CLASSES PRÉPAS PC-PC*

Renaud Carpentier
Benoît Depret

La physique en applications

150 problèmes corrigés contemporains

préface de **Roland Lehoucq**

ellipses

Renaud Carpentier
Benoît Dépret

La physique en applications

50 problèmes corrigés contemporains

préface de **Roland Lehoucq**

ellipses

Références sciences

La physique en applications

150 problèmes corrigés PC/ PC*

Renaud Carpentier
Benoît Dépret

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-002111
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2014
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

DANGER
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Préface

Un arbre n'est ni vrai, ni faux : il est compliqué.
Paul Veyne

La physique porte sur le monde un regard qui n'est réductible à aucun autre. Non seulement le monde que les physiciens étudient dans leurs laboratoires et qui constitue le quotidien de leurs interrogations, mais aussi celui qui nous est plus familier, le monde de la maison, le Soleil qui brille, le flot d'une rivière ou d'un jet d'eau, les mouvements de la mer, la couleur des choses, le son des instruments ou les objets techniques qui envahissent nos vies. Les pages qui suivent s'efforcent de transmettre aux étudiants scientifiques de quoi est fait ce regard, ce qu'il voit, comment il le voit et l'analyse et, surtout, l'excitation et le plaisir qui s'y attachent, dans une invitation alerte à réfléchir sur des objets et des phénomènes proches de nous. Nous les connaissons, nous les pratiquons, nous en avons des représentations mentales, mais sommes-nous vraiment sûrs de bien les comprendre ? Ce livre est novateur à deux titres. D'abord, et c'est bien la moindre des choses pour ses lecteurs, ses exercices tiennent compte des nouveaux programmes de classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles. Mais il est surtout nouveau dans la forme que prennent ses exercices qui visent à montrer un cerveau physicien en action, comment il fonctionne devant une question « mal posée » c'est-à-dire pour laquelle il faut avant toute chose élaborer une stratégie de résolution. Les auteurs proposent donc des exercices très contextualisés s'inspirant d'articles scientifiques récents, de questions issues de la recherche scientifique ou de l'industrie, ainsi que d'expériences réalisées en laboratoire, à la maison et même à la plage ! Ils mettent en avant la démarche d'investigation, le questionnement, l'analyse de documents comme ceux que les étudiants trouvent désormais sur internet, notamment dans l'encyclopédie en ligne Wikipédia. L'étudiant doit réaliser que résoudre une question de physique c'est prendre des initiatives, tenter des solutions qui, même si elles n'aboutissent pas, permettent de mieux cerner la situation. Ainsi, tâtonner, faire une figure, estimer des ordres de grandeur, « bricoler » de toutes les manières, sont des moyens utiles et recommandés. Par exemple, un objet réel n'est jamais « grand » ou « petit » : il faut discuter quels paramètres sont petits ou grands devant quels autres, pour ne garder *in fine* que ceux qui sont strictement nécessaires. On essaie alors de représenter le système réel par un modèle simple plus facile à rattacher aux notions apprises en cours. Savoir ce que l'on peut faire avec les connaissances acquises et évaluer les efforts nécessaires pour arriver à une estimation des effets est aussi important que de souligner les phénomènes physiques à la base du problème. Enfin, après avoir compris qualitativement le problème, il est temps de poser soi-même les équations, avant de les résoudre pour obtenir une solution numérique confrontable au réel. C'est cette phase de recherche de la solution qui permet de s'approprier réellement les notions de physique et d'en améliorer sa maîtrise. Par la façon dont il expose de belles questions de physique, ce livre aidera les étudiants motivés par la compréhension du monde à mieux en maîtriser les arcanes.

Roland Lehoucq

Roland Lehoucq est astrophysicien au CEA (Commissariat à l'Energie Atomique) de Saclay et travaille sur la topologie cosmique. Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, il a écrit ou co-écrit une dizaine de livres et d'articles de vulgarisation scientifique épluchant la physique présente dans diverses œuvres de science-fiction (films, bandes-dessinées...).

Avant-propos

Le présent ouvrage est un recueil de problèmes visant à couvrir l'ensemble du nouveau programme de physique des classes préparatoires scientifiques, filière PC-PC*, et trouvera également toute son utilité dans les filières PSI-PSI*, MP-MP* et PT-PT*, ainsi que dans toute filière scientifique universitaire. Nous proposons à ce titre, avant la table des matières, un tableau répertoriant par quelles filières chaque problème peut être abordé.

Les problèmes proposés sont en très grande majorité des productions originales des auteurs basées sur la littérature scientifique récente, sur des contacts dans les milieux de la recherche scientifique ou de l'industrie, ainsi que sur des expériences réalisées en laboratoire ou à la maison par les auteurs eux-mêmes. Ces problèmes ont tous en commun une passion pour les phénomènes physiques du monde qui nous entoure.

Le lecteur pourra choisir de traiter les problèmes selon leur niveau de difficulté. Chaque problème est ainsi repéré selon son niveau de TECHNICITE (capacité à mener à bien des calculs) et d'INITIATIVE (le lecteur est livré à lui-même pour résoudre le problème posé) :

* Pas de difficulté majeure ** Difficultés possibles *** Très difficile

Les problèmes sont rassemblés par chapitre disciplinaire : optique, électromagnétisme, mécanique quantique etc. En outre, le lecteur trouvera dans le chapitre 10 une vingtaine de problèmes multidisciplinaires : ces « problèmes multichapitres », référencés à la fin de chacun des chapitres auquel ils font appel, constituent un très bon entraînement pour les concours. Enfin, le chapitre 11 propose quelques « résolutions de problèmes » pour lesquels une grande autonomie est nécessaire.

Un bon physicien se doit de connaître les principales constantes fondamentales, ainsi que les ordres de grandeur de paramètres courants. C'est pourquoi ces valeurs ne sont pas toujours rappelées dans les énoncés et il faudra ainsi parfois savoir les retrouver. Ce n'est pas une erreur mais bien une volonté de laisser le lecteur trouver tout seul son chemin vers la résolution des problèmes.

Comme pour tout sujet de concours, le lecteur prendra un soin particulier à vérifier l'homogénéité de ses résultats, à contrôler les unités utilisées et à adapter correctement le nombre de chiffres significatifs dans ses applications numériques. Les résultats expérimentaux devront le plus souvent être accompagnés de leurs incertitudes.

Enfin, les problèmes sont tous entièrement corrigés en détails, afin que le lecteur puisse vérifier ses résultats et sa compréhension des phénomènes physiques étudiés. Ces corrigés constituent ainsi une aide précieuse dans cet apprentissage, mais ils ne sauraient en aucun cas se substituer à une recherche intense et prolongée des questions posées, la phase de recherche étant plus importante encore que la solution elle-même !

Nous espérons que le lecteur prendra autant de plaisir à découvrir tous ces phénomènes physiques passionnants que nous en avons eu en rédigeant cet ouvrage. Dans l'album du conte musical « le Soldat Rose » de Louis Chedid et Pierre-Dominique Burgaud, on peut entendre Bénabar chanter : « *c'est pas une vie d'être chercheur, tout a déjà été trouvé* ».

Nous espérons que ce livre vous convaincra du contraire : la physique est une fantastique vitrine de la nature et de l'intelligence de l'Homme, qu'elle soit dans le plus simple objet ou phénomène du quotidien ou dans les dispositifs technologiques les plus modernes. Il reste encore bien des choses à découvrir et à inventer !

Bonne lecture et bonne recherche !

Les auteurs

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à remercier Renaud pour m'avoir contacté pour ce projet et pour le travail d'équipe que nous avons réalisé durant toute cette aventure. Ce fut une expérience à la fois très prenante et très enrichissante.

La rédaction des problèmes a nécessité de longues heures de recherches, de documentations, de mesures expérimentales et de calculs numériques qui ont été rendues possibles grâce au soutien de nombreuses personnes, qui ont de près ou de loin participé à l'élaboration de ce livre.

Je remercie tout d'abord chaleureusement ma femme – et ma collègue de physique ! – Pascaline, et nos enfants pour leur patience et le réconfort qu'ils m'ont procurés tout le long de ce projet.

Je remercie ensuite tout particulièrement Serge du laboratoire de Physique du Lycée Jean Bart de Dunkerque pour son aide précieuse lors des nombreuses études expérimentales, ainsi que Véro et Sylvie pour leur constante bonne humeur. Merci également à Stéphane pour nos discussions régulières sur le programme, à Morvan pour ses connaissances illimitées en astrophysique solaire, à Michel pour son aide dans l'étude de la machine thermique, à Antoine pour ses encouragements, à Francis pour sa relecture de l'ouvrage, à Vincent pour ses magnifiques clichés de bulles de champagne, à Morgan pour son aide lors de la cartographie électromagnétique du four à micro-ondes, à Irène Ledein pour avoir réussi à trouver des plumes de paon, à Jean Luc Edy de la société Prodidac pour sa recherche acharnée des diagrammes thermodynamiques du R12, à Christophe de Aventures-BD Dunkerque pour sa participation à notre quête des « Survivants », à Philippe Bromblet du CICRP (Centre Interdisciplinaire de Conservation et de Restauration du Patrimoine) pour les détails techniques de la rénovation par laser, à Brian Cox pour son idée du pique-nique au soleil, à Wikipédia et à tous les auteurs d'articles pour rendre accessibles au plus grand nombre des connaissances dans tous les domaines.

Je remercie également les étudiants de PC* et de PSI du Lycée Jean Bart qui ont bien voulu servir de cobayes et tester de nombreux problèmes.

A tous merci !

Benoît DEPRET

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'observations du monde qui nous entoure, de discussions entre amis, de lectures de revues scientifiques, d'expérimentations personnelles et de contacts avec des chercheurs et des ingénieurs.

Je tiens à remercier très sincèrement mon collègue et ami Benoît, qui a répondu presque spontanément « oui » quand je lui ai proposé de participer à ce projet ambitieux. Avait-il imaginé le travail colossal que ce livre impliquait ? Quoi qu'il en soit, il a su immédiatement « entrer dans le jeu » de la rédaction et, grâce à lui, nous avons pu tenir l'objectif de proposer un recueil de problèmes de physique contextualisés et motivants dans l'esprit des nouveaux programmes de CPGE.

Je remercie également Gilbert Pietryk pour son soutien, Dominique Obert et Roland Lehoucq pour l'attention qu'ils m'ont accordée. La richesse des exemples et des applications contenus dans ce livre tient à beaucoup de monde : en espérant n'oublier personne, merci à René-Jean Champeau, François Courvoisier, Thierry Ruchon, le docteur Jacques Tiphine, Guillaume Bloom, Elise Lorenceau, Thierry Guillot, Michel Zampaolo, Arnaud Parent, Louis Gostiaux, Alexis Piettre, Driss Khattach, Marc Tuloup, le docteur Liliane Dornier, Emmanuel Bossy, Hervé Daffix, Pierre Vilain, Jérome Hauden, Romain Barbe et Olivier Rodin.

De nombreuses photos agrémentent les différents problèmes abordés. Une partie d'entre elles, sous licence *Creative Commons* (*CC*), a été prise sur le web. Merci à tous les auteurs de ces photos de faire partager leur passion. La grande quantité d'illustrations a également été rendue possible grâce à l'accord de Sylvie Cohen-Addad, Marc Olivier, Olivier le Traon, Eric Cosandey, le dessinateur LEO, Olive Montel, Joel Bruezière, Danièle Lemercier, Gérard Michel, Alex Hermant, Emmanuel Mougeot, Mohammed Houmine, Aurélie Chevallier de MEDIATOON, Edith Bacher, mon oncle Gilles et mon fiston Robin. Qu'ils reçoivent ici toute ma gratitude. Special thanks to David from SWINGVISION, Mike Scott, David Walker, John Nicholls, Paul Beard and Jamie Casey for photo copyrights.

Je n'oublie pas les éditions Ellipses et plus particulièrement Paul de Laboulaye, qui ont su me faire confiance pour ce projet atypique.

Merci aussi aux élèves de PC du lycée Victor Hugo de Besançon pour leur curiosité et leur enthousiasme qui m'ont apporté une grande émulation.

Enfin, un grand merci à Pierre Magnien, à maman et belle-maman pour leur relecture attentive. Merci également à vous, lecteurs, pour votre bienveillance concernant les coquilles qui doivent sûrement encore être présentes. « *Last but not least* », à ma femme Cécile, qui, en plus de m'avoir soutenu pendant presque un an, s'est chargée de la mise en page du livre : merci, mon amour !

Renaud CARPENTIER

Répartition par filière

		PC	MP	PSI	PT
CHAPITRE 1 OPTIQUE ONDULATOIRE					
1.1	Les faisceaux de Bessel partie 1	X	X		X
1.2	Focalisation du son dans le métro	X	X		X
1.3	Modulateur spatial de lumière	X	X		X
1.4	Le projet spatial LISA partie 1	X	X		X
1.5	Profondeur des alvéoles d'un CD	X	X		X
1.6	Une frange plus rapide que la lumière ?	X	X		X
1.7	Fabrication d'un réseau de Bragg	X	X		X
1.8	Vélocimétrie laser par clignotement	X	X		X
1.9	Les faisceaux de Bessel partie 2	X	X		X
1.10	Le projet spatial LISA partie 2	X	X		X
1.11	Principe et utilisation du LIDAR	X	X		X
1.12	Contrôle de planéité d'un miroir	X	X		X
1.13	Le film étirable, c'est emballant !	X	X		X
1.14	Etude d'une plume de paon	X	X		X
1.15	Des panneaux solaires anti-reflets	X	X		X
1.16	Tomographie par cohérence optique	X	X		X
1.17	Lampadaire vu à travers un rideau	X	X		
1.18	Spectromètre à réseau	X	X		
1.19	Les réseaux de Dammann	X			
1.20	Imagerie des exoplanètes	X			
1.21	Microscopie à contraste de phase	X			
CHAPITRE 2 LES LASERS					
2.1	Principe du laser à deux niveaux d'énergie	X			
2.2	Lasers à modes bloqués	X			
2.3	Combinaison cohérente de lasers	X			
2.4	Les faisceaux de Bessel partie 3	X			
2.5	Capacité des disques optiques	X			
CHAPITRE 3 THERMODYNAMIQUE					
3.1	Principe d'un mitigeur	X	X	X	X
3.2	Etude d'un chauffe-eau solaire	X	X	X	X
3.3	Une machine thermique expérimentale	X	X	X	X
3.4	Principe de la VMC double-flux	X	X	X	X
3.5	Mesure d'un coefficient de diffusion	X		X	
3.6	Durée de vie d'une bulle	X		X	
3.7	Mûrissement d'une mousse	X		X	
3.8	Temps de séchage d'une éponge	X		X	
3.9	Diffusion d'un parfum	X		X	
3.10	Comparaison de vitrages	X	X	X	X
3.11	Choix de la taille du brûleur	X	X	X	X
3.12	Température dans un tunnel	X	X	X	X
3.13	Comment se réchauffer les mains ?	X	X	X	X
3.14	Du gravier pour faire fondre la neige	X	X	X	X
3.15	Réchauffement planétaire	X	X		

		PC	MP	PSI	PT
CHAPITRE 4 MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS					
4.1	Risque de basculement d'une caisse	X	X		
4.2	Etude d'un flipper	X	X		
4.3	Points de Lagrange	X	X		
4.4	Optimisation d'une montre automatique	X	X		
4.5	Oscillation d'une benne de téléphérique	X	X		
4.6	Déviation vers l'Est : théorie et expérience	X	X		
4.7	Principe d'un gyromètre vibrant	X	X		
4.8	Enrichissement par centrifugation	X			
4.9	A propos du jet stream partie 1	X	X		
4.10	Effets de marées	X			
4.11	Système de freinage des remorques	X			
CHAPITRE 5 MECANIQUE DES FLUIDES					
5.1	Largeur d'un couloir de gradin	X		X	X
5.2	Vortex dans un écoulement	X			
5.3	Souffle provoqué par le passage d'un véhicule	X			
5.4	Parapente en bord de mer	X			
5.5	Etude du rebond flexural	X		X	X
5.6	Lévitation d'une balle dans un jet d'air	X		X	
5.7	Autour d'un château d'eau	X		X	X
5.8	Phénomène de surcote	X		X	X
5.9	Une tête de lecture sur coussin d'air	X			
5.10	Un tube à essai qui ne se vide pas ?	X			
5.11	Intérêt du foc pour un voilier	X		X	X
5.12	Force de traction d'une aile de kitesurf	X			
5.13	Récupérateur d'eau	X		X	X
5.14	Une expérience à faire chez soi !	X			
5.15	Naissance des vagues	X			
5.16	Le risque d'aquaplaning	X			
5.17	Avancée d'un bouchon	X		X	
5.18	Usine marémotrice de la Rance	X		X	X
5.19	Résistance au roulement sur sol mouillé	X		X	
5.20	Un Ecureuil au plafond...	X		X	
CHAPITRE 6 ELECTROMAGNETISME					
6.1	Coût d'une ligne électrique	X	X	X	X
6.2	Risque d'électrocution par le sol	X	X	X	X
6.3	Prospection par mesure de résistivité	X	X	X	X
6.4	Electro-érosion par fil	X	X	X	X
6.5	Effet couronne	X	X	X	X
6.6	Il y a de l'orage dans l'air...	X	X	X	X
6.7	Des cheveux électriques !	X	X	X	X
6.8	Détection d'un aquifère par gravimétrie	X	X	X	X
6.9	Générateur électrostatique de Kelvin	X	X		X
6.10	Champ à proximité d'une ligne THT	X	X		
6.11	Micro-miroirs pour vidéoprojecteurs	X	X	X	X
6.12	Energie de fission nucléaire	X			
6.13	Champ magnétique dans un tokamak	X	X	X	X
6.14	Détecteur à boucle inductive	X		X	
6.15	Disjoncteur magnétique	X		X	
6.16	Jeu du RattlesnakeTM	X	X	X	
6.17	Collés avec des aimants...	X		X	
6.18	Champ magnétique créé par une décharge	X	X	X	X
6.19	Canon à effet de champ partie 1	X	X	X	X
6.20	Déviation d'un filet d'eau	X	X		
6.21	Etude d'un câble pour la TNT Partie 1	X	X	X	X

		PC	MP	PSI	PT
CHAPITRE 7 ONDES MECANIQUES					
7.1	Fil de jardinier	X		X	
7.2	Compression d'une balle de golf	X			
7.3	Autour de la guitare...	X		X	
7.4	Tuyaux d'orgue	X		X	
7.5	A propos du niveau sonore	X		X	
7.6	Imagerie photo-acoustique	X		X	
7.7	La technique des Dalton	X		X	
7.8	Modélisation d'un rebond	X			
7.9	Rôle de l'oreille moyenne	X		X	
7.10	Instabilité de flambage	X			
7.11	Pavillon acoustique d'un soubassophone	X		X	
CHAPITRE 8 ONDES ELECTROMAGNETIQUES					
8.1	Emetteur de la Barillette	X	X	X	X
8.2	Portée d'un talkie-walkie	X			
8.3	Voile solaire sous pression	X	X	X	X
8.4	Etude d'un câble pour la TNT Partie 2	X		X	
8.5	Pouvoir rotatoire	X			
8.6	Dispositif optique d'un lecteur CD	X			
8.7	Du chocolat à la vitesse de la lumière !	X	X	X	X
8.8	Ecrantage d'une porte de four à micro-ondes	X	X	X	X
8.9	Dispersion dans les fibres optiques	X	X	X	
8.10	Une impulsion supraluminique ?	X	X	X	
8.11	A propos du débit d'absorption spécifique	X	X	X	
8.12	Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS	X	X	X	
8.13	Phénomène d'iridescence	X			
8.14	Une feuille d'aluminium comme écran ?	X	X	X	X
CHAPITRE 9 MECANIQUE QUANTIQUE					
9.1	Délocalisation d'un neutron	X	X		
9.2	De la mécanique quantique relativiste ?	X	X		
9.3	Des couleurs électroniques	X	X		
9.4	Effet Casimir	X	X		
9.5	Corail quantique	X	X		
9.6	Effet isotopique cinétique	X	X		
9.7	Lasers à cascade quantique	X	X		
9.8	Microscope à effet tunnel	X	X		
9.9	Canon à effet de champ partie 2	X	X		
9.10	Manipulation de fonctions d'onde	X	X		

		PC	MP	PSI	PT
CHAPITRE 10 PROBLEMES MULTICHAPITRES					
10.1	Etude spectrale d'un faisceau laser	X			
10.2	Désembuage d'un pare-brise	X	X	X	X
10.3	Régulateur de vitesse	X			
10.4	Projection d'eau d'une descente en bûche	X		X	
10.5	Puissance d'un sèche-cheveux	X		X	X
10.6	Origine du Jet Stream	X			
10.7	Champagne ! partie 1	X		X	
10.8	Désintégration d'un noyau atomique	X	X	X	X
10.9	Lentille à focale commandable	X	X		X
10.10	Circuits électriques domestiques	X	X	X	X
10.11	Une poêle en lévitation ?	X		X	
10.12	Capacité membranaire d'une cellule	X	X		
10.13	Choix du site d'implantation d'une éolienne	X			
10.14	Etude d'un trampoline	X		X	
10.15	Evolution d'un tsunami	X			
10.16	Restauration de monuments par laser	X	X	X	X
10.17	Modulateur électro-optique	X	X		X
10.18	Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique	X			
10.19	Expérience de complémentarité	X	X		
10.20	Sur la taille d'un atome...	X	X		
10.21	Interférence avec des atomes ultra froids	X	X		
CHAPITRE 11 RESOLUTION DE PROBLEMES					
11.1	Dimensions d'une boîte de conserve	X	X	X	X
11.2	Champagne ! Partie 2	X	X	X	X
11.3	Un pique-nique au Soleil	X	X	X	X
11.4	Vol stationnaire d'un rapace	X	X	X	X
11.5	Le Tour de France	X		X	
11.6	Faut-il courir sous la pluie ?	X	X		
11.7	Des rayons suivant l'horizon	X	X		
11.8	A propos du Jet Stream partie 2	X		X	X

Table des matières

CHAPITRE 1 OPTIQUE ONDULATOIRE ____ *23*

1.1 Les faisceaux de Bessel partie 1 ____ **23**
1.2 Focalisation du son dans le métro ____ **25**
1.3 Modulateur spatial de lumière ____ **27**
1.4 Le projet spatial LISA partie 1 ____ **29**
1.5 Profondeur des alvéoles d'un CD ____ **31**
1.6 Une frange plus rapide que la lumière ? ____ **33**
1.7 Fabrication d'un réseau de Bragg ____ **35**
1.8 Vélocimétrie laser par clignotement ____ **37**
1.9 Les faisceaux de Bessel partie 2 ____ **38**
1.10 Le projet spatial LISA partie 2 ____ **41**
1.11 Principe et utilisation du LIDAR ____ **44**
1.12 Contrôle de planéité d'un miroir ____ **47**
1.13 Le film étirable, c'est emballant ! ____ **49**
1.14 Etude d'une plume de paon ____ **51**
1.15 Des panneaux solaires anti-reflets ____ **51**
1.16 Tomographie par cohérence optique ____ **56**
1.17 Lampadaire vu à travers un rideau ____ **62**
1.18 Spectromètre à réseau ____ **63**
1.19 Les réseaux de Dammann ____ **64**
1.20 Imagerie des exoplanètes ____ **67**
1.21 Microscopie à contraste de phase ____ **69**

CHAPITRE 2 LES LASERS ____ *73*

2.1 Principe du laser à deux niveaux d'énergie ____ **73**
2.2 Lasers à modes bloqués ____ **76**
2.3 Combinaison cohérente de lasers ____ **78**
2.4 Les faisceaux de Bessel partie 3 ____ **81**
2.5 Capacité des disques optiques ____ **82**

CHAPITRE 3 THERMODYNAMIQUE ____ *85*

3.1 Principe d'un mitigeur ____ **85**
3.2 Etude d'un chauffe-eau solaire ____ **87**
3.3 Une machine thermique expérimentale ____ **89**

3.4 Principe de la VMC double-flux 95
3.5 Mesure d'un coefficient de diffusion 98
3.6 Durée de vie d'une bulle 101
3.7 Mûrissement d'une mousse 102
3.8 Temps de séchage d'une éponge 105
3.9 Diffusion d'un parfum 106
3.10 Comparaison de vitrages 109
3.11 Choix de la taille du brûleur 111
3.12 Température dans un tunnel 115
3.13 Comment se réchauffer les mains ? 117
3.14 Du gravier pour faire fondre la neige ? 118
3.15 Réchauffement planétaire 119

CHAPITRE 4 MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS 125

4.1 Risque de basculement d'une caisse 125
4.2 Etude d'un flipper 125
4.3 Points de Lagrange 129
4.4 Optimisation d'une montre automatique 132
4.5 Oscillation d'une benne de téléphérique 134
4.6 Déviation vers l'Est : théorie et expérience 135
4.7 Principe d'un gyromètre vibrant 139
4.8 Enrichissement par centrifugation 144
4.9 A propos du jet stream partie 1 147
4.10 Effets de marées 150
4.11 Système de freinage des remorques 152

CHAPITRE 5 MECANIQUE DES FLUIDES 157

5.1 Largeur d'un couloir de gradin 157
5.2 Vortex dans un écoulement 157
5.3 Souffle provoqué par le passage d'un véhicule 158
5.4 Parapente en bord de mer 161
5.5 Etude du rebond flexural 163
5.6 Lévitation d'une balle dans un jet d'air 166
5.7 Autour d'un château d'eau 167
5.8 Phénomène de surcote 170
5.9 Une tête de lecture sur coussin d'air 171
5.10 Un tube à essai qui ne se vide pas ? 175
5.11 Intérêt du foc pour un voilier 177
5.12 Force de traction d'une aile de kitesurf 178
5.13 Récupérateur d'eau 182
5.14 Une expérience à faire chez soi ! 183
5.15 Naissance des vagues 184

5.16 Le risque d'aquaplaning 186
5.17 Avancée d'un bouchon 189
5.18 Usine marémotrice de la Rance 190
5.19 Résistance au roulement sur sol mouillé 194
5.20 Un Ecureuil au plafond… 194

CHAPITRE 6 ELECTROMAGNETISME 199

6.1 Coût d'une ligne électrique 199
6.2 Risque d'électrocution par le sol 200
6.3 Prospection par mesure de résistivité 201
6.4 Electro-érosion par fil 204
6.5 Effet couronne 207
6.6 Il y a de l'orage dans l'air… 209
6.7 Des cheveux électriques ! 211
6.8 Sondage par gravimétrie 214
6.9 Générateur électrostatique de Kelvin 216
6.10 Champ à proximité d'une ligne THT 220
6.11 Micro-miroirs pour vidéoprojecteurs 222
6.12 Energie de fission nucléaire 226
6.13 Champ magnétique dans un tokamak 228
6.14 Détecteur à boucle inductive 230
6.15 Disjoncteur magnétique 236
6.16 Jeu du Rattlesnake 239
6.17 Collés avec des aimants… 241
6.18 Champ magnétique créé par une décharge 248
6.19 Canon à effet de champ partie 1 249
6.20 Déviation d'un filet d'eau 252
6.21 Etude d'un câble pour la TNT partie 1 256

CHAPITRE 7 ONDES MECANIQUES 258

7.1 Fil de jardinier 259
7.2 Compression d'une balle de golf 259
7.3 Autour de la guitare… 263
7.4 Tuyaux d'orgue 270
7.5 A propos du niveau sonore 271
7.6 Imagerie photo-acoustique 275
7.7 La technique des Dalton 278
7.8 Modélisation d'un rebond 280
7.9 Rôle de l'oreille moyenne 282
7.10 Instabilité de flambage 285
7.11 Pavillon acoustique d'un soubassophone 287

CHAPITRE 8 ONDES ELECTROMAGNETIQUES ____ *291*

8.1 Emetteur de la Barillette ____ **291**
8.2 Portée d'un talkie-walkie ____ **293**
8.3 Voile solaire sous pression ____ **294**
8.4 Etude d'un câble pour la TNT partie 2 ____ **298**
8.5 Pouvoir rotatoire ____ **301**
8.6 Dispositif optique d'un lecteur CD ____ **303**
8.7 Du chocolat à la vitesse de la lumière ! ____ **304**
8.8 Ecrantage d'une porte de four à micro-ondes ____ **306**
8.9 Dispersion dans les fibres optiques ____ **308**
8.10 Une impulsion supraluminique ? ____ **310**
8.11 A propos du débit d'absorption spécifique ____ **313**
8.12 Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS ____ **318**
8.13 Phénomène d'iridescence ____ **321**
8.14 Une feuille d'aluminium comme écran ? ____ **323**

CHAPITRE 9 MECANIQUE QUANTIQUE ____ *327*

9.1 Délocalisation d'un neutron ____ **327**
9.2 De la mécanique quantique relativiste ? ____ **329**
9.3 Des couleurs électroniques ____ **331**
9.4 Effet Casimir ____ **333**
9.5 Corail quantique ____ **337**
9.6 Effet isotopique cinétique ____ **339**
9.7 Lasers à cascade quantique ____ **343**
9.8 Microscope à effet tunnel ____ **348**
9.9 Canon à effet de champ partie 2 ____ **352**
9.10 Manipulation de fonctions d'onde ____ **355**

CHAPITRE 10 PROBLEMES MULTICHAPITRES ____ *361*

10.1 Etude spectrale d'un faisceau laser ____ **361**
10.2 Désembuage d'un pare-brise ____ **365**
10.3 Régulateur de vitesse ____ **368**
10.4 Projection d'eau d'une descente en bûche ____ **371**
10.5 Puissance d'un sèche-cheveux ____ **373**
10.6 Origine du jet stream ____ **374**
10.7 Champagne ! partie 1 ____ **376**
10.8 Désintégration d'un noyau atomique ____ **380**
10.9 Lentille à focale commandable ____ **381**
10.10 Circuits électriques domestiques ____ **384**
10.11 Une poêle en lévitation ? ____ **387**
10.12 Capacité membranaire d'une cellule ____ **389**

10.13 Choix du site d'implantation d'une éolienne 393
10.14 Etude d'un trampoline 395
10.15 Evolution d'un tsunami 399
10.16 Restauration de monuments par laser 402
10.17 Modulateur électro-optique 405
10.18 Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique 408
10.19 Expérience de complémentarité 414
10.20 Sur la taille d'un atome… 416
10.21 Interférence avec des atomes ultra froids 418

CHAPITRE 11 RESOLUTION DE PROBLEMES *421*

11.1 Dimensions d'une boîte de conserve 421
11.2 Champagne ! partie 2 422
11.3 Un pique-nique au Soleil 423
11.4 Vol stationnaire d'un rapace 425
11.5 Le Tour de France 425
11.6 Faut-il courir sous la pluie ? 426
11.7 Des rayons suivant l'horizon 426
11.8 A propos du jet stream partie 2 428

CORRIGES CHAPITRE 1 OPTIQUE ONDULATOIRE *429*

1.1 Les faisceaux de Bessel partie 1 429
1.2 Focalisation du son dans le métro 431
1.3 Modulateur spatial de lumière 431
1.4 Le projet spatial LISA partie 1 433
1.5 Profondeur des alvéoles d'un CD 434
1.6 Une frange plus rapide que la lumière ? 435
1.7 Fabrication d'un réseau de Bragg 438
1.8 Vélocimétrie laser par clignotement 440
1.9 Les faisceaux de Bessel partie 2 442
1.10 Le projet spatial LISA partie 2 444
1.11 Principe et utilisation du LIDAR 447
1.12 Contrôle de planéité d'un miroir 450
1.13 Le film étirable, c'est emballant ! 452
1.14 Etude d'une plume de paon 455
1.15 Des panneaux solaires anti-reflets 457
1.16 Tomographie par cohérence optique 460
1.17 Lampadaire vu à travers un rideau 466
1.18 Spectromètre à réseau 468
1.19 Les réseaux de Dammann 471
1.20 Imagerie des exoplanètes 474
1.21 Microscopie à contraste de phase 476

CORRIGES CHAPITRE 2 LES LASERS *479*

2.1 Principe du laser à deux niveaux d'énergie **479**
2.2 Lasers à modes bloqués **482**
2.3 Combinaison cohérente de lasers **484**
2.4 Les faisceaux de Bessel partie 3 **486**
2.5 Capacité des disques optiques **489**

CORRIGES CHAPITRE 3 THERMODYNAMIQUE *493*

3.1 Principe d'un mitigeur **493**
3.2 Etude d'un chauffe-eau solaire **494**
3.3 Une machine thermique expérimentale **498**
3.4 Principe de la VMC double-flux **503**
3.5 Mesure d'un coefficient de diffusion **507**
3.6 Durée de vie d'une bulle **508**
3.7 Mûrissement d'une mousse **510**
3.8 Temps de séchage d'une éponge **512**
3.9 Diffusion d'un parfum **515**
3.10 Comparaison de vitrages **518**
3.11 Choix de la taille du brûleur **521**
3.12 Température dans un tunnel **523**
3.13 Comment se réchauffer les mains **525**
3.14 Du gravier pour faire fondre la neige ? **526**
3.15 Réchauffement planétaire **528**

CORRIGES CHAPITRE 4 MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS *533*

4.1 Risque de basculement d'une caisse **533**
4.2 Etude d'un flipper **536**
4.3 Points de Lagrange **540**
4.4 Optimisation d'une montre automatique **543**
4.5 Oscillation d'une benne de téléphérique **545**
4.6 Déviation vers l'Est : théorie et expérience **548**
4.7 Principe d'un gyromètre vibrant **551**
4.8 Enrichissement par centrifugation **555**
4.9 A propos du jet stream partie 1 **559**
4.10 Effets de marées **560**
4.11 Système de freinage des remorques **563**

CORRIGES CHAPITRE 5 MECANIQUE DES FLUIDES *567*

5.1 Largeur d'un couloir de gradin **567**
5.2 Vortex dans un écoulement **568**
5.3 Souffle provoqué par le passage d'un véhicule **569**

5.4 Parapente en bord de mer 572
5.5 Etude du rebond flexural 573
5.6 Lévitation d'une balle dans un jet d'air 576
5.7 Autour d'un château d'eau 578
5.8 Phénomène de surcote 582
5.9 Une tête de lecture sur coussin d'air 584
5.10 Un tube à essai qui ne se vide pas ? 588
5.11 Intérêt du foc pour un voilier 590
5.12 Force de traction d'une aile de kitesurf 591
5.13 Récupérateur d'eau 592
5.14 Une expérience à faire chez soi ! 594
5.15 Naissance des vagues 596
5.16 Le risque d'aquaplaning 599
5.17 Avancée d'un bouchon 602
5.18 Usine marémotrice de la Rance 603
5.19 Résistance au roulement sur sol mouillé 605
5.20 Un Ecureuil au plafond… 607

CORRIGES CHAPITRE 6 ELECTROMAGNETISME *611*

6.1 Coût d'une ligne électrique 611
6.2 Risque d'électrocution par le sol 613
6.3 Prospection par mesure de résistivité 614
6.4 Electro-érosion par fil 616
6.5 Effet couronne 618
6.6 Il y a de l'orage dans l'air… 621
6.7 Des cheveux électriques ! 624
6.8 Sondage par gravimétrie 626
6.9 Générateur électrostatique de Kelvin 629
6.10 Champ à proximité d'une ligne THT 633
6.11 Micro-miroirs pour vidéoprojecteurs 635
6.12 Energie de fission nucléaire 638
6.13 Champ magnétique dans un tokamak 641
6.14 Détecteur à boucle inductive 642
6.15 Disjoncteur magnétique 646
6.16 Jeu du Rattlesnake 648
6.17 Collés avec des aimants… 651
6.18 Champ magnétique créé par une décharge 655
6.19 Canon à effet de champ partie 1 657
6.20 Déviation d'un filet d'eau 661
6.21 Etude d'un câble pour la TNT partie 1 666

CORRIGES CHAPITRE 7 ONDES MECANIQUES *673*

7.1 Fil de jardinier **673**
7.2 Compression d'une balle de golf **674**
7.3 Autour de la guitare… **678**
7.4 Tuyaux d'orgue **685**
7.5 A propos du niveau sonore **685**
7.6 Imagerie photo-acoustique **690**
7.7 La technique des Dalton **696**
7.8 Modélisation d'un rebond **698**
7.9 Rôle de l'oreille moyenne **701**
7.10 Instabilité de flambage **704**
7.11 Pavillon acoustique d'un soubassophone **706**

CORRIGES CHAPITRE 8 ONDES ELECTROMAGNETIQUES *711*

8.1 Emetteur de la Barillette **711**
8.2 Portée d'un talkie-walkie **714**
8.3 Voile solaire sous pression **716**
8.4 Etude d'un câble pour la TNT partie 2 **720**
8.5 Pouvoir rotatoire **724**
8.6 Dispositif optique d'un lecteur CD **726**
8.7 Du chocolat à la vitesse de la lumière ! **728**
8.8 Ecrantage d'une porte de four à micro-ondes **730**
8.9 Dispersion dans les fibres optiques **733**
8.10 Une impulsion supraluminique ? **736**
8.11 A propos du débit d'absorption spécifique **739**
8.12 Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS **745**
8.13 Phénomène d'iridescence **750**
8.14 Une feuille d'aluminium comme écran ? **753**

CORRIGES CHAPITRE 9 MECANIQUE QUANTIQUE *759*

9.1 Délocalisation d'un neutron **759**
9.2 De la mécanique quantique relativiste ? **762**
9.3 Des couleurs électroniques **764**
9.4 Effet Casimir **768**
9.5 Corail quantique **771**
9.6 Effet isotopique cinétique **774**
9.7 Lasers à cascade quantique **778**
9.8 Microscope à effet tunnel **786**
9.9 Canon à effet de champ partie 2 **790**
9.10 Manipulation de fonctions d'onde **795**

CORRIGES CHAPITRE 10 PROBLEMES MULTICHAPITRES *801*

10.1 Etude spectrale d'un faisceau laser **801**
10.2 Désembuage d'un pare-brise **803**
10.3 Régulateur de vitesse **806**
10.4 Projection d'eau d'une descente en bûche **811**
10.5 Puissance d'un sèche-cheveux **814**
10.6 Origine du jet stream **816**
10.7 Champagne ! partie 1 **819**
10.8 Désintégration d'un noyau atomique **825**
10.9 Lentille à focale commandable **827**
10.10 Circuits électriques domestiques **829**
10.11 Une poêle en lévitation ? **831**
10.12 Capacité membranaire d'une cellule **835**
10.13 Choix du site d'implantation d'une éolienne **840**
10.14 Etude d'un trampoline **842**
10.15 Evolution d'un tsunami **846**
10.16 Restauration de monuments par laser **849**
10.17 Modulateur électro-optique **851**
10.18 Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique **853**
10.19 Expérience de complémentarité **860**
10.20 Sur la taille d'un atome... **863**
10.21 Interférence avec des atomes ultra froids **865**

CORRIGES CHAPITRE 11 RESOLUTION DE PROBLEMES *869*

11.1 Dimensions d'une boîte de conserve **869**
11.2 Champagne ! partie 2 **870**
11.3 Un pique-nique au Soleil **871**
11.4 Vol stationnaire d'un rapace **873**
11.5 Le Tour de France **874**
11.6 Faut-il courir sous la pluie ? **876**
11.7 Des rayons suivant l'horizon **878**
11.8 A propos du jet stream partie 2 **881**

INDEX *883*

CHAPITRE 1

OPTIQUE ONDULATOIRE

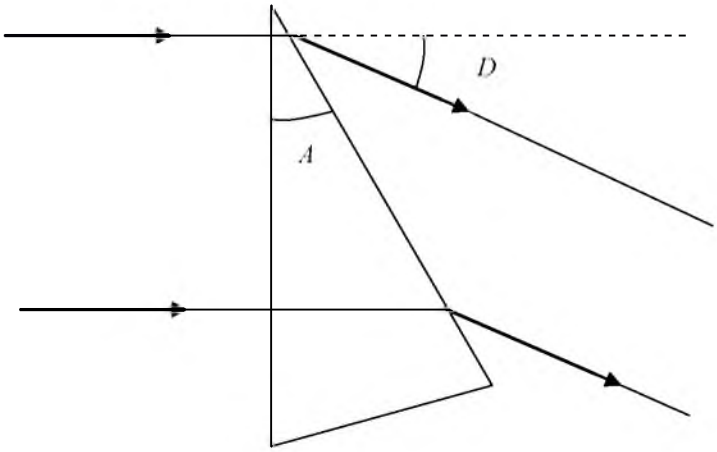
1.1 Les faisceaux de Bessel partie 1

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : optique géométrique, surfaces d'ondes.

L'ablation laser est devenue une technique très répandue de structuration des matériaux. Son principe réside dans l'envoi d'impulsions lumineuses, pouvant être très brèves (de durée inférieure à la picoseconde = 10^{-12} s), à la surface de la pièce à traiter provoquant la sublimation et donc l'éjection de la matière illuminée. Une durée extrêmement courte des impulsions permet une ablation précise et localisée, la diffusion thermique dans le matériau n'ayant pas le temps de se faire. Cependant, si l'on désire effectuer une ablation sur une zone sub-micrométrique (c'est-à-dire de taille inférieure au micromètre), l'utilisation de faisceaux gaussiens entraîne de sérieuses limitations. Une solution technologique qui a été développée à la fin des années 2000 est l'utilisation de faisceaux de Bessel. La partie 1 propose d'étudier deux moyens de fabriquer de tels faisceaux. La partie 2 étudie les principales caractéristiques de ces faisceaux et enfin la partie 3 traite de l'intérêt des faisceaux de Bessel par rapport aux faisceaux gaussiens dans le cadre de l'ablation laser.

On considère dans un premier temps un prisme d'indice n et d'angle au sommet A. Il est éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale. Au passage du prisme, cette onde lumineuse est déviée d'un angle D.

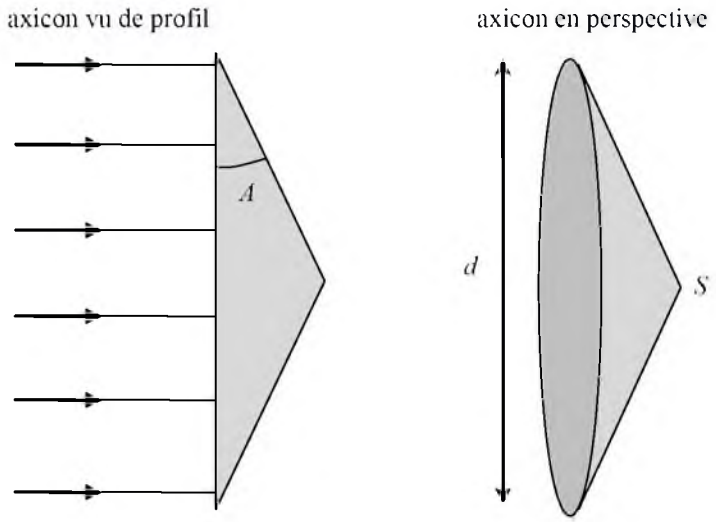


1) A l'aide de la loi de Descartes, établir l'équation reliant A et D.

2) En calculant le chemin optique entre deux surfaces d'ondes de deux manières différentes, aboutir au même résultat.

3) Dans le cas où l'angle A est très petit, donner une expression approchée de D en fonction de A et n.

Les faisceaux de Bessel peuvent être obtenus en pratique de deux manières différentes. Une des méthodes est d'utiliser un axicon. Il s'agit d'une pièce optique ayant la forme d'un tronc de cône de révolution, constitué d'un matériau transparent d'indice n. On note d le diamètre de l'axicon à sa base et A l'angle que font les segments partant du sommet S de l'axicon avec sa base (voir figure suivante). L'axicon est éclairé par une onde plane arrivant sur sa base en incidence normale.



4) Tracer l'allure des trajectoires des différents rayons lumineux dans un plan contenant l'axe de révolution de l'axicon (ce dernier constituant l'axe optique).

5) Exprimer la distance L entre le sommet S de l'axicon et le point T de l'axe optique au-delà duquel il n'y a plus aucun croisement de rayons lumineux.

Dans la zone où se croisent les rayons lumineux, le faisceau résultant de cette superposition forme ce que l'on appelle un faisceau de Bessel.

6) Proposer une autre méthode de création d'un faisceau de Bessel utilisant une lentille de diamètre Φ et de focale f et un diaphragme en forme d'anneau de rayon R et d'épaisseur négligeable. Quelles relations doivent vérifier Φ, f et R pour que le faisceau en sortie de ce système possède les mêmes caractéristiques que le faisceau créé à l'aide de l'axicon à proximité de l'axe optique ?

La photo ci-après représente un axicon de 12,7 mm de diamètre, en verre BK7 (indice 1,51) d'angle au sommet $A = 2°$ provoquant un angle de déviation D = 1°. Cet axicon était utilisé pour une expérience dans laquelle des atomes étaient piégés dans la figure d'interférences obtenue.

Axicon vu de profil

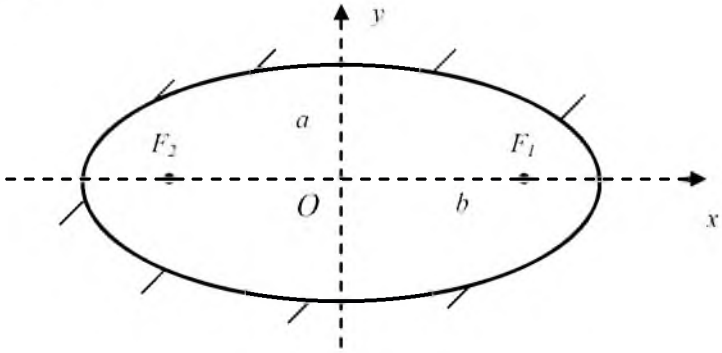
© Benoit Depret

1.2 Focalisation du son dans le métro

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : chemin optique, surfaces d'ondes.

On considère un miroir elliptique de demi-grand axe b et de demi-petit axe a (on raisonne uniquement dans le plan de la feuille). On place l'origine du repère Oxy au centre de l'ellipse. Les foyers F_1 et F_2 de l'ellipse ont pour coordonnées respectives $\left(\sqrt{b^2-a^2},0\right)$ et $\left(-\sqrt{b^2-a^2},0\right)$.

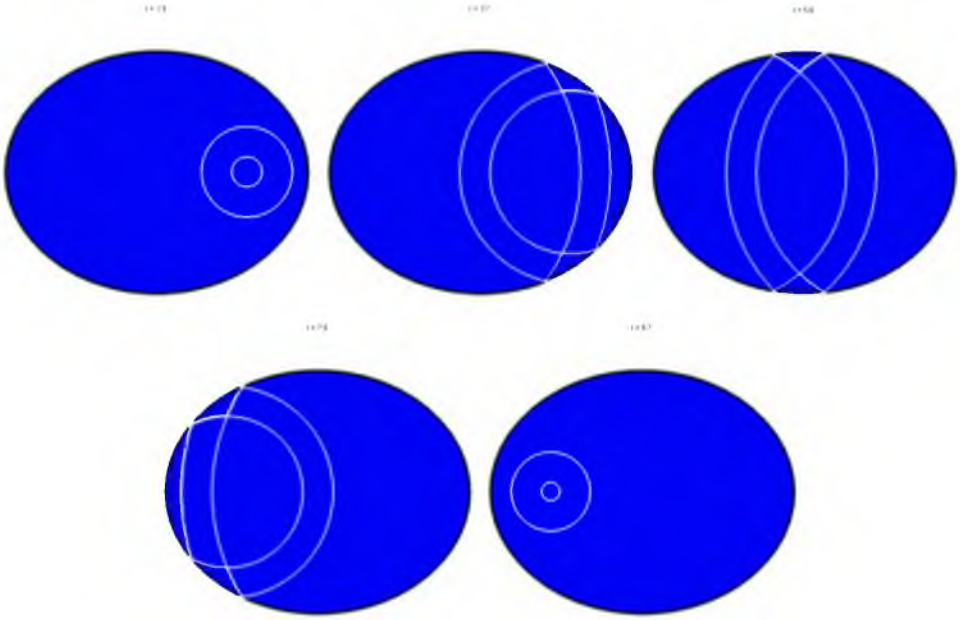


Soit un point M de coordonnées (x,y) situé à la surface du miroir.

1) Quelle relation y a-t-il entre x et y ?

2) Exprimer le chemin optique $(F_1M)+(MF_2)$ en fonction de x et y notamment. Mettre (F_1M) sous la forme $b-kx$, où k est une constante indépendante de x et de y. Procéder de manière similaire avec (MF_2). En déduire que le chemin optique $(F_1M)+(MF_2)$ ne dépend pas de la position du point M.

Sur les figures suivantes sont représentées deux surfaces d'ondes émises par le foyer F_1. Les cinq clichés ont été pris à des instants différents, respectivement aux dates t = 1,5 ; 3,7 ; 5,6 ; 7,5 et 9,7 (unité arbitraire).



3) Commenter ces figures. Peut-on faire un lien avec la question précédente ?

Dans certaines stations de métro, on peut être quelquefois surpris d'entendre très distinctement une personne de dos parlant doucement et pourtant situé de l'autre côté des voies.

Station Billancourt de la ligne 9 du métro parisien

Auteur : Benjism89 (licence CC)

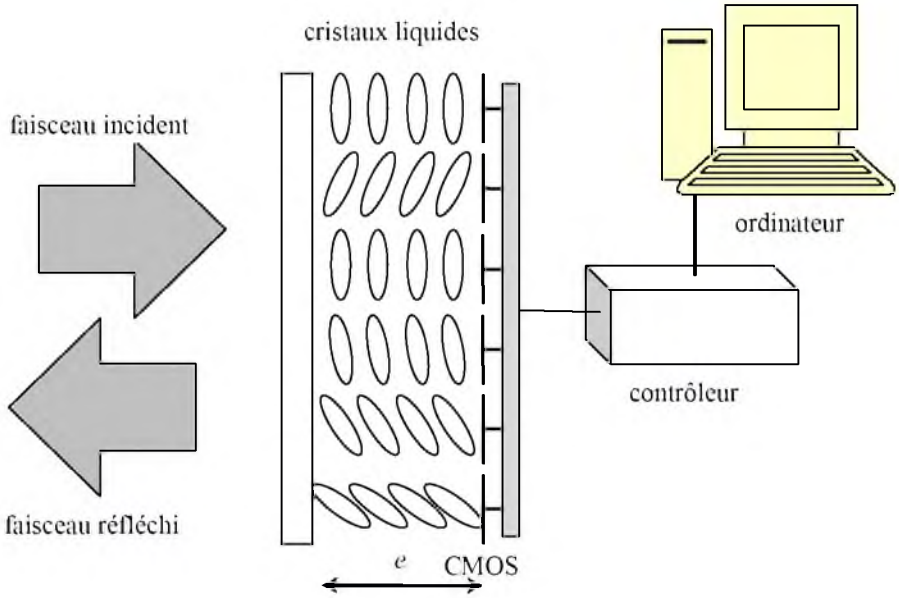
4) Expliquer ce phénomène en s'appuyant sur l'étude précédente.

1.3 Modulateur spatial de lumière

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

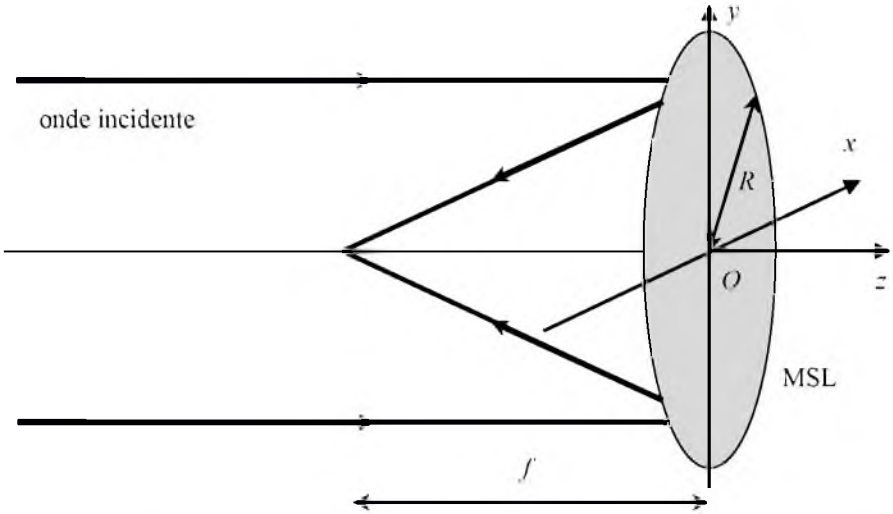
MOTS-CLES : surfaces d'ondes, chemin optique, critère de Shannon.

Un modulateur spatial de lumière (MSL) est un dispositif optique permettant de faire varier point par point la phase ou l'intensité d'un faisceau lumineux. Nous étudions ici un MSL de phase à cristaux liquides dont le schéma de principe est représenté sur la figure suivante.



Les cristaux liquides (CL), représentés par les ellipses sur la figure, peuvent s'orienter en fonction de la tension appliquée à chaque électrode (de technologie CMOS : *Complementary Metal Oxide Semiconductor*). Le retard de phase subi par l'onde effectuant un aller et retour dans le MSL dépend de l'alignement plus ou moins prononcé des CL. Il est ainsi possible de moduler spatialement, sur chaque pixel, la phase de l'onde réfléchie par le MSL.

On modélise le MSL par une lame mince circulaire de rayon R, d'épaisseur e et d'indice effectif $n(x,y)$ non uniforme. On considère une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ arrivant en incidence normale sur le MSL. On néglige la réflexion sur la face avant de la lame et l'on suppose que la face arrière réfléchit entièrement l'onde. On cherche à déterminer le profil d'indice $n(x,y)$ permettant de focaliser le faisceau réfléchi à une distance f du MSL (voir figure page suivante).



1) Tracer les surfaces d'onde des ondes incidentes et réfléchies dans le plan Oyz.

2) A l'aide de calculs de chemin optique et en considérant que $f >> R >> e$, montrer que l'indice doit avoir une expression de la forme :

$$n(x,y) = n_0 - \frac{x^2 + y^2}{4ef}$$

En pratique, $n(x,y)$ n'est pas une fonction continue de x et de y, du fait des pixels : l'indice a en effet une valeur constante en face de chaque pixel. Cette pixellisation inhérente au dispositif limite la variation de $n(x,y)$ entre deux pixels consécutifs, la limitation étant fixée par le critère de Shannon. On peut montrer que ce critère impose que le retard de phase de l'onde réfléchie doit varier de moins de π radians entre deux pixels consécutifs. Si ce critère n'est pas respecté, l'utilisation d'un diaphragme pour bloquer la lumière diffractée par la structure des pixels ne suffira pas à produire au final le faisceau désiré.

3) En notant d la largeur des pixels (de forme carrée), montrer que, pour respecter le critère de Shannon, le MSL ne pourra pas focaliser le faisceau à une distance inférieure à $f_{min} = \frac{2Rd}{\lambda}$.

Les questions suivantes seront traitées sur la base du MSL présenté dans le document suivant.

DOCUMENT : Les MSL de la série X10468, d'après « http://www.hamamatsu.com »

Le fabricant HAMAMATSU propose une gamme de modulateurs spatiaux de lumière LCOS-SLM (*Liquid Crystal on Silicon-Spatial Light Modulator*). La série X10468 possède les caractéristiques communes suivantes :
- Résolution : 792*600 pixels
- Taille des pixels : 20 µm

- Surface effective du MSL : 16*12 mm^2
- Format DVI (*digital video interface*) du signal piloté par ordinateur :

  SVGA (800*600) codé sur 8 bits à 60 Hz
- Modulation de phase : limitée entre 0 et 2π (ou légèrement plus), proportionnelle au signal de commande

La gamme possède huit modèles, chaque modèle étant dédié à un intervalle de longueur d'onde spécifique. Par exemple, le modèle X10468-06 possède une plage de fonctionnement entre 600 et 700 nm.

4) Pour un pixel donné, est-il possible de choisir n'importe quel retard de phase entre 0 et 2π ? Quelles sont les différentes valeurs possibles ? Est-il gênant que le retard de phase ne puisse varier que de 0 à 2π ?

5) Calculer la valeur de f_{min} pour le modèle X10468-06 avec une longueur d'onde centrée sur sa plage d'utilisation.

On veut paramétrer le MSL pour qu'il focalise le faisceau à une distance $f = 20 f_{min}$.

6) Tracer l'allure du retard de phase φ en fonction de l'abscisse x (selon la plus petite largeur du MSL) sans prendre en compte la pixellisation, puis en la prenant en compte.

Les MSL sont actuellement très utilisés pour la mise en forme de faisceaux. Par exemple, un MSL peut parfaitement remplacer un axicon pour créer un faisceau de Bessel (voir problème 1.1). L'avantage d'un MSL est de pouvoir très facilement changer les paramètres de mise en forme (comme par exemple l'angle D dans le cas d'un faisceau de Bessel) en reprogrammant le contrôleur.

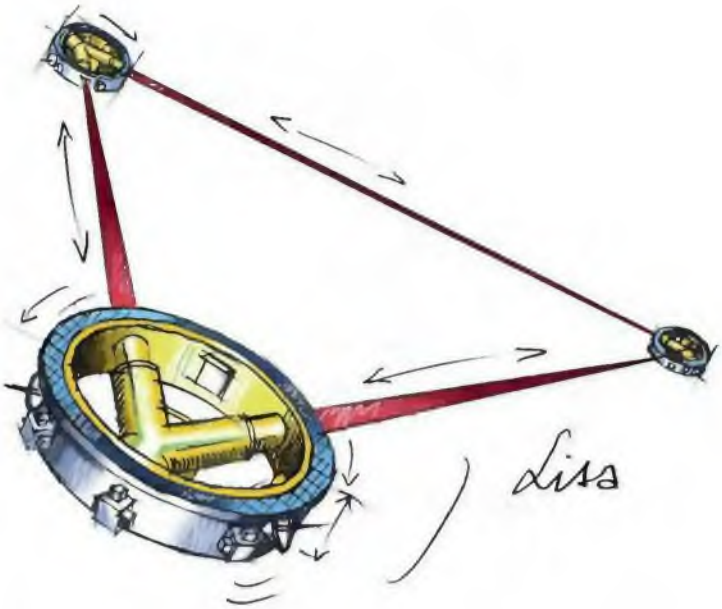
1.4 Le projet spatial LISA partie 1

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : diffraction, récepteurs.

LISA est l'acronyme de *Light Interferometer Space Antenna*. Il s'agit d'un projet de grande envergure développé par l'ESA (l'agence spatiale européenne). Rebaptisé récemment NGO (*New Gravitational wave Observer*), la mission a pour objectif d'envoyer (aux alentours de 2020) un interféromètre dans l'espace à environ 50 millions de kilomètres de la Terre pour détecter le passage d'ondes gravitationnelles. De manière analogue à des ondes électromagnétiques créées par des charges accélérées, la théorie de la relativité générale prévoit en effet l'existence d'ondes gravitationnelles générées par des masses accélérées. Ces ondes déforment sous leur passage l'espace lui-même, ce dernier subissant alternativement contraction et dilatation. L'allongement relatif prévu par la théorie est de l'ordre de 10^{-22} (pour des phénomènes de grande ampleur), ce qui exige des mesures de variations de longueurs extrêmement précises, en s'affranchissant le plus possible des perturbations extérieures. D'où l'idée d'aller dans l'espace !

Croquis du projet LISA, formé par les trois satellites



Copyright ESA-C. Vijoux

L'interféromètre sera constitué de trois satellites identiques formant un triangle équilatéral, les satellites étant distants entre eux de D = 5 millions de kilomètres ! L'objectif de la mission sera donc de mesurer par interférométrie les variations de positions relatives des satellites, notamment les variations de la distance D au cours du temps, provoquées par le passage d'une onde gravitationnelle. Les fréquences des ondes gravitationnelles attendues sont comprises entre 10^{-4} et 10^{-1} Hz.

Chaque satellite contient un laser de longueur d'onde λ = 1064 nm émettant un faisceau passant à travers un système optique, composé de lentilles et de miroirs, afin d'être élargi avant son émission en direction d'un des deux autres satellites. Le dernier miroir de renvoi avant l'émission dans l'espace possède un diamètre d = 40 cm. Ce même miroir sert aussi à la réception de l'onde émise par l'autre satellite.

1) Pourquoi élargit-on le faisceau avant de l'envoyer dans l'espace ?

2) Sachant que la lumière émise par chaque satellite en direction d'un autre est de l'ordre du watt, calculer l'ordre de grandeur de la puissance reçue par un satellite en provenance des deux autres.

3) Proposer un encadrement du nombre de photons reçus par les satellites sur une demi-période de l'onde gravitationnelle.

On rappelle la valeur de la constante de Planck $h = 6{,}6.10^{-34}$ J.s.

1.5 Profondeur des alvéoles d'un CD

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à deux ondes.

Un CD (Compact-Disc) est un disque optique sur lequel sont gravées des données sous format numérique. Celles-ci sont codées le long d'une piste en spirale composée d'alvéoles (voir figure n°1).

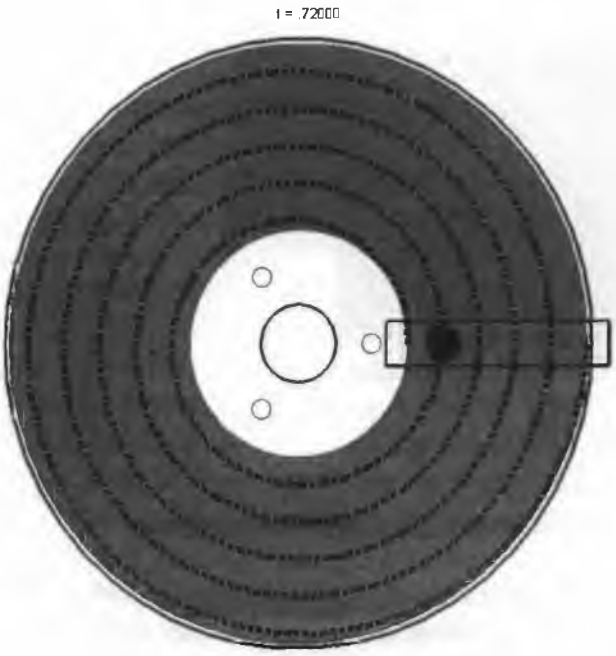


Figure n°1
piste en spirale contenant les données d'un CD

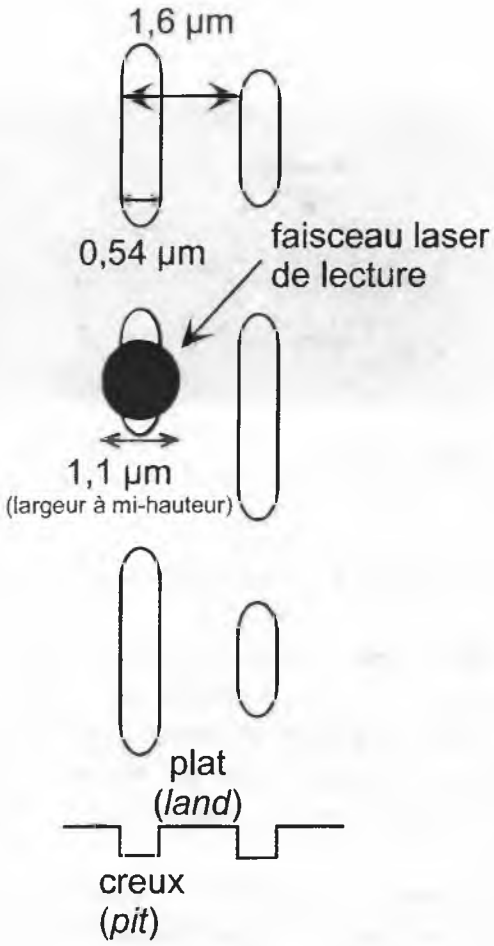


Figure n°2
faisceau de lecture sur une des alvéoles (creux) constituant la piste du CD

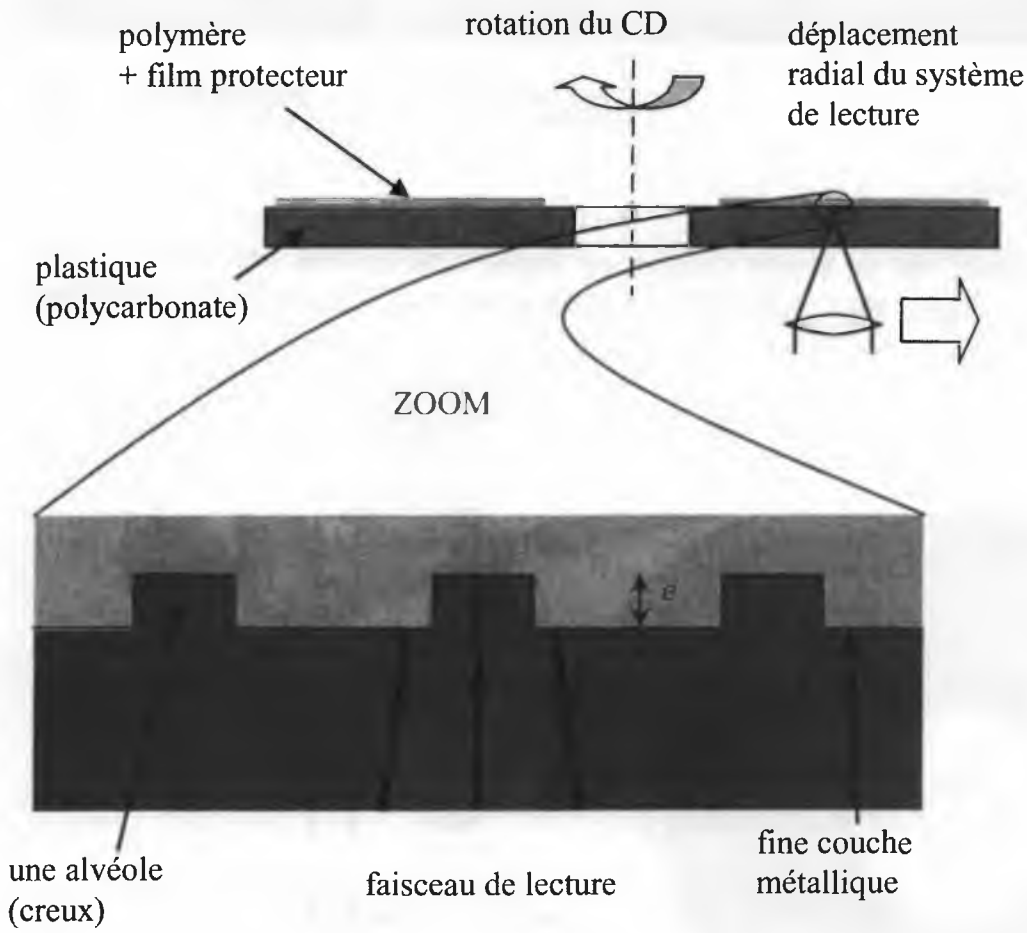


Figure n°3 : schéma en coupe d'un CD faisant apparaître les alvéoles

Pour un CD pressé (ce n'est pas le cas des CD inscriptibles ou réinscriptibles), les alvéoles sont en fait des creux. La technique de « pressage » est la suivante : les alvéoles sont réalisées en injectant le polycarbonate dans un moule contenant le motif inverse, puis une couche métallique réfléchissante est déposée par-dessus. Cette dernière est protégée sur l'autre face par un enrobage en polymère (voir figure n°3).

Le principe de lecture des données inscrites sur la piste consiste à éclairer la couche métallique (du côté du polycarbonate) avec une lumière issue d'une diode laser (de longueur d'onde $\lambda = 780$ nm) et de mesurer l'intensité du signal réfléchi :

- si le faisceau n'éclaire aucun creux (zone plate), l'intensité réfléchie est maximale,
- si le faisceau est centré sur une alvéole, l'intensité est minimale, du fait de l'interférence destructive entre la partie du faisceau réfléchie au fond de l'alvéole et celle réfléchie sur les bords (voir figure n°2).

Exprimer puis calculer la profondeur des alvéoles, notée e, pour qu'il en soit ainsi, sachant que l'indice du polycarbonate vaut $n = 1{,}55$.

Remarque : la correspondance entre les plats et les creux d'une part et le message binaire (bits « 0 » ou « 1 ») est extrêmement complexe. En effet, il ne s'agit pas d'une simple conversion du type : un alvéole correspond à « 0 » et un plat à « 1 ».

On pourra trouver dans la référence suivante des détails concernant le principe du codage :

CARPENTIER R. et GUILLOT T. *Etude comparée d'un CD, d'un DVD et d'un Blu-ray*, Bull. Un. Prof. Phys. Chim., mai 2011, vol. 105, n° 934, pp. 591-626.

Cet article est visible en accès libre sur le site de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie à l'adresse :

http://www.udppc.asso.fr/bupdoc/index.php

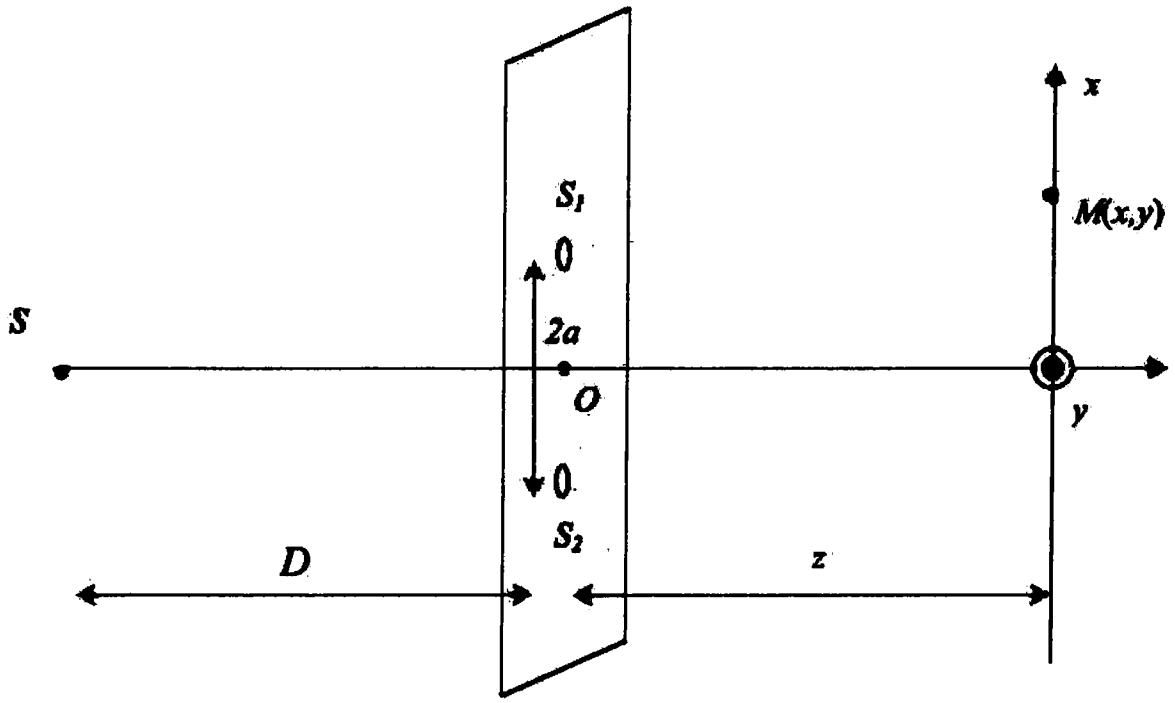
1.6 Une frange plus rapide que la lumière ?

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : trous d'Young, contraste, surfaces d'ondes.

En 2002, une équipe de chercheurs français a publié un article décrivant un moyen simple de mesurer indirectement la vitesse de propagation de la frange brillante centrale dans le fameux dispositif interférentiel des trous d'Young. Ce problème propose de reprendre leur expérience.

On considère le schéma de principe de la figure suivante. Les deux trous d'Young S_1 et S_2 sont distants de $2a$ et l'on place l'écran d'observation à une distance z des trous. La source S est monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ. Sauf mention contraire, elle est supposée ponctuelle et placée à une distance D de l'écran contenant les trous, sur la médiatrice de ceux-ci. On repère un point M de l'écran d'observation par ses coordonnées (x,y), l'axe Ox étant colinéaire au segment reliant les trous. Ces derniers sont suffisamment petits de manière à obtenir un champ d'interférence à l'écran assez grand. Enfin, on assimilera l'air à du vide et l'on considèrera que x, y et a sont très petits devant z et D.



1) Les franges sont-elles localisées ? Calculer l'ordre d'interférence p en un point M de l'écran. Conclure sur la forme des franges. La frange centrale est-elle brillante ou sombre ? Pourquoi peut-on la qualifier de frange « achromatique » ?

2) Pour $a = 1{,}20 \pm 0{,}05$ mm et $z = 50 \pm 2$ cm, calculer l'interfrange avec $\lambda = 633$ nm.

Pour la seule question suivante, la source possède en fait une largeur b dans la direction parallèle à Ox.

3) Donner, en le justifiant, l'expression de b au-delà de laquelle il y a brouillage des franges à l'écran. Application numérique pour $D = 1$ m.

Pour déterminer à quelle vitesse v_f se déplace la frange centrale le long de l'axe Oz, on considère deux surfaces d'ondes émises au même instant (pris comme origine des temps) par les trous S_1 et S_2. On note 2θ l'écart angulaire entre les deux trous depuis un point de l'axe Oz.

4) A quelle date les deux surfaces d'onde commencent-elle à se croiser sur l'axe Oz ? On raisonne dans la suite à une date ultérieure.

5) Représenter dans le plan Oxz les surfaces d'ondes à proximité de l'axe Oz aux dates t puis $t + dt$. En déduire l'expression de v_f en fonction de c et θ. Comparer v_f et c.

6) Pourquoi ne peut-on pas mesurer en pratique *directement* la vitesse v_f ?

Afin de comparer v_f à c, on perce un troisième trou entre les deux autres (au milieu du segment les reliant, c'est-à-dire au niveau du point O visible sur la figure) afin d'introduire une onde de référence. Celle-ci va interférer avec les deux autres ondes provoquant une forte modulation de l'intensité le long de l'axe Oz. On repère alors l'abscisse z_k de la $k^{\text{ième}}$ frange sombre sur l'axe Oz en partant de l'infini (z décroissant lors du comptage).

7) En se limitant aux abscisses z_k grandes devant a, déterminer l'expression de z_k en fonction de a, λ et k et montrer que la vitesse v_f de la frange centrale à l'abscisse z_k se déduit de la formule :

$$\frac{v_f - c}{c} = \frac{1}{2}(2k-1)^2 \frac{\lambda^2}{a^2}$$

8) Calculer z_k et $\dfrac{v_f - c}{c}$ pour $k = 1$ avec $a = 1{,}2$ mm et $\lambda = 633$ nm.

9) Tracer l'allure du graphe représentant l'intensité $I(z)$ sur l'axe Oz en faisant apparaître les abscisses z_k.

On désire pouvoir mesurer v_f à d'autres endroits sur l'axe Oz.

10) Expliquer pourquoi l'insertion d'une lame à faces parallèles (d'indice n et d'épaisseur e) devant le trou central permet d'y parvenir.

L'expérience décrite dans l'article évoqué en début d'énoncé a été conçue avec des fentes d'Young à la place des trous d'Young.

11) Expliquer l'intérêt d'utiliser des fentes plutôt que des trous.

Le fait que la frange centrale se déplace plus vite que la vitesse de la lumière peut surprendre, mais il s'agit pourtant d'un résultat généralisable. On peut par exemple montrer

que les vitesses de phase et de groupe d'un faisceau de Bessel valent $\frac{c}{\cos D}$ (voir problème 1.9 pour la signification de l'angle D), supérieure à la vitesse de la lumière c. Ceci ne remet cependant pas en cause le principe de causalité selon lequel aucune information ne peut se déplacer plus vite que c. Les lecteurs intéressés par ce problème peuvent se référer à l'exercice 5.5 du livre *Ondes lumineuses* de R.-J. Champeau, R. Carpentier et I. Lorgeré paru en 2009 chez De Boeck.

A titre d'information, les références de l'article dont s'inspire ce problème sont :

D. Chauvat, O. Emile, M. Brunel, A. Le Floch, *Direct measurement of the central fringe velocity in Young-type experiments*, Physics Letters A **295** (2002) pp. 78-80

1.7 Fabrication d'un réseau de Bragg

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, trous d'Young.

La technologie des télécommunications par fibres optiques fait souvent appel au multiplexage en longueur d'onde, procédé permettant d'augmenter le débit à travers une unique fibre. Le principe réside dans l'envoi simultané dans la fibre optique de plusieurs longueurs d'onde transportant chacune de l'information par une modulation d'intensité ou de phase (sous format numérique). Cependant, en bout de fibre, pour pouvoir lire les différents signaux, il faut séparer les différentes longueurs d'onde. Ceci peut être réalisé à l'aide de réseaux de Bragg. Ce problème propose d'étudier une méthode de fabrication d'un réseau de Bragg directement à l'intérieur de la fibre optique.

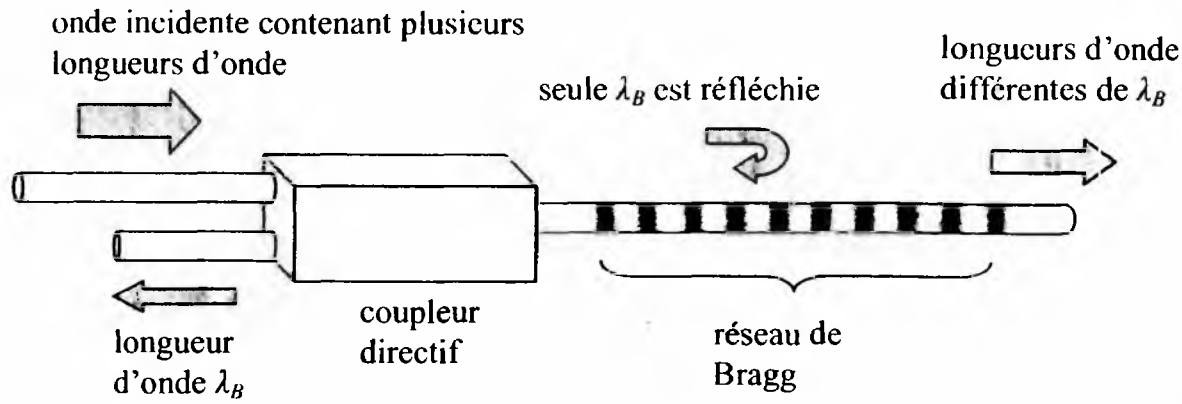
DOCUMENT : Fibre à réseau de Bragg, d'après le site web de « National Instruments »

Un réseau de Bragg créé directement à l'intérieur d'une fibre optique est constitué d'une légère variation périodique de l'indice de la fibre. Il peut donc être vu comme une succession d'un grand nombre de motifs identiques. Pour chaque motif, une faible fraction de la lumière guidée par la fibre optique va être réfléchie, du fait de la légère variation d'indice à l'intérieur du motif.

Un calcul complexe montre que l'ensemble de ces réflexions ne va pas avoir de conséquences pour la plupart des longueurs d'ondes : ces dernières vont alors traverser le réseau de Bragg. Cependant, pour une étroite bande de longueurs d'onde, il se peut que le réseau de Bragg fasse réfléchir entièrement l'onde incidente. Cette bande est centrée sur la longueur d'onde λ_B pour laquelle les ondes réfléchies par deux motifs successifs sont déphasées de 2π : les ondes réfléchies par les différents motifs se retrouvent alors toutes en interférence constructive ce qui explique la réflexion sélective de l'onde par le réseau de Bragg.

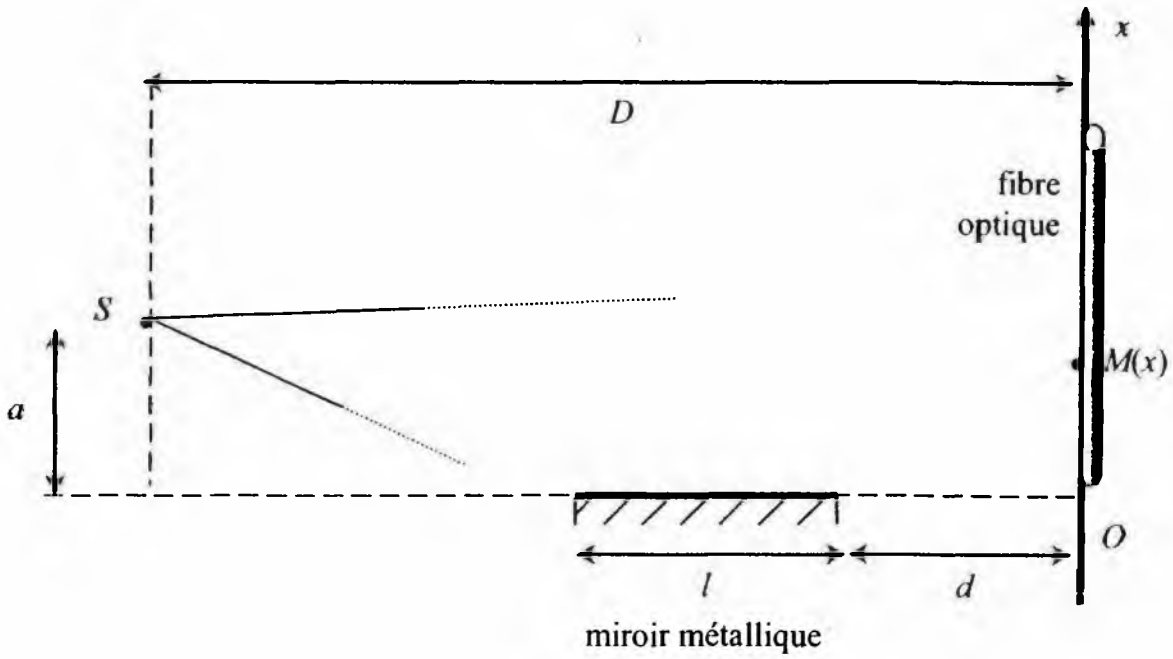
Le schéma de principe suivant résume les principales caractéristiques d'un réseau de Bragg

intégré à l'intérieur d'une fibre optique.



Pour fabriquer un réseau de Bragg à l'intérieur de la fibre optique, on ajoute lors de la fabrication de cette dernière des constituants photosensibles : ceux-ci ont la propriété de modifier définitivement l'indice local du milieu s'ils ont été éclairés par une lumière UV. En illuminant la fibre par une figure d'interférence formée de franges rectilignes, on peut de cette manière créer une modulation périodique de l'indice le long de la fibre et ainsi créer un réseau de Bragg directement à l'intérieur de celle-ci. La modulation d'indice étant très faible, on peut considérer l'indice de la fibre optique comme uniforme pour les calculs de chemin optique dans la fibre. Pour les applications numériques, on prendra $n = 1{,}50$ (cas d'une fibre standard en silice).

Pour produire le système de franges, on utilise le montage interférentiel appelé « miroir de Lloyd », représenté sur la figure suivante. La source S est supposée ponctuelle, émettant un rayonnement monochromatique, de longueur d'onde λ.



1) Montrer que ce système interférentiel est équivalent aux trous d'Young dont on précisera les positions.

On désire fabriquer un réseau de Bragg réfléchissant la longueur d'onde λ_B = 1310 nm et ayant une longueur e = 3 mm.

2) Quelle doit être la valeur de l'interfrange de la figure d'interférence ?

La source est un laser « excimer » avec λ = 248 nm. On choisit D = 100 cm et d = 5 cm.

3) Calculer la distance a et la taille du miroir l.

4) En réalité, le point S est le foyer image d'une lentille convergente, éclairée par un faisceau laser très peu divergent. Calculer l'ouverture angulaire minimale du faisceau à la sortie de la lentille pour pouvoir impressionner le réseau de Bragg.

1.8 Vélocimétrie laser par clignotement

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, cohérence temporelle.

Une technique optique non intrusive de mesure de la vitesse locale d'un écoulement est basée sur la création de franges d'interférence au sein de l'écoulement, préalablement ensemencé par des particules solides réfléchissantes. Ces dernières, en passant dans le champ d'interférence, réfléchissent la lumière sous forme d'un clignotement (passage successif entre franges brillantes et franges claires) que détecte une photodiode. La mesure de la fréquence du clignotement permet d'avoir accès à la vitesse de l'écoulement où se situe le champ d'interférences.

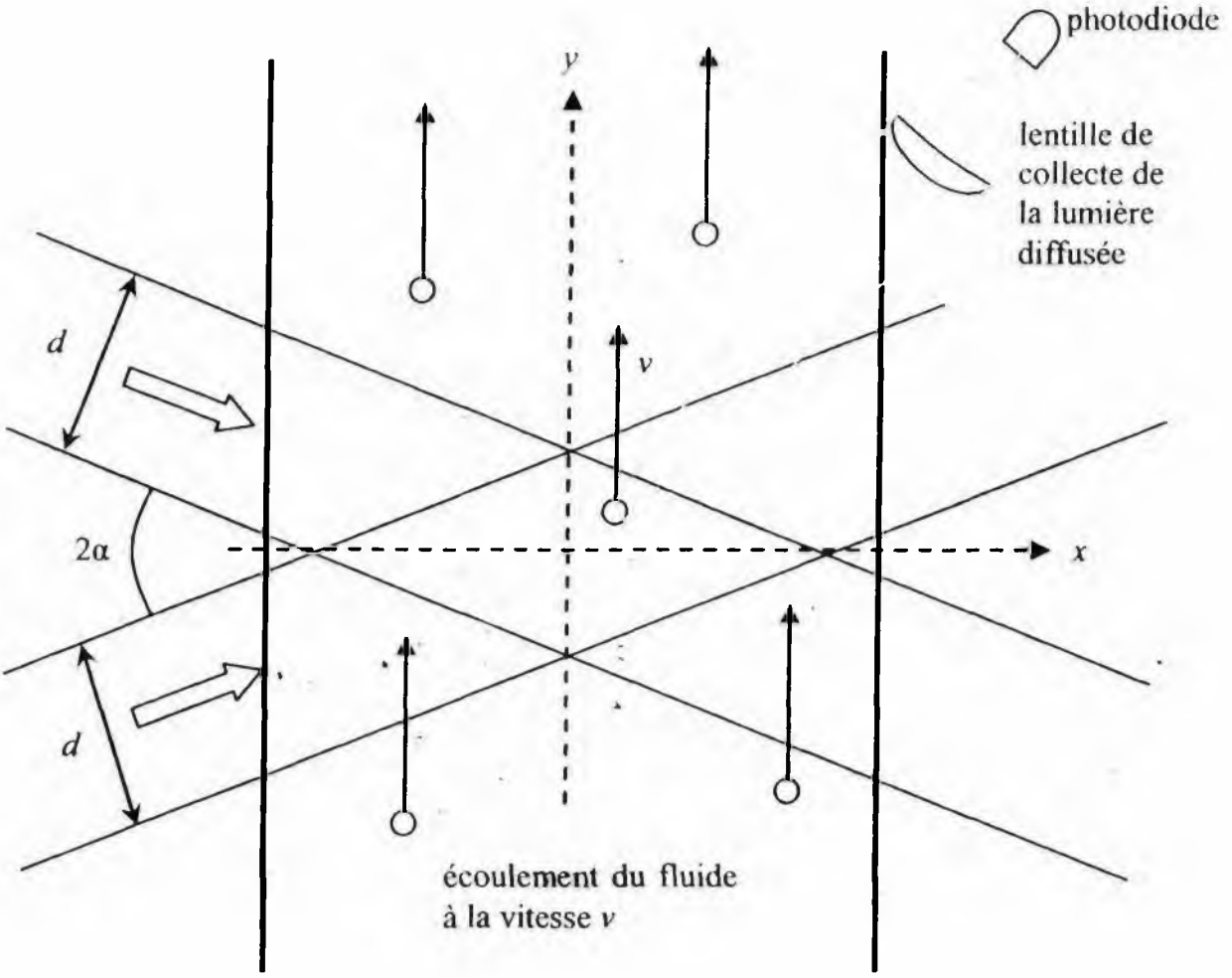
Le dispositif optique est représenté sur la page suivante. Un faisceau laser, supposé parfaitement cohérent de longueur d'onde dans le vide λ_0, est dédoublé en deux faisceaux identiques de diamètre d et d'intensité I_0, dont les directions font un angle 2α entre elles. Le plan médian aux deux faisceaux est réglé pour être exactement perpendiculaire à la direction de l'écoulement. On note v la vitesse du fluide et l'on suppose les champs lumineux en phase en $y = 0$. Dans un premier temps, on considère le fluide suffisamment dilué pour considérer son indice égal à 1.

1) Proposer un montage optique permettant de créer les deux faisceaux.

2) Calculer l'intensité $I(x,y)$ dans le champ d'interférence. Caractériser les franges (forme, direction, valeur de l'interfrange i).

3) La lumière diffusée par les particules solides dans le champ d'interférence et captée par la photodiode possède une fréquence de clignotement mesurée à l'aide d'un fréquencemètre de 2,34 ± 0,03 MHz. Sachant que λ_0 = 514 nm et α = 10,0°, calculer la vitesse de l'écoulement avec son incertitude.

4) En pratique, le pic du spectre du signal enregistré par la photodiode centré sur la fréquence f possède une largeur δf, cela même si le champ de vitesses est parfaitement uniforme. Expliquer qualitativement l'origine de cette largeur spectrale non nulle. Donner un ordre de grandeur de $\delta f/f$ en fonction de i et d. Quelle doit être la largeur des faisceaux si l'on désire une mesure de la vitesse avec une précision relative de 0,1% ?



5) Quels sont les changements à prendre en considération dans le cas où le fluide possède un indice n qui ne peut pas être considéré comme proche de 1 ?

1.9 Les faisceaux de Bessel partie 2

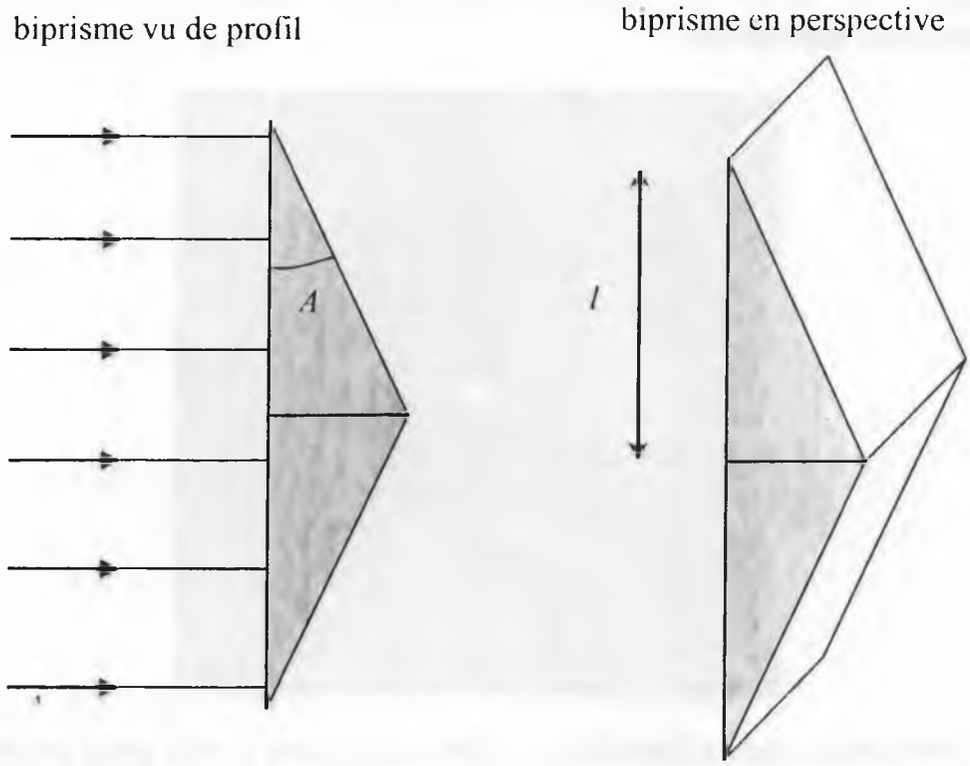
TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, diffraction.

On considère dans un premier temps un bi-prisme de Fresnel. Celui-ci est constitué de deux prismes identiques accolés ayant une largeur l et possédant un angle droit (voir figure page suivante). Le bi-prisme est éclairé par une onde plane progressive monochromatique (longueur d'onde λ). Chaque prisme va dévier les rayons lumineux qui le traversent d'un angle D du côté de sa base (voir partie 1).

1) Le bi-prisme de Fresnel est-il un diviseur de front d'onde ou un diviseur d'amplitude ? Y a-t-il ici un risque que les franges d'interférence se brouillent ? Pourquoi ?

2) Quelle est la forme des franges ? Quelle est la nature de la frange dans le plan de symétrie du système ? Répondre aux deux questions sans calcul.

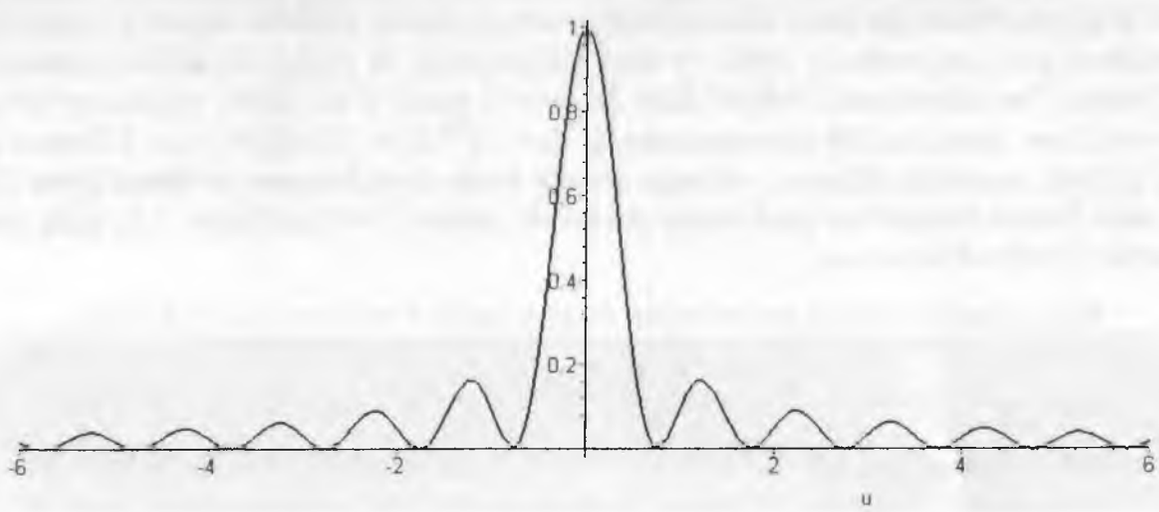


3) Calculer l'interfrange i en fonction de λ et D (sans faire l'approximation des petits angles). Il est conseillé de ne pas calculer de chemins optiques à travers le bi-prisme, mais de calculer des différences de marche entre des surfaces d'ondes bien choisies.

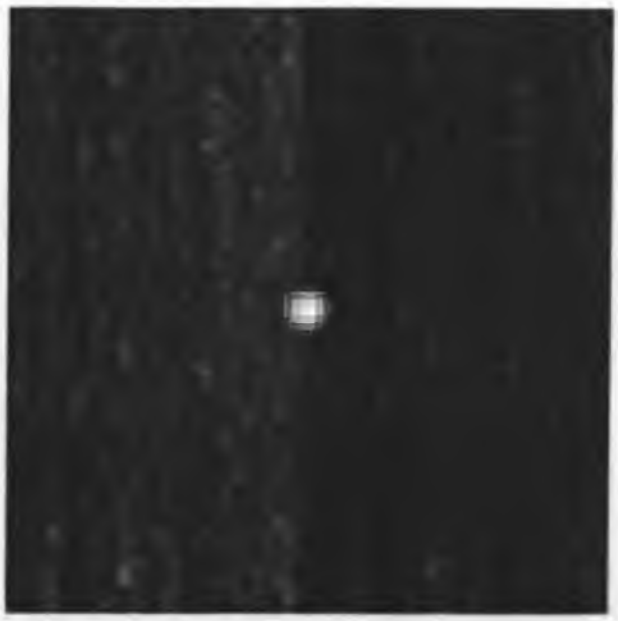
En remplaçant le bi-prisme de Fresnel par un axicon déviant les rayons lumineux d'un angle D (voir partie 1), on montre que, dans le champ d'interférence, il apparaît un faisceau de Bessel caractérisé par une intensité I en un point M situé à une distance r de l'axe optique valant (en négligeant les effets de bord) :

$$I(M) = \left(J_0\left(\frac{2\pi \sin D}{\lambda} r \right) \right)^2 I_0$$

où J_0 désigne la première fonction de Bessel de 1ere espèce et I_0 désigne l'intensité le long de l'axe optique. Le graphe ci-dessous représente $(J_0(\pi u))^2$ en fonction de u.



La figure suivante représente la répartition d'intensité d'un faisceau de Bessel dans un plan perpendiculaire à l'axe optique.



4) Comparer la figure d'interférence créée par l'axicon à celle créée par le bi-prisme de Fresnel. On détaillera les ressemblances ainsi que les différences.

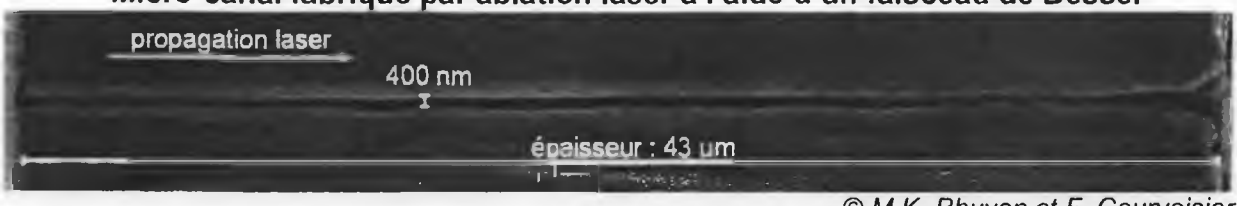
5) Calculer la largeur Δl à mi-hauteur du disque lumineux au centre du faisceau de Bessel pour λ = 800 nm et un axicon de diamètre d = 3 mm provoquant un angle de déviation D = 17°. Estimer la longueur sur laquelle est présent ce disque lumineux le long de l'axe optique.

Les faisceaux de Bessel sont considérés comme des faisceaux « non diffractants ». Les ondes progressives planes possèdent également cette propriété de ne pas diffracter.

6) En faisant tendre d vers l'infini, justifier cette dénomination pour les faisceaux de Bessel. Utilisés dans le cadre de l'ablation laser, quel est l'avantage de tels faisceaux en comparaison des ondes planes ?

L'utilisation de faisceaux de Bessel pour l'ablation laser permet donc d'obtenir une lumière focalisée sur une très petite zone et cela sur une grande distance, ce que ne permettent pas les faisceaux gaussiens (voir partie 3, problème 2.4). L'intérêt des faisceaux de Bessel est donc de pouvoir créer des trous micrométriques très profonds, avec un rapport diamètre sur profondeur pouvant atteindre 1/100. A titre d'illustration, le cliché ci-dessous représente une coupe d'un micro-canal élaboré dans du verre à partir d'une seule impulsion laser à 800 nm d'une durée de 230 femtosecondes (1 fs = 10^{-15} s) et d'énergie 3 µJ. L'impulsion laser utilisée pour cette ablation a été mise sous la forme d'un faisceau de Bessel (avec D = 17° dans l'air) à l'aide d'un modulateur spatial de lumière (voir problème 1.3) réglé pour reproduire l'effet d'un axicon.

Micro-canal fabriqué par ablation laser à l'aide d'un faisceau de Bessel



© M.K. Bhuyan et F. Courvoisier

Il est à noter que le problème a traité le cas d'une propagation du faisceau dans le vide. Dans le cadre de l'ablation laser, la propagation du faisceau dans la matière (du verre dans le cas du cliché) fait intervenir d'autres facteurs influençant l'évolution de son profil : des effets non linéaires (effet Kerr optique) et l'interaction lumière-plasma entrent en jeu. Les faisceaux de Bessel se trouvent être des états stationnaires stables du processus de focalisation-défocalisation. Pour plus de détails, voir l'article :

M. K. Bhuyan, F. Courvoisier, P.-A. Lacourt, M. Jacquot, R. Salut, L. Furfaro, and J. M. Dudley, *High aspect ratio nanochannel machining using single shot femtosecond Besselbeams*, Applied Physics Letters, **97**, 081102 (2010)

1.10 Le projet spatial LISA : partie 2

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, chemin optique, cohérence temporelle, récepteurs.

Dans le projet spatial LISA de détection des ondes gravitationnelles, la mesure des variations de positions relatives d'un satellite par rapport à un autre se décompose en deux parties :

- une mesure du déplacement longitudinal, c'est-à-dire de la variation de la distance D reliant les satellites selon l'axe du faisceau laser,
- une mesure de déplacements angulaires, dans le cas où les satellites se désalignent avec l'axe du faisceau les reliant.

La mesure du déplacement relatif longitudinal de deux satellites est basée sur un dispositif dont une version simplifiée est représentée sur la figure n°1.

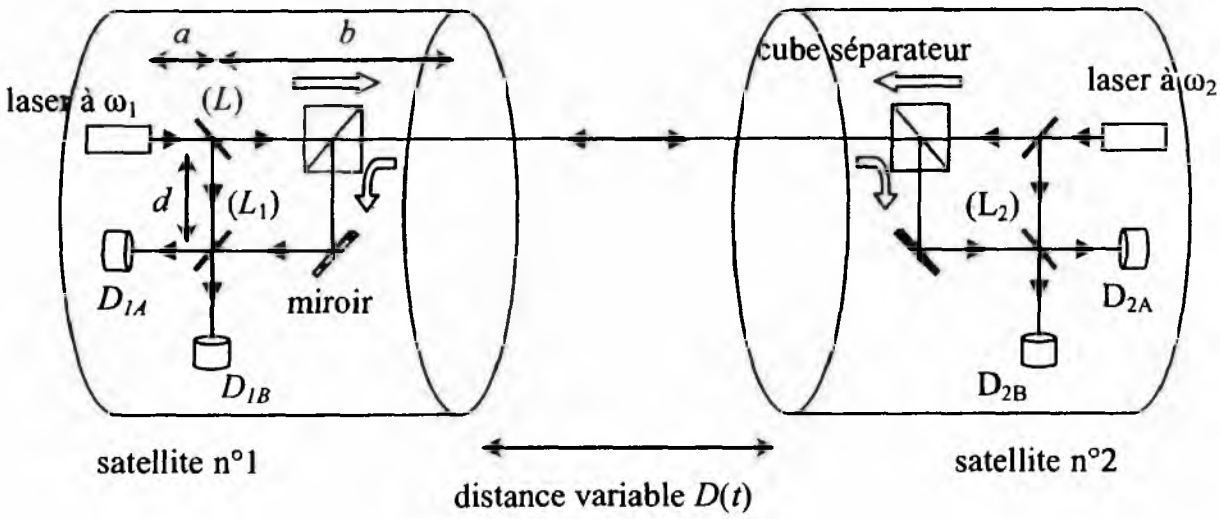


Figure n°1

Il s'agit d'interférométrie dite « hétérodyne », c'est-à-dire que les photodiodes (au nombre de quatre) vont enregistrer l'interférence entre des faisceaux issus de deux lasers différents,

émettant tous deux à une longueur d'onde égale à 1064 nm. Même si les lasers sont de même nature, les ondes qu'ils émettent n'ont pas tout à fait la même fréquence. Néanmoins, le temps de cohérence des lasers est suffisamment grand pour que le système de détection puisse détecter les interférences, qui vont évoluer au cours du temps. La différence maximale de fréquence attendue est de 15 MHz (due à l'effet Doppler), sachant que la fréquence d'échantillonnage des signaux issus des photodiodes vaut 50 MHz. A noter que les cubes séparateurs visibles sur le schéma permettent de diriger différemment les rayons suivant leur sens (grâce à des lames quart d'onde non représentées ici). Pour le calcul des chemins optiques, on fera l'hypothèse simplificatrice que les cubes ont un indice égal à l'unité.

La dépendance temporelle du champ scalaire émis par le laser n°1 (respectivement n°2) est de la forme $\cos(\omega_1 t - \varphi_{1S})$ (respectivement $\cos(\omega_2 t - \varphi_{2S})$) à la sortie immédiate de celui-ci. On note A_1 (respectivement A_2) l'amplitude du champ scalaire de l'onde venant du laser n°1 (respectivement n°2) à l'entrée de la lame (L_1). Les lames séparatrices (L_1) et (L_2), supposées parfaites, ont un coefficient de transmission en amplitude (c'est-à-dire pour le champ scalaire associé à l'onde) $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de coefficient de réflexion $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ du côté du miroir et $r' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ du côté opposé. On suppose que la lame (L) n'introduit aucun déphasage ni à la réflexion, ni à la transmission. L'éclairement E d'une onde lumineuse se déduit de son champ scalaire s par la formule $E = K\langle s^2 \rangle$, où la valeur moyenne, représentée par $\langle\ \rangle$, se calcule sur le temps de réponse du détecteur, K étant une constante multiplicative.

1) Calculer le chemin optique de l'onde issue du laser n°1 et allant jusqu'à la séparatrice (L_1). En déduire le retard de phase $\varphi_{1,(L1)}$ de cette onde au niveau de (L_1) en fonction de φ_{1S}, ω_1, a et d.

2) Mêmes questions pour l'onde issue du laser n°2 et allant à cette même séparatrice (L_1). Exprimer $\varphi_{2,(L1)}$ en fonction de φ_{2S}, ω_2, a, d, b et $D(t)$.

3) Montrer que l'éclairement reçu au niveau de la photodiode D_{1B} s'écrit :

$$E_{1B} = \frac{E_1 + E_2}{2} + \sqrt{E_1 E_2}\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_{sat,1}\right]$$

Que représentent les quantités E_1 et E_2 ? Exprimer $\varphi_{sat,1}$ en fonction de $\varphi_{1,(L1)}$ et $\varphi_{2,(L1)}$, puis en fonction de $D(t)$ et des autres distances intervenant dans le problème.

4) Exprimer l'éclairement E_{1A} au niveau de la photodiode D_{1A}. Combien vaut la somme $E_{1A} + E_{1B}$? Etait-ce prévisible ?

Le signal issu des photodiodes comporte donc un battement à la pulsation $\omega_2 - \omega_1$. Un phasemètre permet de mesurer la phase $\varphi_{sat,1}$ et donc d'avoir accès en théorie aux variations temporelles de la distance $D(t)$. (Remarque : le projet prévoit de mettre en place les deux détecteurs D_{1A} et D_{1B} afin d'avoir une redondance de la mesure de $\varphi_{sat,1}$ afin de diminuer les incertitudes de mesure et également dans le cas où l'un des détecteurs devienne défaillant...). Il faut cependant que les lasers soient stabilisés en fréquence pour que les

retards de phase φ_{1S} et φ_{2S} ne varient pas trop au cours du temps (c'est-à-dire qu'ils aient une très grande cohérence temporelle). Un moyen de s'affranchir de ce manque de cohérence est de combiner les résultats issus des deux satellites.

5) Exprimer le retard de phase $\varphi_{sat,2}$ mesuré par le phasemètre situé dans le satellite n°2.

6) Comment doit-on combiner $\varphi_{sat,1}$ et $\varphi_{sat,2}$ pour faire disparaître l'influence de φ_{1S} et φ_{2S} tout en ayant accès aux variations de $D(t)$?

Remarque : en pratique, les choses sont plus compliquées car les retards de phase φ_{1S} et φ_{2S} ne sont pas calculés au même moment dans les expressions de $\varphi_{sat,1}$ et $\varphi_{sat,2}$ puisqu'il faut prendre en compte le temps de trajet de la lumière d'un satellite à l'autre, d'où la nécessité d'une mesure puis d'un enregistrement des phases...

7) Compte tenu des indications fournies dans la partie 1 (problème 1.4), quelle doit être l'incertitude maximale sur la mesure des phases afin de pouvoir détecter les ondes gravitationnelles ?

La mesure des déplacements angulaires s'effectue à l'aide d'une méthode appelée en anglais *differential wavefront sensing*. Dans la figure n°1, les photodiodes D_{1A} et D_{1B} sont en fait chacune un système de quatre photodiodes placées sur les coins d'un carré de côté a. Ce système est appelé *quadrant photodetector* en anglais, ayant pour acronyme QPD. Pour simplifier l'étude du système, on raisonne en 2D en ne considérant que deux photodiodes (voir figure n°2). Le faisceau provenant de l'autre satellite fait un angle α avec le faisceau de référence, ce dernier arrivant en incidence normale sur le QPD.

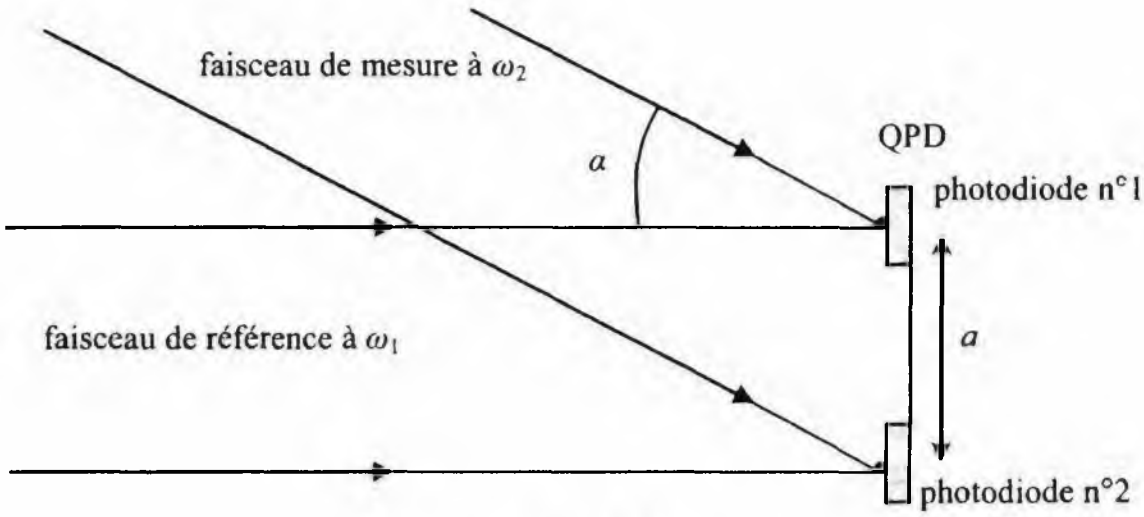


Figure n°2

8) Pourquoi les photodiodes n°1 et n°2 ne vont-elles pas forcément fournir le même signal ? Répondre de manière qualitative.

9) Si la photodiode n°1 délivre un signal de la forme $U_1(t) = U_0 + U_M \cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t - \phi_1\right]$, comment s'écrit celui délivré par la photodiode n°2, noté $U_2(t)$?

Dans l'un des rapports d'évaluation du projet LISA, on peut lire la phrase suivante : *the differential phase between the signals from the different quadrants is used to determine the angle of the wavefront arriving at the photodiodes*, que l'on peut traduire par « la différence de phase entre les signaux provenant des différents quadrants est utilisé pour déterminer l'angle du front d'onde arrivant sur les photodiodes ».

10) Justifier cette phrase.

Remarque : le dispositif est en réalité beaucoup plus complexe que celui présenté dans ce problème. Chaque satellite va contenir une cavité dans laquelle un cube en alliage d'or et de platine de près de 5 cm de côté est en impesanteur (ils seront alors isolés de toute force non gravitationnelle). La détection des ondes gravitationnelles se fera par la mesure des variations de distance entre les cubes. A titre documentaire, on peut consulter des schémas du dispositif réel envisagé sur le « yellow book » du projet LISA, publié en février 2011, disponible sur le site de l'ESA à l'adresse :

http://sci.esa.int/lisa/48364-lisa-assessment-study-report-yellow-book/#

1.11 Principe et utilisation du LIDAR

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, cohérence temporelle.

Le LIDAR (*Light Detection and Ranging*) fonctionne sur le même principe que le RADAR (*Radio Detection and Ranging*), en utilisant la lumière d'un faisceau laser à la place d'une onde électromagnétique centimétrique. La mesure de la durée d'un trajet lumineux permet par exemple d'accéder à des mesures de distances. L'utilisation d'un faisceau laser puissant, directif et contrôlé en fréquence ouvre cependant la voie à de nombreuses autres applications très utiles. On se propose dans ce problème de comprendre le principe de la cartographie aérienne et des mesures de données atmosphériques.

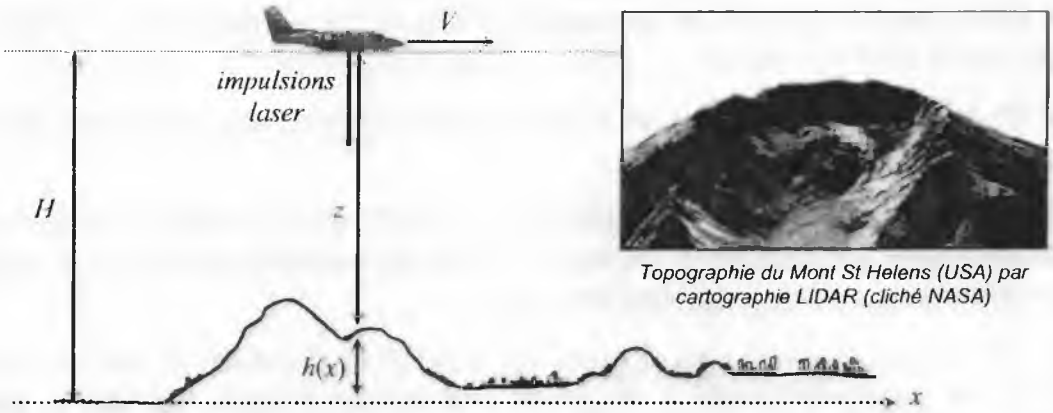
LIDAR topographique

Le LIDAR topographique envoie des impulsions laser infrarouge de courte durée (typiquement 10 ns pour une longueur d'onde de 1 064 nm). Tout obstacle sur le trajet du faisceau va renvoyer une partie de la lumière dans la direction du faisceau incident. La mesure de la durée de l'aller-retour de chaque impulsion permet alors de reconstituer numériquement l'espace environnant. Embarqué à bord d'un avion ou d'un satellite, le LIDAR topographique est un moyen de cartographier la Terre à distance avec une grande précision.

On s'appuie sur la figure page suivante. L'avion vole à une altitude $H = 5\,000$ m à la vitesse $V = 450$ km/h (déterminées par un GPS). Les impulsions laser sont envoyées verticalement vers le bas avec une fréquence de 30 Hz. La vitesse de la lumière vaut : $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}.

1) Exprimer la durée Δt du trajet aller-retour d'une impulsion. En déduire l'allure du graphe de Δt en fonction du temps. Comment obtient-on alors le profil du terrain $h(x)$?

Principe du LIDAR topographique embarqué



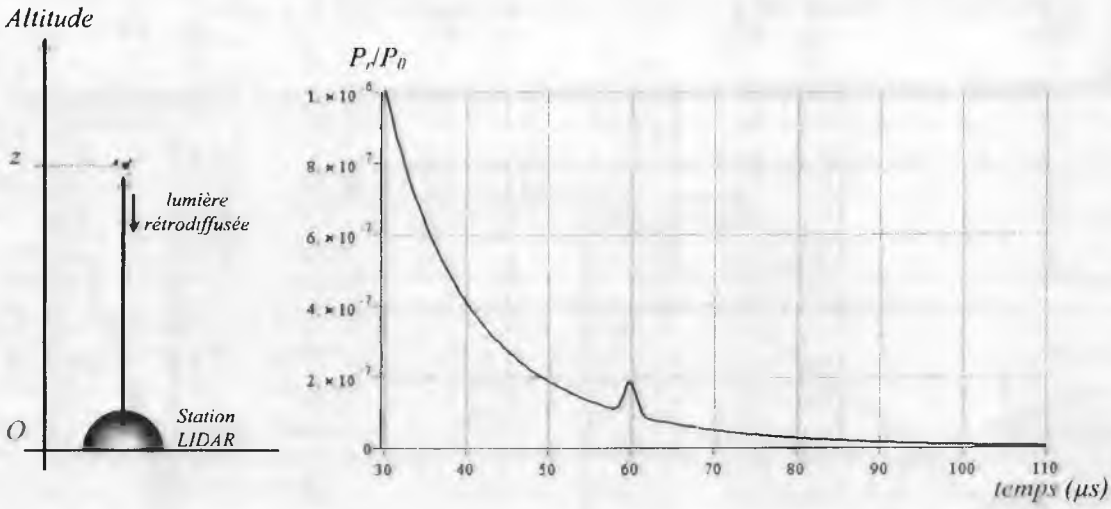
2) Estimer la résolution verticale et la résolution horizontale du dispositif.

3) Proposer un moyen de cartographier directement une bande de terrain.

LIDAR atmosphérique

Le faisceau laser est cette fois envoyé depuis une station au sol, verticalement dans l'atmosphère terrestre. Le faisceau est atténué au cours de sa propagation et est rétrodiffusé à chaque altitude z par des particules en suspension dans l'air (aérosol, gouttelettes d'eau, particules polluantes).

Principe du LIDAR atmosphérique et profil temporel du signal rétrodiffusé



Chaque impulsion laser, envoyée à travers un télescope de diamètre $D = 20$ cm, dure 10 ns et contient 150 mJ. La longueur d'onde utilisée dépend des applications et peut se situer aussi bien dans le visible que dans l'infrarouge. On considère ici une longueur d'onde $\lambda = 532$ nm (laser Nd-YAG doublé en fréquence). L'interaction de la lumière laser avec l'atmosphère est caractérisée par le coefficient d'extinction totale α (supposé uniforme) : la puissance lumineuse après un trajet de longueur L dans l'atmosphère passe de P_0 à P selon la relation $P = P_0 e^{-\alpha L}$ (loi de Beer-Lambert). Les particules situées à chaque altitude z vont diffuser de façon isotrope une fraction $\beta(z)$ de la puissance reçue. La lumière rétrodiffusée est alors récupérée au sol par le télescope, après un temps total de parcours Δt.

4) Calculer la puissance instantanée P_0 du faisceau lors de son émission. Comparer à sa puissance moyenne. Justifier que le faisceau incident reste cylindrique sur plusieurs kilomètres.

5) Exprimer la puissance $P(z)$ du faisceau incident à l'altitude z.

6) Déterminer la fraction de la puissance diffusée par les particules à l'altitude z qui sera reçue par le télescope au sol.

7) En déduire la puissance P_r de la lumière rétrodiffusée par les particules à l'altitude z et mesurée au sol.

8) Interpréter alors l'allure du signal reçu. A quelle altitude se trouvent les particules les plus diffusantes (constituant ici un nuage) ? Evaluer numériquement α et le rapport des fractions diffusées par le nuage et par l'atmosphère.

9) En réalité, le coefficient d'extinction dépend de l'altitude et vaut $\alpha(z)$. A l'aide d'un bilan de puissance entre z et $z + dz$, déterminer l'expression de la puissance rétrodiffusée mesurée au sol P_r. Cette relation, appelée *équation LIDAR*, a été établie en 1976 par Collis et Russel.

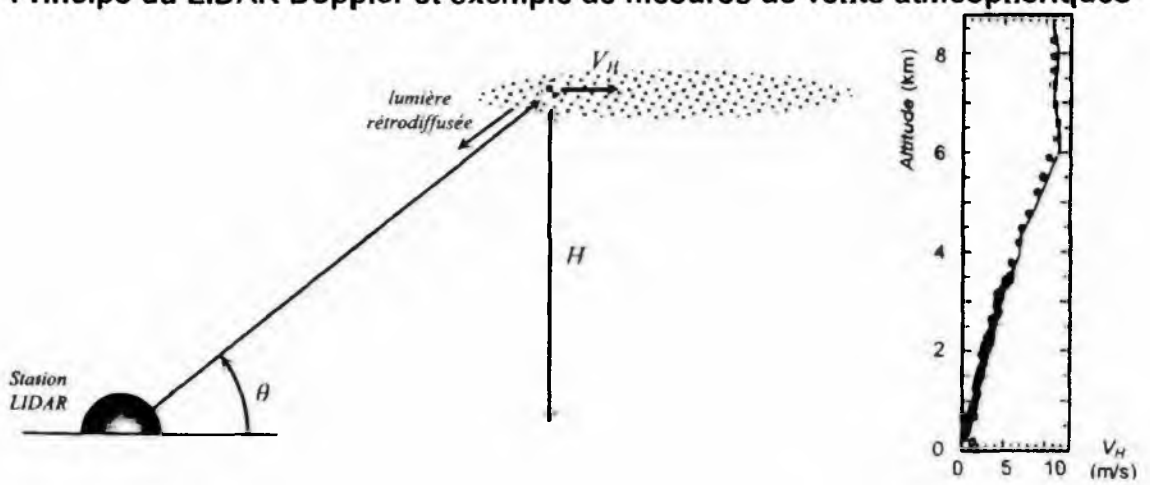
LIDAR Doppler et vents atmosphériques

Le faisceau laser, de fréquence ν_0, est dans ce cas envoyé de façon continue dans l'atmosphère, dans la direction $\theta = 45°$. La lumière rétrodiffusée par les particules, entraînées à la vitesse horizontale V_H par les vents atmosphériques, possède une fréquence ν décalée par effet Doppler, selon la relation approchée :

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{2V_\theta}{c}\right)$$

où $V_\theta = V_H \cos\theta$ est la vitesse des particules dans la direction du faisceau.

Principe du LIDAR Doppler et exemple de mesures de vents atmosphériques



La mesure consiste à faire interférer le faisceau laser rétrodiffusé avec une fraction du laser incident (signal de référence) pour en déduire l'écart de fréquence entre les deux signaux, puis la vitesse des particules.

L'amplitude du signal de référence s'écrit :

$$s_1(t) = s_{01}\cos\left(2\pi\nu_0 t - \Phi_s(t)\right)$$

avec $\Phi_s(t)$ le déphasage aléatoire dû à l'émission, à l'instant t, de chaque train d'ondes pendant le temps de cohérence τ_c du laser.

L'amplitude du signal rétrodiffusé s'écrit de même :

$$s_2(t) = s_{02}\cos\left(2\pi\nu t - \Phi_R - \Phi_s(t - \Delta t)\right)$$

où Φ_R est le déphasage dû à la propagation de l'onde pendant la durée Δt.
Le laser utilisé est un laser Nd-YAG stabilisé en fréquence, de longueur d'onde $\lambda_0 = 1064$ nm et de largeur spectrale $\Delta\nu_0 = 0{,}2$ MHz. Le photorécepteur détecte l'éclairement moyen pendant son temps de réponse $\tau_{det} = 10$ ns.

10) Calculer le temps de cohérence τ_c du laser. Evaluer l'altitude maximale H_{max} au-delà de laquelle le déphasage entre les deux ondes comporte une composante variant de manière aléatoire.

11) Pour $H < H_{max}$, montrer que le terme d'interférences entre le signal de référence et le signal rétrodiffusé oscille avec une fréquence f_{osc} que l'on exprimera en fonction de λ_0, V_H et θ. Donner un encadrement de f_{osc} compte tenu des valeurs indiquées sur la courbe expérimentale.

12) Expliquer pourquoi les mesures de vitesses à des altitudes supérieures à H_{max} sont tout de même possibles avec le laser stabilisé.

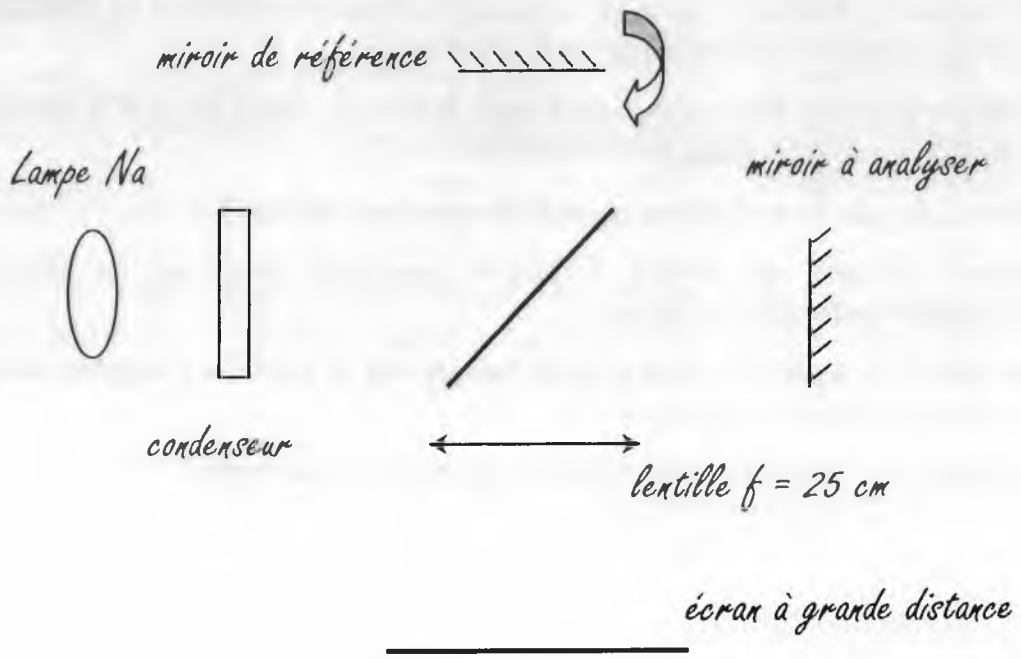
13) L'analyseur de spectre a une résolution de 500 kHz. Estimer l'incertitude sur la mesure de la vitesse horizontale V_H.

1.12 Contrôle de planéité d'un miroir

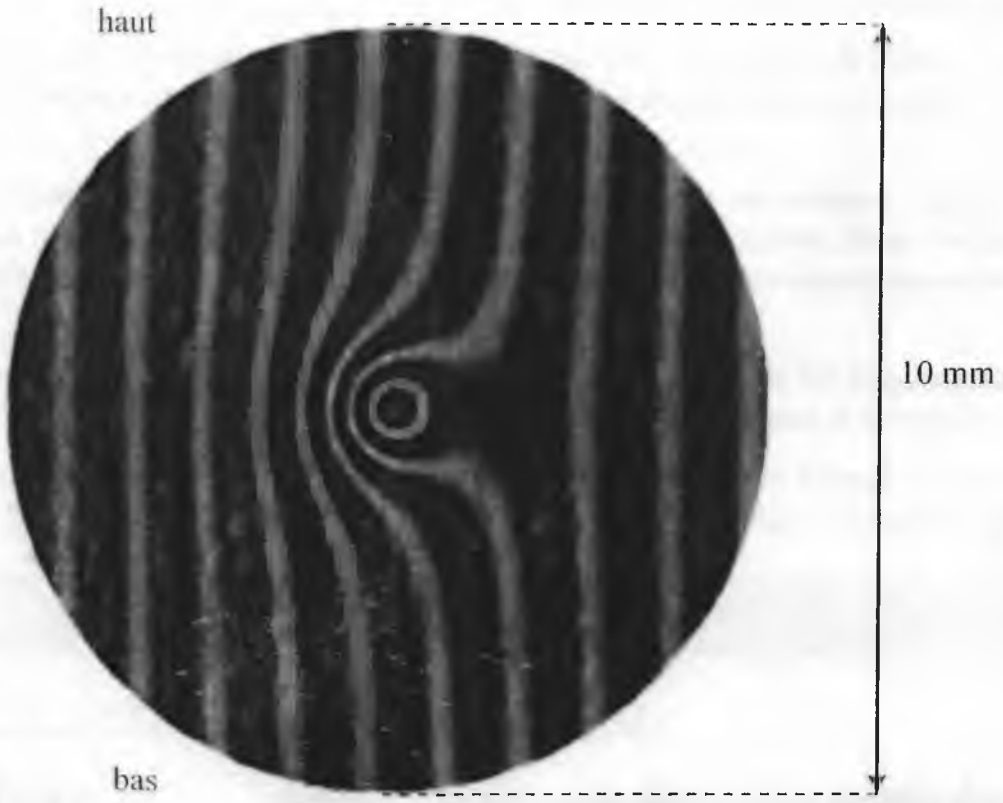
TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interféromètre de Michelson, optique géométrique.

Dans un laboratoire d'optique, un expérimentateur a malencontreusement fait focaliser un faisceau laser infrarouge très puissant sur l'un des miroirs du montage. Il se dit que l'échauffement local du miroir a dû le déformer de manière irréversible. Pour le vérifier, il décide d'insérer le miroir dans un des deux bras d'un appareil de Michelson. Utilisant une lampe spectrale au sodium ($\lambda = 589$ nm), il règle l'appareil en « coin d'air ». Comme toutes les expériences qu'il effectue, il dessine le schéma du montage, vu du dessus, sur son cahier de laboratoire :



A l'écran, il observe la figure d'interférence suivante :



1) En quoi consiste le réglage en coin d'air ? Comment doit être réglé le condenseur ?

2) Sachant que la lentille est à 35 cm du miroir de référence, indiquer à quelle distance de la lentille l'expérimentateur a dû placer l'écran pour voir les franges nettes.

En raisonnant avec l'image, notée (M'), du miroir à analyser noté (M) par la lame séparatrice, on admet que la différence de marche entre le rayon réfléchi par (M) et celui réfléchi par le miroir de référence est égale approximativement au double de l'épaisseur locale du coin d'air formé par (M') et le miroir de référence.

3) D'après les éléments fournis, estimer l'angle θ entre le miroir (M') et le miroir de référence. On évaluera une incertitude au résultat fourni.

4) Préciser la largeur de la zone sur laquelle le miroir est déformé.

5) Estimer l'épaisseur du défaut. Expliquer pourquoi le défaut va diminuer sensiblement les qualités optiques du miroir.

En pivotant le miroir de référence dans le sens indiqué sur le schéma, l'expérimentateur observe à l'écran que l'interfrange augmente.

6) En déduire, en le justifiant, si le défaut est un creux ou une bosse.

1.13 Le film étirable, c'est emballant !

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : chemin optique, spectre cannelé.

Le fil étirable alimentaire est utilisé pour couvrir et protéger les aliments lors de leur conservation dans le réfrigérateur. Il est le plus souvent constitué d'un mince film de PVC (Polychlorure de Vinyle) ou de PELD (Polyéthylène Basse Densité), conditionné en rouleau. On se propose de déterminer l'épaisseur de ce film étirable à l'aide d'un montage optique.

Rouleau de film étirable (à gauche : rouleau plein ; à droite : rouleau vide)

© Benoît Dépret

Le film étirable étudié a une longueur $L = 30$ m et une largeur $l = 29$ cm (données fournies par le fabricant). On mesure le diamètre et la masse de chaque rouleau, plein et vide. Les résultats sont reportés dans le tableau ci-dessous.

Rouleau	Diamètre (mm)	Masse (g)
plein	33,7	126
vide	28,9	33

Des recherches sur internet donnent quelques caractéristiques des matériaux envisagés :

Matériau	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	Indice de réfraction
PELD	$0,91.10^3$	1,51
PVC	$1,38.10^3$	1,55

1) Montrer que les caractéristiques géométriques des rouleaux permettent d'obtenir directement l'épaisseur e du film étirable. On exprimera e en fonction de la longueur L du film et des diamètres d_1 et d_2 des rouleaux plein et vide. Calculer e numériquement.

2) Evaluer la masse volumique du matériau. De quel matériau s'agit-il ? En déduire une autre mesure de l'épaisseur e.

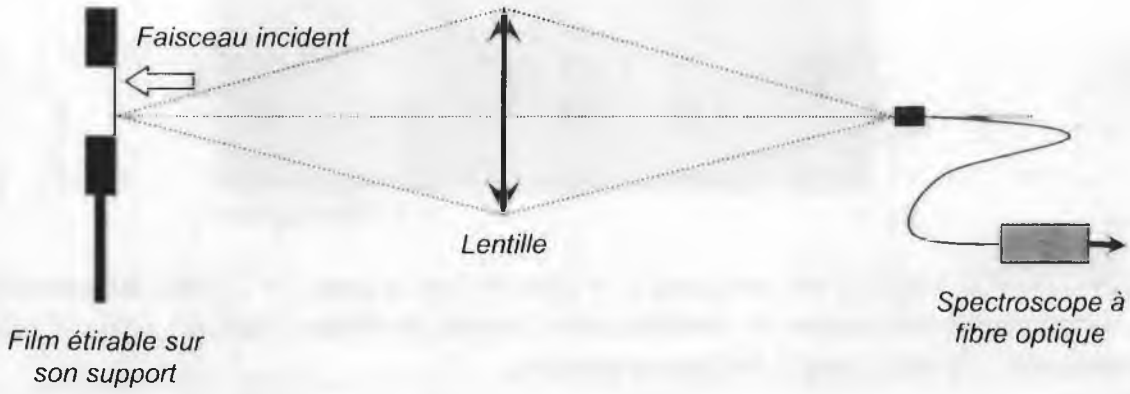
3) Comparer les deux mesures précédentes de l'épaisseur du film : quelles sont les incertitudes de mesure correspondantes ? On considère que le diamètre est mesuré à 0,1 mm près et la masse à 1 g près.

Afin d'améliorer la précision de la mesure, on se propose d'étudier le spectre de la lumière blanche réfléchie sur le film étirable monté sur un support optique.

Film étirable monté sur un support optique

© Benoît Dépret

Le film est éclairé en incidence normale par un faisceau de lumière parallèle et on projette l'image du film étirable sur un écran à l'aide d'une lentille convergente. On analyse alors la lumière reçue sur l'écran avec un spectroscope à fibre optique.



Le film étirable est assimilé à une lame d'épaisseur constante e et d'indice de réfraction n.

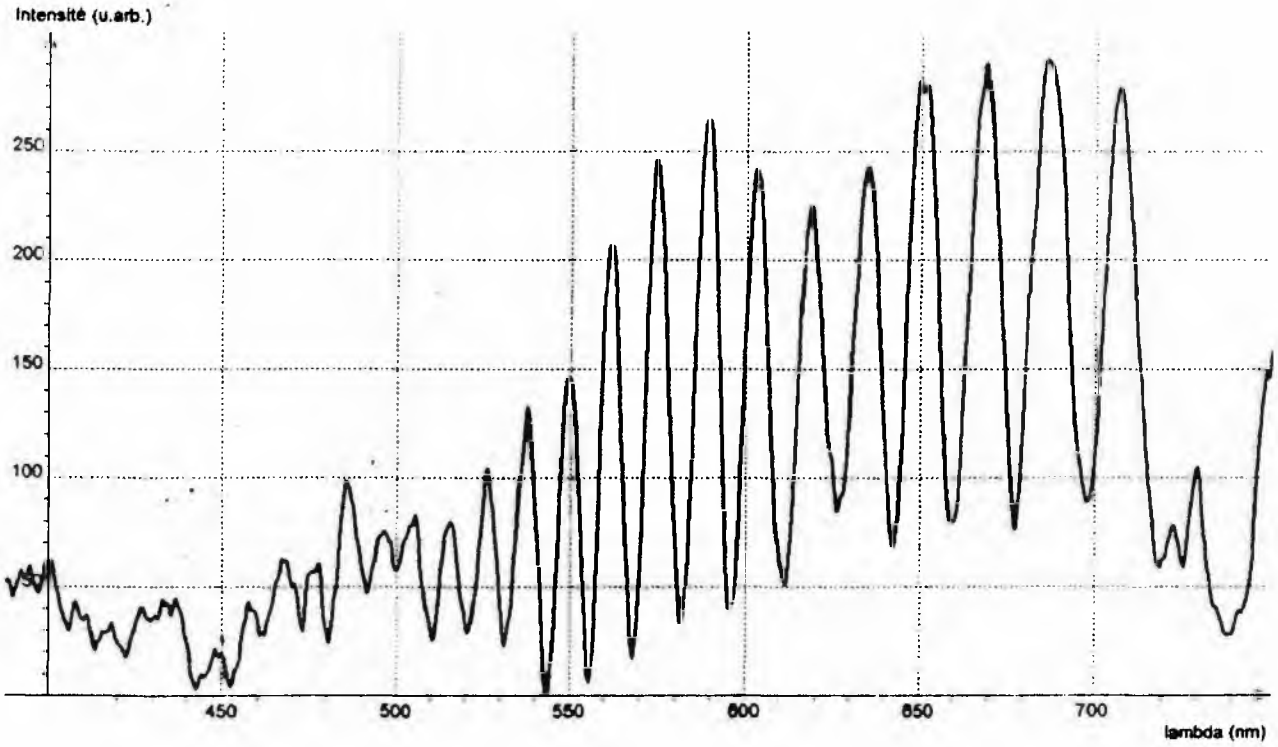
4) Pourquoi préfère-t-on étudier le spectre de la lumière réfléchie plutôt que celui de la lumière transmise ?

5) Représenter sur un schéma les deux ondes qui interfèrent. En déduire leur différence de marche δ en fonction de e, n et λ. On rappelle que la réflexion sur un milieu plus réfringent engendre un déphasage de $\pm\pi$ de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente (réflexion dite *vitreuse*).

6) Déterminer alors les longueurs d'onde λ_p pour lesquelles il y a interférences destructives en fonction de n, de e et d'un entier p.

Le spectre obtenu est représenté ci-après. On constate la présence de *cannelures sombres* qui montrent que certaines longueurs d'onde sont fortement atténuées en réflexion. Le graphe obtenu est ainsi appelé *spectre cannelé*.

Spectre de la lumière réfléchie sur le film étirable



7) Interpréter le spectre obtenu. Mesurer graphiquement la longueur d'onde des cannelures noires.

8) En utilisant une régression linéaire, déterminer l'épaisseur optique *ne* de la lame.

9) En déduire l'épaisseur *e* du film étirable et son incertitude. Quelle mesure de l'épaisseur vous paraît-elle la plus précise ?

1.14 Etude d'une plume de paon

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : lame d'air, spectre cannelé.

Le paon est un oiseau de la famille des *phasianidés*, très connu pour son plumage caractéristique. Lorsque le paon fait la roue, il dévoile en effet de nombreuses structures ovales colorées qui constituent des ocelles, à la base du camouflage passif chez les animaux.

D'un point de vue physique, un ocelle de paon est remarquable par le fait que les couleurs réfléchies dépendent de l'angle d'observation et passent du vert au bleu, voire au violet selon les espèces. Cette propriété est en fait la conséquence d'interférences lumineuses en lumière blanche entre les ondes réfléchies sur la structure microscopique des plumes à différentes incidences.

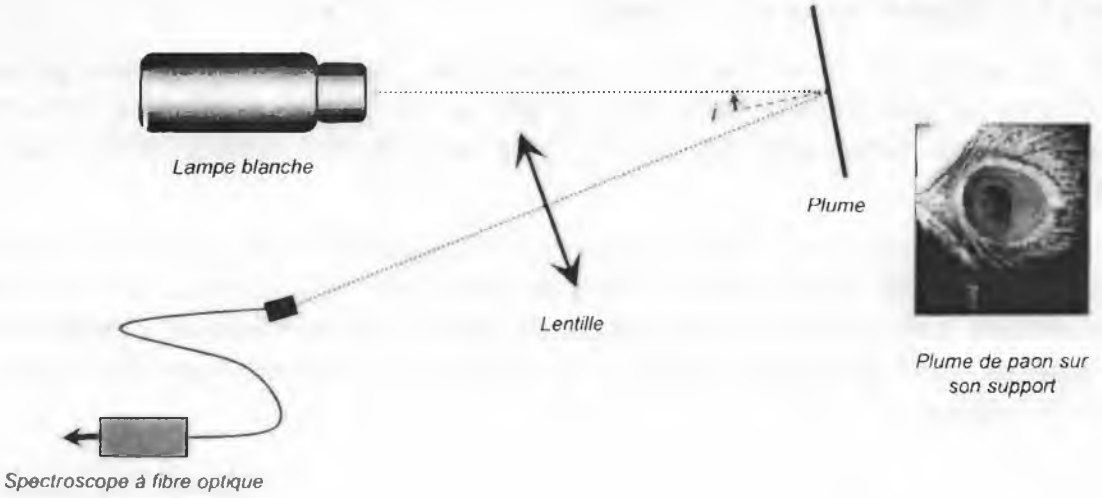
Un paon qui fait la roue

Auteur : Dan Kamminga (Licence CC)

Ocelles *de paon*

Auteur : Lightmatter (Licence CC)

On place une plume de paon sur un support optique et on l'éclaire par un faisceau de lumière blanche parallèle sous l'angle d'incidence i en réalisant le montage ci-dessous. La lentille permet de faire l'image de la plume dans le plan du capteur.

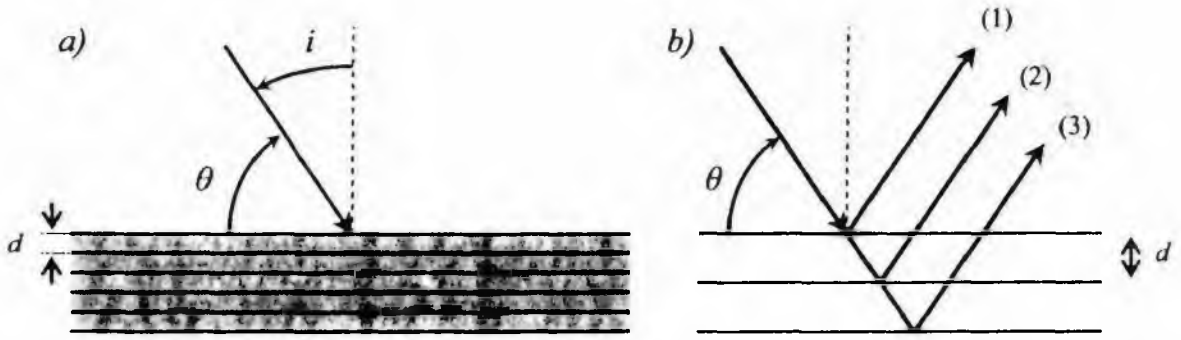


Un spectroscope à fibre optique permet d'obtenir directement le spectre de la lumière réfléchie. On a reporté à la page suivante les spectres enregistrés pour $i = 5°$ (incidence quasi-normale) et $i = 30°$.

1) En analysant les spectres obtenus, préciser la couleur de la lumière réfléchie aux angles d'incidence $i = 5°$ et $i = 30°$.

Une plume de paon est en fait constituée de fines lamelles empilées les unes sur les autres, formant un réseau tridimensionnel appelé *réseau de Bragg*.

Principe du réseau de Bragg



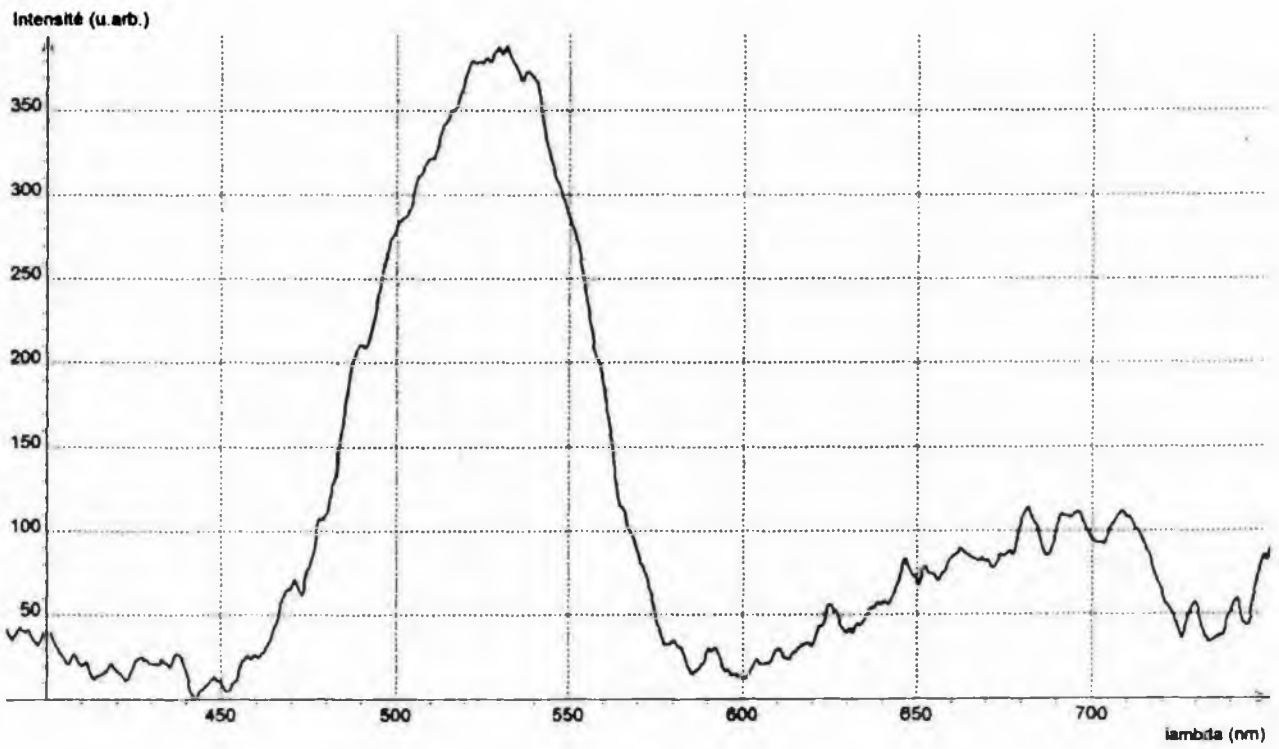
a) La plume de paon constitue un réseau de Bragg
b) Réflexions de la lumière sur les couches successives espacées de d

2) Montrer que la condition d'interférences constructives entre toutes les ondes réfléchies à la longueur d'onde λ est donnée par la loi de Bragg :

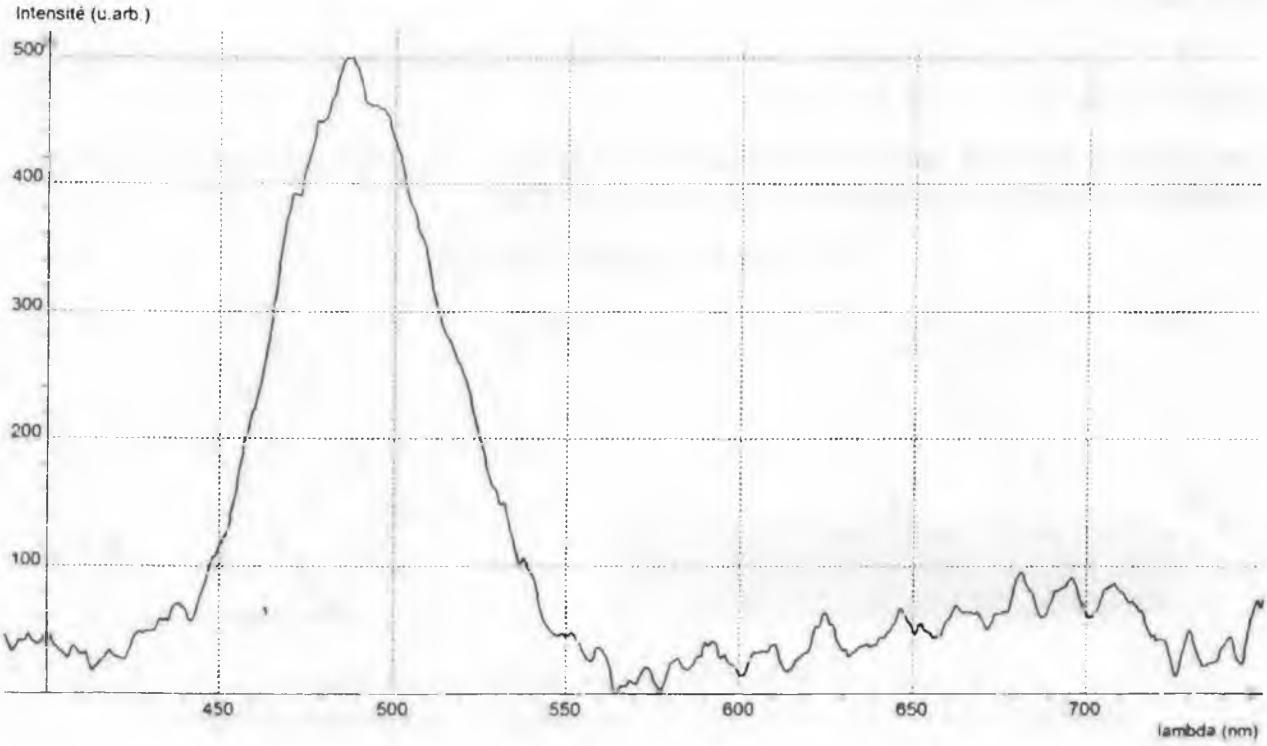
$$2d\sin\theta = p\lambda \text{ avec } p \text{ entier}$$

3) Interpréter alors les spectres obtenus. Est-il possible de déterminer numériquement la distance d entre les couches ?

Spectre de la lumière réfléchie avec un angle d'incidence de 5°



Spectre de la lumière réfléchie avec un angle d'incidence de 30°



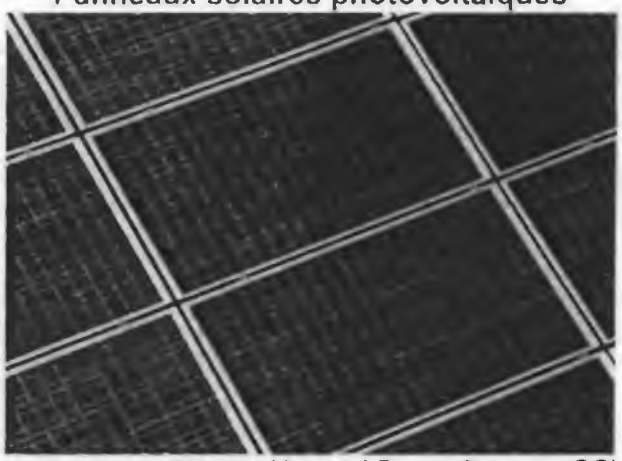
1.15 Des panneaux solaires anti-reflets

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, lumière polychromatique.

Les panneaux solaires photovoltaïques permettent de convertir l'énergie lumineuse provenant du Soleil en énergie électrique. Le rendement énergétique d'un panneau solaire va typiquement de 10 à 25 % suivant la technologie utilisée et peut être optimisé en utilisant une couche anti-reflet.

Panneaux solaires photovoltaïques



auteur : Wayne National Forest (Licence CC)

On considère une toiture équipée de panneaux solaires ayant un rendement de 20% sur une surface totale $S = 30\ \text{m}^2$. On estime que la puissance solaire surfacique maximale reçue dans cette région vaut $600\ \text{W.m}^{-2}$.

1) Evaluer la puissance électrique maximale produite par cette installation. Comment faudrait-il orienter les panneaux solaires pour optimiser cette production ?

2) Estimer l'énergie électrique produite en un an. Avec un taux de rachat de l'électricité de 0,30 €/kWh, en déduire le montant de la facture annuelle de rachat.

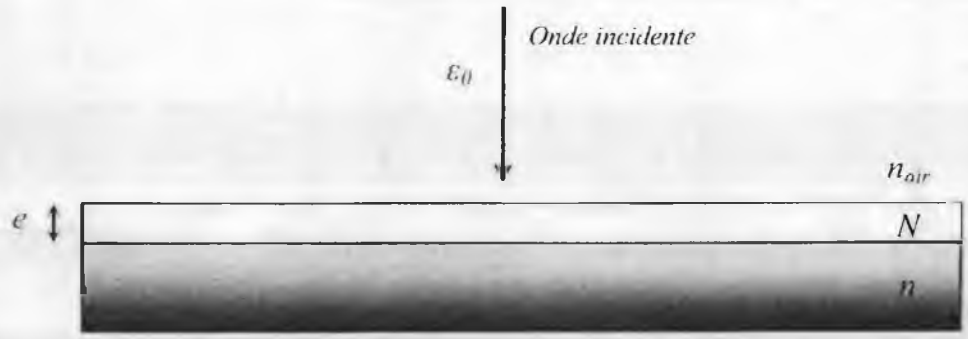
Les cellules photovoltaïques sont en réalité protégées par une plaque de verre d'indice de réfraction $n = 1{,}50$. On rappelle les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance à l'interface entre deux milieux transparents d'indices respectifs n_1 et n_2 en incidence normale :

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

3) Déterminer les pertes par réflexion à l'interface entre l'air (assimilé au vide) d'indice $n_{air} = 1$ et le verre. Commenter.

On réalise une couche anti-reflet sur la plaque de verre précédente en déposant une mince couche d'épaisseur e d'un matériau diélectrique transparent d'indice de réfraction N (compris entre n_{air} et n). Une onde incidente monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600$ nm arrive en incidence normale avec un éclairement ε_0.

Couche anti-reflet sur une plaque de verre



4) Faire un schéma faisant apparaître les ondes (1) et (2) issues de la première réflexion à chaque interface air-milieu diélectrique et milieu diélectrique-verre. On négligera l'effet des autres réflexions sur l'onde totale.

5) Déterminer la différence de marche δ entre ces ondes.

6) Exprimer l'éclairement ε_1 et ε_2 des ondes (1) et (2) en fonction de l'éclairement ε_0 de l'onde incidente et des indices n_{air}, N et n.

7) Etablir *deux* conditions permettant d'annuler l'onde totale réfléchie à la longueur d'onde λ_0. En déduire l'expression de l'indice N et de l'épaisseur e la plus faible permettant de réaliser cette couche anti-reflet. Calculer numériquement N et e. Commenter.

8) Expliquer qualitativement ce qu'il se passe si l'onde incidente n'arrive plus normalement sur les panneaux solaires.

En réalité, il faut tenir compte de toutes les longueurs d'onde contenues dans la lumière blanche incidente. Le spectre de la lumière blanche s'étend, en pulsation, entre $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$, où $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ et $\Delta\omega$ est la largeur spectrale du domaine visible. L'éclairement de l'onde totale réfléchie à la pulsation ω dans la fenêtre spectrale de largeur $d\omega$ peut alors s'écrire :

$$d\varepsilon = 2\varepsilon_{0\omega}\left(1+\cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right)\right)d\omega$$

où δ est la différence de marche et $\varepsilon_{0\omega}d\omega$ l'éclairement de chaque onde réfléchie dans la bande spectrale de largeur $d\omega$.

9) Quelle serait la couleur de la lumière réfléchie en incidence normale avec l'épaisseur e trouvée précédemment ?

10) En intégrant sur tout le domaine visible, déterminer l'éclairement total ε_r de l'onde réfléchie. On supposera que $\varepsilon_{0\omega}$ est indépendant de la pulsation.

11) Tracer l'allure de cet éclairement en fonction de l'épaisseur e de la couche diélectrique. Comment faut-il choisir l'épaisseur e pour réaliser la couche anti-reflet la plus efficace ?

12) En déduire la valeur du coefficient de réflexion minimal $R' = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}$ qu'il est possible d'obtenir avec ce traitement anti-reflet. Commenter.

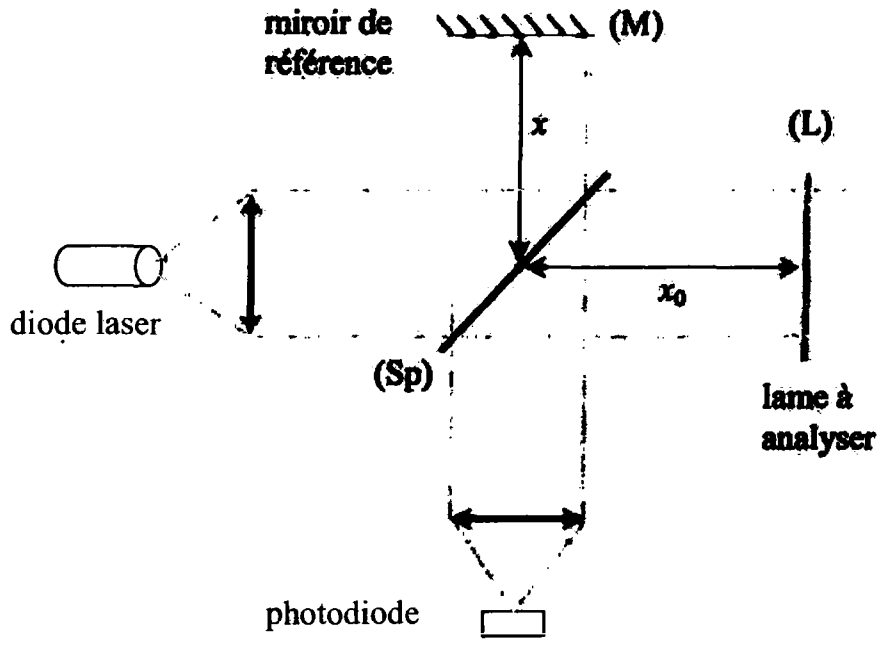
1.16 Tomographie par cohérence optique

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interféromètre de Michelson, cohérence temporelle.

La tomographie par cohérence optique (OCT : *Optical Coherence Tomography*) est un système moderne d'imagerie optique basé sur l'interférométrie en lumière peu cohérente. L'OCT est utilisé depuis les années 2000 en ophtalmologie car elle permet d'obtenir des images du fond de l'œil en trois dimensions, très utile pour détecter ou suivre certaines maladies ou dégénérescences oculaires. Ce problème propose de comprendre les principes généraux de l'OCT.

Le dispositif optique d'un OCT est analogue à un interféromètre de Michelson. Afin de faciliter sa compréhension, on raisonne dans un premier temps sur le schéma simplifié suivant.



La lame séparatrice (Sp) et le miroir (M) sont supposés parfaits. La lame à analyser (L), supposée infiniment fine, possède un coefficient de réflexion en amplitude (c'est-à-dire pour le champ scalaire associé à l'onde lumineuse) noté r. Le but est de déterminer par mesure interférométrique la valeur de r et la distance x_0 de la lame (L) au centre de (Sp). Pour cela, on utilise une diode laser polychromatique émettant de manière quasi-uniforme sur une bande spectrale en longueur d'onde de largeur $\Delta\lambda$ centrée sur λ_0, avec $\Delta\lambda << \lambda_0$. Pour les calculs, on s'attachera à utiliser le nombre d'onde σ défini par $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. Le dispositif est supposé être réglé en lame d'air.

1) Que cela signifie-t-il ? Exprimer l'ordre d'interférence p au niveau de la photodiode pour une onde monochromatique de nombre d'onde σ.

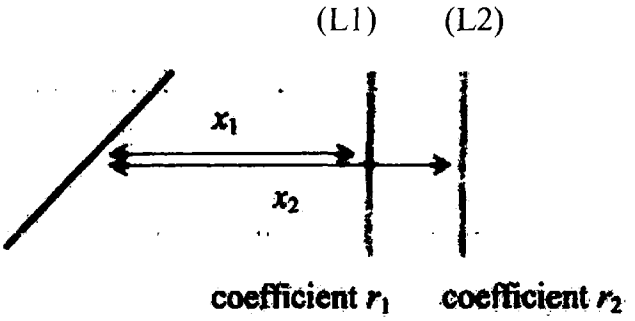
2) Exprimer la largeur spectrale en nombre d'onde $\Delta\sigma$ de la source en fonction de $\Delta\lambda$ et λ_0.

Imagerie TD-OCT :

On étudie dans un premier temps la tomographie TD-OCT (*time domain*) : le principe est de mesurer l'intensité I reçue par la photodiode en faisant varier la distance x du miroir de référence. L'alternance de franges brillantes et sombres va alors être visible uniquement sur un intervalle restreint de valeurs de x.

3) Justifier la phrase précédente et déterminer cet intervalle. Expliquer comment l'exploitation du graphe de $I(x)$ permet d'avoir accès à la valeur de x_0 et de r.

Pour comprendre comment l'OCT permet de sonder un échantillon en profondeur, on remplace la lame (L) par deux lames (L1) et (L2) non absorbantes, de positions et de coefficients de réflexion respectivement x_1 et x_2, et r_1 et r_2 tels que $r_1 << 1$ et $r_2 << 1$.



On admet le résultat suivant : dans le cas d'une interférence à N ondes monochromatiques de longueur d'onde λ_0, la formule de Fresnel se généralise par l'expression :

$$I = \sum_{n=1}^{N}\left(I_n + \sum_{m>n}^{N} 2\sqrt{I_n I_m}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{nm}\right]\right),$$

où I_n désigne l'intensité de la $n^{\text{ème}}$ onde et δ_{nm} la différence de marche entre la $n^{\text{ème}}$ onde et la $m^{\text{ème}}$ onde.

4) Expliquer pourquoi les hypothèses $r_1 << 1$ et $r_2 << 1$ permettent d'écrire la formule approchée pour l'intensité $I(x)$ reçue par la photodiode :

$$I(x) = I_M\left(1 + 2r_1V_1(x)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}2(x-x_1)\right] + 2r_2V_2(x)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}2(x-x_2)\right]\right),$$

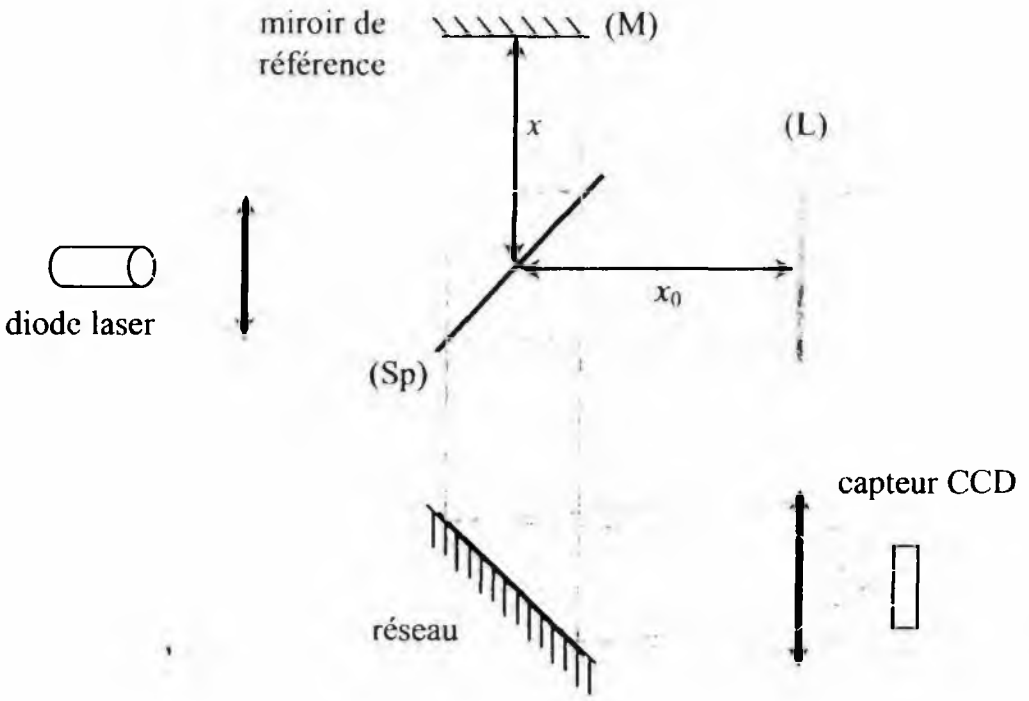
où I_M désigne l'intensité si les lames étaient absentes (miroir de référence seul) et la fonction $V_i(x)$ représente le facteur de visibilité de la lame (Li) dont on ne cherchera pas une expression analytique, mais dont on précisera les principales caractéristiques.

5) L'exploitation du graphe de $I(x)$ permet-elle de distinguer systématiquement les deux lames ? En déduire la résolution spatiale en profondeur de la méthode TD-OCT. Illustrer votre propos en dessinant l'allure des graphes $I(x)/I_M$ pour les données suivantes :

- $x_1 = 25$ µm et $r_1 = 0{,}1$ pour la lame (L1),
- $x_2 = 40$ µm et $r_1 = 0{,}05$ pour la lame (L2),
- une longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 1$ µm,
- une largeur spectrale en nombre d'onde $\Delta\sigma = 2500$ cm^{-1} d'une part, et $\Delta\sigma = 500$ cm^{-1} d'autre part.

Imagerie SD-OCT :

Depuis quelques années seulement, un nouveau procédé beaucoup plus efficace remplace la TD-OCT : il s'agit de la SD-OCT (*spectral domain*). Cette technique s'affranchit du déplacement du miroir de référence et permet ainsi une acquisition des images beaucoup plus rapide. Elle est basée sur une analyse spectrale de la lumière en sortie de l'interféromètre. Le système {lentille+photodiode} est remplacé par un analyseur de spectre constitué d'un réseau, d'une lentille et d'un capteur CCD (voir figure page suivante).



