

**CNC corrigé
2000-2008
physique-chimie
MP**

par : AIT BENALI

physique I

1^{er} problème :
Étude de quelques aspects mécaniques d'une roue de voiture

1^{ère} partie :
Équilibrage d'une roue de voiture

Lorsqu'une roue de voiture possède des défauts de répartition de masse, elle présente alors un défaut d'équilibrage qui se traduit par des vibrations parasites que nous nous proposons d'étudier. Une roue parfaite complète de voiture - jante et pneumatique - est modélisée (figure 1) par un cylindre de section circulaire d'axe $O'X$, de rayon R , d'épaisseur $2e < R$ et de masse M . Lorsque la roue est parfaite, la répartition des masses possède la symétrie cylindrique d'axe $O'X$. L'utilisation du véhicule sur des routes difficiles peut déformer la roue et détruire la symétrie cylindrique en changeant la répartition des masses. Nous modélisons la roue déformée en supposant qu'elle se compose :

- d'une roue parfaite complète R de centre d'inertie O' , d'axe $O'X$, de rayon R , d'épaisseur $2e < R$ et de masse $m = M - \Delta m$;
- d'une masse Δm supposée ponctuelle, placée en un point A de la périphérie de la roue, sur sa face extérieure.

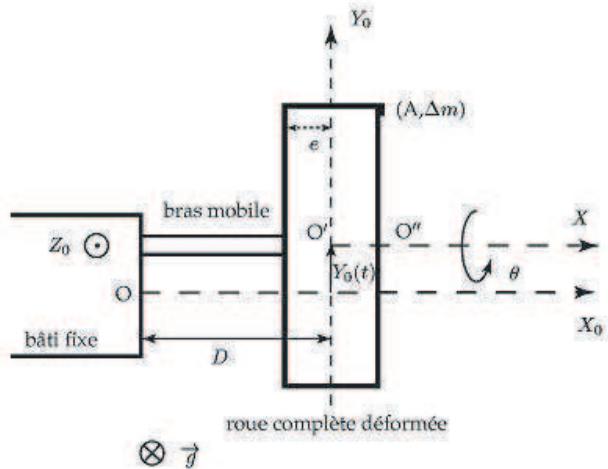


Fig 1 : Roue complète déformée montée sur l'équilibrage - vue de coupe

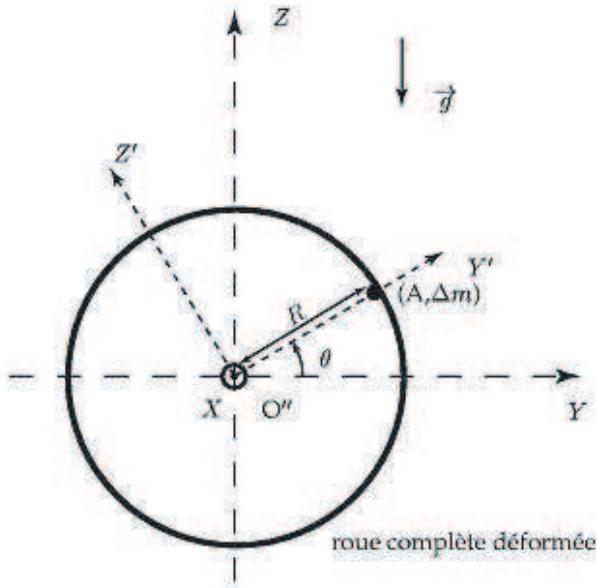


Fig 2 : Roue complète déformée montée sur l'équilibreur - vue de face

Pour étudier la déformation de la roue et les vibrations parasites qu'elle entraîne, on la place sur un appareil de mesure appelé équilibreur. Ce dispositif se compose d'un bâti fixe et d'un bras mobile. On note (O, X_0, Y_0, Z_0) un repère fixe du référentiel (R_0) , du laboratoire, supposé galiléen. On munit ce repère de la base cartésienne $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ habituelle.

On note (O', X, Y, Z) un repère fixe du référentiel (R) constitué par le bras mobile. Le bras peut seulement effectuer un mouvement de translation rectiligne de faible amplitude, sans frottement, parallèlement à l'axe OY_0 et reste toujours dans le plan (OX_0Y_0) (figure 1).

On note (O'', X', Y', Z') un repère fixe du référentiel (R') constitué par la roue complète déformée. La roue est reliée au bras par une liaison pivot parfaite et effectue un mouvement de rotation d'angle θ par rapport à l'axe OX (figure 2). La roue reste toujours dans le plan (OY_0Z_0) .

Le défaut ponctuel $(A, \Delta m)$ est placé à la périphérie de la roue parfaite complète, sur sa face extérieure.

On négligera la masse et l'influence des parties mobiles de l'équilibreur devant celles de la roue complète.

On pose $D > 0$ la distance du point O au plan $(O'Y Z)$. Le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme et dirigé selon la verticale descendante du lieu.

Les angles seront comptés positivement dans le sens trigonométrique.

1.1 Étude cinétique

On notera $X_0(t)$, $Y_0(t)$ et $Z_0(t)$ les coordonnées de O' relativement à (O, X_0, Y_0, Z_0) .

On exprimera **impérativement** les composantes de tous les vecteurs dans la base $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$.

On rappelle l'expression du moment d'inertie $I_{\Delta x}$ d'un cylindre de révolution homogène de section circulaire de rayon R , de masse m et d'axe de révolution Δx :

$$I_{\Delta x} = \frac{1}{2}mR^2$$

1.1.1 Exprimer les composantes du vecteur position $\overrightarrow{O'A}$ sur la base $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ en fonction de e , R , θ .

- 1.1.2** Soit G le centre d'inertie de la roue complète déformée. Exprimer les composantes du vecteur \overrightarrow{OG} sur la base $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ en fonction de m, Δm , e, R, et θ .
- 1.1.3** Déterminer les composantes de ${}^R\vec{v}_A$, vecteur vitesse du défaut ponctuel (A, Δm) par rapport au référentiel (R) lié au bras mobile.
- 1.1.4** Exprimer les composantes de ${}^R\vec{\sigma}_A(O')$, moment cinétique de (A, Δm) au point O' par rapport au référentiel (R).
- 1.1.5** Rappeler la définition du référentiel barycentrique (R*). Quel est le référentiel barycentrique de la roue parfaite ?
- 1.1.6** Énoncer le théorème de KÖNIG relatif au moment cinétique.
- 1.1.7** Exprimer les composantes de ${}^R\vec{\sigma}_R(O')$, moment cinétique de la roue complète parfaite au point O' par rapport au référentiel (R), en fonction de m, R, et $\dot{\theta} = d\theta/dt$
- 1.1.8** D'après les questions précédentes, déterminer les composantes de ${}^R\vec{\sigma}(O')$ le moment cinétique de la roue complète déformée au point O' par rapport au référentiel (R).

1.2 Étude dynamique

On suppose que le bâti exerce sur le bras mobile une réaction \vec{R} de composantes (R_{X0}, R_{Y0}, R_{Z0}) dans la base $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$.

La roue complète déformée est fixée sur le bras par l'intermédiaire d'une liaison pivot **parfaite** qui exerce sur la roue un effort de moment \vec{C} dont les composantes sont données par (C_{X0}, C_{Y0}, C_{Z0}) dans la base $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$.

D'autre part on suppose qu'un dispositif annexe, que l'on n'étudiera pas, exerce sur la roue un couple de moment $\vec{\Gamma} = \Gamma(t)\vec{I}_0$ qui permet de maintenir la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la roue *constante*. On notera $\omega = \dot{\theta}$ cette vitesse angulaire ou pulsation constante dans toute la suite du problème.

- 1.2.1** Le mouvement de translation du bras se faisant sans frottement, que vaut R_{Y0} ?
- 1.2.2** Rappeler la définition d'une liaison pivot parfaite d'axe O'X. Que vaut C_{X0} dans ce cas ?
- 1.2.3** Rappeler l'énoncé du théorème du centre d'inertie.
- 1.2.4** Rappeler l'énoncé du théorème du moment cinétique en un point fixe d'un référentiel galiléen (R_0). Que devient ce théorème si le référentiel n'est pas galiléen ?
- 1.2.5** Effectuer dans le référentiel (R) le bilan des forces qui s'appliquent sur le système composé de la roue complète déformée.
- 1.2.6** Appliquer le théorème du centre d'inertie par rapport au référentiel (R), au système composé de la roue complète déformée et du bras mobile.
- 1.2.7** En déduire que $Y_0(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R \omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (1)$$

On donne pour toute la suite du problème les conditions initiales suivantes : $\theta_0 = 0$, $Y_0(0) = 0$ et $\dot{Y}_0(0) = 0$.

- 1.2.8** Appliquer le théorème du moment cinétique au système composé de la roue complète déformée, au point O' et par rapport au référentiel (R).
- 1.2.9** Montrer qu'en toute rigueur, le bras mobile décrit des oscillations selon OY_0 à la pulsation ω constante si le couple $\Gamma(t)$ obéit à une relation que l'on donnera en fonction de R, Δm , m, g, ω et t.

1.3 Applications

1.3.1 Déduire de la relation (1) la nature du mouvement de l'ensemble bras mobile + roue complète dans le plan (OX_0Y_0). On donnera en particulier l'expression de l'amplitude Y_{0max} en fonction des données du problème.

1.3.2 En réalité le mouvement du bras mobile dans le plan (OX_0Y_0) est un mouvement de rotation d'angle φ autour de OZ_0 de très faible amplitude, assimilable au mouvement de translation selon OY_0 que nous avons étudié. En utilisant les résultats précédents, exprimer φ_{max} en fonction de Y_{0max} et D.

1.3.3 Que valent Y_{0max} et φ_{max} pour une roue complète parfaite ?

1.3.4 Comment Y_{0max} et φ_{max} varient-ils avec Δm ?

1.3.5 On suppose qu'une voiture équipée d'une roue déformée présentant un défaut d'équilibrage se déplace en ligne droite à vitesse constante. Le volant du véhicule est fixé sur l'axe OZ_0 . Comment le défaut d'équilibrage peut-il être ressenti par le conducteur ?

On suppose que la roue déformée présente un défaut d'équilibrage (A, Δm) externe, à la périphérie de la roue complète, comme indiqué sur la figure 1.

1.3.6 Montrer en faisant un minimum de calculs que l'on peut remédier à ce défaut en plaçant une masse supplémentaire Δm en un endroit bien précis de la roue complète que l'on déterminera.

2^{ème} partie : Modélisation d'une suspension d'automobile

Nous abordons dans cette partie une modélisation élémentaire de la suspension d'une roue complète de voiture. Cette roue est supposée parfaite (pas de défaut d'équilibrage). On suppose que le véhicule est équipé de quatre suspensions identiques, que l'on modélise comme indiqué sur la figure 3.

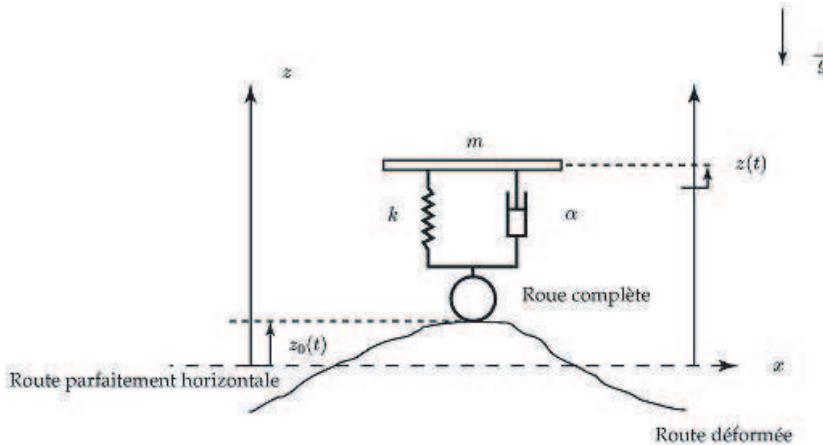


Fig 3 : Suspension
d'une roue de voiture

Chaque suspension est composée d'une part d'un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 . D'autre part un amortisseur fluide à huile de coefficient d'amortissement α permet d'atténuer d'éventuelles oscillations. On rappelle qu'un amortisseur fluide du type représenté sur la figure 3 exerce sur chacune de ses extrémités une force dissipatrice proportionnelle à la vitesse relative d'une de ses extrémités par rapport à l'autre. D'autre part le coefficient α est d'autant plus grand que le fluide utilisé est visqueux. Ainsi $\alpha_{huile} \gg \alpha_{air}$ par exemple.

Cet ensemble {ressort + amortisseur} est relié au véhicule (châssis) et à la roue complète parfaite par des articulations supposées elles aussi parfaites. On ne s'intéressera dans ce problème qu'aux mouvements verticaux du châssis, selon l'axe Oz ascendant.

La masse du véhicule dans les conditions de l'étude (avec passagers) est $m' = 4m$. On néglige la masse de l'ensemble {ressort + amortisseur} devant la masse $m = m'/4$ du quart de châssis représenté sur la figure 3.

Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On travaillera dans le repère $(0, x, y, z)$ muni de la base cartésienne habituelle $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. La variable $z(t)$ représente l'écart de position du châssis par rapport à sa position lorsqu'il n'y a aucun mouvement vertical. La variable $z_0(t)$ représente le profil de la route, c'est à dire l'écart de celle-ci par rapport à l'horizontale choisie comme niveau de référence.

Par conséquent, lorsque la route est parfaitement horizontale et le mouvement stabilisé, on a $z(t) = 0$ et $z_0(t) = 0$.

2.1 Équation différentielle

On suppose tout d'abord que le véhicule est au repos sur une route parfaitement horizontale. La longueur de chaque ressort est alors ℓ_0 .

2.1.1 Déterminer l'expression de $\Delta\ell_0 = L_0 - \ell_0$ en fonction des données du problème.

On suppose maintenant que le véhicule est en mouvement sur une route rectiligne de profil quelconque.

2.1.2 Faire un bilan des forces exercées sur la masse m qui représente un quart du châssis. On exprimera les différentes forces en fonction des données du problème.

2.1.3 Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = f(t) \quad (2)$$

avec $f(t)$ une fonction du temps dont on donnera l'expression en fonction de $z_0(t)$, $\dot{z}_0(t)$ et d'autres données du problème.

2.1.4 Mettre l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$z + 2\frac{\beta}{\omega_0}\dot{z} + \frac{1}{\omega_0^2}\ddot{z} = G(t) \quad (3)$$

Exprimer la pulsation propre ω_0 et le coefficient β en fonction des données. Pourquoi appelle-t-on β coefficient d'amortissement ou coefficient d'amortissement réduit ?

2.2 Réponse indicelle

On suppose que le véhicule suit une trajectoire rectiligne selon Ox à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{I}$ dans la base cartésienne habituelle $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ avec $v_0 > 0$. Le conducteur peu attentif monte de face sur un trottoir dont le profil est représenté sur la figure 4.

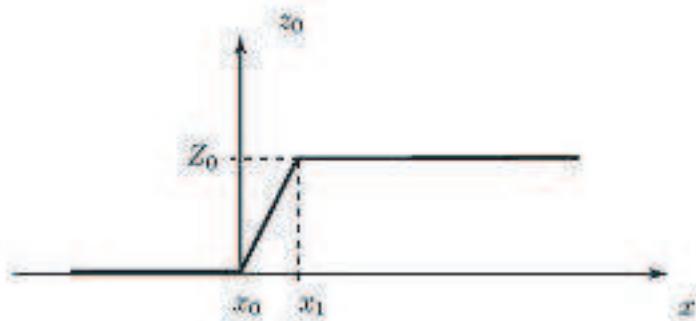


Fig 4 : Profil de route

On suppose que le mouvement selon Ox reste rectiligne uniforme même pendant le passage de l'obstacle et que la roue reste toujours en contact avec la route.

2.2.1 Représenter graphiquement sur la copie le profil de la route $z_0 = z_0(t)$ en fonction du temps. On posera $\varepsilon = (x_l - x_0)/v_0$ et on prendra $t = 0$ pour $x = x_0$.

2.2.2 Donner les équations horaires de $z_0(t)$ pour les instants t tels que $t \in [0, \varepsilon]$ et pour $t \in [\varepsilon, +\infty[$.

On donne pour toute la suite de cette partie $\alpha = 10^4 SI$, $k = 40 \cdot 10^3 SI$, $x_l - x_0 = 1 cm$, $m = 400 kg$, $Z_0 = 10 cm$ et $v_0 = 10 m.s^{-1}$.

2.2.3 Quelles sont les unités de k et α dans le système international ? Déterminer numériquement les valeurs de ω_0 et β .

2.2.4 Montrer que pour les instants t appartenant à $[0, \varepsilon]$, on peut supposer en bonne approximation que la fonction $G(t)$ du second membre de l'équation différentielle (3) est constante.

2.2.5 D'après la question précédente, donner l'expression de $G(t)$ et résoudre l'équation différentielle (3) pour les instants t appartenant à $[0, \varepsilon]$. On mettra $z(t)$ sous la forme :

$$z(t) = A \exp r_1 t + B \exp r_2 t + C$$

avec $r_2 > r_1$. Donner les expressions de r_1 et r_2 en fonction de β et β ainsi que l'expression de C en fonction des données du problème.

2.2.6 On donne les conditions initiales suivantes en $t = 0$: $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$. On admet sans calcul que les valeurs numériques des données du problème sont telles que $|\varepsilon r_1| \ll 1$ et $|\varepsilon r_2| \ll 1$. Montrer que $z(\varepsilon)$ est nul à l'ordre zéro en ε alors que $\dot{z}(\varepsilon)$ ne l'est pas. On prendra aussi désormais pour la suite $\dot{z}(\varepsilon) \approx 0$.

2.2.7 Résoudre l'équation différentielle (3) pour les instants t appartenant à $[\varepsilon, \infty]$. On exprimera les constantes d'intégration A' et B' en fonction des données du problème.

2.2.8 Rappeler l'expression de β en fonction de α , m et k . Représenter sur la copie l'allure de $z(t)$ pour $\beta > 1$ puis pour $\beta < 1$.

Lorsque le véhicule est neuf, les caractéristiques physiques α et k de la suspension sont telles que $\beta > 1$ pour un bon confort et une meilleure sécurité des usagers. En vieillissant, les amortisseurs fluides se dégradent et l'huile peut devenir moins visqueuse ou être remplacée en partie par de l'air.

2.2.9 Quelle est la conséquence de ce vieillissement sur le facteur d'amortissement β ? Quelle peut en être la conséquence sur le confort des usagers lorsque le véhicule rencontre un obstacle sur la route ?

2.2.10 Il arrive que des automobilistes imprudents dépassent la charge maximale autorisée pour leur véhicule aux suspensions déjà usées. Quelles peuvent être les conséquences sur la sécurité ?

2.3 Réponse harmonique

On suppose cette fois que le profil de la route est de la forme :

$$z_0(t) = Z_0 \cos \omega t$$

Le véhicule se déplace toujours en **ligne droite** selon Ox avec une vitesse moyenne constante : $\vec{v} = v \vec{I}$ avec $v > 0$. On adoptera la notation complexe habituelle :

$$z(t) = \underline{Z} \exp i\omega t$$

2.3.1 Établir l'expression de la fonction de transfert harmonique $H(i\omega) = \underline{Z}/\underline{Z}_0$ de la suspension en fonction de β , ω_0 et ω . \underline{Z} et \underline{Z}_0 sont les amplitudes complexes associées respectivement à $z(t)$ et $z_0(t)$.

2.3.2 Déterminer le diagramme de BODE asymptotique du gain $G(w) = 20 \log_{10} H(\omega)$ de la suspension, avec $H(\omega) = |H(i\omega)|$ le module de la fonction de transfert, pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.

2.3.3 Représenter graphiquement sur la copie le diagramme de BODE asymptotique du gain en fonction de ω/ω_0 en représentation semi-logarithmique pour ω/ω_0 variant de 0,1 à 10. Que peut-on en déduire du comportement de $G(\omega)$?

L'usager a un bon confort de conduite si le châssis est pratiquement insensible aux ondulations de la route.

2.3.4 Exprimer la pulsation ω en fonction de la vitesse moyenne v et de λ la période spatiale des ondulations de la route.

2.3.5 Lors du rallye Paris-Dakar, les concurrents affrontent souvent des profils de route de type "tôle ondulée". Si la période spatiale d'un tel profil est $\lambda = 1,5 \text{ m}$, quelle vitesse minimum doit-on conseiller aux pilotes ?

2.3.6 Si les pilotes entrent dans une zone où le profil ondulé s'élargit, c'est à dire si λ augmente, que faut-il conseiller aux pilotes ?

2^{ème} problème :

Étude thermodynamique d'un moteur de voiture

1^{ère} partie :

Étude qualitative du cycle

Ce problème traite de quelques aspects élémentaires du fonctionnement d'un moteur thermique à combustion interne.

On raisonne sur une masse unité d'un mélange de gaz dont la nature évolue au cours d'un cycle. Pour simplifier l'analyse, on assimilera ce mélange à de l'air supposé se comporter comme un gaz parfait de capacités calorifiques massiques c_p et c_v constantes et de rapport $\gamma = c_p/c_v = 1,4$. On suit l'évolution de cette masse unité pour un cycle de fonctionnement d'un des quatre cylindres identiques du moteur.

Le volume offert au gaz dans ce cylindre varie entre la valeur maximale V_1 - piston au point mort bas - et la valeur minimale V_2 - piston au point mort haut -. On définit un taux de compression τ par $\tau = V_1/V_2 > 1$ et un rapport α des températures extrêmes du cycle par : $\alpha = T_{max}/T_{min}$.

On utilise la convention de signe habituelle de la thermodynamique.

On a représenté sur la figure 1 un cycle théorique représentant l'évolution réversible en diagramme PV de l'unité de masse de gaz dans un cylindre.

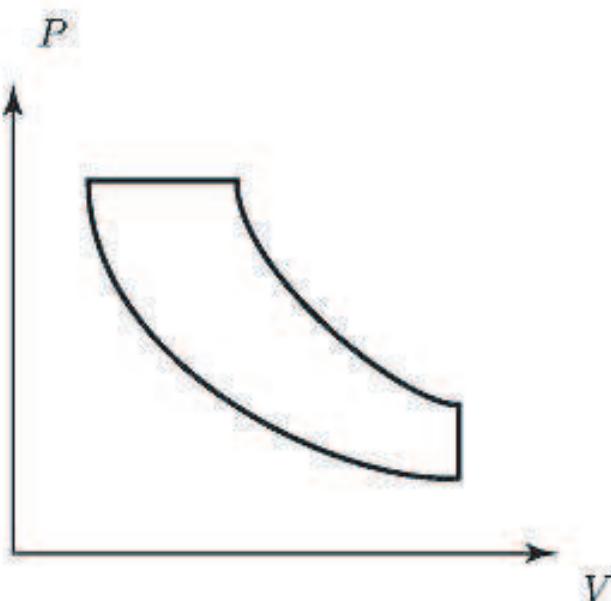


Fig 1 : Cycle réversible théorique

Les différentes étapes du cycle sont réversibles et se décomposent ainsi :

Étape A : le gaz est admis dans le cylindre à la pression atmosphérique $P_1 = 10^5 Pa$ et à la température ambiante $T_1 = 300K$ du point mort bas (point 1) ;

Étape B : le gaz est ensuite comprimé de manière adiabatique pour atteindre le point 2 à la pression P_2 , la température T_2 et le volume V_2 du point mort haut ;

Étape C : le gaz subit **une explosion** qui le détend à pression constante et élève ainsi sa température jusqu'à T_3 (point 3) ;

Étape D : le gaz subit une détente adiabatique jusqu'au point 4 de volume V_4 , de température T_4 et de pression P_4 ;

Étape E : le gaz est finalement rejeté vers l'atmosphère en terminant le cycle au point 1.

On donne les valeurs numériques suivantes pour tout le problème :

$$10^{0,4} = 2,5 ; 10^{1,4} = 25 ; 10^{-\frac{0,4}{1,4}} = \frac{1}{2} ; (10^{-0,4})^{1,4} = \frac{1}{4} ; 10^{\frac{1,4}{0,4}} = 3 \cdot 10^3 ; \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$
$$; \alpha = 10 ; \tau = 10.$$

1.1 Après avoir représenté le cycle sur la copie, indiquer par des flèches le sens de parcours moteur du cycle en justifiant ce choix.

1.2 Placer les points 1, 2, 3 et 4 sur ce cycle.

1.3 Indiquer sur le cycle les transferts thermiques positifs et négatifs.

2^{ème} partie : **Étude quantitative du cycle**

On exprimera toutes les températures en fonction de T_1 et des paramètres choisis parmi α , τ et γ uniquement.

De même **on exprimera toutes les pressions** en fonction de P_1 et des paramètres choisis parmi α , τ et γ uniquement.

2.1 Point 2

2.1.1 Déterminer l'expression littérale de la température T_2 . Calculer numériquement la température T_2 .

2.1.2 Déterminer l'expression littérale de la pression P_2 . Calculer numériquement la pression P_2 .

2.2 Point 3

2.2.1 Déterminer l'expression de α en fonction de deux températures choisies parmi T_1 , T_2 , T_3 et T_4 .

2.2.2 Déterminer l'expression littérale de la température T_3 . Calculer numériquement la température T_3 .

2.2.3 Déterminer l'expression littérale de la pression P_3 . Calculer numériquement la pression P_3 .

2.3 Point 4

2.3.1 Déterminer l'expression littérale de la température T_4 . Calculer numériquement la température T_4 .

2.3.2 Déterminer l'expression littérale de la pression P_4 . Calculer numériquement la pression P_4 .

3^{ème} partie : **Rendement d'un cycle moteur**

3.1 Rappeler la définition du rendement η d'un cycle moteur.

3.2 Rendement du cycle théorique

3.2.1 Donner l'expression de η en fonction de T_1, T_2, T_3, T_4 et γ .

3.2.2 En déduire l'expression littérale de η en fonction de α, τ et γ .

3.2.3 Calculer numériquement la valeur de η .

3.3 Cycle de Carnot

3.3.1 Rappeler la définition d'un cycle de CARNOT. Représenter sur la copie un cycle de CARNOT moteur, entre les températures extrêmes T_{min} et T_{max} , en diagramme (P, V).

3.3.2 Établir l'expression du rendement η_c du cycle moteur de CARNOT en fonction de T_{min} et T_{max} .

3.3.3 . Établir l'expression du rendement η_c d'un cycle de CARNOT moteur qui fonctionnerait entre les mêmes températures extrêmes que le cycle théorique du problème. Calculer numériquement ce rendement η_c .

3.3.4 Comparer η et η_c et conclure.

4^{ème} partie :
Prise en compte des frottements internes

En réalité les étapes B (compression adiabatique) et D (détente adiabatique) ne sont pas réversibles du fait des frottements internes du piston sur la chambre du cylindre. Elles gardent cependant leur caractère adiabatique. On suppose ici que l'irréversibilité ne modifie que les températures des points 2 et 4, tous les autres paramètres thermodynamiques gardant par ailleurs la même valeur que dans la situation réversible. Les étapes C et E sont donc toujours supposées réversibles.

On notera avec un ('') les grandeurs thermodynamiques relatives aux transformations irréversibles.

4.1 Représenter sur la copie l'allure du cycle moteur totalement réversible de la partie 1 en diagramme TS avec l'entropie S en abscisses. On appelle (TSI) cette figure. Indiquer sur cette figure (TSI) le sens de parcours du cycle et placer les points 1,2,3 et 4.

4.2 Rappeler l'énoncé du second principe de la thermodynamique.

4.3 On suppose maintenant que les étapes B et D sont irréversibles. Représenter en pointillés sur la figure (TSI) des étapes irréversibles (B') et (D') possibles. Justifier ce choix.

4.4 Comparer en le justifiant T_2 et T'_2 ainsi que T_4 et T'_4 .

4.5 On note $\beta = T'_2/T_2$ un facteur correctif dû aux frottements internes. On supposera pour simplifier que l'on a aussi $T'_4/T_4 = \beta$.

4.5.1 Exprimer le rendement η' du cycle moteur avec irréversibilités en fonction de T_1, T'_2, T_3, T'_4 et γ .

4.5.2 En déduire l'expression du rendement η' du cycle moteur avec irréversibilités en fonction de $T_1, T'_2, T_3, T_4, \beta$ et γ .

4.5.3 Montrer que $\eta' < \eta$.

4.5.4 Quel est le rôle des huiles de lubrification utilisées dans les moteurs ?

fin de l'énoncé

1^{er} problème :
Étude de quelques aspects mécaniques d'une roue de voiture

1^{ère} partie :
Équilibrage d'une roue de voiture

1.1 Étude cinétique

$$1.1.1 \quad \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O''} + \overrightarrow{O''A} = \begin{vmatrix} e & \vec{I}_0 \\ R \cos \theta & \vec{J}_0 \\ R \sin \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.2 \quad \overrightarrow{O'G} = \frac{m\overrightarrow{O'O'} + \Delta m\overrightarrow{O''A}}{m + \Delta m} = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} \begin{vmatrix} e & \vec{I}_0 \\ R \cos \theta & \vec{J}_0 \\ R \sin \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.3 \quad {}^R\vec{v}_A = \frac{d(O'\overrightarrow{O''} + O''\vec{A})}{dt/R} = R\dot{\theta} \begin{vmatrix} 0 & \vec{I}_0 \\ -\sin \theta & \vec{J}_0 \\ \cos \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.4 \quad {}^R\vec{\sigma}_A(O') = \overrightarrow{O'A} \times \Delta m {}^R\vec{v}_A = \Delta m \begin{vmatrix} e & \vec{I}_0 \\ R \cos \theta & \vec{J}_0 \\ R \sin \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix} \times R\dot{\theta} \begin{vmatrix} 0 & \vec{I}_0 \\ -\sin \theta & \vec{J}_0 \\ \cos \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R^2 \Delta m \dot{\theta} & \vec{I}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \cos \theta & \vec{J}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \sin \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

1.1.5 le référentiel barycentrique R^* d'un système par rapport à R est un référentiel d'origine G - par commodité sinon il suffit que G soit fixe dans R^* - animé d'un mouvement de translation par rapport à R

relativement à R_0 , le référentiel barycentrique de la roue parfaite de centre O' est $R(O', X, Y, Z)$

1.1.6 le moment cinétique d'un système de centre d'inertie G , de masse m , en un point P par rapport à un référentiel R s'écrit :

$$\vec{L}_{P/R} = \vec{L}^* + \overrightarrow{PG} \times m\vec{v}(G/R)$$

$$1.1.7 \quad {}^R\vec{\sigma}_R(O') = J_{O'X}\dot{\theta}\vec{I}_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta} & \vec{I}_0 \\ 0 & \vec{J}_0 \\ 0 & \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

$$1.1.8 \quad {}^R\vec{\sigma}(O') = {}^R\vec{\sigma}_R(O') + {}^R\vec{\sigma}_A(O') = \begin{vmatrix} R^2 \Delta m \dot{\theta} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta} & \vec{I}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \cos \theta & \vec{J}_0 \\ -eR \Delta m \dot{\theta} \sin \theta & \vec{K}_0 \end{vmatrix}$$

1.2 Étude dynamique

1.2.1 $R_{Y0} = 0$

1.2.2 deux solides en liaison pivot d'axe $O'X$ ne peuvent effectuer qu'un mouvement de rotation l'un par rapport à l'autre tel que $\omega(1/2) // O'X$, la liaison est parfaite s'il n'y pas de frottement entre les deux solides càd $C_X = C_{X0} = 0$

- 1.2.3** – dans un réf Galiléen : $m_{tot}\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}$
– dans un réf non Galiléen : $m_{tot}\vec{a}'(G) = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie}(G) + \vec{F}_{ic}(G)$
- 1.2.4** $\frac{d\vec{L}_O}{dt/R_0} = \vec{M}_O(ext)$ avec O fixe dans R_0
pour un réf R' non Galiléen $\frac{d\vec{L}'_O}{dt/R'} = \vec{M}_O(ext) + \vec{M}_O(I.E) + \vec{M}_O(I.E)$ avec O fixe dans R'
- 1.2.5** R est en translation rectiligne non uniforme par rapport à R_0 donc il est non Galiléen , le bilan des efforts extérieurs est alors :
- action du bras mobile réduite au couple \vec{C}
 - poids total $(m + \Delta m)\vec{g}$ s'appliquant en G
 - inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(G) = -(m + \Delta m)\vec{a}_e(G)(R/R_0) = -(m + \Delta m)\vec{a}(O'/R_0)$ s'appliquant en G (car R est en translation par rapport à R_0)
 - inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}(G) = \vec{0}$ car $\vec{\omega}(R/R_0) = \vec{0}$
 - action du dispositif imposant la rotation réduite au couple $\vec{\Gamma}(t)$
- 1.2.6** le TRD appliqué dans R non Galiléen au système
{roue complète($m + \Delta m$)+bras(masse négligeable)}
 $(m + \Delta m)\vec{a}(G/R) = \vec{R}_{bati \rightarrow bras} + (m + \Delta m)\vec{g} - (m + \Delta m)\vec{a}(O'/R_0)$
- 1.2.7** le TRD projeté sur \vec{J}_0 s'écrit donc : $(m + \Delta m)\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}(R \cos \theta)'' = -(m + \Delta m)\ddot{Y}_0(t)$
or $\dot{\theta} = \omega$ soit $\ddot{\theta} = \omega t$ et $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ d'où
- $$\ddot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$
- 1.2.8** le TMC dans R appliqué à la roue complète en O' s'écrit
 $\frac{d^R\vec{\sigma}(O')}{dt/R} = \vec{C} + \vec{\Gamma}(t) + \overrightarrow{O'G} \times (m + \Delta m)\vec{g} - \overrightarrow{O'G} \times (m + \Delta m)\vec{a}(O'/R_0)$
- 1.2.9** le TMC projeté sur \vec{I}_0 s'écrit ,tenant compte de $\theta = \omega t$:
- $$0 = \Gamma(t) - \Delta mgR \cos \theta + \Delta m^2 R \sin \theta \ddot{Y}_0(t)$$
- $$\implies \Gamma(t) = gR\Delta m \cos \omega t - \frac{(R\omega\Delta m)^2}{m + \Delta m} \cos \omega t \sin \omega t$$
- ### 1.3 Applications
- 1.3.1** (1) s'intègre une fois en $\dot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R\omega \sin \omega t + Cte$
or à $t = 0$ on a $\dot{Y}_0(0) = 0 = Cte$ soit $\dot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R\omega \sin \omega t$
qui s'intègre en $Y_0(t) = -\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R \cos \omega t + Cte'$, or à $t = 0$ on a $Y_0(0) = 0$
donc $Y_0(t) = \frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R(1 - \cos \omega t)$, mouvement oscillatoire harmonique à la pulsation ω autour de la valeur moyenne $\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R$ d'amplitude $Y_{0max} = 2\frac{\Delta m}{(m + \Delta m)}R$
- 1.3.2** $\varphi_{max} \approx \tan \varphi_{max} = \frac{Y_{0max}}{D} = \frac{2R\Delta m}{D(m + \Delta m)}$
- 1.3.3** pour une roue parfaite $\Delta m = 0$ soit $Y_{0max} = 0$ et $\varphi_{max} = 0$
- 1.3.4** $\frac{dY_{0max}}{d\Delta m} = \frac{2Rm}{(m + \Delta m)^2} > 0$ et $\frac{d\varphi_{0max}}{d\Delta m} = \frac{2Rm}{D(m + \Delta m)^2} > 0$
si $\Delta m \nearrow \implies Y_{0max} \nearrow$ et $\varphi_{0max} \nearrow$
- 1.3.5** le défaut sera ressenti comme des vibrations horizontale dans la direction de la route
- 1.3.6** la masse Δm doit être au point A' symétrique de A par rapport à O'' sur la face externe de la roue , dans ce cas on ramène G sur l'axe $O'X$
le TRD 1.2.7 s'écrit $\ddot{Y}_0(t) = 0$ d'après les conditions initiales $Y_0(t) \equiv 0$

2^{ème} partie :
Modélisation d'une suspension d'automobile

2.1 Équation différentielle

2.1.1 à l'équilibre $m\vec{g} - k(\ell_0 - L_0)\vec{K} = \vec{0}$ soit $\underline{\ell_0 = L_0 - \frac{mg}{k}}$ donc $\Delta\ell_0 = +\frac{mg}{k}$

2.1.2 bilan des forces sur $\{m\}$:

- tension du ressort $\vec{T} = -k(\ell - L_0)\vec{K} = -[(z(t) - z_0(t) + \ell_0) - L_0]\vec{K}$
- poids $\vec{P} = -mg\vec{K}$
- frottement visqueux de l'amortisseur $\vec{F} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t))\vec{K}$

2.1.3 le TRD dans R_{gal} lié à la piste projeté sur \vec{K} :

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_0 + \ell_0 - L_0) - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)$$

d'après 2.1.1 $\underline{m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = \alpha\dot{z}_0 + kz_0 = f(t)}$ (2)

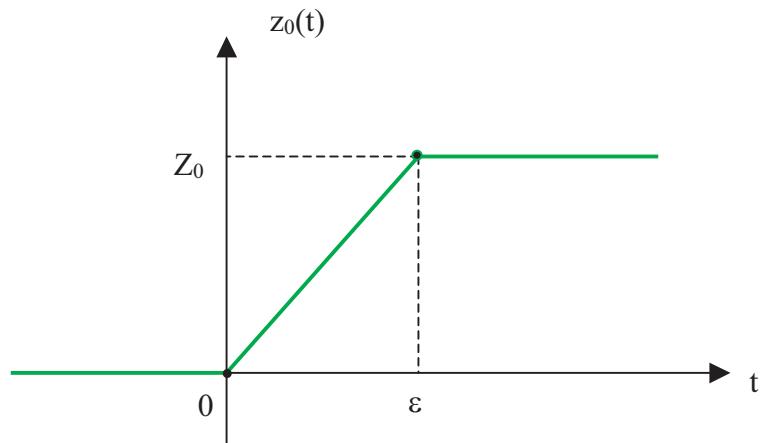
2.1.4 en divisant par k , il vient $z + \frac{\alpha}{k}\dot{z} + \frac{m}{k}\ddot{z} = \frac{\alpha}{k}\dot{z}_0 + z_0 = G(t)$

donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$

$\beta > 0$ est responsable de l'atténuation de la courbe $z(t)$ en régime libre $G(t) \equiv 0$ selon l'un des trois régimes (pseudo-périodique , critique ou apériodique)

2.2 Réponse indicielle

2.2.1 :



2.2.2 on a $\dot{x} = v_0$ qui donne $x = v_0t + x_0$ car à $t = 0$ $x = x_0$

on élimine la variable x dans l'expression de $z_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ Z_0 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} & x_0 \leq x \leq x_1 \\ Z_0 & x \geq x_1 \end{cases}$

, il vient $z_0(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ Z_0 \frac{v_0 t}{x_1-x_0} & 0 \leq t \leq \varepsilon = \frac{x_1-x_0}{v_0} \\ Z_0 & t \geq \varepsilon \end{cases}$

2.2.3 $[k] = Nm^{-1} = kgs^{-2}$ et $[\alpha] = Nm^{-1}s = kgs^{-1}$

A.N : $\omega_0 = 10 \text{ Hz}$ et $\beta = 1.25$ sans unité

2.2.4 pour $t \in [0, \varepsilon]$ on a $\underline{G(t) = \frac{\alpha}{k}\dot{z}_0(t) + z_0(t) = Z_0 \frac{v_0}{x_1-x_0} (\frac{\alpha}{k} + t)}$ A.N : $G(t) = 25 + 100t$ (mètre)

pour $t \leq \varepsilon = 0.001s$ soit $G \in [25, 25.1]$ (mètre) qui est presque constante

2.2.5 $G(t) \approx G_0 = Z_0 \frac{v_0}{x_1 - x_0} \frac{\alpha}{k}$ la solution générale de (3) s'écrit $z(t) = G_0 + A \exp r_1 t + \exp r_2 t$ avec r_1 et r_2 sont solution de l'équation caractéristique $1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}r + \frac{r^2}{\omega_0^2} = 0$ donc $\Delta' = \frac{\beta^2 - 1}{\omega_0^2}$ A.N : $\Delta > 0 \implies r = (-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})\omega_0$ soit $r_1 = (-\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})\omega_0$ et $r_2 = (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})\omega_0$ ainsi que $C = Z_0 \frac{v_0}{x_1 - x_0} \frac{\alpha}{k}$

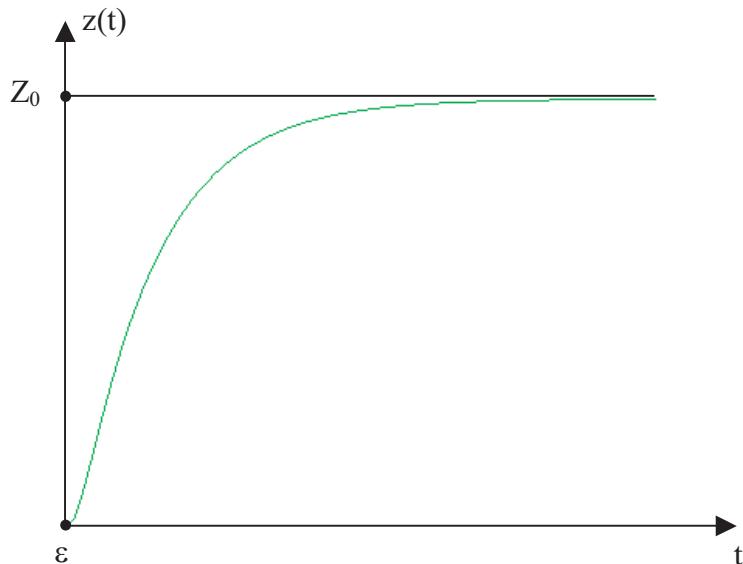
2.2.6 les conditions initiales s'explicitent par : $z(0) = A + B + C = 0$ et $\dot{z}(0) = Ar_1 + Br_2 = 0$ à l'ordre 1 (faute d'énoncé) en ε on a $z(\varepsilon) = A \exp r_1 \varepsilon + \exp r_2 \varepsilon + C \approx A \times (1 + r_1 \varepsilon) + B \times (1 + r_2 \varepsilon) + C = 0$, tandis que $\dot{z}(\varepsilon) = Ar_1 \exp r_1 \varepsilon + Br_2 \exp r_2 \varepsilon \approx Ar_1(1 + r_1 \varepsilon) + Br_2(1 + r_2 \varepsilon) = (Ar_1^2 + Br_2^2)\varepsilon$

2.2.7 les conditions initiales sont $z(\varepsilon) = 0$ et $\dot{z}(\varepsilon) = 0$ or $G(t > \varepsilon) \equiv Z_0$

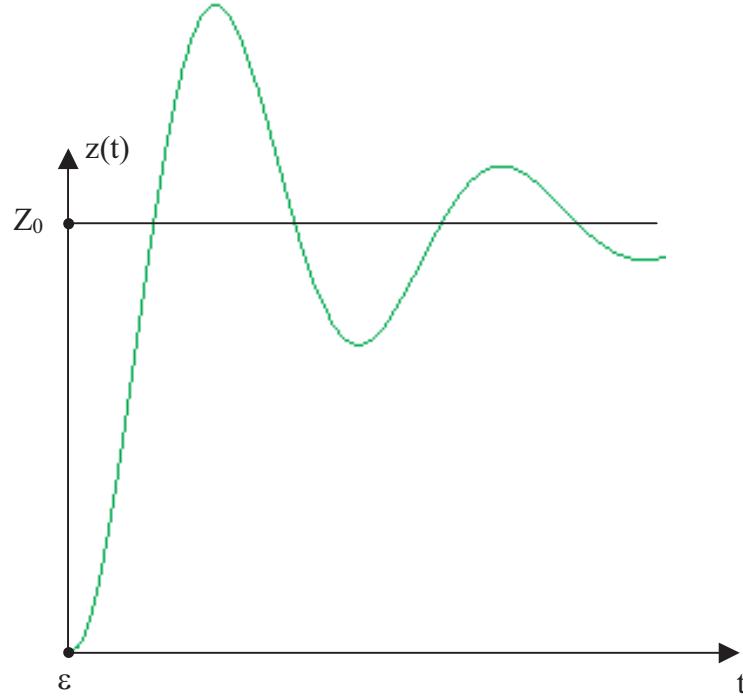
l'équation (3) se résout $z(t) = A' \exp r_1(t - \varepsilon) + B' \exp r_2(t - \varepsilon) + Z_0$ avec $z(\varepsilon) = A' + B' + Z_0 = 0$ et $\dot{z}(\varepsilon) = A'r_1 + B'r_2 = 0$

$$\implies z(t) = Z_0 \left[1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp r_1(t - \varepsilon) + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \exp r_2(t - \varepsilon) \right]$$

2.2.8 $\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$



$$\beta > 1$$



$$\beta < 1$$

2.2.9 avec le vieillissement du véhicule $\alpha \rightarrow 0 \implies \beta \rightarrow 0$, à chaque passage par une bosse le véhicule oscille plusieurs fois avant d'atteindre l'équilibre

2.2.10 pour un vieux véhicule surchargé $\alpha \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty \implies \beta \approx 0$, dans ce cas les oscillations seront incessantes ce qui est dangereux !

2.3 Réponse harmonique

2.3.1 (3) s'écrit en notation complexe $(1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})\underline{Z} = (1 + 2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega)\underline{Z}_0$

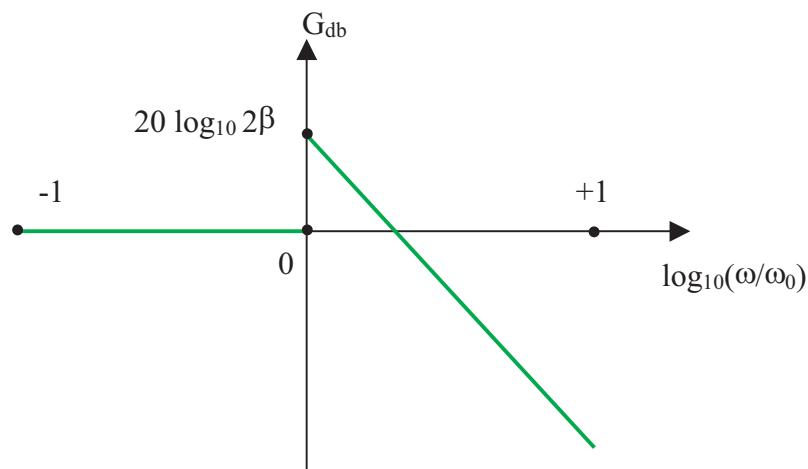
$$\text{soit } \underline{H}(i\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_0} = \frac{1+2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega}{1+2\frac{\beta}{\omega_0}i\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

2.3.2 $G(\omega) = 20 \log_{10} |\underline{H}(i\omega)| = 10 \log_{10} \frac{1+4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2+4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

si $\omega \ll \omega_0$ alors $G(\omega) \approx 0$

si $\omega \gg \omega_0$ alors $G(\omega) \approx 20 \log_{10} 2\beta - 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$

2.3.3 :



$G(\omega)$ présente un maximum non nul correspondant à la résonance , le comportement de la suspension est passe-bas

2.3.4 $\lambda = vT$ soit $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$

2.3.5 pour atténuer au mieux les ondulations il faut avoir $\omega > 10\omega_0$ soit d'après 2.2.3
 $v > 86 \text{ kmh}^{-1}$

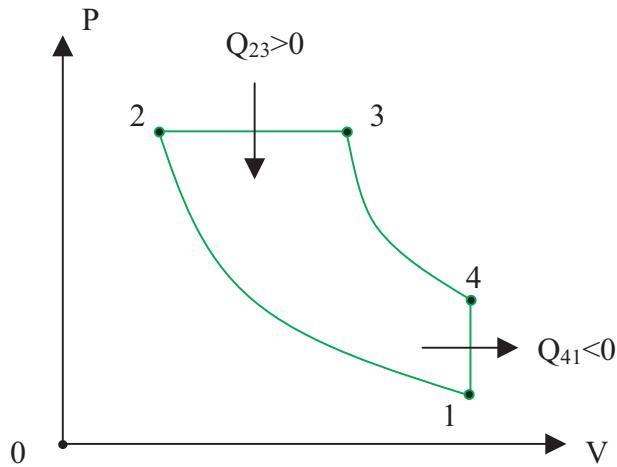
2.3.6 il faut abaisser fortement la vitesse pour éviter la résonance , en effet pour fixer les idées on prend $\lambda = 15 \text{ m}$ la vitesse minimale devient 860 kmh^{-1} qui est impossible! , par contre il faut rouler à $\omega < 0.1\omega_0$ soit $v < 8.6\text{kmh}^{-1}$

2^{ème} problème :

Étude thermodynamique d'un moteur de voiture

1^{ère} partie :
 Étude qualitative du cycle

1.1 :



le cycle est moteur si $W = - \oint pdv < 0$

1.2 voir figure

1.3 $Q_{12} = Q_{34} = 0$ car adiabatiques

$Q_{23} > 0$ car le gaz reçoit de la chaleur de la part de la réaction d'explosion

$Q_{41} = \Delta_{41}U = nc_v(T_1 - T_4) < 0$ refroidissement isochore du gaz parfait

2^{ème} partie :
 Étude quantitative du cycle

2.1 Point 2

2.1.1 le gaz subit une transformation adiabatique réversible entre (1) et (2) donc par loi de Laplace
 $T_2 = T_1(\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1} = T_1\tau^{\gamma-1}$ A.N : on a $\tau = 10$ donc $T_2 = 750 \text{ K}$

2.1.2 $P_2 = P_1(\frac{V_1}{V_2})^{\gamma} = P_1\tau^{\gamma}$ A.N : $P_2 = 25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2.2 Point 3

2.2.1 la température maximale est après explosion $T_{max} = T_3$

et la température minimale est celle de départ après admission du gaz $T_{min} = T_1$ donc $\alpha = \frac{T_3}{T_1}$

2.2.2 $T_3 = \alpha T_1$ or $\alpha = 10$ donc $T_3 = 3000 K$

2.2.3 $P_3 = P_2 = P_1 \tau^\gamma = 25 \cdot 10^5 Pa$

2.3 Point 4

2.3.1 d'une part loi des gaz parfait $nR = \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_4 V_1}{T_4}$ soit $\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1}$

d'autre part le gaz subit une transformation adiabatique réversible entre (3) et (4) donc par loi de Laplace $T_4 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

on en déduit que $T_4 = T_3 \left(\frac{P_3 T_1}{P_1} \right)^{1-\gamma} = T_3 (\tau^\gamma T_1)^{1-\gamma} = \alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)} T_1$ A.N : $T_4 = 2080 K$

2.3.2 $P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = T_4 \frac{P_1}{T_1}$ A.N : $P_4 = 6.9 \cdot 10^5 Pa$

3^{ème} partie : Rendement d'un cycle moteur

3.1 $\eta = \frac{-W}{Q_{23}} \in [0, 1]$

3.2 Rendement du cycle théorique

3.2.1 au cours du cycle $\Delta U = W + Q_{23} + Q_{41} = 0$

or $Q_{23} = \Delta_{23}H = nc_p(T_3 - T_2)$ car isobare

et $Q_{41} = \Delta_{41}U = nc_v(T_1 - T_4)$ car isochore

soit finalement $\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T_2)}$

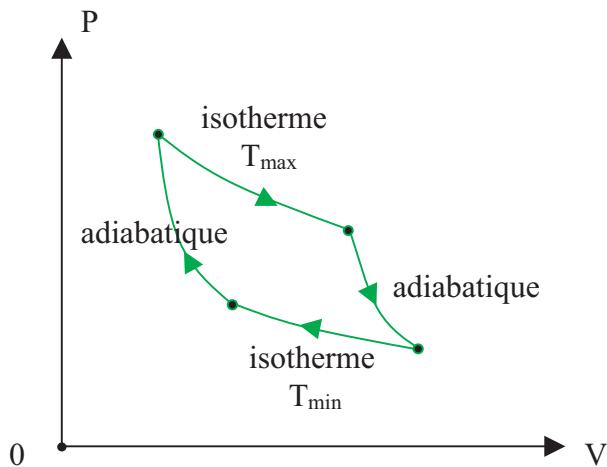
3.2.2 $\eta = 1 - \frac{\alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)} - 1}{\gamma[\alpha - \tau^{\gamma-1}]}$

3.2.3 $\eta = 0.43$

3.3 Cycle de Carnot

3.3.1 un cycle de Carnot est un cycle réversible formé par deux adiabatiques alternées par deux isothermes

une adiabatique $P \propto \frac{1}{V^\gamma}$ décroît plus vite qu'une isotherme $P \propto \frac{1}{V}$



3.3.2 au cours d'un cycle de Carnot : 1^{er} principe s'écrit $\Delta U = W + Q_{max} + Q_{min} = 0$, le 2^d principe

$$\Delta S = \frac{Q_{max}}{T_{max}} + \frac{Q_{min}}{T_{min}} = 0$$

$$\text{donc } \eta_c = \frac{-W}{Q_{max}} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} \in [0, 1]$$

3.3.3 on remplace $T_{max} = T_3 = 3000 \text{ K}$ et $T_{min} = T_1 = 300 \text{ K}$ soit $\eta_c = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 0.9$

3.3.4 $\eta < \eta_c$ les hypothèses d'adiabaticité (paroi sans fuite thermique) et de réversibilité (sans frottement) sont approximatives !

4^{ème} partie :
Prise en compte des frottements internes

4.1 voir figure (a)

pour un gaz parfait on a :

- une adiabatique réversible est une isentropique
- $S = S_0 + nc_v \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$ une isochore $T = T_0 e^{\frac{S-S_0}{nc_v}}$
- $S = S_0 + nc_p \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$ une isobare $T = T_0 e^{\frac{S-S_0}{nc_p}}$

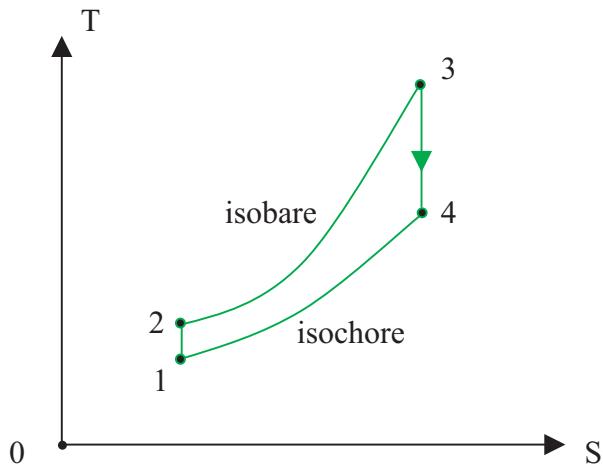


figure (a)

4.2 il existe une fonction d'état extensive , appelé entropie S , dont la variation élémentaire s'écrit : $dS = \frac{\delta Q}{T_{ext}} + \delta S^{cree}$
tel que $\delta S^{cree} = 0$ pour une transformation réversible et $\delta S^{cree} > 0$ pour une transformation irréversible

4.3 voir figure (b)

pour une transformation adiabatique irréversible $\Delta_{12'}S = S_{12'}^{cree} > 0$ donc $S_{2'} > S_1$, de même $S_{4'} > S_3$

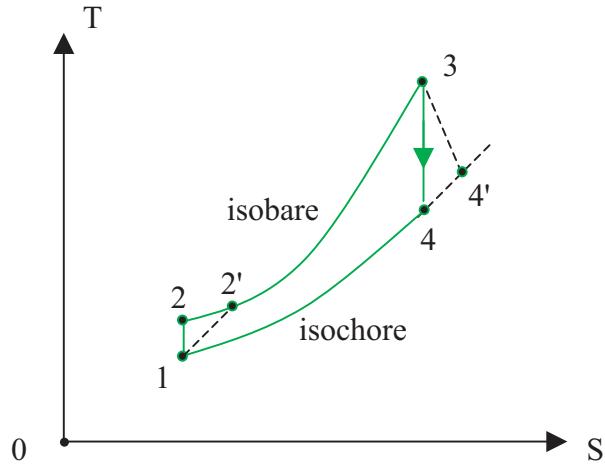


figure (b)

4.4 $T'_2 > T_2$ car (2) et (2') sont sur la même isobare
et $T'_4 > T_4$ car (4) et (4') sont sur la même isochore

4.5

4.5.1 $\eta' = -\frac{W'}{Q'_{2'3}}$

au cours du cycle irréversible on a $\Delta U' = W' + Q'_{2'3} + Q'_{4'1} = 0$

or $Q'_{2'3} = \Delta_{2'3}H = nc_p(T_3 - T'_2)$ car isobare

et $Q'_{4'1} = \Delta_{4'1}U = nc_v(T_1 - T'_4)$ car isochore

soit finalement $\eta' = 1 + \frac{Q'_{4'1}}{Q'_{2'3}} = 1 - \frac{T'_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T'_2)}$

4.5.2 $\eta' = 1 - \frac{\beta T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - \beta T_2)}$

4.5.3 on a $\frac{d\eta'}{d\beta} = -\frac{T_4(T_3 - \beta T_2) + T_2(\beta T_4 - T_1)}{\gamma(T_3 - \beta T_2)^2} = \frac{T_2 T_1 - T_4 T_3}{\gamma(T_3 - \beta T_2)^2} < 0$

or d'après 4.4 on a $\beta > 1$ donc $\eta'(\beta) < \eta'(\beta = 1) = \eta$

4.5.4 minimiser les frottements , ce qui fait augmenter le rendement !

fin du corrigé

Résonance magnétique nucléaire -RMN-

La résonance magnétique nucléaire ou RMN est une technique spectroscopique qui se base sur l'interaction entre les moments magnétiques nucléaires de la matière et un champ magnétique exciteur. La précision et la sensibilité des mesures qui peuvent être effectuées font de la RMN une technique de caractérisation très utilisée dans divers domaines notamment en physique de la matière, en chimie organique. En médecine, la RMN est utilisée comme technique d'imagerie : c'est l'imagerie par résonance magnétique ou IRM.

Le présent problème aborde quelques aspects simples de la RMN. Il est composé de trois parties largement indépendantes entre elles. Aucune connaissance préalable de la RMN n'est nécessaire pour répondre aux questions du problème. **On prendra** $4\pi \approx 12,5$

Données utiles et notations

- Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Formule fondamentale de dérivation vectorielle reliant les dérivées par rapport au temps t d'un vecteur \vec{A} dans deux référentiels R et R' :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + {}^{R'/R} \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

${}^{R'/R} \vec{\Omega}$ étant le vecteur rotation instantané de R' par rapport à R et \times désigne le produit vectoriel ;

- On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p+q) + \cos(p-q)]$$

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2} [\sin(p+q) + \sin(p-q)]$$

- Dans tout le problème ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) désignera une base orthonormée directe attachée au système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ;
j désignera le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$;
- Conformément à l'usage courant, les grandeurs complexes seront *soulignées*.

1^{ère} partie : **Champ magnétique tournant**

Dans cette partie on se propose d'étudier une méthode de production de champ magnétique tournant à l'aide de circuits filiformes classiques parcourus par des courants adéquats.

- 1.1** On considère un solénoïde S_1 comportant **n** spires circulaires jointives par unité de longueur. Les spires ont chacune un rayon **a** et une épaisseur négligeable, elles sont régulièrement espacées et sont parcourues par un courant permanent I_1 orienté dans le sens indiqué figure 1.

Dans toute la suite du problème, on s'intéresse au champ magnétique créé au voisinage du centre O_1 du solénoïde. On négligera alors tous les effets de bord en adoptant **le modèle de solénoïde infiniment long**.

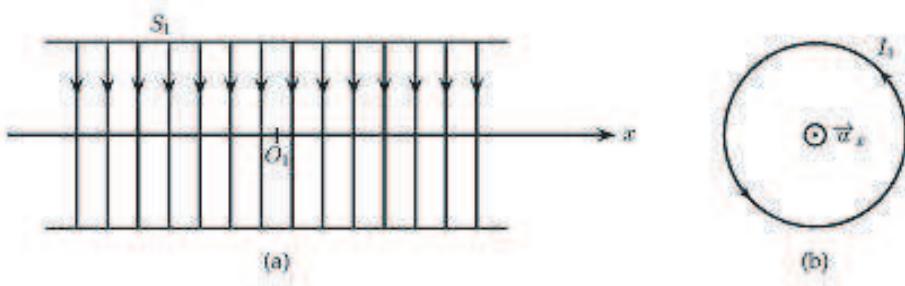


Fig 1 : Solénoïde parcouru par un courant. (a) vue latérale, (b) vue en coupe.

- 1.1.1 Calculer le champ magnétique $\vec{B}_1(x, 0, 0)$ créé par S_1 en tout point $M(x, 0, 0)$ de son axe. On rappelle l'expression du champ magnétique \vec{b} créé par une spire circulaire en tout point M de son axe Ox (figure 2)

$$\vec{b} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_x \quad (1)$$

a étant le rayon de la spire, I l'intensité du courant qui la parcourt et 2α l'angle sous lequel la spire est "vue" depuis le point M.

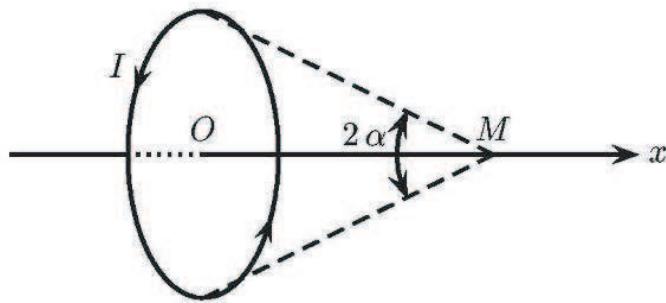


Fig 2 : Spire circulaire parcourue par un courant.

- 1.1.2 Montrer à l'aide de considérations de symétrie de la distribution de courant qu'en tout point M de l'espace le champ magnétique créé par S_1 peut s'écrire $\vec{B}_1(M) = B_1(M) \vec{u}_x$.

- 1.1.3 Montrer que $B_1(M)$ ne dépend que de la distance r du point M à l'axe du solénoïde.

- 1.1.4 En appliquant le théorème d'AMPÈRE à un contour judicieusement choisi, calculer le champ magnétique en **tout point** de l'espace à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde S_1 . Montrer en particulier, qu'à l'intérieur de S_1 , $B_1(M) = k I$ et donner l'expression de k.

- 1.1.5 Déterminer le coefficient d'inductance propre Λ par unité de longueur du solénoïde.

- 1.2 On considère deux solénoïdes identiques de mêmes caractéristiques que celui étudié en 1.1. Chacun de ces deux solénoïdes possède une **résistance électrique R** et un coefficient d'**inductance propre total L**. Les deux solénoïdes sont montés de sorte que l'axe du solénoïde S_1 coïncide avec l'axe Ox et celui du solénoïde S_2 avec l'axe Oy. Leur centres respectifs coïncident avec l'origine O du système d'axe utilisé. Il n'y a aucun contact électrique entre les spires de S_1 et celles de S_2 .

Les deux solénoïdes sont insérés dans le circuit électrique représenté figure 3. Le condensateur utilisé est supposé parfait et de capacité C. L'ensemble est alimenté par un générateur de tension supposé parfait délivrant une tension sinusoïdale basse fréquence :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \quad (2)$$

Dans toute la suite on se placera dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP) et on s'intéressera au régime sinusoïdal établi (ou forcé).

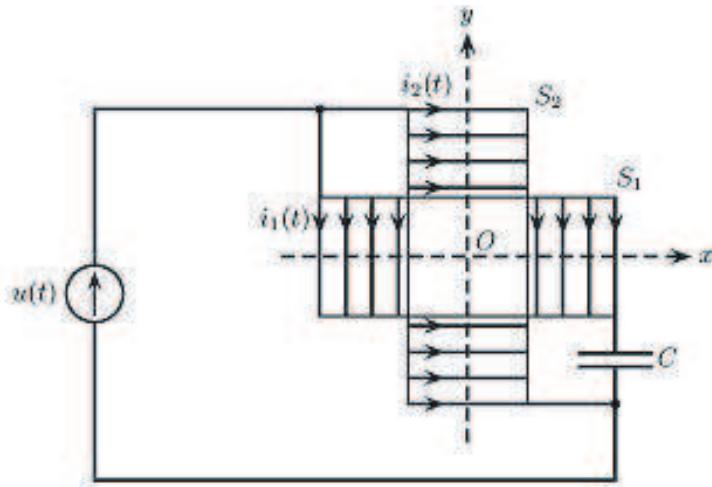


Fig 3 : Deux solénoïdes croisés insérés dans un circuit électrique. Pour des raisons de clarté, les spires ne sont pas représentées dans la partie commune centrale.

- 1.2.1 Déterminer l'expression de la valeur efficace I_1 de l'intensité $i_1(t)$ du courant circulant dans le solénoïde S_1 ainsi que le déphasage φ_1 de $i_1(t)$ par rapport à $u(t)$.
- 1.2.2 Déterminer de même la valeur efficace I_2 de l'intensité $i_2(t)$ du courant circulant dans le solénoïde S_2 ainsi que le déphasage φ_2 de $i_2(t)$ par rapport à $u(t)$.
- 1.2.3 Quelle condition doivent satisfaire L , C et ω pour que les déphasages φ_1 et φ_2 soient opposés $\varphi_1 = -\varphi_2$?
- 1.2.4 Quelles conditions doivent satisfaire R , L , C et ω pour que le déphasage de $i_1(t)$ par rapport à $i_2(t)$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$?
- 1.2.5 **Dans toute la suite** du problème, les conditions établies en 1.2.3. et 1.2.4. sont remplies simultanément. Déterminer I_1 et I_2 .
- 1.2.6 Justifier succinctement pourquoi les résultats de calcul de champ magnétique effectués en 1.1. restent-ils valables dans le cadre de l'ARQP.
 - 1.2.6.1 Déterminer le champ magnétique résultant \vec{B} au voisinage de O dans la région commune aux deux solénoïdes. On négligera tous les champs magnétiques créés éventuellement par les fils de connexion.
 - 1.2.6.2 Monter qu'il s'agit d'un champ magnétique de module B constant tournant dans le plan xOy à une vitesse angulaire que l'on déterminera. Préciser le sens de rotation dans ce plan.
 - 1.2.6.3 Calculer I_1 , I_2 , C , L et B . Pour cela, on prendra $U = 200mV$, $R = 20\Omega$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10kHz$ et $n = 10^3 m^{-1}$. On rappelle que $4\pi \approx 12,5$.
- 1.2.7 Quel est le rôle du condensateur dans le montage de la figure 3 ?
- 1.2.8 Quelle modification très simple doit-on apporter au montage de la figure 3 pour inverser le sens de rotation du champ magnétique total ? Justifier succinctement la réponse.

2^{ème} partie : Théorie élémentaire de la RMN

- 2.1 Dans toute cette partie on considère un noyau atomique supposé ponctuel et fixe en un point O du référentiel R du laboratoire supposé galiléen et auquel on attache un repère orthonormé

direct $R(O, xyz)$ de vecteurs de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un tel noyau peut être considéré comme un dipôle magnétique élémentaire rigide de moment magnétique \vec{m} .

En outre, on admet que le noyau possède un moment cinétique intrinsèque (ou spin) $\vec{\sigma}$ relié au moment magnétique par la relation (que l'on ne cherchera pas à établir) :

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma} \quad (3)$$

Le facteur γ appelé rapport gyro-magnétique est une constante positive indépendante du temps. On négligera, tout au long de cette étude, le poids du noyau. On rappelle l'expression du moment \vec{M} des forces exercées par un champ magnétique \vec{B} sur un dipôle magnétique rigide de moment magnétique \vec{m} :

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (4)$$

\times désignant le produit vectoriel.

2.1 Le noyau considéré est soumis à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$) uniforme et permanent dans R porté par l'axe Oz.

2.1.1 En appliquant le théorème du moment cinétique, donner l'équation régissant l'évolution de \vec{m} .

2.1.2 Montrer que la norme $\|\vec{m}\|$ du moment magnétique \vec{m} ainsi que sa projection $m_z = \vec{m} \cdot \vec{u}_z$ sur la direction du champ magnétique \vec{B}_0 restent constantes au cours du temps.

2.1.3 Que peut-on dire alors de l'angle entre \vec{m} et \vec{B}_0 ?

2.1.4 Déterminer les expressions des projections m_x sur Ox et m_y sur Oy du moment magnétique \vec{m} en fonction du temps en supposant qu'à l'instant $t = 0$, $m_x = m_0$ et $m_y = 0$. On pourra poser avantageusement $\underline{m} = m_x + j m_y$ et résoudre l'équation différentielle vérifiée par \underline{m}

2.1.5 En déduire que le moment magnétique \vec{m} effectue un mouvement de précession autour de la direction de \vec{B}_0 caractérisé par un vecteur rotation instantané $\vec{\omega}_0$ que l'on exprimera en fonction de γ et \vec{B}_0 .

2.1.6 Calculer numériquement $\omega_0 = \vec{\omega}_0 \cdot \vec{u}_z$ ainsi que la fréquence correspondante f_0 en prenant $\gamma = 2,7 \cdot 10^8 u.S.I$ et $B_0 = 1 T$. Dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence se situe-t-elle ?

2.2 Au champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, on superpose un champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ uniforme, perpendiculaire à Oz et tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. **Dans toute la suite**, on supposera que $0 < B_1 \ll B_0$.

Soit R_1 le référentiel animé par rapport au référentiel R d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ et auquel on attache le repère orthonormé direct $R_1(O, XYz)$ de vecteurs de base $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_z)$. On supposera qu'à l'instant $t = 0$, les axes des repères R et R_1 sont confondus. On posera enfin $\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$ et $\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$

2.2.1 Exprimer $(\frac{d\vec{m}}{dt})_R$ dérivée par rapport au temps t du moment magnétique \vec{m} relativement au référentiel R, en fonction de \vec{m} , et $\vec{\omega}_0$ et $\vec{\omega}_1$.

2.2.2 En déduire $(\frac{d\vec{m}}{dt})_{R_1}$ dérivée par rapport au temps du moment magnétique \vec{m} relativement au référentiel R_1 , en fonction de $\vec{\omega}_1$, $\vec{\Omega}$ et \vec{m} .

2.2.3 Décrire alors le mouvement de \vec{m} dans le référentiel R_1 en précisant en particulier la signification physique du vecteur $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ et en donnant la valeur de l'angle θ qu'il fait avec l'axe Oz.

2.2.4 Décrire qualitativement le mouvement du vecteur $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ relativement au référentiel R. En déduire alors celui du moment magnétique \vec{m} dans R.

2.2.5 On s'intéresse à la composante de \vec{m} selon l'axe Oz et on pose $m_z = \vec{m} \cdot \vec{u}_z$, m_z étant la projection de \vec{m} sur \vec{u}_z . On suppose qu'à l'instant pris comme origine des temps ($t = 0$), $m_z = m'_0$ constante positive.

2.2.5.1 Montrer que si la condition de résonance $\vec{\Omega} = \vec{0}$ est réalisée, la composante m_z subit un premier retournement au bout d'un temps Δt que l'on déterminera.

2.2.5.2 Calculer Δt pour $B_1 = 10^{-6} T$ et $\gamma = 2,7 \cdot 10^8 u.S.I$

2.3 Prise en compte de la relaxation

En réalité, dans un échantillon macroscopique, seule la moyenne statistique \vec{M} des moments magnétiques microscopiques est accessible à la mesure. On admet que les résultats précédents obtenus pour le moment magnétique microscopique \vec{m} restent valables pour M . À cause de l'agitation thermique, les atomes d'un tel échantillon entrent en collision les uns avec les autres. Il en résulte une tendance à la désorientation des différents moments magnétiques microscopiques \vec{m} et une annulation de leur moyenne statistique \vec{M} lorsqu'aucun champ magnétique n'est appliqué (relaxation).

2.3.1 Relaxation d'un moment magnétique

On admet que pour tenir compte des interactions microscopiques entre les atomes voisins, il suffit d'ajouter dans l'équation du mouvement de \vec{M} le terme de relaxation donné par :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{\text{relaxation}} = -\frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{\tau} \quad (5)$$

τ étant une constante positive.

2.3.1.1 À quoi la constante τ est-elle homogène ?

2.3.1.2 Montrer que l'hypothèse de prise en compte de la relaxation mentionnée ci-dessus (2.3.1.) est en accord avec la constatation expérimentale suivante : étant donné un échantillon de moment magnétique moyen nul ($\vec{M} = \vec{0}$), lorsque, à l'instant t_0 , on soumet un tel échantillon à la seule action du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, son moment magnétique moyen \vec{M} croît en fonction du temps et tend exponentiellement vers la valeur \vec{M}_0 .

2.3.2 Équation de Bloch

Dans toute la suite, le moment magnétique \vec{M} est soumis aux actions conjuguées du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ uniforme et permanent dans R et du champ tournant $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ décrits en 2.1. et 2.2. En outre, on tiendra compte des phénomènes de relaxation décrits par l'équation (5) où $\vec{M}_0 = M_0 \vec{u}_z$.

2.3.2.1 Établir l'équation du mouvement du moment magnétique \vec{M} relativement au référentiel R_1 défini en 2.2.

2.3.2.2 Établir les équations, dites de BLOCH, vérifiées par les composantes u, v et M_z définies par les relations :

$$\begin{cases} M_X = \vec{M} \cdot \vec{u}_X = u M_0 \\ M_Y = \vec{M} \cdot \vec{u}_Y = v M_0 \\ M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z \end{cases} \quad (6)$$

2.3.3 Dans toute la suite du problème, on s'intéresse au régime établi (ou permanent dans le référentiel tournant R_1).

2.3.3.1 Montrer alors que les composantes u, v et Mz sont données par :

$$\begin{cases} u = \frac{-\tau^2 \omega_1 \Omega}{1+(\tau\omega_1)^2+(\tau\Omega)^2} \\ v = \frac{-\tau\omega_1}{1+(\tau\omega_1)^2+(\tau\Omega)^2} \\ M_z = M_0 - M_0 \frac{(\tau\omega_1)^2}{1+(\tau\omega_1)^2+(\tau\Omega)^2} \end{cases} \quad (7)$$

2.3.3.2 Tracer l'allure des courbes $u(\Omega)$ et $v(\Omega)$ en précisant les positions et les valeurs des maxima et minima éventuels.

2.3.3.3 Déterminer la largeur à mi-hauteur $\Delta\Omega$ de la courbe $u(\Omega)$. Que représente $\Delta\Omega$ pour la courbe $u(\Omega)$?

2.3.4 En réalité, dans la pratique, le champ magnétique tournant $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ est remplacé par un champ alternatif $\vec{B}_2 = 2B_1 \cos(\omega't) \vec{u}_x$ ($\omega' > 0$) de direction fixe dans R créé par un solénoïde très long parcouru par le courant $i(t) = 2I \cos(\omega't)$.

2.3.4.1 Montrer que le champ magnétique \vec{B}_2 peut être décomposé en deux champs \vec{B}_2^+ et \vec{B}_2^- tournant autour de Oz respectivement dans le sens direct et le sens inverse. On donnera les expressions de \vec{B}_2^+ et \vec{B}_2^- .

2.3.4.2 En s'appuyant en particulier sur les résultats des questions 2.1.5. et 2.1.6. et en rappelant la définition de la résonance (question 2.2.5.1.), montrer qu'une seule des deux composantes \vec{B}_2^+ où \vec{B}_2^- ; permettra d'atteindre la résonance. Exprimer le vecteur rotation instantané de cette composante en fonction de ω' .

2.3.4.3 Expliquer alors pourquoi, au voisinage de la résonance, l'évolution de \vec{M} en présence de \vec{B}_2 reste la même que celle prévue avec le champ tournant \vec{B}_1 .

2.4 Détection de la réponse du milieu

On admet que l'échantillon étudié crée un champ magnétique \vec{B} proportionnel au moment magnétique \vec{M}

$$\vec{B} = K \vec{M} \quad (8)$$

K étant un coefficient de proportionnalité réel et positif que l'on ne cherchera pas à expliciter. Pour détecter la réponse du milieu étudié, on place l'échantillon dans une bobine détectrice plate B , d'axe Oy comportant N spires circulaires de surface S chacune.

2.4.1 Expliquer pourquoi la présence des champs \vec{B}_0 et \vec{B}_2 ne perturbe pas la détection.

2.4.2 Déterminer l'expression de la force électromotrice (f.e.m.) $e(t)$ induite dans la bobine détectrice B .

Montrer que l'on peut mettre $e(t)$ sous la forme :

$$e(t) = V_0 \cos \omega't + V_{\frac{\pi}{2}} \sin \omega't \quad (9)$$

et donner les expressions de V_0 et $V_{\frac{\pi}{2}}$.

2.4.3 À l'aide d'une détection synchrone appropriée (3ème partie), on peut mesurer séparément les parties de la f.e.m. $e(t)$ en phase et en quadrature de phase avec le champ magnétique excitateur \vec{B}_2 . Quelle courbe expérimentale doit-on tracer pour obtenir τ ?

3^{ème} partie : Détection synchrone du signal

Dans cette partie, on se propose d'étudier la méthode de détection synchrone qui a permis d'extraire séparément les deux composantes de la f.e.m. $e(t)$, l'une en phase et l'autre en quadrature de phase avec le champ magnétique exciteur.

3.1 Schéma de principe d'un détecteur synchrone

La figure 4 donne le schéma de principe d'un détecteur synchrone.

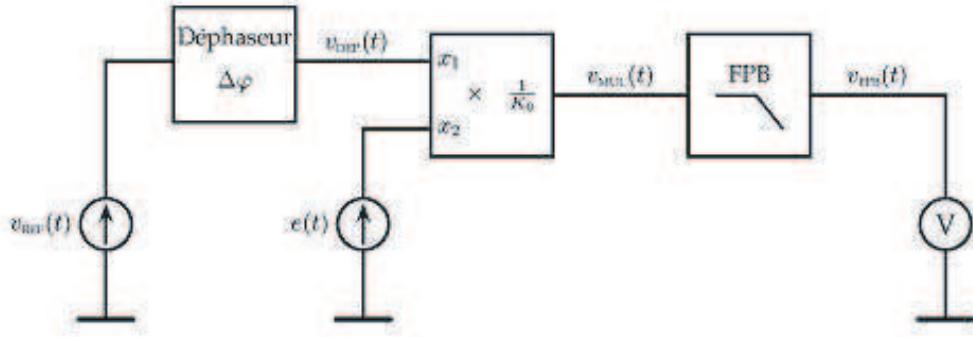


Fig 4 : Schéma bloc de principe d'un détecteur synchrone.

La tension $e(t)$ est prélevée aux bornes de la bobine détectrice B . Le but étant de mesurer séparément les composantes V_0 et $V_{\frac{\pi}{2}}$ de

$$e(t) = V_0 \cos \omega' t + V_{\frac{\pi}{2}} \sin \omega' t \quad (10)$$

La tension de référence $v_{REF}(t)$ est une tension en phase avec le champ magnétique exciteur

$$v_{REF}(t) = V \cos \omega' t \quad (11)$$

Le circuit déphaseur a pour seul rôle d'ajouter un déphasage $\Delta\varphi$ à la phase de la tension de référence

$$V_{DEP}(t) = V \cos(\omega' t + \Delta\varphi) \quad (12)$$

La tension v_{MUL} à la sortie du circuit multiplicateur analogique est ensuite filtrée à l'aide d'un filtre passe-bas (FPB) de pulsation de coupure ω_c et d'amplification **A positive** dans la bande passante. Un voltmètre numérique placé à la sortie du filtre passe-bas permet de mesurer la **valeur efficace** de la tension de sortie. Le multiplicateur analogique utilisé est un composant non linéaire dont les impédances d'entrée seront considérées infinies, l'impédance de sortie nulle et la bande passante infinie. La tension de sortie du circuit multiplicateur v_{MUL} est proportionnelle au **produit** des deux tensions d'entrée :

$$v_{MUL}(t) = \frac{1}{K_0} x_1(t) x_2(t) \quad (13)$$

K_0 étant une constante *positive*.

3.1.1 À quoi la constante K_0 est-elle homogène ?

3.1.2 Donner l'expression de la tension $v_{MUL}(t)$ en fonction de V , K_0 , V_0 , $V_{\frac{\pi}{2}}$, ω' , t et $\Delta\varphi$.

3.1.3 Montrer que cette tension peut s'écrire comme la somme de quatre termes, dont deux de fréquence nulle. Dessiner alors le spectre en fréquence correspondant.

3.1.4 Donner l'expression de la tension v_{FPPB} à la sortie du filtre passe-bas sachant que sa pulsation de coupure ω_c est très inférieure à la pulsation d'excitation ω' .

3.1.5 Montrer qu'un choix judicieux du déphasage $\Delta\varphi$ permet d'étudier séparément V_0 et $V_{\frac{\pi}{2}}$.

3.2 Étude du circuit déphaseur

On peut étudier le principe de fonctionnement du circuit déphaseur à partir du circuit représenté figure 5.

C étant un condensateur de 10 nF et R un potentiomètre réglable de 0 à $100 \text{ k}\Omega$. L'amplificateur opérationnel utilisé sera considéré comme parfait et fonctionnant en régime linéaire.

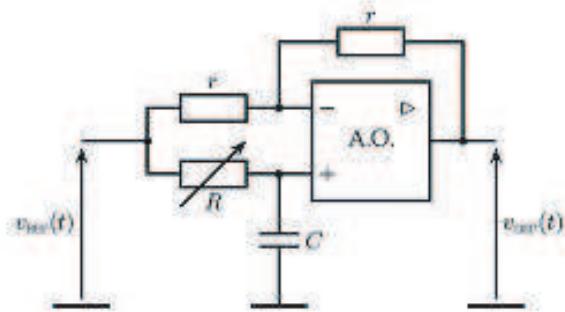


Fig 5 : Circuit déphaseur à amplificateur opérationnel.

3.2.1 Déterminer la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega') = \frac{V_{DEP}}{V_{REF}}$ de ce montage.

3.2.2 Quelles sont les expressions de l'amplification $H(\omega') = |\underline{H}(j\omega')|$ et de la phase $\Delta\varphi = \arg[\underline{H}(j\omega')]?$

3.2.3 Tracer le diagramme de BODE correspondant et en déduire le rôle du montage.

3.2.4 On suppose que le signal de référence $v_{REF}(t) = V_M \cos \omega' t$ en phase avec le champ magnétique excitateur à une fréquence $f' = \omega'/2\pi = 10 \text{ kHz}$.

Quelle valeur faut-il donner à R pour obtenir un déphasage $\Delta\varphi = -\pi/2$? Quelle est alors l'expression de v_{FPPB} à la sortie du détecteur synchrone?

3.2.5 Comment peut-on prélever la tension $v_{REF}(t)$ en phase avec le champ magnétique excitateur \vec{B}_2 ?

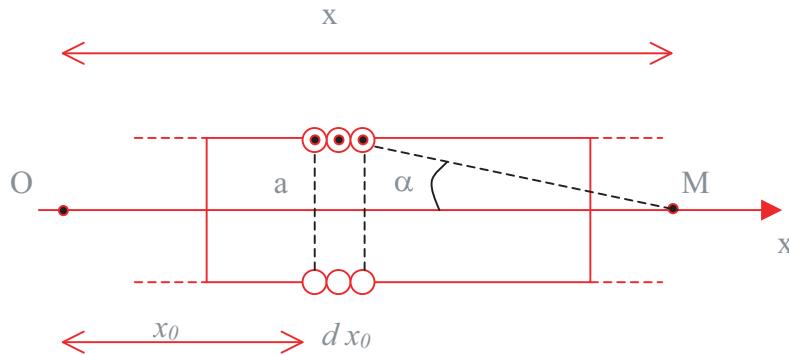
fin de l'énoncé

Résonance magnétique nucléaire -RMN-

1^{ère} partie : Champ magnétique tournant

1.1

1.1.1 la tranche du solénoïde $[x_0, x_0 + dx_0]$ est assimilée à une spire de courant $dI = ndx_0 I_1$ et crée un champ élémentaire $d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 n I_1 dx_0}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_x$ or $\cotan \alpha = \frac{x-x_0}{a} \implies dx_0 = a \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$

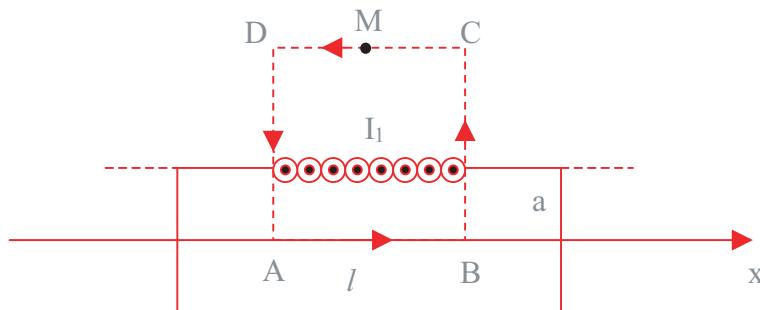


$$\text{soit } \vec{B}_1(x, 0, 0) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 n I_1}{2a} \sin^3 \alpha a \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{u}_x = \mu_0 n I_1 \vec{u}_x$$

1.1.2 le plan $\Pi \equiv (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants donc $\vec{B}_1(M) \perp \Pi$
soit $\vec{B}_1(M) = B_1(M) \vec{u}_x$

1.1.3 le solénoïde infini est invariant par translation et par rotation suivant Ox donc $B_1(M) = B_1(r)$

1.1.4 on a : $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{u}_x$ soit le théorème d'Ampère $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlaces}$ or



on a :

$$\oint_{\Gamma} B(r) \vec{u}_x \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B B_1(0) \vec{u}_x \cdot d\ell \vec{u}_x + \int_B^C B_1(r) d\ell \underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_r}_{+} + \int_C^D B_1(r) \vec{u}_x \cdot d\ell (-\vec{u}_x) + \int_D^A B_1(r) d\ell \underbrace{\vec{u}_x \cdot (-\vec{u}_r)}_{-}$$

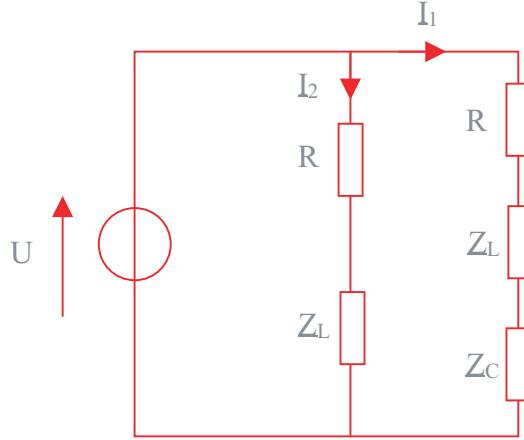
donc : $\oint_{\Gamma} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = [\mu_0 n I_1 \vec{u}_x - B_1(r)] \ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ +\mu_0 n \ell I_1 & r > a \end{cases}$

soit $\vec{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 n I_1 \vec{u}_x & r < a \\ \vec{0} & r > a \end{cases}$ donc $k = \mu_0 n$

1.1.5 $\Lambda = \frac{\Phi_{propre}}{\ell I_1} = \frac{(n\ell)(\mu_0 n I_1)(\pi a^2)}{\ell I_1} = \mu_0 n^2 \pi a^2$

1.2

1.2.1 schéma équivalent en régime sinusoïdal



on adopte la notation complexe $x(t) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{4}) \leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{X}\sqrt{2} \exp j(\omega t - \frac{\pi}{4})$ alors

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} \implies \begin{cases} I_1 = |\underline{I}_1| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \\ \varphi_1 = \arg \underline{I}_1 = \arg \frac{U}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = -\arctan \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R} \end{cases}$$

1.2.2 de même

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{R + jL\omega} \implies \begin{cases} I_2 = |\underline{I}_2| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \\ \varphi_2 = \arg \underline{I}_2 = \arg \frac{U}{R + jL\omega} = -\arctan \frac{L\omega}{R} \end{cases}$$

1.2.3 $\varphi_1 = -\varphi_2 \iff (\frac{1}{C\omega} - L\omega) = L\omega > 0 \quad (*)$

1.2.4 $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \implies \tan \varphi_1 \tan \varphi_2 = -1 \implies L\omega(\frac{1}{C\omega} - L\omega) = R^2 \quad (**)$

1.2.5 dans le cas où les deux conditions sont satisfaites , par remplacement , on aura :

$$L\omega = (\frac{1}{C\omega} - L\omega) = R \text{ soit : } I_1 = I_2 = \frac{U}{R\sqrt{2}}$$

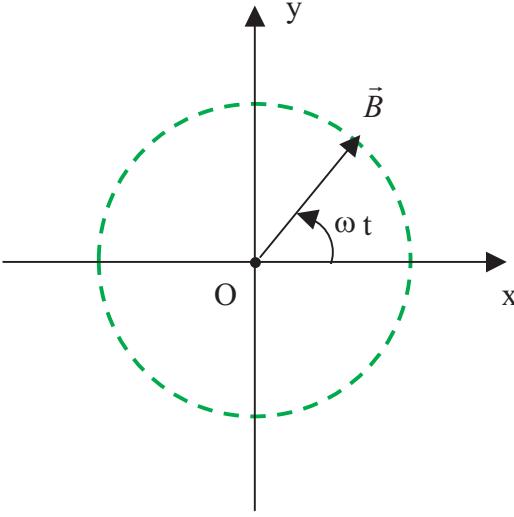
remarque : $\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$

1.2.6 en effet les équations de Maxwell en ARQP s'écrivent : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$ et $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ont la même forme qu'en régime permanent donc le thm d'ampère reste valable sous la forme de 1.1.4

1.2.6.1 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 n i_1(t) \vec{u}_x + \mu_0 n i_2(t) \vec{u}_y = \frac{\mu_0 n U}{R\sqrt{2}} \sqrt{2} [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_y]$

soit $\vec{B} = \frac{\mu_0 n U}{R} [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y]$

1.2.6.2 :



$B = \frac{\mu_0 n U}{R}$ tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire ω dans le sens trigonométrique

$$1.2.6.3 \quad I_1 = I_2 = 7 \text{ mA} \quad L = \frac{R}{\omega} = 0.32 \text{ mH} \quad C = \frac{1}{2R\omega} = 400 \text{ nF} \quad B = 1.25 \cdot 10^{-5} T$$

1.2.7 le condensateur crée un déphasage entre $i_1(t)$ et $i_2(t)$

$$1.2.8 \text{ brancher C en série avec le solénoïde } S_2 \text{ dans ce cas } \vec{B} = \frac{\mu_0 n U}{R} [\cos(\omega t) \vec{u}_y + \sin(\omega t) \vec{u}_x]$$

2^{ème} partie :
Théorie élémentaire de la RMN

2.1

$$2.1.1 \text{ TMC en O dans le Réf Galiléen } \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B} \text{ soit } \left| \frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \times B \vec{u}_z \right.$$

$$2.1.2 \text{ on a } \vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \cdot (\gamma \vec{m} \times \vec{B}) = 0 \iff \frac{1}{2} \frac{d\vec{m}^2}{dt} = 0 \implies \|\vec{m}\| = \text{cte}$$

$$\text{de même } \frac{dm_z}{dt} = \vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = 0 \implies m_z = \text{cte}'$$

$$2.1.3 \cos(\vec{m}, \vec{B}_0) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{B}_0}{m B_0} = \frac{m_z}{m} = \text{constante}$$

$$2.1.4 \text{ on a } \begin{cases} \dot{m}_x &= \begin{cases} \gamma m_y B_0 & (1) \\ -\gamma m_x B_0 & (2) \\ 0 & \end{cases} \\ \dot{m}_y & \\ \dot{m}_z & \end{cases}$$

$$(1) + i(2) \implies \dot{m} + i\gamma B_0 m = 0$$

$$\text{donc } \underline{m}(t) = \underline{m}(0) \exp -i\gamma B_0 t = (m_0 + i0) \exp -i\gamma B_0 t = m_0 \exp -i\gamma B_0 t$$

$$\text{soit } \underline{m}_x(t) = \Re(\underline{m}) = m_0 \cos \gamma B_0 t \text{ et } \underline{m}_y(t) = \Im(\underline{m}) = -m_0 \sin \gamma B_0 t$$

$$2.1.5 \text{ on a } \vec{m}(t) = \begin{cases} m_0 \cos \gamma B_0 t \\ -m_0 \sin \gamma B_0 t \\ m_{z0} \end{cases} \text{ soit } |\omega_0| = \gamma B_0 \text{ de plus d'après les données on écrit}$$

$$\frac{d\vec{m}}{dt}|_R = -\gamma \vec{B}_0 \times \vec{m} = \vec{\omega}_0 \times \vec{B}$$

$$2.1.6 \omega_0 = -\gamma B_0 = -2.7 \cdot 10^8 \text{ Hz et } f_0 = \frac{|\omega_0|}{2\pi} = 0.43 \cdot 10^8 \text{ Hz ondes Hertziennes}$$

2.2

$$2.2.1 \frac{d\vec{m}}{dt}|_R = -\gamma(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \times \vec{m} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{m}$$

$$2.2.2 \frac{d\vec{m}}{dt}|_{R_1} = \frac{d\vec{m}}{dt}|_R - \vec{\omega} \times \vec{m} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}) \times \vec{m}$$

$$2.2.3 \text{ c'est un mouvement de précession à la vitesse de rotation } \vec{\omega}_1 - \vec{\Omega} = -\gamma B_1 \vec{u}_X - \gamma B_0 \vec{u}_z - \omega \vec{u}_z$$

$$\text{on a } \vec{u}_X \perp \vec{u}_z \text{ donc } \cos \theta = \frac{(\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}) \cdot \vec{u}_z}{|\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}|} = -\frac{\gamma B_0 + \omega}{\sqrt{(\gamma B_1)^2 + (\gamma B_0 + \omega)^2}}$$

2.2.4 $\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}$ est fixe dans R_1 effectue donc un mouvement de rotation autour de Oz à la vitesse de rotation $\vec{\omega}$

le mouvement de \vec{m} dans R sera composé de précession et rotation

2.2.5

2.2.5.1 si $\vec{\Omega} = \vec{0}$ on aura $\frac{d\vec{m}}{dt}|_{R_1} = \omega_1 \vec{u}_X \times \vec{m}$

\vec{m}_z subit son premier retournement ($\vec{m}_z \rightarrow -\vec{m}_z$) à la demi-période de rotation

$$\Delta t = \frac{\pi}{|\omega_1|} = \frac{\pi}{\gamma B_1}$$

2.2.5.2 A.N : $\Delta t = 11.6 \text{ ms}$

2.3 Prise en compte de la relaxation

2.3.1 Relaxation d'un moment magnétique

2.3.1.1 τ est un temps

2.3.1.2 En présence du champ magnétique à $t \geq t_0$: $\frac{d\vec{M}}{dt} + \frac{\vec{M}}{\tau} = \frac{\vec{M}_0}{\tau} \implies \vec{M} = \vec{A} \exp(-t/\tau) + \vec{M}_0$ or $\vec{M}(t_0) = \vec{0}$ donc :

$$\vec{M}(t) = \vec{M}_0 [1 - \exp(-\frac{t-t_0}{\tau})]$$

Rqe : En absence du champ magnétique , on aura :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\vec{M}}{\tau} \implies \frac{d\vec{M}}{dt} + \frac{\vec{M}}{\tau} = \vec{0} \implies \vec{M}(t) = \vec{M}_0 \exp(-\frac{t-t_0}{\tau})$$

2.3.2 Équation de Bloch

2.3.2.1 $\frac{d\vec{M}}{dt}|_{R_1} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\Omega}) \times \vec{M} - \frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{\tau}$

2.3.2.2 soit $\begin{vmatrix} \dot{M}_X \\ \dot{M}_Y \\ \dot{M}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1 & M_X & M_X \\ 0 & M_Y & M_Y \\ -\Omega & M_z & M_z - M_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{M_X}{\tau} + \Omega M_Y \\ -\Omega M_X - \frac{M_Y}{\tau} - \omega_1 M_z \\ \omega_1 M_Y - \frac{M_z - M_0}{\tau} \end{vmatrix}$

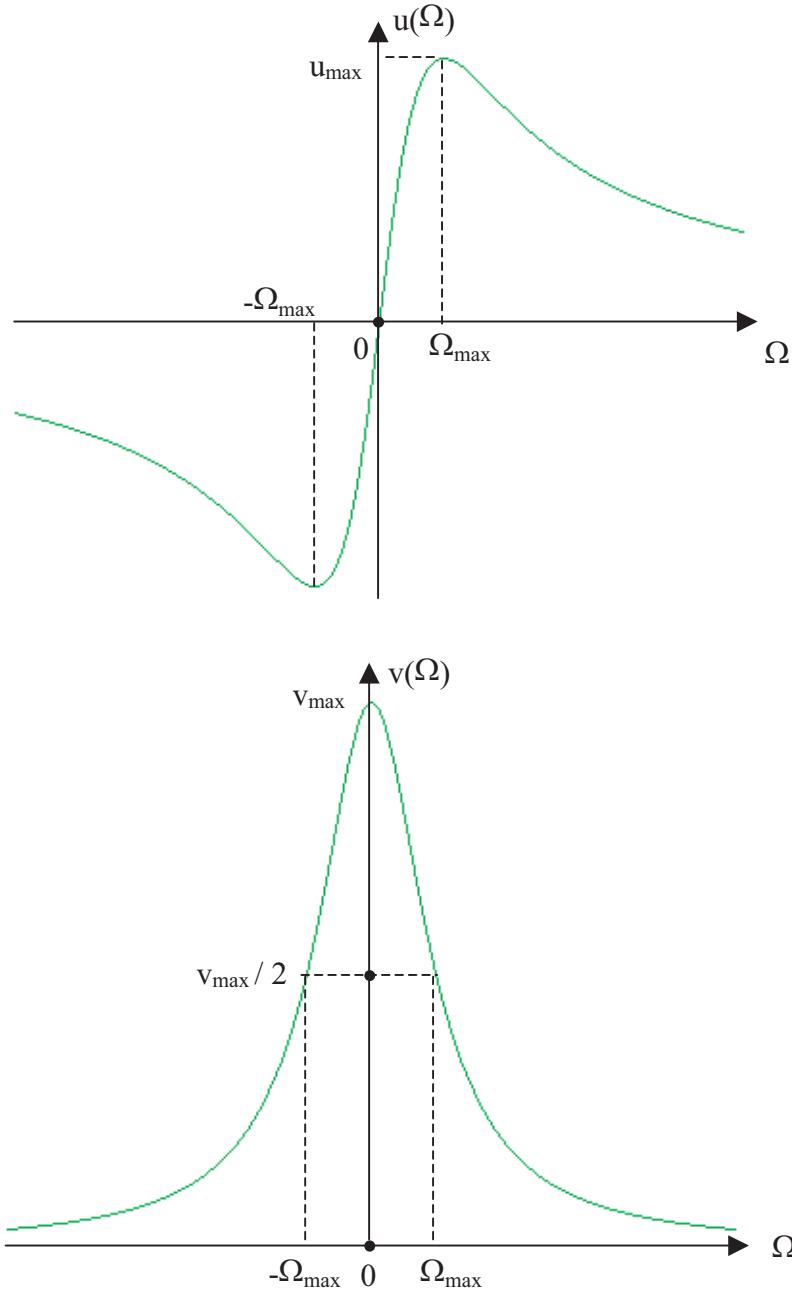
$$\text{soit } \begin{cases} \dot{u} = -\frac{u}{\tau} + \Omega v \\ \dot{v} = -\Omega u - \frac{v}{\tau} - \omega_1 \frac{M_z}{M_0} \\ \dot{M}_z = \omega_1 v M_0 - \frac{M_z - M_0}{\tau} \end{cases}$$

2.3.3

2.3.3.1 En régime établi $\begin{cases} 0 = -\frac{u}{\tau} + \Omega v \\ 0 = -\Omega u - \frac{v}{\tau} - \omega_1 \frac{M_z}{M_0} \\ 0 = \omega_1 v M_0 - \frac{M_z - M_0}{\tau} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = -u + \tau \Omega v \\ \tau \omega_1 = -\tau \Omega u - v(1 + \tau^2 \omega_1^2) \\ M_z = M_0(1 + \tau \omega_1 v) \end{cases}$

$$\text{soit } \begin{cases} u = \frac{-\tau^2 \omega_1 \Omega}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ v = \frac{-\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \\ M_z = M_0 - M_0 \frac{-(\tau \omega_1)^2}{1 + (\tau \omega_1)^2 + (\tau \Omega)^2} \end{cases}$$

2.3.3.2 avec $\omega_1 < 0$ on aura $\Omega_{max} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2}$ et $u_{max} = \frac{-\omega_1}{2\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2}}$ enfin $v_{max} = \frac{-\tau \omega_1}{1 + (\tau \omega_1)^2}$



$$2.3.3.3 \quad v(\Omega) = \frac{v_{max}}{2} \iff \frac{-\tau\omega_1}{1+(\tau\omega_1)^2+(\tau\Omega)^2} = \frac{-\tau\omega_1}{2+2(\tau\omega_1)^2} \implies \Omega = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2} = \Omega_{max} \implies \Delta\Omega = 2\Omega_{max}$$

2.3.4

$$2.3.4.1 \quad \vec{B}_2 = 2B_1 \cos \omega' t \vec{u}_x = \begin{vmatrix} B_1 \cos \omega' t & \vec{u}_x \\ B_1 \sin \omega' t & \vec{u}_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 \cos \omega' t & \vec{u}_x \\ -B_1 \sin \omega' t & \vec{u}_y \end{vmatrix} = \vec{B}_2^+ + \vec{B}_2^- \text{ (resp)}$$

2.3.4.2 à la résonance $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{\pm}' - \vec{\omega}_0 = \vec{0}$ soit $\vec{\omega}_{\pm}' = -\gamma B_0 \vec{u}_z$ donc seul la composante \vec{B}_2^- permet d'atteindre la résonance , le vecteur rotation de cette composante est $-\omega' \vec{u}_z$

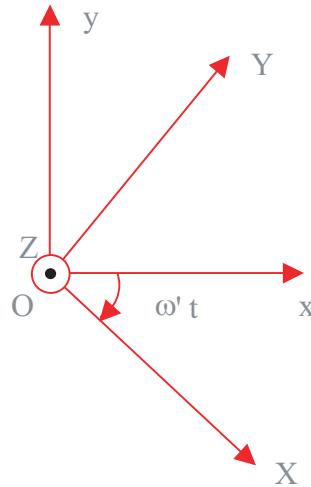
2.3.4.3 notons $\Omega_+ = \omega_+ - \omega_0 = \omega' + \gamma B_0$

l'effet de la composante \vec{B}_2^+ sur \vec{M} sera quantifié par $u(\Omega_+)$ et $v(\Omega_+)$ dans les expressions 2.3.3.1

2.4 Détection de la réponse du milieu

2.4.1 car les flux de $\vec{B}_2 = B_2(t) \vec{u}_x$ et de $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ sont nuls à travers la surface $\vec{S} = S \vec{u}_y$ de la bobine plate

2.4.2 loi de faraday $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -NSK \frac{dM_y}{dt}$ or $M_y = (M_X \vec{u}_X + M_Y \vec{u}_Y + M_z \vec{u}_z) \cdot \vec{u}_y$
or d'après 2.3.4.3 on ne considère que la composante \vec{B}_2^- avec $-\omega' \vec{u}_z$



donc $M_y = -uM_0 \sin \omega' t + vM_0 \cos \omega' t \implies e(t) = NSK u M_0 \cos \omega' t + NSK v M_0 \sin \omega' t$
soit $V_0 = NSK u M_0$ et $V_{\frac{\pi}{2}} = NSK v M_0$

2.4.3 il faut tracer la loi affine $\frac{V_0}{V_{\frac{\pi}{2}}} = \tau \Omega = \tau(-\omega' + \gamma B_0)$ en fonction de ω' de pente $-\tau$

3^{ème} partie : Détection synchrone du signal

3.1 Schéma de principe d'un détecteur synchrone

3.1.1 K_0 est en Volt

3.1.2 $V_{MUL}(t) = \frac{1}{K_0} v_{DEP}(t) e(t) = \frac{1}{K_0} V \cos(\omega' t + \Delta\varphi) [V_0 \cos \omega' t + V_{\frac{\pi}{2}} \sin \omega' t]$

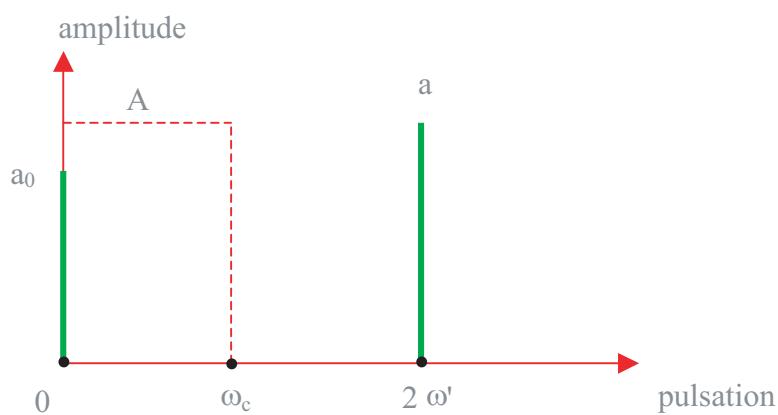
3.1.3 par trigonométrie (voir données), il vient

$$V_{MUL}(t) = \frac{V}{2K_0} \underbrace{[V_0 \cos(\Delta\varphi) - V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\Delta\varphi) + V_0 \cos(2\omega' t + \Delta\varphi) + V_{\frac{\pi}{2}} \sin(2\omega' t + \Delta\varphi)]}$$

le spectre contient deux composantes :

composante continue de pulsation $\omega = 0$ avec l'amplitude $a_0 = \frac{V}{2K_0} [V_0 \cos(\Delta\varphi) - V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\Delta\varphi)]$

composante variable de pulsation $\omega = 2\omega'$ avec l'amplitude $a = \frac{V}{2K_0} \sqrt{V_0^2 + V_{\frac{\pi}{2}}^2}$



3.1.4 le filtre passe-bas élimine la composante variable donc :

$$v_{FPB}(t) = A \frac{V}{2K_0} [V_0 \cos(\Delta\varphi) - V_{\frac{\pi}{2}} \sin(\Delta\varphi)]$$

3.1.5 si $\Delta\varphi = 0$ alors $v_{FPB}(t) = A \frac{VV_0}{2K_0}$

si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ alors $v_{FPB}(t) = -A \frac{VV_{\frac{\pi}{2}}}{2K_0}$

3.2 Étude du circuit déphaseur

3.2.1 En régime linéaire $\varepsilon = \underline{v}^+ - \underline{v}^- = 0$

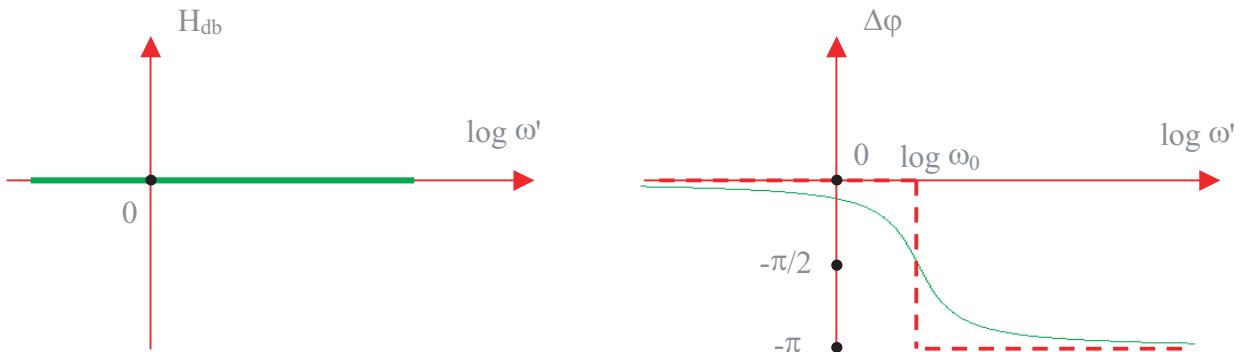
or par le théorème de Millmann : $\underline{v}^- = \frac{\underline{v}_{ref} + \underline{v}_{dep}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = \frac{\underline{v}_{ref} + \underline{v}_{dep}}{2}$ et $\underline{v}^+ = \frac{\underline{v}_{ref} + \frac{0}{Z_c}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c}} = \frac{\underline{v}_{ref}}{1+jRC\omega'}$

soit $\underline{H}(j\omega') = \frac{\underline{v}_{dep}}{\underline{v}_{ref}} = \frac{1-jRC\omega'}{1+jRC\omega'}$

3.2.2 $H(\omega') = |\underline{H}(j\omega')| = 1$

et $\Delta\varphi = \text{Arg}\underline{H}(j\omega') = \text{Arg}(1 - jRC\omega') - \text{Arg}(1 + jRC\omega') = -2\text{Arctan}[RC\omega']$

3.2.3 on note $\omega_0 = \frac{1}{RC}$



le circuit est passe-tout déphaseur

3.2.4 $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ si $\omega' = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ d'où $R = \frac{1}{\omega' C} = \frac{1}{2\pi 10^4 10^{-9}} \Omega = 1.6 k\Omega$

dans ce cas d'après 3.1.4 on aura $v_{FPB}(t) = A \frac{VV_{\frac{\pi}{2}}}{2K_0}$

3.2.5 il suffit de réaliser $\Delta\varphi = 0$ en prenant $R = 0$ ou de relier directement ,sans déphaseur, $v_{ref}(t)$ à l'entrée x_1 du multiplieur.

fin du corrigé

Satellites artificiels

Ce problème propose l'étude de quelques propriétés des satellites artificiels terrestres. Dans le cadre de cette étude on considère un modèle simple se basant sur les hypothèses suivantes :

- le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique R_G , supposé galiléen ;
- la Terre de masse M_T est supposée sphérique de centre T et de rayon R_T ;
- le satellite artificiel sera assimilé à un point matériel S de masse m ;
- sauf mention explicite du contraire, le satellite est supposé soumis à la seule action de la Terre caractérisée par le champ de gravitation terrestre dont l'intensité à une distance r du centre T de la Terre est notée $G(r)$;

1^{ère} partie : Étude générale

- 1.1 En quelle année, le Maroc a-t-il lancé son premier satellite artificiel ? Quel nom porte-t-il ? À quel usage principal est-il destiné ?
- 1.2 Exprimer l'intensité du champ de pesanteur terrestre $G(r)$ à la distance r du centre T de la Terre en fonction de r , R_T et $g_0 = G(R_T)$ qui désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.
- 1.3 La mise sur orbite d'un satellite artificiel se fait à partir d'une fusée en un point S_0 situé à une distance r_0 du centre T de la Terre, $r_0 > R_T$. La vitesse de lancement du satellite par rapport à R_G , est \vec{v}_0 . On posera dans toute la suite :

$$\alpha_0 = \frac{r_0 v_0^2}{g_0 R_T^2} \text{ et } \beta_0 = (\overrightarrow{TS_0}, \vec{v}_0)$$

- 1.3.1 Montrer que, après sa mise sur orbite, le satellite parcourt une trajectoire plane. Caractériser *complètement* le plan de la trajectoire.

- 1.3.2 Dans toute la suite, on repérera la position S du satellite dans le plan de sa trajectoire par :

- . la distance r telle que $\vec{r} = \overrightarrow{TS} = r\vec{u}_r$;
- . l'angle $\theta = (\overrightarrow{TS_0}, \overrightarrow{TS})$ orienté de $\overrightarrow{TS_0}$ vers \overrightarrow{TS} .

On posera aussi : $\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et $\vec{u}_z = \vec{u}_r \times \vec{u}_\theta$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ constitue donc une base orthonormée directe. Faire un schéma représentatif dans le plan de la trajectoire du satellite montrant T , S_0 , S , $\vec{r}_0 = \overrightarrow{TS_0}$, \vec{r} , \vec{v}_0 , θ et β_0 .

- 1.3.3 Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du satellite en T peut s'écrire $\vec{\sigma} = \sigma \vec{u}_z$ et donner l'expression de σ en fonction de m , r_0 , v_0 et β_0 .

- 1.4 On définit le vecteur de HAMILTON \vec{H} du satellite artificiel par : $\vec{H} = m\vec{v} - \frac{K}{\sigma^2}(\vec{\sigma} \times \frac{\vec{r}}{r})$ où \mathbf{x} désigne le produit vectoriel et K une constante réelle.

Montrer que le vecteur \vec{H} reste constant au cours du mouvement à condition de donner à K une expression particulière.

Dans toute la suite du problème, K a l'expression déterminée à la question 1.4. \vec{H} est alors une constante du mouvement appelée intégrale première de LANDAU.

- 1.5 On appelle hodographie H du mouvement le lieu des points A tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, O étant un point quelconque de l'espace. Pour tracer H , on porte donc le vecteur \vec{v} à partir d'un point O . L'hodographie du mouvement est le lieu des points décrit par l'extrémité du vecteur vitesse \vec{v} au cours du temps.

1.5.1 D'après les questions précédentes, exprimer \overrightarrow{OA} et en déduire la forme de l'hodographe dans le cas du mouvement d'une particule dans un champ central de force en $1/r^2$?

1.5.2 Que peut-on dire à propos des directions permises pour le vecteur vitesse \vec{v} selon que le point O est à l'extérieur ou à l'intérieur de H ?

1.5.3 À quel type de trajectoire correspond chacun des cas cités à la question 1.5.2. ? On se rappellera pour cela des résultats de l'étude générale du mouvement d'une particule dans un champ central de force en $1/r^2$.

1.5.4 Donner la direction du vecteur de HAMILTON. Que vaut H dans le cas d'une trajectoire circulaire ?

1.6 On introduit le vecteur $\vec{\epsilon}$ défini par :

$$\vec{\epsilon} = \frac{1}{K} \vec{H} \times \vec{\sigma}$$

1.6.1 Montrer que le vecteur $\vec{\epsilon}$ est une constante du mouvement. Dans quel plan se situe $\vec{\epsilon}$?

1.6.2 En exprimant le produit scalaire $\vec{r} \cdot \vec{\epsilon}$, montrer que l'équation polaire de la trajectoire du satellite peut se mettre sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

ou p , e et θ_0 sont des constantes, $p > 0$ et $e > 0$. Exprimer p et e en fonction de σ , K et $\vec{\epsilon}$. Que représente θ_0 ?

1.6.3 Exprimer p en fonction de α_0 , r_0 et β_0 et montrer que e est donnée par :

$$e^2 = 1 + \alpha_0(\alpha_0 - 2) \sin^2 \beta$$

1.7 On se propose de discuter la nature de la trajectoire du satellite en fonction des conditions de sa mise sur orbite.

1.7.1 Tracer les courbes représentatives de e en fonction de α_0 pour les valeurs suivantes de β_0 : 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

1.7.2 Discuter la nature de la trajectoire en fonction de la valeur de α_0 et en déduire la valeur de la vitesse de libération v_ℓ à l'altitude $z_0 = r_0 - R_T$.

1.7.3 À quelles conditions sur α_0 et β_0 la trajectoire est-elle circulaire ? En déduire la vitesse du satellite sur son orbite circulaire de rayon R .

1.8 On considère le cas : $\alpha_0 = 1$ et $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$

1.8.1 Quelle est la nature de la trajectoire ?

1.8.2 Déterminer θ_0 en fonction de β_0 .

1.8.3 Montrer que S_0 est un sommet du petit axe de la trajectoire du satellite et positionner celle-ci en faisant un schéma *clair et soigné*.

2^{ème} partie : Satellites circulaires

On considère le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R .

2.1 Satellites en orbite basse

2.1.1 En appliquant le théorème de la résultante cinétique au satellite, retrouver directement l'expression de sa vitesse v sur son orbite circulaire de rayon R .

2.1.2 En déduire la période de révolution T du mouvement du satellite. Retrouve-t-on la troisième loi de KEPLER ?

2.1.3 y a-t-il une restriction concernant le plan de la trajectoire ainsi que le sens de rotation du satellite ? Pourquoi certains de ces satellites sont ils dits " satellites polaires" ?

2.2 Satellites géo-stationnaires

Un satellite géo-stationnaire est un satellite qui apparaît fixe à un observateur terrestre.

2.2.1 Quel est l'intérêt de tels satellites ? Citer un exemple d'application.

2.2.2 Exprimer l'altitude z_G à laquelle il faut placer le satellite pour qu'il soit géo-stationnaire en fonction de g_0 , R_T et T_0 qui désigne la période de rotation de la Terre par rapport au référentiel géo-centrique.

2.2.3 Calculer numériquement z_G en prenant $\pi^2 \approx 10$, $g_0 \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$, $R_T \approx 6.10^6 \text{ m}$ et $T_0 \approx 9.10^4 \text{ s}$.

Pourquoi T_0 n'est-elle pas rigoureusement égale à la durée d'un jour ?

2.2.4 Préciser le plan de la trajectoire ainsi que le sens de rotation du satellite.

2.3 Transfert d'orbite

On veut transférer un satellite artificiel de masse m d'une orbite circulaire basse (C_B) de rayon R_B à une orbite géostationnaire (C_G) de rayon R_G . Pour cela on emprunte une orbite de transfert elliptique appelée ellipse de HOHMANN. Une telle ellipse (E_H) est tangente aux deux trajectoires (C_B) et (C_G) ; son périgée P est sur l'orbite basse alors que son apogée A est sur l'orbite géostationnaire. On appelle Δv_1 et Δv_2 les variations de vitesse qu'il faut communiquer au satellite pour le faire passer respectivement de (C_B) à (E_H) et de (E_H) à (C_G).

2.3.1 Quelle est la particularité des plans des trois trajectoires ? Représenter graphiquement (C_B), (C_G) et (E_H)

2.3.2 En exprimant la conservation de l'énergie et du moment cinétique sur l'orbite de transfert, exprimer les vitesses du satellite v_A à l'apogée et v_P au périgée sur l'orbite de transfert en fonction de g_0 , R_T , R_B et R_G .

2.3.3 En déduire Δv_1 et Δv_2 . Commenter.

2.3.4 Quelle est la durée minimale Δt de la phase de transfert sur l'ellipse de HOHMANN ?

2.3.5 Déterminer l'excentricité e_H de l'ellipse de HOHMANN.

3^{ème} partie : Influence de l'atmosphère terrestre

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'influence de l'atmosphère terrestre sur la trajectoire d'un satellite artificiel en orbite circulaire basse. Pour cela on commence par développer un modèle de force de frottement avant de l'appliquer pour étudier le freinage du satellite par l'atmosphère.

3.1 Modèle de force de frottement

On considère un satellite (S) animé d'une vitesse \vec{v} sur une orbite circulaire basse à une altitude $z \ll R_T$. Le frottement subit par le satellite est dû aux chocs avec les molécules de l'atmosphère supposées identiques. Dans le cadre du modèle utilisé, on supposera ces chocs parfaitement *mous* et on négligera la vitesse initiale des particules de l'atmosphère.

3.1.1 Montrer qu'au cours du choc entre le satellite et une molécule de masse m' de l'atmosphère, la quantité de mouvement du satellite subit une variation $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{apres}} - \vec{p}_{\text{avant}}$ donnée au 1 er ordre par :

$$\Delta \vec{p} \approx -m' \vec{v}$$

- 3.1.2** Montrer que tout se passe comme si le satellite était soumis de la part de l'atmosphère à une force de frottement \vec{F} donnée par :

$$\vec{F} = -k(z)v\vec{v}$$

où $v = \|\vec{v}\|$. Pour cela on fera un bilan de quantité de mouvement entre les instants t et $t+dt$ en comptant le nombre de chocs subis par le satellite que l'on pourra considérer comme une sphère de rayon a . Exprimer $k(z)$ en fonction $\Sigma = \pi a^2$ et de la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère à l'altitude z . Que représente Σ ? Le résultat obtenu dépend-il en réalité de la forme du satellite?

- 3.1.3** On suppose qu'à une altitude $z \ll R_T$, la masse volumique de l'atmosphère est donnée par la loi :

$$\mu(z) = \mu_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

Établir cette loi et exprimer les constantes μ_0 et H dans le cadre du modèle d'atmosphère isotherme constituée d'un gaz parfait. Que représente μ_0 ?

3.2 Freinage du satellite

Sous l'effet du frottement atmosphérique, le satellite de masse m perd de l'altitude. On suppose que le module de la force de frottement est petit devant celui de la force d'attraction terrestre de sorte que l'on puisse assimiler la trajectoire à un cercle de rayon R lentement décroissant.

- 3.2.1** En exprimant que la trajectoire reste approximativement circulaire entre les instants t et $t+dt$, déterminer une relation approchée entre la variation d'altitude dz et la variation de vitesse dv du satellite.

- 3.2.2** En utilisant des arguments énergétiques, expliquer qualitativement pourquoi la vitesse du satellite *augmente* au cours de sa chute.

- 3.2.3** Exprimer la variation dE_M de l'énergie mécanique du satellite entre les instants t et $t+dt$ en fonction de m , g_0 , R_T , R et dz .

- 3.2.4** Exprimer de même le travail δW des forces de frottement en fonction de Σ , μ , v et dt .

- 3.2.5** En déduire que la variation d'altitude dz pendant l'intervalle de temps dt vérifie une équation différentielle du type :

$$\frac{dz}{dt} = -B\mu v R$$

où B est une constante réelle positive que l'on exprimera en fonction de Σ et m .

- 3.2.6** En utilisant l'approximation de l'orbite basse, $z \ll R_T$, donner une loi approchée de variation de l'altitude $z(t)$ en fonction du temps en faisant apparaître la quantité :

$$\tau = \frac{mH}{2\sigma\mu_0 R_T \sqrt{g_0 R_T}}$$

dont on précisera la dimension.

- 3.2.7 Application numérique :** Calculer T puis la durée de chute d'un satellite artificiel depuis l'altitude $h = 270 \text{ km}$. On prendra $g_0 \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$, $m = 10^3 \text{ kg}$, $\mu_0 = 1,5 \text{ kg.m}^{-3}$, $H = 9 \text{ km}$, $R_T = 6.10^6 \text{ m}$ et $\Sigma = 10 \text{ m}^2$. On donne $\exp 30 \approx 10^{13}$. Commenter le résultat obtenu.

- 3.2.8** Peut-on réellement négliger la vitesse d'agitation thermique v_{Th} des particules de l'atmosphère devant la vitesse du satellite? On prendra $v_{Th} = 0,5 \text{ km.s}^{-1}$.

fin de l'énoncé

Satellites artificiels

1^{ère} partie : Étude générale

1.1 Yamama , télécommunication

1.2 $G(r) = \frac{GM_T}{r^2}$ or $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donc $G(r) = \frac{g_0 R_T^2}{r^2}$

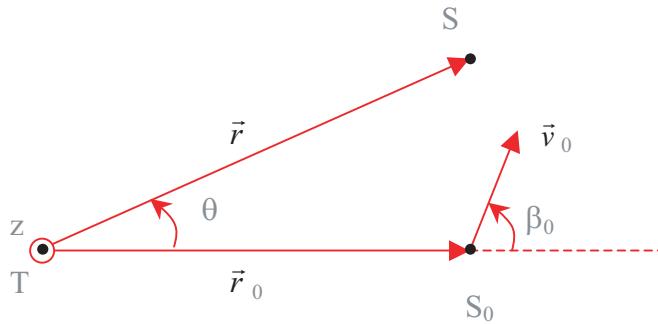
1.3

1.3.1 dans R_G Galiléen le TMC en T appliqué au satellite :

$$\frac{d\vec{\sigma}_T}{dt} = \vec{T}\vec{S} \times -G \frac{mM_T}{TS^3} \vec{T}\vec{S} = \vec{0}$$

donc $\vec{\sigma}_T = \vec{T}\vec{S} \times m\vec{v} = \vec{cte}$ soit $\vec{T}\vec{S} \cdot \vec{cte} = ax + by + cz = 0$ c'est l'équation cartésienne du plan passant par l'origine T et \perp à $\vec{\sigma}_T$ càd le plan formé par $(\vec{T}\vec{S}, \vec{v}_0)$

1.3.2 :



1.3.3 $\vec{\sigma} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\vec{u}_r \times m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ soit $\sigma = mr^2\dot{\theta}$

d'après les conditions initiales $\vec{\sigma} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = mr_0v_0 \sin \beta_0 \vec{u}_z$ donc $\sigma = mr_0v_0 \sin \beta_0$

1.4 par dérivation ($\sigma = cte$) on a $\frac{d\vec{H}}{dt} = m\vec{a} - \frac{K}{\sigma}(\vec{u}_z \times \frac{d\vec{u}_r}{dt}) = -m\frac{g_0 R_T^2}{r^2} \vec{u}_r + \frac{K}{\sigma} \dot{\theta} \vec{u}_r$

donc \vec{H} est constant si $-m\frac{g_0 R_T^2}{r^2} + \frac{K}{\sigma} \dot{\theta} = 0$ or $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ donc $K = m^2 g_0 R_T^2$

1.5

1.5.1 $\overrightarrow{OA} = \vec{v} = \frac{\vec{H}}{m} + \frac{K}{m\sigma}(\vec{u}_z \times \vec{u}_r) = \frac{\vec{H}}{m} + \frac{K}{m\sigma} \vec{u}_\theta = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$

\overrightarrow{OA} est la somme d'un vecteur constant et d'un vecteur de norme constante et direction variable donc l'hodographe sera un cercle

1.5.2 si O est à l'extérieur de H seules les directions comprises dans l'angle représenté seront permises à \vec{v} (fig a)

si O est à l'intérieur de H toutes les directions seront permises à \vec{v} (fig b)

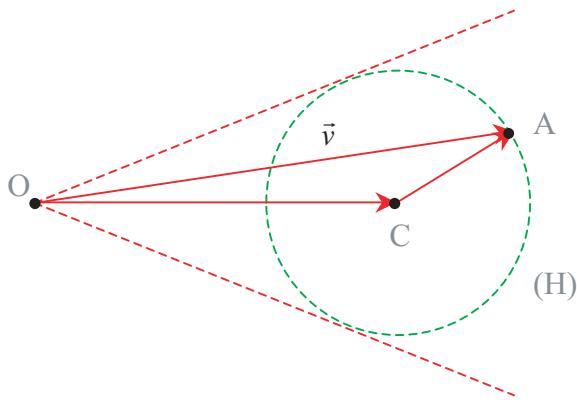


figure a

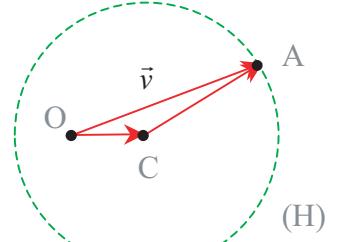


figure b

1.5.3 O est à l'intérieur de H correspond à une trajectoire : cercle ou ellipse

O est à l'extérieur de H correspond à une trajectoire : parabole ou hyperbole

1.5.4 \vec{H} est porté par \overrightarrow{OC} donc // à $\vec{v}_{\text{périphée}}$, la trajectoire est circulaire si $\vec{H} = \vec{0}$ car $|\vec{v}| = \text{cte}$

1.6

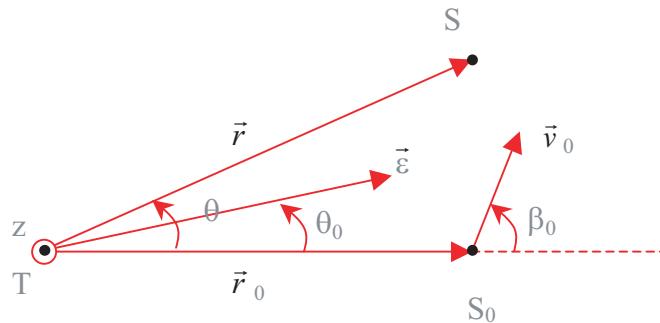
1.6.1 \vec{H} , $\vec{\sigma}$ et K sont constants donc $\vec{\epsilon}$ l'est aussi.

