sont parallèles et interfèrent à l'infini.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 5 *Montage lame d'air à faces parallèles*

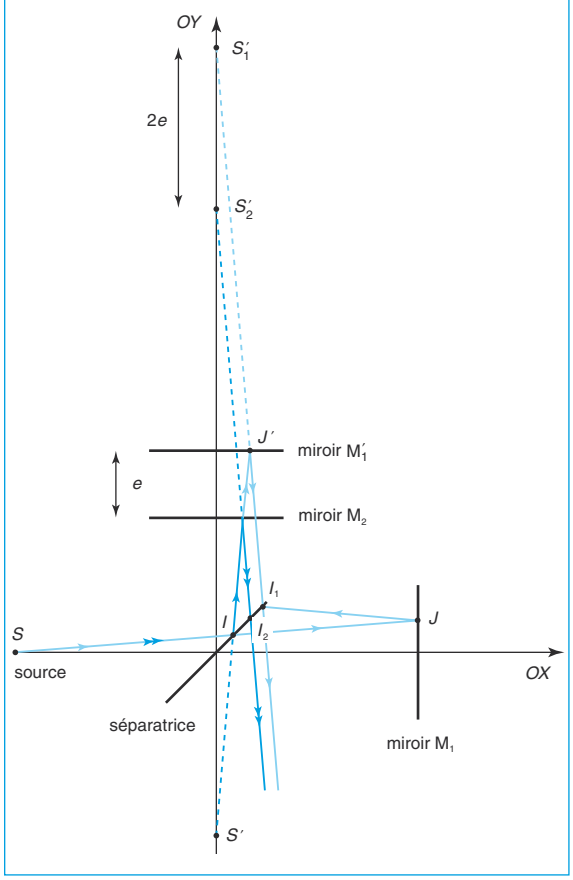
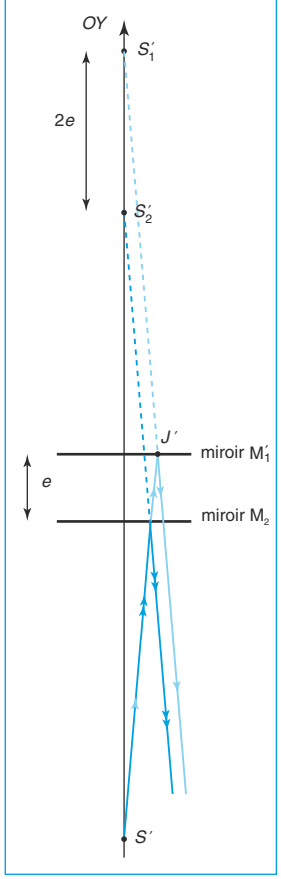


Fig. 6 *Équivalence lame d'air à faces parallèles*



1.1.2. Calcul du déphasage et de la différence de marche

Une fois établie l'équivalence à une lame d'air quelconque, nous avons un **dispositif diviseur d'onde** qui divise l'amplitude. S' est la source primaire. Par le miroir M'_1 on obtient l'image virtuelle de S' : S'_1 ; par le miroir M_2 on obtient l'image virtuelle de S' : S'_2. Tout se passe comme si on avait deux sources cohérentes entre elles S'_1 et S'_2 appelées sources secondaires (voir figures 4 et 6). Dans la configuration coin d'air, calculons le déphasage entre deux rayons issus de S (ou issus de S') qui arrivent au point M et vont y interférer.

Attention

La frange centrale sera brillante pour le Michelson idéalisé tandis que, pour le Michelson réel, tout dépend d'éventuels traitements de la séparatrice et de la compensatrice pour éliminer les réflexions parasites.

$$(SM)_2 = (S'M)_2 \quad \text{et} \quad (SM)_1 = (S'M)_1.$$

$$\phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((S'M)_2 - (S'M)_1) = \frac{2\pi}{\lambda}((S'I_2) + (I_2M) - (S'I_1) - (I_1M)) + \pi - \pi$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}((S'_2M) - (S'_1M))$$

car $(S'I_2) = (S'_2I_2)$ et $(S'I_1) = (S'_1I_1)$.

N.B. : les déphasages supplémentaires de π dus à la réflexion métallique sur chaque miroir se compensent.

© Nathan, *classe prépa*

Dans la configuration lame d'air à faces parallèles (figures 5 et 6), si la distance entre M_1' et M_2 vaut e, la distance entre les deux sources secondaires (situées sur le même axe que S', axe perpendiculaire aux deux miroirs) vaut $2e$.

Pour l'interféromètre de Michelson :

$$\delta_{2/1}(M) = (S_2'M) - (S_1'M) \; ; \quad \phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((S_2'M) - (S_1'M)).$$

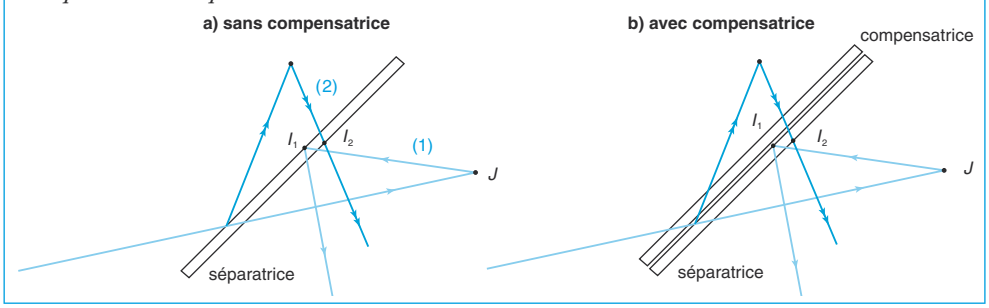
1.2. Description de l'appareil

1.2.1. Nécessité de la compensatrice

• La séparatrice n'est pas infiniment mince et est traitée sur l'une de ses faces pour obtenir un coefficient de réflexion en énergie de 0,5. Ainsi le rayon (1) traversera 3 fois la séparatrice tandis que le rayon (2) ne la traversera qu'une seule fois (voir figure 7). Cela induit une différence de marche supplémentaire qui ne serait pas gênante si elle ne dépendait pas de la longueur d'onde. Or, elle dépend de l'indice du milieu traversé donc de la longueur d'onde.

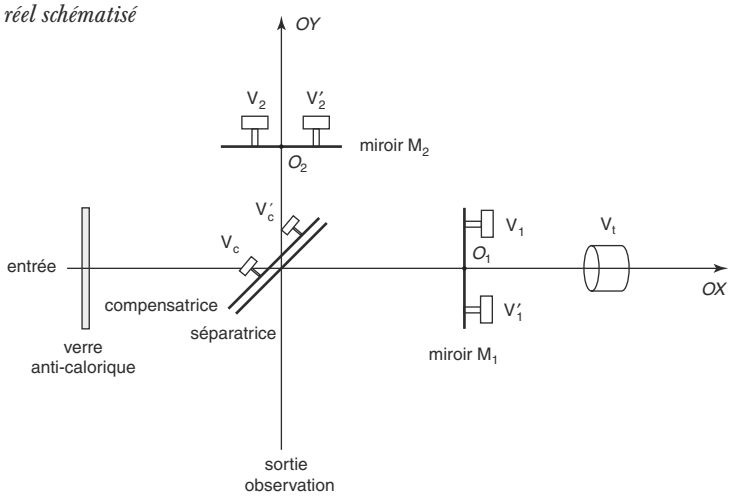
• **La compensatrice est une lame quasi parallèle à la séparatrice par construction**. Le rayon (1) traversera 3 fois la séparatrice et 1 fois la compensatrice tandis que le rayon (2) traversera 3 fois la compensatrice et 1 fois la séparatrice. On réglera la position de la compensatrice pour la rendre parallèle à la séparatrice et compenser ainsi la différence de marche supplémentaire. Pour plus de détails, voir l'exercice n° 8 de « S'entraîner ».

Fig. 7 *Séparatrice et compensatrice*



1.2.2. Ensemble des réglages du Michelson

Fig. 8 *Michelson réel schématisé*



© Nathan, *classe prépa*

L'appareil réel mais schématisé est représenté sur la figure 8. La compensatrice est réglable à l'aide de deux vis de rotation V_c et V'_c autour d'un axe vertical (OZ) et d'un axe horizontal (bissectrice de (OX) et (OY)).

Chaque miroir possède deux vis de rotation. Pour M_1, V_1 et V'_1 permettent de faire tourner le miroir autour de deux axes perpendiculaires du plan (O_1YZ) : ce sont des vis de rotation rapide. Pour M_2, V_2 et V'_2 sont des vis de rotation lente autour de deux axes perpendiculaires du plan (O_2XZ).

Seul le miroir M_1 est translatable grâce à une vis dite de chariotage notée V_t : son tambour est gradué en 50 ou 100 graduations. Un tour du tambour translate le miroir d'un demi-millimètre 500 µm. Donc une graduation correspond à 10 µm ou 5 µm. À vérifier sur le Michelson avant toute manipulation.

La marge de déplacement du miroir M_1 est de quelques cm pour les interféromètres utilisés en TP.

Le Michelson réel possède à l'entrée un verre anti-calorique pour éviter l'échauffement et la déformation des miroirs sous l'action des infrarouges.

2 Franges d'interférences et localisation des franges avec une source étendue

2.1. Cas d'une source ponctuelle

• D'une source ponctuelle, partent un très grand nombre de rayons. Ceux de type (1) sont transmis par la séparatrice, se réfléchissent sur M_1 puis sur la séparatrice pour se diriger vers la sortie du Michelson ; ceux de type (2) se réfléchissent sur la séparatrice, se réfléchissent sur M_2 puis sont transmis par la séparatrice pour se diriger vers la sortie du Michelson. En tout point M interfèrent un rayon de type (1) semblant provenir de S'_1 et un rayon de type (2) semblant provenir de S'_2. Les **franges d'interférences ne sont pas localisées** et sont visibles dans tout le champ d'interférences. Ce sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe $S'_1S'_2$.

• **Il faut préciser la position de l'écran**, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2. Dans la pratique, l'écran est perpendiculaire à la direction (OY) du Michelson.

– *Si l'écran est parallèle* au plan contenant les deux sources et suffisamment loin, on observera des franges quasi rectilignes. Dans la configuration du coin d'air, l'angle α étant faible, on peut, si on éclaire en incidence quasi normale, obtenir les deux sources secondaires virtuelles dans un plan quasi parallèle à (OXZ).

Remarque : l'angle entre les deux miroirs est faible, de l'ordre de la minute d'arc $(\alpha \approx 10^{-5}$ à 10^{-3} rad) quand on observe des franges quasi rectilignes. En raison de la cohérence temporelle $\delta_{2/1}(M) < \ell_c = c\tau$, l'angle doit être suffisamment petit pour permettre l'observation des franges et la distance moyenne entre les deux miroirs ne doit pas excéder le mm.

– *Si l'écran est perpendiculaire* à l'axe des deux sources, on observera des franges circulaires ; ce dernier cas est toujours réalisé avec la configuration lame d'air à faces parallèles.

Les deux sources secondaires virtuelles sont situées sur un axe selon la direction (OY) du Michelson.

© Nathan, *classe prépa*

2.2. Cas d'une source étendue – Théorème de localisation

Une source ne peut jamais être ponctuelle. De plus, pour des raisons de luminosité, on peut être amené à étendre la source. On a vu dans le chapitre **2** que c'était au détriment du contraste. En effet, deux points appartenant à la même source étendue sont nécessairement incohérents entre eux. Dans une source étendue, il y a une infinité de points. Chacun donne son propre système d'interférences. Les systèmes vont se superposer pour finalement se brouiller.

Cependant, pour une condition particulière aux diviseurs d'amplitude, on peut étendre la source tout en gardant un bon contraste sur une surface : **la surface de localisation**. Un rayon incident primitif issu de S peut se diviser pour donner deux rayons émergents qui vont interférer ; un autre rayon incident primitif issu de Σ proche de S se divise aussi pour donner deux rayons émergents qui vont interférer. La différence de marche entre les deux cas est faible et permet de conserver un bon contraste : les deux systèmes d'interférence se superposent mais ils sont très peu décalés.

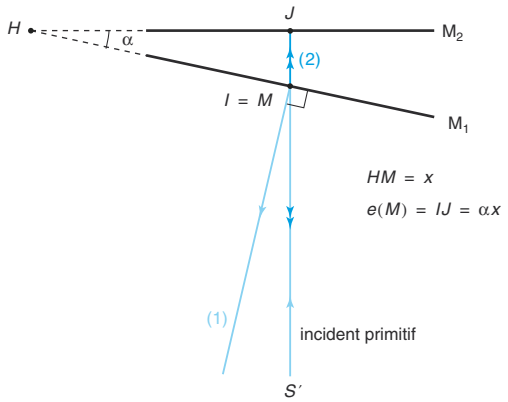
Remarque
La démonstration du théorème de localisation est hors programme mais vous devez en connaître les résultats.

> Pour l'interféromètre de Michelson en source étendue, la surface de localisation est l'ensemble des points d'intersection des deux émergents correspondant au même incident primitif.

2.2.1. Configuration du coin d'air

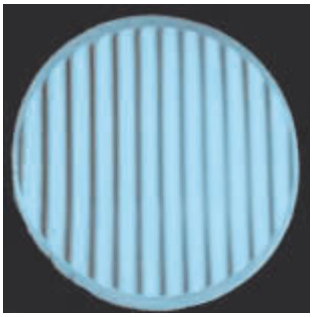
• Traçons un incident primitif issu de S' pour une position bien déterminée du coin d'air (figure 9). Le faisceau incident parallèle est perpendiculaire à la direction moyenne des deux miroirs (l'angle du coin d'air est faible par construction du Michelson) : on parle d'incidence normale. Le rayon se divise au point I, le rayon (1) (simple flèche) se réfléchit sur M_1 tandis que le rayon (2) (double flèche) pénètre dans le coin d'air (qui n'est pas réel) et se réfléchit sur M_2. L'intersection des deux rayons émergents est au point M confondu ici avec le point I. Les points d'intersection des deux émergents correspondant au même incident primitif (rayon incident à faire varier sur la figure) sont situés dans ce cas particulier sur le miroir M_1, donc la surface de localisation des franges d'interférences est le miroir M_1 pour un faisceau incident parallèle à (OY).

Fig. 9 *Primitif coin d'air*



© Nathan, *classe prépa*

Fig. 10 *Michelson en coin d'air : franges d'interférences*



Dans le cas général, **la surface de localisation des franges d'interférences** est située entre les deux miroirs, on dit **localisée sur le coin d'air**.

• Calculons la différence de marche au point M : $\delta_{2/1}(M) = (S'M)_2 - (S'M)_1 = 2e(M) \approx 2\alpha x$.

Cherchons la forme des franges d'interférences. Les franges de même nature ont même intensité donc même différence de marche modulo λ donc même x modulo l'interfrange $i = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$.

Elles sont rectilignes, parallèles à l'arête virtuelle du coin d'air passant par H et équidistantes. On les appelle **les franges d'égale épaisseur** car à une frange donnée correspond la même épaisseur e du coin d'air.

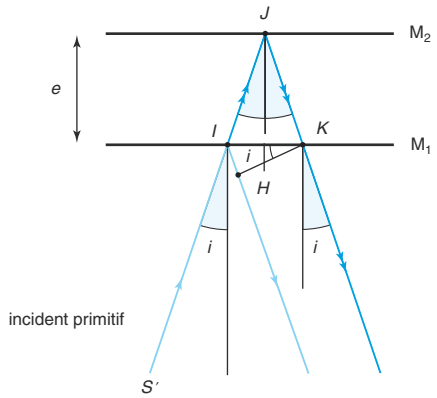
Pour un **Michelson en coin d'air** avec un **éclairage étendu parallèle en incidence normale**, les **franges d'interférences** sont localisées sur le coin d'air. $\delta_{2/1}(M) = 2e(M) \approx 2\alpha x$ et les franges dites d'égale épaisseur sont parallèles à l'arête du coin d'air et équidistantes. L'interfrange vaut $i = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$.

Dans la pratique, on positionnera la source étendue dans le plan focal objet d'une lentille convergente près du foyer objet (par autocollimation) pour obtenir un faisceau incident parallèle quasi normal. Pour observer les franges localisées sur le coin, on fera l'image du coin sur un écran à l'aide d'une lentille convergente (ne pas oublier la condition sur la distance objet-écran $D > 4f'$ et la lentille plus proche de l'objet coin que de l'écran pour agrandir).

2.2.2. Configuration de la lame d'air à faces parallèles

Traçons un incident primitif issu de S' qui arrive sur la lame d'air à faces parallèles avec un angle d'incidence i (figure 11). Le rayon se divise au point I, le rayon (1) (simple flèche) se réfléchit sur M_1 tandis que le rayon (2) (double flèche) pénètre dans la lame d'air (qui n'est pas réelle) et se réfléchit sur M_2 au point J. Les deux rayons émergents sont parallèles, ils se rencontrent donc à l'infini.

Fig. 11 *Primitif lame d'air*



© Nathan, *classe prépa*

Les points d'intersection des deux émergents correspondant au même incident primitif quand l'angle d'incidence varie, sont situés à l'infini. **La surface de localisation des franges d'interférences est à l'infini.**
Pour faire varier l'angle d'incidence dans la pratique, il suffit de faire converger la lumière incidente sur le miroir M_1 avec une lentille. Cela permet d'obtenir des angles d'incidence variant entre 0 et i_{max}.

Conseil
Faire un dessin et donner des noms à tous les points importants (figure 11).

• Calculons la différence de marche au point M à l'infini :
$\delta_{2/1}(M) = (S'M)_2 - (S'M)_1$.

Dans l'air, $\delta_{2/1}(M) = S'I + IJ + JK + KM - S'I - IH - HM$

$$= IJ + JK - IH$$

car $KM = HM$, en effet K et H appartiennent à la même surface d'onde.

$IJ = JK = \dfrac{e}{\cos i}$ et $IH = IK \sin i = 2e \tan i \sin i$.

$$\delta_{2/1}(M) = \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e \sin i^2}{\cos i} = \frac{2e \cos i^2}{\cos i}$$

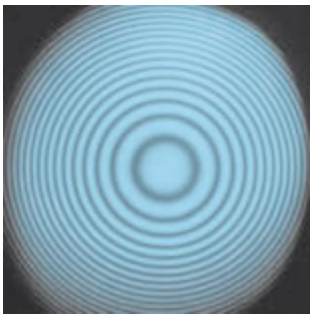
$$= \frac{2e \cos i^2}{\cos i}$$

d'où $\delta_{2/1}(M) = 2e \cos i$.

Remarque : nous verrons dans l'exercice n° 1 de « Savoir résoudre les exercices » une autre méthode plus rapide pour calculer δ mais cette méthode est souvent demandée et doit être connue.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 12 *Michelson en lame d'air à faces parallèles : franges d'interférences*



Cherchons la forme des franges d'interférences. Les franges de même nature ont même intensité, donc même différence de marche modulo λ, donc même $\cos i$ modulo $\dfrac{\lambda}{2e}$.
Une frange correspond à une valeur de l'angle i. On les appelle **franges d'égale inclinaison**. L'écran est situé perpendiculairement à l'axe $S'_1S'_2$. Ce sont donc des anneaux circulaires, concentriques, non équidistants. Ils sont plus resserrés sur les bords qu'au centre.

Pour un Michelson **en lame d'air à faces parallèles** avec un **éclairage étendu convergent** sur le miroir M_1, les franges d'interférences sont localisées à l'infini. $\delta_{2/1}(M) = 2e \cos i$ et les franges dites d'égale inclinaison sont des anneaux concentriques non équidistants (plus resserrés sur les bords qu'au centre).

3 Étude théorique du réglage du Michelson

Remarque
En première lecture, les grandes lignes du réglage suffisent. Pour une lecture approfondie, lire le § 4 qui détaille le TP cours.

Il ne faut pas régler le Michelson sans réfléchir. Toutes les applications intéressantes utilisent la configuration lame d'air à faces parallèles. Quand on doit régler un Michelson, il est, *a priori*, dans une configuration quelconque, donc un coin d'air de grand angle.

• Première étape du réglage

Elle consiste à rendre la compensatrice quasi parallèle à la séparatrice et à rendre les deux miroirs quasi parallèles. Réglages dits géométriques.
L'éclairage est parallèle en incidence normale. Les réflexions sur les miroirs et sur les faces des séparatrice et compensatrice donnent plusieurs images à l'infini. Les réglages permettent d'obtenir une seule image intense ce qui assure un quasi parallélisme entre les deux miroirs d'une part, et entre la compensatrice et la séparatrice d'autre part.

• Deuxième étape

Elle consiste à visualiser les franges du coin d'air, à les agrandir afin de passer à une lame d'air à faces parallèles.
L'éclairage est parallèle en incidence normale. Les franges du coin d'air sont localisées sur le coin. On les observe sur un écran conjugué du coin d'air par une lentille convergente. L'interfrange vaut $\frac{\lambda}{2\alpha}$, ainsi l'agrandissement des franges prouve que l'angle du coin d'air diminue.
On ne doit voir plus qu'une seule frange afin de réaliser une lame d'air à faces parallèles.
On change alors les conditions d'observation et d'éclairage. L'éclairage est convergent sur les miroirs, on observe les anneaux à l'infini (ou dans le plan focal image d'une lentille convergente).

• Troisième étape

Elle consiste à visualiser les anneaux et à les rendre le plus rond possible, à chercher le contact optique $e = 0$.
Les réglages de la compensatrice qui rendent les anneaux ronds assurent le parallélisme entre la séparatrice et la compensatrice.
De part et d'autre du contact optique, on observe des anneaux. Au contact optique, l'éclairement est uniforme car il n'y a plus d'interférences : les deux miroirs sont confondus.
Quand on s'éloigne du contact optique, le nombre d'anneaux augmente. En revanche, quand on se rapproche du contact optique, le nombre d'anneaux diminue.

4 TP cours

La première étape du réglage consiste à rendre la compensatrice quasi parallèle à la séparatrice et à rendre les deux miroirs quasi parallèles.

Les réglages décrits dans le § 4.1 privilégient la projection des franges d'interférences sur un écran ; les franges sont donc visibles par un grand nombre de personnes qui peuvent comparer ce qu'elles observent. Les réglages dits à l'œil nu (demandés parfois aux concours) sont plus rapides quand ils sont maîtrisés. Ils nécessitent une lampe à vapeur de sodium impérativement (les rayons dans l'ultraviolet de la lampe à vapeur de mercure sont pénibles pour l'œil) et un dépoli à l'entrée pour atténuer l'intensité lumineuse.

© Nathan, *classe prépa*

4.1. Premiers réglages géométriques

Conseil

Il faut aligner latéralement et en hauteur : mesurer la hauteur du centre du verre anticalorique, régler la hauteur des lentilles, du diaphragme et de la lampe en conséquence.

On fabrique une source étendue à l'infini : un trou circulaire source (diaphragme éclairé par une lampe à vapeur de mercure ou sodium ou en lumière blanche) est placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente par autocollimation (en général, on prend une focale de 10 cm). En effet, ce faisceau incident créé parallèle va se réfléchir sur les deux miroirs, une partie revient vers la source et si l'image du trou est vu nette dans le même plan que le trou source, cela signifie que le trou source est bien situé dans le plan focal objet de la lentille. À la sortie du Michelson, on récupère plusieurs images du trou source (visibles à l'infini, écran suffisamment loin ou dans le plan focal image d'une seconde lentille convergente dite lentille de sortie). On s'attend à au moins deux images intenses. Avec le Michelson Didalab, les traitements de la séparatrice et de la compensatrice qui éliminent les réflexions parasites empêchent la visualisation d'autres images tandis qu'avec le Michelson Sopra, on récupère quatre images intenses.

• **Michelson Didalab** : on règle à l'œil nu la compensatrice grossièrement parallèle à la séparatrice (réglage insuffisant mais indispensable). On joue sur les vis de rotation V_1 et V_1' du miroir M_1 afin de faire coïncider les deux images du trou source en une seule : miroirs quasi parallèles.

• **Michelson Sopra** : on joue sur les vis V_c et V_c' de la compensatrice afin de n'avoir plus que deux images du trou source : compensatrice quasi parallèle à la séparatrice. Ensuite, on joue sur les vis V_1 et V_1' afin de faire coïncider les deux images du trou source en une seule : miroirs quasi parallèles.

On peut passer à l'étape suivante qui requiert plus de luminosité. On supprime alors le diaphragme et on met le filament de la lampe dans le plan focal objet de la lentille d'entrée. Pour s'en assurer, il faut voir nette l'image du filament à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille de sortie. On peut alors passer à la deuxième étape.

Si les réglages sont faits à l'œil nu, il est inutile d'augmenter la luminosité, on conserve un trou source.

© Nathan, *classe prépa*

4.2. Passage du coin d'air à la lame d'air à faces parallèles et visualisation des franges du coin d'air

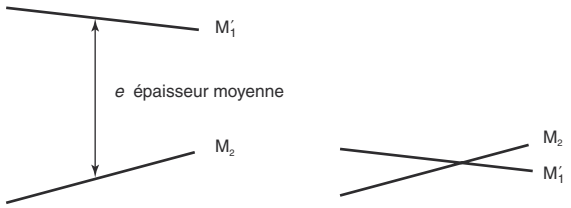
La deuxième étape consiste à visualiser les franges du coin d'air, à les agrandir afin de passer à une lame d'air à faces parallèles.

• Les résultats du théorème de localisation du Michelson en coin d'air en source étendue sont : éclairage parallèle en incidence normale et observation des franges localisées sur le coin d'air. Il faut donc faire l'image du coin sur l'écran avec une lentille convergente. En général, on prend une focale de 20 cm, étant donné l'encombrement du Michelson (on ne peut pas approcher à moins de quelques dm du miroir M_2) et les contraintes des salles de TP. Cette image du coin est un disque de rayon $R_{\text{image}} = |\gamma| R_{\text{miroir}}$. $R_{\text{sopra}} = 1$ cm et $R_{\text{didalab}} = 2\,\text{cm}$. On peut obtenir le grandissement $|\gamma|$ en mesurant le rayon de l'image sur l'écran.

• Soit on observe immédiatement des franges quasi rectilignes soit on observe un éclairement uniforme. Dans le second cas, il faut charioter le miroir translatable M_1 pour diminuer l'épaisseur moyenne du coin d'air. En effet, il ne faut pas oublier la cohérence temporelle qui impose $\delta < c\tau$ (les deux trains d'onde qui interfèrent doivent être issus du même train d'onde primaire). Il faut donc diminuer la différence de marche optique : on

dit qu'il faut ramener l'arête du coin d'air dans le champ de vision. Les deux dessins de la figure 13 l'illustrent. On voit apparaître les franges quand l'épaisseur moyenne est suffisamment petite $\delta = 2e_{moy} < c\tau$.

Fig. 13 *Diminution épaisseur coin d'air*



Conseil
Avant d'élargir l'interfrange, charioter le miroir M_1 pour choisir la zone la plus contrastée afin d'être proche de la frange centrale.

• On va maintenant augmenter l'interfrange en tournant les vis de rotation V_1 et V'_1. En effet, l'interfrange vaut $i = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$; on veut diminuer l'angle du coin d'air, on augmente donc l'interfrange jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une seule frange qui occupe toute l'image. $\alpha \approx 10^{-5}$ rad (pour le calcul, voir l'exercice n° 3 de « Savoir appliquer le cours »). Comme la source n'est pas monochromatique, cette frange est colorée. Sa couleur dépend de l'épaisseur entre M'_1 et M_2. En chariotant le miroir M_1 avec la vis V_t, on change cette couleur.

4.3. Visualisation des anneaux

La troisième étape consiste à visualiser les anneaux et à les rendre le plus rond possible, à chercher le contact optique $e = 0$. On pourra effectuer ensuite des mesures.

Pour visualiser les anneaux, il va falloir changer l'éclairage et l'observation.

• Les résultats du théorème de localisation du Michelson en lame d'air en source étendue sont : l'éclairage doit être convergent sur le miroir M_1 pour avoir une grande gamme d'angles d'incidence et l'observation se fait à l'infini. Pour cela, il suffit de reculer la lampe jusqu'à ce que le faisceau incident converge bien au centre du miroir (pour avoir i_{max} le plus grand possible). Les anneaux étant localisés à l'infini, il faut observer à l'infini à la sortie (ou dans le plan focal image d'une lentille de sortie convergente).
Nous observons des anneaux plutôt elliptiques. Il faut jouer sur les vis V_c et V'_c pour les rendre ronds. L'une des vis rectifie les axes de l'ellipse tandis que l'autre modifie son ellipticité. Quand les anneaux sont ronds, on peut charioter le miroir M_1. On voit le nombre d'anneaux augmenter ou diminuer selon le sens dans lequel on chariote. Pour une position de M_1, on n'observe plus aucun anneau, la teinte est uniforme, il n'y a plus d'interférences. Nous sommes alors au contact optique $e = 0$. De part et d'autre de cette position, le nombre d'anneaux augmente.

Conseil
Loin du contact optique, les anneaux sont nombreux et apparaissent ronds.
Quand on se rapproche du contact optique, ils ne le sont plus. Il faut les rendre ronds et vérifier qu'ils le restent de part et d'autre du contact optique.

4.3.1. Étude sur les anneaux

Calculons le nombre maximal d'anneaux brillants que l'on peut observer.
$\delta_{2/1}(M) = 2e\cos i$ et l'angle d'incidence i variant entre 0 et i_{max},
on a $2e\cos i_{max} \leq \delta \leq 2e$.

© Nathan, *classe prépa*

Les anneaux brillants sont donnés par $\delta = k\lambda$ avec k entier.

$\frac{2e\cos i_{max}}{\lambda} \leq k \leq \frac{2e}{\lambda}$ et si on prend $i_{max} = \frac{\pi}{2}$ alors $0 \leq k \leq \frac{2e}{\lambda}$.

On peut donc affirmer que le nombre maximal d'anneaux brillants visibles est $E\left(\frac{2e}{\lambda}\right)$.

Ce résultat est important car lorsqu'on translate le miroir M_1, on fait varier l'épaisseur e de la lame d'air donc le nombre d'anneaux. Quand e augmente, le nombre d'anneaux augmente (les anneaux semblent se resserrer à l'intérieur de l'image). Quand e diminue, le nombre d'anneaux diminue (ils semblent s'écarter les uns des autres) jusqu'à l'annulation de e (contact optique) où il n'y a plus d'anneaux car il n'y a plus d'interférences $(S'_1 = S'_2)$: on observe une teinte uniforme, couleur de la source.

Expérimentalement, on chariote dans un sens quelconque. Si le nombre d'anneaux augmente et si les anneaux semblent se « produire » au centre tout en se rapprochant les uns des autres, alors on s'éloigne du contact optique. En revanche, si le nombre d'anneaux diminue et si les anneaux semblent « disparaître » dans le centre tout en s'écartant les uns des autres, alors on se rapproche du contact optique. C'est un test infaillible.

Remarque
La fonction $2e\cos i$ étant décroissante, l'ordre d'interférences décroît.

Exprimons le rayon des anneaux brillants sur l'écran ou le détecteur en fonction des données. $\delta_{2/1}(M) = 2e\cos i = k\lambda$ avec k entier. Il faut connaître l'ordre d'interférences au centre des anneaux où $i = 0$ et $\delta = 2e$. Notons $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$. Si p_0 est entier, le centre des anneaux est brillant. *A priori*, le centre est quelconque mais, pour une première étude, nous allons, pour simplifier, le choisir brillant.

Si p_0 est entier alors les anneaux brillants sont donnés par l'équation :

Attention
L'ordre d'interférences décroît à partir du centre des anneaux.

$p_n(M) = \frac{2e\cos i}{\lambda} = k = p_0 - n$ avec n entier, pour le $n^{\text{ième}}$ anneau brillant (on ne compte pas le centre).

• **Pour de faibles valeurs de l'angle *i***, on peut écrire $\tan i \approx i \approx \frac{\rho}{D}$ avec D la distance très grande de la lame d'air à l'écran (ou détecteur) et $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$ à l'ordre 2 en i. Si on observe dans le plan focal image d'une lentille de sortie alors $\tan i \approx i \approx \frac{\rho}{f'}$.

Attention
La relation entre le rayon des anneaux ρ_n et n n'étant pas linéaire, les anneaux ne sont pas équidistants.

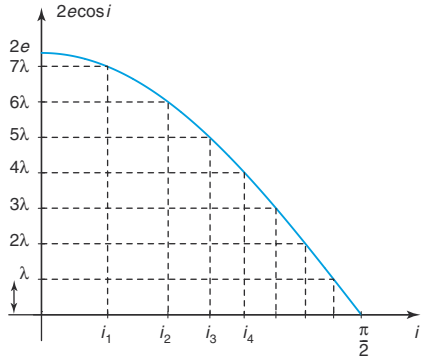
D'où $2e\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = 2e - n\lambda$ ce qui implique $n = 2e\frac{i^2}{2\lambda} = \frac{e}{\lambda}\left(\frac{\rho_n}{f'}\right)^2$ d'où :

$$\boxed{\rho_n = f'\sqrt{\frac{n\lambda}{e}}}$$

• **Pour de grandes valeurs de *i***, les anneaux sont de plus en plus resserrés. On trace, sur la figure 14, $\delta = 2e\cos i$ en fonction de i et les droites $\delta = n\lambda$ avec n entier. Les intersections de la courbe et des droites nous donnent les valeurs de i correspondant aux franges brillantes. On constate que les valeurs se resserrent au fur et à mesure que i augmente.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 14 *Resserrement des anneaux*



Si p_0 n'est pas entier alors les anneaux brillants sont donnés par l'équation :

$p_n(M) = \dfrac{2e\cos i}{\lambda} = k = E(p_0) - (n-1)$ avec n entier, pour le $n^{\text{ième}}$ anneau brillant.

En effet, le premier anneau brillant sera obtenu pour $E(p_0)$. Les formules changent mais les résultats physiques qualitatifs restent inchangés.

4.4. Utilisation du Michelson en lumière blanche

On abordera la question théoriquement dans le chapitre **4**. En pratique, pour des raisons de cohérence temporelle ($\ell_c < \mu\text{m}$ en lumière blanche), il faudra partir de la configuration « contact optique » en lumière lampe spectrale. Remplacer la lampe spectrale par une lampe à incandescence (lumière blanche). Éclairer en lumière parallèle en incidence normale puis donner un petit angle (et faire l'image du coin d'air sur l'écran) afin d'observer les franges du coin d'air en lumière blanche (voir document **d** en 3e de couverture). Nous analyserons ce qu'on observe dans le chapitre **4** et mesurerons l'épaisseur d'une lamelle.

N.B. : Nous ne pouvons pas observer des anneaux en lumière blanche. En effet, $\delta < \ell_c$ donc $2e < \ell_c$, le nombre maximal d'anneaux visibles valant $E\left(\dfrac{2e}{\lambda}\right)$ ne peut excéder quelques unités.

• Conclusion

Certaines applications parmi les plus classiques seront étudiées dans « Savoir résoudre les exercices » (exercices n° 2 et n° 3) : on peut ainsi mesurer de faibles différences de longueur ou détecter des contraintes mécaniques sur une surface réfléchissante. Les mesures en lumière polychromatique seront expliquées dans le chapitre **4**.

Cet appareil est encore utilisé au XXIe siècle. La détection des ondes gravitationnelles (expérience Virgo) utilise un interféromètre de Michelson aux bras de 3 km, les chemins optiques sont énormément augmentés (300 km) par des réflexions sur des miroirs afin d'augmenter la sensibilité de l'appareil.

© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 95*

1 Pour un interféromètre de Michelson en coin d'air avec une source étendue :

- ☐ **a.** l'éclairage doit être parallèle et les franges sont localisées à l'infini.
- ☐ **b.** l'éclairage est convergent sur les miroirs et les franges sont localisées sur le coin d'air.
- ☐ **c.** l'éclairage est en incidence normale sur les miroirs et les franges sont localisées sur le coin d'air.

2 Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles avec une source étendue :

- ☐ **a.** l'éclairage doit être parallèle et les franges sont localisées à l'infini.
- ☐ **b.** l'éclairage est convergent sur les miroirs et les franges sont localisées à l'infini.
- ☐ **c.** l'éclairage est en incidence normale et les franges sont localisées sur la lame d'air.

3 Pour un interféromètre de Michelson en coin d'air éclairé en lumière monochromatique étendue, l'interfrange sur l'écran est :

- ☐ **a.** proportionnelle à l'angle du coin d'air.
- ☐ **b.** proportionnelle à la longueur d'onde.
- ☐ **c.** proportionnelle à l'épaisseur du coin d'air.

4 Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles, on désire observer les franges d'interférences sur un écran.

- ☐ **a.** Les franges sont circulaires et non équidistantes.
- ☐ **b.** Les franges sont elliptiques et se resserrent.
- ☐ **c.** Les franges sont circulaires et équidistantes.

5 Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles en lumière monochromatique $\lambda = 600$ nm, donner l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la lame d'air sachant qu'on observe 10 anneaux brillants sur l'écran.

- ☐ **a.** Quelques µm.
- ☐ **b.** Quelques cm.
- ☐ **c.** Quelques mm.

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 95*

1 Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles, on désire observer les anneaux sur un écran. On dispose de deux lentilles convergentes de focale 20 cm et 100 cm. Où faut-il placer l'écran par rapport à la lentille convergente ? Laquelle choisir pour une observation la meilleure possible ?

2 Connaissant le pouvoir séparateur linéique de l'œil (0,1 mm), calculer l'angle maximal (en minutes d'arc) que doit faire le coin d'air pour pouvoir observer les franges d'égale épaisseur sur un écran conjugué du coin d'air par une lentille convergente. Les miroirs du Michelson ont un diamètre de 2 cm et sur l'écran, on observe les franges dans une tache lumineuse circulaire de 14 cm de diamètre. On prendra pour longueur d'onde moyenne : $\lambda = 600$ nm.

3 Au cours du réglage du Michelson en lame d'air à faces parallèles, on passe par une étape où on agrandit les franges du coin d'air jusqu'à n'en obtenir plus qu'une seule.
Donner un ordre de grandeur de l'angle α du coin d'air (en secondes d'arc). On prendra pour longueur d'onde moyenne : $\lambda = 600$ nm et des miroirs de diamètre 4 cm.

© Nathan, *classe prépa*

4 Quelques manipulations avec l'interféromètre de Michelson

On utilise l'interféromètre de Michelson réglé au préalable en lame d'air à faces parallèles. Il est éclairé en lumière monochromatique. Initialement, il est dit au contact optique. La source lumineuse est suffisamment large et proche de l'appareil pour qu'un condenseur adéquat permette d'éclairer les miroirs avec un faisceau de rayons dont les incidences varient de l'incidence normale jusqu'à une incidence oblique assez importante.

On translate le miroir mobile de l'interféromètre grâce à la vis de chariotage. On observe alors des anneaux sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ cm. L'axe de cette lentille est parallèle aux rayons émergents qui se sont réfléchis sur les miroirs sous incidence normale. On ne demande que des réponses simples et courtes sans aucune démonstration théorique mais justifiées par un dessin ou un argument.

1. Faire un dessin du dispositif.

2. Pourquoi effectue-t-on l'observation dans le plan focal image d'une lentille convergente ?

3. Situer le centre des anneaux.

4. Comment le système d'anneaux évolue-t-il si :

a. La lentille pivote un peu autour d'un de ses diamètres ?

b. La lentille est décalée un peu dans une direction perpendiculaire à son axe ?

5. Pourquoi est-il important de disposer d'un faisceau de rayons d'inclinaisons très variées ?

6. Comment évoluent les rayons des anneaux quand on s'éloigne du contact optique ?

© Nathan, *classe prépa*

1 – Michelson en lame d'air à faces parallèles

On étudie un interféromètre de Michelson monté en lame d'air, éclairé par une source étendue, monochromatique (λ = 0,546 µm). On observe dans le plan focal image d'une lentille convergente (f' = 1 m) à la sortie du Michelson. À partir d'une position où les miroirs M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la séparatrice S, on translate M_1 de e = 1 mm.

1 Établir brièvement l'équivalence du Michelson réel à une lame d'air à faces parallèles. Rappeler les résultats du théorème de localisation en source étendue. En utilisant les deux sources secondaires virtuelles et deux rayons parallèles issus des deux sources dans la direction i angle d'incidence, établir l'expression de la différence de marche entre ces deux rayons qui interfèrent à l'infini.

2 Qu'observe-t-on sur l'écran ? Quel est l'ordre d'interférence au centre des anneaux ? Quel est le rayon du $n^{\text{ième}}$ anneau brillant en fonction de l'ordre d'interférences p_n ? Quel est le rayon du quatrième anneau brillant ?

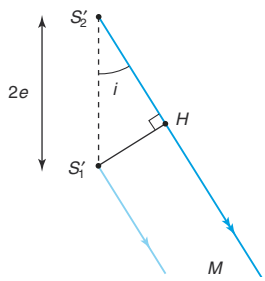
3 On ajoute devant le miroir M_1 une lame à faces parallèles (indice n = 1,5, épaisseur 8 µm). Quelle est la variation de l'ordre d'interférence au centre ? Qu'observe-t-on sur l'écran ?

résolution méthodique

1

Pour établir l'équivalence du Michelson réel de la manière la plus concise, commencer par réaliser un dessin clair du Michelson avec la source, les deux miroirs et des rayons (voir figure 5 de « Retenir l'essentiel »), ensuite introduire la symétrie par rapport à la séparatrice qui conserve les distances (donc, dans l'air, les chemins optiques).

Par symétrie par rapport à la séparatrice de la source, des rayons entre la source et la séparatrice, du miroir M_1 et des rayons entre la séparatrice et M_1, on obtient S', M_1' et M_2 ainsi que tous les rayons lumineux. Faire un dessin (voir figure 6 de « Retenir l'essentiel ») de la nouvelle situation avec la position de la source symétrique S' et les deux miroirs M_1' et M_2 en lame d'air. Positionner les sources secondaires virtuelles, ce sont les symétriques de la source S' par rapport aux deux miroirs. Dans la configuration lame d'air à faces parallèles, si l'épaisseur de la lame est e alors la distance entre les deux sources secondaires est $2e$.
En source étendue, l'éclairage doit être convergent sur les miroirs et les anneaux sont localisés à l'infini.



© Nathan, *classe prépa*

La différence de marche vaut :

$$\delta_{2/1} = (S'_2M) - (S'_1M) = S'_2M - S'_1M = S'_2H + HM - S'_1M = S'_2H$$
$$= S'_2S'_1\cos i = 2e\cos i \text{ car } HM = S'_1M \text{ (}H\text{ et }S'_1\text{ appartiennent au même plan d'onde).}$$

Il faut retenir cette méthode de calcul très rapide de la différence de marche pour un Michelson en lame d'air à faces parallèles. Si vous avez le choix de la méthode, c'est celle qu'il faut utiliser.

2 On observe sur l'écran des anneaux alternativement brillants et sombres non équidistants plus resserrés au bord qu'au centre.

L'ordre d'interférences au centre des anneaux $i = 0$ vaut : $\boxed{p_0 = \dfrac{2e}{\lambda}}$

A.N. : $p_0 = \mathbf{3\,663{,}0}$. Le centre est brillant. Le premier anneau brillant a pour ordre d'interférences 3 662.

$p_n(M) = \dfrac{2e\cos i}{\lambda} = 3\,663 - n$ avec n entier, pour le $n^{\text{ième}}$ anneau brillant. On ne compte pas le centre.

Pour de faibles valeurs de l'angle i, on peut écrire $\tan i \approx i \approx \dfrac{\rho}{f'}$ avec f' la distance focale de la lentille et $\cos i \approx 1 - \dfrac{i^2}{2}$ à l'ordre 2 en i.

D'où $p_n(M) = \dfrac{2e}{\lambda} - \dfrac{ei^2}{\lambda} = \dfrac{2e}{\lambda} - \dfrac{e\rho_n^2}{f'^2\lambda}$ ce qui implique $\dfrac{\rho_n^2}{f'^2} = 2 - \dfrac{p_n\lambda}{e}$.

$$\boxed{\rho_n = f'\sqrt{2 - \frac{p_n\lambda}{e}}}$$

A.N. : $n = 4$, $p_4 = 3\,659$ et $\rho_4 = \mathbf{2{,}71\ cm}$.

Ce résultat est cohérent avec $\rho_n = f'\sqrt{\dfrac{n\lambda}{e}}$ (§ 4.3.1 de « Retenir l'essentiel ») avec $p_n = p_0 - n$.

3

Attention, le chemin optique varie de $2(n-1)e_{\text{lame}}$ car il y a un aller et retour dans la lame en raison du miroir.

$\delta_{2/1}(M)$ diminue car le chemin optique selon la voie 1 est augmenté ;

$$p'_0 = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e - 2(n-1)e_{\text{lame}}}{\lambda} = p_0 - 14{,}815$$

L'ordre d'interférence au centre a varié de 14,815, on va donc observer le brusque déplacement de 14 anneaux brillants au centre.

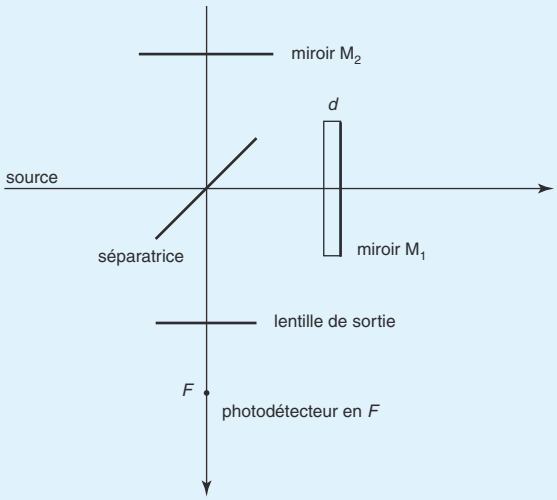
en conclusion

Le calcul des rayons des anneaux est souvent demandé à l'écrit car cela permet d'interpréter les résultats expérimentaux. Il faut faire attention à l'ordre d'interférences au centre des anneaux repéré par l'angle d'incidence nul. Quand on ajoute une lame mince sur le trajet d'une des voies, on fait varier l'ordre d'interférences au centre.

© Nathan, *classe prépa*

2 – Mesure de distances (d'après CCP)

L'interféromètre de Michelson est utilisé couramment pour la mesure de faibles différences de distance, le montage étant réalisé afin que la distance à mesurer d coïncide avec la différence de longueur des bras de l'interféromètre. On colle l'objet d'épaisseur d sur un des miroirs de l'interféromètre préalablement réglé pour avoir des bras optiques égaux. Les deux miroirs sont fixes, perpendiculaires. Le miroir M_1 est constitué par la surface réfléchissante de l'objet dont on souhaite mesurer la distance à M_2' symétrique du miroir M_2 par la séparatrice supposée d'épaisseur négligeable. On a réalisé une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur d. La source monochromatique est une diode laser à semi-conducteur $\lambda_0 = 775$ nm. Elle est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente dite lentille d'entrée.
On utilise un photodétecteur, placé au foyer image F de la lentille convergente dite de sortie, pour enregistrer l'éclairement $E(F)$ en ce point. Soit $2E_0$ l'éclairement incident sur la séparatrice qui le divise en un faisceau réfléchi et un faisceau transmis de même éclairement E_0.



1 Calculer le déphasage Φ des deux ondes interférant en F puis l'éclairement $E(F)$ en fonction de E_0, λ_0 et d.
Le détecteur permet la mesure relative de l'éclairement en fournissant le rapport $E_r = \dfrac{E(F)}{E_0}$. Exprimer la distance d en fonction de E_r et de λ_0. d est-elle déterminée sans ambiguïté ?

2 Dans la gamme de distances allant du centimètre au mètre approximativement, la mesure de d peut être réalisée par changement de longueur d'onde.
La longueur d'onde émise par la diode laser subit une faible variation $\Delta\lambda$ et émet de ce fait une radiation de longueur d'onde $\lambda_0 + \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer la variation $\Delta\Phi$ du déphasage Φ qui en résulte. Montrer que $|\Delta\Phi|$ peut se mettre sous la forme $|\Delta\Phi| = \dfrac{2\pi\delta}{\Lambda}$ où δ est la différence de chemin optique en F. Donner l'expression de Λ et indiquer sa dimension.

© Nathan, *classe prépa*

3 Montrer que la variation $\Delta\lambda$ de λ_0 provoque le défilement au point F d'un certain nombre N de franges. Calculer N en fonction de la distance d et de Λ. Application numérique : la fréquence de l'émission diminue de 100 GHz, calculer le décalage de longueur d'onde $\Delta\lambda$ puis Λ. L'éclairement étant maximal pour λ_0, quand la fréquence de l'émission diminue, on compte 322 franges brillantes qui défilent, après quoi l'éclairement en F reste nul. Calculer la distance d.

résolution méthodique

1 Pour l'interféromètre de Michelson, en F l'angle d'incidence est nul donc $\delta(F) = 2d$ d'où $\Phi(F) = \dfrac{4\pi d}{\lambda_0}$.

D'après la formule de Fresnel, $E(F) = 2E'_0(1 + \cos\Phi(F))$ avec E'_0 l'éclairement de chacune des deux voies prise seule. $E'_0 = \dfrac{E_0}{2}$ car après réflexion sur l'un des miroirs, le faisceau est à nouveau divisé en deux en intensité par le passage par la séparatrice avant d'atteindre le détecteur. La séparatrice est ici idéalisée (supposée d'épaisseur négligeable) et on ne nous parle donc pas de compensatrice.

$$\boxed{E(F) = E_0\left(1 + \cos\frac{4\pi d}{\lambda_0}\right)}$$

$E_r = \dfrac{E(F)}{E_0} = 1 + \cos\dfrac{4\pi d}{\lambda_0}$, on peut alors écrire $\cos\dfrac{4\pi d}{\lambda_0} = E_r - 1$.

$\dfrac{4\pi d}{\lambda_0} = \arccos(E_r - 1) + m2\pi$ avec m entier relatif. Finalement :

$\boxed{d = \dfrac{\lambda_0}{4\pi}\arccos(E_r - 1) + m\dfrac{\lambda_0}{2}}$, d est déterminée à un multiple près de la demi-longueur d'onde.

2 Comme $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, on peut différentier la formule $\Phi(F) = \dfrac{4\pi d}{\lambda_0}$ par rapport à la variable λ_0.

$\dfrac{d\Phi}{\phi} = -\dfrac{d\lambda_0}{\lambda_0}$ d'où $|\Delta\Phi| = \left|\Phi\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right| = \left|\dfrac{4\pi d\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right|$.

$|\Delta\Phi| = \dfrac{2\pi\delta}{\Lambda}$ avec $\delta = 2d$ donne $\boxed{\Lambda = \dfrac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}}$

Λ est homogène à une longueur.

3 Quand la longueur d'onde varie de $\Delta\lambda$, le déphasage en F varie ce qui change l'ordre d'interférences (il varie de $|\Delta p|$) au point F et on voit défiler N franges sur le photodétecteur.

© Nathan, *classe prépa*

$|\Delta\Phi| = |\Delta p| 2\pi$ d'où $\boxed{N = E\left(\frac{|\Delta\Phi|}{2\pi}\right) = E\left(\frac{2d}{\Lambda}\right)}$

Pour la source, $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$, $-\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{d\nu}{c}$ et $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\Delta\nu}{c}$ d'où $\Lambda = \frac{c}{\Delta\nu}$.

A.N. : avec $\Delta\nu = 100$ GHz, $\Delta\lambda = \mathbf{0{,}2\ nm}$ et $\Lambda = \mathbf{3 \cdot 10^{-3}\ m}$.

$N = 322$ et $|\Delta p| = 322{,}5$ car on débute sur un éclairement maximal et on s'arrête en un éclairement nul. $d = |\Delta p| \frac{\Lambda}{2}$. On trouve numériquement $d = 0{,}483\ 750$ m et d est alors déterminée sans ambiguïté. On peut évaluer l'incertitude sur cette mesure à une erreur sur $|\Delta p|$ de $\frac{1}{4}$ ce qui donne $\Delta d = \frac{\Lambda}{8} = 375\ \mu$m. On présentera le résultat ainsi : $d = 0{,}483\ 750 \pm 0{,}000\ 375$ m soit $d = \mathbf{0{,}483\ 8 \pm 0{,}000\ 4\ m}$.

en conclusion

Retenir que l'interféromètre de Michelson permet des mesures précises de distance car on peut repérer le défilement de franges brillantes et(ou) de franges noires.

On évalue la différence de marche optique à $\frac{\lambda_0}{4}$ près et on en déduit l'incertitude sur la mesure de distance.

© Nathan, *classe prépa*

3 – Mesure interférométrique de la déformation d'un miroir (d'après CCP)

Partie A

Soit un miroir plan perpendiculaire à un axe (Oz), soit S le point du miroir plan appartenant à l'axe (Oz). Il est éclairé par une source ponctuelle réelle A_0 située sur (Oz).

1 Où se trouve l'image A_s de A_0 à travers le miroir ? A_s est-elle en phase avec A_0 ? Comment se déplace l'image quand on translate le miroir plan de la distance S_1S_2 selon l'axe (Oz) ?

2 Soit un miroir convexe de même sommet que le miroir plan, de centre C et de rayon $R = SC$, soit A_c l'image d'une source ponctuelle réelle A_0 située sur (Oz) par réflexion sur le miroir et soit A_s le symétrique de A_0 par rapport à S.

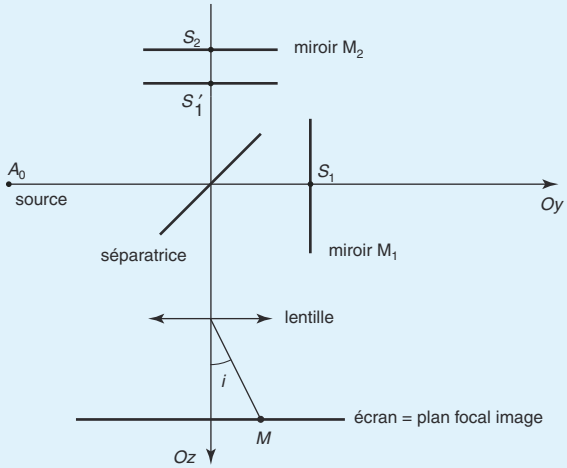
a. Donner la relation de conjugaison donnant la position de A_c.

b. Donner l'expression simplifiée de $\overline{A_cA_s}$ en fonction de $\overline{SA_0}$ et de $\overline{SC}$ en supposant SC très grand devant SA_0.

c. Situer alors A_c par rapport à A_s et justifier que l'image A_c puisse être considérée comme en retard de phase de $\frac{2\pi}{\lambda} A_cA_s + \pi$ sur la source A_0.

Partie B

On considère un système interférentiel type interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles. Il est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 de sommets S_1 et S_2 respectivement et d'une lame semi-réfléchissante inclinée à $45°$ et considérée comme infiniment mince. On note A_1 et A_2 les deux images de A_0 par le dispositif. Soit S'_1 le symétrique de S_1 par rapport à la séparatrice.



3 La source ponctuelle est monochromatique de longueur d'onde λ. On pose $D = A_0S_1$. On observe le phénomène d'interférences dans le plan focal image de la lentille convergente en notant i l'angle d'émergence, i supposé petit. Le faisceau lumineux conique issu de A_0 éclaire donc les deux miroirs et donne deux images A_1 et A_2, sources virtuelles cohérentes pour le phénomène d'interférences.

a. Soit un rayon incident issu de A_0 et faisant un petit angle i avec la normale aux deux miroirs, démontrer et exprimer la différence de marche optique en un point M de l'écran (où interfèrent deux rayons) en fonction de i et de $e = \overline{S_2S'_1}$. Déterminer l'ordre d'interférences $p(M)$ en fonction de i et de e. Le mettre sous la forme $p(M) = p_0 + f(i)$ avec p_0 l'ordre d'interférences au centre des anneaux et préciser la fonction $f(i)$.

b. En supposant l'ordre entier en $i = 0$, donner l'expression du rayon angulaire i_n du $n^{\text{ième}}$ anneau brillant.

c. Calculer le nombre d'anneaux brillants de rayon inférieur ou égal à 5 cm pour une lentille de distance focale égale à 1 m. Faire l'application numérique avec $\lambda = 0{,}5\ \mu\text{m}$ et $e = 0{,}8$ mm.

4 On ramène S_2 en S'_1 (contact optique) et on étudie maintenant la déformation du miroir M_2 qui devient sphérique convexe sous l'effet de contraintes mécaniques, son sommet S_2 demeurant en S'_1. On note R son rayon de courbure et C son centre situé sur S_2z. On suppose R très grand.

a. Qu'observe-t-on sur l'écran avant la déformation du miroir M_2 ?

b. En utilisant les résultats précédents (partie A) et $D = A_0S_1$, déterminer le nouvel ordre d'interférences $p'(M)$ en fonction de i, D et R. $p'(M)$ peut se mettre sous la forme $p'(M) = p'_0 + f(i)$, préciser p'_0 le nouvel ordre d'interférences au centre des anneaux et l'épaisseur e' équivalente. Quand R tend vers l'infini, est-ce pertinent ?

© Nathan, *classe prépa*

c. Faire l'application numérique avec $D = 20$ cm, $\lambda = 0{,}5\ \mu$m et pour une lentille de distance focale égale à 1 m. Connaissant le rayon du troisième anneau brillant 3 cm, calculer le rayon R du miroir M_2 déformé et commenter cette méthode de mesure.

résolution méthodique

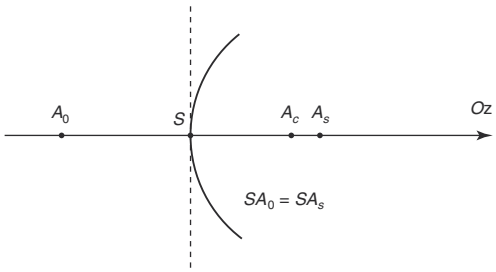
Partie A

1 A_s est le symétrique de A_0 par rapport au miroir plan. Il est déphasé de π par rapport à A_0 en raison de la réflexion métallique. Si on translate le miroir de la distance S_1S_2 selon l'axe (Oz), A_s se déplace de $2S_1S_2$ selon l'axe (Oz) dans le même sens que le miroir.

2 a. Utilisons la formule des miroirs : $\dfrac{1}{\overline{SA_c}} + \dfrac{1}{\overline{SA_0}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$. Le miroir est convexe, $\overline{SC} = R > 0$.

$$\boxed{\overline{SA_c} = \frac{R\overline{SA_0}}{2\overline{SA_0} - R}}$$

b. $\overline{SA_s} = -\overline{SA_0}$ pour le symétrique de A_0.



$$\overline{A_cA_s} = \overline{SA_s} - \overline{SA_c} = -\overline{SA_0} - \frac{R\overline{SA_0}}{2\overline{SA_0} - R} = -\overline{SA_0}\left(1 - \frac{R}{R\left(1 - 2\dfrac{\overline{SA_0}}{R}\right)}\right)$$

Comme $R \gg SA_0$, $\overline{A_cA_s} \approx \overline{SA_0}\left(1 + \dfrac{2\overline{SA_0}}{R} - 1\right) = \dfrac{2\overline{SA_0}^2}{R}$.

Conclusion : quand $R \gg SA_0$, $\boxed{\overline{A_cA_s} \approx \dfrac{2\overline{SA_0}^2}{R} > 0}$

c. $\overline{A_cA_s} = A_cA_s$. L'image A_c peut être considérée comme en retard de phase sur la source A_0 de $\dfrac{2\pi}{\lambda}A_cA_s + \pi$, π en raison de la réflexion métallique.

© Nathan, *classe prépa*

Partie B

3 a. Comme dans la résolution de la question 1 de l'exercice 1, après avoir évoqué l'équivalence de l'interféromètre à une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur $e = S_2S_1'$, on calcule la différence de marche.

Elle vaut : $\delta_{2/1}(M) = (A_0M)_2 - (A_0M)_1 = A_2M - A_1M = A_2H + HM - A_1M = A_2H$
$= A_2A_1\cos i = 2e\cos i$

car $HM = A_1M$, avec H la projection orthogonale de A_1 sur le rayon issu de A_2 (voir question 1 de l'exercice 1).

L'ordre d'interférences au point M vaut $p(M) = \dfrac{\Phi_{2/1}(M)}{2\pi} = \dfrac{\delta_{2/1}(M)}{\lambda} = \boxed{\dfrac{2e\cos i}{\lambda}}$ Il n'y a pas de déphasage supplémentaire, $\pi - \pi = 0$ pour les deux réflexions métalliques.

Pour de petits angles :

$$\boxed{p(M) = \frac{2e\left(1 - \frac{i^2}{2}\right)}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} - \frac{ei^2}{\lambda}\cdot \text{ On trouve donc } p_0 = \frac{2e}{\lambda} \text{ et } f(i) = -\frac{ei^2}{\lambda}}$$

b. On suppose que p_0 est entier. Le centre $(i = 0)$ de la figure d'interférences sera brillant mais on ne le comptabilise pas dans les anneaux brillants. Le rayon angulaire du premier anneau brillant sera obtenu pour $p = p_0 - 1$ et le rayon angulaire du $n^{\text{ième}}$ anneau brillant sera obtenu pour $p = p_0 - n$.

Les angles i_n étant petits, on peut écrire que :

$$2e\cos i_n = 2e\left(1 - \frac{i_n^2}{2}\right) = (p_0 - n)\lambda = 2e - n\lambda \text{ d'où } \boxed{i_n = \sqrt{\frac{n\lambda}{e}}}$$

c. Le rayon du $n^{\text{ième}}$ anneau brillant vaut $\rho_n = f i_n = f\sqrt{\dfrac{n\lambda}{e}}$.

$\boxed{\rho_n = f i_n = 2{,}5\sqrt{n}}$ exprimée en cm. On peut donc observer 4 anneaux brillants de rayon inférieur ou égal à 5 cm.

A.N. : Pour $n = 1$, $\rho_1 = \mathbf{2{,}5\ cm}$. Pour $n = 2$, $\rho_2 = \mathbf{3{,}5\ cm}$. Pour $n = 3$, $\rho_3 = \mathbf{4{,}3\ cm}$. Pour $n = 4$, $\rho_4 = \mathbf{5\ cm}$.

4 a. Avant la déformation du miroir M_2, on observe un éclairement uniforme sur l'écran, nous sommes au contact optique.

b. Après déformation, les deux sources virtuelles sont A_1 inchangée et A_2'. Notons A_0' le symétrique de A_0 par rapport à la séparatrice $D = S_1'A_0' = S_2A_0'$. $A_2' = A_c$ et $A_2 = A_s = A_1$ avec les notations de la partie A. A_2' se situe à la distance $A_2A_2' = \dfrac{2S_2A_0'^2}{R} = \dfrac{2D^2}{R}$ de A_2 et est en retard de phase sur A_0 de $\dfrac{2\pi}{\lambda}A_2'A_2 + \pi$ d'où un nouvel ordre d'interférences.

$p'(M) = p_0' + f(i)$ avec $p_0' = \dfrac{2D^2}{\lambda R}$ équivalent à $\dfrac{2e'}{\lambda}$ donnant l'épaisseur e' équivalente.

$f(i) = -\dfrac{e'i^2}{\lambda}\cdot$

Quand R tend vers l'infini, p_0' tend vers 0 car on était au contact optique et l'épaisseur équivalente e' est nulle. $p'(M)$ tend vers 0. Le résultat est pertinent.

c. Calculons le rayon du troisième anneau brillant sur l'écran en fonction de R (unique inconnue), $\rho_3 = f i_3$ et $p_0' - p' = 3$.

© Nathan, *classe prépa*

$$3 = \frac{e' i_3^2}{\lambda} = p_0' \frac{i_3^2}{2} = \frac{2D^2}{\lambda R}\frac{i_3^2}{2}$$

$$\boxed{R = \frac{D^2 \rho_3^2}{3\lambda f^2}}$$

A.N. : $R = \mathbf{24\ m}$.

Cette méthode de mesure requiert une précision suffisante sur la mesure du rayon des anneaux. La mesure d'un rayon est à la demi-épaisseur du rayon près.

en conclusion

La maîtrise de l'optique géométrique est indispensable pour calculer les déphasages dans un problème d'interférences. Quand il y a déformation d'une partie du dispositif, l'ordre d'interférences au centre peut changer.

© Nathan, *classe prépa*

1 * 20 min

➤ Corrigé p. 96

Michelson en coin d'air

On considère un Michelson monté en coin d'air éclairé par une source étendue de longueur d'onde 600 nm. Une lentille mince convergente de vergence +5 est placée à 25 cm du coin d'air. On observe sur l'écran des franges d'interférences d'interfrange i = 2,5 mm.

1. Préciser l'éclairage nécessaire et calculer, en secondes d'angle, l'angle formé par le coin d'air.

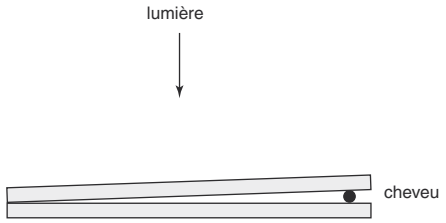
2. En plaçant une lame d'indice n = 1,5, d'épaisseur e, devant l'un seulement des deux miroirs du coin d'air, on observe sur l'écran un déplacement de la figure d'interférences de 1,5 cm. En déduire l'épaisseur de la lame.

2 * 10 min

➤ Corrigé p. 96

Cheveu entre deux plaques de verre

Un large faisceau lumineux de longueur d'onde λ = 546 nm éclaire du dessus deux plaques de verre. Les plaques ont une longueur ℓ = 10 cm, sont jointes à l'extrémité gauche et séparées par un cheveu de diamètre d_{cheveu} = 20 µm à l'extrémité droite.
Combien de franges brillantes sont visibles pour un observateur qui regarde les plaques du dessus ?

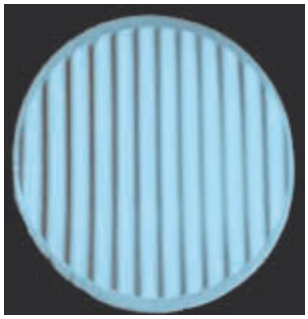


3 ** 10 min

➤ Corrigé p. 96

Jet de gaz

Soit l'expérience du Michelson en coin d'air et en lumière monochromatique. On observe sur l'écran les franges du coin d'air. On envoie un jet de gaz d'indice n_g supérieur à celui de l'air parallèlement à l'un des miroirs.



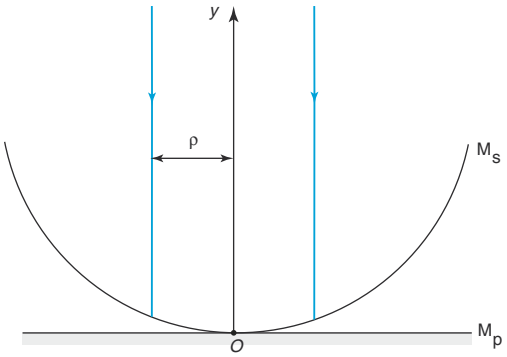
Comment se déforment les franges du coin d'air dans la zone perturbée par le jet de gaz par rapport à la zone sans jet ?

4 ** 20 min

➤ Corrigé p. 97

Interféromètre de Newton

On considère le dispositif de Newton constitué d'un miroir sphérique M_s partiellement réfléchissant, d'épaisseur négligeable, de rayon R, de centre C, reposant sur un miroir plan M_p. Le point de contact est O. On éclaire le système par un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ, parallèle à l'axe de révolution Oy.



1. Expliquer le fonctionnement de cet interféromètre. Où visualise-t-on les franges ?

2. Donner l'expression de l'intensité lumineuse obtenue à cet endroit. (On supposera que les deux rayons qui interfèrent ont la même intensité et on s'intéressera à des points situés à une distance ρ de l'axe telle que $\rho \ll R$.) On démontrera que $\rho^2 \approx 2eR$ avec e l'épaisseur du coin d'air ainsi formé.

3. Décrire le système d'interférences observé (allure, écartement des franges brillantes…).
A.N. : λ = 632,8 nm et R = 5 m.

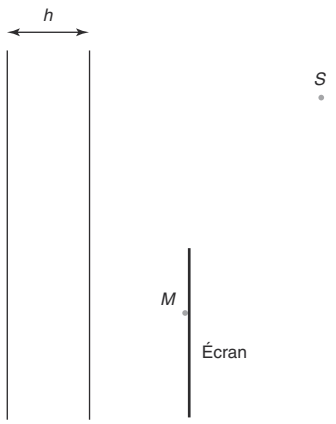
© Nathan, *classe prépa*

5 ** 20 min

➤ Corrigé p. 97

Lame d'air entre deux lames de verre

Une source ponctuelle monochromatique S de longueur d'onde dans le vide λ illumine un système de deux lames de verre à faces parallèles, parallèles entre elles, distantes de h et d'épaisseur négligeable devant h.



1. On considère un point M à distance finie des lames situé du même côté de la première lame que S.

a. Donner la position des sources secondaires S_1 et S_2 pour des rayons réfléchis sur la première lame et des rayons transmis par la première lame et réfléchis par la deuxième. Que vaut la distance $d = S_1S_2$?

b. À quelle condition y a-t-il interférence constructive en M ? Observe-t-on des structures interférentielles en disposant un écran comme sur le schéma ? Si non, pourquoi ? Si oui lesquelles ?

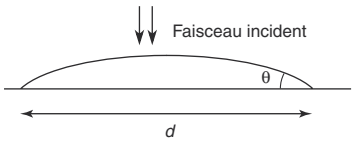
2. On considère maintenant un point M à l'infini situé du même côté de la première lame que S dans une direction qui fait l'angle θ avec la normale au plan des lames. À quelle condition y a-t-il interférence constructive en M ? En déduire les directions émergentes correspondant à des maxima d'intensité. Ce résultat dépend-il de la position du point source S ?

6 *** 20 min

➤ Corrigé p. 98

Mesure d'un angle de contact

Soit une goutte de liquide (indice n_ℓ) étalée sur un support solide partiellement réfléchissant (indice $n_s > n_\ell$), soit θ l'angle dit de contact. Un faisceau incident monochromatique parallèle suffisamment large éclaire toute la goutte. On admet que la surface de séparation air-liquide est une calotte sphérique (portion de sphère) de rayon R très grand. On donne le diamètre d de la goutte. On pourra négliger la réfraction du rayon incident à l'interface air-liquide.



1. Montrer qu'on obtient un phénomène d'interférences. Donner la forme des franges.

2. Quel est le nombre d'anneaux observés en fonction de l'angle de contact ? En déduire un principe de mesure de l'angle de contact.
Faire l'application numérique avec $n_\ell = 1{,}4$ et $d = 0{,}5$ mm, $\lambda = 632{,}8$ nm et on observe 48 anneaux.

7 *** 30 min

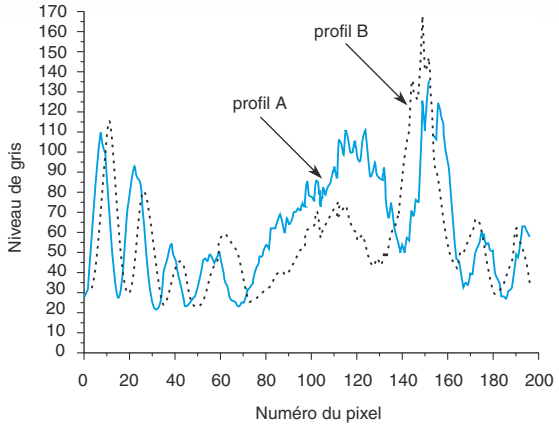
➤ Corrigé p. 98

Enregistrement de franges circulaires avec une caméra CCD (d'après Centrale)

L'interféromètre de Michelson est dans la configuration lame d'air à faces parallèles et on observe les anneaux dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale $f' = 200$ mm.

Mise en œuvre expérimentale :
On dispose d'une caméra numérique, type CCD, associée à un système d'acquisition et de traitement des données. Cette caméra mesure le « niveau de gris » proportionnel à l'éclairement de chaque pixel d'une barrette disposée le long d'une droite horizontale passant par le centre des anneaux. La barrette est équivalente à 200 pixels. On fournit deux enregistrements d'anneaux effectués avec cette caméra. Le profil A est le profil de référence (lame d'épaisseur e). Le profil B est obtenu après déformation de la lame d'air dont l'épaisseur a légèrement diminué.

© Nathan, *classe prépa*



1. Chaque profil devrait admettre un axe de symétrie vertical. Pourquoi ? Citer une des causes possibles de cette absence de symétrie. Malgré l'absence de symétrie, comment peut-on repérer les pics correspondant au premier anneau brillant ?

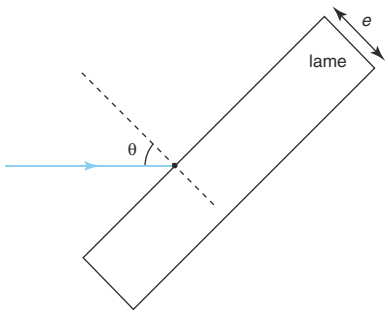
2. Déterminer alors le rayon d'une frange brillante du profil A. On procède de même pour le profil B et on détermine le nouveau rayon de la même frange brillante. Par exemple le premier anneau brillant de rayon r_1.
A.N. : $\lambda = 632$ nm et la largeur d'un pixel est $\ell = 23\ \mu$m.

3. Évaluer la variation d'épaisseur entre les deux enregistrements. On établira une formule reliant cette variation à la variation de r_1. Application numérique.

8 *** 30 min

➤ *Corrigé p. 99*

Séparatrice et compensatrice



1. Soit deux rayons parallèles (1) et (2) issus du même point à l'infini S aboutissant au même point à l'infini S'. Que vaut la différence de marche $\delta = (SS')_2 - (SS')_1$? Le seul rayon (2) est intercepté par une lame à faces parallèles, d'épaisseur e, d'indice n, sous l'incidence θ.
Que vaut la nouvelle différence de marche $\delta' = (SS')_2 - (SS')_1$?

2. En déduire l'influence des données de la séparatrice sur le calcul de la différence de marche dans l'expérience du Michelson réel monté en lame d'air à faces parallèles. Les données de la séparatrice sont son épaisseur e, son indice n et l'angle θ.

3. On ajoute la compensatrice (même indice n et même épaisseur e que la séparatrice). Montrer que celle-ci doit être parallèle à la séparatrice pour corriger la variation de différence de marche.

9 *** 30 min

➤ *Corrigé p. 99*

Signal détecté par une cellule

L'interféromètre de Michelson est utilisé en lumière monochromatique dans la configuration lame à faces parallèles (épaisseur e). Dans le plan focal image de la lentille d'observation (f distance focale), on place un récepteur sensible à l'intensité. Il s'agit d'une cellule dont la face d'entrée centrée sur le foyer de la lentille possède un diamètre $2R$.

1. Déterminer le signal S délivré par la cellule ($f \gg R$).

2. On fait varier e très lentement, comment évolue le contraste défini par : $C = \dfrac{S_{max} - S_{min}}{S_{max} + S_{min}}$?

© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 Réponse **c**. Il faut un éclairage en incidence normale avec une source étendue et les franges sont localisées sur le coin d'air.

2 Réponse **b**. L'éclairage doit être convergent sur les miroirs car un éclairage parallèle ne donnerait qu'un seul angle d'incidence sur les miroirs et on désire un large éventail d'angles d'incidence pour obtenir plusieurs anneaux brillants et sombres sur l'écran (à chaque angle d'incidence, correspond un anneau). Les franges circulaires (ou anneaux) sont localisées à l'infini.

3 Réponse **b**. Pour un interféromètre de Michelson en coin d'air avec une source étendue, le calcul de la différence de marche optique donne $\delta = 2e(x) = 2\alpha x$ et l'interfrange sur l'écran pour une lumière monochromatique est $i = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$.
Elle est donc proportionnelle à la longueur d'onde et inversement proportionnelle à l'angle du coin d'air.

4 Réponse **a**. Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles, les franges d'interférences sont circulaires et non équidistantes. En effet, le calcul de la différence de marche optique donne $\delta = 2e\cos i$. À chaque angle d'incidence, correspond un anneau. Les angles d'incidence des anneaux brillants sont donnés par $\delta = 2e\cos i = k\lambda$ avec k entier et comme la relation entre i et k n'est pas linéaire, les anneaux ne peuvent pas être équidistants.

5 Réponse **a**. Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles en lumière monochromatique $\lambda = 600$ nm, l'ordre de grandeur du nombre maximal d'anneaux brillants observables est donné par la partie entière de $\dfrac{2e}{\lambda}$ donc :
$2e \approx 10\lambda \approx 6$ µm. L'ordre de grandeur de l'épaisseur de la lame d'air est donc de quelques µm.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

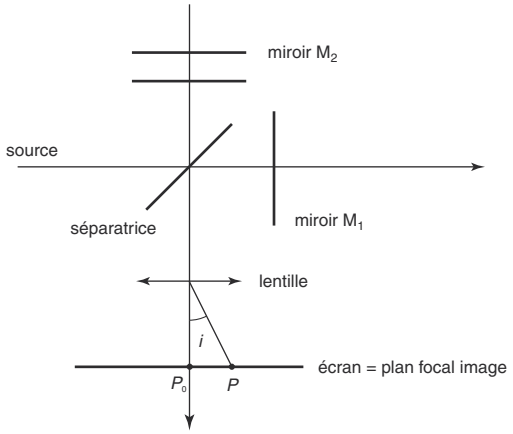
1 Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles, les franges sont localisées à l'infini. Il faut donc placer l'écran dans le plan focal image de la lentille convergente. Le rayon d'un anneau correspondant à un angle d'incidence i est $f\tan i \approx f i$ si i est un petit angle. On agrandira les rayons des anneaux avec la focale la plus grande, il est alors préférable de choisir la focale de 1 m.

2 Les miroirs du Michelson ont un diamètre de 2 cm et sur l'écran, on observe les franges du coin d'air dans une tache lumineuse circulaire de 14 cm de diamètre. La lentille convergente agrandit donc le miroir d'un facteur 7.
Pour pouvoir observer les franges d'égale épaisseur sur un écran conjugué du coin d'air par une lentille convergente, il faut que l'interfrange soit supérieure à 0,1 mm.
L'interfrange $i = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$ sur le coin d'air est 7 fois plus petite $\dfrac{\lambda}{2\alpha} \geqslant \dfrac{0{,}1\text{ mm}}{7}$, on en déduit que :

$$\alpha_{max} = \mathbf{2{,}1 \cdot 10^{-2}\ rad} = \mathbf{72'}.$$

3 Quand on n'observe plus qu'une seule frange du coin d'air, on peut dire que l'interfrange $i = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$ sur le coin d'air est du même ordre de grandeur que le diamètre du miroir (ou γi est du même ordre de grandeur que le diamètre D de l'image du miroir). L'angle α du coin d'air vaut alors $\dfrac{\lambda}{2D}$. Pour un miroir de diamètre 4 cm, $\alpha = \mathbf{7{,}5 \cdot 10^{-6}\ rad} = \mathbf{1{,}5''}$.

4 **1.** On dessine le Michelson en lame d'air à faces parallèles et on positionne la lentille. Les rayons d'angle d'incidence i convergent tous vers le même point P de l'écran.



2. Les anneaux sont localisés à l'infini avec une source étendue donc on peut les observer soit à l'infini soit dans le plan focal image d'une lentille convergente.

3. Le centre des anneaux correspond à l'incidence normale $i = 0$ donc il est en P_0.

4. a. Si la lentille pivote un peu (angle ε) autour d'un de ses diamètres, cela modifie l'angle d'incidence des rayons sur la lentille. L'angle i devient $i \pm \varepsilon$ et cela déplace le centre des anneaux de $f'\varepsilon$ sur l'écran ainsi que tout le système d'anneaux.

b. Si la lentille est décalée légèrement dans une direction perpendiculaire à son axe, cela ne change rien à la figure d'interférences sauf si la lumière sortant de l'interféromètre de Michelson ne rentre plus entièrement dans la lentille. Il faut toujours utiliser une lentille en son centre.

5. Il faut éclairer avec un faisceau de rayons d'inclinaisons très variées $(0 \leqslant i \leqslant i_{max})$ pour obtenir un champ d'interférences le plus grand possible.
L'extension spatiale du champ d'interférences sur l'écran est $\pi(f' \tan i_{max})^2$.

6. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne du contact optique, le nombre d'anneaux brillants (pour fixer les idées) augmente, les anneaux semblent se resserrer. Les rayons des anneaux semblent diminuer quand e augmente.

© Nathan, *classe prépa*

S'entraîner

1 **1.** L'éclairage doit être parallèle en incidence normale sur les miroirs. Avec une source étendue et un Michelson monté en coin d'air, les franges d'égale épaisseur ou franges du coin d'air sont localisées sur le coin d'air. La différence de marche optique est $\delta = 2\alpha x$ avec x la distance d'un point M à l'arête du coin d'air. Les franges sont rectilignes, parallèles à l'arête du coin d'air $(x = 0)$, équidistantes et l'interfrange vaut :

$$i_c = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Sur l'écran, on mesure $i = |\gamma| i_c$. $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{2 i_c}}$

Calculons le grandissement linéaire de la lentille. Sa vergence de +5 correspond à une distance focale :

$f = 20$ cm. $OA = 25$ cm, $|\gamma| = \frac{f}{OA - f}$.

A.N. : $|\gamma| = 4$ donc $i_c = 625$ µm.

$\boldsymbol{\alpha = 4{,}8 \cdot 10^{-4}}$ **rad = 1′39″.**

2. Si l'on place une lame d'épaisseur e et d'indice n devant l'un des miroirs, on fait varier la différence de marche optique de $2(n-1)e$ donc la frange centrale et tout le système de franges se déplacent de $\frac{(n-1)e}{\alpha}$.

Sur l'écran, on observe un déplacement de 1,5 cm soit $|\gamma| \frac{(n-1)e}{\alpha}$.

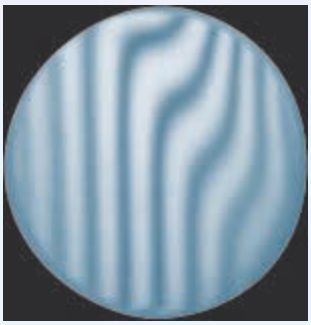
A.N : e = **3,6 µm.**

2 Le dispositif réalise un coin d'air d'angle α très petit.

A.N. : $\tan\alpha = \frac{d_{cheveu}}{\ell} = 2 \cdot 10^{-4} \approx \alpha$.

On peut donc considérer que le faisceau incident arrive en incidence normale sur le coin d'air et négliger le phénomène de réfraction à la traversée des plaques de verre.
La différence de marche optique est :
$\delta = 2e(x) = 2\alpha x = k\lambda$. L'interfrange vaut $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$.
A.N : i = **1,37 mm.**
Un observateur, qui regarde du haut la plaque du dessus, peut observer $\frac{\ell}{i} \approx 73$ franges brillantes.

3 Dans la zone perturbée par le jet de gaz, la différence de marche optique a varié de $2(n_g - 1)e$ par rapport à la zone sans jet. On va donc observer un décalage des franges dans la zone perturbée dans une direction qui dépend de celle du jet par rapport à l'arête du coin d'air.

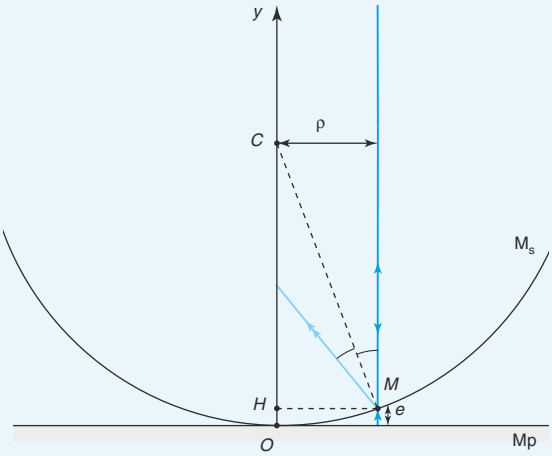


3. Les franges d'interférences de même nature ont la même phase modulo 2π donc le même ρ^2 modulo λR. Elles correspondent donc à des anneaux concentriques non équidistants. Les franges brillantes sont données par $\rho_m = \sqrt{m\lambda R}$ avec m entier naturel. La frange centrale en O est brillante.

A.N : $\sqrt{\lambda R} = \mathbf{1{,}8\ mm}$.

Attention : les anneaux seront difficilement visibles à l'œil nu, il vaudra mieux utiliser un oculaire. L'interféromètre de Newton est éclairé sur le côté et l'observation se fait sur l'axe (Oy) de la figure avec un oculaire.

4 On éclaire le système par un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ, parallèle à l'axe de révolution Oy.



1. Ce dispositif crée un coin d'air entre le miroir sphérique et le miroir plan. Il peut y avoir interférences entre un rayon incident qui se réfléchit sur M_s et le même rayon qui est transmis par M_s et qui se réfléchit sur M_p (il arrive en incidence normale sur M_p et repart en incidence normale). Leur intersection est localisée sur le miroir M_s. On visualise donc les franges d'interférences sur M_s.

