

*j'intègre*

**TOUT-EN-UN**

**MP | MP\***

BERNARD **SALAMITO**

MARIE-NOËLLE **SANZ**

FRANÇOIS **VANDENBROUCK**

MARC **TULOUP**

# Physique tout-en-un

DUNOD

Tout le catalogue sur  
**www.dunod.com**



Conception et création de couverture : Atelier 3+

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-071846-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° al, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>I</b> | <b>Mécanique</b>  | <b>19</b> |
| <b>1</b> | <b>Changements de référentiels en mécanique classique</b>   | <b>21</b> |
| 1        | Exemples . . . . .  | 21        |
| 1.1      | Cas de deux référentiels en translation rectiligne l'un par rapport à l'autre . . . . .                     | 21        |
| 1.2      | Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel . . . . . | 22        |
| 1.3      | Conclusion . . . . .  | 22        |
| 2        | Référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel                           | 23        |
| 2.1      | Transformation de Galilée . . . . .   | 23        |
| 2.2      | Composition des vitesses . . . . .  | 24        |
| 3        | Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel . . . . .                                     | 25        |
| 3.1      | Présentation de la situation . . . . .  | 25        |
| 3.2      | Composition des vitesses . . . . .  | 26        |
| 3.3      | Composition des accélérations . . . . .   | 26        |
| 4        | Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel . . . . .          | 27        |
| 4.1      | Présentation de la situation . . . . .  | 27        |
| 4.2      | Composition des vitesses . . . . .  | 29        |
| 4.3      | Composition des accélérations . . . . .   | 30        |
| 5        | Notion de point coïncident . . . . .  | 32        |
| 5.1      | Point coïncident . . . . .  | 32        |
| 5.2      | Lien avec la vitesse et l'accélération d'entraînement . . . . .   | 33        |
| 6        | Complément : cinématique classique et relativiste . . . . .   | 34        |

## TABLE DES MATIÈRES

|   |           |
|---|-----------|
| <b>2 Dynamique dans un référentiel non galiléen</b>   | <b>45</b> |
| 1 Référentiels galiléens . . . . .  | 45        |
| 2 Référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen . . . . .  | 46        |
| 2.1 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen . . . . .         | 46        |
| 2.2 Autres lois de la dynamique dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen . . . . .                  | 47        |
| 2.3 Exemples d'études dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen . . . . .                            | 49        |
| 2.4 Cas d'un référentiel en translation rectiligne uniformément accélérée par rapport à un référentiel galiléen . . . . .                     | 53        |
| 3 Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen . . . . .                                       | 54        |
| 3.1 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen . . . . . | 54        |
| 3.2 Forces d'inertie . . . . .  | 55        |
| 3.3 Autres lois de la dynamique dans un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen . . . . . | 56        |
| 3.4 Énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement . . . . .  | 57        |
| 3.5 Exemples d'études dans un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen . . . . .           | 58        |
| 4 Les différents référentiels classiques de la mécanique et la question de leur caractère galiléen . . . . .                                  | 63        |
| 4.1 Critère pour déterminer si un référentiel est galiléen ou non . . . . .   | 63        |
| 4.2 Le référentiel terrestre . . . . .  | 63        |
| 4.3 Le référentiel géocentrique . . . . .   | 64        |
| 4.4 Le référentiel de Copernic . . . . .  | 66        |
| <b>3 Lois du frottement solide</b>  | <b>85</b> |
| 1 Introduction . . . . .  | 85        |
| 2 Observations expérimentales . . . . .   | 85        |
| 2.1 Dispositif . . . . .  | 85        |
| 2.2 Première expérience . . . . .   | 86        |
| 2.3 Deuxième expérience . . . . .   | 86        |
| 3 Lois de Coulomb pour le frottement de glissement . . . . .  | 86        |
| 3.1 Modélisation, définitions et notations . . . . .  | 86        |
| 3.2 Loi de Coulomb pour la composante normale $\vec{N}$ . . . . .   | 88        |
| 3.3 Loi de Coulomb pour la composante tangentielle $\vec{T}$ dans le cas du non-glisement . . . . .   | 88        |

## TABLE DES MATIÈRES

|  |  |            |
|--|--|------------|
| 3.4  | Loi de Coulomb pour la composante tangentielle $\vec{T}$ dans le cas du glissement . . . . . | 88         |
| 3.5  | Les coefficients de frottement . . . . .   | 89         |
| 3.6  | Cas d'un contact sans frottement . . . . .   | 89         |
| 4  | Méthode de résolution d'un problème avec frottement solide . . . . .                         | 90         |
| 5  | Interprétations des observations expérimentales . . . . .                                    | 90         |
| 5.1  | Notations et mise en équation générale . . . . .   | 90         |
| 5.2  | Interprétation de la première expérience . . . . .   | 91         |
| 5.3  | Interprétation de la deuxième expérience . . . . .   | 92         |
| 6  | Aspect énergétique . . . . .   | 93         |
| 6.1  | Puissance de la force de contact s'exerçant sur un solide . . . . .                          | 93         |
| 6.2  | Puissance totale des forces de contact entre deux solides . . . . .                          | 94         |
| <br><b>II Éléments de traitement du signal</b> |  | <b>109</b> |
| <b>4 Signaux périodiques, filtrage</b>         |  | <b>111</b> |
| 1  | Signaux périodiques non sinusoïdaux . . . . .  | 111        |
| 1.1  | Spectre d'un signal périodique . . . . .   | 111        |
| 1.2  | Signification physique . . . . .   | 112        |
| 2  | Action d'un filtre sur un signal périodique non sinusoïdal . . . . .                         | 116        |
| 2.1  | Filtres . . . . .  | 116        |
| 2.2  | Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal . . . . .   | 118        |
| 2.3  | Effet d'un filtre sur un signal périodique de forme quelconque . . . . .                     | 118        |
| 2.4  | Diagramme de Bode et type du filtre . . . . .  | 119        |
| 2.5  | Composition spectrale du signal de sortie . . . . .  | 121        |
| 2.6  | Caractère intégrateur ou dérivateur du filtre . . . . .                                      | 121        |
| 3  | Exemples de filtrage de signaux périodiques non sinusoïdaux . . . . .                        | 123        |
| 3.1  | Filtrage d'un créneau par un filtre passe-bas du premier ordre . . . . .                     | 123        |
| 3.2  | Filtrage d'un signal triangulaire par un filtre passe-haut du premier ordre . . . . .        | 126        |
| 3.3  | Filtrage par un filtre passe-bande du deuxième ordre . . . . .                               | 129        |
| 4  | Génération d'harmoniques due à une non-linéarité . . . . .                                   | 132        |
| 4.1  | Première exemple : redressement d'une tension sinusoïdale . . . . .                          | 132        |
| 4.2  | Deuxième exemple : écrêtage d'un signal . . . . .  | 134        |
| 4.3  | Conclusion . . . . .   | 135        |
| <br><b>5 Electronique numérique</b>            |  | <b>155</b> |
| 1  | Échantillonage . . . . .   | 155        |

## TABLE DES MATIÈRES

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Introduction . . . . .   | 155 |
| 1.2 | Acquisition, échantillonnage . . . . .                               | 155 |
| 1.3 | Spectre d'un signal échantillonné . . . . .                          | 156 |
| 1.4 | Critère de Nyquist-Shannon . . . . .                                 | 159 |
| 1.5 | Pratique de l'analyse spectrale . . . . .                            | 161 |
| 2   | Filtrage numérique . . . . .   | 167 |
| 2.1 | Filtre passe-bas du premier ordre . . . . .                          | 167 |
| 2.2 | Limitations . . . . .  | 168 |
| 2.3 | Filtres d'ordre supérieur . . . . .                                  | 170 |
| 2.4 | Génération d'un signal analogique à partir d'un signal numérique . . | 171 |

## III Optique 179

|  |            |
|--|------------|
| <b>6 Modèle scalaire des ondes lumineuses</b>                          | <b>181</b> |
| 1 Le modèle scalaire de la lumière . . . . .                           | 181        |
| 1.1 Nature de l'onde lumineuse . . . . .                               | 181        |
| 1.2 La vibration lumineuse . . . . .                                   | 182        |
| 1.3 Éclairement et intensité vibratoire . . . . .                      | 183        |
| 2 Lumière monochromatique . . . . .                                    | 185        |
| 2.1 Définition . . . . .   | 185        |
| 2.2 Domaine visible . . . . .  | 186        |
| 2.3 Notation complexe . . . . .  | 186        |
| 2.4 Expression de l'éclairement . . . . .                              | 186        |
| 3 Chemin optique . . . . .   | 187        |
| 3.1 Définition . . . . .   | 187        |
| 3.2 Calcul pratique du chemin optique . . . . .                        | 187        |
| 3.3 Chemin optique et retard de phase . . . . .                        | 188        |
| 3.4 Surface d'onde . . . . .   | 189        |
| 3.5 Théorème de Malus . . . . .  | 190        |
| 3.6 Égalité des chemins optiques entre points conjugués . . . . .      | 190        |
| 4 Onde sphérique, onde plane . . . . .                                 | 191        |
| 4.1 Onde sphérique . . . . .   | 191        |
| 4.2 Onde plane . . . . .   | 192        |
| 4.3 Effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss . . . . . | 194        |
| 5 Lumières réelles . . . . .   | 196        |
| 5.1 Composition spectrale . . . . .                                    | 196        |
| 5.2 Sources de lumière blanche . . . . .                               | 197        |

## TABLE DES MATIÈRES

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.3      | Lampes spectrales . . . . .  | 197        |
| 5.4      | Faisceaux lasers . . . . .   | 198        |
| 6        | Trains d'ondes . . . . .   | 198        |
| 6.1      | La largeur des raies spectrales . . . . .  | 198        |
| 6.2      | Interprétation . . . . .   | 199        |
| 6.3      | Longueur de cohérence . . . . .  | 200        |
| 6.4      | Modèle des trains d'ondes aléatoires . . . . .   | 201        |
| <b>7</b> | <b>Interférences de 2 ondes lumineuses</b>   | <b>213</b> |
| 1        | Interférences lumineuses . . . . .   | 213        |
| 2        | Intensité vibratoire résultante . . . . .  | 214        |
| 2.1      | Terme d'interférences . . . . .  | 214        |
| 2.2      | Notion d'ondes cohérentes . . . . .  | 215        |
| 3        | Formule de Fresnel . . . . .   | 216        |
| 3.1      | Énoncé . . . . .   | 216        |
| 3.2      | Interprétation physique . . . . .  | 217        |
| 3.3      | Différence de marche et ordre d'interférences . . . . .                                      | 218        |
| 4        | Figure d'interférences . . . . .   | 219        |
| 4.1      | Champ d'interférences . . . . .  | 219        |
| 4.2      | Franges d'interférences . . . . .  | 219        |
| 4.3      | Contraste . . . . .  | 220        |
| 5        | Retour sur la notion de cohérence . . . . .  | 222        |
| 5.1      | Cas de deux sources distinctes . . . . .   | 222        |
| 5.2      | Cas de deux sources mutuellement cohérentes . . . . .  | 222        |
| <b>8</b> | <b>Dispositif interférentiel par division du front d'onde : les trous d'Young</b>            | <b>227</b> |
| 1        | Le dispositif des trous d'Young . . . . .  | 227        |
| 1.1      | Présentation du dispositif . . . . .   | 227        |
| 1.2      | Notion de dispositif interférentiel à division du front d'onde . . . . .                     | 228        |
| 1.3      | Description du champ d'interférences . . . . .   | 229        |
| 1.4      | Généralisation à d'autres dispositifs interférentiels par division du front d'onde . . . . . | 233        |
| 1.5      | Montage de Fraunhofer . . . . .  | 234        |
| 2        | Modifications du dispositif . . . . .  | 236        |
| 2.1      | Influence du déplacement de la source ponctuelle . . . . .                                   | 236        |
| 2.2      | Influence de la largeur spectrale . . . . .  | 242        |
| 2.3      | Éclairage en lumière blanche . . . . .   | 245        |
| 2.4      | Complément : influence d'une lame à faces parallèles . . . . .                               | 246        |

## TABLE DES MATIÈRES

|  |            |
|--|------------|
| <b>9 L'interféromètre de Michelson</b>                                     | <b>263</b> |
| 1 L'interféromètre de Michelson . . . . .                                  | 263        |
| 1.1 Présentation du dispositif . . . . .                                   | 263        |
| 1.2 Les deux voies de l'interféromètre . . . . .                           | 264        |
| 1.3 Le dispositif séparateur . . . . .                                     | 264        |
| 1.4 Schéma de principe de l'interféromètre . . . . .                       | 265        |
| 2 Configuration de la lame d'air éclairée par une source étendue . . . . . | 266        |
| 2.1 Définition . . . . .   | 266        |
| 2.2 Observation des franges . . . . .                                      | 267        |
| 2.3 Applications . . . . .   | 274        |
| 3 Configuration du coin d'air éclairé par une source étendue . . . . .     | 278        |
| 3.1 Définition . . . . .   | 278        |
| 3.2 Observation des franges . . . . .                                      | 278        |
| 3.3 Application : détection des défauts d'une lame de verre . . . . .      | 281        |
| <b>10 Interférences de <math>N</math> ondes cohérentes</b>                 | <b>295</b> |
| 1 Superposition de $N$ ondes lumineuses . . . . .                          | 295        |
| 1.1 Expression de la vibration lumineuse résultante . . . . .              | 295        |
| 1.2 Intensité vibratoire résultante . . . . .                              | 296        |
| 1.3 Maxima principaux d'intensité . . . . .                                | 298        |
| 1.4 Interprétation à l'aide de la représentation de Fresnel . . . . .      | 299        |
| 2 Réseaux de diffraction . . . . .   | 301        |
| 2.1 Définition . . . . .   | 301        |
| 2.2 Diffraction par un réseau . . . . .                                    | 301        |
| 2.3 Formule fondamentale des réseaux . . . . .                             | 302        |
| 2.4 Principe du spectromètre à réseau . . . . .                            | 304        |
| <b>IV Électromagnétisme</b>  | <b>317</b> |
| <b>11 Champ électrostatique</b>  | <b>319</b> |
| 1 Charge électrique . . . . .  | 319        |
| 1.1 Rappels . . . . .  | 319        |
| 1.2 Charges ponctuelles . . . . .  | 319        |
| 1.3 Distributions continues de charges . . . . .                           | 320        |
| 2 Champ créé par une charge ponctuelle . . . . .                           | 322        |
| 2.1 Loi de Coulomb . . . . .   | 322        |
| 2.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle . . . . .         | 323        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 3         | Champ créé par une distribution de charges . . . . .                                    | 324        |
|           | 3.1    Principe de superposition . . . . .  | 324        |
|           | 3.2    Champ créé par une distribution discrète de charges ponctuelles . . . . .        | 324        |
|           | 3.3    Champ créé par une distribution continue de charges . . . . .                    | 325        |
| 4         | Propriétés de symétrie . . . . .  | 326        |
|           | 4.1    Symétries usuelles des distributions de charges . . . . .                        | 326        |
|           | 4.2    Symétries du champ . . . . .   | 329        |
| 5         | Circulation du champ électrostatique, potentiel électrostatique . . . . .               | 333        |
|           | 5.1    Circulation d'un champ de vecteurs . . . . .                                     | 334        |
|           | 5.2    Potentiel électrostatique . . . . .  | 335        |
|           | 5.3    Lien entre le champ et le potentiel électrostatiques . . . . .                   | 336        |
|           | 5.4    Propriétés de symétrie du potentiel . . . . .                                    | 337        |
|           | 5.5    Énergie potentielle d'une charge placée dans un champ extérieur . . . . .        | 338        |
| 6         | Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss . . . . .                             | 338        |
|           | 6.1    Flux d'un champ de vecteurs . . . . .  | 338        |
|           | 6.2    Théorème de Gauss . . . . .  | 340        |
| 7         | Topographie du champ électrostatique . . . . .  | 340        |
|           | 7.1    Lignes de champ et équipotentielles . . . . .                                    | 340        |
|           | 7.2    Propriétés des lignes de champ électrostatique et des équipotentielles . . . . . | 341        |
|           | 7.3    Quelques exemples . . . . .  | 344        |
| 8         | Analogie avec le champ gravitationnel . . . . .   | 347        |
|           | 8.1    Interaction gravitationnelle . . . . .   | 347        |
|           | 8.2    Champ de gravitation . . . . .   | 347        |
|           | 8.3    Propriétés du champ de gravitation . . . . .                                     | 348        |
| <b>12</b> | <b>Exemples de champs électrostatiques</b>  | <b>365</b> |
| 1         | Méthodes d'étude des champs et des potentiels . . . . .                                 | 365        |
| 2         | Exemple de problème à symétrie sphérique : sphère uniformément chargée. . . . .         | 366        |
|           | 2.1    Étude des symétries . . . . .  | 366        |
|           | 2.2    Application du théorème de Gauss . . . . .                                       | 367        |
|           | 2.3    Champ et potentiel créés par la sphère. . . . .                                  | 368        |
| 3         | Exemple de problème à symétrie cylindrique : cylindre uniformément chargé               | 370        |
|           | 3.1    Étude des symétries . . . . .  | 370        |
|           | 3.2    Application du théorème de Gauss . . . . .                                       | 370        |
|           | 3.3    Champ et potentiel électrostatiques créés par le cylindre . . . . .              | 371        |
| 4         | Exemples de problèmes à symétrie plane . . . . .  | 372        |
|           | 4.1    Étude des symétries . . . . .  | 372        |
|           | 4.2    Calcul du champ par le théorème de Gauss . . . . .                               | 373        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 4.3       | Expression du potentiel . . . . .  | 374        |
| 4.4       | Modélisation surfacique . . . . .  | 375        |
| 4.5       | Application au condensateur plan . . . . .   | 376        |
| <b>13</b> | <b>Dipôle électrostatique</b>  | <b>395</b> |
| 1         | Potentiel et champ créés . . . . .   | 395        |
| 1.1       | Introduction . . . . .   | 395        |
| 1.2       | Dipôle électrostatique, approximation dipolaire . . . . .  | 395        |
| 1.3       | Moment dipolaire . . . . .   | 396        |
| 1.4       | Potentiel créé par un dipôle électrostatique . . . . .   | 397        |
| 1.5       | Champ créé par un dipôle électrostatique . . . . .   | 398        |
| 1.6       | Topographie du champ . . . . .   | 399        |
| 1.7       | Application aux molécules polaires . . . . .   | 400        |
| 2         | Action d'un champ extérieur sur un dipôle . . . . .  | 400        |
| 2.1       | Cas d'un champ uniforme . . . . .  | 400        |
| 2.2       | Cas d'un champ non uniforme . . . . .  | 402        |
| 2.3       | Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique extérieur . . . . .               | 404        |
| <b>14</b> | <b>Champ magnétostatique</b>   | <b>415</b> |
| 1         | Courant électrique . . . . .   | 415        |
| 1.1       | Vecteur densité de courant . . . . .   | 415        |
| 1.2       | Intensité traversant une surface orientée . . . . .  | 417        |
| 1.3       | Distributions filiformes . . . . .   | 417        |
| 2         | Propriétés globales du champ magnétostatique . . . . .   | 417        |
| 2.1       | Flux du champ magnétostatique . . . . .  | 417        |
| 2.2       | Circulation du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère . . . . .                                     | 418        |
| 3         | Symétries et invariances du champ magnétique . . . . .   | 419        |
| 3.1       | Symétries et invariances usuelles des distributions de courants . . . . .                              | 419        |
| 3.2       | Symétries du champ magnétique . . . . .  | 421        |
| 4         | Topographie du champ magnétostatique . . . . .   | 425        |
| 4.1       | Propriétés des lignes de champ du champ magnétostatique . . . . .                                      | 425        |
| 4.2       | Comment distinguer une carte de champ électrostatique d'une carte de champ magnétostatique ? . . . . . | 426        |
| 4.3       | Exemples . . . . .   | 426        |
| 5         | Exemples de calculs de champ magnétostatique . . . . .   | 428        |
| 5.1       | Comment appliquer le théorème d'Ampère ? . . . . .   | 428        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 5.2       | Exemple de problème à symétrie cylindrique : fil infini, de rayon $a$ , parcouru par un courant uniformément réparti en volume . . . . . | 428        |
| 5.3       | Solénoïde long . . . . .   | 431        |
| <b>15</b> | <b>Dipôle magnétique</b>   | <b>451</b> |
| 1         | Moments magnétiques . . . . .  | 451        |
| 1.1       | Notion de moment magnétique . . . . .  | 451        |
| 1.2       | Ordres de grandeur . . . . .   | 452        |
| 2         | Champ créé par un dipôle magnétique . . . . .  | 453        |
| 2.1       | Approximation dipolaire . . . . .  | 453        |
| 2.2       | Champ magnétique créé par le dipôle . . . . .  | 454        |
| 3         | Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique . . . . .  | 455        |
| 3.1       | Actions subies par un dipôle dans un champ magnétique uniforme . .   | 455        |
| 3.2       | Actions subies par un dipôle dans un champ magnétique non uniforme   | 456        |
| 3.3       | Approche documentaire : l'expérience Stern et Gerlach . . . . .  | 456        |
| <b>16</b> | <b>Équations de Maxwell</b>  | <b>469</b> |
| 1         | La loi de la conservation de la charge électrique . . . . .  | 469        |
| 1.1       | Cas unidimensionnel . . . . .  | 469        |
| 1.2       | Cas général . . . . .  | 470        |
| 2         | Champ électromagnétique - Équations de Maxwell . . . . .   | 471        |
| 2.1       | Définition du champ électromagnétique . . . . .  | 471        |
| 2.2       | Équations de Maxwell . . . . .   | 471        |
| 2.3       | Remarques et commentaires . . . . .  | 472        |
| 2.4       | Compatibilité des équations de Maxwell avec la loi de conservation de la charge . . . . .  | 473        |
| 3         | Forme intégrale des équations de Maxwell . . . . .   | 473        |
| 3.1       | Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss : théorème de Gauss   | 474        |
| 3.2       | Forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux . . . . .  | 474        |
| 3.3       | Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday : loi de Faraday .  | 474        |
| 3.4       | Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère : théorème d'Ampère généralisé . . . . .   | 476        |
| 4         | Équation de propagation des champs dans un milieu vide de charge et de courant . . . . .   | 477        |
| 4.1       | Couplage spatio-temporel entre le champ électrique et le champ magnétique . . . . .  | 477        |
| 4.2       | Démonstration de l'équation de propagation . . . . .   | 477        |
| 4.3       | Nature de l'onde lumineuse . . . . .   | 478        |
| 5         | Champs statiques . . . . .   | 479        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 5.1       | Équations de Maxwell en régime stationnaires . . . . .   | 479        |
| 5.2       | Théorème de Gauss et théorème d'Ampère . . . . .   | 479        |
| 5.3       | Existence d'un potentiel électrostatique . . . . .   | 479        |
| 5.4       | Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique . . . . .  | 480        |
| 6         | Approche numérique : résolution de l'équation de Laplace . . . . .   | 480        |
| 6.1       | Méthodes de résolution numérique . . . . .   | 480        |
| 6.2       | Premier exemple : condensateur plan fini . . . . .   | 481        |
| 6.3       | Deuxième exemple : capteur capacitif . . . . .   | 483        |
| <b>17</b> | <b>Énergie du champ électromagnétique</b>  | <b>503</b> |
| 1         | Interaction entre le champ électromagnétique et la matière . . . . .   | 503        |
| 1.1       | Densité volumique de force électromagnétique . . . . .   | 503        |
| 1.2       | Puissance volumique . . . . .  | 504        |
| 1.3       | Cas d'un conducteur ohmique . . . . .  | 505        |
| 2         | Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting . . . . .                                   | 506        |
| 2.1       | Définitions . . . . .  | 506        |
| 2.2       | Expressions . . . . .  | 506        |
| 2.3       | Quelques ordres de grandeur . . . . .  | 507        |
| 3         | Bilan d'énergie électromagnétique . . . . .  | 508        |
| 3.1       | Bilan global . . . . .   | 508        |
| 3.2       | Équation locale de Poynting . . . . .  | 509        |
| 3.3       | Complément : justification des expressions de la densité volumique d'énergie et du vecteur de Poynting . . . . . | 509        |
| 4         | Exemples . . . . .   | 510        |
| 4.1       | Régime stationnaire . . . . .  | 510        |
| 4.2       | Solénoïde en régime variable . . . . .   | 514        |
| <b>18</b> | <b>Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide</b>   | <b>527</b> |
| 1         | Équation de d'Alembert . . . . .   | 527        |
| 1.1       | Définition . . . . .   | 527        |
| 1.2       | Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle . . . . .  | 528        |
| 1.3       | Complément : démonstration de la solution . . . . .  | 529        |
| 2         | Onde électromagnétique plane progressive dans le vide . . . . .  | 530        |
| 2.1       | Définition d'une onde plane progressive (OPP) . . . . .  | 530        |
| 2.2       | Structure de l'OPP électromagnétique dans le vide . . . . .  | 531        |
| 2.3       | Lien du modèle de l'OPP électromagnétique avec la réalité . . . . .  | 532        |
| 3         | Onde électromagnétique plane progressive et monochromatique dans le vide .                                       | 533        |
| 3.1       | Définition d'une onde plane progressive et monochromatique (OPPM) .  | 533        |

## TABLE DES MATIÈRES

|   |   |            |
|---|---|------------|
| 3.2   | Expression générale d'une OPPM et notation complexe . . . . .                 | 534        |
| 3.3   | Lien du modèle de l'OPPM électromagnétique avec la réalité . . . . .          | 535        |
| 3.4   | Spectre électromagnétique . . . . .   | 535        |
| 4   | Polarisation rectiligne . . . . .   | 537        |
| 5   | Étude énergétique des OPP électromagnétiques . . . . .                        | 539        |
| 5.1   | Expressions des grandeurs énergétiques . . . . .                              | 539        |
| 5.2   | Cas des OPPM électromagnétiques, valeurs moyennes . . . . .                   | 540        |
| 6   | La notation complexe pour les OPPM . . . . .                                  | 541        |
| 6.1   | Choix d'une convention de notation complexe . . . . .                         | 541        |
| 6.2   | Dérivation et notation complexe . . . . .                                     | 541        |
| 6.3   | Équations de Maxwell en représentation complexe . . . . .                     | 542        |
| 6.4   | Grandeurs énergétiques en notation complexe . . . . .                         | 542        |
| 6.5   | Application à une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide . . . . . | 543        |
| 7   | Approche expérimentale : polarisation rectiligne de la lumière . . . . .      | 544        |
| 7.1   | Lumière naturelle . . . . .   | 544        |
| 7.2   | Le polariseur (ou polaroïd) . . . . .   | 544        |
| 7.3   | Production de lumière polarisée rectilignement . . . . .                      | 544        |
| 7.4   | Loi de Malus . . . . .  | 545        |
| <b>19 Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma, dispersion</b> |   | <b>559</b> |
| 1   | Onde électromagnétique plane progressive dans un plasma . . . . .             | 559        |
| 1.1   | Interaction entre une OPPM et un plasma . . . . .                             | 559        |
| 1.2   | Relation de dispersion du plasma . . . . .                                    | 561        |
| 1.3   | Vitesse de phase, dispersion . . . . .  | 562        |
| 1.4   | Complément : étude du cas où $\omega > \omega_P$ . . . . .                    | 564        |
| 1.5   | Complément : étude du cas où $\omega < \omega_P$ . . . . .                    | 565        |
| 1.6   | Approche documentaire : ionosphère et télécommunications . . . . .            | 566        |
| 2   | Propagation d'un paquet d'ondes . . . . .                                     | 571        |
| 2.1   | Le modèle du paquet d'ondes . . . . .   | 571        |
| 2.2   | Étude de deux exemples . . . . .  | 572        |
| 2.3   | Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif . . . . .            | 575        |
| 2.4   | Complément : étude théorique de l'évolution du paquet d'ondes . . . . .       | 576        |
| 2.5   | Retour sur la propagation dans un plasma . . . . .                            | 578        |
| <b>20 Onde électromagnétique dans un conducteur, réflexion</b>              |   | <b>591</b> |
| 1   | Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur . . . . .         | 591        |
| 1.1   | Conductivité d'un métal en régime variable . . . . .                          | 591        |
| 1.2   | Relation de dispersion d'un conducteur ohmique . . . . .                      | 593        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 1.3       | Cas des basses fréquences, effet de peau . . . . .                            | 595        |
| 2         | Réflexion d'une OPPM électromagnétique sur un conducteur parfait . . . . .    | 600        |
| 2.1       | Le modèle du conducteur parfait . . . . .                                     | 600        |
| 2.2       | Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur . . . . .         | 603        |
| 2.3       | Onde électromagnétique stationnaire . . . . .                                 | 608        |
| 2.4       | Onde électromagnétique dans une cavité . . . . .                              | 612        |
| <b>21</b> | <b>Rayonnement dipolaire électrique</b>                                       | <b>631</b> |
| 1         | Dipôle électrique oscillant . . . . .   | 631        |
| 1.1       | Moment dipolaire électrique . . . . .   | 631        |
| 1.2       | Définition d'un dipôle électrique oscillant . . . . .                         | 632        |
| 2         | Champ électromagnétique créé par un dipôle oscillant . . . . .                | 632        |
| 2.1       | Étude des symétries . . . . .   | 633        |
| 2.2       | Zone de rayonnement . . . . .   | 634        |
| 2.3       | Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement . . . . .                 | 634        |
| 2.4       | Anisotropie du rayonnement . . . . .  | 636        |
| 2.5       | Affaiblissement de l'onde avec la distance . . . . .                          | 637        |
| 2.6       | Puissance totale rayonnée . . . . .   | 640        |
| 3         | Approche documentaire : diffusion Rayleigh . . . . .                          | 640        |
| 3.1       | Couleur du ciel . . . . .   | 640        |
| 3.2       | Polarisation par diffusion Rayleigh . . . . .                                 | 641        |
| <b>V</b>  | <b>Thermodynamique</b>  | <b>657</b> |
| <b>22</b> | <b>Systèmes ouverts en régime stationnaire</b>                                | <b>659</b> |
| 1         | Énergie et entropie d'un système . . . . .                                    | 659        |
| 1.1       | Équilibre thermodynamique et équilibre thermodynamique local . . . . .        | 659        |
| 1.2       | Énergie d'un système thermodynamique . . . . .                                | 661        |
| 1.3       | Entropie d'un système thermodynamique . . . . .                               | 662        |
| 2         | Les deux principes de la thermodynamique pour un système fermé . . . . .      | 663        |
| 2.1       | Le premier principe . . . . .   | 663        |
| 2.2       | Le second principe . . . . .  | 669        |
| 3         | Principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire | 674        |
| 3.1       | Système ouvert . . . . .  | 674        |
| 3.2       | Bilan d'une grandeur extensive $Y$ en régime stationnaire . . . . .           | 675        |
| 3.3       | Premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire . . . . .      | 676        |
| 3.4       | Second principe pour un système ouvert en régime stationnaire . . . . .       | 680        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 3.5       | Premier et second principes pour un système ouvert sous forme infinitésimale . . . . .         | 681        |
| 4         | Diagramme $(\ln P, h)$ d'un fluide . . . . .   | 682        |
|           | 4.1 Principe d'un diagramme thermodynamique . . . . .  | 682        |
|           | 4.2 Zone d'équilibre entre le liquide et le gaz et courbe isotrope . . . . .                   | 683        |
|           | 4.3 Le diagramme $(\ln P, h)$ ou diagramme des frigoristes . . . . .                           | 684        |
|           | 4.4 Application des deux principes à l'aide du diagramme . . . . .                             | 687        |
| 5         | Exemples d'application des principes de la thermodynamique pour un système ouvert . . . . .    | 688        |
|           | 5.1 Application 1 : étude du circuit d'eau d'une centrale électrique thermique . . . . .       | 688        |
|           | 5.2 Application 2 : étude d'une machine frigorifique . . . . .                                 | 695        |
| <b>23</b> | <b>Transferts thermiques</b>   | <b>727</b> |
| 1         | Les trois modes de transfert thermique . . . . .   | 727        |
|           | 1.1 Transfert thermique conductif . . . . .  | 727        |
|           | 1.2 Transfert thermique convectif . . . . .  | 728        |
|           | 1.3 Transfert thermique radiatif . . . . .   | 728        |
| 2         | Le courant thermique . . . . .   | 730        |
|           | 2.1 Vecteur densité de courant thermique . . . . .   | 730        |
|           | 2.2 Flux thermique . . . . .   | 731        |
| 3         | Loi de Fourier - Conductivité thermique . . . . .  | 731        |
|           | 3.1 Loi phénoménologique de Fourier . . . . .  | 731        |
|           | 3.2 Limites de validité de la loi de Fourier . . . . .   | 732        |
|           | 3.3 Ordre de grandeur des conductivités thermiques . . . . .                                   | 732        |
| 4         | Équation locale de bilan thermique . . . . .   | 733        |
|           | 4.1 Bilan thermique local à une dimension . . . . .  | 733        |
|           | 4.2 Bilan thermique local en symétrie cylindrique . . . . .                                    | 735        |
|           | 4.3 Bilan thermique local en symétrie sphérique . . . . .                                      | 736        |
|           | 4.4 Complément : équation locale de bilan thermique . . . . .                                  | 738        |
| 5         | Équation de la diffusion thermique . . . . .   | 739        |
|           | 5.1 Diffusion thermique en l'absence de sources . . . . .                                      | 739        |
|           | 5.2 Diffusion thermique en présence de sources . . . . .                                       | 743        |
|           | 5.3 Conditions aux limites pour le champ de température . . . . .                              | 744        |
|           | 5.4 Champ de température en régime stationnaire . . . . .                                      | 746        |
|           | 5.5 Approche numérique : exemples de résolution de l'équation de diffusion thermique . . . . . | 749        |
| 6         | Résistance thermique . . . . .   | 752        |

## TABLE DES MATIÈRES

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 6.1       | Définition . . . . .  | 752        |
| 6.2       | Résistance thermique dans le cas d'un transfert unidimensionnel . . . . .   | 754        |
| 6.3       | Résistance thermique en géométries cylindrique et sphérique . . . . .       | 755        |
| 6.4       | Lois d'association des résistances thermiques . . . . .                     | 757        |
| 6.5       | Résistance thermique d'une interface solide-fluide . . . . .                | 759        |
| 6.6       | Cas du régime lentement variable . . . . .                                  | 760        |
| 7         | Comment déterminer expérimentalement une conductivité thermique ? . . . . . | 760        |
| 7.1       | Mesure de conductivité thermique . . . . .                                  | 760        |
| 7.2       | Mesure de résistance thermique . . . . .                                    | 762        |
| 8         | Complément : irréversibilité du phénomène de conduction thermique . . . . . | 764        |
| 8.1       | Irréversibilité . . . . .   | 764        |
| 8.2       | Production d'entropie . . . . .   | 764        |
| <b>VI</b> | <b>Physique quantique</b>   | <b>787</b> |
| <b>24</b> | <b>Introduction à la mécanique quantique.</b>                               | <b>789</b> |
| 1         | Ondes ou particules ? . . . . .   | 789        |
| 1.1       | Interférences avec des ondes lumineuses . . . . .                           | 789        |
| 1.2       | Interférences avec des ondes de matière . . . . .                           | 793        |
| 1.3       | Principe de complémentarité de Bohr . . . . .                               | 794        |
| 2         | La fonction d'onde et l'équation de Schrödinger . . . . .                   | 795        |
| 2.1       | Description de l'état d'une particule . . . . .                             | 795        |
| 2.2       | Amplitude de probabilité et condition de normalisation . . . . .            | 796        |
| 2.3       | Interprétation probabiliste . . . . .                                       | 796        |
| 2.4       | L'équation de Schrödinger . . . . .   | 797        |
| 2.5       | L'équation de Schrödinger indépendante du temps . . . . .                   | 798        |
| 3         | Inégalités de Heisenberg . . . . .  | 801        |
| 3.1       | Inégalité de Heisenberg spatiale . . . . .                                  | 801        |
| 3.2       | Inégalité temps - énergie . . . . .   | 802        |
| 4         | De la limite quantique à la limite classique . . . . .                      | 803        |
| 4.1       | Exemple de l'oscillateur harmonique . . . . .                               | 803        |
| 4.2       | Quantique ou classique ? . . . . .  | 807        |
| 4.3       | Principe de correspondance de Bohr . . . . .                                | 808        |
| <b>25</b> | <b>Évolution d'une particule quantique libre</b>                            | <b>823</b> |
| 1         | La particule quantique libre . . . . .                                      | 823        |
| 1.1       | Définition . . . . .  | 823        |

## TABLE DES MATIÈRES

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 1.2        | États stationnaires d'une particule quantique libre . . . . .            | 823        |
| 1.3        | Représentation d'une particule quantique par un paquet d'ondes . . . . . | 826        |
| 1.4        | Vecteur densité de courant de probabilité . . . . .                      | 831        |
| <b>26</b>  | <b>Évolution d'une particule quantique dans un potentiel</b>             | <b>849</b> |
| 1          | Marche de potentiel . . . . .  | 850        |
| 1.1        | Premier cas : $E > V_0$ . . . . .  | 851        |
| 1.2        | Second cas : $E < V_0$ . . . . .   | 854        |
| 2          | Barrière de potentiel et effet tunnel . . . . .                          | 857        |
| 2.1        | Expression de la fonction d'onde propre . . . . .                        | 858        |
| 2.2        | Probabilités de réflexion et de transmission. Effet tunnel . . . . .     | 859        |
| 2.3        | Représentation de la densité de probabilité de présence . . . . .        | 860        |
| 2.4        | Approximation d'une barrière épaisse . . . . .                           | 861        |
| 2.5        | Interprétation qualitative de l'effet tunnel . . . . .                   | 863        |
| 3          | Applications de l'effet tunnel . . . . .                                 | 864        |
| 3.1        | Première approche documentaire : le microscope à effet tunnel . . . . .  | 864        |
| 3.2        | Deuxième approche documentaire : la radioactivité $\alpha$ . . . . .     | 868        |
| 4          | Puits de potentiel infiniment profond . . . . .                          | 873        |
| 4.1        | Fonctions d'onde propres . . . . .                                       | 873        |
| 4.2        | Niveaux d'énergie . . . . .  | 875        |
| 4.3        | Interprétation de l'existence d'un état d'énergie minimale . . . . .     | 876        |
| 4.4        | Densité de probabilité de présence . . . . .                             | 878        |
| 5          | États non stationnaires d'une particule quantique . . . . .              | 879        |
| 5.1        | Premier exemple : puits de potentiel infiniment profond . . . . .        | 879        |
| 5.2        | Second exemple : le double puits de potentiel symétrique . . . . .       | 880        |
| <b>VII</b> | <b>Thermodynamique statistique</b>                                       | <b>923</b> |
| <b>27</b>  | <b>Éléments de thermodynamique statistique</b>                           | <b>925</b> |
| 1          | Monde microscopique, monde macroscopique . . . . .                       | 925        |
| 1.1        | Ordres de grandeur moléculaires . . . . .                                | 925        |
| 1.2        | Mouvements moléculaires . . . . .  | 927        |
| 1.3        | Échelles macroscopique, mésoscopique et microscopique . . . . .          | 928        |
| 2          | Objet de la thermodynamique statistique . . . . .                        | 929        |
| 2.1        | Système thermodynamique . . . . .  | 929        |
| 2.2        | Macro-état et micro-état . . . . .                                       | 929        |
| 2.3        | Système à l'équilibre thermodynamique . . . . .                          | 930        |

## TABLE DES MATIÈRES

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.4 | Probabilité d'un micro-état . . . . .   | 930 |
| 2.5 | Valeurs moyennes et fluctuations . . . . .  | 931 |
| 3   | Facteur de Boltzmann . . . . .  | 931 |
| 3.1 | Pression dans une atmosphère isotherme . . . . .  | 931 |
| 3.2 | Poids de Boltzmann pour une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat . . . . . | 937 |
| 4   | Systèmes à spectre discret d'énergie . . . . .  | 938 |
| 4.1 | Probabilité d'occupation d'un état quantique donné par une particule donnée . . . . .         | 938 |
| 4.2 | Énergie moyenne . . . . .   | 939 |
| 4.3 | Système à deux niveaux d'énergie non dégénérés . . . . .                                      | 941 |
| 5   | Capacités thermiques classiques des gaz et des solides . . . . .                              | 945 |
| 5.1 | Théorème d'équirépartition de l'énergie . . . . .   | 945 |
| 5.2 | Théorie classique de la capacité thermique des gaz parfaits . . . . .                         | 948 |
| 5.3 | Amélioration du modèle du gaz parfait diatomique . . . . .                                    | 950 |
| 5.4 | Capacité thermique à volume constant d'un solide . . . . .                                    | 953 |

## **VIII Appendice** **983**

|   |            |
|---|------------|
| <b>A Outils mathématiques</b>   | <b>985</b> |
| 1 Analyse vectorielle . . . . .   | 985        |
| 1.1 Gradient d'un champ scalaire . . . . .  | 985        |
| 1.2 Divergence d'un champ de vecteurs . . . . .   | 986        |
| 1.3 Rotationnel d'un champ de vecteurs . . . . .  | 987        |
| 1.4 Laplacien scalaire . . . . .  | 989        |
| 1.5 Laplacien vectoriel . . . . .   | 990        |
| 1.6 Le vecteur symbolique "nabla" . . . . .   | 991        |
| 1.7 Cas des champs proportionnels à $\exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ . . . . . | 991        |
| 2 Analyse de Fourier . . . . .  | 992        |
| 2.1 Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier . . . . .                 | 992        |
| 2.2 Synthèse de Fourier d'un signal non périodique . . . . .                              | 993        |
| 3 Équations aux dérivées partielles . . . . .   | 996        |
| 3.1 Équations fondamentales . . . . .   | 996        |
| 3.2 Résolution par substitution d'une forme donnée . . . . .                              | 997        |
| 3.3 Conditions aux limites et conditions initiales . . . . .                              | 997        |
| 4 Calcul différentiel . . . . .   | 998        |
| 4.1 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables . . . . .                   | 998        |

## TABLE DES MATIÈRES

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.2 | Différentielle d'une fonction de plusieurs variables . . . . . | 998 |
| 5   | Variables aléatoires . . . . .                                 | 999 |
| 5.1 | Variables aléatoires discrètes . . . . .                       | 999 |
| 5.2 | Variables aléatoires à densité . . . . .                       | 999 |



**Première partie**

**Mécanique**



# 1

# Changements de référentiels en mécanique classique

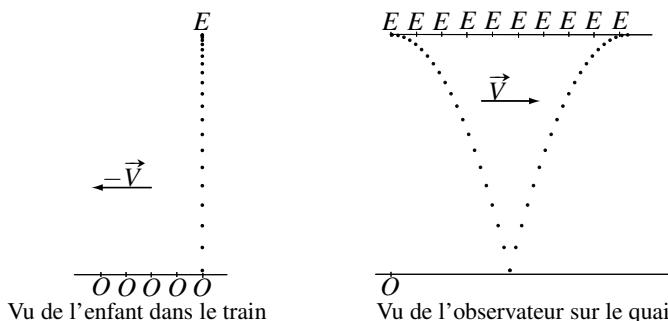
En première année, la mécanique du point et du solide se plaçait dans le cadre d'un seul référentiel, supposé galiléen. Dans ce chapitre, on va étudier les effets cinématiques lorsque deux référentiels différents sont utilisés, tout en restant dans le cadre de la mécanique classique. Au chapitre suivant on verra comment on doit modifier les lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

## 1 Exemples

### 1.1 Cas de deux référentiels en translation rectiligne l'un par rapport à l'autre

#### a) Premier exemple

Un observateur  $O$  se trouve, immobile, sur le quai de la gare. Un train passe à vitesse constante sur la voie rectiligne. Dans ce train, un enfant  $E$  joue à faire rebondir une balle. Pour l'en-



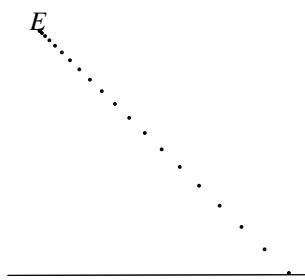
**Figure 1.1** – Mouvement de la balle vu par l'enfant dans le train et vu par l'observateur sur le quai.

fant, la trajectoire de la balle est rectiligne : la balle descend, rebondit sur le sol du train et remonte verticalement jusqu'à sa main. La trajectoire de la balle vue par l'observateur  $O$  est complètement différente : il voit la balle suivre une trajectoire parabolique vers le bas puis parabolique vers le haut pour revenir dans la main de l'enfant.

Chacun des deux, enfant et observateur, voit une trajectoire différente et attribue à la balle un vitesse différente. Pour l'enfant, le mouvement de la balle sera le même que si le train est immobile. On reviendra plus loin sur ce fait.

### b) Deuxième exemple

On suppose maintenant que le train freine avec une accélération constante. Pour l'enfant, la trajectoire de la balle sera toujours rectiligne mais elle ne sera plus verticale. La trajectoire de la balle vue par l'enfant est représentée sur la figure ci-dessous :



**Figure 1.2** – Trajectoire de la balle dans le train qui freine, vue par l'enfant.

De la même façon, si le bus dans lequel on se trouve, debout car il y a du monde, freine, on se sent projeté vers l'avant.

## 1.2 Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel

Le plateau circulaire d'un manège tourne autour de son axe vertical à vitesse angulaire constante. Deux amis se trouvent sur ce manège. L'un d'eux ( $A$ ) est assis au niveau de l'axe de rotation alors que l'autre ( $B$ ) se trouve en un point de la périphérie du manège.

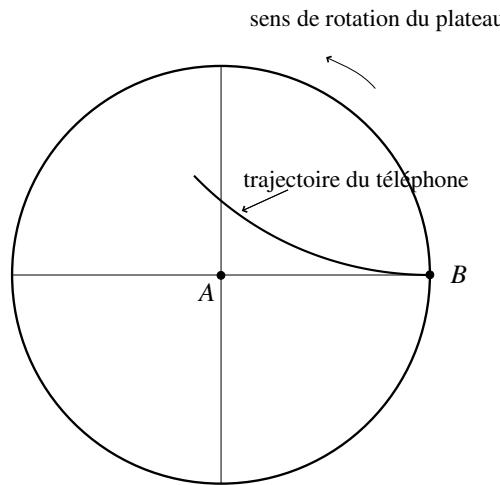
( $A$ ) demande à ( $B$ ) de lui lancer son téléphone portable. Celui-ci, pour ne pas risquer de l'endommager, préfère lui envoyer en le posant sur le manège et en le faisant glisser sur le plateau. S'il ne se déplace pas, ( $A$ ) ne pourra pas se saisir du téléphone.

En effet, la trajectoire du téléphone, si on néglige les frottements avec le plateau du manège est représentée figure 1.3.

Sur cet exemple, on constate que la rotation du plateau a entraîné une déviation de la trajectoire du téléphone.

## 1.3 Conclusion

À partir des exemples présentés, on a mis en évidence que le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre modifie les trajectoires des objets donc leurs vitesses et leurs accélérations.



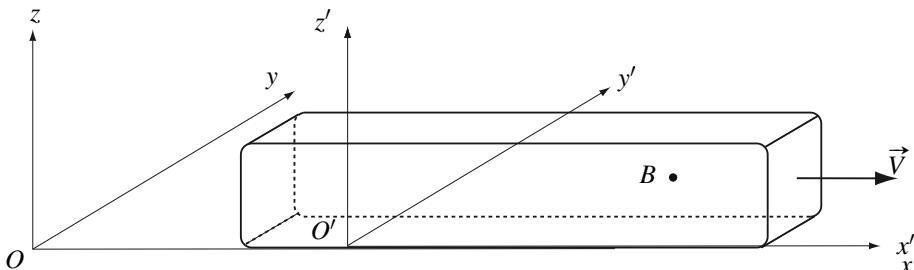
**Figure 1.3 – Trajectoire du téléphone sur le plateau du manège**

Dès lors, quand deux référentiels différents,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , interviennent, il faut impérativement préciser vis-à-vis de quel référentiel on calcule le vecteur vitesse ou le vecteur accélération. On notera  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ ,  $\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$  les vitesses d'un point matériel  $M$  par rapport aux deux référentiels et  $\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M)$  et  $\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M)$  ses accélérations. Dans la suite du chapitre, on va voir quelles relations existent entre ces vecteurs.

## 2 Référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel

### 2.1 Transformation de Galilée

On reprend l'exemple du paragraphe (1.1). On associe des repères d'espace au quai de la gare et au train :



**Figure 1.4 – Référentiel lié au quai et référentiel lié au train**

Le référentiel  $\mathcal{R}(O, x, y, z,)$  est lié au quai, le référentiel  $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$  est lié au train qui est animé de la vitesse  $\vec{V} = V \vec{u}_x$  par rapport au quai où  $V$  est une constante.  $\mathcal{R}'$  est en translation

rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ . La balle se trouve au point  $B$ .

On imagine que l'enfant dans le train et l'observateur sur le quai de la gare aient réglé leurs montres à la même heure le matin. Au moment où le train passe en gare, les deux montres indiquent toujours la même heure : dans le cadre de la mécanique classique, le temps revêt un caractère absolu, il est le même dans tous les référentiels (on reviendra sur ce point plus loin). Si on suppose que les points  $O$  et  $O'$  coïncident à l'instant initial, alors :  $\overrightarrow{OO'} = Vt\vec{u}_x$ .

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B} \quad (1.1)$$

En projection sur les trois axes et en posant  $\overrightarrow{OB} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$  et  $\overrightarrow{O'B} = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z$ , cette équation donne :

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad (1.2)$$

Ces relations constituent la **transformation de Galilée** valable pour un référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{V} = V\vec{u}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , dans le cadre de la mécanique classique.

## 2.2 Composition des vitesses

Le vecteur vitesse de la balle, pour l'observateur sur le quai de la gare, est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position  $\overrightarrow{OB}$ , calculée dans  $\mathcal{R}$ , référentiel lié au quai :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(B) = \left( \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z,$$

car les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont des vecteurs fixes (donc indépendants du temps) dans  $\mathcal{R}$ . De même la vitesse de la balle pour l'enfant est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur position  $\overrightarrow{O'B}$ , calculée dans  $\mathcal{R}'$ , référentiel lié au train :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(B) = \left( \frac{d\overrightarrow{O'B}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'(t)\vec{u}_x + \dot{y}'(t)\vec{u}_y + \dot{z}'(t)\vec{u}_z,$$

car les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont aussi fixes dans  $\mathcal{R}$ . Or, avec la transformation de Galilée :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}'(t) + V, \quad \dot{y}(t) = \dot{y}'(t) \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = \dot{z}'(t).$$

On a donc :  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(B) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(B) + V\vec{u}_x$ . La **formule de composition des vitesses** dans le cadre de la transformation de Galilée est :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(B) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(B) + \vec{V}. \quad (1.3)$$

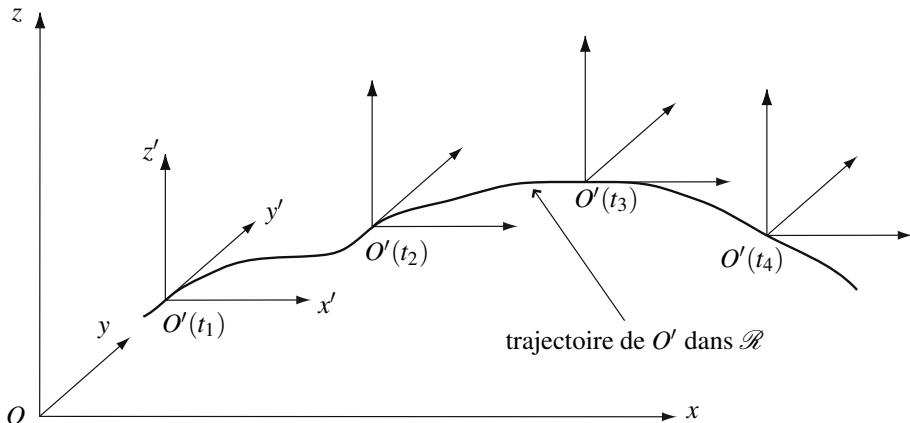
### 3 Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel

On généralise ici le résultat précédent au cas d'une translation quelconque.

#### 3.1 Présentation de la situation

Deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont en **translation** l'un par rapport à l'autre si les axes de  $\mathcal{R}'$  gardent toujours une direction constante par rapport à ceux de  $\mathcal{R}$ .

On peut, sans perte de généralité, choisir les axes de  $\mathcal{R}'$  parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ . Le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est entièrement décrit par celui de son origine  $O'$  dans  $\mathcal{R}$ . Si le mouvement de  $O'$  est rectiligne dans  $\mathcal{R}$ , on parle de **translation rectiligne** (on peut penser au référentiel lié à un wagon d'un train se déplaçant le long d'une voie rectiligne). Si le mouvement de  $O'$  est circulaire dans  $\mathcal{R}$ , on parle de **translation circulaire** (on peut penser au référentiel lié à une nacelle de grande roue, à condition qu'un mécanisme maintienne la nacelle verticale).



**Figure 1.5** – Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Il est représenté à quatre instants différents,  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$ .

Deux observateurs, l'un lié au référentiel  $\mathcal{R}$  (c'est-à-dire immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ), l'autre lié au référentiel  $\mathcal{R}'$  observent le mouvement d'un point  $M$ . Quelle vitesse et quelle accélération attribuent-ils au point  $M$ ? Quelle relation y-a-t-il entre la vitesse ou l'accélération du point  $M$  vue par l'un et celle vue par l'autre? On va maintenant répondre à ces questions.

La position du point  $M$  est repérée :

- dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z,$$

- dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  par le vecteur position :

$$\overrightarrow{O'M} = x'(t)\vec{u}'_x + y'(t)\vec{u}'_y + z'(t)\vec{u}'_z.$$

Le mouvement du point  $O'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est décrit par le vecteur :

$$\overrightarrow{OO'} = x_{O'}(t)\vec{u}_x + y_{O'}(t)\vec{u}_y + z_{O'}(t)\vec{u}_z.$$

### 3.2 Composition des vitesses

Comme vu précédemment :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z,$$

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'(t)\vec{u}_x + \dot{y}'(t)\vec{u}_y + \dot{z}'(t)\vec{u}_z.$$

On déduit de  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$  :  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left( \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ . Or :  $\left( \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{/\mathcal{R}}(O')$ . Cette vitesse est la vitesse, par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , commune à tous les points du référentiel  $\mathcal{R}'$ . On la note  $\vec{v}_e$  et on l'appelle vitesse d'entraînement. Cette vitesse d'entraînement dépend *a priori* du temps.

**La formule de composition des vitesses** dans le cas où le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_e \quad (1.4)$$

où  $\vec{v}_e = \vec{v}_{/\mathcal{R}}(O')$  est la **vitesse d'entraînement**.

### 3.3 Composition des accélérations

L'accélération de  $O'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est :  $\vec{a}_{/\mathcal{R}}(O') = \left( \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$ . De la même façon, en dérivant par rapport au temps l'expression (1.4), et en faisant le même type de travail, on obtient la formule de composition des accélérations. On pose  $\vec{a}_e = \vec{a}_{/\mathcal{R}}(O')$  et on l'appelle accélération d'entraînement.

**La formule de composition des accélérations** dans le cas où le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e \quad (1.5)$$

où  $\vec{a}_e = \vec{a}_{/\mathcal{R}}(O')$  est l'**accélération d'entraînement**.

**Remarque**

Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en translation *rectiligne uniforme* par rapport à  $\mathcal{R}$ , on a  $\vec{a}_e = \vec{0}$ , et donc  $\vec{d}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{d}(M)_{/\mathcal{R}'}$ . Cette remarque prendra toute son importance quand on étudiera la dynamique en référentiel non galiléen.

## 4 Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel

### 4.1 Présentation de la situation

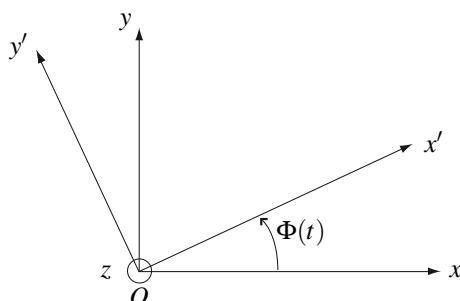
#### a) Définition

Un référentiel  $\mathcal{R}'$  est en **rotation uniforme** autour de l'axe  $\Delta$ , fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , si tous les points fixes dans  $\mathcal{R}'$  sont animés dans  $\mathcal{R}$  d'un mouvement circulaire uniforme de même axe  $\Delta$  et de même vecteur rotation  $\vec{\omega}$  constant.

Ce vecteur rotation commun est appelé **vecteur rotation** de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et noté  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ .

#### b) Paramétrage

Comme tous les points de l'axe  $\Delta$  sont fixes dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ , on peut, sans perte de généralité, choisir le même point pour les origines  $O$  et  $O'$  des deux référentiels en le prenant sur l'axe  $\Delta$ . Par ailleurs, il semble naturel de choisir un des axes des référentiels selon l'axe  $\Delta$ . On le note  $(Oz)$  :



**Figure 1.6** – Le référentiel  $\mathcal{R}'(O, x', y', z)$  est en rotation autour de l'axe fixe  $(Oz)$ .

La rotation est uniforme ce qui fait que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega = \text{constante}$$

en notant  $\omega$  la composante du vecteur rotation le long de l'axe  $(Oz)$  :  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}_z$ .

Un point  $M$  sera repéré par le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ . On l'exprime en utilisant un repérage cartésien :

- dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z,$$

- dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  par :

$$\overrightarrow{OM} = x'(t)\vec{u}'_x + y'(t)\vec{u}'_y + z(t)\vec{u}_z.$$

**Attention**, les vecteurs  $\vec{u}'_x$  et  $\vec{u}'_y$  dépendent du temps pour un observateur fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , tout comme les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  en dépendent pour un observateur fixe dans  $\mathcal{R}'$ . On peut exprimer les vecteurs  $\vec{u}'_x$  et  $\vec{u}'_y$  en fonction de  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\begin{cases} \vec{u}'_x = \cos(\Phi(t))\vec{u}_x + \sin(\Phi(t))\vec{u}_y \\ \vec{u}'_y = -\sin(\Phi(t))\vec{u}_x + \cos(\Phi(t))\vec{u}_y \end{cases} \quad (1.6)$$

### c) Formule de dérivation vectorielle

Pour établir l'expression des relations de composition des vitesses et des accélérations, il faut calculer la dérivée d'une même quantité vectorielle dans deux référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre. On sait, d'après les exemples introductifs, que ces deux dérivées sont *a priori* différentes. Il existe cependant un lien entre elles, que l'on va établir maintenant.

Soit une grandeur vectorielle  $\vec{A}(t)$  variant au cours du temps. On peut exprimer cette grandeur

- dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{u}_x + A_y(t)\vec{u}_y + A_z(t)\vec{u}_z,$$

- dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  par :

$$\vec{A}(t) = A'_x(t)\vec{u}'_x + A'_y(t)\vec{u}'_y + A_z(t)\vec{u}_z.$$

On calcule la dérivée de  $\vec{A}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en utilisant chacune des deux expressions.

On a d'abord très simplement :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{A}_x \vec{u}_x + \dot{A}_y \vec{u}_y + \dot{A}_z \vec{u}_z,$$

car les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont constants dans  $\mathcal{R}$ . En utilisant la deuxième expression il vient :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{A}'_x \vec{u}'_x + \dot{A}'_y \vec{u}'_y + \dot{A}_z \vec{u}_z + A'_x(t) \left( \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + A'_y(t) \left( \frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'},$$

Les trois premiers termes du second membre s'identifient très facilement à la dérivée de  $\vec{A}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Il reste à examiner les deux derniers termes.

En dérivant par rapport au temps les formules (1.6), on obtient :

$$\begin{cases} \left( \frac{d\vec{u}'_x(t)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\omega \sin(\Phi(t))\vec{u}_x + \omega \cos(\Phi(t))\vec{u}_y = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_x(t) \\ \left( \frac{d\vec{u}'_y(t)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\omega \cos(\Phi(t))\vec{u}_x - \omega \sin(\Phi(t))\vec{u}_y = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_y(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Finalement, on peut écrire :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (A'_x(t)\vec{u}_{x'} + A'_y(t)\vec{u}_{y'}) = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}(t). \quad (1.8)$$

### Formule de dérivation vectorielle.

Les dérivées d'une grandeur vectorielle  $\vec{A}(t)$  dans deux référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  étant en rotation autour d'un axe fixe par rapport à  $\mathcal{R}$  sont liées par :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}(t) \quad (1.9)$$

$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  étant le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

## 4.2 Composition des vitesses

On peut appliquer le résultat précédent en prenant pour grandeur  $\vec{A}(t) = \vec{OM}$  le vecteur position de  $M$ .

Il vient  $\left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}$ . Mais  $\left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$  et de même  $\left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \left( \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$ . Ainsi :

Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en rotation uniforme autour d'un axe fixe  $\Delta$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , la **formule de composition des vitesses** s'écrit :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_e(M) \quad (1.10)$$

où la **vitesse d'entraînement** est :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM},$$

$O$  étant un point de  $\Delta$  et  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .



Pour pouvoir appliquer la relation précédente il est indispensable que le point  $O$  choisi soit un point fixe appartenant à l'axe de rotation  $\Delta$ .

### Remarque

La vitesse d'entraînement dépend de la position du point  $M$ , ce qui n'est pas le cas dans la situation où  $\mathcal{R}'$  est translation par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### 4.3 Composition des accélérations

De même, on peut appliquer la formule de dérivation vectorielle en prenant cette fois-ci, pour grandeur  $\vec{A} = \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ , le vecteur vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) &= \left( \frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \\ &= \left( \frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \left( \frac{d(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M),\end{aligned}\quad (1.11)$$

en utilisant l'expression issue de la formule de composition des vitesses (1.10).

Le premier terme du second membre de (1.11) n'est autre que l'accélération du point  $M$  dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M)$ .

Le deuxième est la dérivée d'un produit vectoriel qui se dérive comme un produit de fonctions, à savoir :  $\frac{d\vec{a} \wedge \vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$ . Ici,  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  étant un vecteur constant dans  $\mathcal{R}'$ ,

$$\text{il vient : } \left( \frac{d(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M).$$

Pour le troisième terme on utilise encore la formule de composition des vitesses ; il est ainsi égal à :  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM})$ .

Finalement :

**La formule de composition des accélérations** dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en rotation uniforme autour d'un axe fixe  $\Delta$  par rapport à  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M), \quad (1.12)$$

où l'**accélération d'entraînement** est :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM})$$

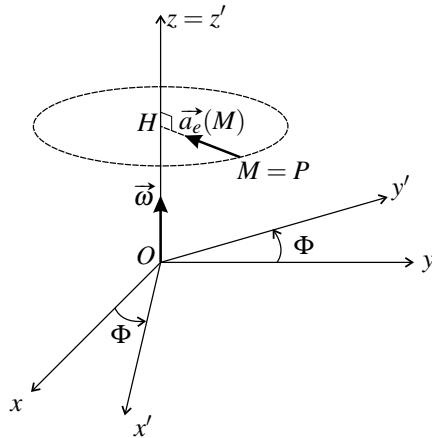
et l'**accélération de Coriolis ou accélération complémentaire** :

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'},$$

$O$  étant un point fixe de  $\Delta$  et  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .



Comme pour la formule de composition des vitesses, pour pouvoir appliquer la relation précédente, il est indispensable que le point  $O$  choisi soit un point fixe appartenant à l'axe de rotation  $\Delta$ .

**Remarque**

**Figure 1.7 – Accélération d’ entraînement dans le cas où  $\mathcal{R}$  en rotation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}'$**

L'accélération d'entraînement peut s'écrire beaucoup plus simplement en introduisant le point  $H$ , projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $\Delta$ .

On a :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{HM},$$

car  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  et  $\overrightarrow{OH}$  sont parallèles. En utilisant la formule du double produit vectoriel,  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ , on trouve :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{HM}) = (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{HM}) \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} - (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}) \overrightarrow{HM} = -\omega^2 \overrightarrow{HM},$$

car  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  et  $\overrightarrow{HM}$  sont orthogonaux. Finalement :

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \quad (1.13)$$

Il apparaît sur cette formule que l'accélération d'entraînement est perpendiculaire à l'axe  $\Delta$ , dirigée vers l'axe, proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation et à la distance du point  $M$  à l'axe  $\Delta$ . Cette remarque permet d'écrire directement l'accélération d'entraînement sans avoir à passer par le calcul du double produit vectoriel.

## 5 Notion de point coïncident

Les formules précédentes permettant de calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement peuvent être difficiles à mémoriser et techniques à calculer. Il existe une approche alternative reposant sur la notion de point coïncident, qui permet d'exprimer très facilement ces deux grandeurs, en particulier dans les cas simples au programme : translation et rotation uniforme autour d'un axe fixe.

### 5.1 Point coïncident

On étudie le mouvement d'un point  $M$  dans deux référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$ , eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre.

**Le point coïncident** du point  $M$  à l'instant  $t$ , est le point  $P$ , fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , qui est confondu avec le point  $M$  à cet instant.



Le point coïncident change à chaque instant. Il serait plus judicieux de parler des points coïncidents, mais c'est contraire aux usages !

#### Exemple

Le centre  $C$  d'une roue de vélo de rayon  $R$ , avance à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au sol. Un point  $M$  de la périphérie de la roue (la valve par exemple) est au contact avec le sol à l'instant  $t$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$  lié au sol et dans le référentiel  $\mathcal{R}' = (C, x, y, z)$  en translation à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans  $\mathcal{R}'$ , la trajectoire du point  $M$  est un cercle. Dans  $\mathcal{R}$ , elle est plus compliquée, c'est une cycloïde (si la roue ne glisse pas sur le sol) représentée en pointillés sur la figure (1.8) :

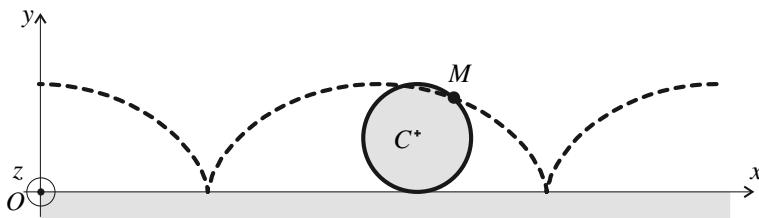


Figure 1.8 – Trajectoire de la valve d'une roue de vélo

Pour faire comprendre ce qu'est le point coïncident, on représente sur la figure 1.9, dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au sol, les trajectoires :

- du point  $M$  pris sur la périphérie de la roue et qui décrit la cycloïde
- d'un point  $P_1$  fixe dans  $\mathcal{R}'$ , situé à une altitude  $R$  au dessus du sol et à une distance  $R$  en arrière du centre de la roue
- d'un point  $P_2$  fixe dans  $\mathcal{R}'$ , situé à une altitude  $2R$  au dessus du sol et à la verticale du

centre de la roue.

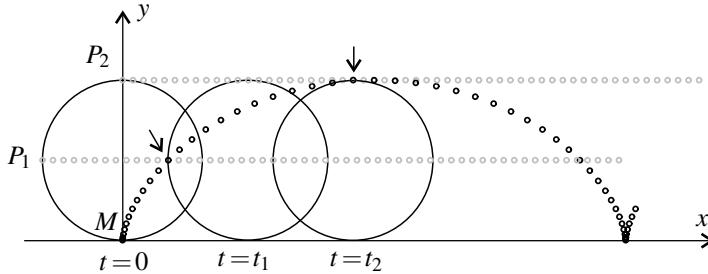


Figure 1.9 – Point coïncident.

À l'instant  $t = 0$  ces trois points sont distincts. À  $t = t_1$ ,  $M$  et  $P_1$  sont confondus, autrement dit à cet instant là  $P_1$  est le point coïncident de  $M$ . De même à  $t = t_2$ ,  $M$  et  $P_2$  sont confondus, c'est-à-dire que  $P_2$  est le point coïncident de  $M$  à  $t = t_2$ .

## 5.2 Lien avec la vitesse et l'accélération d'entraînement

Soit  $P(t)$  le point coïncident du point  $M$  à l'instant  $t$ .

**Cas de la translation** Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  tous les points liés à  $\mathcal{R}'$ , dont  $P(t)$ , ont la même vitesse que celle de  $O'$ . Or  $\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_e$ . Donc la vitesse du point coïncident est égale à la vitesse d'entraînement.

De même, tous les points liés à  $\mathcal{R}'$ , dont  $P(t)$ , ont la même accélération que celle de  $O'$ . Or  $\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{a}_e$ . L'accélération du point coïncident est égale à l'accélération d'entraînement.

**Cas de la rotation autour d'un axe fixe** Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  rapport à  $\mathcal{R}$ ,  $P(t)$  a un mouvement circulaire, d'axe  $\Delta$ , de vecteur rotation  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . Sa vitesse est donc donnée par  $\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}$ . Mais par définition, à l'instant  $t$ ,  $P(t)$  et  $M$  sont confondus, donc  $\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{v}_e(M)$ . Dans ce cas également, la vitesse du point coïncident est exactement la vitesse d'entraînement.

L'accélération est donnée par  $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}} = -\omega^2 \vec{H}\vec{P}$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $P$  sur  $\Delta$ , soit  $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}} = -\omega^2 \vec{H}\vec{M} = \vec{a}_e(M)$  puisque  $M$  et  $P(t)$  sont confondus. L'accélération du point coïncident est encore l'accélération d'entraînement.

La vitesse d'entraînement est égale à la vitesse du point coïncident par rapport à  $\mathcal{R}$ . De même, l'accélération d'entraînement est égale à l'accélération du point coïncident par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Cette constatation donne un moyen simple de calculer vitesse et accélération d'entraînement, à partir de considération de cinématique du point, dans des situations élémentaires (translation et rotation uniforme).

## 6 Complément : cinématique classique et relativiste

Il a été vu en classe de terminale qu'un certain nombre de faits expérimentaux (vitesse de la lumière dans le vide indépendante du référentiel, valeur de la durée de vie de muons dont la vitesse est proche de celle de la lumière) étaient incompatibles avec la mécanique newtonienne. Il a fallu abandonner un postulat fondamental de la mécanique classique : le caractère absolu du temps. Le temps ne s'écoule pas de la même façon dans tous les référentiels.

Dès lors il faut attacher à chaque référentiel une variable temps particulière permettant de repérer la date des événements dans ce référentiel. Autrement dit le fait qu'un événement  $E$  (par exemple l'émission d'un photon) ait lieu à un certain instant dans un référentiel  $\mathcal{R}$  doit être décrit par la donnée des 3 coordonnées d'espace mais également de l'instant correspondant :  $E(x, y, z, t)$ . Dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  ce même événement sera décrit par  $E(x', y', z', t')$ . Il existe bien sûr des relations entre ces deux descriptions qui dépendent du mouvement relatif des deux référentiels. On va donner une telle relation, uniquement à titre informatif car *elle n'est pas au programme*, un peu plus loin. Quelle que soit la forme de cette relation il faut savoir qu'elle permet de lever les incompatibilités de la mécanique newtonienne avec la réalité expérimentale et quelques manipulations élémentaires permettent de retrouver les phénomène de « dilatation des durées », de perte de la simultanéité de deux événements.

On se place dans une situation identique à celle de la transformation de Galilée du paragraphe 2.1, à savoir  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{V} = V\hat{u}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On suppose qu'à  $t = t' = 0$  (ce qui suppose une synchronisation initiale des horloges des deux référentiels), les origines des deux référentiels sont confondues. Dans le cadre de la relativité restreinte les coordonnées  $(x', y', z', t')$  et  $(x, y, z, t)$  d'un même événement  $E$  sont alors liées par la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (1.14)$$

dans laquelle  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ .

On constate des similarités avec la transformation de Galilée. Par exemple les équations  $y' = y$  et  $z' = z$  sont les mêmes. La relation  $x' = \gamma(x - Vt)$  est très proche de  $x' = x - Vt$ , mais on y voit intervenir le paramètre relativiste  $\gamma$ . Ce même paramètre intervient dans le phénomène de dilatation des durées.

Enfin on constate une différence fondamentale dans la relation  $t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$ . Dans le cadre de la transformation de Galilée on aurait eu simplement  $t' = t$ . Ici  $t'$  est différent de  $t$ , et de plus, dépend de la position de l'événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour conclure, on peut remarquer que dans le cas où la vitesse  $V$  est non relativiste, c'est-à-dire  $V \ll c$ , on retrouve en première approximation la transformation de Galilée. Ainsi, la mécanique newtonienne est l'approximation de la mécanique relativiste dans le cas des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière.

**SYNTHÈSE***SAVOIRS*

- référentiel en translation par rapport à un autre référentiel
- référentiel en rotation autour d'un axe fixe d'un autre référentiel
- composition des vitesses dans le cas d'un référentiel en translation
- composition des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation
- formule de dérivation composée
- composition des vitesses dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe fixe
- composition des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe fixe

*SAVOIR-FAIRE*

- reconnaître et caractériser un mouvement de translation
- reconnaître et caractériser un mouvement de rotation
- exprimer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre
- citer et utiliser les expressions de la vitesse d'entraînement
- citer et utiliser les expressions de l'accélération d'entraînement de Coriolis
- faire le lien entre le caractère absolu du temps et la cinématique classique

*MOTS-CLÉS*

- |               |                          |                               |
|---------------|--------------------------|-------------------------------|
| • référentiel | • vecteur rotation       | • accélération d'entraînement |
| • translation | • point coïncident       | • accélération de Coriolis    |
| • rotation    | • vitesse d'entraînement |                               |

**S'ENTRAÎNER****1.1 Mesure de la vitesse de chute de la neige (★)**

Le passager d'une voiture observe que la neige tombe en formant un angle de  $80^\circ$  par rapport à la verticale lorsque celui-ci roule à  $110 \text{ km.h}^{-1}$ . Lorsque la voiture s'arrête au feu, le passager regarde la neige tomber et constate que celle-ci tombe verticalement.

Calculer la vitesse de la neige par rapport au sol puis par rapport à la voiture lorsqu'il roule.

**1.2 Traversée d'un tapis roulant (★)**

Lors d'un jeu télévisé, un joueur A doit traverser un tapis roulant de largeur  $a$ , pour donner un paquet à un second joueur B. Le tapis se déplace à une vitesse constante  $V_t$  par rapport au sol. Lorsque le joueur court sur le tapis, sa vitesse par rapport au tapis a pour norme  $V$  constante.

1. Le joueur A se déplace avec une vitesse  $\vec{V}$  perpendiculaire au bord du tapis. Où doit se placer B pour réceptionner le paquet ? Quel est le temps  $t_1$  de traversée du tapis ?
2. Pour le deuxième essai, le joueur B est posté en face du joueur A. Dans quelle direction A doit-il courir ? Quel est le temps de traversée  $t_2$  ?
3. On suppose maintenant que la vitesse  $\vec{V}$  fait un angle  $\theta$  quelconque avec  $\vec{V}_t$ . Déterminer le temps de traversée  $t_3$  en fonction de  $a$ ,  $V$  et  $\theta$ . Pour quelle valeur de  $\theta$  le temps de traversée est-il le plus court ?

**1.3 Rameur et marcheur (★)**

Un rameur part d'un point A d'un fleuve, va jusqu'à un point B et revient en A sachant que le fleuve coule de A vers B à la vitesse  $\vec{v}$  constante. Il rame de manière à avoir une vitesse constante  $\vec{u}$  par rapport au fleuve parallèlement au courant. Un de ses amis marche à la vitesse  $\vec{u}$  au bord du rivage et effectue le même parcours.

1. Arrivent-ils ensemble en B ? Justifier.
2. Sont-ils de retour en A au même instant ? Justifier.

**1.4 Insecte sur l'aiguille des secondes (★)**

Un insecte se déplace sur l'aiguille des secondes d'une horloge qui a une longueur égale à 20 cm. À l'instant  $t = 0$  l'insecte est au centre de l'horloge, l'aiguille marquant 15 s et 60 s plus tard il arrive à l'extrémité de l'aiguille. Il se déplace à vitesse constante par rapport à l'aiguille.

1. Dans cette question on repère l'insecte par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le référentiel lié à l'horloge. On prend  $\theta = 0$  pour repérer la verticale ascendante.
  - a. Exprimer  $r$  et  $\theta$  en fonction du temps.
  - b. Construire la trajectoire de l'insecte à l'aide de quelques points.
  - c. Donner l'expression des vecteurs vitesse et accélération de l'insecte. Calculer leurs normes pour  $t = 52,5$  s. Les dessiner à cet instant.

**2.** Retrouver l'expression de la vitesse et de l'accélération en considérant l'insecte se déplaçant dans un référentiel  $\mathcal{R}_A(O, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_z)$  en rotation par rapport à celui de la première question, l'axe ( $OX$ ) étant confondu avec l'aiguille.

## APPROFONDIR

### 1.5 Deux stratégies pour ramasser les tickets sur un manège (\*\*)

Un manège d'enfants comporte une plate-forme en forme de disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ , tournant à une vitesse angulaire constante  $\omega > 0$  autour de l'axe vertical ascendant ( $Oz$ ). Le propriétaire, assimilé à un point  $M$ , parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets. Soit  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  un référentiel lié au sol et  $\mathcal{R}_1(O, \vec{u}_{x1}, \vec{u}_{y1}, \vec{u}_{z1})$  un référentiel lié à la plate-forme. À  $t = 0$ , les 2 bases vectorielles sont confondues. De plus, pour tout  $t$ , on a  $\vec{u}_{z1} = \vec{u}_z$ .

Dans tout cet exercice, les vecteurs seront déterminés par leurs composantes dans la base  $(\vec{u}_{x1}, \vec{u}_{y1}, \vec{u}_{z1})$ .

**1.** Le propriétaire part du centre  $O$  du manège à  $t = 0$  et suit un rayon (correspondant à  $y_1 = 0$  et  $x_1 > 0$ ) de la plate-forme avec un mouvement uniforme de vitesse  $v_1$  (en norme).

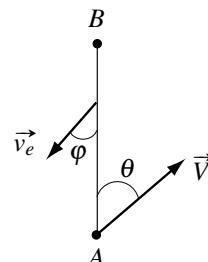
Déterminer  $x_1(t), y_1(t), z_1(t), \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$  puis  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ .

**2.** Le propriétaire parcourt maintenant sur la plate-forme un cercle de rayon  $r_0$ , de centre  $O$ , avec une vitesse angulaire constante  $\omega'$ .  $\omega'$  est algébrique, c'est-à-dire  $\omega' > 0$  pour une rotation dans le sens trigonométrique direct. À  $t = 0$ ,  $M$  est sur l'axe ( $Ox_1$ ).

Déterminer  $x_1(t), y_1(t), z_1(t), \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ , puis  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$  et enfin  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ . Prédire ce que l'on devrait obtenir si  $\omega' = -\omega$ ? Le vérifier sur vos expressions.

### 1.6 Avion confronté à un vent contraire (\*\*)

Un avion doit se déplacer en ligne droite d'un point  $A$  vers un point au sol  $B$  (voir figure ci-contre). Il subit un vent contraire de vitesse  $v_e$  dans le référentiel du sol noté  $\mathcal{R}$ . Le vecteur  $\vec{v}_e$  fait un angle  $\varphi$  avec la trajectoire  $AB$ . L'avion vole à une vitesse constante  $\vec{V}$  par rapport à l'air. Cette vitesse fait un angle  $\theta$  avec la route au sol  $AB$ .



- 1. a.** Calculer la vitesse  $\vec{v}_a$  de l'avion dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en fonction des données.
  - b.** À quelles conditions l'avion peut-il se déplacer en ligne droite de  $A$  vers  $B$ ?
  - c.** Calculer l'angle de correction  $\theta$  que le pilote doit afficher dans le cas où  $V = 445 \text{ km.h}^{-1}$ , pour contrer un vent de vitesse  $v_e = 56 \text{ km.h}^{-1}$  et  $\varphi = 20^\circ$ .
- 2.** L'avion doit faire un aller-retour entre les deux points  $A$  et  $B$  distants de  $d = 500 \text{ km}$ , dans les conditions de la question précédente.
    - a.** Calculer la durée  $t_{ar}$  du trajet aller-retour. On négligera la durée du demi-tour.

