CHAPITRE 4

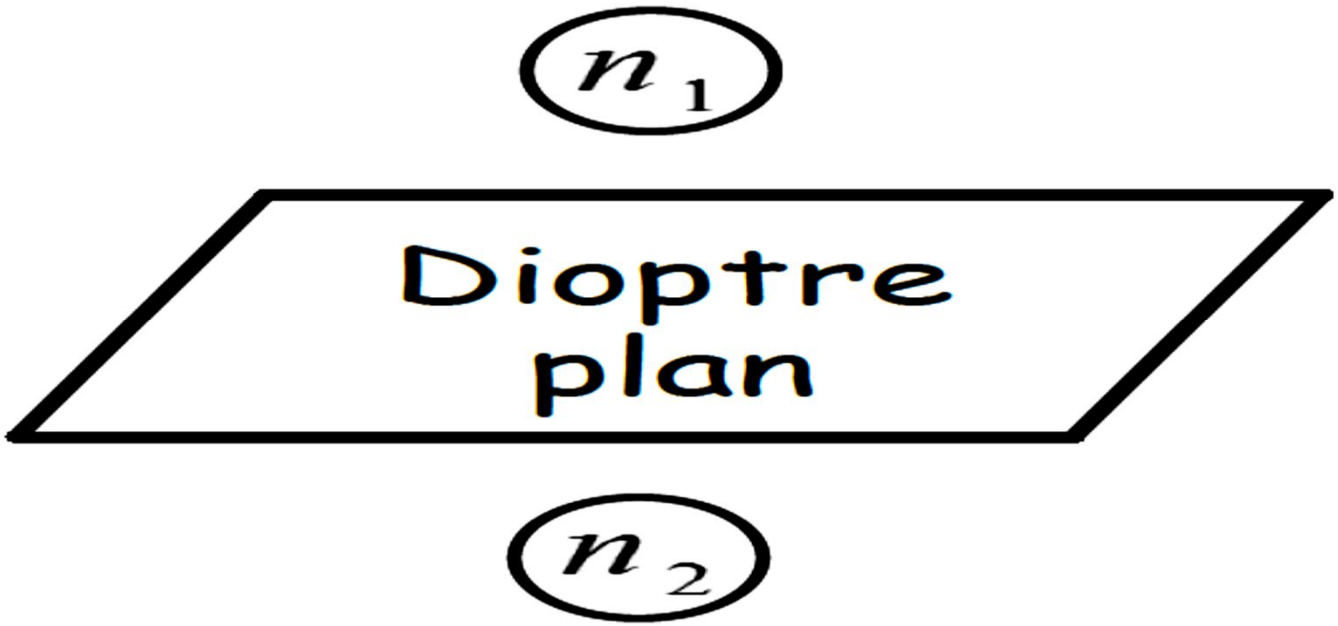
Dioptre Plan, Lames à faces parallèles, Prisme

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Dioptre plan

Définition

On appelle **dioptre plan**, la surface plane séparant deux milieux transparents, homogènes et isotropes d'indices absolus n_1 et n_2 différents$(n_1 \neq n_2)$.

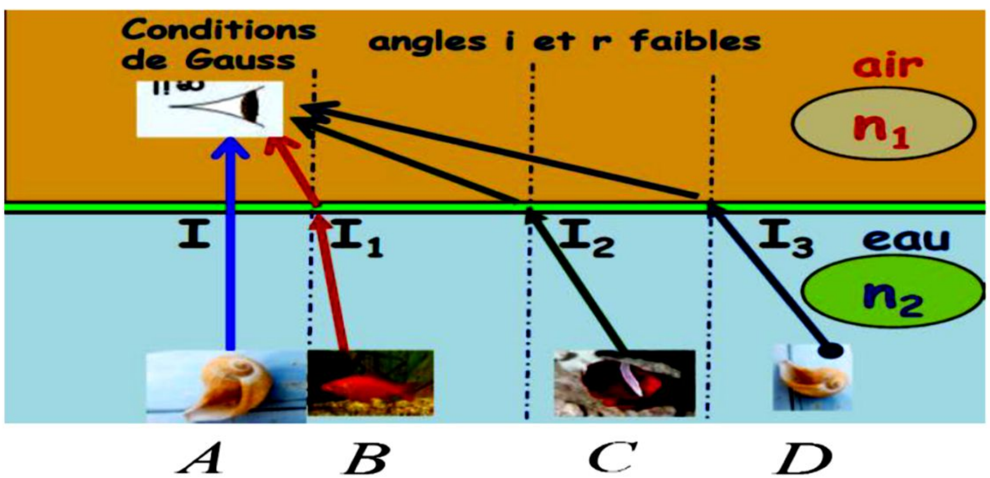


Conditions de Gauss

Lorsque le point objet n'envoie que des rayons incidents sensiblement proches à la normale au dioptre plan autrement dit pour des angles i et r faibles, les lois de Descartes s'écrivent comme suit :

$$\boxed{\underbrace{i = r}_{\text{Réflexion}} \qquad \underbrace{n_1 i = n_2 i'}_{\text{Réfraction}}}$$

Exemple :



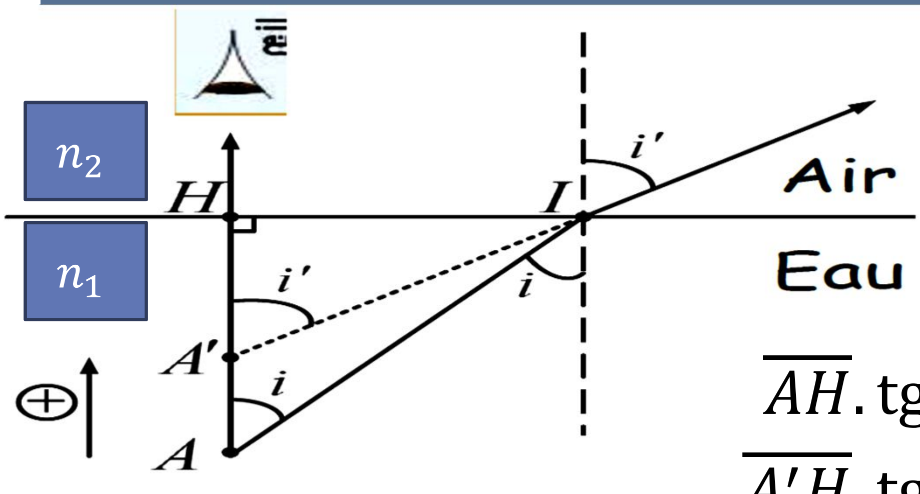
Pour $n_1 < n_2$ on voit que les objets A et B sont vus nettement par contre C et D sont flous.