2. L'intensité lumineuse obtenue en un point M appartenant au champ d'interférences vaut :

$$\boxed{I(M) = 2I_0(1 + \cos\Phi_{2/1}(M))}$$

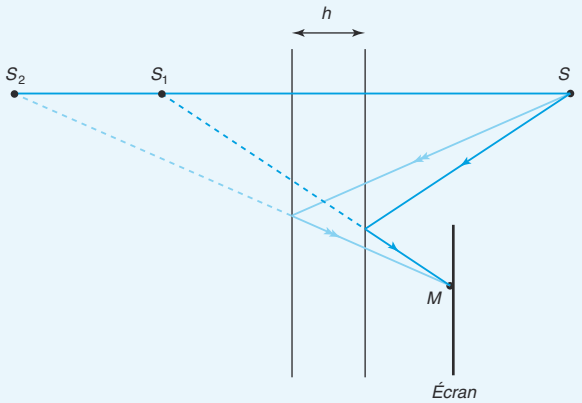
$\Phi_{2/1}(M) = \dfrac{2\pi}{\lambda}((S_2M) - (S_1M))$ car il n'y a pas de déphasage supplémentaire (deux réflexions métalliques).

$$\Phi_{2/1}(M) = 2e(\rho)\frac{2\pi}{\lambda}$$

On remarque que $CM^2 = HC^2 + HM^2$ d'où :
$R^2 = (R - e(\rho))^2 + \rho^2$. Comme
$e(\rho) \ll \rho \ll R$, $\rho^2 \approx 2e(\rho)R$.

$$\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{R}$$

5 Les plaques de verre ont une épaisseur suffisamment faible pour négliger les réfractions dans les plaques et le décalage des rayons qui en résulte ainsi que les différences de chemin optique.
On se retrouve dans la situation d'une lame d'air d'épaisseur h. Les rayons incidents peuvent se réfléchir sur la lame d'entrée (première lame) ou la traverser et se réfléchir sur la deuxième lame pour revenir vers la première lame et la traverser.



1. a. S_1 est le symétrique de S par rapport à la première lame. Quant à S_2, c'est le symétrique de S par rapport à la deuxième lame. La distance $d = S_1S_2$ vaut $\mathbf{2h}$.

b. Il y a interférence constructive en M si le déphasage en M est un multiple de 2π.

$\Phi_{2/1}(M) = \dfrac{2\pi}{\lambda}((S_2M) - (S_1M)) + \phi_0$ avec $\phi_0 = 0$.

Cela implique que $S_2M - S_1M = m\lambda$ avec m entier.

Remarque : $\phi_0 = 0$ car pour la voie 1, le rayon se réfléchit de l'air sur le verre (déphasage de π) ; tandis que pour la voie 2, le rayon est transmis deux fois à travers une plaque (aucun déphasage) et se réfléchit aussi de l'air sur le verre (déphasage de π).

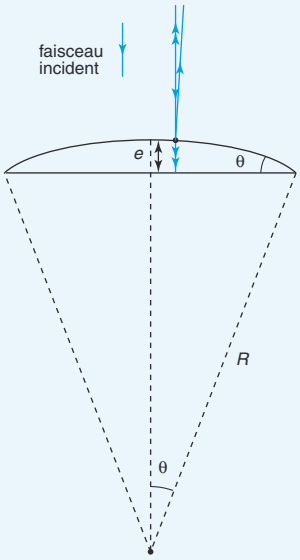
On observe des structures interférentielles en disposant un écran comme sur le schéma si les points M de l'écran sont atteints par deux rayons issus de S : l'un semblant venir de S_1 et l'autre de S_2. Si aucun point de l'écran

© Nathan, *classe prépa*

n'est atteint par ces deux rayons, on n'observera aucune structure. Les structures interférentielles observées sont les intersections d'hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2, d'axe S_1S_2, avec l'écran.
Si l'écran est parallèle aux lames, on obtient des arcs de cercle.

2. On considère maintenant un point M à l'infini. Le point M est atteint par deux rayons issus des deux sources secondaires si ces deux rayons sont parallèles (direction θ). Ils correspondent forcément au même incident primitif d'angle d'incidence θ sur les deux lames. On peut alors calculer $(S_2M)-(S_1M)$ qui vaut $2h\cos\theta$.
Il y a interférence constructive en M si $2h\cos\theta = m\lambda$ avec m entier. Cela donne les directions émergentes des maxima d'intensité. Ce résultat est indépendant de la position du point S. Si on étend la source, chaque point P de la source étendue donnera un maxima d'intensité en M et les franges d'interférences se renforceront (au lieu de se brouiller comme dans les dispositifs diviseurs du front d'onde).
On retrouve que les franges d'interférences du Michelson en lame d'air sont localisées à l'infini pour une source étendue.

6 On voit sur la figure qu'on retrouve l'angle θ et que le diamètre de la goutte vaut $d = 2R\sin\theta$.



1. On obtient un phénomène d'interférences car un rayon incident peut se réfléchir sur l'interface air-liquide (simple flèche) ou peut pénétrer dans la goutte pour se réfléchir sur le support solide et retraverser la goutte (double flèche).
On se retrouve dans la situation de l'exercice 4 avec un coin mais de liquide cette fois.

$$\Phi_{2/1}(M) = 2n_\ell e\frac{2\pi}{\lambda} + \phi_0$$

$\phi_0 = 0$ car chaque trajet comporte une réflexion d'un milieu sur un milieu plus réfringent (indice plus grand).
Comme $e \ll \rho \ll R$, on obtient $\rho^2 \approx 2eR$.

$$\boxed{\Phi_{2/1}(M) = n_\ell\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{R}}$$

Les franges d'interférences sont des anneaux. Les franges brillantes sont données par $\boxed{\rho_m = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n_\ell}}}$ avec m entier naturel.

2. ρ varie entre 0 et $\frac{d}{2}$. Le nombre maximal d'anneaux est donné par $n_\ell\frac{\rho_{max}^2}{R\lambda}$ avec $d = 2R\sin\theta$ donc $\boxed{n_\ell\frac{d\sin\theta}{2\lambda}}$

Expérimentalement, on mesure le diamètre de la goutte de liquide et on compte le nombre d'anneaux brillants. On en déduit l'angle de contact.
A.N : $\theta = \mathbf{5°}$.

7 **1.** Chaque profil devrait admettre un axe de symétrie vertical. En effet, le dispositif expérimental a la symétrie de révolution par rapport au bras de sortie du Michelson. Les causes possibles sont un faisceau laser non uniforme, la caméra CCD mal centrée.
On repère que la tache centrale pour le profil A va de 70 pixels à 140 pixels. On peut alors positionner le centre des anneaux en 105 à quelques pixels près vu les graduations peu précises pour les pixels.

2. $2r_1(A)$ correspond aux pixels de 55 à 150. $2r_1(B)$ correspond aux pixels de 62 à 147 et la largeur d'un pixel est $\ell = 23\ \mu\text{m}$.
A.N. : $r_1(A) = 1{,}1$ mm et $r_1(B) = 0{,}98$ mm.
$\Delta r_1 = \mathbf{-0{,}12\ mm}$.

3. Les anneaux brillants sont donnés par :
$\delta_{2/1} = 2e\cos i_m = (p_0 - m)\lambda$ avec m entier et $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$, l'ordre au centre des anneaux. Si on veut repérer une frange brillante, il faut fixer $\delta_{2/1}$ ou m.
$r_m = f'i_m$ et à l'ordre 2, $\delta_{2/1}$ vaut :
$\delta_{2/1} = 2e\left(1 - \frac{r_m^2}{2f'^2}\right) = (p_0 - m)\lambda$ d'où $\frac{r_m^2}{f'^2} = m\frac{\lambda}{e}$.
En différentiant $\delta_{2/1} =$ constante on obtient :

$$2\mathrm{d}e\left(1 - \frac{r_m^2}{2f'^2}\right) - 2e\frac{2r_m\mathrm{d}r_m}{2f'^2} = 0$$

$$\mathrm{d}e\left(1 - \frac{r_m^2}{2f'^2}\right) = e\frac{r_m\mathrm{d}r_m}{f'^2}.$$

À l'ordre 1, $1 - \frac{r_m^2}{2f'^2} \approx 1$.

© Nathan, *classe prépa*

$$\mathrm{d}e \approx e\frac{r_m \mathrm{d}r_m}{f'^2}$$

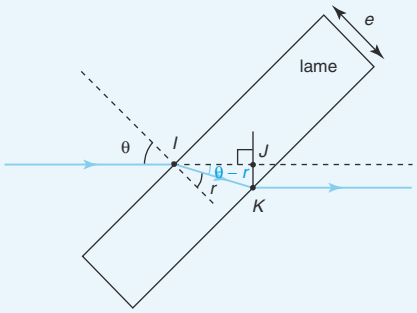
$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{r_1 \Delta r_1}{f'^2} \quad \text{avec} \quad r_1^2 = \frac{\lambda}{e} f'^2$$

$$\Delta e = \frac{e r_1 \Delta r_1}{f'^2} = e r_1^2 \frac{\Delta r_1}{r_1 f'^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta e = \frac{\lambda \Delta r_1}{r_1}}$$

A.N : $\Delta e = -69$ **nm**.

Compte tenu des incertitudes sur les numéros de pixel, on peut écrire $\Delta e = -0{,}07$ µm.

8 **1.** La différence de marche $\delta = (SS')_2 - (SS')_1$ est nulle.



La nouvelle différence de marche

$\delta' = (SS')_2 - (SS')_1 = (IK) - (IJ) = nIK - IJ$

$IK = \dfrac{e}{\cos r}$ et $IJ = IK\cos(\theta - r)$ avec $\sin\theta = n\sin r$

$$\delta' = \frac{ne}{\cos r} - \frac{e}{\cos r}\cos(\theta - r)$$

$$\delta' = \frac{ne}{\cos r} - e\cos\theta - \frac{e}{\cos r}\sin\theta\sin r$$

$$\boxed{\delta' = \frac{ne}{\cos r} - e\cos\theta - \frac{ne}{\cos r}\sin^2 r = ne\cos r - e\cos\theta}$$

2. Pour le calcul de la différence de marche optique dans l'expérience du Michelson monté en lame d'air à faces parallèles, $\delta_{2/1}(M) = 2e\cos i - 2\delta'$ car le rayon (1) traverse 3 fois la séparatrice et le rayon (2) une seule fois.

Pour la séparatrice, elle est par construction inclinée à 45° donc θ est fixé à une valeur très proche de 45°. Son épaisseur e est fixée aussi. Son indice n dépend de la longueur d'onde donc l'angle r aussi ce qui rend δ' variable avec la longueur d'onde.

Remarque : une différence de marche optique supplémentaire constante n'est pas gênante mais une différence de marche optique supplémentaire qui varie avec la longueur d'onde va empêcher l'analyse des franges en lumière non monochromatique. On doit la compenser.

3. On ajoute la compensatrice :

$\delta_{2/1}(M) = 2e\cos i - 2\delta' + 2\delta''$ avec

$\delta'' = ne\cos r - e\cos\theta'$ (θ' angle d'incidence sur la compensatrice).

En effet, le rayon (1) traverse une seule fois la compensatrice et le rayon (2) trois fois.

Si $\delta' = \delta''$, $\delta_{2/1}(M) = 2e\cos i$ devient indépendant de la longueur d'onde. Il suffit donc d'avoir le même angle θ.

Il faut rendre la compensatrice parallèle à la séparatrice.

Remarque : on peut donc compenser la différence de marche optique due à la séparatrice en ajoutant une compensatrice dont on fait varier l'inclinaison. Ce sont les deux vis de réglage qui nous le permettent.

9 **1.** L'interféromètre de Michelson est utilisé en configuration lame d'air à faces parallèles donc on observe des anneaux localisés à l'infini et observés ici dans le plan focal image de la lentille. Le déphasage entre les deux rayons qui interfèrent est $2\pi\dfrac{2e\cos i}{\lambda}$ et on utilise la formule de Fresnel pour calculer l'éclairement.

La cellule dont la face d'entrée est centrée sur le foyer de la lentille possède un diamètre $2R$. Soit M un point appartenant à la face d'entrée de la cellule (ou surface utile), il faut intégrer sur toute la surface utile, $0 < r < R$. Comme $f \gg R$, on peut utiliser :

$\cos i \approx 1 - \dfrac{i^2}{2}$ avec $i \approx \dfrac{r}{f}$.

$$\mathrm{d}S(M) = C\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{2e\cos i}{\lambda}\right)\right)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}S(M) = C\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{2e - e\dfrac{r^2}{f^2}}{\lambda}\right)\right)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$S = \int_0^R C2\pi\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{2e - e\dfrac{r^2}{f^2}}{\lambda}\right)\right)r\mathrm{d}r$$

$$S = \pi CR^2 + \int_0^R C2\pi\cos\left(2\pi\frac{2e - e\dfrac{r^2}{f^2}}{\lambda}\right)r\mathrm{d}r$$

Posons : $u = 2\pi\dfrac{2e - e\dfrac{r^2}{f^2}}{\lambda}$ et différentions u :

$\mathrm{d}u = -4\pi e\dfrac{r\mathrm{d}r}{\lambda f^2}$.

$$S = \pi CR^2 - C\frac{\lambda f^2}{2e}\int_{4\pi\frac{e}{\lambda}}^{4\pi\frac{e}{\lambda} - 2\pi\frac{eR^2}{\lambda f^2}} \cos u\,\mathrm{d}u$$

$$S = \pi CR^2 - C\frac{\lambda f^2}{2e}\left(\sin\left(4\pi\frac{e}{\lambda} - 2\pi\frac{eR^2}{\lambda f^2}\right) - \sin 4\pi\frac{e}{\lambda}\right)$$

Utilisons la formule :

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$S = \pi CR^2 - C\frac{\lambda f^2}{e}\left(\cos\left(4\pi\frac{e}{\lambda} - \pi\frac{eR^2}{\lambda f^2}\right)\sin\left(-\pi\frac{eR^2}{\lambda f^2}\right)\right)$$

$$S_0 = \pi CR^2$$

© Nathan, *classe prépa*

$$S = S_0 + S_0 \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda} - \frac{\pi e R^2}{\lambda f^2}\right) \frac{\sin \dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}}{\dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}}$$

$$\boxed{S \approx S_0 + S_0 \frac{\sin \dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}}{\dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}} \cos \frac{4\pi}{\lambda}}$$

Remarque : cette formule fait intervenir un sinus cardinal : $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$. Cette fonction est étudiée dans l'annexe « Compléments mathématiques ». Retenons que le sinus cardinal s'annule périodiquement et que cette période en x vaut π.

2. On fait varier e très lentement. Calculons le contraste défini par : $C = \dfrac{S_{\max} - S_{\min}}{S_{\max} + S_{\min}}$?

La période du cosinus en e est $\dfrac{\lambda}{2}$ tandis que la période d'annulation du sinus cardinal en e vaut $\dfrac{\lambda f^2}{R^2} \gg \dfrac{\lambda}{2}$.

Remarque : le produit de deux fonctions quand l'une varie beaucoup plus lentement que l'autre sera étudié dans le chapitre suivant 4. On peut remarquer que le sinus cardinal va moduler l'amplitude du cosinus car il varie très lentement par rapport au cosinus.

On peut écrire que $S_{\max} = S_0 + S_0 \left|\operatorname{sinc} \dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}\right|$.

On peut écrire que $S_{\min} = S_0 - S_0 \left|\operatorname{sinc} \dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}\right|$.

$$C = \frac{2 S_0 \left|\operatorname{sinc} \dfrac{\pi e R^2}{\lambda f^2}\right|}{2 S_0} = \left|\operatorname{sinc} \frac{\pi e R^2}{\lambda f^2}\right|$$

Le contraste vaut 1 quand $e = 0$ et s'annule pour $e_{\min} = \dfrac{\lambda f^2}{R^2}$. C'est le premier brouillage de franges quand on augmente e en partant du contact optique. Le contraste n'est suffisant pour observer les franges que dans une région proche du contact optique en raison de la décroissance de $|\operatorname{sinc} x|$, région dont l'extension dépend du rayon R de la face d'entrée de la cellule.

Remarque : il faut donc avoir un rayon R le plus petit possible pour pouvoir augmenter e sans trop perdre de contraste.

© Nathan, *classe prépa*

4 Interférences à deux ondes en lumière polychromatique

1 Sources polychromatiques et intensité spectrale

1.1. Exemples de sources – Intensité spectrale

Les sources naturelles ont un **profil spectral** complexe : un continuum sur une large gamme de longueurs d'onde avec éventuellement des bandes spectrales constituées de raies. On préfère raisonner avec des nombres d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$ (σ homogène à l'inverse d'une longueur).

On peut remarquer que $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{d\nu}{\nu}$ d'où $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$.

On est amené à définir une densité spectrale en nombre d'onde ou intensité spectrale $I_{sp}(\sigma)$ homogène à une intensité fois l'unité de longueur : $dI = I_{sp}(\sigma)d\sigma$ pour une bande élémentaire de nombre d'onde comprise entre σ et $\sigma + d\sigma$ donc de largeur élémentaire $d\sigma$.

Remarque

Par opposition à la raie, la bande spectrale a une largeur moyenne non négligeable devant sa valeur centrale. Elle est constituée d'un très grand nombre de raies très rapprochées et nous apparaît comme une bande.

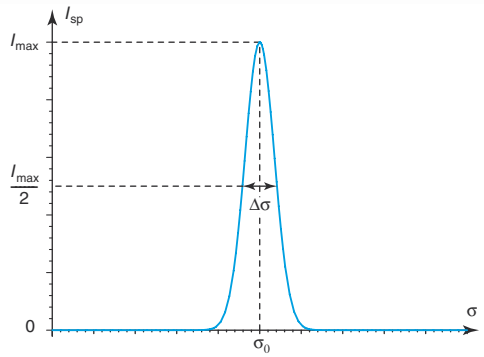
Le but de la spectroscopie (voir le chapitre **6**) sera d'analyser ce profil.

1.1.1. Raies

On parle de raie quand l'intensité émise est centrée sur une longueur d'onde ou un nombre d'onde (λ_0 ou σ_0) et que la largeur à mi-hauteur est très petite devant cette longueur d'onde ou ce nombre d'onde : $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ ou $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. Son profil est proche d'une gaussienne d'équation $C\exp^{-\left(\frac{(\sigma-\sigma_0)}{\Delta\sigma}\right)^2}$ (figure 1).

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 1 *Raie gaussienne*



Cette largeur a trois causes : largeur naturelle, élargissement par effet Doppler et élargissement par collisions.
Les atomes ou molécules excités ont une vitesse par rapport à l'observateur ; quand ils se désexcitent, ils émettent une raie de fréquence ν_0 avec une largeur naturelle $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$ avec τ le temps de cohérence.
Ces fréquences sont perçues par l'observateur avec un décalage dû à l'effet Doppler (voir exercice n° 9 de « S'entraîner » du chapitre **2**) et comme les vitesses sont réparties statistiquement (gaussienne) autour d'une valeur moyenne, le décalage varie avec la vitesse et la raie naturelle est élargie.
Les atomes ou molécules sont en perpétuel mouvement dû à l'agitation thermique, ils entrent en collisions d'autant plus que la pression est élevée (lampes spectrales haute pression). Cet effet élargit encore la raie. L'élargissement par collisions est une lorentzienne d'équation :

$$\frac{C}{1+\left(\frac{(\sigma-\sigma_0)}{\Delta\sigma}\right)^2}$$

La forme de la raie est finalement la convolution d'une gaussienne et d'une lorentzienne mais ces deux courbes ayant des allures proches, on ne distingue pas ces deux allures à l'œil (voir « Éléments de mathématiques » en annexe).

1.1.2. Doublet de raies

Quand deux raies centrées respectivement sur σ_1 et σ_2, de largeur respective $\Delta\sigma_1$ et $\Delta\sigma_2$, sont très proches cela signifie que $\Delta\sigma_1$ et $\Delta\sigma_2 \ll |\sigma_1 - \sigma_2| \ll \sigma_1$ et σ_2, on parle d'un doublet de raies.
On peut aussi écrire : $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2 \ll |\lambda_1 - \lambda_2| \ll \lambda_1$ et λ_2.
Le doublet jaune du sodium est caractérisé par deux raies très proches séparées de 0,6 nm seulement : $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm. En spectroscopie, on essaye de les séparer. Le doublet jaune du mercure est plus large, il correspond à 2,1 nm : $\lambda_1 = 577{,}0$ nm et $\lambda_2 = 579{,}1$ nm.

1.2. Intensité d'une raie et modélisation

1.2.1. Intensité d'une raie

L'intensité d'une raie est définie par : $I_0 = \int_0^{\infty} I_{sp}(\sigma)\mathrm{d}\sigma$.

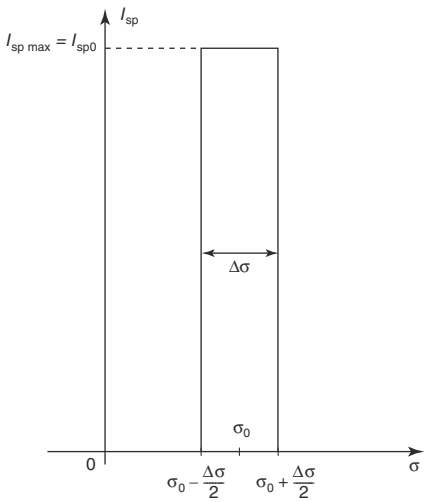
© Nathan, *classe prépa*

1.2.2. Modélisation par une raie rectangulaire

Pour simplifier les calculs, nous sommes amenés à modéliser la forme des raies réelles par une raie rectangulaire centrée sur σ_0 et de largeur $\Delta\sigma$ (figure 2). Évidemment, la raie réelle et la raie modélisée doivent avoir la même intensité. Ainsi,

$$I_0 = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} I_{sp}(\sigma)\mathrm{d}\sigma = I_{sp0}\Delta\sigma.$$

Fig. 2 *Raie rectangulaire*



1.2.3. Modélisation par une raie infiniment fine

La raie rectangulaire est dite infiniment fine si $\Delta\sigma$ tend vers 0 tout en maintenant l'intensité $I_0 = I_{sp0}\Delta\sigma$ constante ce qui impose une densité spectrale I_{sp0} infinie. En mathématiques, on parle de la fonction de Dirac. Ce cas limite est très intéressant pour les calculs.

© Nathan, *classe prépa*

2 Méthodologie : problème théorique à deux sources ponctuelles cohérentes en lumière polychromatique

Il s'agit de traiter du problème de **deux sources cohérentes entre elles qui interfèrent** mais qui sont **polychromatiques**. Dans tous les domaines des ondes et pas seulement en optique, **deux signaux de pulsation différente ne peuvent pas interférer**. Il faudra donc traiter chaque pulsation, chaque fréquence, chaque longueur d'onde, chaque nombre d'onde séparément.

2.1. Intensité élémentaire au point *M*

En optique, nous avons vu la nécessité d'un diviseur d'onde pour créer deux sources secondaires cohérentes à partir d'une même source primaire. On va raisonner sur une bande élémentaire de nombre d'onde comprise entre σ et $\sigma + \mathrm{d}\sigma$ émise par la source primaire, le diviseur d'onde va créer deux sources secondaires cohérentes qui vont pouvoir **interférer**

et l'intensité élémentaire correspondante au point M d'interférences sera calculée avec la formule de Fresnel.

$\boxed{\mathrm{d}I(M) = \mathrm{d}I_{01} + \mathrm{d}I_{02} + 2\sqrt{\mathrm{d}I_{01}\mathrm{d}I_{02}}\cos\Phi_{2/1}(M)}$ **pour la bande élémentaire** de nombre d'onde $\mathrm{d}\sigma$ **émise par la source primaire**. Pour un diviseur d'onde symétrique, $\mathrm{d}I(M) = 2\mathrm{d}I_0(1 + \cos\Phi_{2/1}(M))$ car $\mathrm{d}I_{01} = \mathrm{d}I_{02} = \mathrm{d}I_0 = I_{sp}(\sigma)\mathrm{d}\sigma$.

2.2. Intensité au point *M*. Incohérence entre deux bandes élémentaires

Chaque bande élémentaire est incohérente avec les autres donc, pour calculer la contribution de toutes les bandes à l'intensité au point *M*, il faut sommer les intensités de toutes les bandes donc intégrer.

Pour un diviseur d'onde symétrique :

$$I(M) = \int_0^\infty \mathrm{d}I(M) = \int_0^\infty 2I_{sp}(\sigma)(1 + \cos\Phi_{2/1}(M))\mathrm{d}\sigma.$$

$\Phi_{2/1}(M) = \phi_0 + 2\pi\sigma\delta_{2/1}(M)$, **pour un milieu non dispersif** $\delta_{2/1}(M)$ **est indépendant de** σ.

On fait toujours ensuite le choix $\phi_0 = 0$ pour ne pas alourdir les calculs, ce choix n'influe pas sur les résultats physiques.
Nous pouvons effectuer le calcul de $I(M)$ dans des cas simples : diviseur d'onde symétrique, milieu non dispersif et sources polychromatiques modélisées.

© Nathan, *classe prépa*

3 Première modélisation : cas d'un doublet de raies infiniment fines

Remarque
En TP, il suffira d'adjoindre un très bon filtre aux sources usuelles pour isoler un doublet.

On suppose que la source contient deux raies très proches et infiniment fines σ_1 et σ_2 de même intensité I_0. **Chaque raie donne son propre système d'interférences car les deux raies sont incohérentes entre elles. Il suffit donc de sommer les intensités.** Avant de faire le calcul, on peut prévoir qualitativement que l'interfrange dépendant de la longueur d'onde, les deux systèmes d'interférences seront décalés d'une grandeur variable donc les deux systèmes pourront dans certaines zones se renforcer ou dans d'autres zones se brouiller.

3.1. Expression de l'intensité au point *M*

Pour le point M appartenant au champ d'interférences, $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$ avec $I_1(M) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_1\delta_{2/1}(M))$
et $I_2(M) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_2\delta_{2/1}(M))$

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_1\delta_{2/1}(M)) + 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_2\delta_{2/1}(M))$$

$$I(M) = 2I_0(2 + \cos(2\pi\sigma_1\delta_{2/1}(M)) + \cos(2\pi\sigma_2\delta_{2/1}(M))).$$

Transformons la somme des cosinus en produit : $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

$$I(M) = 2I_0(2 + 2\cos\pi(\sigma_1 + \sigma_2)\delta_{2/1}(M)\cos\pi(\sigma_1 - \sigma_2)\delta_{2/1}(M)).$$

Comme il s'agit d'un doublet de raies, notons $\sigma_{moyen} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et $\Delta\sigma = |\sigma_1 - \sigma_2| \ll \sigma_{moyen}$.

Notons $\delta = \delta_{2/1}(M)$ pour alléger.

$$\boxed{I(M) = 4I_0[1 + \cos(2\pi\sigma_{moyen}\delta)\cos(\pi\Delta\sigma\delta)]}$$

On note la présence du terme habituel d'interférences $\cos 2\pi\sigma_{moyen}\delta$ multiplié par un nouveau terme $\cos\pi\Delta\sigma\delta$.

3.2. Étude de l'intensité en fonction de δ

Cette étude est simplifiée par la remarque suivante : la période en δ du premier cosinus est $\dfrac{1}{\sigma_{moyen}}$ (on écrit $2\pi\sigma_{moyen}\delta = 2\pi$) et la période en δ du second cosinus est $\dfrac{2}{\Delta\sigma}$ (on écrit $\pi\Delta\sigma\delta = 2\pi$). Comme $\Delta\sigma \ll \sigma_{moyen}$ alors $\dfrac{1}{\sigma_{moyen}} \ll \dfrac{1}{\Delta\sigma}$.

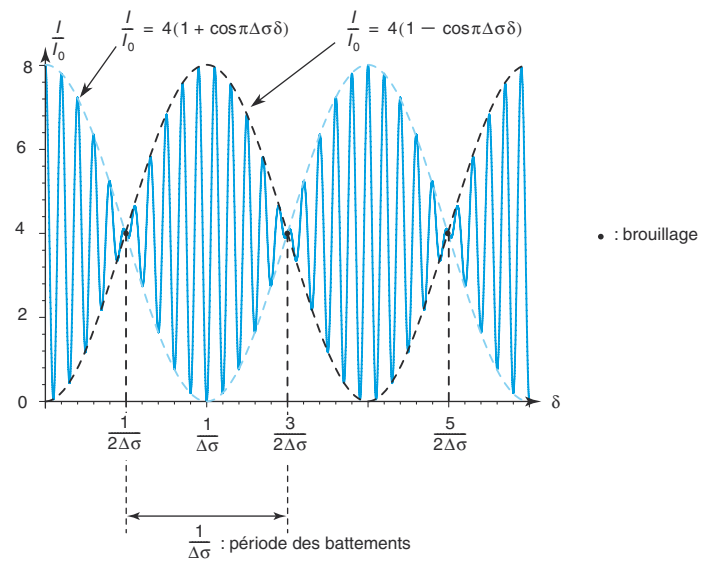
Le produit des deux cosinus est donc le produit d'un terme à variation rapide par un terme à variation lente. **Si on étudie la fonction localement** autour d'un point M de chemin optique δ, le terme à variation rapide varie entre ± 1 et le terme à variation lente vaut $\cos\pi\Delta\sigma\delta$.

Si l'on trace les deux courbes $I(\delta) = 4I_0(1 + \cos\pi\Delta\sigma\delta)$ et $I(\delta) = 4I_0(1 - \cos\pi\Delta\sigma\delta)$, le signal $I(\delta)$ oscille rapidement entre ces deux courbes. On parle de **battements optiques** car il s'agit du même signal que pour des battements acoustiques ou électriques : phénomène typique de l'addition de deux signaux d'amplitude voisine et de fréquences très voisines ($\Delta f \ll f_{moyen}$).

Remarque

En modulation d'amplitude, le signal rapide est la porteuse et le signal lent la modulation. Le signal lent module l'amplitude de la porteuse.

Fig. 3 *Battements optiques*



Attention

I_{max} et I_{min} ne sont plus constants. Ils dépendent de δ donc le contraste va dépendre aussi de δ.

On remarque sur la figure 3 que **la période des battements est $\dfrac{1}{\Delta\sigma}$**, deux fois plus petite que la période du signal lent.

$$I_{max}(\delta) = 4I_0(1 + |\cos\pi\Delta\sigma\delta|)$$
$$I_{min}(\delta) = 4I_0(1 - |\cos\pi\Delta\sigma\delta|)$$

© Nathan, *classe prépa*

Attention

Le contraste ne s'annule que si les deux signaux additionnés ont même amplitude. Les deux signaux sont les intensités $I_1(M)$ et $I_2(M)$ d'amplitude commune $2I_0$.

Le contraste vaut $C(\delta) = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |\cos \pi \Delta\sigma\delta|$. Il s'annule périodiquement pour $\delta = \dfrac{1}{2\Delta\sigma} + \dfrac{k}{\Delta\sigma}$ avec k entier. Quand le contraste s'annule, il y a brouillage des franges d'interférences tandis que $C = 1$ correspond à un renforcement des franges ainsi plus contrastées ($\delta = \dfrac{k}{\Delta\sigma}$).

3.3. Analyse qualitative

Retrouvons sans exprimer l'intensité la période des battements optiques.
Nous allons utiliser l'ordre d'interférences au point M. Pour la raie 1, $p_1(M) = \dfrac{\delta}{\lambda_1}$ et pour la raie 2, $p_2(M) = \dfrac{\delta}{\lambda_2}$. Quand les deux systèmes d'interférences se renforcent au point M, les franges brillantes de l'un coïncident avec les franges brillantes de l'autre au point M et les franges sombres de l'un coïncident avec les franges sombres de l'autre.
On peut donc écrire $p_1(M) = p_2(M) + k$ avec k entier ce qui donne :

$\delta = p_1\lambda_1 = p_2\lambda_2 = (p_2 + k)\lambda_1$ d'où $p_2 = \dfrac{k\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ et finalement $\delta(M) = \dfrac{k\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$ avec k entier.

On fait ainsi apparaître une période en δ : $\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|} = \dfrac{\lambda_{moyen}^2}{\Delta\lambda}$. Cette période est appelée période des coïncidences ou période des brouillages.

Or $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta\sigma}{\sigma}$ donc on retrouve bien la période des battements :

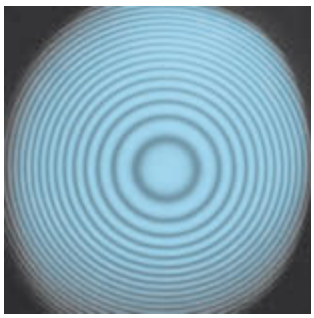
$$\frac{\lambda_{moyen}^2}{\Delta\lambda} = \lambda_{moyen}\frac{\lambda_{moyen}}{\Delta\lambda} = \lambda_{moyen}\frac{\sigma_{moyen}}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma}.$$

3.4. Résultats expérimentaux

En TP, vous observerez les battements optiques avec le Michelson comme diviseur d'onde (en lame d'air à faces parallèles) et avec la lampe à vapeur de sodium comme source. Si vous ne disposez pas d'un très bon filtre dans le jaune pour ne sélectionner que le doublet, vous pouvez tout de même repérer à l'œil nu les zones de brouillage et de renforcement (figure 4).

Fig. 4

Coïncidence anneaux



Brouillage anneaux

Le brouillage n'est pas parfait car les intensités des deux raies ne sont pas identiques.

© Nathan, *classe prépa*

Remarque

Si on peut enregistrer les battements, il suffit de compter le nombre N d'oscillations dans un battement.

$\frac{\lambda_{moyen}^2}{\Delta\lambda} = N\lambda_m$

d'où $\Delta\lambda = \frac{\lambda_m}{N}$.

Vous pouvez mesurer la translation du miroir entre plusieurs zones de brouillage (plus faciles à repérer), diviser par le nombre de battements (nombre de zones moins une) et obtenir le Δe correspondant à un battement. On peut en déduire la largeur du doublet du sodium connaissant la longueur d'onde moyenne $\lambda_{moyen} = 0{,}589\,3\ \mu m$.

$$\Delta\delta = 2\Delta e = \frac{\lambda_{moyen}^2}{\Delta\lambda}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{moyen}^2}{2\Delta e}$$

PC

PSI

4 Deuxième modélisation : cas d'une raie rectangulaire

La raie rectangulaire a été choisie pour simplifier les calculs, la raie réelle proche d'une gaussienne a deux caractéristiques principales : son intensité I_0 et sa largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ ou $\Delta\sigma$. La raie rectangulaire conserve ses deux caractéristiques même si la forme est différente.

4.1. Expression de l'intensité au point *M*

$$I_0 = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} I_{sp}(\sigma)\mathrm{d}\sigma = I_{sp0}\Delta\sigma.$$

La méthode est toujours la même. On raisonne sur une bande élémentaire $\mathrm{d}\sigma$, le diviseur d'onde symétrique en milieu non dispersif donne : $\mathrm{d}I(M) = 2\mathrm{d}I_0(1 + \cos 2\pi\sigma\delta_{2/1}(M))$ avec $\mathrm{d}I_0 = I_{sp}(\sigma)\mathrm{d}\sigma$.

Les bandes élémentaires étant incohérentes entre elles, l'intensité au point M est la somme des contributions de chaque bande donc il faut intégrer sur le profil spectral de la raie.

$$I(M) = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2I_{sp0}(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)\mathrm{d}\sigma$$

$$I(M) = 2I_{sp0}\Delta\sigma + \frac{2I_{sp0}}{2\pi\delta}\left(\sin 2\pi\delta\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right) - \sin 2\pi\delta\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right)$$

On va transformer la différence des deux sinus en un produit en utilisant la formule : $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b\cos a$.

$$I(M) = 2I_{sp0}\Delta\sigma + \frac{I_{sp0}}{\pi\delta}2\sin 2\pi\delta\frac{\Delta\sigma}{2}\cos 2\pi\delta\sigma_0$$

$$I(M) = 2I_{sp0}\Delta\sigma + \frac{2I_{sp0}}{\pi\delta}\sin\pi\delta\Delta\sigma\cos 2\pi\delta\sigma_0$$

$$\boxed{I(M) = 2I_{sp0}\Delta\sigma\left(1 + \frac{\sin\pi\delta\Delta\sigma}{\pi\delta\Delta\sigma}\cos 2\pi\delta\sigma_0\right) \text{ avec } I_{sp0}\Delta\sigma = I_0}$$

On fait apparaître la fonction sinus cardinal noté $\mathrm{sinc}\,x = \frac{\sin x}{x}$. Cette fonction très utile en optique est étudiée dans l'annexe éléments mathématiques à la fin du livre. Il faut en connaître les principales caractéristiques. Elle vaut 1 pour $x = 0$. Elle n'est pas périodique mais s'annule périodiquement avec une période en x de π.

© Nathan, *classe prépa*

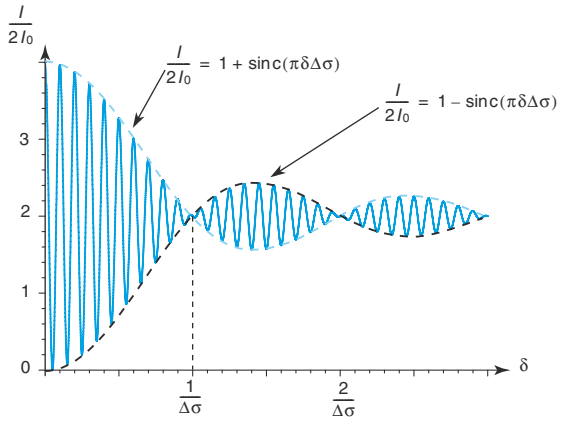
4.2. Étude de l'intensité en fonction de δ

Cette étude est simplifiée par la remarque suivante : la période en δ du cosinus est $\frac{1}{\sigma_0}$ (on écrit $2\pi\sigma_0\delta = 2\pi$) et la période en δ de l'annulation du sinus cardinal est $\frac{1}{\Delta\sigma}$ (on écrit $\pi\delta\Delta\sigma = \pi$). Comme $\Delta\sigma \ll \sigma_0$ alors $\frac{1}{\sigma_0} \ll \frac{1}{\Delta\sigma}$.

Le produit du cosinus par le sinus cardinal est le produit d'un terme à variation rapide par un terme à variation lente. **Si on étudie la fonction localement** autour d'un point M de chemin optique δ, le terme à variation rapide varie entre ± 1 et le terme à variation lente vaut $\text{sinc}\pi\Delta\sigma\delta$.

On peut alors tracer les deux courbes $I(\delta) = 2I_0(1 + \text{sinc}\pi\Delta\sigma\delta)$ et $I(\delta) = 2I_0(1 - \text{sinc}\pi\Delta\sigma\delta)$, le signal $I(\delta)$ oscille rapidement entre ces deux courbes. Le terme $\cos 2\pi\delta\sigma_0$ joue le rôle de terme d'interférences tandis que le terme $\text{sinc}\pi\Delta\sigma\delta$ joue le rôle de terme de contraste au signe près. Le contraste vaut $|\text{sinc}\pi\Delta\sigma\delta|$.

Fig. 5 *Intensité avec raie rectangulaire*



On remarque sur la figure 5 que les franges d'interférences ne seront visibles que dans une zone d'extension en δ : $\frac{1}{\Delta\sigma}$ autour de la frange centrale $\delta = 0$.

Ce n'est pas dramatique pour l'observation des franges avec une seule raie car cette zone est relativement étendue compte tenu des valeurs numériques.

N.B. : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ donc $\frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Une raie pour une lampe basse pression (dans le visible, prenons une valeur moyenne $\lambda = 600$ nm) a une largeur typique de quelques 10^{-2} nm donc la zone en δ s'étend sur quelques cm.

Pour l'ensemble des raies de la lampe spectrale, la zone de visibilité des franges en δ s'étend sur quelques mm.

Pour une source polychromatique à large bande spectrale de l'ordre de la centaine de nm, cette zone est réduite à quelques 0,1 µm autour de la frange centrale.

© Nathan, *classe prépa*

Pour le Michelson en lame d'air à faces parallèles, $\delta = 2e$ donc il faudra translater le miroir de quelques 0,1 µm autour de la position du contact optique $(e = 0)$ pour observer les franges. Il faudra agir avec délicatesse !!

On peut admettre et retenir le critère suivant : pour une source polychromatique s'étendant sur une bande de nombre d'onde $\Delta\sigma$, l'observation de franges d'interférences ne peut se faire que dans une zone d'extension en $\delta \approx \frac{1}{\Delta\sigma}$ autour de la frange centrale.

PC

PSI

5 Interférences en lumière blanche

La bande spectrale du visible s'étend de 400 nm à 750 nm. Chaque longueur d'onde par le dispositif source et diviseur d'onde donne son propre système d'interférences. Étant donné l'infinité de longueurs d'onde, les nombreux systèmes d'interférences décalés vont se superposer et aboutiront à un brouillage des franges sauf près de la frange centrale.

5.1. Analyse qualitative

• **Pour la frange centrale** $\delta = 0$, toutes les longueurs d'onde vont donner une frange brillante aux points M qui correspondent à la frange centrale car l'ordre d'interférences $p(M) = 0$ quelle que soit la longueur d'onde. On observera donc du blanc qu'on appelle **blanc brillant** par opposition au blanc d'ordre supérieur (*cf*. ci-dessous). Ce blanc est bordé de noir. Le problème est symétrique par rapport à la frange centrale donc on raisonnera avec des différences de marche positives.

• Si on se déplace en δ en partant de la frange centrale, la première longueur d'onde qui va donner une frange noire est 400 nm pour $\delta = 100$ nm $\left(p = \frac{1}{2}\right)$. Ensuite, chaque longueur d'onde de la bande du visible va donner, pour $p = \frac{1}{2}$, une frange noire pour des valeurs de δ comprises entre 200 nm et 375 nm.

• On constate que pour les valeurs de δ comprises entre 200 nm et 375 nm, il ne peut y avoir qu'une et une seule frange noire pour une longueur d'onde précise $\lambda = 2\delta$. On va donc observer **la couleur complémentaire de la longueur d'onde « éteinte »**.

On les appelle **irisations** ou échelle de teintes de Newton, on les observe de part et d'autre de la frange centrale.

• Pour des valeurs de δ comprises entre 400 nm et 750 nm, chaque longueur d'onde de la bande du visible va donner pour $p = 1$ une frange brillante. Ainsi de suite. Pour $p = \frac{3}{2}$, une frange noire pour des valeurs de δ comprises entre 600 nm et 1 125 nm. Pour $p = 2$, une frange brillante pour des valeurs de δ comprises entre 800 nm et 1 500 nm. On constate que ces zones en δ ont des parties communes.

De 400 nm à 600 nm, il y aura superposition d'une frange brillante pour une longueur d'onde précise et de franges quelconques pour les autres longueurs d'onde.

• Pour des valeurs de δ plus grandes, on obtiendra la superposition de plusieurs franges noires associées à des longueurs d'onde différentes et des franges brillantes associées à d'autres longueurs d'onde.

© Nathan, *classe prépa*

Par exemple, pour $\delta = 2\,000$ nm $= 2$ µm, calculons $p(M) = \dfrac{\delta}{\lambda}$ et intéressons-nous uniquement aux valeurs entières et demi-entières de p. $\dfrac{2\,000}{750} \leq p \leq \dfrac{2\,000}{400}$ donc $2{,}7 < p < 5$.
On en déduit qu'il y a deux franges noires : $p = \dfrac{7}{2}$ pour $\lambda = 571{,}4$ nm et $p = \dfrac{9}{2}$ pour $\lambda = 444{,}4$ nm. On appelle les longueurs d'onde correspondant aux franges noires les radiations éteintes.
Cela correspond aussi à trois franges brillantes $p = 3$ pour $\lambda = 666{,}7$ nm, $p = 4$ pour $\lambda = 500$ nm et $p = 5$ pour $\lambda = 400$ nm. On obtiendra donc une espèce de blanc appelé **le blanc d'ordre supérieur**.

Quand on analyse la lumière correspondante avec un prisme à vision directe, on obtient un spectre de lumière blanche avec des cannelures noires (qui correspondent aux radiations éteintes) (voir exercice n° 1 de « Savoir résoudre les exercices »). Alors que pour le blanc brillant, on obtient un spectre continu sans cannelures (voir document **e** en 3e de couverture : *spectres non cannelé et cannelé*).

5.2. Résultats expérimentaux et mesure de l'épaisseur d'une lamelle de microscope

• Si on utilise l'interféromètre de Michelson en lumière blanche et en coin d'air, on observe la frange centrale brillante bordée de noir (ou noire (bordée de blanc) sur certains Michelson qui ont des traitements sur la séparatrice ou compensatrice). Ensuite, on observe les irisations : le pourpre, l'indigo… dite échelle de *teintes de Newton* (voir document **d** en 3e de couverture). Enfin, le blanc d'ordre supérieur.

• Le réglage du Michelson en lumière blanche est très délicat (on le réglera toujours en lumière lampe spectrale auparavant) car la zone intéressante se situe à moins d'un µm du contact optique. $\delta = 2e = 200$ nm donne $e = 100$ nm $= 0{,}1$ µm pour voir les irisations autour de la frange centrale.

• En TP, on peut mesurer l'épaisseur moyenne d'une lamelle de microscope. On se place dans la zone des irisations pour le Michelson. On interpose la lamelle devant le miroir M_1. Sur l'écran, on observe une zone blanche (blanc d'ordre supérieur correspondant à la lamelle). En effet, la lamelle, d'indice n_ℓ et d'épaisseur e_ℓ, est traversée deux fois en incidence quasi normale par les rayons lumineux ce qui augmente la différence de marche optique de $2(n_\ell - 1)e_\ell$. C'est suffisant pour faire basculer dans le blanc d'ordre supérieur. On chariote ensuite le Michelson afin d'obtenir des irisations sur la lamelle (elles disparaissent ailleurs, sur l'écran la lamelle apparaît irisée sur fond blanc). On mesure la translation du miroir Δe et $2\Delta e = 2(n_\ell - 1)e_\ell$ d'où $e_\ell = \dfrac{\Delta e}{n_\ell - 1}$. Pour n_ℓ, on prendra l'indice moyen, on obtient un ordre de grandeur de e_ℓ.

© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 123*

1 Soit une source doublet dans le jaune qui éclaire l'interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles. On observe des anneaux sur un écran.

- ☐ **a.** Les anneaux brillants sont jaunes, bien contrastés et ce, quelle que soit l'épaisseur de la lame d'air
- ☐ **b.** Les anneaux sont brouillés partout.
- ☐ **c.** Les anneaux brillants sont jaunes et leur contraste varie avec l'épaisseur de la lame d'air.

2 Une lampe à vapeur de mercure haute pression émet des raies :

- ☐ **a.** de même largeur que toutes les autres lampes spectrales.
- ☐ **b.** plus larges qu'une lampe à vapeur de mercure basse pression.
- ☐ **c.** plus larges qu'une lampe à vapeur de sodium.

3 On observe des franges d'interférences colorées dues à des flaques d'huile sur la route. Quel doit être l'ordre de grandeur de l'épaisseur moyenne de la flaque ?

- ☐ **a.** Quelques mm.
- ☐ **b.** Quelques centaines de nm.
- ☐ **c.** Quelques dizaines de µm.

4 Soit une source doublet qui éclaire l'interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles. On observe des anneaux sur un écran. On fait varier l'épaisseur de la lame d'air. Peut-on déduire de la mesure de la périodicité des brouillages des anneaux la largeur du doublet ?

- ☐ **a.** Oui si on nous donne la longueur d'onde moyenne.
- ☐ **b.** Non.
- ☐ **c.** Oui.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 123*

1 Soit un dispositif d'interférences à deux sources cohérentes entre elles, chaque source émet deux pulsations ω_1 et ω_2 correspondant respectivement aux couleurs rouge et verte. Qu'observe-t-on sur un écran perpendiculaire à l'axe contenant les deux sources ?

2 **1.** Soit l'interféromètre de Michelson en coin d'air en lumière blanche, on observe des franges du coin d'air sur l'écran. On place un filtre interférentiel devant l'un des miroirs, ce filtre laisse passer une bande de 10 nm autour de la longueur d'onde $\lambda = 546$ nm. Observe-t-on des changements sur l'écran ?

2. Soit l'interféromètre de Michelson en coin d'air en lumière blanche, on n'observe pas de franges sur l'écran. On est dans le blanc d'ordre supérieur. On place un filtre interférentiel devant la source ou à la sortie de Michelson, ce filtre laisse passer une bande de 10 nm autour de la longueur d'onde $\lambda = 546$ nm. Observe-t-on des changements sur l'écran ?

3. Soit l'interféromètre de Michelson en coin d'air en lumière blanche, on n'observe pas de franges sur l'écran. On est dans le blanc d'ordre supérieur. On place un filtre interférentiel devant l'un des miroirs, ce filtre laisse passer une bande de 10 nm autour de la longueur d'onde $\lambda = 546$ nm. Observe-t-on des changements sur l'écran ?

3 La réflexion d'un faisceau de lumière blanche perpendiculairement à une pellicule d'eau savonneuse dans l'air produit des interférences constructives pour $\lambda_1 = 600$ nm et des interférences destructives pour $\lambda_2 = 450$ nm. On n'observe pas de minimum d'intensité entre ces deux valeurs. Si l'indice de la pellicule est $n = 1{,}33$, en déduire son épaisseur e supposée uniforme.

4 Une bulle de savon flotte dans l'air et est éclairée par la lumière ambiante, blanche. Sous l'effet de la gravité, l'eau savonneuse s'écoule et le film s'amincit, au sommet de la bulle en premier. Quelle est la couleur au sommet de la bulle juste avant qu'elle n'éclate ?

© Nathan, *classe prépa*

1 – Spectre cannelé
Interférences en lumière blanche

Soit une expérience d'interférences en lumière blanche, par exemple, une lame de mica, d'épaisseur e, éclairée en lumière blanche. On veut analyser le blanc d'ordre supérieur avec un spectroscope à prisme (goniomètre plus prisme) préalablement étalonné.
Ce spectroscope est constitué d'un goniomètre : source, fente source, collimateur, prisme, lunette autocollimatrice.
Étalonnage : pour une position fixe du prisme, on met en coïncidence le réticule de la lunette sur chaque raie de la source spectrale connue, on repère la position de la lunette par l'angle sur la plate-forme du goniomètre et on utilise le vernier pour une mesure précise. On trace la courbe λ en fonction de la position de la lunette.

1 On analyse d'abord directement la lumière blanche. Qu'observe-t-on ?

2 On réalise l'expérience, elle nécessite la présence d'une lame semi-réfléchissante à 45° du faisceau incident de lumière blanche en incidence quasi normale sur la lame de mica. Cette lame semi-réfléchissante permet de diriger la lumière réfléchie par la lame de mica vers la fente d'entrée du spectroscope.
Dessiner le montage avec la source lumineuse, la lame semi-réfléchissante, la lame de mica et l'entrée du goniomètre. Pourquoi observe-t-on un phénomène d'interférences ? Rappeler sans démonstration la différence de marche optique au point M en fonction de l'épaisseur e et de l'angle que fait le rayon incident sur la lame de mica avec la normale à la lame.

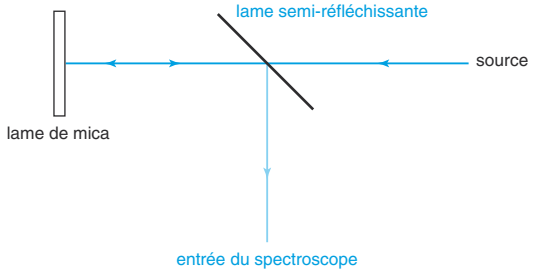
3 On analyse ensuite le blanc d'ordre supérieur. On observe des cannelures. Dans le jaune vert, on pointe deux cannelures noires et on compte le nombre de cannelures brillantes entre les deux. On prendra $N \approx 10$ afin de pouvoir considérer que, dans la gamme de longueurs d'onde correspondantes, le mica n'est pas dispersif.
On a relevé sur la courbe d'étalonnage que les deux cannelures noires séparées par $N = 10$ cannelures brillantes correspondent aux longueurs d'onde $\lambda_1 = 546$ nm et $\lambda_2 = 578$ nm. Montrer que $\delta_{2/1} = \delta(e) + \frac{\lambda}{2}$ avec $\delta(e) = N\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$. En déduire l'épaisseur de la lame de mica.
Application numérique avec les données suivantes : l'indice n du mica sera pris égal à 1,596 dans le domaine des longueurs d'onde du jaune vert.

résolution méthodique

1 Quand on analyse la lumière blanche produite par une lampe, on observe un spectre continu allant du rouge au violet ; en effet, avec un prisme, l'indice du verre de prisme étant inversement proportionnel à la longueur d'onde, le violet est le plus dévié.

© Nathan, *classe prépa*

2 Le montage est dessiné sur la figure suivante. Il ne faut pas mettre la lame semi-réfléchissante dans l'autre position. En effet, cela réfléchirait la lumière blanche de la source vers la fente du spectroscope au lieu de réfléchir la lumière venant de la lame de mica. Expérimentalement, si on se trompe, on observe le spectre continu au lieu d'observer des cannelures.



On observe un phénomène d'interférences type lames minces car la lumière peut se réfléchir soit sur la face d'entrée de la lame de mica soit sur la face de sortie. On a déjà calculé cette différence de marche optique : $\delta_{2/1}(M) = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2}$ avec $\sin i = n\sin r$ dans le chapitre 1, exercice n° 2 de « Savoir résoudre les exercices ».

3 Pour les deux cannelures noires, on peut écrire

$$\delta_{2/1}(M) = p_1\lambda_1 = p_2\lambda_2 = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 \text{ avec } k_1, k_2 \text{ entiers.}$$

Il faut utiliser les ordres d'interférences, cela simplifie les calculs.

On compte N cannelures brillantes entre elles donc $p_1 = p_2 + N$.

De plus, en incidence normale $i = 0 = r$, $\delta_{2/1}(M) = 2ne + \frac{\lambda}{2}$.

On obtient les équations suivantes : $2ne = k_1\lambda_1 = (k_1 - N)\lambda_2$ car λ_1 et λ_2 sont proches.

On en déduit $k_1 = \frac{N\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$ d'où l'épaisseur de la lame de mica :

$$2ne = N\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \Rightarrow \boxed{e = N\frac{\lambda_1\lambda_2}{2n(\lambda_2 - \lambda_1)}}$$

A.N. : $e = \mathbf{30{,}9\ \mu m}$.

en conclusion

Il faut savoir relier la théorie à l'expérience.

© Nathan, *classe prépa*

2 – Spectrométrie interférentielle par transformée de Fourier

On considère un Michelson monté en lame d'air à faces parallèles d'épaisseur e, éclairé par une source étendue. On observe dans le plan focal image d'une lentille convergente (de petite focale pour augmenter la sensibilité du photodétecteur centré sur le centre des anneaux).

1 La source est supposée rigoureusement monochromatique, de nombre d'onde σ_0, d'intensité totale I_0. Calculer l'intensité lumineuse $I(i = 0)$ au centre $(i = 0)$ des anneaux à l'infini. On suppose que l'on chariote de sorte que $e = v_b t$ où v_b est la vitesse constante de balayage (un moteur démultiplié entraîne la vis de translation du miroir du Michelson) et on enregistre la courbe $I = f(e)$ au centre des anneaux $(i = 0)$ ou interférogramme. Déterminer la fonction $I(i = 0, t)$ et tracer son graphe.

2 La source est maintenant non rigoureusement monochromatique, mais à profil spectral rectangulaire, centrée sur σ_0, de largeur $\Delta\sigma \ll \sigma_0$, d'intensité totale $I_0 = I_{sp0}\Delta\sigma$. Calculer $I(i = 0, t)$ et tracer son graphe. Retrouver le cas limite : source rigoureusement monochromatique.

3 La source est un doublet de deux composantes σ_1 et σ_2 monochromatiques, d'intensités totales identiques $I_0 = I_{01} = I_{02}$, distantes de $|\sigma_1 - \sigma_2| = \Delta\sigma_{doublet}$ satisfaisant à :

$$\Delta\sigma \ll \Delta\sigma_{doublet} \ll \sigma_{moyen}.$$

Calculer $I(i = 0, t)$ et tracer son graphe.

Comment se modifie le phénomène si les intensités totales I_{01} et I_{02} des deux composantes sont différentes ?

4 La source est maintenant un doublet composé de deux raies à profil spectral rectangulaire, de même largeur $\Delta\sigma$, de même intensité totale $I_0 = I_{sp0}\Delta\sigma$, distantes de $|\sigma_1 - \sigma_2| = \Delta\sigma_{doublet}$ satisfaisant à :

$$\Delta\sigma \ll \Delta\sigma_{doublet} \ll \sigma_{moyen}.$$

Calculer et tracer $I(i = 0, t)$. Retrouver le cas limite : source de deux raies monochromatiques.

5 Généraliser au cas d'une source à profil spectral quelconque $I_{sp}(\sigma)$, en dégageant le concept de fond lumineux et en reliant la modulation de l'intensité lumineuse au profil spectral via une judicieuse transformée de Fourier.
La transformée de Fourier d'une fonction $f(u)$ est :

$$TF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ut}\mathrm{d}u.$$

© Nathan, *classe prépa*

résolution méthodique

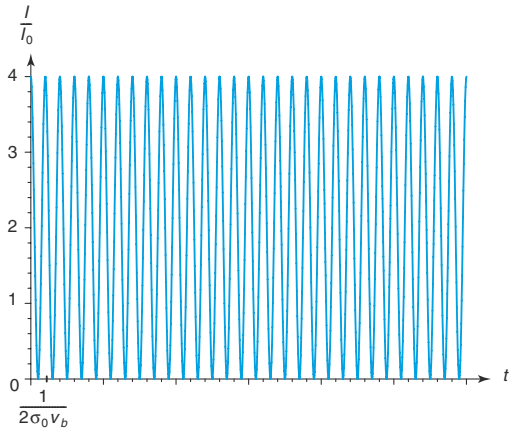
1 L'interféromètre de Michelson, pour la configuration lame d'air à faces parallèles, donne une intensité au point M à l'infini, dans la direction i par rapport au bras de sortie : $I(M) = 2I_0(1 + \cos(4\pi\sigma e \cos i))$. Au point M à l'infini, correspond un point M dans le plan focal image de la lentille.

Au centre des anneaux $(i = 0)$ et pour une source rigoureusement monochromatique, de nombre d'onde σ_0, d'intensité totale I_0, on obtient :

$$I(i = 0) = 2I_0(1 + \cos(4\pi\sigma_0 e))$$

$$\boxed{I(i = 0, t) = 2I_0(1 + \cos(4\pi\sigma_0 v_b t))}$$

L'intensité varie sinusoïdalement en fonction du temps. L'amplitude est $4I_0$ et la période temporelle est $\dfrac{1}{2\sigma_0 v_b}$.



2 La source est une raie centrée sur σ_0 à profil spectral rectangulaire, de largeur $\Delta\sigma \ll \sigma_0$ et d'intensité $I_0 = I_{sp0}\Delta\sigma$. On va intégrer sur tous les nombres d'onde.

$$\mathrm{d}I(i = 0, t) = 2I_{sp0}(1 + \cos(4\pi\sigma v_b t))\mathrm{d}\sigma$$

$$I(i = 0, t) = \int_{\sigma_0 - \left(\frac{\Delta\sigma}{2}\right)}^{\sigma_0 + \left(\frac{\Delta\sigma}{2}\right)} 2I_{sp0}(1 + \cos(4\pi\sigma v_b t))\mathrm{d}\sigma$$

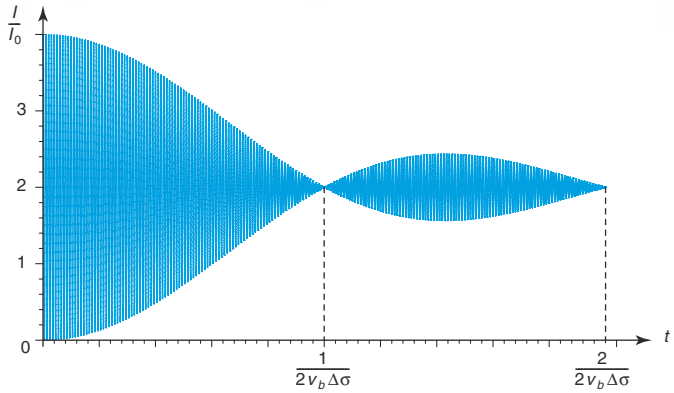
$$I(i = 0, t) = 2I_{sp0}\Delta\sigma + \frac{2I_{sp0}}{4\pi v_b t}\left(\sin 4\pi v_b t\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right) - \sin 4\pi v_b t\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right)$$

$$I(i = 0, t) = 2I_{sp0}\Delta\sigma + \frac{I_{sp0}}{\pi v_b t}\sin\left(4\pi v_b t\frac{\Delta\sigma}{2}\right)\cos(4\pi v_b t\sigma_0)$$

$$I(i = 0, t) = 2I_{sp0}\Delta\sigma + \frac{I_{sp0}}{\pi v_b t}\sin(2\pi\sigma v_b t\Delta\sigma)\cos(4\pi\sigma v_b t\sigma_0)$$

$$\boxed{I(i = 0, t) = 2I_0\left(1 + \frac{\sin 2\pi v_b t\,\Delta\sigma}{2\pi v_b t\Delta\sigma}\cos 4\pi v_b t\sigma_0\right)}$$

© Nathan, *classe prépa*



On reconnaît un produit de deux fonctions, l'une lente et l'autre rapide, produit déjà étudié dans l'essentiel de ce même chapitre, paragraphe 4.1. On observe un signal sinusoïdal d'amplitude modulée par un sinus cardinal. La période temporelle du signal rapide est $\frac{1}{2\sigma_0 v_b}$ tandis que celle du signal lent est une période d'annulation $\frac{1}{2\Delta\sigma v_b}$.

On retrouve le cas limite en faisant $\Delta\sigma = 0$, le sinus cardinal vaut alors 1 et on retrouve le résultat de la question 1.

3 La source est un doublet de deux composantes σ_1 et σ_2 monochromatiques, d'intensités totales identiques $I_0 = I_{01} = I_{02}$. Ces deux composantes sont incohérentes entre elles. On va donc additionner les intensités dues à chacune d'entre elles.

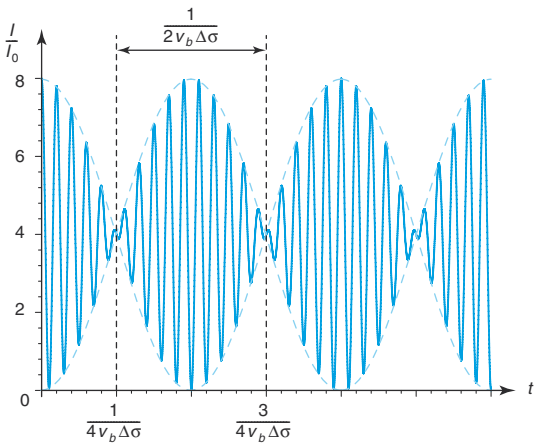
$$I(i = 0, t) = 2I_0(1 + \cos(4\pi\sigma_1 v_b t)) + 2I_0(1 + \cos(4\pi\sigma_2 v_b t))$$

$$I(i = 0, t) = 4I_0 + 2I_0\cos(4\pi\sigma_1 v_b t) + 2I_0\cos(4\pi\sigma_2 v_b t)$$

$$I(i = 0, t) = 4I_0(1 + \cos 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)v_b t \cos 2\pi(\sigma_1 - \sigma_2)v_b t)$$

Comme il s'agit d'un doublet de raies, notons $\sigma_{\text{moyen}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et $\Delta\sigma_{\text{doublet}} \ll \sigma_{\text{moyen}}$.

$$\boxed{I(M) = 4I_0[1 + \cos(4\pi\sigma_{\text{moyen}} v_b t)\cos(2\pi\Delta\sigma_{\text{doublet}} v_b t)]}$$



© Nathan, *classe prépa*

On reconnaît une fonction étudiée dans l'essentiel de ce même chapitre, paragraphe 3.1. On observe des battements optiques. La période temporelle du signal rapide est $\frac{1}{2\sigma_{\text{moyen}}\nu_b}$ tandis que celle du signal lent est $\frac{1}{\Delta\sigma\nu_b}$. La période des battements est deux fois plus petite $\frac{1}{2\Delta\sigma_{\text{doublet}}\nu_b}$.

Si $I_{01} \neq I_{02}$ alors les battements n'ont pas de minima nuls.

4 La source est maintenant un doublet composé de deux raies à profil spectral rectangulaire, de même largeur $\Delta\sigma$, de même intensité totale $I_0 = I_{\text{sp}0}\Delta\sigma$, distantes de $\Delta\sigma_{\text{doublet}}$ et satisfaisant à :

$$\Delta\sigma \ll \Delta\sigma_{\text{doublet}} \ll \sigma_{\text{moyen}}.$$

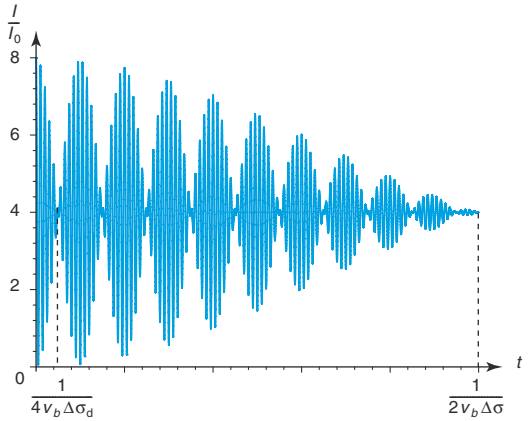
On va additionner l'intensité obtenue à la question 2 pour σ_1 à celle obtenue à la question 2 pour σ_2.

$$I(i=0,t) = 2I_0\left(1 + \frac{\sin 2\pi\nu_b t\Delta\sigma}{2\pi\nu_b t\Delta\sigma}\cos 4\pi\nu_b t\sigma_1\right) + 2I_0\left(1 + \frac{\sin 2\pi\nu_b t\Delta\sigma}{2\pi\nu_b t\Delta\sigma}\cos 4\pi\nu_b t\sigma_2\right)$$

$$I(i=0,t) = 4I_0 + 2I_0\frac{\sin 2\pi\nu_b t\Delta\sigma}{2\pi\nu_b t\Delta\sigma}(\cos 4\pi\nu_b t\sigma_1 + \cos 4\pi\nu_b t\sigma_2)$$

$$I(i=0,t) = 4I_0 + 4I_0\frac{\sin 2\pi\nu_b t\Delta\sigma}{2\pi\nu_b t\Delta\sigma}\cos[2\pi(\sigma_1+\sigma_2)\nu_b t]\cos[2\pi(\sigma_1-\sigma_2)\nu_b t]$$

$$\boxed{I(i=0,t) = 4I_0 + 4I_0\frac{\sin 2\pi\nu_b t\Delta\sigma}{2\pi\nu_b t\Delta\sigma}\cos(4\pi\sigma_{\text{moyen}}\nu_b t)\cos(2\pi\Delta\sigma_{\text{doublet}}\nu_b t)}$$



On observe des battements optiques modulés par un sinus cardinal. La période temporelle du signal rapide est $\frac{1}{2\sigma_{\text{moyen}}\nu_b}$ tandis que la période d'annulation du sinus cardinal est $\frac{1}{2\nu_b\Delta\sigma}$.

On retrouve le cas limite en faisant $\Delta\sigma = 0$, le sinus cardinal vaut alors 1 et on retrouve le résultat de la question 3.

5 Pour un profil spectral quelconque $I_{\text{sp}}(\sigma)$,

$$\mathrm{d}I(i=0,t) = 2I_{\text{sp}}(\sigma)(1+\cos(4\pi\sigma\nu_b t))\mathrm{d}\sigma.$$

© Nathan, classe prépa

On peut prendre comme bornes d'intégration de 0 à l'infini et poser $I_{sp}(\sigma) = 0$ pour les nombres d'onde absents dans le spectre de la source.

$$I(i = 0, t) = \int_0^\infty 2I_{sp}(\sigma)(1 + \cos(4\pi\sigma v_b t))\mathrm{d}\sigma$$

$$I(i = 0, t) = \int_0^\infty 2I_{sp}(\sigma)\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i(4\pi\sigma v_b t)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i(4\pi\sigma v_b t)}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$I(i = 0, t) = \int_0^\infty 2I_{sp}\mathrm{d}\sigma + \int_0^\infty I_{sp}(\sigma)\mathrm{e}^{i(4\pi\sigma v_b t)}\mathrm{d}\sigma + \int_0^\infty I_{sp}(\sigma)\mathrm{e}^{-i(4\pi\sigma v_b t)}\mathrm{d}\sigma$$

Si on introduit la transformée de Fourier du profil spectral (on remarque que $I_{sp}(\sigma) = 0$ pour σ négatif) :

$$\mathrm{TF}(2e = 2v_b t) = \int_0^\infty I_{sp}(\sigma)\mathrm{e}^{i(4\pi\sigma v_b t)}\mathrm{d}\sigma$$

$$\mathrm{TF}^*(2e = 2v_b t) = \int_0^\infty I_{sp}(\sigma)\mathrm{e}^{-i(4\pi\sigma v_b t)}\mathrm{d}\sigma$$

En posant $\int_0^\infty 2I_{sp}\mathrm{d}\sigma = 2I_0$, on obtient alors :

$$\boxed{I(i = 0, t) = 2I_0 + \mathrm{TF}(2v_{bt}) + \mathrm{TF}^*(2v_{bt})}$$

$2I_0$ joue le rôle de fond lumineux tandis que la modulation de l'intensité lumineuse est reliée à la transformée de Fourier du profil spectral. C'est la raison pour laquelle on parle de spectrométrie par transformée de Fourier.

en conclusion

Cette technique donne lieu à de nombreuses applications : détermination du profil spectral d'une source, mesure de la bande passante d'un filtre (voir exercice n° 8 de « S'entraîner ») et mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie (voir ce problème dans le chapitre 8).

© Nathan, *classe prépa*

1 * 10 min

➤ Corrigé p. 124

Film de savon

Une plaque métallique percée d'un trou circulaire est trempée dans du savon liquide, il se forme alors une couche mince à l'intérieur du trou. On fait tourner la plaque, maintenue horizontale, autour de l'axe vertical passant par le trou. On éclaire la couche en lumière blanche. On observe un centre noir, des cercles colorés et une teinte blanche sur les bords. Interpréter.

2 * 10 min

➤ Corrigé p. 124

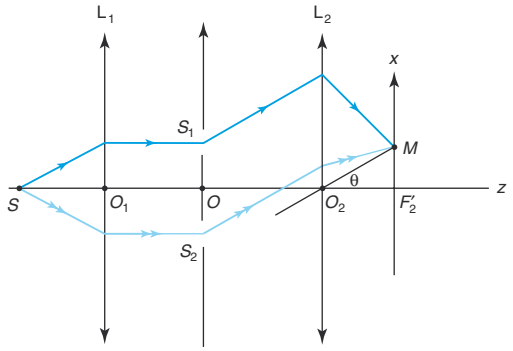
Interféromètre de Michelson

On règle un interféromètre de Michelson en lame d'air à faces parallèles d'épaisseur nulle. On éclaire par une lampe à vapeur de sodium suivie d'un filtre pour sélectionner le doublet jaune. On donne $\lambda_1 = 589$ nm. On déplace le miroir chariotable et on observe des brouillages des franges d'interférences. On part d'une zone de brouillage, on observe encore 6 fois des zones de brouillage et on note un déplacement du miroir de 1,055 5 mm. Interpréter et calculer λ_2 et $\Delta\lambda$. Commenter l'incertitude sur les mesures (une graduation du miroir chariotable vaut 5 µm).

3 * 20 min

➤ Corrigé p. 124

Dispositif des fentes d'Young



1. Soit le dispositif d'Young où les deux petits trous sont remplacés par deux fentes F_1 et F_2 identiques, parallèles à (Oy), infiniment fines, distantes de a et centrées respectivement sur S_1 et S_2 ; une fente source est placée dans le plan focal objet de L_1 parallèlement à (Oy). La source est monochromatique. Exprimer l'éclairement dans le plan focal image de L_2 où on a placé un écran. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

2. On éclaire en lumière blanche et on place la fente d'entrée d'un spectroscope dans le plan focal image de L_2 parallèlement à (Oy). On déplace le spectroscope autour de F'_2. Qu'observe-t-on ? Comment choisir la largeur de la fente d'entrée du spectroscope ?
Données : $f'_2 = 1$ m et $a = 0{,}1$ mm.

3. Quand on éclaire avec le doublet du sodium ($\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm), pour quel ordre d'interférences obtient-on le premier brouillage ? On veut un brouillage en $x = 0$. On ajoute une lame d'épaisseur e et d'indice n devant S_1, calculer l'épaisseur e nécessaire.
On donne $n = 1{,}5$.

4 ** 10 min

➤ Corrigé p. 125

Ordre d'interférences

1. En utilisant la notion d'ordre d'interférence, retrouver la période spatiale d'apparition-disparition des franges d'interférence dans une interférence à deux ondes par une source émettant un doublet de nombres d'onde σ_1 et σ_2.

2. Soit un profil spectral rectangulaire centré sur σ_0 de largeur $\Delta\sigma$. Retrouver directement la condition spatiale de brouillage des franges d'interférence sans aucun calcul d'intensité.

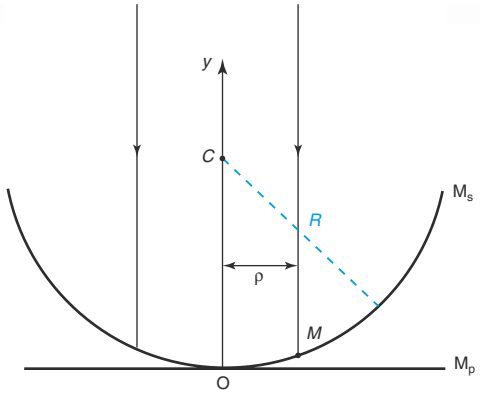
5 ** 30 min

➤ Corrigé p. 125

Interféromètre de Newton

On considère le dispositif de Newton constitué d'un miroir sphérique M_s partiellement réfléchissant, d'épaisseur négligeable, de rayon R, de centre C, reposant sur un miroir plan M_p. Le point de contact est O. On éclaire le système par un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ, parallèle à l'axe de révolution (Oy).

© Nathan, classe prépa



1. Donner l'expression de la différence de marche optique en un point M du miroir M_s, M est à la distance ρ de l'axe telle que $\rho \ll R$.

2. On éclaire le dispositif en lumière blanche. Quel est l'aspect de la figure d'interférences ? Calculer la distance par rapport au centre de la première frange où les longueurs d'onde $\lambda_1 = 450$ nm et $\lambda_2 = 650$ nm sont simultanément éteintes.
On prendra $R = 5$ m.

3. On se place à une distance de 5 mm de l'axe. On analyse la lumière à l'aide d'un spectroscope. Quelles sont les radiations éteintes ?

6 *** 30 min

➤ *Corrigé p. 125*

Raies verte et jaune orangée du mercure

L'œil humain est particulièrement sensible dans le jaune vert. On observe les franges du coin d'air avec l'interféromètre de Michelson et la lampe à vapeur de mercure. On observe deux phénomènes.
D'une part des franges particulièrement colorées vertes et oranges apparaissent périodiquement. Ailleurs les franges ont une couleur indéfinie (bleu verdâtre). On compte le nombre N de franges brillantes vertes entre les centres de deux zones d'apparition avec un filtre vert devant la lampe à vapeur de mercure (cela correspond à moins d'une graduation et on commet moins d'erreur en comptant le nombre de franges).
D'autre part le brouillage de ces franges très colorées a lieu toutes les 8 graduations quand on translate le Michelson.
Le spectre de la lampe à vapeur de mercure comporte trois raies intenses : une raie dans le vert, un doublet de raies dans le jaune orangé et une raie dans le violet.

1. Analyser le premier phénomène et connaissant la longueur d'onde de la raie verte du mercure ($\lambda_{verte} = 546{,}0$ nm), en déduire celle de la raie jaune orangée du mercure et l'incertitude sur cette mesure.
Faire l'application numérique avec $N = 17 \pm 2$.
On commet une erreur d'une frange pour repérer chaque zone.

2. Analyser le deuxième phénomène et en déduire la largeur du doublet jaune du mercure. Faire l'application numérique sachant qu'une graduation du Michelson correspond à 10 µm.

7 *** 20 min

➤ *Corrigé p. 126*

Frange achromatique

1. On considère le dispositif interférentiel des trous d'Young (voir figure de l'exercice n° 3 (S_1 devient T_1 et S_2 devient T_2)). Le trou supérieur T_1 est recouvert à sa gauche par une lame à faces parallèles d'épaisseur e, d'indice n. Rappeler sans démonstration la différence de marche optique en un point M de l'écran de coordonnée x.
Quel est le déplacement de la frange centrale par rapport à la situation sans lame ?

2. On donne $n = n_0 + \dfrac{A}{\lambda^2}$ avec $n_0 = 1{,}50$ et $A = 0{,}006\,05$ µm^2. $T_1T_2 = 3$ mm, $f'_2 = 1$ m, $e = 10$ µm.
Déterminer x en fonction de l'ordre d'interférence p au point M et λ.

3. Montrer qu'il existe une frange brillante pour laquelle x est stationnaire dans la gamme des longueurs d'onde visibles. Quel est l'ordre de cette frange dite achromatique (on justifiera ce dernier qualificatif) ? Calculer le x_0 correspondant.

8 *** 20 min

➤ *Corrigé p. 126*

Mesure de la bande passante d'un filtre

Le Michelson est réglé en frange d'égale inclinaison au voisinage de l'ordre de zéro, on éclaire le Michelson en lumière blanche avec un filtre interférentiel. On utilise un dispositif d'enregistrement

© Nathan, *classe prépa*

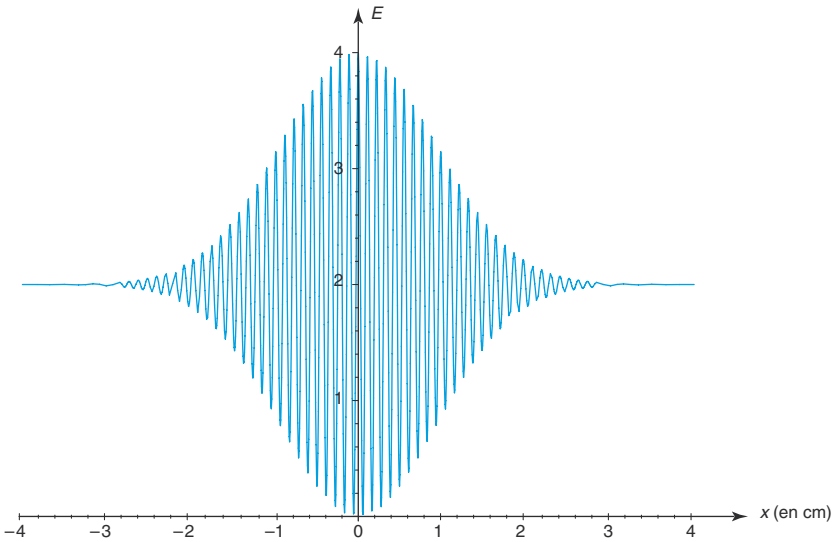
des franges d'égale inclinaison : caméra CCD ou photocellule reliée à une table traçante d'abscisse x. On enregistre l'interférogramme : éclairement en fonction de x (en cm) $E = f(x)$ au centre des anneaux en faisant varier l'épaisseur e de la lame d'air (voir exercice n° 2 de « S'entraîner » spectrométrie interférentielle par transformée de Fourier).

1. Comment obtenir expérimentalement cette courbe ?

2. Interprétation de la courbe. On donne v_t la vitesse de translation du miroir du Michelson (1 tour 500 µm pour 30 minutes) et v_d la vitesse du système enregistreur (pour la table traçante, c'est la vitesse de défilement du papier 8 cm par minute). Sur l'enregistrement, on peut mesurer la demi-largeur et le nombre d'oscillations. En déduire la longueur d'onde moyenne et l'ordre de grandeur de la bande passante de ce filtre.
La demi-largeur est obtenue pour :

$$E(x) = \frac{E_{max} - E_{moyen}}{2}.$$

On admettra que la demi-largeur de l'interférogramme $I = f(e)$ donne l'ordre de grandeur de la bande passante en nombre d'onde $\Delta e \approx 1/\Delta\sigma$.



© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 Réponse **c.** Les anneaux brillants sont jaunes mais leur contraste dépend de la différence de marche optique donc de l'épaisseur de la lame d'air. Quand on fait varier e, en l'augmentant par exemple, les anneaux sont alternativement bien contrastés et brouillés.

2 Réponse **b.** La largeur des raies dépend de la nature de la lampe et de la raie concernée (largeur naturelle), de l'effet Doppler et enfin de l'effet des collisions. À haute pression, les collisions sont plus importantes et augmentent la largeur de la raie. On ne peut comparer qu'une lampe à vapeur de mercure basse pression à une lampe à vapeur de mercure haute pression.

3 Réponse **b.** La différence de marche optique pour une lame mince d'indice n et d'épaisseur e est $\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$ ($\frac{\lambda}{2}$ en raison du déphasage supplémentaire π des lames minces utilisées en réflexion). Pour observer des irisations il faut que δ soit de l'ordre de quelques longueurs d'onde afin qu'une ou deux longueurs d'onde soient éteintes dans le spectre visible. Finalement, e est de l'ordre de quelques centaines de nm.

Remarque : pour observer des franges d'interférences en lumière blanche, on doit satisfaire à $\delta < l_c \approx \mu\text{m}$.

4 Réponse **a.** La mesure de la périodicité des brouillages nous permet d'accéder à la largeur du doublet, connaissant la longueur d'onde moyenne ; en effet, la période en différence de marche optique est $\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda}$.

Savoir appliquer le cours

1 Pour une même pulsation, les deux sources sont cohérentes entre elles. En revanche, deux sources de pulsations différentes ne peuvent pas interférer entre elles.
Pour la pulsation ω_1, on obtient un système de franges d'interférences donc des anneaux sur l'écran (perpendiculaire à l'axe des deux sources), anneaux brillants rouges. Pour la pulsation ω_2, on obtient des anneaux sur l'écran, anneaux brillants verts. Les anneaux de couleur verte vont s'intercaler entre les anneaux de couleur rouge sauf en certains points de l'écran où les ordres d'interférence sont tous les deux entiers. En ces points les anneaux se superposent et on obtient pratiquement du blanc, les deux couleurs étant complémentaires.

2 **1.** Si on place un filtre interférentiel devant l'un des miroirs, il n'y aura interférences entre la voie 1 (réflexion sur M_1) et la voie 2 (réflexion sur M_2) que pour la bande de longueurs d'onde ainsi sélectionnées. Par la voie sans filtre, il passera de la lumière blanche. On verra donc des franges d'interférences dans le vert sur un fond d'éclairement uniforme blanc.

2. Si on place le filtre interférentiel devant la source, on verra des franges d'interférences dans le vert bien contrastées si on n'était pas trop loin des irisations avant de placer le filtre. En effet, en sélectionnant une bande étroite de longueurs d'onde, on a augmenté la longueur de cohérence de la source.

Remarque : on peut l'évaluer : $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$

avec $\Delta\nu = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$.

A.N. : $\tau = \mathbf{10^{-13}\ s}$ donc $l_c = c\tau = \mathbf{30\ \mu m}$.

3. Si on place un filtre interférentiel devant l'un des miroirs, on peut voir des franges dans le vert mal contrastées si on n'était pas trop loin des irisations avant de placer le filtre. Sinon, on verra un éclairement uniforme sur l'écran verdâtre.

3 La réflexion d'un faisceau de lumière blanche perpendiculairement à une pellicule d'eau savonneuse dans l'air correspond à une différence de marche de $2ne + \frac{\lambda}{2}$ ($\frac{\lambda}{2}$ en raison du déphasage supplémentaire π des lames minces utilisées en réflexion).
Pour $\lambda_1 = 600$ nm, les interférences sont constructives, l'ordre d'interférences est entier et on peut écrire $2ne + \frac{\lambda_1}{2} = p_1\lambda_1$ avec p_1 entier.

Pour $\lambda_2 = 450$ nm, l'interférence est destructive, l'ordre d'interférences est demi-entier. Comme il n'y a

© Nathan, *classe prépa*

pas de minimum entre λ_1 et λ_2, cet ordre est $p_1 + \frac{1}{2}$ et on peut écrire $2ne + \frac{\lambda_2}{2} = \left(p_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2$.

Des deux équations, on déduit :

$$2ne = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = p_1\lambda_2 \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Finalement, $e = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)}$.

A.N. : e = **338 nm**.

4 Juste avant que la bulle n'éclate, l'épaisseur est quasi nulle. $\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} \approx \frac{\lambda}{2}$. La couleur est donc noire.

S'entraîner

1 Quand on fait tourner la plaque, en raison de la force centrifuge, la couche mince de savon liquide s'amincit au centre et, en revanche, les bords s'épaississent. La différence de marche est $2ne + \frac{\lambda}{2}$ (lame mince utilisée en réflexion) Le centre est noir car l'épaisseur y est quasi nulle ; il est entouré de cercles colorés qui correspondent aux teintes de Newton. Sur les bords, la teinte blanche correspond à du blanc d'ordre supérieur.

