TD M4 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Questions de cours à savoir refaire

Interaction électromagnétique – force de Lorentz

Charge électrique et interaction coulombienne. Champ électrique, force électrique et notion de potentiel électrique (crée par une charge ou champ constant). Champ magnétique et force magnétique. Force de LORENTZ. Puissance.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme : équations du mouvement, étude de la trajectoire pour $\vec{v_0} \nparallel \vec{E}$, approche énergétique (tension accélératrice) et production d'un champ électrique uniforme.

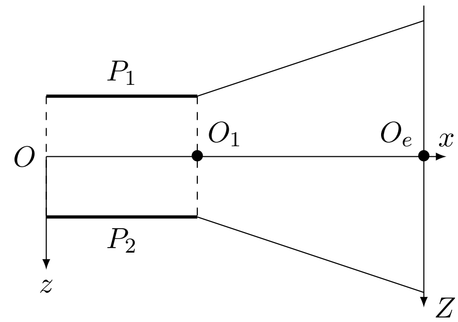
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme : uniformité du mouvement, équations du mouvement pour $\vec{v_0} \perp \vec{B}$, résolution des équations couplées et étude de la trajectoire.

1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_x}$ au point O dans une zone où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u_x}$. Ce champ électrique est créé par deux électrodes planes, parallèles à (Oyz) et séparées d'une distance L, soumises à une différence de potentiel (d.d.p.) U. Les effets de la gravitation seront négligés.

1. Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique pour que les particules soient accélérées. On donnera l'expression de la force électrique. Quel doit être le signe de la tension $U = V_1 - V_2$ (définie comme la différence de potentiel entre la plaque P_1 en $x = 0$ et la plaque P_2 en $x = L$) ?
2. Établir l'équation du mouvement de la particule chargée puis déterminer la vitesse de la particule en $x = L$ (on étudiera le cas $v_0 = 0$ pour simplifier).
3. Retrouver ce résultat par une approche énergétique.
4. Application numérique pour un proton et un électron avec $U = 1$ kV et $v_0 = 0$. On rappelle $m_p = 1,67.10^{-27}$ kg, $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg et $e = 1,6.10^{-19}$ C.
5. Établir la trajectoire $x(y)$ du mouvement dans le cas où $\vec{v_0} \nparallel \vec{E}$.

2 Déflexion électrique dans un oscilloscope



Dans tout l'exercice on se place dans un référentiel galiléen associé à un repère cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$.

Une zone de champ électrique uniforme est établie entre les plaques P_1 et P_2, le champ est supposé nul en dehors et on néglige les effets de bord. La distance entre les plaques vaut d, la longueur des plaques vaut L et la différence de potentiel entre les plaques vaut $U = V_{P_2} - V_{P_1}$ et est positive. Des électrons de charge $q = -e$ et de masse m accélérés pénètrent en O dans la zone de champ électrique uniforme avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_x}$ selon l'axe (Ox).

1. Établir l'expression de la force subie par les électrons en fonction de U, q, d et $\vec{u_z}$.
2. Déterminer la trajectoire $z = f(x)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de d, U et v_0.
3. Déterminer le point de sortie K de la zone de champ ainsi que les composantes de la vitesse en ce point.
4. On note D la distance O_1O_e. Déterminer l'ordonnée Z_P du point d'impact P de l'électron sur l'écran en fonction de U, v_0, D, d et L.

3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, on considère une particule de charge q positive et de masse m qui pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_x}$ au point O dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$.

1. A partir de l'expression de la force magnétique, montrer que la trajectoire de la particule est plane. Préciser le plan du mouvement.

2. Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.
3. Par application du P.F.D., montrer que la trajectoire est circulaire uniforme, parcourue à la pulsation $\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ et de rayon $R = \dfrac{v_0}{\omega_c}$. On pourra pour cela utiliser la quantité complexe $\underline{u}(t) = x(t) + iy(t)$ ou alors résoudre directement les équation différentielles couplées.
4. Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle durée met la particule pour effectuer un tour ?

Exercices

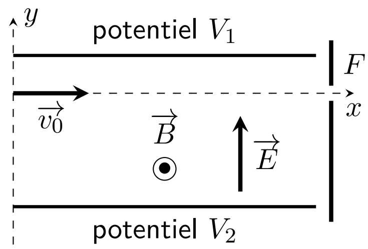
4 Trois charges (***)

Trois charges identiques q de masse m sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral de coté a et de centre O. Elles sont initialement au repos.

1. Sans calcul, peut-on à priori prévoir l'allure de la trajectoire de chacune des charges au cours du temps ?
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour une charge puis l'intégrer. On utilisera la symétrie établie précédemment pour simplifier le problème.
3. Évaluer la vitesse d'une charge en fonction de son éloignement au point O.
4. Quelle est la vitesse d'une charge au bout d'un temps très long ?