Le vecteur $\vec{\epsilon}$ est normal à $\vec{\sigma}$ donc sera dans le plan du mouvement (car $\vec{\sigma}$ est normal au plan du mouvement).

1.6.2 $\vec{r} \cdot \vec{\epsilon} = \frac{1}{K}(\vec{H} \times \vec{\sigma}) \cdot \vec{r} = \frac{1}{K}[(m\dot{r}\vec{u}_r + mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta - \frac{K}{\sigma}\vec{u}_\theta) \times \sigma\vec{u}_z] \cdot r\vec{u}_r = \frac{\sigma^2}{K} - r$

or : $\vec{r} \cdot \vec{\epsilon} = r\epsilon \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{\epsilon}})$, soit :

$$r = \frac{\frac{\sigma^2}{K}}{1 + \epsilon \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{\epsilon}})}$$



il vient $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta-\theta_0)}$ avec $p = \frac{\sigma^2}{K}$ et $e = |\vec{\epsilon}|$

θ_0 représente l'angle entre $\overrightarrow{TS_0}$ et $\vec{\epsilon}$

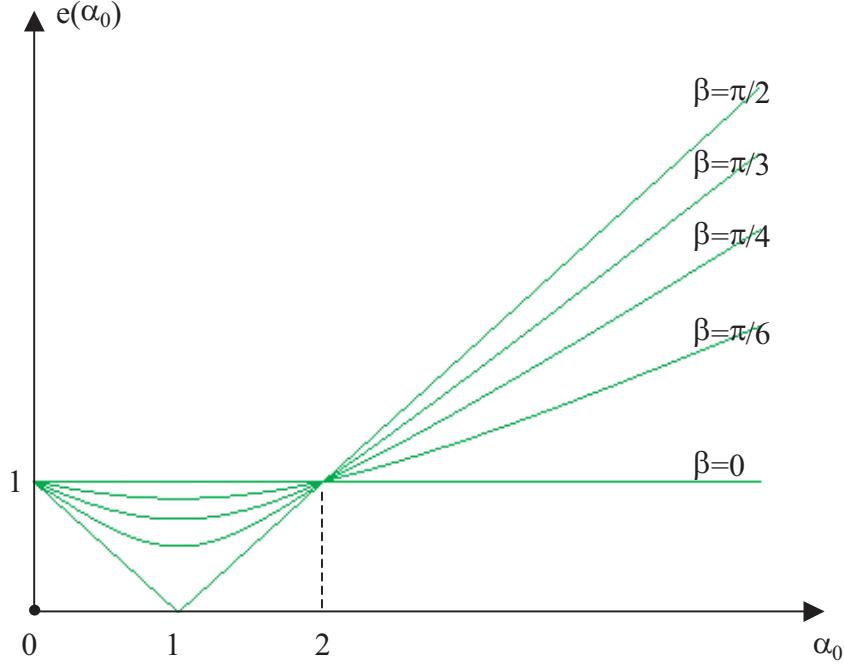
1.6.3 $p = \frac{\sigma^2}{K} = \frac{(mr_0 v_0 \sin \beta_0)^2}{m^2 g_0 R_T^2} = r_0 \alpha_0 \sin^2 \beta_0$

on a $e^2 = |\vec{\epsilon}|^2 = \frac{1}{K^2} H^2 \sigma^2$ car d'après 1.3.3 et 1.5.4 $\vec{H} \perp \vec{\sigma}$
or $\vec{H} = \vec{H}(t=0) = m\vec{v}_0 - \frac{K}{\sigma}\vec{y} = mv_0 \cos \beta_0 \vec{x} + (mv_0 \sin \beta_0 - \frac{K}{\sigma})\vec{y}$
soit $e^2 = \frac{1}{K^2} H^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{K^2} [(mv_0 \cos \beta_0)^2 + (mv_0 \sin \beta_0 - \frac{K}{\sigma})^2]$
 $\implies e^2 = 1 + \alpha_0(\alpha_0 - 2) \sin^2 \beta_0$

1.7

1.7.1 on a : $e(\alpha_0 = 0) = e(\alpha_0 = 2) = 1 \quad \forall \beta_0$

en particulier pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ on a $e(\alpha_0) = |1 - \alpha_0|$ et pour $\beta_0 = 0$ on a $e(\alpha_0) = 1$



1.7.2 :

α_0 qlq et $\beta_0 = 0$	rectiligne!
$\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$	$e = 0$ cercle
$\alpha_0 < 2$ et $\beta_0 \neq \frac{\pi}{2}$	$e < 1$ ellipse
$\alpha_0 = 2$	$e = 1$ parabole
$\alpha_0 > 2$	$e > 1$ hyperbole

la vitesse de libération est la vitesse minimale d'avoir une trajectoire non bornée (para ou hyperbole), ceci correspond à la trajectoire parabolique donc

$$\alpha_0 = 2 \implies v_\ell = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{r_0}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{z_0 + R_T}}$$

1.7.3 $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, la vitesse s'écrit donc $V = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R}}$

1.8 $\alpha_0 = 1$

1.8.1 la trajectoire sera une ellipse

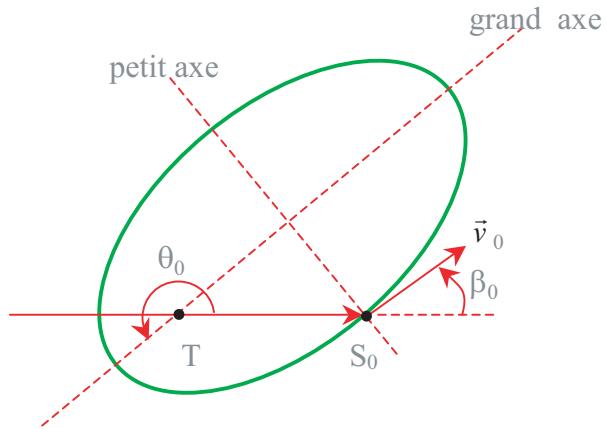
1.8.2 on a $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta - \theta_0)}$ donc $r_0 = \frac{p}{1+e \cos \theta_0}$

soit, tenant compte de $\alpha_0 = 1$, $\cos \theta_0 = \frac{r_0 - 1}{e} = \frac{\sin^2 \beta_0 - 1}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_0}} = -\cos \beta_0 < 0$

soit $\theta_0 = \pi + \beta_0$

1.8.3 un sommet du grand-axe (périgée ou apogée) est tel que $\theta = \theta_0 \text{ ou } \theta_0 + \pi$

$\vec{v}_0 //$ au grand axe donc S_0 appartient au petit axe



2^{ème} partie : Satellites circulaires

2.1 Satellites en orbite basse

2.1.1 le TRC dans la base de Freinet $-m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -G\frac{M_T m}{R^2}\vec{e}_r$ soit $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R}}$

2.1.2 $T = \frac{2\pi R}{v}$ d'où la loi de Kepler $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

2.1.3 la symétrie sphérique de la force gravitationnelle implique qu'il n'y a aucune restriction sur le plan de la trajectoire ni sur le sens de rotation

les satellites polaires sont ceux dont le plan de la trajectoire contient l'axe des pôles Nord-Sud de la terre

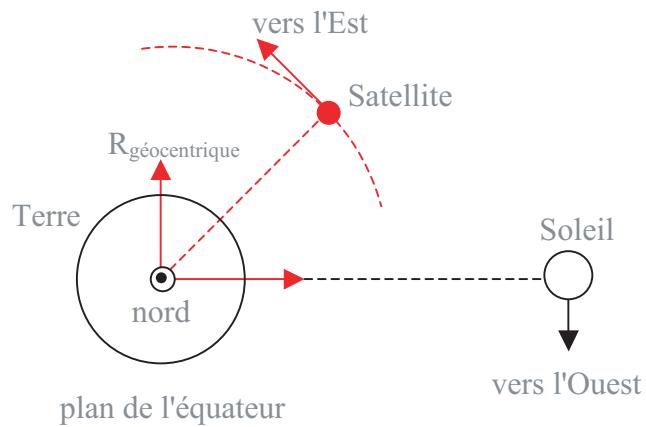
2.2 Satellites géostationnaires

2.2.1 un tel satellite est fixe pour un observateur lié à la terre ; la télécommunication

2.2.2 on a $\frac{T_0^2}{(z_G + R_T)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ or $GM_T = g_0 R_T^2$ donc $z_G = \left(\frac{g_0 R_T^2 T_0^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_T$

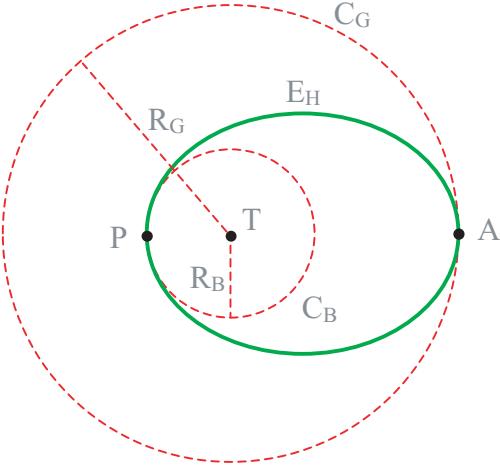
2.2.3 $z_G = 36000 \text{ km}$, car la terre est en mouvement autour du soleil

2.2.4 le plan de l'équateur , même sens de rotation de la terre vers l'Est.



2.3 Transfert d'orbite

2.3.1 les 3 trajectoires sont co-planaires



2.3.2 l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{g_0R_T^2}{r} \implies \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{g_0R_T^2}{R_G} = \frac{1}{2}v_P^2 - \frac{g_0R_T^2}{R_B}$
et $\sigma = mv_A R_G = mv_P R_B \implies R_B^2 v_P^2 = R_G^2 v_A^2$ car en A et P on a $\vec{v} \perp \vec{r}$

$$\text{il vient } \left| v_P = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2 R_G}{R_B(R_G+R_B)}} \right| \quad \left| v_A = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2 R_B}{R_G(R_G+R_B)}} \right|$$

2.3.3 de C_B à E_H , $\Delta v_1 = v_P - v_{circulaire R_B} = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2 R_G}{R_B(R_G+R_B)}} - \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{R_B}} > 0$ il faut pulser le satellite par injection des gaz vers l'arrière

de E_H à C_G , $\Delta v_2 = v_{circulaire R_G} - v_A = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{R_G}} - \sqrt{\frac{2g_0R_T^2 R_B}{R_G(R_G+R_B)}} < 0$ il faut freiner le satellite par injection des gaz vers l'avant

2.3.4 $\Delta t = \frac{T}{2}$ or d'après la loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{g_0R_T^2}$

avec $a = \frac{R_B+R_G}{2}$ étant le demi-grand axe, soit $\left| \Delta t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^2(R_B+R_G)^3}{2g_0R_T^2}} \right|$

2.3.5 à partir de l'équation polaire en apogée $R_G = \frac{p}{1-e_H}$ et en périgée $R_B = \frac{p}{1+e_H}$

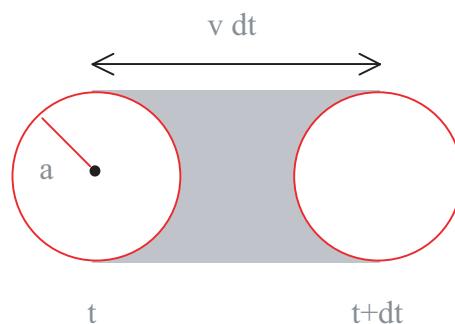
il vient $e_H = \frac{R_G-R_B}{R_G+R_B} \in]0, 1[$

3^{ème} partie : Influence de l'atmosphère terrestre

3.1 Modèle de force de frottement

3.1.1 le choc est mou càd la molécule se colle au satellite après le choc, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit $m\vec{v} + m'\vec{0} = (m+m')\vec{v}'$ car molécule au repos avant la choc
soit $\vec{v}' = \frac{m}{m+m'}\vec{v} \approx (1 - \frac{m'}{m})\vec{v}$ donc pour le satellite $\Delta\vec{p} = m\vec{v}' - m\vec{v} = -m'\vec{v}$

3.1.2 :



la force s'exerçant sur le satellite s'écrit , par application du PFD , $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ or $d\vec{p} = dN \Delta \vec{p}$ avec dN le nombre de choc subit entre t et $t + dt$ qui est le nombre de molécule se trouvant dans le volume balayé par le satellite

$dN = \frac{\mu dt}{m'} = \frac{\mu v dt \pi a^2}{m'}$ soit $\vec{F} = -\mu(z) \Sigma v \vec{v}$ donc $k(z) = \pi a^2 \mu(z)$ πa^2 représente la section droite du tube balayé d'air par le satellite appelé aussi section efficace

non , l'expression est indépendante de la forme du satellite

3.1.3 l'équation de la statique des fluides $-\vec{\nabla}p + \mu \vec{g}_0 = \vec{0}$ projetée sur Oz donne $\frac{dp}{dz} = -\mu g_0$ or l'air est un gaz parfait isotherme $p = \frac{\mu RT}{M}$

soit $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{g_0 M}{RT} dz = -\frac{dz}{H}$ il vient $\mu(z) = m(0) \exp(-\frac{z}{H})$ avec $H = \frac{RT}{M g_0}$ et $\mu_0 = \mu(z=0)$ masse volumique de l'air à la surface du sol !

3.2 Freinage du satellite

3.2.1 trajectoire presque circulaire $v^2 \approx \frac{g_0 R_T^2}{R}$ avec $R = z + R_T$ on différentie $2vdv \approx -\frac{g_0 R_T^2}{R^2} dz$

3.2.2 les frottements étant faible l'énergie mécanique se conserve presque $E_M = \frac{1}{2}mv^2 - m \frac{g_0 R_T^2}{R} \approx cte$ si $z \searrow \Rightarrow R \searrow \Rightarrow v \nearrow$

3.2.3 $dE_M = mv dv + \frac{m g_0 R_T^2}{R^2} dz$ d'après 3.2.1 il vient $| dE_M = \frac{m g_0 R_T^2}{2R^2} dz$

3.2.4 $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\mu(z) \Sigma v^3 dt$

3.2.5 le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $dE_M = \delta W \Rightarrow \frac{m g_0 R_T^2}{2R^2} dz = -\mu(z) \Sigma v^3 dt$

or $v^2 \approx \frac{g_0 R_T^2}{R}$ il vient $| \frac{dz}{dt} = -\frac{2\Sigma}{m} \mu(z) v R$ avec $B = \frac{2\Sigma}{m}$

3.2.6 orbite basse $R = R_T$ et $v \approx \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T}$

donc $\frac{dz}{dt} = -\frac{2\Sigma R_T \mu_0 \sqrt{g_0 R_T}}{m} \exp(-\frac{z}{H})$ par séparation des variables $| e^{\frac{z}{H}} dz = -\frac{H}{\tau} dt$ par intégration $z(t) = H \ln(-\frac{t}{\tau} + \exp \frac{z_0}{H})$ avec τ est un temps

3.2.7 la durée de chute t_0 est donnée par $z(t_0) = 0$

soit $t_0 = \tau \exp \frac{z_0}{H}$ avec $z_0 = h = 270 \text{ } 10^3 \text{ m}$

A.N $\tau = 6.4 \text{ } 10^{-6} \text{ s}$ et $t_0 = 6.4 \text{ } 10^7 \text{ s} = 775 \text{ jours}$ la chute est lente

3.2.8 on a $v \approx \sqrt{g_0 R_T} = 7745 \text{ ms}^{-1}$ et $v_{th} = 500 \text{ ms}^{-1}$ donc on peut négliger réellement la vitesse d'agitation thermique des molécules ceci ne remet pas en cause l'hypothèse de molécule au repos avant le choc !

fin du corrigé

Autour d'exo-planètes

Depuis la découverte en 1995 par M. MAYOR et D. QUELOZ de la première exo-planète ou planète extra-solaire, le nombre de celles-ci n'a cessé d'augmenter pour dépasser actuellement la centaine. Au delà du rêve qu'apporterait la découverte d'une autre "terre", la recherche d'exo-planète nécessite la mise à contribution de différentes avancées scientifiques et technologiques. Elle permettra certainement une évolution des idées actuelles sur la structure de l'Univers. Ce problème aborde quelques aspects relatifs aux propriétés orbitales d'un système composé d'une étoile et d'une planète, puis les conditions de visibilité d'une exo-planète. Il passe aussi en revue les méthodes indirectes de leur détection avant d'aborder les techniques qui pourraient servir pour leur observation directe et qui sont encore à l'étude.

Données utiles et notations

- constante de PLANCK : $h = -6,63 \cdot 10^{-34} J.s$
- constante de BOLTZMAN : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J.K^{-1}$
- célérité la lumière dans le vide : $c_0 = 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} kg^{-1}.m^3.s^{-2}$
- unité astronomique : $1 UA = 1,5 \cdot 10^{11} m$
- année lumière : $1 AL = 9,5 \cdot 10^{15} m$
- température de surface du Soleil : $T_\Theta = 6 \cdot 10^3 K$
- rayon du Soleil : $R_\Theta = 7,0 \cdot 10^8 m$
- rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^6 m$
- distance Terre - Soleil : $TS = 1UA$
- rayon de Jupiter : $R_J = 7,1 \cdot 10^7 m$
- la fonction sinus cardinal , sinc , est définie par $sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$
- valeurs approchées M_i des premiers maxima de $f(x) = \text{sinc}^2(\pi x)$ ainsi que leurs abscisses x_i :

x_i	0	1,43	2,46	3,47	4,48	...
M_i	1,0	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$...

- valeurs approchées M'_i des premiers maxima de $g(x) = \frac{\text{sinc}^2(\pi x)}{(1-x^2)^2}$ ainsi que leurs abscisses x'_i :

x'_i	0	2,36	3,41	4,43	5,44	...
M'_i	1,0	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$...

- $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

1^{ère} partie : **Quelques caractéristiques orbitales**

La détection d'une exo-planète P en orbite autour d'une étoile E passe souvent par la mise en évidence de la perturbation du mouvement de l'étoile due à la présence de la planète P. Pour simplifier, on considère que le système $\{E, P\}$ constitué de l'étoile E, de masse m_E , et

de la planète P, de masse m_P , est isolé. Le problème est ainsi ramené à l'étude classique d'un problème à deux corps.

On définit alors un mobile fictif F par $\vec{GF} = \vec{EP}$, G étant le centre d'inertie du système $\{E, P\}$, et on lui affecte la masse réduite $\mu = m_E \cdot m_P / (m_E + m_P)$.

On rappelle que, dans ce cas, les grandeurs cinétiques (énergie cinétique et moment cinétique) du système $\{E, P\}$ se confondent avec celles du mobile fictif F. D'autre part, tout se passe comme si le mobile fictif F était soumis dans le référentiel barycentrique $*R$ de $\{E, P\}$ à une force égale à celle exercée sur la planète P de la part de l'étoile E.

- 1.1 Quel est le nombre de planètes composant le système solaire ? Citer les noms de trois d'entre elles.
- 1.2 En appliquant un théorème adéquat de la mécanique, montrer que le mouvement de F est plan
- 1.3 On suppose que, dans $*R$, la trajectoire du mobile fictif F est circulaire de rayon R.
 - 1.3.1 Montrer que l'étoile E et la planète P ont elles aussi des trajectoires circulaires.
 - 1.3.2 En appliquant le théorème de la résultante cinétique, exprimer le rayon R de la trajectoire de F en fonction de G, m_E , m_P et de la période T du mouvement circulaire.
 - 1.3.3 En déduire les expressions des rayons GE et GP des trajectoires respectives de E et P.
- 1.4 On considère toujours le cas des trajectoires circulaires.
 - 1.4.1 Établir la relation entre le module v_E de la vitesse de l'étoile et le module v_P de la vitesse de la planète par rapport au référentiel $*R$.
 - 1.4.2 Exprimer ces deux vitesses en fonction de G, m_E , m_P ainsi que la période T du mouvement. Que deviennent ces expressions lorsque l'on tient compte du fait que $m_P \ll m_E$?
 - 1.4.3 **Application numérique** : l'étoile HD19994 possède une planète P beaucoup moins massive en orbite circulaire de rayon $EP = 1,3$ UA qu'elle parcourt en 454,2 jours. Quelle est la masse de l'étoile HD19994 ?
- 1.5 En réalité les mesures ne sont sensibles qu'à la composante $V_{||}(t)$ de la vitesse de l'étoile E parallèlement à l'axe de visée. Soit θ l'angle entre la normale au plan de la trajectoire de E et l'axe de visée (figure 1).

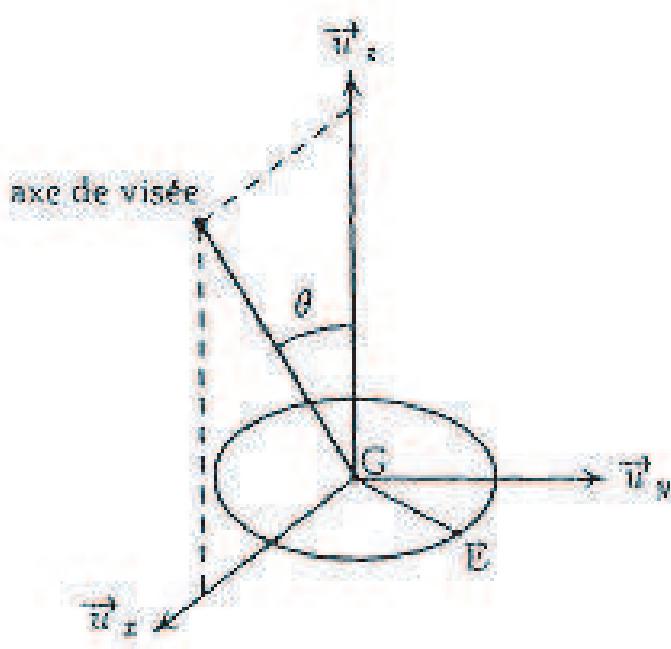


Fig 1 : Axe de visée

- 1.5.1** Exprimer la vitesse $\vec{v}_E(t)$ de l'étoile E sur sa trajectoire circulaire à l'instant t en fonction de v_E , t et T et en déduire $V_{//}(t)$; l'origine des temps sera choisie à un moment où \vec{v}_E est colinéaire avec \vec{u}_x .
- 1.5.2** Exprimer la masse m_P de la planète en fonction de la valeur maximale $V_{//max}$ de $V_{//}(t)$, de la période T, de θ , G et m_E .
- 1.5.3** Commenter cette expression en discutant notamment des meilleures conditions de visée pour pouvoir détecter des planètes de masse relativement faible.

2^{ème} partie : Visibilité de la planète

L'un des problèmes majeurs rencontrés lors de la détection des exo-planètes est lié à leur visibilité. En effet, l'exo-planète est toujours très peu lumineuse devant son étoile. On se propose dans cette partie d'aborder ce problème dans le but de déterminer le domaine spectral adéquat pour une meilleure détection. Les températures T_E de l'étoile et T_P de la planète seront supposées uniformes. On considère que l'étoile E se comporte comme un corps noir de température T_E . On se limitera aussi à des mouvements circulaires. Les rayonnements seront en plus supposés isotropes.

2.1 Caractéristiques générales

Considérons un corps noir en équilibre thermodynamique à la température T. La puissance rayonnée par unité de surface et par unité de longueur d'onde, ou flux hémisphérique spectral, est donnée par la loi de PLANCK :

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp \frac{hc_0}{\lambda k_B T} - 1} \quad (1)$$

- 2.1.1** Représenter graphiquement l'allure de $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ en fonction de λ pour une température T fixée.
- 2.1.2** Montrer que la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum du flux est donnée par la loi de déplacement de WIEN :

$$\lambda_m T = \gamma \frac{hc_0}{k_B} = k_W \quad (2)$$

où γ est la solution numérique d'une équation que l'on précisera. Par la suite on prendra $k_W = 3000 \mu m.K$

- 2.1.3** Calculer numériquement la longueur d'onde λ_Θ correspondant au maximum du spectre solaire. À quelle radiation correspond-elle ? Ceci est-il en accord avec l'observation quotidienne ?
- 2.1.4** Exprimer le flux hémisphérique surfacique total émis par le corps noir et montrer qu'il obéit à la loi de STEFAN, Donner l'expression de la constante σ de STEFAN. On donne :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

2.2 Température d'équilibre de la planète

L'exo-planète P de rayon R_P est supposée en orbite circulaire de rayon EP autour de l'étoile E. On suppose que la température T_P de la planète est uniforme en tout point de sa surface.

- 2.2.1** Exprimer le flux de rayonnement Φ_P reçu par la planète en fonction du flux radiatif Φ_E émis par l'étoile ainsi que de R_P et EP.

- 2.2.2** Exprimer de même les flux réfléchi Φ_r et absorbé Φ_a par la planète en fonction du flux Φ_E émis par l'étoile ainsi que l'albédo A de la planète défini comme étant la fraction réfléchie du rayonnement stellaire Φ_E .
- 2.2.3** Exprimer le flux Φ_e émis par la planète supposée à l'équilibre thermodynamique en fonction de sa température T_P et de son rayon R_P . On supposera pour cela que la planète se comporte comme un corps noir de température T_P .
- 2.2.4** Quelle relation simple existe-t-il entre Φ_e et Φ_a à l'équilibre ? En déduire que la température de la planète est reliée à la température T_E de l'étoile par la relation :

$$T_P = T_E(1 - A)^{1/4} \left(\frac{R_E}{2EP}\right)^{1/2} \quad (3)$$

2.2.5 Application numérique

- 2.2.5.1** Déterminer la température moyenne de la Terre prévue par ce modèle et commenter la valeur ainsi obtenue. La valeur communément admise pour l'albédo terrestre est $A = 0,34$.
- 2.2.5.2** Déterminer la température de la planète HD19994b qui orbite autour de l'étoile HD19994 sachant que $EP = 1,3\text{ UA}$ et que cette étoile a des caractéristiques proches de celles du Soleil. On prendra pour valeur de l'albédo $A = 0,5$. Commenter.
- 2.2.5.3** Calculer numériquement la longueur d'onde λ_P correspondant au maximum du spectre de la planète HD19994b. Commenter.

2.3 Condition photométrique d'observation

Un observateur terrestre pointe un télescope en direction du couple $\{E, P\}$. On se propose à présent de déterminer le domaine spectral qui favorise l'observation de l'exo-planète.

- 2.3.1** Exprimer le rapport ϱ des puissances émises par la planète et par l'étoile en fonction de la longueur d'onde λ , des longueurs d'onde λ_E et λ_P correspondant respectivement au maximum de l'émission de E et de P ainsi que du rapport des rayons de P et E.
- 2.3.2** Représenter graphiquement $\varrho(\lambda)$ et déterminer la limite ϱ_ℓ de $\varrho(\lambda)$ pour les grandes longueurs d'onde en fonction de R_E , R_P , T_E et T_P . Calculer numériquement ϱ_ℓ pour un couple du type $\{\text{Soleil}, \text{Terre}\}$ et commenter.
- 2.3.3** Quel est, du point de vue photométrique, le domaine favorable à l'observation de la planète P ?

3^{ème} partie : Détection par la méthode indirecte des transits

La recherche d'exo-planètes autour d'étoiles autres que le Soleil peut se faire grâce à des mesures photométriques précises. Le principe repose sur la possibilité de mettre en évidence l'affaiblissement de luminosité observée lors du passage de la planète à détecter entre l'étoile et l'observateur. Pour cela, il faut pouvoir réaliser des mesures de haute précision du flux lumineux comme ce sera le cas sur le satellite COROT dont le lancement est prévu pour 2005-2006.

- 3.1** La figure 2 représente la variation relative $\frac{d\Phi}{\Phi_E}$ du flux total détecté au cours du temps lors du passage d'une planète devant son étoile parente. Commenter cette figure en indiquant les positions de la planète correspondant aux différents domaines du graphique. On représentera ces différentes positions relatives du couple $\{\text{étoile, planète}\}$ dans le plan de la trajectoire.

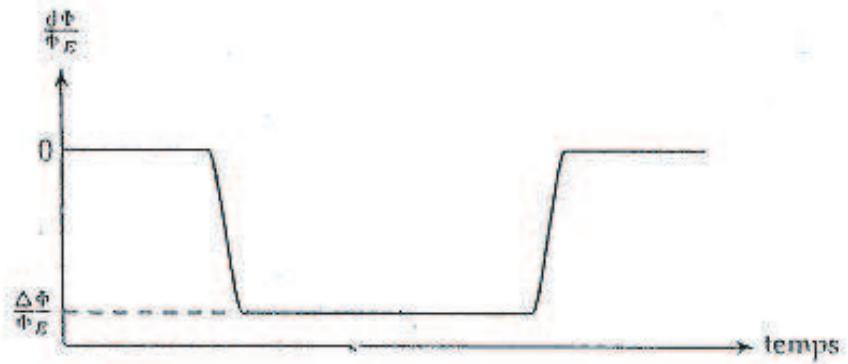


Fig 2 : Effet de l'occultation de l'étoile par le passage d'une planète.

3.2 On note Φ_E le flux hémisphérique total émis par l'étoile de rayon R_E et Φ_P celui émis par la planète de rayon R_P .

3.2.1 Exprimer la variation de flux $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E}$ (figure 2) en fonction de R_E et R_P . On supposera pour simplifier que l'axe de visée est perpendiculaire à la normale au plan de la trajectoire de la planète.

3.2.2 Calculer $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E}$ pour une planète du type Jovienne (comparable à Jupiter) ainsi que pour une planète du type tellurique (comparable à la Terre) en orbite autour d'une étoile du même type que le Soleil. Commenter.

3.2.3 L'exo-planète OGLE-TR-56b annoncée le 30 janvier 2003 a été détectée par la méthode des transits. La variation relative de flux enregistrée est de $1/1000^e$. En déduire le rapport des rayons de la planète et de son étoile parente.

4^{ème} partie : Observation directe

4.1 Coronographe de Lyot

Dans cette partie du problème, on s'intéresse à l'observation d'un système $\{E, P\}$ à l'aide d'un télescope au sol ou dans l'espace. Le télescope en question est un télescope du type CASSEGRAIN constitué d'un miroir primaire parabolique de diamètre D et d'un miroir secondaire hyperbolique. Nous admettrons dans toute la suite qu'un tel système de miroirs est *formellement* équivalent à une seule lentille mince convergente L_1 de grande dimension munie d'un diaphragme circulaire D de même diamètre D que le miroir primaire et de distance focale image f_{l1} . La figure 3 montre la lentille L_1 ainsi que la lentille L_2 qui schématise l'oculaire. Ces lentilles sont disposées de sorte que le système $\{L_1, L_2\}$ soit afocal. Le foyer image F_1 de L_1 sera appelé foyer du télescope et le plan de front passant par F_1 est le plan focal du télescope. Pour les applications numériques, on prendra $\mathbf{D = 15 \text{ m}}$.

Pour simplifier les calculs, on considère un modèle unidimensionnel de la pupille d'entrée du télescope. Dans le cadre de ce modèle, le diaphragme circulaire D de diamètre D est remplacé par une fente F de largeur D selon l'axe Ox et allongée selon Oy (figure 3).

Ce modèle, malgré sa simplicité, permettra de rendre compte des propriétés fondamentales du système.

On s'intéresse plus particulièrement au couple composé de l'étoile HD19994 et de sa planète HD19994b. Pour ce couple, la distance entre l'étoile E et la planète P est $EP = 1,3 \text{ UA}$; il se

trouve à une distance de la Terre $TE = 72$ AL. On supposera que le plan de la trajectoire est perpendiculaire à l'axe de visée.

Un filtre très sélectif permet de sélectionner une longueur d'onde de travail λ dans le domaine de l'infrarouge pour laquelle le rapport des intensités I_0^P de la planète et I_0^E de l'étoile vaut $5 \cdot 10^{-6}$.

On prendra pour les applications numériques $\lambda = 1,5 \mu m$.

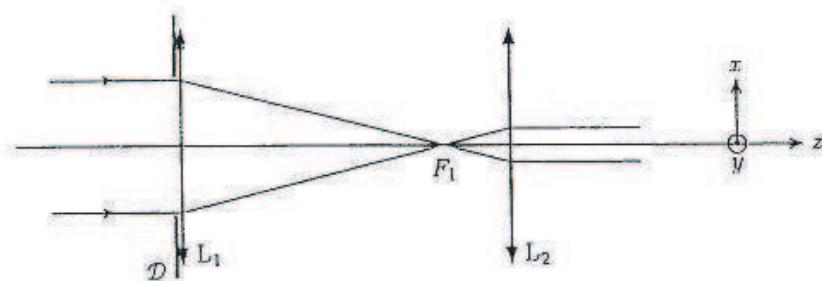


Fig 3 : Système de lentilles minces convergentes équivalent au télescope muni de son oculaire.

- 4.1.1 Citer le nom d'un télescope installé dans l'espace.
- 4.1.2 Dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, représenter l'image du système {E,P} dans le plan focal du télescope lorsque l'axe du télescope est dirigé vers l'étoile E.
- 4.1.3 Énoncer clairement le principe de HUYGHENS-FRESNEL.
- 4.1.4 Le télescope est tout d'abord éclairé par une onde plane monochromatique provenant d'une source unique éloignée située dans la direction faisant un angle α_0 avec l'axe principal du télescope dans le plan $y = 0$.
 - 4.1.4.1 Calculer la répartition de l'intensité lumineuse $I(x)$ dans le plan focal du télescope.
 - 4.1.4.2 Représenter graphiquement l'allure de $I(x)$ en précisant les abscisses des points où l'intensité est nulle ainsi que la largeur de la tache centrale de diffraction.
- 4.1.5 L'axe principal du télescope est maintenant dirigé dans la direction de l'étoile HD19994 autour de laquelle orbite la planète HD19994b. Le problème central de l'observation directe est d'atténuer considérablement la tache centrale de diffraction de l'étoile pour ne pas éblouir l'image géométrique de la planète et permettre ainsi son observation.
 - 4.1.5.1 Exprimer l'intensité résultante dans le plan focal du télescope.
 - 4.1.5.2 Montrer que l'on peut disposer un cache opaque de largeur adéquate ℓ_0 dans le plan focal du télescope pour arrêter la lumière du lobe central ainsi que celle des deux lobes latéraux (un de chaque côté) sans affecter la tache centrale de la planète. Exprimer ℓ_0 en fonction de λ , D et f_{i1} .
 - 4.1.5.3 Montrer que le pic central de la figure de diffraction de la planète reste noyé dans la lumière provenant de l'étoile. On pourra s'aider des données numériques du début de l'énoncé.

4.2 Étude d'une pupille apodisée

L'étude précédente montre que même si on occulte la tache centrale de diffraction de l'étoile, la lumière en provenance de la planète reste noyée dans celles des maxima secondaires. Pour tenter de résoudre cette difficulté, certains chercheurs proposent de faire appel à la technique d'apodisation.

Cette technique consiste à utiliser une pupille diffractante dont la transmittance pupillaire t ou coefficient complexe de transmission en amplitude, n'est pas uniforme. On s'intéresse par la suite à une transmittance en \cos^2 telle que, dans le plan de la fente F on a :

$$t = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi x}{D}\right) & \text{pour } |x| \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4)$$

4.2.1 Calculer la répartition d'intensité $I(x)$ dans le plan focal du télescope lorsque celui-ci est éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ provenant d'une source lointaine dans la direction faisant un angle α_0 avec l'axe principal du télescope dans le plan zOx.

4.2.2 Représenter graphiquement l'allure de $I(x)$ et déterminer les abscisses des points où l'intensité est nulle.

4.2.3 Quelle est la largeur de la tache centrale de diffraction ? Commenter en dégageant les effets du masque (4) sur la figure de diffraction.

4.2.4 On s'intéresse au couple constitué de l'étoile HD19994 et de sa planète HD19994b. Le télescope est ainsi orienté dans la direction de HD19994. On suppose dans cette question qu'un cache opaque de largeur ℓ_0 calculée à la question 4.1.5.2. est interposé dans le plan focal du télescope.

4.2.4.1 Montrer que le cache opaque permet cette fois d'arrêter la lumière de la tache centrale de diffraction de l'étoile.

4.2.4.2 Calculer le rapport de l'intensité du maximum central provenant de la planète à celle du premier maximum non caché provenant de l'étoile. Comparer au cas sans apodisation.

4.2.4.3 L'utilisation du cache opaque et du masque d'apodisation (4) permet-elle d'isoler la lumière provenant de la planète ?

4.2.4.4 Comment peut-on accentuer l'effet de l'apodisation ?

4.3 Apodisation à l'aide de l'interféromètre de Michelson

Dans l'impossibilité de pouvoir disposer de masque d'apodisation d'autant grande dimension que les pupilles d'entrée des grands télescopes, certains chercheurs ont proposé un montage interférométrique pour réaliser l'apodisation. Le montage que l'on se propose d'étudier est construit autour d'un interféromètre de MICHELSON. La figure 4 représente le banc d'essai en laboratoire d'un tel montage.

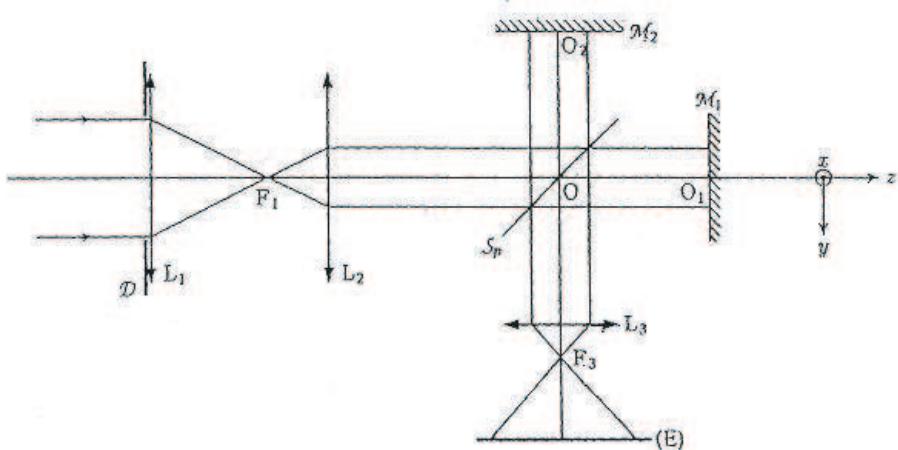


Fig 4 : Banc d'essai d'un montage interférométrique d'apodisation.

La fente F schématise la pupille d'entrée du télescope et la lentille convergente L_1 représente la lentille équivalente aux miroirs du télescope. La lentille convergente L_2 permet d'éclairer

l'interféromètre en lumière parallèle et forme l'image de la pupille d'entrée du télescope sur le miroir de l'interféromètre. La lentille L_3 permet de conjuguer le miroir et l'écran d'observation E.

4.3.1 L'interféromètre de MICHELSON est constitué de :

- un miroir plan M_1 mobile en translation le long de l'axe Oz et en rotation autour des axes O_1x et O_1y ;
- un miroir plan M_2 mobile en rotation autour des axes O_2x et O_2z ;
- une lame séparatrice S en verre d'épaisseur uniforme rendue semi-réfléchissante ; elle transmet 50% du flux incident et en réfléchit 50% ;
- une lame compensatrice C en verre de même épaisseur que la lame séparatrice.

Un réglage préliminaire permet de rendre la lame compensatrice C parallèle à la lame séparatrice S. Dès lors on peut considérer un modèle idéal d'interféromètre de MICHELSON dans lequel la lame séparatrice est remplacée par une séparatrice S_p d'épaisseur nulle (figure 4), fournissant deux ondes de même intensité et n'introduisant pas de déphasage supplémentaire entre les deux ondes qui interfèrent.

4.3.1.1 Par quel procédé technologique, parvient-on augmenter le pouvoir de réflexion d'une lame de verre pour la rendre semi-réfléchissante ?

4.3.1.2 Quel est le rôle de la lame compensatrice C ?

4.3.1.3 Comment parvient-on dans la pratique à disposer la lame compensatrice C parallèlement à la lame séparatrice S ?

4.3.1.4 Décrire un protocole expérimental permettant d'approcher au mieux " le contact optique " : M_1 et M_2 perpendiculaires entre eux et à égale distance de la séparatrice S_p .

4.3.2 À partir du réglage précédent (contact optique), on fait tourner le miroir M_1 d'un angle $+\frac{\alpha}{2}$ positif autour de l'axe O_1x et le miroir M_2 du même angle $+\frac{\alpha}{2}$ positif autour de l'axe O_2x . Dans la pratique α est très petit ($\alpha \ll 1$).

4.3.2.1 Montrer à l'aide d'un schéma, que le dispositif interférentiel ainsi obtenu est équivalent à un coin d'air symétrique dont on déterminera l'angle. Par la suite on s'intéressera aux interférences localisées au voisinage du coin d'air.

4.3.2.2 Montrer que l'éclairement résultant peut se mettre sous la forme :

$$I = I_0 \cos^2 \beta z \quad (5)$$

et donner l'expression de β en fonction de α et λ .

4.3.2.3 En déduire une expression possible de l'amplitude réelle de l'onde lumineuse correspondante.

4.3.2.4 En déduire que tout se passe comme si l'image de la fente F donnée par L_2 et S_p sur M_2 avait une transmission non uniforme décrite par le coefficient de transmission en amplitude t donné par :

$$t(z) = \cos \beta z \quad (6)$$

4.3.2.5 Quelle valeur particulière α_0 faut-il donner à l'angle α pour que $t(z)$ s'annule pour la première fois aux bords du faisceau de largeur D' éclairant le miroir M_2 ? On exprimera α_0 en fonction de λ , D et des distances focales images f_{i1} de L_1 et f_{i2} de L_2 .

4.3.2.6 Où se trouve l'image géométrique du foyer du télescope donnée par le système composé de l'interféromètre de MICHELSON et de la lentille L_3 ?

4.3.3 Les questions suivantes demandent des réponses qualitatives sans aucun calcul.

4.3.3.1 Dans la réalité, la pupille d'entrée du télescope est circulaire. Il est donc nécessaire de procéder à une apodisation à deux dimensions. Comment doit-on modifier le montage interférométrique précédent pour pouvoir réaliser une telle apodisation ?

4.3.3.2 Comment faut-il procéder pour réaliser une apodisation à l'aide d'une transmittance en \cos^2 , en \cos^N ?

fin de l'énoncé

Autour d'exo planètes

1^{ère} partie : Quelques caractéristiques orbitales

1.1 terre , Jupiter , mars (soleil et lune sont inacceptables)

1.2 dans *R (Galiléen car système isolé) le TMC en G appliqué à la particule fictive F :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \overrightarrow{GF} \times -G \frac{m_E m_P}{EP^3} \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EP} \times -G \frac{m_E m_P}{EP^3} \overrightarrow{EP} = \vec{0}$$

donc $\vec{\sigma}_G = \overrightarrow{GF} \times \mu \vec{v} = \overrightarrow{cte}$ soit $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{cte} = ax + by + cz = 0$ c'est l'équation cartésienne du plan passant par l'origine G et \perp à $\vec{\sigma}_G$

1.3 $GF = R$

1.3.1 on a : $\begin{cases} m_E \overrightarrow{GE} + m_P \overrightarrow{GP} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EP} \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{GE} = -\frac{m_P}{m_E + m_P} \overrightarrow{GF} \\ \overrightarrow{GP} = \frac{m_E}{m_E + m_P} \overrightarrow{GF} \end{cases}$

les trajectoires de F , E et P sont homothétique dans *R donc les trajectoires de E et P seront aussi circulaires

1.3.2 dans la base de Freinet le TRC s'écrit : $\mu \frac{v^2}{R} (-\vec{e}_r) = -G \frac{m_E m_P}{R^2} \vec{e}_r$ or $v = \frac{2\pi R}{T}$ donc

$$R = \left[\frac{G(m_E + m_P)T^2}{4\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

1.3.3 soit : $GE = \frac{m_P}{m_E + m_P} R = \frac{m_P}{(m_E + m_P)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{GT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ et $GP = \frac{m_E}{m_E + m_P} R = \frac{m_E}{(m_E + m_P)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{GT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

1.4

1.4.1 on a la relation du barycentre $m_E \overrightarrow{GE} + m_P \overrightarrow{GP} = \vec{0}$, par dérivation par rapport au temps dans *R il vient $m_E \vec{v}_E = -m_P \vec{v}_P$ donc $m_E v_E = m_P v_P$

1.4.2 $v_E = \frac{2\pi GE}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_P^3 G}{(m_E + m_P)^2 T}}$

$$v_P = \frac{2\pi GP}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_E^3 G}{(m_E + m_P)^2 T}}$$

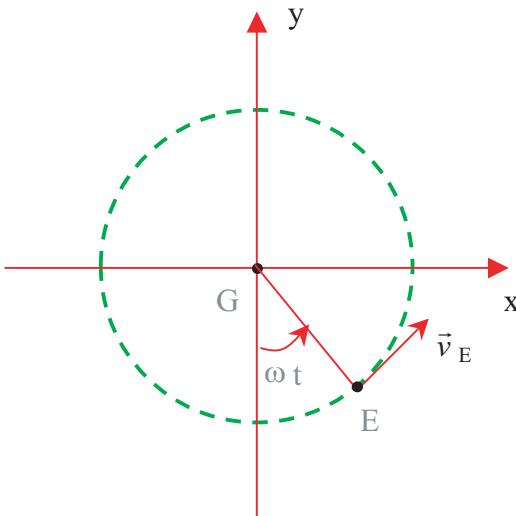
si $m_p \ll m_E$ alors $v_E \approx 0$ et $v_P \approx \sqrt[3]{\frac{2\pi m_E G}{T}}$

1.4.3 dans ce cas $G \equiv E$ et $(F \equiv P)$ donc $v_P = \frac{2\pi EP}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_E G}{T}}$ soit $| m_E = \frac{4\pi^2 EP^3}{GT^2} = 2.8 \cdot 10^{30} kg$

1.5

1.5.1 $\vec{v}_E(t) = v_E [\cos \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_y]$

or $v_{//} = \vec{v}_E \cdot \vec{u} = v_E [\cos \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_y] \cdot [\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_z] = v_E \sin \theta \cos \frac{2\pi t}{T}$



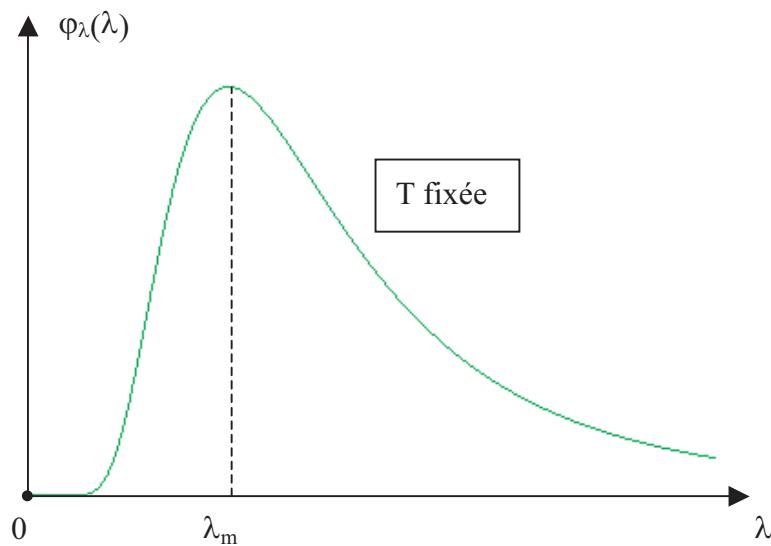
1.5.2 on a $v_{//max} = v_E \sin \theta$ et $v_E = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_P^3 G}{(m_E + m_P)^2 T}} \approx \sqrt[3]{\frac{2\pi m_P^3 G}{m_E^2 T}}$ d'où $m_p = \frac{v_{//max}}{\sin \theta} \sqrt[3]{\frac{m_E^2 T}{2\pi G}}$

1.5.3 les mesures étant sensibles à $v_{//}$ donc la position favorable sera $\sin \theta = 1$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

2^{ème} partie :
Visibilité de la planète

2.1 Caractéristiques générales

2.1.1 :



2.1.2 posons $x = \frac{hc_0}{\lambda k_B T}$, le maximum de φ_λ est donné par

$$\frac{d\varphi_\lambda(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\varphi_\lambda}{dx} \frac{-hc_0}{\lambda^2 k_B T} = 0 \iff \frac{d}{dx} \left(\frac{x^5}{e^x - 1} \right) |_{x_m} = 0 \iff 5e^{x_m} - 5 - x_m e^{x_m} = 0$$

donc $\lambda_m T = \frac{hc_0}{k_B x_m}$ soit $\gamma = \frac{1}{x_m}$

2.1.3 $\lambda_\Theta T_\Theta = 3000 \mu m K \implies \lambda_\Theta = 0.5 \mu m$ couleur jaune en accord avec l'observation

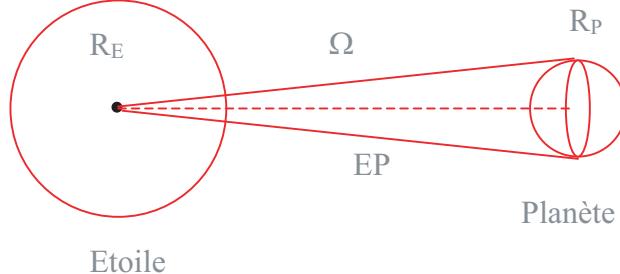
2.1.4 $\varphi = \int_0^\infty \varphi_\lambda d\lambda$ on pose $x = \frac{hc_0}{\lambda k_B T}$ il vient

$$\varphi = \int_{\infty}^0 \frac{2\pi hc_0^2}{(\frac{hc_0}{k_B T})^5} \frac{x^5}{e^x - 1} \frac{-hc_0 dx}{k_B T x^2} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c_0^2} T^4$$

obéissant à la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ avec $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c_0^2}$

2.2 Température d'équilibre de la planète

2.2.1 le flux incident sur la planète venant de l'étoile s'écrit $\Phi_P = \frac{\Omega}{4\pi} \Phi_E = \frac{R_P^2}{4EP^2} \Phi_E$



2.2.2 on a $\Phi_P = \underbrace{\Phi_t}_{\text{radiation}} + \Phi_r + \Phi_a = \Phi_r + \Phi_a$ et $\Phi_r = A\Phi_p$ soit $\boxed{\Phi_r = A \frac{R_P^2}{4EP^2} \Phi_E}$ et $\boxed{\Phi_a = (1 - A) \frac{R_P^2}{4EP^2} \Phi_E}$

2.2.3 loi de Stefan $\Phi_e = \sigma T_P^4 4\pi R_P^2$

2.2.4 à l'équilibre radiatif $\Phi_e = \Phi_a \implies T_P = (1 - A)^{\frac{1}{4}} (\frac{R_E}{2EP})^{\frac{1}{2}} T_E$

2.2.5 Application numérique

2.2.5.1 $T_{terre} = 261 K = -11^\circ C$ trop froid , il faut tenir compte de l'effet de serre!

2.2.5.2 $T_P = 213 K = -59^\circ C$ insupportable par les êtres-vivants

2.2.5.3 loi de Wien $\lambda_P = 14 \mu m$ domaine infra-rouge !

2.3 Condition photométrique d'observation

2.3.1 le rapport des puissances émises dans le domaine $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ s'écrit

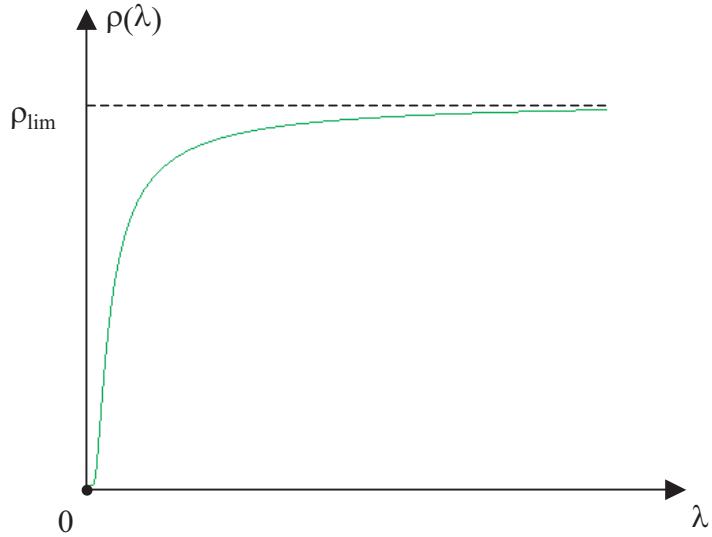
$$\varrho = \frac{\varphi_\lambda(\lambda, T_P) d\lambda}{\varphi_\lambda(\lambda, T_E) d\lambda} \frac{4\pi R_P^2}{4\pi R_E^2} \text{ or } \lambda_P T_P = \lambda_E T_E = \gamma \frac{hc_0}{k_B}$$

$$\text{soit } \varrho = \frac{e^{\frac{\lambda_E}{\gamma \lambda}} - 1}{e^{\frac{\lambda_P}{\gamma \lambda}} - 1} \left(\frac{R_P}{R_E} \right)^2$$

2.3.2 si $\lambda \rightarrow 0$ alors $\varrho \rightarrow e^{\frac{\lambda_E - \lambda_P}{\gamma \lambda}} \left(\frac{R_P}{R_E} \right)^2 \rightarrow 0^+$ car $\lambda_P > \lambda_E$ puisque $T_E > T_P$

si $\lambda \rightarrow \infty$ alors $\varrho \rightarrow \varrho_\ell^- = \frac{\lambda_E}{\lambda_P} \left(\frac{R_P}{R_E} \right)^2$ (au voisinage de 0 $e^x \sim 1 + x$)

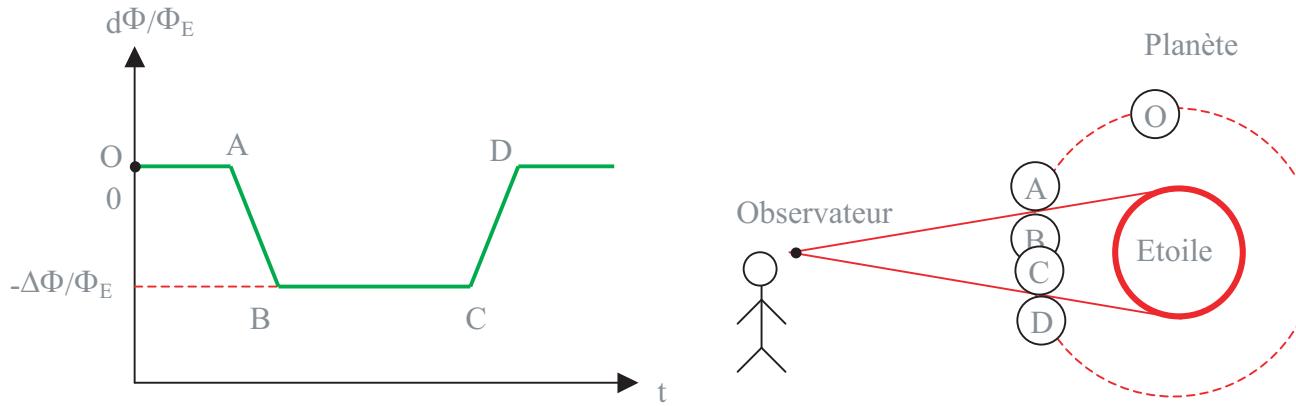
A.N : $\varrho_\ell(\text{terre} - \text{soleil}) = 3.6 \cdot 10^{-6}$ de l'espace la terre sera nettement moins visible !



2.3.3 domaine des grandes longueurs d'onde (infra-rouge)

3^{ème} partie :
Détection par la méthode indirecte des transits

3.1 :



3.2

3.2.1 entre les points O et A le flux observé sera $\Phi = \Phi_E + \Phi_P$ mais entre les points B et C le flux observé sera $\Phi' = \frac{\Phi_E}{\pi R_E^2} (\underbrace{\pi R_E^2 - \pi R_P^2}_{}) + \Phi_P$

$$\text{donc } \frac{\Delta\Phi}{\Phi_E} = \frac{\Phi' - \Phi}{\Phi_E} = -\left(\frac{R_P}{R_E}\right)^2$$

3.2.2 A.N :

$$\text{planète Jovienne } \frac{\Delta\Phi}{\Phi_E} = -10^{-2}$$

$$\text{planète Tellurique } \frac{\Delta\Phi}{\Phi_E} = -8.3 \cdot 10^{-5}$$

la planète Jovienne est plus facile à détecter qu'une planète Tellurique !

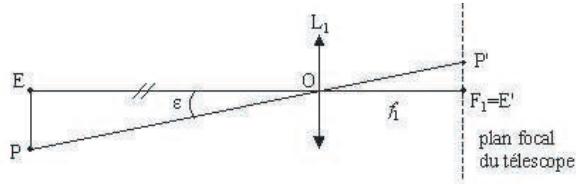
$$\text{3.2.3 } \frac{R_P}{R_E} = \sqrt{\left|\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E}\right|} = \sqrt{10^{-3}} = 3.2 \cdot 10^{-2}$$

4^{ème} partie :
Observation directe

4.1 Coronographe de Lyot

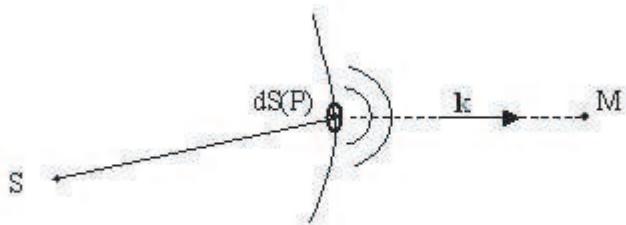
4.1.1 télescope Hubble

4.1.2 le système E, P étant presque à l'infini , les images seront dans le plan focal du télescope



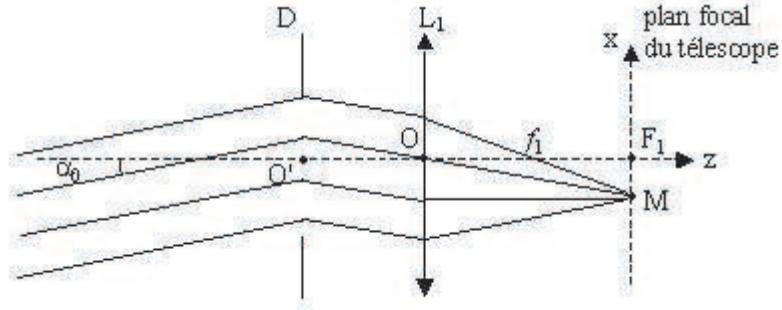
4.1.3 la lumière se propage de proche en proche , chaque point P atteint par elle se comporte comme une source secondaire et émet des ondlettes sphériques d'amplitude

$$da(M, t) = \underline{a}_i(P^-) \underline{t}(P) \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{P} \vec{M})}}{PM} dS(P)$$



avec $\underline{a}_i(P^-)$ est l'amplitude du signal lumineux juste avant P et $\underline{t}(P)$ la transmittance de la surface diffractante en P

4.1.4 le schéma est :



4.1.4.1 on a $I(x) = |\underline{a}|^2$ or à une dimension $\underline{a}(x) = a_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{O}' P} \frac{dx'}{D}$ avec

$$\vec{u}_i = \cos \alpha_0 \vec{z} + \sin \alpha_0 \vec{x}$$

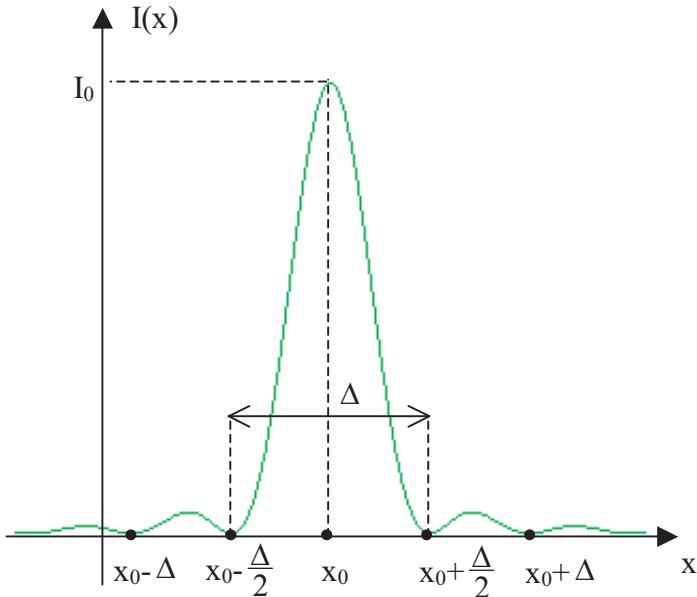
$$\vec{u} \approx \frac{\vec{O} \vec{M}}{f_1} = \frac{f_1 \vec{z} + x \vec{x}}{f_1}$$

$$\vec{O}' \vec{P} = x' \vec{x}$$

il vient $\underline{a}(x) = a_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} e^{\frac{2\pi i}{\lambda f_1} (x - f_1 \sin \alpha_0) x'} \frac{dx'}{D} = a_0 \operatorname{sinc}[\frac{\pi D}{\lambda f_1} (x - x_0)]$ avec $x_0 = f_1 \sin \alpha_0$

$$\text{soit } I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2[\frac{\pi D}{\lambda f_1} (x - x_0)]$$

4.1.4.2 la largeur de la tache centrale de diffraction est $\Delta = 2 \frac{\lambda}{D} f_1$



4.1.5

4.1.5.1 la lumière des deux étoiles est incohérente donc $I(x) = I_P(x) + I_E(x)$

or $\alpha_{0E} = 0$ et $\alpha_{0P} \approx \tan \alpha_{0P} = \frac{EP}{TE} = 2.85 \cdot 10^{-7} rad$

soit $I(x) = I_0^E \operatorname{sinc}^2\left[\frac{\pi D}{\lambda f_1} x\right] + I_0^P \operatorname{sinc}^2\left[\frac{\pi D}{\lambda f_1} (x - x_p)\right]$

avec $x_p = \sin \alpha_{0P} f_1 \approx \alpha_{0P} f_1$ correspondant à la position de l'image géométrique de P !

4.1.5.2 la tache centrale de l'étoile est centrée sur $x = 0$ pour cacher les deux lobes ainsi que la tache centrale de l'étoile on doit prendre $\ell_0 = \frac{\Delta}{2} + \Delta + \frac{\Delta}{2} = 4 \frac{\lambda}{D} f_1 \implies \ell_0 = 4 \cdot 10^{-7} f_1$
or la tache centrale de la planète est centrée sur $x = x_p = 2.85 \cdot 10^{-7} f_1 > \frac{\ell_0}{2}$ donc la tache centrale de la planète est en dehors de la partie masquée

4.1.5.3 le rapport des intensités au niveau de l'image géométrique de la planète et le premier lobe non caché est $\varrho = \frac{5 \cdot 10^{-6} I_0^E}{1.6 \cdot 10^{-2} I_0^P} = 3 \cdot 10^{-4}$

malgré le cache déposé, la planète reste noyée dans la lumière diffractée de l'étoile

4.2 Étude d'une pupille apodisée

4.2.1 $\underline{a}(x) = a_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} t(x') e^{\frac{2\pi j}{\lambda f_1} (x-x_0)x'} \frac{dx'}{D}$ avec $x_0 = f_1 \sin \alpha_0$

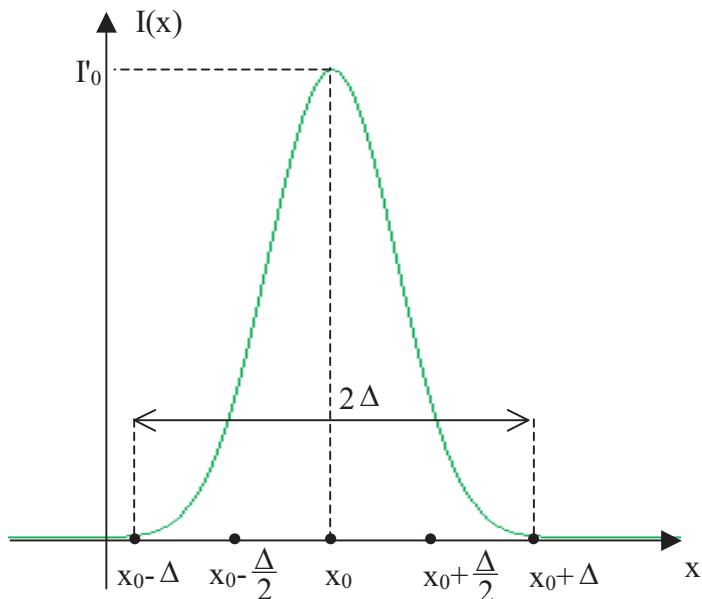
et $t(x') = \cos^2\left(\frac{\pi x'}{D}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x'}{D} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi j x'}{D}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi j x'}{D}}$

donc après calcul, il vient $\underline{a}(x) = \frac{a_0}{2} \frac{\operatorname{sinc}(\pi X)}{1-X^2}$ avec $X = \frac{D}{\lambda f_1} (x - x_0)$ enfin

$$I(x) = I'_0 \frac{\operatorname{sinc}^2(\pi X)}{(1-X^2)^2}$$

où $I'_0 = \frac{I_0}{4}$

4.2.2 on a $I(X = 0) = I'_0$ et par développement limité $I(X = 1) = \frac{I'_0}{4}$ et $I(X) = 0$ pour $X \in Z - \{0, 1\}$



4.2.3 la largeur de la tache centrale est $\Delta' = 2\Delta = 4\frac{\lambda}{D}f_1$, le masque (4) élimine quasiment la lumière des lobes secondaires c'est l'apodisation

4.2.4

4.2.4.1 l'intensité du premier lobe non caché de la lumière issue de E est , d'après le tableau donné , $7.1 \times 10^{-4}I_E^0$, on peut donc dire que la lumière de l'étoile est arrêtée par le cache

4.2.4.2 $\varrho' = \frac{5 \cdot 10^{-6}I_E^0}{7.1 \cdot 10^{-4}I_E^0} = 7 \cdot 10^{-3}$, la lumière de l'étoile est relativement moins gênante avec l'apodisation

4.2.4.3 non , le rapport des intensités est encore très faible

4.2.4.4 changer la transmittance de la pupille du télescope

4.3 Apodisation à l'aide de l'interféromètre de Michelson

4.3.1

4.3.1.1 Par une deposition d'une couche mince (micrométrique) métallique (d'argent par exemple) sous vide.

4.3.1.2 compenser la différence de marche dûe à l'épaisseur non nulle de la lame séparatrice

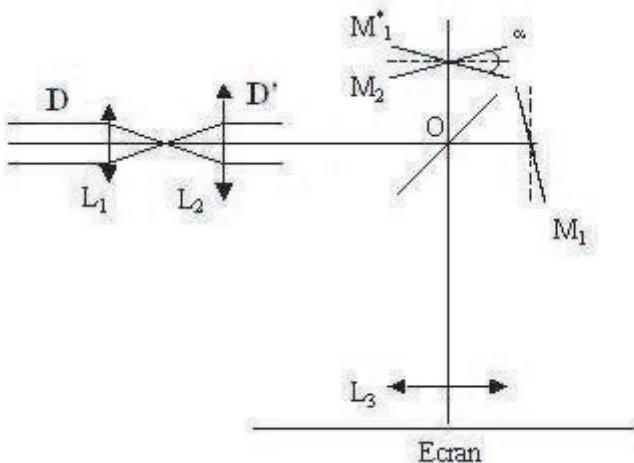
4.3.1.3 on éclaire l'ensemble $\{C + S_p\}$ à l'aide d'un faisceau Laser si la compensatrice n'est pas parallèle à la séparatrice , on observe plusieurs taches sur l'écran , on incline alors C jusqu'à obtenir une seule tache , S_p et C sont alors parallèles!



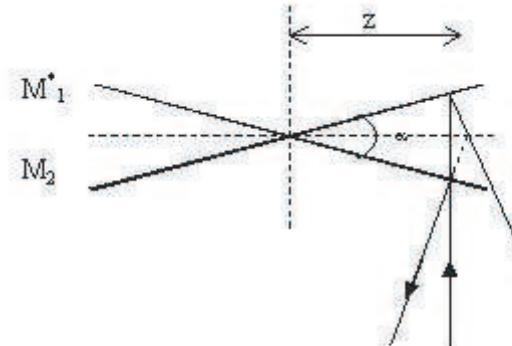
4.3.1.4 on translate le miroir M_1 suivant Oz , les anneaux défilent du centre jusqu'à obtenir une intensité uniforme sur l'écran c'est la position du contact optique



4.3.2



4.3.2.1 :



4.3.2.2 on a $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda})$ or $\delta = 2e \approx 2\alpha z$ soit $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{4\pi\alpha z}{\lambda}) = I_0 \cos^2 \frac{2\pi\alpha z}{\lambda}$ donc $\beta = \frac{2\pi\alpha}{\lambda}$

4.3.2.3 $I = |a|^2 \implies a(z) = a_0 \cos \beta z$ est une expression possible de l'amplitude de l'onde

4.3.2.4 à la sortie de L_2 puis après réflexion sur S_p l'amplitude de onde est a_0

avant L_3 l'amplitude est $a_0 \cos \beta z$ donc tout se passe comme si la transmittance de la fente F est $t(z) = \cos \beta z$

4.3.2.5 Tallis $\frac{D}{D'} = \frac{f_{i1}}{f_{i2}}$ on a $\cos \beta \frac{D'}{2} = 0$ pour la première fois càd $\beta \frac{D'}{2} = \frac{\pi}{2} \implies \alpha_0 = \frac{\lambda f_{i1}}{2 D f_{i2}}$

4.3.2.6 l'image F_1 par le Michelson (Miroirs non tournés) et L_3 est F_3 le foyer image de L_3

4.3.3 qualitativement

4.3.3.1 non , car on aura une invariance par rotation autour de l'axe optique.

Il faut remplacer les miroirs plans M_1 et M_2 par des miroirs sphériques pour obtenir un coin d'air invariant par rotation autour de Oz

4.3.3.2 répéter l'opération à l'aide de N dispositif de Michelson (le point F_3 prend le rôle de F_1).

fin du corrigé

Microscopie

La microscopie est la technique permettant de rendre visible des détails fins d'un objet. L'épreuve propose d'en aborder quelques aspects. Elle est constituée de 3 parties largement indépendantes. La première partie étudie quelques propriétés de l'œil humain. Cette étude est nécessaire pour la compréhension du fonctionnement du microscope étudié dans la partie 2. La dernière partie aborde un aspect de la microscopie électronique.

Données utiles

- . Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$
- . Charge de élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$
- . Constante de PLANCK : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J.s$
- . Divergence en coordonnées cylindriques d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_r(r, z)\vec{u}_r + a_z(r, z)\vec{u}_z$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- . Rotationnel en coordonnées cylindriques d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_r(r, z)\vec{u}_r + a_z(r, z)\vec{u}_z$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta$$

1^{ère} partie : Œuil

L'œil est l'organe pair de la vuc. Le globe oculaire, approximativement sphérique, est constitué principalement des éléments suivants :

- l'iris est une membrane circulaire, contractile, occupant le centre antérieur de l'œil et percée en son milieu d'un orifice, la pupille, dont le diamètre ϕ peut varier entre 2 mm et 8 mm ; l'iris joue le rôle d'un diaphragme permettant de régler la quantité de lumière qui pénètre dans l'œil ;
- le cristallin, en forme de lentille biconvexe, est le principal élément réfringent de l'œil ; il est placé dans le globe oculaire en arrière de la pupille ;
- la rétine est une membrane du fond de l'œil, formée de cellules nerveuses en rapport avec les fibres du nerf optique, et sensible à la lumière ; elle joue le rôle d'un transducteur qui participe à la transformation du flux lumineux en influx nerveux.

L'ensemble du globe oculaire est protégé par une paroi appelée la sclérotique et qui, en avant de l'œil, prend une forme bombée et devient transparente formant la cornée. L'œil ne voit clairement un objet que si son image par ses différents milieux réfringents se forme sur la rétine. Pour cela, les muscles de l'œil peuvent agir sur le cristallin pour modifier sa courbure : c'est le **phénomène d'accommodation**. Pour l'étude optique simplifiée proposée dans ce problème, l'œil sera schématisé par une seule lentille convergente (L) de distance focale image f_i variable, placée devant un écran (E) qui schématise la rétine à une distance $d = OF$ appelée profondeur de l'œil. Un diaphragme (D), d'ouverture circulaire de diamètre ϕ variable entre 2 mm et 8 mm, est placé contre la lentille (figure 1). *Le tout est plongé dans l'air d'indice de réfraction 1.*

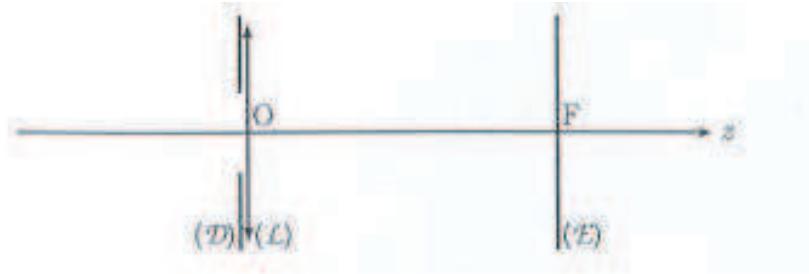


Fig 1 : Modèle simplifié de l'œil.

La puissance P de l'œil est définie par :

$$P = \frac{1}{f_i} \quad (1)$$

P s'exprime en dioptrie (δ) lorsque f_i est exprimée en mètre ($1\delta = 1m^{-1}$). L'accommodation traduit la capacité de l'œil à faire varier sa puissance P .

1.1 Champ latéral et champ en profondeur

1.1.1 Le champ latéral couvert par l'œil représente l'ensemble des points de l'espace qui peuvent être vus nettement par l'œil. Il est défini par un cône de sommet O et d'angle α compris entre 40° et 50° . Cependant, l'acuité visuelle n'est pas la même pour toutes les directions de ce champ. Elle est maximale au centre sur un cône d'angle au sommet $\alpha_F = 5^\circ$. En déduire l'ordre de grandeur du diamètre ϕ_F de la zone de perception des détails située au centre de la rétine pour un œil de profondeur $d = 17 mm$.

1.1.2 Comment doit varier la puissance P en fonction de la distance $p = -\overline{OA}_o$ d'un objet A_oB_o placé devant l'œil sur l'axe optique principal pour que A_oB_o soit vu nettement ? Représenter graphiquement $P(p)$.

1.1.3 En réalité la puissance P de l'œil est limitée par une puissance maximum P_{max} . Le *punctum proximum* (P_p) est le conjugué de la rétine au maximum de la puissance P . Pour un œil normal (P_p) se trouve à une distance $|\overline{OP}_p| = 25 cm$. En déduire la valeur de la puissance maximum P_{max} pour un œil normal de profondeur $d = 17 mm$.

1.1.4 Le *punctum remotum* (P_r) est le conjugué de la rétine au minimum de la puissance P . Pour un œil normal (P_r) est rejeté à l'infini. En déduire la valeur de la puissance minimum P_{min} pour un œil normal de profondeur $d = 17mm$.

1.1.5 Déduire de ce qui précède l'amplitude maximale d'accommodation $A = P_{max} - P_{min}$ et calculer sa valeur numérique.

1.2 Défauts de l'œil et correction

1.2.1 Myopie

Pour les mêmes valeurs numériques des puissances P_{max} et P_{min} , un œil myope possède une profondeur $d_m = 17,5 mm$.

1.2.1.1 Où se trouve l'image d'un objet très loin par un tel œil lorsqu'il n'accorde pas ? L'œil myope est-il capable de former l'image de cet objet sur la rétine ?

1.2.1.2 Déterminer les positions du *punctum remotum* et du *punctum proximum* pour cet œil.

1.2.1.3 Quel type de lentille mince faut-il accoler à la cornée pour corriger une telle anomalie ? Calculer sa distance focale image f_m . Commenter.

1.2.2 Hypermétrie

Un œil hypermétrope a une profondeur $d_h = 16,5 \text{ mm}$ et possède les mêmes valeurs des puissances P_{max} et P_{min} que l'œil normal.

- 1.2.2.1 Où se trouve l'image d'un objet très loin par un tel œil lorsqu'il n'accorde pas ? L'œil hypermétrope est-il capable de former l'image de cet objet sur la rétine ? Si oui, quelle est la puissance P_n nécessaire ?

- 1.2.2.2 Déterminer les positions du punctum remotum et du punctum proximum pour cet œil.

- 1.2.2.3 Quel type de lentille mince faut-il accoler à la cornée pour corriger une telle anomalie ? Calculer sa distance focale image f_h . Commenter.

1.2.3 Presbytie

Avec l'âge, le cristallin perd de son élasticité. Ceci qui se traduit par une diminution de l'amplitude maximale d'accommodation : l'œil devient presbyte. On convient de considérer qu'un œil devient presbyte lorsque sa puissance maximale diminue de plus de $1,14 \delta$. À quelle distance minimale doit-on placer un document devant un tel œil, initialement normal, pour pouvoir le lire ?

1.3 Limite de résolution de l'œil

Le pouvoir de résolution est la capacité de l'œil à distinguer deux points très rapprochés. Cette capacité est limitée par la structure granulaire de la rétine formée de cellules de diamètre moyen $g = 5,1 \mu\text{m}$ au contact les unes avec les autres.

- 1.3.1 On admet que pour que la séparation de deux points puisse se faire distinctement, il faut que leurs images se forment sur deux cellules de la rétine séparées par une troisième. En déduire l'expression littérale puis la valeur numérique de la limite de résolution angulaire α_ℓ d'un œil normal de profondeur $d = 17 \text{ mm}$.

- 1.3.2 À quelle distance de l'œil doit-on placer un objet pour pouvoir apprécier ses détails les plus fins ? Justifier la réponse.

2^{ème} partie : **Microscope composé**

Le microscope est un instrument optique qui permet d'observer les détails d'objets microscopiques ayant un diamètre apparent trop petit pour être distingués à l'œil nu. Un microscope composé est un système optique centré constitué principalement d'un objectif et d'un oculaire d'axe optique principal commun. L'objectif est constitué d'un ensemble assez complexe de lentilles. Il est caractérisé (figure 2) par ses plans principaux objet Π_{o1} et image Π_{i1} et par ses foyers objet F_{o1} et image F_{i1} . Les distances focales objet f_{o1} et image f_{i1} sont telles que $f_{o1} = \overline{H_{o1}F_{o1}}$ et $f_{i1} = \overline{H_{i1}F_{i1}}$. L'objectif donne d'un objet A_oB_o perpendiculaire à l'axe optique une image réelle A_1B_1 . La figure 2 explique le principe de formation de l'image A_1B_1 par l'objectif. Pour les applications numériques, on prendra $f_{i1} = 4 \text{ mm}$.

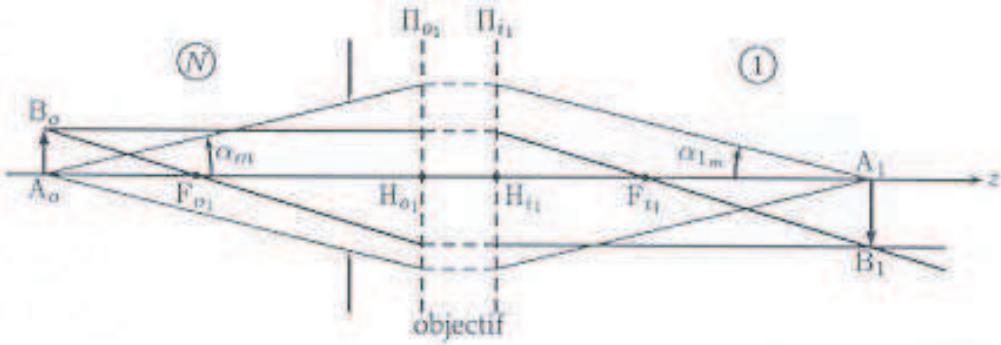


Fig 2 : Formation de l'image intermédiaire par l'objectif du microscope.

L'objectif est stigmatique pour un point objet A_o quelconque situé sur l'axe et il en donne une image A_1 située sur l'axe. Il est aussi aplanétique pour un petit objet A_oB_o perpendiculaire à l'axe optique principal et ce même si l'angle α que font les rayons lumineux avec l'axe optique principal peut atteindre une valeur α_m de l'ordre de 70° . Un rayon lumineux issu de A_o et faisant un angle α_o quelconque avec l'axe ressort de l'objectif en passant par A_1 et en faisant un angle α_1 avec l'axe. On admettra que, contrairement à α_o , l'angle α_1 reste toujours petit. La condition d'aplanétisme pour l'objectif se traduit par la relation :

$$\overline{NA_oB_o} \sin \alpha_o = \overline{A_1B_1} \sin \alpha_1 \approx \overline{A_1B_1} \alpha_1 \quad (2)$$

D'autre part, l'objectif considéré est dit à *immersion* car l'objet est immergé dans un liquide d'indice N qui vient au contact de l'objectif. L'objectif est caractérisé par son ouverture numérique : $\Omega_n = N \sin \alpha_m$. On admet enfin que $f_{o1} = -Nf_{i1}$. Pour les applications numériques on prendra $N = 1,515$ et $\alpha_m = 70^\circ$.

L'oculaire, quant à lui, sera représenté par une lentille mince convergente unique de centre O_2 , de foyer objet F_{o2} et de foyer image F_{i2} sa distance focale image est $f_{i2} = \overline{O_2F_{i2}} = 20\text{mm}$.

Le foyer image F_{i1} de l'objectif et le foyer objet F_{o2} de l'oculaire sont séparés d'une distance $\Delta = \overline{F_{i1}F_{o2}}$ appelée intervalle optique. Pour les applications numériques, on prendra $\Delta = 200\text{ mm}$.

2.1 Mise au point

2.1.1 Qu'appelle-t-on conditions de GAUSS ?

2.1.2 L'objectif du microscope considéré fonctionne-t-il dans les conditions de GAUSS ? Pourquoi ?

2.1.3 En utilisant la figure 2 pour exprimer de deux manières différentes le grossissement transversal G_{t1} de l'objectif défini par :

$$G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_oB_o}} \quad (3)$$

montrer que les positions de l'objet A_o et de son image A_1 par l'objectif sont reliées par la relation de conjugaison de NEWTON :

$$\overline{F_{o1}A_o} \cdot \overline{F_{i1}A_1} = f_{o1} \cdot f_{i1} \quad (4)$$

2.1.4 L'œil de l'observateur est supposé normal. Où l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par l'objectif doit-elle se situer pour que l'observateur puisse voir l'image définitive sans accommodation ?

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que cette condition est réalisée lors de l'utilisation normale du microscope.

2.1.5 Compléter alors le schéma de la figure 2, après l'avoir reporté sur la copie de composition, en traçant le cheminement à travers l'ensemble du microscope (objectif et oculaire) du **faisceau lumineux** issu du point B_o représenté figure 2.

2.1.6 En déduire la position de l'objet A_oB_o caractérisée par la distance algébrique $\overline{F_{o1}A_o}$ que l'on exprimera en fonction de Δ , N et f_{i1} .

2.1.7 Déterminer, dans les mêmes conditions, le grossissement transversal G_{t1} de l'objectif.

2.1.8 Application numérique : calculer $\overline{F_{o1}A_o}$ et G_{t1} .

2.2 Cercle oculaire

2.2.1 En utilisant le schéma de la figure 2, tracer le cheminement à travers le microscope des rayons lumineux extrêmes du faisceau conique de sommet A_o et de demi-angle au sommet α_m .

2.2.2 En déduire que tous les rayons lumineux issus de A_o situés à l'intérieur d'un cône de sommet A_o et de demi-angle au sommet α_m traversent le plan focal image de l'objectif à l'intérieur d'un cercle de rayon R que l'on exprimera en fonction de f_{i1} et Ω_n .

2.2.3 En supposant que l'oculaire n'obture aucune partie de la lumière sortant de l'objectif, déterminer le rayon ρ du faisceau cylindrique sortant du microscope et formé par les rayons lumineux issus de A_o ; on exprimera ρ en fonction de f_{i1} , f_{i2} , Ω_n et Δ .

2.2.4 En fait, tout se passe comme si les rayons sortant de l'objectif étaient diaphragmés par une ouverture circulaire de rayon R , centrée en F_{i1} et située dans le plan focal image de l'objectif.

2.2.4.1 En déduire que tous les rayons issus d'un objet étendu perpendiculaire à l'axe et sortant de l'instrument sont ainsi astreints à traverser un disque appelé disque oculaire, de centre C , dont on calculera la position et le rayon ρ_c . Où doit-on placer l'œil pour recevoir le maximum de lumière ? On supposera par la suite que cette condition est réalisée.

2.2.4.2 Application numérique : calculer ρ_c et $\overline{F_{i2}C}$. Commenter.

2.3 Grossissement

On définit le grossissement G du microscope comme étant le rapport entre l'angle θ' sous lequel on voit un objet donné A_oB_o à travers le microscope et l'angle θ sous lequel on voit le même objet à l'œil nu lorsque A_oB_o est placé à la distance minimale de vision distincte δ . Pour les applications numériques on prendra $\delta = 250 \text{ mm}$.

2.3.1 Exprimer G en fonction de f_{i1} , f_{i2} , Δ et δ . et calculer sa valeur numérique.

2.3.2 Exprimer le rayon ρ_c du cercle oculaire en fonction de G , Ω_n et δ .

2.3.3 Pour quelle valeur G_e du grossissement G , le rayon ρ_c du cercle oculaire devient-il égal au rayon ρ_0 de la pupille de l'œil ? Exprimer G_e en fonction de Ω_n , δ et ρ_0 et calculer numériquement G_e . On prendra $\rho_0 = 2,5 \text{ mm}$.

2.3.4 Comment peut-on définir un rayon utile ρ_u de la pupille pour recevoir un maximum de lumière ? Déterminer l'expression de ρ_u et représenter ses variations en fonction de G en supposant ρ_0 constant.

2.4 Pouvoir de résolution

La résolution du microscope est sa capacité de permettre à un œil de distinguer les détails les plus fins d'un objet. Deux facteurs principaux limitent la résolution du microscope optique. Il s'agit de la diffraction et de la structure granulaire de la rétine de l'œil.

2.4.1 Influence de la diffraction

2.4.1.1 Dire succinctement en quoi consiste le phénomène de diffraction.

Pour l'étude du microscope composé, tout se passe comme si la lumière était diffractée par le diaphragme circulaire de rayon R situé dans le plan focal image de l'objectif et centré en F_{i1} .

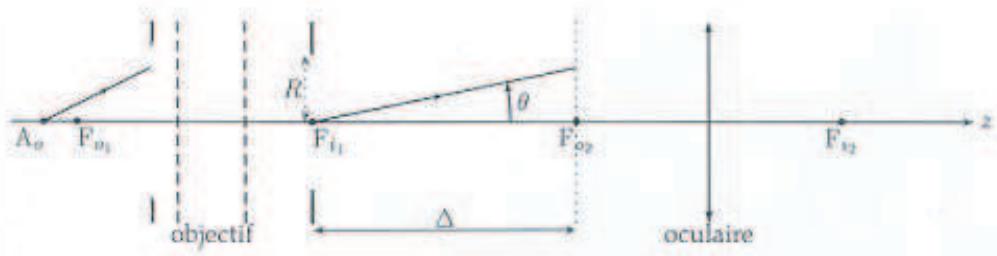


Fig 3 : Diaphragme diffractant dans son environnement.

Le microscope est éclairé par l'onde monochromatique de longueur d'onde λ issue d'un objet ponctuel A_o conjugué géométrique du foyer objet F_{o2} de l'oculaire.

À cause de la diffraction par le diaphragme de rayon R , l'amplitude a_d de l'onde diffractée dans le plan focal objet de l'oculaire dépend de l'angle θ que fait la direction d'observation avec l'axe optique principal. On admet qu'elle est donnée par :

$$a_d(\theta) = a_0 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R\theta}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi R\theta}{\lambda}} \quad (5)$$

où a_0 est une constante et J_1 est la fonction de BESSEL d'ordre 1. La figure 4 donne une représentation graphique de la fonction $\rho \mapsto J_1(2\pi\rho)/2\pi\rho$. Elle s'annule pour la première fois pour $\rho_1 \approx 0,61$.

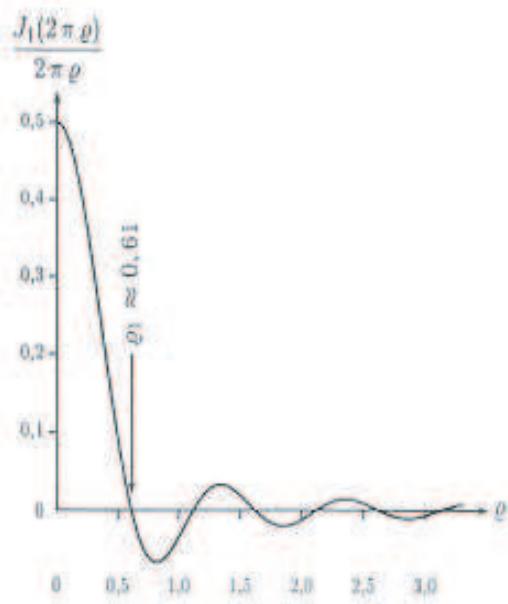


Fig 4 : Représentation de $\frac{J_1(2\pi\rho)}{2\pi\rho}$ en fonction de ρ .

2.4.1.2 Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I_d(\theta)$ dans le plan focal objet de l'oculaire en notant I_0 la valeur de l'intensité en F_{o2}

2.4.1.3 Donner l'aspect de la figure de diffraction obtenue dans le plan focal objet de l'oculaire passant par F_{o2} . On justifiera succinctement la réponse.

2.4.1.4 Déterminer le rayon angulaire θ_d de la tache centrale de diffraction.

2.4.1.5 On considère (critère de RAYLEIGH) qu'il y a séparation entre deux points A_o et B_o si la distance des centres des taches centrales de diffraction est au moins égale au rayon d'une tache centrale. En déduire la distance S_d , dans le plan objet du microscope, correspondant à la plus

petite distance de deux points objets A_o et B_o séparables. On exprimera S_d en fonction de λ et Ω_n . Commenter le résultat obtenu en précisant les facteurs permettant d'améliorer le pouvoir de résolution.

2.4.2 Influence du pouvoir séparateur de l'œil

Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil n'est capable de distinguer deux points que si leur écart angulaire dépasse une valeur minimale α_ℓ appelée pouvoir séparateur de l'œil. Pour les applications numériques on prendra $\alpha_\ell = 3.10^{-4}$.

2.4.2.1 Tracer le cheminement à travers le microscope des faisceaux lumineux issus de deux points A_o et B_o disposés symétriquement par rapport à l'axe optique principal dans le plan conjugué par l'objectif du plan focal objet de l'oculaire.

2.4.2.2 En déduire la distance minimale S_S que doit séparer les deux points A_o et B_o dans le plan objet du microscope pour que l'œil puisse les distinguer en l'absence de la diffraction. On exprimera S_S en fonction de G , α_ℓ et δ .

2.4.3 Discussion

2.4.3.1 En exploitant l'étude précédente, montrer qu'il existe une valeur minimale G_d du grossissement G telle que le pouvoir de résolution soit limité par la diffraction.

2.4.3.2 La diffraction est-elle responsable de la limitation du pouvoir de résolution du microscope étudié ? Justifier. On prendra $\lambda = 0,5 \text{ pm}$.

2.4.3.3 Dans le cas où le pouvoir de résolution est limité par la diffraction, comment varie-t-il en fonction de la longueur d'onde du rayonnement utilisé pour éclairer l'objet à observer ?

3^{ème} partie : Microscope électronique

3.1 Principe

Le microscope électronique exploite une propriété quantique d'un faisceau d'électrons. En effet, à un électron d'impulsion $p = m_e v$, où m_e et v sont respectivement la masse et la vitesse de l'électron, est associée une onde de longueur d'onde λ_e donnée par la relation de DE BROGLIE :

$$\lambda_e = \frac{h}{p} \quad (6)$$

où h est la constante de PLANCK.

Les électrons sont produits par effet thermoélectronique dans un canon à électrons placé dans le vide. Ils sont ensuite accélérés sous une différence de potentiel $V_c = 10 \text{ kV}$.

3.1.1 Exprimer la vitesse v_0 des électrons accélérés en fonction de leur masse m_e de leur charge e et de V_c . Pour cela on négligera la vitesse initiale d'émission des électrons.

3.1.2 En déduire leur longueur d'onde λ_e .

3.1.3 Application numérique : calculer v_0 et λ_e .

3.1.4 Comparer la longueur d'onde λ_e de l'onde associée à l'électron, à celle λ de la lumière visible et dire pourquoi le microscope électronique peut avoir un pouvoir de résolution meilleur que celui du microscope optique. On rappellera auparavant les limites en longueur d'onde du spectre de la lumière visible.

3.2 Lentille électrostatique

Dans le microscope électronique, comme dans le microscope optique, la formation d'une image agrandie de l'objet à observer nécessite l'utilisation de dispositifs capables de dévier la direction

de propagation de l'onde. Le but de cette section est d'étudier le principe de fonctionnement d'une lentille électrostatique qui peut être utilisée pour dévier la trajectoire des électrons dans un microscope électronique.

3.2.1 Champ électrostatique dans la lentille

Dans la région (R) de l'espace appelée lentille électrostatique régne un champ électrostatique non uniforme \vec{E} . La région (R) est vide de charge électrique et telle que : $x^2 + y^2 = R^2$ et $-\ell \leq z \leq +\ell$. Le champ électrostatique \vec{E} est produit par un dispositif invariant par rotation d'un angle θ quelconque autour de l'axe Oz et qui admet le plan $z = 0$ comme plan de symétrie. Le champ électrostatique est nul en dehors de la région .

3.2.1.1 Montrer, en évoquant des arguments clairs, que le champ électrostatique \vec{E} s'écrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz sous la forme :

$$\vec{E} = F(r, z)\vec{u}_r + G(r, z)\vec{u}_z \quad (7)$$

où F et G sont deux fonctions quelconques des coordonnées r et z uniquement que l'on ne demande pas d'expliciter pour le moment.

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est la base orthonormée locale du système de coordonnées cylindriques.

3.2.1.2 Que vaut $G(r, z)$ dans le plan $z = 0$? Justifier.

3.2.1.3 Rappeler les équations locales vérifiées par le champ électrostatique \vec{E} dans la région (R).

3.2.1.4 En déduire que les composantes F et G du champ électrostatique vérifient les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial(rF)}{\partial r} + \frac{\partial(rG)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

3.2.1.5 Le dispositif qui crée le champ électrostatique \vec{E} dans la région (R) impose $F(r, z) = \beta r$ avec $\beta = 2U_0/R^2$, U_0 étant une constante. En déduire que $G(r, z) = \beta'z$ et donner l'expression de β' en fonction de β .

3.2.1.6 Montrer que le champ électrostatique \vec{E} dérive d'un potentiel électrostatique ϕ que l'on exprimera en fonction de U_0 , r et z.

3.2.1.7 Quelle est la nature de la surface équipotentielle passant par l'origine? Justifier la réponse et représenter graphiquement cette surface. Que représente U_0 ?

3.2.2 Mouvement de l'électron dans la lentille

À l'instant choisi comme origine, un électron pénètre dans la région (R) au point I_0 de coordonnées $r = r_0 \ll R$, $z = -\ell$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_z$, $v_0 > 0$. Dans toute la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur le mouvement de l'électron.

3.2.2.1 En exploitant la projection du théorème du moment cinétique sur l'axe Oz, montrer que, dans la région (R), le mouvement de l'électron se fait dans un plan méridien $\theta = \text{constante}$.

3.2.2.2 Établir les équations différentielles vérifiées séparément par r et z. À quelle condition sur U_0 , le mouvement de l'électron est-il confiné au voisinage de l'axe Oz. En supposant que cette condition est satisfaite **dans toute la suite**, montrer que les équations différentielles précédentes peuvent s'écrire :

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2r = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2z}{dt^2} - 2\omega^2z = 0 \quad (9)$$

et donner l'expression de ω en fonction de e, m_e , U_0 et R.

3.2.2.3 Résoudre l'équation différentielle en z et déterminer l'expression de $z(t)$ vérifiant les conditions initiales.

3.2.2.4 Dans toute la suite, on suppose satisfaite la condition $\omega\ell \ll v_0$. Montrer alors, que la vitesse \dot{z} de l'électron reste pratiquement égale à v_0 et en déduire la durée t_1 nécessaire à l'électron pour traverser la zone (R).

3.2.2.5 Résoudre de même l'équation différentielle en r et montrer que la trajectoire électronique reste au voisinage de l'axe Oz. Quelle est l'hypothèse correspondante en optique ?

3.2.2.6 Déterminer les composantes du vecteur vitesse de l'électron au point I de sa sortie de la région (R).

3.2.2.7 Montrer que le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme en dehors de la région (R).

3.2.2.8 Déterminer la coordonnée $z_{F'}$ du point d'intersection de la trajectoire électronique avec l'axe Oz. La position de F' dépend-elle de I_0 ? Justifier le nom de foyer donné à F' . Cette lentille électrostatique est-elle convergente ou divergente? Comment peut-on agir sur la distance focale de la lentille.

3.2.2.9 Application numérique : calculer $z_{F'}$ pour $\ell = 1,0 \cdot 10^{-4}m$ et $\omega\ell/v_0 = 10^{-2}$.

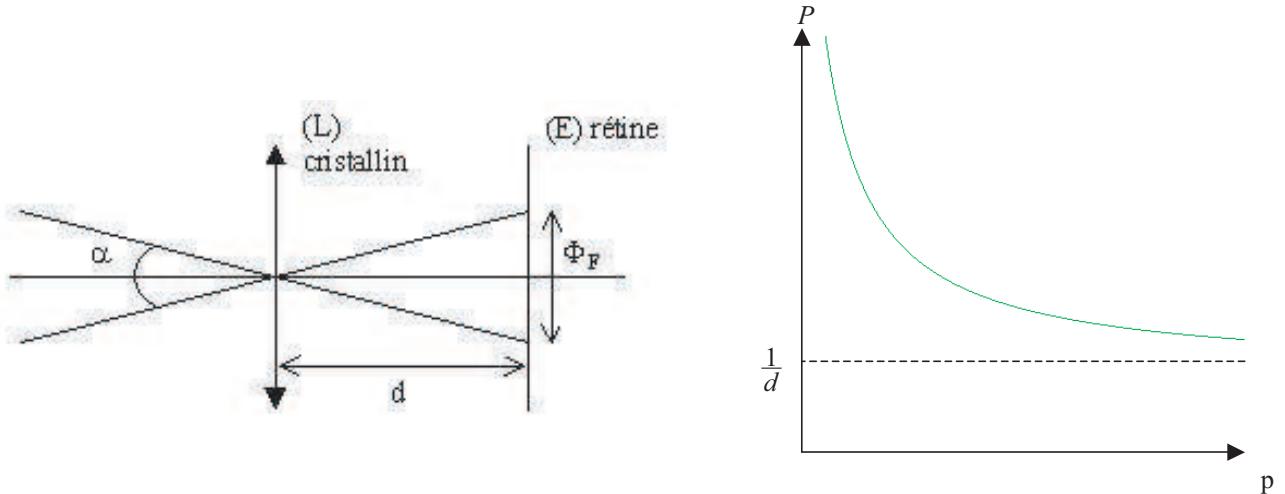
fin de l'énoncé

Microscopie

1^{ère} partie : Œuil

1.1 Champ latéral et champ en profondeur

1.1.1 d'après la figure : $\frac{\Phi_F}{2d} = \tan \frac{\alpha}{2}$ A.N : $\Phi_F = 1.5 \text{ mm}$



1.1.2 l'image étant sur la rétine , la conjugaison s'écrit : $\frac{1}{d} - \frac{1}{-p} = \frac{1}{f'} = P$ soit $\boxed{\frac{1}{d} + \frac{1}{p} = P}$

$$1.1.3 \frac{1}{d} + \frac{1}{OP_p} = P_{max} \implies \boxed{P_{max} = 62.8 \delta}$$

$$1.1.4 \frac{1}{d} + \frac{1}{\infty} = P_{min} \implies \boxed{P_{min} = 58.8 \delta}$$

$$1.1.5 A = P_{max} - P_{min} = \frac{1}{OP_p} = 4 \delta$$

1.2 Défauts de l'œil et correction

1.2.1 Myopie

1.2.1.1 si l'œil n'accorde pas (muscles relâchés) $P = P_{min}$, A_o étant loin (càd à l'infini) :

$$\frac{1}{OA_i} + \frac{1}{\infty} = P_{min} = \frac{1}{d} \implies \overline{OA}_i = d < d_m \text{ l'image se forme avant la rétine}$$

l'œil myope formera l'image de l'objet lointain sur la rétine si : $\exists p \in [P_{min}, P_{max}]$ tel que :

$$\frac{1}{d_m} + \frac{1}{\infty} = P \implies P = 57.1 \delta \text{ n'appartient pas à } [P_{min}, P_{max}] \text{ l'œil ne peut pas voir loin}$$

1.2.1.2 l'image A_i sur la rétine :

$$\frac{1}{d_m} - \frac{1}{\overline{OP}_r} = P_{min} \implies \overline{OP}_r = \frac{1}{\frac{1}{d_m} - P_{min}} = -60 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{d_m} - \frac{1}{\overline{OP}_p} = P_{max} \implies \overline{OP}_p = \frac{1}{\frac{1}{d_m} - P_{max}} = -17.7 \text{ cm}$$

1.2.1.3 on aura :(sans accommodation)

$$\frac{1}{d_m} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_m} + P_{min} \Rightarrow f_m = \frac{d_m - d}{d_m d} < 0$$

Autrement la lentille de correction doit former l'image de l'infini au point P_r de l'œil myope soit : $\frac{1}{\overline{OP}_r} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_m} \implies f_m = \overline{OP}_r = -60 \text{ cm} < 0$ la lentille est divergente , c'est logique puisque l'image sans lentille se forme avant la rétine

1.2.2 Hyperméropie

1.2.2.1 $\frac{1}{OA_i} + \frac{1}{\infty} = P_{min} = \frac{1}{d} \Rightarrow \overline{OA}_i = d > d_h$ l'image se forme après la rétine

l'œil myope formera l'image de l'objet lointain sur la rétine si : $\exists P \in [P_{min}, P_{max}]$ tel que : $\frac{1}{d_h} + \frac{1}{\infty} = P \Rightarrow P = 60.6$ $\delta \in [P_{min}, P_{max}]$ l'œil hypermétrope peut voir loin en accommodant (il se fatigue)

1.2.2.2 l'image A_i sur la rétine :

$$\frac{1}{d_h} - \frac{1}{\overline{OP}_r} = P_{min} \Rightarrow \overline{OP}_r = \frac{1}{\frac{1}{d_h} - P_{min}} = 55.3 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{d_h} - \frac{1}{\overline{OP}_p} = P_{max} \Rightarrow \overline{OP}_p = \frac{1}{\frac{1}{d_h} - P_{max}} = -45.6 \text{ cm}$$

1.2.2.3 la lentille de correction doit former l'image de l'infini au point P_r de l'œil hypermétrope soit : $\frac{1}{\overline{OP}_r} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_h} \Rightarrow f_h = \overline{OP}_r = 55.3 \text{ cm} > 0$ la lentille est convergente , c'est logique puisque l'image sans lentille se forme après la rétine.

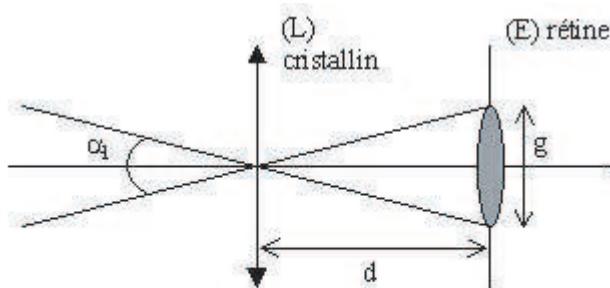
1.2.3 Presbytie

initialement $P_{max} = 62.8 \delta$

avec l'âge $P'_{max} = (62.8 - 1.14) \delta = 61.6 \delta$ donc le nouveau punctum proximum est donné par : $\frac{1}{d} - \frac{1}{\overline{OP}'_p} = P'_{max} = 61.6 \delta \Rightarrow \overline{OP}'_p = -35 \text{ cm}$ au lieu de $\overline{OP}_p = -25 \text{ cm}$ pour un œil jeune et normal

1.3 Limite de résolution de l'œil

1.3.1 $\tan \frac{\alpha_\ell}{2} = \frac{g}{2d}$ A.N : $\alpha_\ell = 3.10^{-4} \text{ rad}$



1.3.2 l'angle sous lequel l'œil voit l'objet devient maximal si celui-ci est au punctum proximum càd à 25 cm devant l'œil

*2^{ème} partie :
Microscope composé*

2.1 Mise au point

2.1.1 tout rayon incident doit être faiblement incliné par rapport à l'axe optique et doit rencontrer les dioptres et miroirs du système optique au voisinage de leurs sommets , ce sont les rayons paraxiaux

2.1.2 non , car l'angle d'incidence $\alpha_m = 70^\circ$ n'est pas faible

2.1.3 les triangles semblables d'après la figure 2 donnent :

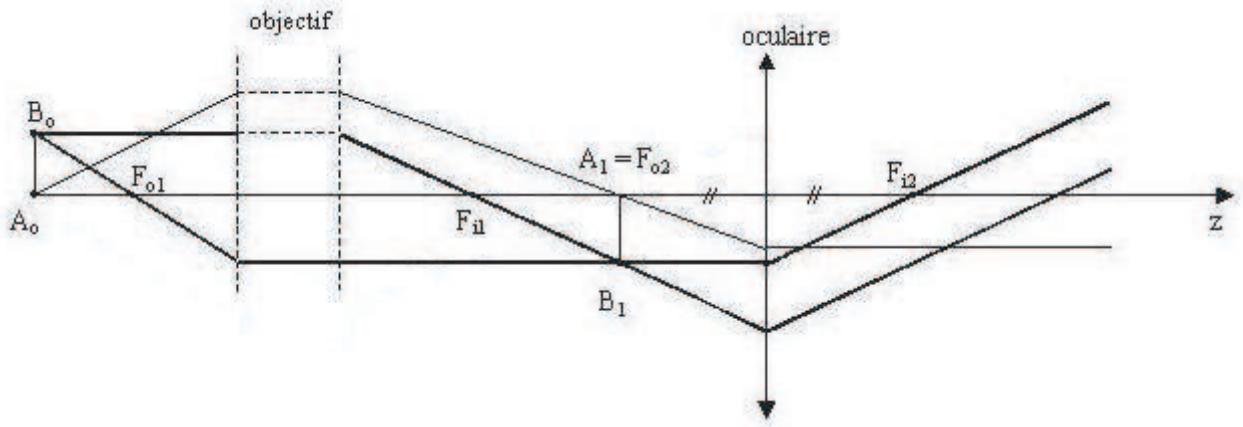
$$G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{f_{i1}}$$

$$G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{H_{o1}F_{o1}}}{\overline{A_oF_{o1}}} = \frac{f_{o1}}{\overline{A_oF_{o1}}}$$

soit : $\overline{F_{o1}A_o} \cdot \overline{F_{i1}A_1} = f_{o1} \cdot f_{i1}$

2.1.4 l'œil normal non accommodé regarde l'infini donc l'image A_1B_1 doit être au plan focal objet de l'oculaire

2.1.5 :



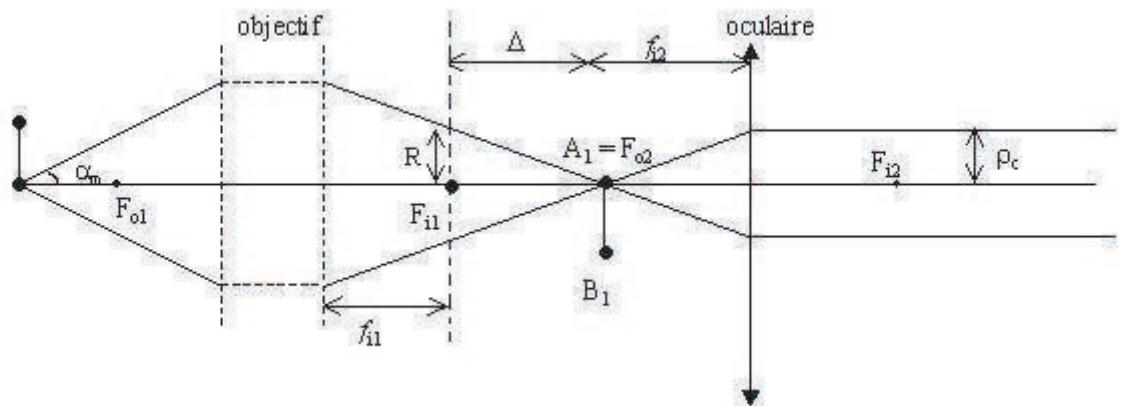
2.1.6 on a : $\overline{F_{o1}A_o} = \frac{f_{o1} \cdot f_{i1}}{\overline{F_{i1}A_1}} = \frac{-Nf_{i1}^2}{\Delta}$

2.1.7 on a : $G_{t1} = \frac{f_{o1}}{A_o F_{o1}} = \frac{-Nf_{i1}}{\frac{Nf_{i1}^2}{\Delta}} = -\frac{\Delta}{f_{i1}}$

2.1.8 A.N : $\overline{F_{o1}A_o} = -0.12 \text{ mm}$ et $G_{t1} = -50$

2.2 Cercle oculaire

2.2.1 :



2.2.2 l'oculaire fonctionne dans les conditions de Gauss : $R \approx |\alpha_1| \overline{F_{i1}A_1} = |\alpha_1| \Delta$

or : la condition d'aplanétisme

$$\alpha_1 \approx \frac{NA_o B_o \sin \alpha_m}{A_i B_i} = \frac{N \sin \alpha_m}{|G_{t1}|}$$

soit : $R = N f_{i1} \sin \alpha_m = \Omega_n f_{i1}$

tous les rayons incidents passent à travers le cercle de centre F_{i1} et de rayon R dans le plan focal image de l'oculaire !

2.2.3 on a : $\frac{R}{\Delta} = \frac{\rho}{f_{i2}} \implies \rho = \frac{\Omega_n f_{i1} f_{i2}}{\Delta}$

2.2.4

2.2.4.1 le disque oculaire sera l'image par l'oculaire du diaphragme fictif , on aura :

$$\frac{1}{O_2C} - \frac{1}{O_2F_{i1}} = \frac{1}{f_{i2}}$$

or $\overline{O_2F_{i1}} = -(\Delta + f_{i2}) \implies$

$$\overline{O_2C} = [1 + \frac{f_{i2}}{\Delta}] f_{i2}$$

et $\rho_c = \rho = \frac{\Omega_n f_{i1} f_{i2}}{\Delta}$

pour recevoir le maximum d'intensité lumineuse il faut placer l'œil sur le cercle oculaire

2.2.4.2 A.N : $\rho_c = 0.57 \text{ mm}$ et $\overline{F_{i2}C} = \overline{O_2C} - f_{i2} = 2 \text{ mm}$ très proche du plan focal image de l'oculaire

2.3 Grossissement

2.3.1 $\theta \approx \tan \theta = \frac{A_o B_o}{\delta}$ et $\theta' \approx \tan \theta' = \frac{\overline{A_i B_i}}{f_{i2}}$

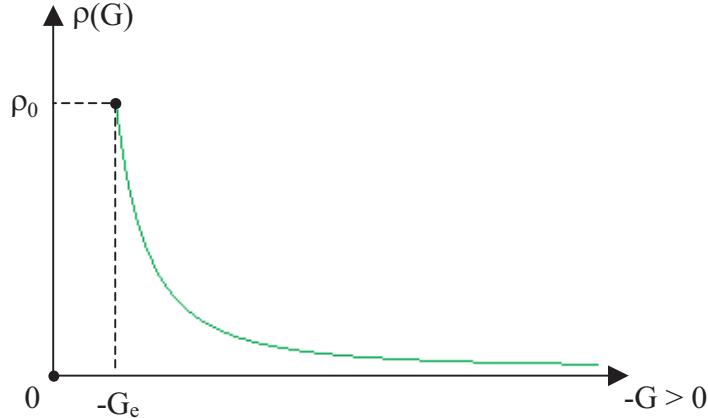
$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{G_{t1}\delta}{f_{i2}} = -\frac{\Delta}{f_{i1}f_{i2}} \delta$$

A.N : $G = -600$ (image inversée)

2.3.2 on a $\rho_c = \frac{\Omega_n f_{i1} f_{i2}}{\Delta}$ or $G = -\frac{\Delta}{f_{i1}f_{i2}} \delta$ soit : $\rho_c = -\frac{\delta \Omega_n}{G}$

2.3.3 $G = G_e$ si $\rho_c = \rho_0 = 2.5 \text{ mm}$ donc $G_e = -\frac{\delta \Omega_n}{\rho_0}$ A.N : $G_e = -142$

2.3.4 $\rho_u = \rho_c = -\frac{\delta \Omega_n}{G} = \rho_0 \frac{-G_e}{-G}$



2.4 Pouvoir de résolution

2.4.1 Influence de la diffraction

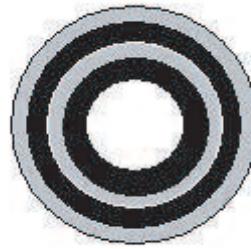
2.4.1.1 diffraction est la déviation observée lorsque la lumière de longueur d'onde λ rencontre un obstacle de taille de l'ordre de λ , la notion de rayon lumineux n'existe plus

2.4.1.2 $I_d(\theta) = |a_d(\theta)|^2 = 4a_0^2 \frac{J_1^2(\frac{2\pi R\theta}{\lambda})}{(\frac{2\pi R\theta}{\lambda})^2}$

or d'après fig4 on a : $I_d(\theta = 0) = 4a_0^2 \times (0.5)^2 = a_0^2$ soit :

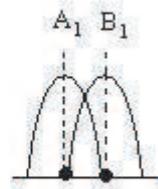
$$I_d(\theta) = 4I_0 \frac{J_1^2(\frac{2\pi R\theta}{\lambda})}{(\frac{2\pi R\theta}{\lambda})^2}$$

2.4.1.3 on a invariance par rotation autour de l'axe $F_{o2}z$ on aura des tâches circulaires concentriques d'axe $F_{o2}z$ d'intensité décroissante



$$2.4.1.4 \quad \theta_d = \rho_1 \frac{R}{\lambda} = 0.61 \frac{R}{\lambda}$$

$$2.4.1.5 \quad A_1 B_{1min} \approx \theta_d \Delta \implies S_d = A_o B_{omin} = 0.61 \frac{|Gt1|R\Delta}{\lambda} = 0.61 \frac{\lambda}{\Omega_n}$$



$S_d \nearrow$ si $\lambda \nearrow$ ou si $\Omega_n \searrow$, le pouvoir de résolution est élevé si on peut distinguer deux points très voisins càd $S_d \rightarrow 0$

2.4.2 Influence du pouvoir séparateur de l'œil

2.4.2.1 voir fig

$$2.4.2.2 \quad A_1 B_{1min} \approx \alpha_\ell f_{i2} \implies S_s = A_o B_{omin} = \frac{\alpha_\ell f_{i2}}{|Gt1|} = \frac{\alpha_\ell \delta}{|G|}$$

2.4.3 Discussion

2.4.3.1 la diffraction est nuisible si $S_d > S_s \iff 0.61 \frac{\lambda}{\Omega_n} > \frac{\alpha_\ell \delta}{|G|} \implies$

$$|G| > G_d = \frac{\Omega_n \alpha_\ell \delta}{0.61 \lambda}$$

2.4.3.2 A.N : $\lambda = 0.5 \mu m \implies G_d = 1000 > |G| = 600$ non la diffraction n'est pas le facteur limitant de la résolution

2.4.3.3 on a : $G_d = \frac{\Omega_n \alpha_\ell \delta}{0.61 \lambda} \nearrow$ si $\lambda \searrow$ la résolution sera améliorée dans le visible pour $\lambda_{min} = 0.4 \mu m$

3^{ème} partie :
Microscope électronique

3.1 Principe

3.1.1 TEC : $\frac{1}{2} m_e (v_0^2 - 0) = eV_c \implies v_0 = \sqrt{\frac{2eV_c}{m_e}}$

3.1.2 $\lambda_e = \frac{h}{m_e v_0} = \frac{h}{\sqrt{2eV_c m_e}}$

3.1.3 A.N : $v_0 = 5.9 \cdot 10^7 m.s^{-1}$ et $\lambda_e = 1.2 \cdot 10^{-5} \mu m$

$$3.1.4 \quad \lambda_{visible} \in [0.4, 0.8] \mu m \implies \lambda_e \ll \lambda_{visible}$$

d'après 2.4.3.3 le pouvoir de résolution du microscope électronique est meilleur

3.2 Lentille électrostatique

3.2.1 Champ électrostatique dans la lentille

3.2.1.1 la distribution est invariante par rotation autour de Oz (variable θ éliminée) \implies tout plan $\Pi \equiv (\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie $\implies \vec{E} \subset \Pi(\vec{e}_r, \vec{e}_z) \implies \vec{E} = F(r, z)\vec{e}_r + G(r, z)\vec{e}_z$

3.2.1.2 le plan $z = 0$ est un plan de symétrie donc $\vec{E}(r, z = 0) \subset xOy \implies G(r, 0) \equiv 0$

3.2.1.3 M-G : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ M-F : $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$

3.2.1.4 données : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial rF}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial rF}{\partial r} + \frac{\partial rG}{\partial z} = 0$
et : $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta = \vec{0} \implies \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial r} = 0$

3.2.1.5 $F(r, z) = \beta r \implies \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ r \frac{dG}{dz} = -\frac{\partial \beta r^2}{\partial r} = -2\beta r \end{cases} \implies G(z) = -2\beta z + cte$
or

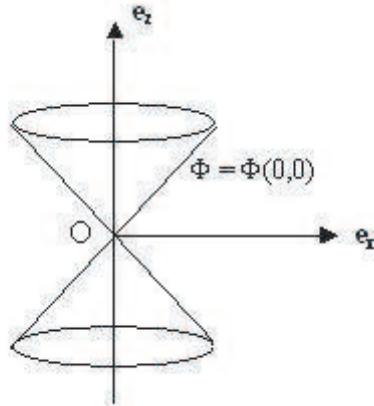
$$G(r, z = 0) = 0 \implies G(z) = -2\beta z \implies \beta' = -2\beta = \frac{-4U_0}{R^2}$$

3.2.1.6 $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0} \implies \exists \Phi \text{ tel que } \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi \iff$

$$\begin{vmatrix} \beta r \\ 0 \\ -2\beta z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial r} (*) \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial z} (**) \end{vmatrix} \implies \Phi(r, z)$$

(*) $\implies \Phi(r, z) = -\beta \frac{r^2}{2} + f(z)$ injectée dans (**) donne $f'(z) = 2\beta z \implies f(z) = \beta z^2 + cte \implies \Phi(r, z) = -\beta \frac{r^2}{2} + \beta z^2 + cte = \frac{2U_0}{R^2} (z^2 - \frac{r^2}{2}) + cte$

3.2.1.7 l'équipotentielle passant par O est donnée par : $\Phi(r, z) = \Phi(0, 0) \iff z^2 = \frac{r^2}{2} \implies z = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$
c'est un double cône d'axe Oz



$$U_0 = \Phi(0, 0) - \Phi(R, 0) \text{ la ddp entre le centre et la périphérie de la lentille électrostatique}$$

3.2.2 Mouvement de l'électron dans la lentille

3.2.2.1 TMC en O dans R_{Gal} exprimé dans la base cylindrique : $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \overrightarrow{OM} \times -e\vec{E}$ or

$$\vec{\sigma}_o = \vec{r} \times m_e \vec{v} = \begin{vmatrix} r & \dot{r} & -m_e r z \dot{\theta} \\ 0 & r \dot{\theta} & m_e (\dot{r} z - \dot{z} r) \\ z & \dot{z} & m_e r^2 \dot{\theta} \end{vmatrix}$$

soit le TMC en O :

$$\begin{vmatrix} -m_e(rz\dot{\theta})' \\ m_e(\dot{r}z - \dot{z}r)' \\ m_e(r^2\dot{\theta})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -3e\beta rz \\ 0 \end{vmatrix}$$

sur \vec{e}_z donne $r^2\dot{\theta} = cte = r_0^2\dot{\theta}_0$ or $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z \implies \dot{\theta}_0 = 0$ d'où : $r^2\dot{\theta} \equiv 0 \implies \theta \equiv cte$ le mouvement se fait dans le plan méridien $\theta = cte$

3.2.2.2 TRD ($\theta = cte$) $\begin{vmatrix} m_e\ddot{r} \\ 0 \\ m_e\ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e\beta r \\ 0 \\ 2e\beta z \end{vmatrix} \implies \begin{cases} \ddot{r} + \frac{2U_0e}{m_eR^2}r = 0 \\ 0 \\ \ddot{z} - \frac{4U_0e}{m_eR^2}\beta z = 0 \end{cases}$

avec $U_0 > 0 \implies \omega = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_eR^2}}$

3.2.2.3 $z(t) = Ae^{\sqrt{2}\omega t} + Be^{-\sqrt{2}\omega t}$, les CIs sont $z(0) = -\ell = A + B$ et $\dot{z}(0) = v_0 = (A - B)\sqrt{2}\omega$

soit :

$$z(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}\omega} - \ell\right)e^{\sqrt{2}\omega t} - \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}\omega} + \ell\right)e^{-\sqrt{2}\omega t}\right]$$

3.2.2.4 $\ddot{z} = 2\omega^2z \iff \dot{z}^2 = v_0^2 + 2\omega^2(z^2 - \ell^2)$

or $v_0 \gg \omega\ell > \omega|z|$ donc $\dot{z} \approx v_0$ d'où $t_1 = \frac{2\ell}{v_0}$

3.2.2.5 $r(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$, les CIs sont $r(0) = r_0 = C$ et $\dot{r}(0) = 0 = \omega D$

soit : $r(t) = r_0 \cos \omega t < r_0 \ll R$ la trajectoire est confinée au voisinage de l'axe c'est analogue au rayon paraxial !

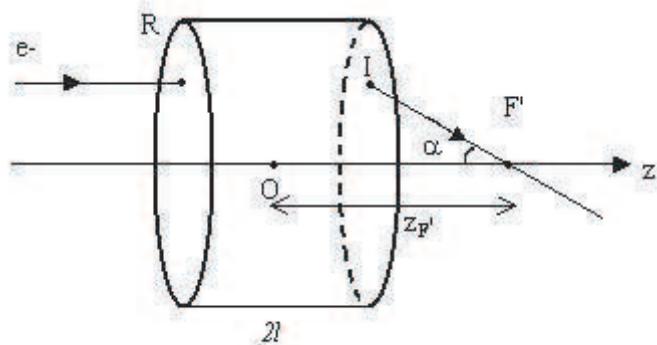
3.2.2.6 au point de sortie I : $t = t_1$ et $z = +\ell$, on aura :

$$\vec{v}_I = \begin{vmatrix} \dot{r}(t_1) = -r_0\omega \sin \omega t_1 \\ 0 \\ \dot{z}(t_1) \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -\omega^2 r_0 t_1 = -\frac{2\ell\omega^2}{v_0} r_0 \\ 0 \\ v_0 \end{vmatrix}$$

3.2.2.7 TRD en dehors de la lentille, poids négligé, s'écrit : $m_e\vec{a} = \vec{0}$ le mouvement sera rectiligne uniforme

pour $t > t_1$ $\vec{v} = \vec{v}_I$

3.2.2.8 $z_{F'} = \ell + \frac{r_I}{\tan \alpha} = \ell + \frac{v_0^2}{2\ell\omega^2 r_0} r_0 \cos \omega t_1 \approx \ell + \frac{v_0^2}{2\ell\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2 t_1^2}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2\omega^2 \ell} > \ell$



non $z_{F'}$ est indépendant de r_0 donc de I_0 , les e^- incidents parallèlement à l'axe $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ passe après la lentille par F' , de plus $z_{F'} > \ell$ la lentille est convergente

la distance focale est contrôlée par U_0 ou v_0 .

3.2.2.9 A.N : $z_{F'} = 0.5 \text{ m.}$

fin du corrigé

Champ magnétique et propriétés de la matière

On se propose dans ce problème d'étudier, à travers deux exemples différents, comment un champ magnétostatique externe peut agir sur certaines propriétés de la matière. C'est ainsi que le problème aborde d'abord l'action d'un champ magnétique sur les charges d'un faisceau électronique. Ensuite, on s'intéresse à la modification du spectre d'émission d'un atome sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Toutes les questions du problème seront abordées dans le cadre de la théorie classique non relativiste et non quantique. Dans toute cette étude, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen.

Données utiles

- . Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.
- . Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$.
- . Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$.
- . Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$.

1^{ère} partie : Faisceau électronique

Un électron, d'un faisceau électronique, de masse m_e et de charge $q = -e$ est animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_0 . À l'instant pris comme origine des temps $t = 0$, il pénètre une région de l'espace où règne un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On suppose que la vitesse initiale \vec{v}_0 n'a pas de composante **non nulle** suivant la direction du champ magnétostatique \vec{B} . On négligera le poids de l'électron.

1.1 Nature de la trajectoire et application

1.1.1 Écrire le théorème de la résultante cinétique pour l'électron considéré.

1.1.2 En projetant l'équation obtenue, d'abord sur la direction du champ magnétique, puis ensuite sur le vecteur vitesse instantanée, montrer que la trajectoire de l'électron est plane et que le module de la vitesse de l'électron reste constant au cours du mouvement.

1.1.3 Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron ? La dessiner en l'orientant relativement au champ magnétique \vec{B}

1.1.4 Montrer que la période T du mouvement de l'électron s'exprime simplement en fonction de la pulsation cyclotron définie par :

$$\omega_c = \frac{qB}{m_e} \quad (1)$$

1.1.5 Calculer numériquement T dans le cas d'un électron plongé dans un champ magnétique $B = 5 \cdot 10^{-3} T$.

1.1.6 L'électron, initialement émis avec une vitesse négligeable, est accéléré sous une différence de potentiel $\Delta V = 10 kV$. Il décrit une trajectoire circulaire de diamètre $D = 13,4 cm$ dans la région de l'espace où règne un champ magnétostatique de module $B = 5 \cdot 10^{-3} T$. Exprimer la charge spécifique de l'électron donnée par le rapport e/m_e en fonction de B , D et ΔV . Commenter le résultat numérique obtenu et préciser les éventuelles sources d'incertitude.

