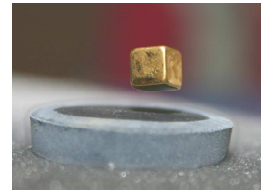


Fiche 13 – Modélisation des actions mécaniques

On appelle Action Mécanique toute cause susceptible de provoquer l'équilibre, le mouvement ou la déformation d'un système matériel. Les actions mécaniques identifiées à ce jour sont les **actions mécaniques à distance** et les **actions mécaniques de contact**.

Toute action mécanique d'un ensemble matériel E sur un système mécanique S est caractérisée par un **torseur d'action mécanique** :

$$\{F_{E \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E \rightarrow S} \\ M_{A(E \rightarrow S)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_i \\ M_A(\vec{F}_i) \end{array} \right\}$$

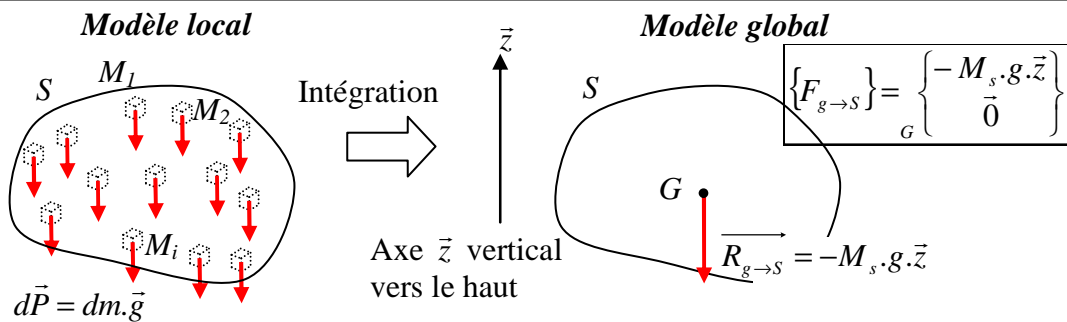


Action mécanique à distance
Exemple : champ magnétique



Action mécanique de contact
Exemple : Air sur un parachute

Modélisation des actions mécaniques à distance – Cas de la pesanteur

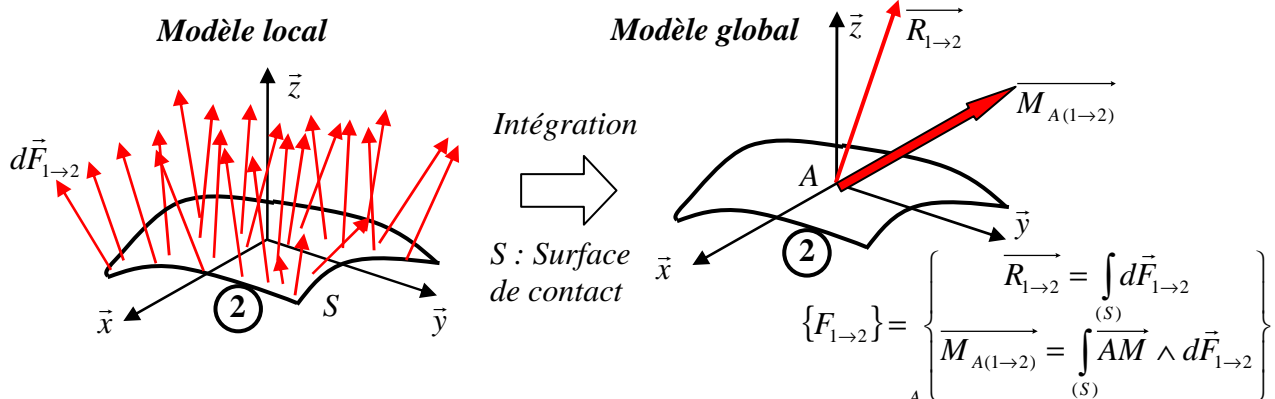


Force résultante : $\vec{R}_{g \rightarrow S} = \int_V d\vec{P} \rightarrow \vec{R}_{g \rightarrow S} = \int_V dm \cdot \vec{g} \rightarrow \boxed{\vec{R}_{g \rightarrow S} = -M_s \cdot g \cdot \vec{z}}$ appliqué au centre de gravité G

