CHAPITRE 0

Analyse Dimensionnelle

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Dimension d'une grandeur

La dimension d'une grandeur est, pour simplifier, sa nature physique : une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse … **Soit G une grandeur physique, sa dimension est notée [G]**.

Attention ! Il ne faut surtout pas confondre la dimension d'une grandeur avec son unité. Ainsi, une grandeur ayant la dimension d'une longueur peut s'exprimer indifféremment en mètres, en centimètres, en angströms, en miles. **A la question : « Quelle est la dimension de L ? », il faut répondre « L a la dimension d'une longueur » ou « L est homogène a une longueur » et surtout pas dire « L est en mètres ».**

Grandeurs et unités de base (1)

Sept constantes pour tout mesurer

Le futur SI sera le système d'unités selon lequel les valeurs des sept constantes physiques suivantes seront fixées exactement. Les unités hertz (Hz), joule (J), coulomb (C), lumen (lm) et watt (W) sont reliées aux unités seconde (s), mètre (m), kilogramme (kg) ampère (A), kelvin (K), mole (mol) et candela (cd) représentées ici :

h *

La constante de Planck est fixée et strictement égale à $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J.s (ou m².kg/s en unités de base)

K_{cd}

L'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz est fixée et strictement égale à 683 lm/W (ou lm.s³/m².kg en unités de base)

c

La vitesse de la lumière dans le vide est fixée et strictement égale à 299 792 458 m/s

N_A *

La constante d'Avogadro est fixée et strictement égale à $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol⁻¹

$\Delta\nu_{Cs}$

La fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé est fixée et strictement égale à 9 192 631 770 Hz

k *

La constante de Boltzman est fixée et strictement égale à $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J/K (ou m².kg/s².K en unités de base)

e *

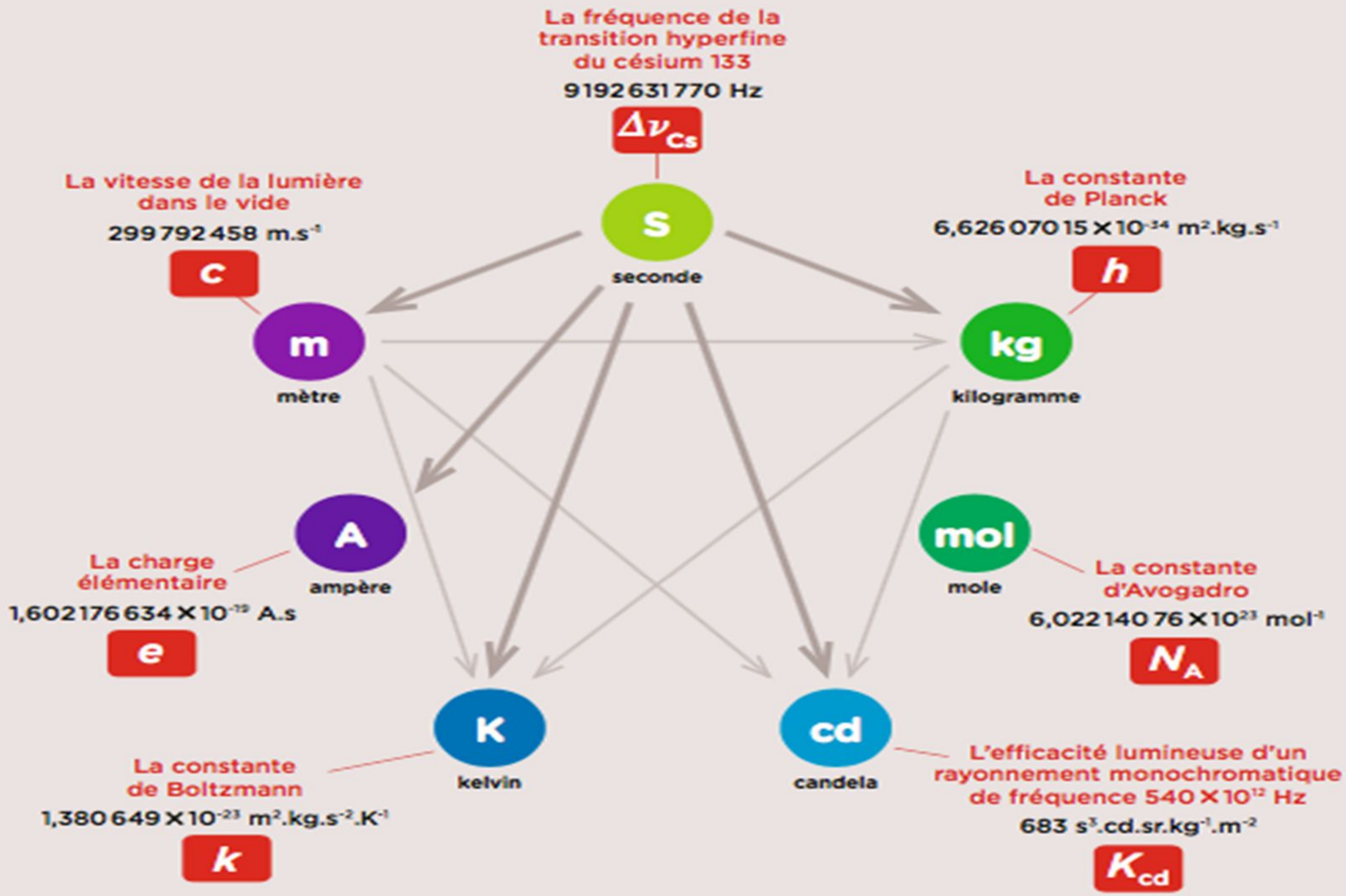
La charge élémentaire est fixée et strictement égale à $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C (ou A.s en unité de base)

