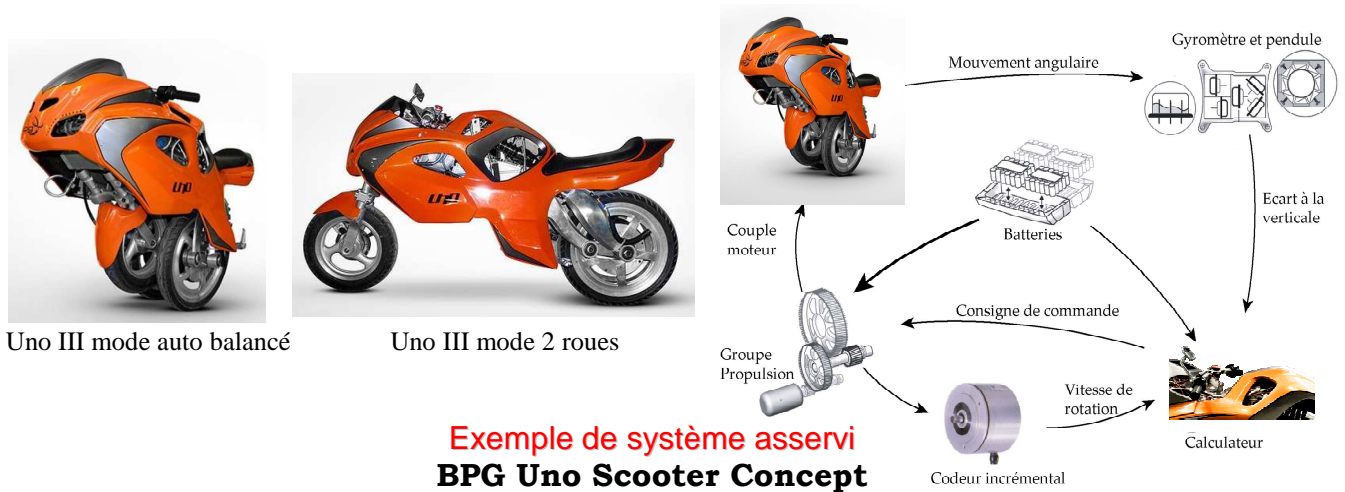


## Evaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI – Partie 2 : Rapidité



On évalue les performances d'un système asservi, modélisé en SLCI, suivant 4 critères principaux qui sont la stabilité, la précision, la rapidité et l'amortissement. Si le système asservi est stable on peut évaluer la rapidité et la précision de celui-ci.

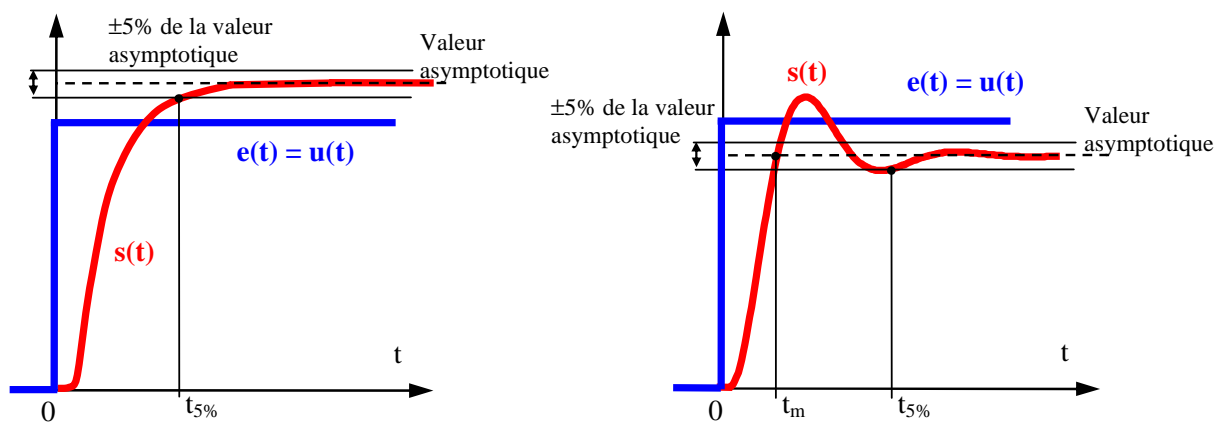
L'objectif de cours est de rappeler les éléments (vus en 1<sup>ère</sup> année) intervenant sur la rapidité des systèmes ainsi que les outils permettant de l'évaluer (indépendamment des autres critères).

### 1. Rapidité - Définition

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à  $n\%$ .