2 On utilise nos connaissances sur l'interféromètre de Michelson en lame d'air $\delta = 2e\cos i \approx 2e$ pour de petits angles.

Quand les franges sont brouillées, les ordres d'interférence au centre des anneaux diffèrent d'un nombre demi-entier. On a donc, en appelant e_b l'épaisseur correspondante :

$$2e_b = p_1\lambda_1 = \left(p_1 - \frac{2k+1}{2}\right)\lambda_2.$$

On en déduit $p_1(\lambda_2 - \lambda_1) = \dfrac{2k+1}{2}\lambda_2$ (avec k entier)

$$e_b = \frac{\frac{2k+1}{4}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

L'écart entre deux brouillages successifs est donc :

$$\boxed{\Delta e_b = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}}$$

On a mesuré $6\Delta e_b = 1{,}055$ mm, donc $\Delta e_b = 176$ µm.

A.N. : $\Delta\lambda$ = **1 nm** et λ_2 = **590 nm**.

L'incertitude sur la lecture du déplacement du miroir est de 2 fois une demi-graduation c'est-à-dire 5 µm ; l'incertitude qui en résulte donc sur Δe_b est de $\frac{5}{6} = 0{,}8$ µm. Toutefois il ne faut pas oublier l'incertitude due à l'évaluation à l'œil des zones de brouillage. On peut estimer à plusieurs graduations cette incertitude car lorsqu'on cherche les zones de brouillage, la zone se situe sur une plage de plusieurs graduations à l'œil nu.

Attention : les incertitudes sur les mesures proviennent surtout de l'évaluation à l'œil des zones de brouillage bien que le fait d'en mesurer plusieurs les diminue.

3 **1.** Dans ce dispositif, la différence de marche est $\delta_{2/1}(M) = a\frac{x}{f'_2}$. Elle a été calculée dans l'exercice n° 3 de « Savoir résoudre les exercices » du chapitre 2. L'éclairement vaut : $E(M) = 2E_0\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}a\frac{x}{f'_2}\right)$. On observe des franges d'interférences sur l'écran.

Attention : la source primaire est confondue avec le foyer objet. Le faisceau incident parallèle atteint en même temps S_1 et S_2. Il n'y a pas de déphasage entre les deux sources secondaires cohérentes.

La fente source parallèle aux deux fentes d'Young est indispensable pour voir des franges d'interférences « entières ». Une source ponctuelle donnerait sur l'écran des franges à l'intérieur de la figure de diffraction d'une fente. On étudiera ce problème dans le chapitre 5.

2. On observe des interférences en lumière blanche. La frange centrale est blanc brillant. De part et d'autre de la frange centrale, on observe les irisations puis le blanc d'ordre supérieur. Avec le spectroscope et si on déplace la fente source du spectroscope, on observe un spectre continu pour le blanc brillant, un spectre cannelé ensuite. Une seule cannelure pour les irisations et plusieurs dans le blanc d'ordre supérieur.

Pour discuter le choix de la largeur de la fente source du spectroscope, calculons quelques ordres de grandeur. Les irisations se situent environ de δ = 200 nm à 400 nm, cela correspond sur l'écran à x qui varie de 2 mm à 4 mm. Si on veut examiner séparément et successivement le blanc brillant, les irisations et le blanc d'ordre supérieur, il faut que la largeur de la fente soit inférieure au mm.

3. Avec le doublet du sodium, les franges se brouillent périodiquement avec une période en δ : $\dfrac{\lambda^2_{\text{moyen}}}{\Delta\lambda}$ voir § 3.3 de « Retenir l'essentiel),

© Nathan, *classe prépa*

Le premier brouillage a lieu pour un ordre d'interférences

$$\boxed{p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\lambda_{\text{moyen}}}{\Delta\lambda}}$$

A.N. : p = **982,2**.

On veut un brouillage en $x = 0$.

$\delta = a\dfrac{x}{f'_2} - (n-1)e$ d'où $\delta = -(n-1)e = -\dfrac{\lambda^2_{\text{moyen}}}{\Delta\lambda}$

A.N. : e = **1,16 mm**.

4 **1.** On raisonne uniquement avec les ordres d'interférences et les nombres d'onde. La périodicité des coïncidences (donc renforcement des franges) est obtenue quand $p_1 = p_2 + k$ avec k entier.

$p_1 = \delta\sigma_1$ et $p_2 = \delta\sigma_2$ donc $\delta\sigma_1 = \delta\sigma_2 + k$.

$\delta = \dfrac{k}{\sigma_1 - \sigma_2}$ donc la période en δ est $\dfrac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} = \dfrac{1}{\Delta\sigma_{\text{doublet}}}$.

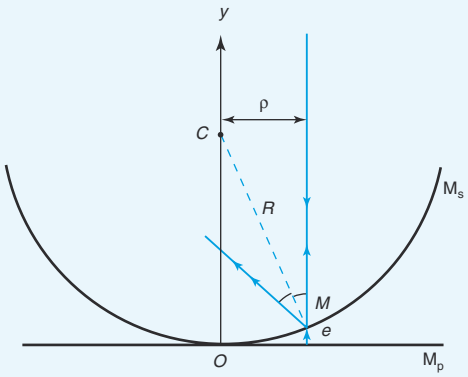
2. Pour une raie rectangulaire, on exprime que le système de franges d'interférences obtenu pour le nombre d'onde σ_0 ne coïncide pas avec le système obtenu pour $\sigma_0 \pm \dfrac{\Delta\sigma}{2}$. Les franges brillantes de l'un coïncident avec les franges noires de l'autre. Les deux ordres d'interférences diffèrent d'un demi.

Attention : on prend les nombres d'onde extrêmes en anticoïncidence avec le nombre d'onde central car il s'agit d'un ordre de grandeur.

$\delta\sigma_0 \pm \dfrac{1}{2} = \delta\left(\sigma_0 \pm \dfrac{\Delta\sigma}{2}\right)$ d'où $\delta\Delta\sigma = \pm 1$.

On retrouve bien l'ordre de grandeur pour δ : $\dfrac{1}{\Delta\sigma}$.

5 **1.** La différence de marche optique en un point M appartenant au champ d'interférences vaut $2e(\rho)$ car il n'y a pas de déphasage supplémentaire (deux réflexions métalliques) voir exercice n° 4 de « S'entraîner » du chapitre 3.



On remarque que $R^2 = (R - e(\rho))^2 + \rho^2$. Comme $e(\rho) \ll \rho \ll R$, $\rho^2 \approx 2e(\rho)R$.

$$\delta_{2/1}(M) = \frac{\rho^2}{R}$$

2. On observe des anneaux. Le centre $(\rho = 0)$ est brillant. L'ordre d'interférences augmente en s'éloignant du centre. Les premiers anneaux sont irisés puis on observe du blanc d'ordre supérieur.

Les radiations $\lambda_1 = 450$ nm et $\lambda_2 = 650$ nm sont simultanément éteintes pour ρ_e qui vérifie :

$\dfrac{\rho_e^2}{R} = p_1\lambda_1 = p_2\lambda_2$ avec p_1 et p_2 demi-entiers.

On en déduit numériquement $p_1 = \dfrac{13}{9}p_2$ d'où $9\left(k_1 + \dfrac{1}{2}\right) = 13\left(k_2 + \dfrac{1}{2}\right)$ avec k_1 et k_2 entiers. Il en résulte $9k_1 = 13k_2 + 2$ donc p_1 et p_2 diffèrent de 2 : $p_1 = p_2 + 2$.

A.N. : p_1 = **6,5** et p_2 = **4,5** en essayant les premiers entiers pour k_1 et k_2.

A.N. : ρ_e = **3,8 mm**.

3. Pour $\rho_e = 5$ mm, $\delta_{2/1}(M) = \dfrac{\rho^2}{R} = 5$ µm. $\delta = p\lambda$, dans le visible :

$\dfrac{5\,000}{750} \leqslant p \leqslant \dfrac{5\,000}{400}$ donc $6{,}7 \leqslant p \leqslant 12{,}5$.

On en déduit qu'il y a six radiations éteintes : $p = \dfrac{15}{2}$ pour $\lambda = 666{,}7$ nm, $p = \dfrac{17}{2}$ pour $\lambda = 588{,}2$ nm, $p = \dfrac{19}{2}$ pour $\lambda = 526{,}3$ nm, $p = \dfrac{21}{2}$ pour $\lambda = 476{,}2$ nm, $p = \dfrac{23}{2}$ pour $\lambda = 434{,}8$ nm et $p = \dfrac{25}{2}$ pour $\lambda = 400$ nm.

Cela correspond aussi à six franges brillantes $p = 7$ pour $\lambda = 714{,}3$ nm, $p = 8$ pour $\lambda = 625$ nm, $p = 9$ pour $\lambda = 555{,}6$ nm, $p = 10$ pour $\lambda = 500$ nm, $p = 11$ pour $\lambda = 454{,}5$ nm et $p = 12$ pour $\lambda = 416{,}7$ nm.

On observe du blanc d'ordre supérieur.

6 **1.** Quand l'interféromètre est utilisé en coin d'air avec une source étendue polychromatique, on observe des franges rectilignes colorées. Si on observe des zones de franges très colorées vertes et oranges, c'est parce que les systèmes d'interférences des deux longueurs d'onde se renforcent. Si elles ne se renforçaient pas, on observerait des franges de la même couleur partout (couleur = vert plus orange plus violet).

Entre deux zones, δ varie de $\Delta\delta = N\lambda_{\text{verte}} = (N-1)\lambda_{\text{jaune}}$.

$$\lambda_{\text{jaune}} = \frac{N}{N-1}\lambda_{\text{verte}}$$

On en déduit $\lambda_{\text{jaune}} = 580$ nm.

Le calcul d'incertitude donne en admettant que l'incertitude sur la raie verte est négligeable et en utilisant la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\lambda_{\text{jaune}}}{\lambda_{\text{jaune}}} = \frac{dN}{N} - \frac{dN}{N-1}$$

$$\frac{\Delta\lambda_{\text{jaune}}}{\lambda_{\text{jaune}}} = \Delta N\left|\frac{1}{N} - \frac{1}{N-1}\right|.$$

© Nathan, *classe prépa*

A.N. : $\dfrac{\Delta\lambda_{\text{jaune}}}{\lambda_{\text{jaune}}} = \mathbf{7{,}4 \cdot 10^{-3}}$.

A.N. : l'incertitude sur $\Delta\lambda$ est de 4,3 nm.

$$\lambda_{\text{jaune}} = \mathbf{580 \pm 4\ nm}.$$

Point Maths. Soit une grandeur physique $z = C\dfrac{y}{x}$ avec C constante. On mesure x à Δx près et on mesure y à Δy près. On en déduit l'incertitude sur z :

$\ln z = \ln y - \ln x + \ln C$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} - \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Si x et y sont des variables indépendantes :

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.$$

2. C'est le phénomène des battements optiques dû au doublet jaune du mercure. Cherchons la périodicité en $\delta = 2e$ du brouillage des franges pour deux raies proches.

Quand les franges sont brouillées, les ordres d'interférence diffèrent d'un nombre demi-entier. On a donc, en appelant e_b l'épaisseur correspondante :

$$2e_b = p_1\lambda_1 = \left(p_1 - \frac{2k+1}{2}\right)\lambda_2.$$

On en déduit $p_1(\lambda_2 - \lambda_1) = \dfrac{2k+1}{2}\lambda_2$ (avec k entier)

$$e_b = \frac{\dfrac{2k+1}{4}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

La périodicité en e du brouillage des franges est :

$$\Delta e_b = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \boxed{\frac{\lambda^2_{\text{moyen}}}{2\Delta\lambda_{\text{doublet}}}}$$

A.N. : $e_b = \mathbf{80\ \mu m}$ et $\Delta\lambda_{\text{doublet}} = \mathbf{2\ nm}$.

Remarque : les valeurs théoriques sont $\lambda_1 = 577{,}0$ nm et $\lambda_2 = 579{,}1$ nm.

7 **1.** La différence de marche optique en un point M de l'écran a été calculée dans le chapitre 2, exercice n° 3 de « Savoir résoudre les exercices ». On lui soustrait la différence de marche due à la lame.

Elle vaut $\delta_{2/1}(M) = a\dfrac{x}{f'_2} - (n-1)e$ avec $a = T_1T_2$.

La frange centrale, par rapport à la situation sans lame, s'est déplacée de $x_{\text{d}} = (n-1)e\dfrac{f'_2}{a}$.

2. $\delta_{2/1}(M) = p\lambda$ d'où $x = \dfrac{f'_2}{a}(p\lambda + (n(\lambda) - 1)e)$

avec $n = n_0 + \dfrac{A}{\lambda^2}$.

3. Pour trouver x correspondant à la frange stationnaire, dérivons x par rapport à la longueur d'onde.

$$\mathrm{d}x = \frac{f'_2}{a}\left(p + e\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -2\frac{A}{\lambda^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{f'_2}{a}\left(p - 2e\frac{A}{\lambda^3}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \text{ pour } p = 2e\frac{A}{\lambda^3}$$

$$p = \frac{0{,}121}{\lambda^3} \text{ avec } \lambda \text{ en } \mu\text{m}.$$

Dans le domaine des longueurs d'onde du visible, on trouve $1{,}89 \geqslant p \geqslant 0{,}29$. On cherche p entier pour avoir une frange brillante. Finalement, $p = 1$ et $\lambda = 494{,}6$ nm. On trouve $x_0 = 1{,}91$ mm.

Cette frange est dite achromatique car, sur l'écran, on observe une frange brillante au point M_0 de coordonnée x_0, de la même couleur que la source et très brillante. Tandis qu'ailleurs sur l'écran, les franges sont colorées.

Attention : il faut se méfier de ce genre de situation qui ne correspond pas à une différence de marche nulle mais à une circonstance particulière.

8 **1.** Pour obtenir cette courbe expérimentalement, il faut mettre le moteur en marche en s'éloignant de l'ordre zéro (les anneaux sortent). Inverser le moteur lorsque le contraste est nul et enregistrer l'interférogramme. Le contraste augmente, passe par un maximum puis rediminue jusqu'à s'annuler. Interrompre alors l'enregistrement

La mesure du nombre N d'oscillations ($N = 61$) dans l'interférogramme de longueur $\Delta x = 8$ cm nous permet de déterminer la période de l'oscillation moyenne.

Relions x à e. Notons $x = v_{\text{d}}t$ et $e = v_t t$, $e = x\dfrac{v_t}{v_{\text{d}}}$.

Notons $k = \dfrac{v_t}{v_{\text{d}}}$, $e = kx$ et $\dfrac{1}{k} = 4\,800$. $\Delta x = 8$ cm, $\Delta e = 16{,}7\ \mu$m.

Pour une translation du miroir Δe de 16,7 µm, N franges défilent. La différence de marche optique vaut $2e$ donc elle a varié de $2\Delta e = N\lambda_{\text{m}}$.

La période d'une oscillation vaut $\lambda_{\text{m}} = 546 \cdot 10^{-9}$ m. On obtient donc la longueur d'onde moyenne.

On mesure sur l'interférogramme les deux valeurs de x pour lesquelles $E(x) = \dfrac{E_{\max} - E_{\text{moyen}}}{2}$, on obtient $\Delta x = 2 \times 1{,}3$ cm $= 2{,}6$ cm d'où $\Delta e = 5{,}4\ \mu$m.

© Nathan, *classe prépa*

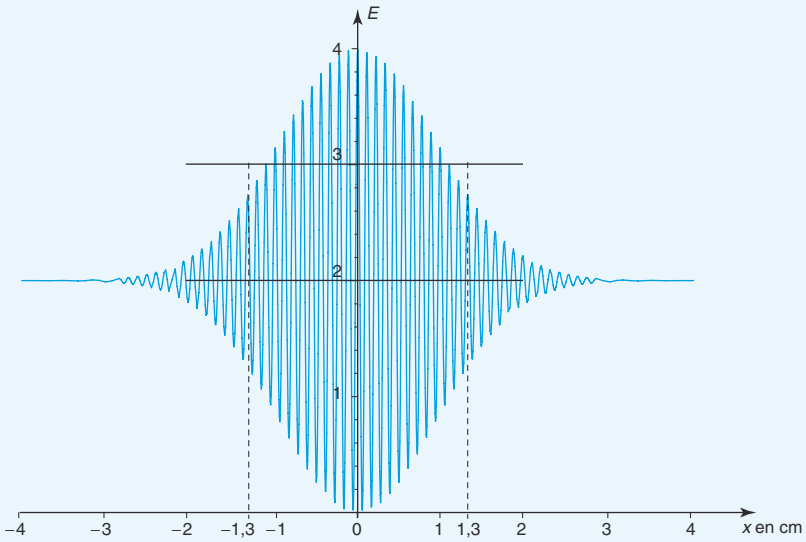
Δe du même ordre de grandeur que $\frac{1}{\Delta\sigma}$ et $\frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$.

Finalement, on obtient $\Delta\lambda = 55$ nm.

Remarque : pour évaluer plus précisément la bande passante, il faudrait déterminer le profil spectral à partir de l'interférogramme (on applique la transformation inverse de la transformée de Fourier).

Résultats : le filtre est de longueur d'onde moyenne $\lambda_m = 546$ nm avec une bande passante $\Delta\lambda = 55$ nm. Ce filtre sélectionne une bande d'environ 55 nm dans le vert de 520 nm à 570 nm environ. C'est un filtre de qualité moyenne.

Remarque : un filtre interférentiel est un filtre de grande qualité qui a une bande passante de l'ordre de quelques nm.



© Nathan, *classe prépa*

© Nathan, *classe prépa*

5 Diffraction

1 Phénomène – Calculs de déphasage

1.1. Phénomène

Soit l'expérience où on essaye d'isoler un mince pinceau lumineux avec un diaphragme. Au fur et à mesure que l'on resserre le diaphragme, la lumière s'étale autour de la direction moyenne attendue qui est la direction de l'optique géométrique. Cet écart avec l'optique géométrique s'appelle phénomène de diffraction.

Quand de la lumière de longueur d'onde λ arrive sur un objet dont l'échelle typique d de variations spatiales est du même ordre de grandeur que λ, alors **la lumière ne suit plus les lois de l'optique géométrique**, elle est **diffractée**. On récupère de la lumière dans une région centrée, en général, sur l'image géométrique de la source et faisant un **angle de l'ordre de** $\frac{\lambda}{d}$ avec la direction moyenne de l'optique géométrique.

Ordres de grandeur

- Si $d = 100\lambda$ alors $\sin\theta = \frac{1}{100} \approx \theta$ et l'angle vaut 0,6° ;
- si $d = 10\lambda$, $\sin\theta = \frac{1}{10} \approx \theta$ et l'angle vaut 5,7° ;
- si d tend vers λ alors $\sin\theta$ tend vers 1 et θ tend vers 90°.

(Cela signifie qu'on tend vers une situation où l'objet rayonne dans toutes les directions).

- Ce **phénomène limite les performances des appareils** (voir § 4) mais permet un très grand nombre d'applications intéressantes (spectroscopie par les réseaux, holographie et strioscopie).

© Nathan, *classe prépa*

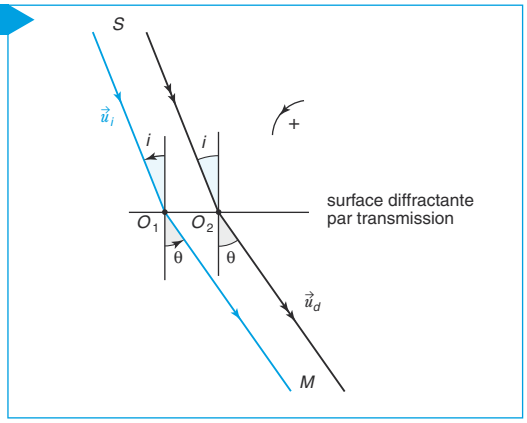
Ce phénomène a lieu dans tous les domaines de la physique, pour toutes les ondes de longueur d'onde λ arrivant sur un objet dont l'échelle typique d de variations spatiales est du même ordre de grandeur. Si on veut explorer un cristal dont la maille est de l'ordre de quelques 0,1 nm, alors il faut disposer d'une onde de longueur d'onde $\lambda \leq 0{,}1$ nm. C'est pourquoi on utilise des rayons X.

Remarque
Comme tout critère, il dépend du système expérimental. Si l'on veut séparer des étoiles de diamètres angulaires très proches, on sera plus exigeant sur le critère.

On peut donc retenir comme critère : la diffraction est perceptible pour d inférieur à la centaine de λ, d étant une longueur caractéristique des variations spatiales de l'objet.

1.2. Calcul préliminaire

Fig. 1



L'onde incidente provient d'une source S à l'infini et on observe à l'infini l'onde émergente M (figure 1).
Calculons le déphasage au point M à l'infini entre le rayon issu de S, source à l'infini, diffracté en O_2 dans la direction θ et celui issu de S diffracté en O_1 dans la même direction.

Remarque : le milieu est d'indice n constant et les angles sont orientés par rapport à la normale à la surface diffractante.

$$\Phi_{2/1}(M) = \Phi_{M/O_2} + \Phi_{O_2/S} - \Phi_{M/O_1} - \Phi_{O_1/S}$$

$$\Phi_{M/O_2} = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{O_2M} \quad \text{et} \quad \Phi_{O_2/S} = \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SO_2}$$

$$\Phi_{M/O_1} = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{O_1M} \quad \text{et} \quad \Phi_{O_1/S} = \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SO_1}$$

$$\Phi_{2/1}(M) = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{O_2O_1} + \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}.$$

La projection de $\vec{k}_i$ sur $\overrightarrow{O_1O_2}$ est $\dfrac{2\pi n}{\lambda}\sin i$ d'où $\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \dfrac{2\pi n}{\lambda} O_1O_2 \sin i$.

La projection de $\vec{k}_d$ sur $\overrightarrow{O_1O_2}$ est $\dfrac{2\pi n}{\lambda}\sin\theta$ d'où $\vec{k}_d \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \dfrac{2\pi n}{\lambda} O_1O_2 \sin\theta$.

Finalement, $\Phi_{2/1}(M) = \dfrac{2\pi n}{\lambda} O_1O_2(\sin i - \sin\theta)$

et $\delta_{2/1}(M) = nO_1O_2(\sin i - \sin\theta) = na(\sin i - \sin\theta)$ avec $a = O_1O_2$.

$\Phi_{2/1}(M) = (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ représente le déphasage entre l'onde incidente plane qui a transité par le point O_2 pour émerger en M à l'infini et la même onde incidente plane qui a transité par le point O_1 pour émerger également en M.

© Nathan, *classe prépa*

1.3. Pupilles planes

Une pupille plane est un plan qui agit sur les ondes lumineuses. La pupille influe sur l'amplitude mais aussi sur la phase, il convient donc de raisonner en amplitude complexe pour le signal lumineux.

1.3.1. Transparence complexe

La pupille plane est idéalisée, la pupille réelle possède une épaisseur. Pour le calcul, il va falloir différencier le point P à l'entrée de la pupille de celui à la sortie de la pupille.

Par définition de la **transparence complexe** d'une pupille :
$\underline{a}(P_{\text{sortie}}) = \underline{T}(P)\underline{a}(P_{\text{entrée}})$ pour tout point P du plan.

On peut noter $\underline{T}(P) = |\underline{T}(P)|e^{i\phi(P)}$.
Si $|\underline{T}(P)| < 1$, on dit que la pupille est absorbante.
Si $|\underline{T}(P)| = 1$, on dit que la pupille est transparente.
Si $|\underline{T}(P)| = 0$, on dit que la pupille est opaque.
Si $\phi(P) = 0$ modulo 2π, la pupille ne déphase pas. Dans le cas contraire, la pupille est dite déphasante.

1.3.2. Pupilles accolées

Si on met deux pupilles l'une derrière l'autre, on parle d'accolement et la transparence complexe de l'ensemble est le produit des transparences.

Attention
On peut réaliser physiquement le produit des transparences à partir des deux pupilles initiales en les accolant mais pas leur somme.

1.3.3. Pupilles complémentaires

Deux pupilles sont dites complémentaires si la somme de leurs transparences est 1 et si leur produit est nul pour tout point P du plan.

Exemple : faisons un trou de forme quelconque dans un écran en découpant le matériau constituant l'écran. Le nouvel écran troué et la forme enlevée constituent deux pupilles complémentaires. Si on les accole en respectant les positions avant découpage, la lumière ne passe plus.
Écrivons la transparence complexe de ces deux pupilles. Pour l'écran troué, appelons D le domaine du trou, $\underline{T}(P) = 1 \ \forall P \in D$ et $\underline{T}(P) = 0 \ \forall P \notin D$.
Pour la forme enlevée, $\underline{T}(P) = 0 \ \forall P \in D$ et $\underline{T}(P) = 1 \ \forall P \notin D$. On vérifie bien que le produit des transparences est nul et que la somme des transparences vaut 1 quel que soit P.

1.3.4. Pupilles disjointes

Deux pupilles sont dites disjointes si leur produit est nul pour tout point P du plan et si la somme de leurs transparences vaut soit $\underline{T}_1(P)$ soit $\underline{T}_2(P)$.

Soient deux pupilles $\underline{T}_1(P) = 1 \ \forall P \in D_1$ et $\underline{T}_1(P) = 0 \ \forall P \notin D_1$ et

$$\underline{T}_2(P) = 1 \ \forall P \in D_2 \text{ et } \underline{T}_2(P) = 0 \ \forall P \notin D_2$$

avec D_1 et D_2 deux domaines disjoints.

© Nathan, *classe prépa*

On vérifie bien que le produit des deux transparences est nul car quand l'une est non nulle, l'autre est nulle. Quant à la somme, elle vaut soit $\underline{T}_1(P)$ soit $\underline{T}_2(P)$ selon les domaines.

Si on veut réaliser la somme de deux pupilles disjointes, il faut fabriquer une nouvelle pupille en découpant les motifs correspondant aux deux pupilles aux mêmes endroits (mêmes domaines) que dans les pupilles initiales.

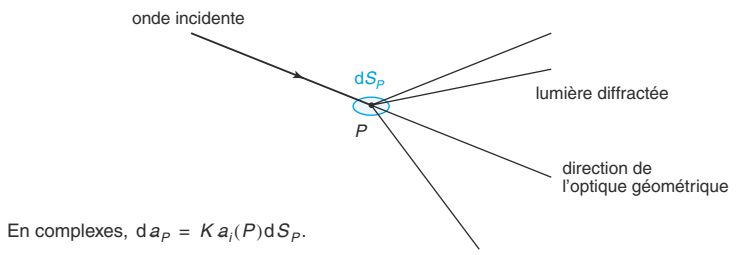
2 Principe d'Huygens-Fresnel – Amplitude et intensité diffractées par une pupille plane

2.1. Principe d'Huygens-Fresnel

2.1.1. Préliminaires

Intéressons-nous à un petit élément de surface $\mathrm{d}S_P$ centré au point P. Une onde lumineuse incidente éclaire cet élément de surface qui va la diffracter (figure 2). On peut supposer que la lumière diffractée, au point P, a une amplitude élémentaire proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente reçue au point P et proportionnelle à $\mathrm{d}S_P$.

Fig. 2



En complexes, $\mathrm{d}a_P = K\,a_i(P)\mathrm{d}S_P$.

2.1.2. Principe d'Huygens-Fresnel

Remarque
Historiquement, ce principe a été énoncé début XIXe siècle dans le cadre de l'optique mais il est valable pour toute onde.

Ce principe postule que tout point P d'une pupille éclairée par une onde incidente devient source secondaire cohérente et émet une ondelette sphérique de même pulsation que l'onde incidente, d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente reçue au point P et de même phase que celle au point P. Tous les points P éclairés étant des **sources secondaires cohérentes**, les ondes diffractées par chacun de ces points vont pouvoir interférer.

Le point important de ce postulat est la cohérence. La diffraction est le résultat physique des interférences à une infinité d'ondes émises par des points P éclairés par une même onde incidente.

Il va alors falloir sommer les amplitudes. On fait ce calcul en complexes car les signaux sont déphasés les uns par rapport aux autres.

© Nathan, *classe prépa*

2.2. Amplitude et intensité diffractées à l'infini par une pupille plane éclairée par une onde incidente plane

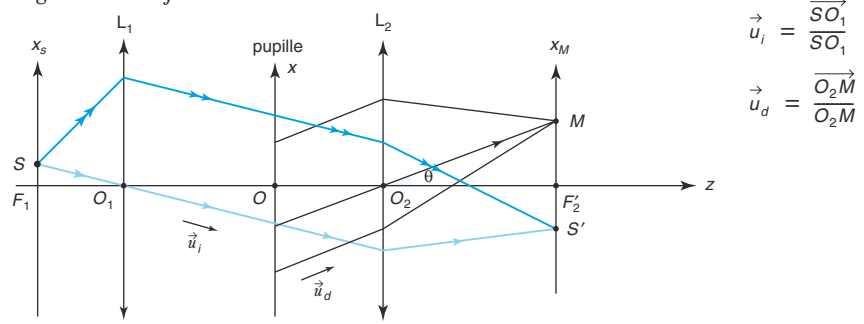
La diffraction à l'infini (ou diffraction de Fraunhofer) requiert une onde incidente plane (source à l'infini) et on observe à l'infini. La diffraction à distance finie (ou diffraction de Fresnel) existe bien sûr mais l'étude de ce phénomène est hors programme.

2.2.1. Montage de Fraunhofer

Remarque

On pourrait ne mettre qu'une seule lentille accolée à la pupille et regarder dans le plan image conjugué du plan objet contenant la source.

Fig. 3 *Montage de Fraunhofer*



C'est un montage avec une source ponctuelle, la pupille et deux lentilles convergentes (figure 3) : la première lentille permet d'obtenir une source à l'infini, la seconde lentille permet de ramener le plan de l'infini à distance finie et d'observer sur un écran dans le plan focal image de la lentille.

L'onde incidente est plane de vecteur d'onde $\vec{k}_i = \frac{2\pi n}{\lambda}\vec{u}_i$ avec $\vec{u}_i$ le vecteur unitaire donnant la direction de la source à l'infini.

La direction du point M est repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}_d$ ou le vecteur d'onde $\vec{k}_d = \frac{2\pi n}{\lambda}\vec{u}_d$.

Attention

On peut choisir S dans le plan Oxz (plan de la figure) mais M n'appartient pas forcément à ce plan.

La source à l'infini est repérée par un angle $i = (\widehat{\vec{u}_z, \vec{u}_i})$ et le point M par l'angle $\theta = (\widehat{\vec{u}_z, \vec{u}_d})$.

Les composantes de $\vec{u}_i$ sont $(\alpha_i = \sin i, \beta_i, \gamma_i)$ et celles de $\vec{u}_d$ sont $(\alpha_d = \sin\theta, \beta_d, \gamma_d)$.

2.2.2. Formules de l'amplitude et de l'intensité diffractées par une pupille plane

Pour appliquer le principe d'Huygens-Fresnel, il faut sommer les amplitudes car les ondes élémentaires diffractées par la pupille sont cohérentes et interfèrent entre elles. Précisons l'amplitude élémentaire au point P. On sommera ensuite sur tous les points P de la pupille, donc on intégrera.

$$\mathrm{d}\underline{a}_P = K\underline{a}_i(P_{\text{sortie}})\mathrm{d}S_P = K\underline{T}(P)\underline{a}_i(P_{\text{entrée}})\mathrm{d}S_P.$$

Notons $\underline{a}_0$ l'amplitude de l'onde émise à la source, $\underline{a}_i(P_{\text{entrée}}) = \underline{a}_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SP})}$. L'onde incidente a cheminé de la source au point P. L'onde émergente diffractée au point P est dans la direction $\vec{u}_d$ (point M à l'infini) et chemine de P vers M.

On peut écrire que $\mathrm{d}\underline{a}(M) = \mathrm{d}\underline{a}(P)\mathrm{e}^{-i\vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PM}}$ d'où :

$$\mathrm{d}\underline{a}(M) = K\underline{T}(P)\underline{a}_i(P_{\text{entrée}})\mathrm{d}S_P\mathrm{e}^{-i\vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PM}}$$

$$\mathrm{d}\underline{a}(M) = K\underline{T}(P)\underline{a}_0\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SP})}\mathrm{e}^{-i\vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PM}}\mathrm{d}S_P$$

© Nathan, *classe prépa*

Pour simplifier les calculs de phase, nous allons introduire un point quelconque de la pupille O choisi comme origine :

$$\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SP} = \vec{k}_i \cdot (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OP}) \text{ et } \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PM} = \vec{k}_d \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})$$

$$\mathrm{d}\underline{a}(M) = K\underline{T}(P)\underline{a}_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SO} + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM}))} \mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP} + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PO}))} \mathrm{d}S_P$$

$$\mathrm{d}\underline{a}(M) = K\underline{T}(P)\underline{a}_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SO} + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM}))} \mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP})} \mathrm{d}S_P$$

Regroupons les termes dépendant du point P avant d'intégrer :

$$\mathrm{d}\underline{a}(M) = (K\underline{a}_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SO} + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM}))})\underline{T}(P)\mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP})} \mathrm{d}S_P$$

$$\mathrm{d}\underline{a}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\underline{T}(P)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}S_P$$

où nous notons $\underline{K} = K\underline{a}_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - (\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{SO} + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM}))}$.

$$\boxed{\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{\text{pupille}} \underline{T}(P)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}S_P}$$

$I_{\text{diffractée}}(M)$ est proportionnelle à $\underline{a}_{\text{diffractée}}(M)\underline{a}^*_{\text{diffractée}}(M)$.

$$\boxed{I_{\text{diffractée}}(M) = \mathrm{C}\int_{\text{pupille}} \underline{T}(P)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}S_P \int_{\text{pupille}} \underline{T}^*(P)\mathrm{e}^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}S_P}$$

Le plan de la pupille est noté Oxy, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour coordonnées $(x, y, 0)$, on peut alors écrire :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_{\text{diffractée}}(M) = \mathrm{C}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}^*(x, y)\mathrm{e}^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On appelle **figure de diffraction** ce qu'on observe sur l'écran à l'infini ou dans le plan focal image de la seconde lentille. La connaissance de l'intensité permet de prévoir cette figure et de la dessiner.

Pour une pupille donnée de transparence donnée, nous pouvons faire le calcul. *In fine*, c'est l'intensité qui nous intéresse. **Le calcul de l'intensité est indépendant du choix de l'origine O** dans le plan de la pupille. En effet, un changement d'origine O en O' n'affecte pas l'intensité, elle affecte juste la phase de l'amplitude et multiplie par $\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OO'}}$.

Remarque

Nous verrons que ce résultat a un rapport avec l'invariance de la figure de diffraction par translation de la pupille dans son plan. Voir § 4.1.2.

$$\underline{a}_{\text{diffractee}}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OO'}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{O'P}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{origine en } O}(M) = \mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OO'}}\underline{a}_{\text{origine en } O'}(M)$$

Posons : $\vec{k}_i - \vec{k}_d = \vec{k}$, le vecteur $\vec{k}$ a pour coordonnées (k_x, k_y, k_z). Le point M est repéré par la direction $\vec{u}_d$ donc par le vecteur $\vec{k}$:

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP} = k_x x + k_y y$$

© Nathan, *classe prépa*

L'amplitude diffractée au point M (repéré par k_x et k_y) s'écrit alors :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On reconnaît **une transformée de Fourier d'ordre 2 de la transparence complexe** (voir « Éléments de mathématiques » en annexe). Toutes les propriétés physiques que nous allons découvrir découlent des propriétés mathématiques de la transformée de Fourier.

2.3. Comment relier le point d'observation M sur l'écran au vecteur $\vec{u}_d$ puis au vecteur $\vec{k}$?

$\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_d$ a pour coordonnées (k_x, k_y, k_z). Après avoir calculé l'amplitude diffractée, il est nécessaire de relier ce vecteur à la position de M sur l'écran.

2.3.1. En fonction des coordonnées cartésiennes de M dans le plan d'observation

Sur la figure du montage de Fraunhofer, on remarque que $\vec{u}_i = \dfrac{\overrightarrow{SO_1}}{SO_1}$ et que $\vec{u}_d = \dfrac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M}$.

On se place dans l'approximation de Gauss où tous les angles sont suffisamment petits d'où $SO_1 \approx f'_1$ et $O_2M \approx f'_2$. S a pour coordonnées (x_S, y_S, d_1) M a pour coordonnées (x_M, y_M, d_2). O_1 a pour coordonnées $(0, 0, d_1 + f'_1)$ et O_2 a pour coordonnées $(0, 0, d_2 - f'_2)$.

En approximant, on obtient $\vec{u}_i = \dfrac{\overrightarrow{SO_1}}{f'_1}$ qui a pour coordonnées $\left(-\dfrac{x_S}{f'_1}, -\dfrac{y_S}{f'_1}, 1\right)$ tandis que $\vec{u}_d = \dfrac{\overrightarrow{O_2M}}{f'_2}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_M}{f'_2}, \dfrac{y_M}{f'_2}, 1\right)$. Ces deux vecteurs sont unitaires si $x, y \ll f'$ ce qui est cohérent avec l'approximation.

On peut alors écrire les coordonnées du vecteur $\vec{k}$:

$k_x = -\dfrac{2\pi n}{\lambda}\left(\dfrac{x_M}{f'_2} + \dfrac{x_S}{f'_1}\right)$ et $k_y = -\dfrac{2\pi n}{\lambda}\left(\dfrac{y_M}{f'_2} + \dfrac{y_S}{f'_1}\right)$. Nous n'avons pas besoin de k_z car on doit calculer $(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP}$. Nous avons admis que le milieu était d'indice constant n.

Remarquons que le cas $k_x = 0$ et $k_y = 0$ correspond à l'image géométrique de S car S' a bien pour coordonnées $x_{S'} = -\dfrac{f'_2 x_S}{f'_1}$ et $y_{S'} = -\dfrac{f'_2 y_S}{f'_1}$. On peut écrire :

$$k_x = -\frac{2\pi n}{\lambda}\left(\frac{x_M - x_{S'}}{f'_2}\right)$$
$$k_y = -\frac{2\pi n}{\lambda}\left(\frac{y_M - y_{S'}}{f'_2}\right)$$

Cette formulation met bien en évidence le rôle joué par l'image géométrique de la source.

Remarque : pour un faisceau incident en incidence normale, $x_S = 0$ et $y_S = 0$,

$k_x = -\dfrac{2\pi n}{\lambda}\dfrac{x_M}{f'_2}$ et $k_y = -\dfrac{2\pi n}{\lambda}\dfrac{y_M}{f'_2}$.

2.3.2. En fonction des angles

On peut aussi repérer le point M sur l'écran par des angles.

Dans le plan Oxz, la source à l'infini est dans une direction faisant un angle i_x avec l'axe optique et le point M correspond à la direction faisant un angle θ_x avec l'axe optique.

© Nathan, *classe prépa*

Remarque
Les problèmes donnent parfois les vecteurs $\vec{k}_i$ et $\vec{k}_d$, il faut s'adapter à l'énoncé.

Dans le plan Oyz, la source à l'infini est dans une direction faisant un angle i_y avec l'axe optique et le point M correspond à la direction faisant un angle θ_y avec l'axe optique.

$$k_x = -\frac{2\pi n}{\lambda}(\sin\theta_x - \sin i_x)$$
$$k_y = -\frac{2\pi n}{\lambda}(\sin\theta_y - \sin i_y)$$

2.4. Premières propriétés de la figure de diffraction liées à la géométrie de la pupille

Si la transparence est réelle, la figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source.

• ***Démonstration :***

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(-k_x, -k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}^{*}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}^{*}\mathrm{e}^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{T}^{*}(x, y)\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

La transparence étant réelle $\underline{T}(x, y) = \underline{T}^{*}(x, y)$,

$$\underline{I}_{\text{diffractée}}(-k_x, -k_y) = \underline{I}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y)$$

La figure de diffraction est donc centrée sur le point à l'infini $k_x = 0$, $k_y = 0$ qui est l'image géométrique de la source.

• **Si $\underline{T}(x, y)$ admet pour centre de symétrie** $(0, 0)$ alors la figure de diffraction admettra l'image géométrique de la source comme centre de symétrie. Voir la démonstration dans l'exercice n° 1 de « Savoir appliquer le cours ».

• **Si la pupille possède un axe de symétrie** noté Δ alors sa figure de diffraction s'organise linéiquement selon un axe perpendiculaire à Δ. Voir la démonstration dans l'exercice n° 2 de « Savoir appliquer le cours ».

3 Cas particulier des pupilles opaques ou transparentes

L'avantage de ces pupilles réside dans le fait que le calcul est grandement simplifié et que leur réalisation pratique est particulièrement simple. Soit elle laisse passer la lumière, soit elle l'occulte complètement. Soit $T(x, y) = 1$ dans certains domaines, soit $T(x, y) = 0$ dans les autres.

3.1. Pupille rectangulaire et cas limite de la fente

3.1.1. Pupille rectangulaire

Soit un rectangle découpé dans un écran opaque. On peut définir la transparence complexe $T(x, y)$ par : si $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ et si $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ alors $T(x, y) = 1$ sinon $T(x, y) = 0$.

© Nathan, *classe prépa*

Calculons l'amplitude diffractée par cette pupille dite rectangulaire :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_x x)}\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_y y)}\mathrm{d}y$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_x x)}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-i\left(k_x\frac{a}{2}\right)} - \mathrm{e}^{i\left(k_x\frac{a}{2}\right)}}{-ik_x} = 2\,\frac{\sin k_x\frac{a}{2}}{k_x} = a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)b\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)$$

$$I_{\text{diffractée}}(M) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(b\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)\right)^2$$

On ne peut pas accéder à la constante C car nous ne connaissons pas la constante de proportionnalité pour l'intensité. Cela ne serait, de toute façon, d'aucune utilité. On préfère se référer au point de l'écran où l'intensité est maximale : $I(0, 0) = \mathrm{C}a^2b^2$.

$I_{\text{diffractée}}(k_x, k_y)) = I(0, 0)\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)^2\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)^2$ pour une pupille plane rectangulaire de surface ab.

L'étude de la fonction sinus cardinal et de son carré est donnée dans l'annexe « Éléments de mathématiques ». Étant donné la décroissance extrêmement rapide du carré de sinus cardinal (figure 4a et 4b), quand on fait l'expérience, on observe une **sorte de croix** (figure 5).

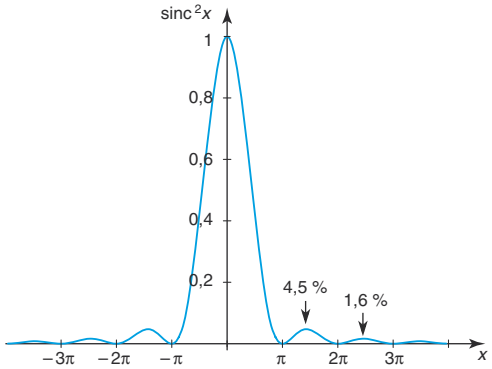
La période en k_x des annulations de $\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)$ est $\frac{2\pi}{a}$; la période en k_y des annulations de $\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)$ est $\frac{2\pi}{b}$.

$k_x = -\frac{2\pi n}{\lambda}\left(\frac{x_2}{f'_2} + \frac{x_1}{f'_1}\right)$ d'où une période en x_2 : $\lambda\frac{f'_2}{na}$;

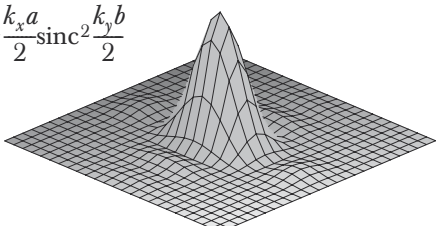
$k_y = -\frac{2\pi n}{\lambda}\left(\frac{y_2}{f'_2} + \frac{y_1}{f'_1}\right)$ d'où une période en y_2 : $\lambda\frac{f'_2}{nb}$. Dans l'air, $n = 1$.

Fig. 4

a) Graphe de $y = \mathrm{sinc}^2 x$

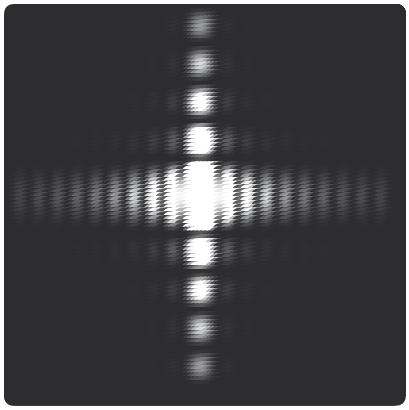


b) Représentation 3D de $\mathrm{sinc}^2\frac{k_x a}{2}\mathrm{sinc}^2\frac{k_y b}{2}$



© Nathan, *classe prépa*

Fig. 5 *Diffraction par une pupille rectangulaire*



On peut dire que la figure de diffraction possède une **tache centrale** en forme de rectangle, tache centrée sur l'image géométrique de la source, d'extensions spatiales dans l'air : $2\lambda\frac{f'_2}{a}$ selon F'_2x_2 et $2\lambda\frac{f'_2}{b}$ selon F'_2y_2. Les maxima secondaires ont une largeur moitié de celle de la tache centrale. L'intensité des premiers maxima secondaires ne vaut plus que 4,5 % de l'intensité maximale obtenue en l'image géométrique de la source.

> Les extensions angulaires de la tache centrale de diffraction pour un rectangle de surface ab : $2\frac{\lambda}{a}$ et $2\frac{\lambda}{b}$ selon les deux directions concernées. La tache centrale est deux fois plus grande que les taches secondaires. Les détails les plus petits dans la pupille donnent les effets les plus grands dans la figure de diffraction.

Quand on observe à l'infini sans lentille, en fait à très grande distance D, il suffit de remplacer dans les formules la distance focale par D, d'où l'intérêt de retenir pour la tache centrale les formules donnant les extensions angulaires plutôt que les distances.

3.1.2. Cas limite de la fente infiniment fine

On utilise souvent dans les expériences des diaphragmes de type fente, c'est-à-dire un rectangle tel que $a \gg b$ ou $a \ll b$. Pour effectuer les calculs, on va modéliser la fente réelle par une fente infiniment fine en faisant tendre l'une des deux dimensions vers l'infini (ici b) et l'autre vers 0 tout en maintenant le produit ab constant.

Quand b tend vers l'infini, $b\text{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)$ se comporte comme une fonction de Dirac car elle tend vers l'infini en $k_y = 0$ et sa largeur $\frac{4\pi}{b}$ tend vers 0. Elle est nulle partout ailleurs.

Remarque
On se servira souvent de ce résultat.

$$\boxed{\text{Pour } k_y \neq 0, \quad \lim_{b\to\infty} b\,\text{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right) = 0}$$

Reprenons les calculs de la pupille rectangulaire avec $a \ll b$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}e^{i\omega t}a\,\text{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)b\,\text{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)$$

Finalement :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, 0) = \underline{K}e^{i\omega t}ab\,\text{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right),$$

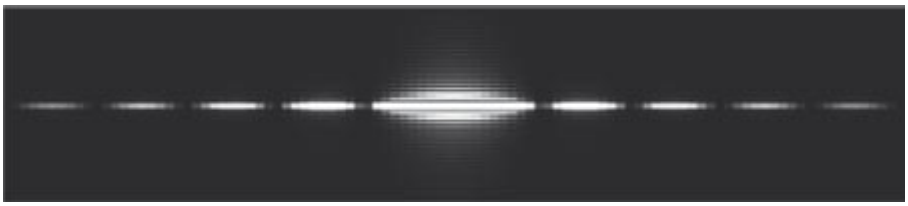
$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \quad \text{si} \quad k_y \neq 0,$$

© Nathan, *classe prépa*

$$I_{\text{diffractée}}(k_x,0) = I(0,0)\,\text{sinc}^2\left(k_x\frac{a}{2}\right),$$

$$I_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \text{ si } k_y \neq 0.$$

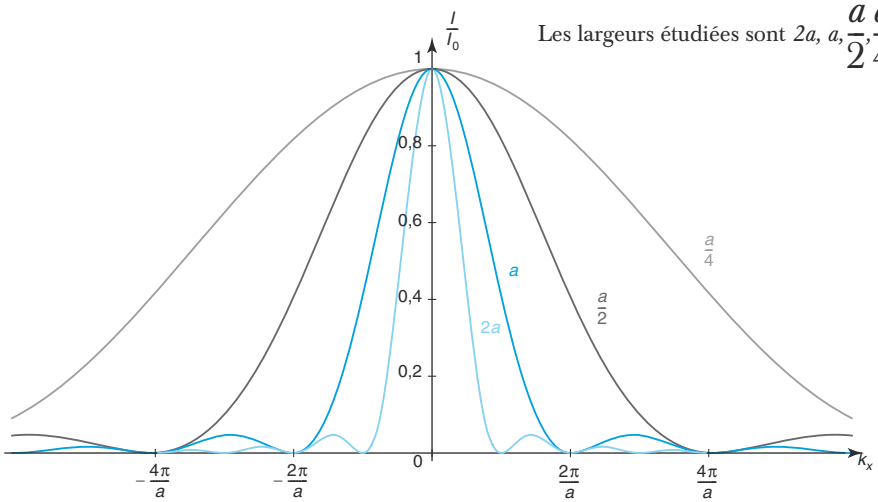
Fig. 6 *Diffraction par une fente infiniment fine*



Nous observons sur l'écran une figure de diffraction (figure 6) qui s'étend linéiquement dans une direction perpendiculaire à la direction de la fente. En effet, la fente est selon Oy car $a \ll b$; la figure s'étend selon un axe parallèle à F'_2x_2 car il n'y a de la lumière que pour $k_y = 0$ donc pour $y_2 = -\dfrac{f'_2 y_1}{f'_1}$ fixé.

Ce résultat n'est pas surprenant, cela ne diffracte plus dans la direction F'_2y_2 car la pupille est de longueur infinie selon Oy, c'est-à-dire de longueur $b \gg \lambda$.
Quand la largeur a de la fente varie et augmente (voir figure 7), l'intensité est non nulle dans une région de plus en plus petite qui correspond à l'image géométrique de la source.
Quand la largeur a de la fente varie et diminue, l'intensité est non nulle dans une région de plus en plus grande.

Fig. 7 *Influence de la longueur de la fente*



© Nathan, *classe prépa*

PC

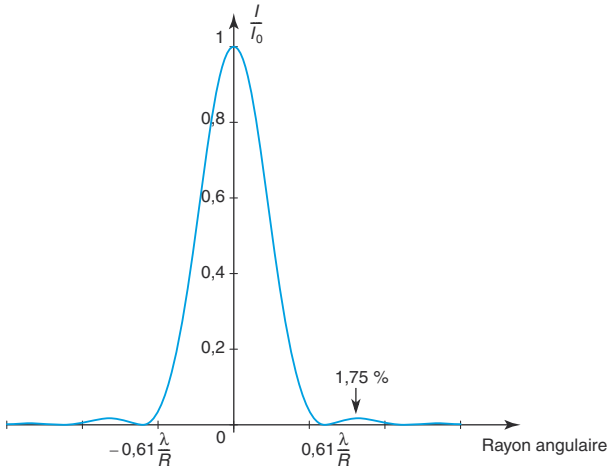
PSI

3.2. Trou circulaire

Les calculs sont hors programme (le calcul nécessite les fonctions de Bessel). Ils donnent l'intensité diffractée en fonction de l'angle (figure 8a). En revanche, il faut connaître les résultats suivants : la figure de diffraction a la symétrie de révolution autour de l'image géométrique de la source. Le **rayon angulaire** du **premier anneau sombre** est $0{,}61\frac{\lambda}{R}$ avec R le rayon du trou, donc le **diamètre de la tache centrale** lumineuse est $1{,}22\frac{\lambda}{R}$. On appelle la tache centrale la **tache d'Airy** (figure 8b). L'intensité décroît très vite, le premier maximum secondaire ne vaut plus que 1,75 % de l'intensité maximale à comparer au 4,5 % de l'intensité diffractée par la fente rectangulaire. On dit qu'il y a apodisation et il est préférable pour séparer des images très proches que les « pieds » soient les plus petits possible (voir § 6).

Fig. 8

a) Intensité d'Airy



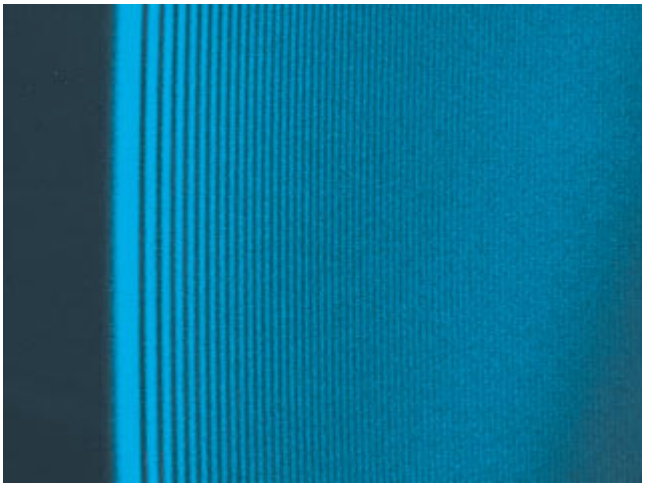
b) Tache d'Airy

© Nathan, *classe prépa*

3.3. Diffraction par un bord d'écran

Si on éclaire un bord d'écran par une onde incidente plane (faisceau laser élargi avec un expanseur de faisceau dans la direction du bord d'écran), on peut observer de la diffraction typique d'un bord d'écran (figure 9). Le calcul est hors programme car il relève de la diffraction de Fresnel. On observe l'« ombre » de l'écran et une zone avec des alternances d'intensité maximale et nulle qu'il ne faut pas confondre avec des franges d'interférences rectilignes (les franges d'interférences rectilignes sont équidistantes).

Fig. 9 *Diffraction par un bord d'écran*



© Nathan, *classe prépa*

4 Effets sur la figure de diffraction d'une transformation de la pupille – Écrans complémentaires

Tous les résultats suivants découlent des propriétés de la transformée de Fourier. Plutôt que de les énoncer mathématiquement, démontrons-les dans le cadre de la physique en évitant le piège qui consiste à dérouler les calculs sans garder à l'esprit leur signification physique profonde.

4.1. Effets sur la figure de diffraction d'une transformation de la pupille

4.1.1. Méthode

On va faire subir une transformation mathématique à la pupille : $(f(x), g(y))$. La méthode va consister à définir une nouvelle transparence complexe que l'on notera $T_{\text{nouvelle}}(x, y)$. $T_{\text{nouvelle}}(x, y) = T_{\text{ancienne}}((f)^{-1}(x), g^{-1}(y))$ qui nous permettra de calculer la nouvelle amplitude diffractée en fonction de l'ancienne.

4.1.2. Translation de la pupille dans son plan

La transformation mathématique est une translation de vecteur $\vec{U}$ contenu dans le plan de la pupille de coordonnées (u, u') : $(x+u, y+u')$. $T_{\text{nouvelle}}(x, y) = T_{\text{ancienne}}(x-u, y-u')$.

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{nouvelle}}(x, y)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{ancienne}}(x-u, y-u')\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On effectue le changement de variable : $(X = x-u, Y = y-u')$. Il n'affecte pas les bornes d'intégration.

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{ancienne}}(X, Y)\mathrm{e}^{-i(k_x(X+u) + k_y(Y+u'))}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

$$= \mathrm{e}^{-i(k_x u + k_y u')}\underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{ancienne}}(X, Y)\mathrm{e}^{-i(k_x X + k_y Y)}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

$$\mathrm{e}^{-i(k_x u + k_y u')} = \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{U}}$$

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{U}}\underline{a}_{\text{ancienne}}(k_x, k_y)$$

$$I_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = I_{\text{ancienne}}(k_x, k_y)$$

> La figure de diffraction est inchangée par translation de la pupille dans son plan.

Ce résultat nous sera très utile pour toutes les pupilles formées de plusieurs motifs identiques : les deux trous d'Young, les deux fentes d'Young et les réseaux.

4.1.3. Homothétie

Soit une homothétie de centre O et de rapport q : (qx, qy). $T_{\text{nouvelle}}(x, y) = T_{\text{ancienne}}\left(\frac{x}{q}, \frac{y}{q}\right)$.

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{nouvelle}}(x, y)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{ancienne}}\left(\frac{x}{q}, \frac{y}{q}\right)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On effectue le changement de variable : $\left(X = \frac{x}{q}, Y = \frac{y}{q}\right)$.

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i}\omega t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}_{\text{ancienne}}(X, Y)\mathrm{e}^{-i(k_x qX + k_y qY)}q\mathrm{d}Xq\mathrm{d}Y$$

$$= q^2\underline{a}_{\text{ancienne}}(qk_x, qk_y)$$

$$I_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = q^4 I_{\text{ancienne}}(qk_x, qk_y)$$

Ce résultat suggère plusieurs commentaires. L'intensité est multipliée par q^4. Étonnant, si $q > 1$, l'intensité augmente ! Oui mais dans une zone restreinte par rapport à la situation initiale (ancienne) car la zone (qk_x, qk_y) devient (k_x, k_y). Si $q < 1$ alors l'intensité diminue mais dans une zone élargie. La conservation de l'énergie est bien respectée.

> Toute dilatation de la pupille dans une direction se traduit par une contraction de la figure de diffraction dans la même direction et toute contraction de la pupille dans une direction se traduit par une dilatation de la figure de diffraction dans la même direction.

© Nathan, *classe prépa*

Pour une affinité selon Ox de rapport q : (qx, y), $T_{\text{nouvelle}}(x, y) = T_{\text{ancienne}}\left(\frac{x}{q}, y\right)$. Par le même raisonnement, on aurait trouvé :

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = q\underline{a}_{\text{ancienne}}(qk_x, k_y),$$
$$I_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = q^2 I_{\text{ancienne}}(qk_x, k_y).$$

4.1.4. Rotation

Soit une rotation de la pupille autour de l'axe optique Oz et d'angle θ, la figure de diffraction tourne du même angle dans le plan de l'écran autour de l'axe optique. On le démontrera dans l'exercice n° 2 de « Savoir résoudre les exercices ».

Pupille et figure de diffraction forment un bloc pour une rotation autour de l'axe optique.

4.2. Déplacement de la source

On fait varier la direction de la source à l'infini, ce qui revient à déplacer la source ponctuelle S dans le plan focal objet de la première lentille. L'image géométrique S' se déplace et la figure de diffraction centrée sur S' pour une pupille à transparence réelle se déplace en bloc avec S'.

4.3. Écrans complémentaires – Théorème de Babinet

Il s'agit donc de deux pupilles complémentaires 1 et 2. On va s'intéresser à l'amplitude diffractée par chacune d'entre elles prise séparément avec la même source S et on va les comparer. Appelons S' l'image géométrique de la source.
Notons $\underline{a}_{\text{diffractée 1}}(M)$ celle diffractée par la seule pupille 1 et $\underline{a}_{\text{diffractée 2}}(M)$ celle diffractée par la seule pupille 2.
Notons $\underline{a}_{OG}(M)$, l'amplitude obtenue sans pupille diffractante donc dans le cadre de l'optique géométrique. $\underline{a}_{OG}(M) \approx 0$ pour tout $M \neq S'$.
La situation sans pupille correspond à une pupille telle que $\underline{T}(P) = 1 \ \forall P$.
Les deux pupilles étant complémentaires, $\underline{T}_1 + \underline{T}_2 = 1$. On en déduit que $\underline{a}_{\text{diffractée 1}}(M) + \underline{a}_{\text{diffractée 2}}(M) = \underline{a}_{OG}(M)$ donc $\underline{a}_{\text{diffractée 1}}(M) = -\underline{a}_{\text{diffractée 2}}(M)$ pour tout $M \neq S'$.
$I_1(M) = I_2(M)$ pour tout $M \neq S'$.

La figure de diffraction de deux pupilles complémentaires est la même sauf en l'image géométrique de la source.

Un fil et la pupille fente fine donnent la même figure de diffraction sauf en S'. La pupille disque et la pupille trou circulaire donnent la même figure sauf en S'. Quand on réalise l'expérience, l'intensité en l'image géométrique dépend de la forme du faisceau incident émis par la source.

PC

PSI

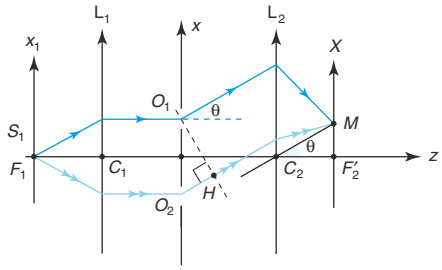
5 Analyse du dispositif des deux fentes d'Young – Nécessité d'une fente source parallèle aux deux fentes

© Nathan, *classe prépa*

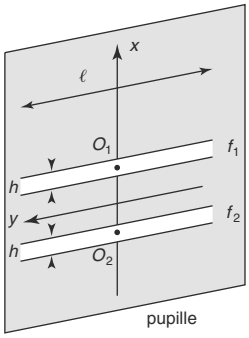
5.1. Analyse du dispositif des deux fentes d'Young

Fig. 10

a) Montage de Fraunhofer



b) Pupille = fentes d'Young



5.1.1. Position du problème et calcul de l'intensité

Soient deux fentes identiques f_1 et f_2 parallèles de largeur h, centrées sur O_1 et O_2, distantes de $O_1O_2 = a \gg h$ et de longueur $\ell \gg h$. Sur la figure 10b, les fentes sont parallèles à Oy. La transformation mathématique qui permet de passer de la fente f_1 à la fente f_2 est une translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2} : (x_{12}, y_{12})$. Utilisons le résultat démontré en 4.1.2, la situation ancienne est l'amplitude diffractée par f_1 et la situation nouvelle l'amplitude diffractée par f_2 :

$$\underline{a}_{f_2}(k_x, k_y) = \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}}\underline{a}_{f_1}(k_x, k_y),$$

$$\underline{a}_{f_2}(k_x, k_y) = \mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})}\underline{a}_{f_1}(k_x, k_y).$$

Pour la pupille avec 2 fentes disjointes :

$$\underline{a}_{2\text{fentes}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{f_1}(k_x, k_y) + \underline{a}_{f_2}(k_x, k_y),$$

$$\underline{a}_{2\text{fentes}}(k_x, k_y) = (1 + \mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})})\underline{a}_{1\text{fente}}(k_x, k_y),$$

$$I_{2\text{fentes}}(k_x, k_y) = I_{1\text{fente}}(k_x, k_y)(1 + \mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})})(1 + \mathrm{e}^{i(k_x x_{12} + k_y y_{12})}),$$

$$I_{2\text{fentes}}(k_x, k_y) = 2I_{1\text{fente}}(k_x, k_y)(1 + \cos(k_x x_{12} + k_y y_{12})).$$

Il apparaît un terme d'interférences à deux ondes (O_1 et O_2) que multiplie un terme de diffraction par une fente. On reconnaît $\Phi_{2/1}(M) = \vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$.

$$\boxed{I_{2\text{fentes}}(M) = 2I_{1\text{fente}}(M)(1 + \cos\Phi_{2/1}(M)) \text{ avec } \Phi_{2/1}(M) = \vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}}$$

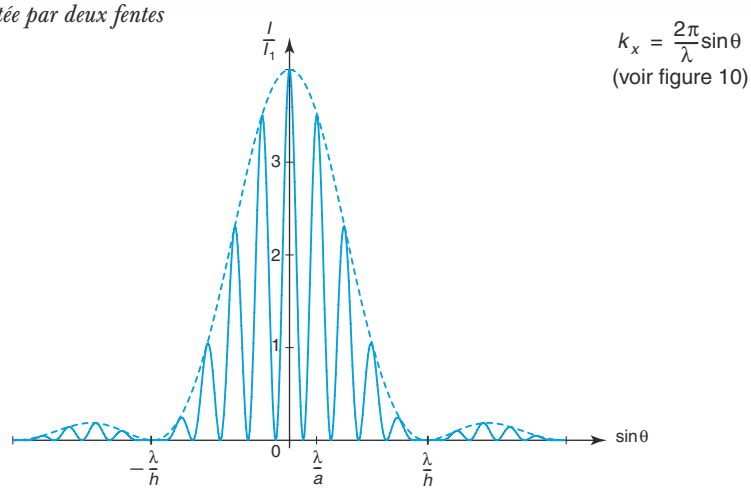
Avec la disposition choisie de fentes :

$$I_{2\text{fentes}}(k_x, 0) = 2I_{1\text{fente}}(k_x, 0)(1 + \cos(k_x a)).$$

L'intensité $I_{2\text{fentes}}(k_x,0)$ est tracée sur la figure 11. Les franges d'interférences sont observées dans la tache centrale de diffraction par une seule fente (figure de diffraction linéique).

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 11 *Intensité diffractée par deux fentes*



Ce résultat est très général et peut s'écrire pour **deux motifs identiques parallèles** et distants de O_1O_2 :

$$I_{2\text{motifs}}(k_x, k_y) = 2I_{1\text{motif}}(k_x, k_y)(1 + \cos(k_x x_{12} + k_y y_{12}))$$

5.1.2. Observation expérimentale

Quand on éclaire le dispositif avec une source ponctuelle à l'infini, on observe des franges d'interférences à deux ondes dans la figure de diffraction par une fente. Ce n'est pas pratique car la figure de diffraction par une fente est linéique dans une direction perpendiculaire à la fente.

En revanche, la figure de diffraction par une fente éclairée par une fente source parallèle (à l'infini) n'est plus linéique comme on peut l'observer sur la figure 12.

Fig. 12 *Diffraction par une seule fente avec une fente source parallèle*

On a alors l'idée d'**étendre la source** et de mettre une fente source dans le plan focal objet de la première lentille. Expérimentalement, on fait tourner la fente source dans le plan focal objet et on constate que la figure est magnifique (figure 13) quand on la dispose parallèlement aux deux fentes de la pupille tandis que le contraste est mauvais pour une position quelconque et que la figure ne ressemble plus à rien pour une position perpendiculaire.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 13 *Diffraction par les deux fentes d'Young avec une fente source parallèle*

Que signifie magnifique ? On observe des franges d'interférences rectilignes, parallèles à la direction des fentes (c'est normal car perpendiculaire à la direction de $\overrightarrow{O_1O_2}$), équidistantes avec un très bon contraste dans une grande zone de l'écran.

5.1.3. Cas d'une fente source perpendiculaire aux deux fentes de la pupille

Pour une source ponctuelle $S = F_1$, $\delta_{2/1}(M) = a\dfrac{X}{f'_2}$ avec X repérant la position de M sur l'écran.

Si on déplace la source en S_1, la nouvelle différence de marche vaut $\delta_{2/1}(M) = a\dfrac{X}{f'_2} + a\dfrac{x_1}{f'_1}$ avec x_1 qui repère la position de S_1 (voir exercice n° 3 de « Savoir résoudre les exercices » du chapitre 2). On observe la même figure linéique avec des franges d'interférences à l'intérieur sur l'écran mais décalée de $-f'_2\dfrac{x_1}{f'_1}$ selon F'_2X.

Si on a plusieurs sources ponctuelles, on comprend qualitativement que les franges d'interférences vont se brouiller.

Quantitativement, si on veut tenir compte de la fente source, on va définir une intensité linéique $I_{\ell i} = \dfrac{I_0}{s}$ avec s la longueur de la fente source. Chaque point source $\left(\mathrm{d}I = \dfrac{I_0}{s}\mathrm{d}x_1 = I_{\ell i}\mathrm{d}x_1\right)$ est incohérent avec les autres et donne son propre système d'interférences. On peut utiliser la formule de Fresnel et intégrer sur tous les points sources. On obtient :

$$\mathrm{d}I(M) = 2I_{\ell i}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi Xh}{\lambda f'_2}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f'_2} + \frac{x_1}{f'_1}\right)\right)\mathrm{d}x_1.$$

On note $I'_{\ell i} = I_{\ell i}\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi Xh}{\lambda f'_2}\right)$.

$$I(M) = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} 2I'_{\ell i}\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f'_2} + \frac{x_1}{f'_1}\right)\right)\mathrm{d}x_1$$

$$I(M) = 2I'_{\ell i}s + \frac{2I'_{\ell i}\lambda f'_1}{2\pi a}\left(\sin\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f'_2} + \frac{s}{2f'_1}\right) - \sin\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f'_2} - \frac{s}{2f'_1}\right)\right)$$

$$I(M) = 2I'_{\ell i}s + \frac{4I'_{\ell i}\lambda f'_1}{2\pi a}\cos\frac{2\pi a}{\lambda}\frac{X}{f'_2}\sin\frac{2\pi a}{\lambda}\frac{s}{2f'_1}$$

$$\boxed{I(M) = 2I'_{\ell i}s + \frac{2I'_{\ell i}s\lambda f'_1}{\pi as}\cos\frac{2\pi a}{\lambda}\frac{X}{f'_2}\sin\frac{\pi a}{\lambda}\frac{s}{f'_1} = 2I_0\left(1 + \mathrm{sinc}\,\frac{\pi a}{\lambda}\frac{s}{f'_1}\cos\frac{2\pi a}{\lambda}\frac{X}{f'_2}\right)}$$

© Nathan, *classe prépa*

Le terme d'interférences est $\cos \frac{2\pi a X}{\lambda f'_2}$ tandis que le terme de contraste $\left|\text{sinc}\frac{\pi a}{\lambda}\frac{s}{f'_1}\right|$ ne dépend que de la longueur s de la fente source.
Sachant qu'un sinus cardinal décroît rapidement et s'annule pour π, les franges ne seront visibles avec un bon contraste que si $\frac{s}{f'_1} < \frac{\lambda}{a}$. On ne peut donc se permettre qu'une fente source de petite longueur donc une source quasiment ponctuelle. De plus cela ne résoud pas notre problème : les franges d'interférences sont visibles toujours dans la figure linéique de diffraction par une fente.

5.2. Nécessité d'une fente source parallèle aux deux fentes et explication

Remarque
Pour cette même raison, le dispositif des miroirs de Fresnel est éclairé par une fente source parallèle à l'arête des deux miroirs (on peut éclairer avec un faisceau laser élargi selon la direction de l'arête par un expanseur de faisceau).

Chaque point S_1 de la fente source donne son propre système d'interférences dans la tache centrale de diffraction d'une fente centrée sur S'_1, l'image géométrique de S_1. Cette tache est linéique dans une direction perpendiculaire à la fente donc selon F'_2X.
Si S_1 décrit un segment selon F_1y_1 alors S'_1 décrit un segment selon F'_2Y dans le plan de l'écran. Les taches de diffraction associées à chaque S'_1 se superposent **en se juxtaposant** car elles sont décalées mais parallèles. On n'a représenté sur la figure que la tache centrale de diffraction autour de l'image géométrique de F_1 et S_1 (figure 14).
Comme S_1 décrit continûment le segment fente source, on récupère sur l'écran des franges d'interférences rectilignes, parallèles à la direction des fentes, équidistantes avec un très bon contraste dans une grande zone de l'écran (figure 15).

Fig. 14 *Fente source avec deux points source*

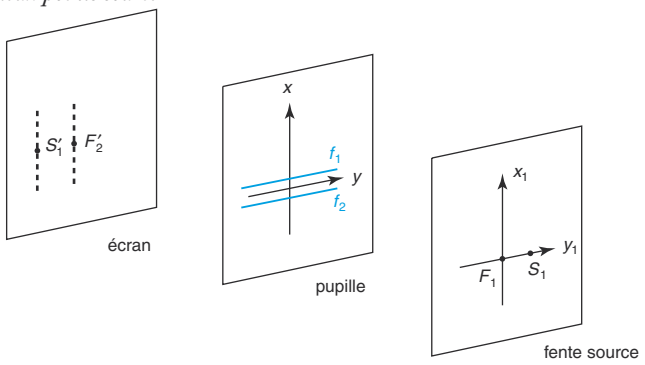
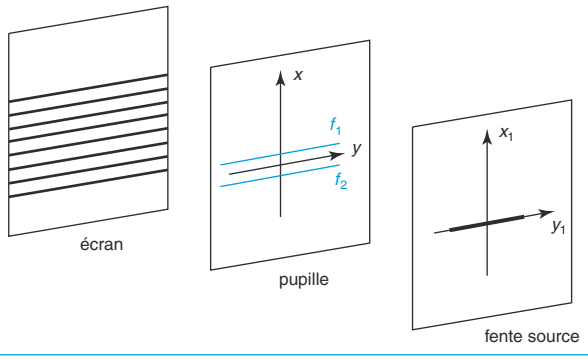


Fig. 15 *Superposition grâce à une fente source*

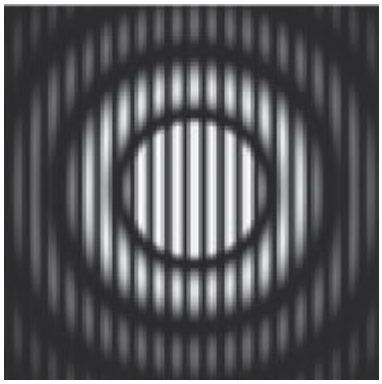


© Nathan, *classe prépa*

Que signifie une grande zone de l'écran ? Elle est délimitée par l'extension de la fente source ℓ_s. N'oublions pas que les fentes ne sont pas infiniment fines, les fentes diffractantes ont une largeur h et la fente source une largeur $h_s > h$ et une longueur $\ell_s \gg h_s$. On verra donc les franges d'interférences dans la tache centrale de diffraction de la fente source (c'est elle qui limite car $\frac{\lambda}{h} > \frac{\lambda}{h_s}$).

Pour le dispositif des **trous d'Young**, il suffit d'avoir une source quasi ponctuelle (trou) car la diffraction par un trou est une tache d'Airy qui n'empêche pas d'observer les interférences (figure 16).

Fig. 16 *Diffraction par les trous d'Young*



© Nathan, *classe prépa*

PC

PSI

6 Limitation du pouvoir séparateur des instruments d'optique par le phénomène de diffraction

6.1. Exemple de la lunette astronomique de Galilée

Attention

La lunette de Galilée grossit mais ne renverse pas. Son grossissement est donc positif. Elle est constituée d'une première lentille convergente et d'une seconde divergente $(f'_1 > 0,\ f'_2 < 0,\ f'_1 > |f'_2|)$.

Cette lunette, formée d'un objectif et d'un oculaire, permet d'observer des objets lointains comme une étoile double dont l'écart angulaire est faible (inférieur à la seconde d'arc). La lunette de Galilée a pour grandissement angulaire ou grossissement $-\frac{f'_1}{f'_2}$. Un écart angulaire objet α donne un écart angulaire image $-\frac{f'_1}{f'_2}\alpha$.

Il se trouve que c'est la lentille objectif qui diffracte. Soit R son rayon, elle se comporte comme un trou circulaire et donne une tache d'Airy de rayon angulaire $0{,}61\frac{\lambda}{R}$. Dans l'espace image, cela correspond au rayon angulaire $-\frac{f'_1}{f'_2}0{,}61\frac{\lambda}{R}$ qui, bien que faible, limite l'observation de deux étoiles proches.

Pour pouvoir mesurer un écart angulaire faible, il faut que l'écart image soit supérieur à l'écart angulaire de la tache de diffraction. Il faut définir un critère.

Pour le microscope (voir l'exercice n° 11 de « S'entraîner » du chapitre **1**), la diffraction limite l'observation à des détails de l'ordre du micromètre.

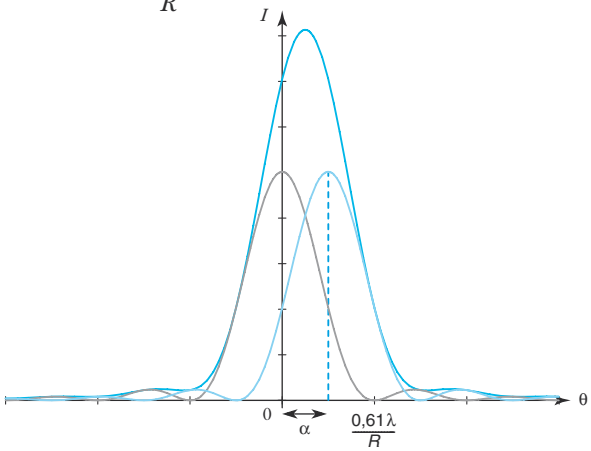
6.2. Critère de Rayleigh

Ce critère a été défini par Rayleigh qui a observé à partir de quel moment on pouvait distinguer un écart faible. Il suffit que l'écart angulaire image soit supérieur ou égal au rayon angulaire image de la tache de diffraction.

Soit $-\frac{f'_1}{f'_2}\alpha \geq -\frac{f'_1}{f'_2}0{,}61\frac{\lambda}{R}$ donc $\boxed{\alpha \geq 0{,}61\frac{\lambda}{R}}$

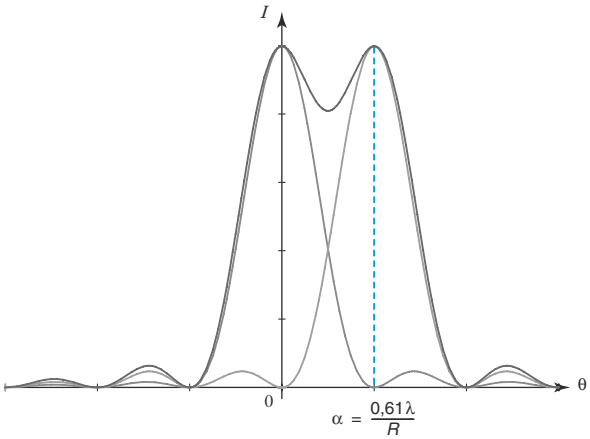
Fig. 17

a) Images non séparées si $\alpha < 0{,}61\frac{\lambda}{R}$



b) Images séparées

si $\alpha \geq 0{,}61\frac{\lambda}{R}$ *Cas limite :* $\alpha = 0{,}61\frac{\lambda}{R}$



© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 162*

1 Relier les pupilles diffractantes aux figures de diffraction à l'infini (numérotées de 1 à 4). Les pupilles sont éclairées sous incidence normale par une onde plane monochromatique.

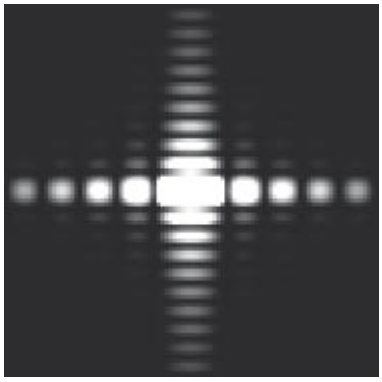
☐ **a.** La pupille est percée de deux petits trous identiques, de rayon R.

☐ **b.** La pupille est percée de deux petits trous identiques, de rayon $3R$.

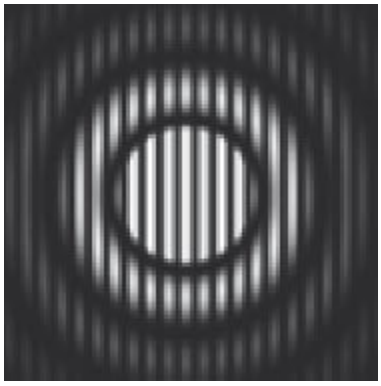
☐ **c.** La pupille est percée d'un rectangle de dimensions a et $b = \frac{a}{2}$.

☐ **d.** La pupille est percée d'un rectangle de dimensions a et $b = \frac{a}{4}$.

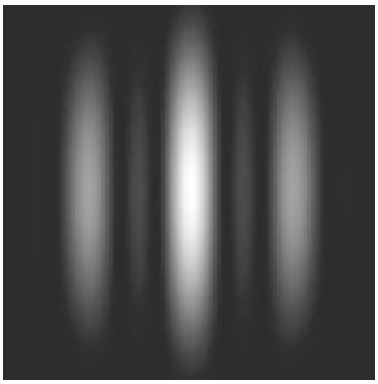
①



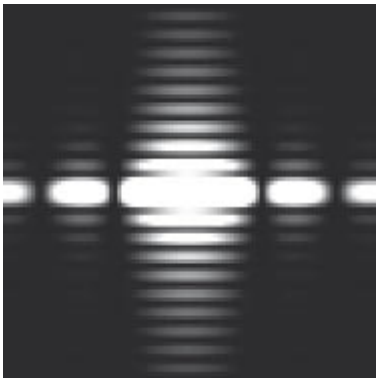
②



③



④



2 Dans une expérience de diffraction par deux fentes identiques parallèles, éclairées par une fente source, la distance entre les deux fentes vaut dix fois la largeur d'une fente. Combien de franges brillantes environ sont visibles à l'intérieur de la tache centrale de diffraction ?

☐ **a.** 10

☐ **b.** 20

☐ **c.** 5

© Nathan, *classe prépa*

3 Deux fentes identiques fines de largeur h et distantes de a sont éclairées en lumière visible à l'aide d'un monochromateur dont on peut régler la longueur d'onde λ. Quand on diminue λ, la figure de diffraction observée à grande distance sur l'écran :

- ☐ **a.** rétrécit et les franges d'interférences se resserrent.
- ☐ **b.** reste inchangée.
- ☐ **c.** rétrécit et les franges d'interférences s'écartent.

4 Dans une expérience de diffraction par deux petits trous, la distance entre les deux trous vaut douze fois le rayon d'un trou. Combien de franges brillantes environ sont visibles à l'intérieur de la tache centrale de diffraction ?

- ☐ **a.** 6
- ☐ **b.** 14
- ☐ **c.** 28

Savoir appliquer le cours

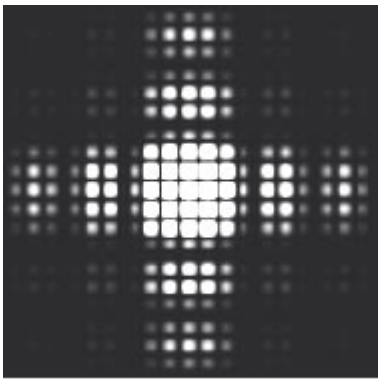
➤ *Corrigés p. 162*

1 Si la transparence de la pupille $\underline{T}(x, y)$ admet pour centre de symétrie $(0, 0)$, démontrer que la figure de diffraction admettra l'image géométrique de la source comme centre de symétrie.
Le montage est celui de Fraunhofer.

2 Si la pupille a une transparence qui ne dépend que d'une coordonnée, $\underline{T}(x, y)$ devenant $\underline{T}(x)$, montrer que la figure de diffraction s'organise le long de l'axe Ox.

3 On éclaire un morceau de tissu sous incidence normale par une onde plane monochromatique, on observe la figure de diffraction à l'infini (figure 5).
Que pouvez-vous en déduire ?

⑤



4 Les deux phares avant d'une voiture qui s'approche sont distants de 1,4 m. L'œil peut-il les séparer sachant que le diamètre de la pupille de l'œil est de 5 mm ? Cela dépend-il de la distance de l'observateur à la voiture ? On prendra une longueur d'onde moyenne de la lumière : 600 nm.

© Nathan, *classe prépa*

1 – Réseaux sinusoïdaux limités

1 On considère dans un plan Oxy une pupille de transparence réelle $T(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ pour $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ et $T(x, y) = 0$ ailleurs. Calculer et interpréter la figure de diffraction à l'infini. On examinera les cas particuliers $a \gg b$ et $a \ll b$.

2 Mêmes questions avec $T(x, y) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ pour $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ et $T(x, y) = 0$ ailleurs.

résolution méthodique

On utilise la formule donnant l'amplitude diffractée à l'infini sans calcul mais en la justifiant de manière concise.

1 L'amplitude diffractée à l'infini par une pupille de transparence $\underline{T}(x, y)$ est la somme des amplitudes des ondes diffractées par tous les points P de la pupille, ondes cohérentes par principe d'Huygens-Fresnel. Il faut tenir compte de la transparence et du déphasage entre l'onde diffractée en P qui a cheminé de la source à l'infini jusqu'en M et l'onde diffractée en O (origine) qui a cheminé de la source à l'infini jusqu'en M. L'onde plane incidente monochromatique est repérée par $\vec{u}_i$ et M est repéré par la direction de droite $\vec{u}_d$ donc le vecteur $\vec{k} = \frac{2\pi n}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u}_d)$.

Attention : Le calcul de l'intensité ne dépend pas du choix de l'origine dans le plan de la pupille.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{OP}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Conseil : on retrouve le cas de la fente infiniment fine (essentiel § 3.1.2). Il faut distinguer les deux cas : $k_y = 0$ et $k_y \neq 0$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, 0) = \underline{K}'\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \quad \text{si} \quad k_y \neq 0$$

Conseil : Penser à transformer le cosinus en somme d'exponentielles complexes.