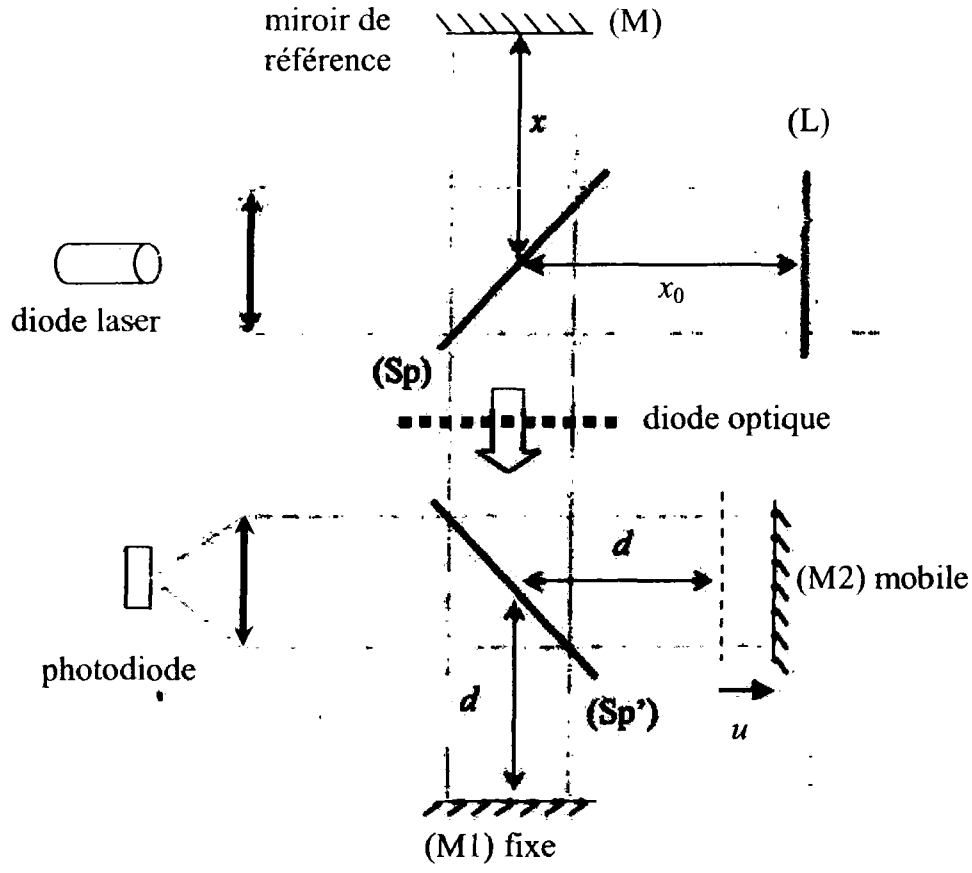
L'analyseur de spectre permet de mesurer la densité spectrale $D(\sigma)$ de la lumière définie de la façon suivante : l'intensité des ondes lumineuses monochromatiques qui la compose dont le nombre d'onde est compris dans l'intervalle $[\sigma\ ;\ \sigma+d\sigma]$ vaut $dI = D(\sigma)d\sigma$. Un ordinateur calcule alors la fonction de u suivante pour $u > 0$:

$$I_{calc}(u) = \int_{spectre} D(\sigma)\cos(4\pi u\sigma)d\sigma$$

A une translation près, la fonction $I_{calc}(u)$ est pour la SD-OCT l'analogue de la fonction $I(x)$ pour la TD-OCT. Pour le comprendre, on raisonne sur le montage fictif représenté à la page suivante. La diode optique a la propriété de ne laisser passer la lumière que dans un seul sens (ici vers le bas). Le miroir (M2) est mobile et repéré par le déplacement u par rapport au contact optique. A l'image de la TD-OCT, on mesure l'intensité I_{simul} reçue par la photodiode en faisant varier l'abscisse u du miroir (M2). On supposera dans toute la suite que $x - x_0 > 0$.

6) En distinguant les différents trajets possibles de la lumière et à l'aide d'un calcul élémentaire de chemins optiques, montrer que si $x - x_0 > \dfrac{1}{\Delta\sigma}$, la courbe $I_{simul}(u)$ possède trois zones distinctes, que l'on précisera, où des franges d'interférence sont visibles. Montrer que l'exploitation de la courbe $I_{simul}(u)$ dans la zone de plus grande valeur de u permet d'accéder aux caractéristiques de la lame (L).

7) En raisonnant uniquement sur la partie du montage située en aval de la diode optique, exprimer l'intensité $dI_{simul}(u)$ reçue par la photodiode en fonction de σ, u et $D(\sigma)d\sigma$ dans le cas où la diode optique laisse passer uniquement les ondes monochromatiques dont le nombre d'onde est compris dans l'intervalle $[\sigma\ ;\ \sigma+d\sigma]$.



8) En déduire que la fonction calculée par l'ordinateur $I_{calc}(u)$ correspond à une translation près à $I_{simul}(u)$.

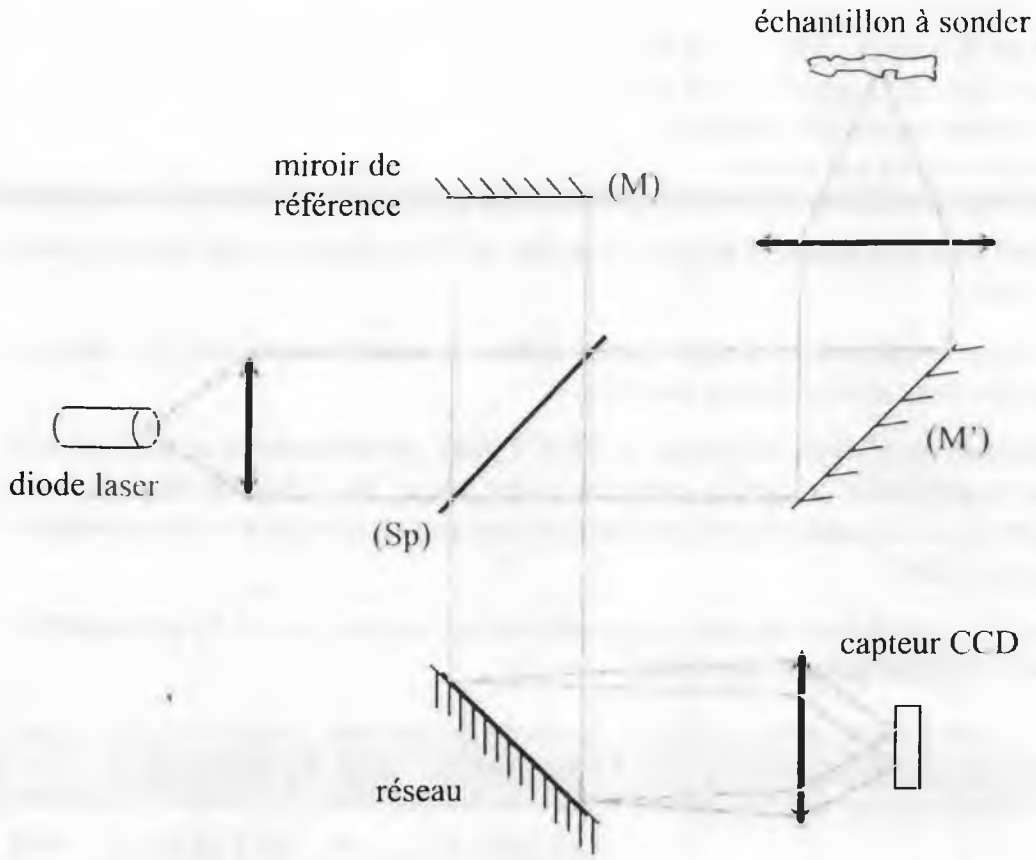
Nous venons donc de montrer qu'un traitement numérique de la densité spectrale de la lumière émergeant de l'interféromètre (méthode SD-OCT) revient à simuler le déplacement du miroir de référence, nécessaire dans la méthode TD-OCT. La puissance de calcul des ordinateurs actuels fait que le temps d'acquisition d'une image par la SD-OCT est beaucoup plus rapide (de l'ordre d'un facteur 100) que la TD-OCT, limitée par la vitesse de déplacement du miroir.

9) Dans la technique TD-OCT, indiquer ce qui fixe la profondeur sur laquelle l'échantillon est sondé.

Dans la technique SD-OCT, cette profondeur est fixée par le critère de Nyquist-Shannon. Le capteur CCD possède un nombre limité de pixels : cela entraîne que la densité spectrale est mesurée avec une résolution $\delta\sigma$. Le critère de Nyquist-Shannon indique que la fonction $I_{calc}(u)$ ne fournira des données fiables que si $\delta\sigma$ est inférieur à la moitié de la période de $f(\sigma) = \cos(4\pi u\sigma)$.

10) Exprimer dans ce cas, en fonction de $\delta\sigma$, la profondeur Δx sur laquelle l'échantillon peut être sondé avec la technique SD-OCT.

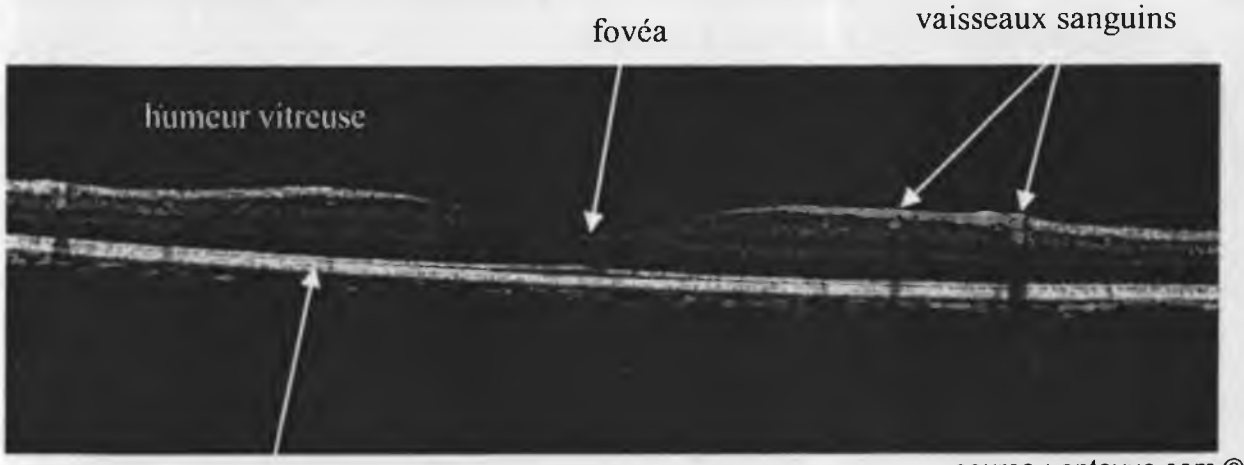
Afin d'obtenir une image en 3D de l'échantillon, il est nécessaire de focaliser le faisceau en un certain point de la surface (voir figure suivante), puis d'effectuer un balayage de ce point sur toute la surface à analyser.



11) Proposer un moyen simple d'effectuer le balayage du faisceau.

DOCUMENT : Le système i-Vue®, d'après le site internet « optovue.com »

Le fabricant OPTOVUE propose i-Vue®, un SD-OCT compact et puissant permettant de faire une imagerie 3D de la rétine, de la cornée ou du nerf optique de manière rapide et précise. A titre d'illustration, l'image ci-dessous représente une coupe de la rétine de 6 mm de largeur et d'environ 2 mm de profondeur.



source : optovue.com ©

Les principales caractéristiques du système i-Vue® sont :
- résolution en profondeur : 5 µm
- résolution transverse : 15 µm

- profondeur des scans axiaux : 2 mm
- longueur d'onde de la source : 840 +/- 10 nm
- puissance d'exposition de la pupille : 750 µW
- vitesse de 26000 scans axiaux par seconde
- de 256 à 1024 scans axiaux par coupe

12) Le patient voit-il le faisceau entrant dans son œil ? La puissance du faisceau vous paraît-elle dangereuse ?

13) Sur l'image montrant la coupe de la rétine, comment expliquer les bandes sombres situées en dessous des vaisseaux sanguins ?

14) En se basant sur l'étude théorique de l'OCT faite précédemment et sachant que l'humeur vitreuse remplissant le globe oculaire a un indice de 1,34, la résolution en profondeur affichée par le constructeur et les données concernant la source vous paraissent-elles cohérentes entre elles ?

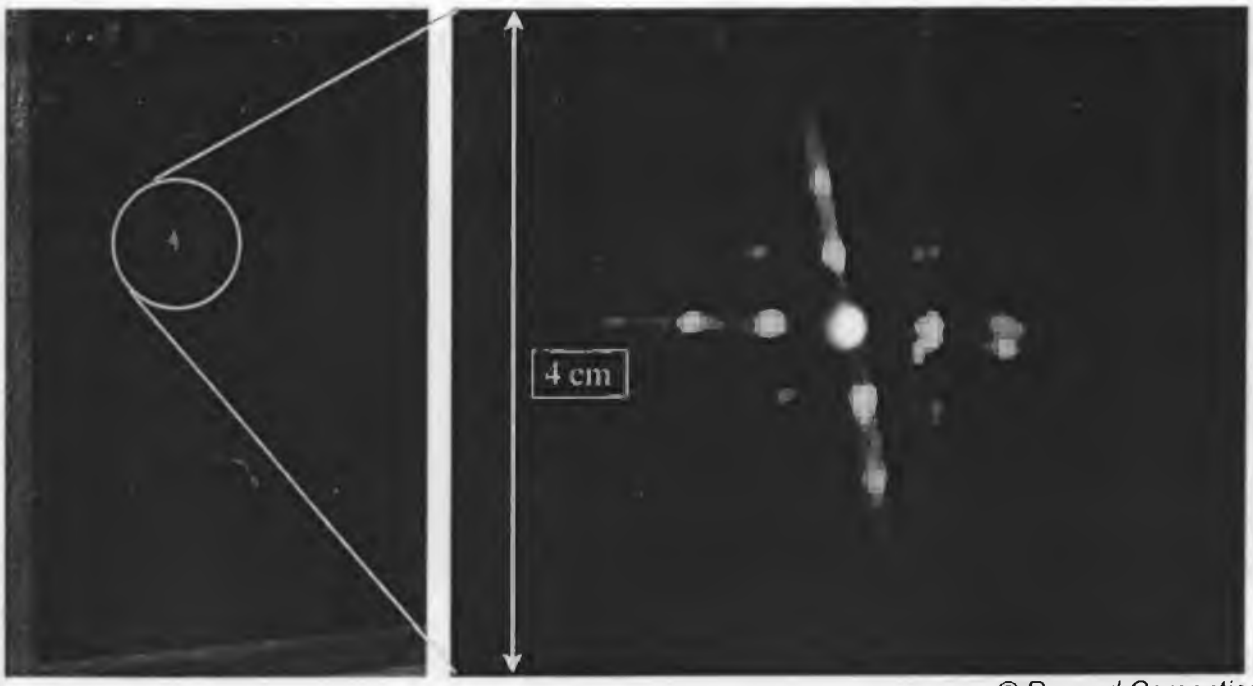
15) Indiquer la résolution minimale, exprimée en nm, que doit avoir le spectromètre de l'appareil SD-OCT décrit dans le document.

1.17 Lampadaire vu à travers un rideau

TECHNICITE : * INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : interférence à *N* ondes.

La photo ci-dessous représente la lumière d'un lampadaire (muni d'une lampe au sodium de longueur d'onde λ = 600 nm environ) situé à environ D = 500 m et vu à travers un rideau situé à L = 3 m de l'appareil photo.



© Renaud Carpentier

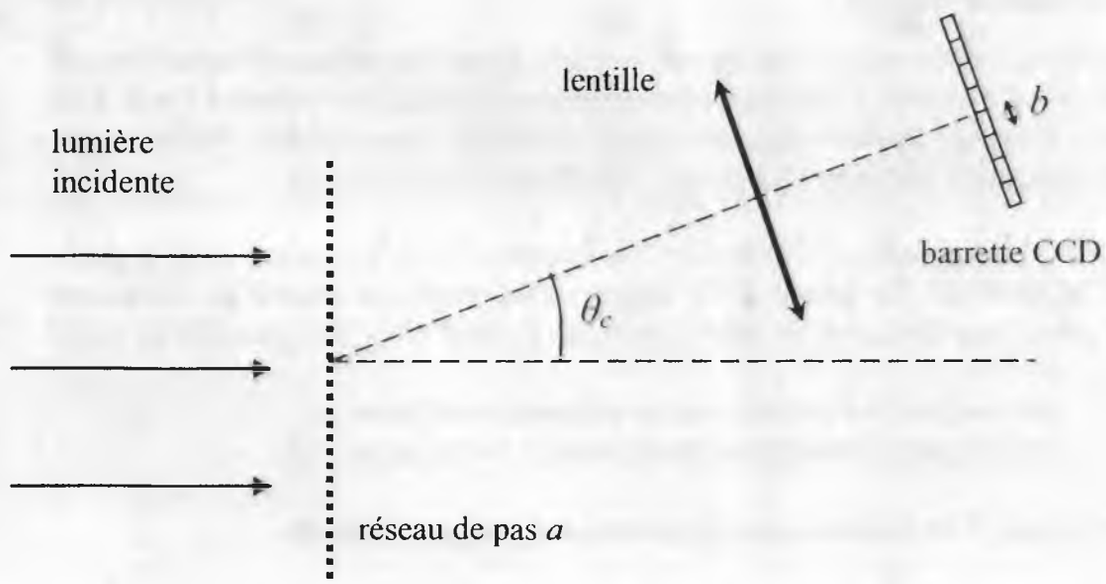
Expliquer la répartition lumineuse obtenue et déduire de la figure et des données la taille d'une maille du rideau, c'est-à-dire la distance entre deux fils de trame ou de chaîne consécutifs du tissu.

1.18 Spectromètre à réseau

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : interférence à *N* ondes, récepteurs, optique géométrique.

On étudie ici un spectromètre à réseau utilisé dans le but d'effectuer une analyse spectrale d'une lumière dont le spectre est centré sur la longueur d'onde $\lambda_0 = 840$ nm. Le spectromètre est constitué d'un réseau, d'une lentille et d'un capteur CCD. Le réseau est un réseau par transmission de largeur L, constitué d'une succession de fentes identiques équidistantes de largeur $a = 1{,}7$ µm. Pour simplifier, on suppose que la lumière éclairant le réseau arrive sous incidence normale. Le capteur CCD est formé d'une barrette de $N_p = 1024$ cellules photosensibles identiques. Chaque cellule, de largeur $b = 5$ µm, délivre une tension proportionnelle à l'intensité lumineuse qu'elle reçoit. Le capteur CCD est placé dans le plan image d'une lentille convergente de distance focale f, le centre du capteur étant positionné sur le foyer objet. Le système {lentille+barrette CCD} fait un angle θ_c avec la normale au réseau.



1) Pour une onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ, montrer que l'intensité de l'onde diffractée par le réseau est maximale pour les directions d'émergence faisant un angle θ_p par rapport à la normale au réseau tel que :

$a \sin\theta_p = p\lambda$ avec p entier relatif appelé l'ordre du faisceau.

Indiquer ici les différentes valeurs de p possibles.

2) A l'aide d'une construction de Fresnel, montrer que, de part et d'autre de la direction du faisceau d'ordre p, c'est-à-dire pour les angles d'émergence $\theta = \theta_p \pm \delta\theta_p$, l'intensité tombe à zéro. Exprimer $\delta\theta_p$ en fonction de λ, L et θ_p, sachant que $L >> a$.

Pour la suite, on considérera que, pour une onde de longueur d'onde λ, la lumière en sortie de réseau est uniquement constituée des faisceaux d'ordre p possédant une largeur angulaire $\delta\theta_p$.

L'angle θ_c est choisi pour que le faisceau d'ordre 1 de longueur d'onde λ_0 focalise au centre du capteur CCD.

3) Calculer la valeur de θ_c pour qu'il en soit ainsi.

On désire obtenir un spectromètre possédant une résolution de $\delta\lambda = 0{,}1$ nm.

4) Que cela signifie-t-il ? Calculer, en le justifiant, la valeur minimale de la focale f_{min} de la lentille d'une part, et la largeur minimale L_{min} du réseau d'autre part pour avoir une telle résolution.

5) Déterminer l'intervalle de longueur d'onde d'utilisation du spectromètre.

A titre d'illustration, un tel spectromètre à réseau trouve son utilité dans un appareil de tomographie par cohérence optique en domaine spectral (SD-OCT), dont le principe de fonctionnement est décrit dans le problème 1.16.

1.19 Les réseaux de Dammann

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

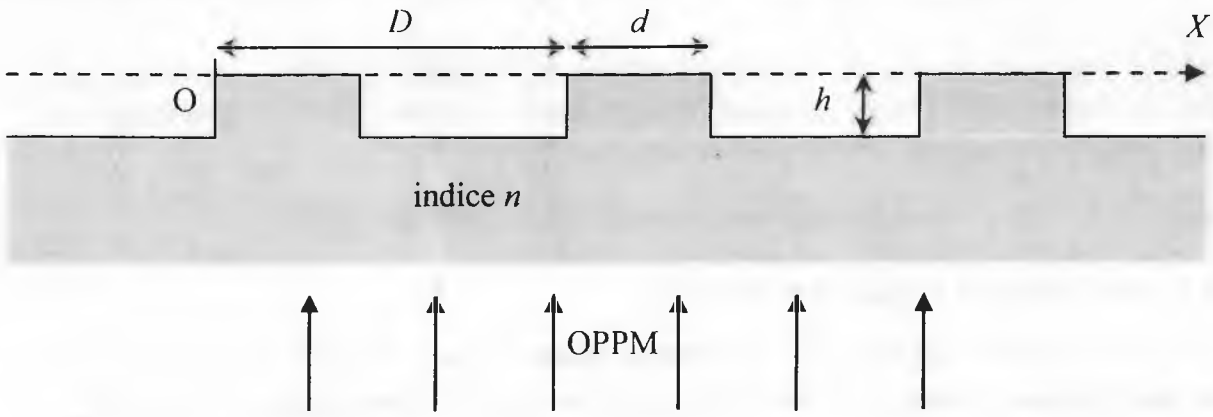
MOTS-CLES : plan de Fourier.

Dans certaines applications, on peut être amené à devoir séparer un unique faisceau laser en N faisceaux de même intensité. Cette séparation de faisceaux peut être réalisée à l'aide d'un réseau de phase. Il existe plusieurs types de réseaux possibles, ce problème s'intéresse aux réseaux les plus simples à fabriquer en pratique : les réseaux de Dammann.

Un réseau de phase est un réseau complètement transparent : il agit uniquement sur la phase de l'onde qui le traverse. En notant D la largeur d'un motif, le réseau de Dammann permettant de créer trois faisceaux de même intensité à partir d'un seul possède un motif ayant :

- une largeur D-d introduisant un déphasage uniforme φ_0.
- une largeur d introduisant un déphasage uniforme $\varphi_0 + \pi$.

Une réalisation simple d'un tel réseau est représentée sur la figure suivante.



Le réseau est éclairé par une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de longueur d'onde $\lambda << D$ arrivant en incidence normale.

1) Quelle doit être la valeur de h pour que ce réseau corresponde à un réseau de Dammann ? Faire l'application numérique pour un réseau en arséniure de Gallium (AsGa) d'indice 3,3 pour la longueur d'onde 4,6 µm (moyen infrarouge).

Dans toute la suite du problème, on choisit la convention d'une dépendance temporelle en $\exp(+i\omega t)$ des champs en notation complexe.

2) Comment s'écrit le facteur de transmission complexe $t(X)$ du réseau dans l'hypothèse où $\varphi_0 = 0$? Expliquer pourquoi cette hypothèse n'est pas restrictive.

On montre (résultat admis) que la décomposition en série de Fourier de $t(X)$ s'écrit :

$$t(X) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_K \exp\left(-iK\frac{2\pi}{D}X\right)$$

avec :

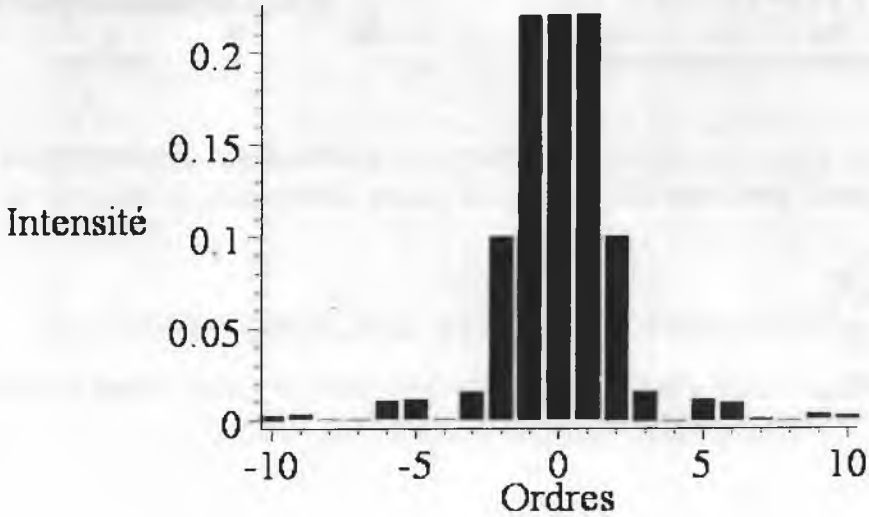
$$C_0 = 1 - 2\frac{d}{D} \quad \text{et} \quad C_K = -\frac{2}{K\pi}\sin\left(K\pi\frac{d}{D}\right)\exp\left(iK\pi\frac{d}{D}\right) \text{ pour } K \neq 0 .$$

3) Montrer que l'onde en sortie du réseau peut être décomposée en somme d'ondes planes. Pour chaque onde plane, préciser l'angle que fait sa direction de propagation par rapport à la normale au réseau. Combien y a-t-il d'ondes planes au total ?

4) Montrer qu'il existe deux valeurs possibles du rapport d/D, que l'on calculera, pour que les trois ondes planes centrales émergeant du réseau possèdent la même intensité.

5) Calculer la fraction de puissance lumineuse contenue dans ces trois ondes par rapport à l'onde incidente, fraction appelée « l'efficacité de diffraction » du réseau de Dammann.

6) Vérifier le résultat précédent à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'intensité de chaque ordre divisée par l'intensité de l'onde incidente pour une des valeurs de d/D trouvées à la question 4.



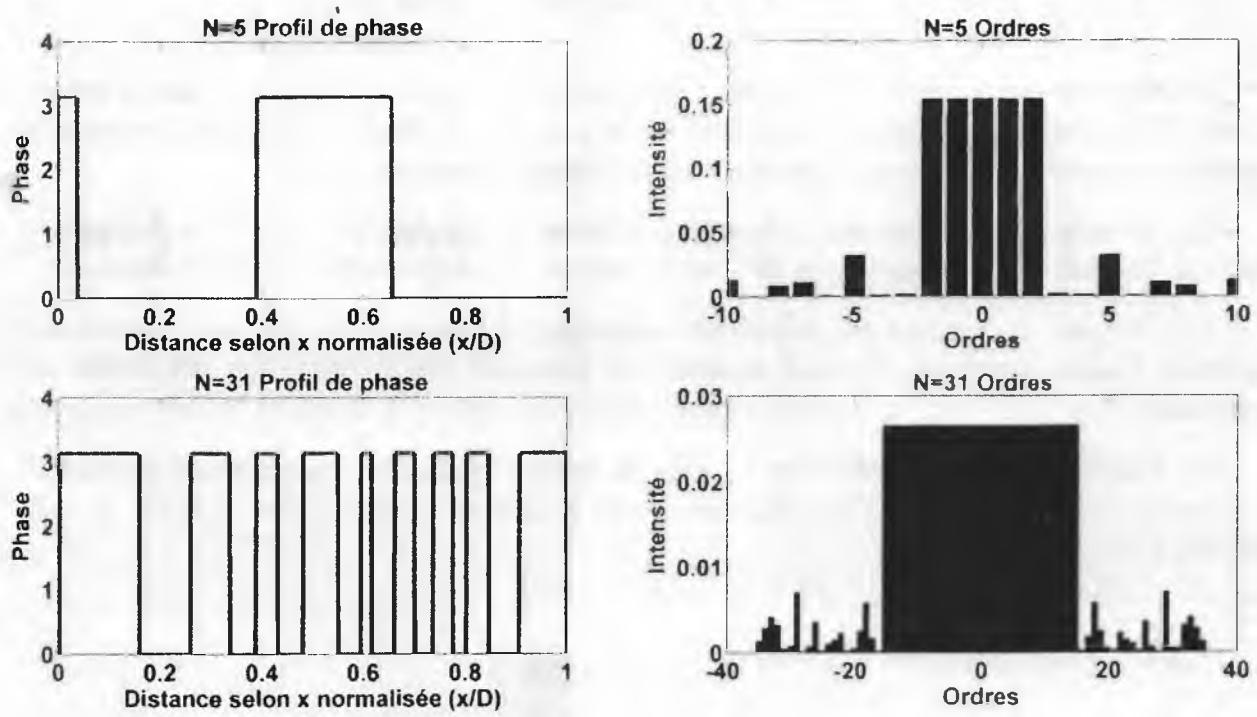
On désire fabriquer un réseau de Dammann à deux dimensions créant neuf faisceaux de même intensité à partir d'un seul.

7) En combinant deux réseaux de Dammann à une dimension, dessiner une structure possible. On pourra représenter un motif du réseau à deux dimensions de la façon suivante : surface blanche pour un déphasage de 2 φ_0 et grise pour un déphasage de 2 $\varphi_0 + \pi$.

On place derrière ce réseau une lentille convergente de focale f et l'on positionne un écran dans le plan focal image de la lentille. On considère $D >> \lambda$ pour se placer dans les conditions de Gauss.

8) Donner l'allure de la répartition d'intensité à l'écran. Pourquoi appelle-t-on le plan focal image de la lentille le « plan de Fourier » ?

On peut complexifier le motif d'un réseau de Dammann de manière à ce qu'il y ait $N > 3$ faisceaux de même intensité. A titre d'exemple, on peut voir sur les graphes suivants les cas $N = 5$ et $N = 31$, avec le profil de phase engendré par le réseau (0 ou π) sur un motif (de largeur D) ainsi que la répartition d'intensité sur les différents ordres de diffraction. Ces résultats sont tirés de la thèse de Guillaume Bloom, soutenue en février 2012.



On pourra trouver dans cette thèse de nombreuses informations, notamment la description des autres structures possibles de réseaux de phase permettant de séparer un faisceau, à l'adresse :

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/67/89/58/PDF/VD2_BLOOM_GUILLAUME_14022012.pdf

Un exemple d'utilisation de tels séparateurs de faisceaux est évoqué dans le problème 2.3.

1.20 Imagerie des exoplanètes

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : plan de Fourier, diffraction.

On appelle « exoplanète » une planète en orbite autour d'une étoile autre que le Soleil. Actuellement, la détection des exoplanètes se fait principalement par des méthodes indirectes : vélocimétrie Doppler utilisant la spectrométrie haute résolution, détection de transits par photométrie haute précision, mise à profit du phénomène de lentilles gravitationnelles… Les visualisations directes depuis la surface de la Terre sont très rares et ne concernent pas les planètes ayant des caractéristiques similaires à celles de la Terre. La première image d'exoplanète fut réalisée en 2004 par le télescope VLT (*Very Large Telescope*) de l'ESO (*European Southern Observatory*). Il s'agit de la planète 2M1207b, de taille comparable à celle de Jupiter mais cinq fois plus massive, en orbite autour d'une étoile de type naine brune, le rayon de l'orbite étant environ deux fois celui de Neptune autour du Soleil. Le système 2M1207 est situé à une distance de 230 années-lumière de notre système solaire.

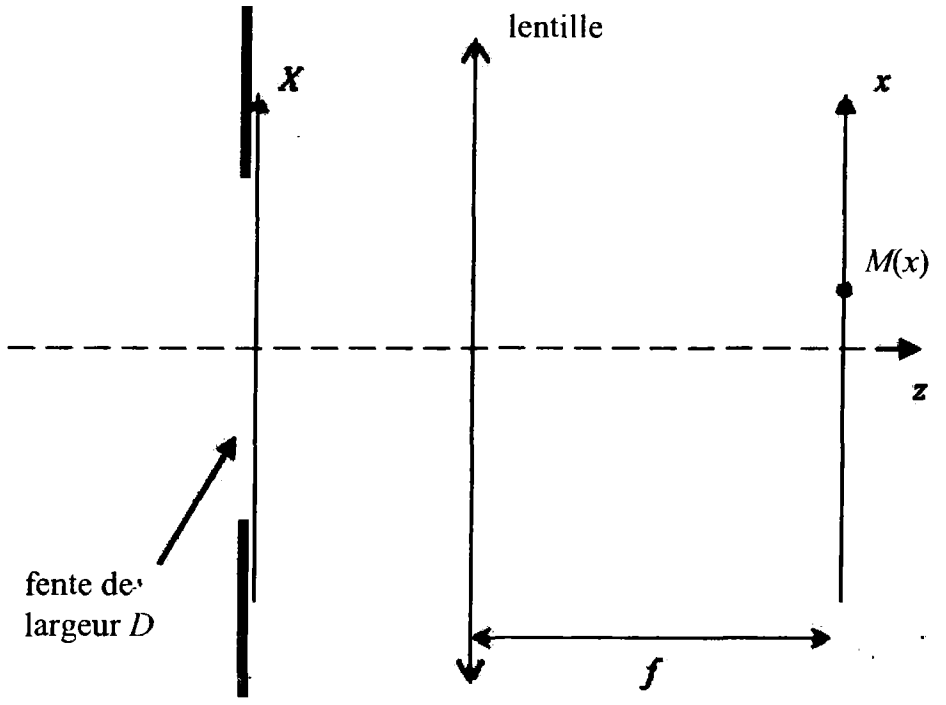
Première exoplanète vue de manière directe, en orbite autour d'une naine brune

source : ESO (licence CC)

Pour améliorer la résolution, il est avantageux d'aller dans l'espace afin de s'affranchir des turbulences atmosphériques. C'est notamment le cas du projet *Exoplanet Characterisation Observatory* (EChO) de l'agence spatiale européenne (ESA), télescope spatial dont l'envoi est prévu entre 2020 et 2022 vers le point de Lagrange L2 (voir problème 4.3). A beaucoup plus long terme, des projets futuristes visent à envoyer un ensemble de télescopes gravitant autour de la Terre. Ce problème propose d'estimer la résolution que permettrait un tel réseau de télescopes.

On peut montrer que le traitement des signaux issus de l'interférence entre les ondes reçues par un ensemble de télescopes distants de D permet d'obtenir des images avec une résolution équivalente à celle d'une lentille de diamètre D. On raisonne donc sur le montage simplifié suivant, où le faisceau est diaphragmé non pas par la lentille elle-même, mais par une fente de largeur D. Dans un premier temps, la fente est éclairée par une onde émise par

une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ située à l'infini sur l'axe optique.



1) Expliciter le facteur de transmission $t(X)$ de la fente.

La fonction $t(X)$ peut être décomposée en une somme continue de sinusoïdes complexes $\exp(-i2\pi f_X X)$ ayant chacune leur propre fréquence spatiale f_X. L'amplitude de ces sinusoïdes en fonction de f_X forme ce que l'on appelle le « spectre » de $t(X)$. Chaque sinusoïde de la décomposition de Fourier va créer une onde plane progressive harmonique (OPPH) en sortie du plan de la fente.

2) Exprimer l'angle θ que fait cette OPPH avec l'axe optique en fonction de f_x et λ en supposant que $|\theta| << 1$. Que devient cette onde ensuite ? Pourquoi le plan focal image de la lentille est-il appelé ici le « plan de Fourier » ?

On rappelle une propriété des transformées de Fourier : si la fonction $t(X)$ a une forme « simple » de largeur ΔX, alors son spectre a également une forme simple de largeur Δf_x vérifiant l'égalité approchée $\Delta X.\Delta f_x \approx 1$.

3) En déduire la largeur Δx de la tache image de la source dans le plan focal.

On considère maintenant deux points sources, toujours à l'infini, séparés d'un angle α.

4) A quelle condition sur α est-il possible de distinguer les deux images ?

5) Montrer, à l'aide d'une application numérique, qu'un ensemble de télescopes gravitant autour de la Terre pourrait permettre de distinguer les continents et les océans des exoplanètes situées dans un rayon de 100 parsecs (1 parsec = 3,3 années-lumière) autour du système solaire.

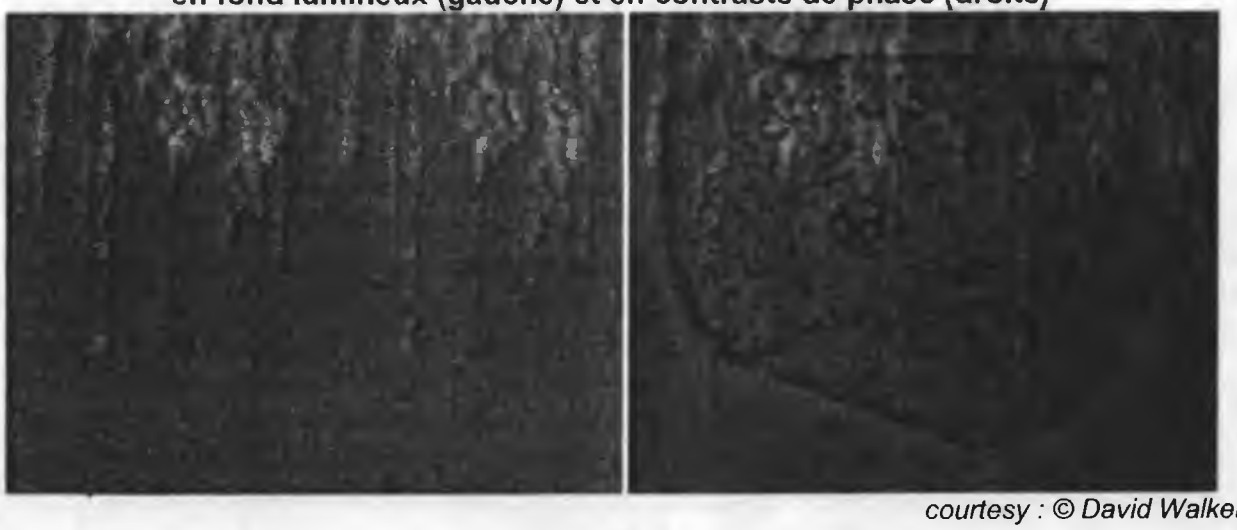
1.21 Microscopie à contraste de phase

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : plan de Fourier, filtrage spatial.

Dans le cadre d'observations en médecine ou en biologie cellulaire, de nombreuses cellules se trouvent être quasiment invisibles au microscope du fait de leur grande transparence en lumière visible. Une solution possible consiste à injecter un colorant qui va se fixer préférentiellement dans certaines parties des cellules, mais cela peut poser problème pour des cellules vivantes. En 1934, le néerlandais Zernike proposa une méthode optique permettant de traduire de très légères différences d'indices de réfraction en différences d'intensité, rendant ainsi visibles au microscope des objets transparents. Cette méthode d'imagerie par contraste de phase, qui valut à Zernike le prix Nobel en 1953, est encore très utilisée de nos jours. Ce problème propose d'en comprendre le principe. A titre d'illustration, les photos ci-dessous permettent de comparer l'image d'une cellule de 120 µm de largeur par microscopie classique (en fond lumineux) et par contraste de phase.

Cellule épithéliale humaine de la joue
en fond lumineux (gauche) et en contraste de phase (droite)

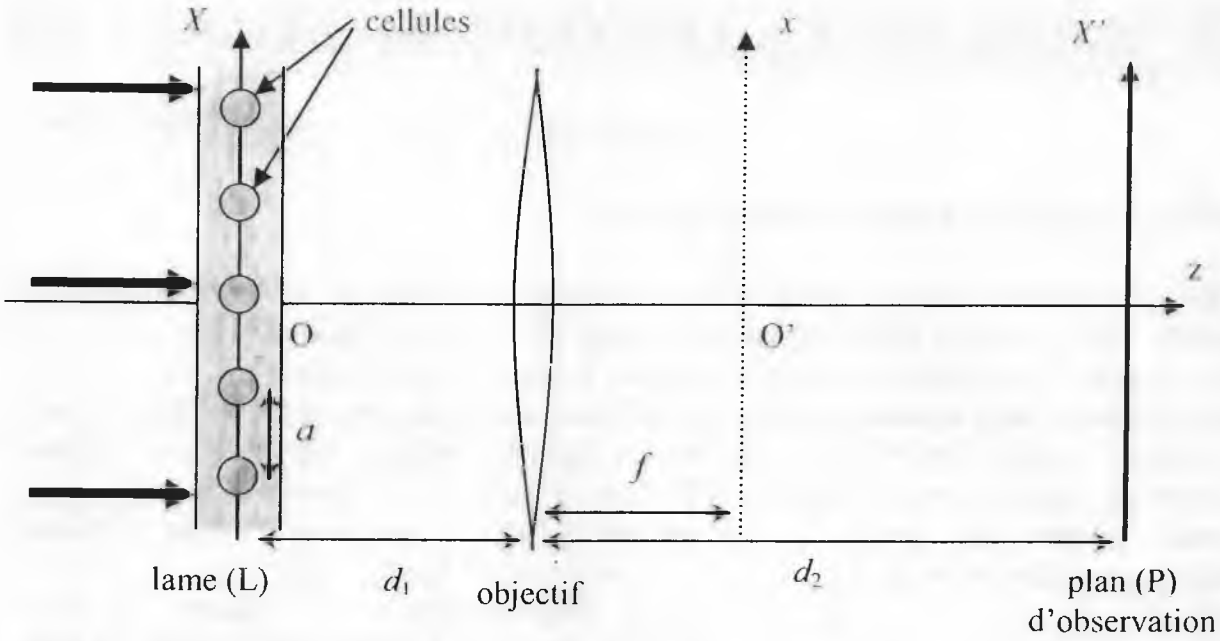


courtesy : © David Walker

On raisonne sur le montage représenté page suivante. La lame de microscope (L) contient les cellules que l'on désire observer. En pratique, dans un microscope, le plan (P) d'observation est en réalité le plan focal objet de l'oculaire, où se forme l'image intermédiaire. Cependant, pour plus de simplicité, on ne raisonne qu'avec l'objectif du microscope, assimilé à une lentille mince convergente de distance focale f. Par ailleurs, on raisonne à une seule dimension et les cellules sont supposées être réparties uniformément dans la lame selon OX, les centres de deux cellules consécutives étant distants de a. La lame (L) est éclairée par une onde plane progressive harmonique de longueur d'onde λ en incidence normale.

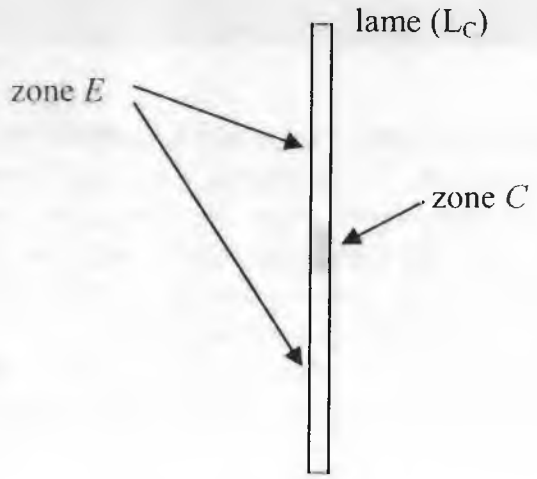
1) Indiquer les valeurs de d_1 et d_2 en fonction de f pour que l'objectif puisse produire un grandissement $\times 10$.

2) Où se situe le plan de Fourier de la lame (L) ? Décrire le plus précisément possible la répartition d'intensité dans ce plan.



Pour les calculs qui suivent, on utilise la notation complexe : à la grandeur scalaire $s(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ de l'optique, on associe l'amplitude complexe $\underline{a} = Ae^{-j\varphi}$, où φ désigne le retard de phase de l'onde. Ainsi, l'intensité lumineuse $I = K\langle s^2(t)\rangle$ s'écrit également $I = \frac{K}{2}|\underline{a}|^2 = \frac{K}{2}\underline{a}\underline{a}^*$.

Le principe de l'imagerie par contraste de phase est d'insérer dans le plan de Fourier la lame (L_C), dont la structure est représentée ci-dessous. A la traversée de la zone E, l'onde lumineuse ne subit aucun changement d'amplitude et aucun déphasage. Par contre, suite à la traversée de la zone C, l'onde subit un retard de phase algébrique ψ_C et voit son amplitude diminuer d'un facteur ε. Le facteur de transmission complexe pour la zone C vaut donc $t_C = \varepsilon e^{-j\psi_C}$.



On suppose que le facteur de transmission de la lame (L) est de la forme $t(X) = e^{-j\Delta\varphi(X)}$, où $\Delta\varphi(X)$ représente le retard de phase subi par l'onde lors de la traversée de lame (L) à l'abscisse X.

3) Sans l'insertion de la lame (L_C), les cellules sont-elles visibles dans le plan d'observation ?

Pour comprendre l'effet de l'insertion de la lame (L_C) sur l'image formée dans le plan (P), on écrit $t(X)$ sous la forme $t(X)=1+\left(e^{-j\Delta\varphi(X)}-1\right)$, le premier terme correspondant au cas où il n'y aucune cellule dans la lame (L).

4) Si ce terme était le seul présent dans $t(X)$, où serait la lumière dans le plan de Fourier de la lame (L) ?

Le deuxième terme, $e^{-j\Delta\varphi(X)}-1$, forme quant à lui tous les autres points lumineux présents dans le plan de Fourier. La lame (L_C) est placée de telle manière à ce que le point lumineux central soit dans la zone C alors que les autres points lumineux se situent dans la zone E. La lame (L_C) a donc pour effet de modifier le facteur de transmission de la lame (L) uniquement pour le premier terme « 1 » et non pour le deuxième terme $e^{-j\Delta\varphi(X)}-1$. Tout se passe comme si on visualisait dans le plan (P) l'image d'une lame fictive ayant pour facteur de transmission complexe $t'(X)=t_C+\left(e^{-j\Delta\varphi(X)}-1\right)$.

5) En supposant que $\Delta\varphi \ll \pi$ et en effectuant un développement limité au premier ordre en $\Delta\varphi$, montrer que l'intensité $I'(X)$ en sortie de cette lame fictive a pour expression :

$$I'(X)=I_0\left(\varepsilon^2+2\varepsilon\sin(\psi_C)\Delta\varphi(X)\right)$$

où I_0 représente l'intensité de l'onde incidente sur la lame.

6) Indiquer les valeurs de ψ_C qui rendent les cellules les plus visibles possibles. Expliquer l'intérêt d'atténuer la lumière dans la zone C.

7) Donner l'ordre de grandeur de $\Delta\varphi$ pour une cellule de 1 µm de diamètre éclairée par une lumière verte sachant que le cytoplasme formant l'essentiel de la cellule possède un indice de 1,37 et que l'indice du liquide physiologique dans lequel elle évolue vaut 1,34.

En microscopie, on dit que le contraste de phase est « positif » si un indice de réfraction plus élevé se traduit par un effet d'absorption. A l'inverse, il est dit « négatif » lorsqu'un indice de réfraction plus élevé entraîne une plus grande luminosité.

8) Quel paramètre de la lame (L_C) règle-t-on pour obtenir un contraste de phase positif ou négatif ?

9) Selon vous, le cliché présenté en début d'énoncé correspond-t-il à un contraste de phase positif ou négatif ?

A noter qu'en pratique, la zone C a la forme d'un anneau et permet de bloquer la lumière non diffractée venant du condenseur auquel est intégré un diaphragme annulaire.

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 1 :

10.1	Etude spectrale d'un faisceau laser
10.9	Lentille à focale commandable
10.17	Modulateur électro-optique
10.18	Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique
10.19	Expérience de complémentarité
10.21	Interférence avec des atomes ultra froids

CHAPITRE 2

LES LASERS

2.1 Principe du laser à deux niveaux d'énergie

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLEŞ : coefficients d'Einstein, amplification des ondes.

L'interaction d'un rayonnement et d'un milieu matériel est à la base de l'effet laser. Les phénomènes d'absorption, d'émission spontanée et d'émission stimulée ont été modélisés simplement par Einstein pour rendre compte de l'émission du rayonnement électromagnétique du corps noir, caractérisée par la loi de Planck. On se propose de revenir sur les points importants de cette modélisation pour expliquer l'amplification d'un faisceau de lumière par émission stimulée (ou *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation – LASER*).

Laser Hélium-Néon de laboratoire. La décharge visible dans le tube permet le pompage du milieu amplificateur et l'inversion de population à la base de l'effet laser

Auteur : David Monniaux (licence CC)

On considère un milieu constitué d'atomes à deux niveaux, d'énergies E_1 (niveau fondamental) et E_2 (niveau excité). On note N_1 et N_2 les populations d'atomes respectives des niveaux *1* et *2*. Dans un milieu à l'équilibre thermodynamique à la température T, le

rapport des populations des niveaux *2* et *1* est donné par la distribution statistique de Maxwell-Boltzmann :

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

où $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann.

En ce qui concerne les processus radiatifs d'interaction lumière-matière, lorsqu'un atome passe du niveau *1* au niveau *2* il doit *absorber* un photon d'énergie $E = h\nu = E_2 - E_1$ et pour passer du niveau *2* au niveau *1* il doit *émettre* un photon de même énergie. La relation $h\nu = E_2 - E_1$ apparaît comme une condition de résonance et de conservation de l'énergie. La constante de Planck vaut $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s et $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}.

Soit dN_2 la variation de population du niveau *2* pendant la durée *dt*.
Einstein propose en fait trois processus élémentaires d'interaction qui vont déterminer les populations des deux niveaux dans le milieu.

L'absorption
Le nombre d'atomes absorbant un photon pendant *dt* est proportionnel à la population du niveau *1* et à la densité volumique de photons d'énergie $h\nu$ dans le milieu, selon la relation :

$$dN_{2,abs} = +B.N_1.u_\nu.dt$$

L'émission spontanée
Le nombre d'atomes se désexcitant spontanément en émettant un photon est simplement proportionnel à la population du niveau excité :

$$dN_{2,sp} = -A.N_2.dt$$

L'émission stimulée
Dans le processus d'émission stimulée, un photon de fréquence ν va provoquer la désexcitation d'un atome du niveau *2*, qui va alors émettre un photon de fréquence ν à son tour. Le nombre d'atomes stimulés émettant un photon pendant *dt* est proportionnel à la population du niveau *2* et à la densité volumique de photons d'énergie $h\nu$ dans le milieu :

$$dN_{2,st} = -B.N_2.u_\nu.dt$$

A et *B* sont les *coefficients d'Einstein* et u_ν est la densité volumique spectrale d'énergie due aux photons de fréquence ν.

D'après la loi de Planck sur le rayonnement du corps noir, pour un milieu en équilibre à la température *T*, la densité volumique spectrale d'énergie s'écrit :

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

1) Evaluer le rapport des populations N_2/N_1 pour une transition optique dans le visible dans un milieu à la température ambiante $T = 293$ K. Commenter le résultat.

On considère un milieu dont on a initialement excité une partie des atomes, par une décharge électrique par exemple, et on souhaite étudier l'émission spontanée de lumière. On note $N_2(0)$ la population initiale d'atomes dans le niveau *2* et on suppose que l'on peut négliger les phénomènes d'absorption et d'émission stimulée pendant la phase de désexcitation spontanée.

2) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $N_2(t)$.

3) En déduire l'évolution $N_2(t)$ de la population dans le niveau *2*. Donner une interprétation physique du coefficient d'Einstein A et préciser son unité. Proposer une valeur numérique de A dans le cas d'une raie d'une lampe à vapeur atomique.

On suppose à présent le milieu en équilibre thermodynamique à la température T.

4) En écrivant l'équilibre des populations, déterminer une relation entre N_1, N_2, A, B et u_ν.

5) En déduire l'expression de la densité volumique spectrale d'énergie u_ν en fonction de N_1, N_2, A et B.

6) En comparant le résultat précédent à la loi de Planck, déterminer l'expression du quotient A/B.

7) En déduire une valeur numérique pour B. Préciser l'unité de B et de u_ν.

C'est en comparant ainsi son modèle à la loi de Planck qu'Einstein a prévu le phénomène d'émission stimulée !
Soit un faisceau de lumière de section S se propageant le long d'un axe Oz à la vitesse c. On appelle n le nombre de photons par unité de volume $d\tau$ possédant une fréquence comprise entre ν et $\nu + \delta\nu$.

8) Que représente la quantité $u_\nu \delta\nu d\tau$? En déduire la relation entre u_ν et n.

9) Déterminer le nombre de photons qui traversent une section S pendant dt. En déduire la puissance P du faisceau en fonction de n et des données.

10) Evaluer numériquement la densité volumique de photons n pour un faisceau de longueur d'onde 632 nm, de puissance 1 mW et de diamètre 1 mm.

Ce faisceau se propage en fait dans un milieu matériel et provoque sur son passage l'absorption et l'émission stimulée de photons d'énergie $h\nu$. Le niveau des populations N_1 et N_2 est maintenu constant par un système de pompage extérieur. On appelle n_1 et n_2 les densités volumiques de populations atomiques dans les niveaux *1* et *2*.

11) Quelles différences y-a-t-il entre les photons émis de façon spontanée et les photons issus de l'émission stimulée ? En déduire que l'on peut négliger le rôle de l'émission spontanée dans la propagation du faisceau le long de Oz.

12) Exprimer le nombre de photons qui traversent la section S d'abscisse z pendant dt en fonction de $n(z)$, S, c et dt.

13) La propagation se faisant dans le sens des z croissants, en déduire le nombre de photons qui traversent la section S d'abscisse $z + dz$. On pourra poser $B' = Bh\nu/\delta\nu$.

14) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $n(z)$, puis celle vérifiée par la puissance $P(z)$ du faisceau.

15) En déduire l'expression de $P(z)$ en fonction de la puissance $P(0)$ en $z = 0$. Montrer que le faisceau peut-être amplifié à condition de réaliser une *inversion de population* dans le milieu, qui devient alors un *milieu amplificateur*.

On utilise en pratique des techniques de *pompage* pour réaliser cette inversion de population. On montre en fait que l'inversion de population n'est possible que si les atomes possèdent au moins trois niveaux d'énergie.

Pour réaliser un laser, on place un milieu amplificateur dans une cavité constituée de deux miroirs, dont l'un est parfaitement réfléchissant et l'autre possède un coefficient de réflexion en puissance $R = 0{,}9999$.

16) Expliquer brièvement le rôle des miroirs dans la réalisation de l'effet laser. A quelle condition le faisceau laser pourra-t-il exister ? Pourquoi un des miroirs n'est-il que partiellement réfléchissant ?

17) Estimer numériquement la densité volumique de photons dans la cavité pour un faisceau de puissance de sortie 1 mW et de diamètre 1 mm. Commenter.

18) Comment explique-t-on que la puissance du laser ne diverge pas ?

19) Quels sont les paramètres qui vont définir la largeur spectrale du faisceau laser et la présence ou non de plusieurs modes d'émission ?

20) Citer quelques applications des lasers. Pourquoi un laser infrarouge ou ultraviolet est-il toujours plus dangereux qu'un laser visible ?

Un faisceau laser présente toujours un danger !

2.2 Lasers à modes bloqués

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : conditions d'oscillation, récepteurs, interférence à *N* ondes.

Les lasers à modes bloqués (*mode-locked lasers* en anglais) permettent de créer des impulsions lasers ultra-brèves, d'une durée de quelques femtosecondes. Les applications de tels lasers sont nombreuses, comme par exemple le stockage optique 3D ou la fabrication de microstructures (voir problème 1.9). Ils interviennent également dans une méthode de spectroscopie ultra-haute précision permettant de mesurer des fréquences avec une précision relative inférieure à 10^{-15}. Ces travaux sur ces « peignes de fréquences optiques » ont valu à Hänsch et Hall le Prix Nobel de Physique en 2005. Ce problème propose de comprendre ce qui se cache derrière le terme « laser à modes bloqués » et comment un tel laser peut émettre des impulsions aussi brèves.

Le grand temps de cohérence de la lumière émise par un laser est basé sur le phénomène d'émission stimulée. On peut décrire le laser comme une cavité fermée par des miroirs

hautement réfléchissants (un des miroirs étant partiellement transparent pour permettre une sortie d'une partie du faisceau). Cette cavité contient un milieu rendu amplificateur par un système dit de « pompage », permettant l'inversion de population nécessaire à l'amplification. On note L le chemin optique total parcouru par la lumière dans la cavité pour revenir au même endroit. Pour les applications numériques, on prendra $L = 3$ m.

Une onde monochromatique peut apparaître spontanément dans la cavité à deux conditions :

- le milieu doit être suffisamment amplificateur pour compenser les pertes,
- la cavité doit être résonante pour l'onde, c'est-à-dire que l'onde doit revenir au même endroit avec la même phase à un multiple de 2π près.

1) Rappeler ce que signifie le terme « émission stimulée ». Quel autre type d'émission existe-t-il ? Expliquer en quoi ces deux types d'émission sont liés au temps de cohérence de la lumière émise.

2) Qu'appelle-t-on « inversion de population » ? Pourquoi est-elle nécessaire pour l'amplification des ondes dans la cavité ? Pourquoi un pompage doit-il avoir lieu ?

3) Montrer que les fréquences pouvant apparaître (appelées les « modes longitudinaux » de la cavité) forment un « peigne », avec un écart $\delta\nu$ entre deux fréquences consécutives que l'on calculera.

On suppose que le laser est en fonctionnement « bimode » : deux ondes sont présentes dans la cavité, de fréquences ν_0 et $\nu_0 + \delta\nu$, avec $\nu_0 = 5.10^{14}$ Hz.

4) Avec le minimum de calcul, décrire le signal délivré par un photodétecteur illuminé par le faisceau émergeant du laser, dans le cas :

- d'une photodiode rapide, de temps de réponse $\tau_1 = 1$ ns,
- d'une photorésistance, de temps de réponse $\tau_2 = 10$ ms.

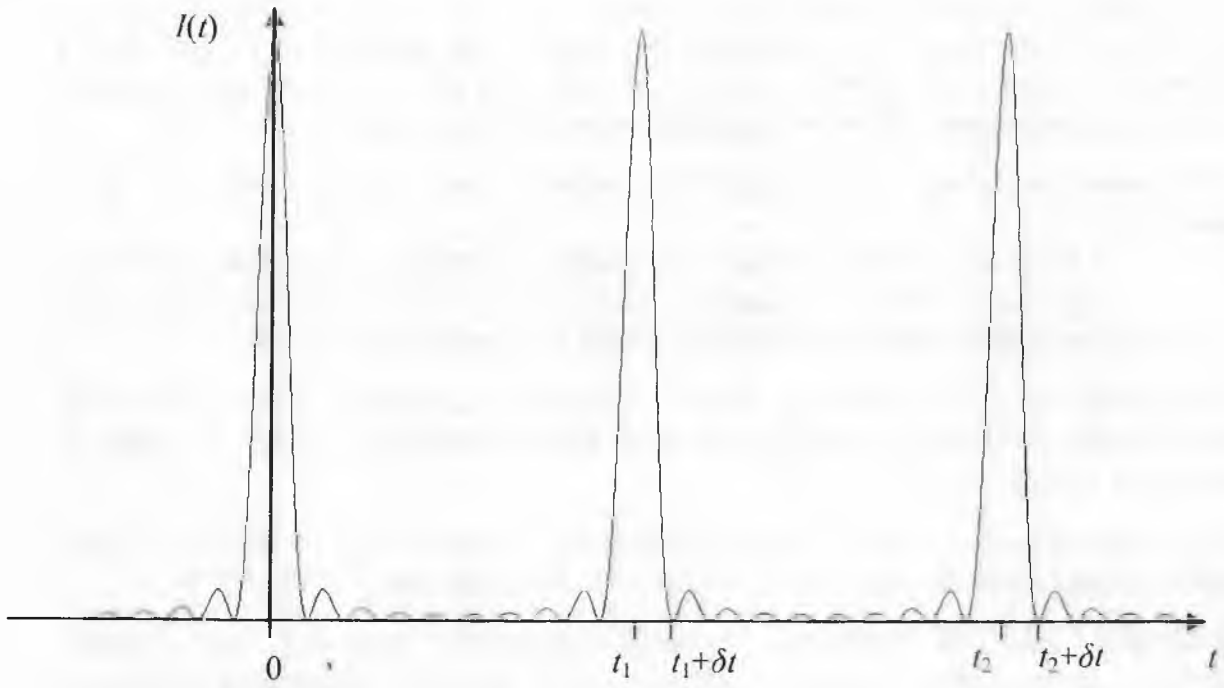
Le laser est maintenant « multimode », avec N modes consécutifs, avec $N >> 1$. Cela est techniquement possible avec un milieu amplificateur solide, comme c'est le cas pour un laser titane-saphir, qui émet toutes les longueurs d'ondes s'échelonnant de $\lambda_1 = 650$ nm à $\lambda_2 = 950$ nm.

5) Calculer le nombre de modes N d'un tel laser.

A l'aide de différentes techniques, il est possible de synchroniser tous les modes entre eux : le laser est en fonctionnement « à modes bloqués » (*mode-locked*). On force les phases des différents modes à être toutes égales à zéro en un point P de la cavité à une date fixée comme origine des temps. En supposant que les modes ont tous la même amplitude, il est alors possible de calculer l'intensité I au point P en fonction du temps. Le graphe $I(t)$ a l'allure page suivante pour $N = 10$.

6) Justifier que le champ scalaire de l'onde présente dans la cavité s'écrit au point P et en notation complexe :

$$\underline{s}(t) = A\exp\left(i2\pi\nu_m t\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\exp\left(2\pi(n-1)\delta\nu t\right)\right)$$



7) A l'aide d'une construction de Fresnel, montrer que l'intensité est maximale pour les temps $t_n = n\Delta t$, avec n entier relatif. Donner l'expression de Δt et sa valeur numérique. A quoi correspond concrètement la durée Δt entre deux impulsions ?

8) Etablir l'expression de δt, la demi-largeur temporelle des impulsions (voir graphe). Calculer la durée des impulsions dans le cas du laser titane-saphir.

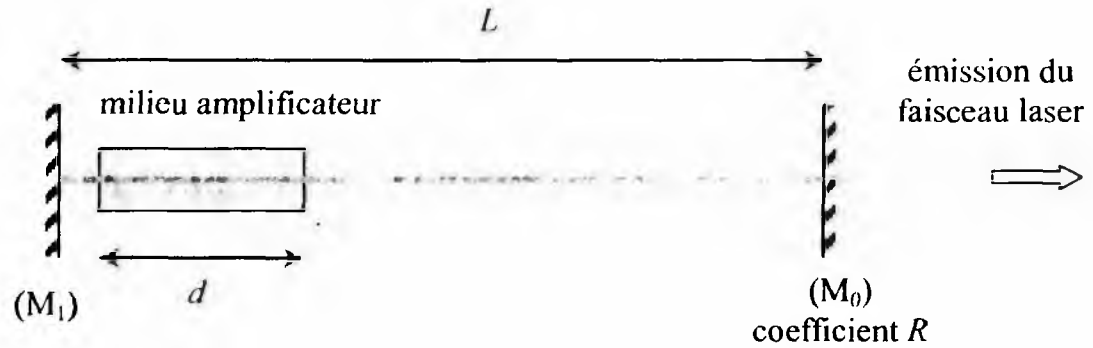
2.3 Combinaison cohérente de lasers

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : conditions d'oscillation, interféromètre de Michelson.

De nombreuses applications exigent des faisceaux lasers de grande puissance. Chaque technologie de sources lasers ayant ses propres limites, un moyen de produire un faisceau de très grande puissance tout en ayant de bonnes qualités spectrale et spatiale consiste à former une combinaison cohérente d'une grande quantité de lasers en parallèle. Ce problème propose d'en expliquer le principe en combinant de manière cohérente deux lasers.

On considère pour commencer une cavité laser représentée sur la figure ci-après et ayant les caractéristiques suivantes : miroir (M_1) parfait, miroir (M_0) possédant un coefficient de réflexion en intensité R, longueur entre les deux miroirs notée L, longueur du milieu amplificateur notée d. Lorsque l'onde lumineuse se propage dans le milieu amplificateur, son intensité augmente en valeur relative de la quantité gdx pour un déplacement infinitésimal dx de l'onde, où g est appelé le gain linéique du milieu amplificateur, dépendant fortement de la longueur d'onde. Afin de simplifier les calculs, on suppose les différents indices égaux à l'unité.



1) Montrer qu'une onde traversant une fois le milieu amplificateur voit son intensité entre l'entrée et la sortie multipliée par le facteur $\exp(gd)$.

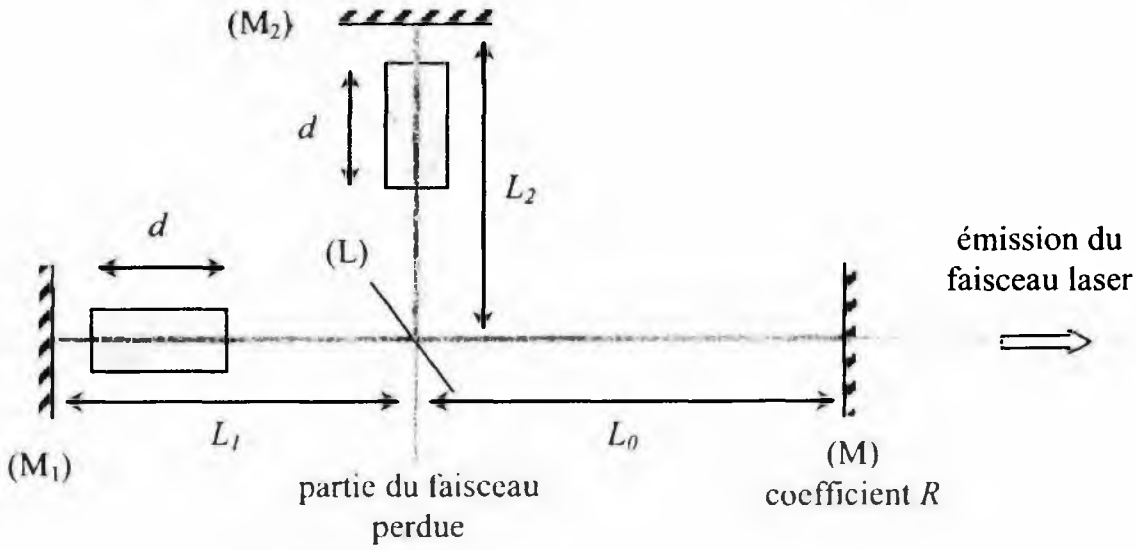
2) Ecrire les deux conditions d'apparition des oscillations à la longueur d'onde λ à l'intérieur de la cavité : condition d'amplification et condition de résonance. Quel paramètre va limiter la puissance fournie par le laser ? Expliquer en quelques mots pourquoi.

Le milieu amplificateur possède une longueur $d = 3$ mm et un gain linéique constant sur un intervalle (appelé bande de gain) de largeur $B = 0{,}1$ µm autour de la longueur d'onde $\lambda_0 = 4{,}5$ µm (moyen infra-rouge). On suppose par ailleurs le gain linéique nul en dehors de cet intervalle. La cavité possède une longueur $L = 0{,}5$ m et le coefficient de réflexion du miroir (M) vaut $R = 0{,}3$.

3) Combien de modes longitudinaux (chacun ayant sa propre longueur d'onde) peuvent coexister dans la cavité ?

4) Que doit valoir le gain linéique minimal (exprimé en cm^{-1}) pour obtenir le démarrage des oscillations ?

On étudie maintenant la combinaison cohérente de deux lasers par une cavité de type Michelson, représentée sur la figure suivante. (L) est une lame séparatrice parfaite, ayant un coefficient de réflexion et de transmission en intensité de 50% et n'apportant pas de déphasage pour les faisceaux restant dans la double cavité. On suppose que les milieux amplificateurs sont identiques (longueur d et gain linéique g) et que les miroirs (M_1) et (M_2) sont parfaits. Par contre, les deux bras ont des longueurs L_1 et L_2 différentes.



5) Montrer que la condition d'amplification s'écrit maintenant $R\eta\exp(2gd) > 1$, avec $\eta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(L_2 - L_1)\right)\right)$.

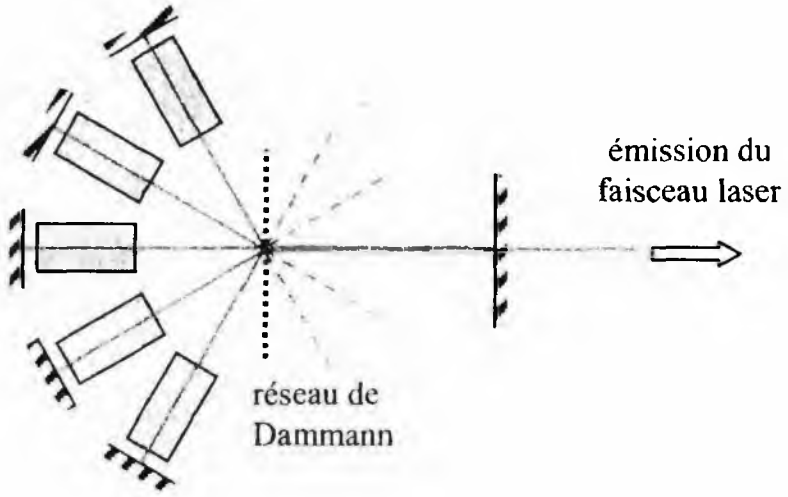
Le coefficient η, compris entre 0 et 1, s'appelle « l'efficacité de combinaison ». On montre par ailleurs que la condition de résonance est la même que celle établie à la question 2 en remplaçant L par la longueur moyenne de la double cavité $L_{moy} = L_0 + \frac{L_1 + L_2}{2}$.

Les longueurs optiques des deux bras de la cavité varient au cours du temps de manière indépendante du fait, par exemple, des variations d'indice, des dilatations à l'intérieur des milieux à gain ou encore du fait des vibrations des miroirs ou des dilatations des supports. Ces fluctuations non contrôlées de L_1 et L_2 modifient l'efficacité de combinaison, empêchant le laser de fonctionner si la condition d'amplification n'est plus vérifiée.

6) Justifier le problème qu'induisent ces fluctuations en quantifiant la sensibilité de l'efficacité de combinaison vis-à-vis des variations de L_1 et L_2.

7) Montrer que, malgré ces variations, il existe toujours une longueur d'onde située dans la bande de gain permettant l'oscillation laser si la différence $|L_2 - L_1|$ est supérieure à une valeur seuil que l'on exprimera en fonction de λ_0 et B. Faire l'application numérique correspondante.

On peut généraliser le procédé pour obtenir la combinaison de N lasers en remplaçant la lame séparatrice par un élément combineur (voir figure suivante). Cet élément doit permettre la combinaison des faisceaux dans un sens et la séparation du faisceau dans l'autre sens. Une technologie possible consiste à utiliser des réseaux de Dammann (voir problème 1.19).



Les lecteurs intéressés sont invités à consulter la thèse de Guillaume Bloom, soutenue en février 2012, intitulée « combinaison cohérente de lasers à cascade quantique », à l'adresse :

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/67/89/58/PDF/VD2_BLOOM_GUILLAUME_14022012.pdf

2.4 Les faisceaux de Bessel partie 3

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : faisceau gaussien, diffraction.

Nous avons vu dans la partie 2 que les faisceaux de Bessel pouvaient avoir une largeur à mi-hauteur de l'ordre de la longueur d'onde λ tout en se propageant sans diffracter sur une distance très grande devant λ. Cette propriété est tout à fait remarquable car généralement, les faisceaux laser ayant un diamètre initial de l'ordre de λ subissent une diffraction très rapide et très prononcée. Cet exercice propose d'illustrer ce phénomène avec l'exemple des faisceaux gaussiens.

On considère un faisceau de profil gaussien se déplaçant selon l'axe Oz vers les z croissants. En prenant $z = 0$ le plan dans lequel la largeur du faisceau est minimale, on montre que l'intensité du faisceau vaut, en notant r la distance à l'axe optique :

$$I(r,z) = \frac{I_0}{1+\frac{z^2}{z_R^2}} \exp\left(-\frac{2r^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{z_R^2}\right)}\right)$$

où $z_R = \frac{\pi a^2}{\lambda}$, grandeur appelée la longueur de Rayleigh.

1) Tracer sur un même graphique l'allure de $I(r,z)$ en fonction de r pour $z = 0$, $z = z_R$ et $z = 3z_R$.

2) Calculer la largeur à mi-hauteur $d(z)$ du faisceau gaussien à l'abscisse z en fonction de celle en $z = 0$, notée d_0, et de z_R. Tracer l'allure de $d(z)$.

3) En se limitant à la zone $z > 0$, montrer que le faisceau gaussien peut être représenté par un faisceau cylindrique dans une certaine zone et par un faisceau conique dans une autre zone. Indiquer l'ouverture angulaire à mi-hauteur du faisceau divergent. Que retrouve-t-on ?

On désire focaliser un faisceau gaussien très peu divergent à l'aide d'une lentille.

4) Expliquer pourquoi il est impossible de le focaliser sur une section de dimension inférieure à la longueur d'onde en ordre de grandeur.

Un faisceau gaussien de longueur d'onde 800 nm possède une largeur à mi-hauteur minimale égale à 2 µm.

5) Jusqu'à quelle distance sa largeur varie-t-elle de moins de 50 % ? Comparer au cas du faisceau de Bessel étudié dans le problème 1.9.

2.5 Capacité des disques optiques

TECHNICITE : * INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : forme d'un faisceau, diffraction.

Ce problème propose de mettre en évidence les caractéristiques de trois types de disques optiques expliquant en partie leur différence de capacité de stockage.

Pour l'analyse et l'exploitation des documents, il est nécessaire d'établir un résultat préliminaire. On considère une onde plane progressive monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0, en incidence normale sur une lentille convergente de diamètre $D >> \lambda_0$ et de focale $f >> D$. On assimile l'air à du vide.

1) Dessiner l'allure du faisceau après la traversée de la lentille. Indiquer où se situe approximativement la section minimale du faisceau. Etablir, en le justifiant soigneusement, une formule approchée donnant le diamètre minimal d du faisceau en fonction de λ_0 et α, défini comme le demi-angle sous lequel est vue la lentille depuis son foyer objet.

Le résultat établi à la question précédente est valable uniquement dans les conditions de Gauss. Si D est de l'ordre de f, un calcul complexe permet de donner l'expression exacte du diamètre minimal du faisceau :

$$d = \frac{1{,}22\lambda_0}{2\sin\alpha}$$

2) Cette formule est-elle compatible avec celle obtenue précédemment ?

3) A l'aide des documents fournis, étudier si l'augmentation de la capacité de stockage des différentes générations de disques optiques (du CD au DVD, puis du DVD au Blu-ray) peut être exclusivement attribuée ou non à l'amélioration de deux caractéristiques propres au système de lecture des disques.

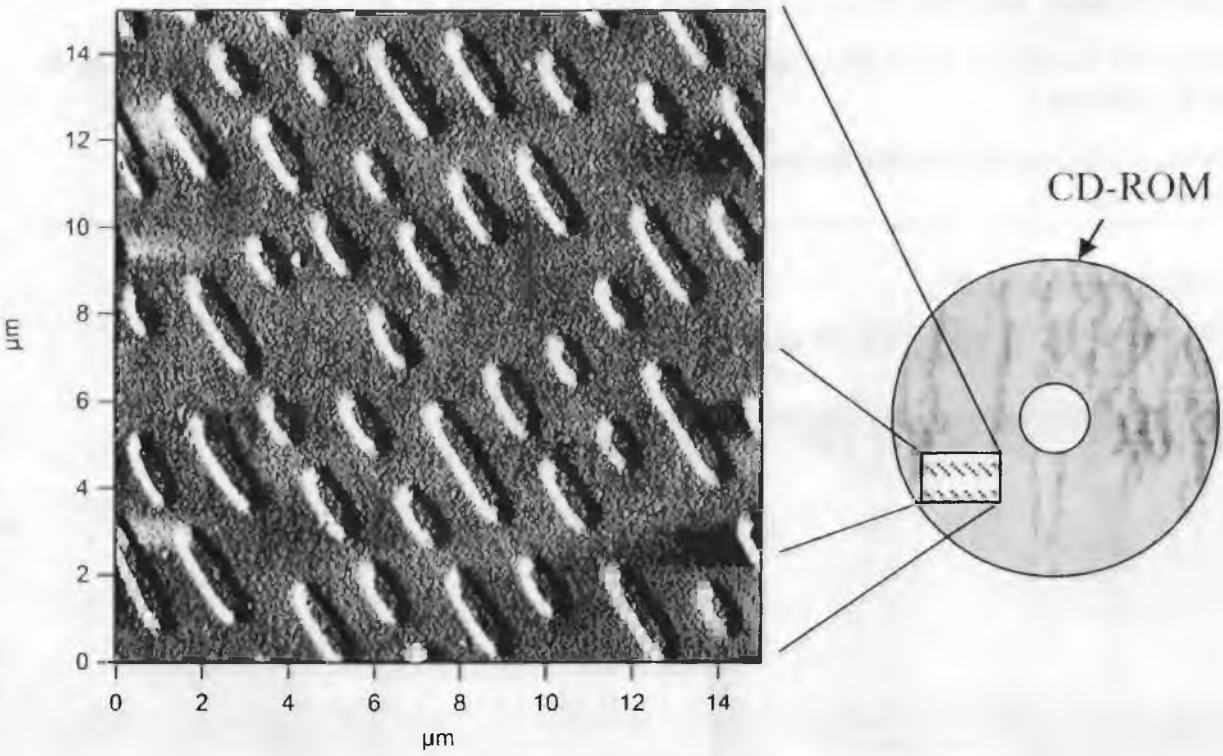
DOCUMENT n°1 : Ouverture numérique d'un système optique

L'ouverture numérique est un paramètre propre à un système optique centré. En dehors des conditions de Gauss, un système optique est généralement conçu pour être stigmatique pour un couple de points situés sur l'axe optique, un des points, noté P, se situant à proximité de la première lentille du système. On définit alors l'ouverture numérique comme le produit $n\sin\theta$, où n désigne l'indice du milieu d'observation qui entoure le point P et θ l'angle entre l'axe optique et les rayons partant du point P et passant par les bords de la première lentille du système.

DOCUMENT n°2 : Les disques optiques

Les disques optiques sont actuellement très répandus et largement utilisés pour le stockage de données. Les versions ayant eu le plus de succès sont dans l'ordre chronologique le Compact Disc (CD) lancé en 1982, le Digital Versatile Disc (DVD) lancé en 1995 et le Blu-ray Disc (BD) lancé en 2003.

Dans le cas de disques pressés, les trois technologies que sont le CD, le DVD et le Blu-ray reposent sur le même principe : on crée sur le disque une piste en spirale sur laquelle on creuse des alvéoles qui vont coder le signal. L'image ci-dessous, prise au microscope à force atomique, donne l'allure de ces alvéoles pour un CD-ROM.



Auteur : freiermensch (licence CC)

La lecture des informations présentes sur le disque s'effectue à l'aide d'un faisceau laser émis par une diode laser et focalisé par une lentille sur la surface où sont inscrites les alvéoles. Un système mécanique fait tourner le disque de manière à ce que les alvéoles défilent dans la zone où focalise le faisceau. Le tableau ci-dessous rassemble les deux principales caractéristiques du système de lecture des disques optiques : la longueur d'onde de la diode laser et l'ouverture numérique de la lentille de focalisation.

type de disque	CD	DVD	Blu-Ray
$\lambda_{\text{diode laser}}$	780 nm	635 nm	405 nm
ouverture numérique	0,45	0,60	0,85

Les disques optiques possèdent chacun leur propre capacité de stockage. Au sein de chaque type de disque, il existe plusieurs formats. Le tableau suivant précise la capacité de stockage des trois grands types de disques optiques (simple couche), ainsi que la distance

séparant deux lignes d'alvéoles consécutives. Les chiffres affichés correspondent à des disques de 12 cm de diamètre, les données étant stockées entre les diamètres 44 mm et 116 mm.

type de disque	CD	DVD	Blu-Ray
capacité de stockage	0,74 Go	4,7 Go	25 Go
distances entre lignes	1,5 µm	0,74 µm	0,32 µm

On pourra trouver dans la référence suivante des détails concernant les capacités de stockage des disques optiques :

« Etude comparée d'un CD, d'un DVD et d'un Blu-ray », de CARPENTIER R. et GUILLOT T. Bull. Un. Prof. Phys. Chim., mai 2011, vol. 105, n° 934, pp. 591-626.

Cet article est visible en accès libre sur le site de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie à l'adresse :

http://www.udppc.asso.fr/bupdoc/index.php

Pour préparer les concours,

PROBLEME MULTICHAPITRES associé au CHAPITRE 2 :

10.1	Etude spectrale d'un faisceau laser

CHAPITRE 3

THERMODYNAMIQUE

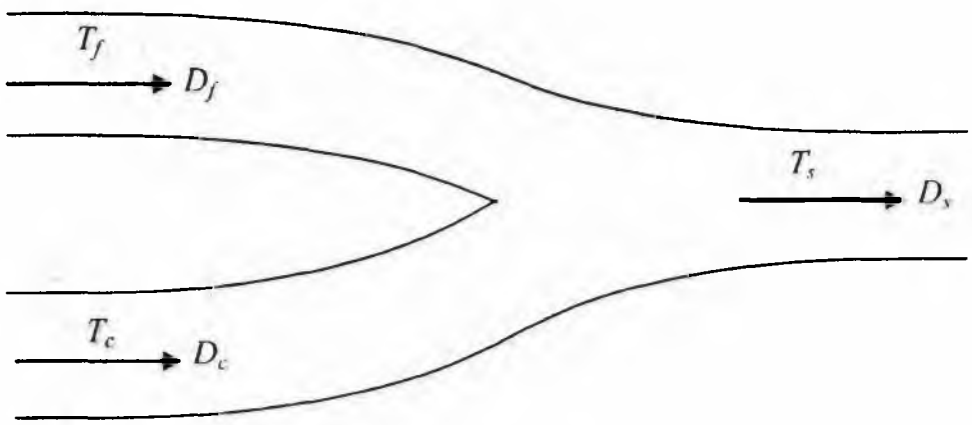
3.1 Principe d'un mitigeur

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : système ouvert.

Un mitigeur est un mélangeur permettant d'obtenir en sortie un débit et une température réglables à l'aide de deux arrivées d'eau : une arrivée d'eau froide et une arrivée d'eau chaude. Ce problème propose de comprendre l'avantage principal des mitigeurs thermostatiques sur les mitigeurs mécaniques.

On considère un mélangeur alimenté par deux canalisations d'eau : une canalisation d'eau à la température T_f avec un débit massique D_f et une autre de température T_c avec un débit massique D_c. On note D_s et T_s respectivement le débit et la température de l'eau en sortie du mitigeur. On fait l'hypothèse que le mitigeur est calorifugé et l'on raisonne en régime stationnaire.



1) En effectuant un bilan de masse, exprimer D_s en fonction de D_c et D_f.

2) A partir du premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé que l'on précisera et en supposant que la capacité calorifique massique à pression constante c_p ne dépend pas de la température, exprimer T_s en fonction de D_c, D_f, T_c et T_f.

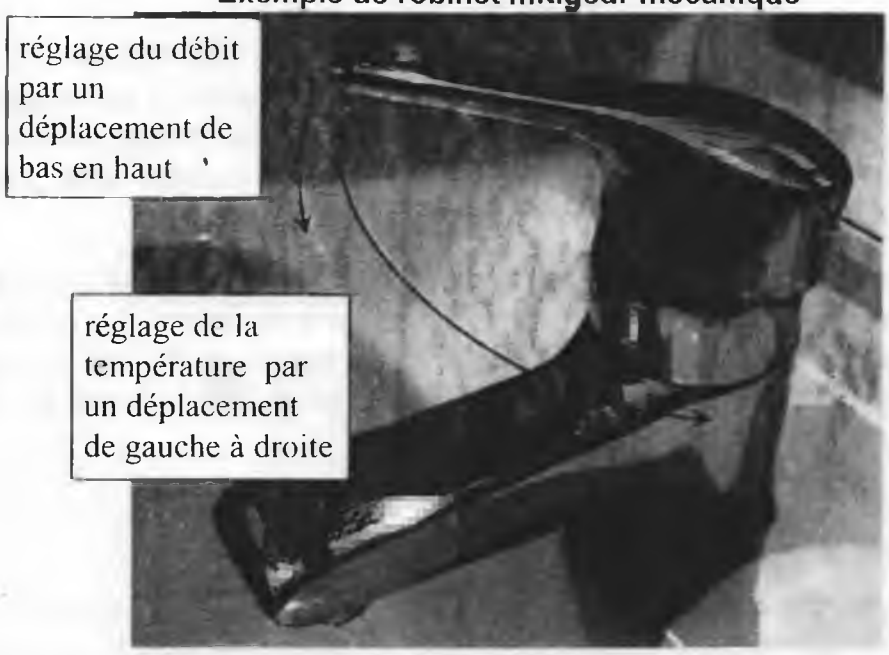
Dans une maison individuelle où le système de production d'eau chaude est à accumulation, la température T_c est fixée, l'eau froide étant à la température ambiante T_f. L'utilisateur souhaite régler le mitigeur afin d'avoir un certain débit D_s et une certaine température T_s.

3) Montrer que le mécanisme du mitigeur doit alors être réglé de telle manière à imposer des débits d'eau chaude et d'eau froide D_c et D_f dont on donnera les expressions en fonction des autres paramètres.

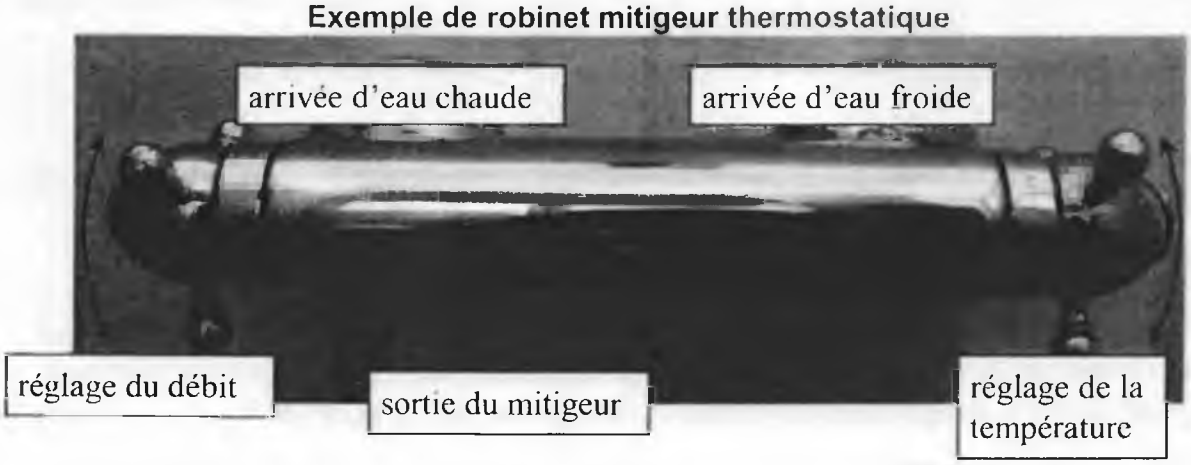
En pratique, les températures de l'eau chaude et de l'eau froide sont variables. Dans un mitigeur mécanique, le dispositif ne possède aucun système d'asservissement : la température de sortie va dépendre des températures de l'eau chaude et de l'eau froide. Pour quantifier cette dépendance, on considère le cas où le mitigeur est réglé pour une température $T_{c,R} = 60°C$ et $T_{f,R} = 20°C$. L'utilisateur décide alors de mettre le chauffe-eau en mode « éco » tel que $T_{c,éco} = 45°C$ sans modifier le réglage du mitigeur.

4) Pour une température de l'eau froide de $T_f = 16°C$ et si l'utilisateur règle la température pour avoir « normalement » 30°C en sortie du mitigeur, quel sera la température *réelle* de l'eau sortant du mitigeur ? Commenter.

Exemple de robinet mitigeur mécanique



Exemple de robinet mitigeur thermostatique



© *Renaud Carpentier*

Un mitigeur thermostatique ajuste quant à lui automatiquement les débits D_c et D_f en fonction de la température de sortie. Pour ce faire, le dispositif dispose d'un détecteur de température (généralement un bilame) et d'une cartouche de cire dilatable. Cette

association permet de faire varier les débits en fonction de la température et ainsi de créer un système asservi sur la température désirée en sortie.

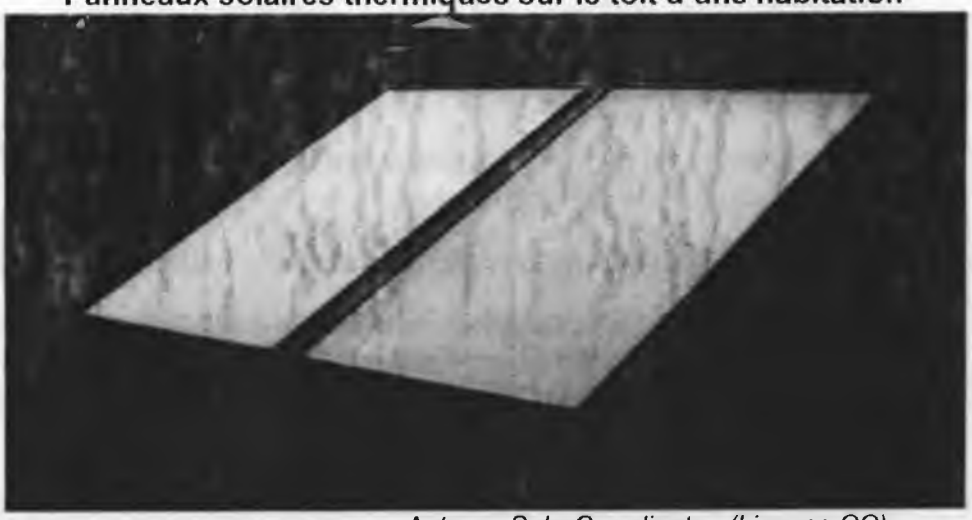
3.2 Etude d'un chauffe-eau solaire

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : système ouvert, bilan thermique.

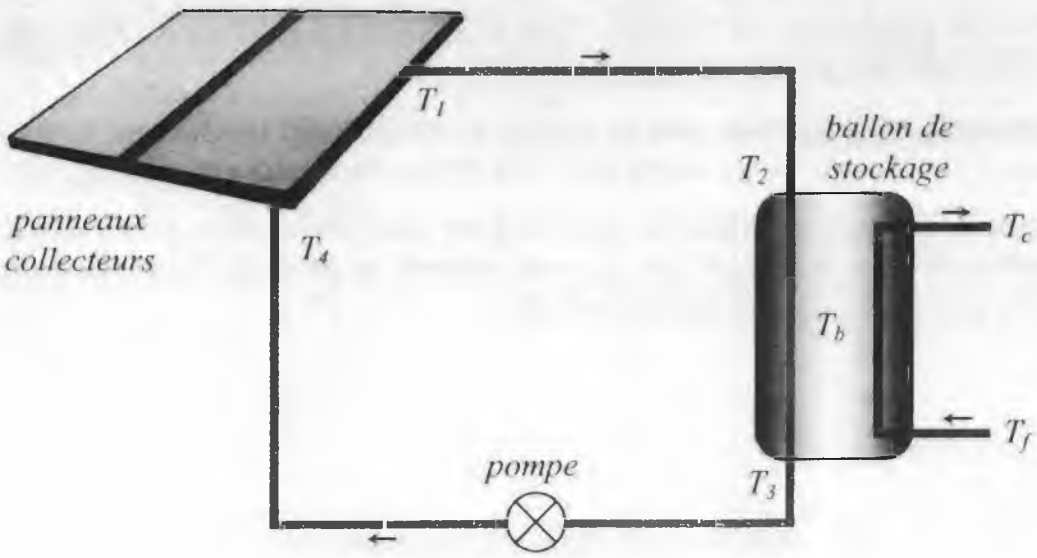
Une méthode économique et écologique pour chauffer de l'eau domestique consiste à utiliser des panneaux solaires thermiques. Le rayonnement solaire est en effet capté par un fluide caloporteur antigel qui le transfert à son tour à l'eau sanitaire grâce à un échangeur thermique. On se propose d'étudier le principe de ces échanges d'énergie et de mesurer l'efficacité du système.

Panneaux solaires thermiques sur le toit d'une habitation



Auteur : SolarCoordinates (Licence CC)

Principe du circuit échangeur thermique



Les panneaux collecteurs ont une surface $S = 6\ m^2$ et sont inclinés pour recevoir le rayonnement solaire en incidence normale. Le fluide caloporteur contient un puissant antigel et peut être assimilé à de l'eau. La circulation est imposée par une pompe qui maintient un débit massique constant $D_m = 180\ kg.h^{-1}$ en période de chauffe. On mesure les températures suivantes à différents endroits de l'installation :

T_1	T_2	T_3	T_4	T_f	T_c
75°C	73°C	65°C	63°C	15°C	65°C

On rappelle la capacité thermique massique de l'eau $c = 4{,}18.10^3\ J.K^{-1}.kg^{-1}$ et sa masse volumique $\rho = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$.

1) Déterminer la puissance thermique transmise au fluide caloporteur dans les panneaux collecteurs. Définir et évaluer le rendement de la conversion d'énergie solaire en énergie thermique sachant que le flux surfacique solaire vaut environ $600\ W.m^{-2}$.

Le ballon de stockage contient $V = 200$ L d'eau à la température initiale $T_i = 35°C$. On appelle $T(t)$ la température de l'eau dans le ballon, supposée uniforme. Pendant la phase de chauffe, la température, T_3 du fluide caloporteur en sortie du ballon vaut $T(t)$. On suppose que la température du fluide à l'entrée reste constante, égale à $T_2 = 73°C$. Le ballon est parfaitement calorifugé.

2) A l'aide d'un bilan thermique, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$. On fera apparaître un temps caractéristique τ que l'on calculera.

3) Evaluer le temps au bout duquel la température dans le ballon atteint $T_b = 65°C$.

Une fois que la température T_b est atteinte dans le ballon, la pompe s'arrête et ne se remet en route que pour maintenir cette température constante. On prélève alors de l'eau chaude sanitaire à la température $T_c = T_b$ avec le débit massique $D_{m,eau}$ en la remplaçant par de l'eau froide à la température $T_f = 15°C$.

4) Déterminer le débit massique maximal possible d'eau chaude sanitaire pour que celle-ci garde la même température T_b.

5) Evaluer les pertes thermiques dans les canalisations de raccordement du fluide caloporteur. Commenter.

6) Le circuit caloporteur est toujours muni d'une soupape de sécurité. Quel est son rôle ?

Certains dispositifs ne comportent pas de pompe et utilisent simplement le principe du *thermosiphon* : l'eau chaude, moins dense que l'eau froide, monte naturellement.

7) Comment faudrait-il modifier le système pour chauffer le ballon sans l'aide d'une pompe ? Quels sont alors les paramètres qui vont imposer le débit du fluide caloporteur ? Commenter les avantages associés à cette méthode.

3.3 Une machine thermique expérimentale

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : système ouvert, machine thermique, diagrammes thermodynamiques.

Une machine thermique cyclique ditherme fonctionne sur le principe des transitions de phase d'un fluide réfrigérant. Les applications sont nombreuses, de la machine frigorifique au climatiseur réversible ou à la pompe à chaleur. L'étude pratique de la liquéfaction (ou condensation) ou de la vaporisation du fluide réfrigérant est grandement facilitée par l'analyse de diagrammes thermodynamiques. On propose ici une étude expérimentale complète d'une machine thermique de laboratoire, jouant le rôle à la fois de machine frigorifique et de pompe à chaleur.

Exemple de machine thermique de laboratoire

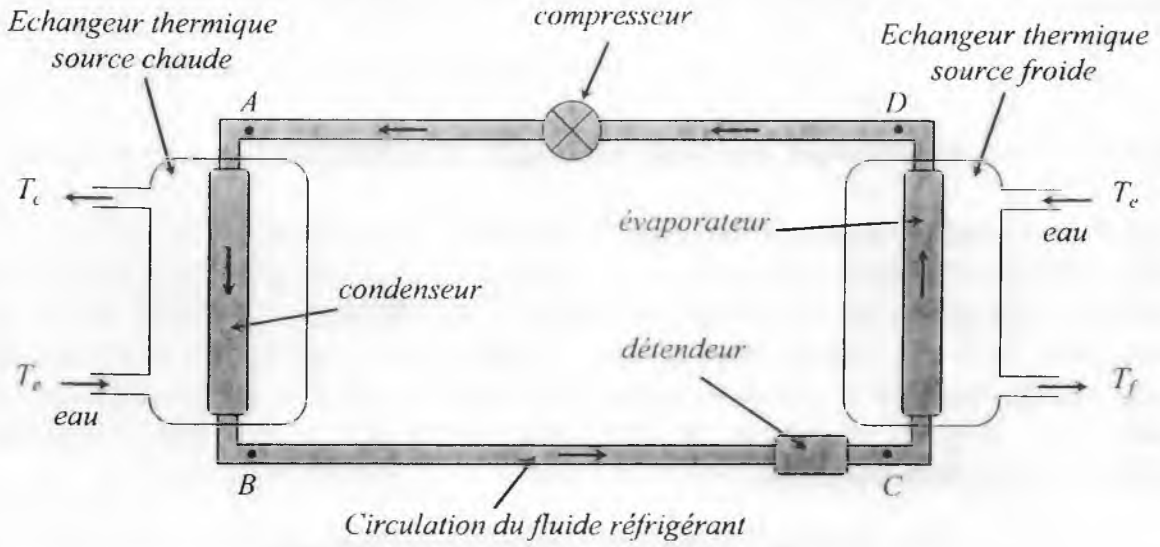
On distingue les différentes parties correspondant aux évolutions du fluide réfrigérant ainsi que les appareils de mesure (manomètres, thermomètres et débitmètres).

(avec l'aimable autorisation de la société P.A.Hilton Ltd, représentée en France par Prodidac)

La machine étudiée (non représentée ici) est un récepteur ditherme cyclique qui utilise la circulation forcée d'un fluide réfrigérant, le *dichlorodifluorométhane* (CCl_2F_2, appelé aussi *fréon R-12*, qui n'est plus utilisé dans les machines récentes), entre une source chaude et une source froide, constituées par une circulation d'eau dans des échangeurs thermiques. La puissance électrique fournie à la machine est transmise à un compresseur qui entraîne le fluide à travers un condenseur, un détendeur puis un évaporateur. Un schéma simplifié du dispositif est présenté ci-après.

Les appareils de mesure permettent de caractériser le fluide réfrigérant à différents stades du cycle, notamment son débit massique, sa température et sa pression.

Schéma de principe de la machine thermique



Le fluide réfrigérant subit les évolutions suivantes :

de A à B : le condenseur
Le fluide en A, sous forme de vapeur sous pression, est mis en contact avec la circulation d'eau dans l'échangeur thermique de la « source chaude » et subit une condensation isobare de l'état vapeur à l'état liquide. L'énergie thermique libérée par la condensation est en partie transférée à l'eau qui voit sa température augmenter de T_e à T_c.

de B à C : le détendeur
Le liquide subit une détente isenthalpique à travers une vanne d'expansion. Le fluide en C se retrouve alors partiellement vaporisé.

de C à D : l'évaporateur
Le mélange liquide-vapeur est mis en contact avec l'eau en circulation dans l'échangeur thermique de la « source froide » et se vaporise entièrement de façon isobare. L'énergie thermique nécessaire à cette vaporisation est partiellement apportée par l'eau dont la température diminue de T_e à T_f.

de D à A : le compresseur
Le fluide sous forme vapeur subit une compression adiabatique en recevant l'énergie mécanique du compresseur.

On a reporté les mesures expérimentales dans le tableau ci-dessous :

Compresseur			
Puissance électrique consommée		500 W	
Circulations d'eau			
Source chaude		**Source froide**	
Débit massique D_{mc} = 72 kg.h^{-1}		Débit massique D_{mf} = 40 kg.h^{-1}	
T_e = 18,5°C	T_c = 28,0°C	T_e = 18,5°C	T_f = 6,0°C
Circulation du fluide réfrigérant			
Condenseur		**Evaporateur**	
Pression en A : 10 bars		Pression en C : 2,5 bars	
T_A = 64,0°C	T_B = 42,0°C	T_C = −7,0°C	T_D = 0,0°C
Débit massique D_m = 25 kg.h^{-1}			

Les températures sont mesurées à 0,5°C près et les pressions à 0,1 bar près. Les débits massiques sont obtenus à 10 % près. Le constructeur précise que le compresseur a un rendement mécanique de l'ordre de 45 %. La machine thermique est supposée avoir atteint son régime de fonctionnement stationnaire.
On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_{eau} = 4{,}18.10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1}.

Premier principe de la thermodynamique
On considère un fluide circulant de façon stationnaire dans une canalisation avec le débit massique D_m et recevant une puissance thermique P_{th} et une puissance mécanique $P_{méca}$. On note h_e et h_s les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la canalisation. On néglige les variations d'énergie cinétique du fluide et les variations d'énergie potentielle de pesanteur.

1) Déduire du premier principe de la thermodynamique appliqué au fluide en écoulement la relation entre $h_s - h_e$ à P_{th}, $P_{méca}$ et D_m.

Utilisation des diagrammes thermodynamiques
On se propose d'effectuer une étude détaillée des échanges thermiques effectués lors des transitions de phase du fluide réfrigérant. Les diagrammes thermodynamiques enthalpique (p,h) et entropique (T,s) du dichlorodifluorométhane sont fournis ci-après.

On utilise dans un premier temps le diagramme enthalpique.

2) Reporter la position des points A, B, C et D sur le diagramme enthalpique (p,h). En déduire l'état physique du fluide dans chaque cas.

3) Mesurer la variation d'enthalpie massique $h_B - h_A$. En déduire la puissance P_c reçue par le fluide de la part de la source chaude.

4) Déterminer de même la puissance P_f reçue par le fluide de la part de la source froide.

5) Mesurer la variation d'enthalpie massique $h_A - h_D$. En déduire la puissance mécanique P_u fournie au fluide par le compresseur et évaluer son rendement réel.

6) Comparer P_u et $P_c + P_f$. Commenter cette relation.

On souhaite confirmer ces résultats à l'aide du diagramme entropique.

7) Reporter la position des points A, B, C et D sur le diagramme entropique (T,s).

8) Sachant que l'énergie thermique massique reçue par le système au cours d'une évolution isobare correspond à l'aire située sous la courbe dans le diagramme entropique, effectuer une nouvelle mesure des puissances thermiques P_c et P_f reçues par le fluide lors de son passage dans le condenseur et dans l'évaporateur. On pourra déterminer l'énergie reçue par une masse dm de fluide pendant dt. Commenter.

9) La compression du fluide est-elle isentropique ? Evaluer l'entropie produite par unité de temps dans le compresseur. Quelle est l'origine de l'irréversibilité ?

10) Mesurer l'enthalpie massique et l'entropie massique de liquéfaction à la pression de 10 bars. Quelle relation y a-t-il entre ces deux grandeurs ?

11) Préciser la composition du mélange liquide-vapeur au point C. On effectuera la mesure à la fois sur le diagramme enthalpique et sur le diagramme entropique.

Efficacités thermodynamiques

Les mesures précédentes de puissances thermiques et de puissance mécanique reçues par le fluide vont permettre d'estimer l'efficacité thermodynamique de la machine thermique, en tant que pompe à chaleur ou machine frigorifique.

12) Définir l'efficacité e_{PAC} de la machine en tant que pompe à chaleur et l'efficacité e_{MF} de la machine en tant que machine frigorifique.

13) Calculer numériquement e_{PAC} et e_{MF}.

On souhaite à présent comparer ces efficacités à l'efficacité maximale obtenue en suivant un cycle de Carnot, constitué de deux isothermes et de deux isentropiques.

14) Représenter le cycle de Carnot le plus proche du fonctionnement de la machine thermique dans le diagramme entropique.

15) En déduire numériquement les efficacités de Carnot $e_{C,PAC}$ pour un fonctionnement en pompe à chaleur et $e_{C,MF}$ pour un fonctionnement en machine frigorifique.

16) Comparer ces valeurs à l'efficacité théorique de Carnot.

On peut définir le rendement thermodynamique théorique de la machine thermique par le rapport de son efficacité expérimentale sur l'efficacité de Carnot.

17) Calculer le rendement thermodynamique théorique de la machine thermique proposée, en tant que pompe à chaleur et en tant que machine frigorifique. Conclure.

Rendement global

En pratique, la machine thermique reçoit directement la puissance électrique P_{elec} qui alimente le compresseur, tandis qu'elle fournit sa puissance thermique à la circulation d'eau. On souhaite donc estimer le rendement global de la machine, en ne tenant compte que des transferts énergétiques réellement effectués.

18) Déterminer les puissances thermiques reçues par l'eau à la « source chaude » et à la « source froide ». Commenter.

19) En déduire l'efficacité globale de la machine thermique en tant que pompe à chaleur ou en tant que machine frigorifique.

20) Evaluer le rendement global théorique de la machine thermique. Conclure.

Diagramme enthalpique (p-h) du dichlorodifluorométhane

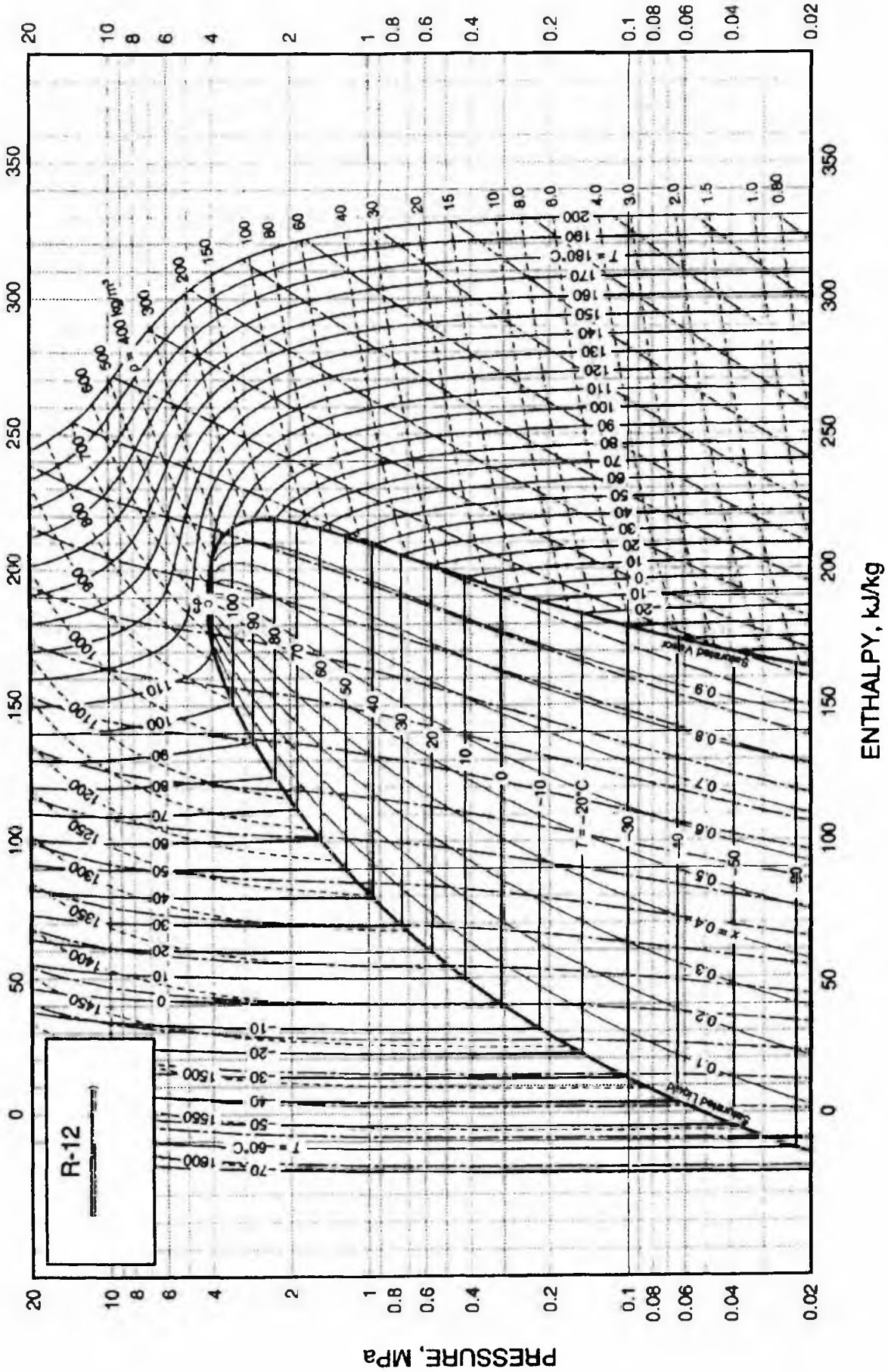
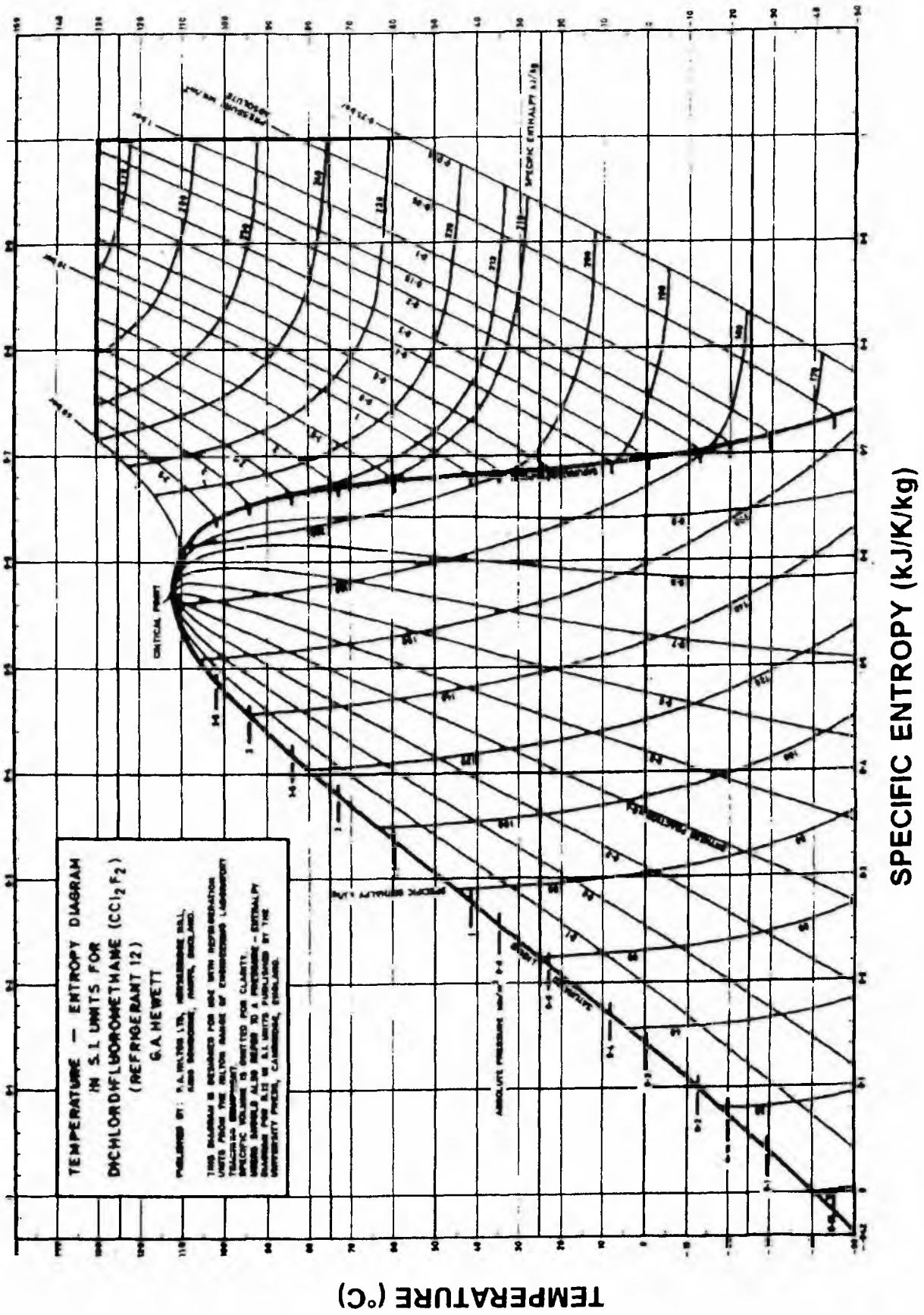


Diagramme entropique (T-s) du dichlorodifluorométhane



© avec l'aimable autorisation de la société P.A.Hilton Ltd, représentée en France par Prodidac

3.4 Principe de la VMC double-flux

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

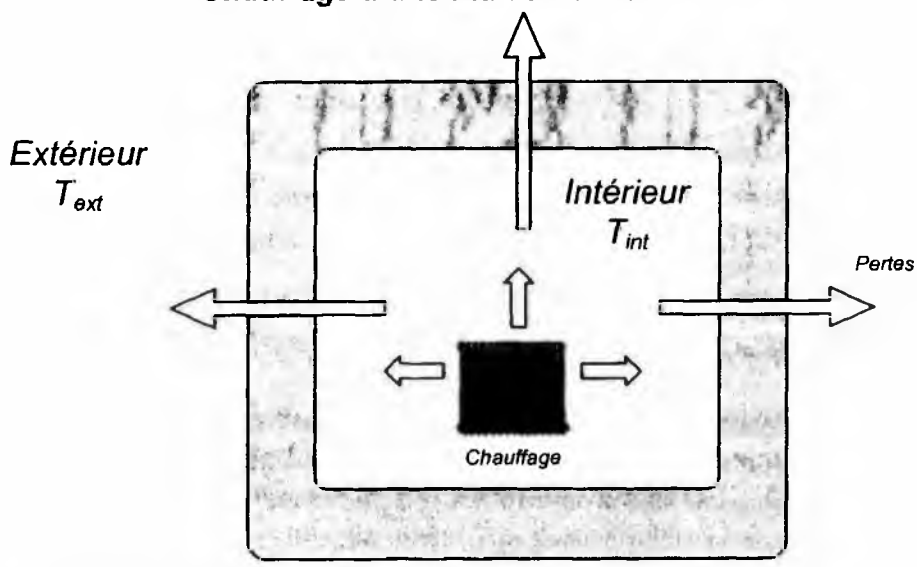
MOTS-CLES : système ouvert, bilan thermique.

Le chauffage d'une maison est une part importante des dépenses des foyers. Dans ce cadre, l'isolation de l'habitation (murs, fenêtres, combles...) joue un rôle évident et primordial. Le renouvellement de l'air intérieur, nécessaire pour assurer une meilleure qualité de l'air respiré, provoque cependant des pertes d'énergie thermique. La ventilation mécanique contrôlée (VMC) est un système répandu d'aération qui remplace simplement l'air chaud intérieur par l'air froid extérieur. Couplé à un échangeur thermique, le dispositif devient une VMC *double flux*, qui peut s'avérer très efficace.

Maison sans ventilation

On considère une maison ne disposant pas de système d'aération mécanique. La résistance thermique équivalente à l'ensemble des parois (murs et fenêtres) est estimée à $1{,}0.10^{-2}$ K.W^{-1}. On souhaite maintenir la température intérieure à $T_{int} = 20°C$ (supposée uniforme) en régime stationnaire. La température de l'air extérieur est constante et vaut $T_{ext} = 0°C$. La pression atmosphérique extérieure vaut $P_0 = 1{,}0.10^5$ Pa.

Chauffage d'une maison sans ventilation



1) A l'aide d'un bilan thermique simple, déterminer la puissance thermique P_{th0} du chauffage permettant de maintenir la température de la pièce.

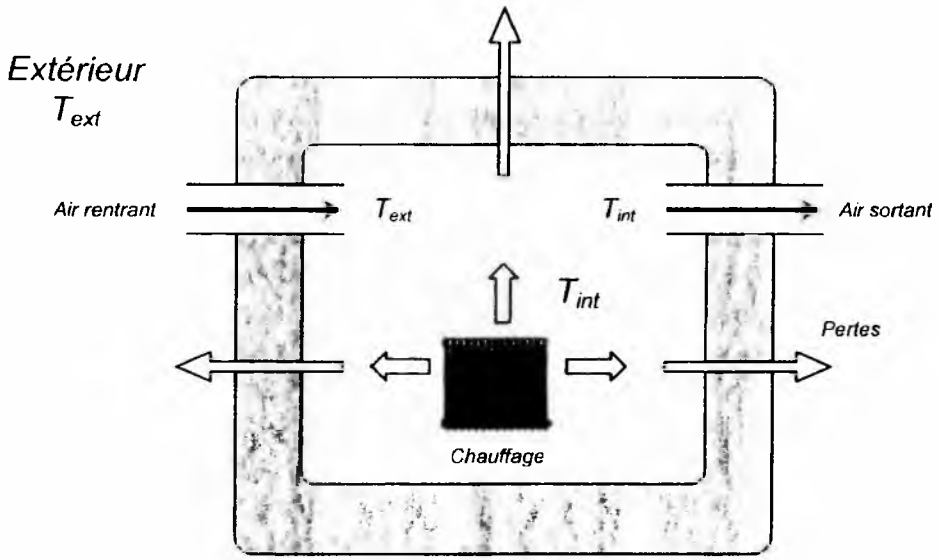
Pour des raisons sanitaires et de santé, il est recommandé de ventiler régulièrement la maison afin de chasser l'humidité et de renouveler l'air respiré. On envisage tout d'abord le cas de la VMC simple flux, dispositif le plus répandu. Les pertes thermiques à travers les murs et fenêtres restent inchangées. On se place en régime stationnaire.

Maison avec VMC simple flux

On impose une entrée d'air à la température de l'air extérieur $T_{ext} = 0°C$ avec un débit constant de 100 m^3/h (débit préconisé pour une habitation de taille moyenne). L'air vicié ressort à la température de la pièce $T_{int} = 20°C$ avec le même débit. On appelle D_m le débit

massique imposé par la ventilation et c_p la capacité thermique massique à pression constante de l'air, assimilé à un gaz parfait diatomique.

Principe d'une VMC simple flux :
l'air rentre à la température T_{ext} et ressort à la température T_{int}.



2) A l'aide d'un bilan d'enthalpie, déterminer la puissance thermique P_{th1} nécessaire pour réchauffer l'air entrant à la température de la pièce en fonction de T_{int}, T_{ext}, D_m et c_p.

3) Evaluer le débit massique D_m d'air entrant. Calculer numériquement P_{th1}, puis la puissance thermique totale P_{tot1} délivrée par le chauffage pour maintenir constante la température de la pièce. Commenter.

Afin de minimiser les écarts de température, donc les pertes d'énergie, on se propose de préchauffer l'air froid entrant grâce au courant d'air chaud sortant en utilisant un échangeur thermique.

Maison avec VMC double flux (voir schéma page suivante)

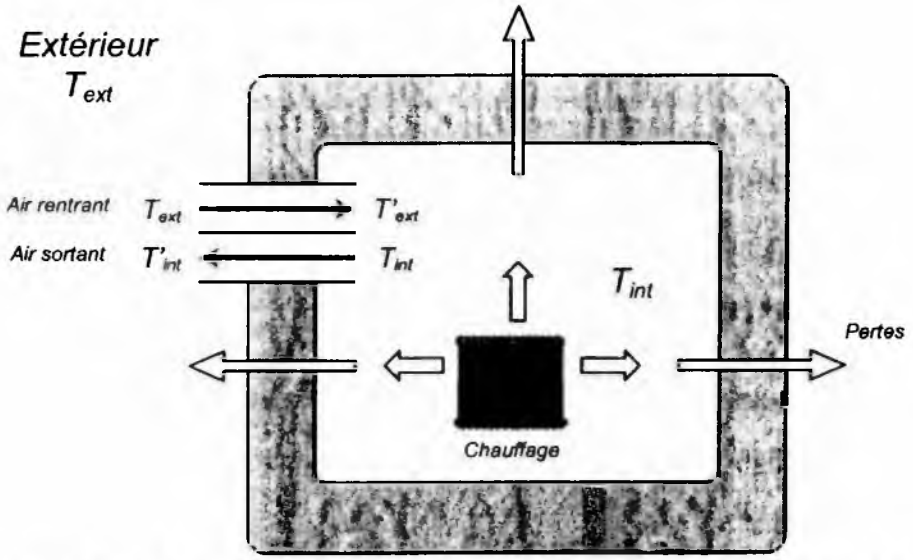
L'air froid entre dans l'échangeur thermique à la température de l'air extérieur T_{ext} avec le même débit de 100 m^3/h que précédemment. Réchauffé par l'air sortant, cet air arrive dans la pièce à la température T'_{ext}, tandis que l'air vicié à la température de la pièce T_{int} ressort de l'échangeur thermique à la température T'_{int} avec un débit identique. On suppose que l'échangeur thermique est parfaitement calorifugé et on se place en régime stationnaire. Les pertes thermiques à travers les murs restent inchangées.

1) Etablir une relation simple entre T_{int}, T_{ext}, T'_{int} et T'_{ext}.

2) Exprimer la nouvelle puissance thermique P_{th2} nécessaire pour réchauffer l'air entrant à la température de la pièce.

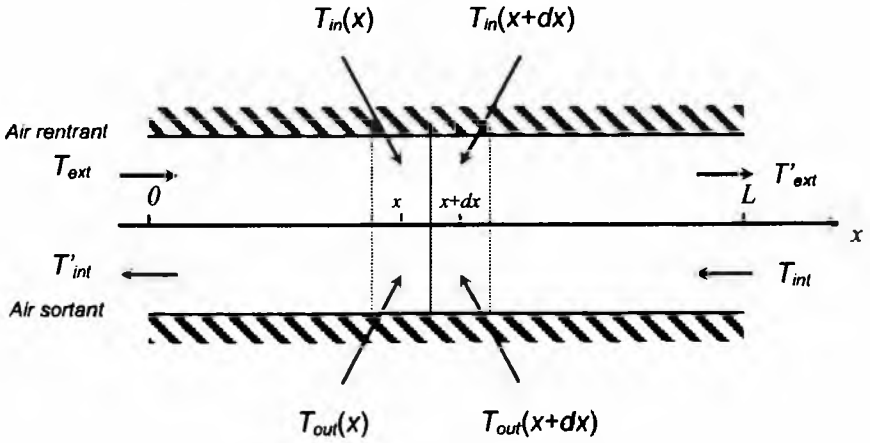
3) Que vaudrait cette puissance si l'échangeur était parfait ? Commenter.

Principe d'une VMC double flux :
***l'air entrant à la température T_{ext}* est réchauffé à la température T'_{ext}**
par l'air sortant qui passe de la température T_{int} à T'_{int}.



On se propose de modéliser le fonctionnement de l'échangeur thermique pour en déduire le profil de température dans chaque conduit.

Modélisation de l'échangeur thermique



On appelle respectivement $T_{in}(x)$ et $T_{out}(x)$ les températures de l'air entrant et de l'air sortant le long de l'axe de chaque canalisation. On suppose que l'air entrant situé à l'abscisse x est en contact thermique avec l'air sortant à la même abscisse par l'intermédiaire de la paroi de séparation. La puissance thermique reçue entre les abscisses x et $x + dx$ par l'air entrant à travers cette paroi s'écrit ainsi :

$$dP_{out \to in} = g_{th} dx \left(T_{out}(x) - T_{in}(x) \right)$$

où g_{th} est la conductance thermique par unité de longueur de la paroi d'échange. Pour une paroi d'épaisseur e, de longueur L, de surface d'échange S et de conductivité thermique λ, on montre que : $g_{th} = \dfrac{\lambda S}{eL}$.

4) Donner les conditions aux limites portant sur $T_{in}(x)$ et $T_{out}(x)$ en $x = 0$ et $x = L$.

5) Montrer que $T_{in}(x)$ et $T_{out}(x)$ sont solutions du système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{in}}{dx} + \dfrac{1}{\delta} T_{in}(x) = \dfrac{1}{\delta} T_{out}(x) \\ \dfrac{dT_{out}}{dx} - \dfrac{1}{\delta} T_{out}(x) = -\dfrac{1}{\delta} T_{in}(x) \end{cases}$$

où δ est une distance que l'on exprimera en fonction de D_m, c_p et g_{th}.

6) Montrer que $T_{out}(x) - T_{in}(x)$ est indépendant de x.

7) En déduire l'expression de $T_{out}(x)$ et de $T_{in}(x)$.

8) Exprimer les températures T'_{ext} et T'_{int} en fonction de T_{int}, T_{ext} et de $\dfrac{\delta}{L}$. Commenter le cas de l'échangeur parfait.

On considère un échangeur dont les canalisations d'entrée et de sortie sont des cylindres coaxiaux. La surface d'échange est donc un cylindre en PVC d'épaisseur $e = 2$ mm et de rayon $a = 5$ cm. La longueur totale du tube vaut $L = 5$ m (le tube est en fait replié plusieurs fois sur lui-même). La surface de contact est la surface latérale $S = 2\pi aL$. La conductivité thermique du PVC vaut $\lambda = 0{,}18$ W.m^{-1}.K^{-1}.

9) Calculer numériquement le rapport $\dfrac{\delta}{L}$, puis les températures T'_{ext} et T'_{int}. Tracer les graphes de $T_{out}(x)$ et de $T_{in}(x)$. Déterminer la valeur numérique de la puissance thermique P_{th2}. Commenter.

On peut définir le rendement η de l'installation en comparant les puissances thermiques nécessaires avec une VMC simple flux ou double flux :

$$\eta = \frac{P_{th1} - P_{th2}}{P_{th1}}$$

10) Calculer numériquement le rendement de cette installation.

11) Un fabricant propose un échangeur thermique avec un rendement de 95 %. Comparer numériquement la puissance totale du chauffage avec VMC double flux ou avec VMC simple flux. Conclure.

3.5 Mesure d'un coefficient de diffusion

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : équation de diffusion.

La diffusion d'un cristal en solution aqueuse est caractérisée par le coefficient de diffusion D qui apparaît dans la loi de Fick. On se propose de déterminer ce coefficient de diffusion par l'étude de clichés expérimentaux.

On remplit d'eau une coupelle cylindrique de diamètre 10 cm, sur une hauteur $h \approx 1$ cm. A $t = 0$, on dispose en son centre un petit cristal de permanganate de potassium ($KMnO_4$). Celui-ci se dissout dans l'eau et diffuse dans le milieu avec une couleur violette caractéristique. On enregistre alors les clichés présentés ci-après aux différents instants t. L'échelle spatiale est donnée par une série de cercles concentriques de rayons allant de 1,0 mm à 10 mm.

L'échelle est donnée par une série de cercles concentriques

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). On supposera que la diffusion s'effectue uniquement dans le plan $z = 0$. On appelle alors $n(r,t)$ la concentration de colorant à la distance r de l'axe et à l'instant t, et $\vec{j}(r,t) = j(r,t)\,\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant de particules correspondant.

Le bilan de particules dans la situation proposée s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$$

On donne l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques pour la fonction $n(r,t)$:

$$\Delta n(r,t) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial n(r,t)}{\partial r}\right)\right)$$

1) Rappeler la relation entre $\vec{j}(r,t)$ et $n(r,t)$.

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $n(r,t)$ en coordonnées cylindriques.

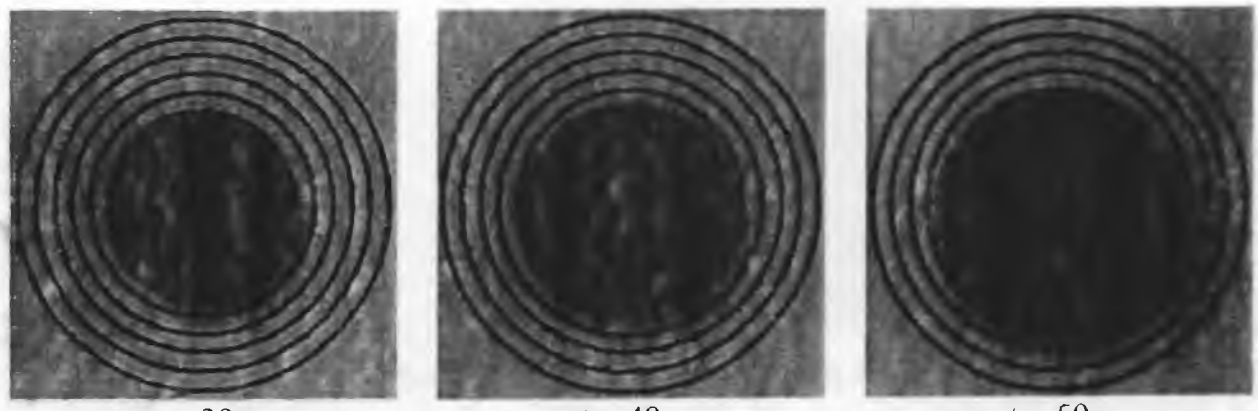
3) Par un raisonnement en ordre de grandeur, relier le rayon $R(\tau)$ de la tâche colorée au temps caractéristique τ de diffusion.

4) Déduire des clichés expérimentaux le coefficient de diffusion D dans la situation proposée. Commenter.

5) Combien de temps faudrait-il attendre pour que la coupelle cylindrique soit entièrement colorée ?

Diffusion d'un cristal de permanganate de potassium dans l'eau

$t = 10$ s $t = 18$ s $t = 30$ s



$t = 39$ s $t = 48$ s $t = 59$ s

$t = 70$ s $t = 79$ s $t = 89$ s

$t = 100$ s $t = 109$ s $t = 120$ s

© Benoît Dépret

3.6 Durée de vie d'une bulle

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : loi de Fick, bilan de particules.

Une bulle est en général un objet éphémère. Généralement, sa fin de vie consiste à un éclatement de la partie la plus amincie du film de liquide (du fait de la gravité, il s'agit souvent de la partie supérieure de la bulle). Si cet effet ne venait pas à se produire, la bulle ne serait pas stable pour autant à long terme si le gaz qu'elle renferme peut se dissoudre dans le film. En effet, la tension superficielle crée une surpression dans la bulle : le gaz emprisonné à l'intérieur va alors diffuser à travers le film de la bulle, cette dernière voyant donc son rayon diminuer au cours du temps. Ce problème propose de quantifier ce phénomène.

On suppose le gaz identique et parfait à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle. Par ailleurs, on suppose la transformation isotherme à la température T. On note p_0 la pression extérieure (constante) et $p_i(t)$ la pression à l'intérieur de la bulle, de rayon $R(t)$ et dont le film, de volume invariant V_{film}, possède une épaisseur $e(t)$, supposée très petite devant $R(t)$.

On donne la loi de Laplace : $p_i(t) - p_0 = \dfrac{4\gamma}{R(t)}$, où γ désigne la tension superficielle du film de la bulle. Enfin, on note D le coefficient de diffusion du gaz dans le film et l'on suppose a priori que le phénomène diffusif dans le film est en régime quasi-stationnaire. Par ailleurs, on suppose qu'il y a constamment l'équilibre thermodynamique de la réaction $gaz_{vapeur} \leftrightarrow gaz_{dissous}$ à chaque interface. On note K la constante d'équilibre de cette réaction, de sorte que $\dfrac{n_{dissous}}{n_{vapeur}} = K$, où n représente le nombre de molécules de gaz par unité de volume. On rappelle que la constante de Boltzmann est reliée à la constante des gaz parfaits et au nombre d'Avogadro par la formule $k_B N_A = R$.

1) Quelle relation lie constamment $R(t)$ et $e(t)$?

2) Montrer que le flux de particules sortant de la bulle par diffusion peut s'écrire :

$$\Phi_p(t) = 16\pi \frac{\gamma D K}{k_B T} \frac{R(t)}{e(t)}$$

Indication : puisque $e(t) << R(t)$, on pourra considérer que la diffusion du gaz dans le film est un problème unidimensionnel.

3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $R(t)$.

4) On suppose que $p_0 >> \gamma/R(t)$. Simplifier l'équation et la résoudre en posant R_0 le rayon initial de la bulle. En déduire le temps caractéristique τ de disparition de la bulle.

5) Etablir l'inégalité sur K et les autres paramètres du problème pour que l'hypothèse du régime de diffusion quasi-stationnaire soit légitime.

Le coefficient de diffusion de l'azote dans l'eau à 25°C vaut $4{,}5.10^{-5}$ $cm^2.s^{-1}$. La loi de Henry stipule que la concentration molaire d'un gaz dissous dans un liquide est

proportionnelle à la pression partielle du gaz au contact du liquide, la constante de proportionnalité, notée H, est appelée la constante de Henry. Pour l'azote dans l'eau, $H = 6{,}4.10^{-6}$ mol.m^{-3}.Pa^{-1}.

6) Calculer la valeur de K associée à la dissolution de l'azote dans l'eau.

7) Estimer la durée de vie d'une bulle d'air de 1 cm de diamètre et dont le film, de 10 µm d'épaisseur, est formé d'eau et de tensioactifs, pour lesquels $\gamma = 20$ mN.m^{-1}.

8) Vérifier la validité des différentes approximations faites pour déterminer τ.

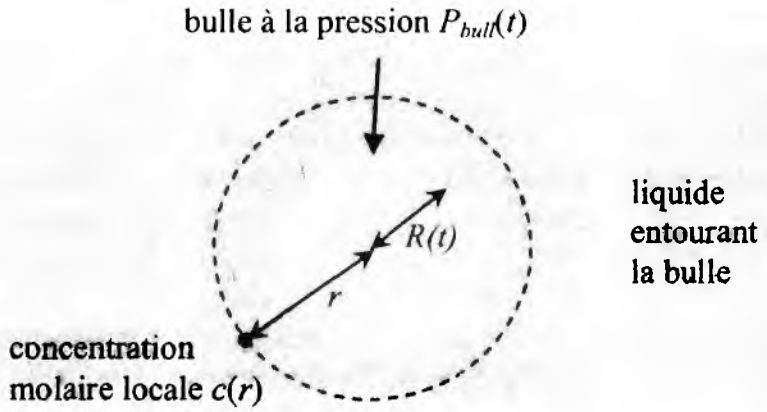
3.7 Mûrissement d'une mousse

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : loi de Fick, bilan de particules.

Une mousse, comme par exemple une mousse à raser, est constituée d'une assemblée de bulles de gaz séparées par un liquide. Une mousse est nécessairement amenée à évoluer au cours du temps du fait de différents facteurs. La gravité fait notamment couler le liquide vers le bas, pouvant localement faire diminuer l'épaisseur de film entre deux bulles : si le film se rompt, les deux bulles n'en forment alors plus qu'une seule. On dit alors que la mousse évolue par coalescence. Par ailleurs, si le gaz peut se dissoudre dans le liquide, l'échange de matière entre les bulles et le liquide participe également à l'évolution de la mousse. On parle alors de « mûrissement ». Ce problème propose d'établir un modèle de mûrissement dans le cas d'une mousse « humide ».

On considère dans un premier temps le cas limite d'une mousse « très humide » où les bulles sont en moyenne éloignées les unes des autres d'une distance grande devant leur propre taille. On peut alors étudier les bulles de manière individuelle. On note $P_{bulle}(t)$ la pression du gaz dans la bulle et $R(t)$ son rayon à la date t. On repère un endroit du liquide par sa distance r avec le centre de la bulle. Du fait de la symétrie sphérique du problème, la concentration molaire c du gaz dissous dans le liquide ne dépend que de la distance r. On note D le coefficient de diffusion du gaz dans le liquide et V_m le volume molaire du gaz, supposé ici approximativement constant. On note c_∞ la concentration molaire du gaz dans le liquide très loin de la bulle.



Pour étudier l'évolution de la bulle, il est nécessaire d'introduire deux lois :

Loi de Henry :

La loi de Henry stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, la concentration molaire d'un gaz dissous dans un liquide est proportionnelle à la pression partielle du gaz au contact du liquide. La constante de proportionnalité, notée H, est appelée la constante de Henry. En écrivant la loi de Henry à la surface de la bulle, on a donc l'égalité $c(R) = HP_{bulle}$.

Loi de Laplace :

La tension superficielle γ du liquide a pour effet d'augmenter la pression dans la bulle. En notant P_0 la pression du liquide, la pression du gaz contenu dans la bulle vaut $P_{bulle} = P_0 + \frac{2\gamma}{R}$. On rappelle que l'équation de diffusion en géométrie quelconque s'écrit : $\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c$, où Δ désigne l'opérateur laplacien. Pour une concentration ne dépendant que de r en géométrie sphérique, on donne $\Delta c = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rc(r))$ et $\vec{grad}(c) = \frac{\partial c}{\partial r}\vec{e}_r$.

On suppose que le temps d'évolution de la bulle est suffisamment grand pour que la diffusion du gaz dans le liquide entourant la bulle soit en régime quasi-stationnaire.

1) Déterminer l'expression de $c(r)$ faisant intervenir R, $c(R)$ et c_∞.

2) A l'aide de la loi de Fick, en déduire la variation de volume de la bulle par unité de temps.

3) Montrer que le rayon de la bulle vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{HDV_m P_0}{R(t)}\left(s - \frac{2\gamma}{P_0 R(t)}\right)$$

Exprimer le coefficient s, appelé paramètre de saturation, en fonction de H, P_0 et c_∞.

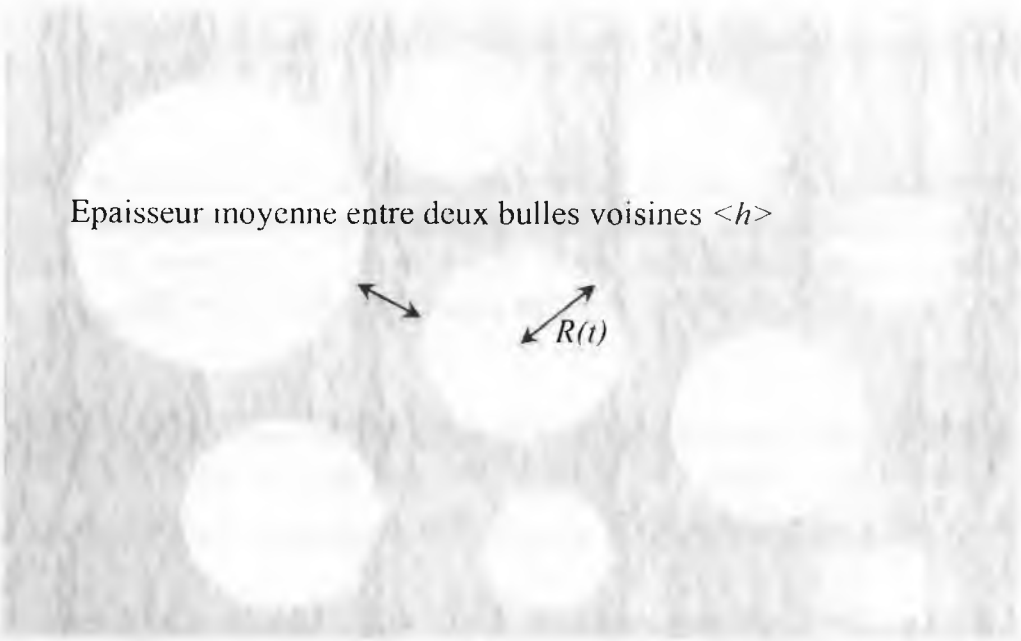
4) Que dire de l'évolution des bulles si $s < 0$?

5) Dans le cas où $s > 0$, préciser, suivant les cas, si la bulle augmente ou diminue de taille. On pourra introduire la quantité $R_s = \frac{2\gamma}{sP_0}$.

En général, dans une mousse, les bulles n'ont pas toutes la même taille. On peut montrer que le paramètre R_s correspond à la valeur moyenne $< R >$ des rayons des différentes bulles.

6) Décrire qualitativement en quoi consiste le mûrissement de la mousse en terme de nombre total de bulles et de taille moyenne des bulles.

La taille moyenne des bulles augmentant, l'hypothèse de bulles très éloignées les unes des autres n'est plus vérifiée au bout d'un certain temps. Cependant, la mousse est encore suffisamment humide pour que les bulles possèdent encore une forme approximativement sphérique. On note $< h >$ l'épaisseur moyenne de liquide entre deux bulles.



7) En estimant *de manière approximative* le flux diffusif qu'échange une bulle avec ses plus proches voisines, montrer que la nouvelle équation différentielle vérifiée par le rayon d'une bulle s'écrit :

$$\frac{dR}{dt} = K\left(\frac{1}{<R>} - \frac{1}{R(t)}\right), \text{ avec } K = \frac{2\gamma HDV_m}{<h>}.$$

Un calcul très complexe permet d'obtenir une expression asymptotique du rayon moyen $<R>$ des bulles au cours du temps. On peut obtenir le même résultat en admettant que $<R>$ vérifie l'équation différentielle :

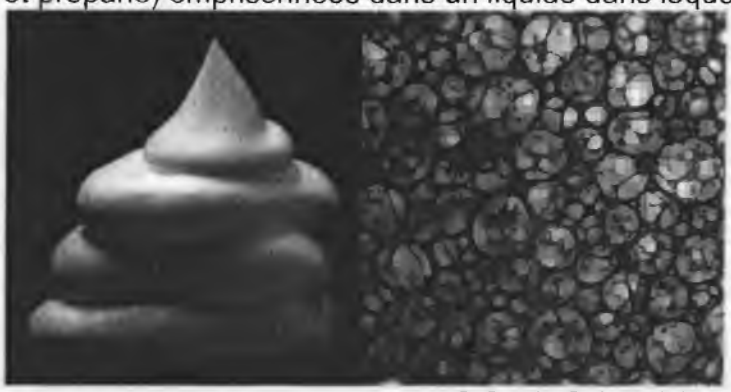
$$\frac{d<R>}{dt} = \frac{K}{4<R>}$$

8) Expliciter $R(t)$ en notant R_0 le rayon moyen initial des bulles. Introduire un temps caractéristique de grossissement des bulles.

Pour une mousse constituée d'eau, de dodécylsulfate de sodium (SDS), utilisé comme tensioactif, et de perfluorohexane, des mesures ont donné K de l'ordre de 2 $\mu m^2.s^{-1}$ avec des bulles de diamètre moyen de 60 µm.

9) Calculer le temps au bout duquel la mousse commence à mûrir.

Une mousse à raser est constituée d'une grande assemblée de bulles d'alcanes (butane, isobutane et propane) emprisonnées dans un liquide dans lequel ils sont miscibles.



© Sylvie Cohen-Addad

3.8 Temps de séchage d'une éponge

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : vapeur saturante, loi de Fick, bilan de particules.

On cherche à calculer le temps que met une éponge pour sécher. On considère pour cela une éponge sphérique de rayon R_0 entièrement imbibée d'eau à la concentration particulaire n_{liq} à l'instant initial $t = 0$. L'objectif est de déterminer la cinétique du séchage de l'éponge en supposant que celle-ci est limitée par la diffusion de la vapeur d'eau à l'intérieur de celle-ci. On note D le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air emprisonné dans l'éponge. On suppose la transformation entièrement isotherme à la température T et que le volume de l'éponge est le même qu'elle soit mouillée ou sèche. La pression partielle de vapeur d'eau dans l'air environnant est notée P_{ext} et la pression de vapeur saturante de l'eau à T est notée P_{sat}.

Eponge naturelle de mer

© Ets Olivier/ Chimitex

On adopte le modèle suivant : à la date t, la partie de l'éponge contenant encore de l'eau liquide (toujours à la concentration n_{liq}) est une sphère de rayon $R(t) < R_0$. A une distance r du centre telle que $R(t) < r < R_0$, la vapeur d'eau diffuse vers l'extérieur de l'éponge. Dans cette zone sèche (absence d'eau sous forme liquide), on note $n(r,t)$ la densité particulaire des molécules d'eau dans l'air. Enfin, le flux de molécules d'eau s'échappant de l'éponge est noté $\Phi(t)$. On fournit l'expression du gradient en coordonnées sphériques dans le cas où la fonction f ne dépend que de la distance r au centre du repère : $\vec{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r$.

1) Quelle inégalité doivent vérifier P_{sat} et P_{ext} pour que l'éponge puisse sécher ?

2) En assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait, exprimer $n(R(t),t)$, que l'on notera n_{vap}, en fonction de P_{sat} et $n(R_0,t)$ en fonction de P_{ext}.

3) En supposant un régime quasi-permanent pour la diffusion de la vapeur d'eau dans la partie sèche de l'éponge, démontrer que $\frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{\Phi(t)}{4\pi D r^2}$ puis déterminer l'expression de $n(r,t)$. En déduire $\Phi(t)$ en fonction de $R(t)$, R_0, D, P_{sat} et P_{ext}, T et k_B la constante de Boltzmann.

4) Dans l'intervalle de temps [t ; $t+dt$], $R(t)$ varie de $dR < 0$. Exprimer le nombre correspondant dN de molécules d'eau liquide passant en phase vapeur. En déduire une seconde expression de $\Phi(t)$ faisant entre autres intervenir $\frac{dR}{dt}$.

5) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $R(t)$. L'intégrer pour obtenir une relation de la forme $F(R) = G(t)$, où F et G sont des polynômes.

6) Exprimer le temps de séchage complet τ de l'éponge en fonction de R_0, D et des rapports n_{liq}/n_{vap} et P_{ext}/P_{sat}.

7) En étudiant les variations du polynôme F, donner l'allure du graphe R/R_0 en fonction de t/τ. Interpréter les caractéristiques du graphe aux extrémités.

8) Application numérique : calculer le temps que met une éponge sphérique de 6 cm de diamètre, initialement entièrement imbibée d'eau, dans :

- une cuisine à 25°C avec un taux d'humidité de 20 % (air sec),
- une cave à 15°C et un taux d'humidité de 90 % (air très humide).

Le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air vaut 2.10^{-5} $m^2.s^{-1}$. Par ailleurs, on donne $P_{sat} = 17$ mbar à 15°C et 32 mbar à 25°C. On pourra également s'appuyer sur le document suivant.

DOCUMENT : d'après le site internet « inovimex.com »

Les éponges PVA sont remarquablement hydrophiles. La capillarité produite par son réseau tri-dimensionnel de micropores, offre des propriétés de rétention d'eau extraordinaires. Les caractéristiques physiques des éponges PVA sont les suivantes :

- matériau : formal de polyvinyle
- configuration des pores : pores ouverts continus tri-dimensionnels
- densité des pores : entre 85 et 95 %
- diamètre moyen des pores : entre 60 et 2000 µm
- densité apparente : entre 0,07 et 0,12 $g.cm^{-3}$

9) Ecrire l'inégalité entre les paramètres permettant de valider a posteriori l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire pour la diffusion à l'intérieur de l'éponge.

3.9 Diffusion d'un parfum

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : bilan de particules, équation de diffusion, approche microscopique.

La diffusion de particules permet de décrire la progression spatio-temporelle d'un ensemble de particules dans un milieu (gaz, liquide ou solide). A l'échelle microscopique, la diffusion moléculaire s'interprète de façon statistique. Après une étude unidimensionnelle de la diffusion d'un parfum au voisinage de la peau, on se propose de déterminer l'ordre de

grandeur d'un coefficient de diffusion dans l'air à l'aide d'un modèle statistique microscopique.

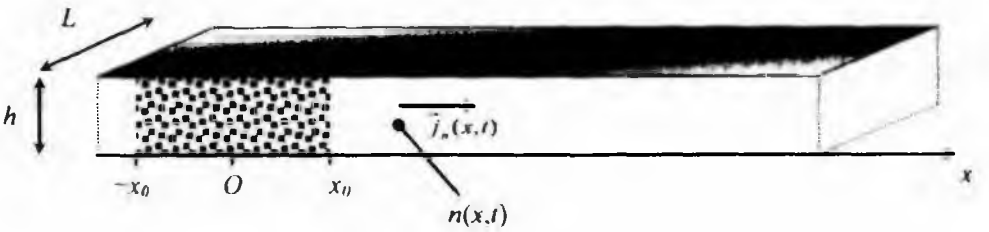
Le déplacement aléatoire d'une particule dans un milieu est appelé mouvement brownien

Auteur : PAR (domaine public)

La diffusion d'un parfum dans l'air peut avoir des conséquences...physiques !
Lorsqu'un parfum est pulvérisé sur la peau, le solvant, volatile, s'évapore et des molécules odorantes se retrouvent dans l'air et diffusent. On considère un modèle unidimensionnel permettant d'accéder à la concentration $n(x,t)$ en parfum dans une couche d'air de largeur L et d'épaisseur h le long d'un axe Ox au voisinage de la peau. Après avoir pulvérisé du parfum sur la peau dans la zone comprise entre $-x_0$ et $+x_0$, il apparaît K molécules de parfum par unité de volume et par unité de temps dans la couche d'air correspondante.

On appelle D le coefficient de diffusion du parfum dans l'air et on note $\vec{j}_n(x,t) = j_n(x,t)\,\vec{e}_x$ le vecteur densité de courant de particules, la diffusion se faisant uniquement le long de l'axe Ox.

Les molécules de parfum apparaissent dans la zone comprise entre $-x_0$ et x_0 puis diffusent le long de l'axe



Le problème étant symétrique de part et d'autre de l'origine O, on cherche le profil de concentration uniquement pour $x > 0$.

1) A l'aide d'un bilan de particules dans la tranche située entre x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par la concentration $n(x,t)$ pour $0 < x < x_0$. Que devient cette équation pour $x > x_0$?

2) Comment évoluerait la concentration pour $0 < x < x_0$ si l'on empêchait la diffusion en $x = x_0$? Un régime stationnaire peut-il être possible ?

On cherche à étudier le profil de concentration $n(x)$ en régime stationnaire.

3) Etablir l'équation vérifiée par $n(x)$ dans chaque zone $0 < x < x_0$ et $x > x_0$. En déduire l'expression générale de $n(x)$ dans chaque zone en introduisant quatre constantes d'intégration.

4) Préciser les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = x_0$. En déduire l'expression des constantes d'intégration précédentes. On notera $n(0) = n_0$.

5) Tracer l'allure du profil de concentration en régime stationnaire et interpréter graphiquement les conditions aux limites obtenues à la question précédente. Discuter brièvement la validité du modèle proposé.

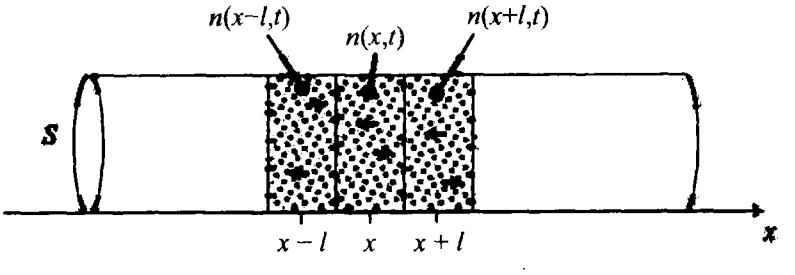
6) Effectuer un bilan global de particules dans la zone $0 < x < x_0$. Commenter.

Une bouteille de parfum contenant 50 mL du précieux liquide (de masse molaire $100\ \text{g.mol}^{-1}$ et de masse volumique $10^3\ \text{kg.m}^{-3}$) dure en moyenne 6 mois à raison de 2 pulvérisations par jour. Chaque pulvérisation sur la peau, sur une zone de 2 cm de côté, fait effet durant environ 5 heures.

7) Evaluer numériquement K. On prendra pour ce modèle $h = 5$ mm et $L = 2$ cm.

On souhaite à présent évaluer le coefficient de diffusion D du parfum dans l'air. On se place dans une zone sans source de particules ($x > x_0$). Dans ce modèle microscopique simplifié, les particules se déplacent toutes avec la même vitesse u, identique à la vitesse quadratique moyenne de l'air, avec une probabilité ½ de se déplacer selon $+\vec{e_x}$ et ½ de se déplacer selon $-\vec{e_x}$. Chaque particule se déplace en moyenne de la distance l, appelée *libre parcours moyen*, avant de subir un choc et de changer éventuellement de direction.

Modèle simple de diffusion unidimensionnelle



8) Exprimer la durée τ que met une particule pour se déplacer de la distance l.

9) Exprimer la variation dN du nombre de particules situées dans la tranche d'abscisse x et d'épaisseur l entre les instants t et $t + \tau$.

10) Déterminer le nombre δN_e de particules qui entrent dans cette tranche entre t et $t + \tau$ et le nombre δN_s de particules qui en sortent.

11) Ecrire le bilan de particules pour la tranche d'abscisse x et simplifier la relation à l'aide d'un développement limité.

On rappelle l'expression d'un développement limité à l'ordre 2 :

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}$$

12) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $n(x,t)$. Commenter ce résultat. En déduire l'expression du coefficient de diffusion D en fonction de l et u.

La théorie cinétique des gaz parfaits permet de relier l'énergie cinétique moyenne d'une molécule du gaz à son agitation thermique, grâce à la relation (valable pour un gaz parfait diatomique) :

$$\frac{5}{2}k_B T = \frac{1}{2}mu^2$$

où $k_B = \dfrac{R}{N_A}$ est la constante de Boltzmann, N_A le nombre d'Avogadro, R la constante des gaz parfaits, m la masse d'une molécule et T la température du gaz.

13) Evaluer la vitesse quadratique moyenne u de l'air à la température ambiante $T = 293$ K.

Le libre parcours moyen l dépend de l'efficacité des chocs subis par les particules dans le milieu. Pour des molécules supposées sphériques de rayon r, on estime que le libre parcours moyen s'écrit :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

où $\sigma = 4\pi r^2$ est la section efficace des chocs et n la densité volumique en molécules

14) Evaluer la densité volumique en molécules d'air à la température ambiante.

15) Proposer un ordre de grandeur pour r et évaluer numériquement le libre parcours moyen l dans l'air.

16) En déduire une valeur numérique du coefficient de diffusion D.

17) Evaluer le temps caractéristique d'une diffusion de particules dans l'air sur une distance $L = 1$ m. Commenter le résultat. Quel phénomène, non étudié ici, permettrait un transport plus efficace des molécules sur de grandes distances ?

3.10 Comparaison de vitrages

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : loi de Fourier, résistance thermique.

On compare dans ce problème les performances en termes d'isolation thermique du simple, double et triple vitrage.

1) Quels sont les différents modes de transferts thermiques ? On indiquera pour chacun son nom et sa description en quelques mots.

2) Enoncer la loi de Fourier. Cette loi est phénoménologique. Que cela signifie-t-il ?

Un simple vitrage standard en verre, de conductivité thermique $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}, possède une épaisseur $e = 6$ mm. Chaque paroi est le siège d'échanges thermiques avec l'air

directement en contact (par les différents modes évoqués à la première question). Ces échanges se révèlent être proportionnels à la différence de température entre la paroi et l'air en contact et sont quantifiés par un coefficient de transfert thermique h. Dans le domaine du bâtiment, les valeurs conventionnelles sont les suivantes :

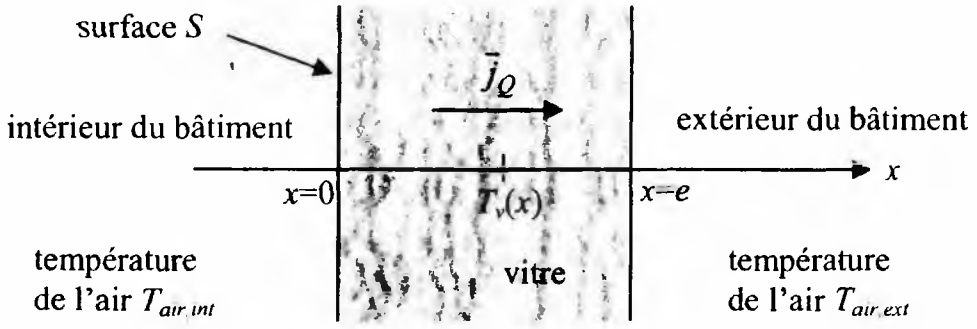
$h_e = 23$ W.m^{-2}.K^{-1} pour la paroi en contact avec l'air extérieur au bâtiment,

$h_i = 8$ W.m^{-2}.K^{-1} pour la paroi en contact avec l'air intérieur au bâtiment.

Dans toute la suite, on raisonne en régime permanent. Pour certaines des questions suivantes, il est vivement conseillé de mener les calculs en effectuant une analogie électrique et de considérer les vitrages comme une association de résistances thermiques.

3) Expliquer qualitativement la différence de valeurs entre h_e et h_i.

On s'appuie sur le schéma suivant représentant une surface S de la vitre vue de côté, où l'axe Ox est dirigé vers l'extérieur du bâtiment et $T_v(x)$ est la température de la vitre à l'abscisse x.



4) Exprimer le flux thermique surfacique à l'intérieur du vitrage ϕ_S de l'intérieur vers l'extérieur en fonction de λ, e et des températures de la vitre $T_{v,int}$ et $T_{v,ext}$ en contact avec l'air respectivement intérieur et extérieur.

5) Vérifier que le coefficient de transfert thermique global du simple vitrage (entre l'air intérieur et l'air extérieur) vaut $U_{g,s} = 5{,}7$ W.m^{-2}.K^{-1}, après avoir donné son expression en fonction de λ, e, h_e et h_i.

Un double vitrage 6/12/6 est un assemblage de deux vitres de 6 mm d'épaisseur séparées de 12 mm et entre lesquelles est enfermé de l'air (à pression ambiante). Un tel double vitrage possède un coefficient de transfert thermique global $U_{g,d} = 2{,}8$ W.m^{-2}.K^{-1}.

6) Quelle valeur $U_{g,t}$ peut-on alors prévoir pour le coefficient de transfert thermique global d'un triple vitrage avec des vitres de 6 mm et des espacements de 12 mm entre elles ?

L'air intérieur d'une maison est à la température $T_{air,int}$ = 18°C et l'air extérieur à $T_{air,ext}$ = 0°C (lors d'une froide journée d'hiver).

7) Calculer la température de la face de la vitre donnant sur l'intérieur de la maison pour chacun des vitrages suivant : simple vitrage, double vitrage et triple vitrage.

3.11 Choix de la taille du brûleur

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

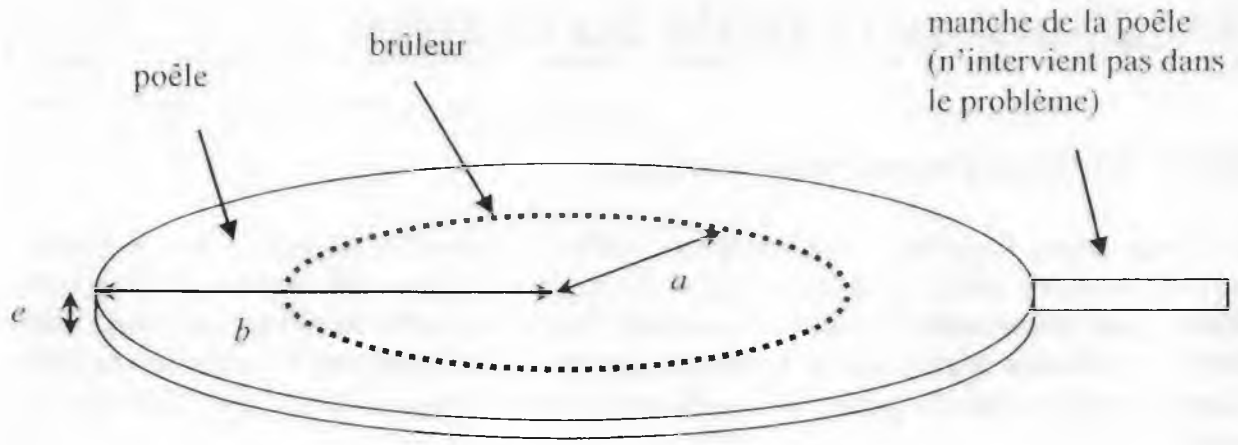
MOTS-CLES : loi de Fourier, bilan thermique.

Un cuisinier désire faire du caramel dans une poêle de cuisson. Il dispose d'une gazinière munie de plusieurs tailles de brûleurs à gaz. Ils fournissent tous une puissance thermique suffisante pour transformer le sucre en caramel. Cependant, afin de réussir au mieux son caramel, le cuisinier désire utiliser le brûleur qui permet d'avoir une température la plus uniforme possible dans la poêle. Ce problème propose de lui fournir des éléments de réponse.

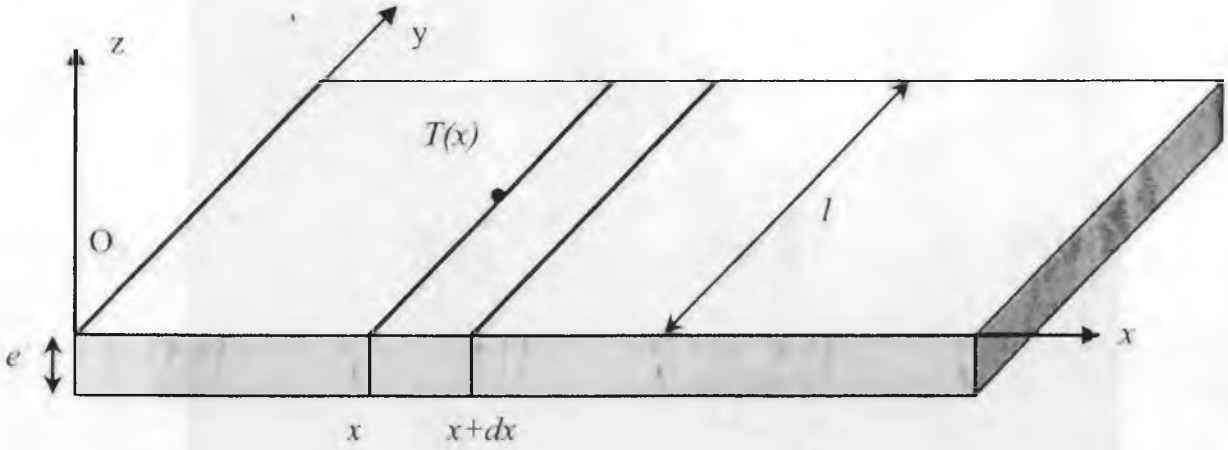
Gazinière composée de quatre brûleurs à gaz et une casserole avec un revêtement en céramique

Auteur : Renaud Carpentier

La poêle a la forme d'un disque de rayon b (on néglige donc la courbure de la poêle sur les bords). Elle possède une épaisseur e suffisamment petite pour pouvoir considérer que la température d'un point de la poêle ne dépend que de la distance r entre ce point et le centre de la poêle. Le brûleur est circulaire de rayon a. On fait l'hypothèse qu'il fournit directement à la poêle une puissance P, les transferts thermiques étant répartis sur le cercle de rayon a où se produit la combustion du gaz. La poêle est en acier inoxydable de conductivité thermique notée λ (on ne prend pas en compte le revêtement antiadhésif). Les échanges conducto-convectifs avec l'air extérieur situé au dessus de la poêle sont modélisés par la loi de Newton : la puissance thermique passant de la poêle à l'air sur une surface de contact dS vaut $d\Phi_{poêle \to air} = h(T_{poêle} - T_{air})dS$. On ne prend pas en compte les échanges avec l'air situé sous la poêle et l'on raisonnera dans tout le problème en régime stationnaire.



On se place dans la question suivante dans une autre géométrie que celle présentée précédemment : on suppose que la température ne dépend que de l'abscisse x dans un repère cartésien $Oxyz$ (voir schéma) et l'on raisonne dans une zone où il n'y a pas de brûleur.



1) A l'aide du 1er principe de la thermodynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ dans cette géométrie. Faire apparaître l'opérateur laplacien Δ.

En géométrie cylindrique, on montre que l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$ est identique à celle établie précédemment en utilisant l'expression de l'opérateur laplacien dans le repère cylindrique $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$.