- 1.1.7** Comment mesure-t-on la charge électrique de l'électron ?
- 1.1.8** Vérifier à l'aide d'un calcul numérique, que le poids de l'électron est effectivement négligeable devant la force de LORENTZ.
- 1.1.9** Sans faire de calcul supplémentaire, dessiner la trajectoire de l'électron dans la région où règne le champ magnétostatique \vec{B} lorsque la vitesse initiale \vec{v}_0 possède une composante **non nulle** suivant l'axe Oz. Quelle est sa nature ?

1.2 Stabilité de la trajectoire électronique

On se propose d'étudier la stabilité de la trajectoire électronique circulaire initiale décrite dans le plan $z = 0$. Pour cela on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz et on pose :

$$\begin{cases} r(t) = R + \epsilon_r(t) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $\omega_c = qB/m_e$. Les trois grandeurs algébriques $\epsilon_r(t)$, $\dot{\epsilon}_\theta(t)$ et $z(t)$ seront considérées comme des infiniment petits de même ordre et nuls à $t = 0$. On rappelle l'expression de l'accélération et en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \quad (2)$$

- 1.2.1** Écrire le théorème de la résultante cinétique en projection sur les vecteurs de base \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_z des coordonnées cylindriques.
- 1.2.2** En se limitant aux termes d'ordre un, montrer que la projection sur \vec{u}_θ conduit à une relation simple entre $\epsilon_r(t)$ et $\dot{\epsilon}_\theta(t)$.
- 1.2.3** Montrer alors que la projection sur \vec{u}_r permet d'obtenir une équation différentielle de second ordre vérifiée par $\epsilon_r(t)$.
- 1.2.4** Donner la solution $\epsilon_r(t)$ de l'équation différentielle précédente en tenant compte des conditions initiales et en déduire $\dot{\epsilon}_\theta(t)$. Le mouvement radiale suivant \vec{u}_r et le mouvement orthoradial suivant \vec{u}_θ sont-ils stables ?
- 1.2.5** Qu'en est-il de la stabilité du mouvement axial suivant Oz ?

2^{ème} partie :
Effet ZEEMAN

2.1 Théorème de Larmor

Considérons un électron atomique de masse m_e et de charge $q = -e$ en mouvement orbital autour du noyau supposé fixe dans le référentiel du laboratoire R. L'électron est soumis de la part de son entourage à l'action d'un champ électrostatique \vec{E} .

- 2.1.1** Exprimer l'accélération \vec{a}_0 d'un tel électron relativement au référentiel R du laboratoire en fonction de m_e , q et \vec{E} .
- 2.1.2** L'électron est en plus soumis à l'action d'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Exprimer son accélération \vec{a} en fonction de m_e , q, \vec{E} , \vec{B} et de la vitesse \vec{v} de l'électron par rapport au référentiel du laboratoire.
- 2.1.3** On considère un référentiel R' en rotation uniforme par rapport à R. On désigne par $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de R' par rapport à R et on note \vec{a}' , (resp. \vec{v}') l'accélération (resp. la vitesse) de l'électron relativement au référentiel R'. On rappelle les formules de composition des vitesses et des accélérations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' \end{array} \right. \quad (5)$$

2.1.3.1 En utilisant les résultats précédents, exprimer \vec{a}' , en fonction de m_e , q , \vec{E} , \vec{B} , $\vec{\Omega}$, \vec{v}' et \vec{r} .

2.1.3.2 Montrer que par un choix judicieux de $\vec{\Omega}$, l'accélération \vec{a}' , de l'électron relativement au référentiel R' est donnée par :

$$m_e \vec{a}' = q\vec{E} + \frac{q^2}{4m_e} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}) \quad (6)$$

Un tel choix définit le référentiel de LARMOR relatif au champ magnétostatique \vec{B} .

On se propose d'examiner l'ordre de grandeur des deux termes qui constituent le second membre de (6). Pour cela on considère le cas simple de l'atome d'hydrogène.

2.1.3.3 Exprimer le champ électrostatique \vec{E} créé par le noyau de l'atome d'hydrogène.

2.1.3.4 En déduire que le rapport ϱ des deux termes du second membre de (6) peut être majoré par :

$$\varrho_{max} = \frac{\pi}{\mu_0 c_0^2} \frac{B^2 r^3}{m_e} \quad (7)$$

2.1.3.5 Compte tenu des ordres de grandeurs des dimensions atomiques ($r \approx 10^{-10} m$) et des champs magnétostatiques qui peuvent être créés au laboratoire ($B \approx 1T$), vérifier à l'aide d'un calcul numérique, que $\varrho_{max} \ll 1$. Montrer alors que :

$$m_e \vec{a}' \approx q\vec{E} \quad (8)$$

2.1.4 En déduire le théorème de LARMOR : *le mouvement électronique dans le référentiel de LARMOR après établissement du champ magnétostatique \vec{B} , est identique au mouvement existant normalement en l'absence de champ magnétique dans le référentiel du laboratoire par rapport auquel le référentiel de LARMOR est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ donné par :*

$$\vec{\Omega} = - \frac{q}{2m_e} \frac{\vec{B}}{r} \quad (9)$$

2.2 Oscillateur harmonique spatial

Dans le cadre de la théorie classique de l'émission de la lumière par les atomes, l'électron est élastiquement lié au noyau à l'aide de la seule force de rappel \vec{f}_r donnée par :

$$\vec{f}_r = -m_e \omega_0^2 \vec{r} \quad (10)$$

2.2.1 Montrer que, dans le cas général, le mouvement est plan. Peut-il être rectiligne ? Dans quel cas ? Par la suite on considérera le cas général.

2.2.2 Dans cette question, on se place dans le plan de la trajectoire. On note r et θ les coordonnées polaires de l'électron dans ce plan et \vec{u} le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire.

2.2.2.1 Exprimer la projection σ sur \vec{u} du moment cinétique de l'électron en fonction de m_e , r et $\dot{\theta}$.

2.2.2.2 Montrer que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (11)$$

et exprimer $U_{eff}(r)$ en fonction de m_e , ω_0 , σ et r .

2.2.2.3 Représenter graphiquement $U_{eff}(r)$ et en déduire la nature de la trajectoire de l'électron.
On montrera auparavant que l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

2.2.2.4 La trajectoire peut-elle être circulaire ? Quel est son rayon dans ce cas ? Quelle est l'énergie mécanique correspondante ?

2.2.3 Écrire le théorème de la résultante cinétique et en déduire l'expression du vecteur position $\vec{r}(t)$ de l'électron en fonction de $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$, ω_0 et t .

2.2.4 On s'intéresse au mouvement de l'électron le long de l'axe Oz.

2.2.4.1 Donner l'expression de $z(t)$ en fonction de $z(0)$, $\dot{z}(0)$, ω_0 et t .

2.2.4.2 Montrer que la représentation complexe de la composante suivant l'axe Oz du déplacement de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{z}(t) = Z \exp -i(\omega_0 t + \zeta) \vec{u}_z \quad (12)$$

et donner les expressions du module Z et de l'argument ζ en fonction de $z(0)$, $\dot{z}(0)$ et ω_0 .

2.2.5 De même, la représentation complexe de la composante du déplacement de l'électron le long de l'axe Ox peut s'écrire :

$$\underline{x}(t) = A \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_x \quad (13)$$

2.2.5.1 Montrer que l'on peut toujours écrire :

$$\underline{x}(t) = A'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) + A'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \quad (14)$$

et exprimer A' en fonction de A .

2.2.5.2 En déduire que la composante suivant Ox du mouvement de l'électron peut se décomposer en un mouvement circulaire dans le sens direct (ou circulaire gauche) et un mouvement circulaire dans le sens rétrograde (ou circulaire droit).

2.2.6 Montrer de même que la composante suivant Oy du mouvement de l'électron peut se décomposer en un mouvement circulaire gauche et un mouvement circulaire droit. On prendra :

$$\underline{y}(t) = B \exp -i(\omega_0 t + \beta) \vec{u}_y \quad (15)$$

2.2.7 Plus généralement, considérons le mouvement de l'électron dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz décrit par :

$$\vec{r}_{\perp}(t) = \underline{x}(t) + \underline{y}(t) \quad (16)$$

2.2.7.1 Montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{x}(t) = \underline{R}_g(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t + \underline{R}_d(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t \quad (17)$$

et donner les expressions de \underline{R}_g et \underline{R}_d en fonction de A , B , α et β .

2.2.7.2 Quelle est ainsi la nature du mouvement le plus général dans le plan xOy ?

2.3 Changements de fréquence dus à la rotation de Larmor

On se propose d'étudier l'influence d'un champ magnétostatique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme sur le mouvement de l'électron atomique. L'étude précédente (2.2.) a montré que le mouvement le plus général d'un tel électron peut être décomposé en :

- un mouvement rectiligne sinusoïdal le long de l'axe Oz de pulsation ω_0 ;
- deux mouvements circulaires l'un gauche, l'autre droit dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz de même pulsation ω_0 .

Nous allons donc étudier l'influence du champ magnétostatique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ sur chacune des trois composantes de ce mouvement.

2.3.1 Écrire le théorème de la résultante cinétique relativement au référentiel du laboratoire, pour l'électron atomique soumis à l'action du champ magnétostatique \vec{B} .

2.3.2 Montrer que la composante suivant Oz du mouvement de l'électron n'est pas modifiée par l'application du champ magnétostatique.

2.3.3 Donner les projections du théorème de la résultante cinétique selon Ox puis selon Oy.

2.3.4 Considérons maintenant la composante du mouvement circulaire dans le sens direct ou gauche. D'après le théorème de LARMOR, en présence du champ magnétostatique, la trajectoire reste circulaire. Elle est décrite à la pulsation ω_+ dans le sens direct.

2.3.4.1 Donner sans démonstration les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ pour un tel mouvement. Exprimer alors $\dot{y}(t)$ en fonction de $x(t)$ et ω_+ .

2.3.4.2 Montrer que ω_+ est solution de l'équation :

$$\omega_+^2 - \frac{eB}{m_e}\omega_+ - \omega_0^2 = 0 \quad (18)$$

2.3.4.3 Donner un ordre de grandeur de ω_0 dans le domaine visible ainsi que du rapport eB/m_e pour un champ fort ($B \approx 1 T$). Commenter.

2.3.4.4 En déduire l'expression approchée du décalage en fréquence $\Delta\nu_+ = (\omega_+ - \omega_0)/2\pi$.

Le résultat obtenu est-il en accord avec le théorème de LARMOR ? Expliquer.

2.3.5 Reprendre l'étude précédente pour la composante circulaire rétrograde de pulsation modifiée ω_- et déterminer l'expression approchée du décalage en fréquence correspondant $\Delta\nu_- = (\omega_- - \omega_0)/2\pi$. Comparer $\Delta\nu_+$ et $\Delta\nu_-$. Expliquer comment le résultat obtenu est-il en accord avec le théorème de LARMOR.

2.4 Conséquences sur les raies d'émission de l'atome

Selon la théorie classique du rayonnement ; lorsque l'électron oscille à la pulsation ω , l'atome acquiert un moment dipolaire électrique instantané $\vec{p}(t) = -er(t)$. Il rayonne alors à grande distance une onde électromagnétique (\vec{e}, \vec{b}) donnée, au point M par :

$$\begin{cases} \underline{\vec{b}} = \frac{\mu_0}{4\pi||\vec{R}||^2} \vec{R} \frac{\omega^2}{c_0} \times \underline{\vec{p}}(t - ||\vec{R}||/c_0) \\ \underline{\vec{e}} = -c_0^2 \vec{k} \times \underline{\vec{b}} \end{cases} \quad (19)$$

où $\vec{k} = \frac{\omega^2}{c_0} \frac{\vec{R}}{||\vec{R}||}$ et $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$; l'origine O étant prise au centre de l'atome.

2.4.1 On s'intéresse tout d'abord au mouvement de l'électron le long de l'axe Oz en l'absence de tout champ magnétostatique extérieur.

2.4.1.1 Trouver l'expression de $\underline{\vec{e}}$ en coordonnées sphériques d'axe Oz. On prendra $\underline{\vec{p}}(t) = p_0 \exp -i\omega t$.

2.4.1.2 Montrer que dans une direction d'observation Δ quelconque, le champ électrique rayonné est proportionnel à la projection de \vec{p} sur le plan perpendiculaire à Δ appelé plan d'observation dans la suite. Quelle est la polarisation d'une telle onde ?

2.4.1.3 Que vaut le champ électromagnétique rayonné par un tel dipôle dans la direction de son axe ? Dans une direction perpendiculaire à son axe ?

2.4.2 Montrer que, plus généralement, la polarisation du champ électrique rayonné à grande distance par un dipôle oscillant quelconque, c'est-a-dire pas nécessairement rectiligne le long de Oz, est celle du vecteur projection de son moment dipolaire instantané \vec{p} sur le plan d'observation.

2.4.3 L'atome est soumis à l'action d'un champ magnétostatique \vec{B} uniforme. On s'intéresse à l'émission de lumière dans une direction Δ perpendiculaire à \vec{B} ou, ce qui revient au même, dans un plan d'observation parallèle à \vec{B} .

2.4.3.1 Montrer que, pour une raie donnée de fréquence initiale $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ (en l'absence de \vec{B}), la lumière émise est constituée de trois radiations dont on donnera les fréquences.

2.4.3.2 Quelle est l'état et la direction de polarisation de chacune de ses trois raies ? Proposer un montage pratique pour vérifier l'état de polarisation de ces raies.

2.4.3.3 Quelles sont les intensités relatives de ces trois raies ?

2.4.4 On s'intéresse à présent à l'émission de lumière, sous le même champ magnétostatique, dans une direction Δ parallèle à \vec{B} ou, ce qui revient au même, dans un plan d'observation perpendiculaire à \vec{B} .

2.4.4.1 De combien de raies la lumière émise est-elle constituée ?

2.4.4.2 Déterminer l'état de polarisation et l'intensité relative des raies observées.

2.4.4.3 Proposer un montage pratique pour vérifier l'état de polarisation des ces raies.

2.4.5 On plonge une lampe à vapeur de cadmium dans un champ magnétostatique uniforme et on sélectionne la radiation rouge de longueur d'onde $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$ à l'aide d'un filtre interférentiel adéquat de bande passante de largeur 10 nm . Dans une direction d'observation donnée, une telle radiation se décompose par effet ZEEMAN en trois raies de longueurs d'onde voisines λ_0 , $\lambda_0 + \Delta\lambda$ et $\lambda_0 - \Delta\lambda$. La figure 1 donne les variations de $\Delta\lambda$ en fonction du champ magnétostatique appliqué.

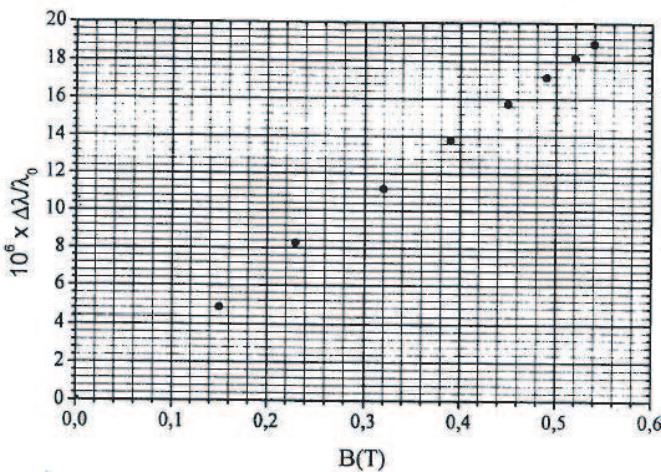


Fig 1 : Variation de la longueur d'onde avec le champ magnétique.

2.4.5.1 Exprimer $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ en fonction de B , λ_0 , e , m_e et c_0 .

2.4.5.2 En déduire la valeur du rapport e/m .

2.4.5.3 Comment pourrait-on mesurer $\Delta\lambda$ dans la pratique ?

fin de l'énoncé

Champ magnétique et propriétés de la matière

1^{ère} partie : Faisceau électronique

1.1 Nature de la trajectoire et application

1.1.1 dans le référentiel R_{gal} : $m_e \vec{a} = -e \vec{v} \times B \vec{z}$

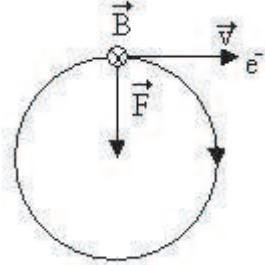
1.1.2 sur Oz :

$$m_e \ddot{z}(t) = 0 \implies \dot{z}(t) = v_{0z} = 0 \implies z(t) = z_0$$

la trajectoire est donc le plan $z = z_0 \perp \vec{B}$

$$\text{on a : } m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \times \vec{B} \implies \frac{1}{2} m_e \frac{d\vec{v}^2}{dt} = -e \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \implies \|\vec{v}\| = cte = v_0$$

1.1.3 la trajectoire est un cercle ,en se basant sur le sens de la force $-e \vec{v}_0 \times \vec{B}$ on dessine :



1.1.4 TRD dans la base de Freinet : $m_e \frac{v^2}{R} = evB$ et $\frac{dv}{dt} = 0$ donc

$$R = \frac{m_e v_0}{eB}$$

$$1.1.5 \quad T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m_e v_0}{eB v_0} = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \text{ A.N : } T = 7 \cdot 10^{-9} s$$

1.1.6 TEC pendant la phase d'accélération :

$$e\Delta V = \frac{1}{2} m_e (v_f^2 - v_i^2) \implies e\Delta V = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{eBR}{m_e} \right)^2$$

soit $\frac{e}{m_e} = \frac{2\Delta V}{B^2 R^2} = \frac{8\Delta V}{B^2 D^2}$ A.N : $\frac{e}{m_e} = 1.8 \cdot 10^{11} C \cdot kg^{-1}$ d'après les données :

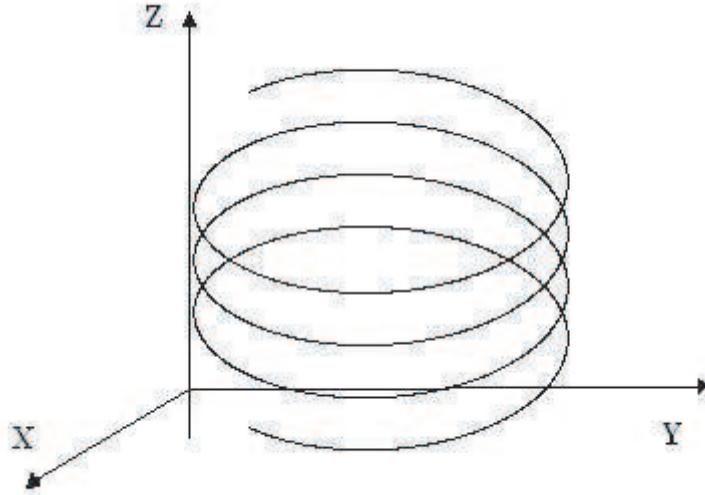
$$\frac{e}{m_e} = 1.76 \cdot 10^{11} C \cdot kg^{-1}$$

l'erreur provient de l'approximation $v_i \approx 0$ et des mesures de D et B

1.1.7 expérience de Millikan !!

$$1.1.8 \text{ A.N : } P = m_e g = 9.1 \cdot 10^{-30} N \text{ et } F_m = ev_0 B = e \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}} B = 4 \cdot 10^{-14} N \implies P \ll F_m$$

1.1.9 on superpose le mouvement circulaire dans le plan $z = cte$ et un mouvement uniforme suivant Oz ,on obtient une trajectoire hélicoïdale



1.2 Stabilité de la trajectoire électronique

1.2.1 $m_e \vec{a} = q\vec{v} \times B\vec{z}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} m_e(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \omega_c r\dot{\theta} & (1) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -\omega_c \dot{r} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

1.2.2

$$(2) \Rightarrow (R + \epsilon_r)\ddot{\epsilon}_\theta + 2\dot{\epsilon}_r(-\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta) = -\omega_c \dot{\epsilon}_r$$

au 1^{er} ordre il reste $\Rightarrow R\ddot{\epsilon}_\theta = \omega_c \dot{\epsilon}_r \Rightarrow R\dot{\epsilon}_\theta = \omega_c \epsilon_r + cte$

à $t = 0$ on a $\epsilon_r(0) = \dot{\epsilon}_\theta(0) = 0 \Rightarrow R\dot{\epsilon}_\theta = \omega_c \epsilon_r$

1.2.3

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \ddot{\epsilon}_r - (R + \epsilon_r)(-\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta)^2 = \omega_c(R + \epsilon_r)(-\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta) \\ &\Rightarrow \ddot{\epsilon}_r - (R + \epsilon_r)(\omega_c^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 - 2\omega_c \dot{\epsilon}_\theta) = \omega_c(R + \epsilon_r)(-\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta) \end{aligned}$$

tenant compte du résultat de 1.2.2, au 1^{er} ordre

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\epsilon}_r + \omega_c^2 \epsilon_r = 0}$$

1.2.4

$\epsilon_r(t) = a \cos \omega_c t + b \sin \omega_c t$

à $t = 0$ on a : $\epsilon_r(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_r(t) = b \sin \omega_c t \\ \epsilon_\theta(t) = \frac{\omega_c}{R} b \sin \omega_c t \end{cases}$ les mouvements sont stables car $\epsilon_r(t)$ et $\epsilon_\theta(t)$ sont bornées

1.2.5 sur Oz

$$m_e \ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{\epsilon}_z(t) = 0 \Rightarrow \epsilon_z(t) = a t$$

le mouvement est instable

2^{ème} partie :
Effet ZEEMAN

2.1 Théorème de Larmor

2.1.1 TRD dans R_{gal} : $\vec{a}_0 = \frac{q\vec{E}}{m_e}$

2.1.2 TRD dans R_{gal} : $\vec{a} = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q}{m_e} \vec{v} \times \vec{B}$

2.1.3

$$2.1.3.1 \quad \vec{a}' = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q}{m_e} \vec{v} \times \vec{B} - \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}}_{\vec{\Omega}} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$$

$$\implies \vec{a}' = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q}{m_e} \vec{v}' \times \vec{B} + \frac{q}{m_e} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$$

2.1.3.2 le terme en \vec{v}' se simplifie si $\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m_e} \vec{B}$ d'où :

$$\vec{a}' = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q}{m_e} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q^2}{4m_e^2} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r})$$

2.1.3.3 loi de coulomb : $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$

2.1.3.4 on a :

$$\rho = \frac{\frac{e^2}{4m_e} |\vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r})|}{e|\vec{E}|} < \frac{e}{4m_e} \frac{B^2 r}{E} = \frac{\pi\epsilon_0 B^2 r^3}{m_e}$$

$$\text{d'où : } \rho_{max} = \frac{\pi\epsilon_0 B^2 r^3}{m_e} = \frac{\pi B^2 r^3}{m_e \mu_0 c^2}$$

2.1.3.5 A.N : $\rho_{max} = 3 \cdot 10^{-11} \ll 1 \implies \boxed{\vec{a}' \approx \frac{q\vec{E}}{m_e}}$

2.1.4 sans \vec{B} on a ,dans R_{gal} : $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m_e}$

avec \vec{B} on a dans R_{Larmor} tel que $\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m_e} \vec{B}$: $\vec{a}' = \frac{q\vec{E}}{m_e}$ c'est le théorème de Larmor

2.2 Oscillateur harmonique spatial

2.2.1 TMC en O dans le référentiel Galiléen : $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{0}$ donc $\vec{\sigma}_O = \vec{r} \times m_e \vec{v} = \vec{cte}$ soit $\vec{r} \cdot \vec{\sigma}_O = ax + by + cz = 0$ (équation d'un plan) la trajectoire est contenue dans le plan passant par O et $\perp \vec{\sigma}_O$

oui , la trajectoire est rectiligne si $\vec{r}_0 // \vec{v}_0$

2.2.2

2.2.2.1 dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u})$ on exprime :

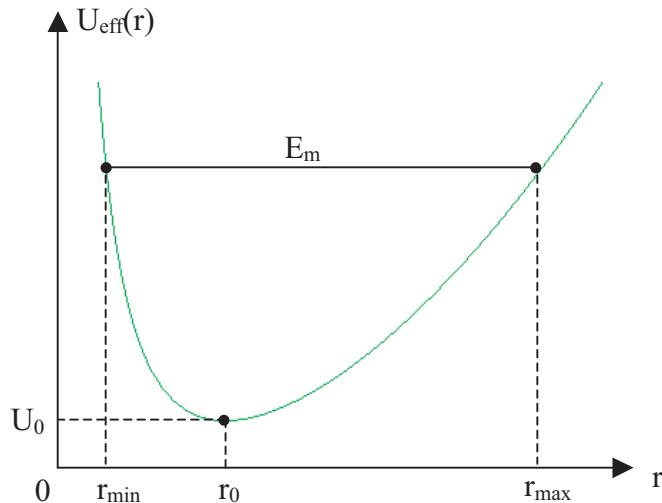
$$\vec{\sigma}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = r\vec{u}_r \times m_e(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u} \implies \boxed{\sigma = m_e r^2 \dot{\theta}}$$

2.2.2.2 on a : $E = E_c + E_p$ or $E_p = \int -\vec{f} \cdot d\vec{r} = \int m_e \omega_0^2 \vec{r} \cdot d\vec{r} = m_e \omega_0^2 \frac{r^2}{2}$ et

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)^2 = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$\text{soit : } E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} + m_e \omega_0^2 \frac{r^2}{2} \implies U_{eff}(r) = \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} + m_e \omega_0^2 \frac{r^2}{2}$$

2.2.2.3 TEM dans un référentiel Galiléen : $\frac{dE}{dt} = P^{N.C} = 0 \implies E = cte$ or $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E_m - U_{eff}(r) \geq 0$
le tracé de $U_{eff}(r)$ est :



la trajectoire est bornée entre $[r_{min}, r_{max}]$

2.2.2.4 si $E = U_{eff}(r_0)$ la trajectoire est un cercle de rayon r_0 donné par

$$U'_{eff} = 0 \iff r_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{m_e \omega_0}}$$

dans ce cas $E = U_{eff}(r_0) = \sigma \omega_0$

2.2.3 TRD dans un référentiel Galiléen :

$$m_e \ddot{\vec{r}} + m_e \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0} \iff \vec{r}(t) = \vec{a} \cos(\omega_0 t) + \vec{b} \sin(\omega_0 t)$$

les conditions initiales donnent : $\vec{r}(0) = \vec{a}$ et $\dot{\vec{r}}(0) = \omega_0 \vec{b}$ soit :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\vec{r}}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

2.2.4

2.2.4.1 projection sur Oz : $z(t) = z(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{z}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

2.2.4.2 on a :

$$z(t) = \Re(\underline{z}(t)) \iff Z \cos(\omega_0 t + \zeta) = z(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{z}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

soit, par trigonométrie : $Z \cos \zeta = z(0)$ et $-Z \sin \zeta = \frac{\dot{z}(0)}{\omega_0}$

finalement : $\boxed{Z = \sqrt{z^2(0) + \frac{\dot{z}^2(0)}{\omega_0^2}}}$ et $\boxed{\tan \zeta = -\frac{\dot{z}(0)}{z(0)\omega_0}}$

2.2.5

2.2.5.1 on a :

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= [A'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) + A'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y)] \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \\ &\iff \vec{x}(t) = 2A' \vec{u}_x \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \\ &\iff A' = \frac{A}{2} \end{aligned}$$

2.2.5.2 on a :

$$\vec{x}(t) = \underbrace{A'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha)}_{\vec{r}_1(t)} + \underbrace{A'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha)}_{\vec{r}_2(t)} = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$$

or $\vec{r}_1(t) = \Re(\vec{r}_1(t)) = A' \cos(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_x + A' \sin(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_y$ mouvement circulaire gauche d'un point fictif dans le plan xOy

$\vec{r}_2(t) = \Re(\vec{r}_2(t)) = A' \cos(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_x - A' \sin(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_y$ mouvement circulaire droit d'un point fictif dans le plan xOy

2.2.6 de même avec $B' = \frac{B}{2}$, on aura :

$$\vec{y}(t) = \underbrace{B'(\vec{u}_y + i\vec{u}_x) \exp -i(\omega_0 t + \beta)}_{\vec{r}_3(t)} + \underbrace{B'(\vec{u}_y - i\vec{u}_x) \exp -i(\omega_0 t + \beta)}_{\vec{r}_4(t)} = \vec{r}_3(t) + \vec{r}_4(t)$$

or $\vec{r}_3(t) = \Re(\vec{r}_3(t)) = B' \sin(\omega_0 t + \beta) \vec{u}_x + B' \cos(\omega_0 t + \beta) \vec{u}_y$

$$\implies \vec{r}_3(t) = B' \cos(\omega_0 t + \beta - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_x - B' \sin(\omega_0 t + \beta - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_y$$

mouvement circulaire droit d'un point fictif dans le plan xOy

de même pour $\vec{r}_4(t)$

2.2.7

2.2.7.1 on a

$$\begin{cases} \underline{\vec{x}}(t) = A'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) + A'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \\ \underline{\vec{y}}(t) = B'i(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \beta) - B'i(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \beta) \end{cases}$$

il vient :

$$\begin{cases} \underline{R}_g = A' \exp -i\alpha - iB' \exp -i\beta = \frac{1}{2}[Ae^{-i\alpha} - iBe^{-i\beta}] \\ \underline{R}_d = A' \exp -i\alpha + iB' \exp -i\beta = \frac{1}{2}[Ae^{-i\alpha} + iBe^{-i\beta}] \end{cases}$$

2.2.7.2 la superposition de deux mouvements circulaires gauche et droit

2.3 Changements de fréquence dus à la rotation de Larmor

2.3.1 TRC dans le référentiel Galiléen appliquée à l'électron atomique s'écrit :

$$m_e \ddot{\vec{r}} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} + q\vec{v} \times B\vec{z}$$

2.3.2 projection sur Oz : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$, le mouvement selon Oz n'est pas modifié

2.3.3 selon Ox : $m_e \ddot{x} + \omega_0^2 x = qB\dot{y}$

selon Oy : $m_e \ddot{y} + \omega_0^2 y = -qB\dot{x}$

2.3.4

2.3.4.1 mouvement circulaire gauche à la pulsation ω_+

$$\begin{cases} x(t) = A' \cos(\omega_+ t + \alpha) \\ y(t) = A' \sin(\omega_+ t + \alpha) \end{cases}$$

soit : $\dot{y}(t) = \omega_+ A' \cos(\omega_+ t + \alpha) = \omega_+ x(t)$

2.3.4.2 d'après 3.3.3 on a : $-m_e \omega_+^2 x(t) = -m_e \omega_0^2 x(t) + qB\omega_+ x(t)$

soit : $\omega_+^2 - \frac{eB}{m_e} \omega_+ - \omega_0^2 = 0$

2.3.4.3 domaine visible $\lambda \in [0.4, 0.8] \mu m \iff \omega_0 = \frac{2\pi c_0}{\lambda} \in [2.3, 4.7] 10^{15} Hz$ or

$$\frac{eB}{m_e} = 1.7 10^{11} Hz \ll \omega_0$$

2.3.4.4

$$(18) \implies \omega_+ = \frac{\frac{eB}{m_e} + \sqrt{(\frac{eB}{m_e})^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \frac{eB}{2m_e} + \omega_0 \sqrt{1 + (\frac{eB}{2\omega_0 m_e})^2} \approx \frac{eB}{2m_e} + \omega_0 [1 + \frac{1}{2}(\frac{eB}{2\omega_0 m_e})^2]$$

soit : $\Delta\nu_+ = \frac{\omega_+ - \omega_0}{2\pi} \approx \frac{eB}{4\pi m_e} + \frac{\omega_0}{16\pi} (\frac{eB}{m_e \omega_0})^2$

ordre de grandeur : $\frac{eB}{2m_e} \sim 10^{11} Hz$ et $\frac{\omega_0}{16\pi} (\frac{eB}{m_e \omega_0})^2 \sim 10^7 Hz$

soit : $\Delta\nu_+ \approx \frac{eB}{4\pi m_e} = \frac{\Omega}{2\pi}$, en accord avec la théorème de Larmor ,en effet la composition des rotations s'écrit : $\omega_+ \}_{gal} = \omega_0 \}_{lar} + \Omega \}_{lar/gal}$ (circulaire gauche)

2.3.5 de même pour un mouvement circulaire droit à la pulsation ω_-

$$\begin{cases} x(t) = A' \cos(\omega_- t + \alpha) \\ y(t) = -A' \sin(\omega_- t + \alpha) \end{cases}$$

soit : $\dot{x}(t) = +\omega_- y(t)$ remplacée dans (18) $\implies \omega_-^2 + \frac{eB}{m_e} \omega_- - \omega_0^2 = 0$ soit :

$$\omega_- = -\frac{\frac{eB}{m_e} + \sqrt{(\frac{eB}{m_e})^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{eB}{2m_e} + \omega_0 \sqrt{1 + (\frac{eB}{2\omega_0 m_e})^2} \approx -\frac{eB}{2m_e} + \omega_0 [1 + \frac{1}{2}(\frac{eB}{2\omega_0 m_e})^2]$$

soit :

$$\Delta\nu_- = \frac{\omega_- - \omega_0}{2\pi} \approx -\frac{eB}{4\pi m_e} = -\frac{\Omega}{2\pi} = -\Delta\nu_+$$

, en accord avec la théorème de Larmor ,en effet la composition des rotations s'écrit : $-\omega_- \}_{gal} = -\omega_0 \}_{lar} + \Omega \}_{lar/gal}$ (circulaire droite)

2.4 Conséquences sur les raies d'émission de l'atome

2.4.1

2.4.1.1 d'abord : $\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R^2 c_0} \vec{R} \times p_0 \vec{z} e^{-i\omega(t-\frac{R}{c_0})} = \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi R} \vec{k} \times \vec{z} e^{i(kR-\omega t)}$ soit :

$$\vec{E} = -c_0^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{B} = -\frac{p_0}{4\pi \varepsilon_0 R} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{z}) e^{i(kR-\omega t)}$$

2.4.1.2 notons \vec{u} vecteur unitaire de la droite Δ , on a : $\vec{p}_\perp = \vec{p} - \vec{p}_\parallel = \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{u}) \vec{u} = p(t)[\vec{z} - (\vec{u} \cdot \vec{z}) \vec{u}]$ or $\vec{k} = k \vec{u}$ d'où :

$$\vec{E} = -\frac{p_0}{4\pi \varepsilon_0 R} k^2 [(\vec{u} \cdot \vec{z}) \vec{u} - \vec{z}] e^{i(kR-\omega t)} = \frac{k^2}{4\pi \varepsilon_0 R} \vec{p}_\perp (t - \frac{R}{c_0})$$

la direction de $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{z})$ est fixe donc l'onde est polarisée rectiligne

2.4.1.3 si $\vec{k} // \vec{p} \implies \vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$

$$\text{si } \vec{k} \perp \vec{p} \implies \vec{E} = \frac{k^2}{4\pi \varepsilon_0 R} \vec{p} (t - \frac{R}{c_0}) , \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi R} \vec{k} \times \vec{z} e^{i(kR-\omega t)}$$

2.4.2 notons $\vec{k} = k \vec{u}$, la polarisation du champ électrique est donnée par $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{p}) = k^2 [(\vec{u} \cdot \vec{p}) \vec{u} - \vec{p}] = -k^2 \vec{p}_\perp$ c'est le résultat demandé

2.4.3

2.4.3.1 le mouvement général de l'électron atomique en présence du champ magnétostatique \vec{B} se compose de :

- (1) : mouvement circulaire gauche dans le plan xOy
- (1) : mouvement circulaire droit dans le plan xOy
- (2) : mouvement oscillatoire $// \vec{B} = B \vec{z}$

il y aura 3 raies aux fréquences : ν_0 , ν_+ , ν_-

2.4.3.2 voir figure a

- raie ν_0 est polarisée rectiligne $// Oz$
- raie ν_+ est polarisée rectiligne $\perp Oz$
- raie ν_0 est polarisée rectiligne $\perp Oz$

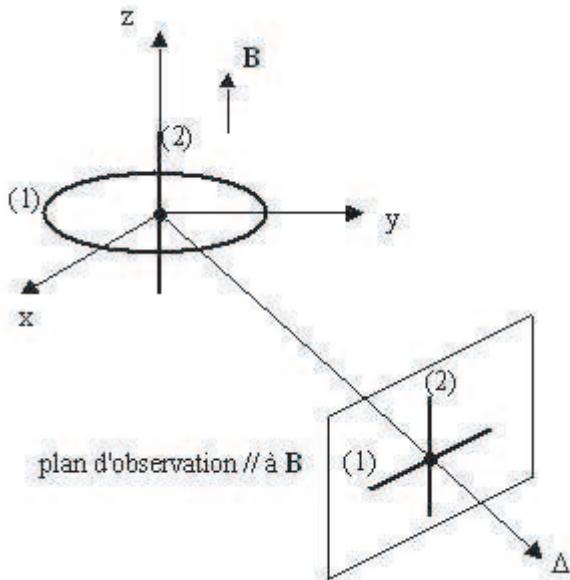


figure a

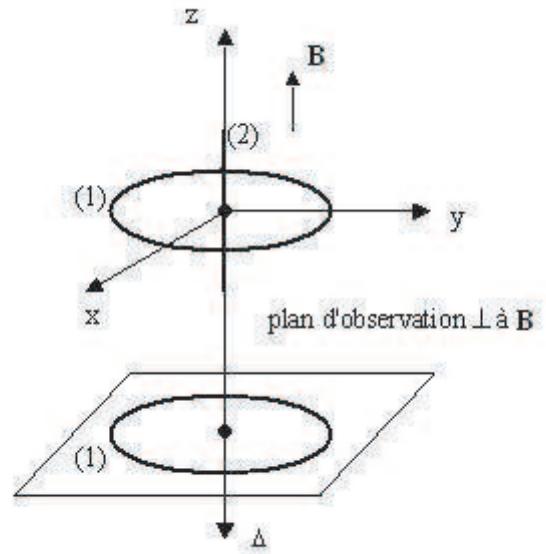


figure b

on utilise un analyseur de polarisation (toutes les raies présentent une extinction)

2.4.3.3 l'intensité $I \propto | < E \times B > | \propto p_0^2$, et par symétrie de l'atome , les relations (12), (13), (15) $\Rightarrow Z = A = B$ et $\alpha = \beta$ dans les relations 2.2.7.1

- raie ν_0 : $I'_0 = cteZ^2$ en présence du champ B
- raie ν_+ : $I_+ = cte|R_g|^2 = cte\frac{Z^2}{2} = \frac{I'_0}{2}$
- raie ν_- : $I_- = cte|R_d|^2 = cte\frac{Z^2}{2} = \frac{I'_0}{2}$

2.4.4

2.4.4.1 d'après 2.4.1.3 il n'y aura que les raies ν_+ et ν_-

2.4.4.2 voir figure b

- raie ν_+ est polarisée circulaire gauche
- raie ν_0 est polarisée circulaire droite
de même intensité

2.4.4.3 il faut utiliser cette fois une lame quart d'onde

2.4.5

2.4.5.1 on a : $\Delta\nu = \Delta\nu_+ = -\Delta\nu_- = \frac{eB}{4\pi m_e} \ll \nu_0$ et $\nu = \frac{c_0}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\frac{c_0 d\lambda}{\lambda^2} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 \Delta\nu}{c_0} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 e B}{4\pi m_e c_0}$

2.4.5.2 pente $= \frac{\lambda_0 e}{4\pi m_e c_0} = 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla}^{-1} \Rightarrow \frac{e}{m_e} = 1.9 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$

2.4.5.3 Interféromètre de Michelson.

fin du corrigé

Premier problème : Thermodynamique

On dispose d'un réservoir (R) de température constante de grande capacité, contenant un gaz diatomique G, sous une pression $P_R = 25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et une température $T_0 = 300K$ constantes. On admettra dans la suite que le volume de ce réservoir est tel que l'on pourra l'assimiler à un générateur de gaz comprimé parfait. C'est-à-dire que la pression dans le réservoir (R) est indépendante de la quantité de gaz qui peut en sortir. On admettra de plus dans tout le problème que G est un gaz parfait diatomique rigide de masse molaire $M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1^{ère} partie : Étude d'un réservoir à gaz

Un cylindre indéformable (C) isolé thermiquement de l'extérieur est séparé, à l'aide d'un piston II à parois athermanes, en deux compartiments (C_1) et (C_2), de volumes respectifs V_1 et V_2 . Le piston II, de masse négligeable, peut glisser sans frottement tout en restant perpendiculaire à l'axe Δ du cylindre (C)(figure 1).

(C_1) peut être mis en communication avec le réservoir (R) par l'intermédiaire d'une vanne ν_1 et avec (C_2) par l'intermédiaire d'une vanne ν_{12} .

(C_2) peut être mis en communication avec un autre réservoir (R_0) au moyen d'une vanne ν_2 .

On négligera systématiquement tout transfert thermique à travers une vanne fermée.

- 1.1** On note γ le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant et on donne, pour les gaz diatomiques rigides, $\gamma = 7/5$.

- 1.1.1** Donner un exemple de gaz diatomique.

- 1.1.2** Exprimer les capacités calorifiques molaires à volume constant c_v et à pression constante c_p pour un gaz parfait diatomique rigide en fonction de γ et R. Application numérique.

- 1.2** Le piston II est bloqué. Le compartiment (C_1) de volume $V_1 = 10 \text{ L}$ constant contient le gaz G à la température $T_0 = 300K$ et sous la pression $P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Les vannes ν_2 et ν_{12} étant fermées, on ouvre **brutalement** la vanne ν_1 afin de remplir le compartiment (C_1) avec le gaz G.

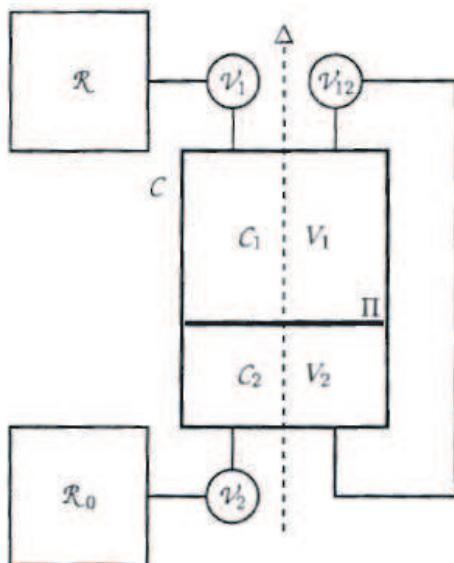


Fig 1 : Réservoirs reliés à un cylindre à piston.

1.2.1 Exprimer la quantité de matière N_1 du gaz contenu initialement dans le compartiment (C_1) en fonction des données du problème. Application numérique.

1.2.2 Que vaut la pression P_1 dans le compartiment (C_1) à la fin de l'opération ?

1.2.3 Exprimer de même la quantité de matière N du gaz qui passe du réservoir (R) dans le compartiment (C_1) en fonction de R , P_0 , P_R , V_1 , T_0 et de la température T_1 , du gaz contenu dans (C_1) à la fin de l'opération.

On considère comme système le gaz contenu initialement dans (C_1) (quantité de matière N_1) et le gaz qui passe de (R) à (C_1) (quantité de matière N).

1.2.4 Exprimer la variation ΔU de l'énergie intème du système en fonction de N , N_1 , T_0 , T_1 , γ et R .

1.2.5 Exprimer le travail W reçu par le système en fonction de la pression P_R et du volume V_N qu'occupait la quantité de matière N du gaz dans le réservoir (R).

1.2.6 En déduire la température finale T_1 du gaz. Pour cela on pourra appliquer le premier principe de la thermodynamique après avoir montré que la transformation peut être considérée comme adiabatique. On exprimera T_1 en fonction de P_R , P_0 , T_0 et γ . Application numérique.

1.3 Le piston II étant toujours bloqué et le compartiment (C_2) parfaitement vide, on ferme la vanne ν_1 puis on ouvre la vanne ν_{12} . La tuyauterie est thermiquement isolée de l'extérieur. mais permet l'échange thermique entre (C_1) et (C_2) quand ν_{12} est ouverte. On donne **pour toute la suite** $V_1 = 10 L$ et $V_2 = 2,0 L$. Soit T_2 la température du gaz lorsque l'équilibre est atteint.

1.3.1 Comment appelle-t-on une telle transformation ?

1.3.2 En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que $T_2 = T_1$

1.3.3 La transformation du gaz est-elle réversible ? Déterminer l'expression de la variation d'entropie ΔS en fonction de P_R , V_1 , V_2 et T_1 . On justifiera soigneusement la méthode utilisée.

Commenter le résultat obtenu.

1.3.4 Calculer numériquement ΔS et commenter le résultat obtenu. On donne $\ln(6/5) \approx 0,18$.

1.3.5 L'état final du système dépend-il de l'ordre de fermeture et d'ouverture des vannes ν_1 et ν_{12} ? Expliquer brièvement.

1.4 Le piston II étant bloqué et la vanne ν_{12} fermée, le compartiment ν_1 de volume $V_1 = 10 L$ est rempli à l'aide du réservoir (R). La température du gaz contenu dans (C_1) est alors $T_0 = 300 K$. Le compartiment (C_2) est rempli à l'aide d'un réservoir (R_0) contenant un gaz parfait G_0 à la pression $P = P_R/x$. On donne $c_{v_0} = 3R$ la capacité calorifique à volume constant de G_0 et on note γ' son rapport de capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

Dans l'état initial, la température du gaz G_0 contenu dans (C_2) est $T_0 = 300 K$ et on note le volume V_2^i du compartiment (C_2) sous la forme $V_2^i = V_0 x$ où $V_0 = 0,1 L$ et $x = P_R/P$ est un paramètre réel pouvant varier de 0 à x_{max} .

Les vannes ν_2 et ν_{12} restant fermées, la vanne ν_1 est à nouveau ouverte. On débloque le piston II et on le bloque à nouveau dès que la pression est la même dans les deux compartiments.

1.4.1 Déterminer la quantité de matière n_2 du gaz G_0 dans le compartiment (C_2) en fonction de P_R , V_0 et T_0 .

1.4.2 Donner l'expression du volume V_2 occupé par le gaz de (C_2) dans l'état final en fonction de sa température T ainsi que de T_0 et V_0 .

1.4.3 En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que la température $T(x)$ du gaz G_0 contenu dans (C_2) est donnée par :

$$T(x) = \frac{3+x}{4}T_0$$

1.4.4 En déduire l'expression de V_2 en fonction de V_0 et x .

1.4.5 Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz G_0 contenu dans (C_2) en fonction de P_R , V_0 , T_1 et x .

1.4.6 Applications numériques :

1.4.6.1 Calculer numériquement T et ΔS pour $x = 25$. On donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

1.4.6.2 Déterminer la valeur numérique de ΔS pour $x = 1$ et pour x tendant vers zéro.

1.4.6.3 Déterminer x_{max} ainsi que la valeur numérique de ΔS lorsque $x = x_{max}$.

On donne $\ln 7450 \approx 8,92$.

1.4.7 Représenter ΔS en fonction de x et commenter le graphique obtenu.

2^{ème} partie : Étude d'un moteur à piston

Un moteur à piston est constitué d'un cylindre calorifugé de volume $V_A = 0,8 L$, muni de deux soupapes S_1 et S_2 et d'un piston Π athermane pouvant glisser sans frottement le long de l'axe du cylindre (figure 2). Le cylindre est relié à l'aide de la soupape S_1 au réservoir à gaz (R) étudié en 1, rempli du gaz parfait G.

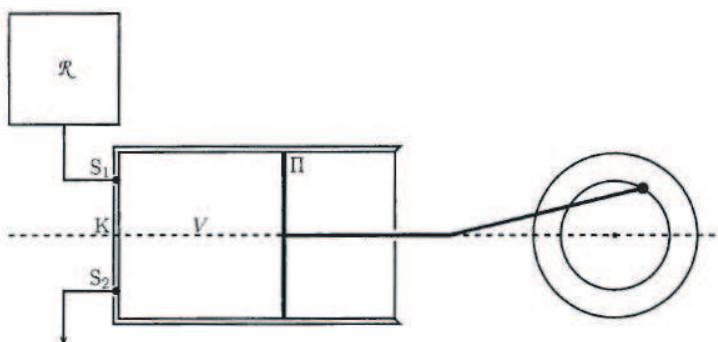


Fig 2 : Moteur à piston

2.1 Initialement le piston est placé contre la culasse K et le volume de gaz enfermé dans le cylindre est nul. La soupape S_2 étant fermée, on ouvre la soupape S_1 pour mettre le cylindre en communication avec le réservoir (R), Le piston se déplace alors vers la droite jusqu'à ce que le volume V du gaz enfermé dans le cylindre soit égal à V_A/α . Pour les applications numériques, on prendra $\alpha = 5$.

2.1.1 Que vaut la pression à l'intérieur du cylindre à la fin de cette première étape ? Comment appelle-t-on une telle transformation ?

2.1.2 Exprimer la quantité de matière n_0 admise dans le cylindre à la fin de cette étape en fonction de P_R , V_A , α et de la température T_1 du gaz dans le cylindre.

2.1.3 En appliquant le premier principe de la thermodynamique, exprimer T_1 en fonction de T_0 .

2.1.4 Calculer numériquement n_0 .

2.2 À la fin de la première étape, alors que la soupape S_2 est toujours fermée, la soupape S_1 se ferme et le gaz enfermé subit une détente adiabatique, que l'on suppose réversible, jusqu'à ce que le volume du cylindre soit égal à V_A .

2.2.1 Exprimer la pression P_2 dans le cylindre à la fin de cette deuxième étape en fonction P_R , γ et α . Application numérique. On donne $5^{(7/5)} \approx 9,52$.

2.2.2 Exprimer le travail W_2 reçu par le gaz au cours de cette étape en fonction de P_R , V_A , γ et α .

2.3 À la fin de la deuxième étape, la soupape S_2 s'ouvre mettant le gaz contenu dans le cylindre en communication avec l'extérieur où la pression est $P_0 = 1 \text{ } 10^5 \text{ Pa}$. Le piston reste d'abord immobile ($V = V_A$) tant que la pression $P \geq P_0$, ensuite il est ramené vers la culasse jusqu'à $V = 0$. Un nouveau cycle peut alors commencer.

2.3.1 Tracer l'allure du diagramme de WATT donnant la pression P du gaz, en ordonnée, en fonction du volume V qu'il occupe. Indiquer les points remarquables et préciser le sens de parcours du cycle.

2.3.2 Déterminer l'expression du travail W_0 fourni au gaz par le piston au cours d'un cycle en fonction de P_0 , P_R , V_A , γ et α . Application numérique.

2.3.3 Quel doit être, en régime stationnaire, le débit massique D_1 du gaz pour que la puissance mécanique du moteur soit $P = 1 \text{ kW}$? On donnera l'expression littérale de D_1 en fonction de P , W_0 , P_R , V_A , T_0 , M , R , γ et α et on calculera numériquement D_1 en kg/h .

2.3.3.1 Calculer numériquement la durée Δt d'un cycle dans ces conditions.

3^{ème} partie :
Étude d'un moteur à turbine

Un moteur à turbine (figure 3) est constitué d'une tuyère τ calorifugée, au milieu de laquelle se trouve une turbine T. Le gaz G du réservoir (R) de la partie 1, est injecté à l'entrée de la tuyère. Il actionne la turbine puis sort dans l'atmosphère, à la pression P_0 avec une vitesse négligeable. On s'intéresse au régime de fonctionnement stationnaire.

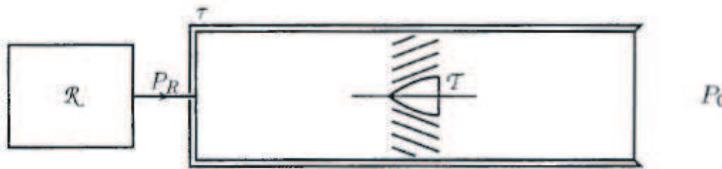


Fig 3 : Moteur à turbine

3.1 On suppose que le gaz G subit une détente adiabatique réversible. Soit W_T le travail fourni à une mole de gaz par la turbine.

3.1.1 Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

3.1.2 En déduire que, dans le cas du modèle de moteur à turbine étudié, le travail W_T est simplement relié à la variation d'enthalpie molaire du gaz entre l'entrée et la sortie de la tuyère.

3.1.3 En déduire l'expression de W_T en fonction de T_0 , P_0 , P_R , γ et R . Application numérique. Préciser le signe de W_T et commenter le résultat obtenu. On donne $5^{(4/7)} \approx 2,51$.

3.1.4 Quel doit être le débit massique D_2 pour que la turbine ait une puissance $P = 1 \text{ kW}$? On exprimera D_2 en fonction de P , W_T et la masse molaire M du gaz G. Application numérique.

3.2 Pour tenir compte des irréversibilités, on admet que lors de la détente adiabatique, la pression P et le volume V sont reliés par la loi polytropique :

$$PV^k = \text{constante}$$

avec $k = 1,16$

3.2.1 Déterminer, dans ces conditions, le travail W_T fourni à une mole de gaz par la turbine. Application numérique. On donne $5^{(8/29)} \approx 1,56$.

3.2.2 Quel est le débit massique correspondant D'_2 assurant une puissance $P = 1 \text{ kW}$ de la turbine ?

4^{ème} partie :
Étude d'un moteur à réaction

On utilise le réservoir (R) pour faire fonctionner un moteur à réaction. Le gaz G est envoyé dans une tuyère calorifugée τ à la sortie de laquelle règne la pression $P_0 = 1 \cdot 10^5 Pa$ et où la vitesse du gaz n'est plus négligeable (figure 4). On s'intéresse au régime de fonctionnement stationnaire et on néglige la vitesse du gaz à la sortie du réservoir.

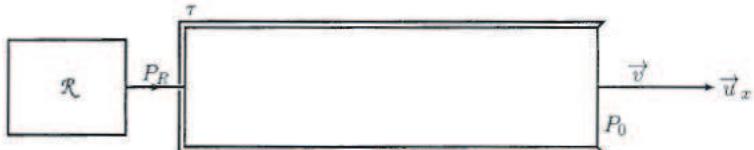


Fig 4 : Moteur à réaction

Pour tenir compte des irréversibilités, on admet la loi d'évolution polytropique :

$$PV^{k'} = constante$$

avec $k' = 1,04$

- 4.1 En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert, exprimer la vitesse v d'éjection des gaz en fonction de M , γ , R , T_0 , P_0 , P_R et k' . Application numérique. On donne $5^{(l/13)} \approx 1,13$.
- 4.2 Quel est le débit massique D_3 du gaz permettant d'avoir une puissance cinétique d'éjection $P = 1kW$?

Deuxième problème : Mécanique

On considère le système mécanique représenté figure 1. AB est une barre homogène de masse m et de longueur 2ℓ . L'extrémité A de la barre est assujettie à se déplacer, sans frottement, le long de l'axe matérialisé par Oy. On note G le centre d'inertie de la barre repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) . L'orientation de la barre dans le plan zOy est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Le champ de pesanteur est uniforme et donné par :

$$\vec{g} = g\vec{u}_x$$

En plus de son poids, la barre est soumise à l'action d'une force de rappel appliquée au point A et schématisée par un ressort de raideur k et de longueur ℓ_0 à vide. Au passage de l'extrémité A de la barre par l'origine O ($y_A = 0$), la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0 . On s'intéresse aux mouvements d'oscillation de la barre AB dans le plan xOy. Toute l'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On donne le moment d'inertie J de la barre AB par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre et passant par son centre d'inertie G :

$$J = \frac{m\ell^2}{3}$$

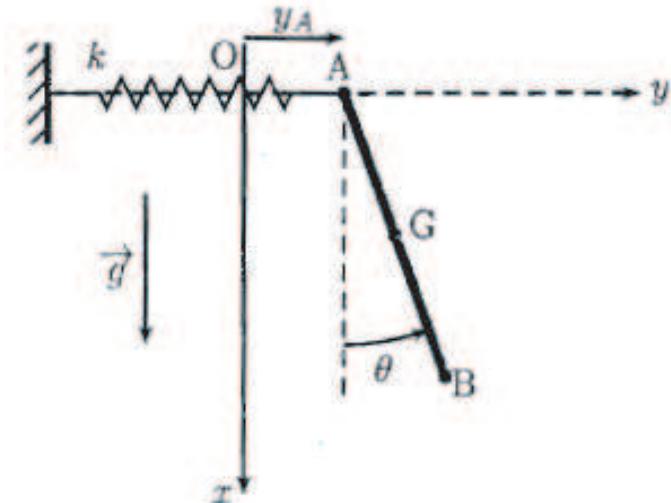


Fig 1 : Système mécanique

1^{ère} partie :
Mise en équation

1.1

1.1.1 Exprimer x en fonction de ℓ et θ .

1.1.2 Exprimer de même la coordonnée y_A donnant la position de l'extrémité A de la barre, $y_A = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}_y$, en fonction de y , ℓ et θ .

1.2 On se propose de déterminer les équations du mouvement de La barre.

1.2.1 Faire le bilan des efforts exercés sur la barre en mouvement et représenter schématiquement leurs résultantes sur une figure.

1.2.2 Écrire le théorème de la résultante cinétique (TRC) appliqué à la barre AB.

1.2.3 En déduire l'expression de la réaction \vec{R} de l'axe Oy en fonction de m , g , ℓ et θ ainsi qu'une équation du mouvement reliant y , \dot{y} et θ . On posera :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2.4 Écrire le théorème du moment cinétique (TMC) en G.

1.2.5 En déduire, à l'aide d'une projection convenable, une deuxième équation du mouvement de la barre reliant θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et y . On posera :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

2^{ème} partie :
Étude des petites oscillations de la barre

On s'intéresse aux petits mouvements de la barre AB. Dans ce cas, y et θ ainsi que toutes leurs dérivées temporelles sont supposés être des infiniment petits de premier ordre.

2.1 En linéarisant les équations du mouvement obtenues précédemment, montrer que, dans ce cas, le mouvement général de la barre est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 z \\ \ddot{z} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2)z = 3\omega_1^2 y \end{cases}$$

où l'on a posé $z = \ell\theta$.

2.2 On cherche les modes propres d'oscillation de la barre sous la forme, en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{A} \exp i\Omega t \\ \underline{z} = \underline{B} \exp i\Omega t \end{cases}$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$. \underline{A} et \underline{B} sont deux constantes complexes.

2.2.1 Montrer que \underline{A} et \underline{B} sont solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)\underline{A} - \omega_1^2 \underline{B} = 0 \\ -3\omega_1^2 \underline{A} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2)\underline{B} = 0 \end{cases}$$

2.2.2 À quelle condition ce système admet-il des solutions non identiquement nulles ?

2.2.3 En déduire que Ω est solution de l'équation :

$$\Omega^4 - (4\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_2^2\omega_1^2 = 0$$

2.2.4 Montrer alors que, dans le cadre des petites oscillations, le mouvement libre le plus général est donné par :

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{A}_1 \exp i\Omega_1 t + \underline{A}_2 \exp i\Omega_2 t \\ \underline{z} = \underline{B}_1 \exp i\Omega_1 t + \underline{B}_2 \exp i\Omega_2 t \end{cases}$$

et donner les expressions de Ω_1 et Ω_2 en fonction de ω_1 et ω_2 . On prendra $\Omega_1 > \Omega_2$. Comment détermine-t-on \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , \underline{B}_1 et \underline{B}_2 ?

2.3 Initialement ($t = 0$), l'extrémité A étant au repos en O, on écarte la barre AB d'un angle $\theta_0 > 0$ très faible par rapport à la verticale et on la lâche sans vitesse initiale.

2.3.1 Déterminer les constantes \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , \underline{B}_1 et \underline{B}_2 .

2.3.2 Que vaut $y(t)$? Commenter.

2.3.3 En déduire l'expression de $\theta(t)$ en fonction de Ω_1 , Ω_2 , θ_0 et t . L'expression obtenue semble-t-elle en accord avec le résultat de la question 2.3.2? Expliquer.

fin de l'énoncé

Premier problème : Thermodynamique

1^{ère} partie : Étude d'un réservoir à gaz

1.1

1.1.1 O_2 , N_2 , H_2 , Cl_2 , HCl (H_2O est triatomique)

1.1.2 on a $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p - c_v = R$ donc $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

A.N : $c_p = 29 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$ et $c_v = 20 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$

1.2

1.2.1 $N_1 = \frac{P_0 V_1}{RT_0}$ A.N : $N_1 = 0.4 \text{ mol}$

1.2.2 équilibre mécanique $P_1 = P_R = 25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

1.2.3 $N = N_f - N_i = \frac{P_R V_1}{RT_1} - \frac{P_0 V_1}{RT_0}$

1.2.4

$$\Delta U = \Delta U(\text{gaz}N_1) + \Delta U(\text{gaz}N) = N_1 c_v(T_1 - T_0) + N c_v(T_1 - T_0) = (N + N_1) \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$$

1.2.5 $W = -P_R(V_f - V_i) = -P_R(V_1 - (V_1 + V_N)) = P_R V_N$

1.2.6 1^{er} principe au système : $\Delta U = W + Q$ avec $Q = 0$ car les parois sont adiabatiques (*CetPi*) , de plus la transformation est brutale les échanges thermiques sont lents entre le gaz du réservoir et le gaz poussé dans C_1 .

soit : $(N + N_1) \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = P_R V_N$ or $V_N = \frac{N R T_0}{P_R}$ donc

$$\frac{P_R V_1}{R T_1} \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = \left(\frac{P_R V_1}{R T_1} - \frac{P_0 V_1}{R T_0} \right) R T_0$$

$$\text{d'où : } T_1 = \frac{\gamma T_0}{1 + (\gamma - 1) \frac{P_0}{P_R}} \text{ A.N : } T = 413K$$

1.3

1.3.1 détente de Joule ou Joule-Gaylussac du gaz parfait

1.3.2 $\Delta U = W + Q$ avec le système isochore $W = 0$, adiabatique $Q = 0$ soit

$$(N + N_1) c_v (T_2 - T_1) = 0$$

càd : $T_2 = T_1$

1.3.3 non , on a : $dS_{GP} = \frac{n c_v dT + p dV}{T} \implies \Delta S = n c_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + n R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ qui est indépendante de la transformation car S est une fonction d'état , soit :

$$\Delta S = n R \ln\left(\frac{V_1 + V_2}{V_1}\right) = \frac{P_R V_1}{T_1} \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)$$

la transformation adiabatique : $S^c = \Delta S = \frac{P_R V_1}{T_1} \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) > 0$ on retrouve que la transformation est irréversible

1.3.4 $\Delta S = 11 \text{ JK}^{-1}$, faible comparée à $1\text{mol}.c_p$ et $1\text{mol}.c_v$!

1.3.5 oui , en effet la pression n'est pas par la même :

- ν_1 puis ν_{12} donne $P_f = \frac{P_R V_1}{V_1 + V_2}$
- ν_{12} puis ν_1 donne $P_f = P_R$

1.4

$$\mathbf{1.4.1} \quad n_2 = \frac{\frac{P_R}{x}(xV_0)}{RT_0} = \frac{P_R V_0}{RT_0}$$

1.4.2 la vanne ν_1 est ouverte donc à l'équilibre du piston Π on a : $P_R = P_2 = \frac{n_2 R T}{V_2}$ soit $V_2 = V_0 \frac{T}{T_0}$

1.4.3 1^{er} principe au compartiment 2 : $\Delta U = W + Q$, la transformation étant adiabatique $Q = 0$ et $p_{ext} = P_R$ donc :

$$n_2 c_{v0}(T - T_0) = -P_N(V_2 - V_2^i) \iff \frac{P_R V_0}{RT_0} 3R(T - T_0) = -P_R(V_0 \frac{T}{T_0} - xV_0) \iff T(x) = \frac{3+x}{4} T_0$$

$$\mathbf{1.4.4} \quad n_2 = \frac{P_R V_0}{RT_0} = \frac{P_R V_2}{RT(x)} \implies V_2 = \frac{3+x}{4} V_0$$

$$\mathbf{1.4.5} \quad \Delta S = n_2 c_{v0} \ln\left(\frac{T(x)}{T_0}\right) + n_2 R \ln\left(\frac{V_2}{V_2^i}\right) = \frac{P_R V_0}{T_0} [3 \ln\left(\frac{3+x}{4}\right) + \ln\left(\frac{3+x}{4x}\right)]$$

1.4.6 A.N :

1.4.6.1 $T(25) = 2100K$ et $\Delta S(x = 25) = 3,8 \text{ JK}^{-1}$

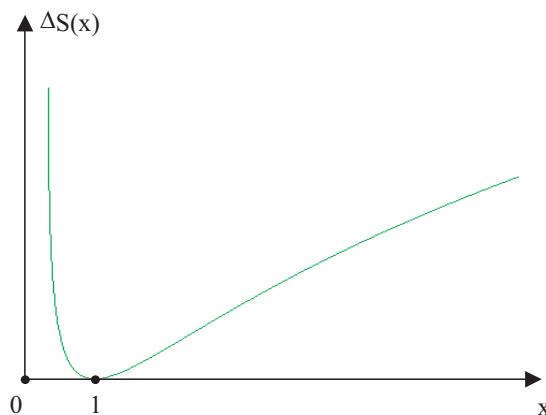
1.4.6.2 $\Delta S(x = 1) = 0$ et $\Delta S(x = 0^+) = +\infty$

1.4.6.3 le volume total de C est $V_1 + V_2 = 12L$ soit $V_{2max} = 12L$ càd :

$$x_{max} = \frac{V_{2max}}{V_0} = 120$$

ainsi $\Delta S(x = x_{max}) = 7,4 \text{ JK}^{-1}$

1.4.7 transformation adiabatique $\Delta S(x) = S^c > 0$



2^{ème} partie :
Étude d'un moteur à piston

2.1

2.1.1 la pression est P_R , la transformation est monobare

$$\mathbf{2.1.2} \quad n_0 = \frac{P_R V_A}{\alpha R T_1}$$

2.1.3 on applique le 1^{er} principe au gaz admis : $\Delta U = W + Q$ l'admission est aussi rapide que l'on peut négliger les échanges thermiques avec le gaz poussant ;

$$n_0 c_v (T_1 - T_0) = -P_R \left(\frac{V_A}{\alpha} - V_0 \right)$$

avec V_0 le volume qu'occupe le gaz admis dans le réservoir , on a : $V_0 = \frac{n_0 R T_0}{P_R} = \frac{V_A T_0}{\alpha T_1}$

$$\implies \frac{c_v}{R} \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) = \frac{V_A}{\alpha} \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \implies T_1 = T_0$$

2.1.4 $n_0 = \frac{P_R V_A}{\alpha R T_0} = \frac{25 \cdot 10^5 \cdot 0.8 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 8.31 \cdot 300} = 0.16 \text{ mol}$

2.2

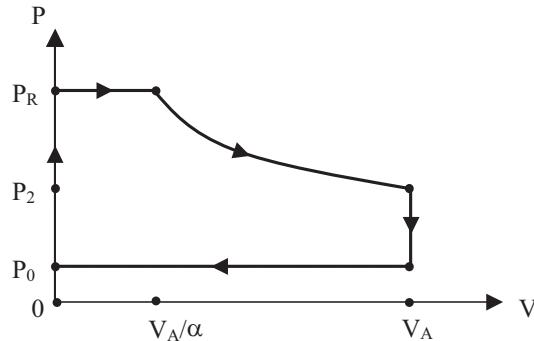
2.2.1 transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait donc : $P_R \left(\frac{V_A}{\alpha} \right)^\gamma = P_2 V_A^\gamma \implies P_2 = \frac{P_R}{\alpha^\gamma}$
A.N : $P_2 = 2.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2.2.2 $V_i = \frac{V_A}{\alpha}$ et $V_f = V_A \implies W_2 = \int (-P dV) = \int \left(-\frac{P_2 V_A^\gamma}{V^\gamma} dV \right)$

$$\implies W_2 = \frac{P_R V_A}{(\gamma - 1) \alpha^\gamma} [1 - \alpha^{\gamma-1}]$$

2.3

2.3.1 :



2.3.2 $W_0 = \int (-P dV) = -P_R \frac{V_A}{\alpha} + W_2 + P_0 V_A \implies$

$$W_0 = P_0 V_A - P_R \frac{V_A}{\alpha} + \frac{P_R V_A}{(\gamma - 1) \alpha^\gamma} [1 - \alpha^{\gamma-1}]$$

A.N : $W_0 = -794 \text{ J}$

2.3.3 soit Δt la durée d'un cycle , on a : $D_1 = \frac{n_0 M}{\Delta t}$ et $|W_0| = P \Delta t$ d'où : $D_1 = \frac{P_R V_A M P}{\alpha R T_0 |W_0|}$ A.N : $D_1 = 20.4 \text{ kg.h}^{-1}$

2.3.3.1 $\Delta t = \frac{|W_0|}{P} = 0.794 \text{ s}$

3^{ème} partie :
Étude d'un moteur à turbine

3.1

3.1.1 le 1^{er} principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit : $\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q$ avec w_i travail massique indiqué et q chaleur massique.

3.1.2 ici la tuyère est calorifugée $q = 0$, et nécessairement $\Delta(e_c + e_p)$ est négligé, soit : pour un gaz parfait $\frac{c_p}{M}(T_f - T_0) = \frac{W_T}{M}$ car W_T et c_p sont molaires .

3.1.3 la transformation du gaz parfait est isentropique d'où :

$$T_f = T_0 \left(\frac{P_R}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \implies W_T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_0 \left[\left(\frac{P_R}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]$$

A.N : $W_T = -5.2 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$, il s'agit donc bien d'un moteur.

3.1.4 $D_2 = \frac{MP}{|W_T|} = 19 \text{ kg.h}^{-1}$

3.2

3.2.1 de même :

$$W'_T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_0 \left[\left(\frac{P_R}{P_0} \right)^{\frac{1-k}{k}} - 1 \right]$$

A.N : $W'_T = -3.1 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$

3.2.2 $D'_2 = \frac{MP}{|W'_T|} = 32 \text{ kg.h}^{-1}$

4^{ème} partie : **Étude d'un moteur à réaction**

4.1 le 1^{er} principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

avec ici $w_i = 0$ travail massique indiqué et $q = 0$ chaleur massique , Δe_p est nécessairement négligé , donc :

$$\frac{c_p}{M}(T_f - T_0) + \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 0$$

transformation isentropique : $T_f = T_0 \left(\frac{P_R}{P_0} \right)^{\frac{1-k'}{k'}} \implies v = \sqrt{2 \frac{\gamma R T_0}{M(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{P_R}{P_0} \right)^{\frac{1-k'}{k'}} \right]}$

A.N : $v = 269 \text{ m.s}^{-1}$

4.2 la puissance cinétique sera définie par : $P_c = \frac{dmv^2}{2} \frac{1}{dt} = \frac{v^2}{2} D_3 = 1 \text{ kW}$ soit :

$$D_3 = \frac{2}{v^2} P_c = 99.5 \text{ kg.h}^{-1}$$

Deuxième problème : Mécanique

1^{ère} partie : **Mise en équation**

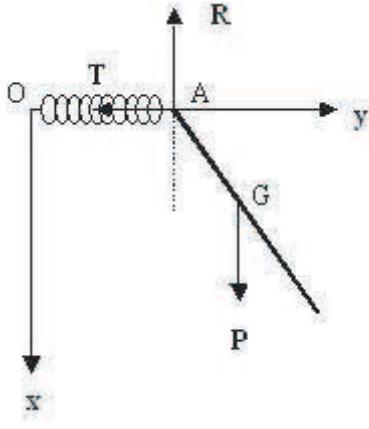
1.1

1.1.1 $x = \frac{2\ell}{2} \cos \theta = \ell \cos \theta$

1.1.2 $y = y_A + \frac{2\ell}{2} \sin \theta \implies y_A = y - \ell \sin \theta$

1.2

1.2.1 :



1.2.2 $m \vec{d}(G)_R = \vec{T} + \vec{P} + \vec{R}$

1.2.3 sur l'axe Ox : $m\ddot{x} = -R + mg$

$$\Rightarrow \vec{R} = -R\vec{x} = -m[\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta + g]\vec{x}$$

sur l'axe Oy : $m\ddot{y} = -ky_A = -k(y - \ell\sin\theta)$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 \ell \sin\theta$$

1.2.4 TMC en G par rapport à R_{gal} s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{T}) + \vec{M}_G(\vec{R})$$

1.2.5 on a : $\vec{\sigma}_G = J\dot{\theta}\vec{z}$, on projette le TMC sur Oz :

$$[\vec{M}_G(\vec{P})].\vec{z} = [\overrightarrow{GG} \times \vec{P}].\vec{z} = 0$$

$$[\vec{M}_G(\vec{R})].\vec{z} = [\overrightarrow{GA} \times (-R\vec{x})].\vec{z} = -\ell R \sin\theta$$

$$[\vec{M}_G(\vec{T})].\vec{z} = [\overrightarrow{GA} \times (-ky_A\vec{y})].\vec{z} = k\ell y_A \cos\theta$$

il vient donc :

$$(1 + 3\sin^2\theta)\ddot{\theta} = -3(\omega_1^2 + \dot{\theta}^2)\cos\theta \sin\theta + \frac{3}{\ell}\omega_1^2 y \cos\theta - \omega_2^2 \sin\theta$$

2^{ème} partie : Étude des petites oscillations de la barre

2.1 $\theta \approx 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$

donc :

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 z$$

$$\ddot{z} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2)z = 3\omega_1^2 y$$

2.2

2.2.1 on a $y = \underline{A} \exp i\Omega t \Rightarrow \ddot{y} = -\Omega^2 \underline{A} \exp i\Omega t$ et $z = \underline{B} \exp i\Omega t \Rightarrow \ddot{z} = -\Omega^2 \underline{B} \exp i\Omega t$ en simplifiant par $\exp i\Omega t$, il vient :

$$(\omega_1^2 - \Omega^2)\underline{A} - \omega_1^2 \underline{B} = 0$$

$$-3\omega_1^2 \underline{A} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2)\underline{B} = 0$$

2.2.2 le déterminant Δ du système est null

2.2.3

$$\Delta = 0 \iff (\omega_1^2 - \Omega^2)(3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2) - 3\omega_1^4 = 0$$

$$\text{soit : } \Omega^4 - (4\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_2^2\omega_1^2 = 0$$

2.2.4 l'équation en 2.2.3 se résout en :

$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(4\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(4\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_2^2\omega_1^2}}{2}}$, les équations sont linéaires , en faible mouvement , donc par superposition des solutions on aura :

$$\underline{y}(t) = \underline{A}_1 \exp i\Omega_1 t + \underline{A}_2 \exp i\Omega_2 t$$

et

$$\underline{z}(t) = \underline{B}_1 \exp i\Omega_1 t + \underline{B}_2 \exp i\Omega_2 t$$

tel que les constantes $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{B}_1$ et \underline{B}_2 sont déterminées par les conditions initiales

2.3

2.3.1 on a : $y(0) = y_A(0) + \ell \sin \theta_0 = \ell \theta_0$; $z(0) = \ell \theta_0$; $\dot{y}(0) = 0$; $\dot{z}(0) = 0$ donc :

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \ell \theta_0$$

$$\Omega_1 \underline{A}_1 + \Omega_2 \underline{A}_2 = 0 \implies \underline{A}_1 = \underline{B}_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1} \ell \theta_0 < 0$$

$$\underline{B}_1 + \underline{B}_2 = \ell \theta_0 \implies \underline{A}_2 = \underline{B}_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2} \ell \theta_0 > 0$$

$$\Omega_1 \underline{B}_1 + \Omega_2 \underline{B}_2 = 0$$

2.3.2

$$y(t) = \Re(\underline{y}(t)) = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1} \ell \theta_0 \cos(\Omega_1 t) + \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2} \ell \theta_0 \cos(\Omega_2 t)$$

superposition de deux modes d'oscillations aux pulsations Ω_1 et Ω_2 (pendule + ressort)

2.3.3

$$\theta(t) = \frac{1}{\ell} \Re(\underline{z}(t)) = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1} \theta_0 \cos(\Omega_1 t) + \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2} \theta_0 \cos(\Omega_2 t)$$

en accord car pour les faibles mouvements $y_A(t) \approx 0 \iff y = \ell \theta$.

fin du corrigé

Conduction électrique sous champ magnétique

Le problème propose l'étude de quelques aspects de l'influence d'un champ magnétique sur la conduction électrique. Il est constitué de trois parties largement indépendantes entre elles. La partie 1 traite de l'effet HALL et de son application à la mesure d'un champ magnétique. La partie 2 étudie la modification de la loi d'OHM en présence d'un champ magnétique. Un résultat donné dans cette partie est utilisé dans la dernière partie pour étudier l'effet de magnéto-résistance dans la géométrie de CORBINO.

Dans tout le problème, le **poids** des particules chargées **sera négligé** devant les actions électriques et magnétiques.

Données utiles

- Nombre d'AVOGADRO : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$.
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.
- Masse volumique du cuivre : $\rho = 8,96 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$.
- Masse molaire du cuivre : $M = 63,5 \cdot 10^{-3} kg.mol^{-1}$.

1^{ère} partie : **Sonde à effet HALL**

On considère une plaque conductrice ou semi-conductrice allongée selon l'axe Ox, de largeur a et d'épaisseur b. Elle est parcourue par un courant d'intensité $I_0 > 0$ réparti uniformément sur toute la section droite de P (figure 1). La plaque P peut être soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$ parallèle à l'axe Oz. On négligera alors le champ magnétique créé par les charges de P en mouvement.

1.1 En l'absence de tout champ magnétique extérieur ($B = 0$), exprimer le vecteur courant électrique \vec{j} et tracer les lignes de courant correspondantes.

La plaque P est à présent soumise au champ \vec{B} dirigé dans le sens des z croissants ($B > 0$). On admet qu'en régime établi, les lignes de courant restent des droites parallèles à l'axe Ox.

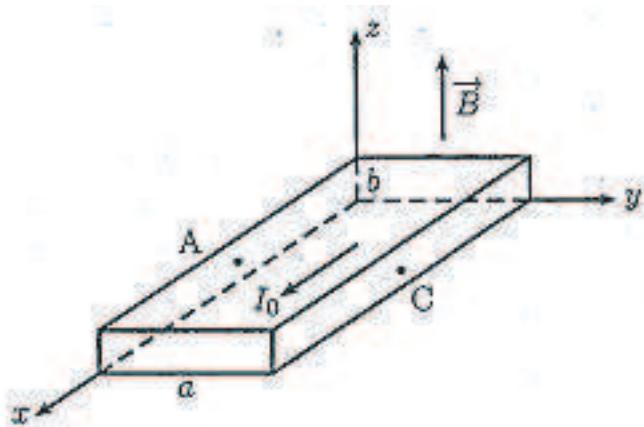


Fig 1 : Ruban conducteur dans un champ magnétostatique.

1.2 On considère un porteur mobile de charge q (algébrique) animé d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$.

1.2.1 Exprimer la force de LORENTZ \vec{f}_L agissant sur le porteur de charge. Quel est l'effet de cette force sur le porteur de charge ?

1.2.2 Montrer qu'il en résulte une accumulation de charges opposées sur certaines faces de la plaque que l'on précisera à l'aide d'un schéma. On distinguera, pour le sens du courant I_0 donné figure 1, les cas $q > 0$ et $q < 0$.

On se place dans la suite en régime établi.

1.2.3 En déduire qu'un champ électrique \vec{E}_h , dit de HALL, prend naissance au sein du matériau pour s'opposer à l'effet de \vec{f}_L . Donner l'expression de \vec{E}_h , d'abord en fonction de q et \vec{f}_L puis en fonction de v et B en précisant sa direction et son sens.

1.2.4 Montrer qu'en régime établi, une différence de potentiel $V_h = V_A - V_C$ prend naissance entre les faces A et C de la plaque et exprimer V_h en fonction de v , a et B . Quel est le signe de la tension V_h appelée tension de HALL ? Dépend-il de celui de q ?,

1.2.5 Exprimer la tension de HALL V_h en fonction de I_0 , B , b et de la constante de HALL $R_h = 1/nq$. n étant le nombre de porteurs de charge par unité de volume.

1.3 Applications

1.3.1 La plaque P est constituée de cuivre métallique. On note ρ et M respectivement la masse volumique et la masse molaire du cuivre. On admet que **chaque atome** de cuivre met en jeu **un seul électron** de conduction.

1.3.1.1 Donner l'expression de n en fonction de ρ , M et du nombre d'AVOGADRO N_A . En déduire la valeur numérique de n .

1.3.1.2 Donner la valeur numérique de la constante de HALL R_h correspondante.

1.3.1.3 Calculer la tension de HALL V_h pour un champ magnétique $B = 1 T$, une intensité de courant $I_0 = 1 A$ et une épaisseur $b = 0,1 mm$. Commenter ces valeurs numériques.

1.3.2 Les sondes de HALL utilisées au laboratoire pour mesurer les champs magnétiques sont constituées d'un matériau semi-conducteur.

1.3.2.1 Pourquoi utilise-t-on un matériau semi-conducteur ?

1.3.2.2 Que mesure-t-on dans la pratique ? Comment fait-on pour remonter à la valeur du champ magnétique ?

2^{ème} partie : Loi d'OHM anisotrope

On considère un matériau conducteur comportant n porteurs de charge par unité de volume. Tous les porteurs de charge ont la même charge q . Le matériau est soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur \vec{B} uniforme et permanent. Sous l'action d'un champ électrique permanent \vec{E} , le matériau devient alors siège d'un courant électrique caractérisé par le vecteur courant électrique \vec{j} . Pour tenir compte de l'action du matériau sur les porteurs de charge, on considère que ces derniers sont soumis à une force du type collisionnel \vec{f}_c donnée par :

$$\vec{f}_c = -\frac{m}{\tau} \vec{v} \quad (1)$$

où \vec{v} est la vitesse des porteurs de charge et m leur masse. τ est une constante caractéristique des collisions entre les porteurs et le réseau cristallin qui constitue le matériau. **Toute l'étude sera faite dans l'hypothèse d'un régime permanent.**

2.1 Quelle est la dimension de τ ?

2.2 Exprimer \vec{j} en fonction de n , q et \vec{v} .

2.3 En appliquant la deuxième loi de NEWTON en régime permanent, montrer que le vecteur courant électrique \vec{j} est relié aux champ électrique $j\vec{E}$ et magnétique \vec{B} par :

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + R_h \vec{B} \times \vec{j} \quad (2)$$

où σ et R_h sont respectivement la conductivité électrique et la constante de HALL que l'on exprimera en fonction de n , q , m et τ .

2.4 L'axe Oz est choisi pour être celui du champ magnétique : $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

2.4.1 En projetant convenablement la relation (2), exprimer les composantes j_x , j_y et j_z du vecteur courant électrique \vec{j} en fonction de E_x , E_y , E_z , τ , σ et $\omega_c = qB/m$.

2.4.2 En déduire que la loi d'OHM peut être généralisée en présence du champ magnétique \vec{B} selon :

$$\vec{j} = \bar{\sigma} \vec{E} \quad (3)$$

où $\bar{\sigma}$ est une matrice 3×3 appelée tenseur conductivité électrique et dont on exprimera les éléments en fonction de σ , τ et ω_c .

2.4.3 Pourquoi dit-on qu'en présence du champ magnétique, le milieu devient anisotrope vis-à-vis de la loi d'OHM ?

2.4.4 Le milieu reste-t-il linéaire en présence du champ magnétique ? Justifier.

2.4.5 Que devient la relation (3) en l'absence de champ magnétique ? Que retrouve-t-on ainsi ?

3^{ème} partie : Effet CORBINO

On considère un matériau conducteur ohmique de conductivité électrique σ contenu entre deux cylindres coaxiaux C_a et C_b parfaitement conducteurs, de rayons respectifs a et b ($a < b$). Les deux cylindres sont supposés être suffisamment longs pour permettre de négliger tout effet de bord. Le cylindre C_a est porté au potentiel électrostatique V_a et le cylindre C_b au potentiel électrostatique V_b (figure 2). Dans toute la suite, on supposera que $V_a > V_b$. On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) habituelles et on note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base locale de ce système de coordonnées.

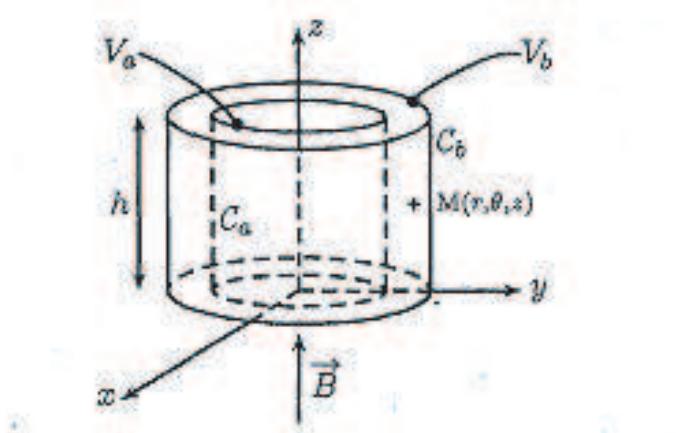


Fig 2 : Milieu conducteur entre deux cylindres.

3.1 On considère d'abord le cas d'un champ magnétique nul ($B = 0$).

3.1.1 Le conducteur compris entre les deux cylindres C_a et C_b est-il en équilibre électrostatique ?

3.1.2 Montrer que le champ électrique \vec{E} entre les deux cylindres est radial et s'écrit $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

3.1.3 En utilisant le théorème de GAUSS, exprimer $E(r)$ entre les deux cylindres C_a et C_b en fonction de la densité surfacique de charge ρ_a^s de C_a , a, r et ε_0 .

3.1.4 Que vaut le champ électrique E_a en $r = a$.

3.1.5 Exprimer ρ_a^s en fonction de ε_0 , a, b et $V_{ab} = V_a - V_b$.

3.1.6 En déduire l'expression de \vec{E} en tout point de l'espace en fonction de V_{ab} , r, a et b et tracer l'évolution de $E(r)$ en fonction de r.

3.1.7 Déterminer la valeur E_b de $E(r)$ en $r = b$ et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de la densité surfacique de charge ρ_b^s de C_b et ε_0 . On admettra que les deux surfaces C_a et C_b sont en état d'influence totale.

3.1.8 Tracer les lignes de champ de \vec{E} . Quelle est la forme des lignes de courant électrique ?

3.1.9 Exprimer l'intensité du courant électrique I_0 qui traverse une surface cylindrique C_h coaxiale à C_a et C_b et de hauteur h placée entre les deux cylindres en fonction de σ , h, a, b et V_{ab} .

3.1.10 En déduire l'expression de la résistance électrique R_0 de la tranche de hauteur h du milieu conducteur. Commenter les variations de R_0 en fonction de h et du rapport b/a.

3.2 Le milieu est soumis à présent à l'action d'un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On admettra que les lignes de courant restent planes en présence de \vec{B} .

3.2.1 En utilisant la relation vectorielle (2) montrer à l'aide d'une construction graphique, que les lignes de courant, font un angle θ_h avec les lignes de champ électrique \vec{E} .

3.2.2 Exprimer $\tan \theta_h$ en fonction de σ , R_h et B.

3.2.3 Montrer qu'en coordonnées cylindriques, la ligne de courant passant par le point de coordonnées (r_0, θ_0, z_0) peut s'écrire sous la forme :

$$r(\theta) = r_0 \exp[f(\theta)] \quad (4)$$

où $f(\theta)$ est une fonction analytique de θ à déterminer. Que devient la relation (4) en champ nul ($B = 0$) ? Commenter le résultat obtenu.

3.2.4 On note \vec{j} le vecteur courant électrique en présence du champ magnétique \vec{B} et j_0 le module du vecteur courant électrique en l'absence du champ magnétique.

3.2.4.1 Exprimer le module j de \vec{j} en fonction de j_0 , σ , R_h et B.

3.2.4.2 En déduire l'expression de la composante radiale j_r de \vec{j} en fonction des mêmes paramètres.

3.2.5 On note I l'intensité du courant qui traverse une surface cylindrique C_h coaxiale à C_a et C_b et de hauteur h placée entre les deux cylindres.

3.2.5.1 Exprimer I en fonction de σ , R_h , B, et I_0 intensité du courant électrique en l'absence du champ magnétique.

3.2.5.2 En déduire l'expression de la résistance R de la tranche de hauteur h du milieu conducteur en présence du champ magnétique \vec{B} en fonction de σ , B, R_h et R_0 .

3.2.5.3 Exprimer la variation relative de résistance $\delta = \frac{R-R_0}{R_0}$ en fonction de σ , R_h et B. Commenter le résultat obtenu.

3.2.5.4 Comment peut-on expliquer qualitativement l'effet de magnétorésistance exprimé par δ ?

3.2.5.5 Déterminer la valeur numérique de la variation relative de résistance δ sous un champ magnétique $B = 1 T$ dans le cas du cuivre pour lequel : $R_h \approx -0,7 \cdot 10^{-10} m^3 \cdot C^{-1}$ et $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.

3.2.5.6 Répondre à la même question dans le cas d'un semi-conducteur comme l'arséniure d'indium InAs pour lequel : $R_h \approx +0,7 \text{ } m^3.C^{-1}$ et $\sigma \approx 1\Omega^{-1}.m^{-1}$. Commenter en comparant les valeurs obtenues.

fin de l'énoncé

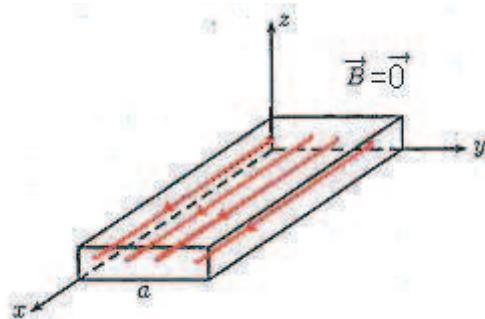
Conduction électrique sous champ magnétique

1^{ère} partie : Sonde à effet HALL

1.1 on a

$$I_0 = \int \int_{ab} \vec{j} \cdot d\vec{S} \implies \vec{j} = \frac{I_0}{ab} \vec{u}_x$$

, les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe Ox :



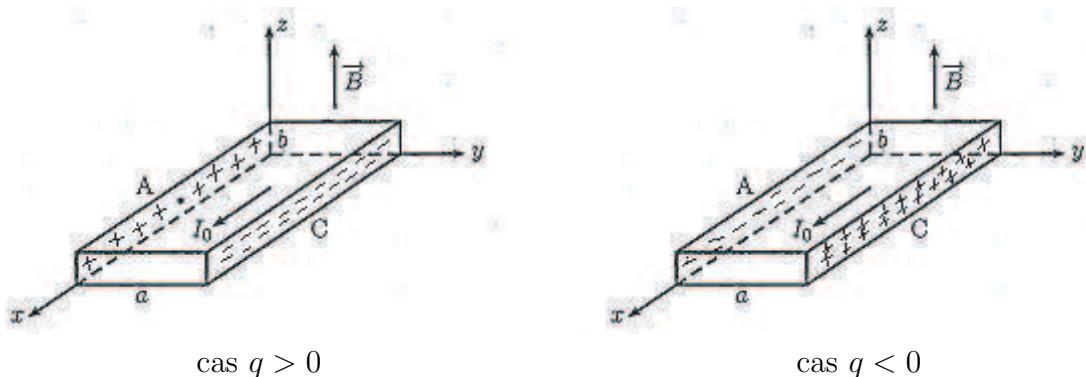
1.2 $B > 0$

1.2.1 $\vec{f}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\vec{u}_y$, une déviation latérale selon Oy.

1.2.2 I_0 étant positif alors :

si $q > 0$ donc $v > 0$ càd $\vec{f}_L \cdot \vec{u}_y < 0$ la face infranchissable $y = 0$ sera chargée positivement et la face infranchissable $y = a$ chargée négativement (par neutralité)

si $q < 0$ donc $v < 0$ càd $\vec{f}_L \cdot \vec{u}_y < 0$ la face infranchissable $y = 0$ sera chargée négativement et la face infranchissable $y = a$ sera chargée positivement (par neutralité)



1.2.3 les charges accumulées en surface créent un champ électrique s'opposant à l'effet de \vec{f}_L tel que en équilibre :

$$q\vec{E}_h + \vec{f}_L = \vec{0} \implies \vec{E}_h = -\frac{\vec{f}_L}{q} = vB\vec{u}_y$$

direction : Oy , sens : des charges positives vers les charges négatives

1.2.4 en régime établit statique

$$V_h = V_A - V_C = \int_C^A -\vec{E}_h \cdot d\vec{\ell} = \int_a^0 -vB\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = vBa$$

le signe de V_h est celui de v , donc aussi celui de q

1.2.5 on a $\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{I_0}{ab}\vec{u}_x$ donc $v = \frac{1}{nq}\frac{I_0}{ab}$ soit :

$$V_h = R_h \frac{I_0 B}{b}$$

1.3 Applications

1.3.1

$$\text{1.3.1.1 } n = \frac{\text{nombre d'e}^-}{\text{volume}} = \frac{1 \times \text{nombre de Cu}}{\text{volume}} = \frac{\rho N_A}{M} = 8.49 \times 10^{28} m^{-3}$$

Rqe : la masse volumique est en $kg.m^{-3}$

$$\text{1.3.1.2 } R_h = \frac{1}{nq} = \frac{1}{-ne} = -7.36 \times 10^{-11} m^3.C^{-1}$$

1.3.1.3 la tension de HALL $V_h = -0.735 \mu V$ est très faible, pour un fort champ magnétique $B = 1 T$, une forte intensité de courant $I_0 = 1 A$ et une faible épaisseur $b = 0,1 mm$.

1.3.2

1.3.2.1 $n(\text{semi-conducteur}) \ll n(\text{métaux})$

1.3.2.2 on mesure la d.d.p de HALL à l'aide d'un voltmètre, or $B = \frac{b}{I_0 R_h} V_h \propto V_h$, par étalonnage on détermine la constante de proportionnalité

2^{ème} partie :
Loi d'OHM anisotrope

$$\text{2.1 } [\tau] = \frac{[mv]}{[f]} = \frac{[kgm/s]}{[kgm/s^2]} = s, \tau \text{ est un temps}$$

$$\text{2.2 } \vec{j} = \rho_m \vec{v} = nq\vec{v}$$

$$\text{2.3 le PFD appliqué à la charge q dans le référentiel Galiléen s'écrit } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} + q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En régime permanent le terme de gauche est nul, tenant compte de 2.2 il vient :

$$\vec{E} = \frac{m}{\tau nq^2} \vec{j} + \frac{1}{nq} \vec{B} \times \vec{j} \quad (2)$$

$$\text{où } \sigma = \frac{\tau nq^2}{m} > 0 \text{ et } R_h = \frac{1}{nq}$$

$$\text{2.4 } \vec{B} = B\vec{u}_z.$$

2.4.1 la projection de la relation (2) donne :

$$\begin{cases} E_x = \frac{j_x}{\sigma} - BR_h j_y \\ E_y = \frac{j_y}{\sigma} - BR_h j_x \\ E_z = \frac{j_z}{\sigma} \end{cases}$$

par remplacement il vient :

$$\begin{cases} j_x = \frac{\sigma}{1+(\tau\omega_c)^2} (E_x + \tau\omega_c E_y) \\ j_y = \frac{\sigma}{1+(\tau\omega_c)^2} (-\tau\omega_c E_x + E_y) \\ j_z = \sigma E_z \end{cases}$$

2.4.2

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1+(\tau\omega_c)^2} & \frac{\tau\omega_c\sigma}{1+(\tau\omega_c)^2} & 0 \\ \frac{-\tau\omega_c\sigma}{1+(\tau\omega_c)^2} & \frac{\sigma}{1+(\tau\omega_c)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

2.4.3 la conductivité des trois directions de l'espace est différente , le milieu est anisotrope !
ou dire que \vec{E} et \vec{j} ne sont pas colinéaire

2.4.4 oui, le milieu est linéaire car les éléments de la matrice sont indépendant de \vec{E}

2.4.5 si $\vec{B} = \vec{0} \implies \omega_c = 0 \implies \vec{j} = \sigma \bar{\bar{\sigma}} \vec{E} = \sigma \vec{E}$

On retrouve la loi d'Ohm isotrope !

3^{eme} partie : Effet CORBINO

3.1

3.1.1 non, car le potentiel n'est pas uniforme ($V_a > V_b$), il sera siège d'un courant électrique

3.1.2 les équipotentielle sont des cylindres $r=cte \implies V=V(r) \implies \vec{E} = -\vec{\nabla}V(r) = E(r)\vec{u}_r$, les invariances sont respectées

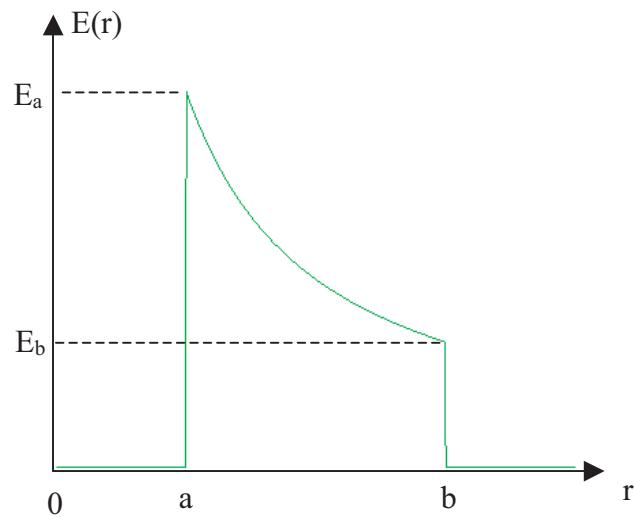
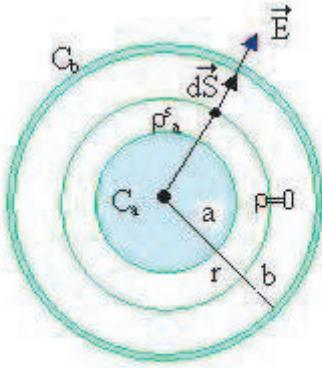
3.1.3 le théorème de GAUSS s'écrit :

$$\oint_{r=cte} E(r)\vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

entre les deux cylindres C_a et C_b la densité de charge volumique est nulle en effet la conservation de la charge en régime permanent , tenant compte de la loi d'Ohm :

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0$$

d'après l'équation de Maxwell-Gauss on obtient $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 0$



le théorème de Gauss devient pour $a < r < b$:

$$E(r)2\pi rh = \frac{\rho_a^s 2\pi ah}{\varepsilon_0}$$

soit :

$$E(r) = \frac{\rho_a^s a}{\varepsilon_0 r}$$

3.1.4

$$E_a = E(r = a^+) = \frac{\rho_a^s}{\varepsilon_0}$$

Rqe : on retrouve la relation de passage en $r=a$ (i.e le champ à l'intérieur du **conducteur parfait** C_a est nul $E(r = a^-) = 0$)

3.1.5

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_b^a -Edr = \frac{\rho_a^s a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \implies \rho_a^s = \frac{\varepsilon_0 V_{ab}}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} > 0$$

3.1.6 il vient

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ \frac{V_{ab}}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{u}_r & a < r < b \\ \vec{0} & r > b \end{cases}$$

3.1.7

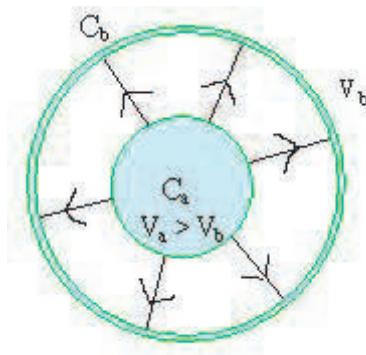
$$E_b = E(r = b^-) = \frac{\rho_a^s a}{b \varepsilon_0}$$

dans le cas d'influence totale entre C_a et C_b on aura $Q_a = -Q_b \implies \rho_a^s 2\pi ah = -\rho_b^s 2\pi bh$
soit

$$E_b = -\frac{\rho_b^s}{\varepsilon_0} > 0$$

Rqe : on retrouve la relation de passage en $r=b$ (i.e le champ à l'intérieur du conducteur parfait C_b est nul $E(r = b^+) = 0$)

3.1.8 la loi d'Ohm en absence de champ magnétique $\vec{j} = \sigma \vec{E} \implies$ les lignes de courants sont confondues avec les lignes de champ radiales se dirigeant vers les potentiels décroissant



3.1.9 l'intensité du courant électrique

$$I_0 = \int \int_{r=cte} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int \int \sigma \frac{V_{ab}}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \frac{\sigma V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot 2\pi h$$

3.1.10

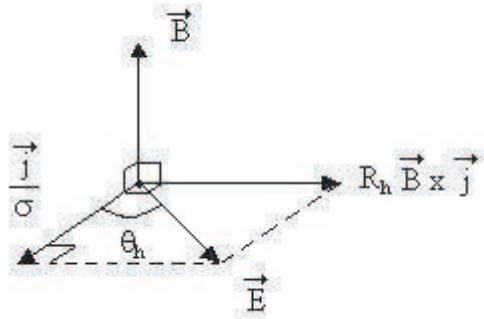
$$R_0 = \frac{V_{ab}}{I_0} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\sigma h}$$

si $h \nearrow R \searrow$ l'association des tranches est parallèle

si $\frac{b}{a} \nearrow R \nearrow$ l'association des tranches est série

3.2 $\vec{B} = B \vec{u}_z$

3.2.1 la relation (2) se représente :



$$\text{3.2.2 } \tan \theta_h = \frac{|\vec{B} \times \vec{j} R_h|}{\frac{|j|}{\sigma}} = \sigma R_h B$$

3.2.3 la ligne de courant est donnée par :

$$\vec{j} \times d\vec{\ell} = \vec{0} \implies j_r r d\theta = j_\theta dr$$

d'autre par la relation (2) projetée sur \vec{u}_θ donne :

$$0 = \frac{1}{\sigma} j_\theta + B j_r R_h$$

il vient donc

$$-d\theta = R_h B \sigma \frac{dr}{r} \quad (*)$$

qui s'intègre en

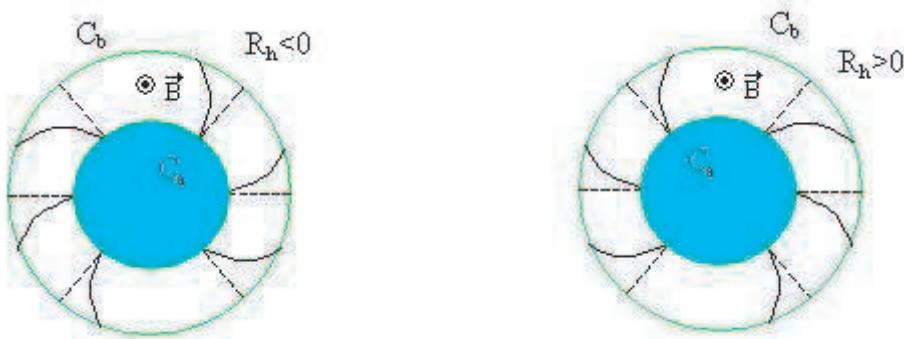
$$r(\theta) = r_0 \exp\left(\frac{\theta_0 - \theta}{R_h B \sigma}\right)$$

partie :

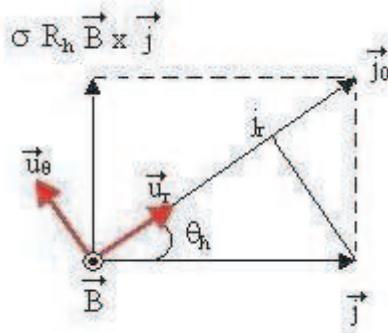
d'une spirale exponentielle

si $B = 0$ alors (*) donne $d\theta = 0$ soit $\theta \equiv \theta_0$, la ligne de courant est un segment ($a < r < b$) radial et coïncide avec celle du champ électrique !

Rqe : voici la représentation des lignes de courant en présence du champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$



3.2.4 :



3.2.4.1 la relation (2) s'écrit $\vec{j}_0 = \vec{j} + \sigma R_h \vec{B} \times \vec{j}$

sachant que les deux termes de droites sont orthogonales et le module s'écrit :

$$j_0^2 = j^2 + (\sigma R_h B)^2 j^2 \implies j = \frac{j_0}{\sqrt{1 + (\sigma R_h B)^2}} = j_0 \cos \theta_h$$

3.2.4.2

$$j_r = j \cos \theta_h = \frac{j_0}{1 + (\sigma R_h B)^2}$$

3.2.5

3.2.5.1 l'intensité du courant électrique

$$I = \int \int_{r=cte} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int \int_{r=cte} j_r \cdot dS = \frac{j_0 2\pi r h}{1 + (\sigma R_h B)^2} = \frac{I_0}{1 + (\sigma R_h B)^2}$$

3.2.5.2

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{V_{ab}}{I_0} [1 + (\sigma R_h B)^2] = R_0 [1 + (\sigma R_h B)^2]$$

3.2.5.3 la variation relative de résistance s'écrit :

$$\delta = \frac{R - R_0}{R_0} = (\sigma R_h B)^2 > 0$$

la résistance croît avec le champ magnétique en B^2 c'est l'effet magnéto-résistance

3.2.5.4 les lignes de courant sont allongées (spirales) \implies plus de frottement par le porteur de charge.
ou dire que les lignes de courants sont déviées \implies moins de courant qui va de C_a à C_b , la ddp étant la même.

3.2.5.5 $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$

3.2.5.6 $\delta = 0.5$ (ou bien 50%)

l'effet magnéto-résistance se manifeste nettement mieux dans les semi-conducteurs que dans les conducteurs métalliques !

fin du corrigé

Quelques manifestations des transferts thermiques

Le présent problème propose d'aborder quelques applications des transferts thermiques. La plus grande importance sera accordée au sens physique des résultats obtenus. Le problème est composé de trois parties indépendantes entre elles.

1^{ère} partie : Thermodiffusion dans une barre

On considère une barre (figure 1) solide, homogène et isotrope, indéformable, de longueur L et de section droite circulaire de rayon a très inférieur à L . La barre a une capacité thermique massique c et on note μ la masse volumique du matériau qui la constitue. Pour isoler la barre latéralement, on l'entoure d'une enveloppe athermane non représentée sur la figure. On peut donc négliger toute fuite thermique par la surface latérale de sorte que la température est uniforme sur une section droite de la barre et ne dépend donc que de son abscisse x et du temps t .

La barre est siège d'un phénomène de diffusion thermique ou conduction décrit par le vecteur courant thermique diffusif $\vec{j}_Q(M, t) = j(x, t) \vec{u}_x$. \vec{u}_x est le vecteur unitaire de l'axe Ox .

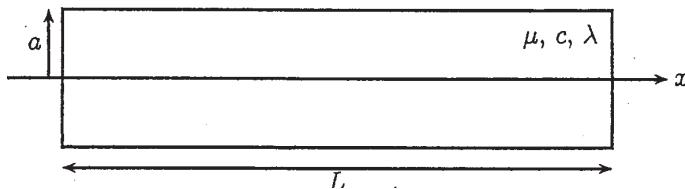


Fig 1 : Barre solide calorifugée latéralement

1.1 Équations générales

- 1.1.1** Rappeler la signification physique de $\vec{j}_Q(M, t)$ et déterminer sa dimension physique ainsi que son unité dans le système international des unités (S.I.).
- 1.1.2** En faisant un bilan thermique sur le tronçon de la barre compris entre les sections x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$, montrer que les variations temporelles de l'énergie interne volumique u de la barre sont reliées aux variations spatiales du vecteur courant thermique diffusif par :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$$

- 1.1.3** Rappeler la loi de FOURIER et déterminer l'unité S.I. de la conductivité thermique λ du matériau constituant la barre solide. En déduire l'expression de $j(x, t)$.
- 1.1.4** Exprimer l'énergie interne volumique $u(x, t)$ en fonction de c , $T(t)$, μ et d'une éventuelle constante additive μ_0 .
- 1.1.5** En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$.

- 1.1.6** Montrer que l'équation précédente, dite équation de la chaleur, peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

et donner l'expression du coefficient de diffusion thermique D en fonction de μ , c et λ . Donner la dimension de D ainsi que son unité S.I.

1.2 Régime stationnaire

Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la barre sont mises en contact avec deux sources isothermes de chaleur de températures respectives $T_1 = T(0)$ et $T_2 = T(L)$. Si l'on attend suffisamment longtemps, un régime stationnaire s'établit.

1.2.1 De quelle variable dépend la température T dans un tel régime ? En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.

1.2.2 Déterminer l'expression de $T(x)$ en fonction de T_1 , T_2 , L et x . Représenter graphiquement $T(x)$.

1.2.3 En déduire l'expression du vecteur courant thermique diffusif \vec{j}_Q dans ce cas. Commenter le résultat obtenu.

1.3 Régime transitoire

On s'intéresse au régime transitoire qui précède le régime stationnaire étudié au §1.2. La figure 2 donne les profils de température $T(x, t)$ au sein de la barre en fonction de x à différents instants t . Initialement, tous les points de la barre sont à la même température T_0 .

1.3.1 Par lecture directe du graphique, déduire les valeurs des températures T_1 et T_2 des deux extrémités de la barre ainsi que la température initiale T_0 de la barre.

1.3.2 Dans une autre expérience, la barre a une température initiale uniforme $\theta_0 = 20^\circ C$ égale à la température ambiante. L'extrémité gauche de la barre ($x = 0$) est brusquement mise, à l'instant $t = 0$, en contact avec une source isotherme de chaleur de température constante $\theta_1 = 100^\circ C$ tandis que l'autre extrémité ($x = L$) est maintenue à la température ambiante $\theta_2 = 20^\circ C$.

1.3.2.1 Proposer un moyen pratique pour maintenir l'extrémité droite de la barre ($x = L$) à la température ambiante.

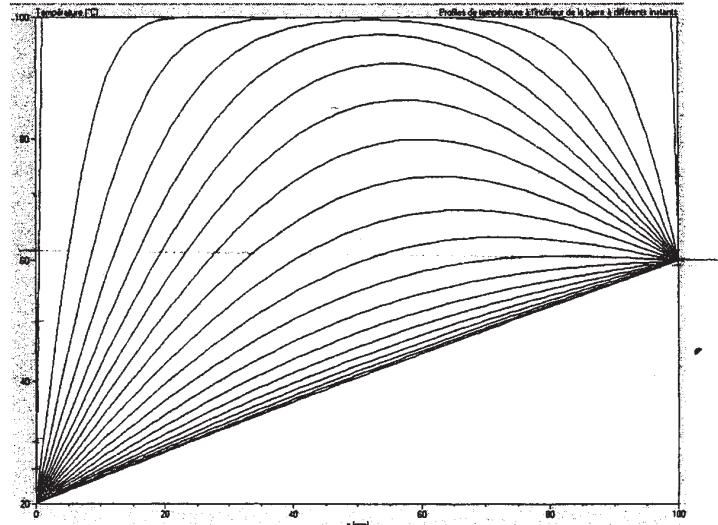


Fig 2 : Profils de température à différents instants au sein d'une barre de longueur $L = 1 \text{ m}$

1.3.2.2 Tracer qualitativement les profils de température au sein de la barre à différents instants montrant l'évolution de la température des différents points de la barre depuis l'instant initial jusqu'à l'établissement du régime stationnaire.

2^{ème} partie :
Contacts thermiques

On cherche à expliquer, à l'aide de deux modèles différents, pourquoi un observateur touchant une table en bois et une table en acier à la même température a la sensation que le bois est plus chaud que l'acier.

2.1 Modèle statique

Dans le cadre du modèle statique, on considère deux cylindres C_a et C_b de même section S , de même axe Ox , de conductivités thermiques respectives λ_1 et λ_2 de longueurs respectives L_1 et L_2 . Les deux cylindres sont mis bout à bout, le contact se faisant en $x = 0$ (figure 3). On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures respectives T_1 et T_2 . On suppose que le régime stationnaire est établi et on note T_0 la température en $x = 0$.

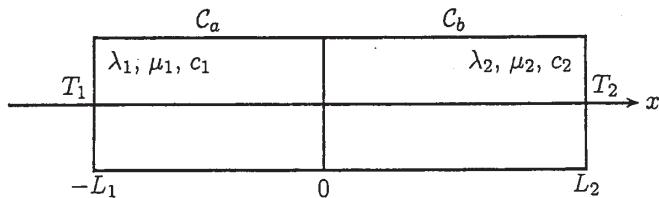


Fig 3 : Deux cylindres en contact en $x = 0$

2.1.1 Exprimer la température $T_i(x)$, $i = a, b$, dans chacun des deux cylindres C_a et C_b , en fonction de x , T_0 et respectivement (T_1, L_1) et (T_2, L_2) .

2.1.2 Exprimer le vecteur courant thermique diffusif $\vec{j}_Q(x)$ dans chacun des deux cylindres.

2.1.3 En déduire la température T_0 de l'interface $x = 0$ des deux cylindres en fonction de T_1 , T_2 , L_1 , L_2 , λ_1 et λ_2 .

2.1.4 La température de la main est $\theta_1 = 37^\circ\text{C}$. Calculer T_0 pour un contact main-bois puis T'_0 pour un contact main-acier dans les deux cas suivants et conclure :

$$\theta_2 = 100^\circ\text{C} \text{ (sensation de chaud)};$$

$$\theta_2 = 10^\circ\text{C} \text{ (sensation de froid)}.$$

On prendra $L_1 = L_2$ et on utilisera les valeurs suivantes des conductivités thermiques :

corps	main	bois	acier
$\lambda(\text{WK}^{-1}\text{m}^{-1})$	10	1	100

Commenter les résultats obtenus.

2.2 Modèle dynamique

On considère que les deux cylindres sont illimités et emboîtés en $x = 0$. Le cylindre C_a s'étend de $-\infty$ à $x = 0$ et le cylindre C_b de $x = 0$ à $+\infty$. Initialement ($t = 0$) le cylindre C_a est à la température T_1 uniforme et le cylindre C_b à la température T_2 uniforme également. Aux instants $t > 0$, les extrémités des cylindres sont maintenues à températures constantes : $T(-\infty, t) = T_1$ et $T(+\infty, t) = T_2$.

On note λ_1 , c_1 et μ_1 respectivement la conductivité thermique, la capacité thermique masse et la masse volumique pour le cylindre C_a . Les mêmes grandeurs physiques sont notées respectivement λ_2 , c_2 et μ_2 pour le cylindre C_b .

2.2.1 Dans chacun des deux cylindres, la température $T(x, t)$ est solution de l'équation de la chaleur (1) où $D = \lambda/\mu c$. On peut montrer, qu'en fait, le champ de température ne dépend que de la variable composée :

$$u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

L'équation de la chaleur devient alors (On ne demande pas d'effectuer ce calcul dans le cadre de cette étude) :

$$\frac{d^2T(u)}{du^2} + 2u \frac{dT(u)}{du} = 0$$

Montrer que dans chacun des deux cylindres le champ des températures $T(x, t)$ peut se mettre sous la forme :

$$T(u) = A + B \operatorname{erf}(u)$$

où A et B sont deux constantes et erf est la fonction erreur définie par :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp -v^2 dv$$

On donne : $\operatorname{erf}(+\infty) = -\operatorname{erf}(-\infty) = 1$.

2.2.2 En utilisant les conditions aux limites spatiales adéquates, déterminer les expressions (A_1, B_1) pour le cylindre C_a et (A_2, B_2) pour le cylindre C_b des constantes A et B en fonction de T_0 , T_1 et T_2 .

2.2.3 Montrer que dans le cylindre C_a , l'expression du vecteur courant thermique diffusif peut se mettre sous la forme :

$$\vec{j}_Q^{(a)}(x, t) = -(T_0 - T_1) \frac{E_1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1 t}\right) \vec{u}_x$$

et donner l'expression de l'effusivité E_1 en fonction de λ_1 , μ_1 et c_1 . En quelle unité exprime-t-on E_1 dans le S.I. ? \vec{u}_x étant le vecteur unitaire de l'axe Ox .

2.2.4 Déterminer de même, l'expression du vecteur courant thermique diffusif dans le cylindre C_b et donner l'expression de E_2 .

2.2.5 En déduire l'expression de la température d'interface T_0 en fonction de T_1 , T_2 , E_1 et E_2 . Comparer avec le résultat obtenu dans le cadre du modèle statique.

2.2.6 Répondre aux questions du §2.1.4. dans le cadre du modèle dynamique et conclure. On donne :

corps	main	bois	acier
$E(10^3 \times S.I.)$	1.8	0.4	14

2.3 Pour disposer d'eau fraîche à boire, deux bouteilles de 1 litre chacune sont placées dans un frigo où règne une température de 5°C environ. L'une des deux bouteilles est en verre, l'autre en plastique.

Au moment de se servir au frigo, que l'on suppose en équilibre thermodynamique, on se rend compte qu'au toucher, la bouteille en verre est plus froide que la bouteille en plastique.

L'eau contenue dans la bouteille en verre est-elle plus fraîche ? Expliquer.

3^{ème} partie : Analogies thermoélectriques

3.1 Résistances thermiques

L'étude de la partie 1 a montré qu'en régime stationnaire, la température $T(x)$ au sein d'un milieu unidimensionnel de longueur L et dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes $T_0 = T(0)$ et $T_L = T(L)$ est donnée par la loi linéaire suivante :

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{x}{L}$$

On note Φ_{th}^c le flux thermique conductif à travers la section droite S perpendiculaire à Ox .

3.1.1 Déterminer l'expression de Φ_{th}^c et montrer que l'on peut écrire $T(0) - T(L) = R_{th}^c \Phi_{th}^c$ où R_{th}^c est appelée résistance thermique de conduction que l'on exprimera en fonction de λ , L et S .

3.1.2 Une analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs thermiques peut être dégagée sur la base des lois de FOURIER et d'OHM.

3.1.2.1 Donner la loi d'OHM locale et rappeler la signification physique des différentes grandeurs qui y figurent. Quelles sont ses conditions de validité.

3.1.2.2 En déduire l'analogie qui existe entre les grandeurs de conduction thermique et de conduction électrique. On précisera en particulier les équivalents électriques de Φ_{th}^c et $T(0) - T(L)$.

3.1.3 Quel est l'équivalent en terme de conduction thermique, de deux résistors montés en série puis celui de deux résistors montés en parallèle ? On donnera dans chaque cas l'expression de la résistance thermique équivalente.

3.1.4 Lorsqu'un corps solide à la température T est plongé dans un fluide ambiant de température T_a , un transfert conducto-convectif a lieu au niveau de la surface du corps solide. Dans le cadre de la loi de NEWTON, un tel transfert peut être caractérisé par une résistance thermique de convection R_{th}^{cc} . En déduire l'expression du flux thermique conducto-convectif Φ_{th}^{cc} compté positivement dans le sens sortant du corps. On exprimera Φ_{th}^{cc} en fonction de R_{th}^{cc} , T et T_a .

3.1.5 On considère à présent un corps solide à la température T placé dans un environnement ambiant de température T_a . On s'intéresse aux échanges thermiques par rayonnement.

3.1.5.1 Écrire la loi de STEPHAN pour le corps solide et pour l'environnement ambiant. On notera σ la constante de STEPHAN.

3.1.5.2 En déduire l'expression du flux thermique radiatif total Φ_{th}^r échangé par le corps solide avec le milieu ambiant, compté positivement dans le sens sortant du corps solide, en fonction de σ , T , T_a et la surface S du corps solide.

3.1.5.3 Montrer que dans le cas d'un faible écart de température entre le corps solide et le milieu ambiant, l'échange thermique par rayonnement peut être décrit par une résistance thermique de rayonnement R_{th}^r que l'on exprimera en fonction de σ , T_a et S . On rappelle l'identité remarquable : $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

3.1.5.4 Calculer numériquement R_{th}^r pour un corps solide de surface $S = 1,5 \text{ m}^2$ placée dans l'air ambiant à la température $T_a = 298 \text{ K}$. On donne la constante de STEPHAN $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

3.2 Bilan thermique du corps humain

L'être humain, ainsi que d'autres animaux, a la capacité de maintenir constante la température interne de son corps ; c'est l'homéothermie. On se propose dans cette section d'étudier le maintien de l'homéothermie chez un individu debout, nu et au repos tout en étant exposé à la température confortable $\theta_a = 23^\circ\text{C}$ du milieu ambiant, supposé être de l'air ambiant. La surface du corps humain $S = 1,5 \text{ m}^2$ sera supposée isotherme de température $\theta = 33^\circ\text{C}$.

Les échanges au niveau de la surface du corps humain ont lieu selon les trois mécanismes suivants :

- transfert conducto-convectif caractérisé par une résistance thermique $R_{th}^{cc} = 167 \times 10^{-3} \text{ KW}^{-1}$;
- transfert radiatif caractérisé par une résistance thermique $R_{th}^r = 133 \times 10^{-3} \text{ KW}^{-1}$;
- évaporation thermique d'une masse moyenne $m_e = 0,3 \text{ kg/jour}$ d'eau par la peau et les voies respiratoires.

La production métabolique journalière ($PMJ = 13 \text{ MJ/jour}$) permet de compenser ces pertes.

3.2.1 On se place tout d'abord en régime stationnaire.

3.2.1.1 Calculer numériquement la puissance métabolique P_M développée par le corps humain, le flux thermique Φ_{th}^r émis par rayonnement ainsi que le flux thermique Φ_{th}^{cc} émis par convection.

3.2.1.2 Calculer numériquement la puissance P_e nécessaire pour entretenir l'évaporation thermique de l'eau sachant que la chaleur latente de changement d'état de l'eau vaut $L = 2,4 \text{ MJ.kg}^{-1}$.

3.2.1.3 En déduire, à l'aide d'un bilan, la puissance résiduelle P_s . À quoi sert-elle ?

3.2.1.4 Donner l'équation algébrique reliant les différentes grandeurs électriques du circuit représenté figure 4 dans le cas où les courants débités par les deux générateurs de tension sont négligeables.

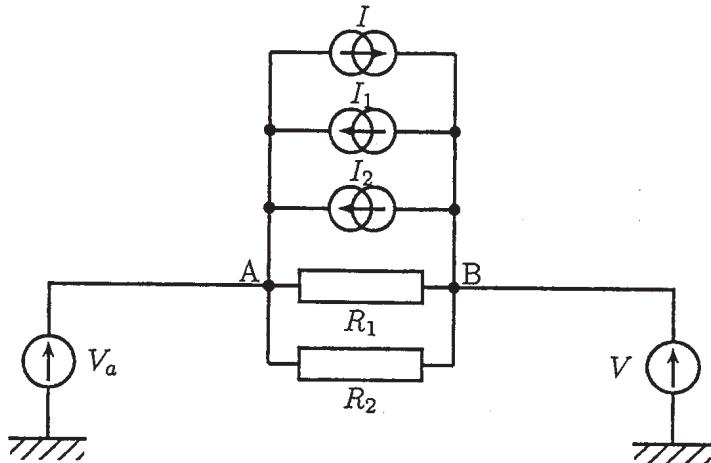


Fig 4 : Circuit électrique

3.2.1.5 En déduire, en s'inspirant de l'analogie thermoélectrique développée au §3.1.2, que le circuit précédent permet de traduire le bilan thermique du corps humain. Pour obtenir le circuit thermique équivalent, on recopiera le circuit de la figure 4 et on remplacera les grandeurs électriques par leurs équivalents thermiques convenables.

3.2.1.6 Déterminer, pour le circuit thermique ainsi obtenu, la représentation équivalente de NOR-TON ainsi que celle de THÉVENIN du réseau électrique vu des points A et B, et excluant les équivalents thermiques des générateurs de tension V_a et V . Vérifier, dans chaque cas, que l'on retrouve bien le bilan thermique établi auparavant.

3.2.2 On se place à présent en régime quasi stationnaire et on note $C_s = C/S$ la capacité thermique surfacique du corps humain. On suppose que la température $T(t)$ de la surface S du corps humain est toujours uniforme.

3.2.2.1 En faisant un bilan énergétique entre les instants t et $t + dt$, montrer que la température $T(t)$ de la surface du corps humain est solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_0}{\tau} = \Lambda \quad (2)$$

On exprimera les deux constantes τ et Λ en fonction de C , R_{th}^{cc} , R_{th}^r , P_m , P_e et P_s .

3.2.2.2 Comment retrouve-t-on le cas stationnaire à partir l'équation (2) ? Les résultats sont ils compatibles avec ceux du §3.2.1 ?

3.2.2.3 Dessiner le schéma du circuit thermique traduisant le bilan thermique du corps humain en tenant compte de sa capacité calorifique. Pour cela, on écrira le bilan thermique sous une forme adéquate permettant de justifier un tel schéma équivalent.

3.2.2.4 Résoudre l'équation différentielle (2) pour déterminer l'évolution de la température $T(t)$ de la surface du corps humain au cours du temps t . On exprimera le résultat en fonction de t , T_a , Λ , τ et $T(0)$ température de la surface du corps humain à l'instant initial $t = 0$.

3.2.2.5 Déterminer l'expression de la température d'équilibre T_e de la surface du corps humain en fonction de T_a , Λ et τ . Calculer numériquement T_e .

3.2.2.6 Représenter graphiquement $T(t)$ en distinguant les trois cas :

- a) $T(0) > T_e$;
- b) $T(0) = T_e$;
- c) $T(0) < T_e$.

À quelle situation physique correspond chacun de ces trois cas ? Montrer comment, le cas échéant, on peut déterminer τ à partir des graphiques obtenus.

3.2.2.7 Sachant que dans l'eau, un corps humain se refroidit environ 25 fois plus rapidement que dans l'air calme, estimer la résistance convective $R_{th,eau}^{cc}$ en admettant que la résistance thermique de rayonnement n'est pas modifiée. Commenter.

3.3 Effet des vêtements sur le bilan thermique du corps

On revient en régime stationnaire et on s'intéresse à l'effet des vêtements sur le bilan des échanges thermiques entre un corps humain et le milieu ambiant.

La surface d'un corps humain habillé est recouverte à 80 %. **Dans toute la suite**, on néglige la convection et le rayonnement à travers les vêtements mais on tient compte de la conduction thermique à travers ces vêtements.

3.3.1 Comment faut-il modifier les valeurs des résistances thermiques R_{th}^{cc} et R_{th}^r ? On notera $R_{th}^{cc,v}$ et $R_{th}^{r,v}$ les nouvelles résistances. Calculer numériquement $R_{th}^{cc,v}$ et $R_{th}^{r,v}$.

3.3.2 Montrer que pour tenir compte de l'effet des vêtements, il faut aussi introduire, dans le schéma électrique équivalent du §3.2.1.5, une résistance thermique supplémentaire $R_{th}^{c,v}$.