© Nathan, *classe prépa*

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{i\pi x}{b}} + \mathrm{e}^{\frac{-i\pi x}{b}}}{2}\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x$$

Une pupille très longue selon Oy et dont la transparence ne dépend que de x correspond à une figure de diffraction linéique selon une direction parallèle à Ox. Il n'y a pas diffraction selon la direction parallèle à Oy car la dimension est très grande devant la longueur d'onde.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \frac{\underline{K}'}{2}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{ix\left(-k_x+\frac{\pi}{b}\right)}\mathrm{d}x + \frac{\underline{K}'}{2}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{ix\left(-k_x-\frac{\pi}{b}\right)}\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{ix\left(-k_x+\frac{\pi}{b}\right)}\mathrm{d}x = a\,\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x - \frac{\pi}{b}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \frac{\underline{K}'}{2}\mathrm{e}^{i\omega t}\left(a\,\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right) + a\,\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x-\frac{\pi}{b}\right)\right)$$

$$I_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \mathrm{C}\left(\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right) + \mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x-\frac{\pi}{b}\right)\right)^2$$

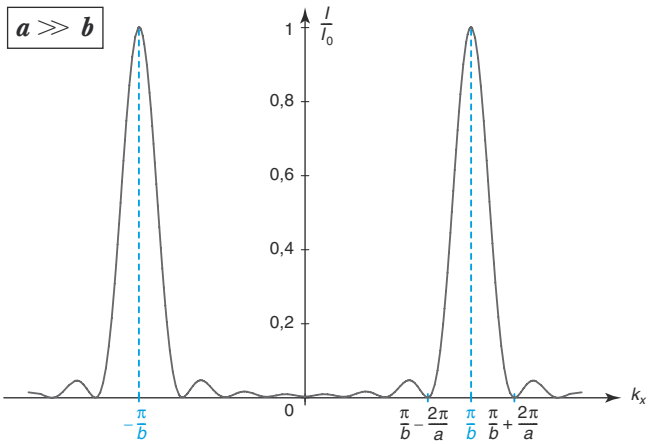
$$I_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \mathrm{C}\,\mathrm{sinc}^2\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right) + \mathrm{C}\,\mathrm{sinc}^2\frac{a}{2}\left(k_x-\frac{\pi}{b}\right) + 2\mathrm{C}\,\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right)\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x-\frac{\pi}{b}\right).$$

La largeur centrale de $\mathrm{sinc}\frac{a}{2}k_x$ en k_x est $\frac{4\pi}{a}$ autour de $k_x = 0$, celle de $\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right)$ est identique mais centrée autour de $k_x = -\frac{\pi}{b}$ et celle de $\mathrm{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x-\frac{\pi}{b}\right)$ est aussi identique mais centrée autour de $k_x = \frac{\pi}{b}$.

Attention : Il est inutile et long de tracer l'intensité dans le cas général. Il vaut mieux déterminer les centres et largeurs des sinus cardinaux. La demi-largeur centrale est obtenue en écrivant, par exemple, $\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right) = \pm\pi$ d'où un centre en $k_x = -\frac{\pi}{b}$ et de largeur $\frac{4\pi}{a}$.

• Si $a \gg b$, $\frac{\pi}{b} \gg \frac{2\pi}{a}$, les deux sinus cardinaux sont très séparés et le double produit est négligeable.

$$I_{\text{diffractée}}(k_x, 0) = \mathrm{C}\,\mathrm{sinc}^2\frac{a}{2}\left(k_x+\frac{\pi}{b}\right) + \mathrm{C}\,\mathrm{sinc}^2\frac{a}{2}\left(k_x-\frac{\pi}{b}\right)$$

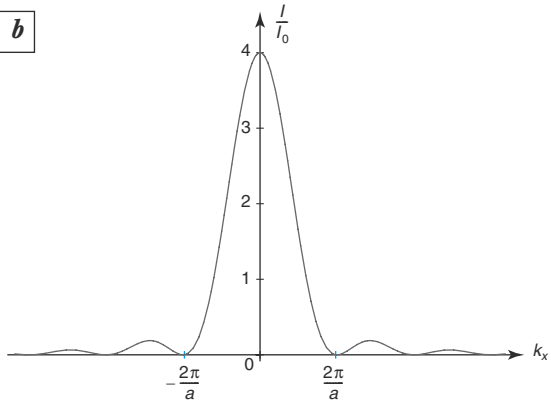


© Nathan, *classe prépa*

• Si $a \ll b$, $\frac{\pi}{b} \ll \frac{2\pi}{a}$, les deux sinus cardinaux sont quasi confondus et le double produit ne s'annule pas.

$$I_{\text{diffractée}}(k_x, 0) \approx (2\sqrt{C}\text{sinc}\frac{a}{2}k_x)^2 \approx 4C\text{sinc}^2\frac{a}{2}k_x$$

$\boxed{a \ll b}$



2

Avec la nouvelle transparence, $T(x, y) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right)$, remarquons que $2\cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$, on peut donc prévoir sans calcul le résultat.

L'amplitude diffractée comportera trois termes. Un sinus cardinal centré sur 0 de largeur centrale $\frac{4\pi}{a}$, un sinus cardinal centré sur $\frac{2\pi}{b}$ de largeur centrale $\frac{4\pi}{a}$ et un sinus cardinal centré sur $\frac{-2\pi}{b}$ de largeur centrale $\frac{4\pi}{a}$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \frac{\underline{K'}}{2}e^{i\omega t}a\text{sinc}\frac{a}{2}k_x + \frac{\underline{K'}}{4}e^{i\omega t}\left(a\text{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x + \frac{2\pi}{b}\right) + a\text{sinc}\frac{a}{2}\left(k_x - \frac{2\pi}{b}\right)\right)$$

• Si $a \gg b$, les deux sinus cardinaux latéraux sont très séparés et loin du sinus cardinal central, les doubles produits sont négligeables.

$$I_{\text{diffractée}}(k_x,0) = 4C\text{sinc}^2\frac{a}{2}k_x + C\text{sinc}^2\frac{a}{2}\left(k_x + \frac{2\pi}{b}\right) + C\text{sinc}^2\frac{a}{2}\left(k_x - \frac{2\pi}{b}\right)$$

On obtient 3 taches de même largeur. La tache centrale est 4 fois plus intense que les 2 taches latérales symétriques.

• Si $a \ll b$, les deux sinus cardinaux latéraux sont quasi confondus en $k_x = 0$.

$$I_{\text{diffractée}}(k_x,0) \approx (4\sqrt{C}\text{sinc}\frac{a}{2}k_x)^2 \approx 16C\text{sinc}^2\frac{a}{2}k_x$$

en conclusion

Il faut éviter le plus possible les calculs quand on peut raisonner physiquement. Il faut savoir raisonner en termes de sinus cardinal et savoir donner le centre et la largeur de la tache centrale.

© Nathan, *classe prépa*

2 – Rotation

Soit une rotation d'angle θ_0 autour de l'axe optique Oz d'une pupille de forme quelconque du plan xOy, quelle est l'influence sur la figure de diffraction à l'infini ?

résolution méthodique

Nous allons utiliser la formule donnant l'amplitude diffractée à l'infini dans une direction repérée par $\vec{k}$.

Attention : il faut utiliser les coordonnées polaires dans le plan de la pupille :

$$\vec{k} \cdot \overrightarrow{OP} = k_x r\cos\theta + k_y r\sin\theta.$$

Les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées au problème.

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \underline{T}_{\text{nouvelle}}(r, \theta)\mathrm{e}^{-i(k_x r\cos\theta + k_y r\sin\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$T_{\text{nouvelle}}(r, \theta) = T_{\text{ancienne}}(r, \theta - \theta_0)$$

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \underline{T}_{\text{ancienne}}(r, \theta - \theta_0)\mathrm{e}^{-i(k_x r\cos\theta + k_y r\sin\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Nous allons effectuer un changement de variables : $\Psi = \theta - \theta_0$. Les bornes d'intégration sont inchangées car intégrer un angle de $-\theta_0$ à $2\pi - \theta_0$ revient au même que de l'intégrer de 0 à 2π.

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \underline{T}_{\text{ancienne}}(r, \Psi)\mathrm{e}^{-i(k_x r\cos(\Psi + \theta_0) + k_y r\sin(\Psi + \theta_0))} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Psi$$

$$= \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \underline{T}_{\text{ancienne}}(r, \Psi)\mathrm{e}^{(-ik_x r\cos\Psi\cos\theta_0 + ik_x r\sin\Psi\sin\theta_0 - ik_y r\sin\Psi\cos\theta_0 - ik_y r\cos\Psi\sin\theta_0)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Psi$$

Si on note $K_x = k_x\cos\theta_0 + k_y\sin\theta_0$ et $K_y = -k_x\sin\theta_0 + k_y\cos\theta_0$:

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \underline{T}_{\text{ancienne}}(r, \Psi)\mathrm{e}^{-i(K_x r\cos\Psi + K_y r\sin\Psi)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Psi,$$

$$\underline{a}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{\text{ancienne}}(K_x, K_y),$$

$$\underline{I}_{\text{nouvelle}}(k_x, k_y) = \underline{I}_{\text{ancienne}}(K_x, K_y).$$

Les coordonnées K_x, K_y définissent une nouvelle direction donc un nouveau point à l'infini. Les nouvelles coordonnées sont déduites des anciennes k_x, k_y par une rotation d'angle θ_0.

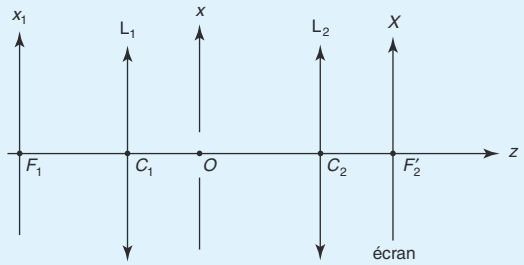
$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & +\sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix}$$

en conclusion

La figure de diffraction tourne du même angle dans le plan de l'écran. **Pupille et figure de diffraction forment un bloc pour une rotation autour de l'axe optique.**

© Nathan, *classe prépa*

3 – Diffraction à l'infini par une fente, séparation à l'infini de deux sources voisines



La pupille diffractante dans le plan Oxy est une fente parallèle à Oy de centre O, de largeur h. Le montage est celui, classique, de diffraction à l'infini.
La source lumineuse est monochromatique (λ), linéique le long de F_1y_1, d'intensité linéique constante, de longueur ℓ.

1 Donner la figure de diffraction dans le plan de l'écran F'_2XY pour un point source puis pour la source décrite ci-dessus. Que se passe-t-il quand la fente diffractante se translate dans son plan, quand la source se translate dans son plan, quand la fente source tourne autour de F_1z et quand la fente diffractante tourne autour de Oz ? On justifiera les résultats sans calcul mais avec précision.

2 La source est maintenant ponctuelle en F_1. Donner la figure de diffraction dans le plan F'_2XY. On rajoute une source ponctuelle en ϕ_1 de coordonnées $x_1, y_1 = 0$, foyer secondaire objet de L_1. À quelle condition les deux images de diffraction seront-elles séparées si on utilise le critère de Rayleigh ?

résolution méthodique

On reconnaît le montage de Fraunhofer avec une source étendue et une pupille fente infiniment fine.

1 Dans le plan de l'écran, on obtiendrait, avec un seul point source S, la figure de diffraction d'une fente parallèle à Oy et de largeur h donc une figure linéique selon $S'X$ avec une tache centrale centrée sur l'image géométrique S' du point source, de demi-largeur angulaire $\frac{\lambda}{h}$ donc de demi-largeur sur l'écran : $\frac{f'_2\lambda}{h}$.
Avec une fente source selon F_1y_1, on obtient une fente source image selon F'_2Y. Quand le point S décrit la fente source, chaque point image S' est le centre d'une figure de diffraction selon $S'X$ de demi-largeur angulaire $\frac{\lambda}{h}$. La figure de diffraction résultante est donc une tache centrale de dimension $\frac{f'_2}{f'_1}\ell$ selon F'_2Y et de largeur $\frac{f'_2\lambda}{h}$ selon F'_2X.

© Nathan, *classe prépa*

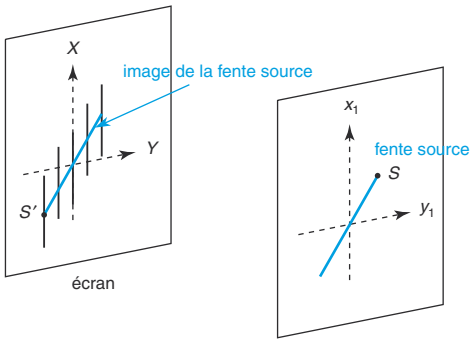
Attention : dans la pratique, h peut être suffisamment petit pour que la tache centrale soit suffisamment grande pour qu'on n'observe pas les taches secondaires. On dit que « cela diffracte tellement qu'on ne s'en aperçoit plus ! ».

• Quand la fente diffractante se translate dans son plan, on n'observe aucun changement ; en effet, pourvu que la pupille soit toujours éclairée, la figure de diffraction est invariante par translation de la pupille dans son plan.

• Quand la source se translate dans son plan, l'image géométrique de la source se translate aussi dans le plan de l'écran et la figure de diffraction centrée sur l'image géométrique de la source (la transparence est réelle) se déplace d'autant.

Conseil : faire un dessin pour comprendre l'évolution de la figure.

• Quand la fente source tourne autour de F_1z, l'image de la fente source tourne aussi mais la figure de diffraction linéique attachée à chaque point image est toujours selon $S'X$. On obtient alors la figure ci-dessous où l'on a représenté quelques points images situés sur l'image de la fente source en couleur avec leur figure de diffraction en noir (la tache centrale seulement).



• Quand la fente diffractante tourne autour de Oz, le problème est identique à la rotation de la fente source ; ce qui n'est pas en contradiction avec ce que nous avons démontré : la figure de diffraction tourne du même angle que la pupille pour une onde incidente plane. Mais pour plusieurs ondes incidentes planes (cas de la fente source), les figures de chaque onde incidente se superposent.

2 La source est maintenant ponctuelle en F_1. La figure de diffraction est linéique selon F'_2X centrée sur F'_2, de demi-largeur sur l'écran : $\dfrac{f'_2\lambda}{h}$.

On rajoute une source ponctuelle en ϕ_1 de coordonnées $(x_1, y_1 = 0)$, on obtient une figure de diffraction identique à la précédente mais centrée sur ϕ'_2 de coordonnées $\left(x_2 = -\dfrac{f'_2}{f'_1}x_1,\right.$ $\left.y_2 = 0\right)$. Les deux images de diffraction sont séparées si $\dfrac{f'_2}{f'_1}x_1 \geqslant \dfrac{f'_2\lambda}{h}$ donc si $x_1 \geqslant \dfrac{f'_1\lambda}{h}$.

en conclusion

Il faut bien connaître les effets sur la figure de diffraction d'une transformation de la pupille tout en gardant à l'esprit les arguments physiques.

© Nathan, *classe prépa*

1 * 10 min

➤ Corrigé p. 163

Diffraction et image géométrique

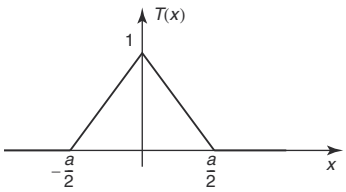
On considère dans un plan Oxy une pupille de transparence réelle $T(x, y) = -1$ si $x \in \left[-\frac{a}{2}, 0\right]$ et $T(x, y) = +1$ si $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ et $T(M) = 0$ ailleurs. Calculer et interpréter la figure de diffraction à l'infini quand elle est éclairée par une onde plane de plan d'onde xOy. Qualifier cette pupille diffractante. Où est l'image géométrique ? Pouvait-on le prévoir ?

2 * 20 min

➤ Corrigé p. 164

Pupille absorbante et apodisation

On considère dans le plan Oxy une pupille très longue selon Oy, de transparence réelle $T(M) = T(x)$, triangulaire, comme le montre la figure ci-contre.



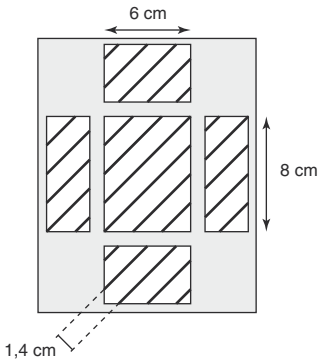
Pupille absorbante

On l'éclaire par une onde plane de plan d'onde Oxy. Quelle est la figure de diffraction à l'infini ? Comparer à une pupille fente le long de Oy, de même largeur a.

3 * 20 min

➤ Corrigé p. 165

Analyse d'une figure de diffraction



La pupille de diffraction est éclairée par une source ponctuelle à l'infini monochromatique ($\lambda = 633$ nm). La pupille est constituée de deux motifs identiques, on donne sa figure de diffraction sur un écran situé à la distance D de la pupille, $D = 1$ m.

1. Faire un schéma du montage.

2. Donner la taille, la forme et la disposition de la pupille.

3. Vérifier par le calcul la figure obtenue sur l'écran.

4 ** 30 min

➤ Corrigé p. 165

Diffraction par trois fentes

Soit le dispositif classique de diffraction à l'infini avec une pupille contenant 3 fentes identiques, parallèles, de largeur h et distantes de d. L'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente. Étudier l'éclairement sur l'écran d'observation.
On prendra $d = 10h$.

5 ** 30 min

➤ Corrigé p. 166

Diffraction par cinq trous circulaires

Soit le dispositif classique de diffraction à l'infini avec une pupille contenant 5 petits trous circulaires de rayon R, alignés et distants de d. Ils sont positionnés respectivement en $(0, 0)$, $(0, d)$, $(0, 2d)$, $(0, 3d)$, $(0, 4d)$ et $(0, 5d)$. L'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente. Étudier l'éclairement sur l'écran d'observation.

6 *** 40 min

➤ Corrigé p. 167

Diffraction par des carrés

1. Prévoir la figure de diffraction par deux carrés de côté a, dont les centres sont distants de d ($d = 2{,}5\ a$), disposés selon l'axe Ox puis selon l'axe Oy et enfin selon la première bissectrice (distants alors de $d\sqrt{2}$).

2. Prévoir la figure de diffraction par quatre carrés disposés aux sommets d'un plus grand carré de côté d.

3. Comparer la dernière figure à la figure de diffraction par quatre carrés alignés.

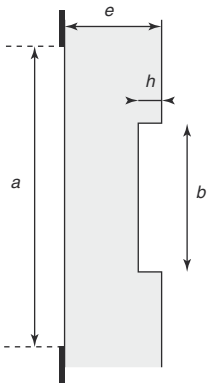
© Nathan, *classe prépa*

7 *** 30 min

➤ Corrigé p. 169

Intensité diffractée par une lame de verre présentant un défaut

Une source ponctuelle monochromatique est placée au foyer objet d'une lentille convergente. On observe la figure de diffraction à l'infini donnée par une fente de largeur a obstruée par une lame de verre d'indice n, d'épaisseur e présentant un défaut : un creux de largeur b et d'épaisseur h avec $b \gg h$.



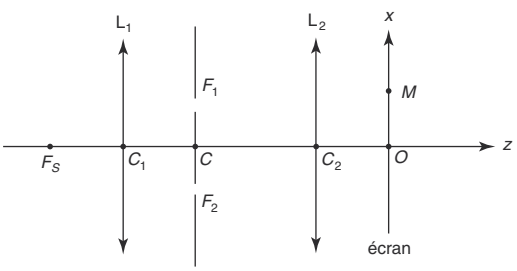
1. Déterminer l'éclairement dans le plan d'observation.

2. Que devient cette intensité pour h suffisamment petit devant la longueur d'onde ?

8 *** 30 min

➤ Corrigé p. 170

Holographie élémentaire



1. On fait l'expérience des fentes d'Young avec le montage classique de diffraction à l'infini. Les fentes d'Young F_1 et F_2 sont parallèles à Oy, distantes de a, de largeur $h \ll a$. Les lentilles identiques, de distance focale f, non diffractantes, fonctionnent dans les conditions de Gauss. La fente source F_S parallèle aux deux fentes est monochromatique. Soit M un point quelconque de l'écran. Déterminer l'éclairement $E(x)$ au point M et le contraste des franges.

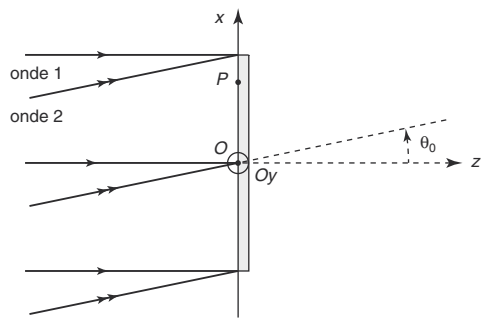
2. Grâce à un dispositif approprié, on diminue l'amplitude des vibrations venant de F_1. L'amplitude des vibrations provenant de F_1 est εA $(\varepsilon \ll 1)$ alors que celle provenant de F_2 vaut A. Quel est le nouvel éclairement $E(x)$? Quel est le nouveau contraste C ?

3. On remplace l'écran Oxy par une plaque photographique sensible. Après développement, cette dernière a un coefficient de transmission en amplitude $T(x) = KE(x)^{-\frac{\alpha}{2}}$ où α est une constante caractéristique de l'émulsion et K une autre constante positive. Montrer que $T(x)$ peut s'écrire $T(x) = T_0(1 - \varepsilon\alpha\cos\phi(x))$. La plaque ainsi obtenue est appelée hologramme, elle est de longueur $\ell \gg \frac{\lambda f}{2a}$ selon l'axe parallèle à Ox. On la substitue aux fentes d'Young dans le montage primitif. Qu'observe-t-on dans le plan de l'écran ? Qu'observe-t-on si on éclaire par une longueur d'onde différente de celle de la source initiale ?

9 *** 60 min

➤ Corrigé p. 171

Filtrage spatial (d'après CCP)



1. On réalise, dans l'air, l'interférence de deux ondes monochromatiques, planes, cohérentes, de

© Nathan, classe prépa

même amplitude a_0 et de même phase nulle au point O de l'écran. La longueur d'onde commune est $\lambda = 632{,}8$ nm. La première onde, de direction Oz, tombe normalement sur l'écran d'observation Oxy et la seconde fait un angle $\theta_0 = 3°$ avec la première.

a. Écrire les amplitudes complexes des deux ondes au point P.

b. En déduire l'éclairement $E(P)$ en un point $P(x, y)$ du plan de l'écran. Préciser la géométrie des franges d'interférences et la valeur de l'interfrange en fonction de λ et de θ_0. Faire l'application numérique en micromètres.

c. Sous quel angle, en minutes d'arc, un observateur voit-il une distance égale à l'interfrange, lorsqu'il est placé à une distance de 25 cm du plan de l'écran ? Commenter.

2. La répartition d'éclairement calculée peut se mettre sous la forme :

$$E(x) = \frac{E(0)}{2}(1 + \cos(2\pi u_0 x)).$$

Il est possible de réaliser, à partir de cet éclairement, une plaque photographique ($\ell = 2$ mm) de fonction de transfert :

$$t(x) = \frac{1 + \cos(2\pi u_0 x)}{2} \text{ pour } -\frac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\ell}{2}.$$

a. On a fabriqué un réseau sinusoïdal par transmission. Donner u_0. Comparer les valeurs numériques de u_0 et $u_1 = \frac{1}{\ell}$.

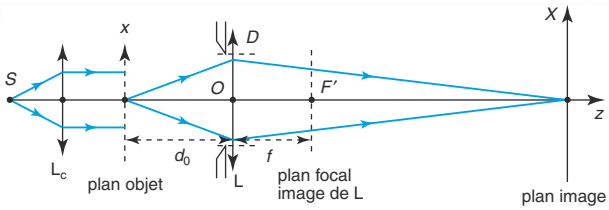
b. On appelle spectre spatial de $t(x)$, noté $\widehat{t}(u)$:

$$\widehat{t}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\mathrm{e}^{-i2\pi ux}\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\widehat{t}(u)$ se met, avec $\widehat{t}_\ell(u) = \frac{\sin \pi u\ell}{\pi u\ell}$, sous la forme suivante et déterminer les trois coefficients.

$$\widehat{t}(u) = \alpha_0\widehat{t}_\ell(u) + \alpha_\ell\widehat{t}_\ell(u - u_0) + \alpha_{-\ell}\widehat{t}_\ell(u + u_0).$$

c. On éclaire le réseau sous incidence normale, avec une onde monochromatique plane et on étudie la diffraction à l'infini dans la direction faisant un angle θ faible avec l'axe Oz. Représenter l'éclairement en fonction de $u = \frac{\theta}{\lambda}$. Comparer la figure de diffraction produite par ce réseau à celle produite par un réseau de fentes infiniment fines (voir chapitre 6).



3. Dans le montage optique de la figure (voir figure ci-dessus), on forme l'image d'un objet transparent, unidimensionnel selon Ox, à l'aide d'une lentille mince convergente L, de distance focale image $f = 20$ cm. Cette lentille est limitée, suivant une direction parallèle à l'axe des x, par une fente rectangulaire, de largeur D, centrée sur l'axe optique Oz. L'éclairage est cohérent : l'onde qui éclaire l'objet a une longueur d'onde déterminée $\lambda = 632{,}8$ nm et son vecteur d'onde une valeur et une direction fixées ; dans ce montage, cette direction est normale au plan de l'objet car l'onde incidente est issue d'une source ponctuelle S placée au foyer principal objet d'une lentille convergente L_c de distance focale image $f_c = 10$ cm.

On suppose que l'approximation de Gauss est satisfaite. L'objet transparent est le réseau sinusoïdal précédent.

a. Trouver la position de l'image géométrique donnée par la lentille L lorsque l'objet est situé en avant de L, à une distance $d_0 = 25$ cm et calculer le grandissement transversal. Quelle est la taille de l'image géométrique de l'objet ? Où se trouve l'image géométrique de la source S par le système des deux lentilles ?

b. L'onde incidente est diffractée à l'infini par le réseau dans la direction faisant un angle θ faible avec l'axe Oz. Montrer que la répartition de l'amplitude complexe de cette onde diffractée, dans le plan focal image de L est donnée par $\widehat{t}(u)$ avec $u = \frac{\theta}{\lambda}$.

c. Lorsque la largeur D est inférieure à une certaine valeur à déterminer, on n'observe pas dans le plan image la structure périodique du réseau sinusoïdal. Donner une interprétation et en déduire que la lentille diaphragmée se comporte comme un filtre passe-bas dont on donnera la fonction de transfert $T(u)$. Calculer en m^{-1} la fréquence spatiale de coupure u_c dans le cas où $D = 10$ cm.

© Nathan, *classe prépa*

d. Décrire l'aspect du plan focal si $u_c > 1{,}5u_0$ (couleur, position des pics d'intensité).

4. Dans le montage précédent, on accole au réseau un objet transparent dont la transmittance est $m(x)$, x étant la variable spatiale le long de l'axe Ox.

a. Montrer qu'on réalise ainsi simplement « un multiplieur optique ». Peut-on prévoir l'amplitude diffractée à l'infini ? On notera :

$$\widehat{m}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m(x) \mathrm{e}^{-i2\pi ux} \mathrm{d}x.$$

b. On constate, dans le plan focal, que les pics d'intensité s'élargissent. Ainsi, le pic central s'étend jusqu'à une distance égale à $b = 2$ mm de l'axe optique. Justifier cet élargissement en s'aidant de l'étude qualitative des réseaux de fentes. Calculer la valeur de la fréquence spatiale u_m correspondante en m^{-1}. Montrer que l'on réalise ainsi un multiplexage spatial de l'information contenue dans l'objet, c'est-à-dire une reproduction multiple de cette information, autour de fréquences spatiales porteuses déterminées. Quelles sont les valeurs de ces dernières en m^{-1} ?

c. On souhaite démoduler le signal optique afin de restituer l'objet initial. Proposer une méthode optique simple de « démodulation spatiale ».

© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 La figure de diffraction ① correspond à la pupille **c** car la figure s'organise en croix et s'étale deux fois plus dans une direction que dans une autre. La figure de diffraction ④ correspond à la pupille **d** car la figure s'organise en croix et s'étale quatre fois plus dans une direction que dans une autre.
Les deux autres figures correspondent à des taches d'Airy. On observe dans les deux cas des franges d'interférence à l'intérieur de la tache d'Ary car il y a deux motifs trous. La tache d'Airy la plus petite (figure ②) correspond aux trous les plus grands, c'est la pupille **b**. La figure ③ correspond à la pupille **a**.

2 Réponse **b**. La tache centrale de diffraction par une fente de largeur h a pour largeur angulaire $2\frac{\lambda}{h}$. L'interfrange angulaire des franges d'interférences est $\frac{\lambda}{a}$ avec a la distance entre les deux fentes. On peut donc observer au maximum 20 franges dans la tache centrale de diffraction.

3 Réponse **a**. L'interfrange angulaire des franges d'interférences est $\frac{\lambda}{a}$. Les franges d'interférences se resserrent ainsi que la tache centrale de diffraction de largeur angulaire $2\frac{\lambda}{h}$. On voit toujours le même nombre de franges.

4 Réponse **b**. La tache d'Airy a un diamètre angulaire de $1{,}22\frac{\lambda}{R}$ et les franges d'interférences ont un interfrange angulaire de $\frac{\lambda}{a}$ avec a la distance entre les deux trous. Si $a = 12R$, on peut alors voir environ 14 franges dans la tache d'Airy.

Savoir appliquer le cours

1 Puisque la transparence de la pupille $\underline{T}(x, y)$ admet pour centre de symétrie $(0, 0)$ alors $\underline{T}(x, y) = \underline{T}(-x, -y)$. Nous allons utiliser la formule donnant l'amplitude diffractée à l'infini dans une direction repérée par (k_x, k_y).

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Effectuons un changement de variable : x en $-x$ et y en $-y$. L'ordre des bornes d'intégration change, le signe de chaque intégrale change mais le produit des deux intégrales reste inchangé. Remplaçons $\underline{T}(-x, -y)$ par $\underline{T}(x, y)$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}\underline{T}(-x, -y)\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}(-\mathrm{d}x)(-\mathrm{d}y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x, y)\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ce qui prouve que :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{\text{diffractée}}(-k_x, -k_y)$$
$$I_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = I_{\text{diffractée}}(-k_x, -k_y)$$

La figure de diffraction admet donc pour centre de symétrie $(k_x = 0, k_y = 0)$ ce qui correspond à l'image géométrique de la source.

2 La transparence de la pupille est indépendante de y : $\underline{T}(x)$. Calculons l'amplitude diffractée.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x)\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x)\mathrm{e}^{-i(k_x x)}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i(k_y y)}\mathrm{d}y$$

© Nathan, *classe prépa*

On retrouve le cas de la fente infiniment fine (voir « Retenir l'essentiel » § 3.1.2).

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x)\mathrm{e}^{-i(k_x x)}\mathrm{d}x \text{ et } \underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \text{ si } k_y \neq 0$$

$$I_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \text{ si } k_y \neq 0 \text{ et } I_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \mathrm{C}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x)\mathrm{e}^{-i(k_x x)}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\underline{T}^*(x)\mathrm{e}^{i(k_x x)}\mathrm{d}x$$

En conclusion, il n'y a de la lumière que pour $k_y = 0$ donc la figure de diffraction s'organise le long de l'axe Ox.

3 Interprétons la figure de diffraction donnée par un morceau de tissu. Les détails les plus petits du tissu sont les plus grands dans la figure de diffraction. On reconnaît la figure de diffraction par un motif carré car elle est de même dimension selon deux directions perpendiculaires. Le motif de base est un carré mais comment sont-ils disposés ? Dans la tache centrale de diffraction, on observe des franges d'interférences rectilignes dans les deux directions. On peut donc dire qu'il y a un motif plus grand qui regroupe des carrés et qui interfère avec un motif identique et ce, dans deux directions perpendiculaires. La structure du tissu est donc un grillage régulier.

4 La pupille de l'œil va diffracter la lumière reçue par chaque phare. Chaque phare va donner une tache d'Airy de rayon angulaire $0{,}61\dfrac{\lambda}{R}$ avec R le rayon de la pupille de l'œil. Les deux images des phares seront séparées si l'angle entre les deux images est supérieur à $0{,}61\dfrac{\lambda}{R}$ (critère de Rayleigh).
La distance D (en mètres) de l'observateur à la voiture intervient car l'angle vaut $\dfrac{1{,}4}{D}$. La limite de séparation est obtenue pour $D = 9\,563$ m. Pour des distances supérieures, l'œil perçoit une seule tache lumineuse. Pour des distances inférieures, l'œil perçoit deux taches lumineuses.

S'entraîner

1 Calculons l'amplitude diffractée à l'infini dans la direction repérée par $\vec{k}$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On retrouve le cas de la fente infiniment fine dans « Retenir l'essentiel » § **3.1.2** et le cas étudié dans l'exercice n° 2 de « Savoir appliquer le cours ».

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \text{ si } k_y \neq 0$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{0} -\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{ik_x\frac{a}{2}}}{ik_x} - \frac{\mathrm{e}^{-ik_x\frac{a}{2}}-1}{ik_x}\right)$$

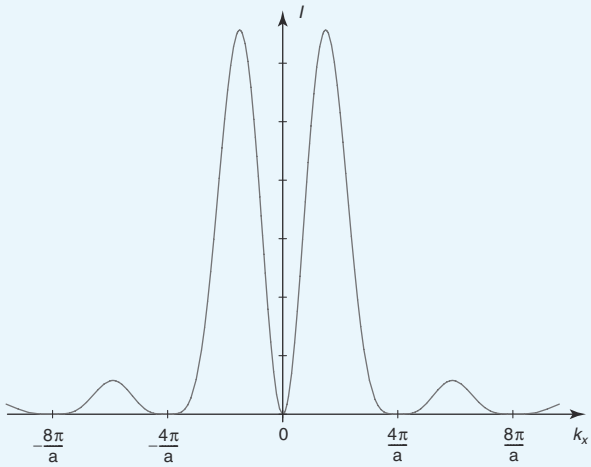
$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(\frac{2-2\cos k_x\frac{a}{2}}{ik_x}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(4\frac{\sin^2 k_x\frac{a}{4}}{ik_x}\right)$$

$$\boxed{I_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \mathrm{C}\left(\frac{\sin^4 k_x\frac{a}{4}}{k_x^2}\right)}$$

© Nathan, *classe prépa*

Traçons l'allure de $I_{\text{diffractée}}(k_x,0)$.



L'image géométrique en $k_x = 0$ est supprimée. Cette pupille dédouble. On pouvait le prévoir car la moitié de la pupille est en opposition de phase par rapport à l'autre moitié.

2 Calculons l'amplitude diffractée à l'infini dans la direction repérée par $\vec{k}$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{T}(x)\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Utilisons les résultats des pupilles infiniment longues selon une direction (voir « Retenir l'essentiel » § **3.1.2**).

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{0}\left(1+\frac{2x}{a}\right)\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{2x}{a}\right)\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0 \text{ si } k_y \neq 0$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(a\,\mathrm{sinc}\,k_x\frac{a}{2} + \int_{-\frac{a}{2}}^{0}\frac{2x}{a}\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{a}{2}}\frac{2x}{a}\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\right)$$

Par intégration par parties :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{0} x\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x\mathrm{e}^{-ik_x x}}{-ik_x}\right]_{-\frac{a}{2}}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-ik_x x}}{k_x^2}\right]_{-\frac{a}{2}}^{0} = \frac{\frac{a}{2}\mathrm{e}^{ik_x\frac{a}{2}}}{-ik_x} + \frac{1-\mathrm{e}^{ik_x\frac{a}{2}}}{k_x^2}$$

$$\int_{0}^{\frac{a}{2}} x\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x\mathrm{e}^{-ik_x x}}{-ik_x}\right]_{0}^{\frac{a}{2}} + \int_{0}^{\frac{a}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-ik_x x}}{ik_x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x\mathrm{e}^{-ik_x x}}{-ik_x}\right]_{0}^{\frac{a}{2}} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-ik_x x}}{k_x^2}\right]_{0}^{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-ik_x\frac{a}{2}}}{-ik_x} + \frac{\mathrm{e}^{-ik_x\frac{a}{2}}-1}{k_x^2}$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, 0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(a\,\mathrm{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - \frac{\mathrm{e}^{ik_x\frac{a}{2}}}{ik_x} + \frac{2-2\mathrm{e}^{ik_x\frac{a}{2}}}{ak_x^2} + \frac{\mathrm{e}^{-ik_x\frac{a}{2}}}{ik_x} + \frac{2-2\mathrm{e}^{-ik_x\frac{a}{2}}}{ak_x^2}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, 0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(a\,\mathrm{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - a\,\mathrm{sinc}\,k_x\frac{a}{2} + \frac{4}{ak_x^2}\left(1-\cos k_x\frac{a}{2}\right)\right)$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, 0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\frac{8}{ak_x^2}\sin^2 k_x\frac{a}{4} = \boxed{\underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\frac{a}{2}\mathrm{sinc}^2 k_x\frac{a}{4}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{\text{pupille absorbante}}(k_x, 0) &= I(0,0)\,\mathrm{sinc}^4 k_x\frac{a}{4} \\ I_{\text{fente}}(k_x,0) &= I(0,0)\,\mathrm{sinc}^2 k_x\frac{a}{2} \end{aligned}}$$

© Nathan, *classe prépa*

On obtient une tache centrale de diffraction deux fois plus grande qu'avec une pupille fente de même largeur et les taches secondaires sont beaucoup plus atténuées d'où l'intérêt de cette pupille qui permet l'apodisation mais qui, en revanche, élargit la tache centrale.

3 **1.** Le montage est celui de Fraunhofer. On fabrique une source à l'infini en plaçant une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille convergente. On observe à l'infini ici à grande distance D.

2. L'énoncé nous précise que la pupille comporte deux motifs identiques. Ce motif est un rectangle de côtés a et b car la figure de diffraction est une croix dont la tache centrale est rectangulaire de dimensions $2D\frac{\lambda}{a}$ et $2D\frac{\lambda}{b}$. Les dimensions sur l'écran donnent 8 cm et 6 cm donc $a = 15{,}8\ \mu\text{m}$ et $b = 21{,}1\ \mu\text{m}$.
Dans la figure de diffraction, on observe des franges d'interférences dont l'interfrange sur l'écran vaut 1,4 cm. Pour deux motifs distants de d, l'interfrange est $D\frac{\lambda}{d}$ d'où $d = 90{,}4\ \mu\text{m}$.
Les franges sont rectilignes selon la première bissectrice donc les deux motifs, centrés sur O_1 et O_2, sont disposés selon la deuxième bissectrice. En effet, les franges rectilignes sont perpendiculaires à la direction O_1O_2.

Remarque : on aurait pu deviner l'existence de deux motifs seulement car les franges brillantes sont toutes de même intensité et on n'observe pas de sous-structure comme dans les interférences à N ondes ($N > 2$).

3. Calculons l'amplitude diffractée à l'infini par ces deux motifs distants de d et de forme rectangulaire. Commençons par écrire l'amplitude diffractée par un motif centré sur un point choisi comme origine.

$$\underline{a}_{\text{Motif1}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)b\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)$$

L'autre motif est centré sur un point de coordonnées (x_{12}, y_{12}), ici $\left(-\frac{d}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{\sqrt{2}}\right)$ selon la deuxième bissectrice.

$$\underline{a}_{\text{Motif2}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{x_{12}-\frac{a}{2}}^{x_{12}+\frac{a}{2}}\int_{y_{12}-\frac{b}{2}}^{y_{12}+\frac{b}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On fait le changement de variables : $X = x - x_{12}$ et $Y = y - y_{12}$.

$$\underline{a}_{\text{Motif2}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)b\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)$$

L'amplitude diffractée par les deux motifs vaut la somme de ces deux amplitudes car la transparence de la pupille est la somme des transparences des deux motifs.

$$\underline{a}_{\text{deux motifs}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)b\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})})$$

$$I_{\text{deux motifs}}(k_x, k_y) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(b\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{b}{2}\right)\right)^2\left(1 + \cos\left(k_x\frac{d}{\sqrt{2}} + k_y\frac{d}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

On observe, dans la tache centrale de diffraction par un rectangle, des franges d'interférences à deux ondes.

4 Il s'agit d'une pupille (plan Oxy) contenant 3 fentes identiques translatées les unes par rapport aux autres, appelons Oy leur axe. Elles sont positionnées respectivement en $(-d, 0)$, $(0, 0)$ et $(d, 0)$ pour conserver la symétrie du problème.
La transparence complexe de cette pupille est : $\underline{T}(x) = \underline{T}_1(x) + \underline{T}_2(x) + \underline{T}_3(x)$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\underline{T}_1(x) + \underline{T}_2(x) + \underline{T}_3(x))\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{trois fentes}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{\text{fente 1}}(k_x, k_y) + \underline{a}_{\text{fente 2}}(k_x, k_y) + \underline{a}_{\text{fente 3}}(k_x, k_y)$$

$$\underline{a}_{\text{fente 2}}(k_x, 0) = \underline{K}'\,\mathrm{e}^{i\omega t}h\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{h}{2}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{fente 2}}(k_x, k_y) = 0 \text{ si } k_y \neq 0$$

© Nathan, *classe prépa*

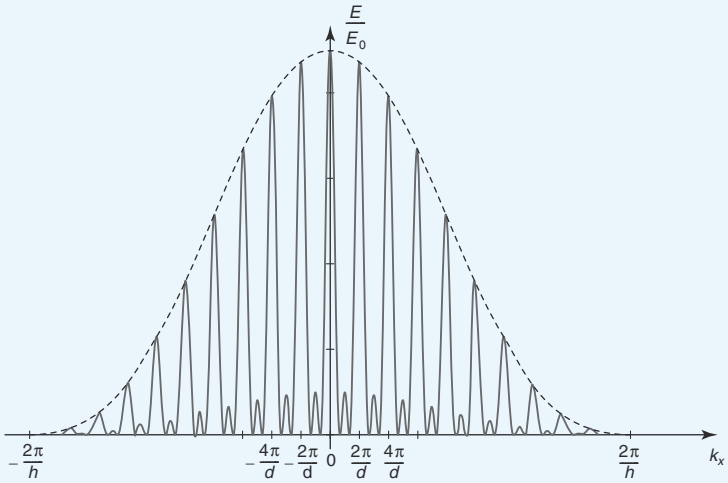
$$\underline{a}_{\text{trois fentes}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}h\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{h}{2}\right)(1+\mathrm{e}^{ik_xd}+\mathrm{e}^{-ik_xd})$$

$$\underline{a}_{\text{trois fentes}}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{-i\omega t}h\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{h}{2}\right)(1+2\cos k_xd)$$

$$\boxed{E_{\text{trois fentes}}(k_x,0) = \mathrm{C}\left(h\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{h}{2}\right)\right)^2(1+2\cos k_xd)^2}$$

Attention **:** le terme d'interférences à trois ondes n'est pas celui de la formule de Fresnel pour les interférences à deux ondes. $(1+2\cos k_xd)^2 \neq (1+\cos k_xd)$.

Traçons l'intensité en fonction de $k_x = 2\pi\dfrac{x_\mathrm{M}-x'_\mathrm{S}}{\lambda f'_2}$ puis en fonction de x_M sur l'écran. On voit apparaître un maximum secondaire et deux minima nuls entre deux maxima principaux, dans la tache centrale de diffraction par une fente.



5 Il s'agit d'une pupille (plan Oxy) contenant 5 trous circulaires identiques translatés les uns par rapport aux autres selon l'axe Oy par exemple. Ils sont positionnés respectivement en $(0,0)$, $(0,d)$, $(0,2d)$, $(0,3d)$, $(0,4d)$ et $(0,5d)$ car $d = 10h$.

La transparence complexe de cette pupille est : $\underline{T}(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{5}\underline{T}_n(r,\theta)$.

$$\underline{T}_n(r,\theta) = \underline{T}_1(r,\theta)\mathrm{e}^{-i(n-1)k_yd}$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,k_y) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\underline{T}(r,\theta)\mathrm{e}^{-i(k_xr\cos\theta+k_yr\sin\theta)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\underline{a}_{\text{cinq trous}}(k_x,k_y) = \sum_{n=1}^{5}\underline{a}_{\text{trou}n}(k_x,k_y) = \sum_{n=1}^{5}\underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\underline{T}_n(r,\theta)\mathrm{e}^{-i(k_xr\cos\theta+k_yr\sin\theta)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

La figure de diffraction par un trou a la symétrie de révolution par rapport à l'axe optique.

$$\underline{a}_{\text{cinq trous}}(k_x,k_y) = \underline{a}_{\text{trou}1}(k_x,k_y)\sum_{n=1}^{5}\mathrm{e}^{-i(n-1)k_yd} = \underline{a}_{\text{trou}1}(k_x,k_y)\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-i5k_yd}}{1-\mathrm{e}^{-ik_yd}}\right).$$

Conseil **:** il vaut mieux faire apparaître une progression géométrique pour les amplitudes.

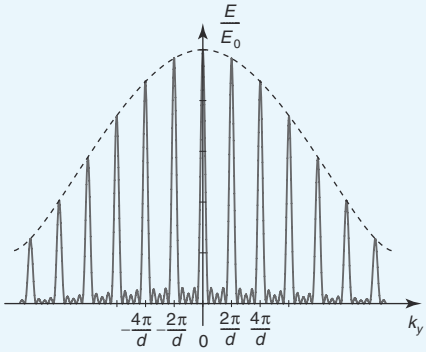
$$\underline{a}_{\text{cinq trous}}(k_x,k_y) = \underline{a}_{\text{trou}1}(k_x,k_y)\left(\frac{\mathrm{e}^{i5k_yd/2}-\mathrm{e}^{-i5k_yd/2}}{\mathrm{e}^{ik_yd/2}-\mathrm{e}^{-ik_yd/2}}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{-i5k_yd/2}}{\mathrm{e}^{-ik_yd/2}}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{cinq trous}}(k_x,k_y) = \underline{a}_{\text{trou}1}(k_x,k_y)\left(\frac{\sin 5k_yd/2}{\sin k_yd/2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{-i5k_yd/2}}{\mathrm{e}^{-ik_yd/2}}\right)$$

© Nathan, *classe prépa*

$$\boxed{E_{\text{cinq trous}}(k_x, k_y) = E_{\text{trou}\,1}(k_x, k_y)\left(\frac{\sin 5k_y d/2}{\sin k_y d/2}\right)^2}$$

Traçons la courbe $\left(\frac{\sin 5x}{\sin x}\right)^2$ puis traçons l'éclairement en fonction de k_y. On voit apparaître 3 maxima secondaires et 4 minima nuls entre deux maxima principaux, dans la tache centrale de diffraction par un trou.



Sur l'écran, on observerait dans la tache d'Airy d'un trou des franges d'interférences très brillantes (maxima principaux) séparées par des franges moins brillantes (maxima secondaires).

6 **1.** Il s'agit d'une pupille (plan Oxy) contenant deux carrés respectivement en O_1 et O_2. Si on choisit O_1 pour origine, notons (x_{12}, y_{12}) les coordonnées de O_2.
La transparence complexe de cette pupille est : $\underline{T}(x) = \underline{T}_1(x) + \underline{T}_2(x)$.

$$\underline{a}_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\underline{T}_1(x) + \underline{T}_2(x))\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{\text{trou}\,1}(k_x, k_y) + \underline{a}_{\text{trou}\,2}(k_x, k_y)$$

$$\underline{a}_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})}).$$

• Si les carrés sont disposés selon Ox. Ils sont positionnés respectivement en $(0, 0)$ et $(d, 0)$.

$$\underline{a}_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-ik_x d})$$

$$\boxed{I_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\right)^2(1 + \cos k_x d)}$$

On prévoit des franges d'interférences rectilignes parallèles à Oy (d'interfrange angulaire $\frac{\lambda}{d}$) dans la figure de diffraction d'un carré. Comme $d = 2{,}5a$, on aperçoit au maximum 5 franges brillantes dans la tache centrale de diffraction car $\frac{2\lambda}{a} = 5\frac{\lambda}{d}$.

• Si les carrés sont disposés selon Oy. Ils sont positionnés respectivement en $(0, 0)$ et $(0, d)$.

$$\underline{a}_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-ik_y d})$$

$$\boxed{I_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\right)^2(1 + \cos k_y d)}$$

On prévoit des franges d'interférences rectilignes parallèles à Ox dans la figure de diffraction d'un carré. Comme $d = 2{,}5a$, on aperçoit au maximum 5 franges brillantes dans la tache centrale de diffraction car $\frac{2\lambda}{a} = 5\frac{\lambda}{d}$.

© Nathan, *classe prépa*

• Si les carrés sont disposés selon la première bissectrice. Ils sont positionnés respectivement en $(0, 0)$ et $(d\sqrt{2}, d\sqrt{2})$.

$$\underline{a}_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t} a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right) a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-i(k_x d\sqrt{2} + k_y d\sqrt{2}}$$

$$\boxed{I_{\text{deux carrés}}(k_x, k_y) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\right)^2(1 + \cos(k_x d\sqrt{2} + k_y d\sqrt{2}))}$$

On prévoit des franges d'interférences rectilignes selon la deuxième bissectrice dans la figure de diffraction d'un carré. Comme $d = 2{,}5a$, on aperçoit au maximum 7 franges brillantes dans la tache centrale de diffraction car $\frac{2\lambda}{a} = 5\sqrt{2}\frac{\lambda}{d\sqrt{2}}$.

2. Quatre carrés sont disposés aux sommets d'un plus grand carré de côté d donc ils sont positionnés respectivement en $\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$, $\left(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$, $\left(\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}\right)$ et $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}\right)$.

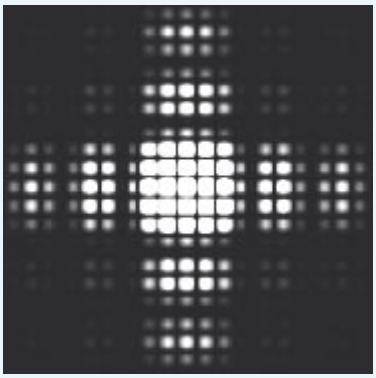
Conseil **:** ne pas effectuer directement le calcul. Utiliser la question précédente.

Étant donné les calculs précédents, on peut considérer que la pupille contient deux motifs selon Ox distants de d : chaque motif est formé de deux carrés selon Oy distants de d. On pourrait aussi considérer que la pupille contient deux motifs selon Oy : chaque motif est formé de deux carrés selon Ox distants de d.

$$\underline{a}_{\text{motif 1}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t} a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right) a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-ik_y d})$$

$$\underline{a}_{\text{deux motifs}}(k_x, k_y) = \left(\underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t} a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right) a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-ik_y d})\right)(1 + \mathrm{e}^{-ik_x d})$$

$$\boxed{I_{\text{deux motifs}}(k_x, k_y) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\right)^2(1 + \cos k_x d)(1 + \cos k_y d)}$$



On prévoit des franges rectilignes parallèles à Ox et à Oy dans la tache centrale de diffraction soit tout un quadrillage de 5 sur 5.

3. Si les quatre carrés sont alignés selon Ox par exemple, on obtient :

$$\underline{a}_{\text{quatre carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t} a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right) a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)(1 + \mathrm{e}^{-ik_x d} + \mathrm{e}^{-i2k_x d} + \mathrm{e}^{-i3k_x d})$$

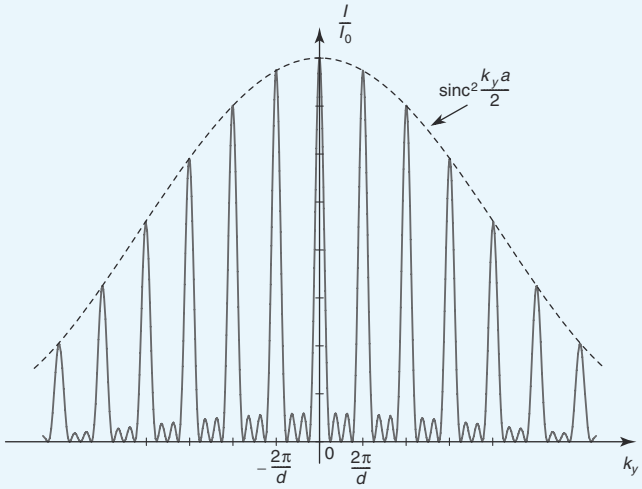
$$\sum_{n=1}^{3} \mathrm{e}^{-i(n-1)k_y d} = \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-i4k_y d}}{1 - \mathrm{e}^{-ik_y d}}\right) = \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-i4k_y d}}{1 - \mathrm{e}^{-ik_y d}}\right) = \left(\frac{\mathrm{e}^{i2k_y d} - \mathrm{e}^{-i2k_y d}}{\mathrm{e}^{ik_y d/2} - \mathrm{e}^{-ik_y d/2}}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{-i2k_y d}}{\mathrm{e}^{-ik_y d/2}}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{quatre carrés}}(k_x, k_y) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t} a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right) a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sin 2k_y d}{\sin k_y d/2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{-i2k_y d}}{\mathrm{e}^{-ik_y d/2}}\right)$$

$$\boxed{I_{\text{quatre carrés}}(k_x, k_y) = \mathrm{C}\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(a\,\mathrm{sinc}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\right)^2\left(\frac{\sin 2k_y d}{\sin k_y d/2}\right)^2}$$

© Nathan, *classe prépa*

On obtient une figure d'interférences à 4 ondes : on voit apparaître deux maxima secondaires et trois minima nuls entre deux maxima principaux, dans la tache centrale de diffraction d'un carré.



7 **1.** Définissons la transparence complexe de cette pupille. Dans la zone où il y a la lame de verre, la pupille déphase de $(n-1)e$.

$$T(x,y) = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda}} \text{ si } x \in \left[-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right] \text{ et } \in \left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

$$T(x,y) = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)(e-h)}{\lambda}} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}} \text{ si } x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

$T(x,y) = 0$ ailleurs.

C'est une pupille très longue selon Oy $\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x, k_y) = 0$ pour $k_y \neq 0$.

Notons $\underline{K}' = \underline{K}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda}}$.

$$\underline{a}(k_x,0) = \underline{K}'\mathrm{e}^{i\omega t}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}\mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{+\frac{b}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{+\frac{b}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{-ik_x x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}(k_x,0) = \underline{K}\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda}}\left(a\,\text{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2} + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}\,b\,\text{sinc}\frac{k_x b}{2}\right)$$

Conseil : il faut vérifier la pertinence des résultats intermédiaires quand on le peut. Le résultat est ici pertinent, car quand $h = 0$, on retrouve une amplitude en $a\,\text{sinc}\,k_x\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda}}$.

$$\mathrm{E}(k_x, 0) = \mathrm{C}\left(a\,\text{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2} + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}\,b\,\text{sinc}\frac{k_x b}{2}\right)$$
$$\left(a\,\text{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}\,b\,\text{sinc}\frac{k_x b}{2}\right)$$

$$\boxed{E(k_x,0) = \mathrm{C}\left(a\,\text{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2}\right)^2 + \mathrm{C}\left(b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2}\right)^2 + 2\mathrm{C}\left(a\,\text{sinc}\,k_x\frac{a}{2} - b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2}\right)b\,\text{sinc}\,k_x\frac{b}{2}\cos\left(\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}\right)}$$

© Nathan, *classe prépa*

2. Quand $h \leqslant \lambda$, on peut faire un développement limité de $e^{i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}$ et son conjugué.

$$\left(a\operatorname{sinc}k_x\frac{a}{2} - b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2} + b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2}e^{i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}\right) = a\operatorname{sinc}k_x\frac{a}{2} + i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2}$$

$$\left(a\operatorname{sinc}k_x\frac{a}{2} - b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2} + b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2}e^{-i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}}\right) = a\operatorname{sinc}k_x\frac{a}{2} - i\frac{2\pi(n-1)h}{\lambda}b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2}$$

$$E(k_x,0) = \mathrm{C}\left(a\operatorname{sinc}k_x\frac{a}{2}\right)^2 + \mathrm{C}h^2\left(\frac{2\pi(n-1)}{\lambda}b\operatorname{sinc}k_x\frac{b}{2}\right)^2$$

Pour une pupille fente de largeur a sans défaut, l'éclairement vaut :

$$\boxed{E(k_x,0) = \mathrm{C}\left(a\operatorname{sinc}k_x\frac{a}{2}\right)^2}$$

L'éclairement sur l'écran est différent quand la lame possède un défaut.

Remarque : cette différence est difficile à visualiser. Il faudrait faire un montage type strioscopie (voir n° 9 de « S'entraîner », question **4.c**).

8 **1.** L'éclairement au point M a été calculé dans « Retenir l'essentiel » § 5.1.1. L'onde incidente est dans la direction de l'axe optique d'où $k_x = \dfrac{2\pi x}{\lambda f}$.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(k_x,0) = \underline{a}_{\text{Fente 1}}(k_x,0)(1 + e^{-ik_x a})$$

$$\boxed{E(x) = E(0)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi h x}{\lambda f}\right)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda f}\right)\right)}$$

Le contraste vaut 1.

2. Avec le signal atténué venant de F_1, l'amplitude diffractée et l'éclairement deviennent :

$$\underline{a}(k_x) = \varepsilon\,\underline{a}_{\text{Fente 1}}(k_x) + \underline{a}_{\text{Fente 1}}(k_x)e^{-ik_x a}.$$

$$E(x) = E(0)\operatorname{sinc}^2\left(k_x\frac{h}{2}\right)(1 + 2\varepsilon\cos k_x a + \varepsilon^2) \approx \boxed{E(0)\operatorname{sinc}^2\left(k_x\frac{h}{2}\right)(1 + 2\varepsilon\cos k_x a)}$$

Le contraste vaut $\boxed{\mathrm{C} = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2\varepsilon \leqslant 1}$ Il est mauvais.

3. Calculons la transparence de la pupille ainsi réalisée. Si l'on se place au voisinage du centre de la ta che centrale de diffraction, $\operatorname{sinc}^2\left(k_x\dfrac{h}{2}\right) \approx 1$.

$$T(x) = KE(x)^{-\alpha/2} = T_0(1 + 2\varepsilon\cos(k_x a))^{-\alpha/2} \approx T_0(1 - \varepsilon\alpha\cos(k_x a))$$

On substitue cette plaque aux fentes d'Young. Calculons l'amplitude diffractée à l'infini dans la direction repérée par $k'_x = \dfrac{2\pi x'}{\lambda f}$.

$$\underline{a}(k'_x,0) = \underline{K}e^{i\omega t}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} T_0\left(1 - \varepsilon\alpha\cos\frac{2\pi a x}{\lambda f}\right)e^{-ik'_x x}\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} T_0\left(1 - \varepsilon\alpha\cos\frac{2\pi a x}{\lambda f}\right)e^{-ik'_x x}\mathrm{d}x = T_0\ell\operatorname{sinc}\left(k'_x\frac{\ell}{2}\right) - T_0\varepsilon\frac{\alpha}{2}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\left(e^{i\frac{2\pi a x}{\lambda f}} + e^{-i\frac{2\pi a x}{\lambda f}}\right)e^{-ik'_x x}\mathrm{d}x$$

$$\underline{a}(k'_x,0) = \underline{K}e^{i\omega t}T_0\ell\operatorname{sinc}\left(k'_x\frac{\ell}{2}\right) - \underline{K}e^{i\omega t}T_0\varepsilon\frac{\alpha}{2}\left(\ell\operatorname{sinc}\frac{\ell}{2}\left(k'_x + \frac{2\pi a}{\lambda f}\right) + \ell\operatorname{sinc}\frac{\ell}{2}\left(k'_x - \frac{2\pi a}{\lambda f}\right)\right)$$

© Nathan, *classe prépa*

Dans le plan de l'écran, comme $\ell \gg \frac{\lambda f}{2a}$ on observe trois pics séparés centrés respectivement sur $k'_x = 0$, $k'_x = \frac{2\pi a}{\lambda f}$ et $k'_x = -\frac{2\pi a}{\lambda f}$. Ils sont tous les trois de largeur $\Delta k_x = \frac{4\pi}{\ell} \ll \frac{2\pi a}{\lambda f}$.

$$\boxed{E(x') = \mathrm{C}\left(\ell \operatorname{sinc}\left(k'_x \frac{\ell}{2}\right)\right)^2 + \mathrm{C}\varepsilon^2 \frac{\alpha^2}{4}\left[\ell \operatorname{sinc}\frac{\ell}{2}\left(k'_x + \frac{2\pi a}{\lambda f}\right) + \ell \operatorname{sinc}\frac{\ell}{2}\left(k'_x - \frac{2\pi a}{\lambda f}\right)\right]^2}$$

On peut ainsi récupérer l'information sur l'amplitude de l'onde qui a cheminé par F_1 en $k'_x = \pm\frac{2\pi a}{\lambda f}$ donc en $x' = \pm a$.

Si on éclaire par une longueur d'onde différente $k'_x = \frac{2\pi x'}{\lambda' f}$, les pics sont toujours situés en $k'_x = 0$, $k'_x = \pm\frac{2\pi a}{\lambda f}$ donc en $x' = 0$ et $x' = \pm\frac{\lambda' a}{\lambda}$ ces deux dernières positions dépendent de la longueur d'onde λ'. La plaque peut donc servir à disperser la lumière donc à étudier une lumière polychromatique.

9 **1. a.** Au point $P(x, y)$, calculons le déphasage de l'onde 2 ($\vec{u}_2 = \sin\theta_0 \vec{u}_x + \cos\theta_0 \vec{u}_z$) par rapport à l'onde 1 ($\vec{u}_1 = \vec{u}_z$). Le point O a été choisi comme référence de phase : $\Phi_{2/1}(O) = 0$.

On remarque que le plan Oxy est un plan d'onde pour l'onde plane 1.

$$\underline{a}_1(O) = \underline{a}_2(O) = a_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$\underline{a}_1(P) = \underline{a}_1(O) \text{ et } \underline{a}_2(P) = a_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \mathrm{e}^{-i\vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OP}}$$

$$\Phi_{2/1}(P) = \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2\pi x \sin\theta_0}{\lambda}$$

b. L'éclairement est proportionnel au produit $\underline{a}(P)\underline{a}^*(P)$ avec $\underline{a}(P) = \underline{a}_1(P) + \underline{a}_2(P)$.

$$E(P) = \frac{E(O)}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x \sin\theta_0}{\lambda}\right)$$

Les franges d'interférences ont même éclairement sur l'écran donc même phase modulo 2π donc même x modulo $\frac{\lambda}{\sin\theta_0}$. Elles sont **rectilignes**, **parallèles à** Oy, **équidistantes**, d'interfrange $i = \frac{\lambda}{\sin\theta_0}$.

A.N. : i = **12,1 µm.**

c. Un observateur situé à $d = 25$ cm (distance minimale commerciale de vision distincte) du plan Oxy voit l'interfrange sous l'angle $\frac{i}{d}$.

A.N. : $5 \cdot 10^{-5}$ rad = **0,17 minute d'arc.**

L'observateur ne voit pas de franges d'interférences car le pouvoir séparateur angulaire de l'œil est une minute d'arc.

2. a. $\boxed{u_0 = \frac{\sin\theta_0}{\lambda}}$

A.N. : u_0 = **$8{,}27 \cdot 10^4$ m^{-1}** et u_1 = **500 m^{-1}**. On constate que $u_0 \gg u_1$.

b. On calcule le spectre spatial de la fonction de transfert $t(x)$ en transformant le cosinus en somme d'exponentielles.

$$\hat{t}(u) = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1 + \cos 2\pi u_0 x}{2} \mathrm{e}^{-i2\pi u x} \mathrm{d}x$$

$$\hat{t}(u) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \left(\mathrm{e}^{-i2\pi u x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i2\pi(u-u_0)x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i2\pi(u+u_0)x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\hat{t}(u) = \frac{\ell}{2}\frac{\sin\pi u \ell}{\pi u \ell} + \frac{\ell}{4}\frac{\sin\pi(u-u_0)\ell}{\pi(u-u_0)\ell} + \frac{\ell}{4}\frac{\sin\pi(u+u_0)\ell}{\pi(u+u_0)\ell}$$

© Nathan, *classe prépa*

Finalement, on obtient la forme suivante avec $\alpha_0 = \frac{\ell}{2}$, $\alpha_\ell = \alpha_{-\ell} = \frac{\ell}{4}$.

$$t(u) = \alpha_0 \hat{t}_\ell(u) + \alpha_\ell \hat{t}_\ell(u - u_0) + \alpha_{-\ell} \hat{t}_\ell(u + u_0)$$

c. On utilise ce réseau comme pupille diffractante. L'amplitude diffractée vaut, en posant $u = \frac{\sin\theta}{\lambda} \approx \frac{\theta}{\lambda}$:

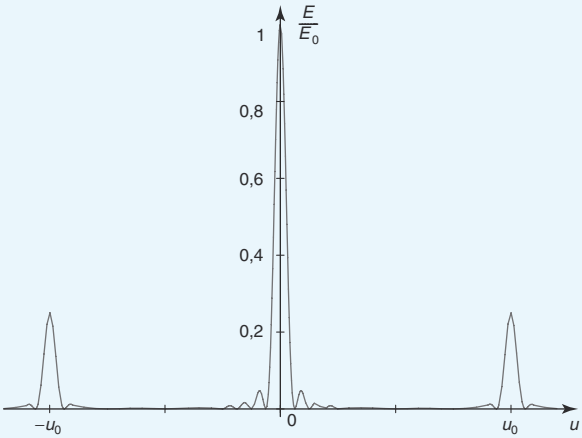
$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(u) = a_0' e^{i\omega t} \hat{t}(u)$$

$$E_{\text{diffractée}}(u) = C\hat{t}(u)\hat{t}^*(u) = C\hat{t}^2(u).$$

L'éclairement étant proportionnel au carré de la somme de trois sinus cardinaux, précisons chaque sinus cardinal. Ils sont centrés respectivement sur $u = 0$, $u = u_0$ $u = -u_0$ et de même demi-largeur en $u : \frac{1}{\ell} = u_1$.

Comme $u_0 \gg u_1$, on peut considérer que les doubles produits sont négligeables et que les sinus cardinaux sont suffisamment séparés pour que l'éclairement soit la somme de trois sinus cardinaux carrés.

$$E_{\text{diffractée}}(u) = C(\alpha_0 \hat{t}_\ell(u))^2 + C(\alpha_\ell \hat{t}_\ell(u - u_0))^2 + C\alpha_{-\ell} \hat{t}_\ell(u + u_0))^2$$



On obtient **trois images de diffraction** centrées respectivement sur $u = 0$, $u = u_0$ et $u = -u_0$; l'éclairement est 4 fois plus grand pour l'image centrale.

Pour un réseau de N fentes infiniment fines, équidistantes (a), éclairé sous incidence normale, on obtient $2E\left(\frac{a}{\lambda}\right) + 1$ images par diffraction données par $2\pi u a = p 2\pi$ avec p entier $\left(-\frac{a}{\lambda} \leqslant p \leqslant \frac{a}{\lambda}\right)$ donc situées en $u = \frac{p}{a}$. Ces images ont même éclairement si elles sont situées dans la tache centrale de diffraction par une fente (largeur h des fentes $h \ll a$) et leur demi-largeur vaut $\frac{1}{Na} \ll \frac{1}{a}$.

3. a. Utilisons la relation objet-image dans l'approximation de Gauss : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f}$ avec $\overline{OA} = -d_0$. La taille de l'image géométrique de l'objet est $|\gamma|\ell = \left|\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right|\ell$.

A.N. : $\overline{OA'} = 100$ cm, $\gamma = -4$ et $4\ell =$ **8 mm**.

L'image géométrique de S est le foyer principal image F' de la lentille L.

b. L'onde incidente diffractée à l'infini converge dans le plan focal image de la lentille L. On a déjà calculé son amplitude dans la question **2 c**. Elle vaut $\boxed{\underline{a}_{\text{diffractée}}(u) = a_0 e^{i\omega t} \hat{t}(u)}$

c. Pour observer la structure périodique du réseau sinusoïdal, il faut pouvoir observer les trois pics. Cela nécessite que $\frac{D}{2} - \frac{\ell}{2} \approx \frac{D}{2} > d_0 \tan\theta_\ell = d_0 \lambda u_0$. On en déduit $\boxed{D_{\min} \approx 2 d_0 \lambda u_0}$

A.N. : $D_{\min} =$ **2,8 cm**.

© Nathan, *classe prépa*

La fente rectangulaire (ou la lentille diaphragmée) peut supprimer les images de diffraction en $\pm u_0$ et donc jouer le rôle de filtre passe-bas en ne laissant passer que les fréquences spatiales basses. On peut définir une fréquence de coupure u_c telle que $\boxed{u_c = \dfrac{D_{min}}{2d_0\lambda}}$

On peut écrire la fonction de transfert de ce filtre sous la forme : $\boxed{T(u) = \dfrac{1}{1 + i\dfrac{u}{u_c}}}$

A.N. : $u_c = \mathbf{31{,}6 \cdot 10^4\ m^{-1}}$.

d. Si $u_c > 1{,}5u_0$, on ne supprime aucune image de diffraction. On observe trois pics rouges en 0, $\pm f\lambda u_0$ de demi-largeur $f\lambda u_1 \ll f\lambda u_0$.

Conseil : pour passer d'un angle (d'une direction à l'infini) à une distance, dans le plan focal image d'une lentille, il suffit de multiplier par la distance focale *f*.

A.N. : $f\lambda u_0 = 1{,}05$ cm et $f\lambda u_1 = 63$ µm.

4. a. Quand on accole deux pupilles planes, la transparence résultante est le produit des transparences $t(x)m(x)$ d'où le nom de « multiplieur optique ».
On remarque qu'on peut mettre l'amplitude diffractée sous cette forme.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(u) = a_0 e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} t(x)m(x)e^{-i2\pi ux}dx = a_0 e^{i\omega t}\left(\widehat{m}(u) + \frac{1}{2}\widehat{m}(u-u_0) + \frac{1}{2}\widehat{m}(u+u_0)\right)$$

b. Si les pics s'élargissent, cela prouve l'existence d'une nouvelle fréquence spatiale $u_m \gg u_1$ telle que $f\lambda u_m = 2$ mm. Autour de chacune des fréquences porteuses 0 et $\pm u_0$, l'information contenue dans $\widehat{m}(u)$ (donc dans l'objet) est reproduite. On a réalisé un multiplexage spatial (reproduction triple de l'information).
A.N. : $u_m = \mathbf{1{,}58 \cdot 10^4\ m^{-1}}$, $u_0 = \mathbf{8{,}27 \cdot 10^4\ m^{-1}}$.

c. On peut utiliser un filtre passe-bande tel qu'il ne laisse passer qu'une bande de fréquences spatiales autour de u_m mais supprime les fréquences porteuses. On peut fabriquer un cache percé d'une fente rectangulaire adaptée qu'on place dans le plan focal image dans le montage de la question **3**.

Remarque : la **strioscopie** utilise ce montage, on réalise un filtre passe-haut (en mettant un cache au centre de la lentille) pour ne conserver que les fréquences élevées de l'objet et visualiser ainsi des zones de l'objet aux grandes variations spatiales : plume d'oiseau ou suivi de la dissolution d'un morceau de sucre dans l'eau.

© Nathan, *classe prépa*

© Nathan, *classe prépa*

PC
PSI
PT

6 Interférences à *N* ondes cohérentes – Réseaux (TP Cours)

Nous allons d'abord dégager l'intérêt des interférences à N ondes $(N > 2)$ en utilisant l'étude de l'intensité quand N augmente.

1 Intérêt des interférences à *N* ondes cohérentes

Dans « Retenir l'essentiel » du chapitre 5 ainsi que dans les exercices n° 4, 5, 6 de « S'entraîner », nous avons mis en évidence que l'intensité diffractée par N motifs se mettait sous la forme :

$$\underline{a}_{N\,\text{motifs}}(k_x, k_y) = \sum_{n=1}^{N} \underline{a}_{n\,\text{motif}}(k_x, k_y).$$

On va se restreindre à des motifs fentes très fines selon Oy et distantes de a et calculer l'amplitude diffractée pour $k_y = 0$:

$$\underline{a}_{N\,\text{fentes}}(k_x, 0) = \underline{a}_{1\,\text{fente}}(k_x, 0) \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-i(n-1)k_x a}.$$

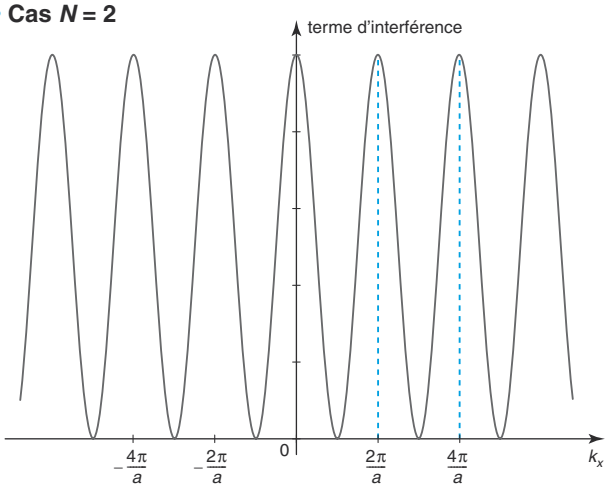
$$I_{N\,\text{fentes}}(k_x, 0) = I_{1\,\text{fente}}(k_x, 0) \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-i(n-1)k_x a}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{+i(n-1)k_x a}\right)}_{\text{termes d'interférences à } N \text{ ondes}}$$

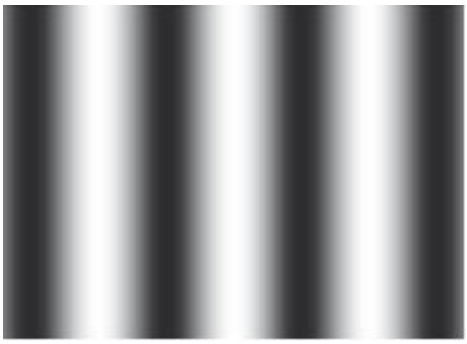
Avec un logiciel de calcul formel, on peut suivre l'évolution du terme d'interférence en faisant varier N, toutes choses égales par ailleurs : l'écart entre deux fentes reste constant, l'onde est monochromatique. On a représenté le terme d'interférences en fonction de k_x c'est-à-dire en fonction de la position de M sur l'écran ainsi que la figure de diffraction visualisée sur l'écran. On a choisi $N = 2$, $N = 4$, $N = 10$ et $N = 50$ (figure 1).

© Nathan, *classe prépa*

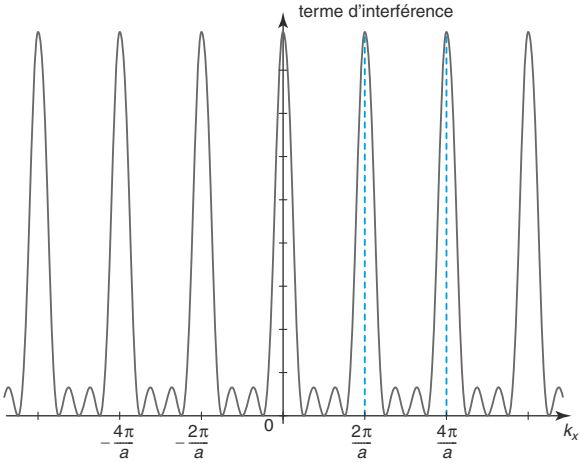
Fig. 1 *Terme d'interférences et figure de diffraction*

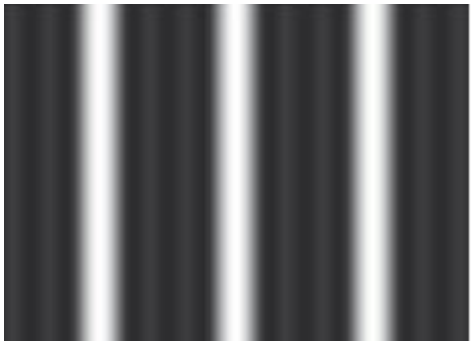
• **Cas $N = 2$**



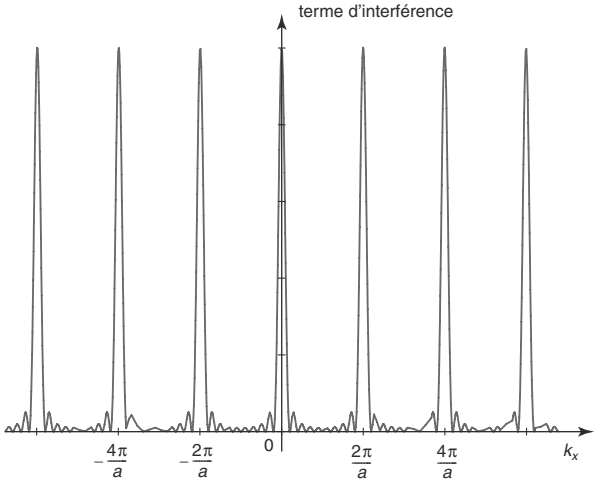


• **Cas $N = 4$**



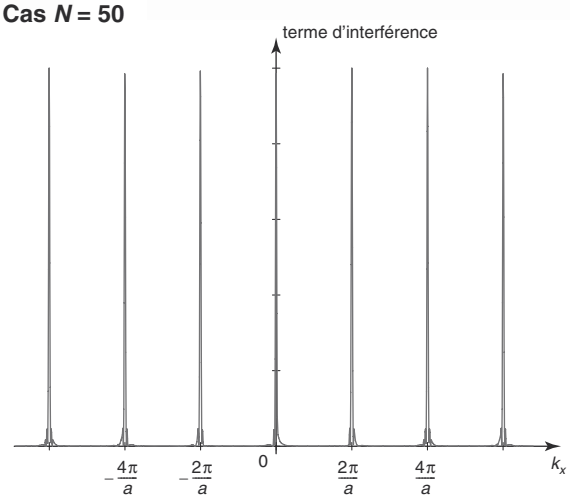


• **Cas $N = 10$**



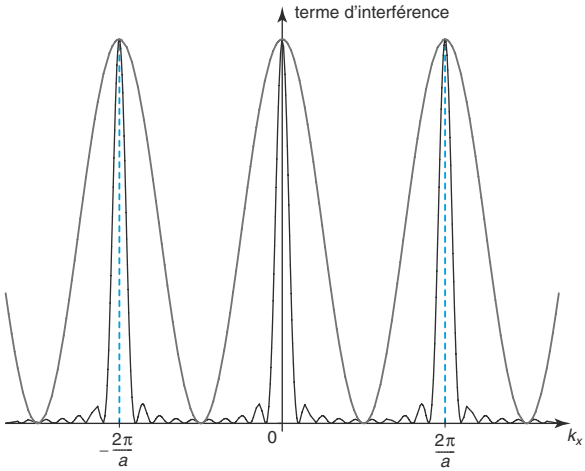
© Nathan, *classe prépa*

• **Cas $N = 50$**



On constate d'une part que les franges très brillantes sont toujours situées au même endroit (figures 1 et 2), et que les **franges brillantes** des interférences à deux ondes deviennent **de plus en plus fines** et, d'autre part, que des franges beaucoup moins brillantes apparaissent entre les franges très brillantes. Quand N augmente, ces dernières disparaissent et ils ne restent plus que des pics fins correspondant aux interférences à deux ondes entre deux motifs consécutifs. L'**effet des interférences à N ondes cohérentes est essentiellement directif** : l'intensité n'est maximale que dans certaines directions et quasi nulle ailleurs.

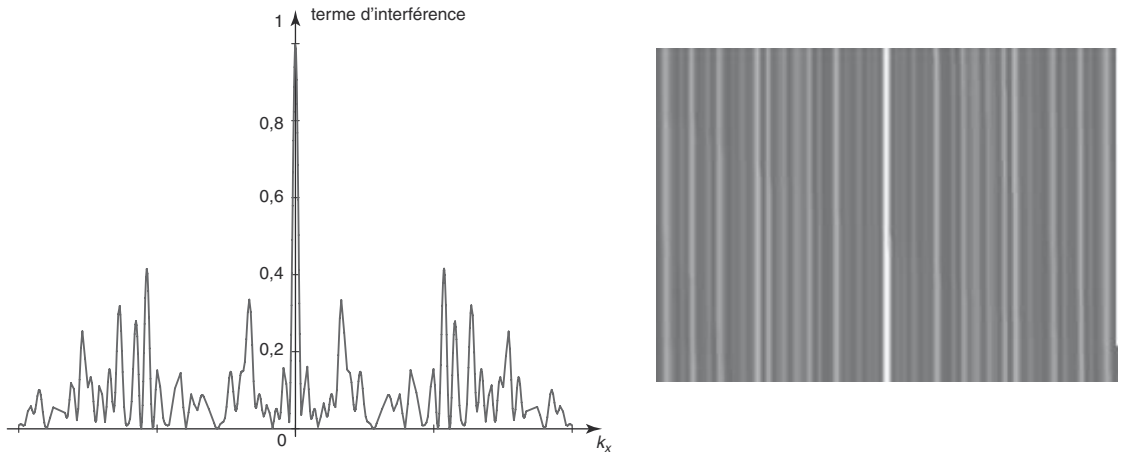
Fig. 2 *Comparaison 2 et 10 fentes*



Si on simule (avec un logiciel de calcul formel) le terme d'interférences et la figure de diffraction de 10 fentes réparties aléatoirement, on constate qu'en dehors de l'image géométrique, on n'obtient pas de franges brillantes. Pour que les interférences à N ondes cohérentes soient intéressantes, il est nécessaire que les **N ondes soient déphasées régulièrement**.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 3 *10 fentes placées aléatoirement*



L'**intérêt** est évident en **spectroscopie** : si la source contient deux longueurs d'onde très proches, elles seront d'autant mieux séparées que les franges brillantes correspondant à chacune d'entre elles seront fines.

2 Interférences à *N* ondes cohérentes, amplitude et intensité diffractées à l'infini

Nous allons d'abord aborder le problème d'un point de vue théorique sans nous préoccuper de sa réalisation pratique qui est le réseau, abordé au § 3.

2.1. Interférences à *N* ondes cohérentes

Appelons les N sources cohérentes O_1, $O_2, \ldots, O_N$ et $\underline{a}_n(M)$ l'amplitude complexe reçue au point M à l'infini de la source O_n. Les N ondes interfèrent au point M, on peut donc sommer les amplitudes.

$$\underline{a}(M) = \sum_{n=1}^{N} \underline{a}_n(M) = \sum_{n=1}^{N} \underline{a}_{0n} e^{i\Phi_n(M)}$$

Supposons que les amplitudes $\underline{a}_{0n}$ soient toutes égales à $\underline{a}_0$ et que les phases $\Phi_n(M)$ au point M croissent selon une progression arithmétique. Le déphasage en M entre deux vibrations successives est noté $\phi(M)$, on prend $\Phi_1(M) = 0$ et on obtient $\Phi_n(M) = (n-1)\phi$.

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_0 \sum_{n=1}^{N} e^{i(n-1)\phi} = \underline{a}_0 \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

$$= \underline{a}_0 \frac{e^{i\frac{N\phi}{2}}}{e^{i\frac{\phi}{2}}} \left(\frac{e^{-i\frac{N\phi}{2}} - e^{i\frac{N\phi}{2}}}{e^{-i\frac{\phi}{2}} - e^{i\frac{\phi}{2}}} \right) = \underline{a}_0 \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} e^{\frac{i(N-1)\phi}{2}}$$

© Nathan, *classe prépa*

Calculons l'intensité due aux N ondes qui interfèrent au point M, ϕ contient l'information sur la position du point M.

$$I(M) = C\underline{a}_0\underline{a}_0^* \left(\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2 = I_0 N^2 \left(\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{N \sin \frac{\phi}{2}} \right)^2 = I_0 N^2 R_N^2\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

On définit donc la fonction réseau par : $R_N(x) = \left(\frac{\sin Nx}{N \sin x}\right)$ avec $x = \frac{\phi}{2}$.

2.2. Étude de la fonction réseau au carré

L'étude de la fonction réseau au carré est donnée dans l'annexe « Éléments de mathématiques ». Retenons-en **les principaux résultats**.

Quand $x = n\pi$ avec n entier relatif, $R_N^2(x) = 1$, ce sont des maxima principaux.

Elle s'annule $(N-1)$ fois sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour $x = n\frac{\pi}{N}$ avec n entier, $n \in [1, N-1]$. Il y a $(N-2)$ maxima secondaires sur l'intervalle $[0, \pi]$, chaque maximum secondaire est situé entre deux annulations.

Il faut retenir que la demi-largeur en x d'un maximum principal est $\frac{\pi}{N}$ donc la demi-largeur en phase d'un maximum principal est $\frac{2\pi}{N}$.

2.3. Étude qualitative

Les N ondes théoriques cohérentes sont de même amplitude et de déphasage constant $\phi(M)$. Elles interfèrent au point M.

Si deux ondes n et $n+1$ sont en phase, $\phi(M) = 0$ modulo 2π, alors les N ondes sont en phase et on prévoit un maximum pour l'intensité.

Si $N \gg 1$ et $\phi \neq 0$ modulo 2π, les N ondes qui interféreront auront des phases quelconques les unes par rapport aux autres et l'intensité résultante sera négligeable.

On prévoit donc, sans aucun calcul, qu'il n'y aura de la lumière si $N \gg 1$ qu'en les maxima principaux donnés par l'équation $\phi = 0$ modulo 2π.

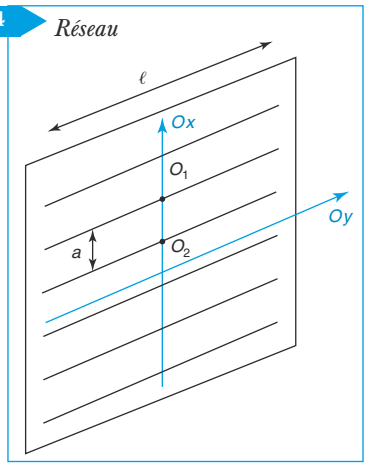
Dans la pratique $N \gg 1$, les maxima secondaires ont des intensités négligeables donc seuls les maxima principaux sont visibles. Ils sont situés en $\phi(M) = 0$ modulo 2π qui exprime que les N ondes sont en phase.