2) A l'aide du formulaire mathématique ci-après, écrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$ en introduisant la constante $L = \sqrt{\frac{\lambda e}{h}}$. Quelle est la dimension de L ? Que représente-t-elle ?

DOCUMENT : Les fonctions de Bessel modifiées

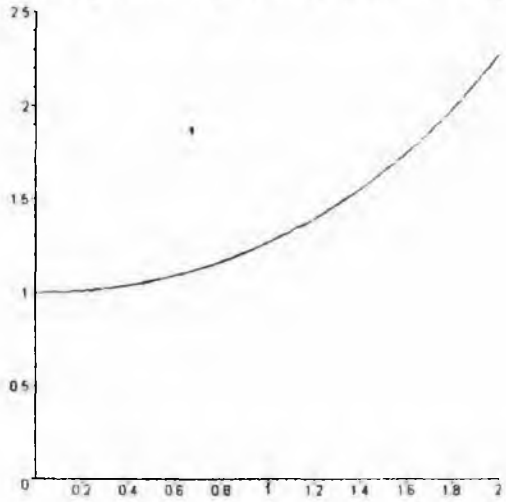
Les solutions générales de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$u^2\frac{d^2F}{du^2}+u\frac{dF}{du}-u^2F(u)=0 \text{ s'écrivent :}$$

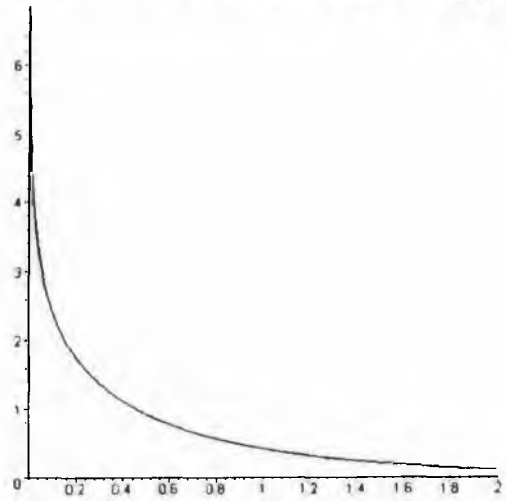
$F(u)=AI_0(u)+BK_0(u)$, où I_0 est la première fonction de Bessel modifiée de première espèce, K_0 la première fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et A et B sont des constantes réelles quelconques.

Par ailleurs, $I_1(u)=\frac{dI_0}{du}$ et $K_1(u)=-\frac{dK_0}{du}$ sont les deuxièmes fonctions de Bessel modifiées respectivement de première et deuxième espèce.

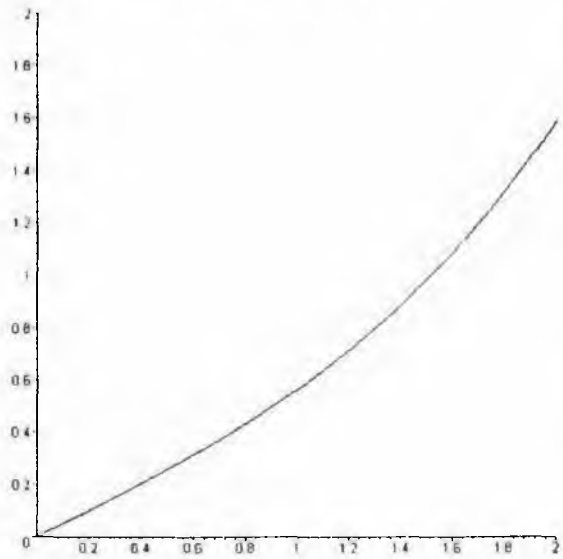
Les graphes de I_0, K_0, I_1 et K_1 sont représentés ci-dessous (noter que $K_0(u)\xrightarrow[u\to 0]{}+\infty$).



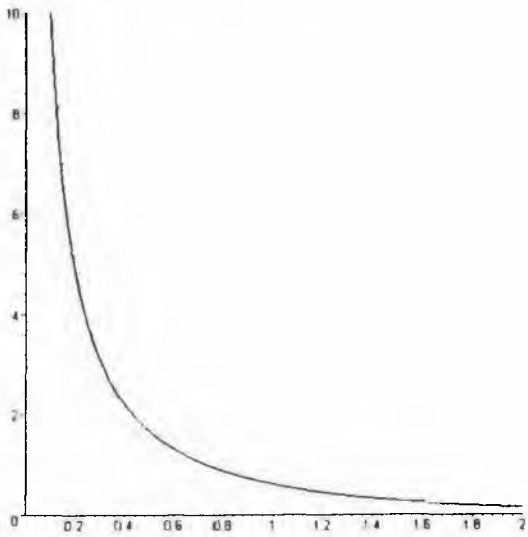
graphe de I_0(u)



graphe de K_0(u)



graphe de I_1(u)



graphe de K_1(u)

La présence d'un apport thermique en $r = a$ entraîne que l'on doit résoudre séparément l'équation différentielle dans l'intervalle $[0,a[$ d'une part et $]a,b]$ d'autre part, ce qui fait apparaître quatre constantes d'intégration, et non deux.

3) A l'aide des différentes conditions aux limites, écrire les quatre relations reliant ces quatre constantes. On prendra en compte le fait que $e << b$. Par ailleurs, on fournit le gradient en repère cylindrique lorsque T ne dépend que de r : $\vec{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r$.

Pour obtenir une répartition de température la plus uniforme possible, on retient comme critère que la température au centre de la poêle doit être égale à celle aux bords.

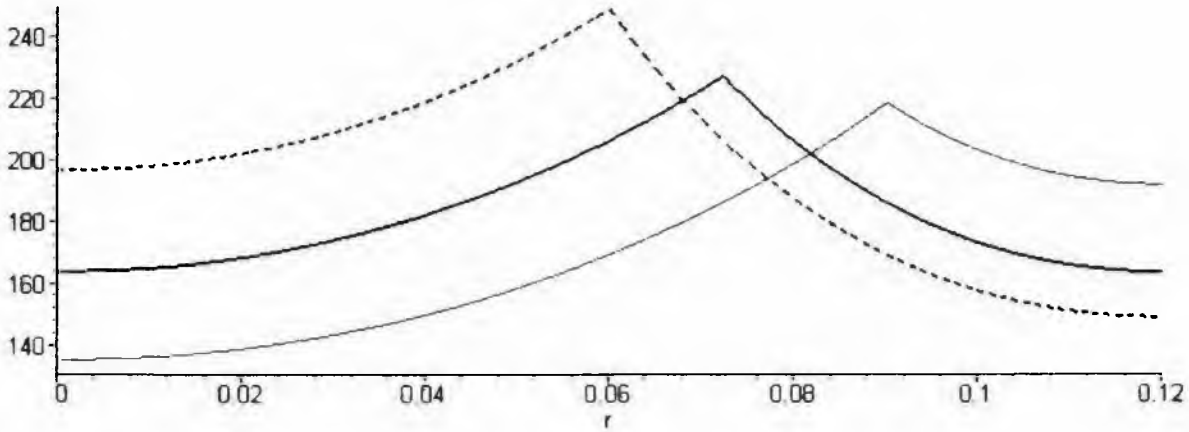
4) En déduire que les rayons a et b doivent vérifier l'égalité :

$$I_0\left(\frac{a}{L}\right)K_1\left(\frac{b}{L}\right)\left[1-I_0\left(\frac{b}{L}\right)\right]+I_1\left(\frac{b}{L}\right)\left[K_0\left(\frac{a}{L}\right)-I_0\left(\frac{a}{L}\right)K_0\left(\frac{b}{L}\right)\right]=0$$

5) Application numérique : on considère une poêle ayant un rayon de 12 cm et une épaisseur de 5 mm, chauffé par un brûleur de 300 W. Avec λ = 26 W.m^{-1}.K^{-1} et h = 40 W.m^{-2}.K^{-1}, calculer la valeur numérique de L.

La résolution numérique de l'équation de la question 4 fournit a = 7,2 cm. Les graphes ci-dessous représentent la répartition de température $T(r)$ dans la poêle où r est exprimé en mètre et T en degré Celsius, pour trois valeurs différentes de a : 6 cm, 7,2 cm et 9 cm, sachant que T_{air} = 20°C.

Répartition de température dans la poêle pour 0 < *r* < *b*



6) Identifier, en le justifiant, la valeur de a pour chaque courbe (trait fin, trait épais et trait pointillé).

7) Dans le cas où a = 7,2 cm, estimer à l'aide du graphe la répartition (en pourcentage) d'énergie thermique partant vers l'intérieur et vers l'extérieur de la poêle.

8) Lister les différentes approximations ou hypothèses utilisées dans ce modèle pouvant être remises en cause.

3.12 Température dans un tunnel

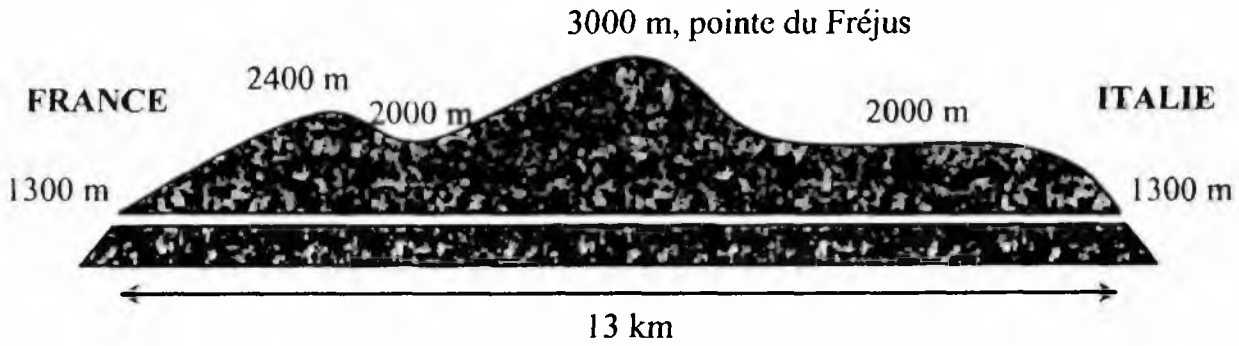
TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : équation de diffusion, loi de Fourier, bilan thermique.

Lorsque l'on emprunte un long tunnel creusé sous un important massif montagneux, on peut être surpris par la température régnant à l'intérieur de celui-ci. Ce problème propose d'en comprendre l'origine et d'effectuer une étude quantitative dans le cas du tunnel du Fréjus.

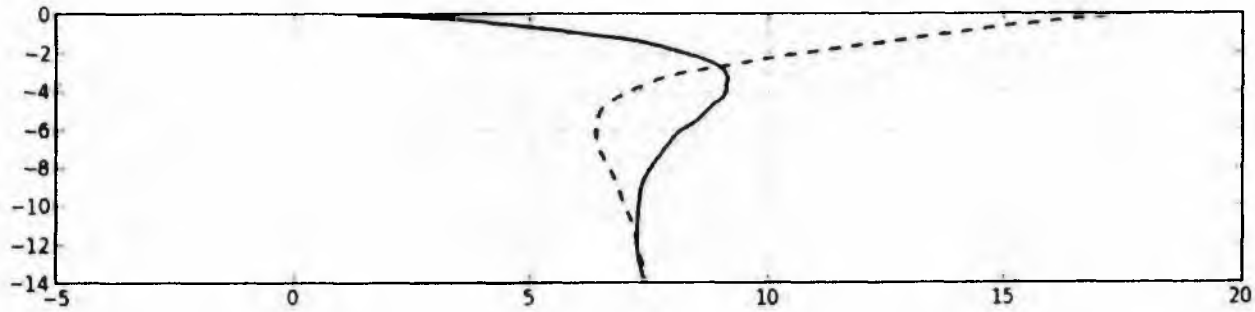
DOCUMENT n°1 : Le tunnel du Fréjus

Le tunnel du Fréjus relie la France à l'Italie, plus précisément la ville de Modane à la ville de Bardonecchia. Long de près de 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. Mise en service en juillet 1980, il absorbe avec le tunnel du Mont-Blanc une grande partie du trafic routier transalpin. La figure ci-dessous représente une coupe approximative du tunnel et du relief situé à l'aplomb.



Lors d'une étude de récupération d'énergie géothermique entreprise par la société d'exploitation du tunnel du Fréjus côté italien (SITAF), des relevés de température de la roche ont été effectués sur quelques mètres de profondeur. La courbe en trait plein correspond à un relevé au mois de novembre et celle en trait pointillé au mois de juillet.

Evolution de la température (en °C) dans le sous-sol (profondeur en m)



DOCUMENT n°2 : Quelques caractéristiques des roches alpines

Essentiellement constitué de roches granitiques, le massif des Alpes possède une hauteur moyenne de 2500 m. Le phénomène d'isostasie entraîne que la croûte continentale située sous les Alpes y est plus épaisse, avec une épaisseur de l'ordre de 45 km (contre 30 km en moyenne sur le globe terrestre). Les roches granitiques possèdent une conductivité thermique typiquement entre 2,5 et 4 $W.m^{-1}.K^{-1}$ et une diffusivité de l'ordre de 1 $mm^2.s^{-1}$. Vers 3000 m d'altitude, la température de la roche à quelques mètres de profondeur est de l'ordre de -10°C, indépendamment des conditions météorologiques et des variations saisonnières.

Les roches granitiques contiennent une faible proportion d'éléments radioactifs. Les trois principaux isotopes radioactifs sont l'uranium (^{238}U et ^{235}U), le thorium (^{232}Th) et le potassium (^{40}K). La désintégration de ces isotopes génère près de la surface une production interne de chaleur égale à 2,5 $\mu W.m^{-3}$. La concentration des isotopes radioactifs diminuant avec la profondeur, un modèle communément admis consiste à multiplier la production interne de chaleur à la profondeur $z > 0$ par le facteur $\exp(-z/h)$, avec $h = 10$ km.

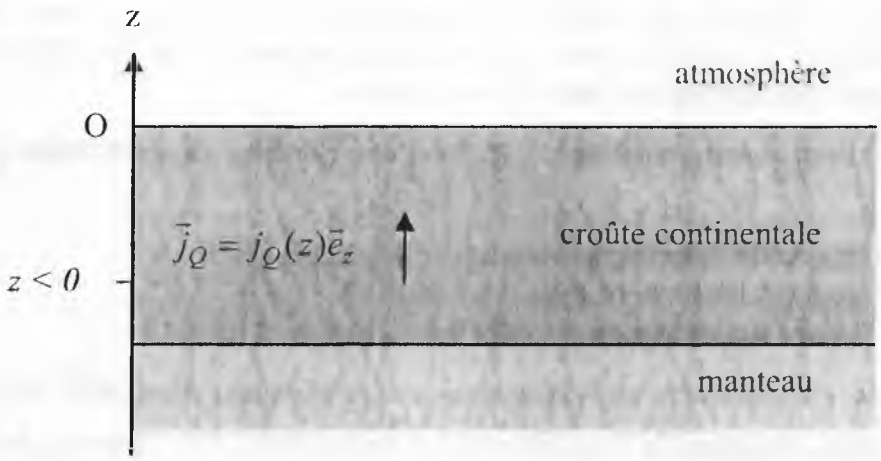
A la surface, le flux thermique venant du sous-sol varie dans les Alpes cottiennes entre 60 et 80 $mW.m^{-2}$. Ce flux a deux origines distinctes :
- la radioactivité naturelle dans la croûte continentale (évoquée précédemment) ainsi que dans le manteau,
- l'énergie primitive de la Terre issue de l'accrétion à l'origine de sa formation, une partie de l'énergie venant de la cristallisation du noyau terrestre.

DOCUMENT n°3 : Laboratoire souterrain de Modane, d'après le site « http://laguna.ethz.ch » et « http://www-lsm.in2p3.fr/ »

Le laboratoire souterrain de Modane (LSM) est un laboratoire français inauguré en 1982 situé à 1700 m sous la montagne au milieu du tunnel du Fréjus. Il est à ce titre le troisième laboratoire le plus profond au monde. Il accueille des expériences de physique des particules nécessitant un environnement protégé des rayons cosmiques, notamment pour l'étude des neutrinos ainsi que pour la recherche de la « matière noire ». Au niveau du laboratoire, la roche environnante a une température entre 28 et 30°C tout au long de l'année.

1) Justifier par un calcul semi-quantitatif le fait que les variations saisonnières n'affectent pas la température de la roche au-delà d'une dizaine de mètres de profondeur.

Pour simplifier la modélisation, on se place dans un problème unidimensionnel où la température ne dépend que de la profondeur $z < 0$, l'axe Oz étant ascendant et l'origine se situant à la surface. On note λ la conductivité thermique de la roche, supposée homogène, et $P_{vol}(z) = P_0 \exp(z/h)$ la puissance thermique volumique dégagée par la roche à la profondeur z. Enfin, on note $\vec{j}_Q = j_Q(z)\vec{e}_z$ le vecteur densité de flux thermique. On se place dans toute la suite en régime stationnaire dans la croûte continentale.



2) Etablir l'équation locale reliant $P_{vol}(z)$ et la dérivée de $j_Q(z)$. En déduire l'expression de $j_Q(z)$ en fonction de $j_Q(z=0)$.

3) Donner l'expression de $T(z)$ en fonction de $T(z = 0)$.

4) Calculer la contribution de la radioactivité à l'intérieur de la croûte continentale dans le flux thermique surfacique au niveau du sol. Est-ce une contribution significative ?

5) Estimer la température à l'interface entre la croûte continentale et le manteau au niveau des Alpes.

6) A partir du modèle développé précédemment et des documents n°1 et n°2, estimer la température de la roche au milieu du tunnel de Fréjus. On accompagnera le résultat d'une incertitude. Est-ce en accord avec le document n°3 ?

Les lecteurs intéressés par l'étude des flux thermiques dans la croûte terrestre trouveront des informations complémentaires dans l'article suivant :

M. JABOYEDOFF, *Modèles thermiques simples de la croûte terrestre : un regard sur les Alpes*, Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, 86.4 : pp. 229-271.

Cet article est accessible à l'adresse :

http://www.quanterra.org/Mod%E8le%20themrique.pdf

3.13 Comment se réchauffer les mains ?

TECHNICITE : * INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : équation de diffusion, bilan thermique.

Une personne ayant froid aux mains décide de les frotter énergiquement l'une contre l'autre. Evaluer l'augmentation de température de l'épiderme engendrée par cette action.

Le candidat est libre de développer toute modélisation nécessaire à l'étude demandée, de calculer des ordres de grandeurs, d'émettre des hypothèses simplificatrices qu'il conviendra de justifier le cas échéant.

On pourra trouver ci-dessous des valeurs de paramètres susceptibles d'intervenir dans la résolution du problème. A noter que tous les paramètres ne sont pas nécessairement utiles et que le candidat peut être amené à en introduire d'autres.

Chez l'Homme, la peau est constituée à 70 % d'eau dont les caractéristiques physiques à 20°C sont :

- capacité calorifique massique : 4,2 $J.kg^{-1}.K^{-1}$
- conductivité thermique : 0,6 $W.m^{-1}.K^{-1}$
- viscosité dynamique : $1{,}0.10^{-3}$ Pa.s

On rappelle la loi de Coulomb sur le frottement de glissement d'un solide sur un autre en notant $\vec{N}$ et $\vec{T}$ respectivement la force normale et tangentielle. En l'absence de glissement, $|\vec{T}| < \mu|\vec{N}|$ et $|\vec{T}| = \mu|\vec{N}|$ lorsque le solide glisse sur l'autre, μ désignant le coefficient de frottement de glissement.

3.14 Du gravier pour faire fondre la neige ?

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

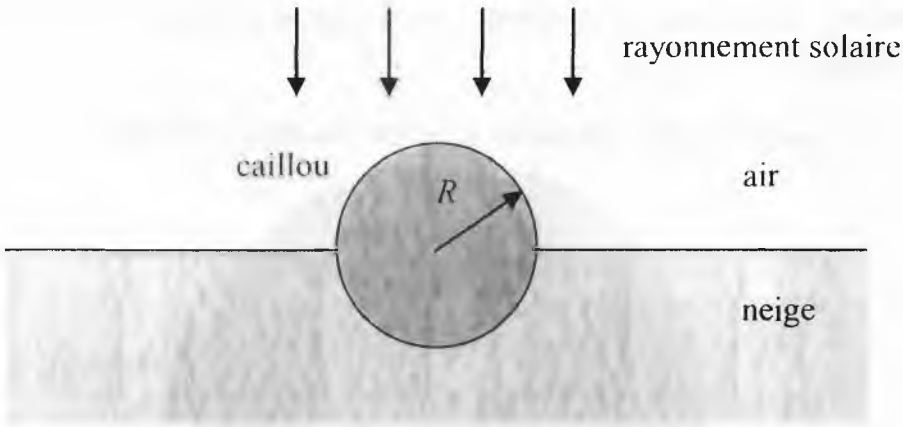
MOTS-CLES : bilan thermique, régime stationnaire, loi de Fourier.

Une méthode alternative au salage sur les routes enneigées en hiver consiste à répandre du gravier ou du sable. Cette technique, si l'on récupère les graviers à la fin de la saison hivernale, est beaucoup plus écologique et a déjà été adoptée par plusieurs pays. Une quantité suffisante de gravier réparti sur la neige permet une meilleure adhérence des véhicules. On peut par ailleurs se demander si le gravier est capable de faire fondre la neige. C'est l'objet de ce problème.

On considère un petit caillou de forme sphérique de rayon R à moitié enfoncé dans la neige, cette dernière étant supposée homogène de conductivité thermique λ. Le caillou absorbe une fraction $f = 0{,}8$ du rayonnement solaire incident, ce dernier ayant une puissance surfacique P_s. La neige, quant à elle, est supposée parfaitement réfléchissante. Pour simplifier, on considère le soleil dans la direction du zénith (verticale locale). Les échanges conducto-convectifs entre le caillou et l'air ambiant sont modélisés par la loi de Newton, qui s'énonce ainsi : la puissance par unité de surface cédée par le caillou de température T_C à l'air de température T_{ext} vaut :

$$\frac{d\Phi_{C\to air,cond}}{dS} = h(T_C - T_{ext})$$

L'air d'une part et la neige loin du caillou d'autre part sont à la température $T_{ext} < T_{fus}$ où T_{fus} désigne la température de fusion de la glace. Enfin, on effectue les approximations suivantes : on néglige les échanges conducto-convectifs entre la neige et l'air, on suppose que la température du caillou est uniforme et l'on se place en régime permanent, sans prendre en compte l'éventuelle fonte de la neige.



1) Exprimer la puissance solaire absorbée par le caillou et convertie en chaleur.

En supposant que le caillou émet comme un corps noir, la puissance surfacique échangée par rayonnement entre le caillou et l'air environnant a pour expression :

$\frac{d\Phi_{C\to air,ray}}{dS} = \sigma\left(T_C^{\ 4} - T_{ext}^{\ 4}\right)$, où $\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} s'appelle la constante de Stefan.

2) En supposant que $T_C - T_{ext} << T_{ext}$, montrer que la puissance *totale* cédée par le caillou à l'air peut se mettre sous la forme $\Phi_{C\to air,tot} = k\left(T_C - T_{ext}\right)$. Déterminer l'expression de k en fonction de σ, T_{ext}, h et R.

3) En notant $\Phi_{C\to N}$ la puissance thermique cédée par le caillou à la neige, déterminer le profil de température $T(r)$ de la neige à une distance r du centre du caillou.

4) En déduire l'expression de T_C en fonction des autres données de l'énoncé.

La conductivité thermique de la neige est fonction de sa densité : plus la neige a une masse volumique faible, plus elle contient de l'air et donc plus elle est isolante. La neige fraîche non tassée possède une conductivité thermique proche de celle du polystyrène, de l'ordre de 0,1 W.m^{-1}.K^{-1}. Par contre, pour de la neige tassée, celle-ci peut monter à 1 W.m^{-1}.K^{-1}. La puissance surfacique solaire au niveau du sol dépend fortement de l'époque de l'année et de la latitude du lieu. Typiquement, dans le Nord de la France, P_s tombe à environ 200 W.m^{-2} vers mi-décembre et atteint presque 600 W.m^{-2} à la fin de l'hiver (mi-mars). Enfin, la valeur de h varie de 5 W.m^{-2}.K^{-1} (absence totale de vent) à 30 W.m^{-2}.K^{-1} (vent soutenu).

5) Discuter, applications numériques à l'appui, sur la possibilité d'un petit caillou de faire fondre la neige autour de lui.

3.15 Réchauffement planétaire

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : rayonnement, bilan thermique.

La Terre est en équilibre thermique : l'énergie thermique reçue de la part du Soleil est entièrement renvoyée vers l'Espace. De ce bilan radiatif va dépendre la température moyenne sur notre planète. L'atmosphère terrestre joue en particulier un rôle fondamental

dans les transferts thermiques en assurant une température propice à l'existence d'eau liquide et à la vie…

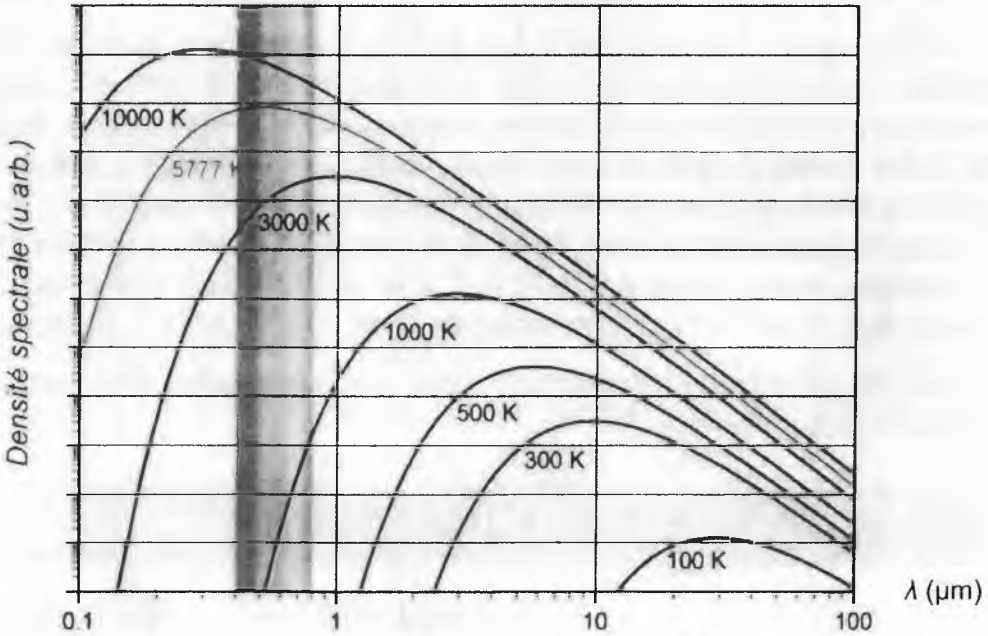
La Terre vue depuis la mission Apollo 17 en 1972

Cliché : NASA (domaine public)

La loi de Planck, établie en 1900 par Max Planck, donne la densité volumique spectrale d'énergie rayonnée par un corps noir en équilibre thermique à la température T :

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}$$

Le graphe suivant propose le tracé de cette densité spectrale d'énergie en fonction de la longueur d'onde λ pour différentes températures T (*attention :* échelles logarithmiques).



Auteur : Sch (licence cc)

La densité spectrale possède un maximum à une longueur d'onde λ_{max} pour chaque température T. La relation entre λ_{max} et T constitue la *loi du déplacement de Wien*. On rappelle les valeurs de la constante de Planck $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s, de la constante de Boltzmann $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} et de la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}.

1) Mesurer λ_{max} pour chaque température T proposée sur le graphe précédent et tracer λ_{max} en fonction de $1/T$. En déduire la loi du déplacement de Wien sous la forme :

$$\lambda_{max}\, T = C$$

où C est une constante dont on donnera la valeur numérique. Comparer à la position du maximum obtenu en dérivant la loi de Planck :

$$\lambda_{max} = \frac{1}{4{,}965}\frac{hc}{k_B T}$$

La température à la surface du Soleil est de $5{,}78.10^3$ K.

2) Déduire de la loi de Wien la longueur d'onde λ_{max} du maximum de la densité spectrale émise par le Soleil. Dans quel domaine spectral trouve-t-on le maximum de rayonnement. Pouvait-il en être autrement ?

3) Que peut-on dire de la température des étoiles qui apparaissent plus rouges ou plus bleutées que le Soleil ? Commenter l'intérêt de la loi de Wien en astronomie.

En intégrant la loi de Planck sur tout le spectre, on obtient la puissance totale surfacique émise par un corps noir en équilibre thermique à la température T. Ce résultat constitue la *loi de Stefan-Boltzmann* et se met sous la forme :

$$p_{surf} = \sigma T^4$$

où $\sigma = \frac{\pi^2}{60}\frac{k_B^4}{c^2\hbar^3}$ est la constante de Stefan, avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Le Soleil, assimilé à un corps noir, a un rayon équatorial $R_S = 6{,}96.10^5$ km. La Terre, quant à elle, est en orbite quasi-circulaire autour du Soleil, à une distance $d = 150.10^6$ km.

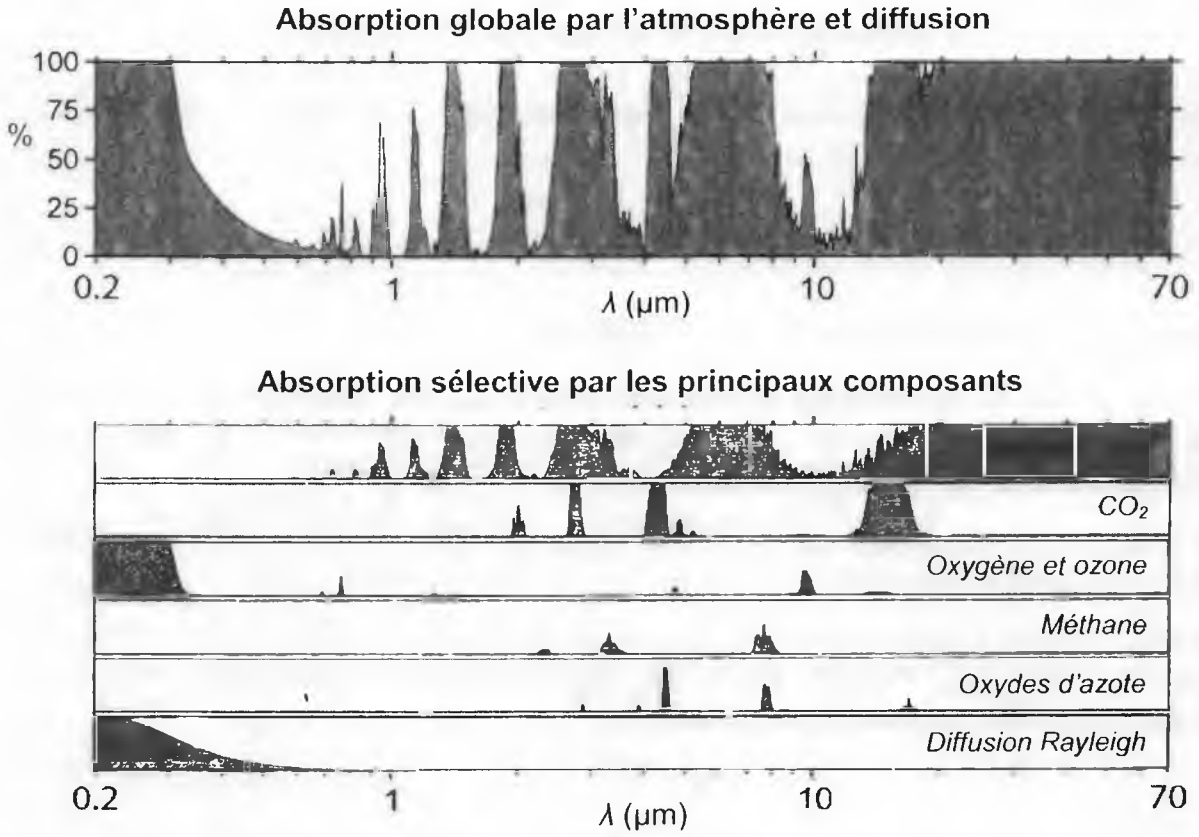
4) Calculer numériquement la constante de Stefan et préciser son unité.

5) Déterminer la puissance totale libérée par le Soleil. En déduire la valeur de la *constante solaire* A_0, définie comme la puissance solaire surfacique reçue au niveau de la Terre, avant de traverser l'atmosphère.

La Terre, de rayon $R_T = 6{,}37.10^3$ km, est également assimilée à un corps noir. Cependant l'atmosphère qui l'entoure, les nuages, ainsi que certaines zones géographiques comme les océans ou les régions polaires, réfléchissent une partie du rayonnement incident. Cet effet, appelé *albédo*, est caractérisé par un coefficient de réflexion global $\alpha = 29{,}8\,\%$ en puissance. La période de rotation de la Terre étant très faible devant les durées caractéristiques des transferts thermiques, on considèrera des grandeurs moyennées sur toute la surface terrestre.

6) Montrer que la puissance solaire incidente reçue en moyenne par unité de surface en haut de l'atmosphère vaut $\frac{A_0}{4}$ et l'évaluer numériquement.

La figure page suivante présente le coefficient d'absorption global d'une onde électromagnétique par l'atmosphère terrestre en fonction de la longueur d'onde, ainsi que l'absorption sélective due aux principaux composants atmosphériques.



7) Que peut-on dire de l'atmosphère dans la gamme de longueurs d'onde du rayonnement solaire incident ? En déduire la puissance surfacique moyenne reçue par la Terre au niveau du sol.

8) Déterminer la température moyenne qui règnerait à la surface de la Terre si le rayonnement incident était réémis directement vers l'Espace. Commenter.

Des mesures par satellite ont permis de déterminer une température moyenne réelle de 288,0 K à la surface de la Terre.

9) Déterminer la longueur d'onde correspondant au maximum de rayonnement terrestre. Dans quelle gamme du spectre se trouve-t-on ? Comment se comporte globalement l'atmosphère dans cette gamme spectrale ?

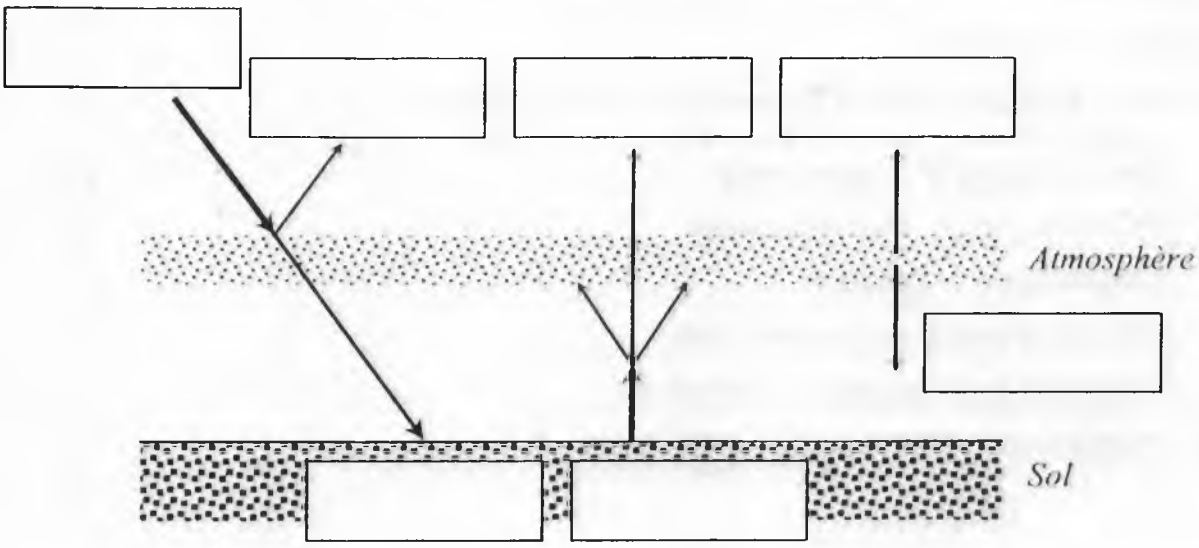
10) Evaluer la puissance surfacique moyenne rayonnée par la Terre au niveau du sol. Comparer à la puissance surfacique moyenne reçue de la part du Soleil. En déduire la puissance surfacique moyenne supplémentaire rayonnée par l'atmosphère vers le sol. Pourquoi parle-t-on de *forçage radiatif* ? Quel nom usuel est donné à cet effet ?

11) L'atmosphère rayonne autant vers le sol que vers l'Espace. Comparer alors les puissances surfaciques moyennes reçues par la Terre et réémise vers l'Espace. En déduire la puissance surfacique moyenne rayonnée par la Terre et traversant directement l'atmosphère sans être absorbée. Préciser la fenêtre spectrale correspondant à ce rayonnement direct.

12) Compléter (ou reproduire) le schéma suivant avec les valeurs numériques des puissances surfaciques moyennes, afin d'établir le bilan radiatif total pour la Terre. Préciser la gamme de longueurs d'onde correspondant à chaque flux. Indiquer la part due au forçage radiatif. Vérifier que l'équilibre thermique est bien réalisé.

Bilan radiatif de la Terre

Compléter les cadres avec la puissance surfacique moyenne correspondante



Le forçage radiatif est dû à 80 % à la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère terrestre. On se propose de déterminer l'influence de la concentration en dioxyde de carbone (CO_2) sur la température moyenne de la Terre.

Des mesures par carottage de la glace en Antarctique montrent que la concentration en CO_2 dans l'atmosphère « avant l'ère industrielle » (typiquement avant 1800) était de 280 ppmv (parties par million en volume, c'est-à-dire 0,0280 % du volume de l'atmosphère). La concentration en CO_2 a atteint 395 ppmv fin 2013.

La *formule de Myhre* modélise le forçage radiatif supplémentaire dû au CO_2 atmosphérique par rapport à la situation de référence où la concentration valait C_0 = 280 ppmv :

$$F = a \ln \frac{C}{C_0}$$

où C est la concentration en CO_2 (en ppmv) et a = 5,35 W.m^{-2}.

13) Expliquer pourquoi le CO_2 joue a priori un rôle particulier dans le bilan radiatif de la Terre. Montrer que le forçage radiatif dû au CO_2 présente une saturation en concentration. Discuter l'origine possible de cette saturation.

14) Calculer le forçage radiatif supplémentaire dû au CO_2 apparu depuis le début de l'ère industrielle. En déduire la variation ΔT de la température moyenne de la Terre depuis cette époque.

15) Evaluer de même les variations de la température moyenne de la Terre en considérant un doublement, puis un triplement, de la concentration en CO_2 depuis le début de l'ère industrielle. Commenter : le rôle du CO_2 est-il déterminant pour le bilan radiatif de la Terre ?

Des études récentes montrent que la concentration de CO_2 a déjà énormément varié au cours des âges (en atteignant parfois plus de dix fois la concentration actuelle), tout en suivant les variations de température de la Terre, donc sans en être la cause. La température sur Terre serait en fait directement déterminée par des paramètres astronomiques, comme l'excentricité de sa trajectoire ou l'inclinaison de son axe de rotation, en lien direct avec les épisodes de glaciation dans le passé.

16) Evaluer, à titre d'exemple, la variation de la température moyenne sur Terre si la distance Terre-Soleil variait de 1 %. Conclure.

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 3 :

10.2	Désembuage d'un pare-brise
10.5	Puissance d'un sèche-cheveux
10.7	Champagne ! partie 1
10.10	Circuits électriques domestiques
10.12	Capacité membranaire d'une cellule
10.16	Restauration de monuments par laser

CHAPITRE 4

MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS

4.1 Risque de basculement d'une caisse

TECHNICITE : ** INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : force d'inertie d'entraînement.

Un camion contient dans sa cargaison une caisse homogène de hauteur h à section carrée de côté a. Le transporteur étourdi ne l'ayant pas attachée, on étudie le risque que la caisse se renverse suivant les mouvements du camion :

1ère situation

Le camion arrive avec une vitesse V_0 sur un feu qui vient de passer au rouge. Le conducteur freine alors brutalement, avec une décélération supposée constante.

1) Exprimer la distance de freinage minimale pour que la caisse ne bascule pas.

2ème situation

Le camion s'engage dans un virage dont le rayon de courbure vaut R.

2) Exprimer la vitesse maximale du camion afin que la caisse ne bascule pas.

Application numérique : $h = 2$ m, $a = 1$ m, $V_0 = 40$ km/h, $g = 9{,}8$ m.s^{-2} et $R = 20$ m.

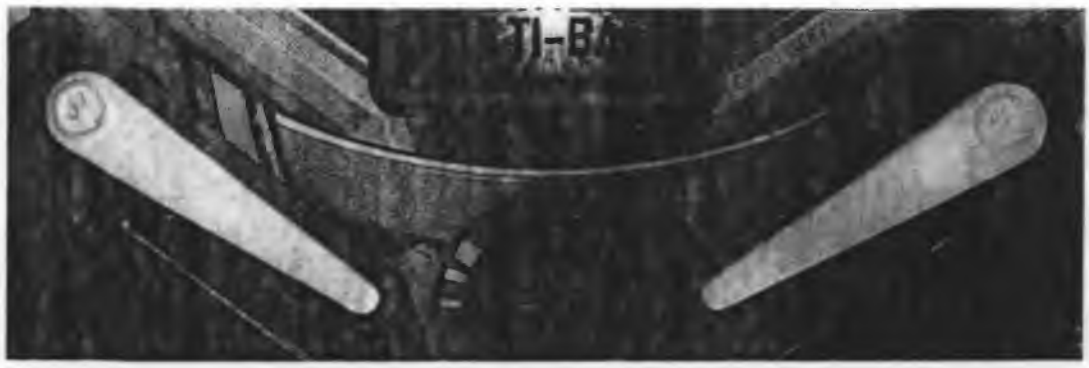
4.2 Etude d'un flipper

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : composition des vitesses, forces d'inertie, étude énergétique.

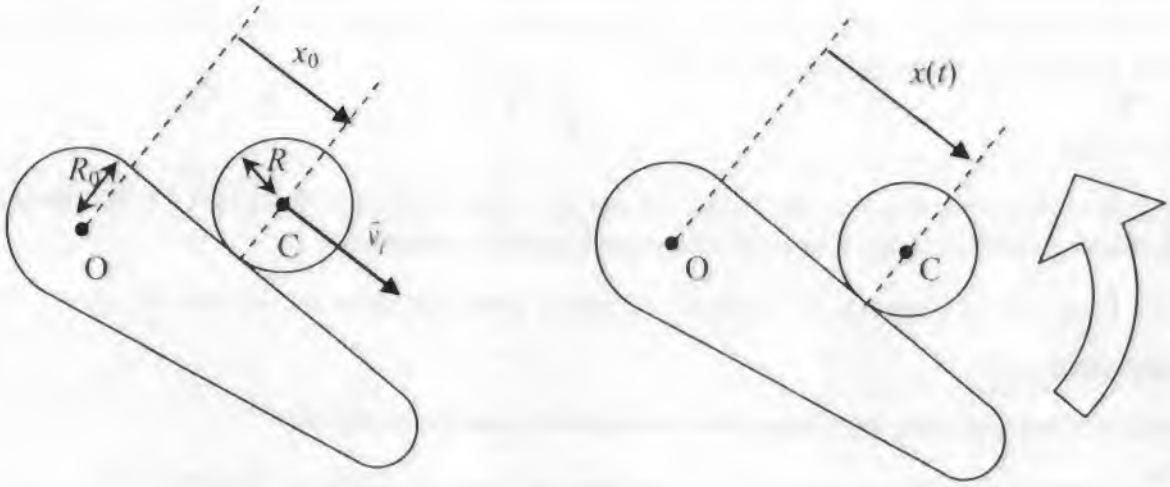
On se propose d'étudier le renvoi d'une boule par l'un des deux bras amovibles, appelés « *flippers* » dans un jeu de flipper (ou « billard électrique » en français).

Bras amovibles (*flippers*) d'un flipper



auteur : ElHeineken (licence CC)

Afin de simplifier la modélisation, on néglige l'inclinaison du plateau sur lequel évolue la boule (en pratique, cette inclinaison varie entre 3° et 6° suivant le flipper). La boule possède un rayon R et une masse m. La forme du bras amovible est représentée sur la figure ci-dessous. Le centre de la boule est repéré par l'abscisse $x(t)$. A la date $t = 0$, la boule est à l'abscisse x_0 et possède une vitesse v_t dans le référentiel du plateau. A ce moment précis, le bras se met en rotation : il acquiert instantanément une vitesse angulaire Ω, qui reste constante, puis s'arrête brutalement après avoir tourné d'un angle α. On suppose que la boule reste toujours en contact avec le bras pendant que ce dernier effectue sa rotation.



Dans la première question, on néglige la rotation de la boule sur elle-même ainsi que les frottements entre la boule et le bras.

1) En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la boule dans un référentiel que l'on précisera, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ faisant intervenir uniquement Ω.

Pour tenir compte de la rotation propre de la boule, on peut effectuer un raisonnement énergétique. Dans le référentiel lié au bras du flipper, en supposant que la boule roule sans glisser sur celui-ci, on montre que l'énergie cinétique de la boule, supposée homogène, a pour expression :

$$E_c = \frac{7}{10} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Dans le référentiel lié au bras du flipper, la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{p,ie}(r)$ qui ne dépend que de la distance r entre le centre C de la boule et l'axe de rotation du bras du flipper. L'expression rigoureuse de $E_{p,ie}(r)$ est complexe du fait de la forme de la boule, mais il est possible d'en obtenir une expression approchée en ramenant toute la masse de la boule en son centre.

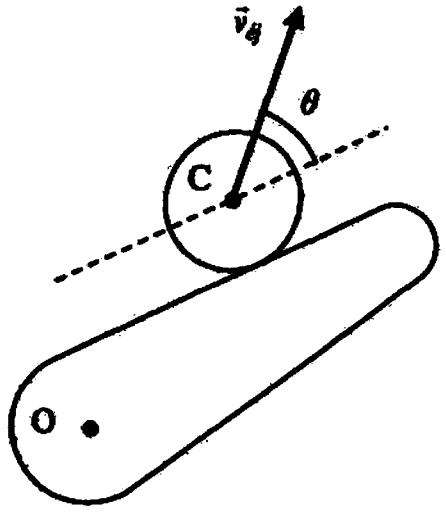
2) Etablir une expression de $E_{p,ie}(r)$ compte tenu de cette approximation.

3) Justifier que l'énergie mécanique de la boule se conserve. En déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x(t)$ prenant cette fois-ci en compte la rotation de la boule.

4) La résoudre pour $t > 0$ en admettant que la vitesse de la boule dans le référentiel lié au bras du flipper vaut $v_0 = v_t + (R_0 + R)\Omega$ à $t = 0^+$. Afin d'alléger les calculs littérales, on gardera v_0 dans les expressions demandées.

On raisonne dans les deux questions suivantes au moment où le bras du flipper arrive en bout de course.

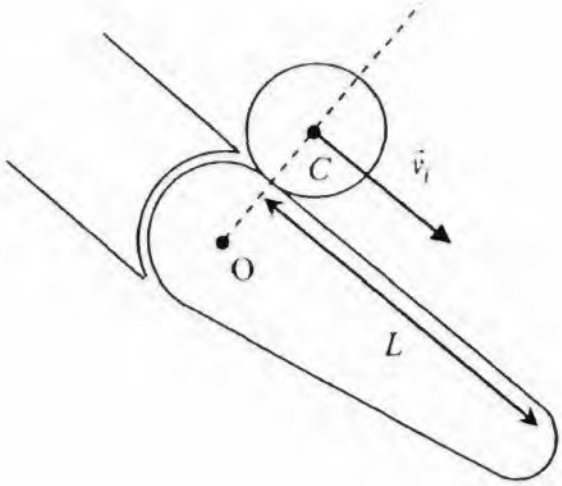
5) Exprimer l'angle θ que fait la vitesse de la boule $\vec{v}_{éj}$ avec le bras dans le référentiel lié au plateau du flipper (voir figure ci-dessous) ainsi que la norme de cette vitesse $v_{éj} = |\vec{v}_{éj}|$. Pour ne pas alourdir les expressions, il est conseillé d'introduire de nouveaux paramètres au problème.



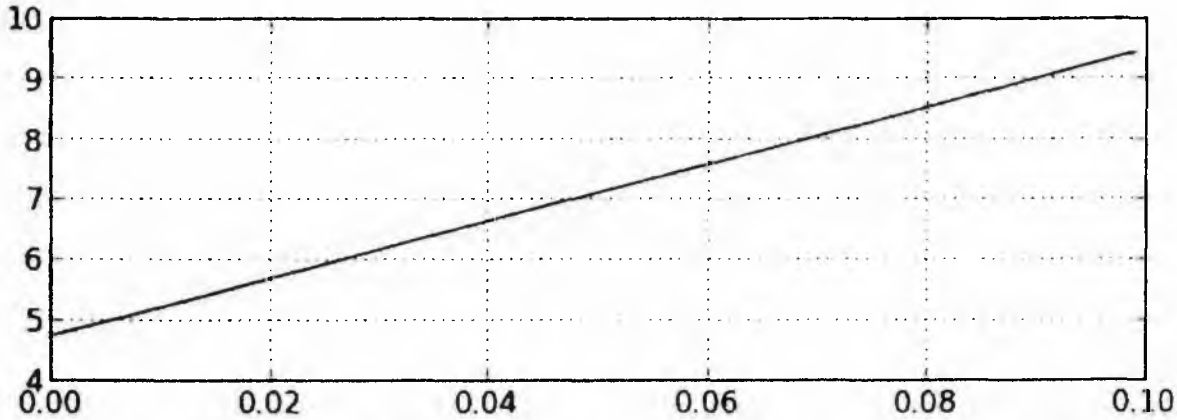
Un flipper standard possède des boules en acier de 27 mm de diamètre. Sauf exception, l'espacement entre les extrémités des deux bras du flipper correspond à deux fois le diamètre des boules. Un joueur décide de déclencher la rotation du bras au bout d'un temps t_R après que le centre de la boule ait traversé le plan (en pointillé sur la figure page suivante) pour lequel $x = 0$. On note L la longueur du bras.

6) Comment adapter l'ensemble des résultats précédents à cette situation ?

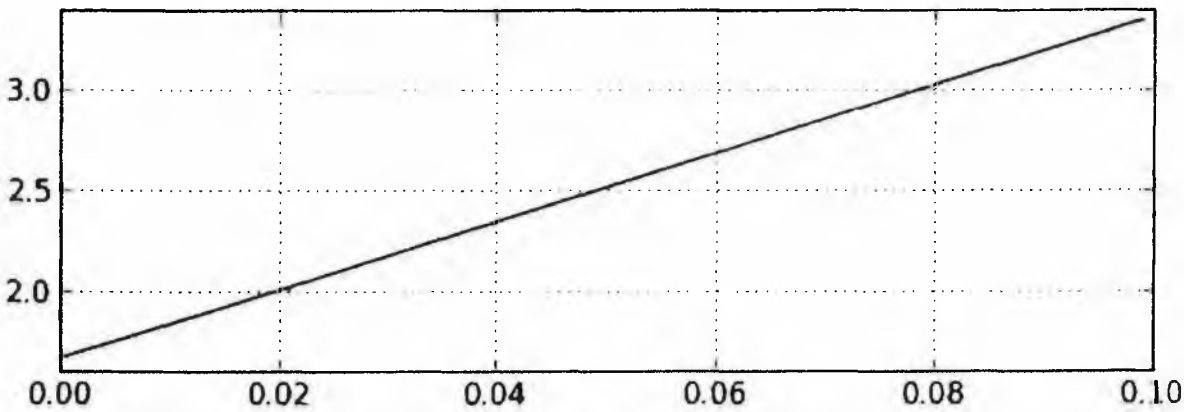
7) Estimer les valeurs numériques de R, R_0 et L d'après les données et la photo.



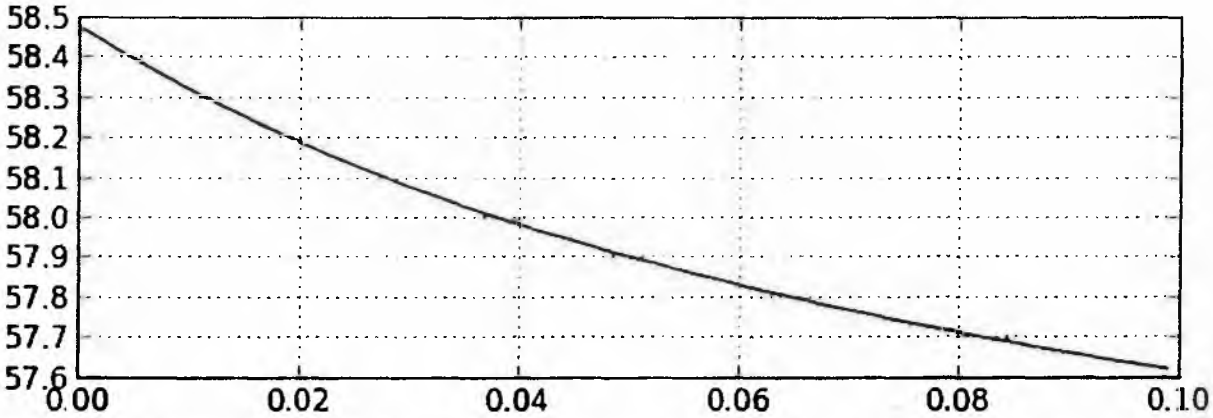
Les graphes suivants représentent l'abscisse x de la boule à la fin de la rotation du bras, sa vitesse d'éjection $v_{éj}$ et l'angle d'éjection θ en fonction de t_R, exprimé en seconde. Ces graphes ont été tracés à partir des expressions déterminées dans les questions précédentes et des données suivantes : $v_i = 0{,}3$ m.s^{-1}, $\Omega = 30$ rad.s^{-1} et $\alpha = 70°$.



abscisse x (en cm) de la boule lors de l'éjection en fonction de t_R (en s)



vitesse d'éjection de la boule (en m.s^{-1}) en fonction de t_R (en s)



angle d'éjection de la boule (en °) par rapport au bras en fonction de t_R (en s)

8) Déterminer le domaine de validité des graphes. Dans ce domaine, le joueur a-t-il une grande marge de manœuvre pour choisir la direction de renvoi de la boule ? Pourquoi un joueur a-t-il en pratique un choix plus large d'angle d'éjection ?

Afin d'obtenir une *extra-ball*, un joueur doit viser une cible de 2 cm de largeur située au centre du flipper à environ un mètre des bras. Pour cela, il doit déclencher le bras au bon moment !

9) En supposant que l'on se situe dans le domaine de validité des graphes, estimer la largeur temporelle de la fenêtre de tir pour avoir cette *extra-ball*.

10) L'hypothèse de considérer le plateau du flipper horizontal pour l'étude du lancer de la boule vous paraît-elle pleinement justifiée ? Répondre par un raisonnement semi-quantitatif.

4.3 Points de Lagrange

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : force centrale, force d'inertie d'entraînement, stabilité.

Le télescope spatial Herschel a été envoyé dans l'espace le 14 mai 2009. Il permet de prendre des images dans le domaine de l'infra-rouge lointain (longueur d'onde millimétrique) d'objets qui ne seraient pas ou très peu discernables dans le domaine visible (grains de poussière et gaz formant une nébuleuse par exemple). Le télescope tourne actuellement autour d'un point de l'espace appelé « point de Lagrange L2 » du système Soleil-Terre. Ce problème propose de comprendre la particularité de ce point.

Télescope Herschel en phase finale d'assemblage

© ESA

Vue de la nébuleuse de la tête de cheval par le télescope Herschel

© ESA

On introduit le référentiel héliocentrique R_H supposé galiléen, ayant pour origine le centre de masse S du Soleil et dont les axes pointent trois étoiles lointaines. On considère le référentiel R' de repère $Sx'y'z'$ direct défini de la façon suivante :

- axe Sx' dirigé selon la droite ST où T représente le centre de masse de la Terre.
- axe Sz' pointant une étoile lointaine.

On suppose que la trajectoire de la Terre autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique R_H est circulaire de rayon D. On note G la constante de gravitation, M_S et M_T les masses respectivement du Soleil et de la Terre.

1) Montrer à l'aide de la loi du moment cinétique que la vitesse angulaire Ω de la Terre autour du Soleil dans R_H est nécessairement constante. A l'aide de la loi de la quantité de mouvement, donner son expression en fonction de G, M_S et D.

On considère un point matériel M de masse m situé sur l'axe Sx' à une distance $d << D$ de la Terre, côté opposé au Soleil.

2) Montrer que si $d = D\left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{\frac{1}{3}}$, le point M est en équilibre dans le référentiel R'.

On appelle cette position le point de Lagrange L2. Pour aboutir à cette expression de d, on prendra en compte le fait que $d << D$ et $M_T << M_S$ dans les calculs.

3) Application numérique : calculer d sachant que D = 150 millions de km, $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg et $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg.

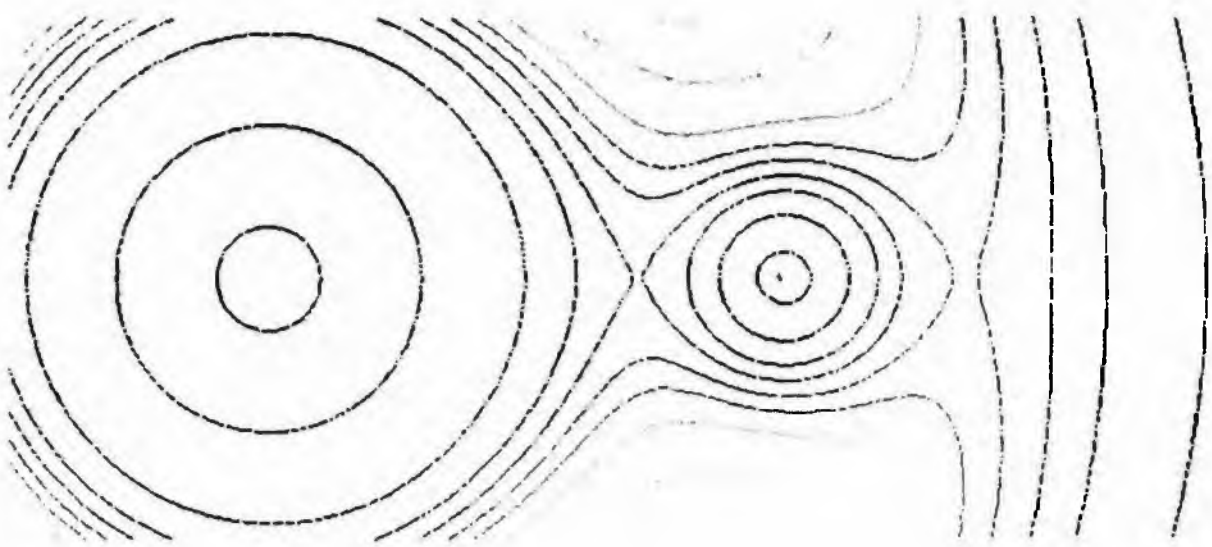
4) Etudier **sans calcul supplémentaire** la stabilité de cet équilibre selon l'axe Sx'.

5) Montrer qu'il existe un autre point de Lagrange, appelé L1, entre le Soleil et la Terre. A quelle distance de la Terre est-il situé ?

6) Montrer que la force centrifuge exercée sur M dans R' dérive d'une énergie potentielle que l'on calculera. On pourra utiliser le repère et les coordonnées cylindriques pour cette question.

7) Exprimer l'énergie potentielle totale (gravitationnelle + axifuge) du point M. Lorsque celui-ci est en mouvement dans R', quelle force supplémentaire apparaît ?

Le dessin ci-contre représente les courbes équipotentielles de l'énergie potentielle totale du point M dans le cas où $d = 0{,}3D$.



8) Indiquer où se situent le Soleil, la Terre, les points de Lagrange L1 et L2. Tracer quelques lignes de champ de forces. En déduire la stabilité des points de Lagrange dans le plan perpendiculaire à l'axe Soleil-Terre.

Remarque : le télescope Herschel tourne autour du point de Lagrange L2 à une distance comprise entre 500 000 km et 800 000 km. Tous les 23 jours un réajustement de la trajectoire est fait (compte tenu de son instabilité) à l'aide de rétrofusées utilisant de l'hydrazine comme carburant.

Enfin, on peut préciser qu'il existe au total cinq points de Lagrange différents dans le système Soleil-Terre. Le lecteur intéressé trouvera de multiples explications détaillées sur le site de wikipédia dans l'article « point de Lagrange ».

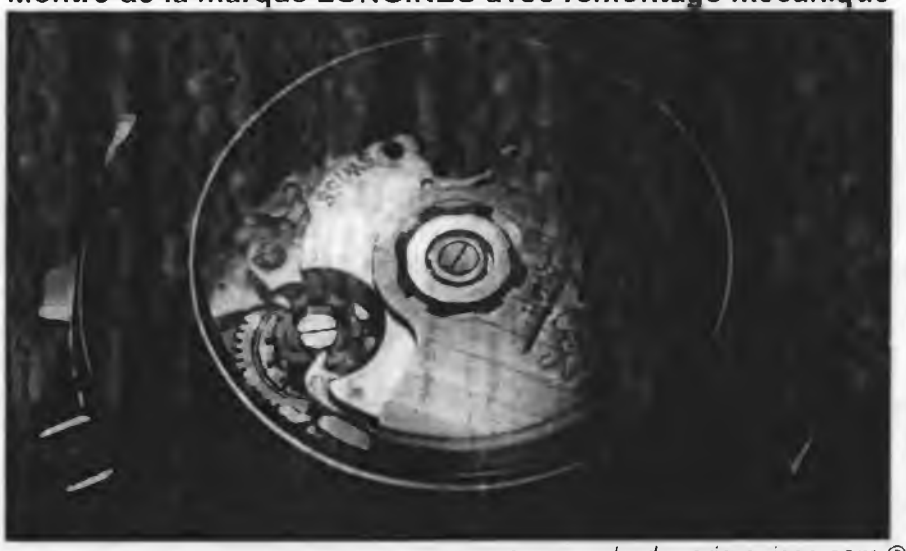
4.4 Optimisation d'une montre automatique

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

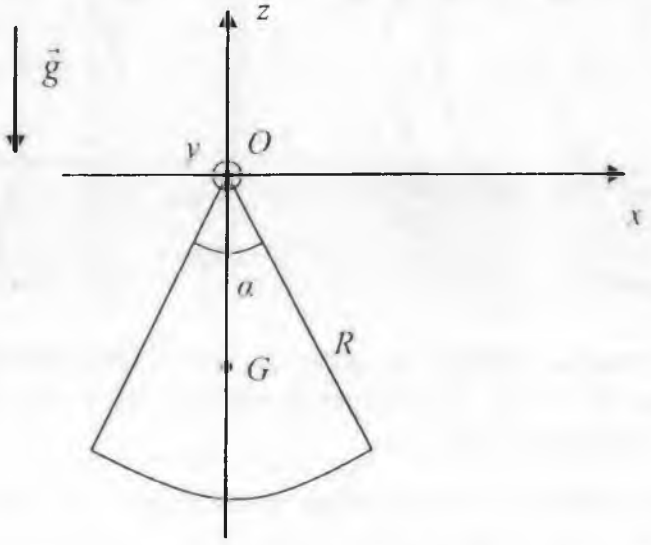
MOTS-CLES : loi du moment cinétique, force d'inertie d'entraînement, énergie.

Une montre automatique fonctionne sans pile. Elle se « remonte » automatiquement à l'aide des mouvements du poignet. En effet, à l'intérieur de la montre se trouve une masse (généralement un demi-disque, comme le montre la photo ci-dessous) qui permet en tournant (quelque soit le sens de rotation) de remonter le ressort en spirale faisant fonctionner la montre. Le but de ce problème est de déterminer si c'est bien un demi-disque qui optimise la transmission d'énergie.

Montre de la marque LONGINES avec remontage mécanique



source : www.horlogerie-suisse.com ©



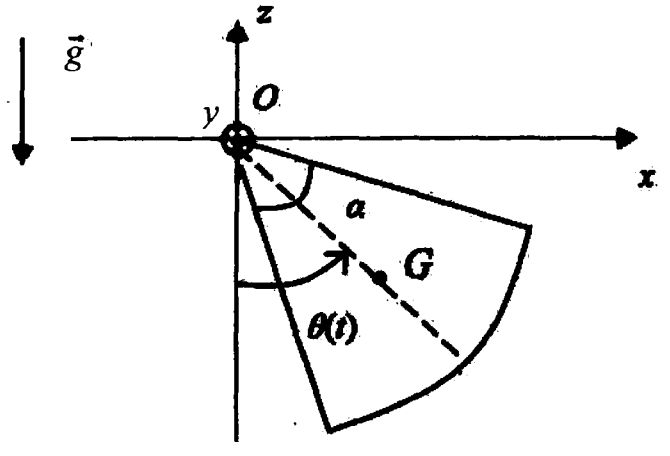
On considère pour cela un morceau de disque homogène de masse surfacique σ, de rayon R, d'angle au sommet α (compris entre 0 et 2π) attaché en O et pouvant osciller sans frottement (liaison pivot parfaite) autour de l'axe Oy. Le moment par rapport à cet axe vaut $J = mR^2/2$, où m désigne sa masse.

1) Calculer m en fonction de σ, R et α.

2) Déterminer la position du barycentre G en montrant que $OG = \dfrac{4\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\alpha}R$, quantité notée d pour la suite.

La montre se portant au poignet et ce dernier étant souvent en mouvement, le référentiel R' ayant pour repère $Oxyz$ n'est pas galiléen. On se place dans le cas où R' est en translation rectiligne non uniforme selon Ox avec une accélération du point O dans le référentiel terrestre R galiléen variable au cours du temps valant $\vec{a}_{O/(R)} = a_0(t)\vec{e}_x$.

3) Appliquer la loi du moment cinétique en O au morceau de disque pour obtenir une équation différentielle en $\theta(t)$, angle repérant la rotation du morceau de disque autour de l'axe Oy.



On se place dans le cas particulier où, à $t = 0$, le poignet et le morceau de disque sont immobiles dans le référentiel terrestre. Puis, pendant le court intervalle de temps $[0,\tau]$, le poignet subit une accélération $a_0(t)$ de sorte qu'il acquiert à la date $t = \tau$ une vitesse v_F.

4) Si l'angle θ reste suffisamment petit pendant cet intervalle, $\ddot{\theta}(t)$ est proportionnel à $a_0(t)$. Déterminer le coefficient de proportionnalité.

5) Calculer l'énergie cinétique acquise par le morceau de disque à la date τ en fonction de v_F, R, σ et α.

6) En supposant que cette énergie est intégralement transférée au ressort (par un mécanisme non précisé ici), montrer qu'il existe une valeur de α, notée α_0, qui permet de remonter le plus possible le ressort de la montre. On déterminera la valeur numérique de α_0 par une méthode numérique.

7) Ecrire deux conditions sur τ pour que l'hypothèse faite à la question 4 soit valable. Leur donner une signification physique simple.

Vous pourrez trouver à l'adresse suivante un petit historique des montres à remontage automatique ainsi qu'un descriptif de différentes techniques de remontage :

http://www.horlogerie-suisse.com/Complications/Chap1.htm

4.5 Oscillation d'une benne de téléphérique

TECHNICITE : *** INITIATIVE : ***

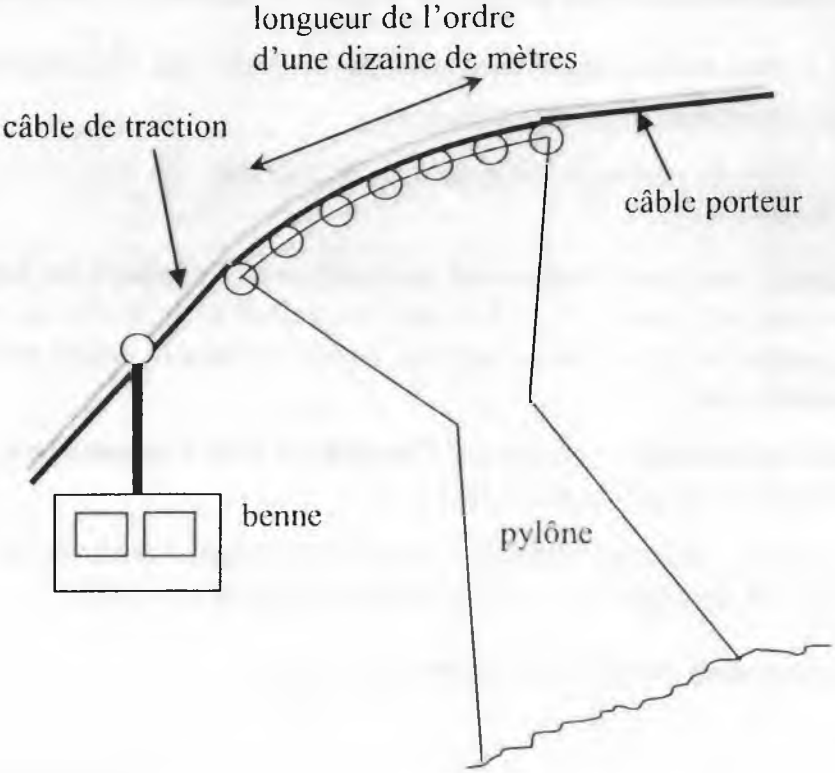
MOTS-CLES : force d'inertie d'entraînement.

Le téléphérique de l'Aiguille du Midi, situé à Chamonix-Mont-Blanc en Haute-Savoie, est constitué de deux tronçons distincts. Contrairement au deuxième tronçon, le premier comporte des pylônes le long du trajet. Juste après le passage de chacun de ces pylônes, la benne se met à osciller avec une amplitude relativement faible mais bien perceptible par les occupants de la cabine (sensation garantie !).

Benne du premier tronçon du téléphérique de l'Aiguille du Midi

Auteur : Clément Raoux (licence CC)

Schéma de la benne arrivant sur l'un des pylônes de la ligne

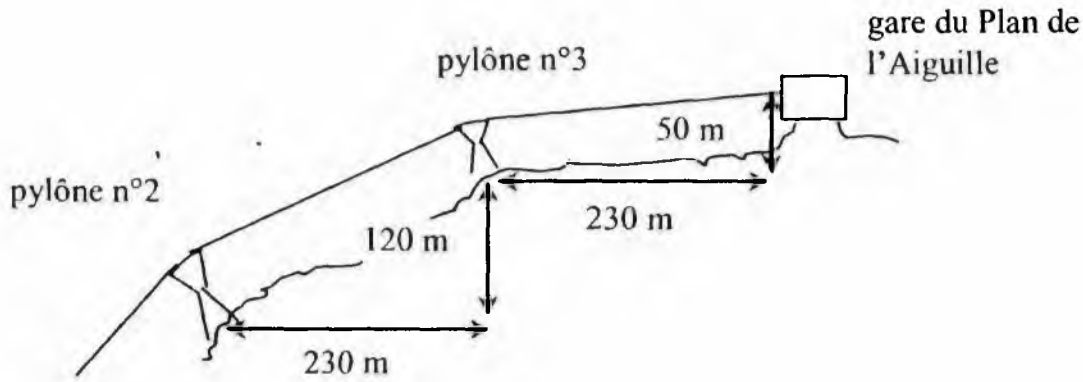


DOCUMENT : d'après les sites internet « Wikipédia.fr » et « geoportail.gouv.fr »

Les caractéristiques du premier tronçon du téléphérique de l'Aiguille du Midi sont les suivantes :

Départ à Chamonix : altitude 1038 m.
Arrivée au Plan de l'Aiguille : altitude 2317 m.
Longueur du parcours : 2553 m.
Temps moyen du parcours : 8 minutes.
Trois pylônes intermédiaires de hauteurs respectives 70, 40 et 25 m.
Capacité de la benne : 75 personnes
Charge maximale : 5040 kg

L'allure de la fin du parcours est représentée sur le schéma ci-dessous :



A l'aide de la photo, du schéma et du document, élaborer un modèle pour estimer l'amplitude des oscillations de la benne après le passage du pylône n°3. Des initiatives peuvent être attendues, telles que de nouveaux paramètres à introduire, des hypothèses simplificatrices à effectuer etc.

4.6 Déviation vers l'Est : théorie et expérience

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : force d'inertie de Coriolis, étude statistique, force de traînée.

Pour la grande majorité des expériences de mécanique, le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen. Cela peut ne plus être le cas dans certaines expériences de longue durée ou de grande précision, dans lesquelles la rotation de la Terre sur elle-même doit être prise en compte. En particulier, la chute libre d'un corps sans vitesse initiale ne s'effectue pas tout à fait selon la verticale locale : la trajectoire subit en effet une très légère déviation dans la direction de la vitesse de rotation de la Terre, c'est-à-dire vers l'est. Dans le cas d'un corps lâché d'une hauteur h, les deux savants Laplace et Gauss déterminèrent en 1803 l'expression de la distance d entre le point d'impact au sol et la verticale locale (celle-

ci étant obtenue à l'aide d'un fil lesté immobile) en négligeant les frottements de l'air. Le problème propose dans un premier temps de retrouver cette formule puis de confronter le résultat obtenu avec ceux issus d'une expérience que réalisa Reich en 1831.

On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour d'elle-même. L'expérience est supposée se situer à une latitude φ (angle que fait le segment reliant le centre de la Terre au lieu de l'expérience avec l'équateur). On note g la pesanteur sur le lieu de l'expérience et l'on introduit le repère $Oxyz$ associé au référentiel terrestre tel que :

- l'axe Oz soit selon la verticale locale ascendante,
- l'axe Ox soit dirigé vers l'Est,
- l'objet, de masse m, soit lâché sans vitesse initiale du point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = h\vec{e}_z$.

1) Rappeler les définitions des référentiels terrestre et géocentrique.

2) Faire un schéma de la Terre en faisant apparaître le repère choisi ainsi que les différents paramètres (on pourra introduire le vecteur rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique).

3) En supposant dans un premier temps que le référentiel terrestre est galiléen, déterminer le vecteur vitesse de l'objet en fonction du temps.

On peut étudier l'effet du caractère non galiléen du référentiel terrestre par la méthode des perturbations, constituée de deux étapes :

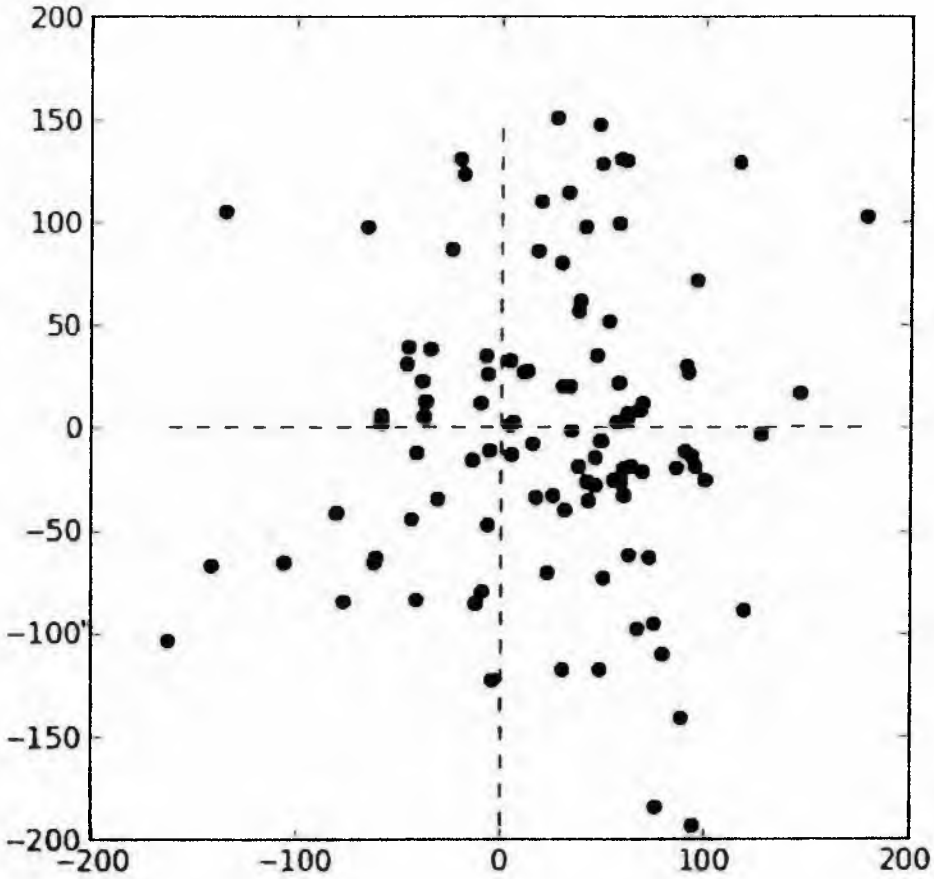
- on calcule la force supplémentaire agissant sur l'objet du fait du caractère non galiléen du référentiel terrestre en utilisant l'expression du vecteur vitesse en l'absence de cette force.
- on détermine la nouvelle expression du vecteur vitesse compte tenu de cette force supplémentaire.

4) Appliquer la méthode des perturbations et trouver l'expression approchée du vecteur vitesse prenant en compte la rotation de la Terre sur elle-même. Doit-on prendre en compte la force d'inertie d'entraînement ? Justifier.

5) En déduire que la déviation d au niveau du sol s'effectue bien vers l'Est et montrer que :

$$d = \frac{2}{3}\Omega\cos(\varphi)\sqrt{\frac{2h^3}{g}}$$

Une des plus célèbres confrontations expérimentales de cette formule a été effectuée par Ferdinand Reich en 1831 dans un puits de mine près de la ville de Freiberg en Allemagne, dont la latitude vaut 50,9°. Il réalisa environ une centaine de chutes de boulets de canon sur une hauteur h égale à 158,5 mètres. Reich utilisa principalement deux types de boulets : la plupart avaient une masse de 270 g et un diamètre de 40 mm ou bien une masse de 190 g pour un diamètre de 36 mm. Pour la plupart des essais, il utilisa une pince pour lâcher les boulets. La figure suivante représente la position des différents points d'impact, l'échelle des axes étant exprimée en mm. Sur la figure, la direction de l'est est selon Ox (vers la droite) et le nord selon Oy (vers le haut). Pour l'application numérique, on prendra $g = 9{,}8$ m.s^{-2} et $\Omega = 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}.



6) Calculer la déviation théorique d prédite par le modèle de Laplace et Gauss dans les conditions de l'expérience de Reich.

7) Les conditions de l'expérience de Reich permettent-elles de négliger les frottements de l'air ? Justifier de manière semi-quantitative.

8) La déviation a-t-elle toujours eu lieu en direction de l'Est ? Selon vous, comment expliquer la grande variation des résultats entre les différents lâchers ?

On donne la liste des coordonnées (x,y) des différents lâchers, exprimées en mm, telles qu'elles apparaissent dans l'article original rédigé par Reich :

N°	x	y
1	38,7	61,8
2	49,3	-6,3
3	-37,15	5,05
4	-60,75	-62,8
5	48,1	-6,65
6	-40,75	-83,6
7	179	102,8
8	37,7	56,95

N°	x	y
37	-80,15	-41,55
38	-58,6	6,2
39	66,8	-97,55
40	29,3	79,8
41	24,95	-33
42	30,9	-39,45
43	60,95	129,65
44	-61,85	-65,5

N°	x	y
73	4,6	-13,2
74	62,5	-62,1
75	69,15	11,85
76	42,5	-35,75
77	-34,4	38,3
78	32,95	20,25
79	-57,95	1,7
80	58,15	-26,5

9	-18,75	123,1
10	-36,95	12,45
11	69,45	-21,3
12	-5,55	-11,6
13	-77,05	-84,15
14	60,3	-19,65
15	-9,52	-79,85
16	63,7	-18,5
17	-6,6	26,5
18	74,95	-95,2
19	-12,85	-85
20	52,7	51,9
21	-4,5	-123
22	19,55	109,95
23	-9,75	11,65
24	61,5	7,3
25	116,55	129,3
26	-65,35	97,55
27	-14,4	-15,6
28	75,8	-184,35
29	88,1	-141,1
30	119,15	-88,8
31	16,65	-33,85
32	-105,85	-65,15
33	-41,15	-11,85
34	90	-11,7
35	17,55	86
36	49	128,7

45	41,6	-26,45
46	79,05	-110,55
47	-43,15	-44,55
48	90,9	30,65
49	56,6	2,6
50	72,65	-62,85
51	-45,45	31,05
52	3,75	0,75
53	22,8	-70,05
54	49,75	-72,55
55	146,6	16,55
56	46,1	-27,7
57	92,9	-13,8
58	60,15	-33,15
59	33,9	-1,15
60	91,35	26,65
61	67,85	8,3
62	-38,7	22,9
63	85,8	-19,6
64	37,35	-18,9
65	-23,9	86,85
66	46,55	34,9
67	96,05	71,7
68	-6,3	-47,4
69	45,4	-14,9
70	57,85	99,4
71	30,15	20,45
72	95	-18,9

81	61,4	4,8
82	6	2,9
83	12,8	27,85
84	55	-25,2
85	-7,15	34,9
86	41,09	97,2
87	-141,81	-66,9
88	-45,31	39,6
89	10,79	27,2
90	-134,66	104,75
91	47,19	147,55
92	127,19	-3
93	68,24	8,9
94	99,64	-25,4
95	57,94	130,8
96	29,6	-117,9
97	94,4	-193,8
98	48,65	-117,95
99	32,4	114,65
100	-30,95	-34,2
101	15	-8,1
102	57,85	21,95
103	-19,9	130,9
104	-163,3	-104
105	3,8	32,9
106	27	151,2

On rappelle les propriétés statistiques relatives à des incertitudes de type A : en effectuant un nombre de mesures N supérieur à 50 de la grandeur x, la valeur vraie de la grandeur mesurée a une probabilité d'environ 95 % de se situer dans l'intervalle :

$$\left[< x > - \frac{2\sigma_x}{\sqrt{N-1}}, < x > + \frac{2\sigma_x}{\sqrt{N-1}} \right]$$

où $< x >$ et σ_x désignent respectivement la moyenne et l'écart-type de la série de mesures de x.

9) En utilisant un tableur et en effectuant une étude statistique que l'on présentera avec soin, expliquer si les résultats expérimentaux de Reich sont compatibles avec la formule de Laplace et Gauss.

Les lecteurs intéressés sur l'historique de la force de Coriolis peuvent lire l'article de Théo Gerkema et Louis Gostiaux publié dans la revue *Reflets de la physique* à l'adresse :

http://www.refletsdelaphysique.fr/articles/refdp/pdf/2009/05/refdp200917p18.pdf

4.7 Principe d'un gyromètre vibrant

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

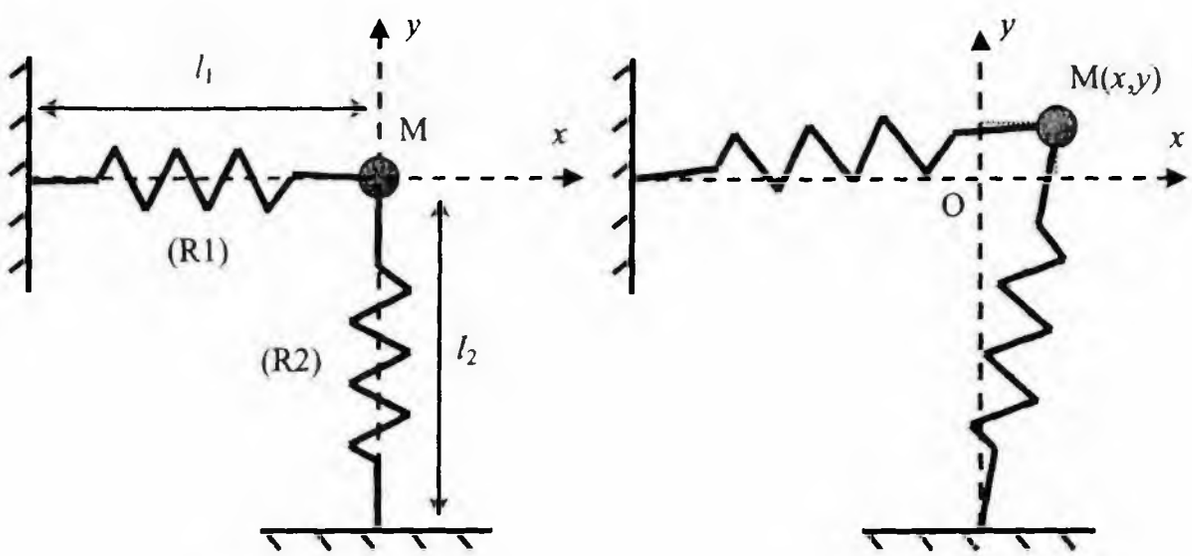
MOTS-CLES : oscillateur, force d'inertie de Coriolis.

Un gyromètre est un appareil permettant de mesurer une vitesse angulaire (c'est-à-dire une vitesse de rotation) par rapport à un référentiel galiléen (dit « inertiel »). Il existe plusieurs types de gyromètres, basés sur des principes physiques différents, les principaux étant :

- les gyroscopes à toupie, utilisant la conservation du moment cinétique d'un système pseudo-isolé,
- les gyromètres à fibres optiques, utilisant l'effet Sagnac,
- les gyromètres vibrants, utilisant la force de Coriolis.

Même s'il ne s'agit pas des gyromètres les plus performants, les gyromètres vibrants ont l'avantage majeur de pouvoir être miniaturisés et fabriqués à faible coût. Ils trouvent ainsi leurs applications dans des domaines variés : stabilisation de caméscopes, navigation automobile... Ce problème propose de comprendre le principe général de ce type de gyromètres en s'appuyant sur l'exemple du micro-gyromètre vibrant *VIG* développé par l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales).

La structure du gyromètre *VIG* est analogue à celle d'un diapason. Afin de simplifier les calculs, on remplace cette structure par un système masse-ressorts. On considère ainsi une masse ponctuelle m localisée au point M accrochée à deux ressorts (R1) et (R2) de constantes de raideur respectives k_1 et k_2 et de longueurs à vide l_1 et l_2. La masse est astreinte à se déplacer uniquement dans le plan horizontal Oxy, l'origine O étant la position de la masse à l'équilibre. Hors équilibre, la masse est repérée à la date t par ses coordonnées ($x(t), y(t)$) telles que x et y soient très petits devant l_1 et l_2. Dans tout le problème, on mettra à profit ces inégalités afin de linéariser les équations.

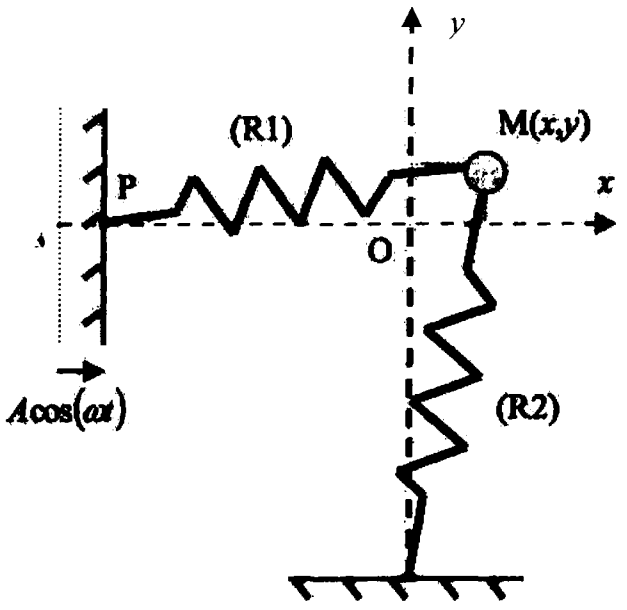


situation à l'équilibre situation hors équilibre

On suppose dans un premier temps que le référentiel de repère $Oxyz$ est galiléen et l'on néglige dans la première question tout frottement.

1) Etablir le système d'équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$. Préciser les deux pulsations caractéristiques du système, notées ω_x et ω_y, en précisant le mouvement de la masse (appelé « mode ») pour chaque pulsation.

On prend en compte les frottements dans la suite du problème : la masse, de vitesse $\vec{V}$, subit une force de frottement de la forme $\vec{F}_{frott} = -\beta\vec{V}$. Par ailleurs, on excite le système en déplaçant le point d'attache P du ressort (R1) de manière sinusoïdale selon l'axe Ox. Plus précisément, l'abscisse de P sur Ox est de la forme $x_P(t) = A\cos(\omega t) - l_1$.



cas de la vibration du point d'attache P du ressort (R1)

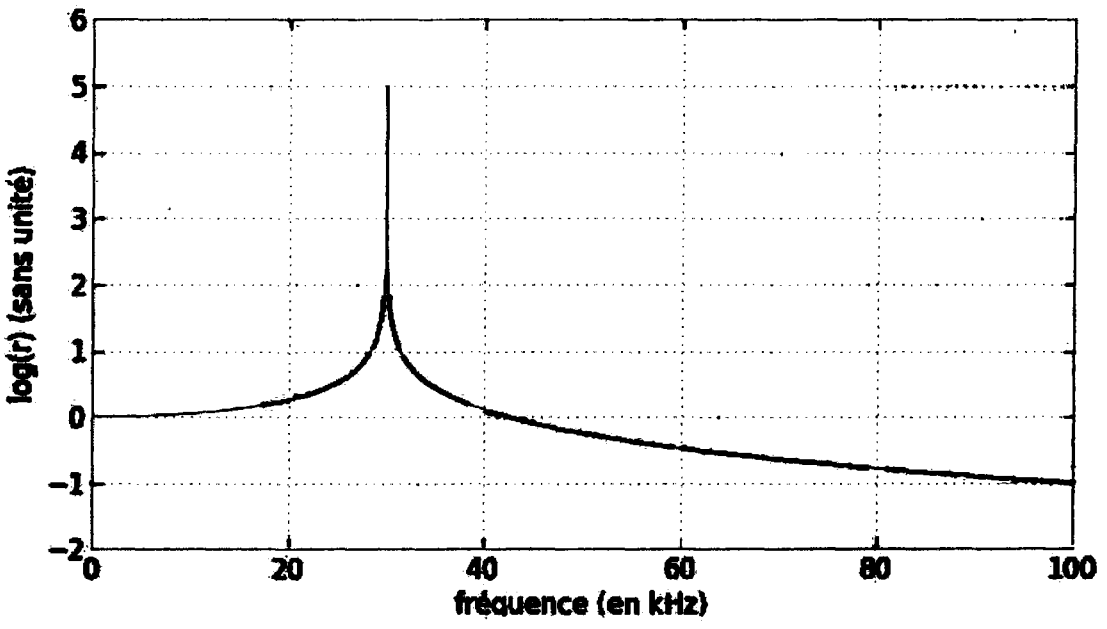
2) Déterminer le nouveau système d'équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$.

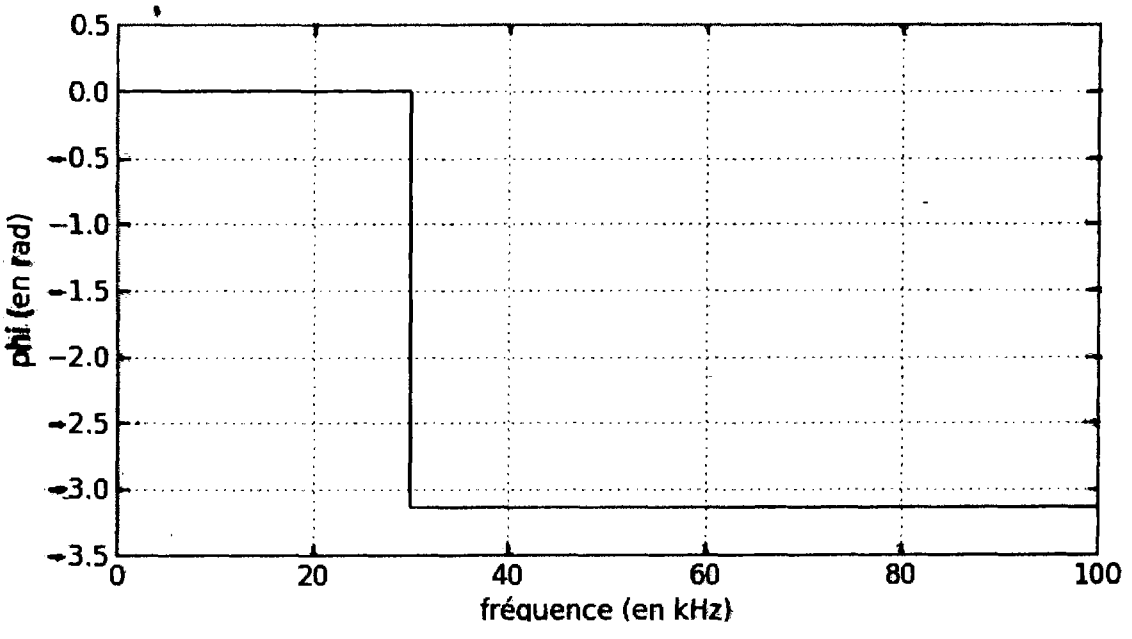
3) Déterminer l'expression de $x(t)$ et $y(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Les deux modes sont-ils excités par le déplacement du point P ?

On note r le rapport de l'amplitude des oscillations de M sur celles de P et φ le déphasage entre les oscillations de M et de P. Les graphes page suivante représentent $\log(r)$ et φ en fonction de la fréquence f d'excitation pour le micro-gyromètre vibrant VIG de l'ONERA.

4) Définir le facteur de qualité Q du mode excité. A partir de l'étude des graphes, déterminer les valeurs numériques de la fréquence et du facteur de qualité du mode excité.

5) A quelle fréquence est-il préférable d'exciter le système afin d'obtenir une amplitude de la masse la plus élevée possible ? Comment se nomme le phénomène associé ? On se placera dans cette situation dans toute la suite du problème.





Le plan Oxy est maintenant en rotation autour de l'axe Oz par rapport au référentiel terrestre galiléen avec une vitesse angulaire algébrique Ω supposée constante. Le point P effectue toujours un mouvement sinusoïdal selon Ox comme précédemment.

6) Etablir le nouveau système d'équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$. Montrer qu'en négligeant les termes en Ω^2, le système s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_1 x - \beta\dot{x} + 2m\Omega\dot{y} + k_1 A\cos(\omega_x t) \\ m\ddot{y} = -k_2 y - \beta\dot{y} - 2m\Omega\dot{x} \end{cases}$$

Dans la littérature, on trouve parfois la description suivante : le gyromètre vibrant permet d'accéder à la valeur de la vitesse angulaire par la mesure de l'amplitude du mode « détecteur » en excitant de manière contrôlée le mode « pilote ».

7) Expliquer cette phrase de manière qualitative à la lumière du système d'équations différentielles précédent en indiquant qui joue ici le rôle du mode pilote et qui joue le rôle du mode détecteur.

On suppose que le terme $2m\Omega\dot{y}$ est négligeable et l'on se place en régime sinusoïdal forcé. On note g le rapport de l'amplitude de la composante selon Oy de M sur celle de la composante selon Ox.

8) Donner l'expression de g.

Dans le cas du micro-gyromètre *VIG*, la différence de fréquence entre les deux modes propres vaut 0,5 kHz.

9) En déduire l'expression approchée $g \approx \dfrac{\Omega}{|\omega_x - \omega_y|}$.

Les calculs précédents ont été menés dans l'hypothèse d'une vitesse angulaire Ω constante. Un calcul, que l'on ne détaillera pas ici, montre que la valeur de g obtenue précédemment chute si Ω varie trop rapidement. Plus précisément, si la vitesse angulaire Ω varie de manière sinusoïdale, la bande passante à -3dB du gain g, notée BP, vérifie l'inégalité :

$$BP \leq \frac{1}{4\pi}|\omega_x - \omega_y|$$

10) Expliquer qualitativement pourquoi la valeur de la différence de fréquence entre les deux modes propres (0,5 kHz dans le cas du micro-gyromètre VIG) est issue d'un compromis entre deux impératifs que l'on précisera.

11) Vérifier a posteriori la légitimité de l'élimination de certains termes dans le système d'équations différentielles en $x(t)$ et $y(t)$ pour $\Omega < 1000$ °/s.

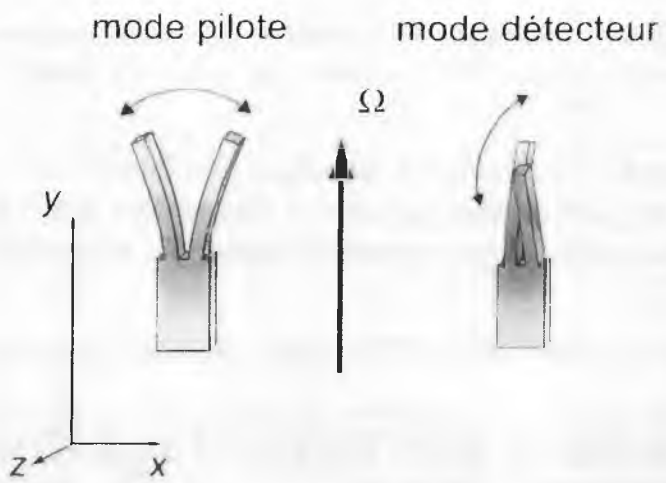
Le document ci-dessous présente de manière plus détaillée le micro-gyromètre *VIG*.

DOCUMENT : le micro-gyromètre vibrant *VIG* (d'après la thèse d'Arnaud Parent)

L'ONERA a développé un micro-gyromètre vibrant monolithique en quartz appelé *VIG* (*Vibrating Integrated Gyro*), dont l'élément vibrant est un diapason.

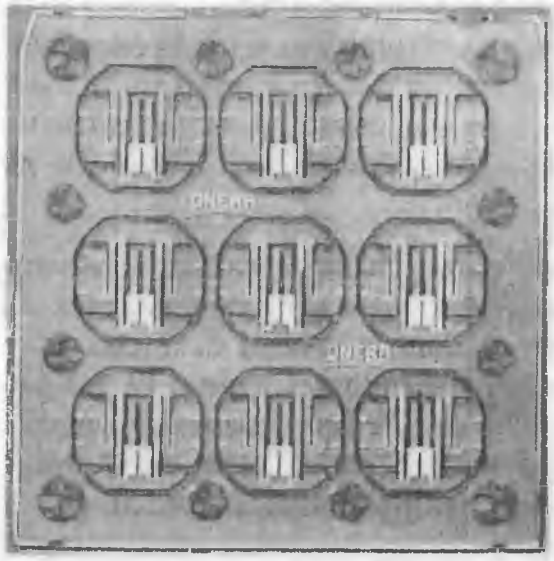
Le mode pilote est le mode de flexion des deux lames vibrant en opposition de phase dans le plan du diapason. Le mode détecteur est le mode de flexion des deux lames vibrant en opposition de phase perpendiculairement au plan du diapason. Les fréquences de ces modes sont autour de 30 kHz, avec un écart en fréquence de 0,5 kHz. Le système de fixation, breveté par l'ONERA, permet de réduire considérablement les fuites d'énergie de vibration et ainsi d'obtenir un facteur de qualité de l'ordre de 10^5 (le diapason étant conditionné sous vide).

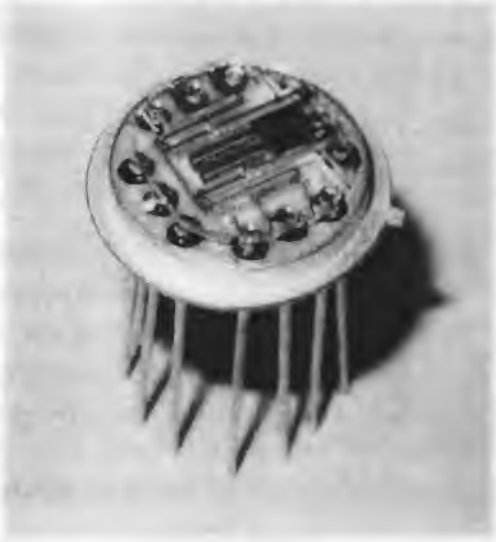
Le quartz est un matériau piézoélectrique : il se contracte ou se dilate lorsqu'il est soumis à un champ électrique. Réciproquement, une tension apparaît à ses extrémités lorsqu'il subit des contraintes mécaniques. L'excitation de la vibration pilote est ainsi obtenue au moyen d'électrodes placées sur le pied du diapason et associées à un oscillateur électronique. La détection s'obtient également par effet piézoélectrique par le biais d'électrodes disposées là où les déformations sont les plus importantes, c'est-à-dire sur les deux lames.



On peut voir sur les figures suivantes :

- à gauche : un *wafer* (pastille) de quartz de 38 mm de côté et 0,5 mm d'épaisseur sur lequel ont été gravées neuf structures *VIG* par un procédé photolithographique.
- à droite : une structure *VIG* monté sur une embase.





© ONERA

Les performances du micro-gyromètre VIG sont les suivantes :

± 1000 °/s pour l'étendue de mesure,
2 mV/(°/s) pour la sensibilité,
0,005 °/s/√Hz pour le bruit de mesure,
100 Hz de bande passante.

La valeur de la vitesse angulaire la plus faible détectable par le gyromètre est égale au produit du bruit de mesure par la racine carrée de la bande passante.

12) Indiquer la plage de tension de sortie du gyromètre, ainsi que la tension minimale (en valeur absolue) susceptible d'être mesurée.

13) Calculer la plus petite amplitude de vibration du mode « détecteur » qu'est capable de mesurer le micro-gyromètre VIG sachant que celle du mode « pilote » vaut 2 µm. Commenter.

On pourra trouver un descriptif plus complet du micro-gyromètre VIG dans la thèse d'Arnaud Parent soutenue en juillet 2008 intitulée « Apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des micro-gyromètres vibrants », accessible sur internet à l'adresse :

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/47/81/PDF/These_Arnaud_Parent.pdf

4.8 Enrichissement par centrifugation

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : statique des fluides, force d'inertie d'entraînement.

L'uranium naturel, extrait du sol sous la forme de minerai, est un mélange de deux isotopes : l'uranium 238 (^{238}U avec une teneur de 99,27 %) et l'uranium 235 (^{235}U avec une teneur de 0,72 %). Seul l'uranium ^{235}U est fissible et peut être utilisé dans un réacteur nucléaire, à condition que sa teneur avoisine 4 %. Les procédés d'enrichissement de l'uranium naturel en uranium 235 utilisent la légère différence de masse entre les deux isotopes, due au nombre de neutrons, leurs propriétés chimiques étant strictement identiques. On se propose d'étudier la technique d'enrichissement de l'uranium la plus répandue de nos jours, l'enrichissement par centrifugation.

Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium UF_6 qui peut être stocké à température ambiante sous forme de barres solides (dans des conteneurs fermés, isolés de l'atmosphère). Dans le procédé d'enrichissement, l'hexafluorure d'uranium est chauffé à environ 60°C et transformé en vapeur. Le gaz passe alors par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir en ^{235}U jusqu'à la teneur souhaitée. Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure de d'uranium enrichi sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous la forme de pastilles d'uranium enrichi.

De l'uranium naturel au combustible nucléaire

Minerai d'uranium naturel (uranite ou pechblende)

Cristaux d'hexafluorure d'uranium dans une ampoule

Pastille d'uranium enrichi

Clichés : Kgrr (licence CC), Argonne National Laboratory (public domain), Nuclear Regulatory Commission (public domain)

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de 20 cm de diamètre et de 5 m de hauteur, tournant autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire de 50 000 tours par minute. Le gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

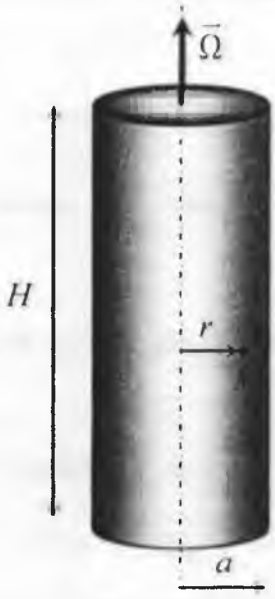
On donne les masses atomiques suivantes (1 u = $1{,}66.10^{-27}$ kg unité de masse atomique) :

Fluor F	Uranium ^{235}U	Uranium ^{238}U
19,0 u	235,0 u	238,0 u

On suppose que l'hexafluorure d'uranium se comporte comme un gaz parfait. On rappelle la constante de Boltzmann $k_B = R/N_a$ avec $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1} la constante des gaz parfaits et $N_a = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} la constante d'Avogadro.

Schéma d'une centrifugeuse.

Dans la pratique, les centrifugeuses sont montées en cascade.



Cliché : US Department of Energy (public domain)

1) Calculer les masses m_1 et m_2 respectives des molécules de $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$.

On suppose que le cylindre est rempli de molécules identiques de masse m. L'ensemble est à la température $T = 353$ K (80°C). On note $P(r)$ le champ de pression dans le gaz et $n^*(r)$ sa densité particulaire.

2) Faire un bilan des forces exercées sur une particule de fluide de volume $d\tau$ dans le référentiel lié au cylindre en rotation.

3) Evaluer numériquement l'accélération subie par les molécules dans le cylindre en rotation. Commenter.

4) Déduire de la condition d'équilibre d'une particule de fluide la répartition $n^*(r)$ de molécules dans le cylindre. On notera $n^*(0)$ la densité particulaire sur l'axe de rotation. Commenter le résultat obtenu en termes de physique statistique.

On souhaite comparer les répartitions de $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ dans le cylindre.

5) Tracer l'allure des densités particulaires $n_1^*(r)$ et $n_2^*(r)$ des molécules $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ en fonction de r. En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium.

La récupération du gaz enrichi est facilitée par le chauffage du cylindre par la base qui entraîne les molécules vers le haut par convection. Le gaz est alors récupéré par un système de pales, aspirant toutes les molécules situées dans un cylindre de rayon r_0, proche du rayon a du cylindre en rotation.

On appelle $N_1(r)$ et $N_2(r)$ le nombre de molécules $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ contenues dans un cylindre de hauteur H et de rayon r. Soient N_1 et N_2 le nombre total de molécules $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ présentes dans le cylindre en rotation et on appelle N'_1 et N'_2 le nombre de molécules correspondantes récupérées après centrifugation.

6) Exprimer $N_1(r)$ et $N_2(r)$ sous la forme d'une intégrale, puis en fonction des données et des densités particulaires au centre $n_1^*(0)$ et $n_2^*(0)$.

7) Evaluer numériquement la fraction de molécules $^{235}UF_6$ contenues dans le cylindre qu'il est possible de récupérer avec un rayon des pales $r_0 = 9{,}95$ cm.

Pour un nombre total N de molécules dans le cylindre, les fractions molaires en $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ sont définies par :

$$\alpha = \frac{N_1}{N} \text{ et } \beta = \frac{N_2}{N}$$

8) Exprimer α et β en fonction des rapports $\frac{N_1}{N_2}$ ou $\frac{N_2}{N_1}$. Préciser leur valeur numérique au début du processus d'enrichissement.

9) Définir de la même manière les fractions molaires α' et β' pour le gaz enrichi qui sera récupéré après centrifugation.

10) Montrer que $\frac{N_1'}{N_2'} = \frac{N_1}{N_2}(1+\varepsilon)$ où $\varepsilon << 1$. On exprimera ε en fonction des données du problème et on donnera sa valeur numérique.

11) En déduire que, dans les conditions proposées, $\alpha' = (1+\varepsilon)\,\alpha$. Commenter.

En pratique, les centrifugeuses sont montées en cascade, le gaz enrichi par l'une passant dans la suivante et ainsi de suite.

12) Evaluer le nombre de centrifugeuses nécessaires pour atteindre le taux d'enrichissement requis pour du combustible nucléaire. Conclure.

La consommation mondiale actuelle en uranium est de l'ordre de 56 000 tonnes/an et l'on estime à 4 300 000 tonnes les réserves d'uranium sur Terre (gisements actuels et à venir).

13) Commenter numériquement ces données.

4.9 A propos du jet stream partie 1

TECHNICITE : * INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : composition des vitesses.

DOCUMENT : Le jet stream, d'après le site « http://fr.wikipedia.org »

Un courant-jet, aussi couramment désigné par sa dénomination anglophone de jet stream, est un courant d'air rapide et confiné que l'on trouve dans l'atmosphère de certaines planètes telles que la Terre. Les courants-jets sont situés à proximité de la tropopause entre la troposphère (où la température décroît avec l'altitude) et la stratosphère (où la température croît avec l'altitude) généralement entre 7 et 16 kilomètres au-dessus du niveau de la mer. Les courants-jets ont plusieurs milliers de kilomètres de longueur, quelques centaines de large et seulement quelques kilomètres d'épaisseur. La majeure partie des courants-jets se trouvant sur Terre sont des vents d'ouest (ils circulent d'ouest en est). Leur trajet a typiquement une forme méandreuse ; les courants-jets peuvent démarrer, s'arrêter, se diviser en deux voire même plus, se combiner en un seule courant ou circuler dans plusieurs directions.

Les courants-jets les plus forts sont les courants-jets polaires (situés entre 7 et 12 kilomètres au-dessus du niveau de la mer) tandis que les plus hauts et les plus faibles courants sont les courants-jets subtropicaux (situés entre 10 et 16 kilomètres au-dessus des mers). L'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud ont tous deux un courant-jet polaire et un courant-jet subtropical.

La formation des courants-jets résulte de la rotation de la Terre et du réchauffement inégal de l'atmosphère terrestre (l'énergie thermique reçue par rayonnement solaire varie d'un endroit à l'autre : il fera plus chaud au niveau de l'équateur qu'aux pôles créant ainsi un déséquilibre thermique). Les courants-jets se forment dans les zones de conflits entre les masses d'air ayant des propriétés différentes appelées fronts, dans lesquels il existe un grand différentiel de température et de pression.

Dans un courant-jet, la vitesse du vent croît très vite à mesure que l'on se rapproche du centre du courant. Au sein de ce dernier, la vitesse moyenne est estimée à environ 25 m/s (ou 90 km/h), mais la vitesse maximale peut dépasser 100 m/s (ou 360 km/h) : c'est ce qui a valu à ce type de courant le nom de jet, qui évoque en anglais une très grande vitesse. D'autre part, les régions atmosphériques traversées par les courants-jets sont affectées par les forts cisaillements horizontal et vertical du vent. Les météorologues comprennent à présent que le trajet des courants-jets est devenu important pour les prévisions météorologiques.

Les courants-jets ont d'abord été remarqués par les scientifiques au XIXe siècle en utilisant des cerfs-volants, et, plus tard des ballons-sondes, mais les vents de haute altitude présentaient peu d'intérêt avant l'époque de l'aviation. Beaucoup de scientifiques pensaient que ces observations étaient simplement des faits étranges ou isolés. Ōishi Wasaburō, météorologiste japonais des années 1920, a été le premier à quantifier ces courants-jets, en suivant des ballons-sondes près de la station météorologique du mont Fuji. Par la suite,

durant la Seconde Guerre mondiale, des pilotes de bombardiers à long rayon d'action ont remarqué l'effet des courants-jets.

Le courant-jet est un élément important de la prévision météorologique puisque sa position et son intensité sont reliés aux mouvements verticaux de l'atmosphère. Comme il constitue la zone de rencontre de deux masses d'air, il sera le lieu de formation des dépressions des latitudes moyennes. Par exemple, les tempêtes de fin décembre 1999 en Europe sont le résultat direct de forts mouvements verticaux sous un jet de 400 km/h.

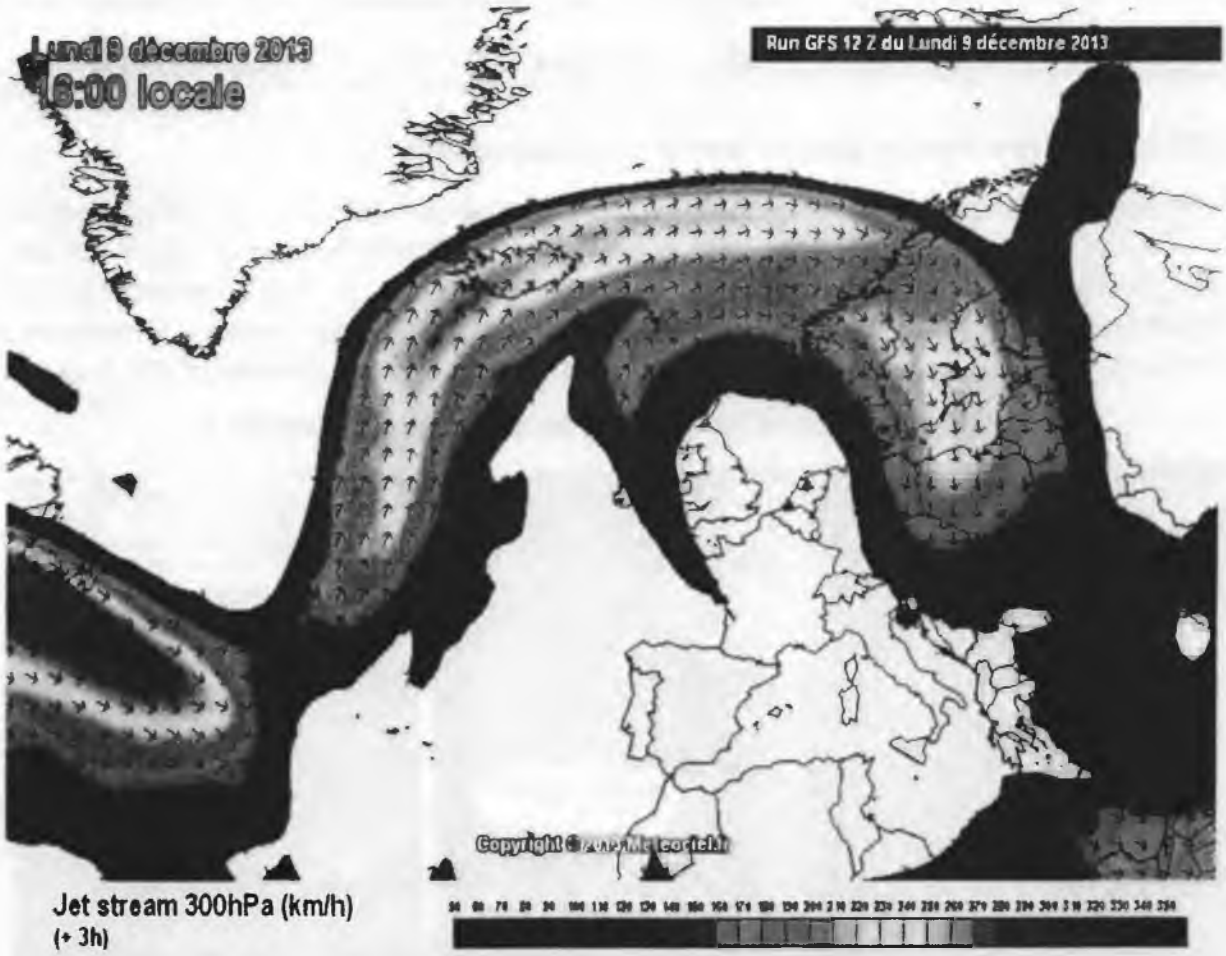
Le courant-jet étant un couloir de vent plus important, l'aviation commerciale doit en tenir compte lors de sa planification de vols. C'est pourquoi la prévision de la position du courant-jet est essentielle à l'aviation. Les vols seront planifiés pour l'utiliser lors de déplacements Ouest - Est et pour l'éviter dans l'autre direction en volant plus haut, plus bas, plus au sud ou au plus au nord que son cœur.

Certains oiseaux migrateurs, dont les oies cendrées par exemple, connaissent et utilisent ce phénomène, ce qui représente parfois un risque de collision avec les avions se déplaçant dans les mêmes altitudes.

Le jet stream est formé de courants polaires et de courants subtropicaux circulant dans l'hémisphère Nord et dans l'hémisphère Sud à grande vitesse. La forme des courants change d'heure en heure et nécessite une étude constante.

© National Oceanic and Atmospheric Administration

Carte de prévision du jet stream au-dessus de l'Europe et de l'Océan Atlantique



Source : www.meteociel.fr *(© avec l'aimable autorisation des auteurs)*

Horaires de quelques vols transcontinentaux Paris - New York et New York - Paris

Départ (heure locale) Aéroport de Paris	Arrivée (heure locale) Aéroport de New York
08:20	**10:30**
10:35	**12:55**
14:10	**16:25**
16:35	**18:55**
19:10	**21:20**

Départ (heure locale) Aéroport de New York	Arrivée (heure locale) Aéroport de Paris
16:25	**5:30**
17:40	**7:05**
19:10	**8:35**
21:25	**10:50**
23:25	**12:30**

La distance au sol Paris-New York est de 5 800 km et le décalage horaire est de 6 heures.

Interpréter les temps de vols observés entre Paris et New York.

4.10 Effets de marées

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : gravitation, force d'inertie d'entraînement.

Dans la bande dessinée *Les survivants, anomalies quantiques, Episode 1* de Léo, publiée en 2011 aux éditions DARGAUD, un vaisseau spatial provenant de la Terre s'écrase sur une planète inconnue, aux caractéristiques similaires à celles de la Terre (atmosphère et pesanteur). Les colons rescapés du crash découvrent alors un monde totalement nouveau. Une nuit, deux d'entre eux lèvent leurs yeux au ciel et découvrent la présence d'une Lune.

Extrait de *Les survivants, anomalies quantiques, Episode 1*

Léo ©, Dargaud 2014

Ce problème propose de déterminer si le simple fait que l'astre gravitant autour de la planète paraisse plus gros que notre Lune vue depuis la Terre suffit à en déduire que les phénomènes de marée vont être plus importants.

Les marées sur Terre sont dues à l'action combinée de la Lune, du Soleil et du mouvement de notre planète dans l'espace. C'est une manifestation du caractère non galiléen du référentiel géocentrique. On considère la Terre, de rayon R_T, de masse m_T et de centre T, en interaction gravitationnelle avec le seul astre A (la Lune ou le Soleil), de rayon R_A, de masse m_A et de centre A.

On rappelle l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{G_A}(P)$ créé par l'astre A en un point P de l'espace :

$$\overrightarrow{G_A}(P) = -\frac{Km_A}{AP^3}\overrightarrow{AP}$$

où $K = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} est la constante de gravitation universelle.

On donne quelques caractéristiques de la Terre, de la Lune et du Soleil :

	Terre	Lune	Soleil
Masse (kg)	$6{,}0.10^{24}$	$7{,}3.10^{22}$	$2{,}0.10^{30}$
Diamètre (km)	$12{,}756.10^{3}$	$3{,}476.10^{3}$	$1{,}392.10^{6}$
Distance à la Terre (km)	-	$384{,}4.10^{3}$	$149{,}6.10^{6}$

Système Terre-Astre en interaction gravitationnelle

On appelle R_0 le référentiel de Copernic, supposé galiléen, et R_T le référentiel géocentrique, en translation dans R_0.

1) En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la Terre, assimilée à un point matériel, dans le référentiel R_0, déterminer l'accélération $\vec{a}_{T/R_0}$ de son centre T dans R_0.

On considère un point matériel P, de masse m, au voisinage de la surface de la Terre. Il subit une force $\vec{f}$ (non explicitée ici) qui le maintient fixe dans le référentiel R_T.

2) Le référentiel géocentrique R_T est-il galiléen ?

3) Faire un bilan des forces subies par le point matériel P dans le référentiel géocentrique R_T.

4) Identifier la *force de marée* $\vec{F}_{marée}$ qui s'exerce sur P en fonction de m, $\vec{G}_A(P)$ et $\vec{G}_A(\mathrm{T})$.

5) Représenter cette force sur le schéma aux différents points P_1, P_2, P_3 et P_4.

On peut comparer l'influence de la force de marée à la force de gravitation terrestre exercée sur le point P grâce au rapport de leurs normes :

$$\alpha_A = \frac{\left\|\vec{F}_{marée}\right\|}{\left\|m\vec{G}_T(P)\right\|} = \frac{m_A}{m_T}\left(\frac{R_T}{TA}\right)^3 \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

où θ est l'angle zénithal géocentrique définissant la position de P et TA la distance Terre-Astre.

6) En quels points ce rapport a-t-il sa valeur maximale α_0 ? Prévoir la forme des océans à la surface de la Terre et préciser la position des points pour lesquels il y aura marée haute ou marée basse. Comment expliquer l'alternance des marées en un point de la Terre au cours de la journée ?

L'amplitude $\Delta\xi$ de la marée est la différence entre la hauteur d'eau à marée haute et la hauteur d'eau à marée basse. On montre que, sans prendre en compte les ondes de marée (théorie statique des marées) :

$$\Delta\xi = \frac{3Km_A R_T^2}{2gTA^3}$$

où g est l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre.

7) Quelle différence y a-t-il entre le champ de pesanteur $\vec{g}$ à la surface de la Terre et le champ de gravitation terrestre $\vec{G_T}(P)$ au même point ? Montrer numériquement que l'on peut confondre les deux dans une première approximation. Quelle hypothèse fait-on alors sur la Terre ?

8) Calculer numériquement $\Delta\xi$ dans le cas de la Lune et du Soleil. Discuter leur influence relative sur les marées. Comment explique-t-on les variations d'amplitude des marées au cours de l'année ?

On définit le diamètre angulaire ε_A de l'astre A comme l'angle sous lequel on voit l'astre depuis la Terre. On appelle ρ_A la masse volumique de l'astre et ρ_T celle de la Terre.

9) Calculer le diamètre angulaire de la Lune et du Soleil. Commenter.

10) Montrer que l'amplitude relative de la marée $\frac{\Delta\xi}{R_T}$ peut s'exprimer simplement en fonction de la valeur maximale α_0 du rapport α_A.

11) En déduire une expression de $\frac{\Delta\xi}{R_T}$ en fonction du diamètre angulaire ε_A et des masses volumiques ρ_A et ρ_T.

12) Que penser de la remarque de l'héroïne des *survivants* ?

4.11 Système de freinage des remorques

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : véhicule à roues.

DOCUMENT : Législation française concernant le tractage des remorques

Un conducteur possédant le permis B peut atteler une remorque à son véhicule si l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est vérifiée :

- le poids total autorisé en charge (PTAC) de la remorque est inférieur ou égal à 750 kg,

- le PTAC de la remorque est inférieur au poids à vide (PV) du véhicule d'une part et la somme du PTAC de la remorque et du véhicule soit inférieure ou égale à 3500 kg d'autre part.

Depuis janvier 2013, la limite des PTAC (tracteur + remorque) est étendue de 3500 kg à

4250 kg, sous réserve d'avoir suivi une formation dans une auto-école afin d'obtenir le permis B96. Au-delà de cette limite, il est nécessaire de passer le permis BE.
Les remorques possèdent ou non leur propre système de freins. Avec une remorque dépourvue de système de freinage, les freins du véhicule doivent absorber toute l'énergie cinétique de celle-ci lors du freinage. A l'inverse, une remorque munie de freins soulage le véhicule tracteur d'une partie de son poids. Le système de frein à inertie d'une remorque comprend le fût coulissant, le système de transmission et le frein de roue. Lorsque l'on freine, la remorque exerce une forte contrainte au niveau du fût coulissant qui déclenche (par la tringlerie) le serrage du frein de roue.

Selon l'article R315-1 du code de la route, seules sont dispensées de l'obligation de freins les remorques vérifiant la double condition que leur poids total autorisé en charge (PTAC) ne dépasse pas 750 kg ni la moitié du poids à vide du véhicule tracteur.

Partie avant d'une remorque avec freins d'inertie

© Sylvie et Emmanuel

Monsieur Mille possède un monospace (PV = 1700 kg et PTAC = 2510 kg) et une remorque avec freins ayant un PTAC de 1500 kg. Monsieur Cent possède quant à lui une petite voiture citadine (PV = 1080 kg et PTAC = 1584 kg).

1) Indiquer le type de permis de conduire que doit posséder Monsieur Mille.

Monsieur Mille décide d'acheter une seconde remorque, plus petite, sans freins et ayant un PTAC de 750 kg. Sa femme possède un permis B.

2) Est-ce que Madame Mille peut conduire le monospace avec la petite remorque ?

Monsieur Cent désire emprunter à Monsieur Mille l'une de ses deux remorques.

3) Cela est-il possible s'il utilise son propre véhicule sachant qu'il a juste le permis B ?

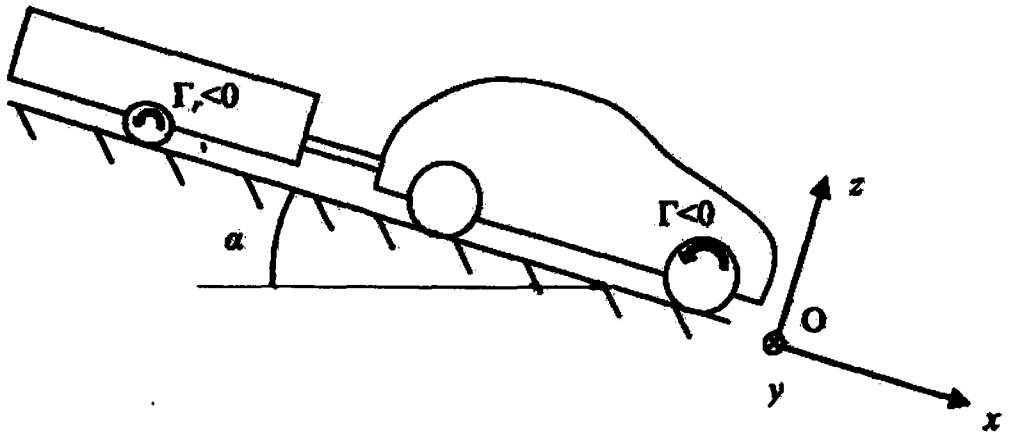
La suite du problème propose de comprendre comment le système de freinage de la remorque permet de soulager le véhicule. On considère une voiture roulant dans le sens de la descente. La route, orientée par l'axe Ox descendant, fait un angle α par rapport à l'horizontale. La voiture possède une vitesse $\vec{V} = V(t)\vec{e}_x$, une masse m et des roues de rayon R. On appelle (S_1) le solide formé par l'essieu et les roues avant et (S_2) le solide formé par l'essieu et les roues arrière. Il possèdent tous deux un moment d'inertie J autour de leur

axe. Le moteur ou les freins de la voiture exercent sur les roues avant un couple de moment Γ algébrique (négatif dans le cas d'un freinage). Pour simplifier, on suppose que les roues arrière de la voiture sont en « roues libres ». La remorque attelée à la voiture possède les caractéristiques suivantes :

- masse m_r et rayon des roues R_r,

- le solide (S_r) formé par l'essieu et les roues possède un moment d'inertie J_r,

- le système de freinage (constitué par le fût coulissant, l'arbre de transmission et les freins) est réglé de manière à exercer sur les roues de la remorque un couple de moment Γ_r proportionnel à la force $\vec{F}_{voit\to rem} = -F\vec{e}_x$ qu'exerce la voiture sur la remorque lorsque la première appuie sur la deuxième, de sorte que $\Gamma_r = -KF$, la quantité K étant constante (dans le cas où la voiture tire sur la remorque, il n'y a aucun freinage).



La voiture subit une force de frottement de la part de l'air $\vec{F}_{frott} = -F_{frott}\vec{e}_x$ et l'on néglige les frottements de l'air sur la remorque. Dans les questions suivantes, il est demandé d'introduire des forces non décrites dans l'énoncé, mais bel et bien présentes de manière à décrire le système de manière satisfaisante.

4) Ecrire la condition de non-glissement des roues en introduisant la vitesse de rotation des roues de la voiture d'une part et de la remorque d'autre part.

5) Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la voiture, puis à la remorque en faisant apparaître la force $\vec{F}_{voit\to rem}$.

6) Appliquer la loi du moment cinétique aux solides (S_1), (S_2), puis (S_r) dans le référentiel lié à la voiture. Pour cela, on admettra qu'elle s'écrit comme si ce dernier était galiléen.

En pratique, les essieux et les roues ont une masse négligeable devant le reste du véhicule. On peut donc écrire $J \approx 0$ et $J_r \approx 0$.

7) Combiner l'ensemble des relations précédentes pour en déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $V(t)$ de la voiture :

$$\left(m+\frac{m_r}{1+\frac{K}{R_r}}\right)\frac{dV}{dt}=\frac{\Gamma}{R}-F_{frott}+\left(m+\frac{m_r}{1+\frac{K}{R_r}}\right)g\sin\alpha$$

8) Comment s'écrit l'équation différentielle sans le système de freinage de la remorque ? Commenter.

La remorque possède des roues ayant un diamètre de 12 pouces (un pouce correspond à 2,54 cm).

9) Déterminer la valeur numérique de K pour que les freins de la remorque soulagent la voiture en diminuant d'un facteur 3 la masse apparente de la remorque lors d'un freinage.

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 4 :

10.3	Régulateur de vitesse
10.6	Origine du jet stream
10.21	Interférence avec des atomes ultra froids

CHAPITRE 5

MECANIQUE DES FLUIDES

5.1 Largeur d'un couloir de gradin

TECHNICITE : * INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : débit.

1) Expliquer de manière générale pourquoi la largeur des couloirs de gradins n'est pas forcément la même partout.

La photo ci-dessous est celle d'un gradin dont on accède uniquement par le bas.

Gradin d'un stade de foot

© Renaud Carpentier

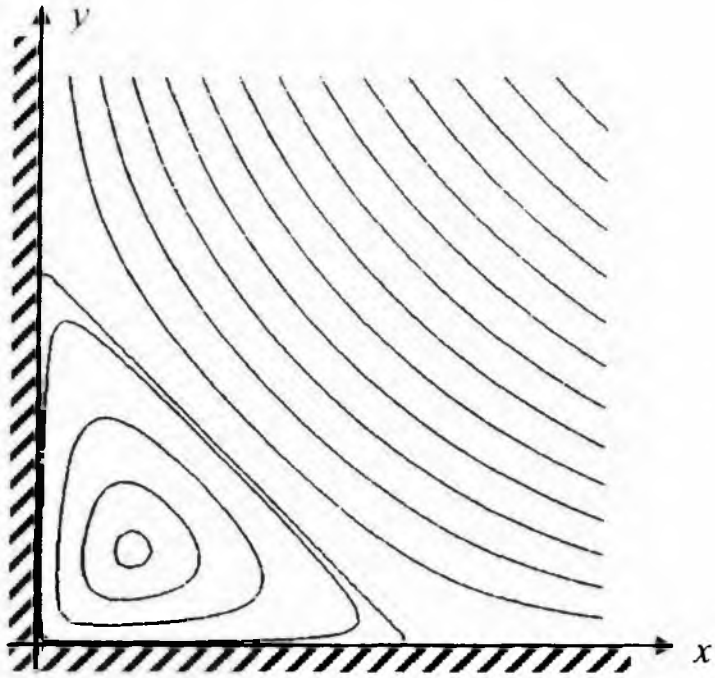
2) Justifier le plus précisément possible l'évolution de sa largeur en fonction de la hauteur (il est attendu un raisonnement quantitatif).

5.2 Vortex dans un écoulement

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : cinématique d'un fluide, vecteur tourbillon.

Dans un lit de rivière, on observe parfois des tourbillons permanents (vortex) à certains endroits, généralement près des rives formant un coin. Des objets flottants sur l'eau ou de la mousse peuvent être piégés dans ces zones où l'eau évolue en circuit fermé. L'exercice propose d'étudier un exemple de ce type d'écoulement où le fluide circule à proximité de deux parois formant un angle droit dans lequel un vortex est présent. Les lignes de courant sont représentées sur la figure suivante.



On suppose l'écoulement invariant selon l'axe Oz. Le champ de vitesses est donné dans le repère Oxy par les expressions :

$$v_x = Kx\left(1 - \frac{xL}{(x+y)^2}\right) \quad \text{et} \quad v_y = -Ky\left(1 - \frac{yL}{(x+y)^2}\right)$$

où L désigne une longueur et K une constante positive.

1) Indiquer la dimension de K.

2) Montrer que l'écoulement est incompressible.

3) Exprimer le vecteur tourbillon.

4) Compléter la figure représentant les lignes de courants en indiquant :
   - leur sens,
   - la zone délimitant le vortex,
   - le centre du vortex, dont on déterminera les coordonnées en fonction de L.

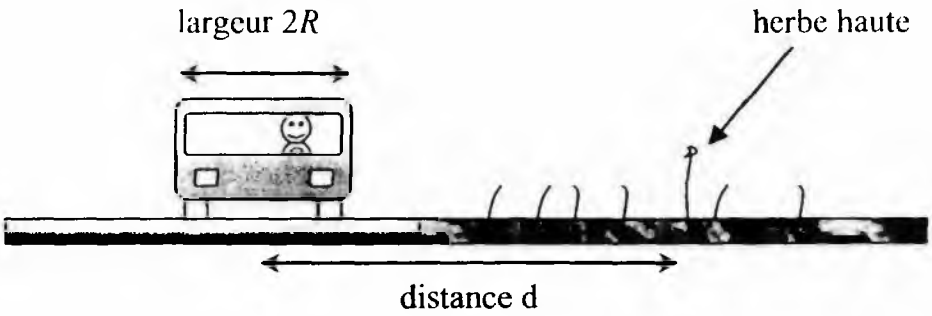
5) Exprimer la période de rotation des particules fluides autour d'elle-même au centre du vortex.

5.3 Souffle provoqué par le passage d'un véhicule

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

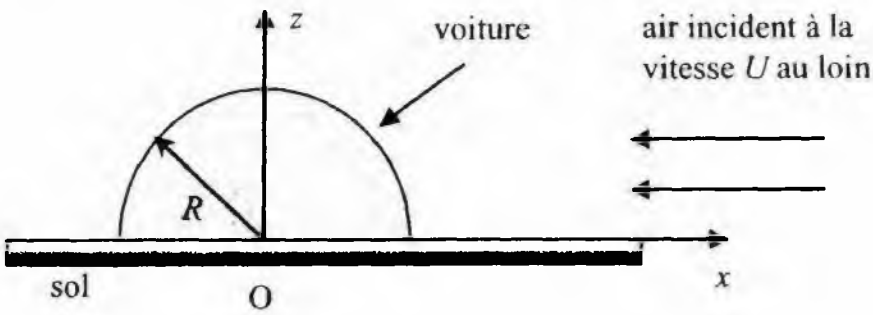
MOTS-CLES : cinématique d'un fluide, potentiel des vitesses.

On étudie le déplacement d'air provoqué par le passage d'un véhicule sur le bord de la route. Ce souffle est facilement visible lorsqu'il y a des hautes herbes à proximité de la chaussée : celles-ci tourbillonnent à chaque passage d'un véhicule. L'objectif de ce problème est de quantifier le déplacement d'air engendré par le souffle de la voiture.

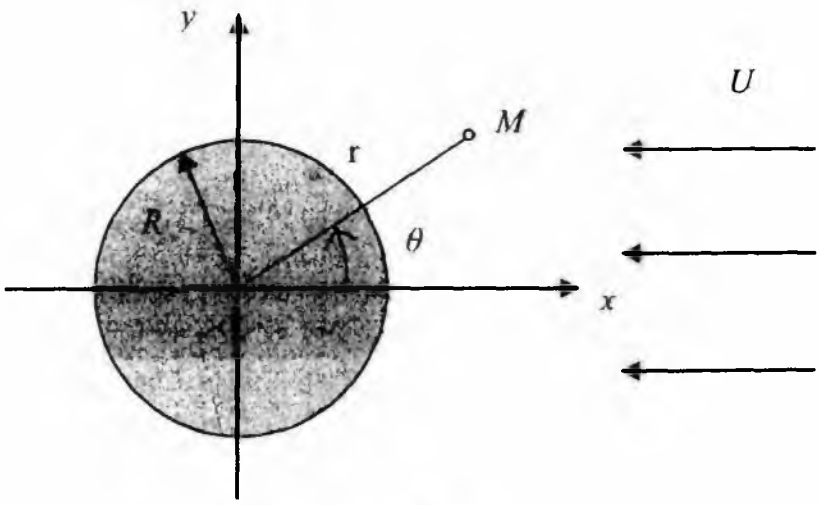


On note U la vitesse du véhicule par rapport à la route. Afin d'obtenir des solutions analytiques, on assimile la voiture à une demi-sphère de rayon R et l'on étudie dans un référentiel R_v lié à la voiture le champ de vitesses de l'air au dessus du sol (donc dans la zone $z > 0$), que l'on supposera stationnaire. L'origine O du repère associé au référentiel R_v est le centre de la demi-sphère, l'axe Ox étant dirigé selon la direction opposée au vent en incidence sur la voiture. On fournit l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi .$$



vue du côté



vue du dessus

En l'absence de voiture, l'écoulement d'air est caractérisé par un champ de vitesses uniforme $\vec{U} = -U\vec{e}_x$.

1) L'écoulement est-il irrotationnel ? En déduire le potentiel des vitesses $\Phi_1(x,y,z)$ qui s'annule en $x = 0$.

2) Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ), où $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OM})$, l'origine pour l'angle φ étant arbitraire. Exprimer $\Phi_1(r,\theta,\varphi)$.

3) Soit un écoulement incompressible et irrotationnel dont le champ de vitesses dérive du potentiel Φ_2. Quelle équation aux dérivées partielles doit vérifier Φ_2 ?

4) Expliquer sans calcul pourquoi $\Phi_2(r,\theta,\varphi) = K\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ est solution de cette équation (on pourra utiliser un résultat d'électrostatique).

5) En choisissant une valeur pour K que l'on déterminera, montrer que le champ de vitesses dérivant du potentiel $\Phi_1 + \Phi_2$ vérifie les conditions aux limites correspondant à l'écoulement de l'air autour de la voiture : celle loin de la demi-sphère et celle imposée à la surface de la demi-sphère.

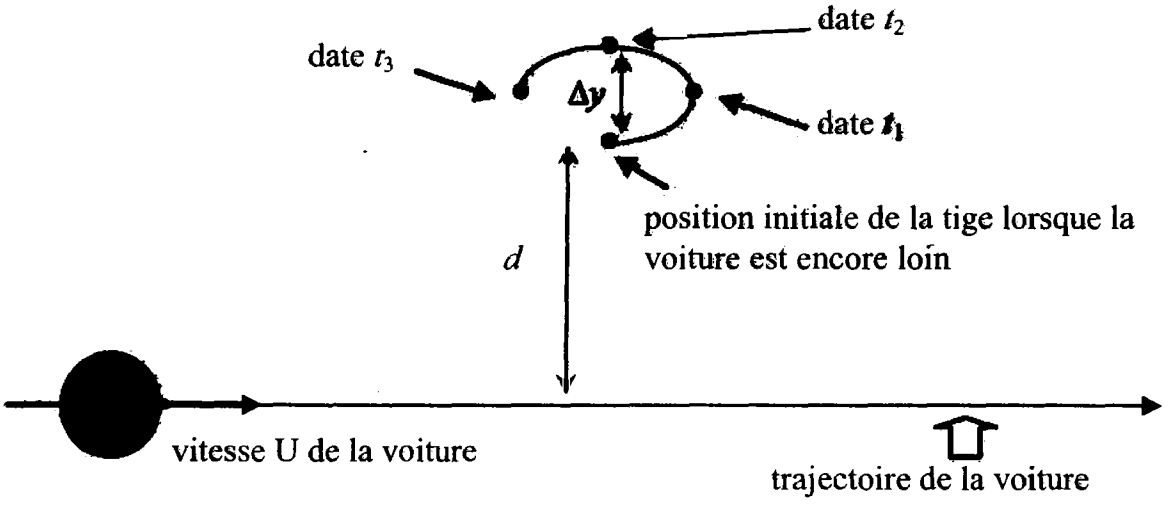
6) Est-il légitime en pratique de considérer l'écoulement d'air autour de la voiture comme incompressible ?

7) Tracer l'allure des lignes de courant de l'écoulement.

8) Comment s'écrit le champ de vitesses de l'air dans le référentiel lié à la route ? Montrer que ses composantes cartésiennes dans le plan Oxy s'écrivent :

$$v_{x/route} = \frac{UR^3}{2}\frac{2x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \quad \text{et} \quad v_{y/route} = \frac{3}{2}UR^3\frac{xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

On considère une tige d'herbe située à une distance d de la route. On suppose qu'elle est suffisamment légère pour suivre en permanence l'air qui l'entoure. La figure suivante représente l'allure de la trajectoire de la tige vue du ciel dans le référentiel lié à la route et sa position pour quatre dates différentes. Pour répondre aux questions, on pourra se servir du formulaire mathématique situé en fin d'énoncé. Les calculs seront menés en considérant que $d >> R$, ce qui entraîne que $\Delta y << R$.



9) Préciser, en le justifiant, où se situe la voiture aux dates t_1, t_2 puis t_3.

10) Une fois que la voiture est passée, à quel endroit se retrouve la tige ?

11) Exprimer le déplacement maximal Δy de la tige lors du passage du véhicule. Faire l'application numérique pour $R = 1$ m et $d = 5$ m. Commenter la dépendance par rapport à la vitesse U.

On fournit les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+d^2\right)^{5/2}} dx = \frac{4}{3d^4} \; ; \; \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+d^2\right)^{5/2}} dx = \frac{1}{3d^3} \; ; \; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+d^2\right)^{5/2}} dx = \frac{2}{3d^2}$$

5.4 Parapente en bord de mer

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

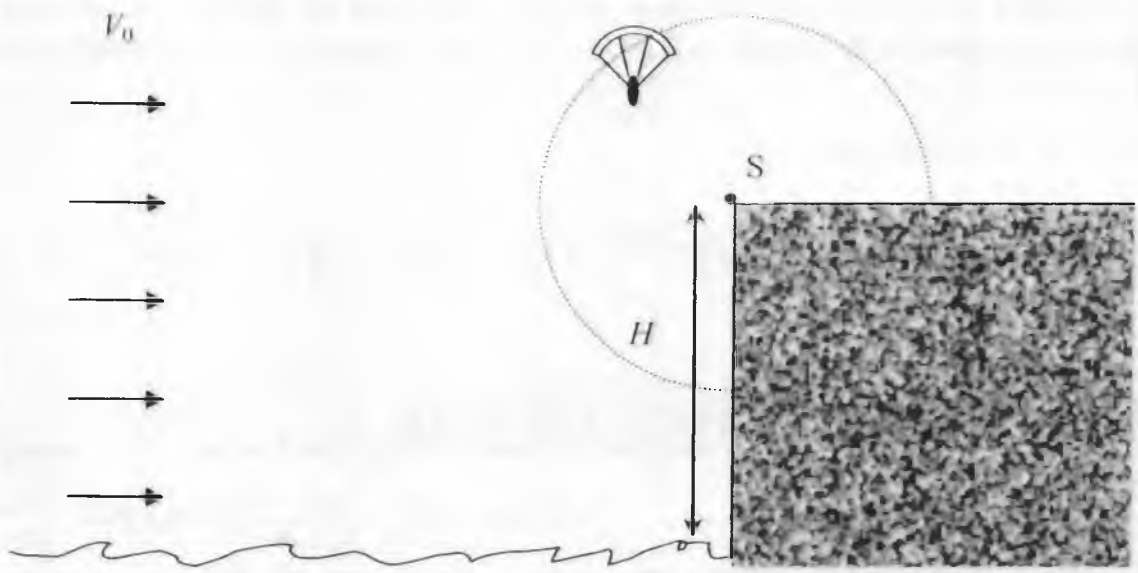
MOTS-CLES : cinématique d'un fluide, lignes de champ, composition des vitesses.

Les falaises de la côte d'opale (dans le Pas-de-Calais) sont le terrain de jeu favori de certains adeptes du parapente. Ceux-ci sortent leur voile par vent de mer faible ou modéré. On propose dans ce problème de comprendre et de quantifier la possibilité pour un parapentiste d'utiliser les courants ascendants provoqués par la présence des falaises afin de garder la même altitude et de prolonger son vol.

Parapentistes près du cap Blanc-Nez

© Olive Montel

On considère une falaise abrupte de hauteur H. Le vent arrive perpendiculairement à la côte avec une vitesse au large V_0. On raisonnera dans tout le problème en régime stationnaire.



1) Compléter le dessin en esquissant l'allure des lignes des courants.

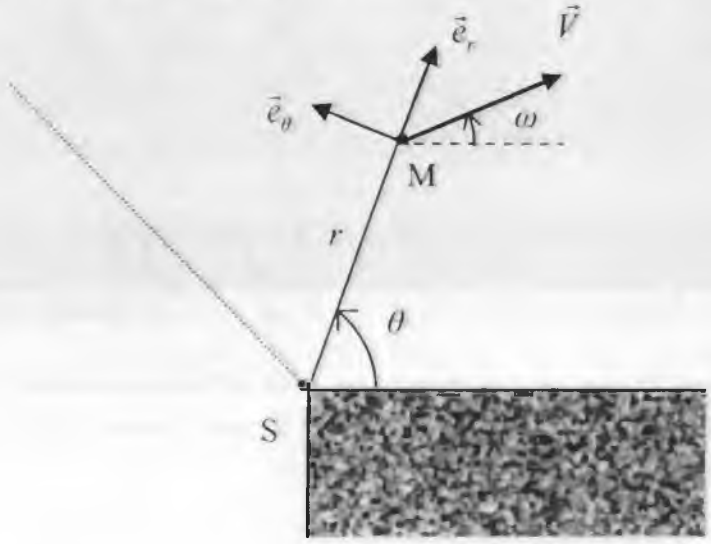
On repère la position, d'un point de l'espace par ses coordonnées polaires (r,θ) avec pour origine le sommet S de la falaise. On montre à l'aide d'outils mathématiques appropriés (fonction à variable complexe, bijection conforme de Schwartz-Christoffel, développement limité et calcul d'intégrale) que le champ de vitesse en un point M à proximité du sommet (zone en pointillé) peut s'écrire en bonne approximation :

$$\left|\vec{V}(M)\right| = \left(\frac{4H}{3\pi r}\right)^{1/3} V_0 \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{\theta}{3}$$

avec r = SM et ω l'angle que fait la vitesse $\vec{V}(M)$ avec l'horizontale. On fournit les expressions de la divergence et du rotationnel dans le repère cylindrique:

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$



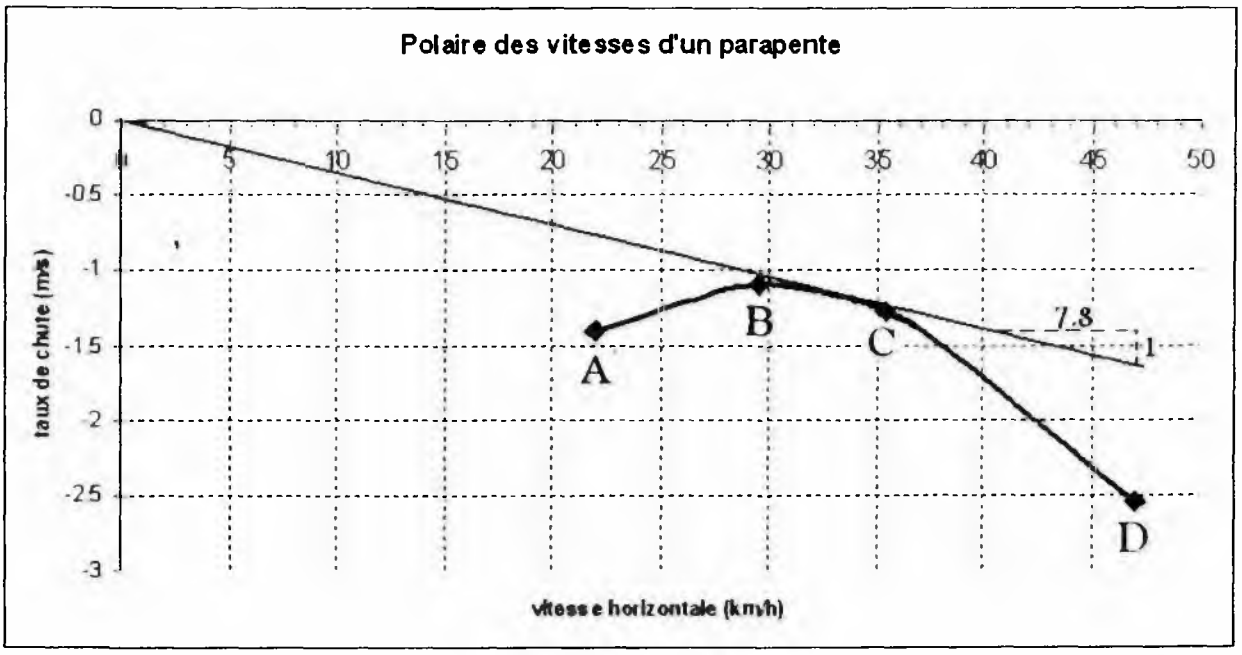
2) Calculer V_r et V_θ, les composantes de la vitesse $\vec{V}$ dans le repère polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

3) Montrer que cet écoulement est incompressible et irrotationnel.

Un parapentiste désire longer la falaise à altitude constante en s'aidant des courants ascendants. Afin d'être sûr de pouvoir revenir en haut de la falaise (en cas notamment de chute brutale de vent), il décide de rester sur la diagonale qui part du sommet (en pointillé sur le dessin précédent).

4) Quelle est alors la direction du vent ?

On donne la « polaire des vitesses » d'un parapente, c'est-à-dire sa vitesse de chute en fonction de sa vitesse horizontale (les deux vitesses étant calculées dans le référentiel lié à la masse d'air entourant le parapente). *Attention aux unités !*



Auteur : PiRK (licence CC)

5) Jusqu'à quelle distance de la falaise peut aller le parapentiste avec un vent de mer de 3 nœuds (1 nœud = 1,85 km/h) ? On prendra H = 130 m correspondant à la hauteur des falaises du cap Blanc-Nez.

6) Calculer dans cette situation la vitesse de déplacement du parapente par rapport à la falaise.

Remarque : le point C correspond à une descente du parapente avec la plus grande **finesse** : le parapente parcourt horizontalement la plus grande distance (ici 7,8 mètres) lorsqu'il descend d'un mètre. Le point A correspond au décrochage de la voile = danger de mort !

5.5 Etude du rebond flexural

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : statique des fluides, analyse dimensionnelle, loi d'échelle.

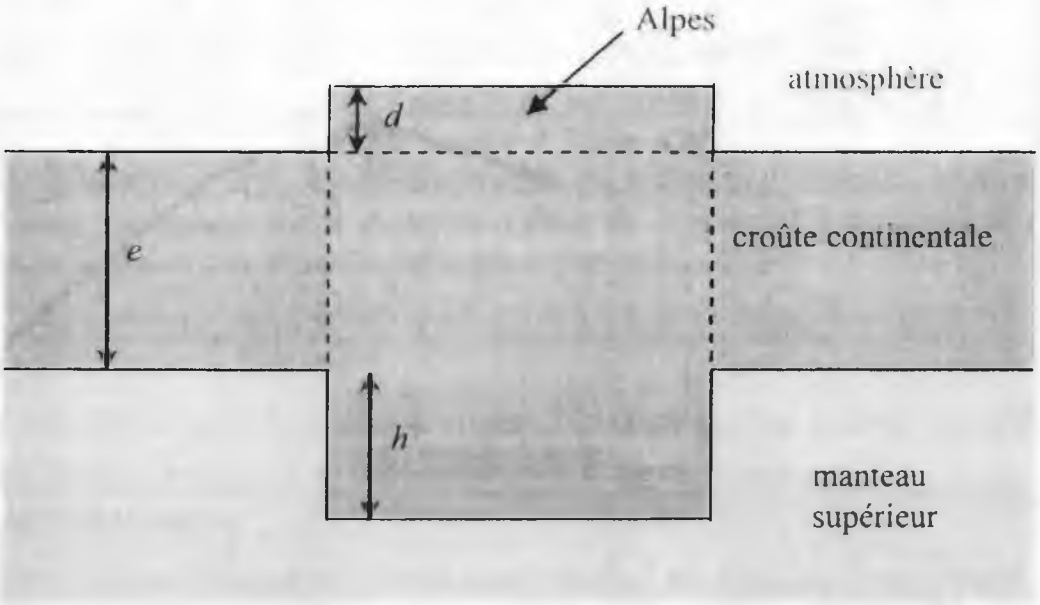
Les continents reposent sur une couche de roches appelée « croûte continentale » ou encore « lithosphère élastique ». Sous les massifs montagneux, il existe un phénomène d'isostasie :

la croûte continentale y est plus épaisse afin de compenser le poids des montagnes situées au dessus d'elle. Le problème propose d'étudier deux modèles décrivant de manière quantitative l'isostasie en l'appliquant au cas des Alpes.

Le modèle de Airy

Dans ce modèle, on considère que la croûte continentale est composée de colonnes de solides placées les unes à côté des autres. Chaque colonne, évoluant indépendamment des colonnes voisines, est libre de s'enfoncer dans le manteau supérieur liquide, l'équilibrage final étant fonction de la charge placée au dessus d'elle.

On applique cette théorie dans le cas des Alpes, que l'on modélise par une élévation de la surface constante égale à d = 2,5 km (valeur moyenne de la hauteur du massif alpin). En périphérie des Alpes, la croûte continentale possède une épaisseur e = 30 km. La masse volumique de la croûte continentale et du manteau supérieur valent respectivement $\rho_c = 2{,}7.10^3$ kg.m^{-3} et $\rho_m = 3{,}2.10^3$ kg.m^{-3}.

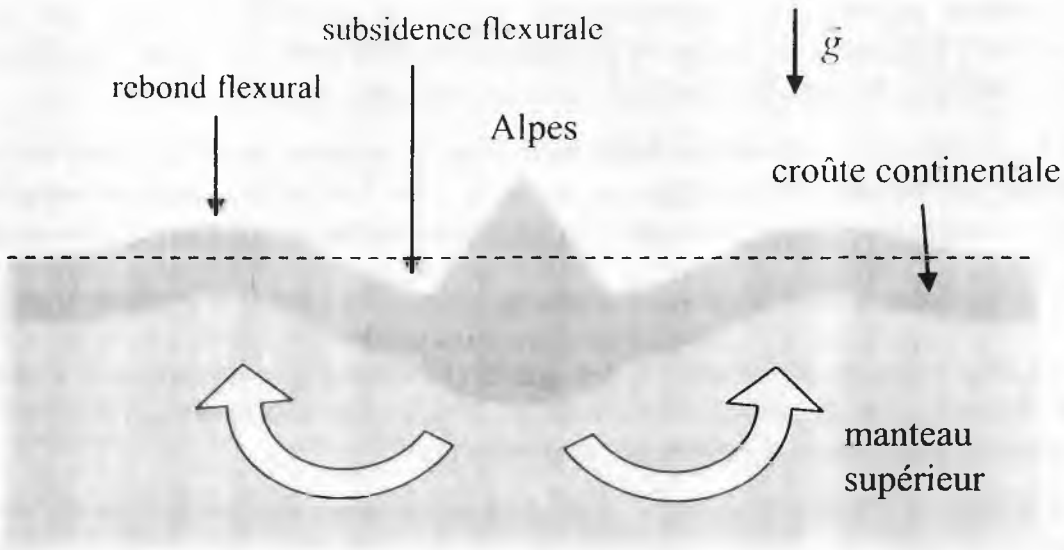


1) En appliquant la théorie de Airy, exprimer puis calculer l'épaisseur supplémentaire h de la croûte continentale du fait de l'isostasie provoquée par les Alpes.

Le modèle de Airy, même s'il donne des valeurs satisfaisantes concernant l'isostasie locale, ne permet pas de rendre compte des deux phénomènes géologiques que sont la subsidence flexurale et le rebond flexural. Pour expliquer ces phénomènes, il est nécessaire de prendre en compte l'élasticité de la croûte continentale.

Le modèle de Vening Meinesz

Dans ce modèle, la croûte continentale est un unique solide pouvant se déformer sous l'effet de contraintes mécaniques. Une coupe géologique schématique de la croûte continentale autour des Alpes est représentée sur la figure suivante (les différentes échelles n'étant pas respectées).



Dans le cadre de ce modèle, on explique ce profil de la manière suivante : suite à la formation du massif alpin, le poids des Alpes a eu pour effet d'enfoncer localement la croûte continentale, provoquant d'une part un abaissement du niveau moyen du sol de chaque côté des Alpes (phénomène de subsidence flexurale) et induisant un déplacement (représenté par les flèches) du liquide constituant le manteau d'autre part. Ce déplacement de liquide a entrainé une augmentation de la pression de part et d'autre des Alpes, ayant eu pour effet une remontée du niveau de la croûte continentale, appelé le « rebond flexural ».

Un groupe d'étudiants souhaitent fabriquer un modèle réduit du phénomène afin d'étudier expérimentalement l'évolution spatiale et temporelle du rebond flexural : à partir de quand apparaît-il ? Quelle est sa distance au massif ? Quelle est sa hauteur ? La suite du problème propose de dégager les paramètres pertinents et d'obtenir des lois d'échelles afin de dimensionner correctement le modèle réduit.

Pour simplifier la modélisation, on considère que la chaîne des Alpes est suffisamment longue pour pouvoir considérer le système invariant par translation selon l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On note m_L la masse des Alpes par unité de longueur. En ce qui concerne la croûte continentale, on peut montrer que sa déformation ne dépend de ses caractéristiques propres (épaisseur e, module d'Young E en Pa, coefficient de Poisson ν sans dimension) que par l'intermédiaire de l'unique paramètre D, appelée le coefficient de rigidité, défini par la relation :

$$D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

Le manteau supérieur est assimilé à un liquide visqueux incompressible de masse volumique ρ_m et de viscosité dynamique η. Au bilan, les paramètres liés au problème du rebond flexural sont au nombre de cinq : m_L, D, ρ_m, η et g, la pesanteur locale. Le phénomène étant suffisamment lent, on peut négliger l'inertie du manteau et de la croûte continentale : les masses ne vont alors intervenir dans les équations que par l'intermédiaire du poids.

2) En déduire que l'on peut se ramener à seulement quatre paramètres caractéristiques D, η, A et B. Exprimer A et B en fonction de m_L, ρ_m et g.

3) Montrer par analyse dimensionnelle qu'il est possible de créer un nombre adimensionné N défini par le produit de puissances de D, A et B. En fixant la puissance de D égale à 1, indiquer les valeurs des deux autres puissances.

Pour que le modèle réduit reproduise fidèlement ce qu'il se passe en réalité, il est nécessaire qu'il possède un nombre N identique au cas réel. Une fois cette condition remplie, les résultats issus du modèle réduit peuvent s'appliquer au cas réel en multipliant par un facteur d'échelle. Le facteur d'échelle des distances vaut $\frac{L_{réel}}{L_{réduit}}$, où L désigne une longueur définie par un produit de puissances des quatre paramètres caractéristiques. Compte tenu que N est identique pour le modèle réduit et le cas réel, on peut montrer qu'il est possible de trouver une expression de L ne faisant pas intervenir ρ_m.

4) En déduire l'expression de L. Que peut-on déduire du fait que ni N, ni L ne dépendent de η ?

Par le même raisonnement, le facteur d'échelle des durées vaut $\frac{T_{réel}}{T_{réduit}}$, où T désigne un temps dont on peut obtenir une expression ne faisant pas intervenir D.

5) En déduire l'expression de T en fonction de m_L, ρ_m, η et g.

La formation des Alpes s'est étalée sur plusieurs millions d'années. On peut cependant citer un mouvement de serrage majeur, datant de 28 millions d'années. Les différents paramètres liés au rebond flexural induit par les Alpes ont les valeurs approximatives suivantes :

$m_L = 10^{13}$ kg.m^{-1}, $\eta = 10^{21}$ Pa.s, $\rho_m = 3{,}2.10^3$ kg.m^{-3} et $D = 8.10^{22}$ N.m.

Les étudiants ont fabriqué un modèle réduit en utilisant une plaque de PVC de 1 cm d'épaisseur pour reproduire la croûte continentale. A l'aide d'un protocole spécifique (non détaillé ici), ils ont mesuré un coefficient de rigidité de la plaque $D_{réduit} = 2.10^2$ N.m. Le liquide visqueux remplaçant le manteau a été élaboré à partir d'un mélange d'eau, d'argile et de terre, de masse volumique $\rho_{réduit} = 1{,}5.10^3$ kg.m^{-3} et de viscosité dynamique $\eta_{réduit} = 9.10^2$ Pa.s, déterminée par la mesure de la vitesse de chute d'une bille dans le liquide.

6) Déterminer la masse par unité de longueur à poser au milieu de la plaque afin que les lois d'échelles puissent s'appliquer.

Au bout de 7 h, les étudiants ont mesuré un rebond flexural de 1 mm de hauteur localisé à une distance de 0,5 m de la masse. Au bout de 22 h, le rebond n'était plus visible.

7) Appliquer les lois d'échelle pour en déduire des valeurs associées au cas des Alpes. Commenter les résultats.

5.6 Lévitation d'une balle dans un jet d'air

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : nombre de Reynolds, force de traînée.

On souhaite faire léviter une balle de ping-pong (ou de tennis de table) dans l'écoulement d'air créé par un sèche-cheveux.

La balle de ping-pong, homologuée par la FITT (Fédération Internationale de Tennis de Table), possède un diamètre de 40 mm et une masse de 2,7 g. Le sèche-cheveux a un diamètre de sortie de 5 cm et un débit d'air de 80 m^3/h à pleine puissance. Le jet d'air en sortie de la soufflerie est vertical vers le haut.

1) Caractériser le régime d'écoulement attendu. Tracer l'allure de l'écoulement au voisinage de la balle. En déduire l'expression de la force de traînée exercée par le fluide sur la balle.

2) Montrer que la lévitation de la balle est possible dans ces conditions.

3) Expérimentalement, la balle lévite à 20 cm au-dessus de la soufflerie. Commenter cette observation : qu'est-ce qui détermine la hauteur d'équilibre ?

On diminue la puissance du sèche-cheveux si bien que le débit d'air ne vaut plus que la moitié de son débit maximal.

4) La lévitation est-elle encore possible ?

5) Montrer que l'utilisation d'un réducteur de section permettrait de retrouver la lévitation dans les mêmes conditions que précédemment. Quel doit être alors le diamètre de sortie de ce réducteur ?

Lévitation d'une balle dans un jet d'air

© Benoît Depret

5.7 Autour d'un château d'eau

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : relation de Bernoulli, force de viscosité.

Un château d'eau permet à la fois de stocker l'eau provenant des stations de captage et de la distribuer dans les habitations environnantes. Des pompes maintiennent le niveau d'eau

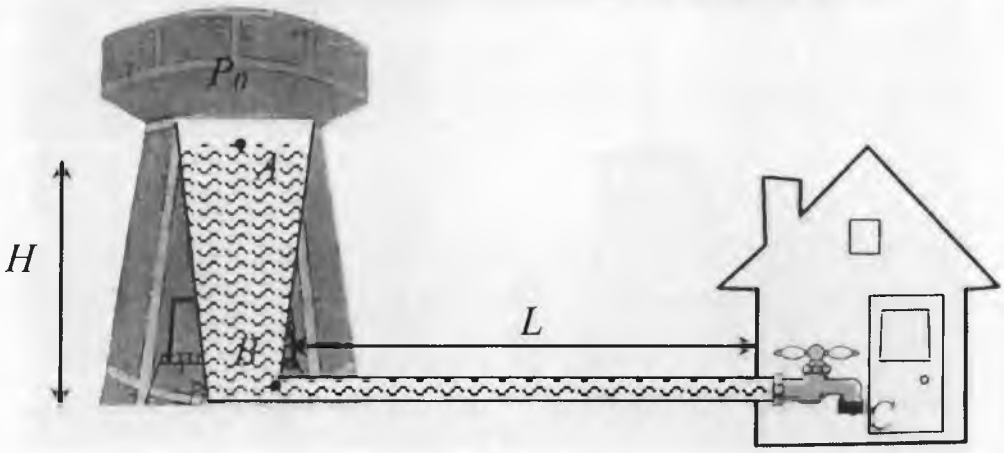
dans le réservoir, assurant ainsi une distribution minimale en eau en cas de coupure électrique.

Château d'eau de Pitgam (Nord)
On distingue au sommet des antennes de relais téléphoniques

© Benoît Dépret

On considère un château d'eau alimentant en eau une habitation. L'eau dans le réservoir atteint une hauteur H supposée constante. L'eau circule dans une canalisation cylindrique de rayon a et de longueur L avant d'atteindre le robinet de la maison. La pression atmosphérique P_0 est supposée uniforme et $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

Principe de l'alimentation en eau par un château d'eau



Caractéristiques de l'installation :
$a = 20$ mm, $H = 30$ m, volume utile de la cuve $V_{tot} = 2\,500$ m^3
Pour l'eau : masse volumique $\rho = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3}, viscosité $\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pl et capacité thermique massique à volume constante $c_v = 4{,}18.10^3$ J.kg^{-1}.K^{-1}.
On ouvre le robinet en C et on remplit une baignoire de 1 200 L en 15 minutes.