## CHAPITRE 1 – CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

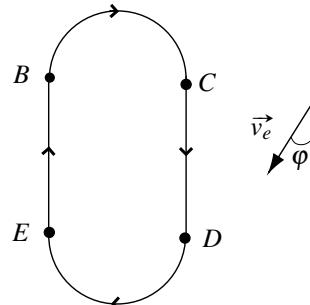
**b.** Comparer cette durée avec le temps  $t'_{ar}$  qu'aurait mis l'avion pour faire le même trajet en l'absence de vent. Est-il possible que  $t_{ar} < t'_{ar}$  ?

Commenter cette maxime de l'aéronautique : « le temps perdu ne se rattrape jamais » .

**3.** En  $B$ , l'avion arrive au-dessus d'une balise au sol à une date prise pour origine des temps. Le contrôleur demande alors au pilote de réaliser à altitude constante un circuit d'attente  $BCDE$  constitué de deux parties semi-circulaires  $BC$  et  $DE$  et de deux parties rectilignes  $CD$  et  $EB$ . Il lui indique à quelle date  $t_B$  l'avion doit se présenter à nouveau au-dessus de la balise  $B$ . Le pilote adapte l'inclinaison de l'appareil et donc le rayon des tronçons semi-circulaires  $BC$  et  $DE$  de manière à ce que ceux-ci durent 1 minute chacun.

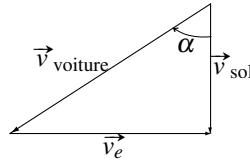
Durant cette attente, la vitesse  $V$  de l'avion est supposée constante et égale à  $222 \text{ km.h}^{-1}$ , tandis que la vitesse du vent est toujours  $v_e = 56 \text{ km.h}^{-1}$ , et  $\varphi = 20^\circ$ .

À quelle date  $t_v$  le pilote doit-il entreprendre le virage  $DE$  si la date de passage au dessus du point  $B$ , imposée par le contrôleur, est  $t_B = 4$  minutes ?



**CORRIGÉS****1.1 Mesure de la vitesse de chute de la neige**

La loi de composition des vitesses s'écrit  $\vec{v}_{\text{sol}} = \vec{v}_{\text{voiture}} + \vec{v}_e$  en notant  $\vec{v}_{\text{sol}}$  la vitesse de la neige par rapport au sol,  $\vec{v}_{\text{voiture}}$  la vitesse de la neige par rapport à la voiture et  $\vec{v}_e$  la vitesse de la voiture par rapport au sol (vitesse d'entraînement). Graphiquement cela se traduit par la figure ci-contre.



D'après les données de l'énoncé, on a  $\alpha = 80^\circ$ ,  $v_e = 110 \text{ km.h}^{-1}$ . On souhaite déterminer les valeurs de  $v_{\text{sol}}$  et  $v_{\text{voiture}}$ .

Le schéma précédent permet d'écrire  $\tan \alpha = \frac{v_e}{v_{\text{sol}}}$  soit  $v_{\text{sol}} = \frac{v_e}{\tan \alpha} = 19,4 \text{ km.h}^{-1}$ .

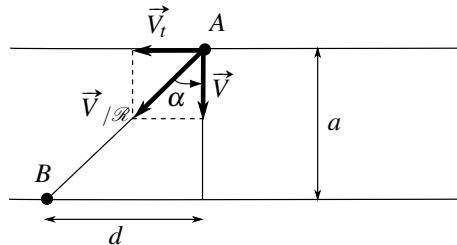
Par ailleurs, en appliquant la relation de Pythagore, on a  $v_{\text{voiture}} = \sqrt{v_{\text{sol}}^2 + v_e^2} = 112 \text{ km.h}^{-1}$ .

**1.2 Traversée d'un tapis roulant**

On note  $\mathcal{R}$  le référentiel lié au sol et  $\mathcal{R}_t$  celui lié au tapis. Le référentiel  $\mathcal{R}_t$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ . La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}} = \vec{V}_{/\mathcal{R}_t} + \vec{V}_e = \vec{V}_{/\mathcal{R}_t} + \vec{V}_t$$

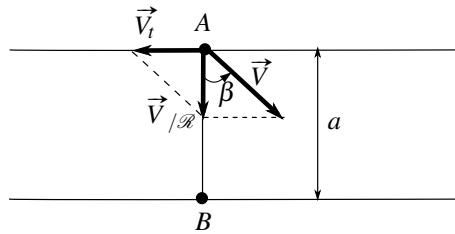
**1.** On a représenté sur la figure les trois vecteurs vitesses. Il faut calculer l'angle du vecteur  $\vec{V}_{/\mathcal{R}}$  par rapport aux bords du tapis, soit  $\tan \alpha = V_t/V$ . Sur la figure, le point de départ est  $A$  et le point d'arrivée  $B$ . La distance  $d$  parcourue entre les deux est  $d = a \tan \alpha$  soit  $d = aV_t/V$ .



Le temps de traversée est  $t_1 = AB/V_{/\mathcal{R}}$ , or  $AB = a/\cos \alpha$  et  $V_{/\mathcal{R}} = V/\cos \alpha$  donc  $t_1 = a/V$ , ce qui est évident du point de vue de  $A$  qui par rapport au tapis parcourt la distance  $a$  à la vitesse constante  $V$

**2.** La vitesse  $\vec{V}_{/\mathcal{R}}$  doit maintenant être perpendiculaire aux bords du tapis (voir figure ci-dessous).

## CHAPITRE 1 – CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

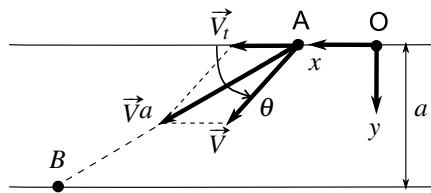


L'angle  $\beta$  que doit faire  $\vec{V}$  avec la normale aux bords du tapis est égal à  $\arcsin\left(\frac{V_t}{V}\right)$ . Le temps de traversée est  $t_2 = \frac{a}{V_{/\mathcal{R}}}$  soit  $t_1 = a/\sqrt{V^2 - V_t^2}$ . Cette trajectoire n'est possible que si  $V > V_t$ .

3. Dans le repère  $Oxy$  de la figure ci-dessous la vitesse  $\vec{V}_{/\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{V}_{/\mathcal{R}} = (V_t + V \cos \theta) \vec{u}_x + V \sin \theta \vec{u}_y$$

Le temps de traversée est donc  $t_3 = a/(V \sin \theta)$ . Le temps  $t_3$  est donc minimal pour  $\theta = \pi/2$  ce qui revient au cas de la première question.



### 1.3 Rameur et marcheur

1. La vitesse du rameur par rapport au référentiel fixe (lié au sol) est :  $\vec{v}_{/\text{sol}}(R) = \vec{u} + \vec{v}$ . Comme  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens, on en déduit que le rameur atteint  $B$  au bout d'un temps  $t_R = \frac{AB}{v+u}$ .

Quant au piéton, sa vitesse par rapport au référentiel fixe est :  $\vec{v}_{/\text{sol}}(P) = \vec{u}$ . Il met donc  $t_P = \frac{AB}{u}$  pour aller de  $A$  à  $B$ .

Comme  $u < u + v$ , on en déduit que le piéton met plus de temps que le rameur :  $t_P > t_R$ , ce qui est logique.

2. Au retour, la vitesse du rameur est :  $\vec{v}_{/\text{sol}}(R) = \vec{v} - \vec{u}$  et, pour revenir en  $A$ , il met un temps  $t'_R = \frac{AB}{|v-u|}$  soit une durée totale du parcours :  $t_R + t'_R = AB \left( \frac{1}{u+v} + \frac{1}{|v-u|} \right)$ .

Quant au piéton, sa vitesse par rapport au référentiel fixe est :  $\vec{v}_{/\text{sol}}(P) = -\vec{u}$ . Il met donc  $t'_P = \frac{AB}{u}$  et une durée totale du parcours  $t_P + t'_P = \frac{2AB}{u}$ .

On note qu'il faut que  $u > v$  pour que le rameur puisse revenir en  $A$ . Dans ces conditions :

$$(t_P + t'_P) - (t_R + t'_R) = 2AB \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+v} - \frac{1}{u-v} \right) = -\frac{2ABv^2}{(v^2-u^2)u}$$

qui est toujours négatif. Le piéton arrive toujours le premier. On remarque que si  $u - v$  est très faible, la durée du retour pour le rameur est très longue.

#### 1.4 Insecte sur l'aiguille des secondes

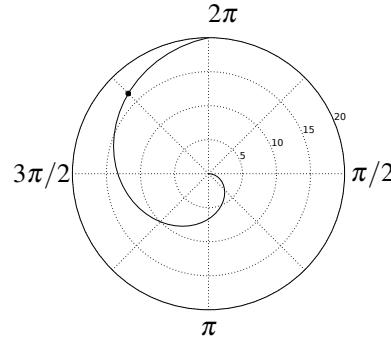
**1. a.** La distance  $r$  de l'insecte à l'origine croît linéairement avec le temps et doit être nulle à  $t = 15$  s, d'où  $r(t) = v(t - 15)$ . L'insecte parcourt 20 cm en 45 s, d'où  $v = \frac{20}{45} = 0,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Finalement :  $r(t) = 0,44(t - 15)$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  avec  $t$  exprimé en s.

La vitesse angulaire est constante d'où  $\theta = \alpha t + \beta$ . Mais  $\theta(15) = \pi/2$ , et  $\theta(60) = 2\pi$  donnent  $\theta = \frac{\pi}{30}t$  en rad pour  $t$  exprimé en s.

**b.** La trajectoire est une spirale. Les coordonnées polaires de l'insecte sont :

| $t$ (s) | $r$ (cm) | $\theta$ (rad) |
|---------|----------|----------------|
| 15      | 0        | $\pi/2$        |
| 30      | 6,7      | $\pi$          |
| 45      | 13,3     | $3\pi/2$       |
| 60      | 20       | $2\pi$         |



On en déduit l'allure de la trajectoire représentée ci-contre.

**c.** D'après les formules en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = 0,44\vec{u}_r + 0,047(t - 15)\vec{u}_\theta \quad \text{en } \text{cm} \cdot \text{s}^{-1},$$

et

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -4,9 \cdot 10^{-3}(t - 15)\vec{u}_r + 9,3 \cdot 10^{-2}\vec{u}_\theta \quad \text{en } \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}.$$

À  $t = 52,5$  s on trouve  $\|\vec{v}\| = 1,8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\|\vec{a}\| = 0,21 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**2.** Dans  $\mathcal{R}_A$  l'insecte a un mouvement rectiligne uniforme le long de  $(Ox)$  :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}_A} = v\vec{u}_X \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}_A} = \vec{0}.$$

Le point coïncident avec l'insecte à l'instant  $t$  a dans  $\mathcal{R}$  un mouvement circulaire uniforme de rayon  $r(t)$ . Dès lors :

$$\vec{v}_e(M) = r(t)\dot{\theta}\vec{u}_Y \quad \text{et} \quad \vec{a}_e(M) = -\dot{\theta}^2r(t)\vec{u}_X.$$

## CHAPITRE 1 – CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

La loi de composition des vitesses donne alors :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{\mathcal{R}_A} + \vec{v}_e = v \vec{u}_X + r(t) \dot{\theta} \vec{u}_Y = v \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

On retrouve la même expression que dans la question précédente. De même la loi de composition des accélérations donne :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{\mathcal{R}_A} + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{0} - \dot{\theta}^2 r(t) \vec{u}_X + 2\dot{\theta} \vec{u}_z \wedge v \vec{u}_X = -\dot{\theta}^2 r(t) \vec{u}_r + 2\dot{\theta} v \vec{u}_\theta.$$

Là aussi c'est la même expression. Il est remarquable que l'accélération dans  $\mathcal{R}$  ne soit due qu'à l'accélération d'entraînement et à l'accélération de Coriolis.

### 1.5 Deux stratégies pour ramasser les tickets sur un manège

**1.** On a clairement  $x_1(t) = v_1 t$ ,  $y_1(t) = z_1(t) = 0$ . Le point coïncident avec  $M$  a un mouvement circulaire uniforme de rayon  $x_1(t) = v_1 t$ , d'où  $\vec{v}_e(M) = \omega x_1(t) \vec{u}_{y1}$ . La loi de composition des vitesses donne alors :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v_1 \vec{u}_{x1} + \omega v_1 t \vec{u}_{y1}.$$

L'accélération d'entraînement vaut  $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 x_1(t) \vec{u}_{x1}$ . L'accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M) = 2\omega \vec{u}_{z1} \wedge v_1 \vec{u}_{x1} = 2\omega v_1 \vec{u}_{y1}$ . Comme  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$ , la loi de composition des accélérations donne :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -\omega^2 v_1 t \vec{u}_{x1} + 2\omega v_1 \vec{u}_{y1}.$$

**2.** On a facilement :  $x_1(t) = r_0 \cos(\omega' t)$ ,  $y_1(t) = r_0 \sin(\omega' t)$ ,  $z_1(t) = 0$ .

On en déduit :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = -r_0 \omega' \sin(\omega' t) \vec{u}_{x1} + r_0 \omega' \cos(\omega' t) \vec{u}_{y1}$ .

Le point coïncident décrit un cercle de rayon  $r_0$  à la vitesse angulaire  $\omega'$ , d'où :

$$\vec{v}_e(M) = \omega \vec{u}_z \wedge (x_1(t) \vec{u}_{x1} + y_1(t) \vec{u}_{y1}) = -r_0 \omega \sin(\omega' t) \vec{u}_{x1} + r_0 \omega \cos(\omega' t) \vec{u}_{y1}.$$

La loi de composition des vitesses donne alors :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = r_0 (\omega' + \omega) (-\sin(\omega' t) \vec{u}_{x1} + \cos(\omega' t) \vec{u}_{y1}).$$

L'accélération par rapport à  $\mathcal{R}_1$  est :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = -\omega'^2 \vec{OM} = -r_0 \omega'^2 (\cos(\omega' t) \vec{u}_{x1} + \sin(\omega' t) \vec{u}_{y1}),$$

l'accélération d'entraînement est donnée par :

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{OM} = -r_0 \omega^2 (\cos(\omega' t) \vec{u}_{x1} + \sin(\omega' t) \vec{u}_{y1}),$$

et l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c(M) = 2\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = -2\omega \omega' r_0 (\cos(\omega' t) \vec{u}_{x1} + \sin(\omega' t) \vec{u}_{y1}).$$

La loi de composition des accélérations donne alors :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= -r_0 (\omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega') (\cos(\omega' t) \vec{u}_{x1} + \sin(\omega' t) \vec{u}_{y1}) \\ &= r_0 (\omega + \omega')^2 (\cos(\omega' t) \vec{u}_{x1} + \sin(\omega' t) \vec{u}_{y1}). \end{aligned}$$

Si  $\omega' = -\omega$  alors le propriétaire est en fait immobile par rapport au sol. On devrait trouver  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$  et  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ , ce qui est bien le cas !

### 1.6 Avion confronté à un vent contraire

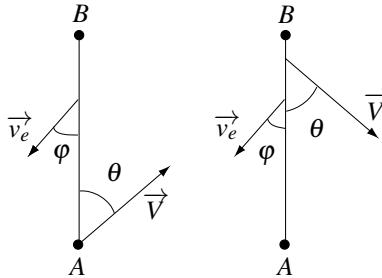
**a.** La vitesse  $\vec{V}$  est la vitesse de l'avion dans le référentiel de l'air et  $\vec{v}_e$  est la vitesse d'entraînement. La composition des vitesses donne :  $\vec{v}_a = \vec{V} + \vec{v}_e$ .

**b.** Pour qu'il se déplace en ligne droite, il faut que la projection de  $\vec{v}_a$  perpendiculairement à  $AB$  soit nulle, soit :

$$v_e \sin \varphi - V \sin \theta = 0$$

**c.** On a alors  $\sin \theta = v_e \sin \varphi / V$  soit  $\sin \theta = 0,043$  et  $\theta = 2,47^\circ$ .

**2. a.** Les vitesses à l'aller et au retour sont représentées sur la figure :



À l'aller, la projection de la vitesse  $\vec{v}_a$  sur  $AB$  (dans le sens de  $AB$ ) donne  $V \cos \theta - v_e \cos \varphi$  donc pour l'aller le temps mis est  $t_a = d / (V \cos \theta - v_e \cos \varphi)$ .

Pour le retour, la projection de la vitesse dans le sens de  $BA$  est  $V \cos \theta + v_e \cos \varphi$ . Le temps mis pour le retour  $t_r = d / (V \cos \theta + v_e \cos \varphi)$ . Le temps mis pour l'aller-retour est :

$$t_{ar} = d \left( \frac{1}{V \cos \theta - v_e \cos \varphi} + \frac{1}{V \cos \theta + v_e \cos \varphi} \right) = 2,28 \text{ h}$$

**b.** L'aller et retour sans vent correspondrait à  $v_e = 0$  et  $\theta = 0$ . La durée mise serait  $t'_{ar} = 2d/V = 2,24$  h soit 2,4 minutes de différence. Si l'on compare la durée de l'aller avec et sans vent on trouve 1,28 h et 1,12 h donc l'avion met plus de temps car il est contre le vent. Pour le retour la durée sans vent est la même qu'à l'aller (1,12 h) et la durée avec vent est 1 h donc on ne rattrape pas au retour tout le temps perdu à l'aller.

**3.** Il faut calculer les durées  $t_{CD}$  et  $t_{EB}$  en utilisant les résultats de la question précédente. La durée  $t_{CD}$  correspond à la durée du retour (sens du vent) et  $t_{EB}$  à celle de l'aller (contre le vent). On ne connaît pas la distance  $CD = EB$  que l'on note  $d'$ .

On doit calculer le nouvel angle  $\theta = \arcsin(v_e \sin \varphi / V)$  soit  $\theta = 4,94^\circ$ . On peut déterminer le rapport  $r = t_{CD}/t_{EB}$  :

$$r = \frac{t_{CD}}{t_{EB}} = \frac{V \cos \theta - v_e \cos \varphi}{V \cos \theta + v_e \cos \varphi} = 0,39$$

On connaît d'autre part  $t_{CD} + t_{EB} = 120$  s car chaque virage prend 1 minute et l'ensemble du trajet prend 4 minutes. On en déduit  $t_{EB} = 86,3$  s et  $t_{CD} = 33,7$  s. Le virage  $DE$  doit être amorcé 93,7 s après le premier passage en  $B$ .

On peut calculer la distance  $d' = (V \cos \theta + v_e \cos \varphi)t_{EB}$ , soit  $d' = 6,65$  km.



# 2

# Dynamique dans un référentiel non galiléen

Ce chapitre est consacré aux conséquences du caractère non galiléen du référentiel de travail sur les lois permettant l'étude du mouvement des point matériels. Comme dans le chapitre précédent, on s'intéressera uniquement à des référentiels en translation ou en rotation autour d'un axe fixe, par rapport à un référentiel galiléen. On envisagera dans les deux cas des exemples de situations que l'on étudiera d'un point de vue dynamique et/ou d'un point de vue énergétique.

## 1 Référentiels galiléens

Le principe d'inertie (ou première loi de Newton) vu en première année postule l'existence de référentiels particuliers, les **référentiels galiléens**, dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Il est donc naturel de chercher expérimentalement de tels référentiels qui sont ceux pour lesquels les lois de Newton s'appliquent sous la forme vue en première année.

Comme on le verra plus loin, la recherche d'un référentiel galiléen est loin d'être évidente. En revanche, on peut obtenir aisément une infinité de tels référentiels dès qu'on en connaît un. En effet, soient  $\mathcal{R}$  un référentiel galiléen et  $\mathcal{R}'$  un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{V}$  constante par rapport à  $\mathcal{R}$ . Un point matériel  $M$  isolé est animé, du fait du principe d'inertie, d'un mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse constante notée  $\vec{v}_0$  par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . La loi de composition des vitesses vue au chapitre précédent permet d'écrire :  $\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = \vec{v}_0 - \vec{V}$ . Or  $\vec{v}_0$  et  $\vec{V}$  sont constantes : on en déduit que  $\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$  est une constante. Si on postule l'invariance des forces par changement de référentiels, le point étudié constitue un système isolé également dans  $\mathcal{R}'$ . Le mouvement de ce point matériel isolé est rectiligne uniforme dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , donc ce référentiel est galiléen.

Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

En prolongeant le même raisonnement on montre facilement que :

- si la translation n'est pas rectiligne ou pas uniforme,  $\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen ;
- un référentiel en rotation autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen n'est jamais galiléen.

On va maintenant s'intéresser à la forme que l'on peut donner aux lois de la mécanique dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  qui n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen.

## 2 Référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen

Dans ce paragraphe le référentiel  $\mathcal{R}'$ , d'origine  $O'$ , est en translation par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , d'accélération  $\vec{a}_e = \vec{a}_{/\mathcal{R}}(O')$ .

On étudie dans ce référentiel le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , soumis à un ensemble de forces  $\vec{f}_k$ ,  $k$  variant de 1 à  $N$ .

### 2.1 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen

Lorsqu'on a étudié les changements de référentiels dans le chapitre précédent d'un point de vue purement cinématique, les deux référentiels envisagés étaient *a priori* interchangeables. Ce n'est plus le cas : le seul dans lequel on sait écrire le principe fondamental de la dynamique est le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Cette équation s'écrit :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \sum_{i=k}^N \vec{f}_k. \quad (2.1)$$

La loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e(M) = \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e;$$

la relation (2.1) devient :

$$m(\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k,$$

ce qui permet d'écrire :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k - m \vec{a}_e. \quad (2.2)$$

Le terme :  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$  est homogène à une force, on l'appelle **force d'inertie d'entraînement**. La relation (2.2) a alors la même forme que celle que l'on peut attendre du principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$ , à condition d'ajouter dans le bilan des forces la force d'inertie d'entraînement.

Dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  en **translation** par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , le **principe fondamental de la dynamique** s'écrit :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k + \vec{f}_{ie} \quad (2.3)$$

où  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$  est la **force d'inertie d'entraînement**,  $\vec{a}_e$  étant l'accélération d'entraînement.

### Remarque

La force d'inertie d'entraînement n'est pas due à des interactions comme les forces  $\vec{f}_k$ . De plus, elle dépend du référentiel contrairement aux forces habituelles. Ce n'est donc pas vraiment une force. On la qualifie parfois de pseudo-force. Cependant elle peut modifier le mouvement du point dans un référentiel non galiléen, au même titre qu'une vraie force !

Si  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , alors  $\vec{a}_e = \vec{0}$ . La force d'inertie d'entraînement est alors nulle, et le principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit :  $m\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k$ , ce qui montre que  $\mathcal{R}'$  est galiléen. On retrouve la conclusion du paragraphe 1.

## 2.2 Autres lois de la dynamique dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen

Dans le cours de première année le principe fondamental de la dynamique a été utilisé pour établir d'autres lois. Comme il s'applique dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  à condition d'ajouter dans le bilan des forces la force d'inertie d'entraînement, on en déduit que les autres lois de la mécanique s'appliquent aussi dans  $\mathcal{R}'$  à cette même condition.

### a) Théorème du moment cinétique dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen

Le théorème du moment cinétique a été démontré en première année à partir du principe fondamental de la dynamique. Il s'applique en tout point  $A$  fixe dans le référentiel. Il fait intervenir le moment cinétique du point matériel au point  $A$  :

$$\vec{L}_{A/\mathcal{R}'} = m\vec{AM} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M),$$

et, pour chaque force  $\vec{f}$ , son moment pris en  $A$  :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \vec{AM} \wedge \vec{f}.$$

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen, le **théorème du moment cinétique** s'écrit :

$$\left( \frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_k) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}), \quad (2.4)$$

où  $A$  est un point fixe quelconque de  $\mathcal{R}'$ .

Il faut bien retenir la présence au second membre de (2.4) du moment, pris en  $A$ , de la force d'inertie d'entraînement.

**b) Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen**

La loi de la puissance cinétique se démontre à partir du principe fondamental de la dynamique. Elle fait intervenir l'énergie cinétique du point matériel :

$$E_{c/\mathcal{R}'} = \frac{1}{2}mv_{\mathcal{R}'}^2,$$

et, pour chaque force  $\vec{f}$  s'appliquant au point matériel, sa puissance :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}'}}(M).$$

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen, la **loi de la puissance cinétique** s'écrit :

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}'}(M)}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_k) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_{ie}). \quad (2.5)$$

En multipliant cette équation par  $dt$  on obtient le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$  qui fait intervenir, pour chaque force, le travail élémentaire entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}) dt = \vec{f} \cdot \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}'}(M)} dt = \vec{f} \cdot \overrightarrow{d\ell_M},$$

où  $\overrightarrow{d\ell_M}$  est le déplacement élémentaire de  $M$  entre ces deux instants.

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen, le **théorème de l'énergie cinétique** entre deux instants très proches s'écrit :

$$dE_{c/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \delta W(\vec{f}_k) + \delta W(\vec{f}_{ie}). \quad (2.6)$$

Enfin, en intégrant cette relation entre un instant  $t_1$  où le point matériel  $M$  est en  $A$  et un instant  $t_2$  où il est en  $B$ , on obtient une autre expression du théorème de l'énergie cinétique faisant apparaître, pour chaque force  $\vec{f}$ , son travail entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , ou entre les points  $A$  et  $B$  :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot \overrightarrow{d\ell_M} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}) dt.$$



$W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$  dépend *a priori* de la trajectoire de  $M$  entre les points  $A$  et  $B$  et de la loi horaire du mouvement.

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen, le **théorème de l'énergie cinétique** entre l'instant où il passe en A et l'instant où il passe en B s'écrit :

$$\Delta E_{c/\mathcal{R}'} = E_{c/\mathcal{R}'}(B) - E_{c/\mathcal{R}'}(A) = \sum_{k=1}^N W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_k) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{ie}). \quad (2.7)$$

Les équations (2.5), (2.6) et (2.7) contiennent toutes un terme correspondant à la force d'inertie d'entraînement. Dans un référentiel en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen, la force d'inertie d'entraînement peut faire varier l'énergie cinétique du point matériel aussi bien qu'une vraie force.

## 2.3 Exemples d'études dans un référentiel en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen

### a) Exemple d'étude qualitative

Soit un passager assis dans un train. Un verre d'eau est posé sur la tablette excessivement glissante devant lui. Le train est initialement à l'arrêt et démarre en accélérant. Le passager se sent plaqué contre le siège mais reste immobile par rapport au train et il constate que le verre glisse sur la tablette en se rapprochant de lui.

On peut analyser cette situation de deux points de vue : celui d'un observateur sur le quai et celui du passager.

**Observation depuis le quai :** Pour un observateur immobile sur le quai, le passager, immobile par rapport au train, accélère avec la même accélération que celle du train : il est donc soumis à une force :  $\vec{f} = m\vec{a}(M) = m\vec{a}_{/\text{quai}}(\text{train})$ . Cette force est exercée par le siège du passager.

Au contraire pour l'observateur du quai le verre semble immobile : il est donc soumis à une résultante des forces nulle. Les seules forces qui s'exercent sur le verre sont son poids et la réaction de la table, toutes les deux verticales. Pour un observateur sur le quai de la gare, le verre ne subit aucune force horizontale : c'est la tablette qui glisse sous lui.

**Observation dans le train :** On se place maintenant du point de vue du passager dans le train. Il ressent la force que le dossier du siège exerce sur lui  $\vec{f} = m\vec{a}_{/\text{quai}}(\text{train}) = m\vec{a}_e$  car  $\vec{a}_e = \vec{a}_{/\text{quai}}(\text{train})$ . Le passager est immobile dans le référentiel lié au train, la résultante des forces qui s'exercent sur lui doit être nulle : il subit donc la force  $-\vec{f}$  qui le plaque contre le dossier, c'est-à-dire la force d'inertie  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ .

Pour le passager dans le train, le verre se déplace dans le sens inverse du train et finit par tomber de la tablette... Le passager peut analyser la situation en disant que le verre est soumis à la force d'inertie d'entraînement, dirigée vers l'arrière du train. Cette force a donc bien un effet réel sur le mouvement du verre dans le train !

Si le train ralentit, la force d'inertie d'entraînement change de sens. Le passager et le verre sont attirés vers l'avant du train.

### b) Présentation de la méthode de calcul

Dans chaque exemple suivant on va calculer le mouvement par rapport à un référentiel en translation accélérée. En pratique, deux méthodes sont envisageables :

- on traite le problème dans le référentiel galiléen puis on effectue le changement de référentiel pour obtenir le mouvement dans le référentiel non galiléen,
- ou bien on applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen en faisant intervenir les forces d'inertie.



Quand une des deux approches est choisie, il faut s'y tenir et ne pas mélanger les deux !

Dans les exemples qui suivent on appliquera toujours la deuxième méthode, parce que l'étude du mouvement sera plus simple dans le référentiel non galiléen.

### c) Premier exemple : balle dans un train

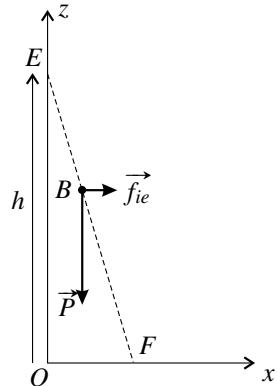
On reprend le deuxième exemple de la page 22 (paragraphe 1.1 du chapitre 1) et on se propose de déterminer la trajectoire de la balle dans le référentiel du wagon, telle que la voit l'enfant.

Le système étudié est la balle assimilée à un point matériel  $B$  confondu avec son centre de masse. L'étude est menée dans le référentiel  $\mathcal{R}_T$  lié au train qui freine, avec l'accélération :

$$\vec{a} = -a\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

La balle est soumise à son poids :  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ .  $\mathcal{R}_T$  n'est pas un référentiel galiléen car il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel lié au sol que l'on considère comme galiléen. Dans  $\mathcal{R}_T$ , il faut prendre en compte la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a} = ma\vec{u}_x.$$



**Figure 2.1 – Bilan des forces dans le référentiel du train**

**Application du principe fondamental de la dynamique :** Le principe fondamental de la dynamique pour la balle dans  $\mathcal{R}_T$  s'écrit :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(B) = \vec{P} + \vec{f}_{ie}.$$

En projection sur  $\vec{u}_x$  et sur  $\vec{u}_z$ , on obtient, après simplification par  $m$  :

$$\begin{cases} \ddot{x} = a \\ \ddot{z} = -g. \end{cases} \quad (2.8)$$

Les équations (2.8) s'intègrent en tenant compte des conditions initiales suivantes : à  $t = 0$  la

balle est en  $E$  point de coordonnées  $(x = 0, z = h)$  et a une vitesse initiale. Il vient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}at^2 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h. \end{cases}$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire, on élimine le temps entre les deux coordonnées et on obtient :

$$z(x) = -\frac{g}{a}x + h.$$

La trajectoire est donc une droite, de pente  $-\frac{g}{a}$ . Elle atteint le sol au point  $F$  de coordonnées  $(x = \frac{ah}{g}, z = 0)$ .

**Application du théorème de l'énergie cinétique** On peut calculer la norme de la vitesse de la balle quand elle arrive en  $F$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_{c/\mathcal{R}_T} = W_{E \rightarrow F}(\vec{P}) + W_{E \rightarrow F}(\vec{f}_{ie}).$$

Le travail du poids entre deux points est égal à  $mg$  multiplié par la différence d'altitude entre ces deux points (voir cours de première année) ; ainsi entre  $E$  et  $F$  il vaut :

$$W_{E \rightarrow F}(\vec{P}) = mgh.$$

Le travail de la force d'inertie d'entraînement est :

$$W_{E \rightarrow F}(\vec{f}_{ie}) = \int_E^F \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{\ell}_M = \int_E^F (ma\vec{u}_x) \cdot (dx\vec{u}_x + dz\vec{u}_z) = \int_E^F madx = ma(x_F - x_E) = \frac{ma^2h}{g}.$$

La variation d'énergie cinétique est :  $\Delta E_{c/\mathcal{R}_T} = E_{c/\mathcal{R}_T}(F) - E_{c/\mathcal{R}_T}(E) = \frac{1}{2}mv^2(F)$ , puisque la vitesse initiale est nulle. Il vient donc :

$$v(F) = \sqrt{2gh + 2\frac{a^2h}{g}}.$$

Cette vitesse contient un terme dépendant de l'accélération  $a$  qui provient du travail de la force d'inertie d'entraînement.

#### d) Deuxième exemple : pendule simple dont l'extrémité oscille

On fabrique un pendule simple en accrochant un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à un fil sans masse que l'on attache à un anneau  $A$  coulissant le long de l'axe ( $Ox$ ). On donne à  $A$  un mouvement oscillatoire de loi horaire :  $x_A = x_0 \sin(\omega t)$  ; le pendule oscille alors dans le plan vertical ( $Oxy$ ).

On souhaite calculer la loi horaire  $\theta(t)$  où  $\theta$  est l'angle entre le fil et la verticale.

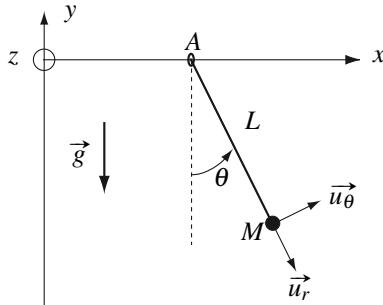


Figure 2.2 – Pendule simple dont l’extrémité oscille.

**Application du théorème du moment cinétique** Le pendule simple, accroché à un point fixe, est un système qui a été étudié dans le cours de première année. On a obtenu l’équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique au point d’attache (voir cours de première année). Pour se ramener à cette situation, on choisit de travailler dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à  $A$  dont les axes sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ . Le point  $A$  est fixe dans  $\mathcal{R}'$ , on peut donc appliquer à  $M$  le théorème du moment cinétique en  $A$  dans  $\mathcal{R}'$  (cela ne serait pas possible dans  $\mathcal{R}$  car, dans ce référentiel  $A$ , se déplace). Mais  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen donc il faut ajouter au bilan des forces la force d’inertie d’entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\ddot{x}_A \vec{u}_x.$$

Le point  $M$  est soumis à son poids :  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$  et à la tension du fil :  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ . Le théorème du moment cinétique en  $A$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , s’écrit :

$$\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) \quad (2.9)$$

La droite d’action de la tension du fil passe par le point  $A$  donc son moment en  $A$  est nul. Par ailleurs :

$$\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}(M) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = (L\vec{u}_r) \wedge (mL\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z,$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = (L\vec{u}_r) \wedge (mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta) = -mgL\sin\theta\vec{u}_z,$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) = \vec{AM} \wedge \vec{f}_{ie} = (L\vec{u}_r) \wedge (-m\ddot{x}_A \sin\theta\vec{u}_r - m\ddot{x}_A \cos\theta\vec{u}_\theta) = -m\ddot{x}_A L \cos\theta \vec{u}_z.$$

Le théorème du moment cinétique projeté sur  $\vec{u}_z$  donne l’équation du mouvement :

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta + m\omega^2 x_0 \sin(\omega t)L\cos\theta, \quad (2.10)$$

car  $\ddot{x}_A = -\omega^2 \sin(\omega t)$ . Pour les petits mouvements,  $\theta \ll 1$  radian, et au premier ordre en  $\theta$ ,  $\sin\theta \simeq \theta$  et  $\cos\theta \simeq 1$ . L’équation du mouvement se simplifie en :

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\theta + m\omega^2 x_0 L \sin(\omega t), \quad (2.11)$$

ou encore, en posant :  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$  :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{x_0}{L} \omega^2 \sin(\omega t). \quad (2.12)$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$  soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . La solution, pour les conditions initiales :  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ , et en supposant  $\omega \neq \omega_0$ , est :

$$\theta(t) = \frac{x_0 \omega^2}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

L'amplitude des oscillations dépend de  $\omega$  et elle a une singularité si  $\omega = \omega_0$  : le dénominateur s'annule. Ceci correspond à un phénomène de résonance (voir cours de première année).

**Application du théorème de la puissance cinétique** Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}'}(M)}{dt} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{P}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{T}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_{ie}).$$

Le poids dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(\vec{P}) = -m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OM} + \text{constante} = -mgL\cos\theta + \text{constante}.$$

Sa puissance est :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{P}) = -\frac{dE_p(\vec{P})}{dt} = -mgL\dot{\theta}\sin\theta.$$

La tension du fil est toujours orthogonale au vecteur vitesse du point  $M$  dans  $\mathcal{R}'$ , donc elle ne travaille pas. La puissance de la force d'inertie d'entraînement est :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_{ie}) = \vec{f}_{ie} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = (L\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot (-m\ddot{x}_A \vec{u}_x) = -m\ddot{x}_A L\dot{\theta}\cos\theta.$$

Il vient donc :

$$mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgL\sin\theta\dot{\theta} - m\ddot{x}_A L\cos\theta\dot{\theta} = -mgL\sin\theta\dot{\theta} + mx_0 L\omega^2 \sin(\omega t)\cos\theta\dot{\theta}.$$

On retrouve, après division par  $\dot{\theta}$ , l'équation du mouvement déjà obtenue par application du théorème du moment cinétique.

## 2.4 Cas d'un référentiel en translation rectiligne uniformément accélérée par rapport à un référentiel galiléen

On considère dans ce paragraphe le cas particulier où  $\mathcal{R}'$  est en translation **uniformément accélérée** par rapport à un référentiel galiléen :

$\vec{a}_e$  est un vecteur constant.

Dans ce cas, il y a une analogie formelle entre :  $\vec{P} = m\vec{g}$  et  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ . Tout point matériel est soumis à une force :

$$\vec{P} + \vec{f}_{ie} = m(\vec{g} - \vec{a}_e),$$

et il est impossible de distinguer dans cette force le poids et la force d'inertie d'entraînement. Tout ce passe comme si l'accélération de la pesanteur était non pas  $\vec{g}$  mais :

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_e.$$

Ainsi, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

- un fil à plomb ne donne pas la verticale mais la direction de  $\vec{g}'$ ,
- une balle lâchée sans vitesse initiale ne tombe pas verticalement mais dans la direction de  $\vec{g}'$ ,
- la surface libre d'un liquide n'est pas horizontale, mais perpendiculaire à  $\vec{g}'$ .

 Il découle aussi de l'analogie entre la force d'inertie d'entraînement et le poids que la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{p,ie} = m\vec{a}_e \cdot \overrightarrow{OM} + \text{constante} \quad , \quad (2.13)$$

analogue à l'énergie potentielle de pesanteur.

### 3 Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

Dans ce paragraphe le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en rotation autour de l'axe fixe ( $Oz$ ) d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . Le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est donc :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}_z.$$

On étudie dans ce référentiel le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , soumis à un ensemble de forces  $\vec{f}_k$ ,  $k$  variant de 1 à  $N$ .

#### 3.1 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

On reprend la même démarche que dans la partie précédente. La loi de composition des accélérations s'écrit maintenant :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M),$$

avec  $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{H} \vec{M}$ ,  $H$  étant le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe ( $Oz$ ), et  $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$ . La relation (2.1) s'écrit :

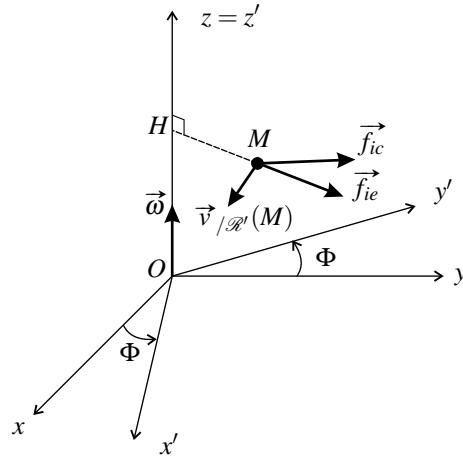
$$m(\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k,$$

ce qui permet d'exprimer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  sous la forme :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M) \quad (2.14)$$

On voit de nouveau apparaître la **force d'inertie d'entraînement** :  $\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M)$ . Elle est accompagnée d'un terme supplémentaire :  $\vec{f}_{ic}(M) = -m\vec{a}_c(M)$ , que l'on appelle **force d'inertie de Coriolis**.

À nouveau, la relation 2.14 a la même forme que celle que l'on peut attendre du principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$ , à condition d'ajouter dans le bilan des forces la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Ces forces sont illustrées sur la figure 2.3.



**Figure 2.3 – Forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis**

Dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  en **rotation uniforme** autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k + \vec{f}_{ie}(M) + \vec{f}_{ic}(M) \quad (2.15)$$

où  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)$  est la **force d'inertie d'entraînement** et  $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c(M)$  la **force d'inertie de Coriolis**.

### 3.2 Forces d'inertie

Comme dans le cas d'un référentiel en translation, on voit apparaître dans un référentiel en rotation des forces d'inertie, qui, sans être dues à des interactions, ont un effet sur le mouvement des objets.

La force d'inertie d'entraînement est :  $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM} = m\omega^2 r \vec{u}_r$  en coordonnées cylindriques. Elle est dirigée selon  $\vec{u}_r$  et tend à éloigner le point matériel radialement de l'axe de rotation. C'est une **force axifuge** appelée le plus souvent, dans le langage courant, **force centrifuge**.

La force d'inertie de Coriolis est :  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$ . Elle est perpendiculaire à la vitesse par rapport au référentiel tournant donc tend à incurver les trajectoires. C'est cette force qui est à l'origine de la déviation de la trajectoire du téléphone dans l'exemple présenté au début du chapitre 1.

### 3.3 Autres lois de la dynamique dans un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

Comme dans la partie précédente, on peut appliquer les autres lois de la mécanique dans  $\mathcal{R}'$  à condition d'ajouter au bilan des forces « vraies » la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis.

#### a) Théorème du moment cinétique dans un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen

Dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en rotation par rapport à un axe fixe de  $\mathcal{R}$ , le **théorème du moment cinétique** s'écrit de la même façon que dans  $\mathcal{R}$  en tenant compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$\left( \frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_k) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic}) \quad (2.16)$$

où A est un point fixe de  $\mathcal{R}'$ .

#### b) Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen

La force de Coriolis a la particularité d'être perpendiculaire à la vitesse dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , par conséquent :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_{ic}) = \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}'} = 0.$$

La force de Coriolis a une puissance nulle donc elle ne fournit aucun travail.

#### Remarque

Il en est exactement de même pour la force exercée par un champ magnétique  $\vec{B}$  sur un point matériel portant une charge  $q$  :  $\vec{f} = q\vec{v}(M) \wedge \vec{B}$ .

Ainsi, il n'y a aucun terme correspondant à la force de Coriolis dans la loi de la puissance cinétique ou le théorème de l'énergie cinétique.

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen, la **loi de la puissance cinétique** s'écrit :

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}'}(M)}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_k) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}_{ie}), \quad (2.17)$$

le **théorème de l'énergie cinétique** entre deux instants très proches s'écrit :

$$dE_{c/\mathcal{R}'} = \sum_{k=1}^N \delta W(\vec{f}_k) + \delta W(\vec{f}_{ie}), \quad (2.18)$$

et le **théorème de l'énergie cinétique** entre l'instant où il passe en  $A$  et l'instant où il passe en  $B$  s'écrit :

$$\Delta E_{c/\mathcal{R}'} = E_{c/\mathcal{R}'}(B) - E_{c/\mathcal{R}'}(A) = \sum_{k=1}^N W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_k) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{ie}). \quad (2.19)$$

La force d'inertie d'entraînement peut faire varier l'énergie cinétique du point matériel aussi bien qu'une vraie force.

### 3.4 Énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement

Le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{f}_{ie}) &= -m\vec{a}_e(M) \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) dt = m\omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot \left( \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} dt \\ &= m\omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot d\overrightarrow{HM} = -d\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2\right), \end{aligned}$$

en notant  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation. Il apparaît que la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m\omega^2 HM^2 + \text{constante} . \quad (2.20)$$

#### Remarque

On notera l'analogie avec l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de masse  $m$  et pulsation  $\omega_0$  :  $E_{p,osc} = +\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ . Il y a cependant une différence très importante : le signe. En effet, la force s'exerçant sur l'oscillateur est une force de *rappel* dirigée vers la position d'équilibre tandis que la force d'inertie est axifuge.

### 3.5 Exemples d'études dans un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

#### a) Premier exemple : mouvement d'un objet lancé sur un plateau tournant

On revient sur l'exemple page 22 (paragraphe 1.2 du chapitre 1).

**Analyse qualitative** Les forces qui s'exercent sur le téléphone dans le référentiel tournant avec le plateau sont : le poids  $\vec{P}$  et la réaction  $\vec{R}$  du plateau sont toutes les deux verticales (car il n'y a pas de frottement), elles s'annulent puisque le téléphone se déplace dans un plan horizontal. Il ne peut être dévié que par les forces d'inertie. La force d'inertie d'entraînement est dirigée selon  $\vec{AM}$  donc elle ne peut expliquer le fait que le téléphone n'aille pas en ligne droite de  $B$  vers  $A$ . C'est la force d'inertie de Coriolis qui fait dévier le téléphone. À l'instant initial, la vitesse du téléphone est selon  $-\vec{u}_x'$ , le vecteur rotation du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  selon  $\vec{u}_z$ , donc la force d'inertie de Coriolis est initialement selon  $\vec{u}_y'$ , ce qui est conforme à la trajectoire du téléphone représentée sur la figure 2.4.

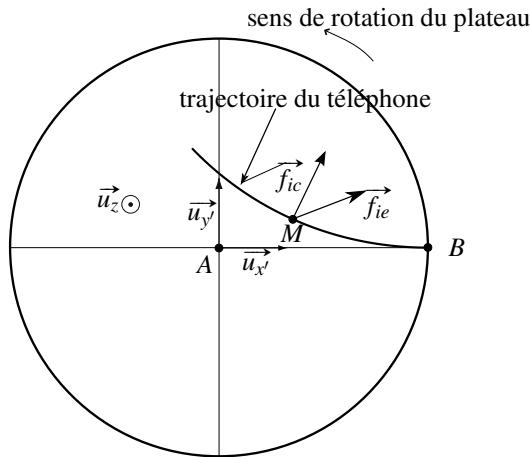


Figure 2.4 – Trajectoire du téléphone sur le plateau tournant

**Mise en équations du mouvement** On étudie le mouvement du téléphone dans le référentiel  $\mathcal{R}_P$ , tournant avec le plateau, à la vitesse angulaire  $\omega$ . Le téléphone est assimilé à point matériel  $M$ , de masse  $m$ , que l'on repère par ses coordonnées cartésiennes dans le plan du plateau :  $\vec{AM} = x'(t)\vec{u}_x + y'(t)\vec{u}_y$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au téléphone dans le référentiel  $\mathcal{R}_P$  du plateau s'écrit :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_P}(M) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic},$$

avec  $\vec{f}_{ie} = m\omega^2\vec{AM}$  et  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{/\mathcal{R}_P}(M)$ .  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  sont des forces verticales. En projec-

tion sur les vecteurs  $\vec{u}_{x'}$  et  $\vec{u}_{y'}$ , on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = m\omega^2 x' + 2m\omega\dot{y}' \\ m\ddot{y}' = m\omega^2 y' - 2m\omega\dot{x}' \end{cases}$$

Il s'agit de deux équations différentielles couplées : elles font toutes les deux apparaître  $x'(t)$  et  $y'(t)$ . Une résolution numérique avec les conditions initiales :  $x'(0) = R$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $\dot{x}'(0) = -v_0$  et  $\dot{y}'(0) = 0$  donne la trajectoire représentée sur la figure 2.4. Une résolution analytique est cependant possible, bien qu'un peu technique et fait apparaître une spirale d'Archimède dont seul le début apparaît sur la figure.

### b) Deuxième exemple : manège

La figure 2.5 représente la modélisation d'un manège dans lequel des sièges sont suspendus par des chaines : quand le manège est au repos les chaines sont verticales et quand il tourne elles s'inclinent. Le point matériel  $M$ , de masse  $m$  représente un passager ; il est relié à un bâti tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  constante par une chaîne tendue  $AM$ . Le point  $A$  de suspension de la chaîne est situé à distance  $R$  de l'axe de rotation et on suppose pour simplifier les expressions que la longueur de la chaîne est aussi égale à  $R$ .

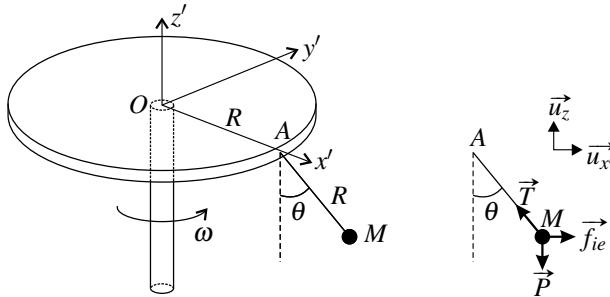


Figure 2.5 – Modélisation d'un manège.

Le repère  $(O; x', y', z)$  est lié au manège, l'axe de rotation étant  $(Oz)$ . On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au manège qui est en rotation autour de l'axe fixe  $(Oz)$  par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen. On fait l'hypothèse que le point  $M$  reste dans le plan  $(Azx')$  et on se propose de déterminer la valeur l'angle  $\theta$  quand  $M$  est à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$ .  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la tension  $\vec{T}$  de la chaîne. Pour appliquer les lois de la mécanique dans  $\mathcal{R}'$  il faut ajouter la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Comme on cherche une position d'équilibre de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$ , on n'a pas besoin de calculer la force d'inertie de Coriolis parce qu'elle est nulle dès que  $\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = \vec{0}$ . La force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_{x'},$$

où  $r$  est la distance entre  $M$  et l'axe de rotation  $(Oz)$ , soit :  $r = R + R \sin \theta$ .

**Application du principe fondamental de la dynamique** Le principe fondamental de la dynamique à l'équilibre s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie},$$

soit, en projection sur  $\vec{u}_x'$  et  $\vec{u}_z$  :

$$0 = m\omega^2 R(1 + \sin \theta_{\text{eq}}) - T \sin \theta_{\text{eq}} \quad \text{et} \quad 0 = -mg + T \cos \theta_{\text{eq}}.$$

La deuxième équation donne  $T = \frac{mg}{\cos \theta_{\text{eq}}}$ ; en reportant ceci dans la première équation on obtient :

$$m\omega^2 R(1 + \sin \theta_{\text{eq}}) - mg \tan \theta_{\text{eq}} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\omega^2 R}{g}(1 + \sin \theta_{\text{eq}}) = \tan \theta_{\text{eq}}.$$

Cette équation ne peut être résolue analytiquement; on peut utiliser une méthode graphique. On montre qu'il y a une solution comprise entre 0 et  $\pi/2$ .

**Utilisation de l'énergie potentielle** La recherche de position d'équilibre peut aussi se faire en utilisant l'énergie potentielle car le point matériel  $M$  est, dans  $\mathcal{R}'$ , un *système conservatif*. En effet :

- la chaîne ayant une longueur constante, la tension  $\vec{T}$  ne travaille pas,
- le poids dérive de l'énergie potentielle :  $-m\vec{g} \cdot \vec{AM} = -mgR \cos \theta$ ,
- la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle :  $-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ ,
- la force de Coriolis ne travaille pas.

L'énergie potentielle de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  est :

$$E_p = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta)^2.$$

La position d'équilibre  $\theta_{\text{eq}}$  est telle que

$$\left( \frac{dE_p}{d\theta} \right)_{\theta_{\text{eq}}} = 0 \quad \text{soit} \quad mgR \sin \theta_{\text{eq}} - m\omega^2 R(1 + \sin \theta_{\text{eq}}) \cos \theta_{\text{eq}} = 0.$$

On retrouve l'équation obtenue par application du principe fondamental de la dynamique. On peut aussi faire une étude graphique en traçant l'énergie potentielle en fonction de  $\theta$ .

La représentation graphique de la figure 2.6 montre qu'il y a une position d'équilibre  $\theta_{\text{eq}}$  entre 0 et  $\pi/2$ : c'est la valeur pour laquelle l'énergie potentielle passe par un extremum (ces points sont marqués sur les courbes). Comme il s'agit d'un minimum, c'est une position d'équilibre *stable* (ce qui est souhaitable pour le passager du manège). On observe aussi que  $\theta_{\text{eq}}$  se rapproche de  $\pi/2$  quand la vitesse de rotation  $\omega$  augmente ce qui est intuitif : la force centrifuge tirant  $M$  vers l'extérieur augmente avec  $\omega$ .

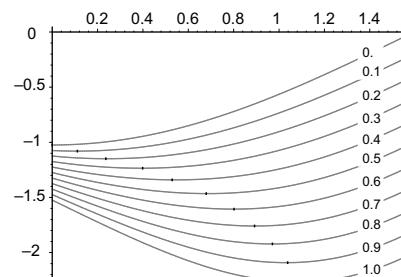


Figure 2.6 –  $\frac{E_p}{mgR}$  en fonction de  $\theta$ ; la valeur de  $\omega^2 R/g$  est indiquée sur chaque courbe.

### c) Troisième exemple : perle sur un cerceau en rotation

Une perle  $M$ , assimilée à un point matériel de masse  $m$ , est enfilée sur un cerceau de centre  $C$  et de rayon  $a$ . La perle se déplace sans frottement sur le cerceau. Le cerceau, situé dans un plan vertical, est entraîné par un moteur qui le fait tourner à vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un diamètre vertical.

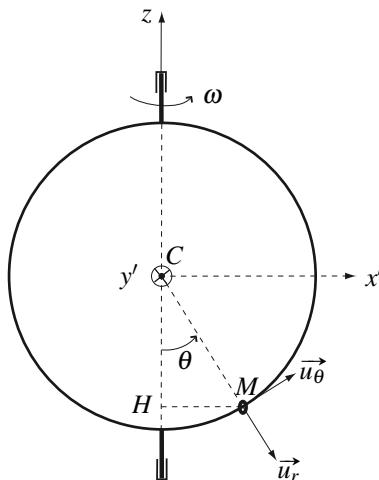


Figure 2.7 – Perle sur un cerceau tournant.

On étudie le mouvement de la perle dans le référentiel  $\mathcal{R}_C$  lié au cerceau, en rotation autour de l'axe ( $Cz$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$  par rapport au référentiel du laboratoire, galiléen.

La position de la perle sur le cerceau est repérée par l'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $-\vec{u}_z$  et  $\vec{CM}$ . Les forces exercées sur la perle sont son poids :  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  et la réaction du cerceau, orthogonale au cerceau :  $\vec{R} = R_r\vec{u}_r + R_y\vec{u}_y$ .



La réaction du support a *a priori* deux composantes, l'une selon  $\vec{u}_r$ , l'autre selon  $\vec{u}_{y'}$ , puisque la tangente au support en  $P$  est uniquement dirigée par  $\vec{u}_\theta$ .

Le référentiel d'étude n'étant pas galiléen, il faut ajouter à ces forces les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Le mouvement du point coïncident du point  $M$  est un mouvement circulaire de centre  $H$ , de rayon  $a \sin \theta$ , de vitesse angulaire  $\omega$ . L'accélération d'entraînement est donc :

$$\vec{a}_e = -a \sin \theta \omega^2 \vec{u}_x$$

et la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = ma \sin \theta \omega^2 \vec{u}_x$$

La force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_C} = -2m(\omega \vec{u}_z) \wedge (a \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = -2m\omega a \cos \theta \dot{\theta} \vec{u}_y$$

**Application du principe fondamental de la dynamique** Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la perle dans  $\mathcal{R}_C$  s'écrit :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_C}(M) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut éliminer la force inconnue, à savoir la réaction du support. Il suffit donc pour cela de projeter cette relation sur  $\vec{u}_\theta$ , ce qui donne :

$$ma\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + ma \sin \theta \omega^2 \cos \theta,$$

ou encore, en posant  $\omega_0 = \sqrt{g/a}$  :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \theta \right). \quad (2.21)$$

C'est une équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  que l'on peut résoudre numériquement. On peut ensuite calculer la force exercée par le cerceau sur la perle. Pour cela, on projette le principe fondamental de la dynamique sur les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_{y'}$  ce qui donne :

$$-ma\dot{\theta}^2 = R_r + mg \cos \theta \quad \text{et} \quad 0 = R_{y'} - 2m\omega a \cos \theta \dot{\theta}.$$

On en déduit :

$$\vec{R} = -(ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta) \vec{u}_r + 2m\omega a \cos \theta \dot{\theta} \vec{u}_{y'}.$$

Une partie de la composante de  $\vec{R}$  selon  $\vec{u}_r$  compense la projection du poids sur cette direction, la composante selon  $\vec{u}_{y'}$  compense la force d'inertie de Coriolis.

**Application du théorème du moment cinétique** On peut aussi établir l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique en  $C$ , point fixe de  $\mathcal{R}_C$ . Cette loi s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_{C/\mathcal{R}_C}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_{ic})$$

avec :  $\vec{L}_{C/\mathcal{R}_C}(M) = \vec{CM} \wedge m\vec{v}_{/\mathcal{R}_C}(M) = ma^2\dot{\theta}\vec{u}_{y'}$ . On projettera donc la loi du moment cinétique sur  $\vec{u}_{y'}$ .

Le moment en  $C$  d'une force,  $\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f})$ , projeté sur  $\vec{u}_{y'}$  est le moment de cette force par rapport à l'axe ( $Cy'$ ) :  $\vec{\mathcal{M}}_{(Cy')}(f)$ . Il est plus facile, plutôt que de calculer des produits vectoriels comme plus haut, de calculer ces projections en utilisant la méthode de bras de levier qui a été vue en première année. On trouve alors :

- $\vec{\mathcal{M}}_{(Cy')}(P) = -mga \sin \theta$ ,
- $\vec{\mathcal{M}}_{(Cy')}(R) = 0$  car une des composante a sa droite d'action qui passe par  $C$  et l'autre est dirigée selon  $\vec{u}_{y'}$ ,
- $\vec{\mathcal{M}}_{(Cy')}(f_{ie}) = ma^2 \sin \theta \cos \theta \omega^2$ ,
- $\vec{\mathcal{M}}_{(Cy')}(f_{ic}) = 0$  car  $\vec{f}_{ic}$  est dirigée selon  $\vec{u}_{y'}$ .

Il vient :

$$ma^2\ddot{\theta} = -mag \sin \theta + ma^2 \sin \theta \omega^2 \cos \theta$$

En divisant cette équation par  $ma^2$ , on retrouve bien l'équation (2.21).

## 4 Les différents référentiels classiques de la mécanique et la question de leur caractère galiléen

Dans cette partie on va passer en revue les différents référentiels fréquemment utilisés en mécanique. Selon la nature du système étudié un référentiel plus naturel apparaît spontanément. On discutera du caractère galiléen de chacun de ces référentiels.

### 4.1 Critère pour déterminer si un référentiel est galiléen ou non

Les lois Newton postulent l'existence d'un référentiel galiléen mais n'en donnent explicitement aucun ! Le seul moyen de vérifier si un référentiel est galiléen est de réaliser des expériences de mécanique et de vérifier si les observations expérimentales sont compatibles avec les lois de Newton en supposant le référentiel galiléen.

Mais qui dit expérience dit précision expérimentale. Dès lors :

On considérera un référentiel comme galiléen tant qu'on pourra appliquer les lois de Newton et en particulier le principe fondamental de la dynamique sans que les observations expérimentales n'infirment cette hypothèse. Autrement dit on ne peut affirmer le caractère galiléen d'un référentiel que dans la limite de la précision des mesures expérimentales.

### 4.2 Le référentiel terrestre

#### a) Description

Pour étudier le mouvement d'un objet au voisinage de la surface de la Terre, le référentiel le plus naturel est le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  lié à la Terre elle-même. C'est classiquement ce référentiel qu'on appelle le référentiel du laboratoire.

Pour repérer un mouvement au voisinage d'un point  $P$  de la surface terrestre on utilise souvent la base locale définie ainsi :

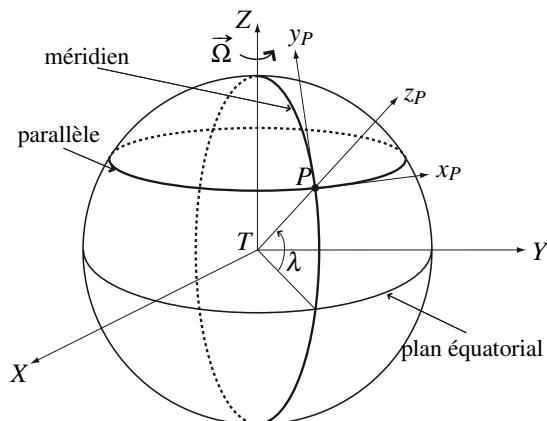


Figure 2.8 – Référentiel terrestre local

L'axe  $TZ$  est choisi parallèle à l'axe de rotation de la Terre, dont le vecteur rotation est  $\vec{\Omega}$ . On choisit l'axe  $Pz_P$  selon la verticale locale au point  $P$ , l'axe  $Px_P$  le long du parallèle passant par  $P$ , dirigé vers l'Est, et l'axe  $Py_P$  le long du méridien passant par  $P$ , dirigé vers le Nord. Attention,  $P$  n'appartient pas à l'axe de rotation  $TZ$ .

L'angle  $\lambda$  défini sur le schéma est la latitude du point  $P$ .

### b) Caractère galiléen

Pour la plupart des applications classiques il n'apparaît aucune contradiction si on considère le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  comme galiléen. On considérera donc en première approximation  $\mathcal{R}_T$  comme galiléen. En revanche si on regarde très finement certaines expériences réalisées sur des grandes échelles de temps ou d'espace, il apparaît des écarts notables et quantifiables qui démontrent définitivement que  $\mathcal{R}_T$  n'est pas galiléen.

Parmi ces expériences on peut citer l'étude de la chute des corps et le pendule de Foucault.

#### Expérience

En 1833, Ferdinand Reich réalisa une centaine de lâchers de bille d'une hauteur  $H = 158$  m, sans vitesse initiale, dans un puits de mines à Freiberg (latitude  $\lambda = 51^\circ$ ). Si  $\mathcal{R}_T$  était galiléen, les billes auraient touché le sol à la verticale du point de lâcher. Reich mesura une déviation moyenne de  $\delta = 28$  mm à l'est de la verticale du point de lâcher.

En 1851, Léon Foucault fit osciller un immense pendule de masse 28 kg, de longueur  $L = 67$  m accroché au sommet de la coupole du Panthéon à Paris (latitude  $\lambda = 48^\circ$ ). Si  $\mathcal{R}_T$  était galiléen, le pendule aurait oscillé dans un plan vertical fixe. L'expérience montra que le pendule, une fois lâché, oscillait pendant 6 h (à cause de diverses causes d'amortissement), mais surtout que le plan d'oscillation du pendule n'était pas fixe et tournait autour de la verticale, à raison de  $11^\circ$  par heure, effet parfaitement mesurable. Le pendule de Foucault est toujours visible de nos jours dans le Panthéon.

On pressent qu'une origine possible au caractère non galiléen du référentiel terrestre est lié à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Pour préciser cela on introduit le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$ , décrit dans le point suivant.

## 4.3 Le référentiel géocentrique

### a) Description

Le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes.

Par rapport à ce référentiel la Terre, et donc  $\mathcal{R}_T$ , est en rotation autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire  $\Omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Ce référentiel semble naturel pour l'étude du mouvement de la Lune autour de la Terre et celle du mouvement des satellites artificiels autour de la Terre.

### b) Conséquence sur le référentiel terrestre

Si on suppose le référentiel géocentrique comme galiléen, cela a des conséquences notables sur le référentiel terrestre, qui de fait, est non galiléen, puisqu'en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.

L'écriture du principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}_T$  doit donc faire apparaître les deux forces d'inertie d' entraînement et de Coriolis.

La force d'inertie d' entraînement est radiale vis-à-vis de l'axe des pôles. Elle sera maximale au niveau de l'équateur (distance à l'axe égale au rayon  $R_T$  de la Terre) où elle aura pour intensité, par unité de masse :  $\Omega^2 R_T = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . On peut comparer cette valeur à l'intensité de la force gravitationnelle exercée par la Terre par unité de masse dans l'hypothèse d'une Terre sphérique :  $\frac{GM_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . On voit que la force d'inertie d' entraînement est un terme correctif de l'ordre du millième.

La force d'inertie de Coriolis dépend de la vitesse du point matériel. On peut raisonner en ordre de grandeur pour évaluer s'il est nécessaire de prendre en compte la force de Coriolis dans l'étude d'un système dans le référentiel terrestre. On note  $L^*$  une distance caractéristique du phénomène étudié,  $T^*$  la durée caractéristique du phénomène étudié. Une vitesse caractéristique associée vaudra  $V^* = \frac{L^*}{T^*}$ , et de même une accélération caractéristique sera donnée par  $A^* = \frac{L^*}{T^{*2}}$ . L'accélération de Coriolis vaudra en ordre de grandeur  $\Omega V^* = \Omega \frac{L^*}{T^*}$ . On pourra donc négliger le rôle de l'accélération de Coriolis si  $\Omega V^* = \Omega \frac{L^*}{T^*} \ll A^* = \frac{L^*}{T^{*2}}$ , soit  $T^* \ll \frac{1}{\Omega} \simeq T_j$  où  $T_j = 1 \text{ jour}$ .

On peut interpréter ceci en disant que si  $T^* \ll T_j$ , alors le mouvement du lieu de l'expérience a décrit par rapport au référentiel géocentrique un tout petit arc de cercle (centré sur l'axe des pôles), de manière uniforme, ce qui permet de le confondre avec un mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique galiléen, permettant de considérer le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  comme galiléen.

### c) Mécanique dans le référentiel terrestre, pesanteur et gravité

On peut se poser la question également de la comparaison des deux forces d'inertie d' entraînement et de Coriolis dans le référentiel terrestre, ou, ce qui revient au même, des deux accélérations d' entraînement et de Coriolis.

On a évalué l'ordre de grandeur de l'accélération d' entraînement à  $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Pour celle de Coriolis imaginons un système se déplaçant à une vitesse de l'ordre de  $1 \cdot 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  par rapport à la Terre. Dans ce cas l'accélération de Coriolis est au mieux de  $2 \times 7,3 \cdot 10^{-5} \times 1 \cdot 10^1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , ce qui est 20 fois plus faible que l'accélération d' entraînement.

On définit par ailleurs le poids  $\vec{P}$  d'un corps  $M$ , de masse  $m$ , de manière expérimentale : c'est la force opposée à la tension d'un fil au bout duquel est accroché le corps, ce dernier étant en équilibre dans le référentiel terrestre. Dans le référentiel terrestre non galiléen le corps est soumis à la force de gravité terrestre  $m\vec{G}_T(M)$ , à la tension du fil  $\vec{T}$ , à la force d'inertie d' entraînement  $-m\vec{a}_e(M)$  (le corps étant immobile dans le référentiel terrestre, la

force de Coriolis est nulle). L’application du principe fondamental de la dynamique permet donc d’écrire :

$$m\vec{G}_T(M) + \vec{T} - m\vec{a}_e(M) = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{P} = -\vec{T} = m \left( \vec{G}_T(M) - \vec{a}_e(M) \right).$$

On voit donc que, compte tenu des ordres de grandeurs déjà calculés, le poids est composé essentiellement de la force de gravitation terrestre, mais corrigé de la force d’inertie d’entraînement. On définit alors le champ de pesanteur par

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{G}_T(M) - \vec{a}_e(M).$$

Dès lors, le poids inclut la force d’inertie d’entraînement, ce qui fait que le principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}_T$  s’écrit finalement

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k + \vec{P} + \vec{f}_{ic},$$

où dans  $\sum_{k=1}^N \vec{f}_k$  on décompte les forces autres que le poids  $\vec{P}$ .

Si l’on peut négliger la force d’inertie de Coriolis il ne reste finalement plus que

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(M) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k + \vec{P}.$$

#### d) Caractère galiléen

L’hypothèse d’un référentiel géocentrique galiléen permet de résoudre certaines difficultés dans le référentiel terrestre, tout en étant très satisfaisante pour un certain nombre de phénomènes au voisinage de la Terre.

Cependant, si on se contente de cette hypothèse on arrive à la conclusion que le mouvement de la Lune doit être à l’origine d’une seule marée par jour, alors qu’expérimentalement on en observe deux !

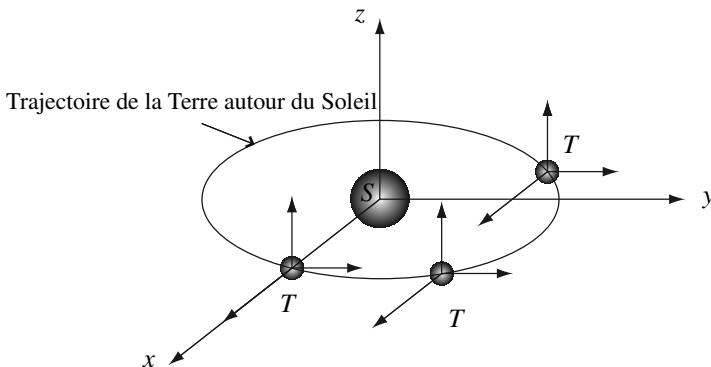
Il faut donc encore une fois abandonner l’hypothèse du caractère galiléen et prendre en compte le mouvement du référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  par rapport à un autre référentiel, le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$ , mouvement dû à celui de la Terre autour du Soleil.

### 4.4 Le référentiel de Copernic

#### a) Description

Le **référentiel de Copernic**  $\mathcal{R}_C$  a pour origine le centre de masse du système solaire et ses axes pointent vers trois étoiles fixes. Ce centre de masse est quasiment confondu avec celui du Soleil.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}_C$ ,  $\mathcal{R}_G$  a un mouvement de translation quasi-circulaire, à la vitesse angulaire  $\Omega' = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  :



**Figure 2.9 – Référentiel géocentrique et référentiel de Copernic.**

Ce référentiel est le référentiel naturel pour l'étude du mouvement des planètes.

Si on fait l'hypothèse que ce référentiel est galiléen, alors pour une étude dans le référentiel géocentrique il faut rajouter une accélération de l'ordre de  $\Omega'^2 D^2 = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , où  $D$  est la distance Terre-Soleil. Mais ce faisant on arrive à expliquer relativement facilement l'existence de deux marées par jour.

Ce référentiel est un excellent référentiel galiléen de ce point de vue.

### b) Caractère galiléen

On pourrait penser avoir ainsi trouvé un référentiel galiléen. Cependant l'analyse du déplacement de raies spectrales par effet Doppler montre qu'on peut encore raffiner les choses en prenant en compte le mouvement du centre de masse du système solaire par rapport au centre de notre galaxie, la voie lactée, ce qui lui fait perdre *a priori* son caractère galiléen, mais l'accélération d'entraînement supplémentaire à prendre en compte est très faible de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

La quête d'un référentiel galiléen peut se poursuivre en prenant en compte le mouvement de notre galaxie par rapport au groupe local de galaxies auquel elle appartient, lui même en mouvement par rapport à des amas de galaxies. Les corrections sont cependant à chaque fois de plus en plus petite, ce qui fait qu'en général on se limite à prendre le référentiel de Copernic comme galiléen.

**SYNTHÈSE**

*SAVOIRS*

- définition d'un référentiel galiléen
- définition de la force d'inertie d'entraînement
- définition de la force d'inertie de Coriolis
- loi de la quantité de mouvement dans un référentiel non galiléen
- loi du moment cinétique dans un référentiel non galiléen
- loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

*SAVOIR-FAIRE*

- reconnaître le caractère galiléen ou non d'un référentiel
- choisir le référentiel d'étude
- étudier qualitativement l'effet des forces d'inertie
- appliquer les lois de la mécanique dans un référentiel galiléen
- savoir que la force d'inertie de Coriolis a une puissance nulle
- savoir si la force d'inertie d'entraînement est conservative ou non
- savoir retrouver l'expression de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement selon le cas étudié
- savoir définir les référentiels usuels (Copernic, géocentrique, terrestre)
- citer des manifestations du caractères non galiléen du référentiel terrestre

*MOTS-CLÉS*

- |                   |                           |                            |
|-------------------|---------------------------|----------------------------|
| • galiléen        | • force centrifuge        | • référentiel géocentrique |
| • force d'inertie | • référentiel de Copernic | • référentiel terrestre    |

## S'ENTRAÎNER

### 2.1 La fusée du Professeur Tournesol (★)

Dans l'album de Tintin « On a marché sur la Lune » l'accélération de la fusée maintient une pesanteur égale à la pesanteur terrestre, d'après le Professeur Tournesol. On considère le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  galiléen. On rappelle la force de Newton exercée par un astre  $A$  de masse  $m_A$  sur un corps  $M$  de masse  $m$  :  $\vec{F} = -Gm_A m \frac{\vec{AM}}{AM^3}$ .

1. Lors de la première phase du voyage, la fusée s'éloigne de la Terre. Quelle accélération  $\vec{a}_e$  la fusée doit-elle avoir par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_G$  pour que les passagers ressentent la même pesanteur qu'à la surface de la Terre ? On note  $R_T$  le rayon de la Terre et l'on considère que l'attraction lunaire est négligeable.
2. Dans la deuxième phase du voyage, la fusée s'est retournée et n'est plus soumise qu'à l'attraction lunaire. Quelle doit-être la nouvelle accélération pour que les passagers aient l'impression d'être sur Terre ? On considérera que le référentiel lié à la Lune est aussi galiléen.

### 2.2 Expérience du manège inertiel (★★)

Si vous allez à la Cité des Sciences à la Villette, vous pourrez monter dans un manège inertiel. Une fois que l'on est entré, les portes se referment et le manège se met en mouvement par rapport au référentiel terrestre, selon un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, à la vitesse angulaire constante  $\omega$ , dans le sens trigonométrique pour un observateur extérieur. L'une des expériences consiste à se placer au centre du manège et à essayer d'atteindre une cible située en face de soi, à une distance  $d = 3$  m du centre, avec une balle en mousse.

1. Définir le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  nécessaires à l'étude. Quel est le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  ?
2. Lors du premier lancé, le tireur vise la cible. Est-ce que la balle atteint la cible ? Est-ce que son point d'impact est à gauche ou à droite de la cible ? Justifier la réponse.
3. Lors du deuxième tir, le tireur n'ayant pas atteint la cible la première fois, il pense qu'il suffit de tirer plus fort. A-t-il raison ? A-t-il tort ? Ne peut-il conclure ?

La distance entre les points de départ et d'arrivée étant faible, on suppose que la vitesse initiale  $v_0$  est suffisante pour que le mouvement ait lieu dans un plan horizontal. Soit  $(O, x, y, z)$  un repère lié au manège tel que  $(Oz)$  est vertical et confondu avec l'axe de rotation, la cible est sur l'axe  $(Ox)$  et le tireur en  $O$ .

4. L'hypothèse précédente conduit à négliger l'effet d'une force, laquelle ?
5. Établir les deux équations différentielles du mouvement dans le référentiel lié au manège.
6. Montrer que  $x = v_0 t \cos \omega t$  et  $y = -v_0 t \sin \omega t$  est la solution de ces équations correspondant à une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .
7. Déterminer le point d'impact sur le mur et commentez vos réponses aux questions 2 et 3.

**2.3 Une attraction foraine sans dangers ? (★★)**

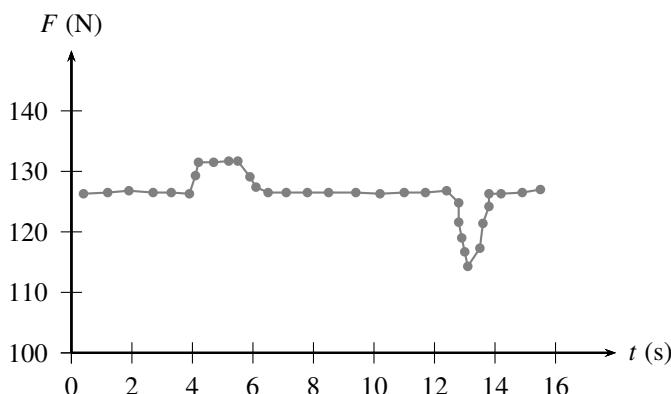
Dans le film de François Truffaut « Les 400 coups », le héros, Antoine Doinel, se rend à une fête foraine et pénètre dans un des manèges appelé « le rotor », constitué d'un énorme cylindre vertical qui tourne autour de son axe. Les passagers pénètrent à l'intérieur et s'installent contre la paroi du cylindre. Le cylindre est mis en rotation, d'abord lentement puis de plus en plus vite. Quand la vitesse de rotation est suffisamment grande, le plancher est retiré et les passagers restent collés contre la paroi du cylindre.

- Expliquer pourquoi les passagers restent collés contre la paroi. Quelle est la force qui les empêche de tomber ? Est-ce sans danger ? Que ressent Antoine Doinel quand il essaie de décoller un bras ou une jambe ?
- On appelle  $\mu$  le coefficient de frottement : quand les passagers sont immobiles, les composantes tangentielle  $R_T$  et normale  $R_N$  de la réaction du support vérifient la relation  $|R_T| \leq \mu |R_N|$ . Déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation du cylindre, en fonction du rayon du cylindre  $a$ , de  $g$  et de  $\mu$ , à partir de laquelle on peut retirer le plancher.
- Application numérique :  $a = 4,0\text{ m}$ ,  $\mu = 0,4$ . Calculer la vitesse minimale de rotation du cylindre en tours par minute.

**APPROFONDIR****2.4 Mesure de l'accélération d'un ascenseur (★★)**

*Cet exercice est posé sous une forme « ouverte » : à partir des informations fournies, il vous est demandé de mettre en place un modèle théorique et de le confronter aux mesures. À vous d'expliquer les approximations qui vous sembleront utiles.*

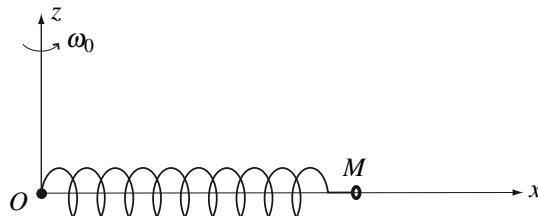
Afin de mesurer l'accélération verticale d'un ascenseur, on décide d'utiliser le capteur de force du plateau d'une console de jeu. L'ascenseur est initialement à l'arrêt. On pose le plateau sur le sol de l'ascenseur et l'on dépose un parpaing de masse  $m$  sur la plateforme. On actionne ensuite l'ascenseur pour passer d'un étage à un autre. Un ordinateur permet d'enregistrer la force mesurée par le capteur en fonction du temps. La figure présente les résultats de l'enregistrement ( $F$  désigne la norme de la force mesurée et  $t$  le temps) :



1. À quel instant démarre l'ascenseur ?
2. Quelle est la masse du parpaing ?
3. Interpréter les variations de  $F$  en fonction du temps. L'ascenseur monte-t-il ou descend-il pendant l'expérience ?
4. En analysant les données expérimentales, estimer numériquement :
  - a. la vitesse avec laquelle l'ascenseur se déplace en dehors des phases d'accélération.
  - b. la distance qui sépare les étages de départ et d'arrivée.

À combien d'étages cela correspond-il ?

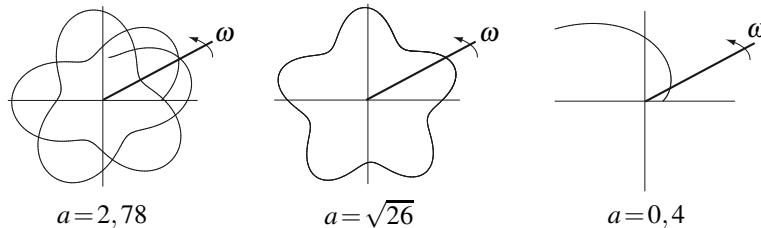
### 2.5 Mouvement d'une perle sur une tige en rotation (★★)



Une petite perle, assimilée à un point matériel  $M$ , glisse sans frottement sur une tige horizontale (axe ( $Ox$ )) tournant à vitesse constante  $\omega_0$  autour de la verticale ( $Oz$ ). La perle est liée au point  $O$  par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . À l'instant initial, le ressort n'est ni comprimé ni tendu et la perle a une vitesse nulle par rapport à la tige.

