CHAPITRE 4 : Propagation d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique dans un conducteur ohmique

Dans ce chapitre on étudie la propagation d'une onde électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur ohmique en régime lentement variable. Pour la propagation d'une OPPM électromagnétique dans un conducteur ohmique, le champ électrique et le champ magnétique dans le conducteur sont de la forme, en notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)\right)$ et $\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0} exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)\right)$

1 Conductivité d'un métal en régime variable

On considère le cas où le conducteur est un métal comprenant :

• des ions positifs fixes,

• des électrons de conduction de masse m_e, de densité particulaire n_0, **libres de se déplacer** dans le métal.

Le métal est un milieu dense (contrairement au plasma), il y a donc des collisions entre les électrons et les ions du réseau. On fait alors l'hypothèse que chaque électron est soumis de la part du réseau cristallin à une force égale à $-\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron et τ une constante appelée temps de collision.

1.1.1. Mouvements des électrons

Le champ électromagnétique de l'onde agit sur les électrons de conduction et les met en mouvement créant dans le métal une densité volumique de courant.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron soumis à la force de Lorentz (en négligeant l'effet de la pesanteur) s'écrit : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} - e\left(\vec{E}(M,t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M,t)\right)$

Dans le cas d'électrons non relativistes ($v \ll c$), la force exercée par le champ magnétique de l'onde est négligée et l'équation se simplifie : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} - e\vec{E}(M,t)$.

On s'intéresse au mouvement oscillant de l'électron sous l'action du champ de l'onde dont la solution est de forme : $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v_0}} exp(i\omega t)$ $avec$ $\vec{v} = R_e(\underline{\vec{v}})$. L'équation donne :

$m_e(i\omega)\underline{\vec{v}} = -\frac{m_e}{\tau}\underline{\vec{v}} - e\,\underline{\vec{E}}(M,t) \Longrightarrow \boxed{\underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m_e(1+i\omega\tau)}\underline{\vec{E}}(M,t)}$.

1.1.2. Densité volumique de courant – Conductivité complexe

La densité volumique de courant dans le métal est alors : $\underline{\vec{j}}(M,t) = -n_0 e\underline{\vec{v}} \Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\underline{\vec{j}}(M,t) = \frac{n_0 e^2\tau}{m_e(1+i\omega\tau)}\underline{\vec{E}}(M,t)}}$. Cette relation permet de définir la conductivité complexe du métal :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e(1+i\omega\tau)}}}$$

Pour $\omega = 0$, $\underline{\gamma} = \gamma = \frac{n_0 e^2\tau}{m_e}$: conductivité en régime stationnaire ou conductivité statique du conducteur. Les ordres de grandeur de $n_0 \sim 10^{23}\ m^{-3}$, $\frac{e^2}{m_e} \sim 10^{-8}\ C^2.kg^{-1}$ et $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ permettent de déduire celle de

$\tau = \frac{m_e\gamma}{n_0 e^2} \sim 10^{-13}$s. Pour $\omega\tau \ll 1$ (régime lentement variable ou ARQS), c'est-à-dire si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \approx 10^{13} rad.s^{-1}$, $\underline{\gamma} \simeq \gamma$. La conductivité étant réelle, on a alors $\vec{j}(M,t) = \gamma\vec{E}(M,t)$ en notation réelle. D'où : La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ est applicable dans un métal pour des pulsations très inférieures à $10^{13} rad.s^{-1}$.

Remarque

Pour $\tau\omega \gg 1$, $\underline{\gamma} \simeq -i\frac{n_0 e^2}{m_e\omega}$. On retrouve l'expression de la conductivité complexe du plasma.

2 Relation de dispersion d'un conducteur ohmique

i. Hypothèses du conducteur ohmique

Dans la suite on considère un conducteur (métal ou autre) tel que :

- la loi d'ohm locale, $\vec{j}(M,t) = \gamma\vec{E}(M,t)$, est valable,
- la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ est nulle.

Remarque

Dans un conducteur ohmique, l'équation locale de conservation de la charge $\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + div\vec{j}(M,t) = 0$ qui s'écrit $\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \gamma div\vec{E}(M,t) = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss, $div\vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$ conduisent à : $\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(M,t) = 0$ dont la solution est : $\rho(M,t) = \rho(M,0)exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\ avec\ \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$. Ainsi, une densité volumique de charge créée dans le conducteur disparaît en une durée de l'ordre de quelques τ.