5 Sélecteur d'isotopes (**)

Des particules de charge $q > 0$ pénètrent avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$ dans un espace où règne un champ électrique uniforme, créé par deux plaques conductrices chargées et distantes de d. La tension (différence de potentiel) entre les plaques vaut $U = V_2 - V_1 > 0$. Il règne également, dans le même espace, un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$, orthogonal à $\overrightarrow{v_0}$.



1. Montrer que pour une valeur particulière de v_0 et en choisissant le signe de B, les particules peuvent avoir un mouvement rectiligne uniforme et passer par la fente F. Effectuer l'A.N. pour $B = 0,10$ T ; $E = 1,0.10^4$ V.m^{-1}.

Le faisceau est constitué d'ions $^4_2\mathrm{He}^{2+}$ et $^3_2\mathrm{He}^{2+}$, de masses respectives $m_1 = 6,6.10^{-27}$ kg et $m_2 = 5,0.10^{-27}$ kg. Ces ions ont été préalablement accélérés, à partir d'une vitesse nulle, sous une même tension U_0 par un dispositif d'accélération non représenté sur le schéma.

2. Montrer qu'en choisissant convenablement la tension U entre les deux plaques, on peut recueillir l'un ou l'autre des isotopes en F.
3. A.N : $U_1 = 100$ V permet de recueillir $^4_2\mathrm{He}^{2+}$. Quelle valeur U_2 permet de recueillir $^3_2\mathrm{He}^{2+}$?

6 Expérience de Millikan : mouvement de gouttelettes chargées (*)

On disperse un brouillard de fines gouttelettes sphériques d'huile, de masse volumique $\rho_h = 1,3.10^3$ kg.m^{-3}, dans l'espace séparant deux plaques horizontales P_1 et P_2 distantes de $d = 2.10^{-2}$m. Les gouttelettes sont préalablement chargées négativement et sans vitesse initiale. On suppose que toutes les gouttelettes ont même rayon R mais pas forcement la même charge $q < 0$. En l'absence de champ électrique $\overrightarrow{E}$, une gouttelette est soumise à son poids ($\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$, $g = 9,81$m.s^{-2}), à la poussée d'Archimède de l'air ambiant ($\rho_{\text{air}} = 1,3$ kg.m^{-3}) et à une force de frottements visqueux $\overrightarrow{f} = -\alpha R \overrightarrow{v}$ ($\alpha = 3,4.10^{-4}$ u.S.I).

1. En l'absence de champ électrique, déterminer la vitesse limite $\overrightarrow{v_0}$.
2. Déterminer l'expression de la vitesse de la goutte $\overrightarrow{v}(t)$. Faire apparaitre un temps caractéristique τ.
3. On mesure $v_0 = 2.10^{-4}$ m.s^{-1}. En déduire la valeur du rayon R.

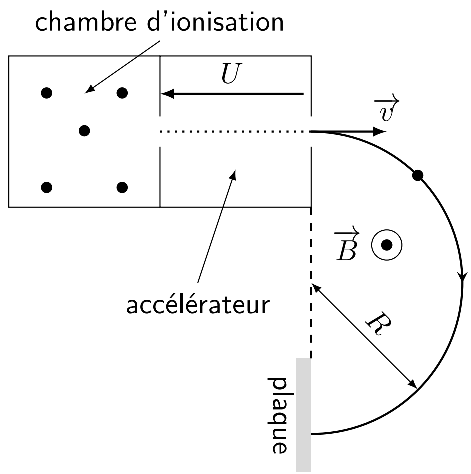
On applique désormais une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux plaques de manière à avoir un champ électrique $\overrightarrow{E}$ dirigé vers le bas.

4. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{E}$ puis celle de la force électrique.
5. Une gouttelette est immobilisée pour $U = 3200V$. Calculer sa charge q.

Au début du XX^e siècle, Millikan observa expérimentalement (en mesurant les vitesses limites pour un champ $\overrightarrow{E}$ donné) que les valeurs d'ionisation de telles gouttelettes étaient toujours des multiples entiers de la charge élémentaire e. Cette expérience s'avère être la première preuve de la quantification de la charge électrique. Pour ces travaux, Millikan reçu le prix Nobel en 1923.