On note  $\omega^2 = k/m$  et  $a = \omega/\omega_0$ .

1. Établir les équations du mouvement.
2. On donne l'allure de la trajectoire de  $M$  pour différentes valeurs de  $a$  : Commenter l'allure



de ces trajectoires. À quelle(s) condition(s) sur  $a$  la trajectoire de la perle est-elle fermée ?  
Dans la suite on suppose que  $a > 1$ .

3. Montrer que le ressort est toujours tendu.
4. Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.
5. On suppose maintenant qu'il y a des frottements entre la perle et la tige. Discuter qualitativement de l'influence de ces frottements sur le mouvement de la perle.

## CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

**2.6 Équilibre dans un bol en rotation (★★★)**

Une bille assimilée à un point matériel  $M$ , de masse  $m$  est astreinte à se déplacer, sans frottement, sur la surface intérieure d'une demi-sphère creuse  $\mathcal{S}$  de centre  $O$ . Cette surface tourne uniformément, à la vitesse angulaire  $\omega$  constante, autour de son axe de révolution vertical ( $Oz$ ). On appelle  $r_0$  le rayon intérieur de la sphère, et on pose  $\omega_0 = \sqrt{2g/r_0}$ ,  $g$  étant l'accélération de la pesanteur. On note  $\mathcal{R}_\mathcal{S}$  le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, et  $\mathcal{R}_\mathcal{S}$  le référentiel lié à  $\mathcal{S}$ .

- On se place dans  $\mathcal{R}_\mathcal{S}$  et on utilise des coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  d'axe ( $Oz$ ). Montrer que l'énergie potentielle de  $M$  dans  $\mathcal{R}_\mathcal{S}$  est :

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 z \left( \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 r_0 + z \right)$$

- Déterminer les cotes  $z_e$  des positions d'équilibre de  $M$  dans  $\mathcal{R}_\mathcal{S}$  et étudier leur stabilité en fonction de la valeur de  $\omega_0/\omega$ .

Représenter  $z_e$  en fonction de  $\omega/\omega_0$ .

- a.** Tracer la courbe  $E_p(z)$  dans le cas  $\omega_0/\omega = 0,2$ .

- b.** Un dispositif permet de lâcher la bille sans vitesse initiale dans  $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ . On note  $z_0$  la cote initiale. Discuter qualitativement le mouvement ultérieur de la bille en fonction de son énergie mécanique.

**2.7 Déviation vers l'est (★★)**

On étudie ici l'expérience réalisée par Ferdinand Reich, en 1833, dans un puits de mine à Freiberg (latitude  $\lambda = 50^\circ 54'$ ). Des billes étaient lâchées d'une hauteur  $h = 158,5$  m.

On travaille dans le référentiel terrestre. On prend comme repère  $(O, x, y, z)$ ,  $O$  étant au fond du puits, à la verticale du point  $L$  de lâcher,  $(Ox)$  étant dirigé vers l'est,  $(Oy)$  vers le nord et  $(Oz)$  suivant vers la verticale ascendante (voir figure 2.10). On note  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique,  $g$  l'intensité du champ de pesanteur,  $m$  la masse d'une bille.

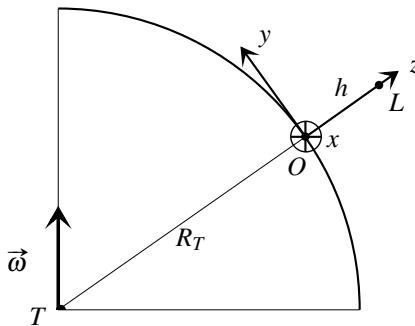
On rappelle que dans le référentiel terrestre le poids inclut la force d'inertie d'entrainement due au mouvement de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. On néglige tout frottement dans cette étude.

- Écrire les projections sur les trois axes de l'application du principe fondamental de la dynamique à une bille dans le référentiel terrestre.

- On cherche à évaluer l'importance de la force de Coriolis. Quelle est la vitesse maximale d'une bille pour laquelle la force de Coriolis est égale à un millième de son poids ? On prendra  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- Comme on constate expérimentalement que la vitesse précédente n'est pas atteinte on va trouver une solution approchée du problème par une méthode dite des perturbations. Cela consiste à résoudre le problème en ignorant la force de Coriolis, puis à utiliser l'expression de la vitesse ainsi trouvée pour évaluer la force de Coriolis.

- a.** En utilisant cette idée, mais en travaillant en ordre de grandeur, déterminer l'ordre de grandeur de l'écart entre le point de chute et  $O$ .



**Figure 2.10 – Paramétrage du problème**

**b.** La bille est lâchée sans vitesse initiale à une altitude  $h$  au dessus de  $O$ . Quelles sont les expressions  $\dot{x}_0(t)$ ,  $\dot{y}_0(t)$  et  $\dot{z}_0(t)$  des composantes du vecteur vitesse en l'absence de la force de Coriolis (on dit qu'on travaille à l'ordre 0) ?

**c.** Quelle est l'expression approchée de la force de Coriolis utilisant l'approximation précédente de la vitesse ? Réécrire les équations du mouvement avec cette approximation, puis les résoudre.

**d.** Déterminer les coordonnées du point d'impact. Comparer à la mesure expérimentale de Reich, à savoir une déviation moyenne de 28 mm à l'est de  $O$ .<sup>1</sup>

**4.** La résolution analytique exacte du système non approché est possible (quoique lourde). Elle prévoit en plus de la déviation vers l'est une déviation vers le sud. Que faudrait-il faire dans notre étude pour la mettre en évidence ?

**5.** On entend parfois dire que dans l'hémisphère sud la bille est déviée vers l'ouest. Qu'en pensez-vous ?

## 2.8 Pendule de Foucault (★★★)

On étudie ici le célèbre dispositif du pendule Foucault destiné à mettre en évidence la rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. On considère un pendule simple constitué d'une masse  $A$  de  $m = 30 \text{ kg}$  suspendue à l'extrémité inférieure d'un filin de longueur  $L = 67 \text{ m}$ . L'autre extrémité est fixée en un point  $O_1$ , placé à une hauteur égale à  $L$  sur la verticale du lieu de latitude  $\lambda$ .

On utilisera comme base du référentiel terrestre local  $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ , ( $Oz$ ) étant la verticale ascendante, ( $Ox$ ) orienté vers l'est, ( $Oy$ ) vers le nord,  $O$  étant pris au niveau du sol.

On rappelle que par définition le poids inclut la force d'inertie d'entrainement due au mouvement de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. La vitesse angulaire de ce mouvement est :  $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$  où  $T_T = 86\,164 \text{ s}$  est le jour sidéral. On néglige tout frottement dans cette étude.

<sup>1</sup> Il est intéressant de noter que les 106 mesures effectuées par Reich donnaient, en centimètre,  $x \in [-12, +12]$  et  $y \in [-12, 12]$  !

## CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

1. À partir de l'équation vectorielle du mouvement, décrire sans calcul la nature de la trajectoire du pendule dans le référentiel terrestre local, pour un pendule placé à l'équateur. Le pendule est lâché sans vitesse initiale. On considérera que l'amplitude du mouvement étant faible, le vecteur vitesse du pendule est toujours dans le plan horizontal.
2. On place maintenant le pendule au pôle nord. Quel serait, sans calcul, le mouvement du pendule pour un observateur lié au référentiel géocentrique ? En déduire la nature de ce même mouvement pour un observateur lié à la terre.
3. Entre ces deux situations extrêmes, on va étudier l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule.

a. Montrer que la tension  $\vec{T}$  du fil peut s'écrire sous la forme  $\vec{T} = -T \frac{\vec{O_1 A}}{L}$ .

b. Expliciter l'équation du mouvement dans la base du référentiel terrestre local en projetant la relation fondamentale de la dynamique sur les trois axes. On notera  $\vec{\omega}_T$  le vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

c. Réécrire ces équations en considérant que le mouvement a lieu dans le plan ( $xOy$ ), et que la composante de la force de Coriolis sur l'axe ( $Oz$ ) est négligeable devant le poids. Montrer qu'alors sur les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ), les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$\ddot{x} - 2\omega_T \sin(\lambda) \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\omega_T \sin(\lambda) \dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2)$$

en posant  $\omega_0^2 = g/L$ .

4. Résoudre ces équations en introduisant la variable complexe  $u = x + iy$ , sachant qu'initialement  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ . (*Indication* : former l'équation  $(1) + i \times (2)$  et simplifier les calculs, après avoir comparé en ordre de grandeur  $\omega_T$  et  $\omega_0$ ).

5. Quelle est la forme de la solution et la nature du mouvement dans un système d'axes tournant autour de ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\omega_T \sin(\lambda)$  dans le sens  $N - E - S - O$  ?

Vérifier la cohérence des résultats pour  $\lambda = 0^\circ$  et  $\lambda = 90^\circ$ .

Le plan d'oscillation du pendule au lieu  $\lambda = 48^\circ 51'$  (Paris) effectue un tour complet en  $T = 31h47min$ . En déduire la période de la rotation de la Terre.

## CORRIGÉS

### 2.1 La fusée du Professeur Tournesol

**1.** Le référentiel  $\mathcal{R}_F$  lié à la fusée est en translation par rapport au référentiel géocentrique avec une accélération  $\vec{a}_e$ . La relation fondamentale de la dynamique appliquée à une personne  $P$  dans la fusée donne :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}_F} = \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} + \vec{A}_{T \rightarrow P} + \vec{R}$$

où la force d'inertie d'entraînement est  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ , la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic}$  est nulle puisque  $\mathcal{R}_F$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}_g$ ,  $\vec{A}_{T \rightarrow P}$  est l'attraction terrestre et  $\vec{R}$  la réaction du sol de la fusée.

Dans la fusée les passagers sont immobiles donc  $\vec{a}_{/\mathcal{R}_F} = \vec{0}$ .

Les passagers ressentent la même attraction qu'à la surface de la Terre ; cette force est l'opposée de la réaction du sol soit  $-\vec{R} = -\frac{GmM_T}{R_T^2}\vec{u}_r$ , où  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire orienté du centre de la Terre vers la fusée.

Si l'on projette la relation fondamentale sur  $\vec{u}_r$  avec  $a_e = \|\vec{a}_e\|$  et  $h$  l'altitude de la fusée par rapport au sol, on obtient :

$$0 = -ma_e - \frac{GmM_T}{(R_T + h)^2} + \frac{GmM_T}{R_T^2} \Rightarrow a_e = GM_T \left( \frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T + h)^2} \right)$$

On remarque que la relation est valable quelle que soit la masse de la personne. Au départ, l'accélération doit être nulle ce qui est normal mais la fusée ne pourrait bien sûr pas décoller. Pour le décollage, en fait l'accélération est tellement importante que les personnages perdent connaissance.

Pendant le trajet, la relation précédente nous indique que  $a_e$  dépend de la distance à la surface de la Terre ; il faut donc sans cesse ajuster la valeur de  $a_e$  ce qui semble difficile.

**2.** On choisit maintenant un vecteur  $\vec{u}_r$  orienté du centre de la Lune vers la fusée. Comme il y décélération  $\vec{a}_e = a_e\vec{u}_r$ . On veut toujours avoir  $-\vec{R} = -\frac{GmM_T}{R_T^2}\vec{u}_r$  mais il faut prendre en compte l'attraction de la Lune sur  $P$  et l'on néglige l'attraction de la Terre sur  $P$ . On obtient donc :

$$0 = -ma_e - \frac{GmM_L}{(R_L + h)^2} + \frac{GmM_T}{R_T^2} \Rightarrow a_e = GM_T \left( \frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_L + h)^2} \frac{M_L}{M_T} \right)$$

où  $h$  est l'altitude par rapport à la surface lunaire et  $M_L$  la masse de la Lune.

### 2.2 Expérience du manège inertiel

**1.** Sur la durée du mouvement (quelques minutes), on peut considérer le référentiel terrestre comme un bon référentiel galiléen. Donc  $\mathcal{R}$  est le référentiel terrestre. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au manège est en mouvement de rotation autour d'un axe vertical ( $Oz$ ), de vecteur rotation  $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ .

## CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

**2.** La vitesse initiale dans  $\mathcal{R}'$  est dirigée vers la cible. La force d'inertie de Coriolis est égale à  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}$  ce qui donne dès le départ une force dirigée vers la droite par rapport au lanceur. La balle frappera la paroi à droite de la cible.

**3.** La force de Coriolis est proportionnelle à la vitesse relative, donc si celle-ci est plus importante, la force a une intensité plus forte. Cependant, le temps de parcours sera plus petit donc l'effet de la déviation moins important. Il est difficile de conclure sans un calcul.

**4.** On néglige l'effet du poids sur la durée du parcours.

**5.** On définit un repère lié au manège  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Le lanceur se trouve en  $O$  et la cible à la distance  $d$  de  $O$  sur l'axe  $(Ox)$ . Le système est la balle  $M$  dont on étudie le mouvement dans  $\mathcal{R}'$ . Les forces qui s'exercent sont uniquement les forces d'inertie puisqu'on néglige le poids. On suppose d'après l'énoncé que le mouvement est horizontal. La relation fondamentale de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

La force d'inertie d'entraînement est égale à  $-m\vec{a}_e$ , où  $\vec{a}_e$  est l'accélération du point  $P$ , fixe dans  $\mathcal{R}'$  et coïncidant avec  $M$ , par rapport à  $\mathcal{R}$ . Le mouvement de  $P$  dans  $\mathcal{R}$  est circulaire uniforme donc :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{OM} = m\omega^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$$

La force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'} = -2m\omega\vec{u}_z \wedge (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y) = 2m\omega(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y)$$

On obtient donc en projection sur  $(Ox)$  et  $(Oy)$  :

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} + m\omega^2x \text{ et } m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} + m\omega^2y$$

**6.** Il faut vérifier que la solution proposée satisfait aux équations ci-dessus et à la condition initiale.

**7.** Le point d'impact correspond à  $\sqrt{x_d^2 + y_d^2} = d$  soit  $d = v_0 t$ .

On trouve  $x_d = d \cos(\omega d / v_0)$  et  $y_d = -d \sin(\omega d / v_0)$ . La déviation  $y$  est négative donc elle s'effectue bien sur la droite. Si l'on tire plus fort,  $\omega/v_0$  est plus petit et  $|y|$  est plus petit donc le point d'impact est plus proche de la cible.

### 2.3 Une attraction foraine sans dangers ?

**1.** Il faut que les passagers soient soumis à une force verticale qui équilibre le poids pour qu'ils ne tombent pas : ce sont les frottements qui permettent aux passagers de tenir en équilibre. La force qui leur permet de rester collés contre la paroi est la composante tangentielle de la réaction du support (voir chapitre suivant). Le coefficient de frottement paroi-passagers doit être suffisamment important : les vêtements des passagers ne doivent pas être trop « lisses ». Si un passager essaie de décoller un bras, celui-ci sera rappelé vers la paroi par la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge) : pour réussir, il devra fournir l'effort nécessaire pour vaincre cette force.

**2.** Dans le référentiel tournant lié au cylindre, la condition d'équilibre d'un passager s'écrit :  $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie}$  (à l'équilibre,  $f_{ic} = \vec{0}$ ).

En projection sur la verticale ascendante :  $0 = -mg + R_T$  ;

en projection sur rayon-vecteur :  $0 = -R_N + m\omega^2 a$ .

Tant que le passager est en équilibre,  $|R_T| \leq \mu |R_N|$ , soit :  $mg \leq \mu m\omega^2 a$ . La vitesse de rotation du cylindre doit vérifier la relation :  $\omega \geq \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\mu a}}$ . Remarquons que cette valeur ne dépend pas de la masse du passager. Si  $\omega$  est supérieure à  $\omega_c$ , tous les passagers seront en équilibre, à condition que  $\mu$  soit le même pour tous, ce qui dans la réalité n'est pas le cas car la valeur de  $\mu$  dépend des vêtements des passagers.

**3.** Application numérique :  $\omega_c = 0,4$  tours par seconde soit 24 tours par minute.

## 2.4 Mesure de l'accélération d'un ascenseur

**Préliminaires :** dans le référentiel lié à l'ascenseur, noté  $\mathcal{R}$ , le parpaing est soumis aux actions mécaniques suivantes :

- son poids  $m\vec{g}$  ;
- la réaction du plateau  $\vec{R}$  (c'est cette force que le capteur mesure) ;
- la force d'inertie d'entraînement  $-m\vec{a}_e$  lorsque l'ascenseur est en mouvement, car le référentiel lié à l'ascenseur n'est pas galiléen.

Comme l'ascenseur a un mouvement de translation dans le référentiel terrestre, l'accélération d'entraînement est égale à l'accélération de l'ascenseur dans le référentiel terrestre :  $\vec{a}_e = \vec{a}$ .

Considérons dans un premier temps l'ascenseur au repos :  $\vec{a} = \vec{0}$ . Appliquons la deuxième loi de Newton au parpaing dans le référentiel lié à l'ascenseur  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R}.$$

En projetant sur la verticale ascendante ( $Oz$ ), on obtient  $R_z = mg$ . Le capteur indique donc une valeur constante, égale au poids du parpaing.

Considérons maintenant le cas où l'ascenseur est en mouvement, son accélération dans le référentiel terrestre étant  $\vec{a} = a\vec{u}_z$ . La deuxième loi de Newton appliquée au parpaing toujours **dans le référentiel lié à l'ascenseur** donne :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a}.$$

En projection selon la verticale ascendante ( $Oz$ ), il vient :

$$0 = -mg + R_z - ma \implies R_z = m(g + a).$$

Le capteur indique donc une valeur différente de la valeur de repos (égale au poids) lorsqu'il se déplace. Si  $a > 0$ , cette valeur est supérieure au poids, inférieure sinon.

**1.** L'examen du graphe montre que l'indication du capteur s'écarte de la valeur initiale à partir de  $t = 4$  s : c'est à cet instant que l'ascenseur démarre.

**2.** La valeur de  $R_z$  au repos donne accès au poids :  $mg = 126$  N, soit  $m = 12,8$  kg.

**3.** On peut faire les observations suivantes :

## CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

**Phase 1 :** pour  $4,0 \text{ s} \leq t \leq 6,0 \text{ s}$ , on constate que  $R_z > mg$ . On en déduit que  $a > 0$  : l'ascenseur accélère vers le haut.

**Phase 2 :** pour  $6,0 \text{ s} \leq t \leq 12,5 \text{ s}$ ,  $R_z = mg$ . On en déduit que l'accélération de l'ascenseur est nulle : il se déplace donc à vitesse constante.

**Phase 3 :** pour  $12,5 \leq t \leq 14 \text{ s}$ ,  $R_z < mg$ . On en déduit que  $a < 0$  : l'ascenseur décélère.

Comme au début de son mouvement, l'ascenseur accélère vers le haut, on conclut que l'ascenseur monte.

4. Nous allons supposer que l'accélération de l'ascenseur est constante pendant les phases 1 et 3 définies ci-dessus. À l'instant initial  $t_0 = 4,0 \text{ s}$ , la position de l'ascenseur est fixée par convention à  $z(t_0) = 0$ .

- **Phase 1 :** l'accélération  $a_1$  de l'ascenseur peut être estimée à partir du graphe où l'on lit  $R_z = 131 \text{ N}$ . On en déduit :

$$a_1 = \frac{R_z}{m} - g = 0,42 \text{ m.s}^{-2}.$$

Partant de  $\ddot{z} = a_1$ , on obtient :  $\dot{z} = a_1(t - t_0)$  puisque la vitesse initiale de l'ascenseur à  $t = t_0$  est nulle. Une intégration supplémentaire donne :  $z(t) = \frac{1}{2}a_1(t - t_0)^2$ , compte tenu de la condition initiale  $z(t_0) = 0$ . La première phase se termine à l'instant  $t_1 = 6,0 \text{ s}$ . À cet instant :

$$z_1 = z(t_1) = \frac{1}{2}a_1(t_1 - t_0)^2 = 0,85 \text{ m} \quad \text{et} \quad v_1 = \dot{z}(t_1) = a_1(t_1 - t_0) = 0,85 \text{ m.s}^{-1}.$$

- **Phase 2 :** il s'agit d'une phase à vitesse constante, égale à  $v_2 = \dot{z}(t_1) = 0,85 \text{ m.s}^{-1}$ . À la fin de cette phase, à l'instant  $t_2 = 12,5 \text{ s}$  :

$$z_2 = z(t_1) + v_2(t_2 - t_1) = 6,4 \text{ m} \quad \text{et} \quad v_2 = 0,85 \text{ m.s}^{-1}.$$

- **Phase 3 :** il s'agit d'une phase que l'on suppose uniformément accélérée. L'accélération  $a_2$  correspondante peut être déduite du graphe. On peut estimer que  $R_z \simeq 118 \text{ N}$ , ce qui correspond à :  $a_3 = \frac{R_z}{m} - g = -0,59 \text{ m.s}^{-2}$ . À partir de  $\ddot{z} = a_3$ , on obtient  $\dot{z} = a_3(t - t_2) + v_2$ . En intégrant une fois de plus par rapport au temps, il vient :

$$z(t) = \frac{1}{2}a_3(t - t_2)^2 + v_2(t - t_2) + z_2.$$

À la fin de cette phase, à l'instant  $t_3$ , la vitesse s'annule :  $t_3 = t_2 - \frac{v_2}{a_3} \simeq 13,9 \text{ s}$ . Cette valeur est compatible avec ce qu'on peut lire sur le graphe : cela montre que l'évaluation de  $R_z$  est pertinente. On peut enfin déterminer la position de l'ascenseur à la fin de cette phase :  $z_3 = 6,9 \text{ m}$ . Ce parcours correspond à deux étages.

## 2.5 Mouvement d'une perle sur une tige en rotation

1. Le mouvement de la perle est étudié dans le référentiel tournant lié à la tige. Ce référentiel n'est pas galiléen. Dans ce référentiel,  $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{u}_x$  et  $\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{u}_x$ .

La perle est soumise à :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ ,
- la tension du ressort  $\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$ ,
- la réaction de la tige perpendiculaire à la tige donc à  $\vec{u}_x$  :  $\vec{R} = R_y\vec{u}_y + R_z\vec{u}_z$  (attention, c'est le plan ( $yOz$ ) qui est perpendiculaire à la tige) ;
- la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie} = m\omega_0^2 x \vec{u}_x$ ,
- la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2m\omega_0 \vec{u}_z \wedge \dot{x}\vec{u}_x$ .

Deux méthodes sont possibles pour établir l'équations du mouvement, qui toutes les deux éliminent la force que l'on ne sait pas exprimer, à savoir la réaction de la tige : on peut ou bien appliquer la première loi de Newton et la projeter sur la direction  $\vec{u}_x$  ou bien faire une étude énergétique puisque toutes les forces qui ont une puissance non nulle sont conservatives.

### Deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) dans le référentiel tournant :

$$m\vec{d}(M) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

En projection sur  $\vec{u}_x$ , on obtient :

$$\ddot{x} + (a^2 - 1) \omega_0^2 x = a^2 \omega_0^2 l_0$$

**Conservation de l'énergie dans le référentiel tournant :** La réaction de la tige, la force d'inertie de Coriolis et le poids ne travaillent pas dans le référentiel tournant car elles sont en permanence perpendiculaires à la vitesse du point  $M$  dans ce référentiel. La tension du ressort dérive de l'énergie potentielle  $E_{p1} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + C_1$  et la force d'inerte d'entraînement de l'énergie potentielle  $E_{p2} = -\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + C_2$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. Dans le référentiel tournant, la perle n'est soumise qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas donc son énergie mécanique se conserve, ce qui s'écrit :  $E_c + E_{p1} + E_{p2} = \text{constante}$  ou encore

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \text{constante}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps et en simplifiant par  $\dot{x}$ , qui est non nul puisqu'il y a mouvement, on obtient la même équation.

**2.** La première trajectoire est bornée, la perle reste sur la tige mais cette trajectoire n'est pas fermée. La perle effectue des oscillations sur la tige avec une période qui n'est pas en rapport simple avec celle de la rotation de la tige, contrairement à la deuxième figure où quand la perle a effectué 5 oscillations, la tige a fait exactement un tour. Dans ce cas, la trajectoire de la perle est fermée. Dans le troisième, le mouvement de la perle sur la tige n'est pas borné et la perle va finir par quitter le support (ou le ressort par casser).

La trajectoire de la perle est fermée si son mouvement sur la tige est borné, donc si  $a > 1$ , et si la période de rotation de la tige et celle du mouvement de  $m$  sur celle-ci sont dans un rapport rationnel. C'est le cas si :  $a = \sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1}$  où  $m$  et  $n$  sont deux entiers quelconques. C'est le cas de la deuxième figure où  $n = 5m$ .

**3.** Puisque  $a > 1$ , le mouvement de la perle sur la tige est sinusoidal. La solution de l'équation

## CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

du mouvement est de la forme :

$$x = \frac{a^2 l_0}{a^2 - 1} + A \cos(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1} t)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Compte tenu des conditions initiales  $x(0) = l_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ , l'équation du mouvement de la perle est :

$$x(t) = \frac{l_0}{a^2 - 1} \left( a^2 - \cos(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1} t) \right)$$

On vérifie que :  $x(t) - l_0 \geq 0$  donc le ressort est toujours tendu.

**4.** La deuxième loi de Newton projetée orthogonalement à la tige donne :  $\vec{R} = mg\vec{u}_z + 2m\omega\vec{x}\times\vec{u}_y$ . On remarque la composante sur  $\vec{u}_y$  de l'action de la tige sur la perle qui compense la force d'inertie de Coriolis.

**5.** La force de frottement va amortir le mouvement sinusoïdal. La position de la perle  $M$  tend vers sa position d'équilibre dans le référentiel tournant, c'est-à-dire  $x_{\text{eq}} = \frac{a^2 l_0}{a^2 - 1}$ .

### 2.6 Équilibre dans un bol en rotation

**1.** Le référentiel  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$  est en rotation par rapport au référentiel galiléen du laboratoire. Les forces qui s'exercent sur un point  $M$  dans  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$  sont le poids (force conservative), la réaction du bol (qui ne travaille pas), la force d'inertie d'entraînement (force conservative) et la force de Coriolis (qui ne travaille pas).

En coordonnées cylindriques, la force d'inertie d'entraînement est  $\vec{f}_{ie} = m\omega^2\rho\vec{u}_\rho$  et elle dérive de l'énergie potentielle :  $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + \text{cte}$ .

L'énergie potentielle de pesanteur poids est  $E_{p,\text{poids}} = mgz + \text{cte}$  donc finalement :

$$E_p = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + \text{cte}$$

Pour un point qui est sur la sphère  $\rho^2 + z^2 = r_0^2$ , on peut donc écrire :

$$E_p = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2(r_0^2 - z^2) + \text{cte} = \frac{1}{2}m\omega^2z\left(z + \frac{2g}{\omega^2}\right) - \frac{1}{2}m\omega^2r_0^2 + \text{cte}$$

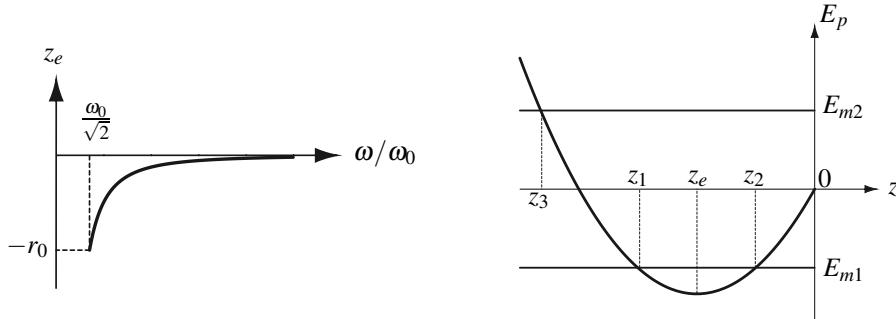
ce qui est l'expression de l'énoncé si on choisit :  $\text{cte} = \frac{1}{2}m\omega_0^2r_0^2$ .

**2.** On calcule la dérivée par rapport à  $z$  de l'énergie potentielle :  $\frac{dE_p}{dz} = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{\omega^2}{\omega^2}r_0 + 2z\right)$ .

On a donc un extremum pour :  $z_e = -\frac{r_0}{2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ . Le signe négatif correspond bien à la zone du bol (en-dessous de  $O$ ). Pour que la position existe, il faut  $|z_e| \leq r_0$ , soit  $\omega \geq \omega_0/\sqrt{2}$ .

$E_p(z)$  est un polynôme du second degré dont le terme en  $z^2$  est positif : l'extremum est donc un minimum et la position d'équilibre est stable si elle existe.

La courbe  $z_e$  fonction de  $\omega/\omega_0$  est représentée sur la figure ci-après, à gauche. On remarque que lorsque  $\omega$  croît,  $z_e$  se rapproche de 0 et la position d'équilibre se rapproche du bord du bol en s'éloignant de l'axe : c'est l'effet de la force d'inertie qui est une force centrifuge.



**3. a.** La courbe  $E_p(z)$  est représentée sur la figure ci-dessus à droite.

**b.** La courbe d'énergie potentielle montre que l'on a un puits de potentiel. Pour une énergie mécanique  $E_m$  donnée, la zone accessible est celle où  $E_m \geq E_p$  (puisque l'énergie cinétique est une grandeur positive ou nulle, voir cours de première année).

Si on lâche la bille à  $z_0 = z_e$ , alors la seule possibilité est qu'elle reste à cette position. Elle va donc tourner avec le bol. Pratiquement, ce cas est impossible à réaliser car il faut avoir exactement  $z_0 = z_e$ .

Si on lâche la bille à une cote pour laquelle l'énergie mécanique  $E_{m1}$  est négative, elle a une énergie mécanique supérieure à  $E_{p,min}$  elle va alors osciller entre deux cotes  $z_1$  et  $z_2$  (voir figure ci-dessus, à droite).

Si on lâche la bille à une cote pour laquelle l'énergie mécanique  $E_{m2}$  est positive elle va osciller d'un côté à l'autre en passant par le fond, et en remontant à la cote de départ  $z_3$  de chaque coté.

## 2.7 Déviation vers l'est

**1.** La bille, dans le référentiel terrestre, est soumise à son poids  $-mg\vec{u}_z$  et à la force de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega(\cos\lambda\vec{u}_y + \sin\lambda\vec{u}_z) \wedge (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z)$ . Tous calculs faits, le principe fondamental de la dynamique donne en projection :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega(\cos\lambda\dot{z} - \sin\lambda\dot{y}) \\ m\ddot{y} = -2m\omega\sin\lambda\dot{x} \\ m\ddot{z} = 2m\omega\cos\lambda\dot{x} \end{cases}$$

**2.** La norme de la force de Coriolis est inférieure à  $2m\omega v$ . On a donc à la limite demandée  $\frac{2m\omega v}{mg} = 10^{-3}$ , d'où  $v = \frac{10^{-3}g}{2\omega} \simeq 68 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , soit près de  $242 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ .

**3. a.** En première approximation on a un mouvement de chute libre. L'ordre de grandeur du temps de chute est  $\tau^* = \sqrt{\frac{h}{g}}$ . L'ordre de grandeur de la vitesse de chute est  $v^* = \tau^* g = \sqrt{hg}$ . La vitesse étant essentiellement selon  $\vec{u}_z$ , la force de Coriolis n'a de composante horizontale que selon  $\vec{u}_x$ . Cette dernière est à pour ordre de grandeur  $f_{ic}^* = 2m\omega\cos\lambda v^*$ . Le

## CHAPITRE 2 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

principe fondamental de la dynamique donne pour l'ordre de grandeur de l'accélération selon  $\vec{u}_x$  :  $a_x^* = 2\omega \cos \lambda v^* = 2\omega \cos \lambda \sqrt{hg}$ . Le déplacement selon  $\vec{u}_x$  est alors de l'ordre de  $x^* = a_x^* \tau^2 = 2\omega \cos \lambda \sqrt{hg} \frac{h}{g} = 2\omega \cos \lambda g \left(\frac{h}{g}\right)^{3/2}$ . L'application numérique donne 6 cm. On s'attend donc à un effet mesurable.

- b.** En chute libre on a facilement :  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$  et  $\dot{z}_0 = -gt$ .
- c.** On obtient alors l'expression approchée  $\vec{F}_{ic} = 2m\omega \cos \lambda gt \vec{u}_x$ . La résolution est alors possible et donne :  $x_1(t) = \frac{1}{3}\omega \cos \lambda gt^3$ ,  $y_1(t) = 0$  et  $z_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ .
- d.** D'après l'expression de  $z_1$ , on voit que le temps de chute est  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . En portant dans  $x_1$  on trouve l'abscisse du point d'impact :  $x_1(\tau) = \frac{1}{3}\omega \cos \lambda g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$ .

L'application numérique donne  $x_1(\tau) = 27,6$  mm, ce qui est sans doute, aux incertitudes de mesures près, compatible avec les mesures expérimentales.

**4.** Dans notre approche en première approximation la déviation vers le sud est nulle. Pour la faire apparaître il faudrait réitérer le processus perturbatif : on injecte  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{y}_1$  et  $\dot{z}_1$  dans l'expression de la force de Coriolis et on résout pour avoir l'effet au deuxième ordre. On trouve une déviation de l'ordre du micromètre, en dessous de la précision des mesures de Reich.

**5.** Les calculs menés sont valables algébriquement. Dans l'hémisphère sud, les latitudes sont négatives, mais  $\lambda$  n'intervient que par son cosinus, et donc la bille serait déviée aussi vers l'est.

## 2.8 Pendule de Foucault

**1.** Dans le référentiel terrestre la masse est soumise à son poids  $\vec{P}$ , à la tension du fil  $\vec{T}$  et à la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ . Si on lâche la masse sans vitesse initiale, les deux seules forces non nulles,  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$ , sont dans le plan vertical contenant le fil. Le mouvement s'initie donc dans ce plan. Avec le choix fait pour les axes, le vecteur rotation  $\vec{\omega}_T$  de la Terre par rapport au référentiel géocentrique est porté par  $\vec{u}_y$  et le vecteur vitesse, par hypothèse du mouvement plan, est porté par  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , dès lors la force d'inertie de Coriolis n'a de composante que selon  $(Oz)$ . Ainsi les trois forces sont toujours dans le même plan vertical : le pendule oscille dans le plan vertical initial de lancement.

**2.** Dans le référentiel géocentrique galiléen le pendule oscillera selon un plan fixe. Dès lors un observateur terrestre verra le plan d'oscillation du pendule tourner autour de l'axe des pôles dans le sens est-ouest, en effectuant une rotation complète en un jour sidéral  $T_T$ .

**3. a.** La tension du fil est dirigée par le vecteur unitaire de la droite  $(O_1A)$ , dirigé de  $A$  vers  $O_1$ . Ce vecteur s'écrit  $-\frac{\vec{O_1A}}{L}$ . Dès lors en notant  $T$  la norme de la tension on a bien  $\vec{T} = -T \frac{\vec{O_1A}}{L}$ .

**b.** En effectuant le produit vectoriel intervenant dans l'expression de  $\vec{f}_{ic}$  et en utilisant

l'expression de la tension de la question précédente il vient en projection sur les trois axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \frac{x}{L} + 2m\omega_T \sin \lambda \dot{y} - 2m\omega_T \cos \lambda \dot{z} \\ m\ddot{y} = -T \frac{y}{L} - 2m\omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg - T \frac{z-L}{L} + 2m\omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

c. Avec les hypothèses de l'énoncé il vient selon ( $Oz$ ) :  $0 = -mg + T$  soit  $T = mg$ . En reportant dans les deux autres projections il vient :

$$\ddot{x} = -g \frac{x}{L} + 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -g \frac{y}{L} - 2\omega_T \sin \lambda \dot{x},$$

qui sont bien les deux équations demandées.

4. En formant (1) +  $i \times$  (2) on aboutit à l'équation différentielle en  $u$  :

$$\ddot{u} + 2\omega_T \sin \lambda i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0.$$

L'équation caractéristique associée est :  $r^2 + 2\omega_T \sin \lambda ir + \omega_0^2 = 0$  dont le discriminant est  $\Delta = -4\omega_T^2 \sin^2 \lambda - 4\omega_0^2$ . Or  $\omega_0 \simeq 0,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_T \sin \lambda < 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Au premier ordre on prendra donc  $\Delta = -4\omega_0^2$ . Les racines complexes sont alors  $(-2\omega_T \sin \lambda \pm \omega_0)i$ . La forme générale de la solution est donc :

$$u(t) = A \exp(i(-2\omega_T \sin \lambda + \omega_0)t) + B \exp(i(-2\omega_T \sin \lambda + \omega_0)t).$$

Les conditions initiales,  $u(0) = x_0$  et  $\dot{u}(0) = 0$ , conduisent, compte tenu de  $\omega_T \ll \omega_0$ , à  $A = B = x_0/2$ , d'où  $u(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \exp(-i\omega_T \sin \lambda t)$ . On en tire :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_T \sin \lambda t) \quad \text{et} \quad y(t) = -x_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_T \sin \lambda t).$$

5. Dans le nouveau système d'axes la variable complexe  $u' = x' + iy'$  repérant la masse s'obtient par une simple multiplication par  $\exp(i\omega_T \sin \lambda)$ , soit  $u'(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  d'où  $x'(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  et  $y'(t) = 0$ . Dans ce repère la masse a un mouvement sinusoïdal rectiligne. Le pendule oscille dans ce plan vertical tournant à la vitesse angulaire  $\omega_T \sin \lambda$  dans le sens  $N - E - S - O$ .

À l'équateur  $\lambda = 0^\circ$ , d'où une rotation du plan d'oscillation à une vitesse angulaire nulle : le plan reste fixe pour un observateur terrestre. Au pôle nord,  $\lambda = 90^\circ$ , et le plan d'oscillation tourne bien à la vitesse angulaire  $\omega_T$ , c'est-à-dire qu'il fait une révolution complète en un jour sidéral. Ceci confirme l'analyse des deux premières questions.

À Paris on a  $\lambda = 48^\circ 51'$ , d'où  $\omega_T = \frac{2\pi}{T \sin \lambda} = 7,293 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui est en très bon accord avec la détermination à partir du jour sidéral  $\frac{2\pi}{86164} = 7,292 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .



# Lois du frottement solide

3

## 1 Introduction

On appelle **action de contact** l'action mécanique qu'exercent l'un sur l'autre deux solides dont les surfaces sont en contact. Ces actions sont omniprésentes dans la vie courante. Considérons par exemple une voiture : l'action du sol sur un pneu a une composante qui évite au véhicule de déraper, le frottement des plaquettes du frein permet de freiner...

L'action de contact résulte des interactions entre les atomes constituant les solides<sup>1</sup> qui se trouvent au voisinage des surfaces en contact. Elle dépend très fortement de l'état de ces surfaces (état de propreté, présence d'une couche d'oxyde pour une surface métallique...). La complexité du problème fait qu'il n'est pas possible d'établir des lois générales pour le frottement à partir des lois fondamentales de la physique.

On présente dans ce chapitre les **lois de Coulomb** relatives aux actions de contact. Ces lois décrivent de manière efficace les comportements observés expérimentalement, mais n'ont pas de fondement théorique : il s'agit de **lois phénoménologiques**. De plus, elles donnent des informations partielles sur les actions de contact mais pas de formules explicites. Il faut insister sur le fait que *les actions de contact sont des actions mécaniques inconnues* qui seront déterminées à l'aide des théorèmes de la mécanique.

Enfin, la structure même des lois de Coulomb fait que doit pour les utiliser adopter une démarche particulière qui consiste formuler une hypothèse relative au comportement du système que l'on teste en fin de calcul. Ce type de démarche est assez courant en physique.

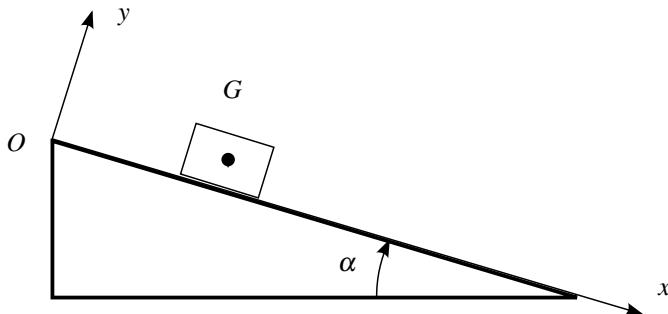
## 2 Observations expérimentales

### 2.1 Dispositif

On dispose d'un plan incliné dont on peut faire l'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On étudie le mouvement (ou l'absence de mouvement) d'un solide parallélépipédique de masse  $m$ , que l'on posera sans vitesse initiale ou que l'on lancera suivant la ligne de plus grande pente (voir figure 3.1).

On ne peut que recommander au lecteur de réaliser les manipulations décrites ici avec ce qu'il

1. Les interactions moléculaires sont étudiées dans le cours de chimie : il y a répulsion à courte distance (distance entre les centres des atomes de l'ordre de  $10^{-10}\text{m}$ ) et attraction à plus grande distance (force de Van der Waals).

**Figure 3.1 – Solide sur plan incliné**

a sous la main : par exemple une boîte de cartouches et la couverture d'un classeur font très bien l'affaire...

## 2.2 Première expérience

Dans cette première expérience on dépose le solide sur le plan incliné sans vitesse initiale. On constate que pour un solide et un plan donnés deux comportements différents sont possibles : soit le solide reste en équilibre là où on l'a posé, soit il se met à glisser vers le bas le long de la direction de plus grande pente.

On constate que le choix du comportement dépend de la valeur de l'angle  $\alpha$  : le solide reste en équilibre quand  $\alpha$  est inférieur à une angle limite  $\alpha_l$  et glisse quand  $\alpha$  est supérieur à  $\alpha_l$ .

On peut recommencer la manipulation avec un autre solide (fait dans une autre matière), par exemple une gomme. On constate encore l'existence des deux comportements. Cependant l'angle limite  $\alpha$  n'est plus le même. On sent intuitivement que la gomme « adhère » plus au plan incliné que la boîte de cartouches, ce qui se traduit expérimentalement par un angle limite  $\alpha_l$  plus grand.

## 2.3 Deuxième expérience

Dans cette deuxième expérience, on lance le solide vers le haut du plan incliné le long de la direction de plus grande pente.

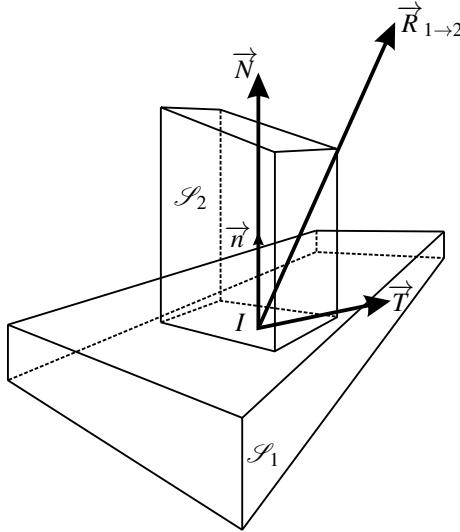
On constate là aussi deux comportements possibles. Dans tous les cas le solide commence par glisser vers le haut le long du plan incliné. Sa vitesse diminue progressivement jusqu'à s'annuler. Ensuite, soit le solide reste immobile, soit il redescend en bas du plan incliné.

# 3 Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

## 3.1 Modélisation, définitions et notations

On modélise l'action de contact d'un solide  $\mathcal{S}_1$  sur un solide  $\mathcal{S}_2$  par une force  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  appliquée en un point  $I$  de la surface de contact (voir figure 3.2).

On décompose cette force en une composante perpendiculaire au plan de contact, notée  $\vec{N}$  et



**Figure 3.2 – Action de contact entre deux solides.**

une composante appartenant au plan tangent, notée  $\vec{T}$  :

$$\vec{R}_{1\rightarrow 2} = \vec{N} + \vec{T} .$$

### Remarque

En raison de la troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques (voir cours de première année) l'action du solide  $S_2$  sur le solide  $S_1$  est :

$$\vec{R}_{2\rightarrow 1} = -\vec{R}_{1\rightarrow 2} = -\vec{N} - \vec{T} .$$

Conformément au programme, on se limite au cas où le solide  $S_2$  est :

- soit immobile par rapport au solide  $S_1$ , on parle alors de **non-glissement** ;
- soit est en translation par rapport à  $S_1$  ; cette translation se fait alors parallèlement au plan tangent aux deux solides, on parle alors d'un mouvement de **glissement**.

On appelle **vitesse de glissement** du solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ , notée  $\vec{v}_{g2/1}$ , la vitesse d'un point quelconque du solide  $S_2$  par rapport au référentiel associé au solide  $S_1$ . Cette vitesse de glissement appartient donc au plan tangent commun aux deux solides.

La situation de non-glissement se traduit donc par  $\vec{v}_{g2/1} = \vec{0}$ . La situation de glissement se traduit au contraire par  $\vec{v}_{g2/1} \neq \vec{0}$ .

Enfin on note  $\vec{n}_{1\rightarrow 2}$  le vecteur unitaire normal au plan tangent, et dirigé de  $S_1$  vers  $S_2$ .

Les lois de Coulomb portent sur les composantes  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  séparément ; pour la composante  $\vec{T}$  elles sont différentes suivant qu'il y a ou non glissement.

### 3.2 Loi de Coulomb pour la composante normale $\vec{N}$

La composante normale  $\vec{N}$  traduit l’opposition du solide  $S_1$  à sa pénétration par le solide  $S_2$ .

Lorsqu’il y a contact entre les deux solides, la composante normale de l’action de  $S_1$  sur  $S_2$  est dirigée nécessairement de  $S_1$  vers  $S_2$ , ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} > 0$$

#### Remarque

Si l’on a fait l’hypothèse d’un contact entre les solides et qu’il ressort du calcul que  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} < 0$  cela signifie que cette hypothèse est fausse et qu’il y a perte du contact.

### 3.3 Loi de Coulomb pour la composante tangentielle $\vec{T}$ dans le cas du non-glissement

La situation de **non-glissement** est caractérisée par :

$$\text{Non-glissement : } \begin{cases} \vec{v}_{g2/1} = \vec{0} \\ \|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\| \end{cases}$$

où  $f_s$  est le **coefficent de frottement statique** entre les deux solides.

L’égalité  $\vec{v}_{g2/1} = \vec{0}$  traduit simplement le fait même qu’il y a non-glissement. C’est une équation que l’on peut utiliser lorsqu’on fait l’hypothèse qu’il n’y a pas glissement.

L’inégalité  $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$  est une condition de validité de cette hypothèse. Il faut la vérifier en fin de calcul pour tester la présence ou non de glissement.

On remarque que rien n’est dit *a priori* ni sur le sens ni sur la direction de la composante tangentielle. On a juste une contrainte sous la forme d’une inégalité : sa norme est inférieure à une certaine valeur.

### 3.4 Loi de Coulomb pour la composante tangentielle $\vec{T}$ dans le cas du glissement

La situation de **glissement** est caractérisée par :

$$\text{Glissement : } \begin{cases} \|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| \\ \vec{v}_{g2/1} \neq \vec{0} \\ \vec{T} \text{ est de même direction et de sens opposé à } \vec{v}_{g2/1} \end{cases}$$

où  $f_d$  est le **coefficent de frottement dynamique** entre les deux solides.

L'égalité  $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$  est une équation que l'on peut utiliser lorsqu'on fait l'hypothèse qu'il y a glissement.

Pour utiliser ces lois il faut faire l'hypothèse que la vitesse de glissement est non nulle et prédire sa direction et son sens. Le calcul doit conduire à une vitesse de glissement dans le sens prévu et une composante tangentielle de sens opposé pour valider l'hypothèse.

Le dernier point traduit le fait que la composante tangentielle s'oppose au glissement du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$ .

### 3.5 Les coefficients de frottement

Les coefficient de frottement statique  $f_s$  et dynamique  $f_d$  dépendent du couple de matériaux constituant les deux solides  $S_1$  et  $S_2$  et de l'état des surfaces. Ils ne dépendent ni de l'aire de la surface de contact, ni de la valeur de la composante normale.

Le tableau ci-dessous rassemble quelques valeurs des coefficients de frottement, statique et dynamique, entre divers matériaux. Ces valeurs sont indicatives, car comme il a été déjà été dit, ces coefficients dépendent grandement de l'état de surface des solides.

| Surface en contact               | $f_s$       | $f_d$       |
|----------------------------------|-------------|-------------|
| Acier sur acier                  | 0,6         | 0,4         |
| Acier sur bois                   | 0,2 à 0,6   |             |
| Aluminium sur aluminium          | 1,1         |             |
| Aluminium sur acier              | 0,61        | 0,47        |
| Bois sur bois                    | 0,25 à 0,50 |             |
| Caoutchouc sur acier             | 0,40        | 0,30        |
| Pneus en bon état sur pavage sec | 0,90        | 0,80        |
| Pneus usés sur pavage humide     | 0,10 à 0,20 | 0,05 à 0,12 |

#### Remarque

- On remarque tout d'abord que  $f_d < f_s$ . Cela se traduit concrètement par le fait que pour mettre en mouvement une lourde caisse posée sur le sol il faut exercer dans un premier une force horizontale donnée, mais qu'une fois que le mouvement est initié, pour maintenir une vitesse constante à la caisse, il faut exercer une force horizontale moins grande.
- On remarque également qu'en général  $\frac{f_s - f_d}{f_s} \ll 1$ , ce qui fait que très fréquemment on confond les deux valeurs. On ne parle alors que d'un coefficient de frottement  $f$  qui est à la fois  $f_s$  et  $f_d$ .

### 3.6 Cas d'un contact sans frottement

On peut noter que la situation idéale, fréquemment rencontrée en exercice, d'un contact sans frottement est incluse dans les lois de Coulomb. Cela correspond à  $f = 0$ . En effet les lois de Coulomb impliquent alors nécessairement  $\|\vec{T}\| = 0$  et donc  $\vec{T} = \vec{0}$ . Dès lors la réaction n'a qu'une composante normale. C'est bien comme ceci que l'on a jusqu'à présent modélisé les contacts parfaits sans frottement.

## 4 Méthode de résolution d'un problème avec frottement solide

On propose ici un canevas de résolution pour les problèmes avec frottement solide. Il n'a rien d'impératif, mais au moins dans un premier temps il n'est peut-être pas inutile de s'appuyer dessus, quitte à abandonner son cadre un peu strict quand on maîtrise son sujet.

On donne tout d'abord le canevas général :

- Formulation : on fait une hypothèse relative au mouvement du solide qui peut être soit le non glissement soit un glissement dans une direction et un sens précis.
- Exploitation : on traduit mathématiquement, compte tenu du paramétrage du problème, les conséquences de l'hypothèse.
- Résolution : on résoud le problème posé dans le cadre de l'hypothèse. En fin de résolution on calcule, si cela n'a pas encore été fait, toutes les grandeurs qui interviennent dans les conditions à vérifier.
- Validation : on impose aux grandeurs calculées de vérifier les conditions de validité de l'hypothèse. On trouve ainsi la plage de valeur des paramètres pour lesquels cette hypothèse est la bonne. Il se peut que ces conditions soient impossibles, ce qui signifie que l'hypothèse choisie était mauvaise. Il arrive aussi qu'elles soient vérifiées mais uniquement jusqu'à un certain instant ; dans ce cas il faut formuler une nouvelle hypothèse pour la suite du mouvement et reprendre la démarche d'hypothèse-validation.
- Conclusion : on tire une conclusion claire concernant l'hypothèse.

## 5 Interprétations des observations expérimentales

### 5.1 Notations et mise en équation générale

On choisit un axe ( $Ox$ ) parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné, orienté vers le bas et un axe ( $Oy$ ) perpendiculaire au plan (voir figure 3.3). On repère la position du solide par l'abscisse  $x$  de son centre de masse et on note sa masse  $m$ .

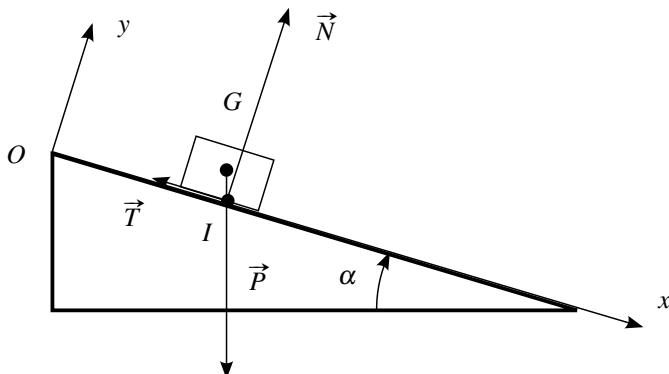


Figure 3.3 – Solide sur plan incliné

Pour simplifier on ne fait pas de différence entre les coefficients de frottement statique et

dynamique que l'on note tous les deux  $f$ .

Le solide est soumis à son poids  $\vec{P}$ , à la réaction du plan incliné :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = N \vec{u}_y + T \vec{u}_x.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide s'écrit :

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} &= mg \sin \alpha + T \\ 0 &= -mg \cos \alpha + N \end{cases} \quad (1) \quad (2).$$

On a trois inconnues :  $x$ ,  $T$  et  $N$  et, sans faire d'hypothèse particulière, deux équations.

## 5.2 Interprétation de la première expérience

L'expérience l'a montré : on ne peut dire a priori si le solide déposé sans vitesse initiale va rester immobile ou s'il va glisser vers le bas. On est donc obligé de formuler une hypothèse. Il y a *a priori* trois cas possibles : le solide reste en équilibre, il descend le plan incliné ou il remonte le plan incliné. Il est clair que le bon sens dit d'exclure ce dernier cas ! On va envisager successivement les deux premiers en suivant la démarche expliquée plus haut.

### a) Hypothèse de non glissement

- Formulation : on fait l'hypothèse que le solide ne glisse pas ; le plan incliné étant fixe il est donc immobile.
- Exploitation : dans ce cas  $\dot{x} = 0$  et  $\ddot{x} = 0$ .
- Résolution : avec les équations (1) et (2) on trouve :

$$T = -mg \sin \alpha \quad \text{et} \quad N = mg \cos \alpha.$$

- Validation : La condition  $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$  se traduit ici par  $|mg \sin \alpha| \leq f |mg \cos \alpha|$ , soit  $\tan \alpha \leq f$ , soit encore :

$$\alpha \leq \alpha_l = \arctan f.$$

- Conclusion : si  $\alpha \leq \alpha_l$ , alors le solide posé sans vitesse initiale ne se mettra pas en mouvement.

On retrouve bien une observation de la première expérience. De plus la mesure de  $\alpha_l$ , angle maximum pour lequel le solide est immobile donne accès au coefficient de frottement puisque :

$$f = \tan \alpha_l.$$

### b) Hypothèse de glissement vers le bas

- Formulation : on fait l'hypothèse que le solide glisse vers le bas.
- Exploitation : la vitesse de glissement étant par hypothèse dans la direction et le sens de  $\vec{u}_x$ , la composante tangentielle de l'action de contact  $\vec{T}$  est dans le sens de  $-\vec{u}_x$  donc  $T < 0$  ; de plus la relation  $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$  s'écrit :  $|T| = f |N|$ .
- Résolution : l'équation (2) donne  $N = mg \cos \alpha$ , on en déduit  $T = -|T| = -fmg \cos \alpha$  ; en reportant dans l'équation (1) on trouve alors :  $\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$  ; enfin en intégrant avec une vitesse initiale nulle on trouve :

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t.$$

- Validation : il faut vérifier que la vitesse de glissement est bien vers le bas, or  $\vec{v}_{g2/1} = \dot{x}\vec{u}_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t\vec{u}_x$ , il faut donc que :  $\sin\alpha - f\cos\alpha > 0$  soit  $\tan\alpha > f$  soit encore :

$$\alpha > \alpha_l = \arctan f.$$

- Conclusion : si  $\alpha > \alpha_l$ , le solide posé sans vitesse initiale se met à glisser vers le bas.

### c) Hypothèse de glissement vers le haut

Il est a priori inutile d'étudier ce cas que l'on pressent être contre nature. On peut d'ailleurs en être convaincu au regard des deux conclusions des deux études précédentes. En effet pour une valeur quelconque de  $\alpha$  on a soit  $\alpha \leq \arctan f$  et alors on a vu que le solide restait immobile, soit  $\alpha > \arctan f$  et alors on a vu que le solide descendait vers le bas. Il n'y a pas d'autre possibilité ici.

Il est cependant instructif d'étudier cette hypothèse au moins une fois en détail.<sup>2</sup>

- Formulation : on fait l'hypothèse que le solide glisse vers le haut.
- Exploitation : la vitesse de glissement étant par hypothèse dans la direction et le sens de  $-\vec{u}_x$ , la composante tangentielle de l'action de contact  $\vec{T}$  est dans le sens de  $\vec{u}_x$  donc  $T > 0$ ; de plus :  $|T| = f|N|$ .
- Résolution : l'équation (2) donne  $N = mg\cos\alpha$ , on en déduit  $T = |T| = fmg\cos\alpha$ ; en reportant dans l'équation (1) on trouve alors :  $\ddot{x} = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$ ; enfin en intégrant avec une vitesse initiale nulle on trouve :

$$\dot{x} = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t.$$

- Validation : il faut vérifier que la vitesse de glissement  $\vec{v}_{g2/1} = \dot{x}\vec{u}_x$  est bien vers le haut soit que :  $g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t < 0$  ce qui est manifestement faux.
- Conclusion : le solide posé sans vitesse initiale ne peut jamais se mettre à glisser vers le haut !

## 5.3 Interprétation de la deuxième expérience

On ne va pas ici reprendre la totalité de la méthode, mais on va insister sur une différence fondamentale : contrairement à la première manipulation, on sait, qu'au moins au début, le solide va glisser en remontant le long du plan incliné, vers le haut. Dès lors il serait absurde de faire une hypothèse d'immobilité ou de descente du solide au début de l'étude.

L'hypothèse de montée du solide n'en est pas une, c'est une certitude. Cela n'empêche cependant pas d'utiliser, en l'adaptant, la canevas de résolution, car l'expérience le montre, le solide ne va pas éternellement monter. Il faudra donc déterminer à quel instant les conditions du mouvement de glissement vers le haut ne seront plus satisfaites.

- Formulation : le solide commence par glisser vers le haut.
- Exploitation : la vitesse de glissement étant dans la direction et le sens de  $-\vec{u}_x$ , la composante tangentielle de l'action de contact  $\vec{T}$  est dans le sens de  $\vec{u}_x$  soit  $T > 0$ ; de plus :  $|T| = f|N|$ .

---

2. En effet les étudiants sont souvent sceptiques devant cette démarche par hypothèse-validation. Beaucoup ont le sentiment que « comme on utilise l'hypothèse » dans les calculs, alors elle sera forcément vérifiée. L'étude de ce cas devrait les convaincre du contraire.

- Résolution : l'équation (2) donne  $N = mg \cos \alpha$ , on en déduit  $T = |T| = fmg \cos \alpha$ ; en reportant dans l'équation (1) on trouve alors :  $\ddot{x} = g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ; enfin en intégrant avec une vitesse initiale  $-v_0 \vec{u}_x$  on trouve :  $\dot{x} = g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t - v_0$ .
- Validation : il faut vérifier que la vitesse de glissement  $\vec{v}_{g2/1} = \dot{x} \vec{u}_x$  est bien vers le haut, soit que  $(\sin \alpha + f \cos \alpha)t - v_0 < 0$  ce qui est le cas tant que :

$$t < t_1 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

- Conclusion : pour  $t < t_1$ , le solide glisse vers le haut.

Pour  $t > t_1$ , il est inutile de poursuivre l'étude. En effet, la situation à l'instant  $t_1$  est exactement la situation à l'instant initial dans la première expérience : solide posé sans vitesse sur le plan. On peut donc affirmer que si  $\alpha \leq \arctan f$ , le solide va rester immobile et si  $\alpha > \arctan f$ , le solide va redescendre.

## 6 Aspect énergétique

### 6.1 Puissance de la force de contact s'exerçant sur un solide

L'expression « frottement solide » laisse penser que la force de contact s'exerçant sur un solide est une force de freinage. C'est bien le cas dans la première expérience ci-dessus : il est intuitif que plus il y a de frottement, plus le solide descend le plan incliné lentement. Dans le cas où  $\alpha > \alpha_l$  l'expression de la vitesse du bloc trouvée,  $\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t$ , montre clairement qu'elle diminue si le coefficient de frottement augmente. La puissance de la force de contact est alors :

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot (\dot{x} \vec{u}_x) = T \dot{x} = -fmg^2 \sin \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha)t ;$$

elle est négative puisque  $\alpha > \alpha_l$  donc  $\sin \alpha > f \cos \alpha$ .

La puissance de la force de frottement sur un solide n'est cependant pas toujours négative et il y a des cas où la force de frottement est la force motrice. C'est ce que montre l'exemple suivant.

On considère une planche horizontale  $\mathcal{S}_1$  de masse  $M$ , qui peut se déplacer sans frottement sur le sol et sur laquelle est posé un solide  $\mathcal{S}_2$  de masse  $m$ . L'ensemble est initialement au repos et on exerce une force horizontale de norme  $F$  constante sur  $\mathcal{S}_1$  (voir figure 3.4).

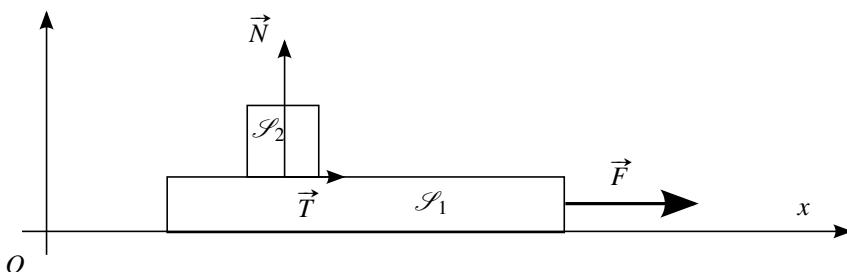


Figure 3.4 – Solide entraîné par une planche

Si  $F$  n'est pas trop grande,  $\mathcal{S}_2$  reste immobile par rapport à  $\mathcal{S}_1$  et tous les deux se déplacent vers la droite. La force qui met en mouvement  $\mathcal{S}_1$  est  $\vec{F}$  tandis que la force qui met en mouvement  $\mathcal{S}_2$  est la force de contact exercée par  $\mathcal{S}_1$ . La puissance de cette force est donc positive.

On peut exprimer cette puissance.  $\mathcal{S}_2$  étant immobile par rapport à  $\mathcal{S}_1$ , les deux solides ont la même accélération. En repérant  $\mathcal{S}_1$  par l'abscisse  $x$  de son extrémité gauche cette accélération commune est simplement :  $\ddot{x} = \dot{x}\vec{u}_x$ .

$\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  forment un solide auquel on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe horizontal ; il vient :  $(M+m)\ddot{x} = F$ . L'intégration donne alors facilement :

$$\ddot{x} = \frac{F}{M+m}t.$$

On applique maintenant le principe fondamental de la dynamique à  $\mathcal{S}_2$  seul. Il est soumis à son poids et à l'action de contact  $\vec{R}_{1/2} = \vec{T} + \vec{N}$  (voir figure 3.4) avec  $\vec{T} = T\vec{u}_x$ . Il vient :

$$m\ddot{x} = T.$$

En combinant les deux résultats précédents pour éliminer  $\ddot{x}$  on trouve :  $T = \frac{m}{m+M}F > 0$ . Dès lors, la puissance de l'action de  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$  est :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\dot{x}\vec{u}_x) = \dot{x}T = \frac{mF^2}{(M+m)^2}t,$$

qui est bien positive.

## 6.2 Puissance totale des forces de contact entre deux solides

On revient au cas général de deux solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  en contact et on s'intéresse maintenant à la puissance des *deux* forces contact :  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ .

Dans le cas le plus général au programme, les *deux* solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont en translation dans le référentiel d'étude. On note  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  leurs vitesses respectives.

La puissance de  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  est :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2,$$

et la puissance de  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$  :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{2 \rightarrow 1}) = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 = -\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_1,$$

d'après la troisième loi de Newton. La puissance totale des deux forces est ainsi :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{R}_{1 \rightarrow 2}) + \mathcal{P}(\vec{R}_{2 \rightarrow 1}) = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 - \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_1 = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Mais il faut noter que  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$  n'est rien d'autre que la vitesse de glissement de  $\mathcal{S}_2$  par rapport à  $\mathcal{S}_1$ . En effet, d'après la loi de composition des vitesses, :

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/\mathcal{S}_1} + \vec{v}_e = \vec{v}_{2/\mathcal{S}_1} + \vec{v}_1 = \vec{v}_{g2/1} + \vec{v}_1.$$

Par ailleurs on a vu que cette vitesse de glissement appartenait au plan tangent commun aux deux solides. Elle est donc orthogonale à la composante normale de la réaction. Finalement :

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_{g2/1}$$

Le contenu physique de cette équation est intéressant. En effet on voit que :

- si  $\mathcal{S}_2$  ne glisse pas par rapport à  $\mathcal{S}_1$ , la puissance des deux actions de contact est nulle ;
- s'il y a glissement, compte tenu de l'anticolinéarité de  $\vec{T}$  et de  $\vec{v}_{g2/1}$ , cette puissance est négative.

La puissance totale des forces mises en jeu dans un contact entre deux solides est nulle dans le cas du non glissement et négative dans le cas du glissement.

### SYNTHESE

#### SAVOIRS

- Lois du frottement de glissement de Coulomb

#### SAVOIR-FAIRE

- Résoudre un problème avec frottements solide par hypothèse-validation
- Bilan énergétique

#### MOTS-CLÉS

- |              |                         |
|--------------|-------------------------|
| • frottement | • non glissement        |
| • glissement | • vitesse de glissement |

**S'ENTRAÎNER****3.1 Distance d'arrêt (★)**

Un jeton est lancé sur un plan horizontal avec une vitesse initiale de norme  $v_0$ . Quel distance parcourt-il avant de s'arrêter ? La réponse fait intervenir un coefficient de frottement que l'on définira.

**3.2 Équilibre sur un plateau tournant (★)**

Sur un plateau horizontal  $\mathcal{P}$ , tournant autour d'un axe fixe vertical à vitesse angulaire constante  $\omega$ , on dépose un jeton à distance  $r$  de l'axe de rotation. À quelle condition le jeton reste-t-il là où on l'a posé ? La réponse fait intervenir un coefficient de frottement que l'on définira.

**3.3 Comment positionner une échelle contre un mur ? (★)**

Une échelle est posée contre un mur vertical, son autre extrémité reposant sur le sol horizontal. Il n'y a pas de frottement entre l'échelle et le mur, le coefficient de frottement entre l'échelle et le sol est  $f$ .

Quelles conditions l'utilisateur doit-il respecter, s'il veut éviter que l'échelle glisse sur le sol ? On négligera la masse de l'échelle devant celle de l'utilisateur et supposera que l'utilisateur reste vertical quand il grimpe à l'échelle.

**APPROFONDIR****3.4 Une règle posée sur deux doigts (★★)**

Lorsqu'on pose les extrémités d'une règle horizontale sur ses deux index et qu'on rapproche les deux doigts, on constate que la règle glisse alternativement sur chaque doigt, en étant fixe par rapport à l'autre doigt, et que les doigts se rejoignent invariablement au milieu de la règle. Le but de l'exercice est d'interpréter cette expérience.

On note  $I_1$  et  $I_2$  les points de contact entre la règle et les deux doigts,  $G$  le centre d'inertie de la règle, et on pose  $x_1 = GI_1$  et  $x_2 = GI_2$  (attention ces grandeurs sont donc positives). On suppose que le doigt (1) est immobile et que le doigt (2) se déplace à vitesse constante en direction du doigt (1) à partir de l'instant  $t = 0$ . À l'instant initial la règle est immobile et  $x_1(0) = a$ . On appelle  $f_s$  le coefficient de frottement statique et  $f_d$  le coefficient de frottement dynamique entre les doigts et la règle. On rappelle que  $f_s > f_d$ .

**1. Question préliminaire.** Au cours du mouvement la règle est en translation. On va d'abord établir les expressions des composantes normales  $N_1$  et  $N_2$  des réactions des doigts, indépendamment de la phase du mouvement. Pour cela on se place dans le référentiel  $\mathcal{R}_G = (G, x, y, z)$  lié à la règle. Il est *a priori* non galiléen et on admet qu'ici la force d'inertie d'entraînement est appliquée en  $G$ . En appliquant le théorème du moment cinétique à la règle, en  $G$  dans  $\mathcal{R}_G$  établir une relation entre  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $x_1$  et  $x_2$ . En déduire les expressions de  $N_1$  et  $N_2$ , en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $x_1$  et  $x_2$  uniquement.

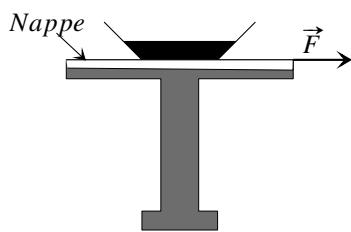
**2. Durant la première phase du mouvement** la règle est fixe par rapport au doigt (1) et glisse sur le doigt (2). Déterminer, en fonction de  $a$ ,  $f_s$  et  $f_d$ , l'expression de  $x_2$  au moment où cette

phase s'achève.

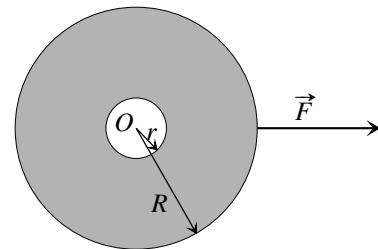
3. Donner l'expression de l'accélération de la règle au moment où elle commence à glisser sur le doigt (1). En déduire l'ordre de grandeur du temps au bout duquel la règle a une vitesse égale à la vitesse  $v$  du doigt (2), sachant que  $v \simeq 1 \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $f_s = 0,5$ ,  $f_d = 0,3$  et  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .
4. Dans la troisième phase suivante la règle est fixe par rapport au doigt (2) et glisse sur le doigt (1). Pourquoi peut-on dire que  $x_2$  a pratiquement la valeur déterminée à la question 2 durant cette phase ? Quelle est la valeur de  $x_1$  au moment où cette phase s'achève ?
5. Montrer que les deux doigts se rejoignent en  $G$ .

### 3.5 Une assiette sur un guéridon (★★)

Sur le guéridon de la figure 3.5, recouvert d'une nappe sans ourlet, on place une assiette bien remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste en place sur le guéridon.



**Figure 3.5 – Guéridon, nappe et assiette**



**Figure 3.6 – Assiette et nappe vues de dessus**

La masse de l'assiette est  $M = 400 \text{ g}$ , celle de la nappe est  $m = 50 \text{ g}$ . Le guéridon (voir figure 3.6) est modélisé par un disque de centre  $O$  et de rayon  $R = 25 \text{ cm}$ . Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, de rayon  $r = 5 \text{ cm}$ , est placée au centre de la nappe. On admet que le support de la force  $\vec{F}$  développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par  $O$  et que cette force s'écrit, en fonction du temps  $t$ ,  $\vec{F} = m\alpha t \vec{u}_x$ , où  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire de l'axe ( $Ox$ ), et  $\alpha$  une constante.

Le frottement entre la nappe et le guéridon est négligeable. Le coefficient de frottement entre la nappe et l'assiette est noté  $f$  ( $f = 0,2$ ). Le repère d'espace  $\mathcal{R}_g(O, \vec{u}_x)$  est supposé galiléen. On note  $g$  l'accélération de la pesanteur ( $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ).

#### Une première modélisation

1. On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant  $t = 0^+$ , le sens de la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe ?
2. Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans  $\mathcal{R}_g$  et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre  $C_a$ ,  $x_a(t) = f(t)$ .
3. Déterminer l'équation horaire du mouvement du centre  $C_n$  de la nappe,  $x_n = h(t)$ .

## CHAPITRE 3 – LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT

**4.** On observe que le déplacement de l'assiette est négligeable et que la nappe cesse d'être au contact de l'assiette après une durée  $\tau = 0,1$  s ; calculer la valeur de  $\alpha$ . Le déplacement de l'assiette est-il effectivement négligeable ? L'expérience peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

**Une modélisation plus réaliste**

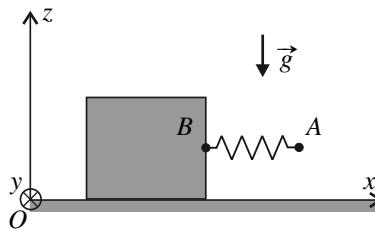
En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases ; dans la première phase, de durée  $t_1$ , l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur  $fMg$  donnée par la loi de Coulomb, l'assiette ne glisse pas sur la nappe et donc  $x_a = x_n$ .

**5.** Pour  $0 \leq t \leq t_1$ , intégrer l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au système {nappe+assiette}. En appliquant l'équation fondamentale de la dynamique à l'assiette seule, déterminer la composante tangentielle de la nappe sur l'assiette. En déduire que la durée de la phase sans glissement est  $t_1 = \frac{f(M+m)g}{\alpha m}$ .

**6.** Exprimer  $x_a(t_1)$ ,  $x_n(t_1)$ ,  $\left(\frac{dx_a}{dt}\right)_{t=t_1}$  et  $\left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{t=t_1}$ .

**7.** Déterminer, pour  $t \geq t_1$ , et sous la forme de polynômes de la variable  $(t - t_1)$ , les équations horaires respectives du mouvement de  $C_a$ ,  $x_a = \varphi(t - t_1)$  et de celui de  $C_n$ ,  $x_n = \eta(t - t_1)$

**8.** On observe que le contact nappe-assiette dure  $t_c - t_1 = 0,1$  s. Calculer la valeur de  $\alpha$  (on devrait arriver à l'équation  $\alpha(t - t_1)^3 = 6(R + r)$ ) ; calculer aussi  $t_1$ .

**3.6 Mouvement « fixe-glisse » (\*\*)** 

Un bloc de masse  $M$  est posé sur une table horizontale. Le contact entre la table et le bloc est caractérisé par un coefficient de frottement dynamique  $f_d$  et un coefficient de frottement statique  $f_s$ . Un ressort de longueur au repos  $l_0$  et raideur  $k$  est relié au bloc. Initialement, le bloc est immobile et le ressort est immobile. À partir de l'instant  $t = 0$  on tire sur l'extrémité libre du ressort  $A$  de manière à la déplacer avec une vitesse constante  $\vec{u} = u\vec{u}_x$  ( $u > 0$ ).

On appelle  $X(t)$  l'allongement du ressort.

**1.** Montrer que dans une première phase le bloc est fixe. Exprimer la date  $t_1$  à laquelle il est mis en mouvement.

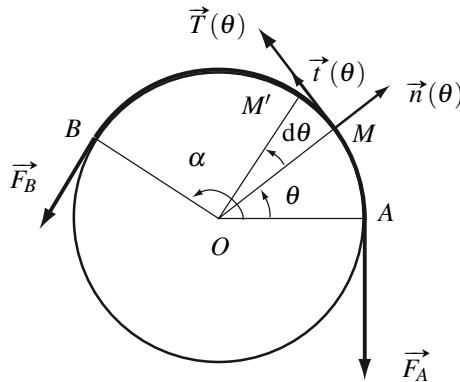
**2.** On s'intéresse à la deuxième phase pendant laquelle le bloc est en mouvement.

**3.** Trouver l'équation différentielle vérifiée par  $X(t)$  au cours de cette phase. Que valent  $X(t_1)$  et  $\dot{X}(t_1)$  ? Exprimer  $X(t)$ .

- 4.** On appelle  $t_2$  l'instant pour lequel la vitesse du bloc s'annule pour la première fois depuis  $t_1$ . Que vaut  $\dot{X}(t_2)$ ? Sans chercher à calculer l'instant  $t_2$ , montrer que  $X(t_2) = (2f_d - f_s)\frac{Mg}{k}$ .
- 5.** On suppose qu'à l'instant  $t_2$  le bloc s'immobilise. Exprimer la durée pendant laquelle il reste immobile.
- 6.** Tracer l'allure des courbes  $X(t)$  et  $x_B(t)$ . Que se passe-t-il si  $k \rightarrow \infty$ ? si  $f_s = f_d$ ?

### 3.7 Équilibre d'un fil sur un arbre cylindrique (★★★)

Un fil de masse négligeable, sans raideur, est enroulé d'un angle  $\alpha$  sur un arbre cylindrique de rayon  $a$ . Le contact arbre - fil est caractérisé par un coefficient de frottement  $f$  valant  $f_d$  s'il y a glissement ou  $f_s$  s'il n'y a pas glissement. On exerce une force  $\vec{F}_A$  de norme  $F_A$  sur l'extrémité  $A$  du fil, et on cherche la valeur minimale de la norme  $F_B$  de la force  $\vec{F}_B$  à appliquer sur l'autre extrémité  $B$  du fil pour qu'il soit en équilibre.



- 1.** On repère un point courant  $M$  du tronçon de fil en contact avec l'arbre par l'angle  $\theta \in [0, \alpha]$ .  $\vec{t}(\theta)$  désigne le vecteur unitaire tangent au fil dans le sens des  $\theta$  croissants ;  $\vec{n}(\theta)$  désigne le vecteur unitaire normal au fil orienté de l'arbre vers l'extérieur.

Exprimer le vecteur  $\vec{t}(\theta + d\theta)$  sur la base  $(\vec{t}(\theta), \vec{n}(\theta))$  en se limitant au premier ordre en  $d\theta$ .

On modélise les efforts qu'exerce le tronçon de fil  $[\theta, \alpha]$  sur le tronçon de fil  $[0, \theta]$  par une force  $\vec{T}(\theta) = T(\theta) \vec{t}(\theta)$ , appelée tension du fil en  $M$ . On raisonne sur un tronçon de fil  $MM'$  compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Ce tronçon est soumis aux forces exercées par les tronçons  $AM$  et  $M'B$ , ainsi qu'à la force de contact  $d\vec{R}$  que lui exerce l'arbre.

- 2.** Écrire une condition nécessaire d'équilibre de  $MM'$  reliant  $\vec{T}(\theta)$ ,  $\vec{T}(\theta + d\theta)$  et  $d\vec{R}$ .

- 3.** Pour  $d\theta$  suffisamment petit, on peut utiliser les lois de Coulomb et écrire :

$$d\vec{R} = dR_t \vec{t}(\theta) + dR_n \vec{n}(\theta).$$

Établir deux équations scalaires reliant  $T(\theta)$ ,  $T(\theta + d\theta)$ ,  $dR_t$  et  $dR_n$ .

- 4.** Dans la situation envisagée, quels sont les signes de  $dR_t$  et de  $dR_n$ ? En déduire la relation valable, à la limite du glissement, entre  $dR_t$  et  $dR_n$ .

**CHAPITRE 3 – LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT**

**5.** En déduire que la tension  $T(\theta)$  est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{d\theta} + f_s T(\theta) = 0$$

**6.** Intégrer cette équation différentielle et en déduire la relation entre  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $f_s$  et  $\alpha$ .

**7.** Application numérique : pour une corde sur un arbre métallique,  $f_s = 0,6$ .

Calculer  $F_B/F_A$  pour  $\alpha = \pi$ .

Un matelot peut exercer confortablement une force de 100 N ; pour quelle valeur minimale  $\alpha_0$  de  $\alpha$  peut-il résister à une force de  $10^4$  N exercée par le bateau sur le premier brin de la corde ?

Dans la disposition précédente, quelle force devrait-il exercer pour tenter de faire glisser la corde afin de tirer le bateau vers lui ?