* Constantes dont les valeurs n'étaient pas fixées avant 2017.

Grandeurs et unités de base (2)

Fig. 1 Sept constantes pour construire le nouveau système

► Contrairement à l'ancien Système international d'unités, qui reposait sur la définition explicite de chacune des sept unités de base (seconde, mètre, ampère, kelvin, candela, mole et kilogramme), le nouveau système se contente de poser les valeurs numériques exactes de sept constantes universelles (ci-contre en rouge). En combinant ces constantes, on peut construire pas à pas les unités de base. Tout d'abord la seconde, définie directement par $\Delta\nu_{Cs}$, qui s'exprime en hertz, l'inverse d'une seconde. Ensuite, la seconde, combinée avec la constante c donne le mètre, puisque le produit d'une vitesse par un temps a la dimension d'une longueur. Puis, à partir de la seconde et du mètre, le kilogramme est obtenu grâce à la constante de Planck h qui s'exprime en $m^2.kg.s^{-1}$. Et ainsi de suite pour définir toutes les unités.



Grandeurs et unités de base (3)

Conformément à la redéfinition du Système international d'unités de 2018-2019. Il est composé de sept unités de base et d'unités dérivées.

❑ LONGUEUR L : le mètre (m)

Le mètre, m, est l'unité de longueur ; sa valeur est définie en fixant la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide à exactement $299\,792\,458$ quand elle est exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$.

❑ MASSE M : le kilogramme (kg)

Le kilogramme, kg, est l'unité de masse ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique de la constante de Planck à exactement $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$quand elle est exprimée en $\mathrm{s^{-1}m^2\,kg}$, ce qui correspond à des J s.

Une des conséquences est que le kilogramme devient dépendant des définitions de la seconde et du mètre.

Grandeurs et unités de base (4)

❑ TEMPS T : la seconde (s)

La seconde s, est l'unité de durée ; sa valeur est définie en fixant la valeur du nombre de périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 à la température du zéro absolu à exactement 9 192 631 770 quand elle est exprimée en s^{-1}.

❑ INTENSITE DU COURANT ELECTRIQUE I : l'ampère (A)

L'ampère, A, est l'unité du courant électrique ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique de la charge élémentaire à exactement $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ quand elle est exprimée en As, ce qui correspond à des C.

Grandeurs et unités de base (5)

- **TEMPERATURE THERMODYNAMIQUE θ: le kelvin (K)**

Le kelvin, K, est l'unité thermodynamique de température ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique de la constante de Boltzmann à exactement $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ quand elle est exprimée en $s^{-2}\, m^{2}$ kg K^{-1}, ce qui correspond à des J K^{-1}.