Dans le cas d'un métal bon conducteur, $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$, on a $\tau \sim 10^{-19}$ s. Dans le cas de l'eau de mer $\gamma \sim 1\ \Omega^{-1}.m^{-1}$ et $\tau \sim 10^{-12}$ s. La faiblesse de τ justifie dans les deux cas l'hypothèse $\rho(M,t) = 0$.

ii. Équations de Maxwell dans le conducteur

Les équations de Maxwell dans le conducteur ohmique s'écrivent, en représentation complexe :

$$(M.G.) \qquad -i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$$

$$(M.\phi) \qquad -i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

$$(M.F.): \qquad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$$

$$(M.A.) \qquad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\vec{j}} + i\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}}\right) = \mu_0(\gamma + i\varepsilon_0\omega)\underline{\vec{E}} = \left(\mu_0\gamma + i\frac{\omega}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

iii. Relation de dispersion

En multipliant vectoriellement l'équation de Maxwell-Faraday par $i\vec{k}$. Il vient : $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega\, \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$ or $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \underbrace{(\vec{k}.\underline{\vec{E}})}_{0}\vec{k} - k^2\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$ (Maxwel-Gauss). En utilisant Maxwell-Ampère, il vient : $-k^2\underline{\vec{E}} = \left(i\mu_0\gamma\omega - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}$. Le champ $\underline{\vec{E}}$ n'étant pas nul, on a finalement : $\boxed{\boldsymbol{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega}}$: Relation de dispersion du conducteur. Le module d'onde est donc complexe. On pose $\underline{k} = k' - ik''$ d'où : $k^2 = k'^2 - k''^2 - 2ik'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$ donnant : $k'^2 - k''^2 =$

$\frac{\omega^2}{c^2}$ $et\ \ 2k'k'' = \mu_0\gamma\omega \Longrightarrow k'k'' = \frac{\mu_0\gamma\omega}{2} > 0\ \ \Longrightarrow k' et\ k''\ sont\ de\ même\ signe.$ $Ainsi\ k'^2.k''^2 = \frac{\mu_0^2\gamma^2\omega^2}{4}$ $et\ \ k'^2\ et\ k''^2\ sont\ solution\ de\ l'équation\ X^2 + \frac{\omega^2}{c^2}X - \frac{\mu_0^2\gamma^2\omega^2}{4} = 0$ dont la résolution permet de trouver $k' = k'(\omega)$ et $k'' = k''(\omega)$.

- Attention avec la convention de notation complexe de notation complexe « $exp\left(i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)\right)$ », la relation de dispersion devient $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0\gamma\omega$ et on définit : $\underline{k} = k' + ik''$.

iv. Interprétation physique

Signification physique d'un module d'onde complexe : Supposons que $\vec{k} = \underline{k}\vec{u}_z$, alors

$\vec{k}.\vec{r} = \underline{k}z = k'z - ik"z$ et le champ électrique de l'onde s'écrit :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 exp\big(i(\omega t - k'z + ik"z)\big)\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 exp\big(i(\omega t - k'z)\big)exp(-k"z).$

La relation de dispersion donne $\underline{k}^2$ donc autorise deux valeurs de $\underline{k}$ égales et opposées. Choisissons celle pour laquelle $k' > 0$ ($donc\ k" >\ 0$). Dans ce cas, le terme «$exp\big(i(\omega t - k'z)\big)$» traduit le fait que l'onde se propage dans la direction et le sens du vecteur $\vec{u}_z$ avec la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$. La partie réelle k' du module d'onde $\underline{k}$ est ainsi liée à la propagation de la phase à vitesse v_φ qui dépend de la pulsation ω donc liée à la dispersion. Le terme «$exp(-k"z)$» traduit une atténuation de l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage (donc que z augmente) car $k'' = \frac{2\mu_0\gamma\omega}{k'} > 0$. Cette atténuation est due à l'**absorption** d'énergie par le milieu conducteur. Dans le cas d'un métal il s'agit de l'effet Joule. On définit la distance caractéristique d'atténuation appelée profondeur de pénétration : $\boxed{\delta = \frac{1}{k"},}$ telle que l'amplitude de l'onde est divisée par $exp(1) = e$ après une propagation sur une distance de δ.

En résumé : Un vecteur d'onde complexe $\vec{k} = \underline{k}\vec{u}$ avec $\underline{k} = k' - ik''$ et tel que $k' > 0$ et $k'' > 0$ traduit :

- la propagation de l'onde dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ avec la **vitesse de phase** : $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\mathcal{Re}[\underline{k}]}$ qui est liée au phénomène de dispersion,
- l'atténuation de l'onde avec **la distance caractéristique d'atténuation** : $\delta = \frac{1}{k"} = \frac{1}{\mathcal{Im}[\underline{k}]}$ qui est liée au phénomène d'absorption.