Le poisson qui voit à l'extérieur, il voit tout plus loin. Si vous regardez un poisson dans un aquarium, il parait plus près.

Les objets dans l'eau paraissent plus près.

Les objets dans l'air paraissent plus loin.

Relation de conjugaison (1)



$$\mathrm{tg}\, i = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \quad \text{et} \quad \mathrm{tg}\, i' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}}$$

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i'$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AH}.\,\mathrm{tg}\, i = \overline{HI} \\ \overline{A'H}.\,\mathrm{tg}\, i' = \overline{HI} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AH}.\,\mathrm{tg}\, i = \overline{A'H}.\,\mathrm{tg}\, i'$$

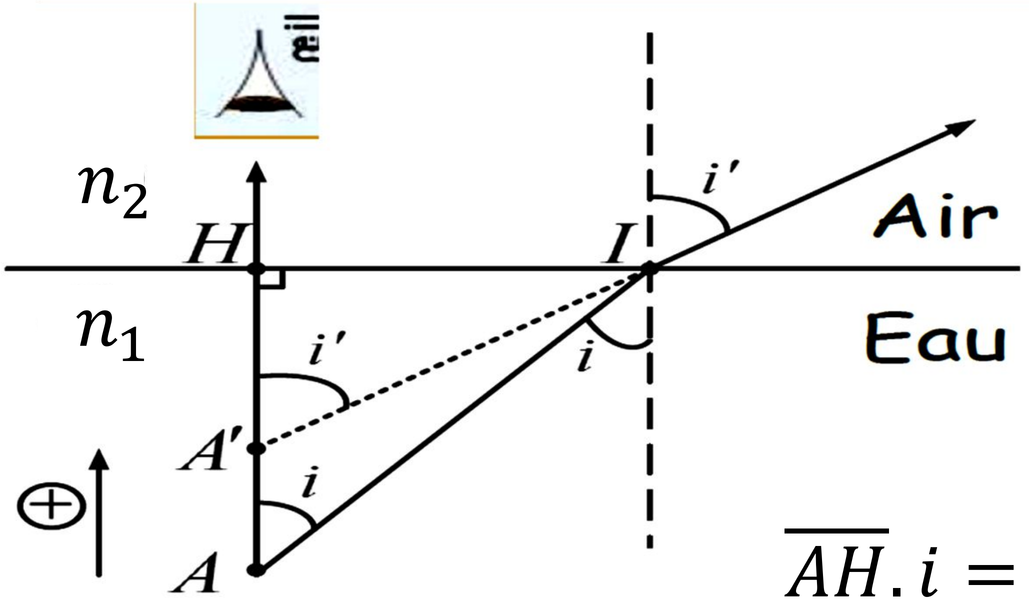
$$\overline{A'H} = \overline{AH}.\frac{\mathrm{tg}\, i}{\mathrm{tg}\, i'} = \overline{AH}\,\frac{\sin i}{\cos i}\,\frac{\cos i'}{\sin i'} = \overline{AH}\,\frac{\sin i}{\cos i}\,\frac{\cos i'}{\frac{n_1}{n_2}\sin i} = \frac{n_2}{n_1}\overline{AH}\,\frac{\cos i'}{\cos i}$$

$$\overline{A'H} = \frac{n_2}{n_1}\overline{AH}\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 i}\;.\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}$$

i faible $\Longrightarrow \sin^2 i$ est très faible

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overline{A'H} = \frac{n_2}{n_1}\overline{AH}}$$

Relation de conjugaison (2)



$$\operatorname{tg} i = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} i' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}}$$

Dans les conditions de Gauss $\operatorname{tg} i \cong i$ et $\operatorname{tg} i' = i'$ on a

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AH}.i = \overline{HI} \\ \overline{A'H}.i' = \overline{HI} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AH}.i = \overline{A'H}.i'$$

$$n_1 i = n_2 i' \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{AH}}{n_1} = \frac{\overline{A'H}}{n_2}}$$

C'est la relation de conjugaison d'un dioptre plan

Relation de conjugaison (3)

- La relation précédente implique que **l'image d'un objet parallèle au dioptre a la même taille et se trouve dans le même sens que celui-ci (grandissement égal à +1)**. En outre, à partir de la relation de conjugaison on voit que si l'objet est dans le milieu le plus réfringent, l'image est plus près de la surface du dioptre ; tandis que si l'objet est dans le milieu le moins réfringent, l'image est plus éloignée de la surface du dioptre
- Il est à remarquer aussi que les points objets A et son image A' sont situés dans le même milieu. Donc, si l'un est réel, l'autre est forcément virtuel.

Relation de conjugaison (4)

- Le point image A' se déduit alors de son point objet A par une translation apparente d'amplitude :

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{\overline{AA'} = \overline{AH}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)}}}$$

En effet

$$\overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HA'} = \overline{AH} - \overline{A'H} = \overline{AH}\left(1 - \frac{\overline{A'H}}{\overline{AH}}\right) = \overline{AH}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)$$

On a un rapprochement apparent de A vers la surface si $n_2 < n_1$ et éloignement apparent si $n_2 > n_1$