- **INTENSITE LUMINEUSE J : le candela (cd)**

La candela, cd, est l'unité d'intensité lumineuse dans une direction donnée ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique de l'intensité énergétique d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12} s^{-1}$(hertz) à exactement 683 quand elle est exprimée en $s^{3}\, m^{-2}\, kg^{-1}\, cd \cdot sr$, ou $cd\; sr\; W^{-1}$, ce qui correspond à des lm W^{-1}.

Grandeurs et unités de base (6)

❑ QUANTITE DE MATIERE N : la mole (mol)

La mole, mol, est l'unité de quantité de matière d'une entité élémentaire spécifique, qui peut être un atome, une molécule, un ion, un électron ou n'importe quelle autre particule ou groupe particulier de ces particules ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique du nombre d'Avogadro à exactement $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ quand elle est exprimée en mol-1.

Grandeurs et unités de base (7)

Les angles étant définis comme des rapports de grandeurs de même dimension, ils sont adimensionnels. On utilise les unités angulaires de base suivantes :

- **Unité d'angle plan : le radian (rad)**

Le radian est l'angle plan qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte sur la circonférence de ce cercle un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle.

- **Unité d'angle solide : le stéradian (sr)**

Le stéradian est l'angle solide d'un cône qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, intercepte sur la surface de cette sphère une aire équivalente à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère.

Grandeurs et unités de base (8)

Grandeur de base	Symbole	Unité (SI)
masse	M	kg
longueur	L	m
temps	T	s
intensité electrique	I	A
température	Θ	K
intensité lumineuse	J	cd
quantité de matière	N	mol

Grandeurs dérivées et unités (1)

Les autres grandeurs que les sept énoncés précédemment sont des grandeurs dérivées, c'est-à-dire qu'elles sont liées aux grandeurs de base à l'aide des lois physiques. En effet, à partir de formules issues des lois physiques, on peut exprimer la dimension de n'importe quelle grandeur dérivée en fonction des dimensions des sept grandeurs de base G_i. **L'équation obtenue est appelée équation aux dimensions.**

$$[\mathrm{G}] = \mathrm{M}^{\alpha_1}\ \mathrm{L}^{\alpha_2}\ \mathrm{T}^{\alpha_3}\ \mathrm{I}^{\alpha_4}\ \Theta^{\alpha_5}\ \mathrm{J}^{\alpha_6}\ \mathrm{N}^{\alpha_7}$$

Grandeurs dérivées et unités (2)

Une grandeur G purement numérique (comme le rapport de 2 longueurs) est dite sans dimension ou adimensionnel. On notera **[G] = 1**.

Il existe des unités n'appartenant pas au système SI : le degré Celsius, le litre, le bar…Il est très important de savoir déterminer la dimension d'une grandeur en fonction des dimensions des grandeurs de base. En effet, cela permet de vérifier **l'homogénéité des équations**.

Une équation est homogène si les deux membres ont la même dimension.

Une équation non homogène est nécessairement fausse.

Grandeurs dérivées et unités (3)

On peut énoncer les conséquences suivantes :

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.

$$[\mathbf{G_1} + \mathbf{G_2}] = [\mathbf{G_1}] = [\mathbf{G_2}]$$

- L'argument d'une fonction (sin, cos, tan, exp, ln, ch, sh, th….) doit être sans dimension.
- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique
- Un vecteur ne peut être ajouté qu'à un vecteur et non à un scalaire.

Grandeurs dérivées et unités (4)

On manipule les dimensions à l'aide des règles suivantes :

- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs.

$$[\mathbf{G_1.G_2}] = [\mathbf{G_1}][\mathbf{G_2}]$$

- $[G^r] = [G]^r$ est égale à, où r est un nombre sans dimension.

- La dimension d'une dérivée de grandeurs est égale à $\left[\frac{dG}{dX}\right] = \frac{[G]}{[X]} \Longrightarrow \left[\frac{d^nG}{dX^n}\right] = \frac{[G]}{[X]^n}$

Grandeurs dérivées et unités (5)

Grandeurs dérivées	Formule de définition	Equation aux dimensions	Unité SI et symbole
Surface S	$S = \ell^2$	$[S] = L^2$	m^2
Volume V	$V = \ell^3$	$[V] = L^3$	m^3
Vitesse v	$v = \frac{dx}{dt}$	$[v] = L.T^{-1}$	$m.s^{-1}$
Accélération a	$a = \frac{dv}{dt}$	$[a] = L.T^{-2}$	$m.s^{-2}$
Fréquence f	$f = \frac{1}{T}$	$[f] = T^{-1}$	hertz (Hz)
Vitesse angulaire ω	$\omega = 2\pi f$	$[\omega] = T^{-1}$	$rad.s^{-1}$
Masse volumique ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	$[\rho] = M.L^{-3}$	$kg.m^{-3}$

