TD M6 : Mécanique des systèmes et des solides

Questions de cours à savoir refaire

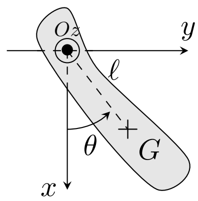
Systèmes de points, solides et théorème de la résultante cinétique (TRC)

Définir le centre d'inertie d'un système de points ou d'un solide. Résultante des forces intérieures et extérieures et théorème de la résultante cinétique.

Moments, actions extérieures et théorème du moment cinétique (TMC)

Définir le moment cinétique d'un système de points ou d'un solide. Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et moment d'inertie. Moment des actions intérieures et extérieures et théorème du moment cinétique. Actions extérieures et couples : liaison pivot parfaite, moment du poids, couple de torsion, couple moteur ou résistant, couple de frottement fluide.

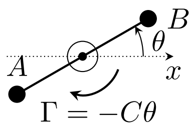
1 Pendule pesant



On considère un solide $\mathcal{S}$, de masse m, mobile autour d'un axe horizontal fixe (Oz) dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{u_x}$. On note G son centre d'inertie, J_z son moment d'inertie selon (Oz), θ l'angle $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OG})$ et ℓ la distance entre l'axe et son centre d'inertie. La liaison entre le solide et le référentiel est pivot parfaite.

1. Effectuer le bilan des actions extérieures puis établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.
2. La résoudre pour de petites oscillations ($\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = \omega_i$).
3. Dans le cas général, établir une intégrale première du mouvement (correspondant à l'énergie mécanique).
4. Donner l'expression de l'énergie potentielle du pendule en fonction de m, g, ℓ et de l'angle θ.
5. Tracer son allure et discuter des positions d'équilibre et des différents types de mouvements possibles.
6. Le pendule est lancé d'un angle initial θ_0 avec une vitesse angulaire ω_i. À quelle condition sur ω_i le pendule se trouve-t-il dans un état libre ?

2 Pendule de torsion



On considère un pendule de torsion constitué d'un fil métallique confondu avec l'axe (Oz) relié à une barre homogène AB de moment d'inertie J_{Oz}, initialement confondue avec l'axe (Ox). L'action du fil sur la barre est un couple de torsion de constante de rappel C.

1. Que dire de l'action du poids si le champ de pesanteur vaut $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$?
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle de torsion θ et la résoudre ($\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = \omega_i$).
3. Dans le cas général, établir une intégrale première du mouvement correspondant à l'énergie mécanique.

3 Disque en liaison pivot

On considère un disque homogène de masse m, de rayon R et d'axe (Ox) horizontal, en liaison pivot autour de ce même axe (ex : roue de vélo). Il est initialement lancé à la vitesse angulaire ω_0. On note $J_x = \frac{1}{2}mR^2$ son moment d'inertie selon (Ox). Le champ de pesanteur est vertical $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$.

1. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse de rotation si la liaison pivot est parfaite.
2. Même question si la liaison pivot, imparfaite, oppose un couple résistant de moment $\Gamma_z = -\Gamma_0 < 0$.
3. Même question si la liaison pivot oppose un couple de frottements de moment $\Gamma_z = -\alpha\omega < 0$.

Approche énergétique et TEC

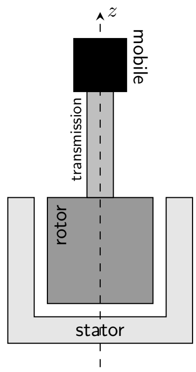
Énergie cinétique d'un système ou d'un solide. Travail des actions intérieures et extérieures. Cas d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe : énergie cinétique et puissance des actions extérieures. Théorème de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique. Énergie potentielle du poids.

4 Tabouret d'inertie

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner sans frottements autour d'un axe vertical (Oz). La personne se met en rotation, les bras repliés sur elle-même (état 1), à la vitesse angulaire ω_1. On peut l'assimiler à un solide dont le moment d'inertie autour de l'axe (Oz) vaut J_1. Ensuite, elle détend les bras (état 2, de moment d'inertie J_2) et on observe que sa rotation se fait à une vitesse angulaire différente ω_2.