1) Evaluer numériquement le débit volumique D_V en C.

2) En déduire la vitesse de l'écoulement en B.

3) Exprimer la pression P_B en B en fonction de V_B et des données en précisant les hypothèses utilisées.

4) Comparer numériquement V_B^2 et $2gH$. En déduire une expression simple de P_B. Commenter.

On souhaite caractériser l'écoulement entre les points B et C en tenant compte de la viscosité dans la canalisation. On néglige l'action de la pesanteur dans la canalisation horizontale. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ de vitesses $\vec{V}(M) = V_z(r,z)\,\vec{e_z}$ et un champ de pression $p(M) = p(r,z)$.
On donne, avec la géométrie proposée :

$$\mathbf{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \Delta\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e_z}$$

5) Montrer que $V_z(r,z)$ ne dépend pas de z et que l'accélération des particules de fluide est nulle. Commenter.

6) Ecrire l'équation de Navier-Stokes. En déduire que la pression p ne dépend pas de r et établir l'équation différentielle dont est solution $V_z(r)$.

7) Montrer que $\frac{dp}{dz}$ est une constante K, dont on donnera l'expression en fonction de P_B, P_C et L. En déduire l'expression de $V_z(r)$.

8) Calculer le débit volumique D_V dans la conduite et en déduire la loi de Poiseuille reliant le débit volumique à la perte de charge $P_B - P_C$:

$$D_V = \frac{\pi a^4}{8\eta L}(P_B - P_C)$$

9) Montrer à l'aide d'une analogie électrocinétique, que l'on peut définir une résistance hydraulique pour la canalisation. En déduire la puissance dissipée par la viscosité dans la canalisation et la calculer numériquement. Retrouver cette expression à l'aide d'un bilan d'énergie. Quelle serait la variation de température de l'eau si la canalisation était calorifugée ?

10) Le niveau de l'eau dans le château d'eau reste constant à la hauteur H grâce à une pompe. Déterminer la puissance mécanique que la pompe doit fournir pour maintenir le niveau de l'eau. On pourra exprimer l'énergie potentielle à fournir à l'eau pour l'amener à l'altitude H. Commenter.

11) Calculer numériquement la résistance hydraulique dans la situation étudiée. En déduire la longueur L de la canalisation d'alimentation.

12) Commenter la validité des résultats précédents sachant que dans une canalisation cylindrique un écoulement est considéré comme laminaire tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à $2{,}1.10^3$.

Un Français consomme en moyenne 137 L d'eau par jour pour son usage domestique (douche, WC, jardin, vaisselle, cuisine,...).

13) Estimer le nombre de châteaux d'eau nécessaires à la distribution nationale, en supposant que l'on n'utilise pas plus de la moitié du réservoir chaque jour. Quelle serait alors la distance moyenne séparant deux châteaux d'eau en France ?

5.8 Phénomène de surcote

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : statique des fluides, couche limite, force de viscosité.

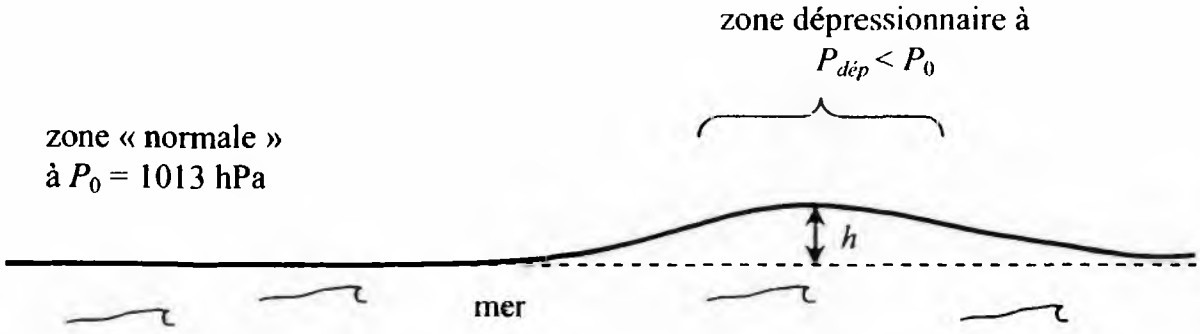
La tempête Xynthia a provoqué d'énormes dégâts lors de son passage en France dans la nuit du 27 au 28 février 2010, notamment en Vendée et en Charente-Maritime. Le caractère exceptionnel de la tempête et le lourd bilan (matériel et humain, dû notamment aux ruptures de digues) est dû à trois facteurs :

- un fort coefficient de marée (coefficient de 102),
- une forte dépression (la pression du centre dépressionnaire est descendue à 968 hPa), qui a fait monter le niveau de la mer,
- un vent fort (rafales jusqu'à 160 km/h) qui a poussé l'eau vers les côtes.

Ces deux derniers facteurs ont fait monter le niveau d'eau de près de 1,5 m au dessus de celui attendue à marée haute ! Ce problème propose d'expliquer et de quantifier cette surcote.

1) Rappeler l'origine du phénomène des marées. Pourquoi leurs amplitudes varient-elles suivant les jours ?

2) En s'aidant du schéma ci-dessous et en notant ρ_{eau} la masse volumique de l'eau, exprimer l'élévation h du niveau de la mer au centre de la zone dépressionnaire. Faire l'application numérique pour la tempête Xynthia.

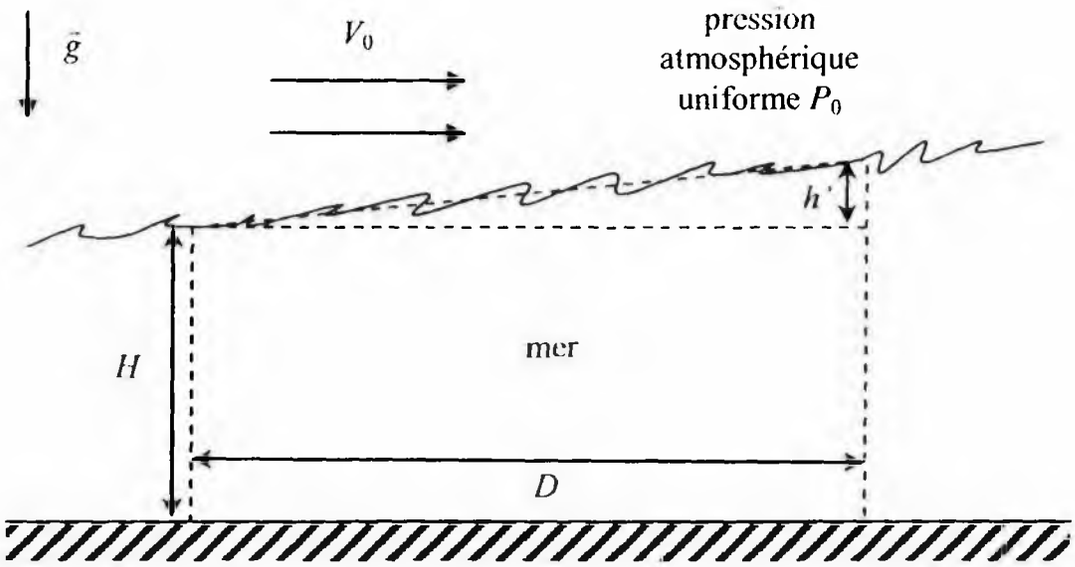


3) En notant V_0 la vitesse caractéristique du vent et L la longueur caractéristique des rides à la surface de l'eau, montrer que l'épaisseur de la couche-limite de l'air au dessous de la mer a pour ordre de grandeur $\delta = \sqrt{\dfrac{\eta_{air} L}{\rho_{air} V_0}}$, où ρ_{air} désigne la masse volumique de l'air et η_{air} sa viscosité dynamique. Calculer δ pour V_0 = 100 km/h et L = 10 cm.

On donne $\rho_{air} = 1{,}3$ kg.m^{-3} et $\eta_{air} = 1{,}8.10^{-5}$ Pa.s. On rappelle l'expression de la force tangentielle sur un élément de surface dS dans un écoulement $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ au sein d'un fluide newtonien : $d\vec{F} = \eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y} dS\vec{e}_x$.

4) En déduire l'expression de la force surfacique tangentielle (en ordre de grandeur) qu'exerce l'air sur l'eau.

Le vent incline la surface moyenne de la mer comme l'illustre le schéma ci-après.



5) Ecrire une relation donnant l'élévation h' du niveau d'eau. Montrer que si $h' << H$, on peut écrire $h' \approx \dfrac{\eta_{air} V_0 D}{\rho_{eau} g H \delta}$. Faire l'application numérique avec $D = 300$ km et $H = 100$ m.

5.9 Une tête de lecture sur coussin d'air

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : description d'un écoulement, forces de pression et de viscosité.

Le disque dur est un élément essentiel à tout équipement informatique. Les capacités de stockage élevées (plusieurs téraoctets) et les taux de transfert importants (jusqu'à 60 Mo/s) en font un outil puissant pour la sauvegarde et l'utilisation de données volumineuses, comme les fichiers numériques audio et vidéo. Les informations sont codées au niveau microscopique par l'agencement de dipôles magnétiques dans une couche ferromagnétique déposée à la surface d'un disque de verre tournant à grande vitesse. La lecture et l'écriture d'informations, sous forme de *bits*, est assurée par une tête de lecture magnétique : située à quelques nanomètres du plateau, elle vient directement lire ou modifier l'orientation des dipôles, tandis qu'un bras mobile la positionne au bon endroit, défini par le registre de données. La sustentation de la tête de lecture à une distance si faible du plateau est assurée par l'écoulement d'air lui-même entre la tête et le disque en rotation. On se propose de modéliser cet écoulement et d'évaluer la force de portance engendrée.

On considère un disque dur de 3,5" (3,5 pouces, soit 8,9 cm de diamètre), tournant à la vitesse standard de 7 200 tours par minute. La tête de lecture n'est pas tout à fait parallèle au plateau et forme avec le disque un dièdre d'angle α très faible, qui sera en fait à l'origine du phénomène de sustentation. On étudie l'écoulement de l'air dans le référentiel lié à la tête de lecture, dans lequel le plateau est localement en translation à la vitesse $U\,\vec{e_x}$.

A l'intérieur d'un disque dur :

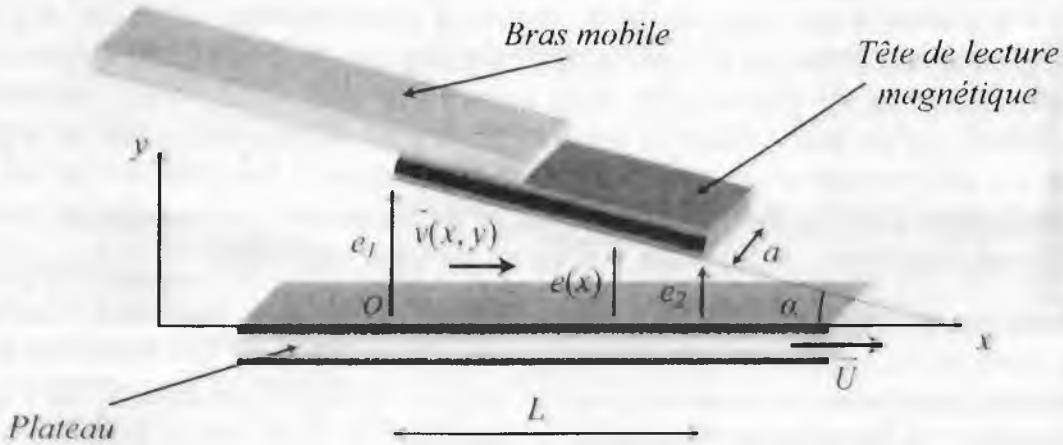
On distingue le plateau en rotation, le bras mobile et la tête de lecture à son extrémité ; l'électronique de contrôle gère la vitesse de rotation du disque et le positionnement du bras.

Photo : Mario Agrillo (licence cc)

Détail de la tête de lecture magnétique

Photo : Mario Agrillo (licence cc)

Tête de lecture en sustentation sur l'écoulement d'air au-dessus du plateau



La tête de lecture est un carré de côté $a = 1{,}2$ mm. On note $e(x)$ la distance entre le plateau et la tête de lecture à l'abscisse x et on pose $e(0) = e_1$ et $e(L) = e_2$, avec typiquement $e(x) \approx 10$ nm et $L = a \cos \alpha \approx a$. L'air, de viscosité $\eta = 2{,}0.10^{-5}$ Pl, est en écoulement stationnaire, la pression atmosphérique en dehors du dièdre vaut P_0 et la pesanteur est

négligée. Le problème est supposé invariant dans la direction Oz. On recherche un champ de pression de la forme $P(x,y)$ et un champ des vitesses sous la forme :

$$\vec{v}(x,y) = v_x(x,y)\,\vec{e_x} + v_y(x,y)\,\vec{e_y}$$

Contrairement au stockage de données sur DVD pour lesquels la gravure commence au centre du disque, les informations sur disque dur sont en priorité écrites en périphérie du plateau car la vitesse y est maximale et le débit de données pourra être plus important.

1) Evaluer numériquement la vitesse U du plateau en périphérie du disque tournant. En déduire que l'écoulement d'air peut être considéré comme incompressible.

Etude en ordres de grandeur

Etant donnée la géométrie de l'écoulement, la distance caractéristique d'évolution de la vitesse du fluide vaut L dans la direction $\vec{e_x}$ et vaut e dans la direction $\vec{e_y}$, avec $e << L$. On peut ainsi écrire les ordres de grandeur suivants :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u}{L} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u}{e}$$

où u est une composante de $\vec{v}$.

2) L'écoulement étant incompressible, montrer par un raisonnement en ordre de grandeur que $v_y << v_x$.

Dans la suite, on écrira le champ des vitesses sous la forme simplifiée : $\vec{v}(x,y) = v(x,y)\,\vec{e_x}$.

3) Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour le fluide dans le dièdre. Montrer par un raisonnement en ordre de grandeur que le terme convectif peut-être négligé devant le terme de viscosité.

4) En déduire que l'équation liant le champ de pression et le champ des vitesses s'écrit simplement :

$$\frac{dP(x)}{dx} = \eta \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}$$

Champ des vitesses

On cherche à obtenir le champ des vitesses pour l'écoulement d'air sous la tête de lecture.

5) Rappeler les conditions aux limites pour la vitesse en $y = 0$ et $y = e(x)$.

6) En intégrant la relation précédente à x fixé, déterminer l'expression de $v(x,y)$. En déduire que l'écoulement étudié est une combinaison d'un écoulement de Couette et d'un écoulement de Poiseuille.

Champ de pression

On souhaite à présent déterminer le champ de pression dans l'écoulement.

7) Exprimer le débit volumique D_V à travers une section droite de l'écoulement à l'abscisse x. En déduire que :

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{6\eta}{(e(x))^2}\left(\frac{2D_V}{e(x)L} - U\right)$$

8) Exprimer simplement $e(x)$ en fonction de e_1, e_2, x et L.

9) En remarquant que $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{de}\frac{de}{dx} = -\alpha\frac{dP}{de}$, exprimer $\frac{dP}{de}$ en fonction de e puis intégrer cette expression pour obtenir le champ de pression $P(e(x))$.

10) Quelles sont les conditions aux limites pour la pression en $x = 0$ et $x = L$? En déduire que le débit volumique peut s'écrire simplement :

$$D_V = UL\frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2}$$

11) Montrer que le champ de pression dans l'écoulement s'écrit finalement :

$$P(x) = P_0 + \frac{6\eta U}{\alpha}\frac{(e(x) - e_2)(e_1 - e(x))}{(e(x))^2(e_1 + e_2)}$$

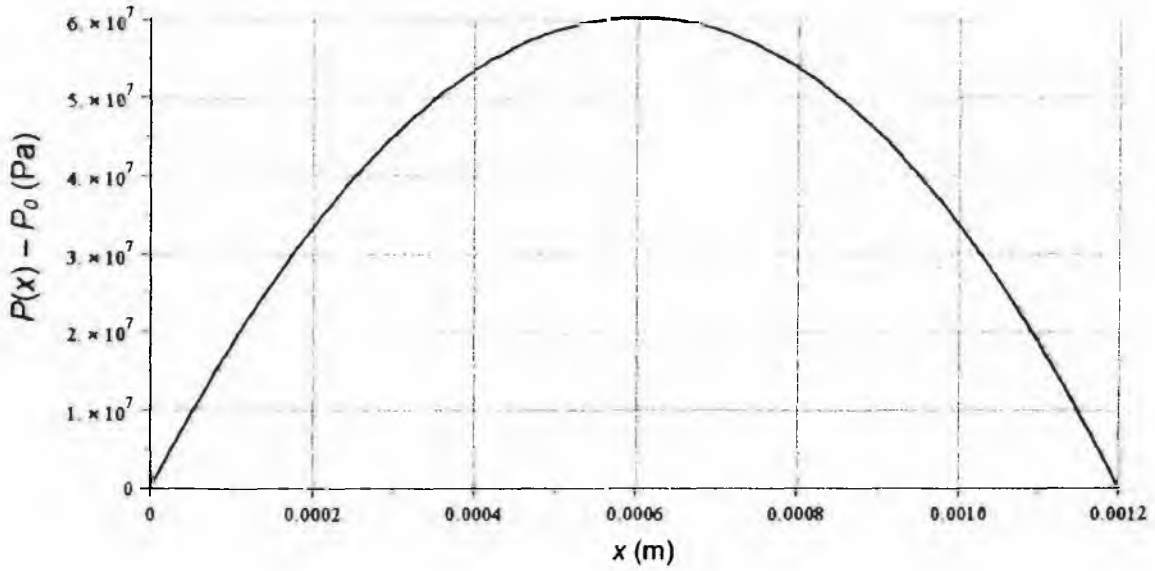
Force de sustentation

On considère la situation pour laquelle e_1 = 10,1 nm et e_2 = 10,0 nm.
La différence de pression $P(x) - P_0$ est représentée numériquement sur le graphe de la figure suivante.

12) Représenter l'allure du champ des vitesses de l'écoulement dans les trois zones caractérisées par : $\frac{dP}{dx} > 0$, $\frac{dP}{dx} = 0$ et $\frac{dP}{dx} < 0$.

13) Discuter l'allure du champ de pression. Estimer graphiquement l'ordre de grandeur de la force de pression exercée par l'écoulement sur la tête de lecture. La sustentation semble-t-elle possible ?

Champ de pression dans l'écoulement d'air sous la tête de lecture



Dans ces conditions on peut poser $e_1 = (1 + \varepsilon)\, e_2$ et déterminer la pression moyenne dans l'écoulement à l'ordre 1 en $\varepsilon << 1$:

$$P_{moy} = \frac{\eta U L \varepsilon}{2e_2^{\,2}}$$

14) Retrouver numériquement la force de sustentation exercée par l'écoulement sur la tête de lecture.

15) Discuter les paramètres permettant de choisir la configuration la plus adaptée à l'utilisation pratique d'un disque dur.

Lorsque le disque dur subit un choc violent alors qu'il est en fonctionnement, la force de sustentation n'est pas toujours suffisante pour éviter le contact de la tête de lecture avec le plateau contenant les données numériques : on parle alors « d'atterrissage de la tête de lecture ». Le plateau est dans ce cas le plus souvent endommagé de façon irréversible, les données à cet endroit étant irrécupérables…

Disque dur ayant subi un « atterrissage ».
La zone endommagée par la tête de lecture est clairement visible.

Photo : Mario Agrillo (licence cc)

5.10 Un tube à essai qui ne se vide pas ?

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

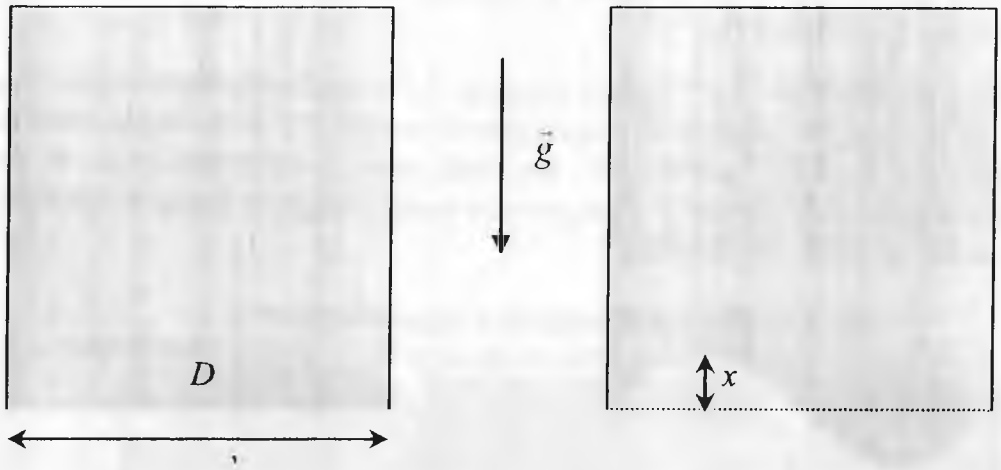
MOTS-CLES : énergie de tension superficielle.

Si une bouteille ou un réservoir étanche possède une évacuation de diamètre trop faible, il se peut que, malgré l'action de la pesanteur, le liquide ne puisse pas s'écouler du fait de sa tension superficielle. Ce problème propose d'étudier ce phénomène par un raisonnement énergétique semi-quantitatif.

On considère un réservoir étanche initialement presque rempli et possédant une unique évacuation du liquide dans sa partie basse. Lorsque la sortie est ouverte, on observe que le liquide se met à couler pendant un certain laps de temps, le débit diminuant au cours du temps pour finalement s'arrêter.

1) Expliquer la diminution du débit observé.

Pour comprendre pourquoi le liquide ne sort plus malgré la pesanteur, on part d'une situation où l'interface entre le liquide et l'air est plane (situation A). Le liquide étant incompressible, la chute du liquide d'un côté entraîne sa remontée de l'autre (situation B). Il y a alors une compétition entre la pesanteur qui a tendance à créer ce mouvement et la tension superficielle qui a tendance à l'empêcher. On note ρ et γ respectivement la masse volumique et la tension superficielle du liquide.



situation A situation B

2) Expliquer sans calcul pourquoi la tension superficielle tend effectivement à empêcher cet écoulement.

3) Calculer *en ordre de grandeur* la variation d'énergie entre les situations A et B en considérant que $x << D$. On supposera que dans la situation B, le problème est invariant selon la direction perpendiculaire au plan de la feuille, le récipient possédant une largeur D selon cette direction.

4) En déduire que le liquide ne s'écoule pas si le diamètre D de l'ouverture est inférieur à une valeur seuil dont on donnera une expression approchée en fonction de γ, ρ et g.

5) Interpréter l'expérience représentée sur la photo ci-dessous où le tube à essai, de diamètre égal à 12 mm, rempli d'eau colorée (par du jus de betterave) est à l'envers sans que l'eau ne s'en échappe. On donne pour l'eau $\gamma = 7.10^{-2}$ N.m^{-1}.

Tube à essai renversé et rempli d'eau colorée

© Robin Carpentier

Note : Pour les sceptiques, il ne s'agit pas d'une photo à l'envers ! On peut s'en convaincre en remarquant une goutte d'eau en train de se former à l'extérieur du tube sur le côté gauche…

5.11 Intérêt du foc pour un voilier

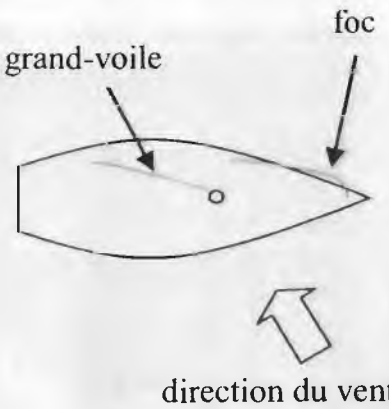
TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : relation de Bernoulli.

Un voilier est généralement constitué de deux voiles : la grand-voile et le foc. Alors que la grand-voile, relativement tendue, est à peu près plate, le foc possède quant à lui une forme plutôt arrondie permettant de renvoyer le vent derrière la grand-voile (côté appelé l'extrados). L'espace entre le foc et la grand-voile s'appelle la fente et leur combinaison donne une force propulsive supérieure à la somme de celles provoquées par chacune des voiles prise individuellement.

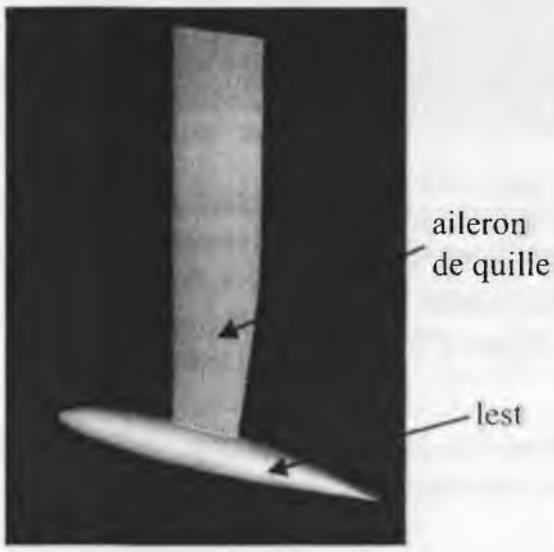
auteur : Julien jj1 (licence CC)

schéma du voilier vu de dessus naviguant au près



1) Expliquer qualitativement pourquoi l'association des deux voiles permet d'augmenter la force exercée par le vent sur le voilier.

Quille d'un voilier



auteur : Plagergren (licence CC)

La quille d'un voilier désigne la partie située sous la coque permettant au voilier de se stabiliser d'une part et de résister à la dérive d'autre part, c'est-à-dire au dérapage latéral dû à l'effet du vent. La quille est constituée d'un aileron, appendice vertical fixe placé sous la coque et du lest placé sous l'aileron. Certains voiliers possèdent deux quilles. Par ailleurs, un voilier possède un autre appendice immergé dans l'eau : c'est le safran, qui est une partie du gouvernail, constitué d'un plan vertical pouvant pivoter afin de dévier le flux d'eau sous la coque pour changer la direction du navire.

2) Expliquer de manière qualitative comment un voilier peut remonter le vent.

5.12 Force de traction d'une aile de kitesurf

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : équation d'Euler, forces de pression.

On cherche dans ce problème à déterminer la plage de vent permettant d'utiliser une aile de kitesurf suivant la surface de sa voilure et le poids du surfeur. En plein essor depuis le début des années 2000, le principe du kitesurf est le suivant : la personne, debout sur un surf glissant sur l'eau, est tractée par un grand cerf-volant (*kite* en anglais). La manipulation de l'aile se fait à l'aide d'une barre de navigation : elle permet au surfeur de se diriger et d'effectuer des acrobaties souvent très spectaculaires. La structure d'une aile dite « *C-shape* » est schématisée sur la figure n°1. L'aile prend sa forme arrondie grâce à des boudins gonflés au préalable : le « bord d'attaque » ainsi que des lattes qui lui sont perpendiculaires. Il est à noter que l'aile est plus large vers le centre que sur les bords.

Aile de kitesurf prête au décollage

Surfeur en mer tracté par l'aile

© *Alexandre Seillier, Stéphane Pottier et Renaud Carpentier*

L'aile est dans un premier temps supposée plate (et non arrondie), de largeur l uniforme et suffisamment longue (de longueur L) pour pouvoir considérer l'écoulement comme un écoulement plan. On raisonne dans le référentiel lié à l'aile. Cette dernière fait un angle α avec la direction de l'air arrivant sur l'aile à la vitesse U. On note p_0 la pression atmosphérique et μ la masse volumique de l'air. La figure n°2 représente l'allure des lignes de courant.

Pour les applications numériques, on raisonnera avec une aile d'une surface S de 9 m^2, ayant une largeur l égale à 1,5 m. On donne la masse volumique de l'air μ = 1,3 kg.m^{-3} et la viscosité dynamique $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ Pa.s.

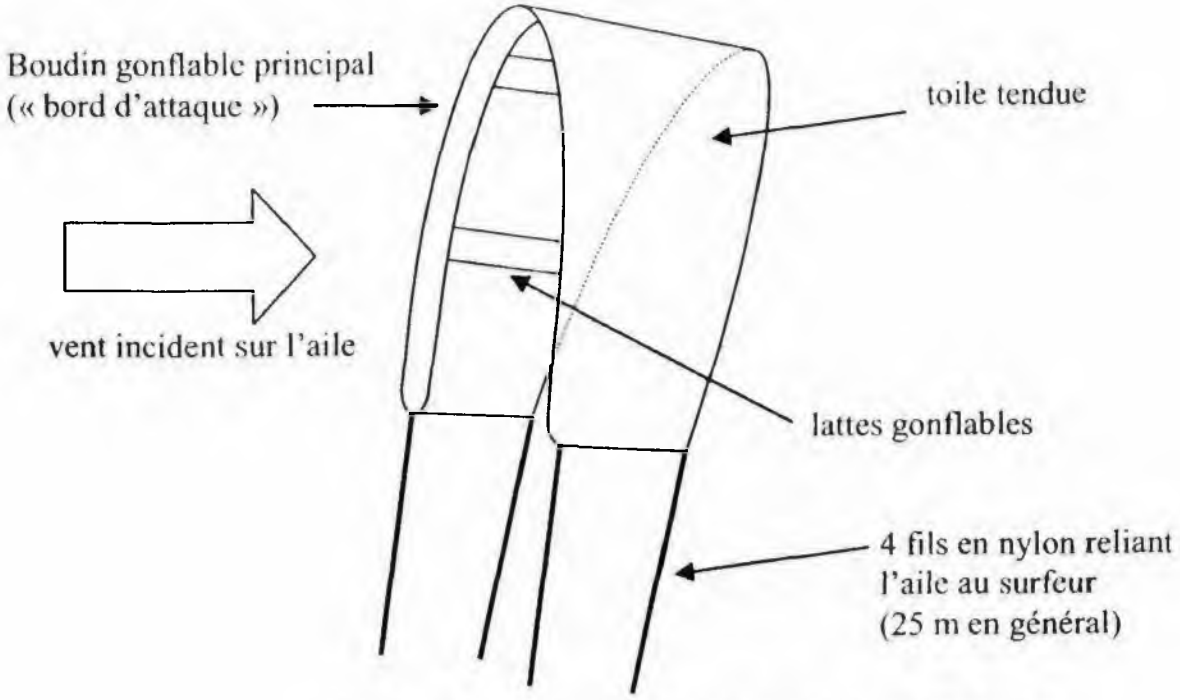


Figure n°1 : structure d'une aile de kitesurf (*C-shape*)

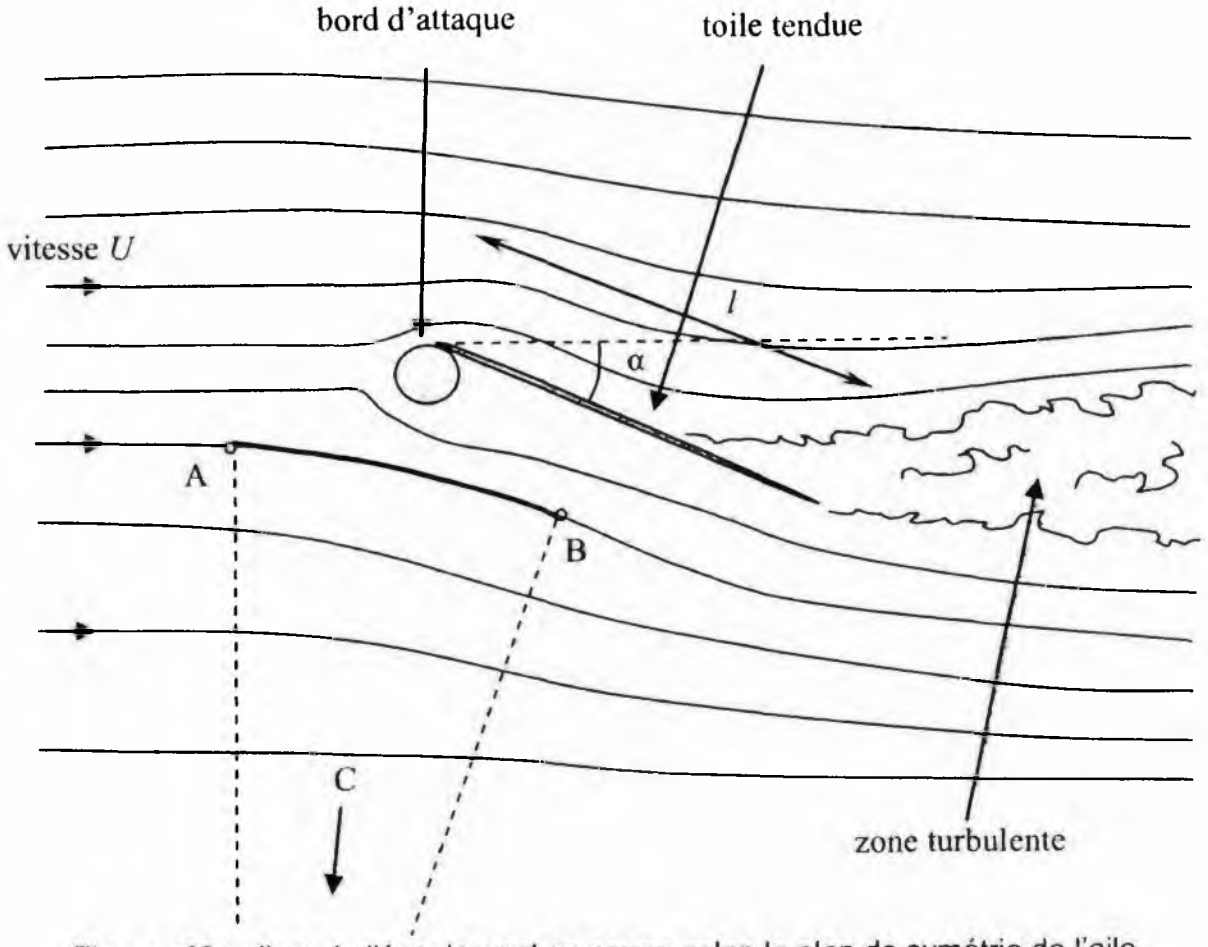


Figure n°2 : allure de l'écoulement en coupe selon le plan de symétrie de l'aile

1) Est-on bien dans le cas d'un écoulement turbulent ? Justifier par une application numérique.

On assimile la portion de ligne de courant AB à un arc de cercle de longueur l environ et de centre C.

2) Exprimer le rayon R = AC = BC de ce cercle en fonction de l et α.

On fait l'hypothèse que sur la portion AB, la vitesse de l'air est constante en norme.

3) Exprimer alors la norme de son accélération en fonction de U et de R.

On suppose l'écoulement parfait en dehors de la zone de turbulence.

4) Ecrire l'équation d'Euler en négligeant la pesanteur.

5) Quelle est la direction et le sens du gradient de la pression au point B. La zone en dessous de l'aile est-elle une zone de surpression ou de dépression ?

6) Quelle est la longueur caractéristique de variation de la pression autour de l'aile ? En déduire l'ordre de grandeur de $p_B - p_0$ en fonction de μ, U et α.

7) La zone au dessus de l'aile est-elle une zone de surpression ou de dépression ?

Si α n'est pas trop grand, une expression approchée de la force exercée par l'air sur l'aile est $\vec{F}_{air \to aile} \approx \frac{1}{2} C\mu U^2 (\alpha S)\vec{n}$ où $\vec{n}$ désigne la normale ascendante à la toile, le coefficient C étant proche de 2.

8) Montrer que le modèle développé précédemment permet de retrouver cette loi à un facteur près.

La forme arrondie de la voile entraîne que la surface réelle qui apparaît dans la formule de la force de traction de l'aile doit être remplacée en pratique par une surface effective, appelée « surface projetée », égale à la surface réelle multipliée par un facteur égal à 0,7 environ. Une planche de kitesurf est trop petite pour que le surfeur puisse s'y mettre debout sans couler. La traction de l'aile doit donc être suffisante pour permettre au surfeur de glisser sur l'eau. A l'inverse, elle ne doit pas être trop élevée pour des raisons évidentes de sécurité : par vent trop fort, le surfeur peut s'envoler sans le vouloir et parcourir une distance très importante dans les airs, en ayant très peu de contrôle sur l'aile. Pour connaître la plage de vent d'utilisation d'une aile, on peut retenir le critère suivant : pour une aile immobile dans le ciel avec un angle α de 30°, la force de traction doit être comprise entre le tiers du poids du surfeur et son poids.

9) En déduire la plage de vent permettant de naviguer avec une voile *C-shape* ayant une surface réelle de 9 m^2 pour un surfeur de 80 kg.

Pour contrôler la force de traction de l'aile, le surfeur peut plus ou moins tirer avec ses mains sur la barre de navigation (voir figure n°3). Il est à noter que le fil accroché au harnais passe à travers un trou situé au milieu de la barre.

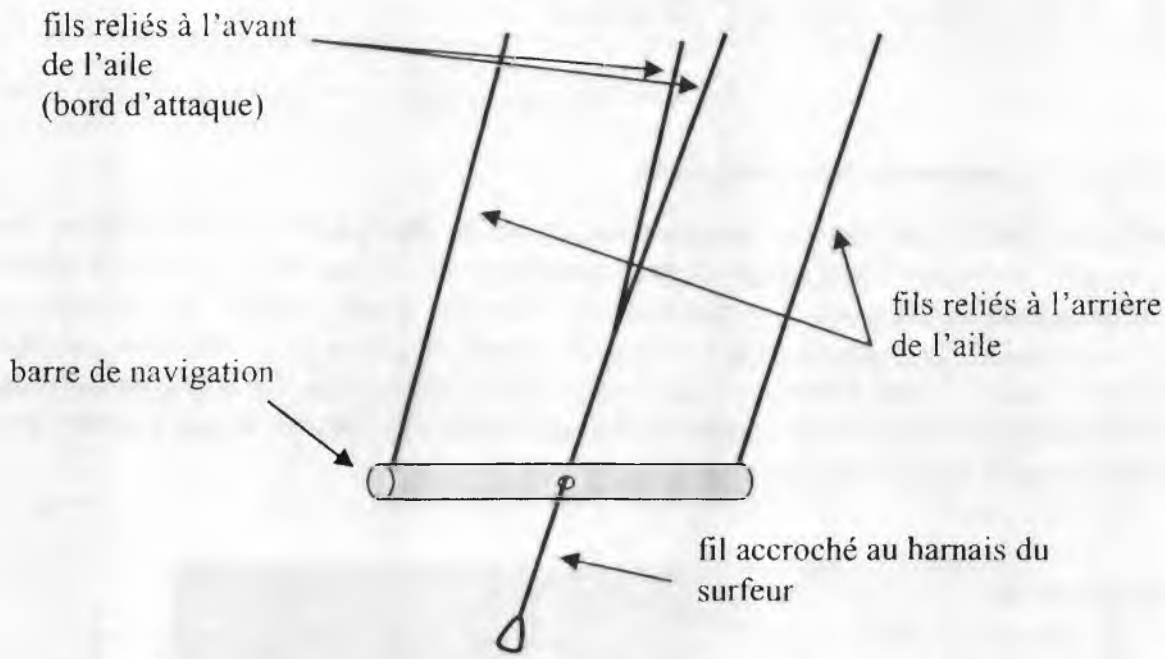
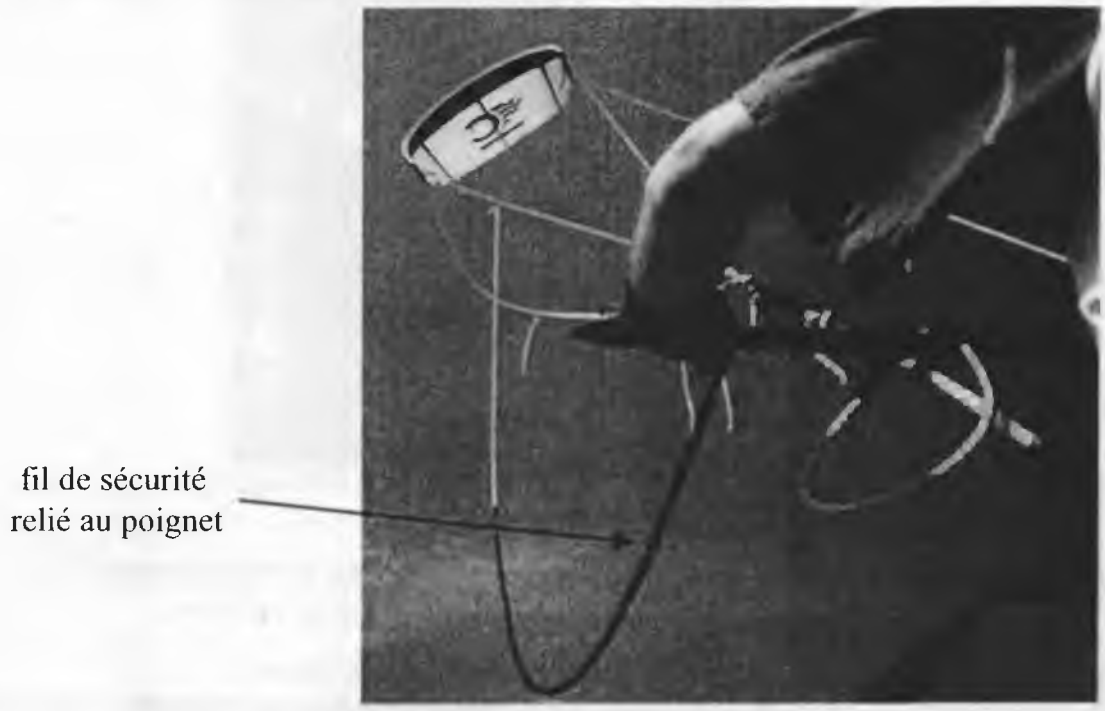


Figure n°3 : principe de la barre de navigation d'une aile de kitesurf



© *Alexandre Seillier*

10) Expliquer, en le justifiant, ce que le surfeur doit faire pour augmenter ou diminuer la force de traction de l'aile.

5.13 Récupérateur d'eau

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : relation de Bernoulli, débit.

Un particulier vient d'acheter un récupérateur d'eau de pluie pour pouvoir arroser son jardin potager. Le récupérateur est de forme cylindrique de hauteur $H = 1{,}8$ m et de rayon $R = 25$ cm. Il possède au pied une ouverture sur laquelle il est possible de brancher un robinet, ce dernier n'étant pas fourni. Il découvre dans le magasin qu'il existe des robinets de différentes tailles. Tenté d'acheter le plus petit (car le moins cher...), il se reprend en se disant qu'il lui fallait prendre un robinet de diamètre suffisant afin de ne pas attendre trop longtemps lorsqu'il remplit son arrosoir.

Récupération de l'eau de pluie (le trop plein allant dans le regard des eaux pluviales)

Deux ouvertures possibles où brancher un robinet. Sur la photo, le robinet a été branché à l'ouverture située tout en bas

© Renaud Carpentier

1) Calculer le diamètre minimal de sortie du robinet pour que le remplissage d'un arrosoir de 15 litres dure moins de trente secondes lorsque le récupérateur est plein.

Il est vivement conseillé de vider complètement le récupérateur avant l'hiver.

2) Expliquer pourquoi.

3) Calculer le temps de vidange complet du récupérateur d'eau si celui-ci est plein au départ.

5.14 Une expérience à faire chez soi !

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : description d'un écoulement, relation de Bernoulli, statique des fluides.

Voici une expérience simple à réaliser chez soi : on souffle dans une paille placée au-dessus d'une grande assiette plate contenant une petite quantité d'eau (ou de soupe pour la faire refroidir plus vite...). Si l'on souffle suffisamment fort, il se crée dans l'assiette un « trou », c'est-à-dire une zone circulaire où l'eau s'est totalement retirée.

On note D la distance entre le bout de la paille et l'assiette, V_0 la vitesse de l'air à la sortie de la paille et e l'épaisseur d'eau dans l'assiette. μ_{eau} et μ_{air} sont respectivement les masses volumiques de l'eau et de l'air. On cherche à déterminer la vitesse minimale $V_{0,min}$ à partir de laquelle se crée le « trou » dans l'assiette, puis de calculer le rayon R du « trou » pour $V_0 > V_{0,min}$.

On suppose dans un premier temps que l'assiette ne contient pas d'eau (schéma a ci-après). On admet que le champ de vitesses de l'air dans la zone (Z) s'écrit dans le repère cylindrique (r,θ,z) :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_r = K_1 r \\ V_\theta = 0 \\ V_z = -K_2 z \end{cases}$$

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ et}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

1) Montrer que cet écoulement est irrotationnel.

2) En écrivant que l'écoulement est incompressible (légitime ici puisque V_0 est très petit devant la vitesse du son dans l'air), écrire le lien simple entre K_1 et K_2. Expliciter ces deux constantes compte tenu des conditions aux limites.

3) Tracer l'allure des lignes de courants dans la zone (Z).

L'assiette contient maintenant de l'eau (schéma b ci-après). On suppose que le niveau d'eau varie suffisamment peu pour considérer que le champ de vitesses étudié précédemment soit encore valable. On note $h(r)$ la diminution du niveau d'eau à une distance r du centre

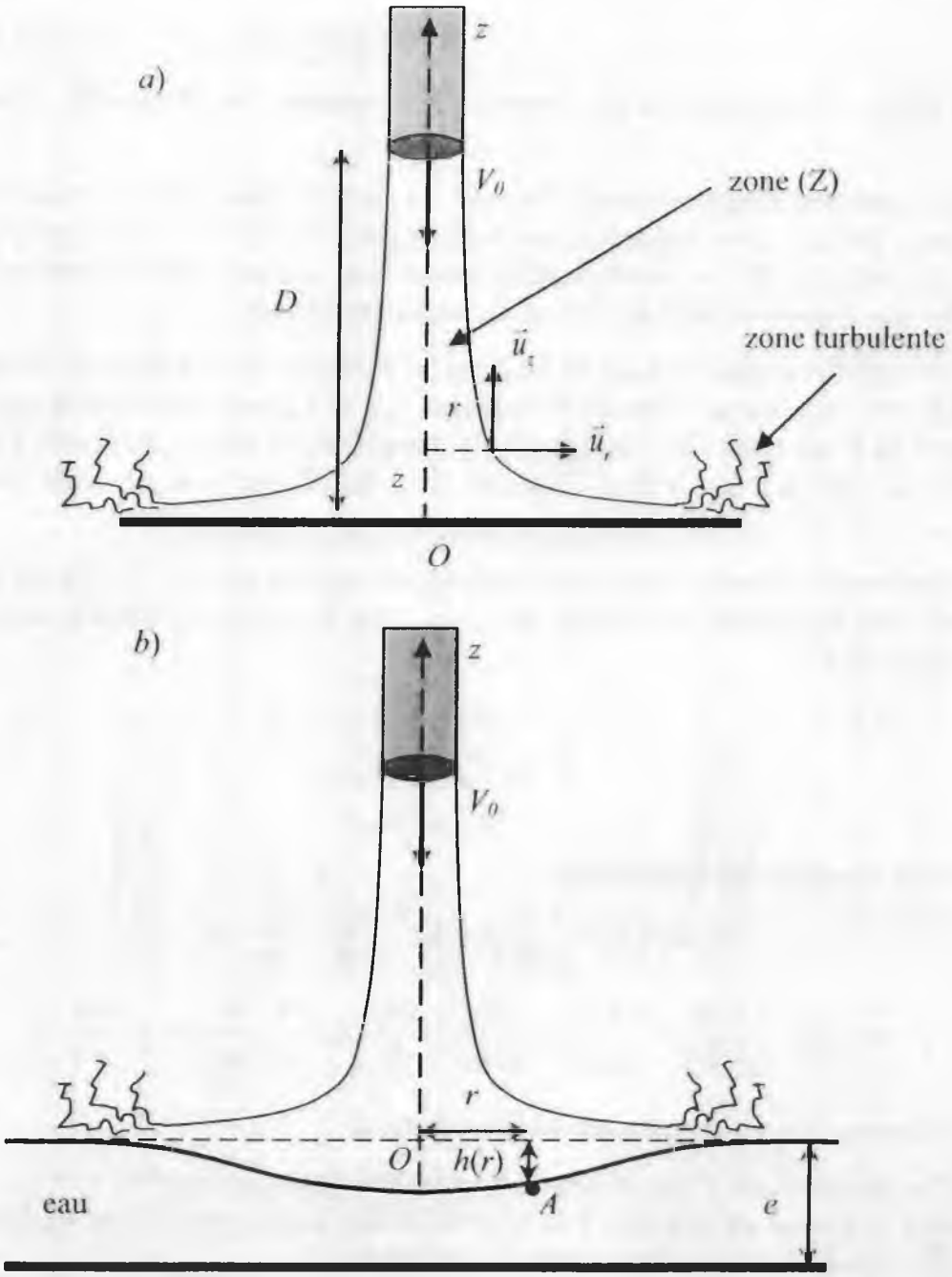
4) Calculer la pression de l'air au point A en supposant que celle à la sortie de la paille soit égale à la pression atmosphérique P_0.

5) Calculer la pression de l'eau au point A, sachant que l'eau est en tout point au repos.

Si l'on néglige la tension superficielle de l'eau, il y a égalité des pressions en A.

6) Etablir l'équation qui permettrait d'obtenir $h(r)$.

7) Déterminer $V_{0\,min}$ et R. Tracer l'allure du graphe de R en fonction de V_0. Est-il possible de créer un trou aussi grand que l'on veut en soufflant très fort ?



5.15 Naissance des vagues

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

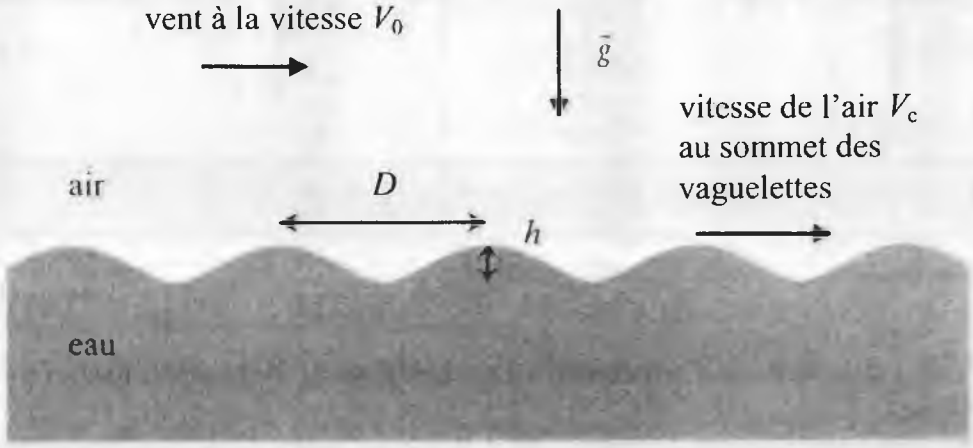
MOTS-CLES : description d'un écoulement, relation de Bernoulli.

On propose dans ce problème de comprendre dans quelles conditions du vent peut créer des rides à la surface d'une eau initialement au repos. Les vaguelettes ainsi créées deviendront progressivement des vagues si le vent est suffisamment soutenu et dure de façon prolongée.

Apparition de rides à la surface d'un étang, le vent venant de la gauche

© *Renaud Carpentier*

On considère une succession de vaguelettes identiques séparées d'une distance D, la différence de hauteur entre les creux et les sommets valant $h << D$. La présence des vaguelettes modifie l'écoulement de l'air sur une hauteur de l'ordre de H. Loin au dessus des rides, l'air se déplace à une vitesse V_0, la pression atmosphérique valant p_0. On note V_c et $p_{c,air}$ respectivement la vitesse et la pression de l'air juste au dessus du sommet d'une vaguelette. Le champ de vitesses de l'air est donné par $\vec{v} = v_x(x,z)\vec{e}_x + v_z(x,z)\vec{e}_z$. On note V_z l'ordre de grandeur de la vitesse verticale de l'air à proximité des vaguelettes. On suppose l'écoulement de l'air incompressible et irrotationnel, et l'on considérera dans un premier temps que les vaguelettes sont immobiles. Enfin, on note ρ_{air} et ρ_{eau} la masse volumique respectivement de l'air et de l'eau.



1) Tracer l'allure des lignes de courant. Expliquer qualitativement comment l'écoulement d'air peut augmenter la hauteur des vaguelettes.

Dans les trois questions suivantes, il est demandé d'établir des relations **en ordre de grandeur** entre les différentes grandeurs introduites en admettant qu'à l'altitude correspondant au niveau de l'eau en l'absence de vaguelettes, la pression vaut p_0 et la vitesse horizontal de l'air vaut V_0.

2) Relier V_z, V_0, h et D.

3) Utiliser le caractère incompressible et irrotationnel de l'écoulement d'air pour établir deux relations entre V_z, $V_c - V_0$, H et D. En déduire une relation simple entre H et D.

4) Déduire des questions précédentes que $p_0 - p_{c,air}$ a pour ordre de grandeur $2\rho_{air}\frac{h}{D}V_0^2$.

5) Donner par ailleurs l'expression de la pression de l'eau $p_{c,eau}$ au niveau du sommet des vaguelettes (on rappelle que l'eau est considérée comme immobile).

Pour étudier le phénomène d'amplification éventuelle des vaguelettes, il est nécessaire de prendre en compte la tension superficielle γ de l'eau. On peut montrer que le vent a pour effet d'augmenter la hauteur des vaguelettes si $p_{c,eau} - p_{c,air} > \frac{\gamma}{R_c}$, où R_c désigne le rayon de courbure de l'interface eau-air au niveau du sommet des vaguelettes.

6) Sachant que $R_c = \frac{D^2}{16h}$, montrer que le vent amplifie les vagues si $\rho_{air}V_0^2 > F(D)$, où F est une fonction de D que l'on explicitera.

7) A l'aide de l'étude de la fonction F, établir l'expression de la valeur minimale $V_{0,seuil}$ de la vitesse du vent permettant de créer spontanément des vaguelettes. Préciser pour cette valeur la distance D_{seuil} entre les vaguelettes. Indiquer ce qui limite l'amplification des vaguelettes plus rapprochées et celles plus écartées.

8) Application numérique : calculer $V_{0,seuil}$ et D_{seuil} dans des conditions normales de température et de pression sachant que $\gamma = 70$ mN.m^{-1}. Comparer au cas de la photo sachant que la tige flottant dans l'eau a une longueur de 20 cm et que la vitesse du vent variait entre 30 et 40 km.h^{-1}.

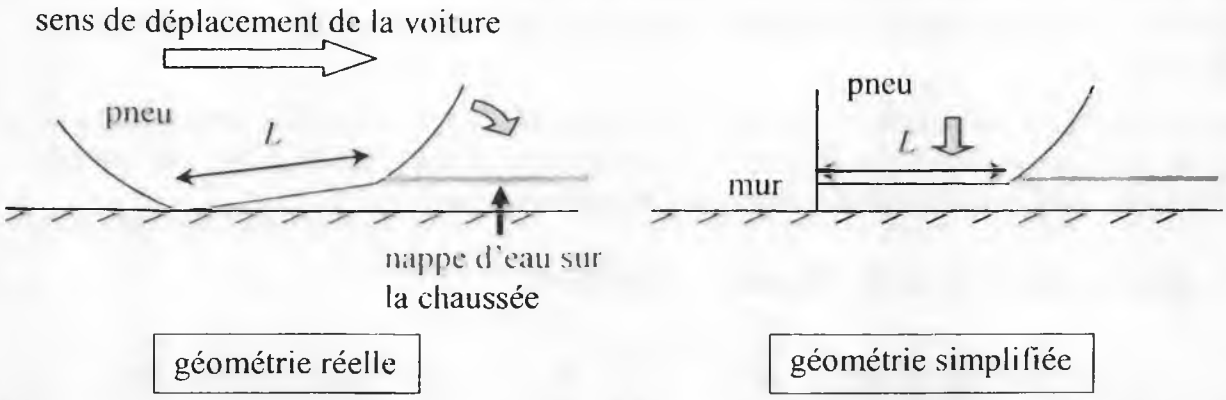
5.16 Le risque d'aquaplaning

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : description d'un écoulement, relation de Bernoulli, forces de pression, bilan de masse.

On propose dans cet exercice de quantifier le risque de faire de l'aquaplanage (« aquaplaning » en anglais) en mettant en évidence l'influence de la vitesse de la voiture mais aussi de la pression des pneus.

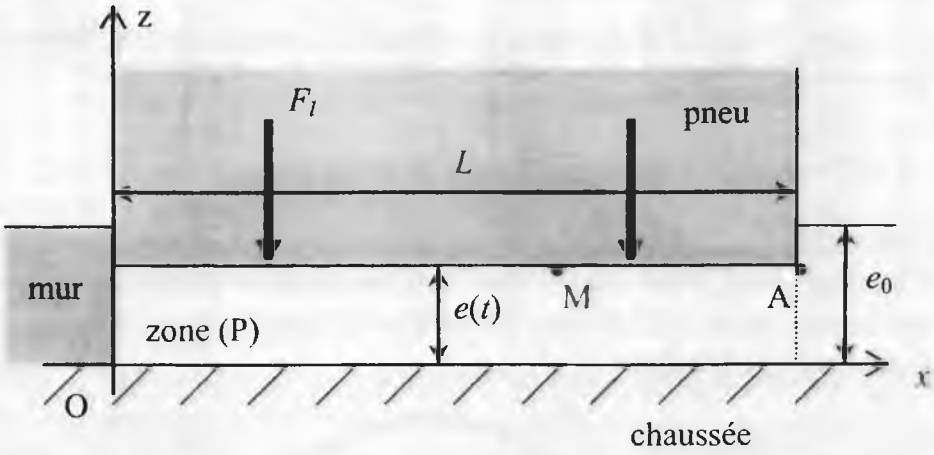
La géométrie réelle de l'évacuation de l'eau par le pneu étant complexe, on la remplace par une géométrie plus simple où le pneu ne se déplace que verticalement, la surface de contact avec l'eau restant constamment horizontale.



Le pneu, supposé lisse (sans rainure), possède une largeur infinie dans la direction Oy et une longueur de contact avec l'eau égale à L. A l'instant initial fixé comme origine des temps, il repose sur une couche d'eau (de masse volumique μ) d'épaisseur $e_0 << L$ initialement au repos. A la date $t > 0$, l'épaisseur d'eau sous le pneu est notée $e(t)$ et le champ de vitesses de l'eau, dont on néglige la viscosité, est de la forme :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = K(t)x \\ v_z = -K(t)z \end{cases}$$ dans la zone sous le pneu notée (P), $0 < z < e(t)$ et $0 < x < L$.

De plus, on fait l'approximation que la pression de l'eau en dehors de la zone (P) est uniforme et vaut la pression atmosphérique p_0.



1) Montrer que l'écoulement est incompressible dans la zone (P). Est-il stationnaire ? Est-il irrotationnel ?

On montre que l'équation des lignes de courant dans la zone (P) est de la forme $xz=C$, où C désigne une constante.

2) Tracer l'allure des lignes de courants dans la zone (P).

3) Rappeler l'équation d'Euler. Quel terme peut-on raisonnablement négliger dans le cadre de l'étude de l'aquaplaning ?

On peut montrer en calculant la circulation de chaque terme de l'équation d'Euler entre deux points bien choisis que la pression au point $M(x, z = e(t))$ à la date t vaut :

$$p(M,t) = p_0 + \frac{1}{2}\mu\left(K^2(t) + \frac{dK}{dt}\right)\left(L^2 - x^2\right)$$

4) Montrer que cette égalité peut s'établir à l'aide de la relation de Bernoulli dans l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire (hypothèse que l'on **ne** gardera **pas** cependant pour la suite).

Le pneu exerce sur l'eau une force par unité de longueur (en plus de celle correspondant à la force de pression atmosphérique) valant F_l. On appelle vitesse d'éjection de l'eau, notée $V_{éj}(t)$, la composante selon Ox de la vitesse de l'eau dans le plan $x = L$.

5) Montrer que $V_{éj}(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$L\frac{dV_{éj}}{dt} + V_{éj}^2(t) = \frac{3F_l}{\mu L}$$

6) Résoudre cette équation en considérant que le pneu est immobile à $t = 0$ en faisant apparaître la vitesse d'éjection en régime permanent que l'on notera V_{RP}. Tracer l'allure de $V_{éj}(t)$.

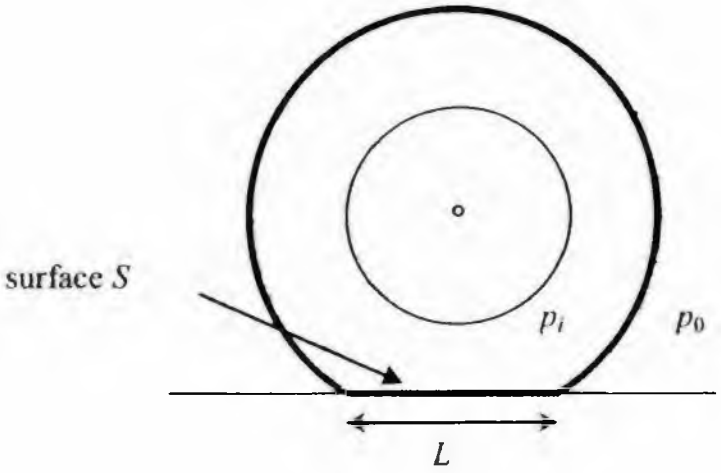
On fournit : $\int \frac{du}{1-u^2} = \text{argtanh}(u) + C$, où argtanh désigne la réciproque de la fonction tangente hyperbolique tanh, définie par $\tanh(u) = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}$.

7) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $e(t)$ faisant intervenir $V_{éj}(t)$.

8) La résoudre. Tracer l'allure de $e(t)$. Indiquer le temps caractéristique τ nécessaire pour que le pneu évacue l'eau.

On fournit : $\int \tanh(u)du = \ln(\cosh(u)) + C$

La question est maintenant de savoir si ce temps τ est suffisamment court pour éviter le phénomène d'aquaplaning. Pour cela, il faut dans un premier temps calculer la surface de contact S entre le pneu et le sol. On note l la largeur des pneus, p_i la pression intérieure des pneus et M la masse de la voiture.



9) En raisonnant à l'équilibre notamment sur la partie du pneu en contact avec le sol et sachant que la surface réelle (au niveau microscopique) de contact entre le pneu et la

chaussée est très petite devant S du fait d'une multitude de micro-aspérités, montrer que $S = \dfrac{Mg}{4(p_i - p_0)}$.

La voiture roule à une vitesse V_0. On peut estimer que le phénomène d'aquaplaning est évité si le temps τ mis pour évacuer l'eau est inférieur au temps τ_0 mis par la voiture pour être en contact avec une nouvelle zone de la nappe d'eau au sol.

10) Exprimer τ_0 en fonction de L et V_0.

On définit le nombre sans dimension n_{ad} d'aquaplaning dynamique par la formule suivante :

$$n_{ad} = \frac{\frac{1}{2}\mu V_0^2}{p_i - p_0}$$

11) Montrer que la voiture risque de faire de l'aquaplaning si n_{ad} dépasse une certaine valeur que l'on calculera.

12) Estimer la vitesse maximale V_{max} en km/h au-delà de laquelle il y a un risque d'aquaplaning avec une pression des pneus $p_i - p_0$ égale à 2 bars.

13) Indiquer l'intérêt de la forme des rainures du pneu visible sur la photo ci-dessous. Dans quel sens doit tourner le pneu en marche avant ?

Pneu Fulda Kristall Montero 3 de la marque Michelin®

5.17 Avancée d'un bouchon

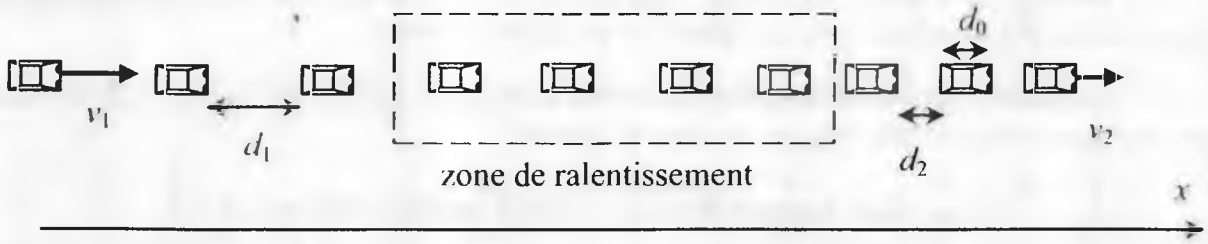
TECHNICITE : * INITIATIVE : *

MOTS-CLES : régime stationnaire, débit, composition des vitesses.

Cet exercice propose de prévoir la vitesse de déplacement d'un bouchon dans une file de voitures.

Trafic congestionné en ville

On considère une unique file de véhicules en ligne droite. On suppose les véhicules tous identiques de longueur d_0. Ceux-ci sont obligés de ralentir à l'arrivée d'un bouchon. Ils passent progressivement de la vitesse v_1 à la vitesse $v_2 < v_1$. La zone en pointillé repère la zone de ralentissement. Celle-ci se déplace au cours du temps. L'objectif de l'exercice est donc de savoir comment. On se place dans le cas d'un trafic congestionné de sorte que les conducteurs sont obligés de respecter les distances de sécurité (avant *et* dans le bouchon): ils laissent un écart temporel τ entre l'arrière du véhicule qui les précède et l'avant de leur propre véhicule.



1) Calculer la distance d_l qui sépare l'arrière d'un véhicule et l'avant du véhicule qui le suit lorsque les véhicules ont une vitesse v_i.

On note v_f la vitesse (algébrique) de déplacement de la zone de ralentissement. On raisonne dans ce qui suit dans le référentiel R_f lié à la zone de ralentissement.

2) Comment s'écrivent les vitesses d'entrée et de sortie des véhicules dans la zone de ralentissement dans le référentiel R_f, notées respectivement v_1^* et v_2^* ?

3) Donner l'expression, avec démonstration, du débit de véhicules entrant dans la zone de ralentissement en fonction de v_1^*, d_1 et d_0. Calculer de même le débit de véhicules sortant de la zone de ralentissement.

4) En supposant que l'on soit en régime stationnaire, c'est-à-dire que le nombre de véhicules dans la zone de ralentissement soit constant, calculer la vitesse de déplacement v_f de la zone de ralentissement. Dans quel sens évolue le front du bouchon ?

AN : $d_0 = 4$ m et $\tau = 2$ s. Calculer numériquement v_f en km/h.

5.18 Usine marémotrice de la Rance

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : relation de Bernoulli, système ouvert.

DOCUMENT n°1 : Les marées dans la Manche, d'après le site « www.ifremer.fr »

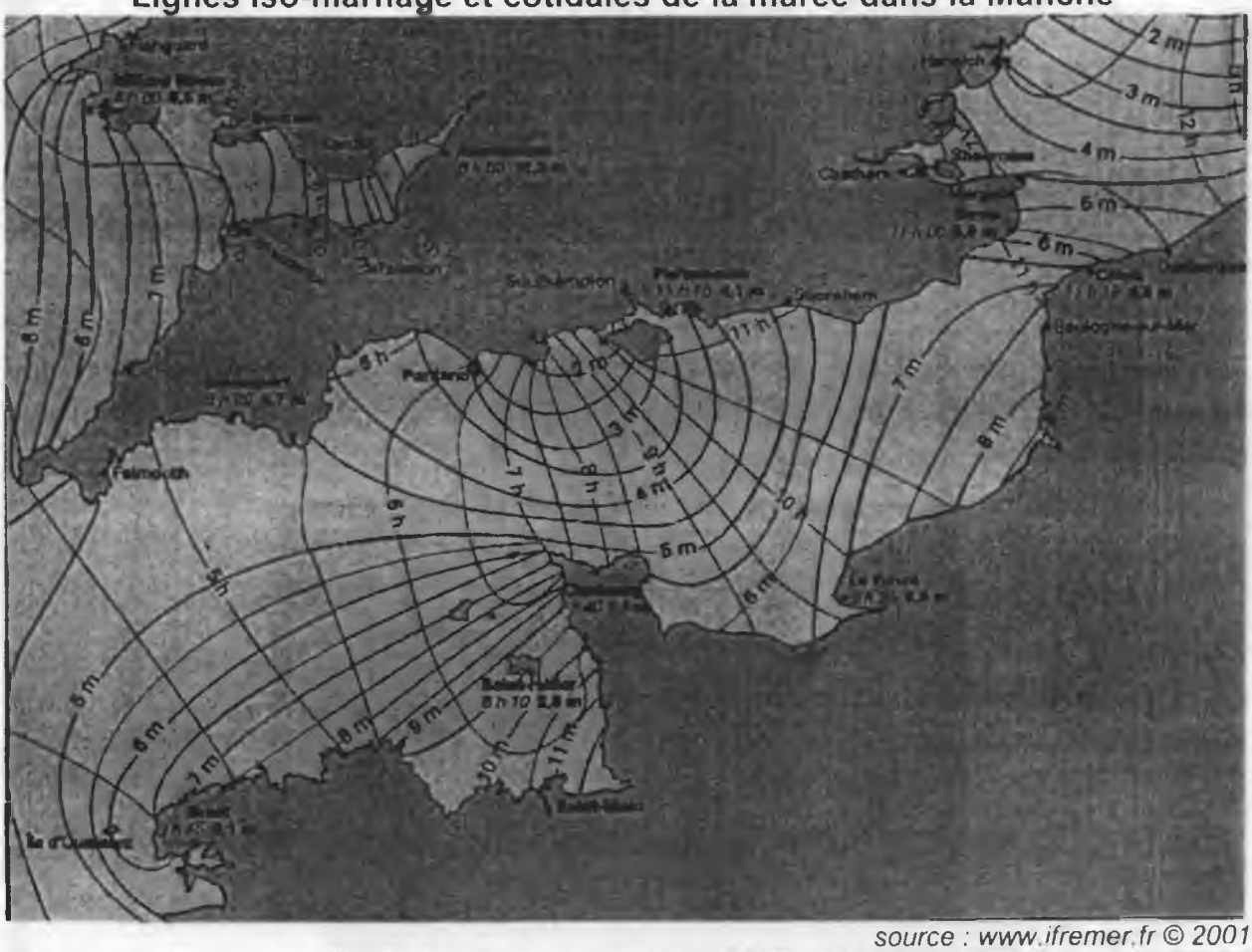
Le phénomène des marées tient son origine de l'action conjuguée de la Lune et du Soleil. La variation de hauteur de l'eau entre une marée basse (basse mer) et une marée haute (pleine mer) s'appelle le marnage. Il diffère d'un endroit à l'autre selon que l'onde de marée est amplifiée par les contraintes qu'impose le littoral. Par ailleurs, à un endroit donné, le marnage varie au fil des jours suivant la position relative de la Lune par rapport au Soleil. Lorsque les deux astres sont alignés avec la Terre, les effets provoqués par chaque astre se conjuguent et induisent un marnage élevé (marée de « vive-eau »). A l'opposé, lorsque les positions de la Lune et du Soleil forment un angle droit depuis la Terre, le marnage est faible : on parle de marée de « morte-eau ». Par commodité, on utilise le coefficient de marée pour quantifier le marnage, ce coefficient (sans dimension) variant entre 20 et 120 selon l'amplitude de la marée.

Sur la figure suivante sont représentées :

- les lignes d'iso-marnage : chaque ligne correspond aux endroits de même valeur du marnage (exprimé en mètres) dans le cas d'une marée de vive-eau moyenne (coefficient de marée égal à 95),'
- les lignes cotidales, représentant les endroits se trouvant en pleine-mer à la même heure.

On peut noter que le marnage est plus important côté français qu'anglais : cela est dû à la force de Coriolis qui a tendance à dévier l'onde de marée.

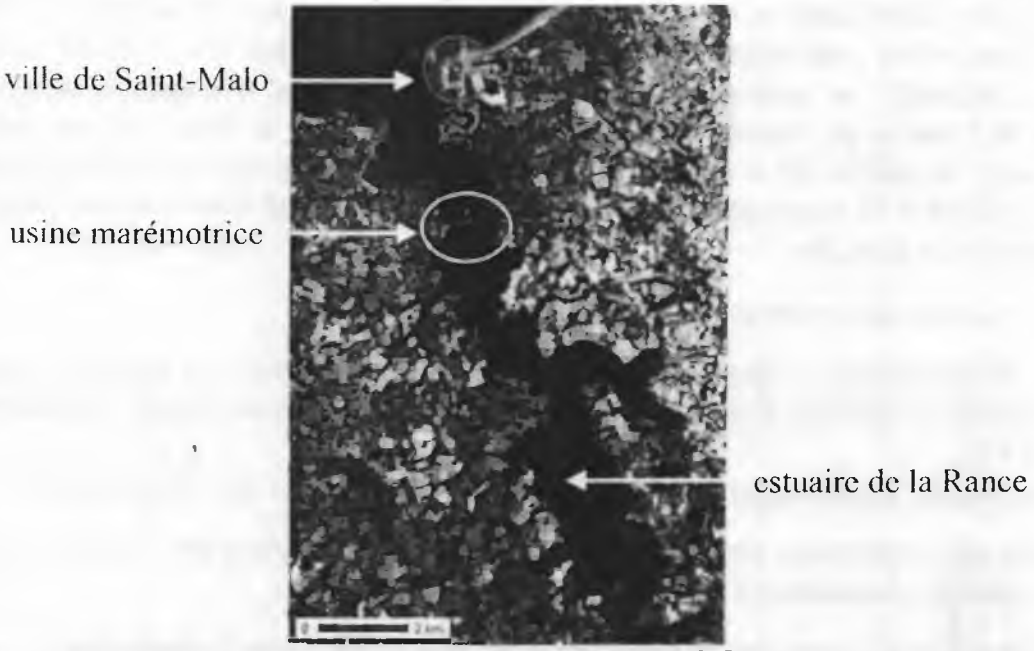
Lignes iso-marnage et cotidales de la marée dans la Manche



source : www.ifremer.fr © 2001

DOCUMENT n°2 : L'usine marémotrice de la Rance, d'après le site « wikipédia.fr »

L'usine marémotrice de la Rance est une centrale électrique française tirant son énergie de la force de la marée. Elle se trouve à l'estuaire de la Rance, en Ille-et-Vilaine, à proximité de la ville de Saint-Malo. Mise en service en 1967, elle est restée la plus grande usine marémotrice au monde jusqu'en 2011.



source : geoportail.gouv.fr ©

Les principales caractéristiques de la centrale sont les suivantes :
- puissance nominale 240 MW,
- tension de sortie 3,5 kV,
- production de 550 millions de kWh/an
- 24 turbines de type Kaplan de 5,3 mètres de diamètre constituées de quatre pales orientables entre -5° et 35°
- poids de chaque bulbe (turbine+alternateur) : 470 tonnes.

Les bulbes ont été conçus pour fonctionner également en pompage, permettant ainsi d'ajuster le niveau d'eau du côté du fleuve en fonction des prévisions des besoins en électricité du réseau.

Vue aérienne de l'usine marémotrice de la Rance

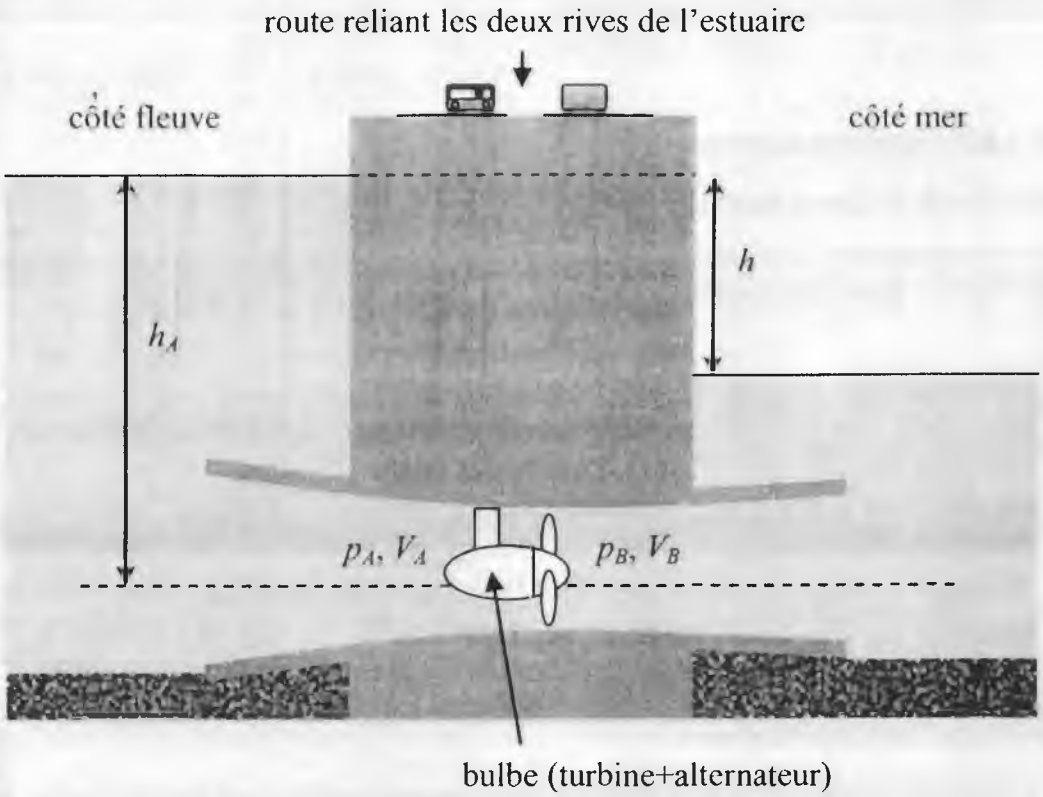
Auteur : Tswgb (domaine public)

1) Dans quel sens se propage l'onde de marée dans la Manche ?

2) Filière PC : justifier précisément pourquoi la force de Coriolis entraîne un marnage globalement plus élevé au niveau des côtes françaises qu'anglaises.

3) Justifier le choix d'implantation de l'usine marémotrice de la Rance. Comment expliquer que ce site soit naturellement privilégié ?

Une coupe schématique du barrage de la Rance est représentée sur la figure ci-dessous. On note S la section du conduit au niveau de la turbine, p_A et V_A respectivement la pression et la vitesse juste en amont de la turbine et p_B et V_B celles juste en aval. Afin de simplifier le modèle, on considère que ces grandeurs sont uniformes sur la section S. On note p_0 la pression atmosphérique, h le marnage, h_A la profondeur de la turbine du côté du fleuve et ρ la masse volumique de l'eau, considérée comme un fluide parfait (excepté dans la zone de turbulence en aval de la turbine) et incompressible. Enfin, on se place en régime stationnaire.



4) Quel lien simple existe-t-il entre V_A et V_B ? Pourquoi ?

5) A l'aide du théorème de Bernoulli, exprimer p_A en fonction de p_0, h_A, ρ et V_A.

Du fait des turbulences, le théorème de Bernoulli n'est pas applicable à travers la turbine ni en aval de celle-ci. On admet qu'il est possible de calculer la pression p_B comme si l'eau était en repos dans toute la zone en aval de la turbine (même si cela peut paraître surprenant, cela donne une bonne estimation de p_B).

6) En déduire une expression de p_B en fonction des autres paramètres.

On suppose que la viscosité, bien que présente car étant responsable du transfert d'énergie de l'eau à la turbine, ne provoque pas de dissipation d'énergie au sein de l'eau à proximité immédiate de la turbine (elle en dissipe en revanche en aval de la turbine dans la zone de turbulence).

7) A l'aide d'un bilan sur un système fermé que l'on définira avec soin, montrer que la puissance fournie par l'eau à la turbine vaut :

$$P = \left(gh - \frac{1}{2} V_4^2 \right) \rho V_4 S$$

8) Montrer qu'il existe une valeur de V_4 pour laquelle la puissance est maximale. Quel paramètre peut-on faire varier afin d'obtenir cette valeur ?

9) Estimer la puissance que peut délivrer chaque bulbe de l'usine de la Rance. Le résultat est-il en accord avec la puissance nominale indiquée sur le document ?

10) Qu'est ce qui limite selon vous le nombre de turbines installées dans le barrage ?

5.19 Résistance au roulement sur sol mouillé

TECHNICITE : ** INITIATIVE : ***

MOTS-CLES : système ouvert.

On considère une voiture ayant les caractéristiques suivantes :

DOCUMENT : Quelques caractéristiques de RENAULT SCENIC 2

Poids à vide : 1340 kg
Dimensions : 1620 mm de hauteur, 4259 mm de longueur, 2087 mm de largeur
Roues : diamètre des jantes 16 pouces, largeur des pneus 195 mm.

1) Evaluer la force de résistance au roulement supplémentaire que subit la voiture lorsqu'elle roule sur une route mouillée par rapport à un sol sec, en prenant le cas d'une voie rapide (limitée à 100 km/h) dont la chaussée est recouverte d'un mince film d'eau de 1 mm d'épaisseur. Pour ce faire, il est demandé de développer un modèle *simplifié* d'évacuation de l'eau par les pneus.

2) Comparer d'une part à la force de roulement sur sol sec qui est de l'ordre de 50 N, et d'autre part à la force de trainée due à l'air, que l'on évaluera également sachant que la viscosité dynamique de l'air vaut $1{,}8.10^{-5}$ Pa.s.

5.20 Un Ecureuil au plafond...

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : relation de Bernoulli, système ouvert, statique des fluides.

Le record mondial pour un atterrissage et un décollage en altitude par hélicoptère fut remporté en 2005 lorsqu'un Ecureuil AS350 B3 se posa au sommet de l'Everest à 8 850 m d'altitude. On se propose de modéliser la force de portance exercée sur cet hélicoptère et d'évaluer son altitude maximale (appelée *plafond*) à partir des caractéristiques de l'appareil.

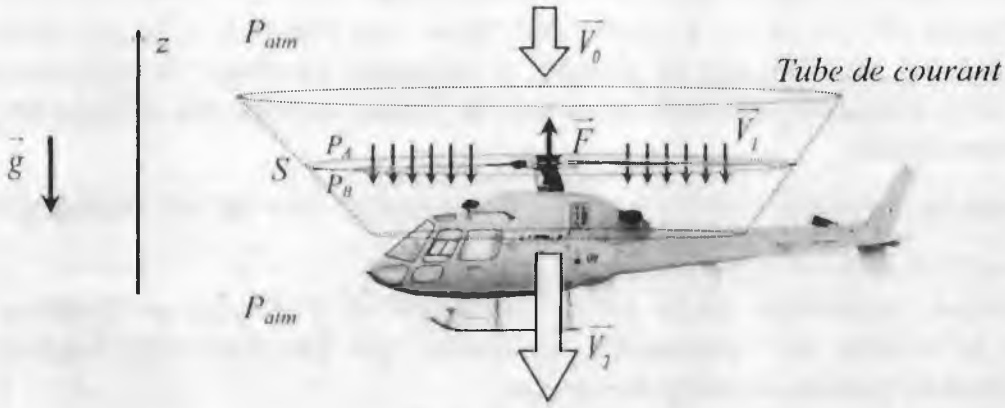
Hélicoptère Ecureuil AS350 de la gendarmerie nationale au décollage

Auteur : Fabien1309 (licence CC)

Le moteur de l'hélicoptère Ecureuil AS350 B3 fournit une puissance mécanique totale de 847 ch (623 kW). Le rotor, constitué de trois pales, a un diamètre de 10,7 m. La masse totale de l'appareil, avec ses passagers et le matériel, vaut 1 500 kg.

Les pales du rotor sont inclinées pour entraîner l'air vers le bas et maintenir l'appareil en vol stationnaire ou en vol ascendant. On considère l'écoulement d'air provoqué par le rotor dans le tube de courant représenté sur le schéma ci-dessous.

Ecoulement d'air dans le tube de courant passant par le rotor de l'hélicoptère



Le rotor balaye une surface totale S. L'air est en écoulement incompressible, de la vitesse V_0 à l'entrée du tube de courant à la vitesse V_2 en sortie, vitesses mesurées dans le référentiel lié à l'appareil. La vitesse de l'air au voisinage du rotor vaut V_1. La pression à l'extérieur du tube de courant est la pression atmosphérique P_{atm}, uniforme à l'échelle de l'hélicoptère. On note P_A et P_B les pressions juste au-dessus et juste en dessous du rotor. L'écoulement est supposé parfait partout, sauf au voisinage des pales où les forces de viscosité jouent un rôle non négligeable. On néglige l'influence de la pesanteur sur l'écoulement et on note ρ la masse volumique de l'air, assimilé à un gaz parfait de

température uniforme $T_0 = 273$ K. La pression P_0 au niveau de la mer vaut $1{,}0.10^5$ Pa. Le champ de pesanteur est uniforme d'intensité $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

1) Justifier l'allure du tube de courant. Exprimer le débit massique de l'air dans le tube de courant en fonction de ρ, S et V_1.

2) Relier les pressions P_A et P_{atm}, puis P_B et P_{atm} aux différentes vitesses. En déduire la différence de pression $P_B - P_A$, puis la force de portance $\vec{F}$ exercée par l'air sur le rotor. Commenter.

3) Déduire d'un bilan de quantité de mouvement l'expression de la vitesse V_1 en fonction de V_0 et V_2.

4) Exprimer alors directement la puissance mécanique P transférée par le rotor à l'air.

5) Retrouver l'expression de cette puissance à l'aide d'un bilan thermodynamique.

On considère dans un premier temps un vol ascendant à la vitesse constante V par rapport au sol, comme lors d'un décollage.

6) Exprimer les vitesses V_0, V_1 et V_2 en fonction de V et des données. En déduire la puissance du rotor nécessaire pour maintenir cette vitesse d'ascension.

L'Ecureuil AS350 B3 a également remporté en 2005 des records de vitesse ascensionnelle :

3 000 m en 2 min 21 s	6 000 m en 5 min 06 s	9 000 m en 9 min 26 s

7) Evaluer la vitesse ascensionnelle atteinte en fonction de l'altitude. Commenter.

8) Déterminer la puissance maximale transférée par le rotor à l'air au niveau du sol. Comparer à la puissance mécanique totale délivrée par le moteur de l'hélicoptère. Définir et évaluer le rendement du moteur au niveau du sol. Commenter le résultat.

La masse volumique de l'air, notée à présent $\rho(z)$, varie avec l'altitude z, ce qui diminue l'efficacité du moteur. Au voisinage du plafond, la puissance maximale du rotor ne vaut plus que 60 % de sa puissance maximale au niveau de la mer, rendant très difficile un vol stationnaire à cette altitude.

9) Exprimer la puissance maximale du rotor nécessaire pour un vol stationnaire à l'altitude z.

10) Retrouver l'expression de la masse volumique de l'air $\rho(z)$ en fonction de l'altitude dans le modèle de l'atmosphère isotherme. On introduira une hauteur H caractéristique dont on donnera la valeur numérique.

11) Déterminer l'altitude maximale z_{max} qu'il est possible d'atteindre avec cet hélicoptère. Commenter.

Le record absolu d'altitude en hélicoptère est détenu par un Lama SA 315 B Eurocopter qui a atteint l'altitude maximale de 12 442 m.

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 5 :

10.4	Projection d'eau d'une descente en bûche
10.5	Puissance d'un sèche-cheveux
10.6	Origine du jet stream
10.7	Champagne ! partie 1
10.13	Choix du site d'implantation d'une éolienne
10.15	Evolution d'un tsunami

CHAPITRE 6

ELECTROMAGNETISME

6.1 Coût d'une ligne électrique

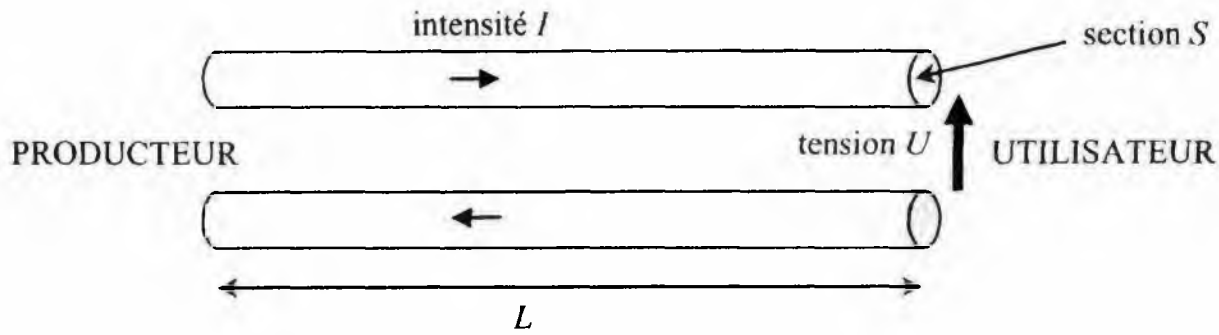
TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : loi d'Ohm, résistance électrique.

Dans le cadre de l'étude du coût financier du transport de masse de l'électricité, on propose de démontrer la loi découverte par Lord Kelvin qui peut s'énoncer ainsi :

« *Le coût d'un transport passe par un minimum lorsque le coût d'investissement du métal conducteur et de construction de la ligne électrique est égal au coût capitalisé des pertes par dissipation d'énergie le long de cette ligne.* »

Pour simplifier, on raisonne sur une unique ligne monophasée constituée par deux câbles conducteurs de section S, de longueur L et de résistivité ρ (inverse de la conductivité). Par ailleurs, on raisonne en régime continu. A noter qu'en pratique, le réseau principal de distribution d'électricité en France est triphasé (voir problème 6.5) et le courant est alternatif à 50 Hz et non continu.



1) Définir puis démontrer l'expression de la résistance R de l'un des deux câbles en fonction de ρ, L et S.

On cherche à exprimer le coût de la ligne électrique, noté C, défini comme le rapport de l'argent dépensé pour transporter de l'énergie sur cette énergie. L'unité d'énergie électrique communément utilisée étant le kWh (kilowatt-heure), le coût d'une ligne C s'exprime en €/kWh. Dans le décompte de l'argent nécessaire pour le transport, il faut prendre en compte :

- d'une part l'argent nécessaire à la construction de la ligne (étude de faisabilité, achat du matériel, terrassement, pose des pylônes, etc...). Cette dépense est approximativement proportionnelle à la masse de câble conducteur utilisé pour la ligne, avec un coefficient de proportionnalité noté K (en €/kg),

- d'autre part, l'argent perdu du fait des pertes par effet Joule. En effet, l'énergie dissipée dans la ligne ne pourra pas être facturée aux utilisateurs !

Le coût de production de l'énergie électrique est noté c_p (en €/kWh). La tension de la ligne côté utilisateur vaut U et la ligne fournit une puissance électrique P aux utilisateurs. On note μ la masse volumique du conducteur formant les câbles.

2) Montrer que le coût de la ligne sur une durée d'utilisation τ a pour expression :

$$C = \frac{2K\mu SL}{P\tau} + \frac{2c_p \rho PL}{SU^2}$$

3) Commenter la dépendance de C vis-à-vis de K, τ, L et U.

4) Etudier les variations de C vis-à-vis de la quantité P/S et justifier la loi de Kelvin.

On donne les informations suivantes :

	résistivité (10^{-9} Ω.m)	masse volumique (tonnes.m^{-3})	cours (avril 2014) (milliers de dollars/tonne)
cuivre	17	8,9	6,6
aluminium	26	2,7	1,8

5) Indiquer par une étude chiffrée s'il est plus rentable d'utiliser du cuivre ou de l'aluminium pour les câbles d'une ligne THT.

6) Calculer la puissance optimale P_{opt} ainsi que le coût minimal C_{min} d'une ligne THT de 400 kV compte tenu des valeurs approximatives suivantes : $S = 100$ cm^2, $K = 10$ €/kg, $c_p = 0{,}1$ €/kWh, $\tau = 30$ ans et $L = 300$ km. Calculer également la chute de tension d'un bout à l'autre du câble due aux pertes par effet Joule.

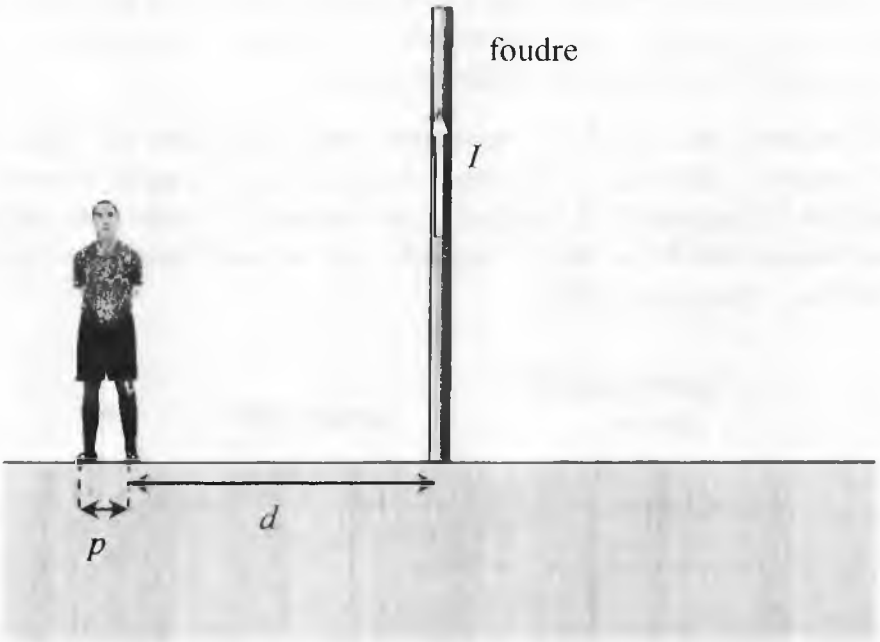
6.2 Risque d'électrocution par le sol

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : loi d'Ohm, vecteur densité de courant.

Lors d'un orage, il est fortement déconseillé de s'abriter sous un arbre isolé. L'exercice propose d'en comprendre la raison et le risque encouru.

On modélise la foudre par un fil semi-infini vertical parcouru par un courant électrique ascendant d'intensité I. Dans le sol supposé resté neutre, on suppose que le courant se propage radialement selon le point d'impact de la foudre avec le sol et cela de manière isotrope (c'est-à-dire équitablement répartie selon les différentes directions). Le sol est conducteur et possède une conductivité électrique notée γ.



1) Déterminer l'expression du vecteur densité de courant en un point quelconque dans le sol.

On donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi .$$

2) En déduire le potentiel électrique en un point quelconque dans le sol en supposant le potentiel nul à l'infini. Quelle est la forme des surfaces équipotentielles ?

Une personne se tient debout et de profil à une distance d du point d'impact de la foudre. Ses deux pieds sont séparés d'une distance p, supposée très petite devant d. La résistance électrique du corps de la personne entre ses deux pieds vaut R. La personne subira des séquelles du fait du passage du courant à travers son corps si l'intensité dépasse une valeur seuil notée I_{max}.

3) En supposant que la présence de la personne ne modifie pas le potentiel électrique créé dans le sol par la foudre, donner l'expression de la distance minimale d_{min} de la foudre pour qu'il n'y ait pas de danger pour la personne.

4) Répondre à la problématique initiale en s'appuyant sur les valeurs suivantes : $I = 10$ kA, $\gamma = 2.10^{-2}$ S.m^{-1} et $R = 2$ kΩ. Si le cœur est traversé par un courant d'intensité supérieure à $I_{max} = 50$ mA, il y a risque de défibrillation cardiaque pouvant entraîner la mort.

6.3 Prospection par mesure de résistivité

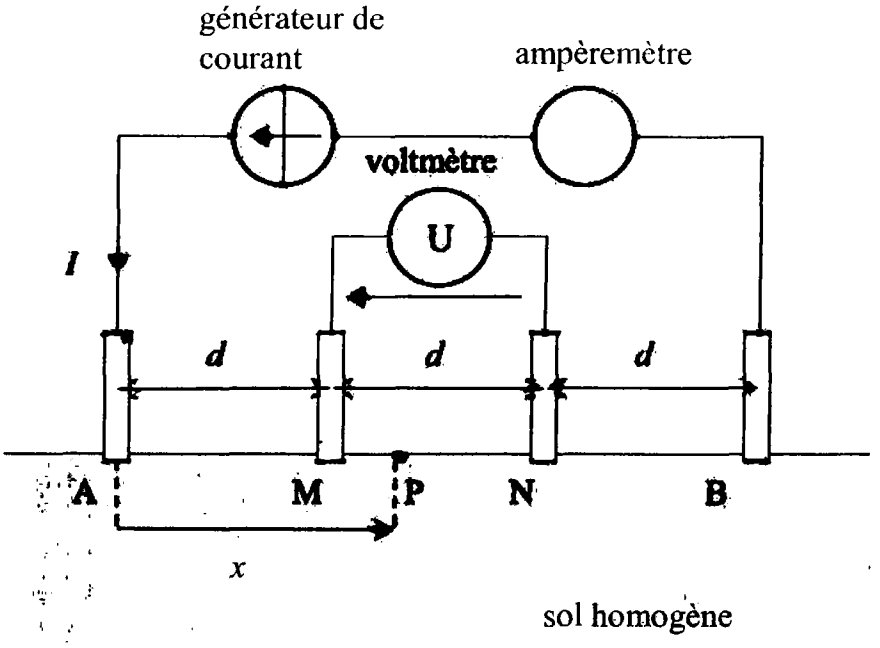
TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : loi d'Ohm, vecteur densité de courant, résistivité.

En archéologie, il existe de nombreuses techniques de prospection géophysique du sous-sol. Une de ces techniques est la mesure de la résistivité apparente du sol par quadripôle. Cette

technique est particulièrement efficace pour détecter des vestiges peu profonds construits en pierre, notamment des fondations de bâtiments ou des murs d'enceinte. Ce problème propose d'en comprendre le principe et sa mise en œuvre.

Le dispositif de mesure de résistivité apparente par quadripôle de type Wenner est représenté sur le schéma ci-dessous. L'électrode A injecte dans le sol un courant d'intensité I qui est récupéré par l'électrode B. L'intensité I est mesurée à l'aide d'un ampèremètre et la tension U aux bornes de M et N est mesurée par un voltmètre. Les électrodes sont séparées d'une distance identique notée d.



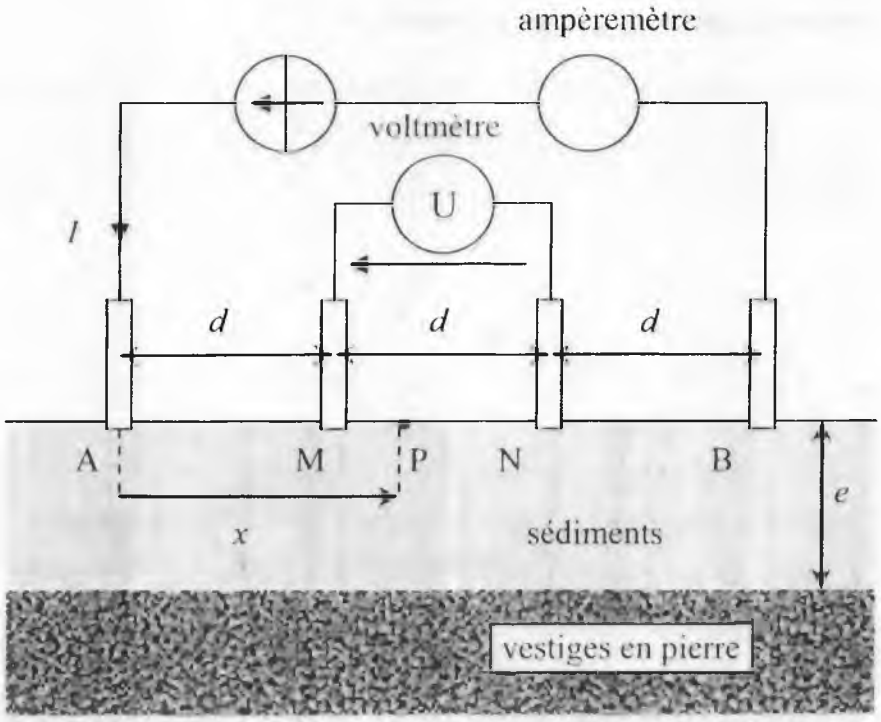
On considère dans un premier temps un sol homogène de résistivité électrique ρ (inverse de la conductivité). Si l'électrode A était la seule au contact du sol, le courant se propagerait dans le sous-sol de façon radiale et isotrope. Il est en de même pour l'électrode B. La loi d'Ohm étant linéaire, le vecteur densité de courant dans le sous-sol lorsque les deux électrodes A et B sont au contact du sol est égal à la somme vectorielle du vecteur densité de courant lorsque l'électrode A est la seule présente et celui lorsque l'électrode B est la seule présente.

1) Exprimer le vecteur densité de courant en un point P situé à une distance x de l'électrode A.

La mesure simultanée de U et I permet d'accéder à la résistivité apparente du sol définie par la formule $\rho_{app} = 2\pi d \dfrac{U}{I}$.

2) Montrer que dans le cas d'un sol homogène, la résistivité apparente du sol est bien égale à sa résistivité réelle.

On se place maintenant dans une situation où la structure du sous-sol n'est pas homogène. Plus précisément, on considère le cas où un vestige en pierre de grande dimension (par rapport au système de mesure) est présent sous une couche de sédiments de résistivité ρ et d'épaisseur e. La pierre constituant les vestiges possède une résistivité beaucoup plus grande que celle des sédiments : on la considère alors comme infinie.



3) Dessiner l'allure des lignes de courant dans le sous-sol. Expliquer qualitativement pourquoi la présence des vestiges fait augmenter la résistivité apparente.

Une campagne de mesure de la résistivité apparente du sol sur toute une zone permet de mettre en évidence les inhomogénéités du sous-sol et le cas échéant la présence de vestiges en pierre, comme le montre la photo ci-dessous.

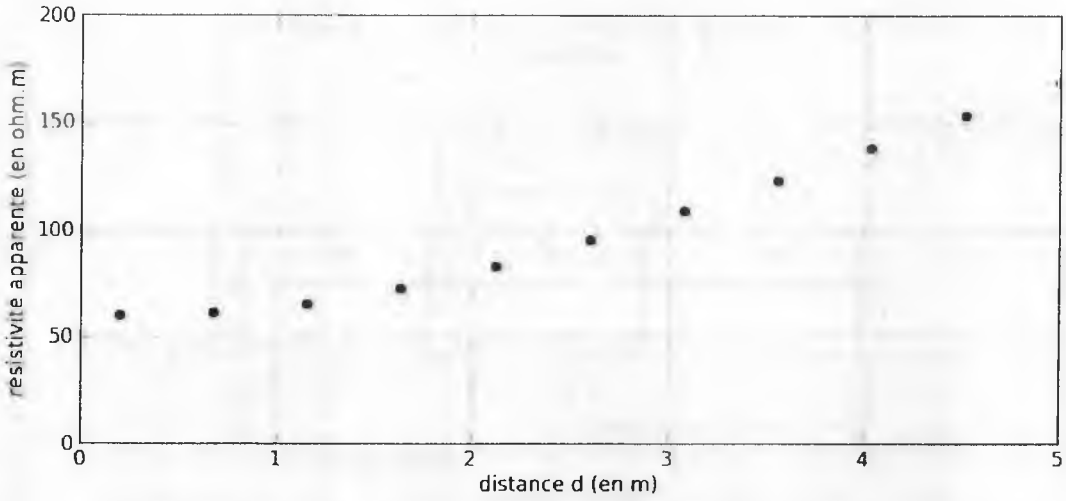
Résistivité électrique, codée en nuances de gris, montrant les vestiges d'une motte castrale (ouvrage de défense médiéval ancien)

source : targetgeophysics.com ©

Une méthode possible pour déterminer à quelle profondeur se situent les vestiges est d'effectuer une série de mesures de résistivité apparente en même endroit en faisant varier la distance *d* entre les électrodes.

4) Exprimer la conductivité apparente dans le cas limite où $d >> e$.

Le graphe ci-dessous représente ρ_{app} en fonction de d.



5) En expliquant la démarche, exploiter le graphe pour estimer la profondeur des vestiges.

De manière plus générale, la mesure de la résistivité apparente en fonction de la distance inter-électrodes permet de reconstituer les couches du sous-sol en épaisseur et résistivité vraie, pour peu que les terrains soient des couches horizontales et uniformes latéralement. Cette reconstitution s'effectue à l'aide de logiciels de modélisation déterminant les paramètres du modèle (épaisseur et résistivité des différentes couches) afin de se rapprocher de la courbe mesurée. On pourra trouver des exemples de réalisations de cette méthode dans la thèse de doctorat de Youcef Hacini soutenue en 2006 accessible à l'adresse :

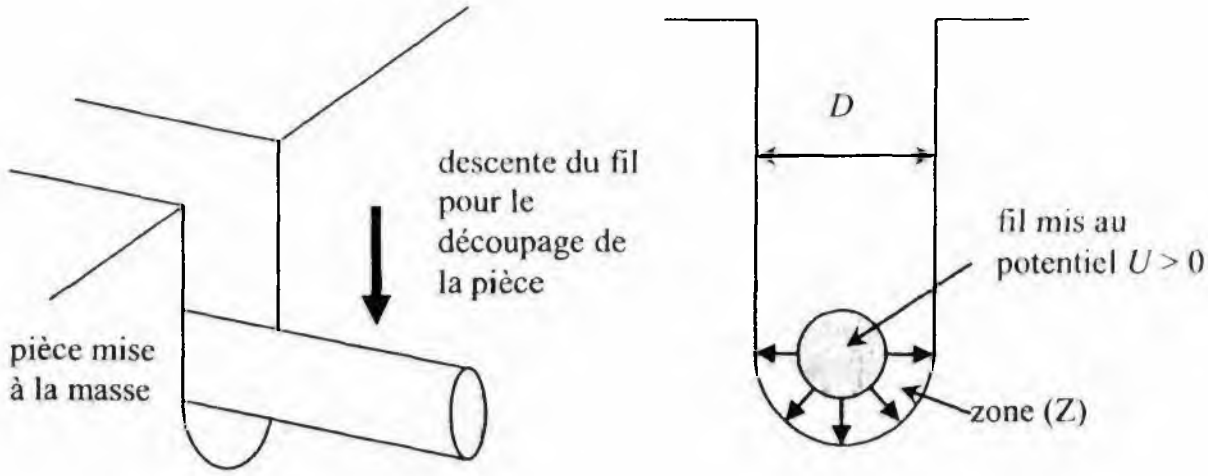
http://doc.rero.ch/record/6329/files/These_HaciniY.pdf

6.4 Electro-érosion par fil

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : théorème de Gauss.

L'électro-érosion, appelée aussi EDM (*Electrical Discharge Machining*), est un procédé d'usinage qui consiste à enlever de la matière dans une pièce en utilisant des décharges électriques. L'exercice propose de calculer la différence de potentiel à appliquer pour créer de telles décharges dans le cas d'une électro-érosion par fil. La méthode consiste à faire pénétrer un fil conducteur dans une pièce métallique massive tout en imposant une différence de potentiel entre eux, l'ensemble étant plongé dans un liquide isolant, généralement de l'huile. Lorsque le fil est suffisamment proche de la surface de la pièce, un arc électrique apparaît entre les deux et la pièce est creusée au niveau du point d'impact de l'arc.



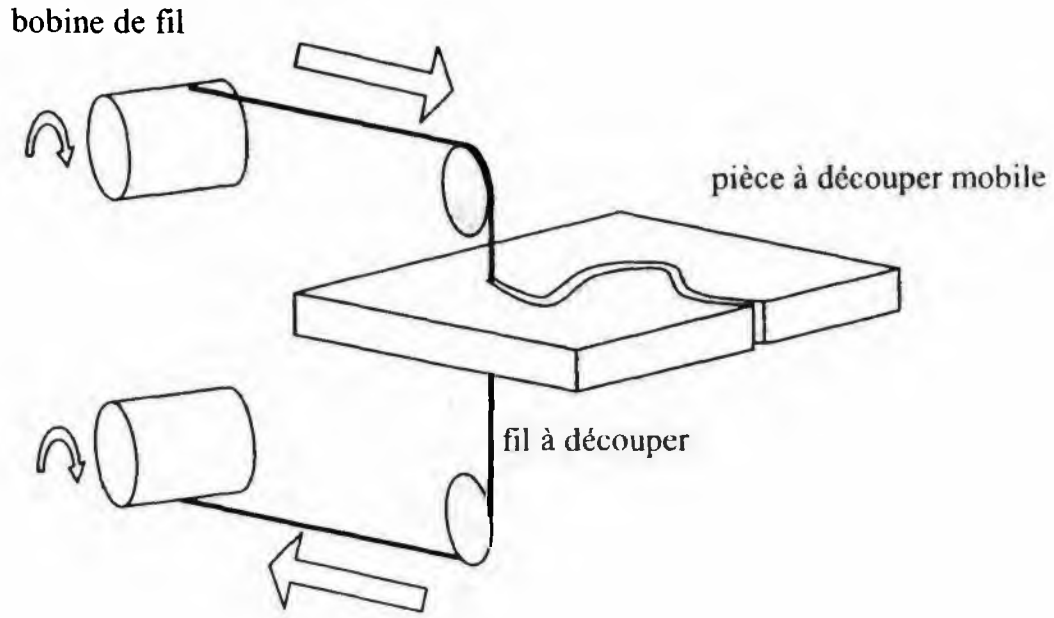
Le fil possède un diamètre noté d. Il crée dans la pièce une entaille de largeur D (voir schéma). On suppose le fil assez long pour pouvoir négliger les effets de bords. Par ailleurs, le champ électrique entre le fil et la pièce (dans la zone (Z) repérée par des flèches) est supposé radial et ne dépendant que de la distance (notée r) au centre du fil. On admet que l'huile présente entre le fil et la pièce se comporte du point de vue électrostatique comme le vide en remplaçant la permittivité du vide ε_0 par le produit $\varepsilon_r\varepsilon_0$, ε_r étant la permittivité relative de l'huile (grandeur sans dimension).

1) Montrer à l'aide du théorème de Gauss que le champ électrique est de la forme K/r dans la zone (Z).

2) Déterminer la constante K en fonction de U, D et d.

3) Sachant que les arcs électriques dans l'huile se produisent si le champ électrique le long de l'arc est supérieur à E_{rupt} = 100 kV.cm^{-1}, calculer la tension minimale U_{min} à appliquer au fil pour pouvoir faire une entaille de diamètre D = 10 µm avec un fil de diamètre d = 5 µm.

En pratique, le fil provient d'une bobine et c'est la pièce à découper qui effectue les mouvements préalablement programmés par ordinateur.



4) Pourquoi fait-on dérouler la bobine au fur et à mesure du découpage de la pièce ?

Les photos ci-dessous, prises à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques (*ENSMM*) de Besançon montrent les dimensions typiques d'une machine d'usinage et un exemple de pièce usinée par électro-érosion à fil.

Machine d'usinage par électro-érosion à fil

© Groupe AGIE CHARMILLES, ENSMM

Exemple de réalisation avec un fil de 0,1 mm de diamètre
(le trou carré percé dans le pignon faisant 2 mm de côté)

© Groupe AGIE CHARMILLES, ENSMM

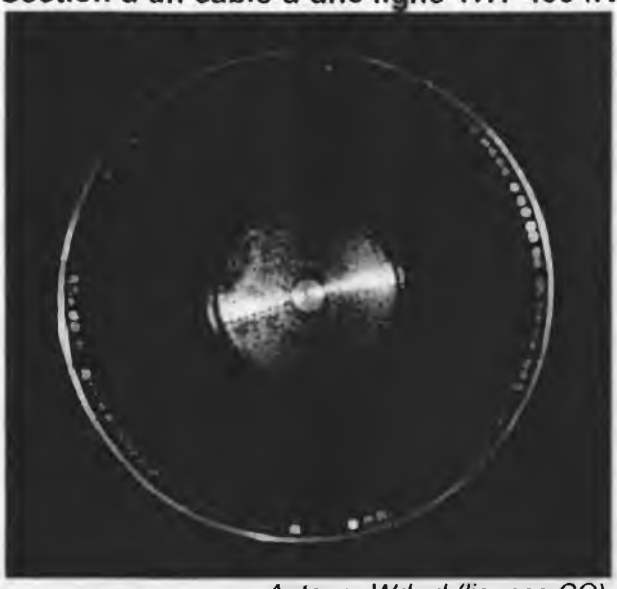
6.5 Effet couronne

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : théorème de Gauss, principe de superposition.

Ce problème propose de calculer l'ordre de grandeur du champ électrique à proximité immédiate des câbles d'une ligne électrique. Dans le cas des lignes à très haute tension (THT), le champ électrique est si élevé qu'il crée dans l'air ambiant des mini-décharges électriques (avalanches électroniques), à l'origine d'un grésillement permanent (crépitement par temps sec et bourdonnement par temps humide). Dans certaines conditions, notamment lors d'orages, Il peut même apparaître un halo lumineux bleu autour des câbles (voir photo). Ce phénomène d'avalanches électroniques, appelé « effet couronne », est à éviter car il provoque des pertes d'énergie (qui s'ajoutent aux pertes par effet Joule).

Section d'un câble d'une ligne THT 400 kV



Auteur : Wdwd (licence CC)

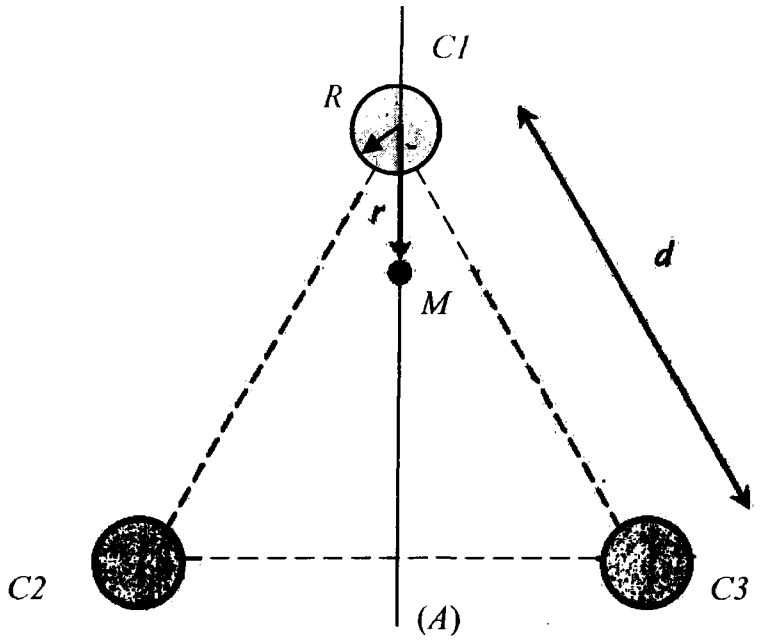
Effet couronne sur une ligne THT

© Alex Hermant

On considère trois câbles parallèles (supposés infiniment longs) de rayon R, formant un triangle équilatéral de côté $d >> R$ (voir figure page suivante) et transportant un courant triphasé. Les tensions des câbles C1, C2 et C3 valent respectivement :

$$V_{C1}(t) = V_0 \cos(\omega t),\ V_{C2}(t) = V_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } V_{C3}(t) = V_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

1) Que vaut la tension maximale du câble C1 ? Que valent à cette même date les tensions des deux autres câbles ? Dans la suite, on se placera dans cette situation en utilisant les résultats d'électrostatique (approximation des régimes quasi-permanents).



On note λ_1 la charge linéique portée par le câble C1. La linéarité de l'équation de Maxwell-Gauss et la symétrie du système font que la charge linéique d'un câble est proportionnelle à sa tension (avec un coefficient de proportionnalité identique pour les trois câbles). Par ailleurs, si $d >> R$ (ce que l'on suppose), les câbles se chargent en surface de manière uniforme.

2) Exprimer le champ électrique (direction et dépendance) créé par le câble C1 en un point M situé sur l'axe de symétrie (A) à une distance $r > R$ du centre du câble.

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

3) En déduire que le potentiel électrique créé par C1 est de la forme :

$$V_1(M) = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + C$$

4) Exprimer de même le potentiel $V_2(M)$ créé par le câble C2 en fonction λ_1, r et d à une constante additive près. Idem pour le potentiel V_3(M) créé par C3.

5) En déduire l'expression du potentiel électrostatique total $V_{tot}(M)$ en imposant que celui-ci doit être nul à l'infini.

6) Que vaut $V_{tot}(M)$ si M est à proximité immédiate du câble C1 ? En déduire l'expression de λ_1 en fonction de V_0, d et R, avec l'approximation $d >> R$.

7) Application numérique : on considère une ligne THT de tension sinusoïdale à 50 Hz de valeur efficace 400 kV. Quelle est la valeur de V_0 ?

Calculer la valeur numérique du champ électrique à proximité immédiate du câble C1, avec les données suivantes :

- diamètre des câbles $2R = 4$ cm
- distance entre les câbles $d = 2$ m.

8) Calculer l'épaisseur minimale e_{min} d'isolant à mettre autour des câbles conducteurs pour que le champ superficiel dans l'air entourant le câble gainé soit inférieur à 20 kV.cm^{-1}, permettant de limiter l'effet couronne. Sur la 1ère photo, on peut voir le cœur du câble métallique entouré d'une épaisse gaine noire en polymère.

Vous pourrez trouver d'autres photos (en couleur) de lignes électriques illuminées par effet couronne sur le site d'Alex Hermant :

http://alexhermant.blogzoom.fr/

6.6 Il y a de l'orage dans l'air...

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : théorème de Gauss, répartition de charges, champ disruptif.

Le processus de formation des nuages dans l'atmosphère suit un ensemble complexe d'étapes dont la connaissance est à la base de la météorologie. Le *cumulonimbus* est le stade ultime du nuage formé dans un courant d'air chaud ascendant en contact avec un air froid et sec. Son profil en forme d'enclume, dont le sommet atteint le haut de la troposphère, et sa taille colossale sont caractéristiques... et annonciateurs d'un orage imminent ! On se propose de modéliser la répartition des charges électriques dans le nuage et de comprendre l'apparition de la foudre.

Le cumulonimbus est un nuage typique en forme d'enclume.
L'orage n'est pas loin...

Cliché : Herbert Campbell (National Oceanic and Atmospheric Administration) ©

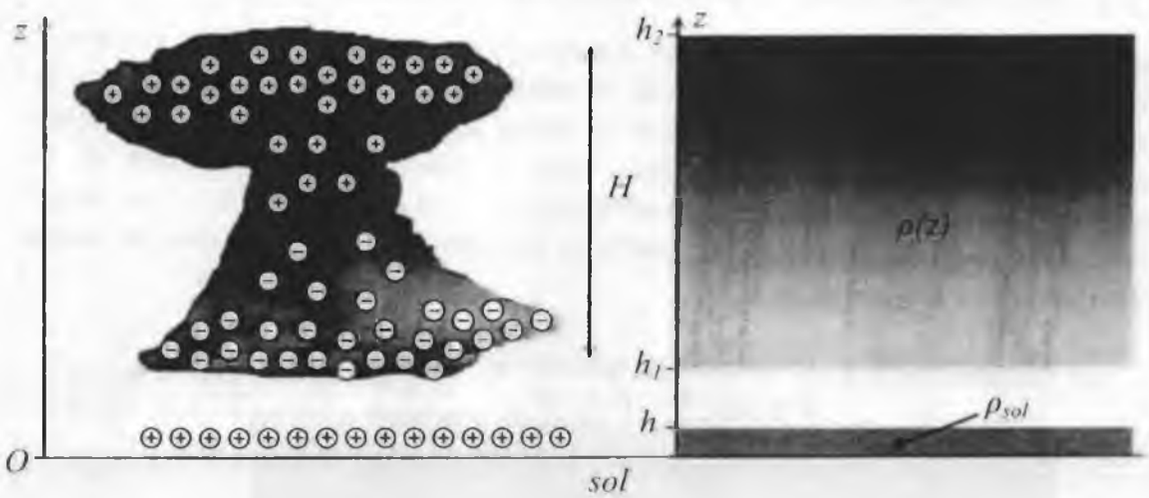
Les mécanismes de séparation des charges électriques au sein du nuage ne sont pas encore parfaitement compris, mais on constate généralement l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet. Dans certains cas, il peut même exister plusieurs zones chargées négativement ou positivement alternativement. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère au voisinage du sol. Des mesures effectuées par ballon-sonde permettent de

déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : environ 65 kV.m^{-1} à 500 m d'altitude et jusqu'à 200 kV.m^{-1} de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

On considère un nuage typique situé entre les altitudes $h_1 = 2$ km et $h_2 = 10$ km (hauteur de la troposphère), de hauteur $H = h_2 - h_1 = 8$ km et de section horizontale $S = 1$ km^2. Au niveau du sol, les charges positives se répartissent sur une épaisseur $h = 500$ m. On rappelle la permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Dans la modélisation proposée, on néglige tout effet de bord et on suppose donc que les grandeurs étudiées ne dépendent que de l'altitude z, comme indiqué sur le schéma ci-après.

Répartition des charges électriques dans un nuage et au voisinage du sol et modélisation unidimensionnelle.



Les charges positives près du sol sont réparties avec la densité volumique de charge uniforme ρ_{sol}. Le champ électrique est supposé nul en $z = 0$. A l'intérieur du nuage, on considère simplement que la densité volumique de charge $\rho(z)$ varie linéairement, de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ en $z = h_2$ à la valeur opposée $-\rho_0$ en $z = h_1$.

1) Montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e_z}$$

2) En utilisant le théorème de Gauss et une surface bien choisie, déterminer le champ électrique $E(z)$ dans la zone chargée $0 < z < h$ au niveau du sol. En déduire la valeur numérique de la densité volumique de charge ρ_{sol}, ainsi que la charge totale Q_{sol} existant dans cette zone.

3) Montrer que le champ électrique dans la zone $h < z < h_1$ est uniforme et donner sa valeur.

4) Etablir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(z)$ à l'intérieur du nuage.

5) Montrer que l'équation locale de Maxwell-Gauss permet d'obtenir le champ électrique dans le nuage à une constante additive près. Justifier la valeur de cette constante.

6) Représenter l'allure de $E(z)$ en fonction de l'altitude z.

7) Déterminer la valeur numérique de ρ_0, ainsi que les charges totales $-Q$ et $+Q$ portées respectivement par les moitiés inférieure et supérieure du nuage. Commenter.

8) Exprimer le potentiel électrostatique $V(z)$ entre le sol et le nuage. On prendra $V = 0$ en $z = 0$. En déduire la différence de potentiels entre le sol et la base du nuage.

La foudre est une décharge électrique entre le nuage et le sol (parfois même entre deux nuages) permettant de neutraliser les charges accumulées. Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur de 10 $kV.cm^{-1}$ (pour l'air humide) – appelé champ *disruptif* – l'air est ionisé et un courant électrique devient possible dans l'air devenu conducteur : la décharge est à craindre…

9) Comparer la valeur du champ électrique obtenu précédemment et la valeur du champ disruptif dans l'air. Commenter.

On constate que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus, comme les arbres, les clochers et… les paratonnerres. Pour illustrer cet *effet de pointe*, on propose la modélisation suivante.
Un objet pointu situé à l'altitude z est modélisé par une petite sphère de rayon R, de charge q et portée au potentiel $V(z)$. On ne considère ici que l'action de la sphère sur son environnement immédiat. Soit un point M situé à la distance $r > R$ du centre O de la sphère.

10) Rappeler l'expression du champ électrique $\vec{E}$ et du potentiel électrostatique créés en M par la sphère chargée. En déduire la relation entre la norme E du champ électrique créé au voisinage immédiat de la sphère et le potentiel $V(z)$ de celle-ci.

11) Déterminer le rayon de la sphère permettant à l'air d'être ionisé à sa surface. Faire l'application numérique pour $z = 2$ m et $z = 10$ m. Commenter.

12) Pourquoi dit-on qu'en l'absence d'obstacles, il vaut mieux s'allonger par terre et attendre que l'orage passe, plutôt que de rester debout ? A quelle altitude l'air pourrait-il être ionisé au bout des doigts ? Il apparaît alors un courant ionique et des effluves lumineux dus à la recombinaison des ions. Cet effet est connu sous le nom d'*effet corona* ou *effet couronne* (voir problème 6.5 Effet Couronne).

Lorsque la foudre tombe, la décharge électrique ne dure que quelques centaines de microsecondes et libère une énorme quantité d'énergie sous forme thermique et sonore dans l'atmosphère.

13) Evaluer l'intensité du courant électrique de la décharge.

14) Déduire des résultats précédents l'énergie libérée par la foudre et la puissance correspondante. Quelle serait l'augmentation de température de l'air à son voisinage ? Conclure.

6.7 Des cheveux électriques !

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : théorème de Gauss, équation locale, forces.

Au Palais de la Découverte, à Paris, il est possible de participer à une série de manipulations spectaculaires d'électrostatique, notamment la fameuse expérience des

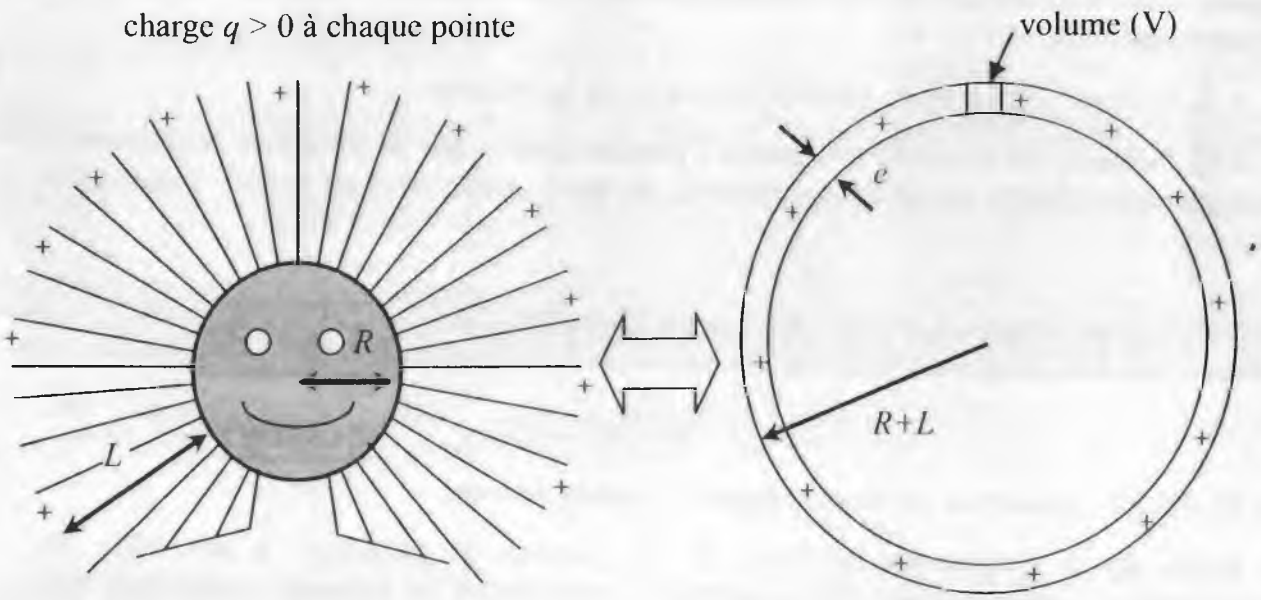
cheveux qui se dressent sur la tête. Sur la photo, la personne est placée sur une plate-forme métallique reliée à une machine haute tension. Le but de ce problème est de calculer à partir de quelle tension les cheveux se dressent comme sur la photo.

Plate-forme sous haute tension au Palais de la Découverte à Paris

crédits photo : Jean-Noël Lafargue, licence « art libre »

1) Expliquer qualitativement le ou les phénomènes entrant en jeu dans cette expérience.

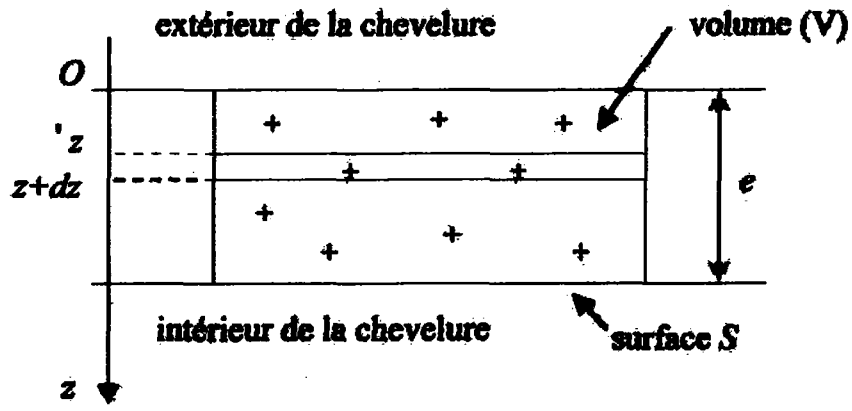
On propose la modélisation suivante : la personne ainsi que ses cheveux, conducteurs d'électricité, sont au potentiel $V_0 > 0$ (le potentiel à l'infini étant pris égal à zéro). La tête de la personne est assimilée à une sphère de rayon R et les cheveux, tous identiques, ont une longueur L. Les pointes des cheveux se chargent sur une longueur e très petite. Chaque pointe possède une charge $q > 0$. On note n_c la densité des cheveux *sur le cuir chevelu* (nombre de cheveux par unité de surface) et μ leur masse par unité de longueur.



2) Les cheveux étant très denses, que peut-on dire de la direction et la dépendance du champ électrique $\vec{E}$ à l'extérieur de la chevelure ?

3) A l'aide entre autres du théorème de Gauss, donner une expression de $\vec{E}$ à l'extérieur de la chevelure faisant intervenir V_0 ainsi que d'autres paramètres de l'énoncé hormis q. Que vaut le champ électrique à l'intérieur de la chevelure ?

On raisonne sur un volume (V) contenant un nombre N de pointes chargées, N étant grand devant l'unité mais petit devant le nombre total de pointes. Les cheveux étant denses, on considère que ce volume contient une distribution volumique de charges. Le volume (V) est pris suffisamment petit (voir schéma précédent) pour pouvoir se placer dans une configuration à une seule dimension où les grandeurs ne dépendent que de la profondeur z, l'origine O étant à l'extérieur de la chevelure (voir schéma suivant). On note $\rho(z)$ la charge par unité de volume et $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$ le champ électrique.



4) Exprimer la force électrique $d\vec{F}$ subie par la tranche du volume (V) situé entre les abscisses z et $z + dz$. En déduire la force totale $\vec{F}$ subie par (V) sous la forme d'une intégrale.

5) A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, calculer cette intégrale et montrer que :

$\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{surface}^2 S\vec{e}_z$, où $E_{surface}$ désigne le champ électrique à proximité immédiate de la chevelure.

6) Montrer qu'un cheveu placé à la verticale au dessus de la tête reste effectivement dressé si le potentiel V_0 est supérieur à une valeur seuil que l'on exprimera en fonction de R, μ, g, L, n_e et ε_0.

Proposer une application numérique sachant que :

- la densité varie entre 100 et 300 cheveux par cm^2 suivant les individus.
- le rayon des cheveux peut aller de 0,04 à 0,1 mm.
- la masse volumique des cheveux est de l'ordre de 1,3 g.cm^{-3}.

On rappelle que $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ S.I.

Pour information, la machine du Palais de la Découverte peut générer une différence de potentiel de 350 kV.

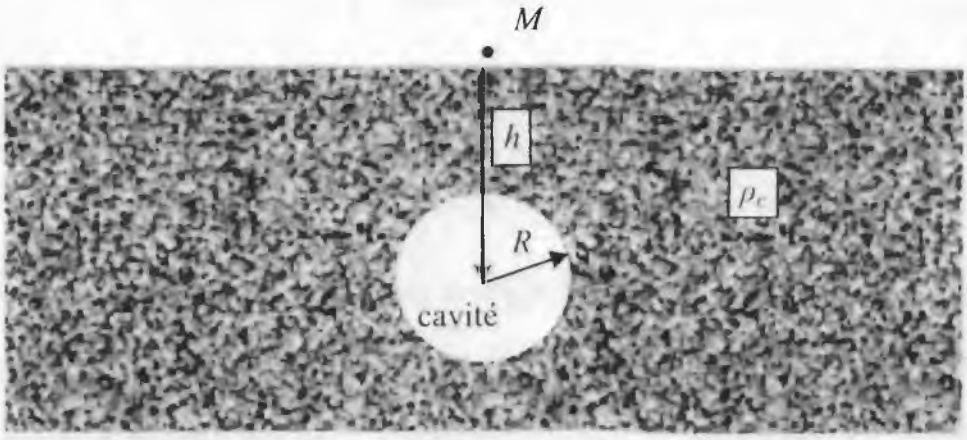
6.8 Sondage par gravimétrie

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : gravitation, théorème de Gauss, propriétés de symétrie.

La gravimétrie est l'étude et la mesure très fine du champ de pesanteur local. Des mesures gravimétriques sur le terrain permettent de détecter des anomalies gravitationnelles dans le sous sol pouvant avoir diverses origines. Couplée généralement à d'autres techniques (telles que des forages ou des études sismiques), la gravimétrie permet de localiser des cavités, des failles, des aquifères etc. Ce problème propose d'étudier deux situations.

On considère dans un premier temps une cavité karstique de forme supposée sphérique de rayon R et dont le centre se situe à une profondeur h. Un milieu karstique étant relativement poreux, cette cavité a été créée dans un milieu rocheux calcaire (masse volumique ρ_c) par la lente dissolution de la roche et par l'écoulement souterrain, qui évacue au fur et à mesure les matières dissoutes. La détection de ce type de cavité est très importante dans le domaine du génie civil avant la construction de grandes structures (ponts, immeubles...) construites à la surface.



1) A l'aide de l'analogue gravitationnel du théorème de Gauss et du principe de superposition, exprimer la variation du champ de pesanteur (appelée « anomalie gravimétrique ») à la verticale du centre de la cavité (point M sur la figure) du fait de sa présence. On parle d'anomalie positive si la variation du champ de pesanteur est dirigée vers le bas et d'anomalie négative si celle-ci est dirigée vers le haut.

2) Sans calcul supplémentaire, donner l'allure du graphe représentant l'anomalie gravitationnelle en fonction de la position à la surface.

3) Comment les résultats sont-ils modifiés si la cavité est remplie d'eau (masse volumique ρ_e) ?

En gravimétrie, on utilise une unité spéciale, le Gal, pour quantifier l'anomalie gravitationnelle, avec pour définition 1 Gal = 1 cm.s^{-2}. On rappelle la valeur de la constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3 s^{-2} kg^{-1}.

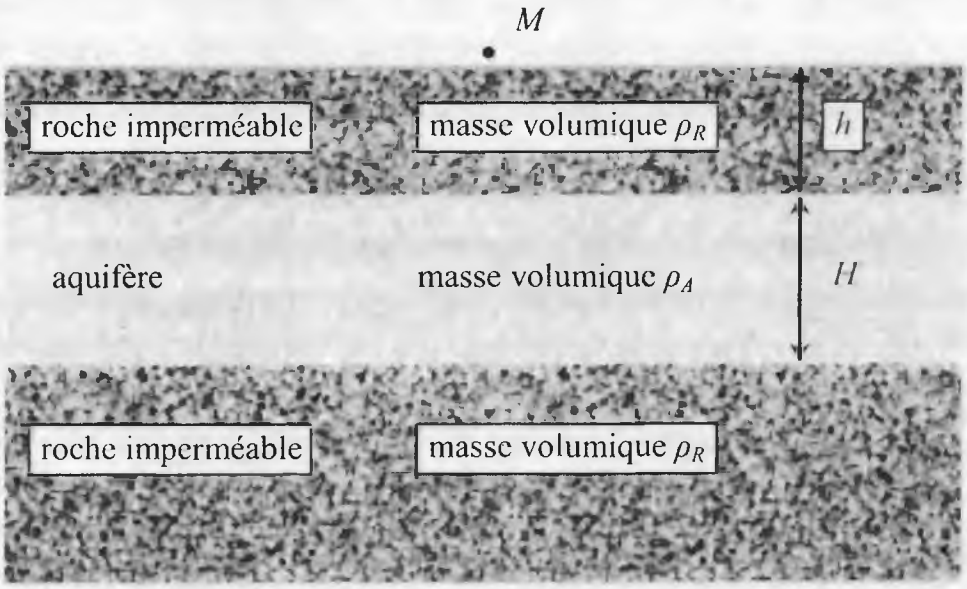
Le gravimètre Autograv CG-5 de la marque Scintrex (voir photo) est un gravimètre portatif (8 kg) permettant d'atteindre une résolution effective d'environ 10 µGal (même si l'anomalie est affichée sur l'appareil à 1 µGal près, le dernier chiffre n'étant pas significatif...).

Gravimètre Autograv CG-5

Auteur : David Monniaux (licence CC)

4) Ce gravimètre est-il capable de détecter une cavité de 10 m de diamètre et dont le centre est situé à 10 m de profondeur ? On prendra une masse volumique du calcaire ρ_c = 2,6 g.cm^{-3}.

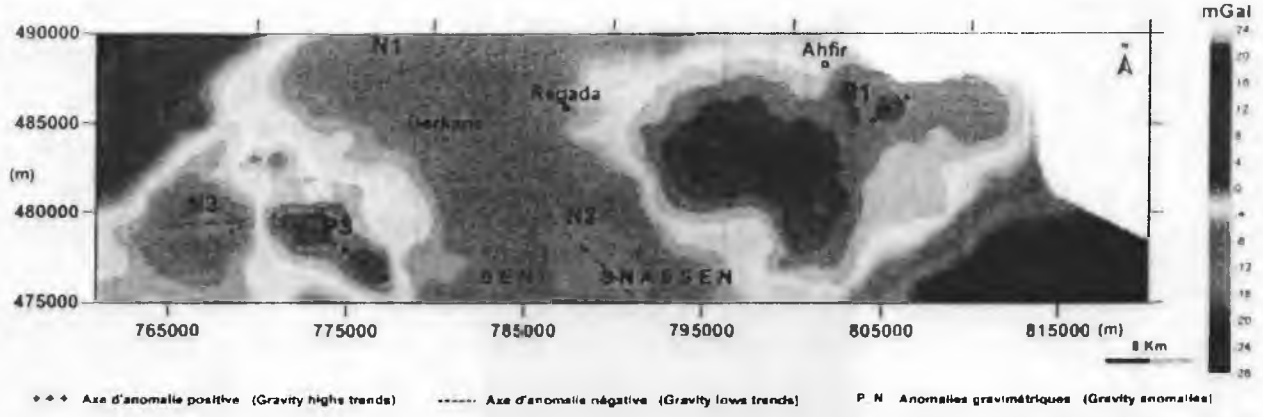
Nous traitons maintenant le cas d'un aquifère de grande dimension. Un aquifère est une couche de terrain, suffisamment poreuse et perméable pour pouvoir contenir une nappe d'eau souterraine. Il est ici supposé parfaitement horizontal, d'épaisseur H et dont la partie supérieure est située à une profondeur h. On le suppose très large comparé à h et H.



5) Exprimer l'anomalie gravimétrique induite par la présence de l'aquifère (comparé au cas où le sous-sol est constitué d'une roche imperméable homogène de masse volumique ρ_R).

6) Application numérique avec $\rho_A - \rho_R = -0{,}5$ g.cm^{-3}, h = 1 km et H = 500 m.

A titre d'illustration, la figure suivante représente la carte de l'anomalie gravimétrique dans les Béni Snassen, ensemble montagneux situé au nord-est du Maroc. On peut y distinguer trois zones d'anomalies négatives N1, N2 et N3 et deux zones d'anomalies positives P1 et P2.



Courtoisie : Driss Khattach ©

On pourra trouver dans l'article dont est extraite cette figure (l'original peut y être visible en couleur) comment des techniques de filtrages permettent de tirer des informations pertinentes de cette carte d'anomalie gravimétrique :

R. EL GOUT, D. KHATTACH & M.-R. HOUARI, *Etude gravimétrique du flanc nord des Béni Snassen (Maroc nordoriental) : implications structurales et hydrogéologiques*, Bulletin de l'Institut Scientifique, Rabat, section Sciences de la Terre, 2009, n° 31, 61-75.

L'article est accessible en ligne à l'adresse :

www.israbat.ac.ma/IMG/pdf/08-ElGout.pdf

6.9 Générateur électrostatique de Kelvin

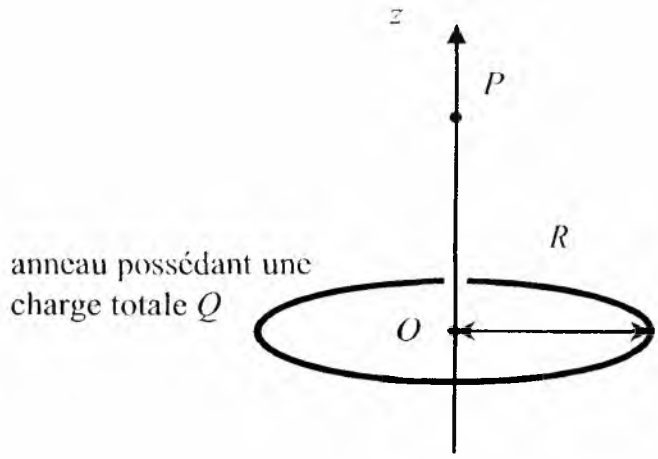
TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : loi de Coulomb, propriétés topographiques, condensateur.

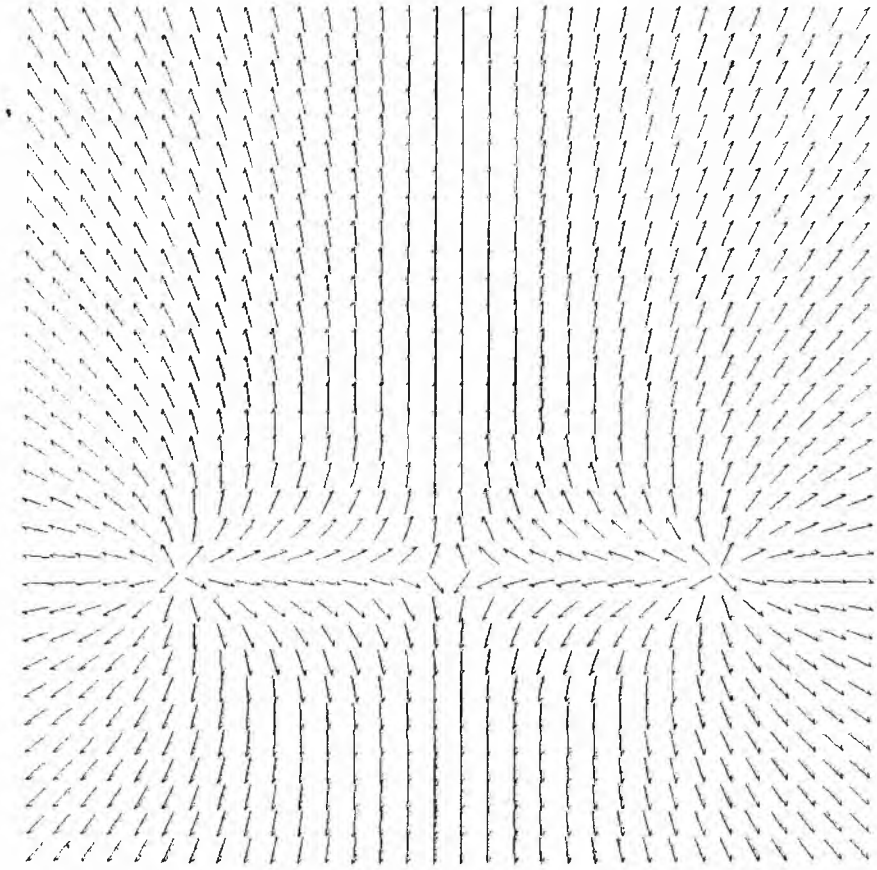
Le générateur électrostatique de Kelvin est une machine électrostatique inventée par Lord Kelvin en 1867. Ce problème propose d'étudier et de comprendre le fonctionnement de cette machine.

On considère un anneau de rayon R portant la charge totale Q, les charges étant régulièrement réparties sur le pourtour de l'anneau. Pour simplifier l'étude, on suppose la section de l'anneau infiniment petite, de sorte que l'on puisse assimiler l'anneau à un cercle. On appelle O le centre de l'anneau et l'on introduit l'axe Oz perpendiculaire au plan contenant l'anneau.

1) A l'aide de la loi de Coulomb, du théorème de superposition et de l'étude des symétries, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(z)$ en un point P situé sur l'axe Oz à une distance z de O. Préciser la position du point M où la norme du champ électrique est la plus élevée sur la demi-droite Oz. Tracer l'allure de E_z en fonction de z.



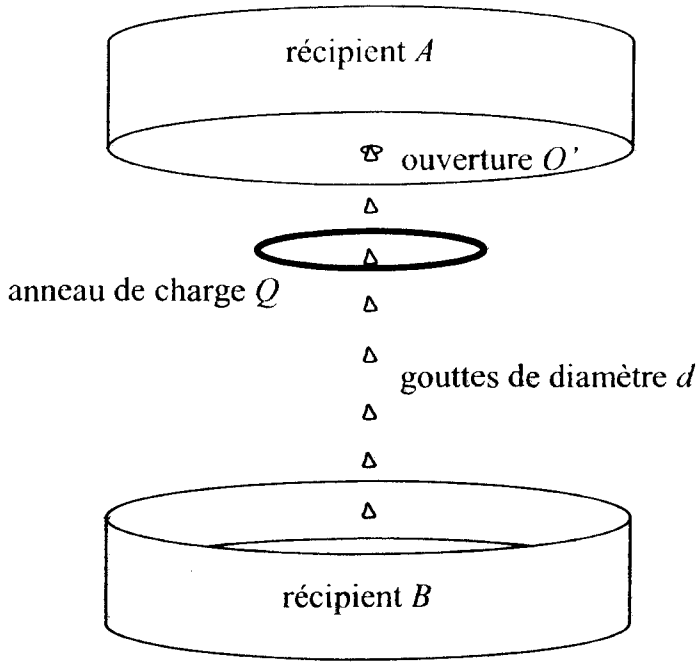
Sur la figure suivante, les flèches indiquent la direction et le sens du champ électrique en différents points situés dans un plan contenant l'axe Oz.



2) Compléter la figure en indiquant, après justification, où se situe l'anneau. Placer de même le point M. Indiquer, en le justifiant, le signe de Q. Expliquer pourquoi il était possible de déterminer sa position approximative par simple analyse de la figure.

3) A partir de la carte de champ électrostatique, esquisser l'allure de quelques lignes équipotentielles.

On considère le dispositif page suivante où l'anneau chargé est placé sous un récipient A rempli d'eau salée. Le fond du récipient possède une petite ouverture O' de manière à ce que les gouttes d'eau tombent en passant par le centre de l'anneau. Le récipient B recueille les gouttes tombées du récipient A.



4) Expliquer pourquoi l'eau contenue dans le récipient B est chargée. Si $Q > 0$, le récipient B est-il chargé positivement ou négativement ?

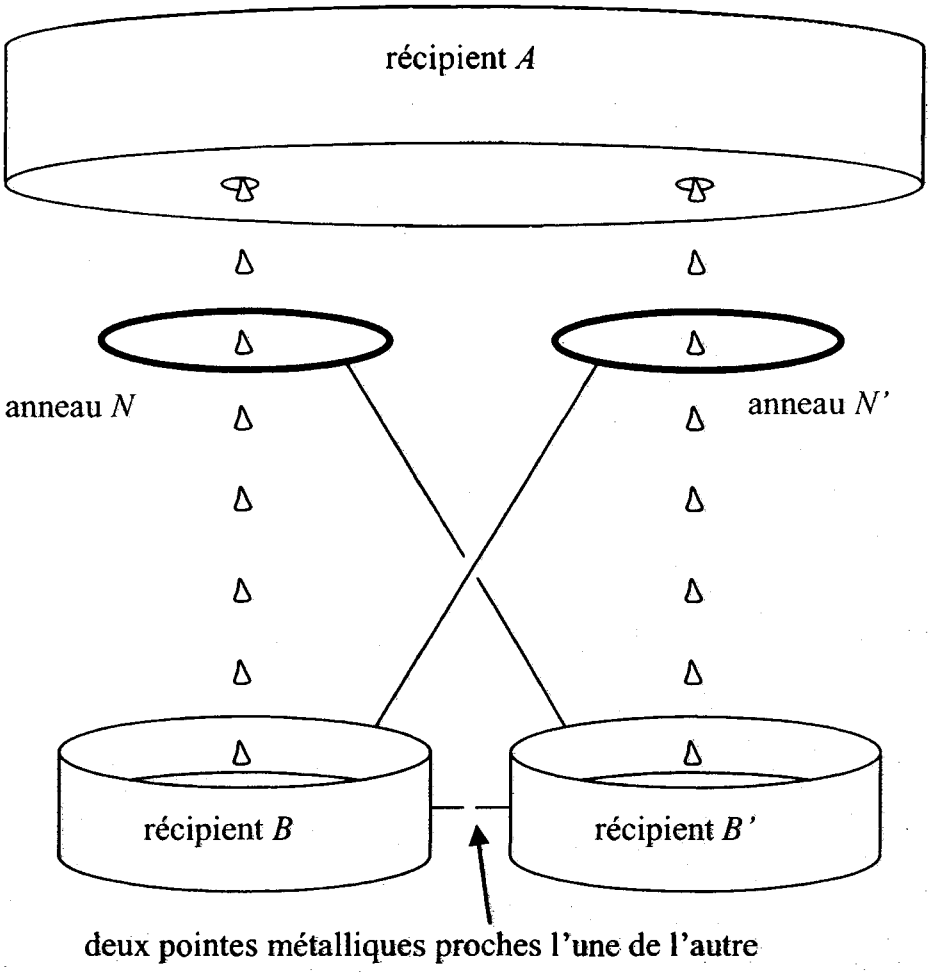
En notant d le diamètre des gouttes, on peut montrer que chaque goutte tombant du récipient A possède une charge q dont la norme est égale approximativement à $\frac{\pi d^2}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}(O')\right|$, où $\vec{E}(O')$ désigne le champ électrique créé par l'anneau au niveau de l'ouverture O'.

5) A quelle distance du récipient A faut-il placer l'anneau pour que le récipient B se charge le plus possible ?

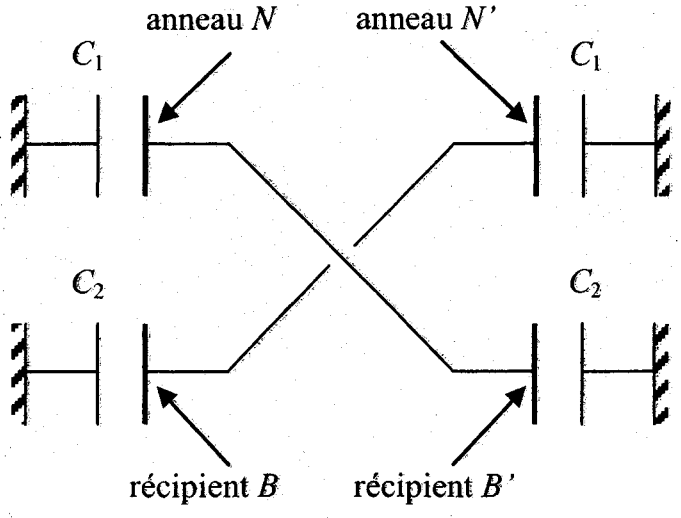
6) Estimer la charge totale maximale Q_B du récipient B, une fois le récipient A presque entièrement vidé, en fonction de Q, R, d et V_A, le volume initial d'eau contenu dans le récipient A. Application numérique : pour $R = 2$ cm, $d = 5$ mm et $V_A = 10$ litres, calculer le rapport $-Q_B/Q$ et commenter.

Le générateur électrostatique de Kelvin est représenté sur la figure représentée page suivante. Les récipients B et B' ainsi que les deux anneaux N et N' sont conducteurs. Le récipient B est relié par un câble conducteur à l'anneau N' et le récipient B est relié à l'anneau N. Au départ de l'expérience, les différents récipients et les anneaux ne sont pas chargés. Quand on remplit le récipient A d'eau salée et que les gouttes tombent, on observe au bout d'un certain temps l'apparition d'une étincelle entre les deux pointes métalliques reliées à chacun des récipients.

7) Justifier ce phénomène en expliquant comment une très faible charge sur l'anneau N va permettre, grâce aux gouttes d'eau, de charger les récipients B et B'.



Le schéma électrique équivalent de la machine est constitué de quatre condensateurs (voir figure suivante). On suppose qu'initialement, l'anneau N possède une charge Q_0 et l'anneau N' une charge $-Q_0$. Par ailleurs, on fait l'hypothèse que les gouttes tombent des deux ouvertures en même temps et à une fréquence suffisamment faible pour que les gouttes touchent le récipient B ou B' avant que les suivantes ne quittent le récipient A.



8) Exprimer la charge initiale contenue dans les récipients B puis B' en fonction de Q_0, C_1 et C_2.

9) Exprimer la charge Q_1 que porte l'anneau N après que la première goutte soit tombée dans le récipient B'. Quelle charge porte alors l'anneau N' ?

10) Calculer la charge Q_i que porte l'anneau N après que la i-ème goutte soit tombée dans le récipient B.

11) Avec $C_2/C_1 = 3$ et en reprenant les valeurs de d et R précédentes, calculer le nombre de gouttes nécessaire pour que la charge portée par chaque anneau soit multipliée par un facteur égal à un milliard.

Le lecteur intéressé pourra regarder une vidéo d'un extrait d'un cours de physique donné au MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) dans lequel le professeur présente un générateur de Kelvin à partir de la 44ème minute :

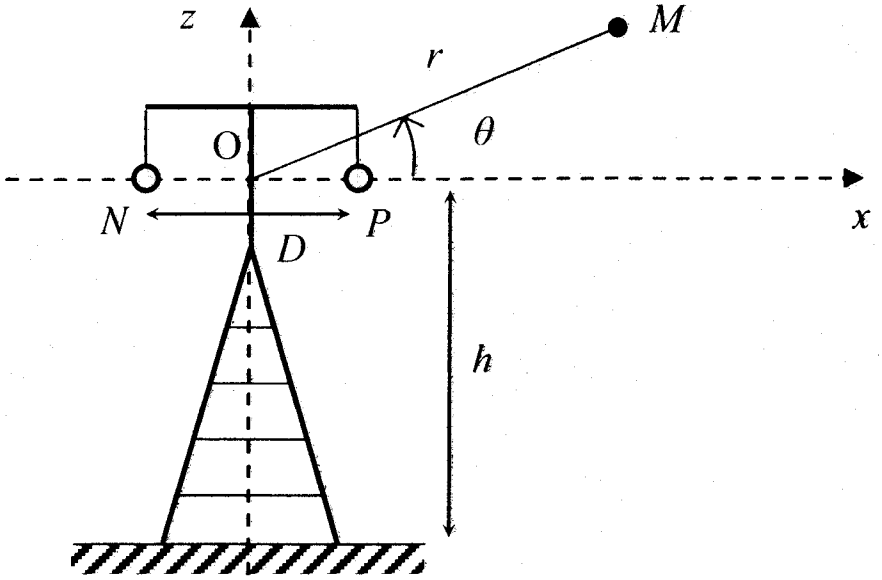
http://www.youtube.com/watch?v=RQX8I9ZWtPQ&feature=relatedLecture

6.10 Champ à proximité d'une ligne THT

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : principe de superposition, dipôle électrostatique, propriétés topographiques.

Ce problème propose d'étudier le champ électrique à proximité d'une ligne électrique très haute tension (THT). En France, le réseau d'alimentation électrique est formé de lignes triphasées (voir problème 6.5) dans lesquelles circule un courant alternatif à 50 Hz. Afin de simplifier les calculs, on ne considère qu'une ligne monophasée, constituée de deux câbles N et P cylindriques parallèles, supposés de longueurs infinies, de rayons R et séparés d'une distance D grande devant R. On modélise la ligne électrique d'un point de vue électrostatique. A chaque instant, les tensions dans les deux câbles sont opposées. On note V_0 la tension du câble P.



Du fait de l'inégalité $D >> R$, un calcul (non demandé) montre que la charge par unité de longueur q_L du câble P a pour expression $q_L = \dfrac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\dfrac{D}{R}\right)}$, le câble N portant une charge opposée à celle de P.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées polaires (r,θ), l'origine O étant placée au milieu de N et P. On montre que le potentiel électrique $V_P(M)$ dont dérive le champ électrique créé par le câble P seul vaut :

$$V_P = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln PM + cste$$

1) Exprimer le potentiel électrique $V(r,\theta)$ créé au point M par la ligne électrique constituée des deux câbles (on fixera le potentiel nul à l'infini).

2) Montrer que pour $r >> D$ (approximation dipolaire), le potentiel peut s'écrire de manière approchée :

$$V(r,\theta) \approx \frac{q_L D\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V(r,\theta) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$$

3) Exprimer les composantes radiale et orthoradiale du champ électrique à grande distance de la ligne électrique. En déduire la norme du champ électrique et commenter sa dépendance vis-à-vis de r et de θ.

On considère une ligne THT ayant les caractéristiques suivantes :

V_0 = +400 kV, D = 3 m, R = 3 cm et h = 15 m.

4) Calculer la valeur E_0 du champ électrique au pied de la ligne électrique à partir de l'expression précédente.

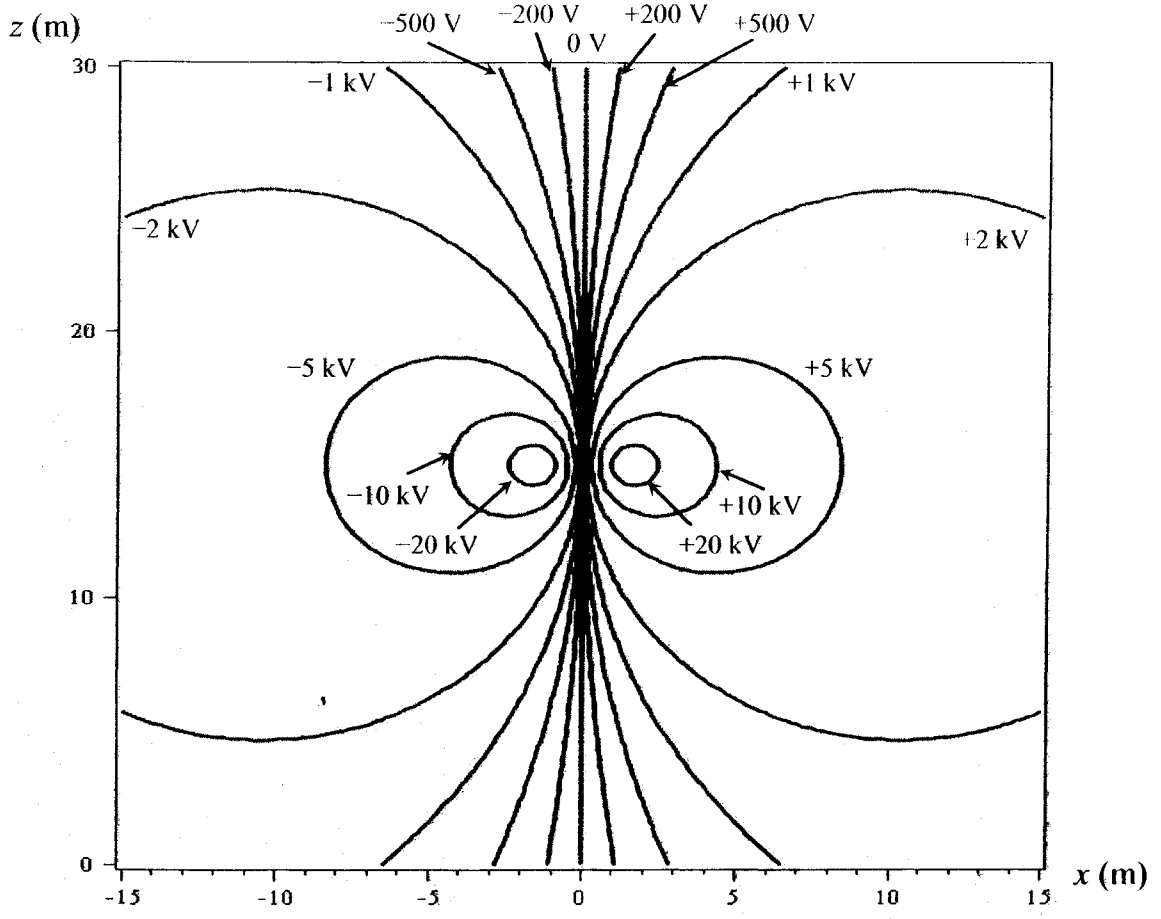
La figure page suivante représente quelques lignes équipotentielles dans le voisinage de la ligne électrique (sur cette figure, l'origine de l'altitude a été placée au niveau du sol, les coordonnées x et z étant exprimées en mètres).

5) Les symétries de ces lignes étaient-elles prévisibles ? Pourquoi ?

6) En déduire l'allure des lignes de champ électrique. Expliquer comment déterminer la valeur du champ électrique au pied de la ligne électrique à partir de la seule étude de ces lignes équipotentielles.

En France, un arrêté du 12 mai 2001 fixe les limites d'exposition du public aux champs électromagnétiques provoqués par les réseaux d'alimentation électrique : la position des ouvrages par rapport aux lieux normalement accessibles aux tiers doit être telle que le champ électrique résultant en ces lieux n'excède pas 5 kV/m dans les conditions de fonctionnement en régime de service permanent.

7) La ligne étudiée précédemment est-elle en accord avec la réglementation française ?



Un entrepreneur désire construire un nouveau bâtiment à côté des bâtiments actuels de son entreprise. Cependant, une ligne très haute tension de 400 kV passe à proximité.

8) Le bâtiment étant destiné à abriter des appareils électroniques sensibles, à quelle distance de la ligne électrique faut-il construire le bâtiment si l'entrepreneur exige un champ électrique inférieur à un centième du champ électrique au pied afin de s'affranchir d'éventuelles perturbations électromagnétiques?

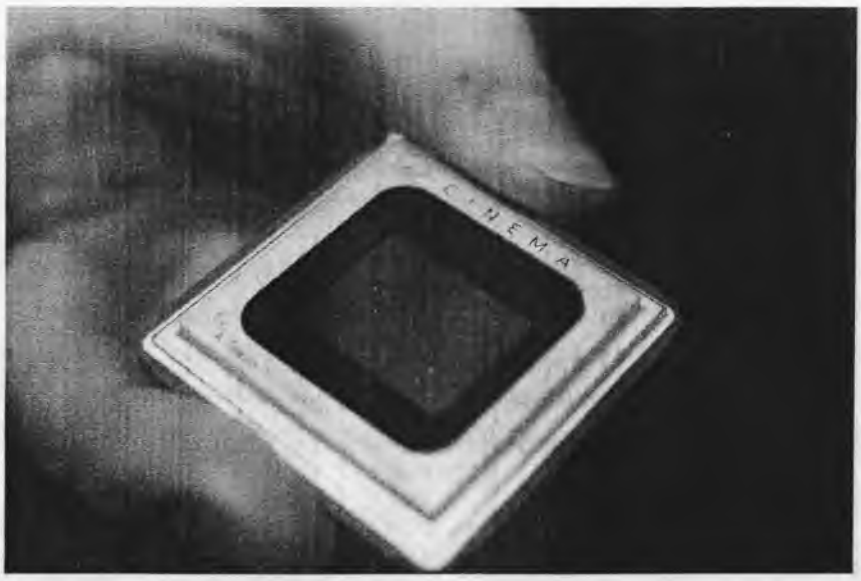
6.11 Micro-miroirs pour vidéoprojecteurs

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : théorème de Gauss, condensateur, forces électrostatiques.