Taille apparente

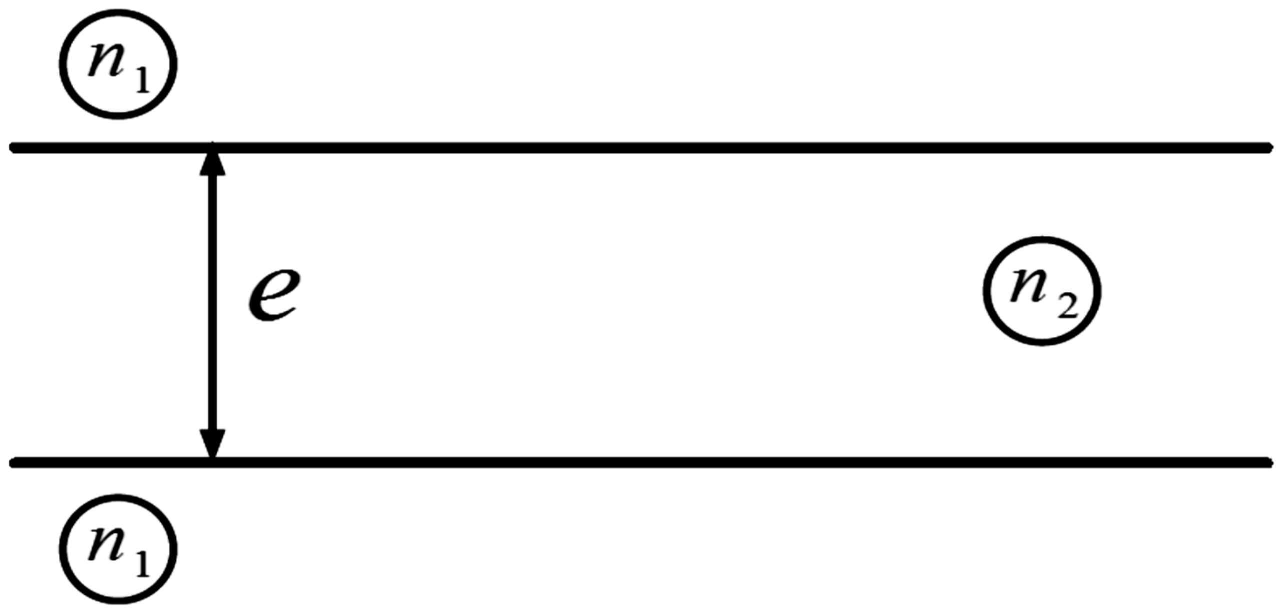
La taille apparente est l'angle sous lequel on voit l'objet. Plus pratiquement, on trace un rayon qui vient du bas de l'objet et un autre qui vient du haut de l'objet. C'est l'angle en ces rayons qui indique la taille apparente des objets. **Ce qui indique la taille apparente d'un objet n'est pas la taille en cm ou en m.**

Exercice d'application: A quelle distance de l'œil faut-il placer une souris de 5 cm pour qu'elle cache un éléphant de 3m? L' éléphant est à 10 m de l'œil.

Lames à faces parallèles

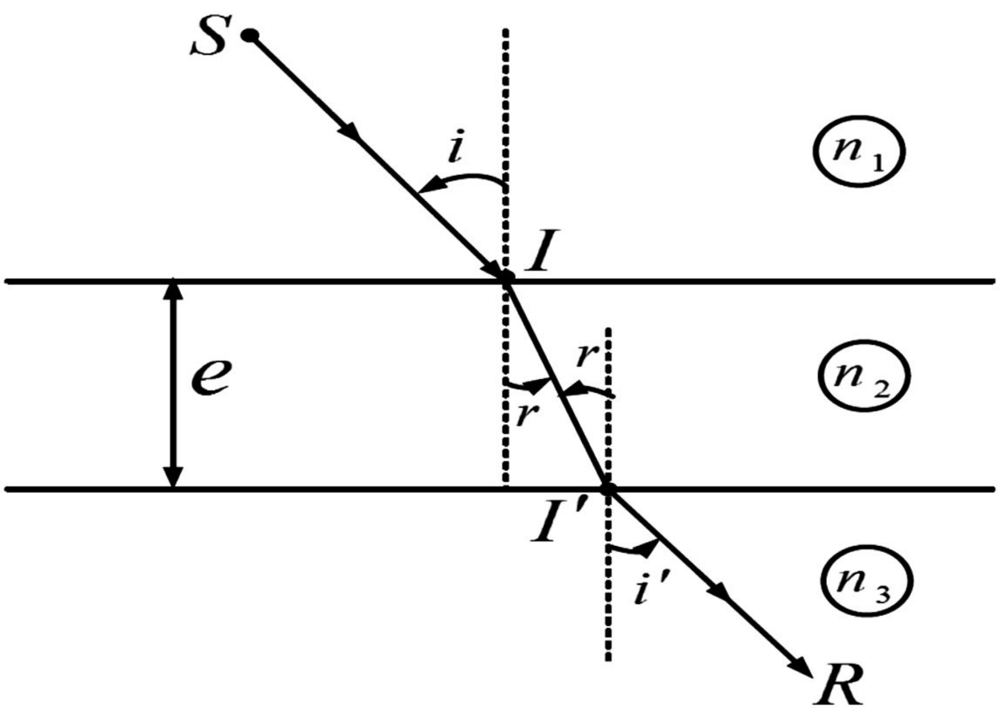
Définition

Une lame à faces parallèles est constituée par un milieu homogène, transparent et isotrope limité par deux dioptres plans parallèles, à une distance e qui est l'épaisseur de la lame. Les milieux extrêmes peuvent être différents ou identiques.



Marche du rayon lumineux

Un rayon incident SI frappe le premier dioptre plan sous l'incidence i ; il se réfracte avec un angle de réfraction r. Les deux faces de la lame étant parallèles, le rayon réfracté II' tombe sur le second dioptre plan avec l'incidence r et émerge avec l'angle i'.



L'application des lois de la réfraction en I et I' donne :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$
$$n_2 \sin r' = n_3 \sin i'$$
$$\boldsymbol{r = r' \Longrightarrow n_1 \sin i = n_3 \sin i'}$$

L'angle d'émergence i' est donc indépendant du milieu intermédiaire.