3.3.3 Donner le nouveau schéma du circuit thermique.

3.3.4 En déduire la valeur de la résistance thermique des vêtements $R_{th}^{c,v}$ conduisant à la même puissance du métabolisme et à la même température $\theta = 33^\circ C$, dans une pièce à la température $\theta'_a = 20^\circ C$.

fin de l'énoncé

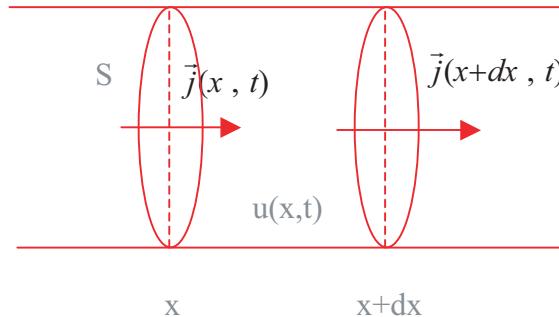
Quelques manifestations des transferts thermiques

1^{ère} partie : Thermodiffusion dans une barre

1.1 Équations générales

1.1.1 $\vec{j}_Q(M, t)$ est un flux surfacique thermique de conduction , homogène à $\frac{\text{masse}}{\text{temp}^3}$, s'exprimant en $W.m^{-2}$

1.1.2 :



le 1^{er} principe appliqué à la tranche rigide $\delta W = 0$ s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_{entrant}(x, t) - \Phi_{sortant}(x + dx, t) = -S[j(x + dx, t) - j(x, t)]$$

or : $U = u(x, t)(Sdx)$ d'où :

$$Sdx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -S \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx$$

soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

1.1.3 la loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{grad}T$ donc λ s'exprime en $WK^{-1}m^{-1}$

soit :

$$j(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

1.1.4 on a :

$$dU = Sdx du = c dm dT = c \mu Sdx dT$$

donc

$$u = u_0 + c \mu T$$

car c et μ ne dépendent pas de T .

1.1.5 on remplace dans 1.1.2 :

$$\frac{\partial(u_0 + c\mu T)}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}$$

donc :

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

1.1.6 on en déduit :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$D = \frac{\lambda}{\mu c}$ s'exprimant en $m^2.s^{-1}$ homogène à $\frac{longueur^2}{temps}$.

Attention : ce n'est pas une accélération : $m.s^{-2}$

1.2 Régime stationnaire

1.2.1 en régime stationnaire T ne dépend plus de t donc $T = T(x)$, soit (1) :

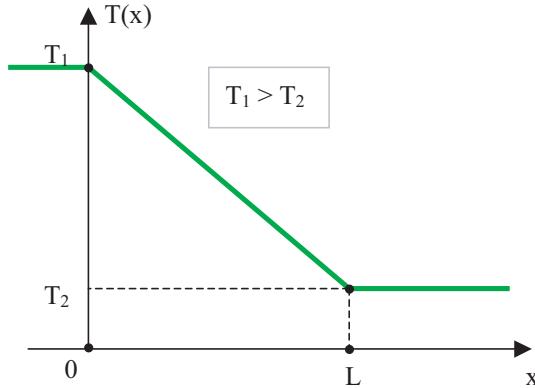
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

1.2.2 on intègre : $T(x) = \alpha x + \beta$ tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0) = \beta = T_1 \\ T(L) = \alpha L + \beta = T_2 \end{cases}$$

donc :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$



1.2.3 la loi de Fourier donne : $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{u}_x$, uniforme et en accord avec l'existence de la paroi latérale athermane.

1.3 Régime transitoire

1.3.1 graphiquement :

$$T_1 = T(x = 0, t) = 20^\circ C = 293 K$$

$$T_2 = T(x = L, t) = 60^\circ C = 333 K$$

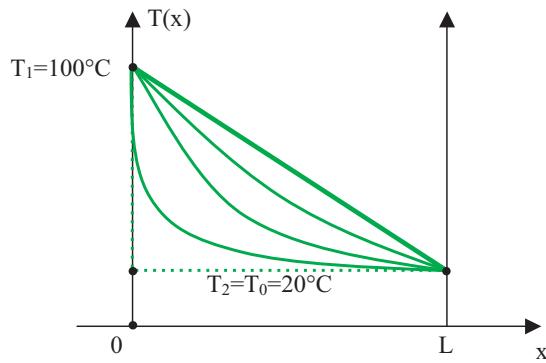
$$T_0 = T(x, t = 0) = 100^\circ C = 373 K$$

(uniforme).

1.3.2

1.3.2.1 il faut laisser la surface $x = L$ en contact avec l'air ambiant qui constitue une source de chaleur en bonne approximation !

1.3.2.2 :



2^{ème} partie : Contacts thermiques

2.1 Modèle statique

2.1.1 de même qu'en 1.2.2 :

$$T_a(x) = T_0 + \frac{T_0 - T_1}{L_1} x$$

$$T_b(x) = T_0 + \frac{T_2 - T_0}{L_2} x$$

2.1.2 dans C_a : $\vec{j}_Q(x) = -\lambda_1 \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{L_1}$ et dans C_b : $\vec{j}_Q(x) = -\lambda_1 \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda_2 \frac{T_0 - T_2}{L_2} \vec{u}_x$

2.1.3 par continuité du courant thermique diffusif en $x = 0$:

$$\lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{L_1} = \lambda_2 \frac{T_0 - T_2}{L_2} \Rightarrow T_0 = \frac{\frac{\lambda_1 T_1}{L_1} + \frac{\lambda_2 T_2}{L_2}}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$$

(Millman)

2.1.4 A.N : $T_1 = 37^\circ\text{C} = 310\text{ K}$ et $L_1 = L_2$ donc : $T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ tel que : $\lambda_1 = 10\text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$

	main-bois	main-acier
sensation de chaud ($T_2 = 100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$)	$T_0 = 316\text{ K} = 43^\circ\text{C}$	$T'_0 = 367\text{ K} = 94^\circ\text{C}$
sensation de froid ($T_2 = 10^\circ\text{C} = 283\text{ K}$)	$T_0 = 308\text{ K} = 35^\circ\text{C}$	$T'_0 = 285\text{ K} = 12^\circ\text{C}$

Lorsqu'il fait chaud, au toucher on sent l'acier plus chaud que le bois ($94^\circ\text{C} > 43^\circ\text{C}$) et lorsqu'il fait froid, au toucher on sent l'acier plus froid que le bois ($13^\circ\text{C} < 35^\circ\text{C}$)

2.2 Modèle dynamique

2.2.1 L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{dT}{du} + 2u\dot{T} = 0$$

par séparation de variable :

$$\frac{dT}{\dot{T}} = -2udu$$

soit :

$$\ln(\dot{T}) = -u^2 + cte \Rightarrow \dot{T} = cte' \exp -u^2$$

soit :

$$T(u) = cte_1 + cte_2 \int_0^u \exp -v^2 dv = A + B \operatorname{erf}(u)$$

2.2.2 pour C_a et $t > 0$:

on a : $x \rightarrow -\infty \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_1 t}} \rightarrow -\infty$

donc : $T(-\infty) = T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(-\infty) = A_1 - B_1$

et on a : $x = 0 \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_1 t}} = 0$

donc : $T(0) = T_0 = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(0) = A_1$

soit :

$$A_1 = T_0$$

$$B_1 = T_0 - T_1$$

de même pour C_b et $t > 0$:

on a : $x \rightarrow +\infty \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_2 t}} \rightarrow +\infty$

donc : $T(+\infty) = T_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(+\infty) = A_2 + B_2$

et on a : $x = 0 \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_2 t}} = 0$

donc : $T(0) = T_0 = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(0) = A_2$

soit :

$$A_2 = T_0$$

$$B_2 = T_2 - T_0$$

2.2.3 dans le cylindre C_a on a :

$$\vec{j}_Q^{(a)}(x, t) = -\lambda_1 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x = -\lambda_1 \frac{dT(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \vec{u}_x$$

or : $\frac{d \operatorname{erf}(u)}{du} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp -u^2$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4D_1 t}}$

il vient :

$$\vec{j}_Q^{(a)}(x, t) = -(T_0 - T_1) \frac{E_1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4D_1 t} \right) \vec{u}_x$$

tel que : $E_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}} = \sqrt{\mu_1 c_1 \lambda_1}$, s'exprimant en $W.m^{-2}.K^{-1}.s^{1/2}$

2.2.4 de même dans le cylindre C_b :

$$\vec{j}_Q^{(b)}(x, t) = -(T_2 - T_0) \frac{E_2}{\sqrt{\pi t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4D_2 t} \right) \vec{u}_x$$

tel que : $E_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}} = \sqrt{\mu_2 c_2 \lambda_2}$

2.2.5 continuité de $\vec{j}_Q(x, t)$ en $x = 0, t > 0$:

$$(T_0 - T_1)E_1 = (T_2 - T_0)E_2 \Rightarrow T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

le modèle dynamique fait intervenir la masse volumique et la capacité calorifique des corps !

2.2.6 A.N : $T_1 = 37^\circ C = 310 K$ et $E_1 = 1.8 \cdot 10^3 SI$

	main-bois	main-acier
sensation de chaud ($T_2 = 100^\circ C = 373 K$)	$T_0 = 321 K = 48^\circ C$	$T'_0 = 366 K = 93^\circ C$
sensation de froid ($T_2 = 10^\circ C = 283 K$)	$T_0 = 305 K = 32^\circ C$	$T'_0 = 286 K = 13^\circ C$

Le modèle statique est suffisant pour décrire le contact main-acier vue la forte effusivité de l'acier.

- 2.3 non, les deux bouteilles mises au frigo suffisamment longtemps auront toutes deux la même température $5^\circ C$, c'est juste la sensation de la main qu'on vient d'étudier qui donne ce sentiment car $E_{verre} \gg E_{plastique}$!

3^{ème} partie : Analogies thermoélectriques

3.1 Résistances thermiques

3.1.1 on a : $\Phi_{th}^c = \int \int_{S(x=cte)} \vec{j}_Q(x) \cdot d\vec{S} = j_Q(x)S$

$$\text{or} : j_Q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_0 - T_L}{L}$$

donc :

$$\Phi_{th}^c = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_L) \Rightarrow R_{th}^c = \frac{T_0 - T_L}{\Phi_{th}^c} \frac{L}{\lambda S}$$

3.1.2

3.1.2.1 la loi d'OHM locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \vec{grad}V$

tel que : \vec{j} vecteur densité volumique de courant électrique, γ la conductivité électrique du milieu, V le potentiel électostatique ; valable en régime statique en absence de champ magnétique , pour un faible champ électrique

3.1.2.2 par analogie :

- $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla}T \longleftrightarrow \vec{j} = -\gamma \vec{\nabla}V$
- $\lambda \longleftrightarrow \gamma$
- $\Phi_{th}^c \longleftrightarrow I$ intensité de courant
- $T \longleftrightarrow V$
- $T(0) - T(L) \longleftrightarrow U$ tension ou ddp

3.1.3 deux résistors thermiques montés en série sont parcourus par le même flux thermique Φ_{th}^c et

$$R_{th,eq} = R_{th,1} + R_{th,2}$$

deux résistors thermiques montés en parallèle sont soumises au même écart de température ΔT et

$$R_{th,eq} = \frac{R_{th,1} \cdot R_{th,2}}{R_{th,1} + R_{th,2}}$$

3.1.4 la loi de NEWTON s'écrit :

$$\Phi_{th}^{cc} = h(T - T_a)S = \frac{(T - T_a)}{R_{th}^{cc}}$$

tq : $R_{th}^{cc} = \frac{1}{hS}$ avec h coefficient de transfert conducto-convectif, S la surface de contact solide-fluide

3.1.5

3.1.5.1 la loi de STEPHAN donne le flux surfacique émis : par le corps solide $\varphi_{th}^r = \sigma T^4$, et par l'environnement ambiant $\varphi_{th}^r = \sigma T_a^4$

3.1.5.2 le flux thermique radiatif total s'écrit sortant algébriquement du solide : $\Phi_{th}^r = \sigma(T^4 - T_a^4)S$

3.1.5.3 si $T \approx T_a$ alors :

$$\Phi_{th}^r = \sigma(T^4 - T_a^4)S = \sigma S(T^3 + T^2 T_a + TT_a^2 + T_a^3)(T - T_a) \approx 4\sigma S T_a^3 (T - T_a)$$

donc $R_{th}^r = \frac{1}{4\sigma S T_a^3}$

3.1.5.4 A.N : $R_{th}^r = 0.11 \text{ KW}^{-1}$

3.2 Bilan thermique du corps humain

3.2.1 régime stationnaire

3.2.1.1 la puissance métabolique $P_M = PMJ \times \frac{1}{24 \times 3600} = 150 \text{ W}$

le flux thermique par rayonnement $\Phi_{th}^r = \frac{(T - T_a)}{R_{th}^r} = 75.2 \text{ W}$

le flux thermique par convection $\Phi_{th}^{cc} = \frac{(T - T_a)}{R_{th}^{cc}} = 59.9 \text{ W}$

3.2.1.2 la puissance $P_e = m_e L \times \frac{1}{24 \times 3600} = 8.3 \text{ W}$.

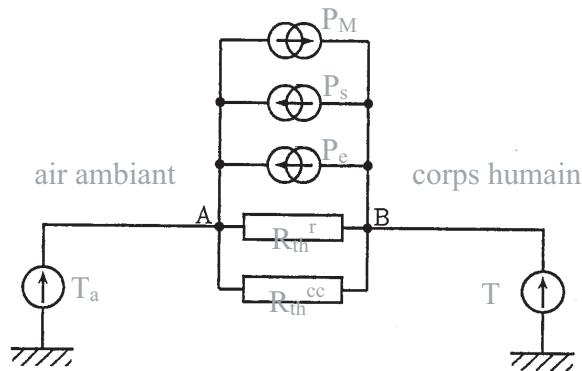
3.2.1.3 la puissance résiduelle $P_s = P_M - \Phi_{th}^{cc} - \Phi_{th}^r - P_e = 6.7 \text{ W}$, qui sert à accomplir les autres efforts physiques (muscles) et mentales (résoudre cette épreuve !), aussi pour chauffer l'air inspiré froid et expiré chaud !

3.2.1.4 on a la loi des noeuds en A :

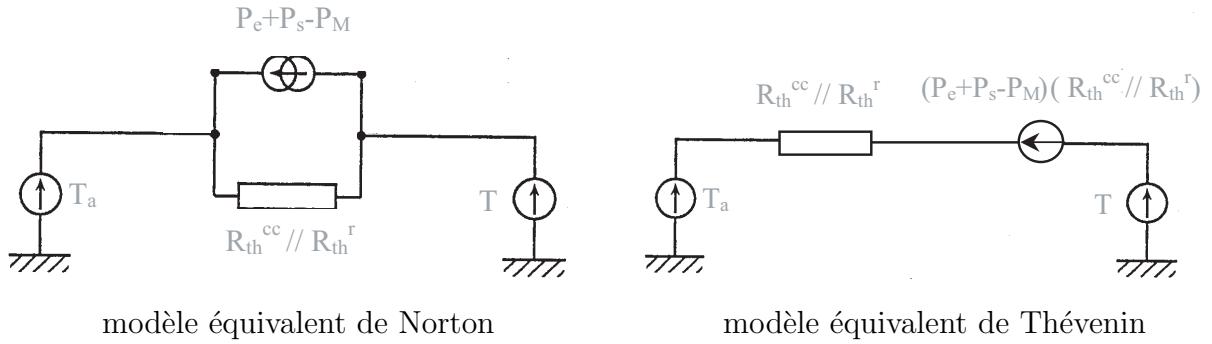
$$-I + I_1 + I_2 + \frac{V - V_a}{R_1} + \frac{V - V_a}{R_2} = 0$$

3.2.1.5 par analogie thermoélectrique le bilan thermique du corps humain s'exprime (3.2.1.3) :

$$-P_M + P_e + P_s + \frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^r} = 0$$



3.2.1.6 :



3.2.2

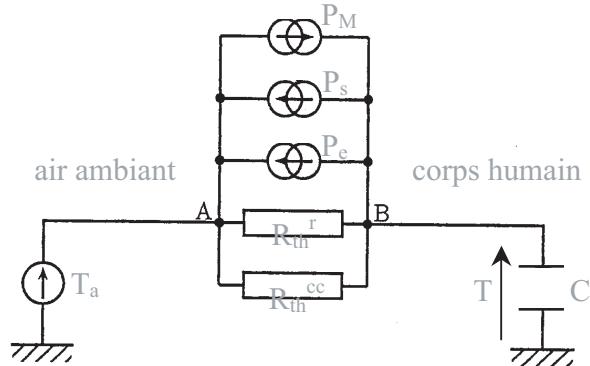
3.2.2.1 le corps humain de volume constant vérifie le 1^{er} principe :

$$C \frac{dT}{dt} = P_m - P_e - P_s - \left[\frac{1}{R_{th}^{cc}} + \frac{1}{R_{th}^r} \right] (T - T_a) \quad (2')$$

donc $\tau = \frac{CR_{th}^{cc}R_{th}^r}{R_{th}^{cc}+R_{th}^r}$ et $\Lambda = \frac{P_m-P_e-P_s}{C}$

3.2.2.2 en régime stationnaire $\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow -P_m + P_e + P_s + \frac{T-T_a}{R_{th}^{cc}} + \frac{T-T_a}{R_{th}^r} = 0$ compatible avec ceux du §3.2.1

3.2.2.3 l'équation (2') est commode avec :



3.2.2.4 on résout :

$$T(t) - T_a = \alpha \exp -\frac{t}{\tau} + \tau \Lambda$$

or à $t = 0$:

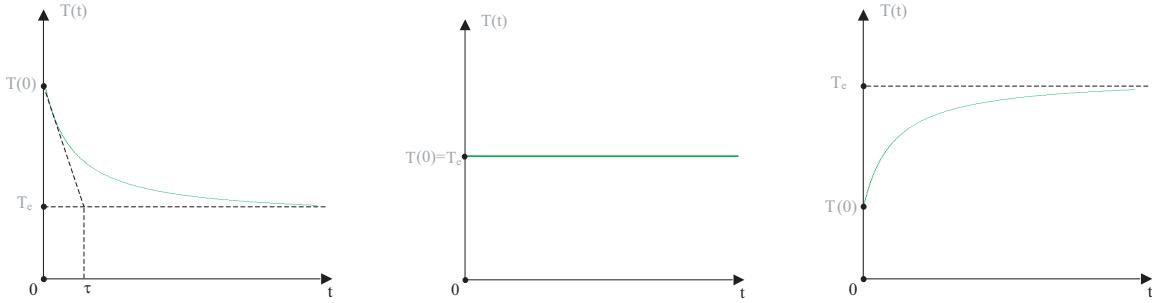
$$\alpha = T(0) - T_a - \tau \Lambda$$

soit :

$$T(t) = T_a + \tau \Lambda + [T(0) - T_a - \tau \Lambda] \exp -\frac{t}{\tau}$$

3.2.2.5 A.N : $T_e = T(\infty) = T_a + \tau \Lambda = 33^\circ C = 306 K$ qui est celle du régime statique par homéothermie !

3.2.2.6 on a : $T(t) = T_e + (T(0) - T_e) \exp -\frac{t}{\tau}$



le corps se refroidit le corps est en équilibre le corps se réchauffe
 τ est déterminé par l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote.

3.2.2.7 on a :

$$\begin{aligned}\tau_{eau} &= \frac{\tau}{25} \Leftrightarrow \frac{C R_{th,eau}^{cc} R_{th}^r}{R_{th,eau}^{cc} + R_{th}^r} = \frac{1}{25} \quad \frac{C R_{th}^{cc} R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r} \\ &\Rightarrow R_{th,eau}^{cc} = \frac{1}{\frac{24}{R_{th}^r} + \frac{25}{R_{th}^{cc}}} = 3.03 \times 10^{-3} \text{ KW}^{-1}\end{aligned}$$

le coefficient de transfert conducto-convectif : $h_{corps-eau} > h_{corps-air}$

3.3 Effet des vêtements sur le bilan thermique du corps

la nouvelle surface du corps en contact avec l'air est $S' = 0.2 S$ et $R \propto \frac{1}{S}$

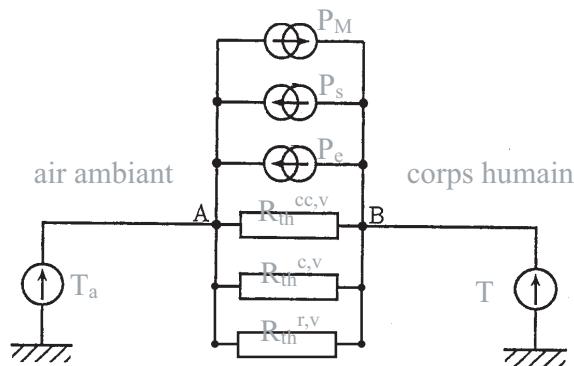
3.3.1 $R_{th}^{cc,v} = \frac{R_{th}^{cc}}{0.2} = 835 \times 10^{-3} \text{ KW}^{-1}$ et $R_{th}^{r,v} = \frac{R_{th}^r}{0.2} = 665 \times 10^{-3} \text{ KW}^{-1}$

3.3.2 en fait $S'' = 0.8 S$ du corps est en contact avec les vêtements qui sont équivalents à une résistance thermique soumise à l'écart $T - T_a$

le bilan s'écrit en régime statique :

$$-P_M + P_e + P_s + \frac{T - T_a}{R_{th}^{cc,v}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^{r,v}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^{c,v}} = 0$$

3.3.3 le nouveau schéma du circuit thermique :



3.3.4 A.N : $T = 33^\circ C = 306 K$, $T'_a = 20^\circ C = 293 K$ et $T_a = 23^\circ C = 296 K$

$$R_{th}^{c,v} = \frac{T - T'_a}{P_M - P_e - P_s - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{cc,v}} - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{r,v}}} = \frac{T - T'_a}{\frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^r} - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{cc,v}} - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{r,v}}} = 130 \times 10^{-3} \text{ KW}^{-1}$$

fin du corrigé



physique II

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques

Le guidage des ondes électromagnétiques s'impose chaque fois qu'il est nécessaire de "canaliser" l'information reçue par le récepteur vers un système utilisateur distant (exemple : antenne réceptrice - câble - poste de télévision). Outre la fiabilité et la confidentialité de l'information qu'il assure, le guidage des ondes électromagnétiques peut aussi constituer une solution au problème de la saturation hertzienne que connaissent certaines plages de fréquences dans certaines régions du monde (chaînes câblées de télévision) ...

Ce problème propose de découvrir quelques aspects de la propagation guidée sur un exemple particulier de guide d'ondes.

Données utiles et notations

- . Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3,0 \cdot 10^8 m.s^{-1}$;
- . Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$;
- . Conductivité électrique du cuivre : $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$;
- . Dimensions du guide d'ondes : $a = (22,86 \pm 0,05)mm$, $b = (10,16 \pm 0,05)mm$;
- . Fréquence de travail du guide d'ondes : $\nu = 9,67 GHz$;
- . Conformément à l'usage courant, les grandeurs complexes seront soulignées ;
- . i désignera le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$;
- . Dans tout le problème $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ désignera une base orthonormée directe attachée au système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

1^{ère} partie : Modèle de conducteur métallique - Conducteur parfait

Dans cette partie on se propose de préciser la notion de conducteur parfait. Pour cela on part d'un modèle plus réaliste de conducteur métallique que l'on ne demande pas de justifier et pour lequel :

1. les équations de MAXWELL dans le conducteur ont la même forme que dans le vide, soit :

$$\vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}(M, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(M, t) \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}_M \cdot \vec{B}(M, t) = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \quad (4)$$

ρ désigne la densité volumique de charge et \vec{j} le vecteur courant volumique. $\vec{\nabla}_M$ est l'opérateur nabla au point M.

2. le conducteur obéit à la loi d'OHM : $\vec{j}(M, t) = \sigma \vec{E}(M, t)$, σ désignant la conductivité électrique du conducteur supposée uniforme et constante dans tout le domaine des fréquences considéré.

3. la densité volumique de charge est identiquement nulle en tout point du conducteur et à tout instant $\rho(M, t) = 0$.

1.1 Effet de peau

1.1.1 Dans le cas des champs harmoniques, comparer les deux termes $\mu_0 \vec{j}$ et $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ du second membre de l'équation de MAXWELL - AMPÈRE (4) et montrer que, à la fréquence de travail du guide d'ondes considéré ($\nu = 9,67 \text{ GHz}$), l'un des deux termes est négligeable devant l'autre.

1.1.2 En déduire une forme simplifiée de l'équation de MAXWELL - AMPÈRE.

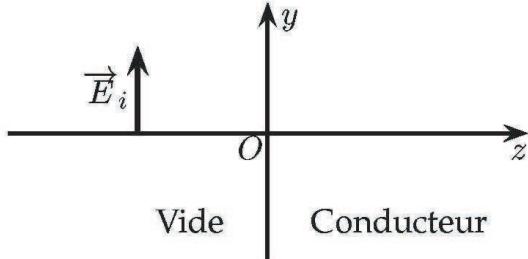


Fig 1

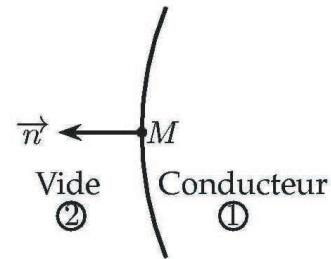


Fig 2

Pour étudier la possibilité d'existence d'une onde électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur métallique réel, on suppose qu'un tel conducteur (Figure 1) occupe le demi-espace $z > 0$ de sorte que sa surface plane coïncide avec le plan (xOy) . Une onde électromagnétique incidente se propage dans le vide ($z < 0$) dans le sens des z croissants et arrive au niveau de la surface plane du conducteur. Elle donne alors naissance à une onde réfléchie dans le vide et une onde transmise dans le conducteur que l'on cherche à caractériser. L'onde incidente, considérée plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement selon \vec{u}_y est décrite par son champ électrique dont la représentation complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = E^0 \exp i(kz - \omega t) \vec{u}_y$$

On cherche le champ électrique de l'onde électromagnétique transmise à l'intérieur du conducteur sous forme harmonique, soit en représentation complexe :

$$\underline{\vec{E}}_t(M, t) = \underline{\vec{E}}_t(M) \exp -i\omega' t$$

1.1.3 Par un raisonnement physique qualitatif, s'appuyant éventuellement sur un résultat du cours, justifier que $\omega' = \omega$.

1.1.4 En exploitant les symétries du système, montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{\vec{E}}_t(M) = \underline{E}_t(z) \vec{u}_y$$

1.1.5 Établir l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire le champ électrique $\underline{\vec{E}}_t(M)$ de l'onde transmise.

1.1.6 En déduire que $\underline{E}_t(z)$ est solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2 \underline{E}_t}{dz^2} + k_t^2 \underline{E}_t = 0 \quad (5)$$

et donner l'expression de k_t^2 en fonction de μ_0 , σ et ω .

1.1.7 Montrer que l'on peut écrire k_t sous la forme $k_t = \frac{1+i}{\delta}$ et donner l'expression de δ .

1.1.8 En déduire la solution physique de l'équation (5) tenant compte de la condition aux limites pour z très grand. On prendra $\underline{E}_t(0) = E_t^0 \exp -i\varphi$; E_t^0 étant une constante réelle positive que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1.1.9 Représenter graphiquement le module de $\underline{E}_t(z)$ en fonction de z et donner une interprétation physique de δ , appelée épaisseur de peau, après en avoir déterminé la dimension.

1.1.10 Application numérique : Calculer δ pour le cuivre à la fréquence de travail $\nu = 9,67 \text{ GHz}$ et commenter la valeur trouvée.

1.1.11 Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_t(M, t)$ transmis à l'intérieur du conducteur.

1.2 Modèle de conducteur parfait

L'approximation de conducteur parfait est suggérée par le calcul numérique effectué en 1.1.10, elle consiste à prendre $\delta = 0$, soit formellement $\sigma \rightarrow +\infty$.

1.2.1 Dans quel domaine de fréquences est-il plus réaliste de considérer qu'un métal réel se comporte comme un conducteur parfait ?

1.2.2 Donner les valeurs du champ électrique $\vec{E}_t(M, t)$ et du champ magnétique $\vec{B}_t(M, t)$ à l'intérieur d'un conducteur parfait. Justifier.

1.2.3 Que valent la densité volumique de charge ρ et le vecteur courant volumique \vec{j} dans un conducteur parfait ?

1.2.4 Comment seront alors distribués dans un conducteur parfait un éventuel excès de charges ou un courant ?

On considère une interface *vide/conducteur* parfait en présence de charges surfaciques ρ_s et de courants surfaciques \vec{j}_s . On note \vec{n} le vecteur normal sortant du conducteur (Figure 2).

1.2.5 En utilisant les notations de la figure 2, donner, sans démonstration, les quatre relations de passage concernant les composantes tangentielles et normales des champs \vec{E} et \vec{B} .

1.2.6 Comment se simplifient ces relations compte tenu des valeurs de \vec{E} et \vec{B} dans le conducteur parfait.

1.2.7 Les valeurs de ρ_s et \vec{j}_s étant quelconques, quelles sont en définitive les seules conditions aux limites imposées par un conducteur parfait ?

2^{ème} partie :

Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire

Le guide d'ondes considéré est constitué de parois métalliques conductrices supposées parfaites. Il est rectiligne et présente une section génératrice rectangulaire de largeur a suivant l'axe Ox et de hauteur b suivant l'axe Oy. On supposera que $a > b$.

L'intérieur du guide est rempli d'air dont les propriétés électromagnétiques seront assimilées à celles du vide non chargé et sans courant.

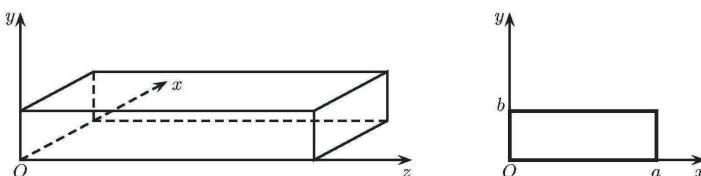


Fig 3 : Guide d'ondes rectangulaire.

On peut montrer, et on l'admettra dans le cadre de ce problème, que le guide d'ondes rectangulaire ne peut pas propager des ondes électromagnétiques transverses (champs électrique et magnétique simultanément orthogonaux à la direction de propagation).

2.1 Onde transverse électrique TE

On cherche à décrire la propagation sans atténuation dans le guide par une onde transverse électrique ou onde TE : le champ électrique est transverse (orthogonal à la direction de propagation Oz) alors que le champ magnétique ne l'est pas. Cherchant à décrire un phénomène harmonique de propagation suivant Oz, on écrit les champs en représentation complexe selon :

$$\vec{E}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0(x, y) \exp i(k_g z - \omega t)$$

$$\vec{B}(M, t) = \underline{\vec{B}}_0(x, y) \exp i(k_g z - \omega t)$$

avec :

$$\underline{\vec{E}}_0(x, y) = \underline{E}_{0x}(x, y)\vec{u}_x + \underline{E}_{0y}(x, y)\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_0(x, y) = \underline{B}_{0x}(x, y)\vec{u}_x + \underline{B}_{0y}(x, y)\vec{u}_y + \underline{B}_{0z}(x, y)\vec{u}_z$$

2.1.1 À partir des équations de MAXWELL, établir l'équation de propagation pour le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M, t)$ et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\underline{B}_{0z}(x, y)$.

2.1.2 Cette équation peut être résolue par la méthode de séparation des variables. Vérifier que $\underline{B}_{0z}(x, y) = (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x)(\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$ peut convenir comme solution de cette équation à condition que k_g , ω , α et β vérifient une relation que l'on déterminera. α et β sont deux constantes que l'on déterminera dans les questions suivantes à l'aide des conditions aux limites imposées par le guide d'ondes.

2.1.3 À l'aide de projections appropriées des équations de MAXWELL - FARADAY (3) et MAXWELL - AMPÈRE (4), exprimer \underline{E}_{0x} en fonction de $\frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$, k_g , ω et c_0 .

2.1.4 Exprimer de même \underline{E}_{0y} en fonction de $\frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$, k_g , ω et c_0 .

2.1.5 En déduire alors les expressions de \underline{E}_{0x} et \underline{E}_{0y} en fonction de x et y .

2.1.6 Écrire les conditions aux limites imposées par le guide d'ondes à \underline{E}_{0y} en $x = 0$ et $x = a$ ainsi que celles imposées à \underline{E}_{0x} en $y = 0$ et $y = b$ et montrer que, m et n étant deux nombres entiers :

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

2.1.7 En déduire la structure du champ électrique pour le mode TE_{mn} :

$$TE_{mn} \left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_{0x,mn} = \underline{A}_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \underline{E}_{0y,mn} = \underline{B}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \underline{E}_{0z,mn} = 0 \end{array} \right.$$

\underline{A}_{mn} et \underline{B}_{mn} étant deux constantes complexes que l'on exprimera.

On peut montrer, et on l'admettra dans le cadre de cette étude, que pour le mode TE_{mn} les entiers m et n ne peuvent être tous les deux nuls à la fois.

2.1.8 Montrer que, pour le mode TE_{mn} le module $k_{g,mn}$ du vecteur d'onde $\vec{k}_g = k_g \vec{u}_z$ dans le guide est donné par :

$$k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (6)$$

2.1.9 Montrer que le guide d'ondes se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure ν_c pour les ondes électromagnétiques. Donner l'expression de la fréquence de coupure $\nu_{c,mn}$ pour le mode TE_{mn} . Que se passe-t-il si la fréquence de travail ν est inférieure à la fréquence de coupure $\nu_{c,mn}$?

2.1.10 Exprimer la longueur d'onde dans le guide $\lambda_{c,mn}$ en fonction de m, n, a, b et de la longueur d'onde λ dans le vide.

2.2 Onde transverse magnétique TM

Le mode transverse magnétique TM est le mode de propagation imposant au champ magnétique d'être orthogonal à la direction de propagation.

Une étude analogue à celle menée en 2.1 donne la structure du champ électrique pour le mode TM_{mn} :

$$TM_{mn} \left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_{0x,mn} = i \frac{k_{g,mn} c_0^2}{\omega^2 - c_0^2 k_{g,mn}^2} \underline{A}_2 \underline{B}_2 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \underline{E}_{0y,mn} = i \frac{k_{g,mn} c_0^2}{\omega^2 - c_0^2 k_{g,mn}^2} \underline{A}_2 \underline{B}_2 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \underline{E}_{0z,mn} = \underline{A}_2 \underline{B}_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{array} \right.$$

Où $k_{g,mn}$ désignant le module du vecteur d'onde $\vec{k}_g = k_g \vec{u}_z$ est donné par l'équation (6). On admettra que, comme pour le mode TE_{mn} les entiers m et n ne peuvent être tous les deux nuls à la fois dans le cas du mode TE_{mn} .

2.2.1 Montrer que, pour le mode TE_{mn} , aucun des deux entiers m et n ne peut être nul.

2.3 Sélection des modes de propagation par le guide d'ondes

2.3.1 Exprimer littéralement puis calculer numériquement les fréquences de coupure pour les modes $TE_{10}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11}$ et TE_{20} .

2.3.2 Comment faut-il choisir la fréquence ν de l'excitateur pour que l'onde qui se propage dans le guide soit une combinaison linéaire des modes TE_{10} et TE_{20} à l'exclusion de tous les autres ?

2.3.3 Exprimer, calculer numériquement puis comparer les vitesses de phase $v_\varphi(TE_{10})$ et $v_\varphi(TE_{20})$ à une fréquence $\nu' = 14 \text{ GHz}$.

2.3.4 Comparer les temps de parcours des deux modes dans le guide d'ondes. Que peut-on en conclure quant à la déformation du signal à la sortie du guide d'ondes ?

3^{ème} partie : Guide d'ondes monomode TE_{10}

Un guide d'ondes monomode est un guide où un seul mode (m,n) peut se propager sans atténuation à l'intérieur du guide d'ondes. On utilise de tels guides pour éviter les problèmes de déformation du signal rencontrés en 2.3.4.

3.1 Sélection du mode du travail

3.1.1 Montrer qu'un guide d'ondes donné est monomode pour un domaine de fréquences $[\nu_{min}, \nu_{max}]$ que l'on précisera.

La fréquence d'excitation imposée **dans toute la suite** par le générateur d'ondes électromagnétiques utilisé est $\nu = 9,67 \text{ GHz}$.

3.1.2 Quel est le mode ainsi sélectionné ?

3.1.3 Quel est l'état de polarisation de l'onde ?

Pour vérifier l'état de polarisation de l'onde, on place (Figure 4) à la sortie du guide d'ondes une grille constituée de fils métalliques parallèles à une direction \vec{u}' perpendiculaire à \vec{u}_z , puis un détecteur sensible à la valeur moyenne temporelle $\langle E^2 \rangle$ du module au carré du champ électrique \vec{E} .

On pourra considérer la grille comme un ensemble de guides d'ondes en parallèle, de côtés d et D.

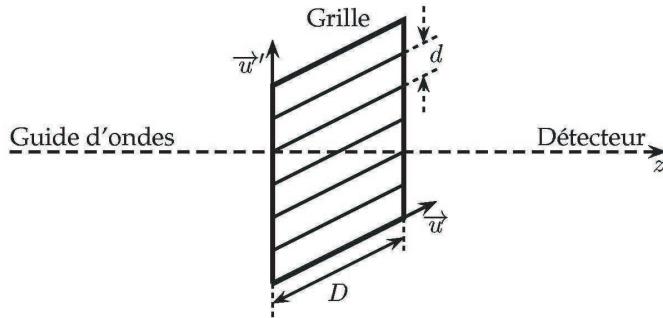


Fig 4 : Grille métallique.

Pour d suffisamment faible, on constate que $\langle E^2 \rangle$ varie lorsque l'on fait tourner la grille dans son plan, autour de la direction de propagation \vec{u}_z des ondes.

3.1.4 Comparer le résultatat de la mesure lorsque \vec{u} est parallèle à \vec{u}_x (grand côté du guide) et lorsque \vec{u} est parallèle à \vec{u}_y (petit côté du guide) et interpréter qualitativement.

3.1.5 Quelle loi peut-on illustrer avec ce dispositif ?

3.1.6 Pour d trop élevé, $\langle E^2 \rangle$ est indépendant de l'orientation de la grille. Interpréter qualitativement cette observation et déterminer la valeur critique de d .

3.2 Mesure de la fréquence

3.2.1 Citer deux appareils de laboratoires utilisés habituellement pour mesurer la fréquence des signaux électroniques usuels.

3.2.2 Pourquoi de tels appareils ne peuvent-ils plus opérer aux fréquences d'utilisation des guides d'ondes habituels ?

Pour mesurer la fréquence des ondes guidées, on utilise un onde-mètre constitué d'une cavité résonante métallique couplée latéralement à une section rectangulaire du guide d'ondes au moyen d'un orifice de petites dimensions (Figure 5).

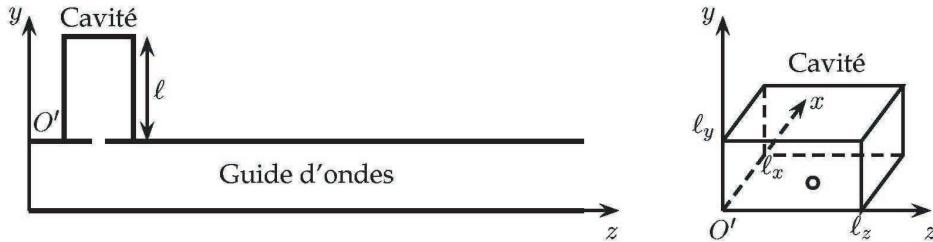


Fig 5 : Cavité résonante couplée au guide d'ondes.

Pour simplifier l'étude, on considère une cavité de forme parallélépipédique de côtés ℓ_x suivant Ox, ℓ_y suivant Oy et ℓ_z suivant Oz et on suppose que le métal qui la compose est un conducteur parfait. L'intérieur est vide.

On adopte pour simplifier dans cette section une théorie scalaire ou une onde électromagnétique est décrite par l'amplitude $E(M, t)$ du champ électrique, sans se préoccuper de sa direction.

On admettra que ce champ doit s'annuler à la surface d'un conducteur parfait.

On cherche des solutions de la forme $E = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cos \omega t$.

3.2.3 Quelle relation entre k_x , k_y , k_z , et ω est-elle imposée par l'équation de propagation ?

3.2.4 Montrer que les conditions aux limites imposées à E par les parois de la cavité imposent une quantification de k_x , k_y et k_z que l'on exprimera en fonction de ℓ_x , ℓ_y , ℓ_z et de trois nombres entiers n_x , n_y et n_z . **On pourra placer l'origine en O'** pour simplifier les calculs de cette question (Figure 5).

3.2.5 Déterminer l'expression de la plus petite pulsation ω_f de l'onde électromagnétique pouvant exister dans la cavité (mode fondamental). Calculer numériquement la fréquence ν_f correspondante pour une cavité ayant les dimensions suivantes : $\ell_x = \ell_z = 3 \text{ cm}$ et $\ell_y = 2 \text{ cm}$.

3.2.6 Expliquer brièvement comment une telle cavité électromagnétique de section donnée et de longueur $\ell_y = \ell$ réglable et mesurable, permet-elle de mesurer la fréquence ν de l'onde.

3.2.7 Avec $\ell_x = \ell_z = 3 \text{ cm}$ maintenues constantes, quelle valeur faut-il donner à ℓ pour mesurer la fréquence de travail $\nu = 9,67 \text{ GHz}$?

3.3 Couplage du guide d'ondes à une charge

Un guide d'ondes rectangulaire du type précédent de longueur L est fermé complètement en $z = L$ par une plaque conductrice plane d'épaisseur e et de conductivité électrique σ . Le guide d'ondes est le siège de la propagation d'une onde électromagnétique incidente TE_{10} décrite par le champ électrique :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \vec{u}_y$$

avec $k_g = \sqrt{(\frac{\omega}{c_0})^2 - (\frac{\pi}{a})^2}$ et $E_i^0 \in IR$

À l'interface air/plaque (en $z = L$), cette onde donne naissance à une onde réfléchie dans le guide, décrite par un champ électrique \vec{E}_r et une onde transmise dans la plaque décrite par le champ électrique \vec{E}_t .

Utilisant les résultats des sections précédentes, on cherche ces champs sous la forme :

. champ électrique réfléchi :

$$\vec{E}_r(M, t) = \underline{E}_r^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \vec{u}_y$$

. champ électrique transmis :

$$\vec{E}_t(M, t) = \underline{E}_t^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp(-z/\delta) \exp i(z/\delta - \omega t) \vec{u}_y$$

3.3.1 On choisit une plaque d'épaisseur e très grande devant l'épaisseur de peau δ à la fréquence de travail Pourquoi ?

3.3.2 En utilisant une équation de MAXWELL appropriée, exprimer les champs magnétiques incident \vec{B}_i , réfléchi \vec{B}_r et transmis \vec{B}_t en fonction des variables et paramètres apparaissant dans les expressions de \vec{E}_i , \vec{E}_r et \vec{E}_t .

3.3.3 À l'aide d'une équation de passage du champ électrique à l'interface $z = L$, établir une première relation entre E_i^0 , \underline{E}_r^0 et \underline{E}_t^0 .

3.3.4 Justifier brièvement la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface $z = L$ et en déduire une deuxième relation entre \vec{E}_i , \vec{E}_r et \vec{E}_t .

3.3.5 Exprimer alors les coefficients de réflexion r et de transmission t définis par $r = \underline{E}_r^0/E_i^0$ et $t = \underline{E}_t^0/E_i^0$.

3.3.6 On s'intéresse maintenant au champ électrique \vec{E} de l'onde résultant de la superposition dans le guide ($z \leq L$) des ondes incidente et réfléchie. Exprimer \vec{E} et montrer que sa partie réelle peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} [\cos(k_g z - \omega t) + r \cos(\psi - k_g z - \omega t)] \vec{u}_y \quad (7)$$

r et ψ désignent respectivement le module et l'argument de r .

3.3.7 Exprimer r en fonction de k_g et δ .

La figure (6) donne une représentation schématique des variations du champ électrique résultant dans le guide dans un plan $x = \text{constante}$ à un instant t donné.

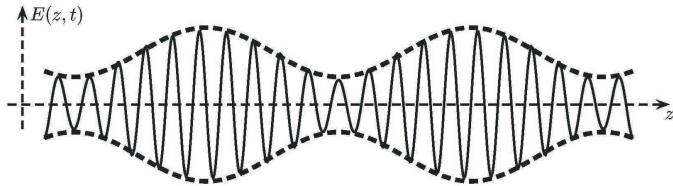


Fig 6 : Représentation schématique des variations du champ électrique dans le guide.

3.3.8 Expliquer, à partir de l'équation (7), pourquoi l'amplitude du champ électrique (courbe en pointillés de la figure 6) présente-t-elle des maxima (ventres d'amplitude) et des minima (nœuds d'amplitude).

3.3.9 En déduire les positions z_v des ventres (amplitude E_{max}) ainsi que les positions z_N des nœuds (amplitude E_{min}). Que vaut la distance Δ entre deux nœuds consécutifs ?

On appelle Taux d'Ondes Stationnaires (T.O.S), le rapport : $\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}}$

3.3.10 Exprimer τ à l'intérieur du guide d'ondes en fonction de r et montrer que la mesure de τ permet de déterminer le module r du coefficient de réflexion.

On désire utiliser le montage précédent pour mesurer la conductivité électrique σ de la plaque conductrice placée en bout du guide ($z = L$). Pour cela on utilise un détecteur d'ondes stationnaires formé par un segment du guide d'ondes fendu sur la partie médiane de sa face supérieure. Une sonde constituée d'une antenne et sa diode détectrice y est insérée. Elle délivre à sa sortie une tension statique A proportionnelle à l'amplitude au carré E^2 du champ électrique dans le plan de la sonde. La sonde est déplaçable le long du guide et sa position est repérée avec précision. On mesure alors : $A_{max} = 98,65 \text{ mV}$, $A_{min} = 0,05 \text{ mV}$, $\nu = 9,67 \text{ GHz}$ et $\Delta = 2,11 \text{ cm}$.

3.3.11 En déduire directement la valeur numérique de la longueur d'onde λ_g dans le guide d'ondes. Cette valeur est-elle en accord avec celle obtenue à partir de l'expression de k_g ?

3.3.12 En supposant que $k_g\delta \ll 1$ (hypothèse à priori) et en ne conservant que les termes d'ordre le plus bas non nul en $k_g\delta$, exprimer simplement δ en fonction r et k_g .

3.3.13 En déduire le T.O.S τ , le module r du coefficient de réflexion, l'épaisseur de peau δ ainsi que la conductivité σ . L'hypothèse à priori de la question 3.3.12 est-elle vérifiée ?

fin de l'énoncé

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques

1^{ère} partie : Modèle de conducteur métallique-Conducteur parfait

1.1 Effet de peau

1.1.1 en régime harmonique $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \times i\omega$

$$\text{soit } r = \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{|\frac{i\omega}{\mu_0 c_0^2} \vec{E}|}{|\sigma \vec{E}|} = \frac{\omega}{\sigma \mu_0 c_0^2}$$

A.N : $r = 9.1 \cdot 10^{-9} \ll 1$ donc $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligé devant $\mu_0 \vec{j}$

1.1.2 (M-A) se simplifie $\vec{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$

1.1.3 l'onde incidente et réfléchie étant de pulsation ω , la relation de passage à la surface du conducteur ne sera vérifiée pour un instant quelconque que si l'onde transmise est de même pulsation $\omega' = \omega$

1.1.4 le système $\{onde\ incidente + conducteur\}$ est invariant par translation selon Ox et Oy donc \vec{E}_t ne dépend que de z (l'onde transmise est plane)

par l'équation (M-G) $\text{div} \vec{E}_t = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ on obtient $\frac{dE_{tz}}{dz} = 0$ en excluant les solutions qui ne se propagent pas de z (il faut temps+espace), il vient $\vec{E}_t = E_{tx} \vec{u}_x + E_{ty} \vec{u}_y$

la relation de passage, en $z=0$, du champ électrique permet d'écrire que $E_i \vec{u}_y + E_r \vec{u}_y - \vec{E}_t = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{z}$ donne, par projection, $\vec{E}_t = E_t(z) \vec{u}_y$

1.1.5 à l'intérieur du conducteur, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\text{div} \underline{\vec{E}}_t = 0$$

$$\text{div} \underline{\vec{B}}_t = 0$$

$$\vec{rot} \underline{\vec{B}}_t = \mu_0 \sigma \underline{\vec{E}}_t$$

$$\vec{rot} \underline{\vec{E}}_t = - \frac{\partial \underline{\vec{B}}_t}{\partial t}$$

donc :

$$\vec{rot}(\vec{rot} \underline{\vec{E}}_t) = \vec{grad} \underbrace{\text{div} \underline{\vec{E}}_t}_{-\Delta \underline{\vec{E}}_t} - \Delta \underline{\vec{E}}_t = - \mu_0 \sigma \frac{\partial \underline{\vec{E}}_t}{\partial t}$$

or $\vec{E}_t(M, t) = \underline{\vec{E}}_t(M) \exp -i\omega t$ soit :

$$\Delta \underline{\vec{E}}_t(M) \exp -i\omega t = \mu_0 \sigma (-i\omega) \underline{\vec{E}}_t(M) \exp -i\omega t \Rightarrow \Delta \underline{\vec{E}}_t(M) + i\mu_0 \sigma \omega \underline{\vec{E}}_t(M) = \vec{0}$$

1.1.6 on a $\Delta \equiv \frac{d^2}{dz^2}$, par projection sur \vec{u}_y du résultat 1.1.5, il vient :

$$\frac{d^2 \underline{\vec{E}}_t(z)}{dz^2} + i\mu_0 \sigma \omega \underline{\vec{E}}_t(z) = 0$$

soit : $k_t^2 = i\mu_0 \sigma \omega$

1.1.7 on a $i = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2$ donc on peut écrire $\underline{k}_t = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}} (i + 1)$

$$\text{d'où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$$

1.1.8 la solution de l'équation (5) s'écrit :

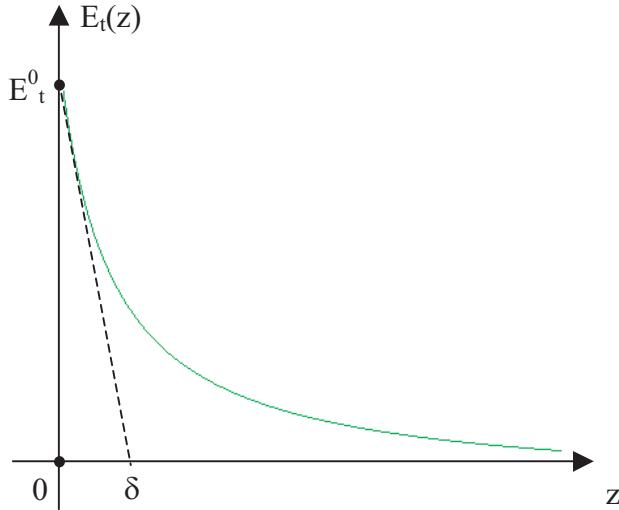
$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp i\underline{k}_t z + \underline{B} \exp -i\underline{k}_t z = \underline{A} \exp \frac{i-1}{\delta} z + \underline{B} \exp \frac{-i+1}{\delta} z$$

$|\underline{E}_t(z)|$ doit être fini pour $z \rightarrow +\infty$ (très loin dans le conducteur) donc $\underline{B} \equiv 0$ donc :

$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp \frac{i-1}{\delta} z = E_t^0 \exp -i\varphi \exp \frac{i-1}{\delta} z$$

avec $E_t^0 > 0$

1.1.9 le module de $\underline{E}_t(z)$ s'écrit $E_t(z) = |\underline{E}_t(z)| = E_t^0 \exp -\frac{1}{\delta} z$



δ caractérise la distance d'atténuation du champ à l'intérieur du conducteur. (au bout de 5δ le champ est quasi-nul)

1.1.10 A.N : $\delta = 2 \cdot 10^{-5} m$

1.1.11 on a : $\vec{E}_t(M, t) = E_t^0 \exp -i\varphi \exp i\underline{k}_t z \exp -i\omega t \vec{u}_y = E_t^0 e^{i(\underline{k}_t z - \omega t - \varphi)} \vec{u}_y$

qui est une onde plane (atténuée), donc l'équation de MAXWELL-FARADAY donne :

$$\vec{B}_t(M, t) = \frac{\underline{k}_t \vec{u}_z \times \vec{E}_t(M, t)}{\omega} = -\frac{(1+i)}{\omega \delta} E_t^0 \exp(-z/\delta) e^{i(z/\delta - \omega t - \varphi)} \vec{u}_x$$

1.2 Modèle de conducteur parfait

1.2.1 en hautes fréquences $\omega \rightarrow +\infty$ on a $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \rightarrow 0^+$

1.2.2 à l'intérieur du conducteur parfait : $z > 0$ et $\delta \rightarrow 0^+$

donc

$$|\vec{E}_t| \sim \exp(-z/\delta) \equiv 0$$

ainsi que

$$|\vec{B}_t| \sim \frac{\exp(-z/\delta)}{\delta} \equiv 0$$

1.2.3 d'après l'énoncé $\rho \equiv 0$ et on a :

$$|\vec{j}| = \sigma |\vec{E}_t| \sim \frac{\exp(-z/\delta)}{\delta^2} \equiv 0$$

1.2.4 un éventuel excès de charges ou un courant sera à la surface du conducteur parfait.

1.2.5 on a :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \rho_s / \varepsilon_0 \vec{n}$$

et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}$$

soit les quatres relations :

$$\text{continuité de la composant tangentielle de } \vec{E} : \quad E_{2t} = E_{1t}$$

$$\text{continuité de la composant normale de } \vec{B} : \quad B_{2n} = B_{1n}$$

$$\text{discontinuité de la composant normale de } \vec{E} : \quad E_{2n} - E_{1n} = \rho_s / \varepsilon_0$$

$$\text{discontinuité de la composant tangentielle de } \vec{B} : \quad B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s$$

1.2.6 pour un conducteur parfait $\vec{E}_1 \equiv \vec{0}$ et $\vec{B}_1 \equiv \vec{0}$, siot :

$$E_{2t} = 0, B_{2n} = 0, E_{2n} = \rho_s / \varepsilon_0 \text{ et } B_{2t} = \mu_0 j_s$$

1.2.7 $\forall \rho_s, j_s$ on aura :

$$\text{continuité de la composant tangentielle de } \vec{E} : \quad E_{2t} = 0$$

$$\text{continuité de la composant normale de } \vec{B} : \quad B_{2n} = 0$$

2^{ème} partie :

Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire

2.1 Onde transverse électrique TE

2.1.1 à l'intérieur du guide sans charges, ni courants volumiques, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \underline{\vec{E}} = - \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

donc :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \underline{\vec{B}}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \underline{\vec{B}}) - \Delta \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\underline{\vec{E}})}{\partial t} = - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2}$$

soit : l'équation de D'alambert

$$\Delta \underline{\vec{B}} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

par projection sur \vec{u}_z , il vient :

$$\Delta \underline{B}_z - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \underline{B}_z}{\partial t^2} = 0$$

or

$$\underline{B}_z = \underline{B}_{0z}(x, y) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2 \right) \underline{B}_{0z} = 0$$

2.1.2 on a : $\underline{B}_{0z}(x, y) = (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x)(\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$ est solution si elle vérifie l'équation de propagation 2.1.1

on a : $\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial x^2} = -\alpha^2 \underline{B}_{0z}$ et aussi $\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial y^2} = -\beta^2 \underline{B}_{0z}$

donc, la condition s'écrit : $(-\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2) \underline{B}_{0z} = 0$

comme l'onde TE n'est pas transverse magnétique donc $\underline{B}_{0z} \neq 0$
soit la relation demandée :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \beta^2$$

2.1.3 MAXWELL-FARADAY s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\underline{E}} = -\frac{\partial \vec{\underline{B}}}{\partial t} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ 0 \end{vmatrix} = +i\omega \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0z} e^{i(k_g z - \omega t)} \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ 0 \end{vmatrix} = i\omega \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} \\ \underline{B}_{0y} \\ \underline{B}_{0z} \end{vmatrix}$$

de même MAXWELL-AMPERE s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\underline{B}} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{B}_{0z} e^{i(k_g z - \omega t)} \end{vmatrix} = -i\omega \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y} e^{i(k_g z - \omega t)} \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{B}_{0x} \\ \underline{B}_{0y} \\ \underline{B}_{0z} \end{vmatrix} = -i\omega \begin{vmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

par projection de M-A sur \vec{u}_x on a :

$$\frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} - ik_g \underline{B}_{0y} = \frac{-i\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0x}$$

et par projection de M-F sur \vec{u}_y , pour éliminer \underline{B}_{0y} , on a :

$$ik_g \underline{E}_{0x} = i\omega \underline{B}_{0y}$$

On en déduit :

$$\underline{E}_{0x} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$$

2.1.4 de même par projection de M-A sur \vec{u}_y on a :

$$ik_g \underline{B}_{0x} - \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x} = \frac{-i\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0y}$$

et par projection de M-F sur \vec{u}_x , pour éliminer \underline{B}_{0x} , on a :

$$-ik_g \underline{E}_{0y} = i\omega \underline{B}_{0x}$$

On en déduit :

$$\underline{E}_{0y} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

2.1.5 tenant compte de 2.1.2, on a :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0x} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (-\underline{B}_1 \sin \beta y + \underline{B}_2 \cos \beta y) \\ \underline{E}_{0y} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha x + \underline{A}_2 \cos \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y) \end{cases}$$

2.1.6 d'après 1.2.7 en $x = 0$ ou $x = a$, on aura $\underline{E}_{0y}(x = 0, y) = 0$ et $\underline{E}_{0y}(x = a, y) = 0$
de même en $y = 0$ ou $y = b$, on aura $\underline{E}_{0x}(x, y = 0) = 0$ et $\underline{E}_{0x}(x, y = b) = 0$
donc

$$\underline{E}_{0y}(x = 0, y) = 0 \implies \underline{A}_2 = 0$$

car y est quelconque entre 0 et b .

et

$$\underline{E}_{0x}(x, y = 0) = 0 \implies \underline{B}_2 = 0$$

car x est quelconque entre 0 et a .

soit :

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \alpha x \cos \beta y$$

comme l'onde TE n'est pas transverse magnétique donc $\underline{B}_{0z} \neq 0 \implies \underline{A}_1 \neq 0$, et $\underline{B}_1 \neq 0$
et puis

$$\underline{E}_{0y}(x = a, y) = 0 \implies \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin \alpha a = 0 \implies \alpha = m\pi/a$$

avec $m \in IN$ et

$$\underline{E}_{0x}(x, y = b) = 0 \implies \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin \beta b = 0 \implies \beta = n\pi/b$$

avec $n \in IN$, d'où :

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

2.1.7 il vient :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0x} = -\frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos \alpha x \sin \beta y \\ \underline{E}_{0y} = -\frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin \alpha x \cos \beta y \end{cases}$$

donc :

$$\underline{A}_{mn} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1$$

et

$$\underline{B}_{mn} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1$$

2.1.8 d'après 2.1.2 :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

donc :

$$k_{g,mn} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$$

pour une onde progressive vers les $z > 0$:

$$k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} > 0$$

2.1.9 il y a propagation si $k_{g,mn}$ est réel càd :

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} > \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \implies \omega > \omega_c = \pi c_0 \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Le guide est un filtre passe-haut des ondes TE, de fréquence de coupure $\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$
Si $\nu < \nu_c$ alors $k_g = i|k_g|$, il y aura atténuation de l'onde le long du guide car le terme de phase $e^{i(k_g z - \omega t)} = \exp(-|k_g|z) e^{-i\omega t}$

2.1.10 dans le guide, on a :

$$\lambda_{g,mn} = \frac{2\pi}{k_{g,mn}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})}}$$

dans le vide $\lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega}$ donc :

$$\lambda_{g,mn} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4}(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})}}$$

2.2 Onde transverse magnétique TM

2.2.1 si $m = 0$ et $n \neq 0$, on aura : $k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$, le dénominateur dans l'expression de l'onde TM_{mn} est non nul : $\omega^2 - c_0^2 k_{g,mn}^2 = (\frac{\pi n c_0}{a})^2 \neq 0$

il reste donc, $m = 0$:

$$TM_{mn} \left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_{0x,mn} = 0 \\ \underline{E}_{0y,mn} = 0 \\ \underline{E}_{0z,mn} = 0 \end{array} \right.$$

ce qui absurde !

de même si $m \neq 0$ et $n = 0$, donc pour que l'onde TM_{mn} existe il faut à la fois $n \neq 0$ et $m \neq 0$

2.3 Sélection des modes de propagation par le guide d'ondes

2.3.1 :

$$TE_{10} \implies \nu_{c10} = \frac{c_0}{2a} = 6,56 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \implies \nu_{c01} = \frac{c_0}{2b} = 14,8 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \implies \nu_{c11} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,2 \text{ GHz}$$

$$TM_{11} \implies \nu_{c11} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,2 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \implies \nu_{c20} = \frac{c_0}{a} = 13,1 \text{ GHz}$$

2.3.2 d'après 2.1.9 il faut avoir :

$$6,56 \text{ GHz} \leq \nu < 14,8 \text{ GHz}$$

ainsi les modes TE_{01} , TE_{11} et TM_{11} ne peuvent pas se propager dans le guide car $\nu < \nu_{cmn}$.

2.3.3 on a : $v_\varphi = \frac{\omega'}{k_g}$, à la pulsation $\omega' = 2\pi\nu'$, donc :

$$v_\varphi(TE_{10}) = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_0^2} - \pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{0}{b^2})}} = 3,4 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_\varphi(TE_{20}) = \frac{\omega'}{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_0^2} - \pi^2(\frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2})}} = 8,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

les deux vitesses de phases sont tel que : $v_\varphi(TE_{20}) > v_\varphi(TE_{10}) > c_0$, car la phase de l'onde en physique n'est ni matière ni énergie !

2.3.4 le mode TE_{20} est plus rapide que TE_{10} , le signal formé par combinaison des deux modes sera déformé à la sortie du guide, car $v_\varphi(TE_{20}) \approx 2v_\varphi(TE_{10})$

3^{ème} partie :
Guide d'ondes monomode TE_{10}

3.1 Sélection du mode du travail

3.1.1 un guide d'onde est un filtre passe-haut vis à vis d'un mode (m, n) donc pour sélectionner un seul mode il faut choisir la fréquence du générateur d'onde (ex : klystron) entre les deux premières fréquences de coupure ainsi d'après 2.3.1 :

$$\nu_{min} = \inf(\nu_{mn}) = \nu_{10} = \frac{c_0}{2a}$$

et

$$\nu_{max} = \inf(\nu_{01}, \nu_{11}, \nu_{20}) = \nu_{20} = \frac{c_0}{a}$$

3.1.2 on a :

$$\nu_{10} = 6,56 \text{ GHz} < \nu = 9.67 \text{ GHz} < 13.1 \text{ GHz} < \nu_{mn}$$

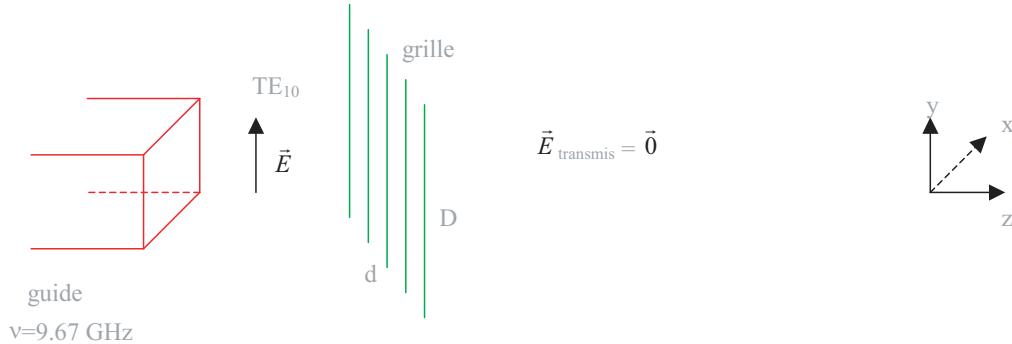
d'où le seul mode sélectionné est : TE_{10}

3.1.3 pour TE_{10} , $m = 1$ et $n = 0$, d'après 2.1.7 :

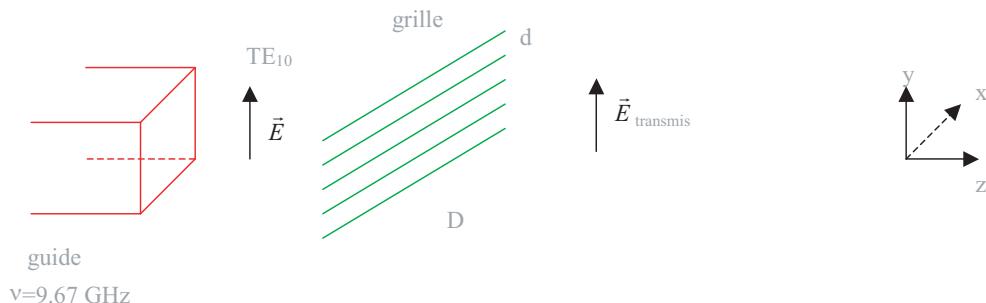
$$\begin{cases} \underline{E}_x = 0 \\ \underline{E}_y = \frac{i\omega a}{\pi} A_1 B_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp i(k_g z - \omega t) \\ \underline{E}_z = 0 \end{cases}$$

qui est une onde polarisée rectiligne selon Oy .

3.1.4 on a : $d < D$, la fréquence de coupure la plus basse de la grille (ensemble de guides) est donnée par : $\nu_c = \frac{c_0}{2D}$ qui doit être suffisamment faible ($\nu_c < 9.67 \text{ GHz}$)
cas 1 : \vec{u}/\vec{u}_y



cas 2 : \vec{u}/\vec{u}_x



la grille est un milieu anisotrope conducteur parfait selon \vec{u} et isolant parfait selon \vec{u}' .
la composante de \vec{E} selon \vec{u} sera absorbée (effet de peau). En fait le champ perd son énergie en créant un courant (mouvement des électrons) selon \vec{u} .

3.1.5 c'est la loi de Malus.

3.1.6 pour d suffisamment élevé le champ \vec{E} sera transmis quelque soit l'orientation de la grille car

$$\nu > \frac{c_0}{d} > \frac{c_0}{D}.$$

la valeur critique d_c est donnée par :

$$d_c = \frac{c_0}{\nu} = 3.1 \text{ cm}$$

3.2 Mesure de la fréquence

3.2.1 fréquence-mètre et oscilloscope.

3.2.2 à une fréquence $\nu = 9.67 \text{ GHz}$, pour satisfaire l'ARQS la dimension r du circuit de mesure (fils de connexion) doit être : $r \ll c_0 \cdot T = 3.1 \text{ cm}$ ce qui est absurde !

3.2.3 on remplace $E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t)$ dans l'équation de D'Alambert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

soit :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

3.2.4 les conditions aux limites sur les parois s'écrivent :

$$E(x = 0, y, z) = 0 ; E(x = \ell_x, y, z) = 0$$

$$E(x, y = 0, z) = 0 ; E(x, y = \ell_y, z) = 0$$

$$E(x, y, z = 0) = 0 ; E(x, y, z = \ell_z) = 0$$

on en déduit : $k_x \ell_x = n_x \pi$; $k_y \ell_y = n_y \pi$ et $k_z \ell_z = n_z \pi$ tels que : $n_x n_y n_z \neq 0$ (sinon $E \equiv 0$)

3.2.5 on a d'après 3.2.3 : $\omega = c_0 \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{\ell_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{\ell_z}\right)^2}$

la valeur minimale : $\omega_f = c_0 \pi \sqrt{\left(\frac{1}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ell_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ell_z}\right)^2}$

$$\text{A.N} : \nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi} = 10.3 \text{ GHz}$$

3.2.6 En plaçant un détecteur de champ E dans la cavité, on distingue facilement :

$\nu < \nu_f(\ell)$, le détecteur mesurera $E = 0$.

$\nu > \nu_f(\ell)$, le détecteur mesurera $E \neq 0$.

il suffit de noter la valeur d'apparition du champ : $\nu = \frac{c_0}{2} \sqrt{2\left(\frac{1}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ell}\right)^2}$

3.2.7 on a : $\nu = \frac{c_0}{2} \sqrt{2\left(\frac{1}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ell}\right)^2} \Rightarrow \ell = 2.27 \text{ cm}$

3.3 Couplage du guide d'ondes à une charge

3.3.1 pour pouvoir dire que le conducteur occupe le demi-espace $z > L$, mais surtout pour ne pas faire intervenir l'onde qui sera réfléchie en $z = L + e$!

3.3.2 comme les ondes ici ne sont pas planes, on doit écrire (M-F) :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

soit :

$$\vec{B}_i = -\frac{1}{-i\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{k_g E_i^0}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \\ 0 \\ -i \frac{\pi E_i^0}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \end{vmatrix}$$

de même :

$$\vec{B}_r = -\frac{1}{-i\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -ik_g \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_r^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k_g \underline{E}_r^0}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \\ 0 \\ -i \frac{\pi \underline{E}_r^0}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \end{vmatrix}$$

et finalement, puisque :

$$\exp -\frac{z}{\delta} \exp i(\frac{z}{\delta} - \omega t) = \exp i(\frac{1+i}{\delta} z - \omega t)$$

donc :

$$\vec{B}_t = -\frac{1}{-i\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ i \frac{1+i}{\delta} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_t^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(\frac{1+i}{\delta} z - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{(1+i)\underline{E}_t^0}{\delta\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \exp -\frac{z}{\delta} \exp i(\frac{z}{\delta} - \omega t) \\ 0 \\ -i \frac{\pi \underline{E}_t^0}{a\omega} \cos \frac{\pi x}{a} \exp -\frac{z}{\delta} \exp i(\frac{z}{\delta} - \omega t) \end{vmatrix}$$

3.3.3 la continuité de la composante tangentielle $\vec{E} \cdot \vec{u}_y$ en $z = L$ s'écrit :

$$\vec{E}_i(x, y, L, t) \cdot \vec{u}_y + \vec{E}_r(x, y, L, t) \cdot \vec{u}_y = \vec{E}_t(x, y, L, t) \cdot \vec{u}_y$$

en simplifiant :

$$E_i^0 \exp ik_g L + \underline{E}_r^0 \exp -ik_g L = \underline{E}_t^0 \exp -\frac{L}{\delta} \exp i \frac{L}{\delta}$$

3.3.4 la plaque ayant une conductivité σ finie permet l'existence d'un courant volumique ce qui exclue celle d'un courant surfacique $\vec{j}_s = \vec{0}$.

la continuité de \vec{B} en $z = L$ s'écrit :

$$\vec{B}_i(x, y, L, t) + \vec{B}_r(x, y, L, t) = \vec{B}_t(x, y, L, t)$$

en simplifiant ($// \vec{u}_x$) :

$$-k_g E_i^0 \exp ik_g L + k_g \underline{E}_r^0 \exp -ik_g L = -\frac{1+i}{\delta} \underline{E}_t^0 \exp -\frac{L}{\delta} \exp i \frac{L}{\delta}$$

3.3.5 on en déduit que :

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \frac{k_g - \frac{1+i}{\delta}}{k_g + \frac{1+i}{\delta}} \exp -2ik_g L \\ \underline{t} &= \frac{2k_g}{k_g + \frac{1+i}{\delta}} \exp ik_g L \exp \frac{1-i}{\delta} L \end{aligned}$$

3.3.6 on a :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\exp i(k_g z - \omega t) + \underline{r} \exp -i(k_g z + \omega t)] \vec{u}_y$$

or : $\underline{r} = r e^{i\psi}$ donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\exp i(k_g z - \omega t) + r \exp -i(k_g z + \omega t - \psi)] \vec{u}_y$$

soit :

$$\vec{E} = \Re e(\vec{E}) = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\cos(k_g z - \omega t) + r \cos(k_g z + \omega t - \psi)] \vec{u}_y$$

3.3.7 on a :

$$r = |\underline{r}| = \sqrt{\frac{(1 - k_g\delta)^2 + 1}{(1 + k_g\delta)^2 + 1}} \leq 1$$

3.3.8 par trigonométrie :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) [\cos(k_g z - \omega t) + r \cos(\psi - k_g z - \omega t)] \vec{u}_y \\ &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_y \{[\cos(k_g z) + r \cos(\psi - k_g z)] \cos \omega t + [\sin(k_g z) + r \sin(\psi - k_g z)] \sin \omega t\} \\ &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_y \{A(z) \cos \omega t + B(z) \sin \omega t\} \\ &= E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_y \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \xi) \end{aligned}$$

tel que : $\tan \xi(z) = B/A$

il vient :

$$\vec{E} = E_i^0 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2k_g z - \psi)}}_{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2k_g z - \psi)}} \cos(\omega t - \xi) \vec{u}_y$$

l'onde dans le guide possède une amplitude qui dépend de z , ceci s'explique par la superposition de deux ondes : incidente et réfléchie.

3.3.9 un ventre correspond à E_{max} donc :

$$\cos(2k_g z_V - \psi) = 1 \Rightarrow 2k_g z_V - \psi = 2\pi n \Rightarrow z_V = \frac{2\pi n + \psi}{2k_g} = n \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\psi}{2k_g}$$

avec n un entier.

un noeud correspond à E_{min} donc :

$$\cos(2k_g z_N - \psi) = -1 \Rightarrow 2k_g z_N - \psi = \pi + 2\pi n \Rightarrow z_N = \frac{2\pi(n + 1/2) + \psi}{2k_g} = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\psi}{2k_g}$$

avec n un entier.

la distance entre deux noeuds consécutifs : $\Delta = |z_N(n+1) - z_N(n)| = \frac{\lambda_g}{2}$

3.3.10 on a :

$$\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r}{1 + r^2 - 2r}} = \frac{1 + r}{1 - r} > 1$$

qui s'inverse en :

$$r = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

qui permet la mesure de r à partir de celle du *T.O.S*

3.3.11 $\lambda_g = 2\Delta = 4.22 \text{ cm}$, on calcule pour le mode TE_{10} d'après les données de la partie 3.3 : $k_g = \sqrt{(\frac{\omega}{c_0})^2 - (\frac{\pi}{a})^2} = 149 \text{ m}^{-1} \approx \frac{2\pi}{\lambda_g}$, les deux valeurs sont en accord.

3.3.12 on a d'après 3.3.7 :

$$r = \sqrt{\frac{(1 - k_g\delta)^2 + 1}{(1 + k_g\delta)^2 + 1}} \approx \sqrt{\frac{(1 - 2k_g\delta) + 1}{(1 + 2k_g\delta) + 1}} = \sqrt{\frac{1 - k_g\delta}{1 + k_g\delta}} \approx \sqrt{(1 - k_g\delta)(1 - k_g\delta)} = 1 - k_g\delta$$

donc : $\delta = \frac{1-r}{k_g}$

3.3.13 A.N :

$$\tau = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \sqrt{\frac{A_{max}}{A_{min}}} = 44.4$$

$$r = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} = 0.96$$

$$\delta = \frac{1 - r}{k_g} = 2.96 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0 \delta^2 \omega} = 300 \text{ } S.m^{-1}$$

$$k_g \delta = 0.04 \ll 1$$

l'hypothèse est assez vérifiée.

fin du corrigé

Quelques mesures physiques en océanographie

Cette épreuve comporte deux parties largement indépendantes.

1^{ère} partie :

Étude de la compressibilité et de la conductivité de l'eau océanique

Les principaux paramètres permettant de décrire les propriétés physiques de l'eau océanique sont :

- . la masse volumique ρ ;
- . la température T ;
- . 1a pression P ;
- . la salinité s qui caractérise la quantité de sels dissous contenus dans 1 kg d'eau océanique. On mesure directement s à partir de la conductivité électrique σ de l'eau océanique.

L'équation d'état de l'eau océanique peut donc s'écrire sous la forme :

$$\rho = \rho(P, T, s)$$

D'autre part on rappelle la définition du coefficient de compressibilité isotherme à salinité constante :

$$\chi_{T,s} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,s}$$

Dans tout le problème, on écrira simplement χ_0 le coefficient de compressibilité isotherme à salinité constante de l'eau océanique et on supposera qu'il est constant et positif ($\chi_0 > 0$).

1.1 Étude de la compressibilité de l'eau océanique

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de la pression P dans un bassin océanique calme (port, fosse, ...) que l'on modélise par une couche unique d'eau immobile, de hauteur h , de température et de salinité constantes.. On suppose que le référentiel d'étude lié au bassin est galiléen. L'axe Oz est ascendant et la référence $z = 0$ des hauteurs d'eau est choisie au fond du bassin. Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme et on donne $g = 9,81 m.s^{-2}$. On note $P_0 = P(h) = 10^5 Pa$ la pression atmosphérique à la surface libre du bassin.

1.1.1 En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique pour un élément de fluide du bassin montrer que :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

1.1.2 Donner l'expression de χ_0 en fonction de $(\frac{\partial \rho}{\partial P})_{T,s}$

1.1.3 Déduire des questions 1.1.1 et 1.1.2 l'équation différentielle en z satisfaite par la masse volumique ρ . Intégrer cette équation différentielle et en déduire la loi d'évolution de la masse volumique $\rho(z)$ avec la hauteur z d'eau. On notera $\rho(0)$ la densité volumique au fond du bassin.

1.1.4 En supposant que la masse volumique est presque constante sur la hauteur totale h du bassin, donner l'expression de la variation relative de masse volumique $\Delta\rho/\rho = [\rho(h) - \rho(0)]/\rho(h)$ en fonction de $\rho(h)$, χ_0 , g et h . Comment varie ρ lorsque z augmente ? Ce résultat semble-t-il convenable ? Justifier.

1.1.5 On donne pour une eau océanique de température $\theta = 20^\circ C$ et de salinité constantes un coefficient $\chi_0 = 4 \cdot 10^{-10} SI$ et une masse volumique à la surface libre $\rho(h) = 1025 kg.m^{-3}$. Déterminer les variations relatives de masse volumique pour des bassins de hauteurs respectives $h = 90 m$, $h = 100 m$ et $h = 10 km$. Conclure.

1.1.6 Déduire de l'expression de $\rho(z)$ établie à la question 1.1.3 la loi donnant la pression $P(z)$ en fonction de la hauteur z d'eau océanique. On notera $P(0)$ la pression au fond du bassin.

1.1.7 Déterminer numériquement la valeur de la pression $P(0)$ au fond d'une fosse océanique de profondeur $h = 10 km$ puis au fond d'un port de plaisance de profondeur $h = 100 m$ et $h = 90 m$. Dans chaque cas, comparer les résultats avec ceux que l'on aurait obtenus en supposant la masse volumique constante et égale à $\rho(h)$. Conclure. On utilisera encore la valeur $\rho(h) = 1025 kg.m^{-3}$ pour les applications numériques.

1.2 Étude de la conductivité de l'eau océanique

On se propose d'aborder dans cette partie l'étude d'un dispositif de mesure de la conductivité électrique σ de l'eau océanique. La mesure de σ permet de connaître ensuite la salinité s de l'eau océanique.

Pour mesurer la conductivité électrique de l'eau océanique à une profondeur quelconque, DIETRICH et al. ont proposé en 1980 l'utilisation du dispositif représenté figure 1. Aucune connaissance sur les transformateurs n'est nécessaire pour résoudre le problème.

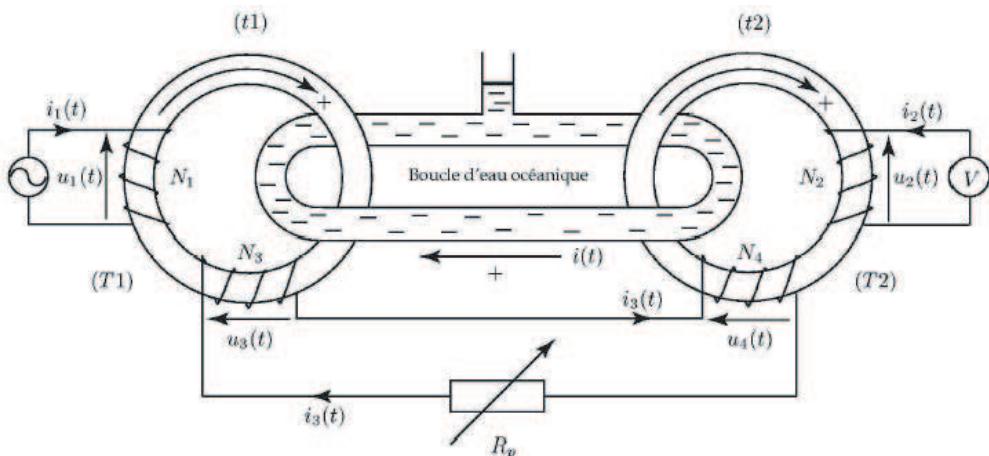


Fig 1 : Dispositif de mesure de la conductivité de l'eau océanique par induction.

La méthode de mesure de la conductivité électrique proposée par DIETRICH et al. utilise une boucle d'eau océanique comprise dans un circuit fermé. Cette boucle couple par induction les transformateurs (T1) et (T2) comme indiqué figure 1. Pour une excitation $U_l(t)$ sinusoïdale de pulsation ω , les phénomènes d'induction font apparaître dans la boucle d'eau de résistance R un courant électrique sinusoïdal d'intensité instantanée $i(t)$ de même pulsation ω et de valeur efficace I . L'orientation du circuit électrique constitué par la boucle d'eau océanique est indiquée sur la figure.

On suppose que le récipient fermé qui contient la boucle d'eau océanique est parfaitement perméable au champ magnétique et sans influence sur les mesures.

Les transformateurs (T1) et (T2) sont constitués de :

(T1) : un tore (tl) de section circulaire S et de circonférence moyenne ℓ , qui canalise parfaitement le champ magnétique \vec{B}_1 dont les lignes de champ sont alors des cercles concentriques de même axe que le tore. Le champ magnétique \vec{B}_1 est supposé uniforme sur la section S et nul à l'extérieur du tore et son sens positif est indiqué figure 1. Le tore (tl) est équipé de

deux enroulements de fils conducteurs parfaits électriquement isolés comportant respectivement N_1 et N_3 spires de section circulaire S . Le sens de ces enroulements est indiqué figure 1.

(T2) : un tore (t2) de section circulaire S et de circonference moyenne ℓ , qui canalise parfaitement les lignes de champ du champ magnétique \vec{B}_2 dont les lignes de champ sont alors des cercles concentriques de même axe que le tore. \vec{B}_2 est supposé uniforme sur la section S et nul à l'extérieur du tore, son sens positif est indiqué figure 1. Le tore (t2) est équipé de deux enroulements de fils conducteurs parfaits électriquement isolés comportant respectivement N_2 et N_4 spires de section circulaire S . Le sens de ces enroulements est indiqué figure 1.

Les tores (tl) et (t2) sont strictement identiques. On note ϕ_{c1} (respectivement ϕ_{c2}) le flux du champ magnétique \vec{B}_1 (respectivement \vec{B}_2) à travers la section S du tore (t1) (respectivement (t2)). On respectera impérativement les orientations imposées par l'énoncé.

Un générateur de tension idéal impose une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_1\sqrt{2}\cos\omega t$ de valeur efficace U_1 et de pulsation ω à l'entrée du transformateur (Tl) (enroulement N_1).

La tension instantanée $u_2(t)$ à la sortie du transformateur (T2) (enroulement N_2) est de la forme $u_2(t) = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$. Les fréquences de travail sont telles que l'on peut se placer dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents. D'autre part toutes les grandeurs électriques du dispositif $i_l(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_3(t)$ et $u_4(t)$ sont sinusoïdales de même pulsation ω et on utilisera les notations réelles et complexes habituelles résumées par :

$$x_k(t) = X_k\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_k) \text{ et } \underline{x}_k(t) = \underline{X}_k\sqrt{2}\exp j\omega t$$

avec j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1.2.1 Donner l'expression de $\Phi_{1c}(t)$ et de $\Phi_{2c}(t)$ en fonction de S , de $B_1(t)$ et de $B_2(t)$.

On montre en électromagnétisme que la forme locale du théorème d'AMPÈRE dans le matériau qui constitue chaque tore s'écrit en régime quasi-permanent :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu\vec{j}$$

avec \vec{j} le courant volumique électrique et μ la perméabilité magnétique du milieu constituant le tore, supposée constante et positive.

1.2.2 Établir la forme intégrale du théorème d'AMPÈRE.

1.2.3 En appliquant la forme intégrale du théorème d'AMPÈRE à la circonference moyenne du tore de longueur ℓ , exprimer la valeur algébrique $B_1(t)$ du champ magnétique qui circule dans le tore (tl) en fonction de ℓ , μ , N_1 , N_3 , $i_1(t)$, $i(t)$ et $i_3(t)$.

1.2.4 Établir de même l'expression de la valeur algébrique $B_2(t)$ du champ magnétique qui circule dans le tore (t2) en fonction de ℓ , N_2 , N_4 , $i_2(t)$, $i(t)$ et $i_3(t)$.

1.2.5 Dans toute la suite du problème, on suppose que l'on place un voltmètre numérique d'impédance d'entrée infinie à la sortie du transformateur (T2). Comment se simplifie l'expression de $B_2(t)$ précédemment établie ?

1.2.6 Déduire de la question 1.2.5 l'expression du flux instantané $\Phi_{2c}(t)$. On appellera cette expression la relation (1).

1.2.7 En appliquant la loi de LENZ-FARADAY au circuit électrique constitué de la boucle d'eau océanique supposée filiforme, établir la relation liant $i(t)$, $\Phi_{1c}(t)$, $\Phi_{2c}(t)$ et la résistance R de l'eau océanique présente dans la boucle. On appellera (2) cette relation.

1.2.8 Établir l'expression de $u_1(t)$ en fonction de N_1 et $\Phi_{2c}(t)$ et l'expression de $u_3(t)$ en fonction de N_3 et $\Phi_{1c}(t)$

1.2.9 De même établir l'expression de $u_2(t)$ en fonction de N_2 et $\Phi_{2c}(t)$ et l'expression de $u_4(t)$ en fonction de N_4 et $\Phi_{2c}(t)$.

1.2.10 Déterminer l'expression de l'intensité instantanée $i_3(t)$ du courant électrique qui circule dans le conducteur ohmique de résistance R_p . On exprimera $i_3(t)$ en fonction de $\Phi_{1c}(t)$, $\Phi_{2c}(t)$, R_p , N_3 et N_4 . On appellera (3) cette relation.

1.2.11 À l'aide des relations (1), (2) et (3), montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\Phi_{1c}(t)$ et $\Phi_{2c}(t)$ s'écrit :

$$\frac{\ell R}{\mu S} \Phi_{2c} = (1 - N_3 N_4 \frac{R}{R_p}) \dot{\Phi}_{1c} - (1 + N_4^2 \frac{R}{R_p}) \dot{\Phi}_{2c}$$

1.2.12 Déduire de la question précédente l'équation satisfaite par les valeurs efficaces complexes \underline{U}_1 et \underline{U}_2 .

On suppose dans **la suite du problème** que $N_3 = N_4$ et que $N_1 = N_2$. D'autre part la résistance R de la boucle d'eau est telle que $R \ll R_p/N_4^2$.

1.2.13 Montrer que la valeur efficace U_2 du signal $u_2(t)$ est inférieure à la valeur efficace U_1 du signal $u_1(t)$.

1.2.14 Donner l'expression de la résistance R en fonction de ℓ , μ , S , ω , U_1 et U_2 .

1.2.15 Rappeler l'expression de la résistance R d'un conducteur cylindrique de conductivité électrique σ , de longueur ℓ_T et de section droite circulaire S_T .

1.2.16 On assimile la boucle d'eau océanique à un cylindre de section droite circulaire S_T et de longueur ℓ_T et on suppose qu'à la pulsation de travail ω , on a $U_2 \ll U_1$. Montrer que la conductivité électrique σ de l'eau océanique est donnée par :

$$\sigma = \alpha U_2$$

avec α une constante dont on donnera l'expression en fonction de ω , μ , S , S_T , ℓ , ℓ_T et U_1 .

1.2.17 Établir un protocole expérimental de mesure de la conductivité électrique de l'eau océanique à partir de ce dispositif.

2^{ème} partie : Mesure des variations du niveau des océans

Pour mesurer les variations Δh de la hauteur d'eau d'une fosse océanique, on peut utiliser un capteur de pression qui, placé au fond de cette fosse, permet de mesurer les variations de pression $\Delta P(h)$ dues à Δh . On se propose d'étudier ici un capteur de pression comportant un oscillateur quasi-sinusoidal à lame de quartz.

2.1 Modélisation mécanique d'une lame de quartz

Le quartz est un oxyde de silicium (SiO_2) cristallin qui présente un phénomène de piézoélectricité, c'est à dire que l'on peut trouver dans une lame de quartz (LQ) convenablement taillée deux formes d'énergie couplées : l'énergie mécanique E_m et l'énergie électrique E_e .

Lorsque l'on soumet une lame de quartz (LQ) d'épaisseur initiale e_0 à une tension excitatrice sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos \omega t$, cette lame se met à vibrer de manière symétrique par rapport à son plan neutre (figure 2). On peut alors écrire l'épaisseur $e(t)$ de la lame de quartz sous la forme :

$$e(t) = e_0 + x(t) \quad (1)$$

avec $x(t) = X_0(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)]$ en régime harmonique établi et $|x(t)| \ll e_0$.

On appelle Ox l'axe principal de la lame perpendiculaire au plan neutre et \vec{e}_x le vecteur unitaire porté par cet axe.

On observe expérimentalement que la lame de quartz présente au moins une **résonance** pour une fréquence f_0 caractéristique.

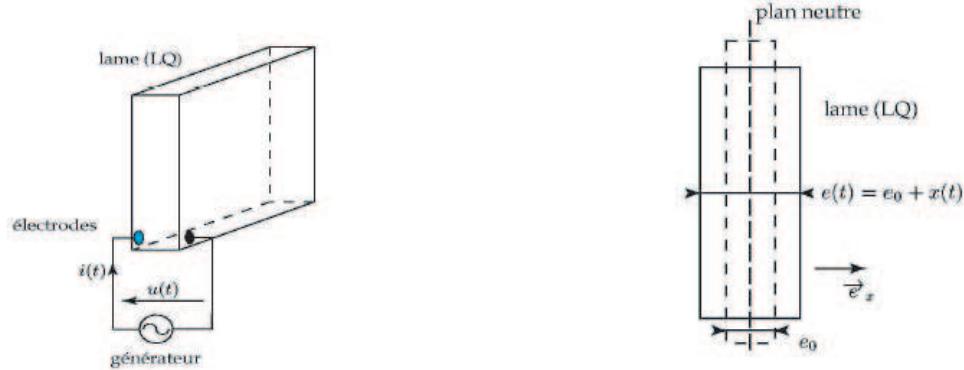


Fig 2 : Lame de quartz (LQ) soumise à une tension sinusoïdale $u(t)$.

2.1.1 Aspect énergétique

2.1.1.1 Lorsque la lame de quartz (LQ) vibre, on peut montrer que l'énergie mécanique E_m de la lame peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m_q\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

avec m_q la masse de la lame de quartz et k une constante dont on donnera le sens physique et l'unité dans le système international (SI). $x(t)$ étant défini par la relation (1), donner le sens physique de chacun des termes de E_m .

2.1.1.2 Rappeler l'expression de la puissance électrique instantanée $p(t)$ reçue par la lame de la part du générateur de tension sinusoïdale en fonction de la tension électrique $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ qui traverse la lame.

2.1.1.3 On modélise les dissipations énergétiques au sein de la lame par une force de frottement visqueux de la forme :

$$\vec{F}_d = -\gamma_q \dot{x} \vec{e}_x$$

avec γ_q une constante positive.

Donner l'expression du travail élémentaire δW_d des forces de frottement visqueux en fonction de γ_q et de \dot{x} .

2.1.1.4 Rappeler le théorème de l'énergie mécanique pour une masse ponctuelle.

2.1.1.5 En généralisant le théorème de l'énergie mécanique à l'énergie totale $E = E_m + E_e$ de la lame de quartz, montrer que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m_q \ddot{x} + \gamma_q \dot{x} + kx = F(t) \quad (2)$$

avec $F(t)$ une fonction du temps t dont on donnera l'expression en fonction de $u(t)$, $i(t)$ et \dot{x} .

2.1.1.6 Mettre l'équation différentielle (2) sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m_q} \quad (3)$$

Donner les expressions de ω_0 et Q en fonction des paramètres mécaniques de la lame de quartz.

2.1.2 Mesure des caractéristiques mécaniques de la lame de quartz Pour mesurer les caractéristiques mécaniques Q et $f_0 = \omega_0/2\pi$ de la lame de quartz, on propose d'utiliser une méthode optique dont le principe est basé sur le dispositif interférentiel de la figure 3.

On éclaire le dispositif à l'aide d'un faisceau laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ (hélium-néon).

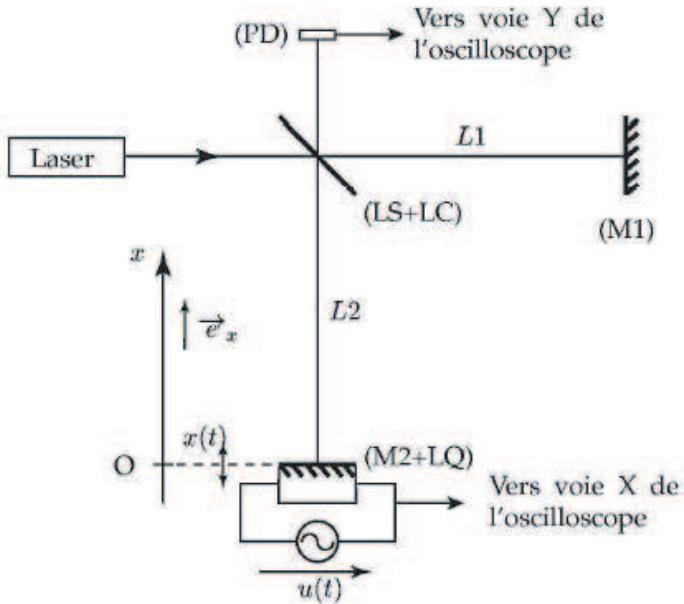


Fig 3 : Dispositif interférentiel pour la mesure des caractéristiques mécaniques de la lame de quartz (LQ).

L'interféromètre de MICHELSON est composé des éléments suivants :

- une lame semi-réfléchissante équipée de sa compensatrice (LS+LC) ;
- un miroir fixe (M1) ;
- un miroir (M2) relié de manière rigide à la lame de quartz (LQ). (M2) est donc susceptible de se translater de $x(t)$ selon l'axe Ox.

Le photo-détecteur (PD) produit une tension électrique proportionnelle à l'intensité lumineuse I détectée. On procède tout d'abord au réglage préliminaire du dispositif interférentiel. Pendant ce réglage, la lame de quartz (LQ) n'est pas excitée électriquement : $u(t) = 0$, $x(t) = 0$ et $e(t) = e_0$. On règle alors le dispositif de telle sorte que les plans des miroirs (M1) et (M2) soient perpendiculaires et d'autre part on s'assure que les longueurs L_1 et L_2 des bras du MICHELSON sont égales.

2.1.2.1 Dans les conditions du réglage préliminaire, qu'observe-t-on au niveau du photo-détecteur (PD) ?

2.1.2.2 Quel est le rôle de la compensatrice (LC) ?

On impose maintenant une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos \omega t$ à la lame de quartz (LQ) et le miroir (M2) se déplace parallèlement à l'axe Ox d'une distance $x(t)$ définie par la relation (1).

2.1.2.3 On admet qu'en régime sinusoïdal établi, le MICHELSON est équivalent à une lame d'air d'épaisseur variable $\varepsilon(t)$ dont on donnera l'expression. Sous quelle incidence cette lame d'air est-elle éclairée ici ?

2.1.2.4 Montrer que dans les conditions d'incidence de la question 2.1.2.3 l'expression de l'intensité

lumineuse I au niveau du détecteur (PD) est donnée par :

$$I = I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda_0}\right) \quad (4)$$

2.1.2.5 Que vaut l'intensité lumineuse I au niveau du détecteur lors du réglage préliminaire ?

2.1.2.6 Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(t)$ lorsque la lame de quartz (LQ) est excitée par la tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos \omega t$. On exprimera le résultat en fonction de $x(t)$.

2.1.2.7 Décrire et expliquer sommairement le phénomène observé au niveau du détecteur (PD) lorsque l'épaisseur $e(t)$ de lame de quartz augmente par exemple.

Le dispositif de liaison et le miroir ont une masse totale $m_m \gg m_q$. De plus un dispositif de guidage non représenté sur la figure 3 permet au plan du miroir (M2) de toujours rester perpendiculaire au plan du miroir (M1). On constate expérimentalement que ce dispositif de guidage introduit un frottement fluide supplémentaire de coefficient $\gamma_m \gg \gamma_q$.

2.1.2.8 Montrer que l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble (M2+LQ) s'écrit en notation complexe, l'équation (5) s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{\omega'_0}{Q'} \dot{x} + \omega'^2_0 x = \frac{F(t)}{m} \quad (5)$$

Donner les expressions de m , Q' et ω'_0 en fonction de k , m_q , m_m , γ_q et γ_m .

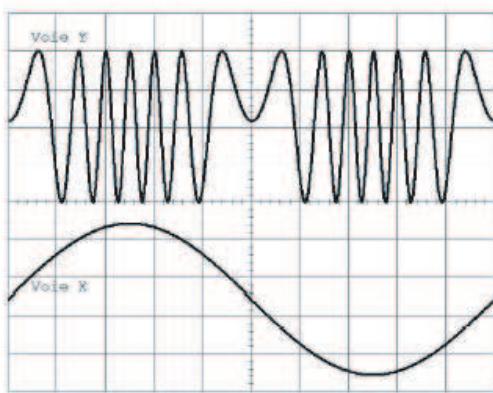
On se place en régime sinusoïdal établi et on suppose que $F(t)$ est donnée par $F(t) = F_0 \cos \omega t$. On écrit toujours $x(t)$ sous la forme $x(t) = X_0(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)]$.

2.1.2.9 Donner l'expression de $X_0(\omega)$ en fonction de F_0 , m , ω , ω'_0 et Q' . Représenter graphiquement l'allure de $X_0(\omega)$ en fonction de ω . Donner les expressions de $\sin \phi(\omega)$ et de $\cos \phi(\omega)$.

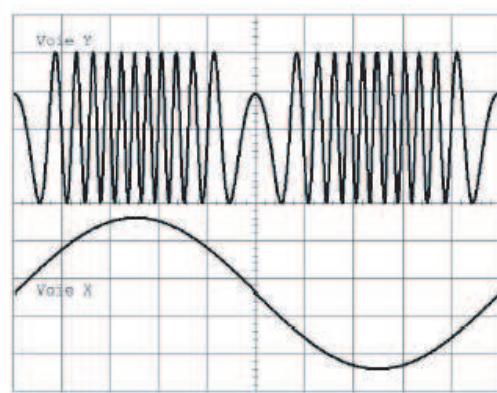
2.1.2.10 Comment se traduit le phénomène de résonance au niveau de l'épaisseur de la lame de quartz (LQ) ? Au niveau de la lame d'air équivalente au MICHELSON ? Au niveau du signal détecté par (PD) ?

2.1.2.11 Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(t)$ en fonction de I_0 , t , ω , $X_0(\omega)$ et de $\phi(\omega)$.

2.1.2.12 On a représenté figure 4 deux oscillosogrammes expérimentaux obtenus pour deux valeurs différentes f_1 et f_2 de la fréquence $f\omega/2\pi$ = du signal $u(t)$.



(a) Oscilloscopogramme obtenu pour $f = f_1$.



(b) Oscilloscopogramme obtenu pour $f = f_2$.

Fig 4 : Oscilloscopogrammes représentant $u(t)$ (voie X) et $I(t)$ (voie Y) pour $f = f_1$ puis $f = f_2$. Les voies ont été décalées verticalement pour plus de clarté.

Sachant que f_1 et f_2 sont toutes deux inférieures à la fréquence f'_0 de résonance du dispositif (M2+LQ), indiquer quel oscilloscopogramme a été obtenu pour $f = 90 \text{ kHz}$ puis pour $f = 95 \text{ kHz}$. Justifier clairement la réponse.

On a relevé (figure 5) le nombre N de maxima d'intensité observés au niveau du détecteur (PD) par demi période $T/2$ du signal $u(t)$, pour différentes valeurs de la fréquence f . On admettra, sans chercher à le démontrer, que l'analyse de la courbe représentée figure 5 conduit à une valeur de Q' égale à vingt : $Q' = 20$.

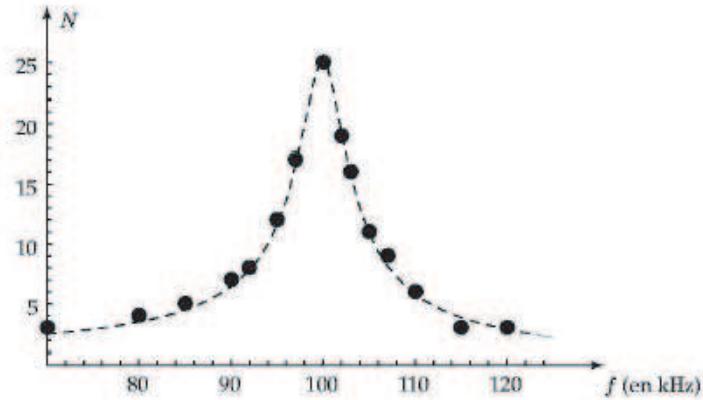


Fig 5 : Nombre N de maxima d'intensité par demi période $T/2$.

2.1.2.13 En remarquant que $Q'^2 \gg 1$, déterminer numériquement à partir de la figure 5 la fréquence de résonance f'_0 du dispositif (M2+LQ).

2.1.2.14 D'après la figure 5, encadrer numériquement la variation maximale d'épaisseur Δe_{max} de la lame de quartz (LQ).

On donne la masse m et le coefficient de frottement fluide γ du système (M2+LQ) : $m = 10^2 \text{ m}_q$ et $\gamma = 10^3 \gamma_q$.

2.1.2.15 Déduire des données et des mesures précédentes la fréquence de résonance f_0 et le facteur de qualité Q de la lame de quartz (LQ) seule. Commenter ces valeurs.

2.2 Modélisation électrique de la lame de quartz

Les mesures de la partie précédente permettent de modéliser la lame de quartz (LQ) par un dipôle RLC série de même fréquence de résonance f_0 et de même facteur de qualité Q que ceux calculés précédemment.

2.2.1 Justifier simplement le modèle électrique proposé pour la lame de quartz.

2.2.2 On donne pour la lame de quartz étudiée $R = 100 \Omega$. Déterminer à l'aide des résultats numériques de la question 2.1.2.15 les valeurs de L et C du modèle électrique.

2.2.3 En réalité il faut ajouter au modèle précédent une capacité parasite $C_0 = 160 \text{ pF}$ en parallèle avec le dipôle RLC série. Que modélise-t-on par cette capacité supplémentaire ?

Dans toute la suite du problème, on supposera que R est négligeable et on prendra $C = 1 \text{ pF}$, $L = 32 \text{ mH}$ et $C_0 = 160 \text{ pF}$.

2.2.4 Représenter graphiquement le dipôle (AB) équivalent à la lame de quartz (LQ).

2.2.5 Montrer que l'admittance complexe $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ du dipôle (AB) peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Y} = j\omega(C + C_0) \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_P})^2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_S})^2}$$

Exprimer ω_P et ω_S en fonction des éléments du modèle. Déterminer les valeurs numériques de ω_P et ω_S .

2.2.6 D'après le modèle électrique précédent, montrer que la lame de quartz (LQ) peut présenter un caractère capacitif ou inductif en fonction de la pulsation ω . En particulier on indiquera le domaine de pulsations pour lequel le dipôle (AB) est inductif.

2.3 Oscillateur à quartz

On considère le schéma électrique de la figure 6(a) où la lame de quartz (LQ) (dipôle (AB) d'admittance complexe \underline{Y} calculée précédemment) est associée à un amplificateur et deux condensateurs additionnels de capacités respectives C_1 et C_2 . Le schéma équivalent de l'amplificateur est représenté figure 6(b), il comporte une source de courant idéale d'intensité de court-circuit $i_{cc} = s.v$ commandée par la tension v , avec s une constante réelle et positive et une résistance ρ .

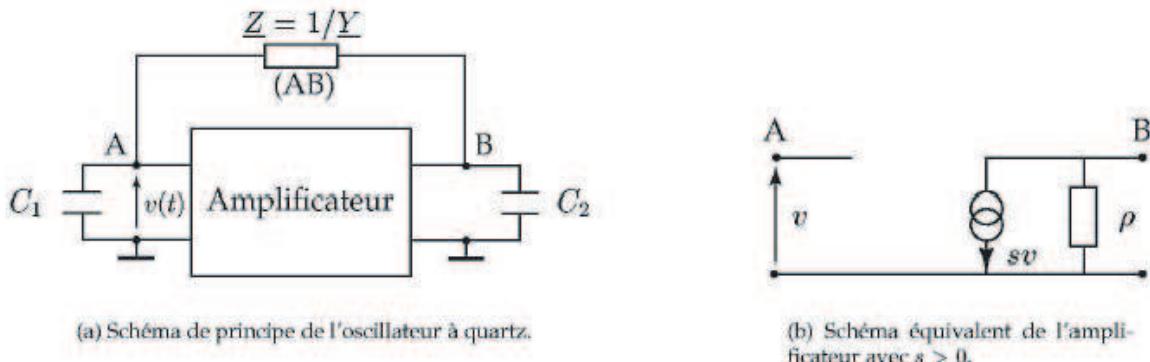


Fig 6 : Oscillateur à quartz. L'amplificateur est composé d'une source de courant commandée par la tension v et d'une résistance ρ .

2.3.1 Représenter sur la copie le schéma complet de l'oscillateur en remplaçant l'amplificateur par son schéma équivalent.

On cherche les conditions d'existence dans le circuit oscillant d'une tension $v(t)$ sinusoïdale de pulsation ω et de valeur efficace complexe V . On suppose que dans ces conditions, l'admittance complexe \underline{Y} du quartz peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL_e\omega}$$

On travaillera en notation complexe.

2.3.2 En appliquant le théorème de MILLMAN aux nœuds A et B, établir deux relations distinctes satisfaites par \underline{V} et \underline{V}_B .

2.3.3 Montrer que des oscillations sinusoïdales peuvent prendre naissance dans le circuit ($\underline{V} \neq 0$) pour une pulsation Ω_0 unique, à condition que ρ vérifie une condition particulière appelée condition d'amplification. Donner l'expression de Ω_0 en fonction de C_1 , C_2 et L_e . Donner la condition d'amplification qui lie ρ , s , C_1 et C_2 .

2.3.4 Établir le plus petit intervalle de pulsations dans lequel se situe Ω_0 . Justifier clairement la réponse.

2.4 Mesure de variations de niveau

L'application d'une variation de pression ΔP sur l'une des faces de la lame de quartz (LQ) permet de modifier la fréquence d'oscillation $f_0 = \Omega_0/2\pi$ de l'oscillateur représenté figure 2.6(a). La fréquence d'oscillation f de l'oscillateur est alors donnée au premier ordre par la relation :

$$\Delta P = \alpha (f_0 - f) \quad (6)$$

avec f_0 la fréquence d'oscillation du circuit à pression atmosphérique $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et α une constante positive qui vaut pour la lame de quartz considérée $\alpha = 10^3 \text{ Pa.Hz}^{-1}$.

2.4.1 En utilisant les résultats de la question 1.1.7 partie 1, déterminer numériquement la variation de fréquence Δf du circuit oscillant placé au fond d'une fosse océanique de profondeur $h = 100 \text{ m}$ si le niveau de la surface libre au-dessus du quartz diminue de $\Delta h = 10 \text{ m}$.

2.4.2 Quelle(s) application(s) peut-on envisager pour ce dispositif en océanographie ?

fin de l'énoncé

Corrigé de l'épreuve CNC physique II MP session 2001 par AIT BENALI

Quelques mesures physiques en océanographie

1^{ère} partie : Étude de la compressibilité et de la conductivité de l'eau océanique

1.1 Étude de la compressibilité de l'eau océanique

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right.$$

1.1.1 l'équation de la statique des fluides s'écrit $-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ soit

donc $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

1.1.2 on a $\chi_{T,s} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}_{T,s}$ or $\rho = \frac{m}{V}$ donc $\chi_0 = -\frac{\rho}{m} \frac{\partial \frac{m}{\rho}}{\partial P}_{T,s} = -\rho \frac{-\frac{\partial \rho}{\partial P}}{\rho^2}_{T,s} \implies \chi_0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}_{T,s}$

1.1.3 on en déduit que $dP = \frac{d\rho}{\chi_0 \rho}$ soit l'équation différentielle $\frac{1}{\chi_0 \rho} \frac{d\rho}{dz} = -\rho g$

par séparation des variables $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = - \int_0^z \chi_0 g dz$

il vient $\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 \chi_0 g z}$

1.1.4 $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 1 - \frac{\rho(0)}{\rho(h)} = -\rho_0 \chi_0 g h \approx -\rho(h) \chi_0 g h$

si $z \nearrow \rho \searrow$ car le fluide en bas est plus comprimé !

1.1.5 :

$h(m)$	$\frac{\Delta \rho}{\rho}$
90	$-3.6 \cdot 10^{-4}$
100	$-4.0 \cdot 10^{-4}$
10000	$-4.0 \cdot 10^{-2}$

cette variation reste faible !

1.1.6 $P(z) = P(0) + \int_0^z -\frac{g \rho_0}{1 + \rho_0 \chi_0 g z} dz \implies P(z) = P(0) - \frac{1}{\chi_0} \ln(1 + \rho_0 \chi_0 g z)$

1.1.7 $P(0) = P(h) + \frac{1}{\chi_0} \ln(1 + \rho_0 \chi_0 g h)$ et pour le cas du fluide incompressible $P^*(0) = P(h) + \rho(h) g h$

$h(m)$	$P(0)(Pa)$	$P^*(0)(Pa)$
90	$10.05 \cdot 10^5$	$10.05 \cdot 10^5$
100	$11.05 \cdot 10^5$	$11.05 \cdot 10^5$
10000	$986.8 \cdot 10^5$	$1007 \cdot 10^5$

résultats sont proches

1.2 Étude de la conductivité de l'eau océanique

1.2.1 $\Phi_{1c}(t) = B_1(t)S$ et $\Phi_{2c}(t) = B_2(t)S$

1.2.2 on a $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu\vec{j}$ d'après le théorème de Stockes $\int \int_{S_\Gamma} \vec{\text{rot}}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ soit le théorème d'Ampère $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \int_{S_\Gamma} \mu\vec{j} \cdot d\vec{S}$

1.2.3 $\ell B_1(t) = \mu(N_1 i_1 + i + N_3 i_3)$

1.2.4 $\ell B_2(t) = \mu(N_2 i_2 - i + N_4 i_3)$

1.2.5 le voltmètre d'impédance infinie implique que $i_2(t) = 0$

donc $\ell B_2(t) = \mu(-i + N_4 i_3)$

$$\boxed{\Phi_{2c}(t) = \frac{S\mu}{\ell}(-i + N_4 i_3)} \quad (1)$$

1.2.7 loi de Faraday $e = Ri = -\frac{d(\Phi_{1c} - \Phi_{2c})}{dt}$

$$\text{soit } \boxed{i = \frac{\dot{\Phi}_{2c} - \dot{\Phi}_{1c}}{R}} \quad (2)$$

1.2.8 $u_1 = -e_1 = N_1 \dot{\Phi}_{1c}$ et $u_3 = -e_3 = N_3 \dot{\Phi}_{1c}$

1.2.9 $u_2 = -e_2 = N_2 \dot{\Phi}_{2c}$ et $u_4 = -e_4 = N_4 \dot{\Phi}_{2c}$

$$\boxed{\text{1.2.10 loi des mailles } R_p i_3 + u_4 + u_3 = 0 \text{ donc } i_3 = -\frac{N_3 \dot{\Phi}_{1c} + N_4 \dot{\Phi}_{2c}}{R_p}} \quad (3)$$

1.2.11 (2) et (3) injectées dans (1) donne

$$\frac{\ell R}{\mu S} \Phi_{2c} = (1 - N_3 N_4 \frac{R}{R_p}) \dot{\Phi}_{1c} - (1 + N_4^2 \frac{R}{R_p}) \dot{\Phi}_{2c}$$

1.2.12 tenant compte de 1.2.8 et 9 en notation complexe , il vient

$$\frac{\ell R}{\mu S} \frac{U_2}{j\omega N_2} = (1 - N_3 N_4 \frac{R}{R_p}) \frac{U_1}{N_1} - (1 + N_4^2 \frac{R}{R_p}) \frac{U_2}{N_2}$$

1.2.13 on aura

$$\underline{U}_2 \approx \frac{\underline{U}_1}{1 - j \frac{\ell R}{\mu S \omega}}$$

$$\text{soit } U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{1 + (\frac{\ell R}{\mu S \omega})^2}} < U_1$$

$$\boxed{1.2.14 \quad R = \frac{\mu S \omega}{\ell} \sqrt{\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1}}$$

$$1.2.15 \quad R = \frac{\ell_T}{\sigma S_T}$$

$$1.2.16 \quad \text{on a } \sigma = \frac{\ell_T}{R S_T} = \frac{\ell \ell_T}{\mu S S_T \omega \sqrt{\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1}} \text{ or } U_2 \ll U_1 \text{ donc } \sigma \approx \frac{\ell \ell_T}{\mu S S_T \omega U_1} U_2 \text{ soit } \alpha = \frac{\ell \ell_T}{\mu S S_T \omega U_1}$$

1.2.17 par étalonnage on détermine α càd on mesure U_{02} pour une solution de σ_0 connue ce qui donne $\sigma = \frac{\sigma_0}{U_{02}} U_2$ puis par une simple lecture du voltmètre on aura σ de n'importe quelle solution !

2^{ème} partie :
Mesure des variations du niveau des océans

2.1 Modélisation mécanique d'une lame de quartz

2.1.1 Aspect énergétique

2.1.1.1 k est la raideur de la force élastique s'exprimant en $N.m^{-1}$

le terme d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m_q\dot{x}^2$ et le terme d'énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}kx^2$

2.1.1.2 en convention récepteur indiquée la puissance reçue $p(t) = u(t)i(t)$

2.1.1.3 $\delta W_d = \vec{F}_d.dx\vec{e}_x = -\gamma_q\dot{x}dx = -\gamma_q\dot{x}^2dt$

2.1.1.4 $dE_m = \delta W^{NC}$ NC forces extérieures non conservatives

2.1.1.5 $dE_m + dE_e = \delta W_d \implies m_q\ddot{x} + k\dot{x} + p(t) = -\gamma_q\dot{x}^2$

soit $m_q\ddot{x} + \gamma_q\dot{x} + kx = -\frac{p(t)}{\dot{x}}$ donc $\boxed{F(t) = -\frac{u(t)i(t)}{\dot{x}}}$

2.1.1.6 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_q}}$ et $Q = \frac{\sqrt{k m_q}}{\gamma_q}$

2.1.2 Mesure des caractéristiques mécaniques de la lame de quartz

2.1.2.1 un point lumineux brillant car $\delta = 0$

2.1.2.2 compenser la différence de marche dûe à l'épaisseur non nulle de la lame séparatrice

2.1.2.3 $\varepsilon(t) = \frac{x(t)}{2}$, les deux miroirs sont éclairés à l'aide du Laser en incidence normale $i = 0$

2.1.2.4 on a $\delta = 2\varepsilon \cos i$ soit $\delta = 2\varepsilon$ donc $I = I_0(1 + \cos \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda_0})$

2.1.2.5 $x(0) = 0$ et $\varepsilon(t = 0) = 0$ donc $I(t = 0) = 2I_0$

2.1.2.6 $I = I_0(1 + \cos \frac{2\pi x(t)}{\lambda_0})$

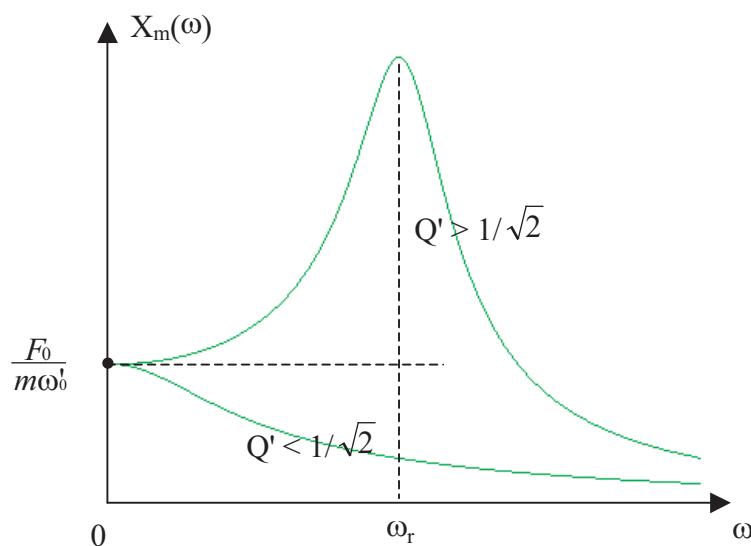
2.1.2.7 le point lumineux au niveau du (PD) devient alternativement sombre et brillant car l'ordre d'interférence $p_0 = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{x(t)}{\lambda_0}$ varie au cours du temps

2.1.2.8 de même qu'en 2.1.1.6 on aura $m = m_q + m_m$ et $\omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m_q+m_m}}$ encore $Q' = \frac{\sqrt{k(m_q+m_m)}}{\gamma_q+\gamma_m}$

2.1.2.9 en notation complexe, l'équation (5) s'écrit :

$$(-\omega^2 + \frac{\omega'}{Q'}j\omega + \omega'^2)X_0 = \frac{F_0}{m} \implies X_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{(-\omega^2 + \frac{\omega'}{Q'}j\omega + \omega'^2)}$$

soit
$$\boxed{X_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega'}{Q'})^2}}}$$



d'autre part $\phi(\omega) = \arg X_0 = \arg[(\omega_0'^2 - \omega^2) - j\frac{\omega' \omega}{Q'}]$

$$\text{donc } \cos \phi(\omega) = \frac{(\omega_0'^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega' \omega}{Q'})^2}} \text{ et } \sin \phi(\omega) = \frac{-\frac{\omega' \omega}{Q'}}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega' \omega}{Q'})^2}} < 0$$

2.1.2.10 à la résonance l'amplitude de la variation de l'épaisseur de la lame (LQ) devient maximale , la lame d'air atteint une épaisseur maximale (varie entre $[-e_{max}, e_{max}]$ pendant une période) , le nombre d'alternance brillant-sombre par période sera maximal

$$\mathbf{2.1.2.11} \quad I(t) = I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi X_0(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))}{\lambda_0} \right] \right\}$$

2.1.2.12 avant la résonance la courbe $X_0(f)$ est croissante , or le nombre N d'alternance brillant-sombre est croissant avec X_0

$$\text{donc } N_1 = 12 < N_2 = 22 \implies X_0(f_1) < X_0(f_2) \implies f_1 < f_2 \implies f_1 = 90 \text{ kHz} < f_2 = 95 \text{ kHz}$$

$$\mathbf{2.1.2.13} \quad \text{si } Q'^2 \gg 1 \text{ on aura } X_0(\omega) \approx \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2}} \text{ soit la résonance } f'_0 = 100 \text{ kHz}$$

2.1.2.14 la distance de translation du miroir mobile du Michelson nécessaire pour défiler un point brillant sombre brillant est $\frac{\lambda_0}{2}$ en effet $\Delta p_0 = 1 = \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda_0}$

soit entre les instants $[0, \frac{T}{4}]$, $x(t)$ varie entre $[0, X_0]$

la variation de l'épaisseur de la lame d'air équivalente vaut à la résonance $\Delta\varepsilon = \frac{25}{2} \times \frac{633}{2} \text{ nm}$
donc $\Delta e_{max} = 2\Delta\varepsilon = 7.9 \mu\text{m}$

$$\mathbf{2.1.2.15} \quad \text{on a } \omega'_0 = \sqrt{\underbrace{\frac{k}{m_q + m_m}}_{\text{masse totale}}} = \sqrt{\frac{k}{100m_q}} = \frac{\omega_0}{10} \text{ soit } \boxed{f_0 = 10 \text{ Hz} \quad f'_0 = 1.0 \text{ MHz}}$$

$$\text{d'autre part } Q' = \frac{\sqrt{k(m_q + m_m)}}{\gamma_q + \gamma_m} = \frac{\sqrt{100km_q}}{1001\gamma_q} \approx \frac{Q}{100} \text{ donc } \boxed{Q = 2000}$$

la résonance de la lame de quartz est prononcé (pic très étroit) à une fréquence élevé 1 MHz

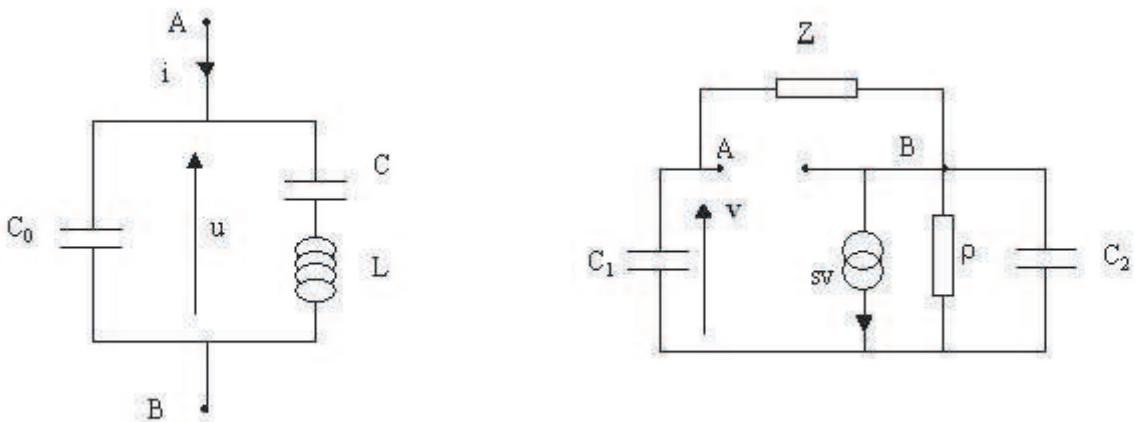
2.2 Modélisation électrique de la lame de quartz

2.2.1 pour un dipôle RLC série : $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L} \frac{du}{dt}$ c'est une équation analogue à l'équation (3)
il vient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

2.2.2 on a $R = 100 \Omega$, $Q = 2000$ et $\omega_0 = 2\pi 10^6 \text{ Hz}$ soit $L = \frac{RQ}{\omega_0} = 32 \text{ mH}$ et $C = \frac{1}{RQ\omega_0} = 0.8 \text{ pF}$

2.2.3 la capacité parasite modélise la capacité formée par les deux conducteurs de connexion au niveau des faces de la lame !

2.2.4 :



$$2.2.5 \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L} = jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1-LC\omega^2} = j\omega(C + C_0) \frac{1 - \frac{LC C_0}{C + C_0} \omega^2}{1 - LC\omega^2}$$

$$\text{soit } \omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5.59 \cdot 10^6 \text{ Hz et } \omega_p = \sqrt{\frac{C+C_0}{LC C_0}} = 5.61 \cdot 10^6 \text{ Hz} > \omega_s$$

2.2.6 AB est capacitif si $\underline{Y} = jC_{eq}\omega$ donc $Im(\underline{Y}) > 0 \Rightarrow \omega \in [0, \omega_s] \cup [\omega_p, +\infty[$

AB est inductif si $Im(\underline{Y}) < 0 \Rightarrow \omega \in]\omega_s, \omega_p[$

2.3 Oscillateur à quartz

2.3.1 : voir fig

2.3.2 le théorème de Millmann au point A

$$\underline{V} = \frac{\frac{0}{\underline{Z}_{C1}} + \frac{V_B}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{C1}} + \frac{1}{\underline{Z}}} \Rightarrow \underline{V} = \frac{1}{1 - L_e C_1 \omega^2} \underline{V}_B$$

le théorème de Millmann au point B

$$\underline{V}_B = \frac{\frac{V}{\underline{Z}} + \frac{0}{\underline{Z}_{C2}} + \frac{0}{\rho} - sV}{\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C2}} + \frac{1}{\rho}} \Rightarrow \underline{V}_B = \frac{1 - jsL_e\omega}{1 - L_e C_2 \omega^2 + j \frac{L_e}{\rho} \omega} \underline{V}$$

2.3.3 :

$$2.3.2 \Rightarrow 1 - jsL_e\omega = (1 - L_e C_2 \omega^2 + j \frac{L_e}{\rho} \omega)(1 - L_e C_1 \omega^2)$$

$$\text{la partie réelle donne } 1 = (1 - L_e C_2 \omega^2)(1 - L_e C_1 \omega^2) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_e C_1 C_2}} = \Omega_0$$

$$\text{la partie imaginaire donne } \rho = \frac{L_e C_1 \omega^2 - 1}{s} = \frac{C_1}{s C_2}$$

2.3.4 la lame de quartz AB est équivalente à une inductance $jL_e\omega$ dans l'intervalle

$$[\omega_s = 5.59, \omega_p = 5.61] \text{ MHz}$$

2.4 Mesure de variations de niveau

$h(\text{m})$	$\Delta P = P(0) - P(h) \text{ (Pa)}$	$f_0 - f = \frac{\Delta P}{\alpha} \text{ (Hz)}$
100	$10.05 \cdot 10^5$	1005
90	$9.05 \cdot 10^5$	905

donc la variation de fréquence $\Delta f = f_{90} - f_{100} = (f_0 - 905) - (f_0 - 1005) = 100 \text{ Hz}$

2.4.2 prévention des inondations et des Tsunamis

mesure de la hauteur des houles et des vagues.

fin du corrigé

Quelques aspects de la physique des plasmas

Un plasma est un gaz ionisé composé d'atomes ou molécules neutres, d'ions positifs et d'électrons. On rencontre de tels milieux dans plusieurs domaines tels que par exemple :

- au laboratoire, le projet de fusion thermonucléaire contrôlée utilise un plasma dont la température atteindrait, s'il est suffisamment confinée, les quelques millions de kelvin nécessaires pour déclencher la fusion nucléaire ;
- dans la vie quotidienne, les tubes fluorescents et certaines lampes d'éclairage utilisent des décharges électriques dans un gaz qui se trouve alors partiellement ionisé ;
- on estime enfin que 99% de la matière de l'Univers est sous forme de plasma (nuages interstellaires, . . .)

La composition d'un plasma est caractérisée par les densités, ou nombres de particules par unité de volume, des différentes espèces : n_a pour les espèces neutres, n_i pour les ions et n_e pour les électrons. Le plasma est globalement neutre. Tout au long du problème, on assimilera les propriétés électromagnétiques du plasma à celles du vide caractérisées par une permittivité électrique ε_0 et une perméabilité magnétique μ_0 . Les électrons seront supposés non relativistes et on négligera leur poids devant les autres forces mises en jeu.

Cette épreuve comporte cinq parties largement indépendantes entre elles.