7 Spectromètre de masse (*)

Le spectromètre de masse est un appareil permettant, entre autres, de séparer les différents isotopes d'un élément dans un échantillon (pour les compter ou pour en sélectionner un).
Un faisceau de particules chargées est constitué des ions de deux isotopes du mercure $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$, notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau est émis par la source S avec une vitesse quasi nulle, puis accéléré par une tension $U > 0$. Il pénètre alors en O dans une zone où le champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ est uniforme et orthogonal au faisceau incident.
Données : masse d'un nucléon $m = 1,67.10^{-27}$ kg, $U = 10$ kV, $B = 0,10$ T et $e = 1,6.10^{-19}$ C.

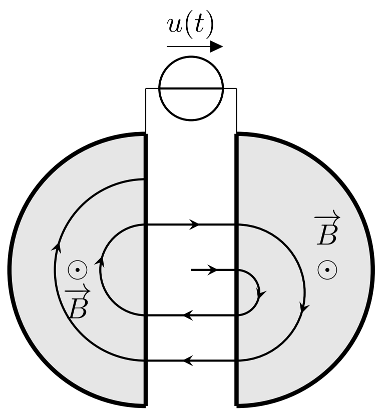


1. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 acquises respectivement par les isotopes (1) et (2) suite à l'accélération par la tension U.
2. Déterminer la trajectoire des ions dans la zone de champ magnétique. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires des isotopes (1) et (2).
3. On recueille les particules sur une plaque photographique P après qu'elles aient fait demi-tour. Exprimer puis calculer la distance d entre les deux traces observées.

8 Le cyclotron (**)

Un cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ ($B = 0,1$ T) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Un champ électrostatique variable $\overrightarrow{E}$ peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant entre eux une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace.

Les protons sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon du fait de la force magnétique. Dans l'intervalle entre les *dees*, le champ électrique les accélère. Ils arrivent donc dans le *dee* suivant avec une vitesse un peu plus élevée. Le rayon de la trajectoire circulaire est alors augmenté et le proton sortira du *dee* un peu plus loin du centre.



Ce mouvement alternant entraine les protons vers l'extrémité des *dees* avec une vitesse, donc une énergie, de plus en plus grande. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_s = 50$ cm.

1. Donner l'expression littérale puis la valeur numérique de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_p, e et B. Qu'en déduisez-vous ?
2. Justifier qualitativement le choix d'une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.
3. Déterminer l'expression puis la valeur de la vitesse v_s et de l'énergie cinétique $E_{c,s}$ des protons à la sortie du cyclotron.
4. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e, R_s, B, m_p et U_m.

Toute particule chargée non relativiste de charge q et d'accélération a (en norme) rayonne une puissance $\mathcal{P}_r$ donnée par la formule de Larmor : $\mathcal{P}_r = \dfrac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

5. Montrer qu'une particule chargée de charge q, de vitesse v, qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon R, rayonne une puissance de la forme : $\mathcal{P}_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q, c, μ_0 et R.
6. Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_s = 50$ cm. Conclure.

9 Effet Zeeman (***)

Un atome d'hydrogène est composé d'un proton de charge $+e$ supposé immobile en O et d'un électron de charge $-e$ et de masse m. La force qu'exerce le proton sur l'électron situé au point M est modélisée par une force de rappel élastique $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{OM}$ (modèle de l'électron élastiquement lié) où k est une constante positive. On néglige le poids.

1. On suppose que la trajectoire de l'électron est comprise dans le plan (Oxy). Trouver les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
2. Quelle est la pulsation ω_0 du mouvement et sa nature géométrique ?
3. On soumet l'atome à un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Écrire les nouvelles équations du mouvement.
4. Les résoudre en posant $\underline{u}(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer que le mouvement est désormais caractérisé par deux pulsations ω_1 et ω_2.
5. Cette subdivision des niveaux d'énergie des atomes ou des molécules plongés dans un champ magnétique est nommé effet Zeeman. Que peut-on à priori en déduire sur leurs spectres d'émission ?

10 Trajectoire cycloïde (**)

Une particule de masse m et de charge électrique positive q est émise dans une région de l'espace où sont superposés un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_x}$ et un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_z}$, $B_0 > 0$ et $E_0 > 0$. On néglige l'action de la pesanteur et on considère que la particule se trouve à l'instant initial en O avec une vitesse nulle.

1. Écrire les équations différentielles du mouvement en fonction des grandeurs E_0, B_0 et $\omega = \dfrac{qB_0}{m}$.
2. Montrer que la trajectoire est plane.
3. Donner, en fonction de E_0, B_0 et ω, les expressions de $y(t)$, $z(t)$, $\dot{y}(t)$ et $\dot{z}(t)$. On pourra introduire $\underline{u} = y + iz$.
4. Représenter sommairement la trajectoire de la particule à partir des équations paramétriques en précisant les valeurs extrêmes de z et les vitesses correspondantes, les tangentes à la trajectoire pour ces valeurs et la périodicité spatiale de la trajectoire.