Dans la pratique, on utilise le **temps de réponse à 5%** ( $t_{5\%}$ ), c'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à  $\pm 5\%$  près et y rester.



Plus les temps de réponse sont faibles plus le système est rapide.



Pour les systèmes oscillants on définit aussi le **temps de montée** ( $t_m$ ) (ou temps de raideur) qui correspond au temps au bout duquel la réponse passe pour la première fois par sa valeur finale.

## 2. Influence de l'ordre

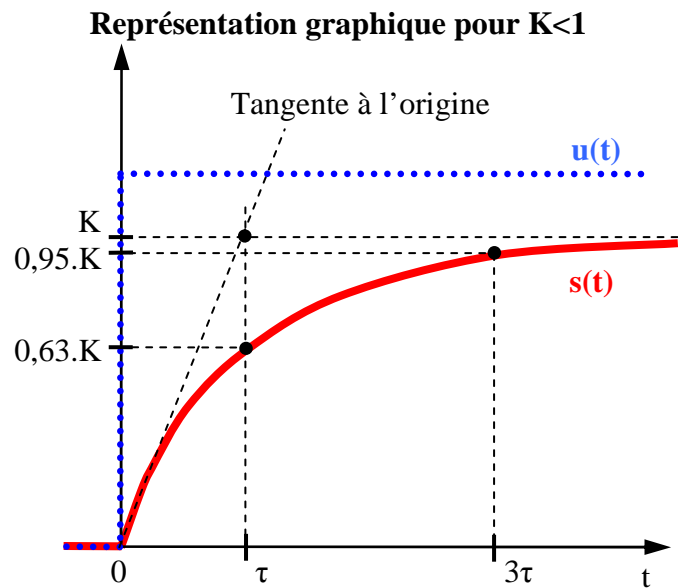
### 2.1. Système du 1<sup>er</sup> ordre

Pour une entrée échelon unitaire  $e(t)=u(t)$ , la réponse temporelle a pour expression :

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$

Le temps de réponse à 5%,  $t_{5\%}$  correspond à 3 fois la constante de temps  $\tau$  :  $t_{5\%} = 3\tau$ .

**Plus la constante de temps est petite plus le système est rapide.**



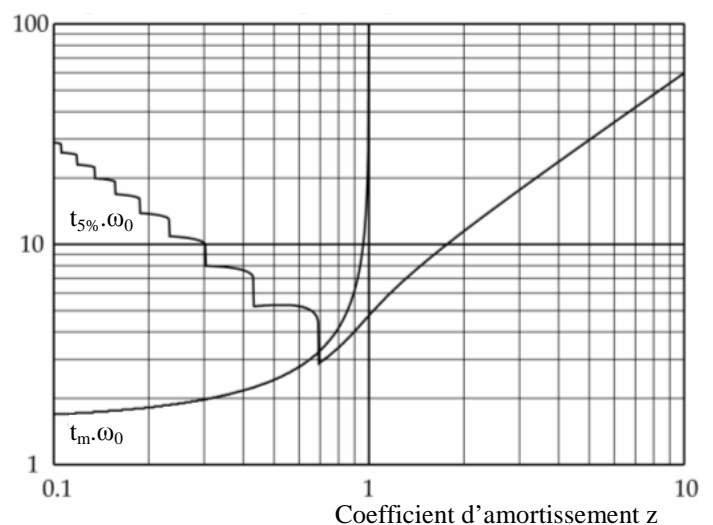
### 2.2. Système du 2<sup>nd</sup> ordre

Dans le cas du système du 2<sup>nd</sup> ordre, il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement  $z$  et de la pulsation propre non amortie du système  $\omega_0$ .

On utilise l'abaque ci-contre qui donne la valeur du temps de réponse réduit  $t_{5\%} \cdot \omega_0$  en fonction du coefficient d'amortissement  $z$  ainsi que la valeur du temps de montée réduit  $t_m \cdot \omega_0$  en fonction du coefficient d'amortissement  $z$ .

Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5% ce qui correspond à un coefficient d'amortissement de  $z = 0,69 \approx 0,7$  :

On a alors  $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$  pour  $z \approx 0,7$ .



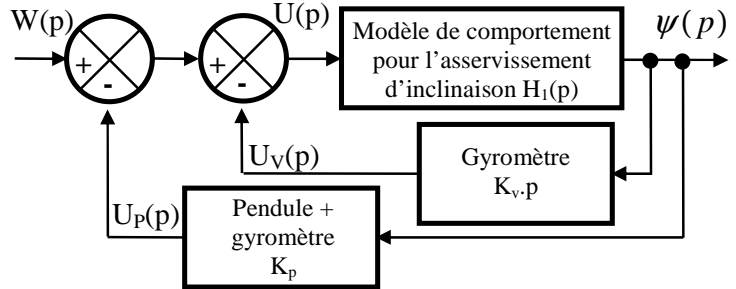
Pour une même pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et :

- pour  $z \ll 1$  (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.
- pour  $z \approx 0,7$ , le système présente un **dépassement D faible ( $D_1 = 5\%$ ) avec le temps de réponse le plus faible.**
- pour  $z = 1$ , le système présente le **temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement.**
- pour  $z \gg 1$ , il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.