## CORRIGÉS

### 3.1 Distance d'arrêt

Les forces s'exerçant sur le jeton sont : son poids  $\vec{P}$  et la force de contact exercée par le plan  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$  où  $\vec{N}$  est verticale et  $\vec{T}$  horizontale. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$  où  $\vec{a}$  est l'accélération qui est horizontale. On a donc :

$$\vec{N} = -\vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{T}.$$

Il y a glissement donc  $\|\vec{T}\| = f_c\|\vec{N}\| = f_c mg$  où  $f_c$  est le coefficient de frottement cinétique ; de plus  $\vec{T}$  est anticolinéaire à la vitesse. Ainsi,  $\vec{T}$  ne peut incurver la trajectoire : le jeton a un mouvement rectiligne dans la direction de sa vitesse initiale. On choisit un repère tel que  $\vec{u}_x$  est de même direction et sens que la vitesse initiale ; alors :  $\vec{T} = -f_c mg \vec{u}_x$ .

*Première méthode :*

On a :  $\vec{a} = -f_c g \vec{u}_x$  soit  $\ddot{x} = -f_c g$  ; d'où par intégration :  $\dot{x} = v_0 - f_c g t$  et :

$$x = x(0) + v_0 t - \frac{1}{2} f_c g t^2.$$

Le jeton s'immobilise à l'instant  $t_1 = \frac{v_0}{f_c g}$  et a parcouru la distance :  $d = x(t_1) - x(0) = \frac{v_0^2}{2 f_c g}$ .

*Deuxième méthode :*

On utilise le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et l'instant où le jeton s'immobilise. La variation d'énergie cinétique est :  $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$  ; le travail du poids est nul car le mouvement est horizontal ; le travail de  $\vec{N}$  est nul car elle est perpendiculaire au mouvement ; le travail de  $\vec{T}$  est :  $W(\vec{T}) = -\|\vec{T}\|d = -f_c mg d$  où  $d$  est la distance parcourue.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit  $\Delta E_c = W(\vec{T})$  et donne immédiatement :  $d = \frac{v_0^2}{2 f_c g}$ .

### 3.2 Équilibre sur un plateau tournant

Cet exercice peut se résoudre soit en se plaçant dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, soit dans le référentiel du plateau qui est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Dans les deux cas on fait l'hypothèse que jeton est immobile par rapport au plateau donc on utilise le coefficient de frottement statique  $f_s$ .

*Dans le référentiel du laboratoire :*

Le jeton a un mouvement circulaire uniforme d'accélération  $\vec{a} = -\omega^2 r \vec{u}_r$  où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial. Il est soumis aux forces suivantes : son poids  $\vec{P}$  et la force de contact exercée par le plan  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$  où  $\vec{N}$  est verticale et  $\vec{T}$  horizontale. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$  où  $\vec{a}$  est l'accélération qui est horizontale. On a donc :

$$\vec{N} = -\vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{T} = m\vec{a} = -m\omega^2 r \vec{u}_r.$$

## CHAPITRE 3 – LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT

La condition de validité de l'hypothèse de non glissement est :  $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$ ; elle s'écrit :

$$m\omega^2 r \leq f_s mg \quad \text{soit} \quad r \leq \frac{f_s g}{\omega^2}.$$

Dans le référentiel lié au plateau :

Le jeton est immobile. Il est soumis aux forces suivantes : son poids  $\vec{P}$ , la force de contact exercée par le plan  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$  où  $\vec{N}$  est verticale et  $\vec{T}$  horizontale et la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_r$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{f}_{ie}.$$

On a donc :  $\vec{N} = -\vec{P}$  et  $\vec{T} = -\vec{f}_{ie} = -m\omega^2 r \vec{u}_r$ . La suite du raisonnement est identique.

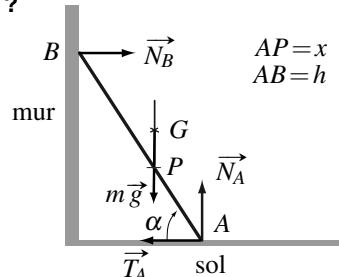
### 3.3 Comment positionner une échelle contre un mur ?

Les forces appliquées au système {échelle + utilisateur} sont : le poids  $m\vec{g}$  appliqué au centre d'inertie  $G$  de l'utilisateur, l'action de contact  $\vec{N}_B$  du mur appliquée en  $B$  et l'action de contact du sol  $\vec{T}_A + \vec{N}_A$  appliquée en  $A$  (voir figure).

Pour que l'échelle ne glisse pas sur le sol, il faut que  $\|\vec{T}_A\| < f \|\vec{N}_A\|$  pour toutes les valeurs de  $x$  comprises entre 0 et  $h$ .

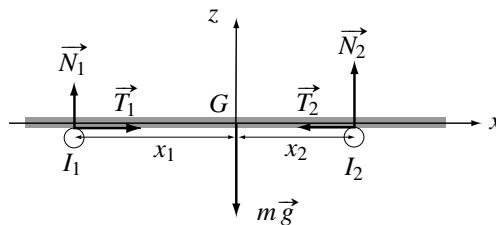
Pour une position donnée de l'utilisateur, l'ensemble est en équilibre donc la somme des forces est nulle ainsi que la somme de leurs moment pris en un point quelconque. Le plus simple est de calculer le moment en  $A$  car cela élimine le plus de forces. Nous obtenons :

$$\begin{cases} 0 = \|\vec{T}_A\| - \|\vec{N}_B\| \\ 0 = -mg + \|\vec{N}_A\| \\ 0 = \sin \alpha h \|\vec{N}_B\| - x \cos \alpha mg \end{cases}$$



Nous en déduisons :  $\|\vec{T}_A\| = \frac{x}{h} mg \cotan \alpha$ . Il faut donc que  $x < h f \tan \alpha$  pour tout  $x \in [0, h]$ , donc que  $f \tan \alpha > 1$ . Dans le cas contraire, l'échelle commence à glisser quand  $x = f \tan \alpha$ .

### 3.4 Une règle posée sur deux doigts



**1.** Le référentiel  $\mathcal{R}_G$  est en translation rectiligne par rapport au référentiel d'étude. Dans les bilans des actions des théorèmes de mécanique il faudra donc rajouter la force d'inertie d'entraînement en plus du poids et des actions de contact  $\vec{T}_1 + \vec{N}_1$  et  $\vec{T}_2 + \vec{N}_2$  des deux doigts. Dans  $\mathcal{R}_G$ , la règle est immobile, donc la somme des forces qui s'y appliquent est nulle, ainsi que la somme des moments de ces forces pris en un point quelconque. On choisit de prendre les moments au point  $G$ ; en utilisant la figure et la notion de bras de levier, il vient :

$$0 = x_1 N_1 - x_2 N_2.$$

Par ailleurs :

$$0 = N_1 + N_2 - mg,$$

car la somme des forces est nulle. On en déduit :  $N_1 = mg \frac{x_2}{x_1 + x_2}$  et  $N_2 = mg \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ .

**2.** Durant cette première phase,  $x_1(t) = a$  et la règle est immobile dans le référentiel d'étude. Le théorème de la résultante cinétique s'écrit, en projection sur  $(Ox)$  :

$$0 = T_1 + T_2$$

La règle glisse sur le doigt (2) donc, compte tenu du sens de la vitesse de glissement :

$$T_2 = -f_d N_2 = -f_d mg \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

Enfin  $T_1 = -T_2$ .

Cette phase du mouvement dure tant que  $|T_1| \leq f_s N_1$ , ce qui donne  $x_2 \geq \frac{f_d}{f_s} a$ . Quand  $x_2$  atteint la valeur  $\frac{f_d}{f_s} a$ , la règle se met à glisser sur le doigt (1). On peut noter que comme  $f_d < f_s$ , cela a lieu pour une situation où le doigt (2) est plus proche du barycentre de la règle que le doigt (1).

**3.** Dans la deuxième phase, la règle glisse sur les deux doigts. Les expressions de  $N_1$  et  $N_2$  n'ont pas changé. On en déduit, compte tenu des sens des vitesses de glissement :

$$T_1 = f_d N_1 = f_d mg \frac{x_2}{x_1 + x_2} \quad \text{et} \quad T_2 = -f_d N_2 = -f_d mg \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) s'écrit pour la règle :

$$m\ddot{x}_{\text{règle}} = T_1 + T_2 = f_d mg \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}.$$

À l'instant où la règle commence à glisser sur le doigt (1),  $x_1 = a$ ,  $x_2 = \frac{f_d}{f_s} a$  donc

$$\ddot{x}_{\text{règle}} = -f_d g \frac{f_s - f_d}{f_s + f_d} = -0,735 \text{ m.s}^{-2}.$$

Si la règle avait une accélération constante, elle atteindrait la vitesse  $v$  en une durée :

$$\tau = \frac{v}{|\dot{x}_{\text{règle}}|} = 0,013 \text{ s.}$$

Le mouvement de la règle est plus compliqué mais le calcul précédent donne l'ordre de grandeur de cette durée :  $\tau \sim 10^{-2} \text{ s.}$

### CHAPITRE 3 – LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT

**4.** La deuxième phase est extrêmement brève. La règle et le doigt (2) n'ont pas le temps de bouger pendant cette phase donc, au début de la troisième phase, durant laquelle la règle ne glisse pas sur le doigt (2),  $x_2 \simeq \frac{f_d}{f_s} a = a'$ ;  $x_2$  garde cette valeur tant que la règle ne glisse pas sur ce doigt.

L'étude est identique à celle de la première question (il suffit de passer dans le référentiel galiléen lié au doigt (2)). La phase s'achève par l'apparition du glissement sur le doigt (2) lorsque :

$$x_1 = \frac{f_d}{f_s} a' = \left( \frac{f_d}{f_s} \right)^2 a.$$

**5.** Il y a alternance de phases de glissement sur chaque doigt et non glissement sur l'autre doigt, séparées par des phases très brèves de glissement sur les deux doigts.

Pendant les phases où la règle ne glisse pas sur le doigt (1),  $x_1$  prend les valeurs successives :  $a, \left( \frac{f_d}{f_s} \right)^2 a, \dots, \left( \frac{f_d}{f_s} \right)^{2n} a$ . Pendant les phases où la règle ne glisse pas sur le doigt (2),  $x_2$  prend les valeurs successives :  $\left( \frac{f_d}{f_s} \right) a, \left( \frac{f_d}{f_s} \right)^3 a, \dots, \left( \frac{f_d}{f_s} \right)^{2n+1} a$ . Ces valeurs diminuent et tendent vers 0 puisque  $f_d < f_s$ . À la fin du mouvement, les doigts sont au centre d'inertie de la règle.

#### 3.5 Une assiette sur un guéridon

**1.** On doit traduire qu'*a priori* la nappe va plus vite vers la droite que l'assiette. Donc la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe est dirigée dans le sens opposé de celui de la force  $\vec{F}$  exercée, soit selon  $-\vec{u}_x$ .

**2.** En projection suivant la verticale ascendante, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'assiette montre que la composante normale  $N$  de la nappe sur l'assiette compense exactement le poids de l'assiette :  $N = Mg$ . D'après la loi de Coulomb du glissement, et en particulier l'anticolinéarité de la composante tangentielle et de la vitesse de glissement, la composante tangentielle  $T$ , comptée positivement vers la droite le long de l'axe horizontal ( $Ox$ ) vaut :  $T = fN = fMg$ .

La projection du principe fondamental selon l'axe ( $Ox$ ) donne alors :  $M\ddot{x}_a = T = fMg$ , en repérant la position du centre de l'assiette par son abscisse  $x_a$ . L'accélération est donc bien constante. Une double intégration tenant compte des conditions initiales conduit à :

$$x_a(t) = \frac{1}{2} fgt^2.$$

**3.** La nappe est soumise à l'action du guéridon (qui n'a qu'une composante verticale puisque le frottement entre eux est négligeable), à son poids, à l'action  $-T\vec{e}_x - N\vec{e}_z$  de l'assiette et à la force de l'expérimentateur  $\vec{F}$ . La projection sur l'axe ( $Ox$ ) du principe fondamental de la dynamique appliqué à la nappe donne alors :  $m\ddot{x}_n = -T + mat = -fMg + mat$ . Une double intégration tenant compte des conditions initiales conduit à :

$$x_n(t) = -\frac{M}{2m} fgt^2 + \frac{1}{6} \alpha t^3.$$

- 4.** Il y a contact tant que  $x_n < r + R$  puisque l'assiette ne bouge quasiment pas. Le temps  $\tau$  est donc tel que  $x_n(\tau) = r + R$ , soit  $r + R = -\frac{M}{2m}fg\tau^2 + \frac{1}{6}\alpha\tau^3$ . On en tire :

$$\alpha = \frac{6(r+R)}{\tau^3} + \frac{3fMg}{m\tau}.$$

L'application numérique donne :  $\alpha = 2,3 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$ .

Le déplacement de l'assiette est donné par  $\frac{1}{2}fg\tau^2 = 1 \text{ cm}$ . Il est assez faible par rapport  $r + R$  pour qu'on l'approximation faite-ci dessus soit acceptable.

À la fin de l'expérience il faut exercer une force de  $m\alpha\tau = 11 \text{ N}$ , soit la force nécessaire pour soulever une masse de 1 kg. Ce n'est pas une valeur importante à l'échelle humaine, même pour un jeune enfant.

- 5.** Le système {nappe + assiette} forme en fait un seul solide pendant la première phase. Ce système n'est soumis qu'à une seule force extérieure horizontale, celle de l'expérimentateur. Il vient donc  $(M+m)\ddot{x} = F = m\alpha t$ , en notant  $\ddot{x} = \ddot{x}_a = \ddot{x}_n$  les accélérations communes à la nappe et à l'assiette. On en tire  $\ddot{x} = \frac{m\alpha t}{M+m}$ .

Pour l'assiette seule on a  $M\ddot{x} = T$ , d'où  $T = M\ddot{x} = \frac{Mm}{M+m}\alpha t$ . Le glissement cesse quand  $T = N = fMg$ , soit pour  $t_1 = fg\frac{M+m}{\alpha m}$ .

On a alors :

$$\dot{x}_a(t_1) = \dot{x}_n(t_1) = \frac{1}{2} \frac{m}{M+m} \alpha t_1^2 = f^2 g^2 \frac{M+m}{2\alpha m}$$

et

$$x_a(t_1) = x_n(t_1) = \frac{1}{6} \frac{m}{M+m} \alpha t_1^3 = f^3 g^3 \frac{(M+m)^2}{6\alpha^2 m^2}.$$

- 6.** À partir de l'instant  $t_1$ , on se retrouve dans la situation étudiée dans la première modélisation où il y avait glissement de l'assiette sur la nappe. Les équations sont donc les mêmes, mais les conditions initiales sont différentes.

L'intégration de  $\ddot{x}_a = fg$ , donne alors :

$$x_a = \frac{1}{2}fg(t-t_1)^2 + f^2 g^2 \frac{M+m}{2m\alpha}(t-t_1) + f^3 g^3 \frac{(M+m)^2}{6m^2\alpha^2}.$$

De même, l'intégration de  $\ddot{x}_n = -\frac{M}{m}fg + \alpha t$  donne :

$$x_n = \frac{1}{6}\alpha(t-t_1)^3 + \frac{1}{2}fg(t-t_1)^2 + f^2 g^2 \frac{M+m}{2m\alpha}(t-t_1) + f^3 g^3 \frac{(M+m)^2}{6m^2\alpha^2}.$$

- 7.** Comme précédemment, à l'instant  $t_c$ ,  $x_n - x_a = R + r$  (le dernier bout de nappe est en contact avec le bord de l'assiette).

Le calcul de  $x_n - x_a$  donne un résultat particulièrement simple :  $x_n - x_a = \frac{1}{6}\alpha(t-t_1)^3$ , et donc on trouve bien :  $\alpha(t_c-t_1)^3 = 6(R+r)$ .

## CHAPITRE 3 – LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT

Les applications numériques donnent  $\alpha = 1,8 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$  et  $t_1 = 10 \text{ ms}$ . Cette première phase est très brève. Par curiosité on peut calculer le déplacement de l'assiette pendant cette phase. On trouve  $33 \mu\text{m}$  ! De même le déplacement à la fin vaut  $x_a(t_c) = 1,1 \text{ cm}$ .

### 3.6 Mouvement « fixe-glisso »

**1.** Pour que le bloc soit mis en mouvement, il faut que la tension du ressort dépasse  $f_s M g$ . Le bloc est donc fixe dans une première phase. L'allongement du ressort croît alors proportionnellement au temps  $X(t) = u t$  ; la tension exercée par le ressort en  $B$  de même :

$$\vec{T} = kX\vec{u}_x = kut\vec{u}_x.$$

Le bloc est mis en mouvement à l'instant :  $t_1 = \frac{f_s M g}{ku}$ .

**2. a.** Le bloc est soumis à son poids  $-Mg\vec{u}_z$ , à la tension du ressort  $kX\vec{u}_x$  et à la force de contact  $N\vec{u}_z + T\vec{u}_x$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué au bloc, en projection sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  donne :

$$M\ddot{x}_B = kX + T \quad \text{et} \quad 0 = -Mg + N.$$

Le bloc glissant maintenant dans le sens de  $\vec{u}_x$  nous avons :  $T = -f_d N = -f_d M g$ .

D'autre part,  $X = ut - x_B - l_0$ , donc  $\ddot{X} = -\ddot{x}_B$ . Il vient finalement :

$$\ddot{X} + \frac{k}{M}X = f_d g.$$

On a les conditions initiales :  $X(t_1) = \frac{f_s M g}{k}$  et  $\dot{X}(t_1) = u$ . La solution de l'équation différentielle précédente est :

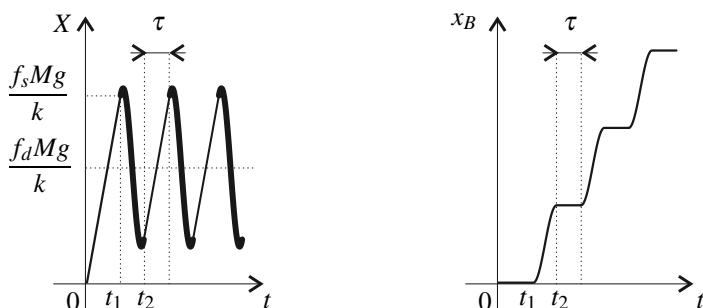
$$X(t) = \frac{f_d M g}{k} + \frac{(f_s - f_d) M g}{k} \cos(\Omega(t - t_1)) + \frac{u}{\Omega} \sin(\Omega(t - t_1)) \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

**b.**  $\dot{X}(t_2) = u$  de même qu'à l'instant  $t_1$ . Un signal sinusoïdal comme  $X(t)$  admet la même dérivée en deux points symétriques par rapport à la valeur moyenne ; donc

$$X(t_2) - \frac{f_d M g}{k} = -X(t_1) + \frac{f_d M g}{k} \quad \text{soit} \quad X(t_2) = \frac{(2f_d - f_s) M g}{k}.$$

**3.** À partir de  $t_2$ , le bloc est immobile ; l'allongement du ressort est :  $X(t) = X(t_2) + ut$ .

La phase d'immobilité dure le temps :  $\tau = \frac{\frac{f_s M g}{k} - X(t_2)}{u} = 2(f_s - f_d) \frac{M g}{k u}$ .



**4.** Entre  $t_1$  et  $t_2$  (traits épais),  $X(t)$  est sinusoïdal, entre  $t_2$  et  $t_2 + \tau$  (traits fins),  $X(t)$  est linéaire. Si  $k \rightarrow \infty$ ,  $x_B(t) \rightarrow ut$ . Si  $f_s = f_d$  il n'y a plus de phase d'immobilité du bloc.

### 3.7 Équilibre d'un fil sur un arbre cylindrique

1.  $\vec{t}(\theta + d\theta) = \vec{t}(\theta) - d\theta \vec{n}(\theta)$  (au premier ordre en  $d\theta$ ,  $\cos(d\theta) = 1$  et  $\sin(d\theta) = d\theta$ ).
2. L'équilibre du tronçon  $MM'$  se traduit par  $-\vec{T}(\theta) + \vec{T}(\theta + d\theta) + d\vec{R} = \vec{0}$ .
3. En projetant la relation ci-dessus sur les vecteurs  $\vec{t}(\theta)$  et  $\vec{n}(\theta)$ , nous obtenons, au premier ordre en  $d\theta$  :

$$\begin{cases} -T(\theta) + T(\theta + d\theta) + dR_t = 0 & \Leftrightarrow \frac{dT}{d\theta} d\theta + dR_t = 0 \\ -T(\theta)d\theta + dR_n = 0 \end{cases}$$

**4.** On cherche la valeur minimale de  $F_B$  pour que le fil soit à l'équilibre. En l'absence de  $F_B$ , il glisse vers la droite donc  $dR_t > 0$ . D'autre part, le fil étant en contact avec l'arbre,  $dR_n > 0$ . Les lois de Coulomb donnent donc :

$$dR_t = f_s dR_n.$$

5. Les équations précédentes donnent bien :  $\frac{dT}{d\theta} + f_s T(\theta) = 0$ .
6. Cette équation s'intègre en :  $T(\theta) = A \exp(-f_s \theta)$  avec  $T(0) = F_A$  et  $T(\alpha) = F_B$ . Finalement :

$$F_B = F_A \exp(-f_s \alpha).$$

7. Pour  $\alpha = \pi$ , nous trouvons :  $\frac{F_B}{F_A} = 0,15$ .

Pour que  $F_B = 0,01F_1$ , il faut que  $\alpha = \alpha_0 = \frac{2 \ln 10}{f_s} = 7,68$  rad, soit un peu plus de un tour 1/4. Si  $\alpha < \alpha_0$ ,  $F_B > 100$  N.

Si le matelot tire le bateau vers lui, la corde glisse dans le sens des angles positifs donc  $dR_t < 0$ , ce qui donne  $F_B = F_A \exp(+f_s \alpha)$ . Il devrait donc exercer une force de  $10^6$  N, ce qui dépasse largement ses possibilités.



## **Deuxième partie**

# **Éléments de traitement du signal**



# Signaux périodiques, filtrage

4

Le filtrage est une opération essentielle dans le traitement des signaux. Dans ce chapitre on s'intéresse au filtrage d'un signal analogique périodique. La linéarité des filtres permet d'utiliser la notion de décomposition spectrale.

## 1 Signaux périodiques non sinusoïdaux

On s'intéresse à un signal périodique  $s(t)$  de période  $T_s$  et fréquence  $f_s = \frac{1}{T_s}$ . On rappelle d'un tel signal se reproduit à l'identique au cours du temps :  $s(t + T_s) = s(t)$ . Le signal peut avoir une forme quelconque ; il n'est pas sinusoïdal *a priori*.

### 1.1 Spectre d'un signal périodique

Un théorème mathématique important découvert au début du *XIX<sup>ème</sup>* siècle par le mathématicien et physicien français Joseph Fourier indique que :

Tout signal périodique de fréquence  $f_s$  et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de  $f_s$  :  $0, f_s, 2f_s, \dots, nf_s, \dots$ . Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n), \quad (4.1)$$

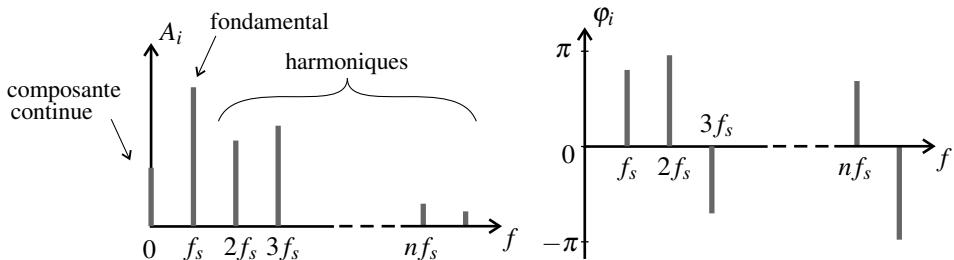
où les  $A_n$  sont des constantes positives et les  $\varphi_n$  des constantes.

La somme infinie de la formule (4.1) est le **développement en série de Fourier** du signal  $s(t)$ . Les formules permettant de trouver les amplitudes  $A_n$  et les phases initiales  $\varphi_n$  des composantes sinusoïdales du signal ne sont pas au programme.

Toute l'information concernant le signal est contenue dans  $A_0$ , les amplitudes  $A_1, A_2, \dots$  et les

phases initiales  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  de ses composantes sinusoïdales. Cette information se représente sur deux graphes en fonction de la fréquence (voir figure 4.1) :

- le **spectre en amplitude** représentant les  $A_n$  ( $A_0$  correspondant à la fréquence nulle),
- le **spectre en phase** représentant les  $\varphi_n$ .



**Figure 4.1** – Spectre d'un signal périodique  $s(t)$  : amplitude et phase initiale.

## 1.2 Signification physique

### a) Composante continue

Le premier terme de la somme, la constante  $A_0$ , est la **valeur moyenne** du signal dans le temps :

$$A_0 = \langle s \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s(t) dt .$$

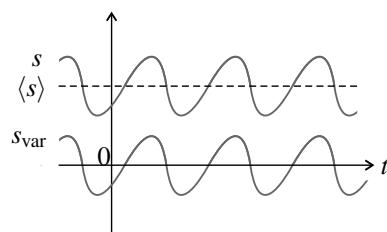
En électronique on l'appelle **composante continue** ou **décalage** (en anglais *offset*).

👉 Dans le spectre c'est la composante de fréquence  $f = 0$  (voir figure 4.1).

La **partie variable** du signal de  $s(t)$  est :

$$s_{\text{var}}(t) = s(t) - \langle s \rangle .$$

C'est un signal de même forme que  $s(t)$  mais qui est centré autour de 0 (voir figure 4.2).



**Figure 4.2** – Composante continue et partie variable.

👉 Sur un oscilloscope on visualise :

- le signal  $s(t)$  quand l'oscilloscope est réglé en position DC (pour *direct current*),
- sa partie variable  $s_{\text{var}}(t)$  quand l'oscilloscope est réglé en position AC (pour *alternative current*).

Cette commodité est très utile quand un signal a une composante continue grande par rapport à l'amplitude de sa partie variable. En revanche on ne peut l'utiliser que si la fréquence du signal est supérieure à 100 Hz.

### b) Fondamental et harmoniques

La partie variable est la somme des **composantes sinusoïdales** :

- la composante sinusoïdale  $A_1 \cos(2\pi f_s t + \varphi_1)$  qui a la même fréquence  $f_s$  que le signal  $s(t)$  est appelée **fondamental** ;
- la composante sinusoïdale  $A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$ , qui a une fréquence  $n$  fois plus élevée que la fréquence du signal, avec  $n \geq 2$ , est appelée **harmonique de rang  $n$** .

Quel est le rôle des différentes composantes sinusoïdales dans la détermination de la forme du signal ? Pour répondre à cette question on va considérer deux exemples.

#### Exemple

**Signal triangulaire** Le premier exemple est le signal  $T(t)$ , de période  $T_s$ , qui vaut  $2\frac{t}{T_s} - \frac{1}{2}$  pour  $0 \leq t \leq \frac{T_s}{2}$  et  $2\frac{t}{T_s} + \frac{3}{2}$  pour  $\frac{T_s}{2} \leq t \leq T_s$ . Ce signal, représenté à gauche de la figure 4.3, a une forme triangulaire, varie entre  $-0,5$  et  $+0,5$  et a une moyenne nulle. Son développement en série de Fourier est :

$$T(t) = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2p+1)^2} \sin\left(2\pi(2p+1)\frac{t}{T_s}\right).$$

Le spectre de  $T(t)$  est représenté à gauche de la figure 4.4 ; il ne contient que des harmoniques de rang impair.

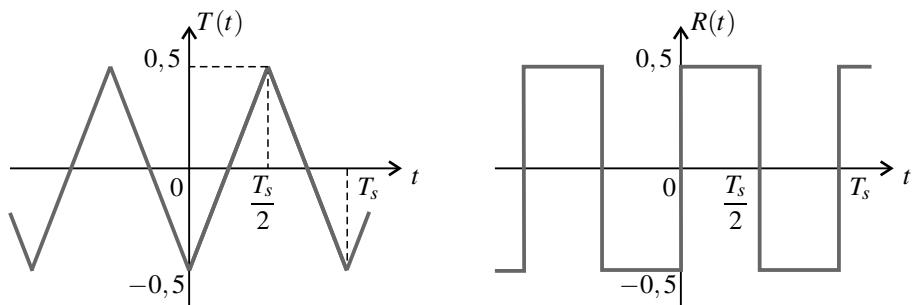
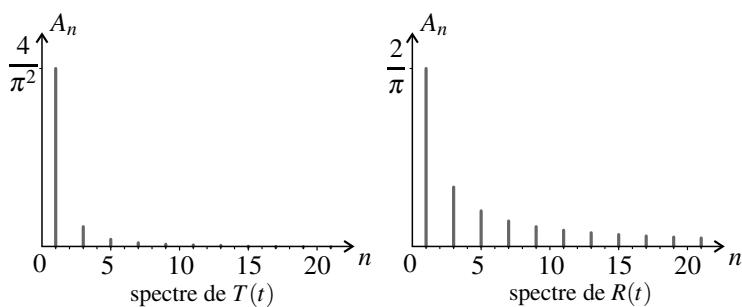


Figure 4.3 – Signaux périodiques  $T(t)$  et  $R(t)$ .

**Figure 4.4** – Spectres en amplitude des signaux triangulaire et créneau.

**Signal rectangulaire ou créneau** Le deuxième exemple est le signal  $R(t)$ , de période  $T_s$ , qui vaut  $0,5$  pour  $0 \leq t \leq \frac{T_s}{2}$  et  $-0,5$  pour  $\frac{T_s}{2} \leq t \leq T_s$ . Ce signal, représenté à droite de la figure 4.3, a une forme rectangulaire ou de créneau, varie entre  $-0,5$  et  $+0,5$  et a une moyenne nulle. Son développement en série de Fourier est :

$$R(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2p+1)} \cos \left( 2\pi(2p+1) \frac{t}{T_s} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Le spectre en amplitude de  $R(t)$  est représenté sur la partie droite la figure 4.4. Il ne contient que des harmoniques de rang impair. Il est beaucoup plus « riche en harmoniques » que celui du signal  $T(t)$  parce que l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  est proportionnelle à  $\frac{1}{n}$ , donc décroît lentement, alors qu'elle est proportionnelle à  $\frac{1}{n^2}$ , donc décroît plus vite, pour le signal triangulaire.

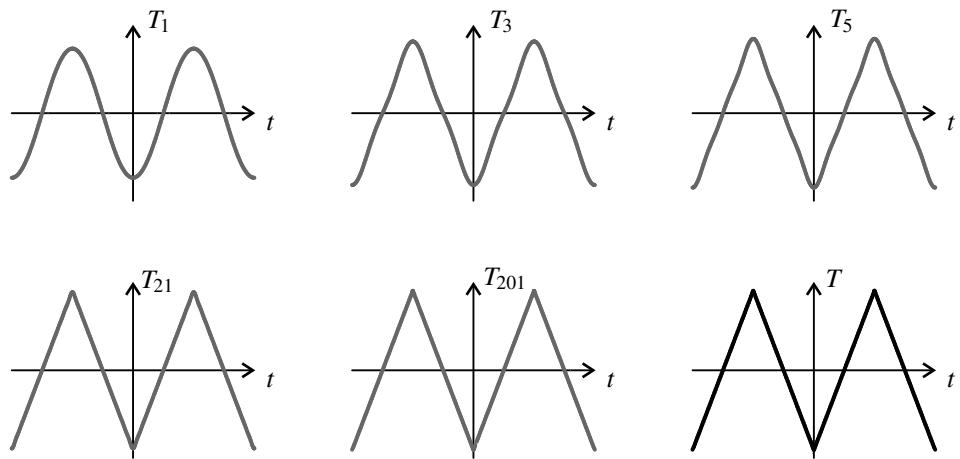
On peut voir sur les figures 4.5 et 4.6, page 115, la reconstruction progressive des signaux  $T(t)$  et  $R(t)$  au fur et à mesure que l'on additionne leurs composantes sinusoïdales.  $T_n$  (resp.  $R_n$ ) est la somme du fondamental et des harmoniques de rang inférieur ou égal à  $n$  de  $T(t)$  (resp.  $R(t)$ ).

À l'observation de la figure 4.5 on constate que le fondamental donne l'allure générale du signal, les premiers harmoniques dessinent la forme (triangulaire) du signal et que les harmoniques de rangs élevés affinent les plus petits détails (les pointes du triangle).

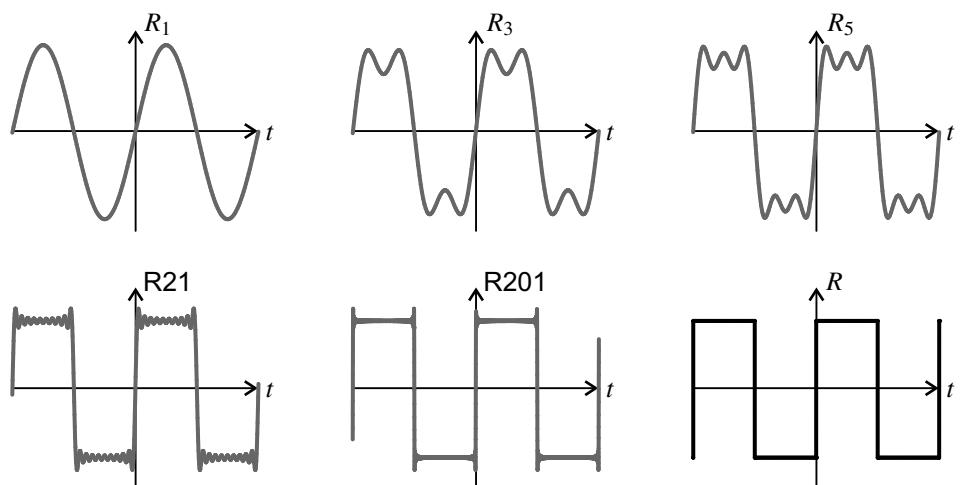
Cela se passe de manière analogue sur la figure 4.6 mais avec une différence. On observe sur les sommes partielles des oscillations qui n'existent pas dans le signal, appelées *oscillations de Gibbs*. Elles sont dues à l'absence dans les sommes partielles, des plus hautes fréquences nécessaires reconstitution des brusques sauts (discontinuités) du signal. Elles restent importantes, même pour  $R_{201}$ , au voisinage des points de discontinuité.

Le fondamental et les premières harmoniques contiennent la forme générale du signal.

Les harmoniques de rang élevé contiennent les détails fins et les discontinuités éventuelles du signal.



**Figure 4.5** – Fondamental du signal  $T(t)$ ; somme du fondamental et des harmoniques de rang inférieur ou égal à : 3, 5, 21, 201 ; signal  $T(t)$ .



**Figure 4.6** – Fondamental du signal  $R(t)$ ; somme du fondamental et des harmoniques de rang inférieur ou égal à : 3, 5, 21, 201 ; signal  $R(t)$ .

## 2 Action d'un filtre sur un signal périodique non sinusoïdal

### 2.1 Filtres

#### a) Définition d'un filtre, équation différentielle

Un **filtre** est un système pour lequel il existe, entre le signal d'entrée  $e(t)$  et le signal de sortie  $s(t)$ , une relation de la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s}{dt^m} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n e}{dt^n} \quad (4.2)$$

où  $n$  et  $m$  sont des entiers positifs ou nuls tels que  $m \geq n$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  sont des constantes.

L'entier  $m$  est l'**ordre du filtre**. Dans le cadre du programme on se limite à  $m = 1$  ou  $2$ . La relation (4.2) est l'**équation différentielle du filtre**.

L'équation différentielle étant linéaire filtre est un **système linéaire** : s'il fournit pour le signal d'entrée  $e_1(t)$  le signal de sortie  $s_1(t)$  et pour le signal d'entrée  $e_2(t)$  le signal de sortie  $s_2(t)$ , alors il donne pour le signal d'entrée  $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$  le signal de sortie  $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$ . Ainsi, quand on superpose des signaux d'entrée on superpose les signaux de sortie qui leur correspondent.

#### b) Fonction de transfert

On considère un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation  $\omega$  :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e),$$

auquel on associe la fonction complexe :  $\underline{e}(t) = E \exp j(\omega t + \varphi_e)$  où  $j^2 = -1$ . Ainsi :

$$e(t) = \operatorname{Re}(\underline{e}(t)).$$

En régime permanent, le signal de sortie du filtre est sinusoïdal de même pulsation que le signal d'entrée :

$$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s).$$

On lui associe la fonction complexe  $\underline{s}(t) = S \exp j(\omega t + \varphi_s)$  telle que :  $s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}(t))$ .

L'équation (4.2) se traduit par une relation simple entre les fonctions complexes  $\underline{s}$  et  $\underline{e}$  puisque la dérivation par rapport au temps revient, pour les fonctions complexes, à une simple multiplication par  $j\omega$ . Ainsi, on a :

$$b_0 \underline{s} + b_1 (j\omega) \underline{s} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 (j\omega) \underline{e} + \dots + a_n (j\omega)^n \underline{e},$$

soit encore :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 (j\omega) + \dots + a_n (j\omega)^n}{b_0 + b_1 (j\omega) + \dots + b_m (j\omega)^m}.$$

**La fonction de transfert** d'un filtre est par définition :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S}{E} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}. \quad (4.3)$$

La fonction de transfert du filtre défini par l'équation différentielle (4.2) est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_n(j\omega)^n}{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_m(j\omega)^m}. \quad (4.4)$$

### c) Exemples

Le **filtre passe-bas du premier ordre** est défini par :

$$s(t) + \frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} = G_0 e(t) \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}},$$

où  $\omega_c$  est une pulsation et  $G_0$  un réel positif.

Le **filtre passe-haut du premier ordre** est défini par :

$$s(t) + \frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} = \frac{G_0}{\omega_c} \frac{de}{dt} \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{G_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{G_0}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}},$$

où  $\omega_c$  est une pulsation et  $G_0$  un réel positif.

Le **filtre passe-bande du deuxième ordre** est défini par :

$$s(t) + \frac{1}{Q\omega_r} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_r^2} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{G_0}{Q\omega_r} \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{G_0 j \frac{\omega}{Q\omega_r}}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_r} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} = \frac{G_0}{1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)},$$

où  $\omega_r$  est une pulsation et  $Q$  et  $G_0$  sont des réels positifs.

Le **filtre passe-bas du deuxième ordre** est défini par :

$$s(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} = G_0 e(t) \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

où  $\omega_0$  est une pulsation et  $Q$  et  $G_0$  sont des réels positifs.

Le **filtre passe-haut du deuxième ordre** est défini par :

$$s(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{G_0}{\omega_0^2} \frac{d^2e}{dt^2} \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{-G_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

où  $\omega_0$  est une pulsation et  $Q$  et  $G_0$  sont des réels positifs.

## 2.2 Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal

Par définition, la fonction de transfert du filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S}{E} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}.$$

Ainsi :

- le module de  $\underline{H}(j\omega)$  est égal à  $\frac{S}{E}$ , rapport de l'amplitude du signal de sortie divisée par l'amplitude du signal d'entrée ;
- l'argument de  $\underline{H}(j\omega)$  est  $\varphi_s - \varphi_e$ , déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

Il est donc possible de mesurer expérimentalement :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)).$$

$G(\omega)$  est appelé **gain** du filtre et  $\varphi(\omega)$  **fonction de phase** du filtre. Avec ces notations, le signal de sortie correspondant au signal d'entrée  $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$  s'écrit :

$$s(t) = G(\omega)E \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega)) . \quad (4.5)$$

L'effet du filtre est de multiplier l'amplitude par  $G(\omega)$  et de déphaser le signal de  $\varphi(\omega)$ .

## 2.3 Effet d'un filtre sur un signal périodique de forme quelconque

On utilise la décomposition en série de Fourier et la possibilité de superposer les signaux de sortie pour trouver la réponse du filtre à un signal périodique de forme quelconque.

Tout signal d'entrée périodique  $e(t)$  de fréquence  $f_s$  peut s'écrire sous la forme :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n}),$$

en posant  $\omega_s = 2\pi f_s$ , pulsation correspondant à la fréquence du signal.

Connaissant la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ , c'est-à-dire la fonction de gain  $G(\omega)$  et la fonction de phase  $\varphi(\omega)$ , on sait écrire le signal de sortie correspondant à chacune des composantes du signal d'entrée :

- pour la composante continue, de fréquence nulle, (voir plus haut) le signal de sortie est :

$$\underline{H}(0)E_0,$$

- pour le fondamental, de pulsation  $\omega_s$ , le signal de sortie est :

$$G(\omega_s)E_1 \cos(\omega_s t + \varphi_{e,1} + \varphi(\omega_s)),$$

- pour l'harmonique de rang  $n$ , de pulsation  $n\omega_s$ , le signal de sortie est :

$$G(n\omega_s)E_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n} + \varphi(n\omega_s)).$$

Par superposition, le signal de sortie est la somme de ces signaux :

$$s(t) = \underline{H}(0)E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega_s)E_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n} + \varphi(n\omega_s)) . \quad (4.6)$$



$\underline{H}(0)$  est réel mais pas toujours positif donc il serait faux de le remplacer par  $G(0)$  dans la formule (4.6).

Dans la somme ci-dessus, chaque gain  $G(\omega)$  et chaque déphasage  $\varphi(\omega)$  est différent car il ne correspondent pas à la même pulsation.

Ainsi, pour calculer le signal de sortie pour un signal d'entrée de fréquence  $f_s$ , il faut en théorie connaître la fonction de transfert (c'est-à-dire le gain et la fonction de phase) pour toutes les pulsations :  $0, \omega_s = 2\pi f_s, 2\omega_s, \dots, n\omega_s$  etc. Dans la pratique, on se limite souvent au fondamental et quelques harmoniques.

## 2.4 Diagramme de Bode et type du filtre

### a) Diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode** est une représentation graphique des propriétés d'un filtre. Il comporte deux courbes :

- la courbe de gain donnant le **gain en décibel**  $G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(G(\omega))$  en fonction de  $\log_{10}(\omega)$ ,
- la courbe de phase donnant  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\log_{10}(\omega)$ .



Il ne faut pas confondre  $G(\omega)$  et  $G_{dB}(\omega)$ .

### b) Différents types de filtres

La courbe d'amplitude du diagramme de Bode visualise la fonction du filtre. Les filtres les plus courants sont des types suivants (voir figure 4.7) :

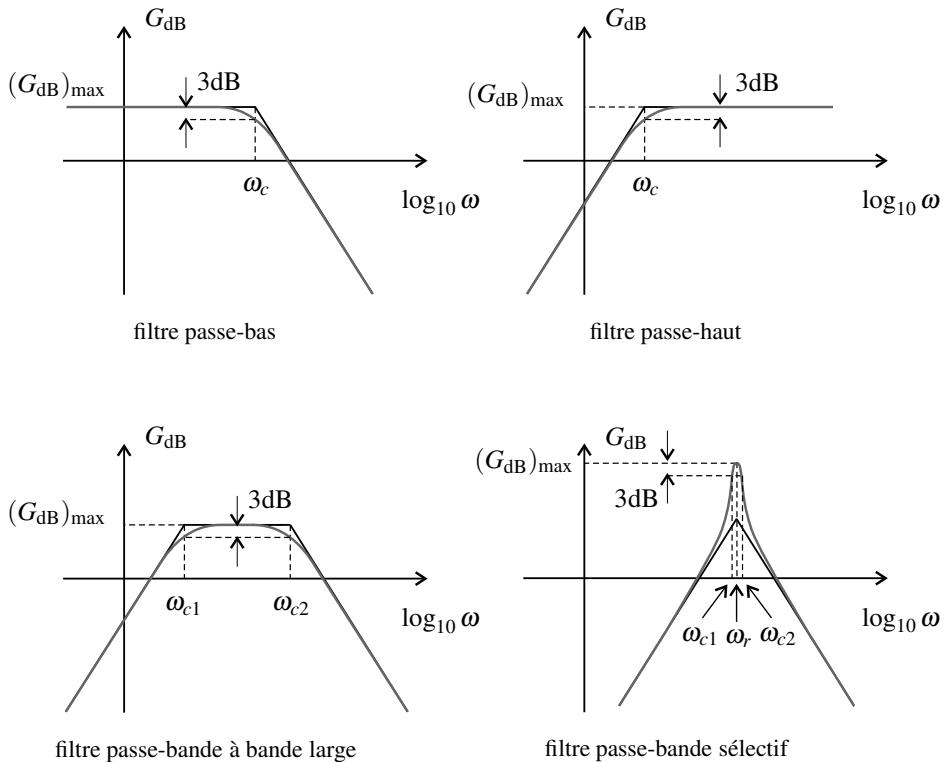
- **filtre passe bas** : le gain est quasiment constant puis il décroît ;
- **filtre passe-haut** : le gain croît puis il est quasiment constant ;
- **filtre passe-bande à bande large** : le gain croît, puis reste quasiment constant, puis décroît ;
- **filtre passe-bande sélectif** : le gain présente un maximum étroit autour d'une pulsation de résonance  $\omega_r$ .

### c) Bande passante, bande(s) atténée(s), asymptotes

On appelle **bande passante à  $-3dB$**  l'intervalle de fréquence sur lequel :

$$G_{dB} \geq (G_{dB})_{max} - 3dB,$$

$(G_{dB})_{max}$  étant la valeur maximale du gain en décibels. Cette valeur de  $-3dB$  est conventionnelle : elle correspond à une division du gain par  $\sqrt{2}$ .



**Figure 4.7** – Différents types de filtres : en gris la courbe d'amplitude, en noir ses asymptotes.

Une **pulsation de coupure** est une pulsation  $\omega_c$  telle que :  $G_{\text{dB}}(\omega_c) = (G_{\text{dB}})_{\text{max}} - 3\text{dB}$ .

La bande passante d'un filtre passe-bas est l'intervalle  $[0, \omega_c]$ , pour un filtre passe-haut c'est un intervalle  $[\omega_c, \infty]$  et pour un filtre passe-bande c'est l'intervalle  $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ .

Les intervalles complémentaires de la bande passante sont appelées **bandes atténuées**. Sur ces intervalles, la fonction de transfert admet fréquemment une approximation de la forme :  $\underline{H}(j\omega) \simeq A(j\omega)^n$  où  $n$  est un entier positif ou négatif et  $A$  une constante réelle. Dans cette approximation on a :

$$G(\omega) \simeq |A|\omega^n \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 20\log_{10}|A| + 20n\log_{10}(\omega)$$

La courbe de gain a alors une asymptote de pente égale à  $20n$  **décibels par décade**. Dans le cadre de cette approximation le fonction de phase est :

$$\varphi(\omega) \simeq \begin{cases} n\frac{\pi}{2} & \text{si } A > 0 \\ \pi + n\frac{\pi}{2} & \text{si } A < 0, \end{cases}$$

## 2.5 Composition spectrale du signal de sortie

Le signal d'entrée contient les fréquences  $0, f_s, \dots, nf_s$  etc. Quel est le contenu spectral du signal de sortie ? Tout d'abord, d'après la formule (4.6) :

Le contenu spectral du signal de sortie est inclus dans celui du signal d'entrée.

En effet, pour que  $G(n\omega_s)E_n \neq 0$  il faut que  $E_n \neq 0$ . Toute fréquence présente dans le signal de sortie est nécessairement présente dans le signal d'entrée. En revanche, le signal de sortie ne contient pas en général toutes les fréquences présentes dans le signal d'entrée. Dans une première approche rapide on peut considérer que :

Les fréquences situées dans la bande passante sont conservées par le filtre et les fréquences situées dans la(les) bande(s) atténuées sont éliminées par le filtre.

### Remarque

Il s'agit d'une schématisation assez grossière que l'on doit appliquer avec prudence, notamment quand le signal contient des fréquences proches de la fréquence de coupure.

Pour trouver le contenu spectral du signal de sortie il faut donc comparer les fréquences des différentes harmoniques présentes dans le signal d'entrée à la (aux) fréquence(s) de coupure du filtre.

## 2.6 Caractère intégrateur ou déivateur du filtre

### a) Caractère intégrateur dans une bande atténuée

Un filtre est **intégrateur** dans une bande atténuee si on peut écrire à l'intérieur de cette bande,  $A$  étant une constante réelle positive :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{A}{j\omega} \Leftrightarrow G(\omega) \simeq \frac{A}{\omega} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \simeq -\frac{\pi}{2}. \quad (4.7)$$

La courbe d'amplitude du diagramme de Bode a dans ce cas une asymptote de pente  $-20$  décibels par décade.

Soit alors un signal  $e(t)$  dont la partie variable a toutes ses composantes sinusoïdales à l'intérieur de cette bande atténuee (la composante continue ne peut en aucun cas y être car on aurait alors  $G(0) = \infty$ ). Pour calculer la partie variable du signal de sortie on peut appliquer la formule (4.6) avec l'approximation ci-dessus :

$$\begin{aligned} s_{\text{var}}(t) &\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\omega_s} E_n \cos\left(n\omega_s t + \varphi_{e,n} - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\omega_s} E_n \sin\left(n\omega_s t + \varphi_{e,n}\right) \\ &= A \int \left( \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n}) \right) dt = A \int e_{\text{var}} dt, \end{aligned}$$

car la primitive de la fonction  $\cos(\omega t)$  est la fonction  $\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$ . Ainsi la partie variable du signal de sortie est une primitive de la partie variable du signal d'entrée, ce qui explique le terme d'intégrateur. Le filtre intègre chaque composante sinusoïdale donc, par superposition, la partie variable du signal.

### Remarque

Quand la fonction de transfert admet une expression approchée de la forme (4.7) mais avec  $A$  réel négatif, le filtre est intégrateur-inverseur dans la bande considérée.

### b) Caractère déivateur dans une bande atténuee

Un filtre est **déivateur** dans une bande atténuee si on peut écrire à l'intérieur de cette bande,  $A$  étant une constante réelle positive :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq A j\omega \Leftrightarrow G(\omega) \simeq A\omega \text{ et } \varphi(\omega) \simeq \frac{\pi}{2}. \quad (4.8)$$

La courbe d'amplitude du diagramme de Bode a dans ce cas une asymptote de pente +20 décibels par décade.

Soit alors un signal  $e(t)$  dont toutes les composantes sinusoïdales sont à l'intérieur de cette bande atténuee. Pour calculer la partie variable du signal de sortie on peut appliquer la formule (4.6) avec l'approximation ci-dessus :

$$\begin{aligned} s_{\text{var}}(t) &\simeq \sum_{n=1}^{\infty} An\omega_s E_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n} + \frac{\pi}{2}) = - \sum_{n=1}^{\infty} An\omega_s E_n \sin(n\omega_s t + \varphi_{e,n}) \\ &= A \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n}) \right) dt = A \frac{de_{\text{var}}}{dt}, \end{aligned}$$

car la dérivée de la fonction  $\cos(\omega t)$  est la fonction  $-\omega \sin(\omega t)$ . Ainsi le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée, ce qui explique le terme de déivateur. Le filtre dérive le signal parce qu'il dérive chacune des composantes sinusoïdales donc, par superposition, le signal lui-même.

### Remarque

Quand la fonction de transfert admet une expression approchée de la forme (4.8) mais avec  $A$  réel négatif, le filtre est déivateur-inverseur dans la bande considérée.

### 3 Exemples de filtrage de signaux périodiques non sinusoïdaux

#### 3.1 Filtrage d'un créneau par un filtre passe-bas du premier ordre

##### a) Le filtre passe-bas du premier ordre

Un filtre passe-bas du premier ordre a pour fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

où  $G_0$  est un nombre positif. Le diagramme de Bode a l'allure donnée pour les filtres passe-bas sur la figure 4.7 page 120, avec  $(G_{\text{dB}})_{\text{max}} = 20 \log_{10} G_0 = G_{0,\text{dB}}$ .

Pour la pulsation  $\omega_c$  on a :

$$G(\omega_c) = \left| \frac{G_0}{1 + j} \right| = \frac{G_0}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{0,\text{dB}} - 10 \log_{10} 2 = G_{0,\text{dB}} - 3,0 \text{ dB}.$$

C'est bien la pulsation de coupure à  $-3\text{dB}$ .

Les asymptotes correspondent aux approximations suivantes :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq G_0 \quad \text{si } \omega \ll \omega_c \quad \text{et} \quad \underline{H}(j\omega) \simeq \frac{G_0 \omega_c}{j\omega} \quad \text{si } \omega \gg \omega_c.$$

 La méthode à retenir pour obtenir ces approximations est d'écrire :

$$1 + j \frac{\omega}{\omega_c} \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \ll \omega_c \\ j \frac{\omega}{\omega_c} & \text{si } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Cette approximation est très fréquemment utilisée pour les fonctions de transfert.

En pratique, on peut considérer que  $\omega \gg \omega_c$  (resp.  $\omega \ll \omega_c$ ) dès que  $\omega > 10\omega_c$  (resp.  $\omega < \frac{\omega_c}{10}$ ).

Ainsi :

- le gain dans la bande passante  $[0, \omega_c]$  est :  $G(\omega) \simeq G_0$ ,
- l'asymptote décroissante a une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$ , le filtre est intégrateur dans sa bande atténuee  $[\omega_c, \infty]$ .

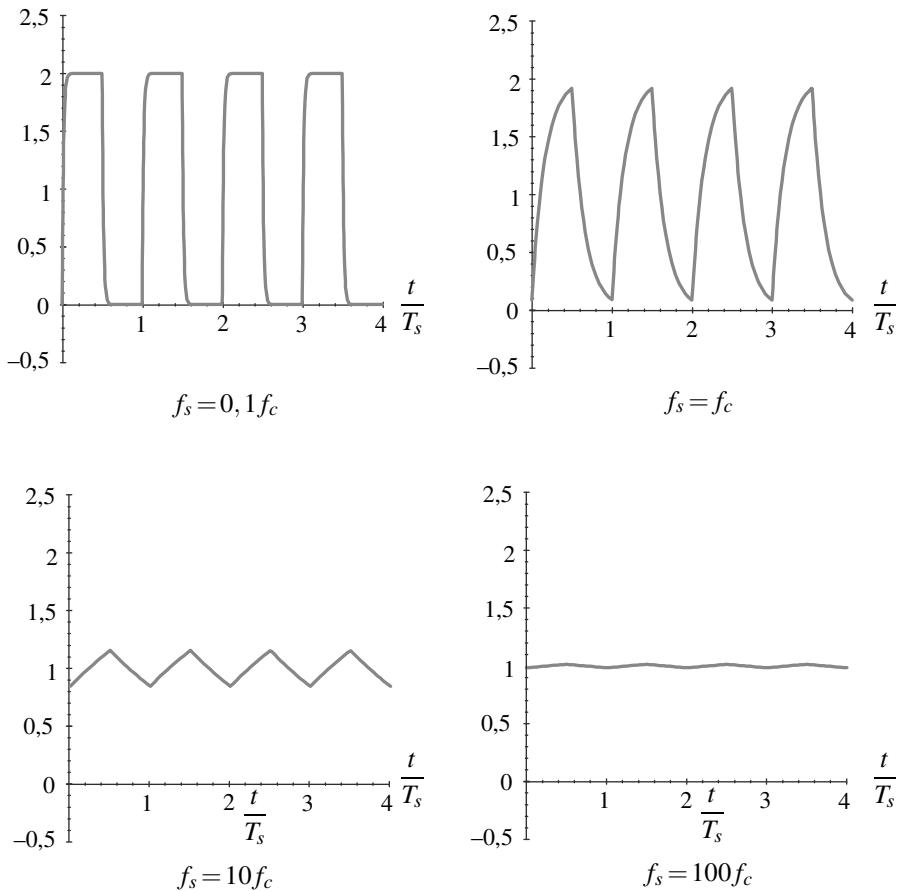
##### b) Filtrage d'un créneau

On envoie dans ce filtre le signal créneau de période  $T_s$  :

$$e(t) = \begin{cases} E_0 & \text{si } 0 < t < \frac{T_s}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{T_s}{2} < t < T_s. \end{cases}$$

Ce signal est :  $e(t) = E_0 \times \left( \frac{1}{2} + R(t) \right)$  où  $R(t)$  est le signal qui a été défini à la page 114.

La figure 4.8, obtenue à l'aide d'un logiciel de simulation, représente le signal de sortie correspondant au signal créneau pour différentes valeurs du rapport  $\frac{f_s}{f_c}$  où  $f_s = \frac{1}{T_s}$  et  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ . On a pris  $G_0 = 1$  et  $E_0 = 2$  V.



**Figure 4.8** – Filtrage d'un signal créneau de fréquence  $f_s$  par un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c$ .

On peut interpréter la forme du signal  $s(t)$  à partir du diagramme de Bode du filtre :

- Pour  $f = 0,1f_c$ , la composante continue, le fondamental et les harmoniques de rang inférieur où égal à 10, sont dans la bande passante en fréquence  $[0, f_c]$ . Ces composantes sont conservées par le filtre et multipliées par  $G_0 = 1$  (en première approximation). Le

signal de sortie est donc quasiment égal au créneau  $e(t)$ . On note toutefois qu'il n'a pas de discontinuité mais des « coins arrondis » ; ceci correspond à l'absence des harmoniques de rang élevé qui ont été coupées par le filtre.

- Le cas  $f_s = f_c$  est un cas intermédiaire difficile à interpréter.
- Pour  $f_s = 10f_c$  et  $f_s = 100f_c$ , seule la composante continue du signal est dans la bande passante  $[0, f_c]$  (on rappelle que sa fréquence est  $f = 0$ ) ; le fondamental de fréquence  $f_s > f_c$  et tous les harmoniques sont dans la bande atténuee. En première approximation on peut dire que seule la composante continue passe le filtre : le signal de sortie est alors égal à la moyenne du signal d'entrée multiplié par  $\underline{H}(0) = G_0 = 1$ . C'est bien ce que l'on observe quand  $f_s = 100f_c$ .
- Dans le cas où  $f = 10f_c$  le signal de sortie présente une oscillation de forme triangulaire que l'on peut interpréter par le caractère intégrateur du filtre dans sa bande atténuee. La partie variable du signal est :

$$e_{\text{var}}(t) = e(t) - \langle e \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}E_0 & \text{si } 0 < t < \frac{T_s}{2} \\ -\frac{1}{2}E_0 & \text{si } \frac{T_s}{2} < t < T_s. \end{cases}$$

Puisque toutes se composantes sinusoïdales sont dans la bande atténuee on a :

$$s_{\text{var}}(t) = G_0 \omega_c \int e_{\text{var}} dt \quad \text{soit} \quad \frac{ds_{\text{var}}}{dt} = G_0 \omega_c e_{\text{var}}(t) = \pm \frac{1}{2} G_0 \omega_c E_0$$

ce qui correspond bien à un signal triangulaire. Entre  $t = 0$  et  $t = \frac{T_s}{2}$ ,  $s_{\text{var}}$  augmente de :  $\frac{T_s}{2} \times \frac{1}{2} G_0 \omega_c E_0 = \frac{G_0 \omega_c T_s}{4} E_0 = \frac{\pi G_0 f_c}{2 f_s} E_0$ . C'est l'amplitude crête à crête du signal de sortie.

### c) Conclusion

On peut généraliser certaines observations faites sur l'exemple précédent.

Les discontinuités d'un signal sont portées par les composantes sinusoïdales de plus haute fréquence donc :

Le signal de sortie d'un filtre passe bas est continu.

Si la fréquence  $f_s$  du signal est très supérieure à la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre passe-bas, toutes les composantes sont dans la bande atténuee, donc éliminées ; le signal de sortie ne comporte alors que la composante continue, multipliée par  $\underline{H}(0)$ .

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  est un **moyenneur** pour tout signal de fréquence très supérieure à  $f_c$  : il fournit un signal continu, proportionnel à la moyenne du signal d'entrée.

### 3.2 Filtrage d'un signal triangulaire par un filtre passe-haut du premier ordre

#### a) Le filtre passe-haut du premier ordre

Un filtre passe-bas du premier ordre a pour fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = G_0 \frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

où  $G_0$  est un nombre positif. Le diagramme de Bode a l'allure donnée pour les filtres passe-haut sur la figure 4.7 page 120, avec  $(G_{\text{dB}})_{\text{max}} = 20 \log_{10} G_0 = G_{0,\text{dB}}$ .

Pour la pulsation  $\omega_c$  on a :

$$G(\omega_c) = G_0 \left| \frac{j}{1+j} \right| = \frac{G_0}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{0,\text{dB}} - 10 \log_{10} 2 = G_{0,\text{dB}} - 3,0 \text{ dB}.$$

C'est bien la pulsation de coupure à  $-3\text{dB}$ . Les asymptotes correspondent aux approximations :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq G_0 \frac{j\omega}{\omega_c} \quad \text{si } \omega \ll \omega_c \quad \text{et} \quad \underline{H}(j\omega) \simeq G_0 \quad \text{si } \omega \gg \omega_c.$$

Ainsi :

- le gain dans la bande passante  $[\omega_c, \infty]$  est :  $G(\omega) \simeq G_0$ ,
- l'asymptote croissante a une pente de  $+20 \text{ dB/décade}$ , le filtre est dérivateur dans sa bande atténuée  $[0, \omega_c]$ .

#### b) Filtrage d'un signal triangulaire

On envoie dans ce filtre le signal triangulaire de période  $T_s$  :

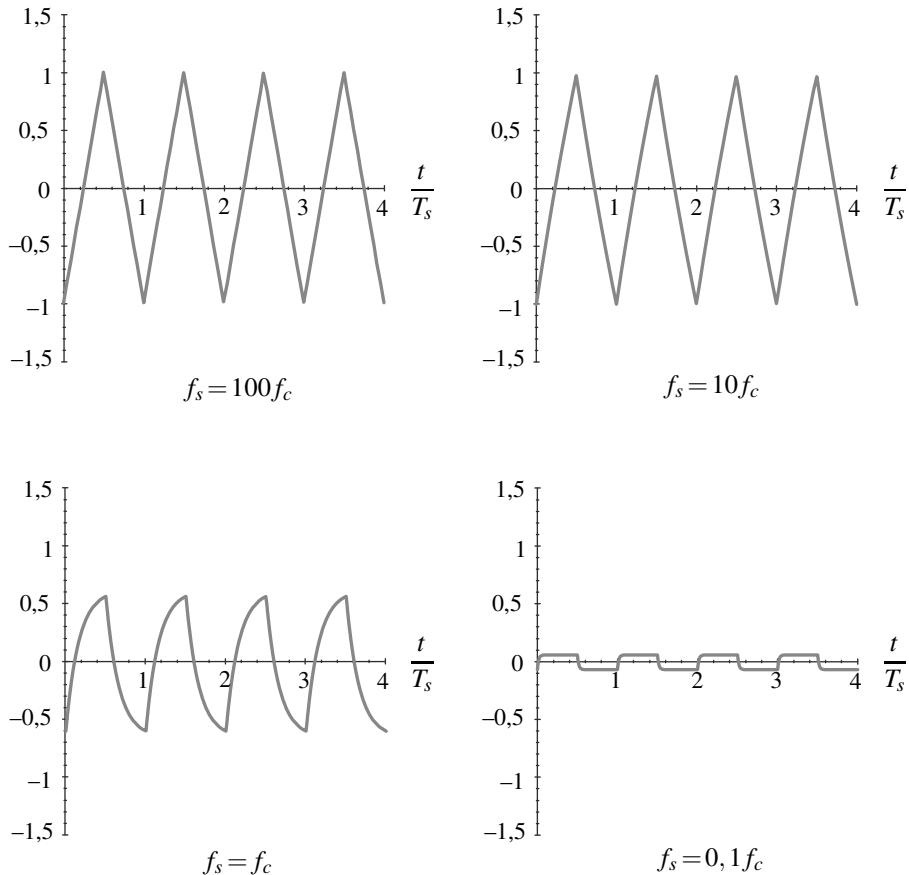
$$e(t) = \begin{cases} E_0 \frac{2t}{T_s} & \text{si } 0 < t < \frac{T_s}{2} \\ E_0 \left( 2 - \frac{2t}{T_s} \right) & \text{si } \frac{T_s}{2} < t < T_s. \end{cases}$$

Ce signal est :  $e(t) = E_0 \times \left( \frac{1}{2} + T(t) \right)$  où  $T(t)$  est le signal de la page 113.

La figure 4.9, obtenue à l'aide d'un logiciel de simulation, représente le signal de sortie correspondant au signal triangulaire pour différentes valeurs du rapport  $\frac{f_s}{f_c}$  où  $f_s = \frac{1}{T_s}$  et  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ . On a pris  $G_0 = 1$  et  $E_0 = 2 \text{ V}$ .

On peut interpréter la forme du signal  $s(t)$  à partir du diagramme de Bode du filtre :

- Pour  $f_s = 10f_c$  et  $f_s = 100f_c$ , le fondamental et tous les harmoniques sont à l'intérieur de la bande passante  $[f_c, \infty]$  donc passent le filtre. En revanche la composante continue (de



**Figure 4.9 – Filtrage d'un signal triangulaire de fréquence  $f_s$  par un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c$ .**

fréquence nulle) n'est pas dans la bande passante. En première approximation, le signal de sortie est égal à la partie variable du signal d'entrée. On observe effectivement sur la figure 4.9 un signal triangulaire *centré autour de zéro*. On note toutefois que le signal est légèrement incurvé dans le cas  $f_s = 10f_c$ .

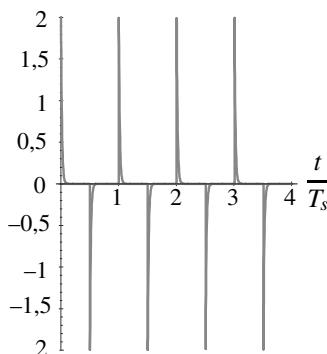
- Le cas  $f_s = f_c$  est un cas intermédiaire difficile à interpréter.
- Pour  $f_s = 0,1f_c$ , le fondamental et harmoniques de rang inférieur ou égal 10 (qui sont les plus importantes) sont dans la bande atténuee  $[0, f_c]$ . En première approximation on peut dire que le signal ne passe pas le filtre. Cependant, on peut aussi utiliser le caractère dérivateur du filtre dans sa bande atténuee. D'après la formule approchée donnée plus haut on a :

$$s(t) \simeq \frac{G_0}{\omega_c} \frac{de}{dt} = \begin{cases} \frac{2G_0E_0}{\omega_c T_s} & \text{si } 0 < t < \frac{T_s}{2} \\ -\frac{2G_0E_0}{\omega_c T_s} & \text{si } \frac{T_s}{2} < t < T_s. \end{cases}$$

Il s'agit d'un créneau ce qui correspond bien à l'allure du signal observé.

### c) Filtrage d'un créneau

Qu'obtient-on si on filtre un créneau de fréquence  $f_s = 0,1f_c$ ? La dérivée du créneau est nulle sauf aux instants où il a un saut de discontinuité, instant pour lesquels la dérivée n'est pas définie. Le raisonnement précédent prédit donc un signal nul, sauf aux instants des sauts de discontinuité.



**Figure 4.10** – Filtrage d'un signal créneau d'amplitude  $E_0 = 2$  V et de fréquence  $f_s = 0,1f_c$  par un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure  $f_c$ .

Le résultat d'une simulation est montré sur la figure 4.10. On observe que le filtre ne transmet que les sauts de discontinuité.

### d) Conclusion

On peut généraliser certaines observations faites sur l'exemple précédent.

La composante continue d'un signal correspond à la fréquence nulle qui n'est jamais dans la bande passante d'un filtre passe-haut, donc :

Un filtre passe-haut élimine la composante continue du signal.

#### Exemple

Quand on utilise la position AC d'un oscilloscope, le signal est filtré par un filtre passe-haut de fréquence de coupure assez basse (de l'ordre de 10 Hz) pour éliminer la composante continue. Pour que ce filtrage ne déforme pas la partie variable signal il faut que

sa fréquence soit d'au moins 100 Hz.

Les éventuelles discontinuités du signal d'entrée sont portées par ses composantes sinusoïdales de plus hautes fréquence qui dans tous les cas passent le filtre. Ainsi :

Un filtre passe-haut transmet les discontinuités du signal d'entrée.

### 3.3 Filtrage par un filtre passe-bande du deuxième ordre

#### a) Le filtre passe-bande d'ordre deux

Un filtre passe-bande d'ordre deux a pour fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)} = G_0 \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_r}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_r} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}},$$

où  $\omega_r$  est une pulsation,  $G_0$  une constante positive et  $Q$  un nombre positif appelé facteur de qualité. L'allure du diagramme de Bode est visible sur la figure 4.7 page 120 et dépend de la valeur de  $Q$  :

- pour  $Q < 1$  le filtre est à bande passante large ;
- pour  $Q > 1$  le filtre est sélectif.

#### Remarque

Les pulsations de coupures sont données en fonction de  $\omega_r$  et  $Q$  par des formules relativement compliquées. On a cependant la relation simple :

$$\omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_r}{Q},$$

et les approximations :

- pour  $Q < 10$  :  $\omega_{c1} \simeq Q\omega_r$  et  $\omega_{c2} \simeq \frac{\omega_r}{Q}$ ,
- pour  $Q > 10$  :  $\omega_{c1} \simeq \omega_r \left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$  et  $\omega_{c2} \simeq \omega_r \left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$ .

Ces formules ne sont pas à mémoriser.

Le gain est maximum pour  $\omega = \omega_r$  (on le voit clairement sur la première expression de la fonction de transfert) et :  $(G_{\text{dB}})_{\text{max}} = 20\log_{10}(G_0)$ .

Les asymptotes correspondent aux approximations :

$$H(j\omega) \simeq G_0 \frac{j\omega}{Q\omega_r} \quad \text{si } \omega \ll \omega_r \quad \text{et} \quad H(j\omega) \simeq G_0 \frac{\omega_r}{Qj\omega} \quad \text{si } \omega \gg \omega_r.$$

 Pour obtenir ces approximations il faut ne garder que le plus grand des trois termes du dénominateur. Ainsi :

$$1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) \simeq \begin{cases} -jQ \frac{\omega_r}{\omega} & \text{si } \omega \ll \omega_r \\ jQ \frac{\omega}{\omega_r} & \text{si } \omega \gg \omega_r, \end{cases}$$

et :

$$1 + j \frac{\omega}{Q\omega_r} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \ll \omega_r \\ -\frac{\omega^2}{\omega_r^2} & \text{si } \omega \gg \omega_r. \end{cases}$$

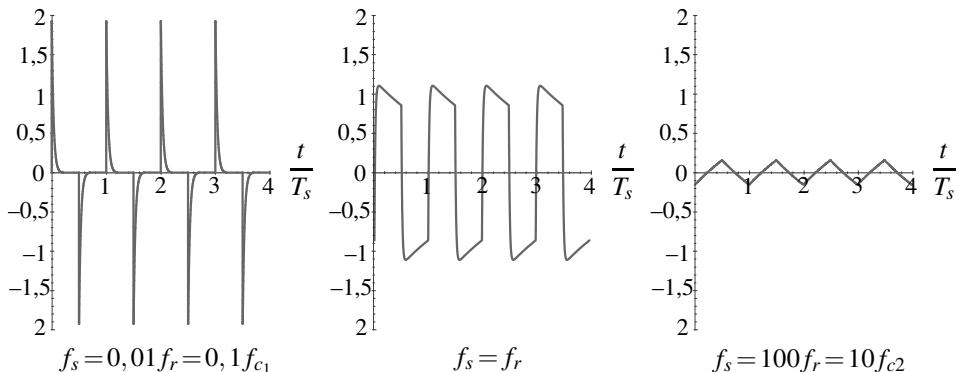
Finalement :

- l'asymptote croissante a une pente de +20 dB/décade, le filtre est déivateur dans sa bande atténuee gauche  $[0, \omega_{c1}]$  ;
- le gain dans la bande passante est  $G(\omega) \simeq G(\omega_r) = G_0$  ;
- l'asymptote décroissante a une pente de -20 dB/décade, le filtre est intégrateur dans sa bande atténuee droite  $[\omega_{c2}, \infty]$ .

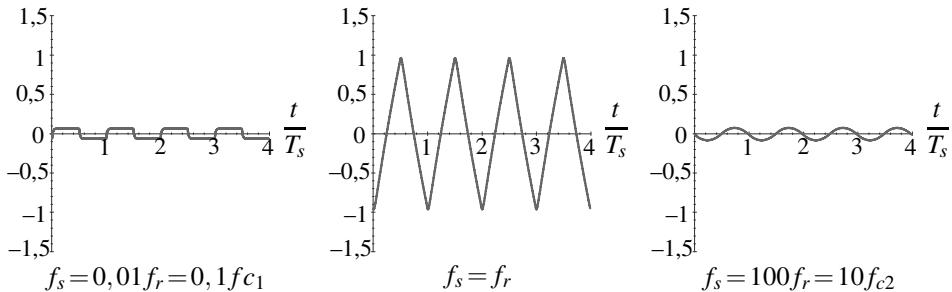
### b) Filtrage par un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 0,1$

Avec  $Q = 0,1$  le filtre est un filtre à bande large de fréquences coupures :  $f_{c1} \simeq \frac{f_r}{10}$  et  $f_{c2} \simeq 10f_r$ .

Les figures 4.11 et 4.12 donnent le signal de sortie lorsqu'on met en entrée le créneau ou le signal triangulaire précédents. On a pris  $E_0 = 2$  V et  $G_0 = 1$ .



**Figure 4.11** – Filtrage d'un signal créneau d'amplitude  $E_0 = 2$  V par un filtre passe-bande d'ordre deux de fréquence de résonance  $f_r$  et facteur de qualité  $Q = 0,1$ .



**Figure 4.12** – Filtrage d'un signal triangulaire d'amplitude  $E_0 = 2$  V par un filtre passe-bande d'ordre deux de fréquence de résonance  $f_r$  et facteur de qualité  $Q = 0, 1$ .

- Pour  $f_s = f_r$  le fondamental et les harmoniques de rang inférieur ou égal à 10 sont à l'intérieur de la bande passante  $\left[\frac{f_r}{10}, 10f_r\right]$ , mais pas la composante continue (de fréquence nulle). Ainsi le signal de sortie reproduit quasiment la partie variable du signal d'entrée (avec une certaine déformation dans le cas du créneau, riche en harmoniques de rang élevé qui ne sont pas prises dans la bande passante).
- Pour  $f_s = 0,01 f_r = 0,1 f_{c1}$ , la composante continue, le fondamental et les harmoniques de rang inférieur ou égal à 10 sont dans la bande atténuee  $[0, f_{c1}]$  dans laquelle le filtre se comporte comme un dérivateur. Le signal de sortie est faible et proportionnel à la dérivée du signal d'entrée.
- Pour  $f_s = 100 f_r = 10 f_{c2}$ , le fondamental et toutes les harmoniques dans la bande atténuee  $[f_{c2}, \infty]$  dans laquelle le filtre se comporte comme un intégrateur, donc la partie variable du signal est intégrée. La composante continue (de fréquence nulle) est éliminée car  $H(0) = 0$ . Le signal de sortie est faible et proportionnel à l'intégrale de la partie variable du signal d'entrée.

### c) Filtrage d'un signal créneau par un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 10$

Avec  $Q = 10$  le filtre est un filtre sélectif de fréquences de coupures :  $f_{c1} \simeq 0,95 f_r$  et  $f_{c2} \simeq 1,05 f_r$ . Il sélectionne une étroite bande de fréquence autour de  $f_r$ .

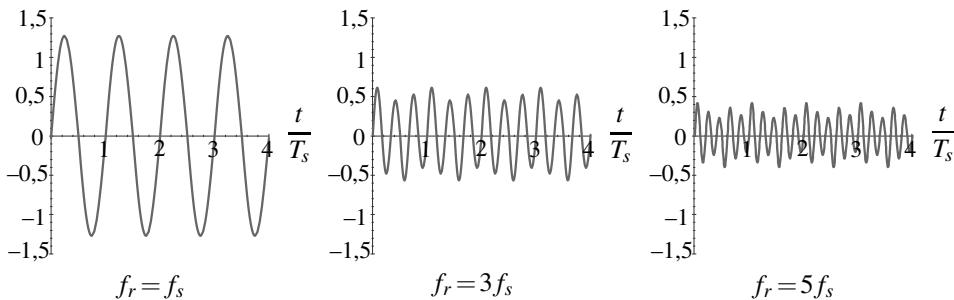
Lorsqu'on envoie le signal créneau dans ce filtre, en faisant varier la fréquence de résonance  $f_r$ , on constate que l'on obtient un signal de sortie d'amplitude plus grande lorsque  $f_r$  un multiple impair de  $f_s$ .

Que vaut le signal de sortie lorsque la pulsation de résonance du filtre est  $\omega_r = n\omega_s$ ? L'harmonique de rang  $n$  est dans la bande passante et il n'y en a pas d'autre car la bande passante est étroite : elle est la seule à passer le filtre. De plus :  $H(j\omega_r) = G_0$ , donc  $G(n\omega_s) = G(\omega_r) = G_0$  et  $\varphi(n\omega_s) = \varphi(\omega_r) = 0$ . Ainsi :

$$s(t) \simeq G_0 A_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n}).$$

Le signal de sortie est égal à l'harmonique de rang  $n$  multiplié par  $G_0$ .

La figure 4.13 donne le résultat de la simulation pour  $f_r = f_s$ ,  $f_r = 3f_s$  et  $f_r = 5f_s$ .



**Figure 4.13** – Filtrage d'un signal créneau d'amplitude  $E_0 = 2 \text{ V}$  par un filtre passe-bande d'ordre deux de facteur de qualité  $Q = 10$ .

#### d) Conclusion

Un filtre passe-bande supprime la composante continue et les discontinuités du signal.

Un filtre passe bande à bande passante large permet d'isoler la partie variable d'un signal.

Un filtre passe-bande sélectif permet d'isoler une composante sinusoïdale d'un signal.

## 4 Génération d'harmoniques due à une non-linéarité

On a vu qu'un filtre, système linéaire, n'enrichit pas le contenu spectral du signal. En revanche, si la relation entre le signal d'entrée  $e(t)$  et le signal de sortie  $s(t)$  d'un système est non linéaire, il est possible que le spectre du signal de sortie contienne des fréquences absentes du signal d'entrée. On va présenter deux exemples.

### 4.1 Première exemple : redressement d'une tension sinusoïdale

On réalise le circuit de la figure 4.14 dans lequel le générateur de tension a une force électromotrice  $e(t) = E_0 \sin(2\pi ft)$  avec  $E_0 = 7,5 \text{ V}$  et  $f = 400 \text{ Hz}$ , la résistance est  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $D$  est une diode.

La diode est un composant **non linéaire**. Dans la modélisation de la *diode idéale*, elle se comporte soit comme un interrupteur fermé (on dit qu'elle est passante) soit comme un interrupteur ouvert (on dit qu'elle est bloquée). Pour qu'elle soit passante il faut que l'intensité  $i$  du courant qui la traverse soit positive dans le sens de la flèche que son symbole représente (voir figure 4.14). Pour qu'elle soit passante il faut que la tension  $u$  à ses bornes (en convention récepteur par rapport à  $i$ ) soit positive.

Dans ce circuit, lorsque la diode est passante,  $u(t) = 0$  (interrupteur fermé), donc  $v(t) = e(t) = E_0 \sin(2\pi ft)$  mais il faut pour cela que  $i(t) > 0$ , soit  $\frac{v(t)}{R} > 0$ , soit encore  $e(t) > 0$ . Lorsque la diode est bloquée,  $i(t) = 0$  (interrupteur ouvert) donc  $v(t) = 0$  mais il

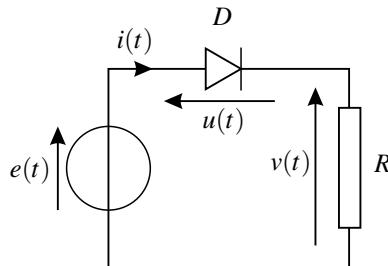


Figure 4.14 – Redressement d'une tension.

faut pour cela que  $u(t) < 0$ , soit  $e(t) - v(t) < 0$ , soit encore  $e(t) > 0$ . Finalement, la théorie prévoit, en notant  $T = \frac{1}{f}$  :

$$v(t) = \begin{cases} E_0 \sin(2\pi ft) & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T. \end{cases}$$

C'est une tension périodique de période  $T$  mais non sinusoïdale. Elle peut s'écrire comme la série de Fourier :

$$v(t) = \frac{E_0}{\pi} - \frac{1}{2} \sin(2\pi ft) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4p^2 - 1)} \cos(4\pi pft),$$

ce qui montre qu'elle contient, en plus de la fréquence  $f$  de  $e(t)$  les fréquences  $0, 2f, 4f, \dots, 2pf$ ...