© Nathan, *classe prépa*

3 Réseaux – Cas particulier du réseau par transmission

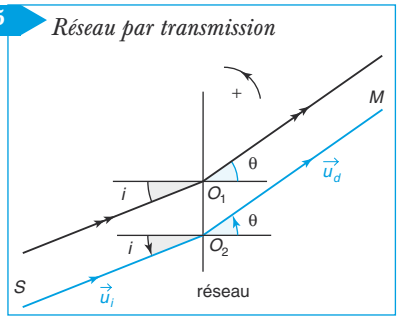
3.1. Description d'un réseau

Fig. 4



Un réseau est une pupille plane opaque percée de N fentes identiques parallèles équidistantes (en fait, on a gravé N traits fins sur un support métallisé, traits de grande longueur l par rapport à leur épaisseur h, distants de a) (figure 4). Les N fentes en diffractant la lumière incidente vont jouer le rôle de N sources secondaires cohérentes. Sur la figure 5, on a tracé deux rayons incidents diffractés par deux traits du réseau situés respectivement en O_1 et O_2.

Fig. 5



Calculons pour le réseau par transmission, dans l'air,

$$\Phi_{2/1}(M) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = (\vec{k_i} - \vec{k_d}) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin\theta - \sin i)$$

(voir § 1.2. chapitre 5).

Pour les maxima principaux $\Phi_{2/1}(M) = p2\pi$ (avec p entier) car toutes les vibrations doivent être en phase.

On obtient la relation appelée « **formule des réseaux** » : $a(\sin\theta - \sin i) = p\lambda$ avec p entier, p appelé **ordre de diffraction**. $p = 0$ donne l'image géométrique de la source, le faisceau n'est pas dévié $\theta = i$.

Cette formule donne la position en θ des faisceaux diffractés correspondant aux intensités maximales.

Remarque : θ pour un réseau donné et un faisceau incident donné ne dépend que de p et de λ.

La demi-largeur en $\sin\theta$ d'un maximum principal est $\frac{\lambda}{Na}$ car la demi-largeur en déphasage est $\frac{2\pi}{N}$ ($\frac{2\pi}{\lambda}a\alpha = \frac{2\pi}{N}$ donne $\alpha = \frac{\lambda}{Na}$).

> La **formule des réseaux par transmission** : $a(\sin\theta_{p,\lambda} - \sin i) = p\lambda$ avec p entier donne la position en θ des faisceaux diffractés donnant les intensités maximales. Elle exprime que les N ondes diffractées par le réseau sont en phase.

Les fentes sont de largeur h, distantes de a. La largeur utile du réseau est Na avec N le nombre de traits éclairés par la source. On appelle a **pas du réseau**.

© Nathan, *classe prépa*

Les **trois échelles spatiales du réseau** sont :

$$h \ll a \ll Na$$

ce qui donne **trois échelles en sin θ dans la figure de diffraction** :

$$\frac{\lambda}{h} \gg \frac{\lambda}{a} \gg \frac{\lambda}{Na}.$$

$\frac{\lambda}{h}$ correspond à la **diffraction par un trait**, $\frac{\lambda}{a}$ est l'**interfrange angulaire du phénomène d'interférences** et $\frac{\lambda}{Na}$ correspond à la **diffraction par tout le réseau** (la partie éclairée). Il suffira de calculer les angles correspondants et de les multiplier par la distance adéquate (distance focale de la lentille ou distance pupille-écran).

Les détails les plus petits dans la pupille diffractante donnent les effets les plus grands dans la figure de diffraction.

• **Ordres de grandeur**

Sur un réseau est indiqué le nombre de traits par mm ou le nombre de *lines per inch* (LPI), il s'agit de $\frac{1}{a}$. Un *inch* vaut 2,54 cm. Par exemple : 570 traits par mm, 15 000 LPI (590 traits par mm).

Le pas *a* du réseau est **de l'ordre de quelques µm** donc de quelques longueurs d'onde dans le visible, h est de l'ordre de quelques 0,1 µm. La largeur des réseaux courants est de l'ordre de quelques cm, donc le nombre total de traits est de l'ordre de 10^4 et le nombre N de traits éclairés est de l'ordre de 10^3.

Le réseau est situé dans un montage de Fraunhofer et est éclairé par une fente source parallèle aux traits du réseau. Le programme prévoit de l'étudier uniquement en transmission. Il est évident que la pupille diffracte aussi par réflexion.

Il sera utilisé en TP sur le goniomètre qui est idéal pour avoir un éclairage à l'infini (collimateur) et observer à l'infini (lunette autocollimatrice). On mettra une fente source devant le collimateur en raison de la diffraction linéique des traits fentes du réseau (voir le problème des fentes d'Young, § 5 chapitre 5).

© Nathan, *classe prépa*

3.2. Amplitude et intensité diffractées à l'infini

La source primaire est à l'infini dans la direction $\vec{u}_i$. L'amplitude diffractée à l'infini dans la direction $\vec{u}_d$ s'écrit :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(M) = \underline{K}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_{\text{pupille}} \underline{T}(P)\,\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d)\cdot\overrightarrow{OP}}\,\mathrm{d}S_P\,.$$

Or nous avons vu dans le chapitre diffraction (5.1) que la transformation mathématique qui permet de passer de la fente F_1 à la fente F_2 est une translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$: (x_{12}, y_{12}) et que :

$$\underline{a}_{F_2}(k_x, k_y) = \underline{a}_{F_1}(k_x, k_y)\,\mathrm{e}^{-i(k_x x_{12} + k_y y_{12})}.$$

Pour la pupille avec N fentes, notons $a = O_1O_2$ et $\Phi_{2/1}(M) = \vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2} = k_x x_{12} + k_y y_{12}$:

$$\underline{a}_{N\text{ fentes}}(k_x, k_y) = (1 + \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}} + \mathrm{e}^{-2i\vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}} + \dots + \mathrm{e}^{-i(N-1)\vec{k}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}})\,\underline{a}_{1\text{ fente}}(k_x, k_y)$$

$$\underline{a}_{N\text{ fentes}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{1\text{ fente}}(k_x, k_y)\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{-i(n-1)\Phi_{2/1}(M)}$$

$$\underline{a}_{N\text{ fentes}}(k_x, k_y) = \underline{a}_{1\text{ fente}}(k_x, k_y)\,\frac{\sin\frac{N\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{(N-1)\phi}{2}}$$

Nous remarquons que l'amplitude de diffraction par une fente se met en facteur. Calculons l'intensité due aux N ondes qui interfèrent au point M :

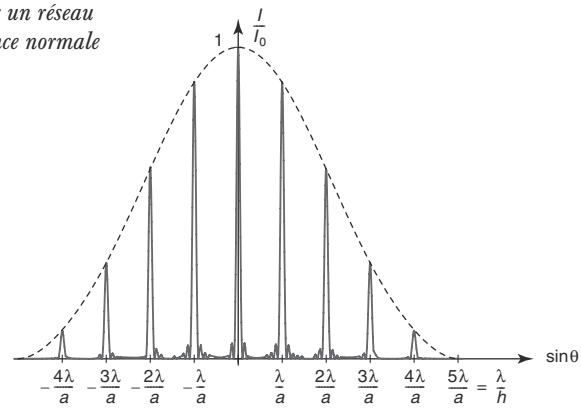
$$I_{N\,\text{fentes}}(k_x, k_y) = I_{1\,\text{fente}}(k_x, k_y)\left(\frac{\sin\frac{N\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)^2 = I_{1\,\text{fente}}(k_x, k_y)N^2R_N^2\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Si les fentes sont selon Oy $I_{N\,\text{fentes}}(k_x, k_y) = 0$ si $k_y \neq 0$

$$I_{N\,\text{fentes}}(k_x, 0) = I_{1\,\text{fente}}(k_x, 0)N^2R_N^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Nous remarquons que l'intensité diffractée par N fentes est l'intensité diffractée par une fente que multiplie un terme d'interférences à N ondes. Les maxima principaux seront obtenus pour $\Phi_{2/1}(M) = 0$ modulo 2π. Sur la figure 6, nous observons des pics (maxima principaux étroits) dont l'intensité est modulée par la diffraction par une fente.

Fig. 6 *Intensité diffractée par un réseau de 10 fentes en incidence normale et avec* $h = \frac{a}{5}$



Retenir $I_{N\text{fentes}}(k_x, k_y) = I_{1\text{fente}}(k_x, k_y) \times$ (terme d'interférences à N ondes)

PC
PSI
PT

3.3. TP Cours : Observations expérimentales – Spectroscopie

Rappelons que la spectroscopie permet d'analyser la composition spectrale de la lumière émise par une source et de mesurer les longueurs d'onde de raies.

3.3.1. Premières observations

Si on place un réseau sur le trajet d'un faisceau laser, on observe plusieurs points lumineux de part et d'autre de l'image géométrique par transmission du faisceau laser. On parle des images par diffraction du faisceau. En effet, la formule des réseaux nous permet de comprendre qu'on observe plusieurs maxima principaux, mais combien ?

$$\sin\theta - \sin i = p\frac{\lambda}{a} \text{ avec } p \text{ entier d'où } \sin\theta = \sin i + p\frac{\lambda}{a}$$

Supposons que $i = 0$ (incidence normale), comme $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$ alors $-\frac{a}{\lambda} \leqslant p \leqslant \frac{a}{\lambda}$.

• $p = 0$ **correspond à l'image géométrique**, nous obtenons $E\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ valeurs positives de p et $E\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ valeurs négatives de p. **Nous pourrons donc observer** $2E\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ **images par diffraction**.

© Nathan, *classe prépa*

Si $i \neq 0$, $-1 \leqslant \sin i + \frac{p\lambda}{a} \leqslant 1$, on observe autant d'images mais elles ne sont plus réparties symétriquement par rapport à l'image géométrique.

> Pour un réseau donné et une longueur d'onde donnée, nous observons $2E\left(\frac{a}{\lambda}\right) + 1$ images de l'objet.

Si on change de réseau et que le pas diminue (le nombre de traits par unité de longueur augmente), on observe moins d'images mais on constate qu'elles sont plus écartées.
Si on regarde une source de lumière blanche à travers un réseau, on observe l'image géométrique de l'objet observé, et de part et d'autre, des spectres continus de lumière blanches organisés linéiquement. On peut placer un stylo entre la source et le réseau. Si le stylo est parallèle aux traits du réseau, on observe alors des bandes parallèles au stylo colorées, de part et d'autre de l'image du stylo. Le stylo joue le rôle d'écran complémentaire à la fente source.

Le goniomètre est réglé au préalable : la lunette autocollimatrice est réglée en viseur à l'infini ce qui permet de régler ensuite le collimateur. La fente source est affinée. Nous sommes dans les conditions du montage de Fraunhofer : source à l'infini et observation à l'infini.
Si on place maintenant le réseau sur la platine du goniomètre, avec une fente source éclairée par la lampe à vapeur de mercure par exemple, on observe l'image géométrique de la fente source et de part et d'autre des fentes colorées ou raies correspondant au spectre d'émission de la lampe (à chaque longueur d'onde, correspond une raie). On observe **plusieurs spectres** allant du bleu vers le rouge. Ce qui est surprenant par rapport à la situation avec le prisme !
L'explication est simple : avec la formule des réseaux, on prévoit à peu près $E\left(\frac{a}{\lambda_{\text{moyen}}}\right)$ spectres de part et d'autre de l'image géométrique de la fente source ; **l'angle de déviation augmente quand λ augmente**. On constate que les raies proches telles que les doublets sont mieux séparées dans les ordres élevés : **l'angle de déviation augmente quand l'ordre *p* augmente**.

Remarque

Rappelons-nous que l'indice du verre constituant le prisme dépendant de la longueur d'onde : $\left(n = A + \frac{B}{\lambda^2}\right)$, le prisme permet de séparer spatialement les longueurs d'onde. On observe un **spectre** de raies, le bleu est plus dévié que le rouge.

3.3.2. Pouvoir dispersif d'un réseau

On définit le pouvoir dispersif d'un réseau comme $\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$ à angle d'incidence et ordre fixés.

Différentions la formule des réseaux : $\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{p}{a}\mathrm{d}\lambda$ d'où $\frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{p}{a\cos\theta}$.

> Le pouvoir dispersif d'un réseau augmente avec l'ordre et avec le nombre de traits du réseau par unité de longueur.

Quand on ne sépare pas un doublet à l'ordre 1, il est utile d'explorer les ordres plus élevés ; en cas d'échec, il faut changer de réseau et en choisir un de pas plus petit, donc avec un plus grand nombre de traits par unité de longueur (voir exercice n° 3 de « S'entraîner »).
Cependant, l'**intensité diminue dans les ordres élevés**. On travaille dans la tache centrale de diffraction de la fente source qui est plus étroite que la tache centrale de diffraction par un trait du réseau.
Enfin, les spectres d'ordre p et $p+1$ peuvent se mélanger. On parle du chevauchement des spectres dans les ordres élevés (voir exercice n° 6 de « S'entraîner »). Ainsi, un même angle θ peut correspondre à (λ_1, p_1) et à (λ_2, p_2).

© Nathan, *classe prépa*

3.3.3. Mesure du pas d'un réseau en incidence normale

On place le réseau sur la platine du goniomètre (réglé) et on règle **l'horizontalité de la platine** à savoir que l'axe de la lunette doit être perpendiculaire à l'axe de rotation de la platine. Ce réglage n'est plus exigible à l'épreuve de TP des concours. Cependant, il est **indispensable à la précision des mesures** qui vont être effectuées. On utilise la lampe à vapeur de mercure-cadmium pour obtenir plus de raies (voir tableau 1).

Tableau 1 – *Longueurs d'onde des lampes spectrales*

Lampe	Couleur	λ en nm	Intensité
Na	Rouge	615,7	Intense
	Jaune	589,6-589,0	Doublet intense
	Vert-Jaune	568,8-568,3	Doublet intense
	Vert	515,2	Intense
	Bleu-Vert	498,1	Intense
	Bleu-Violet	475,0	Très, très pâle
	Violet	466,7	Intense
Hg	Rouge	690,7	Pâle
	Rouge	623,4	Pâle
	Rouge	612,3	Très pâle
	Rouge	607,2	Très pâle
	Jaune	579,1-577,0	Doublet intense
	Vert-Jaune	546,1	Intense
	Vert	496,0	Très pâle
	Vert-Bleu	491,6	Pâle
	Bleu-Violet	435,8	Pâle
	Violet	407,8	Très pâle
	Violet	404,7	Intense
Cd	Rouge	643,8	Intense
	Vert	508,6	Pâle
	Bleu	480,0	Pâle
	Bleu-Violet	467,8	Pâle

On se place en incidence normale par autocollimation sur le réseau :

① On met le réticule de la lunette en coïncidence avec l'image géométrique de la fente source. On bloque la lunette.

② On allume la lampe auxiliaire de la lunette, on bascule la petite lame semi-réfléchissante. On observe l'image du réticule par réflexion sur le réseau. On met le réticule de la lunette en coïncidence avec son image en tournant la platine porte réseau. On bloque la platine.

On a ainsi réglé $i = 0$ **à la minute d'angle près**. On mesure **la position de la lunette** α_0 avec le vernier donc à la **demi-minute d'angle près**.

On mesure pour les raies suffisamment intenses les positions $\alpha_{\pm p}$ de la lunette (réticule en coïncidence avec la raie) dans l'ordre $\pm p$. On en déduit $\theta_{\pm p} = \alpha_{\pm p} - \alpha_0$. $\sin\theta_p = \dfrac{p\lambda}{a}$.

On calcule pour chaque raie, dans chaque ordre, $\dfrac{p\lambda}{\sin\theta_p}$. Pour un ordre p fixé, on en déduit le pas a_p du réseau. On fait la moyenne des valeurs a_p et on en déduit a.

On estime l'incertitude sur la mesure. L'incertitude sur $\theta_{\pm p}$ est de 1 minute (deux fois une demi-minute). L'incertitude sur i est d'une minute d'angle. On admet que la précision sur les longueurs d'onde est telle que l'incertitude est nulle.

Le pas du réseau est, en général, déterminé à quelque 0,1 % près (voir exercice n° 1 de « S'entraîner »).

Remarque
On éteint la lampe source, ou mieux, on la décale pour ne pas être gêné.

Remarque
On remet la lampe en face de la fente source. On peut bouger à nouveau la lunette.

© Nathan, *classe prépa*

3.3.4. Mesure du pas d'un réseau : réseau au minimum de déviation

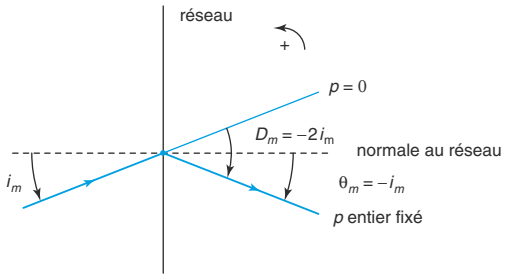
a. Existence d'un minimum de déviation

Si on fixe l'angle d'incidence i, pour une longueur d'onde donnée et un ordre p donné, il correspond un angle θ et un seul. Mais expérimentalement, il est difficile voire impossible de fixer i et de le mesurer précisément. On utilise alors une situation particulière déjà vue pour le prisme, le minimum de déviation. L'intérêt est qu'il est repérable facilement expérimentalement et qu'il fixe les valeurs des angles i et θ : il fait donc correspondre à un angle θ une seule valeur de longueur d'onde pour un ordre p fixé.
Prouvons maintenant que ce minimum de déviation existe. Différentions la formule des réseaux à ordre fixé, réseau fixé et longueur d'onde fixée :

$$\cos\theta \mathrm{d}\theta - \cos i \mathrm{d}i = 0 \text{ d'où } \mathrm{d}\theta = \frac{\cos i}{\cos\theta}\mathrm{d}i.$$

La déviation du faisceau incident après passage dans le réseau est $D = \theta - i$. On obtient un extremum de la déviation si $\mathrm{d}D = 0$, donc pour $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}i$, d'où $\cos i = \cos\theta$. Cela donne deux valeurs de θ : $\theta = i$ et $\theta = -i$. La première valeur correspond à l'image géométrique donc seule la seconde nous intéresse et elle correspond à un **minimum de déviation**.
L'intérêt du minimum de déviation est de fixer l'angle d'incidence, la déviation vaut alors en valeur absolue deux fois l'angle d'incidence (figure 7).

Fig. 7 *Minimum de déviation*



$\theta_{\min} = -i_{\min}$, $D_{\min} = -2i_{\min}$, $2\sin\theta_{\min} = -2\sin i_{\min} = p\frac{\lambda}{a}$. **Au minimum de déviation**, pour un ordre p fixé et un réseau donné, à un angle $\theta_{\min}$ correspond une seule valeur de longueur d'onde.

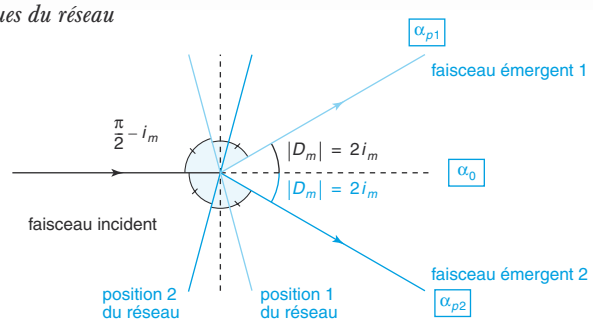
b. Mesure d'un pas par la méthode du minimum de déviation

Si on fixe un ordre p et qu'on se place au minimum de déviation pour une raie intense (par exemple la raie verte du mercure à l'ordre 1), on constate expérimentalement qu'il existe deux positions « symétriques » du réseau correspondant au minimum de déviation lorsque i varie. Le minimum de déviation pour une raie intense fixe l'angle d'incidence i_m.
On mesure les positions de la lunette correspondant aux deux positions « symétriques » (voir figure 8) α_{p1} et α_{p2} et on note $\alpha = |\alpha_{p2} - \alpha_{p1}|$.
Soit α_0, la position de la lunette à l'ordre zéro (image géométrique de la source). $|\alpha_{p1} - \alpha_0| = 2|i_m|$, de même $|\alpha_{p2} - \alpha_0| = 2|i_m|$, d'où $|\alpha_{p2} - \alpha_{p1}| = 4|i_m|$.

Or $-2\sin i_{\min} = p\frac{\lambda}{a}$; il en résulte que $2\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) = |p|\frac{\lambda}{a}$.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 8 *Positions symétriques du réseau*



Cette formule permet de calculer a donc réalise une mesure du pas a du réseau. En fait cette mesure n'est qu'une vérification car le pas du réseau est donné par le constructeur avec une grande précision.

3.3.5. Spectroscopie : mesure d'une longueur d'onde par étalonnage du spectroscope (goniomètre avec réseau)

La méthode du minimum de déviation permet aussi de fournir un étalonnage du spectroscope (goniomètre avec réseau) et de mesurer des longueurs d'onde inconnues. On fixe le réseau dans la position du minimum de déviation d'une raie intense dans un ordre donné, ***p* et l'angle *i*** sont ainsi **fixés**.

On mesure alors, dans cet ordre, les positions de la lunette $\alpha_{p,\lambda}$ qui repèrent les autres raies de la lampe étalon dont on connaît toutes les longueurs d'onde. La lampe mercure-cadmium de par son grand nombre de raies fournit un excellent étalon. On trace alors la courbe $\alpha_{p,\lambda}$ en fonction de la longueur d'onde. Cette courbe représente la courbe d'étalonnage du spectroscope.

Toutes choses égales par ailleurs, on remplace la lampe à vapeur de mercure-cadmium par une autre lampe (celle à vapeur de sodium disponible dans les salles de TP). En restant dans le même ordre et avec la même position du réseau, on mesure les positions de la lunette correspondant à chaque raie inconnue de la lampe. On utilise alors la courbe d'étalonnage pour en déduire les longueurs d'onde correspondantes.

3.3.6. Spectroscopie : séparation d'un doublet et pouvoir séparateur du spectroscope – Pouvoir de résolution

Le but de la spectroscopie est de séparer le mieux possible les différentes longueurs d'onde. On définit le **pouvoir séparateur d'un spectroscope** par $\Delta\lambda_{\min}$ et le **pouvoir de résolution** par : $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}$. Cela exprime son pouvoir à séparer deux raies proches de $\Delta\lambda$ dans le domaine de longueurs d'onde λ.

Deux facteurs peuvent limiter le pouvoir de résolution : d'une part, la **largeur des maxima principaux** (élargissement des raies), et d'autre part, la **largeur de la fente source**.

a. Largeur des maxima principaux

On veut séparer deux longueurs d'onde proches λ_1 et λ_2 (doublet) à l'ordre p, elles donnent deux raies situées respectivement (en $\sin\theta$) en $\sin i + \dfrac{p\lambda_1}{a}$ et $\sin i + \dfrac{p\lambda_2}{a}$ donc distantes (en $\sin\theta$) de $\dfrac{p\lambda_2}{a} - \dfrac{p\lambda_1}{a}$.

© Nathan, *classe prépa*

D'après le critère de Rayleigh, la distance en $\sin\theta$ entre les deux raies doit être supérieure ou égale à la demi-largeur (en $\sin\theta$) $\frac{\lambda_m}{Na}$ (on prend une longueur d'onde moyenne λ_m).

$$\frac{p\lambda_2}{a} - \frac{p\lambda_1}{a} \geqslant \frac{\lambda_m}{Na}; \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{\lambda_m}{Np}; \quad R = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} \leqslant Np.$$

Le pouvoir de résolution augmente avec l'ordre p et avec N. N augmente quand le nombre de traits par unité de longueur augmente, toutes choses égales par ailleurs. Ce n'est pas le facteur le plus limitant.

b. Largeur de la fente source

De par sa largeur h_s, la fente source émet un faisceau incident dans la direction i à $\pm\Delta i$ avec $\Delta i = \frac{h_s}{2f_c}$ (f_c distance focale du collimateur). Le faisceau diffracté pour une longueur d'onde donnée et un ordre donné correspond alors à la direction θ à $\pm\Delta\theta$. Différentions la formule des réseaux :

$\cos\theta \mathrm{d}\theta - \cos i \mathrm{d}i = 0$, d'où $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}i} = \frac{\cos\theta}{\cos i}$ et pour de petits angles, $\Delta\theta \approx \Delta i$. La distance angulaire entre les deux raies doit être supérieure à $\Delta\theta$ pour qu'elles soient séparées.

$$\frac{p\lambda_2}{a} - \frac{p\lambda_1}{a} \geqslant \Delta\theta = \Delta i; \quad \Delta\lambda \geqslant \frac{a\Delta i}{p}; \quad R = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} \leqslant \frac{p\lambda_m}{a\Delta i}.$$

C'est **la largeur de la fente source qui limite**, en pratique, le pouvoir de résolution. Il faut veiller à l'affiner le plus possible.

© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 201*

1 On lit sur un réseau l'indication 8 000 LPI. Quel est le pas du réseau ?

- ☐ **a.** 8,6 µm
- ☐ **b.** 3,2 µm
- ☐ **c.** 5,4 µm

2 Quelle est la demi-largeur angulaire d'un maximum principal pour un réseau de pas a ?

- ☐ **a.** $\frac{\lambda}{a}$
- ☐ **b.** $\frac{2\lambda}{Na}$
- ☐ **c.** $\frac{\lambda}{Na}$

3 À l'aide d'un faisceau laser ($\lambda = 633$ nm), on teste un réseau par transmission sous incidence normale. Sur un mur, perpendiculaire à la direction du faisceau laser, on observe trois points lumineux rouges. L'ordre de grandeur du nombre de traits par mm est :

- ☐ **a.** 1 000
- ☐ **b.** 100
- ☐ **c.** 10 000

4 À l'aide d'un faisceau laser ($\lambda = 633$ nm), on teste un réseau (220 traits par mm) sous incidence normale. On observe sur le mur 9 points lumineux rouges très brillants et 3 points lumineux moins brillants de part et d'autre (de chaque côté).
Que vaut la largeur d'un trait ?

- ☐ **a.** 2 µm
- ☐ **b.** 0,1 µm
- ☐ **c.** 1 µm

5 Quand on observe les raies d'une lampe spectrale à l'aide d'un réseau monté sur un goniomètre, les raies sont mieux séparées quand :

- ☐ **a.** l'ordre du spectre augmente.
- ☐ **b.** on élargit la fente d'entrée du spectroscope.
- ☐ **c.** on diminue l'angle d'incidence sur le réseau.

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 201*

1 Un réseau comporte 570 traits par mm et est éclairé par un faisceau en incidence normale d'extension spatiale 5 mm dans la direction perpendiculaire aux traits.

1. Quel est le plus petit intervalle de longueur d'onde séparable dans le deuxième ordre autour de $\lambda = 590$ nm ?

2. Sépare-t-on le doublet du sodium (0,6 nm) ?

2 Soit un réseau 8 000 LPI, situer les positions angulaires des maxima principaux pour un faisceau en incidence normale et de longueur d'onde 546 nm.

3 Le doublet jaune du sodium est observé avec un réseau sous incidence normale au troisième ordre, à 10° de la normale au réseau, et est tout juste séparé. Sur quelle largeur est éclairé le réseau en incidence normale ? On rappelle que le doublet jaune du sodium correspond aux deux raies de longueurs d'ondes respectives :
$\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_1 = 589{,}6$ nm.

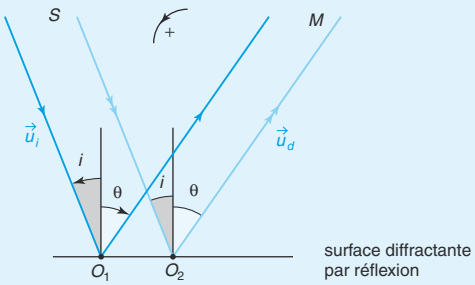
4 Un réseau 15 000 LPI est éclairé en incidence normale par une lumière blanche. Un spectre se forme sur un écran parallèle au réseau, situé à 50 cm du réseau. Si on perce un trou carré de 5 mm de côté dans l'écran et dont le centre est placé à 20 cm de l'image géométrique parallèlement aux traits du réseau, quel sera le domaine de longueurs d'onde sélectionné par le trou ?

© Nathan, *classe prépa*

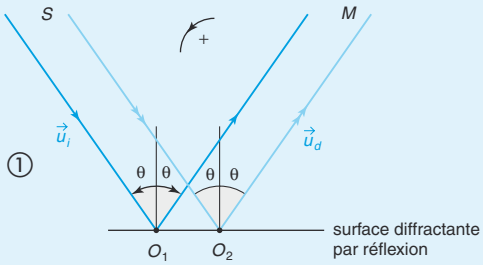
1 – Calculs de déphasage

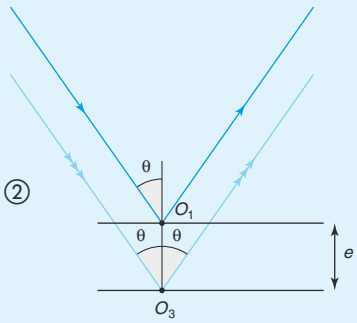
Dans tous les cas, le réseau est éclairé par une onde incidente plane et on observe à l'infini l'onde émergente. N.B. : le milieu est l'air d'indice constant et les angles sont mesurés par rapport à la normale à la surface diffractante. On note $O_1O_2 = a$.

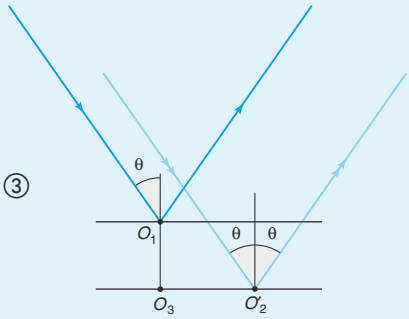
1 Réseau par réflexion – Il s'agit d'un réseau utilisé en réflexion. Calculer le déphasage entre le rayon 2 qui est diffracté par O_2 et le rayon 1 qui est diffracté par O_1.



2 Réseau de Bragg – On calculera d'abord le déphasage entre le rayon diffracté par O_2 et le rayon diffracté par O_1, ensuite le déphasage entre le rayon diffracté par O_3 et le rayon diffracté par O_1 et enfin le déphasage entre le rayon diffracté par O'_2 et le rayon diffracté par O_1.



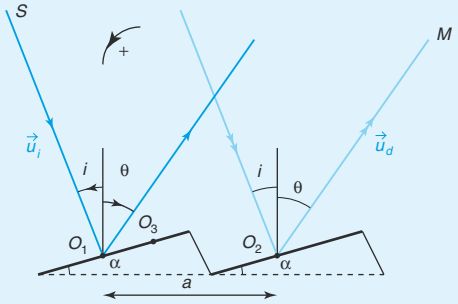




réseau de Bragg

© Nathan, *classe prépa*

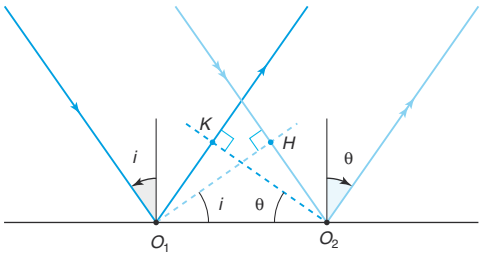
3 **Réseau à échelette** – Il s'agit d'un réseau utilisé en réflexion. Calculer le déphasage entre le rayon 3 qui est diffracté par O_3 et le rayon 1 qui est diffracté par O_1. Calculer le déphasage entre le rayon 2 qui est diffracté par O_2 et le rayon 1 qui est diffracté par O_1. On note $O_1O_3 = b$.



surface diffractante par réflexion

résolution méthodique

1 Calculons le déphasage au point M à l'infini donc la différence de marche optique $\Phi_{2/1}(M) = \dfrac{2\pi\delta_{2/1}(M)}{\lambda}$.



Sur la figure, nous voyons que pour les rayons incidents, le rayon incident en O_2 est en retard de HO_2 et que pour les rayons émergents, le rayon diffracté par O_2 est en avance de O_1K. $a = O_1O_2$.

$HO_2 = a\sin i$ et $O_1K = a\sin(-\theta)$. Comme on mesure des retards,

$\delta_{2/1}(M) = HO_2 - O_1K = a(\sin i + \sin(\theta))$.

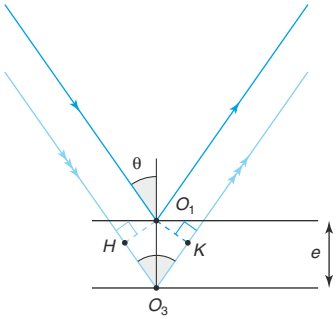
Attention : avec les conventions d'orientation des angles de la figure, l'angle θ est négatif.

Finalement, $\Phi_{2/1}(M) = \dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin i + \sin\theta)$ avec $a = O_1O_2$.

2 Pour le schéma ①, il suffit de remplacer θ par $-i$ dans la formule du réseau par réflexion d'où $\Phi_{2/1}(M) = 0$.

© Nathan, *classe prépa*

Pour le schéma ②, nous voyons que pour les rayons incidents, le rayon incident en O_3 est en retard de HO_3 et que pour les rayons émergents, le rayon diffracté par O_3 est aussi en retard de O_3K.



$HO_3 = O_3K = e\cos\theta$ et $\delta_{3/1}(M) = 2e\cos\theta$

$$\Phi_{3/1}(M) = \frac{4\pi n}{\lambda}e\cos\theta$$

Pour le schéma ③, $\Phi_{2'/1}(M) = \Phi_{2'/3}(M) + \Phi_{3/1}(M) = \frac{4\pi n}{\lambda}e\cos\theta$ et $\delta_{2'/1}(M) = 2e\cos\theta$.

La formule de Bragg est connue sous la forme : $\delta_{2/1}(M) = 2d\sin\alpha$ avec d la distance entre les plans atomiques et α, l'angle complémentaire de θ.

3 On va utiliser la formule du réseau par réflexion en adaptant les notations. L'angle i devient $(i-\alpha)$ par rapport à la normale à la surface diffractante par réflexion. L'angle θ devient $(\theta-\alpha)$ par rapport à la normale à la surface diffractante.
a devient b, distance mesurée dans le plan de la surface diffractante.

$$\delta_{3/1}(M) = b(\sin(i-\alpha) + \sin(\theta-\alpha))$$

Attention : c'est bien l'angle $(\theta-\alpha)$ car θ est négatif.

Finalement, $\Phi_{3/1}(M) = \frac{2\pi b}{\lambda}(\sin(i-\alpha) + \sin(\theta-\alpha))$. Ce résultat est pertinent car, pour $\alpha = 0$, on retrouve la formule du réseau par réflexion.

$\delta_{2/1}(M) = a(\sin i + \sin\theta)$ comme dans la question **1**.

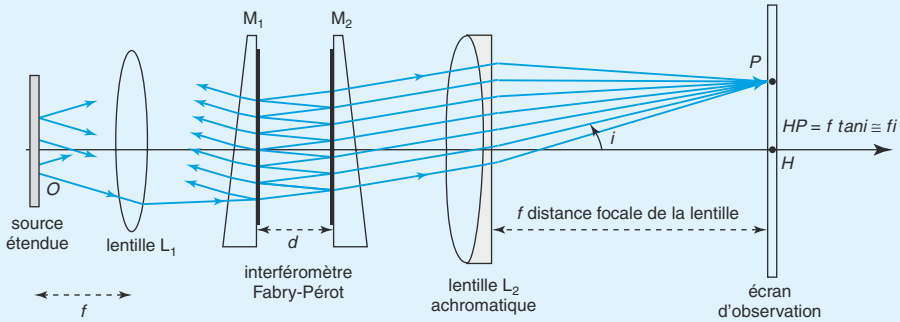
Finalement, $\Phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin i + \sin\theta)$.

en conclusion

Les calculs de déphasage peuvent être menés de deux façons pour des ondes planes incidentes et émergentes. Soit on calcule directement le déphasage avec les vecteurs d'onde (comme dans l'essentiel des chapitres 5 et 6), soit on calcule la différence de marche optique en prenant garde aux orientations et s'il s'agit d'un retard ou d'une avance.

© Nathan, *classe prépa*

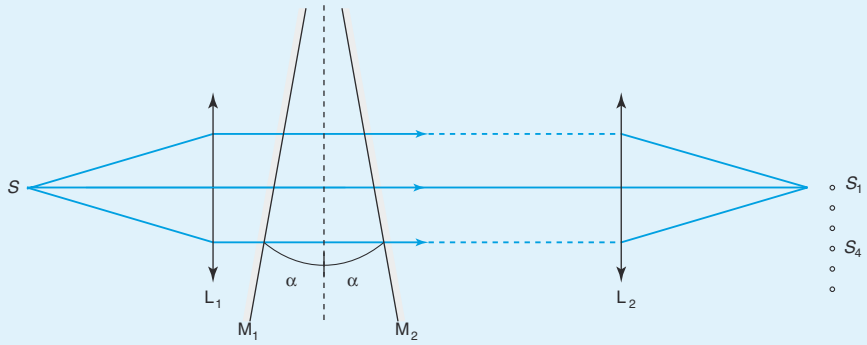
2 – Interféromètre de Fabry-Pérot (d'après CCP)



1 L'interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux lames de verre. Les deux faces M_1 et M_2 ont été polies avec soin et ont reçu un traitement de surface leur donnant un coefficient de réflexion élevé. La position des deux lames est normalement réglée pour que M_1 et M_2 soient parallèles. Le dispositif est éclairé avec une source étendue monochromatique qui émet des rayons d'égale amplitude dans toutes les directions. On néglige toutes les réflexions et réfractions qui se produisent sur les faces des lames autres que M_1 et M_2.

Quel est le rôle de la lentille L_2 ? Quelle est la forme des franges d'interférences dans le plan d'observation ?

2 Les deux miroirs sont identiques. On désigne par r et t les coefficients respectifs de réflexion et de transmission des deux lames pour les amplitudes des ondes lumineuses et par $R = r^2$, $T = t^2$ les coefficients correspondants pour les intensités lumineuses. On admet que transmission et réflexion se font sans déphasage et que r et t sont des nombres réels positifs. Du point de vue des ordres de grandeur, $T \ll 1$, R et $R + T$ sont légèrement plus petits que l'unité. On note $A_b = 1 - (R + T)$ le coefficient d'absorption des miroirs.



L'interféromètre de Fabry-Pérot est déréglé, les deux faces réfléchissantes font un très petit angle 2α entre elles. Une source ponctuelle S est placée au foyer de la lentille L_1, la lentille L_2 reçoit la totalité des rayons sortant de l'interféromètre. Dans le plan focal de L_2, il se forme une série d'images ponctuelles $S_1, S_2, \ldots, S_n$. extrêmement voisines.

a. Calculer en fonction de l'angle α et de la distance focale f de la lentille L_2, la distance entre les images S_1 et S_2 puis entre S_1 et S_{10}. Faire l'application numérique pour $f = 1$ m et $\alpha = 1'$.

© Nathan, *classe prépa*

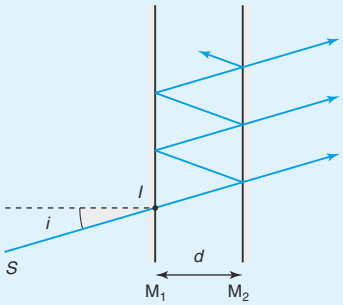
b. Dans le plan focal de la lentille L_2, on place une cellule photoélectrique qui peut recevoir l'ensemble des images $S_1, S_2, \ldots, S_n \ldots$ et qui délivre un signal électrique proportionnel au flux lumineux qu'elle reçoit. On désigne par P_0 le flux lumineux reçu par la cellule, en l'absence de l'interféromètre. Calculer en fonction de P_0, R et T les flux lumineux reçus par les différentes images $S_1, S_2, \ldots, S_n$ et en déduire le flux lumineux total P reçu par la cellule photoélectrique.

c. On veut déterminer R, T et A_b. On réalise les manipulations suivantes : on mesure le flux P_0 reçu par la cellule, on mesure le flux P' quand une seule lame de l'interféromètre est placée entre les deux lentilles, enfin on mesure le flux total P reçu en présence de l'interféromètre. Exprimer R, T et A_b en fonction de P_0, P et P'.

Faire l'application numérique pour $P_0 = 100$ mW, $P = 0{,}21$ mW et $P' = 2$ mW. En supposant R voisin de 1, calculer le numéro d'ordre n de l'image S_n qui reçoit un flux lumineux e^6 fois plus faible que pour l'image S_1. Déterminer n littéralement puis numériquement.

3 L'interféromètre de Fabry-Pérot est réglé, ses deux miroirs sont identiques et caractérisés par les coefficients r, t, $r^2 = R$ et $t^2 = T$. On néglige l'absorption dans les miroirs $(R + T = 1)$. On utilise une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ. On considérera que les milieux à l'intérieur et à l'extérieur du Fabry-Pérot ont le même indice de réfraction, ainsi n'y a-t-il pas changement de direction du rayon lumineux entre l'entrée et la sortie de l'interféromètre.

a. On considère un rayon SI d'amplitude a_0 et d'angle d'incidence i. Montrer que le déphasage entre deux rayons successifs auxquels il donne naissance vaut : $\phi = \dfrac{4\pi d}{\lambda}\cos i$ avec d la distance entre les deux lames de verre. Pourquoi peut-on considérer que la réflexion se fait sans déphasage ?



b. Calculer l'intensité lumineuse $I(i)$ observée à l'infini dans la direction définie par l'angle i, l'exprimer en fonction de ϕ, R, T et a_0. Mettre l'expression obtenue sous la forme :

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 A(\phi, R).$$

La fonction $A(\phi, R)$ (fonction d'Airy) ne dépend que de ϕ et de R. Représenter graphiquement les variations de cette fonction pour $R = 0{,}2$ et $R = 0{,}9$.

c. Calculer l'interfrange en déphasage et la largeur de frange $\Delta\phi$ telle que, pour une frange donnée, l'intensité soit divisée par deux. On définit la finesse du Fabry-Pérot par $F = \dfrac{2\pi}{\Delta\phi}$. La calculer pour $R = 0{,}9$. Que faut-il modifier pour obtenir des pics plus fins ? Comparer l'expression de F à celle du nombre de rayons utiles calculé à la question précédente **2 c.** Comparer à un réseau de pas d.

4 **Valeurs numériques** L'interféromètre a une épaisseur d de 1 cm, la distance focale f de la lentille L_2 vaut 1 m. Pourquoi la lentille L_2 est-elle achromatique ?

© Nathan, *classe prépa*

Déterminer les rayons ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 des quatre premiers anneaux pour deux longueurs d'onde particulières $\lambda_1 = 632{,}8$ nm et $\lambda_2 = 633{,}0$ nm. En déduire son pouvoir de résolution $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, on considérera comme décelable un écart de longueur d'onde $\Delta\lambda$ conduisant à un recouvrement des pics à mi-hauteur. On se place dans le cas $R = 0{,}9$. Pourquoi peut-on dire que le Fabry-Pérot est un outil puissant de spectroscopie ?

résolution méthodique

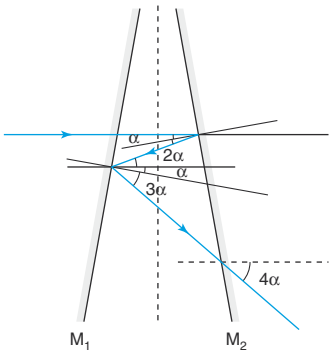
1

Les rayons qui interfèrent au point *P* correspondent à des rayons tous parallèles avant la lentille L_2. Les franges d'interférences sont donc localisées à l'infini. Avec une source étendue, les franges d'interférences correspondent au même incident primitif et la surface de localisation est l'ensemble des points d'intersection des émergents correspondant au même incident primitif.

Le rôle de la lentille L_2 est de ramener le plan de l'infini à distance finie dans son plan focal image.

Le problème possède la symétrie de révolution autour de l'axe optique, ainsi la différence de marche ne dépend-elle que de l'angle *i*. Les franges de même intensité ont le même *i*. Les franges d'interférences dans le plan d'observation sont donc des anneaux circulaires, concentriques, d'axe l'axe optique.

2 a. L'interféromètre de Fabry-Pérot est déréglé, on n'observe plus d'interférences. Par rapport à la situation lame à faces parallèles (miroir M_1 parallèle au miroir M_2), les miroirs ont chacun tourné d'un angle α. Le rayon réfléchi par M_2 tourne d'un angle 2α par rapport au rayon incident. Le rayon réfléchi par M_2 puis par M_1 tourne d'un angle 4α par rapport au rayon incident et ainsi de suite.



L'image S_1 correspond à la transmission par les deux lames du rayon incident sans déviation tandis que l'image S_2 correspond à une rotation d'un angle 4α par rapport au rayon incident. Finalement, $S_1S_2 = 4f\alpha$ (angle α très petit) et $S_1S_{10} = 36f\alpha$.

A.N. : $S_1S_2 = 0{,}12$ cm et $S_1S_{10} = \mathbf{1{,}04\ cm}$.

© Nathan, *classe prépa*

b. L'image S_1 correspond à $P_1 = T^2P_0$ car elle correspond à la transmission par les deux lames. L'image S_2 correspond à $P_2 = R^2T^2P_0$ car elle correspond à deux transmissions et deux réflexions, ce que l'on voit bien sur la figure précédente. L'image S_3 correspond à $P_3 = R^4T^2P_0$ car elle correspond à deux transmissions et quatre réflexions.
L'image S_n correspond à $P_n = R^{2(n-1)}T^2P_0$ car elle correspond à deux transmissions et $2(n-1)$ réflexions.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)}T^2$$

R est un réel positif inférieur à 1.

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{P_0T^2(1-R^{2n})}{1-R^2} = \frac{P_0T^2}{1-R^2}$$

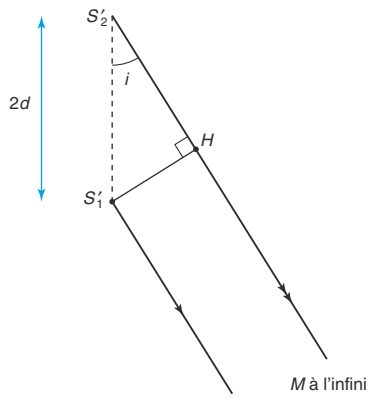
c. $T = \dfrac{P'}{P_0}$ pour la transmission à travers une seule lame. $R + T + A_b = 1$.

A.N. : $T = \mathbf{0{,}02}$, $R = \mathbf{0{,}9}$ et $A_b = \mathbf{0{,}08}$.

$P_n = R^{2(n-1)}T^2P_0 = \dfrac{P_1}{e^6}$ d'où $R^{2(n-1)} = e^{-6}$ et $n = 1 - \dfrac{3}{\ln R}$.

A.N. : $n = \mathbf{28{,}5}$ donc c'est l'image S_{29}.

3 a. La différence de marche entre deux rayons successifs auxquels il donne naissance vaut $2d\cos i$. En effet, les deux rayons semblent provenir de deux sources virtuelles S'_1 et S'_2 distantes de $2\,d$ et font un angle i avec la normale aux deux lames.



$\delta_{2/1} = (S'_2M) - (S'_1M) = S'_2M - S'_1M$

$= S'_2H + HM - S'_1M = S'_2H = S'_2S'_1\cos i = 2d\cos i$

car $HM = S'_1M$ (H et S'_1 appartiennent au même plan d'onde)

Le déphasage vaut : $\phi = \dfrac{4\pi d}{\lambda}\cos i$. On peut considérer que la réflexion se fait sans déphasage supplémentaire car chaque réflexion sur une lame déphase de π mais comme les réflexions vont par paire, le déphasage supplémentaire vaut un multiple de 2π donc un déphasage nul modulo 2π.

b.

Les ondes qui interférent en P sont cohérentes entre elles, on peut donc additionner leurs amplitudes. On réalise des interférences à une infinité d'ondes.
Attention : les interférences sont à une infinité d'ondes mais les amplitudes décroissent et finissent par être nulles.

© Nathan, *classe prépa*

$$\underline{a}(P) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 t^2 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (r^2 e^{-i\phi})^{n-1}$$

$$\underline{a}(P) = a_0 T e^{i\omega t} \frac{1}{1 - R e^{-i\phi}}$$

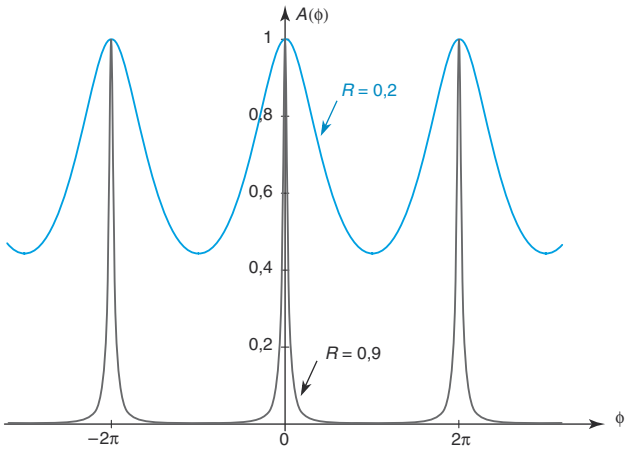
$$I(i) = C a_0^2 T^2 \frac{1}{1 - R e^{-i\phi}} \frac{1}{1 - R e^{i\phi}} = I_0 T^2 \frac{1}{1 + R^2 - 2R\cos\phi}$$

$$1 + R^2 - 2R\cos\phi = 1 + R^2 - 2R - 2R\cos\phi + 2R = (1 - R)^2 + 4R\sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$\frac{I(i)}{I_0} = \left(\frac{T}{1 - R}\right)^2 A(\phi, R)$$

$$A(\phi, R) = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1 - R)^2}\sin^2\dfrac{\phi}{2}}$$

Représentons graphiquement les variations de cette fonction pour $R = 0{,}2$ et $R = 0{,}9$. On remarque que $\dfrac{4R}{(1 - R)^2} = 360$ pour $R = 0{,}9$ et 1,25 pour $R = 0{,}2$. On remarque que les pics sont plus fins pour $R = 0{,}9$.



c. L'interfrange est définie par $\phi = 2\pi$, l'intensité maximale vaut $I_{max} = I_0\left(\dfrac{T}{1 - R}\right)^2$.

La largeur de frange est définie par $\dfrac{I(i)}{I_{max}} = \dfrac{1}{2}$ donc pour $\dfrac{4R}{(1 - R)^2}\sin^2\dfrac{\phi}{2} = 1$. Cela définit deux valeurs $\sin\dfrac{\phi_{\pm 1/2}}{2} = \pm\dfrac{1 - R}{2\sqrt{R}}$.

La finesse du Fabry-Pérot vaut $F = \dfrac{2\pi}{\Delta\phi}$.

A.N. : $\Delta\phi = \mathbf{0{,}21\ rad}$ et $F = \mathbf{30}$.

Pour obtenir des pics plus fins, il faudrait augmenter R et le rendre le plus proche possible de 1. Le nombre n_u de rayons utiles était 29 et la finesse est de l'ordre de n_u. En effet,

© Nathan, *classe prépa*

le nombre de rayons utiles augmente quand R se rapproche de 1, on a des interférences à n_u ondes cohérentes et la finesse augmente.

Pour un réseau de pas d, les pics se situent en incidence normale en $\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} = 2p\pi$ et la largeur totale de frange vaut $\frac{4\pi}{N}$. Les pics sont plus fins car ce sont des interférences à N ondes cohérentes avec $N \gg n_u$.

4 La lentille L_2 est achromatique car si l'on veut séparer des longueurs d'onde, il ne faut pas projeter sur l'écran avec une lentille qui influe sur la longueur d'onde.

On calcule les rayons des anneaux en écrivant $2d\cos i = p\lambda$ d'où $2d\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = p\lambda$ et $\rho = fi$.

$p_0(\lambda_1) = \frac{2d}{\lambda_1} = 31\,605{,}6$ et $p_0(\lambda_2) = \frac{2d}{\lambda_2} = 31\,595{,}6$.

Rayons des 4 premiers anneaux en mm pour $\lambda_1 = 632{,}8$ nm et $\lambda_2 = 633{,}0$ nm

λ_1	ρ_1	5,9	9,9	12,73	15,02
	p_1	31 605	31 604	31 603	31 602
λ_2	ρ_2	6,0	7,1	12,77	15,05
	p_2	31 595	31 594	31 593	31 592

On peut déceler un écart de longueur d'onde $\Delta\lambda$ conduisant à un recouvrement des pics à mi-hauteur, cela correspond à une variation de déphasage de $\Delta\phi = \frac{2\pi}{F}$.

$\phi = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos i$ d'où $\frac{\Delta\phi}{\phi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, d et i ne variant pas.

Finalement, on peut écrire : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\pi\lambda}{4\pi dF} = \frac{\lambda}{2dF}$ et le pouvoir de résolution R vaut $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2dF}{\lambda}$.

A.N. : $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \mathbf{10^6}$.

Le Fabry-Pérot est un outil puissant de spectroscopie car il permet de déceler, en théorie, une variation de longueur d'onde à 10^{-6} près dans le domaine du rouge ($\lambda = 633{,}0$ nm).

en conclusion

Il faut savoir additionner une infinité d'ondes et bien évaluer leurs amplitudes.

© Nathan, *classe prépa*

1 * 10 min

➤ Corrigé p. 202

Calcul de l'incertitude sur la mesure du pas d'un réseau

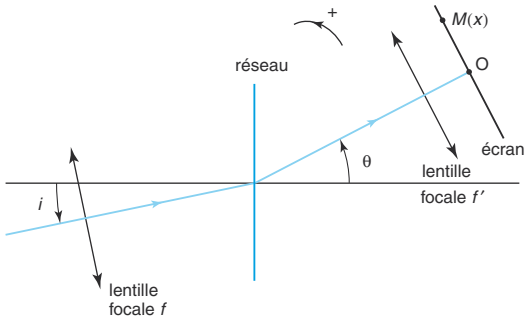
On mesure le pas d'un réseau en incidence normale à l'aide d'un goniomètre et de la lampe à vapeur de mercure. On a réglé $i = 0$ à la minute d'angle près. On mesure, pour les raies suffisamment intenses (ici de 0,404 7 µm à 0,579 0 µm), les positions $\alpha_{p,\lambda}$ de la lunette à la demi-minute d'angle près dans les ordres 1 et 2. On en déduit le pas du réseau a dans chaque ordre. On admet que la précision sur les longueurs d'onde est telle que l'incertitude est nulle.
Que vaut le pas du réseau et l'incertitude sur le pas ? On donne $a_1 = 1{,}665$ µm, $a_2 = 1{,}671$ µm et les déviations du faisceau sont supposées petites à l'ordre 1 mais pas à l'ordre 2.

2 * 20 min

➤ Corrigé p. 202

Mesure au minimum de déviation

Une fente éclairée par une source monochromatique est placée au foyer objet d'une lentille convergente (f) et éclaire un réseau. L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (f'). Les fentes du réseau sont espacées de a.



1. Démontrer la formule des réseaux en transmission.

2. Déterminer la relation entre θ et i pour que la déviation D soit minimale.

3. On suppose la relation ci-dessus vérifiée. Quelle relation vérifie i en considérant que l'on se trouve au minimum de déviation d'ordre 2 ?

4. Déterminer le pas du réseau. Faire l'application numérique avec $\lambda_0 = 0{,}586\,1$ µm et $i = -23°$.

5. Soit $B = \dfrac{dX}{di}$ avec X qui repère la position du point M sur l'écran. Déterminer B sachant que la radiation λ_0 est observée en $X = 0$ et que l'on se trouve au minimum de déviation d'ordre 2. Calculer numériquement B avec $f' = 20$ cm.

3 * 20 min

➤ Corrigé p. 202

Choix du réseau pour séparer le doublet du sodium

1. Soit un réseau utilisé en incidence normale pour séparer le doublet du sodium, quelle est la valeur limite du nombre de traits utiles à l'ordre 2 ? Estimer l'ordre de grandeur du pas du réseau. On donne $\lambda_1 = 0{,}589\,0$ µm et $\lambda_2 = 0{,}589\,6$ µm.

2. Un réseau est éclairé en incidence normale sur une largeur de 10 mm par le doublet du sodium. Le doublet est séparé à l'ordre 5. Quel est le pas du réseau ? Quelle est la largeur de faisceau nécessaire pour séparer le spectre d'ordre 3 ? Dans la pratique, est-ce réalisable en modifiant une caractéristique du goniomètre ?

4 ** 20 min

➤ Corrigé p. 203

Spectromètre à réseau

On utilise un spectrogoniomètre à réseau (15 000 LPI) pour déterminer des longueurs d'onde. On mesure, pour trois longueurs d'onde différentes, la déviation à l'ordre 2 pour un grand nombre de valeurs de l'angle d'incidence i.
Les trois courbes présentent un minimum. On donne $i_{1\min} = 13{,}9°$, $i_{2\min} = 18{,}8°$ et $i_{3\min} = 22{,}4°$.

1. Faire un schéma du dispositif.

2. Trouver la longueur d'onde de chaque enregistrement.

© Nathan, classe prépa

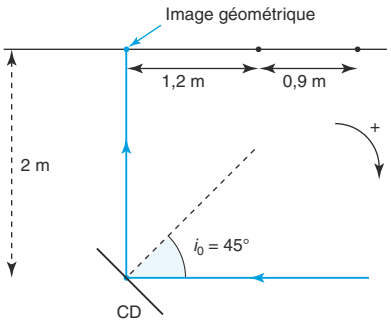
5 ** 20 min

➤ Corrigé p. 203

Réseau par réflexion
Capacité de stockage des CD et DVD

1. On étudie un réseau en réflexion. Donner la formule du réseau dans cette utilisation.

2. Avec un pointeur laser (λ = 0,633 µm) et un CD ou un DVD, vous pouvez faire chez vous la manipulation suivante. Vous « attaquez » la surface du CD avec le faisceau laser sous un angle d'environ 45°. Sur le mur à une distance d'environ 2 m, on observe un point lumineux qui correspond à l'image géométrique et deux traits légèrement courbés, le premier étant à une distance de 1,2 m environ du point lumineux. La distance entre les deux traits est de 0,9 m.



Avec le DVD, on observe sur le mur un point lumineux et un seul trait lumineux à plus de 2 m de l'image géométrique (on observe aussi une sous structure au niveau des traits selon que le CD ou DVD est simple ou double couche).
Interpréter les observations.

3. Donner un ordre de grandeur en octets de la capacité de stockage de ces deux supports.

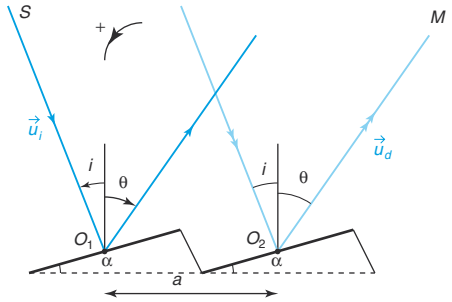
6 *** 20 min

➤ Corrigé p. 204

Réseau à échelette

1. On étudie un réseau en réflexion en incidence quelconque de pas a. Donner la formule du réseau dans cette utilisation.

2. On étudie un réseau à échelette de même pas mais le motif est différent. Un réseau à échelette consiste en une série de N bandes réfléchissantes planes de largeur h, très longues, de centre O_1, O_2, …, O_n. Le pas du réseau est $a = O_nO_{n+1}$. Les bandes sont inclinées d'un angle α sur la direction O_1O_N. Analyser le phénomène de diffraction par un motif et le phénomène d'interférences par deux motifs consécutifs. Calculer l'intensité diffractée par N motifs.



surface diffractante par réflexion

3. On veut rester au centre de la tache centrale de diffraction par un motif. Montrer qu'on peut privilégier un ordre p en choisissant l'angle d'incidence et ainsi résoudre le problème du chevauchement des spectres dans les ordres élevés ainsi que la chute de leur intensité.

7 *** 30 min

➤ Corrigé p. 204

Réseau avec des défauts

Soit un réseau de pas a de N traits identiques mais irréguliers. Ces irrégularités sont modélisées par la formule suivante : la position des traits est donnée par

$$x_n = a\left(n + \varepsilon \sin\frac{2n\pi}{p}\right) \quad \text{avec} \quad p \ll N \quad \text{et} \quad \varepsilon \ll 1.$$

Quelle est l'intensité diffractée par ce réseau ?
Est-ce dommageable quant à l'utilisation de ce réseau en spectroscopie ?

8 *** 40 min

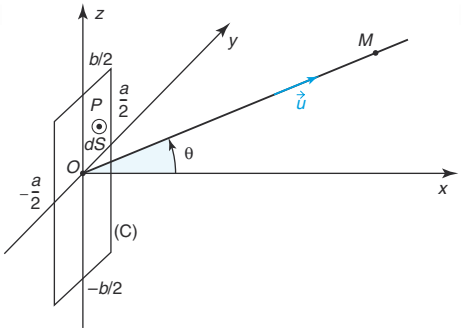
➤ Corrigé p. 205

Échographie médicale à ultrasons
(d'après CCP)

Partie A – Générateur à un élément vibrant

Le générateur le plus simple est constitué par la surface plane S, rectangulaire de largeur a et de hauteur $b \gg a$ d'une céramique piézoélectrique située dans le plan Oyz, de centre O et d'axe Ox.

© Nathan, classe prépa



On admet que les éléments dS situés aux divers points P de la surface S vibrent avec la même phase $\phi_0 = 0$ et émettent des ondes sinusoïdales cohérentes de longueur d'onde λ suivant le principe d'Huygens-Fresnel. Pour $b \gg a$, l'émission est pratiquement localisée dans le plan Oxy. Dans ce plan, la direction $\overrightarrow{OM}$ d'émission vers un point M très éloigné de O est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec Ox $(-90° \leqslant \theta \leqslant 90°)$.

1. Par analogie avec le calcul de l'amplitude complexe diffractée à l'infini par une fente allongée, de largeur a, recevant une onde lumineuse plane sous incidence normale, déterminer l'amplitude acoustique complexe $\underline{a}(\theta)$ reçue au point M, dans la direction θ.

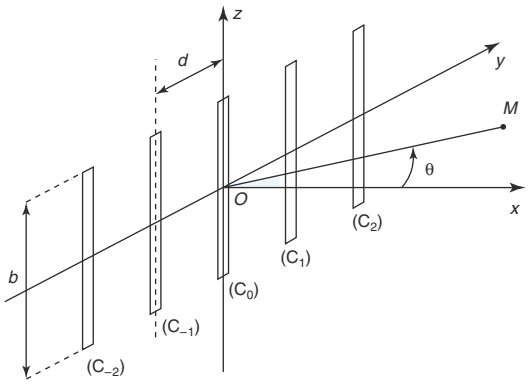
2. En déduire l'intensité acoustique $I(\theta) = K\underline{a}(\theta)\underline{a}^*(\theta)$; on notera I_0 l'intensité acoustique dans la direction de l'axe Ox.

3. Pour $a = \lambda$, déterminer la direction du maximum d'intensité et les directions d'intensité nulle ; préciser la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ du maximum d'intensité. Représenter les variations de I en fonction de $\sin\theta$.

Partie B – Générateur à plusieurs éléments vibrants

Un générateur réel comporte une série de $N = 2N' + 1$ céramiques (C_m) supposées très fines, distantes de d, numérotées m de $-N'$ à $+N'$ et ayant une phase ϕ_m réglable au moyen de lignes à retard séparées. On prend $N' = 5$.

On étudie le seul phénomène d'interférences des ondes émises par les N céramiques, supposées très fines, en un point M très éloigné, dans la direction $\overrightarrow{OM}$ du plan Oxy faisant l'angle θ avec l'axe Ox.



1. Toutes les céramiques émettent avec la même phase $\phi_m = 0$

a. Exprimer la différence de phase $\Phi(\theta)$ en M entre deux ondes issues des centres de deux céramiques consécutives.

b. Montrer que l'intensité I de l'onde résultante en M présente des maxima principaux dans certaines directions θ_p dépendant d'un entier p. Combien peut-on en observer pour $d = 2\lambda$?

c. Montrer que la demi-largeur angulaire $\Delta\theta'$ du maximum principal d'ordre 0 est la même que celle d'une fente de largeur Nd ; la comparer à celle $\Delta\theta$ du maximum d'intensité obtenu avec la céramique unique.

d. Représenter l'allure des variations de I en fonction de $\sin\theta$.

2. Balayage du faisceau d'ultrasons : les céramiques émettent avec des phases différentes

On introduit une différence de phase ϕ_0 constante entre chaque céramique de telle sorte que $\phi_m = m\phi_0$.

a. En déduire les nouvelles amplitude $\underline{a}'(\theta)$ et intensité $I'(\theta)$.

b. Quelle est la nouvelle direction θ_0 du maximum principal d'ordre $p = 0$? En déduire qu'il est possible de balayer avec le faisceau d'ultrasons le plan Oxy par une méthode à préciser.

© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 Réponse **b.** On calcule le nombre de traits n par cm, $n = \frac{8\,000}{2{,}54}$ et on en déduit a. $a = 3{,}175\ \mu\text{m}$.

2 Réponse **c.** La largeur des maxima principaux est due à la diffraction par toute la partie utile du réseau Na donc la demi-largeur angulaire est $\frac{\lambda}{Na}$ et la largeur angulaire totale $\frac{2\lambda}{Na}$.

3 Réponse **a.** On observe trois images par diffraction du réseau donc $E\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 1$. Le pas a du réseau vérifie $\lambda \leqslant a < 2\lambda$ donc $0{,}63\ \mu\text{m} \leqslant a < 1{,}27\ \mu\text{m}$ et n le nombre de traits par mm $790 < n < 1\,590$. L'ordre de grandeur est de 1 000 traits par mm.

4 Réponse **c.** Le pas du réseau vaut $a = 4{,}55\ \mu\text{m}$ et $E\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 7$. On observe, *a priori*, 15 images par diffraction du réseau.

Combien sont situées dans la tache centrale de diffraction par un trait ? On calcule le nombre n théorique qui est $\frac{2\lambda}{h} = n\frac{\lambda}{a}$ donc $h = \frac{2a}{n} = 1\ \mu\text{m}$. Dans les taches secondaires deux fois moins larges que la tache principale, on observe deux fois moins de points, on s'attend à 4 points lumineux au maximum mais comme il n'y a que 15 images au total, on n'en observe que 3.
Les résultats sont cohérents entre eux.

5 Réponse **a.** Le pouvoir dispersif augmente avec l'ordre p. Si on affine la fente d'entrée, les images de la fente sont plus fines et permettent de mieux séparer les raies. L'angle d'incidence intervient car le pouvoir dispersif vaut $\frac{p}{a\cos\theta}$; quand l'angle d'incidence i diminue, l'angle d'émergence θ diminue, son cosinus augmente et le pouvoir dispersif diminue.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

1 **1.** Pour séparer en théorie un doublet, il faut utiliser le critère de Rayleigh et écrire que la distance en $\sin\theta$ entre les deux raies doit être supérieure ou égale à la demi-largeur en $\sin\theta$ d'un maximum principal. Soit $p\frac{\lambda_2}{a} - p\frac{\lambda_1}{a} \geqslant \frac{\lambda_m}{Na}$. Il en résulte que $\Delta\lambda \geqslant \frac{\lambda_m}{Np}$.
Calculons a : $a = 1{,}75\ \mu\text{m}$. Calculons le nombre N de traits utiles $N = \frac{L}{a}$: $N = 2\,850$.
$\Delta\lambda \geqslant \frac{\lambda_m}{Np}$ et $\Delta\lambda_{\min} = 0{,}10$ nm.

2. Ce réseau permet de séparer le doublet du sodium.

2 Les positions angulaires des maxima principaux sont données par $\sin\theta = \frac{p\lambda}{a}$ en incidence normale. Un réseau 8 000 LPI a un pas a de $3{,}175\ \mu\text{m}$. $\sin\theta = 0{,}172p$. $E\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 5$. p peut donc prendre 6 valeurs positives ou nulles. $\theta_{-p} = -\theta_p$.

Positions angulaires des maxima principaux exprimées en degrés

p	0	1	2	3	4	5
$\sin\theta$	0	0,172	0,344	0,516	0,688	0,860
$\theta°$	0	9,9	20,1	31,1	43,5	59,3

Remarque : pour de petits angles, on peut approximer $\sin\theta$ à θ mais attention aux grands angles.

3 Calculons d'abord le pas du réseau, $\sin\theta = \frac{p\lambda}{a}$ en incidence normale. $a = 10{,}2\ \mu\text{m}$ pour $p = 3$ et $\lambda = 589{,}3$ nm.
Le doublet jaune du sodium est tout juste séparé si $\Delta\lambda = \frac{\lambda_m}{Np}$. $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm et $\lambda_m = 589{,}3$ nm, $N = 327$.
Le réseau doit donc être éclairé sur une largeur de Na.
A.N. : Na = **3,4 mm**.

4 Ce réseau a un pas a de $1{,}69\ \mu\text{m}$. $\sin\theta = \frac{p\lambda}{a}$ en incidence normale.

L'écran étant situé à $D = 50$ cm du réseau, le centre du trou carré correspond à $\tan\theta = \frac{d}{D}$ avec $d = 20$ cm.

A.N. : $\tan\theta = \frac{20}{50}$ et $\sin\theta = \mathbf{0{,}371}$.

Le trou carré de 5 mm de côté est situé dans l'ordre 1 qui s'étend, dans le visible, entre les limites $\sin\theta = 0{,}24$ et $\sin\theta = 0{,}44$. L'intervalle sélectionné par le trou carré correspond à des sinus qui vont de 0,367 à 0,375 donc à des longueurs d'onde allant de 0,622 µm à 0,635 µm. Cet intervalle correspond au rouge.

S'entraîner

1 La moyenne des deux pas donne $a = 1{,}668$ µm. On a calculé le pas grâce à la formule des réseaux : $\sin\theta_p - \sin i = \frac{p\lambda}{a}$ avec $\theta_p = \alpha_p - \alpha_0$; α_0 est la position de l'image géométrique de la source. Les angles α sont repérés à la demi-minute d'angle près donc les angles θ à la minute d'angle près.

Pour un ordre fixé p et une longueur d'onde fixée, différentions la formule des réseaux :

$$\cos\theta_p \mathrm{d}\theta_p - \cos i \mathrm{d}i = -\frac{\lambda \mathrm{d}a}{a^2}$$

En incidence normale, $\cos i = 1$. $\Delta i = 1'$, $\Delta\theta_p = 1'$. Les angles θ_1 sont suffisamment petits pour pouvoir écrire $\cos\theta_1 \approx 1$.

$$\mathrm{d}\theta_1 - \mathrm{d}i = -\frac{\lambda \mathrm{d}a}{a^2}$$

$$\frac{\lambda \Delta a}{a^2} = \Delta\theta_1 + \Delta i$$

$$\Delta a_1 = \frac{a^2(\Delta\theta_1 + \Delta i)}{\lambda}$$

A.N. : $\Delta a_1 = \mathbf{4 \cdot 10^{-3}\ \mu m}$ en prenant la longueur d'onde la moins favorable donc la plus petite.

On vérifie dans l'ordre 2 :

$$\cos\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 - \mathrm{d}i = -\frac{2\lambda \mathrm{d}a}{a^2},$$

$$\frac{2\lambda \Delta a}{a^2} = |\cos\theta_2|\Delta\theta_2 + \Delta i \leqslant \Delta\theta_2 + \Delta i,$$

$$\Delta a_2 = \frac{a^2(\Delta\theta_2 + \Delta i)}{2\lambda} \leqslant \Delta a_1.$$

On prend la valeur la plus grande donc Δa_1.

A.N. : $a = \mathbf{1{,}668 \pm 0{,}004\ \mu m}$.

L'incertitude est sous-estimée car elle ne tient pas compte de l'œil qui peut accommoder pendant le réglage de la lunette auto-collimatrice (latitude de mise au point de la lunette) et des incertitudes dues à l'expérimentateur pour les visées. On a seulement tenu compte de la lecture sur le vernier et de l'erreur sur l'incidence normale.

2 **1.** Pour un réseau, les positions des maxima d'intensité sont obtenues quand les N ondes diffractées sont en phase donc quand les ondes diffractées par deux traits consécutifs sont en phase. La différence de marche optique entre deux traits distants de a est $a(\sin\theta - \sin i)$. Exprimons que les deux ondes diffractées sont en phase : $a(\sin\theta - \sin i) = p\lambda$ avec p entier.

Conseil : utiliser la méthode la plus physique qui est aussi la plus rapide.

2. La déviation est $D = \theta - i$. Différentions la formule des réseaux à p, a et λ constants :
$\cos\theta \mathrm{d}\theta - \cos i \mathrm{d}i = 0$ et $\mathrm{d}D = \mathrm{d}\theta - \mathrm{d}i$.
Les extrema sont obtenus pour $\mathrm{d}D = 0$, il en résulte $\cos\theta = \cos i$ ce qui donne deux solutions. $\theta = i$ correspond à la position de l'image géométrique et $\theta = -i$ correspond à la position de l'extremum qui est un minimum. On obtient finalement $-2a\sin i_m = p\lambda$.

3. Au minimum de déviation d'ordre 2, $-2a\sin i_m = 2\lambda$.

4. $a = \frac{-\lambda}{\sin i_m}$ A.N. : $a = \mathbf{1{,}5\ \mu m}$.

5. $X = f'\tan(\theta - \theta_m)$ avec θ_m qui correspond à λ_0 à l'ordre 2. $\theta - \theta_m$ est un petit angle, on peut donc approximer la tangente à l'angle. $X = f'(\theta - \theta_m)$ avec $a(\sin\theta_m - \sin i_m) = 2\lambda_0$

$$B = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}i} = f'\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}i} = f'\frac{\cos i_m}{\cos\theta_m} = f' \quad \text{car} \quad \cos\theta_m = \cos i_m$$

puisqu'on est au minimum de déviation.
A.N. : $B = \mathbf{20\ cm}$.

3 **1.** On utilise la formule des réseaux en incidence normale : $\sin\theta_p = \frac{p\lambda}{a}$. Pour séparer un doublet $\Delta\lambda$, il

© Nathan, *classe prépa*

faut que les maxima principaux dans l'ordre 2 correspondant aux deux longueurs d'onde soient distants en $\sin\theta$ d'au moins $\frac{\lambda}{Na}$ d'après le critère de Rayleigh. Dans l'ordre 2, les deux maxima sont situés respectivement en $\frac{2\lambda_1}{a}$ et en $\frac{2\lambda_2}{a}$ si on raisonne en $\sin\theta$.

$$\frac{2\lambda_1}{a} - \frac{2\lambda_2}{a} = \frac{2\Delta\lambda}{a} \geqslant \frac{\lambda_{moyen}}{Na}$$

$$N \geqslant N_{limite} = \frac{\lambda_{moyen}}{2\Delta\lambda}$$

Pour le doublet du sodium, $\lambda_{moyen} = 0{,}589\,3\ \mu m$ et $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm.

A.N. : $N_{limite} = \mathbf{491}$.

Dans les conditions usuelles d'utilisation du réseau pour mesurer des longueurs d'onde, le faisceau a une largeur de quelques mm car on affine la fente source.

A.N. : Si on choisit une largeur de 5 mm, on trouve un pas de réseau $a = \mathbf{10{,}2\ \mu m}$.

A.N. : Si on choisit une largeur de 1 mm, on trouve un pas de réseau $a = \mathbf{2\ \mu m}$.

2. Le doublet est séparé à l'ordre 5, $N_{limite} = \frac{\lambda_{moyen}}{5\Delta\lambda}$.

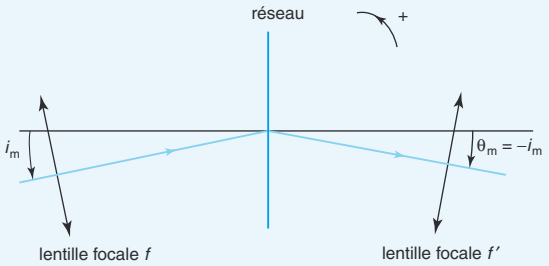
A.N. : $N_{limite} = \mathbf{197}$ et $a = \mathbf{50{,}8\ \mu m}$.

Pour séparer le doublet dans l'ordre 3, $N_{limite} = \frac{\lambda_{moyen}}{3\Delta\lambda}$.

A.N. : $N_{limite} = \mathbf{328}$ et la largeur vaut **17 mm**.

Dans la pratique, si on élargit le faisceau sur le réseau, cela signifie qu'on a élargi la fente source ; c'est la largeur de la fente source qui limite alors la séparation du doublet.

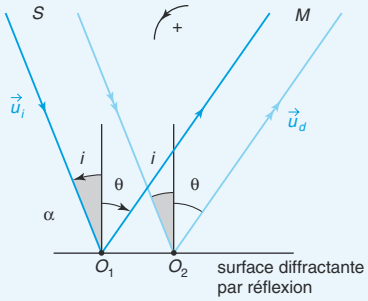
4 **1.** Les courbes présentent un minimum de déviation. Il faut donc se placer dans les conditions du minimum de déviation $\theta_{min} = -i_{min}$. Le schéma du dispositif est donné sur la figure ci-dessous. La lentille de focale f représente le collimateur du goniomètre et la lentille de focale f' représente la lunette auto-collimatrice du goniomètre.



2. Un réseau 15 000 LPI a un pas $a = 1{,}69\ \mu m$. Au minimum de déviation, la formule des réseaux donne : $-2\sin i_{min} = 2\frac{\lambda}{a}$. Il en résulte que la longueur d'onde est donnée par $\lambda = a|\sin i_{min}|$

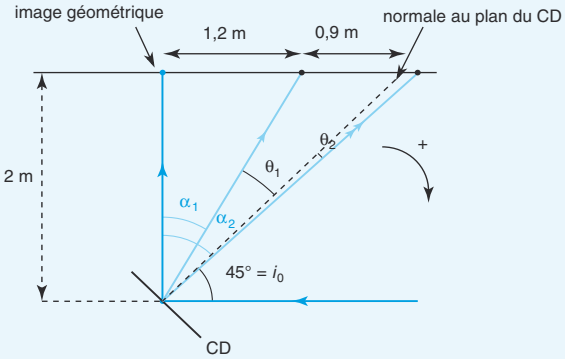
A.N. : $\lambda_{1min} = \mathbf{406{,}8\ nm}$, $\lambda_{2min} = \mathbf{545{,}7\ nm}$ et $\lambda_{3min} = \mathbf{645{,}3\ nm}$.

5 **1.** Dans l'exercice n° **1** de « Savoir résoudre les exercices », nous avons calculé la différence de marche optique : $\delta = a(\sin\theta + \sin i)$. La formule qui donne la position des maxima d'intensité est $\sin\theta + \sin i = \frac{p\lambda}{a}$ avec les conventions pour θ et i indiquées sur la figure.



Attention : en réflexion, avec des angles d'incidence i de l'ordre de 45°, on ne peut pas assimiler le sinus de l'angle θ à l'angle θ.

2. Pour le CD, dans cette manipulation, on observe de la lumière diffractée par réflexion sur un réseau. En effet, des sillons sont gravés sur une couche réfléchissante en sandwich entre deux couches dont l'une est transparente ; ces sillons circulaires sont très proches et diffractent la lumière du laser. Les deux traits obtenus sur le mur correspondent à deux maxima d'intensité de la diffraction, ils sont légèrement courbés en raison de la forme circulaire des sillons.



Remarque : dans une utilisation normale, une diode laser envoie de la lumière sur le CD. La lumière réfléchie (dans la direction de l'optique géométrique) est reçue par un photodétecteur puis convertie en signaux numériques et finalement en signaux acoustiques.

© Nathan, *classe prépa*

Le point lumineux qui correspond à l'image géométrique est obtenu pour $\theta_0 = -i_0 = -45°$ (avec les conventions de la question **1.**)(voir figure précédente). Le premier trait est obtenu pour l'angle θ_1 (il correspond à l'ordre $p = 1$) tel que $\tan\alpha_1 = \frac{1{,}2}{2}$ ce qui donne $\alpha_1 = 31°$ et $\theta_1 = -45 + \alpha_1 = -14°$.

$\sin\theta_1 + \sin i_0 = \frac{\lambda}{a}$.

A.N. : $a \approx$ **1,4 µm**.

Le deuxième trait est obtenu à l'ordre $p = 2$ pour l'angle α_2 tel que $\tan\alpha_2 = \frac{2{,}1}{2}$ et $\sin\theta_2 + \sin i_0 = \frac{2\lambda}{a}$

A.N. : $\alpha_2 =$ **46,4°** et $\theta_2 =$ **1,4°** d'où $a =$ **1,7 µm**.

Les deux mesures sont cohérentes car il s'agit d'ordre de grandeur. Les mesures ne sont pas précises.

Pour le DVD, le raisonnement est le même, on ne voit qu'un maxima car les sillons sont plus proches. Ce maxima correspond à un angle θ positif et très proche de 0. $\sin i_0 = \frac{\lambda}{a}$. On obtient $a \approx 0{,}9$ µm.

3. On connaît donc le pas a du réseau. Si on considère que a^2 est la taille d'un bit, il suffit de diviser la surface utile du support par a^2 pour trouver le nombre de bits stockés donc le nombre d'octets (8 bits) stockés.

La surface utile commune aux deux supports est de l'ordre de $100\ \text{cm}^2 = 10^{10}\ \mu\text{m}^2$. Pour 1,4 µm, on trouve de l'ordre de $9 \cdot 10^9$ bits donc environ 1 100 Mo et pour 1,7 µm, on trouve de l'ordre de $35 \cdot 10^9$ bits donc environ 400 Mo.

Pour 0,9 µ m, on trouve de l'ordre de $2 \cdot 10^9$ bits donc environ 1,5 Go.

Ces valeurs sont cohérentes avec les capacités de stockage des CD (700 Mo) et des DVD (4,7 Go).

6 **1.** Même réponse que dans l'exercice 5 question **1.** : $\delta = a(\sin\theta + \sin i)$.

2. Dans l'exercice n° **1** de « Savoir résoudre des exercices », nous avons calculé la différence de marche optique pour des rayons diffractés par deux points appartenant au même motif et distants de b sur le motif : $\delta_{3/1}(M) = b(\sin(i-\alpha) + \sin(\theta-\alpha))$ avec les conventions pour θ, α et i indiquées sur la figure.

L'intensité diffractée par un motif se calcule comme l'intensité diffractée par une fente en sommant sur b qui varie entre $-\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$, elle est en sinus cardinal au carré :

$$\text{sinc}^2\left(\frac{\pi h(\sin(i-\alpha) + \sin(\theta-\alpha))}{\lambda}\right).$$

Pour les interférences, la différence de marche optique pour les rayons diffractés par deux points homologues de deux motifs consécutifs vaut :

$\delta_{2/1}(M) = a(\sin i + \sin\theta)$.

L'intensité diffractée par N motifs est l'intensité diffractée par un motif que multiplie le terme d'interférences à N ondes, la fameuse fonction réseau au carré :

$$R_N^2(x) = \left(\frac{\sin N\frac{\phi}{2}}{N\sin\frac{\phi}{2}}\right)^2 \quad \text{avec } \phi = \frac{2\pi a(\sin i + \sin\theta)}{\lambda}.$$

3. Les maxima d'intensité sont donnés par deux conditions : $\sin i + \sin\theta = p\frac{\lambda}{a}$ et

$\sin(i-\alpha) + \sin(\theta-\alpha) = 0$ pour être au centre de la tache centrale de diffraction par un motif.

La seconde condition donne : $\sin(i-\alpha) = -\sin(\theta-\alpha)$

d'où $i - \alpha = -\theta + \alpha$ d'où $\theta = 2\alpha - i$.

Attention : pour le réseau normal, il n'y a qu'une seule condition.

Finalement, $\sin i_0 + \sin(2\alpha - i_0) = p_0\frac{\lambda}{a}$, ce qui fixe l'angle d'incidence pour un ordre p_0 fixé.

Si on envoie un faisceau sous l'angle d'incidence i_0 sur un réseau à échelette, on ne récupère de la lumière émergente diffractée qu'à l'ordre p_0. On a intérêt à choisir p_0 le plus grand possible car le pouvoir dispersif augmente avec l'ordre.

7 Calculons l'amplitude diffractée par ce réseau. Les N amplitudes diffractées par les N traits sont cohérentes, l'amplitude diffractée par tout le réseau est donc la somme des amplitudes diffractées par chaque trait (de même amplitude car les traits sont identiques). On note $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta - \sin i)$ avec les angles d'incidence et d'émergence i et θ. On note $k = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta - \sin i)$ et $\phi = ka$.

$$\underline{a}(M) = \sum_{n=1}^{N} \underline{a}_n(M) = \sum_{n=1}^{N} \underline{a}_0 e^{i\Phi_n(M)}$$

$$\Phi_n(M) = \frac{2\pi}{\lambda}x_n(\sin\theta - \sin i)$$

$$= \left(\frac{2\pi na}{\lambda} + \varepsilon\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\frac{2n\pi}{p}\right)(\sin\theta - \sin i)$$

$$= n\phi + \phi\varepsilon\sin\frac{2n\pi}{p}$$

On va obtenir un premier terme qui est celui des réseaux réguliers et un second terme qu'on va développer à l'ordre 1 car $\varepsilon \ll 1$.