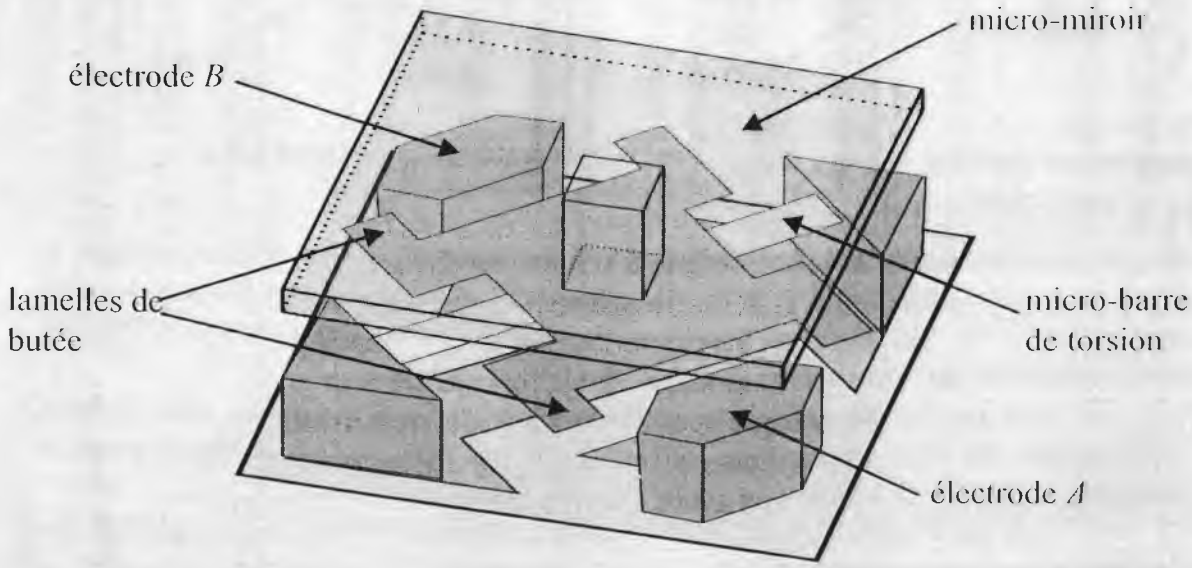
La grande majorité des vidéoprojecteurs numériques, y compris ceux dédiés aux salles de cinéma, utilisent des composants numériques à micro-miroirs (*digital micromirror device*). Ce problème propose d'étudier le principe de fonctionnement de cette technologie de projection (*digital light processing* en anglais).

Matrice de micro-miroirs utilisée dans un projecteur numérique de cinéma



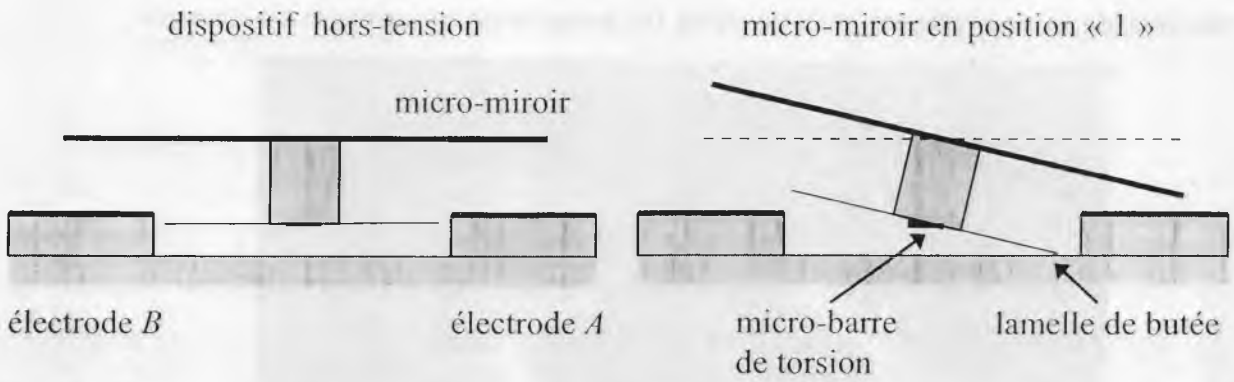
Auteur : Andrew Hitchcock (licence CC)

La figure suivante représente une vue schématique d'un seul micro-miroir et de son environnement, formant un des pixels de l'image finale.

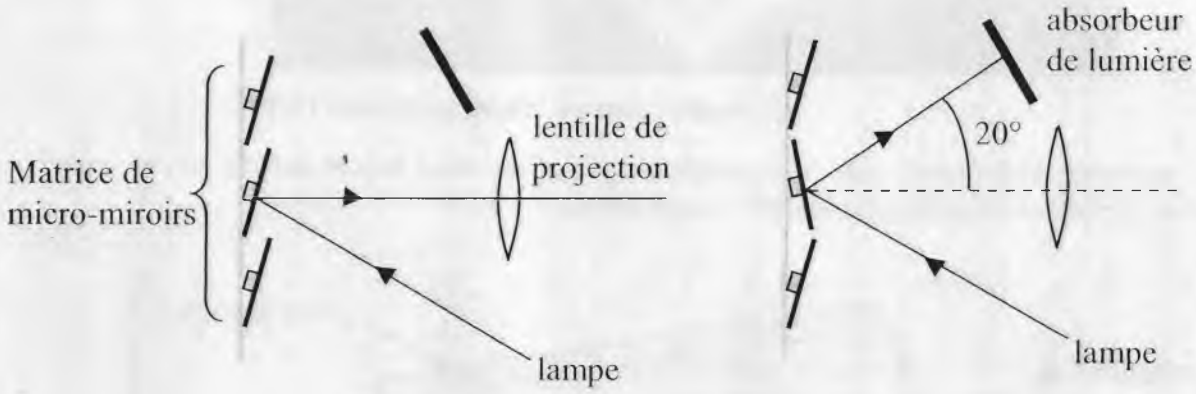


Auteur : Egmason (licence CC)

L'application d'une tension entre le micro-miroir et les électrodes *A* ou *B* permet de contrôler par attraction électrostatique l'orientation du micro-miroir, celui-ci pouvant pivoter autour de la micro-barre de torsion. Le schéma ci-après représente la position du micro-miroir à l'équilibre lorsque le système n'est pas alimenté (à gauche) et la position « 1 » du micro-miroir lors du fonctionnement du dispositif (à droite). La position « 0 », non représentée, correspond au cas où le micro-miroir est penché du côté de l'électrode *B*, les deux lamelles de butée empêchant le contact entre le micro-miroir et l'électrode.



Le principe de gestion du pixel consiste à commander les tensions appliquées entre le micro-miroir et les électrodes *A* et *B* afin de faire basculer le micro-miroir en position « 0 » ou « 1 » suivant que l'on désire un pixel noir ou blanc, comme l'illustre la figure suivante.



micro-miroir en position « 1 » : pixel blanc

micro-miroir en position « 0 » : pixel noir

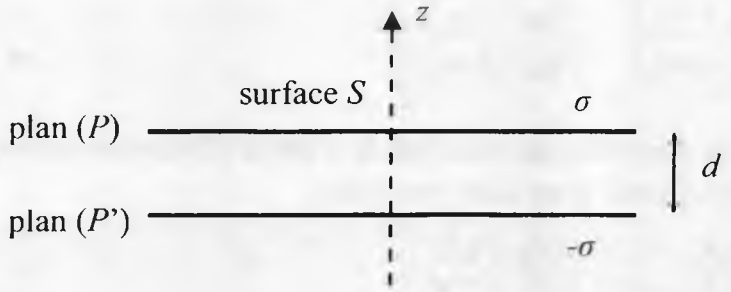
L'obtention de différents niveaux de gris s'obtient en faisant basculer alternativement le micro-miroir en position « 0 » et « 1 », la proportion de temps resté dans chaque position déterminant le niveau de gris final perçu par l'œil. Enfin, la gestion de la couleur s'effectue de différentes manières suivant les modèles de vidéoprojecteurs :

- soit par un disque rotatif constitué de trois filtres (rouge, vert et bleu, c'est-à-dire les trois couleurs primaires en synthèse additive) par lequel passe la lumière venant de la lampe avant d'arriver sur les micro-miroirs,
- soit par l'utilisation de trois sources lumineuses distinctes (en général des diodes électroluminescentes),
- soit par la séparation par un prisme de la lumière issue de la lampe en trois faisceaux. Le dispositif comporte alors trois matrices de micro-miroirs distinctes, chaque matrice modulant l'un des trois faisceaux correspondant chacun à une couleur primaire.

Enfin, on peut préciser que la matrice de micro-miroirs doit comporter 1920*1080, c'est-à-dire plus de deux millions de micro-miroirs pour pouvoir projeter une image en haute définition (*Full HD*).

Pour quantifier l'attraction électrostatique que subit le micro-miroir, on considère dans un premier temps un condensateur plan. Ce dernier est constitué de deux plans parallèles de surface *S* et distants entre eux de *d* (voir figure suivante). Les plans sont supposés de grande

taille comparée à d pour pouvoir négliger les effets de bords. Le plan (P) possède une densité superficielle de charge uniforme notée σ, le plan (P') possédant la densité opposée.



1) Etablir la direction et la valeur du champ électrique créé par le plan (P) seul, considéré de taille infinie.

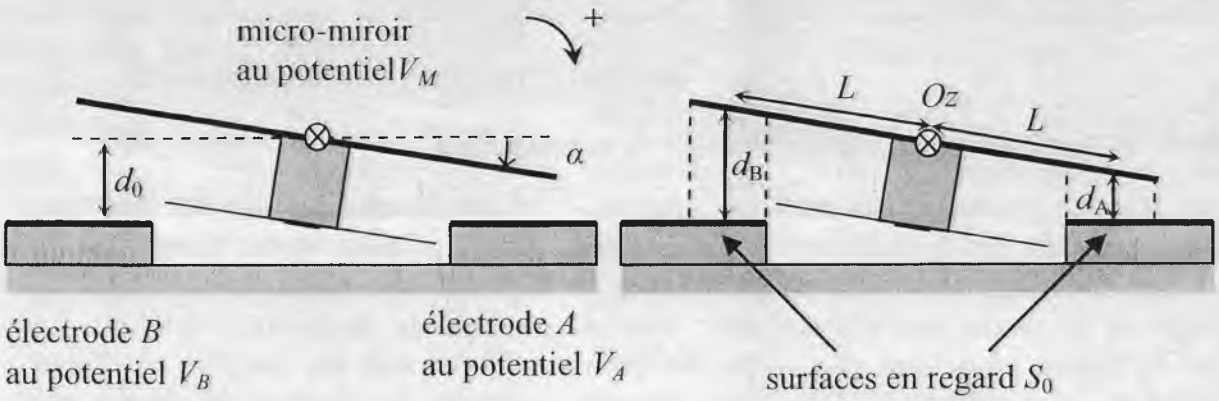
2) En déduire le champ électrique à l'intérieur du condensateur formé par les plans (P) et (P').

3) Définir et exprimer la capacité C du condensateur en fonction de ε_0, S et d. Faire l'application numérique pour d = 2 µm et S = 50 µm^2 (valeur typique pour les micro-miroirs).

On rappelle que $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ SI.

4) Exprimer la force exercée par le plan (P') sur le plan (P) en fonction de ε_0, S, d et U la tension entre les deux plaques.

Lors du fonctionnement du dispositif, le micro-miroir est mis au potentiel V_M et les électrodes A et B respectivement aux potentiels V_A et V_B. Le micro-miroir mobile est repéré par l'angle algébrique α qu'il fait avec sa position hors-tension. En pratique, l'angle α ne dépasse pas +/- 10° du fait de la présence des lamelles de butée, de sorte qu'il est légitime de faire dans la suite des calculs à l'ordre 1 en α. Par ailleurs, dans un souci de simplification, on considère que le micro-miroir pivote autour de l'axe orienté Oz (et non autour de la micro-barre de torsion). Le micro-miroir forme avec *chaque* électrode (A et B) un condensateur que l'on assimilera à un condensateur plan de surface S_0, et de distance inter-armatures respectivement d_A et d_B. Pour les applications numériques, on prendra d_0 = 2 µm et L = 5 µm.



5) Exprimer d_A et d_B en fonction de d_0, L et α.

6) Montrer que le moment M_{Oz} par rapport à l'axe Oz que subit le micro-miroir de la part des forces électrostatiques a pour expression :

$$M_{Oz} = \frac{\varepsilon_0 L S_0}{2}\left(\left(\frac{V_M - V_A}{d_0 - L\alpha}\right)^2 - \left(\frac{V_M - V_B}{d_0 + L\alpha}\right)^2\right)$$

Les potentiels V_A et V_B sont contrôlés par une cellule CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) qui permet d'avoir deux états possibles :

- état (a) : $V_A = 5$ V et $V_B = 0$ V
- état (b) : $V_A = 0$ V et $V_B = 5$ V

Le potentiel V_M du micro-miroir est fixé à 22 V en phase de « capture », au bout de laquelle le miroir est dans la position « 1 » ou « 0 » suivant l'état de la cellule CMOS.

7) Préciser, en le justifiant, à quelle position (« 1 » ou « 0 ») correspondent l'état (a) d'une part et l'état (b) d'autre part.

Lors d'un changement d'adresse, l'état de la cellule CMOS peut changer (passage d'un état (a) à un état (b) ou inversement) ou pas. Immédiatement après chaque changement d'adresse, le potentiel du micro-miroir varie de la manière suivante :

- brève diminution de V_M à 5 V (phase de lâcher d'une durée de l'ordre de 1 µs),
- retour à la valeur 22 V (phase de capture).

8) Montrer que le seul changement d'état de la cellule CMOS est insuffisant pour provoquer le basculement du micro-miroir et donc que la phase de lâcher est nécessaire pour permettre le changement de position du micro-miroir.

Afin d'améliorer le temps de réponse du système, la phase de lâcher est précédée d'une phase de lancer pendant laquelle V_M passe de 22 à 24 V pendant un très bref instant.

9) Sachant que les lamelles de butée peuvent se plier de manière élastique, justifier qualitativement l'intérêt de la phase de lancer.

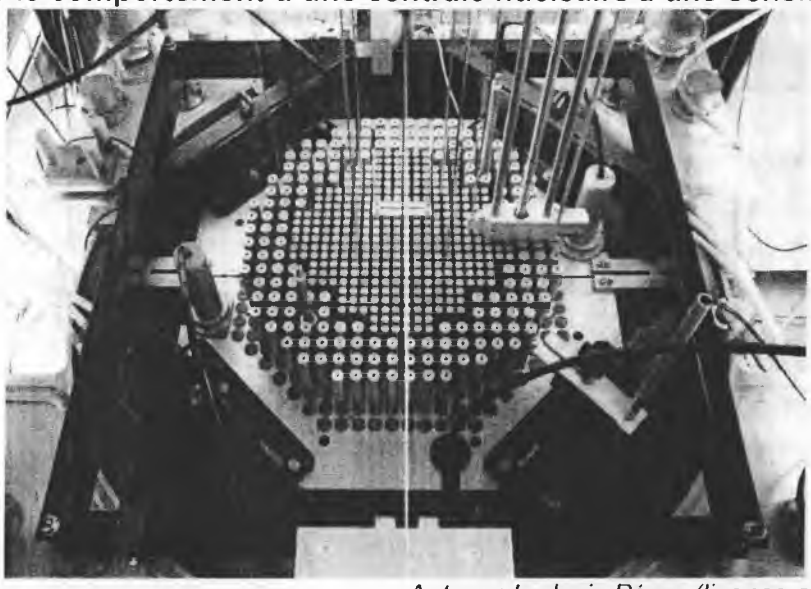
6.12 Energie de fission nucléaire

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : théorème de Gauss, énergie de constitution.

Dans un réacteur nucléaire, des atomes d'uranium ^{235}U sont bombardés par des neutrons. L'énergie apportée par la collision va permettre de scinder chaque atome d'uranium en atomes plus petits et plus stables, en libérant de l'énergie thermique utilisée pour le chauffage ou la production d'électricité : c'est le principe de la fission nucléaire. La réaction de fission produisant elle-même des neutrons, il s'en suit une réaction en chaîne qui peut-être auto-entretenue. Dans une centrale nucléaire, la réaction de fission est contrôlée en contenant le nombre de neutrons dans le réacteur grâce à un modérateur. Ce problème propose un modèle électrostatique simple de l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium.

Réacteur nucléaire « Crocus » au laboratoire de l'EPFL en Suisse destiné à reproduire et étudier le comportement d'une centrale nucléaire à une échelle réduite



Auteur : Ludovic Péron (licence cc)

Un noyau d'uranium $^{235}_{92}U$ est assimilé à une boule de rayon a uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charge ρ. On considère un point M situé à la distance r du centre O du noyau. On rappelle que la charge élémentaire vaut $e = 1{,}6.10^{-19}$ C et on donne la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

1) Exprimer la charge totale Q portée par le noyau d'uranium. En déduire l'expression de la densité volumique de charge ρ en fonction de Q et a.

2) Par des considérations d'invariances et de symétries, déterminer la forme du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en un point M par le noyau, puis exprimer ce champ électrique dans tout l'espace en distinguant deux cas.

3) En déduire l'énergie électrostatique U_e créée dans tout l'espace par le noyau d'uranium en fonction de Q, a et ε_0. Estimer numériquement le rayon a du noyau sachant que U_e =810 MeV.

On peut comparer cette énergie électrostatique à l'énergie qu'il faudrait fournir pour construire le noyau à partir de charges infinitésimales apportées de l'infini.
On considère ainsi le noyau en cours de construction sous la forme d'une boule de rayon $r < a$ chargée avec la densité volumique de charge uniforme ρ précédente.

4) Exprimer la charge $q(r)$ du noyau en cours de construction en fonction de Q, a et r. En déduire le champ électrique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$ créés par cette distribution de charges en un point M situé à la distance $r' > r$ du centre O du noyau. On considère que le potentiel électrostatique est nul à l'infini.

On apporte de l'infini la charge dq permettant de compléter le noyau entre les sphères de rayons r et $r + dr$.

5) Exprimer simplement dq en fonction de ρ, r et dr.

6) Que vaut le travail δW à fournir pour amener la charge dq à la surface de la boule de rayon r ? En déduire l'énergie totale W nécessaire pour construire tout le noyau d'uranium. Commenter.

On considère la réaction de fission de l'uranium ^{235}U en deux noyaux fils identiques :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + n \longrightarrow 2\ ^{A}_{Z}X + n + n$$

Le neutron incident n permet d'apporter l'énergie suffisante pour vaincre la cohésion du noyau. La réaction de fission libère également un neutron, en plus du neutron incident.

7) Déterminer les valeurs de A et Z.

8) En supposant la conservation du volume de matière, exprimer le rayon a' des noyaux fils en fonction du rayon a du noyau père.

9) En déduire l'énergie maximale que l'on peut récupérer lors de la fission d'un noyau d'uranium selon cette réaction. On exprimera le résultat en Joules et en MeV.

10) En réalité la fission d'un atome d'uranium libère une énergie de 203 MeV. Commenter ce résultat dans le cadre du modèle proposé.

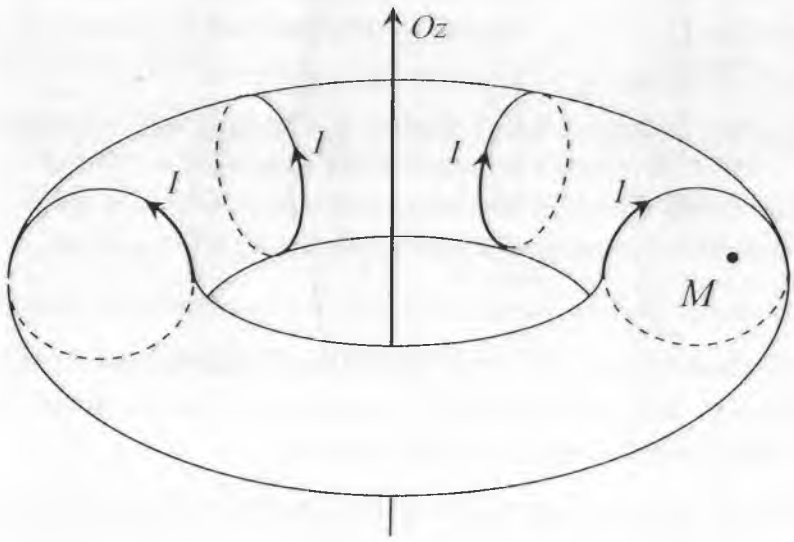
6.13 Champ magnétique dans un tokamak

TECHNICITE : * INITIATIVE : *

MOTS-CLES : théorème d'Ampère.

Un tokamak est une chambre torique de confinement magnétique destinée à contrôler un plasma pour étudier la possibilité de la production d'énergie par fusion nucléaire (définition Wikipédia).

Le champ magnétique principal est créé par une série de bobines supraconductrices constituant un solénoïde en forme de tore. On note N le nombre total de spires, chacune d'elles étant parcourue par le courant I, comme indiqué sur le schéma ci-après. On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elles forment une distribution continue de courant.



1) Que peut-on déduire des symétries et des invariances du système sur la dépendance et la direction du champ magnétique en un point $M(r,\theta,z)$ quelconque de l'espace ?

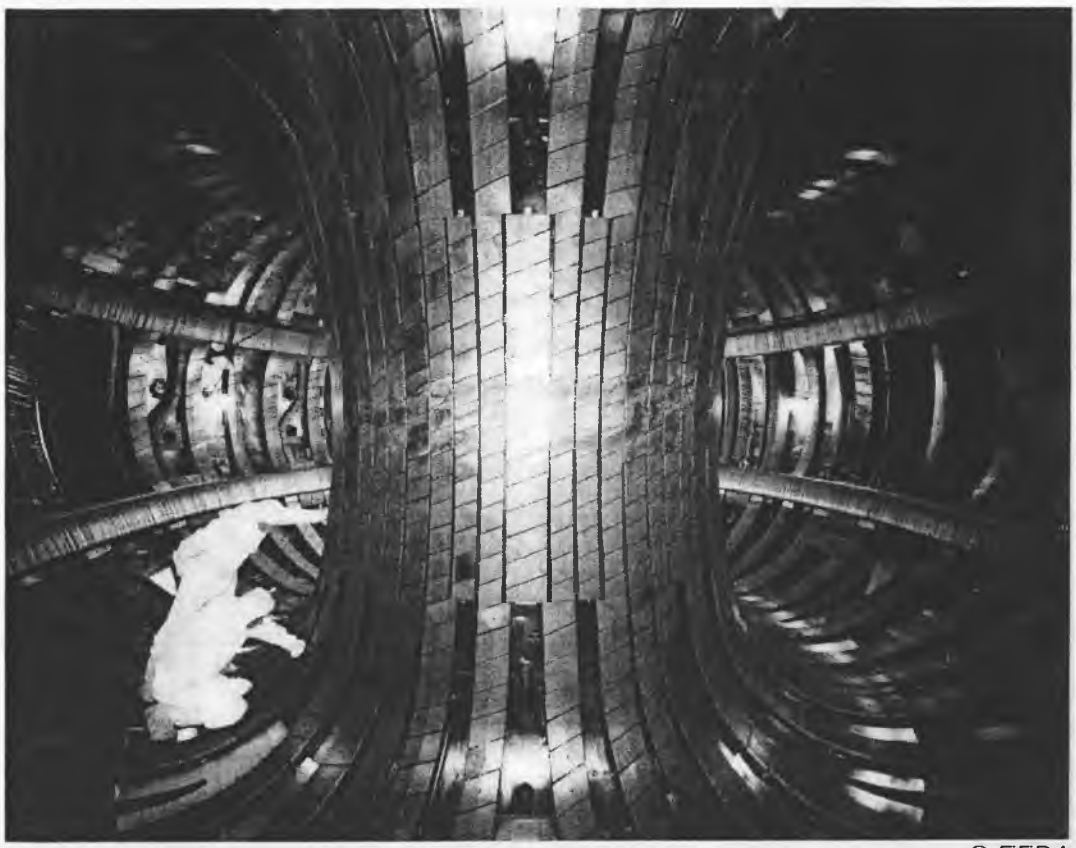
2) Déterminer le champ magnétique à l'intérieur du tokamak. Est-il uniforme ? Que vaut le champ magnétique à l'extérieur ?

Le Tokamak JET peut produire au centre du tore, là où est confiné le plasma, un champ magnétique de 4 Tesla. Le rayon intérieur du tokamak vaut 0,9 m et le rayon extérieur 3 m.

3) Calculer le courant total NI qui doit circuler dans les bobines. Commentaire ?

La photo ci-dessous représente l'intérieur du Tokamak européen JET, le plus grand tokamak au monde. Il devrait être détrôné par le tokamak ITER de Cadarache (France) dont la date d'achèvement est prévue pour 2018. Le contrôle de la fusion thermonucléaire par confinement magnétique est une des pistes à long terme de production d'énergie de masse en prévision de la raréfaction des énergies fossiles (pétrole, charbon, gaz...), ainsi que celle de l'uranium.

Tokamak JET (Joint European Torus) situé à Culham, Oxfordshire, Royaume Uni



© EFDA

On trouvera de multiples informations sur les enjeux et la technologie de la fusion thermonucléaire contrôlée sur le site de l'EDFA (*European Fusion Development Agreement*) :

www.efda.org

6.14 Détecteur à boucle inductive

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

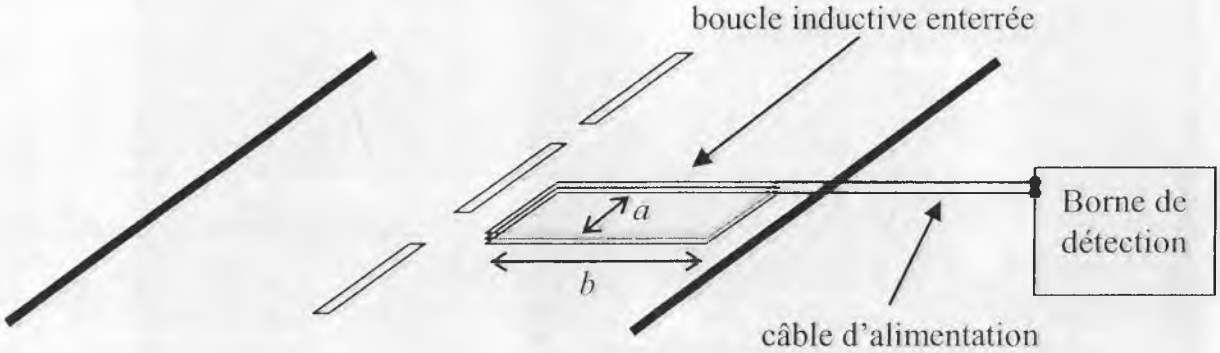
MOTS-CLES : théorème d'Ampère, inductance, propriétés topographiques, oscillateur.

Les détecteurs de véhicules dits à « boucle inductive » (ou encore à boucle d'induction magnétique) sont actuellement de loin les plus répandus, tant pour le contrôle des flux sur autoroutes que pour la détection automatique commandant des feux tricolores ou des barrières de sécurité.

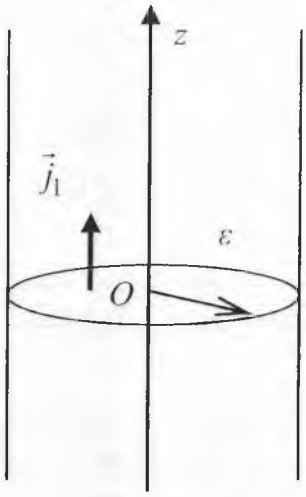
Rainures sur la chaussée où sont installées des boucles inductives

Auteur : swerty (domaine public)

Le principe de fonctionnement d'un détecteur à boucle inductive est le suivant : un enroulement de fil électrique placé dans une tranchée en travers de la chaussée (voir figure ci-dessous) est relié à une borne contenant le reste de l'équipement électrique. Ce dernier génère dans la boucle un courant sinusoïdal qui crée au dessus de celle-ci un champ électromagnétique lui-même sinusoïdal. Lorsqu'un véhicule passe au dessus de la boucle, ce champ induit des courants de Foucault sous le châssis. Ces courants ont pour effet de modifier l'inductance de la boucle et donc la fréquence des oscillations. Un fréquencemètre permet alors de détecter le véhicule. Ce problème propose d'étudier de manière quantitative l'influence de la présence d'un véhicule au dessus de la boucle.



On étudie dans un premier temps la boucle seule afin de calculer son inductance propre. On considère pour cela un fil cylindrique infini d'axe Oz (de vecteur unitaire $\vec{u}_z$), de rayon ε parcouru par un courant $I > 0$ dirigé vers les z croissants. On suppose que la répartition de courant sur une section du fil est uniforme. On note $\vec{j}_1$ le vecteur densité volumique de courant à l'intérieur du fil et l'on utilise les coordonnées cylindriques : un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, z), la base orthonormée associée s'écrivant $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

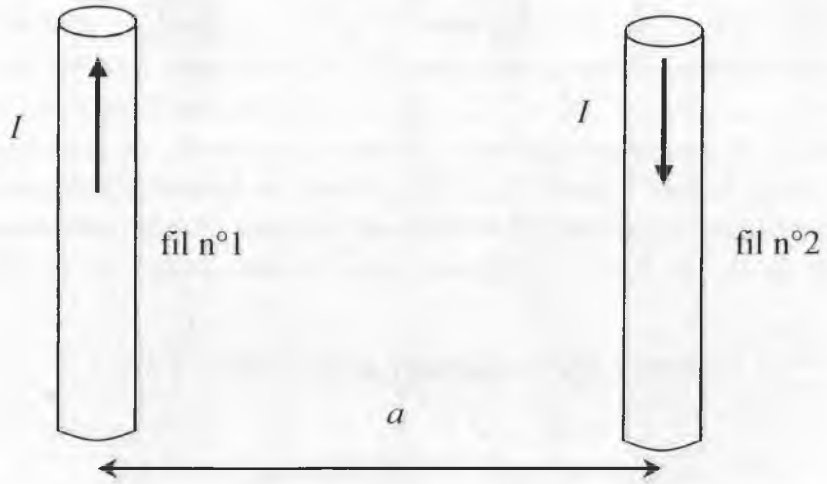


1) Exprimer $\vec{j}_1$ en fonction de I, ε et $\vec{u}_z$.

2) A l'aide des symétries, donner la direction du champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace. De quelles coordonnées sa norme est-elle indépendante (justifier la réponse) ?

3) Calculer $\vec{B}_1(M)$ en fonction de I, ε et r en distinguant deux cas. Tracer l'allure de $\left|\vec{B}_1(M)\right|$ en fonction de r.

On ajoute au fil étudié dans la question précédente un deuxième fil infini d'axe parallèle au premier, de même rayon, et parcouru par un courant de même intensité mais dirigé dans le sens opposé au premier fil. On note a la distance entre les deux fils.



L'expression de l'inductance par unité de longueur L_{lin} du circuit constitué par ces deux fils peut être déterminée en calculant de deux manières différentes l'énergie magnétique E_m que possède le circuit.

4) Justifier cette affirmation, mais sans effectuer les calculs correspondants.

Les calculs, assez techniques, aboutissent à une expression simplifiée de L_{lin} dans le cas (vérifié en pratique) où $a >> \varepsilon$:

$$L_{lin} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(1 + 4\ln\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)\right)$$

La plupart du temps, la boucle enterrée dans la chaussée est de forme rectangulaire, de longueur b (en travers de la voie) et de largeur a (voir la figure du début d'énoncé). Elle est généralement constituée de N spires.

5) Justifier que l'inductance propre L de la boucle est proportionnelle à N^2.

On désire utiliser la boucle inductive décrite dans le document suivant, en choisissant une largeur $a = 0{,}5$ m.

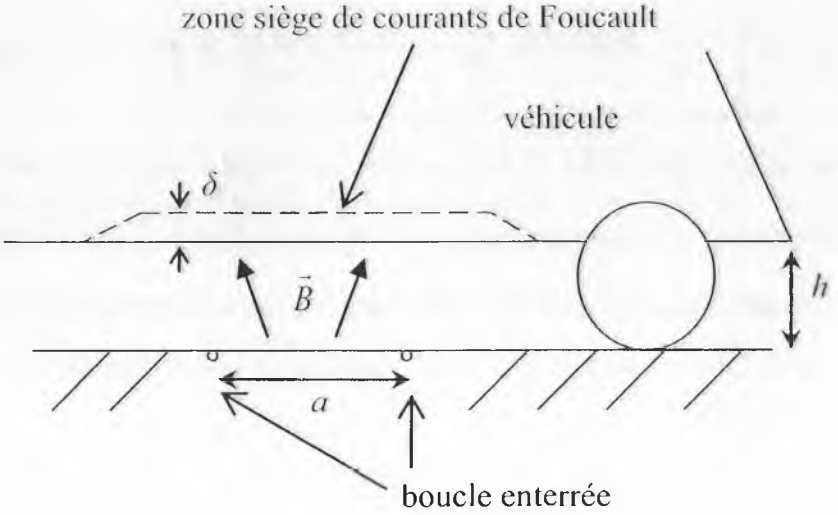
DOCUMENT : Boucle inductive préfabriquée, d'après le site « www.bircher-reglomat.com »

Les détecteurs à boucle inductive permettent la détection sans contact de véhicules et de pièces métalliques. Le câble servant à la détection est constitué de la boucle, composée de plusieurs spires et d'un câble d'alimentation torsadé. Le câble est déjà assemblé, ce qui évite le risque d'endommager les fils lors de sa pose dans la chaussée. Aucun objet instable (grille ou plaque d'égout) ne doit se trouver dans la zone d'influence de la boucle.

Les caractéristiques techniques de la boucle SF6/15 sont les suivantes :

- câble d'alimentation : $2 \times 0{,}75$ mm^2, fils torsadés, diamètre de 6,8 mm avec la gaine
- longueur du câble d'alimentation : 15 m
- câble de la boucle : $3 \times 0{,}75$ mm^2, diamètre de 6,4 mm avec la gaine
- longueur de la boucle : 6 m
- inductance de la boucle : de l'ordre de 80 µH
- gaine en PVC gris

6) Quelle est la valeur de b ? Calculer, à partir du modèle précédent et avec l'approximation simplificatrice $b >> a$, la valeur de L et comparer à celle indiquée par le constructeur. On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}. Lorsqu'un véhicule est placé juste au dessus de la boucle, le dessous de la carcasse métallique (châssis en acier de conductivité électrique $\sigma = 6.10^6$ S.m^{-1} et situé à une hauteur $h = 25$ cm de la boucle), subissant le champ magnétique variable créé par la boucle, est le siège de courants de Foucault présents sur une épaisseur de l'ordre de δ. La figure ci-dessous, qui est une coupe de profil, illustre le phénomène.



On note f la fréquence du courant sinusoïdal circulant dans la boucle enterrée lors de son fonctionnement. On admet que l'épaisseur δ dépend des trois seuls paramètres σ, f et μ_0 sous la forme $\delta = C\sigma^{\alpha} f^{\beta} \mu_0^{\gamma}$, où C est un facteur numérique sans dimension.

7) Déterminer les valeurs des exposants α, β et γ par analyse dimensionnelle. Comment nomme-t-on la grandeur δ ?

8) Calculer δ pour une fréquence de 50 kHz sachant que $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Commenter.

En notant I l'intensité du courant parcourant la boucle et toujours dans l'approximation $h >> a$, on montre que les courants induits sous le châssis du véhicule dissipent par effet Joule une puissance P donnée par la relation :

$$P = \frac{b}{\pi \sigma h \delta} \frac{1}{1 + \frac{4h^2}{a^2}} I^2$$

9) Calculer le rapport entre la puissance dissipée par les courants induits sous le véhicule et celle dissipée dans la boucle inductive (câble d'alimentation y compris), sachant que les câbles sont en cuivre de conductivité $\sigma_{Cu} = 6.10^7$ S.m^{-1}. Commenter sa valeur.

Dans la mesure où δ est très petit devant les autres dimensions du problème, on montre que le champ magnétique total (créé par la boucle et par les courants induits) est tangent au châssis du véhicule. Les figures A, B, C, D et E suivantes représentent des lignes de champ hypothétiques dans le plan de coupe de la figure précédente, la partie grise représentant le bas du châssis (la chaussée n'a quant à elle pas été représentée). Parmi ces cinq figures, une seule représente les véritables lignes de champ magnétique.

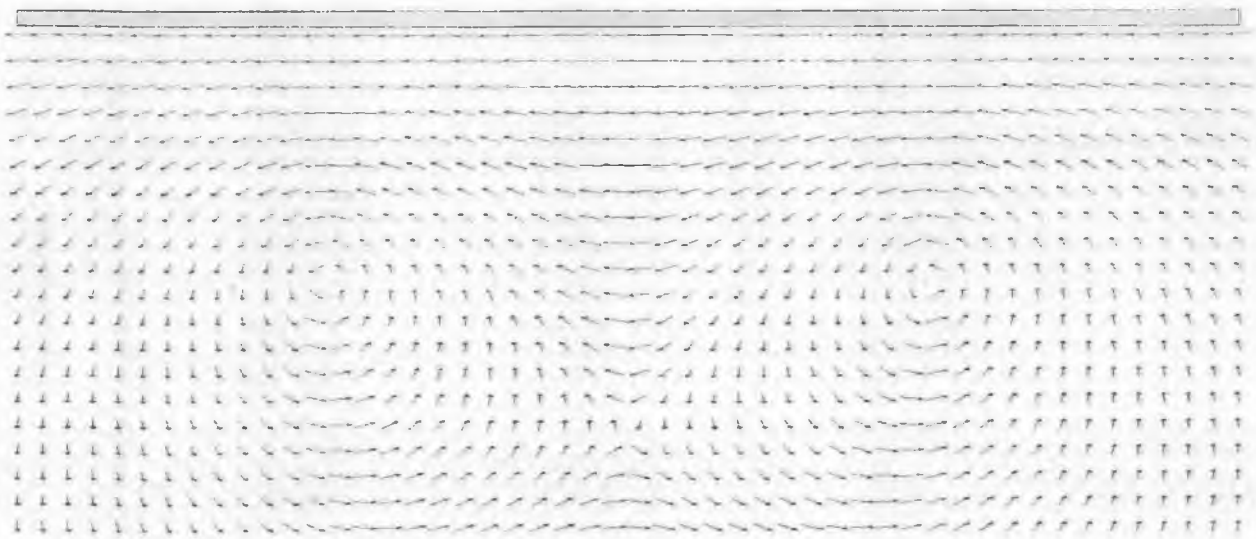


figure A

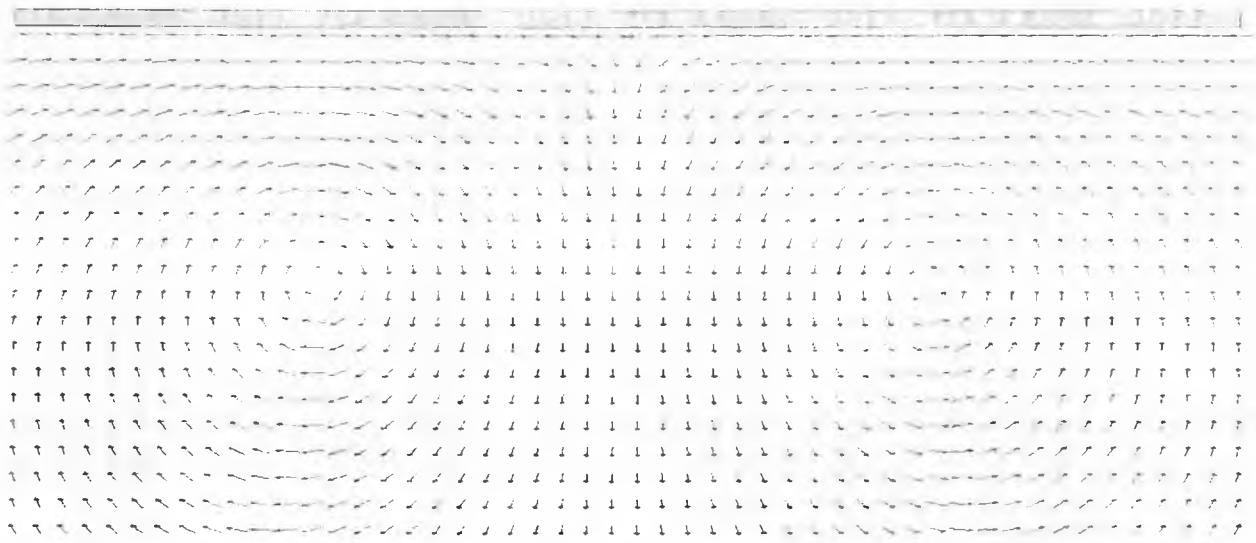


figure B

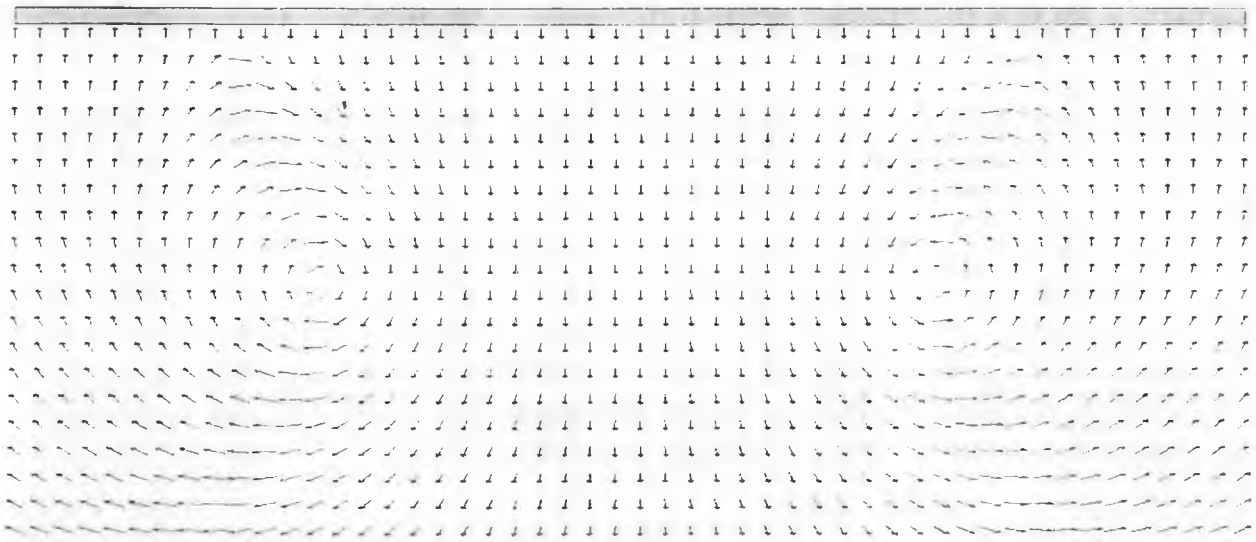


figure C

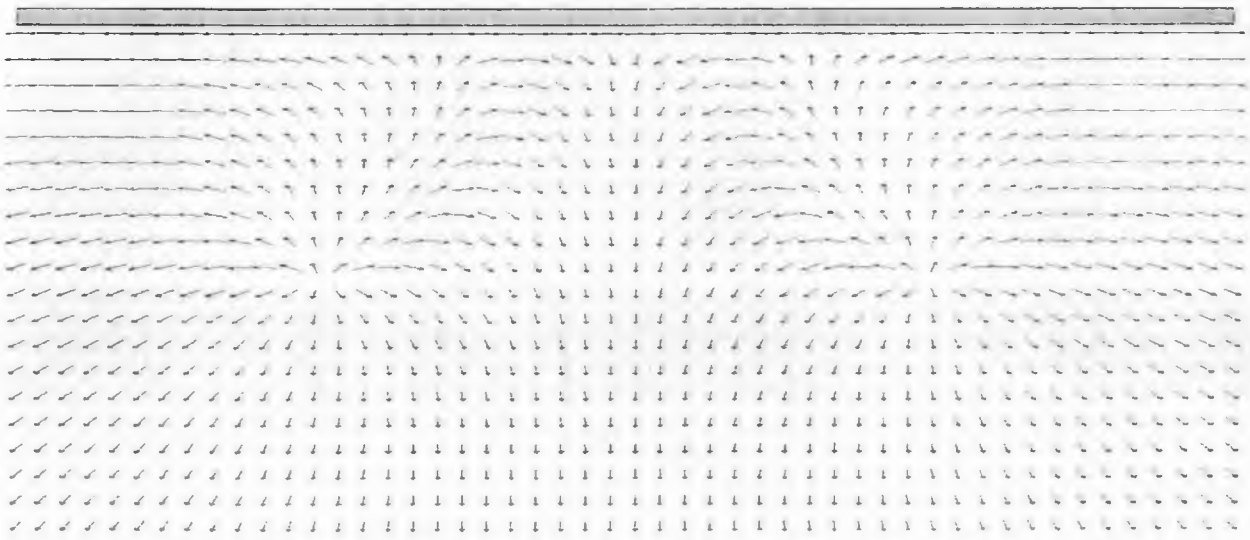


figure D

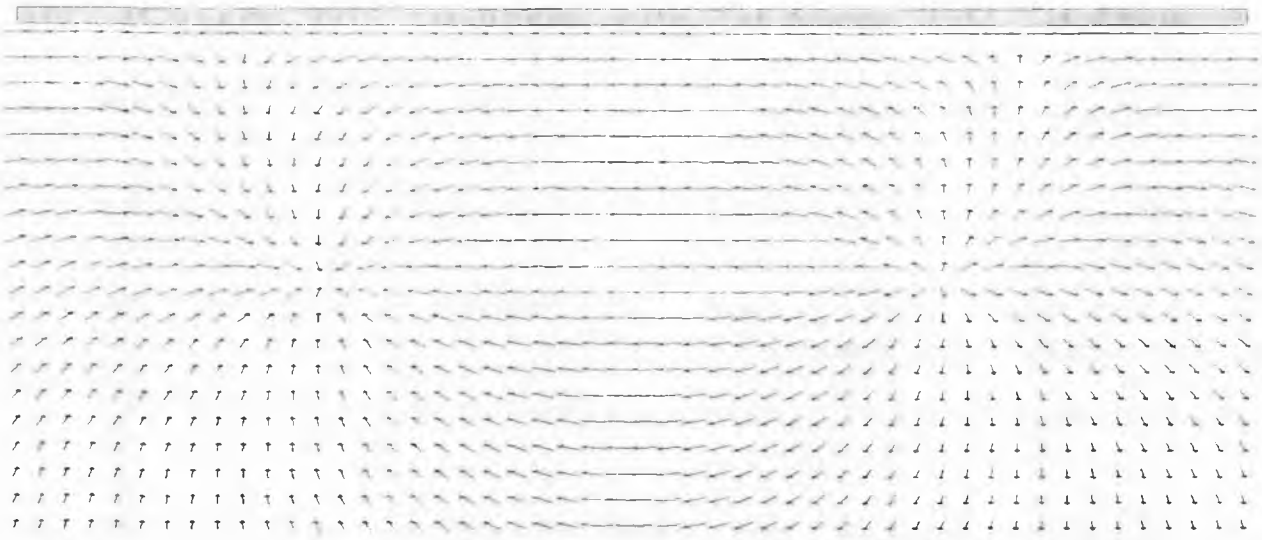
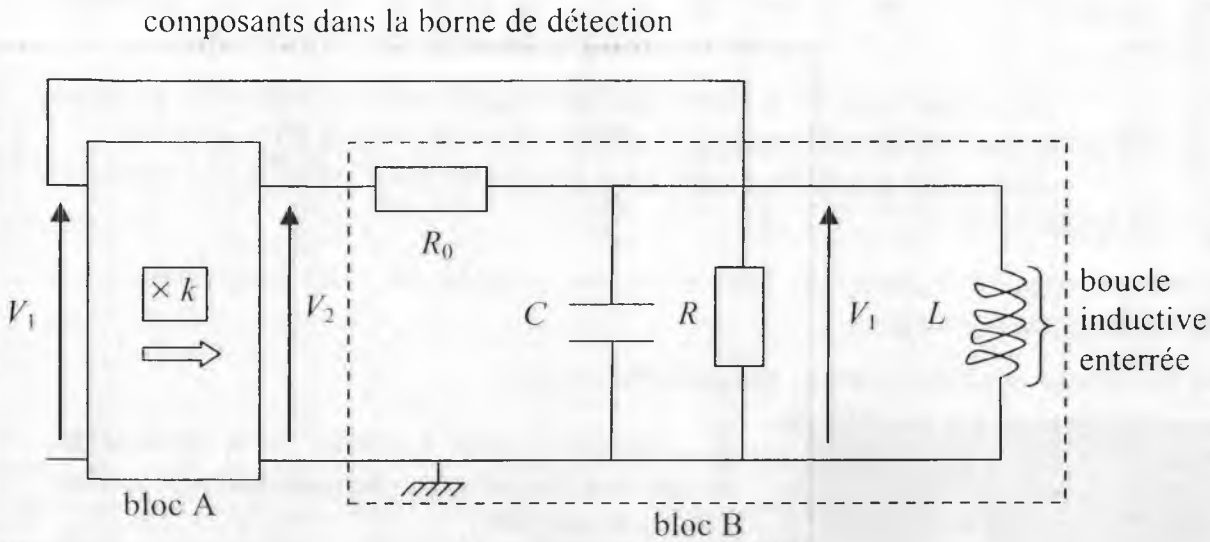


figure E

10) Expliquer pourquoi quatre des cinq figures ne peuvent pas représenter les lignes de champ magnétique créé par la boucle et les courants induits.

Dans la borne de détection se trouve un oscillateur électronique qui utilise l'inductance de la boucle pour générer les oscillations. La figure ci-dessous représente le schéma simplifié de l'oscillateur :



Le bloc A est un amplificateur idéal de tension : il possède une résistance d'entrée infinie et fournit une tension de sortie $V_2 = k\ V_1$, où k est le facteur d'amplification.

11) Identifier la nature du filtre constituant le bloc B (V_2 en entrée et V_1 en sortie).

12) Exprimer la condition de bouclage des deux blocs pour que le circuit soit le siège d'oscillations sinusoïdales d'amplitude constante. Exprimer la fréquence f_0 des oscillations en fonction de L et C et le facteur k en fonction de R et R_0.

On montre que la présence du véhicule fait varier l'inductance L de la boucle de la quantité ΔL telle que $\Delta L = -\dfrac{N^2 \mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \dfrac{a^2}{4h^2}\right)$.

13) Exprimer la variation relative de fréquence $\Delta f_0/f_0$ en fonction de la variation relative de l'inductance de la boucle $\Delta L/L$ avec l'approximation $\Delta L << L$.

14) Donner la valeur numérique de $\Delta f_0/f_0$ lorsque le véhicule est placé au dessus de la boucle.

Les détecteurs à boucle inductive peuvent mesurer des variations relatives de fréquence de l'ordre de 0,01 %.

15) Compte tenu du résultat précédent, quel commentaire suggère cette valeur en rapport avec la photo en début d'énoncé ?

16) Expliquer pourquoi les fils sont torsadés à l'intérieur du câble d'alimentation.

6.15 Disjoncteur magnétique

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

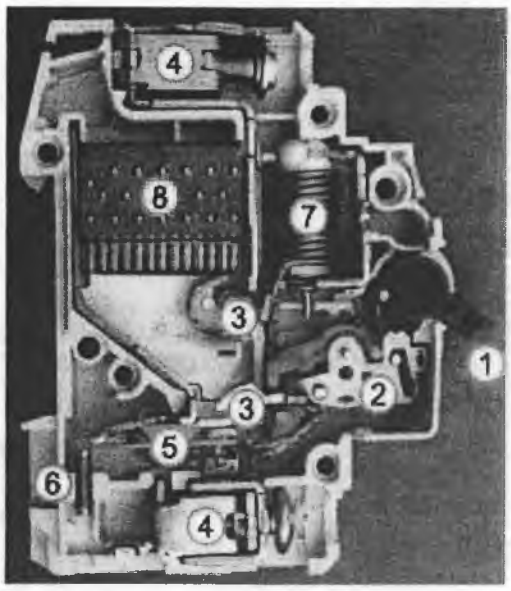
MOTS-CLES : théorème d'Ampère, inductance, dipôle magnétique.

Un disjoncteur est un dispositif de protection dont la fonction est d'interrompre le courant en cas d'incident sur un circuit électrique. L'avantage d'un disjoncteur est sa capacité à être réarmé, contrairement à un fusible qui doit être changé. Dans les disjoncteurs magnétothermiques, la coupure du courant est assurée par deux systèmes distincts :

- la coupure par effet thermique, provoquée par la courbure d'un bilame engendrée par son échauffement (par effet Joule) si le courant est trop élevé.
- la coupure par effet magnétique, provoquée par l'action d'une bobine sur un noyau de fer.

Ce problème propose d'étudier le mécanisme de coupure par effet magnétique et les principes physiques mis en jeu.

Vue de l'intérieur d'un disjoncteur magnétothermique



Auteur : Ali@gwc.org.uk (licence CC)

1 : manette servant à couper ou à réarmer le disjoncteur (il indique également son état ouvert ON ou fermé OFF).

2 : mécanisme entre la manette et les contacts

3 : contacts permettant au courant de passer lorsqu'ils se touchent

4 : connecteurs

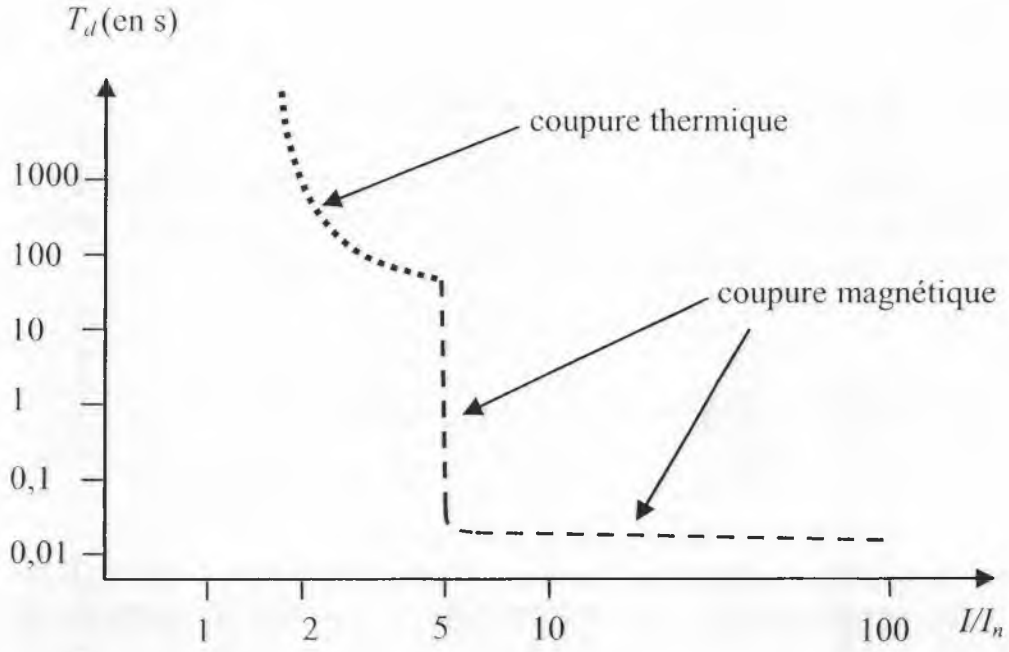
5 : bilame

6 : vis de calibration

7 : bobine

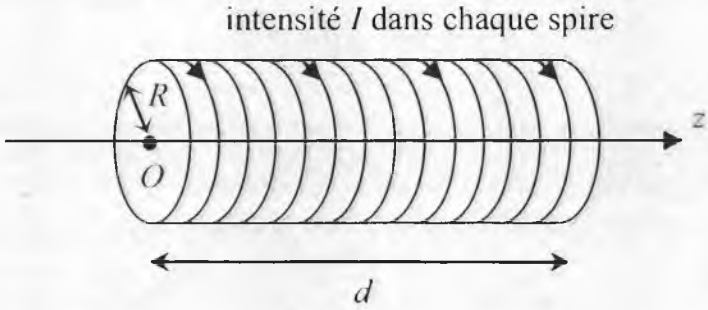
8 : chambre d'absorption de l'arc électrique suite à une coupure

La courbe ci-dessous, en échelle logarithmique, indique le temps de déclenchement T_d d'un disjoncteur de type B en fonction du rapport entre l'intensité I du courant parcourant le circuit et l'intensité nominale I_n (intensité attendue lors d'une utilisation normale du circuit électrique).



1) Comparer les deux systèmes de coupure en termes de temps de réponse et de seuil de déclenchement. Expliquer en quoi ces deux systèmes sont complémentaires.

La bobine utilisée pour la coupure par effet magnétique a la forme d'un solénoïde de rayon R, comprenant n spires par unité de longueur. On suppose dans un premier temps que le solénoïde possède une longueur d suffisamment grande devant R pour pouvoir négliger les effets de bords. On note I l'intensité du courant circulant dans le solénoïde et l'on admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur de celui-ci.



2) A l'aide de l'étude des symétries et du théorème d'Ampère sur un contour à préciser, exprimer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

3) Etablir l'expression de l'inductance propre L de la bobine.

4) Exprimer par deux méthodes différentes l'énergie magnétique E_m stockée par la bobine.

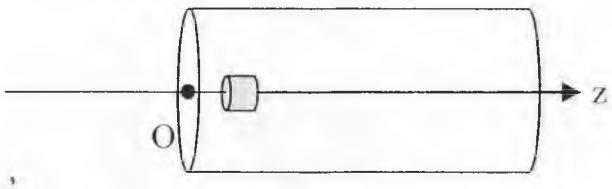
5) Calculer L et E_m pour d = 1,4 cm, R = 4 mm, I = 10 A et sachant que la bobine comporte un enroulement de 12 tours. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

En prenant en compte les effets de bord (avec cependant toujours $d >> R$), on peut montrer que le champ magnétique en un point de l'axe Oz et situé à une distance du point O petite devant d, a pour expression :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{u}_z$$

6) Que valent $\vec{B}(z > 0)$ et $\vec{B}(z < 0)$, avec $|z| >> R$? Commenter.

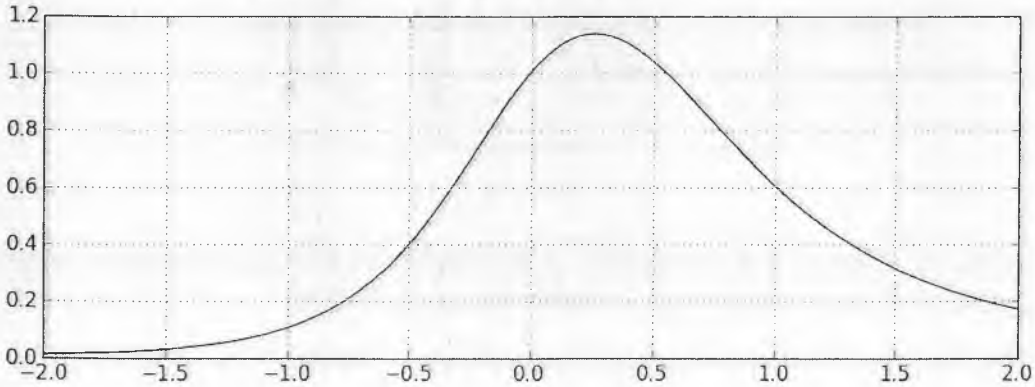
On place sur l'axe du solénoïde à l'abscisse z tel que $z << d$ un cylindre en fer de petite taille (comparée au diamètre du solénoïde). L'abscisse z est positive ou négative suivant que le cylindre est respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde.



Sous l'effet du champ magnétique créé par le solénoïde, le cylindre en fer s'aimante (le fer étant un matériau ferromagnétique). On peut montrer que le cylindre se comporte de manière approchée comme un dipôle magnétique de moment magnétique $\overrightarrow{M_c} \approx V_c \dfrac{\vec{B}(z)}{\mu_0}$, où V_c désigne le volume du cylindre. Le cylindre aimanté subit alors de la part du solénoïde une résultante des forces valant $\vec{F} = \left(\overrightarrow{M_c} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{B}(z)$.

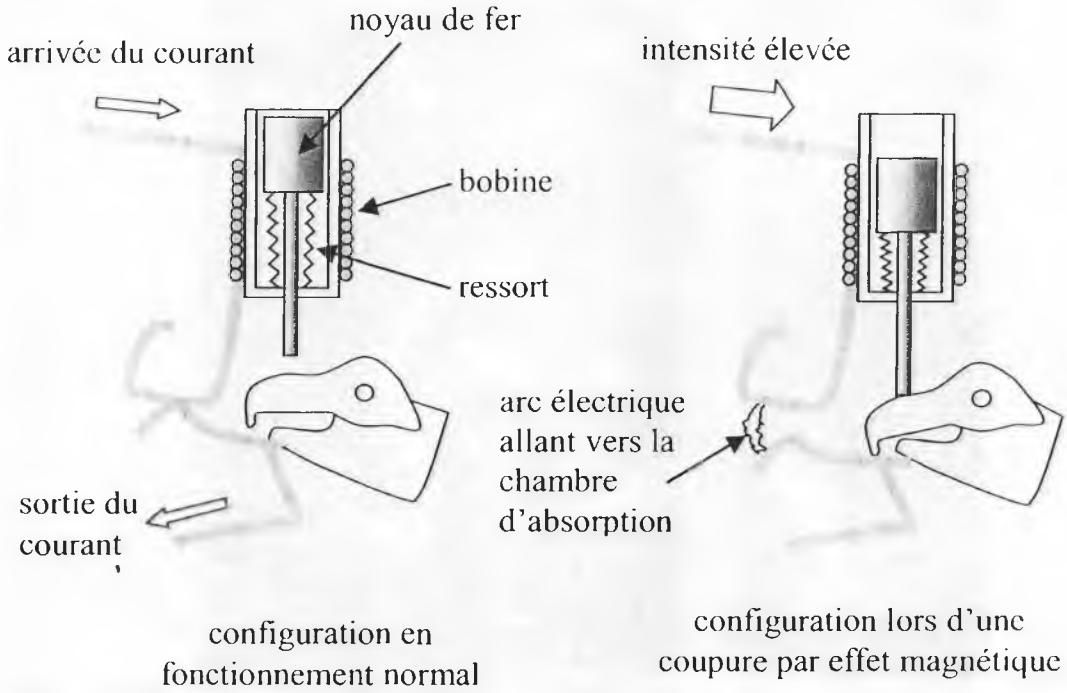
7) Vérifier que l'expression de $\overrightarrow{M_c}$ a bien la dimension d'un moment magnétique.

Le graphe suivant représente $f(u) = \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\dfrac{1}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}$ en fonction de u.



8) Indiquer où placer le cylindre afin qu'il subisse une force la plus grande possible pour une intensité I donnée. Le cylindre est-il attiré ou repoussé par le solénoïde ? Donner une expression littérale de cette force et calculer sa valeur numérique pour un cylindre de volume $V_c = 0{,}1\ \text{cm}^3$ (on reprendra les valeurs numériques de la question 4).

La figure ci-dessous représente une coupe schématique du dispositif de coupure par effet magnétique (le reste du disjoncteur n'ayant pas été représenté).



9) A la lumière de l'étude précédente, expliquer le principe de fonctionnement de la coupure magnétique d'un disjoncteur.

6.16 Jeu du Rattlesnake

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

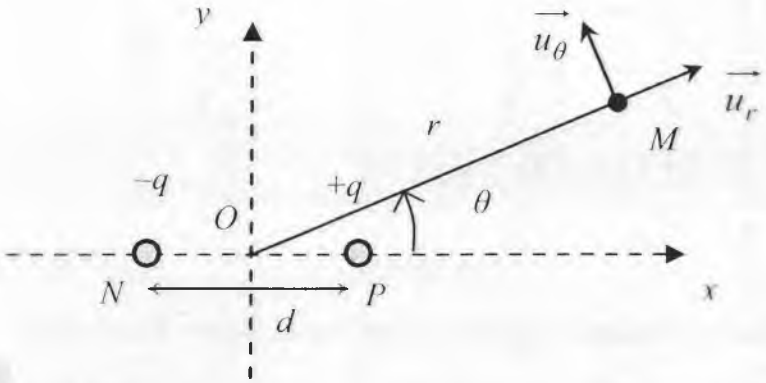
MOTS-CLES : dipôle électrostatique, dipôle magnétique, lignes de champ.

Rattlesnake signifie « serpent à sonnette » en anglais. C'est aussi le nom d'un jeu de société inventé par Roberto Di Meglio et édité en 2007 par *Ubik*®. Le principe est de poser à tour de rôle des aimants (représentant des œufs) au dessus d'un des serpents de la couleur indiquée par un dé. Celui qui, en posant son œuf, provoque un rassemblement des œufs doit récupérer tous les œufs qui se sont collés les uns contre les autres. Le gagnant est le premier à se débarrasser de tous ses œufs. Le but de ce problème est d'étudier de manière qualitative et quantitative l'action d'un aimant sur un autre et le risque de les voir se coller.

On étudie dans un premier temps le champ électrique créé par un dipôle électrostatique, constitué de deux charges opposées $-q$ et $+q$ situées respectivement en N et P, les deux points étant distants de d. On repère un point du plan Oxy, O étant le milieu du segment NP, par ses coordonnées polaires (r, θ), où θ désigne l'angle entre $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{OM}$ (voir figure page suivante).

Plateau de jeu du Rattlesnake™ avec quelques aimants posés dessus

Source : http://jeuxatheme.free.fr ©



1) Si l'on cherche à déterminer le champ électrique dans tout l'espace, pourquoi peut-on se limiter à le calculer dans le plan Oxy ?

2) Etablir l'expression du potentiel $V(r, \theta)$ créé par le dipôle dans l'approximation où $r >> d$. Définir le moment dipolaire $\overrightarrow{P_d}$ du dipôle.

On donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

3) En déduire les composantes radiale E_r et orthoradiale E_θ du champ électrique. Tracer l'allure des lignes de champ.

A une distance grande devant sa propre taille, un aimant peut être modélisé par un dipôle magnétique. Si l'aimant est placé au point O et en notant $\overrightarrow{M_d}$ son moment magnétique

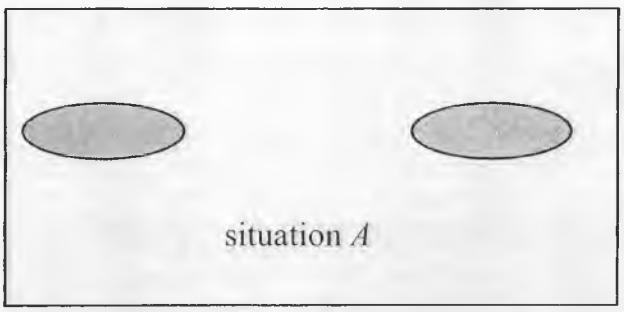
orienté selon $+Ox$, on peut montrer que le champ magnétique créé par le dipôle magnétique a une expression analogue à celle du champ électrique créé par le dipôle électrostatique précédent en remplaçant $\overrightarrow{P_d}$ par $\overrightarrow{M_d}$ d'une part, et $1/\varepsilon_0$ par μ_0 d'autre part. Par ailleurs, on montre que, lorsqu'un dipôle magnétique de moment magnétique $\overrightarrow{M_d}$ est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, il subit un moment des forces magnétiques égal à $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{M_d} \wedge \vec{B}$ ($\vec{\Gamma}$ et $\vec{B}$ étant calculés à l'endroit où se situe le dipôle) et une résultante des forces $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$, avec $E_p = -\overrightarrow{M_d} \cdot \vec{B}$. Dans le jeu du Rattlesnake™, les aimants ont la forme d'un ellipsoïde de révolution (à la manière d'un ballon de rugby très allongé), leur moment magnétique étant dirigé selon leur longueur. Pour les applications numériques, on prendra M_d = 0,2 A.m^2, la masse d'un aimant valant 10 g. On rappelle la valeur de la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

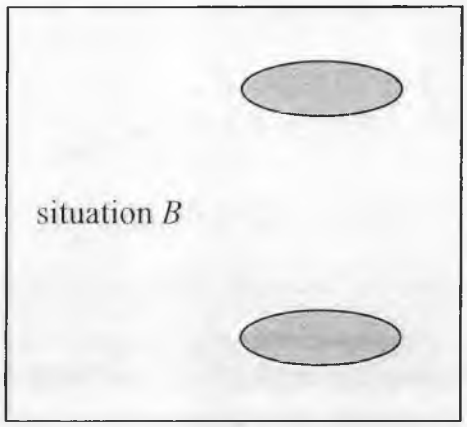
4) Dans le jeu du Rattlesnake™, si un seul aimant est placé sur le plateau, comment a-t-on intérêt à orienter l'aimant suivant pour ne pas risquer de le voir pivoter sur lui-même ? Les aimants paraissent-ils suivre cette règle sur la photo ?

Posés sur le plateau, les aimants peuvent glisser en se déplaçant selon leur axe de révolution (Δ) (grand axe de l'œuf) et également rouler en se déplaçant perpendiculairement à (Δ). En penchant le plateau de jeu, on constate qu'un aimant (seul) commence à rouler à partir d'un angle d'inclinaison de 2° d'une part et à glisser à partir d'un angle de 15° d'autre part.

5) Indiquer à quelle distance minimale faut-il placer deux aimants sans qu'ils ne viennent à se coller, dans le cas où ils sont alignés (situation A) ?

6) Même question dans le cas où ils sont placés l'un à côté de l'autre (situation B) ?





6.17 Collés avec des aimants...

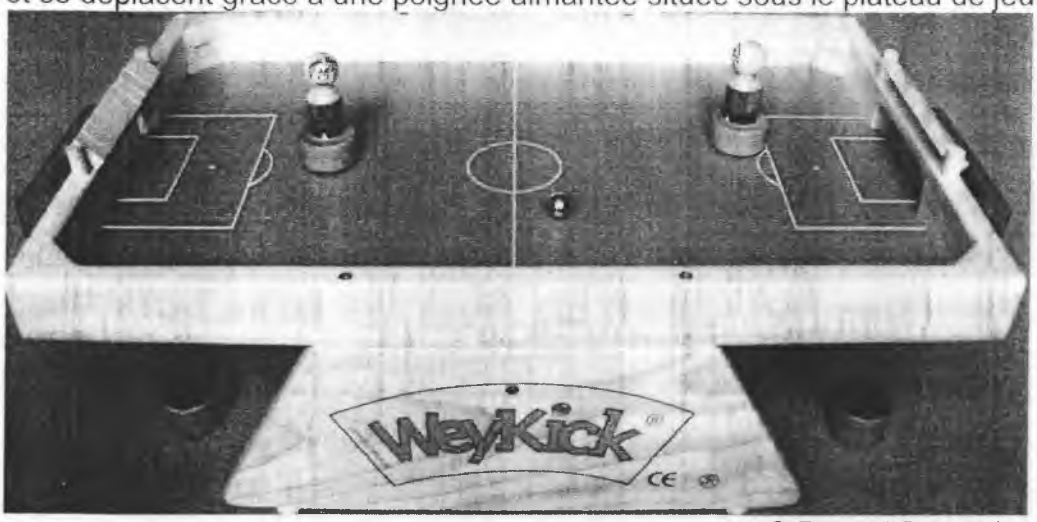
TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : dipôle magnétique, aimantation.

Un aimant est un milieu ferromagnétique dont les dipôles magnétiques microscopiques qui le composent sont orientés dans une direction privilégiée, créant dans l'espace un champ magnétique permanent. Les aimants les plus courants sont fabriqués à base de ferrite, tandis que les aimants les plus intenses sont constitués d'alliages de néodyme, de fer et de bore.

Ce problème tente de répondre à cette question : peut-on caractériser les propriétés d'aimantation d'un aimant ainsi que le champ magnétique créé à son voisinage ?

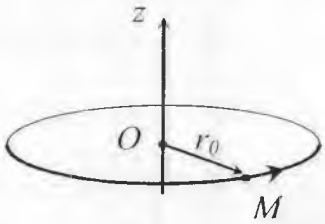
Jeu de football de table : les joueurs ont une base aimantée et se déplacent grâce à une poignée aimantée située sous le plateau de jeu



© Renaud Carpentier

Un modèle simple de dipôle magnétique dans la matière consiste à étudier le mouvement de l'électron autour du noyau dans un atome d'hydrogène. Classiquement, l'électron, de masse $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C, a un mouvement circulaire de rayon r_0 à la vitesse de rotation ω autour du noyau situé en O et subit la seule force d'attraction coulombienne du noyau.

Electron en mouvement circulaire autour du noyau de l'atome d'hydrogène



1) Exprimer le moment cinétique orbital $\overrightarrow{L_O}$ de l'électron par rapport au point O. Montrer que celui-ci est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement est uniforme. Proposer une analogie en mécanique.

Le mouvement circulaire de l'électron est analogue à une boucle de courant parcourue par un courant électrique d'intensité I, constituant un modèle simple de dipôle magnétique.
Le moment dipolaire magnétique associé à cette boucle de courant est défini par :

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

où $\vec{S} = \pi r_0^2\,\vec{e_z}$ est la surface de la boucle de courant.

2) Exprimer l'intensité I du courant électrique dans la boucle de courant en fonction de e et ω. Préciser le sens de parcours du courant. En déduire le moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ de l'électron dans ce modèle.

3) Montrer que le moment cinétique orbital de l'électron et son moment dipolaire magnétique sont colinéaires et exprimer le rapport gyromagnétique de l'électron γ_e défini par la relation $\vec{m} = \gamma_e \vec{L_O}$.

La mécanique quantique montre que la projection L_z sur Oz du moment cinétique orbital de l'électron ne peut prendre que certaines valeurs, multiples entiers de $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, où h est la constante de Planck : $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s.

4) Donner la dimension de L_z. Commenter.

5) Montrer que le moment dipolaire magnétique de l'électron est lui aussi quantifié. En déduire l'expression du quantum μ_B de moment dipolaire magnétique électronique, appelé aussi *magnéton de Bohr*. Calculer μ_B numériquement.

On considère un aimant parallélépipédique de dimensions 10 mm × 20 mm × 40 mm en ferrite, composé essentiellement d'oxydes de fer Fe_2O_3 ou Fe_3O_4 mélangés à d'autres éléments comme le strontium, le baryum ou le cobalt. Cet aimant pèse 40 g.

Aimant en ferrite.
Les pôles Nord et Sud sont situés sur les plus grandes faces.

© Benoît Dépret

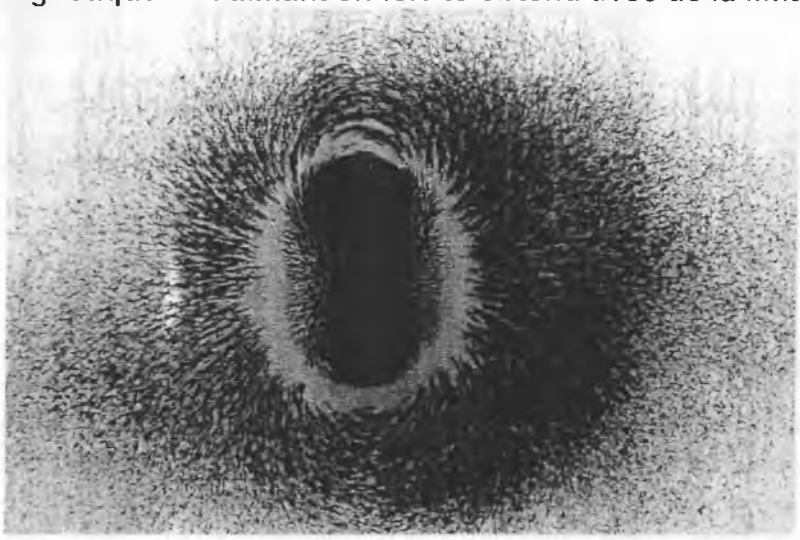
On suppose pour simplifier que l'aimant est uniquement constitué de fer et que chaque atome de fer fournit un dipôle magnétique de moment dipolaire magnétique μ_B. On rappelle la masse molaire du fer : $M_{Fe} = 56.10^{-3}$ kg.mol^{-1}.

6) Evaluer le nombre de dipôles magnétiques par unité de volume dans le matériau. En déduire l'ordre de grandeur du moment magnétique volumique de cet aimant permanent, aussi appelé *aimantation*, notée M.

7) Evaluer alors l'ordre de grandeur du champ magnétique rémanent à l'intérieur de l'aimant, lié à M par la relation $B = \mu_0 M$.

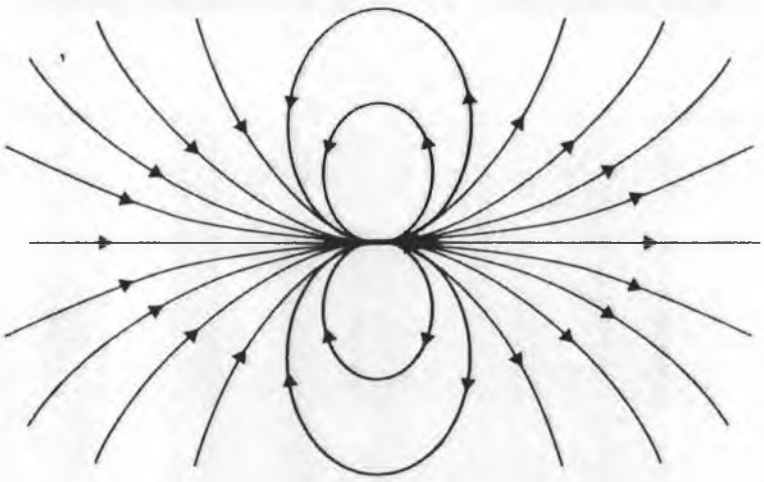
On souhaite caractériser le champ magnétique permanent créé dans tout l'espace par cet aimant et le comparer au champ magnétique créé par un dipôle magnétique seul. On utilise pour cela de la limaille de fer et on visualise le spectre magnétique, simple image du champ magnétique.

Spectre magnétique de l'aimant en ferrite obtenu avec de la limaille de fer



© *Benoît Dépret*

Champ magnétique créé par un dipôle magnétique



8) Commenter l'allure des champs magnétiques de l'aimant et du dipôle magnétique. Pourrait-on considérer que l'aimant se comporte comme un unique dipôle magnétique ?

A l'aide d'un teslamètre (sonde à effet Hall), on a mesuré l'intensité du champ magnétique le long de l'axe d'un aimant en ferrite et d'un aimant en néodyme de même taille, en fonction de la distance d. Les résultats expérimentaux sont reportés sur le graphe ci-après.

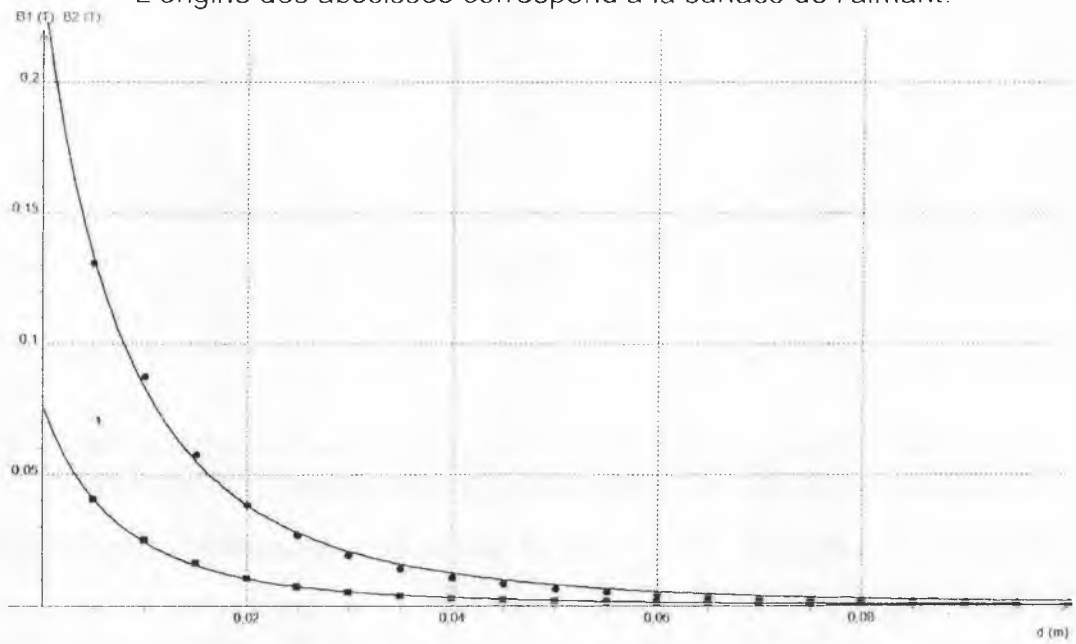
Aimant en néodyme (alliage NdFeB).
Les pôles Nord et Sud sont situés sur les plus grandes faces.

© *Benoît Dépret*

Afin de tester la validité du modèle dipolaire, on a également tracé le champ magnétique créé le long de l'axe d'un dipôle magnétique de moment dipolaire m selon la relation :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{z^3}$$

Champ magnétique le long de l'axe d'un aimant en ferrite et d'un aimant en néodyme.
L'origine des abscisses correspond à la surface de l'aimant.



9) Identifier les courbes relatives à l'aimant en ferrite et à celui en néodyme. Le modèle du dipôle magnétique convient-il ? Commenter la valeur du champ magnétique au voisinage de chaque aimant.

L'ajustement du modèle théorique du dipôle avec les points expérimentaux a permis d'obtenir la valeur du moment dipolaire magnétique équivalent à chaque aimant :

Aimant en ferrite	Aimant en néodyme
$m = 3{,}7$ A.m^2	$m = 16$ A.m^2

10) Déduire de ces résultats l'aimantation M dans chaque aimant. Commenter.

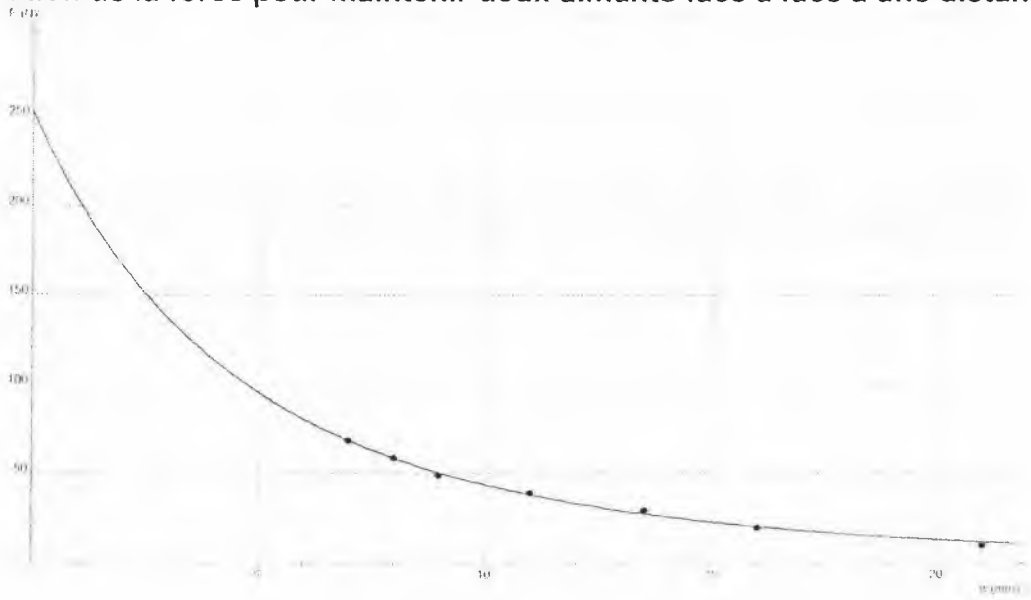
Lorsque deux aimants sont face à face, ils se repoussent ou s'attirent fortement selon l'orientation de leurs pôles et la distance qui les sépare.
On a placé deux aimants en néodyme face à face, leurs pôles Nord se faisant face, et on a mesuré la force nécessaire pour maintenir les aimants en équilibre à une distance donnée. Le graphe ci-après présente les résultats expérimentaux, ainsi que la courbe du modèle théorique dipolaire.

On rappelle que l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m}$ placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ s'écrit : $E_p = -\vec{m}.\vec{B}$

La force magnétique s'exerçant sur le dipôle magnétique dérive alors de cette énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Evolution de la force pour maintenir deux aimants face à face à une distance d



11) Exprimer la force magnétique exercée sur chacun des deux aimants face à face à la distance d l'un de l'autre. Cette force magnétique est-elle attractive ou répulsive ?

12) Commenter l'adéquation du modèle du dipôle avec les mesures expérimentales. On obtient numériquement pour ce modèle $m = 6{,}6$ A.m^2.

Une mesure simple et rapide du champ magnétique moyen au voisinage d'un aimant consiste à effectuer un test d'arrachement : un aimant est placé sur une surface en acier et on mesure simplement la force nécessaire pour le décoller de la surface.
On a ainsi réussi à accrocher une masse de 6 kg à l'aimant en néodyme. Pour une masse de 7 kg, l'aimant se décroche de la surface.
On considère la force F à exercer sur l'aimant pour le décoller d'une faible distance ε. Le travail fourni par cette force est alors utilisé pour remplir d'énergie magnétique le volume situé entre l'aimant et le support. On note B_{moy} le champ magnétique moyen au voisinage de l'aimant et $S = 20$ mm $\times$ 40 mm la surface de contact.

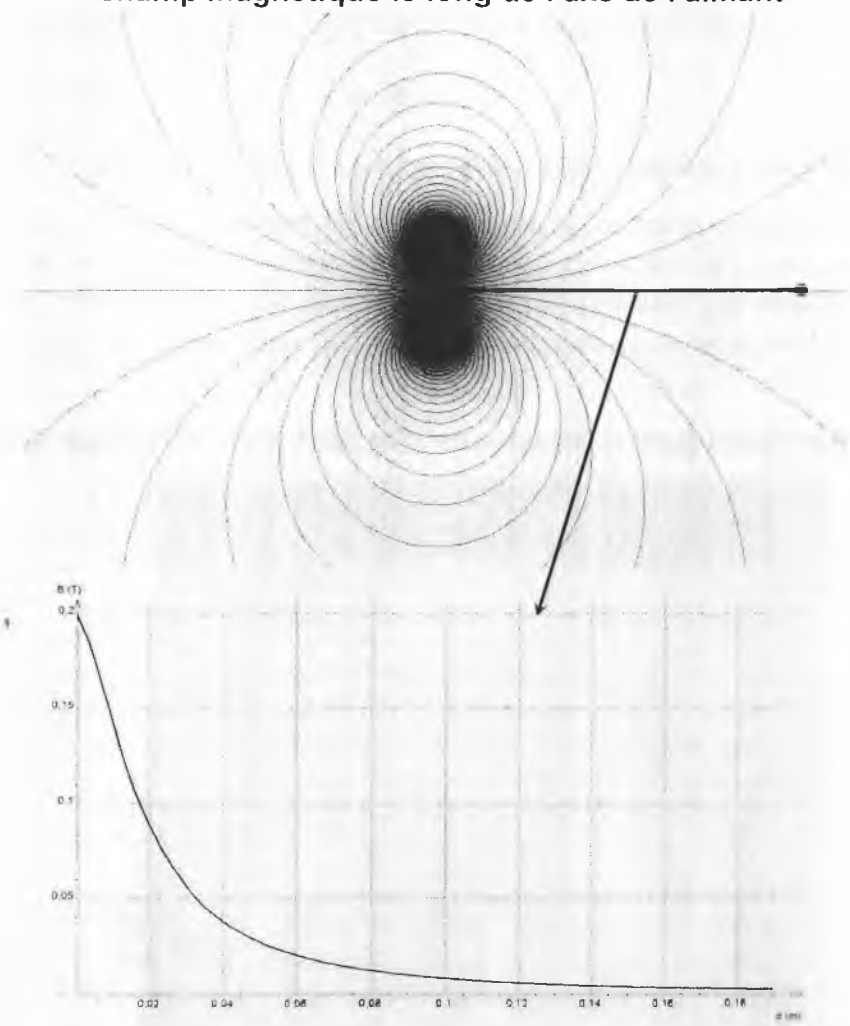
13) Relier simplement la force F et le champ magnétique B_{moy} au voisinage de l'aimant.

14) En déduire la valeur numérique de B_{moy}.

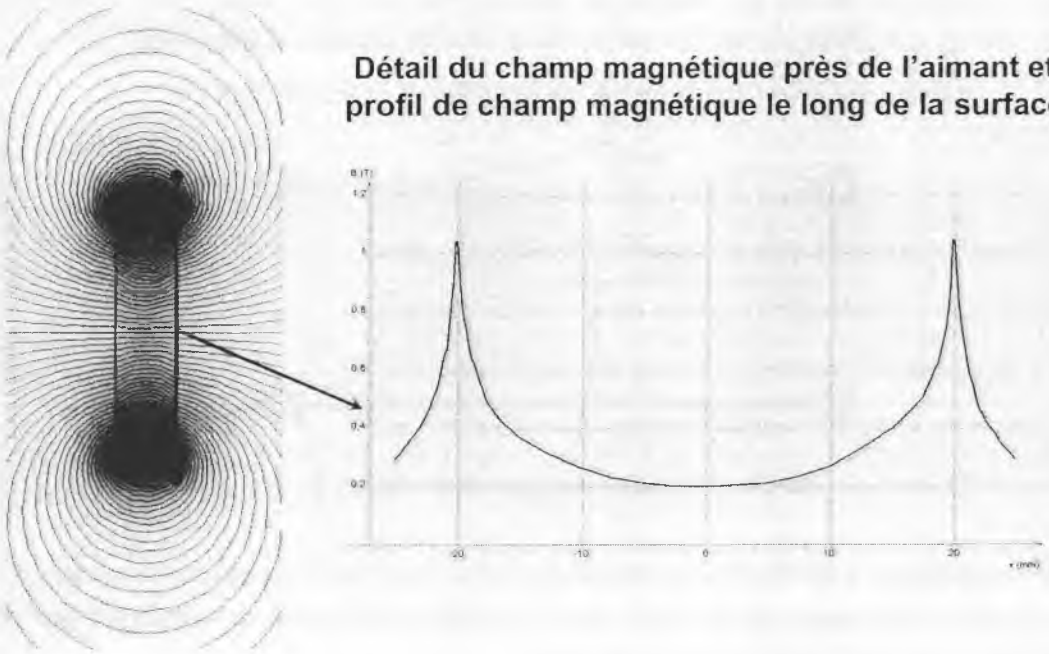
Des simulations numériques permettent d'obtenir directement le champ magnétique créé dans l'espace par un aimant permanent dont on connaît les caractéristiques.
On a reporté page suivante l'allure des lignes de champ magnétique obtenues avec l'aimant en néodyme étudié, ainsi que des profils de champ magnétique le long de l'axe de l'aimant et au voisinage de sa surface.

15) A l'aide des simulations numériques, interpréter les résultats précédents. Commenter le rôle du modèle du dipôle magnétique.

Lignes de champ magnétique créées par l'aimant et profil de champ magnétique le long de l'axe de l'aimant



Détail du champ magnétique près de l'aimant et profil de champ magnétique le long de la surface



Simulations numériques de l'aimant au néodyme réalisées avec le logiciel FEMM © (Finite Element Methode Magnetics) disponible gratuitement sur www.femm.info

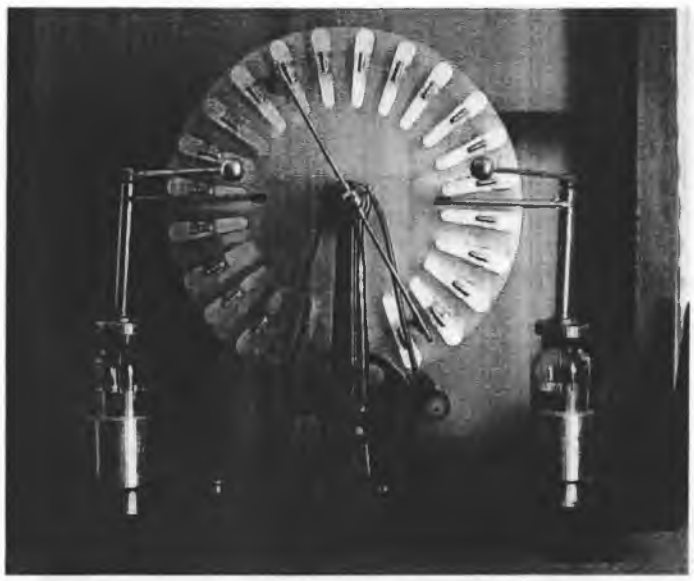
6.18 Champ magnétique créé par une décharge

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : théorème d'ampère généralisé, loi de Coulomb, ARQS.

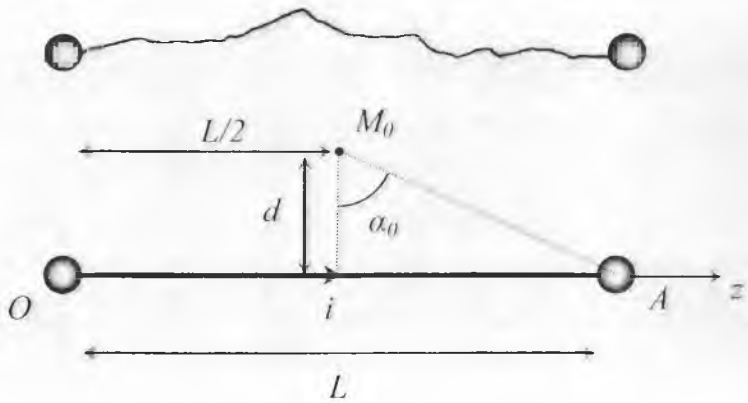
Une machine électrostatique, comme la machine de Wimshurst, permet de générer des décharges électriques dans l'air entre deux électrodes appelées éclateurs. Par un phénomène d'influence et de frottements, des charges sont accumulées au niveau des éclateurs. La décharge se produit alors lorsque le champ électrique est suffisant pour ioniser l'air et le rendre conducteur.

La machine de Wimshurst permet de générer des décharges électriques dans l'air



La décharge électrique entre les éclateurs délivre un courant électrique d'intensité i, générant un champ magnétique dont on se propose de déterminer l'expression.

Décharge électrique entre les éclateurs et modélisation



On assimile la décharge à un fil fini de longueur L parcouru par un courant d'intensité i. On cherche le champ magnétique en un point M_0 de son plan médiateur, à une distance d du fil. On utilisera les coordonnées cylindriques d'axe Oz.

1) Déduire des symétries du système la direction du champ magnétique $\vec{B}(M_0)$.

2) Déterminer l'expression du champ magnétique que l'on obtiendrait en M_0 par l'application du théorème d'Ampère dans l'approximation d'un régime quasi-stationnaire *magnétique*.

La loi de Biot et Savart permet de calculer directement le champ magnétique créé en M_0 par ce fil fini de longueur L :

$$\vec{B}(M_0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \sin\alpha_0 \, \vec{e_\theta}$$

3) Comparer ce résultat à celui obtenu précédemment. Commenter.

En fait, les éclateurs O et A, supposés ponctuels, portent des charges respectives $-q(t)$ et $q(t)$ qui varient dans le temps en donnant lieu à la décharge électrique de courant $i(t)$.

4) Montrer que l'application du théorème d'Ampère *généralisé* permet de retrouver le champ magnétique attendu au point M_0. On admettra pour cela qu'il est possible d'utiliser la loi de Coulomb pour calculer le champ électrique créé par les charges $-q(t)$ et $q(t)$ (cas d'un régime quasi-stationnaire *électrique*).

Les charges qui apparaissent au niveau des éclateurs s'accumulent en fait dans des condensateurs (qui à l'origine étaient des bouteilles de verre remplies de feuilles d'étain, appelées *bouteilles de Leyde*, visibles sur le cliché) de capacité voisine de 1 nF. La décharge électrique, d'une durée de quelques microsecondes, se produit dans l'air sec dès que le champ électrique avoisine le champ disruptif de l'air, de l'ordre de 36 kV/cm.

5) On place les éclateurs à 2 cm l'un de l'autre. Estimer la différence de potentiels entre les éclateurs permettant la création d'une décharge électrique dans l'air.

6) En considérant que les éclateurs sont reliés aux deux armatures d'un condensateur, estimer la charge électrique transférée lors de la décharge et l'intensité du courant électrique correspondant.

7) En déduire la valeur du champ magnétique à 1 mm de l'étincelle.

8) Comparer le champ magnétique créé à 1 m de l'étincelle au champ magnétique terrestre. Comment expliquer qu'une telle étincelle puisse provoquer des perturbations électriques dans un circuit électronique situé à cette distance ?

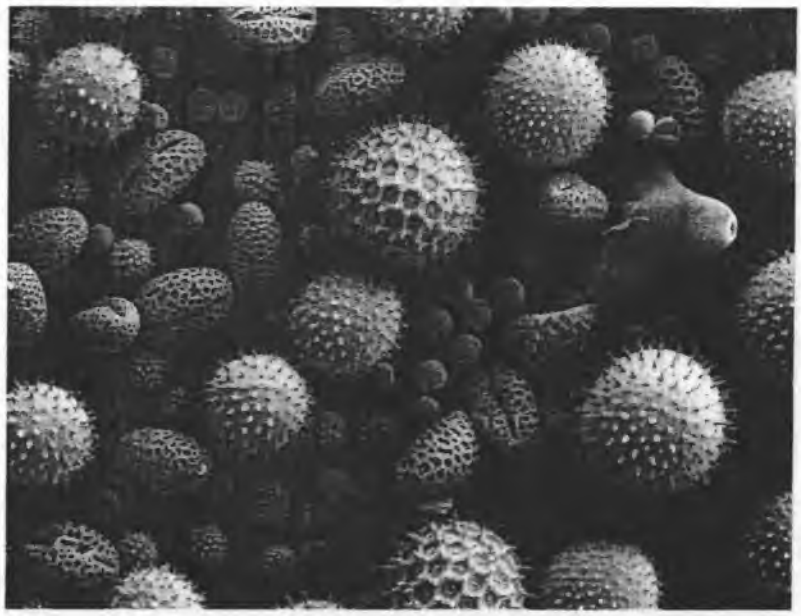
6.19 Canon à effet de champ partie 1

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : propriétés topographiques, théorème de Gauss, théorème d'Ampère.

Les microscopes électroniques, qu'ils soient en transmission (*transmission electron microscopy* : TEM) ou à balayage (*scanning electron microscopy* : SEM), utilisent un flux d'électrons (faisceau électronique) pour sonder la matière, remplaçant ainsi le flux de lumière (faisceau lumineux) utilisé par la microscopie optique. Ce problème traite de l'un des moyens de créer le faisceau électronique : le canon à effet de champ, encore appelé canon à émission de champ.

Grains de pollen vus au microscope électronique à balayage

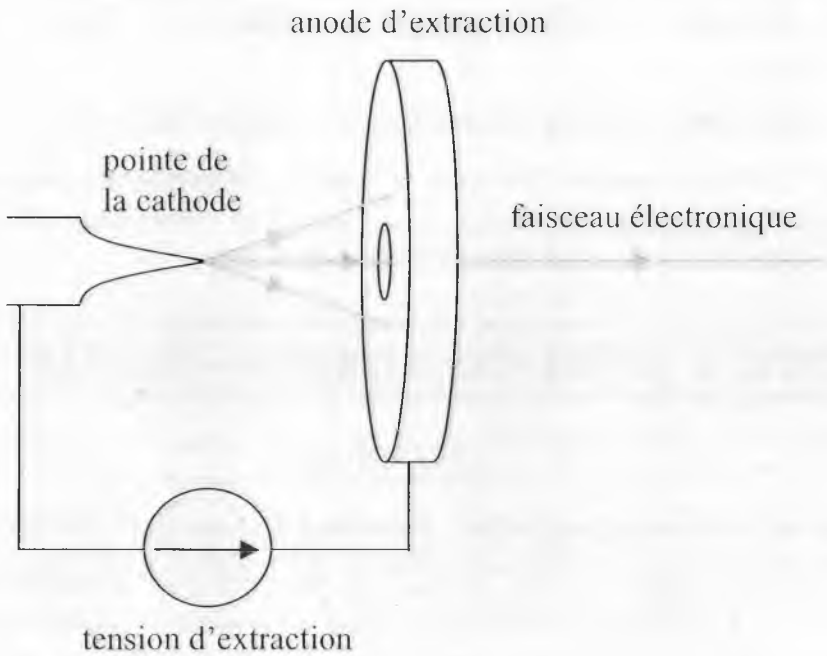


Auteur : Dartmouth College (domaine public)

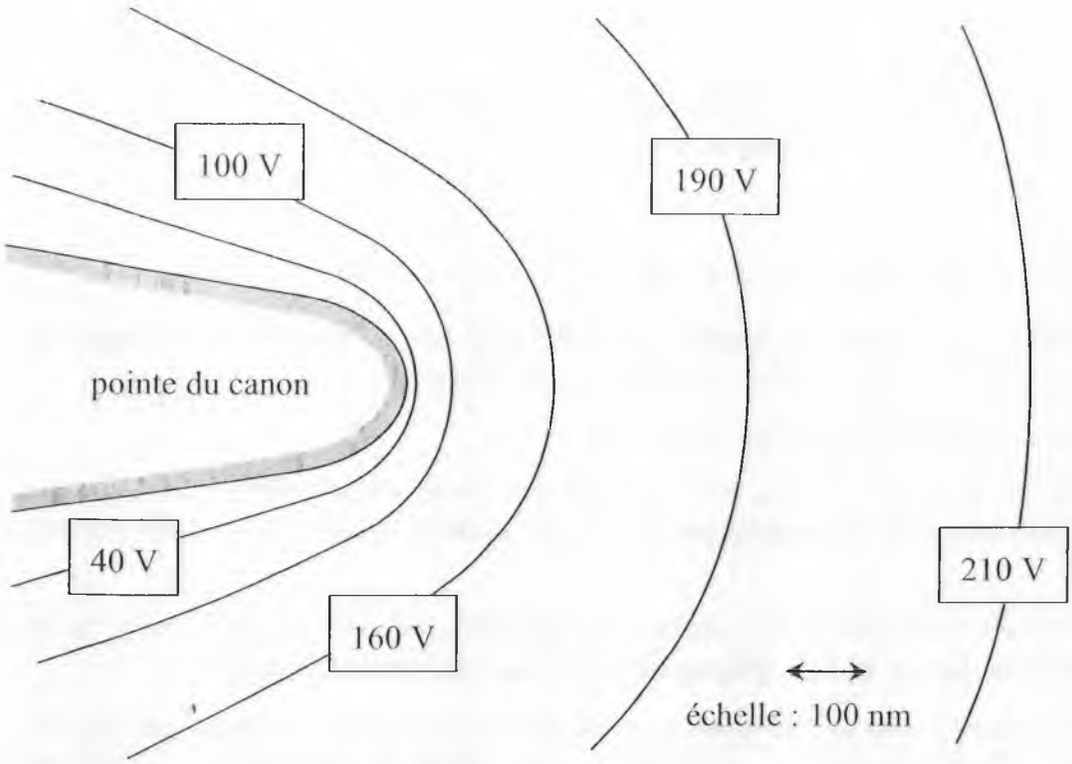
Données numériques :

- charge et masse d'un électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C et $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.
- permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1}.
- vitesse de la lumière $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

La figure ci-dessous représente le schéma de principe de la première partie du canon à effet de champ. Le faisceau électronique passe ensuite par une lentille électrostatique, puis est accéléré par une seconde anode mise sous très haute tension (de l'ordre de 100 kV).



La figure suivante donne l'allure de quelques lignes équipotentielles autour de la pointe du canon dont le potentiel électrique est pris comme référence. La forme pointue de la cathode entraine à son extrémité la présence d'un champ électrique très intense. Ce phénomène, nommé l' « effet de pointe », permet aux électrons d'être arrachés de la pointe par effet tunnel (voir partie 2).



1) Compléter la figure en traçant l'allure de quelques lignes de champ électrique partant de la cathode. Comment cette figure permet-elle d'illustrer l'effet de pointe ? Donner la valeur numérique approximative du champ électrique au bout de la pointe.

2) Calculer la vitesse des électrons lorsqu'ils arrivent à la ligne équipotentielle 210 V.

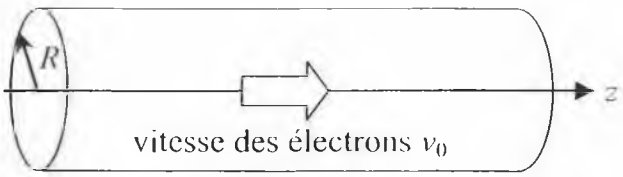
Un paramètre important quantifiant la qualité d'une source d'électrons est ce que l'on appelle la « brillance ». Les autres paramètres étant fixés, celle-ci est d'autant plus grande que la zone d'où semblent provenir les électrons est petite. Les canons à effet de champ possèdent une brillance élevée (comparée à celle des canons à émission thermoïonique) car le diamètre de la source virtuelle des électrons peut être très petit, typiquement une dizaine de nanomètres.

3) Expliquer pourquoi la source virtuelle d'où semblent provenir les électrons possède une taille plus petite que la pointe elle-même.

Dans la suite du problème, on tente de savoir si l'interaction entre les électrons influence la divergence du faisceau à la sortie de la pointe.

4) Dans le cas d'une source lumineuse, y a-t-il une interaction entre les photons à l'intérieur du faisceau lumineux ? En quoi les équations de Maxwell permettent-elles de répondre à cette question ?

Afin de simplifier les calculs, on suppose que le faisceau électronique est cylindrique d'axe Oz, de rayon R, de longueur infinie et contient n_e électrons par unité de volume. Les électrons, de charge $-e$, possèdent tous une vitesse identique v_0 vers les z croissants. On admet que l'on peut utiliser les résultats d'électrostatique même si les électrons sont en mouvement du moment où $v_0 << c$.



5) Indiquer le sens du courant et la norme I de l'intensité du faisceau électronique.

6) Déterminer l'expression du champ électrique créé par le faisceau électronique en un point quelconque de l'espace (dedans et en dehors du faisceau).

7) Faire de même pour le champ magnétique.

8) En déduire la force $\vec{F}$ que subit un électron situé en périphérie du faisceau. Comparer les effets électrique et magnétique en prenant comme valeur pour v_0 celle trouvée à la question 2.

9) En précisant votre démarche, estimer l'augmentation ΔR, supposée très petite devant R, du rayon du faisceau après propagation des électrons sur une longueur L.

10) Sachant que l'intensité du faisceau émis par le canon est de l'ordre de 10 µA, estimer par un calcul d'ordre de grandeur si la répulsion électronique augmente significativement la divergence du faisceau (on raisonnera à moins de 1 µm de la pointe, là où le faisceau reste encore assez concentré).

6.20 Déviation d'un filet d'eau

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

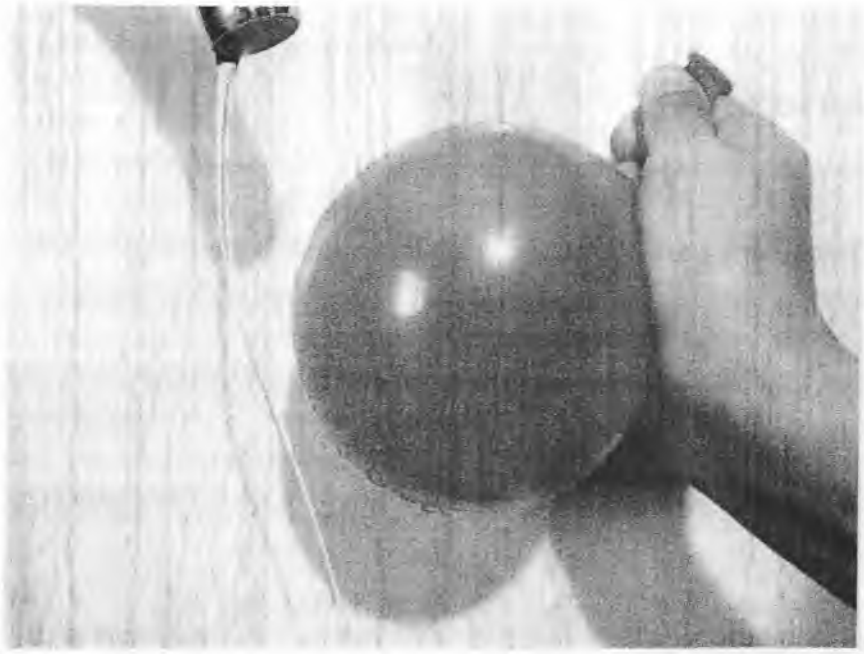
MOTS-CLES : dipôle électrostatique, loi d'Ohm, équations de Maxwell, étude dynamique.

Une expérience simple d'électricité statique à réaliser chez soi consiste à électriser un objet par frottement puis de l'approcher d'un mince filet d'eau. Si l'objet est suffisamment électrisé et s'il est placé assez près, on observe une déviation du filet. Ce problème propose de comprendre et de quantifier ce phénomène. A défaut d'un morceau d'ambre (matériau que Thalès utilisa au VIème siècle av. J.C. lorsqu'il découvrit le phénomène d'attirance de petits objets suite à son frottement), on peut utiliser un ballon de baudruche que l'on frotte sur ses cheveux afin d'électriser son enveloppe.

Données numériques pouvant être utiles à la résolution du problème :

$\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1}.
$k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}.
$N_A = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1}.
$m_{proton} = 1{,}67.10^{-27}$ kg.
$e = 1{,}6.10^{-19}$ C.
1 Debye = $3{,}3.10^{-30}$ C.m.

Déviation d'un filet d'eau par un ballon de baudruche électrisé



© Robin Carpentier

Deux étudiants discutent de l'interprétation de l'attirance de l'eau par les charges fixées sur l'objet électrisé. Chacun d'eux propose une explication différente :

- le premier étudiant pense que cela est dû au caractère dipolaire des molécules d'eau.
- le second pense plutôt que cela est dû au caractère conducteur de l'eau du fait de la présence d'ions.

Pour déterminer lequel des deux étudiants a raison, il faut dans un premier temps introduire différents temps caractéristiques propres à l'eau.

Premier temps caractéristique

La molécule d'eau possède un moment dipolaire permanent de 1,83 Debye.

1) Rappeler par une figure la géométrie de la molécule d'eau. Justifier qu'elle possède un moment dipolaire permanent, que l'on représentera sur la figure.

On considère une molécule d'eau seule (pas d'autres molécules à proximité), de moment dipolaire $\vec{p}$, plongé subitement dans un champ électrique $\vec{E}$ orienté à 90° de $\vec{p}$. Elle est alors soumise à un couple de moment $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

2) Expliquer qualitativement l'évolution temporelle du moment dipolaire $\vec{p}$. Sachant que la liaison OH fait environ $d = 1$ Å, estimer la valeur numérique du temps caractéristique de cette évolution pour un champ électrique de 100 kV.m^{-1}.

En réalité, il faut tenir compte de l'environnement de la molécule d'eau et de l'agitation thermique pour étudier le changement d'orientation de son moment dipolaire. Les molécules d'eau mettent alors un temps de l'ordre de $\tau_0 = 10^{-11}$ s pour que leur moment dipolaire moyen s'aligne avec le champ électrique.

3) Justifier par un calcul énergétique que l'agitation thermique joue effectivement un rôle déterminant dans le processus d'alignement du moment dipolaire. On rappelle que

l'énergie potentielle de la molécule de moment dipolaire $\vec{p}$ plongée dans un champ $\vec{E}$ vaut $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$.

Deuxième temps caractéristique

L'eau pure est un liquide conducteur d'électricité du fait de son autoprotolyse, de constante d'équilibre $K_e = 10^{-14}$ à 25°C. Pour décrire le mouvement des ions dans l'eau, on adopte le modèle simplifié où les ions hydroxydes et hydroniums de vitesses respectives $\vec{v}_{OH^-}$ et $\vec{v}_{H_3O^+}$ subissent, en plus de la force électrique, une force respectivement de la forme $\vec{F}_{OH^-} = -K_{OH^-}\vec{v}_{OH^-}$ et $\vec{F}_{H_3O^+} = -K_{H_3O^+}\vec{v}_{H_3O^+}$, modélisant l'effet des interactions des ions avec leur environnement.

4) Calculer la densité volumique n_{OH^-} et $n_{H_3O^+}$ des ions hydroxydes et hydroniums, exprimée en m^{-3}.

5) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}_{OH^-}$ d'une part et $\vec{v}_{H_3O^+}$ d'autre part lorsque l'eau est soumise à un champ électrique variable $\vec{E}$.

6) En notant τ_E le temps caractéristique de variation du champ électrique, écrire les deux conditions pour que la loi d'Ohm locale puisse être appliquée à l'eau en introduisant deux autres temps caractéristiques τ_{OH^-} et τ_{H3O^+} et exprimer la conductivité γ de l'eau. Donner les valeurs numériques de τ_{OH^-}, τ_{H3O^+} et γ sachant les conductivités par unité de concentration des ions hydroxydes et hydroniums à 25°C valent respectivement 20 $mS.m^2.mol^{-1}$ et 35 $mS.m^2.mol^{-1}$.

Troisième temps caractéristique

On considère un volume d'eau occupant tout l'espace. Pour $t < 0$, l'eau a subi des perturbations extérieures de sorte qu'à $t = 0$, elle n'est pas localement neutre et possède une densité volumique de charges non uniforme $\rho_0(M)$ au point M. On cherche à étudier le retour à l'équilibre en supposant que la loi d'Ohm est applicable et en négligeant la polarisation des molécules d'eau.

7) A partir entre autres de l'une des équations de Maxwell, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité volumique de charges $\rho(M,t)$ au point M à la date t.

8) Résoudre cette équation et faire apparaître un temps caractéristique τ_t. Faire l'application numérique pour l'eau. Cela valide-t-il l'utilisation de la loi d'Ohm ?

De manière plus générale, on montre que τ_t est le temps caractéristique d'établissement d'un équilibre électrostatique d'un matériau de conductivité γ soumis à un champ électrique extérieur.

Cas d'une goutte d'eau

On considère maintenant une goutte d'eau sphérique soumise à un échelon de champ électrique.

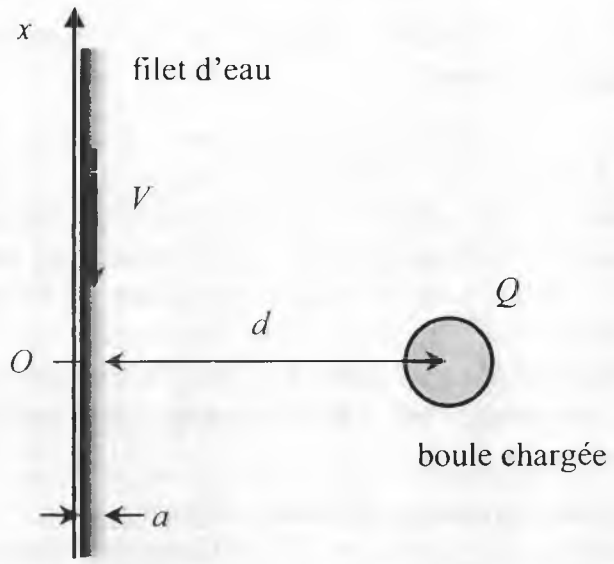
9) Compte tenu des différentes valeurs numériques précédentes, expliquer dans l'ordre chronologique les différents mécanismes se produisant dans la goutte. Indiquer

qualitativement par un dessin la répartition finale des charges et préciser la valeur finale du champ électrique dans la goutte d'eau.

On montre par un calcul relativement complexe que le temps caractéristique d'établissement de cet équilibre vaut $\tau_{éq} = (3+\chi)\tau_i$, le facteur 3 venant de la forme sphérique de la goutte et le facteur χ, appelé susceptibilité électrique, venant du caractère polaire des molécules d'eau avec $\chi = 80$.

Expérience de la déviation du filet d'eau

On raisonne sur l'expérience représentée sur la figure suivante. L'eau coule verticalement à une vitesse supposée constante $V_0 = 1$ m.s^{-1}. Le filet d'eau de diamètre a est à une distance $d = 5$ cm du centre d'une boule chargée possédant une charge totale Q. La position d'une goutte à l'intérieur du filet d'eau est repérée par l'abscisse x. On considère dans un premier temps que le filet d'eau n'est pas dévié par la boule.



10) Calculer la composante du champ électrique responsable de la déviation du filet d'eau à l'abscisse x. Tracer l'allure de cette composante en fonction de x.

11) Indiquer l'ordre de grandeur de la durée pendant laquelle une goutte subit cette composante du champ électrique. La comparer à $\tau_{éq}$ pour conclure quant à savoir lequel des deux étudiants a raison.

12) Expliquer qualitativement pourquoi les gouttes d'eau sont attirées par la boule. Cela dépend-il du signe de Q ?

Une fois l'équilibre électrostatique atteint (au bout de quelques fois $\tau_{éq}$), on montre qu'une goutte d'eau de volume V_g soumise à un champ $\vec{E}$ peut être assimilé à un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p} = V_g 3\varepsilon_0 \vec{E}$. On rappelle qu'un dipôle plongé dans un champ $\vec{E}$ non uniforme subit la force $\vec{F} = (\vec{p}.\vec{grad})\vec{E}$ et l'on fournit la formule suivante dans le cas où le champ $\vec{E}$ est de la forme $E(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques $(\vec{E}.\vec{grad})\vec{E} = E\dfrac{\partial E}{\partial r}\vec{u}_r$. On fournit la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^3}du = \frac{3\pi}{8}$.

Pour calculer l'angle de déviation α du filet d'eau, on utilise la méthode des perturbations si celui-ci est suffisamment petit : on calcule la force horizontale subie par une goutte d'eau en supposant que la trajectoire reste rectiligne uniforme. On en déduit alors la vitesse horizontale acquise par la goutte une fois passée à proximité de la boule. On notera μ la masse volumique de l'eau et l'on suppose que la longueur du filet d'eau est très grande devant d.

13) Exprimer l'angle α en fonction de Q, μ, d, a et V_0.

14) Estimer la norme de la charge Q du ballon de baudruche de la photo en début d'énoncé sachant que le robinet a un diamètre de 2 cm.

6.21 Etude d'un câble pour la TNT partie 1

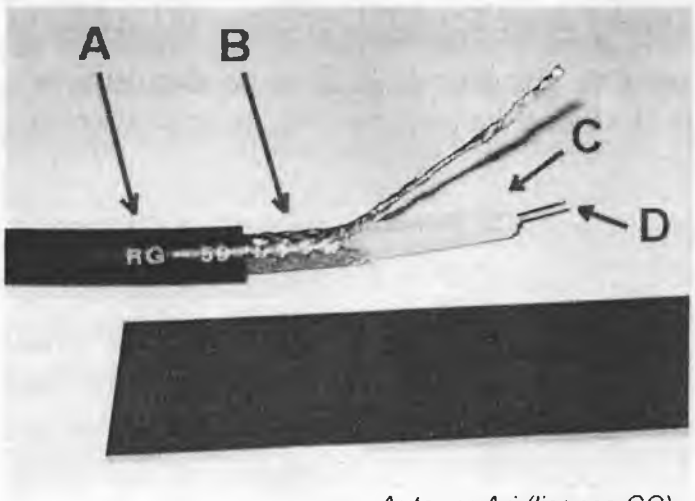
TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : équations de Maxwell, propriétés de symétrie, impédance, propagation, énergie électromagnétique.

La TNT (Télévision Numérique Terrestre) utilise des signaux de fréquences de l'ordre de 500 MHz transportant les informations numériques nécessaires à la télévision. La propagation du signal s'effectue par ondes électromagnétiques jusqu'à l'antenne de réception, puis par câble jusqu'à l'utilisateur. Un signal numérique comporte très peu d'erreur, permettant une très grande qualité d'image. Cependant, si l'amplitude du signal reçu est trop faible, le décodage numérique est impossible et l'image disparaît complètement. Le réseau de transmission par câble doit donc minimiser toutes les pertes de signal. On se propose de caractériser un câble coaxial théoriquement (partie 1) et expérimentalement (partie 2).

. Câble coaxial (de référence RG-59)

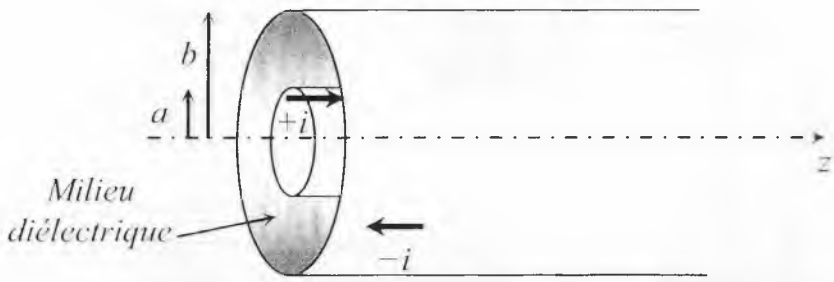
A : la gaine extérieure en plastique ; B : le blindage en cuivre ;
C : la gaine diélectrique ; D : le conducteur central (âme) en cuivre



Auteur : Arj (licence CC)

Pour comprendre la propagation du signal le long du câble, on considère le champ électromagnétique créé par la distribution de courant dans le câble. Le câble coaxial est modélisé par deux cylindres conducteurs coaxiaux, de rayons respectifs a et b et de longueur infinie, séparés par un milieu diélectrique (gaine isolante).

Modélisation d'un câble coaxial



Le conducteur central est parcouru par le courant électrique $i(z,t)$, tandis que le conducteur extérieur est parcouru par le courant opposé $-i(z,t)$, tous deux répartis uniformément en surface. Le milieu diélectrique a une permittivité diélectrique relative ε_r, supposée réelle, ce qui revient simplement à remplacer ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell dans le vide.
On recherche le champ électrique dans le milieu en coordonnées cylindriques sous la forme : $\vec{E} = E(r,z,t)\,\vec{e_r}$

1) Pourquoi le courant $i(z,t)$ est-il supposé surfacique ?

2) Etablir l'équation de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le milieu diélectrique.

3) A l'aide des invariances et symétries du problème, déterminer la forme du champ magnétique $\vec{B}$ associé à cette onde.

4) Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère, sous sa forme intégrale, le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M dans le câble.

On considère une onde de courant plane progressive harmonique de la forme :

$$i_+(z,t) = i_0\cos(\omega t - kz)$$

5) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point du câble. On ne s'intéressera qu'à la partie oscillante du champ et tout champ statique sera supposé nul. On rappelle en coordonnées cylindriques :

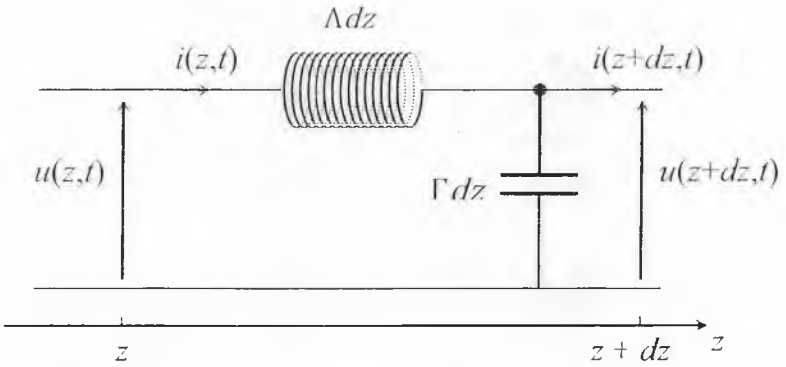
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r.B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_z}$$

6) Etablir la relation de dispersion et en déduire la vitesse V de propagation des champs dans le milieu.

7) Déterminer $u_+(z,t)$, la différence de potentiels $V(a) - V(b)$ entre les deux conducteurs à l'abscisse z et à l'instant t ainsi que l'impédance caractéristique Z_c du câble définie pour <u>une onde plane progressive</u> par le quotient $\dfrac{u_+(z,t)}{i_+(z,t)}$.

8) Que devient la relation entre $u\ (z,t)$ et $i\ (z,t)$ pour l'onde plane *régressive* dont l'amplitude de courant s'écrit : $i\ (z,t) = i_0\cos(\omega t + kz)$?

On note respectivement Λ et Γ l'inductance propre linéique et la capacité linéique du câble. D'un point de vue électrique, le câble coaxial peut être modélisé entre z et $z + dz$ par le circuit représenté page suivante, constitué d'une bobine et d'un condensateur.



9) Etablir les équations électriques couplant $i(z,t)$ et $u(z,t)$.

10) Déterminer les équations de propagation vérifiées par $i(z,t)$ et $u(z,t)$.

11) Quelle relation y-a-t-il entre les amplitudes $u_1(z,t)$ et $i_1(z,t)$ d'une onde plane progressive harmonique ?

12) Déduire des résultats précédents l'expression de Λ et Γ en fonction des caractéristiques du câble.

On considère que le câble n'est pas infini mais qu'il est fermé en $z = 0$ par un dipôle d'impédance réelle Z_u. Le signal électrique en tout point $z < 0$ est alors caractérisé par l'amplitude de tension $u(z,t) = u_0 \cos(\omega t - kz) + r.u_0 \cos(\omega t + kz)$.

13) Discuter la forme proposée pour $u(z,t)$ et déterminer l'amplitude $i(z,t)$ du courant associé. Quelle est la signification de r ?

14) En utilisant une condition limite en $z = 0$, déterminer l'expression de r en fonction de Z_u et Z_c.

15) Discuter la condition $r = 0$. Exprimer le vecteur de Poynting dans le câble dans ce cas. En déduire la puissance électromagnétique traversant une section du câble. Comparer la puissance moyenne injectée dans le câble et celle transférée au dipôle.

16) Que devient la puissance moyenne transférée au dipôle lorsque $r \neq 0$? Commenter les cas $Z_u = 0$ et $Z_u = +\infty$. Conclure.

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 6 :

10.8	Désintégration d'un noyau atomique
10.9	Lentille à focale commandable
10.10	Circuits électriques domestiques
10.11	Une poêle en lévitation ?
10.12	Capacité membranaire d'une cellule
10.13	Choix du site d'implantation d'une éolienne
10.17	Modulateur électro-optique
10.20	Sur la taille d'un atome...

CHAPITRE 7

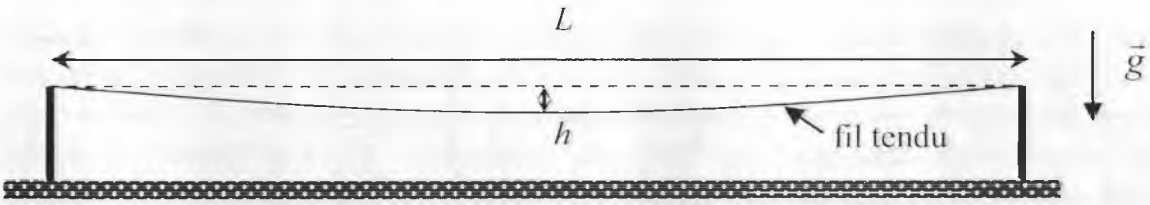
ONDES MECANIQUES

7.1 Fil de jardinier

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : forme d'une corde, système infinitésimal.

Un jardinier désire mettre une bordure autour de son jardin potager. Afin de bien aligner les différentes bordures entre elles, il tend un fil entre deux poteaux. Le fil utilisé possède une masse linéique μ et une raideur négligeable.



1) Quelle doit être la tension minimale à appliquer au fil pour que l'écart maximal h entre le fil et l'horizontale joignant les deux poteaux (voir figure) soit inférieur à h_{max} sur une distance L ? Exprimer T_{min} en fonction de μ, g, L et h_{max} en supposant que $h_{max} << L$.

2) Faire l'application numérique avec $\mu = 2$ g.m^{-1}, $L = 10$ m et $h_{max} = 1$ cm. Préciser la masse que cela revient à soulever pour tendre le fil.

3) Reprendre l'application numérique avec un jardinier plus perfectionniste qui désire un écart inférieur à 1 mm.

7.2 Compression d'une balle de golf

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES :module d'Young, ondes acoustiques dans un solide.

Quand on la manipule, une balle de golf paraît extrêmement rigide. Pourtant, lors de l'impact de la balle avec le driver (le club permettant d'envoyer la balle le plus loin possible au départ d'un trou), celle-ci se trouve être fortement comprimée, comme on peut le constater sur la série de photos prise à l'aide d'une caméra ultra-rapide. Ce problème propose de quantifier ce phénomène.

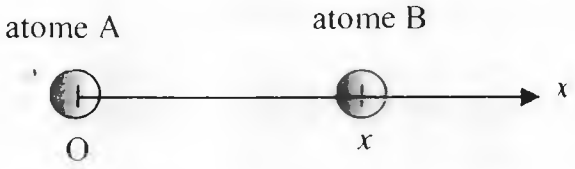
Capture d'images de l'impact entre un driver et une balle de golf

© SwingVision

Ce problème se scinde en trois parties : après avoir évalué l'ordre de grandeur du module d'Young d'un solide à partir d'un modèle microscopique (1ère partie), on détermine la vitesse des ondes acoustiques longitudinales dans le solide (2ème partie). Enfin, on étudie dans la 3ème partie l'impact entre le driver et la balle de golf.

1ère partie

On isole deux atomes placés sur l'axe Ox, l'atome A étant placé à l'origine et l'atome B étant à l'abscisse x.



Pour décrire de manière satisfaisante l'interaction entre les deux atomes, il est nécessaire d'utiliser la physique quantique pour calculer les niveaux d'énergie des différentes orbitales moléculaires. Cependant, un modèle simple de physique classique permet de retrouver les principaux résultats en admettant que l'énergie potentielle E_p dont dérive la force d'interaction qu'exerce l'atome A sur l'atome B s'écrit de manière approchée (formule de Lennard-Jones) :

$$E_p(x) = U\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right)$$

1) Etudier la fonction $E_p(x)$ et tracer l'allure du graphe. A quoi correspond concrètement la quantité a ?

2) Donner l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par l'atome A sur l'atome B. La décrire en termes de forces attractive et répulsive.

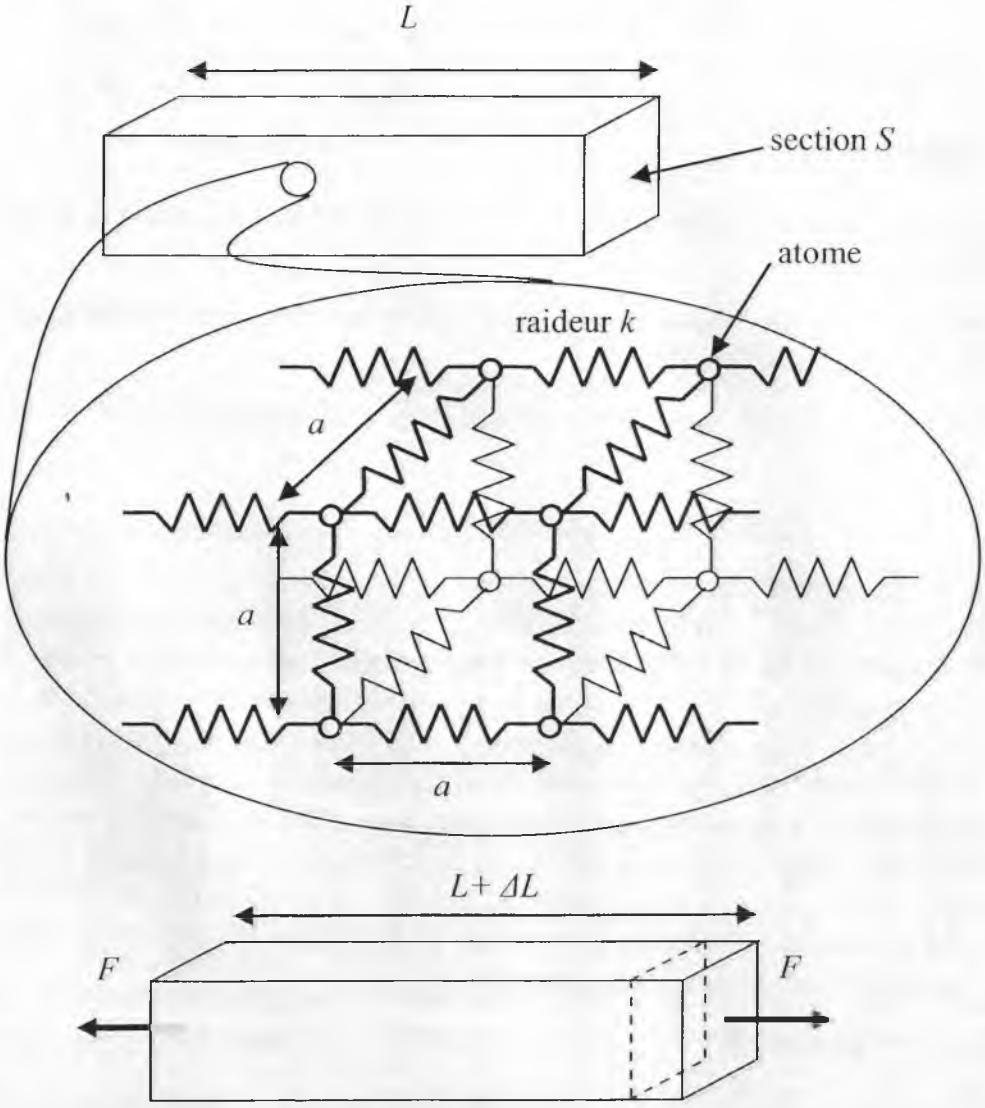
3) Exprimer l'énergie de liaison, définie comme le travail minimal que l'on doit fournir pour séparer les deux atomes initialement à leur distance d'équilibre.

Lorsque l'atome B est proche de sa position d'équilibre, la force qu'il subit de la part de l'atome A peut être modélisée par un ressort ayant une longueur à vide a et une constante de raideur k.

4) Justifier cette affirmation et montrer que $k = 72\dfrac{U}{a^2}$.

5) Donner la valeur numérique de k pour une énergie de liaison de 1 eV et une distance interatomique d'équilibre de 0,3 nm.

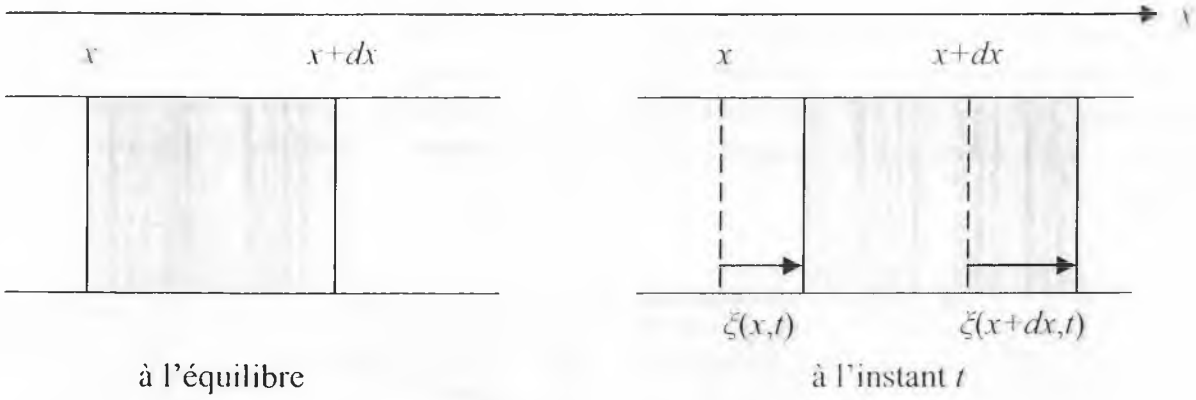
On raisonne sur une barre homogène de longueur L et de section S. Sous l'action d'une force F exercée de part et d'autre de la barre, celle-ci voit sa longueur augmenter de ΔL. Le solide constituant la barre possède une structure atomique cubique d'arête a. Les atomes, tous identiques, sont reliés par des ressorts fictifs de constante de raideur k déterminée précédemment.



6) Montrer que ce modèle microscopique d'atomes élastiquement liés permet d'aboutir à la loi macroscopique de Hooke que l'on explicitera. Exprimer le module d'Young E en fonction de k et a. Faire l'application numérique.

2ème partie

On raisonne à nouveau sur la barre de section S et l'on étudie les ondes acoustiques longitudinales qui peuvent s'y propager. On note ρ la masse volumique du solide sans contrainte et $\xi(x,t)$ le déplacement (algébrique) du solide à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre. On raisonne sur un tronçon de la barre compris à l'équilibre entre les abscisses x et $x+dx$. Il se trouve donc à l'instant t entre les abscisses $x + \xi(x,t)$ et $x + dx + \xi(x + dx,t)$. On se place dans l'approximation acoustique qui consiste à négliger $\xi(x,t)$ devant la taille caractéristique de la perturbation sonore.



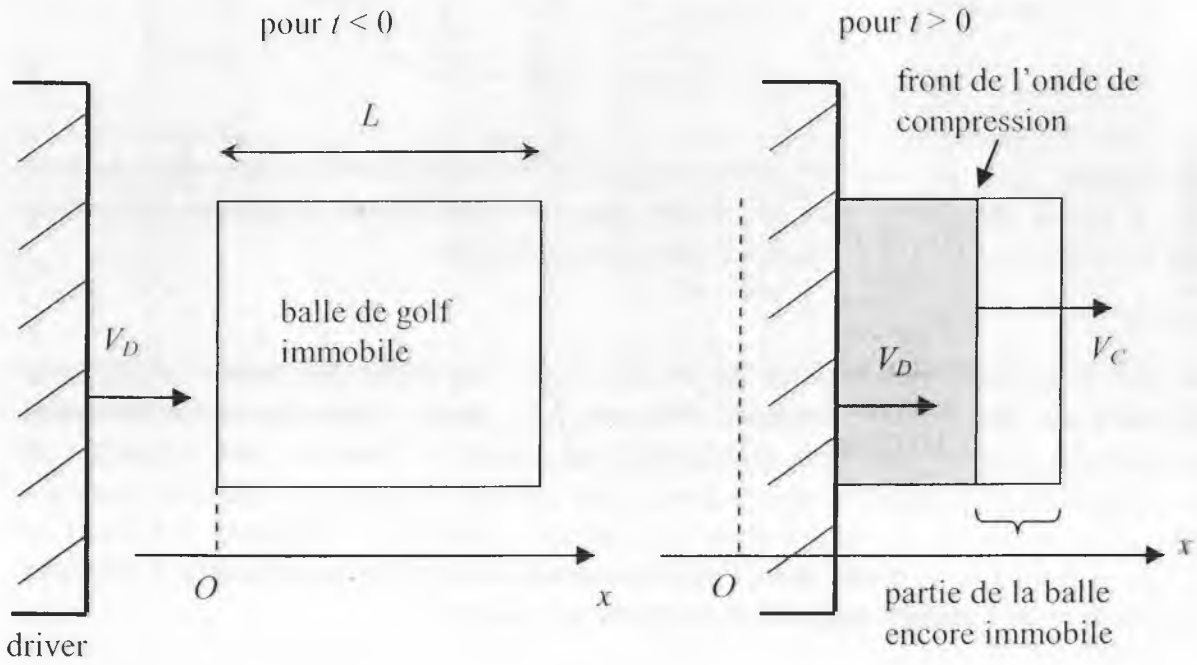
7) Définir et exprimer l'allongement relatif du tronçon à la date t à l'aide d'une dérivée partielle de $\xi(x,t)$.

8) Appliquer la loi de la quantité de mouvement au tronçon. Comment se nomme l'équation aux dérivées partielles obtenue ?

9) Exprimer la célérité des ondes acoustiques longitudinales dans le solide en fonction de ρ et E.

3ème partie

Pour simplifier l'étude de l'impact entre le driver et la balle de golf, on se ramène à un problème à une dimension : la balle est assimilée à un solide homogène cylindrique (et non sphérique) de longueur L et de section S. La balle possède un module d'Young E et une masse volumique ρ quand elle n'est soumise à aucune contrainte. A la date $t = 0$, le driver, arrivant à la vitesse V_D, vient percuter la balle en $x = 0$. Pour $t > 0$, le driver, possédant une très grande rigidité et une très grande masse, continue de se déplacer à la vitesse constante V_D (hypothèse de travail). Une onde de compression va alors se créer à l'intérieur de la balle, le front de cette onde se déplaçant à la vitesse constante V_C par rapport à la partie de la balle restée immobile. Ainsi, toute la partie de la balle située en amont du front de l'onde (partie grisée sur le schéma) se déplace à la vitesse V_D, alors que la partie de la balle en aval du front ne s'est pas encore mise en mouvement.



10) Préciser l'abscisse du driver x_D et celle du front de l'onde de compression x_C en fonction du temps.

11) Calculer la quantité de mouvement de la balle de golf à la date t.

12) Appliquer la loi de Hooke à la partie comprimée de la balle pour exprimer la force qu'exerce le driver sur celle-ci.

13) A partir de la loi de la quantité de mouvement et des questions précédentes, donner l'expression de V_C en fonction de ρ et E uniquement. Que retrouve-t-on ?

14) Définir et exprimer le taux de compression maximale de la balle de golf en fonction de V_C et V_D. Le modèle présenté est-il valable pour n'importe quelle valeur de V_D ?

Une balle de golf standard possède un diamètre de 43 mm et une masse de 45 g. Sur la vidéo dont sont extraites les photos du début d'énoncé, le contact entre le driver et la balle de golf a duré un peu moins de quatre millièmes de seconde. Le driver était en titane, de module d'Young égal à $1{,}1.10^{11}$ Pa.

15) Confronter ces données ainsi que celles qui peuvent être extraites des photos avec le modèle développé précédemment. En quoi le modèle est-il critiquable ?

16) Estimer le module d'Young du cœur de la balle de golf et le comparer à celui du driver.

7.3 Autour de la guitare...

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

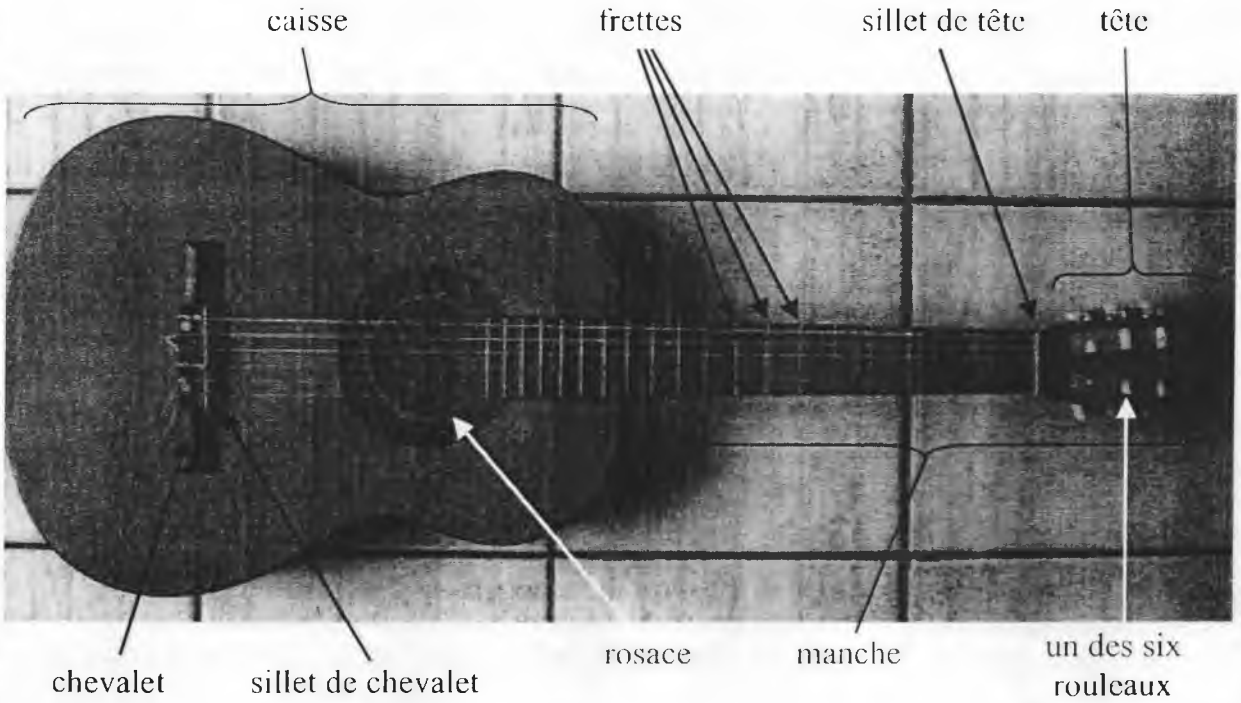
MOTS-CLES : ondes transversales sur une corde, modes propres, module d'Young, battements.

Ce problème traite de l'un des instruments de musique à cordes le plus répandu : la guitare.

DOCUMENT n°1 : Principales caractéristiques d'une guitare classique, d'après « wikipedia.fr » et « lutherie-guitare.org »

La guitare est un instrument de musique de la famille des instruments à cordes pincées. Les cordes sont disposées parallèlement à la table d'harmonie (qui est la plaque avant de la caisse entièrement en bois) et au manche. Ce dernier est coupé de frettes, sur lesquelles le joueur appuie les cordes avec les doigts d'une main pour produire des notes différentes. L'autre main pince les cordes, soit avec les ongles ou le bout des doigts, soit avec un plectre (encore appelé médiator). Une guitare classique possède généralement six cordes de différents diamètres. À l'origine, les cordes étaient fabriquées à partir de boyaux de mouton mais de nos jours, elles sont en nylon, matériau qui offre une tension bien moindre par rapport aux cordes d'acier, ce qui autorise des manches entièrement faits en bois (érable, cèdre, acajou...). Les trois cordes inférieures (dites « cordes basses ») sont cependant entourées d'un fil métallique, généralement de l'argent ou du nickel, afin de les alourdir de manière à produire des notes plus graves. La tension de chaque corde peut être modifiée à l'aide d'un système de vis sans fin actionné par une clef, qui entraîne un petit rouleau sur lequel s'enroule la corde.

Guitare classique



© *Antoine Trentesaux*

Sauf exception, les cordes d'une guitare sont réglées selon l'accordage standard suivant, les notes étant indiquées avec l'écriture latine (do, ré, mi, fa, sol, la, si) et également avec la notation grégorienne (respectivement C, D, E, F, G, A, B) :

mi_1 (E2) 82,4 Hz,	la_1 (A2) 110,0 Hz,	$ré_2$ (D3) 146,8 Hz,
sol_2 (G3) 196,0 Hz,	si_2 (B3) 246,9 Hz,	mi_3 (E4) 329,6 Hz.

Certains guitaristes préfèrent des cordes plus dures ou plus tendres, ce qui donne lieu à plusieurs jeux de cordes différents pour un même accordage final. Ces jeux sont identifiés par le « tirant » donné par le diamètre de la corde. Le tirant, exprimé en $1/1000^{ème}$ de pouce, correspond environ à 40 fois le diamètre en mm.

DOCUMENT n°2 : Le nylon, d'après « wikipedia.fr »

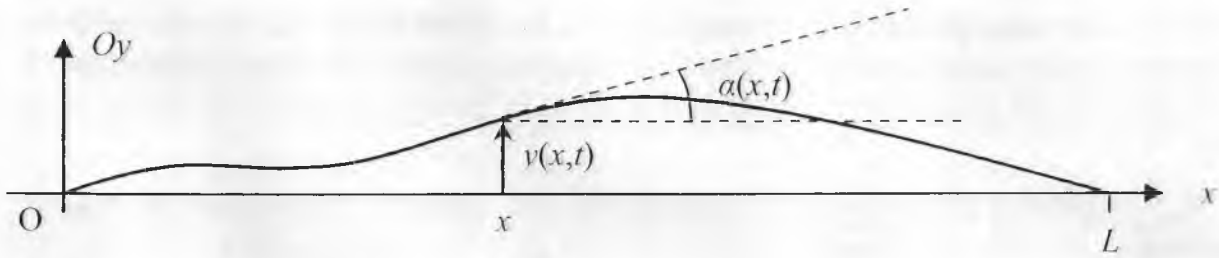
Le nylon est une matière plastique de type polyamide, utilisée dans de nombreux domaines industriels. Son faible pouvoir absorbant fait du nylon un matériau de choix dans l'industrie textile. Par ailleurs, sa grande résistance est mise à profit pour la réalisation de pièces mécaniques, notamment dans l'industrie automobile. Les principales caractéristiques physiques du nylon sont les suivantes :

- masse volumique : 1240 $kg.m^{-3}$,
- module d'Young : de l'ordre de 3 GPa,
- limite d'élasticité : environ 70 MPa

(au-delà, le matériau se déforme de manière irréversible),
- coefficient de dilatation linéique : 1.10^{-5} K^{-1}
(correspondant à l'allongement relatif d'un fil de nylon par Kelvin suite à une augmentation de température)

A titre de comparaison, le bois possède un coefficient de dilatation linéique entre 3.10^{-6} K^{-1} et 6.10^{-6} K^{-1}.

On cherche dans un premier temps à modéliser la dynamique d'une des cordes de la guitare. Pour cela, on utilise un modèle simplifié où la corde, de masse linéique μ, est fixée d'une part au sillet du chevalet (en $x = 0$) et d'autre part au sillet de tête (en $x = L$), les deux sillets étant distants de $L = 65$ cm. La corde, à ce stade considérée comme infiniment souple, est constamment tendue de part et d'autre par une tension notée F. La pesanteur étant négligée, la corde est confondue avec l'axe Ox à l'équilibre. Lors de son mouvement, un point de la corde d'abscisse x est repéré à la date t par son déplacement $y(x,t)$ que l'on suppose perpendiculaire à Ox. Par ailleurs, on note $\alpha(x,t)$ l'angle que fait à la date t la tangente à la corde à l'abscisse x avec l'axe Ox. Cet angle est supposé petit de sorte qu'il est légitime par la suite d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.



1) Montrer que, dans le cadre des approximations effectuées, la tension est uniforme le long de la corde.

2) Montrer que $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Donner l'expression de c en fonction de F et μ. Que représente la grandeur c ?

On cherche à déterminer les modes propres de la corde.

3) Faut-il choisir comme solution individuelle de l'équation précédente une onde de type progressive ou de type stationnaire ? Justifier.

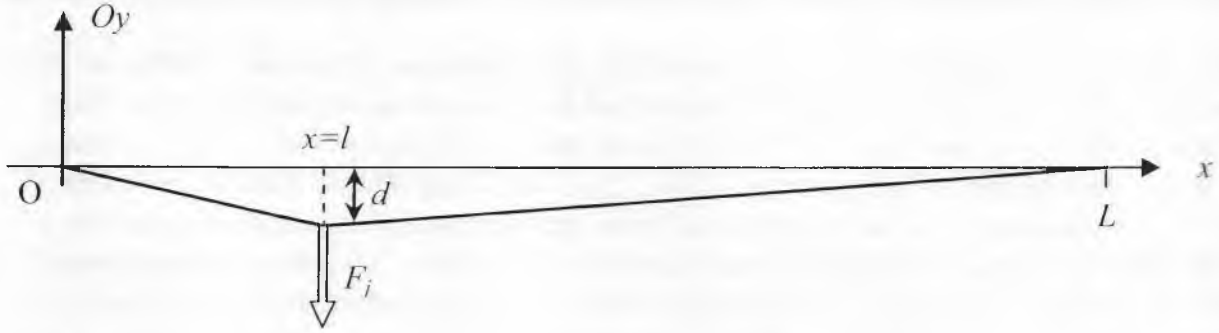
4) Expliciter la dépendance spatio-temporelle $y(x,t)$ d'une onde stationnaire harmonique de pulsation ω. Montrer que les conditions aux limites entraînent que la pulsation doit prendre l'une des valeurs suivantes :

$\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$, où n désigne un entier naturel non nul, appelé le rang du mode propre.

5) Décrire et faire une représentation graphique des modes propres de rang 1, 2 et 3 de la corde.

6) A partir de l'analyse des documents, expliquer de manière très concrète dans quelle(s) circonstance(s) la dépendance de ω_1 par rapport à F, μ puis L apparaît dans l'utilisation d'une guitare ?

En pratique, les cordes de la guitare sont pincées par l'un des doigts du joueur à proximité de la rosace, à une distance l du sillet du chevalet, comme l'illustre la figure suivante. Le joueur doit alors exercer une force F_j pour déplacer la corde d'une distance $d << l$.



7) Exprimer la force F_j que doit exercer le joueur en fonction de F, L, l et d (on suppose la tension F inchangée).

8) Compte tenu des questions précédentes et à l'aide des documents fournis, calculer la force, en newton, qu'un joueur de guitare classique doit exercer s'il désire déplacer de 12 mm la corde du mi aigu ayant un tirant égal à 30 en la pinçant au niveau du centre de la rosace

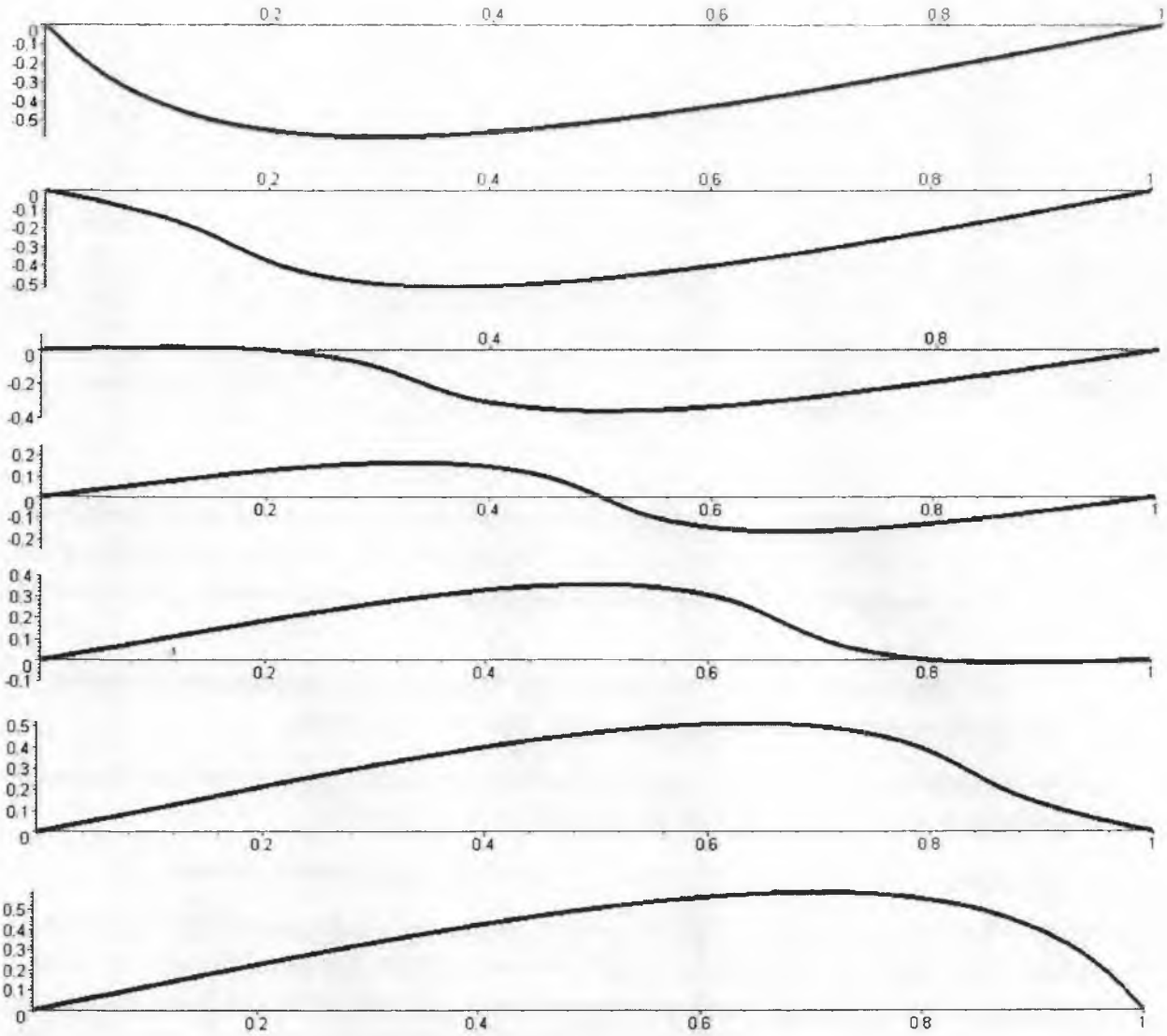
9) L'hypothèse d'une tension F inchangée est-elle valable ? On justifiera de manière quantitative.

10) Y a-t-il un risque qu'une corde de guitare se déforme de manière irréversible ?

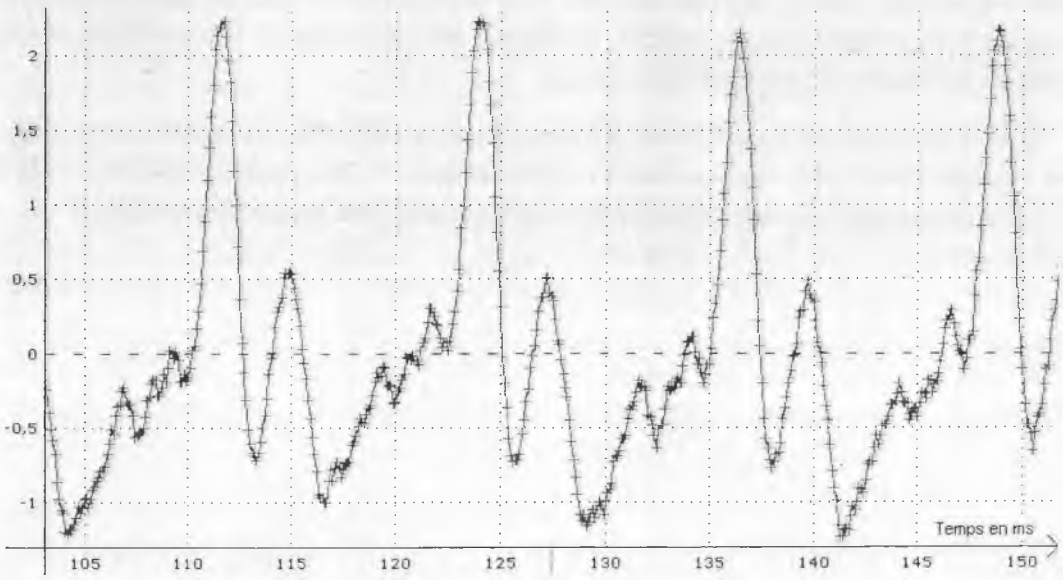
Le joueur lâche la corde sans vitesse initiale dans les conditions de la question précédente. La raideur de la corde entraîne que la forme de celle-ci s'arrondit après quelques oscillations. Les figures sur la page suivante sont une simulation numérique de la forme de la corde à différents instants répartis de manière régulière sur une demi-période d'oscillation. L'abscisse est la grandeur adimensionnée x/L et l'ordonnée est exprimée en cm.

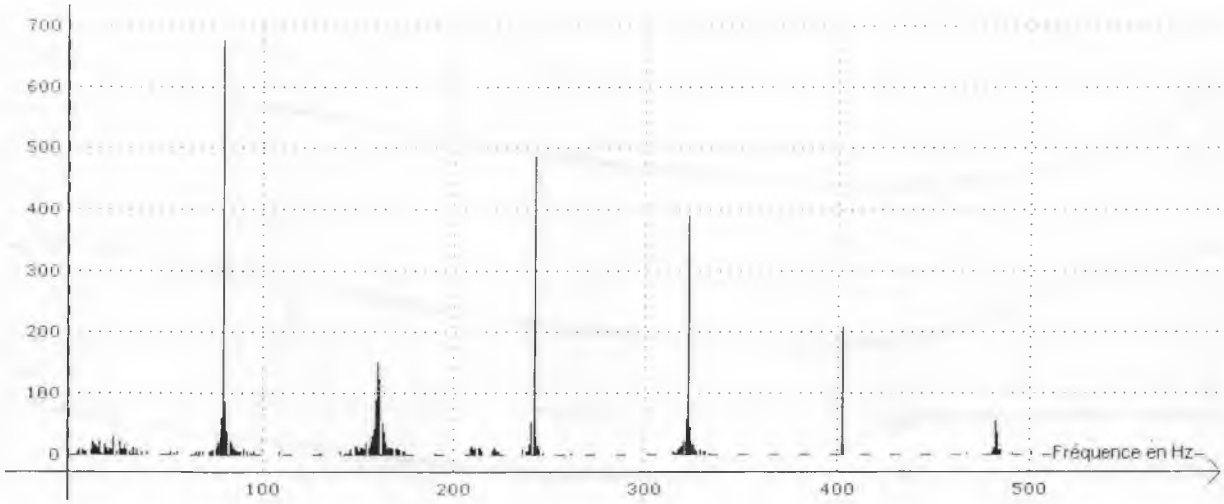
1) Expliquer en quelques lignes et sans calcul comment cette simulation peut être déduite des modes propres précédemment étudiés. En s'appuyant sur les figures, dire en quoi le mouvement de la corde a des similitudes avec une onde progressive d'une part et une onde stationnaire d'autre part.

2) A partir de l'analyse des figures, tracer l'allure du graphe de la force transversale F_y que la corde exerce sur le sillet de chevalet en fonction du temps.



La force F_y met en vibration la table d'harmonie qui va alors générer dans l'air une onde sonore. C'est cette chaîne mécanique qui est à l'origine du son produit par la guitare. Les figures ci-dessous représentent la tension (en V) en fonction du temps enregistrée par un microphone situé à proximité de la guitare à laquelle on a joué la note mi_1, ainsi que le spectre du signal (échelle arbitraire en ordonnée).





3) L'étude de ces courbes permet-elle de savoir si la guitare est accordée pour cette corde ? On prendra comme critère que la note jouée doit être séparée de moins d'un trentième de ton (de la gamme tempérée), c'est-à-dire que l'écart relatif des fréquences doit être inférieur à 4.10^{-3}.

4) Peut-on faire un lien entre ces courbes et la courbe F_y en fonction du temps ? Indiquer les facteurs supplémentaires qu'il faudrait prendre en compte.

En appuyant la corde mi_1 sur la cinquième frette et en la pinçant, on constate que la corde la_1 se met à vibrer « toute seule » (on dit qu'elle vibre par sympathie).

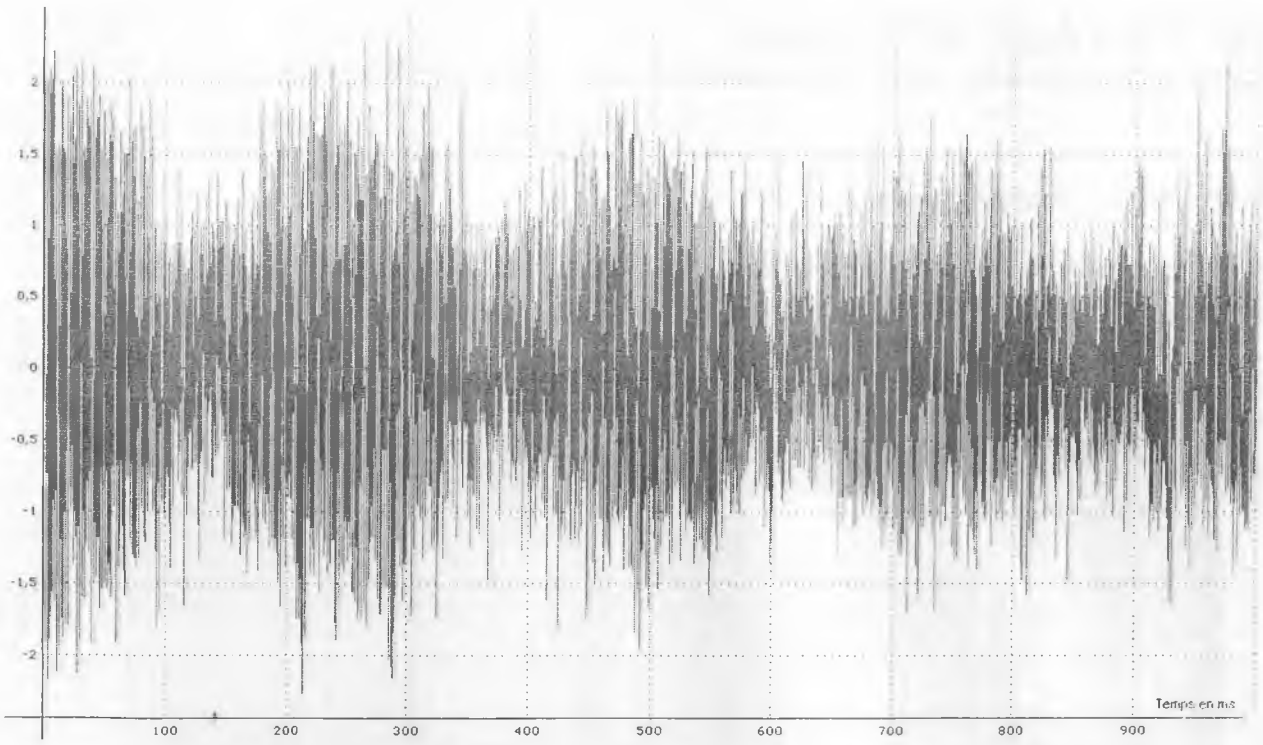
5) Expliquer et justifier ce phénomène à l'aide d'une application numérique.