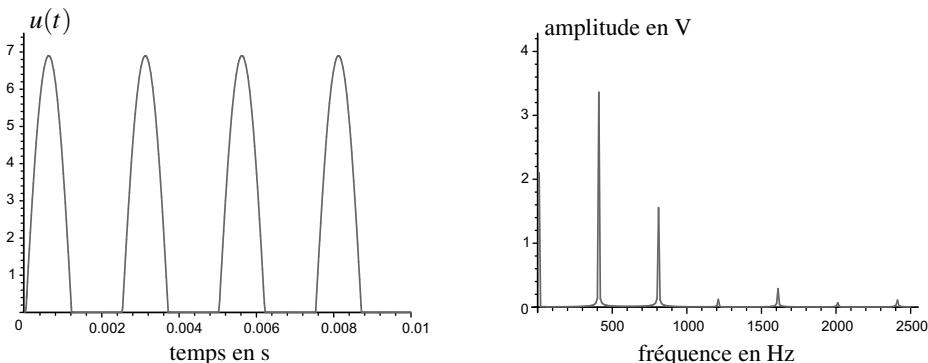


Figure 4.15 – Tension sinusoïdale redressée et son spectre en amplitude.

Le résultat de l'expérience est montré sur la figure 4.15. La tension  $u(t)$  observée est proche de sa modélisation théorique, mais elle ne monte pas jusqu'à 7,5 V comme prévu. La raison est que la diode n'est pas parfaite : elle a une *tension de seuil*  $u_S = 0,6$  V (c'est la valeur pour une diode au silicium) et la valeur maximale atteinte est :  $E_0 - u_S = 6,9$  V.

Sur le spectre, on observe comme prévu des raies aux fréquences 0, 400 Hz, 800 Hz, 1600 Hz et 2400 Hz. On observe en plus deux raies plus faibles à 1200 Hz =  $3f$  et 2000 Hz =  $5f$  parce que la diode n'est pas parfaite.

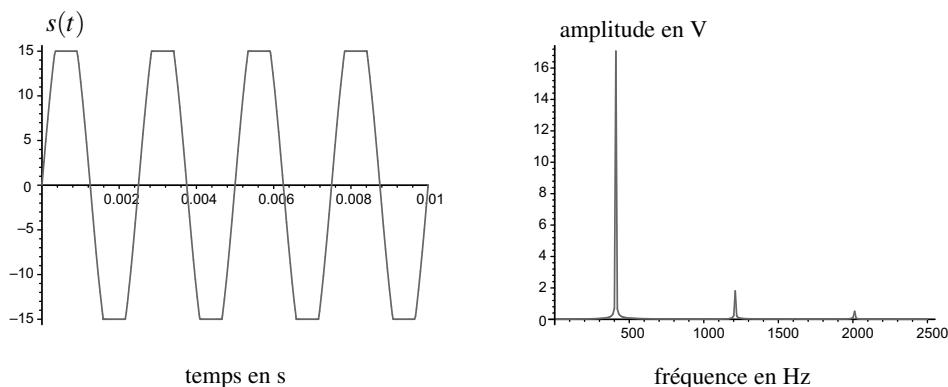
## 4.2 Deuxième exemple : écrêtage d'un signal

Un filtre est un système linéaire qui ne génère pas de nouvelle fréquences. Cependant, dans la pratique, il peut arriver avec un filtre *actif* que le signal de sortie correspondant à un signal sinusoïdal de fréquence  $f$  présente des harmoniques à cause du phénomène de saturation.

Un filtre actif comporte un composant électronique *alimenté par une source de tension continue*. Dans ce cas, si la force électromotrice de l'alimentation est  $2U$ , la valeur du signal de sortie ne peut être supérieure à  $U$ , ni inférieure à  $-U$ . Lorsqu'elle tend à dépasser  $U$  (resp.  $-U$ ) elle sature à cette valeur.

Par exemple, on suppose que  $U = 15$  V et on considère un filtre ayant à la fréquence  $f = 400$  Hz le gain  $G(2\pi f) = 4$ . Si on envoie un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 400 Hz et d'amplitude  $E_0 = 5$  V, le signal de sortie  $s(t)$  devrait avoir une amplitude égale à  $G(2\pi f) \times E_0 = 20$  V. Or, il ne peut dépasser ni +15 V, ni -15 V. Le signal  $s(t)$  est alors écrêté, comme on peut le voir sur la figure 4.16. Dans ce cas il y a **saturation** et le montage n'est *plus* linéaire.

Le spectre de  $s(t)$  est représenté sur la figure 4.16. Il comporte des harmoniques. L'apparition de ces nouvelles fréquences est due à la non-linéarité montage lorsqu'il y a saturation.



**Figure 4.16** – Tension sinusoïdale écrêtés et son spectre en amplitude.

### Remarque

L'apparition de la saturation est gênante quand on souhaite un fonctionnement de filtre linéaire. Mais la génération d'harmoniques qui en résulte est recherchée à la guitare électrique dans certains styles de musique parce qu'elle enrichit le son.

## 4.3 Conclusion

La présence de fréquences, absentes du spectre du signal d'entrée, dans le spectre du signal de sortie fourni par un montage permet de détecter une **non-linéarité**.

En injectant un signal d'entrée sinusoïdal et en observant le spectre du signal de sortie on met immédiatement en évidence un comportement non linéaire, si le spectre du signal de sortie comporte plus d'une fréquence.

### SYNTHÈSE

#### SAVOIRS

- contenu spectral d'un signal périodique non sinusoïdal
- rôle des différents harmoniques selon leur rang
- conditions pour qu'un filtre soit intégrateur
- conditions pour qu'un filtre soit déivateur

#### SAVOIR-FAIRE

- trouver le signal de sortie d'un filtre pour un signal d'entrée sinusoïdal
- trouver le signal de sortie d'un filtre pour un signal d'entrée périodique quelconque
- déterminer le contenu spectral d'un signal filtré
- reconnaître un comportement intégrateur
- reconnaître un comportement déivateur
- mettre en œuvre une expérience de filtrage d'un signal périodique
- détecter expérimentalement un comportement non linéaire par l'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre.

#### MOTS-CLÉS

- |                       |                         |                                  |
|-----------------------|-------------------------|----------------------------------|
| • signal périodique   | • filtre                | • bande passante, bande atténuee |
| • composante continue | • fonction de transfert | • déivateur                      |
| • fondamental         | • diagramme de Bode     | • intégrateur                    |
| • harmonique          | • fréquence de coupure  |                                  |

**S'ENTRAÎNER****4.1 Train d'impulsion périodique (\*)**

On considère le signal de période  $T_s = \frac{1}{f_s}$  défini par :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 < t < \alpha T_s \\ 0 & \text{si } \alpha T_s < t < T_s \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

On admet que ce signal a des composantes sinusoïdales de fréquences  $n f_s$ , avec  $n \geq 1$ , et d'amplitudes :  $A_n = \frac{|\sin(n\pi\alpha)|}{\pi n}$ .

**1.** Quel est la composante continue de ce signal ? Quelle est sa valeur efficace ?

**2.** Lorsque  $\alpha \ll 1$  ce signal est un train d'impulsion. Vérifier que pour  $\alpha = \frac{1}{100}$ , les amplitudes des harmoniques de rang inférieur ou égal à 17 sont approximativement égales à l'amplitude du fondamental à mieux que 5% près. On envoie ce signal dans un filtre et on observe le spectre du signal de sortie jusqu'au rang  $n = 17$ . Que voit-on ?

**4.2 Contenu spectral du produit de deux signaux (\*)**

**1.** Quelles sont les fréquences contenues dans le signal :

$$\cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \times \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) ?$$

**2.** Même question pour  $f(t) \times g(t)$  où  $f(t)$  et  $g(t)$  sont des signaux périodiques de fréquences respectives  $f_s$  et  $f'_s$  et non sinusoïdaux.

**4.3 Domaines intégrateur et déviateur (\*)**

On considère des filtres dont les fonctions de transfert sont :

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2 = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

où  $\omega_1 = 200\pi \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_2 = 10^5\pi \text{ rad.s}^{-1}$ .

**1.** De quels types sont ces deux filtres ?

**2.** Étudier l'existence pour chacun d'eux d'un domaine intégrateur ou déviateur.

**4.4 Influence de l'ordre du filtre (\*)**

On veut comparer le filtrage par deux filtres passe-bas de même pulsation de coupure  $\omega_c = 628 \text{ rad.s}^{-1}$  et de fonctions de transfert :

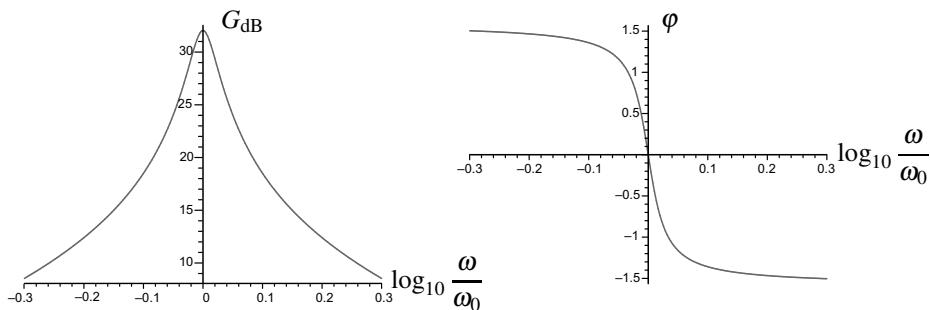
$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}.$$

- Vérifier que  $\omega_c$  est bien la pulsation de coupure à  $-3$  dB de chacun des deux filtres.
- Donner les expressions approchées pour  $\omega \gg \omega_c$  des deux fonctions de transfert. Quelles sont les pentes des asymptotes correspondantes sur la courbe d'amplitude du diagramme de Bode.
- Le signal d'entrée est :  $e(t) = E_0(1 + \cos(2\pi f_s t))$  avec  $E_0 = 2$  V et  $f_s = 300$  Hz. Exprimer le signal de sortie pour les deux filtres. Quel est le meilleur moyenneur ?

#### 4.5 Élimination du bruit d'un signal ( $\star$ )

Un capteur donne une signal utile sinusoïdal de fréquence  $f_u = 80$  Hz mais brouillé par des signaux de fréquences différentes de  $f_u$  (« bruit » expérimental).

- Donner une origine possible pour le bruit de fréquence inférieure à  $f_u$  et une autre pour le bruit de fréquence supérieure à  $f_u$ .
- Quel type de filtrage peut-on envisager pour réduire l'amplitude de ces signaux parasites ?
- Pour éliminer le bruit on utilise un filtre dont le diagramme de Bode est :



Quelle est le meilleur choix pour  $\omega_0$  ? Avec ce choix et en exploitant graphiquement ce diagramme, donner l'expression du signal de sortie pour chacun des trois signaux suivants :  $e_1(t) = E_0 \cos(100\pi t)$ ,  $e_2(t) = E_0 \cos(160\pi t)$  et  $e_3 = E_0 \cos(200\pi t)$ . Commenter les résultats obtenus.

#### 4.6 Filtrage par un filtre passe-bas ( $\star\star$ )

Pour éliminer du bruit haute fréquence, on filtre un signal périodique (non nécessairement sinusoïdal) de fréquence  $f_s \sim 100$  Hz par un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de

$$\text{coupure } \omega_c \text{ et de fonction de transfert : } H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}.$$

- Quelle est la valeur de  $\omega_c$  adaptée :  $\omega_c = 628 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ou  $\omega_c = 1.10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ?
- Trouver une approximation de la fonction de phase du filtre valable à l'intérieur de la bande passante qui soit de la forme :  $\varphi(\omega) \simeq -K\omega$  où  $K$  est une constante positive.
- Montrer que le signal est restitué avec un léger retard  $\tau$ .

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE

**4.7 Filtrage par un filtre passe-bande (★★)**

On règle un générateur de basses fréquences pour qu'il délivre un signal « rampe » de période  $T_s = 1 \text{ ms}$  tel que :

$$e(t) = \frac{2E_0 t}{T_s} \quad \text{pour} \quad -\frac{T_s}{2} \leq t < \frac{T_s}{2}$$

avec  $E_0 = 5 \text{ V}$ . On donne la décomposition en série de Fourier de ce signal est :

$$e(t) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\omega_s t) \quad \text{avec} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}.$$

**1.** Expliquer l'absence de terme constant dans cette expression et commenter le fait que l'amplitude des composantes sinusoïdales soit proportionnelle à  $\frac{1}{n}$ .

**2.** On envoie  $e(t)$  dans un filtre de fonction de transfert :  $H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_r}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_r} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}$  avec  $Q = 10$  et  $\omega_r$  variable. Donner une approximation du signal de sortie dans les trois cas :

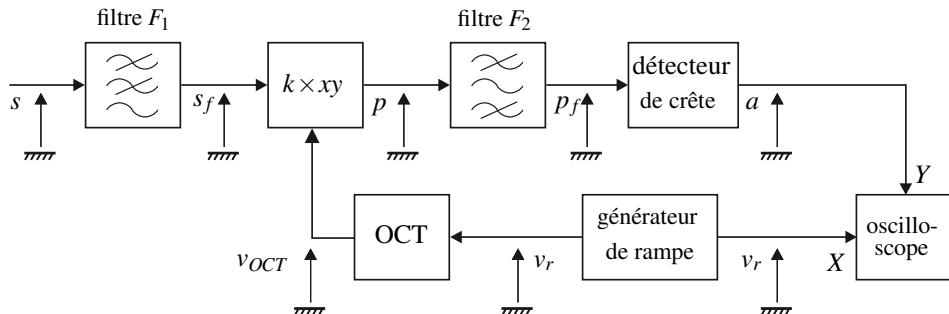
a.  $\omega_r = 6,28 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

b.  $\omega_r = 31,4 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,

c.  $\omega_r = 6,28 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

*Indication :* Dans l'un des cas on peut utiliser un comportement intégrateur ou dérivateur.

## APPROFONDIR

**4.8 Principe simplifié d'un analyseur de spectre analogique (★★)**

Le schéma fonctionnel d'un analyseur de spectre analogique est représenté sur la figure. Il comprend :

- un oscillateur commandé en tension (OCT) fournissant un signal  $v_{OCT}(t)$  sinusoïdal dont la fréquence dépend linéairement d'une tension appliquée ;
- un générateur de rampe fournissant le signal en dent de scie  $v_r(t)$  de période  $T_{\text{rampe}}$  qui pilote l'OCT ainsi que le balayage horizontal d'un oscilloscope ;

- un multiplicateur dont le signal de sortie  $p(t)$  est égal au produit des deux signaux d'entrée multiplié par une constante  $k$  ;
- un filtre  $F_2$ , passe-bande très sélectif, de facteur d'amplification dans sa bande passante égal à  $G_0$ , de fréquence centrale  $F_0$ , dont la bande passante a une largeur  $\Delta f$  ;
- un détecteur de crête dont on admettra qu'il fournit une tension égale à l'amplitude du signal qu'il reçoit ;
- un filtre  $F_1$ , passe-bas qui élimine les fréquences supérieures à une fréquence  $F_m$  et a un gain égal à 1 dans sa bande passante.

Le signal  $s(t)$  à analyser a une fréquence  $f_s$ .

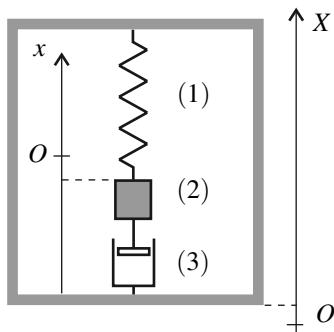
On suppose que  $\Delta f \ll f_s \ll F_m < F_0$ ,  $a \ll b$  signifiant ici que  $10a < b$ .

La fréquence  $F_{\text{OCT}}$  du OCT varie entre  $F_0$  et  $F_0 + F_m$  ; son amplitude a une valeur constante  $A_{\text{OCT}}$ . On a de plus :  $T_{\text{rampe}} \gg \frac{1}{\Delta f}$ .

1. Quelles sont les fréquences présentes dans les spectres des signaux  $s(t)$ ,  $s_f(t)$  et  $p(t)$  ?
2. Montrer que le signal  $a(t)$ , en sortie du détecteur de crête, est non nul seulement si  $F_{\text{OCT}}$  est proche de certaines fréquences. Quelles sont les valeurs des maxima par lesquels passe ce signal ?
3. En déduire qu'on observe sur l'écran de l'oscilloscope une série de pics représentant le spectre de  $s(t)$ .

#### 4.9 Sismomètre (★★)

1. Le principe d'un sismomètre est schématisé sur la figure ci-dessous. Un ressort (1) de masse négligeable, dont la réponse en élongation, linéaire, est caractérisée par une raideur  $k$ , est suspendu à un boîtier rigide lié au sol. Un solide (2), de masse  $m$ , est accroché à l'autre extrémité de ce ressort. Une partie de ce solide est solidaire d'un amortisseur (3) exerçant sur (2) la force de frottement fluide  $\vec{f} = -h\vec{v}$ , où  $h$  est une constante, et  $\vec{v}$  la vitesse de translation de (2) par rapport au boîtier.



Le passage d'une onde sismique provoque un mouvement du boîtier par rapport à un référentiel galiléen qui est repéré par sa coordonnée  $X(t)$  le long d'un axe  $O'X$ . Le mouvement de (2) par rapport au boîtier est repéré par sa coordonnée  $x(t)$  sur un axe  $Ox$  fixe par rapport au

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE

boîtier dont l'origine  $O$  correspond au point d'attache de (2) dans sa position d'équilibre en l'absence de mouvement du boîtier. L'axe  $Ox$ , comme l'axe  $O'X$ , est vertical ascendant. On étudie le mouvement  $x(t)$  de (2) provoqué par le mouvement du boîtier  $X(t)$ .

a. Établir l'équation différentielle suivante liant les variables  $x(t)$  et  $X(t)$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{d^2X}{dt^2},$$

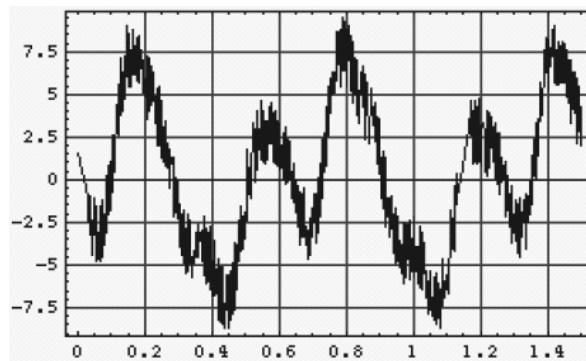
où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre du sismomètre et, par définition,  $\tau = \sqrt{2} \frac{m}{h}$  la constante de temps relative à l'amortissement.

b. On considère une onde sismique sinusoïdale et de pulsation  $\omega$ . En régime forcé, la fonction  $x(t)$  est sinusoïdale elle aussi, et de même pulsation. Établir l'expression de la fonction de transfert mécanique  $H_1(j\omega) = \frac{x}{X}$ , où  $\underline{g}$  est la grandeur complexe (proportionnelle à  $\exp(j\omega t)$ ) associée au signal sinusoïdal  $g(t)$ . On suppose désormais que  $\omega_0\tau = 1$ ; montrer que la fonction de transfert mécanique peut s'écrire :

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}.$$

c. Exprimer  $G_1(\omega) = |H_1(j\omega)|$  et  $\varphi_1(\omega) = \arg(H_1(j\omega))$  pour  $\omega < \omega_0$ . À quelle type de filtre correspond cette fonction de transfert ?

2. La pulsation propre du sismomètre étant  $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$ , cet appareil détecte une onde sismique sous la forme de la fonction périodique  $x(t)$  reproduite sur la figure ; l'amplitude est en unité arbitraire.



L'application d'un algorithme de transformée de Fourier à  $x(t)$  fournit la décomposition en série de Fourier sous la forme  $x(t) = c_0 + \sum_n c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$  avec  $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les valeurs des coefficients  $c_n$  et des phases  $\varphi_n$  sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

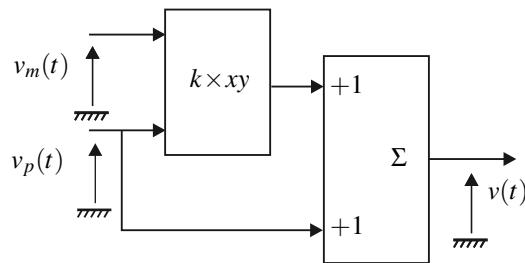
| $n$ | $c_n$ (unité arbitraire) | $\varphi_n$ |
|-----|--------------------------|-------------|
| 0   | 0                        |             |
| 1   | 4                        | $-0,4\pi$   |
| 2   | 3,5                      | $0,6\pi$    |
| 3   | 2                        | $0,5\pi$    |
| 4   | 0                        |             |
| 5   | 1                        | $-0,6\pi$   |

a. En déduire l'excitation sous la forme  $X(t) = c'_0 + \sum_n c'_n \cos(n\omega t + \varphi'_n)$ . Tracer l'allure de  $X(t)$  sur une période.

b. Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre afin que l'enregistrement de  $x(t)$  permette de déduire directement  $X(t)$  ?

#### 4.10 Modulation d'amplitude (★★)

Un signal, que nous supposons d'abord sinusoïdal  $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$ , module la porteuse  $v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$  fournie par un oscillateur sinusoïdal haute fréquence dont la fréquence d'oscillation  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  ( $f_p \gg f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ ) est particulièrement stable. La modulation s'effectue à l'aide d'un circuit comprenant un multiplicateur de constante multiplicative  $k$  et un additionneur.



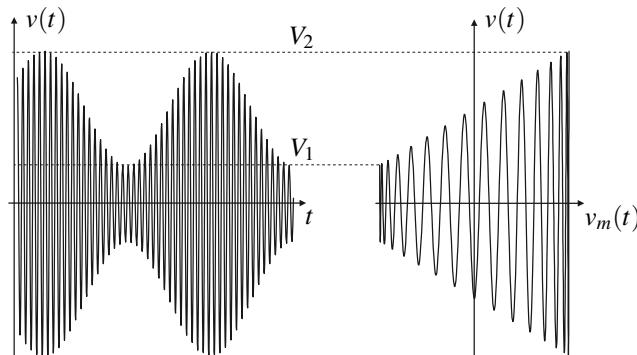
1. Montrer que le signal modulé peut se mettre sous la forme :

$$v(t) = V_p(1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t),$$

où  $m$  est l'indice de modulation que l'on explicitera.

2. Afin de mesurer l'indice de modulation du signal porteur, on réalise les deux oscillogrammes représentés ci-dessous.

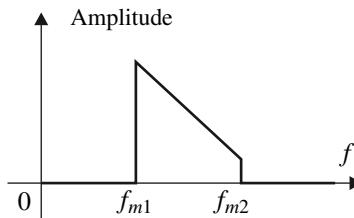
## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE



Quels sont les modes de l'oscilloscope utilisés pour la réalisation de chacun de ces oscillogrammes ? Exprimer l'indice de modulation en fonction des tensions extrêmales  $V_1 = 2$  V,  $V_2 = 18$  V et le calculer numériquement.

**3.** Déterminer le spectre de fréquences du signal modulé  $v(t)$  et le représenter. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquence nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_m$ .

**4.** Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquences  $[f_{m1}, f_{m2}]$ .



Représenter le spectre de fréquences du signal modulé. En radiodiffusion  $f_{m1} = 300$  Hz et  $f_{m2} = 4,5$  kHz, quelle est la largeur de la plage de fréquences occupée par le signal modulé ? Quel écart minimal de fréquence  $\Delta f_{\min}$  doit-il exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soit pas mutuellement brouillées ?

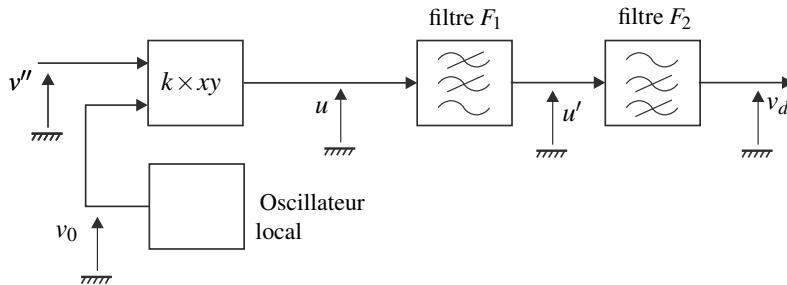
#### 4.11 Démodulation d'un signal modulé en amplitude (★★★)

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent.

**1.** L'antenne d'un récepteur radio capte un signal modulé en amplitude qui est appliqué à l'entrée d'un amplificateur à commande automatique de gain (CAG), c'est-à-dire que ce signal sera d'autant plus amplifié que son amplitude au niveau de l'antenne est plus faible. L'amplificateur délivre un signal de la forme  $v''(t) = V_p''(1 + m' \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t)$  avec  $V_p''$  constante par CAG.

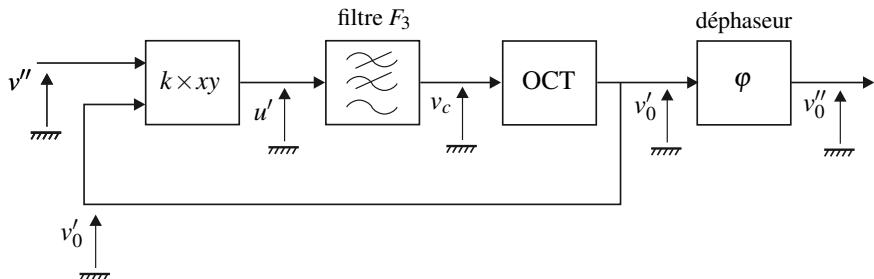
Ce dernier signal est ensuite appliquée à l'entrée d'un démodulateur dont le rôle est de fournir un signal  $v_d(t)$  image du signal de modulation  $v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$  (voir exercice précédent).

Le démodulateur comprend un oscillateur local délivrant un signal  $v_0(t) = V_0 \cos(\omega_p t)$ , synchrone de la porteuse, un multiplicateur de constante multiplicative  $k$ , un filtre passe-bas  $F_1$  de fréquence de coupure égale à  $f_p$  et de facteur d'amplification  $K_1 = 1$  pour  $f \leq f_p$  et un filtre passe-haut  $F_2$  de fréquence de coupure égale à  $\frac{1}{10}f_{m1}$  et de facteur d'amplification  $K_2 = 1$  pour  $f \geq f_{m1}$ .



- a.** Établir l'expression du signal démodulé  $v_d(t)$  à la sortie du filtre  $F_2$ .
- b.** On isole à l'aide d'un soustracteur la composante continue  $U$  du signal  $u(t)$  en utilisant les signaux délivrés par les filtres  $F_1$  et  $F_2$ . Exprimer  $U$ . Quel renseignement nous fournit cette composante continue et à quoi peut-on l'utiliser ?
- 2.** En fait, il est pratiquement impossible de réaliser un oscillateur local parfaitement synchrone de la porteuse. En effet, la phase instantanée de l'oscillateur local est de la forme  $\omega_p t + \varphi_0(t)$  où  $\varphi_0(t)$  est une fonction aléatoire du temps avec  $\left| \frac{d\varphi_0}{dt} \right| \ll \omega_m \ll \omega_p$ .
- a.** Dans cette hypothèse, calculer le signal  $v'_d(t)$  délivré par le démodulateur. Conclure que l'amplitude du signal démodulé fluctue aléatoirement et détériore le signal audible (fading).
- b.** Pour corriger ce défaut, on remplace l'oscillateur local par un circuit alimenté par la tension modulée  $v''(t)$  et dont le rôle est de fournir une tension sinusoïdale  $v'_0(t)$  parfaitement synchrone de la porteuse. Ce circuit réalise une « boucle à verrouillage de phase » (voir figure). Il est constitué d'un oscillateur commandé en tension OCT délivrant un signal  $v'_0(t)$  d'amplitude constante  $V_0$  et de phase instantanée  $\omega_p t + \varphi_0(t)$  c'est-à-dire de pulsation instantanée  $\omega_p + \frac{d\varphi_0}{dt}$  avec  $\frac{d\varphi_0}{dt} = av_c(t)$  où  $v_c(t)$  est la tension de commande de l'OCT et  $a$  une constante dimensionnée réelle positive telle qu'à tout instant  $|av_c(t)| \ll \omega_p$ . Le circuit comprend, en outre, un multiplicateur de constante multiplicative  $k$ , un filtre passe-bas idéal  $F_3$ , qui transmet sans atténuation les signaux de fréquence  $f < f_p$ , et, enfin, un circuit déphaseur introduisant un déphasage de  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  à la fréquence  $f_p$ . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $\varphi_0(t)$  ?

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE



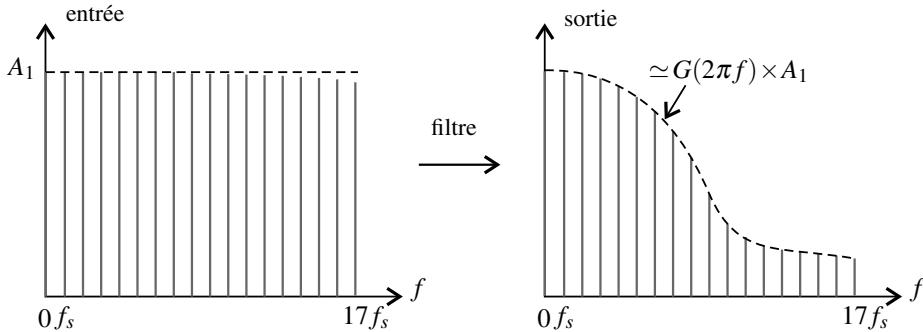
c. Sachant que  $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ , intégrer l'équation différentielle précédente et montrer que la boucle se verrouille, c'est-à-dire que  $\varphi_0(t)$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  et que la pulsation de l'OCT tend vers  $\omega_p$ , pulsation de la porteuse.

d. Cependant, une fois la boucle verrouillée, peut-on substituer le signal  $v'_0(t)$  délivré par l'OCT à celui  $v_0(t)$  délivré initialement par l'oscillateur local ? Quel est le rôle du déphaseur ?

**CORRIGÉS****4.1 Train d'impulsion périodique**

1. La composante continue est :  $\langle e \rangle = \alpha E$  ; la valeur efficace :  $e_{\text{eff}} = \sqrt{\langle e^2 \rangle} = \sqrt{\alpha E^2} = \sqrt{\alpha} E$ .  
 2.  $\frac{A_1 - A_n}{A_1} = 1 - \frac{\sin(n\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}$  augmente avec  $n$  et vaut 0,047 pour  $n = 17$ . Donc à 5% près :  $A_1 \simeq A_2 \simeq \dots \simeq A_{17}$ .

Si on envoie ce signal dans un filtre de fonction de gain  $G(\omega)$ , les amplitudes des composantes sinusoïdales du signal de sortie sont :  $G(2\pi f_s)A_1$ ,  $G(4\pi f_s)A_2 \simeq G(4\pi f_s)A_1$ , ...,  $G(34\pi f_s)A_{17} \simeq G(34\pi f_s)A_1$ . Le spectre du signal de sortie visualise la fonction de gain du filtre (voir figure).

**4.2 Contenu spectral du produit de deux signaux**

1.  $\cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \times \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)$ .

Ce signal contient les fréquences  $f_1 + f_2$  et  $|f_1 - f_2|$ .

2. De manière analogue, le produit des signaux

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

et

$$g(t) = A'_0 + \sum_{n'=1}^{\infty} A'_{n'} \cos(2\pi n' f'_s t + \varphi'_{n'})$$

contient toutes les fréquences  $n f_s + n' f'_s$  et  $|n f_s - n' f'_s|$  où  $n$  et  $n'$  prennent toutes les valeurs entières.

**4.3 Domaines intégrateur et déviateur**

1. La fonction de transfert  $H_1$  correspond à un filtre passe-bas d'ordre 2 ; la fonction de transfert  $H_2$  correspond à un filtre passe-haut d'ordre 2.

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE

2. La grande différence d'ordre de grandeur entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  permet d'envisager trois domaines :  $\omega \ll \omega_1$ ,  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$  et  $\omega \gg \omega_2$ . Les approximations dans les différents domaines sont rassemblées dans le tableau suivant :

|                                | $\omega \ll \omega_1$          | $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$    | $\omega \gg \omega_2$                 |
|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ | 1                              | $\frac{j\omega}{\omega_1}$            | $\frac{j\omega}{\omega_1}$            |
| $1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$ | 1                              | 1                                     | $\frac{j\omega}{\omega_2}$            |
| $\underline{H}_1(j\omega)$     | 1                              | $\frac{\omega_1}{j\omega}$            | $-\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}$ |
| $\underline{H}_2(\omega)$      | $-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}$ | $\frac{\omega_1}{\omega_2^2} j\omega$ | $\frac{\omega_1}{\omega_2}$           |

Ainsi, dans le domaine  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ , le filtre 1 est intégrateur et le filtre 2 est déivateur.

#### 4.4 Influence de l'ordre du filtre

1.  $G_1(\omega) = |\underline{H}_1(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$  et  $G_2(\omega) = |\underline{H}_2(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_c^4}}}.$  Dans les deux cas, la valeur maximale du gain est  $G_{\max} = 5$  et  $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}.$

Donc  $\omega_c$  est la pulsation de coupure à  $-3$  dB.

2. Pour  $\omega \gg \omega_c$ ,  $\underline{H}_1(j\omega) \simeq \frac{5\omega_c}{j\omega}$  donc la courbe d'amplitude du diagramme de Bode admet une asymptote de pente  $-20$  dB/décade ;  $\underline{H}_2(j\omega) \simeq -5\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$  donc la courbe admet une asymptote de pente  $-40$  dB/décade. Le premier filtre est intégrateur dans sa bande atténuée.  
3. Dans les deux cas :  $s(t) = \underline{H}(0)E_0 + G(\omega_s)E_0 \cos(\omega_s t + \varphi(\omega_s))$  en posant  $\omega_s = 2\pi f_s$ . Numériquement :  $\frac{\omega_s}{\omega_c} = 3$  et il vient :

$$G_1(\omega_s) = 0,10 \quad \text{et} \quad \varphi(\omega_s) = \text{Arg} \frac{5}{1+3j} = -\arctan(3) = -1,25 \text{ rad} ;$$

$$G_2(\omega_s) = 0,012 \quad \text{et} \quad \varphi(\omega_s) = \text{Arg} \frac{5}{-8+4,2j} = \pi + \arctan(0,53) = \pi + 0,48 \text{ rad}.$$

Les signaux de sortie sont donc, en V :

$$s_1(t) = 10 + 1,0 \cos(\omega_s t - 1,25) \quad \text{et} \quad s_2(t) = 10 - 0,12 \cos(\omega_s t + 0,48).$$

Le filtre d'ordre 2 coupe mieux la composante variable du signal, c'est le meilleur moyenneur.

#### 4.5 Élimination du bruit d'un signal

- Le courant du secteur de fréquence 50 Hz est une cause très fréquente de bruit. Le bruit de fréquence supérieure à  $f_u$  peut provenir de certaines ondes radio (grandes ondes) de fréquences relativement basses de l'ordre de 100 kHz.
- Pour éliminer à la fois les fréquences inférieures et supérieures à  $f_u$  il faut un filtrage par un filtre passe-bande. Étant donné que le signal, sinusoïdal, ne contient que la fréquence  $f_u$  on a intérêt à prendre un filtre sélectif centré sur la fréquence  $f_u$ .
- Le meilleur choix est  $\omega_0 = 2\pi f_u$  : le signal utile est ainsi amplifié le plus possible par rapport au bruit et on a aussi l'avantage que le filtrage conserve sa phase puisque  $\varphi(\omega_0) = 0$ . On détermine les valeurs du gain et du déphasage pour les pulsations des trois signaux par lecture des courbes :

| $\omega$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ | $\log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$ | $G_{\text{dB}}(\omega)$ | $G(\omega)$ | $\varphi(\omega)$ |
|--|-------------------------------------|-------------------------|-------------|-------------------|
| $100\pi$                                     | -0,20                               | 12                      | 4           | 1,5               |
| $160\pi$                                     | 0                                   | 32                      | 40          | 0                 |
| $200\pi$                                     | 0,10                                | 19                      | 9           | -1,4              |

Les signaux de sortie correspondant aux trois signaux d'entrée sont donc :

$$s_1(t) = 4E_0 \cos(100\pi t + 1,5) \quad s_2(t) = 40E_0 \cos(160\pi t) \quad \text{et} \quad s_3(t) = 9E_0 \cos(200\pi t - 1,4).$$

On constate que le « rapport signal sur bruit » a augmenté environ d'un facteur 4.

#### 4.6 Filtrage par un filtre passe-bas

- Le signal comporte des constantes sinusoïdales de fréquences  $f_s$ ,  $2f_s$ , ...,  $nf_s$ , .... Les dernières harmoniques sont obligatoirement coupées par le filtre mais le signal garde sa forme si l'on conserve un bon nombre d'harmoniques. Il faut choisir  $\omega_c = 1.10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  car ainsi  $\frac{\omega_c}{2\pi f_s} \sim 15$  donc le fondamental et une dizaine d'harmoniques sont dans la bande passante. L'autre choix de pulsation de coupure n'est pas bon car on n'aurait que le fondamental du signal dans la bande passante.

- $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \simeq -\frac{\omega}{\omega_c}$  si  $\omega \ll \omega_0$  ce qui est de la forme demandée avec  $K = \frac{1}{\omega_c}$ .

- On approche le signal par la somme de sa composante continue, son fondamental et ses harmoniques de rang  $\leq 10$  :  $e(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n})$ . Toutes les composantes sinusoïdales de cette expression sont dans la bande passante donc on fait les approximations :  $G(\omega) \simeq 1$  et  $\varphi(\omega) \simeq -K\omega$ . Le signal de sorte est alors :

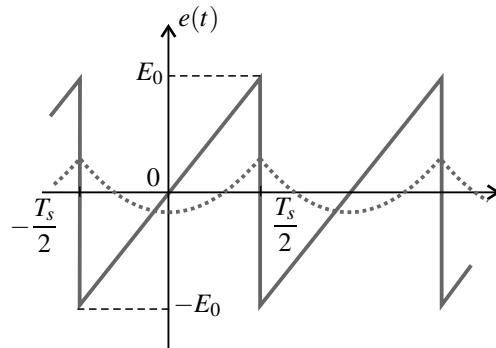
$$\begin{aligned} s(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos(n\omega_s t + \varphi_{e,n} - Kn\omega_s) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos(n\omega_s(t - K) + \varphi_{e,n}) = e(t - K). \end{aligned}$$

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE

Il est approximativement égal au signal d'entrée retardé de  $\tau = K = \frac{1}{\omega_c}$ . Pour évaluer l'importance de ce retard, on doit comparer  $K$  à la période du signal. Or :  $\frac{K}{T_s} = \frac{f_s}{\omega_c} \sim 10^{-2}$ , donc ce retard est faible.

#### 4.7 Filtrage par un filtre passe-bande

1. Le signal rampe a l'allure suivante (courbe en trait plein) :



Ce signal a une moyenne nulle donc il n'y a pas de composante continue dans sa décomposition de Fourier. De plus le signal présente des discontinuités qui sont contenues dans les harmoniques de rang tendant vers l'infini. C'est pour cela que l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  tend relativement lentement vers 0.

2. Le filtre est un filtre passe-bande sélectif de pulsation de résonance  $\omega_r$ . Il faut comparer  $\omega_s$  et  $\omega_r$ .

a.  $\frac{\omega_s}{\omega_r} = 1$ , donc le fondamental du signal est dans la bande passante. Toutes les harmoniques sont éliminées (en première approximation). Le signal de sortie est :  $s(t) \simeq \frac{1}{n\pi} \sin(\omega_s t)$ .

b.  $\frac{\omega_s}{\omega_r} = \frac{1}{5}$ , donc l'harmonique de rang 5 est dans la bande passante. Le fondamental et les autres harmoniques sont (en première approximation) éliminés. Donc :  $s(t) \simeq \frac{1}{5\pi} \sin(5\omega_s t)$ .

c.  $\frac{\omega_s}{\omega_r} = 10$ . Toutes les composantes sinusoïdales du signal sont de pulsation très supérieure à  $\omega_r$  et on peut faire l'approximation :  $H(j\omega) \simeq \frac{\omega_r}{Qj\omega}$  soit  $G(\omega) \simeq \frac{\omega_r}{Q\omega}$  et  $\varphi(\omega) \simeq -\frac{\pi}{2}$ . Ceci traduit un caractère intégrateur du filtre. On peut écrire la décomposition de Fourier du signal de sortie :

$$s(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} E_0 \frac{\omega_r}{Qn\omega_s} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(n\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_0}{100} \frac{(-1)^n}{n^2\pi} \cos(n\omega_s t).$$

Pour trouver la forme du signal  $s(t)$  on peut utiliser le caractère intégrateur du filtre : c'est une primitive du signal d'entrée, de moyenne nulle dont l'allure est représentée en pointillés sur la figure (avec une échelle dilatée sur l'axe des ordonnées).

#### 4.8 Principe simplifié d'un analyseur de spectre analogique

**1.** Le spectre de  $s(t)$  contient, *a priori*, toutes les fréquences multiples de  $f_s : 0, f_s, 2f_s, \dots, nf_s, \dots$

Le filtre  $F_1$  élimine du spectre de  $s(t)$  les fréquences supérieures  $F_m$ . Le spectre de  $s_f(t)$  contient les fréquences :  $0, f_s, 2f_s, \dots, Nf_s$  où  $N$  est la partie entière de  $\frac{F_m}{f_s}$ .

D'après l'exercice sur le contenu spectral du produit de deux signaux, le spectre de  $p(t)$  contient les fréquences  $F_{\text{OCT}}, F_{\text{OCT}} + f_s, F_{\text{OCT}} + 2f_s, \dots, F_{\text{OCT}} + Nf_s$  et les fréquences  $F_{\text{OCT}} - f_s, F_{\text{OCT}} - 2f_s, \dots, F_{\text{OCT}} - Nf_s$ .

**2.** Le signal  $p_f(t)$  est non nul seulement si l'une des fréquences présentes dans le spectre de  $p(t)$  est dans la bande  $\left[F_0 - \frac{\Delta f}{2}, F_0 + \frac{\Delta f}{2}\right]$ . On remarque qu'il ne peut s'agir que d'une fréquence de la forme  $F_{\text{OCT}} - nf_s$  où  $n$  est un entier compris entre 0 et  $N$ . La bande passante de  $F_3$  étant très étroite, il faut pour cela que  $F_{\text{OCT}}$  soit très proche de  $F_0 + nf_s$ .

Lorsque la fréquence de l'OCT varie, l'amplitude du signal  $p_f(t)$  passe par un maximum chaque fois que  $F_{\text{OCT}} = F_0 + nf_s$ . Alors,

$$p_f(t) = \frac{1}{2}G_0 \times kA_{\text{OCT}}A_n \sin(2\pi F_0 t + \varphi),$$

où  $A_n$  est l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  du signal  $s(t)$ , et :

$$a(t) = \frac{1}{2}G_0 k A_{\text{OCT}} \times A_n.$$

Le signal  $a(t)$  passe donc par des maxima aux instants où  $F_{\text{OCT}} = F_0 - nf_s$ ; les valeurs de ces maxima sont proportionnelles aux amplitudes des différentes harmoniques de  $s(t)$ . En dehors de ces maxima  $a(t)$  est quasiment nul.

**3.** On observe sur l'oscilloscope le signal  $a(t)$  avec pour base de temps  $v_r(t)$  qui est parfaitement synchrone avec  $a(t)$ . La fréquence  $F_{\text{OCT}}$  dépendant de  $v_r(t)$  de manière linéaire, on observe le spectre de  $s(t)$ . Les pics n'ont pas infiniment fins, mais ont une largeur  $\Delta f$ .

#### 4.9 Sismomètre

**1. a.** On choisit d'étudier le mouvement du solide (2), dans le référentiel lié au boîtier. Lors du passage d'une onde sismique ce référentiel présente par rapport au référentiel galiléen une accélération non nulle  $\frac{d^2X}{dt^2}$ ; il n'est donc pas galiléen.

Les forces agissant sur le solide (2) dans le référentiel du boîtier sont : son poids  $-mg\vec{u}_x$ , la tension du ressort  $k\Delta l\vec{u}_x$  où  $\Delta l$  est l'allongement algébrique du ressort, la force de l'amortisseur  $-h\frac{dX}{dt}\vec{u}_x$  et la force d'inertie d'entraînement  $-m\frac{d^2X}{dt^2}\vec{u}_x$ .

L'allongement du ressort est  $\Delta l = \Delta l_{\text{eq}} - x$  où  $\Delta l_{\text{eq}}$  est l'allongement à l'équilibre. D'autre part, lorsque le boîtier est immobile, la condition d'équilibre du solide (2) est :  $-mg + k\Delta l_{\text{eq}} = 0$  soit :  $\Delta l_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}$ .

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour (2) dans le référentiel du boîtier et en projection sur  $Ox$  :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg + k \left( \frac{mg}{k} - x \right) - h \frac{dx}{dt} - m \frac{d^2X}{dt^2}$$

c'est-à-dire, après simplification :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{d^2X}{dt^2}$ .

**b.** En notation complexe, l'équation s'écrit :  $-\omega^2 \underline{x} + j \frac{\sqrt{2}}{\tau} \omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega^2 \underline{X}$ . Il vient immédiatement :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{X}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\tau}} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}$$

en utilisant le fait que  $\omega_0\tau = 1$ .

**c.** On obtient facilement :  $G_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4}}}$  et  $\varphi_1(\omega) = \arctan \left( \frac{\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \right)$  pour  $\omega < \omega_0$ . Il s'agit d'un filtre passe-haut du deuxième ordre.

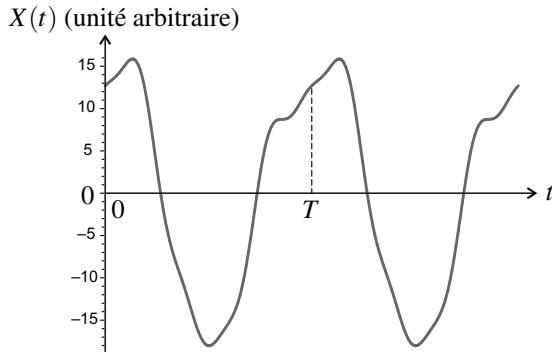
**2. a.** On utilise la fonction de transfert « à l'envers » pour retrouver le signal  $X(t)$  :

$$c'_n = \frac{c_n}{G_1(n\omega)} \quad \text{et} \quad \varphi'_n = \varphi_n - \varphi_1(n\omega).$$

Les résultats se présentent avantageusement sous forme de tableau :

| $n$ | $c_n$ (unité arbitraire) | $\varphi_n$ | $G(n\omega)$ | $\phi(n\omega)$ | $c'_n$ | $\varphi'_n$            |
|-----|--------------------------|-------------|--------------|-----------------|--------|-------------------------|
| 0   | 0                        |             |              |                 | 0      |                         |
| 1   | 4                        | $-0,4\pi$   | 0,242        | $-0,24\pi$      | 16,5   | $0,04\pi$               |
| 2   | 3,5                      | $0,6\pi$    | 0,707        | $-0,50\pi$      | 2,8    | $1,1\pi$ ou $-0,9\pi$   |
| 3   | 2                        | $0,5\pi$    | 0,914        | $-0,67\pi$      | 2,1    | $1,17\pi$ ou $-0,83\pi$ |
| 4   | 0                        |             | 0,970        | $-0,76\pi$      | 0      |                         |
| 5   | 1                        | $-0,6\pi$   | 0,987        | $-0,81\pi$      | 1,0    | $0,21\pi$               |

La représentation graphique s'obtient aisément avec une calculatrice graphique.



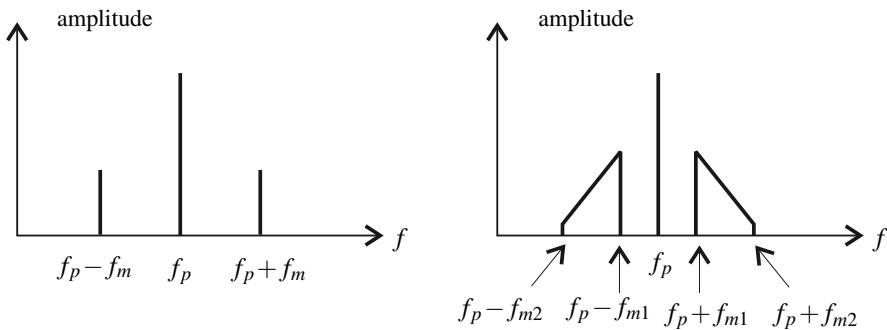
- b.** La différence entre  $x(t)$  et  $X(t)$  provient essentiellement de l'atténuation de la composante fondamentale du signal. Pour y remédier, il faudrait diminuer  $\omega_0$  en augmentant par exemple la masse  $m$ .

#### 4.10 Modulation d'amplitude

1.  $v(t) = v_p(t) + kv_p(t)v_m(t) = V_p(1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t)$  avec  $m = kV_m$ .
2. Le premier oscilloscopogramme est obtenu en mode normal, le deuxième en mode  $XY$ . Pour éviter les problèmes de synchronisation du balayage, il faut se placer dans les deux cas en mode numérique.

L'amplitude modulée du signal est  $V_p(1 + m \cos(\omega t))$ ; elle a pour valeurs extrêmes :  $V_1 = V_p(1 - m)$  et  $V_2 = V_p(1 + m)$ . On a donc :  $m = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = 0,8$ .

3.  $v(t) = V_p \cos(\omega_p t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_p - \omega_m)t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_p + \omega_m)t)$ . Son spectre contient donc les fréquences  $f_p$ ,  $f_p - f_m$  et  $f_p + f_m$  avec des amplitudes respectives  $V_p$ ,  $\frac{m}{2}V_p$  et  $\frac{m}{2}V_p$ . La largeur du spectre en fréquence est  $2f_m$ .



4. Voir figure précédente. La largeur en fréquence du spectre est  $2f_{m2} = 9$  kHz. C'est l'écart minimal qui doit exister entre les porteuses de deux émetteurs.

## CHAPITRE 4 – SIGNAUX PÉRIODIQUES, FILTRAGE

**4.11 Démodulation d'un signal modulé en amplitude**

**1. a.** Déterminons successivement les différentes tensions dans le montage. Pour pouvoir appliquer le filtrage il est nécessaire de décomposer chaque tension en une somme de composantes sinusoïdales.

Nous écrivons donc (en utilisant quelques formules de trigonométrie) :

$$\begin{aligned} u(t) &= kv''(t)v_0(t) = kV_p''V_0(1 + m'\cos(\omega_m t))\cos^2(\omega_p t) \\ &= \frac{1}{2}kV_p''V_0(1 + m'\cos(\omega_m t))(1 + \cos(2\omega_p t)) \\ &= \frac{1}{2}kV_p''V_0(1 + \cos(2\omega_p t) + m'\cos(\omega_m t) + m'\cos(\omega_m t)\cos(2\omega_p t)) \\ &= \frac{1}{2}kV_p''V_0(1 + \cos(2\omega_p t) + m'\cos(\omega_m t) + \frac{m'}{2}\cos((2\omega_p + \omega_m)t) \\ &\quad + \frac{m'}{2}\cos((2\omega_p - \omega_m)t)). \end{aligned}$$

Le filtre  $F_1$  élimine les composantes des fréquences strictement supérieures à  $f_p$ , multiplie les autres par  $K_1 = 1$ , donc :

$$u'(t) = \frac{1}{2}kV_p''V_0(1 + m'\cos(\omega_m t)).$$

Enfin, le filtre  $F_2$  élimine la composante continue de  $u'(t)$  et multiplie la composante de fréquence  $f_m$  par  $K_2 = 1$ , donc :

$$v_d(t) = \frac{1}{2}kV_p''V_0m'\cos(\omega_m t).$$

On retrouve donc, à une constante multiplicative près, le signal de modulation.

**b.**  $U = \frac{1}{2}kV_p''V_0 = u'(t) - u(t)$ . Sa mesure renseigne sur l'amplitude de  $v_d(t)$  et permet le pilotage du CAG.

**2. a.** Dans cette hypothèse (pour alléger les notations nous notons  $\varphi_0$  pour  $\varphi_0(t)$ ) :

$$\begin{aligned} u(t) &= kv''(t)v_0(t) = kV_p''V_0(1 + m'\cos(\omega_m t))\cos(\omega_p t)\cos(\omega_p t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}kV_p''V_0(1 + m'\cos(\omega_m t))(\cos\varphi_0 + \cos(2\omega_p t + \varphi_0)) \\ &= \frac{1}{2}kV_p''V_0(\cos\varphi_0 + \cos(2\omega_p t + \varphi_0) \\ &\quad + m'\cos\varphi_0\cos(\omega_m t) + m'\cos(\omega_m t)\cos(2\omega_p t + \varphi_0)) \\ &= \frac{1}{2}kV_p''V_0(\cos\varphi_0 + \cos(2\omega_p t + \varphi_0) + \frac{m'}{2}\cos(\omega_m t + \varphi_0) + \frac{m'}{2}\cos(\omega_m t - \varphi_0) \\ &\quad + \frac{m'}{2}\cos((2\omega_p + \omega_m)t + \varphi_0) + \frac{m'}{2}\cos((2\omega_p - \omega_m)t + \varphi_0)). \end{aligned}$$

Après filtrage par  $F_1$  puis par  $F_2$ , dans l'hypothèse où  $\left| \frac{d\varphi_0}{dt} \right| \ll \omega_{m1} \ll \omega_p$ , il ne reste plus que les troisième et quatrième termes, de sorte que :

$$v'_d = \frac{1}{2} k V''_p V_0 m' \cos(\varphi_0(t)) \cos(\omega_m t).$$

**b.** Dans ce nouveau montage, de même qu'à la question précédente :

$$u(t) = \frac{1}{2} k V''_p V_0 \left( \cos \varphi_0 + \cos(2\omega_p t + \varphi_0) + \frac{m'}{2} \cos(\omega_m t + \varphi_0) + \frac{m'}{2} \cos(\omega_m t - \varphi_0) + \frac{m'}{2} \cos((2\omega_p + \omega_m)t + \varphi_0) + \frac{m'}{2} \cos((2\omega_p - \omega_m)t + \varphi_0) \right).$$

Le terme  $\cos(\varphi_0(t))$  a une pulsation instantanée  $\left| \frac{d\varphi_0}{dt} \right| = |av_c(t)| \ll \omega_p$  donc il est transmis sans atténuation par le filtre  $F_3$ . Il en est de même pour les troisième et quatrième termes ci-dessus qui ont une pulsation instantanée  $|\omega_m \pm av_c(t)|$ . Les trois autres termes, de pulsation  $2\omega_p$  et  $2\omega_p \pm \omega_m$  sont arrêtés par  $F_3$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} v_c(t) &= \frac{1}{2} k V''_p V_0 \left( \cos(\varphi_0(t)) + \frac{m'}{2} \cos(\omega_m t + \varphi_0(t)) + \frac{m'}{2} \cos(\omega_m t - \varphi_0(t)) \right) \\ &= \frac{1}{2} k V''_p V_0 \cos(\varphi_0(t)) \left( 1 + m' \cos(\omega_m t) \right). \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par  $\varphi_0(t)$  :

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{1}{2} a k V''_p V_0 \cos(\varphi_0(t)) (1 + m' \cos(\omega_m t)).$$

**c.** Séparons les variables :  $\frac{d\varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{1}{2} a k V''_p V_0 (1 + m' \cos(\omega_m t))$ , relation qui s'intègre en :

$$\ln \left| \tan \left( \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{2} a k V''_p V_0 \left( t + \frac{m'}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \right) + \text{constante.}$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini, le membre de droite tend vers l'infini (quelle que soit la constante), donc  $\varphi_0$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . Alors, d'après l'équation différentielle,  $\frac{d\varphi_0}{dt}$  tend vers 0, ce qui signifie que la pulsation instantanée de l'OCT tend vers  $\omega_p$ .

**d.** Une fois la boucle verrouillée,  $v'_0(t) = V_0 \cos(\omega_p t + \frac{\pi}{2})$ . Avant de l'injecter à la place de  $v_0(t)$  dans le montage de la première question 1, il faut le déphaser de  $-\frac{\pi}{2}$  pour obtenir le fonctionnement étudié à cette question. C'est le rôle du déphaseur.



# Électronique numérique

5

On utilise de plus en plus, à la place de l'électronique analogique étudiée au chapitre précédent, l'électronique numérique. Au lieu de traiter des signaux électriques fonction du temps, on manipule des signaux numérisés, listes de nombres provenant de l'échantillonnage des signaux analogiques. Dans ce chapitre, on introduit la condition de Nyquist-Shannon à respecter pour que le signal numérique soit une image fidèle du signal analogique. On montre ensuite comment on peut effectuer le filtrage d'un signal numérique.

## 1 Échantillonage

### 1.1 Introduction

L'avènement et les performances toujours croissantes des calculateurs électroniques (ordinateurs par exemple) ont conduit à vouloir manipuler les signaux issus de capteurs, non plus sous forme analogique (c'est-à-dire sous la forme d'une fonction définie pour un ensemble continu d'instants et prenant des valeurs dans un ensemble continu) mais sous une forme dite **numérique** ou **numérisée**, manipulable par ces calculateurs.

On espère ainsi bénéficier d'une grande puissance de calculs mais aussi d'une souplesse d'utilisation due au caractère programmable des calculateurs.

### 1.2 Acquisition, échantillonnage

Il faut faire subir diverses transformations à un signal analogique pour le rendre manipulable par un calculateur. En effet ce dernier ne travaille qu'avec des bits, ne prenant que deux valeurs, 0 ou 1. C'est le rôle de l'**acquisition** d'effectuer ces transformations.

On distingue essentiellement une phase d'**échantillonage du signal** (qui consiste en une discrétisation du temps) et une phase de **quantification du signal** (discrétisation des valeurs prises). En définitive, le calculateur, en accord avec ses possibilités (mémoire finie en particulier, voir programme d'informatique commune de première année), manipulera un tableau fini de valeurs prises par le signal.

L'**échantillonnage** consiste à prélever les valeurs du signal  $s(t)$  étudié à des instants régulièrement espacés, de la forme  $t_k = kT_e$  où  $k \in \llbracket 0..N - 1 \rrbracket$ ,  $N$  étant le nombre de points d'acquisition.

On obtient le **signal échantillonné** :  $s_E = \{s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$  où  $s_k = s(t_k)$ . Ceci est illustré sur la figure 5.1.  $T_e$  est la **période d'échantillonnage**. On définit alors  $f_e = \frac{1}{T_e}$  comme étant la **fréquence d'échantillonnage**.

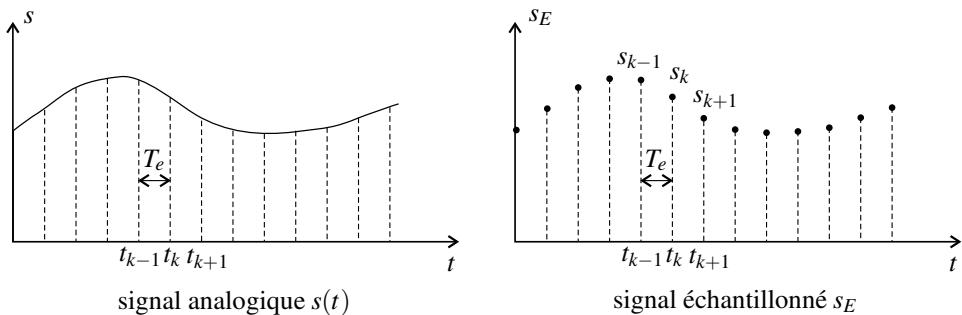


Figure 5.1 – Échantillonnage d'un signal.

Il est intuitif que le signal échantillonné n'est une représentation fidèle du signal analogique que si  $T_e$  est suffisamment petite, c'est-à-dire si  $f_e$  est suffisamment grande. On verra plus loin quelle est la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage pour un signal donné. Conformément au programme on ne parlera pas de l'étape de quantification du signal.

### 1.3 Spectre d'un signal échantillonné

#### a) Transformée de Fourier Discrète (DTF)

Il est souvent plus facile de décrire des phénomènes variables dans le temps en les étudiant dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire en considérant le **spectre** du signal étudié. L'outil mathématique adapté à la détermination du spectre d'un signal est la transformée de Fourier (hors programme).

Pour effectuer le calcul correspondant il faut connaître l'intégralité du signal  $s$  étudié, de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ . Ceci est bien sûr impossible et le calculateur ne dispose que du signal échantillonné  $s_E$ . Il fait appel alors à une version discrète de la transformée de Fourier : la transformée de Fourier discrète (Discrete Fourier Transform=DFT en anglais). Celle-ci permet, à partir du signal échantillonné, de calculer l'amplitude d'un nombre fini de fréquences, déterminées par la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  et par le nombre de points d'acquisition  $N$ .

Plus précisément, l'amplitude sera connue pour les fréquences  $f_k = k \frac{f_e}{N}$  avec  $k \in \llbracket 0..N - 1 \rrbracket$ , soit pour les  $N$  fréquences :  $f_0 = 0, f_1 = \frac{f_e}{N}, \dots, f_{N-1} = \frac{(N-1)f_e}{N} = f_e - \frac{f_e}{N}$

Le spectre discret ainsi calculé (celui de  $s_E$ ) donnera, sous certaines conditions, des informations sur celui du signal  $s$ .

### b) Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Un algorithme particulièrement efficace a été mis au point dans les années 1960 par J.W. Cooley et John Tukey, et porte le nom de Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform = FFT en anglais). Il impose que le nombre de points d'acquisition  $N$  soit une puissance de 2 ( $N = 2^p$ ), ce qui permet d'optimiser un très grand nombre de traitements. C'est cet algorithme de calcul (ou une de ses variantes) que l'on trouve dans les oscilloscopes numériques, dans les logiciels d'acquisition et de traitements de données (comme Synchronie ou Latis-Pro), ou dans les logiciels de calcul numérique (Matlab, Scilab). Il est fréquent de récupérer les valeurs dans un fichier qui sera ensuite traité par un de ces logiciels de calcul numérique.

Le programme de physique prône une approche purement expérimentale de ces sujets. Cependant, l'observation directe à l'oscilloscope du spectre d'un signal obtenu par FFT présente quelques subtilités qu'on va occulter dans un premier temps en utilisant une approche intermédiaire. On va pour cela observer des spectres calculés avec Scilab ou Python. On va ainsi mettre en évidence la principale différence entre le vrai spectre du signal étudié et celui du signal échantillonné, calculé par FFT.

### c) Exemple d'un signal purement sinusoïdal

Soit  $s(t) = 5 \cos(400\pi t)$  un signal représentant une tension sinusoïdale d'amplitude 5 V et de fréquence  $f = 200$  Hz. On échantillonne ce signal à une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1$  kHz, en prenant  $N = 1000$  points d'acquisition tous les  $T_e = 1/f_e = 1$  ms. On utilise la fonction `fft` de scilab pour en obtenir le spectre.

La figure 5.2 donne l'allure du signal  $s(t)$  et de son spectre d'amplitude.

On constate que l'on retrouve bien la raie attendue à  $f = 200$  Hz. On constate malheureusement la présence d'une autre raie à  $f' = 800$  Hz ! On voit donc que l'échantillonnage est à l'origine d'une nouvelle raie dans le spectre dont on peut remarquer que la fréquence est :

$$f' = 1000 - f = f_e - f.$$

### d) Exemple d'un signal à plusieurs composantes

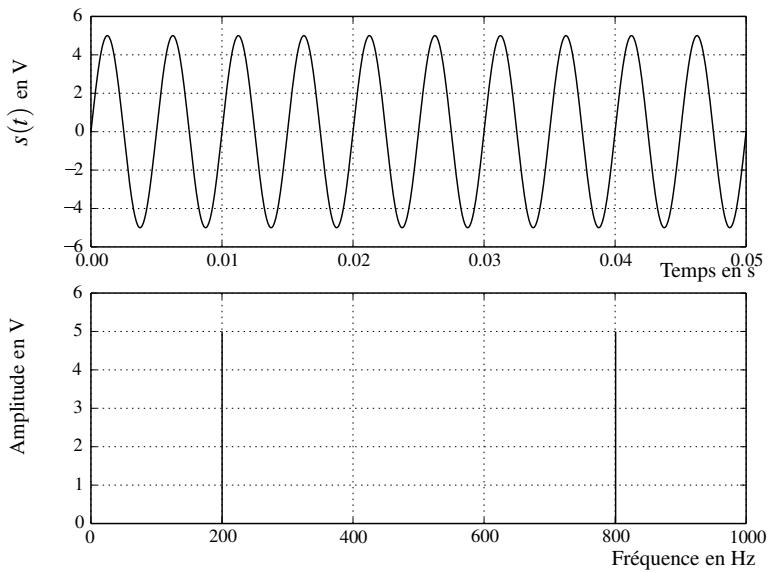
On effectue le même travail avec un signal comportant plusieurs composantes fréquentielles. Par exemple :

$$s_{ma}(t) = 5 \times \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(2\pi ft) - \frac{2}{3\pi} \cos(4\pi ft) - \frac{2}{15\pi} \cos(8\pi ft) - \frac{2}{35\pi} \cos(12\pi ft) \right),$$

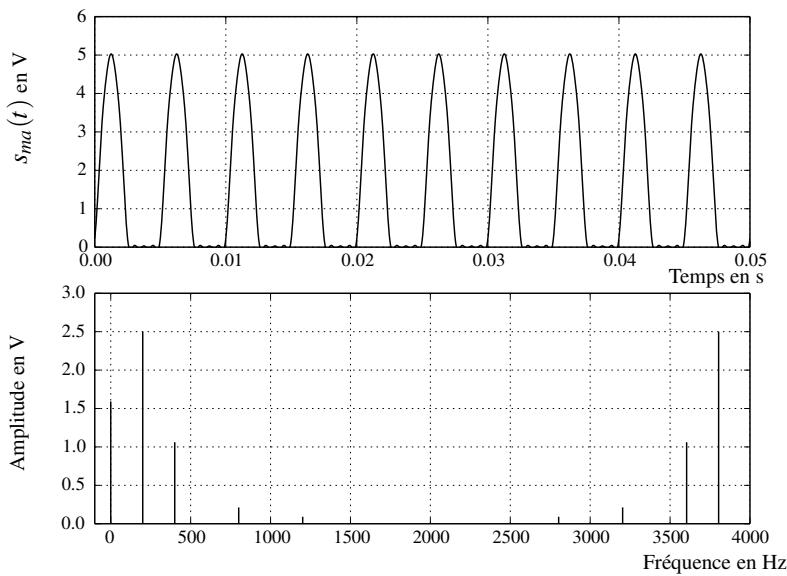
avec  $f = 200$  Hz, qui est une bonne approximation du redressement monoalternance du signal sinusoïdal  $s(t)$  précédent. On prend comme fréquence d'échantillonnage  $f_e = 4000$  Hz. L'allure du spectre est donnée sur la figure 5.3.

Comme dans l'exemple précédent, on trouve dans l'intervalle  $[0, f_e[$  on trouve :

- les raies attendues à 0 Hz, 200 Hz, 400 Hz, 800 Hz, 1200 Hz,
- des raies supplémentaires à  $4000 - 200 = 3800$  Hz,  $4000 - 400 = 3600$  Hz,  $4000 - 800 = 3200$  Hz,  $4000 - 1200 = 2800$  Hz.



**Figure 5.2** – Signal sinusoïdal et son spectre par FFT.



**Figure 5.3** – Signal à cinq composantes et son spectre calculé par FFT.

### e) Repliement du spectre

Le phénomène précédemment observé sur les spectres des deux signaux est général :

Dans le spectre du signal échantillonné  $s_E$ , il y a pour chaque fréquence  $f$  existant dans le spectre du signal réel  $s$  une raie supplémentaire de même amplitude à la fréquence  $f_e - f$ . Ce phénomène porte le nom de **repliement du spectre**, en anglais **aliasing**.

#### Remarque

Plus généralement, le spectre de  $s_E$  contient des raies pour toutes les fréquences  $kf_e \pm f$  où  $k$  est un entier relatif quelconque. Dans les cas usuels, seule la fréquence  $f_e - f$  est comprise entre 0 et  $f_e$ .

## 1.4 Critère de Nyquist-Shannon

### a) Influence de la fréquence d'échantillonnage

Il semble assez intuitif de penser que si l'on prélève des valeurs du signal étudié plus fréquemment, c'est-à-dire si on travaille avec une fréquence d'échantillonnage plus élevée, on a plus de chances de mieux connaître ce signal. Inversement si on n'observe pas le signal assez souvent, ne risque-t-on pas de perdre de l'information ? Peut-on traduire quantitativement cette intuition ?

On reprend le signal sinusoïdal  $s(t)$  précédent, mais on l'échantillonner à une fréquence  $f_e$  plus faible, par exemple  $f_e = 500$  Hz. On trouvera une raie à  $f_1 = 200$  Hz et une autre à  $f_2 = 500 - 200 = 300$  Hz. On voit que les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont plus proches que lors du premier échantillonnage, mais que la fréquence du signal étudié est toujours la plus basse du spectre, ce qui permet *a priori* de l'identifier.

On diminue encore la fréquence d'échantillonnage, par exemple à  $f_e = 300$  Hz. On aura alors  $f_1 = 200$  Hz mais  $f_2 = 300 - 200 = 100$  Hz ! Cette fois-ci la fréquence la plus basse n'est plus la fréquence du signal étudié .

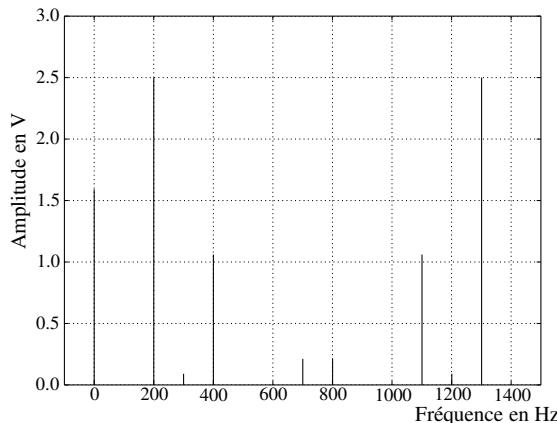
Pour rendre le phénomène et la difficulté associée plus parlants, on observe le spectre du signal  $s_{ma}(t)$  vu précédemment, mais échantillonner à  $f_e = 1500$  Hz. Le signal d'entrée comporte 5 raies à 0 Hz, 200 Hz, 400 Hz, 800 Hz et 1200 Hz. On trouvera, entre 0 et  $f_e$  les fréquences supplémentaires  $1500 - 0 = 1200$  Hz,  $1500 - 200 = 1300$  Hz,  $1500 - 400 = 1100$  Hz,  $1500 - 800 = 700$  Hz et  $1500 - 1200 = 300$  Hz. C'est ce que confirme le spectre donné par scilab sur la figure 5.4.

Le mélange des deux jeux de fréquences est tel qu'il sera impossible d'identifier et d'isoler le spectre du signal d'entrée en prenant les fréquences les plus basses, et ce, même si on connaît *a priori* la fréquence la plus grande  $f_{\max}$ .

### b) Énoncé du critère de Shannon

On peut maintenant énoncer le critère de Nyquist-Shannon.

De manière générale, si le spectre du signal d'entrée appartient à  $[f_{\min}, f_{\max}]$ , les fréquences rajoutées par l'échantillonnage appartiennent à l'intervalle  $[f_e - f_{\max}, f_e - f_{\min}]$  (en supposant que  $f_e > f_{\max}$ ).



**Figure 5.4** – Spectre FFT du signal à cinq fréquences sous-échantillonné

Pour que ces fréquences ne viennent pas se superposer à celles du spectre du signal d’entrée il faut nécessairement que

$$f_e - f_{\max} > f_{\max} \quad \text{soit} \quad f_e > 2f_{\max}.$$

Il est très important de vérifier cette condition dans la pratique.

**Condition de Nyquist-Shannon** : pour que l’échantillonnage d’un signal ne modifie pas son spectre, il faut que la fréquence d’échantillonnage soit supérieure au double de la plus grande fréquence  $f_{\max}$  contenue dans ce spectre :

$$f_e > 2f_{\max}.$$

### Remarque

D’après le théorème de Shannon (hors programme), on peut reconstituer sans perte d’information un signal  $s$  à partir du spectre du signal échantillonné  $s_E$  dès que la condition précédente est vérifiée. Par exemple si l’on veut échantillonner sans perte un signal sinusoïdal de fréquence  $f$ , il faut une fréquence d’échantillonnage minimale  $f_e = 2f$ , soit une période d’échantillonnage  $T_e = 1/f_e = 1/(2f) = T/2$  en notant  $T = 1/f$  la période du signal sinusoïdal, soit seulement deux points d’acquisition seulement par période. Si on veut pouvoir identifier une harmonique de fréquence  $nf$  dans le signal, il faut au moins  $2n$  points d’acquisition par période.

### c) Nécessité d'un filtre anti-repliement

Les signaux réels présentent en général un spectre contenant un très grand nombre de raies (parfois même infini, comme pour les signaux triangulaires, rectangulaires, ...). Le critère de Nyquist-Shannon est alors impossible à satisfaire.

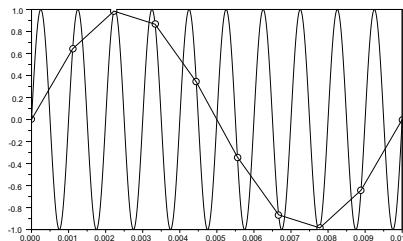
Cependant, il existe dans la pratique une fréquence  $f_{\max}$  telle que les fréquences supérieures à  $f_{\max}$  ne soient pas réellement porteuses d'informations dans le signal. On peut penser à la voix et au son : les fréquences supérieures à 20 kHz n'étant pas audibles, il est inutile de les traiter.

On peut (doit !) donc interposer entre le signal d'entrée et le dispositif d'acquisition un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $f_{\max} < f_c$ , ce qui éliminera les fréquences inutiles, puis choisir une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  telle que  $f_c < f_e/2$  de manière à satisfaire le critère de Nyquist-Shannon. Dès lors on évitera le phénomène de repliement. Le filtre utilisé porte le nom de **filtre anti-repliement**.

#### d) Sous-échantillonnage

On parle de sous-échantillonnage quand le critère de Nyquist-Shannon n'est pas vérifié. On a vu plus haut par une analyse dans le domaine fréquentiel qu'il en résultait l'impossibilité de reconstruire correctement le signal de départ.

Il est intéressant d'illustrer cela en repassant dans le domaine temporel. Soit par exemple un signal sinusoïdal de fréquence  $f = 1000$  Hz. On l'échantillonne à  $f_e = 900$  Hz. On représente sur la figure 5.5 les points d'acquisitions (petits ronds), reliés par des segments de droite pour reconstruire le signal échantillonné. On interprétera ce signal comme étant proche d'une sinusoïde de fréquence  $f' = 100$  Hz (on lit qu'une demi-période dure environ 5 ms) !



**Figure 5.5 –** Sinusoïde de fréquence  $f = 1000$  Hz échantillonnée à  $f_e = 900$  Hz

Ceci est compatible avec l'analyse faite dans le domaine fréquentiel. La fréquence de 1000 Hz échantillonnée à 900 Hz donne par périodisation et repliement du spectre les fréquences (re-classées par ordre croissant) :  $1000 - 900 = 100$  Hz,  $2 \times 900 - 1000 = 800$  Hz, 1000 Hz,  $1000 + 900 = 1900$  Hz, ...

### 1.5 Pratique de l'analyse spectrale

#### a) Nécessité d'un compromis entre la fréquence d'échantillonnage et le nombre de points d'acquisition

On donne ici quelques réflexions qu'il faut garder en tête lorsqu'on choisit les paramètres d'acquisition.

On a vu que le spectre est calculé pour les fréquences  $f_k = (k - 1)\frac{f_e}{N}$  avec  $k \in \{0..N - 1\}$ .

La résolution en fréquence est ainsi  $\Delta f = \frac{f_e}{N}$ . Donc si on double la fréquence d'échantillonnage il faut doubler le nombre de points d'acquisition si on veut garder la même résolution  $\Delta f$ .

Si on fixe cette valeur  $N$  au maximum qu'autorise le calculateur ou système d'acquisition, le respect du critère de Nyquist-Shannon (augmentation de  $f_e$  si le signal à étudier présente des composantes de hautes fréquences) va dégrader la résolution en fréquence.

On peut noter également que  $\Delta f = \frac{1}{NT_e} \simeq \frac{1}{T_a}$  en notant  $T_a$  la durée totale d'acquisition ( $T_a = (N - 1)T_e$  et  $N \gg 1$ ). Donc *a priori* plus le temps d'acquisition est long, meilleure sera la résolution en fréquence. Cependant en augmentant la durée totale d'acquisition en gardant constant le nombre de points d'acquisition, la période d'échantillonnage  $T_e$  va augmenter, la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  va diminuer, et le critère de Nyquist-Shannon risque de ne plus être satisfait.

Par exemple, si dans une expérience on doit étudier un signal issu d'un capteur dont les fréquences sont contenues dans le domaine  $[1.10^2 \text{ Hz}, 1.10^4 \text{ Hz}]$ , on peut imaginer prendre une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 100 \text{ kHz}$ , ce qui permet de vérifier assez largement le critère  $f_e > 2f_{\max}$ . Si l'échantillonnage se fait avec  $N = 2048$  points, la durée totale d'échantillonnage est  $T_a = \frac{N}{f_e} \simeq 10 \text{ ms}$ . Ce qui fait que l'on observera le signal sur une durée même pas égale à deux périodes de la composante du signal de fréquence la plus faible (100 Hz). Si, pour observer le signal sur une durée d'une vingtaine de périodes on choisit une durée totale d'acquisition  $T_a = 200 \text{ ms}$ , sans modifier le nombre de points, on a alors une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 10,2 \text{ kHz} < \frac{f_{\max}}{2}$ . Le critère de Nyquist-Shannon n'est plus satisfait.

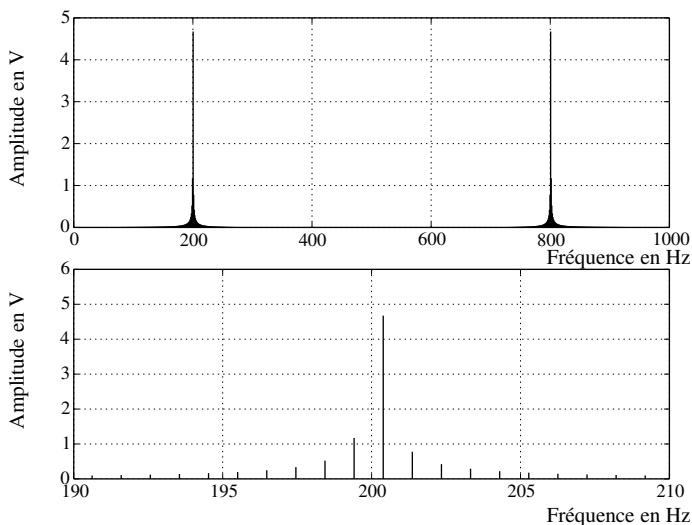
### b) Observation de spectres à l'aide d'un logiciel d'acquisition et de traitement de données

L'utilisateur choisit les données d'acquisition : nombre de points  $N$ , période d'acquisition  $T_e$  d'où découle la durée totale d'acquisition  $T_a = (N - 1)T_e$ . Lors du calcul du spectre, le logiciel propose de sélectionner une partie seulement du signal acquis. Il est recommandé de sélectionner un nombre entier, le plus grand possible, de périodes. On assure ainsi le fait que la fréquence  $f_S$  du signal et les fréquences de ses éventuelles harmoniques font partie des fréquences pour lesquelles le spectre est effectivement calculé. En effet si on a sélectionné  $p$  périodes :  $T_a = pT_S = \frac{p}{f_S}$  de sorte que  $\Delta f = \frac{1}{T_a} = \frac{f_S}{p}$ .