© Nathan, *classe prépa*

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_0\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\phi} e^{i\phi\varepsilon \sin\frac{2n\pi}{p}}\right)$$

$$e^{i\phi\varepsilon \sin\frac{2n\pi}{p}} \approx 1 + i\phi\varepsilon \sin\frac{2n\pi}{p} = 1 + \frac{\phi\varepsilon}{2} e^{i\frac{2n\pi}{p}} - \frac{\phi\varepsilon}{2} e^{-i\frac{2n\pi}{p}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{in\phi}\left(1 + \frac{ka\varepsilon}{2} e^{i\frac{2n\pi}{p}} - \frac{ka\varepsilon}{2} e^{-i\frac{2n\pi}{p}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e^{in\phi} + \frac{ka\varepsilon}{2} e^{in\left(\phi + \frac{2\pi}{p}\right)} - \frac{ka\varepsilon}{2} e^{in\left(\phi - \frac{2\pi}{p}\right)}$$

Comme $\phi \gg \frac{2\pi}{p}$ car $p \ll N$, on obtient pour l'intensité la somme de trois termes :

$$I(k) = I_{\text{réseau}}(ka) + \left(\frac{ka\varepsilon}{2}\right)^2 I_{\text{réseau}}\left(ka + \frac{2\pi}{p}\right) + \left(\frac{ka\varepsilon}{2}\right)^2 I_{\text{réseau}}\left(ka - \frac{2\pi}{p}\right).$$

Les maxima principaux du réseau régulier sont obtenus en $ka = m2\pi$ (avec m entier) ou $\sin\theta - \sin i = m\frac{\lambda}{a}$. Avec ce réseau irrégulier, chaque maximum principal $k = \frac{m2\pi}{a}$ est entouré de deux maxima secondaires d'intensité beaucoup plus faible en raison de ε^2, centrés en $k = \frac{m2\pi}{a} + \frac{2\pi}{pa}$ et $\frac{m2\pi}{a} - \frac{2\pi}{pa}$.

L'utilisation de ce réseau en spectroscopie n'est plus possible car chaque raie correspondant à une longueur d'onde sera accompagnée de deux raies satellites qui gêneront la séparation des doublets, en revanche pour des applications courantes il pourra encore être utilisé.

8 Partie A

1. Chaque point P de la céramique est source secondaire cohérente avec les autres points de la céramique. La céramique a une forme de fente infiniment fine donc le calcul de l'amplitude acoustique complexe à l'infini $\underline{a}(\theta)$ reçue dans la direction θ est analogue à celui de l'amplitude complexe diffractée à l'infini par une fente en optique. Calculons le déphasage de l'onde diffractée au point P par rapport à un point de référence O de la céramique.

$$\vec{k}_d = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$$

$$\Phi_{P/O} = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2\pi y \sin\theta}{\lambda}$$

$\Phi_{P/O}$ est l'avance de la vibration issue de P par rapport à celle issue de O. La vibration issue de P s'écrit : $\underline{K} e^{i\omega t} e^{i\Phi_{P/O}} dy$.

On intègre entre $y = -\frac{a}{2}$ et $y = \frac{a}{2}$:

$$\underline{a}(M) = \underline{a}(\theta) e^{i\omega t}$$

$$\underline{a}(\theta) = K\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{i\Phi_{P/O}} dy$$

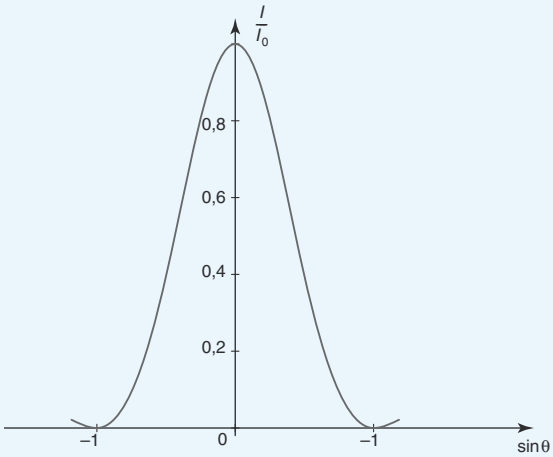
$$\underline{a}(\theta) = a_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right).$$

2. On en déduit l'intensité acoustique : $I(\theta) = C a(\theta) a^*(\theta)$.

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)$$

3. Pour $a = \lambda$, $I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi \sin\theta)$. Le maximum d'intensité est obtenu pour $\sin\theta = 0$ donc $\theta = 0$. Les directions d'intensités nulle sont données par $\sin\theta = \pm 1$ donc $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\Delta\theta = \pi$. Les variations de I en fonction de $\sin\theta$ sont caractéristiques de la fonction sinus cardinal au carré.



Partie B

1. a. Appelons O_i le centre de chaque céramique. Le déphasage (avance) en M entre deux ondes issues des centres de deux céramiques consécutives vaut :

$$\Phi(\theta) = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{O_i O_{i+1}} = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}.$$

b. Pour obtenir les maxima principaux de ces N ondes qui interfèrent, il faut exprimer que les N ondes sont en phase donc que deux ondes consécutives sont en phase (cela suffit car les déphasages sont les mêmes quel que soit le couple choisi de deux céramiques consécutives).

$$\Phi(\theta) = \frac{2\pi d \sin\theta_p}{\lambda} = p2\pi$$

© Nathan, *classe prépa*

On aboutit à la formule dite des réseaux en incidence normale $\sin\theta_p = p\dfrac{\lambda}{d}$ avec p entier.

Pour $d = 2\lambda$, $-1 \leqslant \sin\theta_p = \dfrac{p}{2} \leqslant 1$ et on peut observer 5 maxima principaux mais on n'en observera que 3 car $\sin\theta_p = \pm 1$ correspond à deux rayons rasants difficilement observables. Ces trois maxima principaux correspondent à $\theta_0 = 0$ et $\sin\theta_{\pm 1} = \pm\dfrac{1}{2}$.

c. Soient $\underline{a}_N(\theta)$ et $I_N(\theta)$, l'amplitude et l'intensité résultante des N ondes émises par les N céramiques qui interfèrent.

$$\underline{a}_N(\theta) = \underline{a}_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \sum_{m=1}^{N} e^{i(m-1)\Phi(\theta)}$$

$$= \underline{a}_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

$$= \underline{a}'_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \frac{\sin\dfrac{N\phi}{2}}{\sin\dfrac{\phi}{2}}$$

$$I_N(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \left(\frac{\sin N\dfrac{\Phi(\theta)}{2}}{\dfrac{\Phi(\theta)}{2}}\right)^2$$

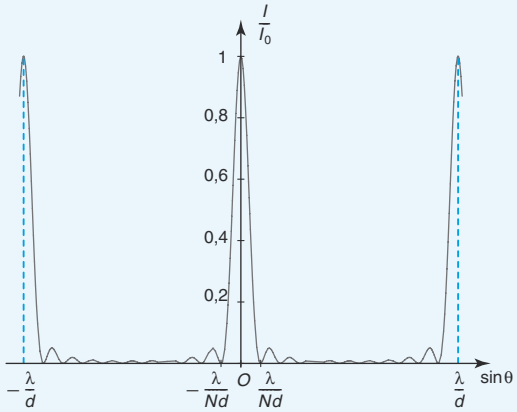
$$= I_0 N^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \left(\frac{\sin N\dfrac{\Phi(\theta)}{2}}{N\dfrac{\Phi(\theta)}{2}}\right)^2$$

La demi-largeur angulaire $\Delta\theta'$ du maximum principal d'ordre 0 se calcule en cherchant les annulations de $\sin N\dfrac{\Phi(\theta)}{2}$ les plus proches de $\theta = 0$. On trouve :

$$\Phi(\theta) = \frac{2\pi d \sin\theta_p}{\lambda} = \frac{2\pi}{N} \text{ implique } \sin\theta_p = \frac{\lambda}{Nd}.$$

La demi-largeur angulaire $\Delta\theta'$ vaut donc $\dfrac{\lambda}{Nd}$, on trouve la même que pour une fente diffractante de largeur Nd. $\Delta\theta' \ll \Delta\theta = \pi$.

d. L'allure des variations de I en fonction de $\sin\theta$ est caractéristique de la fonction réseau au carré.
Entre deux maxima principaux, on a $N - 1 = 10$ annulations de l'intensité et $N - 2 = 9$ maxima secondaires.
On ne s'intéresse qu'aux interférences, les céramiques sont suffisamment fines pour qu'on soit au centre de la tache centrale de diffraction.



2. On introduit une différence de phase ϕ_0 constante entre chaque céramique de telle sorte que $\phi_m = m\phi_0$.
a. On calcule les nouvelles amplitude et intensité.

$$\underline{a}'(\theta) = \underline{a}_0 \sum_{m=1}^{N} e^{i(m-1)(\Phi(\theta)+\phi_0)}$$

$$I'(\theta) = I_0 N^2 \left(\frac{\sin N\dfrac{\Phi(\theta)+\phi_0}{2}}{N\dfrac{\Phi(\theta)+\phi_0}{2}}\right)^2$$

b. La nouvelle direction θ_0 du maximum principal d'ordre 0 est donné par $\Phi(\theta) + \phi_0 = 0$.

$$\Phi(\theta) = \frac{2\pi d \sin\theta_0}{\lambda} = -\phi_0$$

$$\sin\theta_0 = -\phi_0 \frac{\lambda}{2\pi d}$$

On peut balayer le plan Oxy avec le faisceau d'ultrasons en faisant varier ϕ_0. À chaque valeur de ϕ_0, correspond une direction où l'intensité acoustique est maximale.

© Nathan, *classe prépa*

PC

7 Polarisation

© Nathan, *classe prépa*

1 Polarisation – Théorie

1.1. Ondes planes progressives électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques, dans le vide $(n = 1)$ ou dans un milieu linéaire, homogène et isotrope d'indice n, se propagent à la vitesse $\frac{c}{n}$.

Les champs électrique et magnétique satisfont à l'équation de d'Alembert (vectorielle et tridimensionnelle) dont la solution générale est une somme d'ondes planes progressives harmoniques qui se propagent dans la direction $\vec{u}$ à la célérité $\frac{c}{n}$, somme à la fois sur la direction et la pulsation (ou la fréquence).

On notera pour alléger les notations OPPH une onde plane progressive harmonique dans la direction $\vec{u}$ et OPP une onde plane progressive dans la direction $\vec{u}$.

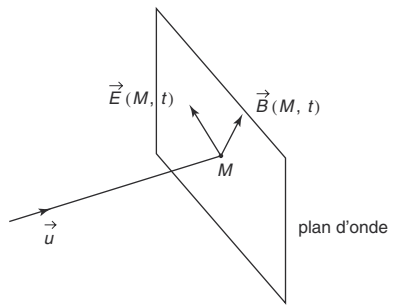
Pour chaque composante du champ électromagnétique :

$$\text{Solution générale} = \sum_{\vec{u}} \text{OPP}_{\text{selon}\,\vec{u}} = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} \text{OPPH}_{\text{selon}\,\vec{u}}$$

$$\text{OPPH}_{\text{selon}\,\vec{u}} = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \text{ avec } \vec{k} = \frac{n}{c}\omega\vec{u} \text{ vecteur d'onde.}$$

Les champs électrique et magnétique en M à t (figure 1) sont perpendiculaires à la direction de propagation, ils sont situés dans un plan appelé le plan d'onde. Dans ce plan, ils sont perpendiculaires entre eux, $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre orthogonal direct.

Fig. 1 *Structure d'une onde plane progressive*



Les ondes électromagnétiques planes progressives ont une structure tranversale dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes dits transparents (célérité $\frac{c}{n}$ avec n constant).

1.2. Polarisation

La direction du champ électrique dans le plan d'onde est appelée direction de polarisation. Pour la lumière naturelle, cette direction varie de manière aléatoire et très rapidement si on compare au temps de réponse des récepteurs usuels. Les récepteurs ne sont donc pas sensibles à la direction du champ électrique. La lumière naturelle (Soleil, lampes usuelles) est dite non polarisée.

La polarisation d'une onde plane progressive est la direction du champ électrique dans le plan d'onde.

Remarque

En TP, quand on envoie sur les deux voies de l'oscilloscope deux signaux **de même pulsation mais déphasés**, en mode XY, on observe des ellipses (courbes de Lissajous). Quand les signaux sont en phase ou en opposition de phase, on observe des droites.

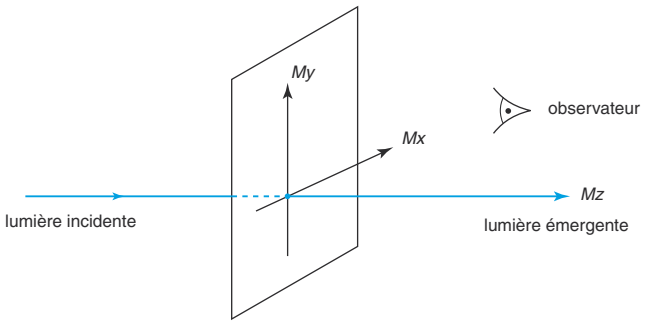
Si cette direction ne varie pas, la polarisation est dite rectiligne (il s'agit bien d'une direction car le champ électrique change de sens durant une période). Sinon, la direction varie au cours du temps.

On s'intéresse alors à la trajectoire que décrit l'extrémité du vecteur champ électrique dans le plan d'onde en une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ pour M fixé.

Pour une **OPPH** il s'agit dans le cas général d'une ellipse (voir le calcul dans l'annexe « Éléments de mathématiques ») : on dit que **la polarisation est elliptique**.

Pour pouvoir étudier plus précisément la polarisation, on va choisir **une direction de propagation** selon $+\vec{u}_z$, donc **le plan d'onde** en M à t est Mxy, et on va prendre la composante du champ électrique selon Mx comme référence de phase (figure 2). ϕ_0 se définit comme **le retard de phase de la composante E_y sur la composante E_x**.

Fig. 2



On peut alors écrire les composantes du champ électrique avec E_{0x} et E_{0y} réels positifs sous la forme générale :

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

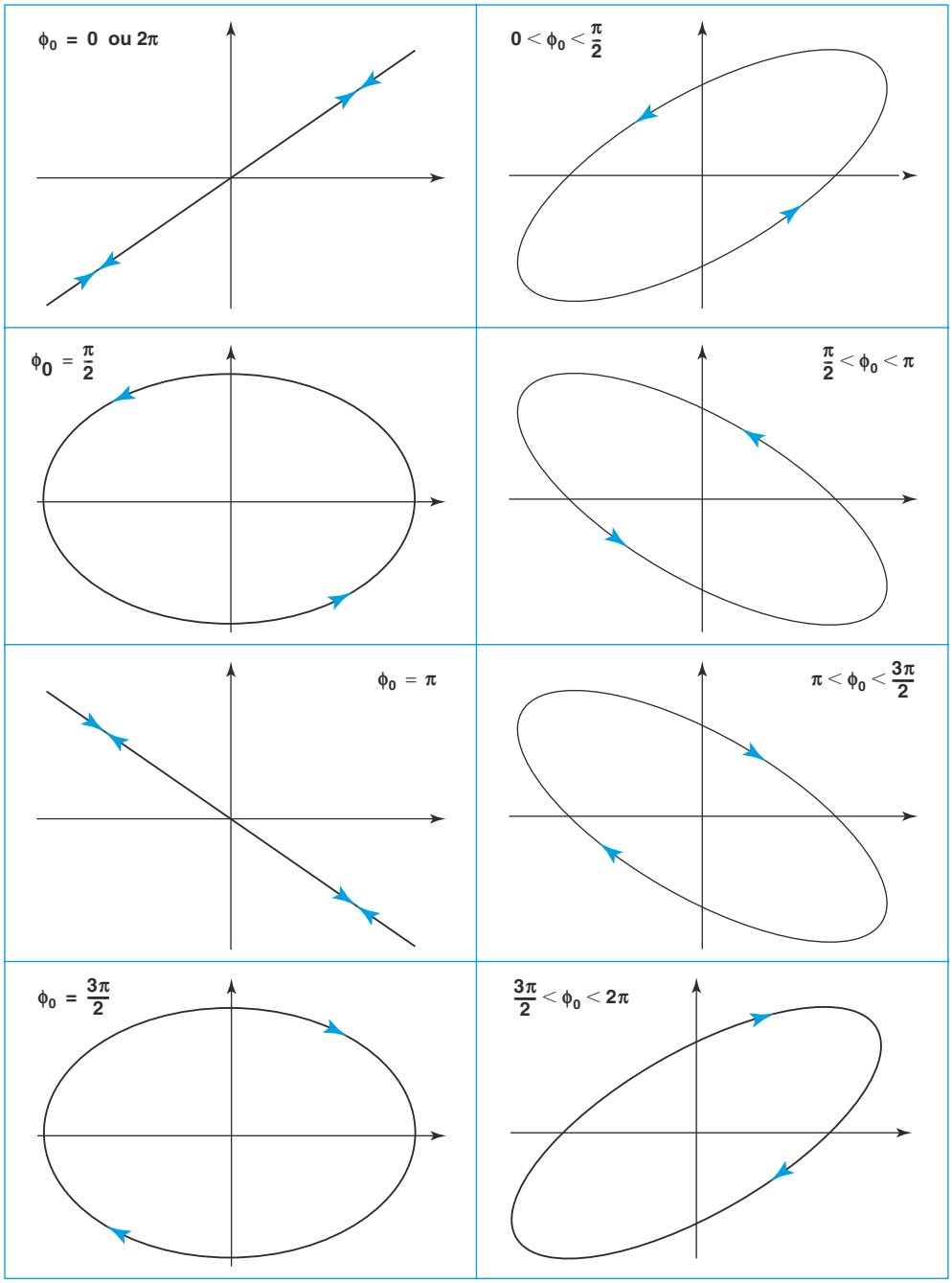
© Nathan, *classe prépa*

Remarque

Pour la détermination du **sens de parcours**, voir l'exercice n° 4 de « Savoir appliquer le cours ».

Si l'observateur voit l'ellipse décrite dans le sens trigonométrique, on parle d'ellipse gauche ou de **polarisation elliptique gauche**. ϕ_0 varie entre 0 et π.
Si l'observateur voit l'ellipse décrite dans le sens des aiguilles d'une montre, on parle d'ellipse droite ou de **polarisation elliptique droite**. ϕ_0 varie entre π et 2π. (voir tableau).

Tableau récapitulatif



© Nathan, *classe prépa*

• Les deux cas particuliers $\phi_0 = 0$ ou π modulo 2π correspondent à une droite. La polarisation est dite **rectiligne**.

• Les cas particuliers $\phi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ modulo 2π correspondent à une ellipse d'axes Mx et My.

• Si de plus, $E_{0x} = E_{0y}$ alors il s'agit d'un cercle : la polarisation est dite **circulaire**. On définit de même la polarisation circulaire droite ou gauche :

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ \pm E_0\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$ avec + pour la circulaire gauche et – pour la circulaire droite.

Les sources de lumière sont constituées d'un grand nombre d'émetteurs (atomes ou molécules). Chacun d'eux peut émettre un train d'onde, ils sont tous aléatoires entre eux, il en résulte une onde non polarisée : toutes les directions de champ électrique sont équiprobables dans le plan d'onde.

• La **lumière naturelle** (pour une pulsation fixée) peut être décrite par un champ électrique dont la direction est quelconque dans le plan d'onde et d'amplitude quasi constante ; elle peut donc être décrite par un champ électrique dont les composantes orthogonales dans le plan d'onde ont même amplitude et un déphasage aléatoire, elles sont incohérentes entre elles.

$$\vec{E}_{\text{naturelle}}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_0\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3. Calculs d'intensité

L'intensité est proportionnelle à la moyenne du carré de l'amplitude du champ électrique.

$$I(M) = K\langle\vec{E}^2(M, t)\rangle = K\langle E_x^2(M, t) + E_y^2(M, t)\rangle = K\langle E_x^2(M, t)\rangle + K\langle E_y^2(M, t)\rangle$$

1.3.1. Pour la lumière naturelle d'amplitude E_0

$$I_{\text{naturelle}}(M) = K\left(\frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2}\right) = KE_0^2$$

1.3.2. Pour la lumière polarisée rectilignement d'amplitude E_0

Pour le calcul, on choisit une polarisation rectiligne selon Mx ou My d'amplitude E_0. Le calcul ne dépend pas de ce choix.

$$I_{\text{rectiligne}}(M) = K\frac{E_0^2}{2}$$

1.3.3. Pour la lumière polarisée elliptiquement

$$I_{\text{elliptique}}(M) = K\left(\frac{E_{0x}^2}{2} + \frac{E_{0y}^2}{2}\right)$$

1.3.4. Pour la lumière polarisée circulairement d'amplitude E_0

$$I_{\text{circulaire}}(M) = K\left(\frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2}\right) = KE_0^2$$

© Nathan, *classe prépa*

1.4. Décomposition – Notations complexes

Une onde polarisée elliptiquement peut être décomposée en deux ondes polarisées rectilignement (ici l'une selon Mx et l'autre selon My).

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une onde polarisée rectilignement peut être décomposée en deux ondes polarisées circulairement droite et gauche.

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La notation complexe peut être utile dans la résolution des problèmes.

- On note l'**OPPH générale** : $\underline{\vec{E}}(M) = (E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-i\phi_0}\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}$.
En prenant la partie réelle, on retrouve l'OPPH réelle.
- L'**OPPH polarisée circulairement** s'écrit : $\underline{\vec{E}}(M) = (E_0\vec{u}_x \pm iE_0\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}$.
Le signe + pour la circulaire droite et le signe – pour la circulaire gauche.
- L'**OPPH polarisée rectilignement** s'écrit : $\underline{\vec{E}}(M) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$.
Elle garde la **direction fixe** $\vec{E}_0$. $\vec{E}(M) = \vec{E}_0\cos(\omega t - kz)$.
- Quant à la **lumière naturelle non polarisée** : $\underline{\vec{E}}(M) = (E_0\vec{u}_x + E_0e^{-i\phi_{at}}\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}$.

© Nathan, *classe prépa*

2 Polariseurs

Ce sont des matériaux appelés « dichroïques » qui absorbent sélectivement une composante du champ électrique. On les réalise avec des films de polymères étirés dans un sens, ce qui va privilégier une direction du champ électrique après passage dans le milieu. On appelle axe du polariseur cette direction privilégiée. Le polariseur est dit parfait si le milieu absorbe totalement une composante et ne laisse passer que la composante perpendiculaire (direction du polariseur).

2.1. Action d'un polariseur parfait sur une lumière quelconque et calculs de l'intensité émergente

Quelle que soit la polarisation de la lumière incidente sur le polariseur parfait, **la lumière émergente ressort toujours dans la direction de l'axe du polariseur** (ou ne ressort pas si la lumière incidente est polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire). On produit ainsi de la lumière **polarisée rectilignement**.

2.1.1. Action d'un polariseur sur une lumière polarisée rectilignement

Soit α l'angle entre la direction du polariseur $\vec{u}_p$ et la direction du champ électrique d'amplitude $\vec{E}_0$.

$$I_{\text{incidente}} = K\frac{E_0^2}{2}$$

À la sortie du polariseur, $\vec{E}_{\text{émergent}} = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz)\vec{u}_P$.

$$I_{\text{émergente}} = K\frac{E_0^2 \cos^2 \alpha}{2} = I_{\text{incidente}} \cos^2\alpha.$$

Cette variation en $\cos^2\alpha$ est appelée la loi de Malus.

Remarque
Si on tourne le polariseur dans son plan, l'intensité émergente varie et peut s'annuler quand la direction du polariseur devient perpendiculaire à $\vec{E}_0$ (extinction).

2.1.2. Action d'un polariseur sur une lumière polarisée elliptiquement

Choisissons l'axe du polariseur $\vec{u}_p$ faisant l'angle α avec $\vec{u}_x$.

$$\vec{E}_{\text{incident}} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\text{incidente}} = K\left(\frac{E_{0x}^2}{2} + \frac{E_{0y}^2}{2}\right)$$

À la sortie du polariseur, si on choisit $\cos\phi_0 = 0$ (ellipse d'axes Ox et Oy) :

$$\vec{E}_{\text{émergent}} = (E_{0x}\cos\alpha\cos(\omega t - kz) + E_{0y}\sin\alpha\cos(\omega t - kz - \phi_0))\vec{u}_P$$

$$I_{\text{émergente}} = K\left(\frac{E_{0x}^2\cos^2\alpha}{2} + \frac{E_{0y}^2\sin^2\alpha}{2}\right).$$

Si $E_{0x} < E_{0y}$, alors $\frac{E_{0x}^2}{2} < \frac{E_{0x}^2\cos^2\alpha}{2} + \frac{E_{0y}^2\sin^2\alpha}{2} < \frac{E_{0y}^2}{2}$

et $I_{\min}(\alpha = 0) < I_{\text{émergente}} < I_{\max}\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

Remarque : si on tourne le polariseur dans son plan, l'intensité émergente varie et l'observateur constate que le maximum et le minimum d'intensité émergente sont obtenus pour deux positions perpendiculaires du polariseur : ce sont les positions du grand axe (maximum) et du petit axe (minimum) de l'ellipse décrite par le champ électrique.

2.1.3. Action d'un polariseur sur une lumière polarisée circulairement

C'est le cas précédent avec $E_{0x} = E_{0y}$.

$$I_{\text{incidente}} = KE_0^2$$

À la sortie du polariseur :

$$I_{\text{émergente}} = K\frac{E_0^2}{2} = \frac{I_{\text{incidente}}}{2}.$$

Remarque
Si on tourne le polariseur dans son plan, l'intensité émergente est constante et l'observateur ne constate aucun changement.

2.1.4. Action d'un polariseur sur une lumière naturelle

Notons $\vec{u}_P$ la direction de l'axe du polariseur et $I_{\text{incidente}}$ l'intensité incidente sur le polariseur.

$$I_{\text{incidente}} = K\left(\frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2}\right) = KE_0^2$$

À la sortie du polariseur : $\vec{E}_{\text{émergent}} = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{u}_P$

$$I_{\text{émergente}} = K\frac{E_0^2}{2} = \frac{I_{\text{incidente}}}{2}$$

Remarque
Si on tourne le polariseur dans son plan, l'intensité émergente est constante et l'observateur ne constate aucun changement.

© Nathan, *classe prépa*

2.2. Analyseur et polariseur croisés

On appelle un analyseur un polariseur qui sert à analyser la lumière. Ils sont dits croisés si leurs axes sont perpendiculaires. La lumière qui sort du polariseur est polarisée rectilignement selon l'axe du polariseur donc **l'intensité émergente d'un polariseur puis d'un analyseur croisé est nulle** (**extinction**) ; ce qu'on retrouve avec la loi de Malus en prenant $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3 Lames demi-onde et quart d'onde

3.1. Milieux biréfringents

Les milieux biréfringents sont anisotropes.

La vitesse de propagation des ondes dans ce milieu n'est pas la même selon deux directions orthogonales appelées les lignes neutres.

On note Ox et Oy ces deux axes, $v_x = \frac{c}{n_x}$ et $v_y = \frac{c}{n_y}$ sont les vitesses respectives de propagation selon ces deux directions.

Si $n_y < n_x$, $v_x = \frac{c}{n_x} < v_y = \frac{c}{n_y}$, on appellera alors l'**axe** Oy **l'axe rapide** et l'**axe** Ox **l'axe lent**. Le champ électrique qui se propage dans un tel milieu voit ses deux composantes (perpendiculaires à la direction de propagation) se déphaser progressivement l'une par rapport à l'autre. On néglige tout phénomène d'absorption.

$$\vec{E}_{\text{dans le milieu}} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - k_x z) \\ E_{0y}\cos(\omega t - k_y z - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{après une épaisseur } e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi n_x e}{\lambda}\right) \\ E_{0y}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi n_y e}{\lambda} - \phi_0\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le déphasage entre la composante du champ électrique qui se propage selon l'axe lent par rapport à la composante qui se propage selon l'axe rapide, pour une épaisseur e de milieu traversé et pour une longueur d'onde donnée, est $\Phi = \frac{2\pi(n_x - n_y)e}{\lambda}$.

On fabrique des lames biréfringentes d'épaisseur e telles que $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ou π, pour une longueur d'onde donnée, ce qui correspond à des différences de marche optique $\delta = (n_x - n_y)e$ égales à $\frac{\lambda}{4}$ ou $\frac{\lambda}{2}$. On les appelle **lame quart d'onde et lame demi-onde**. Elles ne sont opérationnelles que **pour une longueur d'onde donnée**.

© Nathan, *classe prépa*

Remarque
Les choix E_x référence de phase et $z = 0$ à l'entrée de la lame reviennent à faire porter par E_y tout le déphasage entre les deux composantes.

On choisit $z = 0$ à l'entrée de la lame et $z = e$ à la sortie :

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t + \Phi - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2. Lames demi-onde

Une lame demi-onde retarde la composante du champ électrique selon l'axe lent de π par rapport à celle selon l'axe rapide.

Remarque
On note $+\Phi$ car l'axe lent selon x est en retard par rapport à l'axe rapide selon y donc il s'agit d'une avance de y/x et $\Phi > 0$.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t + \pi - \phi_0) = -E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.1. Action d'une lame demi-onde sur une lumière naturelle

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t + \pi - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La composante selon y est déphasée de $\phi_{\text{aléatoire}} - \pi$ par rapport à la composante selon x donc la lumière est toujours naturelle et de même intensité. **Aucun changement du point de vue de la polarisation**.

3.2.2. Action d'une lame demi-onde sur une lumière polarisée rectilignement

Soit α l'angle entre la direction de l'axe lent et la direction du champ électrique d'amplitude $\vec{E}_0$.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_0\cos\alpha\cos(\omega t) \\ E_0\sin\alpha\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_0\cos\alpha\cos(\omega t) \\ -E_0\sin\alpha\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient **une onde polarisée rectilignement, symétrique par rapport aux lignes neutres** de la direction du champ électrique avant la lame.

Attention
La polarisation est une direction. Le sens du champ électrique varie au cours d'une période.

Si $\alpha = 0$ ou $\pm\frac{\pi}{2}$, on obtient une onde polarisée rectilignement de direction inchangée car la direction de $\vec{E}_0$ est confondue avec une des lignes neutres.

3.2.3. Action d'une lame demi-onde sur une lumière polarisée elliptiquement

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ -E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

© Nathan, *classe prépa*

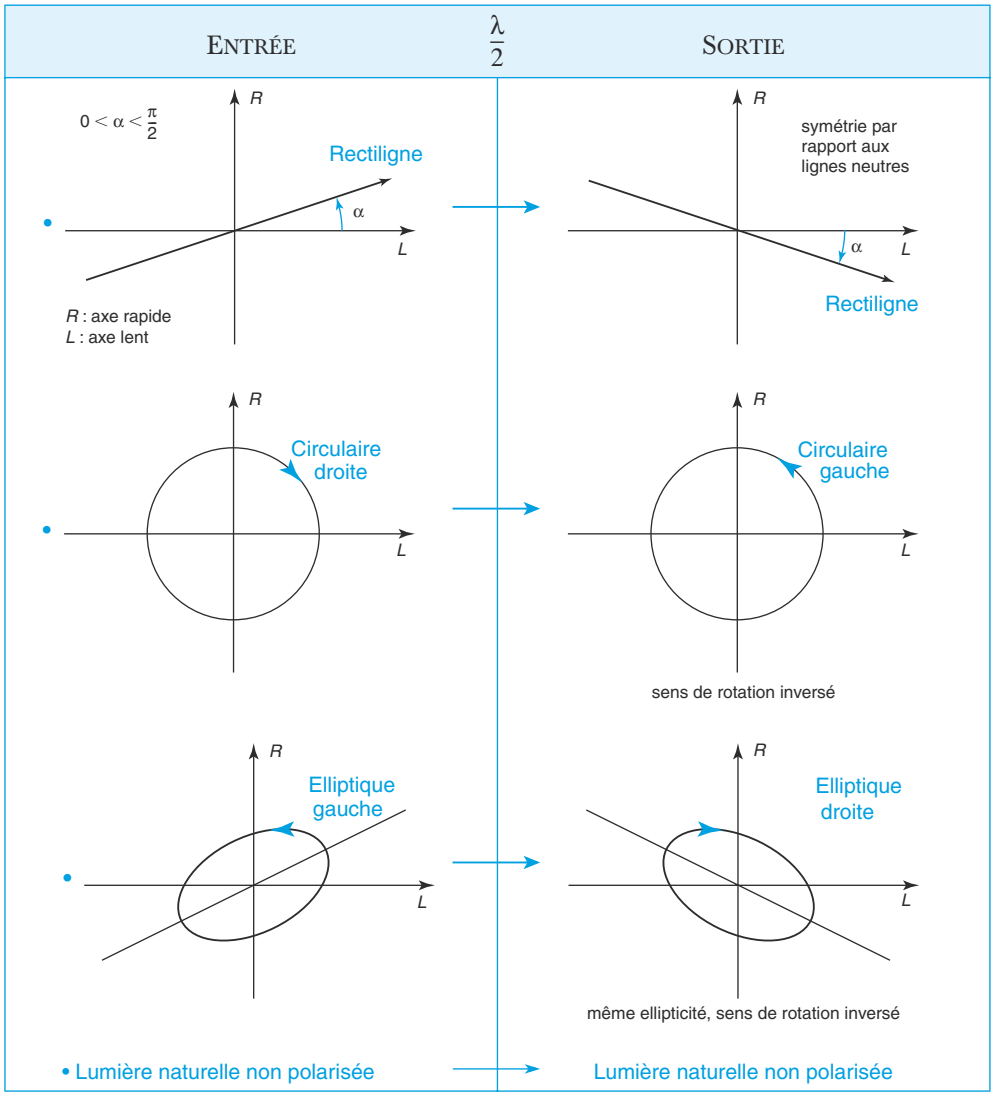
On obtient une onde polarisée elliptiquement et de même ellipticité mais, à chaque position de $\vec{E}$ avant la lame, correspond une position symétrique par rapport à l'axe lent après la lame (E_x inchangé et E_y change de signe), cela change le sens de rotation de l'ellipse.

Une onde polarisée elliptiquement droite devient polarisée elliptiquement gauche et vice versa.

3.2.4. Action d'une lame demi-onde sur une lumière polarisée circulairement

La polarisation circulaire n'étant qu'un cas particulier de la polarisation elliptique, on obtient après la lame une onde polarisée circulairement. Une onde polarisée circulairement droite devient polarisée circulairement gauche et vice versa.

Tableau récapitulatif lame demi-onde



© Nathan, *classe prépa*

3.3. Lames quart d'onde

Une lame quart d'onde retarde la composante du champ électrique selon l'axe lent de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celle selon l'axe rapide.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = -E_{0y}\sin(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3.1. Action d'une lame quart d'onde sur une lumière naturelle

La composante selon y est déphasée de $\phi_{\text{aléatoire}} - \frac{\pi}{2}$ par rapport à la composante selon x donc la lumière est toujours naturelle et de même intensité. **Aucun changement du point de vue de la polarisation**.

3.3.2. Action d'une lame quart d'onde sur une lumière polarisée rectilignement

Soit α l'angle entre la direction de l'axe lent et la direction du champ électrique d'amplitude $\vec{E}_0$.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_0\cos\alpha\cos(\omega t) \\ E_0\sin\alpha\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_0\cos\alpha\cos(\omega t) \\ -E_0\sin\alpha\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient **une onde polarisée elliptiquement d'axes les lignes neutres de la lame**.

- Si $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$, on obtient une onde polarisée circulairement : circulaire droite pour $+\frac{\pi}{4}$ et circulaire gauche pour $-\frac{\pi}{4}$. C'est un des moyens de production d'une onde polarisée circulairement.
- Si $\alpha = 0$ ou $\pm\frac{\pi}{2}$, on obtient une onde polarisée rectilignement de direction inchangée car la direction de $\vec{E}_0$ est confondue avec une des lignes neutres.

3.3.3. Action d'une lame quart d'onde sur une lumière polarisée elliptiquement

A priori, les axes de l'ellipse sont quelconques par rapport aux lignes neutres de la lame et on obtient une onde polarisée elliptiquement sans rapport particulier avec la première.

Si les axes de l'ellipse sont confondus avec les lignes neutres de la lame (cas $\phi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$), on obtient une **onde polarisée rectilignement**.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ -E_{0y}\sin(\omega t - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

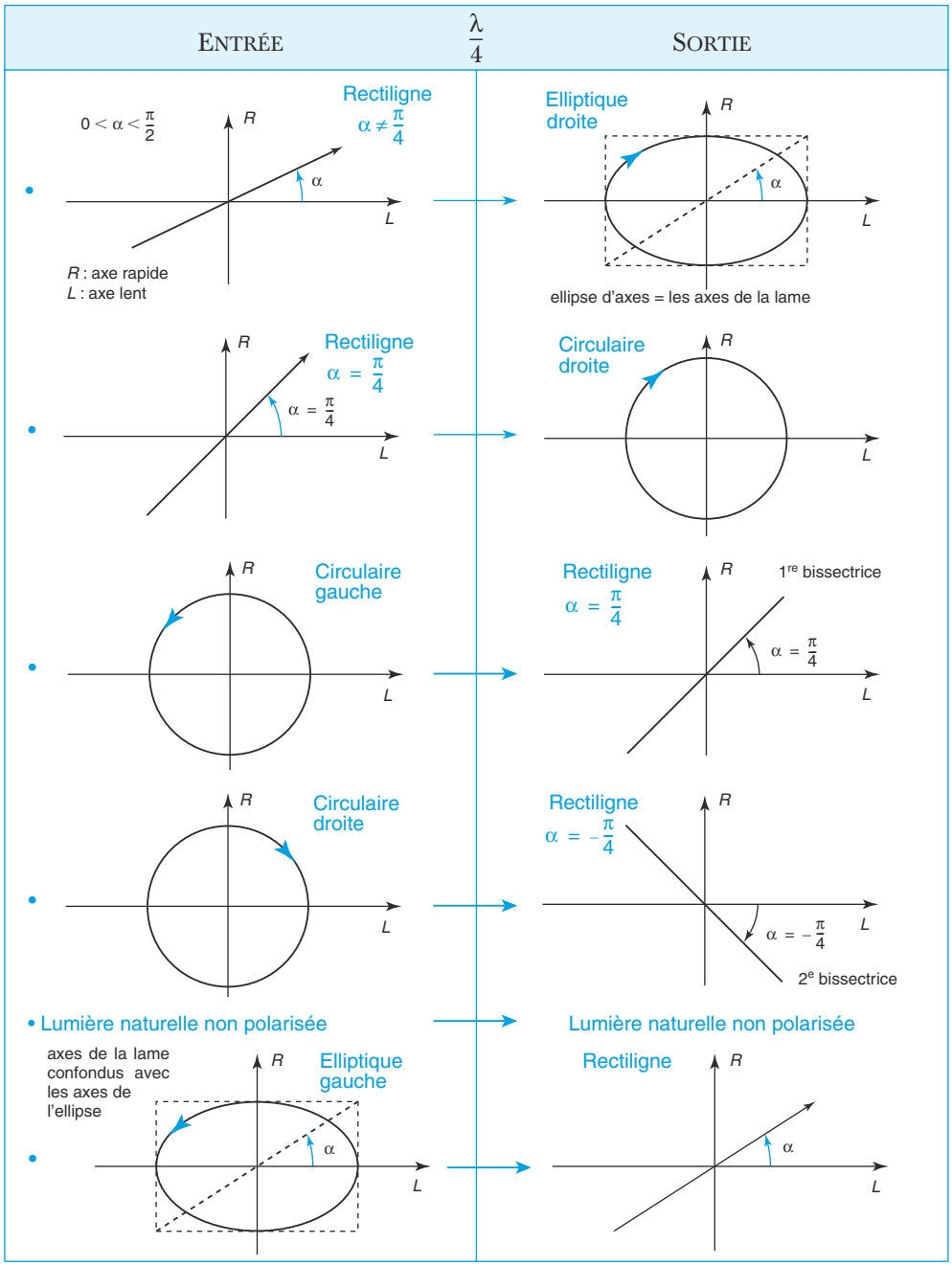
© Nathan, *classe prépa*

Remarque
Voir exercice n° 2 de « Savoir appliquer le cours ».

3.3.4. Action d'une lame quart d'onde sur une lumière polarisée circulairement

C'est un cas particulier intéressant. On peut toujours choisir les axes du cercle confondus avec les axes de la lame. **On obtient une polarisation rectiligne après la lame** : cas inverse du § 3.3.2. Pour une circulaire droite, la polarisation rectiligne après la lame sera selon la deuxième bissectrice ; pour une circulaire gauche, la polarisation rectiligne après la lame sera selon la première bissectrice.

Tableau récapitulatif lame quart d'onde



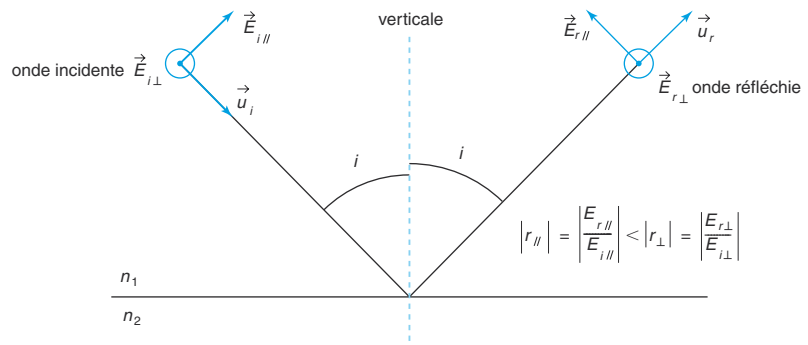
© Nathan, *classe prépa*

4 Polarisations par réflexion vitreuse et par diffusion

4.1. Polarisation par réflexion vitreuse

Une onde plane progressive électromagnétique incidente non polarisée (lumière naturelle) peut se polariser par réflexion sur une interface milieu diélectrique n_1 et milieu diélectrique n_2.
En effet, les calculs (effectués dans le cadre de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques) montrent que, par réflexion, la composante du champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence $E_{r\perp}$ est privilégiée par rapport à la composante du champ électrique contenue dans le plan d'incidence $E_{r//}$ pour un angle d'incidence non nul ; ce qui polarise la lumière naturelle, la lumière est alors partiellement polarisée (figure 3).

Fig. 3 *Polarisation par réflexion vitreuse*



De plus, pour un angle d'incidence dit angle de Brewster i_B tel que $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$, l'onde est totalement polarisée, rectilignement selon la perpendiculaire au plan d'incidence.

Numériquement, pour une interface air-verre, $\tan i_B = 56{,}3°$ et pour une interface air-eau, $\tan i_B = 53{,}1°$.
On peut réaliser une expérience simple avec une surface réfléchissante diélectrique (une plaque de verre ou une table vitrée de la salle de TP) : on envoie de la lumière naturelle sur la surface et on observe la lumière réfléchie à travers un polariseur.
Le plan d'incidence est vertical, l'angle d'incidence grossièrement proche de 45°. On tourne le polariseur dans son plan (choisi vertical) et on constate l'existence d'un minimum non nul d'intensité.
La lumière réfléchie est donc partiellement polarisée, le minimum non nul est obtenu pour une direction du polariseur verticale.
Si on se trouve à l'incidence de Brewster, on obtient un minimum nul car la lumière est totalement polarisée rectilignement selon l'horizontale.
Cet effet permet la réalisation de lunettes de glacier efficaces. Les verres contiennent un filtre polarisant qui éliminent la composante horizontale du champ électrique. La lumière naturelle du Soleil réfléchie par la neige ou la glace est polarisée partiellement (composante horizontale privilégiée), le filtre polarisant élimine donc la composante privilégiée et diminue fortement l'intensité lumineuse reçue par l'œil.

Remarque
On peut vérifier que la réflexion sur un métal ne polarise pas la lumière naturelle.

© Nathan, *classe prépa*

4.2. Polarisation par diffusion

Remarque
Les abeilles s'orientent en détectant la polarisation de la lumière diffusée.

La lumière du Soleil est non polarisée mais si on regarde le ciel bleu à travers un polariseur, un jour sans nuages, on détecte un minimum non nul en tournant le polariseur.
La lumière du Soleil est diffusée par les molécules de l'atmosphère : il s'agit de la diffusion Rayleigh (étudiée dans le cadre du rayonnement dipolaire). Par diffusion, la lumière devient polarisée partiellement.

5 TP Cours : Production et analyse de lumière polarisée

On a besoin de déterminer l'axe des polariseurs et de connaître les positions des axes des lames demi-onde et quart d'onde pour la production ou l'analyse de lumière polarisée. Les polariseurs et les lames sont montés sur support rotatif.

5.1. Détermination de l'axe d'un polariseur

Certains constructeurs munissent les polariseurs d'une tige qui indique l'axe du polariseur (tige que l'on peut tourner dans son plan) mais certains polariseurs ne possèdent pas d'indication. Un petit test très rapide va nous permettre de le repérer.
On utilise la polarisation par réflexion vitreuse. On réalise l'expérience suggérée au § **4.1.** On observe la lumière réfléchie à travers un polariseur. Le plan d'incidence est vertical et on tourne le polariseur dans son plan (choisi vertical) ; on constate l'existence d'un minimum non nul obtenu pour une direction du polariseur selon la verticale (on supprime alors la composante horizontale qui est la plus importante).

© Nathan, *classe prépa*

5.2. Détermination des axes des lames

On va d'abord déterminer les lignes neutres de la lame.

5.2.1. Détermination des lignes neutres

L'intensité émergente est nulle pour un polariseur et analyseur croisés (axe de l'analyseur perpendiculaire à l'axe du polariseur). Quand on place la lame entre le polariseur et l'analyseur croisés, on détecte de la lumière émergente. On tourne la lame dans son plan et on constate que, pour deux positions de la lame perpendiculaires entre elles, l'intensité émergente est à nouveau nulle. Ces deux positions correspondent à l'arrivée de la lumière polarisée rectilignement selon l'une des lignes neutres de la lame. Les lignes neutres sont alors données par les axes du polariseur et de l'analyseur croisés.

> Le polariseur et l'analyseur sont croisés. On place la lame entre les deux et on la tourne jusqu'à extinction de la lumière émergente, les lignes neutres sont données par les axes du polariseur et de l'analyseur croisés.

5.2.2. Détermination de l'axe lent d'une lame quart d'onde connaissant l'axe lent d'une autre quart d'onde

On commence par repérer les lignes neutres de la lame quart d'onde inconnue avec la méthode précédente. On associe les deux lames quart d'onde avec leurs lignes neutres parallèles à l'axe de l'analyseur et du polariseur croisés.

a. Protocole opératoire

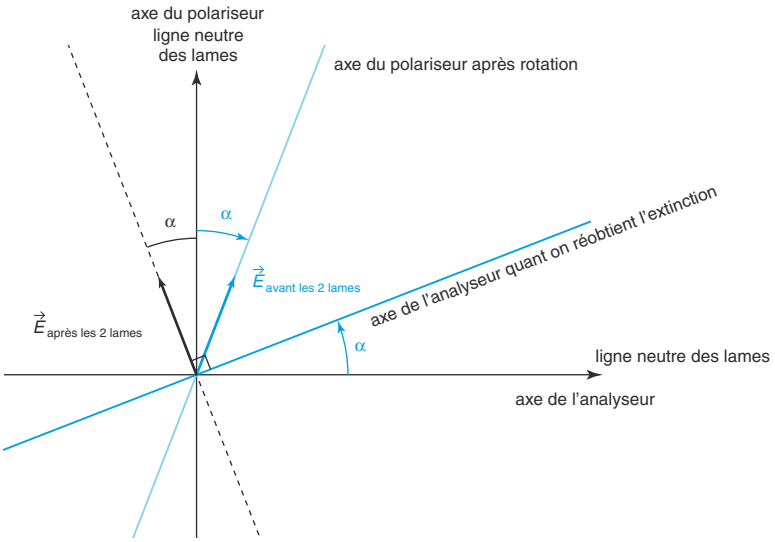
Remarque
Le filtre est indispensable car les lames ne sont quart d'onde ou demi-onde que pour une longueur d'onde déterminée qu'on sélectionne avec le filtre. En général, il s'agit d'un filtre vert.

On croise le polariseur et l'analyseur (extinction) ; on place ensuite un filtre et les deux lames (lignes neutres parallèles aux axes du polariseur et de l'analyseur) entre le polariseur et l'analyseur croisés, l'extinction subsiste.
On tourne alors le polariseur d'un angle α (10 à 20° environ, pour éviter la valeur particulière de 45°) dans un certain sens, l'extinction ne subsiste pas. On tourne l'axe de l'analyseur pour réobtenir l'extinction.
Si on a tourné l'axe de l'analyseur dans le même sens que le polariseur, les deux lames ont leur axe lent perpendiculaire.
Si on a tourné l'axe de l'analyseur dans le sens opposé au polariseur, les deux lames ont leur axe lent parallèle.

b. Explication du protocole opératoire

• Soit **les deux lames ont leur axe lent parallèle** et leur association est équivalente à une lame demi-onde du point de vue de la polarisation (on néglige tout phénomène d'absorption). En effet, la première lame quart d'onde va déphaser de $\frac{\pi}{2}$ l'axe rapide par rapport à l'axe lent ; la deuxième lame va déphaser de $\frac{\pi}{2}$ l'axe rapide par rapport à l'axe lent donc **l'association déphase de** π l'axe rapide par rapport à l'axe lent.
Une lame demi-onde transforme une onde polarisée rectilignement ($\vec{E}_{\text{avant les deux lames}}$) en une onde polarisée rectilignement symétrique par rapport à ses lignes neutres ($\vec{E}_{\text{après les deux lames}}$). On doit tourner l'axe de l'analyseur du même angle mais dans le sens opposé au polariseur pour réobtenir l'extinction (figure 4).

Fig. 4 *Protocole opératoire*



© Nathan, *classe prépa*

• Soit **les deux lames ont leur axe lent perpendiculaire** et leur association est équivalente à une absence de lame du point de vue de la polarisation (on néglige tout phénomène d'absorption). En effet, la première lame quart d'onde va déphaser de $\frac{\pi}{2}$ l'axe rapide par rapport à l'axe lent ; la deuxième lame va déphaser de $-\frac{\pi}{2}$ l'axe rapide par rapport à l'axe lent donc **l'association ne déphase pas** l'axe rapide par rapport à l'axe lent.
L'onde polarisée rectilignement est inchangée. On doit tourner l'axe de l'analyseur du même angle et dans le même sens que le polariseur pour réobtenir l'extinction.

5.3. Production de lumière polarisée

Remarque
Le filtre est indispensable car les lames ne sont quart d'onde ou demi-onde que pour une longueur d'onde déterminée qu'on sélectionne avec le filtre. En général, il s'agit d'un filtre vert.

Le dispositif expérimental sera toujours le même : lumière naturelle parallèle à l'axe optique (source et collimateur sur un banc d'optique) plus un filtre suivi d'opérateurs optiques : polariseurs, lames demi-onde et quart d'onde.

La direction de propagation de l'onde incidente plane est l'axe optique et le champ électrique est dans le plan d'onde perpendiculaire à l'axe optique.

5.3.1. Production de lumière polarisée rectilignement avec un polariseur

Il suffit de placer un polariseur après le faisceau de lumière naturelle.

5.3.2. Production de lumière polarisée circulairement avec une lame quart d'onde

On utilise le résultat du § 3.3.2. Une lame quart d'onde transforme une lumière polarisée rectilignement en une lumière polarisée circulairement si l'axe lent de la quart d'onde est à 45° de la polarisation rectiligne.
Il suffit de placer un polariseur après le faisceau de lumière naturelle et ensuite une lame quart d'onde dont l'axe lent est à 45° de l'axe du polariseur. On nomme alors l'ensemble polariseur circulaire.

5.3.3. Production de lumière polarisée elliptiquement

Il suffit de placer un polariseur puis une lame quart d'onde après le faisceau de lumière naturelle dans une position quelconque (angle de l'axe lent par rapport à l'axe du polariseur différent de 0°, 45° et 90°). On obtient une lumière polarisée elliptiquement avec des axes parallèles aux lignes neutres de la quart d'onde.

5.4. Analyse de lumière polarisée inconnue

Remarque
Une lumière partiellement polarisée est un mélange de lumière non polarisée avec de la lumière polarisée. Son analyse est hors programme.

Soit le problème suivant, une lumière totalement polarisée inconnue doit être analysée.

5.4.1. Premier test

On place un analyseur (polariseur) devant la source de lumière, on le fait tourner dans son plan et on observe.

• Il n'y a pas de minimum détecté : la lumière est non polarisée ou polarisée circulairement (voir § 2.1.3 et § 2.1.4).

© Nathan, *classe prépa*

Remarque
Si l'analyseur n'est pas parfait, il n'y a pas extinction totale mais extinction suffisante pour le différencier du cas minimum non nul.

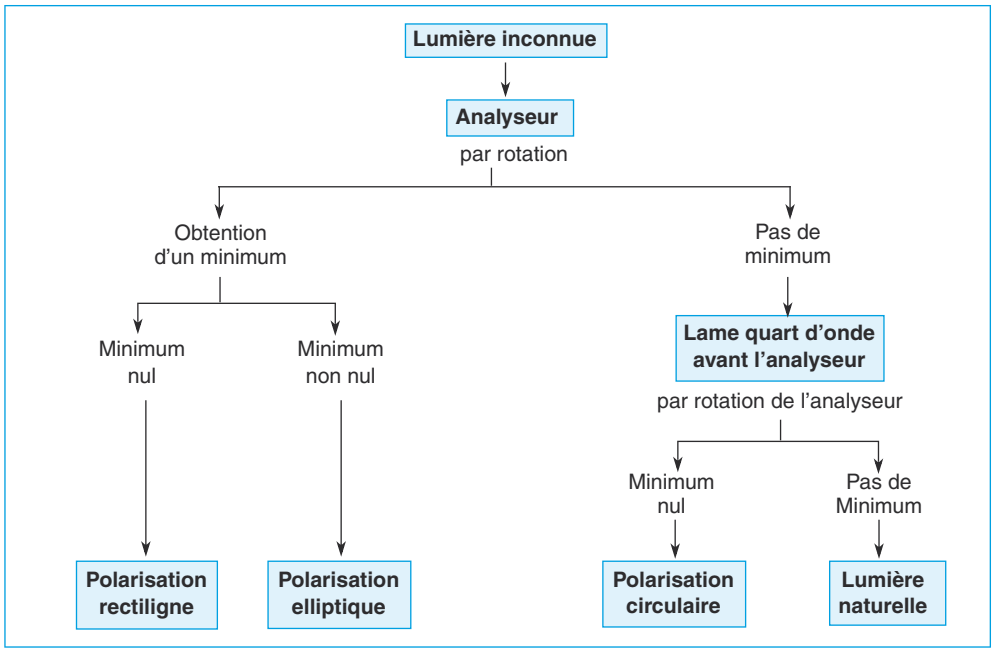
- On détecte un minimum nul : la lumière est polarisée rectilignement (voir § 2.1.1).
- On détecte un minimum non nul : la lumière est polarisée elliptiquement (voir § 2.1.2).

La détermination du sens de rotation de l'ellipse est hors programme.

5.4.2. Deuxième test

Il nous faut départager les cas lumière naturelle et lumière polarisée circulairement.
On place devant la source de lumière un filtre (filtre adapté à la lame) et une lame quart d'onde puis un analyseur. On fait tourner l'analyseur dans son plan et on observe.

- On détecte un minimum nul : la lumière est polarisée circulairement (voir § 3.3.4). La lame quart d'onde transforme une polarisation circulaire en une polarisation rectiligne.
- On ne détecte pas de minimum : la lumière est non polarisée (voir § 3.3.1). La lame quart d'onde laisse inchangée une lumière non polarisée.



© Nathan, *classe prépa*

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 235*

1 Une onde plane progressive est polarisée rectilignement si :

☐ **a.** le champ magnétique est de même direction que le champ électrique.

☐ **b.** le champ électrique est parallèle à la direction de propagation.

☐ **c.** le champ électrique est de direction constante dans le plan d'onde.

2 Une onde plane progressive harmonique a :

☐ **a.** pas de polarisation ;

☐ **b.** une polarisation elliptique ;

☐ **c.** une polarisation forcément rectiligne.

3 Une onde plane progressive harmonique polarisée circulairement s'écrit :

☐ **a.** $\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ \pm E_0\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ **b.** $\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ \pm E_0\cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ **c.** $\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos\alpha\cos(\omega t - kz) \\ \pm E_0\sin\alpha\cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$.

4 En notation complexe, une onde plane progressive harmonique (OPPH) polarisée rectilignement s'écrit :

☐ **a.** $\underline{\vec{E}}(M) = (E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-i\phi_0}\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}$.

☐ **b.** $\underline{\vec{E}}(M) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$.

☐ **c.** $\underline{\vec{E}}(M) = (E_{0x}\vec{u}_x + iE_{0y}\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}$.

5 Une Onde Plane Progressive Harmonique polarisée rectilignement peut se décomposer en :

☐ **a.** une OPPH polarisée circulairement et une OPPH polarisée rectilignement.

☐ **b.** une OPPH non polarisée et une OPPH polarisée circulairement.

☐ **c.** deux OPPH polarisées circulairement.

© Nathan, *classe prépa*

Savoir appliquer le cours

➤ *Corrigés p. 235*

1 On fabrique de la lumière polarisée avec de la lumière naturelle, un filtre suivi d'un dispositif : polariseur plus lame quart d'onde avec ses lignes neutres à 45° de la direction du polariseur (ensemble appelé polariseur circulaire), quelle est la polarisation de la lumière ainsi produite ?
On retourne le polariseur circulaire donc la lumière rencontre d'abord la lame quart d'onde puis le polariseur, la polarisation de la lumière produite a-t-elle changé ?

2 Imaginer un protocole opératoire pour déterminer si une lumière polarisée circulairement est droite ou gauche.

3 Le verre de silice est dispersif. Son indice optique n varie de $n_1 = 1{,}456$ pour $\lambda = 700$ nm à $n_2 = 1{,}470$ pour $\lambda = 400$ nm. Calculer les limites inférieure et supérieure des angles de Brewster d'une lumière blanche incidente sur ce verre.

4 Soit une onde plane progressive dont le champ électrique est donné ci-dessous $(E_0 > 0)$, quelle est la trajectoire décrite par l'extrémité du vecteur et quel est le sens de parcours ?

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} 2E_0\cos(\omega t - kz) \\ 3E_0\cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

1 – Polariseur imparfait (d'après Centrale-Supélec)

Soit un polariseur imparfait, son coefficient de transmission en énergie est noté T_1 selon la direction de transmission privilégiée et T_2 selon la direction perpendiculaire avec $T_2 < T_1$.

1 Calculer le coefficient en transmission en énergie d'un tel polariseur éclairé par une onde plane polarisée rectilignement. Retrouver le cas du polariseur parfait.

2 Calculer le coefficient en transmission en énergie de deux polariseurs, disposés en série, identiques, avec leurs directions de transmission privilégiée faisant un angle θ, éclairés par une onde plane non polarisée (lumière naturelle).

résolution méthodique

1 Notons Oz la direction de propagation de l'onde plane. Notons α l'angle que fait sa direction de polarisation rectiligne avec la direction privilégiée $\vec{u}_x$ du polariseur. Dans le plan d'onde Oxy, on peut alors écrire le champ électrique avant le polariseur :

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit $\sqrt{T_1}$ le coefficient de transmission en amplitude pour le champ électrique selon $\vec{u}_x$ et $\sqrt{T_2}$ le coefficient de transmission en amplitude selon $\vec{u}_y$. Après le polariseur :

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} \sqrt{T_1} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz) \\ \sqrt{T_2} E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculons l'intensité incidente avant le polariseur et l'intensité émergente après le polariseur.

$$I_{\text{incidente}} = K\langle E_x^2(M, t)\rangle + K\langle E_y^2(M, t)\rangle = K\frac{E_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{2} = K\frac{E_0^2}{2}$$

$$I_{\text{émergente}} = K\left(\frac{T_1 E_0^2 \cos^2\alpha}{2} + \frac{T_2 E_0^2 \sin^2\alpha}{2}\right) = K\frac{E_0^2}{2}(T_1 \cos^2\alpha + T_2 \sin^2\alpha)$$

$$T = \frac{I_{\text{émergente}}}{I_{\text{incidente}}} = T_1 \cos^2\alpha + T_2 \sin^2\alpha$$

Pour le polariseur parfait, $T_2 = 0$ et $T_1 = 1$, on retrouve la loi de Malus :

$$\frac{I_{\text{émergente}}}{I_{\text{incidente}}} = \cos^2\alpha.$$

2 Notons toujours Oz la direction de propagation de l'onde plane et $\vec{u}_x = \vec{u}_{P_1}$ la direction privilégiée du premier polariseur, la direction privilégiée du second polariseur faisant un angle θ avec le premier.

© Nathan, *classe prépa*

$$\vec{E}_{\text{naturelle}}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_0\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\text{incidente}} = KE_0^2$$

Après le premier polariseur :

$$\vec{E}_1(M) = \begin{bmatrix} \sqrt{T_1}E_0\cos(\omega t - kz) \\ \sqrt{T_2}E_0\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donnons les coordonnées du champ électrique dans la base $\vec{u}_{P_2}$ et $\vec{u}_{P_2\perp}$:

$$\vec{u}_x = \cos\theta\vec{u}_{P_2} - \sin\theta\vec{u}_{P_2\perp}$$

$$\vec{u}_y = \sin\theta\vec{u}_{P_2} + \cos\theta\vec{u}_{P_2\perp}$$

$$\vec{E}_1(M) = \begin{bmatrix} E_0(\sqrt{T_1}\cos\theta\cos(\omega t - kz) + \sqrt{T_2}\sin\theta\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}})) \\ E_0(-\sqrt{T_1}\sin\theta\cos(\omega t - kz) + \sqrt{T_2}\cos\theta\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}})) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conseil : il faut décomposer le champ électrique, avant le composant optique, dans la base adaptée au composant optique pour pouvoir calculer le champ électrique après le composant optique.

Après le second polariseur :

$$\vec{E}_2(M) = \begin{bmatrix} \sqrt{T_1}E_0(\sqrt{T_1}\cos\theta\cos(\omega t - kz) + \sqrt{T_2}\sin\theta\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ \sqrt{T_2}E_0(-\sqrt{T_1}\sin\theta\cos(\omega t - kz) + \sqrt{T_2}\cos\theta\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = K\langle E_{P_2}^2(M, t)\rangle + K\langle E_{P_2\perp}^2(M, t)\rangle$$

$$= K\frac{E_0^2}{2}(T_1^2\cos^2\theta + T_1T_2\sin^2\theta) + K\frac{E_0^2}{2}(T_1T_2\sin^2\theta + T_2^2\cos^2\theta)$$

Attention : en raison du déphasage aléatoire, la moyenne temporelle du signal au carré ne donne pas de double produit car $\langle\cos(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz - \phi_{\text{aléatoire}})\rangle = 0$.

$$T = \frac{I_{\text{émergente}}}{I_{\text{incidente}}} = \frac{1}{2}T_1^2\cos^2\theta + T_1T_2\sin^2\theta + \frac{1}{2}T_2^2\cos^2\theta$$

en conclusion

Pour calculer les intensités, il faut toujours revenir à la définition : l'intensité est proportionnelle à la moyenne temporelle du signal (champ électrique) au carré. On calcule l'intensité incidente. On calcule le champ électrique après chaque composant optique et on en déduit l'intensité émergente. Il faut procéder pas à pas.
Pour interpréter les expériences, il faut se souvenir que les composants optiques ne sont pas parfaits.

© Nathan, *classe prépa*

2 – Propagation dans un milieu rendu anisotrope par effet Faraday

Soit une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit :
$\underline{\vec{E}} = (\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + \underline{E}_{0y}\vec{e}_y)e^{i(\omega t - kz)}$ où $\underline{E}_{0x}$ et $\underline{E}_{0y}$ sont des constantes complexes et où k désigne une constante réelle positive.
Soit un milieu qui n'est capable de propager une onde électromagnétique dans la direction $\vec{e}_z$ que si $\underline{E}_{0x}$ et $\underline{E}_{0y}$ vérifient :

Soit $\underline{E}_{0x} = i\underline{E}_{0y}$ avec $k^2 = k_g^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r + b\dfrac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}$.

Soit $\underline{E}_{0x} = -i\underline{E}_{0y}$ avec $k^2 = k_d^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r - b\dfrac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}$.

N.B : $\varepsilon_r > \dfrac{b}{\varepsilon_0}$.

Il s'agit de l'effet Faraday. Le milieu est soumis à un champ magnétique statique en plus d'une onde électromagnétique. Le champ magnétique statique est parallèle à la direction de propagation de l'onde. b est proportionnel à la valeur algébrique du champ magnétique statique.

1 Quelle est la nature de la polarisation de l'onde propagée dans chacun des cas ? Que se passe-t-il si un tel milieu est soumis à un champ magnétique statique de même valeur mais de signe opposé ?

2 On applique à l'entrée d'un tel milieu (en $z = 0$) une onde polarisée rectilignement : $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$. Déterminer le champ obtenu après un parcours de longueur d dans le milieu. Comment évolue l'état de polarisation sur la distance d ? N.B : On décomposera l'onde polarisée rectilignement en deux ondes astucieusement choisies.

résolution méthodique

1 Pour $k^2 = k_g^2$, $\underline{E}_{0x} = i\underline{E}_{0y}$ donc $\underline{E}_{0y} = -i\underline{E}_{0x}$ l'onde se met sous la forme :

$$(\underline{E}_{0x}\vec{e}_x - i\underline{E}_{0x}\vec{e}_y)e^{i(\omega t - kz)} = \left(\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + \underline{E}_{0x}e^{-i\frac{\pi}{2}}\vec{e}_y\right)e^{i(\omega t - kz)}.$$

En réels et en choisissant $\underline{E}_{0x}$ réel :

$$\underline{E}_{0x}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + \underline{E}_{0x}\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y.$$

Il s'agit d'une polarisation circulaire gauche.
De même, pour $k^2 = k_d^2$, $\underline{E}_{0x} = -i\underline{E}_{0y}$ donc $\underline{E}_{0y} = i\underline{E}_{0x}$ l'onde se met sous la forme :

$$(\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + i\underline{E}_{0x}\vec{e}_y)e^{i(\omega t - kz)} = \left(\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + \underline{E}_{0x}e^{i\frac{\pi}{2}}\vec{e}_y\right)e^{i(\omega t - kz)}.$$

En réels et en choisissant $\underline{E}_{0x}$ réel :

$$\underline{E}_{0x}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x - \underline{E}_{0x}\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y.$$

Il s'agit d'une polarisation circulaire droite.

© Nathan, *classe prépa*

Si le champ magnétique statique change de signe, b change de signe et cela inverse les résultats précédents.

$\underline{E}_{0x} = \mathrm{i}\underline{E}_{0y}$ pour $k^2 = k_d^2$, circulaire gauche.

$\underline{E}_{0x} = -\mathrm{i}\underline{E}_{0y}$ pour $k^2 = k_g^2$, circulaire droite.

2 On applique à l'entrée d'un tel milieu (en $z = 0$) une onde de champ électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$. Elle va se propager avec deux vecteurs d'onde de module k différent selon qu'il s'agit d'une onde polarisée circulairement droite ou gauche.

On sait qu'on peut décomposer une onde polarisée rectilignement en deux ondes polarisées circulairement gauche et droite.

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans le milieu considéré, l'onde polarisée circulairement gauche se propage avec $k = k_g$ et l'onde polarisée circulairement droite se propage avec $k = k_d$.

En $z = d$:

$$\vec{E}(z = d) = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k_g d) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - k_g d) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k_d d) \\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - k_d d) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}(z = d) = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k_g d) + \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - k_d d) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - k_g d) - \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - k_d d) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}(z = d) = \begin{bmatrix} E_0\cos\left(\omega t - \frac{k_g + k_d}{2}d\right)\cos\frac{k_d - k_g}{2}d \\ E_0\cos\left(\omega t - \frac{k_g + k_d}{2}d\right)\sin\frac{k_d - k_g}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}(z = d) = E_0\cos\left(\omega t - \frac{k_g + k_d}{2}d\right)\vec{u}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\frac{k_d - k_g}{2}d \\ \sin\frac{k_d - k_g}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}$$

© Nathan, *classe prépa*

Il s'agit donc d'une polarisation rectiligne selon $\vec{u}$ à la sortie du milieu. L'onde était initialement polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$. La polarisation rectiligne a tourné d'un angle θ tel que $\tan\theta = \tan\frac{k_d - k_g}{2}d$. On dit que le milieu a acquis un pouvoir rotatoire grâce à l'effet Faraday.

en conclusion

Dans un milieu anisotrope, il peut être judicieux de décomposer l'onde (ici une onde polarisée rectilignement en deux ondes circulaires droite et gauche).

3 – Analyse de la lumière solaire diffusée par la Lune (d'après Mines)

Les première études indirectes du sol lunaire ont été effectuées en analysant la polarisation de la lumière solaire diffusée par le sol lunaire (figure 1). La lumière recueillie traverse un polariseur linéaire qui tourne à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Le récepteur permet de suivre l'évolution, $s(t)$, de l'éclairement lors de la rotation du polariseur (figure 2).

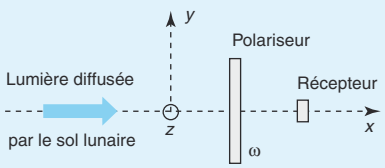


Figure 1

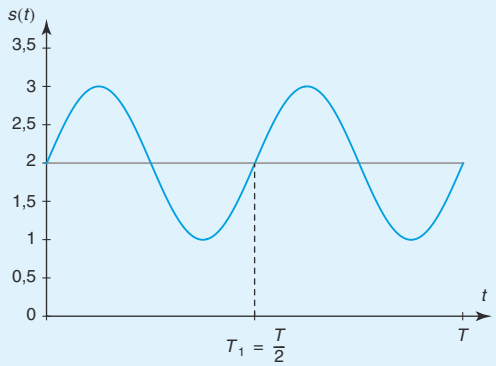


Figure 2

1 Interpréter la forme et la période du signal $s(t)$. Montrer qu'il ne s'agit ni de lumière naturelle ni de lumière totalement polarisée. Déduire de la forme du signal temporel de la figure 2 l'état de polarisation de la lumière solaire diffusée par le sol lunaire. Que représente la valeur moyenne ?

2 Dans un dispositif plus complet (figure 3), après sélection d'une longueur d'onde unique λ par un filtre, la lumière traverse une lame demi-onde $\frac{\lambda}{2}$ qui tourne à la vitesse angulaire ω. La lumière traverse ensuite un biprisme biréfringent. L'indice du premier prisme a la valeur n_1 si la direction de polarisation est suivant l'axe y et la valeur n_2 si la direction de polarisation est suivant l'axe z. Le second prisme, accolé au premier, possède un indice n_1 quelle que soit la direction de polarisation. Les récepteurs permettent de suivre l'évolution, $s_1(t)$ et $s_2(t)$, des éclairements, lors de la rotation de la lame demi-onde (figure 4).

© Nathan, *classe prépa*

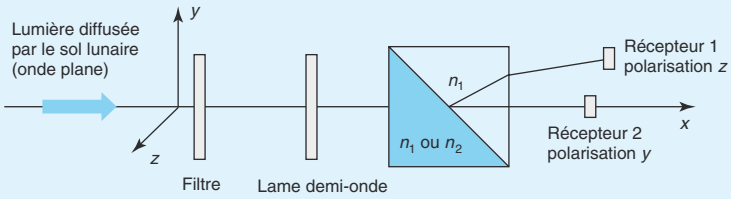


Figure 3

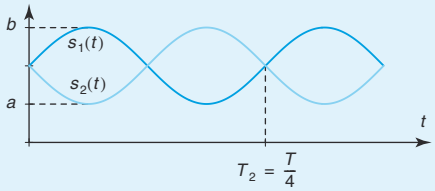


Figure 4

On nomme taux de polarisation le rapport $\tau = \dfrac{b-a}{b+a}$. Quelle serait la valeur du taux de polarisation pour une lumière polarisée rectilignement et pour une lumière naturelle non polarisée ? Quelle serait la forme du signal obtenu pour chacun de ces deux cas ? Les résultats de la figure 4 sont-ils en accord avec les données de la figure 2 ?

résolution méthodique

1 Le récepteur est sensible à l'éclairement donc le signal $s(t)$ est proportionnel à l'intensité reçue. $s(t)$ est de la forme $s_0 + s_1 \cos\dfrac{2\pi t}{T_1} = s_0 + s_1 \cos\dfrac{4\pi t}{T}$ d'après la figure 2.

Il ne s'agit donc pas de lumière naturelle car le signal $s(t)$ aurait été constant (voir **2.1.4**). Rappelons les grandes lignes du raisonnement. Soit E_0 l'amplitude du champ électrique de la lumière naturelle.

$$I_{\text{incidente}} = CE_0^2$$

À la sortie du polariseur, $\vec{E}_{\text{émergent}} = E_0 \cos(\omega_0 t - kx)\vec{u}_P$.

$$I_{\text{émergente}} = C\frac{E_0^2}{2} = \frac{I_{\text{incidente}}}{2} = \text{constante}$$

Conseil : il faut examiner chaque cas avant de conclure.
Prouvons qu'il s'agit de lumière partiellement polarisée. Si la lumière solaire diffusée par la Lune était totalement polarisée, deux cas seraient possibles : lumière polarisée rectilignement et elliptiquement (circulairement est un cas particulier).

Pour la lumière polarisée rectilignement, après le polariseur tournant, on aurait obtenu $s(t) = a\cos^2\alpha = a\cos^2\dfrac{2\pi t}{T} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos\dfrac{4\pi t}{T}$ en égard à la loi de Malus. $s(t)$ se serait annulé pour chaque position du polariseur tournant perpendiculaire à la direction de la polarisation de la lumière ce qui n'est pas le cas : $s(t)$ n'est jamais nul.

© Nathan, *classe prépa*

Pour la lumière polarisée elliptiquement, après le polariseur tournant, on aurait obtenu une succession périodique de minima et de maxima mais pas un signal sinusoïdal.

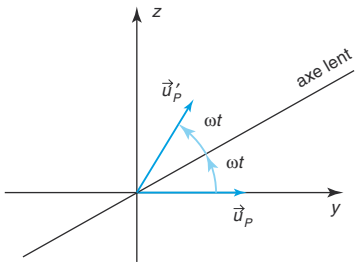
La lumière solaire diffusée par la Lune est donc **partiellement polarisée** : somme de lumière naturelle et de lumière polarisée rectilignement.

Notons l'intensité avant le polariseur $I_{\text{totale}} = I_{\text{nat}} + I_{\text{pol}}$. Après le polariseur, on récupère un signal proportionnel à $\frac{1}{2}I_{\text{nat}} + I_{\text{pol}}\cos^2\frac{2\pi t}{T} = \frac{1}{2}I_{\text{nat}} + \frac{1}{2}I_{\text{pol}}\left(1 + \cos\frac{4\pi t}{T}\right)$.

La valeur moyenne de $s(t)$ est $K\left(\frac{1}{2}I_{\text{nat}} + \frac{1}{2}I_{\text{pol}}\right) = \frac{K}{2}I_{\text{totale}}$ tandis que son amplitude est $K\frac{1}{2}I_{\text{pol}}$. La figure 2 nous montre que l'amplitude de la fonction sinusoïdale est la moitié de la valeur moyenne, ce qui prouve que $I_{\text{nat}} = I_{\text{pol}}$.

2 La lame demi-onde tourne donc les lignes neutres tournent de $\omega t = \frac{2\pi t}{T}$ dans le plan Oyz. Décomposons la lumière incidente en lumière naturelle et en lumière polarisée rectilignement.

Pour la lumière polarisée rectilignement, le champ électrique est transformé en son symétrique par rapport à l'axe lent. La polarisation de la lumière a donc tourné de $2\omega t$.



Si on note la lumière polarisée rectilignement :

$$\vec{E}_{\text{pol}} = E_{\text{pol}}\cos(\omega_0 t - kx)\vec{u}_y.$$

La lumière émergente de la lame demi-onde est :

$$\vec{E}_{\text{émergente}} = (E_{\text{pol}}\cos(2\omega t)\vec{u}_y + E_{\text{pol}}\sin(2\omega t)\vec{u}_z)\cos(\omega_0 t - kx).$$

Le récepteur 1 récupère le signal polarisé selon $\vec{u}_z$ et le récepteur 2 récupère le signal polarisé selon $\vec{u}_y$.

$$s_2(t) = KE_{\text{pol}}^2\cos^2(2\omega t)$$
$$s_1(t) = KE_{\text{pol}}^2\sin^2(2\omega t)$$

Attention : on fait la moyenne sur une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\tau = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{s_{\max} + s_{\min}} \text{ avec } s_{1\min} = s_{2\min} = 0 \text{ et } s_{1\max} = s_{2\max} = KE_{\text{pol}}^2$$

Pour la lumière polarisée rectilignement, $\tau = 1$.

© Nathan, *classe prépa*

Pour la lumière naturelle, la lame demi-onde est sans effet et $s_1(t) = s_2(t) =$ constante. $a = b$ et $\tau = 0$.

Les résultats de la figure 4 sont une période $\frac{T}{4}$, $b = 3a$ et $\tau = \frac{1}{2}$; ils sont en accord avec les données de la figure 2. L'intensité avant la lame demi-onde est $I_{nat} + I_{pol}$ avec $I_{nat} = I_{pol}$.

$$s_2(t) = KE_{nat}^2 + KE_{pol}^2 \cos^2(2\omega t) = s_{nat} + \frac{s_{pol}}{2}(1 + \cos(4\omega t)) = \frac{3s_{nat}}{2} + \frac{s_{nat}}{2}\cos(4\omega t)$$

$$s_1(t) = KE_{nat}^2 + KE_{pol}^2 \sin^2(2\omega t) = s_{nat} + \frac{s_{pol}}{2}(1 - \cos(4\omega t)) = \frac{3s_{nat}}{2} - \frac{s_{nat}}{2}\cos(4\omega t).$$

en conclusion

Pour traiter les cas de lumière polarisée partiellement, il faut se placer dans des cas bien précis de polarisation totale, calculer l'intensité émergente du dispositif avant de conclure sur la composition de la lumière.

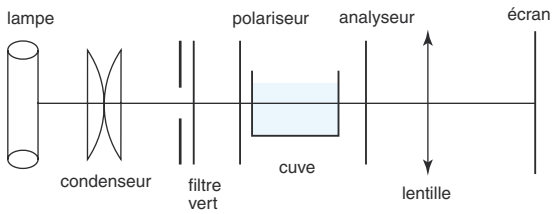
© Nathan, *classe prépa*

1 * 10 min

➤ Corrigé p. 236

Mesure du pouvoir rotatoire d'une substance optiquement active

On utilise la lampe à vapeur de mercure, un condenseur, un diaphragme avec un filtre vert ; on fait l'image du diaphragme sur l'écran avec la lentille.
On place une cuve contenant une substance douée de pouvoir rotatoire entre polariseur et analyseur croisés. On fait converger la lumière sur la face d'entrée de la cuve. Qu'observe-t-on ?



On dispose de deux solutions : saccharose et lévulose. Comment mesurer leur pouvoir rotatoire ? Comment déterminer la nature de ces deux solutions (dextrogyre ou lévogyre) ? De quoi dépend le pouvoir rotatoire ?

2 * 20 min

➤ Corrigé p. 236

Polariseurs en série

On veut changer de 90° la direction de polarisation d'un faisceau de lumière (polarisée rectilignement) en lui faisant traverser un ou plusieurs polariseurs.

1. Quel est le nombre minimum de polariseurs requis ?

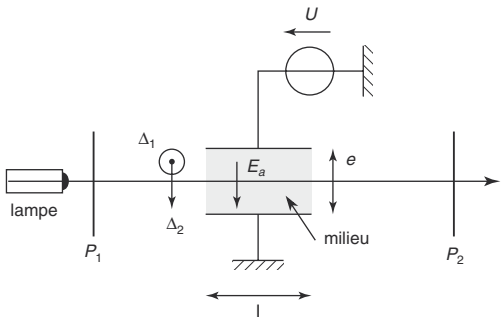
2. Quel est le nombre minimum de polariseurs requis pour que l'intensité transmise soit supérieure à 60 % de l'intensité initiale ?

3 * 20 min

➤ Corrigé p. 237

Effet Kerr

On utilise le montage qui suit. La source de lumière est monochromatique. P_1 et P_2 sont deux polariseurs croisés. Une cuve contenant un liquide est placée entre P_1 et P_2. Grâce à un condensateur plan, on crée un champ électrique dans cette substance. Le champ $\vec{E}_a$ est uniforme dans le milieu, ce qui donne au milieu la propriété suivante : une onde électromagnétique polarisée selon l'axe Δ_1 « voit » l'indice n_0, une onde électromagnétique polarisée selon l'axe Δ_2 (orthogonal à Δ_1) « voit » l'indice n_D, avec $n_D - n_0 = k\lambda E_a^2$.



1. Trouver le déphasage introduit entre les deux composantes du champ électrique de l'onde par la traversée du milieu.

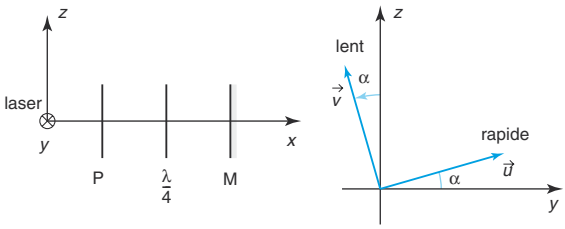
2. Trouver la valeur U_1 de U pour laquelle on réalise une lame demi-onde. A.N. : on utilise le bromobenzène : $k \approx 10^{-12}$ USI, avec $\ell = 2$ cm et $e = 1$ cm.

3. $U \neq U_1$, P_1 a un axe de transmission privilégié faisant un angle de 45° avec Δ_1 et Δ_2. On pourra prendre l'axe Oy dans la direction de $\vec{E}_a$. Calculer le champ électrique $\vec{E}_2$ de l'onde à la sortie de P_2. Calculer $I_2 = K\langle E_2^2 \rangle$ en fonction de $I_1 = K\langle E_1^2 \rangle$ obtenu en sortie de P_1.

4 ** 20 min

➤ Corrigé p. 237

Polariseur, lame quart d'onde et miroir



Un laser envoie une onde plane progressive harmonique se propageant dans une direction normale au polariseur (axe de polarisation selon $\vec{e}_y$) et

© Nathan, classe prépa

coïncidant avec l'axe Ox. Elle traverse par la suite une lame quart d'onde. Le déphasage induit par celle-ci sera pris entièrement selon l'axe rapide.

1. Écrire les composantes de l'onde après la traversée de la lame dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, axes rapide et lent de la lame. Quel est l'état de polarisation ?

2. L'onde rencontre ensuite le miroir, elle subit un déphasage supplémentaire de π à la réflexion. Quel est l'état de polarisation après réflexion sur le miroir et après traversée de la lame ? Analyser le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{4}$, quel est l'intérêt du dispositif ?

3. On remplace le miroir par un milieu diélectrique (linéaire, homogène et isotrope) en incidence de Brewster, le plan d'incidence étant Ixz avec I le point d'incidence sur le milieu. Quelle est la polarisation de l'onde réfléchie (sans faire de calculs)?

5 ** 20 min

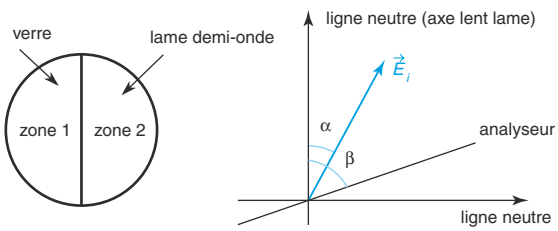
➤ *Corrigé p. 238*

Principe de l'analyseur à pénombre

Considérons un dispositif constitué de deux zones : l'une est constituée d'un verre isotrope (zone 1) et l'autre d'une lame demi-onde (zone 2). Ce dispositif est précédé d'un polariseur dont la direction de polarisation $\vec{u}_i$, fait un angle α avec l'axe lent de la lame. Il est suivi par un autre polariseur, l'analyseur, dont la direction privilégiée $\vec{u}_A$ fait un angle β avec l'axe lent de la lame. On peut fait tourner l'analyseur, β est donc réglable.

$0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$.

L'ensemble est éclairé par un faisceau parallèle de lumière monochromatique. Un observateur examine la lame à travers l'analyseur.



1. Quelle(s) valeur(s) faut-il donner à β pour que l'observateur voit les deux plages de la lame également éclairées ? Que vaut l'éclairement pour chaque valeur de β ?

2. L'œil humain apprécie plus facilement une égalité d'éclairements si ces éclairements sont faibles. Déduire de ce résultat que l'angle α doit être petit (quelques degrés) pour pouvoir observer une égale pénombre ou équipénombre. Que prendre pour valeur de β ?