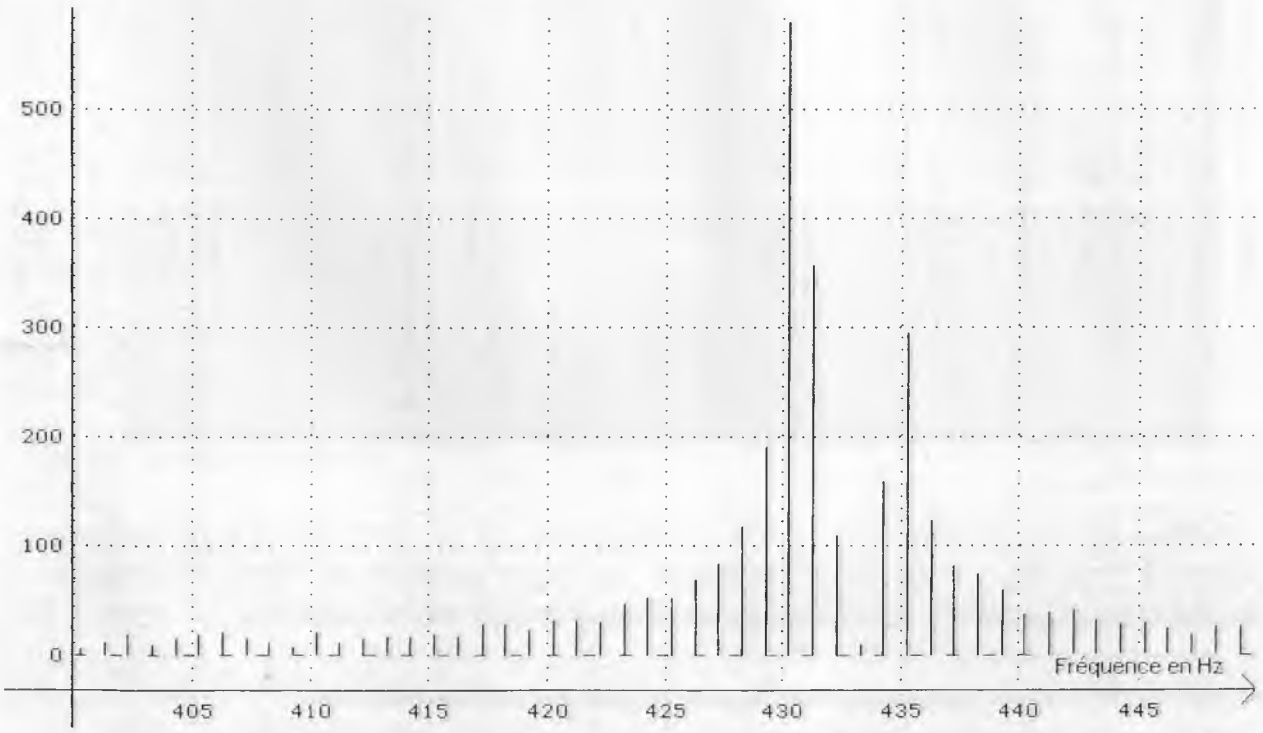
On propose d'illustrer un moyen commode pour accorder les cordes entre elles en prenant l'exemple de l'accordage de la corde $ré_2$ à partir de la corde la_1. Le procédé est le suivant : on pose un doigt sur la corde la_1 juste au dessus de la cinquième frette (mais sans appuyer trop fort pour ne pas que la corde touche la frette) et l'on pince la corde. Juste après, on pose un doigt sur la corde $ré_2$ juste au dessus de la septième frette et l'on pince la corde. Ensuite, on règle la tension de la corde $ré_2$ de manière à ce que les deux cordes produisent la même note.

6) Justifier de manière quantitative la pertinence de cette méthode d'accordage.

Les figures sur la page suivante représentent la tension délivrée par un microphone (en V) en fonction du temps ainsi que le spectre du signal lors d'un essai d'accordage des cordes la_1 et $ré_2$ par la méthode décrite précédemment.

7) Relier de manière quantitative les deux graphes (évolution temporelle du signal et spectre du signal). Quel nom donne-t-on à ce phénomène ? Que perçoit l'oreille dans ce cas de figure ? Comment doit-on alors procéder pour accorder les cordes entre elles ?





Lors d'une chaude journée d'été, un guitariste s'entraîne dans une pièce à 28°C en vue de donner un concert dans une salle climatisée à 20°C. Le changement d'environnement désaccorde l'instrument et oblige le musicien à réaccorder sa guitare juste avant de jouer après un « temps d'adaptation » dans la salle de concert.

8) Le désaccordage de la guitare est-il dû à la contraction thermique des cordes ? Répondre de manière quantitative. Proposer d'autres causes du désaccordage.

7.4 Tuyaux d'orgue

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : modes propres.

Un tuyau d'orgue est une cavité acoustique dont la longueur va déterminer la note du son joué.

Orgue de la chapelle des Buis de Besançon

© *Emmanuel Bossy*

On modélise un tuyau d'orgue par un tube cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L, ouvert à l'air libre à ses deux extrémités. Le tuyau contient de l'air à la pression atmosphérique moyenne P_0. La vitesse du son dans le milieu vaut $c = 340$ m.s^{-1}.

On recherche le champ de pression $p(x,t)$ de l'onde sonore dans la cavité comme une superposition d'ondes stationnaires, chacune de la forme $A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\phi)$.

1) Justifier physiquement la présence d'un nœud de surpression à chaque extrémité du tuyau.

2) Rappeler l'équation vérifiée par la surpression dans la cavité. En déduire la relation entre k, ω et c.

3) Montrer que seules certaines ondes stationnaires sont possibles et exprimer leur fréquence f_p en fonction de L, c et un entier p. Ce sont les modes propres de la cavité acoustique, de fréquence propre f_p.

4) Tracer l'allure du spectre du son émis par un tuyau d'orgue. Identifier la fréquence fondamentale f_1 et les harmoniques. Que détermine l'amplitude des harmoniques ?

En musique, la fréquence fondamentale définit en fait le nom de la *note* jouée par l'instrument. La gamme tempérée est constituée d'*octaves*. Chaque octave rassemble douze notes, séparées par un *demi-ton* :

Note	***Do***	***Do#***	***Ré***	***Ré#***	***Mi***	***Fa***	***Fa#***	***Sol***	***Sol#***	***La***	***La#***	***Si***
Fréquence	$f^{(0)}$	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$f^{(7)}$	$f^{(8)}$	$f^{(9)}$	$f^{(10)}$	$f^{(11)}$

Les fréquences des notes sont les termes d'une suite géométrique de raison $2^{1/12}$. On passe ainsi d'une note à la suivante par la relation :

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} 2^{1/12}$$

La fréquence d'une note est ainsi *doublée* lorsque l'on passe d'une octave à la suivante. La référence de fréquence est donnée par la fréquence du la_3 (*la* pour l'octave 3) qui vaut 440 Hz.

5) Exprimer la fréquence $f^{(n)}$ en fonction de $f^{(0)}$ dans une octave donnée.

6) En déduire les valeurs numériques des fréquences du do_3, du do_2 et du do_1.

Dans un orgue, chaque note n est jouée par un tuyau de longueur L_n, celle-ci étant mesurée entre la bouche et l'extrémité du tuyau. La note la plus grave jouée par l'orgue illustré page précédente est un fa_2.

7) Justifier la définition de la longueur d'un tuyau d'orgue.

8) A quel tuyau correspond la note la plus grave ? En déduire sa longueur L_0.

9) Exprimer la longueur L_n du tuyau jouant la note n en fonction de L_0 et n.

10) Interpréter alors la forme globale de l'orgue. Peut-on retrouver expérimentalement la relation précédente ?

7.5 A propos du niveau sonore

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : intensité acoustique.

Ce problème traite des différentes grandeurs utilisées pour apprécier le niveau sonore.

L'acuité sonore humaine recouvrant plusieurs décades, le niveau sonore est par convention exprimé en décibels (dB), mais sa définition n'est pas unique. En effet, on peut quantifier le niveau sonore de manière absolue, en dB (SPL), indépendamment du récepteur utilisé (oreille, microphone...), à partir de la pression acoustique (voir document n°1). Mais cette

échelle ne prend pas en compte la différence de sensibilité de l'oreille humaine en fonction de la fréquence (voir document n°2). Une pondération dépendant de la fréquence amène alors à définir de nouvelles échelles, la plus communément utilisée étant le dB (A) (voir document n°3).

DOCUMENT n°1 : Niveau de pression acoustique, d'après « wikipédia.fr »

Le niveau de pression acoustique (*Sound Pressure Level* - SPL) repère la valeur efficace de la pression acoustique p_{eff} par rapport à une valeur de référence $p_{réf}$ égale à 20 µPa. Plutôt que le rapport direct des pressions, on utilise le décibel, qui représente vingt fois son logarithme décimal.

$$L_p = 20\log\left(\frac{p_{eff}}{p_{réf}}\right) \text{ en dB (SPL)}$$

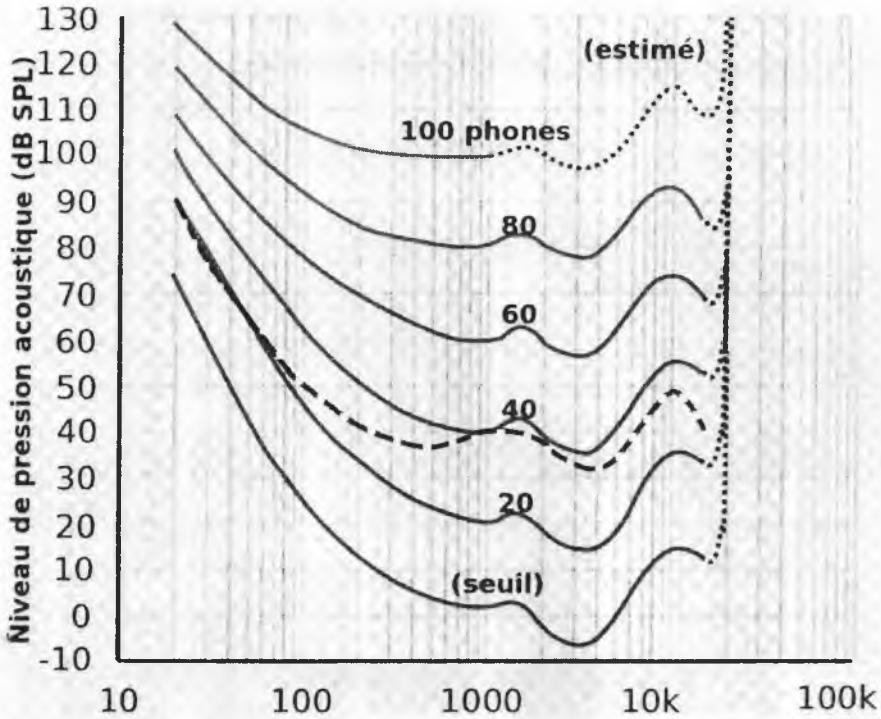
Cette définition a été choisie parce que, tout en étant simple et utilisant des nombres sans virgule, un décibel représente la plus faible variation de pression acoustique (environ 12 %) que les humains puissent distinguer. Le niveau de référence correspond à la pression acoustique d'une onde sonore dont l'intensité acoustique est d'environ 1 pW/m². Il s'agit du son un peu plus ténu que le plus faible son que les humains puissent percevoir. On obtient ainsi un repère pratique où tous les niveaux sonores sont des nombres positifs pouvant se passer de décimales.

DOCUMENT n°2 : Courbe d'isosonie, d'après « wikipédia.fr »

Une courbe isosonique, ou courbe d'isosonie, représente le niveau de pression acoustique, exprimé en dB (SPL), en fonction de la fréquence (en Hz), ayant le même niveau en phones, c'est-à-dire provoquant la même sensation d'intensité sonore pour l'oreille humaine. L'unité de mesure utilisée, le phone, correspond exactement au dB (SPL) pour une fréquence de 1 000 Hz.

En raison de divergences entre les mesures anciennes et les récentes, l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO) a actualisé, en 2003, la norme ISO226, en se basant sur plusieurs études de chercheurs japonais, allemands, danois, britanniques et nord-américains. Le standard des courbes isosoniques, l'ISO226:2003, est représenté sur la figure suivante, où la fréquence est exprimée en Hz. A titre de comparaison, la courbe en trait pointillé correspond à l'ancienne norme pour 40 phones.

La courbe « seuil » correspond à la courbe d'isosonie à 1 phone, correspondant au seuil d'audition de l'Homme. Le seuil de douleur (non représenté sur la figure) correspond quant à lui à environ 120 phones.



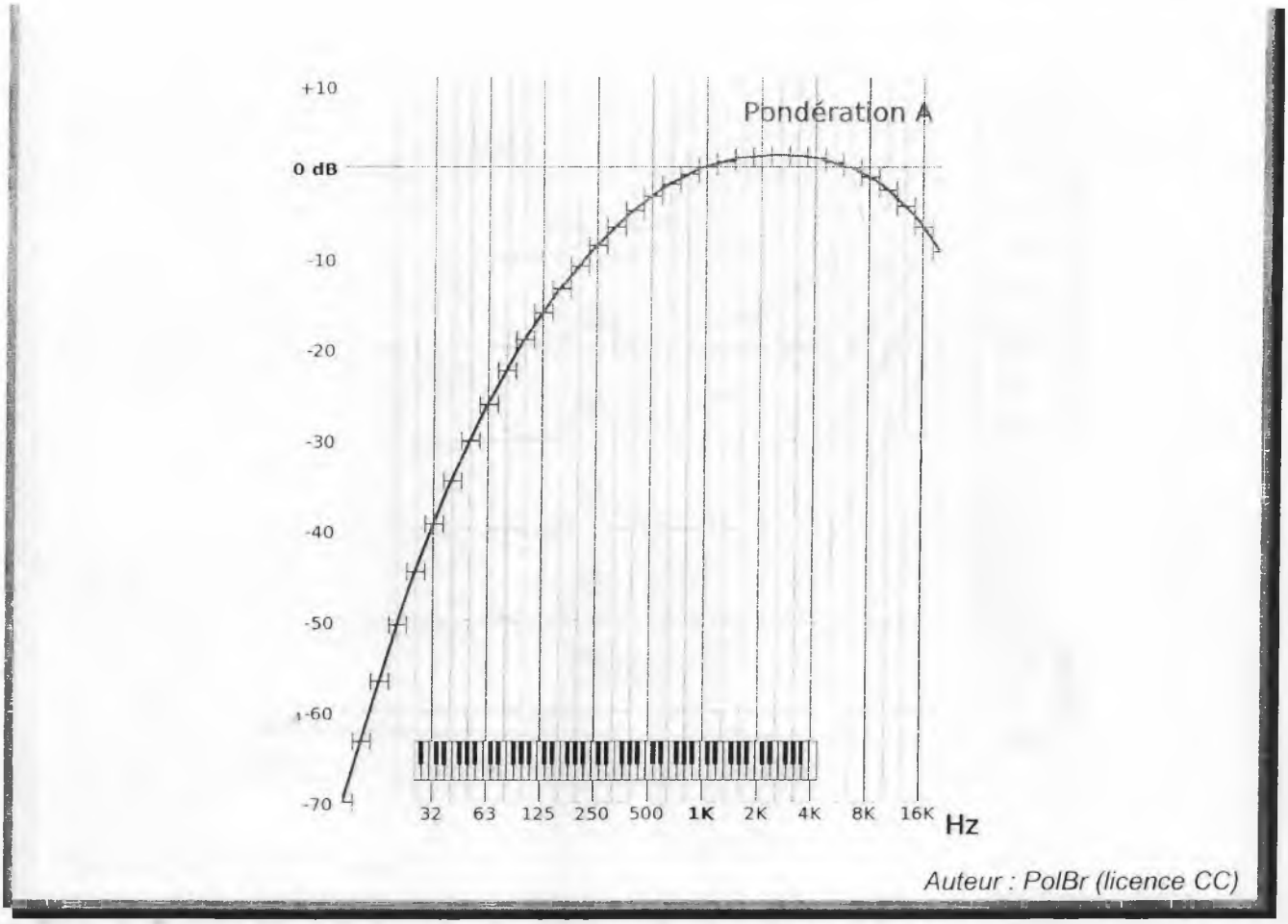
Auteur : PolBr (licence CC)

DOCUMENT n°3 : A propos du décibel (A), d'après « wikipédia.fr »

Une valeur exprimée en dB (A) indique une évaluation en décibels d'un niveau sonore avec la pondération A de la norme CEI 61672-1 établie en 2002. L'intérêt du dB (A) par rapport au dB (SPL) est la prise en compte de la sensibilité moyenne de l'oreille humaine en fonction de la fréquence. Ainsi, le niveau sonore en dB (A) quantifie l'intensité sonore que vont percevoir les personnes. De nombreuses lois et règlements font référence à la pondération « A » pour exprimer des valeurs de niveau sonore. Par exemple, la directive de l'union européenne « mesure et gestion des bruits environnementaux » institue des cartes de bruit dont les valeurs doivent être exprimées en dB (A).

Le principe de la pondération A est la suivante : on isole chaque bande de fréquence par tiers d'octave, et l'on multiplie la valeur efficace de la pression acoustique de cette bande par un coefficient pondérateur fourni par une table. Le niveau sonore exprimé en dB (A) est alors le niveau de pression acoustique de la somme des valeurs efficaces de la pression acoustique pondérées de toutes les bandes. Les différentes bandes de fréquences sont visibles sur la figure ci-après. Le coefficient pondérateur, exprimé en décibels, est l'intersection des intervalles avec la courbe continue « Pondération A ». Cette courbe a été établie compte tenu de la courbe isosonique à 40 phones, correspondant à un environnement sonore calme.

Même si elle reste la plus utilisée, la pondération « A » possède plusieurs défauts. Elle ne prend notamment pas en compte le fait que la différence de sensibilité de l'oreille humaine suivant la fréquence dépend du niveau sonore.



1) Qu'appelle-t-on valeur efficace de la pression acoustique ? Rappeler la relation entre cette grandeur et l'intensité acoustique. Vérifier numériquement que le niveau de référence $p_{réf}$ correspond bien à une intensité acoustique de 1 pW/m². On donne l'impédance acoustique spécifique de l'air (à 20°C) $Z_{air} = 4{,}1.10^2$ SI.

2) Est-il légitime d'utiliser l'approximation acoustique (dont on rappellera le principe) pour une intensité acoustique correspondant au seuil de douleur de l'oreille humaine ? On rappelle la célérité des ondes sonores dans l'air à température et pression ambiante $c = 3{,}4.10^2$ m.s^{-1}.

3) Quelle est la fréquence pour laquelle l'oreille humaine est la plus sensible ? Calculer pour cette fréquence la plus petite amplitude de vibration de l'air que l'oreille humaine est capable de percevoir. Commenter.

Dans le cadre d'une campagne de mesures du niveau sonore dans un atelier en France, un sonomètre enregistre depuis un poste de travail un niveau sonore de 35 dB (A) provoqué par des transformateurs électriques situés à proximité, émettant essentiellement à 100 Hz.

4) Justifier en quelques mots la fréquence du son émis par les transformateurs. Calculer la valeur efficace de la pression acoustique au niveau du poste de travail.

La courbe « Pondération A » est une forme approchée pour prendre en compte la sensibilité de l'oreille humaine en fonction de la fréquence.

5) Donner l'allure de la courbe de pondération qui prendrait en compte de manière plus précise la sensibilité de l'oreille humaine à 40 phones selon la norme ISO226:2003.

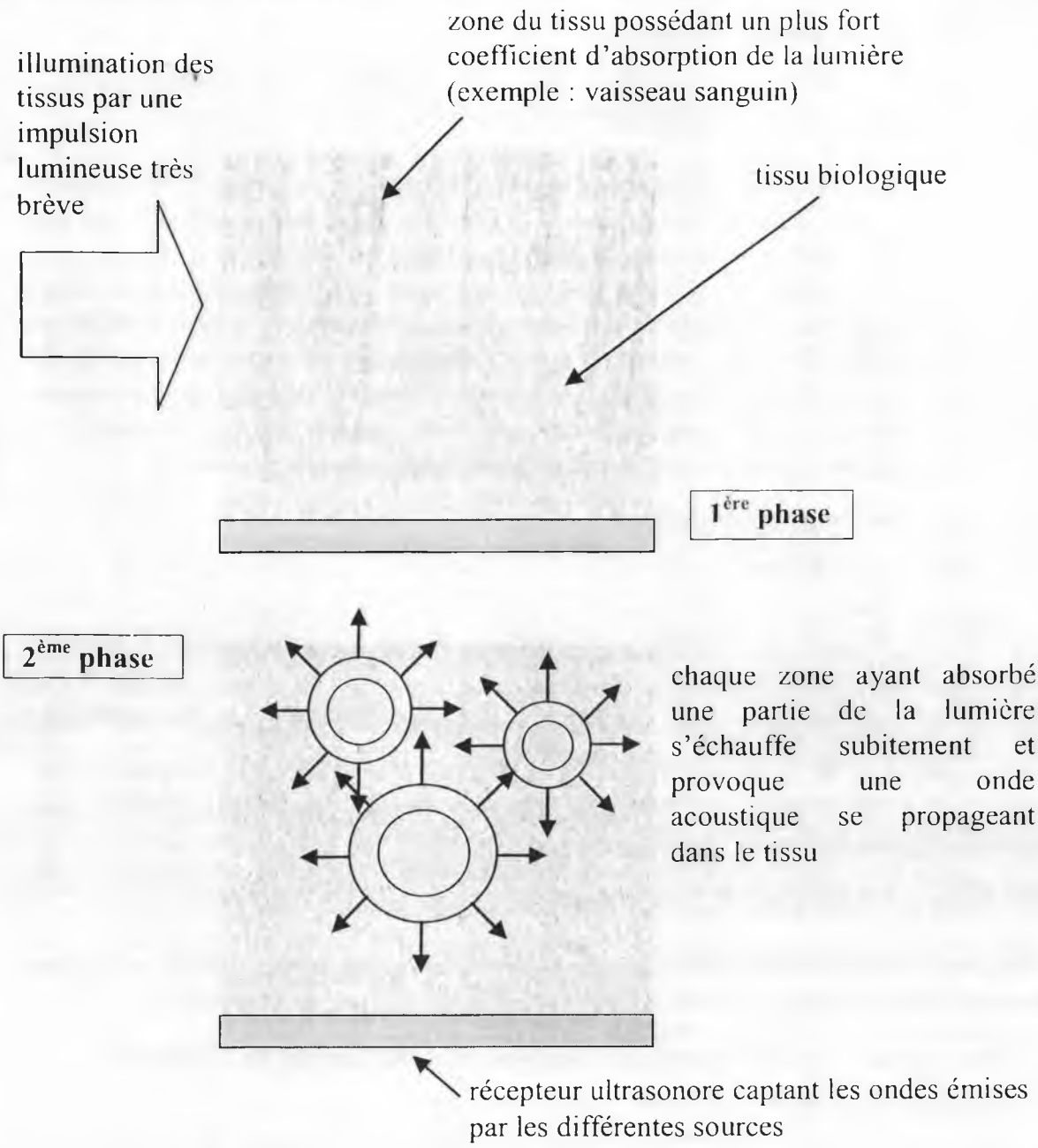
6) Justifier la dernière phrase du document n°3 à partir des autres documents.

7.6 Imagerie photo-acoustique

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : ondes acoustiques dans un fluide, ondes progressives, énergie acoustique, onde sphérique.

Depuis les années 2000 se développe une nouvelle technique d'imagerie médicale par effet photo-acoustique. Cette technique originale repose sur la création d'une onde ultrasonore directement à l'intérieur des tissus par absorption d'une impulsion lumineuse très brève. L'onde ainsi créée est alors captée par des récepteurs ultrasonores placés à la surface du corps. Un algorithme d'inversion permet ensuite de reconstruire une image en trois dimensions mettant en évidence les contrastes d'absorption des différentes zones du tissu. Ce problème propose d'illustrer l'effet photo-acoustique en étudiant l'onde ultrasonore générée par l'illumination très brève d'une sphère absorbante.



Partie I : Cas unidimensionnel

On considère une onde plane ultrasonore se propageant dans un fluide parfait et homogène selon la direction Ox. On note respectivement p_0 et μ_0 la pression et la masse volumique du fluide à l'équilibre. Lors du passage de l'onde, en un point d'abscisse x, la pression et la masse volumique à la date t deviennent respectivement $p_0 + p_1(x,t)$ et $\mu_0 + \mu_1(x,t)$. On note $v_1(x,t)$ la vitesse algébrique du fluide à l'abscisse x et à la date t. On introduit χ_s le coefficient de compressibilité isentropique du fluide. Dans toute la suite, on se place dans l'approximation acoustique.

1) Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique ainsi que sa ou ses conditions de validité.

2) Ecrire les trois équations reliant les champs $p_1(x,t)$, $\mu_1(x,t)$ et $v_1(x,t)$.

3) En déduire l'équation aux dérivées partielles faisant intervenir le seul champ de surpression $p_1(x,t)$. Comment appelle-t-on cette équation ? En donner la solution générale sous la forme de deux ondes progressives.

4) Exprimer et calculer la vitesse des ultrasons c_s dans les tissus biologiques pour lesquelles $\mu_0 = 1.10^3$ kg.m^{-3} et $\chi_s = 4{,}5.10^{-10}$ Pa^{-1}.

On suppose que la zone de fluide comprise entre les abscisses $x = -a/2$ et $x = +a/2$ possède la particularité de pouvoir absorber partiellement la lumière. En éclairant le fluide par une impulsion lumineuse très brève de durée τ, la zone absorbante va recevoir de l'énergie et va voir de ce fait sa température locale augmenter provoquant ainsi une surpression. Dans toute la suite, on se place en « régime de confinement de contraintes », correspondant aux situations pour lesquelles la surpression créée par l'illumination n'a pas le temps de se propager à l'échelle de la zone d'absorption pendant la durée de l'illumination. On montre alors qu'après le passage de l'impulsion lumineuse, pris comme origine des temps, la surpression vérifie l'équation établie à la question 3 avec pour conditions initiales :

$$p_1(x,t=0) = \begin{cases} p_A & si \quad -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_1(x,t=0) = 0 \text{ pour tout } x.$$

avec $p_A = \dfrac{\beta_0 c_s^2}{c_p}\mu_a \Phi$, où β_0 désigne le coefficient d'expansion thermique à pression constante, c_p la capacité calorifique massique à pression constante, μ_a le coefficient d'absorption optique et Φ la fluence du faisceau (énergie transportée par l'impulsion par unité de surface). Dans le cadre de l'imagerie photo-acoustique, les valeurs typiques pour des tissus biologiques sont les suivantes :

$\beta_0 = 2.10^{-4}$ K^{-1}, $c_p = 4.10^3$ J.kg^{-1}.K^{-1}, $\mu_a = 1$ cm^{-1}.

5) Pour une durée de l'impulsion lumineuse de 5 ns, est-on effectivement en régime de confinement de contraintes pour un vaisseau sanguin de 100 µm de diamètre ?

6) L'approximation acoustique est-elle légitime avec une fluence de 10 mJ.cm^{-2} ?

7) Démontrer le lien simple existant entre $p_1(x,t)$ et $v_1(x,t)$ dans le cas particulier d'une onde plane harmonique homogène et progressive se déplaçant vers les x croissants. Pourquoi peut-on généraliser cette formule à toute onde plane progressive se déplaçant vers les x croissants quelque soit sa forme ?

8) Déterminer de même le lien entre $p_1(x,t)$ et $v_1(x,t)$ dans le cas d'une onde plane progressive se déplaçant vers les x décroissants.

9) A l'aide des conditions initiales et des résultats des questions 3, 7 et 8, déterminer l'expression du champ de surpression $p_1(x,t)$ après l'illumination du fluide, c'est-à-dire pour $t > 0$. Tracer l'allure du champ de surpression en fonction de x à différents instants. On distinguera les cas $t < \dfrac{a}{2c_s}$ et $t > \dfrac{a}{2c_s}$.

Pour les deux questions suivantes, on raisonne sur une section S perpendiculaire à l'axe Ox.

10) Calculer l'énergie acoustique initiale contenue dans la zone de surpression. Faire l'application numérique avec les données fournies et $S = 1$ mm^2.

11) Calculer l'énergie acoustique traversant une section repérée par l'abscisse x supérieure à $a/2$. Montrer qu'il y a bien conservation de l'énergie acoustique.

Partie II : Cas d'une symétrie sphérique

La zone de fluide absorbant partiellement la lumière est maintenant une sphère de rayon R. On montre que l'équation de propagation établie à la question 2 s'écrit dans le cas général (en 3D) :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \text{ , où } \Delta \text{ désigne l'opérateur laplacien.}$$

A la date $t = 0$, la sphère, suite au passage de l'impulsion lumineuse, possède une surpression uniforme p_A (voir partie I pour l'expression de p_A), le fluide ne s'étant pas encore mis en mouvement. La symétrie sphérique du problème entraîne que la surpression ne dépend que de la distance r au centre de la sphère. Dans cette géométrie, l'opérateur laplacien a pour expression $\Delta p_1(r,t) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rp_1)$. Pour $t > 0$, on montre que le champ de surpression qui est solution de l'équation de propagation a pour expression :

$$p_1(r,t) = \frac{F(r - c_s t) + F(r + c_s t)}{r}, \quad \text{avec } F(u) = \begin{cases} \dfrac{p_A}{2}u & \text{si } -R < u < R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

12) Montrer que cette solution vérifie bien la condition initiale sur le champ de surpression (on admettra qu'elle vérifie également la condition initiale sur le champ de vitesse associé).

13) Tracer l'allure du champ de surpression $p_1(r,t)$ à différents instants. On distinguera les cas $t < \dfrac{R}{c_s}$ et $t > \dfrac{R}{c_s}$. Comparer la structure de l'onde émise par la sphère au cas unidimensionnel.

14) Pour une distance r grande devant R, l'onde sphérique est assimilable à une onde plane. Donner alors l'expression approchée du vecteur densité de courant énergétique. En déduire l'énergie acoustique traversant une sphère de rayon $r >> R$. Commenter la dépendance en r et comparer avec l'énergie acoustique contenue dans la sphère de rayon R à t = 0.

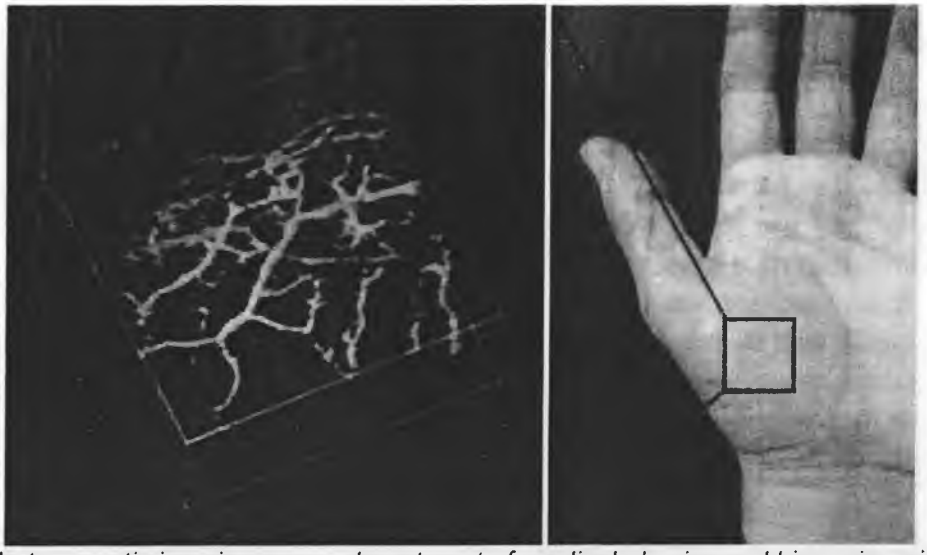
15) Application numérique : pour $R = 0{,}1$ mm, calculer la surpression maximale de l'onde émise par la sphère à une distance $r = 5$ mm.

Le problème a traité les cas 1D et 3D de la propagation d'une onde photoacoustique. Pour le cas 2D (qui est plus compliqué que la 3D), on pourra consulter l'article suivant :

G. J. Diebold, T. Sun and M. I. Khan, *Photoacoustic monopole radiation in one, two and three dimensions*, Physical Review Letters, vol. 67, n°24, déc. 1991

Les calculs développés dans ce problème ainsi que des simulations numériques du phénomène dans des géométries plus complexes sont des étapes nécessaires avant la création de prototypes afin de dresser un cahier des charges précis des appareils impliqués dans le dispositif (puissance du faisceau laser, taille et sensibilité des capteurs, résolution spatiale et temporelle...). Les dispositifs actuels donnent des résultats prometteurs, comme le montre la photo ci-dessous.

Image 3D de vaisseaux sanguins superficiels obtenue par imagerie photo-acoustique



© photoacoustic imaging group, department of medical physics and bioengineering, University College London

7.7 La technique des Dalton

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : ondes acoustiques dans un solide, énergie acoustique, atténuation.

Dans la célèbre série de bande dessinée « Lucky Luke » créée par Morris, on peut voir les frères Dalton coller une oreille au rail de chemin de fer pour savoir si le train qu'ils comptent attaquer va bientôt arriver. On peut se demander pourquoi font-ils cela ? Sur certains sites internet non institutionnels, on trouve parfois la justification suivante : c'est parce que le son se propage nettement plus vite dans l'acier que dans l'air (environ 12 fois plus vite).

Extrait de « la ballade des Dalton », de Morris et Goscinny, © LUCKY COMICS 2014

1) Expliquer en quoi cette justification est fausse. Proposer une justification qualitative correcte.

La suite de l'exercice a pour but de quantifier la capacité du rail à faire propager le son sur une grande distance. Le rail, de section rectangulaire, possède une largeur l et une hauteur h. Il est le siège d'une onde transversale dans le sens de la largeur, se propageant vers les x croissants et dont le déplacement transversal à l'abscisse x est donné par $\xi(x,t) = A(x)\cos(\omega t - kx)$. Le tronçon de rail, situé entre les abscisses x et $x+dx$, émet de part et d'autre une onde sonore se propageant dans l'air perpendiculairement au rail. On note Z_{air} et Z_{acier} les impédances acoustiques respectivement de l'air et de l'acier.

2) Rappeler la définition de l'impédance acoustique Z d'un fluide et son expression en fonction de la masse volumique μ du fluide et la célérité c des ondes acoustiques dans ce fluide.

3) Calculer la puissance acoustique moyenne dP_{air} émise dans l'air par ce tronçon en fonction de Z_{air}, $A(x)$, ω, h, dx et l'impédance acoustique de l'air en supposant les ondes émises dans l'air planes.

4) Calculer la puissance acoustique moyenne transportée par l'onde dans le rail à l'abscisse x notée $P_{rail}(x)$. Pour cela, on assimilera l'onde transversale (onde de cisaillement) à une onde longitudinale (onde de compression) comme si l'acier était un fluide (cette similitude paraît grossière mais elle s'avère correcte si l'on se contente d'ordres de grandeur).

5) A l'aide d'un bilan de puissance, établir l'équation différentielle vérifiée par $P_{rail}(x)$.

6) La résoudre et faire apparaître une distance caractéristique L d'atténuation de l'onde sonore dans le rail.

7) Application numérique : calculer la distance L avec $l = 7$ cm, $\mu_{acier} = 7.10^3$ kg.m^{-3}, $\mu_{air} = 1{,}3$ kg.m^{-3}, $c_{acier} = 3{,}2.10^3$ m.s^{-1} (onde de cisaillement) et $c_{air} = 340$ m.s^{-1}. Commenter.

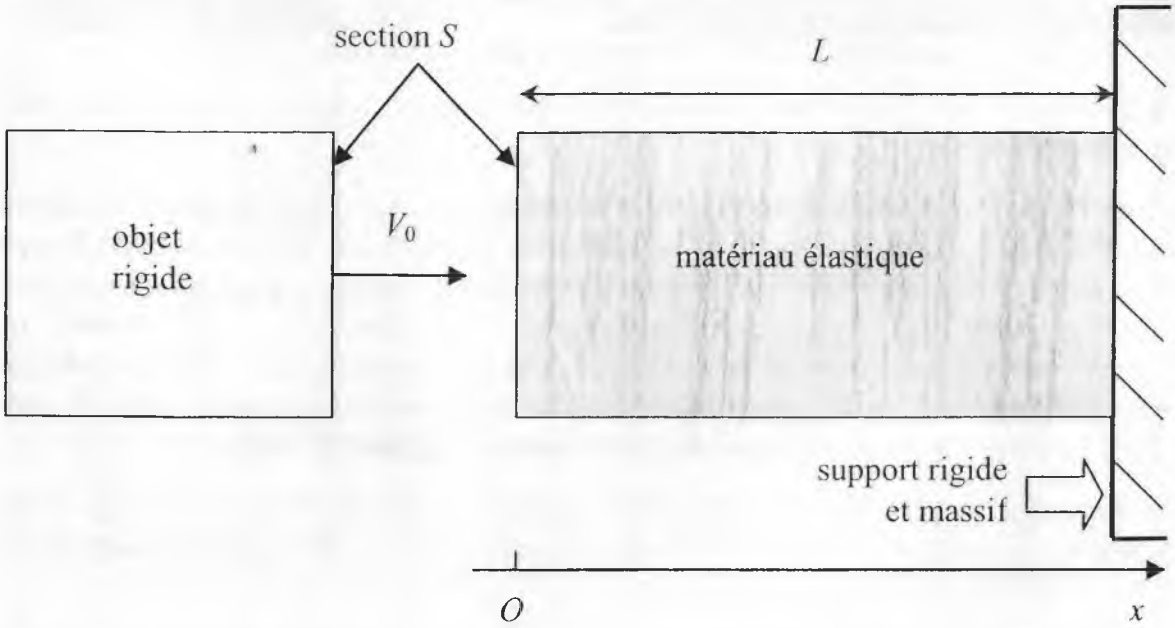
Note : il est évident qu'il ne faut en aucun cas tenter de faire cette expérience, l'accès aux voies de chemin de fer est extrêmement dangereux et strictement interdit.

7.8 Modélisation d'un rebond

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : ondes acoustiques dans un solide.

On désire modéliser le rebond d'un objet rigide sur une surface en caoutchouc. Pour cela, on se limite à un problème à une dimension : l'ensemble des déplacements s'effectue uniquement selon l'axe Ox. L'objet, de masse m, est considéré comme infiniment rigide. Il arrive à la vitesse V_0 sur la surface élastique initialement immobile. Cette dernière possède une longueur L, une masse volumique ρ, un module d'Young E et s'appuie sur un support infiniment rigide et massif. Les ondes longitudinales se déplacent dans ce matériau à la vitesse c. L'objet et le matériau élastique ont une section identique notée S. Enfin, on se place dans tout le problème dans l'approximation acoustique et l'on néglige la pesanteur.



L'origine O de l'axe est choisi à l'endroit où l'objet touche le matériau pour la première fois, à la date $t = 0$. Pour $t > 0$, le contact entre l'objet et le matériau crée à l'intérieur de ce dernier une onde de compression. On note $v(x,t)$ et $p(x,t)$ respectivement la vitesse algébrique et la surpression du matériau à l'abscisse x et à la date t. On rappelle que, pour une onde longitudinale se propageant dans le matériau selon les x croissants, on a $\vec{v}(x,t) = +\dfrac{p(x,t)}{\rho c}\vec{u}_x$.

1) A l'aide de la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'objet rigide, établir l'expression de la vitesse $V(t)$ de l'objet en fonction du temps. On pourra poser $\tau = \dfrac{m}{\rho c S}$.

2) Donner l'expression de $v(x,t)$ pour $t < t_1$ où t_1 désigne la date pour laquelle l'onde de compression atteint le support fixe. Exprimer t_1 en fonction des données. Tracer l'allure de $v(x,t)$ en fonction de x pour $t < t_1$.

Dans toute la suite, on suppose que le matériau possède une masse beaucoup plus grande que celle de l'objet.

3) Que peut-on en déduire sur la longueur caractéristique de l'onde de compression comparée à la longueur du matériau ? Que peut-on dire sur la vitesse de l'objet à la date t_1 ?

4) Etudier la réflexion de l'onde sur le support supposé infiniment rigide et massif. Donner l'expression de $v(x,t)$ une fois l'onde complètement réfléchie. Tracer l'allure de $v(x,t)$ en fonction de x à la date $t = 2\ t_1$.

Lorsque l'onde de compression revient sur l'objet, elle donne naissance à une onde réfléchie repartant à nouveau vers les x croissants. On note $v_i(x,t)$ le champ de vitesses de l'onde allant vers les x décroissants et $v_r(x,t)$ celle allant vers x croissants.

5) Tant que l'objet reste en contact avec le matériau, quelle relation existe-t-il entre $v_i(0,t)$, $v_r(0,t)$ et la vitesse de l'objet $V(t)$?

6) Exprimer le champ de surpression $p(x,t)$ en fonction de $v_i(x,t)$, $v_r(x,t)$, ρ et c.

Pour alléger les calculs, on pose $t' = t - 2t_1$ (changement de l'origine des temps).

7) Montrer que $V(t')$ vérifie l'équation différentielle :

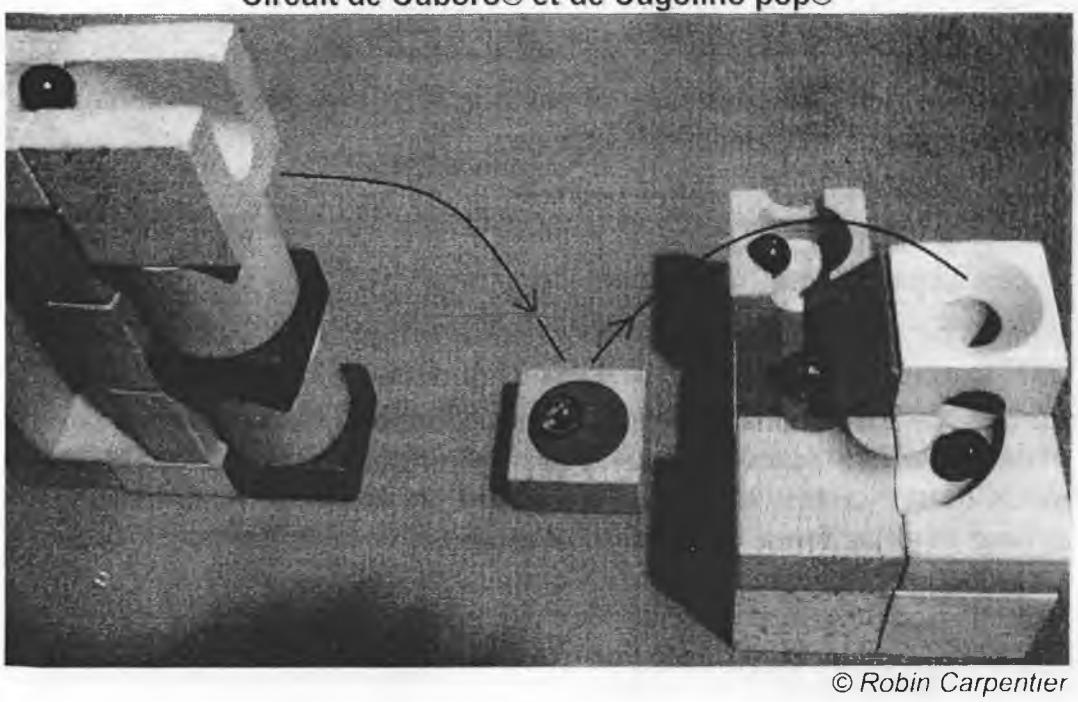
$$\tau \frac{dV}{dt'} + V(t') = -2V_0 \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right)$$

8) Déterminer $V(t')$ en cherchant une solution particulière de la forme $At'\exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right)$.

9) Pour quelle valeur de t' l'objet se détache-t-il du matériau ? En déduire la vitesse de l'objet après le rebond.

La photo représente un circuit de billes utilisant des pièces du jeu cugolino pop® de la marque suisse CUBORO®. Le circuit est constitué de pièces en bois qui permettent de créer un parcours guidant les billes. Certaines pièces sont munies d'une couche de caoutchouc (disques foncés sur la photo) permettant aux billes de rebondir et d'accéder à une autre partie du circuit.

Circuit de Cuboro® et de Cugolino pop®



© Robin Carpentier

10) En supposant que le modèle développé précédemment soit valable, calculer à quelle hauteur H' remonte une bille partant sans vitesse initiale d'une hauteur H après avoir rebondi sur le support en caoutchouc ?

Robin, un petit garçon passionné de cugolino pop®, a vite remarqué que les billes rebondissent moins bien lorsque le circuit est posé sur de la moquette que lorsqu'il est posé sur une table.

11) Comment peut-on expliquer cette différence de comportement à partir du modèle ?

12) En quoi est-ce cependant critiquable d'appliquer le modèle au cas du jeu cugolino pop® ?

Vous pourrez trouver des vidéos de circuits de cugolino pop® et de CUBORO® sur YouTube en tapant « cuboro », ou directement à l'adresse :

http://www.youtube.com/watch?v=vZip6vx0bpg

7.9 Rôle de l'oreille moyenne

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : ondes acoustiques dans un fluide, interface entre deux milieux, impédance acoustique.

Le but de ce problème est de développer un modèle de transmission des ondes sonores afin d'expliquer le rôle de l'oreille moyenne dans la structure de l'oreille humaine.

DOCUMENT : structure de l'oreille humaine, d'après les sites internet « wikipédia.fr » et « futura-sciences.com »

L'Homme, comme la grande majorité des mammifères, possède deux oreilles, chacune d'elles étant constituée de trois parties, l'ensemble formant la chaîne de transmission du son :

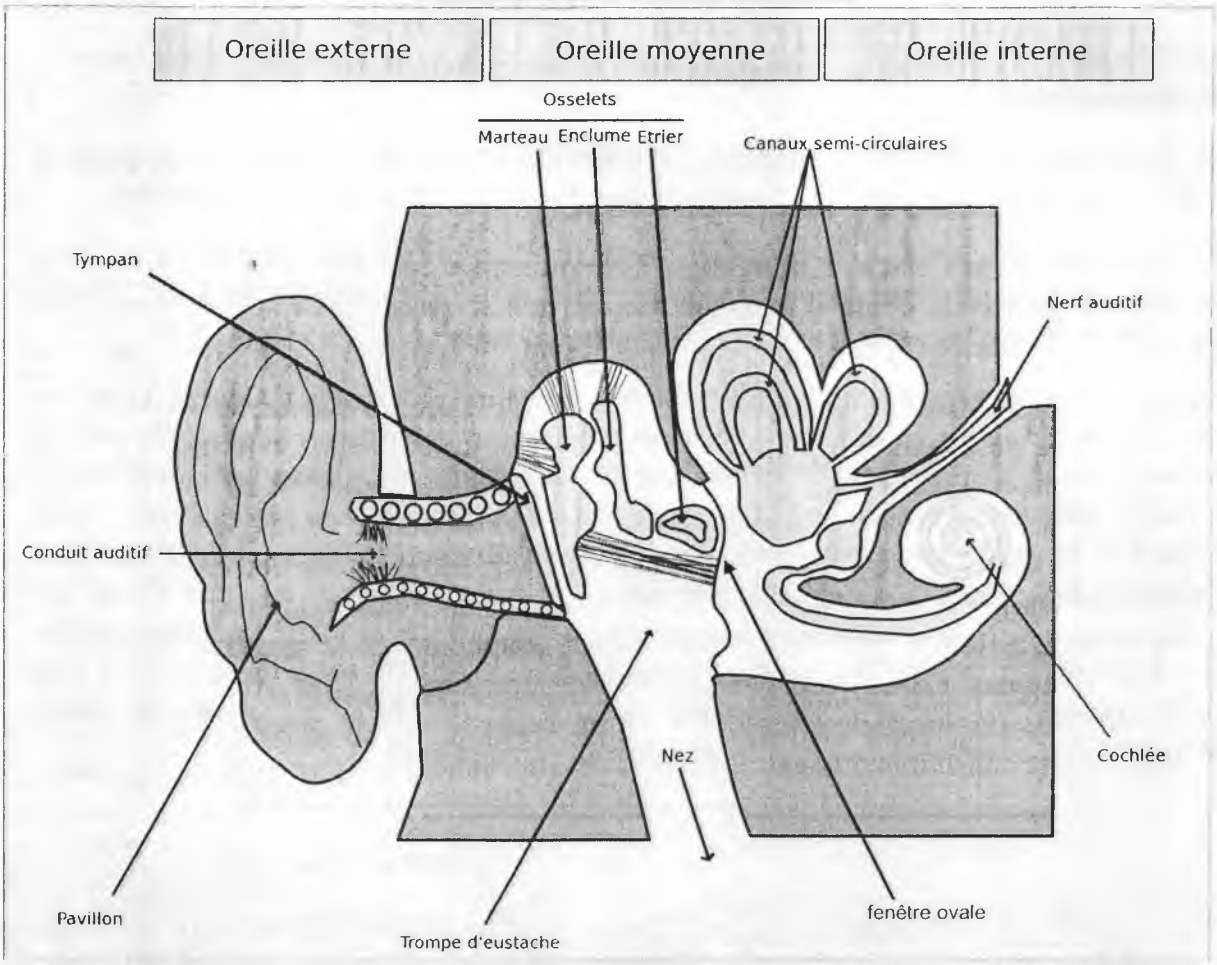
- *l'oreille externe* : elle est constituée du pavillon (partie visible de l'oreille) et du canal auditif externe, qui guide le son jusqu'au tympan.

- *l'oreille moyenne* : elle est constituée du tympan et d'une chaîne ossiculaire (comportant trois osselets : le marteau, l'enclume et l'étrier). L'ensemble de la chaîne se situe dans un milieu aérien, appelé cavité tympanique. Cette cavité est reliée aux fosses nasales par la trompe d'Eustache afin d'assurer un équilibre des pressions statiques de part et d'autre du tympan.

- *l'oreille interne* : entièrement plongée dans un milieu liquide, elle est constituée des organes de l'équilibre (canaux semi-circulaires), du vestibule et de la cochlée. Les mouvements de l'étrier sont transmis à la cochlée par la fenêtre ovale et le vestibule. La cochlée, long tube en forme de coquille d'escargot, contient sur toute sa longueur des cellules ciliées reliées au nerf auditif. Ce sont ces cellules qui assure la transduction mécano-électrique : le mouvement de leur cils engendre un signal nerveux, qui va être interprété par le cerveau comme un son de hauteur (c'est-à-dire de fréquence) correspondant au groupe de cellules excitées.

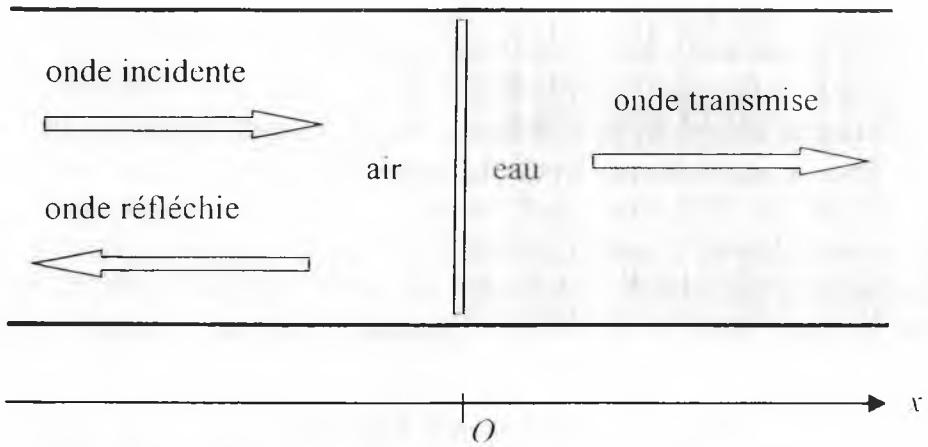
La transformation des vibrations sonores du canal auditif externe (milieu aérien) à l'oreille interne (milieu liquide) se fait par l'intermédiaire des osselets : les vibrations du tympan entraînent successivement celles du bloc marteau-enclume, puis celles de l'étrier, qui les transmet à l'oreille interne via la fenêtre ovale. Le rapport de levier effectif entre le marteau et l'enclume (de l'ordre de 20), d'une part, et le rapport de surfaces entre le tympan (60 mm^2) et la platine de l'étrier (3 mm^2) d'autre part, font du système tympano-ossiculaire un véritable adaptateur d'impédance qui assure un transfert quasi intégral de l'énergie sonore à l'oreille interne. Sans ce système, la quasi-totalité de l'énergie sonore serait perdue.

Schéma d'une oreille humaine



Auteur : historicair (licence CC)

Pour comprendre la dernière phrase du document, on propose de calculer la fraction de puissance sonore transmise d'un milieu aérien à un milieu liquide (que l'on assimilera à de l'eau) à travers une simple membrane, dont on négligera la masse. On donne $Z_A = 4{,}1.10^2$ SI et $Z_L = 1{,}5.10^6$ SI les impédances acoustiques respectivement de l'air et de l'eau. Une onde sonore plane progressive harmonique venant du milieu aérien arrive sur la membrane. Elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise.

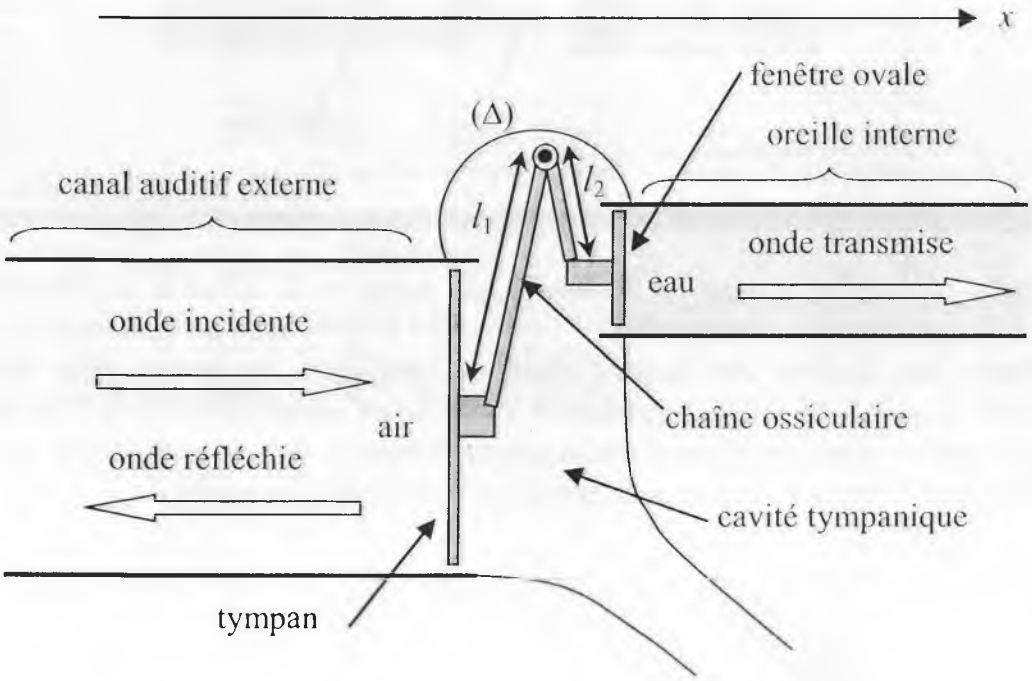


1) Rappeler la définition d'une impédance acoustique et préciser son unité dans le système international.

2) Définir et calculer les coefficients de réflexion et de transmission r_v et t_v pour le champ des vitesses en explicitant les conditions aux limites au niveau de la membrane.

3) Exprimer puis calculer la fraction T de puissance sonore passant de l'air à l'eau. Calculer en décibels la chute d'intensité sonore que le passage du son de l'air à l'eau entraîne. Commenter.

On cherche à modéliser la transmission du son par l'oreille moyenne. Pour cela, on considère que la propagation des ondes sonores dans le canal auditif externe d'une part et dans le vestibule de l'oreille interne d'autre part est unidimensionnelle et l'on modélise la chaîne ossiculaire par un unique solide pouvant pivoter autour de l'axe (Δ). On note v et p respectivement le champ de vitesses et le champ de surpression (tous deux algébriques) du fluide provoqués par une onde sonore, les indices i, r et t désignant respectivement les ondes incidente, réfléchie et transmise à proximité immédiate de la membrane (tympan ou fenêtre ovale suivant l'onde). Le tympan possède une surface S_1 et la fenêtre ovale une surface S_2. Dans un souci de simplification, on suppose que la pression dans la cavité tympanique reste constamment égale à la pression atmosphérique.



4) En notant Ω la vitesse angulaire de la chaîne ossiculaire, écrire les liens entre Ω, v_i, v_r et v_t faisant intervenir les longueurs l_1 et l_2.

5) En négligeant le moment d'inertie de la chaîne ossiculaire, établir une relation entre p_i, p_r et p_t.

6) En déduire que la fraction T' de puissance sonore transmise de l'oreille externe à l'oreille interne vaut :

$$T' = \frac{4W_A W_L}{(W_A + W_L)^2} \qquad \text{avec } W_A = Z_A S_1 l_1^2 \text{ et } W_L = Z_L S_2 l_2^2$$

7) Justifier par une application numérique le contenu du document expliquant que « le système tympano-ossiculaire se comporte comme un véritable adaptateur d'impédance ».

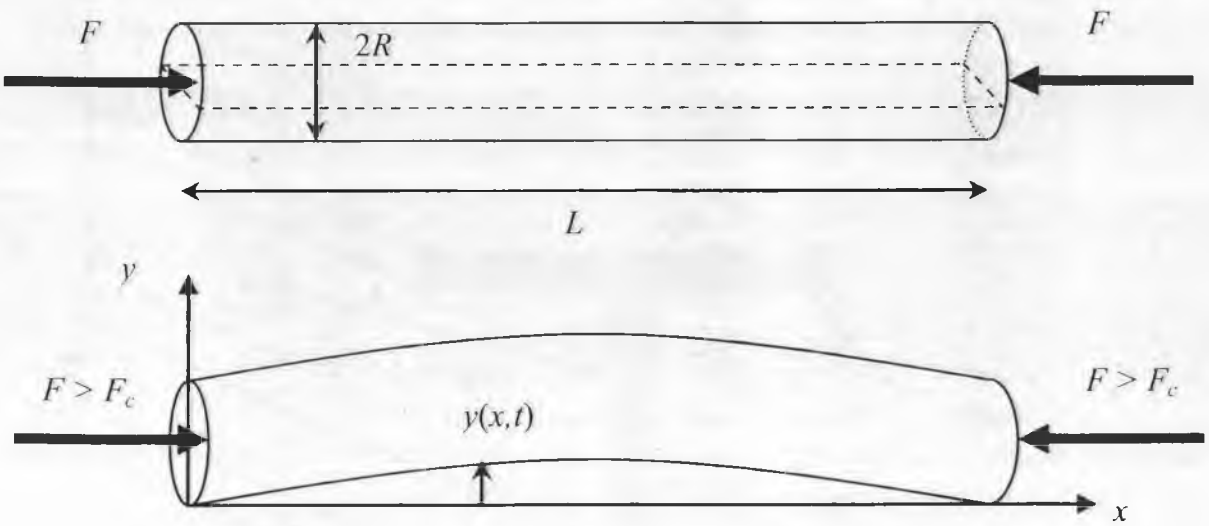
7.10 Instabilité de flambage

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : ondes transversales sur une corde, ondes stationnaires.

Le choix des caractéristiques des poutres en acier formant l'ossature de certains bâtiments est primordial : celles-ci doivent en effet supporter le poids de la partie située au dessus d'elles. Or si l'on exerce une force de compression suffisante de part et d'autre d'une poutre, cette dernière peut « flamber », c'est-à-dire se plier sous l'effet de cette contrainte. Le but de ce problème est de quantifier ce phénomène.

On considère un barreau cylindrique homogène de longueur L et de rayon R. Il possède une masse volumique ρ et un module d'Young E. On exerce de part et d'autre une force de compression F. Si la force F est supérieure à F_c, le barreau se met à flamber. On désire déterminer l'expression de F_c, appelé « charge critique de flambage » en fonction des différents paramètres.



On montre que, hors équilibre, le déplacement transversal du barreau vérifie l'équation aux dérivées partielles (valable pour des déplacements suffisamment faibles) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad \text{avec } K_2 = \frac{EI}{\pi R^2 \rho},$$

où I désigne le moment quadratique de la poutre. Pour un barreau cylindrique, $I = \frac{\pi R^4}{4}$.

1) En utilisant l'analogie avec le cas d'une corde tendue, donner l'expression de K_1 en fonction de F, ρ et R.

On suppose que la fixation du barreau à chaque extrémité est de type « liaison pivot ». On montre que cela impose les conditions aux limites suivantes : $y = 0$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ en $x = 0$ et $x = L$. On propose une solution de l'équation de la forme :

$y(x,t) = f(t)\sin(kx + \varphi)$, où k et φ sont des constantes.

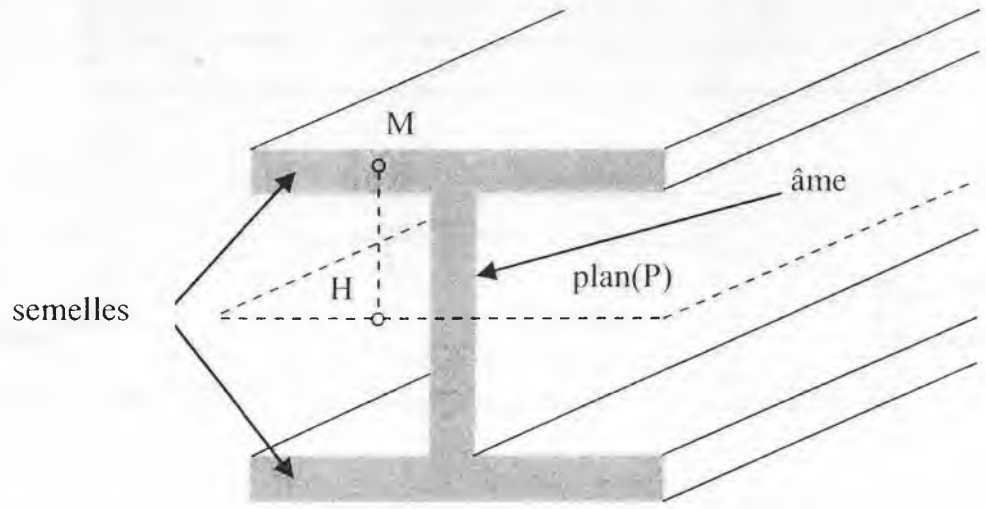
2) Déterminer k et φ en s'appuyant sur la forme que prend la poutre lors du flambage.

3) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $f(t)$.

4) Déduire de l'étude de la stabilité de la solution l'expression de F_c.

5) AN : calculer la masse maximale que peut supporter un pilier en acier sans flamber de rayon R = 10 cm et de longueur L = 3,3 m (hauteur standard d'un étage d'un immeuble de bureaux). La densité de l'acier est de l'ordre de 8. Par ailleurs, le module d'Young de l'acier vaut E_{acier} = 200 GPa.

Dans le cas d'une géométrie quelconque de la poutre, le moment quadratique est défini par la formule $I = \iint_{\text{section}} HM^2 dS$, où H désigne le projeté sur le plan médian (P) d'un point M appartenant à la poutre. Le plan (P) est représenté en pointillé d'une part sur la première figure de l'énoncé (cas d'une poutre circulaire) et d'autre part sur la figure suivante. Un profil fréquent pour les poutres d'acier utilisées en génie civil est un profil en forme de H : la section est constituée de deux semelles (ici horizontales) reliées par l'âme (ici verticale).



6) Expliquer qualitativement les intérêts de cette forme comparée au cas d'une section circulaire ou rectangulaire.

Alexandre et Stéphane sont deux amis d'enfance se retrouvant après qu'Alexandre ait passé 10 ans aux Etats-Unis. Ce dernier, ayant quelques kilos à perdre, se voit proposer par Stéphane une sortie vélo. Lors d'une pause au pied d'un arbre, ils discutent de la solidité du vélo et ne sont pas d'accord sur l'action des rayons dans une roue de vélo. Alexandre affirme que ce sont les rayons situés sous le centre de la roue qui supportent le poids du vélo (et de la personne assise dessus) alors que Stéphane explique que ce sont les rayons situés au dessus du centre de la roue qui agissent principalement, faisant que le cadre du vélo est comme « suspendu » aux roues.

Roue avant de vélo de course

Auteur : David Haberthür (licence CC)

7) Chiffre à l'appui, dire qui d'Alexandre ou de Stéphane a raison.

7.11 Pavillon acoustique d'un soubassophone

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : ondes acoustiques dans un fluide, dispersion, énergie acoustique.

On cherche dans ce problème à étudier le profil du pavillon acoustique situé en sortie de d'un soubassophone (voir document suivant). Pour simplifier l'étude, on se place dans un cas unidimensionnel où les champs ne dépendent que de l'abscisse x. Le pavillon est supposé rigide, d'axe de révolution Ox et de section variable $S(x)$. Il contient de l'air qui, au repos, est à la pression p_0, possède une masse volumique μ_0 et un coefficient de compressibilité isentropique χ_s. Les effets de la pesanteur seront négligés dans tout le problème et l'on se place dans l'approximation acoustique. Au passage d'une perturbation sonore, le fluide subit un déplacement $\xi(x,t)$ essentiellement longitudinal selon Ox. La masse volumique et la pression à l'abscisse x et à la date t s'écrivent alors respectivement :

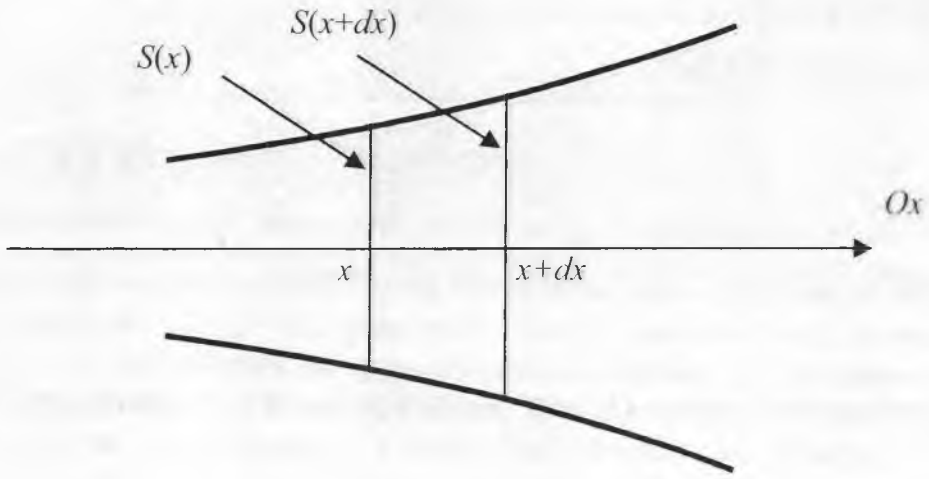
$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad \text{et} \qquad p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$$

Musicien d'une fanfare soufflant dans un soubassophone

© Renaud Carpentier

DOCUMENT d'après « Wikipédia.fr »

Le soubassophone ou sousaphone (souvent abrégé en « sousa », «souba») est un instrument de musique de la famille des cuivres, apparenté au tuba-contrebasse. Il présente sur le tuba l'avantage d'être porté sur l'épaule, d'une façon équilibrée, sans être en porte-à-faux avant comme le tuba. Ceci lui permet d'être joué en marchant sans trop de fatigue, d'où son grand succès dans les fanfares. De plus, il a l'avantage d'avoir un pavillon orienté de manière frontale : cela permet une projection du son plus efficace que celle du tuba. Enfin, les grandes dimensions du pavillon contribuent à une meilleure transmission dans l'air du son émis par l'instrument tout en attirant le public impressionné par sa taille. Malgré le fait que le soubassophone soit porté sur l'épaule, réduisant la fatigue, il reste un instrument assez lourd à porter en défilant, en particulier les modèles tout en métal, qui peuvent peser près de 15 kg (les modèles à pavillon en fibre de verre sont nettement plus légers mais ont un son plus « fermé », moins brillant).



1) Expliquer en quelques lignes l'intérêt du très grand évasement du pavillon du soubassophone.

2) Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

3) Ecrire l'équation d'Euler dans cette approximation.

On raisonne sur une tranche d'air contenu au repos dans le pavillon entre les abscisses x et $x + dx$.

4) Représenter cette tranche d'air à une date t quelconque lors du passage de la perturbation sonore en faisant apparaître $\xi(x,t)$ et $\xi(x+dx,t)$.

On note δ l'accroissement relatif du volume de cette tranche d'air entre l'état au repos et l'état perturbé.

5) Exprimer δ en fonction de $\xi(x,t)$, d'une de ses dérivées et de $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}$.

6) En écrivant le lien entre p_1 et δ, aboutir à l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la surpression :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Exprimer la constante c en fonction des paramètres. Que représente-elle ?

On considère, un pavillon dit « exponentiel », pour lequel la section est de la forme $S(x) = S_0 \exp(Mx)$, où M est appelé le coefficient d'expansion.

7) Montrer qu'une onde plane progressive monochromatique dont la surpression complexe s'écrit $\underline{p}_1(x,t) = p_{10}\exp\left(j\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right)$ peut se propager dans un tel pavillon et établir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω.

8) En posant $\underline{k} = k' - jk''$, mettre en évidence dans l'expression de la surpression les termes d'amortissement/amplification et de propagation.

9) Montrer que le pavillon exponentiel se comporte comme un filtre passe-haut en précisant sa pulsation de coupure ω_c.

10) Montrer par un raisonnement énergétique que l'expression de k'' était prévisible.

11) Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de c, ω_c et ω.

Une étude de la photo du soubassophone a permis d'accéder au diamètre D de la section du pavillon en fonction de l'abscisse x sur les dix derniers centimètres avant la sortie. Les résultats sont répertoriés dans le tableau suivant :

abscisse (mm)	574	594	613	632	650	662	675
diamètre (mm)	361	407	474	549	644	726	809

L'incertitude sur chaque valeur est de l'ordre de 5 mm.

12) Peut-on considérer qu'il s'agit d'un pavillon exponentiel ?

13) Déterminer la fréquence de coupure, en Hz, du pavillon du soubassophone. Commenter sachant que la note la plus grave que l'on peut jouer avec un soubassophone est un fa0#, de fréquence 46,25 Hz et la note la plus aigue est un la2, de fréquence 220 Hz.

14) La modélisation développée dans ce problème permettait-elle d'expliquer la différence de sonorité entre un pavillon métallique et un pavillon en fibre de verre évoquée dans le document ? Pourquoi ?

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 7 :

10.14	Etude d'un trampoline
10.15	Evolution d'un tsunami
10.18	Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique

CHAPITRE 8

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

8.1 Emetteur de la Barillette

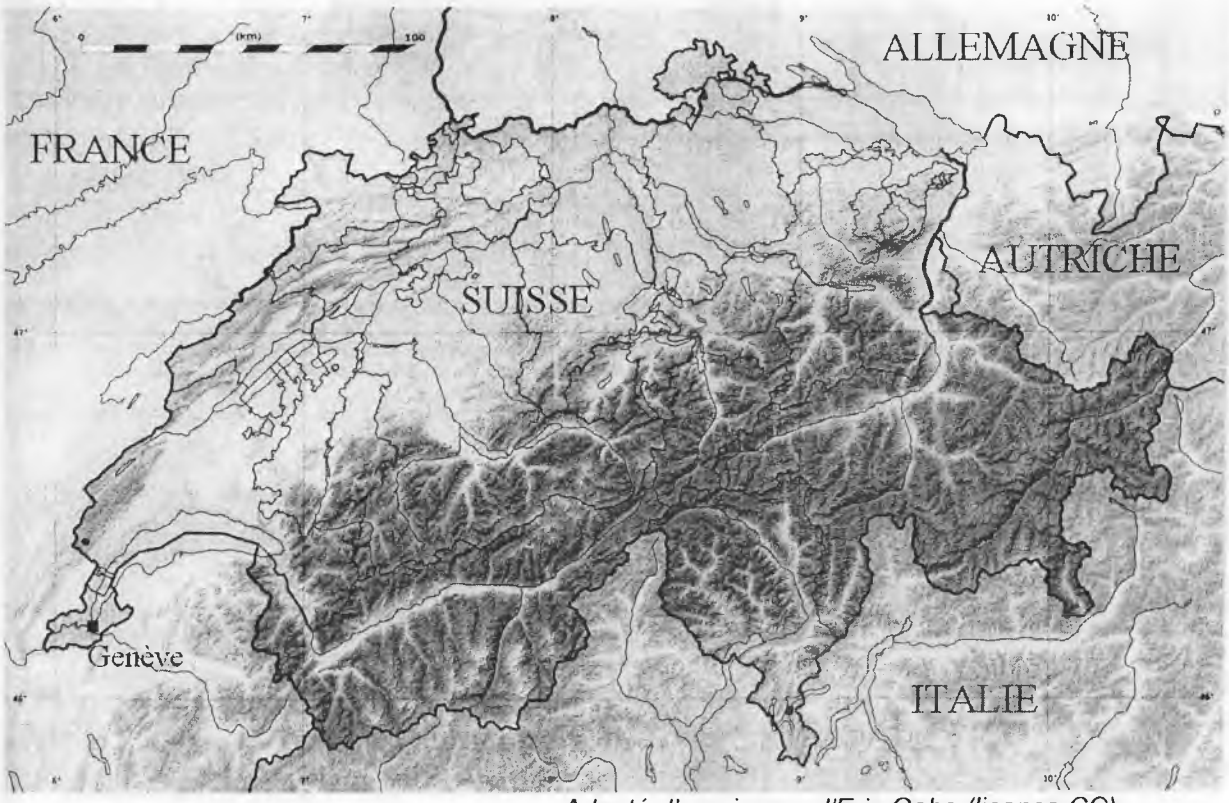
TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : indicatrice de rayonnement, interférence, ARQS.

Ce problème porte sur l'étude de l'indicatrice de rayonnement d'une antenne de diffusion de la TNT en Suisse.

DOCUMENT n°1 : La Barillette, d'après « wikipédia.fr »

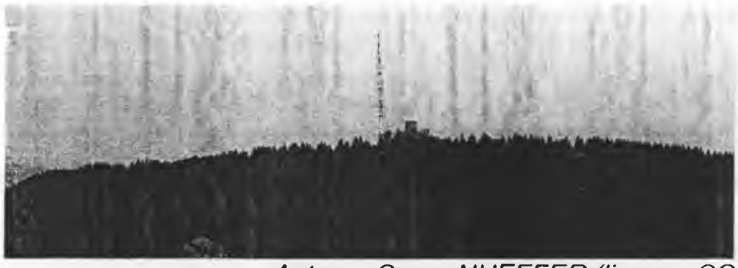
La Barillette est un sommet du Jura situé dans le canton de Vaud en Suisse culminant à 1528 mètres d'altitude dans le massif de La Dôle. La Barillette est située au nord de Genève (carré noir), sa localisation étant repérée par le petit point noir sur la carte de la Suisse ci-dessous, où l'échelle, en haut à gauche, représente une distance de 100 km.



Adapté d'une image d'Eric Gaba (licence CC)

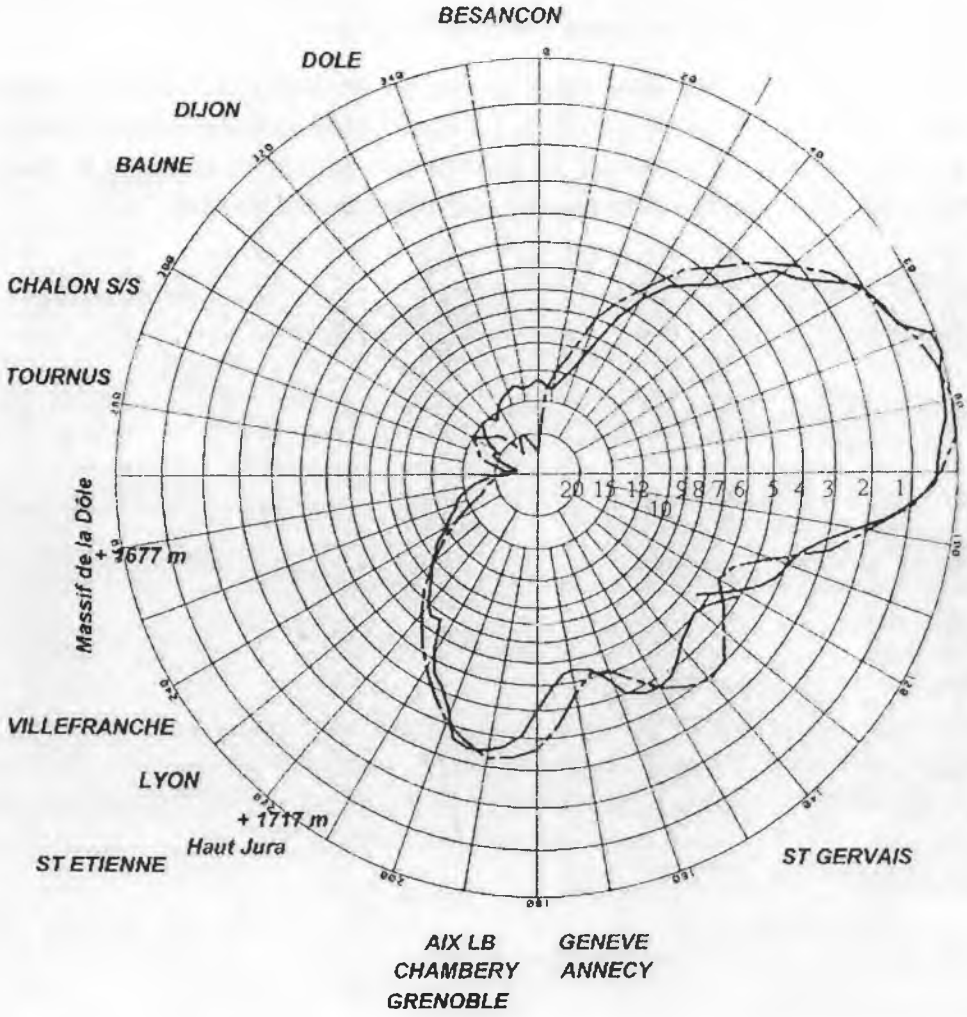
DOCUMENT n°2 : L'émetteur de la Barillette, d'après « wikipédia.fr »

Le sommet de la Barillette accueille le principal émetteur de télévision et FM de la société suisse de radiodiffusion et télévision (SRG SSR) desservant le sud-ouest de la Suisse. Le pylône contenant les antennes émettrices mesure 120 mètres de hauteur.



Auteur : Serge NUEFFER (licence CC)

Sont émises par l'antenne notamment des chaînes de la TNT (Télévision Numérique Terrestre) sur le canal 34 de la bande V centré sur 578 MHz selon la norme DVB-T (*Digital Video Broadcasting-Terrestrial*) en 16-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*). La courbe en trait plein sur la figure suivante représente l'indicatrice de rayonnement pour ce canal (la courbe en trait pointillé correspond au canal 69 de la bande H qui n'est plus utilisé depuis la suppression de la télévision analogique). L'échelle radiale correspond à la chute en décibels par rapport à la direction de plus grand rayonnement.



adapté d'une image de Serge NUEFFER (licence CC)

1) Peut-on appliquer l'approximation des régimes quasi-stationnaires si l'on désire étudier le courant circulant le long du pylône ? Justifier.

2) Expliquer ce que représente une indicatrice de rayonnement, appelé également « diagramme polaire de rayonnement ».

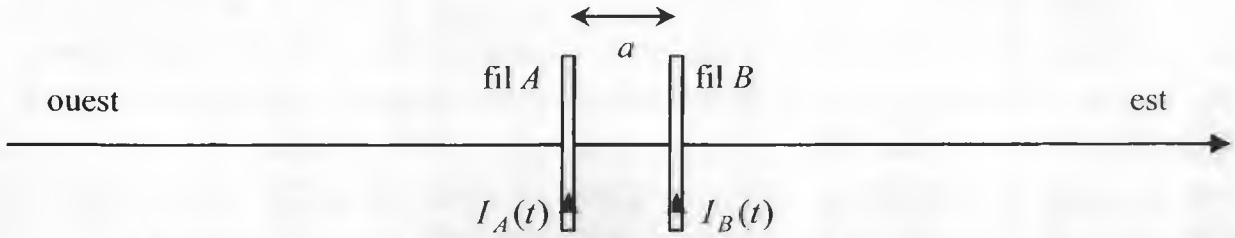
3) Définir et indiquer la fenêtre angulaire d'émission à -3 dB de l'antenne.

4) Expliquer en quoi l'indicatrice de rayonnement est bien adaptée au site d'implantation de l'antenne.

5) De quel facteur la puissance des signaux de la TNT suisse rayonnée vers Dijon est-elle plus faible que celle rayonnée par l'antenne en direction de l'est ?

6) En faisant l'hypothèse que la puissance totale émise par l'antenne soit tout juste calibrée afin que les suisses habitant près de la frontière avec la France aux alentours de Genève puissent capter la TNT, estimer la distance maximale de réception de la TNT dans la direction de plus fort rayonnement de l'antenne de la Barillette.

Pour comprendre la différence d'émission selon les deux directions opposées que sont l'ouest et l'est, on raisonne sur un modèle élémentaire unidimensionnel, où l'antenne est constituée de deux fils identiques rectilignes A et B distants de a et alimentés par des courants respectifs $I_A(t) = I_1 \cos(\omega t)$ et $I_B(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi)$ avec I_1 et I_2 positifs.



7) Le courant I_1 étant donné, proposer des valeurs pour I_2, a et φ de manière à ce que l'antenne n'émette presque rien dans la direction de l'ouest et de manière optimale dans la direction de l'est. Donner la valeur numérique de a dans le cas du canal 34 de la bande V utilisé pour la TNT.

8) Quel est l'intérêt d'avoir installé l'antenne au sommet d'une montagne ?

8.2 Portée d'un talkie-walkie

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : modulation FM, énergie électromagnétique.

On peut lire sur une notice de talkie-walkies les informations suivantes :

SPECIFICATIONS :

Le talkie-walkie dispose de 8 différents canaux.
Puissance maximale : 0,5 W en transmission (ERP : *effective radiated power*).
Portée : jusqu'à 5 km sans obstacles ni interférences.

Tables de fréquences (*Channel Frequency Table*) :

Channel	Frequency (MHz)	Channel	Frequency (MHz)
1	446,00625	5	446,05625
2	446,01875	6	446,06875
3	446,03125	7	446,08125
4	446,04375	8	446,09375

Porté effective :

La portée dépend des conditions extérieures : elle ne peut naturellement être garantie précisément. Ce n'est qu'une valeur indicative.
En conditions extérieures dégagées et sans obstacles (plaine, champ) : 5 km.
En intérieur ou en ville : 500 m.

1) Sachant qu'un talkie-walkie fonctionne avec trois piles LR03, estimer son autonomie maximale en fonctionnement en utilisant des piles rechargeables Ni-MH (de tension 1,2 V) de 800 mAh.

2) Rappeler le principe de l'émission de signaux par modulation de fréquence.

On rappelle la règle de Carlson : Le spectre d'un signal modulé en fréquence a une largeur de l'ordre de $\Delta f + 2f_m$, où Δf désigne la largeur de l'intervalle des valeurs prises par la fréquence instantanée du signal modulé et f_m la fréquence maximale du signal modulant.

3) Indiquer, en le justifiant, l'inégalité que doit vérifier l'écart fréquentiel entre les canaux et la largeur spectrale de la voix humaine. Est-ce vérifié dans le cas présent ?

4) D'après les données fournies dans le document et en supposant que le talkie-walkie émet de manière isotrope (c'est-à-dire de la même manière suivant les différentes directions), estimer la valeur de l'amplitude minimale du champ électrique d'un signal détectable par un talkie-walkie. On rappelle que $\mu_0 = 1{,}26.10^{-6}$ H.m^{-1}.

8.3 Voile solaire sous pression

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : OPPHH électromagnétiques, photons, force centrale.

L'exploration spatiale nécessite la fabrication de vaisseaux capables de franchir de très grandes distances. Se pose alors la question de la propulsion et de la quantité d'énergie qu'il est possible d'embarquer pour un si long voyage. Une voile solaire utilise directement la force exercée par le rayonnement du Soleil sur une surface réfléchissante, et trouve ainsi sur place l'énergie nécessaire pour avancer. Bien que la pression de radiation exercée par le Soleil soit très faible, cette technique peut s'avérer très efficace à long terme. Deux projets de voiles solaires ont déjà été réalisés : Cosmos-1 en 2005 (mission échouée à cause d'une défaillance technique) et Ikaros en 2010 (qui fut un succès). On se propose de modéliser cette pression de radiation et de prévoir les caractéristiques d'une future voile solaire.

La voile solaire est une solution envisagée pour les voyages interstellaires

Cliché : NASA (domaine public)

On considère un faisceau lumineux de puissance surfacique moyenne P_{surf} et de fréquence ν arrivant en incidence normale sur une plaque parfaitement réfléchissante d'aire S. D'un point de vue corpusculaire, on peut voir ce faisceau comme un ensemble de photons, d'énergie $h\nu$ et de quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$, se déplaçant à la vitesse c. On note n^* la densité volumique de photons dans le faisceau incident.

1) Exprimer l'énergie lumineuse traversant une section droite du faisceau d'aire S pendant dt. En déduire la densité de photons n^* en fonction de P_{surf}, h, ν et c.

2) On étudie dans un premier temps la réflexion d'un unique photon sur la plaque réfléchissante. Exprimer la quantité de mouvement du photon avant et après réflexion. En déduire la force exercée sur le photon par la plaque pendant la durée δt du choc.

3) Exprimer alors la force exercée par l'ensemble du faisceau lumineux sur la plaque et montrer qu'il s'exerce une pression de radiation moyenne $< p >$ que l'on exprimera en fonction de P_{surf} et c. Vérifier l'homogénéité du résultat.

On peut retrouver cette pression de radiation à l'aide d'un modèle ondulatoire de la lumière.

4) Etablir l'équation de propagation dans le vide vérifiée par les champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique.

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide arrive en incidence normale sur la plaque située en $z = 0$ et donne lieu à une onde réfléchie se propageant en sens opposé. Le champ électrique de l'onde incidente défini pour $z < 0$ s'écrit :

$$\overrightarrow{E_i} = E_0 \cos(\omega t - kz)\, \overrightarrow{e_x}$$

5) Démontrer la relation de dispersion reliant ω et k.

6) En admettant que le champ électrique est nul à l'intérieur de la plaque (conducteur supposé parfait) et en utilisant la continuité admise de la composante tangentielle du champ

électrique à la traversée de l'interface, donner l'expression du champ électrique $\vec{E_r}$ de l'onde réfléchie.

7) Retrouver la relation de structure liant le champ électrique $\vec{E_i}$ et le champ magnétique $\vec{B_i}$ de l'onde incidente. En déduire l'expression de $\vec{B_i}$ et de $\vec{B_r}$, les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie.

8) Déterminer le champ électrique $\vec{E}(z,t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ de l'onde *totale* régnant dans le vide. Commenter.

On montre que la force exercée par l'onde incidente sur un élément de surface de la plaque s'écrit :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{j_s} \wedge \vec{B}(0,t)dS$$

où $\vec{j_S} = \frac{B_y(0,t)}{\mu_0}\vec{e_x}$ est la densité surfacique de courant générée sur la plaque en $z = 0$ par la réflexion de l'onde.

9) Exprimer $d\vec{F}$ et montrer qu'il s'exerce sur la plaque une pression de radiation moyenne $< p >$ que l'on exprimera en fonction de ε_0 et E_0.

10) Montrer que $< p >$ s'exprime simplement en fonction de la densité volumique d'énergie moyenne $< w_i >$ de l'onde incidente.

11) Déterminer la puissance surfacique moyenne de l'onde incidente en fonction de ε_0, c et E_0. Commenter.

La Terre se situe à la distance $d = 1{,}5.10^{11}$ m du Soleil, définissant ainsi l'*unité astronomique* (1 UA = $1{,}5.10^{11}$ m). La puissance surfacique moyenne du rayonnement solaire reçu au niveau de la Terre (en haut de l'atmosphère) est donnée par la constante solaire $A_0 = 1{,}36.10^3$ W.m^{-2}.

12) Evaluer la pression de radiation ressentie au niveau de la Terre. Commenter.

13) Le vaisseau Cosmos-1 lancé en 2005 avait une masse de 110 kg et une voile circulaire de 30 m de diamètre fabriquée en mylar. Le vaisseau Ikaros pèse quant à lui 315 kg avec une voile carrée de 14,1 m de côté en polyimide. Déterminer la force de pression de radiation dans chaque cas et évaluer l'accélération de chaque vaisseau. Commenter.

Les sondes Voyager-1 et Voyager-2, lancées en 1977 par la NASA, sont toujours en fonctionnement et se trouvent actuellement aux limites de notre Système Solaire. Avec une vitesse de 60 000 km/h, Voyager-1 est l'objet le plus rapide jamais construit par l'Homme et, depuis 2013, le premier à être sorti de notre Système Solaire après avoir franchi l'héliopause (frontière qui sépare l'héliosphère, où se trouve notre Système Solaire, de l'espace interstellaire) à 120 UA du Soleil.
On cherche à évaluer les performances d'une voile solaire dans un but d'exploration spatiale. On considère un vaisseau de masse totale $m = 100$ kg muni d'une voile solaire de surface $S = 1{,}15.10^5$ m^2 (correspondant à un carré de 340 m de côté). La Terre a une masse

de $6{,}0.10^{24}$ kg et le Soleil une masse de $2{,}0.10^{30}$ kg. On rappelle la valeur de la constante de gravitation universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

14) Comparer la force de pression de radiation et les forces de gravitation exercées sur le vaisseau par le Soleil et par la Terre. A partir de quelle distance de la Terre peut-on négliger la force de gravitation terrestre devant celle du Soleil ? On se placera dans cette approximation dans la suite.

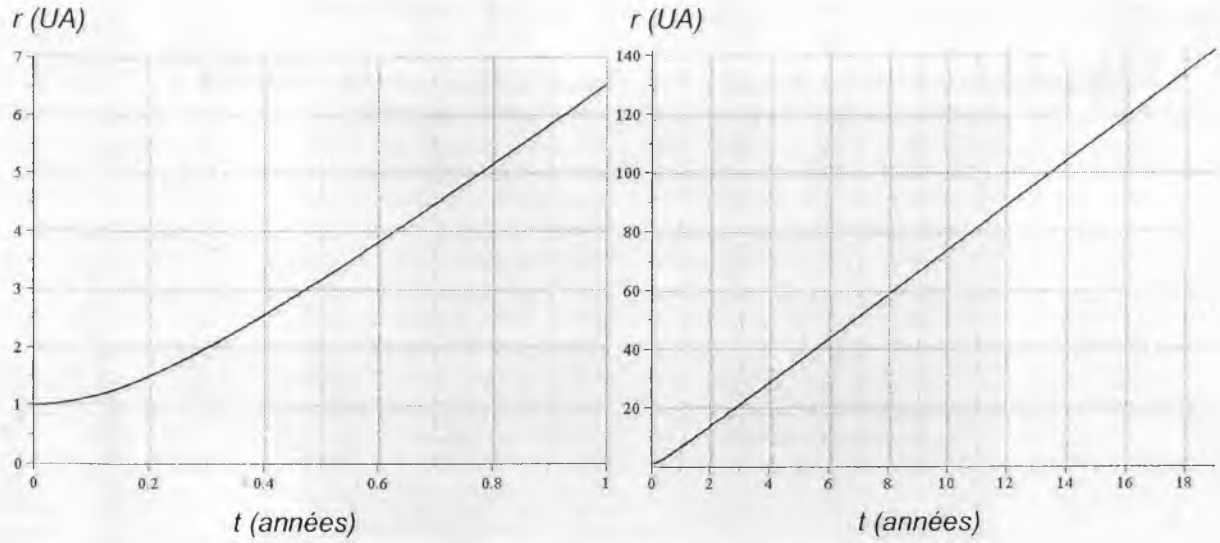
15) Montrer que le mouvement de la voile solaire est rectiligne. En déduire l'équation du mouvement du vaisseau, supposé être lâché sans vitesse initiale depuis la distance $r = d$ du Soleil, sous la forme :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\alpha}{r^2}$$

où α est une constante que l'on exprimera en fonction des données.

16) Montrer que la force subie par le vaisseau dérive d'une énergie potentielle E_p. Déduire alors de la conservation de l'énergie mécanique la vitesse maximale V_{max} que peut atteindre la voile solaire et l'évaluer numériquement. Commenter.

Afin de préciser le mouvement de la voile solaire, on a résolu numériquement l'équation différentielle précédente avec les conditions initiales correspondantes. Le graphe de la distance au Soleil r (en UA) en fonction du temps t (en années) est présenté ci-dessous.



17) Commenter les graphes. Au bout de combien de temps le vaisseau croisera-t-il les orbites de Mars (à 1,5 UA du Soleil), de Saturne (9,5 UA) et de Neptune (30 UA) ? Au bout de combien de temps le vaisseau sera-t-il sorti du Système Solaire ? Evaluer sa vitesse maximale. Conclure.

8.4 Etude d'un câble pour la TNT partie 2

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : ondes progressives, réflexion, atténuation.

Afin de caractériser complètement un câble coaxial, on réalise une série d'expériences. Un générateur d'impulsions envoie une impulsion électrique de durée 56 ns toutes les 20 µs dans un câble coaxial de longueur totale $L = 100$ m. On branche l'entrée du câble à un oscilloscope numérique pour étudier le signal reçu au cours du temps.
L'étude théorique du câble, menée dans la partie 1 (voir problème 6.21) a permis d'établir les résultats suivants (supposés valables ici) :

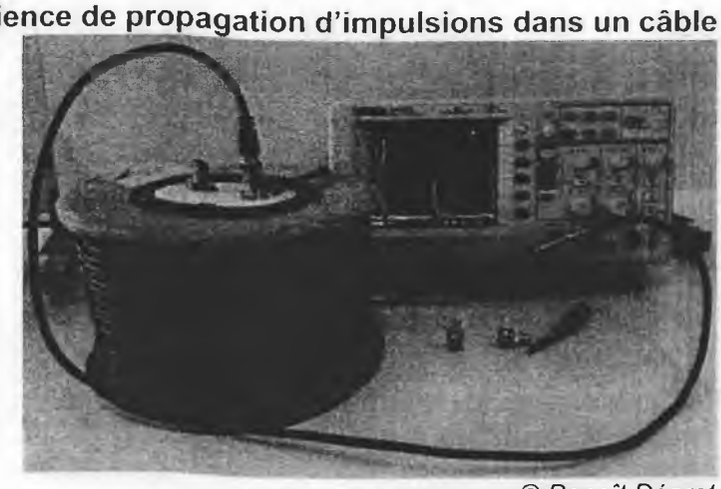
Vitesse de propagation dans le câble : $V = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$

Impédance caractéristique du câble : $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 c\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Inductance linéique et capacité linéique Λ et Γ du câble : $\Lambda = \dfrac{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}{2\pi\varepsilon_0 c^2}$ et $\Gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$

a et b sont les rayons des conducteurs, ε_r est la permittivité diélectrique relative du milieu séparant les deux conducteurs, c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Expérience de propagation d'impulsions dans un câble coaxial



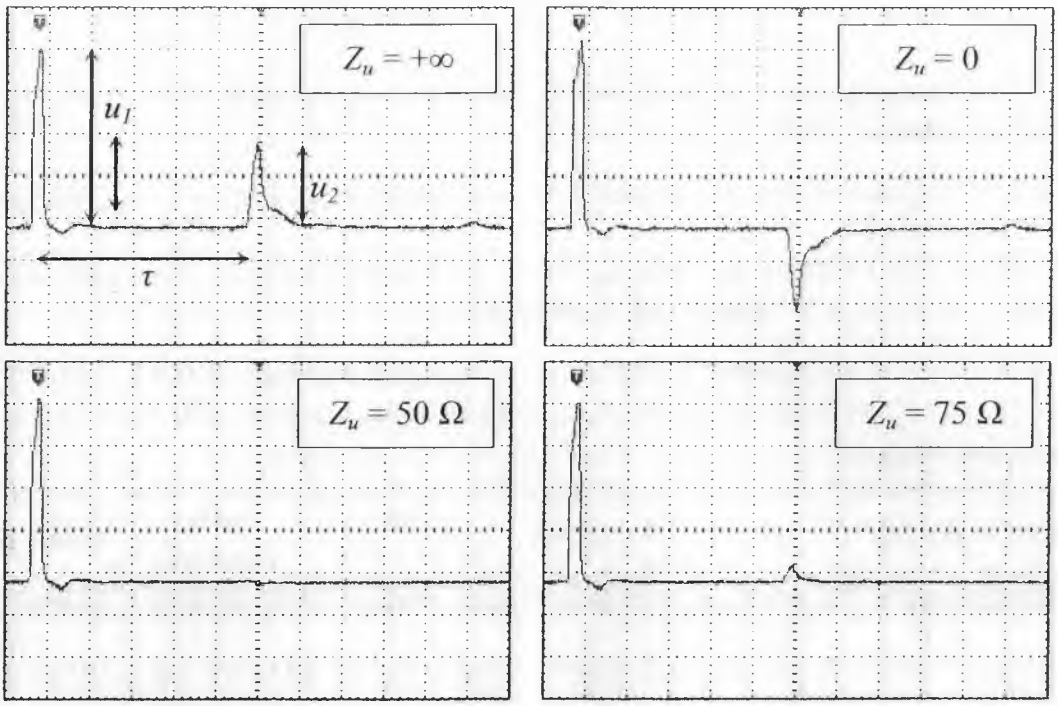
© Benoît Dépret

L'extrémité du câble est branchée sur une charge d'impédance Z_u qui peut valoir :
$Z_u = +\infty$ (extrémité ouverte), $Z_u = 0$ (court-circuit), $Z_u = 50\ \Omega$ ou $Z_u = 75\ \Omega$.

Le coefficient de réflexion en amplitude de tension à l'extrémité du câble a été obtenu dans la partie 1 et vaut :

$$r = \frac{Z_u - Z_c}{Z_u + Z_c}$$

Les captures d'écran de l'oscilloscope numérique sont présentées ci-après.



On note u_1 l'amplitude de l'impulsion incidente et u_2 celle de l'impulsion retour.
Le retard entre la réception des deux impulsions vaut $\tau = (1{,}02 \pm 0{,}02)$ µs.
Le tableau ci-dessous rassemble les mesures effectuées dans les différents cas :

$Z_u = +\infty$	$Z_u = 0$	$Z_u = 50\ \Omega$	$Z_u = 75\ \Omega$
$u_1 = (2{,}20 \pm 0{,}02)$ V	$u_1 = (2{,}20 \pm 0{,}02)$ V	$u_1 = (2{,}20 \pm 0{,}02)$ V	$u_1 = (2{,}20 \pm 0{,}02)$ V
$u_2 = (1{,}04 \pm 0{,}02)$ V	$u_2 = (-1{,}02 \pm 0{,}02)$ V	$u_2 < 20$ mV	$u_2 = (220 \pm 20)$ mV

1) Interpréter l'existence de la deuxième impulsion. En déduire la vitesse de propagation V des impulsions dans le câble. Estimer son incertitude absolue ΔV et son incertitude relative $\frac{\Delta V}{V}$. Commenter.

2) Que vaut r pour $Z_u = +\infty$? Interpréter alors la valeur de u_2 dans ce cas.

Le modèle précédent ne tient pas compte de l'absorption dans le câble. Expérimentalement, on peut cependant définir un coefficient d'absorption en amplitude $\alpha(L)$ après un trajet de longueur L dans le câble par la relation :

$$u(L) = \frac{u(0)}{\alpha(L)}$$

où $u(0)$ et $u(L)$ sont les amplitudes de tension du signal en $z = 0$ et $z = L$.
Dans le cas de la réception de signaux TNT, on utilise en fait le coefficient α_{dB} d'absorption en puissance défini en dB par 100 m de câble par la relation :

$$\alpha_{dB} = 20\log(\alpha(L)) \text{ avec } L = 100 \text{ m}$$

3) Etablir la relation entre u_1, u_2, r et $\alpha(L)$. En déduire la valeur numérique de $\alpha(L)$, puis celle de α_{dB}.

4) Commenter l'existence d'une troisième impulsion dans certains cas.

5) Interpréter le cas $Z_u = 0$.

6) Déduire du cas $Z_u = 50\ \Omega$ la valeur de l'impédance caractéristique Z_c du câble.

7) Déterminer la valeur expérimentale de r dans le cas $Z_u = 75\ \Omega$ et comparer à la valeur théorique.

Le cas $Z_u = 75\ \Omega$ permet en fait de modéliser le raccordement du câble d'impédance Z_c avec un câble d'impédance $Z_c' = 75\ \Omega$.

8) Quelle précaution faut-il prendre lors de l'installation d'un réseau câblé pour la TNT ?

9) Déduire des résultats précédents toutes les caractéristiques physiques du câble coaxial utilisé : Λ, Γ, ε_r, et le rapport des diamètres b/a.

On souhaite modifier l'installation existante en connectant le câble étudié à un câble neuf acheté dans le commerce. Les caractéristiques des câbles disponibles sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Référence	Z_c (Ω)	V/c	Γ (pF/m)	αdB (à 100 MHz)	αdB (à 400 MHz)	Diélectrique
RG-58/U	50	0,66	95	16,1	39,5	PE
RG-58/U	75	0,79	55,5	15,1	34,5	PEF
RG-59A/U	75	0,66	67,3	11,2	23	PE

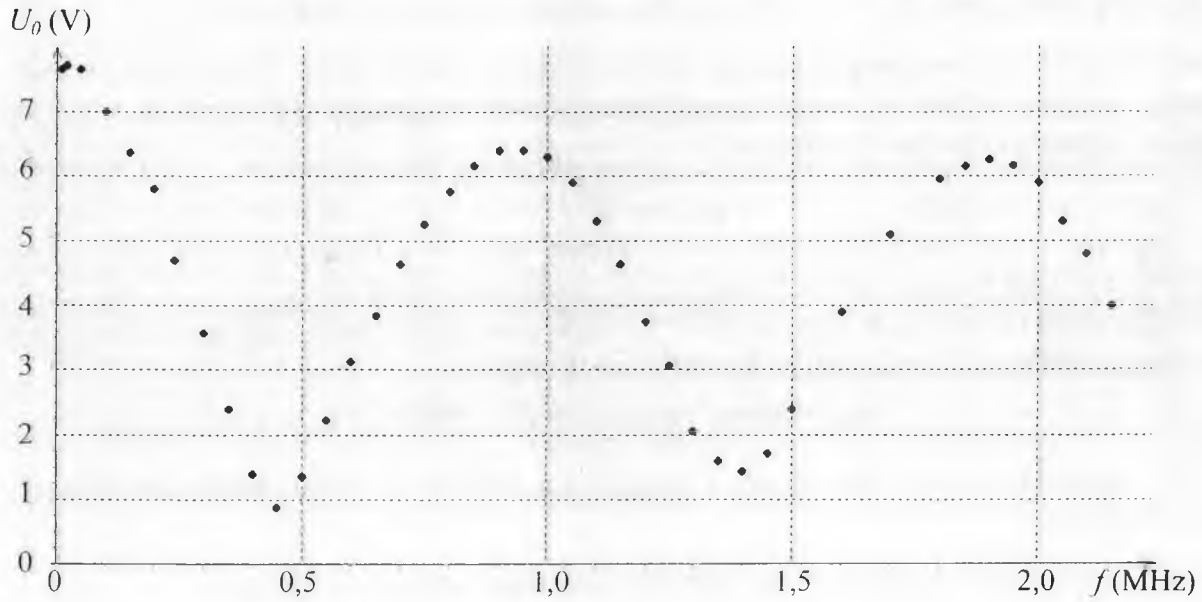
10) Quel câble faut-il utiliser de préférence dans ce cas ?

11) Quel câble utiliserait-on pour une installation neuve de réception de la TNT ?

12) Calculer numériquement le coefficient d'absorption du signal TNT en dB pour une installation neuve de 25 m de longueur.

On remplace le générateur d'impulsions précédent par un générateur basse fréquence délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f. L'extrémité du câble coaxial est ouverte ($Z_u = +\infty$) et l'on mesure à l'oscilloscope l'amplitude U_0 du signal à l'entrée du câble en fonction de la fréquence utilisée. On obtient alors le graphe expérimental ci-dessous.

Evolution de l'amplitude du signal à l'entrée du câble en fonction de la fréquence



13) Définir un critère sur la fréquence f pour pouvoir négliger le phénomène de propagation dans le câble.

14) Interpréter alors la forme de la courbe obtenue. Montrer que l'on peut retrouver la vitesse V de propagation dans le câble.

15) Pourquoi la valeur minimale de U_0 n'est-elle pas nulle ? Commenter la dépendance en fréquence de cette valeur minimale.

16) Que deviendrait l'allure du signal en prenant $Z_u = 0$?

17) Comment pourrait-on obtenir un signal d'amplitude constante quelle que soit la fréquence ?

18) Conclure : quels sont les paramètres les plus importants d'une installation câblée pour la TNT ?

8.5 Pouvoir rotatoire

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : polarisation, lame à retard.

Certains composés naturels ou synthétisés sont dits « optiquement actifs » : lorsqu'une onde lumineuse polarisée rectilignement les traverse, celle-ci ressort avec une polarisation toujours rectiligne, mais de direction différente. Expérimentalement, on mesure que l'angle de rotation α de la direction de polarisation est proportionnelle à la longueur L parcourue à l'intérieur de la substance ainsi qu'à la concentration c de celle-ci. Plus précisément, la loi expérimentale de Biot s'écrit :

$$\alpha = [\alpha] L c$$

Dans cette expression, l'angle α est exprimé en degré, la longueur L en décimètre, la concentration c de la substance active en $g.cm^{-3}$ et $[\alpha]$ désigne le pouvoir rotatoire spécifique en $°.dm^{-1}.g^{-1}.cm^3$. Pour une substance donnée, la valeur de $[\alpha]$ dépend de la longueur d'onde, de la température et du solvant. Très souvent, les tables prennent comme référence la raie D du sodium à 589 nm et une température de 20°C, le solvant utilisé étant l'eau. Par convention, l'angle de rotation est compté positivement dans le sens horaire du point de vue d'un observateur qui reçoit l'onde lumineuse (la convention est donc différente de celle utilisée pour orienter les angles par rapport à un axe). On distingue alors les substances dites « dextrogyres » et « lévogyres » qui font tourner la direction de polarisation respectivement positivement ($\alpha > 0$) et négativement ($\alpha < 0$). De telles substances optiquement actives sont nécessairement asymétriques (elles sont dites « chirales ») : elles ne sont pas images d'elles-mêmes dans un miroir. Si la solution contient plusieurs substances actives, on constate expérimentalement que l'angle de rotation de la polarisation provoquée par le passage dans la solution est la somme des angles de rotation provoquée par chaque substance active.

Fresnel a interprété le pouvoir rotatoire comme une biréfringence circulaire : le milieu ne possède pas le même indice pour deux ondes de même fréquence, de polarisations circulaires opposées (indice n_G pour la circulaire gauche et indice n_D pour la circulaire

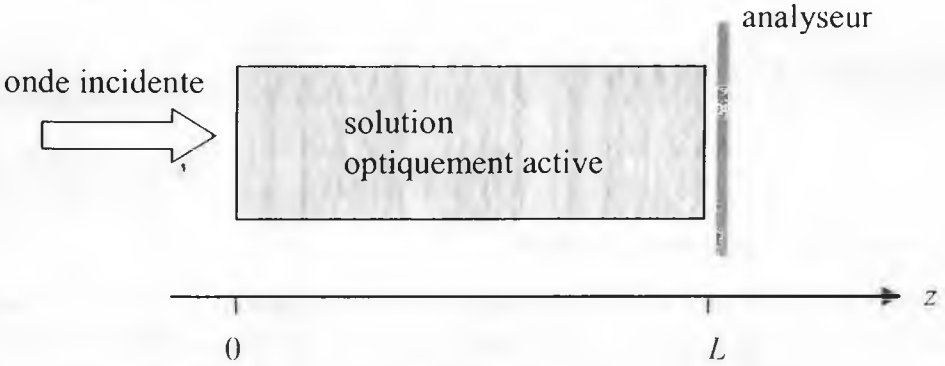
droite). Ce problème propose de montrer que le modèle de Fresnel permet de retrouver certaines caractéristiques de la loi de Biot.

On considère une onde électromagnétique plane progressive harmonique homogène (OPPHH) de longueur d'onde λ_0 dans le vide, polarisée rectilignement selon Oy, ayant un champ électrique d'amplitude E_0, se propageant dans le vide vers les z croissants (occupant le demi-espace $z < 0$), ayant une phase nulle dans le plan $z = 0$ à la date $t = 0$.

1) Ecrire l'expression du champ électrique $\vec{E}(z,t)$ de l'onde.

2) Montrer que cette onde peut être vue comme la superposition de deux ondes polarisées circulairement dont on donnera les expressions du champ électrique (dans la zone $z < 0$).

La substance optiquement active occupe tout l'espace $0 < z < L$.



3) En faisant propager chaque onde de polarisation circulaire et à l'aide du principe de superposition, comment s'écrit le champ électrique après la traversée de la substance, dans le plan $z = L$? (on négligera tout phénomène de réflexion aux interfaces)

4) On place un analyseur en $z = L$, dont l'axe fait un angle β (orienté selon Oz) avec l'axe Oy. Montrer qu'aucune onde ne passe à travers l'analyseur si β vérifie l'égalité :

$$\tan(\beta) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{\lambda_0}(n_G - n_D)L\right)}$$

On fournit pour cela le résultat suivant : $\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \tan\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Par ailleurs, on rappelle que $\frac{1}{\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

5) En déduire la polarisation de l'onde en $z = L$, c'est-à-dire après la traversée de la solution. Calculer l'angle α que fait la direction de polarisation avec l'axe Oy.

6) Si $n_D < n_G$, la solution est-elle lévogyre ou dextrogyre ? Quelle(s) hypothèse(s) manque-t-il pour retrouver la loi de Biot ?

La mesure du pouvoir rotatoire d'une solution peut servir à connaître la concentration d'une substance optiquement active ou de suivre la cinétique d'une réaction faisant intervenir une ou des substances actives. Cette technique se nomme la polarimétrie. L'exemple le plus

célèbre d'étude cinétique par polarimétrie est celui de l'hydrolyse du saccharose en milieu acide donnant du glucose et du fructose.

saccharose + eau → glucose + fructose

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + C_6H_{12}O_6$$

Le saccharose et le glucose sont des sucres dextrogyres de pouvoir rotatoire spécifique respectivement $[\alpha] = +67\ °.dm^{-1}.g^{-1}.cm^3$ et $[\alpha] = +53\ °.dm^{-1}.g^{-1}.cm^3$. Le fructose est un sucre lévogyre telle que $[\alpha] = -93\ °.dm^{-1}.g^{-1}.cm^3$. On dit souvent que l'hydrolyse du saccharose s'accompagne d'une « inversion » du pouvoir rotatoire.

7) Justifier ce terme. Préciser le taux d'avancement de la réaction lors de l'inversion.

Il est à noter que c'est en étudiant par polarimétrie la cinétique de cette réaction que Svante Arrhenius énonça en 1889 la fameuse loi qui portera ensuite son nom dans son article intitulé « *On the reaction velocity of the inversion of cane sugar by acids* ».

8.6 Dispositif optique d'un lecteur CD

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

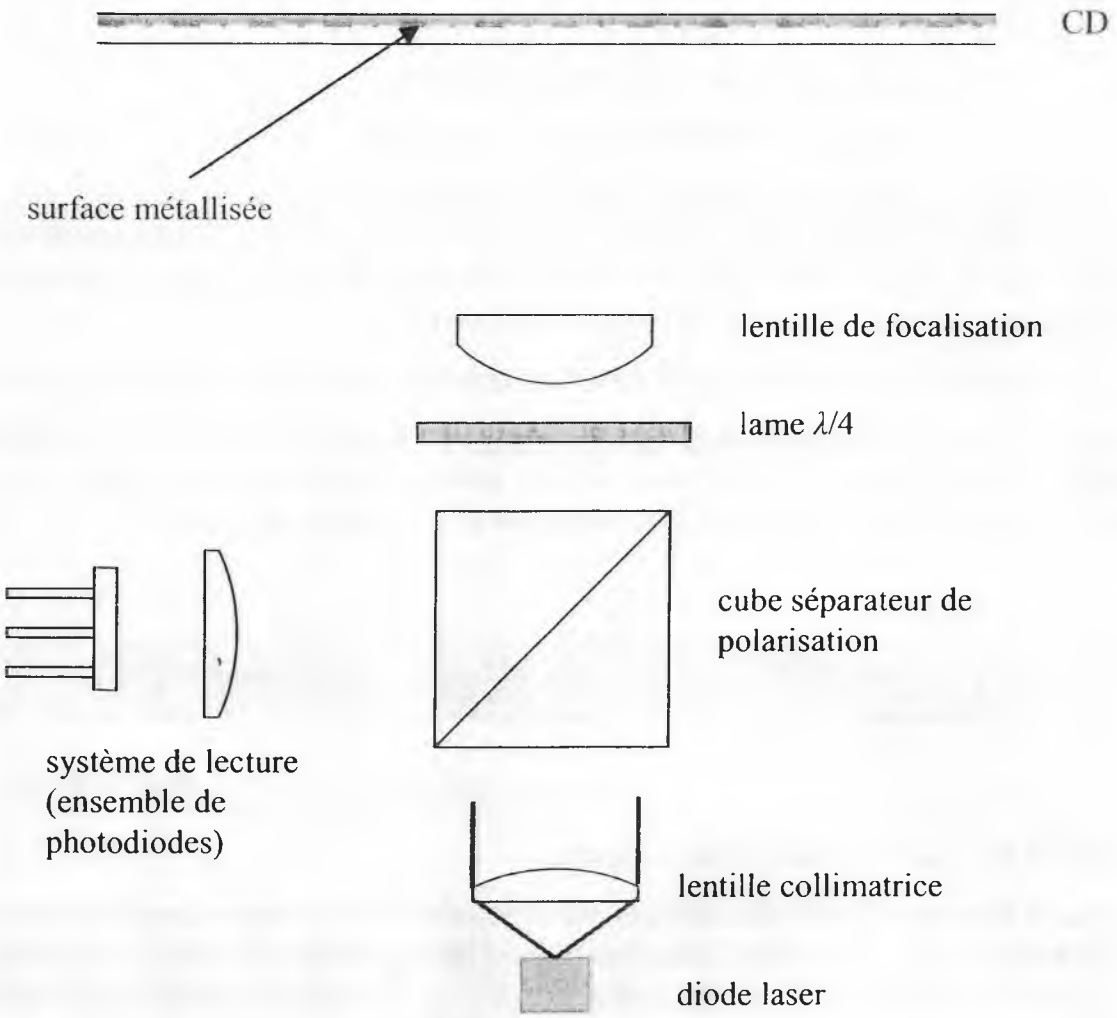
MOTS-CLES : polarisation, lame à retard.

Le dispositif optique d'un lecteur de CD est représenté sur le schéma simplifié représenté à la page suivante. Le principe de lecture des bits d'information stockés sur un disque pressé est expliqué dans le problème 1.5. La diode laser (λ = 780 nm) émet une lumière polarisée rectilignement dans le plan de la feuille. Le cube séparateur de faisceau agit ainsi : si l'onde incidente est polarisée rectilignement dans le plan de la feuille, elle traverse le cube. Par contre, si sa polarisation est rectiligne perpendiculaire à la feuille, l'onde est réfléchie sur la diagonale du cube.

On rappelle qu'à la traversée d'une interface entre deux milieux, la composante tangentielle du champ électrique se conserve et l'on assimile le métal à un conducteur parfait.

1) La surface sur laquelle se réfléchit la lumière dans le CD étant métallique, que peut-on dire de l'effet de cette réflexion sur la polarisation de l'onde ?

Justifier l'intérêt d'orienter les lignes neutres de la lame $\lambda/4$ à 45° de l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. Compléter le schéma en indiquant le trajet complet du faisceau lumineux ainsi que sa polarisation suivant l'endroit et le sens de propagation.



8.7 Du chocolat à la vitesse de la lumière !

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : équation de propagation, modes propres.

Un four à micro-ondes est une cavité parallélépipédique dans laquelle règne le champ électromagnétique créé par un magnétron. L'interaction du champ électrique correspondant avec les molécules d'eau des aliments se traduit par une dissipation de l'énergie sous forme thermique. Cependant la distribution du champ électromagnétique dans la cavité n'est pas uniforme et il est possible d'en réaliser une cartographie.

La cavité est formée de plans conducteurs supposés parfaits (situés en $x = 0$ et $x = a$, en $y = 0$ et $y = b$ et en $z = 0$ et $z = c$) et le champ électromagnétique généré par le magnétron a une fréquence de 2,45 GHz (cette fréquence a été choisie pour avoir un bon compromis entre la pénétration du champ dans les aliments et sa dissipation sous forme thermique).

On se propose de modéliser le problème en recherchant le champ électrique dans un plan horizontal sous la forme de modes propres :dont le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E}(x,y,t) = E_0 \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(m\pi \frac{y}{b}\right) \cos(\omega t)\, \vec{e_z}$$

où a et b sont les dimensions de la cavité selon Ox et Oy, n et m étant deux paramètres à déterminer. On peut montrer que, pour la fréquence utilisée, la composante tangentielle du champ électrique à proximité immédiate des parois doit être nulle.

Un four à micro-ondes est une cavité électromagnétique

Auteur : Christian Rasmussen (licence CC)

1) Que peut-on en déduire sur les paramètres n et m ? Déterminer la distance entre deux ventres consécutifs de champ électrique selon Ox et selon Oy.

2) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$ dans la cavité.

3) En déduire la condition sur ω pour que le champ proposé soit effectivement solution du problème.

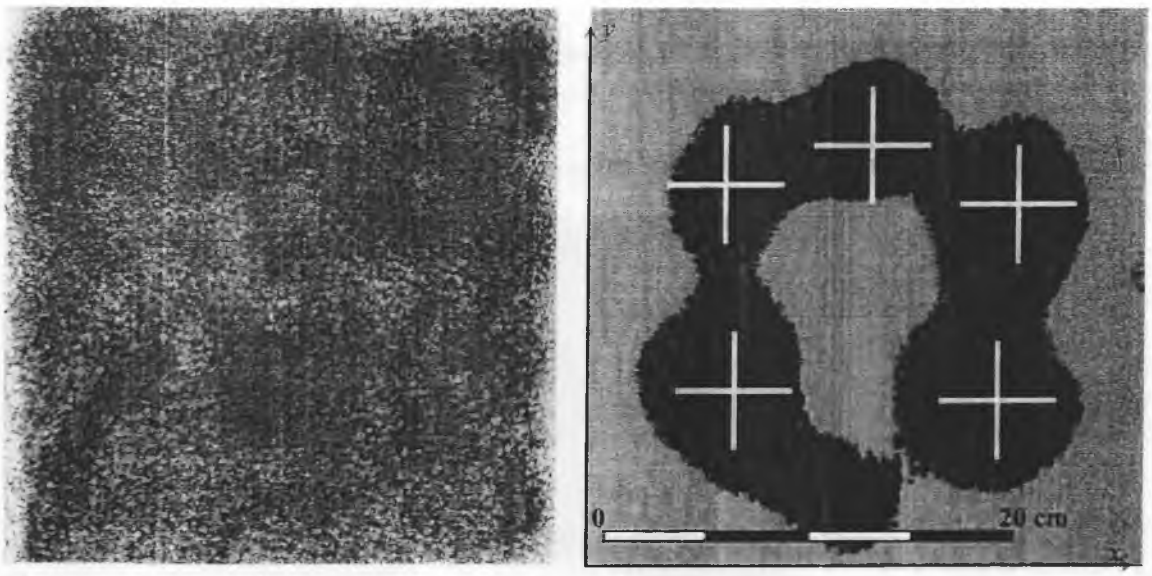
On considère un four à micro-ondes de dimensions intérieures 30 cm x 30 cm (largeur et profondeur). Afin de sonder le champ électromagnétique dans le four, on répartit uniformément sur une plaque des fins copeaux de chocolat qui vont servir de détecteur de champ électrique ! On préfèrera utiliser une plaque de chocolat réduite en copeaux plutôt que du chocolat en poudre, qui ne contient que très peu d'eau et ne réagit donc que faiblement avec le champ électrique. On analyse alors les effets du champ après quelques secondes de cuisson à pleine puissance (voir photos ci-après).

4) Interpréter les clichés expérimentaux. Sachant que l'interaction du champ électromagnétique avec la matière se fait principalement par l'intermédiaire du champ électrique, à quoi correspondent les zones fondues ? Qu'utilise-t-on en pratique pour que le chauffage des aliments soit uniforme ?

5) Mesurer la distance moyenne entre les zones fondues selon Ox et selon Oy.

6) En déduire la vitesse de la lumière.

a) Le détecteur de champ électrique est réparti uniformément sur une plaque.
b) Après quelques secondes de cuisson, le chocolat a fondu par endroit... On a retiré le chocolat qui n'a pas été affecté par le champ et on a repéré la position des zones fondues.



a) *b)*

© *Benoît Dépret*

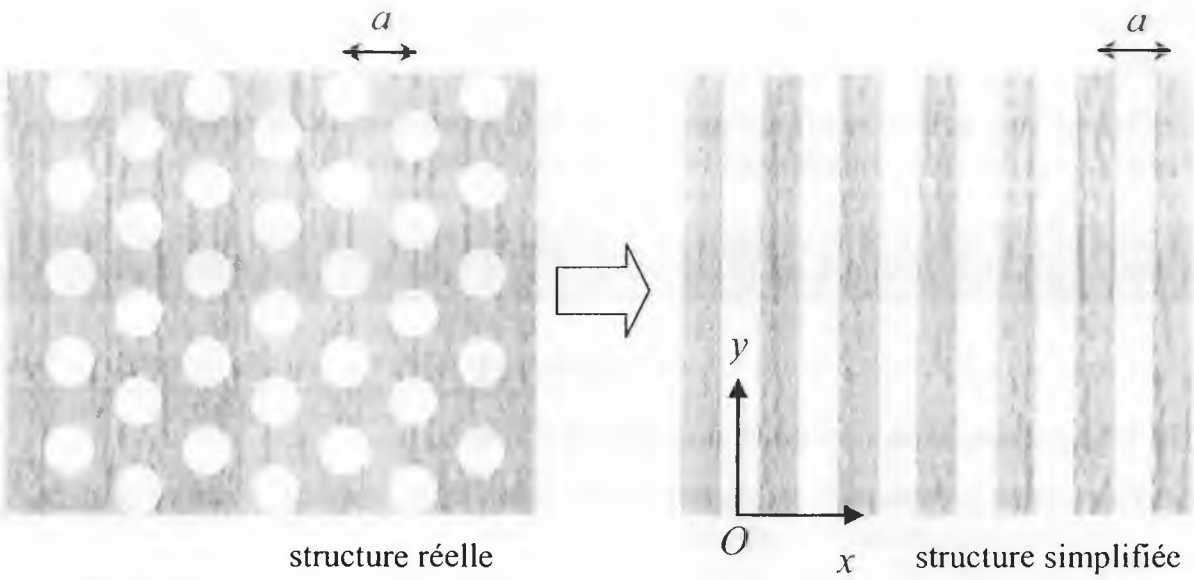
8.8 Ecrantage d'une porte de four à micro-ondes

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : série de Fourier, ondes évanescentes, énergie électromagnétique.

L'élément-clé d'un four à micro-ondes est le magnétron dont le principe de fonctionnement est le suivant : une cathode cylindrique chauffée et mise sous haute tension (plusieurs milliers de volts) libère des électrons qui sont attirés par l'anode extérieure mise à la masse. Un champ magnétique dévie leurs trajectoires et les fait tourner dans l'espace inter-électrodes (sous vide). Ils passent alors devant des cavités résonantes où vont être générées des ondes électromagnétiques dont la fréquence est reliée à la fréquence de passage des électrons. Les fours à micro-ondes du commerce sont conçus pour émettre une fréquence de 2,5 GHz environ. L'onde ainsi créée est envoyée dans le four proprement dit possédant des parois métalliques. L'onde électromagnétique va être absorbée par l'eau contenue dans les aliments, ce qui a pour effet de chauffer ces derniers. Afin de pouvoir observer l'intérieur du four, la porte est percée d'une multitude de trous. L'exercice propose de quantifier dans quelle mesure l'onde électromagnétique « déborde » de ces petites ouvertures.

En général, les trous sont disposés en structure hexagonal. Pour simplifier le raisonnement, on transforme ce motif en une grille infinie de pas a (problème unidimensionnel).



La porte se situe dans le plan $z = 0$, le four étant situé dans la partie $z < 0$. L'origine O est choisie pour être au milieu de deux bandes métalliques. On suppose connaître le champ électrique en $z = 0^+$ (i.e. à proximité immédiate de la porte, côté extérieur). Il s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(x,y,z=0^+,t) = \underline{E}_0(x)\exp(j\omega t)\vec{u}_y, \text{ avec } \int_0^a \underline{E}_0(x)dx \approx 0 .$$

La fonction $\underline{E}_0(x)$ peut être décomposée en série de Fourier sous la forme :

$$\underline{E}_0(x) = \underline{E}_{0,amp} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{E}_{n,amp}\cos(K_n x)$$

1) Justifier que la fonction $\underline{E}_0(x)$ soit décomposable en série de Fourier, justifier sa parité et donner l'expression de K_n en fonction de n et a. Que vaut $\underline{E}_{0,amp}$?

On cherche à trouver comment chaque terme de la décomposition évolue en dehors de la porte (dans le demi-espace $z > 0$). On cherche alors pour le n-ième terme une solution de la forme :

$$\underline{\vec{E}}_n(x,y,z,t) = \underline{F}_n(z)\cos(K_n x)\exp(j\omega t)\vec{u}_y$$

2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{F}_n(z)$. Ecrire la condition sur le pas a pour que le champ s'atténue lorsque l'on s'éloigne de la porte. Déterminer alors $\underline{F}_n(z)$ et faire apparaître une distance caractéristique d'atténuation d_n. Comment s'appelle ce type d'onde ?

3) Calculer le champ magnétique associé $\underline{\vec{B}}_n(x,y,z,t)$, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_n(x,y,z,t)$, puis sa valeur moyenne. On pourra poser $\underline{E}_{n,amp} = E_{n,amp}\exp(j\varphi_n)$. Commenter le dernier résultat obtenu.

4) Application numérique : a = 2 mm. Calculer numériquement la distance caractéristique sur laquelle le champ électromagnétique est présent à l'extérieur du four à micro-ondes.

5) On rajoute une vitre en plastique à 1 cm de la porte métallique pour protéger les utilisateurs. De quel facteur est atténué le champ à cette distance ?

8.9 Dispersion dans les fibres optiques

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : dispersion, atténuation, paquet d'ondes.

Ce problème traite de quelques caractéristiques des fibres optiques utilisées dans les réseaux de télécommunications longues distances.

Une fibre optique est un cylindre allongé très fin qui a la propriété de guider la lumière. Utilisée dans les télécommunications, elle peut transmettre une grande quantité d'information entre deux lieux pouvant être distants de plusieurs centaines, voire milliers de kilomètres. Le principe de la transmission numérique des données réside dans la modulation de l'intensité (ASK : *amplitude-shift keying*) ou de la phase (DPSK : *differential phase-shift keying*) de la lumière se propageant à l'intérieur de la fibre optique. En ASK, le bit 1 correspond à une présence de lumière et le bit 0 à une absence de celle-ci. Dans tout le problème, on raisonne avec une transmission au format RZ où l'intensité lumineuse retourne systématiquement à zéro entre chaque bit, de sorte que les impulsions lumineuses possèdent toutes la même durée. On note f le débit (en bits/s) envoyé dans la fibre optique.

1) Donner l'allure de l'intensité lumineuse en fonction du temps correspondant à l'octet « 10110011 » en faisant apparaître $1/f$.

On considère une fibre optique de longueur L ayant un indice effectif n_e dépendant de la longueur d'onde dans le vide λ_0 de la lumière. On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

2) Rappeler l'expression de la vitesse de phase en fonction de c et n_e.

3) Montrer que la vitesse de groupe a pour expression :

$$v_g = \frac{c}{n_e - \lambda_0 \dfrac{dn_e}{d\lambda_0}}$$

4) Laquelle des deux vitesses précédentes correspond à la vitesse de propagation des données numériques dans la fibre optique ? Justifier.

Si l'on module à la fréquence f l'intensité d'une lumière initialement monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0, le spectre de la lumière modulée possède alors un pic centré sur λ_0 de largeur $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda_0^2 f}{c} << \lambda_0$. Le caractère dispersif de la fibre optique provoque l'élargissement temporel des impulsions lumineuses au cours de leur propagation. On admet que l'augmentation $\Delta\tau$ de leur durée, appelée le délai différentiel, correspond à la

valeur absolue de la différence de temps de trajet entre une impulsion dont le spectre est centré sur λ_0-$\Delta\lambda/2$ et une impulsion dont le spectre est centré sur λ_0+$\Delta\lambda/2$.

5) Montrer que le délai différentiel des impulsions lumineuses, après la traversée de la fibre, a pour expression $\Delta\tau = |D_c L \Delta\lambda|$, avec $D_c = -\frac{\lambda_0}{c}\frac{d^2 n_e}{d\lambda_0^2}$.

La quantité D_c s'appelle la dispersion chromatique de la fibre optique.

6) Quelle est l'expression de $\Delta\tau$ dans le cas où l'on met en série une fibre optique de longueur L_1 et de dispersion chromatique $D_{c\,1}$ avec une fibre optique de longueur L_2 et de dispersion chromatique $D_{c\,2}$?

On énonce une règle pratique des télécommunications : pour que les effets de la dispersion ne soient pas pénalisants, le délai différentiel doit rester inférieur au dixième de la durée entre deux impulsions consécutives.

7) Expliquer pourquoi la dispersion empêche la transmission des données si le délai différentiel devient du même ordre de grandeur que la durée entre les impulsions.

8) Pour une fibre optique monomode conventionnelle (type G652) ayant une dispersion chromatique à 1,55 µm valant D_c = +17 ps/nm/km, jusqu'à quelle distance peut-on transmettre le signal sans correction de la dispersion pour un débit (sur un canal) de 10 Gbits/s ? Commenter.

La dispersion de la fibre optique dépend d'une part du matériau utilisé (généralement de la silice), mais aussi du diamètre du cœur de la fibre (plus précisément du profil d'indice pour une fibre à gradient d'indice). Ainsi, lors de la fabrication de la fibre, il est possible de la concevoir de manière à diminuer et même à annuler la dispersion chromatique. Cependant, une dispersion chromatique nulle tout le long du trajet est à éviter à cause d'effets non linéaires indésirables (mélange entre différents canaux). De ce fait, on privilégie des fibres optiques optimisées où la dispersion chromatique est faible, mais non nulle, typiquement +3 ps/nm/km à 1,55 µm (type G655). Pour des liaisons longues distances, il est alors nécessaire de compenser cette dispersion chromatique laissée volontairement non nulle. Un des moyens possibles consiste à intercaler sur le trajet une certaine longueur d'une fibre optique spécifique, appelée « fibre à compensation de dispersion » (DCF), possédant une très forte dispersion chromatique négative, de l'ordre de -5000 ps/nm/km.

Une autre caractéristique des fibres optiques à prendre en considération est leur atténuation. Les fibres optiques en silice utilisées dans les réseaux longues distances ont une atténuation minimale autour de 1,55 µm, de l'ordre de 0,2 dB/km (la notion de chute en décibel est la même que celle utilisée pour l'intensité acoustique des ondes sonores). Typiquement, quand l'intensité lumineuse n'est plus que de 1% de sa valeur initiale, la lumière est réamplifiée, généralement avec un amplificateur à fibre dopée à l'erbium (EDFA : *erbium-doped fiber amplifier*). Cependant, après environ 500 km, il est nécessaire de régénérer le signal dont la qualité a fortement diminué sous peine de ne plus pouvoir lire les données. Cette régénération passe par une conversion optique-électrique-optique, dont les équipements sont assez coûteux.

Cécile, habitant à Marseille, désire communiquer via internet avec son frère Maxime en mission humanitaire au Bangladesh (pour l'association *AJHA France,*

« http://www.chakma.org/ »). La liaison s'effectue par le réseau SEA-ME-WE-4 dont la route est indiquée sur la carte suivante. Le Bangladesh est relié au réseau au point 14.

Route du câble sous-marin de télécommunications en fibres optiques SEA-ME-WE-4

Auteur : J.-P. Lon (licence CC)

9) Estimer le nombre d'amplificateurs optiques EDFA ainsi que le nombre de régénération du signal nécessaire pour que Cécile puisse communiquer avec Maxime.

10) Justifier la nécessité de placer un système de compensation de dispersion chromatique avant chaque régénération. Dans le cas de l'utilisation d'une fibre DCF, calculer la longueur L' de fibre nécessaire.

Les lecteurs intéressés par la compensation de dispersion chromatique dans les réseaux de télécommunications par fibres optiques peuvent consulter la thèse de Julien MAURY soutenue en 2003 à l'adresse :

http://epublications.unilim.fr/theses/2003/maury-julien/maury-julien.pdf).

8.10 Une impulsion supraluminique ?

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : dispersion, atténuation, énergie électromagnétique, vitesse de groupe.

On examine dans ce problème la possibilité d'une impulsion lumineuse de se propager dans du verre de silice à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide.

On considère une onde plane progressive harmonique homogène (OPPHH) de pulsation ω et de longueur d'onde *dans le vide* notée λ_0 se propageant selon les x croissants dans du verre de silice ayant un indice complexe $\underline{n}$ dépendant de λ_0. Le champ électrique de l'OPPHH s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp\left(j\left(\underline{k}x - \omega t\right)\right)\vec{u}_y \text{ avec } E_0 \text{ réel.}$$

1) Rappeler la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω.

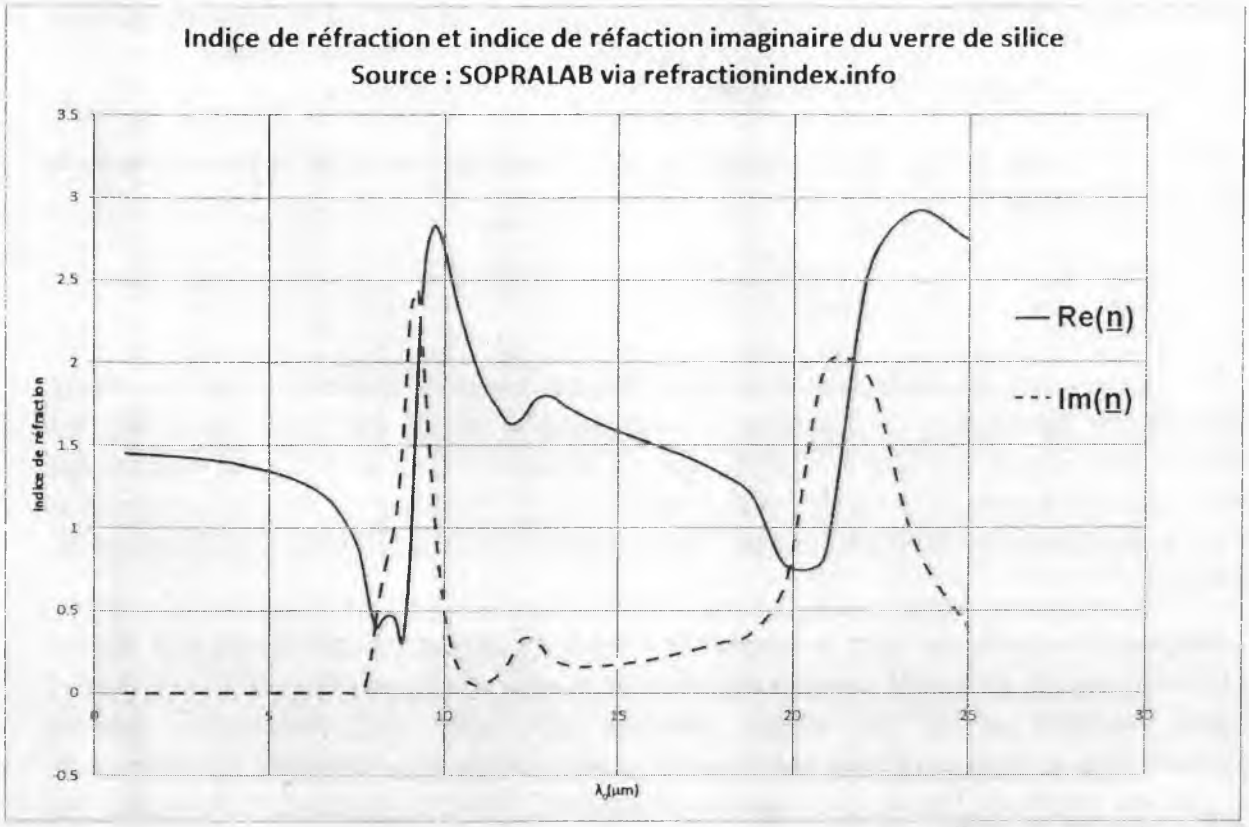
2) Exprimer le champ magnétique de l'onde $\underline{\vec{B}}(x,t)$ en notation complexe.

On pose $n' = \mathrm{Re}(\underline{n}) > 0$ et $n'' = \mathrm{Im}(\underline{n}) > 0$.

3) Donner les expressions réelles des champs électrique et magnétique. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ oscillent-ils en phase dans le cas général ? Définir et exprimer la vitesse de phase v_φ de l'OPPHH en fonction de c et n'.

4) Exprimer la puissance surfacique Φ_s transportée par l'onde à une abscisse x à la date t, puis exprimer sa valeur moyenne temporelle. Introduire une distance caractéristique d'atténuation D_{att} de la puissance lumineuse dans le matériau que l'on exprimera en fonction de n'' et λ_0.

5) A partir du document suivant, donner les valeurs numériques de v_φ et D_{att} dans du verre de silice pour λ_0 = 15 µm puis 20 µm (on précisera le domaine du spectre électromagnétique dans lequel on se situe). Commenter.



auteur : Euterpia (domaine public)

6) En s'appuyant sur ces courbes, commenter en quelques lignes le caractère dispersif d'une part et absorbant d'autre part du verre de silice suivant la longueur d'onde dans le domaine entre 1 et 25 µm.

Pour calculer à quelle vitesse se propage une impulsion lumineuse, on raisonne sur une onde formée par la superposition de deux OPPHH de même amplitude (E_0 pour le champ électrique), de même polarisation et de pulsations voisines ω_1 et ω_2, se propageant toutes deux selon les x croissants. Pour simplifier les calculs, on suppose que la phase des deux ondes est nulle en $x = 0$ et $t = 0$ et l'on néglige l'absorption du milieu dans les deux questions suivantes ($n'' \approx 0$).

7) Montrer que le champ électrique de l'onde peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(x,t) = 2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(k_0 x - \omega_0 t), \text{ avec } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 .$$

Exprimer les paramètres Δk, k_0 et ω_0 en fonction de ω_1, ω_2, $n'(\omega_1)$ et $n'(\omega_2)$.

8) Tracer l'allure de $E(x,t)$ en fonction de x à une date t fixée. L'onde peut ainsi être vue comme une succession d'impulsions lumineuses de pulsation ω_0 se propageant à la vitesse v_{env}. Donner l'expression de v_{env}.

On admet la généralisation de cette étude pour une impulsion unique dont le spectre est centré sur la pulsation ω_0 se propageant dans un milieu faiblement dispersif et absorbant : l'enveloppe de celle-ci se déplace à la vitesse dite de groupe, ayant pour expression $v_g = \dfrac{1}{\left(\dfrac{d\,\mathrm{Re}(\underline{k})}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}}$.

9) Exprimer la vitesse de groupe pour une impulsion centrée sur la longueur d'onde *dans le vide* λ_0 en fonction de c, λ_0, $n'(\lambda_0)$ et $\dfrac{dn'}{d\lambda_0}$.

10) Montrer que la vitesse de groupe est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide si et seulement si :

$$\frac{dn'}{d\lambda_0} > \frac{n'(\lambda_0) - 1}{\lambda_0}$$

11) Donner une interprétation graphique de cette inégalité à partir du graphe $n'(\lambda_0)$. En déduire les intervalles de longueur d'onde entre 1 et 25 µm pour lesquelles les impulsions lumineuses ont une enveloppe qui se déplacent dans du verre de silice à des vitesses supraluminiques (c'est-à-dire plus grande que c). Estimer pour chaque intervalle la distance la plus courte au bout de laquelle l'intensité lumineuse a diminué d'un facteur 100. Commenter.

La recherche des conditions pour lesquelles la vitesse de groupe est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide peut paraître anecdotique et sans intérêt pratique. Il n'en est rien ! On peut montrer qu'il est même possible de créer des matériaux, appelés « métamatériaux », dans lesquelles la vitesse de groupe est de signe opposée à la vitesse de phase (sur un intervalle limité de fréquence cependant). Etudiés de manière théorique dès 1967 mais réalisés seulement depuis un peu plus d'une dizaine d'années, les métamatériaux ont des propriétés étonnantes : ils possèdent un indice de réfraction réel négatif et amplifient les ondes évanescentes ! Considérés dans les premiers temps comme une curiosité de laboratoire, les métamatériaux peuvent en fait être utilisés pour créer d'une part des « superlentilles », permettant d'obtenir des systèmes optiques ayant des résolutions bien inférieures à la longueur d'onde, et d'autre part des « capes d'invisibilité », permettant à un objet entouré du métamatériau d'être complètement invisible ! Proposées sur le papier en 2006, les premières réalisations de capes d'invisibilité voient peu à peu le jour, comme par exemple celle réalisée récemment en aluminium par l'Institut Fresnel de Marseille.

Les lecteurs intéressés par les métamatériaux peuvent consulter l'article suivant :

FELBACQ D., *Cristaux photoniques et métamatériaux: vers un contrôle total de la lumière*. Bull. Un. Prof. Phys. Chi., Juin 2005, vol. 99, No 875, pp. 19-23.

Enfin, l'article ci-dessous propose un montage électrique réalisable au lycée, qui utilise un filtre constitué d'un RLC série, générant entre l'entrée et la sortie un retard de groupe négatif, ce phénomène étant l'analogue d'une vitesse de groupe supraliminique ou de signe opposée à la vitesse de phase :

CARPENTIER R. et SIGWARTH O. : *fabrication d'un filtre à remonter le temps*, Bull. Un. Prof. Phys. Chi., juin 2006, vol. 100, p 757-776.

8.11 A propos du débit d'absorption spécifique

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : énergie électromagnétique, atténuation, absorption.

Le développement de la téléphonie et des systèmes de communication sans fil (Wifi™ et Bluetooth® par exemple) impose une large exposition à des champs électromagnétiques de fréquences et de puissances variées. L'influence de ces rayonnements sur le corps humain et la santé n'est pas parfaitement connue et l'on invoque souvent le principe de précaution visant à minimiser l'exposition des plus jeunes et des femmes enceintes. L'analyse des caractéristiques des systèmes d'émission d'ondes électromagnétiques actuels permet d'en savoir plus sur les effets potentiels sur le corps humain.

Un téléphone portable est aussi un émetteur de signaux Wifi™ et Bluetooth®

La puissance moyenne d'émission d'un téléphone dépend de son mode de fonctionnement. Les téléphones de type GSM émettent des signaux par impulsions alors que les téléphones de type UMTS émettent de façon continue. La puissance moyenne d'un téléphone GSM est estimée à un huitième de sa puissance maximale affichée.

Le tableau suivant regroupe les caractéristiques de quelques types de téléphones.

Téléphone	GSM 900	GSM 1800	UMTS 2100
Fréquence du signal	900 MHz	1 800 MHz	2 100 MHz
Puissance maximale	2 W	1 W	0,125 W
Fonctionnement	à impulsions	à impulsions	continu

1) Comparer les puissances moyennes des différents téléphones.

Pour communiquer, un téléphone portable reçoit et émet des signaux électromagnétiques avec une station relais. On supposera dans toute la suite que les émissions d'ondes se font de façon isotrope, c'est-à-dire de la même manière dans toutes les directions de l'espace.

2) Comparer la puissance surfacique moyenne reçue à 100 m d'une antenne relais de puissance moyenne 100 W avec celle reçue à 10 cm d'un téléphone portable de type UMTS 2100. Commenter.

Des normes européennes limitent en fait la valeur maximale du champ électrique autorisée dans les lieux de vie. Celles-ci sont regroupées dans le tableau suivant en fonction de la fréquence :

Fréquence du signal	900 MHz	1 800 MHz	2 100 MHz
Champ électrique maximal	41 $V.m^{-1}$	56 $V.m^{-1}$	61 $V.m^{-1}$

On considère un téléphone émettant en continu la puissance moyenne P de façon isotrope.

3) En assimilant localement la structure de l'onde électromagnétique rayonnée à celle d'une onde plane progressive harmonique, montrer que l'amplitude du champ électrique de l'onde reçue à la distance d de l'émetteur peut se mettre sous la forme :

$$E_0 = K\frac{\sqrt{P}}{d}$$

où K est une constante que l'on déterminera. Calculer K numériquement en précisant son unité.

4) A quelle distance minimale du téléphone faudrait-il se placer pour respecter les normes européennes ? Déterminer de même la distance minimale à laquelle il faudrait se placer de l'antenne émettrice de puissance 100 W. Ces normes sont-elles difficiles à respecter ?

En fait les normes européennes sont basées sur des valeurs d'exposition temporaire aux champs électromagnétiques, d'une durée inférieure à 6 minutes, permettant à l'organisme de se rétablir, alors que les systèmes de télécommunication actuels imposent une exposition prolongée à ces rayonnements. Certains pays, comme l'Allemagne, adoptent ainsi des

valeurs de précaution en fonction de l'impact sur l'organisme (toutes fréquences confondues) :

Impact sur l'organisme	Aucun	Faible	Fort	Très fort
Champ électrique maximal ($V.m^{-1}$)	< 0,006	0,006 à 0,06	0,06 à 0,6	> 0,6

5) Déterminer les nouvelles distances minimales à laquelle il faut se placer d'une antenne relais ou d'un téléphone portable pour éviter tout impact fort sur l'organisme suite à une exposition prolongée au rayonnement. Commenter.

Un émetteur Wifi™ domestique émet en continu un signal de puissance typique 50 mW à une fréquence de 2 450 MHz (ou 5 200 MHz selon la bande utilisée). Une oreillette Bluetooth® fonctionne également à 2 450 MHz avec une puissance de 2,5 mW pour une portée de 20 m environ.

6) Evaluer l'impact sur l'organisme d'un émetteur Wifi™ placé dans une chambre ou dans une école. Comparer au cas de l'oreillette Bluetooth® et du téléphone portable. Commenter.

Les conséquences du rayonnement électromagnétique sur la santé peuvent être nombreuses (maux de tête, insomnies, et même cancers...) mais aucun lien direct n'a encore été établi. L'étude la plus simple concerne les effets thermiques engendrés par un champ électromagnétique pénétrant dans l'organisme. Les constructeurs de téléphones portables ont ainsi défini un indice de pénétration d'ondes dans le corps, appelé *DAS* (*débit d'absorption spécifique*, ou *SAR* en anglais pour *specific absorption rate*). Le DAS, exprimé en W/kg, est la puissance absorbée sous forme thermique par unité de masse de corps humain (typiquement la tête et le cerveau) et doit être indiqué sur la notice de chaque téléphone. La législation en France impose un DAS maximum de 2 W/kg pour les téléphones portables.

7) Un four à micro-ondes émet un rayonnement électromagnétique de fréquence 2,45 GHz – comme pour le Wifi™ ou le Bluetooth® ! – absorbé par les molécules d'eau composant les aliments, et permet d'amener un verre de 20 cl d'eau à ébullition en 1 minute. Estimer le DAS correspondant à cette situation. Commenter.

On se propose de modéliser les effets thermiques du rayonnement électromagnétique en assimilant l'organisme à un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope de permittivité diélectrique complexe :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(1 - j\beta\right)$$

où ε_r est la permittivité diélectrique relative réelle du milieu et β une caractéristique du milieu.

L'onde électromagnétique traversant le milieu admet un champ électrique complexe d'amplitude E_{0t} de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_{0t}\, e^{j(\omega t - \underline{k}z)}\, \vec{e_x}$$

où $\underline{k} = k' - jk''$ vérifie la relation de dispersion dans le milieu, lorsque $\beta << 1$:

$$\underline{k} = \sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{j\beta}{2}\right)$$

8) Ecrire la forme réelle du champ électrique de l'onde. En déduire l'interprétation physique du coefficient β et définir une distance caractéristique δ d'absorption de l'onde dans le milieu.

Le vecteur de Poynting moyen associé à l'onde électromagnétique dans le milieu s'écrit dans ce cas :

$$< \vec{\Pi}(z) > = \frac{E_{0i}^{\ 2}\sqrt{\varepsilon_r}}{2\mu_0 c} e^{-2\frac{z}{\delta}} \vec{e_z}$$

9) A l'aide d'un bilan thermique dans la tranche de matériau comprise entre z et $z + dz$, déterminer la puissance thermique totale P_{th} absorbée dans un matériau de section S et de longueur L. Interpréter simplement cette expression sous la forme d'un bilan macroscopique.

On trouvera ci-après quelques caractéristiques de tissus humains vis-à-vis de la propagation d'ondes électromagnétiques : la permittivité diélectrique relative ε_r, la longueur d'onde λ dans le milieu et la distance caractéristique d'absorption δ.

Caractéristiques de différents tissus organiques humains vis-à-vis des ondes électromagnétiques

Fréquence : 900 MHz			
Milieu	ε_r	λ **(m)**	δ **(m)**
Os	12,454	0,093782	0,13157
Moelle osseuse	5,5043	0,14161	0,31058
Cerveau Substance grise	52,725	0,045182	0,041536
Cerveau Substance blanche	38,886	0,052826	0,056661
Graisse	5,462	0,14192	0,24412
Muscle	55,032	0,044277	0,042355

Fréquence : 1 800 MHz			
Milieu	ε_r	λ **(m)**	δ **(m)**
Os	11,781	0,048202	0,066649
Moelle osseuse	5,3716	0,071717	0,18005
Cerveau Substance grise	50,079	0,023316	0,027256
Cerveau Substance blanche	37,011	0,027174	0,035563
Graisse	5,3494	0,07182	0,15705
Muscle	53,549	0,022587	0,029193

Fréquence : 2 100 MHz			
Milieu	ε_r	λ **(m)**	δ **(m)**
Os	11,592	0,041631	0,055479
Moelle osseuse	5,3362	0,061673	0,1533
Cerveau Substance grise	49,51	0,020107	0,023949
Cerveau Substance blanche	36,6	0,023425	0,030914
Graisse	5,3169	0,061751	0,13658
Muscle	53,163	0,019438	0,025761

Fréquence : 2 450 MHz			
Milieu	ε_r	λ (m)	δ (m)
Os	11,381	0,035987	0,045779
Moelle osseuse	5,2969	0,053053	0,12884
Cerveau Substance grise	48,911	0,017341	0,020723
Cerveau Substance blanche	36,167	0,020196	0,026473
Graisse	5,2801	0,053113	0,11702
Muscle	52,729	0,016731	0,02233

Fréquence : 5 200 MHz			
Milieu	ε_r	λ (m)	δ (m)
Os	9,946	0,018013	0,016821
Moelle osseuse	5,0189	0,025643	0,048454
Cerveau Substance grise	44,861	0,0084941	0,00835
Cerveau Substance blanche	33,238	0,0098823	0,010278
Graisse	5,0104	0,025658	0,046834
Muscle	49,278	0,0081242	0,0088291

10) Les milieux proposés sont-ils dispersifs ? Justifier la relation entre ε_r et λ. Peut-on considérer que l'on a $\beta << 1$ pour les gammes de fréquences et les tissus étudiés ?

11) Quels sont les tissus les plus affectés par l'onde électromagnétique ? Comment cet impact varie-t-il avec la fréquence ? Commenter.

On se propose de caractériser plus précisément l'impact des ondes électromagnétiques sur le cerveau, organe le plus sensible du corps humain. Le cerveau humain est essentiellement constitué de substance blanche, entourée par une fine couche de substance grise, le tout protégé par de la matière osseuse, le crâne. Le diamètre moyen de la tête vaut environ $D = 15$ cm.

12) Estimer la masse volumique du cerveau, sachant qu'un cerveau humain coule dans l'eau mais flotte dans le formol. On donne la masse volumique du formol : $1{,}08.10^3$ kg.m^{-3}.

13) Montrer que dans le cas du cerveau on peut simplifier l'expression de la puissance thermique totale P_{th} absorbée par le milieu.

14) Le champ électrique dans le milieu s'exprime en fonction du champ électrique incident par la relation :

$$E_{0t} = \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon_r}} E_0$$

Déterminer P_{th} en fonction de la puissance P de l'émetteur, de la distance d entre l'émetteur et le cerveau, du diamètre D de la tête et des caractéristiques du milieu. Commenter.

15) En déduire l'expression du DAS dans le cas du cerveau.

On considère l'utilisation pratique d'appareils électromagnétiques domestiques dans les situations suivantes :

Appareil	Fréquence	Puissance	Distance *d*
Téléphone portable UMTS	2 100 MHz	125 mW	1,0 cm
Emetteur Wifi™	2 450 MHz	50 mW	50 cm
Emetteur Wifi™	5 200 MHz	50 mW	50 cm
Oreillette Bluetooth®	2 450 MHz	2,5 mW	1,0 cm

Concernant les fours à micro-ondes domestiques, le niveau de fuite maximal toléré par les normes est de 5 mW.cm^{-2}, mesuré à 5 cm de la porte. En pratique, le niveau de fuite ne dépasse pas 0,5 mW.cm^{-2} pour les modèles récents.

16) Déterminer numériquement le DAS dans chacune des situations proposées. Conclure.

8.12 Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS

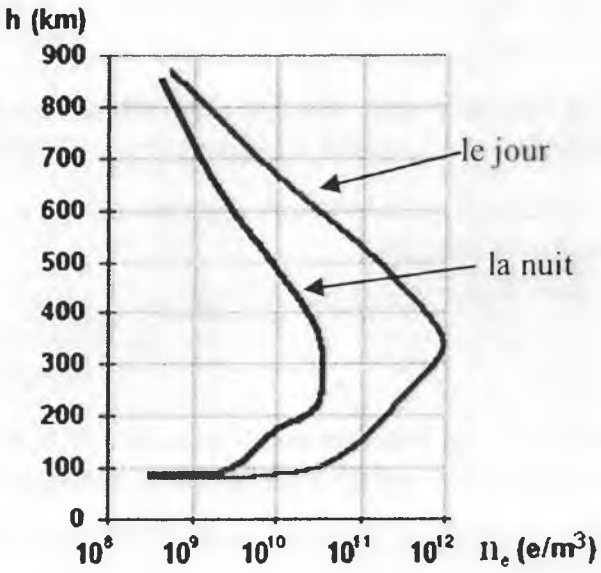
TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : plasma, dispersion.

On étudie dans ce problème l'influence de l'ionosphère sur les ondes électromagnétiques utilisées pour la localisation par satellite (GPS) et les moyens de s'en affranchir.

DOCUMENT n°1 : l'ionosphère

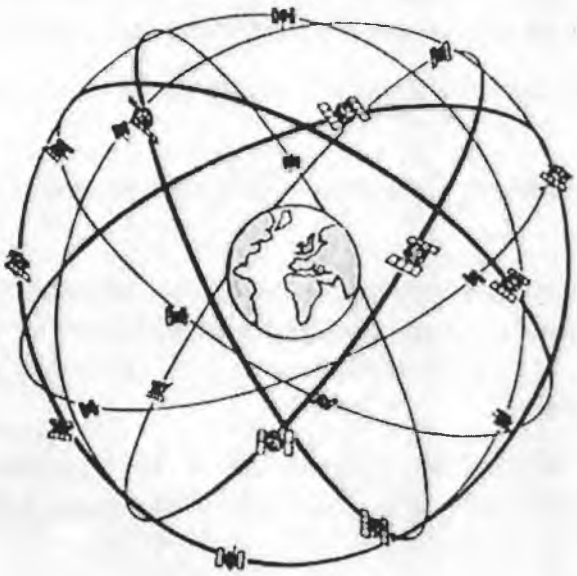
L'ionosphère forme la partie haute de l'atmosphère. Elle se situe entre 100 km et 1000 km d'altitude environ. Sous l'effet du rayonnement solaire, l'ionosphère forme ce que l'on appelle un « plasma », c'est-à-dire qu'elle est partiellement ionisée (d'où son nom). La densité volumique des électrons libres de se déplacer au sein de l'ionosphère fluctue énormément, et cela suivant de nombreux facteurs, comme par exemple la position du soleil dans le ciel, l'activité solaire ou encore la température. Sur le graphe ci-contre est représentée la densité typique d'électrons libres en fonction de l'altitude en plein jour et en pleine nuit.



DOCUMENT n°2 : le système de localisation GPS

La localisation par GPS (*global positioning system*) a été développée par l'armée américaine au début des années 70. Disponible depuis déjà de nombreuses années pour le domaine civil, elle s'appuie sur la présence de 24 satellites en orbite autour de la Terre à environ 20 000 km d'altitude. La localisation de l'appareil GPS est déduite de la mesure des temps de trajet d'ondes électromagnétiques émises par quatre satellites et reçues par l'appareil. Il faut bien au minimum quatre mesures pour déterminer d'une part les trois coordonnées de l'appareil GPS que sont sa latitude, sa longitude et son altitude et d'autre part pour synchroniser l'horloge de l'appareil qui est beaucoup moins précise que les horloges atomiques contenues dans les différents satellites.

Réseau des 24 satellites du système GPS



Les transmissions GPS s'effectuent par modulation de phase numérique sur deux bandes de fréquence :
- la bande L1 de fréquence centrale f_1 = 1575,42 MHz
- la bande L2 de fréquence centrale f_2 = 1227,60 MHz.

On rappelle les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

Charge d'un électron : $-e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C,
Masse d'un électron : $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg,
Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}8\ 10^{-12}$ F.m^{-1},

ainsi que la formule : $\Delta\vec{E} = \vec{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \vec{\text{rot}}\left(\vec{\text{rot}}\left(\vec{E}\right)\right)$.

1) A la lecture des documents et en utilisant vos connaissances sur la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma, expliquer qualitativement le problème que pose la traversée de l'ionosphère des signaux GPS.

La suite du problème propose de quantifier ce problème. On note n_e la densité volumique (supposée dans un premier temps uniforme) d'électrons libres de se mouvoir dans l'ionosphère (on néglige tout frottement) et l'on néglige le déplacement des ions.

2) Justifier ce dernier point.

On considère dans le plasma une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω. On admet que l'ionosphère reste localement neutre même en présence de l'onde.

3) Ecrire l'équation du mouvement d'un électron libre. On négligera dans la suite l'accélération convective. Faire une autre approximation.

4) Montrer que l'ionosphère se comporte comme un conducteur avec une conductivité complexe $\underline{\sigma}$ que l'on explicitera.

5) Calculer la puissance volumique moyenne cédée aux électrons par le champ électromagnétique. Commenter.

6) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique de l'onde. En déduire la relation de dispersion $k = f(\omega)$. Faire apparaître une pulsation ω_c.

7) Décrire en quelques mots l'onde si $\omega < \omega_c$. A quel type de filtre peut-on assimiler le plasma ?

8) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour $\omega > \omega_c$. Tracer l'allure des graphes.

9) Calculer la fréquence de coupure f_c typique de l'ionosphère en plein jour et en pleine nuit. Expliquer pourquoi la transmission radio en AM (vers les 100 kHz) ne nécessite qu'un émetteur national alors que la transmission FM (émission autour de 100 MHz) nécessite des antennes régionales.

10) Montrer que le retard des signaux dû à la traversée d'une longueur L d'ionosphère (comparé au cas d'une propagation dans le vide) vaut approximativement :

$$\tau_{retard} = \frac{L}{c}\frac{f_c^2}{2f^2}$$

11) Estimer la longueur L d'ionosphère que doit traverser les ondes provenant d'un satellite situé à l'horizon. On rappelle que le rayon de la Terre vaut 6400 km.

12) Estimer dans le cas le plus défavorable l'erreur induite par la traversée de l'ionosphère sur l'estimation de la distance entre le satellite et l'appareil GPS. Est-ce une erreur systématique qui peut être enlevée de manière automatisée ?

13) Expliquer en quoi l'utilisation simultanée des deux bandes L1 et L2 permet de résoudre le problème.

Afin de mieux prendre en compte l'effet de l'ionosphère sur les ondes radio, le projet SPECTRE, développé initialement par le Ministère français de la Recherche, l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), mis en service depuis 2004, propose une cartographie en temps réel du TEC (*Total Electron Content*) au dessus de l'Europe. Le TEC est par définition le nombre total d'électrons libres présents dans une colonne verticale d'ionosphère de 1 m^2 de section.

14) En prenant en compte la dépendance de n_e suivant l'altitude, adapter la formule de la question 10 et montrer que, dans le cas où le satellite est à la verticale de l'appareil GPS, le retard ionosphérique τ_{retard} dépend directement du TEC.

Les images du projet SPECTRE sont visibles à l'adresse :

http://www.noveltis.com/spectre/

8.13 Phénomène d'iridescence

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : interface entre deux milieux, interférences.

Il est courant de pouvoir admirer de jolies couleurs vives à la surface d'une bulle de savon. Le phénomène est appelé « iridescence » du grec ancien *iris* qui veut dire arc-en-ciel. On peut voir également le même phénomène sur une nappe d'huile ou d'essence déposée sur de l'eau. Cependant, les couleurs sont moins vives et moins contrastées que dans le cas d'une bulle. Ce problème propose de comprendre l'origine de l'iridescence et de justifier cette différence de contraste.

Iridescence provoquée par une fine nappe d'essence sur du macadam mouillé

© Renaud Carpentier

On considère un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 supposés réels. Une onde électromagnétique plane progressive harmonique homogène (OPPHH), repérée par l'indice i, arrive en incidence normale sur le dioptre depuis le milieu d'indice n_1. Elle donne naissance à une onde transmise (repérée par l'indice t) et une onde réfléchie (repérée par l'indice r).

1) Que signifie concrètement le fait de considérer n_1 et n_2 réels ?

2) Rappeler la structure d'une OPPH électromagnétique.

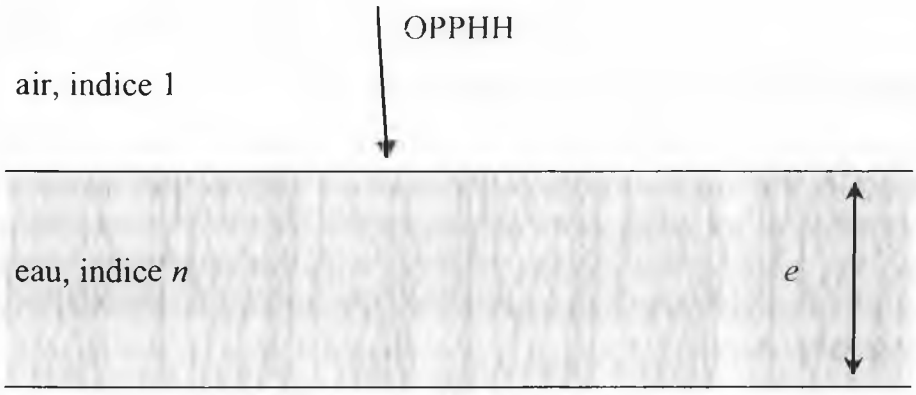
3) En admettant la continuité des champs électrique et magnétique totaux à la traversée du dioptre, montrer que le coefficient de réflexion pour le champ électrique vaut :

$$r_E = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Exprimer de même le coefficient de transmission $t_E = \dfrac{E_t}{E_i}$ en fonction de n_1 et n_2.