Grandeurs dérivées et unités (6)

Grandeurs dérivées	Formule de définition	Equation aux dimensions	Unité SI et symbole
Force F	$F = m\,a$	$[F] = M.L.T^{-2}$	newton (N)
Travail W, énergie E	$W = F \times \ell$ $E_c = \frac{1}{2} m v^2$	$[W] = M.L^2.T^{-2}$	joule (J)
Puissance P	$P = \frac{dE}{dt}$	$[P] = M.L^2.T^{-3}$	watt (W)
Pression p	$p = \frac{F}{S}$	$[p] = M.L^{-1}.T^{-2}$	pascal (Pa)
Tension u	$u = \frac{P}{i}$	$[u] = M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	volt (V)
Charge q	$i = \frac{dq}{dt}$	$[q] = I.T$	coulomb (C)
Résistance R	$R = \frac{U}{I}$	$[R] = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	ohm (Ω)

Grandeurs dérivées et unités (7)

Grandeurs dérivées	Formule de définition	Equation aux dimensions	Unité SI et symbole
Capacité C	$C = \frac{q}{u}$	$[C] = M^{-1}.L^{-2}.T^{4}.I^{2}$	farad (F)
Inductance L	$u = L\frac{di}{dt}$	$[L] = M.L^{2}.T^{-2}.I^{-2}$	henry (H)
Champ électrique E	$E = \frac{F_{élec}}{q}$	$[E] = M.L.T^{-3}.I^{-1}$	$V.m^{-1}$
Flux magnétique Φ	$u = -\frac{d\Phi}{dt}$	$[\Phi] = M.L^{2}.T^{-2}.I^{-1}$	weber (Wb)
Champ magnétique B	$B = \frac{d\Phi}{dS}$	$[B] = M.T^{-2}I^{-1}$	tesla (T)
Concentration molaire c	$c = \frac{n}{V}$	$[c] = N.L^{-3}$	$mol.m^{-3}$

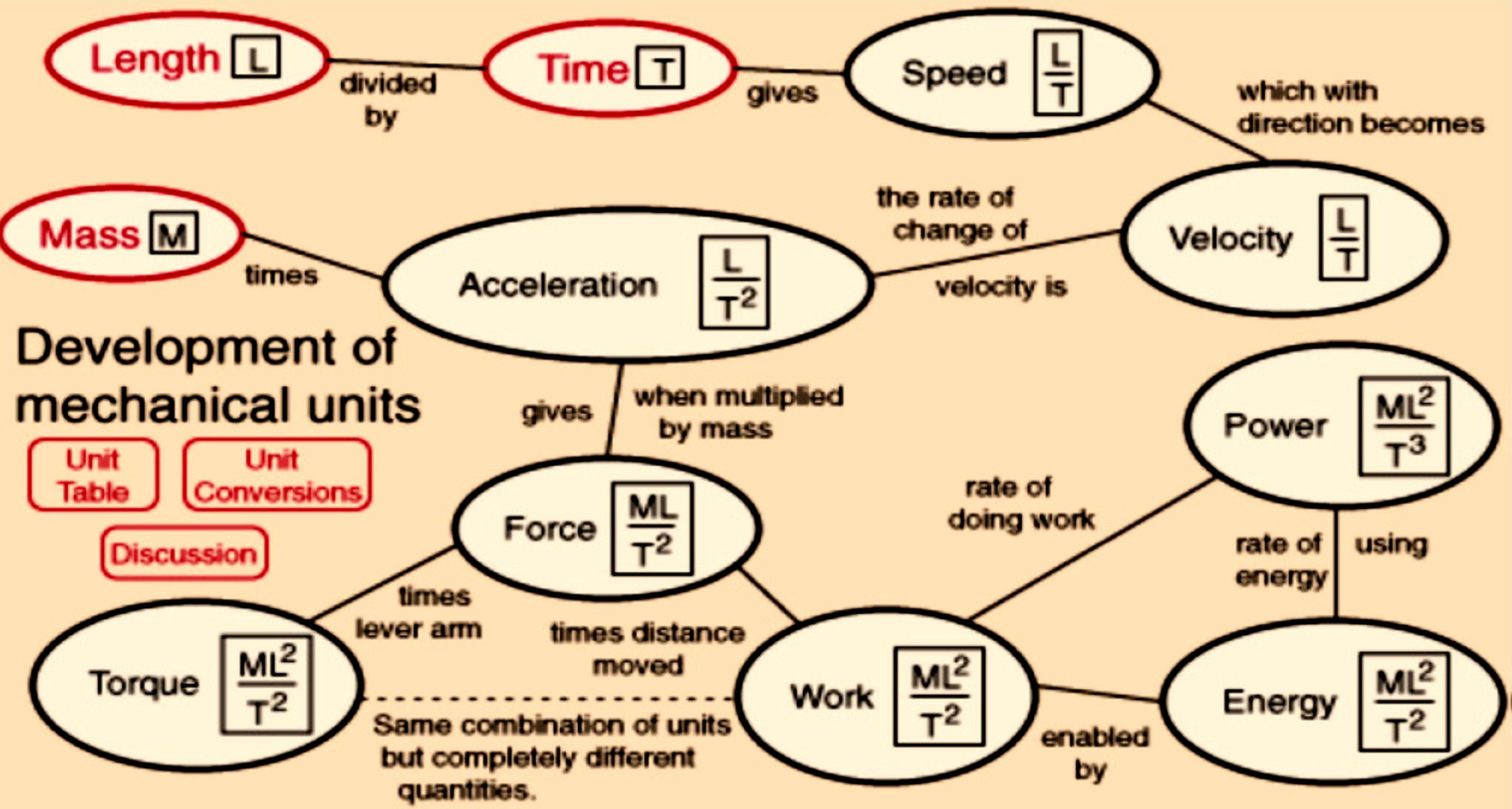
Unités mécaniques de bases (1)