Moment résultant au point A : $\vec{M}_{A(g \rightarrow S)} = \int_V \vec{AM} \wedge d\vec{P}$ soit : $\{F_{g \rightarrow S}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{g \rightarrow S} = -M_s \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{A(g \rightarrow S)} = \int_V \vec{AM} \wedge d\vec{P} \end{array} \right\}$

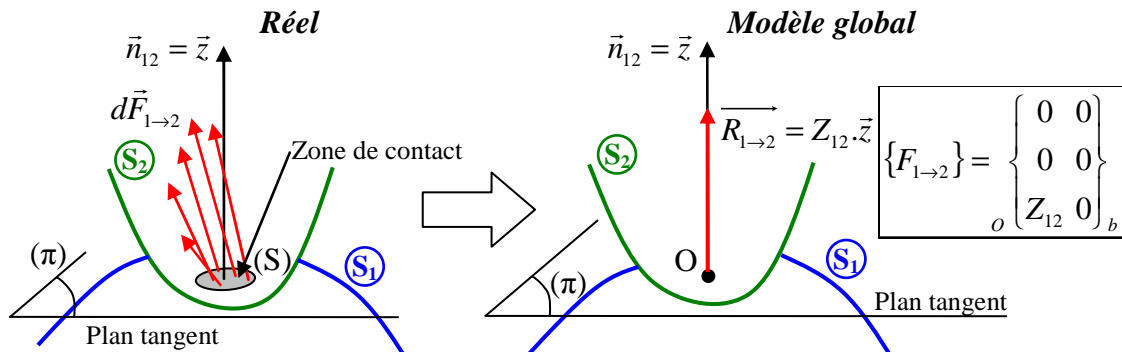
Modélisation des actions mécaniques de contact

On note $\{F_{1 \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ M_{A(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S.

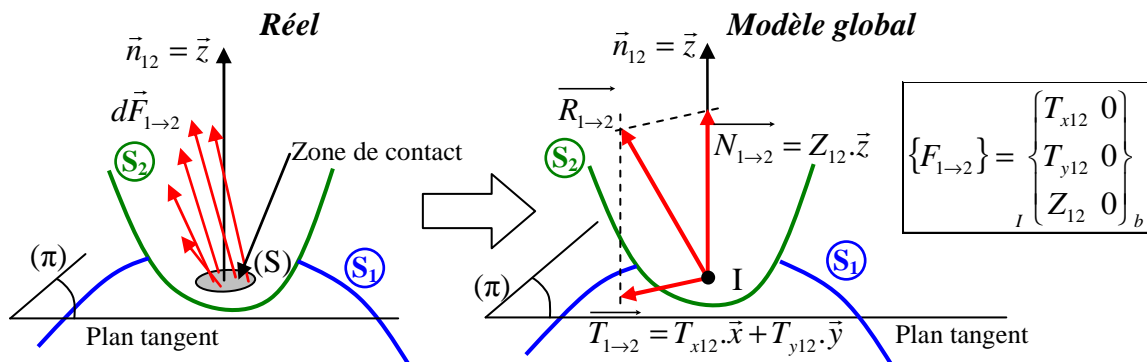


Fiche 14 – Lois de Coulomb

Si la **liaison** peut être considérée comme **parfaite**, on définit alors le modèle global suivant.



Si le **frottement n'est pas négligeable**, il existe une composante tangentielle à l'action mécanique.

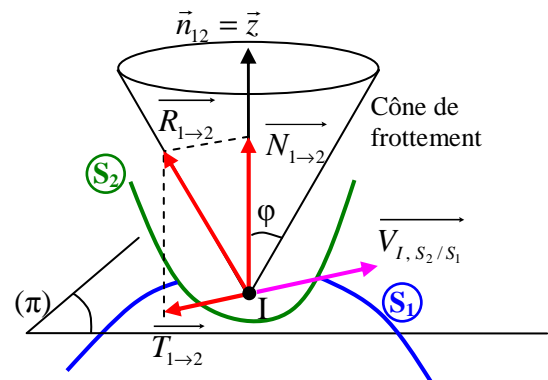


Les lois (expérimentales) de Coulomb permettent de relier $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ à la composante normale Z_{12} .