**Pour un même coefficient d'amortissement  $z$ , plus  $\omega_0$  augmente plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.**

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balançé :

Afin de stabiliser l'inclinaison du scooter, le système élabore la grandeur de commande,  $u(t)$  à partir des mesures de  $\dot{\psi}(t)$  (réalisée par le gyromètre) et de  $\psi(t)$  (réalisée par combinaison de la mesure du gyromètre et du pendule).



Le modèle de comportement du système mécanique de fonction de transfert  $H_1(p)$  est connu :

$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1} \text{ avec } K_1 \text{ gain du système mécanique } (K_1 = 0,24 \text{ rad/V}) \text{ et } \omega_1 \text{ pulsation}$$

propre du système mécanique ( $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$ ).

On souhaite déterminer les gains  $K_v$  et  $K_p$  qui permettent d'obtenir :

- un système stable (conditions vues cours 04 à l'aide du critère de Routh :  $K_v \cdot K_1 > 0$  et  $K_p \cdot K_1 - 1 > 0$ )
- le temps de réponse à 5% du système le plus rapide possible pour une pulsation propre  $\omega_2 = 6,15 \text{ rad}$  (la pulsation  $\omega_2$  est choisie telle qu'elle soit proche de celle du système mécanique  $\omega_2 = 1,5 \cdot \omega_1 = 6,15 \text{ rad}$ ).

Pour étudier la réponse du système il faut d'abord déterminer sa FTBF qui présentée sous forme

$$\text{canonique, s'écrit : } H_2(p) = \frac{\frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1}}{\frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2} \cdot p^2 + \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \cdot p + 1} = \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1}$$

$$\text{Avec : } K_2 = \frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1}$$

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)} \cdot \omega_1$$

$$\frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} = \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \rightarrow z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_v \cdot K_1 \cdot \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)} \cdot \omega_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \rightarrow z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_v \cdot K_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)}}$$

$$\text{Si } \omega_2 = 1,5 \cdot \omega_1 \text{ alors } \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1,5 = \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)} \rightarrow K_p = \frac{1,5^2 + 1}{K_1} = \frac{1,5^2 + 1}{0,24} = 13,5 \text{ V/rad}$$

Le temps de réponse le plus rapide pour un système du 2<sup>nd</sup> ordre est obtenu pour  $z_2 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$  soit :

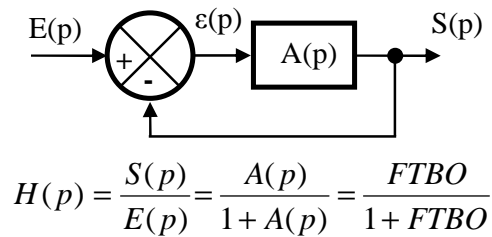
$$z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_v \cdot K_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow K_v = \frac{2 \cdot z_2 \cdot \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)}}{K_1 \cdot \omega_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(13,5 \times 0,24 - 1)}}{0,24 \times 4,1} = 2,15 \text{ rad/V.}$$

$$K_2 = \frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} = \frac{0,24}{13,5 \times 0,24 - 1} = 0,107 \text{ rad/V}$$

$$\text{Le temps de réponse du système pour } z_2 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ est de } t_{5\%} \cdot \omega_2 = 3 \rightarrow t_{5\%} = \frac{3}{\omega_2} = \frac{3}{6,15} = 0,49 \text{ s.}$$

### 3. Influence du bouclage

Un système asservi peut toujours être mis sous la forme d'un système à retour unitaire si l'entrée  $E(p)$  et la sortie  $S(p)$  sont comparables (même dimension). L'avantage pratique du bouclage est qu'il permet de modifier facilement les caractéristiques du système.