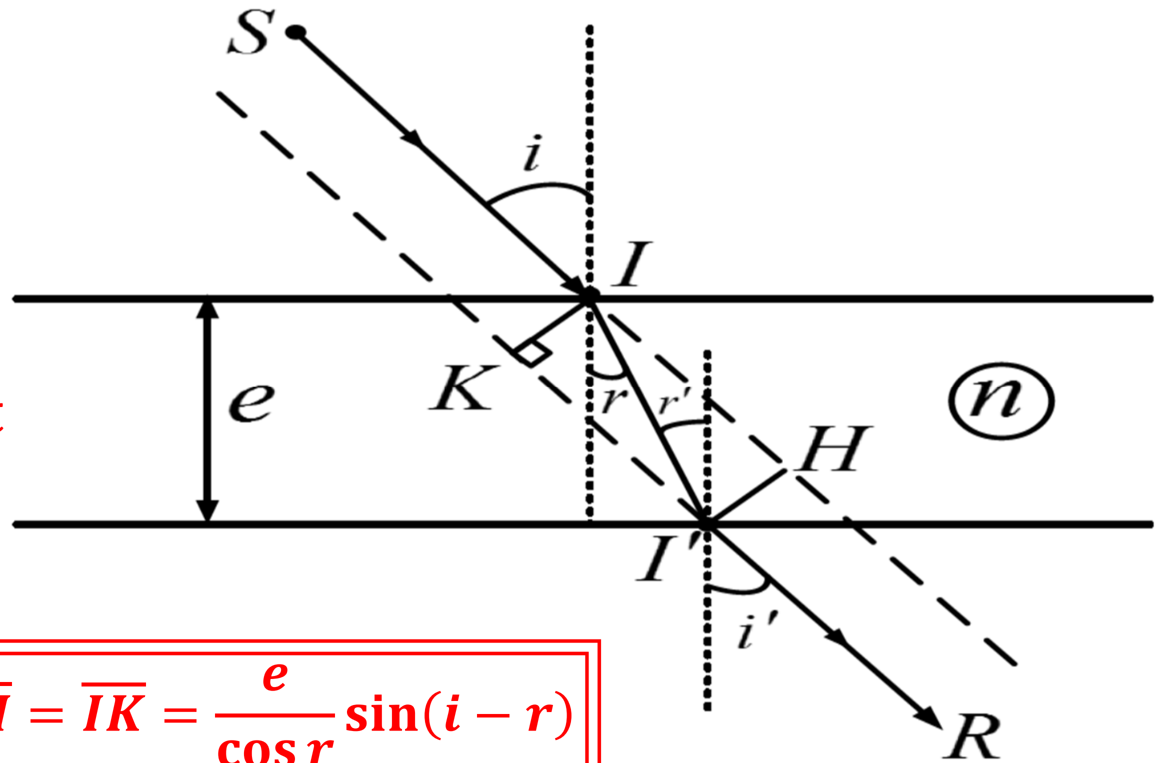
Détermination du déplacement latéral du rayon (1)

On considère le cas particulier où la lame est plongée dans deux milieux extrêmes identiques (exemples : vitre, lame couvre-objet de microscope). L'application des lois de la réfraction en I et I' donne :

$$\sin i = n \sin r$$

$$n \sin r' = \sin i'$$

$$r = r' \Longrightarrow i = i'$$



$d = \overline{I'H}$ est le déplacement latéral du rayon SI

$$d = \overline{I'H} = \overline{II'} \sin(i - r)$$

$$\overline{II'} = \frac{e}{\cos r} \Longrightarrow \boxed{d = \overline{I'H} = \overline{IK} = \frac{e}{\cos r} \sin(i - r)}$$

Détermination du déplacement latéral du rayon (2)

- si $i = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ d = e\dfrac{0}{1} = 0 \end{cases}$
- si $i = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ d = e\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cos 1} = e \end{cases}$

i est l'angle limite. On conclut que $\boxed{\mathbf{0 \leq d \leq e}}$.

Si on se place dans les conditions de Gauss à savoir i et r sont des angles petits ($i < 15°$ et $r < 15°$). On a donc :

$$\sin i = n \sin r \Longrightarrow i = nr \quad ; \quad \sin(i - r) \approx i - r \approx i\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \cos r \approx 1$$

Il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{d = \overline{I'H} = ei\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}$$

Relation de conjugaison et dioptre équivalent

Les relations de conjugaison des 2 dioptres plans (dans les conditions de Gauss) donnent :

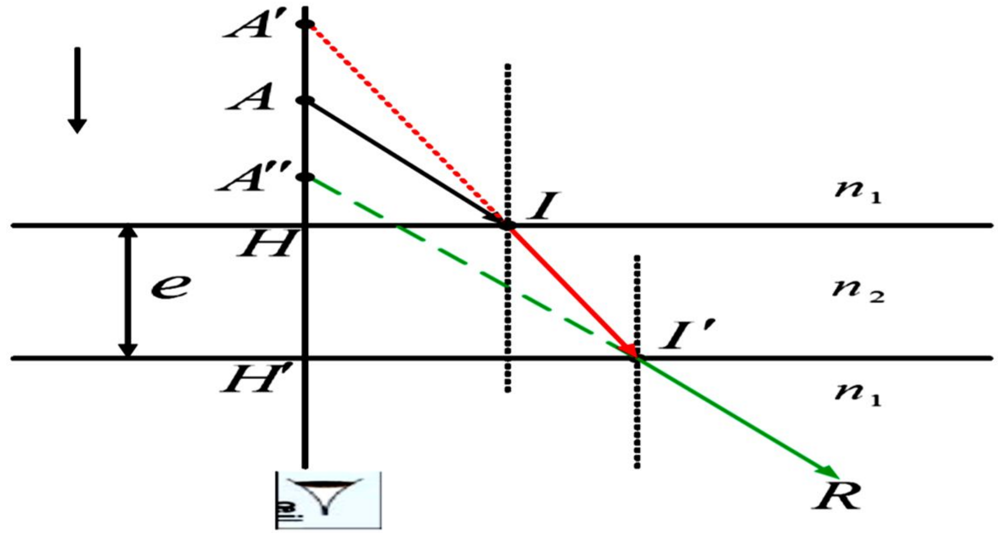
$$\frac{\overline{AH}}{n_1} = \frac{\overline{A'H}}{n_2} \qquad \frac{\overline{A'H'}}{n_2} = \frac{\overline{A''H}}{n_1}$$

$$\Longrightarrow \overline{AA''} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A''}$$

$$\Longrightarrow \overline{AA''} = \frac{n_1}{n_2}\overline{A'H} + e - \frac{n_1}{n_2}\overline{A'H'}$$

$$\Longrightarrow \overline{AA''} = e - \frac{n_1}{n_2} e$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\overline{AA''} = e\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}}$$



$n_1 = 1$ et $n_2 = n$, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{AA''} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}$$