1^{ère} loi de Coulomb : Glissement en $I \rightarrow \vec{V}_{I, S_2/S_1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de frottement f (qui ne dépend que de la nature des matériaux en contact) tel que $f = \tan \varphi$.

- La composante tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I, S_2/S_1}$.
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est toujours sur le cône de frottement.
- On connaît exactement $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| : \|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$

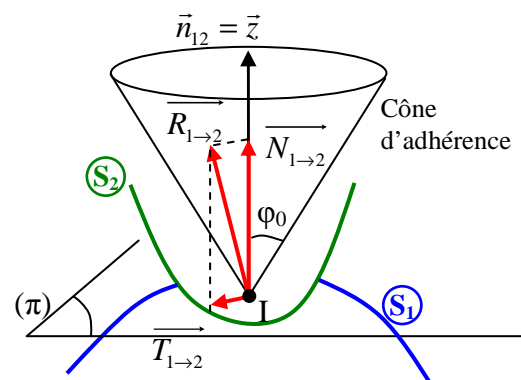


2^{ème} loi de Coulomb : Non glissement en $I \rightarrow \vec{V}_{I, S_2/S_1} = \vec{0}$

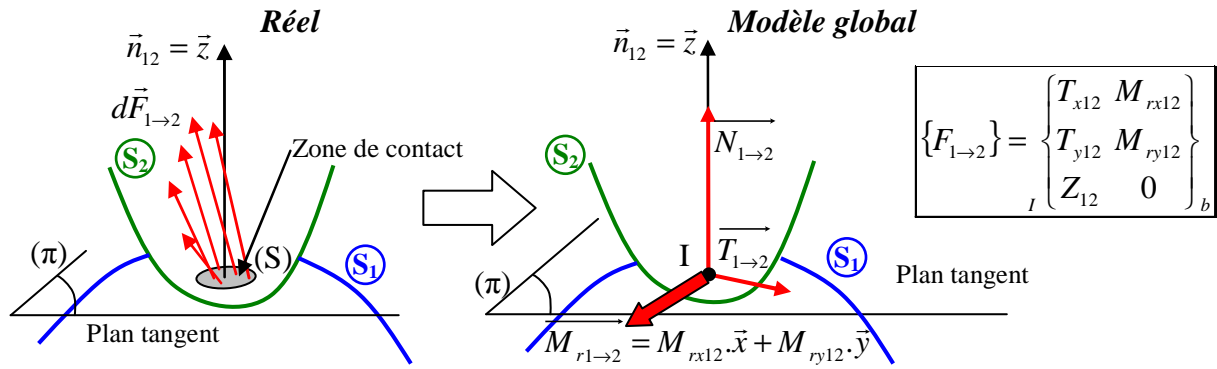
On définit un coefficient d'adhérence f_0 ($f_0 \geq f$) tel que $f_0 = \tan \varphi_0$. (dans la pratique on considère $f_0 = f$)

- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est toujours dans le cône d'adhérence.
- On ne connaît pas exactement $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\|$:

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f_0 \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$



Si le roulement n'est pas négligeable, il existe deux composantes de moment dans le plan tangent.

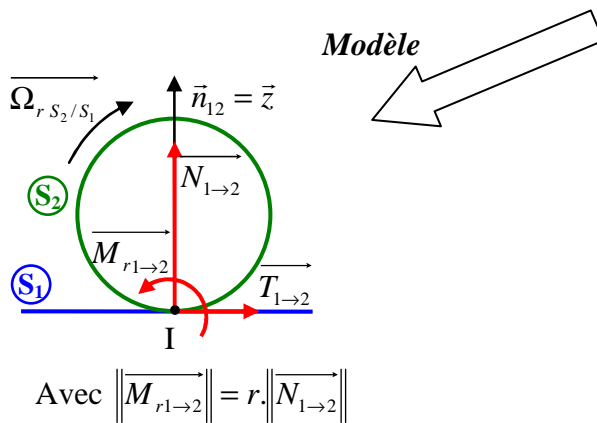


Des lois (expérimentales) permettent de relier les composantes de $\vec{M}_{r1 \rightarrow 2}$ à Z_{12} .