#### 3.1. Bouclage d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

Dans le cas d'un système du 1<sup>er</sup> ordre  $A(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ . Après bouclage on obtient :

$$H(p) = \frac{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau \cdot p}} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p + K} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} \cdot p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p} \quad \text{avec : } \boxed{K_{BF} = \frac{K}{1 + K}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K}}$$



Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre permet :

- de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 1<sup>er</sup> ordre,
- **de diminuer la valeur de la constante de temps  $\tau_{BF}$  du système, ce qui permet d'obtenir un temps de réponse plus faible lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO.**

#### 3.2. Bouclage d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre

Dans le cas d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre  $A(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$ . Après bouclage on obtient :

$$H(p) = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + K} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{2 \cdot z}{(1 + K) \cdot \omega_0} p + \frac{1}{(1 + K) \cdot \omega_0^2} p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2 \cdot z_{BF}}{\omega_{BF0}} p + \frac{1}{\omega_{BF0}^2} p^2}$$

avec :  $\boxed{K_{BF} = \frac{K}{1 + K}}$

$$\frac{1}{\omega_{BF0}^2} = \frac{1}{(1 + K) \cdot \omega_0^2} \rightarrow \boxed{\omega_{BF0} = \sqrt{1 + K} \cdot \omega_0}$$

$$\frac{2 \cdot z_{BF}}{\omega_{BF0}} = \frac{2 \cdot z}{(1 + K) \cdot \omega_0} \rightarrow z_{BF} = \frac{z \cdot \sqrt{1 + K} \cdot \omega_0}{(1 + K) \cdot \omega_0} \rightarrow \boxed{z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1 + K}}}$$

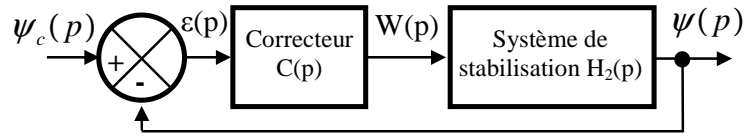


Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre :

- permet de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 2<sup>ème</sup> ordre,
- **augmente la valeur de la pulsation propre du système lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO,**
- **diminue la valeur du coefficient d'amortissement  $z_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain  $K$  de la FTBO. Par conséquent :**
  - si  $z_{BF}$  reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
  - si  $z_{BF}$  est inférieur à 0,7, le temps de montée  $t_m$  sera plus faible mais le temps de réponse à 5%  $t_{5\%}$  ne sera pas forcément meilleur car le régime transitoire comportera d'avantage d'oscillations.

Application sur la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :  
La consigne de la régulation de l'inclinaison du châssis  $\psi(t)$  par rapport à la verticale est notée  $\psi_c(t)$ .

Sur le système il existe un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  qui élabore le signal  $w(t)$  (de transformée de Laplace  $W(p)$ ) à partir de l'écart  $\varepsilon(t) = \psi_c(t) - \psi(t)$ .



$$C(p) = K_c \text{ et } H_2(p) = \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1}$$

Où  $K_2 = 0,107 \text{ rad/V}$ ,  $\omega_2 = 6,15 \text{ rad/s}$  et  $z_2 = 0,7$ .

$$\text{Soit : FTBO} = K_c \cdot H_2(p) = \frac{K_c \cdot K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1} = \frac{0,107 \cdot K_c}{\frac{1}{6,15^2} \cdot p^2 + \frac{2 \times 0,707}{6,15} \cdot p + 1} = \frac{0,107 \cdot K_c}{0,0264 \cdot p^2 + 0,23 \cdot p + 1}$$

A partir de la FTBO on peut calculer la FTBF :

$$H_4(p) = \frac{\frac{K_c \cdot K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1}}{1 + \frac{K_c \cdot K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1}} = \frac{K_c \cdot K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1 + K_c \cdot K_2}$$

$$H_4(p) = \frac{\frac{K_c \cdot K_2}{1 + K_c \cdot K_2}}{\frac{1}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2} \cdot p + 1}$$

$$H_4(p) = \frac{\frac{K_c \cdot K_2}{1 + K_c \cdot K_2}}{\frac{1}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2} \cdot p + 1} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2 \cdot z_{BF}}{\omega_{BF0}} p + \frac{1}{\omega_{BF0}^2} p^2}$$

On constate bien que l'ordre du système est conservé et on a :

$$K_{BF} = \frac{K_c \cdot K_2}{1 + K_c \cdot K_2}$$

$$\frac{1}{\omega_{BF0}^2} = \frac{1}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2^2} \rightarrow \omega_{BF0} = \sqrt{(1 + K_c \cdot K_2)} \cdot \omega_2$$