4) Montrer que les expressions de r_E et t_E permettent de vérifier que la puissance émergeant du dioptre est bien égale à la puissance incidente.

On désire calculer le contraste des interférences produites par une bulle de savon. On considère pour cela une lame d'eau plane (indice $n = 1{,}33$) d'épaisseur e, entourée d'air d'indice 1. La lame est éclairée par une OPPHH en incidence normale de longueur d'onde dans le vide λ_0.



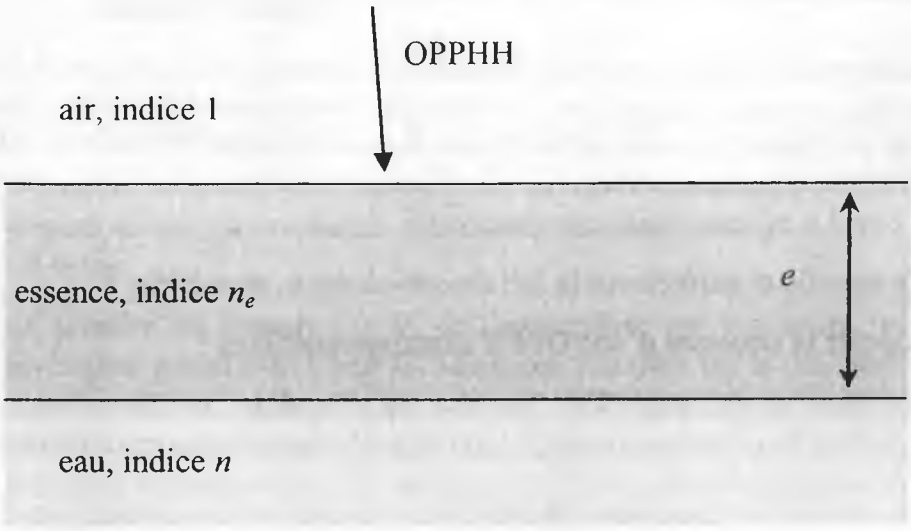
5) En pratique, à quelle condition peut-on supposer que la lame d'eau savonneuse est plane ?

6) Dessiner les différentes ondes issues de l'onde incidente. Pour plus de lisibilité, on prendra un angle d'incidence faible, mais non nul.

7) Montrer, à l'aide d'un calcul numérique, que l'on peut considérer de manière approchée qu'il s'agit d'une interférence à seulement deux ondes en réflexion.

8) Exprimer le déphasage $\Delta\varphi$ entre ces deux ondes. Pourquoi la lumière réfléchie par la bulle est-elle parfois colorée ? Pourquoi ne l'est-elle pas forcément ?

9) Calculer le contraste C du phénomène d'interférence en réflexion.



10) Reprendre la même démarche dans le cas d'une fine nappe d'essence (indice $n_e = 1{,}45$) sur de l'eau (indice $n = 1{,}33$) et conclure.

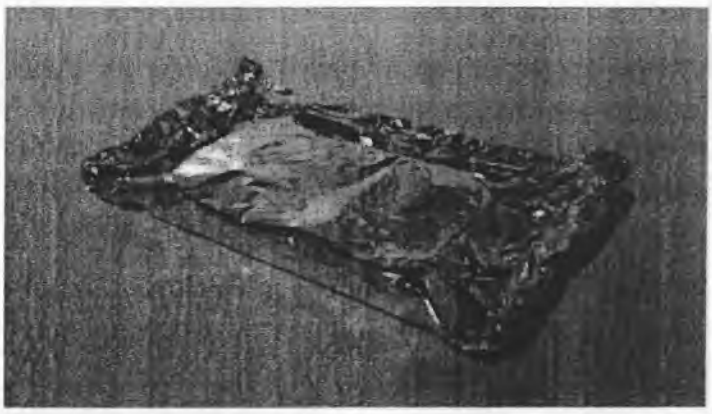
8.14 Une feuille d'aluminium comme écran

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : plasma, équations de Maxwell, ARQS, énergie électromagnétique, interface entre deux milieux.

On propose dans ce problème de répondre à la question suivante : est-il possible de bloquer les ondes d'un téléphone portable à l'aide d'une simple feuille d'aluminium ?

Le téléphone enfermé dans la feuille d'aluminium recevra-t-il les appels ?



© *Benoît Dépret*

On fournit les données numériques suivantes :

Vitesse de la lumière : $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}
Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26.10^{-6}$ H.m^{-1}
Charge de l'électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C
Masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1}

1ère partie : modélisation du métal dans le domaine des radiofréquences

On considère un métal homogène de dimension supposée infinie. On note γ_0 sa conductivité électrique en régime statique. On suppose qu'il y a n électrons libres par unité de volume, n étant supposé indépendant du temps. Chaque électron possède une masse m et une charge électrique $-e$. On soumet ce métal à un champ électrique permanent et uniforme $\vec{E}_0$. On admet, suivant le modèle de Drüde, que l'interaction des charges fixes sur un électron libre est assimilable à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$.

1) Ecrire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ d'un électron libre.

2) Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ que l'on exprimera et définir un temps τ_1 de relaxation du métal à partir duquel la loi d'Ohm est valable. En déduire la relation entre γ_0, e, n et h.

3) L'aluminium possède une masse volumique de 2,7 g.cm^{-3}, une masse molaire de 27 g.mol^{-1} et une conductivité de $3{,}8.10^7$ S.m^{-1}. Sachant que chaque atome d'aluminium libère trois électrons de conduction, donner les valeurs numériques de n et τ_1.

On soumet maintenant ce conducteur à un champ électrique sinusoïdal $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, auquel on associe le champ complexe $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$.

4) Montrer que le modèle de Drüde permet de définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ que l'on exprimera en fonction de γ_0, τ_1 et ω.

5) Justifier que pour une fréquence de l'ordre du GHz, on peut assimiler la conductivité électrique de l'aluminium à sa conductivité statique γ_0, c'est-à-dire que la loi d'Ohm locale reste encore valable à de telles fréquences.

6) Justifier numériquement qu'à une telle fréquence, il est légitime de se placer dans l'ARQS magnétique. Comment se simplifie l'une des équations de Maxwell ?

On suppose qu'une brusque perturbation extérieure crée un déplacement inhomogène d'électrons libres de telle sorte qu'apparaît localement au sein du métal une densité volumique de charge non nulle. On peut alors montrer (résultat admis) que le retour à l'équilibre s'effectue par des oscillations temporelles de la densité volumique de charges dont l'amplitude décroît exponentiellement avec un temps caractéristique τ_1.

7) Expliquer pourquoi il est légitime de considérer que l'aluminium reste localement neutre lorsque l'on étudie la propagation d'une onde électromagnétique de fréquence de l'ordre du GHz se propageant en son sein.

2ème partie : Propagation d'une onde électromagnétique dans un métal

On considère une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation ω qui se propage vers les z croissants à l'intérieur d'un métal semi infini, occupant le demi-espace $z > 0$, et de conductivité réelle γ_0. Le champ électrique de l'onde en notation complexe a la forme $\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}z)}\, \vec{e}_x$ avec E_0 réel. On note $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\, \vec{e}_z = (k' + jk'')\, \vec{e}_z$ le vecteur d'onde complexe, avec k' et k'' réels.

8) Préciser la polarisation de l'onde.

9) Ecrire les équations de Maxwell appliquées à l'onde plane progressive harmonique dans le métal en se plaçant dans les approximations validées dans la 1ère partie.

10) En déduire la relation de dispersion : $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega$.

On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$.

11) Comment se nomme cette grandeur ? Montrer que le champ électrique réel de l'onde s'écrit dans le métal :

$$\vec{E}(z,t) = E_0\, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

12) Déterminer également le champ magnétique réel $\vec{B}(z,t)$.

13) En déduire l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(z,t)$. Calculer sa valeur moyenne temporelle et commenter sa dépendance vis-à-vis de z.

3ème partie : Réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal

Le conducteur métallique précédent occupe toujours le demi espace $z > 0$, tandis que l'air, assimilé au vide, occupe le demi espace $z < 0$. On considère une onde plane progressive harmonique de pulsation ω arrivant depuis l'air en incidence normale sur le métal, son champ électrique en notation complexe s'écrivant $\underline{\vec{E}_i}(z,t) = \underline{E_{0i}}\, e^{j(\omega t - k_0 z)}\, \vec{e}_x$.

14) Que vaut k_0 ? Comment s'écrit le champ magnétique $\underline{\vec{B}_i}(z,t)$ de l'onde incidente en notation complexe ?

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans l'air et une onde transmise dans le métal, dont les champs électriques en notation complexe ont pour expressions respectives $\underline{\vec{E}_r}(z,t) = \underline{E_{0r}}\, e^{j(\omega t + k_0 z)}\, \vec{e}_x$ et $\underline{\vec{E}_t}(z,t) = \underline{E_{0t}}\, e^{j(\omega t - \underline{k} z)}\, \vec{e}_x$, $\underline{k}$ ayant été déterminé dans la partie précédente. On admet que les champs électrique et magnétique sont continus au niveau de l'interface air-métal.

15) Déterminer les expressions des coefficients complexes de réflexion $\underline{r} = \dfrac{\underline{E_{0r}}}{\underline{E_{0i}}}$ et de transmission $\underline{t} = \dfrac{\underline{E_{0t}}}{\underline{E_{0i}}}$ du champ électrique.

16) Définir puis exprimer le coefficient de réflexion en puissance R en fonction des seuls paramètres ω, c et δ. On rappelle que la valeur moyenne du vecteur de Poynting peut s'obtenir simplement à partir des amplitudes complexes des champs :

$$<\vec{\Pi}> = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right)$$

où $\underline{\vec{B}}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{\vec{B}}$.

17) Utiliser la conservation d'énergie électromagnétique à proximité immédiate de l'interface air-métal pour en déduire très simplement le coefficient de transmission en puissance T.

18) Que se passe-t-il dans le cas limite où δ tend vers zéro ? Indiquer le déphasage subi par l'onde lors de la réflexion sur le métal.

Epilogue

Un rouleau de 30 mètres de papier d'aluminium vendu dans le commerce fait un rayon intérieur de 2,0 cm et un rayon extérieur de 2,5 cm. En France, la téléphonie mobile 4G utilise des bandes radiofréquences situées aux alentours de 0,8 GHz, 1,8 GHz et 2,6 GHz.

19) A partir de ces données et de résultats obtenus dans les parties précédentes, répondre à la question soulevée en début d'énoncé en estimant la fraction de puissance des ondes émises par un téléphone portable qui peuvent traverser une feuille d'aluminium.

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 8 :

10.16	Restauration de monuments par laser
10.17	Modulateur électro-optique
10.18	Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique

CHAPITRE 9

MECANIQUE QUANTIQUE

9.1 Délocalisation d'un neutron

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : états stationnaires, dispersion, paquet d'ondes, inégalité de Heisenberg, relation de de Broglie.

Le vide est un milieu non dispersif pour les ondes électromagnétiques. Ce n'est en revanche pas le cas pour des particules possédant une masse. Ce problème propose d'illustrer ce phénomène en étudiant de manière semi-quantitative l'étalement de la fonction d'onde d'un neutron libre évoluant dans le vide.

1) Justifier la première phrase de l'énoncé.

Afin de simplifier la modélisation, on raisonne sur un problème unidimensionnel. Le neutron, de masse m, se déplaçant selon l'axe Ox, est décrit par la fonction d'onde $\psi(x,t)$. Dans l'hypothèse où le neutron est isolé et non relativiste, sa fonction d'onde vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$, où H est l'opérateur Hamiltonien.

On cherche dans un premier temps les états stationnaires du neutron de la forme $\psi(x,t) = A\exp(i(kx-\omega t))$.

2) Etablir la relation de dispersion reliant k et ω. En déduire la vitesse de phase v_φ. En quoi voit-on que le vide est dispersif ?

3) En admettant que, pour ces états stationnaires, l'opérateur Hamiltonien s'identifie à l'énergie E de la particule, établir le lien entre E et ω. Comment s'appelle cette relation ?

4) En exploitant l'expression classique de l'énergie de la particule, expliquer comment la relation de dispersion permet de retrouver la relation de de Broglie.

5) Pourquoi ce type de fonction d'onde ne peut pas représenter un état quantique réel du neutron ?

On considère que le neutron est représenté par une fonction d'onde ayant la forme d'un paquet d'ondes se déplaçant selon les x croissants. A la date $t = 0$, le paquet d'ondes est

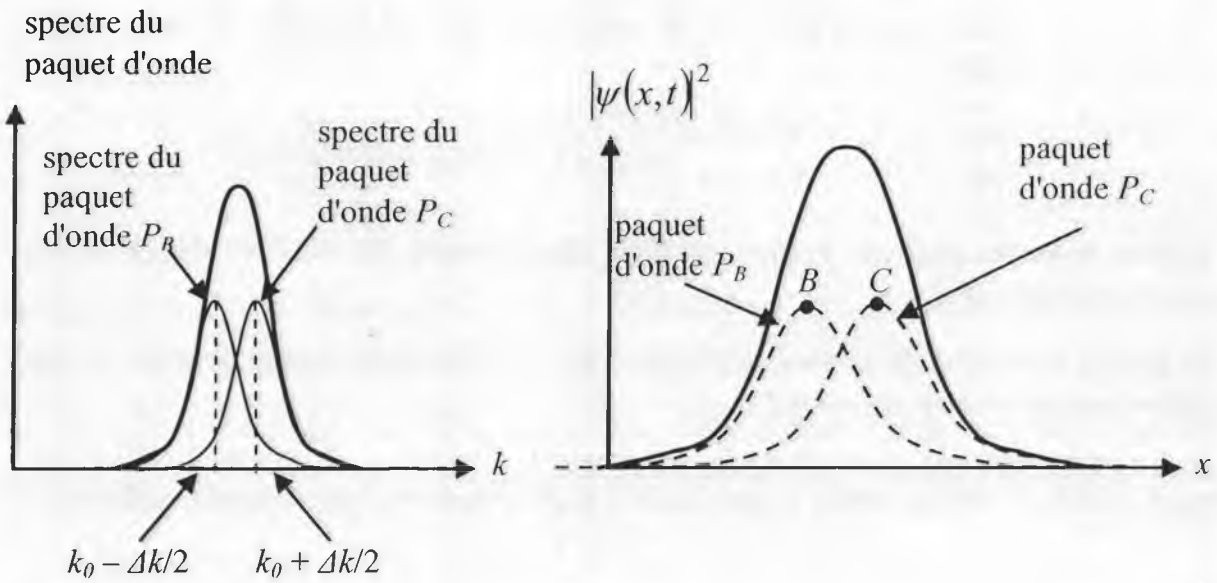
centré en $x = 0$ et possède une largeur spatiale Δx_0. Le spectre spatial du paquet d'ondes consiste un pic unique centré sur la fréquence spatiale k_0 de largeur $\Delta k << k_0$ et l'on suppose que les différentes sinusoïdes formant le paquet d'ondes sont toutes en phase à la date $t = 0$. On montre alors que la fonction d'onde initiale prend la forme $\psi(x,t=0) = A(x)\exp(ik_0x)$, où $A(x)$ est réel.

6) Donner l'allure du paquet d'ondes initial, représenté par le graphe $\mathrm{Re}(\psi(x,t=0))$ en fonction de x en faisant apparaître Δx_0 et $\frac{2\pi}{k_0}$. Tracer également l'allure de $|\psi(x,t=0)|^2$. Que peut-on dire sur la localisation du neutron ?

7) Indiquer la relation entre Δk et Δx_0 sachant que l'inégalité d'Heisenberg spatiale est en fait une égalité en ordre de grandeur à la date $t = 0$, les composantes du spectre étant toutes en phase initialement.

8) En partant de la relation de dispersion, exprimer la vitesse de déplacement de l'enveloppe du paquet d'ondes v_P. Que retrouve-t-on ?

Pour étudier de manière semi-quantitative l'étalement du paquet d'ondes, on peut voir le spectre spatial du paquet d'ondes comme la superposition de deux pics côte à côte centrés sur $k_0+\Delta k/2$ et $k_0 - \Delta k/2$ (voir graphe ci-dessous). Du point de vue spatial, le paquet d'ondes peut donc être vu comme la superposition de deux paquets d'ondes notés P_B et P_C de fréquences spatiales centrales respectivement $k_0 - \Delta k/2$ et $k_0 + \Delta k/2$. Le vide étant dispersif, les paquets d'ondes vont se propager à des vitesses différentes. On note B (respectivement C) la position du maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes P_B (respectivement P_C). Initialement ($t = 0$), les points B et C sont confondus. A la date $t > 0$, on peut montrer que la largeur spatial du paquet d'ondes résultant de la superposition de P_B et P_C est de l'ordre de $\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x_0^2 + BC^2}$.



9) Exprimer la distance BC en fonction de Δx_0, m, $\hbar$ et du temps t.

10) A partir de quelle date τ le paquet d'ondes a-t-il doublé de largeur ?

11) Tracer l'allure du graphe $\Delta x(t)$ pour différentes valeurs de Δx_0. En quoi ce réseau de courbes illustre-t-il l'inégalité d'Heisenberg spatiale ?

Pour les applications numériques, on donne :

$\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s, $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} et masse d'un neutron $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg.

Les neutrons issus de la fission de l'uranium ont une vitesse moyenne d'éjection de l'ordre de 20 000 km.s^{-1}. Dans un réacteur nucléaire dit « à neutrons thermiques » (comme les réacteurs à eau pressurisée, d'acronyme *REP*, équipant les centrales nucléaires françaises), les neutrons sont ralentis par diffusions ou chocs successifs sur des matériaux modérateurs (tels que l'eau) pour finalement atteindre une vitesse d'équilibre thermique avec la matière. Plus un neutron est lent, plus la probabilité qu'il soit capté par un atome ^{235}U est grande. L'action des modérateurs, qui consiste à fortement ralentir les neutrons, permet donc d'obtenir une réaction de fission nucléaire auto-entretenue au sein du réacteur.

12) Calculer la vitesse quadratique moyenne v_q d'un « neutron thermique » dans un réacteur à 350°C.

On suppose qu'initialement, le neutron, possédant une vitesse v_q, possède une densité de probabilité de présence selon sa direction de propagation de 1 nm de largeur. Dans un réacteur de type *REP*, le libre parcours moyen des neutrons est de l'ordre du centimètre.

13) Estimer l'incertitude moyenne de la position du neutron juste avant un choc. Peut-on traiter le neutron évoluant dans le réacteur comme une particule classique ?

9.2 De la mécanique quantique relativiste ?

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : états stationnaires, dispersion, vecteur courant de probabilité.

Le principe de Galilée sur la relativité du mouvement est mise en défaut à des vitesses proches de celle de la lumière c, auquel cas il est nécessaire de faire intervenir la théorie de la relativité restreinte développée par Einstein en 1905. De même, la mécanique classique de Newton permet de décrire la gravitation uniquement dans l'hypothèse des basses vitesses (comparées à c) et des faibles masses. Dans le cas contraire, il faut utiliser la théorie de la relativité générale qu'Einstein acheva en 1915, actuellement nécessaire dans les *GPS* afin d'obtenir une précision suffisante de localisation. Peu de temps après, dans les années 1920, une autre théorie mettait également en défaut la mécanique classique, cette fois-ci à l'échelle microscopique. On découvrit que la matière exhibait de nombreuses propriétés que seule la physique quantique parvenait à expliquer. Cependant, la mécanique quantique, basée entre autres sur l'équation de Schrödinger, est incompatible avec la relativité restreinte. C'est pourquoi Klein et Gordon proposèrent indépendamment en 1926 une équation alternative que l'exercice propose d'étudier.

Dans la théorie relativiste, l'énergie E d'une particule de masse m est liée à sa quantité de mouvement p par la relation :

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad \text{(relation n°1)}$$

1) Montrer que, dans la limite classique (c'est-à-dire non relativiste) où la vitesse de la particule est très faible devant la vitesse de la lumière, l'énergie de la particule est égale à l'énergie de masse au repos, dont on donnera l'expression en fonction de m et c, additionnée de l'énergie cinétique classique.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans un problème unidimensionnel où la particule est décrite en mécanique quantique par la fonction d'onde $\psi(x,t)$. On admet que la généralisation de l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi(x,t) \qquad \text{(relation n°2)}$$

où H est l'opérateur Hamiltonien.

En s'appuyant sur les relations n°1 et n°2 et en utilisant le principe de correspondance entre la physique quantique et la physique classique, Klein et Gordon ont proposé une équation aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction d'onde $\psi(x,t)$ d'une particule évoluant dans le vide :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi(x,t) = 0$$

Dans la suite, on considère un état stationnaire de la particule ayant une énergie $E > mc^2$, la fonction d'onde $\psi(x,t)$ pouvant alors se factoriser en $\varphi(x)\chi(t)$.

2) Déterminer l'expression de $\chi(t)$ à une constante multiplicative près sachant que l'opérateur Hamiltonien s'identifie alors à l'énergie E. Qu'appelle-t-on relation de Planck-Einstein ?

On se place dans le cas où $\varphi(x) = \exp(ikx)$.

3) Que dire de la particule représentée par une telle fonction d'onde ? Etablir la relation de dispersion reliant le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ et la pulsation ω de la fonction d'onde vérifiant l'équation de Klein-Gordon.

4) Pour une particule sans masse, que retrouve-t-on ?

5) Dans le cas d'une particule non relativiste pour laquelle $E \approx mc^2$, simplifier la relation de dispersion et en déduire la vitesse de groupe. Que retrouve-t-on ?

Les résultats des deux questions précédentes pourraient laisser croire que l'équation de Klein-Gordon est un bon candidat pour remplacer l'équation de Schrödinger afin d'obtenir une relation compatible avec les principes de la relativité restreinte. Cependant, cette équation souffre d'un problème majeur qui l'empêche de représenter une réalité physique. En effet, il est impossible de trouver une densité linéique de probabilité $\rho(x,t)$ et un courant de probabilité $\vec{J}(x,t)$ vérifiant l'équation locale de conservation de la probabilité.

6) Que représentent physiquement $\rho(x,t)$ et $\vec{J}(x,t)$?

7) Dans le cas non relativiste, comment déduit-on $\rho(x,t)$ de la fonction d'onde $\psi(x,t)$? Rappeler également l'expression de $\vec{J}$ dans le cas d'un état stationnaire et l'interpréter physiquement.

8) Par analogie avec la conservation de la charge en électromagnétisme, écrire l'équation de continuité reliant $\rho(x,t)$ et $\vec{J}(x,t)$ traduisant qu'« aucune probabilité n'est perdue ».

En imposant que $\psi(x,t)$ vérifie l'équation de Klein-Gordon et non l'équation de Schrödinger, on montre que les expressions classiques de $\rho(x,t)$ et $\vec{J}(x,t)$ ne vérifient plus l'équation de conservation de la probabilité. Il est possible de trouver des expressions la vérifiant, mais dans ce cas, $\rho(x,t)$ peut être négatif, ce qui est physiquement impossible. En 1928, Dirac proposa une équation compatible quant à elle avec l'équation de continuité. L'analyse de celle-ci l'amena à introduire les antiparticules. Le positron, antiparticule de l'électron, fut observé expérimentalement dans une chambre à brouillard en 1932, ce qui valida l'interprétation de Dirac. A noter que le positron est à la base d'une technique moderne d'imagerie médicale : la tomographie par émission de positrons (*TEP*). On peut enfin préciser que le cadre rigoureux permettant de concilier la physique quantique et la relativité restreinte est la théorie quantique des champs. Actuellement, de nombreux chercheurs en physique théorique tentent de développer un modèle prenant également en compte la gravitation, c'est-à-dire regroupant à la fois la physique quantique et la relativité générale. Il existe de très nombreux modèles, comme la théorie des supercordes, mais aucun de ces modèles n'a pu à ce jour trouver une validation expérimentale.

9.3 Des couleurs électroniques

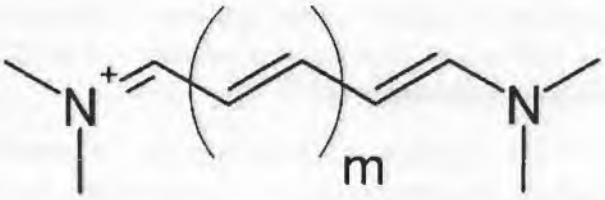
TECHNICITE : * INITIATIVE : **

MOTS-CLES : relation de de Broglie, niveaux d'énergie, spectre.

Certaines molécules ont la propriété d'absorber la lumière. En fonction de la longueur d'onde des radiations absorbées, le composé apparaît alors coloré. On utilise ainsi depuis la fin du 19ème siècle des molécules de la famille des cyanines à chaîne ouverte (ou streptocyanines), de formule générale $R_2N^+=CH-[CH=CH]_n-NR_2$ (avec R un radical carboné de type CH_3), en photographie et dans l'industrie des colorants. Les cyanines peuvent également servir de marqueurs fluorescents en médecine et en biologie. On se propose de modéliser simplement le comportement quantique de ces nanostructures linéaires vis-à-vis de la lumière et de prévoir la couleur de ces composés.

Les streptocyanines (*strepto*= « *tordu* ») sont des chaînes carbonées linéaires terminées à chaque extrémité par un atome d'azote.

La chaîne entre parenthèses est répétée *m* fois.



La chaîne carbonée principale de la molécule de cyanine est une alternance de simples liaisons C–C et de doubles liaisons C=C permettant aux électrons π, par effet mésomère, d'être délocalisés sur l'ensemble de la molécule entre les deux atomes d'azote N. Tous les électrons délocalisés partagent donc le même espace confiné et se répartissent en conséquence sur les différents niveaux d'énergie de la boîte quantique ainsi créée. La lumière absorbée par la molécule permettra en fait aux électrons de changer de niveau d'énergie et d'effectuer des transitions vers des niveaux d'énergie plus grande.

On rappelle les valeurs de la masse d'un électron $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg et de la constante de Planck $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s.

1) De quelle couleur apparaît un composant qui absorbe la lumière bleue ? la lumière verte ? Pourquoi les plantes vertes sont-elles vertes ?

On modélise une molécule de cyanine par une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. On note λ_n la longueur d'onde du mode propre n pouvant exister sur la corde.

2) Représenter l'allure des trois premiers modes propres de la corde et exprimer la longueur d'onde λ_n du mode propre n en fonction de L et n.

La dualité onde-corpuscule en mécanique quantique permet d'associer à toute particule une onde de longueur d'onde λ_{DB}, appelée longueur d'onde de de Broglie, qui s'exprime en fonction de sa quantité de mouvement p et de la constante de Planck h par la relation (dite de de Broglie) :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

3) Préciser les conditions aux limites pour l'onde de matière associée à un électron délocalisé dans une molécule de cyanine. Commenter.

4) En identifiant la longueur d'onde de de Broglie d'un électron à la longueur d'onde du mode propre n dans la molécule de longueur L, exprimer l'énergie cinétique E_n de l'électron dans le niveau n en fonction de n, h, L et de sa masse m.

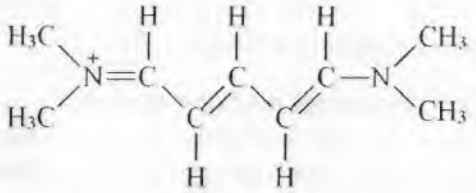
5) Représenter les niveaux d'énergie d'un électron dans la molécule. Montrer que le confinement spatial dans la molécule se traduit par une énergie minimale non nulle de l'électron. Ce résultat était-il prévisible ?

6) On note m l'indice de répétition de la chaîne carbonée dans la molécule. Sachant que seuls les deux électrons π sont délocalisés pour chaque double liaison, déterminer le nombre d'électrons dans la boîte quantique formée par la cyanine-m. Comment ces électrons se répartissent-ils dans les niveaux d'énergie ?

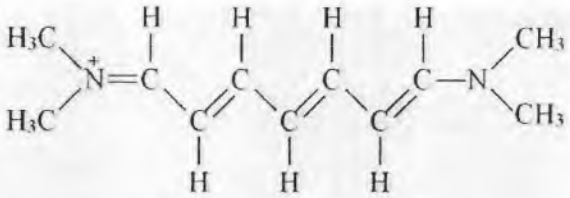
7) Exprimer alors la variation minimale d'énergie ΔE d'un électron effectuant une transition vers un niveau d'énergie plus élevée. En déduire la longueur d'onde λ de la lumière absorbée par la cyanine-m.

Des mesures spectroscopiques en laboratoire ont permis d'obtenir la longueur d'onde absorbée par des cyanines de différentes tailles. L'incertitude est de 5 % sur les longueurs d'onde. Les valeurs sont reportées page suivante.

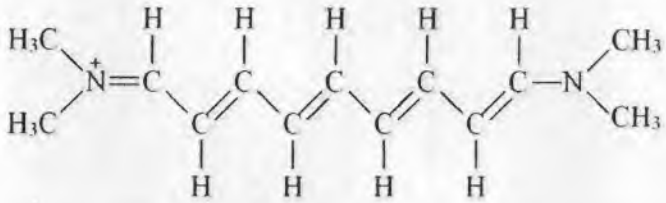
8) Montrer, à l'aide d'une régression linéaire, que le modèle proposé permet d'interpréter les mesures spectroscopiques d'absorption. En déduire la longueur moyenne l_0 d'une liaison dans la chaîne principale.



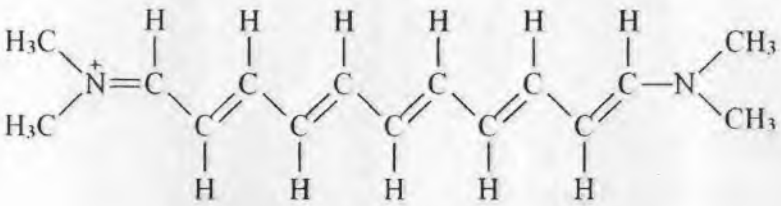
$m = 1$
$\lambda = 416$ nm



$m = 2$
$\lambda = 519$ nm



$m = 3$
$\lambda = 625$ nm



$m = 4$
$\lambda = 735$ nm

Le tableau ci-dessous rassemble les valeurs des longueurs des liaisons présentes dans les molécules de cyanines.

C–C	C=C	C–N	C=N
150 pm	134 pm	147 pm	128 pm

9) Commenter la validité du modèle.

10) Prévoir la longueur d'onde absorbée par la cyanine $m = 5$. Pourquoi ce composé particulier n'est-il pas utilisé comme colorant ?

Cet exercice est basé sur la rubrique *Idées de Physique* parue dans « Pour la Science » n°403, Mai 2011.

9.4 Effet Casimir

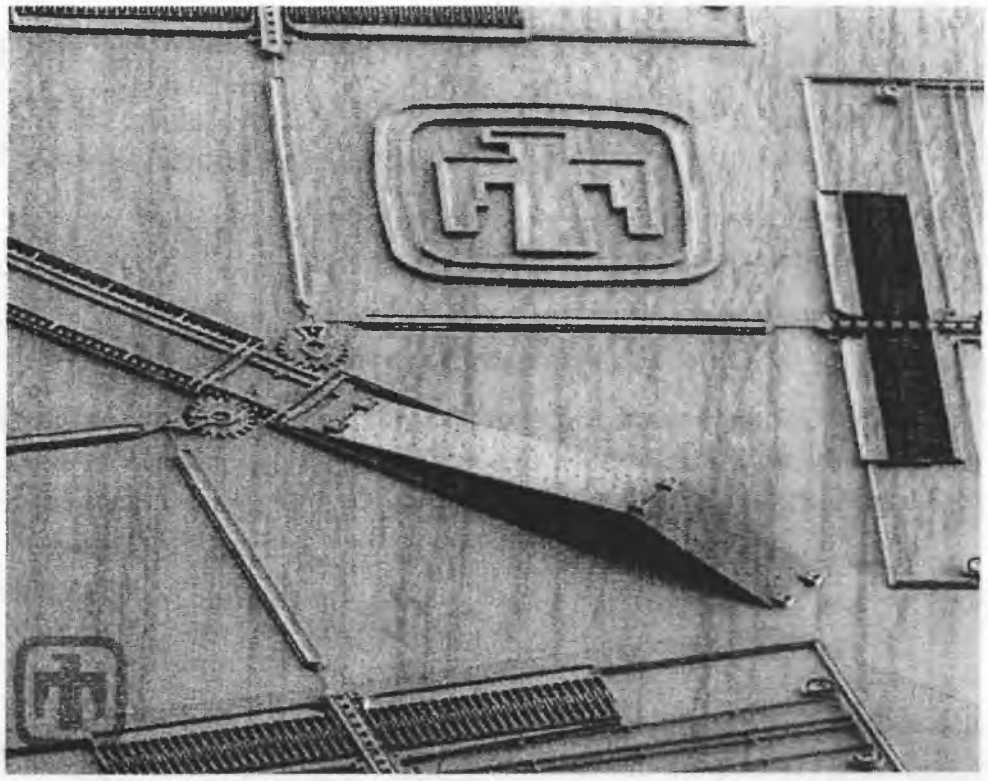
TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : puits de potentiel rectangulaire de profondeur infinie, états stationnaires, énergie de confinement quantique, photon, inégalité de Heisenberg.

Le physicien danois Hendrick Casimir prédit en 1948 que deux plaques métalliques parallèles électriquement neutres placées dans le vide s'attiraient du fait des fluctuations quantiques du vide. Loin d'être anecdotique, cet effet a été mesuré expérimentalement pour

la première fois en 1997 et doit être un phénomène à prendre en considération dans certains systèmes microélectromécaniques (*MEMS* : *Micro Electro Mechanical Systems*). Ce problème propose de comprendre cet effet d'origine quantique.

Micro-miroir pliable commandé par une tension :
une extrémité du miroir peut coulisser dans un rail, entraînée par des engrenages pilotés par quatre peignes électrostatiques (dont deux visibles en bas et à droite de l'image).
Si les surfaces en regard sont trop proches, l'effet Casimir peut intervenir.



Courtesy of Sandia National Laboratories, SUMMiT(TM) Technologies, www.mems.sandia.gov

Données numériques:

Vitesse de la lumière : $c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}.
Constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi = 1{,}05.10^{-34}$ J.s.
Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4.10^{-23}$ J.K^{-1}.
Constante de Stefan : $\sigma = 5{,}7.10^{-8}$ SI.

On considère deux plaques parallèles séparées d'une distance L et l'on introduit un axe Ox perpendiculaire aux plaques tel que les plaques soient à l'abscisse $x = 0$ et $x = L$.

1ère partie

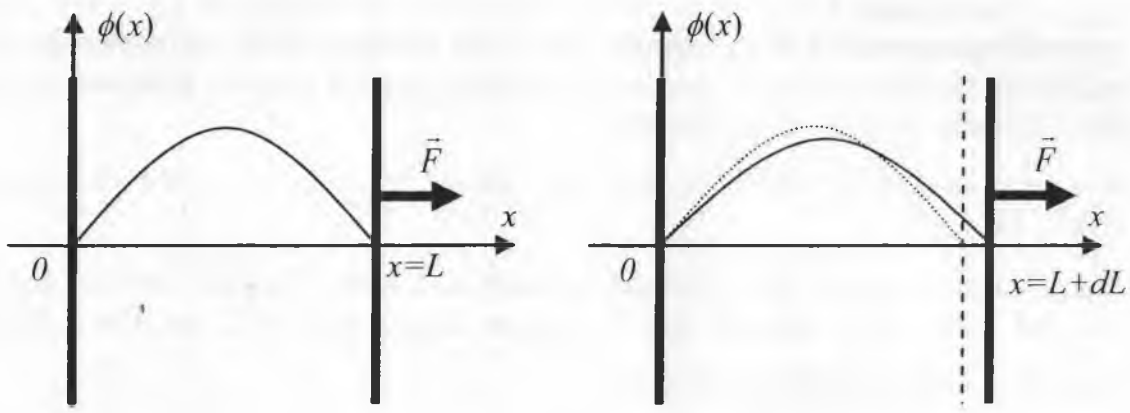
On raisonne dans cette partie sur une particule non relativiste de masse m piégée entre les deux plaques. Du point de vue énergétique, cela signifie que la particule se trouve dans un puits de potentiel rectangulaire de largeur L et de profondeur infinie. On suppose que la particule est dans un état stationnaire d'énergie E et décrite par la partie spatiale de la fonction d'onde $\phi(x)$. L'équation de Schrödinger vérifiée par $\phi(x)$ s'écrit alors :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

1) Montrer que la présence des plaques entraîne une quantification de l'énergie. Introduire un nombre entier naturel non nul n pour exprimer les énergies E_n possibles de la particule.

2) Retrouver *l'ordre de grandeur* de l'énergie minimale à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale.

Dans la suite, on suppose que la particule se trouve dans l'état fondamental (celui de plus basse énergie). La plaque en $x = 0$ est fixe alors que la plaque en $x = L$ peut se déplacer. La particule exerce sur cette dernière une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$.



3) Justifier l'évolution de $\phi(x)$ lors du déplacement de la plaque de la quantité dL.

4) En effectuant un bilan énergétique à la particule lorsque la plaque mobile se déplace de l'abscisse $x = L$ à $x = L + dL$, exprimer F en fonction de $\hbar$, m et L. La présence de la particule a-t-elle tendance à ce que les plaques s'attirent ou se repoussent ?

5) Retrouver l'expression de F *en ordre de grandeur* à l'aide d'une description corpusculaire de la particule et de l'inégalité d'Heisenberg spatiale, en considérant que la particule effectue des allers et retours entre les deux plaques.

Les plaques possèdent une surface S et il y a n_s particules par unité de surface présentes entre elles (particules identiques de masse m). A une température suffisamment faible, les particules sont toutes dans leur état fondamental (possible pour des bosons mais pas pour des fermions).

6) Exprimer la pression p subie par les plaques de la part du gaz de particules. Comparer la dépendance de p par rapport à L au cas d'un gaz parfait classique à la température T.

A noter que cette pression est présente même en l'absence totale d'agitation thermique (zéro absolu) : il s'agit d'un phénomène purement quantique.

2ème partie

Il n'y a plus de particules massiques dans l'espace situé entre les plaques. Néanmoins, du champ électromagnétique peut y être présent. La présence des plaques entraîne que la composante tangentielle du champ électrique doit être nulle à proximité immédiate de celles-ci. Cette condition impose que seuls certains modes électromagnétiques peuvent être présents autour des plaques. D'après la théorie de quantification du champ électromagnétique (appelée l'électrodynamique quantique), chaque mode

électromagnétique de pulsation ω est décrit par un Hamiltonien d'oscillateur harmonique quantique à une dimension. Les niveaux d'énergie d'un mode sont alors quantifiés par la formule $\left(m+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, où m est le nombre de photons, chacun d'énergie $\hbar\omega$, présents dans le mode considéré. Il existe pour chaque mode une énergie fondamentale non nulle $\frac{\hbar\omega}{2}$, correspondant à l'énergie du vide quantique électromagnétique. Cette énergie du vide n'est pas une simple énergie de référence arbitraire non observable puisqu'elle va intervenir dans la force que va subir les plaques.

7) En se restreignant à une onde plane harmonique se propageant entre les deux plaques perpendiculairement à elles, montrer que seuls certains modes de pulsations ω_n peuvent exister du fait des conditions aux limites imposées par les plaques. Exprimer ω_n en fonction de c, L et d'un nombre entier positif n.

On raisonne sur le mode de pulsation ω_n décrit précédemment. On suppose qu'il n'y a aucun photon dans ce mode.

8) En reprenant la même démarche que la question 4 de la 1ère partie, montrer que la présence de ce mode vide entraîne que la plaque située en $x = L$ subit une force $\vec{F}_{n,0} = F_{n,0}\vec{e}_x$ dont on donnera l'expression.

9) Comment s'écrit la force, notée $\vec{F}_{n,N} = F_{n,N}\vec{e}_x$, lorsque le mode de pulsation ω_n contient N photons ? Montrer que la contribution d'un photon sur l'expression de la force peut être déterminée par un raisonnement corpusculaire.

Un calcul très technique (que l'on peut trouver dans l'article cité en fin d'énoncé) permet de d'obtenir la résultante des forces $\vec{F}_{Casimir} = F_{Casimir}\vec{e}_x$ subies par la plaque en $x = L$ compte tenu de *l'ensemble* des modes électromagnétiques. Il faut souligner que le calcul est très complexe, puisqu'il faut prendre en compte les modes se propageant dans une direction quelconque (pas seulement perpendiculaire aux plaques) ainsi que les modes présents en $x < 0$ et en $x > L$. Lorsque les modes sont tous vides, la force est non nulle et s'écrit :

$$F_{Casimir} = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{L^4}S$$

10) Expliquer qualitativement le signe de $F_{Casimir}$.

11) Calculer la valeur de $F_{Casimir}$ pour des plaques carrées de 10 µm de côté séparées de 1 µm (valeurs typiques pour les micro-miroirs de vidéoprojecteurs, voir problème 6.11). Comparer au propre poids des plaques dans le cas où elles sont en silicium (masse volumique de 2,3 g.cm^{-3}) et ont une épaisseur de 0,2 µm. Commenter.

A une température non nulle, il faut prendre en compte également le rayonnement thermique des plaques. A température ambiante et pour une distance entre les plaques inférieure au micromètre, on montre qu'à la force de Casimir, il faut rajouter la force due au rayonnement ayant pour expression approchée $\vec{F}_{ray} = -\frac{4}{3}\frac{\sigma T^4}{c}S\vec{e}_x$, où $\sigma = \frac{\pi^2}{60}\frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2}$

désigne la constante de Stefan (qui intervient dans la loi de Stefan-Boltzmann sur le rayonnement des corps noirs).

12) Comparer numériquement $F_{Casimir}$ et F_{ray} pour les plaques précédentes et commenter.

Les lecteurs intéressés peuvent consulter les articles spécialisés relatifs à l'énergie du vide quantique (notamment celui de Duplantier sur l'introduction à l'effet Casimir) disponibles à l'adresse :

http://www.cvni.net/abc/poincare200203/

9.5 Corail quantique

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : puits de potentiel, niveaux d'énergie.

En 1993, une équipe de l'entreprise IBM a réussi à déposer sur une surface métallique de cuivre 48 atomes de fer formant un cercle de rayon R = 7,1 nm en les manipulant à l'aide d'une pointe de microscope à effet tunnel. La manipulation a été effectuée à une température très basse de 4 K pour ne pas que l'agitation thermique ne désassemble la structure. Les atomes de fer forment alors une barrière quasi-infranchissable pour les électrons libres du cuivre situés à l'intérieur du cercle (à la manière d'une barrière de corail qui coupe les vagues de l'océan, d'où le nom imagé de « corail quantique », ou « enclos quantique » pour cette structure). La photo ci-dessous représente la répartition de densité électronique (*local density of states*) en fonction de la position, mesurée à l'aide d'un microscope à effet tunnel (*STM* : *scanning tunneling microscope,* voir problème 9.8).

Densité électronique formée par un corail quantique

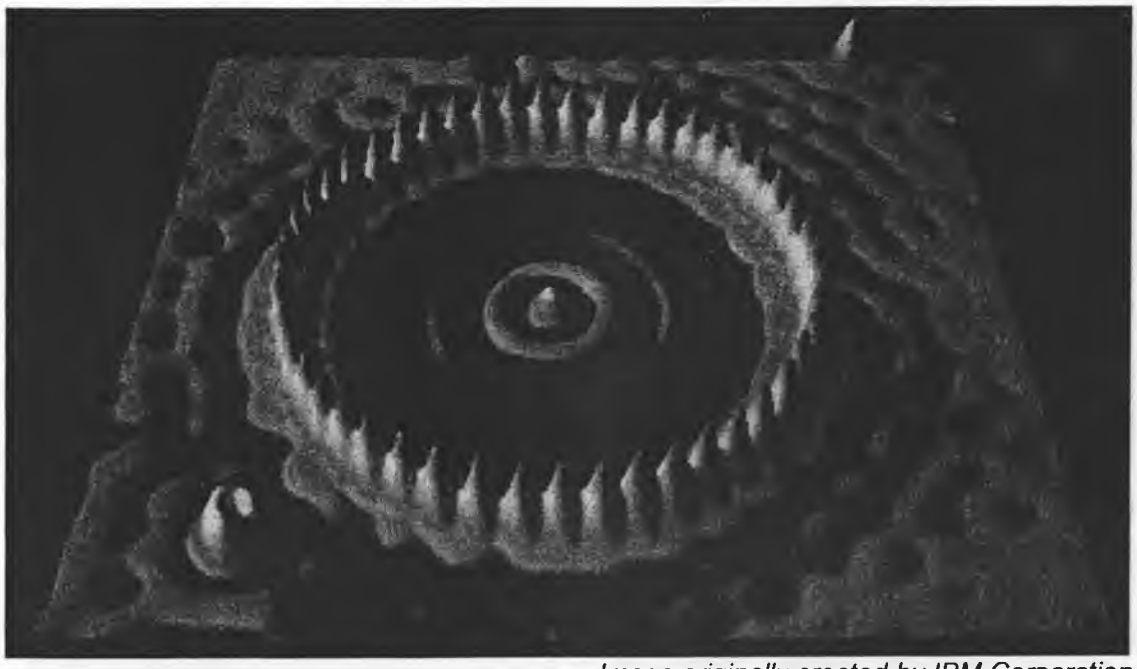


Image originally created by IBM Corporation

On considère un unique électron confiné à l'intérieur du cercle formé par les atomes de fer. La fonction d'onde de l'électron, de masse m, est notée $\psi(M,t)$. On rappelle l'équation de Schrödinger vérifiée par $\psi(M,t)$ pour un électron soumis à un potentiel $V(M,t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(M,t)\psi(M,t)$$ où Δ désigne l'opérateur laplacien.

On se ramène dans un premier temps à un problème à une dimension selon Ox : l'électron se trouve dans un puits de potentiel de profondeur infinie, situé entre $x = 0$ et $x = 2R$.

1) Expliquer le lien entre la fonction d'onde $\psi(x,t)$ et ce que l'énoncé appelle la « densité électronique ».

2) Etablir les expressions des énergies des états stationnaires de l'électron (en prenant pour référence le potentiel dans le puits).

3) En assimilant le corail quantique à un puits unidimensionnel et en exploitant la photo, estimer l'énergie, exprimée en eV, des électrons piégés par le corail.

On donne :

$\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s,
$m = 9{,}1.10^{-31}$ kg,
$e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Se ramener à un problème unidimensionnel peut paraître assez critiquable. Il est possible d'affiner le modèle en cherchant les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger en coordonnées cylindriques (r, θ) ne dépendant pas de θ. On suppose que le corail quantique peut être modélisé par un puits circulaire de rayon R et de profondeur infinie.

4) L'examen de la photo permet-elle de justifier que l'on cherche une fonction d'onde $\psi(M,t)$ ne dépendant pas de θ ? Pourquoi ?

5) A partir du formulaire et du document, calculer l'énergie des électrons piégés par le corail. Le modèle unidimensionnel initial était-il satisfaisant ?

Formulaire : on donne l'expression de l'opérateur laplacien dans le repère cylindrique dans le cas où ψ ne dépend que de la distance r à l'axe : $\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\partial\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$.

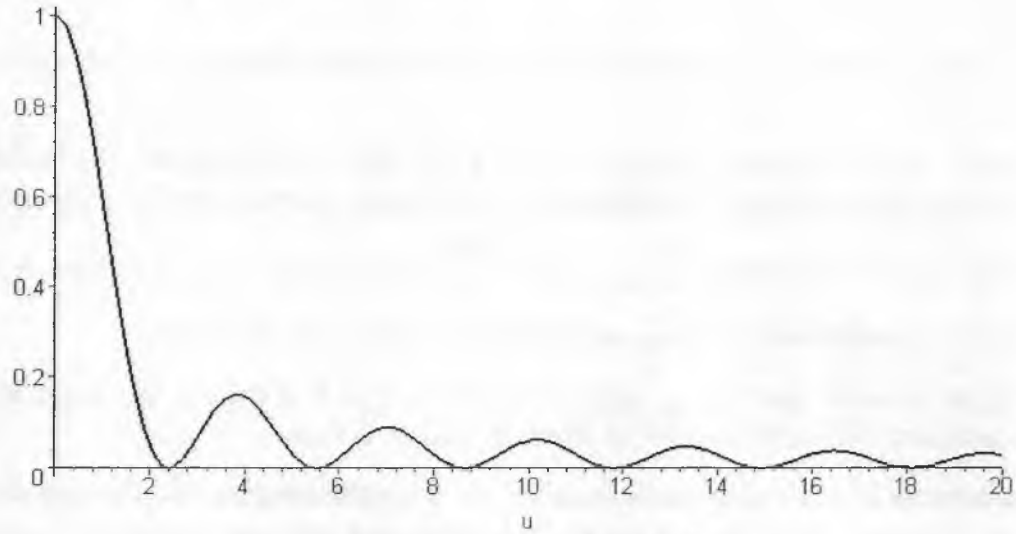
DOCUMENT : La fonction de Bessel de première espèce

On considère l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\frac{d^2F}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dF}{du} + F(u) = 0$$

Les solutions qui ne divergent pas pour $u \to 0$ sont de la forme $F(u) = AJ_0(u)$, où J_0 est la première fonction de Bessel de première espèce, A étant une constante quelconque.

Le graphe de J_0^2 est le suivant :



graphe de $(J_0(u))^2$

A noter qu'il existe de nombreux états stationnaires possibles pour les électrons piégés dans le corail quantique, mais il n'y a en pratique que quelques états principalement visibles, ceux ayant une énergie proche de l'énergie de Fermi (voir problème 9.8) dans le cuivre. On pourra trouver dans la référence suivante le détail de l'expérience de « corail quantique » :

M.F. Crommie, C.P. Lutz, D.M. Eigler. *Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface.* Science **262**, 218-220 (1993)

9.6 Effet isotopique cinétique

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : oscillateur harmonique, énergie de confinement quantique, inégalité de Heisenberg, effet tunnel.

L'effet isotopique cinétique (*KIE* : *kinetic isotopic effect*) est la variation de la vitesse d'une réaction chimique lorsqu'un atome appartenant à l'un des réactifs est remplacé par l'un de ses isotopes. Utilisé dès les années 60, cet effet est un outil important pour l'étude des mécanismes réactionnels. Il permet par exemple de savoir si une substitution nucléophile est de type SN1 ou SN2. Ce problème propose de comprendre l'origine de l'effet isotopique cinétique.

Données numériques :

$\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s, $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}.
La masse d'un nucléon (proton ou neutron) vaut $1{,}67.10^{-27}$ kg.

On considère un atome de masse m situé au sein d'une molécule. Dans un modèle unidimensionnel où la fonction d'onde décrivant l'atome ne dépend que l'abscisse x, on

suppose que l'environnement de l'atome peut être modélisé par l'énergie potentielle $E_p(x) = E_0 + \frac{1}{2}K_0(x - x_0)^2$, où K_0 désigne une constante positive.

1) Où se situe l'atome à l'équilibre dans une description classique ? Que vaut alors son énergie ?

2) Pourquoi la mécanique quantique interdit cet état ? A l'aide de l'inégalité de Heisenberg spatiale, montrer que le confinement de l'atome entraîne que l'énergie de son état fondamental vaut au minimum $E_{ZPE,0} = E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2}$. Exprimer ω_0 en fonction de K_0 et m. Que représente concrètement ω_0 dans une description classique de l'atome ?

On admettra pour la suite que $E_{ZPE,0}$, appelée quelques fois l' « énergie du point zéro », correspond exactement à l'énergie de l'état fondamental de l'atome.

On étudie maintenant le cas d'une réaction chimique : l'environnement de l'atome change au cours de la réaction, dont on paramètre la progression par une variable y, appelée « coordonnée de réaction ». Pour $y = 0$, le système est constitué des réactifs (la réaction n'a pas commencé) et pour $y = 1$, il est constitué des produits (la réaction est terminée). Très fréquemment, lors de la réaction, le système se trouve dans un état de transition énergétiquement défavorable. Du point de vue cinétique, le passage par cet état est l'étape cinétiquement déterminante de la réaction. Lorsque le système est dans l'état de transition, l'énergie potentielle de l'atome vaut $E_p(x) = E_t + \frac{1}{2}K_t(x - x_t)^2$, avec $E_t > E_0$ et $K_t \geq 0$. La figure n°1 représente les courbes $E_p(x)$ pour l'état initial et l'état de transition. La figure n°2 représente le minimum de l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée de réaction y. Enfin la figure n°3 donne l'allure de l'énergie potentielle en fonction de x et de y.

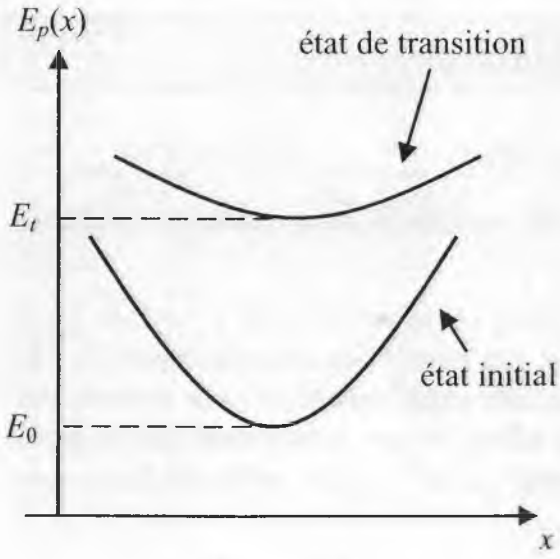


Figure n°1

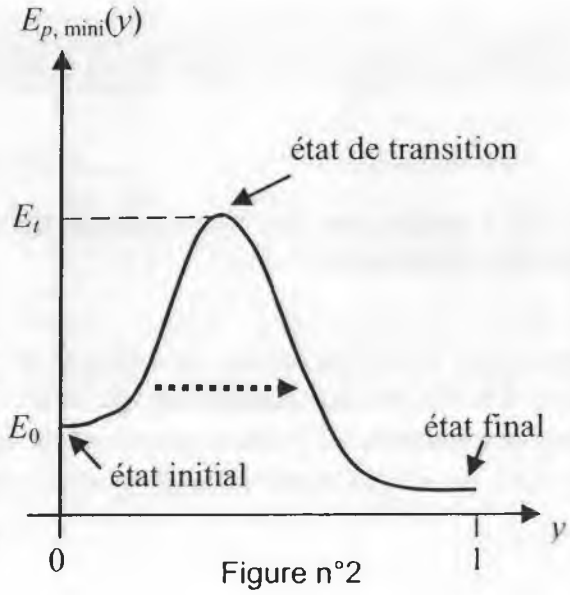


Figure n°2

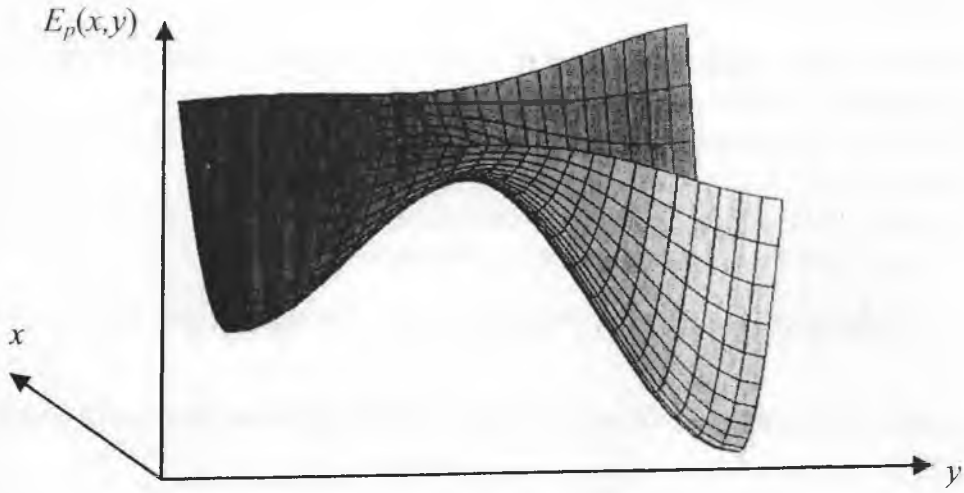


Figure n°3

Lorsqu'elle existe, la constante de vitesse k de la réaction dépend fortement de la température T. Elle suit la loi empirique d'Arrhenius qui s'écrit :

$k = A\exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)$, où A est un facteur constant et E_a est appelée l'énergie d'activation, correspondant à la différence d'énergie du système entre l'état de transition et l'état initial. A température ambiante, une règle simple et pratique de cinétique en solution est de considérer que la durée d'une réaction diminue de moitié quand la température augmente de 10 °C.

3) Calculer l'énergie d'activation des réactions pour lesquelles cette règle est vérifiée. Est-ce une règle applicable à toutes les réactions ?

Dans le cadre de l'étude de l'effet isotopique cinétique, on compare les constantes de réaction k_L et k_H de la même réaction chimique, mais impliquant dans l'un des réactifs respectivement un atome léger de masse m_L et l'un de ses isotopes, plus lourd, de masse m_M. On définit alors l'effet isotopique cinétique KIE par le rapport $\frac{k_L}{k_M}$. A titre d'illustration, les deux réactions de substitution nucléophile suivantes, qui ne diffèrent que par le nombre de masse de l'atome C (^{12}C d'une part et l'isotope ^{13}C d'autre part) du groupe méthyle, possède un effet isotopique cinétique $KIE = \frac{k_L}{k_M} = 1{,}082 \pm 0{,}008$.

$$^{12}CH_3Br + CN^- \xrightarrow{k_L} {}^{12}CH_3CN + Br^-$$

$$^{13}CH_3Br + CN^- \xrightarrow{k_M} {}^{13}CH_3CN + Br^-$$

4) En supposant que l'atome reste dans son état de plus basse énergie tout au long de la réaction, expliquer comment le résultat de la question 2 permet d'expliquer l'effet isotopique cinétique. On pourra compléter avantageusement la figure n°1 en faisant apparaître les énergies d'activation des deux réactions.

Généralement, dans l'état de transition, les forces de liaison agissant sur l'atome sont plus faibles (car l'étape cinétiquement déterminante consiste souvent en une rupture de liaison). On dit que l'effet isotopique cinétique est normal si $KIE > 1$.

5) Justifier le qualificatif « normal ».

On cherche à estimer la valeur maximale du *KIE* qu'il est possible d'observer en théorie. On considère par exemple une réaction dont l'étape cinétiquement déterminante consiste à la rupture d'une liaison C-H. En spectroscopie infra-rouge, une liaison C-H possède un pic d'absorption pour une longueur d'onde voisine de 3,3 μm, correspondant à la vibration en élongation de la liaison. Afin d'étudier un effet isotopique cinétique, on remplace l'atome d'hydrogène de la liaison par l'un de ses isotopes, le deutérium ^2H, noté D.

6) Pourquoi ce choix plutôt que de remplacer le carbone 12 par son isotope le carbone 14 ?

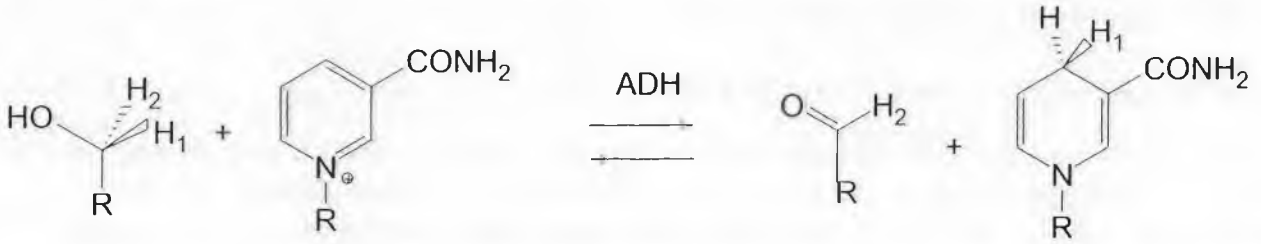
7) En expliquant la démarche, estimer la valeur du *KIE* attendue pour cette réaction à température ambiante.

Afin de valider le modèle utilisant les énergies du point zéro de l'atome pour prédire la valeur de *KIE*, on compare les effets isotopiques cinétiques d'une réaction impliquant un atome d'hydrogène H en le substituant par un atome de deutérium D ou un atome de tritium ^3H, noté T.

8) Montrer que, dans le cadre du modèle précédent, $\dfrac{\ln\left(\dfrac{k_H}{k_T}\right)}{\ln\left(\dfrac{k_H}{k_D}\right)} = \dfrac{1-\sqrt{\dfrac{m_H}{m_T}}}{1-\sqrt{\dfrac{m_H}{m_D}}}$. En déduire la loi de Swain $\dfrac{k_H}{k_T} = \left(\dfrac{k_H}{k_D}\right)^{\alpha}$. Donner la valeur numérique de l'exposant α.

Dans certaines réactions, les mesures de *KIE* entre l'hydrogène, le deutérium et le tritium s'écartent nettement de la loi de Swain. D'autre part, il est possible d'observer des valeurs de *KIE* supérieures à 10, nettement plus grandes que les valeurs prédites par le modèle (dit « semi-classique ») des énergies de point zéro. Ces écarts sont dus à un autre phénomène intervenant dans la cinétique de la réaction : la possibilité pour l'atome de traverser la barrière d'énergie par effet tunnel, comme cela est illustré par la flèche en pointillé sur la figure n°2.

A titre d'exemple, dans l'oxydation d'alcools catalysée par l'enzyme alcool déshydrogénase (ADH), qui participe chez l'Homme à la détoxification de l'organisme, le transfert de proton, qui est l'étape cinétiquement déterminante, s'effectue principalement par effet tunnel.



Lorsqu'un atome de masse m arrive sur une barrière d'énergie E_a et de largeur d, la mécanique quantique montre qu'il est possible que l'atome franchisse la barrière, et cela même s'il lui manque l'énergie E_a pour passer au dessus de celle-ci. La probabilité de

franchissement est donnée par la formule approchée $T = \exp\left(-2d\frac{\sqrt{2mE_a}}{\hbar}\right)$, valable si $T << 1$.

9) Expliquer en quelques lignes comment la mécanique quantique peut expliquer le passage de l'atome à travers la barrière, celle-ci étant infranchissable d'après la mécanique classique.

10) Donner la valeur numérique de la probabilité de franchissement T_H pour un transfert de proton avec une énergie d'activation $E_a = 15$ kJ.mol^{-1} et une largeur de la barrière $d = 0{,}4$ Å. Qu'en est-il pour un noyau de deutérium ? Commenter.

11) En remarquant que le rapport T_H/T_D ne dépend pas de la température, expliquer un moyen expérimental simple pour mettre en évidence l'influence de l'effet tunnel dans l'effet isotopique cinétique.

9.7 Lasers à cascade quantique

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

MOTS-CLES : puits de potentiel rectangulaire de profondeur finie, énergie des états liés, effet laser.

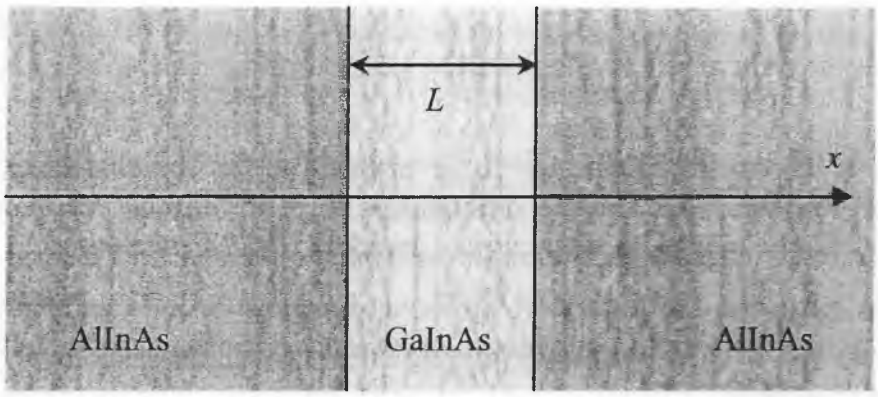
Les lasers à cascade quantique (*QCL* : *quantum cascade laser*) sont des lasers à semi-conducteurs pouvant émettre dans l'infrarouge moyen et l'infrarouge lointain (actuellement entre 3 et 13 µm à température ambiante et jusqu'à 130 µm avec un refroidissement cryogénique). Le principe de ce type de laser a été proposé sur le papier dès 1971 par Kazarino et Sursis mais sa première mise en œuvre expérimentale fut réalisée bien plus tard, en 1994, par une équipe des laboratoires Bell. Devenu depuis quelques années des produits commerciaux, les *QCL* ont de multiples avantages, notamment leur compacité et leur accordabilité en longueur d'onde. Les applications sont multiples : analyse d'échantillon par spectroscopie, communication en espace libre... et ils sont encore actuellement l'objet de multiples travaux de recherche.

Contrairement aux autres lasers à semi-conducteurs, comme les diodes laser, dans lesquelles la lumière est issue de la recombinaison de paires électrons-trous, les *QCL* contiennent des hétérostructures formant des puits quantiques où l'émission d'un photon se produit lorsqu'un électron change de niveau à l'intérieur d'un puits. Ce problème propose de comprendre en quoi consiste un puits quantique et d'appréhender le principe d'émission des lasers à cascade quantique.

Les hétérostructures étant en pratique des empilements de couches de semi-conducteurs d'épaisseurs nanométriques, on peut considérer dans tout le problème que le système d'étude est invariant par toute translation parallèle aux couches et l'on notera Ox l'axe perpendiculaire à celles-ci. Dans tout le problème, on étudie un unique électron à l'intérieur des semi-conducteurs, dont on notera m sa masse et $-e$ sa charge.

Données numériques :
Charge et masse d'un électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C et $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.
Constante de Planck réduite $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s.

On considère pour commencer une unique couche de semi-conducteur GaInAs (arséniure de gallium indium) comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. Pour $x < 0$ et $x > L$, l'espace est rempli par le semi-conducteur AlInAs (arséniure d'aluminium indium). Cette structure forme un puits quantique que nous nous proposons d'étudier.



On suppose que l'électron est dans un état stationnaire d'énergie E. On rappelle l'équation de Schrödinger vérifiée par la partie spatiale $\phi(x)$ de la fonction d'onde de l'électron :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x)$$, où $V(x)$ désigne le potentiel à l'abscisse x.

On choisit de fixer à zéro le potentiel dans le semi-conducteur GaInAs (origine des énergies). Dans un premier temps, on suppose que le potentiel dans le semi-conducteur AlInAs est suffisamment grand pour pouvoir le considérer comme infini.

1) Déterminer les différents états stationnaires de l'électron dans cette hypothèse. Il est demandé d'exprimer leurs énergies E_n ainsi que la partie spatiale des fonctions d'onde $\phi_n(x)$.

2) Donner l'allure des graphes de la densité linéique de probabilité de présence de l'électron pour les deux premiers états de plus basse énergie.

On considère un *QCL* dont les puits ont une largeur comprise entre 0,5 et 1,5 nm.

3) Calculer E_1, en eV, dans le cas d'un puits « large » de 1,5 nm, puis d'un puits « étroit » de 0,5 nm en supposant le puits de profondeur infinie.

En réalité, la différence de potentiel entre les deux semi-conducteurs vaut $V_0 = 0{,}55$ eV.

4) L'hypothèse d'un potentiel infini dans AlInAs est-elle justifiée ?

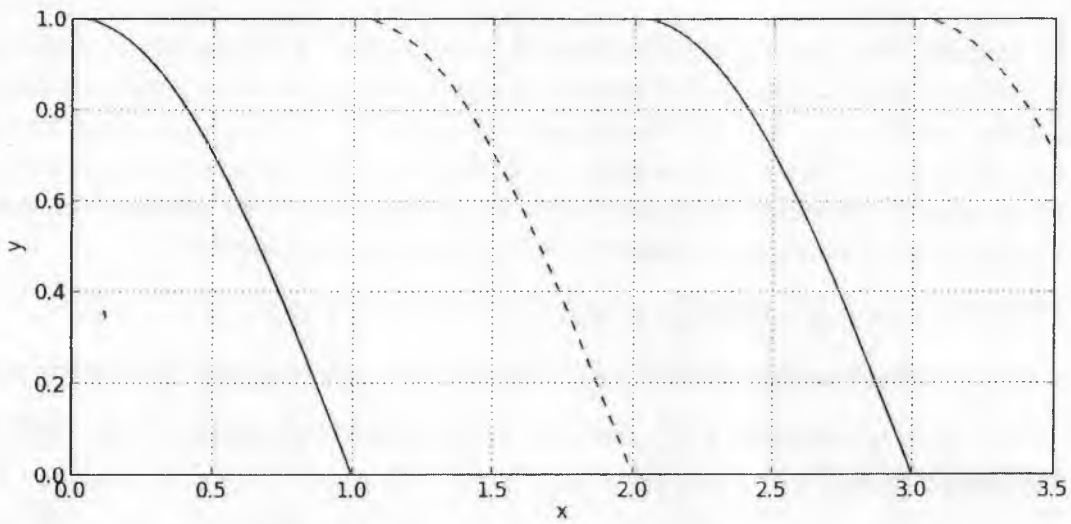
On cherche les états liés dans le puits quantique compte tenu de sa profondeur finie. Par commodité, on change l'origine de l'axe Ox que l'on place au milieu du puits quantique.

5) Que signifie le terme « lié » ? Quelle inégalité l'énergie E de l'état doit vérifier pour qu'il le soit ? Indiquer alors la forme de la partie spatiale de la fonction d'onde dans chaque domaine de l'espace. On posera $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.

6) Sachant que $\phi(x)$ et sa dérivée doivent être continus, établir le système d'équations que doivent vérifier les différentes constantes introduites précédemment. Pourquoi ce système entraîne-t-il une quantification de l'énergie ?

7) Qu'en est-il si $E > V_0$?

En posant $k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$, on montre que les solutions du système d'équations de la question 6 pour la variable $x = \frac{L}{\pi}k$ sont les intersections de la droite d'équation $y = \frac{\pi}{k_0 L}x$ avec les arcs de sinusoïdes représentés sur la figure suivante. Pour les arcs en trait plein, on montre que $\phi(x)$ est une fonction paire et pour les arcs en pointillé, elle est impaire.



8) Montrer qu'il existe un seul état lié dans le puits quantique si celui-ci possède une largeur inférieure à L_m dont on donnera l'expression en fonction de V_0, $\hbar$ et m. Faire l'application numérique. Connaissez-vous une situation analogue dans le domaine de l'optique ?

9) Décrire les états liés pour les puits « étroit » puis « large » introduits à la question 3. Pour chaque puits, on indiquera leur nombre et pour chacun des états, la valeur numérique de son énergie, en eV, ainsi que l'allure de $|\phi(x)|^2$.

Lorsque $L >> L_m$, on montre que le $n^{\text{ème}}$ état lié (rangé par ordre croissant d'énergie) possède une énergie $E'_n \approx \left(1 - \frac{4}{k_0 L}\right)E_n$ tant que $E'_n << V_0$ (niveaux dits « profonds ») où E_n représente l'énergie de l'état lié si le puits quantique était de profondeur infinie (voir question 1).

10) Montrer que cette formule approchée peut se justifier de manière semi-quantitative en considérant que, du fait de la présence des ondes évanescentes, un puits de profondeur finie est équivalent à un puits de profondeur infinie ayant une largeur effective L' modifiée.

11) Comment justifier le fait $E'_n < E_n$ à l'aide d'un raisonnement qualitatif utilisant l'inégalité de Heisenberg spatiale ?

La structure d'un *QCL* consiste en un empilement de couches de deux semi-conducteurs (ici GaInAs et AlInAs) d'énergies de bande de conduction différentes (on parle

d' « hétérostructure »), formant une succession de puits quantique. Les épaisseurs des différentes couches se répètent périodiquement. Chaque motif est constitué environ d'une dizaine de paires de couches, l'épaisseur de chaque couche devant être réglée précisément pour que le motif se comporte pour l'électron de la façon suivante :

- une première partie du motif, appelée « l'injecteur », récupère l'électron venant de la zone active située en amont et l'emmène jusqu'à la zone active située en aval.

- une seconde partie du motif, appelée la « zone active », constituée de trois puits quantiques (*3QW = three quantum well active region*), est le lieu où se produit le rayonnement laser.

L'ensemble de la structure est soumise à un champ électrique dirigé perpendiculairement aux couches afin de faire circuler les électrons à travers elles. Le principe de l'émission laser est le suivant : dans l'injecteur, l'électron passe rapidement d'un puits quantique à l'autre par effet tunnel. Le rôle de l'injecteur est crucial : il est conçu pour envoyer l'électron dans le niveau 3 de la zone active. L'électron se désexcite alors vers le niveau 2 en émettant un photon (désexcitation radiative). Il passe ensuite très rapidement vers le niveau 1 (processus de relaxation non radiatif) puis dans l'injecteur suivant.

La figure suivante contient de multiples informations. On peut y voir :

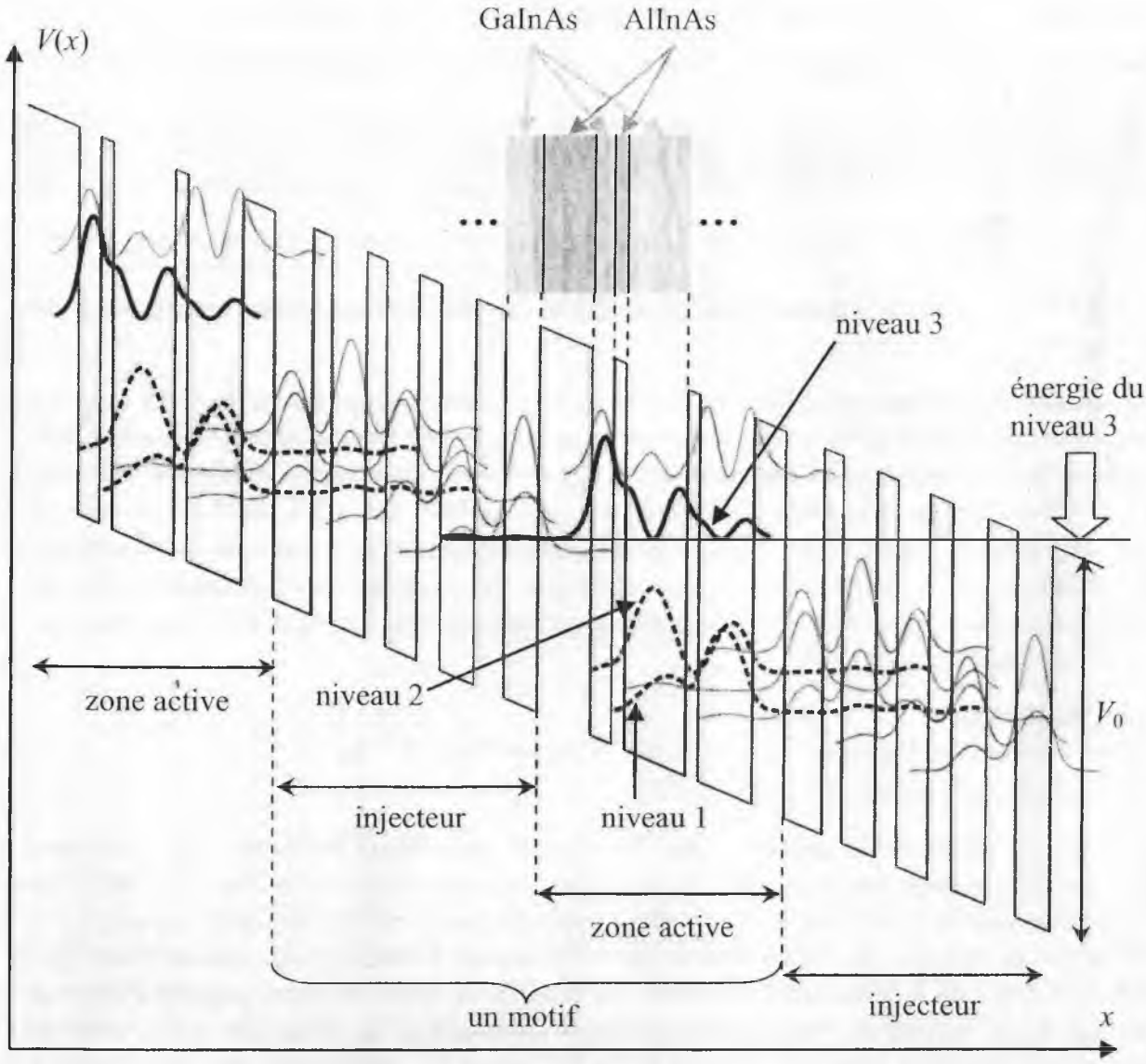
- le graphe du potentiel $V(x)$ de l'électron à l'intérieur de l'hétérostructure.

- dans les injecteurs, les densités de probabilité de présence des différents états liés, représentées en gris.

- dans les zones actives, les densités de probabilité de présence du niveau 3, en trait épais, et des niveaux 1 et 2 en traits pointillés.

Chaque densité de probabilité de présence a été tracée avec une origine des ordonnées différente, de telle manière à ce que la courbe soit au niveau de l'énergie de l'état lié correspondant lorsque la densité de probabilité tend vers zéro, comme cela est illustré pour le niveau 3.

Une hétérostructure de *QCL* est généralement constituée de plusieurs dizaines de motifs de sorte que chaque électron est « recyclé » de très nombreuses fois (d'où le terme de « cascade ») : le rendement quantique, défini par le rapport du nombre de photons émis sur le nombre d'électrons traversant la structure, peut ainsi être supérieur à l'unité, contrairement à une diode laser.



adapté d'une image de Evans82, licence CC

12) Au cours de son évolution, peut-on dire que l'électron se situe dans un seul puits à la fois ?

13) A partir des explications et des données fournies, calculer la longueur d'onde d'émission du laser.

14) En étudiant le niveau 2 et en se basant sur les résultats établis en début de problème, *estimer* la largeur du puits quantique situé au milieu de la zone active. On pourra éventuellement proposer et comparer différentes méthodes plus ou moins élaborées.

15) Dans quel sens est appliqué le champ électrique ? Estimer sa norme, en $V.cm^{-1}$, à partir du graphe. Commenter.

Filière PC : Afin d'obtenir l'effet laser dans un *QCL*, il est nécessaire que le temps de transfert par effet tunnel de l'injecteur au niveau 3 soit petit devant le temps de vie de l'électron dans le niveau 3.

16) Justifier cette phrase.

Les références de l'article original proposant la première mise en œuvre d'un *QCL* sont :

J. Faist et al., *Quantum cascade laser*, Science, vol. 264, n°5158, pp. 553-556, avril 1994.

9.8 Microscope à effet tunnel

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : vecteur courant de probabilité, ondes évanescentes, coefficient de transmission.

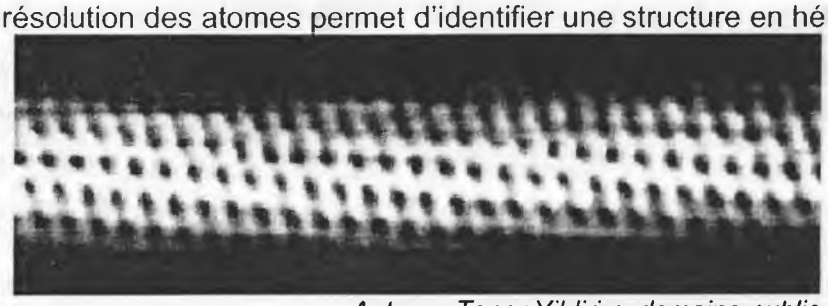
Le microscope à effet tunnel (*STM* : *scanning tunneling microscope*) a été inventé dans les années 80 par Binnig et Rohrer (qui reçurent le prix Nobel de physique en 1986 pour cette réalisation). Cette technique d'imagerie a pu aboutir suite au progrès réalisés d'une part dans l'électronique de contrôle (déplacement de la pointe par effet piézoélectrique) et d'autre part dans la mesure de courants très faibles (intensité de l'ordre du nanoampère, voire inférieure). Ce problème propose d'étudier le principe de fonctionnement du microscope, de faire apparaître les paramètres physiques entrant en jeu et de comprendre ce que le *STM* mesure exactement.

Données numériques :
Charge et masse d'un électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C et $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.
Constante de Planck réduite $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s.

Le principe du *STM* est le suivant : une fine pointe métallique (terminée par un atome unique) est placée juste au dessus de l'échantillon à une distance très faible (de l'ordre du nm). En imposant une différence de potentiel entre la pointe et l'échantillon, on permet à des électrons de transiter de l'un à l'autre par effet tunnel. L'intensité du courant étant très sensible vis-à-vis de la distance à traverser, la mesure de cette intensité permet d'obtenir une image de la surface de l'échantillon grâce à un balayage de la pointe. La résolution latérale d'un *STM* peut atteindre 0,1 nm et sa résolution en profondeur peut descendre à moins de 0,01 nm. Il existe deux modes de balayage possibles de la surface :

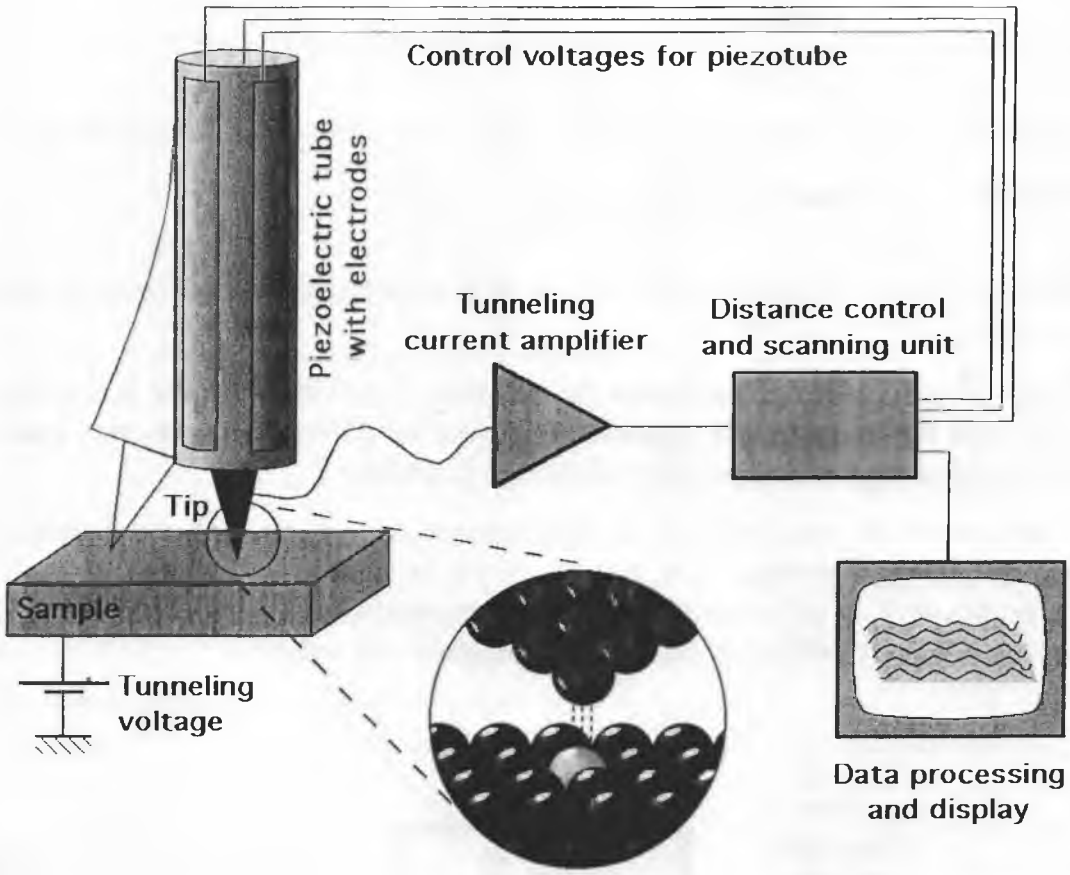
- le mode à hauteur constante, où l'on mesure le courant tunnel en fonction de la position en fixant la hauteur de la pointe.
- le mode à courant constant, dans lequel un système d'asservissement fait varier la hauteur de la pointe lors du balayage afin de maintenir constant le courant tunnel.

Nanotube de carbone vu sous *STM*
La résolution des atomes permet d'identifier une structure en hélice



Auteur : Taner Yildirim, domaine public

Schéma de principe d'un *STM*



Auteur : Michael Schmid, licence CC

Avant d'étudier l'effet tunnel, on étudie dans un premier temps le comportement d'un électron en incidence sur une marche de potentiel de hauteur V_0. On se place dans un problème unidimensionnel dans lequel les grandeurs ne dépendent que de l'abscisse x. Plus précisément, le potentiel $V(x)$ vaut 0 pour $x < 0$ et $V_0 > 0$ pour $x > 0$. L'électron, de masse m et de charge $-e$, possède une énergie E comprise entre 0 et V_0 et arrive depuis le demi-espace $x < 0$ en incidence normale sur la marche de potentiel. On rappelle que la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E s'écrit $\psi(x,t) = \phi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$, où $\phi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x)$$

La partie spatiale de la fonction d'onde de l'onde incidente décrivant l'électron est de la forme $\phi_i(x) = A_i \exp(+ikx)$.

1) Déterminer l'expression de k en fonction de E, m et $\hbar$. Vérifier la cohérence avec la relation de de Broglie.

2) De même, comment s'écrit $\phi_r(x)$, la partie spatiale de la fonction d'onde de l'onde réfléchie ?

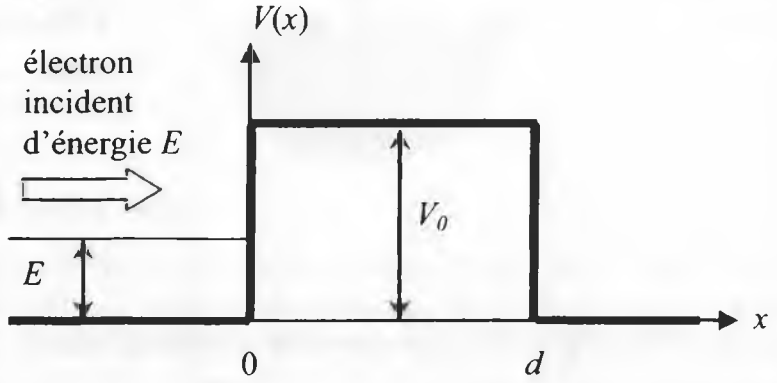
3) Indiquer la forme de $\phi_t(x)$, partie spatiale de la fonction d'onde de l'onde transmise. On posera $K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$. Comment s'appelle ce type d'onde ?

4) En admettant que la fonction d'onde *totale*, ainsi que sa dérivée, doit être une fonction continue de x, montrer que $\frac{\phi_r(0)}{\phi_i(0)} = \frac{k - iK}{k + iK}$.

5) Définir et donner l'expression du courant de probabilité associé à l'onde incidente, puis à l'onde réfléchie.

6) Définir puis calculer le coefficient de réflexion R de l'électron sur la marche de potentiel. Que vaut le coefficient de transmission ? Quelle différence faîtes-vous entre ce que prévoient la mécanique classique et la mécanique quantique ?

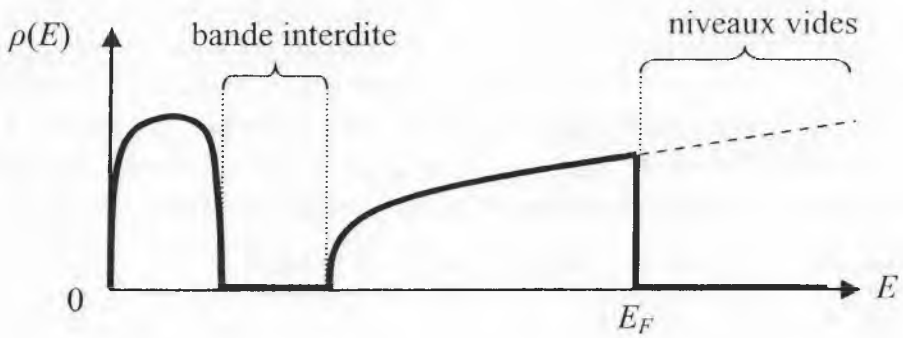
On étudie maintenant la possibilité de franchissement de l'électron d'une barrière de potentiel, de hauteur V_0 et de largeur d, représenté sur la figure suivante. Si $Kd >> 1$, on montre qu'il est possible de calculer le coefficient de transmission T_b de l'électron à travers la barrière en négligeant les réflexions multiples à l'intérieur de celle-ci.



7) Montrer que la dépendance du coefficient de transmission par rapport à la largeur de la barrière est de la forme $T_b = C\exp(-2Kd)$. On ne cherchera pas à établir une expression de la constante C.

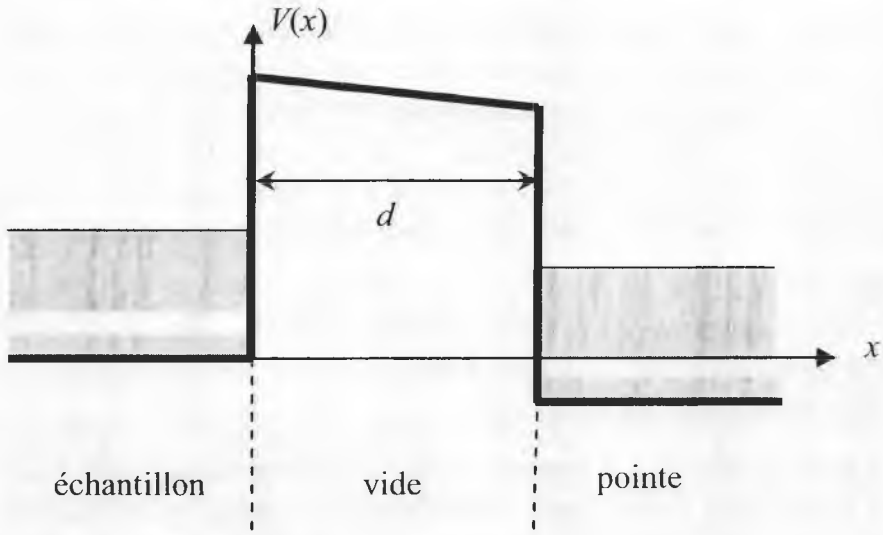
8) Comment peut-on justifier de manière qualitative que $T_b \neq 0$ malgré le résultat de la question 6 ?

On suppose que l'échantillon et la pointe sont de même nature : à l'intérieur de ces matériaux, les électrons, étant des fermions, doivent tous être dans des états quantiques différents les uns des autres (c'est le principe d'exclusion de Pauli). A température ambiante, on montre que les électrons vont approximativement remplir tous les états par ordre croissant d'énergie. La différence d'énergie entre l'état de plus basse énergie (premier niveau) et le dernier état occupé (appelé le niveau de Fermi) s'appelle l' « énergie de Fermi », notée E_F. On introduit la densité d'états (*LDOS* : *local density of states*), notée $\rho(E)$, définie telle que le nombre d'électrons par unité de volume dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$ vaut $dn = \rho(E)\,dE$. On donne l'allure de $\rho(E)$ pour un conducteur, en prenant pour origine de l'énergie celle du premier niveau :



Enfin, on appelle « travail de sortie », noté W_S, l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron du niveau de Fermi en dehors du conducteur (échantillon ou pointe).

Dans le cas du *STM*, la barrière de potentiel a l'allure suivante, compte tenu de la tension U appliquée entre la pointe et l'échantillon, ces derniers étant séparés d'une distance d. Les zones grisées sont les énergies des états occupés par les électrons.



9) Compléter la figure en faisant apparaître l'énergie de Fermi E_F, le travail de sortie W_S ainsi que la quantité eU.

10) Indiquer l'intervalle d'énergie des électrons susceptibles de passer de l'échantillon à la pointe par effet tunnel.

Pour la suite, on raisonne avec les valeurs suivantes (cas de l'or) : $E_F = 5{,}5$ eV et $W_S = 5{,}1$ eV et l'on applique une tension $U = 100$ mV.

11) Compte tenu de ces valeurs et à l'aide de deux approximations que l'on explicitera, justifier que l'intensité I du courant tunnel est proportionnelle à la quantité $\rho(E_F)U\exp\left(-2\frac{\sqrt{2mW_S}}{\hbar}d\right)$.

12) En admettant que l'intensité puisse être mesurée avec une précision de 10 %, calculer la sensibilité verticale du microscope. Commenter.

13) Qu'est-ce qui limite la résolution latérale du microscope ?

14) Indiquer, selon vous, les avantages et les inconvénients des deux modes de balayage évoqués dans l'énoncé.

Outre la mesure du relief de la surface, le *STM* peut être utilisé pour mesurer la *LDOS* de l'échantillon, qui peut varier de manière significative suivant l'endroit (voir le problème 9.5 « corail quantique » qui en est un bel exemple). Il est par ailleurs possible d'accéder aux caractéristiques de $\rho(E)$ pour des énergies autres que l'énergie de Fermi. Le procédé (nommé *STS* : *scanning tunneling spectroscopy*) permet par exemple de déterminer la bande interdite du matériau sondé (*bandgap* de semi-conducteurs notamment).

15) Quel paramètre doit-on faire varier dans ce procédé ?

9.9 Canon à effet de champ partie 2

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : états liés dans un puits, force électrique, effet tunnel.

Il a été évoqué dans la partie 1 (voir problème 6.19) qu'un champ électrique élevé appliqué à la surface d'un métal pouvait arracher des électrons et ainsi créer un faisceau intense d'électrons, utilisé notamment dans les microscopes électroniques. On se propose d'étudier dans un premier temps l'effet d'un champ électrique sur un électron confiné puis d'examiner la possibilité pour un électron de sortir d'un métal par effet tunnel pour enfin estimer le courant électronique émergeant du canon à effet de champ étudié dans la partie 1.

Données numériques :
Charge et masse d'un électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C et $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.
Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1}.
Constante de Planck réduite $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s.

On utilise dans tout le problème un modèle unidimensionnel dans lequel les variables ne dépendent que de l'abscisse x (on suppose l'invariance du système selon les deux directions perpendiculaires à Ox). On raisonne sur un unique électron de masse m, de charge $-e$, piégé dans une bande métallique comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On suppose que l'électron est dans un état stationnaire d'énergie E. Il est alors décrit par la partie spatiale de sa fonction d'onde notée $\phi(x)$. L'équation de Schrödinger vérifiée par $\phi(x)$ s'écrit :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x)$$, où $V(x)$ désigne le potentiel (autrement dit l'énergie potentielle) à l'abscisse x.

Dans un premier temps, on suppose que le travail de sortie de l'électron est infini : du point de vue énergétique, cela signifie que le potentiel est infini en dehors du métal. On rappelle que la fonction d'onde est une fonction continue de l'espace. En l'absence de champ électrique, le potentiel dans le métal est constant. Par convention, il sera pris comme référence des énergies.

1) Déterminer les différents états stationnaires de l'électron dans cette situation. Il est demandé d'exprimer leurs énergies E_n ainsi que la partie spatiale des fonctions d'onde $\phi_n(x)$. On veillera à normaliser les fonctions d'ondes et à s'arranger pour qu'elles soient réelles et positives pour x proche de 0.

On suppose que l'électron se trouve au départ dans l'état de plus basse énergie E_1 puis on applique un champ électrique uniforme $\vec{E} = -E\vec{u}_x$ avec $E > 0$, qui va avoir pour effet de modifier l'état et l'énergie de l'électron. On étudie le cas d'école (c'est-à-dire invraisemblable !) où tous les autres électrons du métal sont figés, le métal restant alors localement neutre en tout point et ne faisant pas écran au champ électrique.

2) Exprimer le potentiel électrique $U(x)$, puis le potentiel $V(x)$ pour $0 < x < L$ en prenant l'origine en $x = 0$. Exprimer la différence de potentiel électrique $\Delta U = U(L) - U(0)$ entre les deux bords de la bande métallique.

Si le champ électrique n'est pas trop élevé, la nouvelle partie spatiale de la fonction d'onde de l'état fondamental en présence de $\vec{E}$, notée $\phi_{1,\vec{E}}(x)$, peut être vue comme une combinaison linéaire des $\phi_n(x)$. En ne gardant que les deux états de plus proche énergie, la théorie quantique des perturbations stationnaires montre que l'on peut écrire de manière approchée :

$\phi_{1,\vec{E}}(x) \approx \beta(\phi_1(x) - K\phi_2(x))$, avec $K = \dfrac{16}{27\pi^2}\dfrac{e\Delta U}{E_1}$. Cette formule est valable tant que $K << 1$.

3) Sachant que $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = 0$, que doit valoir β si l'on désire normaliser la fonction d'onde $\phi_{1,\vec{E}}(x)$?

4) Sur un même graphe, tracer $V(x)$, $|\phi_1(x)|^2$, $|\phi_{1,\vec{E}}(x)|^2$ pour $K = 0{,}3$ et les commenter de manière détaillée.

Toujours d'après la théorie des perturbations, l'énergie de l'état fondamental en présence du champ électrique a pour expression approchée si $K << 1$:

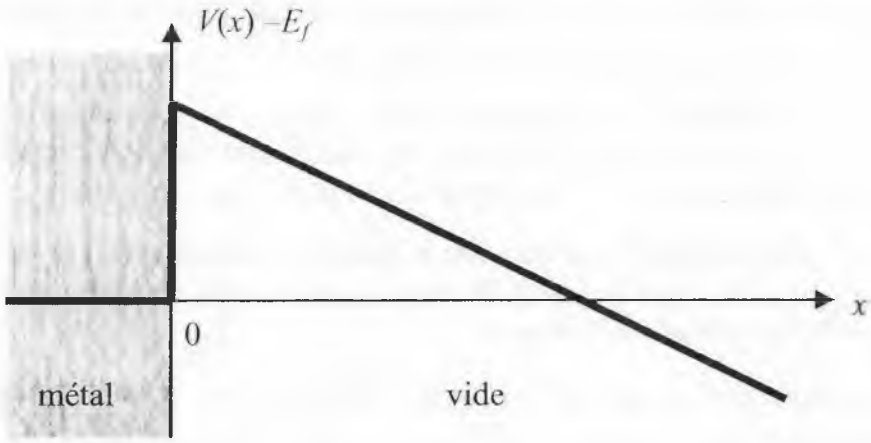
$$E_{1,\vec{E}} \approx E_1 - \frac{e\Delta U}{2} - \frac{256}{243\pi^2}\frac{(e\Delta U)^2}{E_1}$$

5) Justifier la valeur des deux premiers termes ainsi que le signe du troisième.

6) Pour les canons à effet de champ (voir partie 1), L représente la longueur (et non la largeur) de la pointe de la cathode. Pour $L = 3$ mm, estimer la valeur maximale de la d.d.p. ΔU pour que les formules approchées soient valables. Que vous inspire ce résultat ?

7) En pratique, le métal contient une multitude d'électrons libres de se mouvoir. Que se passe-t-il lorsqu'on lui applique un champ électrique ?

On étudie maintenant la possibilité d'extraction par effet tunnel d'un électron hors du métal sous l'action du champ électrique. Le métal occupe cette fois-ci le demi-espace $x < 0$, la zone $x > 0$ étant du vide. On note Φ le travail de sortie des électrons : il correspond au travail à fournir pour faire sortir un électron (loin) du métal. Dans la zone $x > 0$ règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = -E\vec{u}_x$ avec $E > 0$. En notant E_f l'énergie de l'électron dans le métal et dans l'hypothèse où l'électron n'interagit plus avec le métal dès sa sortie, le graphe de $V(x) - E_f$ a l'allure suivante, en fixant l'origine à l'intérieur du métal.



8) Faire apparaître Φ et indiquer la pente de la droite pour $x > 0$. Exprimer l'abscisse x_b pour laquelle le potentiel redescend à zéro. Que représente x_b pour l'effet tunnel ?

Dans l'approximation *WKB* (étudié par Brillouin, Kramers et Wentzel en 1926), le coefficient de transmission par effet tunnel T de l'électron à travers une barrière de potentiel situé entre les abscisses x_1 et x_2 est donné par la formule approchée :

$$T = \exp\left(-2\int_{x_1}^{x_2} K(x)dx\right) \text{ avec } K(x) = \frac{\sqrt{2m(V(x) - E_f)}}{\hbar}.$$

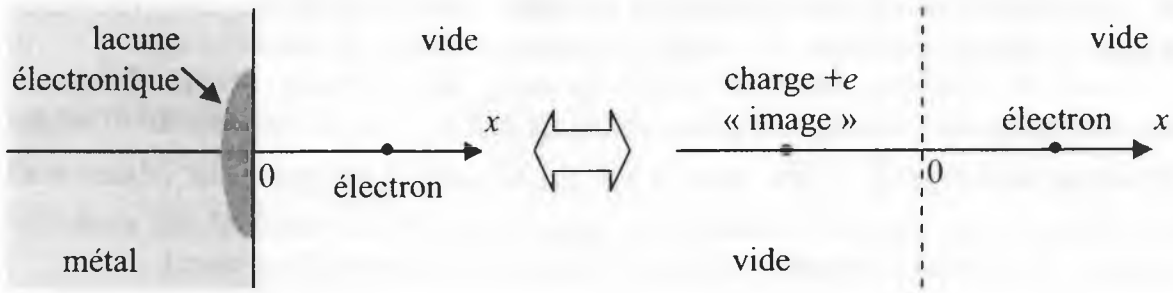
9) Montrer que, dans le cas de la barrière triangulaire, le coefficient de transmission s'écrit :

$T = \exp\left(-b\dfrac{\Phi^{3/2}}{E}\right)$. Exprimer b en fonction de m, e et $\hbar$.

En pratique, le modèle précédent de barrière nécessite une correction. Lorsque l'électron quitte la surface du métal, il subit en réalité deux forces :

- celle due au champ électrique qui existerait en son absence,
- celle due au champ électrique créé par la surface métallique suite au départ de l'électron.

En effet, lorsque l'électron quitte le métal, il laisse derrière lui une lacune électronique générant un champ électrique. L'interaction entre l'électron et cette lacune est appelée l'effet d'échange et de corrélation (*E&C* : *exchange and correlation effect*). Il faut normalement utiliser la mécanique quantique pour l'étudier de manière rigoureuse, mais il est possible de déterminer son effet sur le potentiel en utilisant la notion de « charge image » : tout se passe comme si la lacune électronique dans le métal était une charge $+e$ située au niveau de l'image de l'électron par rapport à la surface métallique (voir figure suivante).



10) A l'aide d'un raisonnement énergétique sur un déplacement élémentaire dx de l'électron, montrer que l'effet $E\&C$ revient à rajouter un potentiel supplémentaire $V_{E\&C}(x) = -\dfrac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x}$ pour l'électron.

11) Tracer la nouvelle allure de $V(x) - E_f$ prenant en compte l'effet $E\&C$. Faire apparaître la hauteur maximale et les abscisses x_1 et x_2 des extrémités de la barrière et commenter. Ce modèle plus élaboré est appelé la barrière de Schottky-Nordheim.

12) Montrer que la barrière disparaît si le champ électrique E est supérieur à E_{SN}. Exprimer E_{SN} en fonction de Φ, ε_0, e et $\hbar$.

La prise en compte de l'effet $E\&C$ modifie l'expression du coefficient de transmission :

$T_{E\&C} = \exp\left(-b\dfrac{\Phi^{3/2}}{E} f\left(\dfrac{E}{E_{SN}}\right)\right)$, où le facteur correctif f a pour expression approchée :

$f(u) \approx 1 - u + \dfrac{1}{6} u \ln(u)$ (avec une erreur absolue inférieure à 0,3 %).

Dans un canon à effet de champ (voir partie 1), le champ électrique E au niveau de la pointe est de l'ordre de 4.10^7 V.cm^{-1}.

13) Calculer T pour du tungstène dont le travail de sortie vaut $\Phi = 4{,}5$ eV. L'effet $E\&C$ doit-il être pris en compte ?

Un calcul complexe permet d'aboutir à l'expression de la densité de courant électronique j émergeant du métal (équation de Fowler-Nordheim) :

$$j = \frac{e^3}{16\pi^2\hbar}\frac{E^2}{\Phi} T_{E\&C}$$

14) Estimer la valeur du courant électronique émis par le canon à effet de champ étudié dans la partie 1.

9.10 Manipulation de fonctions d'onde

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : double puits symétrique, évolution temporelle, paquet d'ondes.

Le contrôle des réactions chimiques au sein de molécules est l'un des défis majeurs de la chimie moléculaire moderne. Un tel contrôle demande une manipulation très précise des fonctions d'onde électronique. Une solution pour agir sur la dynamique des électrons est d'illuminer la molécule avec plusieurs impulsions laser très courtes (des impulsions si brèves que le champ électromagnétique n'y effectue que quelques oscillations). Pour modifier efficacement l'évolution des fonctions d'onde électronique au sein de la molécule, il faut une synchronisation et surtout une mise en forme très précise des paquets d'ondes formant les impulsions laser. Cette exigence de précision vient du fait que les fonctions

d'onde électronique évoluent très rapidement au sein de la molécule. Ce problème propose d'étudier cette évolution à travers un exemple simplifié.

Pour les applications numériques, on fournit les valeurs suivantes :

$\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s.
$\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1}.
$m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg.
$e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

On rappelle l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde $\psi(M,t)$ d'un électron de masse m_e, de charge $-e$, situé dans l'environnement immédiat d'un atome ou d'une molécule :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi + V(M,t)\psi(M,t)$$

Dans cette formule, Δ désigne l'opérateur laplacien et V le potentiel (ayant la dimension d'une énergie, en prenant par convention une énergie nulle à l'infini) dans lequel est plongé l'électron. On raisonne dans un premier temps sur un atome d'hydrogène, dont le noyau est constitué d'un seul proton.

1) Comment s'écrit alors le potentiel V ?

On admet que les trois termes apparaissant dans l'équation de Schrödinger ont le même ordre de grandeur.

2) Montrer que les orbitales atomiques de l'atome ont un rayon de l'ordre de a_0 dont on donnera l'expression en fonction de $\hbar$, ε_0, m_e, et e.

3) Donner l'expression du temps caractéristique τ d'évolution de la fonction d'onde électronique en fonction de m_e, $\hbar$ et a_0. Faire l'application numérique.

Afin d'obtenir des résultats plus précis, on raisonne sur l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, pour lequel l'électron est dans l'orbitale appelée 1s, décrite par une fonction d'onde de la forme $\psi(M,t) = \varphi(r)\exp\left(-\frac{iE_1}{\hbar}t\right)$ avec $\varphi(r) = K\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ où r désigne la distance au proton. Pour une fonction ne dépendant que de r, on donne la formule de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques $\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$.

4) Quel est le rayon caractéristique de cette orbitale ? Où se situe l'endroit le plus probable de localisation de l'électron ?

5) Qu'est-ce qui fixe la valeur de K ? Il n'est demandé aucun calcul.

6) A l'aide de l'équation de Schrödinger, donner l'expression de a et de l'énergie E_1 de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. Commenter le signe de E_1. Faire les applications numériques correspondantes.

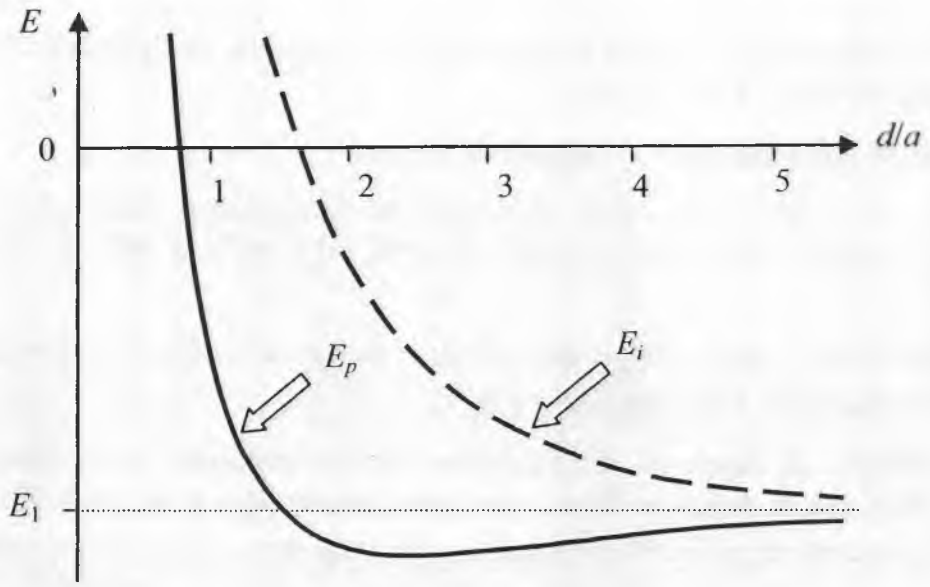
On étudie maintenant l'ion H_2^+, constitué d'un unique électron et de deux protons notés A et B distants de d. Dans un modèle de résolution approximative de l'équation de Schrödinger pour cette situation, on montre que les fonctions d'onde électronique des deux premiers

états stationnaires de plus basse énergie, repérés par les indices p et i, ont pour expression approchée :

$$\psi_p(M,t) = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}}(\varphi_A + \varphi_B)\exp\left(-\frac{iE_p}{\hbar}t\right) \text{ et}$$

$$\psi_i(M,t) = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}}(\varphi_A - \varphi_B)\exp\left(-\frac{iE_i}{\hbar}t\right),$$

où $\varphi_A = K\exp\left(-\frac{r_A}{a}\right)$ et $\varphi_B = K\exp\left(-\frac{r_B}{a}\right)$, r_A et r_B étant les distances respectivement au proton A et au proton B. La quantité sans dimension S, comprise entre 0 et 1, s'appelle « l'intégrale de recouvrement ». Le graphe suivant représente l'allure des énergies E_p et E_i de l'ion pour les deux états respectivement p et i en fonction de la distance d entre les deux protons.



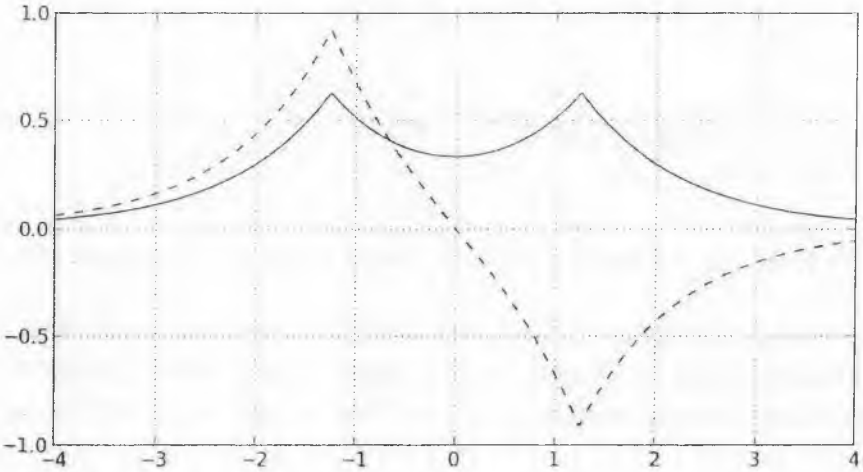
7) Que représentent φ_A et φ_B ?

8) Comment ces résultats expliquent-ils l'existence même de l'ion H_2^+ ? Souvent, l'état p est appelé l'état « liant » et l'état i l'état « anti-liant ». Justifier cette dénomination. Quelle est la distance entre les deux protons dans l'état fondamental de l'ion H_2^+ d'après ce modèle simplifié ? Comparer à la valeur exacte (résolution numérique de l'équation de Schrödinger sans approximation) qui est de 1,06 Å.

9) A l'aide de la relation de Planck-Einstein, estimer la fréquence d'une onde électromagnétique permettant de dissocier l'ion H_2^+. Dans quel domaine du spectre se situe-t-on ?

La figure suivante représente la partie spatiale $\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}}(\varphi_A + \varphi_B)$ de la fonction d'onde de l'état p (trait plein) et $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}}(\varphi_A - \varphi_B)$ celle de l'état i (trait pointillé) le

long d'un axe passant par les deux protons dans le cas où $d = 2{,}5\ a$, sachant que $S \approx 0{,}5$ pour cette distance. L'échelle des abscisses correspond à des multiples de a et l'échelle des ordonnées est arbitraire (mais identique pour les deux graphes).



10) Donner l'allure de la densité de probabilité de présence de l'électron le long de l'axe pour chaque état p et i. Commenter.

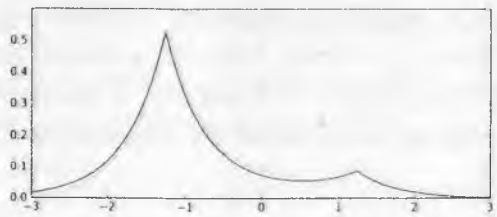
11) Estimer la taille (longueur et largeur) de l'ion H_2^+.

On suppose que l'ion H_2^+, initialement dans son état fondamental, subit une première perturbation qui modifie sa fonction d'onde de telle sorte qu'à la date $t = 0$, celle-ci s'écrive :

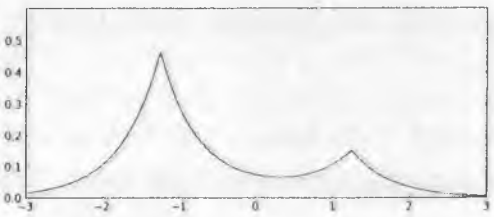
$\psi(t = 0) = k(\varphi_A + \varepsilon\varphi_B)$, k étant une constante de normalisation. Pour simplifier, on suppose que la distance d ne varie pas pour $t > 0$.

12) En utilisant la linéarité de l'équation de Schrödinger et le principe de superposition, exprimer la fonction d'onde de l'état excité $\psi(t)$ pour $t > 0$. En déduire l'expression de la densité de probabilité de présence de l'électron $\rho(t)$ en fonction du temps.

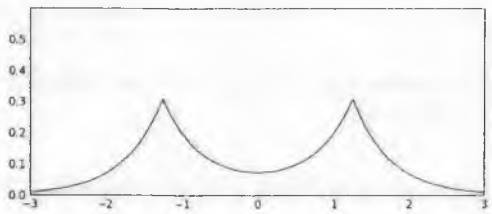
Les figures suivantes représentent l'allure du graphe $\rho(t)$ le long de l'axe reliant les deux protons tracées à différents instants dans le cas où $\varepsilon = 1/3$.



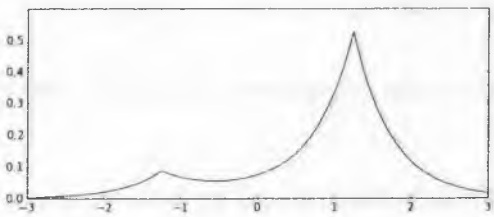
$t = 0$



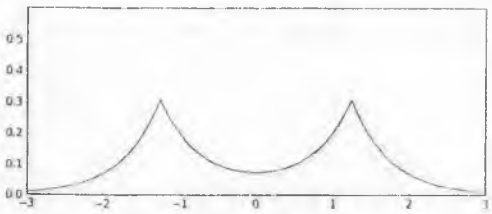
$t = T/8$



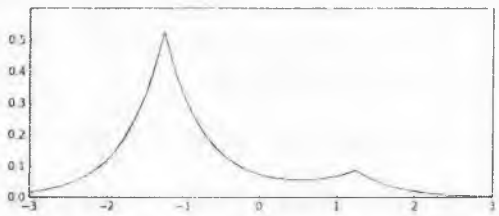
$t = T/4$



$t = T/2$



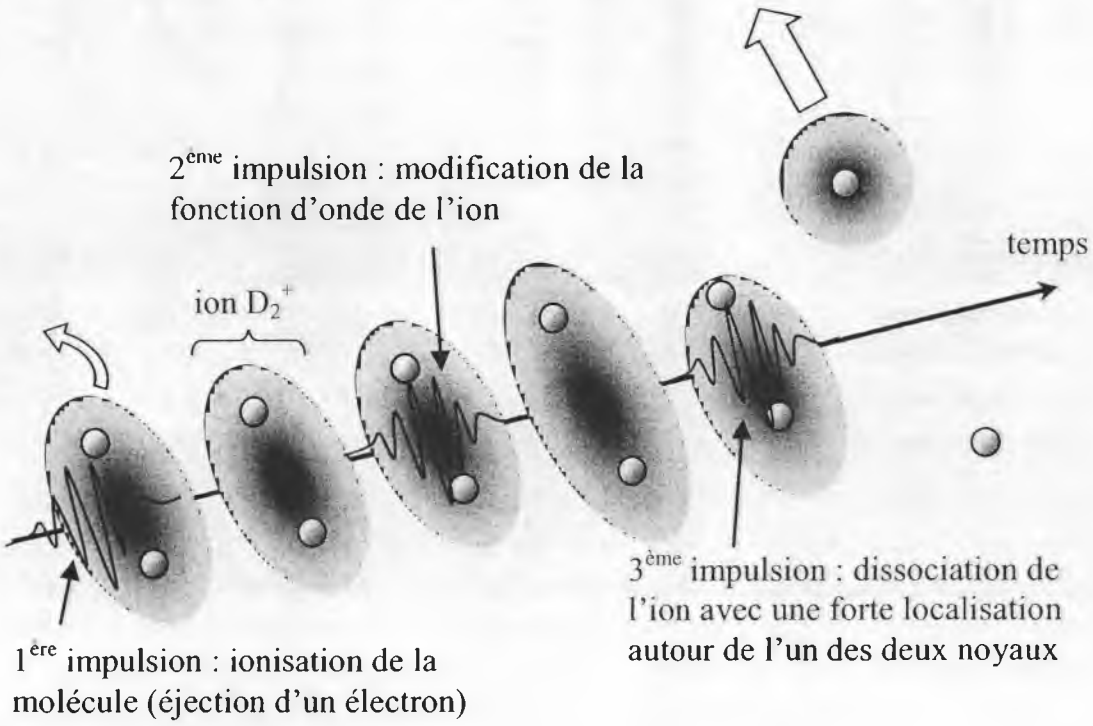
$t = 3T/4$



$t = T$

13) Commenter ces graphes et décrire la dynamique de l'électron au sein de l'ion. Exprimer le temps T en fonction de E_p et E_i et lui donner une signification physique concrète.

Des chercheurs ont publié en 2010 un article dans la revue *Journal of Physics B* montrant qu'il était théoriquement possible d'orienter la localisation d'un électron lors de la dissociation d'une molécule symétrique. En partant d'une molécule de di-deutérium D_2 (le deutérium, dont le noyau est constitué d'un proton et d'un neutron, est un isotope de l'hydrogène), une série d'impulsions laser infrarouge d'une durée de 7 femtosecondes (1 fs = 10^{-15} s) peut ioniser la molécule en D_2^+ (éjection d'un électron), modifier la fonction d'onde de l'ion pour enfin localiser l'électron autour de l'un des deux noyaux lors sa dissociation. La figure ci-dessous reprend les différentes étapes de la manipulation. En réglant avec soin d'une part le retard temporel entre la 2ème et la 3ème impulsion et d'autre part le déphasage entre la porteuse et l'enveloppe du paquet d'ondes formant la 3ème impulsion, il est possible de maximiser le taux de dissociation et de privilégier le noyau dans lequel l'électron se retrouvera une fois les deux noyaux de deutérium séparés. Les simulations numériques prévoient un rapport de 1 sur 10 entre les probabilités de présence autour de chaque noyau, alors que, sans contrôle particulier, l'électron se retrouvera de manière équiprobable autour de l'un des deux noyaux.



14) En reprenant les résultats précédents, estimer la précision des paramètres temporels de mise en forme de la 3ème impulsion nécessaire pour espérer obtenir la localisation contrôlée de l'électron.

Les références de l'article de recherche sont :

C.R. Calvert et Al., *Multi-pulse scheme for enhancing electron localization through vibrational wavepacket manipulation*, J Phys B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 011001 (2010)

Pour préparer les concours,

PROBLEMES MULTICHAPITRES associés au CHAPITRE 9 :

10.19	Expérience de complémentarité
10.20	Sur la taille d'un atome…
10.21	Interférence avec des atomes ultra froids

CHAPITRE 10

PROBLEMES MULTICHAPITRES

10.1 Etude spectrale d'un faisceau laser

TECHNICITE : * INITIATIVE : **

Chapitres concernés : 1- OPTIQUE et 2- LASERS

MOTS-CLES : laser, cohérence temporelle.

Un faisceau laser est souvent considéré comme monochromatique. En réalité, le spectre du signal peut comporter plusieurs raies, selon la nature du milieu amplificateur et de la cavité utilisées. On se propose de caractériser le spectre de la lumière émise par une diode laser.

Une diode laser est un composant optique de quelques millimètres de long permettant d'obtenir facilement un faisceau laser.

Sa taille réduite et son faible coût ont rendu son utilisation très répandue dans de nombreuses applications

© NASA

L'étude directe du spectre du faisceau laser avec un spectroscope à réseau donne une mesure de la longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 672$ nm, mais ne permet pas de résoudre les longueurs d'onde des différentes raies émises. C'est pourquoi on envisage d'obtenir le spectre à partir de l'étude du contraste d'une figure d'interférences.

On considère tout d'abord le cas d'un faisceau laser possédant une seule raie, de largeur spectrale $\Delta\nu$.

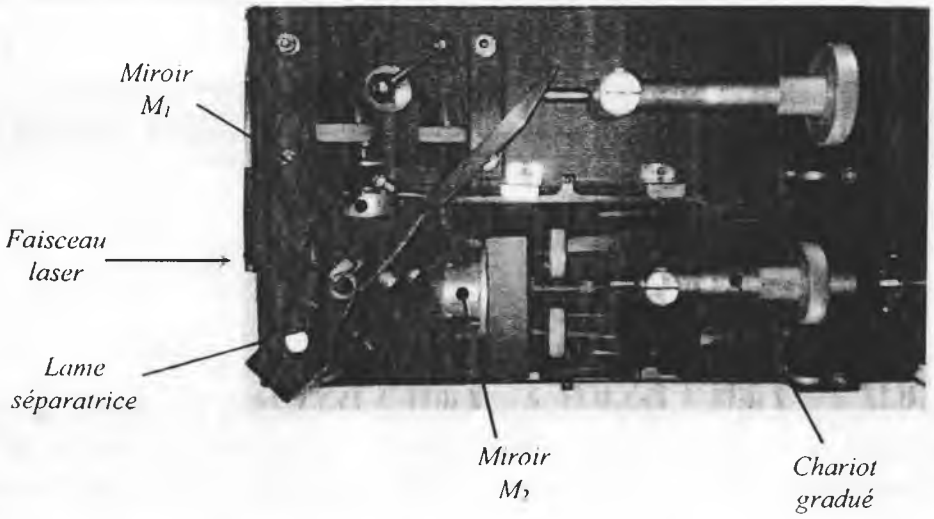
1) Rappeler les relations donnant le temps de cohérence τ_c et la longueur de cohérence temporelle l_c de la source en fonction de la largeur spectrale $\Delta\nu$.

2) Comment évolue le contraste de la figure d'interférences obtenue avec ce faisceau selon la valeur de la différence de marche δ ? Que se passe-t-il lorsque $\delta > l_c$?

On envoie le faisceau laser émis par la diode dans un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Lors du réglage de l'appareil, le contact optique a été obtenu pour une position

du chariot $x_0 = 11{,}53$ mm. On observe alors que la figure d'interférences n'existe que pour certaines positions du chariot et que le contraste de cette figure diminue à mesure que l'on s'éloigne du contact optique. On a consigné dans le tableau ci-après les résultats expérimentaux obtenus en fonction de la position x du chariot gradué. Des mesures d'éclairement avec une photodiode ont permis de déterminer numériquement le facteur de contraste de la figure.

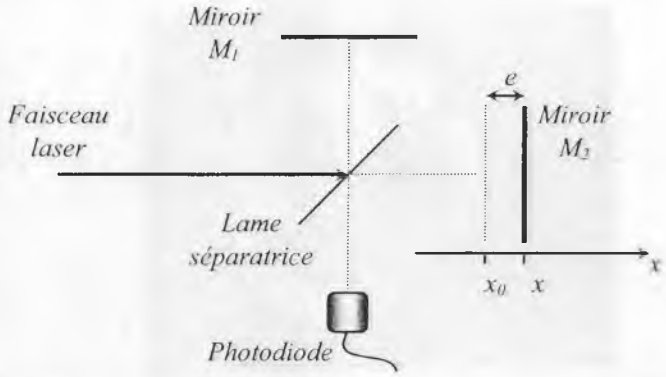
Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air



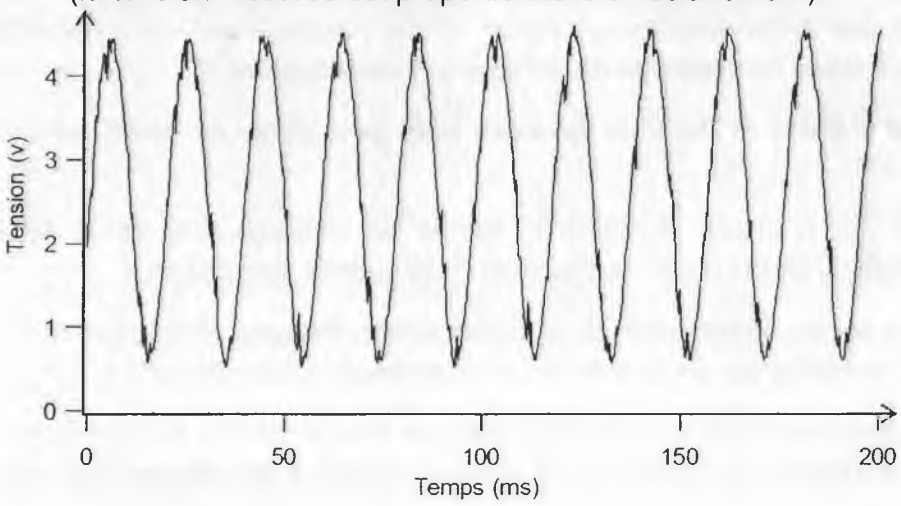
© Benoît Dépret

Schéma de principe de l'expérience

La photodiode permet de mesurer l'éclairement au centre de la figure d'interférences



Signal délivré par la photodiode (à la sortie d'un montage convertisseur courant-tension) lorsque l'on déplace le miroir M_2 à vitesse constante au voisinage de x = 14,03 mm (la tension mesurée est proportionnelle à l'éclairement).



Facteur de contraste de la figure d'interférences en fonction de la position du chariot

Position du chariot x (mm)	*Facteur de contraste γ*	*Commentaire*	*Position du chariot x (mm)*	*Facteur de contraste γ*	*Commentaire*
11,53	**1,0**	Contact optique	15,41	0	Brouillage
11,84	0	Brouillage	16,27		
12,52			**16,54**	**0,23**	Interférences
12,78	**0,91**	Interférences	16,72	0	Brouillage
12,89	0	Brouillage	17,53		
13,90			**17,80**	**0,10**	Interférences
14,03	**?**	Interférences	18,04	0	Brouillage
14,24	0	Brouillage	18,99		
15,04			**19,12**	**0,03**	Interférences
15,24	**0,45**	Interférences	19,24	0	Brouillage

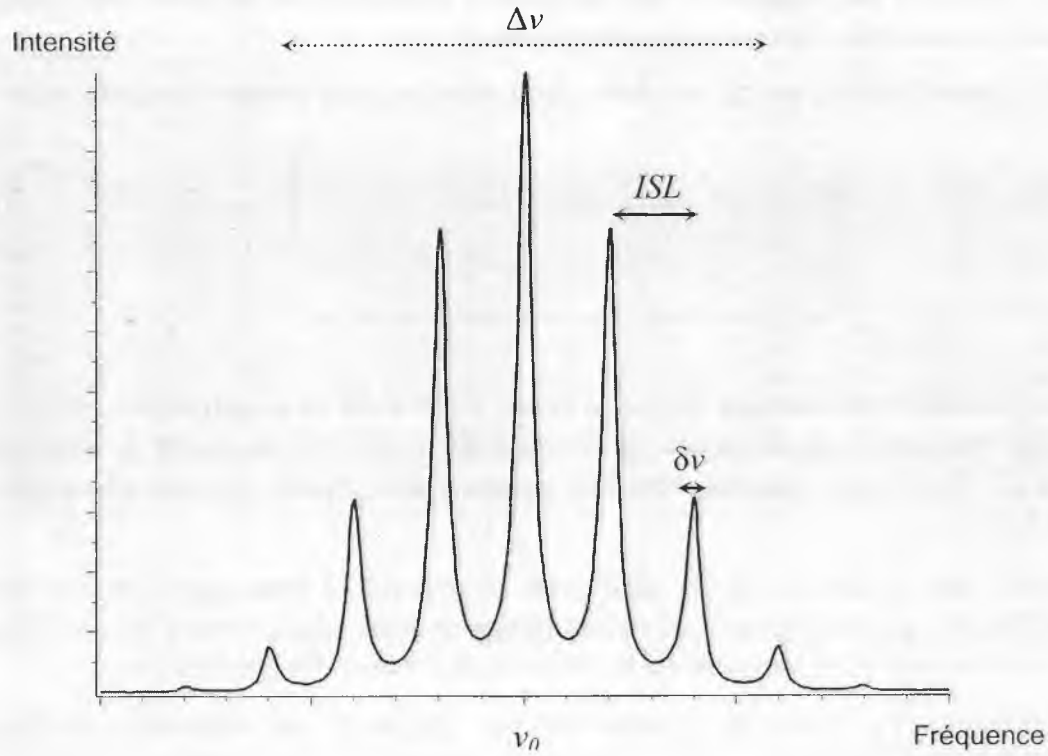
3) Exprimer la différence de marche δ sur la photodiode en fonction de x et x_0.

4) En utilisant le signal enregistré à l'aide de la photodiode, calculer le facteur de contraste obtenu pour x = 14,03 mm et compléter le tableau.

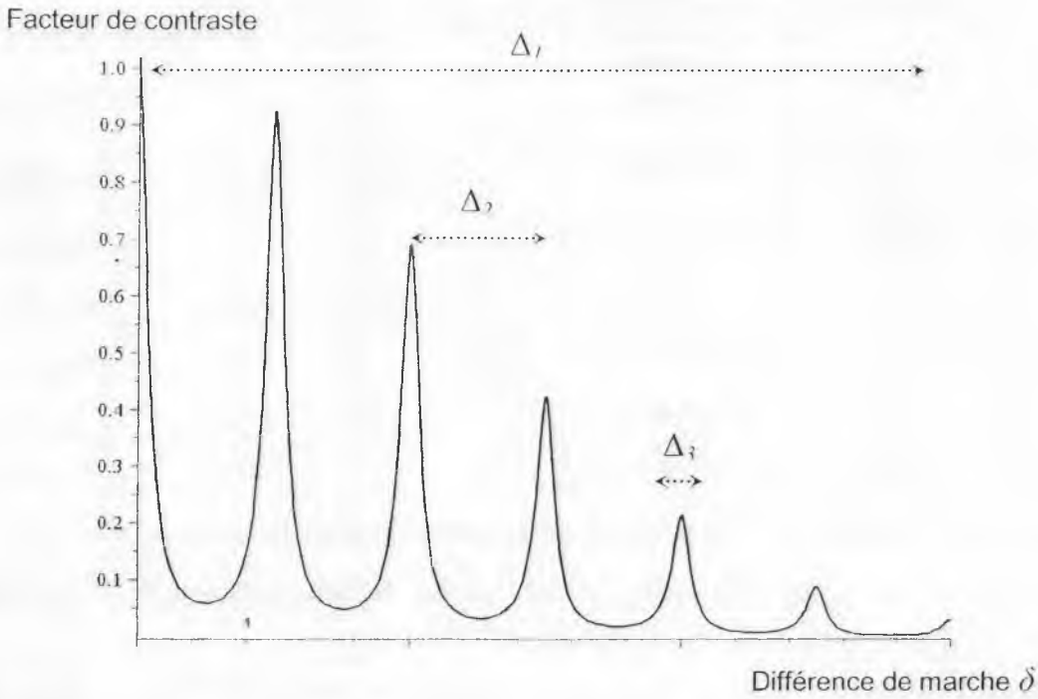
5) Tracer l'allure du graphe donnant le facteur de contraste γ en fonction de la différence de marche δ.

Afin d'interpréter les résultats obtenus, on se propose de modéliser simplement le spectre du faisceau émis par la diode laser et de comparer le facteur de contraste correspondant (calculé par transformée de Fourier) au profil expérimental.

Modélisation du spectre de la diode laser :
le spectre, de fréquence moyenne ν_0, contient des raies de largeur $\delta\nu$, espacées de l'intervalle spectral libre ISL, dans une enveloppe de largeur totale $\Delta\nu$.



Evolution du facteur de contraste correspondant en fonction de la différence de marche :
il apparaît les distances caractéristiques Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

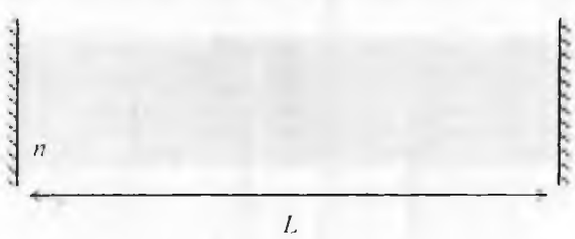


6) Le modèle proposé est-il en accord avec les résultats observés ? En déduire les valeurs numériques de Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

7) Montrer que l'on peut facilement exprimer Δ_1 et Δ_3 en ne considérant dans le spectre qu'une seule raie, de largeur $\delta\nu$ ou de largeur $\Delta\nu$. En déduire les valeurs numériques de $\delta\nu$ et de $\Delta\nu$.

Les différentes raies observées dans le spectre correspondent aux modes propres de la cavité laser. Celle-ci est modélisée par un milieu amplificateur d'indice de réfraction $n = 3{,}6$ et placé entre deux miroirs plans distants de L.

Le milieu amplificateur est placé entre deux miroirs pour former la cavité laser



8) En procédant par analogie avec une corde fixée à ses deux extrémités, déterminer les fréquences propres ν_p de la cavité en fonction de L, n, c et un entier p. En déduire l'expression de l'*intervalle spectral libre ISL* séparant deux modes propres consécutifs en fonction de L, c et n.

9) Etablir une condition sur la différence de marche δ pour que tous les modes propres interfèrent constructivement en même temps en sortie de la lame d'air. En déduire les valeurs numériques de la longueur de la cavité et de l'intervalle spectral libre.

10)Commenter la forme du spectre obtenu. Qu'est-ce qui détermine la largeur spectrale totale $\Delta\nu$? Comment pourrait-on réaliser un laser monomode ?

10.2 Désembuage d'un pare-brise

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : PCSI et 3- THERMODYNAMIQUE

MOTS-CLES : vapeur saturante, loi de Fourier, bilan thermique, série de Fourier.

On examine dans ce problème la présence ou non de buée à l'intérieur d'un véhicule et les moyens de la faire disparaître. Le pare-brise d'une voiture est constitué de deux feuilles de verre d'environ 2 mm d'épaisseur chacune reliée par une feuille de PVB (polyvinyle de butyral) d'environ 1 mm d'épaisseur.

8) Expliquer le rôle de la couche de PVB.

Cependant, par souci de simplification, on assimilera un pare-brise à un simple vitrage standard en verre de conductivité thermique $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1} possédant une épaisseur $e = 6$ mm. Chaque face du vitrage est le siège d'échanges thermiques avec l'air directement en contact. La puissance échangée se révèle être proportionnelle à la surface de contact et à la différence de température entre la paroi et l'air en contact et est quantifiée par un coefficient de transfert thermique h. On prendra les valeurs conventionnelles suivantes :

$h_e = 23$ W.m^{-2}.K^{-1} pour la paroi en contact avec l'air extérieur,

$h_i = 8$ W.m^{-2}.K^{-1} pour la paroi en contact avec l'air intérieur.

L'air intérieur du véhicule est à la température $T_i = 20$°C et l'air extérieur à $T_e = 5$°C. On montre (voir problème 3.10) que la température T_{int} de la face intérieure du pare-brise a pour expression :

$$T_{int} = \frac{h_i T_i + \dfrac{1}{\dfrac{e}{\lambda} + \dfrac{1}{h_e}} T_e}{h_i + \dfrac{1}{\dfrac{e}{\lambda} + \dfrac{1}{h_e}}}$$

Le taux d'humidité est défini par $Taux_h = \dfrac{P_{vap}}{P_{sat}}$, où P_{vap} désigne la pression partielle de vapeur d'eau dans l'air et P_{sat} la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'air ambiant. La formule de Rankine donne une expression approchée de la pression de vapeur saturante en fonction de la température, avec $P_0 = 1$ bar et $T_0 = 273$ K:

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right) = 13{,}7 - 18{,}7\frac{T_0}{T}$$

9) Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante.

10) Pour un taux d'humidité de 60 % dans l'habitacle du véhicule, indiquer si de la buée se forme sur le pare-brise.

Trois moyens simples permettent de désembuer les vitres à l'intérieur d'un véhicule : chauffer l'habitacle, augmenter la ventilation ou mettre en route la climatisation pendant quelques minutes.

11) Expliquer dans chaque cas le ou les phénomènes qui entrent en jeu.

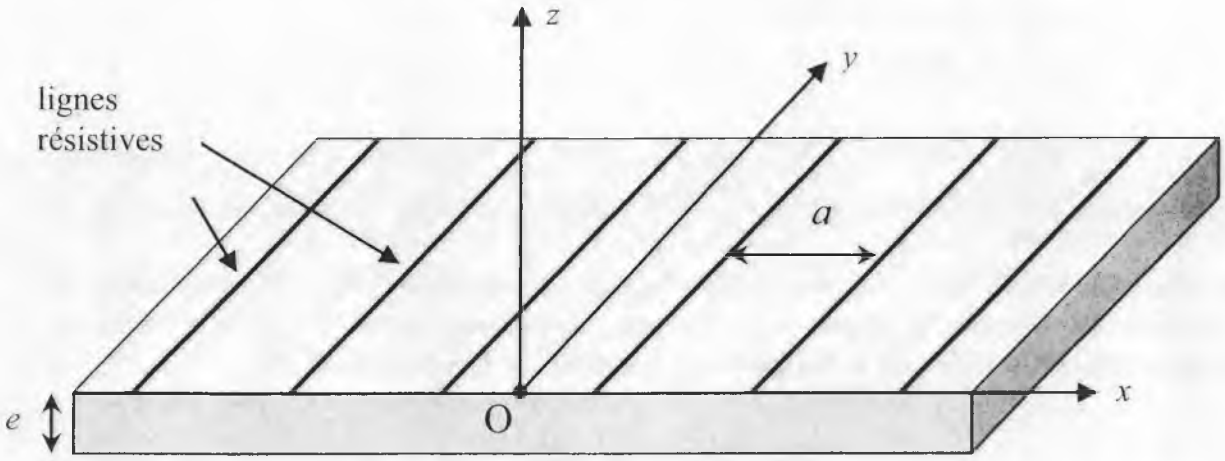
Il se peut que ces méthodes soient insuffisantes pour désembuer la plage arrière du véhicule. C'est pourquoi le pare-brise arrière possède une série de lignes résistives (résistances chauffantes) réparties régulièrement et distantes de a. On prendra $a = 3$ cm pour la suite. En plus des caractéristiques décrites précédemment, le vitrage du pare-brise possède les propriétés suivantes :

- masse volumique $\rho = 2700$ kg.m^{-3},
- capacité calorifique massique $c_m = 800$ J.kg^{-1}.K^{-1}.

12) En calculant l'ordre de grandeur du temps mis par l'énergie thermique pour diffuser entre deux résistances chauffantes, justifier la valeur de l'espacement entre deux lignes résistives successives choisie par le constructeur.

Pour une étude quantitative plus précise, on se place dans la configuration du schéma ci-dessous, où l'on effectue les approximations suivantes :

- les lignes résistives sont considérées comme infiniment longues selon la direction Oy.
- il y a une succession infinie de lignes dans la direction Ox, séparées d'une distance a, l'axe Oy étant choisi au milieu de deux lignes.
- l'épaisseur e du vitrage est suffisamment petite pour négliger la dépendance de la température par rapport à z,
- on néglige les échanges thermiques entre la vitre et l'air intérieur ($h_i = 0$). Les échanges thermiques entre la vitre et l'air extérieur seront pris en compte et quantifiés par le coefficient $h_e = 40$ W.m^{-2}.K^{-1} (la voiture étant en train de rouler).



On étudie dans un premier temps le cas du régime stationnaire, lorsque l'équilibre thermique est atteint une fois le système de chauffage allumé.

13) Que dire sur la dépendance spatiale de la température du vitrage (invariance, périodicité, parité...) ?

14) Montrer que la température T du pare-brise vérifie **entre** deux lignes résistives l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h_e}{e\lambda}T(x) = -\frac{h_e}{e\lambda}T_e$$

15) Déterminer explicitement $T(x)$ pour $x \in \left[-\frac{a}{2};+\frac{a}{2}\right]$, sachant que chaque ligne résistive dissipe une puissance P_L par unité de longueur. On posera $b = \sqrt{\frac{e\lambda}{h_e}}$. Que représente cette grandeur ?

16) Pour un pare-brise constitué de 15 lignes résistives d'un mètre de long consommant une puissance totale de 200 W, calculer les températures T_{max} et T_{min} respectivement aux points les plus chauds et les plus froids du vitrage. La buée disparaît-elle ?

On étudie maintenant l'évolution spatiale et temporelle de la température une fois le chauffage éteint, l'extinction ayant lieu à la date $t = 0$.

17)Montrer que la température $T(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{h_e}{\rho e c_m}\left(T_e - T(x,t)\right)$$

Comment appelle-t-on le coefficient D ? L'exprimer en fonction des données du problème.

Le profil de température en régime permanent déterminé à la question 13) peut se mettre sous la forme :

$$T(x) = T_e + \frac{P_L}{h_e a}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{1+\left(\frac{2\pi d}{a}n\right)^2}\cos\left(\frac{n2\pi}{a}x\right)\right]$$

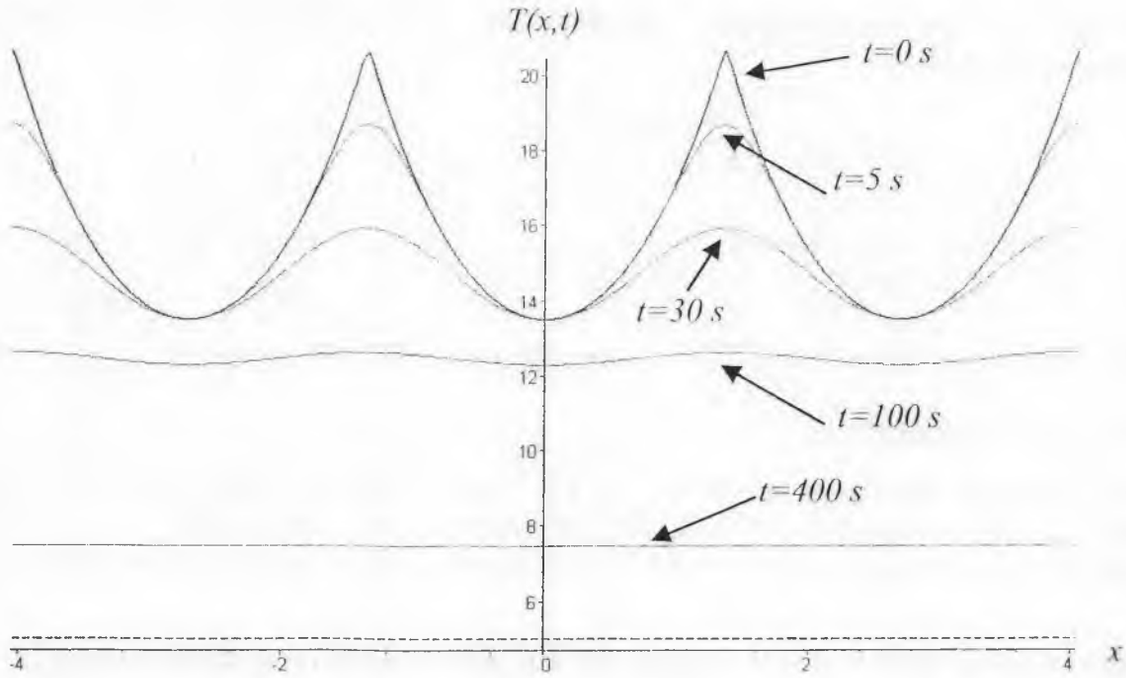
18) Justifier l'origine de cette forme sans chercher à la démontrer.

On cherche une solution pour $t > 0$ de la forme :

$$T(x,t) = T_e + \frac{P_L}{h_e a}\left[F_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{1+\left(\frac{2\pi d}{a}n\right)^2}F_n(t)\cos\left(\frac{n2\pi}{a}x\right)\right]$$

19) Déterminer explicitement les fonctions $F_n(t)$ pour n entier naturel.

Les courbes ci-après représentent le profil de température à différents instants, le trait en pointillé correspondant à la température T_e.



20) Commenter ces courbes à la lumière des résultats de la question précédente. Il est demandé notamment de mettre en évidence deux temps caractéristiques dont on donnera une signification concrète, une expression littérale et une valeur numérique.

10.3 Régulateur de vitesse

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

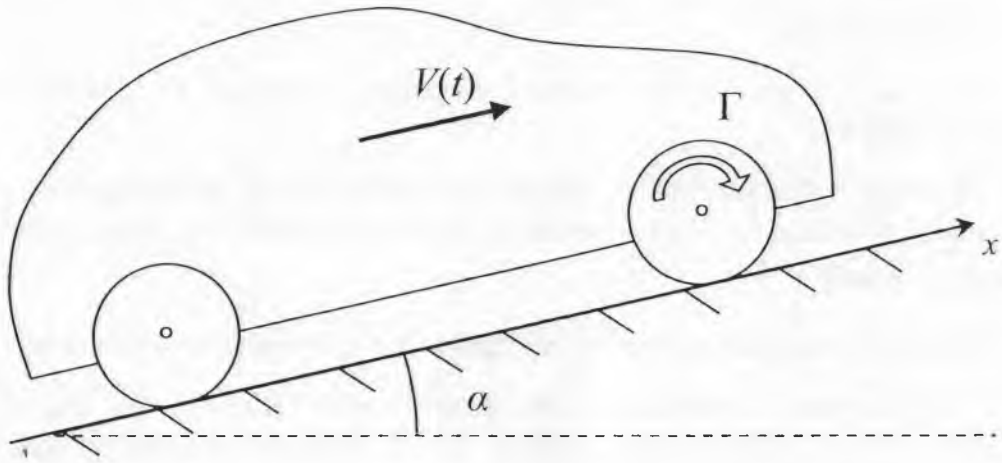
Chapitres concernés : PCSI, 4- MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS et 5- MECANIQUE DES FLUIDES

MOTS-CLES : véhicule à roues, force de traînée.

Certains modèles de voitures disposent d'un régulateur de vitesse : un calculateur contrôle le couple moteur à exercer pour que le véhicule garde une vitesse la plus proche possible d'une valeur de consigne préalablement choisie par le conducteur. Ce problème propose d'étudier deux exemples d'asservissement, de type linéaire, permettant de réaliser cette fonction.

© Renaud Carpentier

On considère une voiture de masse m, montant sur une route rectiligne faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Ses roues ont un rayon noté R et le couple moteur appliqué à l'essieu avant (système de traction) est noté Γ. Le système {roues avant et essieu avant}, assimilé à un solide, possède un moment d'inertie J par rapport à l'axe des roues, considéré comme axe de symétrie. On note $V(t)$ la vitesse de la voiture et $\Omega(t)$ la vitesse angulaire de rotation des roues à la date t.



1) Traduire le fait que les roues roulent sans glisser sur le sol par une relation entre $V(t)$ et $\Omega(t)$.

2) En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la voiture dans le référentiel terrestre et la loi du moment cinétique au système {roues avant et essieu avant} dans le référentiel de la voiture (en admettant que son caractère non galiléen n'intervienne pas), montrer que la vitesse $V(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\frac{dV}{dt}=\frac{\Gamma}{R}+F_{air}+F_{poids,x}$$

où $F_{poids,x}$ représente la projection du poids de la voiture sur l'axe Ox montant de la route et F_{air} représente la force de trainée exercée par l'air sur la voiture.

3) Donner l'expression de F_{air} en faisant intervenir la section maximale S de la voiture dans un plan perpendiculaire à la vitesse, ρ_{air} la masse volumique de l'air et enfin C_x le coefficient de traînée.

On désire maintenir la voiture à une vitesse de consigne notée V_0. On démarre le régulateur de vitesse à la date t_0, le moteur délivrant alors le couple Γ_0. Dans un modèle d'asservissement linéaire de type « intégrateur », le calculateur fait appliquer un couple moteur selon la formule :

$$\Gamma=\Gamma_0-K\int_{t_0}^{t}(V(t)-V_0)\,dt$$

4) Expliquer sans calcul comment cet asservissement permet d'amener la voiture à la vitesse V_0, cela qu'elle que soit la pente de la route si cette dernière reste la même un temps « suffisant » (on ne cherchera pas à quantifier ce temps pour le moment). Quel doit être le signe de K ?

On suppose que la vitesse $V(t)$ est assez proche de V_0.

5) Montrer qu'un développement limité à l'ordre 1 en $V - V_0$ permet d'écrire que :

$$F_{air} \approx -\frac{1}{2}\beta V_0^2 - \beta V_0 (V - V_0)$$

où β est une constante à déterminer.

6) Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $V(t)$ dans le cas où la pente est constante.

7) Dans quel régime a-t-on intérêt à se placer ? Justifier. En déduire l'expression littérale de K à donner.

On traite le cas de figure suivant : la voiture possède la vitesse de consigne sur une portion plate et entame à la date $t = 0$ une montée de pente α constante. On pourra considérer dans la suite que $J \ll mR^2$.

8) Déterminer explicitement $V(t)$, le régulateur de vitesse étant enclenché.

Pour les applications numériques, on prendra $m = 1$ t, $S = 2$ m^2, $\rho_{air} = 1{,}3$ kg.m^{-3}, $V_0 = 90$ km.h^{-1} et $\alpha = 10°$ (soit une pente de 17 %). Pour une voiture de type citadine le coefficient de traînée est de l'ordre de $C_x = 0{,}3$.

9) A quelle date la vitesse est-elle la plus basse ? Combien vaut-elle ? Commenter. Quelle devrait être la masse maximale de la voiture pour que l'écart maximal à la consigne soit inférieur à 10 % ?

Pour obtenir un système plus rapide et plus efficace, on peut utiliser un asservissement linéaire de type « proportionnel intégrateur » de la forme :

$$\Gamma = \Gamma_0 - K\int_{t_0}^{t} (V(t) - V_0)\, dt - K'(V(t) - V_0)$$

10) Montrer que cette loi de contrôle permet de diminuer le temps de réponse du régulateur de vitesse et de diminuer l'écart à la consigne.

11) Déterminer les paramètres à utiliser pour obtenir un temps de réponse 100 fois plus faible que précédemment. Evaluer l'écart maximal à la consigne. Tracer alors l'allure de $V(t)$ et commenter les valeurs numériques.

La puissance d'un moteur de voiture est généralement exprimée en « chevaux-vapeur » ou simplement « chevaux » (noté *ch*), sachant que 1 ch = 736 W. Pour délivrer le couple Γ à la vitesse de rotation Ω, le moteur doit fournir la puissance mécanique :

$$P_{moteur} = \Gamma\Omega$$

12) Déterminer la vitesse de consigne maximale qu'une voiture de 90 ch de puissance peut respecter lors de cette montée. Que se passerait-t-il si la consigne était plus élevée ? Conclure : qu'est-ce qui limite les performances d'un asservissement de vitesse ?

10.4 Projection d'eau d'une descente en bûche

TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : PCSI et 5- MECANIQUE DES FLUIDES

MOTS-CLES : système ouvert, force de pression.

La descente en bûche est un grand classique des parcs d'attractions. Ce problème propose d'étudier la projection d'eau induite par le freinage de la bûche.

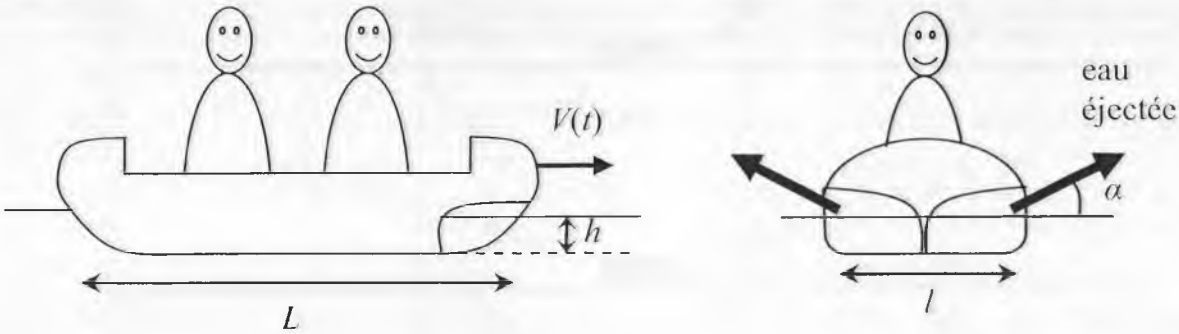
Descente en bûche du Parc Tibidabo près de Barcelone

source : TIBIDABO park, licence CC

La bûche possède une largeur l, une longueur L et une masse M (avec ses joyeux occupants). Elle part d'une hauteur H avec une vitesse initiale négligeable. On étudie son mouvement après la descente (translation rectiligne horizontale) lorsqu'elle est partiellement dans l'eau (de masse volumique μ) : on note h la hauteur de la partie immergée de la bûche. Valeurs numériques : l = 1 m ; L = 3 m ; M = 400 kg ; μ = 1000 kg.m^{-3} ; H = 10 m.

1) En négligeant les frottements pendant la descente, exprimer puis calculer en km/h la vitesse initiale V_0 de la bûche en bas de la piste juste avant son freinage.

Dans le référentiel lié à la bûche, on suppose que la bûche éjecte l'eau perpendiculairement à son axe, avec une vitesse d'éjection faisant un angle α par rapport à l'horizontale (voir figure) et de norme égale à la vitesse de la bûche dans le référentiel terrestre.



2) A l'aide d'un bilan entre t et $t + dt$ sur un système fermé que l'on précisera, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $V(t)$ de la bûche. Montrer que l'action de l'eau sur la bûche correspond à une force opposée à la vitesse de norme égale à $\mu l h V^2$.

3) Expliciter $V(t)$. Montrer que la décélération initiale de la bûche vaut V_0/τ. Exprimer τ en fonction des données du problème.

On suppose dans un premier temps que la bûche « flotte » sur l'eau, tout en restant constamment horizontale.

4) Montrer dans ce cas que τ s'exprime simplement en fonction de L et V_0. Calculer alors la valeur numérique de la décélération initiale et commenter.

En fait, la bûche repose sur des rails dans sa phase de freinage. La hauteur h correspond dans toute la suite à la profondeur des rails dans l'eau.

5) Calculer la hauteur h d'eau nécessaire pour que la décélération initiale de la bûche soit égale au double de la pesanteur.

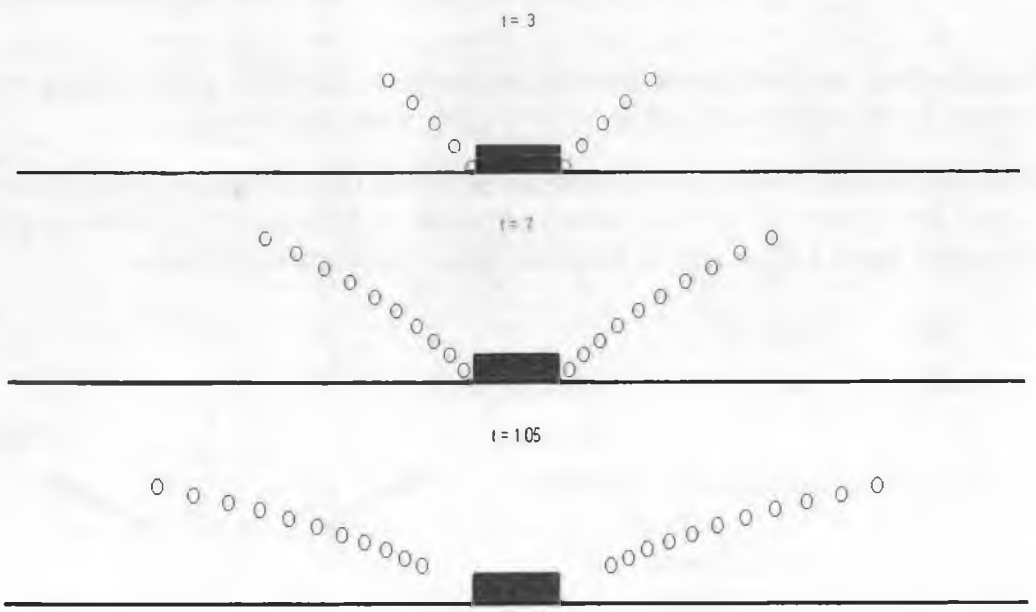
Afin qu'un spectateur voyant le freinage de la bûche ait l'impression d'un véritable « mur d'eau » qui retombe dans le bassin (et rendre ainsi l'attraction plus impressionnante), le concepteur du manège, un peu physicien dans l'âme, se demande s'il est possible d'ajuster la profondeur h des rails guidant la bûche lors du freinage pour que les différentes gouttes d'eau éjectées retombent toutes en même temps dans le bassin. Pour répondre à ce problème, on négligera les frottements de l'air.

6) Calculer la date t'' à laquelle l'eau éjectée à la date t' retombe dans le bassin.

7) En déduire la décélération que doit subir la bûche pour que les gouttes d'eau retombent toutes au même instant.

8) Exprimer la hauteur d'eau $h(x)$ en fonction de la distance x parcourue par la bûche depuis le début du freinage pour qu'il en soit ainsi. Quelle distance a-t-elle parcourue avant de s'arrêter ?

Les figures suivantes représentent une modélisation de la projection d'eau vue de face lorsque la condition précédente est satisfaite, avec $\alpha = 45°$.



t = 1 37

10.5 Puissance d'un sèche-cheveux

TECHNICITE : ** INITIATIVE : ***

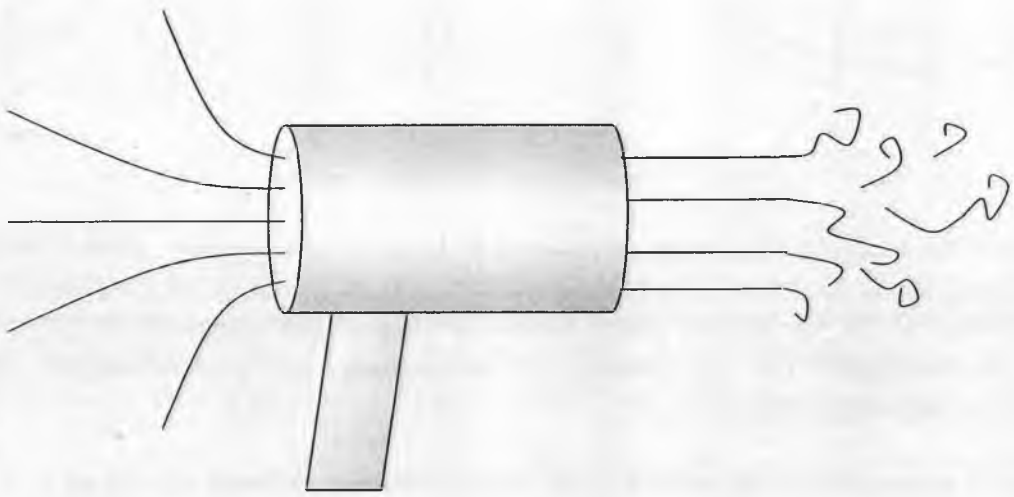
Chapitres concernés : 3-THERMODYNAMIQUE et 5- MECANIQUE DES FLUIDES

MOTS-CLES : système ouvert.

Un sèche-cheveux possède les caractéristiques suivantes :

- diamètre d'entrée et de sortie quasiment identique égal à 4 cm.
- vitesse de sortie de l'air (mesurée à l'aide d'un anémomètre) de 60 $km.h^{-1}$.
- température de l'air en sortie de 100°C pour une température ambiante de 20°C.

Le schéma ci-dessous représente l'allure des lignes de courant en amont et en aval d'un sèche-cheveux.



Estimer la puissance mécanique fournie par l'hélice, ainsi que la puissance thermique dégagée par le moteur et les résistances chauffantes. Il est demandé d'expliciter toute hypothèse simplificatrice permettant de répondre au problème posé.

10.6 Origine du jet stream

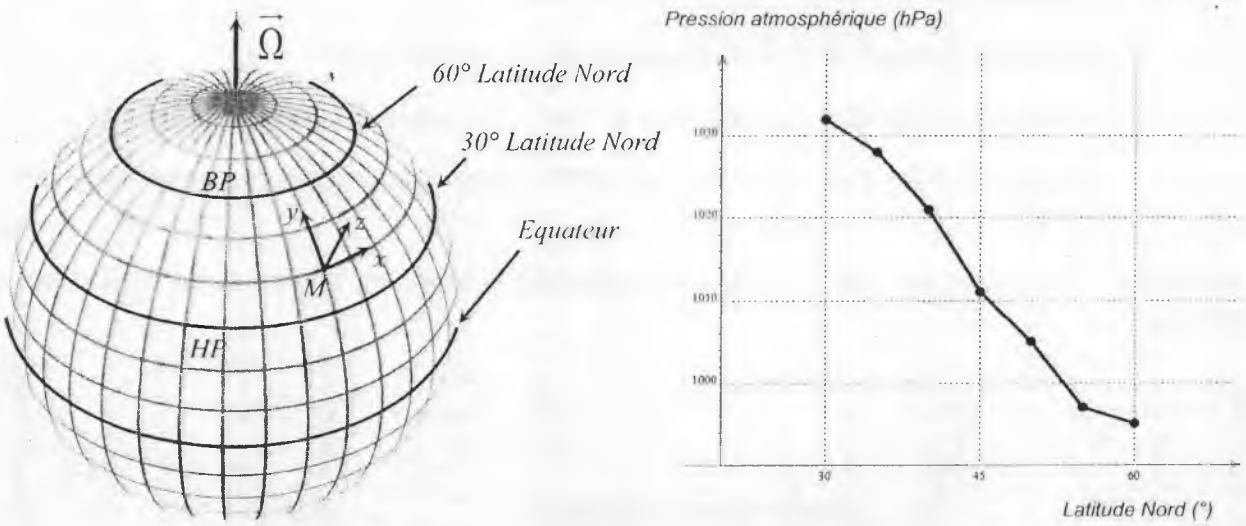
TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : 4- MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS et 5- MECANIQUE DES FLUIDES

MOTS-CLES : force d'inertie de Coriolis, équation d'Euler, statique des fluides.

On peut comprendre l'origine du jet stream (voir problème 4.9) en étudiant le rôle de la force de Coriolis dans la formation du vent à l'échelle de la planète. Ce mouvement global des masses d'air, appelé vent géostrophique, est dû à la variation spatiale de pression atmosphérique combinée à la rotation de la Terre.

Evolution de la pression atmosphérique moyenne en fonction de la latitude dans l'hémisphère Nord



La pression atmosphérique moyenne varie selon la latitude : on constate, dans l'hémisphère Nord, que la pression au sol au voisinage de 30° de latitude Nord est en général plus élevée qu'au voisinage de 60° de latitude Nord, induisant un gradient horizontal de pression dans la zone intermédiaire. On se propose de déterminer les caractéristiques du vent géostrophique dans cette région.

On associe à tout point M de latitude λ un repère cartésien d'axes $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$, comme indiqué sur le schéma ci-dessus. La direction $\vec{e_z}$ est assimilée à la verticale locale, définie par le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$, localement uniforme. On considère une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse volumique ρ située en M en mouvement dans le référentiel terrestre. On néglige tout effet de la viscosité. La Terre, de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km, tourne à la vitesse angulaire Ω dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1) Représenter les lignes isobares au sol dans la zone étudiée (entre 30° de latitude Nord et 60° de latitude Nord). Comment est dirigé le gradient horizontal de pression ? En déduire le mouvement attendu des particules de fluide en l'absence de rotation de la Terre.