3. Le polarimètre étant réglé à l'égale pénombre, on intercale entre le dispositif et l'analyseur une cuve de longueur ℓ, contenant une solution d'un composé dextrogyre. De quel angle doit-on tourner l'analyseur pour retrouver l'égale pénombre ?

6 ** 15 min

➤ *Corrigé p. 239*

Interféromètre de Michelson avec polariseurs (expérience de Fresnel Arago)

On règle l'interféromètre de Michelson en coin d'air en lumière monochromatique non polarisée. On observe les franges d'interférences rectilignes sur un écran conjugué du coin d'air.

1. On place un polariseur P_1 devant le miroir M_1, qu'observe-t-on sur l'écran ? Ensuite, on place un polariseur P_2 devant le miroir M_2 qu'on fait tourner, qu'observe-t-on sur l'écran pour les positions parallèle puis antiparallèle des deux polariseurs ?

2. Les deux polariseurs sont antiparallèles. On place alors un polariseur P_3 à la sortie et en le tournant, on observe à nouveau des franges d'interférences qui sont le plus contrastées quand ce dernier est à 45° des deux autres polariseurs. Expliquer.

3. Les deux polariseurs étant antiparallèles, que se passe-t-il si on place le polariseur P_3 à l'entrée du Michelson ? Peut-on retrouver des interférences en le tournant ?

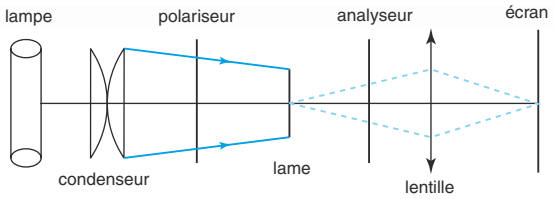
7 *** 20 min

➤ *Corrigé p. 239*

Couleurs des lames minces biréfringentes

On utilise la lumière blanche. Le polariseur et l'analyseur sont croisés avant de placer une lame mince biréfringente entre les deux. On fait converger la lumière sur la lame en l'éclairant complètement, on fait l'image de la lame sur l'écran avec la lentille. On tourne la lame dans son plan jusqu'à obtenir l'image la plus contrastée possible : les lignes neutres de la lame sont alors à 45° des directions du polariseur et de l'analyseur.

© Nathan, *classe prépa*



1. Qu'observe-t-on sur l'écran ? Pourquoi doit-on utiliser une lame mince ?

2. On tourne alors l'analyseur de 90°. On observe la couleur complémentaire de l'expérience précédente. Interpréter.

En réalité, à la place de la lame on a un diaphragme sur lequel on a collé plusieurs morceaux de papier adhésif (Scotch) dans diverses directions et de diverses épaisseurs.

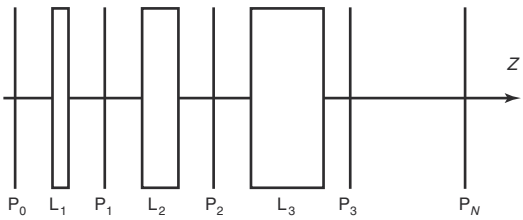
3. Qu'observe-t-on avec ce dispositif ?

8 *** 30 min

➤ *Corrigé p. 240*

Filtre interférentiel de Lyot
(d'après Centrale)

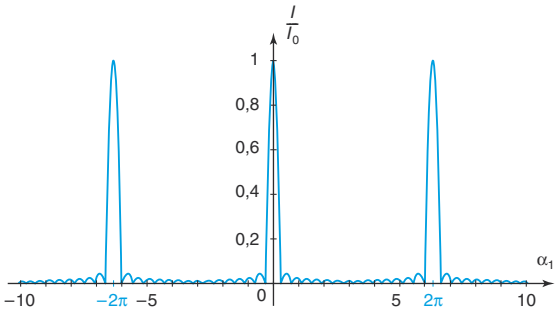
On considère le montage suivant constitué d'un ensemble de N lames cristallines de même matériau caractérisé par $\Delta n = |n_x - n_y|$ (la direction de propagation des ondes est $\vec{u}_z$), dont les épaisseurs sont respectivement : $e, 2e, 4e, \ldots, 2^{(N-1)}e$, dont les axes lents (et donc aussi les axes rapides) sont tous alignés (selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$). Les lames sont séparées par des polariseurs rectilignes idéaux dont les directions de transmissions privilégiées, toutes identiques, sont orientées à 45° des lignes neutres des lames.



1. L'ensemble est placé entre un polariseur et un analyseur rectilignes parallèles à l'ensemble des polariseurs intermédiaires. La lame L_1 introduit, entre les vibrations selon les lignes neutres, la différence de phase α_1. Le système est éclairé en lumière parallèle. Exprimer $|\alpha_1|$ en fonction de Δn, e et λ, longueur d'onde dans le vide de la lumière traversant le système.

2. On se place dans le cas particulier de quatre lames (de quatre polariseurs et du polariseur d'entrée). On néglige l'absorption due à la traversée des lames et polariseurs successifs. Exprimer l'intensité lumineuse I_1 à la sortie du premier polariseur, puis l'intensité I transmise par le système en fonction de l'intensité I_0 transmise par le polariseur P_0.

3. Commenter l'allure de la courbe $\dfrac{I}{I_0} = f(\alpha_1)$ donnée ci-dessous.



4. *Données* : $e = 250\ \mu\text{m}$ et $\Delta n = |n_x - n_y| = 10^{-2}$.
Calculer les longueurs d'onde transmises dans le visible en supposant Δn indépendant de la longueur d'onde. Quelles sont les couleurs correspondantes ? Comment caractériser la propriété principale de ce dispositif ? Pourquoi le qualifier de monochromateur ?

© Nathan, *classe prépa*

Tester ses connaissances

1 Réponse **c.** Une onde plane est telle que les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation. Elle est polarisée rectilignement quand la direction du champ électrique dans le plan d'onde est constante.

2 Réponse **b.** Une onde plane progressive harmonique a une polarisation elliptique dans le cas général. Elle s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi_0)\vec{u}_y.$$

Les cas rectilignes ou circulaires ne sont que des cas particuliers.

3 Réponse **a.** La trajectoire décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}(M)$ au cours d'une période est un cercle : $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$. Le signe + correspond à la polarisation circulaire gauche et le signe – correspond à la polarisation circulaire droite. Les autres réponses correspondent à des polarisations rectilignes.

4 Réponse **b.** La direction reste constante, c'est la direction du vecteur $\vec{E}_0$. Les réponses **a.** et **c.** correspondent à des champs électriques dont les directions varient. Ce sont des ondes polarisées elliptiquement.

5 Réponse **c.** Elle se décompose en deux ondes polarisées circulairement droite et gauche.

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Savoir appliquer le cours

1 La lumière naturelle, après passage dans le polariseur, est polarisée rectilignement. Après passage dans la lame quart d'onde, elle devient polarisée circulairement.
En sens inverse, la lumière naturelle, après passage dans la lame, est toujours non polarisée. Le passage dans le polariseur la polarise rectilignement.
Il faut donc tenir compte du sens de parcours de la lumière dans les composants optiques. Un polariseur circulaire a une face d'entrée.

2 Pour une lumière **polarisée circulairement gauche**, le passage dans une lame quart d'onde donne une onde polarisée rectilignement. On choisit l'entrée de la lame en $z = 0$ et $E_0 > 0$.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t) \\ E_0\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t) \\ E_0\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = E_0\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc une **polarisation rectiligne selon la première bissectrice**.
Pour une lumière **polarisée circulairement droite**, le passage dans une lame quart d'onde donne une onde polarisée rectilignement.

$$\vec{E}_{\text{entrée } z=0} = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t) \\ -E_0\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{sortie } z=e} = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t) \\ -E_0\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -E_0\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc une **polarisation rectiligne selon la deuxième bissectrice.**
Le protocole opératoire est le suivant : on place derrière la source de lumière, polarisée circulairement, un filtre, une lame quart d'onde et un polariseur. On tourne le polariseur dans son plan. On obtient un minimum nul pour une direction du polariseur. La perpendiculaire à cette direction donne la direction

© Nathan, *classe prépa*

du champ électrique (première ou deuxième bissectrice) et nous permet de différencier la polarisation circulaire gauche de la polarisation circulaire droite.

3 On peut polariser de la lumière naturelle par réflexion vitreuse, l'angle de Brewster est donné par

$\tan i_B = \dfrac{n_{verre}}{n_{air}} = n_{verre}$ pour une réflexion air-verre.

A.N. : $i_{B1} = 55{,}52°$ et $i_{B2} = 55{,}77°$.

On remarque que l'angle de Brewster varie très peu.

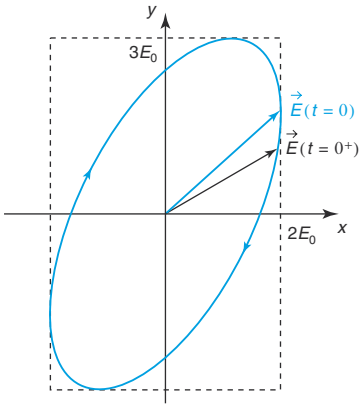
4 La trajectoire décrite par l'extrémité du champ électrique est une ellipse inscrite dans un rectangle de cotés $2E_0$ et $3E_0$. La méthode pour déterminer le sens de parcours est la suivante. On va fixer $z = 0$, on regarde la position du champ à $t = 0$ et ensuite à $t > 0$ proche de $t = 0$, on en déduit le sens de parcours.

$$\vec{E}(z = 0, t = 0) = \begin{bmatrix} 2E_0 \\ 3E_0 \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}E_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

À $t > 0$ et proche de 0, $0 < \cos\omega t < 1$ et

$0 < \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right) < \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$; E_x et E_y décroissent entre 0 et t.

On remarque sur la figure que la polarisation elliptique est droite.



S'entraîner

1 Avant de placer la cuve, il y a extinction (analyseur et polariseur croisés). Quand on place la cuve avec la substance, on réobtient de la lumière sur l'écran. Pour mesurer le pouvoir rotatoire, on va mesurer l'angle dont a tourné la direction de polarisation de la lumière en tournant l'analyseur jusqu'à réobtenir l'extinction.

Si, en regardant l'analyseur du point de vue de la sortie, on a tourné vers la droite (sens des aiguilles d'une montre), la substance est dite dextrogyre. Si on a tourné vers la gauche (sens inverse des aiguilles d'une montre), la substance est dite lévogyre.

Le pouvoir rotatoire dépend de la longueur de substance traversée, de la concentration et, bien sûr, de la nature de la solution.

Attention : il ne faut pas confondre la biréfringence et le pouvoir rotatoire. Dans l'expérience ci-dessus, si on remplace la cuve par une lame biréfringente, on peut trouver des positions de la lame pour lesquelles l'extinction subsiste (positions telles que les lignes neutres de la lame soient confondues avec les directions de l'analyseur et du polariseur croisés) tandis que pour une substance à pouvoir rotatoire, quelle que soit sa position, le champ électrique tourne et on réobtient de la lumière.

2 Chaque polariseur i fait tourner la direction de polarisation de α_i. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 90°$ avec n le nombre de polariseurs. Un seul polariseur ne peut suffire car cela imposerait que sa direction soit perpendiculaire à la direction de polarisation de la lumière et il y aurait extinction.

1. Il faut au minimum deux polariseurs tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$.

2. L'intensité transmise par un polariseur est, d'après la loi de Malus, $I_{transmis} = I_{incident}\cos^2\alpha_i$. L'intensité transmise par n polariseurs est :

$$\prod_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i \, I_{incident}.$$

On veut que l'intensité transmise soit supérieure à 60 % de l'intensité initiale donc que :

$$\prod_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i \geqslant 0{,}6.$$

avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 90°$. On s'aperçoit que le produit des $\cos^2\alpha_i$ est maximal quand les α_i ont tous la même

© Nathan, *classe prépa*

valeur. On fait des calculs numériques et on obtient au minimum 5 polariseurs.

A.N. : $n = \mathbf{2}$, $\alpha_i = \mathbf{45°}$ et $\prod_{i=1}^{2} \cos^2\alpha_i = \mathbf{0{,}25}$.

A.N. : $n = \mathbf{3}$, $\alpha_i = \mathbf{30°}$ et $\prod_{i=1}^{3} \cos^2\alpha_i = \mathbf{0{,}42}$.

A.N. : $n = \mathbf{4}$, $\alpha_i = \mathbf{22{,}5°}$ et $\prod_{i=1}^{4} \cos^2\alpha_i = \mathbf{0{,}53}$.

A.N. : $n = \mathbf{5}$, $\alpha_i = \mathbf{18°}$ et $\prod_{i=1}^{5} \cos^2\alpha_i = \mathbf{0{,}605}$.

3 **1.** Le déphasage entre les deux composantes du champ électrique selon les axes Δ_1 et Δ_2 après une longueur ℓ traversée dans le milieu est :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_D - n_0)\ell = 2\pi k E_a^2 \ell.$$

2. On veut réaliser une lame demi-onde, le déphasage vaut π et il en résulte $2kE_a^2\ell = 1$ avec $E_a = \frac{U}{e}$.

$$U_1 = \frac{e}{\sqrt{2k\ell}}.$$

A.N. : $U_1 = \mathbf{5 \cdot 10^4\ V}$.

3. En choisissant l'axe Ox selon Δ_1 et la direction de propagation selon Oz, on peut écrire le champ électrique de l'onde polarisée rectilignement par P_1 (à 45° de Ox et Oy) sous la forme (amplitude $E_0 > 0$) :

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_0\cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On choisit $z = 0$ à l'entrée du milieu, le champ électrique après P_1 et juste avant la traversée du milieu peut s'écrire :

$$\vec{E}_1(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos\omega t \\ E_0\cos\omega t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les lignes neutres de la lame formée par le milieu sont Ox et Oy, $n_D > n_0$ donc la composante selon y est en retard par rapport à la composante selon x. Le champ électrique juste après le milieu peut s'écrire, en mettant tout le déphasage $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_D - n_0)\ell$ dans la composante selon y :

$$\vec{E}_2(M) = \begin{bmatrix} E_0\cos\omega t \\ E_0\cos(\omega t - \phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le polariseur P_2 est croisé avec P_1 :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{u}_{P_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

$$\vec{u}_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x - \vec{u}_y).$$

Le champ électrique après P_2 s'écrit :

$$\vec{E}_2(M) = \left(E_0\cos\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz_2) - E_0\sin\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz_2 - \phi)\right)\vec{u}_{P_2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\vec{E}_2(M) = -2\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t - kz_2 - \frac{\phi}{2}\right)\sin\frac{\phi}{2}\vec{u}_{P_2}$$

$$I_2 = K\langle E_2^2\rangle = KE_0^2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$I_1 = K\langle E_1^2\rangle = KE_0^2$$

$$I_2 = I_1\sin^2\frac{\phi}{2}.$$

Cette relation est pertinente. En effet, en l'absence de milieu, $\phi = 0$ et $I_2 = 0$ ce qui est cohérent avec l'analyseur et le polariseur croisés. En présence du milieu quand $U = U_1$, $\phi = \pi$ et $I_2 = I_1$ ce qui est cohérent, le milieu transforme l'onde polarisée selon P_1 en onde polarisée selon P_2.

Remarque : une lame demi-onde transforme une onde polarisée rectilignement en une onde polarisée rectilignement symétriquement par rapport aux lignes neutres de la lame.

4 **1.** Le polariseur polarise rectilignement l'onde et la lame quart d'onde transforme l'onde polarisée rectilignement en une onde polarisée elliptiquement d'axes les lignes neutres de la lame.

Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et en notant l'amplitude $E_0 > 0$ selon $\vec{e}_y$:

$$\vec{E}_{\text{avant la lame}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0\cos\alpha\cos(\omega t - kx) \\ -E_0\sin\alpha\cos(\omega t - kx) \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{après la lame}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0\cos\alpha\cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) = -E_0\cos\alpha\sin(\omega t - kx) \\ -E_0\sin\alpha\cos(\omega t - kx) \end{bmatrix}$$

2. Après le miroir dont la normale est selon Ox, les composantes selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont changées de signe (déphasage de π à la réflexion).

© Nathan, *classe prépa*

$$\vec{E}_{\text{après le miroir}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \cos\alpha \sin(\omega t + kx) \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t + kx) \end{bmatrix}$$

On constate que cela ne change pas le sens de parcours de l'ellipse car l'onde se propage maintenant dans la direction $-\vec{e}_x$.

Attention : c'est l'observateur qui définit droite et gauche et il est toujours situé à la sortie du composant optique.

$$\vec{E}_{\text{après le miroir et après la lame}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \cos\alpha \sin\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t + kx) \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t + kx) \end{bmatrix}$$

Il s'agit des composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. L'onde est polarisée rectilignement selon la direction symétrique de $\vec{u}_P = \vec{e}_y$ par rapport à $\vec{u}$.

Dans le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{4}$, l'onde est polarisée circulairement après la lame et après réflexion sur le miroir et passage à nouveau dans la lame, elle est polarisée rectilignement dans une direction perpendiculaire au polariseur. Il y a extinction après passage dans le polariseur.

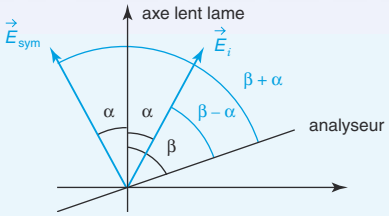
L'intérêt est de fournir un test pour repérer la face d'entrée d'un polariseur circulaire. On met un miroir plan derrière, si le polariseur circulaire est dans le bon sens, il y a extinction de la lumière retour.

S'il est dans le mauvais sens (voir exercice n° 1 de « Savoir appliquer le cours), on récupère de la lumière polarisée selon $\vec{e}_y$ à l'aller et après réflexion sur le miroir aussi, le passage dans le polariseur laisse inchangée la polarisation et le passage dans la lame quart d'onde donne une lumière polarisée circulairement donc il n'y a pas extinction.

3. Quand on remplace le miroir par un milieu diélectrique en incidence de Brewster, l'onde réfléchie est totalement polarisée selon la perpendiculaire au plan d'incidence. Le plan d'incidence est le plan Ixz donc la composante selon z est éliminée et l'onde réfléchie est polarisée rectilignement selon y.

5 **1.** Dans la zone 1, la polarisation de l'onde est inchangée $\vec{E}_i$ tandis que dans la zone 2, l'onde est polarisée rectilignement symétriquement par rapport aux lignes neutres de la lame demi-onde $\vec{E}_{\text{sym}}$.

Après passage dans l'analyseur, dans la zone 1 on récupère la projection de $\vec{E}_i$ sur l'analyseur $E_i \cos(\beta - \alpha)$ et dans la zone 2, on récupère la projection de $\vec{E}_{\text{sym}}$ sur l'analyseur $E_i \cos(\beta + \alpha)$.



Conseil : l'intensité d'une onde polarisée rectilignement après passage dans un polariseur est en $\cos^2\theta$ (loi de Malus) avec θ l'angle que fait le polariseur avec la direction de polarisation de l'onde.

Pour réaliser l'égalité des éclairements des deux zones, il faut que $\cos^2(\beta - \alpha) = \cos^2(\beta + \alpha)$ donc que $\beta = 0$ ou $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Si $\beta = 0$, les éclairements valent $\cos^2\alpha$.

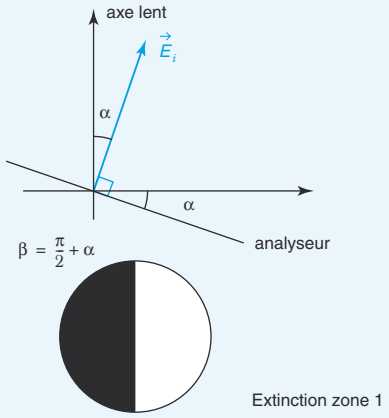
Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, les éclairements valent $\sin^2\alpha$.

2. Il faut choisir α le plus petit possible (mais non nul) pour avoir un contraste maximal : $\cos^2\alpha$ très différent de $\sin^2\alpha$. Si $\beta = 0$, éclairements égaux intenses. Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, éclairements égaux faibles, on parle d'équipénombre. On choisit donc $\beta = \frac{\pi}{2}$.

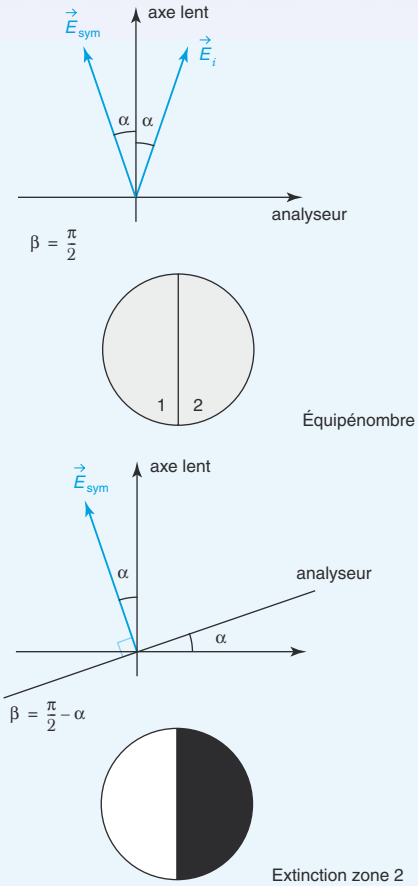
3. Le polarimètre étant réglé à l'égale pénombre $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$, on intercale entre le dispositif et l'analyseur une cuve de longueur ℓ, contenant une solution d'un composé dextrogyre. Cette solution douée de pouvoir rotatoire va faire tourner le champ électrique d'un angle θ dans le sens des aiguilles d'une montre.

Pour retrouver l'équipénombre, il faut tourner l'analyseur de θ dans le sens des aiguilles d'une montre.

Remarque : Expérimentalement, quand on règle le polarimète à l'équipénombre, on remarque que l'équipénombre se situe entre deux extinctions : celle de la zone 1 (analyseur perpendiculaire à $\vec{E}_i$) puis celle de la zone 2 (analyseur perpendiculaire à $\vec{E}_{\text{sym}}$). En effet, $\beta = \frac{\pi}{2}$ à l'équipénombre et $\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ pour les deux extinctions.



© Nathan, *classe prépa*



6 **1.** On place un polariseur P_1 devant le miroir M_1, sur l'écran on observe toujours des franges d'interférences mais beaucoup moins contrastées. En effet, le polariseur P_1 diminue de moitié l'intensité (voir essentiel **2.1.4**) de la voie 1 et les interférences n'ont lieu, pour la voie 2, que pour la composante du champ électrique sélectionnée par le polariseur, ces interférences sont observées sur un fond continu dû à la lumière non polarisée selon P_1 et réfléchie sur le miroir M_2 ($I_{min} \neq 0$).
On place un polariseur P_2 devant M_2 et on le tourne, pour la position antiparallèle, on n'observe plus de franges sur l'écran. Deux ondes de champs électriques de directions perpendiculaires ne peuvent pas interférer. Pour la position parallèle, on observe à nouveau des franges sur l'écran. Deux ondes de champs électriques de même direction peuvent interférer et si les amplitudes sont égales, le contraste est maximal.
Attention : on a perdu en luminosité car les intensités de chaque voie ont été divisées par deux.

2. Les deux polariseurs P_1 et P_2 étant antiparallèles, on place alors un polariseur P_3 à la sortie. L'onde est polarisée rectilignement selon une direction par la voie 1 et l'onde est polarisée rectilignement selon une direction perpendiculaire par la voie 2. Le polariseur de sortie permet de projeter les champs électriques des deux ondes sur la même direction et de rendre les interférences possibles entre les deux voies de l'interféromètre.
Quand le polariseur P_3 est à 45° des deux autres polariseurs, les deux ondes qui interfèrent ont même amplitude et le contraste est alors maximal. Quand le polariseur P_3 fait un angle quelconque, le contraste chute jusqu'à s'annuler quand il est parallèle à P_1 ou P_2 En effet, dans ces deux cas, il ne peut plus y avoir interférences. Le champ électrique selon une seule voie est sélectionné par P_3, l'autre voie est éliminée.

Attention : on a encore perdu en luminosité car les intensités de chaque voie ont été divisées d'abord par deux puis multipliées par $\cos^2\alpha_i < 1$ (loi de Malus) avec α_i, l'angle que fait chaque polariseur P_1 ou P_2 avec la direction de P_3.

3. Les deux polariseurs étant antiparallèles, on ajoute un polariseur P_3 à l'entrée du Michelson. On sélectionne à l'entrée la composante du champ électrique selon P_3 qui se projette sur les polariseurs P_1 et P_2 ; ces derniers étant antiparallèles, ils ne peuvent en aucun cas interférer. Cela ne sert donc à rien de tourner P_3. Pour retrouver des franges d'interférences, il faudrait mettre un polariseur à la sortie comme dans la question précédente.

Conclusion : pour interférer, deux ondes lumineuses doivent avoir la même direction de polarisation.

7 **1.** Les lignes neutres de la lame sont à 45° des directions du polariseur et de l'analyseur croisés. En raison de sa biréfringence, la lame d'épaisseur e donne en sortie deux composantes du champ électrique selon ses lignes neutres de même amplitude (onde incidente polarisée rectilignement à 45° de ses lignes neutres) mais déphasées de $\Phi = \dfrac{2\pi(n_{lent} - n_{rapide})e}{\lambda}$ pour une longueur d'onde fixée. Les deux composantes vont se projeter sur l'axe de l'analyseur (à 45° des lignes neutres) et vont pouvoir interférer. Comme elles ont même amplitude, le contraste sera maximum. Notons l'axe optique Oz et raisonnons à longueur d'onde fixée :

$$\vec{E}_{\text{après l'analyseur}} = \left(E_0 \cos\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz) - E_0 \sin\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz + \Phi)\right)\vec{u}_{\text{analyseur}}$$

$$\langle \cos^2(\omega t - kz)\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos^2(\omega t - kz + \Phi)\rangle = \frac{1}{2}, \text{ et}$$

$$\langle \cos(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz + \Phi)\rangle = \frac{\cos\Phi}{2}.$$

$$I_{\text{après l'analyseur}} = I'_0(1 - \cos\Phi) = 2I'_0 \sin^2\frac{\Phi}{2}.$$

© Nathan, *classe prépa*

La source étant blanche, on observe des interférences en lumière blanche. Une ou plusieurs longueurs d'onde dans le visible peuvent correspondre à $\Phi = \pi$ modulo 2π (interférences constructives dans ce cas, l'intensité est maximale) tandis que d'autres longueurs d'onde dans le visible peuvent correspondre à $\Phi = 0$ modulo 2π (interférences destructives dans ce cas, l'intensité est nulle, radiations éteintes) donc la lame nous apparaît d'une certaine couleur.
La lame doit être mince car il ne faut pas qu'il y ait trop de radiations éteintes sinon on obtiendrait un blanc d'ordre supérieur.

2. On tourne alors l'analyseur de 90°. On observe la couleur complémentaire de l'expérience précédente.

$$\vec{E}_{\text{après la lame}} = \begin{bmatrix} E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_0\cos(\omega t - kz + \Phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{après l'analyseur}} = \left(E_0\cos\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz) + E_0\sin\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz + \Phi)\right)\vec{u}_{\text{analyseur}}.$$

$$I_{\text{après l'analyseur}} = I_0'(1 + \cos\Phi) = 2I_0'\cos^2\frac{\Phi}{2}.$$

Imaginons que dans l'expérience du **1.**, nous ayons vu la lame jaune, cela signifie que :

$$\frac{2\pi(n_{\text{lent}} - n_{\text{rapide}})e}{\lambda_{\text{jaune}}} = (2p+1)\pi \text{ avec } p \text{ entier.}$$

Dans cette expérience (l'analyseur a tourné de 90°), les interférences sont constructives pour $\Phi = 0$ modulo 2π. Ce déphasage supplémentaire de π va donner des interférences destructives pour le jaune et va donc donner la couleur complémentaire du jaune. La lame apparaît dorénavant violette.

3. Pour chaque épaisseur de Scotch, correspond une ou plusieurs longueurs d'onde dans le visible telle que $\Phi = 0$ modulo 2π (interférences constructives pour l'expérience du **2.**) donc cette partie du Scotch nous apparaît d'une certaine couleur (dans l'expérience du **1.**, la même partie du Scotch apparaît avec la couleur complémentaire).
L'effet résultant est un effet vitrail si on a croisé suffisamment de morceaux de scotch.
Voir documents **a** et **b** en 2e de couverture : un papillon a été gravé sur une lame mince biréfringente. Il en résulte des variations d'épaisseur de la lame. On la place dans le dispositif expérimental. Dans la situation polariseur et analyseur croisés, le papillon apparaît coloré sur l'écran ; dans la situation polariseur et analyseur parallèles, le papillon apparaît aussi coloré mais avec les couleurs complémentaires.

8 **1.** Calculons le déphasage $|\alpha_1|$ entre les vibrations qui se propagent selon l'axe lent et celles qui se propagent selon l'axe rapide de la lame L_1, il vaut $|\alpha_1| = \frac{2\pi}{\lambda}e\Delta n$;

2. L'onde incidente est polarisée rectilignement par le polariseur P_0 à 45° des lignes neutres de la lame L_1. On peut écrire en choisissant l'axe rapide selon $\vec{u}_y$ qui est en avance par rapport à l'axe lent selon $\vec{u}_x$.

$$\vec{E}_{\text{avant la lame}} = \begin{bmatrix} E_0\cos\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz) \\ E_0\sin\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_0 = K\frac{E_0^2}{2}$$

$$\vec{E}_{\text{après la lame}} = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - kz + \alpha_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{\text{après le polariseur}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz) + \sin\frac{\pi}{4}\cos(\omega t - kz + \alpha_1)\right)\vec{u}_{P_1}.$$

$$\vec{E}_{\text{après le polariseur}} = \frac{E_0}{2}(\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t - kz + \alpha_1))\vec{u}_{P_1}.$$

Il y a interférences entre les deux vibrations selon les lignes neutres de la lame grâce au polariseur P_1.

$$\langle\cos^2(\omega t - kz)\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle\cos^2(\omega t - kz + \alpha_1)\rangle = \frac{1}{2}$$

et $\langle\cos(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz + \alpha_1)\rangle = \frac{\cos\alpha_1}{2}$

$$I_1 = K\frac{E_0^2}{4}(1 + \cos\alpha_1) = I_0\cos^2\frac{\alpha_1}{2}$$

On en déduit que pour 4 lames et 4 polariseurs, les déphasages étant α_1, $2\alpha_1$, $4\alpha_1$ et $8\alpha_1$:

$$I = I_0\cos^2\frac{\alpha_1}{2}\cos^2\alpha_1\cos^2(2\alpha_1)\cos^2(4\alpha_1).$$

3. La courbe $\frac{I}{I_0} = f(\alpha_1)$ est celle d'un filtre très sélectif. En effet, $\frac{I}{I_0}$ est maximum, et vaut 1 quand tous les cosinus au carré valent 1 donc quand $\alpha_1 = 2p\pi$ avec p entier naturel. Quand on s'écarte de cette valeur, la fonction décroît très rapidement.
$\alpha_1 = 2p\pi$ implique $\lambda = \frac{e}{p}\Delta n$.

4. A.N. : $\lambda = \mathbf{0{,}417\ \mu m}$ dans le violet très proche de l'ultraviolet, $\lambda = \mathbf{0{,}500\ \mu m}$ dans le bleu et $\lambda = \mathbf{0{,}625\ \mu m}$ dans le rouge.
On le qualifie de monochromateur car il permet de sélectionner une bande étroite de longueurs d'onde autour d'une longueur d'onde.

© Nathan, *classe prépa*

Problèmes de concours

Problème 1

Mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie

(d'après École Polytechnique)

Le dispositif étudié constitue un interféromètre compact dédié à l'étude sismique de sources stellaires. Le principe proposé, un peu moins efficace qu'un spectromètre à réseau, conduit à un instrument bien moins encombrant et bien moins coûteux. Le principe de l'interféromètre est analysé, ainsi que son installation au foyer d'un télescope et son fonctionnement dans des conditions d'observation réalistes. On suppose, dans tout le problème, les optiques idéales : lentilles parfaitement transparentes, miroirs totalement réfléchissants, lames semi-réfléchissantes divisant le faisceau incident en deux faisceaux d'intensités lumineuses égales.
Un soin tout particulier devra être apporté aux applications numériques.

Grandeurs physiques

Vitesse de la lumière : $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
Masse de l'atome d'hydrogène : $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masse molaire de l'hydrogène atomique : $M_H = 1\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$

Partie A – Interférométrie

Dans tout ce qui suivra, on notera σ le nombre d'onde, à savoir l'inverse de la longueur d'onde λ. On exprimera ce nombre d'onde en m^{-1}.

© Nathan, *classe prépa*

1 La figure 1 correspond au montage de principe d'un interféromètre de Michelson. Les miroirs sont réglés de telle façon que l'on observe des anneaux d'interférence circulaires sur l'écran E placé dans le plan focal de la lentille L, de distance focale image f'.

a. Quel est le rôle de la lame semi-réfléchissante SR ? Quel est celui de la lentille L ?

b. Montrer qu'avec ce montage la moitié du flux incident est irrémédiablement perdue.

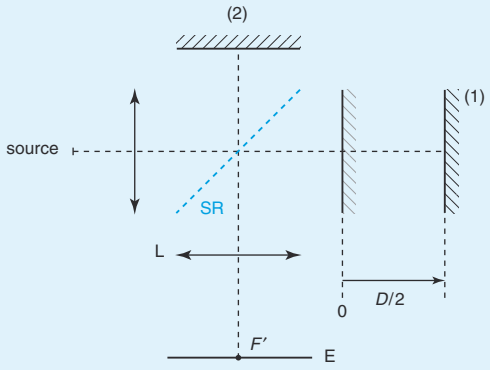


Figure 1

2 La différence de marche, différence entre les deux chemins optiques pour un rayon entrant perpendiculairement au miroir (1), est notée D ; pour un rayon entrant avec une inclinaison i, on rappelle que la différence de marche est alors donnée par $\delta = D\cos i$.

a. L'interféromètre est éclairé par une source étendue, supposée strictement monochromatique de nombre d'onde σ_0. On suppose la tache centrale en F' brillante. Exprimer le rayon r_1 du 1er anneau sombre, en fonction de σ_0, D et f'. Faire un schéma de ce que l'on observe sur l'écran.

b. La source est l'image d'une étoile, telle celle fournie par un télescope. Cette image est étalée par la diffraction mais surtout par la turbulence atmosphérique, ce qui donne des rayons entrant dans l'interféromètre d'inclinaisons diverses mais faibles. Quelle est la figure d'interférence observée en fonction de D en présence d'un filtre interférentiel qui sélectionne une très étroite bande passante autour d'un nombre d'onde σ_0 donné ?

3 On éclaire l'interféromètre par une source monochromatique, de nombre d'onde σ_0. Un détecteur est placé au foyer F' de la lentille L. Ce détecteur délivre un signal $S(D)$, proportionnel à l'intensité lumineuse au point F'. Ce signal sera appelé dans la suite *interférogramme*. Il dépend de la différence de marche D.

a. Montrer que $S(D)$ est donné par : $S(D) = S_0(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D)$. Que représente S_0 ?

b. Quelle est la période de l'interférogramme ?

4 On illumine l'interféromètre par une source présentant un doublet de nombres d'onde σ_1 et σ_2 voisins. Chacune des raies est supposée monochromatique et leurs intensités sont égales.

a. Déterminer l'expression de l'interférogramme $S(D)$ correspondant. Mettre en évidence deux périodes caractéristiques dans $S(D)$.

b. A.N. Représenter l'allure de l'interférogramme pour le doublet du sodium : $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm.

Partie B – Interférogramme d'une raie élargie

1 On suppose maintenant que le profil spectral de la source n'est plus monochromatique mais possède une largeur $\Delta\sigma$. On désigne par I_σ l'intensité spectrale : dans l'intervalle $[\sigma\,;\,\sigma + d\sigma]$, l'intensité émise est $I_\sigma d\sigma$. On admettra que les rayonnements correspondant à chaque intervalle de largeur $d\sigma$ sont incohérents.

© Nathan, *classe prépa*

On notera I_0 l'intensité lumineuse totale de la raie. I_0 est donc donnée par la somme des intensités de chaque intervalle :

$$I_0 = \int_0^{\infty} I_\sigma \, d\sigma.$$

Dans la suite, on prend I_σ de la forme :

$$I_\sigma(\sigma) = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \text{ si } |\sigma - \sigma_0| \leqslant \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$I_\sigma(\sigma) = 0 \text{ si } |\sigma - \sigma_0| > \frac{\Delta\sigma}{2}.$$

a. Montrer alors que le signal détecté est donné par : $S(D) = S_0(1 + v\cos 2\pi\sigma_0 D)$ et exprimer la fonction de visibilité des franges v en fonction de D et $\Delta\sigma$. Représenter schématiquement la fonction $v(D)$.

b. Quelle est la plus petite valeur $D_{\Delta\sigma}$ de D qui annule la fonction de visibilité ?

2 On illumine l'interféromètre avec une source stellaire via un filtre de bande passante $[\sigma_1 ; \sigma_2]$ sélectionnant une raie en absorption (figure 2). Cette raie d'absorption (profil grisé sur la figure 2) est suffisamment étroite pour être considérée comme monochromatique. On note I_c l'intensité totale au travers du filtre (sans absorption) et I_a l'intensité totale absorbée.

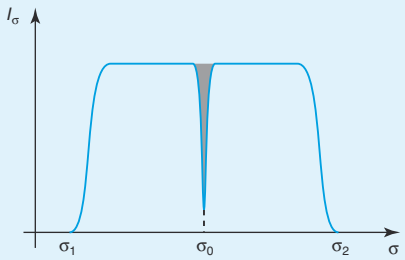


Figure 2

a. Montrer que, d'après la question précédente, on peut négliger dans le signal interférométrique tout terme interférentiel associé au spectre large délimité par le filtre si D est suffisamment grand, en supposant valables les résultats établis précédemment sur le profil de raie idéalisé.

b. En déduire que l'interférogramme s'écrit :

$$S(D) = S_c(1 + C\cos 2\pi\sigma_0 D)$$

où S_c est proportionnel à I_c. Exprimer le contraste de franges C en fonction de I_c et I_a.

Partie C – Élargissement et décalage possibles des raies spectrales. Évaluation de la différence de marche optimale

Une cause possible d'élargissement ou de décalage (en nombre d'onde) d'une raie spectrale est associée au mouvement relatif de la source et de l'observateur (effet Doppler). Soit ν_0 la fréquence d'émission d'une source au repos. Dans tout ce qui suit, lorsque la source (S) se déplace à la vitesse relative $\vec{V}$ par rapport à l'observateur (O), on admettra que celui-ci reçoit un rayonnement de fréquence ν donnée (pour $\frac{V}{c} \ll 1$) par :

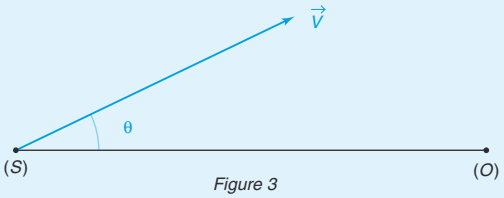


Figure 3

$$\nu - \nu_0 = \nu_0 \frac{V\cos\theta}{c}$$

© Nathan, *classe prépa*

où c est la vitesse de la lumière, $V = \|\vec{V}\|$ et θ l'angle entre la direction de propagation et $\vec{V}$ (figure 3). Nous examinons dans la suite diverses conséquences de cet effet Doppler sur l'interférogramme.

1 À la surface d'une étoile, les atomes (majoritairement de l'hydrogène) sont supposés former un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique de température T.
a. Quelle est la vitesse quadratique moyenne V_T d'un atome de cette étoile ?
b. La dispersion des vitesses entraîne par conséquent un élargissement $\Delta\sigma_K$ de la raie symétrique autour de la valeur σ_0. Donner l'ordre de grandeur de $\Delta\sigma_K$ en fonction de σ_0, V_T et c.
c. A.N. Évaluer $\Delta\sigma_K$ pour $T = 6\,000$ K et $\sigma_0 = 2 \cdot 10^6$ m^{-1}.

2 La rotation de l'étoile est aussi un paramètre dont il faut tenir compte. On note ψ l'angle entre la direction de visée et l'axe de rotation stellaire.
a. Pour quelle valeur de ψ l'influence de la rotation sur la largeur de la raie sera-t-elle nulle ? maximale ? Dans ce dernier cas, expliquer qualitativement pourquoi la rotation de l'étoile, phénomène parfaitement déterminé, conduit à un élargissement de la raie d'émission analogue à celui associé aux mouvements erratiques des atomes et analysé dans la question précédente.
b. Toujours dans le cas d'une influence maximale de la rotation, évaluer la contribution de la rotation stellaire $\Delta\sigma_{rot}$ à la largeur de raie en fonction de la vitesse équatoriale de rotation V_{rot} de la surface de l'étoile. Pour quelle vitesse équatoriale de rotation ce dernier terme est-il comparable à $\Delta\sigma_K$?
c. A.N. Dans ce dernier cas, calculer V_{rot} pour une étoile dont la température de surface est $T_s = 6\,000$ K.

3 On désire utiliser l'interféromètre comme sismomètre pour détecter les mouvements oscillatoires de la surface stellaire. Une oscillation sismique est assimilée à une variation $\Delta v(t)$ de la vitesse apparente vers l'observateur de l'ensemble de la couche externe de l'étoile. On suppose cette variation sinusoïdale, d'amplitude ΔV, de pulsation ω. Le spectre d'émission et d'absorption de l'étoile est celui de la question B.2. Cette utilisation ne requiert que l'enregistrement de l'interférogramme pour une valeur optimisée de la différence de marche notée D_0. En l'absence de signal sismique, l'interférogramme est $S(D_0)$ de B.2.b.
a. Montrer qu'à l'instant t, l'interférogramme peut être mis sous la forme :

$$S(D_0) = S_c[1 + C\cos(2\pi\sigma_0 D_0 + \varphi)]$$

où φ est le déphasage de l'interférogramme donné par l'expression :

$$\varphi = 2\pi\sigma_0 D_0 \frac{\Delta v(t)}{c}.$$

b. Montrer que cette relation implique, pour une détection optimale, le choix d'une différence de marche D_0 la plus grande possible. Comparer cette nouvelle condition à celle trouvée à la question B.1 et en déduire un ordre de grandeur de la différence de marche optimale pour une étoile de température T_0, en supposant négligeables les effets de rotation.
c. Montrer alors que le principe instrumental conduit à mesurer un déphasage φ d'amplitude de l'ordre de $\frac{\Delta V}{V_T}$.

© Nathan, *classe prépa*

4 Au décalage Doppler sismique du spectre stellaire, enregistré sur une nuit entière, se superposent diverses contributions. Estimer succinctement l'influence du mouvement de rotation de la Terre pour une observation menée dans un observatoire situé à la latitude λ. L'amplitude et la pulsation de l'oscillation sismique sont typiquement de l'ordre de 10 cm · s^{-1} et 10^{-2} rad · s^{-1}.

Partie D – Effet de la turbulence atmosphérique

1 L'interféromètre reçoit le flux d'une étoile, objet à l'infini, collecté par un télescope. On suppose le système optique du collecteur équivalent au montage de la figure 4. Ce montage est dit afocal : le foyer image de L_1 est confondu avec le foyer objet de L_2. La lentille L_1 représente le miroir primaire du télescope, de diamètre a. La lentille L_2 alimente l'interféromètre : le flux issu de L_2 est divisé par la première lame semi-réfléchissante de la figure 1.

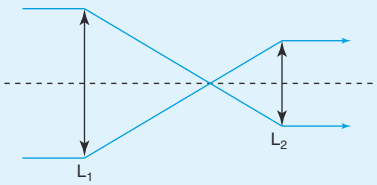


Figure 4

a. Justifier l'intérêt de ce montage afocal pour alimenter l'interféromètre.
b. Exprimer le grandissement angulaire G en fonction des distances focales images f'_1 et f'_2 des lentilles L_1 et L_2.
c. Déterminer la taille b du faisceau en sortie du collecteur, en fonction de G et du diamètre a du collecteur. En déduire le diamètre minimal des pièces optiques de l'interféromètre. Le calculer pour $a = 3{,}30$ m et $G = 165$.

2 La tache image de l'étoile n'est en fait ni limitée par la seule diffraction du collecteur, ni stable. La turbulence de l'atmosphère terrestre dévie et étale le faisceau stellaire incident. On s'intéresse principalement à la déviation atmosphérique du faisceau incident, notée i_0, et l'on suppose la source toujours ponctuelle.
a. Déterminer l'angle i sous lequel l'interféromètre voit les rayons d'une source stellaire, en fonction de i_0 et du grossissement G (grandissement angulaire) du télescope collecteur de lumière.
b. Estimer la différence de marche $D(i)$, en fonction de la différence de marche sous incidence nulle D_0 et de l'angle i.
c. Exprimer la condition sur l'inclinaison maximale admissible dans l'instrument, pour que les fluctuations en différence de marche restent inférieures à une fraction α de longueur d'onde.
d. A.N. On fixe α au plus égal à 5 % ; pour des conditions de turbulence moyenne $i_0 = 1''$; on donne $D_0 = 0{,}8$ cm et $2 \cdot 10^6$ m^{-1}. Estimer le grossissement G maximal.

3 **a.** Montrer que la turbulence conduit à une mesure de vitesse parasite δv telle que :

$$\frac{\delta v}{c} = \frac{1}{2} i^2.$$

b. A.N. Calculer δv pour $i_0 = 1''$, et un grossissement G égal à 165. L'instrument est conçu pour la mesure de vitesses sismiques dont l'amplitude est de l'ordre de 10 cm · s^{-1}. Est-il nécessaire de prévoir, pour alimenter l'interféromètre, un dispositif corrigeant les fluctuations dues à la turbulence atmosphérique ?

© Nathan, *classe prépa*

résolution méthodique

Partie A

1 a. Le rôle de la lame semi-réfléchissante est de diviser l'amplitude de l'onde incidente et de **réaliser un dispositif diviseur d'onde**. Un point M qui appartient à l'écran est atteint par deux ondes cohérentes entre elles : l'une a cheminé par la voie 1 (transmis par SR, réfléchi par M_1 puis réfléchi par SR) tandis que l'autre a cheminé par la voie 2 (réfléchi par SR, réfléchi par M_2 puis transmis par SR).
On observe des anneaux d'interférences sur l'écran ; cela signifie que l'interféromètre de Michelson est dans la configuration lame d'air à faces parallèles. Avec une source étendue convergente sur les miroirs, les franges d'interférences sont localisées à l'infini d'où la nécessité d'utiliser une lentille L pour les visualiser sur un écran à distance finie.

b. Avec ce montage, la lame SR divise le faisceau incident I_0 en deux faisceaux d'intensités lumineuses égales à chaque passage à travers elle.
Au premier passage par SR, l'intensité est divisée en deux parts égales : 50 % pour la voie 1 et 50 % pour la voie 2 donc $\frac{I_0}{2}$ pour chaque voie. Après réflexion sur M_2, la moitié $\left(\frac{I_0}{4}\right)$ est transmise par SR pour aller interférer, tandis que l'autre moitié $\left(\frac{I_0}{4}\right)$ est réfléchie vers la source. Après réflexion sur M_1, la moitié est réfléchie par SR pour aller interférer $\left(\frac{I_0}{4}\right)$, tandis que l'autre moitié $\left(\frac{I_0}{4}\right)$ est transmise vers la source.

Finalement, $2\frac{I_0}{4} = \frac{I_0}{2}$ se dirige vers la source et la moitié du flux incident est irrémédiablement perdue.

2 a. On observe des interférences en lumière monochromatique.
$\delta = D\cos i$ et les anneaux brillants sont donnés par $\delta = k\lambda_0$ avec k entier. Pour $i = 0$, $\delta(i = 0) = D$: d'où $p_0 = D\sigma_0$; p_0 est entier car la tache centrale en $F'(i = 0)$ est brillante.

> **Attention :** l'énoncé ne précise pas si la différence de marche est calculée voie 2 par rapport à voie 1 ou l'inverse. Ce n'est pas important : soit k sera positif, soit k sera négatif.

Les anneaux sombres sont donnés par $p_n(M)$ demi-entier donc par l'équation :
$p_n(M) = \frac{D\cos i}{\lambda_0} = p_0 - \frac{1}{2} - (n-1)$ avec n entier, pour le $n^{\text{ième}}$ anneau sombre.
Pour le premier anneau sombre, $p_1 = \frac{D\cos i}{\lambda_0} = \sigma_0 D\cos i = p_0 - \frac{1}{2} = D\sigma_0 - \frac{1}{2}$.

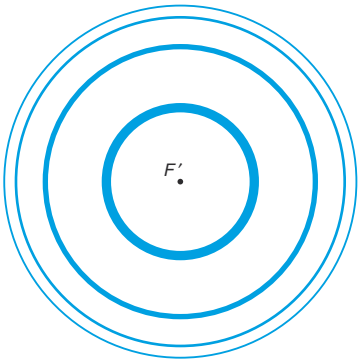
Pour de faibles valeurs de l'angle *i*, dans le plan focal image de la lentille L, on peut écrire $\tan i \approx i \approx \frac{r}{f'}$ et $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$ à l'ordre 2 en i.

$$D\sigma_0\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = D\sigma_0 - \frac{1}{2} \qquad D\sigma_0 i^2 = 1 = D\sigma_0\frac{r_1^2}{f'^2}$$

$$r_1 = f'\sqrt{\frac{1}{D\sigma_0}}.$$

© Nathan, *classe prépa*

On observe sur l'écran des anneaux, de centre F', alternativement sombres et brillants, non équidistants, plus resserrés sur les bords qu'au centre. On a représenté les quatre premiers anneaux sombres sur un schéma.



b. Si la source était ponctuelle et non étalée, le faisceau incident aurait correspondu à un seul angle d'incidence i. En raison de l'étalement (diffraction et turbulence atmosphérique), les inclinaisons bien que faibles sont diverses et permettent d'observer plusieurs anneaux. On observe à peu près la même chose que dans la question précédente. La source n'étant plus rigoureusement monochromatique, le contraste va diminuer légèrement, légèrement car la bande passante est très étroite.

3 a. L'amplitude reçue en F' est : $\underline{a}(F', t) = \underline{a}_0 e^{i\omega t}(1 + e^{i\Phi})$
avec $\Phi = 2\pi\sigma_0 D$ le déphasage entre les deux ondes cohérentes qui interfèrent en F'.
$S(D)$ est proportionnelle à $\underline{a}\underline{a}^*$.

$$\underline{a}\underline{a}^* = 2\underline{a}_0\underline{a}_0^*(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D)$$

$$\boxed{S(D) = S_0(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D)}$$

S_0 représente le signal que recevrait F' si les deux signaux étaient incohérents et n'interféraient pas.

$$S_{max} = 2S_0$$

b. La période de l'interférogramme est la période du signal $S(D)$ donc la période est $\frac{1}{\sigma_0}$.

4 a. Les deux composantes du doublet sont incohérentes, on peut additionner directement les intensités donc les signaux $S_1(D)$ et $S_2(D)$.

$$S_i(D) = S_0(1 + \cos 2\pi\sigma_i D)$$

$$S(D) = S_1(D) + S_2(D) = S_0(2 + \cos 2\pi\sigma_1 D + \cos 2\pi\sigma_2 D)$$

$$S(D) = 2S_0\left(1 + \cos\frac{2\pi D(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}\cos\frac{2\pi D(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}\right)$$

$$\sigma_{moyen} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \text{ et } \Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$S(D) = S_1(D) + S_2(D) = 2S_0(1 + \cos 2\pi\sigma_{moyen} D \cos \pi D\Delta\sigma)$$

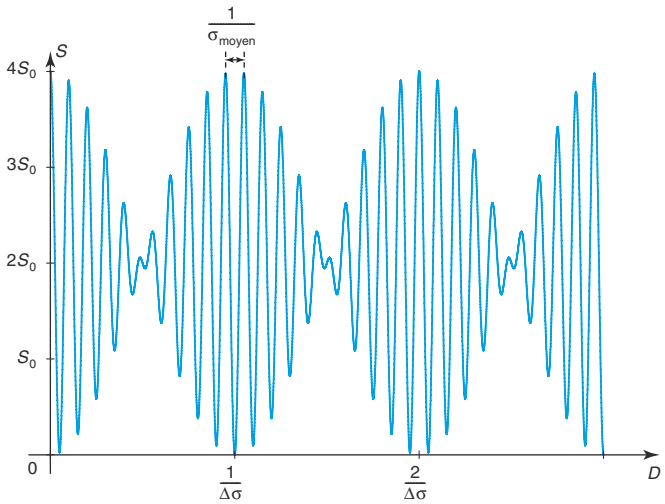
On met donc en évidence deux périodes caractéristiques $\frac{1}{\sigma_{moyen}}$ et $\frac{2}{\Delta\sigma}$.

© Nathan, *classe prépa*

b. A.N. : $\sigma_{moyen} = 1{,}696\,9 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1}$ et $\Delta\sigma = 1{,}7 \cdot 10^3\ \text{m}^{-1}$.

$\dfrac{1}{\sigma_{moyen}} = \mathbf{589{,}3\ nm}$ et $\dfrac{2}{\Delta\sigma} = \mathbf{1{,}158\ nm}$.

Pour représenter l'allure, remarquons que $\sigma_{moyen} \gg \Delta\sigma$ d'où $\dfrac{1}{\Delta\sigma} \gg \dfrac{1}{\sigma_{moyen}}$. Le signal est donc le produit d'un signal lent par un signal rapide. Le signal lent (de période $\dfrac{1}{\Delta\sigma}$) donne l'évolution de l'amplitude, la modulation tandis que le signal rapide (de période $\dfrac{1}{\sigma_{moyen}}$) est la porteuse. On observe des battements optiques de période $\dfrac{1}{\Delta\sigma}$ (voir figure).



Partie B

1 a. Chaque bande élémentaire de largeur $d\sigma$ est incohérente avec les autres donc, pour calculer la contribution de toutes les bandes à l'intensité au point F', il faut sommer sur toutes les bandes donc intégrer.

$$I(M) = \int_0^{\infty} dI(M) = \int_0^{\infty} 2I_\sigma(\sigma)(1+\cos\Phi)d\sigma = 2\frac{I_0}{\Delta\sigma}\int_{\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}}(1+\cos 2\pi\sigma D)d\sigma$$

$$I(M) = 2\frac{I_0}{\Delta\sigma}\int_{\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}}(1+\cos 2\pi\sigma D)d\sigma$$

$$S(D) = S_0 + \frac{S_0}{\Delta\sigma}\int_{\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}}\cos 2\pi\sigma D d\sigma = S_0 + S_0\left(\frac{\sin 2\pi\left(\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)D}{2\pi D\Delta\sigma} - \frac{\sin 2\pi\left(\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}\right)D}{2\pi D\Delta\sigma}\right)$$

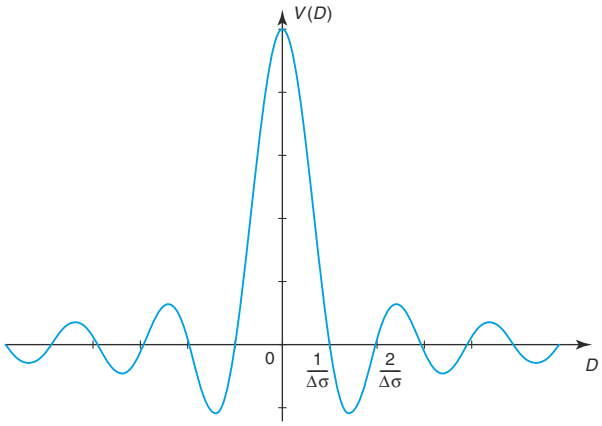
$$S(D) = S_0 + S_0\left(\frac{\sin 2\pi\left(\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)D}{2\pi D\Delta\sigma} - \frac{\sin 2\pi\left(\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}\right)D}{2\pi D\Delta\sigma}\right)$$

© Nathan, *classe prépa*

On utilise la formule : $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$.

$$S(D) = S_0\left(1 + \frac{\sin \pi D\Delta\sigma}{\pi D\Delta\sigma}\cos 2\pi D\sigma_0\right) = \boxed{S_0(1 + \operatorname{sinc}\pi D\Delta\sigma \cos 2\pi D\sigma_0)}$$

On peut alors noter $v = \operatorname{sinc}\pi D\Delta\sigma$ fonction visibilité des franges ; on reconnaît la fonction sinus cardinal qui s'annule périodiquement (voir figure).



b. La fonction sinus cardinal s'annule pour $\pi D\Delta\sigma = \pi$, ce qui donne la plus petite valeur $D_{\Delta\sigma} = \dfrac{1}{\Delta\sigma}$.

2 a. Notons S_c et S_a les signaux correspondants à I_c et I_a. Le signal obtenu avec le filtre sélectionnant la raie en absorption est :

$$S(D) = K\int_{-\infty}^{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}} I_\sigma(1 + \cos 2\pi\sigma D)\mathrm{d}\sigma + K\int_{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\infty} I_\sigma(1 + \cos 2\pi\sigma D)\mathrm{d}\sigma$$

$$S(D) = C_0\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(1 + \cos 2\pi\sigma D)\mathrm{d}\sigma - C_0\int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}}(1 + \cos 2\pi\sigma D)\mathrm{d}\sigma$$

Le premier terme correspond au filtre sans absorption et le second terme à une raie idéalisée quasi monochromatique.

$$S_c = C_0\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(1 + \cos 2\pi\sigma D)\mathrm{d}\sigma = S_{0c}(1 + \operatorname{sinc}\pi D(\sigma_2 - \sigma_1)\cos\pi D(\sigma_1 + \sigma_2))$$

Si $D \gg D_{\Delta\sigma} = \dfrac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}$, alors la fonction visibilité est quasi nulle et $S_c \approx S_{0c}$.

b. Le second terme vaut pour une raie suffisamment étroite (visibilité $v \approx 1$) :

$$S_a = C_0\int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}}(1 + \cos 2\pi\sigma D)\mathrm{d}\sigma \approx S_{0a}(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D)$$

$$S(D) = S_c - S_{0a}(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D) = (S_c - S_{0a}) - S_{0a}\cos 2\pi\sigma_0 D \approx S_c - S_{0a}\cos 2\pi\sigma_0 D$$

En effet, $S_{0a} \ll S_c \approx S_{0c}$ car $I_a \ll I_c$ d'où $\boxed{C = -\dfrac{S_{0a}}{S_{0c}} = -\dfrac{I_a}{I_c}}$

© Nathan, *classe prépa*

Partie C

1 a. La vitesse quadratique moyenne (agitation thermique) vaut pour un gaz parfait monoatomique comme l'hydrogène $V_T^2 = \dfrac{3k_B T}{m_H}$ à l'équilibre thermodynamique de température T.

b. La dispersion des vitesses fait que $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$; il en résulte que :

$$-\nu_0 \frac{V_T}{c} \leqslant \Delta\nu = \nu_0 \frac{V_T}{c}\cos\theta \leqslant \nu_0 \frac{V_T}{c}.$$

$$-\frac{V_T}{c} \leqslant \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \leqslant \frac{V_T}{c}$$

Si on note $\Delta\sigma_K$ l'écart total, il correspond à un écart total $\Delta\nu = 2\dfrac{\nu_0 V_T}{c} = 2V_T\sigma_0$.

$$\Delta\sigma_K = \frac{\Delta\nu}{c} = 2\frac{V_T\sigma_0}{c}$$

c. A.N. : $V_T = 1{,}22 \cdot 10^4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $\Delta\sigma_K = 163\ \mathrm{m^{-1}}$.

2 a. L'étoile tourne. Si $\Psi = 0$, la direction de visée (direction SO de la figure 3) est confondue avec l'axe de rotation stellaire et cela correspond à un seul angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ puisque les vitesses des atomes (dues à la rotation) sont contenues dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. L'influence de la rotation sur la largeur de raie est nulle.

Pour $\Psi = \dfrac{\pi}{2}$, toutes les valeurs de θ sont possibles puisque la direction de visée est dans le même plan que les vitesses de rotation. L'influence de la rotation sur la largeur de raie est maximale.

La rotation de l'étoile est un phénomène parfaitement déterminé mais, au même instant, l'observateur observe toutes les directions possibles (pour $\Psi = \dfrac{\pi}{2}$) pour les vitesses de rotation des atomes, ce qui conduit alors à un élargissement analogue à celui dû à l'agitation thermique.

b. On obtient une largeur de raie maximale $\Delta\sigma_{\text{rotation}} = 2\dfrac{V_{\text{rotation}}\sigma_0}{c}$ en utilisant la formule du **1.b**.

Les deux termes sont comparables si $\Delta\sigma_{\text{rotation}} \approx \Delta\sigma_K$ ce qui donne $V_{\text{rotation}} \approx V_T$.

c. A.N. : $V_{\text{rotation}} = V_T = \mathbf{1{,}22 \cdot 10^4\ m \cdot s^{-1}}$.

3 a. En l'absence de signal sismique, $S(D_0) = S_c(1 + C\cos 2\pi\sigma_0 D_0)$.

En présence de signal sismique, la fréquence et donc le nombre d'onde $\sigma(t)$ perçus par l'observateur varient (effet Doppler).

$$\sigma(t) = \sigma_0\left(1 + \frac{\Delta v(t)}{c}\right)$$

$$S(D_0)(t) = S_c\left(1 + C\cos 2\pi\sigma_0 D_0\left(1 + \frac{\Delta v(t)}{c}\right)\right)$$

$$\boxed{\varphi(t) = 2\pi\sigma_0 D_0 \frac{\Delta v(t)}{c}}$$

© Nathan, *classe prépa*

b. Pour une détection optimale, on se place en D_0 tel que $\cos 2\pi\sigma_0 D_0 = 0$. En effet, on est beaucoup plus sensible à la variation d'une courbe (ici $S(D_0)$) autour d'un point d'inflexion (la dérivée y est maximale) qu'autour d'un extremum (la dérivée y est nulle).

D_0 vaut alors $\dfrac{2p+1}{4\sigma_0}$. Ce choix est possible car c'est l'expérimentateur qui choisit le filtre sélectionnant la raie en absorption donc qui fixe σ_0.

Dans la question 1 de la partie B, $D_0 \gg D_{\Delta\sigma} = \dfrac{1}{\Delta\sigma}$. Cela nécessite que D_0 soit **la plus grande possible**.

Si on néglige les effets de rotation de l'étoile, il ne reste plus que l'effet Doppler thermique avec l'élargissement $\Delta\sigma_K$. Le contraste C s'annule pour $\dfrac{1}{\Delta\sigma_K}$, D_0 doit être suffisamment éloigné de cette valeur.

Un bon compromis donne $D_0 \approx \dfrac{1}{2\Delta\sigma_K} = \dfrac{c}{4\sigma_0 V_T} \gg D_{\Delta\sigma}$ avec $D_0 = \dfrac{2p+1}{4\sigma_0}$.

c. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\boxed{\varphi(t) = 2\pi\sigma_0 D_0 \frac{\Delta v(t)}{c} = \frac{\pi \Delta v(t)}{2V_T}}$$

$\Delta v(t) = \Delta V \cos\omega t$. L'amplitude du déphasage mesuré est bien de l'ordre de $\dfrac{\Delta V}{V_T}$.

$$S(D_0)(t) = S_e\left(1 + C\cos 2\pi\sigma_0 D_0\left(1 + \frac{\Delta v(t)}{c}\right)\right) = S_e\left(1 + C\cos\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\Delta v(t)}{V_T}\right)\right)$$

$$S(D_0)(t) = S_e(1 - C\sin\varphi(t))$$

4 À la latitude λ, à la surface de la Terre (rayon terrestre R), la vitesse due à la rotation terrestre vaut $R\omega_T \cos\lambda$. Cela entraîne une variation supplémentaire de vitesse.

$\omega_T = \dfrac{2\pi}{T}$ avec une période T de 24 heures, $\omega_T = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $R = 6\,400$ km.

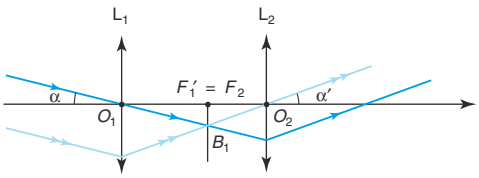
ΔV est de l'ordre de $300\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour une latitude d'environ 45°.

Cet effet est très important bien plus que celui des oscillations sismiques que l'on désire détecter. Il faut donc éliminer l'effet de la rotation terrestre. Le plus simple est d'utiliser un filtre passe haut car $\omega_T \ll \omega_{\text{sismique}}$.

Partie D

1 a. On utilise un montage afocal car l'objet est à l'infini et on souhaite une image à l'infini pour envoyer un faisceau parallèle sur l'interféromètre.

b.



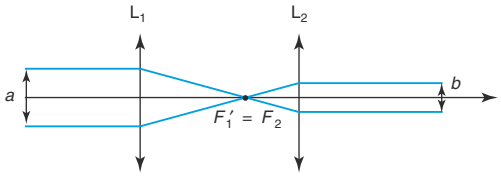
© Nathan, *classe prépa*

Explication de la construction (voir figure) : le rayon simple flèche passe par le centre optique de L_1 et n'est donc pas dévié. L'image de B à l'infini par L_1 est B_1, intersection du rayon avec le plan focal image de L_1. Le rayon double flèche doit, entre L_1 et L_2, converger vers B_1. Après L_2, comment avoir la direction des rayons émergents ? On a choisi le rayon double flèche passant par O_2 et B_1, il n'est donc pas dévié par L_2. On obtient ainsi la direction α' des rayons émergents.

Pour calculer le grandissement angulaire ou grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f'_1}{f'_2}$, utilisons les triangles $O_1F'_1B_1$ et $O_2F'_1B_1$:

$$\boxed{G = \frac{\dfrac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}}{\dfrac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}}} = -\frac{f'_1}{f'_2}}$$

c. Sur la figure ci-après, on voit que le grandissement linéaire vaut en valeur absolue $\dfrac{b}{a} = \dfrac{f'_2}{f'_1}$.



$$\frac{b}{a} = |\gamma| = \frac{1}{|G|}$$

A.N. : $b = \mathbf{2\ cm}$.

2 a. Par définition de G, $i = |G|i_0$.

b. Pour un interféromètre de Michelson, $D(i) = D_0 \cos i$ et pour de petits angles, $D = D_0\left(1 - \dfrac{i^2}{2}\right)$.

c. Les variations de différence de marche autour de D_0 valent $D_0\dfrac{i^2}{2}$.

$$D_0\frac{i^2_{\max}}{2} = D_0\frac{G^2 i^2_{0\max}}{2} < \alpha\lambda_0$$

d.

$$G^2 < \frac{2\alpha}{i^2_{0\max}\sigma_0 D_0}\ ; \quad \text{A.N. : } G_{\max} = \mathbf{516}.$$

3 a. La turbulence entraîne des fluctuations pour l'angle i (fluctuations de la déviation i_0), ce qui a pour conséquence de faire varier $D(i)$ et de créer une fluctuation $\delta D = D_0\dfrac{i^2}{2}$ qu'on peut relier à une fluctuation δv.

Le déphasage de la partie C vaut $\varphi(t) = 2\pi\sigma_0 D_0\dfrac{\delta v}{c}$; $D_0\dfrac{\delta v}{c} = \delta D$ d'où $\dfrac{\delta v}{c} = \dfrac{i^2}{2}$

b. A.N. : $\delta v = \mathbf{100\ m \cdot s^{-1}}$.

Ceci est immense si on compare ce résultat à la valeur donnée au **C.4** de 10 cm · s^{-1}. Il est indispensable de prévoir un dispositif pour corriger : optique adaptative.

© Nathan, *classe prépa*

Problème 2

Radioastronomie
(d'après Centrale-Supélec)

La radioastronomie est l'étude des ondes radio en provenance du ciel, émises par des étoiles éloignées mais aussi par le Soleil.

Notations et valeurs numériques :

- Vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$, avec $\|\vec{u}\| = 1$, λ longueur d'onde (on prendra pour toute application numérique $\lambda = 10$ cm).
- Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Fonction $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.
- Les grandeurs complexes seront exprimées avec i tel que $i^2 = -1$.

Partie A – Étude d'un radiotélescope

Un radiotélescope comprend un miroir dont la surface est un paraboloïde de révolution. On assimilera dans toute la suite du problème ce miroir parabolique à un miroir sphérique concave de sommet S de foyer F, de rayon R, d'axe Sy (figure 1). On pose $\overline{SF} = f$.

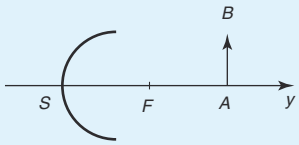


Figure 1

Le radiotélescope comprend également une antenne située dans le plan focal image (Fx, Fz) du miroir et susceptible d'être déplacée dans ce plan (figure 2).

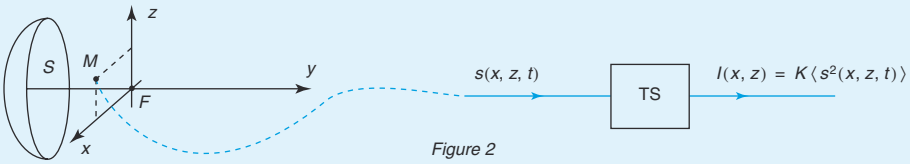


Figure 2

La surface efficace de l'antenne est supposée ponctuelle de sorte que le radiotélescope est un **enregistreur point par point**. De plus, on suppose que cette antenne est entièrement tournée vers le miroir de sorte qu'elle est insensible aux ondes directes. On dispose ainsi d'un signal $s(x, z, t)$ proportionnel au champ électrique au point $M(x, z)$ du plan Fxz. Ce signal est supposé harmonique de fréquence ν, et on peut lui associer une amplitude complexe instantanée $\underline{a}(x, z, t) = A(x, z)e^{i(2\pi\nu t - \varphi(x, z))}$, où $A(x, z)$ est un réel, tel que $s(x, z, t) = \text{Re}[\underline{a}(x, z, t)]$ où $\text{Re}[\underline{Z}]$ est la partie réelle de $\underline{Z}$.

Dans la suite, $\underline{a}(x, z, t)$ sera simplement appelée « amplitude complexe » et son amplitude réelle $A(x, z)$ sera simplement appelée « amplitude ». Le dispositif de traitement du signal, TS, transforme le signal d'entrée $s(x, z, t)$ en signal d'intensité $I(x, z) = K\langle s^2(x, z, t)\rangle$ où $\langle\ \rangle$ représente la valeur moyenne temporelle :

$$\langle f \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } K \text{ est une constante réelle.}$$

© Nathan, *classe prépa*

En notation complexe, $I(x, z) = \frac{K}{2}\langle \underline{a}(x, z, t) \cdot \underline{a}^*(x, z, t)\rangle$ où $\underline{a}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{a}$ (cas d'un signal rigoureusement harmonique).

I. Les ondes en provenance d'un astre à l'infini et prises en considération sont des ondes radio mais, dans la suite du problème, elles peuvent être traitées comme des ondes lumineuses dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique et de l'approximation de Gauss.

1 Indiquer en quoi consistent ces approximations et quelles en sont les principales conséquences.

2 **a.** Indiquer, sur un schéma, la position du centre de courbure C du miroir. Donner les propriétés optiques du centre C, du sommet S et du foyer F. Le miroir reçoit dans les conditions de Gauss la lumière émise par un petit objet frontal AB placé à droite du centre C (figure 1). On appellera A' l'image de A donnée par le miroir et B' l'image de B. À l'aide d'un tracé de rayons, construire $A'B'$.

b. On emporte l'objet AB à l'infini en conservant son diamètre angulaire, c'est-à-dire l'angle ε sous lequel on le voit depuis S. Quelle est la taille d de l'image en fonction de R, rayon de courbure du miroir, et ε, diamètre angulaire ?

c. A.N. : on observe le Soleil, l'axe du miroir sphérique concave étant dirigé vers le centre S_0 du Soleil, de diamètre angulaire $\varepsilon_0 = 31'$; $f = 100$ m (radiotélescope d'Arecibo, Porto Rico). Calculer d.

II. En fait, l'image d'un point objet n'est pas un point image mais une tache. Ce phénomène est dû à la diffraction par les bords du miroir. On pointe l'axe Sy du radiotélescope sur une étoile ponctuelle E considérée comme une radiosource émettant une onde plane progressive monochromatique à la longueur d'onde λ, d'amplitude complexe $A_0 e^{i(2\pi\nu t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)}$ où $\vec{r}$ est le vecteur position dans une base que l'on choisira et t le temps.

3 On suppose que la diffraction due à la taille finie du miroir peut être prise en compte en considérant qu'une pupille carrée, de côté $2a$, d'axe Sy (figure 3) diffracte les rayons au passage avant leur réflexion sur le miroir (**mais pas après**) et que le miroir est de taille illimitée.

a. Quelle est, après diffraction par la pupille et avant réflexion par le miroir, la direction $\vec{u}$ de la lumière qui vient finalement converger au point $M(x, z)$ du plan focal, proche de l'axe Sy ?

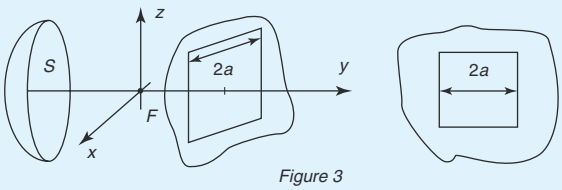


Figure 3

En déduire l'amplitude complexe $\underline{a}(x, z, t)$ en ce point $M(x, z)$ en fonction de λ, x, z, a, A_0 et f.

b. Déterminer l'intensité $I(x, z)$ en fonction de λ, x, z, a, f et de $I_0 = \mathrm{Max}(I(x, z))$. Exprimer les coordonnées des points d'intensité nulle en fonction de λ, f et a. Tracer, pour $z = 0$, $I(x)$. Définir la largeur de la tache principale de diffraction.

c. A.N. : radiotélescope d'Arecibo : $a = 150$ m ; $f = 100$ m. Calculer les coordonnées des points d'intensité nulle. Quelles sont les dimensions et la forme de la tache principale ? Préciser l'ordre de grandeur de l'intensité des deux premiers maxima secondaires rapportée à celle du maximum principal sur l'axe Ox.

© Nathan, *classe prépa*

d. Reprendre les questions **3.a.** et **3.b.** en supposant que la radiosource ponctuelle est dans une direction ε du plan *yz* voisine mais différente de l'axe *Sy* du radiotélescope (figure 4). On appréciera une démarche qualitative.

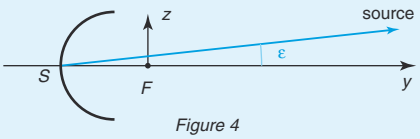


Figure 4

4 On tient compte à présent de la diffraction par le miroir sphérique. On considère une ouverture circulaire de rayon *a*, éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde λ et d'amplitude A_0. L'amplitude alors diffractée **à l'infini** par cette ouverture circulaire dans une direction $\vec{u}$ faisant un angle α **avec l'axe de l'ouverture** (et donc avec la direction du faisceau incident) (figure 5) est donnée par :

$$A(\alpha) = A_0 J\left(\frac{2\pi a \sin\alpha}{\lambda}\right).$$

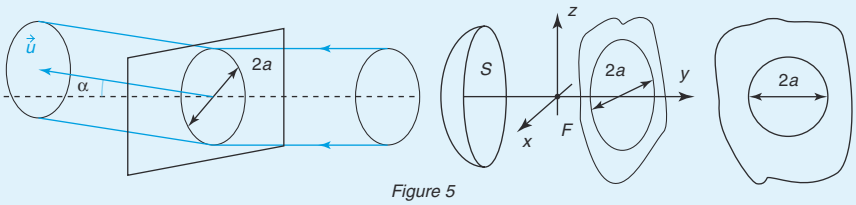
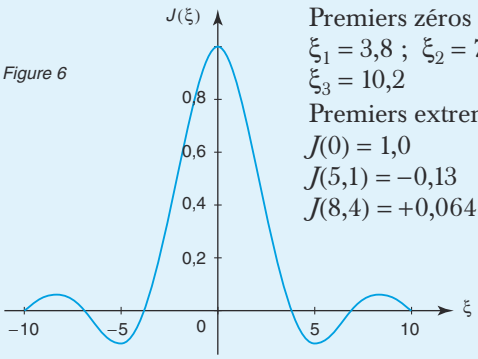


Figure 5

Dans le cas présent, qui concerne la diffraction par un miroir sphérique de rayon d'ouverture *a*, on pourra considérer comme au **II.** que la diffraction par l'ouverture du miroir a lieu avant la réflexion : la réflexion du faisceau diffracté à l'infini dans une direction $\vec{u}$ obéit ensuite aux lois de l'optique géométrique. On a représenté la fonction paire $J(\xi)$ ci-dessous : (figure 6).

Figure 6



Premiers zéros de $J(\xi)$
$\xi_1 = 3{,}8$; $\xi_2 = 7{,}0$
$\xi_3 = 10{,}2$
Premiers extrema :
$J(0) = 1{,}0$
$J(5{,}1) = -0{,}13$
$J(8{,}4) = +0{,}064$

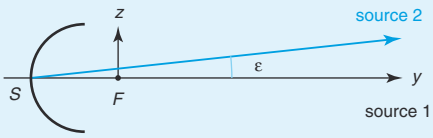


Figure 7

a. Quelle est la forme de la tache de diffraction ? Montrer que l'on peut se restreindre à l'étude de l'intensité sur l'axe *Fx*. Reprendre les questions **3.a.**, **b.** et **c.** en se limitant aux trois premières régions d'intensité nulle.

b. Comparer les résultats des deux formes de pupilles. La description d'une pupille circulaire par une pupille carrée est-elle légitime pour les phénomènes de diffraction ?

© Nathan, *classe prépa*

III. On considère une radiosource double constituée de deux étoiles ponctuelles E_1 et E_2, émettant des ondes de même intensité, séparées par un écart angulaire ε (figure 7). Deux points images sont considérés comme séparés si leur distance est supérieure à la demi-largeur de base de la tache principale de diffraction. Le pouvoir séparateur d'un télescope est égal à l'écart angulaire minimal ε_{min} entre deux sources ponctuelles pour que ces deux sources soient séparées par l'appareil.

5 Pourquoi peut-on sommer les intensités fournies par chacune des étoiles ? En assimilant le rayon d'ouverture du miroir à la demi-largeur a de la pupille carrée introduite au **II.**, déterminer en fonction de λ et ε le rayon d'ouverture minimal a_0 d'un télescope ayant un pouvoir séparateur suffisant pour distinguer les sources 1 et 2.

6 La galaxie du Cygne contient deux radiosources ponctuelles séparées d'un angle $\varepsilon = 85''$. Calculer a_0. Commenter le résultat. Quelle autre raison peut expliquer le gigantisme de certains radiotélescopes ?

7 En suivant le même raisonnement, quel serait l'ordre de grandeur du pouvoir séparateur d'un télescope optique utilisant la lumière visible dont le rayon d'ouverture du miroir serait $a = 1$ m (télescope Hubble) ? Commenter. Connaissez-vous cependant un intérêt à l'exploration du domaine des ondes radio en astronomie ?

Partie B – Interféromètre à deux antennes

Le gigantisme du radiotélescope unique posant un problème de coût, on envisage un ensemble de deux radiotélescopes **identiques**, de rayon d'ouverture $a = 5$ m, et dont les foyers sont distants de L (figure 8). Les miroirs sont montés sur des rails, ce qui permet de faire varier L. O est le milieu de F_1F_2. On tient compte de la diffraction par chaque miroir sphérique, en utilisant les résultats relatifs à la pupille circulaire (question **II.4**). L'antenne focale de chaque radiotélescope reste centrée sur le foyer principal du miroir.
En conséquence, elle délivre un signal $s_i(0, 0, t)$, noté simplement $s_i(t)$, proportionnel à l'amplitude du champ électrique au point F_i ($i = 1, 2$). On associe à ce signal l'amplitude complexe $\underline{a}_i(t)$ telle que $s_i(t) = \mathrm{Re}[\underline{a}_i(t)]$. Deux câbles, d'égale longueur, sont issus des antennes et introduisent un déphasage identique sur les deux voies (figure 9). Ils sont connectés à un sommateur qui délivre donc un signal $s(t)$ proportionnel à la somme des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ reçus aux foyers principaux F_1 et F_2. Un dispositif de traitement du signal, TS, délivre un signal d'intensité $I = K\langle s(t)^2\rangle$.

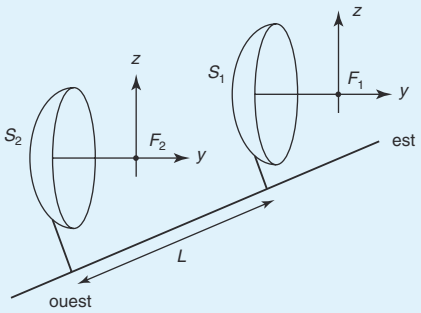


Figure 8

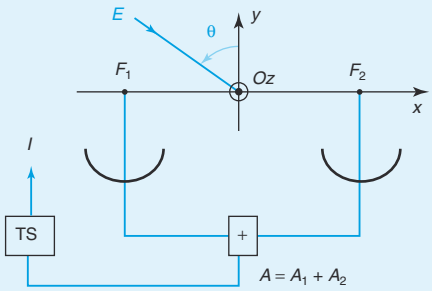


Figure 9

© Nathan, *classe prépa*

I. On observe une source ponctuelle à l'infini qui est supposée contenue dans le plan équatorial de la Terre. Le système d'axes $Oxyz$ lié à la Terre est ainsi défini : Ox est horizontal, dirigé vers l'ouest du lieu d'observation ; le plan Oxy est parallèle au plan équatorial ; Oz est parallèle à l'axe des pôles, orienté du sud vers le nord. On pose $\theta = \text{angle}(Oy, OE)$, angle orienté par $\vec{u}_z$. L est fixe pendant l'observation.

1 **a.** Pourquoi θ est-il variable ? Dans quel sens se déplace la source ? On prendra pour les applications numériques $|\dot{\theta}| = 7{,}25 \cdot 10^{-5}$ rad · s^{-1}.

b. Les directions S_1F_1, S_2F_2 sont parallèles entre elles et à la direction fixe Oy. Préciser dans quelle direction α (par rapport à θ) ont été diffractés (avant réflexion) les rayons qui convergent au foyer de chaque miroir. On suppose que θ reste faible : dans ces conditions, on admettra que l'expression de l'amplitude diffractée en F_i par le miroir M_i est $A_i(\alpha) = A_0 J\left(\frac{2\pi a \sin\alpha}{\lambda}\right)$. Pour des valeurs de θ faibles, déterminer $I(\theta)$ en fonction de λ, a, L, θ et $I_0 = \text{Max}(I(\theta))$. Exprimer l'interfrange $\Delta\theta$ en fonction de λ et L. Tracer la courbe $I(\theta)$.

c. A.N. : $a = 5$ m ; $L = 100$ m. Calculer $\Delta\theta$. Combien enregistre-t-on de franges dans la tache principale de diffraction ?

Quelle est la durée maximale d'observation Δt ?

Quelle est la durée τ entre la réception de deux maxima consécutifs ?

2 Les antennes sont à présent orientables : les directions S_1F_1, S_2F_2 sont parallèles entre elles et à la direction OE variable dans le temps, Ox et Oy restant fixes. Déterminer la nouvelle intensité $I(\theta)$ et tracer la courbe correspondante. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de la question précédente ?

II. On considère une radiosource double constituée de deux points lumineux à l'infini E_1 et E_2 de même intensité, situés dans le plan Oxy, séparés par un écart angulaire $(\varepsilon = \text{angle}(OE_1, OE_2)) > 0$. On l'observe à l'aide de l'interféromètre à deux antennes orientables de la question précédente. Les antennes sont pointées sur la source E_1.

On supposera que $\frac{a\varepsilon}{\lambda} \ll 0{,}6$.

3 **a.** Déterminer $I(\theta)$ en fonction de L, ε, λ et $I_1 = \text{Max}(I(\theta)) + \text{Min}(I(\theta))$ pour θ faible. À quoi correspond l'approximation $\frac{a\varepsilon}{\lambda} \ll 0{,}6$?

b. Exprimer l'interfrange $\Delta\theta$ en fonction de λ et L. Exprimer le contraste $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ en fonction de L, ε et λ. Tracer la courbe $I(\theta)$.

c. A.N. : $\varepsilon = 85''$; $L = 100$ m ; $a = 5$ m. L'approximation $\frac{a\varepsilon}{\lambda} \ll 0{,}6$ est-elle vérifiée ? Calculer $\Delta\theta$ et C.

4 **a.** Les miroirs sont mobiles. Comment évolue la figure d'interférence lorsqu'on fait varier L ? Comment se rend-on compte que l'on observe une radiosource double ?

b. Déterminer le plus petit écart mesurable ε_{min} entre ces sources en fonction de L_{max}, distance maximale entre les antennes.

c. Exprimer en fonction de L_{max} le diamètre d'ouverture $2a_0$ d'un radiotélescope ayant même pouvoir séparateur.

© Nathan, *classe prépa*

A.N. : on veut $\varepsilon_{min} = 85''$. Calculer L_{max} et a_0. Quels sont les avantages et inconvénients, à pouvoir séparateur égal, de l'interféromètre à deux antennes sur celui à une seule ? Quelle est l'utilité d'avoir des miroirs mobiles sur les rails ?

d. Les deux sources ont des intensités I_1 et I_2 différentes. Expliquer qualitativement ce qui se passe lorsqu'on fait varier L.