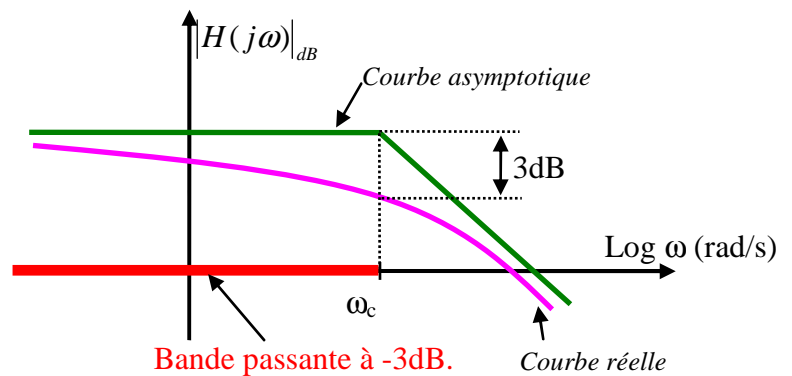
$$\frac{2 \cdot z_{BF}}{\omega_{BF0}} = \frac{2 \cdot z_2}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2} \rightarrow z_{BF} = \frac{z_2 \cdot \sqrt{(1 + K_c \cdot K_2)} \cdot \omega_2}{(1 + K_c \cdot K_2) \cdot \omega_2} \rightarrow z_{BF} = \frac{z_2}{\sqrt{(1 + K_c \cdot K_2)}}$$

→ L'augmentation du gain  $K_c$  diminue le coefficient d'amortissement  $z_{BF}$  de la FTBF. Par conséquent comme  $z_2 = 0,7$  on obtient  $z_{BF} < 0,7$  et le système aura un temps de réponse à 5% moins bon après bouclage.

#### 4. Influence de la bande passante de la FTBF

La bande passante à -n dB correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain asymptotique en régime statique moins n décibels.

Pour le système du 1<sup>er</sup> ordre défini sur la figure de droite, on a par exemple défini la bande passante à -3dB. En électronique on appelle ce système filtre passe bas car la bande passante à -3dB se situe dans les zones de basse fréquence.



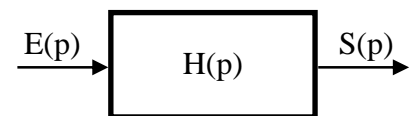
On montre que plus la bande passante de la FTBF du système est importante plus le système sera rapide. On montre aussi que la bande passante à -3dB de la FTBF  $BP_{FTBF(-3dB)}$  est pratiquement égale à la pulsation de coupure de la FTBO  $\omega_{co(FTBO)}$  :  $BP_{FTBF(-3dB)} \approx \omega_{co(FTBO)}$ .

#### 5. Influence des pôles dominants de la FTBF

La réponse  $s(t)$  d'un SLCI dépend des pôles de sa fonction de transfert  $H(p)$ . L'écriture en pole de  $H(p)$  donne :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_i) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

Avec  $N(p)$  : numérateur de  $H(p)$ ,  $p_i$  : **pôles** de  $H(p)$  et  $n$  : **ordre** de  $H(p)$ .



Si l'on sollicite ce système avec une impulsion de Dirac en entrée ( $E(p) = 1$ ), la sortie  $S(p)$  a pour expression dans le domaine de Laplace :  $S(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_i) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$ .

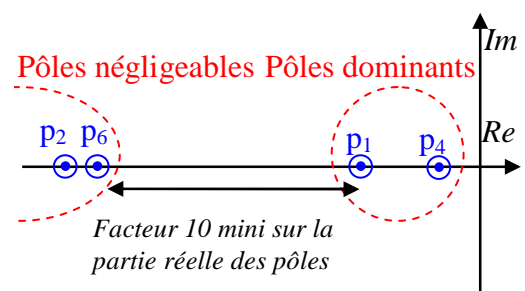
Ce qui donne  $S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p - p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$  après décomposition en éléments simples.

La transformation inverse permet ensuite d'obtenir la réponse temporelle qui a donc expression :

$$s(t) = \underbrace{A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t}}_{\text{Mode 1}} + \underbrace{A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}}_{\text{Mode 2}} + \dots + \underbrace{A_i \cdot e^{p_i \cdot t}}_{\text{Mode i}} + \dots + \underbrace{A_n \cdot e^{p_n \cdot t}}_{\text{Mode n}}$$

On constate ainsi que la réponse  $s(t)$  du système correspond à une superposition de  $n$  modes qui dépendent des pôles de la FTBF.

Plus un pôle aura une partie réelle grande et plus il influencera la réponse globale du système. Au contraire, plus un pôle aura une partie réelle petite et plus il sera rapidement amorti et influencera peu la réponse globale du système.



Par conséquent, lorsque l'on étudie un système, on peut se contenter de ne prendre en compte que les pôles dominants qui permettent d'obtenir un modèle mathématique plus simple à manipuler qui reflète les caractéristiques principales du système.