1. Montrer que le moment cinétique est conservé et en déduire une relation simple entre les moments d'inertie et les vitesses de rotation dans les deux états.
2. On observe que $\omega_1 > \omega_2$. Pouvait-on s'attendre au sens d'évolution du moment d'inertie ?
3. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme bilan entre les deux états. À quel travail correspond cette variation ? D'où provient-il ?

5 Étude dynamique d'un moteur



On considère une machine comportant une pièce tournante, par ex une perceuse. Cette pièce est entrainée en rotation par la partie mobile du moteur, le **rotor**, dont le mouvement est transmis par un **arbre de transmission**. Pour simplifier, on supposera que l'ensemble {rotor + partie tournante} forme un solide indéformable en rotation autour de l'axe (Oz) et on note J_z son moment d'inertie autour de cet axe. La partie fixe du moteur, le **stator**, entraine le rotor en exerçant un couple moteur $\Gamma_m > 0$ constant autour de (Oz) (on ne s'intéresse pas au dispositif qui maintient le stator fixe). On suppose que la liaison entre le rotor et le stator est pivot parfaite et on note ω la vitesse angulaire. Hormis cette liaison, on suppose que le rotor est plongé dans un bain d'huile dont l'action se ramène à une couple de frottement $\Gamma_f = -\alpha\omega$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire ω lorsque la machine fonctionne à vide (pas d'action extérieure sur la pièce tournante) puis la résoudre en supposant $\omega(t = 0) = 0$. Quelle vitesse angulaire maximale atteint-on ?

On utilise désormais la machine pour percer un trou. L'action extérieure du mur sur la pièce mobile est modélisée par un couple résistant $\Gamma_{\text{ext}} < 0$.

2. Déterminer puis commenter la nouvelle valeur obtenue pour la vitesse angulaire finale.
3. On définit le rendement énergétique du moteur par la relation $\eta = \dfrac{\mathcal{P}_{\text{utile}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie}}}$. Établir les expressions des différentes puissances en régime permanent et montrer que le rendement est inférieur à 1.

Exercices

6 Effondrement du Soleil (*)

On pense qu'à la fin de sa vie actuelle (dans environ 5 milliards d'années), le Soleil s'effondrera sur lui-même pour former une naine blanche, astre de très forte densité.

1. Montrer que le moment cinétique scalaire du Soleil par rapport à son axe de rotation sera conservé au cours de cet effondrement.
2. Évaluer les moments d'inertie du Soleil et de la naine blanche sachant qu'ils ont une même masse $m = 2.10^{30}$ kg, que $R_S = 7.10^5$ km, $R_{nb} = 7.10^3$ km et que le moment d'inertie d'une boule homogène autour d'un de ses diamètres vaut $J = \frac{2}{5}mR^2$.
3. Sachant que la période de rotation du Soleil sur lui-même vaut $T \simeq 1$ mois, déterminer la vitesse de rotation de la naine blanche.

7 Collision entre deux masses (**)

Deux masse m_1 et m_2 se percutent frontalement, chacune possédant initialement une vitesse de même norme $v_0 = 30$ km/h. Après la collision, elles restent encastrées : on parle de choc inélastique. On néglige les frottements du sol sur les roues.

1. En utilisant le TRC projeté dans une direction pertinente, déterminer la vitesse finale du système.

2. À l'aide du TEC bilan, calculer le travail des actions intérieures lors du choc. Commenter son signe.

On suppose désormais que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique des deux masses est conservée, et que l'une des boules est initialement au repos.

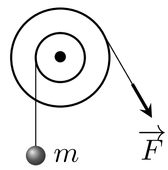
1. Déterminer, en fonction de m_1, m_2 et v_1, l'expression des projections v_1' et v_2' des vitesses après collision.
2. Que se passe-t-il si $m_1 \gg m_2$? À l'inverse, à quelle condition peut-on faire un "carreau".