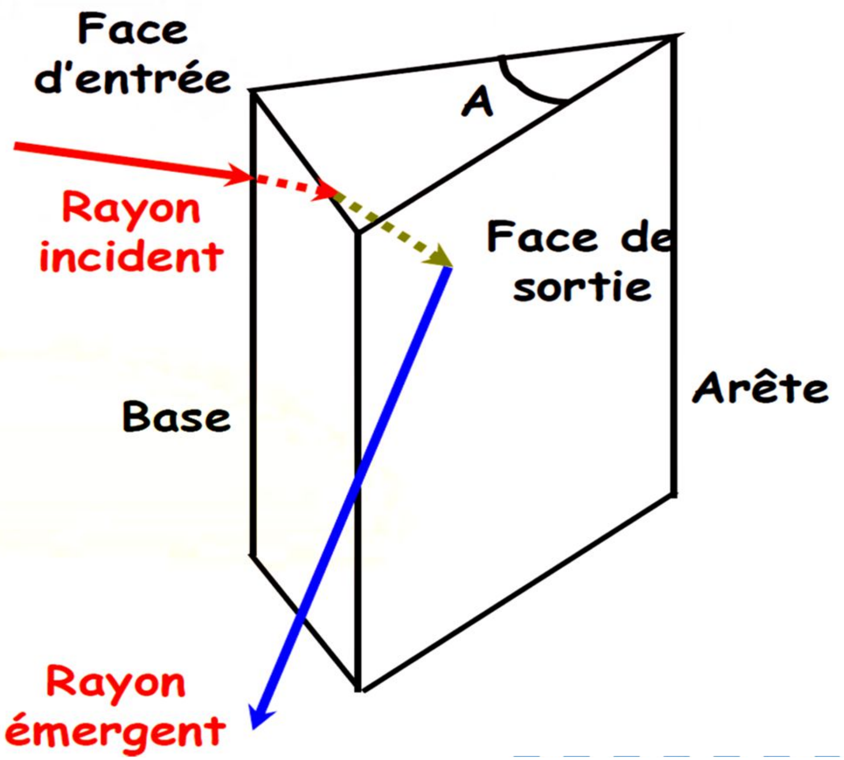
C'est la formule de conjugaison de la lame à faces parallèles.

La lame à faces parallèles est donc équivalente à un dioptre plan unique placé à la distance e de l'objet.

Prisme

Présentation du prisme

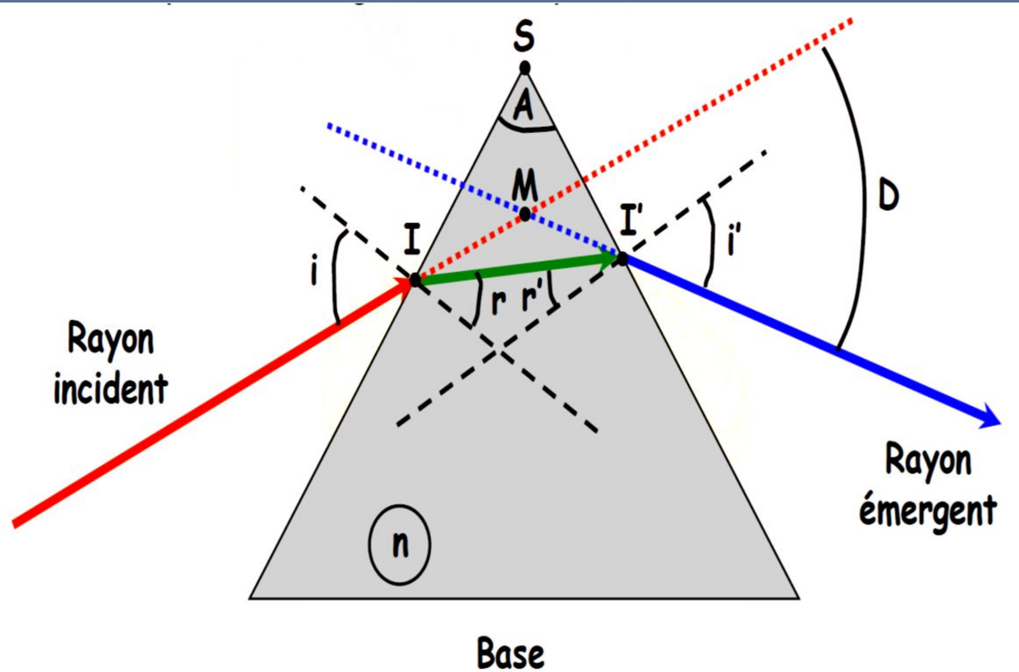
Le prisme correspond à un dièdre d'angle au sommet *A*, formé de l'association de deux dioptres plans air/verre et verre/air (les faces utiles du prisme). L'intersection des faces utiles constitue l'arête du prisme. La troisième face est la base du prisme. On note n l'indice du verre. Les rayons lumineux envoyés sur le prisme se réfractent successivement sur ses deux faces.



En général, le prisme est plongé dans l'air. Le prisme est utilisé soit pour changer le sens ou la direction de propagation d'un rayon lumineux à la suite de réfractions ou de réflexions, soit pour analyser une lumière polychromatique grâce à ses propriétés dispersives.

Marche d'un rayon lumineux

Pour tracer la marche d'un rayon lumineux à travers le prisme, on se place en général dans un plan de section principale perpendiculaire à l'arête du prisme. Ce plan est considéré comme le plan d'incidence et tous les rayons provenant d'un rayon incident et traversant le prisme sont contenus dans ce plan. En effet, un rayon incident se réfracte en I en restant dans ce plan; s'il rencontre la deuxième face en I', il émerge dans le même plan.



***Convention de signe** :*

Les angles étant toujours orientés de la normale vers le rayon, on convient de noter positivement :

- *les angles i et r à l'entrée lorsqu'ils sont orientés dans le sens trigonométrique*
- *les angles à la sortie, i' et r' ainsi que la déviation D, lorsqu'ils sont orientés dans le sens inverse.*

Relations fondamentales du prisme (1)

On se place dans le plan d'incidence d'un rayon qui arrive par la face d'entrée du prisme (les angles sont tous positifs). Les lois de Descartes permettent d'écrire :

$$\boxed{\sin i = n \sin r} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin i' = n \sin r'}$$

Dans le triangle ISI' :

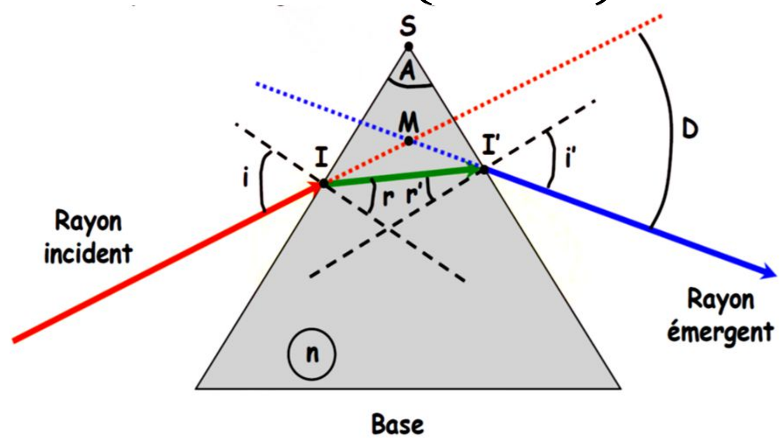
$$\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + A + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi \Longrightarrow \boxed{r + r' = A}$$

Dans le triangle IMI' :

$$(i - r) + (\pi - D) + (i' - r') = \pi \Longrightarrow D = i + i' - (r + r')$$

$$\Longrightarrow \boxed{D = i + i' - A}$$

D étant l'angle de déviation du rayon incident.