Données utiles et notations

- . Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$;
- . Masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$;
- . Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$;
- . Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3,0 \cdot 10^8 m.s^{-1}$;
- . Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$;
- . Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J.K^{-1}$;
- . Constante de PLANK réduite : $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} J.s$;
- . Laplacien scalaire en coordonnées sphériques (r, θ, φ) pour un champ scalaire f ne dépendant que de la coordonnée r :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2}$$

Identité vectorielle :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \Delta \vec{C}$$

- . On rappelle enfin les équations de MAXWELL dans un milieu ayant les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}(M, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(M, t) \\ \vec{\nabla}_M \cdot \vec{B}(M, t) &= 0 \\ \vec{\nabla}_M \times \vec{E}(M, t) &= - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

Dans tout le problème $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ désignera une base orthonormée directe attachée au système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Pour les grandeurs évoluant sinusoïdalement avec le temps, on utilisera la notation complexe avec le facteur $\exp -i\omega t$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Conformément à la pratique courante, les grandeurs complexes seront soulignées.

1^{ère} partie : Réponse d'un plasma à un champ électromagnétique

Le plasma est soumis à l'action d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . On suppose que les ions positifs sont fixes par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen. Les électrons du plasma sont supposés en plus soumis à une force du type "frottement visqueux" donnée par $\vec{f} = -(m_e/\tau)\vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de l'électron et τ une constante positive. On négligera la force d'origine magnétique.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Quelle est la dimension de la constante τ ? Justifier.

1.1.2 Quelle est l'origine de la force \vec{f} ?

1.1.3 Écrire l'équation du mouvement vérifiée par la vitesse \vec{v} d'un électron du plasma.

1.1.4 Exprimer le vecteur courant volumique \vec{j} en fonction de n_e , e et \vec{v} .

1.1.5 En déduire l'équation différentielle vérifiée par \vec{j} .

1.2 Pulsation plasma

1.2.1 À partir des équations de MAXWELL, établir l'équation de conservation de la charge et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ .

1.2.2 Montrer que, si on néglige les causes d'amortissement, le plasma peut être le siège d'une oscillation d'ensemble du gaz électronique. Exprimer la pulsation ω_p de ce mode propre d'oscillation de charges, appelée pulsation plasma, en fonction de n_e , e , m_e et ϵ_0 .

1.2.3 Calculer ω_p ainsi que la longueur d'onde λ_p correspondante en précisant le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient, dans les cas suivants :

- ionosphère terrestre où $n_e = 10^{11} m^{-3}$;

- décharge dans un gaz où $n_e = 10^{21} m^{-3}$;

- sodium métallique de concentration atomique, où le nombre d'atome par unité de volume, $C_{Na} = 6,02 \cdot 10^{28} m^{-3}$; on supposera que chaque atome de sodium donne **un électron** de conduction;

- aluminium métallique de concentration atomique $C_{Al} = 2,65 \cdot 10^{28} m^{-3}$; on supposera que chaque atome d'aluminium donne **trois électrons** de conduction.

On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau.

1.3 Conductivité électrique

Le champ électrique est un champ harmonique qui s'écrit en notation complexe $\underline{E} = \vec{E}_0 \exp -i\omega t$.

1.3.1 Exprimer le vecteur courant volumique \vec{j} en fonction de \underline{E} , ω , ω_p , ϵ_0 et τ .

1.3.2 Montrer que le plasma vérifie une loi d'OHM généralisée et en déduire la conductivité complexe $\underline{\sigma}(\omega)$ du plasma.

2^{ème} partie :
Auto-confinement d'une colonne de plasma

Certaines expériences de physique nécessitent de confiner de la matière dans une région limitée de l'espace. Le but de cette partie est de montrer qu'un plasma peut s'auto-contracter lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité suffisante. Pour cela on considère une colonne de plasma de symétrie cylindrique d'axe Oz et de rayon R . Le plasma est traversé par un courant électrique d'intensité I constante dirigé suivant Oz et uniformément réparti dans la section droite de la colonne de plasma. Le plasma est supposé en équilibre thermodynamique local et on note $n(r)$ la densité totale des particules à la distance r de l'axe. La pression $p(r)$ est donnée par la loi des gaz parfaits sous sa forme locale $p(r) = n(r)k_B T$ où k_B est la constante de BOLTZMANN et T la température thermodynamique supposée constante.

- 2.1 Déterminer l'expression du champ magnétique créé par le courant I en tout point de l'espace.
- 2.2 Exprimer la force magnétique $d\vec{F}_m$ m dûe au courant I qui s'exerce sur un élément de volume $d\tau$ de plasma. Quelle est l'effet d'une telle force ?
- 2.3 Montrer que les forces de pression qui s'exercent sur un élément de volume $d\tau$ peuvent être décrites par une densité volumique donnée, en un point M où la pression est $p(M)$, par $\vec{f}_P(M) = -\vec{\nabla}_M P(M)$.
- 2.4 En déduire l'expression de la pression $p(r)$ à l'équilibre thermodynamique local sachant que la colonne de plasma est placée dans le **vide**.
- 2.5 Établir la formule dite de BENNETT traduisant la condition d'équilibre thermodynamique local du plasma et reliant le nombre total N de particules par unité de longueur de la colonne de plasma et le courant I qui la traverse.
- 2.6 Calculer le courant I nécessaire pour confiner une colonne de plasma de 30 cm de diamètre. La densité des particules supposées monoatomiques est $n_0 = 10^{20} m^{-3}$ et leur énergie cinétique moyenne est égale à 200 keV.

3^{ème} partie :
Effet d'écran dans un plasma

On se propose d'examiner, dans cette partie du problème, comment le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est-il modifié dans un plasma. Pour ce faire, on commence par établir la loi de distribution des charges avant de caractériser l'effet d'écran à l'aide notamment de la longueur de DEBYE.

3.1 Loi de Boltzmann

Considérons un ensemble de charges q dont la densité n_0 à l'équilibre est uniforme. Au sein de cette distribution, on place une charge test Q_t en un point O pris comme origine des **coordonnées sphériques**. On note $n(M)$ la nouvelle distribution des charges et $V(M)$ le potentiel électrostatique résultant de cette perturbation. On suppose que $V(M)$ est à symétrie sphérique et que le système est à l'équilibre thermodynamique à la température T constante. La pression est donnée par $p(M) = n(M)k_B T$. On rappelle que les forces de pression peuvent être décrites par une densité volumique donnée, en un point M où la pression est $p(M)$, par $\vec{f}_P(M) = -\vec{\nabla}_M P(M)$.

- 3.1.1 Écrire la condition d'équilibre des charges sous l'action de la force électrique et des forces de pression et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $n(M)$.

3.1.2 En intégrant l'équation précédente et en tenant compte des conditions aux limites montrer que la densité des particules $n(M)$ obéit à la loi de BOLTZMANN :

$$n(M) = n_0 \exp - \frac{qV(M)}{k_B T}$$

3.2 Longueur de Debye

On se propose maintenant d'appliquer les résultats précédents au plasma considéré. On admettra que la loi de BOLTZMANN reste valable aussi bien pour les électrons que pour les ions. On supposera que les ions positifs portent une seule charge élémentaire positive $+e$ et on notera n_0 leur densité moyenne. On se propose de déterminer le potentiel électrostatique $V(M)$ qui règne autour d'un ion fixe pris comme origine.

3.2.1 Que vaut la densité moyenne des électrons ? Justifier.

3.2.2 On suppose que les densités $n_i(M)$ et $n_e(M)$ obéissent à la loi de BOLTZMANN.

3.2.2.1 Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(M)$ au point M du plasma.

3.2.2.2 Que devient l'expression de $\rho(M)$ dans le cadre de l'approximation de faible perturbation, $eV \ll k_B T$, que l'on adoptera **dans toute la suite** ?

3.2.3 On se propose de déterminer le potentiel qui règne autour d'un ion positif placé à l'origine.

3.2.3.1 Établir l'équation de POISSON reliant le potentiel électrostatique V et la densité volumique de charge ρ .

3.2.3.2 En déduire que le potentiel électrostatique est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{r}{\lambda_D^2} V = 0$$

où λ_D est une constante, appelée longueur de DEBYE, que l'on exprimera en fonction de n_0 , T , e , k_B et c_o .

3.2.3.3 En déduire l'expression du potentiel électrostatique satisfaisant aux conditions aux limites très loin de l'ion ainsi qu'à son voisinage. Justifier. Au besoin, on assimilera les ions à des sphères de rayon négligeable devant la longueur de DEBYE λ_D .

3.2.3.4 Tracer sur un même graphique $V(r)$ et le potentiel créé par un ion de charge $+e$ dans le vide. Comparer et commenter.

3.2.4

3.2.4.1 Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M du plasma.

3.2.4.2 En déduire la charge électrique $Q_{total}(R)$ contenue dans une sphère de rayon R centrée sur l'origine. Que vaut $Q_{total}(R)$ lorsque R est très grand devant la longueur de DEBYE λ_D ? Commenter.

4^{ème} partie : Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Dans cette partie, on se propose d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma. Pour cela, on considère un plasma constitué d'ions de charges $+e$ de densité n_0 uniforme, fixes en première approximation et d'électrons de densité n_0 uniforme en l'absence de champ électromagnétique.

On étudie la possibilité de propagation dans la direction Oz au sein du plasma, d'une onde électromagnétique plane décrite par le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .

Par la suite, tout champ vectoriel \vec{C} sera décomposé en une composante longitudinale parallèle à Oz, notée $\vec{C}_{//}$ et une composante transversale orthogonale à Oz, notée \vec{C}_{\perp}

4.1 Relations générales

4.1.1

4.1.1.1 Donner une définition aussi précise que possible de chacun des termes suivants : onde plane, onde plane transversale, onde plane longitudinale.

4.1.1.2 À partir des équations de MAXWELL, montrer l'existence d'un potentiel vecteur \vec{A} et d'un potentiel scalaire ϕ

4.1.1.3 \vec{A} et ϕ sont-ils uniques ? Expliquer.

4.1.2 Par la suite on imposera la condition supplémentaire $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

4.1.2.1 Montrer qu'alors $\vec{A} = \vec{A}_\perp$.

4.1.2.2 Que vaut alors $\vec{B}_{//}$? En déduire une relation simple entre \vec{B}_\perp et \vec{A} .

4.1.2.3 Exprimer $\vec{E}_{//}$ en fonction de ϕ seulement.

4.1.2.4 Exprimer de même \vec{E}_\perp en fonction de \vec{A} seulement.

4.1.3

4.1.3.1 Établir l'équation de POISSON pour le potentiel scalaire ϕ .

4.1.3.2 Montre que le potentiel vecteur \vec{A} obéit à une équation de POISSON généralisée qui s'écrit :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Pourquoi cette équation fait-elle intervenir le potentiel scalaire ϕ ?

4.1.3.3 En déduire une équation différentielle reliant le potentiel vecteur \vec{A} et \vec{j}_\perp

4.1.3.4 En déduire aussi une équation reliant $\vec{j}_{//}$ et ϕ .

4.1.4 Le passage de l'onde dans le plasma provoque un mouvement de ses électrons décrit par le champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$. Il en résulte un courant électrique de vecteur volumique \vec{j} ainsi qu'une modulation de la densité volumique d'électrons qui devient alors $n(z, t) = n_0 + \Delta n(z, t)$. On se placera dans l'hypothèse des faibles perturbations où $\Delta n(z, t) \ll n_0$. On considérera donc Δn , mais aussi ϕ , \vec{A} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{v} et \vec{j} comme des infiniment petits de premier ordre et on linéarisera en conséquence toutes les équations du problème. On s'intéresse au mouvement des électrons sous l'effet de la seule action du champ électrique. On néglige donc le poids des électrons ainsi que l'action de la force magnétique.

On donne l'expression de l'accélération \vec{a} d'un électron passant au point M à l'instant t, en fonction du champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

On remarquera que le terme $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ est un terme de second ordre en \vec{v} .

4.1.4.1 Écrire l'équation du mouvement d'un électron du plasma siège de l'onde électromagnétique.

4.1.4.2 Exprimer \vec{v}_\perp en fonction de e , m_e et \vec{A} uniquement.

4.1.4.3 Exprimer de même \vec{j} en fonction de n_0 , e et \vec{v} .

4.1.5 Déduire de ce qui précède, l'équation différentielle que doit vérifier \vec{A} .

4.2 Conditions de propagations

On cherche à étudier la possibilité de propagation dans le plasma d'une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique décrite par le potentiel vecteur $\vec{A} = \vec{A}_0 \exp i(kz - \omega t)$ où \vec{A}_0 est un vecteur réel constant.

4.2.1 Établir la relation de dispersion entre k et ω et faisant apparaître la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$.

4.2.2

4.2.2.1 Tracer la courbe représentative de k en fonction de ω . On tracera sur le même graphique, la relation de dispersion pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le vide illimité.

4.2.2.2 Dans quel domaine de fréquence y'a-t-il propagation ? Que se passe-t-il dans l'autre domaine ; on donnera dans ce dernier cas, l'expression du potentiel vecteur \vec{A} et on la commenterà.

4.2.3

4.2.3.1 Définir et calculer la vitesse de phase v_φ . Commenter.

4.2.3.2 Définir de même et calculer la vitesse de groupe v_g . Commenter.

4.2.3.3 Quelle relation simple lie v_φ et v_g à la célérité c_0 de la lumière dans le vide ?

4.3 Ondes longitudinales

On examine dans cette partie la possibilité de propagation d'une onde électromagnétique longitudinale progressive et monochromatique dont le potentiel scalaire est donné, en notation complexe, par $\underline{\phi}(z, t) = \phi_0 \exp i(kz - \omega t)$.

4.3.1 Exprimer \vec{j}_{\parallel} en fonction de ϵ_0 , k , ω et ϕ .

4.3.2 En déduire une expression de \vec{v}_{\parallel} en fonction de ϵ_0 , n_0 , e , k , ω et ϕ .

4.3.3 Établir une autre expression de \vec{v}_{\parallel} en fonction de e , m_e , ω , k et ϕ .

4.3.4 En déduire que pour, k quelconque, il existe une seule pulsation permettant la propagation d'une onde longitudinale dans le plasma. Donner l'expression de cette pulsation et commenter.

5^{ème} partie :

Effets collectifs dans un plasma - Plasmons

Dans cette partie du problème, on se propose de donner une interprétation physique de la pulsation plasma ω_p introduite dans les parties précédentes. Cette pulsation apparaîtra comme étant celle d'oscillation collective du gaz de charges. On pourra alors introduire la notion de plasmon. On exposera enfin une méthode d'excitation des plasmons dans un matériau solide.

5.1 Préliminaire

5.1.1 On considère une distribution superficielle de charge σ uniforme confondue avec le plan xOy placée dans le vide. Établir l'expression du champ électrique créé par cette distribution en un point situé à une distance h du plan xOy très faible devant les dimensions linéaires caractéristiques de la distribution.

5.1.2 On considère à présent deux distributions du même type que la précédente caractérisées par les densités superficielles $+\sigma$ et $-\sigma$; $\sigma > 0$. Les deux distributions sont séparées d'une distance d très faible devant leur dimensions linéaires caractéristiques. Établir l'expression du champ électrique qui règne dans l'espace compris entre les deux distributions.

5.2 Oscillations longitudinales d'une colonne de plasma

On considère un cylindre de plasma d'axe Oz, de hauteur h très faible devant ses dimensions linéaires transversales caractéristiques. Il contient des ions de charge $+e$ et de masse m_i et des électrons. On désigne par n_0 la densité à l'équilibre des électrons égale à celle des ions. On suppose que les ions sont fixes. On déplace l'ensemble des électrons d'une distance z petite devant h de sorte que la distribution de charge résultante est équivalente, lorsque $z \neq 0$, à celle étudiée en 5.1.

5.2.1 Pourquoi peut-on considérer les ions comme étant fixes en première approximation ?

5.2.2 Déterminer la densité équivalente σ .

5.2.3 Quelle est la force qui agit sur un électron du plasma ?

5.2.4 Établir l'équation différentielle du mouvement des électrons.

5.2.5 Montrer que les électrons du plasma effectuent des oscillations collectives à une pulsation que l'on exprimera en fonction de n_0 , e , m_e et ϵ_0 . Commenter.

5.3 Plasmon

Un plasmon est une oscillation de plasma quantifiée d'énergie $\hbar\omega_p$ et d'impulsion $\hbar\vec{k}$. Pour observer l'excitation de plasmon, on soumet une fine couche métallique au bombardement par un faisceau homocinétique d'électrons d'énergie cinétique initiale donnée E_c . On compte le nombre des électrons N_s ayant traversé la couche tout en mesurant leur énergie cinétique. Le tracé de N_s en fonction de la perte d'énergie $\Delta E = E_{ci} - E_{cf}$ des électrons constitue un spectre de pertes d'énergie (figure 1).

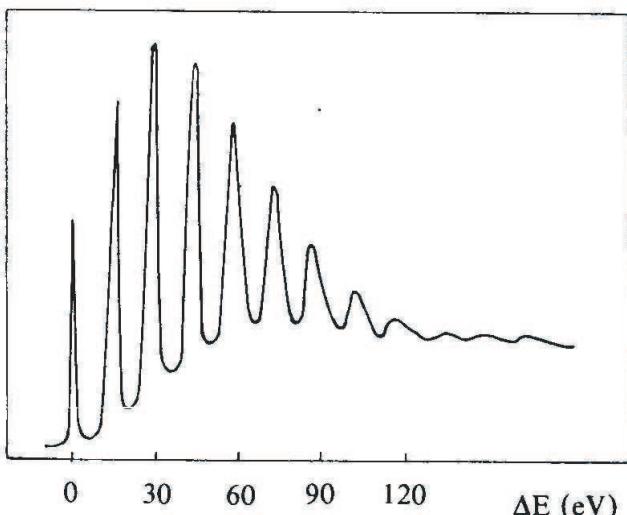


Fig 1 : Spectre des pertes d'énergie ΔE subies par des électrons d'énergie cinétique initiale $E_{ci} = 50 \text{ keV}$ traversant une couche mince d'aluminium d'épaisseur 240 nm.

D'après P. TREBBIA et C. COLLIEUX.

5.3.1 En exprimant une loi de conservation, donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c^{(1)}$ d'un électron ayant excité un seul plasmon.

5.3.2 Donner de même l'expression de l'énergie cinétique $E_c^{(n)}$ d'un électron ayant excité n plasmons.

5.3.3 La figure 1 représente le spectre des pertes d'énergie subies par des électrons d'énergie cinétique initiale $E_{ci} = 50 \text{ keV}$ traversant une couche mince d'aluminium d'épaisseur 240 nm.

5.3.3.1 Déterminer à partir du graphe, l'énergie du plasmon de volume ainsi mis en évidence.

5.3.3.2 En déduire la densité électronique n_0 de la couche mince d'aluminium considérée.

fin de l'énoncé

Quelques aspects de la physique des plasmas

1^{ère} partie : Réponse d'un plasma à un champ électromagnétique

1.1 Préliminaires

1.1.1 $[\vec{f}] = [m\vec{a}] = \left[\frac{m\vec{v}}{\tau} \right] \Rightarrow [\tau]$ est un temps en s

1.1.2 les chocs

1.1.3 $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ force magnétique et poids négligés donc $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} \right.$

1.1.4 $\vec{j} = \rho_m \vec{v} = -n_e e \vec{v}$

1.1.5 PFD devient $\left| \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E} \right.$

1.2 Pulsation plasma

1.2.1 $\operatorname{div}(M - A) \Rightarrow 0 = \operatorname{div}\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ tenant compte de $(M - G) \Rightarrow \left| \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right.$
soit : $\operatorname{div}(1.1.5)$ et $M - G \Rightarrow \left| \ddot{\rho} + \frac{1}{\tau} \dot{\rho} + \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0} \rho = 0 \right.$

1.2.2 $\ddot{\rho} + \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0} \rho \approx 0 \Rightarrow \rho(M, t) = \rho(M, 0) \cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ indépendante du point M c'est une oscillation homogène d'ensemble

1.2.3

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$$

milieu	pulsation (Hz)	longueur d'onde	domaine
ionosphère	$18 \cdot 10^6$	1.05 km	Hertzienne
décharge	$1.8 \cdot 10^{12}$	1.05 mm	Radio
Aluminium ($3e^-$)	$2.7 \cdot 10^{16}$	$0.07 \mu m$	U.V
Sodium	$1.4 \cdot 10^{16}$	$0.13 \mu m$	U.V

1.3 Conductivité électrique

1.3.1 (1.1.5) $\Rightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{\tau}{1-i\tau\omega} \frac{n_e e^2}{m_e} \underline{\vec{E}}$ d'où : $\left| \underline{\vec{j}} = \frac{\tau \varepsilon_0 \omega_p^2}{1-i\tau\omega} \underline{\vec{E}} \right.$

1.3.2 loi d'Ohm généralisée $\vec{j} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}}$ si : $\underline{\sigma} = \frac{\tau \varepsilon_0 \omega_p^2}{1-i\tau\omega}$

2^{ème} partie : Auto confinement d'une couche de plasma

2.1 Le plan (M, Oz) est un plan de symétrie P^+ des courants donc $\vec{B} \perp P^+$ soit : $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$

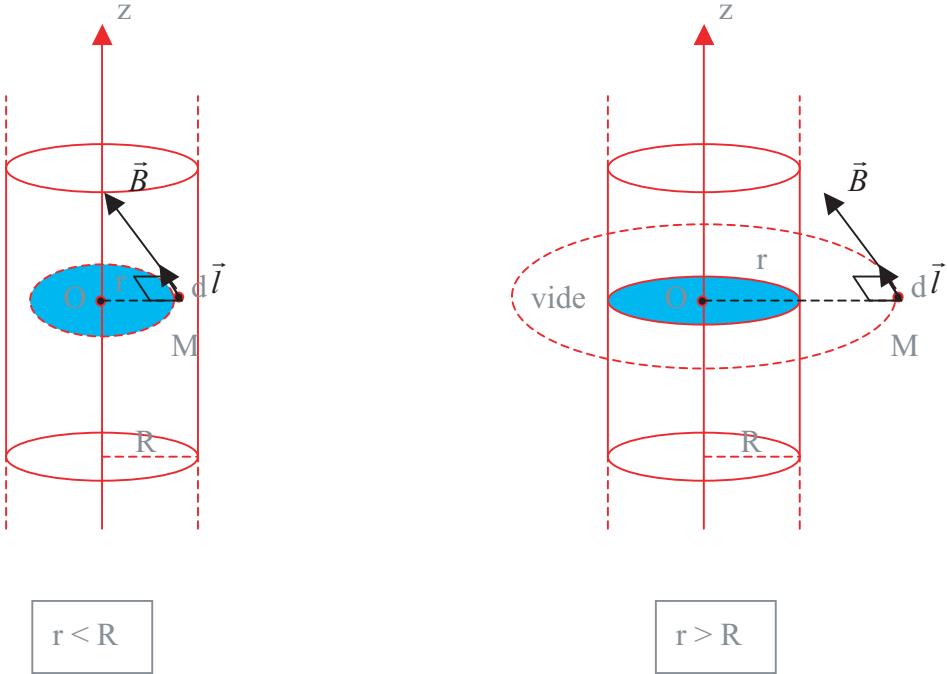
La colonne est invariante par rotation et translation selon Oz donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$.

Le théorème d'ampère en régime permanent appliqué sur un contour circulaire d'axe Oz , de rayon r :

$$\int_{\Gamma} B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = \mu_0 \int \int_{S_\Gamma} \vec{j} \cdot dS \vec{u}_z$$

or $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$, il vient :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & r \geq R \end{cases}$$



$$2.2 \quad d\vec{F}_m = \vec{j}d\tau \times \vec{B}_{int} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{z}d\tau \times \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} d\tau \vec{e}_r$$

c'est une force centripète donc la colonne s'auto-confine !

2.3 sur un élément $d\tau = dx dy dz$ la résultante des forces de pression projetée sur Ox :

$$dF_x = -p(x + dx, y, z) dy dz + p(x, y, z) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} d\tau$$

il vient sur les trois axes : $\vec{f}_{vol} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = -\nabla p$

$$2.4 \text{ à l'équilibre } d\vec{F}_{magn} + d\vec{F}_{pr} = \vec{0} \implies \nabla p = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \vec{e}_r \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} & -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

soit : $p(r) = -\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 R^4} + cte$ or $p(r = R) = 0$ car la colonne est dans le vide
soit :

$$p(r) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4} (R^2 - r^2)$$

2.5 on a : $N\ell = \int \int \int n(r)d\tau = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \frac{1}{k_B T} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4} (R^2 - r^2) r dr d\theta dz$

$$\text{soit } N = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k_B T}$$

2.6 d'après le théorème de l'équipartition de l'énergie en théorie cinétique $\bar{E}_c = \frac{1}{2} k_B T$ car les particules sont dirigées selon le courant Oz or $n_0 \ell \pi R^2 = N\ell$ sachant que $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$ on aura
 $I = 4\sqrt{\frac{\pi R^2 n_0 E_c}{\mu_0}} = 1.7 \cdot 10^6 A$

3^{ème} partie :
Effet d'écran dans un plasma

3.1 Loi de Boltzmann

$$3.1.1 -\vec{\nabla} p + \vec{f}_e = \vec{0} \text{ avec } \vec{f}_e = \frac{d\vec{F}_e}{d\tau} = nq\vec{E} = -nq\vec{\nabla}V$$

En symétrie sphérique : $\frac{dp(r)}{dr} = -qn(r)\frac{dV(r)}{dr}$ or $p = nk_B T$ donc $k_B T \frac{dn}{n} = -qdV$

$$3.1.2 \text{ soit } n = cte \exp -\frac{qV}{k_B T} \text{ à l'infini } V = 0 \text{ et } n = n_0 \text{ donc } n = n_0 \exp -\frac{qV}{k_B T}$$

3.2 Longueur de Debye

3.2.1 milieu globalement neutre $n_0 e + \bar{n}_e(-e) = 0 \implies \bar{n}_e = n_0$

3.2.2

$$3.2.2.1 \rho = (n_i - n_e)e = +en_0 \exp -\frac{eV}{k_B T} + (-e)n_0 \exp -\frac{-eV}{k_B T} = -2n_0 e \sinh \frac{eV}{k_B T}$$

$$3.2.2.2 \text{ si } eV \ll k_B T \text{ alors } \rho \approx -\frac{2n_0 e^2}{k_B T} V$$

3.2.3

$$3.2.3.1 \text{ on a : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ et } \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V \text{ d'où } \underbrace{\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V}_{\Delta V} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \text{ soit } \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$3.2.3.2 \text{ En symétrie sphérique } \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2n_0 e^2}{k_B T \epsilon_0} V = 0 \implies \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{(rV)}{\lambda_D^2} = 0 \text{ avec } \lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T \epsilon_0}{2n_0 e^2}}$$

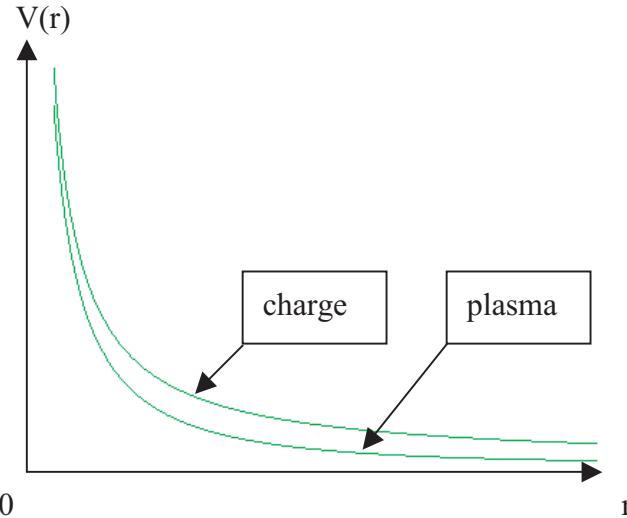
3.2.3.3 $rV = A \exp -\frac{r}{\lambda_D} + B \exp +\frac{r}{\lambda_D}$ les conditions aux limites :

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \implies B = 0$$

$$V(r \rightarrow 0) \approx \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \implies A = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \text{ celui de l'ion fixe à l'origine}$$

$$\text{soit } V(r) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-\frac{r}{\lambda_D})}{r}$$

3.2.3.4 :



dans le plasma le potentiel décroît plus vite c'est l'effet d'écran causé par les autres charges

3.2.4

$$3.2.4.1 \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$$

$$3.2.4.2 \text{ théorème de Gauss } Q_{int} = \epsilon_0 \int \int E(r = R) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \epsilon_0 E(r = R) 4\pi R^2$$

$$\text{soit } Q_{total}(R) = e \left(1 + \frac{R}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{R}{\lambda_D}\right)$$

si $R \rightarrow +\infty$ (tout le milieu) alors $Q_{total} \rightarrow 0$ le milieu est globalement neutre !

4^{ème} partie :
Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

4.1 Relations générales

4.1.1

4.1.1.1 – onde qui ne dépend que d'une seule variable cartésienne et du temps

- onde vectorielle transversale est \perp à la direction de propagation
- onde vectorielle longitudinale est $//$ à la direction de propagation

4.1.1.2 Max-flux $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \implies \exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{A}$

$$\text{Max-Faraday } \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{\operatorname{rot}}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0} \implies \exists \phi \text{ tel que } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

4.1.1.3 non , $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi$ et $\phi' = \phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ sont aussi des potentiels électromagnétiques

4.1.2

4.1.2.1 on a : $\operatorname{div} \vec{A}(z, t) = \frac{\partial A_x(z, t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(z, t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(z, t)}{\partial z} = 0 \implies A_z \text{ ne dépend que de } t \text{ qui ne décrit donc pas une onde , donc on prend } A_z \equiv 0 \text{ et } \vec{A} = \vec{A}_\perp$

4.1.2.2 de même M-flux $\operatorname{div} \vec{B}(z, t) = 0 \implies \vec{B}_{//} = \vec{0}$ donc $\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} \iff \vec{B}_\perp = \vec{\operatorname{rot}} \vec{A}$

$$4.1.2.3 \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \implies \boxed{\vec{E}_{//} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z}$$

$$4.1.2.4 \boxed{\vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

4.1.3

4.1.3.1 on a : (1) $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$ et $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

$$\operatorname{div}(1) \implies \boxed{\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\Delta \phi}$$

$$4.1.3.2 \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}) = \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} \iff \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \iff \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \vec{e}_z}$$

la jauge utilisée est de Coulomb et non pas de Lorentz

$$4.1.3.3 \text{ projection } \perp \text{ à Oz} : \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_\perp = \vec{0}}$$

$$4.1.3.4 \text{ projection } // \text{ à Oz} : \boxed{\mu_0 \vec{j}_{//} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \vec{e}_z}$$

4.1.4

$$4.1.4.1 m_e \vec{a} \approx -e \vec{E} \implies \text{au premier ordre} \boxed{m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E}}$$

$$4.1.4.2 \text{ d'après 4.1.2.4 } \vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ soit } m_e \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = +e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \implies m_e \vec{v} = e \vec{A} + \underbrace{\vec{f}(z)}$$

le terme ne dépendant que de z ne décrit pas une propagation

$$\text{soit} \boxed{m_e \vec{v} = e \vec{A}}$$

$$4.1.4.3 \vec{j} = -n_e e \vec{v} = -e(n_0 + \Delta n) \vec{v} \approx -n_0 e \vec{v}$$

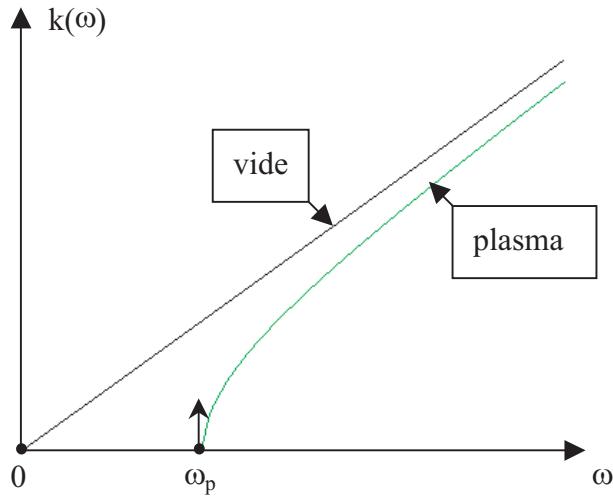
$$4.1.5 4.1.3.3 \implies \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{n_0 e^2}{m_e} \vec{A} = \vec{0} (**)}$$

4.2 Conditions de propagations

$$4.2.1 (**) \text{ en notation complexe } [(ik)^2 - \frac{1}{c_0^2}(-i\omega)^2 - \mu_0 \frac{n_0 e^2}{m_e}] \vec{A} = \vec{0} \implies k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}$$

4.2.2

$$4.2.2.1 \text{ pour le vide } k = \frac{\omega}{c_0} \text{ et pour le plasma } k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}}$$



4.2.2.2 il y a propagation si k est réel càd $\omega > \omega_p$ sinon k sera complexe tel que $k = i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c_0^2}} = ik'$ il vient $\vec{A} = \vec{A}_0 \exp i(ik'z - \omega t)$ en notation réelle $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-k'z} \cos \omega t$ qui est une onde stationnaire atténuée

4.2.3

4.2.3.1 $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} c_0 > c_0$ car la phase n'est ni matière ni énergie

4.2.3.2 $v_g = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} c_0 < c_0$

4.2.3.3 $v_\varphi v_g = c_0^2$

4.3 Ondes longitudinales

4.3.1 on a $\mu_0 \vec{j}_{//} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \vec{e}_z \implies \vec{j}_{//} = \epsilon_0 k \omega \underline{\phi}$

4.3.2 on a $\vec{j}_{//} = -en_0 \vec{v}_{//} \implies \vec{v}_{//} = -\frac{k \omega \epsilon_0}{n_0 e} \underline{\phi} \vec{e}_z$

4.3.3 PFD $m_e \frac{\partial \vec{v}_{//}}{\partial t} = -e \vec{E}_{//} = e \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \implies \underline{\vec{v}_{//}} = -\frac{ek}{m_e \omega} \underline{\phi} \vec{e}_z$

4.3.4 4.3.2 et 4.3.3 donne : $\frac{ek}{m_e \omega} = \frac{k \omega \epsilon_0}{n_0 e} \implies \omega = \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$ et k quelconque , c'est une oscillation collective du plasma

5^{ème} partie :
Effets collectifs dans un plasma - Plasmons

5.1 Préliminaire

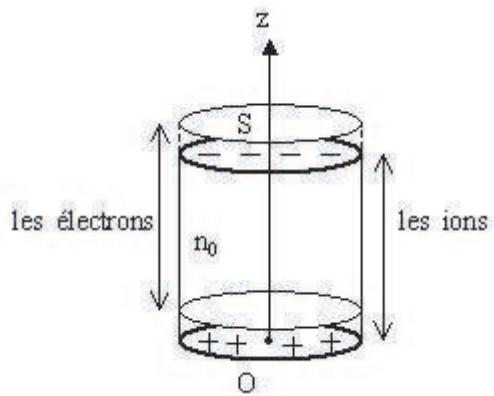
5.1.1 champ créé par un plan infini uniformément chargé $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

5.1.2 par superposition $\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{extérieur} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{intérieur} \end{cases}$

5.2 Oscillations longitudinales d'une colonne de plasma

5.2.1 car $m_i \gg m_e$

5.2.2 $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{en_0 z S}{S} \implies \sigma = en_0 z$



$$5.2.3 \vec{F} = -e\vec{E}_{int} = -e\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n} \implies \vec{F} = -\frac{e^2 n_0 z}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$5.2.4 \text{ PFD sur Oz : } m_e \ddot{z} = -\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} z \implies \ddot{z} + \omega_p^2 z = 0$$

5.2.5 $z(t) = z_0 \cos(\omega_p t)$ les électrons effectuent ensemble une oscillation à la pulsation plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

5.3 Plasmon

$$5.3.1 E_c^{(1)} = E_c - \hbar \omega_p$$

$$5.3.2 E_c^{(n)} = E_c - n \hbar \omega_p$$

5.3.3

$$5.3.3.1 \hbar \omega_p = 15 \text{ eV} = 24 \cdot 10^{-19} J$$

$$5.3.3.2 n_0 = \frac{\omega_p^2 m_e \epsilon_0}{e^2} = 16.4 \cdot 10^{28} m^{-3}.$$

fin du corrigé

Quelques aspects de la conduction thermique

L'épreuve, qui aborde quelques aspects des transferts thermiques, est constituée de trois parties largement indépendantes entre elles. Il est toutefois conseillé de les traiter dans l'ordre proposé. La première partie du problème rappelle quelques notions fondamentales de la conduction thermique. La deuxième partie propose d'étudier l'un des dispositifs utilisés par Joseph FOURIER pour l'étude de ce phénomène. La troisième partie, quant à elle, propose l'étude du principe d'une mesure optique d'un coefficient de transfert thermique conducto-convectif.

On étudie dans ce problème la conduction de la chaleur, ou diffusion thermique, dans un milieu isotrope, homogène, supposé incompressible, de masse volumique ρ , de capacité thermique c et de conductivité thermique λ . On désigne par h le coefficient de transfert conducto-convectif entre le solide et l'air, lorsque le solide est en contact direct avec l'air ambiant. Ces quatre grandeurs ρ , c , λ et h sont supposées indépendantes de la température T .

Données utiles

- . Masse volumique du fer : $\rho = 7,86 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$;
- . Capacité thermique du fer : $c = 460 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$;
- . Conductivité thermique du fer : $\lambda = 81 \text{ u.S.I.}$;
- . Coefficient de transfert conducto-convectif du fer au contact de l'air : $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$;
- . Conductivité thermique de l'air : $\lambda_a = 2,65 \cdot 10^{-2} \text{ u.S.I.}$;
- . $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$;
- . $\cosh 2x = 2 \sinh^2 x + 1$;
- . $\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$.

1^{ère} partie : **Transfert thermique conductif dans un barreau**

1.1 Loi de Fourier

1.1.1 Énoncer la loi de FOURIER pour la conduction de la chaleur et en préciser les conditions de validité. Définir les différentes grandeurs utilisées et en préciser l'unité dans le système international des unités (S.L.).

1.1.2 Quels sont les analogues électriques des notions suivantes : conductivité thermique, flux thermique, loi de FOURIER et gradient de température $\vec{\nabla}T$? On pourra répondre sous la forme d'un tableau.

1.2 Équation de la chaleur

On considère un barreau (figure 1) solide, homogène et isotrope, indéformable de longueur L , de section droite carrée de surface S et dont le côté est très inférieur à la longueur L . Ce barreau est entouré par une enveloppe **adiabatique** non représentée sur la figure. On considère qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale et que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de son abscisse x et du temps t . Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de ce barreau sont en contact avec deux sources isothermes de chaleur de températures respectivement égales à T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$; avec $T_1 > T_2$.

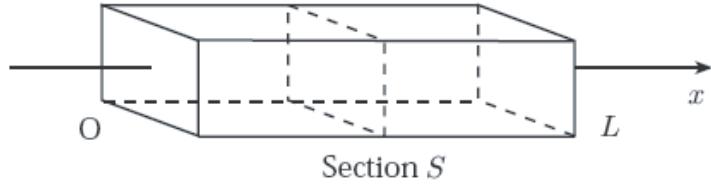


Fig 1 : Barreau solide homogène, isotrope et indéformable de section S et de longueur L .

1.2.1 En effectuant un bilan énergétique pour la partie de barreau située entre les sections d'abscisses x et $x + dx$, montrer que la température $T(x, t)$ dans le barreau est solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles, appelée équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

1.2.2 Temps caractéristique de la diffusion thermique

En régime non stationnaire, pour une diffusion thermique s'effectuant sur une distance d , il faut une durée de l'ordre de τ_d pour que toute variation ΔT de température se manifeste. τ_d est appelé temps caractéristique de la diffusion thermique.

1.2.1.1 En utilisant l'équation de la chaleur (1), **construire** la grandeur τ_d à partir des grandeurs ρ , c , λ et d .

1.2.1.2 Calculer le temps caractéristique de la diffusion thermique dans le cas du fer pour les extensions spatiales $d_1 = 10 \text{ cm}$ et $d_2 = 50 \text{ cm}$. Commenter.

1.2.3 Résistance thermique

On se place en régime stationnaire.

1.2.3.1 Déterminer l'expression de la température $T(x)$ dans une section droite du barreau.

1.2.3.2 Établir la relation entre le flux thermique ϕ traversant une section droite du barreau en régime stationnaire et les températures T_1 et T_2 .

1.2.3.3 En déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} du barreau que l'on définira. Commenter.

2^{ème} partie :
Transfert thermique conductif dans un anneau (Fourier,1806)

Un des dispositifs utilisés par J. FOURIER était constitué d'un anneau solide indéformable en fer homogène et isotrope représenté figure 2, ayant la forme d'un tore d'axe Oz, de rayon moyen R et de section carrée de côté ℓ , avec ℓ très inférieur à R . Plusieurs petites loges de dimensions négligeables, remplies de mercure et dans lesquelles plongent des thermomètres, sont percées en divers endroits de l'anneau.

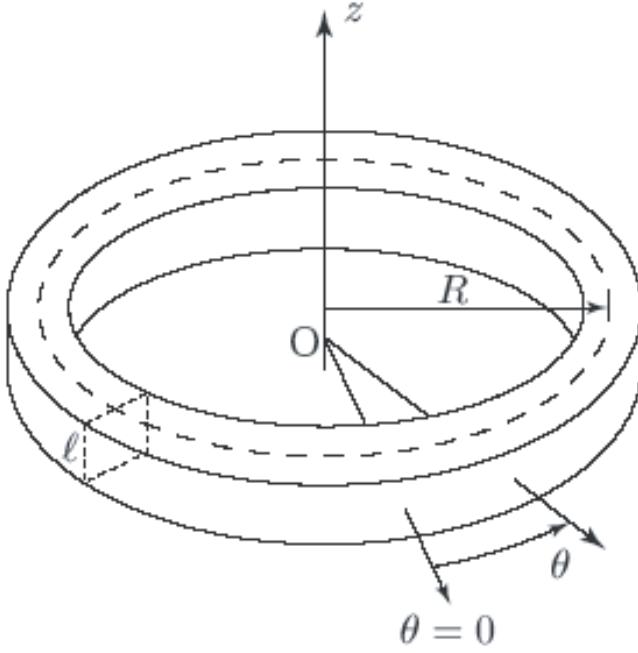


Fig 2 : Anneau solide homogène, isotrope et indéformable de rayon moyen R et de section carrée de côté $\ell \ll R$.

Dans une section droite de l'anneau prise pour origine des angles ($\theta = 0$), on place un dispositif de chauffage constitué d'une plaque d'épaisseur négligeable et de même section ($\ell \times \ell$) que l'anneau. On considère que la température est uniforme sur toute section droite du barreau et ne dépend que de l'angle θ et du temps t . Dans toute la suite du problème, et sauf mention explicite du contraire, on limitera l'angle θ à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Pour les applications numériques, on prendra $R = 16,0 \text{ cm}$ et $\ell = 3,30 \text{ cm}$.

2.1 Équation de la chaleur avec fuites thermiques

L'anneau est placé dans l'air ambiant de température T_e , uniforme et indépendante du temps. Selon la loi de NEWTON, le flux thermique conducto-convection sortant par l'élément de surface latérale dS_{lat} de l'anneau et donc cédé à l'air ambiant, vaut $\delta\varphi = h(T - T_e)dS_{lat}$, où h est le coefficient de transfert conducto-convection entre le métal et l'air, que l'on suppose constant, et T la température de la portion d'anneau considérée à l'instant t .

2.1.1 Quel est l'intérêt pratique de remplir les loges par du mercure ?

2.1.2 En effectuant un bilan énergétique pour la partie d'anneau située entre les sections repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$, montrer que la température $T(\theta, t)$ en tout point de l'anneau est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{4h}{\lambda \ell} (T_e - T) \quad (2)$$

On se place désormais en régime stationnaire.

2.1.3 Écrire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(\theta)$ dans l'anneau et en donner la solution générale. On introduira la grandeur $a = \sqrt{\frac{\lambda \ell}{4h}}$ dont on précisera la dimension.

2.1.4 On suppose que le dispositif de chauffage impose une température constante $T = T_C$ dans la tranche infiniment mince de l'anneau repérée par l'angle $\theta = 0$. En exploitant les conditions aux limites en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, déterminer toutes les constantes d'intégration introduites dans la question précédente et donner l'expression de la température $T(\theta)$ au sein de l'anneau.

2.1.5 Représenter graphiquement l'allure de la température $T(\theta)$ dans le barreau pour θ compris entre 0 et 2π et commenter le résultat obtenu.

2.1.6 Exprimer le flux thermique $\Phi(\theta)$ à travers une section droite de l'anneau repérée par l'angle θ et représenter graphiquement l'allure de $\Phi(\theta)$ pour θ variant entre 0 et 2π . Commenter la valeur de Φ en $\theta = \pi$. Le flux thermique Φ est-il continu à la traversée du dispositif de chauffage ? Pourquoi ? Commenter.

On se limite au domaine où θ est compris entre 0 et π . Un thermomètre 1 est placé dans la section A_1 , repérée par l'angle $\theta_1 = \theta_2 - \Delta\theta$ avec $\Delta\theta > 0$; un thermomètre 2 est placé dans la section A_2 repérée par l'angle θ_2 enfin un thermomètre 3 est placé dans la section A_3 , repérée par l'angle $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta$. On pose $\Delta T_i = T(\theta_i) - T_e$. D'après FOURIER, le rapport $q = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2}$ ne dépend que des dimensions ou de la nature de l'anneau et non de la manière dont ce solide est chauffé.

2.1.7 Montrer qu'effectivement ce rapport q ne dépend ni de θ_2 ni de la température T_C .

2.1.8 Calculer le rapport théorique q_{th} pour $\Delta\theta = \pi/4$ pour le dispositif de FOURIER.

Sur le cahier d'expériences de FOURIER du 31 juillet 1806, on lit : "deux heures après le début de chauffage, les valeurs des températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires et les thermomètres indiquent, par des lectures au tiers de degré près : 17,67 °C pour l'air ambiant, 66,00 °C pour $\theta_1 = \pi/2$, 50,67 °C pour $\theta_2 = 3\pi/4$ et 44,00 °C pour $\theta_3 = \pi$ ".

2.1.9 Commenter ce passage en calculant en particulier le temps caractéristique de diffusion thermique correspondant à la distance $d = \pi R$ ainsi que le rapport expérimental q_{ex} .

2.2 Équation de la chaleur en régime variable

L'anneau représenté figure 2, chauffé comme précédemment en $\theta = 0$, est isolé du dispositif de chauffage puis enfoui dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable. La température T de l'anneau est alors uniforme sur une section droite de l'anneau et dépend comme précédemment de l'angle θ mais aussi du temps t puisque le régime est supposé non stationnaire. On se limite encore au domaine où θ est compris entre 0 et 2π .

2.2.1 Donner l'équation différentielle aux dérivées partielles dont la température $T(\theta, t)$ est solution.

On se propose de déterminer la solution générale de cette équation en utilisant la méthode dite de séparation des variables. Pour cela on commence tout d'abord par chercher une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme :

$$T(\theta, t) = K + f(\theta)g(t) \quad (3)$$

où K est une constante et f et g deux fonctions bornées des variables θ et t respectivement.

2.2.2 Montrer que l'équation différentielle de la question 2.2.1 peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{1}{R^2} \frac{\ddot{f}(\theta)}{f(\theta)} \quad (4)$$

2.2.3 Montrer que chaque membre de l'équation (4) ne peut être égal qu'à une même constante réelle Ω .

2.2.4 Montrer que la constante Ω est impérativement négative de sorte que l'on puisse écrire : $\Omega = -\frac{1}{d^2}$. Quelle est la dimension de d ?

2.2.5 En déduire la solution $f(\theta)$ de l'équation (4).

2.2.6 Résoudre de même l'équation (4) en $g(t)$ et montrer que l'on peut écrire :

$$g(t) = g_0 \exp -\frac{t}{\tau} \quad (5)$$

Donner l'expression de τ en fonction de ρ , c , λ et d .

On impose à la solution particulière (3) de vérifier les conditions aux limites, d'une part sur $T(\theta, t)$ en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ et d'autre part sur le flux thermique $\Phi(\theta, t)$ en $\theta = 0$.

2.2.7 Exprimer le flux thermique $\Phi(\theta, t)$ traversant une section droite de l'anneau et simplifier l'expression (3) de $T(\theta, t)$ en exploitant la condition au limite $\theta = 0$ sur le flux thermique.

2.2.8 Montrer alors que la solution (3) de l'équation de la chaleur peut se mettre sous la forme :

$$T_n(\theta, t) = K_n + A_n \cos \frac{R\theta}{d_n} \exp -\frac{t}{\tau_n} \quad (6)$$

et donner les expressions de d_n et τ_n en fonction de ρ , c , λ , R et d'un entier naturel non nul n .

2.2.9 Montrer alors que la solution générale de l'équation de la chaleur satisfaisant aux conditions aux limites précédentes, peut s'écrire sous la forme :

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \exp -\frac{t}{\tau_n} \quad (7)$$

Que représente T_m physiquement ? Comment peut-on calculer les coefficients A_n ?

2.2.10 Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps τ_1 du fondamental et τ_2 et τ_3 du deuxième et troisième harmonique.

2.2.11 Commenter et expliquer les propos de FOURIER : " lorsque l'on mesure la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, on constate que l'état de l'anneau ne tarde pas à se confondre avec celui pour lequel les écarts des températures des différents points par rapport à la température moyenne sont proportionnels aux cosinus des angles qui mesurent les distances à l'origine, la disposition initiale n'apportant aucun changement à ces résultats... ".

3^{ème} partie :

Mesure optique d'un coefficient de transfert conducto-convectif

On se propose, dans cette partie du problème, d'étudier le principe d'un montage permettant de mesurer le coefficient de transfert thermique conducto-convectif à la surface d'un métal placé dans l'air au repos. Le montage utilise une technique interférométrique pour relever le profil de température $T(x)$ au-dessus d'une plaque métallique P portée à une température T_s et placée dans l'air ambiant dont la température est T_∞ loin de la plaque chauffée. Pour les applications numériques, on prendra $T_s = 328 K$ et $T_\infty = 294 K$.

La surface libre du métal est supposée occuper le plan $x = 0$.

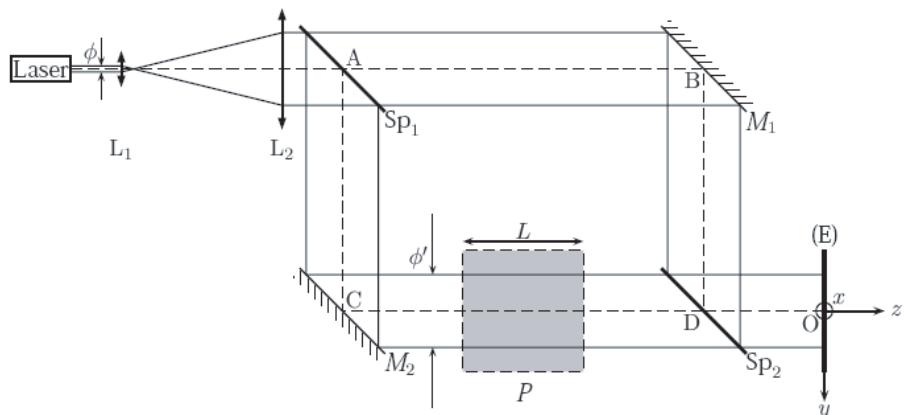


Fig 3 : Interféromètre de MACH-ZEHNDER.

La technique utilisée repose sur la dépendance de l'indice de réfraction de l'air vis-a-vis de sa température thermodynamique T . Cette dépendance est supposée vérifier la loi approchée suivante, que l'on ne demande pas de justifier :

$$n(T) = 1 + \frac{A}{T} \quad (8)$$

où A est une constante positive.

Le dispositif interférentiel utilisé est un interféromètre de MACH-ZEHNDER (figure 3). Il est composé de deux miroirs plans parfaitement réfléchissants M_1 et M_2 et de deux lames semi-transparentes SP_1 et SP_2 d'épaisseurs négligeables. Les deux miroirs M_1 et M_2 ainsi que les deux lames semi-transparentes SP_1 et SP_2 sont inclinés de 45° et parallèles entre eux. Les distances AB et CD d'une part, AC et BD d'autre part sont égales. La plaque métallique P est placée dans le bras CD de l'interféromètre de sorte que, lorsqu'elle est portée à la température T_s supposée uniforme, elle crée dans l'air une variation de température $T(x)$ perpendiculairement à sa surface.

Dans toute cette étude, on supposera que la longueur L des côtés de la plaque carrée P est suffisamment grande pour pouvoir négliger tous les effets de bord. La figure 3 représente l'ensemble du dispositif vu de dessus alors que la figure 4 est une vue de profil de la plaque éclairée par le faisceau du bras CD de l'interféromètre.

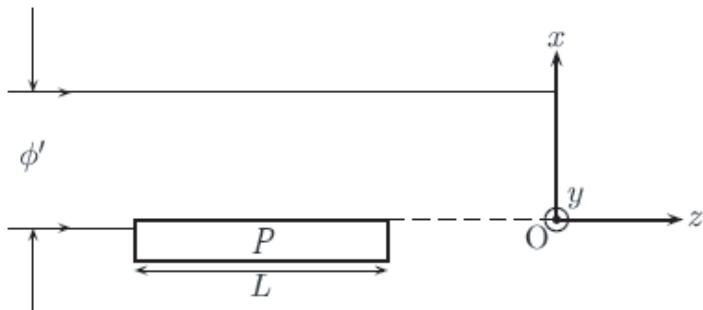


Fig 4 : Vue de profil de la plaque P placée dans le bras CD de l'interféromètre. La lame semi-transparente SP_2 n'est pas représentée sur ce schéma.

Le dispositif expérimental est éclairé à l'aide d'un laser Re-Ne de longueur d'onde $\Lambda = 632,8\text{ nm}$.

On note ϕ le diamètre du faisceau laser supposé cylindrique. On supposera également que l'intensité lumineuse du faisceau laser est constante sur une section principale du faisceau.

3.1 Afin de pouvoir éclairer toute la zone de variation de température au dessus de la plaque P (figure 4), on élargit le faisceau laser initial de diamètre ϕ pour obtenir un faisceau laser cylindrique de travail de diamètre ϕ' . Pour cela, on utilise un montage télescopique constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de distances focales image f_1 et f_2 .

3.1.1 Comment doit-on placer les deux lentilles L_1 et L_2 l'une par rapport à l'autre afin d'obtenir un faisceau cylindrique de diamètre ϕ' à la sortie à partir d'un faisceau cylindrique de diamètre ϕ à l'entrée ? On exprimera la distance O_1O_2 en fonction de f_1 et f_2 .

3.1.2 Exprimer le rapport $\frac{\phi'}{\phi}$ en fonction de f_1 et f_2 .

3.2 On se propose tout d'abord d'étudier quelques propriétés de la figure d'interférence. Pour cela, on note, au niveau de l'écran d'observation (E) :

- . I_1 l'intensité lumineuse de l'onde qui passe par la voie (1), ABD, de l'interféromètre ;
- . I_2 l'intensité lumineuse de l'onde qui passe par la (2), ACD, de l'interféromètre ;
- . φ le déphasage entre ces deux ondes en un point M quelconque de l'écran d'observation.

- 3.2.1** Exprimer l'intensité résultante I en un point quelconque de l'écran d'observation en fonction de I_1 , I_2 et φ .
- 3.2.2** Donner la représentation graphique de I en fonction de φ et déterminer la valeur maximale I_{max} ainsi que la valeur minimale I_{min} de I .
- 3.2.3** Montrer que le contraste C de la figure d'interférence défini par $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ ne dépend que du rapport des intensités $R = \frac{I_1}{I_2}$ et tracer les variations de C en fonction de R .
- 3.2.4** Pour quelle valeur de R le contraste C est-il maximum ? Quelles précautions pratiques doit-on prendre pour obtenir le contraste maximum ?
- 3.3** On se propose à présent de montrer que le relevé de l'interférogramme $I(x)$ permet de déterminer le profil de température au-dessus de la plaque P.
- 3.3.1** Décrire l'allure de la figure d'interférence dans le plan de l'écran d'observation (E) et montrer que les surfaces d'égale intensité du champ d'interférence correspondent à des surfaces isothermes du profil de température au-dessus de la plaque P.
- 3.3.2** Exprimer l'ordre d'interférence p , défini par $\varphi = 2\pi p$, avec $p > 0$ par convention, en fonction de Λ , L , A , T_∞ et T .
- 3.3.3** Exprimer l'ordre d'interférence p_s au niveau du plan de la plaque P.
- 3.3.4** Montrer que la température T_p correspondant à la frange d'interférence d'ordre p est donnée par la relation :

$$T_p = \frac{T_\infty}{1 - \frac{p}{p_s}(1 - \frac{T_\infty}{T_s})} \quad (9)$$

- 3.4** La figure 5 représente la partie centrale de l'interférogramme montrant l'ensemble de toutes les franges d'interférence obtenues. La partie du champ d'interférence ainsi montrée **couvre l'ensemble** des variations de température allant de T_s à T_∞ .

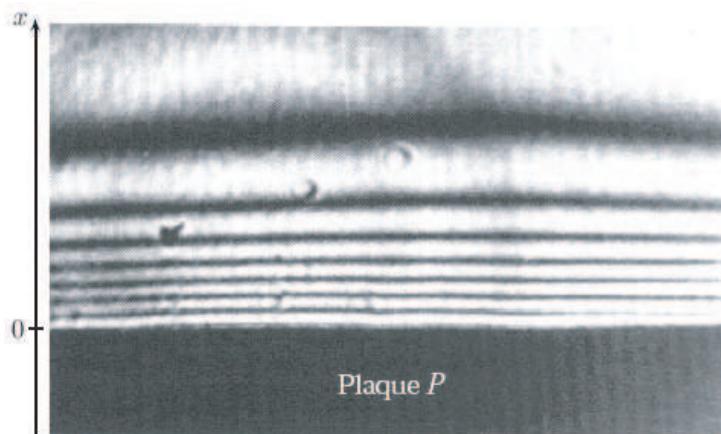


Fig 5 : Région centrale de l'interférogramme.

Cet interférogramme a été enregistré à l'aide d'une caméra numérique à dispositif de transfert de charge DTC (ou CCD pour Charge Coupled Device). La matrice active de cette caméra est composée de 256×256 éléments photosensibles (ou pixel pour Picture Element). Chaque pixel est un carré de côté $303,5 \mu m$. La figure 6 donne la variation de l'intensité des pixels, sur une échelle de 0 à 255, dans la direction Ox perpendiculaire à la plaque P.

- 3.4.1** Montrer que l'ordre d'interférence p est maximal au niveau du plan de la plaque P. On rappelle que, par convention, p a été défini positif.
- 3.4.2** Déterminer les valeurs numériques de l'ordre d'interférence de toutes les franges sombres qui apparaissent sur l'interférogramme.

3.4.3 En déduire les valeurs numériques de la température des surfaces isothermes correspondantes.

On présentera les résultats sous forme d'un tableau à deux lignes (x_p, T_p) donnant la distance x_p de la surface isotherme p par rapport à la surface de la plaque P ainsi que sa température T_p . On admettra, qu'en très bonne approximation, l'ordre d'interférence p est entier en $x = 0$ et on rappelle la correspondance : 1 pixel $\leftrightarrow 303,5\mu m$.

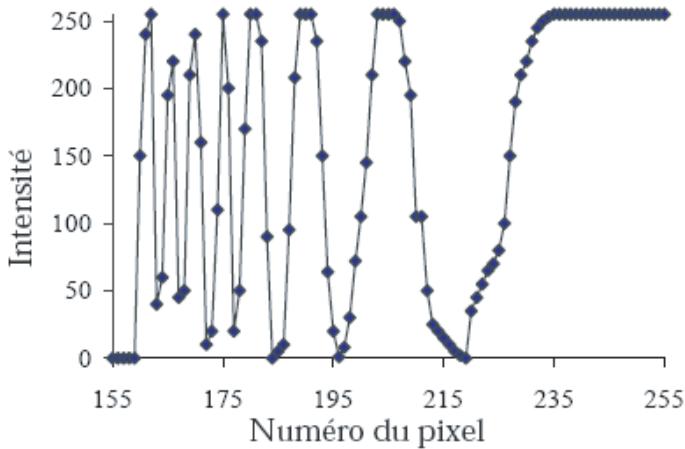


Fig 6 : Variation de l'intensité des pixels dans la direction Ox perpendiculaire à la plaque P.
Le pixel n°159 correspond à la surface de la plaque.

3.5 On se propose de vérifier que le profil de température au dessus de la plaque P peut être décrit par une loi du type :

$$T(x) = \alpha + \beta \exp(-kx) \quad (10)$$

où α , β et k sont trois constantes positives.

3.5.1 Exprimer α et β en fonction de T_s et T_∞ .

3.5.2 Vérifier, à l'aide d'une représentation graphique adéquate par exemple, que les données expérimentales déduites de la question 3.4.3 peuvent bien être représentées par la loi (10) et en déduire la valeur de la constante k .

3.5.3 Montrer que le flux thermique Φ dans l'air à la surface de la plaque satisfait à la loi de NEWTON :

$$\Phi = h_{cc}(T_s - T_\infty) \quad (11)$$

et en déduire l'expression du coefficient de transfert conducto-convectif h_{cc} en fonction de la constante k et de la conductivité thermique λ_a de l'air.

3.5.4 Déterminer la valeur numérique du coefficient de transfert conducto-convectif de cette plaque en acier placée dans l'air au repos.

fin de l'énoncé

Quelques aspects de la conduction thermique

1^{ère} partie : Transfert thermique conductif dans un barreau

1.1 Loi de Fourier

1.1.1 dans un milieu homogène isotrope ,solide ou fluide au repos , la densité de courant thermique est liée au gradient de température par $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{grad}T$ tel que :

- j_{th} en Wm^{-2}
- T en K
- λ constante positive en $WK^{-1}m^{-1}$

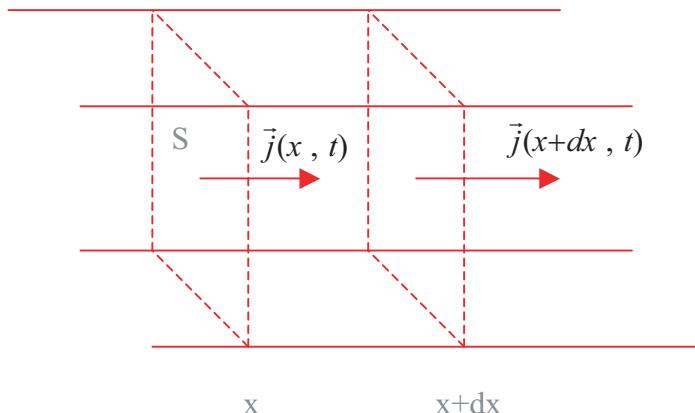
cette loi reste valable tant que le gradient de température est faible

1.1.2 $-\lambda \longleftrightarrow \sigma$

- $\phi_{th} \longleftrightarrow I$
- $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{grad}T \longleftrightarrow \vec{j} = -\sigma \vec{grad}V$
- $T \longleftrightarrow V$

1.2 Équation de la chaleur

1.2.1 :



la surface latérale étant calorifugée, pas de gradient de température selon Oy et Oz , la température T ne dépendra que de x et du temps t .

la loi de Fourier donne $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla}T(x, t) = j(x, t)\vec{u}_x$ uniforme sur toute section droite.

le 1^{er} principe sur la tranche isochore $[x, x + dx]$, entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_e(x, t) - \Phi_s(x + dx, t) = j(x, t)S - j(x + dx, t)S$$

soit

$$(\rho S dx)c \frac{\partial T}{\partial t} = -S \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx$$

loi de fourier $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$

soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

1.2.2 Temps caractéristique de la diffusion thermique

$$1.2.1.1 \quad (1) \implies \frac{\Delta T}{\tau_d} \sim \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta T}{d^2} \implies \tau_d \sim \frac{\rho c}{\lambda} d^2$$

1.2.1.2 A.N :

- $d_1 = 10\text{cm} \implies \tau_d = 446\text{s} \approx 7\text{minutes}$
- $d_2 = 50\text{cm} \implies \tau_d = 11160\text{s} \approx 3\text{heures}$

La diffusion thermique est un processus lent.

La loi non linéaire entre d et τ_d .

1.2.3 Résistance thermique

1.2.3.1 En régime stationnaire (1) s'écrit : $\ddot{T}(x) = 0$ soit $T(x) = Ax + B$; les conditions aux limites du barreau :

$$T(x=0) = T_1 = B$$

$$T(x=L) = T_2 = AL + B$$

$$\text{soit } T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

1.2.3.2 on a : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{x} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{x}$ donc $\Phi_{th} = \int \int j_{th} \vec{x} \cdot dS \vec{x} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S$

1.2.3.3 $R_{th} := \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}} = \frac{L}{\lambda S} > 0$ analogue à la résistance électrique !

2^{ème} partie :

Transfert thermique conductif dans un anneau (Fourier,1806)

2.1 Équation de la chaleur avec fuites thermiques

2.1.1 pour réaliser un contact thermique parfait , en effet sans Hg l'air s'infiltrera entre le thermomètre et l'anneau , sachant que $\lambda_{Hg} \gg \lambda_{air}$

2.1.2 1^{er} principe à la tranche isochore

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_e(\theta, t) - \Phi_s(\theta + d\theta, t) - \Phi_{cc}(\text{solide} \longrightarrow \text{fluide})$$

or

$$\frac{dU}{dt} = (\rho R d\theta \ell^2) c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{loi de fourier } \vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T(\theta, t) = -\lambda \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Phi_e(\theta, t) = \int \int_{\theta=cte} j_{th} \vec{e}_\theta \cdot dS \vec{e}_\theta = j_{th}(\theta, t) \ell^2$$

$$\Phi_s(\theta + d\theta, t) = \int \int_{\theta+d\theta=cte} j_{th} \vec{e}_\theta \cdot dS \vec{e}_\theta = j_{th}(\theta + d\theta, t) \ell^2$$

$$\Phi_{cc}(\text{solide} \longrightarrow \text{fluide}) = h(T_s - T_e) dS_{lat} = h(T(\theta, t) - T_e)(4.Rd\theta\ell) \text{ soit : } \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{4h}{\lambda \ell} (T_e - T) \quad (2)$$

2.1.3 en R.P $R^2 \times (2)$ devient :

$$0 = \frac{d^2(T - T_e)}{d\theta^2} - \frac{4hR^2}{\lambda \ell} (T - T_e)$$

de solution générale :

$$T = T_e + A \cosh\left(\frac{R}{a}\theta\right) + B \sinh\left(\frac{R}{a}\theta\right)$$

a est une distance en mètre

2.1.4 conditions aux limites : $T(0) = T_c = T_e + A$ et

$$T(2\pi) = T_c = T_e + (T_c - T_e) \cosh\left(\frac{R}{a}2\pi\right) + B \sinh\left(\frac{R}{a}2\pi\right)$$

il vient :

$$T(\theta) = T_e + (T_c - T_e) \left[\cosh \frac{R\theta}{a} + \frac{1 - \cosh \frac{2\pi R}{a}}{\sinh \frac{2\pi R}{a}} \sinh \frac{R\theta}{a} \right]$$

2.1.5 on simplifie , d'après les données , l'expression de $T(\theta)$ en :

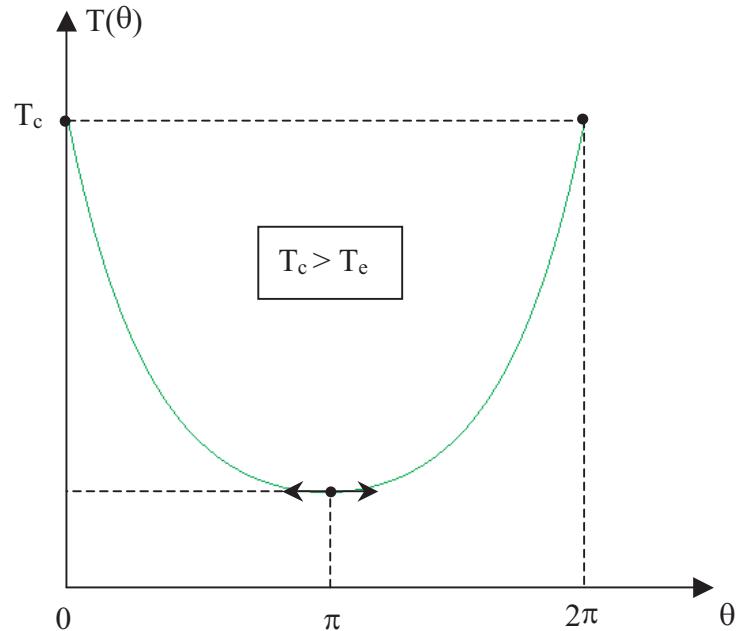
$$T(\theta) = T_e + \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta - \pi)}{a}$$

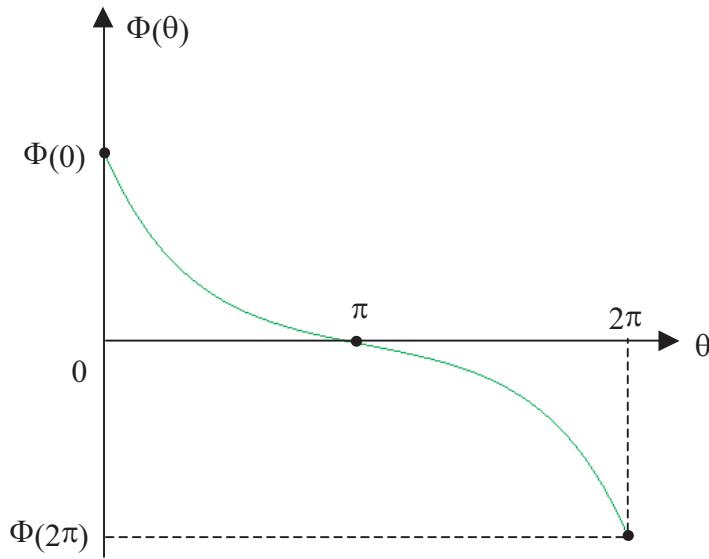
la température est symétrique par rapport à $\theta = \pi$ et $T_c > T_e$

2.1.6 $\Phi(\theta) = j_{th}(\theta)\ell^2 = -\lambda \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \ell^2$ soit :

$$\Phi(\theta) = -\frac{\lambda \ell^2}{a} \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \sinh \frac{R(\theta - \pi)}{a}$$

on a : $\Phi(\theta = \pi) = 0$ la température est minimale ; et $\Phi(\theta = 2\pi) \neq \Phi(\theta = 0)$ à cause de la plaque chauffante d'épaisseur $e \ll 2\pi R$





2.1.7 on a :

$$\Delta T_1 = \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta_1 - \pi)}{a}$$

$$\Delta T_2 = \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta_2 - \pi)}{a}$$

$$\Delta T_3 = \frac{T_c - T_e}{\cosh \frac{\pi R}{a}} \cosh \frac{R(\theta_3 - \pi)}{a}$$

avec $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2$ soit :

$$q := \frac{\Delta T_3 + \Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{\cosh \frac{R(\theta_2 + \Delta\theta - \pi)}{a} + \cosh \frac{R(\theta_2 - \Delta\theta - \pi)}{a}}{\cosh \frac{R(\theta_2 - \pi)}{a}}$$

d'après les données : $ch(x+y) + ch(x-y) = 2chx chy$, l'expression se simplifie en :

$$q = 2 \cosh \frac{\Delta\theta R}{a}$$

2.1.8 A.N : $a = 0.26 \text{ m}$ et $q_{th} = 2.23$

2.1.9 d'après 1.2.1.1 $\tau_d = \frac{\rho c}{\lambda} (\pi R)^2 = 3 \text{ h } 6 \text{ min}$ et

$$q_{ex} := \frac{(66 - 17.67) + (44 - 17.67)}{50.67 - 17.67} = 2.26$$

$q_{ex} > q_{th}$ il fallait attendre 3 heures et non deux heures !

2.2 Équation de la chaleur en régime variable

2.2.1 on prend $h = 0$ dans l'équation (2), soit :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

2.2.2 (3) donne $\frac{\partial T}{\partial t} = f(\theta) \cdot \dot{g}(t)$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \ddot{f}(\theta) \cdot g(t)$ soit : $\frac{\rho c}{\lambda} f(\theta) \cdot \dot{g}(t) = \frac{1}{R^2} \ddot{f}(\theta) \cdot g(t)$ d'où :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = \frac{1}{R^2} \frac{\ddot{f}(\theta)}{f(\theta)}$$

2.2.3 les deux termes dépendent chacun d'une variable θ et t qui sont indépendantes , ceci n'est possible que dans le cas

$$\frac{\rho c \dot{g}(t)}{\lambda g(t)} = \frac{1}{R^2} \frac{\ddot{f}(\theta)}{f(\theta)} = \Omega$$

2.2.4 donc : $\dot{g}(t) - \frac{\lambda}{\rho c} \Omega g(t) = 0$, g sera bornée si $\Omega < 0 = -\frac{1}{d^2}$, donc $\ddot{f}(\theta) + \frac{R^2}{d^2} f(\theta) = 0$, θ est en rad qui n'est pas une unité d'où : d est une distance en metre

2.2.5 $f(\theta) = A \cos(\frac{R}{d}\theta) + B \sin(\frac{R}{d}\theta)$

2.2.6 $\dot{g}(t) - \frac{\lambda}{\rho c} \Omega g(t) = 0 \implies g(t) = g_0 \exp \frac{\lambda}{\rho c} \Omega t = g_0 \exp -\frac{\lambda}{\rho c d^2} t$ soit :

$$\tau = \frac{\rho c d^2}{\lambda}$$

2.2.7 on a : $\Phi(\theta, t) = j_{th}(\theta, t) \ell^2 = -\frac{\lambda \ell^2}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\lambda \ell^2}{R} \dot{f}(\theta) g(t)$ En absence de chauffage $\Phi(\theta = 0, t) = 0 \implies \dot{f}(\theta = 0) = 0 \implies B = 0$ donc :

$$T(\theta, t) = K + \underbrace{g_0 A}_{\text{soit}} \cos\left(\frac{R}{d}\theta\right) \exp -\frac{\lambda}{\rho c d^2} t$$

2.2.8 on a : $T(\theta = 0, t) = T(\theta = 2\pi, t) \implies \frac{R}{d} = n \in \mathbb{N}^*$ soit : $d_n = \frac{R}{n}$ et $\tau_n = \frac{\rho c d_n^2}{\lambda} = \frac{\rho c R^2}{\lambda n^2}$

2.2.9 l'équation de chaleur est linéaire , on superpose les solutions 2.2.8 :

$$T(\theta, t) = T_m + \sum A_n \cos n\theta \exp -\frac{t}{\tau_n}$$

on vérifie qu'on a $T(\theta = 0, t) = T(\theta = 2\pi, t)$ et aussi

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta = 0, t) = 0$$

$T_m = \langle T \rangle_\theta$, les A_n seront calculés à t=0

2.2.10 $\tau_1 = \frac{\rho c R^2}{\lambda} = 1142s$

$$\tau_2 = \frac{\rho c R^2}{\lambda 2^2} = 286s$$

$$\tau_3 = \frac{\rho c R^2}{\lambda 3^2} = 126s$$

2.2.11 après une durée $5\tau_2 = 23$ min tous les termes $n \geq 2$ disparaissent , il reste :

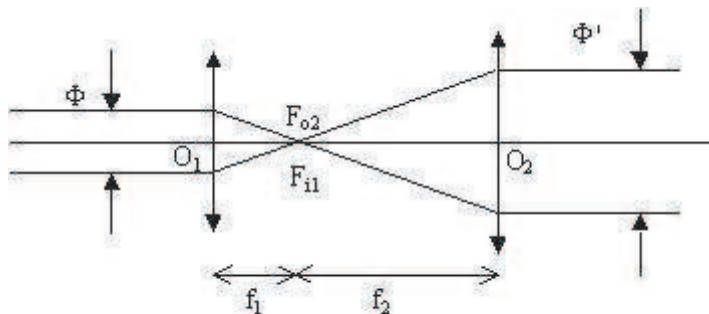
$T(\theta, t) = T_m + A_1 \cos \theta \exp -\frac{t}{\tau_1}$, l'écart $T - T_m = A_1 \cos \theta \exp -\frac{t}{\tau_1}$ est proportionnel au $\cos \theta$!

3ème partie :

Mesure optique d'un coefficient de transfert conducto- convectif

3.1

3.1.1 $F_{i1} \equiv F_{o2}$, soit $O_1 O_2 = f_1 + f_2$

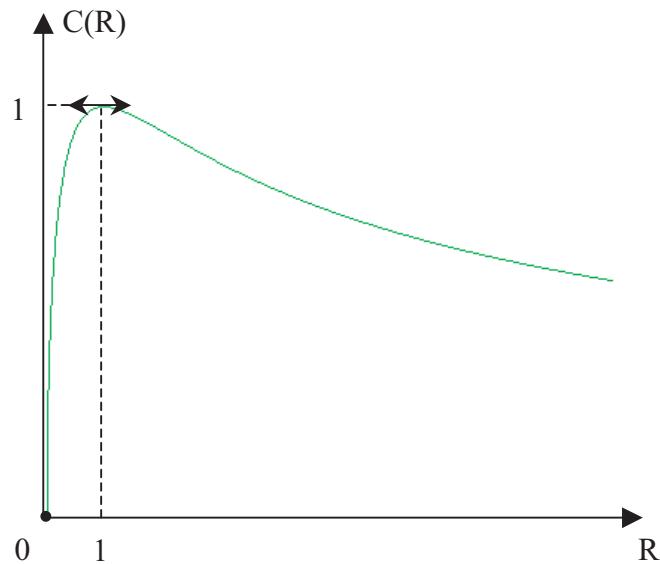
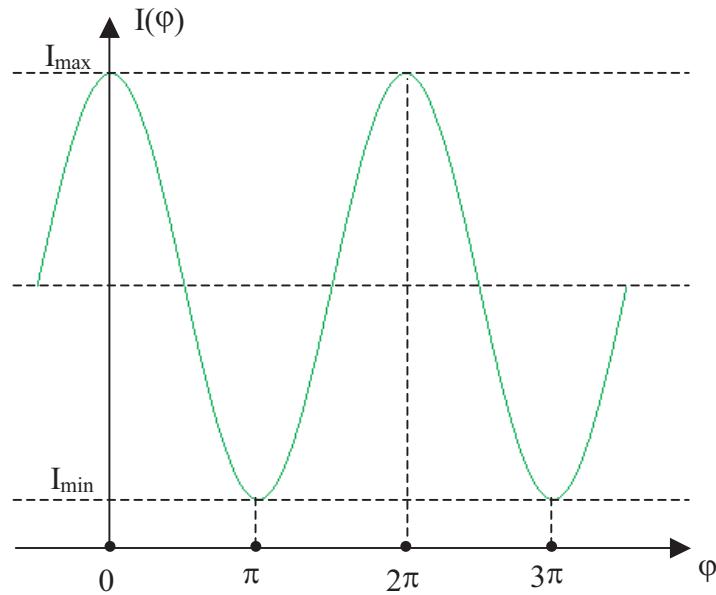


$$3.1.2 \quad \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{f_2}{f_1}$$

3.2

$$3.2.1 \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

3.2.2 :



$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

$$3.2.3 \quad C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{R}}{1+R} \text{ on a :}$$

$$C' = \frac{1-R}{\sqrt{R}(1+R)^2}$$

3.2.4 $C_{\max} = 1$, pour $R = 1$ donc il faut éclairer les deux miroirs de façon égales

3.3

3.3.1 Une frange $I(x) = cte \iff x = cte$ est une droite parallèle à Oy $\iff T(x) = cte$ surface isotherme

ou bien : $I = cte \iff \varphi = cte \iff \delta = cte \iff n = cte \iff T = cte$

3.3.2 on a : $p = \frac{|\varphi|}{2\pi} = \frac{|\delta|}{\Lambda}$ or

$$\delta = \delta_{geo} + \delta_{ond} = [(SM)_2 - (SM)_1] + [2\frac{\Lambda}{2} - 2\frac{\Lambda}{2}]$$

$$\delta = [(SA) + n_\infty AC + n_\infty (CD - L) + nL + (DM)] - [(SA) + n_\infty AB + n_\infty BD + nL + (DM)] = L(n - n_\infty)$$

soit

$$\delta = LA(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T})$$

$$\text{or } T_{plaque} > T > T_\infty \text{ donc } p = \frac{LA}{\Lambda}(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T}) > 0$$

3.3.3 $p_s = \frac{LA}{\Lambda}(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_s})$

3.3.4 d'après 3.3.2 et 3.3.1 on aura :

$$\frac{p}{p_s} = \frac{\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_p}}{\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_s}} \iff T_p = \frac{T_\infty}{1 - \frac{p}{p_s}(1 - \frac{T_\infty}{T_s})}$$

3.4

3.4.1 on a : $\frac{dp}{dT} = \frac{LA}{\Lambda} \frac{1}{T^2} > 0$ donc p est maximal pour T maximale càd au niveau de la plaque ($T_s > T(x) > T_\infty$)

3.4.2 pour $p(T_\infty) = 0$, on compte du haut vers la plaque les ordres d'interférence des franges sombres
0.5 – 1.5 – 2.5 – 3.5 – 4.5 – 5.5 – 6.5

3.4.3 d'après figure 6, on a : $x_p = (N^\circ - 159) \times 303\mu m$ l'ordre d'interférence au niveau de la plaque , d'après l'énoncé , est entier donc $p_s = 7$

soit :

$$T_p = \frac{294}{1 - \frac{p}{7}(1 - \frac{294}{328})}$$

p	6.5	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5	0.5
N°	163	167	172	177	184	196	219
$x_p(mm)$	1.21	2.42	3.94	5.45	7.57	11.2	18.2
$T(x_p)(K)$	325	320	314	310	305	300	296

3.5

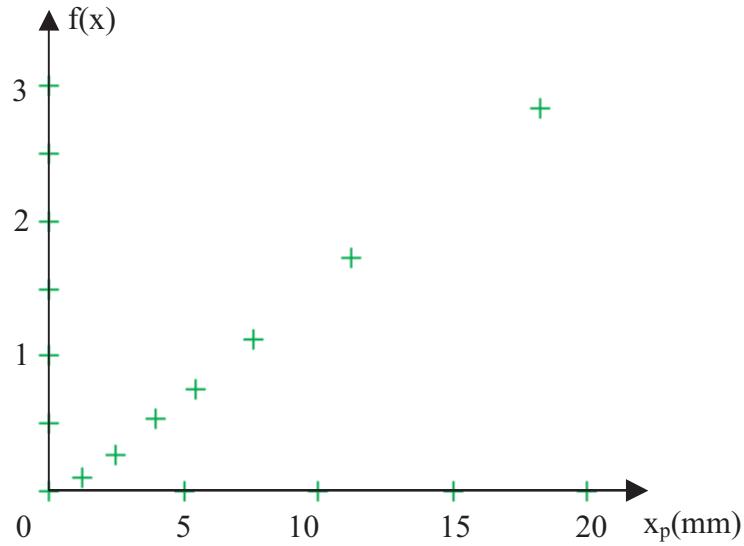
3.5.1 $T(x = +\infty) = \alpha = T_\infty$ et $T(x = 0) = \alpha + \beta = T_s$ soit :

$$\alpha = T_\infty$$

$$\beta = T_s - T_\infty$$

3.5.2 on représente la loi linéaire $f(x) = \ln \frac{T_s - T_\infty}{T - T_\infty} = kx$ avec $T_s = 328K$ et $T_\infty = 294K$

$T(x_p)(K)$	325	320	314	310	305	300	296
$x_p(mm)$	1.21	2.42	3.94	5.45	7.57	11.2	18.2
$f(x_p)$	0.092	0.27	0.53	0.75	1.13	1.73	2.83



soit : $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = 160 \text{ m}^{-1}$

3.5.3 (*dans l'énoncé il manque $S = L^2$ dans l'expression de Φ_{cc} !*)

Fourier au niveau de la plaque :

$$\Phi = j_{th}S = -\lambda_a S \frac{dT}{dx}(x=0) = kS\lambda_a\beta = kS\lambda_a(T_s - T_\infty)$$

d'où : $h = k\lambda_a$

3.5.4 A.N : $h = 4.24 \text{ WK}^{-1}\text{m}^2$.

fin du corrigé

Sondage atmosphérique

L'épreuve aborde quelques aspects de la physique de l'atmosphère terrestre. Elle est constituée de 2 parties largement indépendantes entre elles. Dans toute la suite on négligera les différents mouvements de la Terre de manière à pouvoir assimiler le référentiel terrestre R_T à un référentiel galiléen.

$R(O, x, y, z)$ désigne un repère cartésien lié à R_T ; l'axe Oz est pris vertical ascendant.

L'intensité \vec{g} du champ de pesanteur sera supposée constante. Tous les gaz rencontrés dans cette étude seront considérés comme parfaits.

Données utiles

- . Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- . Intensité du champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
- . Pression atmosphérique à l'altitude $z = 0 \text{ km}$: $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- . Température ambiante à l'altitude $z = 0 \text{ km}$: $T_0 = 290 \text{ K}$
- . Masse molaire de l'air : $M_a = 29,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$
- . Masse molaire de l'hélium : $M_{He} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$
- . Rapport des capacités calorifiques de l'air : $\gamma = c_p/c_v = 7/5$
- . Rapport des capacités calorifiques de l'hélium : $\gamma = c_p/c_v = 5/3$

1^{ère} partie : Thermodynamique de l'atmosphère

Tout au long de cette partie, on considérera que l'air atmosphérique est en équilibre hydrostatique sous la seule influence du champ de pesanteur. D'autre part on négligera la rotundité de la Terre de sorte que les variables d'état ne dépendent que de l'altitude z .

1.1 Étude préliminaire

1.1.1 Equilibre hydrostatique

1.1.1.1 Montrer que la pression $p_a(z)$ de l'air à l'altitude z est reliée à l'intensité \vec{g} du champ de pesanteur et à la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air par la relation :

$$\frac{dp_a(z)}{dz} = -g\mu_a(z) \quad (1)$$

Pour cela on pourra considérer une tranche d'atmosphère comprise entre les altitudes z et $z + dz$ et exprimer la condition de son équilibre mécanique après avoir dressé un bilan des forces auxquelles elle est soumise.

1.1.1.2 Exprimer la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air en fonction de sa température T_a et de sa pression p_a . Calculer numériquement la masse volumique de l'air à l'altitude $z = 0 \text{ km}$ notée μ_0 .

1.1.1.3 Déduire de ce qui précède l'équation différentielle liant la pression p_a à l'altitude z pour un profil de température $T_a(z)$ donné.

1.1.2 Application : Modèle de l'atmosphère isotherme

Dans cette question on suppose que la température de l'atmosphère est uniforme et partout égale à T_a .

1.1.2.1 Montrer que la pression $p_a(z)$ est alors donnée par :

$$p_a(z) = p_0 \exp - \frac{z}{H_a} \quad (2)$$

et donner l'expression de la constante H_a .

1.1.2.2 Pourquoi la constante H_a est-elle appelée échelle de hauteur ? En donner une interprétation graphique. Calculer numériquement H_a . Commenter le résultat obtenu en calculant la distance Δz_1 nécessaire pour que p_a varie de 1%.

1.1.2.3 Établir dans ces conditions l'expression de $\mu_a(z)$ en fonction de μ_0 et z .

1.1.3 Poussée d'Archimède

Considérons un volume V , limité par une surface fermée Σ au sein de l'atmosphère au repos dans le champ de pesanteur \vec{g} .

Montrer que le système contenu à l'intérieur de la surface Σ est soumis de la part du reste de l'atmosphère à une force pressante totale, appelée aussi force de poussée $\vec{\Pi}_A$ ou poussée d'ARCHIMÈDE, donnée par :

$$\vec{\Pi}_A = -m_d \vec{g} \quad (3)$$

où $m_d = \iiint \rho d\tau$ est la masse d'air déplacé c'est-à-dire la masse qu'aurait le volume V s'il était occupé par l'air atmosphérique dans les conditions d'équilibre de l'atmosphère.

On rappelle que les forces de pression peuvent être décrites par une densité volumique d'effort donnée, en un point M où la pression est $p_a(M)$, par $\vec{f}_p(M) = -\vec{\nabla}p_a(M)$. D'autre part, la condition d'équilibre hydrostatique peut être généralisée par $\vec{\nabla}p_a = \mu_a \vec{g}$.

1.2 Sondage de l'atmosphère

Un ballon-sonde est constitué par une enveloppe fermée (ballon) à laquelle est accrochée une nacelle contenant des instruments de mesure : sondes de température, de pression, d'humidité, d'hygrométrie, ... ainsi que ceux nécessaires à la transmission radio des données. L'enveloppe, la nacelle et les instruments qu'elle contient ont une masse totale $m = 20 \text{ kg}$. Initialement ($z = 0 \text{ km}$) l'enveloppe est partiellement gonflée à l'aide d'une quantité de matière n d'hélium. Au besoin, on pourra négliger la variation de la pression d'un point à un autre du ballon-sonde. D'autre part, on négligera le volume de la nacelle devant celui du ballon.

Le diamètre du ballon ne peut dépasser une valeur critique $\phi_c = 8 \text{ m}$. Au-delà de $\phi_c = 8 \text{ m}$ le ballon éclate. On négligera la raideur de l'enveloppe.

1.2.1 Calculer numériquement la valeur du volume maximum V_c du ballon.

1.2.2 Exprimer la résultante \vec{F} des forces qui s'exercent sur le ballon-sonde à une altitude z quelconque dans l'hypothèse de l'atmosphère isotherme et de l'équilibre hydrostatique. On exprimera le résultat en fonction de m , n , M_{He} , M_a et g .

1.2.3 Montrer qu'il existe une valeur minimale n_{min} de la quantité de matière n d'hélium qui sert à gonfler le ballon au-delà de laquelle le ballon peut décoller. En déduire le volume minimum V_{min} qui permet le décollage. Calculer numériquement n_{min} et V_{min} .

1.2.4 Le ballon est gonflé avec une masse $m_{He} = 9 \text{ kg}$ d'hélium.

1.2.4.1 Cela lui permet-il de décoller ?

1.2.4.2 Justifier brièvement pourquoi on peut considérer que lors de l'ascension du ballon, l'hélium subit une détente adiabatique. Par la suite on supposera que cette détente est quasi-statique.

1.2.4.3 Calculer la valeur numérique du volume initial V_0 du ballon.

1.2.4.4 Déterminer l'expression littérale et en déduire la valeur numérique la hauteur maximale z_m accessible par le ballon dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme de température T_0 (cf. 1.1.2). Que se passe-t-il lorsque z atteint z_m ?

1.2.5 Lors de l'ascension du ballon, un système de transmission hertzienne permet de récupérer au sol les données enregistrées. La figure 1 donne le profil de variation verticale de la température relevé par le ballon-sonde dans la troposphère ($0\text{km} \leq z \leq 11\text{km}$). L'hypothèse d'une atmosphère isotherme est-elle vérifiée dans les premières couches de l'atmosphère ? Expliquer brièvement pourquoi l'air au sol est plus chaud qu'en altitude.

1.2.6 Dans la troposphère règne un gradient de température $dT_a/dz = -\Gamma$ constant en première approximation.

1.2.6.1 Déterminer graphiquement le gradient thermique Γ qui règne dans la troposphère.

1.2.6.2 Déterminer les expressions donnant l'évolution de la pression $p_a(z)$ et de la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air dans la troposphère.

1.2.6.3 Représenter graphiquement $p_a(z)$ et $\mu_a(z)$ en fonction de z et commenter en comparant avec le modèle de l'atmosphère isotherme.

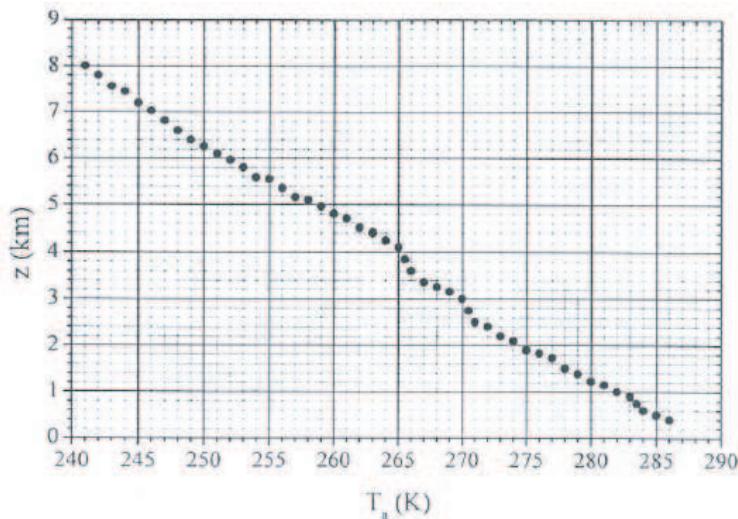


Fig 1 : Profil vertical de température mesuré par le ballon-sonde.

1.3 Stabilité de l'atmosphère

On se propose d'étudier la stabilité de la troposphère terrestre dans le cadre du modèle " à gradient de température " $dT_a/dz = -\Gamma$ constant. Pour cela, on considère un système mésoscopique constitué d'un petit volume d'air V pouvant être considéré comme infinitésimal à l'échelle macroscopique mais contenant un très grand nombre de particules d'air. V sera considéré comme un système fermé. Le système initialement en équilibre thermodynamique à l'altitude z_i est élevé d'une hauteur dz . On suppose que lors de ce déplacement le système n'échange pas de chaleur avec l'air environnant. La transformation sera de plus supposée quasi-statique.

1.3.1 Quelle relation thermodynamique relie la température T et la pression p de l'air constituant le système au cours d'une telle transformation ?

1.3.2 En différentiant la relation précédente, montrer que la variation de température dT du système entre les altitudes z_i et $z_i + dz$ est telle que :

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma_s$$

où Γ_s est une constante positive que l'on exprimera en fonction du rapport, des capacités calorifiques de l'air, de la masse molaire M_a de l'air, de la constante R des gaz parfaits et de l'intensité g du champ de pesanteur. Calculer numériquement Γ_s .

1.3.3 Exprimer la résultante \vec{F} des forces à laquelle est soumis le système ainsi déplacé à l'altitude $z_i + dz$ en fonction de sa masse volumique μ à l'altitude $z_i + dz$, de la masse volumique μ_a de l'air environnant, du volume V et de l'intensité g du champ de pesanteur.

1.3.4 En déduire la force par unité de masse \vec{f} à laquelle est soumis le système à l'altitude $z_i + dz$ en fonction de la température T du système, de la température T_a de l'air environnant et de l'intensité du champ de pesanteur g .

1.3.5 Déduire de ce qui précède un critère de stabilité de l'air déplacé. Quelle est la valeur maximale de Γ permettant d'avoir de l'air stable ?

1.3.6 Établir l'équation du mouvement libre du système considéré.

1.3.7 En linéarisant l'équation du mouvement du système, déterminer la pulsation ω de son mouvement en fonction de Γ , Γ_s , g et $T_i = T(z_i)$. Application numérique : calculer ω et la période correspondante pour $z_i = 3 \text{ km}$.

2^{ème} partie : Mouvement d'un ballon-sonde

Dans cette partie, on se propose d'étudier quelques mouvements d'un ballon-sonde dans le cadre d'un modèle simplifié. Pour cela on considère le système (S) constitué d'un ballon-sonde de masse $m_l = 10 \text{ kg}$ -y compris la masse du gaz ayant servi à gonfler le ballon- auquel est suspendu une nacelle de masse $m_2 = 20 \text{ kg}$ -y compris la masse des instruments de mesure et de transmission-.

On note $M = m_l + m_2$ la masse totale du système (S). Le ballon est supposé sphérique de centre B et de diamètre constant $\phi = 4 \text{ m}$. La nacelle est quant à elle supposée ponctuelle et centrée au point C (figure 2) tel que $BC = 3 \text{ m}$. On posera par la suite $\ell_1 = BG$ et $\ell_2 = GC$. La liaison entre le ballon et la nacelle est supposée rigide et sans masse. On supposera alors que le système (S) se comporte comme un solide indéformable de moment d'inertie J par rapport à l'axe (G, \vec{u}_x) perpendiculaire à BC et passant par le centre d'inertie G de (S). Pour les applications numériques on prendra $J = 77 \text{ kg.m}^2$.

Enfin, on supposera que la masse volumique de l'air est constante et vaut $\mu_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$. L'atmosphère environnante du ballon-sonde est le siège d'un vent caractérisé par sa vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_y$ uniforme et constante.

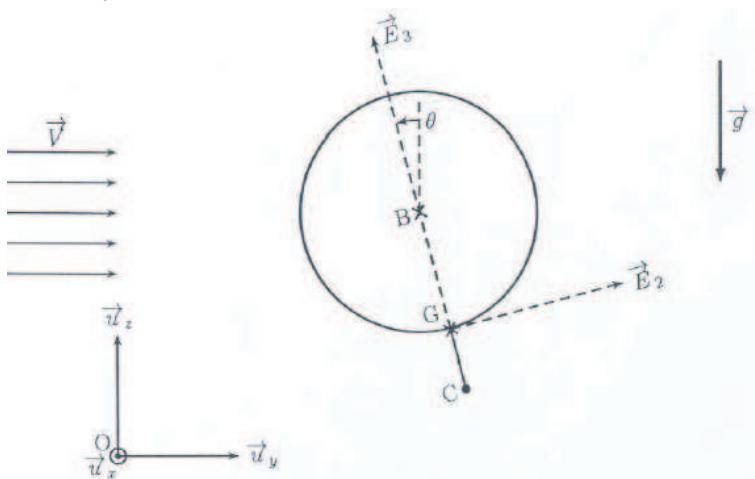


Fig 2 : Ballon-sonde en mouvement dans le champ de pesanteur.

On restreint l'étude au mouvement du système (S) dans le plan vertical constant (yOz). Le système est repéré par les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de son centre d'inertie G et par l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{E}_3)$.

Toutes les grandeurs vectorielles demandées seront exprimées dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ du repère $R(O, x, y, z)$ lié au référentiel terrestre R_T supposé galiléen.

2.1 Grandeur cinétiques

2.1.1 Déterminer, littéralement puis calculer numériquement, la position du centre d'inertie G de (S).

2.1.2 Exprimer le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ de (S) relativement à R_T .

2.1.3 Exprimer la vitesse $\vec{v}(B)$ du centre B du ballon-sonde par rapport à R_T , en fonction de y, z et θ et leurs dérivées ainsi que de ℓ_1 .

2.1.4 Déterminer les composantes U_x, U_y et U_z de la vitesse relative \vec{U} du centre B du ballon sonde par rapport à l'atmosphère environnante.

2.2 Bilan de forces

En plus de son poids \vec{P} , le système (S) est soumis à l'action des forces pressantes de l'atmosphère qui peut être décomposée en :

- la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{\Pi}_A$ (cf. 1.1.3) dont on suppose qu'elle reste applicable en régime dynamique ;
- la force de résistance de l'air donnée par :

$$\vec{R}_a = -\frac{1}{8}C_x\pi\phi^2\mu_a U\vec{U}$$

où $C_x = 0,8u.S.I$ est un coefficient positif constant appelé coefficient de traînée et $U = \|\vec{U}\|$ le module de la vitesse relative du système (S) par rapport à l'air ambiant. On posera par la suite : $k = \frac{1}{8}C_x\pi\phi^2\mu_a$.

Dans le cadre du modèle simplifié adopté, on supposera que ces deux forces n'agissent pas sur la nacelle et que leur point d'application est le centre B du ballon.

2.2.1 Quelle est la dimension de C_x ? Calculer numériquement k .

2.2.2 Donner l'expression de la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{\Pi}_A$ agissant sur le ballon-sonde et calculer numériquement son module que l'on notera Π_A par la suite.

2.2.3 Déterminer les composantes F_x, F_y et F_z de la résultante \vec{F} des efforts qui s'exercent sur le système (S).

2.2.4 Déterminer de même, les composantes M_x, M_y et M_z du moment résultant \vec{M} en G des efforts qui s'exercent sur le système (S).

2.3 Equations dynamiques du mouvement

Écrire, en projection sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique appliqués au système (S) relativement au référentiel terrestre R_T .

2.4 Régime établi

On se propose d'étudier un régime particulier du mouvement du ballon-sonde pour lequel le centre de gravité G se déplace à vitesse constante et l'angle θ reste constant. Ce régime sera appelé **régime établi** dans la suite du problème.

2.4.1 Préciser la direction de la vitesse \vec{U}_0 de (S) par rapport au vent dans ce régime et exprimer son module $U_0 = \|\vec{U}_0\|$ en fonction de k, M, g et Π_A . Calculer numériquement U_0 .

2.4.2 Quelle est la valeur de l'angle θ en régime établi ?

2.5 Perturbation verticale du régime établi

Le système (S) étant en régime établi d'ascension à la vitesse \vec{U}_0 constante, à l'instant pris comme origine, il rencontre une perturbation qui modifie instantanément sa vitesse verticale \dot{z} de $\varepsilon_z(0)$. On se propose alors d'étudier l'influence de cette perturbation, supposée petite, sur le mouvement d'ascension du ballon-sonde. Pour cela on pose à un instant $t \geq 0$:

$$\dot{z}(t) = U_0 + \varepsilon_z(t) \quad (6)$$

et on considère $\varepsilon_z(t)$ comme petit. La perturbation étudiée ne modifie ni \dot{y} ni θ .

2.5.1 Écrire l'équation différentielle dont $\varepsilon_z(t)$ est solution.

2.5.2 En linéarisant l'équation différentielle ainsi obtenue, montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\varepsilon_z}{dt} + \frac{2\alpha_1}{M}\varepsilon_z = 0$$

et donner l'expression de α_1 en fonction de k et U_0 . Calculer numériquement α_1 .

2.5.3 Donner l'expression de $\varepsilon_z(t)$ et commenter le résultat obtenu en discutant la stabilité du régime établi.

2.5.4 Donner l'expression d'un temps caractéristique τ de l'évolution du régime établi et calculer sa valeur numérique. Commenter.

2.6 Perturbation horizontale du régime établi

Le système (S) étant en régime établi d'ascension à la vitesse \vec{U}_0 constante, à l'instant pris comme origine, il rencontre une perturbation qui modifie instantanément sa vitesse horizontale \dot{y} de $\varepsilon_y(0)$ et l'angle θ de $\varepsilon_\theta(0)$. On admet que la composante verticale de la vitesse du ballon-sonde n'est pas modifiée par la perturbation considérée. On se propose alors d'étudier l'influence de cette perturbation, supposée petite, sur le mouvement d'ascension du ballon-sonde. Pour cela on pose à un instant $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = V + \varepsilon_y(t) \\ \theta(t) = \varepsilon_\theta(t) \end{cases} \quad (8)$$

et on considère $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_\theta(t)$ comme petits.

2.6.1 Vérifier, qu'au premier ordre non nul, le module U de \vec{U} n'est pas modifié par la perturbation.

2.6.2 En linéarisant les équations différentielles dont $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_\theta(t)$ sont les solutions montrer que :

$$\begin{cases} M \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \alpha_1 \varepsilon_y = \alpha_2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} \\ J \frac{d^2\varepsilon_\theta}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} + \alpha_4 \varepsilon_\theta = \alpha_2 \varepsilon_y \end{cases} \quad (9)$$

et donner les expressions des constantes α_1 , α_2 , α_3 et α_4 en fonction de k , U_0 , ℓ_1 , M et g . Calculer numériquement ces constantes.

2.6.3 On cherche des solutions de (9) sous forme harmonique telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon_y(t) = A \exp \omega t \\ \varepsilon_\theta(t) = B \exp \omega t \end{cases} \quad (10)$$

où A , B et ω sont trois constantes réelles ou complexes.

2.6.3.1 Montrer que A et B sont quelconques et ω est solution de l'équation de troisième degré :

$$\omega^3 + C_1\omega^2 + C_2\omega + C_3 = 0 \quad (11)$$

et donner les expressions littérales et calculer les valeurs numériques des constantes C_1 , C_2 et C_3 .

2.6.3.2 La résolution numérique de (11) donne les solutions :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{1}{\tau_1} \\ \omega_2 = -\frac{1}{\tau_2} + i\Omega \\ \omega_3 = -\frac{1}{\tau_2} - i\Omega \end{cases} \quad (12)$$

avec $\tau_1 = 0,30$ s, $\tau_2 = 3,14$ s et $\Omega = 1,70$ s⁻¹.

En déduire la solution générale de (9) en déterminant les constantes d'intégration à l'aide de conditions initiales adéquates que l'on précisera.

2.6.3.3 Interpréter les solutions obtenues et discuter de la stabilité horizontale du mouvement du ballon-sonde dans le régime établi. Quel est le temps δt au bout duquel l'effet de la perturbation horizontale se dissipe à 99% ?

fin de l'énoncé

Sondage atmosphérique

1^{ère} partie : Thermodynamique de l'atmosphère

1.1 Étude préliminaire

1.1.1 Equilibre hydrostatique

1.1.1.1 soit une tranche $[z, z+dz]$ de surface S , l'équilibre mécanique de la tranche dans le référentiel Galiléen s'écrit : $\vec{0} = \mu_a S dz \vec{g} + p_a(z+dz)S(-\vec{z}) + p_a(z)S\vec{z} \iff \frac{dp_a(z)}{dz} = -g\mu_a(z)$

1.1.1.2 on a : $p_a V = nRT_a = \frac{m}{M}RT_a \iff \mu_a = \frac{m}{V} = \frac{p_a M}{RT_a}$ A.N : $\mu_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$

1.1.1.3 $\frac{dp_a}{dz} = -\frac{Mg}{RT_a} p_a$

1.1.2 Application : Modèle de l'atmosphère isotherme

1.1.2.1 T_a est constante 1.1.1.3 $\Rightarrow p_a = A \exp -\frac{Mg}{RT_a} z$ en $z = 0$ on a $p_a(0) = p_0$ donc : $p_a(z) = p_0 \exp -\frac{Mg}{RT_a} z$, soit : $H_a = \frac{RT_a}{Mg}$

1.1.2.2 H_a est la longueur caractéristique de l'atténuation de la pression, est aussi la pente à l'origine ; après $5H_a$ la pression est quasi-nulle! A.N : $H_a = 8.5 \text{ km}$

Δz_1 est donné par : $p_a(\Delta z_1) = p_0 \exp -\frac{\Delta z_1}{H_a} = 0.99p_0 \iff \Delta z_1 = \ln(0.99)H_a = 85 \text{ m}$, la pression varie notablement à l'échelle de H_a

1.1.2.3 $\mu_a = \frac{p_a M}{RT_a} = \frac{p_0 M}{RT_a} \exp -\frac{z}{H_a} = \mu_0 \exp -\frac{z}{H_a}$

1.1.3 Poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A = \int \int \int -\vec{\nabla} p_a d\tau = \int \int \int -\mu \vec{g} d\tau = -m_d \vec{g}$$

1.2 Sondage de l'atmosphère

1.2.1 $V_c = \frac{4\pi}{3} \frac{\phi_c^3}{8} = 268 \text{ m}^3$

1.2.2 $\vec{F} = \vec{P}(\text{ballon}) + \vec{P}(\text{gazHe}) + \vec{\Pi}_A = (m + n.M_{He} - m_d)\vec{g}$

on a : $m_d = n_d \cdot M_a = \frac{p_a V M_a}{RT_a} = n \cdot m_a$ soit : $\vec{F} = (m + n.M_{He} - nM_a)\vec{g}$

1.2.3 le ballon décolle en $z = 0$ si $\vec{F} \cdot \vec{z} > 0 \iff n > n_{min} = \frac{m}{M_a - M_{He}} \quad (> 0)$

en $z = 0$ on aura : $V_{min} = \frac{n_{min} RT_0}{p_0} = \frac{m}{M_a - M_{He}} \frac{RT_0}{p_0}$ A.N : $n_{min} = 800 \text{ mol}$ et $V_{min} = 19 \text{ m}^3$

1.2.4

1.2.4.1 on a : $n = \frac{m_{He}}{M_{He}} = \frac{9}{4 \cdot 10^{-3}} = 2250 \text{ mol} > n_{min} = 800 \text{ mol}$ le ballon décolle

1.2.4.2 l'ascension est rapide or les échanges thermiques sont lents donc négligés, de plus lors de l'ascension la pression décroît donc détente adiabatique

1.2.4.3 on a : $n = 2250 \text{ mol}$ donc $V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 53 \text{ m}^3 < V_c$

1.2.4.4 détente adiabatique réversible : entre $z = 0$ et $z = z_{max}$

$$\Rightarrow p_0 V_0^{\gamma'} = p_a(z_{max}) V_c^{\gamma'} = p_0 e^{-\frac{z_{max}}{H_a}} V_c^{\gamma'} \Rightarrow z_{max} = \gamma' H_a \ln \frac{V_c}{V_0}$$

A.N : $z_{max} = 23 \text{ km}$ à cette altitude le ballon éclate

1.2.5 Non , car T varie

1.2.6

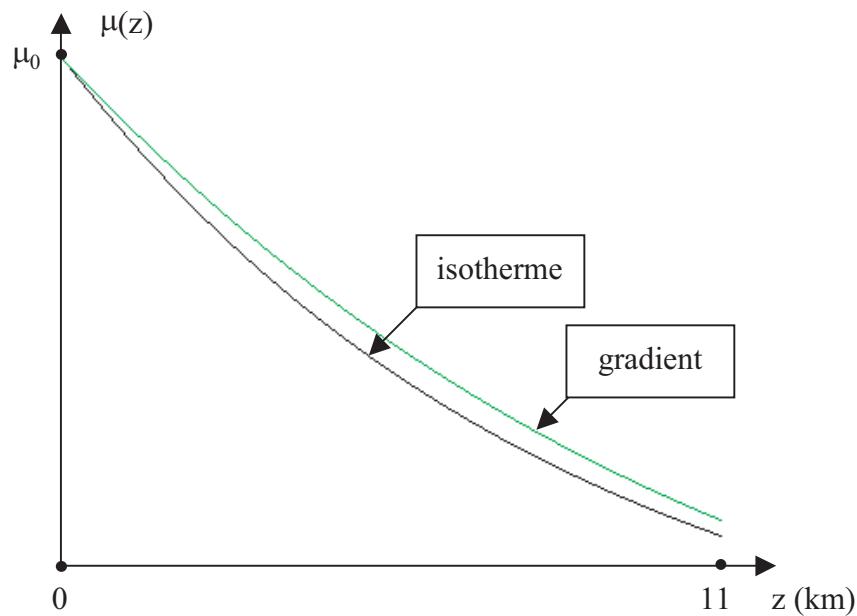
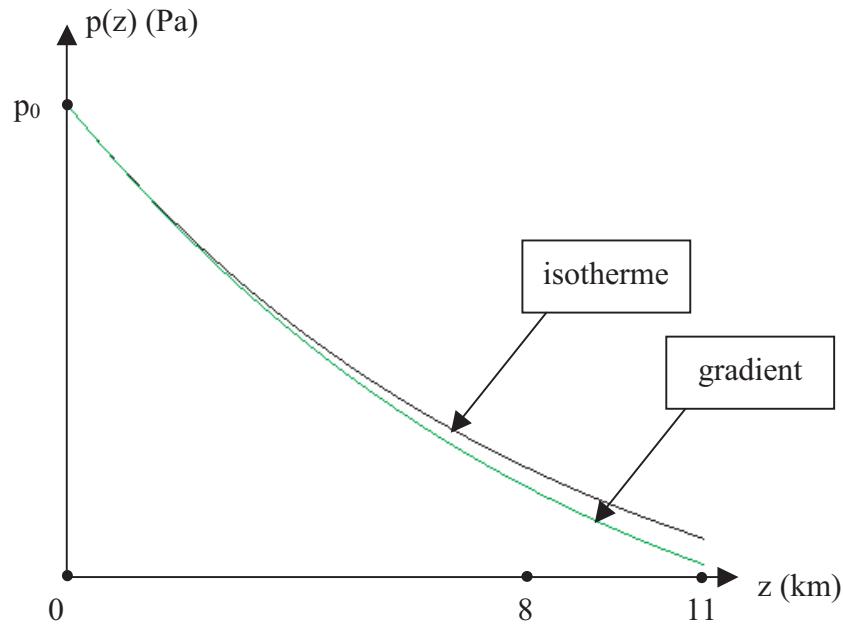
$$1.2.6.1 \quad \Gamma = -\frac{dT_a}{dz} = 6 \cdot 10^{-3} K.m^{-1}$$

1.2.6.2 on a : $T_a = -\Gamma z + T_0 > 0$ donc $\frac{dp_a(z)}{dz} = -\frac{p_a M g}{R(T_0 - \Gamma z)}$ séparation des variables

$$\int_{p_0}^p \frac{dp_a(z)}{p_a} = - \int_0^z \frac{M g dz}{R(T_0 - \Gamma z)} \implies$$

$$p_a(z) = p_0 \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} \right]^{\frac{M g}{R \Gamma}} \quad \text{et} \quad \mu_a(z) = \frac{p_a M}{R T_a} = \mu_0 \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} \right]^{\frac{M g}{R \Gamma} - 1}$$

1.2.6.3 A.N : $\frac{M g}{R \Gamma} = 5.7$



1.3 Stabilité de l'atmosphère

1.3.1 loi de Laplace s'applique pour la transformation adiabatique quasi-statique (réversible) d'un gaz parfait : $p^{1-\gamma}T^\gamma = cte$

1.3.2 $\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp_a}{p_a} + \frac{dT}{T} = 0 \iff -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{Mgdz}{R(T_0-\Gamma z)} + \frac{dT}{(T_0-\Gamma z)} = 0 \iff \Gamma_s = -\frac{dT}{dz} = \frac{Mg}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma}$
A.N :

$$\Gamma_s = 9.8 \cdot 10^{-3} K.m^{-1}$$

1.3.3 $\vec{F} = \vec{\Pi}_A + \mu V \vec{g} = (\mu - \mu_a) V \vec{g}$

1.3.4

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\mu V} = (1 - \frac{\mu_a}{\mu}) \vec{g}$$

la transformation étant réversible $p_a = p \iff \frac{RT_a \mu_a}{M_a} = \frac{RT \mu}{M_a} \implies \vec{f} = (1 - \frac{T}{T_a}) \vec{g}$

1.3.5 lorsque la masse d'air monte, la force de rappel doit être vers le bas, l'atmosphère sera stable :

$$T < T_a \iff -\Gamma_s z + T_0 < -\Gamma z + T_0 \iff \Gamma < \Gamma_s = \Gamma_{max}$$

1.3.6 $\mu V \ddot{z} = \vec{F} \cdot \vec{z} \implies \ddot{z} = -(1 - \frac{T}{T_a}) g = \frac{\Gamma - \Gamma_s}{T_0 - \Gamma z} z g$

1.3.7 or au voisinage de z_i :

$$T_0 - \Gamma z \approx T_0 - z_i \Gamma = T_i$$

soit :

$$\ddot{z} + \frac{\Gamma_s - \Gamma}{T_i} g z = 0$$

donc $\omega = \sqrt{\frac{\Gamma_s - \Gamma}{T_i}} g$

A.N : $T(z_i = 3km) = 270K$; $\omega = 1.1 \cdot 10^{-2} Hz$ et la période $\Delta t = 9.5 mn$ (raisonnable)

2^{ème} partie : Mouvement d'un ballon-sonde

2.1 Grandeurs cinématiques

2.1.1 G est tel que : $m_1 \vec{GB} + m_2 \vec{GC} = \vec{0} \implies m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2$ d'autre part $\ell_1 + \ell_2 = BC$

$$\implies BG = \ell_1 = \frac{m_2 BC}{m_1 + m_2} = 2 m$$

2.1.2 $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{x}$

2.1.3 dans le plan xOy on a :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{GB} = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\theta} & 0 \\ \dot{y} & 0 & -\ell_1 \sin \theta \\ \dot{z} & 0 & \ell_1 \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} - \ell_1 \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$$

2.1.4 composition des vitesses $\vec{U} = \vec{v}_{B/atm} = \vec{v}_B - \vec{V}_{vent}$ soit : $\vec{U} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} - \ell_1 \dot{\theta} \cos \theta - V \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$

2.2 Bilan de forces

2.2.1 on a : $N = [C_x] \cdot m^2 \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot m^2 \cdot s^{-2} \implies C_x$ est sans unité; A.N : $k = 6.5 \cdot kg \cdot m^{-1}$

2.2.2 $\vec{\Pi}_A = -m_d \vec{g} = \mu_a g \frac{\pi \Phi^3}{6} \vec{z}$ A.N : $\Pi_A = 427 N$

2.2.3 $\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{\Pi}_A + \vec{R}_a = \begin{vmatrix} 0 \\ -kUU_y \\ -Mg + \Pi_A - kUU_z \end{vmatrix}$

2.2.4

$$\vec{M}_G = \vec{M}_G(\vec{P}, G) + \vec{M}_G(\vec{\Pi}_A, B) + \vec{M}_G(\vec{R}_a, B) = \vec{G}\vec{B} \times (\vec{\Pi}_A + \vec{R}_a) = \begin{vmatrix} 0 \\ -\ell_1 \sin \theta \\ \ell_1 \cos \theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -kUU_y \\ \Pi_A - kUU_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_G = \begin{vmatrix} -\ell_1 \Pi_A \sin \theta + k\ell_1 UU_z \sin \theta + k\ell_1 \cos \theta UU_y \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2.3 Equations dynamiques du mouvement

$$\text{TRC : } M\vec{a}_G = \vec{F}_{ext} \iff \begin{cases} M0 = 0 \\ M\ddot{y} = -kUU_y \\ M\ddot{z} = -Mg + \Pi_A - kUU_z \end{cases} \quad \text{TMC en G : } \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G \text{ or}$$

$$\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_G^* = J\dot{\theta}\vec{x} \implies J\ddot{\theta} = M_x = -\ell_1 \Pi_A \sin \theta + k\ell_1 UU_z \sin \theta + k\ell_1 \cos \theta UU_y$$

2.4 Régime établi

2.4.1 en régime établi $\vec{a}_G = \vec{0} \implies U_y = 0 \implies \vec{U}_0 = U_z \vec{z} \perp \vec{V}$
 or : $U_z = \frac{\Pi_A - Mg}{kU_0} > 0 \implies U_0 = |U_z| = \sqrt{\frac{\Pi_A - Mg}{k}} = 4.5 \text{ m.s}^{-1}$

2.4.2 en régime établi TMC devient $0 = -\ell_1(\Pi_A - kU_0U_z) \sin \theta = -\ell_1 Mg \sin \theta = 0 \implies \theta = 0 \text{ (ou } \pi)$

2.5 Perturbation verticale du régime établi

2.5.1 en régime établi perturbé $\ddot{y} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ sont encore valables donc : $U_y = 0$ et $U = |U_z|$
 TRC sur Oz : $M\ddot{z} = -Mg + \Pi_A - kUU_z$ avec $U_z = \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z} > 0$ (ascension), il vient :

$$M\dot{\varepsilon}_z = -Mg + \Pi_A - k(U_0 + \varepsilon_z)^2$$

2.5.2 $M\dot{\varepsilon}_z \approx \underbrace{-Mg + \Pi_A - kU_0^2(1 + 2\frac{\varepsilon_z}{U_0})}_{\alpha_1 = 29 \text{ kg.s}^{-1}}$ d'après 2.4.1 on aura $\frac{d\varepsilon_z}{dt} + \frac{2kU_0}{M}\varepsilon_z = 0$ soit $\alpha_1 = kU_0$ A.N :

2.5.3 $\varepsilon_z(t) = \varepsilon_z(0)e^{-\frac{2\alpha_1}{M}t} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$ le régime établi est donc stable.

2.5.4 $\tau = \frac{M}{2\alpha_1}$ or $M = 30 \text{ kg} \implies \tau = 0.5 \text{ s}$ le régime ne tarde pas à s'établir

2.6 Perturbation horizontale du régime établi

2.6.1 on a :

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} - \ell_1 \dot{\theta} \cos \theta - V \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ \varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta \varepsilon_\theta \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ \varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

d'où : $U = \sqrt{U_0^2 + (\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta)^2} \approx U_0$

2.6.2 TRC sur Oy : $M\dot{\varepsilon}_y = -kU_0U_y = -kU_0(\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta)$

et TMC : $J\ddot{\varepsilon}_\theta = -\ell_1(\Pi_A - kU_0^2)\varepsilon_\theta + k\ell_1 U_0(\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta) = -\ell_1 Mg \varepsilon_\theta + k\ell_1 U_0(\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta)$

donc : (9) $\begin{cases} M\frac{d\varepsilon_y}{dt} + \alpha_1 \varepsilon_y = \alpha_2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} \\ J\frac{d^2\varepsilon_\theta}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} + \alpha_4 \varepsilon_\theta = \alpha_2 \varepsilon_y \end{cases}$

avec : $\alpha_1 = kU_0$ $\alpha_2 = kU_0\ell_1$ $\alpha_3 = kU_0\ell_1^2$ $\alpha_4 = \ell_1 Mg$

$\alpha_1 = 29 \text{ kg.s}^{-1}$ $\alpha_2 = 58 \text{ kg.s}^{-1}.m$ $\alpha_3 = 116 \text{ kg.s}^{-1}.m^2$ $\alpha_4 = 589 \text{ N.m}$

2.6.3

2.6.3.1 (10) injecté dans (9) donne : $\begin{cases} (M\omega + \alpha_1)A - \alpha_2\omega B = 0 \\ -\alpha_2A + (J\omega^2 + \alpha_3\omega + \alpha_4)B = 0 \end{cases}$

A et B étant non nuls soit : $\Delta = (M\omega + \alpha_1)(J\omega^2 + \alpha_3\omega + \alpha_4) - \alpha_2^2\omega = 0$

il vient : $C_1 = \frac{M\alpha_3 + J\alpha_1}{JM} = 2.5 \text{ s}^{-1}$ $C_2 = \frac{M\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2}{JM} = 7.6 \text{ s}^{-2}$ $C_3 = \frac{\alpha_1\alpha_4}{JM} = 7.4 \text{ s}^{-3}$

2.6.3.2 le système (9) est linéaire donc par superposition : $\begin{cases} \varepsilon_y(t) = A_1e^{\omega_1 t} + A_2e^{\omega_2 t} + A_3e^{\omega_3 t} \\ \varepsilon_\theta(t) = B_1e^{\omega_1 t} + B_2e^{\omega_2 t} + B_3e^{\omega_3 t} \end{cases}$

En notation réelle : $\begin{cases} \varepsilon_\theta(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}}(B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) \\ \varepsilon_y(t) = A'e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}}(B' \cos \Omega t + C' \sin \Omega t) \end{cases}$

les conditions initiales sont :

$$\varepsilon_\theta(0) = A + B$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta(0) = 0 = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2} + C\Omega$$

(système écarté de sa position d'équilibre mais laché sans vitesse initiale)

d'après (9) :

$$\alpha_2\varepsilon_y(0) = J\left(\frac{A}{\tau_1^2} + \frac{B}{\tau_2^2} - \frac{2C\Omega}{\tau_2} - B\Omega^2\right) + \alpha_4\varepsilon_\theta(0)$$

par remplacement :

$$A =$$

$$B =$$

et

$$C =$$

2.6.3.3 $\varepsilon_y(t) = ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + be^{-\frac{t}{\tau_2}} \cos(\Omega t + \varphi) \rightarrow 0$ lorsque $t > 5$ $\sup(\tau_1, \tau_2) = 15.7 \text{ s.}$

fin du corrigé

Méthode photométrique de mesure d'une température

Le problème traite de la mesure de la température d'un corps. Dans certaines situations, la mesure d'une température à l'aide d'un thermomètre de contact est impossible (températures élevées, objets éloignés, ...). On peut alors mettre en œuvre des méthodes optiques comme le pyromètre optique ou la méthode photothermique que nous étudions dans ce problème.

La méthode photothermique de mesure de la température T_0 d'un corps solide opaque consiste à perturber localement le champ des températures $T(\vec{r}, t)$ de ce corps par un apport d'énergie lumineuse variable $\varphi_{\lambda_0}(t) = \varphi_{\lambda_0} F(t)$. Cette énergie lumineuse est fournie par un faisceau laser cylindrique monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide et de section transversale ΔS . La variation temporelle $F(t)$ est obtenue à l'aide d'un hacheur optique. Le champ des températures perturbé peut s'écrire en présence du flux laser modulé sous la forme :

$$T(\vec{r}, t) = T_0 + \Delta T(\vec{r}, t)$$

avec $\Delta T \ll T_0$.

En présence du faisceau laser, le corps émet localement un rayonnement thermique de température $T(\vec{r}, t)$ qui est analysé par un détecteur photométrique. On considère le dispositif expérimental dont le schéma de principe est représenté figure 1. L'échantillon (Σ) dont on veut mesurer la température T_0 est un solide opaque, cylindrique de section circulaire ΔS et d'épaisseur $e = 1 \text{ cm}$. La paroi latérale de l'échantillon est supposée parfaitement calorifugée par un corps athermane. La face supérieure (FS) de l'échantillon est à l'air libre de température T_a . L'air ainsi que tous les milieux traversés par les divers flux lumineux sont supposés parfaitement transparents. Tous les instruments de mesure sont supposés à la température constante T_a . On appelle h , supposé constant, le coefficient de transmission thermique de surface entre (FS) et l'air immobile à grande distance de (FS). La face inférieure (FI) de l'échantillon est en contact thermique parfait avec un thermostat de température constante T_0 .

Du fait de l'éclairage ambiant, le solide est soumis en permanence à un flux surfacique lumineux parasite noté φ_{pa} qui apporte au corps une très faible énergie thermique.

Les propriétés radiatives de (Σ) sont modélisées par celles du corps noir.

On note c la chaleur spécifique du solide, λ sa conductivité thermique et ρ sa masse volumique. Ces grandeurs seront supposées constantes.

1^{ère} partie : Modélisation et mise en équation

1.1 Étude de l'équilibre thermique initial

On considère tout d'abord la situation initiale où le solide n'est pas éclairé par le faisceau laser.

Dans ces conditions le corps est en équilibre thermique à la température T_0 constante.

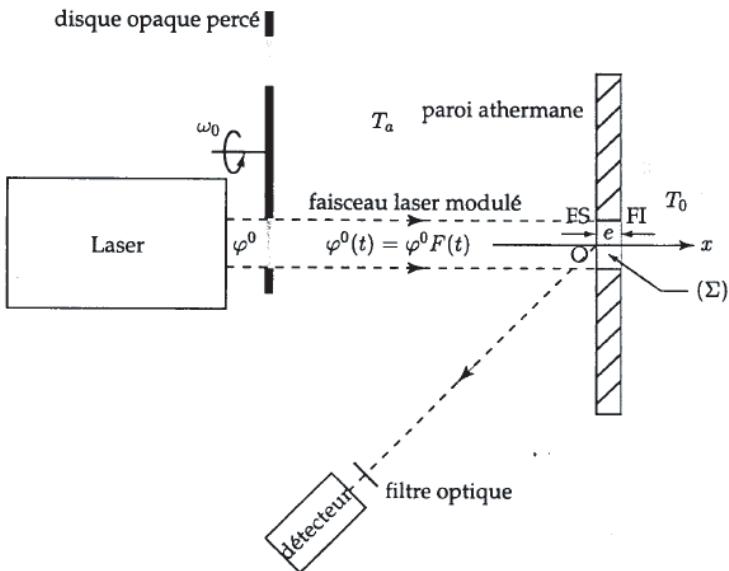


Fig 1 : Schéma de principe du dispositif expérimental.
L'origine de l'axe Ox est choisi sur la face (FS).