### Remarque

Si on a sélectionné une seule période, les fréquences pour lesquels le spectre est calculé sont exactement les multiples de  $f_S$ .

Il n'est pas toujours possible de réaliser cette condition. Dans ce cas, le spectre calculé diffère légèrement du spectre réel. La figure 5.6 représente le spectre d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_S = 200$  Hz et d'amplitude 5 V échantillonné sur  $\frac{Nf_S}{f_e} = 204,8$  périodes.



**Figure 5.6 –** Spectre FFT du signal sinusoïdal de fréquence  $f_S = 200$  Hz, échantillonné à  $f_e = 1000$  Hz, avec  $N = 1024$  points d'acquisition et zoom autour de 200 Hz.

On a bien la présence de la raie attendue à 200 Hz. Mais on constate également la présence de nombreuses raies secondaires au voisinage de  $f$  et le fait que l'amplitude pour la fréquence  $f_S$  est un peu inférieure à celle qui était attendue. En effectuant un zoom autour de 200 Hz on constate que le maximum n'a pas lieu à la fréquence  $f_S = 200$  Hz, mais à 200,2 Hz. C'est la fréquence la plus proche de  $f_S$  qui soit multiple de  $\frac{f_e}{N} = \frac{1000}{1024} = 0,98$  Hz. Il est donc apparue une incertitude due à la discrétisation des calculs.

### c) Exemples d'observation de spectre à l'aide d'un oscilloscope numérique

On observe un signal sinusoïdal à l'aide d'un oscilloscope numérique. On peut utiliser le module de calcul de transformée de Fourier pour représenter son spectre. Le résultat est donné sur la figure 1.8.

On observe bien une seule raie dans le spectre (on observe en fait une courbe enveloppe

## CHAPITRE 5 – ÉLECTRONIQUE NUMÉRIQUE

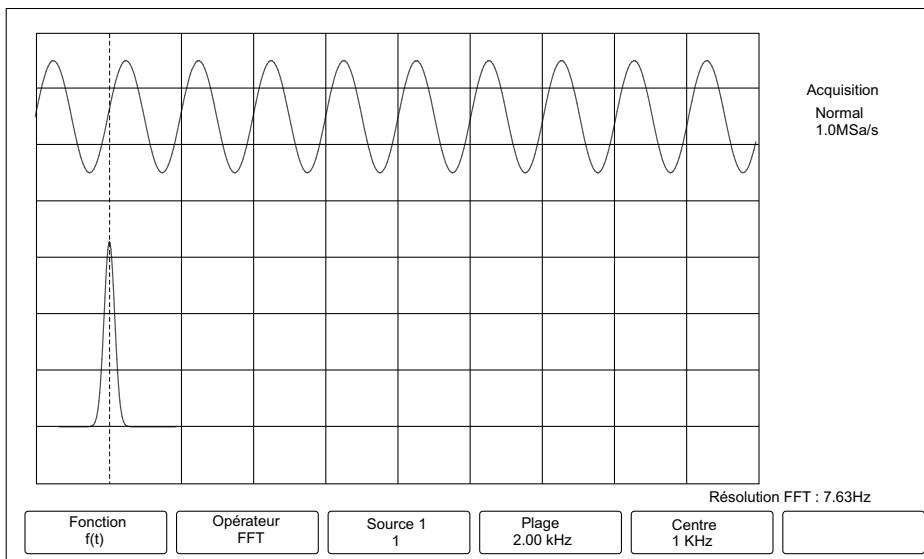


Figure 5.7 – Observation à l'oscilloscope d'un signal sinusoïdal de fréquence 200 Hz.

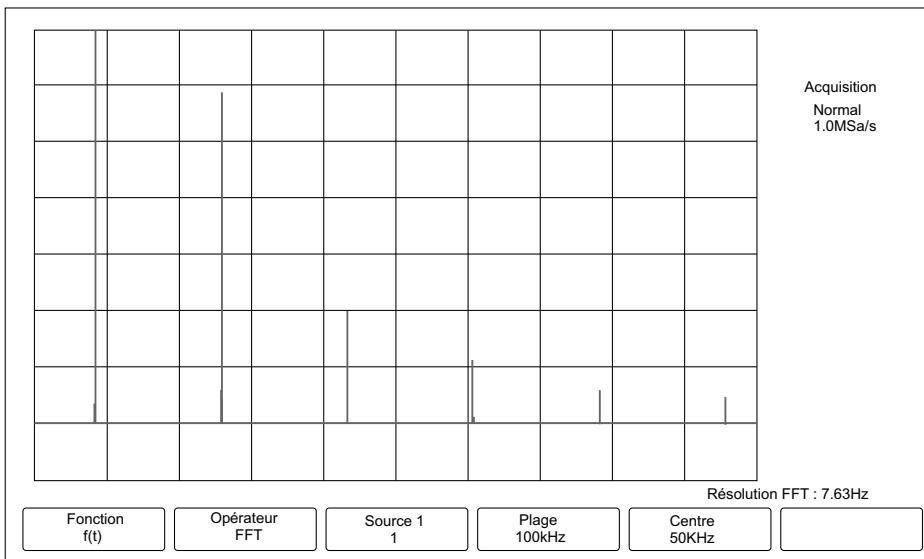


Figure 5.8 – Observation à l'oscilloscope du spectre d'un signal triangulaire.

reliant les sommets des raies calculées dans le spectre, et non pas les raies elle-mêmes). Les informations dans le bas de l'écran nous indiquent que les fréquences de 0 Hz à 2,00 kHz (indication plage) sont représentées sur l'axe horizontal et que le milieu de l'écran correspond à 1,00 kHz (indication centre). On en déduit donc que la raie est proche de la fréquence de 200 Hz. L'utilisation du curseur sur la droite permet une mesure à 199 Hz. Compte tenu de la résolution indiquée (7,63 Hz), ceci est compatible avec un signal de fréquence 200 Hz.

En haut à droite, dans la fenêtre acquisition, on trouve une information relative à la fréquence d'échantillonnage sous la forme 1,0 MSa/s. Le "Sa" est l'abréviation de sample (échantillon en anglais). L'oscilloscope fait donc 1 million d'acquisitions par seconde, soit une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1 \text{ MHz}$ . Le critère de Nyquist-Shannon est donc très largement vérifié.

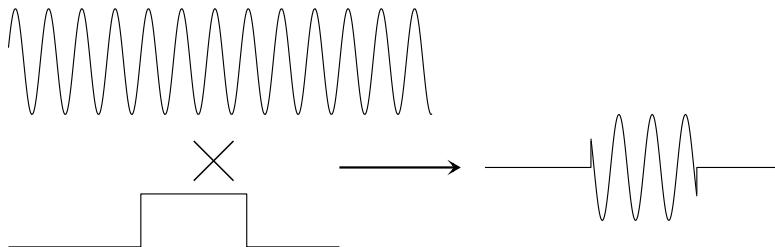
On observe maintenant un signal au spectre plus riche, par exemple un signal triangulaire. La figure 5.8 montre le spectre pour une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande pour que le phénomène de repliement soit négligeable. La sensibilité verticale a été choisie de manière à ce que la deuxième raie la plus grande couvre la quasi-totalité de l'écran afin qu'un plus grand nombre de raies soit observable (la raie principale, celle du fondamental, est alors tronquée). On identifie des raies aux fréquences 8,5 kHz, 25,5 kHz, 42,5 kHz, 59,5 kHz, 76,5 kHz et 93,5 kHz, qui sont les multiples impairs de la fréquence du fondamental 8,5 kHz. Ceci est parfaitement compatible avec le spectre d'un signal triangulaire. La fréquence d'échantillonnage est là aussi de 1 MHz et donc il n'y a pas de repliement pour les fréquences inférieures à 500 kHz (ce qui concerne les 29 premiers harmoniques impairs). On peut remarquer qu'ici on observe des raies, mais en fait il s'agit de bosses de même nature que celle de la figure 5.7, écrasées latéralement sous forme de raie en raison de l'étendue de l'échelle horizontale.

#### d) Complément : fenêtre de pondération

Bien que non mentionnée par le programme, il semble intéressant d'évoquer la notion de *fenêtre de pondération*. La transformée de Fourier discrète suppose de connaître le signal de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ . L'algorithme de transformée de Fourier rapide ne dispose quant à lui que d'une partie finie du signal (sur une durée  $T_a = NT_e$ ). On simule la connaissance du signal sur  $]-\infty, +\infty[$  en périodisant dans le domaine temporel la partie finie connue. Ceci introduit en général des discontinuités dans le signal. Sans rentrer dans le détail technique c'est ce qui est à l'origine des raies secondaires de la figure 5.6, ou du pic élargi de la figure 5.7. On parle parfois de *fuites spectrales*.

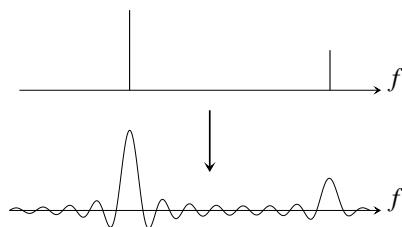
On peut décrire la situation en disant que le signal dont le spectre est calculé est en fait celui du produit du signal initial multiplié par une fonction créneau, nulle en dehors de la durée d'acquisition et valant 1 sur la durée d'acquisition. On dit que l'on a utilisé une fenêtre de pondération *rectangulaire* (figure 5.9).

En entrant un peu plus dans l'aspect technique, tout se passe comme si le spectre étudié était le spectre du signal initial, mais dans lequel chaque raie (initialement infiniment fine) serait remplacée par la transformée de Fourier de la fenêtre de pondération, centrée sur la fréquence de la raie. Dans le cas de la fenêtre rectangulaire, cela remplace la raie par le graphe de la fonction *sinus cardinal*  $f : x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ , centré, dilaté selon les caractéristiques de la raie en question. Encore plus techniquement, on parle de produit de convolution entre le spectre du



**Figure 5.9** – Troncature du signal étudié par utilisation d'une fenêtre de pondération rectangulaire.

signal et de la fenêtre de pondération (figure 5.10)



**Figure 5.10** – Apparition de la transformée de Fourier de la fenêtre de pondération dans le spectre.

Cela a bien sûr des conséquences qui peuvent être dommageables sur l'interprétation d'un spectre. En effet, le sinus cardinal présente un pic principal, mais également des pics secondaires latéraux, d'amplitudes plus faibles. Dès lors dans un spectre une raie de faible amplitude pourra avoir son pic principal (de faible amplitude) masqué par un pic secondaire d'une autre raie, d'amplitude plus importante. Ceci affecte *l'étude dynamique du signal*, c'est-à-dire l'aptitude à discerner deux composantes de fréquences relativement éloignées mais d'amplitudes très différentes.

On a donc développé d'autres fenêtres de pondération pour essayer d'améliorer la situation, par exemple en éliminant les pics secondaires. Mais ceci s'accompagne d'un élargissement du pic principal de chaque raie, ce qui diminue *la résolution en fréquence*, c'est-à-dire l'aptitude à séparer deux fréquences proches.

Il existe ainsi diverses fenêtres de pondération que l'on peut en général choisir sur l'oscilloscope numérique utilisé. Chacune réalise un compromis entre la résolution en fréquence et la dynamique du signal.

- La fenêtre rectangulaire permet donc d'obtenir les raies les plus fines, mais avec de nombreuses fuites spectrales, difficiles à séparer du bruit.
  - À l'autre extrémité les fenêtres de Kaiser-Bessel ou de Blackman-Harris donnent des raies facilement séparables du bruit, mais plus grossières
  - Enfin les fenêtres de Hanning ou de Hamming réalisent des spectres aux caractéristiques intermédiaires. On préférera la fenêtre de Hamming pour une meilleure résolution en fréquence.
- Il faudra donc choisir sa fenêtre de pondération en fonction des objectifs de l'analyse spectrale.

## 2 Filtrage numérique

Une fois le signal échantillonné, on peut effectuer sur lui des traitements en s'appuyant sur la puissance de calcul du calculateur.

### 2.1 Filtre passe-bas du premier ordre

Examinons un filtrage de type passe-bas du premier ordre. La fonction de transfert d'un filtre du premier ordre, de gain maximal  $G_0 = 1$  et de pulsation de coupure  $\omega_c = 2\pi f_c$  est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}.$$

Dans le domaine temporel cette fonction de transfert correspond à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t),$$

en notant  $e(t)$  le signal d'entrée et  $s(t)$  le signal de sortie.

Cette relation concerne des grandeurs continues (signaux analogiques). Pour l'utiliser avec des signaux numérisés, il faut la discréteriser elle aussi. Comme on ne dispose des valeurs des signaux qu'aux instants  $t_k = kT_e$ , on va remplacer dans cette équation différentielle un signal par sa valeur prise à l'instant  $t_k$ . Ainsi  $e(t)$  deviendra  $e_k = e(kT_e)$  et de même  $s(t)$  deviendra  $s_k = s(kT_e)$ . Pour la dérivée de  $s$  par rapport au temps,  $\frac{ds}{dt} = \frac{s(t+dt) - s(t)}{dt}$ , on fait l'approximation de remplacer la durée élémentaire  $dt$  par  $T_e$  (c'est la plus petite durée que l'on manipule) :

$$\frac{ds}{dt}(t_k) \simeq \frac{s(t_k + T_e) - s(t_k)}{T_e} = \frac{s_{k+1} - s_k}{T_e}.$$

En faisant toutes ces substitutions dans l'équation différentielle du filtre on obtient :

$$\frac{s_{k+1} - s_k}{\omega_c T_e} + s_k = e_k \quad \Leftrightarrow \quad s_{k+1} = s_k + \omega_c T_e (e_k - s_k).$$

On a donc une relation de récurrence permettant, puisque l'on connaît les  $e_k$ , de calculer de proche en proche tous les  $s_k$ , en prenant une condition initiale, par exemple :  $s_0 = 0$ .

Ceci se programme très facilement avec des logiciels comme Scilab, dans les logiciels d’acquisition et de traitement de données, où même dans un simple tableur comme OpenOffice.

Commençons par un exemple simple : filtrage d’un signal sinusoïdal échantillonné par un filtre passe bas du premier ordre. La programmation en Scilab de ce filtrage se fait en quelques lignes :

```
// Filtre passe-bas d'ordre 1, Gain statique unitaire
// Pour utiliser le bout de code suivant
// il faut qu'aient été définis:
// la fréquence de coupure : fc
// le signal échantillonné à filtrer : e
// le nombre de points d'acquisition : N
// la période d'échantillonnage : Te
s=zeros(1,N)// On initialise la sortie avec la valeur nulle

for i = 2:N,
    s(i)=s(i-1)+Te*2*pi*fc*(e(i-1)-s(i-1))
end
// Après cette boucle on dispose dans s du signal filtré.
```

La figure 5.11 montre le résultatat du filtrage numérique calculé par Scilab pour le signal sinusoïdal de fréquence 200 Hz, filtré par le passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = 100$  Hz.

L’amplitude prévisible est  $\frac{5}{\sqrt{1+2^2}} = 2,2$  V et le signal de sortie doit être en retard de  $\arctan(2) = 1,1$  rad =  $63^\circ$ , ce qui est bien vérifié sur la simulation. On note aussi un petit régime transitoire avant le régime permanent.

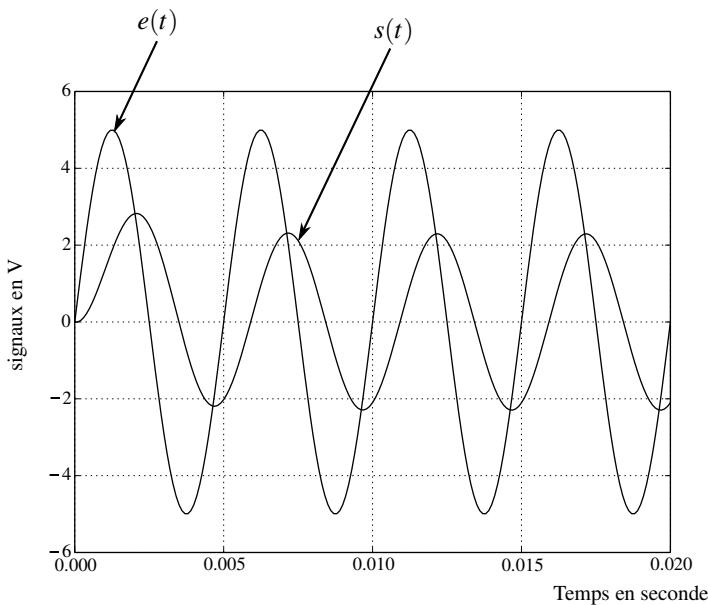
La figure 5.12 montre sur un même graphe les spectres du signal à quatre composantes  $s_{ma}$  ainsi que celui du signal obtenu après filtrage numérique avec le filtre passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure  $f_c = 300$  Hz. Pour pouvoir présenter les deux spectres sur le même graphe on a légèrement décalé sur la droite celui du signal de sortie.

## 2.2 Limitations

On sait qu’un filtre analogique présente toujours une bande passante d’utilisation limitée en raison des composants utilisés qui n’ont pas le comportement idéal voulu (résistors dont la résistance augmente avec la fréquence, amplificateurs opérationnels dont le gain chute en haute fréquence, etc...)

On pourrait être tenté de croire qu’avec un filtre numérique ces contingences matérielles disparaissent. Il n’en est rien.

Tout d’abord, tout calculateur électronique introduit des erreurs d’arrondi. De plus l’étape de quantification du signal (que nous n’avons pas présentée) introduit des erreurs : on approxime une valeur lue lors de l’échantillonnage par la valeur la plus proche manipulable par le calculateur. Le signal filtré ne sera donc pas le résultat idéal du filtrage. On peut cependant, en général, maîtriser ces erreurs et les maintenir au dessous d’un seuil qui les rend parfaitement acceptables.



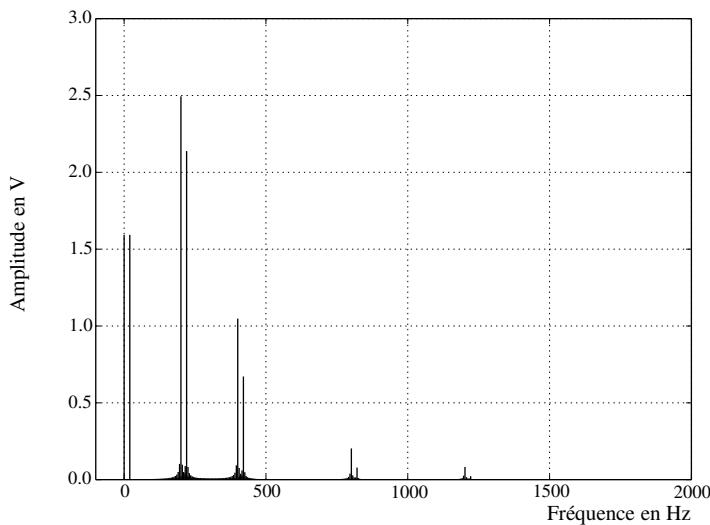
**Figure 5.11 –** Filtrage numérique d'un signal sinusoïdal de fréquence 200 Hz, par un passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure 100 Hz.

Cependant il existe une autre limitation que nous allons illustrer en traçant le diagramme de Bode "expérimental" du filtre numérique. Pour cela on fait calculer numériquement le signal de sortie pour des signaux d'entrée de fréquences différentes et on obtient le gain pour chaque fréquence en calculant le rapport de l'amplitude du signal de sortie sur celle du signal d'entrée.

Pour le filtre numérique passe-bas d'ordre 1 présenté plus haut, de fréquence de coupure  $f_c = 100$  Hz, le résultat est donné sur la figure 5.13 sur laquelle les petits ronds correspondent aux calculs et la ligne continue au tracé théorique. On constate que les deux courbes coïncident bien jusqu'à  $f \simeq 10^{1.5} \times f_c = 3,1$  kHz et qu'au delà le résultat est pour le moins surprenant. En tout état de cause ceci montre qu'il ne faut pas utiliser ce filtre pour des signaux de trop haute fréquence !

Essayons de comprendre l'origine de ce phénomène pour voir si l'on peut améliorer les choses. Les erreurs d'arrondi n'étant certainement pas à l'origine d'un tel comportement c'est que c'est la méthode même de calcul qui en est à l'origine. Or dans cette méthode nous avons effectué une approximation pour obtenir une expression approchée de la dérivée première :  $s(t_k + Te) = s(t_k) + T_e \frac{ds}{dt}(t_k)$ . Cependant cette approximation n'est pertinente que si on peut

négliger le terme suivant dans le développement, à savoir  $\frac{1}{2} T_e^2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t_k)$ , qui pour un signal sinusoïdal est d'autant plus important que la fréquence est élevée (à cause de la dérivée seconde). Évaluons par un calcul d'ordre de grandeur une condition sur la fréquence  $f$  pour que



**Figure 5.12** – Spectres de l’entrée ( $s_{ma}$ ) et de la sortie.

le terme de dérivée seconde soit négligeable devant celui de dérivée première. En notant  $S_m$  l’amplitude du signal sinusoïdal et  $T = 1/f$  sa période, on a  $T_e \frac{ds}{dt}(t_k) \simeq T_e \times \frac{S_m}{T} = f T_e S_m$ . De même  $\frac{1}{2} T_e^2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t_k) \simeq \frac{1}{2} T_e^2 \frac{S_m}{T^2} = \frac{1}{2} T_e^2 S_m f^2$ . L’inégalité donne alors  $f \ll \frac{2}{T_e} = 2f_e$ . On voit donc que la fréquence maximale d’utilisation du filtre est liée à la fréquence d’échantillonnage du signal d’entrée ! Il est donc temps de préciser que pour tracer la figure 5.13, on a échantillé le signal d’entrée à  $f_e = 10$  kHz. Avec  $f_c = 100$  Hz, la condition, en prenant un facteur 10 donne  $f < 2$  kHz, soit  $\log \frac{f}{f_c} < 1,3$  ce qui est cohérent avec le graphe de la figure 5.13.

Pour confirmer notre analyse, on retrace le diagramme de Bode pour une fréquence d’échantillonnage  $f_e = 100$  kHz. Le résultat est donné sur la figure 5.14. On constate qu’il existe toujours une fréquence d’utilisation maximale du filtre, mais qu’on l’a bien décalée d’une décade vers la droite.

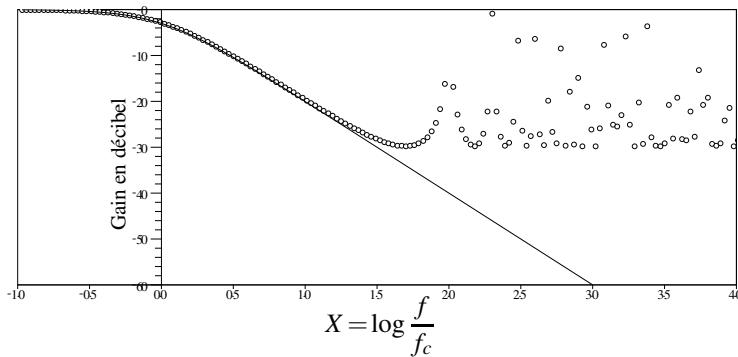
### 2.3 Filtres d’ordre supérieur

On peut étendre la technique de discréttisation à des dérivées d’ordre supérieur. Par exemple pour l’ordre 2 on a :

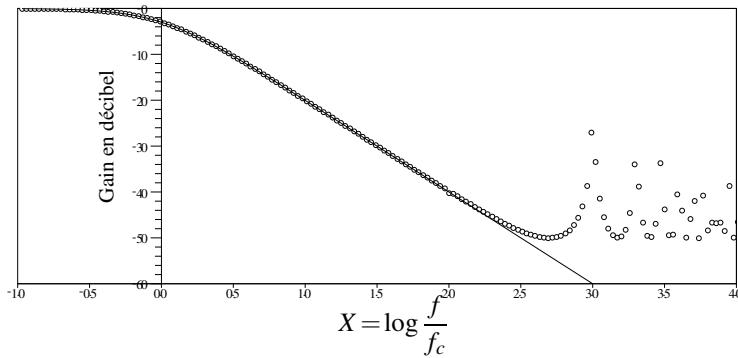
$$\frac{d^2 s}{dt^2} \simeq \frac{s_{k+1} + s_{k-1} - 2s_k}{T_e^2}.$$

On note qu’alors la récurrence sera elle aussi d’ordre 2.

On peut ainsi réaliser très simplement par le calcul des filtres numériques d’ordre très élevé.



**Figure 5.13** – Courbe de réponse en gain du filtre numérique passe-bas d'ordre 1 avec  $f_e = 10 \text{ kHz}$ .



**Figure 5.14** – Courbe de réponse en gain du filtre numérique passe-bas d'ordre 1 avec  $f_e = 100 \text{ kHz}$ .

## 2.4 Génération d'un signal analogique à partir d'un signal numérique

On peut enfin fabriquer un signal analogique à partir du signal numérique que l'on vient de calculer. On peut utiliser pour cela un convertisseur numérique-analogique (CNA).

Si on utilise LatisPro avec sa carte d'acquisition on peut récupérer le signal analogique correspondant sur une des sorties de la carte d'acquisition et l'observer à l'oscilloscope.

**SYNTHESE**

*SAVOIRS*

- influence de l'échantillonnage sur l'allure du spectre du signal
- critère de Nyquist-Shannon
- filtrage numérique

*SAVOIR-FAIRE*

- savoir choisir les paramètres d'acquisition pour réaliser un échantillonnage
- réaliser une filtrage numérique

*MOTS-CLÉS*

- |                   |                  |                      |
|-------------------|------------------|----------------------|
| • acquisition     | • quantification | • repliement         |
| • échantillonnage | • spectre        | • filtrage numérique |

## S'ENTRAÎNER

*Avertissement : bien que ce chapitre du programme doive être traitée exclusivement expérimentalement on propose ici quelques exercices.*

### 5.1 Extrait d'une notice (\*)

On peut lire dans la notice d'utilisation de l'oscilloscope numérique TDS1002 :

« Si vous tournez le bouton SEC/DIV afin de sélectionner un réglage plus rapide (moins de cycles), le spectre FFT affiche une plage de fréquences plus étendues et limite les possibilités d'un repliement du spectre. Cependant l'oscilloscope affiche également une résolution de fréquence inférieure. »

Interpréter et commenter cet extrait.

### 5.2 Adaptation de la fréquence d'échantillonnage aux besoins (\*)

En téléphonie la fréquence d'échantillonnage est  $f_e = 8 \text{ kHz}$ . Pour la musique enregistrée sur un CD elle est de  $f_e = 44,1 \text{ kHz}$ .

Commenter. Dans les deux cas faut-il utiliser a priori un filtre anti-repliement ?

### 5.3 Filtre numérique passe-haut du premier ordre (\*)

Établir la relation de récurrence permettant de calculer (avec les notations du cours)  $s_{k+1}$  pour

$$\text{le filtre dont la fonction de transfert est donnée par : } H(j2\pi f) = G_0 \frac{j\frac{f}{f_c}}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

## APPROFONDIR

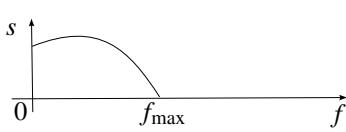
### 5.4 Théorème de Shannon, généralisation (\*\*)

Pour travailler quantitativement sur le spectre d'un signal il faut utiliser la transformation de Fourier, hors programme tant en physique qu'en mathématique : on travaille alors sur des fonctions complexes de la variable  $f$ , fréquence, avec  $f \in ]-\infty, +\infty[$ . Pour travailler qualitativement on admet qu'il est possible de prendre en compte le résultat de l'effet de l'échantillonnage sur un signal donné, à la fréquence  $f_e$ , de la façon suivante :

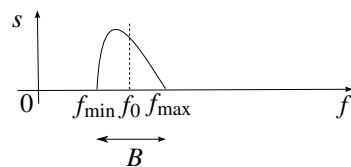
- on symétrise le spectre initial par rapport à la fréquence  $f = 0$  (on obtient donc des fréquences négatives). Ce spectre constitue l'ordre 0 ;
- on périodise le spectre ainsi obtenu, avec une période  $f_e$ , i.e. on translate en fréquence l'ordre 0 de  $n f_e$  pour toute valeur de  $n$  (l'ordre 0 translaté de  $n f_e$  constitue l'ordre  $n$ ) ;
- enfin, on ne conserve que la partie du spectre périodisé correspondant aux fréquences positives.

1. Soit un signal, dit à support borné (figure 5.15), dont le spectre contient toutes les fréquences comprises entre 0 et  $f_{\max}$ . Déterminez, en appliquant la méthode décrite ci-dessus l'allure du spectre du signal échantillonné. On traitera le cas  $f_e > 2f_{\max}$ , puis  $f_e < 2f_{\max}$ .

## CHAPITRE 5 – ÉLECTRONIQUE NUMÉRIQUE



**Figure 5.15** – Signal à support borné



**Figure 5.16** – Signal à bande étroite

En étudiant ce qu'il se passe dans le domaine de fréquence  $[0, f_e]$ , retrouvez le critère de Shannon.

**2.** On considère maintenant un signal dit à bande étroite (figure 5.16), de largeur  $B$ , centré sur la fréquence  $f_0$  : son spectre ne contient donc que des fréquences appartenant à l'intervalle  $[f_m = f_0 - B/2, f_M = f_0 + B/2]$ . On va voir qu'il est alors possible d'échantillonner le signal à des fréquences inférieures à celle imposée par le critère de Shannon.

**a.** La bande radio FM occupe en France les fréquences comprises entre  $f_m = 87,5$  MHz et  $f_M = 108$  MHz. L'ordre 0 est donc le domaine  $[-108; -87,5] \cup [87,5; 108]$ . On échantillonne un tel signal à la fréquence  $f_e = 43,5$  MHz. Avec la méthode décrite, déterminer les fréquences des ordres 1 à 6. Le critère de Shannon est-il satisfait ? Peut-on à l'aide d'un filtre passe-bande récupérer uniquement le signal initial ?

- b.** Mêmes questions pour une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 50$  MHz.  
**c.** Généraliser et établir que l'on peut récupérer parfaitement le signal initial en l'échantillonnant à une fréquence  $f_e$  s'il existe un entier  $n$  tel que

$$\frac{2f_M}{n} < f_e < \frac{2f_m}{n-1}$$

- d.** À quel résultat connu le cas  $n = 1$  correspond-il ?  
**e.** Que peut-on dire s'il existe des valeurs de  $n$  strictement supérieures à 1 ?  
**f.** Établir que les seules valeurs possibles de  $n$  sont celles telles que  $n < \frac{f_m}{B}$ .  
**g.** Dans le cas de la bande FM quelles sont toutes les valeurs possibles des fréquences d'échantillonnage ?  
**3.** Un signal audio utilise les fréquences de l'intervalle 0,20 kHz. On ne dispose que d'un échantillonneur à 22 kHz. On dispose également de tous les passe-bandes idéaux éventuellement nécessaires. Comment réaliser l'échantillonnage sans perte du signal audio ?

## CORRIGÉS

### 5.1 Extrait d'une notice

Il faut interpréter le « moins de cycles » visualisés comme une diminution de la durée totale d'acquisition  $T_a = NT_e$ . Comme le nombre  $N$  de points d'acquisition est constant, c'est que  $T_e$  a diminué, et donc que la fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{1}{T_e}$  a augmenté, ce qui permet de comprendre pourquoi une plus grande plage de fréquences est présentée. Par ailleurs, pour un signal donné, le critère de Shannon  $2f_{\max} < f_e$  a donc plus de chance d'être respecté : on risque moins les effets d'un repliement du spectre.

Enfin la résolution en fréquence est donnée par  $\Delta f = \frac{f_e}{N}$ . À  $N$  fixé, l'augmentation de  $f_e$  s'accompagne effectivement d'une augmentation de  $\Delta f$  et donc la résolution est effectivement moins bonne.

Il y a donc un compromis à faire dans le choix de la base de temps entre le risque de repliement et la résolution en fréquence, dû au nombre fixe de points d'acquisition. Pour garder la même résolution il faudrait pouvoir en même temps augmenter la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  et le nombre de points d'acquisition  $N$  de manière à garder le rapport  $\frac{f_e}{N}$  constant. Cela ne peut pas se faire avec un oscilloscope numérique, mais est possible dans une certaine mesure avec les logiciels d'acquisition de type Latis-pro.

### 5.2 Adaptation de la fréquence d'échantillonnage aux besoins

Les deux fréquences d'échantillonnage données donnent accès aux deux fréquences maximales que peuvent présenter les signaux en téléphonie et en musique d'après le critère de Shannon. On a donc respectivement 4 kHz et 22 kHz.

La plus haute fréquence audible par l'homme est de l'ordre de 20 kHz. Pour l'utilisation dans le cadre musical on voit donc que la fréquence d'échantillonnage à 44,1 kHz satisfait le critère de Shannon et qu'on ne perdra pas d'information utile lors de l'échantillonnage (harmoniques des différentes notes de musique enregistrées).

Pour la téléphonie on estime qu'un message parlé est encore intelligible si on ne garde que les fréquences inférieures à 3,5 kHz. Bien sûr, lors de la restitution le timbre de voix du locuteur sera un peu modifié (et d'autant plus qu'il a a priori une voix aiguë).

Pour la téléphonie on utilisera donc bien nécessairement un filtre anti-repliement.

Dans le cadre musical on utilisera aussi un filtre anti-repliement. En effet si des harmoniques ultra-sonores étaient présents dans le signal d'entrée, il donnerait potentiellement des fréquences audibles par le phénomène de repliement, ce qu'il faut à tout prix éviter.

Remarque : à titre indicatif cette valeur curieuse de la fréquence d'échantillonnage pour le CD est un avatar historique du format des magnétoscopes à bande magnétique.

### 5.3 Filtre numérique passe-haut du premier ordre

On peut réécrire l'expression et la définition de la fonction de transfert sous la forme :

## CHAPITRE 5 – ÉLECTRONIQUE NUMÉRIQUE

$\left(1 + j\frac{\omega}{2\pi f_c}\right) \underline{s} = G_0 \frac{j\omega}{2\pi f_c} \underline{e}$ , soit en repassant dans le domaine temporel :

$$s + \frac{1}{2\pi f_c} \frac{ds}{dt} = \frac{G_0}{2\pi f_c} \frac{de}{dt}.$$

On discrétise alors l'équation et on effectue l'approximation du cours pour exprimer les dérivées premières :  $s_k + \frac{1}{2\pi f_c} \frac{s_{k+1} - s_k}{T_e} = \frac{G_0}{2\pi f_c} \frac{e_{k+1} - e_k}{T_e}$ , soit au final la relation de récurrence :

$$s_{k+1} = (1 - 2\pi f_c T_e) s_k + G_0 (e_{k+1} - e_k)$$

#### 5.4 Théorème de Shannon, généralisation

1. Dans le cas  $f_e > 2f_{\max}$  on obtient en suivant la procédure décrite la figure suivante (5.18).

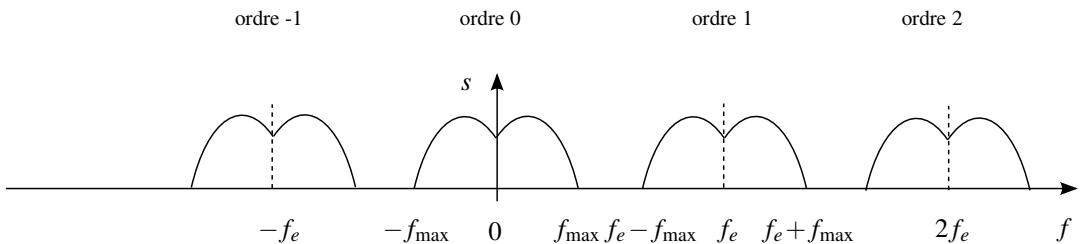


Figure 5.17 – Spectre périodisé

Dans le cas  $f_e < 2f_{\max}$ , on obtient la figure 5.18. On constate qu'il y a recouvrement partiel de l'ordre 0 et de l'ordre 1, ce qui empêche de récupérer le signal initial par un filtrage passe-bas.

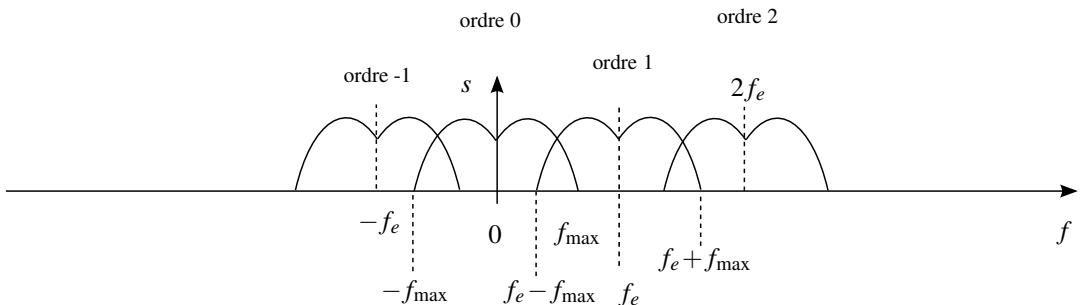


Figure 5.18 – Spectre périodisé

Pour que cela ne soit plus le cas il faut clairement que la fréquence la plus basse de l'ordre 1, à savoir  $f_e - f_{\max}$ , soit supérieure à la fréquence maximale de l'ordre 0 :  $f_e - f_{\max} > f_{\max}$ , soit  $f_e > 2f_{\max}$ , ce qui est bien le critère de Shannon.

**2. a.** On applique la méthode proposée en décalant de  $n \times 43,5$  MHz l'ordre 0, ce qui donne respectivement pour les ordres 1 à 6, en MHz :  $[-64,5; -44] \cup [131; 151,5]$ ,  $[-21; -0,5] \cup [174,5; 195]$ ,  $[22,5; 43] \cup [218; 238,5]$ ,  $[66; 86,5] \cup [261,5; 282]$ ,  $[109,5; 130] \cup [305; 325,5]$  et  $[153; 173,5] \cup [348,5; 369]$ . On constate qu'aucun ordre ne recouvre le domaine fréquentiel du signal initial. On pourra donc le récupérer par un filtre passe-bande bien choisi, bien que le critère de Shannon ne soit pas respecté.

**b.** De même on trouve respectivement pour les ordres 1 à 6, en MHz :  $[-58; -37,5] \cup [137,5; 157]$ ,  $[-8; 12,5] \cup [187,5; 208]$ ,  $[42; 62,5] \cup [237,5; 258]$ ,  $[92; 112,5] \cup [287,5; 308]$ ,  $[142; 162,5] \cup [337,5; 358]$  et  $[192; 212,5] \cup [387,5; 408]$ . On note que la partie basse de l'ordre 4 recouvre le spectre initial, ce qui rend impossible sa récupération !

**c.** Les deux études précédentes montrent qu'on peut échantillonner sans perte si les différents ordres ne recouvrent pas le spectre du signal initial. Pour cela il faut pouvoir le coincer entre deux ordres successifs,  $n-1$  et  $n$ . On doit donc avoir d'une part  $-f_m + (n-1)f_e \leq f_m$  et  $f_M < -f_m + nf_e$ , ce qui donne directement  $\frac{2f_M}{n} \leq f_e \leq \frac{2f_m}{n-1}$ .

**d.** Le cas  $n=1$  donne  $2f_M \leq f_e \leq +\infty$ . C'est le théorème de Shannon vu en cours.

**e.** Si  $n > 1$ ,  $n-1 \geq 1$ , d'où  $f_e \leq \frac{2f_m}{n-1} \leq 2f_m < 2f_M$ . On voit donc que l'on peut échantillonner à une fréquence strictement inférieure à celle imposée par le critère de Shannon.

**f.** De  $\frac{2f_M}{n} \leq f_e \leq \frac{2f_m}{n-1}$ , on tire  $\frac{2f_M}{n} \leq \frac{2f_m}{n-1}$ , soit  $n \leq \frac{f_M}{f_M - f_m} = \frac{f_M}{B}$ .

**g.** Ici  $\frac{f_M}{B} = 5,27$ . Les valeurs autorisées pour  $n$  sont donc 1, 2, 3, 4 et 5 pour lesquelles on a respectivement les intervalles autorisés pour la fréquence d'échantillonnage :  $[216 \text{ MHz}, +\infty[$ ,  $[108 \text{ MHz}, 175 \text{ MHz}]$ ,  $[72 \text{ MHz}, 87,5 \text{ MHz}]$ ,  $[54 \text{ MHz}, 58,3 \text{ MHz}]$  et  $[43,2 \text{ MHz}, 43,75 \text{ MHz}]$ . La fréquence d'échantillonnage doit appartenir à la réunion de ces intervalles. On remarque que 43,5 MHz est bien une fréquence autorisée, mais pas 50 MHz.

**3.** On peut utiliser un filtre passe-bande, de bande passante  $[0, 11 \text{ kHz}]$  (c'est en fait un passe-bas) pour isoler la partie basse du spectre. Avec l'échantilleur à  $f_e = 22 \text{ kHz}$ , le critère de Shannon sera vérifié et cette partie du spectre sera échantillonnée sans perte. On peut parallèlement utiliser un filtre passe-bande, de bande passante  $[11 \text{ kHz}, 22 \text{ kHz}]$ , pour isoler la partie haute du spectre. D'après l'étude précédente comme  $\frac{f_M}{B} = \frac{22}{11} = 2$ , la valeur  $n = 2$  est acceptable et autorise les fréquences d'échantillonnage  $f \in [\frac{2 \times 22}{2}, \frac{2 \times 11}{2-1}] = [22 \text{ kHz}, 22 \text{ kHz}]$ .

On doit donc prendre précisément  $f_e = 22 \text{ kHz}$ . Malgré le sous échantillonnage apparent la partie haute du spectre sera échantillonnée elle aussi sans perte.

Ceci se généralise : on découpe un signal de fréquence maximale  $f_M$  en  $N$  sous-bandes de largeur  $f_M/N$ , chacune pouvant être échantillonnée sans perte à la fréquence  $f_e = f_M/N$ . C'est ce que l'on appelle l'analyse par sous-bande.



**Troisième partie**

**Optique**



# 6

## Modèle scalaire des ondes lumineuses

La nature ondulatoire de la lumière, objet de controverse scientifique aux XVII<sup>ème</sup> et XVIII<sup>ème</sup> siècles, fut définitivement établie par la découverte, au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, des phénomènes d'**interférence** et de **diffraction**. Ces phénomènes sont observés avec tous les types d'onde.

L'**optique ondulatoire** est une théorie élaborée au début du XIX<sup>ème</sup> siècle qui les interprète. Elle englobe les résultats de l'optique géométrique qui est une approximation de l'optique ondulatoire valable dans la limite des très faibles longueurs d'onde (par rapport à la dimension des obstacles rencontrés par la lumière).

Avec sa théorie électromagnétique, Maxwell élucida à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle la question de la nature de l'onde lumineuse : c'est une onde électromagnétique. La théorie scalaire de l'optique ondulatoire est donc une approximation par rapport à la théorie des ondes électromagnétiques, ondes vectorielles. On discutera la validité de ce point de vue.

Enfin, la découverte au début du XX<sup>ème</sup> siècle des propriétés corpusculaires de la lumière constraint les physiciens à admettre la dualité onde-corpuscule de la lumière. On découvrit au cours de la même période que toutes les particules élémentaires ont également une double nature, ondulatoire et corpusculaire. La **mécanique quantique** fut élaborée pour tenir compte de cette double nature. La **mécanique classique** est une approximation de la mécanique quantique exactement comme l'optique géométrique est une approximation de l'optique ondulatoire.

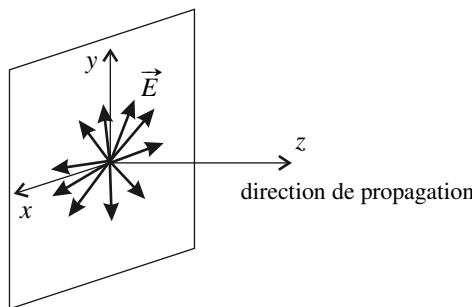
Dans ce chapitre on pose les bases de l'optique ondulatoire.

### 1 Le modèle scalaire de la lumière

#### 1.1 Nature de l'onde lumineuse

On verra dans le cours d'électromagnétisme que la lumière est une onde électromagnétique. Une onde électromagnétique se compose de deux champs de vecteurs couplés, le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ , se propageant à la vitesse  $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  dans

le vide. Dans le cas d'une onde plane (voir chapitre 18), ces vecteurs sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation que l'on supposera être celle du vecteur  $\vec{u}_z$  dans la discussion qui suit.



**Figure 6.1** – Lumière naturelle, non polarisée.

Dans le cas de la **lumière naturelle**, la direction du vecteur  $\vec{E}$  change de manière aléatoire au cours du temps ; la durée moyenne entre deux changements est le temps de cohérence  $\tau_c$  qui sera défini plus loin dans ce chapitre. À ce stade, il suffit de savoir que ce temps est extrêmement bref par rapport à la durée d'une expérience. Ainsi il n'est pas possible d'attribuer une direction au champ  $\vec{E}$ . On dit que la lumière naturelle est *non polarisée*.

La **lumière polarisée** a la particularité de présenter une géométrie précise pour le champ électrique dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Elle est produite à partir de la lumière naturelle à l'aide de dispositifs appropriés (voir chapitre 18).

## 1.2 La vibration lumineuse

### a) Définition

Pour une lumière non polarisée, les deux composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation sont parfaitement équivalentes.

On appelle **vibration lumineuse** une composante quelconque du champ électrique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

La vibration lumineuse en un point  $M$  et à l'instant  $t$  sera notée  $s(M, t)$ . On ne se préoccupera pas de sa nature physique. La vibration lumineuse scalaire fut d'ailleurs introduite au début du XIX<sup>ème</sup> siècle par Fresnel, plus de cinquante ans avant la découverte des équations de Maxwell, équations de base de l'électromagnétisme (voir la partie électromagnétisme). Elle est beaucoup plus facile à manipuler que les vecteurs de l'onde électromagnétique et on obtient des résultats tout à fait conformes à l'expérience. Il y a cependant une restriction : on ne pourra pas rendre compte des expériences en lumière polarisée.

### b) Propriétés

La vibration lumineuse se propage dans les milieux transparents, le long des rayons lumineux, à la vitesse  $v = \frac{c}{n}$  où  $n$  est l'indice optique du milieu.

L'indice  $n$  est le même que celui qui intervient dans la loi de la réfraction.

On admet aussi le **théorème de superposition** :

Si plusieurs vibrations  $s_i(M, t)$  se propagent simultanément dans l'espace, chacune se propage comme si elle était seule et la vibration résultante en un point  $M$  est :

$$s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

Ce théorème de superposition découle directement de la linéarité des équations de Maxwell. Cependant on doit en réalité additionner vectoriellement les champs électriques des ondes. Pour que cela se traduise par une addition des vibrations lumineuses il faut que les plans dans lesquels évoluent les champs électriques soient proches c'est-à-dire que les directions de propagation  $\vec{u}_i$  fassent des angles petits entre elles.

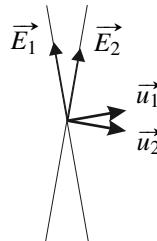


Figure 6.2 – Superposition de deux ondes électromagnétiques.

## 1.3 Éclairement et intensité vibratoire

**L'éclairement** est une grandeur fondamentale car elle correspond à ce que l'on peut observer ou mesurer. Pour en comprendre la définition il faut avoir quelques notions sur les récepteurs de l'onde lumineuse.

### a) Les récepteurs de l'onde lumineuse

Les récepteurs sont caractérisés par leur temps de réponse  $\tau$  qui est le temps minimum qui doit séparer deux signaux pour qu'ils soient perçus individuellement.

**L'œil** Pour observer à l'œil, on place un écran diffusant (par exemple une feuille de papier) dans le champ éclairé de telle manière qu'il soit approximativement orthogonal aux rayons

lumineux. Chaque point  $M$  de l'écran renvoie dans toutes les directions de l'espace (et en particulier en direction de l'œil) l'énergie lumineuse qu'il reçoit. La sensation visuelle dépend de la puissance reçue par l'œil, qui est différente suivant le point  $M$  de l'écran. Le temps de réponse est typiquement  $\tau \simeq 0,1$  s.

### Exemple

Un film de cinéma est projeté à raison de 24 images par seconde. Les mouvements filmés semblent continus parce que le temps de réponse de l'œil est supérieur à  $\frac{1}{24}$  s  $\simeq 0,04$  s.

**La pellicule photographique** On peut mettre à la place d'un écran une pellicule photographique. Le signal enregistré est l'énergie reçue pendant la durée d'exposition  $\tau \sim 10^{-4}$  à  $10^{-2}$  s qui joue le rôle de temps de réponse.

**Détecteurs électroniques classiques** Il existe des détecteurs électroniques qui fournissent un signal électrique (tension ou intensité suivant le cas) proportionnel à la puissance lumineuse reçue par une petite surface sensible. On les caractérise par leur sensibilité et leur temps de réponse (voir tableau 6.1).

| récepteur       | sensibilité            | temps de réponse    |
|-----------------|------------------------|---------------------|
| photodiode      | $0,1 \text{ A.W}^{-1}$ | $10^{-6} \text{ s}$ |
| photorésistance | $100 \text{ A.W}^{-1}$ | $10^{-2} \text{ s}$ |
| thermopile      | $1 \text{ V.W}^{-1}$   | 1 s                 |

Tableau 6.1 – Quelques récepteurs lumineux électroniques

**Le capteur CCD** Le capteur CCD, acronyme du nom anglais *Charge - Coupled Device*, est l'élément sensible des appareils photographiques numériques. Il fournit pour chaque pixel de l'image les valeurs des trois puissances lumineuses pour les trois couleurs rouge, vert et bleu du système RGB. Un capteur de 12 millions de pixels est typiquement un tableau rectangulaire de  $4000 \times 3000$  cellules comportant chacune 4 photorécepteurs (1 pour le rouge, 2 pour le vert et 1 pour le bleu) et dont la taille est de l'ordre de quelques micromètres. Son temps de réponse est inférieur à  $10^{-2}$  s.

### b) Éclairement et intensité vibratoire

Les récepteurs sont sensibles à la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Dans les exemples précédents le temps de réponse le meilleur, c'est-à-dire le plus faible, reste bien plus grand que la période de vibration d'une lumière visible dont on verra au paragraphe suivant qu'elle est de l'ordre de  $10^{-14}$  s. Dans ces conditions :

Les récepteurs ne sont sensibles qu'à la **valeur moyenne** de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent.

On verra dans le cours d'électromagnétisme que la puissance lumineuse surfacique est proportionnelle au carré de la vibration lumineuse  $s^2(M,t)$ .

On appelle **éclairement**  $\mathcal{E}$  la puissance lumineuse surfacique **moyenne** reçue par une surface ; il se calcule par la formule :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle s^2(M,t) \rangle \quad (6.1)$$

où  $K$  est une constante positive et où le symbole  $\langle \dots \rangle$  désigne la moyenne dans le temps.

### Remarque

- L'éclairement se mesure ainsi en  $\text{W.m}^{-2}$ .
- La théorie électromagnétique montre que  $K = \varepsilon_0 c \sin \theta$  où  $\varepsilon_0$  est une constante fondamentale et  $\theta$  l'angle entre la surface et la direction de propagation. Dans les expériences d'optique cet angle est proche de  $\frac{\pi}{2}$ .

Dans la suite du cours d'optique, la valeur de  $K$  ne sera pas utilisée parce qu'on n'interprétera que l'éclairement relatif  $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}$  où  $\mathcal{E}_0$  est un éclairement de référence. Dans ce cas, il est équivalent de travailler avec l'**intensité vibratoire** définie par :

$$I = \langle s^2(M,t) \rangle .$$

## 2 Lumière monochromatique

### 2.1 Définition

On appelle **lumière monochromatique** une vibration idéale purement sinusoïdale donc de la forme :

$$s(M,t) = s_0(M) \cos(\omega t - \varphi(M)), \quad (6.2)$$

où  $\omega$  est la **pulsation**,  $s_0(M)$  est l'**amplitude** et  $\varphi(M)$  le **retard de phase** au point  $M$ .

La vibration lumineuse monochromatique a pour fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  (cette notation est plus utilisée en optique que la notation  $f$ ) et pour période  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ . Le plus souvent on préfère la caractériser par sa **longueur d'onde dans le vide** :

$$\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} .$$

$\lambda_0$  est la distance sur laquelle la lumière se propage pendant la période  $T$  de l'onde.

**Remarque**

On peut aussi définir la longueur d'onde dans un milieu matériel où l'onde se propage à la vitesse  $\frac{c}{n}$  :

$$\lambda = \frac{c}{n} T = \frac{c}{n\nu} \quad \text{ou encore} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (6.3)$$

**2.2 Domaine visible**

Les lumières visibles par l'œil humain ont des longueurs d'onde dans le vide comprise entre 400 nm et 750 nm et une fréquence moyenne de  $6 \times 10^{14}$  Hz. L'œil perçoit chaque fréquence comme une couleur différente (voir tableau 6.2).

| $\lambda_0$ (nm) | 500                | 550                  | 590                  | 630                  |
|------------------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\nu$ (Hz)       | $6 \times 10^{14}$ | $5,5 \times 10^{14}$ | $5,1 \times 10^{14}$ | $4,8 \times 10^{14}$ |
| Couleur          | bleu               | vert                 | jaune orangé         | rouge                |

**Tableau 6.2** – Correspondance entre longueur d'onde dans le vide et couleur.

**2.3 Notation complexe**

On représentera la vibration lumineuse monochromatique (6.2) par la **vibration complexe** :

$$\underline{s}(M, t) = s_0(M) \exp(i(\omega t - \varphi(M))), \quad (6.4)$$

telle que la vibration réelle est :  $s(M, t) = \operatorname{Re}(\underline{s}(M, t))$ . Son amplitude est :  $s_0(M) = |\underline{s}(M, t)|$ .

**2.4 Expression de l'éclairement**

L'éclairement est :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle = \langle s_0^2(M) \cos^2(\omega t - \varphi(M)) \rangle = \frac{1}{2} K s_0^2(M) \quad (6.5)$$

L'éclairement et l'intensité vibratoire sont proportionnels au carré de l'amplitude de la vibration.

En notation complexe obtient l'éclairement et l'intensité vibratoire par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= \frac{1}{2} K |\underline{s}(M)|^2 &= \frac{1}{2} K \underline{s}(M, t) \underline{s}(M, t)^* \\ I(M) &= \frac{1}{2} |\underline{s}(M, t)|^2 &= \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \underline{s}(M, t)^* \end{aligned} \quad (6.6)$$

où  $\underline{s}^*$  est le complexe conjugué de  $\underline{s}$ .

## 3 Chemin optique

### 3.1 Définition

On a vu que la vibration lumineuse se propage le long des rayons lumineux. Soit un rayon lumineux passant par  $M$  puis par  $N$  (figure 6.3).

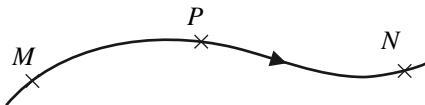


Figure 6.3 – Rayon lumineux quelconque.

Le **chemin optique** parcouru par la lumière entre  $M$  et  $N$  est par définition :

$$(MN) = ct_{MN} \quad (6.7)$$

où  $t_{MN}$  est le temps mis par la lumière pour aller de  $M$  à  $N$ . Le chemin optique a la dimension d'une longueur. Il s'agit de la distance que pourrait parcourir la lumière durant le temps  $t_{MN}$  si elle se propageait dans le vide.

Si la lumière passe entre  $M$  et  $N$  par le point  $P$ , alors  $t_{MN} = t_{MP} + t_{PN}$ . On a donc la relation utile :

$$(MN) = (MP) + (PN) \quad (6.8)$$

### 3.2 Calcul pratique du chemin optique

#### a) Hypothèses de travail

Les milieux transparents utilisés dans les expériences (verre, quartz, plexiglas...) sont **dispersifs** c'est-à-dire que la vitesse de propagation  $v$  et l'indice optique  $n$  dépendent de la longueur d'onde de la lumière. Pour éviter cette difficulté on ne considérera dans ce cours, sauf mention contraire, que des ondes monochromatiques.

On supposera de plus les milieux traversés **homogènes** :  $n$  est le même en tout point du milieu. Il en résulte que la lumière se propage en ligne droite ; sa direction de propagation change seulement lorsqu'elle est réfléchie ou lorsqu'elle est réfractée.

Enfin, on négligera l'**absorption** de l'énergie lumineuse par le milieu : l'indice optique  $n$  est réel (voir chapitre 19).

#### b) Cas où la lumière traverse un milieu homogène

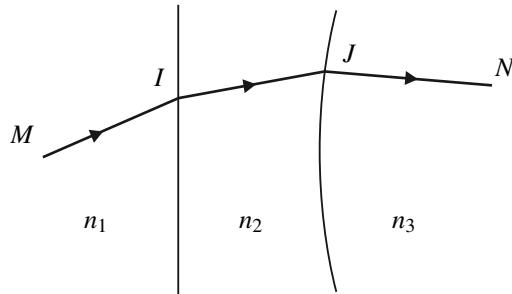
Dans un milieu homogène d'indice  $n$  la lumière se propage en ligne droite de  $M$  à  $N$  à la vitesse  $\frac{c}{n}$ , donc :

$$(MN) = c \frac{MN}{\frac{c}{n}} = nMN \quad (6.9)$$

où  $MN$  représente la distance entre les points  $M$  et  $N$ .

### c) Cas où la lumière traverse plusieurs milieux homogènes

Les points  $M$  et  $N$  peuvent être dans deux milieux homogènes différents. Par exemple sur la figure 6.4 la lumière traverse entre  $M$  et  $N$  des milieux d'indices respectifs  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  et le rayon lumineux est une ligne brisée  $MIJN$ .



**Figure 6.4** – Exemple de calcul de chemin optique.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} (MN) &= (MI) + (IJ) + (JN) \\ &= n_1 MI + n_2 IJ + n_3 JN \end{aligned} \quad (6.10)$$

On retiendra la méthode pratique suivante :

Le chemin optique le long d'un rayon lumineux est égal à la longueur du rayon multiplié par l'indice du milieu transparent qu'il traverse.

On peut alors écrire :  $(AB) = n \vec{u} \cdot \vec{AB}$ , où  $\vec{u}$  orienté dans le sens de parcours de la lumière.

## 3.3 Chemin optique et retard de phase

### a) Relation fondamentale entre le chemin optique et le retard de phase

La vibration lumineuse en  $N$  reproduit la vibration en  $M$  avec un retard de propagation  $t_{MN}$  et une atténuation éventuelle que l'on représente ici par un coefficient  $\alpha$  (dépendant de  $M$  et  $N$ ) compris entre 0 et 1. On a donc :

$$s(N, t) = \alpha s(M, t - t_{MN})$$

La lumière étant monochromatique ceci s'écrit :

$$s_0(N) \cos(\omega t - \varphi(N)) = \alpha s_0(M) \cos(\omega(t - t_{MN}) - \varphi(M))$$

On en déduit :

$$\varphi(N) = \varphi(M) + \omega t_{MN} = \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN)$$

Il faut retenir que :

Le retard de phase accumulé par la vibration lumineuse croît proportionnellement au chemin optique qu'elle parcourt selon la relation :

$$\varphi(N) = \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) \quad (6.11)$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide.

### b) Suppléments de marche optique exceptionnels

En plus du déphasage lié à la propagation, la lumière subit un déphasage supplémentaire de  $\pi$  dans les situations suivantes :

- lorsque le rayon lumineux subit une **réflexion sur une surface métallique** ;
- lorsque le rayon subit une **réflexion sur un milieu plus réfringent**, c'est-à-dire sur un dioptre séparant le milieu de propagation d'indice  $n$  d'un milieu d'indice  $n' > n$  ;
- lorsque le rayon **passe par un point de convergence** (par exemple au point  $A'$  de la figure 6.5 page 190).

Pour conserver la relation fondamentale (6.11) entre la phase et le chemin optique, on ajoute  $\frac{\lambda_0}{2}$  au chemin optique chaque fois qu'une de ces situations se présente.

Par exemple, si la lumière, se propageant dans un milieu homogène d'indice  $n$ , passe par  $M$ , se réfléchit en  $I$  sur un métal puis arrive en  $N$  :

$$(MN) = nMI + \frac{\lambda_0}{2} + nIN,$$

le terme  $\frac{\lambda_0}{2}$  provenant de la réflexion métallique.

### 3.4 Surface d'onde

Considérons une source lumineuse ponctuelle  $S$ . Par définition :

**Une surface d'onde relative au point source  $S$**  est une surface formée des points  $M$  tels que  $(SM) = \text{constante}$ , ou encore, ce qui est équivalent,  $\varphi(M) = \text{constante}$ .

Étant donné que la vibration en  $M$  reproduit la vibration à la source avec le retard  $t_{SM} = \frac{(SM)}{c}$  (et éventuellement une diminution d'amplitude) on peut dire que :

La vibration a la même valeur en tous les points d'une surface d'onde.

### 3.5 Théorème de Malus

**Théorème de Malus :** Les surfaces d'onde relatives au point source  $S$  sont orthogonales aux rayons lumineux issus de  $S$ .

Conformément au programme, on admet ce résultat qui est illustré dans les deux paragraphes suivants.

### 3.6 Égalité des chemins optiques entre points conjugués

La figure 6.5 représente deux points  $A$  et  $A'$  conjugués par un système optique (autrement dit :  $A'$  est l'image de  $A$  par le système optique) et situés dans des milieux transparents d'indice  $n$  et  $n'$ .

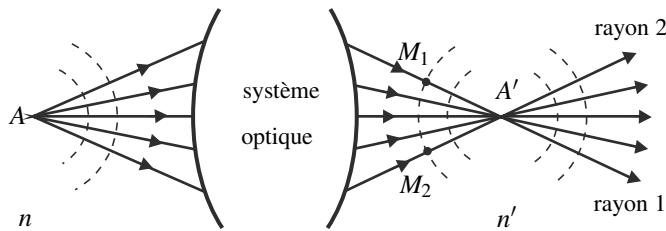


Figure 6.5 – Points conjugués par un système optique.

Avant le système optique, les rayons lumineux sont des droites passant par  $A$ . Les surfaces d'onde doivent être orthogonales à ces droites d'après le théorème de Malus ; ce sont donc des sphères de centre  $A$ . Pour une raison analogue les surfaces d'onde, après le système optique, sont des sphères de centre  $A'$ .

On veut comparer le chemin optique de  $A$  à  $A'$  le long de deux rayons différents numérotés 1 et 2. Soient  $M_1$  et  $M_2$  des points situés sur ces rayons, après le système optique et sur une même surface d'onde (figure 6.5). Par définition des surfaces d'onde on a  $(AM_1) = (AM_2)$ . De plus,  $M_1$  et  $M_2$  se trouvant sur une sphère de centre  $A'$ ,  $M_1A' = M_2A'$  donc  $(M_1A') = n'M_1A' = n'M_2A' = (M_2A')$ ,  $n'$  étant l'indice du milieu à la sortie du système optique. On trouve donc :

$$(AA')_1 = (AM_1) + (M_1A') = (AM_2) + (M_2A') = (AA')_2$$

Lorsque deux points  $A$  et  $A'$  sont conjugués par un système optique, le chemin optique  $(AA')$  est le même le long de tous les rayons allant de  $A$  à  $A'$ .

## 4 Onde sphérique, onde plane

### 4.1 Onde sphérique

#### a) Définition

Une **onde sphérique** est une onde ayant l'une des caractéristiques suivantes :

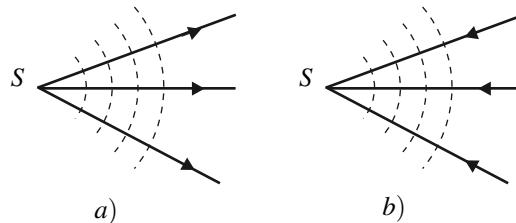
- les rayons lumineux sont des droites concourantes en un point  $S$ ,
- les surfaces d'onde sont des sphères centrées sur  $S$ .

Les deux propositions précédentes sont équivalentes d'après le théorème de Malus.

L'onde émise par une source ponctuelle  $S$  située à distance finie est une onde sphérique.

Lorsqu'un système optique donne d'une source ponctuelle  $S$  une image  $S'$  à distance finie, l'onde issue du système optique est un onde sphérique de centre  $S'$ . Tout se passe comme s'il y avait une nouvelle source en  $S'$ .

L'onde sphérique est dite **divergente** dans une zone où les rayons lumineux s'éloignent du centre et **convergente** dans une zone où les rayons se dirigent vers le centre (figure 6.6).



**Figure 6.6 – Ondes sphériques : a) divergente ; b) convergente.**

#### Exemple

Sur la figure 6.5, l'onde émise par le point  $A$  est une onde sphérique divergente. L'onde sortant du système optique est une onde sphérique convergente jusqu'au point  $A'$ , puis une onde sphérique divergente.

#### b) Expression du retard de phase d'une onde sphérique

Dans le cas d'une onde sphérique divergente, le rayon arrivant en  $M$  est passé avant par la source  $S$ . La formule fondamentale (6.11) s'écrit alors, en notant  $\varphi_0 = \varphi(S)$  la phase à l'émission de l'onde :

$$\varphi(M) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) = \varphi_0 + \frac{2\pi n}{\lambda_0}SM , \quad (6.12)$$

où  $n$  est l'indice optique du milieu.

Dans le cas d'une onde sphérique convergente, le rayon passe par  $S$  après le point  $M$  donc

$$\varphi_0 = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MS) \quad \text{soit} \quad \varphi(M) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0}(MS) = \varphi_0 - \frac{2\pi n}{\lambda_0}SM . \quad (6.13)$$

### c) Expression d'une onde sphérique

On admet que l'amplitude de l'onde sphérique de source  $S$  est :

$$s_0(M) = \frac{A}{SM},$$

où  $A$  est une constante. Dans toutes les applications des chapitres suivants, la distance  $SM$  sera quasiment constante dans la zone d'intérêt et on fera pour l'onde sphérique l'approximation :

$$s_0(M) \simeq \text{constante} = s_0.$$

On utilisera donc l'expression suivante de l'onde sphérique :

$$s(M,t) = s_0 \cos(\omega t - \varphi_0 \pm \frac{2\pi n}{\lambda_0}SM) , \quad (6.14)$$

avec le signe  $-$  pour l'onde divergente et le signe  $+$  pour l'onde convergente.

## 4.2 Onde plane

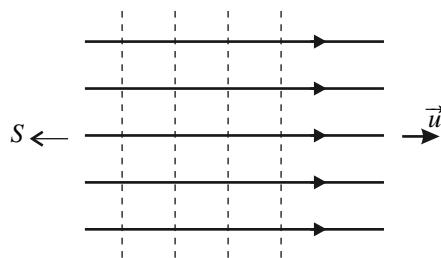
### a) Définition

Une **onde plane** est une onde ayant l'une des caractéristiques suivantes :

- les rayons lumineux sont des droites parallèles entre elles,
- les surfaces d'onde sont des plans parallèles entre eux appelés **plans d'onde**.

Les deux propositions sont équivalentes d'après le théorème de Malus. De plus :

Les plans d'onde sont orthogonaux aux rayons lumineux.



**Figure 6.7** – Onde plane. Les surfaces d'onde sont en pointillé.

Notons  $\vec{u}$  le vecteur unitaire parallèle aux rayons dirigé dans le sens de propagation de la lumière. Une onde plane peut être considérée comme l'onde émise par une source ponctuelle  $S$  située à l'infini dans la direction  $-\vec{u}$ .

Dans les situations concrètes l'onde plane est :

- l'onde d'un faisceau laser dans une modélisation très simple,
- la lumière provenant d'une source très éloignée (c'est-à-dire à distance très supérieure aux dimensions des instruments utilisés) et quasi-ponctuelle (c'est-à-dire de dimension très inférieure à sa distance) par exemple une étoile,
- l'onde produite par un **collimateur** c'est-à-dire une source ponctuelle  $S$  placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente (voir plus bas).

### b) Expression du retard de phase d'une onde plane

On peut toujours considérer qu'une onde plane se propageant dans la direction et le sens d'un vecteur  $\vec{u}$  provient d'un point source  $S$  situé à l'infini dans la direction de  $-\vec{u}$  (voir figure 6.8). On suppose que  $S$  se trouve à très grande distance  $r_0$  de l'origine  $O$ , soit  $\overrightarrow{OS} = -r_0 \vec{u}$  puis on fait tendre  $r_0$  vers l'infini.

Pour un point  $M$  quelconque on a :

$$SM^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM})^2 = (r_0 \vec{u} + \overrightarrow{OM})^2 = r_0^2 + 2r_0 \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2$$

d'où, puisque  $r_0 \gg OM$  :

$$SM = r_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}}{r_0} + \frac{OM^2}{r_0^2}} \simeq r_0 \left( 1 + \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}}{r_0} \right) = r_0 + \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$$

L'onde émise par  $S$  est une onde sphérique divergente donc :

$$\varphi(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi n}{\lambda_0} SM = \varphi(S) + \frac{2\pi n}{\lambda_0} r_0 + \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

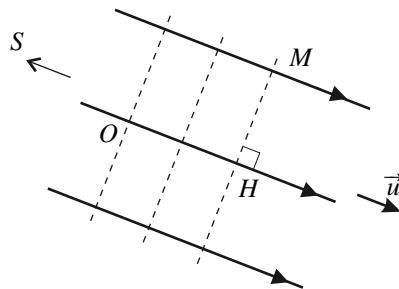
Or,  $\varphi(S) + \frac{2\pi n}{\lambda_0} r_0 = \varphi(O)$ , il vient donc :

$$\varphi(M) = \varphi(O) + \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}. \quad (6.15)$$

#### Remarque

On peut retrouver la formule (6.15) par le raisonnement suivant. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le rayon passant par  $O$  (figure 6.8). D'après le théorème de Malus,  $M$  et  $H$  sont dans un même plan d'onde donc  $\varphi(M) = \varphi(H)$ . D'autre part :

$$\varphi(H) - \varphi(O) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (OH) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \overline{OH} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}.$$



**Figure 6.8** – Calcul du retard de phase d'une onde plane.

### c) Expression d'une onde plane

On admet que l'amplitude d'une onde plane est une constante :

$$s_0(M) = \text{constante} = s_0 .$$

L'expression de l'onde plane est finalement, en notant  $\varphi(O) = \varphi_0$  :

- en notation réelle :

$$s(M, t) = s_0 \cos \left( \omega t - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} \right) ,$$

- en notation complexe :

$$\underline{s}(M, t) = s_0 \exp(-i\varphi_0) \exp \left( i(\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}) \right) .$$

## 4.3 Effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss

Une lentille donne de tout point objet  $A$  une image  $A'$  quand on respecte les conditions de Gauss. En terme d'ondes cela se traduit par la transformation d'une onde sphérique de centre  $A$  en un onde sphérique de centre  $A'$ . Si l'un des deux points est à l'infini, l'onde qui lui correspond est une onde plane. La figure 6.9 présente quelques situations avec une lentille convergente :

- Cas (a) : l'objet réel  $A$  à distance finie a une image réelle  $A'$  à distance finie ; l'onde sphérique divergente issue de  $A$  devient une onde sphérique d'abord convergente, puis divergente de centre  $A'$ .
- Cas (b) : l'onde sphérique divergente issue du foyer objet principal  $F$  est transformée en une onde plane se propageant dans la direction et le sens de l'axe de la lentille.
- Cas (c) : l'onde sphérique divergente issue du foyer objet secondaire  $\phi$  est transformée en une onde plane se propageant selon le vecteur  $\vec{u} = \frac{\vec{\phi}O}{\phi O} \simeq \frac{\vec{\phi}O}{f'} ,$  en notant  $f'$  la distance focale image de la lentille.

- Cas (d) : l'onde plane se propageant dans la direction et le sens de l'axe de la lentille est transformée en onde sphérique convergente (puis divergente) de centre  $F'$ , foyer image principal de la lentille.
- Cas (e) : l'onde plane se propageant selon le vecteur  $\vec{u}$  est transformée en onde sphérique convergente (puis divergente) de centre  $\phi'$ , foyer image secondaire, intersection du plan focal image et de la droite  $(O, \vec{u})$ .

Les cas (b) et (c) correspondent à un **collimateur**, appareil comportant une lentille convergente et une ouverture ponctuelle placée dans le plan focal image la lentille. En éclairant l'ouverture avec une source on fabrique une onde plane.

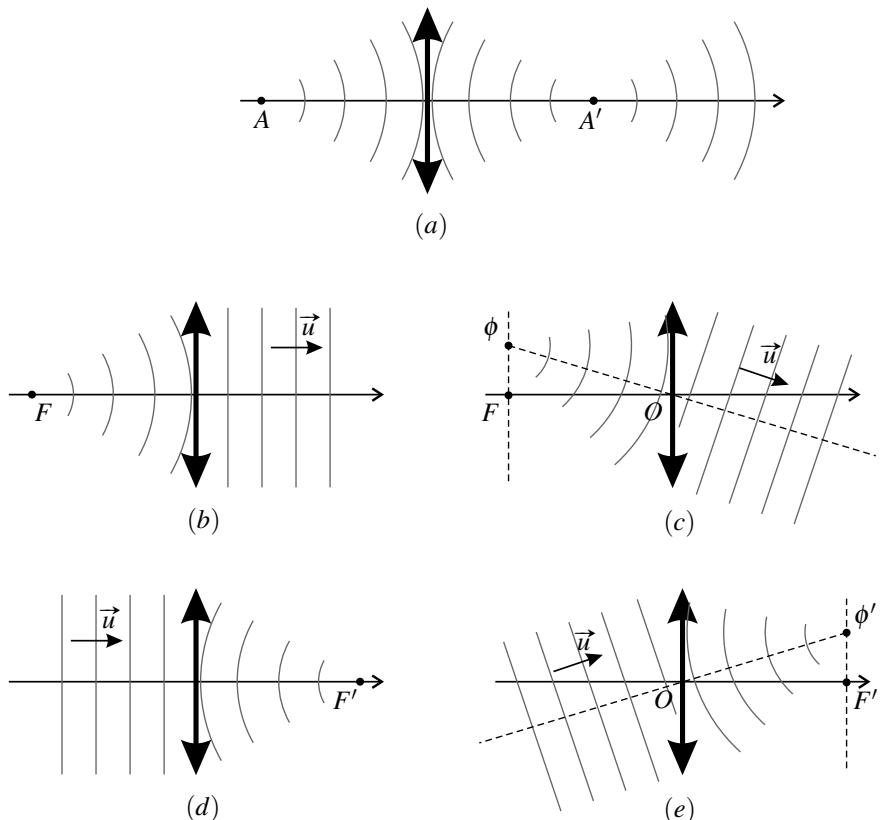


Figure 6.9 – Transformation des ondes par une lentille convergente.

## 5 Lumières réelles

### 5.1 Composition spectrale

Il n'existe pas dans la réalité de lumière parfaitement monochromatique.

Cependant, toute vibration lumineuse « réelle »  $s(M, t)$  peut se décomposer en somme de vibrations monochromatiques. C'est que l'on observe expérimentalement en faisant passer un pinceau de lumière dans un prisme de verre : les différentes composantes monochromatiques sont séparées et on observe le **spectre** de la lumière. Les spectromètres à réseau permettent une détermination du spectre plus précise qu'avec un prisme.

La méthode mathématique correspondant à cela est la **transformation de Fourier** (voir appendice mathématique).

L'éclairement est la somme des éclairements dus aux différentes composantes monochromatiques.

On définit la **densité spectrale d'éclairement**, notée  $\mathcal{E}_\lambda$ , telle que la contribution à l'éclairement des composantes monochromatiques dont la longueur d'onde dans le vide est dans un intervalle élémentaire  $[\lambda_0, \lambda_0 + d\lambda_0]$  est :

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}_\lambda(\lambda_0) d\lambda_0 \quad (6.16)$$

L'éclairement est ainsi :

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{E}_\lambda(\lambda_0) d\lambda_0 \quad (6.17)$$

Le spectre de la lumière, tel qu'on l'observe dans l'expérience du prisme, est l'image de la fonction  $\mathcal{E}_\lambda(\lambda_0)$ .

#### Remarque

On définit aussi une densité spectrale  $\mathcal{E}_v$  par rapport à la fréquence. Ces deux densités spectrales sont liées puisque  $v = \frac{c}{\lambda_0}$ . L'intervalle de longueur d'onde  $[\lambda_0, \lambda_0 + d\lambda_0]$  correspond à l'intervalle de fréquence  $[v + dv, v]$  avec :

$$dv = d\left(\frac{c}{\lambda_0}\right) = -\frac{c}{\lambda_0^2} d\lambda_0.$$

On a donc :

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}_\lambda(\lambda_0) d\lambda_0 = \mathcal{E}_v(v) |dv|,$$

d'où :

$$\mathcal{E}_v(v) = \frac{\lambda_0^2}{c} \mathcal{E}_\lambda(\lambda_0) = \frac{c}{v^2} \mathcal{E}_\lambda\left(\frac{c}{v}\right),$$

et de même :

$$\mathcal{E}_\lambda(\lambda_0) = \frac{c}{\lambda_0^2} \mathcal{E}_v\left(\frac{c}{\lambda_0}\right).$$

## 5.2 Sources de lumière blanche

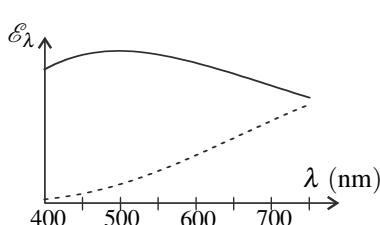
Une **lumière blanche** est une lumière dont le spectre est continu et contient toutes les longueurs d'onde du domaine visible.

C'est le cas de la *lumière du Soleil* dont le spectre, représenté sur la figure 6.10, contient ces longueurs d'onde avec un poids sensiblement égal.

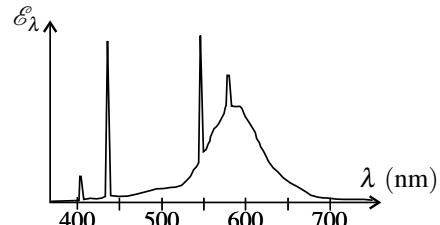
Les *lampes à filament* fonctionnent sur le principe de l'émission thermique : émission de lumière par un corps chaud. Elles émettent un spectre continu, assez pauvre en courtes longueurs d'onde ce qui explique l'aspect jaune de cette lumière (voir figure 6.10). L'émission de lumière visible s'accompagne aussi d'une forte émission dans le domaine des infrarouges, ce qui a pour effet de chauffer la lampe et faire diminuer très fortement le rendement énergétique.

Les *lampes dites « à économie d'énergie »* fonctionnent différemment. Un tube à décharge, analogue à celui d'une lampe spectrale (voir paragraphe suivant) produit une lumière au spectre discret. Cette lumière est en partie absorbée par une substance fluorescente qui réemet une lumière au spectre continu. Le spectre de la lumière émise contient des pics correspondant aux longueurs d'onde émises par le tube à décharge superposés au spectre continu de la fluorescence (voir figure 6.11).

Les *diodes électroluminescentes* fonctionnent sur le même principe, à partir d'une raie bleue assez large, émise à la suite d'une recombinaison électron-trou à la jonction entre deux semi-conducteurs.



**Figure 6.10** – Spectres de la lumière solaire (trait plein) et de la lumière d'une lampe à filament (pointillé).



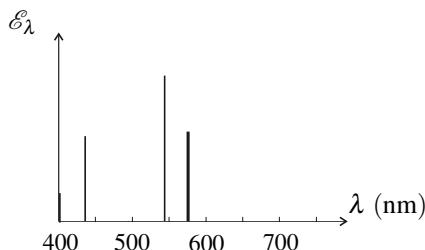
**Figure 6.11** – Spectre d'une lampe « à économie d'énergie ».