3 Cas des basses fréquences, effet de peau

i. Relation de dispersion aux basses fréquences

➢ Approximation de la relation de dispersion aux basses fréquences

L'**approximation des basses fréquences** consiste à négliger le terme en ω^2 dans la relation de dispersion ($k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$) devant le terme en ω. Il faut donc : $\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\gamma\omega \Leftrightarrow\ \omega \ll\ \mu_0 c^2\gamma = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$

Avec cette approximation, la relation de dispersion devient : $\boldsymbol{\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega}$

On peut remarquer que $(1-i)^2 = -2i$ d'où $\underline{k}^2 = (1-i)^2\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$

➢ Autre démonstration : Equation de diffusion aux basses fréquences

Comparons les ordres de grandeurs des deux termes du second membre de l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$. Soit $\tilde{E}$ l'ordre de grandeur du champ électrique. $\left\|\vec{\underline{J}}\right\| = \gamma\left\|\vec{\underline{E}}\right\| \sim \gamma\underline{\tilde{E}}$ *et* $\left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t}\right\| \sim \varepsilon_0\omega\underline{\tilde{E}}$

En approximation des basses fréquences $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0\omega\underline{\tilde{E}} \ll \gamma\underline{\tilde{E}} \Rightarrow \left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t}\right\| \ll \left\|\vec{\underline{J}}\right\|$, ainsi le terme de courant de déplacement peut être négligé devant la densité volumique de courant.

D'autre part $\frac{\varepsilon_0}{\gamma} = \tau$ d'où $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \omega\tau \ll 1$. Donc l'approximation des basses fréquences correspond au régime lentement variable c'est-à-dire à l'ARQS (approximation des régimes quasi-stationnaires).

Dans le cadre de l'ARQS le courant de déplacement est négligé devant le courant de conduction.

Ainsi dans cette approximation l'équation de Maxwell-Ampère dévient $\overrightarrow{rot}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{J}$ d'où ;

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = -\mu_0\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{\underline{E}}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{\underline{E}}\right) - \Delta\vec{\underline{E}} = -\Delta\vec{\underline{E}} \Rightarrow$$

$\boxed{\Delta\vec{E}(M,t) - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t} = \vec{0}}$: *Equation de diffusion du champ* $\vec{E}$

De même en utilisant le $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)$, on trouve la même équation de diffusion pour le champ magnétique.

En représentation complexe, cette équation de diffusion conduit à : $-k^2\vec{\underline{E}}(M,t) = \mu_0\gamma(i\omega)\vec{\underline{E}}(M,t)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega}$. On retrouve la relation de dispersion dans le cas des basses fréquences c'est-à-dire en ARQS. On a alors $\underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$, avec le choix $\underline{k} = k' - ik''$ tel que $k' > 0$ et $k'' > 0$. Cette relation conduit ainsi à : $\boldsymbol{k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}}$

ii. Vitesse de phase et vitesse de groupe

La vitesse de phase de l'OPPM est alors : $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}}$. Elle dépend de ω : le milieu ohmique est dispersif.

Vitesse de groupe (vitesse d'un paquet d'onde) : $\omega = \frac{2k'^2}{\mu_0\gamma} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk'} = \frac{4k'}{\mu_0\gamma} = \frac{4}{\mu_0\gamma}\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$

$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}} = 2v_\varphi}$. La vitesse de groupe dépend de ω : un paquet d'ondes se propageant à travers le milieu ohmique est déformé.

iii. Distance caractéristique d'atténuation, effet de peau

Dans l'approximation des basses fréquences (donc en ARQS), la distance caractéristique d'atténuation dans un milieu ohmique de conductivité γ d'une OPPM de pulsation ω est : $\boxed{\boldsymbol{\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}}}$.