1.1.1 corps noir

1.1.1.1 Rappeler la définition du corps noir.

1.1.1.2 Donner l'expression du flux *hémisphérique* surfacique total φ_e^{CN} émis par le corps noir de température thermodynamique T . Comment appelle-t-on cette loi ?

1.1.1.3 Quelles sont les conditions d'application de cette loi ?

1.1.2 Equilibre thermique

1.1.2.1 Rappeler l'expression de l'énergie interne massique u d'un solide idéal en fonction de la chaleur spécifique c constante, de la température thermodynamique T et d'une éventuelle constante u_0 .

1.1.2.2 La température initiale T_0 du solide étant supposée uniforme, montrer à l'aide d'un bilan d'énergie détaillé que T_0 vérifie l'équation (1) :

$$\sigma(T_0^4 - T_a^4) + h(T_0 - T_a) - \varphi_{pa} = 0 \quad (1)$$

avec σ la constante de STEFAN.

1.1.2.3 Déduire de la faible valeur de φ_{pa} que la température T_0 du corps est très légèrement supérieure à la température ambiante T_a .

1.1.2.4 Linéarisation : En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que l'on peut linéariser l'équation (1) sous la forme :

$$4\sigma T_a^3(T_0 - T_a) + h(T_0 - T_a) - \varphi_{pa} = 0 \quad (2)$$

1.2 Ordres de grandeurs

1.2.1 Bilan d'énergie en régime variable

On considère le solide (Σ) de la figure 1. On suppose que sa température est variable et peut s'écrire sous la forme $T = T(\vec{r}, t)$, du fait d'un apport d'énergie thermique surfacique variable, à l'interface entre (FS) et l'air libre, en $x = 0$.

1.2.1.1 En examinant les symétries et les conditions aux limites radiales du problème, montrer que le champ des températures $T = T(\vec{r}, t)$ ne peut dépendre que du temps t et d'une seule variable spatiale que l'on précisera.

1.2.1.2 Établir à partir d'un bilan détaillé d'énergie que l'équation vérifiée par la température T au sein de l'échantillon est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

avec a la diffusivité thermique du solide, dont on donnera d'une part l'expression en fonction de ρ , λ et c et d'autre part l'unité dans le système international SI.

1.2.1.3 On note δt la durée de l'expérience pendant laquelle on impose l'apport d'énergie thermique à l'interface entre (FS) et l'air libre. En écrivant à partir de (3) une équation aux dimensions, donner en fonction de a et δt , l'expression de la longueur L_q de pénétration de l'énergie thermique par diffusion dans le solide.

1.2.1.4 On donne $a = 10^{-6} \text{ SI}$ et $\delta t = 0,1 \text{ s}$. En déduire la valeur numérique de la longueur de pénétration L_q de l'énergie thermique dans l'échantillon.

1.2.1.5 En comparant la valeur numérique de L_q à l'épaisseur $e = 1 \text{ cm}$ de l'échantillon, montrer que l'on a $T(x \gg L_q, t) = T_0$ à chaque instant t de l'expérience.

1.2.2 Effet d'un flux lumineux incident variable

On suppose maintenant que l'apport d'énergie thermique au niveau de la face supérieure (FS) de l'échantillon est due au faisceau laser cylindrique qui illumine exactement la face (FS).

Le faisceau laser est modulé dans le temps à l'aide d'un hacheur optique constitué d'un disque opaque percé de plusieurs orifices circulaires transparents de même section que le faisceau laser. Ce disque mis en rotation uniforme à vitesse angulaire constante intercepte périodiquement le faisceau (figure 1).

L'expression de la densité surfacique de puissance lumineuse transportée par le faisceau laser modulé est donnée par :

$$\varphi^0(t) = \varphi^0 F(t) \quad (4)$$

On suppose que l'intensité lumineuse du faisceau laser est uniforme sur sa section.

Seule la contribution variable du flux étant détectée ultérieurement, on se limite à la pulsation fondamentale en écrivant la fonction modulante $F(t)$ sous la forme :

$$F(t) = \cos \omega t \quad (5)$$

1.2.2.1 La puissance lumineuse du laser utilisé dans cette expérience est $P = 2 \text{ W}$ pour un rayon du faisceau laser qui vaut $r = 5 \text{ mm}$. En déduire l'expression et la valeur numérique de φ^0 . Commenter cette valeur.

1.2.2.2 Représenter graphiquement l'allure de $\varphi^0(t)$ en fonction du temps t .

Lors de son interaction avec l'échantillon (Σ), la lumière du laser est absorbée par l'échantillon selon une loi exponentielle. La densité surfacique de puissance lumineuse absorbée par la matière est alors donnée par :

$$\varphi_{\lambda 0}(x, t) = \varphi^0 F(t) \exp(-x/L_{\lambda 0}) \quad (6)$$

avec φ^0 et $L_{\lambda 0}$ des constantes positives. On donne $L_{\lambda 0} = 10^{-7} \text{ m}$.

1.2.2.3 Quel est le sens physique de la constante $L_{\lambda 0}$?

1.2.2.4 Comparer $L_{\lambda 0}$ à l'épaisseur e de l'échantillon (Σ). En déduire une représentation graphique pertinente de la densité surfacique de puissance lumineuse $\varphi_{\lambda 0}(x, t)$ absorbée par (Σ) pour $x \in [0, e]$.

1.2.2.5 Déduire des questions précédentes que l'équation (3) est encore valable lorsque l'échantillon (Σ) est illuminé par le faisceau laser modulé.

1.3 Résolution et conditions aux limites

On cherche à résoudre l'équation (3) qui donne le champ des températures $T(x, t)$ au sein de (Σ) lorsque le solide est éclairé par le faisceau laser modulé. Le faible flux parasite φ_{pa} , la température ambiante T_a et la température T_0 du thermostat sont supposés avoir les mêmes valeurs que dans la situation statique de la question 1.1.

On pose la température absolue complexe $\underline{T}(x, t)$ sous la forme :

$$\underline{T}(x, t) = \underline{\theta}(x) \exp i\omega_0 t + T_0 \quad (7)$$

avec $\underline{\theta}(x)$ une fonction à priori complexe de la position x uniquement, $i^2 = -1$ et

$T(x, t) = \Re[\underline{T}(x, t)]$ où \Re désigne la partie réelle.

On rappelle que $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et que $\exp -i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

1.3.1 Équation différentielle

1.3.1.1 Déduire des relations (3) et (7) l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\underline{\theta}(x)$.

1.3.1.2 En déduire que la fonction $\underline{\theta}(x)$ est de la forme :

$$\underline{\theta}(x) = \underline{A} \exp +\underline{\alpha}x + \underline{B} \exp -\underline{\alpha}x$$

avec \underline{A} et \underline{B} deux constantes à priori complexes, dont on ne demande pas l'expression ici et $\underline{\alpha}$ une constante complexe que l'on exprimera en fonction de ω_0 et de a .

1.3.2 Conditions aux limites

1.3.2.1 En remarquant que la température $T(x \gg L_q, t)$ de l'échantillon est finie, simplifier l'expression de $\underline{\theta}(x)$.

1.3.2.2 linéarisation : L'écart entre la température absolue $T(x, t)$ et la température ambiante T_a étant faible, montrer que la partie $\varphi_1^R = \sigma[T^4(0, t) - T_a^4]$ du flux radiatif surfacique hémisphérique φ^R de l'échantillon peut se mettre sous la forme linéarisée :

$$\varphi_1^R = 4\sigma T_a^3 [T(0, t) - T_a] \quad (8)$$

1.3.2.3 Donner l'expression de chacun des courants volumiques d'énergie thermique existant à l'interface $x = 0$ de l'échantillon.

1.3.2.4 En déduire une équation de continuité faisant intervenir $T(0, t)$, T_a , $(\frac{\partial T}{\partial x})_{x=0}$, $\varphi^0(t)$ et φ_{pa} .

1.3.2.5 En utilisant les résultats (2) et (8), montrer que la fonction $\underline{\theta}$ obéit à l'équation de continuité :

$$-\lambda \left(\frac{d\underline{\theta}}{dx} \right)_{x=0} = \varphi^0 - h_e \underline{\theta}(0) \quad (9)$$

avec h_e une constante dont on donnera l'expression en fonction de h , σ et T_a .

1.3.2.6 Déduire de (9) l'expression de la constante \underline{B} en fonction de φ^0 , h_e , λ et a . On donne $a = 10^{-6} SI$, $h = 20 W.K^{-1}.m^{-2}$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W.K^{-4}.m^{-2}$, $\lambda = 10 W.m^{-1}.K^{-1}$, $T_a = 300 K$ et $f_0 = \omega_0/2\pi = 500 Hz$.

1.3.2.7 Montrer par un calcul d'ordre de grandeur que $h_e \ll |\underline{B}|$, où $|\underline{B}|$ désigne le module de \underline{B} . En déduire finalement que \underline{B} peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{B} = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-i\frac{\pi}{4})$$

1.3.2.8 En déduire que l'expression de $\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}(x) \exp i\omega_0 t$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\theta}(x, t) = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}x) \exp i(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}x - \frac{\pi}{4})$$

1.3.2.9 Donner finalement l'expression du champ des températures $T(x, t)$ dans le solide (Σ). Discuter le sens physique de chacun des termes qui apparaissent dans $T(x, t)$. Vérifier qu'en absence de faisceau laser on retrouve la situation statique.

2^{ème} partie : Détection et analyse du signal

Le signal $S_\lambda(t)$ délivré par le détecteur est proportionnel à la densité spectrale φ_λ^P du flux hémisphérique surfacique partant de (Σ). Un dispositif optique non représenté permet de focaliser ce flux sur le détecteur. Un filtre passe-bande optique idéal de longueur d'onde centrale λ et de bande passante $\Delta\lambda \ll \lambda$ ne laisse passer que la fraction d'énergie lumineuse dont la longueur d'onde est comprise entre $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$ avec un coefficient de transmission $\tau(\lambda)$ égal à 1 dans cet intervalle de longueur d'onde.

2.1 Détection du signal

2.1.1 Densité spectrale

2.1.1.1 Représenter graphiquement l'allure du coefficient de transmission $\tau(\lambda)$ du filtre en fonction de λ .

On rappelle que la densité spectrale φ_λ^P du corps noir obéit à la loi de PLANCK.

2.1.1.2 Rappeler la loi de Planck du rayonnement du corps noir.

2.1.1.3 Montrer que $\frac{\partial \varphi_\lambda^P}{\partial T}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi_\lambda^P}{\partial T} = \frac{p \exp(\frac{b}{\lambda T})}{\lambda^6 T^2 (\exp(\frac{b}{\lambda T}) - 1)^2}$$

avec p et b des constantes positives dont on donnera les expressions.

2.1.2 Signal délivré par le détecteur

On note désormais $\varphi_\lambda^P(T) = L_\lambda(T)$, avec $T = T_0 + \Delta T(0, t)$ et $\Delta T(0, t) \ll T_0$. Le signal délivré par le détecteur peut se mettre sous la forme :

$$S_\lambda(t) = D_\lambda \tau(\lambda) L_\lambda(T) \Delta\lambda \quad (10)$$

avec D_λ la détectivité spectrale du détecteur, que nous supposerons constante dans tout le domaine spectrale étudié.

2.1.2.1 En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le signal $S_\lambda(t)$ peut s'écrire :

$$S_\lambda(t) = D_\lambda [L_\lambda(T_0) + \Delta T(0, t) \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T} \right)_{T=T_0}] \Delta\lambda$$

2.1.2.2 Un dispositif de détection synchrone que nous n'étudierons pas, permet d'extraire du signal $S_\lambda(t)$ uniquement la composante variable de même pulsation ω_0 que le hacheur optique. Donner dans ces conditions l'expression du signal $S'_\lambda(t)$ délivré par le détecteur synchrone.

2.2 Analyse du signal

On utilise successivement deux filtres optiques idéaux différents, de longueurs d'onde centrales respectives λ_1 et λ_2 et d'étendues spectrales respectives $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2$. On mesure successivement les valeurs efficaces S'_{λ_1} et S'_{λ_2} des signaux respectifs $S'_{\lambda_1}(t)$ et $S'_{\lambda_2}(t)$ délivrés par le détecteur synchrone.

Montrer que le rapport des valeurs efficaces S'_{λ_1} et S'_{λ_2} permet de mesurer la température T_0 de la surface du solide (Σ).

fin de l'énoncé

Méthode photométrique de mesure d'une température

1^{ère} partie : Modélisation et mise en équation

1.1 Étude de l'équilibre thermique initial

1.1.1 corps noir

1.1.1.1 corps totalement absorbant quelque soit l'incidence et la longueur d'onde

1.1.1.2 $\varphi_e^{CN} = \sigma T^4$; loi de Stefan

1.1.1.3 forme convexe et équilibre thermique

1.1.2 Equilibre thermique

1.1.2.1 $dU = c dT \implies U = c(T - T_0) + U_0$

1.1.2.2 en équilibre thermique $\sum \varphi_i = 0 \implies \varphi_{pa} + \varphi_{ambiant} - \varphi_e - \varphi_{cc} = 0$

$$\implies \sigma(T_0^4 - T_a^4) + h(T_0 - T_a) - \varphi_{pa} = 0$$

1.1.2.3 on a $\varphi_{pa} = (T_0 - T_a)(h + \sigma T_0^3 + \sigma T_a^3 + \sigma T_0^2 T_a + \sigma T_a^2 T_0)$ donc $\varphi_a \approx 0^+$ (reçu) $\implies T_a \approx T_0^+$

1.1.2.4 d'après 1.2.3 on aura : $(4\sigma T_a^3 + h)(T_0 - T_a) - \varphi_{pa} = 0$

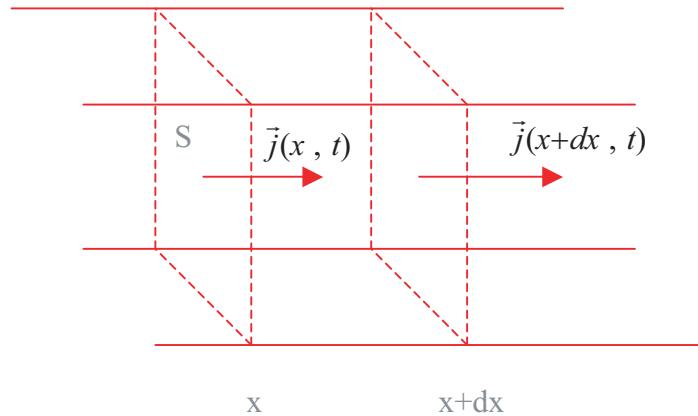
1.2 Ordres de grandeurs

1.2.1 Bilan d'énergie en régime variable

1.2.1.1 – Σ est invariant par rotation autour de Ox donc $T(r, x, t)$ ne dépendra pas de θ .

– paroi latérale adiabatique donc pas de gradient de T suivant \vec{e}_r donc $T(x, t)$

1.2.1.2 :



la loi de Fourier donne $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T(x, t) = j(x, t) \vec{u}_x$ uniforme sur toute section droite.
le 1^{er} principe sur la tranche isochore $[x, x + dx]$, entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_e(x, t) - \Phi_s(x + dx, t) = j(x, t)S - j(x + dx, t)S$$

soit

$$(\rho S dx) c \frac{\partial T}{\partial t} = -S \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx$$

loi de fourier $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$

soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

donc $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ s'exprimant en $m^2 s^{-1}$

$$1.2.1.3 \quad (3) \implies \frac{\delta T}{\delta t} = a \frac{\delta T}{L_q^2} \implies L_q = \sqrt{a \delta t}$$

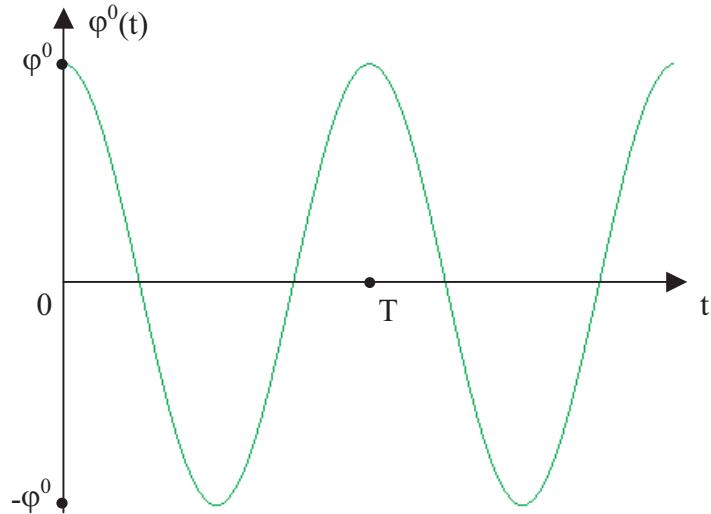
$$1.2.1.4 \quad \text{A.N : } L_q = 3,2 \cdot 10^{-4} m$$

1.2.1.5 pendant l'expérience $t \in [0, \delta t]$ on a $L_q \ll e = 1 \text{ cm}$ donc sauf au voisinage de la surface $x \approx 0$ l'apport d'énergie n'est pas senti donc $T(x \gg L_q, t) = T_0$

1.2.2 Effet d'un flux lumineux incident variable

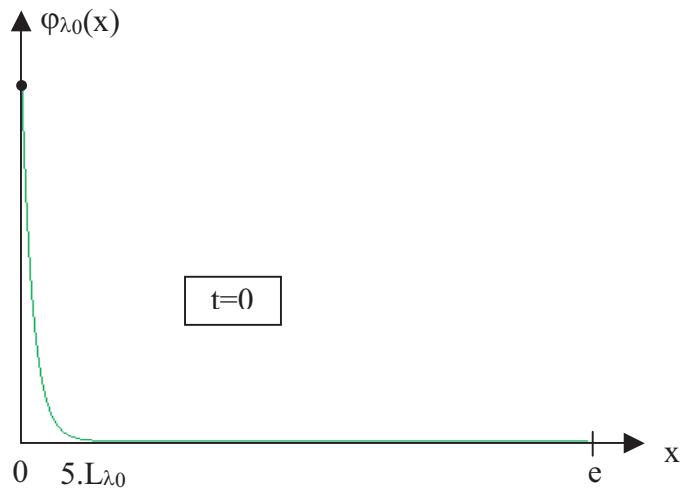
$$1.2.2.1 \quad \varphi_0 = \frac{P}{\pi r^2} \quad \text{A.N : } \varphi_0 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2}; \text{ très grande}$$

1.2.2.2 :



1.2.2.3 $L_{λ_0}$ caractérise la pénétration du laser dans Σ

1.2.2.4 :



1.2.2.5 on a $L_{\lambda_0} \ll e$ donc l'apport énergétique du laser s'effectue en surface et l'équation (3) sera inchangée

1.3 Résolution et conditions aux limites

1.3.1 Équation différentielle

1.3.1.1 (3)et(7) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = i\omega_0 \underline{\theta}(x) e^{i\omega_0 t}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \ddot{\underline{\theta}}(x) e^{i\omega_0 t}$ soit $\ddot{\underline{\theta}}(x) - \frac{i\omega_0}{a} \underline{\theta}(x) = 0$

1.3.1.2 on a $i = \frac{(1+i)^2}{2}$ soit $\ddot{\underline{\theta}}(x) - \alpha^2 \underline{\theta}(x) = 0$ avec $\alpha = (1+i)\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}$ de solution

$$\underline{\theta}(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

1.3.2 Conditions aux limites

1.3.2.1 on a $Re(\underline{\alpha}) > 0$ T et θ sont finies pour $x \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{\theta}(x) = \underline{B}e^{-\alpha x}$

1.3.2.2 de même qu'en 1.2.4 ,on a $T(0, t) \approx T_a$ soit $\varphi_1^R = 4\sigma T_a^3 (T(0, t) - T_a)$

1.3.2.3 – conduction : $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=0)$ entrant (Wm^{-2})

– conducto-convectif : $j_{cc} = h(T(0, t) - T_a)$ sortant (Wm^{-2})

– flux surfacique parasite : φ_{pa} entrant (Wm^{-2})

– flux du laser : $\varphi^0(t)$ entrant (Wm^{-2})

– flux radiatif : φ_1^R sortant (Wm^{-2})

1.3.2.4 continuité du flux thermique en $x = 0$:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=0) = \varphi_{pa} + \varphi^0(t) - \varphi_1^R - h(T(0, t) - T_a)$$

1.3.2.5 $\frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t) = \dot{\underline{\theta}}(0) e^{i\omega_0 t}$ et $\varphi^0(t) = \varphi^0 e^{i\omega_0 t}$ tenant compte du résultat de 1.2.4 on établit : $-\lambda \dot{\underline{\theta}}(0) = \varphi^0 - (h + 4\sigma T_a^3) \underline{\theta}(0) \Rightarrow h_e = h + 4\sigma T_a^3$

1.3.2.6 on a $\underline{\theta}(x) = \underline{B}e^{-\alpha x} \Leftrightarrow \lambda \underline{\alpha} \underline{B} = \varphi^0 - h_e \underline{B} \Leftrightarrow \underline{B} = \frac{\varphi^0}{h_e + \lambda \underline{\alpha}}$

1.3.2.7 on a $h_e = 26 WK^{-1}m^{-2}$ et $\lambda |\underline{\alpha}| = 560 10^3 WK^{-1}m^{-2} \Rightarrow h_e \ll \lambda |\underline{\alpha}|$

$$\Rightarrow \underline{B} \approx \frac{\varphi^0}{\lambda \underline{\alpha}} = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-i\frac{\pi}{4})$$

1.3.2.8

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}(x) e^{i\omega_0 t} = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-i\frac{\pi}{4}) \exp(-\underline{\alpha} x) \exp(i\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \underline{\theta}(x, t) = \frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x) \exp(i(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x - \frac{\pi}{4}))$$

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + Re(\underline{\theta}(x, t)) = \underbrace{T_0}_{\text{statique}} + \underbrace{\frac{\varphi^0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x)}_{\text{terme de propagation de phase}} \underbrace{\cos(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x - \frac{\pi}{4})}_{\text{terme d'atténuation ou effet de peau thermique}}$$

on distingue trois termes :

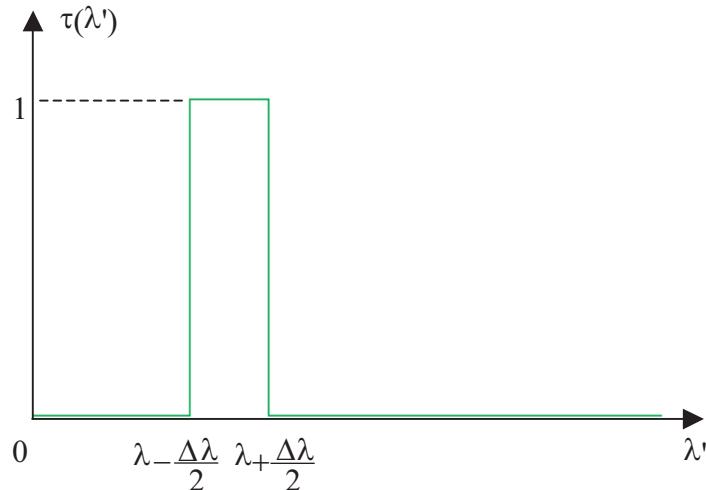
- T_0 statique existe même en absence du Laser ($\varphi^0 = 0$)
- terme de propagation de phase
- terme d'atténuation ou effet de peau thermique

2ème partie :
Détection et analyse du signal

2.1 Détection du signal

2.1.1 Densité spectrale

2.1.1.1 :



2.1.1.2 la loi de Planck ,pour le flux surfacique spectral , s'écrit : $\varphi_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda K T}) - 1}$

2.1.1.3 il vient $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial T} = \frac{p \exp(\frac{b}{\lambda T})}{\lambda^6 T^2 (\exp(\frac{b}{\lambda T}) - 1)^2} \implies b = \frac{hc}{K}$ et $p = \frac{2\pi h^2 c^3}{K}$

2.1.2 Signal délivré par le détecteur

2.1.2.1 l'approximation $\Delta T(0, t) \ll T_0$ permet de faire un développement limité au 1^{er}ordre au voisinage de $T_0 \implies L_\lambda(T) \approx L_\lambda(T_0) + (T - T_0)(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T})_{T=T_0}$ et puisque $\tau(\lambda) = 1$ d'où le résultat : $S_\lambda(t) = D_\lambda [L_\lambda(T_0) + \Delta T(0, t)(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T})_{T=T_0}] \Delta\lambda$

2.1.2.2

$$S'_\lambda(t) = D \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T} \right)_{T=T_0} \Delta\lambda \Delta T(x=0, t)$$

$$\implies S'_\lambda(t) = D \underbrace{\left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T} \right)_{T=T_0} \Delta\lambda \left(\frac{\varphi^0}{\lambda_{th}} \sqrt{\frac{a}{\omega_0}} \right)}_{\text{cos}(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})}$$

2.2 Analyse du signal

$$\frac{S'_{eff}(\lambda_2)}{S'_{eff}(\lambda_1)} = \frac{\Delta\lambda_2 \frac{\partial L_{\lambda_2}}{\partial T}}{\Delta\lambda_1 \frac{\partial L_{\lambda_1}}{\partial T}} = \frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1} \frac{\lambda_1^6}{\lambda_2^6} \frac{(\exp(\frac{b}{\lambda_1 T_0}) - 1)^2}{(\exp(\frac{b}{\lambda_2 T_0}) - 1)^2} \exp[\frac{b}{T_0}(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})]$$

ce qui permet de déterminer T_0 par résolution graphique ou numérique !

fin du corrigé

Indice de réfraction de l'air

Le problème propose l'étude et l'exploitation d'une méthode de mesure simple de l'indice de réfraction de l'air. Une telle mesure est rendue difficile par le fait que l'indice de réfraction de l'air est très proche de 1. Aussi recourt-on à une méthode interférentielle utilisant l'interféromètre de MICHELSON. La première partie est une étude succincte et simplifiée du phénomène de réfraction atmosphérique. La deuxième partie propose de retrouver quelques résultats généraux sur les interférences à deux ondes. La troisième partie est consacrée à la mesure de l'indice de réfraction de l'air alors que la quatrième partie propose de retrouver théoriquement les variations de l'indice en fonction des paramètres d'état du système. Les quatre parties sont indépendantes entre elles. Au sein de chaque partie, plusieurs questions sont indépendantes.

Une feuille de papier millimétré recto-verso sera fournie à chaque candidat. Elle servira aux représentations graphiques, une par face, demandées aux questions 3.1.16 et 3.2.6.2.

1^{ère} partie : Réfraction atmosphérique

La réfraction atmosphérique est une manifestation naturelle de l'existence de l'atmosphère terrestre avec un indice de réfraction de l'air $n \neq 1$. Pour se rendre compte de ce phénomène atmosphérique, considérons le modèle simple selon lequel on néglige la courbure de la Terre et où l'on considère que l'atmosphère, de hauteur uniforme H , est isobare et isotherme. L'indice de réfraction n de l'air est donc uniforme en tout point de l'atmosphère.

- 1.1 On considère un rayon lumineux, émis par exemple par une étoile et arrivant en haute atmosphère sous un angle d'incidence i_0 .
 - 1.1.1 Montrer à l'aide d'un schéma, qu'un observateur à la surface de la Terre reçoit ce rayon sous un angle d'incidence i différent de i_0 .
 - 1.1.2 Donner la relation entre i_0 , i et n . Pourquoi i est-il très proche de i_0 ?
 - 1.1.3 En faisant un développement limité adéquat, exprimer $\Delta i = i_0 - i$ en fonction de i_0 et n .
 - 1.1.4 Calculer numériquement Δi en minutes d'arc pour $i_0 = 0^\circ$, $i_0 = 60^\circ$ et $i_0 = 80^\circ$ et commenter les résultats obtenus. On donne $n - 1 = 3 \cdot 10^{-4}$.
 - 1.1.5 Que dire du résultat obtenu pour $i_0 = 90^\circ$? Expliquer.
- 1.2 Sur Terre, les étoiles paraissent souvent colorées lorsqu'elles se lèvent ou se couchent à l'horizon. Pourquoi ?

2^{ème} partie : Interférences à deux ondes

L'interféromètre de MICHELSON est un dispositif interférentiel à deux ondes aux usages multiples. Pour la présente étude, on considère (figure 1) un modèle d'interféromètre de MICHELSON constitué de :

- un miroir plan M_1 pouvant tourner autour de l'axe A_1z orthogonal au plan de la figure;
- un miroir plan M_2 pouvant tourner autour de l'axe A_2z , orthogonal au plan de la figure, et subir un mouvement de translation parallèlement à la direction Oy ;

- une lame séparatrice S_p , qui réfléchit la moitié de la lumière qu'elle reçoit et transmet l'autre moitié. Elle est orientée à 45° des axes Ox et Oy et placée de sorte que son centre coïncide avec O . On suppose que son épaisseur est nulle et qu'elle n'introduit aucun déphasage supplémentaire.

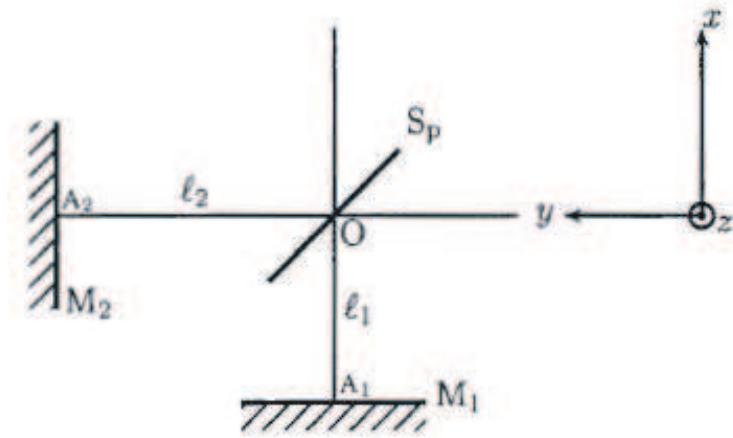


Fig 1 : Modèle d'interféromètre de MICHELSON.

2.1 Dire brièvement en quoi le modèle d'interféromètre de MICHELSON proposé, est-il différent de l'interféromètre réel. On expliquera le rôle des éléments essentiels de l'interféromètre réel.

2.2 On rappelle les équations de MAXWELL dans un milieu optique transparent, linéaire, isotrope et homogène d'indice de réfraction n :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

c_0 est la célérité de la lumière dans le vide.

2.2.1 Donner les valeurs de l'indice de réfraction n pour l'eau pure et pour le verre ordinaire.

2.2.2 Montrer que le champ électrique \vec{E} est solution d'une équation de propagation que l'on établira et exprimer la célérité c de la lumière dans le milieu considéré en fonction de c_0 et n .

2.3 Par la suite on utilisera l'approximation scalaire dans le cadre de laquelle la lumière est décrite par une grandeur scalaire $\psi(M, t)$ appelée vibration lumineuse et représentant l'une des composantes du champ électromagnétique de l'onde.

2.3.1 Écrire l'équation de propagation dont $\psi(M, t)$ est solution.

On s'intéresse à la description de la propagation par onde plane.

2.3.2 Qu'appelle-t-on onde plane ?

2.3.3 Donner la solution générale $\psi(M, t)$ de l'équation de propagation précédente pour une onde plane se propageant dans la direction Oz . Quelle interprétation physique peut-on donner à chacun des termes qui constituent la solution ?

2.3.4 Donner le schéma d'un montage optique simple permettant de réaliser une onde quasi plane au laboratoire.

On considère maintenant le cas où $\psi(M, t)$ dépend du temps t et d'une seule coordonnée spatiale notée r et représentant la distance entre le point M et une origine fixe O .

2.3.5 Établir dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\phi(M, t) = r\psi(M, t)$.

On rappelle que le Laplacien d'une fonction f ne dépendant que de la variable sphérique r est donné par :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2[r f(r)]}{dr^2}$$

2.3.6 En déduire que $\psi(r, t)$ est donnée par :

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} f_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} f_2(t + \frac{r}{c})$$

2.3.7 Que représente chacun des deux termes de cette solution. Comment qualifie-t-on l'onde décrite par chacun des deux termes pris séparément ?

2.3.8 Donner le schéma d'un montage optique simple où l'on rencontre les deux ondes précédentes.

3ème partie : Mesure de l'indice de réfraction de l'air

Dans cette partie, on se propose de montrer comment on peut réaliser des mesures très précises de l'indice de réfraction n de l'air en utilisant un interféromètre de MICHELSON.

3.1 Étude de la figure d'interférence

On considère le montage représenté figure 2. Les deux miroirs M_1 et M_2 de l'interféromètre sont perpendiculaires d'un à l'autre. La source est un Laser He-Ne de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$. Elle éclaire l'interféromètre à travers un oculaire de microscope que l'on peut assimiler à une seule lentille convergente L de courte distance focale $f_0 = 5 \text{ mm}$. L'écran d'observation E est placé à la sortie de l'interféromètre, perpendiculairement à la droite A_1O .

3.1.1 Quelle est la couleur du faisceau Laser utilisé ?

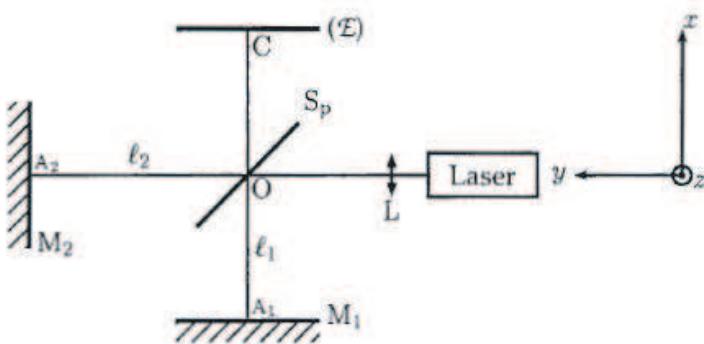


Fig 2 : Interféromètre de MICHELSON
en observation longitudinale.

3.1.2 Montrer à l'aide d'un schéma, que l'ensemble constitué de la source laser et de l'oculaire du microscope permet d'éclairer l'interféromètre de MICHELSON par une source ponctuelle monochromatique S . Où se trouve S ? On pourra poser $SO = \ell_0$.

Soient S_1 et S_2 les images de S à travers l'interféromètre :

- S_1 est l'image de S successivement par S_p et M_1 ;
- S_2 est l'image de S successivement par M_2 et S_p .

3.1.3 Faire un schéma représentatif de l'interféromètre indiquant les positions des images S_1 et S_2 . On indiquera aussi les positions de l'image intermédiaire S_{10} de S par S_p ainsi que l'image intermédiaire S_{20} de S par M_2 .

3.1.4 Déterminer l'expression de la distance $a = S_1S_2$ séparant S_1 et S_2 en fonction des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des deux bras de l'interféromètre.

3.1.5 En considérant le cheminement au sein de l'interféromètre des deux rayons lumineux issus de S et qui interfèrent en un point M du champ d'interférence, montrer à l'aide d'une construction graphique, que la différence de marche optique est donnée par :

$$\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$$

3.1.6 Donner l'expression de l'intensité lumineuse en un point M du champ d'interférence en fonction de δ et λ_0 . On notera I_0 l'intensité totale injectée par la source S dans l'interféromètre. Quelle est la nature géométrique des surfaces d'égale intensité ?

On dispose un écran (E) perpendiculairement à la droite joignant S_1 et S_2 (figure 3) à la distance D du milieu du segment $[S_1, S_2]$. On note $r_1 = S_1 M$ et $r_2 = S_2 M$.

3.1.7 Quelle est la nature géométrique des franges d'interférence obtenues sur l'écran (E) ?

3.1.7 Exprimer $r_2 - r_1$ en fonction de y , z , D et a . y et z étant les coordonnées du point M dans le plan de l'écran (E).

Dans la pratique, on limite l'observation au voisinage du centre C de la figure d'interférence. Dans ce cas, un développement limité donne :

$$\frac{r_2 - r_1}{a} = 1 - \frac{y^2 + z^2}{2D^2}$$

3.1.9 Donner dans ce cas, l'expression de l'ordre d'interférence $p = \delta/\lambda_0$ au point M . Montrer qu'il est maximum au centre C de la figure d'interférence obtenue sur l'écran (E).

Par la suite, on note p_0 la valeur de p en C .

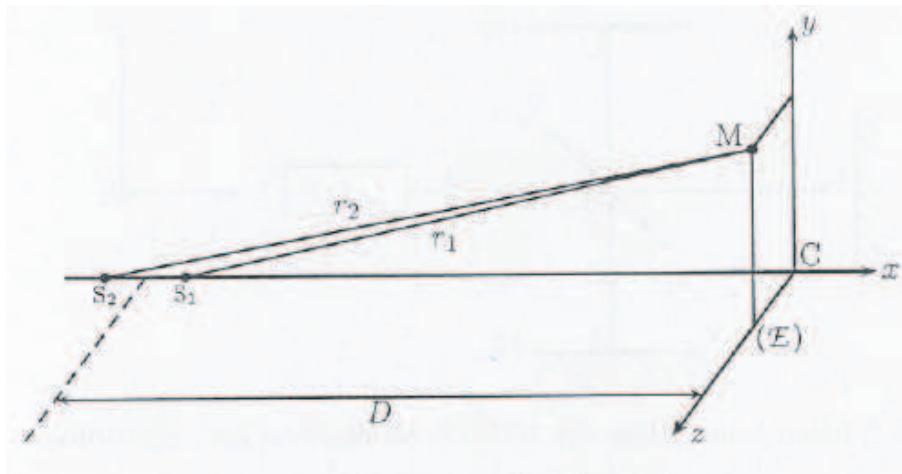


Fig 3 : Observation longitudinale.

3.1.10 Montrer que les franges obtenues sur l'écran (E) sont des anneaux concentriques de centre C et de rayon R_p que l'on exprimera en fonction de n , a , λ , D et $p_0 - p$.

On note $E[p(C)] = k_0$ la partie entière de l'ordre d'interférence en C et on pose :

$$p_0 = k_0 + \varepsilon$$

ε est appelé ordre fractionnaire en C ($0 < \varepsilon < 1$).

3.1.11 Que vaut ε respectivement dans le cas où le centre est brillant (maximum d'intensité) et dans le cas où le centre est sombre (minimum d'intensité) ?

3.1.12 Que vaut p pour un anneau clair ? En déduire que les rayons des anneaux clairs peuvent être écrits sous la forme :

$$R_{c,m} = D \sqrt{\frac{2\lambda_0}{na} (m + \varepsilon)}$$

et donner l'expression de m .

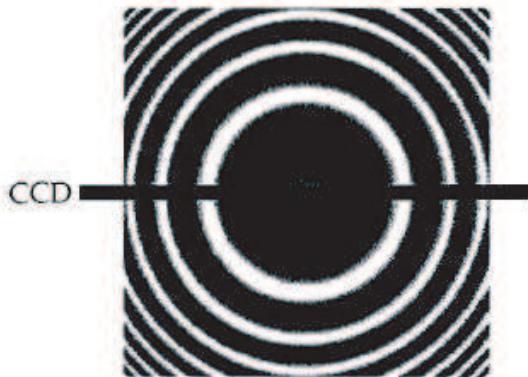
Quelles sont les valeurs permises pour m ? Pour vérifier expérimentalement la loi de variation des rayons des anneaux, on remplace l'écran (E) par un capteur linéaire à barrette CCD (charge coupled device) ou DTC (dispositif à transfert de charges). Cette barrette est composée de 2048 éléments photosensibles ou pixel (Picture Element) indépendants. Chaque pixel a une largeur moyenne de $14 \mu m$. La barrette CCD est reliée via son boîtier électronique à un ordinateur qui, grâce à un logiciel approprié, affiche en temps réel l'intensité lumineuse reçue par chaque pixel sous forme d'un graphique.

La figure 4 donne la disposition de la barrette par rapport aux franges d'interférence (figure 4(a)) ainsi que l'intensité lumineuse enregistrée par chaque pixel en fonction du numéro du pixel (figure 4(b)).

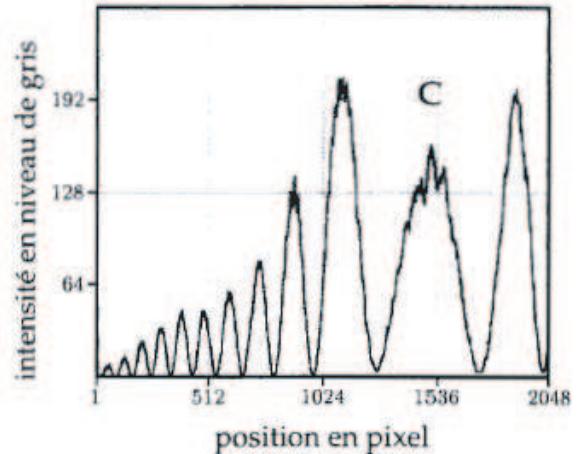
3.1.13 Pourquoi faut-il que la barrette CCD coïncide avec un diamètre commun des anneaux? Comment peut-on s'assurer de cela dans la pratique?

3.1.14 Pour pouvoir pointer un maximum d'anneaux clairs, la barrette CCD a été décentrée par rapport aux anneaux formant la figure d'interférence. Quel est l'intérêt de garder un anneau de l'autre côté du centre?

3.1.15 Déterminer les numéros de pixel des différents anneaux clairs présents sur le graphique de la figure 4. En déduire la position du centre de la figure d'interférence ainsi que les rayons $R_{c,m}$, des différents anneaux brillants.



(a) Disposition de la barrette CCD.



(b) Enregistrement obtenu.

Fig 4 : Disposition de la barrette CCD et enregistrement obtenu.

3.1.16 À l'aide d'une représentation graphique adéquate, montrer que la loi théorique donnant les rayons des anneaux est vérifiée et en déduire la valeur de l'ordre fractionnaire au centre. Le résultat obtenu est-il en accord avec la figure 4?

Le miroir M_1 étant fixe, on translate M_2 dans le sens qui fait diminuer la distance $a = S_1S_2$.

3.1.17 Montrer que les anneaux voient leur rayons diminuer et finissent par disparaître en C.

3.2 Indice de réfraction de l'air

En partant du réglage précédent (3.1.2), on place une cuve hermétique (C) à faces parallèles dans l'un des bras de l'interféromètre de MICHELSON.

La cuve C, de longueur intérieure ℓ , est placée de sorte que ses faces soient parallèles au miroir M_2 . L'intérieur de la cuve peut être mis à la pression atmosphérique à l'aide d'un robinet. Une pompe à vide permet de réaliser un vide partiel au sein de la cuve.

Un manomètre indique la dépression $\Delta P = P' - P$; P' étant la pression à l'intérieur de la cuve et P la pression atmosphérique de travail ou pression ambiante. On note n' l'indice de réfraction de l'air à l'intérieur de la cuve où la pression vaut P' .

- 3.2.1** Calculer la différence de marche optique δ_0 des deux ondes lumineuses qui interfèrent en C et en déduire la nouvelle distance $a' = S_1S_2$ entre les deux images de la source S par l'interféromètre en fonction de ℓ , ℓ_1 , ℓ_2 , n et n' .
- 3.2.2** Donner l'expression de l'intensité lumineuse I en un point M de coordonnées y et z du champ d'interférence. On notera encore I_0 l'intensité totale injectée dans l'interféromètre et on négligera les réflexions sur les faces de la cuve.
- 3.2.3** Quel est l'ordre d'interférence p au point M ? En déduire que, lorsque la pression dans la cuve augmente de P' à P , les anneaux défilent dans le champ d'interférence. On rappelle que l'indice de réfraction d'un gaz augmente lorsque sa pression augmente.
- 3.2.4** Exprimer la variation $\Delta p_0 = p_0 - p'_0$ de l'ordre d'interférence en C lorsque la pression dans la cuve passe de P' à P . Que représente Δp_0 ?
- 3.2.5** En déduire que l'indice de réfraction de l'air dans les conditions de l'expérience est donné par :

$$n = 1 + \frac{N_0 \lambda_0}{2\ell}$$

N_0 étant le nombre de franges qui défilent au centre C de la figure d'interférence, lorsque la pression dans la cuve passe de 0 (vide parfait) à P (pression atmosphérique ambiante).

3.2.6 conduite d'une expérience de mesure d'indice

Pour mesurer l'indice de l'air par la méthode précédente, on utilise un détecteur de lumière relié à une système informatique d'acquisition. Le détecteur, qui peut être considéré comme ponctuel en bonne approximation, est placé au centre C de la figure d'interférence. La mesure de l'indice se fait alors selon les étapes suivantes :

- Le robinet de communication de la cuve à faces parallèles (C) avec l'extérieur étant fermé, on commence par créer une dépression ΔP au sein de (C).
- On lance l'enregistrement de l'interférogramme et on ouvre le robinet pour laisser rentrer l'air dans la cuve.
- On répète cette opération pour différentes valeurs de la dépression ΔP .

La figure 5 donne les interférogrammes obtenus pour différentes valeurs de ΔP . L'expérience a été réalisée sous une pression atmosphérique $P = 969 \text{ hPa}$ et une température $\theta = 21^\circ\text{C}$.

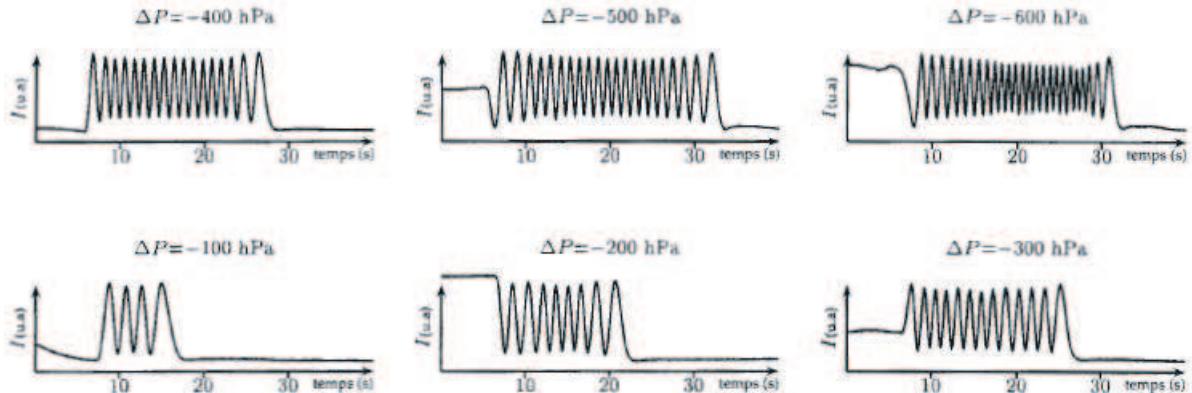


Fig 5 : Interférogrammes obtenus pour différentes valeurs de la pression $P' = P + \Delta P$ dans la cuve à la température $\theta = 21^\circ\text{C}$ sous la pression ambiante $P = 969 \text{ hPa}$.

- 3.2.6.1** Déterminer le nombre N des franges d'interférence qui défilent à l'ouverture du robinet pour les différentes valeurs de ΔP . On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

3.2.6.2 Tracer la courbe représentative du nombre N de franges qui défilent à l'ouverture du robinet, en fonction de la pression P' à l'intérieur de la cuve (C).

3.2.6.3 Déterminer graphiquement le nombre N_0 de franges qui défilerait si la cuve était initialement parfaitement vidée.

3.2.6.4 En déduire la valeur de $n - 1$. Données : $\lambda_0 = 632,8\mu m$ et $\ell = 50 mm$.

4^{ème} partie : Modèle de variation d'indice

Dans cette partie, on se propose d'utiliser le modèle de l'électron élastiquement lié pour se rendre compte des variations de l'indice de réfraction de l'air en fonction des paramètres pression P et température T . On suppose alors qu'un électron optique - pouvant répondre à une excitation optique - est lié élastiquement à l'atome, d'azote ou d'oxygène, avec une force de rappel que l'on écrit sous la forme simplifiée :

$$\vec{f} = -m_e \omega^2 \vec{r}$$

où \vec{r} désigne le déplacement de l'électron par rapport à sa position d'équilibre correspondant à un moment dipolaire nul.

Pour tenir compte de l'amortissement de son mouvement, on suppose que l'électron est aussi soumis à l'action d'une force de frottement de type fluide que l'on écrit sous la forme :

$$\vec{f}_r = -\frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

\vec{r} désigne le déplacement de l'électron sous l'action du champ électromagnétique de l'onde lumineuse. L'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire suppose galiléen. On rappelle que, tout en étant différent de 1, l'indice de réfraction de l'air n reste très proche de 1.

4.1 L'onde lumineuse incidente est décrite par une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique dont le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

4.1.1 Montrer que le champ électrique est transverse.

4.1.2 Exprimer le champ magnétique \vec{B} de l'onde lumineuse en fonction de $\underline{\underline{E}}$, \vec{k} et ω . Montrer qu'il est également transverse.

4.2 Dans toute la suite, on néglige le poids de l'électron.

4.2.1 Exprimer la force de LORENTZ à laquelle est soumis un électron atomique de la part de l'onde électromagnétique et montrer que, dans le cadre non relativiste, la partie magnétique peut être négligée devant la partie électrique.

4.2.2 Déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'électron vérifiée par $\vec{r}(t)$.

4.2.3 En se plaçant en régime forcé, déterminer la représentation complexe du déplacement \vec{r} de l'électron. On négligera les variations du champ électrique de l'onde sur des distances de l'ordre de $||\vec{r}||$.

4.2.4 En déduire le moment dipolaire \vec{p} induit par le déplacement de l'électron ainsi que le vecteur polarisation défini par $\vec{P} = N \vec{p}$; où N est la densité volumique des électrons optiques.

4.2.5 Montrer que $\underline{\vec{P}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0(n^2 - 1)\underline{\vec{E}}$$

définissant l'indice de réfraction complexe n du milieu. En déduire l'expression de n^2 en fonction de N , e , ε_0 , m_e , τ , ω et ω_0 .

4.3 Dans le domaine visible auquel on s'intéresse, on peut considérer que $\omega \ll \omega_0$ et on peut négliger l'amortissement. Montrer alors que, compte tenu de $n \approx 1$:

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0\omega_0^2}$$

4.4 On admet que les molécules de dioxygène et de diazote qui composent majoritairement l'air, possède chacune deux électrons optiques. On suppose en plus que l'air se comporte comme un gaz parfait. En déduire la loi de GLADSTONE donnant l'indice de réfraction de l'air en fonction de la pression P et la température T :

$$n - 1 = \alpha \frac{P}{T}$$

et exprimer la constante α en fonction de e , ε_0 , m_e , ω_0 et la constante de BOLTZMAN k_B .

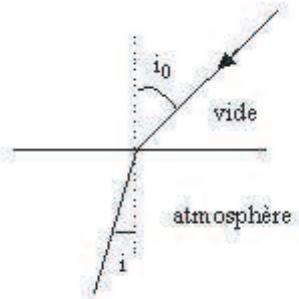
fin de l'énoncé

Indice de réfraction de l'air

1^{ère} partie : Réfraction atmosphérique

1.1

1.1.1 :



1.1.2 loi de Descartes : $1 \sin i_0 = n \sin i$; on a : $n \approx 1 \Rightarrow i_0 \approx i$

1.1.3 développement limité au voisinage de i_0 donne :

$$\sin i \approx \sin i_0 + \cos i_0 (i - i_0) \implies \Delta \approx \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tan i_0$$

i_0 (degré)	Δ ($\text{min} d'arc = \frac{1}{60}$)
0	0
60	0,03
80	0,10

dans les 3 cas la déviation Δ est trop faible

1.1.5 pour $i_0 = 90^\circ$; $\Delta = i_0 - \arcsin \frac{1}{n} = 1,4^\circ$ grande valeur ! phénomène de réfraction limite

1.2 la dispersion des couleurs est dûe à la dépendance de n avec λ , la déviation étant importante pour $i_0 \approx 90^\circ$

2^{ème} partie : Interférences à deux ondes

2.1 le modèle réel contient en plus la lame compensatrice qui corrige la différence de marche dûe à l'épaisseur de la lame séparatrice qui ,quant-à-elle, sert à diviser un rayon incident

2.2

2.2.1 $n_{eau} = 1,33$ et $n_{verre} = 1,5$

2.2.2 $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) \implies \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ soit $c = \frac{c_0}{n}$

2.3

2.3.1 $\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$

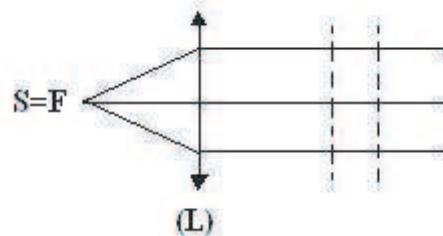
2.3.2 une onde plane est une onde qui ne dépend que d'une variable cartésienne et du temps

2.3.3 solution générale s'écrit : $\psi(z, t) = \psi^+(z - ct) + \psi^-(z + ct)$

- ψ^+ est une onde plane progressive selon Oz

- ψ^- est une onde plane régressive selon Oz

2.3.4 source ponctuelle au foyer objet d'une lentille mince convergente



2.3.5 l'équation de propagation s'écrit : $\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \iff \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$

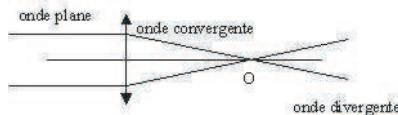
$$\iff \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

2.3.7 solution générale s'écrit : $\phi(r, t) = r\psi(r, t) = \phi^+(r - ct) + \phi^-(r + ct)$ soit

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} f_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} f_2(t + \frac{r}{c})$$

2.3.6 f_1 onde divergente et f_2 onde convergente , chaque terme est une onde sphérique

2.3.8 :

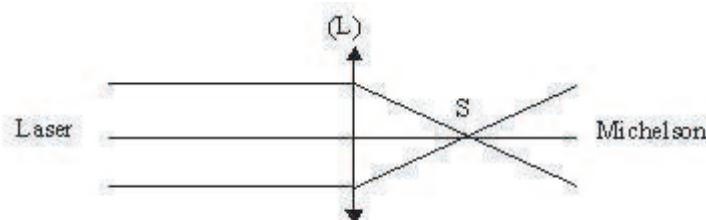


3ème partie : Mesure de l'indice de réfraction de l'air

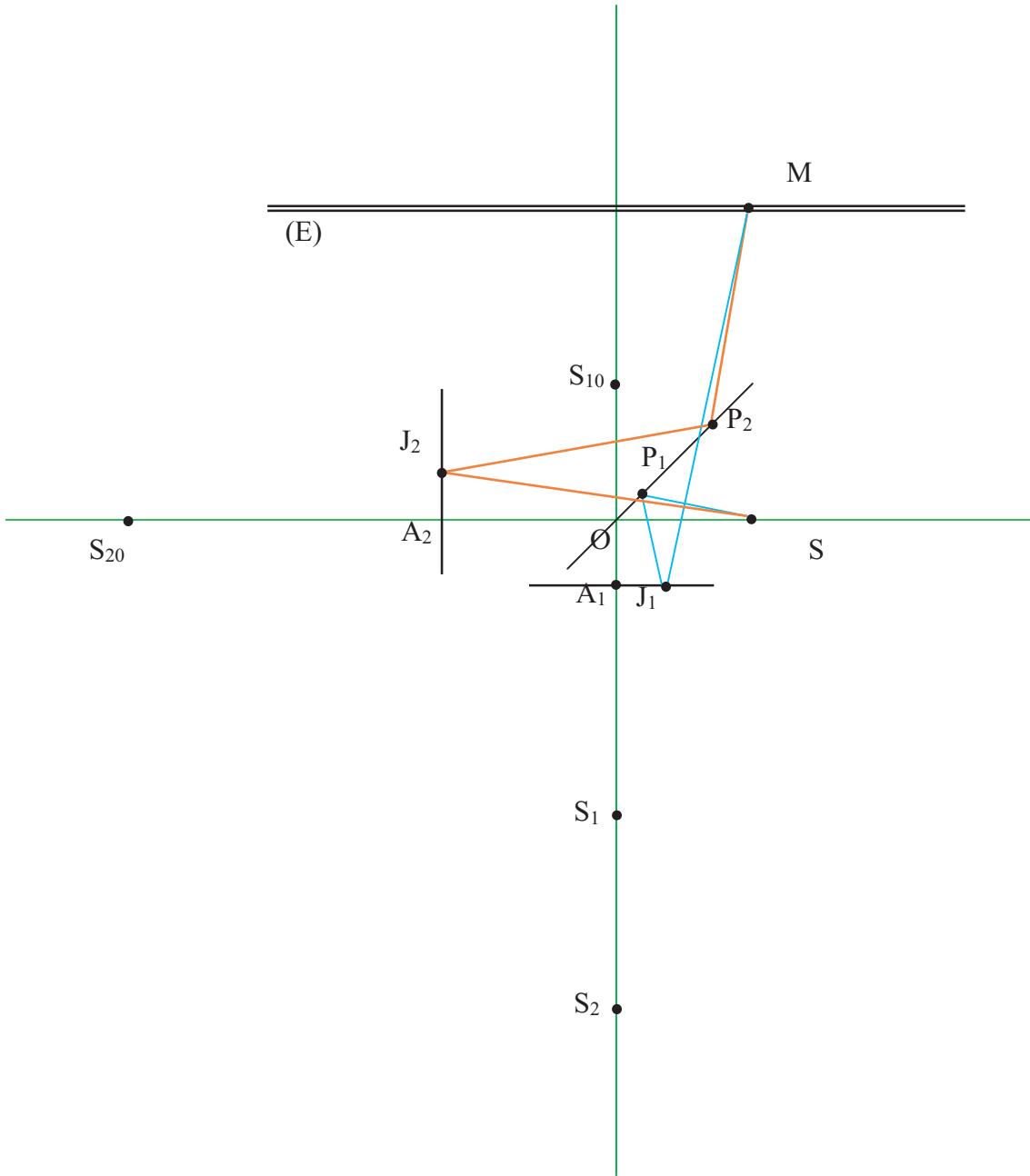
3.1 Étude de la figure d'interférence

3.1.1 $\lambda_0 = 0,6328\mu m$ donc Laser rouge

3.1.2 le faisceau Laser est un faisceau parallèle donc S est au foyer image de L



3.1.3 :



3.1.4

$$\begin{aligned}
 a &= S_1 S_2 = OS_2 - OS_1 = OS_{20} - (S_{10} S_1 - OS_{10}) = (SS_{20} - SO) - (2A_1 S_{10} - l_0) \\
 &= (2SA_2 - l_0) - (2A_1 S_{10} - l_0) = 2(l_0 + l_2) - 2(l_0 + l_1) = 2(l_2 - l_1)
 \end{aligned}$$

3.1.5 on a :

$$(SM)_2 = (SJ_2) + (J_2 P_2) + (P_2 M) = [(S_{20} J_2) + (J_2 P_2)] + (P_2 M) = (S_2 P_2) + (P_2 M) = (S_2 M)$$

de même :

$$(SM)_1 = (SP_1) + (P_1 J_1) + (J_1 M) = [(S_{10} P_1) + (P_1 J_1)] + (J_1 M) = (S_1 J_1) + (J_1 M) = (S_1 M)$$

3.1.6 la séparatrice est semi-réfléchissante agissant deux fois pour chaque rayon donc :

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)$$

les surfaces d'égale intensité sont données par $I = cte \iff \delta = n.(S_2M - S_1M) = cte \iff$ hyperboloïdes d'axe de révolution S_1S_2

3.1.7 l'écran est perpendiculaire à l'axe S_1S_2 donc les franges seront circulaires (anneaux)

3.1.8 on a : $r_2 - r_1 = \sqrt{(D + \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(D - \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2}$

3.1.9 on a : $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{n}{\lambda_0}a(1 - \frac{CM^2}{2D^2})$ décroissant en fonction de CM ; donc maximal pour $M \equiv C$ soit $p = p_0(1 - \frac{CM^2}{2D^2})$ avec $p_0 = \frac{na}{\lambda_0}$

3.1.10 une frange est donnée par $I = cte \iff \delta = cte \iff CM := R = cte \iff$ cercle de centre C et de rayon R on a : $p = p_0(1 - \frac{R_p^2}{2D^2}) \iff R_p = D\sqrt{2\frac{p_0-p}{p_0}} = D\sqrt{2\lambda_0\frac{p_0-p}{na}}$

3.1.11 – centre brillant p_0 est entier càd $\epsilon = 0$

– centre sombre p_0 est demi-entier càd $\epsilon = \frac{1}{2}$

3.1.12 p est entier pour un anneau clair

on a : $R_p = D\sqrt{2\lambda_0\frac{p_0-p}{na}} \implies R_{c,m} = D\sqrt{2\lambda_0\frac{k_0+\epsilon-p}{na}} \implies m = k_0 - p$ entier

3.1.13 pour que le centre C soit détecté , si on tourne la barrette dans sans plan l'intensité enregistrée doit être inchangée ou bien en supprimant l'oculaire la tache du laser doit tomber sur la barrette CCD

3.1.14 pour repérer le centre C (symétrie).

3.1.15 l'échelle de la figure 4-b : $2048\text{pixel} \longleftrightarrow 5,9\text{cm}$

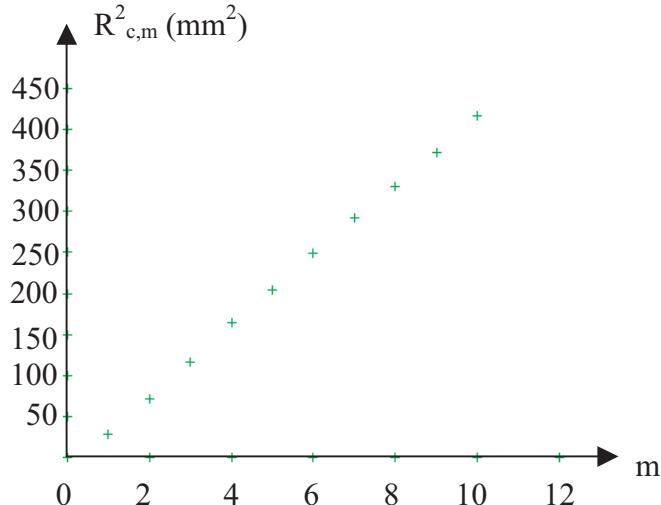
distance(mm)	1.5	3.75	6	8.3	11	14	17.2	21.2	26	32.4	43.5	54.5
$n^\circ_{pixel} = \frac{2048 \cdot d}{59}$	52	130	208	288	382	486	597	736	902	1125	1510	1892

la position du centre C est donnée par $n^\circ_{pixel} = 1510$

$$\implies R_{c,m} = (n^\circ - 1510).14\mu\text{m}$$

rang m de l'anneau clair	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}	7 ^{ème}	8 ^{ème}	9 ^{ème}	10 ^{ème}
rayon $R_{c,m}(\text{mm})$	5.4	8.5	10.8	12.8	14.3	15.8	17.1	18.2	19.3	20.4

3.1.16 on représente la loi affine $R_{c,m}^2 = \alpha m + \beta = \frac{2D^2\lambda_0}{na}(m + \epsilon)$



graphiquement :
$$\begin{cases} \alpha = \frac{2D^2\lambda_0}{na} = 43 \cdot 10^{-6} m^2 \\ \beta = \frac{2D^2\lambda_0}{na} \epsilon = -13.8 \cdot 10^{-6} m^2 \\ \epsilon = \frac{\beta}{\alpha} = -0.3 \end{cases}$$

oui , en fait le centre n'est ni sombre ni brillant

3.1.17 le rayon du $m^{ème}$ anneau clair s'écrit $R_p = D\sqrt{2(1 - \frac{p\lambda_0}{na})}$ si $a \searrow \Rightarrow R_p \searrow 0$, l'anneau disparaît au centre

3.2 Indice de réfraction de l'air

3.2.1 on a : $\delta_0 = \delta + 2\ell(n' - n)$ la cuve intervient deux fois dans l'aller-retour du rayon (2).

or d'après 3.1.8 en C $\delta = a$ soit $\delta_0 = a + 2\ell(n' - n) = a'$ soit $a' = 2(\ell_2 - \ell_1) + 2\ell(n' - n)$

3.2.2 on change a par a', soit : $I(M) = 2\frac{I_0}{4}(1 + \cos \frac{2\pi\delta'}{\lambda_0})$ avec $\delta' = na'(1 - \frac{y^2+z^2}{2D^2})$

3.2.3 $p = \frac{\delta'}{\lambda_0} = \frac{na'}{\lambda_0}(1 - \frac{y^2+z^2}{2D^2})$ si $P' \rightarrow P \Rightarrow n' \rightarrow n \Rightarrow a' \rightarrow a$ l'ordre d'interférence au centre change \Rightarrow il y aura défillement des anneaux

3.2.4 on a : $\Delta p_0 = p_0 - p'_0 = [\frac{a}{\lambda_0}] - [\frac{a+2\ell(n'-n)}{\lambda_0}] = \frac{2\ell(n-n')}{\lambda_0}$ c'est le nombre d'anneaux qui défilent au centre

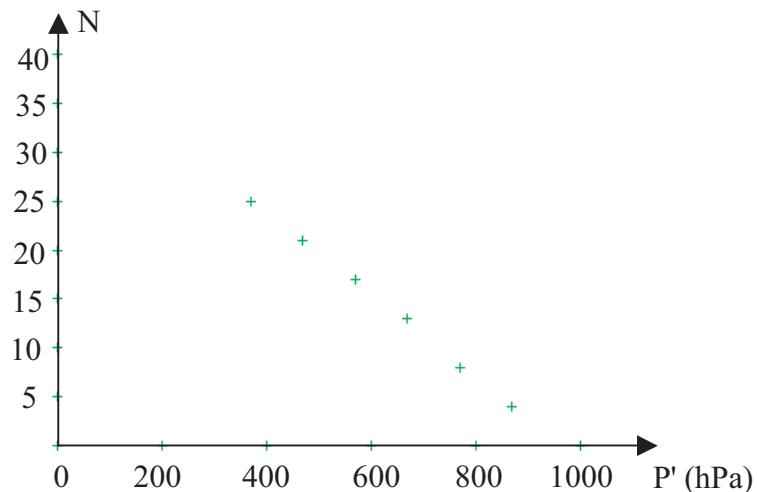
3.2.5 on a $\Delta p_0 = N_0 = \frac{2\ell(n-1)}{\lambda_0}$ car $n'(P=0) = 1$ soit $n = 1 + \frac{N_0\lambda_0}{2\ell}$

3.2.6 conduite d'une expérience de mesure d'indice

3.2.6.1 :

$-\Delta P(hPa)$	100	200	300	400	500	600
N	4	8	13	17	21	25

3.2.6.2 :



3.2.6.3 l'intersection avec l'axe des N donne $N_0 = 39$

3.2.6.4 d'après 3.2.5 : $n - 1 = \frac{N_0\lambda_0}{2\ell} = 2.4 \cdot 10^{-4}$

4^{ème} partie :
Modèle de variation d'indice

4.1

4.1.1 L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\vec{\nabla} \cdot \underline{E} = 0 \iff i\vec{k} \cdot \underline{E} = 0 \iff$ le champ électrique de l'onde est perpendiculaire à la direction de propagation

4.1.2 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff i\vec{k} \times \underline{\vec{E}} = -(-i\omega \underline{\vec{B}}) \iff \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \times \underline{\vec{E}}}{\omega}$, on a aussi : $\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$, le champ magnétique de l'onde est perpendiculaire à la direction de propagation

4.2

4.2.1 $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \implies \frac{q|\vec{E}|}{qv|\vec{B}|} = \frac{E}{v\frac{c}{c}} = \frac{c}{v} \gg 1$ dans le cadre non-relativiste

4.2.2 PFD appliqué à l'électron dans le réf Galiléen

$$m_e \ddot{\vec{r}} = -\frac{m_e}{\tau} \dot{\vec{r}} - m_e \omega_0^2 \vec{r} - e \vec{E} - \underbrace{e \vec{v} \times \vec{B}}$$

4.2.3 en régime harmonique le PFD s'écrit : $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}) \underline{\vec{r}} = -\frac{e}{m_e} \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \approx -\frac{e}{m_e} \underline{\vec{E}}_0 e^{i(-\omega t)}$

$$\text{soit : } \underline{\vec{r}} = \frac{-\frac{e}{m_e} \underline{\vec{E}}_0 e^{i(-\omega t)}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})}$$

4.2.4 on a : $\underline{\vec{p}} = -e \dot{\vec{r}} = \frac{\frac{e^2}{m_e}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} \underline{\vec{E}}_0 e^{i(-\omega t)} \implies \underline{\vec{P}} = \frac{\frac{Ne^2}{m_e}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} \underline{\vec{E}}$

4.2.5 soit : $\underline{\vec{P}} = \frac{\frac{Ne^2}{m_e}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} \underline{\vec{E}} = \epsilon_0 (\underline{n}^2 - 1) \underline{\vec{E}} \implies \underline{n}^2 = 1 + \frac{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})}$

4.3 $\omega \ll \omega_0$ et on néglige le terme d'amortissement $-\frac{m_e}{\tau} \dot{\vec{r}} \implies \underline{n}^2 \approx 1 + \frac{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}}{\omega_0^2}$, en faisant un DL_1 :

$$n = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}}} \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$$

4.4 G.P : $PV = nRT = n_0 K_B T$, le nombre de molécule par unité de volume s'écrit $N_0 = \frac{n_0}{V} = \frac{P}{K_B T}$, chaque molécule contient 2 électrons optiques :

$$n = 1 + \frac{2N_0 e^2}{2m_e \epsilon_0 \omega_0^2} = 1 + \frac{\frac{P}{K_B T} e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} \implies \boxed{\alpha = \frac{e^2}{m_e K_B \epsilon_0 \omega_0^2}}$$

fin du corrigé

Fibres optiques

Les fibres optiques sont des guides d'ondes électromagnétiques dans le domaine optique. L'épreuve propose d'aborder quelques aspects de la physique des fibres optiques. Elle est composée de trois parties largement indépendantes entre elles. Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'axe Oz entouré d'une gaine également cylindrique et de rayon $b > a$ (figure 1). Le cœur est composé d'un milieu diélectrique non magnétique, transparent, linéaire isotrope et homogène d'indice de réfraction n_1 . La gaine est elle aussi composée d'un milieu diélectrique non magnétique, transparent, linéaire isotrope et homogène d'indice de réfraction n_2 . Dans la pratique $n_2 < n_1$.

Dans tout le problème, la fibre optique est supposée plongée dans l'air d'indice de réfraction $n_0 = 1$. La longueur d'onde dans le vide du rayonnement utilisé sera notée λ_0 .

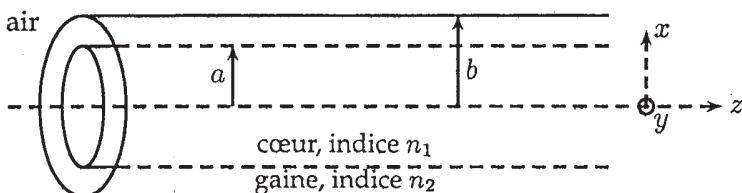


Fig 1 : Fibre optique à saut d'indice.

Pour simplifier les calculs tout en s'assurant de pouvoir dégager l'essentiel des propriétés des fibres optiques, on limite l'étude, à la propagation du signal lumineux, selon la direction moyenne Oz dans un ensemble de milieux dont l'indice ne dépend que de la coordonnée z (figure 2).

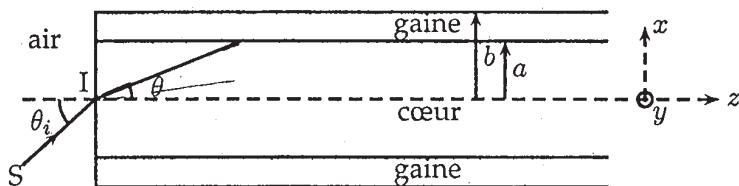


Fig 2 : Modèle simplifié d'une fibre optique à saut d'indice.

Au besoin, on notera \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z les trois vecteurs unitaires du repère orthonormé (O, x, y, z) . Pour la célérité de la lumière dans le vide, on prendra la valeur approchée habituelle $c_0 = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

1^{ère} partie : Étude géométrique d'une fibre optique à saut d'indice

1.1 On se place dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique.

1.1.1 En quoi consiste une telle approximation ?

1.1.2 L'approximation de l'optique géométrique est-elle valable pour décrire la propagation d'une onde lumineuse dans le cœur d'une fibre optique en silice d'indice de réfraction $n_1 = 1,46$ et de rayon $a = 100 \mu\text{m}$. On donne la longueur d'onde dans le vide du rayonnement $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$.

À quel domaine du spectre électromagnétique appartient ce rayonnement ?

1.2 On considère un rayon lumineux SI se propageant dans l'air et situé dans un plan zOx (figure 2).

1.2.1 Rappeler les lois de DESCARTES-SNELL pour la réfraction. Qu'appelle-t-on réflexion totale ?

Quand existe-t-elle ? Définir l'angle de réflexion totale Λ et donner son expression en fonction de n_1 et n_2 .

1.2.2 Montrer que si l'angle θ_i est inférieur à une certaine valeur θ_a que l'on déterminera, alors ce rayon peut être guidé dans le cœur de la fibre.

1.2.3 Déterminer la valeur numérique de θ_a pour $n_1 = 1,46$ et $n_2 = 1,41$.

1.2.4 Déterminer l'expression de l'ouverture numérique $ON = \sin \theta_a$ en fonction de n_1 et $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$

1.2.5 Montrer que, pour un rayon lumineux guidé par la fibre optique, $|\theta| \leq \theta_{lim}$ et exprimer $\sin \theta_{lim}$ en fonction de Δ .

1.3 Un signal lumineux est émis au point I à l'instant $t = 0$ dans une direction faisant un angle θ avec l'axe Oz à l'intérieur de la fibre optique (figure 2). On note $\tau(\theta, z)$ le temps mis par le signal pour être détecté par un photorécepteur placé dans le plan d'abscisse z .

1.3.1 Représenter soigneusement le trajet d'un tel rayon lumineux au sein de la fibre optique.

1.3.2 Exprimer la longueur totale ℓ du trajet parcouru par la lumière au sein de la fibre optique entre le plan d'entrée et le plan d'abscisse z en fonction de z et θ .

1.3.3 En déduire l'expression de $\tau(\theta, z)$ en fonction de n_1 , z , θ et c_0 .

Lorsque θ prend les valeurs comprises entre 0 et $\pm \theta_{lim}$, τ prend les valeurs entre τ_0 et $\tau_0 + \Delta\tau$.

1.3.4 Exprimer $\Delta\tau$ en fonction de z , θ_{lim} , n_1 et c_0 .

1.4 La source émet une succession d'impulsions lumineuses de période T et de durées très brèves devant T (figure 3). On note $I'(z, t)$ l'intensité lumineuse détectée en régime établi par le photorécepteur placé à l'abscisse z .

1.4.1 Représenter qualitativement $I'(z, t)$ et commenter le résultat dans les deux cas suivants :

- $z = z_1$ telle que $\Delta\tau(z_1) < T$;
- $z = z_2$ telle que $\Delta\tau(z_2) > T$;

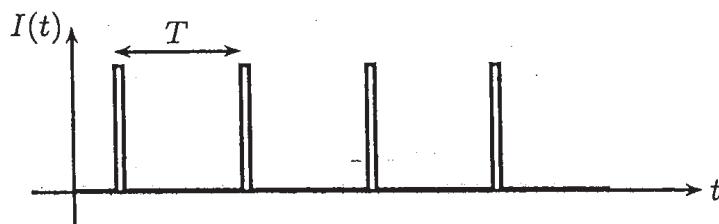


Fig 3 : Suite d'impulsions lumineuses.

1.4.2 Déterminer l'expression de la valeur minimale T_m de T au-dessous de laquelle les impulsions détectées par le photorécepteur peuvent se chevaucher. On exprimera T_m en fonction de c_0 , n_1 , n_2 et z . Conclure quant à la transmission de signaux à grande distance.

1.4.3 Calculer T_m ainsi que l'ordre de grandeur du débit maximal de la fibre optique exprimé en nombre d'impulsions par seconde lorsque $z = 1 \text{ km}$, $n_1 = 1,46$ et $n_2 = 1,41$. Commenter.

2^{ème} partie :
Modes d'une fibre optique

La condition de guidage de la lumière par la fibre optique, établie en 1.2.2 est en fait une condition nécessaire mais non suffisante. En effet, la description utilisée ne tient pas compte *suffisamment* du caractère ondulatoire de la lumière.

Un modèle simple permet d'introduire la notion de mode de propagation dans une fibre optique. Selon ce modèle, on décrit la propagation de la lumière au sein de la fibre optique à l'aide d'une onde électromagnétique plane monochromatique. La figure 4 représente une portion de la fibre optique. (II) est le plan d'onde correspondant aux rayons lumineux A_1B_1, A_2B_2, \dots . Pour qu'il y ait propagation le long de la fibre optique, il faut que les ondes issues des réflexions multiples soient en phase aux différents points P_1, P_2, \dots pour y interférer de manière identique.

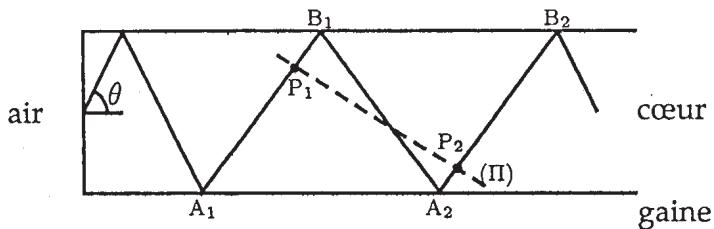


Fig 4 : Onde lumineuse au sein d'un fibre optique.

2.1 Énoncer le théorème de MALUS-DUPIN.

Un calcul géométrique non demandé dans ce problème, montre que la longueur du trajet, le long du rayon lumineux, séparant deux points successifs P_i et P_{i+1} est donné par :

$$P_i P_{i+1} = 4a \sin \theta \quad (1)$$

2.2 Exprimer le déphasage $\Delta\varphi$ entre les amplitudes des ondes aux points P_i et P_{i+1} en fonction de a, θ, n_1 et λ_0 .

2.3 En explicitant la condition d'interférence constructive, montrer que seules certaines inclinaisons correspondant à des valeurs particulières θ_m ($m \in \mathbb{Z}$) de l'angle θ sont permises. Chacune de ces valeurs correspond à un mode de propagation. Le mode fondamental correspond à $m = 0$.

2.4 À quelle condition sur a le mode d'ordre m existe-t-il ?

2.5 En déduire le nombre N de modes possibles en fonction de n_1, n_2, a et λ_0 . Faire l'application numérique pour $a = 100 \mu m$, $n_1 = 1,46$, $n_2 = 1,41$ et $\lambda_0 = 1,55 \mu m$

2.6 Est-il possible dans la pratique de distinguer le mode $+m$ du mode $-m$?

Une fibre optique monomode est une fibre dans laquelle seul le mode fondamental peut se propager.

2.7 À quelle condition sur son rayon a , une fibre optique est-elle monomode ? On exprimera le rayon maximum a_{max} d'une telle fibre en fonction de λ_0, n_1 et n_2 .

2.8 Calculer la valeur numérique de a_{max} pour $\lambda_0 = 1,55 \mu m$, $n_1 = 1,46$ et $n_2 = 1,41$.

2.9 Quel intérêt peut-il y avoir à utiliser une fibre optique monomode compte tenu de l'étude effectuée en 1.3 et 1.4 ?

3^{ème} partie : Gyromètre optique

Cette partie aborde l'étude du principe de fonctionnement d'un gyromètre optique. Comme son prédecesseur mécanique ou gyroscope, le gyromètre optique est capable de détecter de faibles rotations. Il trouve ainsi son utilisation dans la navigation inertie.

3.1 Effet Sagnac

La figure 5 représente un interféromètre de SAGNAC éclairé par une source Laser. La lumière de la source est divisée à l'aide de la séparatrice S_p en deux ondes se propageant en sens opposés le long du chemin fermé défini par les miroirs M_1 , M_2 et M_3 .

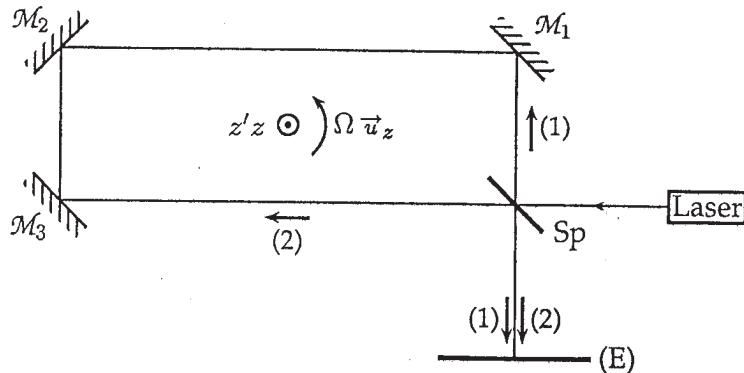


Fig 5 : Interféromètre de SAGNAC.

Les ondes contrapropagatives (1) et (2) produisent une figure d'interférence sur l'écran (E). Lorsque l'interféromètre, la source et l'écran sont animés d'un mouvement d'ensemble de rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ par rapport à un référentiel galiléen, les chemins optiques dans les sens (1) et (2) ne sont pas égaux. Il en résulte un déphasage entre les ondes (1) et (2) dépendant de Ω : c'est l'effet SAGNAC. Cet effet, qui se traduit sur l'écran par un déplacement des franges d'interférences, peut être exploité pour mesurer la vitesse de rotation de l'ensemble. Pour simplifier l'étude, on suppose que le trajet des rayons lumineux est un cercle de rayon R et non le rectangle représenté figure 5.

L'interféromètre est placé dans l'air supposé avoir les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide.

- 3.1.1 Exprimer la durée δt_0 que mettent les ondes (1) et (2) pour faire un tour lorsque l'interféromètre est au repos par rapport au référentiel galiléen.
- 3.1.2 Montrer que lorsque l'ensemble est en rotation, le trajet de l'onde (1) constituant un tour de séparatrice à séparatrice diffère d'une quantité $\Delta\ell$ de celui de l'onde (2).
- 3.1.3 Montrer que les durées de propagation δt_1 et δt_2 respectivement des trajets de l'onde (1) et de l'onde (2) vérifient des relations de la forme :

$$\delta t_i = \delta t_0 \pm \frac{R\Omega}{c_0} \delta t_i \quad (2)$$

En déduire les expressions de δt_1 et δt_2 .

3.1.4 En déduire que, dans le cas où la vitesse de déplacement $R\Omega$ de la séparatrice est faible devant la célérité de la lumière dans le vide c_0 , la différence de phase $\Delta\varphi$ entre les ondes qui interfèrent peut s'écrire :

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi S\Omega}{\lambda_0 c_0} \quad (3)$$

λ_0 étant la longueur dans le vide de l'onde lumineuse et S la surface de l'interféromètre supposé circulaire.

3.1.5 Calculer la différence de phase pour $R = 0,1\text{ m}$, $\lambda_0 = 0,8\text{ }\mu\text{m}$ et les trois vitesses angulaires suivantes : $\Omega = 10^{-8}\text{s}^{-1}$, $\Omega = 10^{-1}\text{s}^{-1}$ et $\Omega = 10^2\text{s}^{-1}$. Commenter.

On supposera dans toute la suite du problème que l'expression (3) du déphasage en fonction de la vitesse de rotation ne dépend pas de l'indice du milieu.

3.2 Gyromètre à fibre optique

N tours de fibre optique sont enroulés autour d'un tambour circulaire d'axe $z' Oz$ et de rayon R . Les deux extrémités A et B de la fibre sont placées aux foyers de deux lentilles convergentes L_A et L_B . Un faisceau Laser de fréquence ν est envoyé sous une incidence de $\pi/4$ sur la lame séparatrice S_p donnant lieu à deux ondes contrapropagatives (1) et (2) dans la fibre (figure 6).

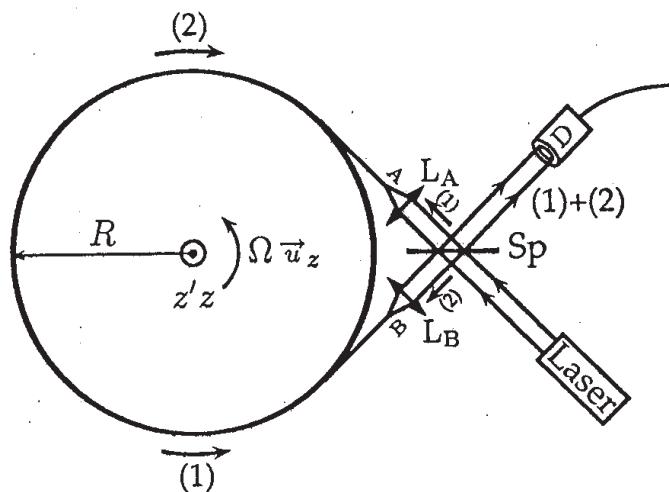


Fig 6 : Schéma de principe d'un gyromètre à fibre optique.

Le photorécepteur analyse la figure d'interférence produite par les ondes (1) et (2) et fournit un signal électrique $s(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse $I(t)$ qu'il reçoit : $s(t) = \alpha I(t)$ où α est une constante positive. On négligera l'écart entre les points A et B et le tambour. L'ensemble est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire Ω par rapport à un référentiel galiléen.

3.2.1 principe

3.2.1.1 À partir des résultats établis à la question 3.1.4, déterminer l'expression du déphasage $\Delta\varphi$ entre les ondes (1) et (2) au niveau du photorécepteur en fonction de Ω , N , λ_0 , c_0 et de l'aire $S = \pi R^2$ de la base du tambour.

3.2.1.2 Déterminer l'expression du signal $s(t)$ émis par le photorécepteur.

3.2.1.3 Montrer que l'introduction d'un déphasage supplémentaire constant de $\pi/2$ entre les deux ondes permet d'obtenir une réponse linéaire du système aux faibles vitesses de rotation.

3.2.2 sensibilité aux effets extérieurs

3.2.2.1 Discuter qualitativement l'influence de chacun des phénomènes suivants sur le fonctionnement de l'interféromètre. Proposer, le cas échéant, lorsque l'effet est perturbateur, une démarche permettant de réduire son influence :

- a) La silice constituant le coeur de la fibre se dilate thermiquement. La variation relative de longueur de la fibre est $1 \cdot 10^{-7} K^{-1}$.
- b) Les vibrations mécaniques du gyromètre peuvent faire varier la distance des points A et/ou B à la séparatrice.
- c) Les variations de température, les champs électromagnétiques extérieurs peuvent influer sur les propriétés optiques et mécaniques de la lame séparatrice.
- d) Les extrémités des fibres donnent lieu à des réflexions parasites.

3.2.2.2 Quels peuvent être les avantages et les inconvénients d'une grande longueur de fibre ?

3.2.2.3 Calculer le déphasage $\Delta\varphi$ pour $R = 0,1 \text{ m}$, $N = 1 \cdot 10^4$, $\nu = 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ et les trois vitesses angulaires suivantes : $\Omega = 10^{-8} \text{ s}^{-1}$, $\Omega = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $\Omega = 10^2 \text{ s}^{-1}$. Commenter.

fin de l'énoncé

Fibres optiques

1^{ère} partie : Étude géométrique d'une fibre optique à saut d'indice

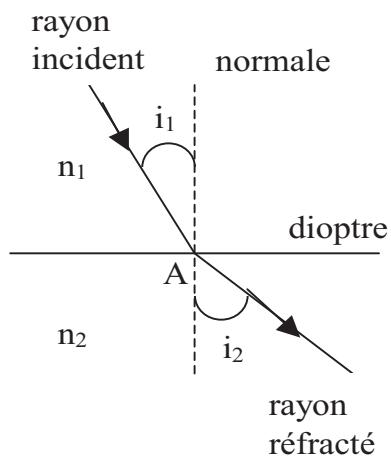
1.1

1.1.1 la longueur d'onde doit être trop faible devant les dimensions des obstacles ou ouvertures rencontrées par les rayons lumineux

1.1.2 la longueur d'onde dans le cœur d'indice $n_1 = 1.46$ est $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1} = 1.06\mu m \ll a = 100 \mu m$
 $\lambda_0 = 1.55 \mu m$ est dans le domaine infrarouge

1.2

1.2.1 soit deux milieux 1 et 2 d'indice n_1 et n_2 séparés par un dioptre , un rayon incident tombe sur le diopstre en A :



les lois de Descartes pour la réfraction sont :

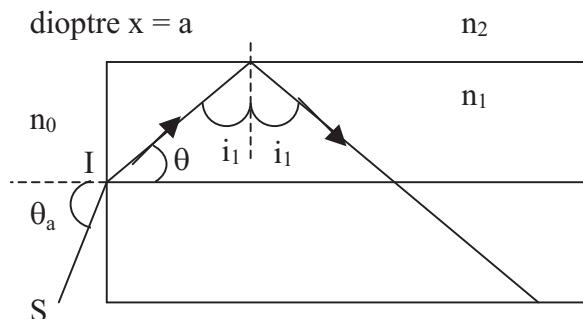
1- le rayon réfracté appartient au plan d'incidence formé par le rayon incident et la normale

2- la relation entre les angles est : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

le phénomène de reflexion totale peut avoir lieu si $n_1 > n_2$

l'angle de réflexion totale est l'angle d'incidence Λ au delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté
son expression est donné par $i_2 = 90^\circ$ soit $\Lambda = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$, rappelant que $n_1 > n_2$

1.2.2 en I le rayon réfracté existe toujours car $n_0 < n_1$ donc pour que le rayon soit guidé dans le cœur de la fibre il faut avoir réflexion totale sur le diopstre en $x = \pm a$ (pour ne pas perdre de l'énergie par réfraction vers la gaine)



soit : $i_1 > \Lambda \implies \sin i_1 > \sin \Lambda \implies \cos \theta > \frac{n_2}{n_1} \implies |\theta| < \cos^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$
 d'autre part on a en I

$$\sin \theta_i = \frac{n_1 \times \sin \theta}{n_0}$$

soit

$$|\theta_i| < \theta_a = \sin^{-1}\left(n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}\right)$$

1.2.3

$$\theta_a = 22.3^\circ = 0.39 \text{ rad}$$

1.2.4

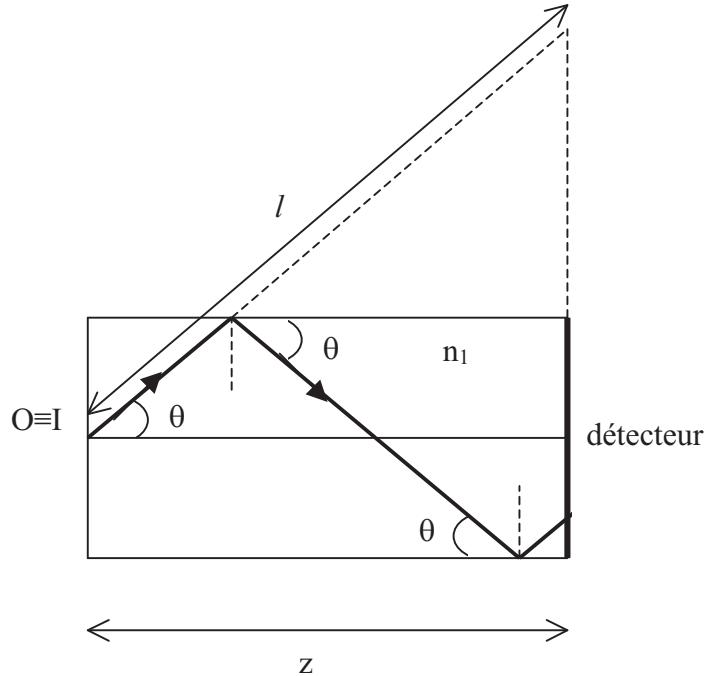
$$ON = \sin \theta_a = n_1 \sqrt{2\Delta}$$

1.2.5 d'après 1.2.2

$$|\theta| < \theta_{lim} = \cos^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \implies \sin \theta_{lim} = \sqrt{2\Delta}$$

1.3

1.3.1 :



1.3.2

$$\ell = \frac{z}{\cos \theta}$$

1.3.3

$$\tau = \frac{\ell}{c_1} = \frac{\ell n_1}{c_0} = \frac{z n_1}{c_0 \cos \theta}$$

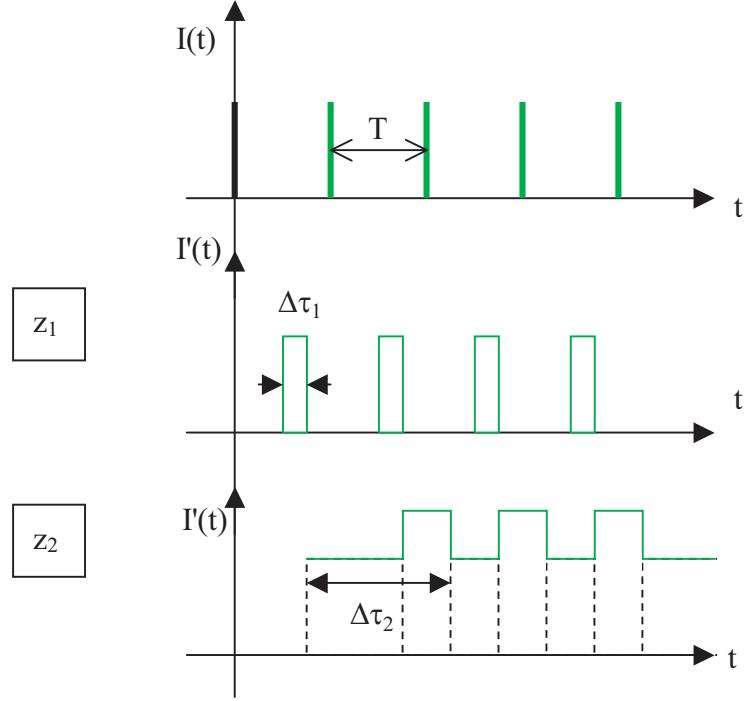
1.3.4 on a $\tau(0) = \frac{z n_1}{c_0}$ et $\tau(\theta_{lim}) = \frac{z n_1}{c_0 \cos \theta_{lim}}$

il vient

$$\Delta \tau = \tau(\theta_{lim}) - \tau(0) = \frac{z n_1}{c_0} \left(\frac{1}{\cos \theta_{lim}} - 1 \right) > 0$$

1.4

1.4.1 :



commentaire : pour la distance z_2 , il y aura chevauchement càd la détection des impulsions sera impossible.

1.4.2 pour que les impulsions ne se chevauchent pas il avoir $T > \Delta\tau(z) = T_m$ soit $T_m = \frac{2n_1}{c_0} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) > 0$

à grande distance $z \rightarrow +\infty$ donc $t_m \rightarrow 0$, les signaux possibles à transmettre sans chevauchement sont de très basses fréquences.

1.4.3 pour $z = 1 \text{ km}$ on a $T_m = 1.72 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ soit $D_{max} = f = \frac{1}{T} \leq \frac{1}{T_m} \text{ A.N} : D_{max} = 6 \cdot 10^6 \text{ imp.s}^{-1}$

2^{ème} partie : Modes d'une fibre optique

2.1 les rayons lumineux sont perpendiculaire aux surfaces d'onde.

$$\mathbf{2.2} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi P_i P_{i+1} n_1}{\lambda_0} = \frac{8\pi n_1 a \sin\theta}{\lambda_0}$$

Rqe : le déphasage supplémentaire au cours de la réflexion n_1/n_2 est nul car ici $n_1 > n_2$.

2.3 les interférences sont constructives si $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ avec m entier

$$\text{donc } \sin\theta_m = \frac{m\lambda_0}{4n_1 a}$$

2.4 le mode d'ordre m existe si

$$-\sin\theta_{lim} \leq \sin\theta_m \leq \sin\theta_{lim}$$

$$\text{soit } a \geq \frac{|m|\lambda_0}{4n_1 \sin\theta_{lim}}$$

$$\mathbf{2.5} \quad \text{on a } -\frac{4n_1 \sin\theta_{lim}}{\lambda_0} \leq m \leq \frac{4n_1 \sin\theta_{lim}}{\lambda_0}$$

$$\text{donc } N = 2 \times E\left(\frac{4n_1 \sin\theta_{lim}}{\lambda_0}\right) + 1$$

on ajoute 1 pour le mode $m = 0$, soit

$$N = 2E\left(\frac{4a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) + 1 = 195$$

2.6 non, le terme d'interférence $\cos \Delta\varphi$ est pair.

2.7 la fibre est monomode si le seul mode permis sera $m = 0$ donc $a < \frac{1 \times \lambda_0}{4n_1 \sin \theta_{lim}}$
soit $a_{max} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$

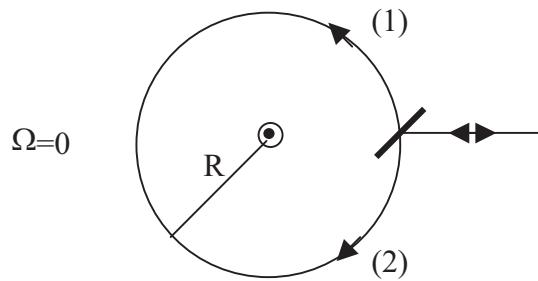
2.8 $a_{max} = 1.02\mu m$

2.9 dans une fibre monomode $m = 0$ donc d'après 2.4 $\theta_m = 0$, le rayon ne subit plus de réflexion multiple, le problème de chevauchement des impulsions va disparaître.

3^{ème} partie : Gyromètre optique

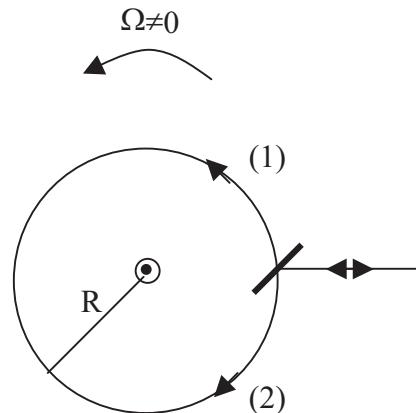
3.1 Effet Sagnac

3.1.1 :



$$\text{on a } \delta t_0 = \frac{2\pi R}{c_0}$$

3.1.2 :



la séparatrice et l'onde (1) ont le même sens du mouvement donc $\ell_1 > 2\pi R$, tandis que $\ell_2 < 2\pi R$ donc $\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 \neq 0$

3.1.3 la loi de composition des vitesses pour l'onde (1) : $c_0 = v_1 + R\Omega$ soit $\delta t_1 = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi R}{c_0 - R\Omega}$
donc $\delta t_1 = \delta t_0 + \frac{R\Omega}{c_0} \delta t_1$

de même la loi de composition des vitesses pour l'onde (2) : $c_0 = v_2 - R\Omega$ soit $\delta t_1 = \frac{2\pi R}{v_2} = \frac{2\pi R}{c_0 + R\Omega}$
donc $\delta t_2 = \delta t_0 - \frac{R\Omega}{c_0} \delta t_2$

d'où

$$\delta t_1 = \frac{\delta t_0}{1 - \frac{R\Omega}{c_0}}$$

et

$$\delta t_2 = \frac{\delta t_0}{1 + \frac{R\Omega}{c_0}}$$

3.1.4 on a $\Delta\varphi = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0}(\delta t_1 - \delta t_2) = \frac{2\pi c_0 \delta t_0}{\lambda_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{R\Omega}{c_0}} - \frac{1}{1 + \frac{R\Omega}{c_0}} \right)$

soit au premier ordre en $\frac{R\Omega}{c_0}$, tenant compte de 3.1.1 :

$$\Delta\varphi \approx \frac{4\pi^2 R}{\lambda_0} \left(1 + \frac{R\Omega}{c_0} - 1 - \frac{R\Omega}{c_0} \right) = \frac{8\pi^2 R^2 \Omega}{\lambda_0 c_0} = \frac{8\pi S \Omega}{\lambda_0 c_0}$$

3.1.5 :

Ω (Hz)	10^{-8}	10^{-1}	10^2
$\Delta\varphi$ (rad)	$3 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-1}$

dans les 3 cas $\Delta\varphi \ll \pi$ le déplacement des franges d'interférences sera inaperçu.

3.2 Gyromètre à fibre optique

3.2.1 principe

3.2.1.1 $\Delta\varphi = N \times \frac{8\pi S \Omega}{\lambda_0 c_0}$

3.2.1.2 le dispositif est symétrique on a $I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi)$ donc $s(t) = 2\alpha I_0 [1 + \cos \frac{8\pi N S}{\lambda_0 c_0} \Omega(t)]$

3.2.1.3 dans ce cas $s(t) = 2\alpha I_0 [1 + \cos(\frac{8\pi N S}{\lambda_0 c_0} \Omega(t) + \frac{\pi}{2})] = 2\alpha I_0 [1 - \sin \frac{8\pi N S}{\lambda_0 c_0} \Omega(t)]$

pour Ω faible on aura :

$$s(t) = 2\alpha I_0 [1 - \frac{8\pi N S}{\lambda_0 c_0} \Omega(t)]$$

qui est une loi linéaire $s = a + b\Omega$

3.2.2 sensibilité aux effets extérieurs

3.2.2.1 :

- a- la longueur de la fibre intervient dans $\Delta\varphi$, mais l'influence est négligeable
- b- pas d'effet sur l'expression de $\Delta\varphi$.
- c- pas d'effet sur l'expression de $\Delta\varphi$.
- d- pas d'effet sur l'expression de $\Delta\varphi$, juste une diminution de l'intensité.

3.2.2.2

avantage : $\Delta\varphi$ est plus important , le gyromètre detectera des valeurs faibles de Ω

inconvéniant : la luminosité va diminuer , ainsi que la fibre sera plus sensible à la température.

3.2.2.3 on a $\Delta\varphi = \frac{8\pi N S \Omega}{\lambda_0 c_0} = \frac{8\pi N S \Omega \nu}{c_0^2}$

Ω (Hz)	10^{-8}	10^{-1}	10^2
$\Delta\varphi$ (rad)	$3 \cdot 10^{-7}$	3	$3 \cdot 10^3$

commentaire : les deux dernières vitesses de rotations peuvent être détectées car $\Delta\varphi$ est comparable à π , le défilement des franges sera observé.

fin du corrigé

Le sujet comporte deux parties **totalement indépendantes**.

On donne **pour toute l'épreuve** :

- la permittivité du vide $\varepsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ SI ;
- on note j le nombre complexe de module unité et d'argument $\pi/2$.

1^{ère} partie :
Conducteurs en équilibre électrostatique

On note respectivement $\vec{E}(M)$ le champ électrique, $\phi(M)$ le potentiel électrique et $\rho(M)$ la densité volumique totale de charges électriques en tout point M de l'espace. On suppose que les conducteurs considérés obéissent à la loi d'OHM locale et on note σ_q la conductivité électrique.

1.1 Relations générales

1.1.1 Théorème de Gauss

1.1.1.1 Énoncer le théorème de GAUSS sous sa forme intégrale.

1.1.1.2 Définir l'équilibre électrostatique d'un système de conducteurs.

1.1.2 Conducteur cylindrique chargé

On considère un conducteur cylindrique (C_1) de section circulaire de rayon R_1 , d'axe Oz et de hauteur $h \gg R_1$ de sorte que l'on puisse négliger tout effet de bord. Ce conducteur présente une charge $Q > 0$, il est en équilibre électrostatique placé dans le vide et est suffisamment éloigné de toute autre distribution de charges pour que l'on puisse négliger toute influence. On pourra utiliser les coordonnées cylindriques habituelles (r, θ, z) et on notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base locale de ces coordonnées.

1.1.2.1 Décrire la distribution de charges électriques de ce conducteur en équilibre électrostatique.
Justifier clairement la réponse.

1.1.2.2 Analyser les symétries et les invariances de la distribution de charges. En déduire d'une part les composantes non nulles du champ électrique et d'autre part les coordonnées d'espace dont dépend \vec{E} .

1.1.2.3 Établir l'expression du champ électrique en tout point M de l'espace. Représenter graphiquement le module $|\vec{E}|$ en fonction des coordonnées d'espace.

1.1.2.4 Quelle est la valeur du champ électrique en $r = R_1^+$? En $r = R_1^-$? Quel résultat retrouve-t-on ainsi?

1.1.3 Quadripôle cylindrique

On considère maintenant un ensemble de quatre conducteurs cylindriques identiques chargés (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) formant un quadripôle électrique en équilibre électrostatique placé dans le vide (figure 1). La charge totale du système est nulle. On note $Q > 0$ la valeur absolue de la charge du conducteur (C_1).

La figure 1 représente l'allure des lignes équi-potentielles au voisinage du centre X du quadripôle.

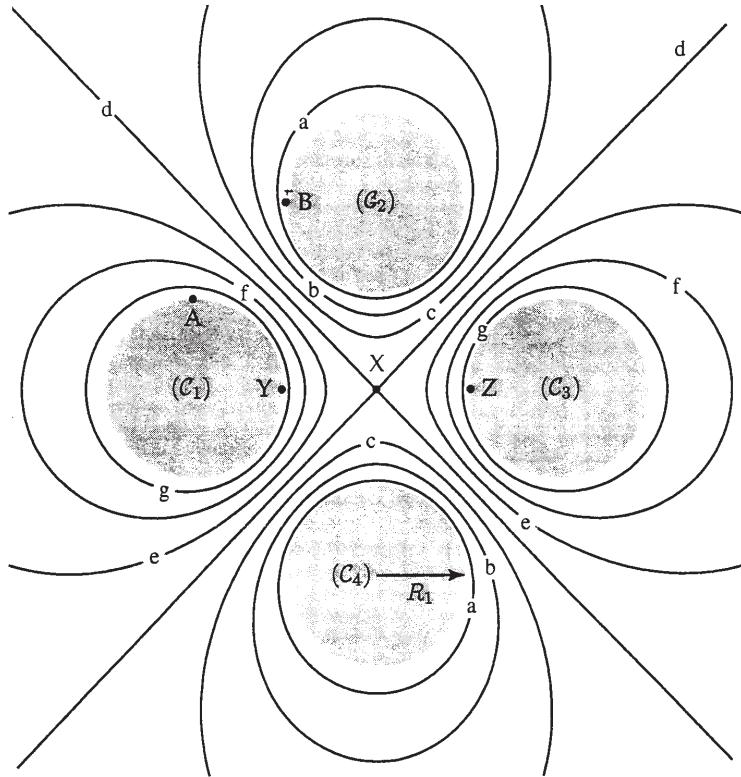


Fig 1 : Allure des équi-potentielles du quadripôle électrique en équilibre électrostatique.

On donne la valeur du potentiel électrique ϕ du système sur certaines équi-potentielles :

- équi-potentielle g : $\phi_g = 0,90 \text{ kV}$;
- équi-potentielle f : $\phi_f = 0,60 \text{ kV}$;
- équi-potentielle c : $\phi_c = -0,30 \text{ kV}$.

1.1.3.1 Déterminer en le justifiant la valeur du potentiel électrique ϕ sur les équi-potentielles d .

1.1.3.2 En analysant les symétries du problème, déterminer en le justifiant la valeur du potentiel électrique ϕ sur les équi-potentielles e , b et a .

1.1.3.3 Déterminer en le justifiant la charge Q_i (avec $i = 1,2,3$ ou 4) de chacun des quatre conducteurs en fonction de Q .

1.1.3.4 Recopier l'allure des équipotentielles sur la copie et représenter soigneusement la ligne de champ électrique reliant dans le vide les points A et B . On n'omettra pas d'indiquer l'orientation de cette ligne de champ sur le schéma.

1.1.3.5 Déterminer en le justifiant la valeur du champ électrique \vec{E} au centre X du quadripôle.

1.1.3.6 Représenter de même la ligne de champ électrique orientée reliant dans le vide les points Y et X et celle reliant X et Z .

1.1.4 Condensateur cylindrique - Généralités

On suppose maintenant que le conducteur (C_1) est entouré d'un autre conducteur (C_2) de même hauteur h , de rayon intérieur R_2 et de même axe de révolution Oz (figure 2). Un générateur de tension continue, non représenté sur le schéma, impose au conducteur (C_1) un potentiel constant $U > 0$. On note Q_1 la charge totale de (C_1) et Q_2 la charge totale de (C_2) . Un milieu isolant assimilable au vide sépare (C_1) de (C_2) . On note Q_2^{ext} une éventuelle charge amenée de l'extérieur ($r \gg R_2^{ext}$) sur (C_2) .

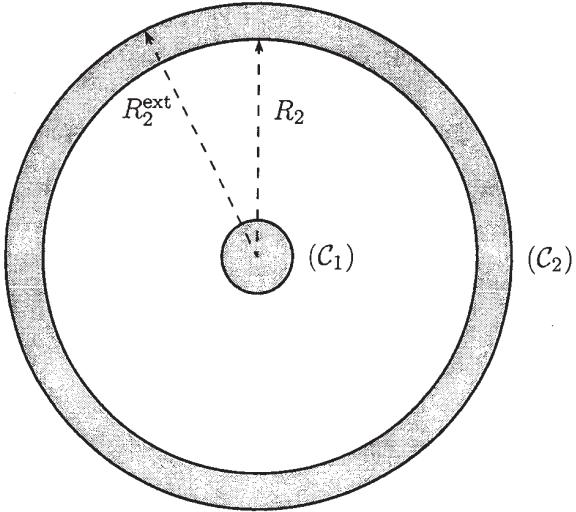


Fig 2 : Conducteurs cylindriques en équilibre électrostatique.

- 1.1.4.1** En appliquant le théorème de GAUSS, déterminer la charge portée par l'armature intérieure de (C_2) . En déduire la relation entre Q_1 , Q_2 et Q_2^{ext} .
- 1.1.4.2** Comment Q_2^{ext} est-elle répartie sur (C_2) ? Cette charge a-t-elle une influence sur Q_1 ? Justifier la réponse.
- 1.1.4.3** Donner l'équation de MAXWELL-GAUSS.
- 1.1.4.4** Dans le cas général, donner l'expression de \vec{E} en fonction du potentiel électrique ϕ à l'équilibre électrostatique.
- 1.1.4.5** En déduire l'équation différentielle satisfaite par ϕ en tout point M . Comment s'écrit cette équation en tout point compris entre (C_1) et (C_2) ? Comment appelle-t-on cette équation?
- 1.1.4.6** Déterminer l'expression du potentiel électrique ϕ que créerait le conducteur cylindrique (C_1) en tout point de l'espace *s'il était seul*. On exprimera $\phi(r)$ en fonction de Q_1 , r , R_1 , h et U . Montrer que cette expression diverge alors loin du conducteur si on suppose que celui-ci est seul. Comment peut-on interpréter ce comportement singulier? Que vaut le potentiel électrique dans le conducteur (C_1) ? Comment appelle-t-on un tel volume?
- Le conducteur (C_2) est à présent **rélié à la terre**.
- 1.1.4.7** Que vaut le potentiel du conducteur (C_2) ? En déduire l'expression du potentiel électrique ϕ en tout point de l'espace compris entre (C_1) et (C_2) en fonction de r , U , R_1 et R_2 . Représenter graphiquement $\phi(r)$ en fonction de r pour $r \in [0, R_2^{ext}]$. Que vaut Q_2^{ext} dans ce cas?
- 1.1.4.8** Rappeler la définition de la capacité C d'un condensateur en équilibre électrostatique.
- 1.1.4.9** Déduire des questions précédentes l'expression de la capacité C du condensateur cylindrique représenté figure 2.
- On rappelle que la densité volumique w_e d'énergie électrostatique dans le vide et dans les conducteurs est définie par $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$. On suppose désormais que $Q_2^{ext} = 0$.
- 1.1.4.10** Déterminer l'expression de w_e en tout point de l'espace. En déduire l'énergie électrostatique W_e du condensateur cylindrique.
- 1.1.4.11** En déduire une nouvelle expression de la capacité du condensateur cylindrique. Comparer avec 1.1.4.9
- On suppose maintenant que** $R_2 = R_1 + \delta R_1$ avec $\delta R_1 \ll R_1$.
- 1.1.4.12** Montrer alors que la capacité C du condensateur cylindrique s'écrit en bonne approximation sous la forme :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{e}$$

avec e et Σ des grandeurs positives que l'on exprimera en fonction de δR_1 et de h . Quel résultat retrouve-t-on ici ?

1.2 Condensateur cylindrique en ARQS - Applications

On se place désormais dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) et l'on admettra que les expressions précédemment établies pour la capacité C du condensateur cylindrique restent valables. Les signaux électriques $x(t)$ utilisés dans cette partie sont tous harmoniques de pulsation ω et de notation complexe $\underline{x}(t) = X \exp j(\omega t + \varphi_x)$. On suppose que les différents milieux qui entourent les conducteurs ont les mêmes propriétés électriques que le vide, caractérisés par une permittivité diélectrique ε_0 .

1.2.1 Généralités

1.2.1.1 Rappeler le cadre d'application de l'ARQS.

1.2.1.2 Écrire les quatre équations de MAXWELL dans le cadre de l'ARQS.

1.2.1.3 Montrer que l'expression de la capacité C en ARQS est la même qu'en régime statique à condition que $E \gg \omega A$. Avec E et A respectivement l'amplitude du champ électrique \vec{E} et l'amplitude du potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Montrer que cela revient à négliger tout phénomène d'induction dans le condensateur.

On supposera désormais ce résultat applicable **dans toute la suite du problème**.

1.2.2 Capacité d'un câble coaxial

Un câble coaxial utilisé au laboratoire d'électronique est constitué d'un conducteur cylindrique (C_1) de rayon $R_1 = 0,1\text{ mm}$ entouré d'une tresse métallique (C_2) de rayon interne $R_2 = 0,4\text{ mm}$, tous deux de longueur $h = 1,0\text{ m}$. Un milieu isolant assimilable au vide sépare (C_1) de (C_2). La tresse métallique est elle-même protégée de l'extérieur par une gaine souple isolante en PVC par exemple.

Une coupe transversale de ce câble est représentée figure 2.

1.2.2.1 Déterminer numériquement la valeur de la capacité C d'un câble coaxial de longueur $h = 1,0\text{ m}$.

1.2.2.2 On associe bout à bout deux câbles coaxiaux identiques et du type précédent à l'aide d'une fiche métallique en T qui relie entre eux les conducteurs de même nature. Le câble coaxial ainsi constitué est-il l'association série ou parallèle des deux câbles coaxiaux considérés ? Justifier la réponse à l'aide d'un schéma par exemple. Calculer numériquement la capacité de l'association. Pour mesurer la capacité du câble coaxial de la question 1.2.2.1, on propose une simple expérience de résonance d'intensité avec un circuit RLC série, le condensateur étant constitué du câble coaxial à caractériser. On note $u_g(t) = U_g \cos \omega t$ la tension d'excitation délivrée par le générateur de tension qui excite le montage.

1.2.2.3 Représenter le schéma de principe du circuit RLC série et les branchements permettant de visualiser l'excitation $u_g(t)$ sur la voie X d'un oscilloscope et l'image du courant $i(t)$ sur la voie Y. On prendra garde aux éventuels problèmes de masse électrique.

1.2.2.4 Déterminer l'expression en régime harmonique, du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_g - \varphi_i$ entre la tension d'excitation et le courant $i(t)$ qui circule dans le circuit. Que vaut ce déphasage à la résonance d'intensité ? En déduire l'expression de la fréquence de résonance ν_0 .

1.2.2.5 On se place en mode de visualisation XY sur l'oscilloscope. Quelle figure obtient-on hors résonance ? Même question à la résonance ?

1.2.2.6 Analyser de manière qualitative l'influence de la valeur de la résistance R sur la détermination de la résonance.

1.2.2.7 On donne $R = 100\text{ }\Omega$ et $L = 100\text{ mH}$. Déterminer numériquement la valeur de ν_0 pour le câble coaxial de la question 1.2.2.1.

1.3 Principe d'un capteur de force capacitif

On considère le condensateur plan représenté figure 3, dont l'armature (-) est supposée mobile selon l'axe Ox et l'armature (+) est supposée fixe. Les plaques du condensateur restent en permanence parallèles entre elles. Les armatures ont une surface Σ et l'épaisseur x du condensateur est faible devant les dimensions caractéristiques des plaques, de sorte que l'on puisse négliger tout effet de bord (condensateur plan idéal). Le milieu qui sépare les plaques est assimilable au vide de permittivité ε_0 .

1.3.1 Généralités

1.3.1.1 Montrer que la capacité C d'un condensateur plan idéal d'épaisseur x et de surface Σ est donnée par :

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x}$$

1.3.1.2 Rappeler l'expression de l'énergie électrique E_e d'un condensateur en fonction de la capacité C du condensateur et de la tension U .

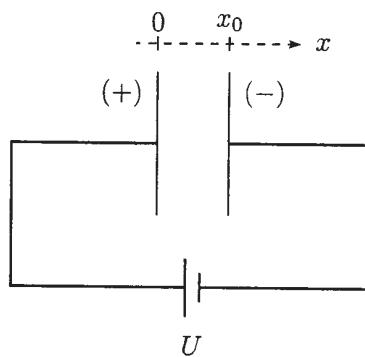


Fig 3 : Schéma de principe d'un capteur capacitif à tension constante.

1.3.1.3 Suite à une variation de la capacité du condensateur, sa charge varie de dQ . Rappeler l'expression du travail électrique élémentaire δW_g fourni par le générateur pour maintenir sa tension constante. On exprimera le résultat tout d'abord en fonction de la charge Q du condensateur et de la tension U , puis en fonction de C et de U .

1.3.2 Détection de force par déplacement

On modélise la force exercée sur l'armature (-) par un "opérateur" qui exerce de manière réversible une force $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{e}_x$ avec $F_{op} > 0$.

1.3.2.1 Effectuer un bilan énergétique du système constitué par le condensateur, lorsque la plaque (-) est déplacée par l'opérateur de manière quasi-statique d'une distance $\delta x > 0$. On prendra soin de détailler la signification de chacun des termes de ce bilan.

1.3.2.2 Déduire des questions précédentes l'expression de la force F_{op} en fonction de U , ε_0 , Σ et la position d'équilibre finale x de la plaque. En déduire que la mesure de x permet une détermination de la force qu'exerce l'opérateur sur la plaque.

1.3.2.3 Calculer le travail W_{op} que doit fournir l'opérateur pour faire passer l'armature (-) de la position x_0 à la position $x_0 + \Delta x$ (avec $\Delta x > 0$) de manière quasi-statique. Discuter le signe de W_{op} . Ce travail est-il moteur ou résistant ?

2ème partie :
Oscillateur commandé en tension (OCT)

Les applications des condensateurs sont nombreuses en électronique. La réalisation d'un Oscillateur Commandé en Tension (OCT) nécessite quasi-systématiquement l'utilisation d'un condensateur. On indique qu'un OCT est un système fournissant un signal périodique dont la fréquence ν est commandée par une tension v_c .

On considère le circuit représenté figure 4. Les amplificateurs opérationnels (AO) sont supposés idéaux et sont polarisés de manière symétrique à $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$ avec $+V_{cc} = 15 V$. On donne les tensions de saturation des deux AO : $V_{sat}^+ = +V_{sat} = +V_{cc}$ et $V_{sat}^- = -V_{sat} = -V_{cc}$.

L'amplificateur opérationnel AO1 est supposé fonctionner en régime linéaire. On posera $\tau = RC$.

Le transistor T fonctionne comme un interrupteur idéal commandé par le courant électrique i_B :

- lorsque $i_B > 0$, le transistor T fonctionne comme un interrupteur fermé idéal ($R_T = 0$) et relie directement la résistance $R/2$ à la masse. Dans ces conditions le potentiel du point B vaut en bonne approximation $V_B = U_s \approx 0,6 V$;
- lorsque $i_B = 0$, le transistor T fonctionne comme un interrupteur ouvert idéal ($R_T = \infty$) et $i_T = 0$.
- lorsque $i_B < 0$, le transistor T est détruit !

La diode de signal D est supposée idéale :

- lorsque $u_D < 0$, la diode D est bloquée et $i_D = 0$;
- lorsque $i_D > 0$, la diode D est passante et $u_D = 0$.

La tension de commande v_c est supposée constante.

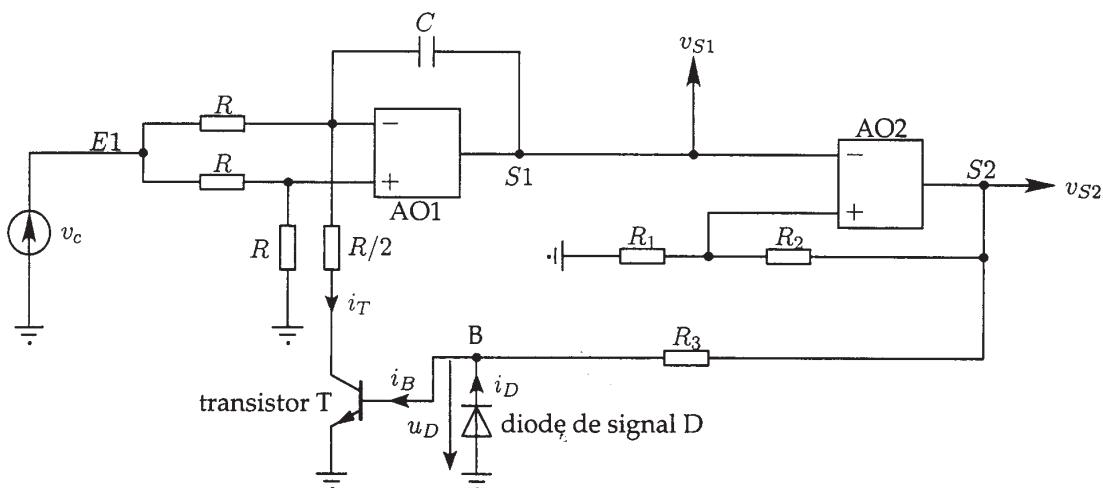


Fig 4 : Oscillateur commandé en tension OCT.

2.1 Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel AO1

2.1.1 Établir l'équation différentielle satisfaite par les tensions v_c et v_{S1} lorsque $i_B > 0$. Simplifier éventuellement cette équation en rappelant que v_c est constante. Quelle est alors l'opération mathématique effectuée par la portion $E_1 - S_1$ du circuit ? En déduire, à une constante C_1 près, l'expression de $v_{S1}(t)$ en fonction de t , de τ et de v_c . Représenter graphiquement l'allure de $v_{S1}(t)$.

2.1.2 Mêmes questions lorsque $i_B = 0$. Quelle est alors l'opération mathématique effectuée par la portion $E_1 - S_1$ du circuit ? En déduire, à une constante C_2 près, l'expression de $v_{S1}(t)$ en fonction de t , de τ et de v_c . Représenter graphiquement l'allure de $v_{S1}(t)$.

2.2 Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel AO2

2.2.1 L'amplificateur opérationnel A02 fonctionne-t-il de manière linéaire ou saturée ? Justifier simplement la réponse.

2.2.2 Quelles valeurs la tension v_{S2} peut-elle prendre ?

2.2.3 Déterminer et représenter graphiquement la caractéristique de transfert $v_{S2} = v_{S2}(v_{S1})$ de la portion $S_1 - S_2$ du montage. On pourra négliger l'effet de la résistance R_3 sur le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel A02. Comment appelle-t-on un tel circuit ?

2.2.4 À quelle condition sur $v_{S1}(t)$ la sortie S2 passe-t-elle de sa valeur maximale à sa valeur minimale ? De même à quelle condition sur $v_{S1}(t)$ la sortie S2 passe-t-elle de sa valeur minimale à sa valeur maximale ?

2.3 Rôle de la diode D

2.3.1 Représenter la caractéristique statique $i_D = i_D(u_D)$ de la diode D.

2.3.2 Quel est l'état de la diode D lorsque la tension v_{S2} atteint sa valeur maximale ? Que vaut alors le courant i_D ? Donner dans ces conditions l'expression de i_B en fonction de V_{cc} , R_3 et U_s ? Comment se comporte alors le transistor T ? D'après les données de l'énoncé, montrer que l'expression de i_B peut être simplifiée. Quelle est alors l'expression de $v_{S1}(t)$?

2.3.3 De même lorsque la tension v_{S2} atteint sa valeur minimale, que vaut la tension u_D ? Quel est alors l'état de la diode D ? Que vaut le courant i_B ? Donner dans ces conditions l'expression de i_D en fonction de V_{cc} et de R_3 ? Comment se comporte alors le transistor T ? Quelle est alors l'expression de $v_{S1}(t)$?

2.4 Signaux délivrés par l'OCT

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la sortie S2 est à son niveau maximal et $v_{S1} = 0$.

2.4.1 Quel est alors l'état de fonctionnement du transistor T ? En déduire l'expression complète de $v_{S1}(t)$. Montrer qu'il existe un instant $t_1 > 0$ pour lequel la sortie S2 bascule vers son niveau minimal.

2.4.2 Lorsque S2 est à son niveau minimal, quel est alors l'état de fonctionnement du transistor T ? En déduire l'expression complète de $v_{S1}(t)$. Montrer qu'il existe un instant $t_2 > t_1$ pour lequel la sortie S2 bascule à nouveau vers son niveau maximal.

2.4.3 Déduire des questions précédentes que les signaux v_{S1} et v_{S2} sont périodiques de période T . Représenter graphiquement et en concordance des temps l'allure des signaux v_{S1} et v_{S2} pour $t \in [0, t_1 + 2T]$.

2.4.4 Déduire des questions précédentes l'expression de la période T des signaux v_{S1} et v_{S2} en fonction de τ , R_1 , R_2 , V_{cc} et v_c . En déduire l'expression de la fréquence ν de l'OCT et montrer qu'elle est commandée par la tension v_c .

2.4.5 Application numérique : On donne $R_1 = R_2$, $R = 10k\Omega$, $C = 500pF$ et $v_c = 0,1V$. Déterminer numériquement la valeur de la fréquence ν délivrée par l'OCT.

2.5 Proposer une application possible de l'OCT.

fin de l'énoncé

1^{ère} partie :
Conducteurs en équilibre électrostatique

1.1 Relations générales

1.1.1 Théorème de Gauss

1.1.1.1 le flux sortant du champ électrostatique à travers toute surface fermée Σ est égale au quotient par ε_0 de la charge totale intérieure à Σ

1.1.1.2 le champ intérieur de tout conducteur du système est nul.