2) Montrer que l'équation du mouvement d'une particule de fluide de vitesse $\vec{v}$ peut se mettre sous la forme, dans le référentiel terrestre :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right)=\rho\vec{g}-\overrightarrow{grad}P-2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$$

où $P(x,y,z)$ est le champ de pression dans l'atmosphère.

Identifier les différents termes, en particulier les termes d'inertie. Quel est l'effet de la force de Coriolis sur le mouvement des particules de fluide ?

3) Que devient l'équation du mouvement dans le cas d'une atmosphère au repos à la température $T_0 = 288$ K ? En déduire le champ de pression $P_{repos}(x,y,z)$ dans ce modèle d'atmosphère isotherme et évaluer l'épaisseur H de l'atmosphère. On pourra assimiler l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29.10^{-3}$ kg.mol^{-1}. Comparer H au rayon R_T de la Terre. Commenter.

On pose dans la suite $p(x,y,z) = P(x,y,z) - P_{repos}(x,y,z)$ et on recherche une solution sous la forme d'un écoulement stationnaire. Afin d'évaluer l'influence du terme de Coriolis dans le mouvement des particules de fluides, on définit le *Nombre de Rossby*, noté R_o, du nom du météorologue suédois Carl-Gustaf Rossby, comme le rapport du terme de convection sur le terme de Coriolis dans l'équation du mouvement.

4) En travaillant en ordre de grandeur, déterminer l'expression du nombre de Rossby R_o pour un écoulement de vitesse caractéristique U et de taille caractéristique L.

5) Evaluer numériquement R_o pour un écoulement correspondant à la vidange d'une baignoire d'une part, et pour un écoulement de masses d'air atmosphérique d'autre part. Commenter.

6) Simplifier l'équation du mouvement en conséquence et déterminer la relation liant $\vec{v}$ et $\overrightarrow{grad}p$.

7) Comment est dirigé le vent géostrophique dans l'hémisphère Nord ? Comparer à la direction des lignes isobares. Le profil de pression étant symétrique dans l'hémisphère Sud, déterminer la direction et le sens du vent géostrophique dans l'hémisphère Sud. Commenter.

8) En projetant la relation précédente sur $\vec{e_y}$, exprimer la composante v_x de la vitesse en fonction de ρ, Ω, λ et $\frac{dp}{dy}$. En déduire une estimation numérique de la vitesse du vent géostrophique pour la latitude $\lambda = 45°$. Conclure.

10.7 Champagne ! partie 1

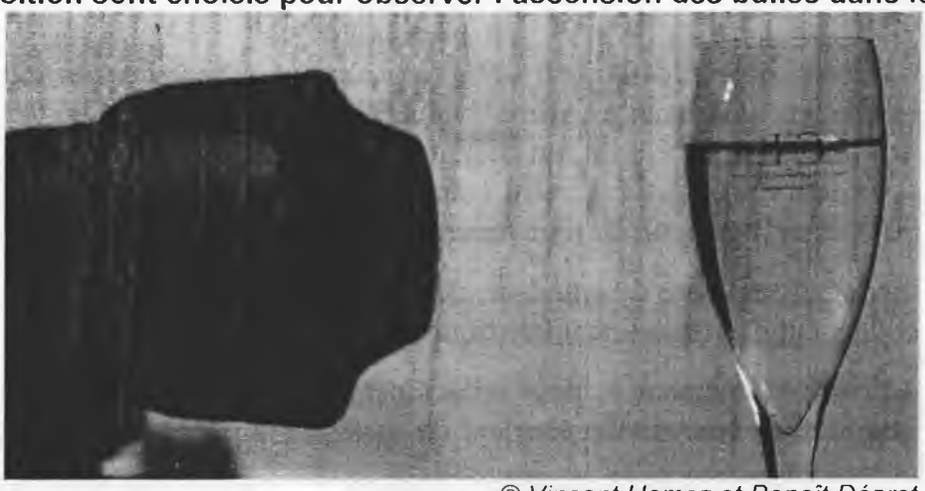
TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : PCSI, 3- THERMODYNAMIQUE et 5- MECANIQUE DES FLUIDES

MOTS-CLES : loi de Fick, bilan de particules, force de traînée.

Les bulles de champagne ont toujours intrigué les amateurs de cette boisson pétillante... et les physiciens ! Le procédé de fabrication du champagne fait intervenir des levures qui produisent du dioxyde de carbone, à l'origine de cette effervescence. L'évolution des bulles dans une coupe peut être modélisée en tenant compte de domaines physiques très variés, tels que la mécanique des fluides, la tension superficielle ou les phénomènes diffuso-convectifs de transport de matière : de la Physique à consommer sans modération !

Une coupe de champagne prête à être photographiée. L'objectif et la durée d'exposition sont choisis pour observer l'ascension des bulles dans le verre.



© Vincent Hamez et Benoît Dépret

Lorsque la bouteille est fermée, le CO_2 dissous est en équilibre avec le CO_2 sous forme de vapeur à la pression $P_{CO_2} = 8$ bars. La concentration c en CO_2 (en g.L^{-1} ou kg.m^{-3}) peut alors être obtenue par la *loi de Henry* :

$$P_{CO_2} = H_c\, c$$

où $H_c = 0{,}52$ bar.m^3.kg^{-1} est la constante de Henry à 12°C (température du champagne).

1) Calculer la concentration initiale c_i en CO_2 dissous. Que se passe-t-il lorsque l'on ouvre la bouteille ? Déterminer le volume total de CO_2 libéré dans l'atmosphère entre l'ouverture de la bouteille et le dégazage complet. On rappelle les valeurs de la masse molaire de CO_2 $M_{CO_2} = 44.10^{-3}$ kg.mol^{-1} et de la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

Le dégazage du CO_2 s'effectue essentiellement par l'interface à la surface libre du liquide et dans une moindre mesure par les bulles de champagne. On estime que 20% du CO_2 est dégagé par l'effervescence. On se propose d'étudier la formation et l'évolution de ces bulles. La création d'une bulle coûte de l'énergie au fluide car il faut supprimer des liaisons pour réaliser une interface. Le système cherche ainsi à minimiser son énergie en évitant au

possible la formation de bulles. Une bulle sphérique de rayon r peut exister en équilibre dans un milieu de pression extérieure P_{ext} si sa pression intérieure P_{int} compense la tension de surface et vérifie la loi de Laplace-Young :

$$P_{int} - P_{ext} = \frac{2\gamma}{r}$$

où $\gamma = 47.10^{-3}$ N.m^{-1} est le coefficient de tension superficielle du champagne.
On considère que le champagne est un liquide homogène, de masse volumique $\rho = 998$ kg.m^{-3}, de viscosité dynamique $\eta = 1{,}6.10^{-3}$ Pl et de température $T = 285$ K. La surface libre est surmontée d'air à la pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar. Le champ de pesanteur est uniforme, d'intensité $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

2) Evaluer la variation relative maximale de pression dans le verre. Commenter.

3) Calculer la pression dans une bulle de rayon $r = 10$ nm au moment de sa formation. La création d'une bulle au sein du liquide (*nucléation homogène*) est-elle envisageable ?

La formation des bulles dans le verre suit en fait un processus de *nucléation hétérogène* : une poche de gaz se forme à l'intérieur de fibres microscopiques laissées à la surface du verre et grossit. Une bulle de CO_2 est alors libérée périodiquement dans le liquide. Le cliché ci-dessous montre un ensemble de bulles issues d'un même site de nucléation, environ une quinzaine de minutes après l'ouverture de la bouteille.

Photographie du verre de champagne.
La durée d'exposition est de 1/500 s. On distingue une série de bulles issues du même site de nucléation hétérogène (zoom à droite).

© Vincent Hamez et Benoît Dépret

Les bulles étant émises de façon parfaitement périodique, un seul cliché permet en fait de caractériser *une* bulle au cours de son ascension dans le verre. On a mesuré expérimentalement une fréquence de libération des bulles de 7,8 Hz pour ce site. Des mesures directes sur le cliché ont permis d'obtenir la position de la bulle et son rayon au cours du temps. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-après.

On se propose de modéliser cette ascension afin de décrire et d'interpréter les phénomènes qui entrent en jeu.

Position z et rayon r d'une bulle en fonction du temps.
L'instant t = 0 et l'origine z = 0 sont choisis de façon arbitraire sur la première bulle.

(incertitudes : Δz = 0,06 mm et Δr = 0,03 mm)

t (s)	z (mm)	r (mm)
0,00	0,00	0,15
0,13	2,70	0,16
0,26	5,85	0,18
0,38	9,48	0,21
0,51	14,13	0,22
0,64	19,26	0,24
0,77	24,96	0,25
0,90	30,87	0,27
1,02	37,50	0,28
1,15	44,79	0,30
1,28	52,65	0,33

4) Evaluer numériquement la pression dans une bulle de rayon $r = 0{,}1$ mm. Commenter. Faut-il tenir compte de la tension superficielle lors de l'étude de l'ascension des bulles ?

5) En supposant que le CO_2 dissous est en équilibre avec le CO_2 gaz dans la bulle, calculer la concentration c en CO_2 dissous dans le liquide au voisinage immédiat de la bulle. Comparer à la concentration c_0 en CO_2 dissous au sein du liquide à l'ouverture de la bouteille. Montrer qu'il existe un transfert de matière vers la bulle qui tend à la faire grossir. Comment va évoluer la concentration c_0 dans le liquide ? Déterminer la concentration c_∞ à partir de laquelle l'effervescence n'aura plus lieu.

Le gradient de concentration en CO_2 dissous dans le liquide au voisinage de la bulle se traduit par un courant radial de particules de densité *massique* $\vec{j}_{CO_2}$ (en kg.m^{-2}.s^{-1}) à travers l'interface. Du fait du mouvement de la bulle dans le liquide, le transfert de particules n'est pas uniquement diffusif, mais plutôt diffuso-convectif et on introduit le coefficient de transfert total de matière K entre le liquide loin de la bulle et le proche voisinage de la bulle par la relation :

$$\vec{j}_{CO_2} = -K(c_0 - c)\,\vec{e_r}$$

Au voisinage immédiat de la bulle, il existe cependant, comme en mécanique des fluides, une couche limite de diffusion, d'épaisseur caractéristique δ_D, dans laquelle le transport par diffusion prédomine. On note D le coefficient de diffusion correspondant.

6) Relier simplement le vecteur densité de courant massique $\vec{j}_{CO_2}$ au vecteur densité de courant de particules $\vec{j}_n$. Rappeler la loi de Fick pour le transport de particules par diffusion.

7) En considérant un gradient de concentration constant dans la couche limite de diffusion, exprimer simplement K en fonction de D et de δ_D. Calculer numériquement K en prenant $D = 1{,}4.10^{-9}$ m^2.s^{-1} pour le champagne et $\delta_D = 10$ µm dans le cas étudié.

On peut comparer l'influence du transport de particules par diffusion seule par rapport au transport total diffuso-convectif en évaluant le *nombre de Sherwood*, noté *Sh*, défini comme le rapport sans dimension du courant total massique de particules sur le courant massique de diffusion.

8) En raisonnant en ordre de grandeur, exprimer *Sh* en fonction de K, D et d'une distance caractéristique L. Faire l'application numérique en prenant pour L le diamètre d'une bulle. Sous quelle forme le transport de CO_2 s'effectue-t-il principalement ?

On considère une bulle de CO_2 de rayon r contenant la masse $m_{CO_2}(t)$ de gaz à l'instant t.

9) Faire un bilan de la masse de gaz contenue dans la bulle entre t et $t + dt$. En déduire l'expression de $\dfrac{dm_{CO_2}}{dt}$ en fonction de j_{CO_2} et de r.

10) En assimilant le CO_2 à un gaz parfait, déterminer l'équation différentielle vérifiée par le rayon de la bulle $r(t)$. En déduire l'expression de $r(t)$ en supposant j_{CO_2} constant.

11) A l'aide des données expérimentales, proposer une méthode permettant de valider le modèle proposé. En déduire la valeur numérique de j_{CO_2}, puis la concentration c_0 en CO_2 dissous dans le champagne au moment de l'expérience. Commenter.

Le mouvement de la bulle est imposé par les forces hydrodynamiques qui agissent à sa surface. En première approximation, on suppose que la force de traînée est donnée par la formule de Stokes $\vec{F}_{traînée} = -6\pi\eta r\vec{v}$, valable pour un écoulement laminaire, et que la résultante des forces de pression est assimilée à la poussée d'Archimède.

12) Justifier que l'on peut négliger le poids de la bulle devant les autres forces.

En fait, lors de son ascension, la bulle met aussi en mouvement le liquide environnant qui doit la contourner. Pour rendre compte de ce phénomène, on montre qu'il suffit de remplacer la masse m de la bulle par $m + \dfrac{m^*}{2}$, où m^* est la masse de liquide déplacé.

13) Etablir l'équation du mouvement de la bulle dans le cadre de ce modèle.

14) On considère dans un premier temps le mouvement d'une bulle de rayon <u>constant</u>. Faire apparaître un temps caractéristique τ du mouvement. Calculer τ numériquement et en déduire l'expression de la vitesse v d'une bulle de rayon constant r. Justifier que l'on peut alors exprimer la vitesse $v(t)$ d'une bulle de rayon $r(t)$.

15) En déduire l'expression de la position $z(t)$ de la bulle au cours du temps. Montrer alors que z varie linéairement avec r^3.

16) Déduire des résultats expérimentaux une mesure de la viscosité dynamique η du champagne. Discuter la validité du modèle proposé. Conclure.

On pourra remarquer que le coefficient de tension superficielle $\gamma = 47.10^{-3}$ N.m^{-1} du champagne est bien plus faible que celui de l'eau pure $\gamma_{eau} = 72.10^{-3}$ N.m^{-1}. Ceci est dû à la forte concentration en éthanol, de faible tension superficielle $\gamma_{éthanol} = 23.10^{-3}$ N.m^{-1}.
Enfin, l'alcool doit être consommé avec modération !

10.8 Désintégration d'un noyau atomique

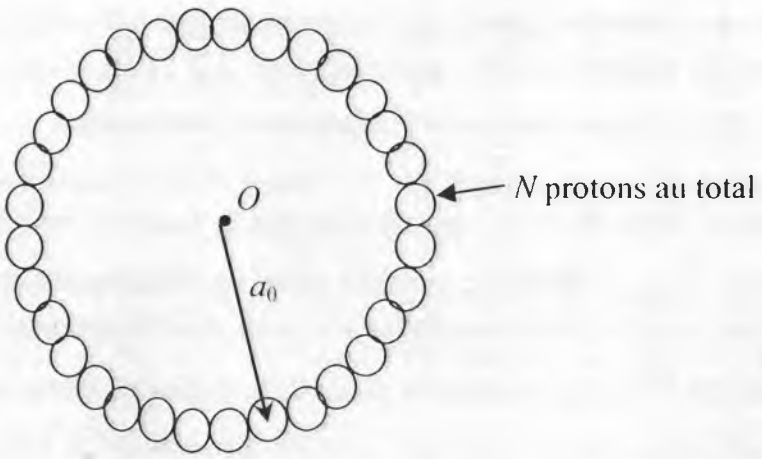
TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : PCSI et 6- ELECTROMAGNETISME

MOTS-CLES : propriétés de symétrie, théorème de Gauss, force électrique.

On propose dans cet exercice de calculer l'ordre de grandeur de la vitesse d'éjection des protons si l'interaction forte assurant la cohésion d'un noyau atomique venait à disparaître subitement.

On modélise pour cela le noyau par un ensemble de N protons (mais sans aucun neutron) de charge $+e$ et de masse m avec $N >> 1$ répartis de manière uniforme à la **surface** d'une sphère de rayon a_0 (dans ce modèle, le noyau est donc vide à l'intérieur). A la date $t = 0$, l'interaction forte disparaît et chaque proton est alors soumis au seul champ électromagnétique créé par **tous** les autres.



1) Justifier pourquoi, à une date $t > 0$, les protons sont encore répartis à la surface d'une sphère de rayon $a(t) > a_0$. Y a-t-il un champ magnétique créé par l'ensemble des protons ? Justifier précisément.

Excepté à proximité immédiate des protons, on peut assimiler leur distribution à une surface uniformément chargée.

2) Exprimer dans ce cas le champ électrique créé à la date t par les protons en distinguant l'intérieur de la sphère de protons et l'extérieur de celle-ci. On suppose être dans l'ARQS électrique pour ce calcul.

Le champ électrique subi par un proton se trouve être la moyenne de $\vec{E}(r=a^-)$ et $\vec{E}(r=a^+)$ calculés précédemment.

3) Pourriez-vous justifier ce point à l'aide de considérations de symétrie et du principe de superposition ?

4) En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $a(t)$.

5) En déduire la vitesse d'éjection à l'infini $V_{éj}$ des protons. On l'exprimera en fonction de ε_0, N, e, m et a_0.

6) Calculer l'ordre de grandeur du temps τ mis par les protons pour acquérir cette vitesse.

7) Application numérique : estimer $V_{éj}$ et τ pour un noyau d'uranium $^{235}_{92}U$, sachant qu'un proton seul possède un rayon de 0,9 fm = 9.10^{-16} m et une masse de $1,7.10^{-27}$ kg. On donne $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Dans une centrale nucléaire, les neutrons issus de la fission des noyaux d'uranium sont éjectés à une vitesse moyenne de l'ordre de 20 000 km/s.

8) Comparer à la valeur précédente et commenter.

10.9 Lentille à focale commandable

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

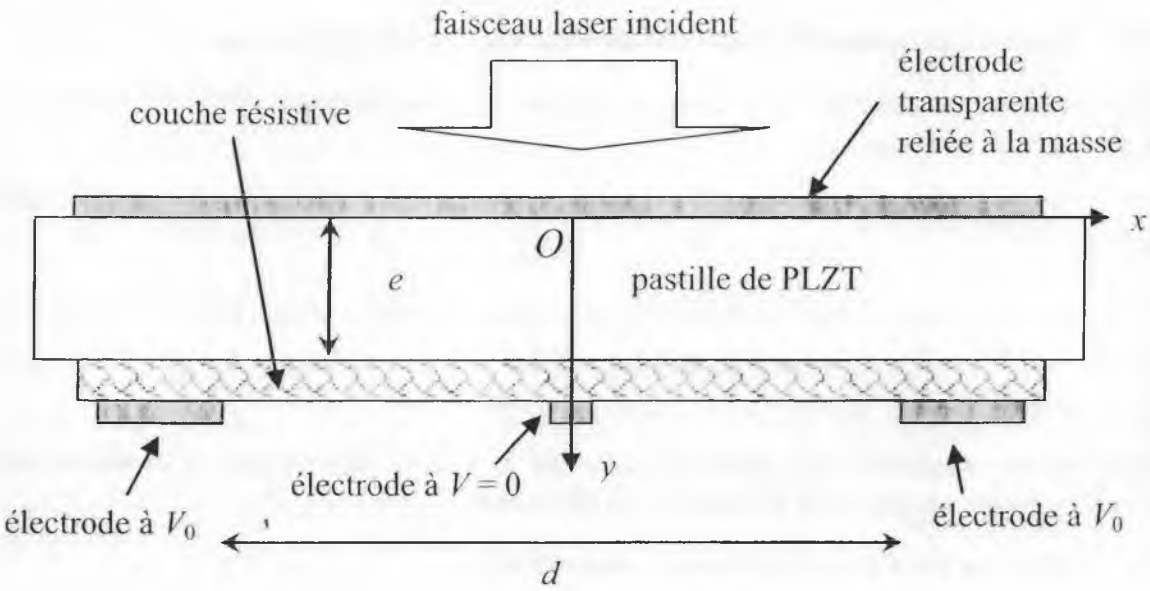
Chapitres concernés : 1-OPTIQUE ONDULATOIRE et 6-ELECTROMAGNETISME

MOTS-CLES : surfaces d'ondes, condensateur, chemin optique.

Dans un article scientifique publié en 1996, trois chercheurs décrivent le principe et la mise en œuvre d'une lentille cylindrique divergente dont la valeur de la focale, notée $-f$, pouvant varier entre $-f_{min}$ et $-\infty$, est commandée par une haute tension. Ce problème propose d'en comprendre le principe de fonctionnement et de prédire la valeur de f_{min} à partir des paramètres du montage.

La lentille est constituée d'une pastille de céramique transparente d'épaisseur e, en tantalate de plomb et de zirconium dopé au lanthane, nommée plus couramment du PLZT. Avec une proportion adéquate des différents éléments chimiques, la céramique fait apparaître un fort *effet électro-optique* : en un point du matériau, l'indice optique n dépend du champ électrique présent en ce point. En plaçant des électrodes sur les deux surfaces en regard de la pastille, on peut ainsi contrôler l'indice local du milieu par une tension : les rayons lumineux traversant la lentille vont ainsi subir une différence de marche ajustable. Le but est de trouver une configuration permettant de transformer les surfaces d'onde d'une onde plane en entrée de la lame en celles d'une onde cylindrique divergente en sortie de celle-ci. Pour ce faire, les chercheurs ont eu l'idée de placer les électrodes comme indiquées sur la figure suivante, représentant une vue en coupe du dispositif. La pastille a une épaisseur $e = 0,32$ mm. On y dépose sur la face inférieure une très fine couche résistive en germanium (ayant une épaisseur de 30 nm, ce qui rend la couche transparente) puis par-

dessus trois électrodes rectangulaires en aluminium (remarque : l'électrode centrale a une largeur de 4 μm : elle n'absorbe donc qu'une très faible partie de la lumière qui traverse la pastille). Les deux électrodes reliées au potentiel V_0 sont distantes de $d = 2$ mm. Enfin, l'électrode supérieure, reliée à la masse, est fabriqué en oxyde d'indium, matériau transparent et suffisamment conducteur pour imposer un potentiel nul sur toute sa surface.



Avant de comprendre comment ce dispositif peut être assimilable à une lentille cylindrique divergente, on peut se demander s'il est possible de créer d'autres types de lentilles. La réponse est positive : à partir de deux lentilles « dynamiques » (c'est-à-dire ayant une focale commandable) divergentes et d'une lentille sphérique à focale fixe convergente, il est possible de fabriquer un système optique assimilable à une lentille sphérique convergente de focale commandable.

Introduction :

1) Préciser la combinaison à agencer pour fabriquer une telle lentille.

2) Connaissez-vous par ailleurs un autre exemple de lentille sphérique convergente à focale commandable ?

Etude électrostatique du dispositif :

La couche résistive en germanium permet une distribution linéaire du potentiel entre les électrodes en aluminium.

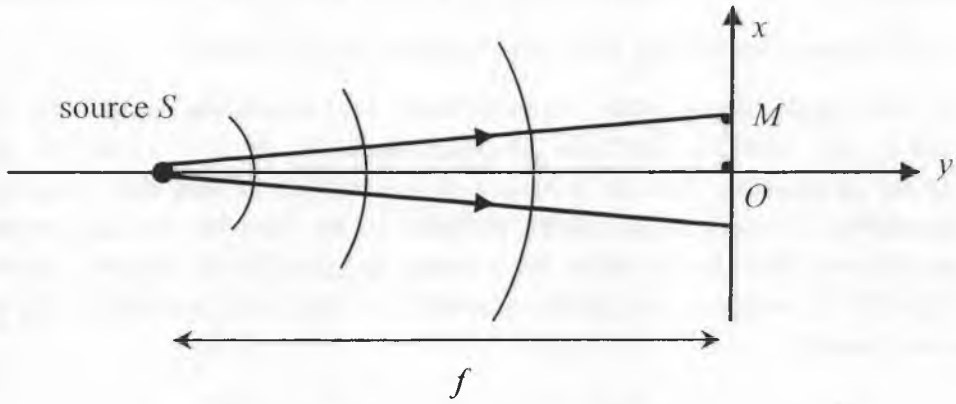
3) Justifier avec soin cette dépendance linéaire et exprimer le potentiel $V_{Ge}(x)$ dans la couche résistive à une distance $|x|$ de l'électrode centrale.

Dans le cas limite où $d >> e$, on peut *localement* assimiler les deux faces du PLZT à un condensateur plan dont on néglige les effets de bords.

4) Exprimer alors le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du PLZT en admettant que celui-ci reste localement neutre.

Question préliminaire :

On considère une source S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ) cylindrique, formée par un tube infini parallèle à l'axe Oz placé en $x = 0$ à une distance f du centre O du repère (voir figure).



5) Exprimer le retard de phase $\varphi_{OC}(x)$ de l'onde cylindrique au point M par rapport à S. En se plaçant dans les conditions de Gauss, faire un développement limité de $\varphi_{OC}(x)$ à l'ordre 2 en x/f.

Etude optique du dispositif :

Dans le cas d'un faisceau lumineux parallèle au champ électrique, ce qui est le cas en première approximation dans le dispositif étudié dans ce problème, le PLZT voit son indice optique modifié par le champ électrique $\vec{E}$ de la quantité :

$\Delta n = \frac{1}{2} n_0^3 R E^2$, où n_0 désigne l'indice optique sans champ électrique.

Cet effet électro-optique quadratique se nomme l' « effet Kerr ». Pour le PLZT utilisé dans l'article, $n_0 = 2{,}5$ et la constante de Kerr vaut $R = 2{,}4.10^{-16}$ m^2V^{-2}.

6) Lorsque les électrodes latérales sont reliées au potentiel V_0, exprimer le retard de phase $\varphi(x)$ provoqué par la lame lors de la traversée d'un rayon lumineux à l'abscisse x (pour le calcul du chemin optique, on négligera le phénomène de réfraction à l'intérieur de la lame).

7) En déduire que l'onde en sortie de la pastille a la structure d'une onde cylindrique divergente. Exprimer f_{min} en posant que V_0 est la tension maximale applicable aux électrodes.

8) Application numérique : calculer f_{min} avec $V_0 = 300$ V. Pourquoi y a-t-il une valeur de tension à ne pas dépasser ?

Les références de l'article scientifique dont est basé ce problème sont :

Q. Wang Song, X.-M. Wang and R. Bussjager, *Lanthanum-modified lead zirconate titanate ceramic wafer-based electro-optic dynamic diverging lens*, Optics Letters, Vol. **21**, No. 4, February 15, 1996.

10.10 Circuits électriques domestiques

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : 3- THERMODYNAMIQUE et 6- ELECTROMAGNETISME

MOTS-CLES : résistance électrique, bilan thermique, loi de Fourier.

Une installation électrique domestique monophasée est alimentée sous une tension électrique de 220 V. Le tableau électrique permet alors de répartir l'énergie vers les différentes prises de la maison, tout en assurant la sécurité à la fois des usagers et de l'installation elle-même. La taille des câbles utilisés et les fusibles ou disjoncteurs du tableau électrique doivent être choisis selon les normes de sécurité en vigueur. Ainsi selon la norme NF C 15-100 la section des câbles dépend de l'intensité maximale du courant électrique qui devra circuler :

Section du câble mm^2	Intensité maximale A
1,5	16
2,5	20

On donne quelques caractéristiques des matériaux utilisés dans une installation électrique :

	Cuivre Cu	Etain Sn	Polyéthylène PE
Conductivité électrique ($S.m^{-1}$)	$5{,}96.10^7$	$9{,}17.10^6$	-
Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	$4{,}01.10^2$	$6{,}66.10^1$	$4{,}6.10^{-1}$
Température de fusion	1084°C	232°C	85°C

Dans tout le problème, on considère des signaux continus, indépendants du temps, et on se place en régime stationnaire.

Soit un fil de cuivre de rayon a et de longueur L, traversé par un courant électrique de densité uniforme, d'intensité I.

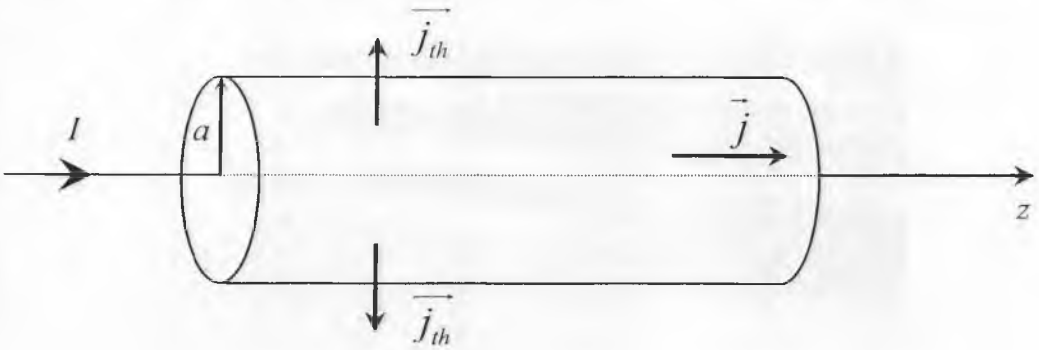
1) Rappeler l'expression de la résistance électrique R du câble en fonction de a, L et γ_{Cu} la conductivité électrique de cuivre.

2) Calculer numériquement cette résistance dans le cas d'un câble de longueur 1 m et de section 1,5 mm^2, parcouru par un courant d'intensité 16 A. En déduire la puissance dissipée sous forme thermique par effet Joule.

On souhaite étudier le profil de température dans le câble suite au passage du courant électrique de densité surfacique $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e_z}$. On se place en coordonnées cylindriques et on

recherche un champ de température $T(r)$ et un vecteur densité de courant thermique de la forme $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r)\,\overrightarrow{e_r}$.

Conducteur cylindrique parcouru par un courant électrique d'intensité I



3) Exprimer la puissance thermique volumique p_{vol} libérée dans le câble par effet Joule en fonction de I, a et γ_{Cu}.

4) Comparer la puissance thermique libérée dans un cylindre de longueur L et de rayon $r < a$, à la puissance thermique traversant la surface latérale de ce cylindre. En déduire l'expression de $j_{th}(r)$.

5) Déterminer le profil de température $T(r)$ dans le câble en fonction de la température $T(a)$ à la surface du câble. En déduire l'expression de la température au centre du câble.

6) On suppose que la surface du câble est en équilibre thermique avec l'extérieur de température $T_{ext} = 20°C$. Calculer numériquement la température au centre pour un courant d'intensité $I = 16$ A et un câble de section 1,5 mm^2. Commenter : le câble risque-t-il de fondre dans ces conditions ? Quelle serait l'intensité maximale du courant pouvant circuler dans ce câble ?

Afin de protéger cette ligne électrique, on utilise un *fusible* de 16 A, constitué d'un fil d'étain (Sn) placé en série avec le câble précédent, qui fond et coupe le circuit dès que l'intensité du courant dépasse 16 A.

Exemple de fusible

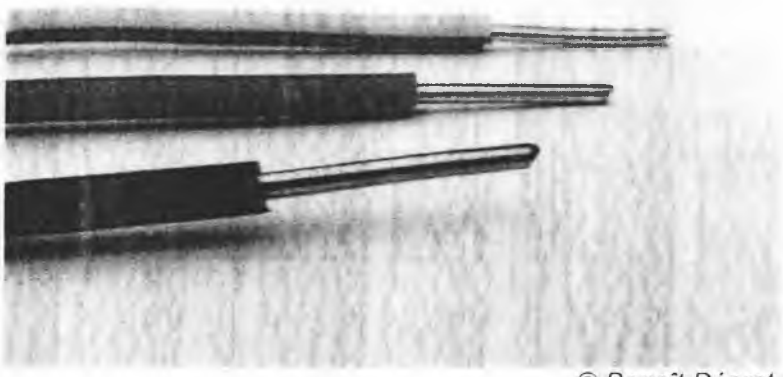
Cliché : André Karwath (Licence Creative Commons)

7) Justifier l'utilisation de l'étain pour réaliser ce fusible.

8) Déterminer le diamètre du fil d'étain permettant de protéger cette installation.

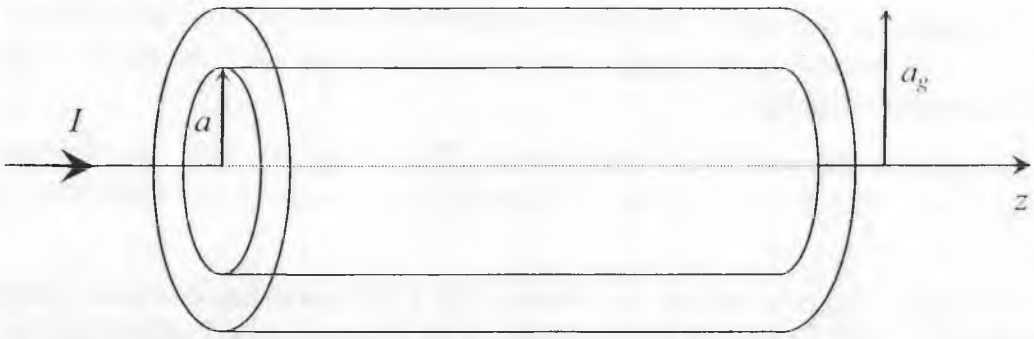
En fait, un fil électrique est entouré d'une gaine isolante en polyéthylène (PE) qui permet d'éviter le contact électrique entre plusieurs câbles de l'installation. On note a_g le rayon de la gaine et λ_g sa conductivité thermique.

Un fil électrique est entouré d'une gaine isolante



© Benoît Dépret

Conducteur cylindrique entouré par sa gaine en polyéthylène



9) Déterminer une relation simple entre la puissance thermique totale dissipée par effet Joule par le fil électrique et le flux de $\vec{j}_{th}$ dans la gaine à travers un cylindre de rayon $a < r < a_g$. En déduire le profil de température $T(r)$ dans la gaine.

10) Pour un fil de section de cuivre 1,5 mm^2, le diamètre de la gaine vaut 2,0 mm. Evaluer numériquement la température maximale dans le câble électrique parcouru par un courant d'intensité 16 A. Commenter.

ATTENTION

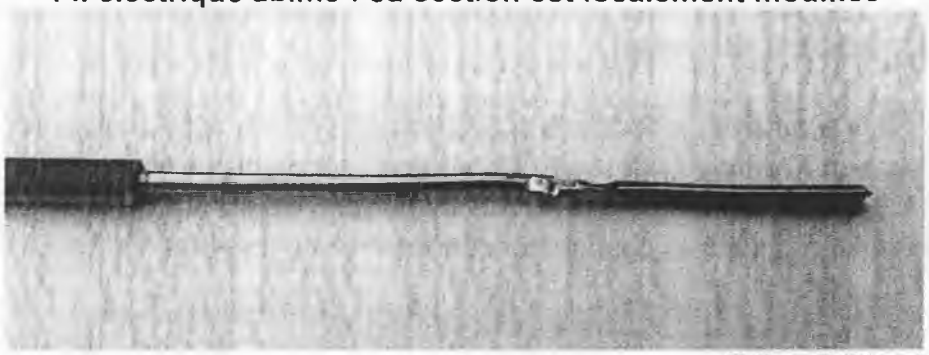
Il ne faut jamais remplacer un fusible par un fusible de calibre supérieur !

On considère un logement muni d'une prise électrique, câblée avec le fil de cuivre de section 1,5 mm^2 étudié précédemment, protégée par un disjoncteur de 16 A.
Un utilisateur mal averti souhaite organiser une soirée raclette avec des amis et branche sur cette prise (avec une multiprise) : deux appareils à raclette (de puissance 1 200 W chacun), un grille-pain (de puissance 1 000 W) et le four à micro-ondes (de puissance 800 W). Il constate alors qu'à chaque fois que quelqu'un allume le four à micro-ondes, le tableau électrique disjoncte et tout le monde se retrouve dans le noir ! Pour que la fête puisse continuer, il remplace le disjoncteur de 16 A par un disjoncteur de 20 A !

11) Montrer que le problème est en apparence résolu, puisque le disjoncteur ne disjoncte plus.

Seulement, l'installation électrique étant un peu vétuste, certains câbles sont abîmés : ils ont par exemple été « mordus » localement par un serrage trop intense dans un domino de câblage. On considère que le diamètre du fil est localement divisé par 5 et que le diamètre de la gaine reste inchangé.

Fil électrique abîmé : sa section est localement modifiée



© Benoît Dépret

12) Montrer par des considérations numériques que l'incendie électrique est à craindre et que le pire aurait pu être évité en laissant le disjoncteur de 16 A. Conclure.

10.11 Une poêle en lévitation ?

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : PCSI et 6- ELECTROMAGNETISME

MOTS-CLES : équations de Maxwell, force de Laplace, inductance.

Le phénomène d'induction électromagnétique trouve de nombreuses applications pratiques, de la cuisinière à induction au train à lévitation magnétique. Est-il cependant possible de faire léviter une poêle sur une plaque à induction ? On propose ici une modélisation simple permettant de répondre à cette question.

Train à lévitation magnétique (Maglev)

Photo : Alex Needham (domaine public)

Une plaque à induction est constituée d'une bobine parcourue par un courant $I(t)$ de fréquence 50 kHz, générant dans l'espace un champ magnétique variable. Une poêle métallique plongée dans ce champ magnétique devient le siège de phénomènes d'induction électromagnétique : il apparaît des courants de Foucault dans la matière qui vont dissiper de l'énergie par effet Joule et chauffer les aliments. La poêle parcourue par un courant électrique et plongée dans un champ magnétique doit également subir une force de Laplace lui permettant, peut-être, de léviter...

Le bobinage de la plaque à induction est assimilé à une spire circulaire, de rayon $r_0 = 15$ cm, placée à l'origine O d'un axe Oz vertical, et parcourue par le courant d'intensité variable $I(t) = I_0 \sin \omega t$. La loi de Biot et Savart permet, dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, d'obtenir le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire :

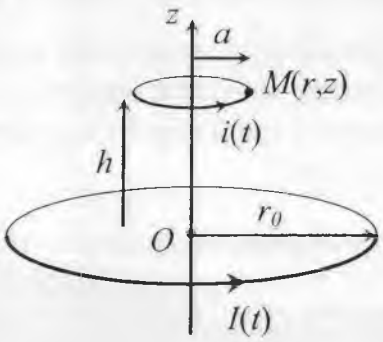
$$\vec{B}(r=0,z,t) = B_0(z)\sin\omega t\,\vec{e_z} \quad \text{où} \quad B_0(z) = \frac{\mu_0 I_0}{2}\frac{r_0^2}{\left(r_0^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Le champ magnétique en un point $M(r,z)$ au voisinage de l'axe s'écrit alors, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(r,z,t) = B_0(z)\sin\omega t\,\vec{e_z} - \frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}\sin\omega t\,\vec{e_r}$$

La poêle, quant à elle, est modélisée par une spire de rayon $a < r_0$, de résistance R et d'inductance propre L, placée à la hauteur h. Les orientations respectives des spires sont précisées sur le schéma ci-dessous.

On place une spire de rayon a dans le champ magnétique créé par la spire de rayon r_0



1) Justifier la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

2) Montrer que le champ $\vec{B}$ proposé au voisinage de l'axe est bien à flux conservatif.

On donne pour cela la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}\left(\vec{B}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

3) Etablir l'équation différentielle dont est solution l'intensité $i(t)$ du courant dans la spire de rayon a. En déduire l'expression de $i(t)$ en régime sinusoïdal établi. On pourra rechercher une solution sous la forme : $i(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ où a et b sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données.

4) Exprimer la force de Laplace $\vec{F}$ exercée sur la spire de rayon a, puis sa moyenne temporelle $< \vec{F} >$. La lévitation est-elle *a priori* possible ?

5) Comment évolue $< F_z >$ en fonction de ω ? A quelle condition sur la pulsation ω $< F_z >$ est-elle maximale ? On suppose que cette condition est réalisée dans la suite. Simplifier alors l'expression de $< F_z >$.

6) Tracer l'allure de $< F_z >$ en fonction de la hauteur h de la spire. Montrer qu'il existe une hauteur h_{max} à laquelle $< F_z >$ est maximale. Exprimer h_{max} et la force $< F_z >_{max}$ correspondante.

Le système de chauffage à induction est prévu pour dissiper la puissance thermique moyenne $P = 2$ kW dans la poêle.

7) Exprimer la puissance moyenne P dissipée par effet Joule dans la spire.

8) En déduire l'expression de la force $< F_z >_{max}$ en fonction de P, L, R et r_0.

Pour calculer l'ordre de grandeur de la force exercée, il faut déterminer la résistance R et l'inductance propre L de la spire équivalente à la poêle. La poêle est essentiellement en fer, de conductivité électrique $\gamma = 9{,}9.10^6$ S.m^{-1}. La spire équivalente est alors constituée par la couronne de rayon moyen $a = 9$ cm, de largeur $\varepsilon = 1$ cm et d'épaisseur $e = 2$ mm.

9) En assimilant la couronne à un conducteur filiforme, calculer la résistance R de la spire.

10) Exprimer le champ magnétique créé au centre de cette spire parcourue par un courant d'intensité i. En supposant ce champ magnétique uniforme sur la surface de la spire, évaluer le flux magnétique propre à travers la spire. En déduire l'inductance propre de la spire.

11) Vérifier numériquement l'approximation faite à la question 5).

12) Calculer la force $< F_z >$ exercée sur la spire. Conclure : la lévitation d'une poêle sur une plaque à induction est-elle possible ?

10.12 Capacité membranaire d'une cellule

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : 3- THERMODYNAMIQUE et 6- ELECTROMAGNETISME

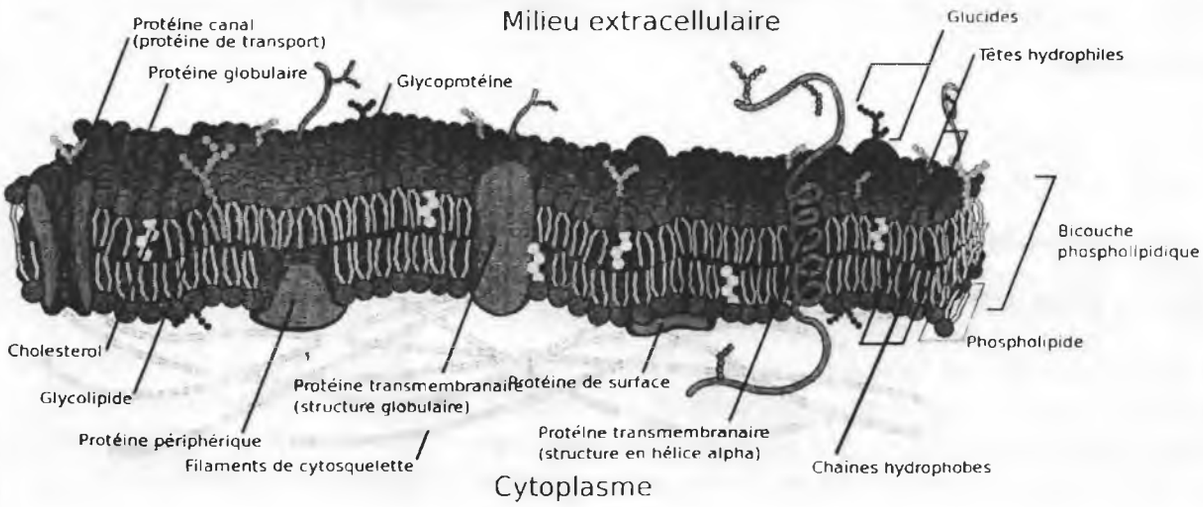
MOTS-CLES : loi de Fick, régime stationnaire, Boltzmann, théorème de Gauss, condensateur.

Ce problème propose d'étudier certaines propriétés électriques des membranes cellulaires.

DOCUMENT : Quelques caractéristiques des membranes cellulaires, d'après « wikipédia.fr »

Les cellules des êtres vivants possèdent toutes une membrane. Celle-ci, composée principalement d'une bicouche de phospholipides (voir schéma ci-dessous), sépare en deux compartiments semi-étanches l'intérieur de la cellule, le cytoplasme, de l'extérieur de la cellule, le milieu extracellulaire.

Coupe schématique d'une membrane cellulaire



Auteur : LadyofHats (domaine public)

En introduisant une micro-électrode de mesure à l'intérieur d'une cellule, on constate une différence de potentiel (d.d.p.) avec l'extérieur. Cette d.d.p. transmembranaire, de l'ordre de -50 mV au repos, est due à l'action de pompes ioniques (pompes à protons pour les végétaux et pompes sodium-potassium chez les animaux) permettant le passage d'ions à travers la membrane via des canaux spécifiques. La d.d.p. entraîne une différence de concentration pour chaque espèce ionique de part et d'autre de la membrane, différence régie par la formule de Nernst à l'équilibre thermodynamique. La d.d.p. transmembranaire permet ainsi de transporter des petites molécules contre leur gradient de concentration. En particulier, les nutriments (composés nécessaires au métabolisme cellulaire) sont importés, tandis que les déchets du métabolisme sont exportés.

La bicouche phospholipidique est caractérisée par une forte imperméabilité qui permet de maintenir les différences de concentrations ioniques de part et d'autre de la membrane (gradient chimique), ainsi qu'une haute résistance électrique qui permet de maintenir une différence de potentiel (gradient électrique). Du fait de la faible épaisseur de la membrane (entre 7 et 8 nm seulement), le champ électrique présent à l'intérieur de celle-ci est considérable, à une valeur proche de la limite de fracture de la membrane.

En pratique, seule une très faible proportion des ions présents dans la cellule est responsable de la d.d.p. transmembranaire. Les ions impliqués dans la d.d.p. sont très proches de la membrane. Ainsi l'électroneutralité de la solution n'est violée qu'à proximité immédiate de celle-ci mais est respectée partout ailleurs.

Données numériques :

Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}.
Charge de l'électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C.
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1}.
Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Pour simplifier l'étude, on se limite à un problème unidimensionnel. On raisonne dans un premier temps uniquement dans le milieu extracellulaire occupant le demi-espace $x < 0$, au contact en $x = 0$ de la paroi de la membrane cellulaire dont le potentiel électrique est égal à $-V_0 < 0$, la référence des potentiels étant prise loin de la membrane. Le milieu extracellulaire est assimilé à un électrolyte contenant uniquement deux types de porteurs : des cations de charges $+e$ et des anions de charges $-e$, de densités moléculaires à l'abscisse x respectivement $n_+(x)$ et $n_-(x)$. Loin de la membrane (x tendant vers $-\infty$), les densités moléculaires des anions et des cations sont égales et valent n_0. En plus de l'action du champ électrique, chaque ion est soumis à une force de frottement fluide de la forme $\vec{F} = -\beta\vec{v}$. On se place dans les questions suivantes en régime permanent et l'on néglige la diffusion dans les deux questions suivantes.

1) Exprimer la vitesse limite atteinte par les cations.

2) En déduire le flux moléculaire des cations traversant une section S perpendiculaire à Ox situé à l'abscisse x.

La diffusion des ions engendre un flux supplémentaire.

3) En notant D le coefficient de diffusion, exprimer le flux diffusif moléculaire des cations à travers la section S.

4) Que peut-on dire des deux flux en régime stationnaire ? En déduire, après intégration, l'expression de $n_+(x)$ en fonction de n_0, $V(x)$, e, β et D. Quelle forme de loi obtient-on ? En déduire un lien entre D et β en fonction de la température T et de la constante de Boltzmann k_B.

5) Exprimer de même $n_-(x)$, puis la densité volumique de charges $\rho(x)$.

L'eau pouvant se polariser sous l'action du champ électrique, on montre que l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit dans le milieu extracellulaire $div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_{r,eau}\varepsilon_0}$, où $\varepsilon_{r,eau}$ désigne la permittivité relative de l'eau.

6) En déduire l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(x)$ pour $x < 0$.

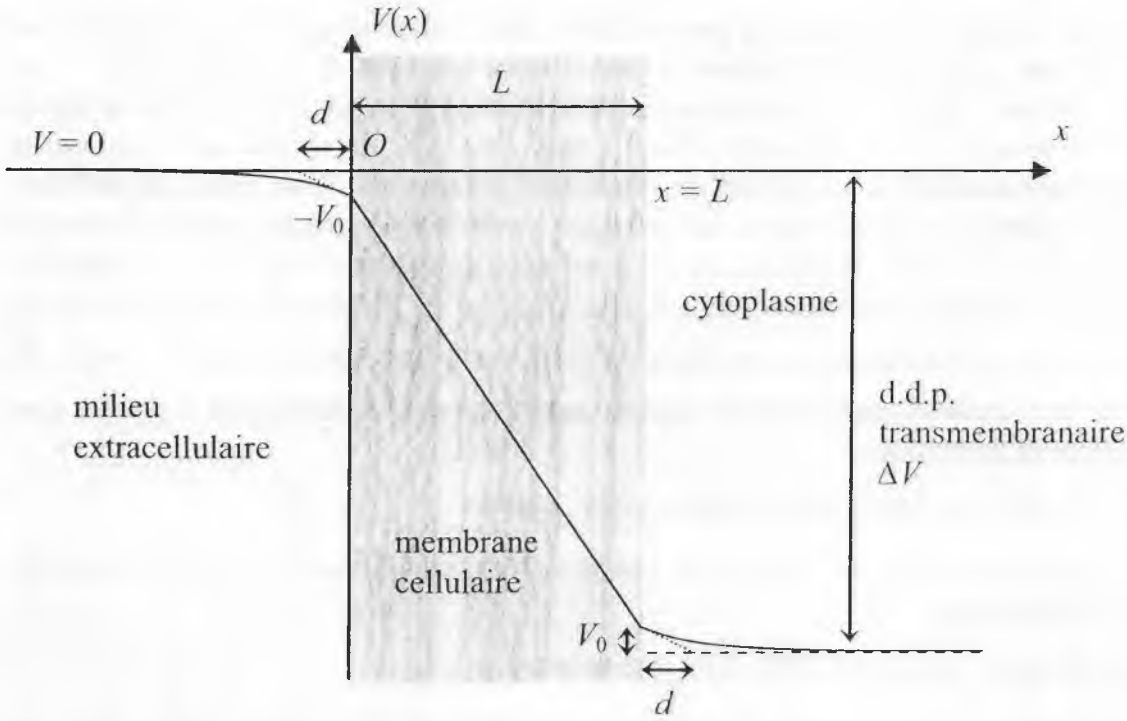
7) La résoudre dans l'hypothèse où $-eV_0 << k_BT$ en posant $d = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r,eau}\varepsilon_0 k_B T}{2n_0e^2}}$.

8) Donner la valeur numérique de d en nm pour une température de 35°C et une concentration en ions (cations+anions) dans le milieu extracellulaire de 0,3 mol.l^{-1}. On donne $\varepsilon_{r,eau} = 80$.

La double couche phospholipidique, de largeur L, possède quant à elle une permittivité relative $\varepsilon_{r,lip}$ de l'ordre de 8. Dans la suite de l'étude, le cytoplasme est supposé avoir les mêmes propriétés que le milieu extracellulaire (milieu aqueux de même concentration totale

ionique loin de la membrane). De plus, on admet qu'à la traversée de deux milieux de permittivités différentes, il y a discontinuité de la composante normale du champ électrique E_n , mais continuité de la grandeur $\varepsilon_r E_n$.

La courbe suivante représente l'allure du graphe $V(x)$, les échelles n'étant pas respectées pour plus de lisibilité.



9) Quelle indication du document permet de justifier la forme de $V(x)$ à l'intérieur de la membrane cellulaire ?

10) Tracer l'allure du graphe du champ électrique $E(x)$ ainsi que celui de la densité volumique de charges $\rho(x)$.

11) En quoi les résultats précédents justifient-ils les deux dernières phrases du document ?

12) A l'aide de la relation de continuité indiquée plus haut impliquant le champ électrique, établir une relation entre $\varepsilon_{r,eau}$, $\varepsilon_{r,lip}$, d, L, V_0 et ΔV.

On note Q_s l'excédent de charges algébrique par unité de surface situées dans le milieu extracellulaire à proximité de la membrane.

13) Exprimer Q_s à partir d'une intégrale de $\rho(x)$. En déduire l'expression de Q_s en fonction de ε_0, $\varepsilon_{r,eau}$, d et V_0.

14) Retrouver ce résultat à partir du théorème de Gauss appliqué à une surface contenue dans le milieu extracellulaire que l'on précisera.

15) Montrer que $Q_s = C_s\,\Delta V$, où C_s, représentant la capacité de la membrane par unité de surface, a pour expression :

$$C_s = \frac{\varepsilon_0}{\dfrac{L}{\varepsilon_{r,lip}} + \dfrac{2d}{\varepsilon_{r,eau}}}$$

Donner la valeur numérique de C_s en $\mu F.cm^{-2}$.

16) L'hypothèse faite à la question 7 est-elle valide ?

17) En raisonnant sur une cellule sphérique de 1 µm de diamètre, justifier par une application numérique l'affirmation du document précisant que seule une très faible proportion des ions présents dans la cellule est responsable de la d.d.p. transmembranaire.

18) Estimer la valeur du champ électrique à l'intérieur de la membrane, ainsi que la valeur de la pression exercée sur chaque face de celle-ci. Commenter.

10.13 Choix du site d'implantation d'une éolienne

TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : 5- MECANIQUE DES FLUIDES et 6- ELECTROMAGNETISME

MOTS-CLES : analogie, cinématique des fluides, lignes de champ.

On cherche à déterminer le site d'implantation d'une éolienne sur un massif montagneux dans le but de produire le maximum d'électricité. Cette recherche n'est pas forcément simple car le relief modifie la vitesse locale du vent et il est nécessaire d'étudier précisément le champ de vitesse à l'intérieur de la zone afin de trouver l'endroit où la vitesse du vent est la plus élevée. Une campagne de mesures de vitesses sur site est possible, mais elle peut s'avérer longue, coûteuse et fastidieuse. Une alternative à ces mesures de terrain est une simulation numérique permettant de prédire le champ des vitesses induit par le relief.

Pour simplifier, on se limite à un problème à deux dimensions : la chaîne montagneuse est invariante par translation selon Oz. On mène l'étude sur une longueur L selon Ox et une hauteur de l'ordre de h selon la verticale (correspondant au dénivelé entre la vallée et le plus haut sommet). On note v_0 la vitesse du vent (supposée uniforme) en amont du relief. On suppose que l'écoulement de l'air est incompressible et irrotationnel. On montre que l'incompressibilité de l'écoulement permet d'écrire le champ de vitesses sous la forme $\vec{v} = \vec{rot}\left(\vec{A}\right)$. L'écoulement étant ici à deux dimensions, on admet que l'on peut choisir un champ $\vec{A}$ de la forme $\vec{A} = \psi(x,y)\vec{e}_z$.

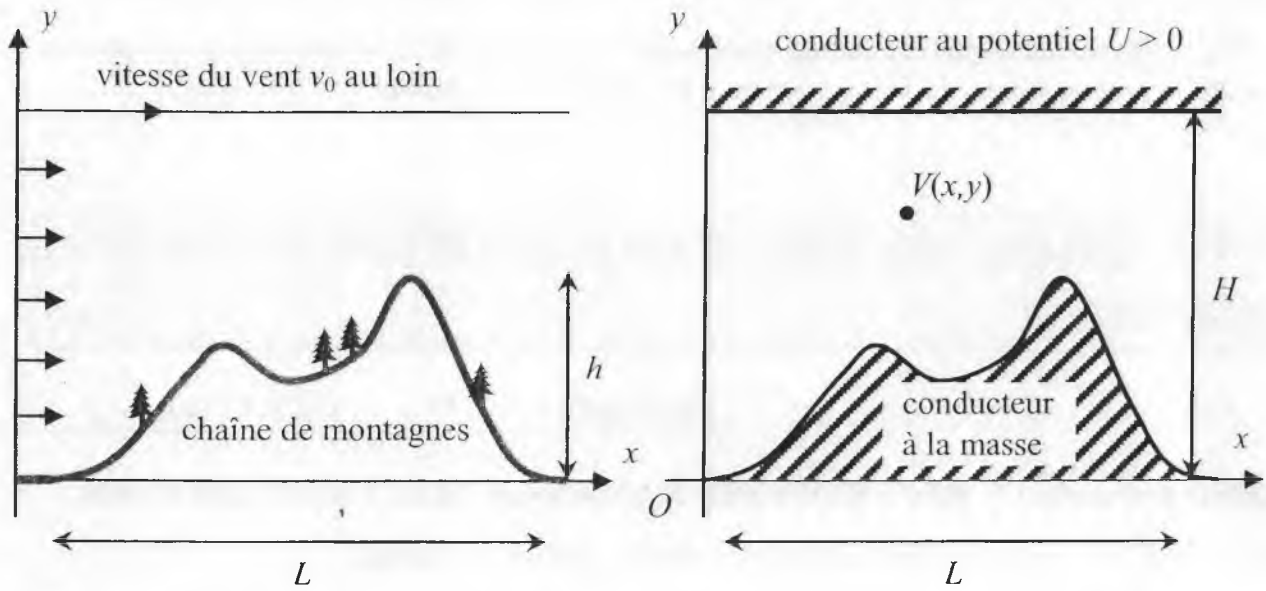
1) Exprimer alors les composantes v_x et v_y du champ de vitesses en fonction de dérivées partielles du champ scalaire ψ.

2) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\psi(x,y)$.

3) Montrer que les lignes de courant (lignes de champ des vitesses) correspondent aux lignes équipotentielles de ψ.

Pour déterminer le champ ψ, on peut utiliser une analogie électrostatique : on raisonne sur un schéma équivalent où la chaîne de montagnes est un conducteur mis à la masse et où le

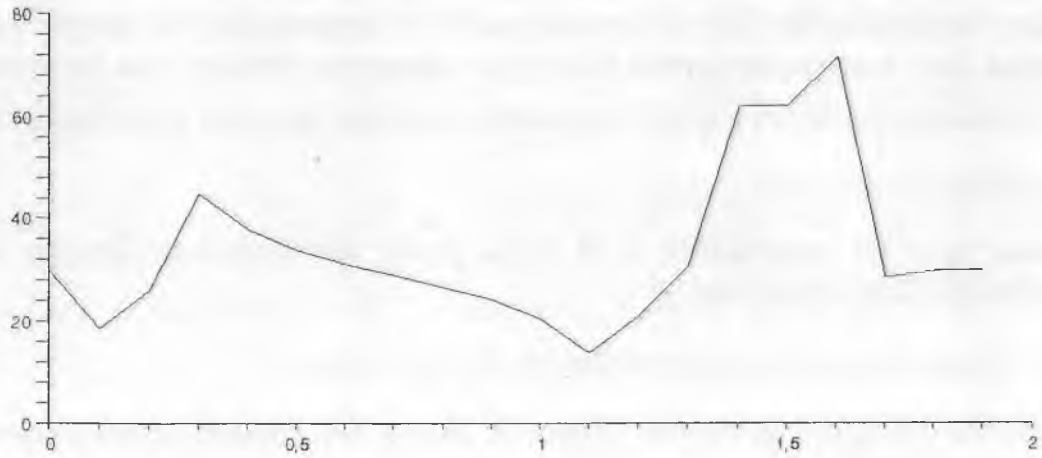
ciel à une altitude H grande devant h est au potentiel $U > 0$, l'espace entre les deux conducteurs étant vide. Le champ ψ du cas réel se déduit alors du potentiel électrique V du cas électrostatique par la relation $\psi(x, y) = KV(x, y)$, où K est un coefficient de proportionnalité.



4) Enoncer les différents arguments justifiant cette analogie. Tracer l'allure des lignes équipotentielles électriques.

5) En exploitant le fait que les lignes de courant ne soient pas perturbées loin en amont de la chaîne de montagnes, déterminer la constante K en fonction de U, H et v_0.

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel $V(x,y)$ peut être résolue numériquement compte tenu des conditions aux limites sur le pourtour du domaine. On en déduit alors le champ de vitesses par les relations déterminées précédemment. Pour $h = 400$ m et $L = 2$ km, un profil de chaîne de montagnes représenté sur la figure précédente et un vent de $v_0 = 30$ km/h, le graphe ci-dessous représente la vitesse horizontale du vent à 100 m de hauteur au dessus du sol (en km/h) en fonction de l'abscisse x (en km).



6) Commenter cette courbe. Pouvait-on prévoir le lieu où le vent était le plus important ? Justifier.

10.14 Etude d'un trampoline

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

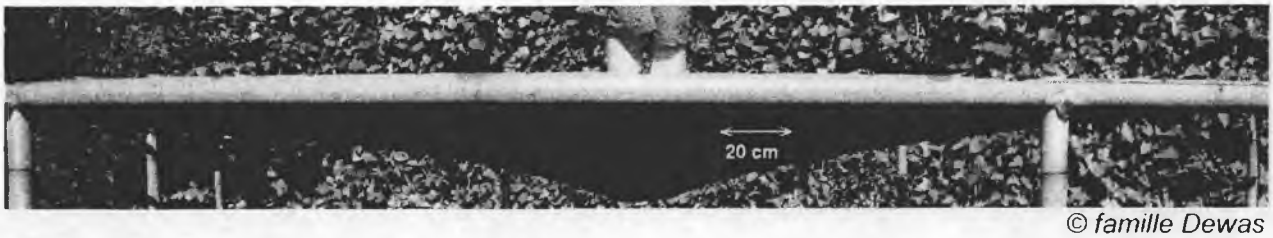
Chapitres concernés : PCSI et 7- ONDES MECANIQUES

MOTS-CLES : corde, oscillateur, ARQS, espace des phases.

On étudie un trampoline dont les caractéristiques sont les suivantes :

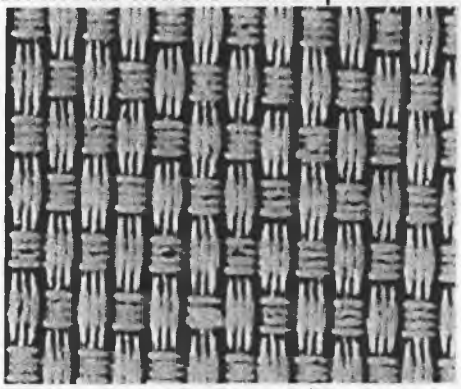
- la toile circulaire, de centre O et d'axe Oz ascendant, possède un rayon b. Elle est constituée d'un tissage de fils entrecroisés que l'on supposera inextensibles et sans masse. On note n le nombre de fils par unité de longueur de la toile et T la tension d'un fil (supposée identique pour tous les fils).
- un ensemble de N ressorts identiques disposés radialement accrochés à un cadre fixe circulaire assurant le maintien et la mise sous tension de la toile. On note k la constante de raideur de l'un des ressorts et Δl son allongement.

Photos du trampoline que l'on cherche à modéliser



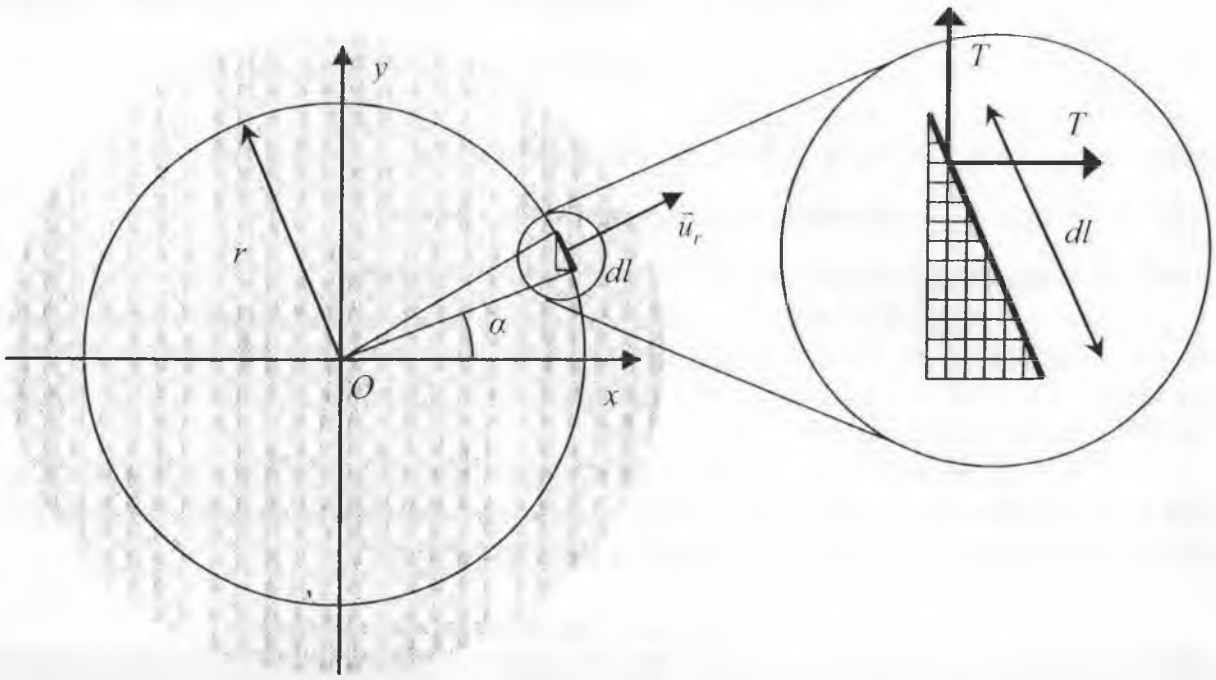
© famille Dewas

Photo en mode macro d'une partie de la toile



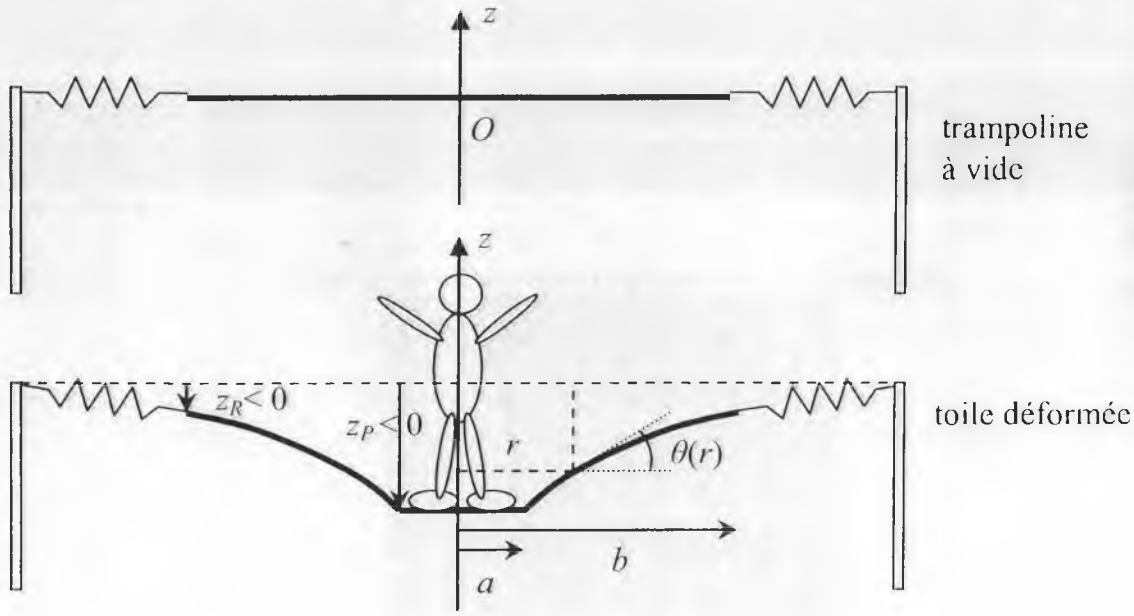
© Renaud Carpentier

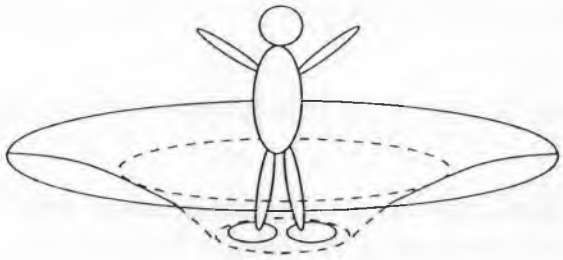
On considère un segment de toile (trait épais sur le schéma suivant) de longueur infinitésimal dl situé à une distance r du centre O et perpendiculaire au rayon, ce dernier faisant un angle α avec les fils de trame de la toile.



1) Montrer que la partie extérieure de la toile exerce sur la partie intérieure au niveau du segment dl une force égale à $d\vec{F} = nT\vec{u}_r dl$. L'orientation du tissage a-t-elle une influence ?

La personne se place au milieu du trampoline, de sorte que le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz. On note $z_P < 0$ l'abscisse verticale des pieds de la personne (partie la plus basse de la toile) et $z_R < 0$ celle du point d'ancrage de la toile sur les ressorts. Enfin, on note $\theta(r)$ l'angle que fait la toile avec l'horizontale à la distance r de l'axe Oz (voir schéma).





vue schématique
en perspective

On note F_z la force verticale exercée par la toile sur la personne.

2) Montrer que $2\pi r n T \sin\theta = F_z$ en un point quelconque de la toile.

3) Dans l'approximation $\theta << 1$, montrer que l'équation de la courbe formée par la toile tendue s'écrit :

$$z = \frac{F_z}{2\pi n T} \ln r + cste$$

On néglige l'augmentation de l'allongement Δl des ressorts autour de la toile du fait de la présence de la personne sur le trampoline. Par ailleurs, on considère que $|z_R| << |z_P|$.

4) Exprimer T en fonction de Δl et d'autres paramètres.

5) Déduire des questions précédentes que le trampoline se comporte comme un ressort pour la personne, c'est-à-dire que $F_z = -K_{éq} z_P$. Exprimer la constante de raideur équivalente $K_{éq}$ en fonction N, k, Δl, b et a.

Sur les photos présentées en début d'énoncé, la personne, pesant 55 kg, est immobile sur le trampoline.

6) Estimer la force qu'exerce chaque ressort sur la toile.

La personne s'amuse maintenant à effectuer des petites oscillations sur le trampoline tout en restant au centre de celui-ci. La formule $F_z = -K_{éq} z_P$ est encore valable si l'on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), qui consiste à négliger le temps de propagation τ des ondes transversales le long des fils de la toile tendue.

7) Devant quel autre temps faut-il comparer τ pour valider l'ARQS ? Montrer que cette condition revient en ordre de grandeur à négliger la masse de la toile devant celle de la personne.

8) Ecrire l'équation du mouvement vérifiée par l'abcsisse $z_P(t)$ en distinguant les cas $z_P < 0$ et $z_P > 0$.

Les dix courbes représentées à la page suivante sont issues de la résolution numérique de l'équation précédente pour un enfant de masse M_e avec comme conditions initiales pour $t = 0$: $z_P = -0{,}27$ m et $\frac{dz_P}{dt}$ prenant des valeurs réparties de manière régulière dans l'intervalle [-2,7 ; 0] m.s^{-1}.

9) Les oscillations sont-elles toutes isochrones ? Pourquoi ?

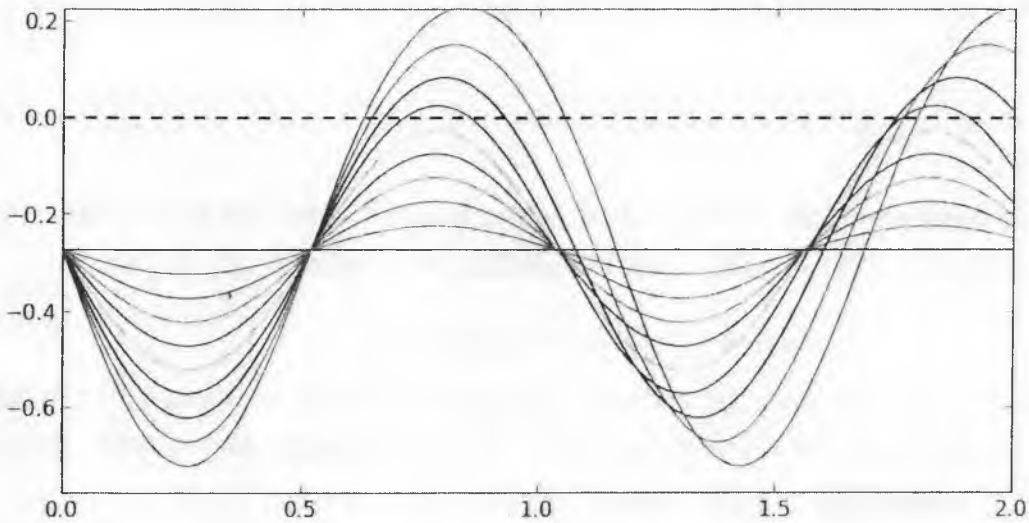
10) Indiquer jusqu'à quelle hauteur maximale la personne décolle du trampoline.

11) En quoi la position $z_P = -0{,}27$ m est-elle particulière ? Déterminer la masse M_c de l'enfant.

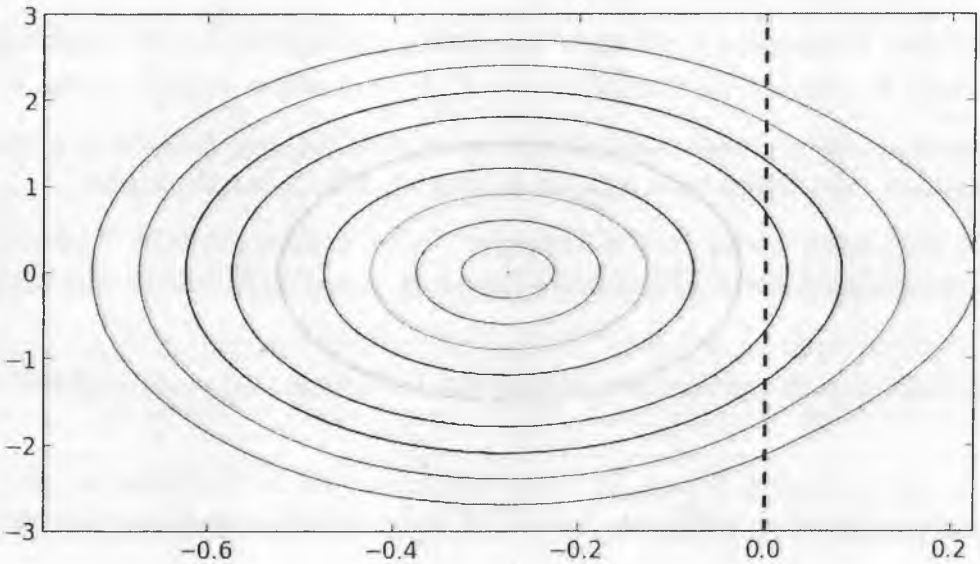
12) La période des oscillations pour les faibles amplitudes est-elle compatible avec les données obtenues par ailleurs ?

13) Justifier le sens de parcours ainsi que l'asymétrie des courbes dans l'espace des phases. Déterminer leur forme en distinguant les cas $z_P < 0$ et $z_P > 0$.

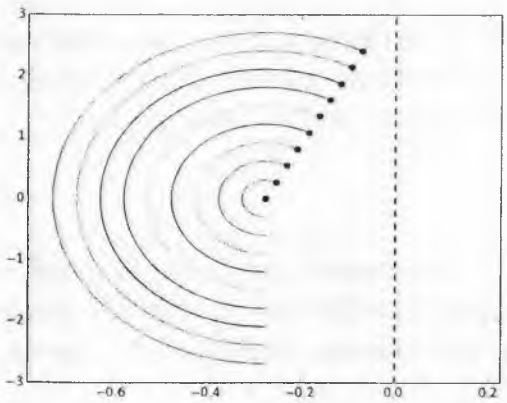
Abscisse z_P (en m) en fonction du temps (en s)

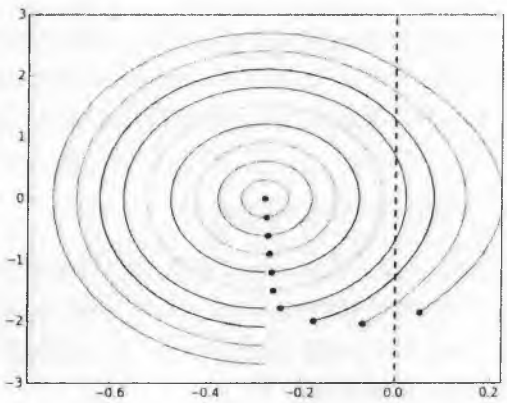


Espace des phases : dz_P/dt (en $m.s^{-1}$) en fonction de z_P (en m)



Espace des phases en cours de construction





En fait, l'expression $F_z = -K_{éq} z_P$ n'est plus valable si les amplitudes sont trop élevées.

14) Expliquer qualitativement pourquoi. La valeur de F_z est-elle alors plus grande ou plus petite que $-K_{éq} z_P$? En déduire *l'allure* de l'espace des phases pour de telles amplitudes.

10.15 Evolution d'un tsunami

TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : 5- MECANIQUE DES FLUIDES et 7- ONDES MECANIQUES

MOTS-CLES : équation d'Euler, bilan de masse, équation de propagation, dispersion.

Un tsunami (terme japonais) désigne un raz-de-marée, c'est-à-dire un gigantesque déplacement d'eau, généralement provoqué par un important séisme (ou quelque fois une éruption sous-marine). Au large des côtes où se crée le séisme, le déplacement d'eau est presque imperceptible : élévation du niveau de la mer de l'ordre du mètre sur une durée de plusieurs minutes et sur une distance de l'ordre de 100 km. Mais lorsque la vague arrive près des côtes, ce qui était initialement une faible et lente montée des eaux se transforme en véritable mur dévastateur. Ce problème propose de quantifier ce phénomène.

DOCUMENT d'après le site internet du quotidien *Le Monde*

Le tsunami qui a frappé le 26 décembre 2004 une grande partie des côtes de l'océan indien fut provoqué par un tremblement de terre au large de l'île indonésienne de Sumatra, fruit de l'affrontement de deux plaques tectoniques (phénomène de subduction). Un large morceau de l'écorce terrestre s'est alors effondré, mettant en mouvement la colonne d'eau situé au-dessus de lui. Ceci provoqua la formation d'une série de vagues, un peu comme le fait un caillou lancé dans une mare. En pleine mer, ces vagues géantes se déplacèrent à des vitesses comprises entre 500 et 800 km/h. En eau peu profonde, à l'approche des côtes, les vagues perdirent en vitesse mais gagnèrent en amplitude, pouvant former un mur d'eau atteignant 30 m de hauteur.

On suppose le problème invariant selon l'axe Oy. Le plan Oxy correspond à la surface de l'eau lorsque celle-ci est au repos. A l'abscisse x, la profondeur d'eau vaut $h(x)$. Hors-équilibre, on note $\xi(x,t)$ la hauteur d'eau par rapport à l'équilibre à l'abscisse x et à la date t. Puisque la vague a une longueur L très grande devant la profondeur d'eau, on admet que l'on peut négliger la composante et la dépendance du champ de vitesse selon la verticale dans l'équation d'Euler. On cherche donc le champ des vitesses sous la forme :

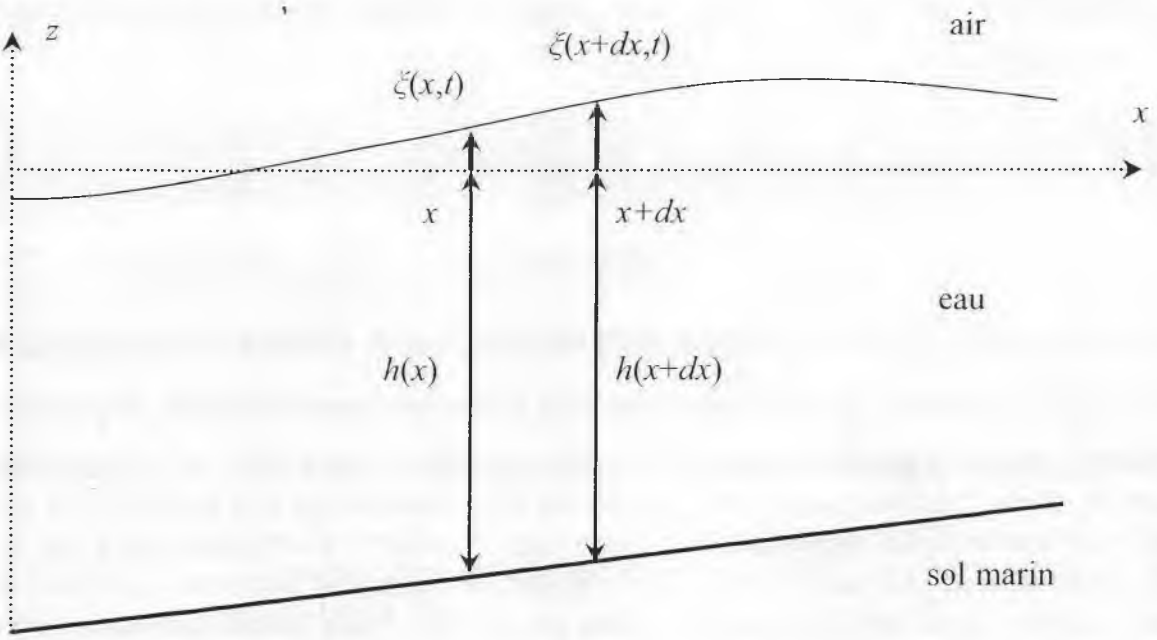
$$\vec{v} \approx v(x,t)\,\vec{e}_x .$$

On note μ la masse volumique de l'eau.

1) Rappeler l'équation d'Euler. Montrer par un raisonnement en ordre de grandeur que l'accélération convective peut être négligée devant l'accélération locale. On pourra considérer que les particules de fluide se déplacent sur une distance de l'ordre de ξ pendant une durée caractéristique T.

2) Exprimer la pression $p(x,z,t)$ dans l'eau en fonction de la pression atmosphérique p_0, μ, g, z et $\xi(x,t)$.

3) En projetant l'équation d'Euler sur l'axe Ox, établir une relation entre une dérivée partielle de $v(x,t)$ et une de $\xi(x,t)$.



4) Calculer la masse d'eau contenue dans la tranche comprise entre x et $x + dx$, de largeur ℓ selon Oy. A l'aide de la conservation de la masse, établir une seconde relation reliant $v(x,t)$, $\xi(x,t)$ et $h(x)$ et leurs dérivées. La simplifier dans le cas où la hauteur de la vague $\xi(x,t)$ est petite devant la profondeur $h(x)$.

5) Eliminer $v(x,t)$ pour aboutir à l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\xi(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh(x)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + g\frac{dh}{dx}\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (1)$$

On suppose dans un premier temps que la profondeur d'eau est constante, notée h.

6) Reconnaître l'équation vérifiée par $\xi(x,t)$. Exprimer la célérité c de la vague. Application numérique avec $h = 1$ km (zone d'océan profond), puis $h = 10$ m (près des côtes). Comparer ces résultats aux éléments fournis dans le document.

On étudie maintenant l'effet de la diminution de la profondeur de l'eau au cours de l'avancée de la vague.

7) Expliquer sans calcul pourquoi la vague va se raccourcir en se rapprochant des côtes. En assimilant une succession de vagues à une sinusoïde, indiquer la dépendance de la longueur d'onde vis-à-vis de la profondeur.

On envisage à présent la possibilité qu'une onde plane progressive harmonique de la forme $\underline{\xi}(x,t) = \underline{\xi}_0 \, e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ puisse se propager selon les x croissants, avec $\underline{k}$ complexe. On considère le cas où $h(x) = h_0 - \alpha x$, avec $\alpha << 1$. Dans ce modèle, on se limite à une zone restreinte de l'espace où h varie très peu, de sorte que le terme $h(x)$ dans l'équation (1) sera considéré comme uniforme localement, tout en ayant $\frac{dh}{dx} \neq 0$! On cherche à connaître la variation de hauteur de la vague, c'est à dire l'amplitude de l'onde au cours de la propagation.

8) Que représente concrètement α ?

9) Injecter la solution proposée dans l'équation (1). En déduire la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω.

10) On pose $\underline{k} = k' + jk''$. Exprimer k' et k'' à l'ordre 1 en $\alpha << 1$. En déduire la vitesse de phase de l'onde.

11) Comment varie l'amplitude A de l'onde en fonction de x ? En fait, ce résultat n'est applicable que pour une variation infinitésimale de x. Montrer alors que la variation infinitésimale de A est reliée à celle de h par une relation du type :

$$\frac{dA}{A} = \varepsilon \frac{dh}{h}$$

Déterminer ε. En déduire la dépendance de la hauteur de la vague en fonction de la profondeur.

Le phénomène d'amplification tel que décrit précédemment s'arrête lorsque la hauteur de la vague a le même ordre de grandeur que la profondeur de l'eau à l'endroit où elle se trouve. Initialement, la vague, créée dans une zone de profondeur H, possède une hauteur ξ_i.

12) Exprimer la hauteur finale de la vague ξ_f en fonction de ξ_i et H. Faire l'application numérique avec $\xi_i = 1$ m et $H = 1$ km.

13) Une étude énergétique (plus rigoureuse que l'analyse faite plus haut) montre que la hauteur d'une succession de vagues évolue en fonction de la profondeur en $h^{-1/4}$. Reprendre la question précédente.

14) Comparer ces résultats aux éléments fournis dans le document. Evoquer une autre cause d'amplification de la hauteur des vagues pouvant s'ajouter à celle étudiée dans ce problème.

10.16 Restauration de monuments par laser

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : 3- THERMODYNAMIQUE et 8- ONDES ELECTROMAGNETIQUES

MOTS-CLES : énergie électromagnétique, bilan thermique, loi de Fourier, équation de diffusion.

La restauration de monuments historiques utilise des techniques avancées qui ne doivent pas altérer la nature délicate des œuvres d'art. La technique de restauration par laser, employée depuis 1993, est basée sur l'irradiation des monuments et des statues par des impulsions laser de grande puissance, permettant d'éliminer très soigneusement les dépôts superficiels accumulés avec le temps sous l'effet de la pollution.

Détail du cloître de la primatiale Saint-Trophime à Arles, en cours de rénovation.
Un dépôt noir solide recouvre la surface de la statue.
La zone entourée, plus claire, a été en partie restaurée par laser.

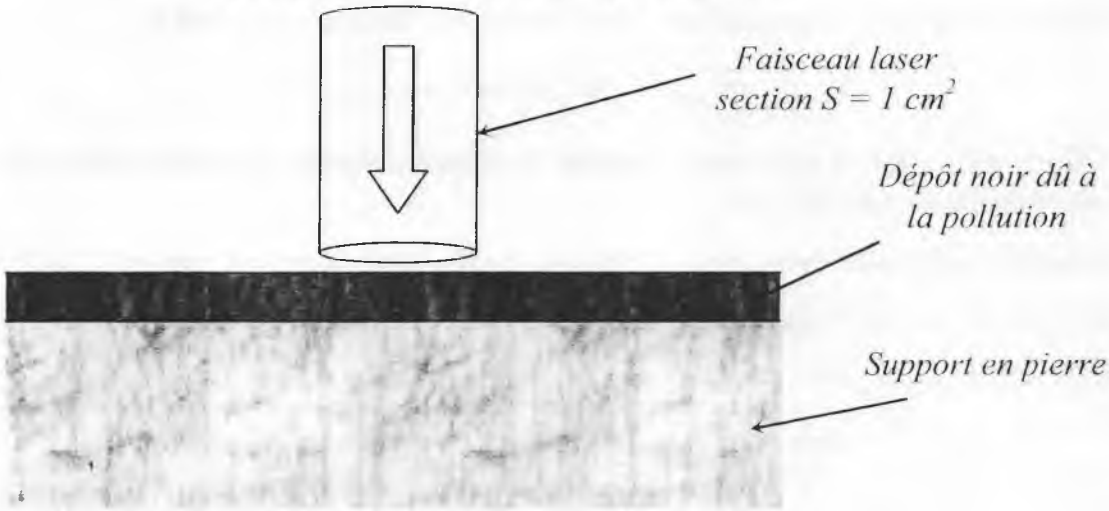
© Renaud Carpentier

Le laser utilisé est un laser solide de type YAG-Nd fonctionnant à 1064 nm (proche infrarouge) en mode impulsionnel déclenché (mode *Q-switch*). Chaque impulsion dure 10 ns et libère 1,0 J. Le faisceau a une section de 1 cm^2 et comporte 20 impulsions par seconde.

1) Calculer la puissance moyenne du faisceau laser, ainsi que la puissance instantanée correspondant à une impulsion. Quel est l'intérêt de travailler avec des impulsions plutôt qu'avec un faisceau continu ?

On se propose de modéliser l'interaction matière-rayonnement à la base de la restauration par laser. On considère un monument en pierre naturelle recouvert d'un dépôt noir, formé de poussières de carbone et de micro-suies compactées, dû à la pollution atmosphérique, d'épaisseur $e = 100$ µm. On irradie le monument par les impulsions laser en incidence normale.

Principe de la restauration par laser



On donne quelques caractéristiques des matériaux utilisés :

Dépôt noir (Carbone)	
Masse volumique ρ	$2{,}0.10^3$ kg.m^{-3}
Capacité thermique massique c	710 J.kg^{-1}.K^{-1}
Conductivité thermique λ	129 W.m^{-1}.K^{-1}
Température de sublimation T_{sub}	3 825°C
Enthalphie massique de sublimation l_{sub}	$2{,}96.10^7$ J.kg^{-1}

Monument en pierre naturelle (Granite)	
Masse volumique ρ	$2{,}8.10^3$ kg.m^{-3}
Capacité thermique massique c	790 J.kg^{-1}.K^{-1}
Conductivité thermique λ	2,2 W.m^{-1}.K^{-1}

Du fait de sa couleur noire, le dépôt de carbone va absorber sous forme thermique toute l'énergie de l'impulsion laser incidente.

2) Par un raisonnement en ordre de grandeur, évaluer la profondeur de pénétration de l'énergie thermique d'une impulsion laser dans le dépôt.

3) Montrer que la sublimation du carbone est possible avec une impulsion.

4) Estimer l'épaisseur de dépôt sublimé à chaque impulsion.

5) En déduire le temps nécessaire pour rénover complètement 1 m^2 de monument. Commenter.

Les grandes variations de température observées dans le dépôt noir ne doivent cependant pas pénétrer dans le monument lui-même sous peine de le détériorer. Le modèle suivant se

propose de quantifier l'effet de la propagation de l'onde thermique dans le monument en pierre naturelle.

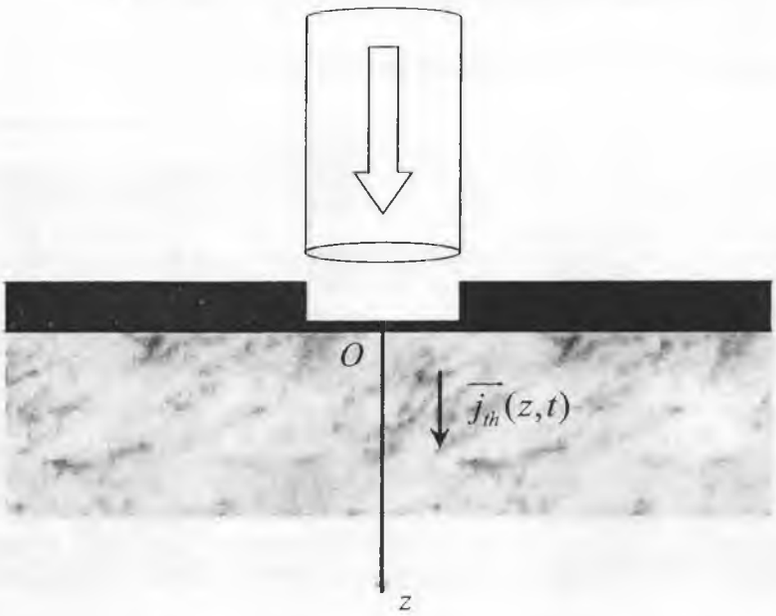
On considère que la surface de la pierre, pratiquement mise à nue par le nettoyage du dépôt noir, est portée à la température maximale $T_{max} = 4{,}1.10^3$ K à chaque impulsion. La variation de température en surface $\delta T_{surf}(t)$ est une succession de pics de fréquence $f = 20$ Hz, et de hauteur $T_{max} - T_0$. Afin d'obtenir une solution analytique de l'équation de diffusion, on remplace la succession de pics par une fonction sinusoïdale :

$$\delta T_{surf}(t) = \delta T_0 \cos \omega t \text{ , avec } \omega = 2\pi f.$$

où $\delta T_0 = \alpha(T_{max}-T_0)$. A noter que le facteur de proportionnalité α peut être déterminé par une analyse de Fourier de $\delta T_{surf}(t)$.

On appelle $\delta T(z,t)$ la variation de température dans la pierre par rapport à la température moyenne et $\overrightarrow{j_{th}}(z,t) = j_{th}(z,t)\,\overrightarrow{e_z}$ le vecteur densité de courant thermique à la côte z à l'instant t.

Une fois le dépôt éliminé, la pierre naturelle subit de fortes variations de température en surface



6) En appliquant le premier principe de la thermodynamique à une tranche de matériau de surface S comprise entre z et $z + dz$, établir l'équation différentielle vérifiée par la variation de température $\delta T(z,t)$.

7) Montrer que :

$$\delta T(z,t) = \delta T_0\, e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

est solution de l'équation précédente. Exprimer la distance δ en fonction des données et la calculer numériquement. Commenter.

8) Discuter l'effet de la restauration laser sur la pierre naturelle. Conclure.

10.17 Modulateur électro-optique

TECHNICITE : * INITIATIVE : ***

Chapitres concernés : 1- OPTIQUE ONDULATOIRE, 6- ELECTROMAGNETISME et 8- ONDES ELECTROMAGNETIQUES

MOTS-CLES : interférence à deux ondes, ARQS, onde stationnaire, condensateur.

De nos jours, les télécommunications par fibres optiques représentent plus de 80% du trafic mondial longue distance. En France, les opérateurs affichent l'objectif de déployer un réseau de sorte que la fibre optique puisse arriver jusqu'au domicile des utilisateurs, le but étant d'offrir aux abonnés une connexion internet à très haut débit. Le transfert de données par fibres optiques s'effectue par une modulation de la lumière transportée par la fibre. Ce problème propose d'étudier un modulateur d'intensité, basé sur un effet électro-optique, permettant de transmettre des signaux à un débit de 10 Gbits/s sur un seul canal.

DOCUMENT n°1 : Quelques définitions liées à la technologie des télécommunications par fibres optiques

Le point fort des fibres optiques ? Une très faible atténuation !

Depuis de nombreuses années, les fibres optiques sont le support principal des liaisons à très haut débit. En effet, cette technologie est la seule permettant de guider des signaux numériques à plusieurs dizaines de Gbits/s avec une très faible atténuation, inférieure à 0,2 $dB.km^{-1}$. A titre d'exemple, cela signifie qu'au bout de 100 km de propagation, la puissance lumineuse à l'intérieur de la fibre a diminué de 20 dB, il reste donc une fraction ε de la puissance initiale telle que $-20 = 10.\log(\varepsilon)$, c'est-à-dire 1%.

Par ailleurs, les connectiques entre les fibres optiques et les appareils (émetteurs, modulateurs, multiplexeurs, amplificateurs, récepteurs...) ne font perdre tout au plus qu'une poignée de décibels. Au bilan, les faibles pertes et l'utilisation ponctuelle d'amplificateurs permettent d'assurer les liaisons entre les différents continents.

Les formats numériques

Les télécommunications par fibres optiques utilisent essentiellement un format numérique : l'information à transmettre est codée sous forme binaire en une succession de bits « 0 » ou « 1 ». Ces bits sont alors « injectés » dans la lumière guidée dans la fibre optique grâce à une modulation de celle-ci.

Il existe plusieurs types de modulation, notamment en intensité (ASK : *amplitude-shift keying*) et en phase (DPSK : *differential phase-shift keying*). Pour la modulation d'intensité, le principe est le suivant : une absence de lumière (en pratique, une intensité inférieure à un seuil) code le bit « 0 » et une présence de lumière (une intensité supérieure à ce seuil) code le bit « 1 ». Deux formats sont alors utilisés :

- le format RZ (retour à zéro), où le signal lumineux redescend systématiquement à zéro entre chaque bit.

- le format NRZ (non retour à zéro), où le signal garde la même valeur entre deux bits consécutifs identiques.

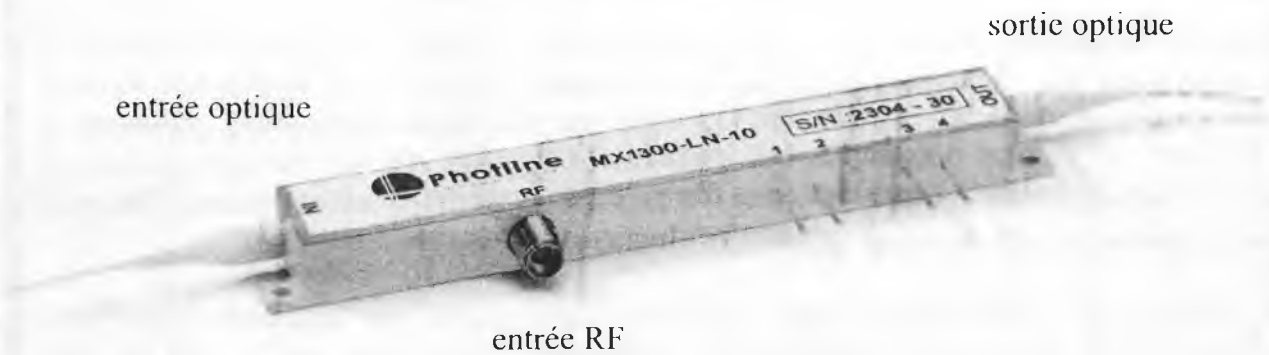
Taux d'extinction

Dans le format ASK, on définit le taux d'extinction (*extinction ratio*) par le rapport P_1/P_0 (éventuellement exprimé en dB), où P_1 et P_0 désignent les puissances lumineuses codant respectivement le bit « 1 » et le bit « 0 ».

DOCUMENT n°2 : Modulateur d'intensité, d'après le site « photline.com »

Le modulateur d'intensité MX1300-LN-10 de l'équipementier PHOTLINE Technologies implanté à Besançon fonctionne sur une bande centrée sur 1310 nm de largeur 40 nm. Il permet une modulation de la lumière, avec un grand rapport d'extinction, par un signal radio-fréquence (RF) à 10 Gbits/s pour les formats numériques de transmission optique.

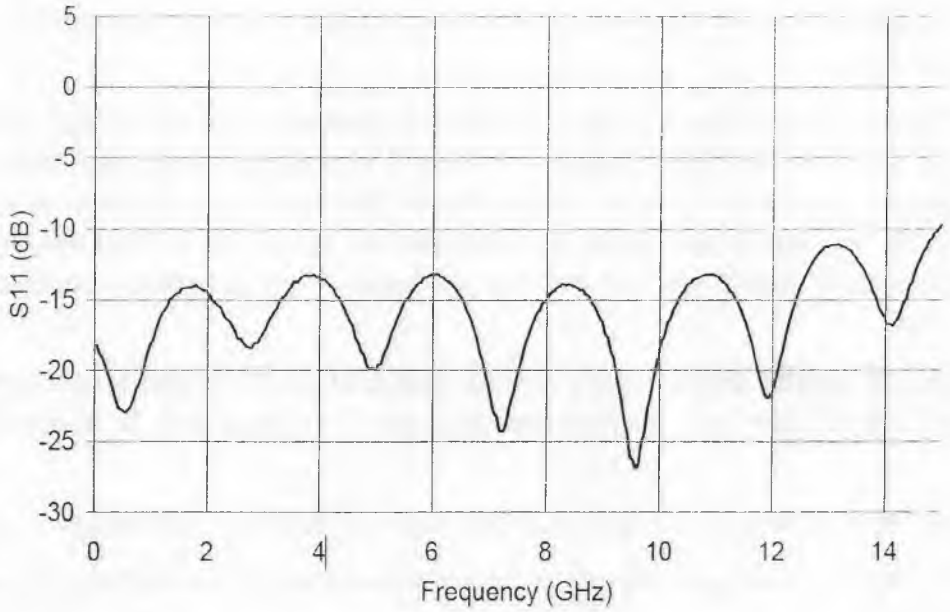
Modulateur MX1300-LN-10



© PHOTLINE

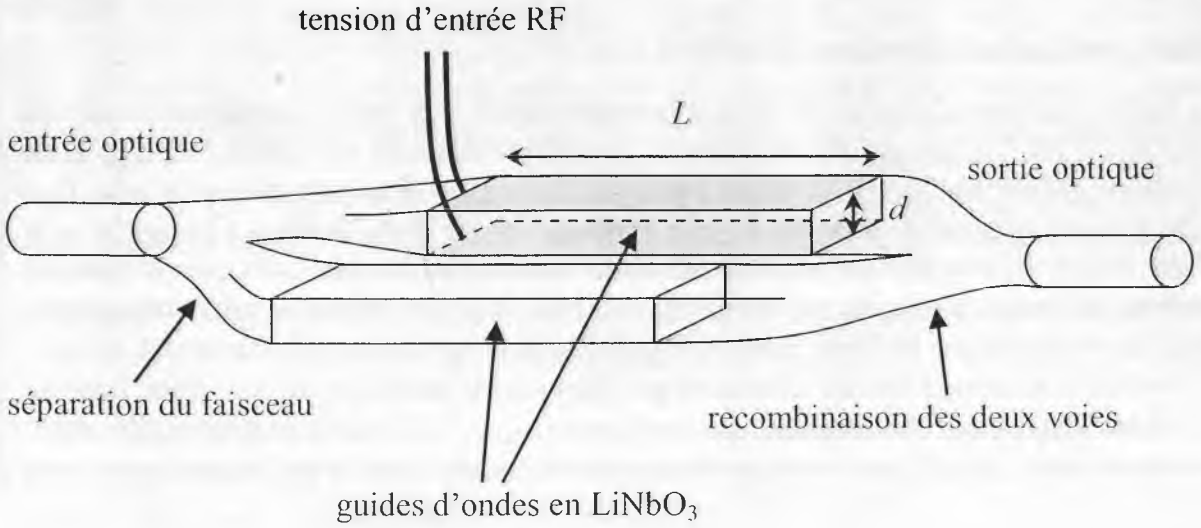
Les principales caractéristiques du modulateur sont les suivantes :

- longueur du boitier : 110 mm
- pertes d'insertion de la lumière : 3,5 dB
- tension à appliquer pour l'extinction à 10 GHz : $V_\pi = 6$ volts
- taux d'extinction : 20 dB
- impédance d'entrée du signal RF : 40 Ω
- coefficient de réflexion du signal RF : paramètre S11 (en dB)



© PHOTLINE

La modulation d'intensité de la lumière du modulateur présenté dans le document n°2 s'effectue sur le principe d'un interféromètre de type Mach-Zender : le modulateur répartit la lumière dans deux guides d'ondes parallèles (les deux « voies » de l'interféromètre), puis recombine les faisceaux en sortie (voir figure suivante). Dans chaque guide, la lumière se propage dans du niobate de lithium ($LiNbO_3$) dont l'indice n dépend du champ électrique E qui lui est appliqué. Il s'agit d'un effet électro-optique, la relation entre n et E s'écrivant dans la configuration du modulateur (effet Pockels) : $n = n_0 + \frac{n_0^3 r E}{2}$, où n_0 désigne l'indice sans champ électrique (en pratique, l'effet électro-optique est un phénomène de biréfringence provoqué, donc dépend de la polarisation, mais par souci de simplicité, on s'affranchit de ce détail). Ainsi, un signal électrique de commande aux bornes des électrodes (parties grisées sur la figure) permet de modifier la phase de l'onde lumineuse passant par l'un des deux bras et ainsi moduler l'intensité lumineuse en sortie du modulateur.



Pour $LiNbO_3$ à 1310 nm, on donne les valeurs suivantes : $n_0 = 2{,}15$ et $r = 31$ pm.V^{-1}.

1) Dans le document n°2, pourquoi la tension à appliquer pour obtenir l'extinction est-elle notée « V_π » ?

2) A la fréquence d'utilisation du modulateur, préciser par un calcul d'ordre de grandeur s'il est possible de faire l'approximation d'un régime quasi-stationnaire pour exprimer le champ électrique entre les électrodes en fonction de la tension appliquée à l'entrée RF. Quelle doit être la vitesse de propagation des ondes RF le long des électrodes pour que le modulateur fonctionne de manière optimale ? On supposera cette condition vérifiée par la suite.

3) Pourquoi la courbe du paramètre S11 en fonction de la fréquence présente-t-elle des oscillations ? En déduire, par un raisonnement que l'on détaillera, la longueur L des électrodes.

4) Estimer l'épaisseur d du guide en $LiNbO_3$ séparant les deux électrodes.

Lorsque les deux bras se rejoignent, les deux ondes lumineuses ne possèdent pas tout à fait la même intensité.

5) D'après les documents, estimer le rapport entre les intensités lumineuses de chacune des voies.

10.18 Suivi des ondes sismiques par sondage ionosphérique

TECHNICITE : ** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : PCSI, 1- OPTIQUE ONDULATOIRE, 7- ONDES MECANIQUES et 8- ONDES ELECTROMAGNETIQUES

MOTS-CLES : statique des fluides, onde acoustique dans un fluide, plasma, onde évanescente, interface, paquet d'ondes, effet Doppler.

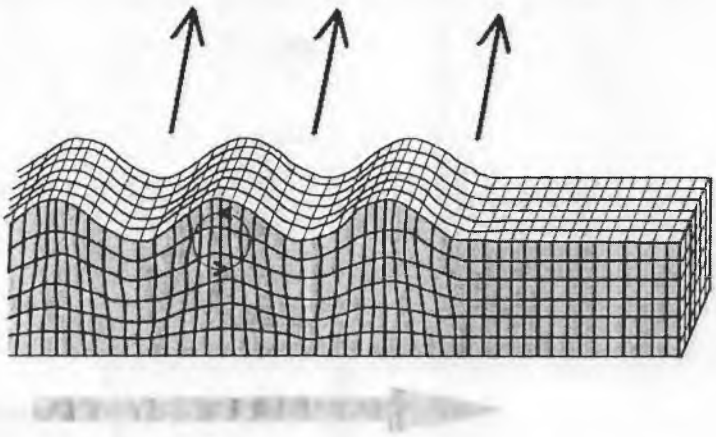
DOCUMENT : « Des ondes sismiques dans l'ionosphère ! »

d'après l'article *seismic waves in the ionosphere* de Philippe Lognonné et al. paru dans la revue *europhysicsnews*, No 4, Vol. 37 (2006)

Il y a encore quelques années de cela, l'enregistrement des ondes sismiques se faisait exclusivement par l'intermédiaire de réseaux de sismomètres au sol. Mais la Terre étant recouverte de 70% d'eau, de nombreuses zones ne disposaient d'aucune mesure locale. Une nouvelle technique apparue dans les années 2000 est venue révolutionner l'imagerie et le suivi des ondes sismiques. Le principe de cette technique consiste non pas à mesurer directement les ondes sismiques au niveau du sol, mais ses conséquences sur l'atmosphère. En effet, un tremblement de Terre génère des oscillations verticales et horizontales du sol : les mouvements verticaux du sol entraînent un mouvement identique de l'air situé juste au dessus, créant ainsi dans l'atmosphère une onde acoustique. Celle-ci se propage alors quasi-verticalement étant donné que la vitesse des ondes sismiques dans le sol, entre 3 et 4 km/s

pour les ondes de surface de Rayleigh, est nettement supérieure à la vitesse du son dans l'air.

Schéma représentant le mouvement du sol induit par une onde de Rayleigh

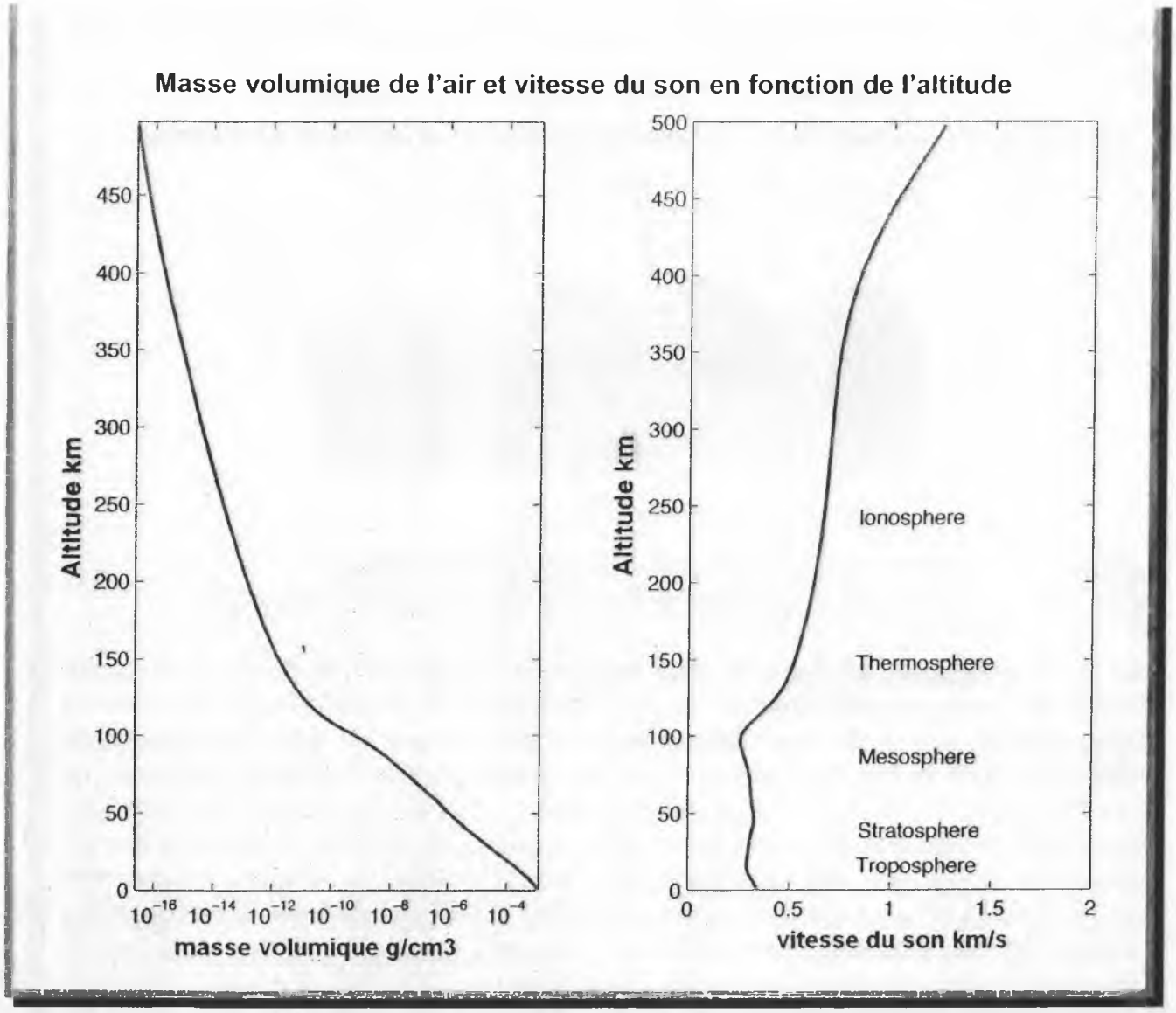


flèche grise : direction de propagation de l'onde sismique de Rayleigh,
flèches noires : direction de propagation de l'onde infrasonore générée dans l'air.

Pour des tremblements de Terre de forte magnitude, l'amplitude de l'onde de Rayleigh peut atteindre quelques mm, voire cm, même à une distance de 10 000 km de l'épicentre du séisme, comme cela a pu être observé pour le tremblement de Terre dévastateur du 26 décembre 2004 au large de Sumatra. Avec leur grande période temporelle (de l'ordre de 10 s à 20 s au moins), les ondes infrasonores générées dans l'air ne sont que très faiblement atténuées par la viscosité de l'atmosphère. Elles se propagent alors en gardant leur énergie cinétique et de ce fait, leur amplitude croît avec l'altitude, de manière inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité de l'air. Ainsi, lorsque les ondes infrasonores atteignent 200 km d'altitude, leur amplitude a augmenté de plusieurs ordres de grandeur. Cette amplification va permettre leur détection grâce à un sondage de la partie haute de l'atmosphère appelée l'ionosphère.

Au-delà d'environ 100 km d'altitude, une faible proportion des molécules constituant l'atmosphère est ionisée : c'est le domaine de l'ionosphère. La densité d'électrons libres atteint un maximum entre 350 et 400 km d'altitude, sa valeur, très fluctuante, dépendant essentiellement de l'activité solaire. Typiquement, en pleine journée, elle peut monter à 2.10^{12} électrons par m^3 et descendre à 10^{11} électrons par m^3 en pleine nuit.

La détection des oscillations verticales de l'ionosphère générées par un tremblement de Terre ou un tsunami exploite le comportement de celle-ci vis-à-vis des ondes électromagnétiques : quand une onde radio (la bande de fréquence utilisée en pratique étant de 1 et 15 MHz) est envoyée en direction de l'ionosphère, le champ électrique de l'onde met en mouvement les électrons libres, ce qui modifie en retour sa propagation. A une certaine altitude, l'onde radio est alors entièrement réfléchie. Cette réflexion se produit lorsque la densité électronique est telle que la fréquence plasma est égale à la fréquence de l'onde. Grâce à l'effet Doppler, on accède au mouvement vertical de l'ionosphère en mesurant la fréquence de l'onde radio revenant au sol. Les instruments actuels peuvent ainsi mesurer des vitesses verticales de quelques dizaines de cm/s, permettant la détection et le suivi de séisme de magnitude supérieure ou égale à 7. De telles mesures permettront d'améliorer la compréhension de la propagation des tsunamis et offriront peut-être la possibilité de rendre plus efficace les systèmes d'alerte.



1ère partie

1) Justifier de manière quantitative le fait que l'onde infrasonore créée dans l'atmosphère par l'onde sismique de Rayleigh se propage selon une direction quasi-verticale en donnant un encadrement de l'angle que fait cette direction avec la verticale. On pourra employer les techniques de calcul utilisées en optique lors l'étude d'un réseau de coefficient de transmission sinusoïdal éclairé par une onde plane sous incidence normale.

On considère l'atmosphère isotherme à la température $T = 275$ K. On suppose que l'air est un gaz parfait de composition uniforme et l'on note M sa masse molaire, égale à 29 g.mol^{-1}. On note p_{sol} la pression atmosphérique au niveau du sol, égale à $1{,}0.10^5$ Pa. Dans toute la suite, on considère la pesanteur g comme uniforme entre le sol et 400 km d'altitude, égale à 10 m.s^{-2}.

2) Quantifier l'erreur commise par cette approximation. On rappelle le rayon de la Terre $R_T = 6400$ km.

3) Compte tenu des hypothèses, établir l'expression de la pression $p_0(z)$ et de la masse volumique $\mu_0(z)$ de l'air au repos en fonction de l'altitude z. On posera $H = \dfrac{RT}{Mg}$.

Donner la valeur numérique de H issue de ce modèle.

4) Expliquer comment trouver la valeur expérimentale de H à partir du document et comparer à la valeur précédente. Préciser à partir de quelle altitude le modèle précédent n'est plus du tout valable. Proposer des explications.

On rappelle la définition du coefficient de compressibilité isentropique : $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = +\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S$. On note γ = 1,4 le rapport de la capacité calorifique à pression constante sur la capacité calorifique à volume constant de l'air.

5) Montrer que $\chi_s(z) = \frac{1}{\gamma p_0(z)}$.

On étudie maintenant la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère. On rappelle que celles-ci se déplacent dans l'air à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$.

6) Lors de leur montée dans l'atmosphère, les ondes infrasonores se propagent-elles à vitesse constante ? Comment expliquer que l'on retrouve la même limite qu'à la question 4 ?

7) Justifier la phrase du document expliquant que l'amplitude de l'onde croît avec l'altitude de manière inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité de l'air.

8) En admettant que l'énergie totale de l'onde infrasonore se conserve également au cours de la montée, que peut-on dire de l'évolution de l'amplitude de la surpression en fonction de l'altitude ?

9) Estimer le temps que met l'onde infrasonore émise au sol pour atteindre 200 km d'altitude.

10) En exploitant les informations fournies dans le document, donner les ordres de grandeur de l'amplitude du champ de vitesse ainsi que celle du déplacement de l'air au niveau de l'ionosphère à 200 km d'altitude lors d'un tremblement de Terre de forte magnitude. L'approximation acoustique est-elle encore valable à cette altitude ?

2ème partie

On rappelle les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

Charge d'un électron : $-e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C,
Masse d'un électron : $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg,
Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}8\ 10^{-12}$ F.m^{-1},

On étudie dans le début de cette partie la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation ω à l'intérieur de l'ionosphère, assimilée à un plasma neutre sans collision de densité électronique n_e. Le champ électrique de l'onde en notation complexe est de la forme :

$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}z))\vec{u}_x$ avec $\underline{k}$ pouvant être complexe.

On montre que le plasma se comporte comme un conducteur de conductivité complexe $\underline{\sigma} = -i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}$.

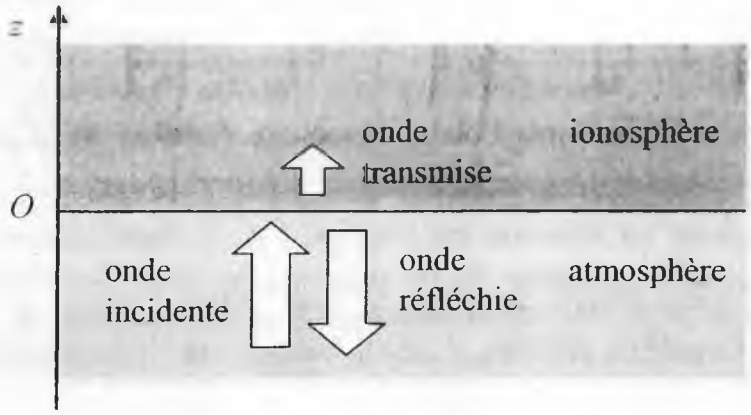
11) Montrer que la relation de dispersion pour l'onde électromagnétique s'écrit :

$\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Exprimer ω_p, appelé pulsation plasma, en fonction de n_e, e, m et ε_0.

Dans toute la suite du problème, on considère le cas où $\omega < \omega_p$ (domaine réactif du plasma). On rappelle que l'axe Oz est ascendant et que, dans le cadre du sondage ionosphérique, l'onde électromagnétique vient du sol.

12) En posant $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$, donner les expressions réelles du champ électrique et du champ magnétique de l'onde. En déduire l'expression du vecteur de Poynting puis calculer sa valeur moyenne. Commenter et donner le nom attribué à ce type d'onde.

On étudie maintenant la réflexion d'une OPPH polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$, en incidence normale sur l'ionosphère en faisant l'hypothèse simplificatrice suivante : on place l'origine de l'axe Oz ascendant en considérant que pour $z < 0$, l'air n'est pas ionisé (que l'on assimilera à du vide) et pour $z > 0$ se trouve l'ionosphère avec une densité électronique uniforme.



On admet que les champs électrique et magnétique tangentiels sont continus au niveau de l'interface ionosphère-atmosphère.

13) Rappeler le lien entre le champ électrique et le champ magnétique de l'onde incidente. Même question pour l'onde réfléchie.

14) Exploiter la continuité des champs en $z = 0$ pour déterminer l'expression du coefficient de réflexion complexe $\underline{r_E}$ du champ électrique. Exprimer le retard de phase φ_r subi par l'onde lors de sa réflexion sur l'ionosphère. Commenter son signe.

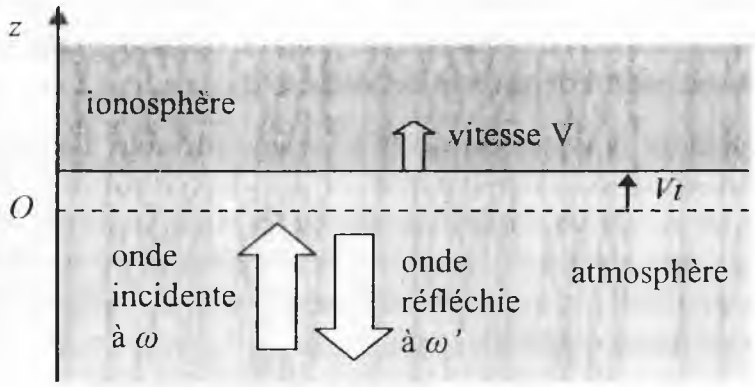
15) Définir puis exprimer le coefficient de réflexion en puissance. Pourquoi le résultat était-il prévisible ?

On étudie maintenant un paquet d'ondes électromagnétiques dont le spectre est centré sur la pulsation ω_0 arrivant sur l'ionosphère en incidence normale depuis le sol. On montre alors

qu'il est entièrement réfléchi si $\omega_0 < \omega_p$ et que l'enveloppe du paquet d'ondes subit lors de la réflexion sur l'ionosphère un retard temporel τ_g, appelé retard de groupe, égal à $\left(\frac{d\varphi_r}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}$.

16) Déterminer l'expression de τ_g. Commenter son signe. Comment peut-on interpréter la présence de ce retard ?

Pour simplifier l'étude de l'effet Doppler, on considère à nouveau une OPPH incidente de pulsation ω et l'on suppose dans la suite que l'onde transmise dans l'ionosphère est nulle. En présence d'un tremblement de Terre ou d'un séisme, l'atmosphère et l'ionosphère se déplacent verticalement. On se place dans le cas particulier où l'interface atmosphère-ionosphère monte à la vitesse constante V, de sorte que son abscisse à la date t soit égale à Vt.



17) En exploitant à nouveau la continuité du champ électrique à l'interface, montrer que la pulsation ω' de l'onde réfléchie a pour expression :

$$\omega' = \frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}\omega$$

18) Sachant que $V << c$, donner une expression approchée de $\omega' - \omega$.

19) Comparer la plage de fréquence utilisée pour le sondage ionosphérique par effet Doppler aux valeurs que peut prendre la fréquence plasma de l'ionosphère et commenter.

20) Estimer la résolution spectrale du sondeur Doppler, exprimée en Hz, nécessaire pour détecter des séismes de magnitude 7.

L'article dont est inspiré ce problème est disponible à l'adresse :

www.europhysicsnews.org/articles/epn/pdf/2006/04/Whole_issue.pdf

En plus du sondage Doppler de l'ionosphère, on pourra y trouver une autre technique de suivi des tremblements de Terre et des tsunamis en temps réel (ou presque, à cause d'un décalage de 10 minutes) qui consiste à mesurer la quantité d'électrons libres (*Total Electron Content*) de l'ionosphère (voir problème 8.12) par les systèmes GPS.

10.19 Expérience de complémentarité

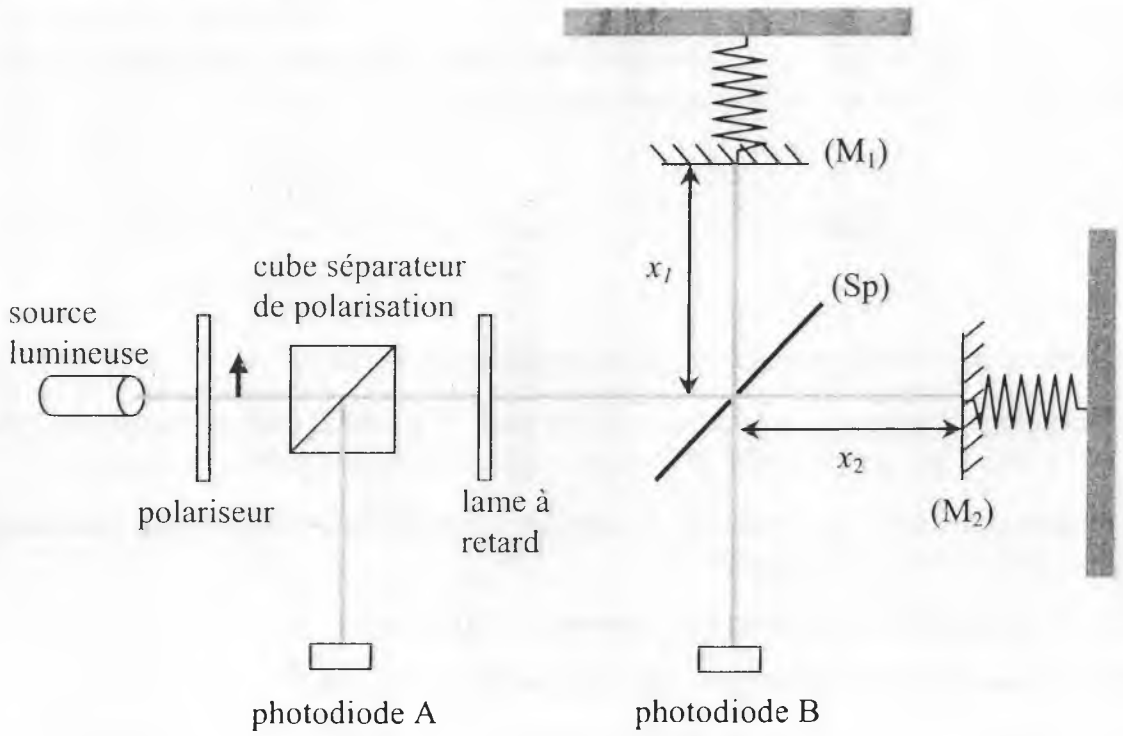
TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : 1- OPTIQUE ONDULATOIRE, 8- ONDES ELECTROMAGNETIQUES et 9- MECANIQUE QUANTIQUE

MOTS-CLES : interféromètre de Michelson, lame à retard, interférence à deux ondes, photon, inégalité de Heisenberg, relation de de Broglie.

Bohr, l'un des fondateurs de la physique quantique, a énoncé en 1924 le principe de complémentarité : *Les aspects ondulatoires et particulaires d'une entité quantique ne se manifestent jamais simultanément.* Pour illustrer ce principe, il existe de nombreuses expériences pour lesquelles on ne peut pas à la fois savoir par quel chemin est passée la particule (propriété à caractère particulaire) et voir en même temps des interférences (propriété à caractère ondulatoire). Ce problème propose de mettre en évidence le principe de complémentarité avec un interféromètre de Michelson.

On raisonne sur le montage optique représenté à la page suivante. La source lumineuse est supposée monochromatique de longueur d'onde λ. On assimilera l'air à du vide. Le polariseur à la sortie de la source lumineuse est orienté dans le plan de la feuille (comme l'indique la flèche). La diagonale du cube séparateur de polarisation a la propriété de laisser passer la lumière lorsque celle-ci est polarisée dans le plan de la feuille et de la réfléchir lorsqu'elle est polarisée perpendiculairement à ce plan.



1) Donner les caractéristiques de la lame à retard (nature et orientation des lignes neutres) pour que la lumière revenant de la séparatrice en direction de la source soit intégralement dirigée vers la photodiode A (on admettra ce résultat pour la filière MP). On se place dans cette situation dans toute la suite du problème.

On note I_0 l'intensité émise par la source et l'on suppose que ni la transmission, ni la réflexion par la séparatrice n'induit de déphasage pour les ondes reçues par la photodiode B.

2) Exprimer l'intensité reçue par la photodiode B en fonction notamment de x_1 et x_2.

3) En déduire l'intensité reçue par la photodiode A. L'hypothèse faite sur l'absence de déphasage induit par la séparatrice peut-elle être également faite pour les ondes reçues par la photodiode A ?

Dans les calculs précédents, la lumière a été considérée comme une onde. Cependant, la seule description ondulatoire de la lumière ne permet pas d'interpréter certaines observations expérimentales. La première expérience ayant suggéré un caractère corpusculaire de la lumière fut l'effet photoélectrique. Pour expliquer cet effet, Einstein introduisit en 1905 la notion de photon, corpuscule élémentaire de lumière (voir cependant la note en fin de problème concernant ce point).

On considère une source pouvant émettre un photon unique (de telles sources pouvant émettre un seul photon à la demande existent bel et bien !). Dans une description purement corpusculaire, le photon a une probabilité de 50% de traverser la séparatrice et de 50% d'être réfléchi par elle.

4) Dans cette description purement corpusculaire, calculer la probabilité P_B pour que le photon soit capté par la photodiode B. En réitérant l'opération un grand nombre de fois, ce résultat est-il compatible avec le résultat de la question 2 ? Expliquer en quoi la notion de fonction d'onde permet de rendre compatible le point de vue probabiliste et le point de vue ondulatoire ? En déduire dans ce cas l'expression de P_B.

On cherche à savoir par quel chemin le photon passe dans l'interféromètre. Pour cela, on tente de détecter le mouvement du miroir (M_1) ou (M_2) provoqué par le rebond du photon sur l'un d'eux. Dans le cas de miroirs de taille macroscopique, ceux-ci sont en pratique trop massifs pour que le mouvement provoqué par le photon puisse être détecté.

5) Après avoir rappelé la relation de Louis De Broglie, justifier l'affirmation précédente par une application numérique en traitant le cas de la lumière visible.

A l'inverse, si les miroirs ont une taille microscopique, il est envisageable de mesurer la variation de leur quantité de mouvement. Cependant, pour être certain de détecter le rebond du photon, celle-ci doit être supérieure à trois fois l'incertitude sur la mesure de la quantité de mouvement.

6) Rappeler l'inégalité de Heisenberg spatiale. En déduire un minorant de l'incertitude sur la position du miroir dans le cas où l'on détecte le rebond du photon.

7) Sachant que cette incertitude correspond à une fluctuation réelle, que dire de la valeur moyenne de P_B ? Conclure.

L'expérience présentée dans cet exercice est une expérience dite « de pensée », mais il existe de nombreuses expériences réalisées expérimentalement montrant le principe de complémentarité. Pour la première fois, des chercheurs du laboratoire Kastler Brossel de l'Ecole Normale Supérieure ont élaboré en 2001 une expérience où le passage d'un comportement corpusculaire à un comportement ondulatoire peut s'observer de manière continue. Il s'agit d'un interféromètre atomique de Ramsey dans lequel des atomes de Rydberg changent ou non d'état quantique suivant leur interaction avec des photons piégés

dans une cavité micro-onde. La visibilité des franges diminue progressivement en fonction du nombre moyen de photons dans la cavité. Pour plus d'informations sur cette expérience, se référer à l'article original :

P. Bertet et al., *A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary*, Nature **411**, pp. 166-170 (May 2001)

A noter que le français Serge Haroche du laboratoire Kastler Brossel a obtenu en 2012 le prix Nobel de Physique (avec l'américain David J. Wineland) pour l'élaboration de dispositifs expérimentaux permettant de manipuler des systèmes quantiques individuels.

Contrairement à une idée répandue, il est faux d'affirmer que l'effet photoélectrique met en évidence la nécessité de la notion de photon puisque cet effet peut être également décrit sans quantifier l'énergie lumineuse, comme l'ont montré Wentzel et Beck dès 1926. Il aura fallu attendre les années 70 pour que des expériences de mesures d'intensité (fonctions de corrélation ou moments statistiques) montrent des résultats ne pouvant pas être expliqués par une description classique (c'est-à-dire sans quantification) du champ électromagnétique (Burnham 1970, Clauser 1974, Kimble 1977). Il est à noter qu'en 1986, les français P. Grangier, G. Roger et A. Aspect réussirent pour la première fois à montrer expérimentalement, par des mesures d'anti-coïncidence, qu'un unique photon, après avoir traversé une lame séparatrice, n'est détecté que d'un seul côté, bien que la fonction d'onde associée au photon soit présente des deux côtés à la fois avant la détection (puisqu'il est possible d'observer des interférences entre les deux voies en créant un dispositif interférentiel après la lame). Les références de l'article décrivant cette expérience, téléchargeable sur le site de *IOPscience*, sont :

P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter : a new light on single-photon interferences*, Europhys. Lett., **1** (4), pp. 173-179 (Feb 1986)

10.20 Sur la taille d'un atome...

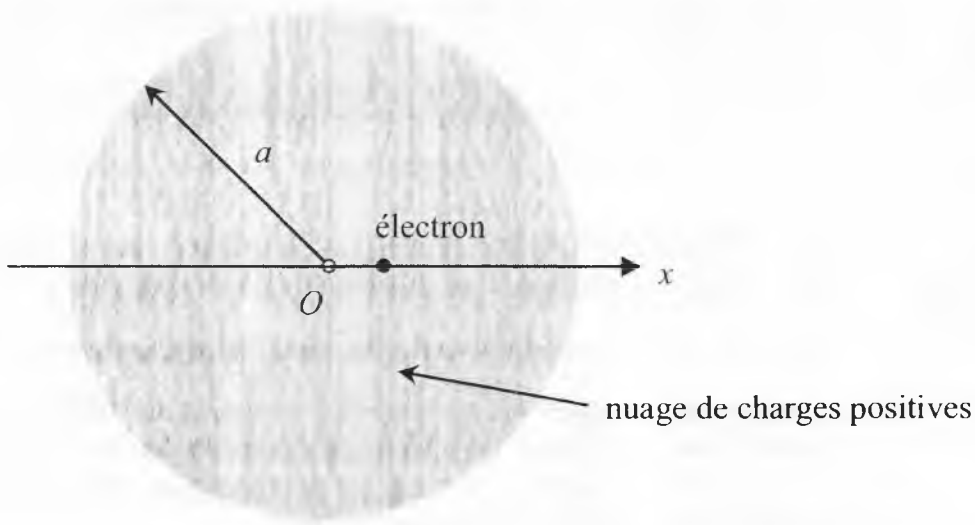
TECHNICITE : ** INITIATIVE : *

Chapitres concernés : 6-ELECTROMAGNETISME et 9-MECANIQUE QUANTIQUE

MOTS-CLES : théorème de Gauss, force électrique, inégalité de Heisenberg.

On propose dans cet exercice d'estimer la taille d'un atome d'hydrogène à partir du modèle de Thomson et du principe d'incertitude de Heisenberg.

Dans ce modèle atomique de l'hydrogène, l'électron est ponctuel, de charge $-e$ et de masse m alors que la charge positive $+e$ est représentée par une distribution volumique sphérique homogène de charges de rayon a (qui correspond donc à la taille de l'atome H), de masse nettement plus grande que l'électron de sorte que l'on puisse la considérer comme fixe. Même si ce modèle atomique, proposé par Thomson en 1904, fut invalidé par une expérience menée par Rutherford en 1909 qui montra l'existence du noyau atomique, il permet d'obtenir des résultats assez proches de mesures expérimentales concernant la polarisabilité des atomes.



1) Exprimer le champ électrique (direction et norme) créé à l'intérieur de l'atome par la distribution de charges positives.

On suppose que l'électron reste sur un axe Ox, où O représente le centre du nuage de charges positives, et peut se déplacer librement dans le nuage (pas de collision).

2) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ de l'électron. En donner la solution générale en posant $x_0 < a$ l'amplitude des oscillations.

L'état fondamental de l'atome est celui de plus basse énergie.

3) En appliquant le principe d'incertitude de Heisenberg au mouvement de l'électron, montrer que le rayon a de l'atome doit être supérieur à une valeur minimale que l'on exprimera en fonction de m, e, ε_0 et $\hbar$.

Cette valeur correspond en ordre de grandeur au rayon de Bohr, qui est le rayon caractéristique des premières orbitales atomiques de l'atome d'hydrogène déterminées par la résolution de l'équation de Schrödinger en régime stationnaire.

4) Montrer que l'expression de a établi précédemment peut se retrouver en ordre de grandeur par une analyse dimensionnelle.

5) Donner la valeur numérique du rayon de Bohr sachant que le facteur numérique sans dimension dans l'expression issue de l'analyse dimensionnelle vaut 4π.

$m = 0{,}9.10^{-30}$ kg, $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C et $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Même si elle permet d'obtenir l'ordre de grandeur du rayon de Bohr, on peut noter l'anachronisme de la méthode employée puisque le principe d'incertitude fut énoncé par Heisenberg en 1927, date à laquelle le modèle de Thomson était invalidé depuis une vingtaine d'années.

10.21 Interférence avec des atomes ultra froids

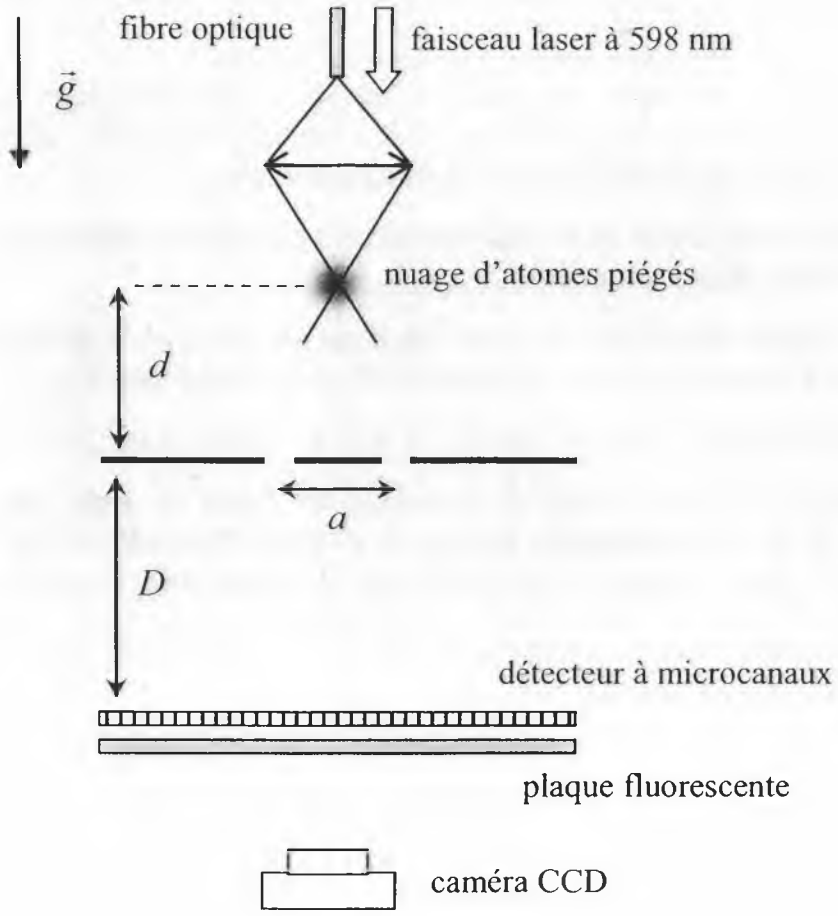
TECHNICITE : *** INITIATIVE : **

Chapitres concernés : PCSI, 1- OPTIQUE ONDULATOIRE, 4- MECANIQUE DES REFERENTIELS NON GALILEENS et 9- MECANIQUE QUANTIQUE

MOTS-CLES : Boltzmann, relation de de Broglie, trous d'Young, surfaces d'ondes.

En 1992, une équipe de chercheurs japonais a réussi à produire des interférences avec des atomes de néon, montrant ainsi que l'objet quantique décrivant les atomes peut revêtir un caractère ondulatoire. Ce problème propose d'étudier en détail le dispositif expérimental de l'expérience, dont un schéma est représenté à la page suivante.

Un piège magnéto-optique permet de confiner des atomes tout en les refroidissant. Ici, les atomes de néon situés dans le piège forment un nuage d'environ 1 mm de diamètre et ont une température très faible de 2,5 mK. Pendant un bref instant (un trentième de seconde), un faisceau laser à 598 nm illumine une partie du nuage et fait passer certains atomes de néon dans un état métastable $1s_3$. Une lentille permet de focaliser le faisceau laser à l'intérieur du nuage sur une largeur de 20 µm et une profondeur de 1 mm. L'état métastable $1s_3$ possède un moment cinétique total nul ce qui le rend insensible au piège magnéto-optique. Les atomes métastables tombent alors sous l'effet de la pesanteur vers les deux fentes situées à d = 76 mm sous le piège. Celles-ci ont une largeur de 2 µm et leurs centres sont distants de a = 6 µm.



Les atomes sont détectés à l'aide d'une matrice de microcanaux (*microchannel plate detector* appelé MCP) située à une distance $D = 116$ mm des fentes. Un atome arrivant sur un des microcanaux va générer un important flux d'électrons qui va illuminer une plaque fluorescente située juste en dessous du MCP. Une caméra CCD permet d'enregistrer les points lumineux apparaissant sur la plaque, chaque point étant le signe de l'impact d'un atome sur le MCP. Le dispositif permet d'obtenir une résolution de la position des points d'impact de 20 µm.

On rappelle la valeur de la constante de Planck $h = 6{,}6.10^{-34}$ J.s. et l'on donne la masse molaire du néon $M_{Ne} = 20$ g.mol^{-1}. On note v_s la vitesse d'un atome lorsqu'il passe à travers les fentes.

1) Calculer v_s si l'atome de néon part du piège sans vitesse initiale.

2) Peut-on réellement considérer la vitesse initiale des atomes sortant du piège comme nulle ? Justifier de manière quantitative.

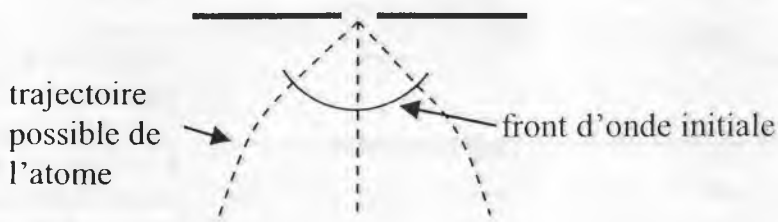
Afin d'obtenir dans un premier temps certains ordres de grandeur, on suppose dans les trois questions suivantes que l'atome possède une vitesse constante v_s depuis le piège jusqu'au détecteur. Pour les applications numériques, on prendra la valeur trouvée à la question 1.

3) Calculer la longueur d'onde de de Broglie associée à l'atome. Montrer que les conditions de l'expérience permettent bien d'obtenir d'une part un champ d'interférence au niveau du MCP et d'autre part une valeur d'interfrange permettant d'observer les franges.

4) Pourquoi est-il nécessaire d'utiliser des atomes ultra froids ?

5) Montrer que si le faisceau laser à 598 nm avait été orienté selon l'horizontale au lieu de la verticale, les franges n'auraient pas été visibles.

Pour faire une comparaison quantitative avec les résultats expérimentaux, il est nécessaire de prendre en compte le fait que les atomes ne possèdent pas une vitesse constante lors de leur chute. On raisonne avec un unique atome, celui-ci étant décrit par une fonction d'onde sous la forme d'un paquet d'ondes, et l'on utilise la notion de front d'onde de l'optique ondulatoire. Une partie du paquet d'ondes passe à travers chaque fente et se transforme en une onde cylindrique du fait de la diffraction : le front d'onde émergeant de chaque fente (à une date fixée comme origine des temps) est donc *au départ* un cylindre d'axe correspondant à l'axe central de chaque fente (voir figure suivante). On pose $\alpha = \dfrac{2gD}{v_s^2}$.



6) Sachant que le front d'onde correspond à l'ensemble des positions possibles de l'atome sortant d'une fente à la vitesse v_s, montrer que le front d'onde à la date t issu d'une des deux fentes est un cylindre de rayon $v_s t$ et d'axe se déplaçant au cours du temps et dont la distance à la fente vaut $\frac{1}{2}gt^2$. On pourra pour cela étudier les trajectoires possibles de l'atome dans un référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré selon la verticale descendante.

7) Déterminer l'expression de la date t_f à laquelle les deux fronts d'onde arrivent sur le MCP. Exprimer à cette date la vitesse v_f de l'atome situé à la proximité de la verticale de la fente en fonction de v_s et α.

8) Peut-on généraliser le théorème de Malus aux fronts d'onde et aux trajectoires possibles de l'atome ? Justifier par un schéma.

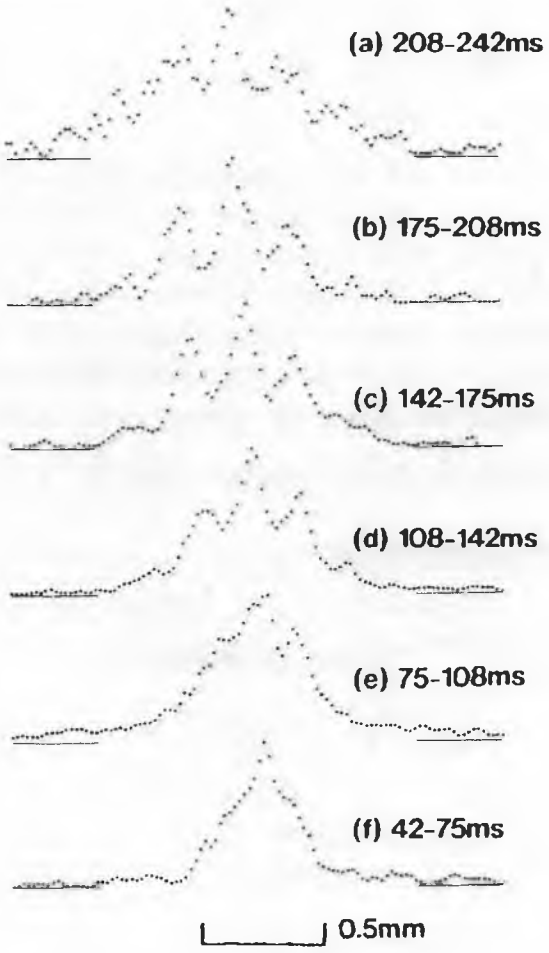
9) A l'aide des résultats précédents, montrer que les différents vecteurs vitesses possibles de l'atome au niveau du MCP sont identiques à ceux obtenus dans le cas *hypothétique* où l'atome a une vitesse constamment égale à v_f en partant d'une distance D' au lieu de D, avec $D' = \frac{v_s^2}{g}\sqrt{1+\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha}-1\right)$.

10) En déduire que l'interfrange au niveau du MCP a pour expression :

$$i = \frac{h}{mv_s}\frac{D}{a}\frac{2\left(\sqrt{1+\alpha}-1\right)}{\alpha}$$

11) Vérifier la cohérence du résultat lorsque g tend vers zéro. Calculer l'interfrange dans le cas où les atomes partent du piège avec une vitesse nulle.

La figure suivante représente le nombre d'impacts détectés pendant plusieurs intervalles de temps en fonction de l'abscisse, l'origine des temps ayant été pris lorsque le nuage d'atomes piégés a été illuminé.



Reprinted figure from F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma, *Double-slit Interference with ultracold metastable neon atoms*, Physical Review A, vol. 46, No 1, July 1992.

Copyright 1992 by the American Physical Society

12) A quelle courbe expérimentale parmi (a), (b),... (g) faut-il se référer pour comparer avec la valeur théorique de l'interfrange de la question précédente ? Conclure.

CHAPITRE 11

RESOLUTION DE PROBLEMES

11.1 Dimensions d'une boîte de conserve

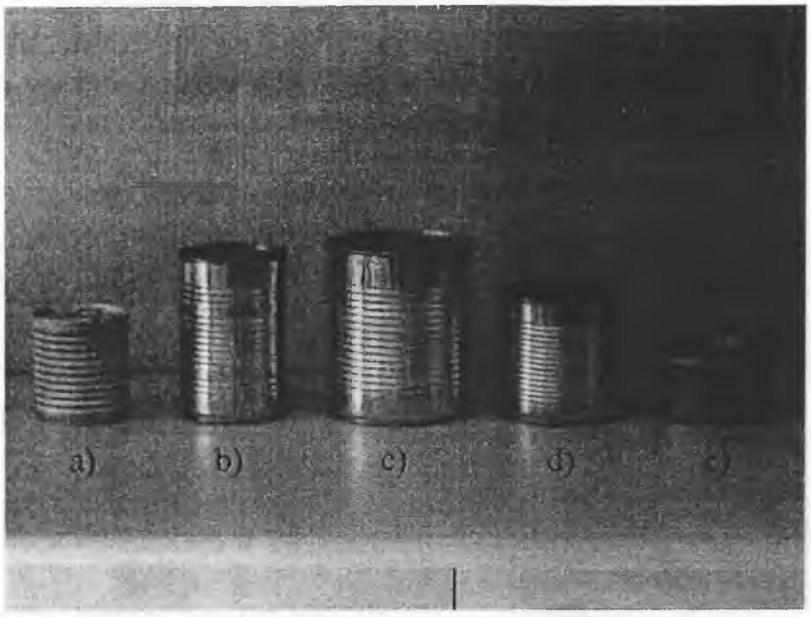
INITIATIVE : **

Une boîte de conserve est généralement un cylindre qui peut contenir un volume V_0 d'aliments. L'épaisseur d'acier, très petite devant les dimensions de la boîte, est considérée comme uniforme.

1) Déterminer la hauteur h et le diamètre D de la boîte de conserve permettant de minimiser sa surface. Quel est l'intérêt de cette configuration ?

2) Comparer le résultat précédent aux différentes boîtes de conserve de la photo. Proposer des explications sur les différences de formats.

Contenus des boîtes de conserve de gauche à droite :
a) Grains de maïs petit format b) cœurs de palmier c) macédoine de légumes
d) grains de maïs grand format d) thon



© Renaud Carpentier

3) Si la forme de la boîte était quelconque (pas nécessairement cylindrique), quelle forme devrait-on lui donner afin qu'elle possède une surface minimale ? Quel objet naturel vérifie cette propriété ? Pourquoi ? Quel est l'inconvénient de cette forme pour une boîte de conserve ?

11.2 Champagne ! partie 2

INITIATIVE : ***

L'étude de l'évolution et du mouvement d'une bulle de champagne, réalisée dans le problème 10.7 (Champagne ! Partie 1), utilise la fréquence de libération des bulles d'un site de nucléation hétérogène. On se propose dans ce problème de revenir sur la détermination expérimentale de cette fréquence.
Le cliché suivant présente un ensemble de bulles issues d'un même site de nucléation avec deux durées d'exposition différentes.

Ensemble de bulles issues d'un même site de nucléation.
La durée d'exposition est différente sur les deux clichés
A gauche : 1/500 s *A droite : 1/15 s*

© Vincent Hamez et Benoît Dépret

L'analyse précise des clichés a permis de déterminer la position z de chaque bulle le long d'un axe vertical et la longueur Δz de la trace produite sur le cliché de durée d'exposition la plus longue. L'origine de l'axe vertical a été définie dans le problème 10.7. L'incertitude sur chaque mesure est de l'ordre de 0,2 mm. Les mesures sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

z (mm)	Δz (mm)
9,5	2,3
14,1	2,6
19,3	2,9
25,0	3,2
30,9	3,5
37,5	3,8
44,8	4,2
52,6	4,6

En utilisant ces données expérimentales, déterminer numériquement la fréquence de libération des bulles et son incertitude.

11.3 Un pique-nique au Soleil

INITIATIVE : ***

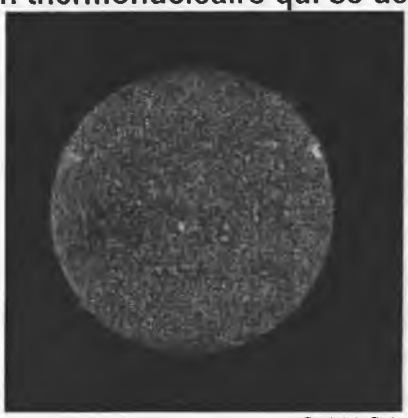
Un physicien décide de profiter d'une belle journée d'été pour partir en pique-nique. Le ciel est bleu, la température extérieure est de 20°C. Prévoyant, il emporte, entre autres, sa bouteille (de diamètre 8 cm et de hauteur 30 cm) de 1,5 L d'eau (de capacité thermique massique 4,18 $kJ.kg^{-1}.K^{-1}$) qu'il sort du réfrigérateur à la température de 5°C. Il emmène également un peu de lecture, notamment quelques articles d'astrophysique solaire et de physique nucléaire.

Le Soleil transmet son énergie à la Terre par rayonnement

Auteur : Likaestria (Licence CC)

Le physicien apprend notamment que « *le Soleil est une étoile de taille moyenne, âgée d'environ 4,5 milliards d'années, de masse totale 2.10^{30} kg, constituée essentiellement d'hydrogène (et un peu d'hélium). Les réactions de fusion thermonucléaire se déroulent en fait dans le noyau solaire, dont la masse représente environ 10 % de la masse du Soleil, où la température atteint 15.10^{6} K. L'énergie est essentiellement libérée sous forme de rayonnement. La lumière solaire est émise en surface par la photosphère, de température de l'ordre de 6 000 K. La lumière met un peu plus de 8 minutes pour arriver sur Terre et est réfléchie à 30 % par l'atmosphère terrestre par un effet d'albédo.* ».

La lumière du Soleil est émise par la photosphère. L'énergie libérée provient des réactions de fusion thermonucléaire qui se déroulent dans le noyau.



© NASA

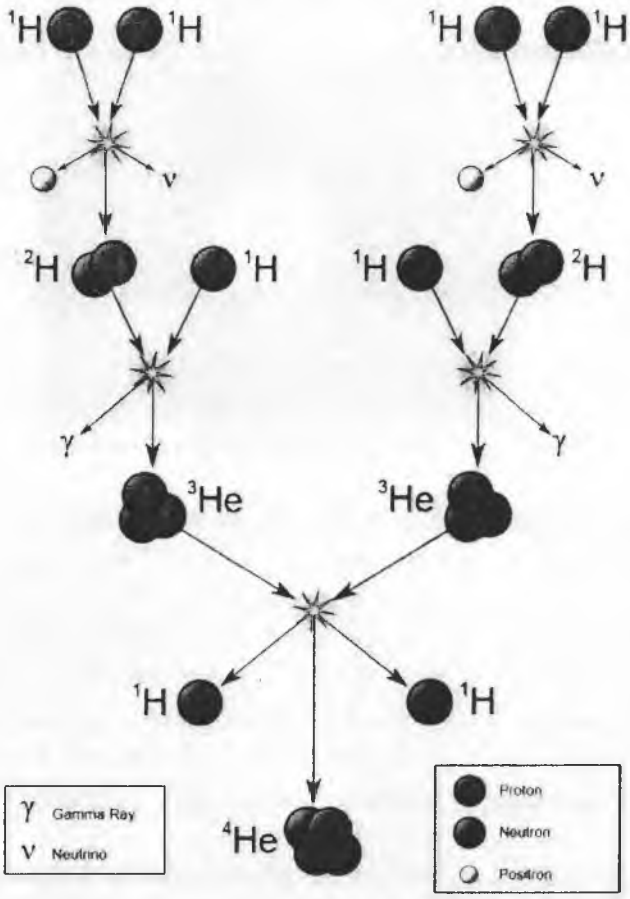
Après 1h30 de lecture, le physicien fait une pause et va chercher sa bouteille d'eau, qu'il avait soigneusement placée à l'ombre. Il constate que la température de l'eau a déjà atteint 19°C. Il se dit que la puissance thermique reçue par la bouteille est proportionnelle à l'écart

de température avec l'extérieur et qu'il aurait dû emmener un récipient calorifugé. Pensif, il repose la bouteille et retourne à sa lecture.

Dans son manuel de physique nucléaire, il lit que « *dans une étoile comme le Soleil, la fusion thermonucléaire suit essentiellement une chaîne de réactions appelée chaîne proton-proton qui convertit les noyaux d'hydrogène en noyaux d'hélium, en libérant des neutrinos et du rayonnement, selon la réaction de fusion suivante :*

$$4\,{}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + 2e^{+} + 2\nu + 2\gamma$$

Chaîne proton-proton de fusion de l'hydrogène en hélium



Auteur : Borb (Licence CC)

Le défaut de masse entre les noyaux d'hydrogène (de masse atomique 1,00794 u) et le noyau d'hélium (de masse atomique 4,00260 u) est libéré sous forme d'énergie selon la célèbre relation d'Einstein d'équivalence masse-énergie $E = mc^2$ *(l'unité de masse atomique vaut u = 1,66.10*$^{-27}$ *kg) ».*

Le physicien s'aperçoit alors qu'il est tellement absorbé par ses lectures qu'il en a oublié de remettre sa bouteille d'eau à l'abri : voilà bientôt 1h30 que celle-ci est au Soleil… la température de l'eau avoisine maintenant les 27°C !
Après quelques secondes de réflexion, il se dit que finalement il est content de ne pas avoir emmené de récipient calorifugé car, grâce à ses observations, il va pouvoir estimer la durée de vie du Soleil…

En utilisant les données fournies, établir un modèle simple permettant d'évaluer la durée de vie du Soleil.

11.4 Vol stationnaire d'un rapace

INITIATIVE : ***

DOCUMENT : Le faucon crécerelle, d'après « wikipédia.fr » et « airleman.ch »

Le Faucon crécerelle (*Falco tinnunculus*), est une petite espèce d'oiseaux de proie agile de la famille des falconidés. C'est l'un des rapaces les plus communs de France avec la buse variable et le milan noir. Sa taille est de 32 à 36 cm de longueur pour une envergure de 65 à 80 cm et une masse de 190 à 240 g pour le mâle et de 220 à 300 g pour la femelle. Ses yeux sont noirs. La femelle a une queue rousse et le mâle a la tête et la queue gris ardoise. Chez les deux sexes, la partie terminale de la queue possède une couleur noire commune. Le Faucon crécerelle pratique le « vol battu », le « vol plané », et, en action de chasse, un vol stationnaire à battements d'ailes rapides. Ce mode de chasse le distingue de la plupart des autres oiseaux prédateurs, dont certains le pratiquent, mais moins volontiers. Cela lui permet de repérer aisément ses proies, comme depuis un poste d'observation en hauteur. L'espèce peut ainsi chasser à l'affût même en l'absence d'arbre ou de point élevé.

Faucon crécerelle mâle en vol stationnaire, le regard fixé sur le sol

source : www.airleman.ch ©

A l'aide d'un modèle élaboré par vos soins, estimer la fréquence de battements des ailes du rapace visible sur la photo. On s'attachera à développer un modèle le plus simple possible.

11.5 Le Tour de France

INITIATIVE : ***

Dans une course cycliste par étapes, telle que le fameux « Tour de France », les étapes déterminantes pour le classement final sont principalement les étapes de montagne.

Echappée lors d'une des étapes de montagne du Tour de France 2013

© Gilles Carpentier

Justifier cette affirmation par une analyse quantitative de l'avance obtenu par un cycliste faisant une échappée lors de l'ascension d'un col d'une part et sur une zone de plat d'autre part.

Le candidat est libre de développer toute modélisation nécessaire à l'étude demandée, de calculer des ordres de grandeurs, d'émettre des hypothèses simplificatrices qu'il conviendra de justifier le cas échéant.

11.6 Faut-il courir sous la pluie ?

INITIATIVE : ***

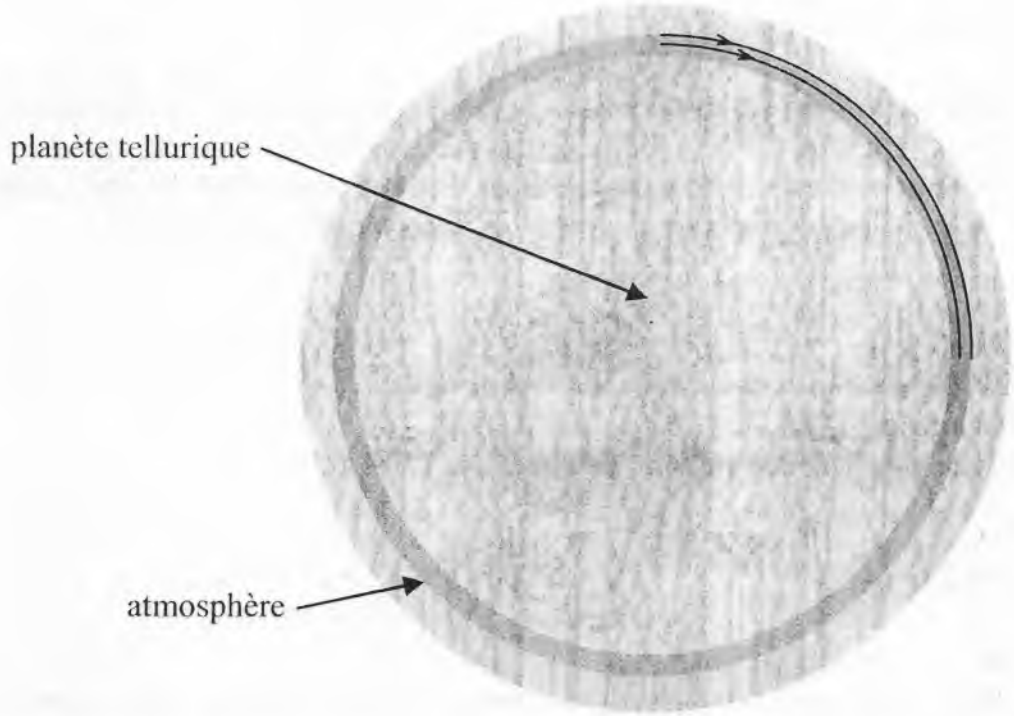
Faut-il courir sous la pluie si l'on veut se faire mouiller le moins possible et que l'on a oublié son parapluie ?

Pour répondre à ce problème, vous êtes invités à introduire tous les paramètres que vous jugerez utile et à développer un modèle simplifié de la situation.

11.7 Des rayons suivant l'horizon

INITIATIVE : ***

Trouver la ou les conditions sur les paramètres physiques d'une planète tellurique (supposée sans relief) pour que des rayons lumineux envoyés vers l'horizon puissent continuellement raser la surface grâce à la réfraction atmosphérique et puissent ainsi faire le tour de la planète.



On pourra trouver dans les documents suivants des éléments de modélisation ou des valeurs numériques permettant de répondre au problème posé. On pourra tester la condition trouvée avec les planètes telluriques du système solaire.

DOCUMENT n°1 : indice et polarisabilité

Les atomes et molécules ont la propriété de se polariser sous l'effet d'un champ électrique. Pour une amplitude suffisamment faible pour avoir un comportement linéaire, un atome ou une molécule acquiert un moment dipolaire tel que $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$. Le coefficient α est appelé la polarisabilité. Sa valeur dépend de la structure atomique ou moléculaire de la particule considérée.

L'indice de réfraction n d'un milieu matériel peut être déduit de la concentration particulaire n_p (nombre de particules par unité de volume) et de la polarisabilité moyenne α des atomes et des molécules qui constituent le milieu par la relation :

$$n = \sqrt{1 + n_p\alpha}$$

Il est à noter que cette formule suppose que le milieu est non absorbant, hypothèse valable si les moments dipolaires oscillent en phase avec le champ électrique (dans le cas contraire, il faut introduire des grandeurs complexes).

A titre d'exemple, le dioxyde de carbone possède une polarisabilité égale à $1{,}7.10^{-29}$ m^3 pour une longueur d'onde de 590 nm. Ainsi, l'indice du dioxyde de carbone à 0°C sous une pression de 1 atm vaut 1,00045 pour cette longueur d'onde.

DOCUMENT n°2 : Quelques caractéristiques des planètes telluriques du système solaire, d'après le site « wikipédia »

Une planète tellurique est une planète composée de roches et de métaux, en opposition aux planètes gazeuses. Dans le système solaire, les planètes telluriques gravitant autour du Soleil sont au nombre de quatre : Mercure, Vénus, la Terre et Mars (dans l'ordre croissant de leur distance au Soleil). Voici les principales caractéristiques de ces planètes :

Mercure :
rayon moyen : 2440 km
masse : $3{,}3.10^{21}$ kg
pesanteur à la surface : 3,7 $m.s^{-2}$
atmosphère : quasi inexistante (pression de l'ordre de 10^{-9} Pa)

Vénus :
rayon moyen : 6052 km
masse : $4{,}9.10^{24}$ kg
pesanteur à la surface : 8,9 $m.s^{-2}$
atmosphère : pression à la surface de $9{,}3.10^{6}$ Pa, hauteur caractéristique de 16 km, constitué à 97% de CO_2, température moyenne de 462°C.

La Terre :
rayon moyen : 6371 km
masse : $6{,}0.10^{24}$ kg
pesanteur à la surface : 9,8 $m.s^{-2}$
atmosphère : pression à la surface de $1{,}0.10^{5}$ Pa, hauteur caractéristique de 8,5 km, constitué à 80% de N_2 et à 20% de O_2, température moyenne de 15°C. Indice de réfraction de l'air (à 0°C et sous 1 atm) de 1,00029.

Mars :
rayon moyen : 3390 km
masse : $6{,}4.10^{23}$ kg
pesanteur à la surface : 3,7 $m.s^{-2}$
atmosphère : pression moyenne à la surface de 6.10^{2} Pa, hauteur caractéristique de 11 km, constitué à 95% de CO_2, température moyenne de -63°C.

11.8 A propos du jet stream partie 2

INITIATIVE : ***

Ce problème fait suite au problème 4.9 (A propos du jet stream, partie 1), dans lequel le lecteur trouvera des documents sur le jet stream (ou courant-jet).

En utilisant toutes les données que l'on jugera utiles, élaborer un modèle simple permettant d'évaluer l'influence du jet stream sur la rotation de la Terre.