Pour le cuivre (conductivité $\gamma = 6{,}0.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$), δ = 9,2 mm à 50 Hz et δ = 0,92 μm à 5,0 GHz. Ces valeurs sont très petites et typiques de ce qu'on obtient pour un conducteur métallique. L'onde est donc atténuée sur une très courte distance quand elle pénètre dans le métal. Le champ électromagnétique est ainsi quasiment nul en dehors d'une couche d'épaisseur égale à quelques fois δ au voisinage de la surface d'un métal. Il est donc localisé sur la longueur caractéristique δ. Ce phénomène est l'**effet de peau** et dans ce cadre δ est appelée **épaisseur de peau**. L'épaisseur diminue avec la fréquence de l'onde et la conductivité du métal.

iv. Champ électromagnétique dans le conducteur

Pour simplifier les écritures, on se place désormais dans le cas où :

• L'onde se propage suivant le vecteur $\vec{u}_z$, alors : $\vec{k} = (k' - ik")\vec{u}_z = k'(1-i)\vec{u}_z = \left(\frac{1-i}{\delta}\right)\vec{u}_z$

• l'onde est polarisée rectilignement selon le vecteur $\vec{u}_x$, alors : $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0\vec{u}_x$.

Ainsi d'après l'équation de Maxwell-Gauss et l'hypothèse $\rho(M,t) = 0$, le champ électrique est nécessairement transversal, soit orthogonal à $\vec{u}_z$. Le champ électrique s'écrit alors : $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{u}_x$

Le champ magnétique se calcule en appliquant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1}{\omega}\underline{k}u_z \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{\underline{k}}{\omega}\underline{E}_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1-i}{\omega\delta}\underline{E}_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{u}_y.$$

En posant $\underline{E}_0 = E_0 exp(i\varphi)$ *on peut exprimer les champs réels*

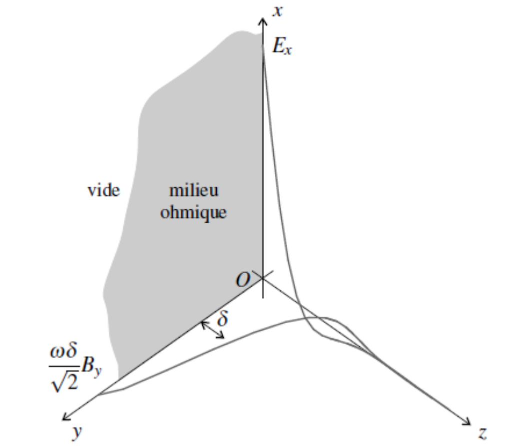
$$\underline{\vec{E}} = E_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)\right)\vec{u}_x,$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)\vec{u}_x}.$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1-i}{\omega\delta}E_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)\right)\vec{u}_y,$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\left[cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) + sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)\right]\vec{u}_y,$$

$$\boxed{\vec{B} = \sqrt{2}\frac{E_0}{\omega\delta} exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y}.$$



Onde électromagnétique dans un milieu ohmique occupant le demi-espace z > 0

v. Densité de courant dans le conducteur

La loi d'Ohm locale donne l'expression de la densité volumique de courant dans le conducteur :

$\underline{\vec{j}} = \gamma\underline{\vec{E}} = \gamma\underline{E}_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{u}_x$. Soit en notation réelle en posant $\underline{E}_0 = \exp(i\varphi)$:

$\vec{j} = \gamma E_0 exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) cos\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \varphi\right)\vec{u}_x$. Elle ne prend de valeur appréciable que dans une couche d'épaisseur de quelques δ à la surface du conducteur. C'est une manifestation de l'effet de peau. Si l'épaisseur de peau est très faible devant toutes les autres longueurs mises en jeu, on peut envisager de considérer ce courant comme surfacique.

vi. Aspect énergétique

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est égale à : $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}R_e\left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}^*}\right) = \frac{1}{2\mu_0}R_e\left(\frac{1+i}{\omega\delta}\left|\underline{E}_0\right|^2 exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\vec{u}_z\right)$. $\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\left|\underline{E}_0\right|^2}{2\mu_0\omega\delta} exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\vec{u}_z}$. La puissance moyenne transportée par l'onde s'atténue avec une distance caractéristique de $\frac{\delta}{2}$. La valeur moyenne de la puissance volumique dissipée par effet Joule est : $\boxed{\langle \mathcal{P}_{VJ} \rangle = \frac{1}{2} R_e\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\overrightarrow{E^*}}\right) = \frac{1}{2}\gamma \left|\underline{E_0}\right|^2 exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)}$. L'équation locale de Poynting est bien vérifiée, en effet : $\boxed{div\langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \mathcal{P}_{VJ} \rangle = 0 \quad car \ \frac{\partial \langle \mu_{em} \rangle}{\partial t} = 0 \ et \ div\langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{\left|\underline{E_0}\right|^2}{\mu_0 \omega \delta^2} exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) = -\frac{1}{2}\gamma \left|\underline{E_0}\right|^2 exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)}$