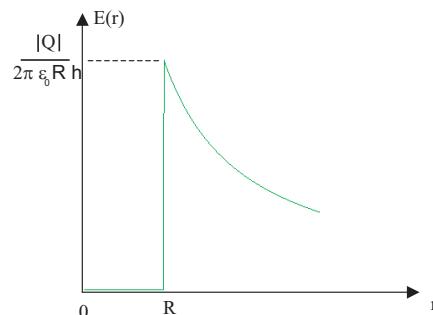
1.1.2 Conducteur cylindrique chargé

1.1.2.1 le conducteur en équilibre ne peut porter de charges qu'en sa surface : $\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 h}$
Rqe : l'hypothèse $h \gg h$ permet de négliger la charge portée par les bases

1.1.2.2 tout plan contenant Oz est un plan de symétrie du conducteur chargé, ainsi que tout plan \perp à Oz donc $\vec{E} = E(r, \theta, z) \hat{e}_r$.

le conducteur est invariant par translation et par rotation selon Oz donc $\vec{E} = E(r) \hat{e}_r$

1.1.2.3 par le thm de GAUSS : $\begin{cases} 2\pi rhE(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} & r > R_1 \\ 2\pi rhE(r) = 0 & r < R_1 \end{cases} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi rh\varepsilon_0} & r > R_1 \\ 0 & r < R_1 \end{cases}$



1.1.2.4 $E(r = R_1^+) = \frac{Q}{2\pi R_1 h \varepsilon_0}$ et $E(r = R_1^-) = 0$, on retrouve la relation de passage (de continuité) du champ électrostatique : $E(r = R_1^+) - E(r = R_1^-) = \frac{Q}{2\pi R_1 h \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

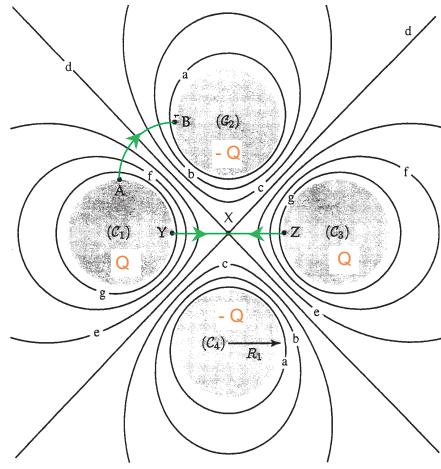
1.1.3 Quadripôle cylindrique

1.1.3.1 $\phi_d = 0$ par thm des valeurs intermédiaires suivant un segment joignant les centres de C_1 et C_2 , donc $\phi_c = -0.30kV < \phi_d < \phi_f = 0.60kV$

1.1.3.2 $\phi_e = -\phi_c = 0.30kV$, $\phi_b = -\phi_f = -0.60kV$ et $\phi_a = -\phi_g = -0.90kV$

1.1.3.3 $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q_1 = -Q$, $Q_3 = Q_1 = Q$ et $Q_4 = -Q_1 = -Q$

1.1.3.4 le champ \vec{E} est orthogonale aux équi-potentielles se dirigeant vers les potentiels décroissant :



1.1.3.5 au centre X : $\vec{E} = \vec{0}$ car intersection de deux équipotentielles orthogonales

1.1.3.6 voir figure

1.1.4 Condensateur cylindrique - Généralités

1.1.4.1 le théorème de GAUSS donne :

$$2\pi rhE(r) = \frac{Q_1 + Q'_2}{\varepsilon_0}$$

pour $R_2 < r < R_2^{ext}$

or à l'intérieur du conducteur (C_2) on a : $E(r) = 0$

donc :

$$Q'_2 = -Q_1$$

c'est l'influence totale

et par conservation de la charge de (C_2) : $Q'_2 + Q_2^{ext} = Q_2 \Rightarrow Q_2 - Q_2^{ext} + Q_1 = 0$

1.1.4.2 Q_2^{ext} est répartie uniformément en surface externe sur (C_2) , non

1.1.4.3 $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

1.1.4.4 $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}\phi$

1.1.4.5 en tout point M : $\Delta\phi + \rho/\varepsilon_0 = 0$, en particulier en tout point compris entre (C_1) et (C_2) assimilable au vide $\Delta\phi = 0$, équation de Laplace

1.1.4.6 on a une symétrie cylindrique ($r > R_1$) : $\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{Q_1}{2\pi rh\varepsilon_0}$

donc : $\phi(r) = -\frac{Q_1}{2\pi h\varepsilon_0} \ln r + cte$

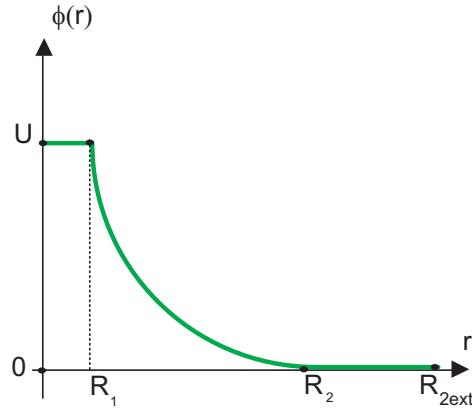
or $\phi(r = R_1) = U$ d'où : $\phi(r) = \begin{cases} -\frac{Q_1}{2\pi h\varepsilon_0} \ln(\frac{r}{R_1}) + U & r > R_1 \\ U & r < R_1 \end{cases}$

on a bien $\phi(r \rightarrow +\infty) = +\infty$ si $Q_1 > 0$

Ceci est du au fait que le cylindre chargé est une distribution à extension spatiale infinie
 $\phi(C_1) = U$, le volume du conducteur est équi-potentiel

1.1.4.7 $\phi(C_2) = 0$, on a : $\phi(r) = a \ln r + b$, les conditions aux limites :

$$\phi(r) = U \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)} > 0$$



$Q_2^{ext} = 0$ puisque (C_2) est mis à la terre

$$1.1.4.8 \quad C = \frac{U_1 - U_2}{Q_1}$$

$$1.1.4.9 \quad \text{on a : } E(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} = +\frac{U}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r} \text{ et par thm de Gauss : } E(r) = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{1}{r} \text{ donc :}$$

$$Q_1 = U \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$1.1.4.10 \quad w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \begin{cases} 0 & r > R_2 \\ \frac{Q_1^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2} \frac{1}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r < R_1. \end{cases}$$

donc :

$$W_e = \int \int \int w_e d\tau = 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2} \frac{1}{r^2} r dr = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{\frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}}$$

$$1.1.4.11 \quad C = \frac{\frac{W_e}{2}}{\frac{1}{2}Q_1^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}, \text{ on retrouve le résultat 1.1.4.9}$$

$R_2 = R_1 + \delta R_1$ avec $\delta R_1 \ll R_1$.

$$1.1.4.12 \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(1 + \frac{\delta R_1}{R_1})} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\frac{\delta R_1}{R_1}} = \epsilon_0 \frac{2\pi h R_1}{\delta R_1}$$

donc : $e = \delta R_1$ et $\Sigma = 2\pi h R_1$, on retrouve la limite du condensateur plan

1.2 Condensateur cylindrique en ARQS - Applications

1.2.1 Généralités

1.2.1.1 notons d la taille du circuit, dans l'ARQS la propagation est négligé :

$$T \gg \frac{d}{c_0} \Rightarrow \omega \ll \frac{2\pi c_0}{d}$$

1.2.1.2 les quatre équations de MAXWELL dans le cadre de l'ARQS :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(M, t) \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) \quad (4)$$

1.2.1.3 le thm de Gauss reste inchangé en ARQS, il suffit d'avoir aussi :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}\phi \approx -\vec{\text{grad}}\phi$$

ceci nécessite en régime harmonique d'avoir :

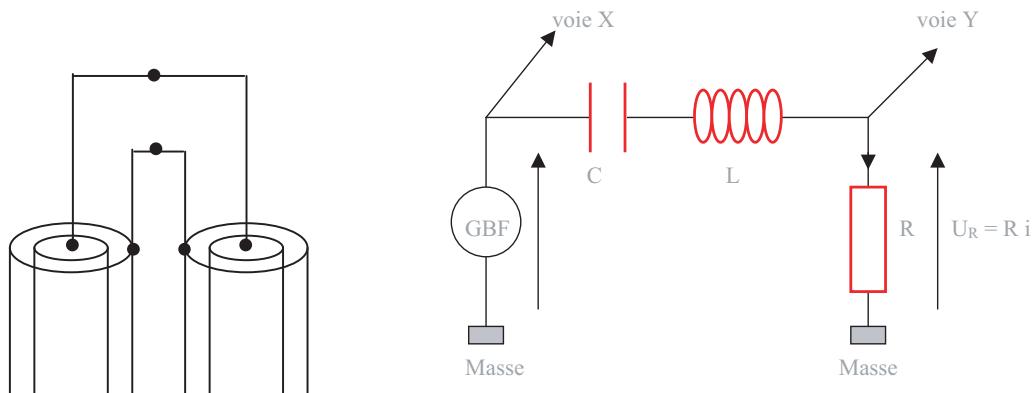
$$E \gg \omega A$$

ce qui revient à négliger le phénomène d'induction, sachant que $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est le champ électromoteur de Newmann

1.2.2 Capacité d'un câble coaxial

1.2.2.1 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)} = 40 \text{ pF}$.

1.2.2.2 l'association parallèle (liaison int-int et ext-ext), $C_e = 2C = 80 \text{ pF}$



1.2.2.3 voir figure

1.2.2.4 on a :

$$\Delta\varphi = \varphi_g - \varphi_i = \text{Arg} \frac{U_g}{I} = \text{Arg}(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}) = \arctan \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$$

à la résonance d'intensité $\Delta\varphi = 0$

soit : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ d'où $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

1.2.2.5 hors résonance on obtient une ellipse, à la résonance on obtient un segment de droite.

1.2.2.6 si $R \nearrow$ la plage de fréquence $\Delta\nu$ pour laquelle $\Delta\varphi = \arctan \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \approx 0$ est vaste d'où la mesure moins précise (résonance floue)

1.2.2.7 $\nu_0 = 80 \text{ kHz}$

1.3 Principe d'un capteur de force capacitif

1.3.1 Généralités

1.3.1.1 (Poisson) entre les armatures :

$$\frac{d^2V}{dx'^2} = 0$$

soit, par intégration :

$$V(x') = \frac{V_2 - V_1}{x} x' + V_1$$

d'où le champ :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx'} \vec{x}' = \frac{V_1 - V_2}{x} \vec{x}'$$

uniforme

thm de Coulomb au voisinage d'une armature :

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{x}$$

la charge sur cette armature :

$$Q_1 = \sigma_1 \Sigma = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{x} \Sigma$$

donc, la capacité :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x}$$

1.3.1.2 l'énergie électrique $E_e = \frac{1}{2} C U^2$

1.3.1.3 $\delta W_g = U dQ = U^2 dC$ car $U = cte$

1.3.2 Détection de force par déplacement

1.3.2.1 bilan d'énergie du condensateur :

$$dE_e = F_{op} \delta x + \delta W_g$$

1.3.2.2 le bilan s'écrit : ($U = cte$)

$$\frac{1}{2} U^2 dC = F_{op} \delta x + U^2 dC \Rightarrow F_{op} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{\delta x} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x^2} > 0$$

ce qui permet la mesure de F_{op} connaissant x et les autres données

1.3.2.3 on a : ($\Delta x > 0$)

$$W_{op} = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F_{op} \delta x = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Sigma U^2 \left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \Delta x} \right] > 0$$

le travail est moteur car il doit s'opposer aux forces d'attraction électrostatiques entre les deux armatures portant des charges opposées !

2^{ème} partie :
Oscillateur commandé en tension (OCT)

2.1 Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel AO1

2.1.1 $i_B > 0$ le transistor relie à la masse la résistance $\frac{R}{2}$, on applique Millman (régime harmonique hypothétique) :

$$V^- = \frac{\frac{v_c}{R} + jC\omega v_{S1}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R/2} + jC\omega} = \frac{v_c + jRC\omega v_{S1}}{3 + jRC\omega}$$

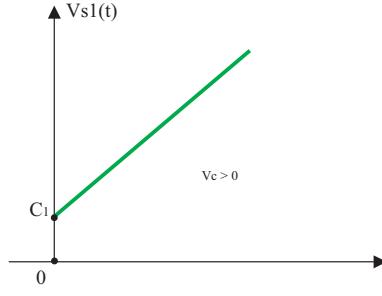
$$V^+ = \frac{\frac{v_c}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{v_c}{2}$$

AO1 est en fonctionnement linéaire car sa sortie est reliée à son entrée inverseuse :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow 2RC j\omega v_{S1} = v_c + jC\omega v_c \Rightarrow 2RC \frac{dv_{S1}}{dt} = v_c$$

la portion $E_1 - S_1$ du circuit réalise une intégration :

$$v_{S1} = \frac{1}{2RC} \int v_c dt = \frac{v_c}{2\tau} t + C_1$$



2.1.2 $i_B = 0$ le transistor est bloqué $i_T = 0$, on applique Millman (régime harmonique hypothétique) :

$$V^- = \frac{\frac{v_c}{R} + jC\omega v_{S1}}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{v_c + jRC\omega v_{S1}}{1 + jRC\omega}$$

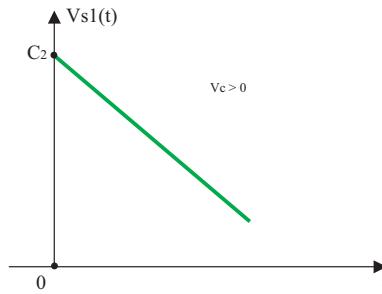
$$V^+ = \frac{\frac{v_c}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{v_c}{2}$$

fonctionnent linéaire :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow 2RC j\omega v_{S1} + v_c = jC\omega v_c \Rightarrow 2RC \frac{dv_{S1}}{dt} = -v_c$$

la portion $E_1 - S_1$ du circuit réalise une intégration-inversion :

$$v_{S1} = -\frac{1}{2RC} \int v_c dt = -\frac{v_c}{2\tau} t + C_2$$



2.2 Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel A02

2.2.1 AO2 fonctionne de manière saturée, car sa sortie est reliée à son entrée non inverseuse

2.2.2 $v_{S2} = \pm V_{sat}$

2.2.3 pour AO2 :

$$\varepsilon = V^+ - V^-$$

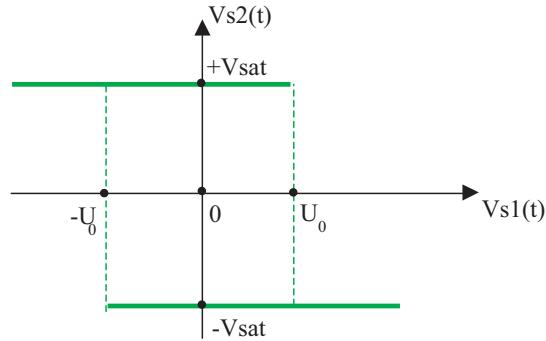
or $V^- = v_{S1}$ et par Millman $V^+ = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_{S2}$

donc :

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{S2} - v_{S1}$$

1er cas : saturation positive : $v_{S2} = +V_{sat}$ et $\varepsilon > 0 \Rightarrow v_{S1} < +U_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{sat}$

2d cas : saturation négative : $v_{S2} = -V_{sat}$ et $\varepsilon < 0 \Rightarrow v_{S1} > -U_0 = -\frac{R_1}{R_1+R_2} V_{sat}$

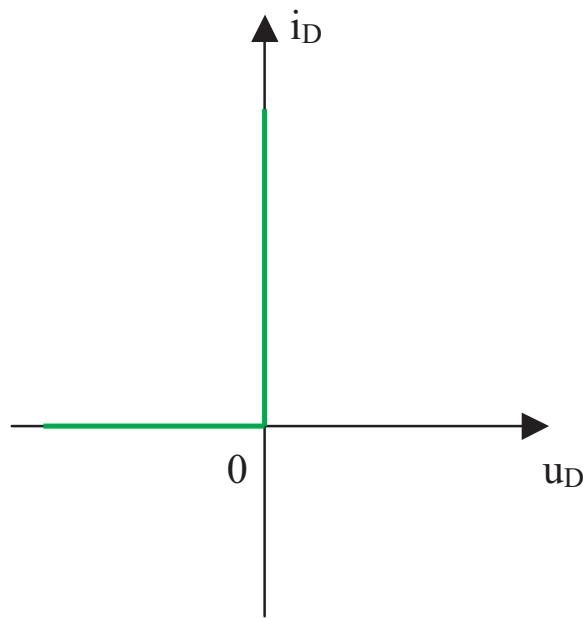


la portion $S_1 - S_2$ du montage est un comparateur-inverseur à double seuil. Un tel circuit est appelé comparateur à hystérésis (trigger de Schmitt)

2.2.4 v_{S2} bascule de V_{sat} à $-V_{sat}$ si $v_{S1} > U_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ et v_{S2} bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ si $v_{S1} < -U_0 = -\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$

2.3 Rôle de la diode D

2.3.1 :



2.3.2 la diode D sera bloquée, $i_D = 0$

$$\text{alors } i_B = \frac{V_{cc} - U_S}{R_3} > 0 \quad (15 > 0.6)$$

le transistor T est saturé et relie la résistance $R/2$ à la masse

$$i_B = \frac{V_{cc} - U_S}{R_3} \approx \frac{V_{sat}}{R_3}$$

d'après 2.1.1 :

$$v_{S1}(t) = \frac{v_c}{2\tau}t + C_1$$

2.3.3 $u_D = 0$, la diode D conduit, $i_B = 0$

$$i_D = \frac{V_{cc}}{R_3} > 0, \text{ le transistor T est bloqué}$$

d'après 2.2.2 :

$$v_{S1}(t) = -\frac{v_c}{2\tau}t + C_2$$

2.4 Signaux délivrés par l'OCT

2.4.1 d'après 2.3.2 le transistor T est saturé, or à $t = 0$ on a : $v_{S1}(0) = 0$

$$v_{S1}(t) = \frac{v_c}{2\tau}t$$

d'après 2.2.4 :

$$\frac{v_c}{2\tau}t > U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_{sat}$$

donc :

$$t > t_1 = \frac{2\tau R_1 V_{sat}}{(R_1 + R_2)v_c} = \frac{2\tau}{v_c}U_0$$

Attention : v_c doit être positif !

2.4.2 le transistor T est bloqué pour $t > t_1$

$$v_{S1}(t) = -\frac{v_c}{2\tau}t + C_2$$

tq :

$$v_{S1}(t_1^+) = v_{S1}(t_1^-) = \frac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} = U_0$$

donc :

$$v_{S1}(t) = -\frac{v_c}{2\tau}(t - t_1) + U_0$$

$v_{S1}(t)$ est décroissante, donc d'après 2.2.4 :

$$-\frac{v_c}{2\tau}(t - t_1) + U_0 < -U_0$$

donc :

$$t > t_2 = t_1 + \frac{2\tau}{v_c}U_0 = 2t_1$$

2.4.3 voir figure

2.4.4 la période $T = 4t_1 = \frac{8\tau}{v_c}U_0 = \frac{8\tau R_1 V_{cc}}{(R_1 + R_2)v_c}$

et

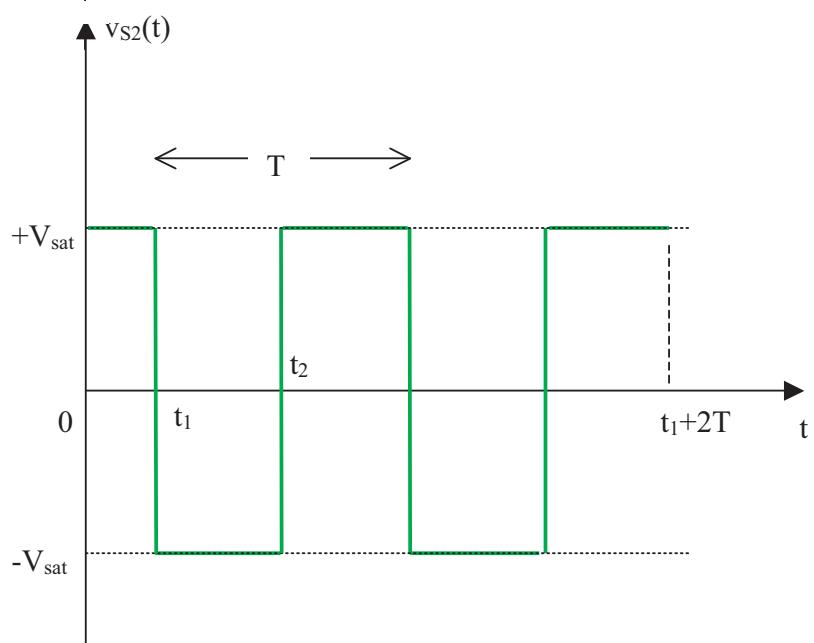
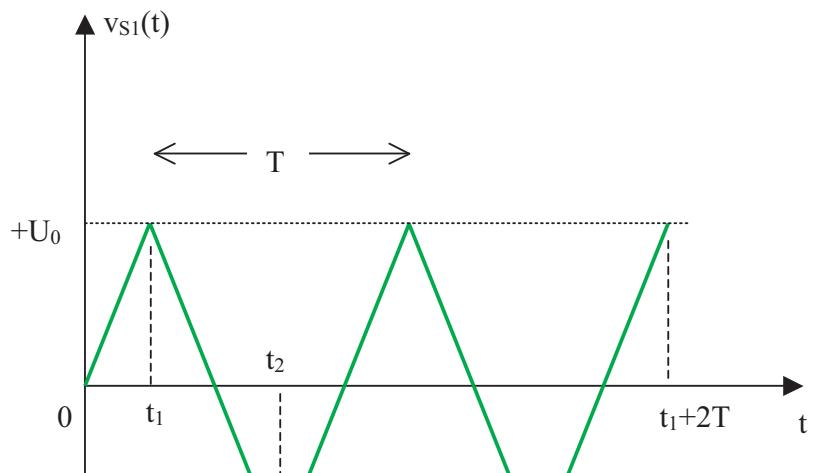
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{(R_1 + R_2)}{8\tau R_1 V_{cc}} v_c$$

commandée bel et bien de façon linéaire par v_c !

2.4.5 Application numérique : $R_1 = R_2$, $R = 10k\Omega$, $C = 500pF$ et $v_c = 0, 1V$.

la fréquence $\nu = 333 Hz$

2.5 modulation de fréquence FM !



fin du corrigé



Chimie

L'eau

En plus de son rôle primordial dans notre vie, l'eau a une importance capitale en chimie. Ce sujet propose d'aborder quelques propriétés physico-chimiques de l'eau. Il se compose de 3 parties largement indépendantes entre elles et pouvant être traitées dans un ordre quelconque.

Données utiles

- Données générales
 - Charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.
 - Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
 - $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$ à 298 K, où F désigne la constante de FARADAY et \ln le logarithme népérien.
 - $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$, (pm : picomètre).
 - $1 \text{ D} = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C.m}$, (D : debye).
- Masses molaires atomiques en (g.mol^{-1}) :

Elément	H	C	N	O	Cl	Ca	Zn
Masse molaire	1,01	12,0	14,0	16,0	35,5	40,1	65,4

- Enthalpies standard de formation, entropies standard absolues et capacités calorifiques standard à 298 K (g : gaz, l : liquide) :

	$H_2(g)$	$O_2(g)$	$H_2O(l)$	$N_2(g)$
$\Delta_r H_f^\circ (\text{kJ.mol}^{-1})$	-	-	-286	-
$S^\circ (\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})$	132	205	69,9	-
$c_p^\circ (\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})$	28,3	31,2	75,5	29,7

- Chaleur latente de vaporisation de l'eau sous pression atmosphérique : $L_v = 40,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$.
- $pK_a(NH_4^+/NH_3) = 9,2$.
- Potentiels standard d'oxydoréduction (solution aqueuse à 298 K) :

Couple	Zn^{2+}/Zn	$2H^+/H_2$
$E^\circ(V)$	-0,76	0,00

- Composition molaire de l'air : $\{\frac{1}{5}O_2, \frac{4}{5}N_2\}$.
- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie : **Étude de quelques propriétés structurales**

- 1.1 Donner la structure électronique de l'oxygène dans son état fondamental.
- 1.2 Donner le schéma de LEWIS de la molécule d'eau H_2O ainsi que celle du peroxyde d'hydrogène ou "eau oxygénée" H_2O_2 ; on précisera dans chaque cas les doublets liants et non liants.

1.3 Quels sont les nombres d'oxydation de l'oxygène et de l'hydrogène dans H_2O puis dans H_2O_2 ? Expliquer.

1.4 Déterminer la géométrie de la molécule d'eau en utilisant la méthode V.S.E.P.R.

1.5 Dans la molécule d'eau, l'angle valentiel \widehat{HOH} vaut $104^\circ 47'$.

1.5.1 Calculer la valeur des angles valentiels dans le cas d'une molécule à géométrie tétraédrique parfaite; on pourra considérer comme exemple celui de la molécule de méthane CH_4 .

1.5.2 Comparer la valeur de l'angle valentiel \widehat{HOH} dans H_2O à celle calculée en 1.5.1 pour la géométrie tétraédrique parfaite. Interpréter.

1.6 Dans la molécule d'eau, l'atome d'oxygène et les deux atomes d'hydrogène portent des charges électriques partielles.

1.6.1 Quelle est l'origine de ce phénomène?

1.6.2 Soit $+δe$ (e étant la charge élémentaire et $δ > 0$) la charge partielle portée par l'un des deux atomes d'hydrogène. Quelle est la charge partielle portée par l'atome d'oxygène?

1.6.3 Pour déterminer l'ordre de grandeur de $δ$ on admet que le moment dipolaire $μ$ de la molécule d'eau est due à la seule présence des charges partielles sur l'oxygène et sur les deux hydrogènes : on ne tient pas compte de la contribution des doublets non liants au moment dipolaire. Exprimer $δ$ en fonction de la longueur l des liaisons $O - H$, de l'angle valentiel $α$ et du module $μ$ du moment dipolaire.

1.6.4 Application numérique : Calculer $δ$ sachant que $l = 96 \text{ pm}$, $α = 104^\circ 47'$ et $μ = 1,85 \text{ D}$.

2^{ème} partie :

Principe du chalumeau oxhydrique

Le chalumeau oxhydrique utilise l'énergie dégagée par la réaction de combustion du dihydrogène dans le dioxygène dont le bilan s'écrit :



H_2 et O_2 sont à l'état gazeux, H_2O est liquide.

2.1 Calculer pour l'équilibre (1), à 298 K, l'enthalpie standard de réaction $Δ_rH^0$ ainsi que l'entropie standard de réaction $Δ_rS^0$.

2.2 En déduire, à 298K, l'enthalpie libre standard $Δ_rG^0$ et la constante d'équilibre K_1° . Conclusion.

2.3 La réaction ne se produit pas spontanément à 298 K. Pourquoi? Comment peut-on l'amorcer?

2.4 Sous pression constante $p = 10^5 Pa$, un chalumeau reçoit, à 298 K, du dihydrogène H_2 mélangé à deux fois le volume d'air nécessaire à sa combustion. Calculer, en négligeant les variations des capacités calorifiques avec la température, la température T_f de flamme d'un tel chalumeau en admettant que 10% de l'énergie libérée est perdue par rayonnement. On considérera que N_2 est inerte dans ces conditions.

2.5 Du point de vue écologique, quel est l'avantage du chalumeau oxhydrique par rapport, par exemple, au chalumeau oxyacétylénique qui utilise la réaction de combustion de l'acétylène C_2H_2 dans le dioxygène?

3^{ème} partie :

Détermination expérimentale d'une dureté d'une eau de robinet

Une eau est dite dure si elle ne mousse pas quand on y dissout du savon. La dureté est due à la présence dans l'eau de sels calciques et magnésiques qui décomposent les savons alcalins solubles et les transforment en sels insolubles. Lorsqu'on ajoute du savon à une eau contenant les ions Ca^{2+} et/ou Mg^{2+} la mousse ne se produit pas avant que la totalité des ions Ca^{2+} et Mg^{2+} n'ait été précipitée par une quantité correspondante de savon.

3.1 Le degré hydrotimétrique ($^{\circ}\text{HT}$)

La dureté D d'une eau est proportionnelle à la masse de savon de Marseille qu'il faut ajouter à 1 litre de cette eau pour obtenir une mousse persistante par agitation. D est égal à 1°HT lorsque cette masse de savon vaut 100 mg : cette quantité de savon, ajoutée à une solution contenant suffisamment d'ions Ca^{2+} , permet la précipitation de 10 mg de CaCO_3 . Montrer que $D = 10^4 \frac{c}{c_0}$; où c est la somme des concentrations molaires volumiques en Ca^{2+} et Mg^{2+} exprimées en mol.l^{-1} et $c_0 = 1 \text{ mol.l}^{-1}$.

Pour déterminer la dureté D d'une eau on réalise un dosage complexométrique des ions Ca^{2+} et Mg^{2+} par une solution titrée d'E.D.T.A qui forme des complexes stables avec des cations métalliques (Mg^{2+} , Ca^{2+} , Zn^{2+} ...). Le dosage volumétrique est conduit en présence d'un indicateur coloré de complexation. L'indicateur utilisé est le noir ériochrome T (N.E.T.). À pH compris entre 8 et 11, il est bleu foncé en absence d'ions métalliques et rouge en présence de cations bivalents (Mg^{2+} , Ca^{2+} , Zn^{2+} ...).

3.2 Etalonnage de la solution d'E.D.T.A

L'E.D.T.A est l'acide éthylène diamine tétracétique, c'est un tétraacide que l'on symbolisera dans toute la suite par H_4Y et dont les pK_a valent respectivement : 1,9 ; 2,5 ; 6,3 et 11.

3.2.1 Quelle est la forme prédominante de l'E.D.T.A au cours du dosage sachant qu'il est réalisé en présence d'un tampon $pH = 9,5$? On tracera le diagramme de prédominance de l'E.D.T.A.

3.2.2 Écrire alors la réaction de dosage d'un cation bivalent M^{2+} par l'E.D.T.A sachant qu'une mole de M^{2+} réagit avec une mole d'E.D.T.A.

Pour déterminer avec précision la concentration molaire volumique c_1 de la solution d'E.D.T.A, on réalise un dosage préliminaire de cette solution par une solution étalon de Zn^{2+} .

3.2.3 La solution étalon d'ions Zn^{2+} est obtenue par attaque d'une masse $m = 1,010 \text{ g}$ de zinc métallique par une solution concentrée d'acide chlorhydrique. Écrire la réaction décrivant l'attaque du zinc et calculer sa constante d'équilibre. Conclusion.

3.2.4 Après dissolution complète du zinc on place la solution obtenue dans une fiole jaugée de 500 mL et on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge. Calculer la concentration molaire volumique c_2 de la solution étalon ainsi préparée.

3.2.5 Dans un erlenmeyer, on place $v_1 = 10,0 \text{ mL}$ de solution d'E.D.T.A, 5 mL de tampon $pH = 9,5$ et quelques milligrammes de N.E.T. On ajoute ensuite, à l'aide d'une burette, la solution étalon de Zn^{2+} . Le virage de l'indicateur coloré est observé pour un volume $v_2 = 14,35 \text{ mL}$. En déduire le titre exact de la solution d'E.D.T.A.

3.3 Dosage de l'eau du robinet

On place dans un erlenmeyer, $v = 80 \text{ mL}$ d'eau à doser, 20 mL de tampon $pH = 9,5$ et quelques milligrammes de N.E.T. On verse ensuite, à l'aide d'une burette, la solution d'E.D.T.A jusqu'au changement de couleur de l'indicateur. Soit v_{1e} le volume de la solution titrante versé à l'équivalence.

3.3.1 Déterminer la concentration totale c de l'eau en ions Ca^{2+} et Mg^{2+} sachant que $v_{1e} = 3,3 \text{ mL}$.

3.3.2 En déduire sa dureté D .

3.4 Préparation du tampon pH

Le tampon $pH = 9,5$ utilisé dans le dosage complexométrique est un tampon ammoniacal obtenu par dissolution, sans variation de volume, d'une masse m de chlorure d'ammonium ($\text{NH}_4^+, \text{Cl}^-$) dans un volume $V = 1 \text{ L}$ d'ammoniaque de concentration $c = 1 \text{ mol.l}^{-1}$.

3.4.1 Qu'appelle-t-on solution tampon?

3.4.2 Calculer la masse m de chlorure d'ammonium à ajouter pour obtenir 1 litre de solution tampon $pH = 9,5$.

3.4.3 Déterminer le pouvoir tampon π (en $mol.l^{-1}$) de cette solution.

fin de l'énoncé

Corrigé de l'épreuve chimie MP session 2000 par AIT BENALI

L'eau

1^{ère} partie : **Étude de quelques propriétés structurales**

1.1 O : $1s^2 2s^2 2p^4$

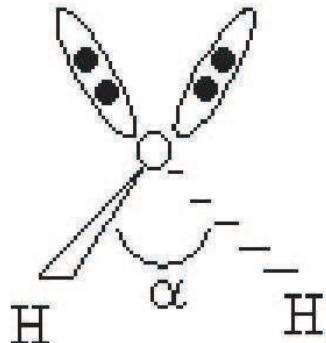
1.2 Lewis : $H - \overline{O} - H$ et $H - \overline{O} - \overline{O} - H$

1.3 :

	H_2O	H_2O_2
no(O)	-II	-I
no(H)	+I	+I

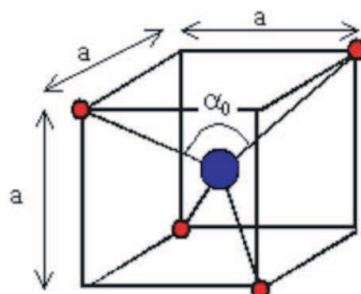
car l'atome d'O est plus électronégatif que l'atome d'H , ce qui fait dans la molécule H_2O l'atome O gagne $2e^-$, H perd $1e^-$, tandis que dans la molécule H_2O_2 l'atome O gagne $1e^-$.

1.4 H_2O a la formule AB_2E_2 qui est une forme en "V" avec un angle $\alpha = 104,5^\circ$



1.5

1.5.1 la molécule CH_4 a une formule AB_4 tel que A au centre d'un tétraèdre régulier et B au sommet du tétraèdre



$$\tan \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\frac{a}{2}} \implies \alpha_0 = 2 \arctan \sqrt{2} = 109,47^\circ$$

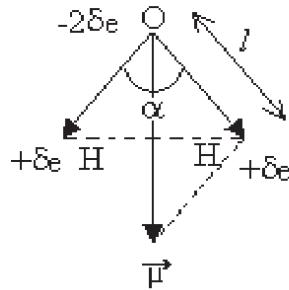
1.5.2 $\alpha < \alpha_0$ car un doublet libre (non liant) occupe plus d'espace qu'un doublet liant !

1.6

1.6.1 la différence d'électronégativité , l'atome O attire plus le doublet de la liaison vers lui , donc il sera chargé partiellement négatif

1.6.2 par neutralité électrique : l'atome d'oxygène portera $-2\delta_e$

1.6.3 :



$$\mu = 2 \times (\delta e \ell \cos \frac{\alpha}{2}) \text{ soit } \delta = \frac{\mu}{2e\ell \cos \frac{\alpha}{2}}$$

1.6.4 A.N : $\delta = 0.33 < 1$

2ème partie : Principe du chalumeau oxhydrique

2.1 $\Delta_r H^0(298) = 2 \times -286 - 2 \times 0 - 0 = -572 \text{ kJ mol}^{-1}$

$$\text{et } \Delta_r S^0(298) = 2 \times 69.9 - 2 \times 132 - 205 = -329.2 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

2.2 $\Delta_r G^0(298) = \Delta_r H^0(298) - 298 \times \Delta_r S^0(298) = -474 \text{ kJ mol}^{-1}$ et $K_1 = \exp -\frac{\Delta_r G^0(298)}{R \times 298} = 1.2 \times 10^{83}$
la réaction est totale

2.3 la réaction est cinétiquement lente , son énergie d'activation est trop élevée !

il suffit de l'enflammer par une étincelle , elle devient explosive

2.4 $T_i = 298 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ bar}$:

	$2H_{2g}$	O_{2g}	$2H_2O_{liq}$	N_{2g}
$t = 0$	$2n_0$	$2n_0$	0	$8n_0$
$t > 0$	$2n_0 - 2x$	$2n_0 - x$	$0 + 2x$	$8n_0$
$t = t_f$	0	n_0	$2n_0$	$8n_0$

la chaleur dégagée , à p=cte , en fin de réaction est $Q_p(298) = n_0 \times \Delta_r H^0(298) < 0$, 10% de cette chaleur est perdue par rayonnement , les 90% servent à chauffer tous les constituants restant donc :

$$0.9 \times n_0 \times -\Delta_r H^0(298) = 2n_0 \times L_v + \int_{298}^{T_f} [n_0 c_p^0(O_2) + 2n_0 c_p^0(H_2O_{liq}) + 8n_0 c_p^0(N_2)] dT$$

car à priori la température finale $T_f > 100^\circ C$ et l'eau sera vapeur (chalumeau) !

$$\text{donc } T_f = 298 + \frac{0.9 \times 572000 - 2 \times 40700}{31.2 + 2 \times 75.5 + 8 \times 29.7} = 1330 \text{ K}$$

2.5 la combustion oxyacétylénique : $C_2H_2 + \frac{5}{2}O_2 \rightarrow 2CO_2 + H_2O$ produit le dioxyde de carbone qui est un gaz à effet de serre

3^{ème} partie :
Détermination expérimentale d'une dureté d'une eau de robinet

3.1 Le degré hydrotimétrique ($^{\circ}HT$)

on a :

$$D = \alpha m$$

avec m masse de savon et α constante à déterminer , or $D = 1 ^{\circ}HT$ pour $m = 100 mg$ donc $\alpha = 10 ^{\circ}HT/g$

or la masse du savon est reliée à la masse du précipité $CaCO_3$ formée par :

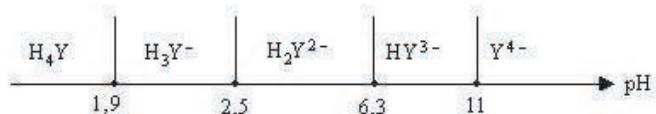
$$m = 10 \times m(CaCO_3)$$

or $c = \frac{m(CaCO_3)}{V \times M(CaCO_3)}$ et $V = 1 L$, $M(CaCO_3) = 100.1 g mol^{-1}$

$$\text{donc } D = 10 \frac{^{\circ}HT}{g} \times 10 \times 100.1 g mol^{-1} L \times c \implies D \approx 10^4 \frac{c}{c_0} ^{\circ}HT$$

3.2 Etalonnage de la solution d'E.D.T.A

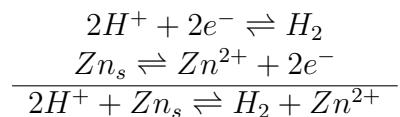
3.2.1 :



à $pH = 9.5$, la forme dominante est HY^{3-}

3.2.2 la réaction s'écrit $M^{2+} + HY^{3-} \rightleftharpoons MY^{2-} + H^+$

3.2.3 les deux demi-réactions s'écrivent



$$K_e^\circ = 10^{2 \times \frac{E^0(H^+/H_2) - E^0(Zn^{2+}/Zn)}{0.06}} = 2.1 \cdot 10^{25} \text{ la réaction est totale !}$$

$$3.2.4 \quad c_2 = \frac{m}{V \times M(Zn)} = \frac{1.010}{0.5 \times 65.4} = 30.9 \text{ mmol l}^{-1}$$

3.2.5 d'après 3.2.2 , à l'équivalence $n(Zn^{2+}) = n(EDTA)$ soit :

$$c_2 v_2 = c_1 v_1 \implies c_1 = \frac{c_2 v_2}{v_1} = 44.3 \text{ mmol l}^{-1}$$

3.3 Dosage de l'eau du robinet

3.3.1 d'après 3.2.2 , à l'équivalence on aura :

$$c v = c_1 v_{1e} \implies c = \frac{c_1 v_{1e}}{v} = 1.83 \text{ mmol l}^{-1}$$

3.3.2 d'après 3.1 :

$$D = 10^4 \times 1.83 \cdot 10^{-3} = 18.3 ^{\circ}HT$$

3.4 Préparation du tampon pH

3.4.1 solution dont le pH varie très peu si on la dilue , elle est obtenue par un mélange équimolaire d'une base et de son acide conjugué dans ce cas $pH \approx pK_a$

3.4.2 la quantité de matière de la base NH_3 est $n(base) = c \times v = 1 \text{ mol}$, donc la solution sera tampon si la quantité de matière de l'acide ajoutée en acide NH_4^+ est :

$$n(acide) = n(base) = 1 \text{ mol}$$

soit : la masse de chlorure d'ammonium $m = M(NH_4Cl) \times 1 \text{ mol} = 53.5 \text{ g}$

3.4.3 Le pouvoir tampon est par définition :

fin du corrigé

Le Silicium

Avec un pourcentage d'environ 27 % en masse, le silicium est, après l'oxygène, l'élément le plus abondant de l'écorce terrestre à l'état naturel. Il y est présent essentiellement sous forme de silicates, d'alumino-silicates et de silice.

Ce problème propose l'étude de quelques aspects de la chimie du silicium. Cependant aucune connaissance préalable des propriétés de cet élément n'est indispensable pour répondre aux questions du problème.

Données utiles

- Données générales
 - Nombre d'Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
 - Constante des gaz parfaits $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$.
 - $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 V$ à 298 K, où F désigne la constante de FARADAY et \ln le logarithme népérien.
 - Règles de SLATER :
 - Energie (en eV) des orbitales de SLATER : $E = -13,6 \left(\frac{Z^*}{n^*}\right)^2$.
 - $n^* = n$ pour $n < 4$; n étant le nombre quantique principal.
 - $Z^* = Z - \sigma$, σ étant le facteur d'écran, somme des contributions suivantes pour un électron du groupe (ns, np) :
 - 0,35 pour un autre électron du même groupe (ns, np),
 - 0,85 pour un électron de la couche $n - 1$,
 - 1 pour un électron des couches plus profondes.
- Températures standard de fusion

corps	Si	SiO ₂
$T_f^\circ(K)$	1683	1883

- Masses molaires atomiques

Elément	C	O
$M(g.mol^{-1})$	12,0	16,0

- $pK_a(HF/F^-) = 3,2$ en solution aqueuse.
- Potentiels standard d'oxydoréduction (solution aqueuse à 298 K) :

Couple	$SiO_2(s)/SiO(s)$	$SiO(s)/Si(s)$	$[SiF_6]^{2-}/Si(s)$
$E^\circ(V)$	-0,97	-0,81	-120

- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie : Quelques propriétés structurales

1.1 Le silicium Si a pour numéro atomique $Z = 14$.

1.1.1 Quelle est sa configuration électronique dans l'état fondamental ?

1.2.2 En déduire sa position (ligne et colonne) dans la table périodique des éléments. À quel bloc d'éléments appartient-il ? Donner un autre élément de la même colonne que le silicium.

1.2 À l'état naturel, le silicium possède trois isotopes stables d'abondances respectives

Isotope	$\frac{14}{28}Si$	$\frac{14}{29}Si$	$\frac{14}{30}Si$
Abondance	92,2%	4,7%	3,1%

Déterminer la masse molaire atomique M_{Si} de l'élément Si .

1.3

1.3.1 Définir l'énergie de première ionisation E_i du silicium.

1.3.2 Calculer E_i en utilisant le modèle de SLATER.

1.3.3 Commenter le résultat obtenu sachant que la valeur expérimentalement admise pour l'énergie de première ionisation du silicium est $8,15\text{ eV}$.

1.4 Le silicium cristallise dans une structure de type carbone diamant. Cette structure peut être décrite comme suit :

- un réseau cubique (arête a) à faces centrées (CFC) d'atomes de silicium ;
- les quatre sites tétraédriques situés aux points de coordonnées $(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4})$, $(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{3a}{4})$, $(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{3a}{4})$, et $(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a}{4})$ par rapport à un sommet du cube pris comme origine, sont également occupés par des atomes de silicium.

La distance entre deux atomes de silicium plus proches voisins est $d = 0,234\text{ nm}$.

1.4.1 Dessiner une maille cubique d'arête a en y plaçant les différents atomes de silicium.

1.4.2 En effectuant un dénombrement précis des différents atomes de la maille d'arête a , montrer que celle-ci contient 8 atomes de silicium.

1.4.3 Quel est le nombre de sites tétraédriques restant inoccupés dans une telle maille ?

1.4.4 Quelle est la coordinence du silicium dans une telle structure ?

1.4.5 Définir puis donner la valeur numérique du rayon covalent r_c du silicium.

1.4.6 Calculer la compacité C d'une telle structure et comparer la valeur obtenue à celle de la compacité d'un réseau compact dont on rappellera la valeur numérique. Commenter.

1.4.7 Exprimer littéralement puis calculer numériquement la masse volumique ρ du silicium cristallin.

2^{ème} partie :

Préparation du silicium métallurgique

Le silicium peut être obtenu par réduction de la silice SiO_2 par voie sèche à l'aide d'un réducteur approprié. Le choix d'un tel réducteur peut être facilité par l'utilisation du diagramme d'ELLINGHAM. Il s'agit de tracer l'enthalpie libre standard Δ_rG^0 de la réaction de formation d'un oxyde, rapportée à une demie (1/2) mole de dioxygène, en fonction de la température thermodynamique T . La figure 1 donne le diagramme d'ELLINGHAM de quelques couples redox. On donne également les équations des droites (3) et (5) :

$$\Delta_rG_3^0 = -110,5 - 0,0895 T \text{ en } kJ.mol^{-1}, T \text{ en } K;$$

$$\Delta_rG_5^0 = -461,7 + 0,1047 T \text{ en } kJ.mol^{-1}, T \text{ en } K.$$

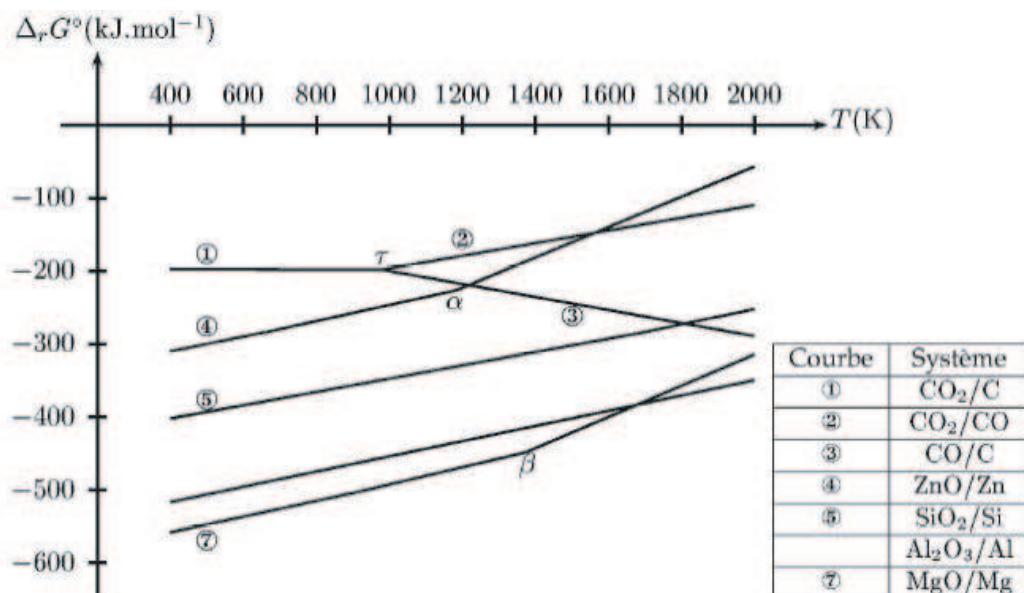


Fig 1 : Diagramme d'ELLINGHAM pour quelques systèmes redox tracé pour (1/2) mole de dioxygène.

2.1 Analyse qualitative du diagramme

- 2.1.1 En quoi consiste l'approximation qui permet d'obtenir une variation linéaire de l'enthalpie libre standard de réaction Δ_rG^0 en fonction de la température ? Comment s'appelle-t-elle ?
- 2.1.2 Dans un certain domaine du diagramme, les segments de droites relatives à différents couples sont parallèles entre eux. Quelle en est la cause ?
- 2.1.3 Comment peut-on interpréter les changements de pente constatés aux points α et β ? Que peut-on en déduire ?

2.2

- 2.2.1 Quels sont parmi les réducteurs proposés figure 1, ceux permettant de réduire SiO_2 en Si à toute température du domaine de tracé du diagramme. Justifier la réponse.
- 2.2.2 Écrire les réactions chimiques redox correspondantes.
- 2.3 On se propose d'étudier la possibilité de réduction de SiO_2 en Si liquide par le carbone graphite C (coke).
- 2.3.1 On considère un système contenant $\text{SiO}_2(s)$, $\text{Si}(\ell)$, $\text{CO}(g)$ et $C(s)$.
- 2.3.1.1 Écrire la réaction (R) de réduction de SiO_2 par le carbone C .
- 2.3.1.2 Déterminer la variance v du système et commenter la valeur trouvée.
- 2.3.1.3 Définir et calculer la température d'inversion T_i pour la réaction (R).
- 2.3.1.4 Que se passe-t-il lorsque, sous pression fixée $p = 1 \text{ bar}$, la température du système est supérieure à la température d'inversion T_i ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul de l'affinité chimique du système.
- 2.3.1.5 Répondre à la même question lorsque la température du système est inférieure à T_i .
- 2.3.2 Dans l'industrie, on peut réaliser la réduction de la silice SiO_2 à l'aide du carbone.
- 2.3.2.1 Dans quel domaine de température doit-on placer le système pour pouvoir obtenir du silicium Si liquide à partir de la silice SiO_2 solide ?
- 2.3.2.2 Quel intérêt peut-il y avoir à obtenir ainsi du silicium liquide ?
- 2.3.3 Dans un réacteur de volume $V = 10 \text{ L}$ préalablement vidé et maintenu à une température $T = 1850 \text{ K}$, on introduit 120 g de SiO_2 en poudre et 30 g de carbone solide. Déterminer les masses ainsi que la pression de la phase gazeuse à l'état final. On prendra $M_{\text{Si}} = 28,1 \text{ g.mol}^{-1}$.

2^{ème} partie :
Préparation du silicium métallurgique

- 3.1** On se propose de tracer le diagramme potentiel-pH du silicium en solution aqueuse à 298 K en se limitant aux espèces suivantes : SiO_2 (s), $SiO(s)$ et $Si(s)$.
- 3.1.1** Déterminer le nombre d'oxydation du silicium dans chacune de ces espèces chimiques.
- 3.1.2** Écrire l'équation de la demi-réaction redox correspondant au couple SiO_2/SiO et en déduire l'équation de la droite frontière correspondante.
- 3.1.3** Faire de même pour le couple SiO/Si .
- 3.1.4** Tracer un diagramme potentiel-pH préliminaire et montrer que le monoxyde de silicium SiO est instable.
- 3.1.5** Écrire la réaction de dismutation de SiO et déterminer son enthalpie libre standard Δ_rG^0 à 298 K.
- 3.1.6** Déterminer le potentiel standard du couple SiO_2/Si et tracer le diagramme potentiel-pH définitif du silicium.
- 3.2** On constate expérimentalement que le silicium n'est pas attaqué par le dioxygène, l'eau ou les acides usuels. Par contre, le silicium est attaqué en profondeur par des solutions aqueuses d'acide fluorhydrique HF , il se forme alors de l'hexafluorure de silicium $[SiF_6]^{2-}$ et du dihydrogène H_2 .
- 3.2.1** Tracer, sur le même graphique, le diagramme potentiel-pH de l'eau et conclure quant à la stabilité du silicium en solution aqueuse.
- 3.2.2** Comment peut-on expliquer l'immunité de Si en solution aqueuse ?
- 3.2.3** Écrire la réaction d'oxydation du silicium en $[SiF_6]^{2-}$ par l'acide fluorhydrique et calculer sa constante d'équilibre.

fin de l'énoncé

Le Silicium

1^{ère} partie : Quelques propriétés structurales

1.1

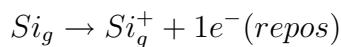
1.1.1 ${}_{14}Si$: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

1.2.2 valence $3s^2 3p^2$, la $(2 + 10 + 2) = 14^{\text{ème}}$ colonne et la $3^{\text{ème}}$ ligne , bloc p , ${}_6C$

$$1.2 \quad M_{Si} = 0.922 \times 28 + 0.047 \times 29 + 0.031 \times 30 = 28.1 \text{ g mol}^{-1}$$

1.3

1.3.1 E_i est l'enthalpie standard $\Delta_r H^0$ de la réaction



1.3.2 Selon Slater : Si $(1s)^2(2s2p)^8(3s3p)^4$ et Si^+ $(1s)^2(2s2p)^8(3s3p)^3$

$$\text{donc } E_i = E(Si^+) - E(Si) = 3 \times E_{3s^23p^1} - 4 \times E_{3s^23p^2}$$

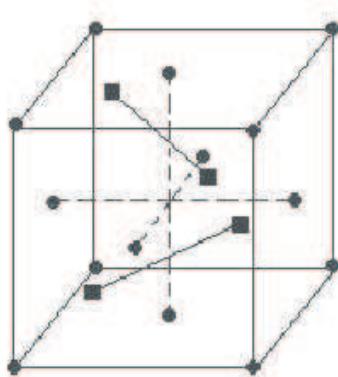
$$\text{avec } E_{3s^23p^1} = -13.6 \left(\frac{14-2 \times 0.35-8 \times 0.85-2 \times 1}{3}\right)^2 = -30.6 \text{ eV}$$

$$\text{et } E_{3s^23p^2} = -13.6 \left(\frac{14-3 \times 0.35-8 \times 0.85-2 \times 1}{3}\right)^2 = -26.0 \text{ eV} \text{ soit } |E_i| = 12.2 \text{ eV} > 0 \text{ endotherme}$$

1.3.3 le modèle de Slater reste approximatif au niveau de l'influence des e^- entre eux !

1.4

1.4.1 :



$$1.4.2 \quad n = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = 8 \text{ atome/maille}$$

1.4.3 les sites [4] non occupés sont 4

1.4.4 on raisonne sur l'atome au site [4] ses proches voisins sont 4 donc $coord = 4$

1.4.5 le rayon covalent est la moitié de la distance entre deux noyaux des atomes en liaison :

$$r_\tau = \frac{d}{2} = 0.117 \text{ nm}$$

$$1.4.6 \quad C = \frac{V_{occupe}}{V_{maille}} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r_t^3}{a^3}$$

or selon la diagonale du petit cube d'arête $\frac{a}{2}$ on établit $2d = \sqrt{3} \frac{a}{2}$ soit $a = 0.540 \text{ nm}$ et $C = 34\% < 74\%$ du CFC ou HC

le fait qu'on a inséré des atomes dans les sites tétra du réseau CFC on a créé plus de vide dans la maille !

$$1.4.7 \quad \rho = \frac{n \times M_{Si}}{a^3 N_A} = 2.37 \text{ g cm}^{-3}$$

2^{ème} partie :
Préparation du silicium métallurgique

2.1 Analyse qualitative du diagramme

2.1.1 $\Delta_r H^0(T)$ et $\Delta_r S^0(T)$ sont presque constantes , approximation d'Ellingham

2.1.2 le $\Delta_r S^0$ pour les différentes réactions est le même , le désordre causé est le même

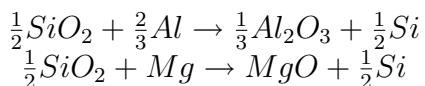
2.1.3 une augmentation de pente est dûe au changement d'état du métal

en α : fusion de Zn_s à $T_f(Zn) = 1200K$ et en β : fusion de Mg_s à $T_f(Mg) = 1360K$

2.2

2.2.1 règle de $\gamma \implies$ Mg courbe (7) et Al courbe (6) sont au dessous de la courbe (5) de SiO_2 pour $T \in [400, 2000]$

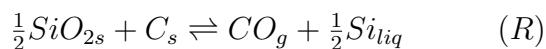
2.2.2 :



2.3

2.3.1

2.3.1.1 :



2.3.1.2 $v = (4+2) - (1+4+0) = 1$, la pression P et T sont liées

2.3.1.3 T_i est telle que $\Delta_R G^0(T_i) = \Delta_3 G^0(T_i) - \Delta_5 G^0(T_i) = 0 \implies T_i = 1808 \text{ K}$

2.3.1.4 $A = -\Delta_R G^0(T) - \underbrace{RT \ln \frac{p}{p^0}}_{= 0} = \Delta_5 G^0(T) - \Delta_3 G^0(T)$

si $T > T_i \implies A > 0$ la réaction est totale dans le sens direct : formation du Si_{liq}

2.3.1.5 si $T < T_i \implies A < 0$ la réaction est totale dans le sens inverse

2.3.2

2.3.1.1 il faut opérer à $T \in [T_i = 1808, T_f(SiO_2) = 1883] \text{ K}$

2.3.1.2 le liquide est facile à séparer et à fabriquer en pièce !

2.3.3 $T > T_i$:

	$\frac{1}{2}SiO_{2s}$	C_s	CO_g	$\frac{1}{2}Si_{liq}$
$t = 0$	2.0 mol	2.5 mol	0	0
$t = t_{final}$	0.75 mol	0	2.5 mol	1.25 mol
	45 g	0	30 g	75 g

loi des gaz parfaits $p = \frac{n(CO)RT}{V} = \frac{2.5 \times 8.314 \times 1850}{10^{-2}} Pa = 38.5 \text{ bar}$

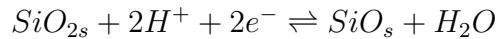
3^{ème} partie :
Propriétés oxydoréductrices

3.1

3.1.1 :

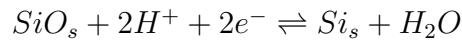
espèce	Si	SiO	SiO ₂
no(Si)	0	+II	+IV

3.1.2 la demi-réaction s'écrit :



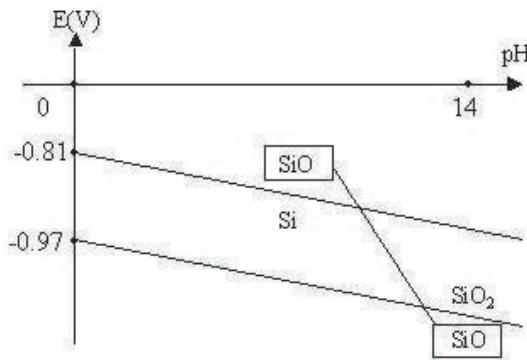
$$E_{IV/II} = E_{SiO_2/SiO}^0 + \frac{0.06}{2} \log h^2 = -0.97 - 0.06 \text{ pH Volt}$$

3.1.3 la demi-réaction s'écrit :



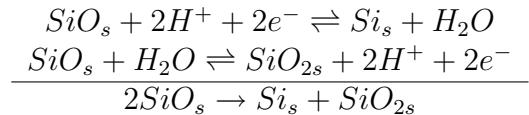
$$E_{II/0} = E_{SiO/Si}^0 + \frac{0.06}{2} \log h^2 = -0.81 - 0.06 \text{ pH Volt}$$

3.1.4 :



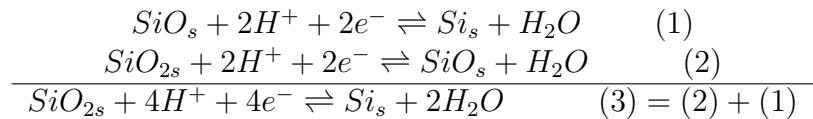
d'après la règle de γ le SiO_s n'est pas stable et se dismute

3.1.5 la réaction de dismutation de SiO s'établit :



$$\Delta_{dis}G^0 = -8.314 \times 298 \times \ln K^\circ \text{ or } K_{25}^\circ = 10^{2 \times \frac{E^0(SiO/Si) - E^0(SiO_2/SiO)}{0.06}} \text{ donc } \Delta_{dis}G^0 = -30.4 \text{ kJmol}^{-1}$$

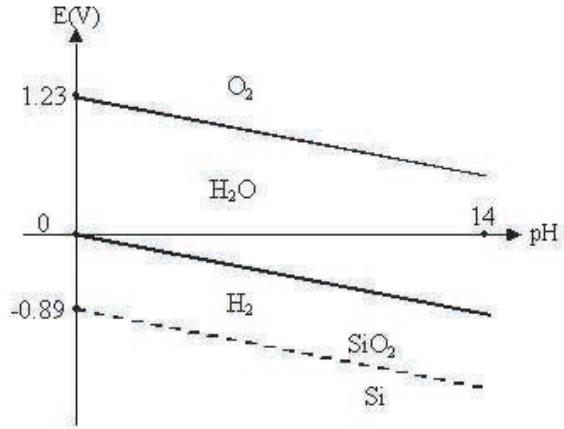
3.1.6 la demi-réaction s'établit :



or pour une demi-réaction $\Delta_rG^0 = -nFE^0$ soit $4 \times E_{SiO_2/Si}^0 = 2 \times E_{SiO/Si}^0 + 2 \times E_{SiO_2/SiO}^0$

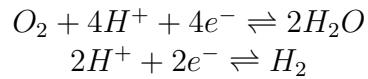
$$\text{A.N : } E_{SiO_2/Si}^0 = -0.89 \text{ Volt}$$

$$\text{soit } E_{IV/0} = -0.89 + \frac{0.06}{4} \log h^4 = -0.89 - 0.06 \text{ pH Volt}$$



3.2

3.2.1 :



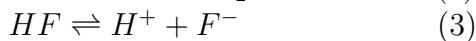
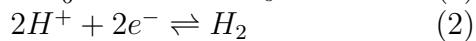
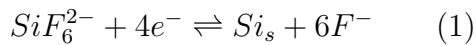
$$E = E^0(O_2/H_2O) + \frac{0.06}{4} \log \frac{h^4 p(O_2)}{P_0} \text{ avec } p(O_2) = 1\text{bar} \text{ il vient } | E = 1.23 - 0.06 \text{ pH } \text{ Volt}$$

$$E = E^0(H_2O/H_2) + \frac{0.06}{2} \log \frac{h^2 P_0}{p(H_2)} \text{ avec } p(H_2) = 1\text{bar} \text{ il vient } | E = -0.06 \text{ pH } \text{ Volt}$$

le Si et H_2O ont des domaines disjoints donc Si n'est pas stable

3.2.2 la cinétique de la réaction $Si + 2H_2O \rightarrow SiO_2 + 2H_2$ est nécessairement lente !

3.2.3 :



$$\text{soit } \Delta_r G^0 = -RT \ln K_e^\circ = +4FE_{SiF_6^{2-}/Si}^0 - 2FE_{H^+/H_2}^0 - 4 \times RT \ln K_a$$

$$\text{divisé par } -F \text{ on obtient } 0.06 \log K_e^0 = 4 \times 1.20 - 4 \times 0.06 \times 3.2$$

$$K_e^0 = 1.6 \cdot 10^{67}$$

à condition que la cinétique de cette réaction soit rapide !

fin du corrigé

Autour du manganèse

On se propose dans ce problème d'étudier quelques aspects de la chimie du manganèse. En particulier son application dans un procédé de dosage du dioxygène dissous dans l'eau. Ce procédé peut être facilement réalisé dans un laboratoire d'enseignement. Aucune connaissance préalable de la chimie du manganèse n'est requise pour aborder les différentes parties du problème.

Données numériques

- Données générales
 - constante des gaz parfaits $R = 8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$
 - $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0.06 \text{ V}$ à $T = 298 \text{ K}$, F désignant la constante de Faraday et \ln le logarithme népérien
- Enthalpies standard de formation et entropies standard absolues à 298 K (g : gaz, s : solide) :

	$O_2(g)$	$Al(s)$	$Mn(s)$	$MnO_2(s)$	$Mn_3O_4(s)$	$Al_2O_3(s)$
$\Delta_r H_f^\circ(\text{kJ.mol}^{-1})$	-	-	-	-522,1	-1387	-1674
$S^\circ(\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})$	205	27,75	32	53,1	149,4	51

- Masses molaires atomiques

Elément	O	Cl	K	Mn	I
$M(\text{g.mol}^{-1})$	16,0	35,5	39,1	55,0	127

- Potentiels standard d'oxydoréduction en solution aqueuse à 298 K :

Couple	$S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$	I_2/I^-	O_2/H_2O
$E^\circ(\text{V})$	0,08	0,62	1,23

- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie : **Quelques propriétés structurales**

Le manganèse Mn a pour numéro atomique $Z = 25$.

- 1.1 Quelle est la configuration électronique de l'atome de manganèse dans son état fondamental ?
- 1.2 En déduire sa position (ligne et colonne) dans la table périodique des éléments. À quel bloc d'éléments appartient-il ? Comment s'appellent les éléments de ce bloc ? Donner un autre élément du même bloc et de la même période que le manganèse.
- 1.3 Le manganèse possède plusieurs degrés d'oxydation dont le plus stable est le degré $+II$. Donner la configuration électronique dans son état fondamental de l'ion Mn^{2+} et justifier sa stabilité relative.

2^{ème} partie :
Métallurgie du manganèse

La source principale du manganèse est le bioxyde de manganèse MnO_2 . Le métal pur s'obtient par aluminothermie de Mn_3O_4 provenant de la réduction par chauffage de MnO_2 .

2.1 Diagramme d'Ellingham

On se propose, dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM, de tracer le diagramme représentant l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^\circ$ de formation des oxydes MnO_2 , Mn_3O_4 et Al_2O_3 en fonction de la température.

- 2.1.1 Écrire les équations des réactions de formation des oxydes MnO_2 , Mn_3O_4 et Al_2O_3 . Ces équations seront rapportées à une mole de dioxygène.
- 2.1.2 Établir l'expression de l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^\circ(T)$ de réaction pour chacune des réactions précédentes.
- 2.1.3 Tracer le diagramme d'ELLINGHAM correspondant limité à l'intervalle de température [300 K, 1200 K]. On calculera les valeurs des enthalpies libres $\Delta_r G^\circ$ aux limites de l'intervalle de traçage. On ne tiendra pas compte des éventuels changements d'état qui peuvent avoir lieu dans cet intervalle de température.
- 2.2 Montrer que le chauffage de MnO_2 à une température supérieure à une valeur minimale T_{min} que l'on déterminera permet d'obtenir Mn_3O_4 . On justifiera la réponse et on écrira l'équation de la réaction chimique correspondante.
- 2.3 Montrer que l'aluminium métallique permet de réduire Mn_3O_4 en Mn . Écrire l'équation de la réaction chimique correspondante et calculer la variance du système. Interpréter complètement la valeur obtenue. Comment pourrait-on déterminer la température d'équilibre ?

3^{ème} partie :
Procédé WINKLER de dosage du dioxygène dissous dans l'eau

La méthode de WINKLER de dosage du dioxygène dissous dans l'eau utilise les propriétés oxydoréductrice du manganèse.

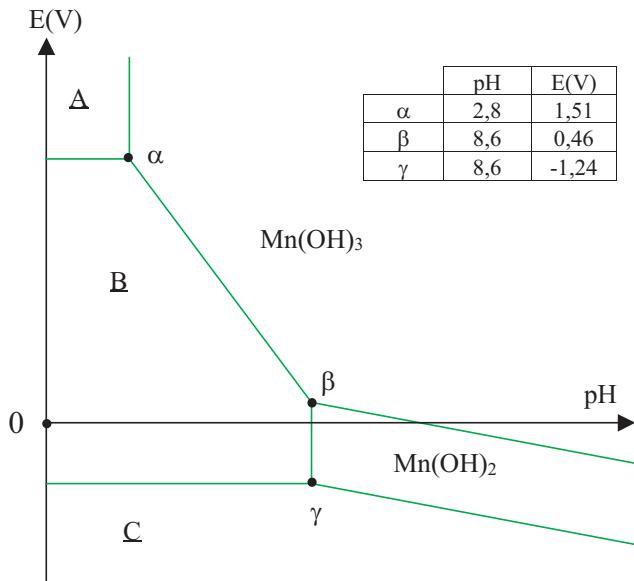
3.1 Mode opératoire (cette partie ne comporte aucune question)

Le procédé permet de déterminer la concentration molaire volumique $c_0(O_2)$ du dioxygène dissous dans l'eau. Il comporte trois étapes principales :

- étape 1) on remplit d'eau à doser un flacon de volume $V_{tot} = 250 \text{ mL}$ et on y ajoute quelques pastilles d'hydroxyde de sodium puis environ 2 g de chlorure de manganèse II . La solution devient alors **trouble**. On agite énergiquement et on laisse reposer pendant 15 mn environ.
- étape 2) on ajoute ensuite environ 3 g d'iodure de potassium puis quelques gouttes d'acide sulfurique concentré et on vérifie que, après homogénéisation, la solution obtenue est limpide et très acide ($pH \approx 2$).
- étape 3) On prélève exactement $v_0 = 50 \text{ mL}$ de la solution du flacon et on la dose avec une solution de thiosulfate de sodium de concentration molaire volumique $c = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$.

3.2 Diagramme potentiel-pH

Pour comprendre ce mode opératoire on se sert du diagramme potentiel-pH du manganèse. La figure 1 du document-réponse donne un diagramme simplifié limité aux seuls degrés d'oxydation (+III), (+II) et (0). Le degré d'oxydation (+II) est représenté par l'ion Mn^{2+} et par l'hydroxyde de manganèse $Mn(OH)_2$. Le degré d'oxydation (+III) est représenté par l'ion Mn^{3+} et par l'oxyde Mn_2O_3 hydraté que l'on écrit simplement $Mn(OH)_3$. La concentration totale en élément manganèse en solution est de $10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$.



Document-réponse

3.2.1 Lecture du diagramme

3.2.1.1 Quelles espèces chimiques représentent les lettres A, B et C?

3.2.1.2 En utilisant le diagramme, déterminer le produit de solubilité K_s de $Mn(OH)_2$.

3.2.1.3 Déterminer de même le produit de solubilité K'_s de $Mn(OH)_3$.

3.2.1.4 Que peut-on dire de la précision de cette méthode de détermination des constantes K_s et K'_s ?

3.2.2 Stabilité en solution aqueuse

On fera tous les tracés sur le diagramme du document-réponse que l'on n'oubliera pas de rendre avec la copie.

3.2.2.1 Écrire l'équation de la demi-réaction redox du couple O_2/H_2O et en déduire l'expression du potentiel redox correspondant. On prendra à la frontière $p(O_2) = 1 \text{ bar}$ et on tracera le segment de droite correspondant sur le diagramme potentiel-pH du manganèse.

3.2.2.2 Écrire de même l'équation de la demi-réaction redox du couple H^+/H_2 et en déduire l'expression du potentiel redox correspondant. On prendra à la frontière $p(H_2) = 1 \text{ bar}$. Tracer le segment de droite correspondant sur le diagramme potentiel-pH du manganèse.

3.2.2.3 Écrire l'équation de la demi-réaction redox du couple I_2/I^- et en déduire l'expression du potentiel redox correspondant. On prendra à la frontière $[I_2] = 2[I^-] = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$ et on tracera le segment de droite correspondant sur le diagramme potentiel-pH du manganèse.

3.2.2.4 Que peut-on dire des solutions aqueuses de Mn^{3+} ? Justifier la réponse et écrire l'équation de la réaction qui a éventuellement lieu dans la solution.

3.2.2.5 On introduit un morceau de manganèse dans de l'eau à laquelle ont été ajoutées quelques gouttes d'un acide non oxydant. Que se passe-t-il? Justifier la réponse et écrire l'équation de la réaction qui a éventuellement lieu dans la solution.

3.2.2.6 Indiquer sur le diagramme les domaines de prédominance du dioxygène et du dihydrogène ainsi que celui de stabilité de l'eau.

3.3 Justification du mode opératoire

Pour répondre aux questions de cette section on s'aidera au besoin du diagramme potentiel-pH du manganèse.

3.3.1 Etape 1

3.3.1.1 Écrire l'équation de la réaction de l'hydroxyde de sodium sur les ions Mn^{2+} et calculer sa constante d'équilibre. Commenter.

3.3.1.2 Écrire l'équation de la réaction de l'oxygène dissous sur le composé obtenu. Cette réaction est relativement lente. Pourquoi ? Comment pourrait-on l'accélérer ?

3.3.1.3 Quelle relation y a-t-il entre la quantité de matière $n(O_2)$ de dioxygène initialement dissous dans l'eau et la quantité de matière $n(III)$ du manganèse au degré d'oxydation (+III) formé ?

3.3.2 Etape 2

3.3.2.1 Écrire l'équation de la réaction des ions iodures sur les ions Mn^{3+} .

3.3.2.2 Quelle relation y a-t-il entre la quantité de matière $n(I_2)$ du diiode formé et celle $n(III)$ de la solution ?

3.3.2.3 Quelle autre réaction peut avoir lieu dans la solution ? A-t-elle une incidence sur le dosage ? Justifier.

3.3.3 Etape 3

3.3.3.1 Écrire l'équation de la réaction de dosage de I_2 par $S_2O_3^{2-}$ et calculer sa constante d'équilibre. Commenter.

3.3.3.2 Exprimer la concentration molaire volumique $c_0(O_2)$ du dioxygène dans l'eau initiale en fonction de la concentration c de la solution de thiosulfate de sodium, du volume V_e de cette solution versé à l'équivalence et du volume V_0 prélevé pour réaliser le dosage.

3.3.3.3 Comment peut-on repérer dans ce cas le point d'équivalence ?

3.4 Dosage du dioxygène dissous et discussion

3.4.1 Le dosage d'une eau de robinet distribuée dans une ville donne $V_e = 21,2\text{ mL}$.

3.4.1.1 Déterminer la concentration molaire volumique du dioxygène dans l'eau distribuée.

3.4.1.2 Cette eau vérifie-t-elle les normes en vigueur qui imposent, entre autres, une concentration massique volumique de dioxygène dissous comprise entre 5 mg.L^{-1} et 8 mg.L^{-1} ?

3.4.2 Pour que le dosage précédent soit possible, il faut avoir opéré en présence d'un excès de chlorure de manganèse (II) lors de l'étape 1 et un excès d'iodure de potassium lors de l'étape 2.

3.4.2.1 Justifier ces deux affirmations.

3.4.2.2 Calculer les masses minimales de chlorure de manganèse (II) et d'iodure de potassium à utiliser pour que le dosage de l'eau de distribution précédente soit possible. On rappelle que l'iode dissous se trouve sous forme d'ions I_3^- .

fin de l'énoncé

Autour du manganèse

1^{ère} partie : Quelques propriétés structurales

1.1 $_{25}Mn$: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^5$

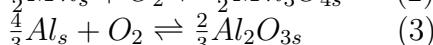
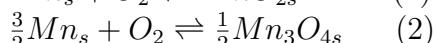
1.2 valence $3d^5 4s^2$, la 7^{ème} colonne et la 4^{ème} ligne , bloc d , éléments de transition , $_{29}Cu$

1.3 Mn^{2+} : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^5$, relativement stable car la sous-couche d est moitié-remplie

2^{ème} partie : Métallurgie du manganèse

2.1 Diagramme d'Ellingham

2.1.1 :



2.1.2 :

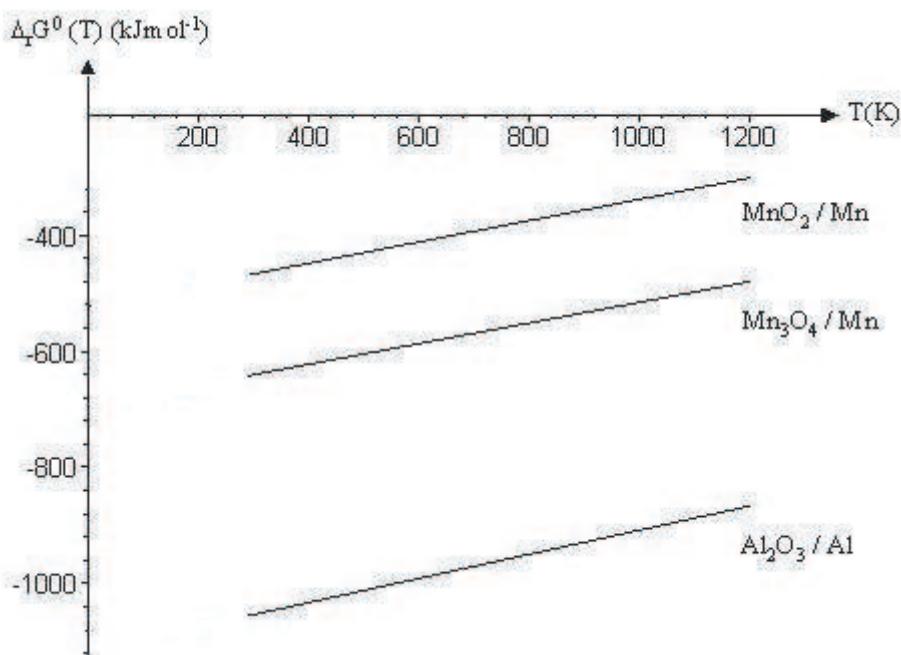
$$\Delta_r G_1^0(T) = -522.1 + 0.184 T \quad kJmol^{-1}$$

$$\Delta_r G_2^0(T) = -693.5 + 0.178 T \quad kJmol^{-1}$$

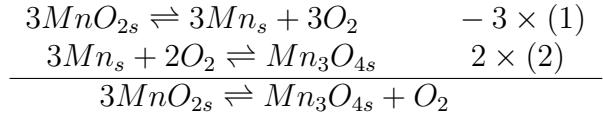
$$\Delta_r G_3^0(T) = -1116 + 0.208 T \quad kJmol^{-1}$$

	300K	1200K
$\Delta_r G_1^0$	-467	-301
$\Delta_r G_2^0$	-640	-480
$\Delta_r G_3^0$	-1054	-866

en $kJmol^{-1}$



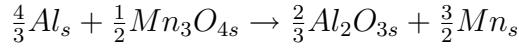
2.2 :



$$\Delta_r G^0(T) = 2\Delta_r G_2^0(T) - 3\Delta_r G_1^0(T) = 179.3 - 0.196 T \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$\text{on s'intéresse à } K^\circ > 1 \implies \Delta_r G^0(T) = -RT \ln K^\circ < 0 \implies |T > T_{min} = 915 \text{ K}|$$

2.3 d'après le diagramme la règle de γ permet de dire sur l'intervalle $[300, 1200]K$ on a :



la variance s'écrit $v = (4+1)-(1+4+0) = 0$ car ici P n'est pas un facteur d'équilibre , l'équilibre est invariant : on ne peut choisir aucun paramètre , la température d'équilibre s'impose par nature , elle déterminer graphiquement par l'intersection des deux droites d'Ellingham (2) et (3)

3ème partie :

Procédé WINKLER de dosage du dioxygène dissous dans l'eau

3.1 Mode opératoire (cette partie ne comporte aucune question)

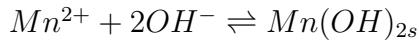
3.2 Diagramme potentiel-pH

3.2.1 Lecture du diagramme

3.2.1.1 une verticale sépare deux espèces correspondant aux même degré d'oxydation

donc $\underline{A} = Mn^{3+}$, $\underline{B} = Mn^{2+}$ et $\underline{C} = Mn_s$

3.2.1.2 la précipitation de $Mn(OH)_2$ s'écrit :

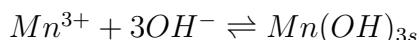


tel que $K_s = [Mn^{2+}][OH^-]^2$, au début de précipitation $[Mn^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol l}^{-1}$

et $[OH^-] = 10^{pH_\beta - 14} = 10^{-5.4} \text{ mol l}^{-1}$

soit $|K_s = 1.6 \cdot 10^{-13}|$

3.2.1.3 la précipitation de $Mn(OH)_3$ s'écrit :



tel que $K'_s = [Mn^{3+}][OH^-]^3$, au début de précipitation $[Mn^{3+}] = 10^{-2} \text{ mol l}^{-1}$

et $[OH^-] = 10^{pH_\alpha - 14} = 10^{-11.2} \text{ mol l}^{-1}$

soit $|K'_s = 2.5 \cdot 10^{-36}|$

3.2.1.4 le pH est au maximum mesuré à trois chiffres significatifs , ceci limite la précision de cette méthode

les méthodes de précision sont conductimétrie (conductivité électrique de la solution ionique) ou gravimétrie (pesée de masse du précipité avec balance électronique)

3.2.2 Stabilité en solution aqueuse

3.2.2.1 :



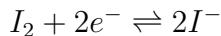
$$E = E^0(O_2/H_2O) + \frac{0.06}{4} \log \frac{h^4 p(O_2)}{P_0} \text{ avec } p(O_2) = 1 \text{ bar il vient } |E = 1.23 - 0.06 \text{ pH Volt}|$$

3.2.2.2 :

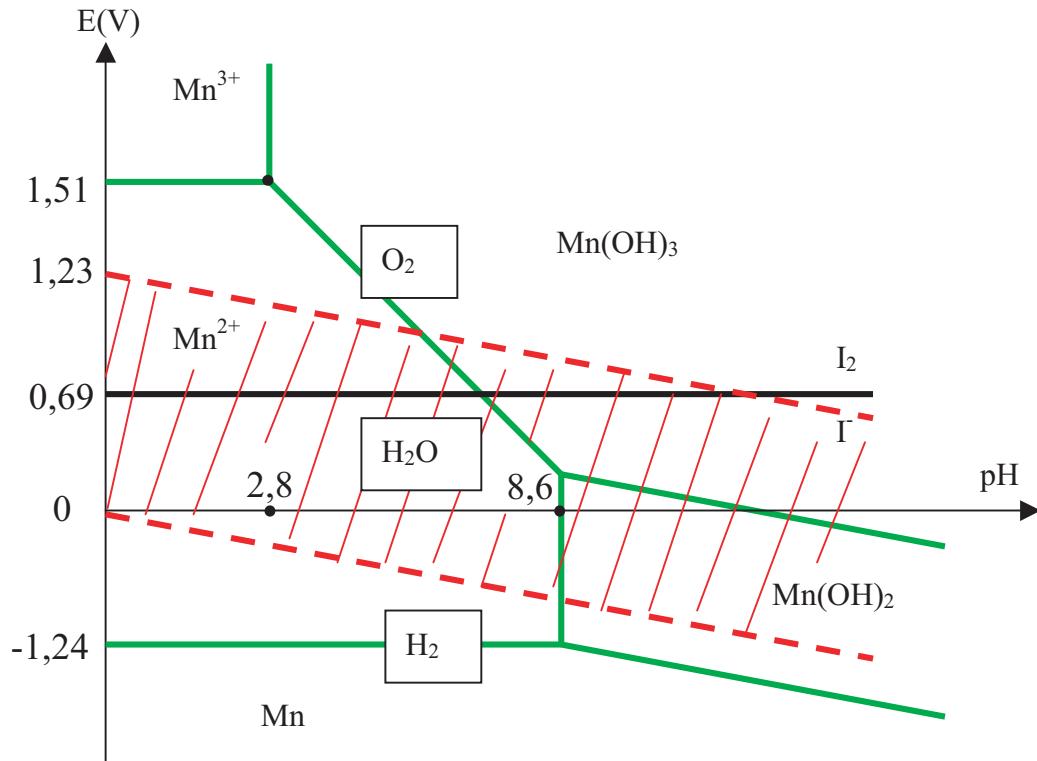


$$E = \underbrace{E^0(H_2O/H_2)}_{\text{avec } p(H_2) = 1 \text{ bar}} + \frac{0.06}{2} \log \frac{h^2 P_0}{p(H_2)} \text{ avec } p(H_2) = 1 \text{ bar il vient } | E = -0.06 \text{ pH Volt}$$

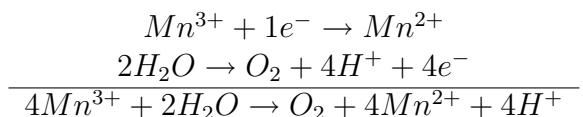
3.2.2.3 :



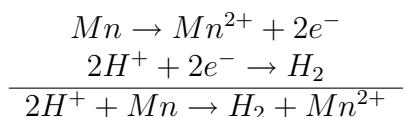
$$E = E^0(I_2/I^-) + \frac{0.06}{2} \log \frac{[I_2]}{[I^-]^2} \text{ avec } [I^-] = 10^{-2} \text{ mol l}^{-1} \text{ et } [I_2] = 2 \times 10^{-2} \text{ mol l}^{-1} \text{ il vient } | E = 0.69 \text{ Volt}$$



3.2.2.4 H_2O (réductrice) et Mn^{3+} ont des domaines disjoints , il réagissent suivant



3.2.2.5 H_2O (oxydante) et Mn_s ont des domaines disjoints , il réagissent suivant



On constate un dégagement gazeux de H_2 et une dégradation du morceau de Mn

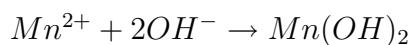
En milieu acide on élimine la possibilité de précipitation de $Mn(OH)_2$

3.2.2.6 voir diagramme

3.3 Justification du mode opératoire

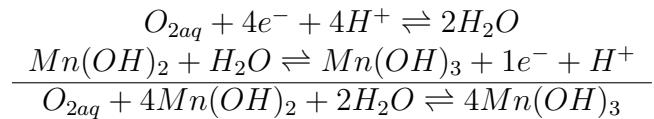
3.3.1 Etape 1

3.3.1.1 la solution devient trouble par formation de précipité



$K^\circ = \frac{1}{K_s} = 6.25 \times 10^{12}$, la réaction est totale

3.3.1.2 les deux demi-réactions s'écrivent

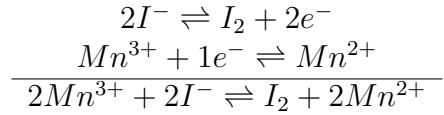


Le mécanisme réactionnel fait intervenir 7 molécules en réactifs donc plusieurs étapes , pour l'accélérer on doit chauffer !

$$3.3.1.3 \implies n(O_2) = \frac{n_{III}}{4}$$

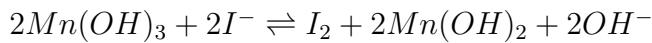
3.3.2 Etape 2

3.3.2.1 les deux demi-réactions s'écrivent



$$3.3.2.2 \implies n(I_2) = \frac{n_{III}}{2}$$

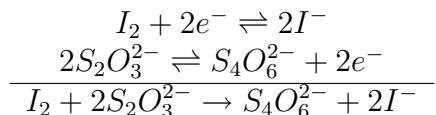
3.3.2.3 on peut aussi avoir :



, qui a une influence sur le dosage , car elle n'est pas quantitative puisque les domaines de I^- et $Mn(OH)_3$ ne sont pas disjoints! , ce problème disparaît si on opère en milieu acide (ajout d'acide sulfurique) les précipités n'existent pas

3.3.3 Etape 3

3.3.3.1 les deux demi-réactions s'écrivent



$$K_e^\circ = 10^{2 \times \frac{E^0(I_2/I^-) - E^0(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-})}{0.06}} = 10^{18} > 10^3 , \text{ la réaction est totale}$$

3.3.3.2 à l'équivalence $n(S_2O_3^{2-}) = c \times V_e = 2n(I_2) = n_{III} = 4n(O_2)$ or $n(O_2) = c_0(O_2) \times V_0$
donc $c_0(O_2) = \frac{c \times V_e}{4V_0}$

3.3.3.3 un indicateur coloré

3.4 Dosage du dioxygène dissous et discussion

3.4.1

$$3.4.1.1 c_0(O_2) = \frac{2.25 \cdot 10^{-3} \times 21.2}{4 \times 50} \text{ mol l}^{-1} = 2.39 \cdot 10^{-4} \text{ mol l}^{-1}$$

$$3.4.1.2 c_m(O_2) = M(O_2) \times c_0(O_2) = 7.63 \text{ mg l}^{-1} , \text{ oui cette eau vérifie les normes !}$$

3.4.2

$$3.4.2.1 \text{ on a } n(I_2) = 2n(O_2) = 2 \times 2.39 \cdot 10^{-4} \times 50 \cdot 10^{-3} \text{ mol} = 2.39 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$\text{or dans } m = 3g \text{ de KI on a } n(I^-) = \frac{3}{39.1+127} \text{ mol} = 18.3 \cdot 10^{-3} \text{ mol} > 2n(I_2)$$

$$\text{on a aussi } n_{III} = 2n(I_2) = 4.78 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$\text{or dans } m' = 2g \text{ de } MnCl_2 \text{ on a } n(Mn) = \frac{2}{55.0+2 \times 35.5} \text{ mol} = 15.8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} > n_{III}$$

$$3.4.2.2 m'_{min}(MnCl_2) = n_{III} \times M(MnCl_2) = 6.02 \text{ mg}$$

$$\text{et on a } n(I_2) = n(I_3^-) \text{ donc } m_{min}(KI) = 3 \times n(I_2) \times M(KI) = 11.9 \text{ mg.}$$

fin du corrigé

Le mercure

Le problème propose l'étude de quelques aspects de la chimie du mercure. Aucune connaissance préalable de la chimie de cet élément n'est requise pour aborder les différentes parties du problème.

Données utiles

– Données générales

Nombre d'Avogadro $\aleph_A = 6.022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

constante des gaz parfaits $R = 8.314 JK^{-1}mol^{-1}$

Constante de FARADAY : $F = 9.65 \cdot 10^4 C.mol^{-1}$;

$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0.06 V$ à $T = 298 K$, $F = \aleph_A e$ désignant la constante de Faraday et \ln le logarithme népérien

– Enthalpies standard de formation et entropies standard absolues à 298 K :

	$O_2(g)$	$Ag(s)$	$Hg(l)$	$SO_2(g)$	$AgCl(s)$	$HgS(s)$
$\Delta_r H_f^\circ (kJ.mol^{-1})$	-	-	-	-296,8	-127,1	-58,20
$S^\circ (JK^{-1}mol^{-1})$	205	42,55	76,02	248,2	96,25	82,40

g : gaz, l : liquide, s : solide.

– Masses molaires atomiques

Elément	S	Cl	K	Hg
$M(g.mol^{-1})$	32,1	35,5	39,1	200,6

- Pression de vapeur saturante du mercure liquide à 800 K : $p_s(Hg) = 11,6 bar$.

- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie : Quelques propriétés structurales

1.1 Quelques propriétés de l'élément mercure

Le mercure Hg a pour numéro atomique $Z = 80$.

1.1.1 Dans quel état physique (gaz, liquide ou solide) se trouve le mercure dans les conditions normales de température et de pression ? Citer un autre élément qui se trouve dans le même état physique.

1.1.2 À l'état naturel, le mercure possède sept isotopes stables d'abondances respectives :

Isotope	^{196}Hg	^{198}Hg	^{199}Hg	^{200}Hg	^{201}Hg	^{202}Hg	^{204}Hg
Abondance	0,15%	9,97%	16,87%	23,10%	13,18%	29,86%	6,87%

1.1.2.1 Qu'appelle-t-on noyaux isotopes ?

1.1.2.2 Déterminer la masse molaire atomique M_{Hg} du mercure.

1.1.3 Quelle est la configuration électronique de l'atome de mercure dans son état fondamental ?

1.1.4 En déduire sa position (ligne et colonne) dans la table périodique des éléments. À quel bloc d'éléments appartient-il ?

1.1.5 Le mercure possède deux degrés d'oxydation stables $+I$ et $+II$. Donner les configurations électroniques correspondantes et justifier leur stabilité relative.

1.2 Propriétés cristallographiques

Le mercure se rencontre à l'état naturel sous forme de sulfure HgS qui possède deux variétés allotropiques. La variété principale, de couleur rouge est appelée cinabre. Elle a une structure de type hexagonal assez complexe. Par contre, la variété moins courante, dite métacinabre, cristallise dans une structure cubique du type ZnS blende de paramètre de maille $a = 587,17 \text{ pm}$. Les vecteurs de base de la maille sont notés \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} . On s'intéresse par la suite aux propriétés cristallographiques du métacinabre.

1.2.1 Quelles relations existent-elles entre \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} ?

1.2.2 Donner les coordonnées réduites des ions de la maille de HgS et représenter sa projection orthogonale dans le plan (\vec{a}, \vec{b}) .

1.2.3 Quelle est la nature des sites cristallographiques occupés par les cations ? Sont-ils tous occupés ? Si non, donner les coordonnées des sites non occupés.

1.2.4 Calculer la distance la plus courte entre deux cations ainsi que la distance la plus courte entre deux sites du type de ceux occupés par les cations. Comparer et commenter.

1.2.5 Quel est le nombre d'entités HgS par maille ?

1.2.6 Calculer la masse volumique ρ du métacinabre HgS .

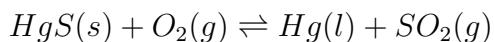
2^{ème} partie :

Réactions en phase sèche

Dans cette partie, on se propose d'étudier la réaction chimique à la base de l'obtention du mercure à partir du cinabre. On étudiera également un équilibre de décomposition de l'oxyde de mercure HgO .

2.1 Pyrométauxurgie

L'extraction du mercure à partir du cinabre s'effectue par grillage du mineraï à l'air :



2.1.1 Calculer la variance d'un tel système et interpréter la valeur obtenue.

2.1.2 Déterminer l'enthalpie libre standard' $\Delta_r G^\circ(T)$ de cette réaction dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM. Commenter son signe.

2.1.3 Déterminer la valeur numérique de la constante d'équilibre K_1 à 300 K. Commenter.

2.1.4 En réalité on travaille à 973 K. Pourquoi doit-on travailler à température élevée pour extraire le mercure à partir du cinabre ? On donne la température d'ébullition du mercure sous pression standard : $\theta_{eb}^o(Hg) = 356,6 \text{ } ^\circ C$.

2.2 Décomposition de l'oxyde mercurique

À température suffisamment élevée, l'oxyde de mercure HgO solide peut se décomposer pour donner du mercure gazeux et du dioxygène selon :



dont la constante d'équilibre vaut $K_2 = 6,2$ à 800 K.

2.2.1 Calculer la variance du système général composé de $HgO(s)$, $Hg(g)$ et $O_2(g)$ ainsi que celle du système obtenu par décomposition partielle de $HgO(s)$. Interpréter les valeurs obtenues.

Dans un récipient clos de volume $V = 1\text{ L}$, initialement vide et maintenu à une température $T = 800\text{ K}$, on introduit une quantité de matière n d'oxyde de mercure HgO solide.

2.2.2 Pourquoi, pour les faibles valeurs de n , l'oxyde de mercure se décompose-t-il totalement ?

2.2.3 À partir de quelle valeur n_0 de n , il y a coexistence de $HgO(s)$, $Hg(g)$ et $O_2(g)$? Commenter.

2.2.4 Exprimer et représenter les variations de la pression totale p dans le récipient en fonction de n .

2.2.5 Montrer que, lors de cette expérience, il ne se forme pas de mercure liquide.

Dans le récipient précédent, contenant un excès de $HgO(s)$ et maintenu à la température constante $T = 800\text{ K}$, on introduit une quantité de matière N de mercure liquide.

2.2.6 À partir de quelle valeur N_0 de N apparaît la première goutte de $Hg(l)$ en équilibre avec $HgO(s)$, $Hg(g)$ et $O_2(g)$?

2.2.7 Calculer la variance du système ainsi obtenu et interpréter le résultat. v

3^{ème} partie :

Chlorure mercureux ou calomel

Le calomel est le chlorure de mercure I ou chlorure mercureux Hg_2Cl_2 . On admettra qu'en solution aqueuse, l'ion mercure (+I) se trouve uniquement sous forme de dimère Hg_2^{2+} .

3.1 Solubilité du calomel

À 298 K, la solubilité du calomel dans l'eau pure vaut $s = 6,8 \cdot 10^{-7} mol.l^{-1}$.

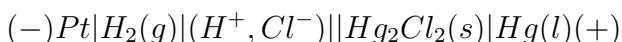
3.1.1 En déduire le produit de solubilité K_s du calomel.

3.1.2 Calculer la solubilité s' du calomel dans une solution de chlorure de potassium à $10^{-2} mol.l^{-1}$.

Comparer les deux valeurs de solubilité et expliquer.

3.2 Mesure d'un potentiel standard

On réalise la pile suivante :



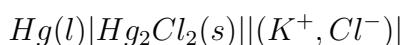
La pression de dihydrogène vaut 1 bar et la concentration en acide chlorhydrique est $c_1 = 10^{-2} mol.l^{-1}$. La force électromotrice de cette pile vaut $e_1 = 510\text{ mV}$.

3.2.1 Déterminer le potentiel standard du couple $Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)$.

3.2.2 En déduire le potentiel standard du couple $Hg^+/Hg(l)$

3.3 Électrode au calomel saturée

L'électrode au calomel est la demi-pile symbolisée par :



On note c la concentration de la solution de chlorure de potassium.

3.3.1 Faire un schéma réaliste d'une électrode au calomel de laboratoire.

3.3.2 Donner le montage complet permettant de mesurer le pH d'une solution aqueuse utilisant une électrode au calomel et une autre électrode dont on donnera le nom.

3.3.3 Exprimer le potentiel rédox EEC de l'électrode au calomel.

3.3.4 Qu'appelle-t-on électrode de référence ? À quelle condition l'électrode au calomel peut elle jouer le rôle d'électrode de référence ? Comment parvient-on à cela ?

3.3.5 Dans quel type de solution ne peut-on pas alors l'utiliser ? En donner un exemple concret.
Comment arrive-t-on alors à résoudre ce problème ?

3.3.6 Calculer la valeur du potentiel EECS de l'électrode au calomel saturée à 298 K sachant que la solubilité du chlorure de potassium est $w = 355 \text{ g.L}^{-1}$.

3.4 Mesure d'une grandeur thermodynamique

On réalise, sous une pression totale de 1 bar, la pile suivante :



La concentration de la solution de chlorure de potassium est $c_2 = 0,1 \text{ mol.l}^{-1}$. On note e_2 la force électromotrice de cette pile. Elle vaut 46,00 mV à 298 K et 65,03 mV à 353 K.

3.4.1 Faire un schéma de la pile ainsi réalisée.

3.4.2 Écrire les équations des demi-réactions rédox ayant lieu à chaque électrode ainsi que la réaction globale de fonctionnement de la pile.

3.4.3 Calculer l'enthalpie standard Δ_rH° et l'entropie standard Δ_rS° de cette réaction. Commenter les valeurs obtenues. On supposera ces grandeurs indépendantes de la température.

3.4.4 En déduire l'entropie standard absolue et l'enthalpie standard de formation du calomel.

fin de l'énoncé

Le mercure

1^{ère} partie : Quelques propriétés structurales

1.1 Quelques propriétés de l'élément mercure

1.1.1 aux conditions normales, le mercure est liquide Hg_{ℓ} ainsi que le brome sous forme de $Br_2(liq)$.

1.1.2

1.1.2.1 noyaux ayant le même numéro atomique, càd le nombre de protons, mais différent par leurs nombre de neutrons.

1.1.2.2 on a

$$M_{Hg} = \frac{\sum_i a_i \cdot A_i}{100} = 200.5 \text{ g.mol}^{-1}$$

avec A_i nombre de masse de l'isotope $^{A_i}_{80}Hg$

1.1.3 Hg : $[_{18}Ar]4s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^24f^{14}5d^{10}$

1.1.4 la couche de valence est : $5d^{10}6s^2$ donc ligne 6 et colonne 12, le mercure appartient au bloc d.

1.1.5 Hg^+ : $[_{18}Ar]4s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^14f^{14}5d^{10}$

Hg^{2+} : $[_{18}Ar]4s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^66s^04f^{14}5d^{10}$

on arrache les électrons de la sous-couche s , car la sous-couche d est remplie !

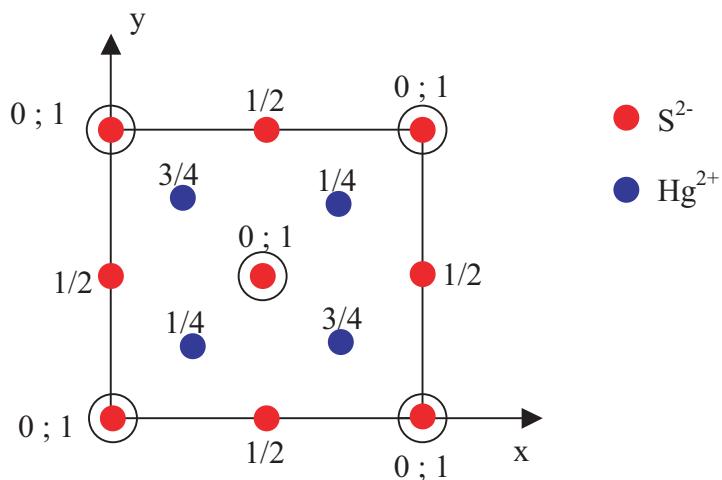
1.2 Propriétés cristallographiques

1.2.1 la maille est cubique donc $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ et $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}$.

1.2.2 S^{2-} : $(0,0,0); (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,1,0); (0,1,1); (1,0,1); (1,1,1); (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}); (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Hg^{2+} : $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}); (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}); (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}); (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

la projection sur le plan (\vec{a}, \vec{b}) , qu'on prend confondu au plan (xOy) , de la maille HgS :



où on a noté à coté de chaque ion sa coordonnée réduite sur l'axe Oz .

1.2.3 Hg^{2+} occupent la moitié des sites tétraédriques en opposition.

les sites non occupés sont quatre : $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$; $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$; $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$; $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

1.2.4 la distance minimale entre deux cations est (fig 1.2.2) : $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

et la distance minimale entre deux sites tétraédrique est (fig 1.2.2) : $d' = \frac{a}{2}$

1.2.5 pour Hg^{2+} : 4×1 entité/maille;

et pour S^{2-} : $(8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2})$ entité/maille;

donc $4 HgS / \text{maille}$.

$$\mathbf{1.2.6} \quad \rho = \frac{4 \times M(HgS)}{N \pi a^3} = \frac{4 \times (200.6 + 32.1) \cdot 10^{-3}}{6.023 \cdot 10^{23} \cdot (587.17 \cdot 10^{-12})^3} = 7634 \text{ kg.m}^{-3}$$

2ème partie :

Réactions en phase sèche

2.1 Pyrométallurgie

2.1.1 on a $v = (n + a) - (r + \varphi + q) = 1$, tel que :

$n = 4$: O_2 , Hg , HgS et SO_2

$a = 1$: T, p n'est pas facteur d'équilibre $\sum \nu_i(\text{gaz}) = 0$

$r = 1$: un seul équilibre.

$\varphi = 3$: solide, liquide, gaz.

$q = 0$ aucune restriction sur les quantités initiales.

parmi x_{O_2} , x_{SO_2} et T on ne peut choisir librement qu'un seul paramètre.

2.1.2 on a $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T) - T \Delta_r S^\circ(T) \approx \Delta_r H^\circ(298) - T \Delta_r S^\circ(298)$

d'après les données : Hess

$$\Delta_r H^\circ(298) = -296.8 + 0 + 58.2 - 0 = -238.6 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$\Delta_r S^\circ(298) = 248.2 + 76.02 - 82.4 - 205.1 = 36.72 \text{ J.K}^{-1}.mol^{-1}$$

donc :

$$\Delta_r G^\circ(T) = -238.6 \times 10^3 - 36.72 T < 0$$

on aura : la constante d'équilibre $K^\circ = \exp -\frac{\Delta_r G^\circ(T)}{RT} > 1$

2.1.3 à 300 K, on a $\Delta_r G^\circ(300K) = -249 \text{ kJ.mol}^{-1}$ donc $K_1 = \exp +\frac{249000}{8.314 \cdot 300} = 2.3 \cdot 10^{43} \gg 1$

la réaction est quantitative à 300K.

2.1.4 on opère à température élevée, alors que l'équilibre est exothermique $\Delta_r H^\circ < 0$, pour des raisons cinétiques. En fait la réaction est quantitative à 300K mais très lente.

2.2 Décomposition de l'oxyde mercurique

2.2.1 -dans le cas général ($\sum \nu_i(\text{gaz}) \neq 0$) : $v = (3 + 2) - (1 + 2 + 0) = 2$, on peut choisir T et p librement.

-lorsqu'on introduit initialement uniquement $HgO(s)$, on aura une relation supplémentaire : $p(O_2) = p(Hg)/2$

donc $v' = (3 + 2) - (1 + 2 + 1) = 1$, T et p deviennent liées.

2.2.2 car l'équilibre n'est pas encore atteint, autrement les quantités de gaz formés O_2 et Hg ne sont pas suffisants pour équilibrer la réaction dans le sens inverse.

2.2.3 à $T = 800 \text{ K}$, $K_2 = 6.2$:

	$2HgO(s) \rightleftharpoons O_2(g) + 2Hg(g)$			$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n	0	0	0
$t > 0$	$n - 2x$	x	$2x$	$3x$

n_0 est la quantité n telle que $n - 2x = 0^+$, l'équilibre est à peine réalisé.

$$\text{à l'équilibre : } K_2 = \frac{\frac{p(O_2)}{P^\circ} \times (\frac{p(Hg)}{P^\circ})^2}{1} = \frac{P}{3P^\circ} \cdot (\frac{2P}{3P^\circ})^2 = \frac{4}{27} \cdot (\frac{P}{P^\circ})^2$$

$$\text{donc } P = 6.47 \text{ bar or la loi des gaz parfaits } P = \frac{n_{tot}(gaz)RT}{V}$$

$$\text{soit : } x = \frac{PV}{3RT} = \frac{6.47 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 8.314 \cdot 800} = 32.4 \text{ mmol} \Rightarrow n_0 = 2x = 64.8 \text{ mmol} \text{ ceci correspond à une masse } m_0 = n_0 \cdot M(HgO) = 14 \text{ g, très faible}$$

2.2.4 si $n < n_0$ l'équilibre n'est pas atteint :

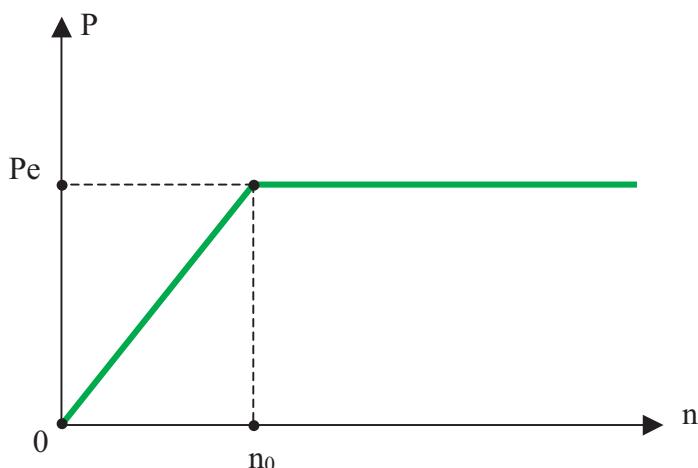
	$2HgO(s) \rightleftharpoons O_2(g) + 2Hg(g)$			$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n	0	0	0
$t = t_f$	0	$n/2$	n	$3n/2$

$$\text{la loi des gaz parfaits donne : } P = \frac{2nRT}{3V}$$

et si $n > n_0$ l'équilibre est atteint :

	$2HgO(s) \rightleftharpoons O_2(g) + 2Hg(g)$			$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n	0	0	0
$t = t_{eq}$	$n - n_0$	$n_0/2$	n_0	$3n_0/2$

$$\text{la loi des gaz parfaits donne : } P = \frac{2n_0RT}{3V} = P_e, \text{ en accord avec 2.2.1.}$$



2.2.5 à $T = 800 \text{ K}$ on a $P \leq P_e = 6.47 \text{ bar} < P_s(Hg) = 11.6 \text{ bar}$, le mercure liquide ne se formera pas.

2.2.6 on suppose que, sous vide, le mercure introduit est totalement vaporisé :

	$2HgO(s) \rightleftharpoons O_2(g) + 2Hg(g)$			$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n	0	N	N
$t = t_{eq}$	$n - 2x$	x	$2x + N$	$3x + N$

$$\text{à l'équilibre on a } K_2 = \frac{p(O_2)}{P^\circ} \times \left(\frac{p(Hg)}{P^\circ}\right)^2$$

$$\text{et d'après la loi des gaz parfaits } (p(O_2) + p(Hg))V = n_{tot}(gaz)RT$$

le mercure se liquifie si $p(Hg) \geq P_s(Hg)$, tel que $N = N_0$ si $p(Hg) = P_s(Hg) = 11.6 \text{ bar}$

$$\text{soit : } p(O_2) = \frac{K_2}{(p(Hg))^2} = 46 \text{ mbar}$$

on en tire $n_{tot}(gaz) = \frac{p(O_2) + p(Hg)}{RT} V = 0.175 \text{ mol}$

il reste à déterminer x et N_0 , on a : $3x + N_0 = 0.175 \text{ mol}$ et $p(O_2) = \frac{x}{n_{tot}(gaz)} P$

soit $x = \frac{n_{tot}(gaz)}{P} p(O_2) = \frac{0.175}{11.6+0.046} 0.046 = 0.69 \text{ mmol}$

finalement

$$N_0 = n_{tot}(gaz) - 3x = 0.175 - 3 \times 0.69 \cdot 10^{-3} = 0.173 \text{ mol}$$

2.2.7 la variance du système $\{O_2(g), Hg(g), Hg(l), HgO(s)\}$ s'écrit :

$$v = (3 + 2) - (1 + 3 + 0) = 1$$

$P = f(T)$, la température étant fixée à 800 K donc la pression d'équilibre est alors imposée par nature, elle est indépendante de $N > N_0$.

3^{ème} partie :
Chlorure mercureux ou calomel

3.1 Solubilité du calomel

3.1.1 l'équilibre de dissolution du calomel dans l'eau pure s'écrit :

$Hg_2Cl_2(s) \rightleftharpoons Hg_2^{2+} + 2Cl^-$			
$t = 0$	n	0	0
$t = t_{eq}$	$n - s.V$	$s.V$	$2s.V$

avec $K_s = \frac{[Hg_2^{2+}][Cl^-]^2}{c^3} = 4s^3$ soit $K_s = 1.26 \cdot 10^{-18}$

3.1.2 l'équilibre de dissolution du calomel dans une solution KCl ($10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$) s'écrit :

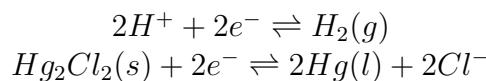
$Hg_2Cl_2(s) \rightleftharpoons Hg_2^{2+} + 2Cl^-$			
$t = 0$	n	0	$10^{-2}.V$
$t = t_{eq}$	$n - s'.V$	$s'.V$	$(2s' + 10^{-2}).V$

avec $K_s = \frac{[Hg_2^{2+}][Cl^-]^2}{c^3} \Rightarrow s'(2s' + 10^{-2})^2 = 1.26 \cdot 10^{-18}$

c'est une équation 3^{ème} degré, qu'on résout par approximation. En effet, $s' < s \ll 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$ donc $s'(10^{-2})^2 = 1.26 \cdot 10^{-18} \Rightarrow s' \approx 1.26 \cdot 10^{-14} \text{ mol.l}^{-1} \ll s = 6.8 \cdot 10^{-7} \text{ mol.l}^{-1}$

3.2 Mesure d'un potentiel standard

3.2.1 les deux demi-réactions intervenant dans la pile sont :



les potentiels redox s'écrivent, d'après Nernst :

$$\begin{aligned} E_+ &= E^\circ_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} + \frac{0.06}{2} \log \frac{1}{[Cl^-]^2} \\ E_- &= E^\circ_{H^+/H_2} + \frac{0.06}{2} \log \frac{[H^+]^2}{p(H_2)} \end{aligned}$$

avec $p(H_2) = 1 \text{ bar}$, $[H^+] = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$, $E^\circ_{H^+/H_2} = 0 \text{ V}$

et d'après on a $[Cl^-] \approx 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$.

donc $e_1 = E_+ - E_- = E^\circ_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} + 0.240 = 0.510 \text{ V}$ soit $E^\circ_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} = 270 \text{ mV}$

3.2.2 la demi-réaction du couple $Hg_2^{2+}/Hg(l)$: $Hg_2^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons 2Hg(l)$

le potentiel redox s'écrit : $E_2 = E_2^\circ + \frac{0.06}{2} \log [Hg_2^{2+}]$ or $[Hg_2^{2+}] = \frac{K_s}{[Cl^-]^2}$

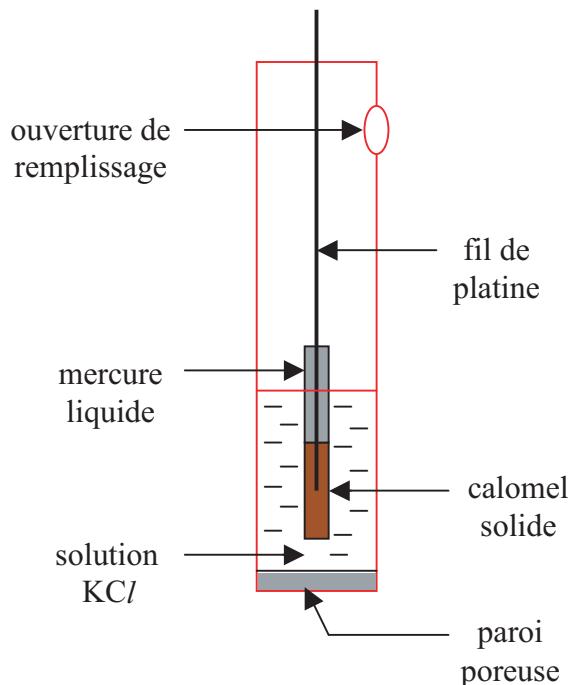
soit $E_{I/0} = \underbrace{E^\circ_{Hg_2^{2+}/Hg(l)}}_{0.03 \log K_s} + \frac{0.06}{2} \log \frac{1}{[Cl^-]^2} = E^\circ_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} + \frac{0.06}{2} \log \frac{1}{[Cl^-]^2}$

soit :

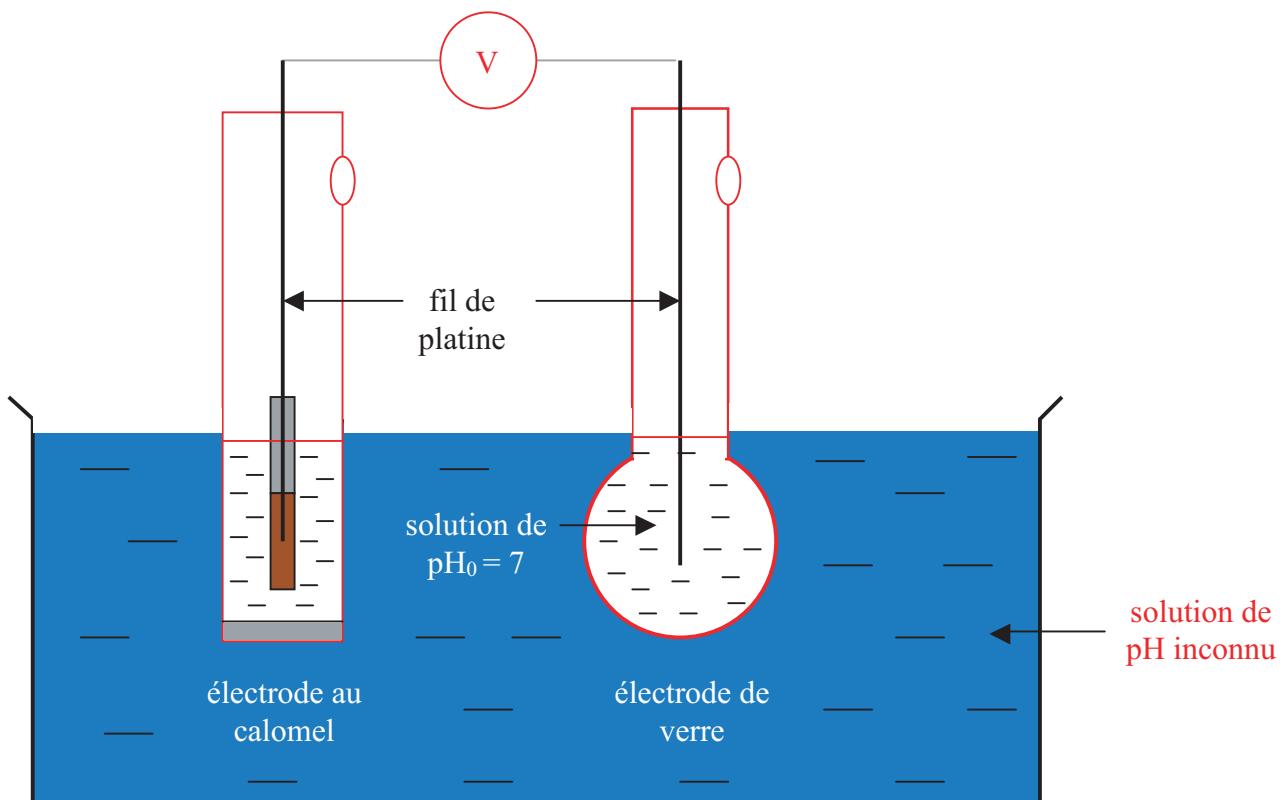
$$E^\circ_{Hg_2^{2+}/Hg(l)} = E^\circ_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} - 0.03 \log K_s = -807 \text{ mV}$$

3.3 Électrode au calomel saturée

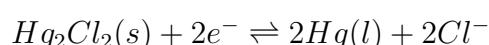
3.3.1 :



3.3.2 la ddp de la pile formée par une électrode de verre et une électrode au calomel est une fonction affine du pH de la solution :



3.3.3 la demi-réaction intervenant dans la demi-pile est :

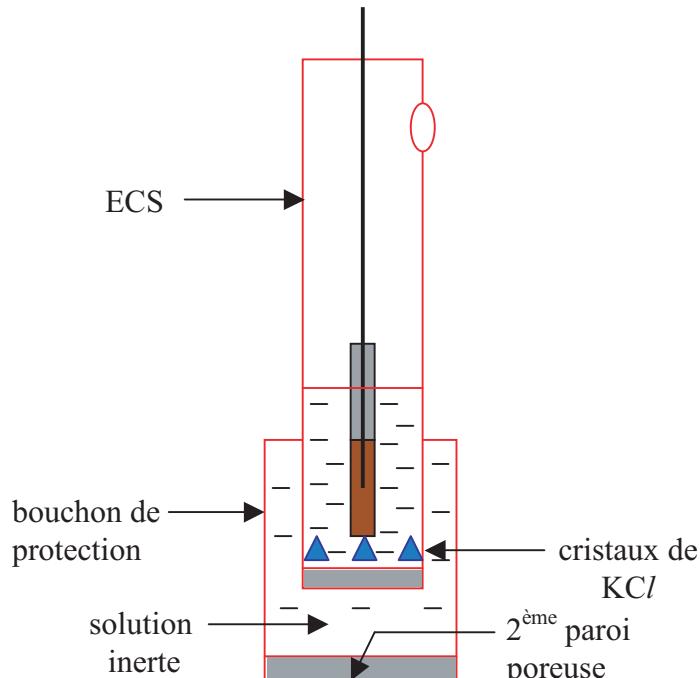


le potentiel redox s'écrit, d'après Nernst :

$$E_{EC} = E^{\circ}_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} + \frac{0.06}{2} \log \frac{1}{[Cl^-]^2} = E^{\circ}_{Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)} - 0.06 \log c$$

3.3.4 une électrode dont le potentiel redox est une constante indépendante des conditions d'utilisation, une électrode au calomel dont c est fixée par saturation de la solution de KCl , appelée électrode au calomel saturée ECS.

3.3.5 une ECS ne doit pas être utiliser dans une solution contenant les ions Ag^+ sous peine de précipiter le chlorure d'argent $AgCl$ qui bouche la paroi poreuse et fausse la valeur de $[Cl^-]$. Dans une solution des ions Ag^+ , l'ECS doit être protégée par une deuxième paroi poreuse comme indiquée dans la figure.



3.3.6 dans l'eau pure, la dissolution de KCl s'écrit :

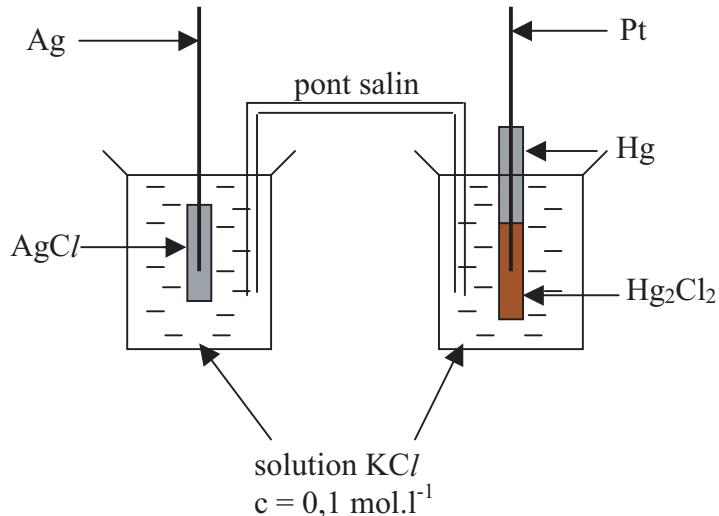
$KCl(s) \rightleftharpoons K^+ + Cl^-$			
$t = 0$	n	0	0
$t = t_{eq}$	$n - s.V$	$s.V$	$s.V$

$$\text{donc } c = [Cl^-] = s = \frac{w}{M(KCl)} = 4.76 \text{ mol.l}^{-1}$$

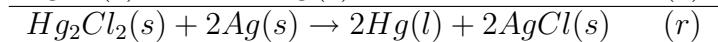
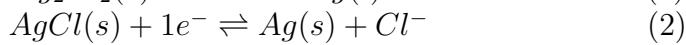
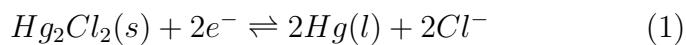
soit, d'après 3.2.1 et 3.3.3 $E_{ECS} = 244 \text{ mV}$

3.4 Mesure d'une grandeur thermodynamique

3.4.1 :



3.4.2 les deux demi-réactions intervenant dans la pile sont :



les potentiels redox s'écrivent :

$$E_+ = E^\circ_1 + \frac{RT}{2F} \ln \frac{1}{[Cl^-]^2}$$

$$E_- = E^\circ_2 + \frac{RT}{1F} \ln \frac{1}{[Cl^-]}$$

3.4.3 d'une part on a la force électromotrice de la pile : $e = E_+ - E_- = E^\circ_1 - E^\circ_2$

d'autre part on a : $(r) = (1) - 2 \times (2)$, or pour chaque demi-réaction on a $\Delta_r G^\circ_i = -n_i F E_i$
donc : $\Delta_r G^\circ = (-2FE^\circ_1) - 2 \times (-1FE^\circ_2) = -2F.e \Rightarrow \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ = -2F.e(T)$

soit :

$$\begin{cases} \Delta_r H^\circ - 298 \Delta_r S^\circ = -2 \cdot 9.65 \cdot 10^4 \cdot 46.00 \cdot 10^{-3} \text{ J.mol}^{-1} & T=298 \text{ K} \\ \Delta_r H^\circ - 353 \Delta_r S^\circ = -2 \cdot 9.65 \cdot 10^4 \cdot 65.03 \cdot 10^{-3} \text{ J.mol}^{-1} & T=353 \text{ K} \end{cases}$$

il vient : $\Delta_r H^\circ = -11 \text{ kJ.mol}^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ = -66.8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

3.4.4 on a : $\Delta_r S^\circ = \sum \nu_i S_m^\circ_{mi} = 2 S_m^\circ(AgCl) + 2 \times S_m^\circ(Hg) - S_m^\circ(Hg_2Cl_2) - 2 \times S_m^\circ(Ag)$

d'après les données :

$$| S_m^\circ(Hg_2Cl_2) = 326.2 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} > 0$$

d'après le troisième principe l'entropie molaire absolue est toujours positif.

la loi de Hess pour la réaction (r) s'écrit :

$$\Delta_r H^\circ = 2 \Delta_r H_f^\circ(AgCl) + 2 \times 0 - \Delta_r H_f^\circ(Hg_2Cl_2) - 2 \times 0$$

soit :

$$| \Delta_r H_f^\circ(Hg_2Cl_2) = -243.2 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

fin du corrigé

Les halogènes

Le problème s'intéresse à l'étude de quelques aspects de la chimie des halogènes. Il est constitué de 4 parties , largement indépendantes entre elles et pouvant être traitées dans un ordre quelconque.

Données utiles

– Données générales

- Nombre d'Avogadro $N_A = 6.023 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
- constante des gaz parfaits $R = 8.314 JK^{-1}mol^{-1}$
- Constante de FARADAY : $F = 9.65 \cdot 10^4 C.mol^{-1}$;

$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0.06 V$ à $T = 298 K$, $F = N_A e$ désignant la constante de Faraday et \ln le logarithme népérien

– Rayons ioniques :

Ion	Cs^+	Na^+	Cl^-
$R_i(nm)$	0,169	0,098	0,181

- pK_a du couple hypochloreux ($HClO$)/ ion hypochlorite (ClO^-) en solution aqueuse à 298 K : $pK_a = 7,5$
- Potentiels standard d'oxydoréduction en solution aqueuse à 298 K :

Couple	$Na^+/Na(s)$	$S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$	$I_2(aq)/I^-$	O_2/H_2O	$Cl_2(g)/Cl^-$	$HClO/Cl_2(g)$
$E^\circ(V)$	-2,71	0,08	0,62	1,23	1,36	1,63

- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie :

Quelques propriétés structurales

Les halogènes occupent l'avant-dernière colonne de la table périodique des éléments, Ils possèdent donc tous la structure électronique externe ns^2np^5 dans l'état fondamental.

1.1 Pourquoi les halogènes possèdent-ils tous le degré d'oxydation stable -I ?

1.2 Le premier élément de la série des halogènes est le fluor F.

1.2.1 Quel est le numéro atomique Z du fluor ? Donner sa configuration électronique complète dans l'état fondamental.

1.2.2 Donner une définition de l'électronégativité. Commenter son évolution dans la table périodique des éléments. Quel est l'élément le plus électronégatif de la table périodique ?

1.3 Le chlore est le deuxième élément de la série des halogènes.

1.3.1 Donner la configuration électronique du chlore dans l'état fondamental.

1.3.2 À l'état naturel, le chlore possède deux isotopes stables : ^{35}Cl et ^{37}Cl . Déterminer leurs abondances respectives a_{35} et a_{37} sachant que la masse molaire du chlore est $M_{Cl} = 35,5 g.mol^{-1}$

1.3.3 Les deux éléments suivants de la série des halogènes sont le brome Br et l'iode I.

1.3.3.1 Dans quel état physique (solide, liquide ou gaz) se trouve, dans les conditions normales de température et de pression, chacun des éléments de la série des halogènes cités ci-dessus.

1.3.3.2 Citer pour chacun des quatre éléments précédents une application domestique ou au laboratoire en indiquant dans ce dernier cas la ou les réactions chimiques misées en jeu.

2^{ème} partie :
Cristallographie des halogénures ioniques

2.1 Structure du chlorure de césium

Dans la structure $CsCl$, les ions Cl^- forment un réseau cubique simple et les ions Cs^+ occupent les sites cubiques de ce réseau.

2.1.1 Quel est le type d'assemblage constitué par les ions Cs^+ ? En déduire que l'on peut passer de l'assemblage des ions Cl^- à celui des ions Cs^+ par une translation que l'on précisera.

2.1.2 Quel est le rayon du plus grand atome ou ion, supposé sphérique, qui peut être inséré dans un site cubique d'un réseau cubique simple hypothétique formé par les ions Cl^- ?

2.1.3 En déduire que dans la structure $CsCl$ la tangence des ions Cs^+ et Cl^- a lieu le long de la grande diagonale du cube et calculer le paramètre de maille de $CsCl$.