III. On revient au cas de la source unique E : l'étoile E émet, à présent, une onde plane progressive d'amplitude complexe $A_0 e^{i\left(2\pi\nu t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right)\right)}$ où la phase à l'origine φ_0 peut être variable mais de variation lente devant $\frac{1}{\nu}$. $\vec{r}$ est le vecteur position avec origine en O. Les antennes sont orientables et orientées vers E comme dans la question précédente.

5 Comment interpréter le fait que φ_0 ne dépend que de la variable $t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}$?

6 Montrer que les amplitudes complexes, $\underline{a}_1(F_1, t)$ et $\underline{a}_2(F_2, t)$, des signaux mesurés sont liées par la relation : $\underline{a}_1(F_1, t-\tau) = \underline{a}_2(F_2, t)$ où l'on donnera l'expression de τ en fonction de L, θ et c. En déduire que l'intensité I se met sous la forme : $I(\tau) = \frac{1}{2} I_0 (1 + \langle \cos(2\pi\nu\tau + \varphi_0(t'+\tau) - \varphi_0(t'))\rangle)$ quitte à choisir une nouvelle origine des temps.

7 Que devient $I(\tau)$ si l'onde incidente est monochromatique, c'est-à-dire que $\varphi_0(t) = C^{te}$? Retrouve-t-on le résultat de la question 2 ?

Partie C – Interféromètre à *N* antennes

Afin d'améliorer le pouvoir séparateur de l'interféromètre à deux antennes, on construit un interféromètre à réseau constitué de N radiotélescopes, identiques à ceux de l'interféromètre à deux antennes, équidistants de L (figure 10). N est pair et on suppose L fixe. L'antenne focale du radiotélescope numéro i reste centrée sur le foyer principal F_i de son miroir. Un système de câbles d'égale longueur et de sommateurs introduisent un déphasage identique sur les N voies. On obtient donc un signal $s(t)$ égal à la somme des signaux $s_i(t)$ reçus aux foyers principaux F_i (figure 10). Un dispositif de traitement du signal délivre un signal d'intensité $I = K\langle s(t)^2\rangle$. On observe la source E de la question II– partie A. On fait pivoter les radiotélescopes de telle sorte que les directions S_iF_i soient constamment parallèles entre elles et à la direction OE.

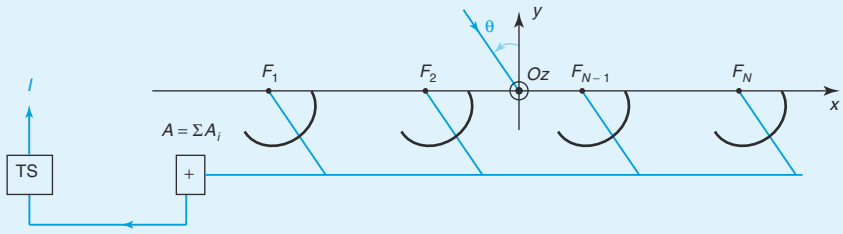


Figure 10

© Nathan, *classe prépa*

1 Pour des valeurs de θ faibles, déterminer $I(\theta)$ en fonction de λ, N, L, θ et $I_0 = \text{Max}(I(\theta))$. Montrer que $I(\theta)$ présente des maxima principaux et des maxima secondaires. Exprimer l'écart $\Delta\theta$ entre les maxima principaux en fonction de λ et L. Exprimer la demi-largeur de base $\Delta\theta'$ des pics principaux, c'est-à-dire la distance angulaire entre l'abscisse du maxima principal et le minimum nul suivant, en fonction de λ, N et L.

2 A.N. : $L = 100$ m ; $a = 5$ m ; $N = 16$. Calculer $\Delta\theta$ et $\Delta\theta'$. Tracer la courbe $I(\theta)$. Préciser l'ordre de grandeur de l'ordonnée des deux premiers maxima secondaires rapportée à celle du maximum principal.

3 À l'aide de l'interféromètre à réseau de la question précédente, on observe la radiosource double E_1 et E_2 de la question III– partie A. Pour des valeurs de θ faibles, déterminer $I(\theta)$ en fonction de λ, N, L, θ, ε et $I_2 = \text{Max}(I(\theta))$. Tracer l'allure de la courbe $I(\theta)$.
A.N. : $\varepsilon = 85''$. Déterminer numériquement l'écart $\Delta\theta''$ entre deux maxima principaux voisins relatifs à chacune des sources.

4 On considère que les sources sont séparées si $\Delta\theta''$ est supérieur à $\Delta\theta'$. Exprimer en fonction de L et N le diamètre $2a_0$ d'un radiotélescope unique ayant même pouvoir séparateur.

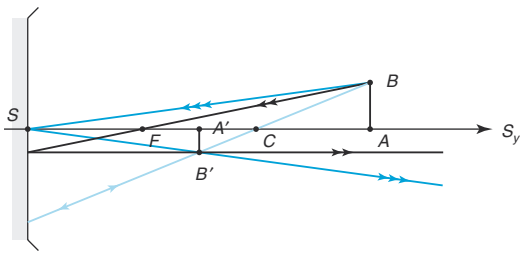
5 A.N. : déterminer numériquement le pouvoir séparateur ε' du radiotélescope à réseau et le diamètre $2a_0$ du radiotélescope à antenne unique équivalent. Commenter les résultats.

résolution méthodique

Partie A

1 L'approximation de l'optique géométrique consiste à négliger la diffraction, ce qui est valable si les dimensions des miroirs ou lentilles utilisés sont grandes devant la longueur d'onde. Pour les ondes radio, $\lambda = 10$ cm, ce qui entraîne des dispositifs de grande taille.
L'approximation de Gauss peut se résumer en stigmatisme et aplanétisme approchés : les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique et les objets sont de petite dimension. On néglige les aberrations sphériques.

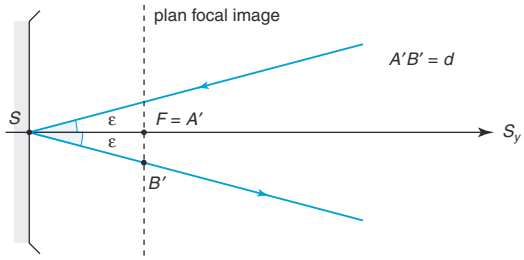
2 a. Pour un miroir sphérique, dans l'approximation de Gauss, la formule de conjugaison est : $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}}$. F est au milieu de S et C.



© Nathan, *classe prépa*

Tout rayon passant par le centre C est réfléchi sur lui-même (ou non dévié).
Tout rayon passant par le sommet S est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique.
Tout rayon passant par le foyer F est réfléchi parallèlement à l'axe optique (et tout rayon parallèle à l'axe optique est réfléchi en passant par le foyer F).
Ces trois rayons nous permettent de construire l'image $A'B'$.

b. L'objet, à l'infini, a pour diamètre angulaire ε. Son image est dans le plan focal image du miroir. $SA' = SF = \frac{R}{2}$ et $d = A'B' = f\varepsilon = \frac{R}{2}\varepsilon$.



c. A.N. : $\varepsilon_0 = 31' = 9 \cdot 10^{-3}$ rad, d'où $d = \mathbf{0{,}90\ m}$.

Attention à la conversion des minutes en radians : un degré vaut $\frac{\pi}{180}$ radians et vaut aussi 60′ donc une minute vaut $\frac{\pi}{10\,800} = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ radians.

3 a. La pupille carrée diffracte. L'onde incidente est plane et on observe à l'infini (ramené à distance finie dans le plan focal image du miroir), ce sont les conditions de la diffraction de Fraunhofer. L'onde diffractée par la pupille est dans la direction $\vec{u}$, elle correspond à un angle ε par rapport à l'axe optique. Après réflexion sur le miroir, elle va converger en M tel que $FM = f\varepsilon = \frac{R}{2}\varepsilon$ d'après la question **2.b.** Soit M_S, le symétrique de M par rapport au point F dans le plan focal. $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_S S}}{SM_S}$ avec $SM_S = SM \approx f$.

Les coordonnées de M_S dans le plan focal sont $(-x, -z)$. Les coordonnées du vecteur unitaire $\vec{u}$ sont $\left(\frac{x}{f}\,;-1\,;\frac{z}{f}\right)$. On vérifie que la norme du vecteur est de l'ordre de 1 car $\sqrt{x^2+z^2} = FM = f\varepsilon \ll f$.

Pour l'onde incidente $\vec{u}_i = -\vec{u}_y$ et pour l'onde diffractée $\vec{u}_\mathrm{d} = \vec{u}$, $\vec{k}_i = -\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_y$ et $\vec{k}_\mathrm{d} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$ en prenant pour indice de l'air $n = 1$.

Le point P appartient à la pupille et O est une origine de la pupille choisie en son centre ici. On note $\underline{T}$ la transparence complexe de la pupille. Le principe d'Huygens Fresnel exprime que les ondes diffractées par les points P de la pupille sont cohérentes entre elles et le calcul de l'amplitude complexe résultante, avant le miroir, donne :

$$\underline{a}_{\text{avant le miroir}} = CA_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\nu t + \phi_0)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{T}(x_P, z_P)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}_i - \vec{k}_\mathrm{d})\cdot\overrightarrow{OP}}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}z_P$$

$$= CA_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\nu t + \phi_0)} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{xx_P}{f} + \frac{zz_P}{f}\right)}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}z_P$$

© Nathan, classe prépa

Le calcul classique fait apparaître un sinus cardinal :

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xx_P}{f}}\,\mathrm{d}x_P = 2a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f}\right)$$

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{zz_P}{f}}\,\mathrm{d}z_P = 2a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{za}{f}\right)$$

$$\underline{a}_{\text{avant le miroir}} = CA_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\nu t+\phi_0)}4a^2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{za}{f}\right)$$

$$\underline{a}(x, z, t) = -\,\underline{a}_{\text{avant le miroir}}$$

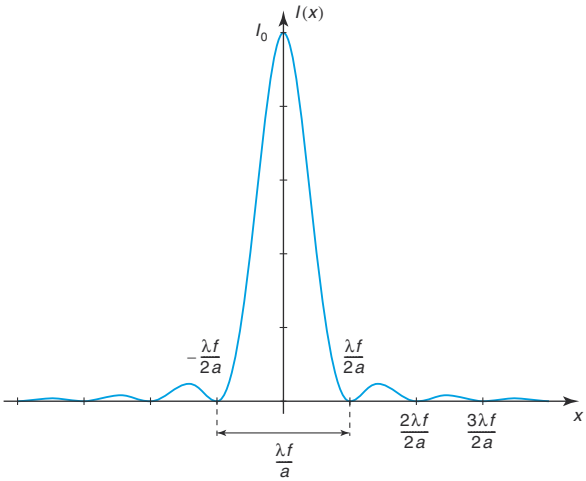
La réflexion métallique entraîne un déphasage supplémentaire de π donc un signe –, cela n'a aucune incidence sur l'intensité au point M.

b. Calculons l'intensité au point M.

$$I(x, z) = I(0,0)\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{za}{f}\right)$$

$I(0, 0) = I_0$, l'intensité maximale. $I(x, z) = 0$ est obtenu pour $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f} = m\pi$ (avec m entier non nul) ou pour $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{za}{f} = m'\pi$ (avec m' entier non nul).
Les coordonnées des points d'intensité nulle sont les points $x = m\frac{\lambda f}{2a}$ ou les points $z = m'\frac{\lambda f}{2a}$.

c. Pour $z = 0$, $I(x) = I_0\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f}\right)$ (voir figure suivante). La largeur de la tache principale de diffraction est $\frac{\lambda f}{a}$.



A.N. : $\frac{\lambda f}{2a}$ = **3,3 cm**. La tache principale est en forme de carré de côté $\frac{\lambda f}{a}$. L'ordre de grandeur des deux premiers maxima secondaires est 4,5 % et 1,6 % du maximum principal (ce sont les valeurs de $\mathrm{sinc}^2 x$ pour $x \approx \frac{3\pi}{2}$ et $x \approx \frac{5\pi}{2}$). La tache principale est centrée sur l'image géométrique de la source (étoile ponctuelle E) qui est F.

© Nathan, *classe prépa*

d. La direction de l'onde incidente $\vec{u}_i$ change, les coordonnées du vecteur unitaire sont $(0, -\cos\varepsilon \approx -1, -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon)$. $\vec{u}$ est inchangé, coordonnées $\left(\frac{x}{f}\,;\,-1\,;\,\frac{z}{f}\right)$.

$$I(x, z) = I_0 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f}\right)\mathrm{sinc}^2\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{z}{f}+\varepsilon\right)$$

$I(x, z) = 0$ est obtenu pour $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xa}{f} = m\pi$ (avec m entier non nul) ou pour :
$\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{z}{f}+\varepsilon\right) = m'\pi$ (avec m' entier non nul).

Les coordonnées des points d'intensité nulle sont les points $x = m\frac{\lambda f}{2a}$ ou les points $z = m'\frac{\lambda f}{2a} - f\varepsilon$.

La tache principale est de même forme et de mêmes dimensions, mais elle n'est plus centrée sur F car la source a changé et si on note S' son image géométrique, la tache est désormais centrée sur S' de coordonnées dans le plan focal $(x_{S'} = 0, z_{S'} = -f\varepsilon)$.

4 a. La tache de diffraction est circulaire (tache d'Airy) car il y a symétrie de révolution autour de l'axe Fy. On peut donc restreindre l'étude à l'axe Fx. On pose $z = 0$ et $\sin\alpha = \frac{x}{f}$.
Reprenons les questions précédentes.

$$\underline{a}(x, 0, t) = A_0 e^{i(2\pi\nu t + \phi_0)} J\left(\frac{2\pi a \sin\alpha}{\lambda}\right)$$

$$I(x, 0) = I_0 J^2\left(\frac{2\pi a \sin\alpha}{\lambda}\right)$$

Les coordonnées des trois premiers points d'intensité nulle sont $x = 0{,}6\frac{\lambda f}{a}$ et $x = 1{,}1\frac{\lambda f}{a}$ et $x = 1{,}6\frac{\lambda f}{a}$.

Le diamètre de la tache principale de diffraction est $1{,}2\frac{\lambda f}{a}$.

A.N. : **4 cm**, **7 cm** et **11 cm**. L'ordre de grandeur des deux premiers maxima secondaires est 1,7 % et 0,4 % du maximum principal. La tache est centrée sur l'image géométrique de la source qui est F.

b. Les formes des taches sont très différentes pour une pupille carrée et pour une pupille circulaire mais les dimensions sont du même ordre de grandeur. Il y a apodisation pour la pupille circulaire, c'est-à-dire diminution de l'intensité des maxima secondaires (premier maxima secondaire à 1,7 % au lieu de 4,6 %). Si on se restreint à l'axe Fx et à l'intensité $I(x)$, il est légitime de décrire la pupille circulaire par la pupille carrée.

5 Soient deux étoiles ponctuelles E_1 et E_2, séparées par un écart angulaire ε. Elles sont incohérentes, on peut donc directement sommer les intensités dues à chaque étoile. E_1 donne, à travers le dispositif, une figure de diffraction centrée sur le foyer F tandis que E_2 donne, à travers le dispositif, une figure de diffraction centrée sur le point de coordonnées dans le plan focal $(0, -f\varepsilon)$.

Les deux images sont séparées si $f\varepsilon > \frac{\lambda f}{2a}$ donc si $a > \frac{\lambda}{2\varepsilon}$. $a_0 = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$.

6 A.N. : $\varepsilon = 81'' = 4 \cdot 10^{-4}$ rad d'où $a_0 =$ **121,3 m**.

On a donc intérêt à réaliser un miroir de rayon d'ouverture le plus grand possible pour observer des étoiles très proches angulairement. Le gigantisme est aussi expliqué par la nécessité de collecter le maximum de lumière en provenance des deux radiosources.

© Nathan, *classe prépa*

7 Pour un télescope optique, le pouvoir séparateur angulaire est $\frac{\lambda}{2a}$ avec les longueurs d'onde du visible. Si on prend $\lambda_{moyen} = 600$ nm, on obtient $\varepsilon_{min} = 3 \cdot 10^{-7}$ rad $= 0{,}06''$. Le télescope de Hubble a un pouvoir séparateur bien meilleur mais il ne permet pas d'étudier le domaine des ondes radio. En astronomie, le rayonnement fossile à $4K$ se situe dans le domaine des ondes radio et a d'ailleurs été découvert par deux chercheurs qui exploraient ce domaine sans rechercher intentionnellement le rayonnement fossile.

Partie B

1 a. L'angle θ est variable car la Terre tourne sur elle-même tandis que l'étoile peut être considérée comme fixe pendant une durée de 24 h. La Terre tourne d'ouest en est donc l'étoile semble tourner d'est en ouest. $\dot{\theta} < 0$. θ va diminuer.

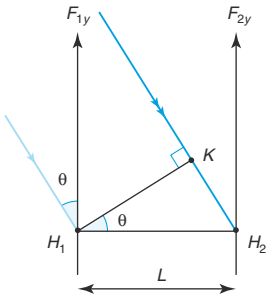
b. Les rayons qui convergent aux foyers de chaque miroir, ont été diffractés dans la direction $-\vec{u}_y$ puisqu'ils sont réfléchis par les miroirs dans la direction $\vec{u}_y$. Ils correspondent donc à un angle de diffraction $\alpha = -\theta$. θ faible, on peut écrire $\sin\alpha \approx \alpha = -\theta$. Les deux signaux (de même amplitude) interfèrent grâce au dispositif, sommons leurs amplitudes :

$$\underline{a}(\theta, t) = A_0 e^{i(2\pi\nu t + \phi_0)} J\left(\frac{2\pi a \sin\alpha}{\lambda}\right)(1 + e^{-i\Phi})$$

$$I(\theta) = K A_0^2 J^2\left(\frac{2\pi a\theta}{\lambda}\right)(1 + \cos\Phi)$$

N.B. : $J^2(-u) = J^2(u)$.

Φ est le déphasage entre le signal reçu en F_2 par rapport au signal reçu en F_1 (voir figure).



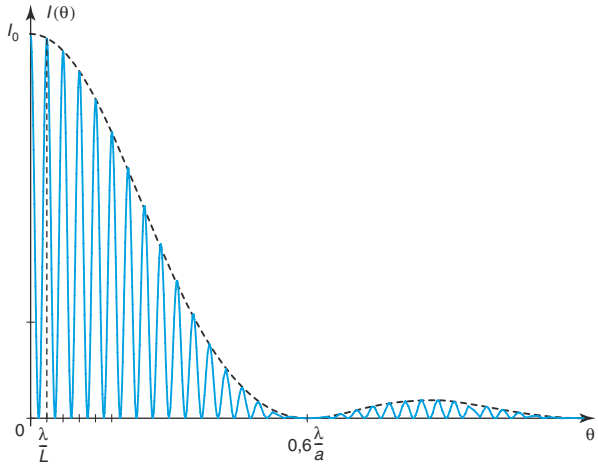
Avant diffraction, les rayons font un angle θ avec F_1y et F_2y ; après diffraction, les rayons sont parallèles à F_1y et à F_2y. Après réflexion sur les deux radiotélescopes, les chemins ont même valeur selon les deux voies. Si on note H_1 le point d'incidence d'un rayon sur le radiotélescope 1 et H_2 le point d'incidence correspondant sur le radiotélescope 2, le déphasage Φ vaut $\frac{2\pi K H_2}{\lambda}$.

$$\Phi = \frac{2\pi L \sin\theta}{\lambda} \approx \frac{2\pi L\theta}{\lambda}$$

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2} J^2\left(\frac{2\pi a\theta}{\lambda}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda}\right)$$

© Nathan, *classe prépa*

On observe des franges d'interférences dans la tache principale de diffraction par un miroir de rayon d'ouverture a. Les franges brillantes sont données par $\Phi = m2\pi = \dfrac{2\pi L\theta}{\lambda}$ avec m entier. Il en résulte un interfrange angulaire $\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{L}$; on peut observer l'allure de I_θ sur la figure suivante.



c. A.N. : $\Delta\theta = 10^{-3}$ rad. Dans la tache principale de diffraction de diamètre angulaire $1{,}2\dfrac{\lambda}{a}$, on observe N franges d'interférences.

$$\boxed{N = 1{,}2\frac{\lambda}{a\Delta\theta}}$$

A.N. : $N = \mathbf{24}$.

Attention, la courbe de la question précédente ne correspond pas à ces valeurs numériques.

La durée maximale d'observation Δt est $\boxed{1{,}2\dfrac{\lambda}{a|\dot{\theta}|}}$ dans la tache principale.

A.N. : $\Delta t = 334$ s $=$ **5 min 34″**.

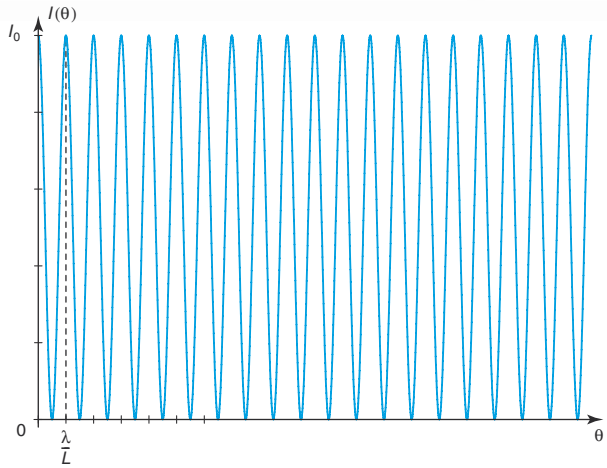
La durée τ entre la réception de deux maxima consécutifs correspond à $\boxed{\tau = \dfrac{\Delta\theta}{|\dot{\theta}|} = \dfrac{\lambda}{L|\dot{\theta}|}}$

A.N. : $\tau =$ **13,8 s**.

2 Ox et Oy restent fixes, les directions S_1F_1, S_2F_2 et OE sont toutes parallèles mais variables au cours du temps. Le déphasage Φ est inchangé ; en revanche, cela apporte une grande amélioration du point de vue de l'intensité.
Les rayons qui convergent aux foyers de chaque miroir, ont été diffractés dans la direction qui correspond à $\alpha = 0$ par rapport à la direction OE. Les miroirs s'orientent au fur et à mesure que la direction OE varie. Ainsi, $J^2\left(\dfrac{2\pi a\sin\alpha}{\lambda}\right) = 1$ et l'observation se fait toujours au centre de la tache principale de diffraction.

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda}\right)$$

© Nathan, *classe prépa*



On remarque (voir figure ci-dessus) que les franges brillantes ont toutes même intensité. Le contraste vaut 1 tandis que, dans la question précédente, l'intensité des franges brillantes variait et le contraste chutait dans la tache principale quand on s'éloignait du centre en raison de la diffraction. On n'est plus limité en durée d'observation puisqu'on suit l'étoile dans son mouvement apparent par rapport à la Terre. Il suffit que l'étoile soit visible du point d'observation ce qui limite à environ 12 h (à comparer à $\Delta t = 334$ s).

3 a. On observe deux points lumineux à l'infini de même intensité à l'aide de l'interféromètre à deux antennes orientables. Les antennes sont pointées sur E_1, E_2 est séparé angulairement de E_1 de la valeur ε. Les deux sources lumineuses sont incohérentes, leurs intensités s'ajoutent. Calculons leur intensité respective (θ toujours faible).

$$I_1(\theta, \alpha = 0) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda}\right)$$

$$I_2(\theta, \alpha = \varepsilon) = \frac{I_0}{2}J^2\left(\frac{2\pi a\varepsilon}{\lambda}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi L(\theta + \varepsilon)}{\lambda}\right)$$

$$I(\theta) = I_1(\alpha = 0) + I_2(\alpha = \varepsilon) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda}\right) + \frac{I_0}{2}J^2\left(\frac{2\pi a\varepsilon}{\lambda}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi L(\theta + \varepsilon)}{\lambda}\right)$$

L'approximation $a\frac{\varepsilon}{\lambda} \ll 0{,}6$ donc $\varepsilon \ll 0{,}6\frac{\lambda}{a}$ permet de considérer que $J^2\left(\frac{2\pi a\varepsilon}{\lambda}\right) \approx 1$.

$$I(\theta) = I_1(\alpha = 0) + I_2(\alpha = \varepsilon) = \frac{I_0}{2}\left(2 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda} + \cos\frac{2\pi L(\theta + \varepsilon)}{\lambda}\right)$$

$$I(\theta) = I_1(\alpha = 0) + I_2(\alpha = \varepsilon) = I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi L\theta}{\lambda} + \frac{\pi L\varepsilon}{\lambda}\right)\cos\frac{\pi L\varepsilon}{\lambda}\right)$$

θ faible mais grand devant ε.

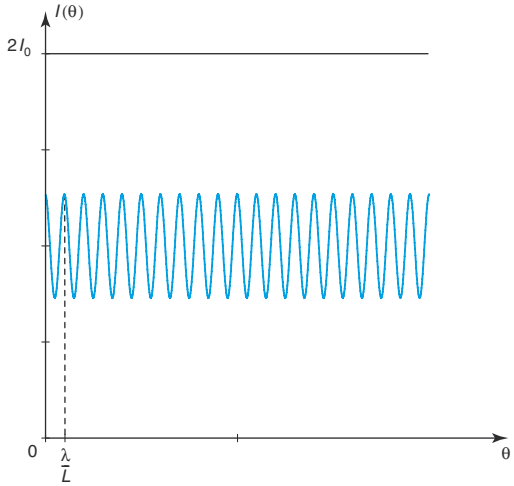
$$I(\theta) \approx I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda}\cos\frac{\pi L\varepsilon}{\lambda}\right)$$

Calculons $I_1 = I_{max} + I_{min}$.

$I_{max} = I_0\left(1 + \left|\cos\frac{\pi L\varepsilon}{\lambda}\right|\right)$ et $I_{min} = I_0\left(1 - \left|\cos\frac{\pi L\varepsilon}{\lambda}\right|\right)$. $I_1 = 2I_0$.

© Nathan, *classe prépa*

b. $\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{L}$ et $C = \left|\cos\dfrac{\pi L\varepsilon}{\lambda}\right|$, le contraste est indépendant de θ. On remarque sur la courbe que $I_{\min} \neq 0$ et que $I_{\max} \neq 2I_0$.



c. A.N. : $a\dfrac{\varepsilon}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-2} \ll 0{,}6$, $\Delta\theta = \mathbf{10^{-3}}$ **rad** et $C = \mathbf{0{,}27}$.

4 a. On fait varier L, cela fait varier le contraste. On peut observer des brouillages de franges d'interférences. Ces brouillages sont périodiques de période en L : $\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}$.
Si l'on observe une radiosource simple, le contraste ne varie pas avec L, il est constant et vaut 1 (voir question 2 partie B).

b. Il faut observer au moins un brouillage qui correspond à $\dfrac{\pi L\varepsilon}{\lambda} = \dfrac{\pi}{2}$. $L_{\max} = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_{\min}}$ d'où $\varepsilon_{\min} = \dfrac{\lambda}{2L_{\max}}$.

c. $\varepsilon_{\min} = \dfrac{\lambda}{2a_0} = \dfrac{\lambda}{2L_{\max}}$, $a_0 = L_{\max}$.

A.N. : $a_0 = L_{\max} = \mathbf{121{,}3\ m}$.

À pouvoir séparateur égal, il est plus aisé de construire deux petits miroirs (de rayon d'ouverture de 5 m) distants de 121 m plutôt qu'un seul grand (de rayon d'ouverture de 121 m). Cependant, on collecte moins de lumière avec deux petits miroirs qu'avec un grand miroir et l'orientation des deux antennes complique le dispositif.
L'intérêt des deux petits miroirs est qu'ils sont mobiles et qu'on peut détecter des brouillages de franges et mesurer de faibles écarts angulaires.

d. Si les deux sources ont des intensités différentes, le contraste va diminuer. Quand on fera varier L, les zones de brouillages seront moins discernables et l'incertitude sur les mesures d'écart angulaire sera plus grande.

5 La variable $t - \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$ tient compte du retard dû à la propagation. Cela prouve que cette variation est due à la source et non au milieu traversé.

© Nathan, *classe prépa*

6 Le foyer F_2 sera atteint après le foyer F_1. La distance supplémentaire à parcourir est $L\sin\theta$ à la célérité c donc $\tau = \dfrac{L\sin\theta}{c}$ (voir questions 1 et 2, partie B). Le signal en F_2, à l'instant t, reproduit le signal reçu en F_1 à l'instant $t-\tau$.

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_1(F_1, t) + \underline{a}_2(F_2, t) = \underline{a}_1(F_1, t) + \underline{a}_1(F_1, t-\tau)$$

$$\underline{a}(t) = A_0 e^{i\left(2\pi\nu t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi_0\left(t - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right)\right)} + A_0 e^{i\left(2\pi\nu(t-\tau) - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi_0\left(t-\tau-\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right)\right)}$$

Notons $t' = t - \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$. Remarquons que $\vec{k}\cdot\vec{r} = 2\pi\nu\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}$.

$$2\pi\nu t - \vec{k}\cdot\vec{r} = 2\pi\nu t'$$

$$\underline{a}(t) = A_0 e^{i(2\pi\nu t' - \phi_0(t'))} + A_0 e^{i(2\pi\nu(t'-\tau) - \phi_0(t'-\tau))}$$

$$\underline{a}^*(t) = \underline{a}_1^*(F_1, t) + \underline{a}_1^*(F_1, t-\tau)$$

$$\underline{a}^*(t) = A_0 e^{-i(2\pi\nu t' - \phi_0(t'))} + A_0 e^{-i(2\pi\nu(t'-\tau) - \phi_0(t'-\tau))}$$

Le déphasage entre les deux signaux est $2\pi\nu\tau + \phi_0(t'+\tau) - \phi_0(t')$.

$$I(\tau) = \frac{I_0}{2}(1 + \langle\cos(2\pi\nu\tau + \phi_0(t'+\tau) - \phi_0(t'))\rangle)$$

7 Si $\phi_0(t) = \text{constante}$,

$$I(\tau) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos 2\pi\nu\tau) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi L\theta}{\lambda}\right)$$

On retrouve bien le résultat de la question 2 partie B.

Partie C

1 On construit un interféromètre à réseau. Le déphasage entre deux radiotélescopes consécutifs est $\Phi = \dfrac{2\pi L\theta}{\lambda}$ pour θ faible. Les N signaux sont sommés et interfèrent.

$$\underline{a}(\theta) = \underline{a}_0\sum_{n=1}^{N} e^{i(n-1)\Phi} = \underline{a}_0\frac{1-e^{iN\Phi}}{1-e^{i\Phi}} = \underline{a}_0\frac{e^{i\frac{N\Phi}{2}}\,e^{-i\frac{N\Phi}{2}} - e^{i\frac{N\Phi}{2}}}{e^{i\frac{\Phi}{2}}\,e^{-i\frac{\Phi}{2}} - e^{i\frac{\Phi}{2}}} = \underline{a}_0\frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}}e^{i\frac{(N-1)\Phi}{2}}$$

Calculons l'intensité.

$$I(M) = C\left(\frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}}\right)^2 = I_0 R_N^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)$$

On définit donc la fonction réseau par : $R_N(x) = \left(\dfrac{\sin Nx}{N\sin x}\right)$ avec $x = \dfrac{\Phi}{2}$.

Quand $x = m\pi$ avec m entier relatif, $R_N^2(x) = 1$, ce sont des maxima principaux.

La fonction s'annule $(N-1)$ fois sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ pour $x = n\dfrac{\pi}{N}$ avec n entier, $n \in [1\,;N-1]$. Il y a $(N-2)$ maxima secondaires sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, chaque maximum secondaire est situé entre deux annulations.

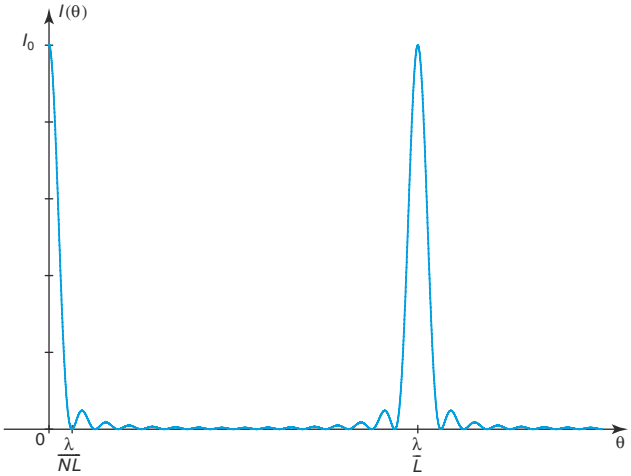
© Nathan, *classe prépa*

La demi-largeur en x d'un maximum principal est $\frac{\pi}{N}$.

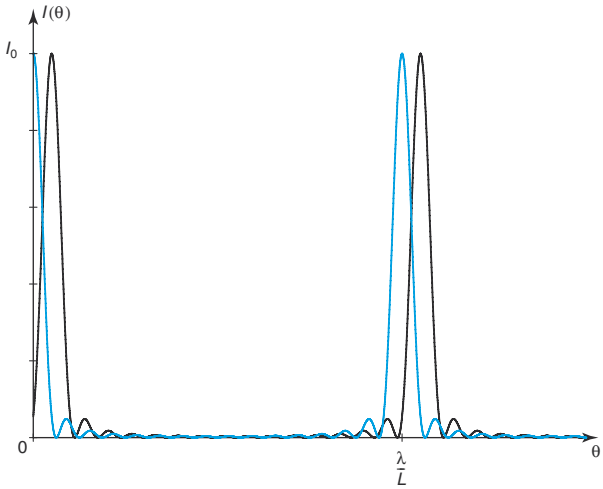
Les maxima principaux sont obtenus pour $\Phi = m2\pi = \frac{2\pi L\theta}{\lambda}$ avec m entier donc l'écart angulaire entre deux maxima principaux vaut $\Delta\theta = \frac{\lambda}{L}$.

La demi-largeur en phase d'un maximum principal est $\frac{2\pi}{N}$ donc $\Delta\theta' = \frac{\lambda}{NL}$.

2 A.N. : $\Delta\theta = 10^{-3}$ rad = **3′26″** et $\Delta\theta' = 6{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad = **13″**. Le premier maximum secondaire est à 1,3 % du maximum principal en intensité et le deuxième est à 0,6 %. Les maxima secondaires sont donc à peine visibles sur la courbe (voir figure ci-dessous). On n'a tracé que deux maxima principaux.



3 On va avoir deux courbes décalées : la première (voir figure ci-dessus) et la seconde décalée de $\theta = -\varepsilon$ (voir figure suivante). On n'a tracé que deux maxima principaux.



© Nathan, *classe prépa*

$$I(M) = I_0 R_N^2\left(\frac{\pi L\theta}{\lambda}\right) + I_0 R_N^2\left(\frac{\pi L(\theta+\varepsilon)}{\lambda}\right)$$

$$I_2 = I_0$$

A.N. : $\Delta\theta'' = \varepsilon = \mathbf{85''}$.

4 $\Delta\theta'' > \Delta\theta'$ donc $\varepsilon > \dfrac{\lambda}{NL}$.

$\varepsilon_{\min} = \dfrac{\lambda}{NL} = \dfrac{\lambda}{2a_0}$ et $2a_0 = NL$.

5 $\varepsilon' = \dfrac{\lambda}{NL} = 13''$ et $2a_0 = 1\,600$ m.

Il est évident que l'encombrement global est le même mais il est plus aisé de fabriquer 16 miroirs (rayon de 5 m) qu'un seul grand miroir de rayon 1 600 m.

© Nathan, *classe prépa*

Problème 3

Holographie
(d'après Mines)

L'addition cohérente de deux ondes optiques produit une figure d'interférence, dont l'enregistrement est nommé hologramme. L'holographie consiste en l'étude de la production et de l'utilisation d'hologrammes ; elle diffère de l'étude classique d'interférences par la complexité des ondes qui interfèrent et celle du dispositif expérimental. Convenablement éclairé, un hologramme peut produire l'image tridimensionnelle d'un objet. L'utilisation d'hologrammes est largement répandue à des fins publicitaires, éducatives, techniques ou artistiques.

Pour former l'hologramme d'un objet, on utilise (figure 1) une onde lumineuse plane monochromatique, de pulsation ω, de longueur d'onde $\lambda_{\text{réf}}$, que l'on sépare en deux faisceaux. L'un des faisceaux sert d'onde de référence ; l'autre faisceau éclaire un objet, et subit simultanément réflexion, réfraction et diffusion. L'hologramme est produit en faisant interférer sur une plaque photosensible l'onde de référence avec l'onde ayant éclairé l'objet. L'utilisation ultérieure d'un faisceau de lecture (fig. 2) permettra d'obtenir, en transmission dans ce problème, une onde non plane, de pulsation ω, caractéristique de l'objet.

On note $\underline{a}(M, t) = A_{\text{objet}}(M)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \psi(M))}$ l'onde issue de l'objet au point M à l'instant t. Dans le trièdre orthonormé $Oxyz$, l'onde de référence d'amplitude $A_{\text{réf}}$, de phase nulle au point O et à l'instant $t = 0$ est caractérisée par son vecteur d'onde $\vec{k}_{\text{réf}} = k_{\text{réf}}(\vec{u}_x \sin\varphi + \vec{u}_z \cos\varphi)$ avec $k_{\text{réf}} = \|\vec{k}_{\text{réf}}\|$. On la note $A_{\text{réf}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM})}$ et l'on suppose, dans tout le problème, l'amplitude $A_{\text{réf}}$ de l'onde de référence très supérieure à celle de l'onde issue de l'objet : $\varepsilon = \dfrac{A_{\text{obj}}}{A_{\text{réf}}}$, $|\varepsilon| \ll 1$. L'intensité $I(M)$ au point M d'une onde d'amplitude complexe $\underline{s}(M, t)$ sera conventionnellement définie par $I(M) = s(M, t)s^*(M, t) = |s(M, t)|^2$.

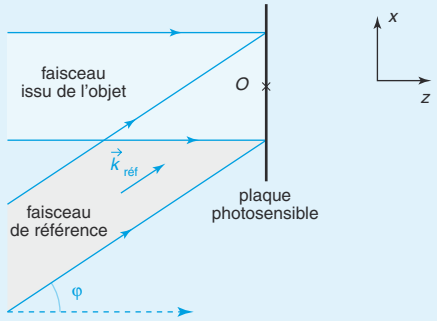


Figure 1 – Enregistrement d'un hologramme mince

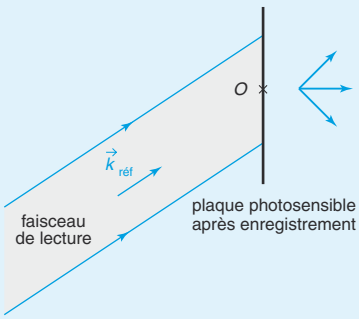


Figure 2 – Lecture en transmission d'un hologramme mince

1 Établir l'expression suivante de l'intensité lumineuse $I(M)$ au point M :

$$I(M) = I_{\text{obj}}(M) + I_{\text{réf}} + 2A_{\text{obj}}(M)A_{\text{réf}}\cos[\psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM}].$$

© Nathan, *classe prépa*

2 La plaque photosensible (P) est une plaque photographique rectangulaire, d'épaisseur négligeable, placée dans le plan *Oxy*. Après développement, le coefficient de transmission en amplitude (ou *transparence*) $t(x, y, 0)$ de cette plaque en un point M de coordonnées $(x, y, 0)$ ne dépend que du temps de pose et de l'intensité lumineuse I en M au moment de l'exposition, selon la loi $t(x, y, 0) = t_0\left(\frac{I}{I_0}\right)^{-\frac{\gamma}{2}}$, où γ et t_0 sont des coefficients positifs et $I_0 = I_{\text{réf}} = A_{\text{réf}}^2$. Montrer que, en se limitant aux termes du premier ordre en $\varepsilon = \frac{A_{\text{obj}}}{A_{\text{réf}}}$:

$$t(x, y, 0) = t_0\left\{1 - \gamma\frac{A_{\text{obj}}(M)}{A_{\text{réf}}}\cos[\psi(x, y, 0) - k_{\text{réf}}\, x\sin(\varphi)]\right\}$$

3 Après développement, la plaque est replacée dans la position qu'elle avait lors de l'impression (figure 2) puis éclairée par une onde de lecture identique à l'onde de référence. Montrer que l'amplitude de l'onde transmise par la plaque holographique se compose de trois termes dont l'un est, à un coefficient multiplicatif près, identique à l'onde issue de l'objet. On présentera chacun de ces termes sous la forme $A_n e^{i(\omega t - \varphi_n)}$, en explicitant A_n et φ_n, avec $n \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

4 L'onde obtenue après traversée de l'hologramme résulte de la diffraction de l'onde de lecture par l'hologramme. Il est possible ainsi de reconstituer l'onde issue d'un objet éclairé par une lumière cohérente. On suppose dans tout le problème que l'objet dont on forme l'hologramme est ponctuel et situé à l'infini sur l'axe Oz ; il génère alors une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_{\text{obj}} = k_{\text{réf}}\vec{u}_z$, en phase avec l'onde de référence au point O. La phase de cette onde plane est maintenant explicite :

$$\psi(x, y, z) = \vec{k}_{\text{obj}} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Établir dans ces conditions l'expression approchée suivante de l'intensité au point M :

$$I(M) = I_0[1 + m\cos(\overrightarrow{OM} \cdot \Delta\vec{k})] \qquad (1)$$

où $\Delta\vec{k} = \vec{k}_{\text{obj}} - \vec{k}_{\text{réf}}$. Exprimer m en fonction de $A_{\text{réf}}$ et A_{obj}. Caractériser les surfaces d'intensité maximale et exprimer la distance entre deux de ces surfaces successives puis la distance entre deux lignes successives dans un plan $z = C$, avec $C =$ constante. On exprimera la distance en fonction de la longueur d'onde $\lambda_{\text{réf}}$ et de φ.

5 La plaque photographique permet d'enregistrer au plus N traits par unité de longueur. À quelle condition sur N, $\lambda_{\text{réf}}$ et φ la photographie sera-t-elle une reproduction acceptable de la figure d'interférence ?
Pour $N = 500\ \text{mm}^{-1}$ et $\lambda_{\text{réf}} = 500\ \text{nm}$, quelle est la valeur maximale de φ ?

6 Exprimer $t(x, y, 0)$, coefficient de transmission de la plaque après développement, en se limitant au terme du premier ordre en ε.

7 La plaque, de dimensions (centimétriques) a selon Ox et h selon Oy, est éclairée par l'onde de lecture, dans le domaine du visible, d'amplitude A_{lec}, de longueur d'onde $\lambda_{\text{réf}}$ et de vecteur d'onde $(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z)k_{\text{réf}}$. En utilisant le principe de Huygens-Fresnel, calculer l'amplitude de l'onde diffractée par la plaque photographique dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{u}_d = \alpha_d\vec{u}_x + \beta_d\vec{u}_y + \gamma_d\vec{u}_z$. On constatera que cette amplitude est la somme de trois termes, que l'on notera respectivement $\underline{a}_{d_1}$, $\underline{a}_{d_2}$ et $\underline{a}_{d_3}$.

© Nathan, *classe prépa*

On rappelle la relation de définition : $\int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}} e^{2i\pi\frac{ax}{\lambda}} dx = u \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a u}{\lambda}\right)$.

8 On étudie séparément les intensités I_1, I_2 et I_3 associées respectivement aux amplitudes $\underline{a}_{d_1}$, $\underline{a}_{d_2}$ et $\underline{a}_{d_3}$. Montrer que les directions des maximas principaux d'intensité sont situées dans le plan (zx) et expliciter β_d pour de tels maxima ; posant $\vec{u}_d = \sin\theta_d \vec{u}_x + \cos\theta_d \vec{u}_z$, donner les relations vérifiées par $\sin(\theta_d)$ pour les directions d'intensité maximale ; par analogie avec un réseau de fentes fines, donner les ordres auxquels correspondent ces maxima d'intensité.

9 Déterminer dans l'approximation des petits angles les demi-largeurs angulaires des pics principaux de diffraction par rapport aux axes x et y. Calculer, en fonction de m et de γ, les valeurs relatives des maxima principaux d'intensité diffractée pour les composantes dépendant de m par rapport au maximum de l'intensité diffractée par la composante qui n'en dépend pas.

10 À quelle condition sur φ, $\lambda_{\text{réf}}$ et a la distance angulaire entre les pics principaux de diffraction est-elle grande devant leurs largeurs angulaires ? Déterminer dans ce cas l'expression approchée de l'intensité diffractée. Représenter, pour $\beta_d = 0$, son allure en fonction de α_d.

11 Déterminer, pour $\theta = \varphi$, la composante de l'amplitude diffractée qui permet de reconstituer l'image de l'objet. Quelle est l'influence d'une variation de θ sur la direction de reconstitution de cette image ?

12 Pour que la reconstitution soit acceptable, il faut que l'intensité associée à la composante indépendante de m dans la direction de reconstitution de l'image soit inférieure à une certaine fraction f de l'intensité maximale associée à l'image. En déduire l'ordre de grandeur de la valeur minimale à donner à l'angle φ (on majorera $|\operatorname{sinc} x|$ par $\frac{1}{x}$). Application numérique : $\gamma m = 10^{-3}$, $f = 10^{-1}$, $a = 1$ cm.

13 La plaque photographique est remplacée à partir de maintenant et dans toutes les questions qui suivent par une couche transparente de mêmes dimensions, orientée de manière identique et d'épaisseur e suffisamment faible pour qu'elle puisse être considérée comme une surface diffractante coïncidant avec le plan Oxy. Cette plaque est *photosensible* : la valeur en tout point M de son indice de réfraction n reproduit celle de l'intensité incidente $I(M)$ selon la loi $n(M) = n_0 + \alpha I(M)$. L'hologramme est ainsi obtenu sous la forme de réseau d'indice. Les angles avec l'axe Oz restent quasiment nuls. Exprimer pour tout point M la différence de chemin optique $\delta(M)$ entre un rayon traversant la couche photosensible sous incidence quasi-normale et un rayon se propageant dans le vide.

14 On note $\underline{t}(M) = e^{\left(-\frac{2i\pi\delta(M)}{\lambda_{\text{réf}}}\right)}$ la transparence de l'hologramme associée à $\delta(M)$. Montrer que si le terme $\frac{\alpha I(M) e}{\lambda_{\text{réf}}}$ est suffisamment petit, cette transparence peut s'écrire sous la forme $\underline{t}(M) = \underline{t}_0[1 + \underline{C} I(M)]$, où $\underline{t}_0$ et $\underline{C}$ sont des constantes complexes, dont on donnera les expressions. En déduire que les caractéristiques géométriques de la figure de diffraction lors de la lecture sont identiques à celles obtenues avec une plaque photographique.

© Nathan, *classe prépa*

15 On enregistre successivement deux hologrammes. Les ondes de références sont de même intensité et de même longueur d'onde $\lambda_{\text{réf}}$, leurs directions respectives sont caractérisées par les angles φ_1 et φ_2. Les objets restent ponctuels et situés sur l'axe Oz, les amplitudes des ondes objet sont A_1 et A_2 ($|A_1|, |A_2| \ll |A_{\text{réf}}|$). Avec des notations analogues à celles de la relation (1), les intensités lors des enregistrements sont :

$$I_1(M) = \frac{I_0}{2}[1 + m_1 \cos(\overrightarrow{OM} \cdot \Delta\vec{k}_1)] \quad \text{et} \quad I_2(M) = \frac{I_0}{2}[1 + m_2 \cos(\overrightarrow{OM} \cdot \Delta\vec{k}_2)].$$

La transparence après l'enregistrement est alors :

$$t(M) = \underline{t}_0\{1 + \underline{C}[I_1(M) + I_2(M)]\}.$$

L'hologramme étant éclairé par l'onde de lecture sous l'angle d'incidence θ, caractériser les positions, les tailles angulaires et les intensités relatives des pics principaux de diffraction. En déduire que l'on reconstitue simultanément les images des deux objets.

16 Les images des deux objets sont dites séparées si les taches principales de diffraction qui leurs sont associées ne se recouvrent pas (les limites des taches principales de diffraction sont ici les premiers points où l'intensité s'annule, de part et d'autre du maximum principal). En déduire l'expression et la valeur de l'écart minimal $(\Delta\varphi)_{\min}$ entre les directions des faisceaux de référence lors de l'enregistrement des hologrammes successifs. Quels facteurs peuvent contribuer à augmenter $(\Delta\varphi)_{\min}$?

résolution méthodique

1 Un faisceau primitif est divisé en deux faisceaux. Le premier faisceau donne l'onde de référence tandis que le second éclaire l'objet. Les deux faisceaux résultants peuvent interférer. On calcule l'amplitude résultante avant d'en déduire l'intensité. Pour un point M de la plaque photosensible :

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_{\text{objet}}(M, t) + \underline{a}_{\text{réf}}(M, t) = A_{\text{objet}}(M)\mathrm{e}^{i(\omega t - \Psi(M))} + A_{\text{réf}}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

$$I(M) = \underline{a}(M, t)\underline{a}^*(M, t) = A^2_{\text{objet}}(M) + A^2_{\text{réf}} + 2A_{\text{réf}}A_{\text{objet}}(M)\cos(\Psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM})$$

2 La transparence de la plaque vaut en M de coordonnées $(x, y, 0)$:

$$t(x, y, 0) = t_0\left(\frac{I(M)}{I_0}\right)^{-\frac{\gamma}{2}} = t_0\left(\frac{A^2_{\text{objet}}(M) + A^2_{\text{réf}} + 2A_{\text{réf}}A_{\text{objet}}(M)\cos(\Psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM})}{I_0}\right)^{-\frac{\gamma}{2}}$$

$A_{\text{objet}} = \varepsilon A_{\text{réf}}$ et $I_{\text{objet}} = \varepsilon^2 I_{\text{réf}} = \varepsilon^2 I_0$.

$$t(x, y, 0) = t_0\left(\frac{\varepsilon^2 I_0 + I_0 + 2\varepsilon I_0 \cos(\Psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM})}{I_0}\right)^{-\frac{\gamma}{2}}$$

Au premier ordre en ε :

$$t(x, y, 0) = t_0(\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon\cos(\Psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM}))^{-\frac{\gamma}{2}} \approx t_0(1 - \gamma\varepsilon\cos(\Psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM}))$$

Notons $\|\vec{k}_{\text{réf}}\| = k_{\text{réf}}$. Calculons $\vec{k}_{\text{réf}} \cdot \overrightarrow{OM} = xk_{\text{réf}}\sin\varphi$.

$$t(x, y, 0) = t_0(1 - \gamma\,\varepsilon\cos(\Psi(x, y, 0) - xk_{\text{réf}}\sin\varphi))$$

© Nathan, *classe prépa*

3 On développe la plaque. Calculons l'amplitude de l'onde transmise par la plaque, juste après la plaque, au point noté M^+ (non précisé dans l'énoncé).

$$\underline{a}(M^+, t) = t(x, y, 0)A_{\text{réf}}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM})}$$

$$\underline{a}(M^+, t) = t_0(1 - \gamma\varepsilon\cos(\Psi(x, y, 0) - xk_{\text{réf}}\sin\varphi))A_{\text{réf}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM})}$$

On transforme le cosinus en somme d'exponentielles pour faire apparaître trois termes sous la forme $A_n\mathrm{e}^{i(\omega t - \varphi_n)}$.

$$\underline{a}(M^+, t) = t_0\left(1 - \frac{\gamma A_{\text{objet}}}{2A_{\text{réf}}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi(x, y, 0) - xk_{\text{réf}}\sin\varphi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi(x, y, 0) - xk_{\text{réf}}\sin\varphi)})\right)A_{\text{réf}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM})}$$

$$\underline{a}(M^+, t) = t_0\left(1 - \frac{\gamma A_{\text{objet}}}{2A_{\text{réf}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi(x, y, 0) - xk_{\text{réf}}\sin\varphi)} - \frac{\gamma A_{\text{objet}}}{2A_{\text{réf}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi(x, y, 0) - xk_{\text{réf}}\sin\varphi)}\right)A_{\text{réf}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM})}$$

$$\underline{a}(M^+, t) = \sum_{n=1}^{3} A_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi_n)}$$

$$A_1 = t_0A_{\text{réf}} \text{ et } \varphi_1 = \vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM} = xk_{\text{réf}}\sin\varphi$$

$$A_2 = -t_0\frac{\gamma}{2}A_{\text{objet}}(M) \text{ et } \varphi_2 = 2\vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM} - \Psi(M)$$

$$A_3 = -t_0\frac{\gamma}{2}A_{\text{objet}}(M) \text{ et } \varphi_3 = \Psi(M)$$

C'est le troisième terme qui est identique à l'onde issue de l'objet au facteur $-t_0\frac{\gamma}{2}$ près.

4 On peut expliciter $\Psi(M)$ quand l'objet est ponctuel.

$$\Psi(M) - \vec{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{OM} = (\vec{k}_{\text{objet}} - \vec{k}_{\text{réf}})\cdot\overrightarrow{OM} = \Delta\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}$$

D'après les questions **1** et **2**, on obtient pour intensité au point M sur la plaque avant enregistrement :

$$I(M) = I_0(1 + 2\varepsilon\cos(\Delta\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}))$$

$m = 2\varepsilon$ et les surfaces d'intensité maximale sont obtenues pour $\Delta\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = n2\pi$ avec n entier. $\Delta\vec{k} = (-k_{\text{réf}}\sin\varphi, 0, k_{\text{réf}} - k_{\text{réf}}\cos\varphi)$ et $\Delta\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = -xk_{\text{réf}}\sin\varphi + z(k_{\text{réf}} - k_{\text{réf}}\cos\varphi) = n2\pi$; ce qui donne :

$$(1 - \cos\varphi)z = x\sin\varphi + n\frac{2\pi}{k_{\text{réf}}} \text{ équation d'un plan à } n \text{ fixé.}$$

La distance entre deux de ces surfaces successives est obtenue pour n variant d'une unité, soit $\frac{2\pi}{k_{\text{réf}}} = \lambda_{\text{réf}}$. Dans un plan $z = C$, on obtient des droites d'intensité maximale données par $-x\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}\sin\varphi = n2\pi + C'$. La distance entre deux de ces droites successives, notée i et appelée interfrange, vaut $i = \frac{\lambda_{\text{réf}}}{\sin\varphi}$.

5 La plaque permet d'enregistrer au plus N traits par unité de longueur (mm ici). $Ni \geqslant 1$ donne la limite avec i exprimée en unité de longueur (mm ici).

$N\frac{\lambda_{\text{réf}}}{\sin\varphi} \geqslant 1$ et $\sin\varphi_{\max} = N\lambda_{\text{réf}}$

A.N. : $\varphi_{\max} = \mathbf{14{,}5°}$.

© Nathan, *classe prépa*

6 On reprend le résultat du **2** en remplaçant $\Psi(x, y, 0)$ par sa valeur.

$$t(x, y, 0) = t_0\left(1 - \gamma\,\varepsilon\cos\left(x\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}\sin\varphi\right)\right)$$

7 L'amplitude complexe de l'onde diffractée vaut :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{\text{lec}}t_0\left(1 - \gamma\,\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}x\sin\varphi\right)\right)\mathrm{e}^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_{\text{d}})\cdot\overrightarrow{OP}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z)$$

$$\vec{k}_{\text{d}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}}\vec{u}_x + \beta_{\text{d}}\vec{u}_y + \gamma_{\text{d}}\vec{u}_z)$$

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_{\text{d}})\cdot\overrightarrow{OP} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}x(\sin\theta - \alpha_{\text{d}}) - \frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}y\beta_{\text{d}}$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{\text{lec}}t_0\left(1 - \gamma\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}x\sin\varphi\right)} - \gamma\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}x\sin\varphi\right)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}_i - \vec{k}_{\text{d}})\cdot\overrightarrow{OP}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{a}_{\text{diffractée}} = \underline{a}_{\text{d}_1} + \underline{a}_{\text{d}_2} + \underline{a}_{\text{d}_3}$$

$$\underline{a}_{\text{d}_1} = A_{\text{lec}}t_0 h\,\text{sinc}\left(\frac{\pi h\beta_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)a\,\text{sinc}\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}} - \sin\theta)$$

$$\underline{a}_{\text{d}_2} = -\gamma\frac{\varepsilon}{2}A_{\text{lec}}t_0 h\,\text{sinc}\left(\frac{\pi h\beta_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)a\,\text{sinc}\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}} - \sin\theta + \sin\varphi)$$

$$\underline{a}_{\text{d}_3} = -\gamma\frac{\varepsilon}{2}A_{\text{lec}}t_0 h\,\text{sinc}\left(\frac{\pi h\beta_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)a\,\text{sinc}\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}} - \sin\theta - \sin\varphi)$$

8 Calculons les intensités correspondant aux trois amplitudes complexes.

$$I_{\text{d}_1} = (A_{\text{lec}}at_0h)^2\text{sinc}^2\left(\frac{\pi h\beta_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)\text{sinc}^2\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}} - \sin\theta)$$

$$I_{\text{d}_2} = (\gamma\frac{\varepsilon}{2}A_{\text{lec}}at_0h)^2\text{sinc}^2\left(\frac{\pi h\beta_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)\text{sinc}^2\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}} - \sin\theta + \sin\varphi)$$

$$I_{\text{d}_3} = (\gamma\frac{\varepsilon}{2}A_{\text{lec}}at_0h)^2\text{sinc}^2\left(\frac{\pi h\beta_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)\text{sinc}^2\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(\alpha_{\text{d}} - \sin\theta - \sin\varphi)$$

Les directions des maxima principaux d'intensité sont $\alpha_{\text{d}_1} = \sin\theta$, $\alpha_{\text{d}_2} = \sin\theta - \sin\varphi$ et $\alpha_{\text{d}_3} = \sin\theta + \sin\varphi$ dans la direction $\vec{u}_x$ et $\beta_{\text{d}} = 0$ dans la direction $\vec{u}_y$.
$\beta_{\text{d}} = 0$ correspond au plan (zx). Notons que $\alpha_{\text{d}_i} = \sin\theta_{\text{d}_i}$.
$\sin\theta_{\text{d}_1} = \sin\theta$, c'est l'ordre 0.
$\sin\theta_{\text{d}_2} = \sin\theta - \sin\varphi$, c'est l'ordre –1.
$\sin\theta_{\text{d}_3} = \sin\theta + \sin\varphi$, c'est l'ordre 1.

9 Pour les petits angles, $\sin\theta_{\text{d}} \approx \theta_{\text{d}}$. Prenons $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a\alpha_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}}\right)$, il s'annule pour $\frac{\pi a\alpha_{\text{d}}}{\lambda_{\text{réf}}} = \pi$ donc pour $\alpha_{\text{d}} \approx \theta_{\text{d}} = \frac{\lambda_{\text{réf}}}{a}$.

© Nathan, *classe prépa*

Prenons $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi h \beta_d}{\lambda_{réf}}\right)$, il s'annule pour $\frac{\pi h \beta_d}{\lambda_{réf}} = \pi$ donc pour $\beta_d = \frac{\lambda_{réf}}{h}$.

La demi-largeur angulaire est la même pour les trois pics et vaut $\frac{\lambda_{réf}}{a}$ dans la direction $\vec{u}_x$ et $\frac{\lambda_{réf}}{h}$ dans la direction $\vec{u}_y$.

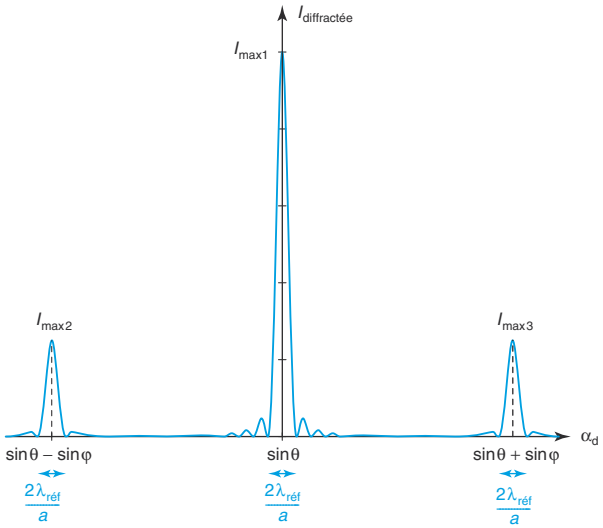
Notons les maxima d'intensité I_{max1}, I_{max2} et I_{max3}.

$$\frac{I_{max2}}{I_{max1}} = \frac{I_{max3}}{I_{max1}} = \left(\frac{\gamma\varepsilon}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma m}{4}\right)^2$$

10 Si $\sin\varphi \gg \frac{\lambda_{réf}}{a}$ alors les trois pics sont suffisamment éloignés les uns des autres et on peut sommer les trois intensités.

$$I_{diffractée} = I_{d_1} + I_{d_2} + I_{d_3}$$

L'allure de $I_{diffractée}$ est donnée pour $\beta_d = 0$.



11 Si $\theta = \varphi$, $\underline{a}_{d_2}$ permet de reconstituer l'image de l'objet dans la direction $\alpha_d = 0$ car son amplitude est proportionnelle à ε donc à A_{objet}. $\underline{a}_{d_3}$ permet aussi de reconstituer l'image de l'objet mais dans la direction $\alpha_d = 2\sin\varphi$.

Si θ varie, l'image de l'objet sera reconstituée dans les deux directions $\alpha_d = \sin\theta - \sin\varphi$ et $\alpha_d = \sin\theta + \sin\varphi$.

12 L'intensité associée à la composante indépendante de m est en remplaçant par $\alpha_d = 0$, $\beta_d = 0$ et $\theta = \varphi$:

$$I_{d_1} = (A_{lec} a t_0 h)^2 \text{sinc}^2 \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda_{réf}}$$

$$I_{d_2} = (\gamma \frac{m}{4} A_{lec} a t_0 h)^2 = (\gamma \frac{m}{4})^2 (A_{lec} a t_0 h)^2$$

© Nathan, *classe prépa*

On exprime la condition de l'énoncé. $I_{d_1} < f I_{d_2}$, ce qui implique :

$$\text{sinc}^2 \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda_{\text{réf}}} < f\left(\gamma \frac{m}{4}\right)^2$$

$\text{sinc}^2 x$ est majoré par $\frac{1}{x^2}$ donc $\text{sinc}^2 \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda_{\text{réf}}}$ est majoré par $\left(\frac{\lambda_{\text{réf}}}{\pi a \sin\varphi}\right)^2$.

$$\left(\frac{\lambda_{\text{réf}}}{\pi a \sin\varphi}\right)^2 < f\left(\gamma \frac{m}{4}\right)^2$$

$$\sin\varphi > \frac{4\lambda_{\text{réf}}}{\gamma m \pi a \sqrt{f}}$$

A.N. : $\varphi_{\min} = \mathbf{11{,}6°} < 14{,}5°$. Cette valeur est fort heureusement inférieure à la valeur calculée à la question 5.

13 La différence de marche optique vaut $\delta(M) = (n(M) - 1)e$.

14 Calculons la nouvelle transparence complexe.

$$\underline{t}(M) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_{\text{réf}}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(n(M)-1)e}{\lambda_{\text{réf}}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(n_0+\alpha I(M)-1)e}{\lambda_{\text{réf}}}}$$

Si $\frac{\alpha I(M)\mathrm{e}}{\lambda_{\text{réf}}} \ll 1$ alors on peut écrire :

$$\underline{t}(M) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(n_0-1)e}{\lambda_{\text{réf}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi\mathrm{e}\alpha I(M)}{\lambda_{\text{réf}}}} \approx \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(n_0-1)e}{\lambda_{\text{réf}}}}\left(1 - \mathrm{i}2\pi e\frac{\alpha I(M)}{\lambda_{\text{réf}}}\right)$$

$$\underline{t}(M) = t_0(1 + \underline{C}I(M)) \text{ avec } t_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(n_0-1)e}{\lambda_{\text{réf}}}} \text{ et } \underline{C} = -\mathrm{i}2\pi e\frac{\alpha}{\lambda_{\text{réf}}}$$

$$I(M) = I_0(1 + m\cos\Phi) \text{ avec } \Phi = \Delta\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}$$

$$\underline{t}(M) = t_0(1 + \underline{C}I_0(1 + m\cos\Phi)) = t_0(1 + \underline{C}I_0) + t_0\underline{C}I_0 m\cos\Phi$$

Pour la plaque photographique, on obtenait une transparence de la forme :

$$t(x, y, 0) = t_0\left(1 - \gamma\frac{m}{2}\cos\Phi\right).$$

Le fait que $\underline{C}$ soit complexe ne change rien aux résultats : les intensités donneront toujours des sinus cardinaux au carré.
Les deux transparences ont la même dépendance en $\Phi(M)$ et les caractéristiques géométriques des deux figures de diffraction sont les mêmes.

15 On enregistre successivement deux hologrammes sur la même couche photosensible.

$$\underline{t}(M) = t_0(1 + \underline{C}I_1(M) + \underline{C}I_2(M)) = t_0(1 + 2\underline{C}I_0 + \underline{C}I_0 m_1\cos\Phi_1 + \underline{C}I_0 m_2\cos\Phi_2)$$

On obtiendra par diffraction 5 pics. Ils sont centrés sur :

$$\sin\theta_{\text{d}} = \sin\theta$$

$$\sin\theta_{\text{d}} = \sin\theta \pm \sin\varphi_1$$

$$\sin\theta_{\text{d}} = \sin\theta \pm \sin\varphi_2.$$

© Nathan, *classe prépa*

La demi-largeur angulaire est la même pour les cinq pics et vaut $\frac{\lambda_{\text{réf}}}{a}$ dans la direction $\vec{u}_x$ et $\frac{\lambda_{\text{réf}}}{h}$ dans la direction $\vec{u}_y$.

Calculons les intensités relatives et notons les maxima d'intensité $I_{\max 0}$, $I_{\max 1}$, $I_{\max 2}$.

$$I_{\max 0}(\sin\theta_d = \sin\theta) = \left|t_0(1 + 2\underline{C}I_0)\right|^2$$

$$I_{\max 1}(\sin\theta_d = \sin\theta \pm \sin\varphi_1) = \frac{1}{4}\left|t_0\underline{C}I_0 m_1\right|^2$$

$$I_{\max 2}(\sin\theta_d = \sin\theta \pm \sin\varphi_2) = \frac{1}{4}\left|t_0\underline{C}I_0 m_2\right|^2$$

$$\frac{I_{\max 1}}{I_{\max 0}} = \frac{\left|\underline{C}I_0 m_1\right|^2}{4\left|1 + 2\underline{C}I_0\right|^2}$$

$$\frac{I_{\max 2}}{I_{\max 0}} = \frac{\left|\underline{C}I_0 m_2\right|^2}{4\left|1 + 2\underline{C}I_0\right|^2}$$

Si $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \geqslant \frac{2\lambda_{\text{réf}}}{a}$, on peut alors reconstituer simultanément les images des deux objets.

16 $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \geqslant \frac{2\lambda_{\text{réf}}}{a}$ et pour de petits angles, $\varphi_1 - \varphi_2 \geqslant \frac{2\lambda_{\text{réf}}}{a}$.

L'approximation des petits angles est justifiée par $11{,}6° < \varphi < 14{,}5°$.

$$\Delta\varphi_{\min} = \frac{2\lambda_{\text{réf}}}{a}$$

A.N. : $\Delta\varphi_{\min} = \mathbf{10^{-4}°}$.

$\Delta\varphi_{\min}$ peut augmenter si on diminue a (taille de la plaque ou de la couche) ou si on change de longueur d'onde en l'augmentant.

© Nathan, *classe prépa*

Annexe

© Nathan, *classe prépa*

Éléments de mathématiques

1 Fonctions usuelles en optique

1.1. Fonction sinus cardinal et son carré

$\text{sinc}\,x = \dfrac{\sin x}{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ et vaut 1 en $x = 0$. Elle est paire.
$\sin x$ est une fonction périodique et s'annule périodiquement avec une période en x de π donc $\text{sinc}\,x$ s'annule périodiquement avec une période en x de π.
Calculons sa dérivée.

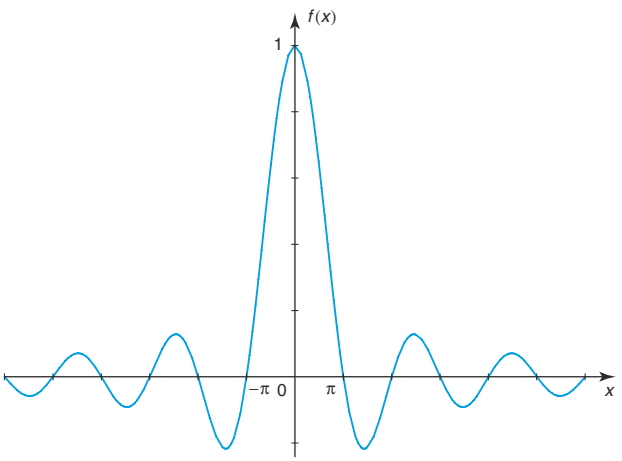
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Elle s'annule pour $\tan x = x$ c'est-à-dire pour des valeurs proches de $(2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec p entier différent de 0. On obtient donc des extrema de la fonction pour ces valeurs. $\text{sinc}\dfrac{3\pi}{2} = -0{,}21$ et $\text{sinc}\dfrac{5\pi}{2} = 0{,}13$.
On a tracé la fonction sur la figure **1a** ainsi que son carré (1b).

$$\text{sinc}^2\frac{3\pi}{2} = 0{,}045 \quad \text{et} \quad \text{sinc}^2\frac{5\pi}{2} = 0{,}016.$$

Fig. 1 *Sinus cardinal*

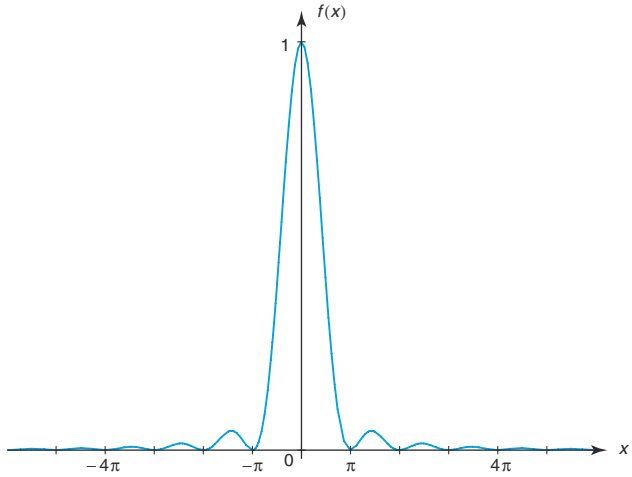
1a



© Nathan, *classe prépa*

Sinus cardinal carré

1b



1.2. Fonction Réseau et son carré

$R_N(x) = \dfrac{\sin Nx}{N \sin x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ avec n entier et vaut ± 1 en $x = n\pi$.
$\sin x$ est périodique de période 2π et $\sin Nx$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{N}$ donc $R_N(x)$ est périodique de période 2π.
La fonction est paire $R_N(-x) = R_N(x)$, on peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

Elle est symétrique par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ car $R_N(\pi - x) = R_N(x)$.

Quand $x = n\pi$ avec n entier, $R_N(x) = \pm 1$ et $R_N^2(x) = 1$, ces points sont appelés maxima principaux de la fonction réseau au carré.
$R_N(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour $x = n\dfrac{\pi}{N}$ avec n entier, $n \in [1, N-1]$. Elle s'annule donc $(N-1)$ fois sur l'intervalle $[0, \pi]$. Elle s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$ que si N est paire.
Calculons sa dérivée.

$$\left(\frac{\sin Nx}{N \sin x}\right)' = \frac{N^2 \sin x \cos Nx - N \cos x \sin Nx}{N^2 \sin^2 x}$$

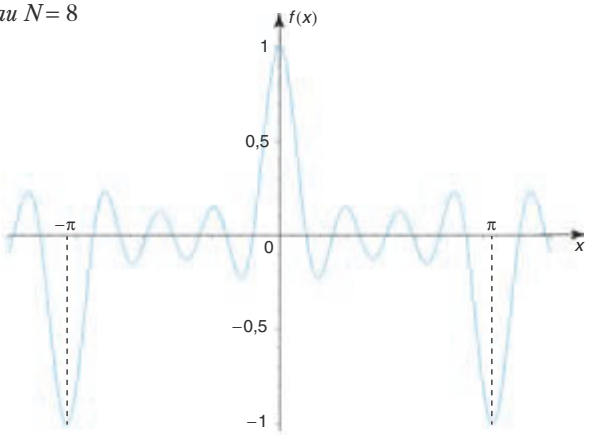
Elle s'annule pour $\tan Nx = N \tan x$ c'est-à-dire pour des valeurs Nx proches de $(2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec p entier différent de 0. On obtient donc des extrema de la fonction pour ces valeurs. On les appelle des maxima secondaires. Il y a $(N-2)$ maxima secondaires sur l'intervalle $[0, \pi]$ situés entre deux annulations de la fonction.
On a tracé cette fonction ainsi que son carré pour $N = 8$ (voir figures 2a et 2b).
Si on veut calculer la largeur en x d'un maximum principal situé en $x = x_m$, on remarque que la fonction s'annule autour de x_m pour $x_m \pm \dfrac{\pi}{N}$. La largeur vaut donc $\dfrac{2\pi}{N}$ ou la demi-largeur $\dfrac{\pi}{N}$.

© Nathan, *classe prépa*

Fig. 2

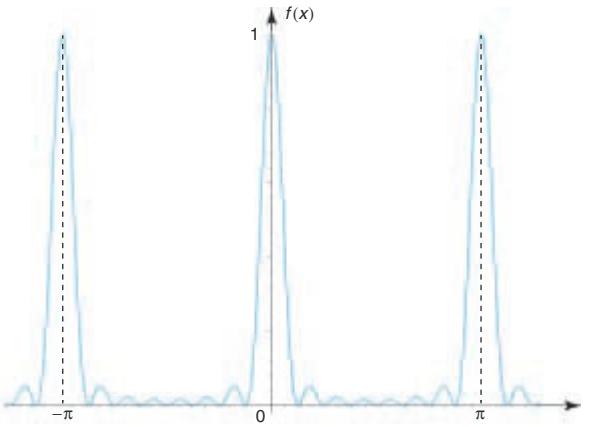
Fonction réseau $N = 8$

2a



Fonction réseau carré $N = 8$

2b

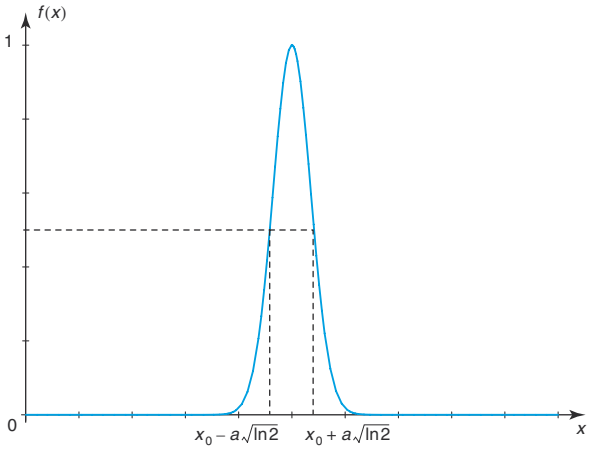


1.3. Fonctions gaussienne et lorentzienne

L'équation d'une gaussienne est $f(x) = Ce^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2}$ (voir figure 3). Elle vaut C pour $x = x_0$. Sa largeur à mi-hauteur est donnée par $f(x) = \frac{C}{2}$ donc pour $x - x_0 = \pm a\sqrt{\ln 2}$.

Fig. 3

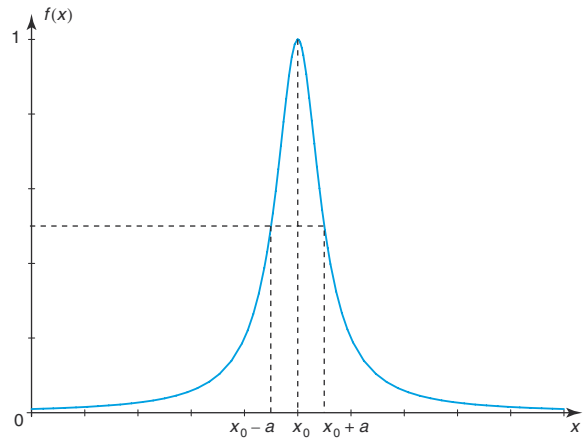
Raie gaussienne



© Nathan, *classe prépa*

L'équation d'une lorentzienne est $f(x) = \dfrac{C}{1+\left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)^2}$. Elle vaut C pour $x = x_0$ Sa largeur à mi-hauteur est donnée par $f(x) = \dfrac{C}{2}$ donc pour $x - x_0 = \pm a$.

Fig. 4 *Raie lorentzienne*



2 Polarisation elliptique

Montrons que l'extrémité du vecteur $\vec{E}(M)$ décrit une ellipse dans le plan d'onde pour une Onde Plane Progressive Harmonique.

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz) \quad \text{et} \quad \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz)\cos\phi_0 + \sin(\omega t - kz)\sin\phi_0$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi_0 = \sin(\omega t - kz)\sin\phi_0$$

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} = \cos^2(\omega t - kz) \quad \text{et} \quad \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2}\cos^2\phi_0 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\phi_0 = \sin^2(\omega t - kz)\sin^2\phi_0$$

Si $\sin\phi_0 \neq 0$ $\dfrac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \dfrac{E_x^2}{E_{0x}^2\tan^2\phi_0} + \dfrac{E_y^2}{E_{0y}^2\sin^2\phi_0} - 2\dfrac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}\sin\phi_0\tan\phi_0} = 1.$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une ellipse. $\sin\phi_0 = 0$ correspond à $\phi_0 = 0$ ou π modulo 2π, ces deux cas particuliers correspondent à une droite.

3 Transformée de Fourier

3.1. Définitions

La transformée de Fourier d'ordre 1 d'une fonction $f(x)$ (continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes intégrables) est : $TF_1(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i2\pi ux}dx$.

© Nathan, *classe prépa*

Pour une fonction $F(u)$, on peut définir la transformée de Fourier inverse :

$$TF_{\text{inverse}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}u.$$

La transformée de Fourier d'ordre 2 d'une fonction $g(x, y)$ est :

$$TF_2(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi ux + 2\pi vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

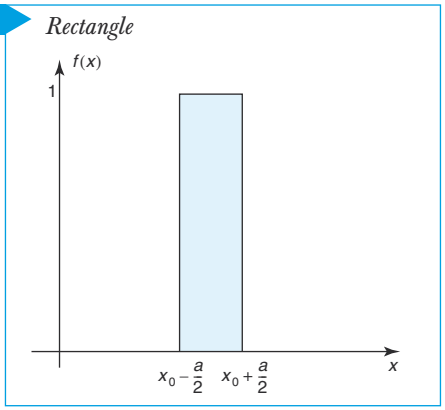
Si $g(x, y) = h(x)k(y)$, c'est le produit de deux transformées de Fourier d'ordre 1.

$$TF_2(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} k(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi vy}\mathrm{d}y.$$

3.2. Transformée de Fourier de quelques fonctions

3.2.1. Transformée de Fourier de la fonction « rectangle »

Fig. 5



Elle est représentée (voir figure 5) par la fonction $f(x) = 1$ pour $x_0 - \frac{a}{2} \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{a}{2}$ et nulle partout ailleurs.

$$TF_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x = \int_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x$$

$$TF_1(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi ua} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi ua}}{\mathrm{i}2\pi u}$$

$$= a\mathrm{sinc}(\pi ua)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux_0}$$

$$TF_1(u)TF_1^*(u) = a^2\mathrm{sinc}^2(\pi ua).$$

Quand a tend vers l'infini, $a\mathrm{sinc}(\pi ua)$ se comporte comme une fonction de Dirac car elle tend vers l'infini en $u = 0$ et est nulle partout ailleurs.

À deux dimensions, on peut définir la fonction $g(x, y) = 1$ pour $x_0 - \frac{a}{2} \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{a}{2}$ et $y_0 - \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant y_0 + \frac{b}{2}$, elle est nulle partout ailleurs.

$$TF_2(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi ux + 2\pi vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x\int_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi vy}\mathrm{d}y = a\mathrm{sinc}(\pi ua)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux_0}b\mathrm{sinc}(\pi vb)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi vy_0}$$

$$TF_2(u, v)TF_2^*(u, v) = a^2\mathrm{sinc}^2(\pi ua)b^2\mathrm{sinc}^2(\pi vb).$$

3.2.2. Transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale

$f(x) = \cos 2\pi u_0 x$ pour $x_0 - \frac{a}{2} \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{a}{2}$ et nulle partout ailleurs.

$$TF_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x = \int_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \cos(2\pi u_0 x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x$$

$$TF_1(u) = \int_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(u+u_0)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(u-u_0)x})\mathrm{d}x$$

$$TF_1(u) = \frac{a}{2}\mathrm{sinc}(\pi(u+u_0)a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(u+u_0)x_0} + \frac{a}{2}\mathrm{sinc}(\pi(u-u_0)a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(u-u_0)x_0}.$$

© Nathan, *classe prépa*

Index

A

Analyseur à pénombre 233
Analyseur et polariseur croisés 213
Angle de Brewster 218
Anisotrope 213, 226
Anneaux 44
Apodisation 140
Appareil photographique 30
Arc-en-ciel 32
Axe
    lent 213
    rapide 213

B

Battement optique 105
Biréfringent 213
Bras du Michelson 68
Brouillage des franges 106

C

Cannelure 110
Capacité de stockage des CD et DVD 199
Champ d'interférences 42
Chemin optique 15
Cohérence temporelle 47
Compensatrice 71
Contraste 43
Coucher apparent des étoiles 13
Couleurs des lames minces biréfringentes 233
Critère de Rayleigh 149

D

Déphasages supplémentaires 17
Dichroïque 211
Diffraction par un bord d'écran 141
Diviseur
    d'amplitude 49
    d'onde 48
    du front d'onde 48
Doublet afocal 30

E

Échelle de teintes de Newton 109
Échographie médicale à ultrasons 199
Écran complémentaire 143
Effet
    Faraday 226
    Kerr 232
Élargissement de raie
    par collisions 102
    par effet Doppler 60, 102
Émission lumineuse 47
Expanseur de faisceau 11
Expérience de Fresnel Arago 233

F

Fibre optique 29
Figure de diffraction 134
Filtrage spatial 159
Filtre interférentiel 234
Formule de Fresnel 42
Frange
    achromatique 121
    centrale 43
    d'interférences 42
Franges
    circulaires 44
    égale épaisseur 74
    égale inclinaison 75
    rectilignes 44

G

Gaussienne 101

© Nathan, *classe prépa*

H

Holographie élémentaire 159
Hyperboloïde 43

I

Intensité lumineuse 14
Interféromètre de Fabry-Pérot 192
Interféromètre de Newton 92
Irisations 109

L

Lentille mince convergente et divergente 9
Lignes neutres 213
Loi de Malus 212
Lois de Descartes 7
Longueur d'onde des lampes spectrales 184
Longueur de cohérence temporelle 48
Lorentzienne 102
Loupe 10
Lumière solaire diffusée par la Lune 228
Lunette
    astronomique 11
    de Galilée 11
Lunettes de glacier 218

M

Mesure de la bande passante d'un filtre 121
Mesure du pas d'un réseau 185
Mesure du pas d'un réseau en incidence normale 184
Microscope 11, 31
Milieu stratifié 11
Mirage optique 12
Miroir de Fresnel 48, 59
Miroir de Lloyd 54
Miroir sphérique et plan 8
Montage de Fraunhofer 133

O

Œil humain 10
Onde
    plane 16
    scalaire 13
    sphérique 16
Ordre d'interférences 45

P

Pas du réseau 180
Polarisation
    elliptique 208
    elliptique droite 209
    elliptique gauche 209
    par diffusion 219
    par réflexion vitreuse 218
    rectiligne 208
Polarisation circulaire
    droite 210
    gauche 210
Polariseur
    circulaire 221, 223
    imparfait 224
Pouvoir
    de résolution 186
    dispersif 183
    séparateur du spectroscope 186
Pouvoir rotatoire 232
Prisme 25
Profil spectral 101

R

Radiation éteinte 110
Récepteur lumineux 14
Réflexion totale et réfraction limite 29
Renforcement des franges 106
Réseau
    à échelette 190, 199
    au minimum de déviation 185
    de Bragg 189
    ordres de grandeur 181
Réseaux sinusoïdaux limités 152
Resserrement des anneaux 80

© Nathan, *classe prépa*

S

Séparatrice 67
Source laser 47
Spectre cannelé 113
Spectre du visible 14
Spectrométrie interférentielle 115
Surface de localisation 49, 73

T

Tache d'Airy 140
Télescope de
    Cassegrain 29
    Newton 30
Théorème de Babinet 143
Théorème de Malus 16
Trains d'onde 47
Trous d'Young 49, 148

V

Viseur 30
Visibilité 43

© Nathan, *classe prépa*