Relations fondamentales du prisme (2)

Remarques :

– La déviation D est une fonction des trois variables i, n et A.

– Il n'est pas nécessaire d'orienter les angles i, i', r et r' qu'il suffit de poser positifs.

– D est positif. En effet, $i > r$ et $i' > r'$. Donc

$$i + i' > r + r' = A$$

La déviation se fait donc toujours vers la base du prisme pour un rayon incident situé côté base par rapport à la normale.

Relations fondamentales du prisme (3)

- **Conditions d'existence du rayon émergent :**

En pénétrant par la première face du prisme le rayon incident est réfracté puis tombe sur la deuxième face sous l'angle d'incidence $r' = A - r$. Pour que le rayon puisse émerger, **il faut que r' soit inférieur ou égal en valeur absolue à l'angle critique d'incidence**: $r' \leq i_\ell$ avec $\sin i_\ell = 1/n$

$$|r'| \leq i_\ell \Rightarrow -i_\ell \leq r' \leq i_\ell \Rightarrow -i_\ell \leq A - r \leq i_\ell$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A - i_\ell \leq r \leq A + i_\ell}$$

$$i \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \boldsymbol{-i_\ell \leq r \leq i_\ell}$$

r doit être supérieure à la plus grande des valeurs de $A - i_\ell$ et i_ℓ.
r doit être inferieure à la plus petite des valeurs de $A - i_\ell$ et i_ℓ

Relations fondamentales du prisme (4)

$$\Longrightarrow \boxed{A - i_\ell \leq r \leq i_\ell}$$

$$A - i_\ell \leq r \leq i_\ell \Longrightarrow A - i_\ell \leq i_\ell \Longrightarrow \boxed{A \leq 2i_\ell}$$

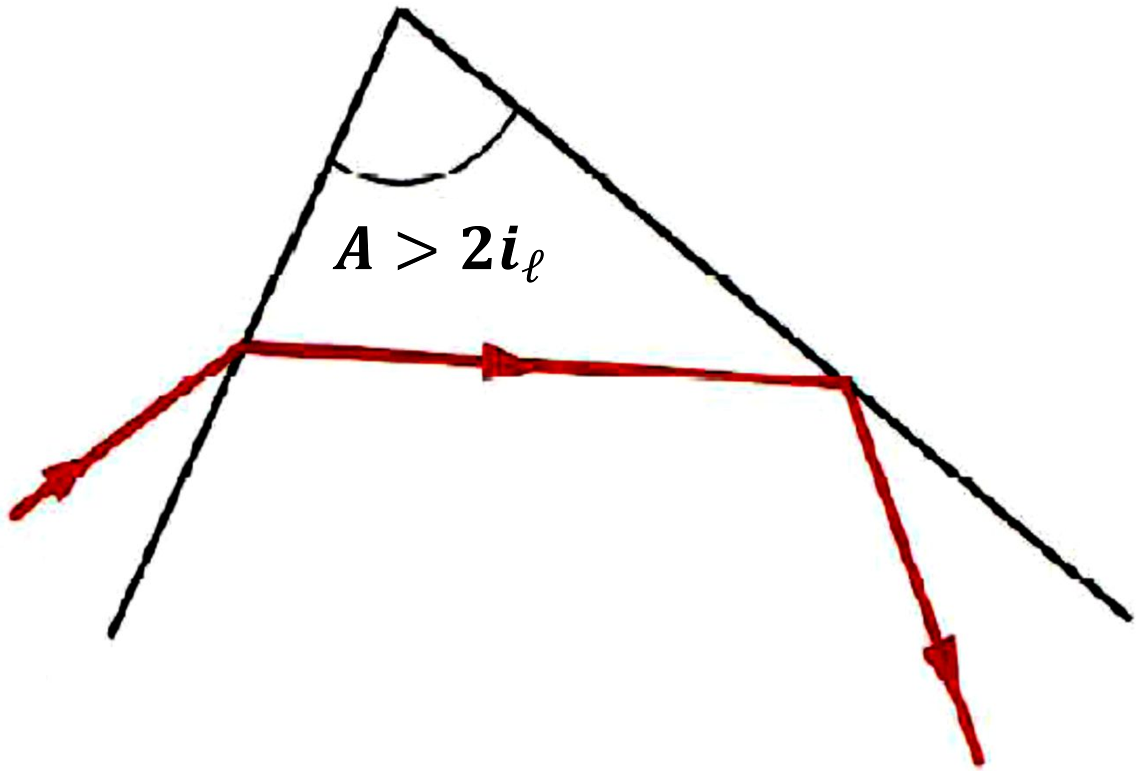
Donc pour qu'un rayon émerge du prisme, il faut que $A \leq 2i_\ell$. Dans le cas contraire, il y a réflexion totale sur la face de sortie du prisme.

$$r \geq A - i_\ell \Longrightarrow \sin i = n \sin r \Longrightarrow \sin i \geq n \sin(A - i_\ell)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} \geq i \geq i_0 \text{ avec } \sin i_0 = n \sin(A - i_\ell) = n \sin\left[A - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$$

- **AN :** On choisit $A = 60°$ et $n = 1{,}732$; alors $i_0 = 46{,}4°$ **(Angle minimun d'incidence)**