2.1.4 Déterminer la compacité de la structure $CsCl$ et comparer à celle de la structure cubique simple. Commenter.

2.2 Structure du chlorure de sodium

Reprendre l'étude précédente pour la structure du chlorure de sodium $NaCl$ dans laquelle les ions chlorure Cl^- forment un réseau cubique à faces centrées, dont les sites octaédriques sont occupés par les ions Na^+ . On comparera en particulier la compacité d'une telle structure avec celle de la structure $CsCl$ d'une part celle d'un réseau cubique à faces centrées d'autre part.

3^{ème} partie :
À propos de l'eau de Javel

L'eau de Javel est une solution aqueuse équimolaire d'hypochlorite de sodium (Na^+, ClO^-) et de chlorure de sodium (Na^+, Cl^-). Au laboratoire, une telle solution peut être préparée par dissolution du dichlore dans une solution aqueuse basique d'hydroxyde de sodium.

3.1 Dissolution du dichlore dans l'eau

3.1.1 Calculer la variance de l'équilibre : $Cl_2(gaz) \rightleftharpoons Cl_2(aqueux)$ et commenter le résultat obtenu.

3.1.2 Écrire la condition d'équilibre physique du dichlore entre la solution aqueuse et la phase gazeuse. On notera respectivement μ_g^0 et μ_{aq}^0 les potentiels chimiques standard du dichlore respectivement en phase gazeuse et en solution aqueuse considérée idéale.

3.1.3 En déduire que la concentration $[Cl_2]$ du dichlore en solution aqueuse est proportionnelle à sa pression partielle p_{Cl_2} en phase gazeuse. Exprimer la constante de proportionnalité K à l'aide des potentiels chimiques du dichlore. De quel(s) paramètre(s) dépend-elle?

3.1.4 Montrer que l'on peut exprimer la constante K à l'aide des potentiels standard d'oxydoréduction des couples rédox Cl_{2g}/Cl^- et Cl_{2aq}/Cl^- en solution aqueuse. Déterminer la valeur numérique de la constante K à 298 K sachant qu'à cette température $E^0(Cl_{2aq}/Cl^-) = 1,40\text{ V}$.

3.1.5 En déduire à 298 K, la valeur du potentiel standard d'oxydoréduction du couple $HClO/Cl_{2aq}$ en solution aqueuse.

3.2 Dismutation du dichlore

3.2.1 Quelle est la valeur du degré d'oxydation du chlore dans l'acide hypochloreux $HClO$?

3.2.2 Quelle est, selon le modèle V.S.E.P.R, la géométrie de la molécule d'acide hypochloreux?

3.2.3 Écrire l'équation bilan de la réaction de dismutation du dichlore. Dans cette écriture, on fera figurer l'élément chlore au degré d'oxydation $+I$ sous forme d'acide hypochloreux.

3.2.4 Calculer la constante K_D de l'équilibre de dismutation lorsque la réaction bilan est écrite pour une mole de Cl_2 .

3.2.5 Montrer que l'on peut écrire $K_D = \beta[H_3O^+]$ et donner l'expression de β . Que représente le cas $\beta = 1$? Calculer la valeur pH_D du pH pour laquelle $\beta = 1$. Dans quel domaine de pH y a-t-il dismutation du dichlore en solution aqueuse?

3.2.6 Pour quelles raisons l'eau de Javel doit-elle être basique? Que se passe-t-il lorsque l'on ajoute de l'acide chlorhydrique dans l'eau de Javel? Est-ce dangereux?

3.3 Dosage d'une eau de Javel

3.3.1 Mode opératoire

Le dosage d'une solution commerciale d'eau de Javel a pour but de déterminer son degré chlorométrique D° défini comme étant le volume du dichlore gazeux qui peut être dégagé, dans les conditions normales de température et de pression par litre de solution commerciale. Le mode opératoire proposé pour déterminer D° se déroule en plusieurs étapes :

- i) on prélève 20 mL de la solution commerciale et on complète à 200 mL à l'aide d'eau distillée pour constituer une solution S_1 ;
- ii) on prélève un échantillon de 10 mL de S_1 et on y ajoute 50 mL d'eau distillée, 2 g d'iodure de potassium et 2 mL d'acide chlorhydrique concentré;
- iii) on dose ensuite le diiode ainsi libéré par une solution de thiosulfate de sodium ($2Na^+, S_2O_3^{2-}$) de concentration 0,1 $mol.l^{-1}$

3.3.2 Pourquoi opère-t-on en milieu acide?

3.3.3 Donner le schéma du montage expérimental utilisé au laboratoire pour un tel dosage en rappelant les noms des différents matériels utilisés.

3.3.4 Quel est le dispositif qui permet d'assurer l'homogénéisation de la solution au cours du dosage.

3.3.5 Écrire la réaction prépondérante traduisant l'étape ii).

3.3.6 Écrire de même la réaction de dosage et dire comment on peut repérer le point d'équivalence.

3.3.7 Exprimer la quantité de matière $n(Cl_2)$ que peut libérer un litre de solution commerciale en fonction du volume v_e de thiosulfate de sodium versé à l'équivalence.

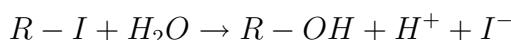
3.3.8 En déduire le degré chlorométrique de la solution commerciale d'eau de Javel sachant que $v_e = 16,5\text{ mL}$.

3.3.9 Montrer que les ions iodures ajoutés dans l'étape ii) constituent bien un excès. Pourquoi est-ce nécessaire? On donne les masses molaires atomiques du potassium $M(K) = 39,1\text{ g.mol}^{-1}$ et de l'iode $M(I) = 127\text{ g.mol}^{-1}$

4^{ème} partie :

Cinétique d'hydrolyse d'un iodoalcane

On se propose d'étudier la réaction d'hydrolyse se traduisant par une substitution nucléophile des ions iodures I^- du 2-iodo-2-méthylpropane par les ions hydroxides OH^- provenant de l'eau. Dans la suite le 2-iodo-2-méthylpropane sera noté $R - I$. L'équation bilan de cette réaction s'écrit :



4.1 Étude théorique

On se propose de vérifier que cette réaction est d'ordre 1 par rapport à $R - I$. Pour cela on note a la concentration initiale en $R - I$ et $a - x(t)$ sa concentration à l'instant t .

- 4.1.1** Exprimer $x(t)$ en fonction de t , a et de la constante de vitesse k de la réaction d'hydrolyse.
- 4.1.2** Montrer que si l'on mesure la concentration x à intervalle de temps constant $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, alors le rapport

$$b = \frac{a - x_i}{a - x_{i+1}}$$

où $x_i = x(t_i)$ et $x_{i+1} = x(t_{i+1})$, est constant. Exprimer x_i en fonction de a , b et x_{i+1} . Montrer que b s'exprime uniquement en fonction de k et Δt .

4.2 Mesures expérimentales

L'évolution du système est suivi par conductimétrie. Les conditions opératoires sont telles que la conductance C de la solution est proportionnelle à la concentration $x(t)$ des ions I^- . Le tableau 1 résume les résultats expérimentaux obtenus. Le temps t y est exprimé en minute et la conductance C en microsiemens.

$t(\text{min})$	0	2	4	6	8	10	12	14	15	16	18	20	22	24
$C(\mu\text{S})$	5,5	13,0	20,0	26,0	31,0	36,0	39,0	43,5	44,8	46,0	48,0	51,0	51,0	54

Tableau 1 : Évolution de la conductance du milieu réactionnel au cours du temps

- 4.2.1** Représenter le montage expérimental permettant de suivre la conductance du milieu réactionnel au cours du temps.
- 4.2.2** Tracer la courbe $C_i = f(C_{i+1})$ pour des intervalles de temps constants et en déduire la constante de vitesse k de la réaction d'hydrolyse du 2-iodo-2-méthylpropane. Commenter.

fin de l'énoncé

Les halogènes

1^{ère} partie : Quelques propriétés structurales

1.1 après avoir reçu un électron , un halogène acquiert la configuration stable du gaz noble ns^2np^6

1.2

1.2.1 $Z_F = 9$, F : $1s^22s^22p^5$

1.2.2 l'électronégativité χ mesure la tendance d'un atome à attirer le doublet de la liaison vers lui
 χ croît sur une colonne de bas en haut et sur une ligne de gauche à droite (i.e : comme un repère Oxy)

l'élément le plus électronégatif est le fluor F

1.3

1.3.1 Cl : $1s^22s^22p^63s^23p^5$

1.3.2 on a $a_{35} + a_{37} = 1$ et $M_{Cl} = 35 a_{35} + 37 a_{37} = 35.5 g mol^{-1}$ soit : $a_{35} = 75\%$ et $a_{37} = 25\%$

1.3.3

1.3.3.1 le brome se trouve sous $Br_2(liquide)$ et l'iode sous forme de $I_2(solide)$

1.3.3.2 :

élément	application
Fluor	dentifrice
chlore	eau de Javel
iode	sel iodé de cuisine
brome	pellicule d'un appareil photo

2^{ème} partie : Cristallographie des halogénures ioniques

2.1 Structure du chlorure de césum

2.1.1 les Cs^+ occupent un réseau cubique simple translaté par $\vec{t} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}$

2.1.2 suivant la diagonale principale du cube $\sqrt{3}a = 2r_{max} + 2R(Cl^-)$ or le contact hypothétique de deux Cl^- suivant un arrête $a = 2R(Cl^-)$ soit $r_{max} = (\sqrt{3} - 1)R(Cl^-) = 0.132 nm$

2.1.3 $R(Cs^+) = 0.169 nm > r_{max}$ le contact sera suivant la diagonale principale
donc $\sqrt{3}a = 2R(Cs^+) + 2R(Cl^-)$ soit $a = 0.404 nm$

2.1.4 $C = \frac{V_{occupé}}{V_{maille}} = \frac{1 \times (\frac{4}{3}\pi R_-^3 + \frac{4}{3}\pi R_+^3)}{a^3} = 68.3\%$

2.2 Structure du chlorure de sodium

2.2.1 les Na^+ occupent un réseau cubique à faces centrées translaté par $\vec{t} = \frac{\vec{a}}{2}$

2.2.2 suivant l'arête du cube $a = 2r_{max} + 2R(Cl^-)$ or le contact hypothétique de deux Cl^- suivant la diagonale d'une face $\sqrt{2}a = 4R(Cl^-)$ soit $r_{max} = (\sqrt{2} - 1)R(Cl^-) = 0.075 nm$

2.2.3 $R(Na^+) = 0.098 \text{ nm} > r_{max}$ le contact sera suivant l'arrête

donc $a = 2R(Na^+) + 2R(Cl^-)$ soit $a = 0.558 \text{ nm}$

$$\mathbf{2.2.4} \quad C = \frac{V_{occupe}}{V_{maille}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_-^3 + \frac{4}{3}\pi R_+^3}{a^3} = 66.2\%$$

3^{ème} partie :
À propos de l'eau de Javel

3.1 Dissolution du dichlore dans l'eau

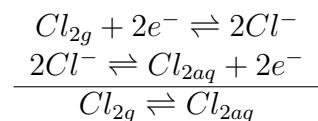
3.1.1 $v = (n + a) - (r + \varphi + q) = (1 + 2) - (0 + 2 + 0) = 1$, on ne peut choisir librement qu'un seul paramètre (T par exemple), autrement dit $P = f(T)$

3.1.2 à l'équilibre $A = 0$ soit $\mu_{aq} = \mu_g \implies \mu_{aq}^0 + RT \ln \frac{[Cl_2]}{C^0} = \mu_g^0 + RT \ln \frac{p_{Cl_2}}{p^0}$

3.1.3 $[Cl_2] = \frac{C^0 p_{Cl_2}}{p^0} \exp \frac{\mu_g^0 - \mu_{aq}^0}{RT}$ avec $C^0 = 1 \text{ mol l}^{-1}$ et $p^0 = 1 \text{ bar}$

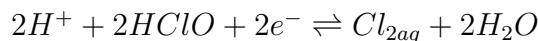
la constante $K = \exp \frac{\mu_g^0(T) - \mu_{aq}^0(T)}{RT}$ qui ne dépend que de la température

3.1.4 les deux demi-réactions s'écrivent



soit $K = 10^{2 \times \frac{E^0(Cl_{2g}/Cl^-) - E^0(Cl_{2aq}/Cl^-)}{0.06}}$ A.N : données $K = 46.4 \cdot 10^{-3}$

3.1.5 la demi-réaction pour le couple $HClO/Cl_{2aq}$ s'écrit



Nernst $E = E^0_{(HClO/Cl_{2aq})} + \frac{0.06}{2} \log \frac{h^2[HClO]^2}{[Cl_2]}$

d'après 3.1.3 $[Cl_2] = K p_{Cl_2}$ soit $E = (E^0_{(HClO/Cl_{2aq})} + \frac{0.06}{2} \log \frac{1}{K}) + \frac{0.06}{2} \log \frac{h^2[HClO]^2}{p_{Cl_2}}$

donc $E^0_{(HClO/Cl_{2g})} = E^0_{(HClO/Cl_{2aq})} + \frac{0.06}{2} \log \frac{1}{K}$

$$\implies E^0_{(HClO/Cl_{2aq})} = E^0_{(HClO/Cl_{2g})} + \frac{0.06}{2} \log K = 1.59 \text{ V}$$

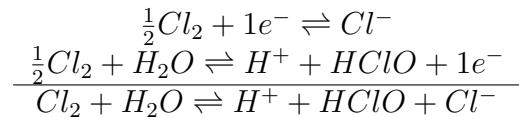
3.2 Dismutation du dichlore

3.2.1 $n.o(Cl) = +I$

3.2.2 Lewis $H - \overline{O} - \overline{Cl}$ de formule AB_2E_2 selon VSEPR la molécule sera de forme en "V"

3.2.3 le dichlore appartient aux couples $HClO/Cl_{2aq}$ et Cl_2/Cl^-

soit les deux demi-réactions



3.2.4 $K_D = 10^{1 \times \frac{E^0_{(Cl_{2aq}/Cl^-)} - E^0_{(HClO/Cl_{2aq})}}{0.06}} = 6.8 \cdot 10^{-4}$

3.2.5 $K_D = \frac{[HClO][Cl^-]h}{[Cl_2]} \implies \beta = \frac{[HClO][Cl^-]}{[Cl_2]}$

le cas $\beta = 1$ est la limite entre les domaines de prédominance du réactif Cl_2 d'une part et des espèces produites $HClO$ et Cl^- d'autre part

$$pH_D = -\log K_D = 3.16$$

si $pH < pH_D \implies \beta < 1 \implies Cl_2$ est majoritaire, il n'y a pas dismutation

si $pH > pH_D \implies \beta > 1 \implies Cl_2$ est minoritaire, il y a dismutation

3.2.6 pour avoir la dismutation du dichlore

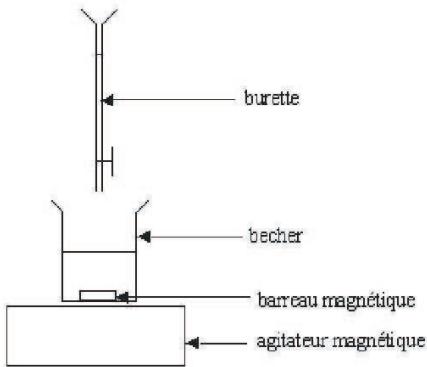
après l'ajout de HCl on obtient une eau de Javel acide tel que $pH < pH_D$, le Cl_{2aq} est majoritaire et d'après 3.1.1, il y aura dégagement de Cl_2 qui est très toxique!

3.3 Dosage d'une eau de Javel

3.3.1 Mode opératoire

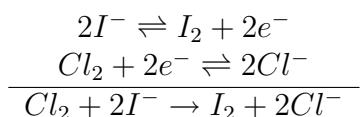
3.3.2 en milieu acide l'élément chlore est sous la seule forme Cl_2 qu'on veut doser

3.3.3 :

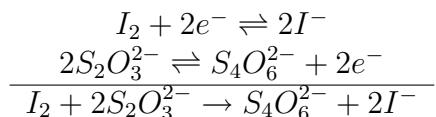


3.3.4 barreau et agitateur magnétique

3.3.5 les deux demi-réactions s'écrivent



3.3.6 les deux demi-réactions s'écrivent



3.3.7 à l'équivalence $\frac{n(S_2O_3^{2-})}{2} = n(I_2) = n(Cl_2) \implies n(Cl_2) = \frac{v_e \times 0.1}{2}$

3.3.8 soit n_0 le nombre de moles dans 1L d'eau de Javel commercial

dans 20 mL on a $n_1 = \frac{n_0}{1} \times 0.020 \text{ mol}$, en complétant avec l'eau distillée (180 mL), la quantité de matière de Cl_2 dans S_1 est inchangé

dans 10 mL de S_1 on a $n(Cl_2) = \frac{n_1}{0.200} \times 0.010 \text{ mol} = \frac{n_0 \times 0.020 \times 0.010}{0.200} \text{ mol}$

finalement $n_0 = 1000 \times n(Cl_2) = 1000 \times \frac{16.5 \times 10^{-3} \times 0.1}{2} \text{ mol} = 0.825 \text{ mol}$

dans les conditions normales le volume molaire du gaz parfait Cl_2 est $V_m = \frac{V}{n_0} = 22.4 \text{ Lmol}^{-1}$
soit $V = 0.825 \times 22.4 \text{ L} = 18.5 \text{ L}$ donc $D^\circ = 18.5^\circ$

3.3.9 la quantité de matière de I_2 utile est $n(I_2) = \frac{16.5 \times 10^{-3} \times 0.1}{2} \text{ mol} = 0.825 \text{ mmol}$

or la masse de KI ajoutée est 2g càd $n(I^-)_{ajoute} = \frac{2}{39.1+127} \text{ mol} = 12 \text{ mmol} > 2 \times 0.825 \text{ mmol}$
c'est donc bien un excès

c'est nécessaire pour transformer tout les Cl_2 existant, sinon la relation $n(Cl_2) = n(I_2)$ serait fausse !

4^{ème} partie :
Cinétique d'hydrolyse d'un iodoalcan

4.1 Étude théorique

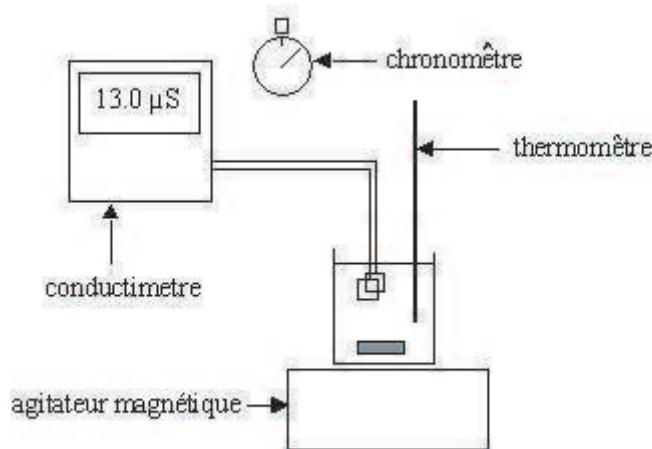
	$R - I$	H_2O	$R - OH$	I^-	H^+
$t = 0$	a	-	0	0	-
$t > 0$	a-x	-	x	x	-

4.1.1 on a $\frac{d[RI]}{dt} = -k[RI]$ soit $\dot{x} = k(a - x)$ donc $x(t) = a + B \exp(-kt)$ or à $t = 0$ $x(0) = 0$
soit $x(t) = a(1 - \exp(-kt))$

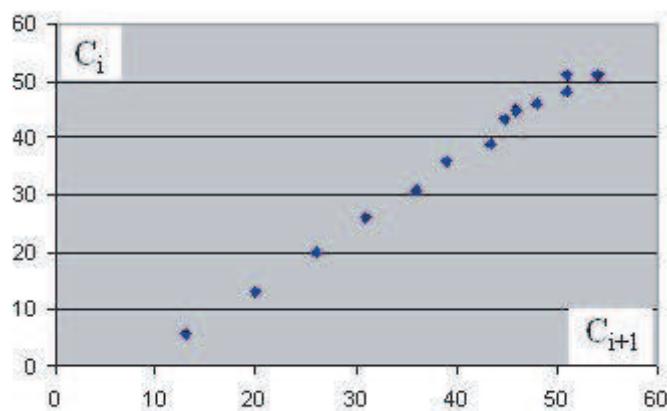
4.1.2 on a $b = \frac{a - x_i}{a - x_{i+1}} = \frac{a \exp(-kt_i)}{a \exp(-kt_{i+1})} = \exp(k\Delta t)$ est une constante
on a $a - x_i = b(a - x_{i+1})$ donc $x_i = a(1 - b) + bx_{i+1}$, $x_i = f(x_{i+1})$ est une droite

4.2 Mesures expérimentales

4.2.1 :



4.2.2 :



on a $C_i = \lambda x_i$ avec λ est une constante de proportionnalité

soit $C_i = bC_{i+1} + \lambda a(1 - b)$, la pente de la courbe $b = \frac{51 - 5.5}{54 - 13} = 1.1$ or $b = \exp(k\Delta t)$

soit $k = \frac{\ln b}{\Delta t} = 7.9 \cdot 10^{-4} s^{-1}$

ceci vérifie d'une part que l'ordre de la réaction en $R - I$ est bien un , et d'autre par la constante de temps de la cinétique est $\tau = \frac{1}{k} = 21 \text{ min}$, la réaction est relativement lente !

fin du corrigé

Le Nickel

On se propose dans ce problème de passer en revue quelques aspects de la chimie du nickel. Aucune connaissance préalable de la chimie de cet élément n'est requise pour traiter le problème. Les principaux minerais du nickel sont la *garnierite* de Nouvelle Calédonie et la *pyrrhotine-nickélfière* du Canada . Nous commencerons par étudier quelques propriétés de la structure électronique du nickel puis cristallographique du nickel métallique et de son oxyde . Nous passerons ensuite à l'étude de la métallurgie de cet élément avant d'aborder quelques unes de ses applications relatives à la chimie des solutions

Données utiles :

- Données générales

Nombre d'Avogadro $\aleph_A = 6.022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

constante des gaz parfaits $R = 8.314 JK^{-1}mol^{-1}$

$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0.06 V$ à $T = 298 K$, $F = \aleph_A e$ désignant la constante de Faraday et \ln le logarithme népérien

- Entropies standard absolues à 298 K (g : gaz , s : solide)

$S^\circ (JK^{-1}mol^{-1})$	$O_2(g)$	$C(s)$	$Ni(s)$
205	6,0	30,0	

- Masses molaires atomiques

Elément	O	Ni
$M(g.mol^{-1})$	16,0	58,7

- Rayon ionique de O^{2-} : $R(O^{2-}) = 140 pm$

- Masse volumique du nickel : $\rho(Ni) = 8,90 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$

- Constante d'acidité du couple NH_4^+/NH_3 en solution aqueuse à 298 K : $pK_a = 9,2$

- Constante d'acidité de l'acide éthylènediaminetétraacétique H_4Y en solution aqueuse à 298 K :

$pK_{a,1}$	$pK_{a,2}$	$pK_{a,3}$	$pK_{a,4}$
2,0	2,7	6,2	10,3

- Constantes de formation de complexes en solution aqueuse à 298 K :

$$\begin{aligned} \log \beta([NiY]^{2-}) &= \log \beta_a = 18,6 \\ \log \beta([Ni(NH_3)_6]^{2+}) &= \log \beta_b = 8,0 \end{aligned}$$

- Potentiels standard d'oxydoréduction en solution aqueuse à 298 K :

Couple ox/red	$Ni^{2+/Ni}$	Fe^{2+}/Fe
$E^\circ(V)$	-0,25	-0,44

- Règles de Slater

Energie (en eV) des orbitales de Slater : $E = -13.6 \left(\frac{Z^*}{n^*}\right)^2$

n est le nombre quantique principale et n^* le nombre quantique apparent donné par le tableau ci-après :

n	1	2	3	4	5	6
n^*	1,0	2,0	3,0	3,7	4,0	4,2

$Z^* = Z - \sigma$ est le nombre atomique effectif et σ la constante d'écran , somme de différentes contributions données par le tableau suivant :

origine de l'électron considéré	contribution des autres électrons dans la constante d'écran					
	couches $n' < n - 1$	couche $n' = n - 1$	couche $n' = n$			couches $n' > n$
			s,p	d	f	
s ou p	1,00	0,85	0,35	0,00	0,00	0,00
d	1,00	1,00	1,00	0,35	0,00	0,00
f	1,00	1,00	1,00	1,00	0,35	0,00

1^{ère} partie :
Structure électronique

Le nickel a pour numéro atomique $Z = 28$.

1.1 Donner la configuration électronique du nickel dans l'état fondamental

1.2 En déduire sa position (ligne et colonne) dans le tableau périodique des éléments. A quel bloc d'éléments appartient-il ? Comment s'appellent les éléments de ce bloc ?

1.3 On se propose de vérifier par le calcul que la configuration électronique proposée en 1.1 , et notée par suite Ni , est bien celle de l'état fondamental. Pour cela , on comparera son énergie avec celle de la configuration $[Ar]3d^{10}$ notée Ni^* , et ce en utilisant les règles de Slater

1.3.1 Donner l'expression de la différence d'énergie $\Delta E = E(Ni^*) - E(Ni)$ en fonction de l'énergie des orbitales atomiques $E_{3d}(Ni^*)$, $E_{3d}(Ni)$ et $E_{4s}(Ni)$

1.3.2 En utilisant la méthode de Slater calculer numériquement $E_{3d}(Ni^*)$, $E_{3d}(Ni)$ et $E_{4s}(Ni)$

1.3.3 En déduire la valeur numérique de ΔE . Commenter et conclure

1.4 Quel est l'ion le plus courant du nickel ? Donner sa configuration électronique dans l'état fondamental

2^{ème} partie :
Propriétés cristallographiques

2.1 Structure cristallographique du nickel

Le nickel cristallise dans le système cubique à faces centrées

2.1.1 Dessiner la maille élémentaire du nickel. Représenter l'un des plan de compacité maximum et indiquer l'ordre de succession de tels plans

2.1.2 Combien cette maille contient-elle d'atomes de nickel ?

2.1.3 Calculer numériquement l'arrête a de cette maille ainsi que le rayon métallique $R(Ni)$ du nickel

2.1.4 Indiquer la position des sites octaédriques et tétraédriques pour une telle structure. Préciser leur nombre dans une maille élémentaire

2.1.5 Le cuivre donne des solutions solides avec le nickel. Sans faire de calculs supplémentaires, indiquer si ces solutions sont de substitution ou d'insertion. On donne $R(Cu) = 128 \text{ pm}$

2.2 Cristallographie de l'oxyde de nickel

L'oxyde de nickel NiO présente une structure type NaCl de paramètre de maille $a' = 418 \text{ pm}$

2.2.1 Décrire cette structure et dessiner la maille élémentaire de l'oxyde de nickel. Quel est le type de réseau dessiné par les ions Ni^{2+} ?

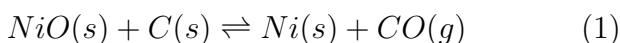
2.2.2 En déduire le rayon ionique $R(Ni^{2+})$ dans NiO ainsi que la masse volumique $\rho(\text{NiO})$ de NiO

3^{ème} partie : Métallurgie du nickel

3.1 Quelles sont les principales sources du nickel ?

Après différents traitements des minerais bruts, le nickel est obtenu sous forme d'oxyde NiO .

On se propose d'étudier la possibilité de réduire l'oxyde de nickel à l'aide du carbone pour obtenir du nickel selon :



Cette étude se fera dans le cadre de l'approximation d'Ellingham

3.2 En quoi consiste l'approximation d'Ellingham ?

3.3 La figure 1 donne le diagramme d'Ellingham pour les deux systèmes rédox NiO/Ni et CO/C

3.3.1 A quel couple rédox (NiO/Ni ou CO/C) est attribué chacun des segments de droites (1) et (2) ? Justifier la réponse

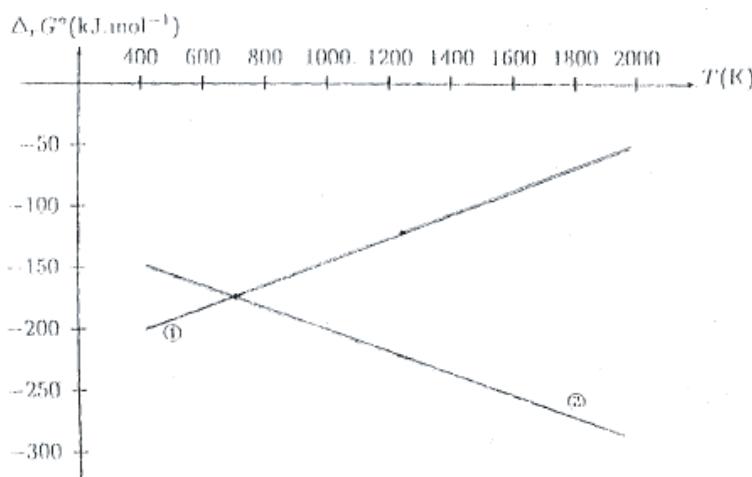


Fig 1 : Diagramme d'Ellingham pour les couples rédox NiO/Ni et CO/C pour $\frac{1}{2}$ mole de O_2

3.3.2 Que représentent les segments de droite tracées pour chacun des deux couples rédox ?

3.3.3 A partir du diagramme, déterminer les enthalpies standard de formation $\Delta_rH_f^\circ(NiO)$ de NiO et $\Delta_rH_f^\circ(CO)$ de CO

3.3.4 Déterminer de même les entropies standard absolues $S^\circ(NiO)$ de NiO et $S^\circ(CO)$ de CO

3.4 On s'intéresse à la réaction (1) de **réduction de l'oxyde de nickel par le carbone**

3.4.1 Quelle est la variance du système le plus général contenant NiO , C , Ni et CO et siège de l'unique réaction (1) ? Interpréter la valeur obtenue.

3.4.2 Quelle est la valeur de la température d'inversion T_i de l'équilibre (1) ? Dans quel domaine de température doit-on travailler pour favoriser la réduction du nickel ? Justifier

3.4.3 Dans l'industrie, la réduction du nickel s'effectue à la température $\theta = 1000^\circ C$. Calculer la constante K° de l'équilibre (1) et commenter la valeur obtenue

4^{ème} partie :
Le nickel en solution aqueuse

4.1 Dosage complexométrique

la détermination de la concentration molaire volumique c_{Ni} d'une solution aqueuse d'ions nickel II peut se faire par dosage complexométrique. Un tel dosage est effectué par une solution aqueuse de l'ion éthylène diamine tétraacétate , ou EDTA , noté Y^{4-} dans la suite. L'acide éthylène diamine tétraacétate H_4Y est un tétraacide. Pour effectuer le dosage, on utilise une solution de sel disodique de l'EDTA noté $(2\text{Na}^+, H_2Y^{2-})$ de concentration molaire volumique $c_Y = 0.116 \text{ mol.l}^{-1}$

4.1.1 Quel est le domaine de stabilité de la forme H_2Y^{2-} ? Comment peut-on procéder au laboratoire, pour déterminer avec précision la concentration molaire volumique c_Y du sel disodique ?

Pour repérer le point d'équivalence, on utilise la murexide, noté Mu , comme indicateur complexométrique. Dans une solution de pH voisin de 12 , cet indicateur , de couleur violet-pourpre donne avec l'ion Ni^{2+} un complexe noté $[NiMu]^{2+}$ de couleur orangée

4.1.2 Comment peut-on fixer le pH de la solution à une valeur proche de la valeur nominale de 12 ?

Dans un bêcher, on introduit $v_{Ni} = 10.0 \text{ mL}$, de la solution de Ni^{2+} de concentration c_{Ni} à déterminer puis un volume $v = 40 \text{ mL}$ de solution d'ammoniac de concentration molaire volumique 2.0 mol.l^{-1} et enfin une pointe de spatule de meruxide. La solution S ainsi préparée est limpide, l'hydroxyde de nickel $Ni(OH)_2$ n'apparaissant pas dans ces conditions

4.1.3 Pourquoi ajoute-t-on la solution d'ammoniac ?

4.1.4 Ecrire les équations des deux réactions auxquelles participent les ions Ni^{2+} lors de la préparation de la solution S

A l'aide d'une burette graduée, on ajoute progressivement la solution de $(2\text{Na}^+, H_2Y^{2-})$ de concentration molaire volumique c_Y jusqu'au virage de la teinte de la solution de l'orangée au violet-pourpre obtenue pour un volume $v_e = 8.1 \text{ mL}$. On admettra que dans les conditions de conduite de ce dosage, les teintes des espèces autres que $[NiMu]^{2+}$ et Mu sont peu intenses

4.1.5 Ecrire l'équation de réaction de dosage compte tenu de la valeur indicative du pH. Calculer la constante de cette réaction et commenter la valeur obtenue

4.1.6 Ecrire, de même , l'équation de la réaction justifiant le changement de teinte à l'équivalence. Quelles conditions de stabilité doit vérifier le complexe $[NiMu]^{2+}$? Pourquoi ?

4.1.7 Déterminer la concentration molaire volumique de la solution de Ni^{2+}

4.2 Nickelage chimique des pièces métalliques

Le nickelage des pièces métalliques en fer ou en acier, consiste à les revêtir d'une couche uniforme et résistante de nickel métallique. Il permet alors de protéger ces pièces de la corrosion

4.2.1 On plonge une lame de fer dans une solution aqueuse d'ions nickel Ni^{2+} . Peut-on obtenir ainsi un dépôt de nickel métallique sur la lame de fer ? Calculer la constante d'équilibre de la réaction correspondante

Dans l'industrie, on prépare une solution en mélangeant une solution de chlorure de nickel $(Ni^{2+}, 2Cl^-)$ et une solution d'hypophosphite de sodium $(\text{Na}^+, H_2PO_2^-)$ de même concentration de 1.0 mol.l^{-1} . Le pH est amené à 4 à l'aide d'une solution tampon adéquate

- 4.2.2** Montrer qu'une réaction devrait se produire lors de la préparation de cette solution. Laquelle ? Ecrire son équation. On donne le potentiel apparent à pH=4 du couple $H_2PO_3^-/H_2PO_2^-$: $E(H_2PO_3^-/H_2PO_2^-) = -0.75 V$
- 4.2.3** La solution précédente est en réalité inerte. Proposer une explication à l'apparente inertie observée
- 4.2.4** Dès qu'une lame de fer ou d'acier est introduite dans cette solution, elle se recouvre d'une couche de nickel très régulière et très résistante. Interpréter
- 4.2.5** Proposer une solution tampon adéquate pour imposer un $pH \approx 4$.

fin de l'énoncé

Le Nickel

1^{ère} partie : Structure électronique

1.1 ${}_{28}Ni : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^8$

1.2 la $2 + 8 = 10^{\text{ème}}$ colonne et la $4^{\text{ème}}$ ligne , bloc d , éléments de transition

1.3

1.3.1 selon Slater : Ni $\underbrace{(1s)^2(2s2p)^8(3s3p)^8}_{\text{et } Ni^* \underbrace{(1s)^2(2s2p)^8(3s3p)^8}_{\text{soit : }}(3d)^8(4s)^2}$

$(3d)^{10}$

soit : $E(Ni) = E(Ar) + 2E_{4s}(Ni) + 8E_{3d}(Ni)$ et $E(Ni^*) = E(Ar) + 10E_{3d}(Ni^*)$

il vient $\Delta E = 10E_{3d}(Ni^*) - 2E_{4s}(Ni) - 8E_{3d}(Ni)$

1.3.2 $E_{3d}(Ni^*) = -13.6 \left(\frac{28-9\times0.35-18\times1}{3}\right)^2 = -70.9 \text{ eV}$

$E_{3d}(Ni) = -13.6 \left(\frac{28-7\times0.35-18\times1}{3}\right)^2 = -86.1 \text{ eV}$

$E_{4s}(Ni) = -13.6 \left(\frac{28-1\times0.35-16\times0.85-10\times1}{3.7}\right)^2 = -16.3 \text{ eV}$

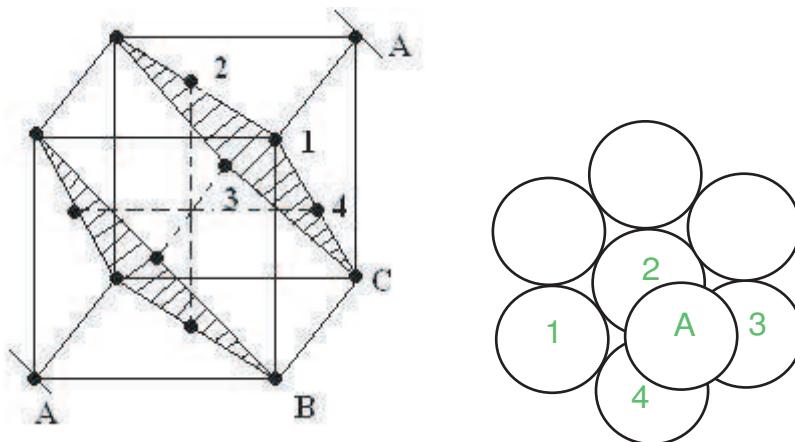
1.3.3 A.N : $\Delta E = 12.4 \text{ eV}$ donc Ni est bien l'état fondamental càd de plus basse énergie !

1.4 $Ni^{2+} : [{}_{18}Ar]3d^8$

2^{ème} partie : Propriétés cristallographiques

2.1 Structure cristallographique du nickel

2.1.1 :



dans un plan de compacité maximale A , B ou C , chaque atome est entouré par 6 autres
la succession des plan est : ABC ABC ABC ...

2.1.2 $n = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ atome/maille}$

2.1.3 $\rho_{Ni} = \frac{4 \times M_{Ni}}{a^3 N_A}$ donc $a = \sqrt[3]{\frac{4 M_{Ni}}{\rho_{Ni} N_A}} = 0.353 \text{ nm}$

contact suivant la diagonale d'une face : $R = \frac{\sqrt{2}a}{4} = 0.123 \text{ nm}$

2.1.4 les sites [6] occupent les milieux des arêtes et le centre de la maille

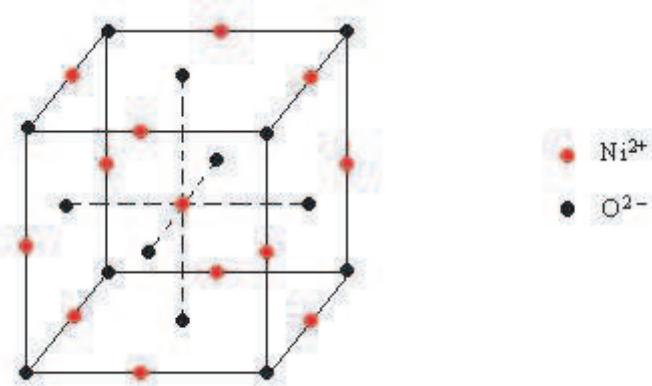
les sites [4] occupent les centres des petits cubes d'arête $\frac{a}{2}$

$$n_6 = 1 \times 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4 \text{ et } n_4 = 8 \times 1 = 8$$

2.1.5 $R(Cu) = 1.28 \cdot 10^{-10} m > R(Ni) = 1.23 \cdot 10^{-10} m$ donc Cu ne peut pas être inséré donc l'alliage formé est de substitution

2.2 Cristallographie de l'oxyde de nickel

2.2.1 O^{2-} occupe un réseau CFC et Ni^{2+} occupe tous les sites octa (milieu des arrêtes + centre de la maille)



les Ni^{2+} occupent un réseau CFC translaté par $\vec{t} = \frac{\vec{a}}{2}$ par rapport à celui occupé par les O^{2-}

2.2.2 selon un arrête : $a' = 2R(Ni^{2+}) + 2R(O^{2-})$ donc $R(Ni^{2+}) = \frac{a'}{2} - R(O^{2-}) = 69 \text{ pm}$

$$\text{et } \rho(NiO) = \frac{4 \times M(NiO)}{a^3 N_A} = 68 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

3ème partie : Métallurgie du nickel

3.1 d'après le préambule de l'énoncé : garniérite et pyrrhotine nickelifère

3.2 l'approximation d'Ellingham consiste à prendre $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ constantes

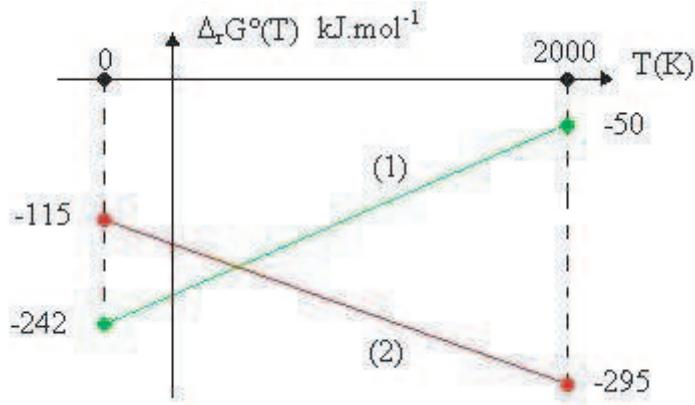
3.3

3.3.1 les réactions d'oxydation s'écrivent avec une demie mole de dioxygène :



3.3.2 la droite (1) représente $\Delta_r G_1^\circ(T) = \Delta_r H_1^\circ - T\Delta_r S_1^\circ$ de la réaction $Ni(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightleftharpoons NiO(s)$ et la droite (2) représente $\Delta_r G_2^\circ(T) = \Delta_r H_2^\circ - T\Delta_r S_2^\circ$ de la réaction $C(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightleftharpoons CO(g)$

3.3.3 graphiquement :



il vient en kJ.mol^{-1} : $\Delta_rG_1^\circ(T) = -242 + 0.096 T$ et $\Delta_rG_2^\circ(T) = -115 - 0.090 T$
la loi de Hess s'écrit :

$$\Delta_rH_1^\circ = -242 \text{ kJ.mol}^{-1} = \Delta_fH^\circ(\text{NiO}_s)$$

et

$$\Delta_rH_2^\circ = -115 \text{ kJ.mol}^{-1} = \Delta_fH^\circ(\text{CO}_g)$$

car $\Delta_rH_f^\circ(\text{O}_2(g)) = \Delta_rH_f^\circ(\text{C(graphite)}) = \Delta_rH_f^\circ(\text{Ni}(s)) = 0$

3.3.4 on a : $\Delta_rS_1^\circ = S^\circ(\text{NiO}(s)) - \frac{1}{2}S^\circ(\text{O}_2(g)) - S^\circ(\text{Ni}(s)) = -96 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

d'après les données : $S^\circ(\text{NiO}(s)) = 36.5 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} > 0$

et on a : $\Delta_rS_2^\circ = S^\circ(\text{CO}(g)) - \frac{1}{2}S^\circ(\text{O}_2(g)) - S^\circ(\text{C(graphite)}) = +90 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

d'après les données : $S^\circ(\text{CO}(g)) = 198 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} > 0$

3.4



3.4.1 le théorème de Gibbs : $v = (n + a) - (r + \varphi + q) = 1$, tel que :

$n = 4$: C, Ni, NiO et CO

$a = 2$: T, p car $\Delta_rH_1^\circ \neq 0$ et $\sum \nu_i(\text{gaz}) = +1 \neq 0$

$r = 1$: un seul équilibre.

$\varphi = 4$: 3 solide, et 1 gaz.

$q = 0$ aucune restriction sur les quantités initiales.

parmi p et T on ne peut choisir librement qu'un seul paramètre soit $p = f(T)$.

3.4.2 graphiquement : $T_i = 700 \text{ K}$ qui est l'intersection des deux droites d'Ellingham.

par la règle de γ : NiO est réduit par C pour $T > T_i$, la courbe du couple NiO/Ni passe au dessus de celle de CO/C

3.4.3 à $\theta = 1000^\circ\text{C} = 1273 \text{ K}$ on aura :

$$K^\circ_{1273} = \exp - \frac{\Delta_rG^\circ}{RT}$$

or $\Delta_rG^\circ = \Delta_rG_2^\circ - \Delta_rG_1^\circ$, graphiquement : $\Delta_rG^\circ = -220 - (-125) = 95 \text{ kJ.mol}^{-1}$
donc $K^\circ_{1273} = 7900$, la réaction est quantitative ou totale à 1273 K.

4^{eme} partie :
Le nickel en solution aqueuse

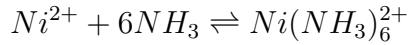
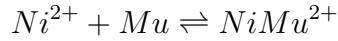
4.1 Dosage complexométrique

4.1.1 d'après les données H_2Y^{2-} sera stable si : $2.7 < pH < 6.2$. Par dosage complexométrique !

4.1.2 on utilise une solution tampon à base d'un mélange équimolaire ($[acide]=[base]$) d'un couple dont le $pK_a \approx 12$

4.1.3 Pour éviter la précipitation de Ni^{2+} par les ions hydroxides, en formant le complexe stable $Ni(NH_3)_6^{2+}$ ($\beta_b = 10^8$).

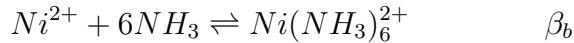
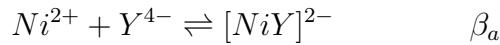
4.1.4 les deux réactions de complexation sont :



4.1.5 la réaction de dosage s'écrit à $pH \approx 12$ (l'espèce stable est Y^{4-}) :



à partir des données des constantes de formation des complexes :

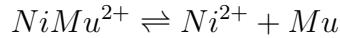


on a :

$$k_{eq} = \frac{[NH_3]^6 [NiY^{2-}]}{[Ni(NH_3)_6^{2+}][Y^{4-}]} = \frac{[NH_3]^6 [Ni^{2+}]}{[Ni(NH_3)_6^{2+}]} \frac{[NiY^{2-}]}{[Ni^{2+}][Y^{4-}]} = \frac{\beta_a}{\beta_b} = 10^{10.6} \gg 1$$

la réaction de dosage est donc totale.

4.1.6 la teinte au virage change de l'orangée ($[NiMu^{2+}]$) au violet-pourpre (Mu), soit :



il faut que le complexe $[NiMu^{2+}]$ soit plus stable que le complexe $Ni(NH_3)_6^{2+}$ sinon le complexe $[NiMu^{2+}]$ ne va jamais exister et la teinte sera inchangée au virage (violet-pourpre)

4.1.7 à l'équivalence, d'après la réaction de dosage :

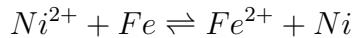
$$c_{Ni} = \frac{c_Y v_e}{v_{Ni}} = \frac{8.1 \times 0.116}{10.0} = 9.4 \cdot 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$$

4.2 Nickelage chimique des pièces métalliques

4.2.1 oui il y aura un dépôt de Nickel car on a (règle de γ) :

$$E^\circ(Ni^{2+}/Ni) = -0.25 \text{ V} > E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0.44 \text{ V}$$

selon la réaction :



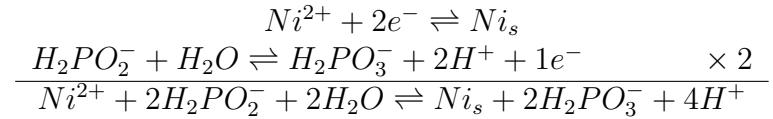
de constante d'équilibre :

$$K^\circ = 10^{2 \frac{E^\circ(Ni^{2+}/Ni) - E^\circ(Fe^{2+}/Fe)}{0.06}} = 2.2 \cdot 10^6 \gg 1$$

4.2.2 de point de vue thermodynamique on a :

$$E^\circ(Ni^{2+}/Ni) = -0.25 \text{ V} > E(H_2PO_3^-/H_2PO_2^-) = -0.75 \text{ V}$$

il y aura réduction des ions Ni^{2+} par les ions hypophosphites $H_2PO_2^-$ selon :



4.2.3 le mécanisme réactionnel de cette réaction est lent ! (blocage cinétique)

fin du corrigé

Le Cuivre

Le cuivre joue un rôle important dans l'industrie chimique et dans la vie quotidienne. On se propose dans ce problème de passer en revue quelques aspects de la chimie du cuivre. Aucune connaissance préalable de la chimie de cet élément n'est requise pour traiter le problème.

Données utiles

- Données générales

Nombre d'Avogadro $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

constante des gaz parfaits $R = 8.314 JK^{-1}mol^{-1}$

Constante de FARADAY : $F = 9.65 \cdot 10^4 C.mol^{-1}$;

$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0.06 V$ à $T = 298 K$, $F = N_A e$ désignant la constante de Faraday et \ln le logarithme népérien

- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés parfaits.

- Masse volumique du cuivre : $\mu_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$.

- Masse molaire atomique du cuivre : $M_{cu} = 63,546 g.mol^{-1}$.

- Enthalpies standard de formation (en $kJ.mol^{-1}$) et entropies standard absolues (en $J.K^{-1}.mol^{-1}$) à 298 K (g : gaz, s ; solide) :

	$O_2(g)$	$Cu(s)$	$Cu_2O(s)$	$CuO(s)$
$\Delta_r H_f^\circ$	-	-	-168	-157
S°	205	33,1	93,0	42,6

- Potentiels standard d'oxydoréduction en solution aqueuse à 298 K :

Couple	Cu^{2+}/Cu	Cu^+/Cu
$E^\circ(V)$	0,16	0,52

- Constantes de formation successives de complexes en solution aqueuse à 298 K :

$Cu(NH_3)_2^+$		$Cu(NH_3)_4^{2+}$			
$\log K_{f1}$	$\log K_{f2}$	$\log K'_{f1}$	$\log K'_{f2}$	$\log K'_{f3}$	$\log K'_{f4}$
6,1	4,7	4,1	3,5	2,9	2,2

1^{ère} partie : Structure électronique

Le numéro atomique du cuivre est $Z = 29$. L'élément cuivre possède deux isotopes naturels ^{63}Cu et ^{65}Cu .

1.1 Quels sont les nombres de protons et de neutrons présents dans chacun des noyaux de ^{63}Cu et de ^{65}Cu ? On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

1.2 Quelle est l'abondance relative de chacun de ces deux isotopes?

1.3 Donner la configuration électronique du cuivre prévue par les règles de remplissage.

- 1.4** En réalité, la configuration électronique observée est : $[Ar]3d^{10}4s^1$. Expliquer cette anomalie de remplissage.
- 1.5** En déduire la position du cuivre (ligne et colonne) dans la table périodique des éléments. À quel bloc d'éléments appartient-il ? Comment s'appellent les éléments de ce bloc ?
- 1.6** Donner la configuration électronique des deux ions les plus courants du cuivre.

2^{ème} partie : **Propriétés cristallographiques**

2.1 Structure cristallographique du cuivre

le réseau cristallin du cuivre est du type cubique à faces centrées ou c.f.c.

- 2.1.1** Faire un schéma, en vue éclatée, de la maille conventionnelle du rescau c.f.c.
- 2.1.2** Calculer le nombre d'atomes de cuivre appartenant à cette maille.
- 2.1.3** Exprimer la masse volumique μ_{Cu} du métal cuivre et en déduire le paramètre a de la maille conventionnelle.
- 2.1.4** Représenter une face de la maille conventionnelle en précisant clairement le contact entre atomes de cuivre.

- 2.1.5** En déduire la valeur du rayon atomique R_{Cu} du cuivre.

- 2.1.6** Calculer la compacité C du reseau du cuivre. Commenter.

2.2 Cavités dans le réseau du cuivre

Le réseau C.F.C. présente des cavités octaédriques Ω et des cavités tétraédriques Θ .

- 2.2.1** Dessiner une cavité octaédrique en vue éclatée. Dessiner de même une cavité tétraédrique.
- 2.2.2** Indiquer les positions des sites octaédriques et tétraédriques dans une maille conventionnelle C.F.C.
- 2.2.3** Déterminer les nombres respectifs n_Ω des cavités octaédriques et n_Θ des cavités tétraédriques dans une maille conventionnelle C.F.C.
- 2.2.4** Calculer la valeur maximale R_Ω du rayon d'une sphère que l'on peut placer au centre d'une cavité octaédrique sans déformer le réseau. On exprimera le résultat en fonction de a avant d'effectuer l'application numérique. Commenter.
- 2.2.5** Calculer de même la valeur maximale R_Θ du rayon d'une sphérique que l'on peut placer au centre d'une cavité tétraédrique sans déformer le réseau. Commenter.

3^{ème} partie : **Oxydation en phase sèche**

On se propose d'étudier l'oxydation du cuivre métallique par l'oxygène de l'air supposé être sec. L'étude sera limitée à l'intervalle de température $[500\ K, 1300\ K]$ dans lequel le cuivre et ses oxydes se trouvent à l'état solide. On se limitera à une étude thermodynamique sans se préoccuper des phénomènes cinétiques. On se placera enfin, dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM.

3.1 Enthalpies libres standard de réaction

- 3.1.1** En quoi consiste l'approximation d'ELLINGHAM ?

- 3.1.2** Écrire l'équation de la réaction d'oxydation du cuivre métallique Cu en oxyde de cuivre Cu_2O pour une mole de dioxygène (réaction 1) et en déduire l'expression, en fonction de la température T , de son enthalpie standard de réaction $\Delta_rG_1^0(T)$. Calculer numériquement $\Delta_rG_1^0$ à $300\ K$.

3.1.3 Écrire de même la réaction d'oxydation de Cu_2O en CuO pour une mole de dioxygène (réaction 2) et en déduire l'expression, en fonction de la température T , de son enthalpie standard de réaction $\Delta_rG_2^0(T)$. Calculer numériquement $\Delta_rG_2^0$ à 300 K.

3.2 Températures d'oxydation

On se propose d'étudier la stabilité de Cu , Cu_2O et CuO dans l'air, en fonction de la température.
On donne la pression atmosphérique $P_0 = 1 \text{ bar}$.

3.2.1 Exprimer les affinités chimiques A_1 de la réaction (1) et A_2 de la réaction (2) en fonction de la température T et de la pression partielle $P(O_2)$ de dioxygène.

3.2.2 Calculer dans les conditions de l'étude, la température T_1 en dessous de laquelle le cuivre métallique Cu s'oxyde en Cu_2O dans l'air sous $P_0 = 1 \text{ bar}$.

3.2.3 Calculer de même la température T_2 en dessous de laquelle Cu_2O s'oxyde en CuO dans l'air sous $P_0 = 1 \text{ bar}$.

3.2.4 En déduire le diagramme d'existence stable, en fonction de la température de Cu , Cu_2O et CuO , supposés solides, en présence d'air sous une pression de 1 bar.

3.2.5 Que se passe-t-il lorsqu'une plaque de cuivre est placée dans l'air supposé sec.

3.3 Pressions d'oxydation

On se propose d'étudier l'influence de la pression partielle de dioxygène sur la stabilité de Cu , Cu_2O et CuO à $T = 300 \text{ K}$.

3.3.1 Calculer la valeur P_1 de la pression partielle de dioxygène au dessus de laquelle le cuivre métallique Cu s'oxyde en CuO .

3.3.2 Calculer de même la valeur P_2 de la pression partielle de dioxygène au dessus de laquelle Cu_2O s'oxyde en CuO .

3.3.3 En déduire le diagramme d'existence stable de Cu , Cu_2O et CuO , supposés solides, en fonction de $P(O_2)$ à 300 K.

3.3.4 Que se passe-t-il lorsqu'une plaque de cuivre est placée dans l'air supposé sec.

4^{ème} partie : Le cuivre en solution aqueuse

En solution aqueuse, les ions cuivre (I), ou ions cuivreux, et les ions cuivre (II), ou ions cuivriques, sont hydratés. Pour simplifier, on les notera, par commodité, Cu^+ et Cu^{2+} respectivement. Dans cette partie, on se propose d'étudier une méthode de stabilisation des ions cuivreux Cu^+ en solution aqueuse.

4.1 Montrer que les ions cuivreux sont instables dans l'eau. Pour cela on écrira la réaction de dismutation des ions Cu^+ et on calculera sa constante d'équilibre K_1° à $T = 298 \text{ K}$.

4.2 En présence d'ammoniac, les ions du cuivre donnent des complexes amminés que l'on note de façon simplifiée : $Cu(NH_3)_n^+$ et $Cu(NH_3)_p^{2+}$.

4.2.1 Établir le diagramme de prédominance des complexes amminés du cuivre (I) en fonction de $pNH_3 = -\log[NH_3]$.

4.2.2 En déduire, qu'aux concentrations usuelles d'ammoniac ($0 < pNH_3 < 2$), le cuivre (I) se trouve de façon prépondérante sous la forme $Cu(NH_3)_2^+$.

4.2.3 Montrer de même que le cuivre (II) se trouve de façon prépondérante sous la forme $Cu(NH_3)_4^{2+}$.

4.3 Écrire l'équation de la demi-réaction rédox correspondant au couple $Cu(NH_3)_2^+/Cu$ et en déduire le potentiel rédox standard de ce couple à 298 K.

- 4.4** Déterminer de même, à 298 K, le potentiel rédox standard du roupie $Cu(NH_3)_4^{2+}/Cu(NH_3)_2^+$.
- 4.5** Les ions cuivre (I) sont-ils stables en solution aqueuse ammoniacale à 298 K ? Justifier la réponse en calculant la constante d'équilibre K_2° de la réaction de dismutation correspondante.

fin de l'énoncé

Le Cuivre

1^{ère} partie : Structure électronique

1.1 :

	$N_p = Z$	$N_n = A - Z$
^{63}Cu	29	34
^{65}Cu	29	36

1.2 on a $a_{63} + a_{65} = 1$ et $M_{Cu} = 65$ $a_{65} + 63 a_{63} = 63.546 \text{ g mol}^{-1}$ soit : $a_{65} = 72.7\%$ et $a_{63} = 27.3\%$

1.3 Cu : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^9$

1.4 en effet , la couche d remplie dans $4s^1 3d^{10}$ est plus stable

1.5 la 11^{ème} colonne et la 4^{ème} ligne , bloc d , éléments de transition

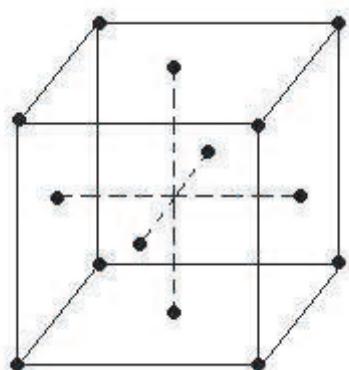
1.6 $Cu^+ :$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^{10}$

$Cu^{2+} :$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^9$

2^{ème} partie : Propriétés cristallographiques

2.1 Structure cristallographique du cuivre

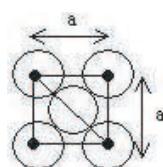
2.1.1 :



2.1.2 $n = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ atomes de cuivre par maille

2.1.3 $\mu_{Cu} = \frac{4 \times M_{Cu}}{a^3 N_A}$ donc $a = \sqrt[3]{\frac{4 M_{Cu}}{\mu_{Cu} N_A}} = 0.362 \text{ nm}$

2.1.4 :

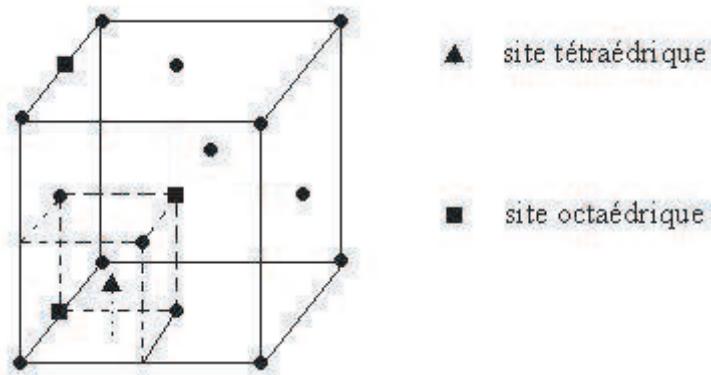


2.1.5 $R_{Cu} = \frac{\sqrt{2}a}{4} = 0.128 \text{ nm}$

2.1.6 $C = \frac{V_{occupe}}{V_{maille}} = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi R_{Cu}^3}{a^3} = 74\%$ la maille CFC est la plus compacte (mise à part la maille hexagonale compact)

2.2 Cavités dans le réseau du cuivre

2.2.1 :



2.2.2 Ω occupent les milieux des arêtes et le centre de la maille

Θ occupent les centres des petits cubes d'arête $\frac{a}{2}$

2.2.3 $n_\Omega = 1 \times 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$ et $n_\Theta = 8 \times 1 = 8$

2.2.4 suivant un arête $a = 2R_\Omega + 2R_{Cu}$ soit $R_\Omega = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{a}{2} = 0.053 \text{ nm} < R_{Cu}$

on ne peut pas insérer un atome plus gros , en particulier un atome de cuivre!

2.2.5 on raisonne sur la moitié de la diagonale principale du petit cube d'arête $\frac{a}{2}$

soit $\frac{\sqrt{3}\frac{a}{2}}{2} = R_\Theta + R_{Cu}$ donc $R_\Theta = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}a = 0.029 \text{ nm}$

le site tétra est plus étroit que le site octa !

3^{ème} partie :
Oxydation en phase sèche

3.1 Enthalpies libres standard de réaction

3.1.1 $\Delta_r H^0(T)$ et $\Delta_r S^0(T)$ sont presque constantes

3.1.2 :



$$\Delta_r G_1^0(T) \approx \Delta_r H_1^0(298) - T \Delta_r S_1^0(298)$$

à partir des données $\Delta_r H_1^0(298) = 2 \times (-168000) - 4 \times 0 - 1 \times 0 = -336000 \text{ Jmol}^{-1}$

et $\Delta_r S_1^0(298) = 2 \times 93 - 4 \times 33.1 - 205 = -151.4 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$

soit $\Delta_r G_1^0(T) = -336000 + 151.4 T \text{ Jmol}^{-1}$ et $\Delta_r G_1^0(300) = -291 \text{ kJmol}^{-1}$

3.1.3 :



$$\Delta_r G_2^0(T) \approx \Delta_r H_2^0(298) - T \Delta_r S_2^0(298)$$

à partir des données $\Delta_r H_2^0(298) = 4 \times (-157000) - 2 \times (-168000) - 1 \times 0 = -292000 \text{ Jmol}^{-1}$

et $\Delta_r S_2^0(298) = 4 \times 42.6 - 205 - 2 \times 93.0 = -221 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$

soit $\Delta_r G_2^0(T) = -292000 + 221 T \text{ Jmol}^{-1}$ et $\Delta_r G_2^0(300) = -226 \text{ kJmol}^{-1}$

3.2 Températures d'oxydation

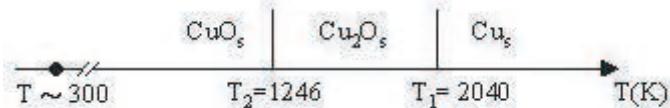
attention $P(O_2) = \frac{1}{5} \text{ bar}$ est la pression de O_2 dans l'air

$$3.2.1 \ A_1 = -\Delta_r G_1^0(T) + RT \ln \frac{P(O_2)}{P_0} \text{ et } A_2 = -\Delta_r G_2^0(T) + RT \ln \frac{P(O_2)}{P_0}$$

$$3.2.2 \ Cu_s \text{ s'oxyde si } A_1 > 0 \implies 336000 - 151.4 T + 8.314 T \times \ln \frac{1}{5} > 0 \text{ soit } \boxed{T < T_1 = 2040 \ K}$$

$$3.2.3 \ Cu_2O_s \text{ s'oxyde si } A_2 > 0 \implies 292000 - 221 T + 8.314 T \times \ln \frac{1}{5} > 0 \text{ soit } \boxed{T < T_2 = 1246 \ K}$$

3.2.4 :



3.2.5 à température ambiante $T \sim 300K$, le cuivre n'est pas stable sous l'air, une couche Cu_2O_s puis une autre CuO_s se forment en sa surface, qui le protègent contre la disparition totale, mises en évidence par le changement de couleur d'une plaque récemment nettoyée!

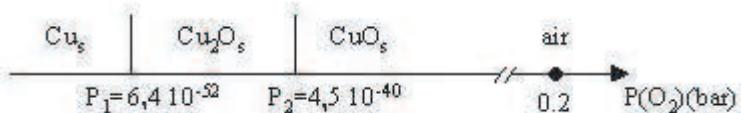
3.3 Pressions d'oxydation

$$T = 300K$$

$$3.3.1 \ Cu_s \text{ s'oxyde si } A_1 > 0 \implies 294000 + 8.314 \times 300 \times \ln \frac{P(O_2)}{P_0} > 0 \text{ soit } \boxed{P(O_2) > P_1 = 6.4 \cdot 10^{-52} \text{ bar}}$$

$$3.3.2 \ Cu_s \text{ s'oxyde si } A_1 > 0 \implies 226000 + 8.314 \times 300 \times \ln \frac{P(O_2)}{P_0} > 0 \text{ soit } \boxed{P(O_2) > P_2 = 4.5 \cdot 10^{-40} \text{ bar}}$$

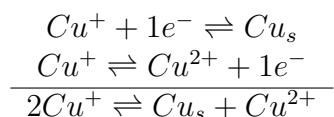
3.3.3 :



3.3.4 à $T = 300K$, le cuivre n'est pas stable sous l'air, une couche Cu_2O_s puis une autre CuO_s se forment en sa surface, qui le protègent contre la disparition totale, mises en évidence par le changement de couleur d'une plaque récemment nettoyée!

4ème partie : Le cuivre en solution aqueuse

4.1 les deux demi-réactions s'écrivent

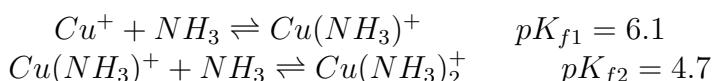


$$\text{la constante d'équilibre de dismutation } K_1^\circ = 10^{1 \times \frac{E^0(Cu^+/Cu_s) - E^0(Cu^{2+}/Cu^+)}{0.06}} = 10^6 > 10^3$$

la dismutation est quantitative ou totale, l'ion cuivreux est instable en solution aqueuse!

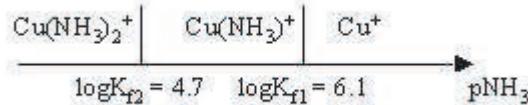
4.2 d'après les données $n = 2$ et $p = 4$

4.2.1 les réactions de formation de $Cu(NH_3)_2^+$ s'écrivent



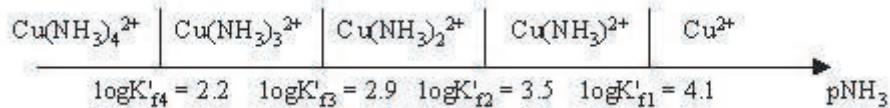
$$\text{soit } K_{f1} = \frac{[Cu(NH_3)^+]}{[NH_3][Cu^+]}, \text{ donc } \boxed{pNH_3 = \log K_{f1} + \log \frac{[Cu^+]}{[Cu(NH_3)^+]}}$$

$$\text{soit } K_{f2} = \frac{[Cu(NH_3)_2^+]}{[NH_3][Cu(NH_3)^+]}, \text{ donc } \boxed{pNH_3 = \log K_{f2} + \log \frac{[Cu(NH_3)^+]}{[Cu(NH_3)_2^+]}}$$



4.2.2 $0 < p\text{NH}_3 < 2 < \log K_{f2}$ alors l'ion prépondérant est $\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+$

4.2.3 :



$0 < p\text{NH}_3 < 2 < \log K'_{f4}$ alors l'ion prépondérant est $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$

4.3 la demi-réaction s'écrit



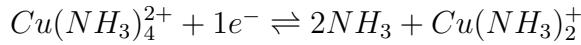
le potentiel redox s'écrit $E = E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+/\text{Cu}_s) + \frac{0.06}{1} \ln \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+]}{1 \times [\text{NH}_3]^2}$

d'après 4.2.1 $\frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{NH}_3]^2} = [\text{Cu}^+]K_{f1}K_{f2}$

donc $E_{I/0} = \underbrace{E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+/\text{Cu}_s) + 0.06 \log K_{f1}K_{f2}}_{\text{demi-réaction I}} + \frac{0.06}{1} \log \frac{[\text{Cu}^+]}{1} = E^0(\text{Cu}^+/\text{Cu}) + \frac{0.06}{1} \log \frac{[\text{Cu}^+]}{1}$

$$\implies E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+/\text{Cu}_s) = E^0(\text{Cu}^+/\text{Cu}) - 0.06 \log K_{f1} - 0.06 \log K_{f2} = -0.128 \text{ V}$$

4.4 la demi-réaction s'écrit

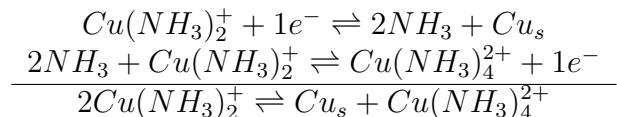


le potentiel redox s'écrit $E_{II/I} = E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}/\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+) + \frac{0.06}{1} \ln \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+] \times [\text{NH}_3]^2}$

d'après 4.2.1 et 4.2.3 on a $\frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+] \times [\text{NH}_3]^2} = \frac{K'_{f1}K'_{f2}K'_{f3}K'_{f4}}{K_{f1}K_{f2}} \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]}$

$$\implies E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}/\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+) = E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) - 0.06 \log \frac{K'_{f1}K'_{f2}K'_{f3}K'_{f4}}{K_{f1}K_{f2}} = 0.046 \text{ V}$$

4.5 les deux demi-réactions s'écrivent



la constante d'équilibre de dismutation

$$K^\circ_2 = 10^{1 \times \frac{E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+/\text{Cu}_s) - E^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}/\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+)}{0.06}} = 10^{-2.9} \approx 10^{-3}$$

la dismutation est quasi-interdite, l'ion cuivre (I) est stable en solution ammoniacale !

fin du corrigé

Dérivés oxygénés de l'azote

L'azote joue un rôle important dans la vie. Ses dérivés oxygénés présentent une Chimie très riche. Le présent problème propose de découvrir quelques aspects de la Chimie de certains de ces dérivés. Aucune connaissance préalable de la chimie de ces composés n'est requise pour traiter le problème.

Données utiles

- Données générales
 - Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
 - Masses molaires atomiques en (g.mol^{-1}) :

Elément	H	N	O
Masse molaire	1,00	14,0	16,0

- Enthalpies standard de formation (en kJ.mol^{-1}), entropies standard absolues (en $\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$) et capacités thermiques molaires standard à pression constante (en $\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$) à 298 K :

	$O_2(g)$	$NO(g)$	$NO_2(g)$	$N_2(g)$
$\Delta_r H_f^\circ$	-	90,3	33,2	-
S°	205	-	-	-
c_p°	42,5	31,1	-	29,6

- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie : Structure électronique

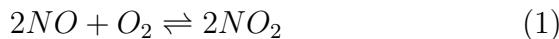
L'azote est l'élément de numéro atomique $Z = 7$; il est immédiatement suivi par l'oxygène dans la table périodique des éléments.

- 1.1 Donner la configuration électronique des atomes d'azote et d'oxygène dans leur état fondamental.
- 1.2 Quelle est la position (ligne et colonne) de l'azote dans la table périodique des éléments. À quel bloc d'éléments appartient-il ? Justifier.
- 1.3 Quelle est la valence de l'azote ? Justifier. Répondre à la même question pour l'oxygène.
- 1.4 Donner la structure de LEWIS des molécules de dioxygène et de diazote.
- 1.5 Donner de même les structures de LEWIS des ions : NO_2^+ , NO_2^- et NO_3^- .
- 1.6 En faisant appel à la théorie V.S.E.P.R, prévoir la géométrie des ions : NO_2^+ , NO_2^- et NO_3^- .
- 1.7 Expliquer l'évolution de la valeur de l'angle $X\widehat{N}O$ dans le tableau suivant :

Composé XNO	FNO	$C\ell NO$	$BrNO$
angle $X\widehat{N}O$	110°	113°	117°

2^{ème} partie :
Étude de l'oxydation du monoxyde d'azote

On se propose d'étudier dans cette partie quelques aspects de la Chimie de l'oxydation, en phase gazeuse, du monoxyde d'azote par le dioxygène conduisant à la formation du dioxyde d'azote dont l'équation bilan s'écrit :



2.1 Étude thermodynamique

- 2.1.1** Déterminer l'enthalpie standard $\Delta_r H^0$ de la réaction d'oxydation (1) du monoxyde d'azote à $T = 298 K$?
- 2.1.2** Quel est l'effet d'une augmentation de température sur cet équilibre ? Justifier la réponse.
- 2.1.3** Calculer la variance du système général siège de la réaction (1) et obtenu par mélange de NO , O_2 et NO_2 . Interpréter.
- 2.1.4** Calculer de même la variance du système obtenu par décomposition de NO_2 selon (1). Comparer et commenter.
- 2.1.5** On place dans une enceinte initialement vide de $10 L$ à température fixée $T = 400 K$, une mole de $NO(g)$ et une demi-mole de $O_2(g)$. Calculer la constante de l'équilibre (1) à cette température sachant la pression totale d'équilibre vaut $P_e = 4,20 bar$.
- 2.1.6** On enferme, à pression maintenue constante à 1 bar une mole de $NO(g)$, une demi-mole de $O_2(g)$ et deux moles de $N_2(g)$ dans une enceinte initialement vide et supposée à parois athermanes. Les gaz sont initialement à $300 K$. La température finale vaut $400 K$. Le diazote est supposé être inerte dans les conditions de l'expérience. En plus on négligera les variations des capacités thermiques avec la température.
- 2.1.6.1** Déterminer la composition du système à l'équilibre.
- 2.1.6.2** Déterminer l'enthalpie standard de la réaction à $400 K$. Commenter.

2.2 Étude cinétique

On note k la constante de vitesse de la réaction (1) d'oxydation du monoxyde d'azote.

- 2.2.1** Pour déterminer l'ordre partiel par rapport au monoxyde d'azote NO , on travaille en présence d'un excès de dioxygène par rapport au monoxyde d'azote.
- 2.2.1.1** En faisant l'hypothèse d'un ordre partiel égal à 2 par rapport au monoxyde d'azote NO , montrer que la loi d'évolution de la concentration $[NO]$ en monoxyde d'azote vérifie :

$$\frac{1}{[NO]} = \frac{1}{[NO]_0} + k't \quad (2)$$

où :

- $[NO]_0$ est la concentration initiale en oxyde d'azote ;
- k' est une constante que l'on exprimera en fonction de la constante de vitesse k de la réaction (1) d'oxydation du monoxyde d'azote et de la concentration $[O_2]$ en dioxygène.

Une première série de mesures effectuées en présence d'un excès de dioxygène par rapport au monoxyde d'azote donne les résultats suivants :

Temps en min	1	2	4	8	12	20	30
$[NO]$ en $10^{-6} mol.l^{-1}$	9,6	9,2	8,5	7,4	6,5	5,3	4,3

2.2.1.2 Montrer, à l'aide d'une représentation graphique adéquate, que les résultats expérimentaux ci-dessus sont compatibles avec une cinétique d'ordre 2 par rapport à NO.

2.2.1.3 En déduire la valeur numérique de la constante de vitesse k de la réaction d'oxydation du monoxyde d'azote par le dioxygène sachant que la concentration initiale de dioxygène vaut : $[O_2]_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$.

2.2.1.4 L'hypothèse de travail est-elle vérifiée ?

2.2.2 De même, pour déterminer l'ordre partiel par rapport au dioxygène, on effectue une deuxième série de mesures en présence d'un excès de monoxyde d'azote. Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la concentration en dioxygène en fonction du temps :

Temps en s	10	20	30	60	120	240	360
$[O_2]$ en $10^{-6} \text{ mol.l}^{-1}$	9,3	8,6	8,0	6,4	4,1	1,7	0,7

avec $[NO]_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$ et $[O_2]_0 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ mol.l}^{-1}$.

2.2.2.1 En s'inspirant de la démarche utilisée en 2.2.1, montrer à l'aide d'une représentation graphique, que les résultats expérimentaux ci-dessus sont compatibles avec une cinétique d'ordre 1 par rapport à O_2 .

2.2.2.2 En déduire une autre détermination de la valeur de la constante de vitesse k de la réaction d'oxydation du monoxyde d'azote par le dioxygène. Commenter.

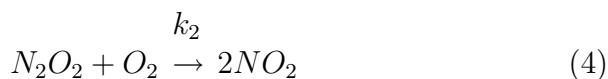
2.2.3 Donner l'expression de la vitesse de la réaction d'oxydation du monoxyde d'azote par le dioxygène en fonction de k , $[NO]$ et $[O_2]$.

2.2.4 Pour expliquer la loi de vitesse ainsi obtenue, on propose un mécanisme réactionnel en deux étapes élémentaires.

1^{ère} étape :



2^{ème} étape :



Dans ce mécanisme, le dioxyde de diazote N_2O_2 apparaît comme un intermédiaire réactionnel ; sa concentration obéit donc au principe de l'état quasi-stationnaire :

$$\frac{d[N_2O_2]}{dt} = 0 \quad (5)$$

2.2.4.1 Pourquoi dit-on que N_2O_2 est un intermédiaire réactionnel ?

2.2.4.2 En appliquant le principe de l'état quasi-stationnaire, exprimer la concentration $[N_2O_2]$ en fonction de k_1 , k_{-1} , k_2 , $[NO]$ et $[O_2]$.

2.2.4.3 En déduire l'expression de la vitesse v de la réaction (1) d'oxydation du monoxyde d'azote en fonction de k_1 , k_{-1} , k_2 , $[NO]$ et $[O_2]$.

2.2.4.4 Montrer que la loi de vitesse ainsi obtenue est comparable à celle établie expérimentalement en 2.2.3 à une condition que l'on précisera.

On augmente la concentration en dioxygène jusqu'à ce que $k_{-1} \ll k_2 [O_2]$.

2.2.4.5 Quelle est la nouvelle loi de vitesse obtenue ? Quel est l'ordre de la réaction ? Quelle est dans ce cas l'étape limitante de la vitesse ? Expliquer.

3^{ème} partie :
Purification de l'acide nitrique par distillation fractionnée

Dans l'industrie chimique, l'acide nitrique HNO_3 est synthétisé à partir de l'ammoniac. La dernière étape du processus industriel consiste à purifier l'acide nitrique par distillation fractionnée.

Cette opération a pour but d'augmenter la teneur en acide nitrique d'un mélange que nous allons considérer, pour simplifier, comme un système binaire eau-acide nitrique. La figure 1 donne le diagramme d'équilibre liquide-vapeur du mélange binaire eau-acide nitrique sous pression constante.

3.1 Quelles sont les phases présentes dans les différents domaines notés 1 à 4 ? On donnera le résultat sous forme d'un tableau.

3.2 Donner les noms des différentes courbes du diagramme.

3.3 Déterminer, à partir du diagramme, la valeur de la température d'ébullition de l'acide nitrique HNO_3 pur dans les conditions de relevé du diagramme. De quoi dépend-elle ?

3.4 On s'intéresse au mélange liquide dont la composition correspond à l'abscisse du maximum A.

3.4.1 Comment appelle-t-on un tel mélange ?

3.4.2 Calculer la variance du système au point A. Commenter.

3.4.3 Quelle propriété commune avec un corps pur, possède un tel mélange ?

3.4.4 Comment peut-on le distinguer simplement d'un corps pur ?

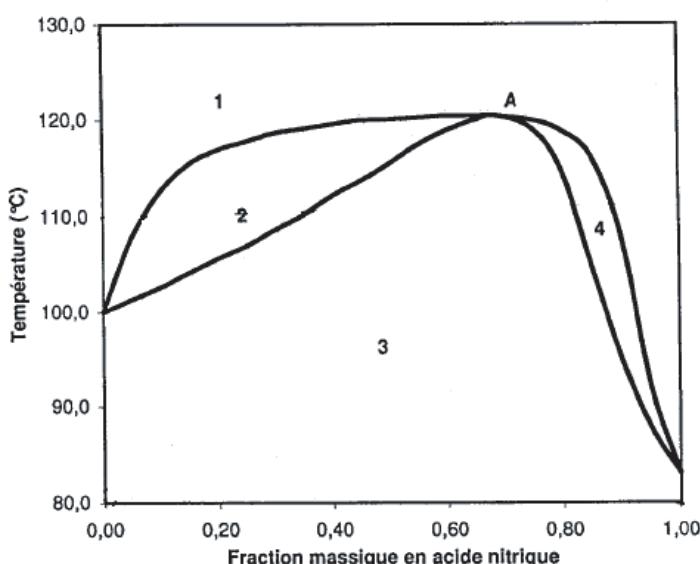


Fig 1 : Diagramme d'équilibre liquide-vapeur du mélange binaire eau-acide nitrique.

3.5 Un échantillon du mélange eau-acide nitrique constitué de 15 moles contient 1 mole d'acide nitrique.

3.5.1 Calculer la fraction massique w_{HNO_3} en acide nitrique de ce mélange et montrer que le système est homogène à 100°C. Préciser la nature de la phase.

3.5.2 On chauffe ce mélange à pression constante jusqu'à 110°C.

3.5.2.1 Déterminer la masse m de liquide obtenue à 110°C.

3.5.2.2 Quelle est la fraction massique w'_{HNO_3} en acide nitrique dans cette phase liquide. Commenter le résultat obtenu.

3.6 On effectue une distillation fractionnée de l'échantillon précédent.

3.6.1 Expliquer le principe d'une telle opération et indiquer sur une figure la suite des opérations effectuées.

3.6.2 En considérant comme efficace la suite des opérations effectuées, préciser de quoi sont constitués :

- le distillat à la sortie de la colonne de fractionnement.
- le résidu de distillation dans le ballon.

fin de l'énoncé

Dérivés oxygénés de l'azote

1^{ère} partie : Structure électronique

1.1 ${}_7N$: $1s^22s^22p^3$ ou $\uparrow\downarrow \uparrow\downarrow \uparrow\uparrow\uparrow$ et ${}_8O$: $1s^22s^22p^4$ ou $\uparrow\downarrow \uparrow\downarrow \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$

1.2 la couche de valence de ${}_7N$ est : $2s^22p^3$ donc la 2^{ème} ligne et la $2+10+3=15$ ^{ème} colonne.

1.3 l'azote possédant 3 électrons célibataires dans sa couche de valence est donc trivalent.

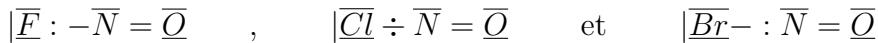
l'oxygène possédant 2 électrons célibataires dans sa couche de valence est donc divalent.

1.4 $\overline{O} = \overline{O}$ et $|N \equiv N|$

$$1.5 \quad \overline{O} = \begin{array}{c} \oplus \\ N \end{array} = \overline{O} \quad , \quad {}^\ominus|\overline{O} - \overline{N} = \overline{O} \quad \text{et} \quad |\overline{O}^\ominus - \begin{array}{c} \oplus \\ |N| \\ || \\ |O| \end{array} - \overline{O}|^\ominus$$

1.6 NO_2^+ de forme AB_2 est linéaire, NO_2^- de forme AB_2E est coudée en V et NO_3^- de forme AB_3 est plan triangulaire équilatérale.

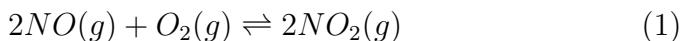
1.7 la représentation de Lewis des molécules est :



de forme AB_2E sont coudées en V, le doublet de la liaison $X-N$ est plus proche de X du fait de l'électronégativité dans l'ordre : F , puis Cl , puis Br .

l'angle $X\widehat{N}O$ sera moins encombré (géné) dans FNO , que dans $ClNO$, que dans $BrNO$.

2^{ème} partie : Étude de l'oxydation du monoxyde d'azote



2.1 Étude thermodynamique

2.1.1 la loi de Hess s'écrit $\Delta_rH^0(298K) = 2\Delta_rH_f^0(NO_2) - 2 \times 0 - 2\Delta_rH_f^0(NO) = -114 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$

2.1.2 L'équilibre est exothermique, toute augmentation de température déplacera l'équilibre dans le sens indirecte.

2.1.3 le théorème de Gibbs donne : $v = (n + a) - (r + \varphi + q) = 3$, tel que :

$n = 3$: O_2 , NO et NO_2

$a = 2$: T, p car $\Delta_rH^0 \neq 0$ et $\sum \nu_i(\text{gaz}) = 2 - 2 - 1 \neq 0$

$r = 1$: un seul équilibre.

$\varphi = 1$: gaz.

$q = 0$ aucune restriction sur les quantités initiales.

Parmi p_{O_2} , p_{NO_2} , p_{NO} , p et T , on ne peut choisir librement que trois paramètres.

2.1.4 Par décomposition de NO_2 , on aura une relation supplémentaire :

$$p(NO) = 2p(O_2) \implies q = 1 \implies v' = 2$$

Parmi p_{O_2} , p_{NO_2} , p_{NO} , p et T , on ne peut choisir librement que deux paramètres.

2.1.5 :

	$2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$			$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	1 mol	0.5 mol	0	1.5 mol
$t = t_{eq}$	$1 - 2x$	$0.5(1 - 2x)$	$2x$	$1.5 - x$

$$\text{on a : } K^\circ_1 = \frac{\left(\frac{p(No_2)}{P}\right)^2}{\left(\frac{p(No)}{P}\right)^2 \cdot \left(\frac{p(O_2)}{P}\right)}$$

$$\text{la loi de Dalton } p_i = \frac{n_i}{n_{tot}(gaz)} P \text{ soit : } K^\circ_1 = \frac{(2x)^2(1.5-x)}{0.5(1-2x)^3} \frac{P^\circ}{P_e}$$

$$\text{loi des gaz parfaits : } \left(\frac{3}{2} - x\right)RT = P_e V, \text{ soit : } x = \frac{3}{2} - \frac{4.20 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{8.314 \cdot 400} = 0.24 \text{ mol}$$

on en déduit que :

$$K^\circ_1 \approx 1$$

2.1.6 à $T_f = 400 K$:

	$2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$			$N_2(g)$	$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	1 mol	0.5 mol	0	2 mol	3.5 mol
$t = t_{eq}$	$1 - 2x'$	$0.5(1 - 2x')$	$2x'$	2	$3.5 - x$

2.1.6.1 on a $K^\circ_1(400) \approx 1 = \frac{(2x')^2(3.5-x')}{0.5(1-2x')^3} \frac{P^\circ}{P_e}$ tel que $P_e = 1 \text{ bar}$.

soit une équation, après simplification, du 2^d degré qui se résout : $x' = 0.125 \text{ mol}$, la valeur négative est non acceptée (ie : $n(NO_2) > 0$).

soit : $n_{eq}(NO) = 0.75 \text{ mol}$, $n_{eq}(O_2) = 0.375 \text{ mol}$, $n_{eq}(NO_2) = 0.25 \text{ mol}$ et $n_{eq}(N_2) = 2 \text{ mol}$.

2.1.6.2 le 1^{er} principe pour les gaz de l'enceinte adiabatique s'écrit :

$$2x' \Delta_r H^\circ(400) + \int_{300}^{400} [0.5 \times c_p(O_2) + 1 \times c_p(NO) + 2 \times c_p(N_2)] dT = 0$$

càd que la chaleur dégagée par la réaction à $T_f = 400 K$ doit compenser (système adiabatique), la chaleur nécessaire pour chauffer les réactifs (la réaction étant bloquée) de T_i à T_f .

$$\text{soit : } \Delta_r H^\circ(400) = - \frac{[0.5 \times 42.5 + 1 \times 31.1 + 2 \times 29.6] \times (400 - 300)}{2 \times 0.125} = -44.6 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Rqe : on peut aussi dire que la chaleur dégagée par la réaction à $T_i = 300 K$ sert à chauffer les constituants :

$$2x' \Delta_r H^\circ(300) + \int_{300}^{400} [0.5(1-2x') \times c_p(O_2) + (1-2x') \times c_p(NO) + 2x' \times c_p(NO_2) + 2 \times c_p(N_2)] dT = 0$$

2.2 Étude cinétique

2.2.1

2.2.1.1 on a :

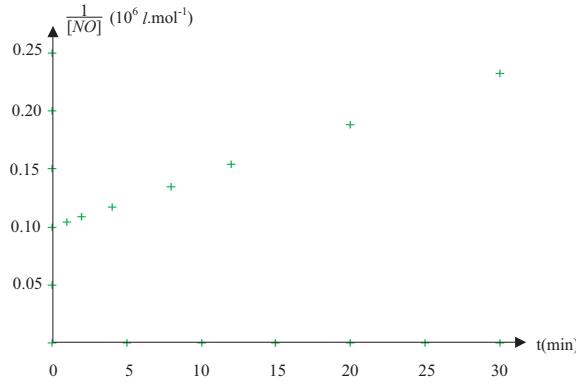
$$-\frac{1}{2} \frac{d[NO]}{dt} = -\frac{d[O_2]}{dt} = k[O_2]^\alpha [NO]^2$$

pour un excés de O_2 devant NO , on aura $[O_2] \approx cte$, donc

$$-\int_{[NO]_0}^{[NO]} \frac{d[NO]}{[NO]^2} = \int_0^t 2k[O_2]^\alpha dt$$

$$\implies \frac{1}{[NO]} - \frac{1}{[NO]_0} = 2k[O_2]^\alpha t \text{ où } \boxed{k' = 2k[O_2]^\alpha}$$

2.2.1.2 on représente la loi affine $\frac{1}{[NO]} = f(t) = \frac{1}{[NO]_0} + k't$



la loi est vérifiée ainsi l'ordre partiel par rapport à NO est bien 2.

2.2.1.3 graphiquement $k' = pente = 74 \text{ l}.mol^{-1}.s^{-1}$

Attention : l'ordre partiel par rapport à O_2 n'est pas précisé , je le prend à priori $\alpha = 1$

$$\Rightarrow k = \frac{k'}{2[O_2]^\alpha} = 74 \cdot 10^2 \text{ l}^2.mol^{-2}.s^{-1}$$

2.2.1.4 oui, car $[NO] < 9.6 \cdot 10^{-6} \text{ mol.l}^{-1} \ll [O_2]_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$

2.2.2

2.2.2.1 on a :

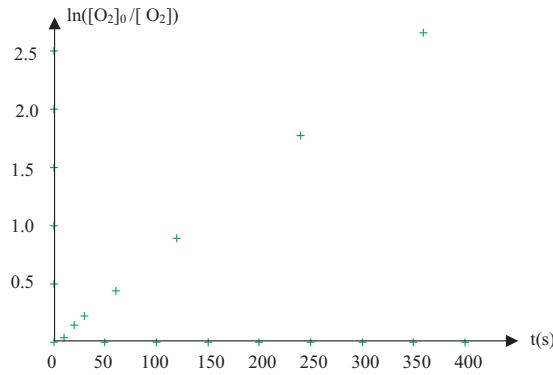
$$-\frac{1}{2} \frac{d[NO]}{dt} = -\frac{d[O_2]}{dt} = k[NO]^2[O_2]$$

pour un excés de NO devant O_2 , on aura $[NO] \approx cte = [NO]_0$, donc

$$\int_{[O_2]_0}^{[O_2]} \frac{d[O_2]}{[O_2]} = \int_0^t -k[NO]_0^2 dt$$

$$\Rightarrow \ln \frac{[O_2]}{[O_2]_0} = -k[NO]_0^2 t$$

On représente la loi linéaire $\ln \frac{[O_2]_0}{[O_2]} = g(t) = +k[NO]_0^2 t$



la loi est vérifiée ainsi l'ordre partiel par rapport à O_2 est bien 1.

2.2.2.2 graphiquement $k[NO]_0^2 = pente' = 7.4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \Rightarrow k = 74 \cdot 10^2 \text{ l}^2.mol^{-2}.s^{-1}$.

on retrouve la même valeur qu'en 2.2.1.

2.2.3 la vitesse de la réaction d'oxydation s'écrit :

$$\frac{d[NO_2]}{dt} = 2k[NO]^2[O_2]$$

2.2.4

2.2.4.1 N_2O_2 est un intermédiaire réactionnel car il ne figure pas dans l'équation bilan de la réaction (1).

2.2.4.2 on a :

$$\frac{d[N_2O_2]}{dt} = +k_1[NO]^2 - k_{-1}[N_2O_2] - k_2[N_2O_2][O_2] = 0$$

soit :

$$[N_2O_2] = \frac{k_1[NO]^2}{k_{-1} + k_2[O_2]}$$

2.2.4.3 la vitesse v d'oxydation du monoxyde d'azote s'écrit :

$$v = \frac{d[NO_2]}{dt} = 2k_2[N_2O_2][O_2] = \frac{2k_2k_1[NO]^2[O_2]}{k_{-1} + k_2[O_2]}$$

2.2.4.4 en 2.2.3 on a : $v = 2k[NO]^2[O_2]$ qui est comparable à celle obtenue en 2.2.4.3 à condition que : $k_{-1} \gg k_2[O_2]$, dans ce cas $k = \frac{k_2k_1}{k_{-1}}$.

2.2.4.5 si $k_{-1} \ll k_2[O_2]$ on aura $v \approx 2k_1[NO]^2$

l'ordre global de la réaction est 2, au lieu de 3, l'étape limitante est l'étape (1) car la loi devient indépendante de $[O_2]$ et k_2 .

3ème partie :
Purification de l'acide nitrique par distillation fractionnée

3.1 :

1	V
2	V+L
3	L
4	V+L

3.2 la frontière $V|(V + L)$ est la courbe de rosée : apparition de la première goutte liquide.

la frontière $(L + V)|L$ est la courbe d'ébullition : apparition de la première bulle de vapeur.

3.3 $T_{eb}(HNO_3) = 82.3^\circ C$, elle dépend de la pression.

3.4

3.4.1 un mélange azéotrope.

3.4.2 on a $v = 3 - \varphi$ en A : $\varphi = 2$ (L+V) donc $v = 1$, le point A dépend de la pression.

3.4.3 le changement d'état isobare liquide-vapeur se fait à température constante.

3.4.4 à une autre valeur de pression le mélange n'est plus azéotrope et son changement d'état isobare ne se fera plus à température constante.

3.5

3.5.1 on a :

$$w_{HNO_3} := \frac{m_{HNO_3}}{m_{HNO_3} + m_{H_2O}} = \frac{1 \times M_{HNO_3}}{14 \times M_{H_2O} + 1 \times M_{HNO_3}} = 0.2$$

Le point (0.2, 100°C) appartient au domaine (3), le système est donc homogène (1 seule phase) et liquide.

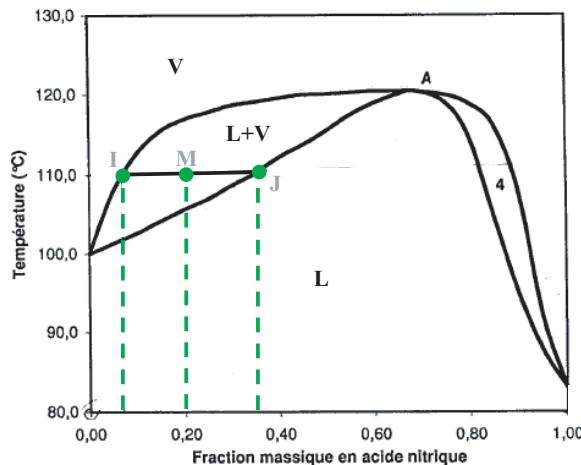
3.5.2

3.5.2.1 par application du théorème des moments chimiques : $IM \times m_V = MJ \times m_\ell$

ici on note $m_\ell = m$, on a : $m_V = m_{tot} - m$ avec $m_{tot} = 14 \times M_{H_2O} + 1 \times M_{HNO_3} = 315 \text{ g}$

sur le diagramme on lit (par règle de trois) : $IM = 0.13$ et $MJ = 0.15$

d'où : $m = \frac{IM}{IM+MJ} m_{tot} = 146 \text{ g}$



3.5.2.2 par lecture : $w'_{HNO_3} = 0.35 > w_{HNO_3} = 0.2$, la phase liquide est plus riche en acide nitrique que le mélange initial.

3.6

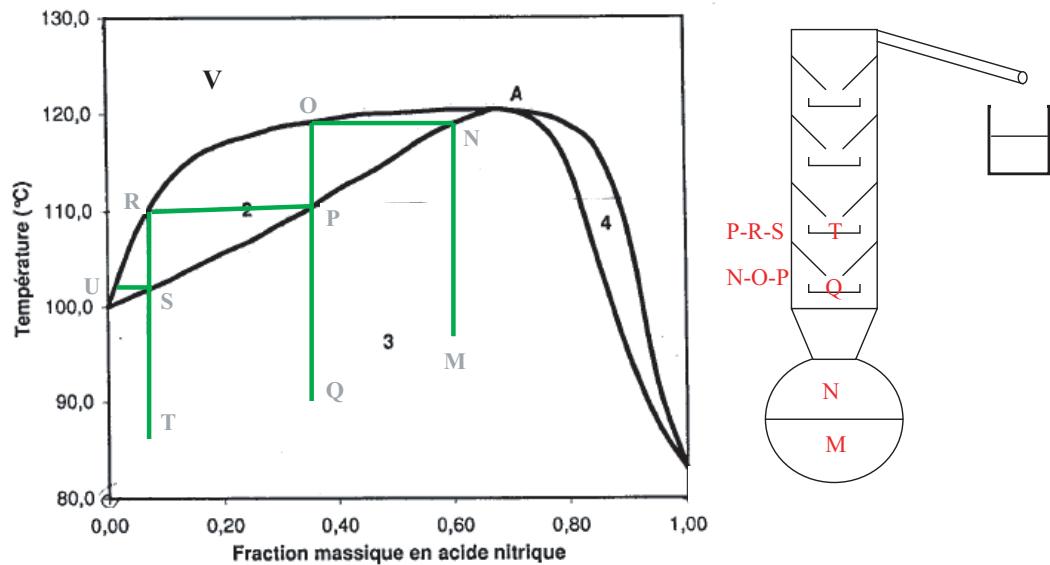
3.6.1 On chauffe le mélange initial de M à N , la première vapeur formée est isolée O puis refroidie Q par contact avec la paroi au niveau de l'étage 1.

Un nouveau cycle commence par chauffage de Q à P , la vapeur est isolée R puis refroidie T par contact avec la paroi au niveau de l'étage 2.

etc...

la vapeur est de plus en plus riche en produit plus volatil.

Rqe : la température décroît du bas vers le haut de la colonne.



- 3.6.2** - le distillat à la sortie de la colonne de fractionnement est l'eau pur (ie : le plus volatil).
 - le résidu de distillation dans le ballon sera donc le mélange azéotrope.

fin du corrigé

À propos de quelques composés du phosphore

Le phosphore joue un rôle très important dans différents secteurs. Le présent problème propose de découvrir quelques aspects de la chimie de cet élément et de certains de ses composés. Aucune connaissance préalable de la chimie de ces composés n'est requise pour traiter le problème.

Le problème est constitué de 4 parties **indépendantes** et qui peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Chacune des différentes parties du problème comporte plusieurs questions indépendantes.

Données utiles

- Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
- Numéros atomiques Z et masses molaires atomiques $M(\text{g.mol}^{-1})$ de quelques éléments :

	H	N	O	P	Cl
Z	1	7	8	15	17
M	1,008	14,01	16,00	30,97	35,45

- Enthalpies standard de formation $\Delta_r H_f^\circ$, entropies standard absolues S° à 298 K :

	$H_{(g)}$	$P_{(g)}$	$P_{(s,blanc)}$	$P_{(s,rouge)}$	$P_{4(g)}$
$\Delta_r H_f^\circ(\text{kJ.mol}^{-1})$	218,0	315,9	0	-17,56	58,9
$S^\circ(\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})$	114,6	163,1	41,1	22,8	279,9
	$H_{2(g)}$	$PH_{3(g)}$	$Cl_{2(g)}$	$PCl_{3(g)}$	$PCl_{5(g)}$
$\Delta_r H_f^\circ(\text{kJ.mol}^{-1})$	-	5,44	-	-287,0	-374,9
$S^\circ(\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})$	103,7	210,1	223,0	311,7	364,5

Ces données seront supposées indépendantes de la température.

- Constantes d'acidité en solution aqueuse à 298 K :
 - acide phosphorique H_3PO_4 : $pK_{a,l} = 2$, $pK_{a,2} = 7$, $pK_{a,3} = 12$
 - acide carbonique H_2CO_3 : $pK'_{a,l} = 6,4$, $pK'_{a,2} = 10,3$
- Constante de l'équilibre d'auto-protolyse de l'eau à 298 K : $K_e = 10^{-14}$
- Composition approximative de l'air : $\{\frac{1}{5}O_2, \frac{4}{5}N_2\}$
- Tous les gaz rencontrés dans le problème seront considérés comme parfaits.

1^{ère} partie : L'élément simple

1.1 Le phosphore possède un numéro atomique $Z = 15$.

1.1.1 Donner la structure électronique du phosphore dans son état fondamental.

1.1.2 Quelle est la position (ligne et colonne) du phosphore dans la classification périodique des éléments ? À quel bloc d'éléments appartient-il ?

1.2 Le phosphore solide peut exister sous deux formes ou variétés allotropiques : le phosphore rouge et le phosphore blanc.

1.2.1 D'après les données thermodynamiques, quelle est la variété allotropique stable à 25°C ? À partir de quelle température T_i l'autre variété allotropique devient-elle stable ?

Par chauffage, le phosphore rouge se sublime en phosphore gazeux selon :



1.2.2 Proposer une structure géométrique de la molécule P_4 sachant que dans cette molécule, les 4 atomes de phosphore sont équivalents.

1.2.3 Déterminer la variance d'un système siège d'un équilibre entre $P_{(s,\text{rouge})}$ et $P_{4(g)}$, Interpréter.

1.2.4 Déterminer l'expression en fonction de la température, de l'enthalpie libre standard Δ_rG° de la réaction (1).

1.2.5 En déduire l'expression de la pression $p_P(T)$ de vapeur du phosphore en équilibre avec le solide en fonction de la température.

1.2.6 À quelle température T_1 cette pression est-elle égale à la pression de référence $p^\circ = 1\text{bar}$?

2^{ème} partie :
La phosphine

La phosphine ou hydrure de phosphore a pour formule brute PH_3 .

2.1 Structure de la molécule

2.1.1 Donner le schéma de LEWIS de PH_3 .

2.1.2 En utilisant la théorie de la répulsion entre les paires d'électrons de valence ou VSEPR (Valence Shell Electron Pair Repulsion), déterminer la géométrie tridimensionnelle de PH_3 .

2.2 Étude cinétique de la décomposition thermique

Par chauffage, la phosphine $PH_{3(g)}$ se décompose en phosphore gazeux $P_{4(g)}$ et en dihydrogène $H_{2(g)}$

2.2.1 Écrire l'équation bilan de la réaction de décomposition thermique de la phosphine.

On suppose que la température est maintenue constante tout au long de l'évolution de la réaction qui a lieu dans un récipient de volume constant.

2.2.2 En considérant une cinétique d'ordre 1, montrer que la pression totale $p(t)$ dans le récipient suit une loi du type :

$$p(t) = A - B \exp -Ct$$

où A , B et C sont trois constantes positives que l'on exprimera en fonction de :

- la constante de vitesse k de la réaction écrite pour une mole de P_4 ;
- la pression initiale p_0 dans le récipient juste avant le déclenchement de la réaction.

On enferme, à basse température, de la phosphine dans un récipient de volume constant, préalablement vide. Ce dernier est rapidement porté à 600°C et on suit l'évolution de la pression dans le récipient en fonction du temps. Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la pression totale $p(t)$ au sein du récipient en fonction du temps.

$t(s)$	20	30	40	50	60	80	100	∞
$p(\text{bar})$	0,822	0,882	0,928	0,967	1,000	1,053	1,086	1,151

On note p_∞ la pression finale dans le récipient.

2.2.3 Quelle était la pression initiale p_0 , à 600°C, dans le récipient à $t = 0$?

2.2.4 À l'aide d'une représentation graphique :

$$\ln \frac{p_\infty - p_0}{p_\infty - p(t)} = f(t)$$

montrer que la décomposition thermique de la phosphine est bien une réaction de premier ordre et en déduire la valeur de sa constante de vitesse k en précisant son unité.

4^{ème} partie : Les chlorures de phosphore

On se propose d'étudier, en phase gazeuse, l'équilibre de dissociation :



- 3.1 Donner le schéma de LEWIS et déterminer la géométrie, selon VSEPR, des molécules de tri-chlorure de phosphore PCl_3 et de pentachlorure de phosphore PCl_5 .
- 3.2 À 200°C , sous une pression $p = 1\text{bar}$, la densité du mélange gazeux, obtenu par chauffage du pentachlorure de phosphore pur, est $d = 4,80$. En déduire la valeur de la constante d'équilibre K_2 de l'équilibre (2). **On rappelle** que la densité d'un gaz est définie par rapport à l'air. Elle est égale au rapport de la masse molaire du gaz considéré à celle de l'air.
- 3.3 Quelle est la composition du mélange obtenu à l'équilibre, dans les mêmes conditions, sous la pression $p = 5\text{bar}$? Justifier le sens de déplacement de l'équilibre.
- 3.4 Déterminer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_rH^\circ_2$ et l'entropie standard de réaction $\Delta_rS^\circ_2$ de l'équilibre (2).
- 3.5 En déduire l'expression de $\ln K_2$ en fonction de la température T dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM.
- 3.6 À quelle température T_d faut-il opérer, sous $p = 1\text{bar}$, pour que le taux de dissociation du pentachlorure de phosphore à l'équilibre soit de 25%?

3^{ème} partie : L'acide phosphorique

Dans cette partie, on se propose d'étudier le dosage d'un mélange d'acide phosphorique H_3PO_4 de concentration molaire volumique $c_{a,1}$ et d'acide carbonique H_2CO_3 de concentration molaire volumique $c_{a,2}$. À une prise d'essai de volume v_a sont ajoutés progressivement des volumes v_b croissants d'une solution d'hydroxyde de sodium (Na^+, OH^-) de concentration molaire volumique c_b .

- 4.1 Donner le schéma de LEWIS et déterminer la géométrie, selon VSEPR, de l'ion PO_4^{3-} . En déduire la géométrie de H_3PO_4 .
- 4.2 Tracer les diagrammes de prépondérance des couples de l'acide phosphorique d'une part et de ceux de l'acide carbonique d'autre part.
- 4.3 En exprimant les lois de conservation de la matière, exprimer les coefficients α_i de distribution des espèces chimiques en fonction de v_a , v_b , $K_{a,1}$, $K_{a,2}$, $K_{a,3}$, $K'_{a,1}$, $K'_{a,2}$ et $h = [H_3O^+]$. On notera :

$$\alpha_1 = \frac{[H_3PO_4]}{c_{a,1}} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{[H_2PO_4^-]}{c_{a,1}} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{[HPO_4^{2-}]}{c_{a,1}} \quad ; \quad \alpha_4 = \frac{[PO_4^{3-}]}{c_{a,1}}$$

et

$$\alpha'_1 = \frac{[H_2CO_3]}{c_{a,2}} ; \quad \alpha'_2 = \frac{[HCO_3^-]}{c_{a,2}} ; \quad \alpha'_3 = \frac{[CO_3^{2-}]}{c_{a,2}}$$

4.4 Montrer que la loi de conservation de l'électroneutralité de la solution permet en principe de déterminer le *pH* de la solution au cours du dosage. On ne cherchera pas à résoudre l'équation qui en découle.

4.5 La figure 1 donne le diagramme théorique de distribution des différentes espèces de la solution au cours du dosage du mélange par une solution d'hydroxyde de sodium. En déduire l'allure de courbe de dosage pH-métrique du mélange en question. On précisera en particulier le nombre d'équivalences observées et les espèces dosées à chaque équivalence éventuelle.

4.6 Application

On procède au dosage d'une prise d'essai de volume $v_a = 10 \text{ mL}$ du mélange à l'aide d'une solution décimolaire d'hydroxyde de sodium. Le dosage est suivi par pH-métrie.

4.6.1 Faire un schéma du dispositif expérimental en précisant en particulier la nature des électrodes utilisées.

4.6.2 Exprimer les concentrations $c_{a,1}$ d'acide phosphorique et $c_{a,2}$ d'acide carbonique en fonction de v_a , c_b et des volumes $v_{b,1}$ et $v_{b,2}$ d'hydroxyde de sodium versés respectivement au premier et au second point d'équivalence.

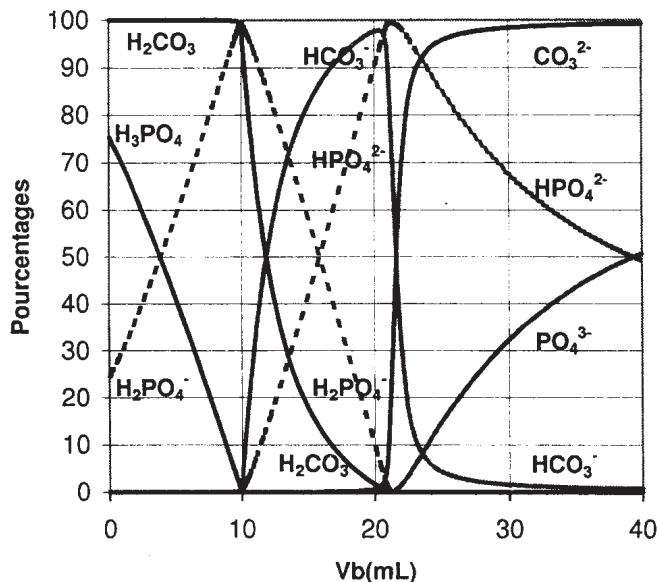


Fig 1 : Diagramme de distribution des espèces chimiques au cours du dosage.

4.6.3 Calculer $c_{a,1}$ et $c_{a,2}$ sachant que $v_{b,1} = 12,3 \text{ mL}$ et $v_{b,2} = 32,8 \text{ mL}$.

4.6.4 Lors du dosage de l'acide phosphorique contenu dans une boisson gazeuse, il est fréquent de constater que le volume $v_{b,2}$ d'hydroxyde de sodium versé à la seconde équivalence (virage de la phénolphthaleine) est supérieur à deux fois $v_{b,2}$, le volume versé à la première équivalence (virage de l'hélianthine). Proposer une explication.

fin de l'énoncé

À propos de quelques composés du phosphore

1^{ère} partie : L'élément simple

1.1

1.1.1 ${}_{15}P$: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$

1.1.2 ligne : 3 et colonne 15 ; bloc p

1.2

1.2.1 soit l'équilibre à 25°C :

$$P_{(s,blanc)} \rightleftharpoons P_{(s,rouge)}$$

on a : $A = -\Delta_r G^\circ - RT \ln Q$, or $Q = 1$, soit :

$$A = -\Delta_r G^\circ (298 \text{ K}) = +17.56 \cdot 10^3 + 298 (22.8 - 41.1) > 0$$

donc : $P_{(s,rouge)}$ est plus stable

$P_{(s,blanc)}$ sera stable si : $A = -\Delta_r G^\circ - RT \ln Q < 0$, or $Q = 1$, donc $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ > 0$ d'après les données (valables pour tout température), il vient :

$$T > T_i = 956 \text{ K}$$

1.2.2 forme tétraèdre (stable) et cyclique (instable) :



1.2.3 $v = (n+a) - (r+\varphi+q) = (2+2) - (1+2+0) = 1$, car $\sum \nu_{gaz} = 1$, le système est monovariant :
 $p = f(T)$

1.2.4 d'après les données $\Delta_r G^\circ_1 = 129 \cdot 10^3 - 188.7 T$ en $J.mol^{-1}$

1.2.5 la constante d'équilibre s'écrit $K = \frac{p_P(T)}{p} = \exp - \frac{\Delta_r G^\circ_1}{RT}$, soit :

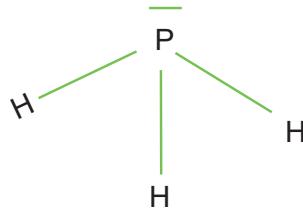
$$p_P(T) = p^\circ \exp(22.3 - \frac{15.5 \cdot 10^3}{T})$$

1.2.6 $T_1 = 684 \text{ K}$

2^{ème} partie : La phosphine

2.1 Structure de la molécule

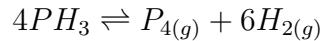
2.1.1 :



2.1.2 PH_3 est de formule AB_3E : pyramide à base triangulaire ou tétraèdre irrégulier

2.2 Étude cinétique de la décomposition thermique

2.2.1



2.2.2 on a :

	$4PH_3(g) \rightleftharpoons P_{4(g)} + 6H_{2(g)}$			$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n_0	0	0	n_0
$t > 0$	$n_0(1 - 4x)$	n_0x	$6n_0x$	$n_0(1 + 3x)$

donc :

$$p(t) = n_0(1 + 3x) \frac{RT}{V}$$

et

$$[PH_3] = \frac{n_0(1 - 4x)}{V}$$

la loi cinétique d'ordre 1 :

$$\frac{1}{4} \frac{d[PH_3]}{dt} = -k[PH_3] \Rightarrow [PH_3](t) = [PH_3](0) \exp -4kt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{4}(1 - \exp -4kt)$$

soit :

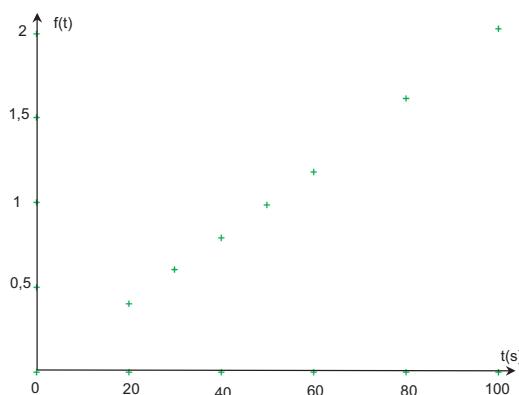
$$p(t) = \frac{n_0 RT}{V} \left[\frac{7}{4} - \frac{3}{4} \exp -4kt \right] = \frac{7p_0}{4} - \frac{3p_0}{4} \exp -4kt$$

d'où : $A = \frac{7p_0}{4}$, $B = \frac{3p_0}{4}$ et $C = 4k$

2.2.3 $p_\infty = \frac{7p_0}{4}$ donc $p_0 = 0.658 \text{ bar}$

2.2.4 théoriquement :

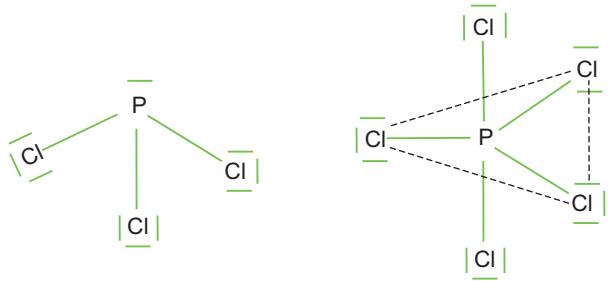
$$\ln \frac{p_\infty - p_0}{p_\infty - p(t)} = 4kt$$



la loi est bien vérifiée et $k = \frac{\text{pente}}{4} = 5.05 \text{ s}^{-1}$

4^{ème} partie :
Les chlorures de phosphore

3.1 :



PCl_3 : tétraèdre irrégulier, PCl_5 : bipyramide à base triangulaire

3.2 on a :

$PCl_5(g) \rightleftharpoons PCl_{3(g)} + Cl_{2(g)}$				$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n_0	0	0	n_0
$t = t_{eq}$	$n_0(1-x)$	n_0x	n_0x	$n_0(1+x)$

$$\text{or} : d := \frac{M_{mélange}}{29} = \frac{n_0(1-x)(M_P+5M_{Cl})+n_0x(M_P+3M_{Cl})+n_0x(2M_{Cl})}{n_0(1+x)} = \frac{1}{29}$$

$$\text{soit} : d = \frac{M_{PCl_5}}{29(1+x)} \Rightarrow x = \frac{M_{PCl_5}}{29d} - 1 = 0.50$$

finalement :

$$K = \frac{\left(\frac{n_0x}{n_0(1+x)} \cdot \frac{p^\circ}{p}\right)^2}{\frac{n_0(1-x)}{n_0(1+x)} \cdot \frac{p^\circ}{p}} = \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{p^\circ}{p}$$

$$\text{A.N} : p = p^\circ = 1\text{bar}, K = 0.326$$

3.3 la composition du mélange obtenu à l'équilibre, $T = 600^\circ C$ donc même valeur de K , sous la pression $p = 5\text{bar}$:

$$x' = \sqrt{\frac{K}{K + \frac{p}{p}}} = 0.25$$

$PCl_5(g) \rightleftharpoons PCl_{3(g)} + Cl_{2(g)}$				$n_{tot}(gaz)$
$t = 0$	n_0	0	0	n_0
$t = t_{eq}$	$0.75n_0$	$0.25n_0$	$0.25n_0$	$1.25n_0$
farction molaire	60%	20%	20%	

on a : $x' < x$ l'équilibre se déplace dans le sens indirect car $P \nearrow$: sens de diminution des gaz

3.4 $\Delta_r H^\circ_2(T) = 87.9 \cdot 10^3 \text{ J.mol}^{-1}$, $\Delta_r S^\circ_2(T) = 170.2 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$ constantes d'après les données

$$\text{3.5 } \ln K_2 = -\frac{\Delta_r G^\circ_2}{RT} = -10.57 \cdot 10^3 \times \frac{1}{T} + 80.5$$

3.6 le taux de dissociation de PCl_5 est égale à :

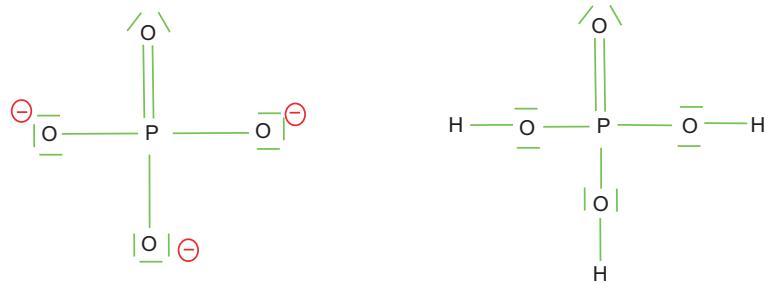
$$x = \frac{\text{qté dissociée}}{\text{qté initiale}} = 0.25$$

$$\text{on a : } K_2(T_d) = \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{p^\circ}{p} = 66.6 \cdot 10^{-3}$$

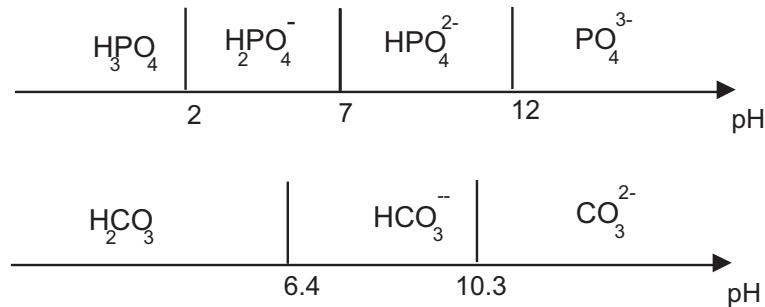
$$\text{soit, d'après 3.5 : } T_d = 456 \text{ K}$$

3^{ème} partie :
L'acide phosphorique

4.1 :



4.2 :



4.3 les trois acidités de H_3PO_4 :

$$K_{a,1} = \frac{[H_2PO_4^-]h}{[H_3PO_4]} \quad ; \quad K_{a,2} = \frac{[HPO_4^{2-}]h}{[H_2PO_4^-]} \quad ; \quad K_{a,3} = \frac{[PO_4^{3-}]h}{[HPO_4^{2-}]}$$

la conservation de la matière s'écrit :

$$\frac{c_{a,1}v_a}{v_a + v_b} = [H_3PO_4] + [H_2PO_4^-] + [HPO_4^{2-}] + [PO_4^{3-}]$$

en remplaçant :

$$\alpha_1 = \frac{[H_3PO_4]}{c_{a,1}} = \frac{\frac{v_a}{v_a + v_b}}{1 + \frac{K_{a,1}}{h} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}}{h^2} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}K_{a,3}}{h^3}}$$

$$\alpha_2 = \frac{[H_2PO_4^-]}{c_{a,1}} = \frac{\frac{v_a}{v_a + v_b} \times \frac{K_{a,1}}{h}}{1 + \frac{K_{a,1}}{h} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}}{h^2} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}K_{a,3}}{h^3}}$$

$$\alpha_3 = \frac{[HPO_4^{2-}]}{c_{a,1}} = \frac{\frac{v_a}{v_a + v_b} \times \frac{K_{a,1}K_{a,2}}{h^2}}{1 + \frac{K_{a,1}}{h} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}}{h^2} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}K_{a,3}}{h^3}}$$

$$\alpha_4 = \frac{[PO_4^{3-}]}{c_{a,1}} = \frac{\frac{v_a}{v_a + v_b} \times \frac{K_{a,1}K_{a,2}K_{a,3}}{h^3}}{1 + \frac{K_{a,1}}{h} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}}{h^2} + \frac{K_{a,1}K_{a,2}K_{a,3}}{h^3}}$$

de même pour le diacide H_2CO_3 :

$$K'_{a,1} = \frac{[HCO_3^-]h}{[H_2CO_3]} \quad ; \quad K'_{a,2} = \frac{[CO_3^{2-}]h}{[HCO_3^-]}$$

la conservation de la matière s'écrit :

$$\frac{c_{a,2}v_a}{v_a + v_b} = [H_2CO_3] + [HCO_3^-] + [CO_3^{2-}]$$

en remplaçant :

$$\alpha'_1 = \frac{[H_2CO_3]}{c_{a,2}} = \frac{\frac{v_a}{v_a+v_b}}{1 + \frac{K'_{a,1}}{h} + \frac{K'_{a,1}K'_{a,2}}{h^2}}$$

$$\alpha'_2 = \frac{[HCO_3^-]}{c_{a,2}} = \frac{\frac{v_a}{v_a+v_b} \times \frac{K'_{a,1}}{h}}{1 + \frac{K'_{a,1}}{h} + \frac{K'_{a,1}K_{a,2}}{h^2}}$$

$$\alpha'_3 = \frac{[CO_3^{2-}]}{c_{a,2}} = \frac{\frac{v_a}{v_a+v_b} \times \frac{K'_{a,1}K'_{a,2}}{h^2}}{1 + \frac{K'_{a,1}}{h} + \frac{K'_{a,1}K'_{a,2}}{h^2}}$$

4.4 l'électroneutralité de la solution :

$$h + [Na^+] = \frac{K_e}{h} + [HCO_3^-] + 2[CO_3^{2-}] + [H_2PO_4^-] + 2[HPO_4^{2-}] + 3[PO_4^{3-}]$$

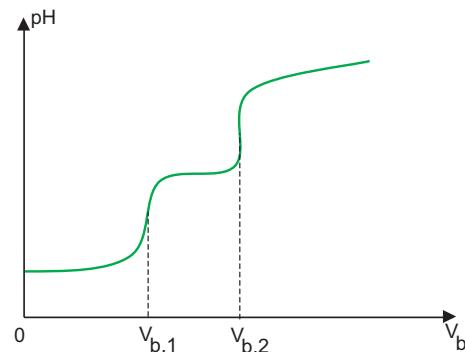
soit :

$$h + \frac{c_b v_b}{v_a + v_b} = \frac{K_e}{h} + c_{a,2}(\alpha'_2(h) + 2\alpha'_3(h)) + c_{a,1}(\alpha_2(h) + 2\alpha_3(h) + 3\alpha_4(h))$$

qui est une équation de la seule inconnue h .

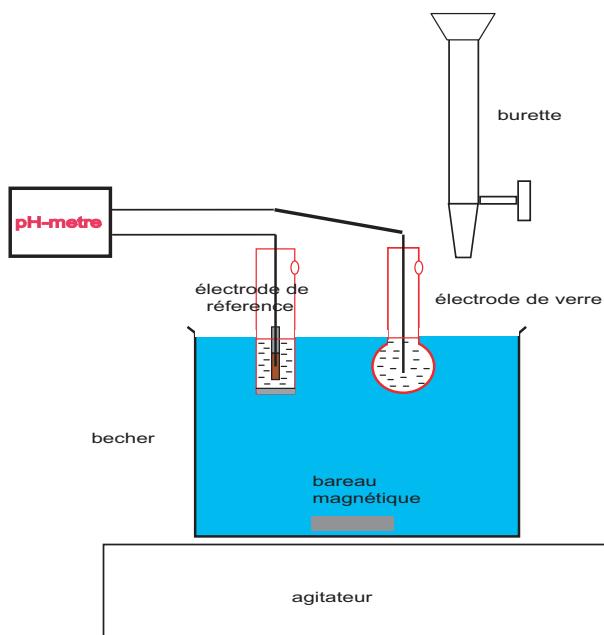
- 4.5 pour $v_b \in [0, 10]$ mL la seule espèce qui diminue est H_3PO_4 et pour $v_b \in [10, 20]$ mL les deux espèces qui diminuent sont H_2CO_3 et $H_2PO_4^-$

Rqe : le dosage de l'espèce HCO_3^- est pratiquement confondu à $v_b = 20$ mL



4.6 Application

4.6.1 :



4.6.2 première équivalence (dosage de H_3PO_4) :

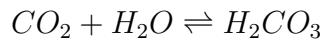
$$c_{a,1}v_a = c_b v_{b,1} \Rightarrow c_{a,1} = \frac{c_b v_{b,1}}{v_a}$$

deuxième équivalence (dosage simultané $H_2PO_4^-$ et H_2CO_3) :

$$c_{a,1}v_a + c_{a,2}v_a = c_b(v_{b,2} - v_{b,1}) \Rightarrow c_{a,2} = \frac{c_b(v_{b,2} - v_{b,1})}{v_a} - c_{a,1}$$

4.6.3 $c_b = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$ A.N : $c_{a,1} = 0.123 \text{ mol.L}^{-1}$ et $c_{a,2} = 0.082 \text{ mol.L}^{-1}$

4.6.4 ceci s'explique par l'existence du CO_2 dissout dans la boisson selon :



fin du corrigé

SOMMAIRE :

PHYSIQUE.I

Étude de quelques aspects mécaniques d'une roue de voiture	..2000..	03-12
Résonance magnétique nucléaire -RMN-	..2001..	21-29
Satellites artificiels	..2002..	36-40
Autour d'exo-planètes	..2003..	46-55
Microscopie	..2004..	63-72
Champ magnétique et propriétés de la matière	..2005..	79-85
Thermodynamique et mécanique	..2006..	92-99
Conduction électrique sous champ magnétique	..2007..	105-110
Quelques manifestations des transferts thermiques	..2008..	116-123

PHYSIQUE.II

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques	..2000..	132-140
Quelques mesures physiques en océanographie	..2001..	151-160
Quelques aspects de la physique des plasmas	..2002..	165-172
Quelques aspects de la conduction thermique	..2003..	178-186
Sondage atmosphérique	..2004..	194-201
Méthode photométrique de mesure d'une température	..2005..	206-212
Indice de réfraction de l'air	..2006..	216-224
Fibres optiques	..2007..	230-236
Électrostatique et électronique	..2008..	241-248

CHIMIE

L'eau	..2000..	258-261
Le Silicium	..2001..	265-269
Autour du manganèse	..2002..	273-277
Le mercure	..2003..	281-285
Les halogènes	..2004..	292-296
Le Nickel	..2005..	300-305
Le Cuivre	..2006..	310-314
Dérivés oxygénés de l'azote	..2007..	318-323
À propos de quelques composés du phosphore	..2008..	329-333