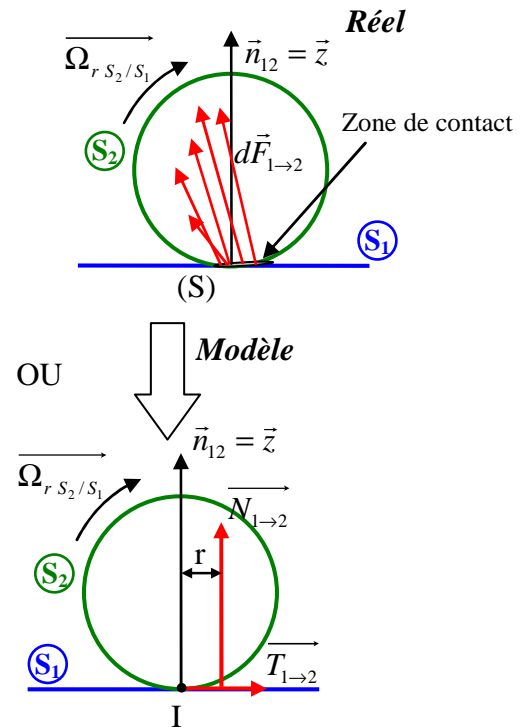
Roulement en I : $\vec{\Omega}_{r S_2 / S_1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de résistance au roulement r .

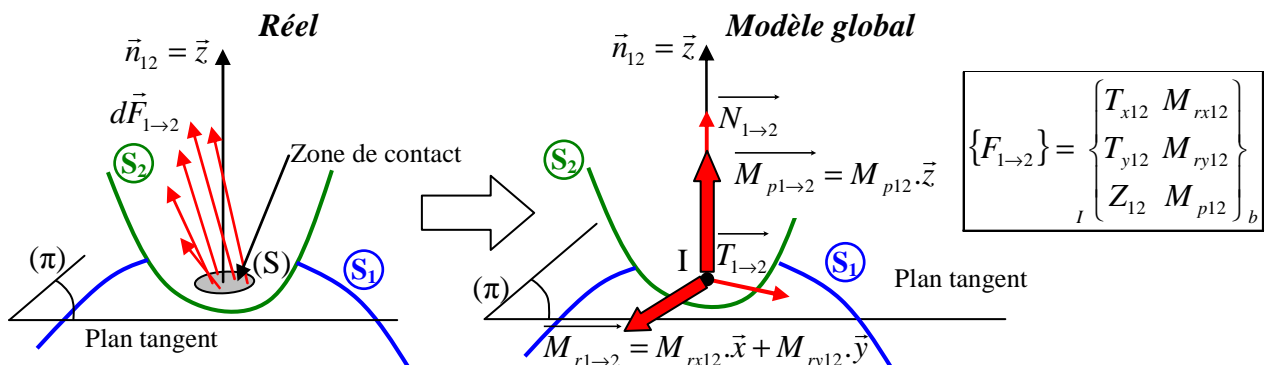
- $\|\vec{M}_{r1 \rightarrow 2}\| = r \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$
- $\vec{M}_{r1 \rightarrow 2}$ s'oppose à $\vec{\Omega}_{r S_2 / S_1}$.



Avec $\|\vec{M}_{r1 \rightarrow 2}\| = r \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$



Si le pivotement n'est pas négligeable, il existe une composante de moment normale au plan tangent.



Pivotement en I : $\vec{\Omega}_{p S_2 / S_1} \neq \vec{0}$. On définit un coefficient de résistance au pivotement p .

- $\|\vec{M}_{p1 \rightarrow 2}\| = p \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$
- $\vec{M}_{p1 \rightarrow 2}$ s'oppose à $\vec{\Omega}_{p S_2 / S_1}$.