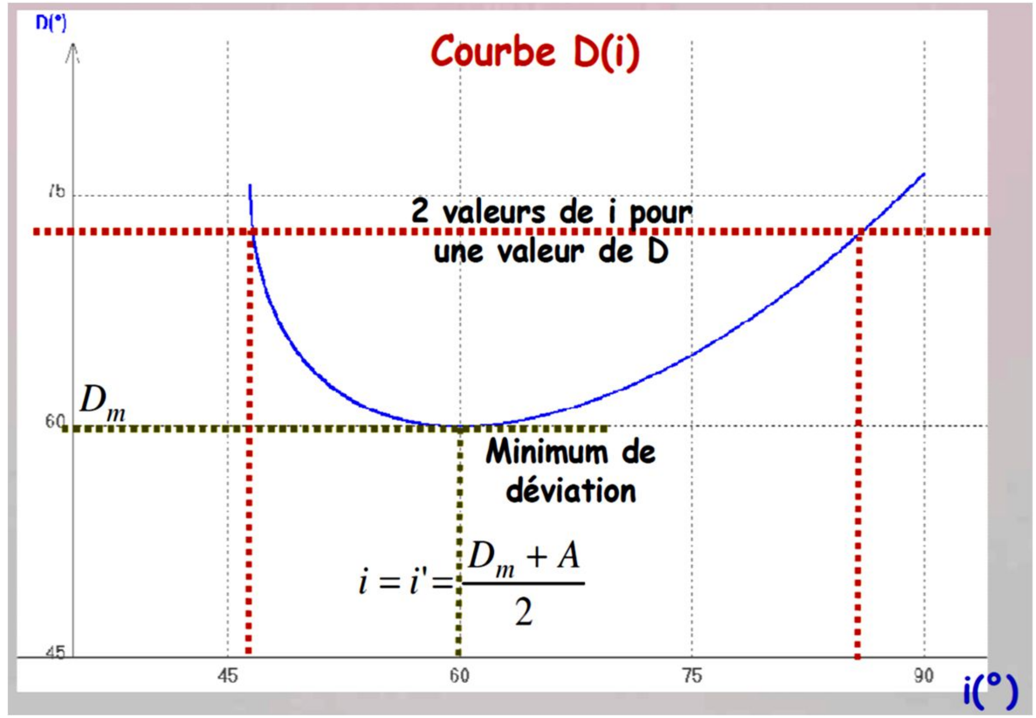
Relations fondamentales du prisme (5)



Pour $A > 2i_\ell$: aucun rayon ne sort du prisme

Etude de la déviation $D(i)$ (1)

En utilisant le principe de retour inverse de la lumière, on remarque que les angles d'incidence i et $i' = D + A - i$ donnent le même angle de déviation D.



Lorsque i varie de i_0 à $\pi/2$, D décroît et passe par un minimum i_m puis augmente.

Ainsi, à une valeur de D correspond deux valeurs de l'angle d'incidence, sauf dans le cas où $i = i' = \frac{D+A}{2}$ qui correspond à un extremum de $D(i)$.

Etude de la déviation $D(i)$ (2)

- **Relation entre l'indice du prisme et le minimum de déviation**

Au minimum de déviation D_m, les angles i et i' sont égaux :

$$i = i' = \frac{D_m + A}{2}$$

Les deux relations de Descartes permettent d'en déduire que $r = r' = A/2$

On en déduit :

$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Ainsi la mesure du minimum de déviation permet d'en déduire l'indice du prisme.

Etude de la déviation $D(i)$ (3)

Démonstration : A et n sont constants (fixe)

$$\cos i \;\; di = n \cos r \;\; dr \quad (1)$$

$$\cos i' \;\; di' = n \cos r' \;\; dr' \quad (2)$$

$$dr + dr' = 0$$

$$dD = di + di' \Longrightarrow \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{di'}{di} = \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \frac{dr'}{dr} = -\frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$$

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$$

$$\frac{dD}{di} = 0 \Longrightarrow \cos r' \cos i = \cos r \cos i' \Longrightarrow \cos^2 r' \cos^2 i = \cos^2 r \cos^2 i'$$

Etude de la déviation $D(i)$ (4)

$$\Longrightarrow (1-\sin^2 r')(1-\sin^2 i) = (1-\sin^2 r)(1-\sin^2 i')$$

$$\Longrightarrow (1-\sin^2 r')(1-n^2\sin^2 r) = (1-\sin^2 r)(1-n^2\sin^2 r')$$

$$\Longrightarrow (\sin^2 r - \sin^2 r')(1-n^2) = 0 \ \Longrightarrow r = \pm r'$$

$r = -r'$ est exclue car $A = 0$ (lame à face parallèle pour laquelle $D = 0$)

Il s'en suit alors $r = r' = r_m = \frac{A}{2}$

$$i = i' = i_m \Longrightarrow D_m = 2i_m - A \Longrightarrow i_m = \frac{D_m + A}{2}$$

$$\sin i_m = n \sin\frac{A}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Etude de la déviation $D(i)$ (5)

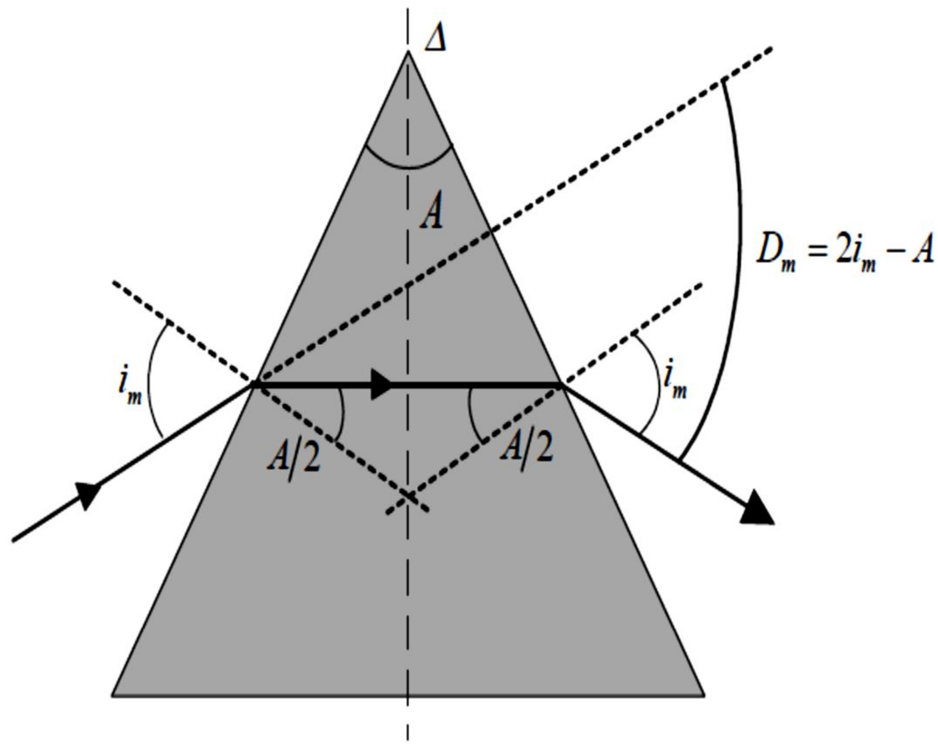
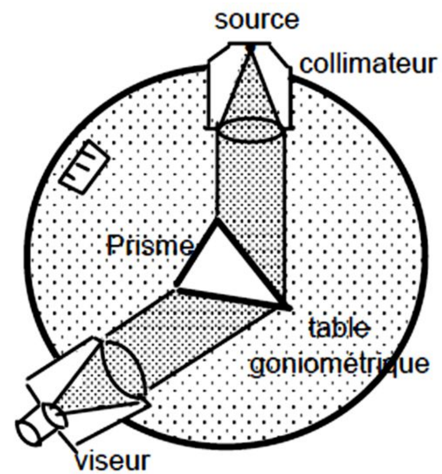


FIG. 2.4 – Cheminement d'un rayon lumineux à travers un prisme au minimum de déviation : la figure est symétrique par rapport à Δ, plan bissecteur du prisme.