8 Barre posée sur deux rondins (**)

Une barre homogène, de longueur 2ℓ et de masse m est posée en équilibre horizontal sur deux rondins. Les contacts ont lieu en A_1, situé à une distance x_1 du centre C de la barre, et A_2 situé à x_2.

1. À l'aide du TRC et du TMC, calculer les composantes verticales des réactions exercées en A_1 et A_2 par les rondins sur la barre. À quelle condition sur x_1 et x_2 ces deux composantes sont-elles égales ?
2. On applique une force constante $\overrightarrow{F} = -F\,\overrightarrow{u_z}$ verticale à une extrémité de la barre. À quelle condition sur sa norme cette force parvient-elle à faire décoller l'un des deux contacts ?

9 Étude d'un treuil (*)



Deux fils sont enroulés autour d'un treuil à deux cylindres de rayons $r_1 = 5,0$ cm et $r_2 = 8,0$ cm. L'un des filins est attaché à une charge de masse $m = 1,0$ kg que l'on souhaite soulever en exerçant sur l'autre une force $\overrightarrow{F}$. Le moment d'inertie du treuil par rapport à l'axe de rotation Δ vaut $J = 5,0.10^{-3}$ kg.m^2. Initialement, la masse est au repos, posée au sol. On note $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ l'accélération de pesanteur.

1. Quelle est l'intensité minimale de la force pour que la masse se soulève ? Comparer à l'intensité qu'il faudrait déployer pour le soulever en tirant verticalement.

L'opérateur tire avec une force d'intensité $F = 8,0$ N.

2. Quelle est l'énergie potentielle acquise par la masse lorsqu'on la soulève d'une hauteur $h = 1,0$ m. Comparer au travail de la force $\overrightarrow{F}$ au cours du mouvement. Sous quelle forme se trouve l'énergie manquante ?
3. Exprimer l'énergie cinétique du système en fonction dela vitesse v de la masse et de la vitesse angulaire ω du treuil puis en déduire la vitesse v_f de la masse lorsqu'elle atteint la hauteur h.

10 Réaction d'un axe et intérêt de l'équilibrage statique (*)

Un disque non homogène de centre O, de masse m et de rayon R, est en liaison pivot parfaite autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire initiale ω_0. Le centre d'inertie du disque, noté G, est tel que $OG = d$. On note J_{Oz} le moment d'inertie du disque. L'accélération de pesanteur est verticale descendante $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$.

1. Que dire de la vitesse angulaire $\omega(t)$?
2. À l'aide du TRC, établir l'expression de la réaction $\overrightarrow{R}$ de l'axe sur le disque. On suppose que la coordonnée polaire du centre d'inertie vaut initialement $\theta = 0$.
3. Pourquoi a-t-on intérêt à diminuer d lors de rotations rapides ?

11 Chute d'un arbre (**)

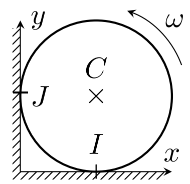
On assimile un arbre à une tige homogène de masse m et de longueur L. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui sur le sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5\,^\circ$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son extrémité : $J = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Établir l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$.
3. En ré-écrivant la relation précédente $\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$, déterminer le temps de chute d'un arbre de 30m de long. On prendra $g = 10$m.s^{-2}. On donne, pour $\theta_0 = 5°$, $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1$.

12 Cylindre coincé (***)

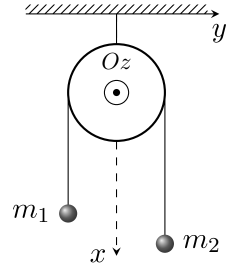
Un cylindre homogène de centre C, de masse m, de rayon a et de moment d'inertie $J = ma^2/2$ par rapport à son axe (Cz), tourne coincé dans un coin avec une vitesse angulaire initiale ω_0. On note μ le coefficient de frottements de glissement entre le cylindre et les parois. Le cylindre est supposé rester en contact avec le sol (plan Oxz) et un mur vertical (plan Oyz). On note $\overrightarrow{R}$ la réaction du sol sur le cylindre et $\overrightarrow{R}'$ celle du mur.