Fiche 15 – Résolution analytique des problèmes de statique

Enoncé du PFS

La condition nécessaire pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un référentiel Galiléen est que la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures à E soit nulle.


$$\sum \{F_{\vec{E} \rightarrow E}\} = \{0\} \rightarrow \sum_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\vec{E} \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{A(\vec{E} \rightarrow E)}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ où A est un point quelconque}$$

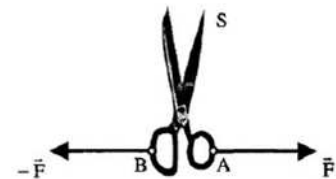


Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point !



La condition $\sum \{F_{\vec{E} \rightarrow E}\} = \{0\}$ est une condition nécessaire mais pas suffisante !

Equilibre de E  $\sum \{F_{\vec{E} \rightarrow E}\} = \{0\}$



Théorèmes généraux de la statique - Traduction vectorielle du PFS

L'énoncé du PFS conduit à l'écriture de deux équations vectorielles soit :

- Le **théorème de la résultante statique** : $\overrightarrow{R_{\vec{E} \rightarrow E}} = \vec{0}$
- Le **théorème du moment statique** : $\overrightarrow{M_{A(\vec{E} \rightarrow E)}} = \vec{0}$



Le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique sont ensuite projetés sur les 3 axes d'une même base, ce qui conduit à **6 équations scalaires** dans le cas d'un **problème spatial**.

Théorème des actions réciproques : $\{F_{2 \rightarrow 1}\} = -\{F_{1 \rightarrow 2}\}$

Cas particulier d'un système matériel E soumis à 2 forces

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 2 forces alors ces forces ont même norme et sont directement opposées.

Cas particulier des problèmes plan

Certains cas fréquemment rencontrés concernent les systèmes en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan. Ces systèmes sont qualifiés de systèmes plans.



Dans le cas d'un **problème plan**, l'application du PFS ne peut fournir au maximum que **3 équations scalaires** (2 équations issues du théorème de la résultante statique projetée sur les 2 axes de la base appartenant au plan + 1 équation issue du théorème du moment statique projetée sur le 3^{ème} axe de la base perpendiculaire au plan).

Méthode générale pour la résolution analytique des problèmes de statique

Etape 1 : On réalise un graphe de structure.

Etape 2 : On réalise un bilan complet des actions mécaniques et on complète le graphe de structure (qui devient un graphe d'analyse). On ajoute éventuellement ces actions mécaniques sur le schéma d'architecture.

Etape 3 : On identifie (s'il y en a) les systèmes soumis à l'action unique de deux actions mécaniques ce qui permet d'identifier à chaque fois une direction et de supprimer des composantes d'actions mécaniques inconnues.

On utilise le Principe Fondamental de la Statique. Deux méthodes sont possibles et doivent être choisies en fonction de l'objectif d'étude.



Objectif d'étude 1 : on cherche toutes les inconnues d'une liaison.

Etape 4 : On cherche une frontière d'isolement faisant apparaître les inconnues recherchées ainsi que des données connues tout en limitant le nombre d'inconnues non recherchées. On dresse le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (on donne les torseurs d'actions mécaniques aux points les plus simples).

Etape 5 : On écrit le PFS en déplaçant tous les torseurs au même point (choisir, parmi les différents points disponibles pour les torseurs, celui qui demande le moins de changements de points).

Etape 6 : On injecte les équations scalaires utiles issues de lois de comportement (équation du type $T_{ij} = f.N_{ij}$ à la limite du glissement dans le cas du frottement) pour chaque couple de solides. Si le nombre d'inconnues $I_s \leq 6$ on peut résoudre, sinon on écrit les 6 équations obtenues et on cherche un nouvel isolement faisant intervenir à nouveau les inconnues recherchées ou celles apparues.



Etape 7 : On résout littéralement le(s) système(s) d'équations

Etape 8 : On effectue les applications numériques et on valide ou non le critère de performance attendu.



Objectif d'étude 2 : On cherche une équation reliant une inconnue aux données.

Etape 4 : On cherche une frontière d'isolement faisant apparaître l'inconnue recherchée, les données et limitant le nombre d'inconnues non recherchées. On dresse le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (on donne les torseurs d'actions mécaniques aux points les plus simples).