Basic Mechanical Units

	SI Units (MKS)	(CGS)	U.S. Common
Length (L)	meter (m)	centimeter (cm)	foot (ft)
Time (T)	second (s)	second (s)	second (s)
Mass (M)	kilogram (kg)	gram (gm)	slug
Velocity (L/T)	m/s	cm/s	ft/s
Acceleration (L/T^2)	m/s^2	cm/s^2	ft/s^2
Force (ML/T^2)	kg m/s^2=Newton(N)	gm cm/s^2= dyne	slug ft/s^2=pound(lb)
Work (ML^2/T^2)	N m = joule (j)	dyne cm = erg	lb ft = ft lb
Energy (ML^2/T^2)	joule	erg	ft lb
Power (ML^2/T^3)	j/s = watt (W)	erg/s	ft lb/s

All mechanical quantities can be expressed in terms of these three quantities (L, T and M)

Unités mécaniques de bases (2)



Exercices (1)

1) On exprime la vitesse d'un corps par l' équation $\boldsymbol{v = At^3 - Bt}$ où t représente le temps. Quelles sont les unités de A et B ?

2) Donnez les unités SI des coefficients A, B et C dans l' équation suivante : $\boldsymbol{v = At^2 - Bt + \sqrt{C}}$, $\boldsymbol{v}$ est une vitesse et t un temps.

3) 3 étudiants établissent les équations suivantes dans lesquelles x désigne la distance parcourue (m), a l' accélération $(m.s^{-2})$ et t le temps.

$(a)\ x = vt^2$ $\quad (b)\ x = v_0t^2 + \frac{1}{2}at^2$ $\quad (c)\ x = v_0t + 2at^2$

Parmi ces équations, lesquelles sont possibles?

Exercices (2)

4) Parmi ces 3 équations laquelle représente la formule de l'effet Doppler

$$(1)\ \lambda' = \frac{v}{c}\lambda_0 \qquad (2)\ \lambda' = \lambda_0(c - v) \qquad (3)\ \lambda' = \lambda_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

5) On considère le cas du pendule simple où $\omega = f(\mathrm{g}, \ell, m)$ tel que $\omega = C\, m^{\alpha} \ell^{\beta} \mathrm{g}^{\gamma}$. C est une constance, g la pesanteur, m la masse et ℓ la longueur.

Déterminer l'expression de la pulsation ω.