## 5.3 Lampes spectrales

L'élément central d'une **lampe spectrale** est une ampoule contenant un élément sous forme de vapeur dans laquelle on provoque une décharge électrique entre deux électrodes. Lorsque la lampe est mise sous tension, des électrons circulent entre les électrodes, accélérés par le champ électrique qui règne et entrent en collision avec les atomes de la vapeur. Ces atomes sont ainsi portés dans un état excité et se désexcitent en émettant des photons, dont l'énergie est égale à la différence d'énergie entre deux niveaux d'énergie de l'atome.

Une **lampe spectrale** émet une série de longueurs d'onde caractéristique de l'élément qu'elle contient. Le spectre est constitué de pics fins appelés **raies spectrales**.

La figure 6.12 montre l'allure du spectre d'une lampe au mercure utilisée en travaux pratiques : on trouve principalement une raie violette (404,7 nm), une raie indigo (435,8 nm), une raie verte (546,1 nm) et un doublet jaune orangé (577,0 et 579,1 nm) non résolu sur la figure. Il existe aussi une raie ultraviolette assez importante, qui est en dehors de la figure.



**Figure 6.12** – Spectre d'une lampe au mercure (basse pression).

La lumière d'une lampe au sodium (utilisée en travaux pratiques ou pour l'éclairage urbain) est jaune orangé et contient essentiellement deux longueurs d'onde très voisines 589,0 et 589,6 nm. C'est le « doublet jaune » du sodium.

## 5.4 Faisceaux lasers

La lumière d'un **faisceau laser** présente une raie spectrale unique beaucoup plus fine qu'une raie de lampe spectrale.

Les lasers plus courants sont les lasers hélium-néon et les diodes laser à semi-conducteurs. Les lasers hélium-néon les plus répandus émettent une radiation rouge de longueur d'onde 633 nm.

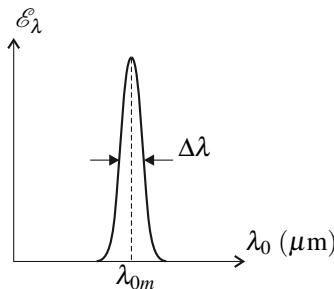
Le faisceau laser présente une divergence très faible. Il se caractérise aussi par un éclairement exceptionnellement élevé, ce qui fait qu'il est dangereux de le recevoir dans l'œil.

# 6 Trains d'ondes

## 6.1 La largeur des raies spectrales

On sait mesurer le profil fin des raies spectrales. Ces raies ont une allure voisine de la figure 6.13 et sont caractérisées par :

- la longueur d'onde  $\lambda_{0m}$  correspondant au maximum d'émission,
- la largeur à mi-hauteur  $\Delta\lambda$  qui est telle que  $\Delta\lambda \ll \lambda_{0m}$ ,
- la forme de la raie qui peut correspondre à différentes fonctions mathématiques.



**Figure 6.13** – Raie spectrale. L'échelle horizontale est fortement dilatée par rapport à celle de la figure 6.12.

### Remarque

Une radiation parfaitement sinusoïdale aurait une raie parfaitement fine ( $\Delta\lambda = 0$ ).

Dans le domaine de fréquences, la raie est caractérisée par la fréquence moyenne  $v_m = \frac{c}{\lambda_{0m}}$  et la largeur  $\Delta v$ . Étant donné que  $\Delta\lambda \ll \lambda_{0m}$  et  $\Delta v \ll v_m$  on peut écrire :

$$\Delta v = \Delta \left( \frac{c}{\lambda_0} \right) \simeq \frac{c \Delta \lambda}{\lambda_{0m}^2} = v_m \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{0m}}$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_{0m}} \simeq \frac{\Delta v}{v_m}$$

Les valeurs des largeurs de raies sont très variables, les lasers ayant des raies nettement plus fines que les lampes spectrales. Les ordres de grandeurs habituels sont :

- pour une lampe spectrale :  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_{0m}} \sim 10^{-3}$ ,
- pour un laser :  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_{0m}} \sim 10^{-7}$ .

## 6.2 Interprétation

La théorie mathématique de la transformée de Fourier indique qu'un signal limité dans le temps et de durée approximative  $\tau_c$  a un spectre dont la largeur en fréquence est telle que :

$$\Delta v \sim \frac{1}{\tau_c}.$$

On trouvera des exemples illustrant ce résultat dans l'appendice mathématique.

Si ce signal est quasiment sinusoïdal de période  $T$ , la fréquence moyenne du spectre est  $v_m = \frac{1}{T}$ . On en tire :

$$\frac{\Delta v}{v_m} \sim \frac{T}{\tau_c} = \frac{1}{N},$$

où  $N$  est le nombre d'oscillations du signal.

Pour tenter d'interpréter la largeur d'une raie spectrale, calculons l'ordre de grandeur de la durée  $\tau_c$ . Il vient :

$$\tau_c \sim T \frac{v_m}{\Delta v} \sim \begin{cases} 10^{-11} \text{ s} & \text{dans le cas d'une lampe spectrale} \\ 10^{-7} \text{ s} & \text{dans le cas d'un laser} \end{cases}$$

en prenant  $T \sim 10^{-14}$  s pour la vibration lumineuse. Ce temps  $\tau_c$ , bref à notre échelle mais très grand devant  $T$ , est la durée de l'émission lumineuse d'un atome. L'onde limitée dans le temps émise par un atome est appelée **train d'ondes**.

Les atomes émettent la lumière par **trains d'ondes** de durée limitée  $\tau_c$  telle que :

$$\Delta v \sim \frac{1}{\tau_c} \quad (6.18)$$

La durée moyenne des trains d'ondes est appelée **temps de cohérence**.

## 6.3 Longueur de cohérence

### a) Définition

On appelle **longueur de cohérence**  $\ell_c$  la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée  $\tau_c$  d'un train d'ondes soit :

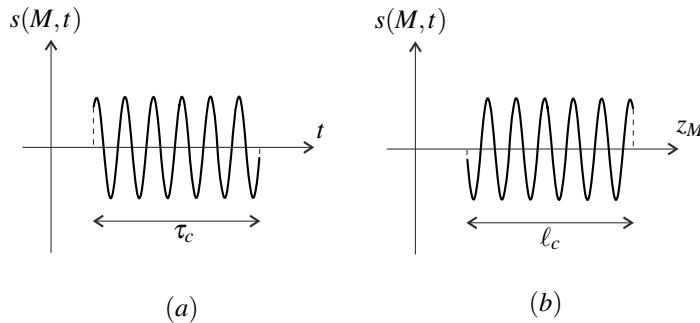
$$\ell_c = c\tau_c \quad (6.19)$$

La figure 6.14 illustre la signification du temps de cohérence et de la longueur de cohérence :

- en un point  $M$  donné le passage du train d'ondes dure en moyenne un temps  $\tau_c$  (figure 6.14 à gauche);
- à un instant  $t$  donné, le train d'ondes a une extension spatiale moyenne le long de la direction de propagation égale à  $\ell_c$  (figure 6.14 à droite).

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples de valeurs de largeur de raie, temps de cohérence et longueur de cohérence.

| source                           | $\lambda_{0m}$ (nm) | $\Delta\lambda$ (nm) | $\Delta v$ (Hz) | $\tau_c$ (s)         | $\ell_c$             |
|----------------------------------|---------------------|----------------------|-----------------|----------------------|----------------------|
| lumière blanche                  | 575                 | 350                  | $3.10^{14}$     | $3.10^{-15}$         | $0,9 \mu\text{m}$    |
| lampe au mercure                 | 546,1               | 1,0                  | $1.10^{12}$     | $10^{-12}$           | $0,3 \text{ mm}$     |
| lampe étalon au Kr <sup>86</sup> | 605,6               | $1,2.10^{-3}$        | $10^9$          | $10^{-9}$            | $30 \text{ cm}$      |
| laser He-Ne stabilisé            | 632,8               | $10^{-6}$            | $7,5.10^5$      | $1,3 \times 10^{-6}$ | $\sim 400 \text{ m}$ |



**Figure 6.14 –** (a) : extension spatiale d'un train d'ondes ; (b) : extension temporelle d'un train d'ondes.

### b) Relation entre la longueur de cohérence et la largeur de raie

On peut relier la longueur d'onde moyenne du train d'ondes  $\lambda_{0m}$ , la largeur de la raie  $\Delta\lambda$  et la longueur de cohérence  $\ell_c$ . En effet,  $\Delta\lambda = \Delta\left(\frac{c}{v}\right) \simeq \frac{c}{v_m^2} \Delta v$ , en assimilant les largeurs  $\Delta\lambda$  et  $\Delta v$  très faibles à des variations élémentaires. Il vient donc :  $\Delta\lambda = \frac{\lambda_{0m}^2}{c} \Delta v \sim \frac{\lambda_{0m}^2}{c \tau_c}$ , puisque  $\tau_c \sim \frac{1}{\Delta v}$ , soit finalement :

$$\Delta\lambda \sim \frac{\lambda_{0m}^2}{\ell_c}. \quad (6.20)$$

Il faut retenir cette relation et savoir l'établir. On remarque que  $\Delta\lambda$  tend vers 0 quand la longueur de cohérence tend vers l'infini : si les trains d'ondes sont infiniment longs, le signal parfaitement sinusoïdal.

## 6.4 Modèle des trains d'ondes aléatoires

L'émission de lumière par les atomes est un phénomène quantique. Les atomes émettent à des instants aléatoires des photons ayant une énergie  $hv$  voisine d'une énergie  $hv_0$  mais pas exactement égale. Ainsi la fréquence des ondes électromagnétiques associées n'est pas unique. Une description non quantique du phénomène est le **modèle des trains d'ondes aléatoires** selon lequel chaque train d'ondes a une amplitude et une phase aléatoire.

On peut constater que la durée d'un train d'ondes est très inférieure au temps de réponse d'un récepteur lumineux. Les observations et les mesures portent sur un très grand nombre de trains d'ondes puisque :

- le nombre d'atomes émettant à un instant donné est très grand ;
- les trains d'ondes sont renouvelés un très grand nombre de fois pendant le temps de réponse du récepteur.

On modélise la **lumière quasimonochromatique** d'une raie spectrale de manière simplifiée comme une onde monochromatique :

- d'amplitude  $s_0$  constante,
- de retard de phase à l'émission  $\varphi_0$  aléatoire prenant toutes les valeurs possibles entre 0 et  $2\pi$  et changeant de valeur au bout d'un temps  $\tau_c$ .

### Remarques

$s_0$  est la moyenne de l'amplitude sur un très grand nombre de trains d'ondes.

Le retard de phase en un point  $M$  est aussi aléatoire puisque :  $\varphi(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM)$ .

Enfin, il faut retenir que la moyenne intervenant dans la définition (6.1) de l'éclairement ou de intensité vibratoire porte sur une durée de l'ordre du temps de réponse du récepteur qui est très supérieure à  $\tau_c$ .

### SYNTHESE

#### SAVOIRS

- la grandeur (vibration) lumineuse est une composante du champ électrique d'une onde électromagnétique
- les détecteurs optiques sont sensibles à la valeur moyenne du carré de la grandeur lumineuse sur leur temps d'intégration
- le retard de phase se formule en fonction de la différence de chemin optique
- une source est caractérisée par un éclairement spectral
- l'émission des sources lumineuses classiques possède un caractère fortement aléatoire

#### SAVOIR-FAIRE

- définir une onde plane, une onde sphérique
- décrire la formation des images en termes de rayons lumineux et en termes de surfaces d'onde
- utiliser l'égalité de chemins optiques sur des rayons reliant deux points conjugués
- exprimer un retard de phase en fonction de la différence de chemin optique.
- écrire la relation entre temps de cohérence et largeur spectrale spectrale
- connaître des exemples de sources lumineuses et les caractériser par leur spectre et leur longueur de cohérence

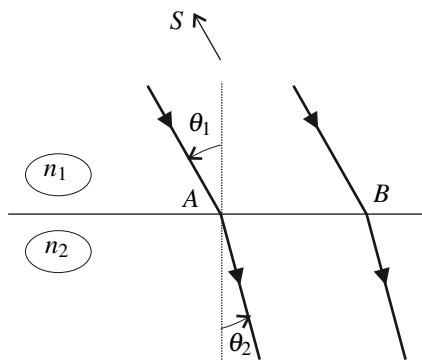
#### MOTS-CLÉS

- |                          |                         |                    |
|--------------------------|-------------------------|--------------------|
| • vibration lumineuse    | • chemin optique        | • trains d'onde    |
| • intensité, éclairement | • surface d'onde        | • détecteur        |
| • approximation scalaire | • temps de cohérence    | • temps de réponse |
| • onde sphérique         | • longueur de cohérence | • spectre lumineux |

## S'ENTRAÎNER

**6.1 Accord de phase sur un dioptre (\*)**

Une onde plane monochromatique émise par une source  $S$  tombe sur un dioptre plan séparant le milieu d'indice  $n_1$  contenant la source d'un milieu d'indice  $n_2$ . On note  $\theta_1$  l'angle d'incidence sur le dioptre et  $\theta_2$  l'angle de réfraction.

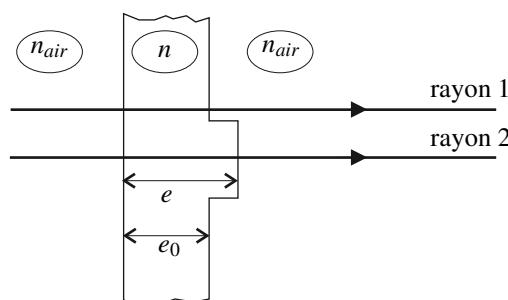


**1.** En faisant apparaître le point  $H$  situé sur le rayon passant par  $B$  tel que  $(SA) = (SH)$ , trouver une expression de  $(SB) - (SA)$  en fonction de  $l = AB$  et  $\theta_1$ . Trouver de même une expression de  $(SB) - (SA)$  en fonction de  $l$  et  $\theta_2$ . Montrer qu'on retrouve la loi de la réfraction liant  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

**2.** On suppose que l'onde incidente et l'onde réfractée ont le même retard de phase au point  $A$ . Montrer qu'elles ont le même retard de phase en tout point  $M$  du dioptre.

**6.2 Lame de verre avec un défaut d'épaisseur (\*)**

Une lame de verre, parfaitement transparente, à faces parallèles, d'indice de réfraction  $n$  et de faible épaisseur  $e_0$ , comporte un petit défaut localisé en  $M$ , où l'épaisseur devient  $e$ . Elle est éclairée par un faisceau de lumière parallèle issu d'une source monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

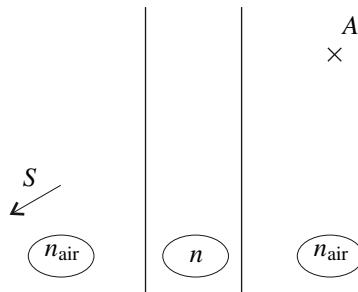


## CHAPITRE 6 – MODÈLE SCALAIRE DES ONDES LUMINEUSES

- Déterminer le déphasage à l'infini entre les rayons 1 et 2.
- Représenter sur la figure une surface d'onde avant la traversée de la lame et une surface après la traversée de la lame. En préciser les caractéristiques.

**6.3 Différence de marche introduite par une lame à faces parallèles (★★)**

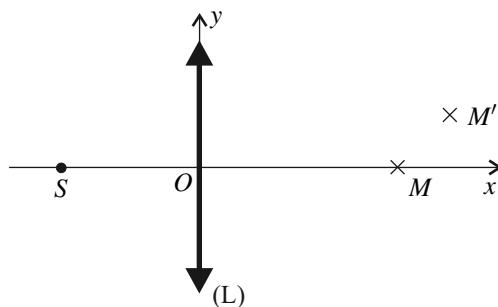
Une lame de verre à face parallèles, d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n$  est interposée entre une source  $S$  située à l'infini dans l'air, d'indice  $n_{\text{air}}$ , et un point  $A$  situé aussi dans l'air.



- Tracer soigneusement sur la figure précédente le rayon lumineux, issu de  $S$ , qui arriverait en  $A$  en l'absence de la lame, ainsi que le rayon qui arrive en  $A$  en présence de celle-ci.
- On s'intéresse à la grandeur  $\delta_{\text{lame}} = (SA)_{\text{avec lame}} - (SA)_{\text{sans lame}}$ , différence des chemins optiques entre  $S$  et  $A$  en présence et en l'absence de la lame (ces chemins optiques sont infinis). Montrer que :  $\delta = e(n \cos r - n_{\text{air}} \cos i)$  où  $i$  est l'angle d'incidence des rayons lumineux sur la lame et  $r$  l'angle de réfraction. Vérifier le résultatat dans le cas où  $i = 0$ . Donner une expression de  $\delta$  approchée au deuxième ordre lorsque l'angle  $i$  est très petit.

**6.4 Chemins optiques (★★)**

La lentille ( $L$ ) est en verre d'indice  $n$  et a une épaisseur  $e$  au niveau de son centre optique  $O$ . Sa distance focale image est  $f'$ . Elle est plongée dans l'air d'indice  $n_{\text{air}}$ . Soient  $M$  et  $M'$  deux points dont les coordonnées dans le repère  $Oxy$  sont respectivement  $(x, 0)$  et  $(x', y')$ . Une source  $S$  est placée devant ( $L$ ) sur l'axe  $Ox$ .



**1.** On suppose que  $OS = f'$ . Construire les rayons issus de  $S$  qui parviennent en  $M$  et en  $M'$ . Exprimer les chemins optiques  $(SM)$  et  $(SM')$ .

**2.** Même question avec  $OS = \frac{3f'}{2}$ .

### 6.5 Raie quasi-monochromatique ( $\star$ )

Une raie spectrale d'un lampe au cadmium a pour caractéristiques : longueur d'onde moyenne  $\lambda_{0m} = 643,8$  nm et largeur en longueur d'onde  $\Delta\lambda = 1,3$  pm.

**1.** Quelle est sa couleur ?

**2.** Calculer la longueur de cohérence  $\ell_c$ , le temps de cohérence  $\tau_c$  ainsi que le nombre moyen d'oscillations par train d'onde.

## APPROFONDIR

### 6.6 Faisceau laser ( $\star$ )

Un laser, de puissance lumineuse  $\mathcal{P} = 5,0$  mW, émet un fin pinceau lumineux sensiblement parallèle, de longueur d'onde 632,8 nm, non polarisé. La répartition radiale d'éclairement est supposé gaussienne, c'est à dire modélisable par

$$\mathcal{E}(w) = \mathcal{E}_0 \exp \left( - \left( \frac{w}{w_0} \right)^2 \right)$$

où  $w$  est la distance à l'axe et  $w_0 = 1,0$  mm s'appelle le diamètre (en anglais *waist*) du laser.

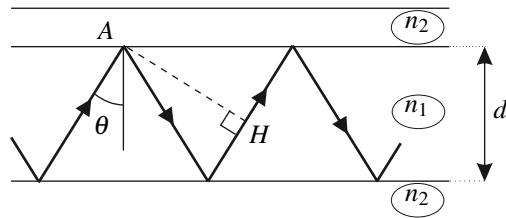
**1.** Représenter la fonction  $\mathcal{E}(w)$ . Déterminer l'éclairement  $\mathcal{E}_0$ .

**2.** On élargit le faisceau laser à l'aide d'un dispositif afocal pour lui donner un diamètre de  $w'_0 = 10$  cm. Que devient l'éclairement ?

**3.** On limite alors le faisceau à l'aide d'un diaphragme de diamètre égal à 4 cm. Quelle erreur relative commet-on sur l'éclairement en considérant le faisceau obtenu est une onde plane ?

### 6.7 Fibre optique à saut d'indice ( $\star\star$ )

Une fibre optique est schématisée par une lame de verre d'épaisseur  $d$  et d'indice  $n_1$  placée entre deux couches de verre d'indice  $n_2 < n_1$ . Les rayons lumineux suivent des trajets compris dans un plan perpendiculaire à la lame, du type de celui qui est représenté sur la figure.



- À quelle condition portant sur l'angle  $\theta$  le rayon est-il confiné dans la lame d'indice  $n_1$  ?
  - Pour qu'il y ait propagation de l'énergie, l'onde doit être en phase aux points  $A$  et  $H$  de la figure. En déduire une nouvelle condition sur l'angle  $\theta$
  - Chaque valeur de  $\theta$  correspond à un mode de propagation. Calculer le nombre de modes possibles si  $d = 50 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1,5$  et  $n_2 = 1,4$ .

## CORRIGÉS

## 6.1 Accord de phase sur un dioptre

1. D'après le théorème de Malus l'ensemble des points  $M$  tels que  $(SM) = (SM)$  est le plan passant par  $A$  orthogonal aux rayons incidents ;  $H$  est donc le projeté orthogonal de  $A$  sur le rayon incident arrivant en  $B$ . On a :

$$(SB) - (SA) = (SB) - (SH) = (HB) = n_1 \overline{HB} = n_1 l \sin \theta_1$$

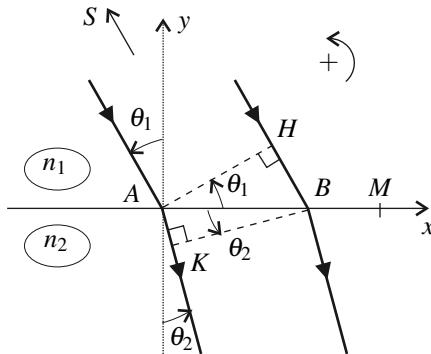
De même, si  $K$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur le rayon réfracté passant par  $A$ ,  $(SB) = (SK)$  et

$$(SB) - (SA) = (SK) - (SA) = (AK) = n_2 \overline{AK} = n_2 l \sin \theta_2$$

On trouve en comparant les deux expressions :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

qui est la loi de Descartes pour la réfraction.



2. Nous utilisons le repère  $Axyz$  défini sur la figure. L'onde incidente et l'onde réfractée sont planes et se propagent selon les vecteurs respectifs :

$$\vec{u}_1 = (\sin \theta_1 \vec{u}_x - \cos \theta_1 \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = (\sin \theta_2 \vec{u}_x - \cos \theta_2 \vec{u}_y).$$

Leur retard de phase en un point  $M$  du dioptre de coordonnées  $(x, 0, z)$  s'écrivent, en prenant le point  $A$  pour référence :

$$\varphi_1(M) = \varphi_1(A) + \frac{2\pi n_1}{\lambda} \vec{u}_1 \cdot \vec{AM} = \varphi_1(A) + \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_1 x$$

et

$$\varphi_2(M) = \varphi_2(A) + \frac{2\pi n_2}{\lambda} \vec{u}_2 \cdot \vec{AM} = \varphi_2(A) + \frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \sin \theta_2 x,$$

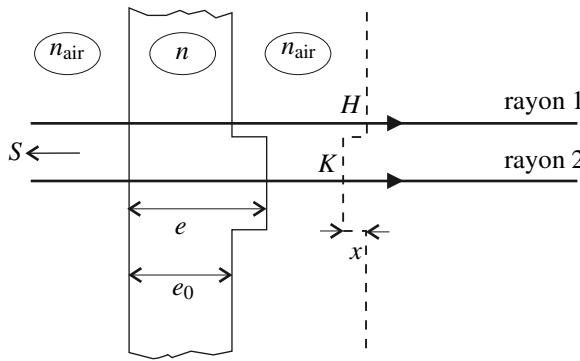
en notant  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide. Par hypothèse  $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$  ; la loi de Descartes permet de conclure que :  $\varphi_1(M) = \varphi_2(M)$ .

## CHAPITRE 6 – MODÈLE SCALAIRE DES ONDES LUMINEUSES

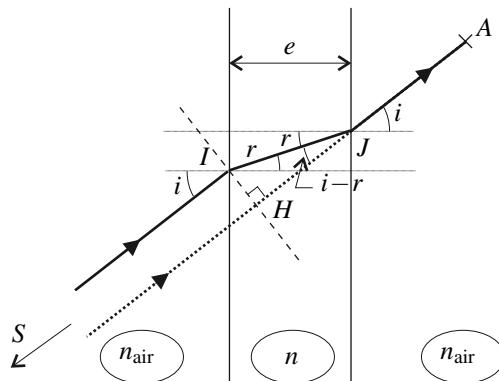
**6.2 Lame de verre avec un défaut d'épaisseur**

**1.** Le rayon numéro 2 se propage dans le verre sur une distance  $e - e_0$ , alors que le rayon 1 se propage sur cette distance dans l'air ; le chemin optique du rayon numéro 2 est donc supérieur de  $(n - n_{\text{air}})(e - e_0)$  (remarquons que les deux chemins optiques sont infinis). D'après la relation entre chemin optique et augmentation de retard de phase, la vibration transportée par le rayon 2 est en retard sur la vibration transportée par le rayon 1 de :  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n - n_{\text{air}})(e - e_0)$ .

**2.** La surface d'onde (en tireté sur la figure) présente un creux de profondeur  $x$ . Soient  $H$  et  $K$  les points de cette surface situés respectivement sur les rayons 1 et 2 et  $S$  la source (située à l'infini). Nous avons  $(SH) = (SK)$ , d'où  $n_{\text{air}}x = (n - n_{\text{air}})(e - e_0)$  soit :  $x = \frac{n - n_{\text{air}}}{n_{\text{air}}}(e - e_0)$

**6.3 Différence de marche introduite par une lame à faces parallèles**

**1.** Le rayon sortant de la lame à faces parallèles est parallèle au rayon incident.



**2.**  $\delta = (SIJA) - (SHJA) = nIJ - n_{\text{air}}HJ$  car  $(SI) = (SH)$  d'après le théorème de Malus.

Or,  $IJ = \frac{e}{\cos r}$  et  $HJ = IJ \cos(i - r) = e \frac{\cos i \cos r + \sin i \sin r}{\cos r} = e \left( \cos i + \frac{n \sin^2 r}{n_{\text{air}} \cos r} \right)$ , car  $n_{\text{air}} \sin i = n \sin r$ .

Donc :  $\delta = e \left( n \frac{1 - \sin^2 r}{\cos r} - n_{\text{air}} \cos i \right) = e(n \cos r - n_{\text{air}} \cos i)$ .

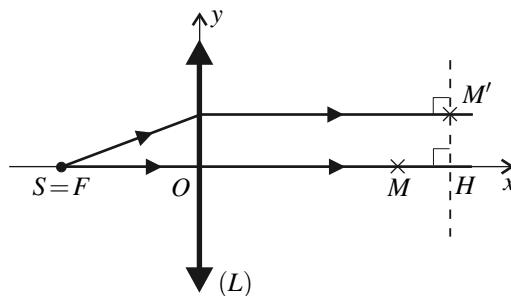
Si  $i = 0$ ,  $r = 0$  et le résultat  $\delta = e(n - n_{\text{air}})$  est évident puisque la lumière se propage sur la distance  $e$  dans le verre d'indice  $n$  au lieu de se propager sur cette distance dans l'air.

Si  $i$  est très petit, alors  $r$  est aussi très petit ; on négligera les termes d'ordre  $\geq 3$ . La loi de Descartes s'écrit :  $r \simeq \frac{n_{\text{air}}}{n} i$ .

Et :  $\delta \simeq e \left( n - n \frac{r^2}{2} - n_{\text{air}} + n_{\text{air}} \frac{i^2}{2} \right) = e(n - n_{\text{air}}) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{n_{\text{air}}}{n} i^2 \right)$

## 6.4 Chemin optique

**1.**  $S$  est le foyer objet de la lentille ; les rayons parvenant en  $M$  et  $M'$  sont parallèles à l'axe  $Ox$ .



Le rayon arrivant en  $M$  traverse une épaisseur  $e$  de verre donc :

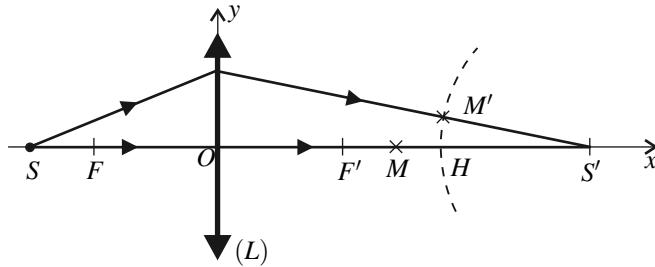
$$(SM) = n_{\text{air}}SM + (n - n_{\text{air}})e = n_{\text{air}}(f' + x) + (n - n_{\text{air}})e$$

Les surfaces d'ondes après  $(L)$  sont les plans perpendiculaires à  $Ox$  ; soit  $H$  le point de l'axe  $Ox$  situé sur la même surface d'onde que  $M'$ . Nous avons :

$$(SM') = (SH) = n_{\text{air}}(f' + x') + (n - n_{\text{air}})e$$

**2.** L'image de  $S$  par  $(L)$  est le point  $S'$  tel que :  $\frac{1}{OS'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{OS} = \frac{1}{f'} - \frac{2}{3f'}$  soit  $\overline{OS'} = 3f'$ . Les rayons parvenant en  $M$  et  $M'$  passent par  $S'$ .

## CHAPITRE 6 – MODÈLE SCALAIRE DES ONDES LUMINEUSES



Comme à la question précédente on trouve :  $(SM) = n_{\text{air}} \left( \frac{3f'}{2} + x \right) + (n - n_{\text{air}})e$ .

Les surfaces d'onde sont les sphères de centre  $S'$ . Soit  $H$  le point de l'axe  $Ox$  situé sur la même surface d'onde que  $M'$  ; ce point a pour coordonnées  $(3f' - \sqrt{(x' - 3f')^2 + y'^2}, 0)$ . Nous trouvons donc :

$$(SM') = (SH) = n_{\text{air}} \left( \frac{9f'}{2} - \sqrt{(x' - 3f')^2 + y'^2} \right) + (n - n_{\text{air}})e$$

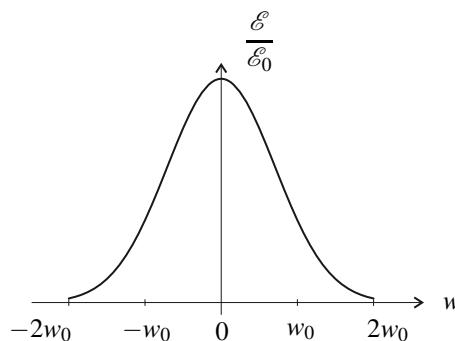
### 6.5 Raie quasi monochromatique

1. C'est une raie rouge.

2.  $\ell_c = \frac{\lambda_{0m}^2}{\Delta\lambda} \simeq 32 \text{ cm}$  et  $\tau_c = \frac{\ell_c}{c} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

Le nombre d'oscillations par train d'onde est  $N = \frac{\ell_c}{\lambda_{0m}} \simeq 5 \cdot 10^5$ .

### 6.6 Faisceau laser



1. La puissance émise par le laser est :

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty \mathcal{E}(w) 2\pi w dw = \left[ -\pi \mathcal{E}_0 w_0^2 \exp \left( -\left( \frac{w}{w_0} \right)^2 \right) \right]_0^\infty = \pi \mathcal{E}_0 w_0^2$$

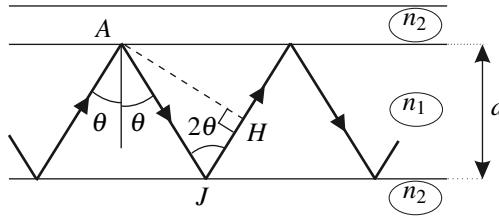
Donc :  $\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{P}}{\pi w_0^2} = 1,6 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ .

2. L'éclairement devient  $\mathcal{E}(w) = \mathcal{E}'_0 \exp\left(-\left(\frac{w}{w'_0}\right)^2\right)$ , avec  $\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}_0 \left(\frac{w_0}{w'_0}\right)^2 = 10^{-4} \mathcal{E}_0$ .

3. En assimilant le faisceau à une onde plane, on considère que son éclairement est constant. Or celui-ci varie entre  $\mathcal{E}'_0$  et  $\mathcal{E}'_0 \exp\left(-\left(\frac{w_1}{w'_0}\right)^2\right) = 0,85 \mathcal{E}'_0$ . L'erreur relative commise est de 7,5%.

## 6.7 Fibre optique à saut d'indice

1. Il faut qu'il y ait réflexion totale aux points tels que A. L'angle d'incidence du rayon est  $\theta$ ; il faut :  $\sin \theta > \frac{n_2}{n_1}$ .



2. Le déphasage entre les points H et A est  $\varphi(H) - \varphi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AH)$ . La condition posée est  $\varphi(H) - \varphi(A) = m \times 2\pi$ , avec  $m$  entier, ce qui est équivalent à  $(AH) = m\lambda_0$ .

Or :  $(AH) = n_1(AJ + JH)$ , avec  $AJ = \frac{d}{\cos \theta}$  et  $JH = AJ \cos(2\theta) = d \frac{\cos(2\theta)}{\cos \theta}$ , soit  $(AH) = 2n_1 d \cos \theta$ .

La condition de propagation de l'énergie est finalement :

$$\cos \theta = m \frac{\lambda_0}{2n_1 d}, \text{ avec } m \text{ entier}$$

3. La condition de réflexion totale s'écrit aussi  $\cos \theta < \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$ . Les valeurs possibles de l'entier  $m$  sont celles qui vérifient  $0 \leq m \leq \frac{2d}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ . Numériquement :  $0 \leq m \leq 107,7$ . Il y a 108 modes possibles.



# 7

# Interférences de 2 ondes lumineuses

Dans ce chapitre on s'intéresse aux interférences de deux ondes lumineuses. Le phénomène d'interférences à deux ondes a été étudié dans le cours de première année pour des ondes mécaniques. Dans le cas des ondes lumineuses, on doit tenir compte de la **cohérence** des ondes.

## 1 Interférences lumineuses

Les interférences lumineuses sont une manifestation expérimentale du caractère ondulatoire de la lumière, qui trouve une interprétation naturelle dans le cadre du formalisme de l'optique ondulatoire. De façon générale, le terme **interférences lumineuses** recouvre en fait toutes les situations où est réalisée la superposition de deux ou plusieurs ondes lumineuses.

On dira qu'il y a **interférences** chaque fois que l'intensité vibratoire résultant de la superposition de plusieurs ondes électromagnétiques diffère de la superposition des intensités vibratoires des différentes ondes.

En optique, les interférences ne sont observables que lorsque les ondes sont **cohérentes** : nous serons amenés à expliciter cette notion.

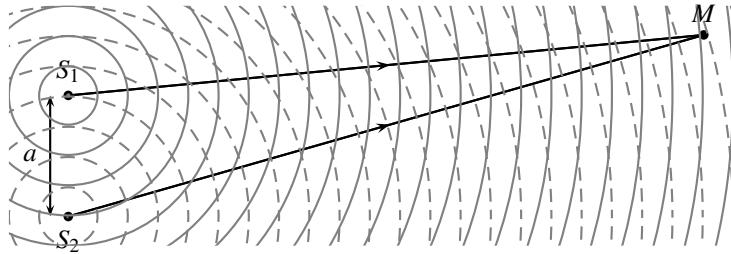
Sur un plan historique, la description et l'interprétation du phénomène d'interférences lumineuses doivent beaucoup à Thomas Young (1773-1829) et Augustin Fresnel (1788-1827). D'un point de vue pratique, les interférences jouent un rôle important en métrologie, mais aussi dans l'observation astronomique pour déterminer le diamètre des étoiles, méthode utilisée depuis plus d'un siècle et encore d'actualité !

Dans ce chapitre on s'intéresse à la superposition de deux ondes lumineuses. La superposition de  $N$  ondes fait l'objet d'un chapitre ultérieur.

## 2 Intensité vibratoire résultante

### 2.1 Terme d'interférences

On envisage la superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques issues de deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  (voir figure 7.1).



**Figure 7.1** – Superposition de deux ondes lumineuses quasi-monochromatiques émises par deux sources ponctuelles.

On suppose que les deux ondes ont a priori des pulsations différentes. Au point  $M$  et à l'instant  $t$  elles s'écrivent :

$$s_1(M, t) = s_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \text{ et } s_2(M, t) = s_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)),$$

où les retards de phase au point  $M$  s'écrivent :

$$\varphi_1(M) = \varphi_{10} + \frac{\omega_1}{c} (S_1 M) \text{ et } \varphi_2(M) = \varphi_{20} + \frac{\omega_2}{c} (S_2 M).$$

Les phases  $\varphi_{10}$  et  $\varphi_{20}$  sont les phases à l'émission en  $S_1$  et  $S_2$ . Pour des ondes parfaitement monochromatiques, leurs valeurs sont parfaitement définies. Pour des ondes lumineuses quasi-monochromatiques elles sont fluctuantes (voir chapitre précédent)

La vibration lumineuse résultant s'obtient en ajoutant les deux vibrations lumineuses :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = s_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) + s_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)).$$

L'intensité vibratoire au point  $M$  s'en déduit :

$$I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle,$$

où la valeur moyenne est calculée pendant une durée égale à la durée d'intégration du détecteur (c'est la durée que prend le détecteur pour effectuer une mesure).

$$I(M) = \langle s_1^2(M, t) \rangle + \langle s_2^2(M, t) \rangle + \langle 2s_{01}s_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle.$$

Les intensités vibratoires  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  produites en  $M$  par  $S_1$  ou  $S_2$  seule sont respectivement égales à  $\langle s_1^2(M, t) \rangle$  et  $\langle s_2^2(M, t) \rangle$ . La relation précédente peut donc être mise sous la forme suivante :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + \langle 2s_{01}s_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle. \quad (7.1)$$

On constate que l'intensité  $I$  diffère de l'addition  $I_1 + I_2$ . Le terme  $I_{12} = I - I_1 - I_2$  est appelé **terme d'interférences** :

$$I_{12}(M) = \langle 2s_01s_02 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle.$$

### Remarque

On obtient la même expression pour l'éclairement, qui est proportionnel à l'intensité vibratoire :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2K \langle s_01s_02 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle.$$

## 2.2 Notion d'ondes cohérentes

Les interférences sont visibles si et seulement si le terme d'interférences est non nul. Dans ce cas, on dit que les deux ondes sont **cohérentes**. On retiendra le résultat suivant.

- Deux ondes sont **cohérentes** si leur superposition conduit à un terme d'interférences non nul.
- Inversement, lorsque le terme d'interférences est nul, les deux ondes sont **incohérentes**. Dans ce cas, l'intensité vibratoire résultante est la somme des intensités des deux ondes :  $I = I_1 + I_2$ .

Le calcul de l'intensité vibratoire que l'on vient de mener permet de dégager des conditions nécessaires de cohérence. En explicitant davantage le calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{12}(M) &= \langle 2s_01s_02 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle, \\ &= \langle s_01s_02 \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \\ &\quad + \langle s_01s_02 \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle. \end{aligned}$$

Le temps de réponse des détecteurs optiques usuels est très largement supérieure à la période des ondes lumineuses visibles (de l'ordre de  $2 \times 10^{-15}$  s). Dans le processus de mesure, les termes sinusoïdaux qui figurent dans l'expression de  $I_{12}$  sont moyennés sur un nombre gigantesque de périodes. Or, la moyenne d'un terme du type  $\cos(\omega t - \varphi)$  est nulle, à moins que  $\omega$  ne soit nul. On en déduit que le terme d'interférences  $I_{12}$  est nul si  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

**Première condition de cohérence** : il n'y a pas d'interférences entre deux ondes de pulsation différentes. Elles sont incohérentes et leurs intensités vibratoires (ou leurs éclairements) s'ajoutent :  $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$ .

Pour obtenir des interférences, on doit donc faire en sorte que les deux ondes qui interfèrent en  $M$  aient la même pulsation. Dans toute la suite, on supposera que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Le terme d'interférences est alors :

$$\begin{aligned} I_{12}(M) &= \langle s_01s_02 \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle, \\ &= \left\langle s_01s_02 \cos\left(\frac{\omega}{c}((S_2M) - (S_1M)) + \varphi_{02} - \varphi_{01}\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Pour des ondes parfaitement monochromatiques, les termes  $s_{01}s_{02}$  et  $\varphi_{02} - \varphi_{01}$  restent invariables. Mais celles-ci n'ont pas de réalité physique en optique. Il faut envisager une situation plus réelle : celle où les deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  rayonnent des ondes quasi-monochromatiques décrites par le modèle des trains d'ondes vu dans le chapitre précédent. Dans ce modèle les amplitudes  $s_{01}$  et  $s_{02}$  sont constantes et les phases à l'émission  $\varphi_{01}$  et  $\varphi_{02}$  varient aléatoirement dans le temps. Si  $\varphi_{02} - \varphi_{01}$  prend de très nombreuses valeurs aléatoires pendant la durée sur laquelle la moyenne est calculée (durée égale au temps de réponse du détecteur), la moyenne du cosinus dans (7.2) est nulle et il n'y a pas d'interférences.

**Deuxième condition de cohérence** : deux ondes de même pulsation sont cohérentes si leur déphasage est constant ou varie très lentement de manière à être quasiment constant sur une durée égale au temps de réponse du détecteur utilisé.

On reviendra à la section 5 sur cette condition de cohérence. Dans la suite on suppose que l'on a deux ondes cohérentes. Le terme d'interférence se met alors sous la forme :

$$I_{12}(M) = s_{01}s_{02} \cos(\Delta\varphi(M)),$$

où  $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ , soit encore, puisque  $I_1(M) = \langle s_1^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2}s_{01}^2$  et  $I_2(M) = \langle s_2^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2}s_{02}^2$  :

$$I_{12}(M) = 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos(\Delta\varphi(M)),$$

### 3 Formule de Fresnel

#### 3.1 Énoncé

On obtient des interférences lumineuses entre deux ondes monochromatiques de même pulsation **cohérentes**. L'intensité vibratoire (ou l'éclairement) est alors donné par la **formule de Fresnel** :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos(\Delta\varphi(M)), \quad (7.3)$$

où  $\Delta\varphi(M)$  représente le retard de phase au point  $M$  d'une onde par rapport à l'autre.

#### Remarque

En utilisant la notation complexe, on peut retrouver de façon rapide la formule de Fresnel pour deux ondes monochromatiques de même pulsation. Écrivons :

$$\underline{s}_1(M) = s_{10} \exp(i(\omega t - \varphi_1(M))) \text{ et } \underline{s}_2(M) = s_{20} \exp(i(\omega t - \varphi_2(M))).$$

La vibration lumineuse résultante  $\underline{s}(M)$  est égale à  $\underline{s}_1(M) + \underline{s}_2(M)$  et l'intensité vibratoire résultante est :

$$\begin{aligned} I(M) &= \frac{1}{2}\underline{s}(M) \cdot \underline{s}^*(M), \\ &= \frac{1}{2} \left( s_{10} e^{i(\omega t - \varphi_1(M))} + s_{20} e^{i(\omega t - \varphi_2(M))} \right) \cdot \left( s_{10} e^{-i(\omega t - \varphi_1(M))} + s_{20} e^{-i(\omega t - \varphi_2(M))} \right), \\ &= \frac{1}{2} s_{10}^2 + \frac{1}{2} s_{20}^2 + s_{10}s_{20} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)), \\ &= I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos(\Delta\varphi(M)). \end{aligned}$$

### 3.2 Interprétation physique

Selon le signe de  $\cos(\Delta\varphi(M))$ , l'éclairement résultant est supérieur ou inférieur à la somme des éclairements des ondes. On distingue les deux cas suivants :

**Interférences constructives** : elles sont réalisées en un point où  $I(M) > I_1(M) + I_2(M)$ , c'est-à-dire si  $\cos(\Delta\varphi(M)) > 0$ .

**Interférences destructives** : elles sont réalisées en un point où  $I(M) < I_1(M) + I_2(M)$ , c'est-à-dire si  $\cos(\Delta\varphi(M)) < 0$ .

La figure 7.2 donne l'intensité vibratoire en fonction de la différence de phase  $\Delta\varphi(M)$ .

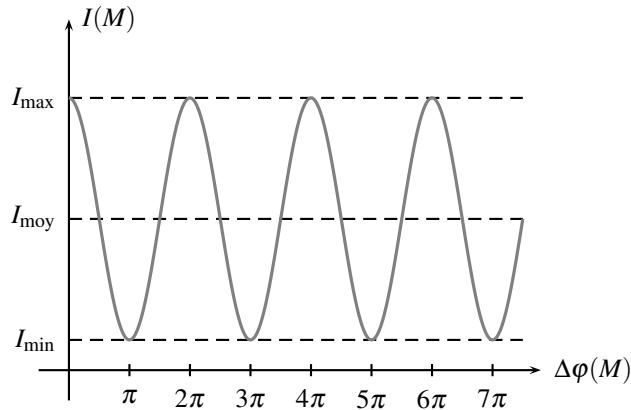


Figure 7.2 – Variation de l'intensité vibratoire en fonction de la différence de phase.

#### Remarques

- la valeur moyenne  $I_{\text{moy}}$  est  $I_1(M) + I_2(M)$ . Ce résultat est conforme à la conservation de l'énergie. Le phénomène d'interférences ne modifie que la distribution spatiale de l'énergie mais ne change pas l'énergie totale.

- l'éclairement est maximal si  $\cos(\Delta\varphi(M)) = 1$ , c'est-à-dire si :

$$\Delta\varphi(M) = 2m\pi,$$

où  $m$  est un entier relatif. La valeur maximale de l'intensité vibratoire est  $I_{\max} = (\sqrt{I_1(M)} + \sqrt{I_2(M)})^2$ . Aux points où cette situation est réalisée on dit que les interférences sont **totalement constructives**.

- l'éclairement est minimal si  $\cos(\Delta\varphi(M)) = -1$ , c'est-à-dire si :

$$\Delta\varphi(M) = (2m+1)\pi,$$

où  $m$  est un entier relatif. La valeur minimale de l'intensité vibratoire est  $I_{\min} = (\sqrt{I_1(M)} - \sqrt{I_2(M)})^2$ . Aux points où cette situation est réalisée on dit que les interférences sont **totalement destructives**.

Dans le cas particulier, qu'on rencontre néanmoins souvent, où les deux sources ont la même intensité vibratoire au point  $M$ , notée  $I_0(M)$ , alors la formule de Fresnel donne :

$$I(M) = 2I_0(M) \left( 1 + \cos(\Delta\varphi(M)) \right). \quad (7.4)$$

Dans cette situation,  $I_{\min} = 0$ , et l'on observe le comportement paradoxal selon lequel « lumière + lumière = obscurité »<sup>1</sup>.

### 3.3 Différence de marche et ordre d'interférences

Jusqu'à présent on a utilisé la différence de phase  $\Delta\varphi(M)$  qui a été définie comme la différence, au point  $M$ , du retard de phase de l'onde 2 et du retard de phase de l'onde 1 :  $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ . Pour deux **sources synchrones**, c'est-à-dire telles que  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ ,  $\Delta\varphi(M)$  s'exprime en fonction de la différence des chemins optiques :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(M) &= \left( \varphi_{02} + \frac{\omega}{c}(S_2 M) \right) - \left( \varphi_{01} + \frac{\omega}{c}(S_1 M) \right) \\ &= \frac{\omega}{c} ((S_2 M) - (S_1 M)) = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2 M) - (S_1 M)), \end{aligned}$$

où  $\lambda_0$  désigne la longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse considérée.

La différence des chemins optiques  $(S_2 M) - (S_1 M)$  est appelée **différence de marche** au point  $M$ . On la note  $\delta(M)$  :

$$\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M).$$

---

1. Le phénomène d'interférences totalement destructives est aussi obtenu en acoustique. On parle de contrôle actif du bruit. Ce phénomène permet d'isoler certains écouteurs du bruit environnant et d'apporter à l'utilisateur un bon confort d'écoute.

La différence de phase  $\Delta\varphi(M)$  s'exprime simplement en fonction de la différence de marche :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}. \quad (7.5)$$

### Remarque

Si l'on en revient à la définition du chemin optique, la différence de marche  $\delta(M)$  peut s'écrire en fonction des temps de parcours des deux ondes :

$$\delta(M) = c(t_{S_2M} - t_{S_1M}),$$

où  $t_{S_1M}$  représente la durée de propagation de l'onde de  $S_1$  à  $M$ . La définition de  $t_{S_2M}$  est équivalente. Il importe de retenir que la différence de marche est proportionnelle à la différence des durées de propagation. Un signe positif de  $\delta(M)$  traduit que l'onde provenant de  $S_2$  arrive au point  $M$  en **retard** par rapport à l'onde provenant de  $S_1$ .

On appelle **ordre d'interférences** le rapport de la différence de phase à  $2\pi$  :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}. \quad (7.6)$$

L'ordre d'interférences peut être relié à la différence de marche dans le cas de deux sources synchrones :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}. \quad (7.7)$$

L'intensité vibratoire, ou l'éclairement, est maximale lorsque l'ordre d'interférences est un **entier**  $m$  et minimale lorsque l'ordre d'interférences est un **demi-entier**  $m + \frac{1}{2}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

## 4 Figure d'interférences

### 4.1 Champ d'interférences

On appelle **champ d'interférences** la zone de l'espace éclairée par les deux ondes cohérentes. C'est dans cette zone nécessairement limitée qu'est éventuellement observable le phénomène d'interférences.

### 4.2 Franges d'interférences

L'éclairement varie en fonction de la différence de phase, qui dépend du point  $M$  d'observation.

On appelle **surfaces brillantes** l'ensemble des points  $M$  de l'espace où l'intensité vibratoire est maximale, ce qui se traduit par  $\Delta\phi(M) = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Les intersections de ces surfaces avec l'écran d'observation sont les courbes d'éclairement maximal et sont appelées **franges d'interférences brillantes**, ou plus simplement, franges brillantes.

On appelle **surfaces sombres** l'ensemble des points  $M$  de l'espace où l'intensité vibratoire est minimale, ce qui se traduit par  $\Delta\phi(M) = (2m+1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Les intersections de ces surfaces avec l'écran d'observation sont les courbes d'éclairement minimal et sont appelées **franges d'interférences sombres**, ou plus simplement franges sombres.

Sur l'écran, l'ensemble des franges d'interférences forme la figure d'interférences.

### 4.3 Contraste

On suppose que les intensités vibratoires  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$  sont pratiquement indépendants du point  $M$  et on les note  $I_1$  et  $I_2$ . C'est le cas réel des expériences d'optique au laboratoire.

On appelle **contraste** ou **visibilité** d'une figure d'interférences la quantité :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (7.8)$$

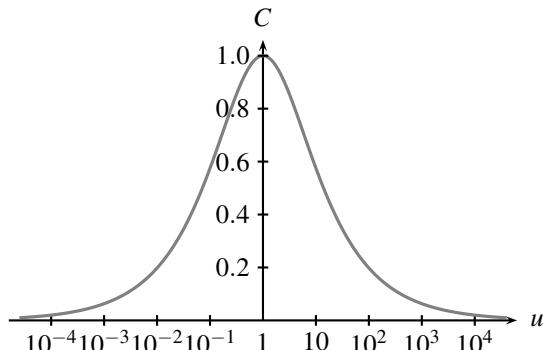
#### Remarque

On peut bien sûr définir le contraste à partir de l'éclairement. On obtient la même quantité :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}.$$

Le contraste est une grandeur sans dimension qui, par construction, varie entre 0 et 1. À partir de la formule de Fresnel (7.3), on obtient :

$$C = \frac{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 + (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2} = \frac{2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}{I_1 + I_2}.$$



**Figure 7.3** – Évolution du contraste en fonction du rapport  $u = \frac{I_1}{I_2}$  des intensités vibratoires. L'axe horizontal est gradué selon une échelle logarithmique.

Posons  $u = \frac{I_1}{I_2}$ . Alors, on peut écrire le contraste  $C$  sous la forme suivante :  $C = \frac{2\sqrt{u}}{1+u}$ . Sur la figure 7.3, on a représenté les variations de  $C$  en fonction de  $u$ . On observe que le contraste est maximum pour  $u = 1$ .

Le contraste a sa valeur maximale, égale à 1, lorsque  $I_1 = I_2$ .

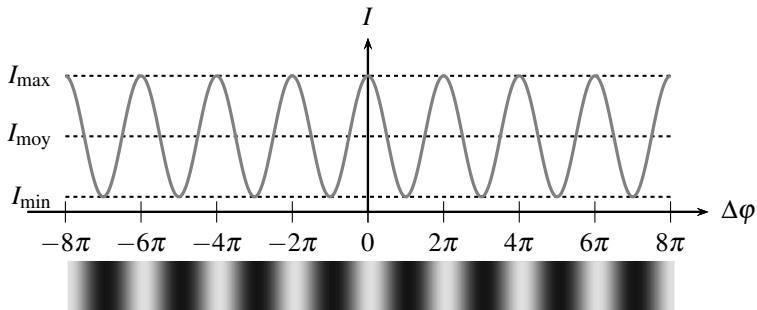
Dans la situation où  $I_1 = I_2$ , la formule de Fresnel (7.4) se met sous la forme suivante :

$$I(M) = I_{\text{moy}} \left( 1 + \cos(\Delta\varphi(M)) \right).$$

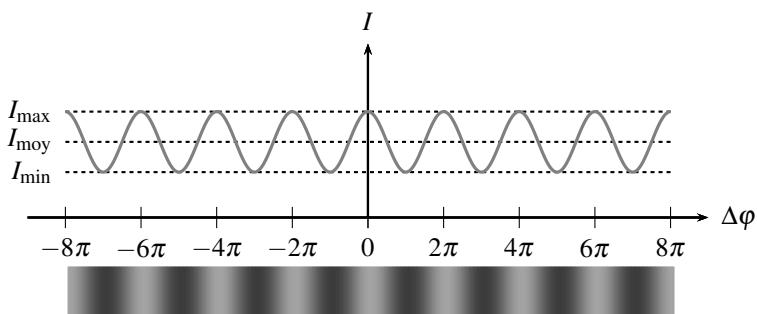
Dans le cas général où  $I_1$  et  $I_2$  sont différents elle se met sous la forme :

$$I(M) = I_{\text{moy}} \left( 1 + C \cos(\Delta\varphi(M)) \right). \quad (7.9)$$

L'intensité vibratoire varie entre  $I_{\min} = I_0(1 - C)$  et  $I_{\max} = I_0(1 + C)$ . Les figures 7.4 et 7.5 montrent l'influence du contraste sur la figure d'interférences.



**Figure 7.4 –** Influence du contraste :  $C = 0,8$ .



**Figure 7.5 –** Influence du contraste :  $C = 0,4$ .

## 5 Retour sur la notion de cohérence

Dans ce paragraphe on va donner un critère de cohérence entre deux ondes lumineuses quasi-monochromatiques de même pulsation émises par deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , utilisant le modèle des trains d'ondes aléatoires.

La vibration lumineuse au point  $M$  qui résulte de la superposition des deux ondes lumineuses s'écrit :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + s_{01}s_{02} \left\langle \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2 M) - (S_1 M)) + \varphi_{02} - \varphi_{01} \right) \right\rangle,$$

en reprenant l'expression (7.2) du terme d'interférence et en sortant les amplitudes  $s_{01}$  et  $s_{02}$ , supposées constantes, de la moyenne.

### 5.1 Cas de deux sources distinctes

Dans le cas où les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  sont distinctes, on voit se superposer au point  $M$  des trains d'ondes qui correspondent à des phases à l'émission  $\varphi_{01}$  et  $\varphi_{02}$  différentes et non corrélées. Il en résulte que  $\varphi_{02} - \varphi_{01}$  prend, pendant la durée (égale au temps de réponse du détecteur) sur laquelle la moyenne est effectuée, des valeurs aléatoires très nombreuses (la durée d'un train d'ondes étant très inférieure au temps de réponse du détecteur). Ceci conduit à une valeur moyenne nulle qui vient annuler le terme d'interférences.

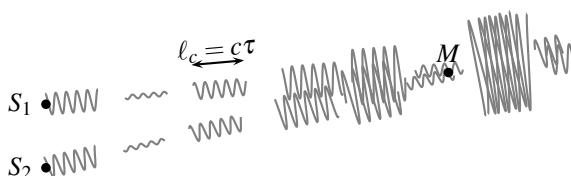
Deux sources ponctuelles **distinctes** quasi-monochromatiques ne produisent pas d'interférences. Elles constituent deux sources **incohérentes**. Les intensités vibratoires qu'elles produisent en  $M$  s'ajoutent :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M).$$

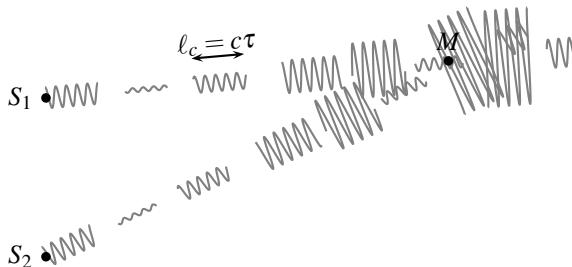
### 5.2 Cas de deux sources mutuellement cohérentes

Comme il n'est pas possible de faire interférer deux sources distinctes, il faut réaliser deux sources  $S_1$  et  $S_2$  « jumelles » pour espérer observer des interférences. Les dispositifs interférentiels que nous étudierons permettent en quelque sorte de « cloner » une source primaire  $S$  en deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ , dites **mutuellement cohérentes**, qui délivrent la même séquence de trains d'ondes.

Les figures 7.6 et 7.7 donnent une illustration simplifiée de la situation envisagée selon que  $\delta(M)$  est supérieure ou inférieure à la longueur de cohérence  $\ell_c$ , qui, rappelons-le, correspond à l'extension spatiale moyenne d'un train d'ondes.



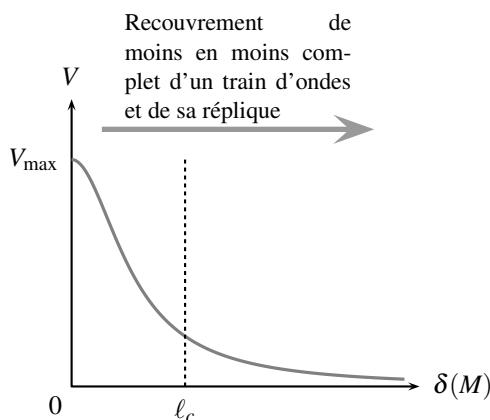
**Figure 7.6** – Superposition des différents trains d'ondes. Cas où  $\delta(M) < \ell_c$ .



**Figure 7.7 –** Superposition des différents trains d'ondes. Cas où  $\delta(M) > \ell_c$ .

- Dans le cas où  $\delta(M) < \ell_c$ , on constate qu'au point  $M$  se superposent un train d'ondes issu de  $S_1$  et sa réplique issue de  $S_2$ . Dans ce cas  $\varphi_{02} - \varphi_{01}$  garde une valeur constante non affectée par les changements de train d'ondes (pour un dispositif symétrique  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ ) et ainsi  $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2M) - (S_1M)) + \varphi_{02} - \varphi_{01}$  est stable. Les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  sont **mutuellement cohérentes**.
- Dans le cas où  $\delta(M) > \ell_c$ , on constate qu'au point  $M$  se superposent un train d'ondes issu de  $S_1$  et un train d'ondes différent issu de  $S_2$ . On se retrouve dans la situation de deux sources distinctes : le terme d'interférences est nul. Les sources ne sont plus mutuellement cohérentes.

Cette description est très simplifiée mais permet de fixer les idées. Lorsque la différence de marche est nulle, le recouvrement en  $M$  d'un train d'ondes issu de  $S_1$  et de sa réplique issue de  $S_2$  est complet. Les interférences sont visibles. Au fur et à mesure que la différence de marche augmente, ce recouvrement est de plus en plus partiel. Du point de vue théorique, on montre que la visibilité  $V$  des franges d'interférences (qui s'identifie au contraste  $C$ ) décroît, au fur et à mesure que  $\delta(M)$  augmente, à partir d'une valeur maximale  $V_{\max}$  obtenue pour  $\delta(M) = 0$  (voir figure 7.8).



**Figure 7.8 –** Évolution de la visibilité  $V$  des franges d'interférences en fonction de la différence de marche  $\delta(M)$ .

On retiendra le résultat suivant :

On ne peut observer des interférences que si la différence de marche  $\delta(M)$  reste inférieure à la longueur de cohérence  $\ell_c$  du rayonnement émis par la source.

### Remarques

- La condition énoncée montre que plus la longueur de cohérence de la lumière de la source est importante et plus l'observation des interférences est facilitée.
- Lorsque la longueur de cohérence  $\ell_c$  est finie, on dit que la source présente un défaut de **cohérence temporelle**. Cela signifie que l'onde rayonnée par la source s'écarte du modèle de l'onde parfaitement monochromatique. La longueur  $\ell_c$  est souvent appelée **longueur de cohérence temporelle**.
- la visibilité des interférences est directement liée aux performances du détecteur utilisé. Si les détecteurs usuels ne permettent pas d'observer des interférences entre deux sources distinctes, on parvient néanmoins à observer des interférences entre deux lasers stabilisés distincts, de longueur de cohérence exceptionnellement grande, pendant  $1 \mu\text{s}$  en utilisant des récepteurs électroniques ultrarapides.

**SYNTHESE***SAVOIRS*

- définition du phénomène d'interférences
- conditions de cohérence mutuelle de deux ondes
- formule de Fresnel des interférences à deux ondes
- définition d'un état d'interférences totalement constructives ou complètement destructives

*SAVOIR-FAIRE*

- citer la formule de Fresnel
- justifier la pertinence de son utilisation
- établir la formule de Fresnel
- citer les conditions de cohérence mutuelle de deux ondes
- associer un bon contraste à deux valeurs proches de l'intensité vibratoire
- justifier et utiliser l'additivité des intensités vibratoires pour deux ondes incohérentes
- exprimer une condition d'interférences totalement constructives
- passer de l'expression de la différence de marche, à celle de la différence de phase et à celle de l'ordre d'interférences, et réciproquement

*MOTS-CLÉS*

- |                               |                         |                           |
|-------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| • formule de Fresnel          | • contraste             | • figure d'interférence   |
| • cohérence                   | • différence de marche  | • franges d'interférence  |
| • interférences constructives | • différence de phase   | • contraste ou visibilité |
| • interférences destructives  | • ordre d'interférences | • construction de Fresnel |
|                               | • champ d'interférences |                           |



# Dispositif interférentiel par division du front d'onde : les trous d'Young

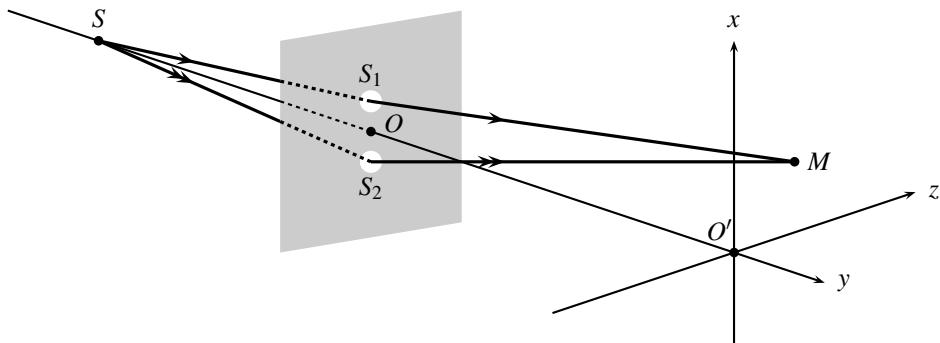
La difficulté principale pour observer des interférences est d'obtenir deux sources mutuellement cohérentes, comme on l'a vu dans le chapitre précédent. Dès 1665, Grimaldi tente de réaliser une expérience d'interférences en illuminant deux trous avec la lumière solaire dans le but d'obtenir des interférences résultant de la superposition de la lumière diffractée par les deux trous. Mais, comme on le verra dans ce chapitre, le Soleil constitue une source trop large pour que les interférences soient visibles. En 1805, Thomas Young réalise à nouveau l'expérience de Grimaldi. Il utilise la lumière émise par le Soleil pour éclairer, dans une chambre obscure, un premier trou qui joue le rôle de source primaire. Ce trou éclaire à son tour deux autres trous. La superposition des deux ondes diffractées par les deux trous donnent lieu à un phénomène d'interférences.

L'objet de ce chapitre est d'étudier le dispositif de Thomas Young et de préciser les conditions expérimentales qui permettent d'obtenir des interférences visibles.

## 1 Le dispositif des trous d'Young

### 1.1 Présentation du dispositif

On considère la situation suivante : une source ponctuelle, éclaire un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$ . La source est placée « à grande distance » de l'écran, mais est équidistante des deux trous. On dispose, aussi à « grande distance » (il s'agit d'une approximation qu'on sera amené à quantifier par la suite) au-delà du plan des deux trous, un écran d'observation parallèle à  $S_1S_2$ .  $O$  est le milieu de  $[S_1S_2]$ ,  $OO'$  est perpendiculaire à l'écran ( $S$ ,  $O$  et  $O'$  ne sont pas nécessairement alignés). La figure 8.1 donne une représentation du dispositif.



**Figure 8.1** – Dispositif des trous d’Young éclairé par une source ponctuelle.

Le dispositif des trous d’Young est un dispositif qui offre deux trajets possibles à la lumière : l’un passe par  $S_1$ , l’autre par  $S_2$ . On dit qu’il constitue un dispositif interférentiel à **deux voies**.

## 1.2 Notion de dispositif interférentiel à division du front d’onde

La figure 8.1 montre que les rayons lumineux qui viennent interférer au point  $M$  sont issus de deux rayons distincts qui émergent de la source. Cette propriété est caractéristique des dispositifs interférentiels à division du front d’onde.

Un dispositif interférentiel donné, pour un point  $M$  d’observation donné, est configuré en **division du front d’onde** lorsque les deux rayons lumineux qui viennent interférer en  $M$  sont issus de deux rayons *distincts* qui émergent de la source.

La figure 8.2 résume schématiquement cette situation.



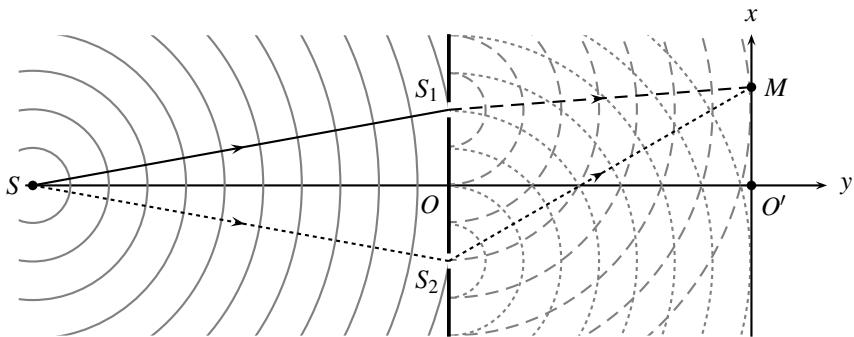
**Figure 8.2** – Représentation schématique d’un dispositif interférentiel à deux voies fonctionnant par division du front d’onde.



Pour un dispositif interférentiel donné, le fonctionnement par division du front d'onde dépend du point  $M$  d'observation. Tant que ce dernier n'est pas précisé, on ne peut donc pas dire *a priori* si le dispositif interférentiel opère ou non par division du front d'onde.

On peut comprendre intuitivement la dénomination de « division du front d'onde ». Un front d'onde peut être assimilé à une surface d'onde qui se propage. Dans le montage des trous d'Young étudié, un front d'onde issu de la source  $S$  est divisé en deux parties : l'une traverse le trou  $S_1$  l'autre le trou  $S_2$ .

La figure 8.3 donne une représentation schématique des surfaces d'onde et des deux rayons lumineux qui viennent interférer en  $M$ .



**Figure 8.3 –** Représentation schématique des surfaces d'onde et des deux rayons lumineux qui viennent interférer en  $M$ .

Les deux trous d'Young diffractent la lumière incidente. Ils sont éclairés par la même surface d'onde et peuvent être considérés comme deux sources mutuellement cohérentes, qui vont émettre la même séquence de trains d'ondes.

### 1.3 Description du champ d'interférences

#### a) Notion de localisation des franges

On adopte les notations suivantes : la distance entre les deux trous  $S_1S_2 = a$  et la distance  $OO' = D$ . Dans la base cartésienne  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , le point  $M$  admet les coordonnées  $x, y = D$  et  $z$ . Le champ d'interférences correspond à tout le volume de l'espace où les ondes diffractées par les deux trous se recouvrent. Expérimentalement, on constate que les franges d'interférences sont visibles sur l'écran d'observation quelle que soit sa position au-delà des deux trous. On dit que les interférences sont **non localisées**. Cette propriété est propre aux dispositifs interférentiels fonctionnant par division du front d'onde. On admet sa généralisation.

Les interférences produites par un dispositif interférentiel fonctionnant en division du front d’onde sont **non localisées** : elles sont observables en tout point du champ d’interférences.

### b) Différence de phase, différence de marche et ordre d’interférences

Afin de décrire les franges d’interférences observées dans le plan de l’écran d’observation, il est nécessaire de calculer  $\Delta\phi(M)$ , la différence des retards de phase des deux ondes en  $M$ , ou plus simplement, différence de phase en  $M$  :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( (SM)_{\text{voie } 2} - (SM)_{\text{voie } 1} \right).$$

où  $(SM)_{\text{voie } 1}$  et  $(SM)_{\text{voie } 2}$  désignent les chemins optiques de  $S$  à  $M$  en passant respectivement par  $S_1$  et  $S_2$ . Pour une expérience d’interférences réalisée au laboratoire, les ordres de grandeurs usuels des différentes longueurs sont les suivantes :  $a$  est de l’ordre du millimètre,  $D$  de l’ordre du mètre et  $|x|$  et  $|y|$  sont inférieurs au centimètre. On se trouve dans des conditions telles que  $a \ll D$  et  $|x|$  ou  $|y| \ll D$ . Les ondes lumineuses se propagent dans un milieu homogène d’indice  $n$  dont on néglige les variations avec la longueur d’onde. La différence de marche en  $M$  est alors :

$$\delta(M) = n \left( (SS_2 + S_2M) - (SS_1 + S_1M) \right) = n \left( S_2M - S_1M \right),$$

puisque la source  $S$  est supposée équidistante des deux trous  $S_1$  et  $S_2$ . Pour évaluer les distances  $S_1M$  et  $S_2M$ , on commence par calculer la norme au carré des vecteurs  $\overrightarrow{S_1M}$  et  $\overrightarrow{S_2M}$  en faisant intervenir le point  $O$  :

$$\|\overrightarrow{S_1M}\|^2 = (\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OM})^2 = \|\overrightarrow{S_1O}\|^2 + \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{S_1O} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

On pose  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  pour alléger les notations :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{S_1M}\|^2 &= \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\overrightarrow{S_1O} \cdot \overrightarrow{OM}, \\ &= r^2 \left( 1 - 2\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OS}_1}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2} \right). \end{aligned}$$

Comme  $r$  est de l’ordre de  $D$ , alors  $\left| \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OS}_1}{r^2} \right| \sim \frac{a}{D} \ll 1$  et  $\frac{a^2}{4r^2} \sim \frac{a^2}{D^2}$ . On peut effectuer un développement limité, en se limitant au termes du premier ordre en  $\frac{a}{D}$  :

$$\begin{aligned} S_1M &= r \left( 1 - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OS}_1}{r^2} + O\left(\frac{a^2}{D^2}\right) \right), \\ &\simeq r - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OS}_1, \end{aligned}$$

où le vecteur unitaire  $\vec{u}$  est :  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ . De même, on établit :

$$\overrightarrow{S_2M} \simeq r - \vec{u} \cdot \overrightarrow{OS_2}.$$

On en déduit :  $S_2M - S_1M = \vec{u} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}$ . On peut alors exprimer la différence de marche  $\delta(M)$ , l'ordre d'interférences  $p(M)$  et la différence de phase  $\Delta\varphi(M)$ .

- **Différence de marche :**

$$\delta(M) = n(S_2M - S_1M) = n\vec{u} \cdot \overrightarrow{S_2S_1} . \quad (8.1)$$

- **Différence de phase :**

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{u} \cdot \overrightarrow{S_2S_1} . \quad (8.2)$$

- **Ordre d'interférences :**

$$p(M) = \frac{n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{S_2S_1} . \quad (8.3)$$

### Remarque

Les termes qui ont été négligés dans le calcul de la différence de marche doivent être petits devant la longueur d'onde  $\lambda_0$  pour que l'expression (8.1) soit valide. En effet, si l'un de ces termes était égal à  $\lambda_0/2$  par exemple, cela induirait une erreur correspondant à confondre une frange brillante et la frange sombre adjacente.

On peut montrer que le premier terme négligé est de l'ordre de  $\frac{|x|a^3}{D^3}$ . Si par exemple  $a = 1,0 \text{ mm}$ ,  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$  et  $D = 1,0 \text{ m}$ , alors  $\frac{|x|a^3}{D^3} \ll \lambda_0$  impose  $|x| \ll \frac{D^3\lambda_0}{a^3} = 5,3 \times 10^2 \text{ m}$ , ce qui n'est guère contraignant en pratique !

### c) Franges d'interférences

Afin de caractériser complètement la figure d'interférences, on poursuit le calcul de la différence de marche  $\delta(M)$ . Il faut exprimer le vecteur unitaire  $\vec{u}$  :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + D\vec{u}_y + z\vec{u}_z \implies \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + D^2 + z^2} \simeq D,$$

si l'on se limite au premier ordre en  $|x|/D$  et  $|z|/D$ . On obtient alors, à cet ordre d'approximation :

$$\vec{u} \simeq \frac{x}{D}\vec{u}_x + \vec{u}_y + \frac{z}{D}\vec{u}_z.$$

Connaissant  $\overrightarrow{S_2S_1} = a\vec{u}_x$ , on peut alors déterminer la différence de marche, la différence de phase et l'ordre d'interférences en  $M$  à partir des relations (8.1) à (8.3), et ensuite l'expression de l'intensité vibratoire :

- **Différence de marche :**

$$\delta(M) \simeq \frac{nax}{D}. \quad (8.4)$$

- **Différence de phase :**

$$\Delta\varphi(M) \simeq \frac{2n\pi ax}{\lambda_0}. \quad (8.5)$$

- **Ordre d’interférences :**

$$p(M) \simeq \frac{nax}{\lambda_0 D}. \quad (8.6)$$

- **Intensité vibratoire :**

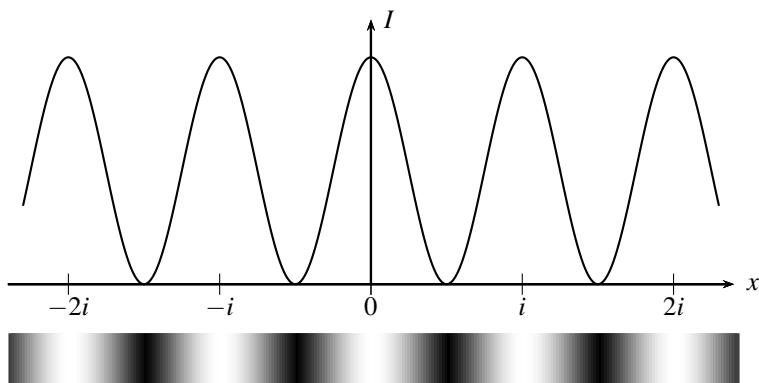
$$I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} \right) \right), \quad (8.7)$$

où  $I_0$  est l’intensité vibratoire rayonnée par chaque trou.

### Remarque

Sur la figure 8.3, on a choisi de représenter un point  $M$  d’abscisse  $x$  positive. On peut constater sur cette même figure que le chemin optique  $(SM)_{\text{voie } 2}$  est supérieur au chemin optique  $(SM)_{\text{voie } 1}$ . Cela signifie que le retard accumulé le long de la voie 2 est plus important que le retard accumulé le long de la voie 1, ce qui conduit à une différence de marche  $\delta(M)$  positive. C’est bien en accord avec la relation (8.4).

L’intensité vibratoire ne dépend que de  $x$  : on observe donc sur l’écran des franges rectilignes, alternativement sombres et brillantes, comme l’illustre la figure 8.4.



**Figure 8.4** – Représentation de l’intensité vibratoire.

L’intensité vibratoire présente une période spatiale  $i$  qu’on nomme **interfrange** dont on peut déterminer l’expression en faisant apparaître explicitement dans l’expression de l’intensité

vibratoire (8.7) la période spatiale :

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2n\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi x}{i} \right) \right).$$

Par identification, on obtient  $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$ .

D'autre part, chaque frange brillante est repérée par une valeur entière de l'ordre d'interférence. À partir de la relation (8.6), on obtient les positions des franges brillantes :  $x_p = p \frac{\lambda_0 D}{na}$  avec  $p$  entier. La distance entre deux franges brillantes consécutives redonne l'interfrange :  $i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 D}{na}$ . On retiendra le résultat suivant :

Les franges d'interférences, sur un écran à grande distance parallèle au plan contenant les trous d'Young, apparaissent rectilignes. Leur période spatiale est appelée **interfrange**, elle est donnée par la relation :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na}. \quad (8.8)$$

### Exemple

On réalise l'expérience en utilisant deux trous d'Young. L'écran est placé à une distance  $D = 2,0$  m du plan des trous d'Young. Les deux trous sont éclairés par une diode laser :  $\lambda_0 = 532$  nm. L'interfrange mesuré sur l'écran est :  $i = 2,7$  mm. Quelle est la distance  $a$  entre les deux trous ?

En considérant que  $n_{\text{air}} \simeq 1$ , on obtient :  $a = \frac{5,32 \times 10^{-7} \times 2,0}{2,7 \times 10^{-3}}$  m, soit  $a = 0,4$  mm.

## 1.4 Généralisation à d'autres dispositifs interférentiels par division du front d'onde

Les relations (8.1) à (8.3) peuvent être généralisées pour l'étude de n'importe quel dispositif interférentiel fonctionnant par division du front d'onde. La démarche est la suivante :

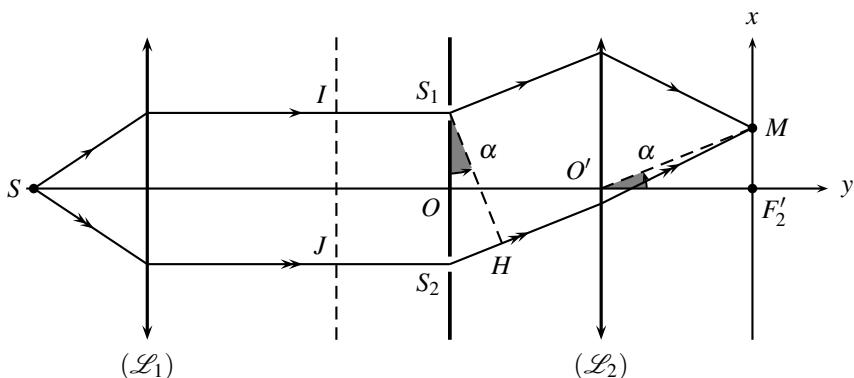
- on choisit un point d'observation  $M$  ;
- on recherche les deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ . Elles peuvent être l'image de la source primaire  $S$  par un système optique stigmatique à deux voies, ou deux ouvertures diffractionnelles éclairées par la source primaire  $S$ . Le dernier cas est celui des trous d'Young.
- on trace la marche des rayons lumineux, issus de  $S$ , et qui vont interférer en  $M$ .
- on vérifie que le dispositif fonctionne par division du front d'onde en constatant que les deux rayons issus de  $S$  sont distincts.

Quelques exemples sont proposés à titre d'exercices.

## 1.5 Montage de Fraunhofer

### a) Description du montage

On envisage une configuration alternative du dispositif des trous d’Young où la source  $S$  et le point d’observation  $M$  sont rejettés à l’infini. Pour ce faire, on utilise deux lentilles convergentes : la source  $S$  est placée au foyer principal objet de la lentille  $(\mathcal{L}_1)$ , et le point d’observation  $M$  est placé dans le plan focal image de la seconde lentille  $(\mathcal{L}_2)$ . Ce montage, appelé **montage de Fraunhofer**, est schématisé sur la figure 8.5.