Mesure des indices (1)

On réalise en général l'expérience à l'aide d'un ***goniomètre*** . Dans ce montage, un faisceau cylindrique issu d'un collimateur tombe sur le prisme. Un viseur permet d'analyser le faisceau émergent. En faisant tourner la table autour d'un axe vertical, on peut mesurer le minimum de déviation et par conséquent n. L'incertitude sur la mesure de l'indice peut être déterminée en différentiant l'expression précédente :



$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \Longrightarrow \frac{dn}{n} = \frac{d\left(\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)} - \frac{d\left(\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$d\left(\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)(dA + dD_m)$$

Mesure des indices (2)

$$d\left(\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{A}{2}\right) dA$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{D_m + A}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}\right)\right) dA + \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{D_m + A}{2}\right)\right) dD$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\left|cotg\left(\frac{D_m + A}{2}\right) - cotg\left(\frac{A}{2}\right)\right| \Delta A + \frac{1}{2}\left|cotg\left(\frac{D_m + A}{2}\right)\right| \Delta D}$$

Cette méthode permet de mesurer n avec une grande précision. Ainsi, par exemple, dans le cas où les angles A et D_m ($A = 60°$ et $D_m = 36{,}3°$) sont mesurés à un demi degré près, on trouve $n = 1{,}50 \pm 0{,}01$.

Dispersion de la lumière (1)

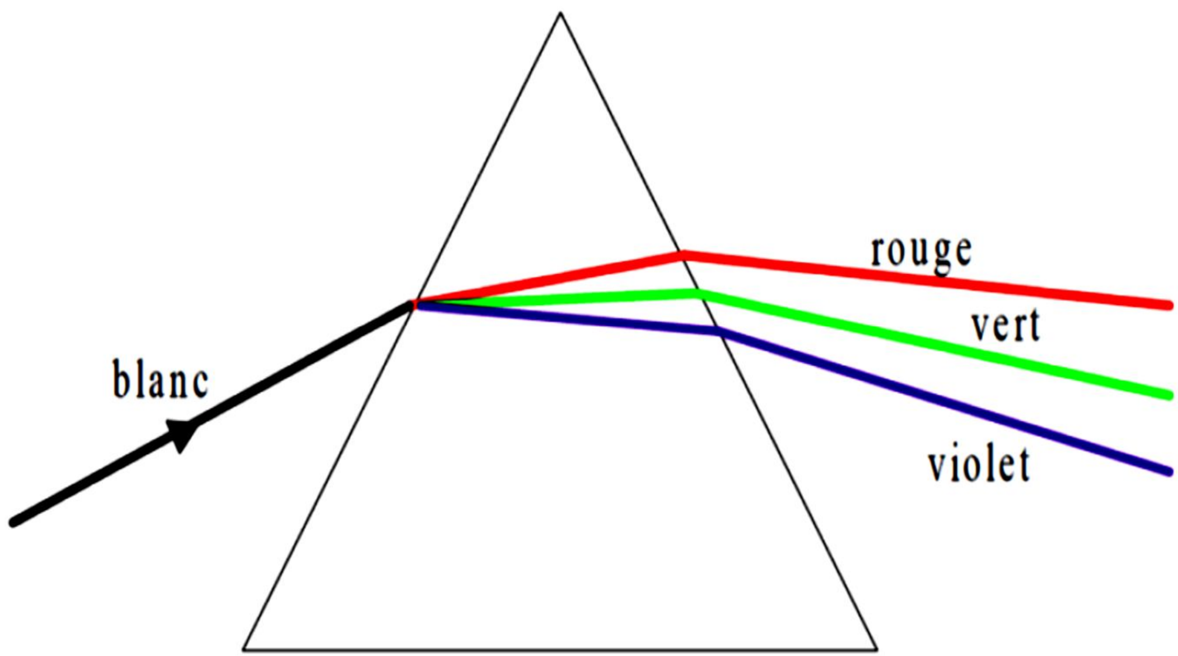
L'indice du prisme, donc de la déviation, dépend de la longueur d'onde (phénomène de dispersion de la lumière). La relation phénoménologique de Cauchy $n(\lambda) = n_0 + \frac{B}{\lambda^2}$ montre que l'indice est une fonction croissante de la longueur d'onde. **La déviation croit avec l'indice du prisme**. En effet :

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dD}{dn} &= \frac{\sin A}{\cos r \cos i'} \\ \frac{dn}{d\lambda} &= -\frac{2\lambda B}{\lambda^4} = -\frac{2B}{\lambda^3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{dD}{d\lambda} = -\frac{\sin A}{\cos r \cos i'} \cdot \frac{2B}{\lambda^3}}$$

Dispersion de la lumière (2)

$\frac{dD}{d\lambda} < 0 \implies$ la déviation D augmente lorsque la longueur d'onde λ diminue. Ainsi, la déviation croit du rouge $(\lambda = 0{,}7\mu\text{m})$ au violet $(\lambda = 0{,}4\mu\text{m})$ dans le domaine du visible.



Prisme de petit angle

Ce cas correspond à **des angles d'incidence $\boldsymbol{i}$ et de réfraction $\boldsymbol{r'}$ petits**, c'est-à-dire à des rayons lumineux proches de la normale. L'angle au sommet A du prisme doit, par conséquent, être lui aussi petit. Ainsi A petit $\Longrightarrow r$ et r' petits car $r + r' = A$.

A petit $\Longrightarrow i$ et i' petits car $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$.

Les formules du prisme s'écrivent alors :

$$\boxed{\boldsymbol{i = nr}} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{i' = nr'}} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{r + r' = A}}$$

$$D = i + i' - (r - r') = nr + nr' - A = n(r + r') - A$$

$$= nA - A \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{D = (n-1)A}}$$

A l'approximation des petits angles, la déviation D est indépendante de l'angle d'incidence i.