Etape 5 : En observant les torseurs d'actions mécaniques extérieures inconnues non recherchées, on choisit le théorème à appliquer (résultante ou moment) et on projette sur un axe ne faisant pas intervenir ces inconnues. On obtient une équation scalaire.

Etape 6 : On injecte les équations scalaires utiles issues de lois de comportement (équation du type $T_{ij} = f.N_{ij}$ à la limite du glissement dans le cas du frottement) pour chaque couple de solides. S'il reste des inconnues inutiles, on recherche un autre isolement ou une autre équation permettant de résoudre en utilisant la même règle.




Fiche 16 – Résolution graphique des problèmes de statique

Méthode générale pour la résolution graphique des problèmes de statique

Etape 1 : On réalise un graphe de structure.

Etape 2 : On réalise un bilan complet des actions mécaniques et on complète le graphe de structure (qui devient un graphe d'analyse). On ajoute éventuellement ces actions mécaniques sur le schéma d'architecture.

Etape 3 : On élabore la stratégie de résolution et on regarde si l'on peut résoudre le problème graphiquement. On part de la (des) force(s) connue(s) et on progresse en isolant les solides soumis à 2 forces ou à 3 forces pour aller jusqu'à l'effort recherché

On indique avec le symbole  les liaisons qui ne sont pas des glisseurs.

Etape 4 : On fixe une échelle (pour le tracé des forces) et on réalise les constructions graphiques sur les figures. On ajoute au fur et à mesure les informations obtenues (direction ou force entièrement connue) sur le tracé.

Etape 5 : On mesure l'effort recherché à l'aide de l'échelle.

Etape 6 : On indique les résultats en précisant «Graphiquement on obtient ... » et on valide ou non ou non le critère de performance attendu de la fonction de service.

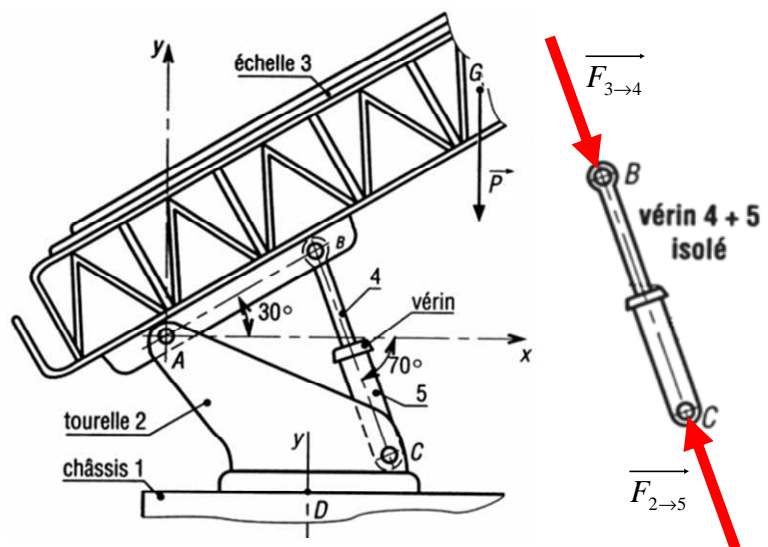
Cas des systèmes soumis à 2 glisseurs

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 2 glisseurs alors ces 2 glisseurs ont même norme et sont directement opposées.

Exemple de l'E.P.A.S. :

On isole l'ensemble $E=4+5$ et on effectue le B.A.M.E.

On constate que l'ensemble est soumis à 2 glisseurs \rightarrow ces 2 glisseurs ont donc même norme et sont directement opposées.



Cas des systèmes soumis à 3 glisseurs

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 3 glisseurs alors les résultantes des 3 glisseurs sont :

- coplanaires,
- concourantes ou parallèles
- de somme vectorielle nulle

Cas des résultantes non parallèles



Méthode de construction pour la résolution graphique de ce type de problème

Etape 1 : On doit connaître au minimum une résultante d'une action mécanique + une direction de résultante d'une 2^{ème} action mécanique.

Etape 2 : On définit le point J intersection des deux directions connues.