1. D'après les loi de COULOMB, que peut-on dire des composantes tangentielles de $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{R}'$ dans le cas où le cylindre glisse ?
2. En appliquant les théorèmes de la dynamique au cylindre, trouver une équation satisfaite par la vitesse angulaire $\omega(t)$. Quand le cylindre s'arrête-t-il de tourner ?

13 La machine d'Atwood (**)

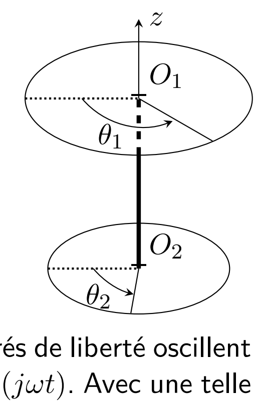
Deux masses m_1 et $m_2 > m_1$ sont reliées par un fil passant sur une poulie homogène de rayon R dont le moment d'inertie par rapport à son axe de rotation (Oz) est J. La poulie est reliée à un bâti immobile par une liaison pivot parfaite. Le fil est sans masse, inextensible (sans raideur) et il ne glisse pas sur la poulie. On va étudier le mouvement des deux masses dans le champ de pesanteur.



1. Sachant que le fil ne s'allonge pas, déterminer la relation entre les vitesses $\dot{x_1}$ et $\dot{x_2}$ des masses.
2. Sachant que le fil ne glisse pas sur la poulie, donner le lien géométrique entre $\dot{x_2}$, R et ω, vitesse angulaire de la poulie.
3. Sachant que le fil n'a pas de masse, appliquer le TMC au système {poulie+fil} et établir une relation entre J, R, ω et les tensions T_1 et T_2 (il faudra utiliser le principe des actions réciproques). Que remarque-t-on d'utile si l'on suppose que $J = 0$ ou $\dot{\omega} \ll 1$?
4. En appliquant le PFD à chaque masse et en utilisant les questions précédentes, établir l'expression de $\ddot{x_2}$ en fonction des données du problème.
5. En remarquant que le système est non-dissipatif, déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale du système et établir l'expression de $\ddot{x_2}$ à l'aide du TEM.

14 Disques couplés par torsion (***)

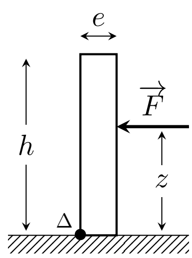
Deux disques sont libres en rotation autour de l'axe (Oz). Leurs moments d'inertie par rapport à cet axe valent respectivement J_1 et J_2. Ils sont liés par un fil de torsion de constante C, c'est-à-dire que l'action exercée par l'un sur l'autre est un couple, de valeur proportionnelle à l'écart entre les angles θ_1 et θ_2 que font les disques par rapport à l'axe (Ox). À l'instant initial, les deux disques sont immobiles, dans les positions $\theta_{1,0}$ et $\theta_{2,0} = 0$.



1. Établir le système d'équations différentielles couplées vérifiées par θ_1 et θ_2.
2. Résoudre explicitement leur évolution au cours du temps en découplant les équations. Quelles sont les pulsations propres des oscillations libres du système ?
3. Par définition, on obtient les pulsations propres d'un système en imposant que tous les degrés de liberté oscillent à la même pulsation, c'est-à-dire que l'on cherche des solutions de la forme $\underline{\theta_i}(t) = \underline{A_i}\exp(j\omega t)$. Avec une telle modélisation, retrouve-t-on un résultat cohérent avec la question précédente ?

15 Basculement d'un pavé (**)

On considère un pavé homogène, de hauteur h, d'épaisseur e, de masse m, posé sur un sol vertical. On note μ le coefficient de frottements avec le sol. On pousse avec une force $\overrightarrow{F}$ horizontale à une hauteur z. On note Δ l'arête autour de laquelle va pivoter le pavé.



1. À quelle condition sur z et F le pavé commence-t-il à basculer autour de Δ ?
   Où faut-il pousser pour que la force soit minimale.
2. À partir de quelle valeur du rapport e/h le pavé glisse toujours avant de basculer ?