Etape 3 : On construit la troisième direction qui passe par le point J et le point d'application de la résultante de la 3^{ème} action mécanique.

Etape 4 : On réalise la somme vectorielle à partir de la résultante connue sur une construction dont on a défini l'échelle appelée triangle des forces.

Exemple de l'E.P.A.S. : On isole le solide 3 et on effectue le B.A.M.E. On constate que le solide 3 est soumis à 3 glisseurs dont les résultantes ne sont pas parallèles :

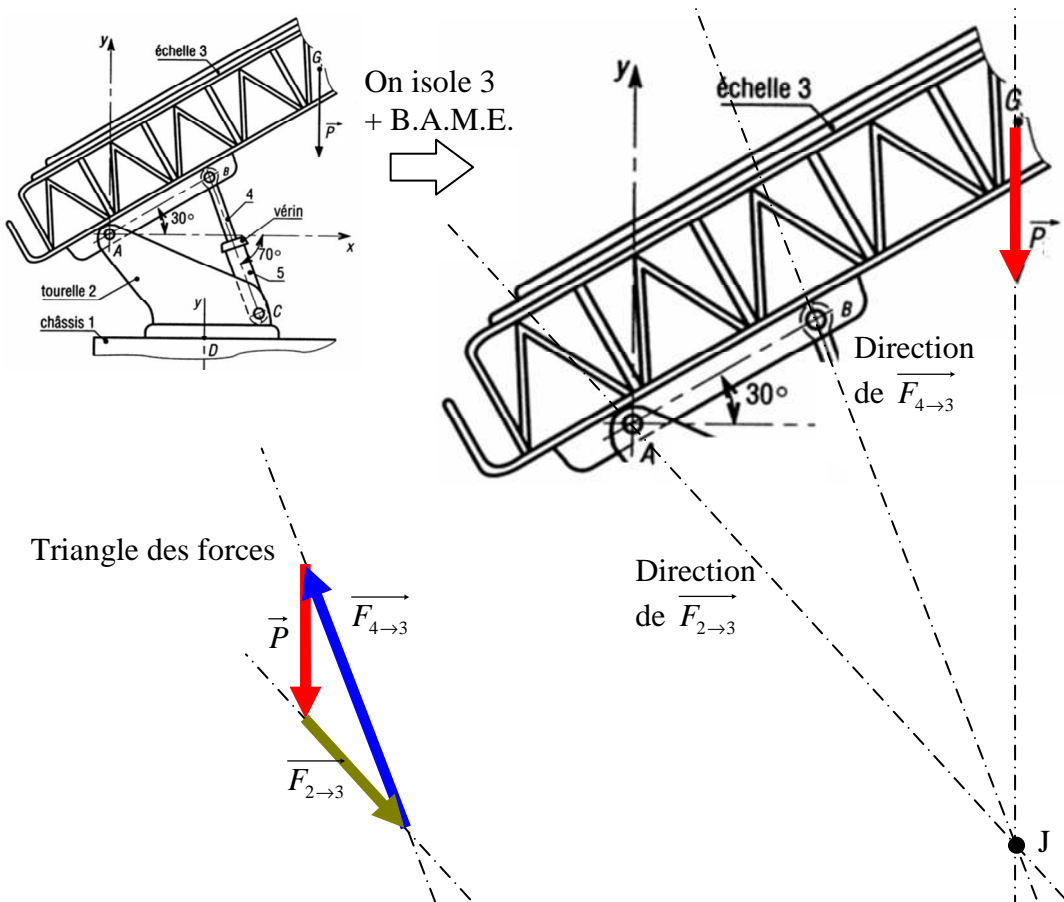
- L'action mécanique de la pesanteur
- L'action du solide 4
- L'action du solide 2

Etape 1 : On connaît \vec{P} + la direction de $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$.

Etape 2 : On définit le point J intersection des directions de \vec{P} et de $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$.

Etape 3 : On construit la troisième direction qui passe par le point J et le point A.

Etape 4 : On réalise la somme vectorielle sur le triangle des forces. On en déduit $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$.



Cas des résultantes parallèles → Méthode analytique permet de résoudre immédiatement le problème par la technique du bras de levier.