**Figure 8.5** – Représentation schématique des surfaces d’onde et des deux rayons lumineux qui viennent interférer en  $M$ .

Les franges d’interférences sont observées dans le plan focal de la lentille  $(\mathcal{L}_2)$ .

### b) Tracé des rayons et calcul de la différence de marche

La figure 8.5 représente la marche des deux rayons qui viennent interférer au point  $M$  : on constate qu’ils correspondent à deux rayons distincts issus de la source  $S$ . Le dispositif interférentiel opère donc par division du front d’onde. Comme le point  $M$  est dans le plan focal de la lentille  $(\mathcal{L}_2)$ , les deux rayons sont, entre les trous d’Young et la lentille, parallèles à la direction de  $O'M$ . On complète les rayons en remarquant qu’ils sont avant les fentes parallèle à l’axe optique du dispositif puisque la source  $S$  est placée au foyer principal objet de la lentille  $(\mathcal{L}_1)$ . La « cassure » des rayons au niveau des trous d’Young est le fait de la diffraction.

Notons  $\alpha = (\overrightarrow{O'y}, \overrightarrow{O'M})$  l’angle repérant la position du point  $M$ . Cet angle est algébrique, il est compté positivement dans le sens trigonométrique sur la figure (ainsi sur la figure  $\alpha > 0$ ). Notons que l’emploi de lentilles impose que les rayons soient peu inclinés par rapport à l’axe (conditions de Gauss). L’angle  $\alpha$  est donc petit. On peut écrire :

$$\tan \alpha = \frac{x}{f'} \simeq \alpha,$$

où  $f'$  est la distance focale image de la lentille  $(\mathcal{L}_2)$  et  $x = \overline{F'_2 M}$ . Pour connaître l’état d’interférence au point  $M$ , il faut connaître la différence de marche  $d$  entre les deux rayons.

terférences en  $M$ , on doit calculer la différence de marche en  $M$  :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M).$$

La source  $S$  est placée au foyer principal objet de la lentille ( $\mathcal{L}_1$ ). Elle émet une onde sphérique que la lentille transforme en onde plane. Un plan orthogonal aux rayons lumineux qui émergent de la lentille ( $\mathcal{L}_1$ ) est un plan d'onde : c'est le cas du plan qui contient  $I$  et  $J$ , mais aussi de celui qui contient  $S_1$  et  $S_2$ . On a donc :  $(SS_1) = (SS_2)$ .

Pour calculer  $(S_2M) - (S_1M)$ , imaginons qu'on place une source ponctuelle au point  $M$ . D'après la loi du retour inverse, les rayons issus de  $M$  seraient les mêmes, mais parcourus en sens inverse. Le plan passant par  $S_1$  et orthogonal à ces rayons (c'est le plan représenté en tirets sur la figure et qui contient le point  $H$ ) serait, d'après le théorème de Malus, un plan d'onde. Ainsi :  $(MS_1) = (MH)$ . Comme le chemin optique est le même quel que soit le sens de parcours, on obtient :  $(S_1M) = (HM)$ . Cette égalité signifie qu'il n'y a plus aucune différence de marche supplémentaire au delà du plan orthogonal aux rayons lumineux et passant par  $S_1$  et  $H$ . Donc, si les ondes arrivent déphasées en  $M$ , leur retard relatif s'est produit avant ce plan. On obtient donc :

$$(S_2M) - (S_1M) = n\overline{S_2H}.$$

Le raisonnement qu'on vient de faire est très souvent utilisé. Il est important de noter que le plan contenant  $S_1$  et  $H$  n'est pas un plan d'onde puisque les ondes issues des deux trous  $S_1$  et  $S_2$  ne sont pas planes ; seuls les deux rayons provenant en  $M$  sont parallèles. On dira que ce plan est un **plan d'onde relatif à  $M$** .

$M$  étant un point à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille, on appelle **plan d'onde relatif à  $M$** , tout plan perpendiculaire aux rayons, parallèles entre eux, qui passent par  $M$ .

Pour la différence de marche, on obtient :

$$\delta(M) = n\overline{S_2H} = na \sin \alpha \simeq n \frac{ax}{f'}. \quad (8.9)$$

En définissant un vecteur unitaire  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{O'M}}{\|\overrightarrow{O'M}\|}$ , on peut écrire la différence de marche sous une forme analogue à la relation (8.1) :

La différence de marche  $(S_2M) - (S_1M)$  en un point  $M$  à l'infini dans la direction  $\vec{u}$  entre deux rayons lumineux parallèles, de sens  $\vec{u}$ , qui proviennent de  $S_2$  et  $S_1$  est :

$$\delta(M) = n \vec{u} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}. \quad (8.10)$$

### c) Figure d'interférences

À partir de la différence de marche, on peut exprimer la différence de phase  $\Delta\varphi(M)$ , l'ordre d'interférences  $p(M)$  et l'intensité vibratoire  $I(M)$  :

- Différence de phase :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'} . \quad (8.11)$$

- Ordre d’interférences :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{nax}{\lambda_0 f'} . \quad (8.12)$$

- Intensité vibratoire :

$$I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'} \right) \right) . \quad (8.13)$$

L’intensité vibratoire varie en fonction de l’abscisse  $x$  seulement. La figure d’interférences est constituée de franges rectilignes, alternativement sombres et brillantes, caractérisées par un interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 f'}{na} .$$

### Exemple

On réalise une expérience avec deux fentes d’Young, séparées d’une distance  $a = 0,5$  mm, en utilisant le montage de la figure 8.5. On suppose que  $\lambda_0 = 532$  nm et  $f' = 1,0$  m. Quelle est la valeur de l’interfrange mesuré sur l’écran ?

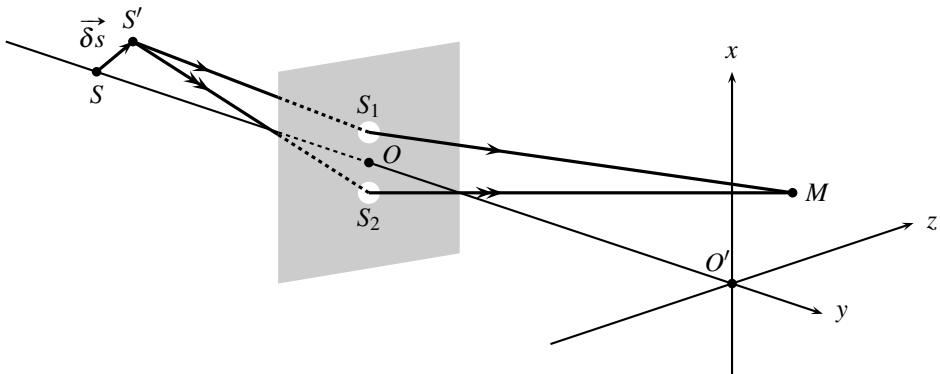
On suppose que l’indice de l’air est :  $n \simeq 1,0$ . On obtient :  $i = \frac{\lambda_0 f'}{na} = 1,1$  mm. L’utilisation d’une lentille convergente de grande distance focale permet de faciliter la mesure de l’interfrange.

## 2 Modifications du dispositif

### 2.1 Influence du déplacement de la source ponctuelle

#### a) Variation de l’ordre d’interférences

On considère le montage initial, représenté sur la figure 8.1, où le point source et le point  $M$  sont situés à grande distance des trous d’Young. Mais on considère un déplacement  $\vec{\delta}s$  de la source ponctuelle. Elle passe de la position  $S$  à  $S'$  :  $\vec{\delta}s = \vec{SS}'$ .



**Figure 8.6 – Décalage de la source primaire.**

Dans le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , la source  $S'$  est repérée par le vecteur position :  $\overrightarrow{OS'} = x_0 \vec{u}_x - D_0 \vec{u}_y + z_0 \vec{u}_z$ . On constate, sur la figure 8.6 que la source  $S'$  n'est plus équidistante des deux trous. Il en résulte que les chemins optiques de la source  $S'$  aux trous  $S_1$  et  $S_2$  ne sont plus égaux : il existe donc une différence de marche supplémentaire associée au décalage de la source.

Le calcul de cette différence de marche supplémentaire se fait exactement comme celui qui a conduit à la différence des chemins optiques  $(S_2M) - (S_1M)$ , le point  $S'$  jouant le rôle du point  $M$ . En adaptant la relation (8.1), on obtient l'expression de cette différence de marche supplémentaire :  $\Delta\delta(M) = n \vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{S_2S_1}$ , où  $\vec{u}_0 = \frac{\overrightarrow{OS'}}{\|\overrightarrow{OS'}\|} \simeq \frac{\overrightarrow{OS'}}{D_0}$ . En écrivant  $\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{\delta s}$ , on obtient :

$$\Delta\delta(M) = n \frac{\overrightarrow{\delta s} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}}{D_0},$$

puisque  $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{S_1S_2} = 0$ . On peut déduire de cette différence de marche supplémentaire, la variation de l'ordre d'interférences au point d'observation  $M$  :

$$\Delta p(M) = n \frac{\overrightarrow{\delta s} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}}{\lambda_0 D_0}. \quad (8.14)$$

Notons que la variation de l'ordre d'interférences en  $M$  est indépendante du point  $M$  considéré. Cette relation permet d'étudier l'incidence de l'élargissement de la source sur l'intensité vibratoire observée sur l'écran. On va envisager deux cas selon que  $\overrightarrow{\delta s} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}$  est nul ou pas.

### b) Utilisation d'une fente source

Si le déplacement de la source se fait selon  $\vec{u}_z$  ou  $\vec{u}_y$ , alors  $\overrightarrow{\delta s} \cdot \overrightarrow{S_2S_1} = 0$ . L'ordre d'interférences en  $M$  reste inchangé. Cela signifie que l'état d'interférences est le même au point  $M$ , qu'il soit produit par une source ponctuelle en  $S$  ou en  $S'$ .

On a justifié dans le premier chapitre que deux sources ponctuelles distinctes étaient incohérentes : les intensités vibratoires qu’elles produisent s’ajoutent. Par conséquent, deux sources ponctuelles placées en  $S$  et  $S'$ , telles que  $\vec{\delta s} \cdot \vec{S_2 S_1} = 0$ , produiront deux ensembles de franges d’interférences qui vont coïncider *exactement* sur l’écran d’observation, puisque l’ordre d’interférences  $p(M)$  est le même pour  $S$  et  $S'$ . La figure d’interférences est dans ce cas plus lumineuse.

En prolongeant ce raisonnement, on comprend que, dans le but d’obtenir une figure d’interférences plus lumineuse, on peut remplacer la source ponctuelle sur l’axe ( $Oy$ ) par un segment lumineux allongé dans la direction ( $Oz$ ). Ce segment est constitué de sources ponctuelles incohérents. Chacune crée sur l’écran d’observation son propre ensemble de franges d’interférences. Ces systèmes de franges d’interférences coïncident exactement pour former une figure d’interférences de même contraste qu’avec une source ponctuelle mais plus lumineuse.

On peut remplacer la source ponctuelle par une fente source allongée dans la direction orthogonale à l’axe des deux trous, sans modifier le contraste de la figure d’interférences.

### c) Visibilité des franges produites par deux sources ponctuelles incohérentes

On envisage maintenant un déplacement de la source dans la direction  $\vec{u}_x$  parallèle à l’axe des trous :  $\vec{\delta s} = b\vec{u}_x$ . La variation de l’ordre d’interférences qui en résulte est obtenue à partir de la relation (8.14) :  $\Delta p(M) = \frac{nab}{\lambda_0 D_0}$ . L’ordre d’interférences  $p(M)$  est :

$$p(M) = \frac{nax}{\lambda_0 D} + \frac{nab}{\lambda_0 D_0}. \quad (8.15)$$

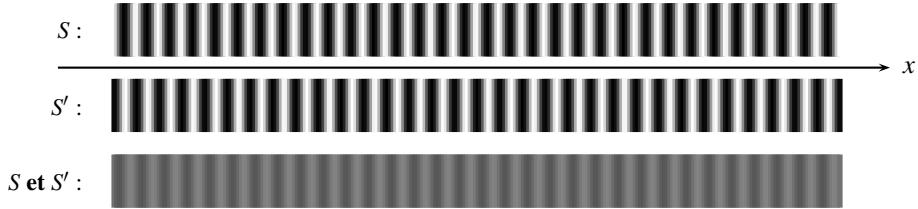
L’intensité vibratoire produite par une source ponctuelle en  $S'$  est :

$$I'(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} + \frac{2\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \right).$$

Le terme constant qui apparaît dans l’expression de l’intensité vibratoire correspond à un décalage des franges brillantes, qu’on peut calculer en comparant la position de la frange d’ordre  $p$  avant et après déplacement de la source.

- Source ponctuelle en  $S$  :  $x_p^{(S)} = p \frac{\lambda_0 D}{na}$  d’après la relation (8.3).
- Source ponctuelle en  $S'$  :  $x_p^{(S')} = p \frac{\lambda_0 D}{na} - \frac{D}{D_0} b$  d’après la relation (8.15).

On obtient un décalage de la frange considérée égal à  $-\frac{D}{D_0}b$ . Dans la situation où l’on dispose deux sources ponctuelles incohérentes en  $S$  et en  $S'$ , les intensités vibratoires qu’elles produisent s’ajoutent. La figure 8.7 montre les deux systèmes de franges décalés produits par  $S$  et  $S'$  ainsi que leur superposition.



**Figure 8.7 –** Représentation des franges d’interférences produites par  $S$  seulement,  $S'$  seulement et les deux sources.

On constate sur la figure que la superposition des intensités produites par les deux sources se traduit par une **diminution de la visibilité des franges**. Comme  $\Delta p(M)$  est indépendant du point  $M$ , la diminution de la visibilité est uniforme sur l’ensemble de la figure d’interférences. Comme les deux sources ponctuelles sont incohérentes, on peut ajouter les intensités vibratoires qu’elles produisent :

$$\begin{aligned} I_{\text{total}}(M) &= I(M) + I'(M) \\ &= 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D_0} \right) \right) + 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D_0} + \frac{2\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \right) \\ &= 4I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D_0} + \frac{\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \right), \end{aligned}$$

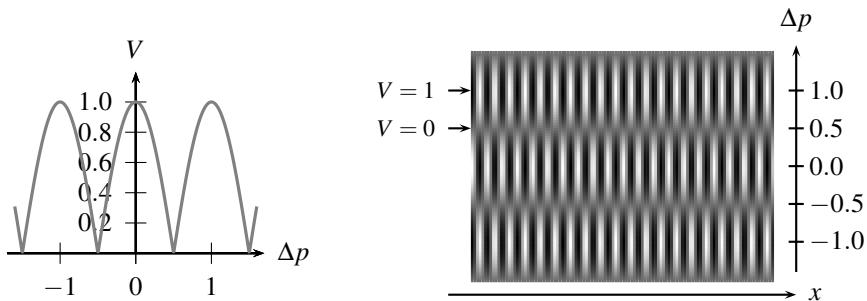
en utilisant la relation trigonométrique :  $\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$ . On peut en déduire la visibilité  $V$  (ou contraste) des franges à partir des valeurs maximales et minimales de  $I_{\text{total}}$  :

$$\begin{aligned} I_{\text{total max}} &= 4I_0 \left( 1 + \left| \cos \left( \frac{\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \right| \right), \\ I_{\text{total min}} &= 4I_0 \left( 1 - \left| \cos \left( \frac{\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \right| \right). \end{aligned}$$

On en déduit la visibilité  $V$  :

$$V = \frac{I_{\text{total max}} - I_{\text{total min}}}{I_{\text{total max}} + I_{\text{total min}}} = \left| \cos \left( \frac{\pi nab}{\lambda_0 D_0} \right) \right| = |\cos(\pi \Delta p(M))|.$$

La figure 8.8 montre les variations de la visibilité en fonction de  $\Delta p(M)$ , ainsi que l’apparence correspondante de l’intensité vibratoire totale.



**Figure 8.8** – Variation de la visibilité  $V$  en fonction de  $\Delta p = \frac{nab}{\lambda_0 D_0}$ .

La figure 8.8 montre que la visibilité  $V$  des franges s’annule pour certaines valeurs particulières de  $\Delta p$ . On peut deviner que cette situation correspond au cas où une source donne au point  $M$  une frange brillante alors que l’autre source donne au même point  $M$  une frange sombre. Cela se traduit par une différence d’ordre d’interférences égale à un demi-entier. La première occurrence de cette compensation se produit donc pour  $\Delta p(M) = \frac{1}{2}$ . On peut en déduire un critère semi-quantitatif qui exprime que le décalage des deux systèmes de franges d’interférence est suffisamment faible pour obtenir une visibilité proche de sa valeur maximale 1 :

Les franges d’interférences sont visibles au point  $M$  à condition que :

$$|\Delta p(M)| \leq \frac{1}{2}. \quad (8.16)$$

On sera amené à utiliser ultérieurement ce critère, dont on admet l’universalité.

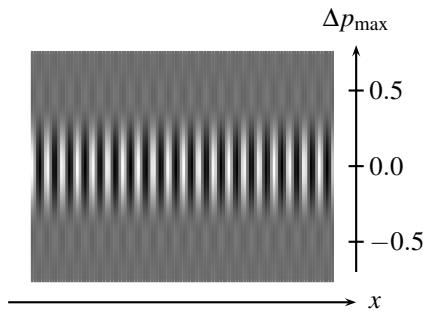
#### Remarque

La figure 8.8 montre qu’une frange brillante en  $M$  pour  $\Delta p = 0$  devient une frange sombre pour  $\Delta p = 1$  : on parle d'**inversion de contraste**. C’est lié au changement de signe de  $\cos(\pi \Delta p(M))$ .

#### d) Visibilité des franges produites par une source étendue

Considérons maintenant une source en forme de segment lumineux étendu dans la direction  $\vec{u}_x$  entre  $z = -b$  et  $z = b$ . On peut considérer cette source comme une superposition continue de sources ponctuelles élémentaires incohérentes. Chacune de ces sources ponctuelles produit sur l’écran d’observation un système de franges d’interférences. La figure d’interférences qu’on observe sur l’écran résulte de la superposition de tous ces systèmes de franges d’interférences décalés les uns par rapport aux autres.

Le décalage maximum est obtenu pour les deux points sources situés aux extrémités de ce segment :  $\Delta p_{\max}(M) = \frac{na(2b)}{\lambda_0 D_0}$ . La figure 8.9 représente l’évolution de la visibilité des franges d’interférences en fonction de  $\Delta p_{\max}(M)$  pour une source étendue.



**Figure 8.9 –** Visibilité des franges d’interférences en fonction de  $\Delta p_{\max}$ .

Pour  $\Delta p_{\max}(M)$  faible, l’alternance des franges sombres et brillantes est clairement visible. Dès que  $\Delta p_{\max}$  augmente, la visibilité chute et l’on ne distingue plus les franges sombres des franges brillantes : on dit que la figure d’interférences est brouillée.

### e) Longueur de cohérence spatiale d’une source étendue

Pour traduire de façon plus quantitative, les observations précédentes, on utilise le critère semi-quantitatif de visibilité des franges (relation (8.16)) en prenant pour  $\Delta p$  la moitié de la valeur maximale<sup>1</sup>. La visibilité des franges d’interférences reste peu affectée par l’élargissement de la source tant que  $\left| \frac{\Delta p_{\max}(M)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$ . Cela donne :  $\frac{na(2b)}{2\lambda_0 D_0} \leq \frac{1}{2}$ , soit  $a \leq \frac{\lambda_0 D_0}{2nb}$ . La quantité  $\theta = \frac{2b}{D_0}$  représente l’angle sous lequel est vue la source étendue depuis  $O$ , le centre des deux trous. On peut s’en servir pour exprimer autrement la condition de visibilité des franges.

Les franges d’interférences sont observables avec une bonne visibilité à condition que :

$$a \leq \ell_s, \quad (8.17)$$

où  $\ell_s = \frac{\lambda_0}{n\theta}$  est la **longueur de cohérence spatiale** de la source. Plus la source est vue sous un angle faible, plus sa longueur de cohérence spatiale augmente, et plus il est aisément d’obtenir des franges d’interférences visibles.

#### Exemple

Pour illustrer la notion de longueur de cohérence spatiale, reprenons le cas de l’expérience réalisée par Grimaldi en 1665. Est-il possible de former des franges d’interférences en utilisant deux trous d’Young éclairés directement par la lumière solaire ?

On travaille avec la longueur d’onde moyenne  $\lambda_0 = 550$  nm. Depuis la Terre, le So-

1. C’est une prescription du programme.

leil est vu sous un angle  $\theta = 0,5^\circ$ , qu’on appelle **diamètre apparent**. La longueur de cohérence spatiale est (en considérant  $n \simeq 1$ ) :  $\ell_s = 6 \times 10^{-5}$  m. La condition  $a \leq \ell_s$  est particulièrement drastique. On comprend dès lors que Grimaldi ait échoué dans sa tentative d’observer des interférences.

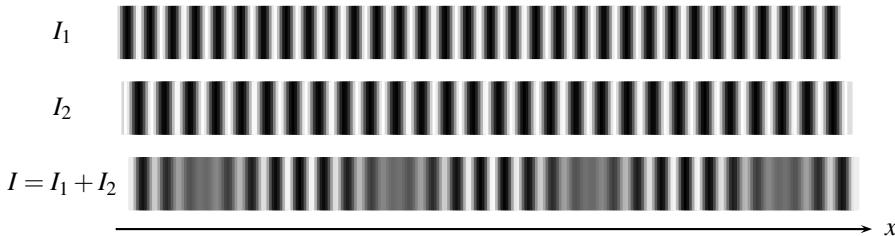
### Remarque

La diminution de la visibilité des franges d’interférences consécutive à l’élargissement de la source est propre à tous les dispositifs opérant par division du front d’onde.

## 2.2 Influence de la largeur spectrale

### a) Doublet de longueurs d’onde

On revient à la situation d’une source ponctuelle  $S$ , dans la configuration de la figure 8.1. Mais on suppose qu’elle émet un doublet de longueurs d’onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On a vu que deux ondes lumineuses de pulsations différentes ne peuvent pas interférer. Par conséquent, chacune des deux ondes lumineuses rayonnées par la source  $S$  produit une figure d’interférences sur l’écran d’observation. La figure 8.10 donne une représentation schématique des franges rectilignes produites par chaque onde, ainsi que l’intensité vibratoire qui résulte de la superposition des deux intensités vibratoires.



**Figure 8.10** – Représentation des différentes intensités vibratoires.

On y observe que le contraste n’est pas uniforme.

- Pour certaines valeurs de la différence de marche, deux franges brillantes produites par chaque onde se superposent en un même point  $M$ . On dit qu’il y a **coïncidence**. On obtient en ce point  $M$  une frange brillante et la visibilité des franges y est égale à celle qui correspond à une seule des deux radiations.
- Pour d’autres valeurs de la différence de marche, une frange brillante produite par une onde se superpose en un même point  $M$  à une frange sombre produite par l’autre onde. On dit qu’il y a **anticoïncidence**. On observe en ce point un brouillage des franges d’interférences, c’est-à-dire une diminution de leur visibilité.

Déterminons la distance entre les abscisses  $x$  où se réalisent ces brouillages :

- frange brillante associée à  $\lambda_1$  :  $p = \delta(M)\sigma_1$ , où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$  est le nombre d’onde.

- frange sombre associée à  $\lambda_2 : q + \frac{1}{2} = \delta(M)\sigma_2$ , où  $q \in \mathbb{Z}$  et avec  $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ .

Par différence membre à membre, on en déduit, en posant  $m = q - p$  (avec  $m \in \mathbb{Z}$ ) :

$$m + \frac{1}{2} = \delta(M)(\sigma_2 - \sigma_1) \implies \delta(M) = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma},$$

avec  $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ . On rappelle que  $\delta(M) = \frac{nax}{D}$ . Les abscisses  $x_m$  où sont réalisées l'annulation de la visibilité des franges sont données par la relation suivante :

$$x_m = \frac{D}{na} \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} \implies \Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{D}{na\Delta\sigma}.$$

On suppose  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  assez proches : c'est-à-dire  $|\lambda_1 - \lambda_2| \ll \lambda_m$  avec  $\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ . Alors :  
 $\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 \lambda_1} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2}$ . Alors :

$$\Delta x = \frac{\lambda_m^2 D}{na\Delta\lambda} = i \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}, \quad (8.18)$$

où  $i = \frac{\lambda_m D}{na}$  est l'interfrange calculé pour la longueur d'onde moyenne. Le nombre de maxima d'intensité vibratoire entre deux brouillages est :

$$N = \frac{\Delta x}{i} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}.$$

### Exemple

On considère :  $a = 0,5$  mm,  $D = 1,0$  m,  $n \simeq 1$  et on envisage le cas du doublet du sodium :  $\lambda_m = 589,3$  nm et  $\Delta\lambda = 0,6$  nm. On en déduit  $\Delta x = 1,2$  m. Comme l'interfrange est  $i = \frac{\lambda_m D}{na} = 1,2$  mm, il existe 500 franges de part et d'autre de la frange centrale entre deux brouillages. Il est donc tout à fait illusoire, avec un dispositif de trous d'Young, de visualiser les anticoïncidences du doublet du sodium. On verra dans le chapitre suivant un autre dispositif interférentiel, l'interféromètre de Michelson, adapté à cette mesure.

### b) Source de faible largeur spectrale

On envisage maintenant le cas d'une source de faible largeur spectrale. Il s'agit d'une source qui émet des ondes lumineuses dont les longueurs d'onde sont distribuées autour d'une valeur moyenne  $\lambda_m$  dans un intervalle de largeur typique égale à  $\Delta\lambda$ . On suppose que  $\Delta\lambda \ll \lambda_m$ . Dans l'intervalle de longueur d'onde  $[\lambda; \lambda + d\lambda]$ , la source rayonne une intensité vibratoire  $dI$ . La figure 8.11 donne une représentation schématique de  $\frac{dI}{d\lambda}$ . On peut considérer que

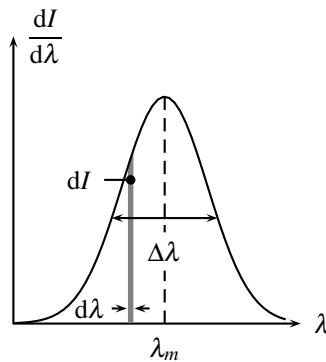


Figure 8.11 – Distribution spectrale de l’intensité vibratoire.

le rayonnement émis est constitué d’une superposition d’ondes lumineuses monochromatiques de largeur  $d\lambda$ . Chacune de ces ondes produit sur l’écran son propre système de franges d’interférences. Comme elles sont incohérentes, on observe la superposition des intensités vibratoires.

Plutôt que de calculer la visibilité des franges correspondant à la distribution spectrale, on se contente d’un argument semi-quantitatif. On évalue, en un point  $M$  de l’écran, la variation de l’ordre d’interférences  $dp$  consécutive à une variation  $d\lambda$  de la longueur d’onde (comme  $M$  est fixé, la différence de marche  $\delta(M)$  est aussi fixée) :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} \implies dp = -\frac{\delta(M)}{\lambda^2} d\lambda.$$

Comme on s’intéresse à une source de faible largeur spectrale, on peut en déduire un ordre de grandeur de la variation de l’ordre d’interférences  $p(M)$  pour la distribution spectrale envisagée :

$$\Delta p(M) = \delta(M) \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_m^2},$$

en considérant une largeur spectrale égale à  $\Delta\lambda/2$  comme le prescrit le programme. Le critère semi-quantitatif de visibilité des franges  $\Delta p(M) \leq \frac{1}{2}$  amène à la condition suivante :

$$\delta(M) \leq \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}.$$

Or, on a établi au chapitre 6 la relation :  $\ell_c \sim \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$ . Ce critère s’écrit donc :  $\delta(M) \leq \ell_c$ , condition qu’on a déjà trouvée au chapitre précédent.

Pour obtenir des franges visibles à partir d’une source de faible largeur spectrale, il faut respecter la condition :

$$\delta(M) \leq \ell_c, \quad (8.19)$$

où  $\ell_c = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$  est la **longueur de cohérence temporelle** de la source.

## 2.3 Éclairage en lumière blanche

### a) Aspect du phénomène d'interférences

La lumière blanche est constituée des radiations électromagnétiques dont la longueur d'onde est approximativement comprise entre  $\lambda_{0\min} = 400$  nm (limite de l'ultraviolet) et  $\lambda_{0\max} = 750$  nm (limite de l'infrarouge). Avec ces valeurs, on obtient la longueur d'onde moyenne :  $\lambda_m = 575$  nm et la largeur spectrale :  $\Delta\lambda = 350$  nm. Si on assimile ce spectre à une raie extrêmement large, on peut définir une longueur de cohérence temporelle :

$$\ell_c = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} = 0,9 \mu\text{m}.$$

Cette valeur est très faible ; l'ordre d'interférences des franges visibles doit vérifier :

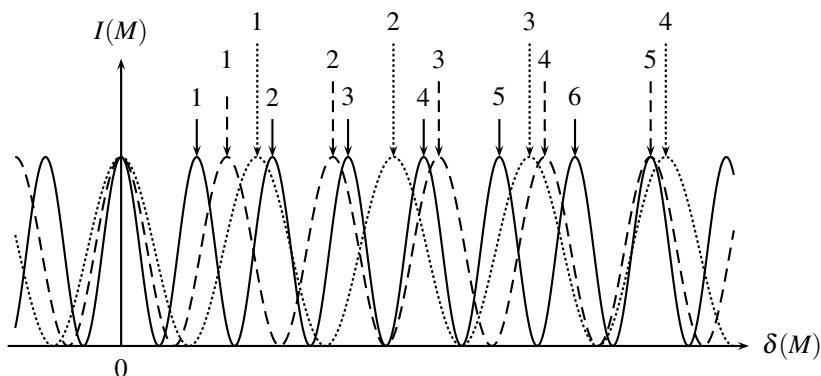
$$p \leq \frac{\ell_c}{\lambda_m} \simeq 2.$$

Expérimentalement, on constate effectivement qu'un nombre réduit de franges d'interférences sont observables (de l'ordre d'une dizaine). L'intensité vibratoire est la somme des intensités vibratoires associées à chaque raie élémentaire quasi-monochromatique :

$$I(M) = \int_0^{+\infty} 2 \frac{dI}{d\lambda} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi x}{i(\lambda)} \right) \right) d\lambda,$$

puisque à chaque longueur d'onde, on peut associer un système de franges d'interférences, avec un interfrange spécifique  $i(\lambda)$ , proportionnel à la longueur d'onde  $\lambda$ . L'interfrange associé au bleu est donc quasiment deux fois plus petit que l'interfrange associé au rouge.

La figure 8.12 représente les intensités vibratoires pour 3 longueurs d'ondes différentes (correspondant au bleu, au vert et au rouge). Au centre de la figure d'interférences (correspondant à une différence de marche nulle), toutes les longueurs d'onde se superposent en phase et reconstituent la lumière blanche de la source : **on observe une frange blanche au centre**. La figure 8.12 montre qu'en s'éloignant du centre, il n'y a plus de recouvrement exact : la structure des franges disparaît et laisse place à des irisations, c'est-à-dire à un ensemble de couleurs qui forme l'échelle des **teintes de Newton**.



**Figure 8.12 –** Intensités vibratoires associées à 3 longueurs d'ondes différentes. Pour chacune est indiqué l'ordre d'interférences correspondant aux franges brillantes.

## 2.4 Complément : influence d'une lame à faces parallèles

### a) Présentation du dispositif

On envisage la situation, représentée sur la figure 8.13, où une lame à faces parallèles, d'indice  $N$ , et d'épaisseur  $e$  est placée devant un des deux trous. Les rayons lumineux arrivent en incidence normale sur la lame.

### b) Calcul de la variation de l'ordre de d'interférences

Comme les ondes lumineuses se propagent à une vitesse plus faible dans la lame que dans l'air, la présence de la lame sur la voie 2 de l'interféromètre a pour conséquence d'allonger le chemin optique le long de la voie 2. Considérons la figure 8.13.

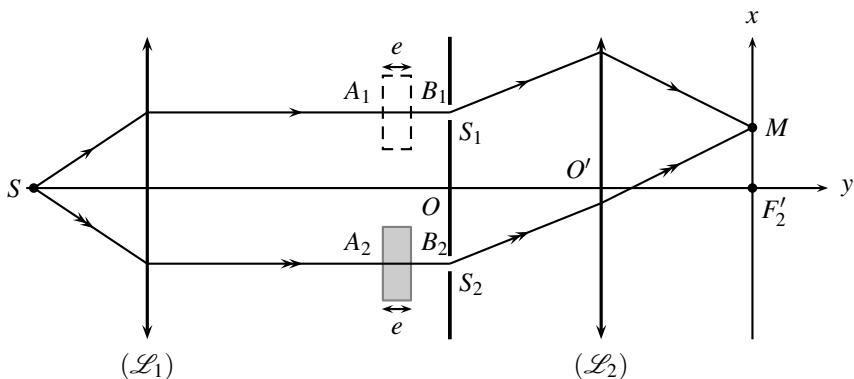


Figure 8.13 – Lame à faces parallèles insérée devant un des trous.

Calculons le chemin optique de  $S$  à  $M$  le long des deux voies de l'interféromètre :

$$(SM)_{\text{voie } 1} = (SA_1) + (A_1B_1) + (B_1S_1) + (S_1M), \\ (SM)_{\text{voie } 2} = (SA_2) + (A_2B_2) + (B_2S_2) + (S_2M).$$

La différence de marche  $\delta(M)$  s'en déduit par différence. Mais le plan orthogonal aux rayons lumineux passant par  $A_1$  et  $A_2$  est un plan d'onde relatif à la source placée en  $S$ . On en déduit que :  $(SA_1) = (SA_2)$ . De plus, de manière évidente  $(B_1S_1) = (B_2S_2)$ . On en déduit que :

$$\delta(M) = (SM)_{\text{voie } 2} - (SM)_{\text{voie } 1} = \left( (A_2B_2) - (A_1B_1) \right) + \left( (S_2M) - (S_1M) \right).$$

La différence  $(S_2M) - (S_1M)$  correspond à la différence de marche calculée plus haut :

$$(S_2M) - (S_1M) = \frac{nax}{f'}.$$

Comme  $(A_1B_1) = ne$  et  $(A_2B_2) = Ne$ , il vient :

$$\delta(M) = (N - n)e + \frac{nax}{f'}.$$

L'ordre d'interférences  $p(M)$  et la différence de phase  $\Delta\varphi(M)$  s'en déduisent :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = (N-n)\frac{e}{\lambda_0} + \frac{nax}{\lambda_0 f'}, \quad (8.20)$$

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = (N-n)\frac{2\pi e}{\lambda_0} + \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'}. \quad (8.21)$$

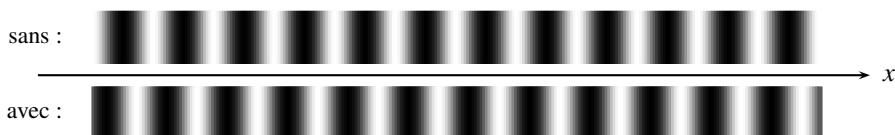
On peut aussi donner l'expression de l'intensité vibratoire :

$$I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'} + (N-n)\frac{2\pi e}{\lambda_0} \right) \right).$$

L'intensité vibratoire ne dépend que de l'abscisse  $x$  du point  $M$  sur l'écran. Elle est périodique, de période  $i = \frac{\lambda_0 f'}{na}$ .

### c) Modifications introduites par la lame

L'expression de l'intensité vibratoire, en présence de la lame, montre que l'interfrange est inchangé. La figure 8.14 donne une représentation, en niveaux de gris, de l'intensité vibratoire sur l'écran, avec et sans lame.



**Figure 8.14** – Représentation des franges d'interférences, sans et avec la lame.

On constate que les franges se décalent. Pour déterminer l'amplitude et interpréter le sens de ce décalage, on peut exprimer l'abscisse  $x_p$  de la frange dont l'ordre d'interférences est  $p$ , sans et avec la lame :

- **Sans la lame :**  $x_p^{(\text{sans})} = p \frac{\lambda_0 f'}{na}$ , d'après la relation (8.12).
- **Avec la lame :**  $x_p^{(\text{avec})} = p \frac{\lambda_0 f'}{na} - \frac{ef'}{a} \left( \frac{N}{n} - 1 \right)$ , d'après la relation (8.20).

L'expression du décalage s'en déduit par différence :

$$\Delta x = x_p^{(\text{avec})} - x_p^{(\text{sans})} = -\frac{ef'}{a} \left( \frac{N}{n} - 1 \right). \quad (8.22)$$

La situation usuelle correspond à  $N > n$ . On obtient alors  $\Delta x < 0$  : les franges se décalent vers les  $x < 0$ , c'est-à-dire vers le côté où la lame a été placée. Cela se comprend intuitivement : pour compenser l'allongement du chemin optique dû à la traversée de la lame, chaque frange se déplace du côté de la lame, augmentant ainsi le chemin optique pour le rayon lumineux issu de  $S_1$ . Mais comme on le devine à l'examen de la figure 8.14, en lumière monochromatique,

l’apparence identique de toutes les franges rend la mesure de ce décalage impossible. On verra, en exercice, qu’un éclairage en lumière blanche rend la mesure possible, mais fait intervenir un effet de dispersion puisque  $N$  varie avec la longueur d’onde.

### Exemple

On considère l’interféromètre de Rayleigh, dérivé du dispositif que l’on vient d’étudier et représenté sur la figure 8.15.

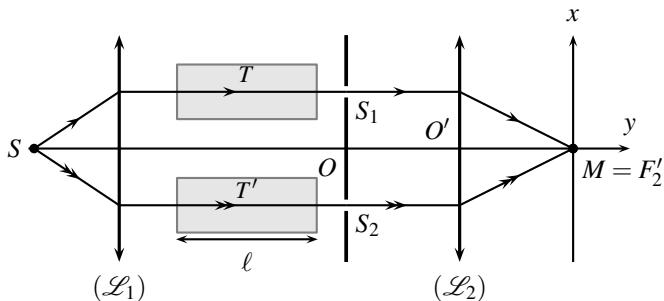


Figure 8.15 – Interféromètre de Rayleigh.

Sur chaque voie de l’interféromètre, on place un tube de longueur  $\ell = 20,00 \text{ cm}$ . On dispose, au foyer image  $F'$  de la lentille  $(\mathcal{L}_2)$ , un détecteur fixe qui permet d’enregistrer le défilement des franges lorsqu’on fait le vide progressivement dans un des deux tubes. Au début de l’expérience, les deux tubes sont remplis d’air. À la fin de l’opération, le vide a été réalisé dans le tube  $T'$ . Avant le début de la manipulation, le détecteur est positionné sur une frange brillante. La détecteur enregistre le défilement de 112 franges brillantes pendant l’expérience. On donne :  $\lambda_0 = 532,0 \text{ nm}$ . On peut alors en déduire une valeur numérique de  $n_{\text{air}} - 1$ .

Il faut déterminer le déplacement  $\Delta x$  des franges. On utilise l’expression (8.22) en remplaçant  $N$  par 1 (indice du vide) et  $n$  par  $n_{\text{air}}$ . Grâce aux données, on obtient que  $|\Delta x| = 112i$  où  $i$  représente l’interfrange, soit :

$$\left| \frac{\ell f'}{a} \left( \frac{1}{n_{\text{air}}} - 1 \right) \right| = 112 \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a} \implies n_{\text{air}} - 1 = p \frac{\lambda_0}{\ell} = 0,0003.$$

On peut estimer que le nombre de franges qui défilent est connu à une frange près, ce qui correspond à une incertitude sur  $n_{\text{air}} - 1$  égale à  $2 \frac{\lambda_0}{\ell} = 6 \times 10^{-6}$ . D’où :

$$n_{\text{air}} - 1 = 0,00030 \pm 0,00001.$$

Cet exemple montre que les phénomènes interférentiels peuvent être utilisés pour réaliser des mesures précises.

**SYNTHESE***SAVOIRS*

- définir un fonctionnement par division du front d'onde
- non localisation des franges produites par un dispositif interférentiel fonctionnant par division du front d'onde
- expression de la différence de marche dans le cas des trous d'Young
- expression de l'interfrange dans le cas des trous d'Young
- critère semi-quantitatif  $|\Delta p| \leq 1/2$  de bonne visibilité des franges d'interférences
- la visibilité décroît avec l'élargissement de la source pour un dispositif interférentiel par division du front d'onde
- définition de la longueur de cohérence spatiale d'une source étendue

*SAVOIR-FAIRE*

- définir, déterminer et utiliser l'ordre d'interférences
- interpréter la forme des franges observées sur un écran éloigné
- utiliser le critère semi-quantitatif de bonne visibilité des franges
- Interpréter qualitativement les observations en lumière blanche.

*MOTS-CLÉS*

- |                           |                          |                        |
|---------------------------|--------------------------|------------------------|
| • trous et fentes d'Young | • visibilité des franges | • cohérence temporelle |
| • ordre d'interférences   | • cohérence spatiale     |                        |

**S’ENTRAÎNER****8.1 Interfrange (\*)**

On réalise une expérience d’interférences avec deux trous d’Young dans l’air. On obtient un interfrange  $i_0 = 2,0 \text{ mm}$ . Le dispositif est alors immergé totalement dans l’eau d’indice  $n_1 = 1,33$ .

Quelle est la nouvelle valeur de l’interfrange ?

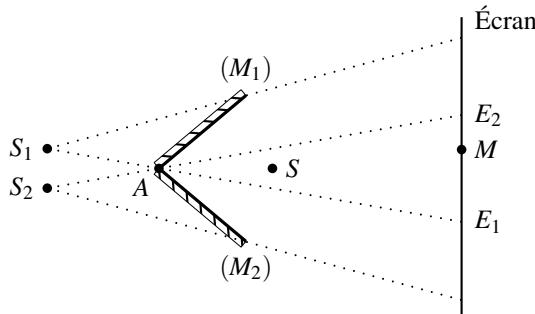
**8.2 Trous d’Young (\*)**

On considère le dispositif des trous d’Young. Les deux trous sont identiques mais l’un des deux trous est recouvert d’une lame qui ne laisse passer que 50% de l’intensité incidente et qui n’introduit aucune différence de marche notable.

Qu’y a-t-il de changé par rapport à la situation où les deux trous sont identiques ?

**APPROFONDIR****8.3 Dispositif interférométrique à deux miroirs (\*\*)** 

On considère le dispositif interférentiel suivant formé de deux miroirs plans ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) placés dans l’air et formant un dièdre d’arête  $A$  et d’angle égal à  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  avec  $\alpha \ll 1$ .



**Figure 8.16** – Dispositif interférométrique à deux miroirs.

Une source lumineuse  $S$  ponctuelle et monochromatique de longueur d’onde  $\lambda_0$  est placée dans le plan bissecteur du dièdre formé par les miroirs, à une distance  $R$  de l’arête ( $AS = R$ ). Soient  $S'_1$  l'image de  $S$  donnée par ( $M_1$ ) et  $S_2$  l'image de  $S'_1$  donnée par ( $M_2$ ). De même, on définit  $S'_2$  l'image de  $S$  donnée par ( $M_2$ ) et  $S_1$  l'image de  $S'_2$  donnée par ( $M_1$ ). Tout se passe comme si les deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  émettaient deux ondes cohérentes susceptibles d’interférer : les franges d’interférences sont observées sur un écran  $\mathcal{E}$  perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre et placé à une distance  $d$  du point  $A$  avec  $d > R$ . On donne :  $AS_1 = AS_2 = R$ .

**1.** Représenter la marche des deux rayons lumineux issus de  $S$  qui viennent interférer au point  $M$ . Le dispositif fonctionne-t-il par division du front d'onde ?

**2.** On donne l'angle  $(\widehat{S_1AS_2}) = 4\alpha$  et la distance  $a$  entre les deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  :  $a = 4R\alpha$ .

**a.** Donner l'expression de l'interfrange  $i$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $d$ ,  $R$  et  $\alpha$ .

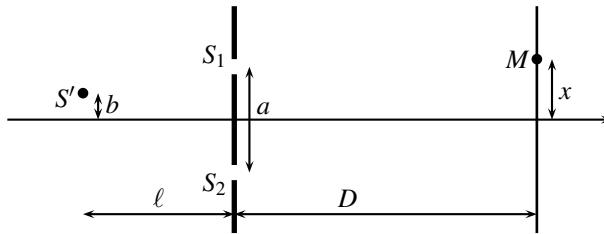
**b.** Donner l'expression de la largeur  $E_1E_2$  du champ d'interférences intercepté par l'écran ainsi que le nombre  $N$  de franges brillantes observées.

**c.** Calculer  $i$ ,  $a$ ,  $E_1E_2$  et  $N$  pour  $\lambda_0 = 0,60 \mu\text{m}$ ,  $\alpha = 2,0 \times 10^{-3} \text{ rad}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$  et  $d = 70 \text{ cm}$ .

#### 8.4 Méthode de Michelson et Pease (★★)

Une source monochromatique  $S'$  de longueur d'onde  $\lambda$  éclaire un dispositif classique de trous d'Young. Les notations sont précisées sur la figure suivante. La source  $S'$  n'est pas sur l'axe des fentes, mais à une distance  $b$  de celui-ci.

On suppose  $|x| \ll D$ ,  $a \ll D$ ,  $a \ll \ell$  et  $b \ll \ell$ .



**1.** En tenant compte de ces approximations, exprimer l'ordre d'interférences  $p(M)$  en fonction de  $x$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $D$  et  $\ell$ , où  $x$  représente l'abscisse du point  $M$ .

**2. a.** Une seconde source  $S''$ , identique à la précédente, est placée symétriquement à  $S'$  par rapport à l'axe du dispositif de fentes. Les sources  $S'$  et  $S''$  sont supposées incohérentes. Un dispositif adapté permet de faire varier  $a$ , les paramètres  $\varepsilon = \frac{2b}{\ell}$  et  $\lambda_0$  restant fixes.

Déterminer les valeurs de  $a$  qui correspondent à une annulation de la visibilité des franges d'interférences au point  $M$ .

**b. Application.** Les deux sources  $S'$  et  $S''$  sont les deux composantes d'une étoile double. Dans le cas de Capella, pour  $\lambda_0 = 635 \text{ nm}$ , on trouve que la plus petite valeur de  $a$  annulant la visibilité des franges vaut  $a_0 = 116,5 \text{ cm}$ . En déduire la valeur de  $\varepsilon$  (par souci de simplicité, on prendra l'indice des milieux traversés égal à 1).

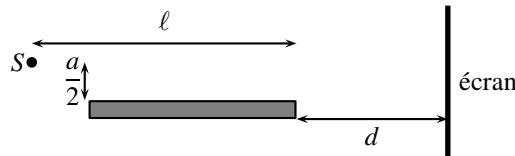
#### Remarque

Si le principe de mesure de  $\varepsilon$  est dû à Fizeau et Stefan (1868), la première mise en pratique a été réalisée par Michelson et Pease en 1920 qui ont adapté des fentes d'Young devant un télescope avec une base  $a$  réglable allant jusqu'à trois mètres. En 1974, A. Labeyrie a obtenu, sur le même principe, des interférences avec deux télescopes distincts,

ce qui permet d’augmenter à la fois la luminosité du montage et la base  $a$  ; c’est celle-ci qui conditionne le pouvoir de résolution de cette méthode.

### 8.5 Miroir de Lloyd (★★)

On considère une dispositif interférentiel constitué d’une lame de verre plane utilisée comme miroir plan, éclairée sous incidence rasante. Un point source  $S$  émet une lumière monochromatique de longueur d’onde  $\lambda_0$ .



**Figure 8.17** – Dispositif interférentiel du miroir de Lloyd.

On rappelle que la réflexion sur un miroir s’accompagne d’un retard de phase égal à  $\pi$ .

1. Les interférences sont obtenues par superposition de l’onde issue directement de  $S$  et de celle réfléchie par le miroir. En déduire quelles sont les deux sources qui produisent des interférences. Sont-elles cohérentes ?

2. Représenter la marche des deux rayons lumineux qui interfèrent en un point  $M$  de l’écran. Vérifier que le dispositif fonctionne bien par division du front d’onde.

3. Décrire le champ d’interférences. Les interférences sont-elles localisées ?

4. L’écran est placé à la distance  $d$  du bord droit du miroir. La source est à la distance  $a/2$  du miroir et la distance entre la source et le bord droit du miroir est notée  $\ell$ .

Déterminer l’ordre d’interférences  $p(M)$ , la différence de marche  $\delta(M)$  et la différence de phase  $\Delta\varphi(M)$  en un point  $M$  de l’écran.

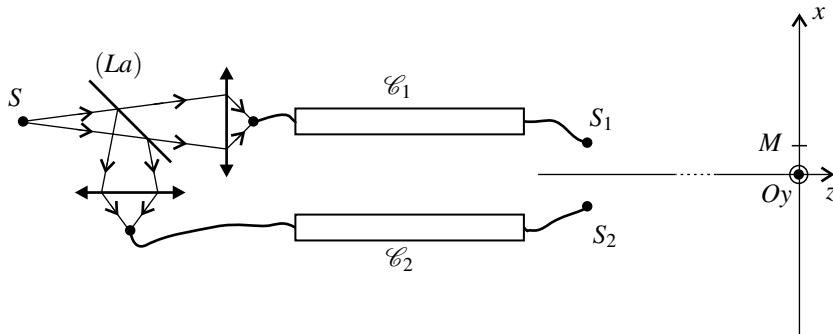
5. En déduire l’expression de l’intensité vibratoire sur l’écran. Quelle est la forme géométrique des franges d’interférences ? Peut-on remplacer la source ponctuelle par une fente lumineuse allongée dans la direction orthogonale au plan de la figure sans dégrader la visibilité des franges ?

6. On élargit maintenant la fente source dans la direction parallèle à l’écran. Sa largeur  $b$  est répartie également de part et d’autre de la position  $a/2$ . En utilisant le critère semi-quantitatif de visibilité des franges, estimer l’extension spatiale de la figure d’interférences où les franges restent visibles. On l’exprimera en fonction de l’interfrange  $i$ , de  $a$  et  $b$ .

### 8.6 DéTECTEUR INTERFÉROMÉTRIQUE DE CONCENTRATION (★)

Le faisceau émis par une source  $S$  monochromatique de longueur d’onde  $\lambda_0 = 590 \text{ nm}$  est dédoublé par une lame semi-réfléchissante ( $La$ ) en deux faisceaux qui sont injectés dans deux fibres optiques. Les rayons lumineux guidés par ces fibres traversent deux cuves transparentes  $C_1$  et  $C_2$  identiques et sortent de la fibre optique en deux points  $S_1$  et  $S_2$  tels que  $S_1S_2 = a$ .

Un écran d’observation est disposé parallèlement à l’axe  $S_1S_2$  à distance  $D \gg a$  de celui-ci. Le dispositif est réglé de telle manière que les chemins optiques  $(SS_1)$  et  $(SS_2)$  sont rigoureusement identiques lorsque les cuves sont vides.



**1.** Les cuves sont remplies d'air dans les conditions standard de température et de pression ; on note  $n_1$  l'indice de l'air dans ces conditions supposées réalisées à l'extérieur des cuves aussi. Donner une expression de l'intensité  $I(x)$  observée sur l'écran au voisinage de  $O$  en fonction de sa valeur moyenne  $I_m$ , de  $x$  et d'une interfrange  $i$  que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

**2.** Dans la cuve  $\mathcal{C}_2$  on remplace progressivement tout l'air par du monoxyde carbone CO d'indice optique  $n_2$ . On constate que lors de ce remplacement les franges se déplacent vers le haut.

**a.** Quel est le signe de  $n_2 - n_1$  ?

**b.** Soit  $n$  l'indice du mélange en cours de remplissage. Donner l'expression de l'intensité  $I(x)$  au cours du remplissage en fonction de  $I_m$ ,  $i$ ,  $x$ ,  $n_1$ ,  $n$  et  $L$  (longueur intérieure des cuves).

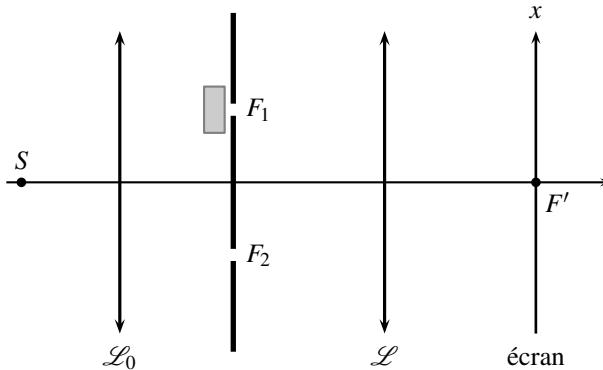
**c.** On note que  $70 \pm 1$  franges passent en  $O$  au cours de l'expérience. Sachant que  $L = 1,00 \text{ m}$  et  $n_1 = 1,0002926$ , calculer  $n_2$  et évaluer l'incertitude sur le résultat.

**3.**  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  étant à nouveau remplies d'air, on introduit dans  $\mathcal{C}_2$  une petite quantité de CO. On admet que la variation d'indice est proportionnelle à la fraction molaire  $f$  de CO dans celui-ci ; l'indice du mélange est donc :  $n = n_1 + (n_2 - n_1)f$ .

Calculer la plus petite fraction molaire  $f_{\min}$  de CO détectable dans l'hypothèse où le plus petit déplacement décelable des franges est égal à  $i/10$ .

### 8.7 Frange achromatique (★★★)

On considère le dispositif des fentes d’Young en lumière monochromatique avec observation dans le plan focal image d’une lentille  $\mathcal{L}$ , la source  $S$  étant placé au foyer objet d’une lentille  $\mathcal{L}_0$  :



**1.** Décrire la figure d’interférence observée ainsi que la répartition de l’intensité vibratoire  $I(x)$  sur l’écran.

*Application numérique :  $F_1F_2 = a = 1 \text{ mm}$  ;  $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$  ;  $f' = 50 \text{ cm}$ . Calculer l’interfrange.*

**2.** Une lame de verre d’épaisseur  $e$ , d’indice  $n$ , est placée avant  $F_1$  (voir figure). Déterminer la nouvelle position de la frange centrale. De combien d’interfranges s’est-elle déplacée ?

*Application numérique :  $n = 1,500$  et  $e = 0,01 \text{ mm}$ .*

**3.** On remplace désormais la source monochromatique par une source de lumière blanche. L’indice du verre varie avec la longueur d’onde dans le vide selon la *loi de Cauchy* :

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2},$$

avec  $A = 1,489$  et  $B = 0,004 \mu\text{m}^2$ . On appelle *frange achromatique* celle pour laquelle  $\frac{\partial \Delta\phi}{\partial \lambda_0} = 0$  pour  $\lambda_0 = \lambda_{0m} = 600 \text{ nm}$ , longueur d’onde moyenne du spectre visible.

Déterminer, la position de la frange achromatique. Donner, en interfrange, l’écart entre la frange achromatique et la frange centrale trouvée à la question précédente.

**4.** Pour mesurer l’épaisseur  $e$  d’une lame à faces parallèles d’indice  $n$ , l’écart entre les positions, sur l’écran, de l’unique frange blanche (qui est aussi la mieux contrastée) avant et après l’introduction de la lame. Quelle erreur relative commet-on sur la mesure de  $e$  si on considère que  $n = 1,500$  indépendamment de la longueur d’onde ?

**5.** Dans cette question on néglige la dispersion ( $B = 0$ ). Sachant que le dispositif des fentes de Young permet d’obtenir des différences de marche géométriques allant de 0 à  $10 \mu\text{m}$ , quelle est la valeur maximale de  $e$  qui peut être mesurée par cette méthode ? Qu’observe-t-on si on prend une lame ayant 1 mm d’épaisseur ? On rappelle que la longueur de cohérence de la lumière blanche peut être estimée en pratique à environ  $3 \mu\text{m}$ .

## 8.8 Expérience de Fizeau (★★★)

*La résolution de cet exercice nécessite d'avoir vu le cours de mécanique et la loi de composition des vitesses.*

En 1851, Fizeau réalisa l'expérience d'interférométrie suivante afin de vérifier l'hypothèse émise par Fresnel selon laquelle la vitesse de la lumière mesurée dans un référentiel en mouvement par rapport à l'éther n'obéissait pas à la loi de composition des vitesses galiléenne.

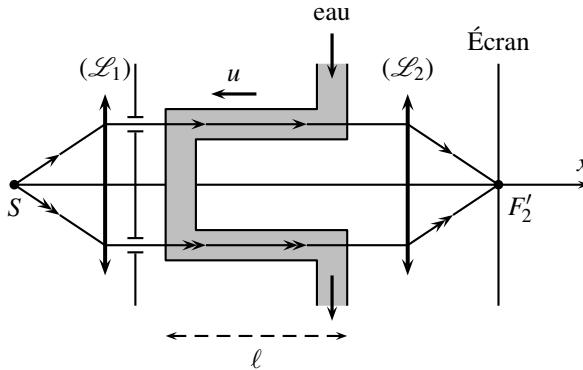


Figure 8.18 – Représentation schématique du dispositif utilisé par Fizeau.

La source ponctuelle  $S$  est supposée monochromatique ( $\lambda_0 = 530 \text{ nm}$ ) même si Fizeau utilisa la lumière solaire. L'eau, initialement au repos, est mise en mouvement avec une vitesse d'écoulement constante  $u$ . On notera  $v = c/n$  la vitesse de la lumière dans l'eau.

**1.** Estimer la différence de temps de propagation entre les deux rayons qui interfèrent en  $F'_2$  et en déduire la différence de marche  $\delta$  correspondante :

a. en utilisant la loi de composition des vitesses galiléenne :  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$  où  $\vec{v}'$  est la vitesse mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation à la vitesse  $\vec{u} = u \vec{u}_x$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  où est mesurée la vitesse  $\vec{v}$ .

b. en utilisant la loi de composition des vitesses relativiste (avec les mêmes notations) :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}.$$

**2.** L'expérience de Fizeau consiste à observer les franges d'interférences avec l'eau immobile ( $u = 0$ ) puis à mesurer le déplacement des franges quand on met l'eau en mouvement.

Donner ce déplacement  $\Delta p$ , exprimé en nombre de franges, dans les deux cas ci-dessus (galiléen et relativiste).

**3.** Les valeurs des différents paramètres correspondant à l'expérience historique de Fizeau sont  $n = 1,33$ ;  $\ell = 1,5 \text{ m}$  et  $u = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Quelle est la loi de composition des vitesses qui donnent un résultat théorique compatible avec l'expérience sachant que Fizeau mesura un décalage de 0,23 frange, doublant l'effet en inversant le sens du courant.

**Remarque**

L’hypothèse formulée par Fresnel et que Fizeau cherchait à vérifier est que l’eau en mouvement n’entraînait que partiellement l’éther de sorte que la vitesse relative entre l’eau et l’éther n’était qu’une fraction de  $\vec{v}$  égale à  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \vec{v}$ . Cette hypothèse alarmante était compatible avec les résultats de Fizeau. Mais celui-ci, en bon scientifique, conclut que « le succès de cette expérience me semble devoir entraîner l’adoption de l’hypothèse de Fresnel, ou, du moins, de la loi qu’il a trouvée pour exprimer le changement de la vitesse de la lumière par l’effet du mouvement des corps ». Il faut rendre hommage à Fizeau pour sa prudence puisque, presque cinquante ans après ses expériences, Einstein montrera que la loi de Fresnel était en fait une approximation de la loi de transformation relativiste.

**CORRIGÉS****8.1 Interfrange**

Dans l'air, d'indice  $n_0$ , l'interfrange s'exprime ainsi :  $i_0 = \frac{\lambda_0 D}{n_0 a}$ . Dans l'eau, il devient :  $i_1 = \frac{\lambda_0 D}{n_1 a}$ . On en déduit que  $n_0 i_0 = n_1 i_1$ . D'où :  $i_1 = \frac{n_0}{n_1} i_0 = 1,50 \text{ mm}$ .

**8.2 Trous d'Young**

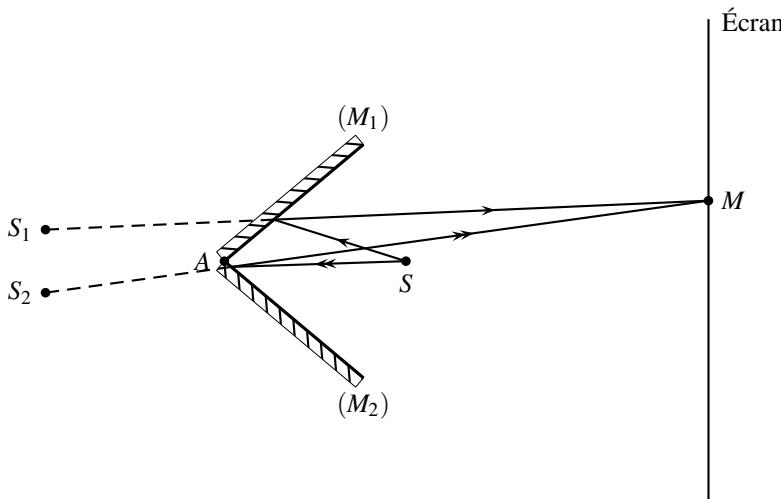
Lorsque les deux trous ne sont pas identiques, l'intensité vibratoire sur l'écran s'écrit :  $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}\right)$ . Selon l'énoncé :  $I_2 = 0,5I_1$ . On en déduit :

$$I(M) = 1,5I_1 + \sqrt{2}I_1 \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}\right).$$

Il en résulte seulement une modification du contraste de la figure d'interférences, qui vaut  $\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . L'interfrange n'est pas affecté.

**8.3 Dispositif interférométrique à deux miroirs**

1. On a représenté la marche des rayons lumineux issus de la source  $S$  et qui vont interférer au point  $M$ .



On constate sur la figure que les deux rayons qui viennent interférer en  $M$  sont issus de deux rayons distincts de la source  $S$ . Le dispositif fonctionne donc par division du front d'onde.

2. On considère que l'indice de l'air est égal à 1.

## CHAPITRE 8 – DISPOSITIF INTERFÉRENTIEL PAR DIVISION DU FRONT D’ONDE : LES TROUS D’YOUNG

**a.** L’expression de l’interfrange est analogue à celle obtenue pour les trous d’Young. On doit faire intervenir la distance  $D = d + R$  entre les sources  $S_1$  et  $S_2$  et l’écran d’observation. La distance entre les deux sources est donnée :  $a = 4R\alpha$ . L’expression de l’interfrange est :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{\lambda_0(d+R)}{4R\alpha}.$$

**b.** La largeur du champ d’interférences est  $E_1 E_2 = 4\alpha d$ . Le nombre de franges visibles est donné par  $N = \frac{E_1 E_2}{i}$ , soit :

$$N = \frac{16Rd\alpha^2}{\lambda_0(d+R)}.$$

**c.** On obtient :  $i = 6,0 \times 10^{-4}$  m ;  $E_1 E_2 = 5,6$  mm et  $N = 9,3$ . Il y a donc 9 franges brillantes visibles dans le champ d’interférences.

#### 8.4 Méthode de Michelson et Pease

**1.** On utilise les résultats démontrés dans le cours :  $p(M) = \frac{nax}{\lambda_0 D} + \frac{nab}{\lambda_0 \ell}$ .

**2. a.** Les deux sources  $S'$  et  $S''$  sont deux sources distinctes, incohérentes. Chacune produit sur l’écran son propre système de franges d’interférences. La visibilité des franges s’annule lorsque, par exemple, la source  $S'$  produit au point  $M$  une frange brillante, alors que la source  $S''$  produit au point  $M$  une frange sombre. Cela se traduit ainsi :

$$p = \frac{nax}{\lambda_0 D} + \frac{nab}{\lambda_0 \ell} \quad \text{et} \quad q + \frac{1}{2} = \frac{nax}{\lambda_0 D} - \frac{nab}{\lambda_0 \ell},$$

où  $p$  et  $q$  sont deux entiers. On précise que l’ordre d’interférences en  $M$  associé à la source  $S''$  se déduit de celui associé à  $S'$  en changeant  $b$  en  $-b$ . On obtient ensuite, en posant  $m = p - q$  ( $m$  entier), par différence :

$$m - \frac{1}{2} = \frac{2nab}{\lambda_0 \ell} = \frac{n\alpha\varepsilon}{\lambda_0}.$$

Les valeurs de  $a$  qui correspondent à l’annulation de la visibilité s’en déduisent :

$$a_m = m \frac{\lambda_0}{n\varepsilon} - \frac{\lambda_0}{2n\varepsilon},$$

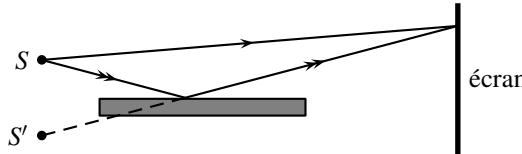
avec  $m \in \mathbb{N}^*$  car  $a_m < 0$  n’a pas de sens.

**b.** La plus petite valeur positive de  $a$  est obtenue pour  $m = 1$ . On obtient :  $\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2a}$  (avec  $n = 1$ ). L’application numérique donne :  $\varepsilon = 2,7 \times 10^{-7}$  m. Cette méthode permet de mesurer des angles très faibles.

#### 8.5 Miroir de Lloyd

**1.** Les deux sources qui interfèrent sont la source  $S$  elle-même et la source  $S'$  image de  $S$  par le miroir (elles sont représentées sur la figure suivante). Ce sont deux sources ponctuelles, de même pulsation, mais aussi synchrones : elles sont donc cohérentes.

**2.** La marche des deux rayons lumineux qui viennent interférer en  $M$  sur l'écran est représentée sur la figure suivante.



On constate que ce sont bien deux rayons distincts issus de  $S$  qui donnent les deux rayons qui interfèrent en  $M$  : le dispositif fonctionne bien par division du front d'onde.

**3.** Le champ d'interférences est limité au recouvrement des faisceaux lumineux issus de la source  $S$  et du faisceau lumineux réfléchi. Celui-ci est limité par les deux rayons, issus de  $S'$ , et qui s'appuient sur les bords du miroir. Le dispositif à division du front d'ondes étudié ici est éclairé par une source ponctuelle : les interférences ne sont pas localisées.

**4.** Les deux sources sont distantes de  $a$  et la distance entre les deux sources et l'écran est  $d + \ell$ . On en déduit les expressions demandées sans oublier le retard de phase égal à  $\pi$ , associé à la réflexion sur le miroir. L'abscisse  $x = 0$  doit être positionnée sur l'axe médiateur des deux sources  $S$  et  $S'$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad p(M) &= \frac{nax}{\lambda_0(d + \ell)} + \frac{1}{2}; \\ \bullet \quad \delta(M) &= \frac{nax}{d + \ell} + \frac{\lambda_0}{2}; \\ \bullet \quad \Delta\varphi(M) &= \frac{2\pi nax}{\lambda_0(d + \ell)} + \pi. \end{aligned}$$

**5.** L'intensité vibratoire au point  $M$  d'abscisse  $x$  est :  $I(x) = 2I_0 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0(d + \ell)} \right) \right)$ .

L'intensité vibratoire ne dépend que de  $x$  : les franges sont donc rectilignes. Dans le cours, nous avons vu, dans le cas analogue des trous d'Young, qu'il était possible d'étendre la source dans une direction orthogonale à l'axe des deux sources sans que le contraste de la figure d'interférences ne soit affecté.

**6.** Si l'on rapproche la source  $S$  du miroir d'une distance  $b/2$ , alors la source  $S'$  se rapproche aussi de la même distance  $b/2$ . Par suite, la distance entre  $S$  et  $S'$  devient  $a - b$  et l'ordre d'interférences au point  $M$  s'écrit alors (l'axe médiateur de  $S$  et  $S'$  n'est pas modifié, donc l'origine  $x = 0$  reste la même) :

$$p'(M) = \frac{n(a - b)x}{\lambda_0(d + \ell)} + \frac{1}{2}.$$

La variation de l'ordre d'interférences au point  $M$  est :  $\Delta p(M) = p'(M) - p(M) = -\frac{nbx}{\lambda_0(d + \ell)}$ .

Considérons maintenant une source élargie de largeur totale  $b$ . La calcul que nous venons de faire correspond à l'évaluation de la variation de l'ordre d'interférences lorsqu'on considère une source ponctuelle au centre de la fente-source puis sur son bord. On obtient donc :  $|\Delta p(M)| = \frac{nb|x|}{\lambda_0(d + \ell)}$ . Les franges restent visibles en  $M$  à condition que  $|\Delta p(M)| \leq 1/2$ , soit

## CHAPITRE 8 – DISPOSITIF INTERFÉRENTIEL PAR DIVISION DU FRONT D’ONDE : LES TROUS D’YOUNG

pour :

$$\frac{nb|x|}{\lambda_0(d+\ell)} \leq \frac{1}{2} \implies |x| \leq \frac{\lambda_0(d+\ell)}{2nb}.$$

L’interfrange se lit dans l’expression de l’intensité vibratoire en l’écrivant sous la forme :  $I(x) = 2I_0 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{i} \right) \right)$ . On obtient :  $i = \frac{\lambda_0(d+\ell)}{na}$ . On en déduit finalement que les franges restent bien visibles pour  $x$  vérifiant la condition suivante :

$$|x| \leq i \frac{a}{2b}.$$

### 8.6 DéTECTEUR INTERFÉROMÉTRIQUE DE CONCENTRATION

**1.** Les points de sortie  $S_1$  et  $S_2$  des fibres optiques sont deux sources secondaires cohérentes car la lumière provient d’une seule source primaire  $S$ . Ces sources sont synchrones (leur déphasage est nul) puisque  $(SS_1) = (SS_2)$ , que les cuves soient vides toutes les deux ou remplies toutes les deux d’air dans les mêmes conditions de température et de pression.

La différence de marche des deux rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$  qui parviennent en  $M$  sur l’écran est, d’après le calcul classique :  $\delta(M) \simeq \frac{n_1 ax}{D}$ . Ainsi, l’intensité est :

$$I(x) = I_m \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi x}{i} \right) \right) \quad \text{avec} \quad i = \frac{\lambda_0 D}{n_1 a}.$$

**2. a.** Chaque frange correspond à une valeur donnée de la différence de marche. Les franges se déplacent vers le haut pour compenser le fait que le trajet optique dans la cuve  $\mathcal{C}_2$  diminue, donc  $n_2 < n_1$ .

**b.** La nouvelle différence de marche est :  $\delta = \frac{n_1 ax}{D} + (n - n_1)L$  et la nouvelle intensité :

$$I(x) = I_m \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi x}{i} + \frac{2\pi(n - n_1)L}{\lambda_0} \right) \right).$$

**c.** La frange d’ordre 0 initialement en  $x = 0$  est passée en  $x = (70 \pm 1)i$  donc :

$$0 = (70 \pm 1) + \frac{(n_2 - n_1)L}{\lambda_0} \Leftrightarrow n_2 = n_1 - (70 \pm 1) \frac{\lambda_0}{L} = 1,000253 \pm 0,0000006.$$

**3.** La plus petite variation d’indice décelable est celle qui provoque une variation de la différence de marche égale à  $\lambda/10$  :  $(n_1 - n_2)f_{\min}L = \frac{\lambda_0}{10}$  soit :

$$f_{\min} = \frac{\lambda_0}{10(n_1 - n_2)L} = \frac{1}{10 \times 70} = 1,4 \cdot 10^{-3}.$$

### 8.7 Frange achromatique

**1.** Il s'agit de l'expérience des fentes de Young avec source ponctuelle à l'infini et écran à l'infini (montage de Fraunhofer). La construction des rayons et le calcul de la différence de marche se font comme dans le cours. La différence de marche des rayons parvenant en point  $M$  de l'écran d'abscisse  $x = \overline{F'M}$  est :

$$\delta(x) = (SF_2M) - (SF_1M) = \frac{n_{\text{air}}ax}{f'},$$

et l'intensité vibratoire :

$$I(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi n_{\text{air}}ax}{\lambda_0 f'} \right) \right),$$

où  $I_0$  est l'intensité vibratoire uniforme obtenu lorsqu'on obstrue l'une des fentes. L'interfrange est :  $i = \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}}a} = 0,3$  mm.

**2.** La lame donne au rayon qui la traverse un supplément de chemin optique valant  $(n - n_{\text{air}})e$ . La différence de marche devient :  $\delta'(x) = \frac{n_{\text{air}}ax}{f'} - (n - n_{\text{air}})e$ . La frange centrale se trouve à présent en :  $x'_0 = \frac{(n - n_{\text{air}})ef'}{n_{\text{air}}a}$ .

Le déplacement du système de franges correspond à un nombre de fois l'interfrange égal à :  $\frac{x'_0}{i} = \frac{(n - n_{\text{air}})e}{\lambda_0} = 8,3$ .

**3.**  $\Delta\varphi(x, \lambda) = \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda_0} = \frac{n_{\text{air}}ax}{\lambda_0 f'} - \frac{(n - n_{\text{air}})e}{\lambda_0}$  d'où :

$$\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\lambda_0} = - \left( \frac{n_{\text{air}}ax}{f'} - (n - n_{\text{air}})e \right) \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{3Be}{\lambda_0^4}.$$

La frange achromatique est donc située en :  $x''_0 = \left( A - n_{\text{air}} + \frac{4B}{\lambda_{0m}^2} \right) \frac{ef'}{n_{\text{air}}a}$ .

On a :  $\frac{x''_0 - x'_0}{i} = \frac{3Be}{\lambda_{0m}^3} = 0,56$ .

**4.** On mesure  $x''_0$ . Supposer que l'indice de la lame est constant revient à interpréter le résultat comme si c'était  $x'_0$ . L'erreur relative sur la détermination de  $e$  qui en découle est  $\frac{x''_0 - x'_0}{x'_0} = 6,7\%$ . C'est une erreur par excès.

**5.** Pour qu'on puisse trouver la frange centrale dans le champ d'interférence, il faut que le chemin optique supplémentaire apporté par la lame reste inférieur à  $10 \mu\text{m}$  c'est à dire que :  $e < e_{\text{max}} = \frac{10 \mu\text{m}}{(n - n_{\text{air}})} = 20 \mu\text{m}$ .

Si l'on prend une lame de 1 mm d'épaisseur, la différence de marche dans le champ d'interférence est comprise entre  $(n - n_{\text{air}})e - 10 \mu\text{m} = 490 \mu\text{m}$  et  $(n - n_{\text{air}})e + 10 \mu\text{m} = 510 \mu\text{m}$ ; elle est donc nettement supérieure à la longueur de cohérence de la lumière blanche. Dans ce cas, les franges disparaissent lorsqu'on introduit la lame. On observe un blanc d'ordre supérieur.

### 8.8 Expérience de Fizeau

**1.** La seule dissymétrie dans les deux voies de l’interféromètre réside dans les trajets dans le fluide en écoulement.

**a.** La différence de marche est donc reliée à la différence des temps de parcours dans les fluides. On admet que la vitesse de la lumière suit la loi galiléenne de composition des vitesses. Dans la branche du bas, la lumière est entraînée par l’eau :  $v' = v + u$ . Dans la branche du haut, la lumière, remontant à contre-courant, va moins vite :  $v' = v - u$ . La différence des temps de parcours s’écrit :  $\Delta t_c = \frac{2u\ell}{v^2 - u^2} \approx \frac{2u\ell}{v^2}$ , soit, puisque  $v = c/n$  :  $\Delta t_c = \frac{2n^2u\ell}{c^2}$ . La différence de marche s’en déduit :  $\delta_c = c\Delta t_c = \frac{2n^2u\ell}{c}$ .

**b.** En utilisant la loi de composition des vitesses relativistes, on trouve  $\Delta t_r = \frac{2u\ell}{v^2 - u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ , soit, de façon approchée :

$$\Delta t_r = \frac{2u\ell}{v^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Puisque  $v = c/n$ , on obtient :  $\Delta t_r = \frac{2u\ell}{c^2}(n^2 - 1)$ . D'où la différence de marche correspondante :  $\delta_r = c\Delta t_r = \frac{2u\ell}{c}(n^2 - 1)$ .

**2.** Le déplacement des franges est donné par :  $\Delta p = \frac{\delta(u \neq 0) - \delta(u = 0)}{\lambda_0}$ . Étant donné que  $\delta(u = 0) = 0$ , on obtient :

$$\Delta p_c = \frac{2n^2u\ell}{\lambda_0 c} \text{ et } \Delta p_r = \frac{2u\ell}{\lambda_0 c}(n^2 - 1).$$

**3.** L’application numérique donne :  $\Delta p_c = 0,23$  et  $\Delta p_r = 0,10$ . Si l’on double l’effet de décalage des franges en inversant le sens du courant, la formule classique donne un décalage de 0,46 frange alors que la formule relativiste donne un décalage de 0,20 frange, compatible avec l’expérience. L’expérience de Fizeau valide donc la loi de composition des vitesses relativiste.

# L'interféromètre de Michelson

**L'interféromètre de Michelson**, porte le nom d'Albert Michelson (1852-1931), prix Nobel de physique en 1907. Il conçut et utilisa cet interféromètre pour tenter de vérifier la loi de composition des vitesses galiléenne et de mesurer la vitesse d'entraînement de la lumière dans le référentiel terrestre. Le résultat négatif de cette expérience ouvrit la voie à la théorie de la relativité d'Einstein. De nos jours cet appareil est très employé pour réaliser des mesures de grande précision (mesures de distances notamment). Le détecteur franco-italien d'ondes gravitationnelles VIRGO qui a été inauguré en 2003, est un interféromètre de Michelson géant dont les bras font 3 km de long.

## 1 L'interféromètre de Michelson

### 1.1 Présentation du dispositif

L'interféromètre de Michelson est représenté sur la figure 9.1 :

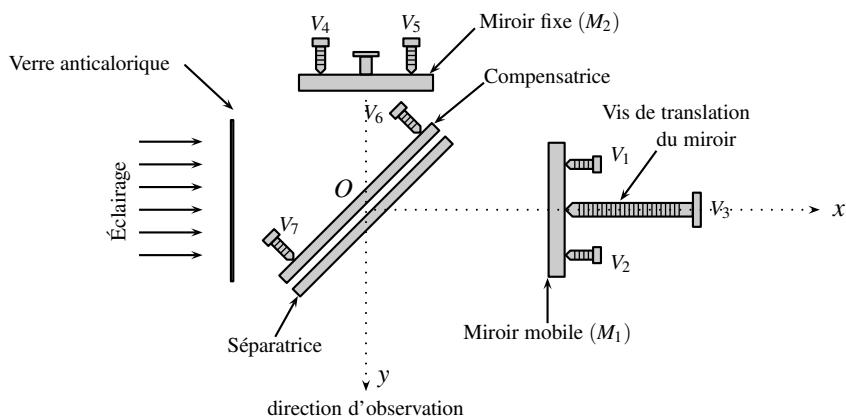


Figure 9.1 – Schéma d'un interféromètre de Michelson.

L’interféromètre est réalisé à partir d’éléments de haute qualité optique et mécanique :

- un miroir mobile ( $M_1$ ), pouvant être translaté le long de l’axe ( $Ox$ ).
- un miroir fixe ( $M_2$ ).
- une lame traitée sur sa face avant pour être semi-réfléchissante, appelée **lame séparatrice**, et une lame identique mais non traitée, appelée **lame compensatrice**, toutes deux inclinées d’un angle  $\pi/4$  par rapport aux axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ). L’ensemble de ces deux lames constituent le **dispositif séparateur**.

Les deux segments  $[O ; \text{miroir } (M_1)]$  et  $[O ; \text{miroir } (M_2)]$  constituent les deux **bras de l’interféromètre**.

Un verre anticalorique est placé à l’entrée de l’interféromètre : il a pour rôle d’absorber le rayonnement infrarouge, protégeant ainsi toute l’optique de l’interféromètre.

Différentes vis de réglage (de  $(V_1)$  à  $(V_6)$ ) permettent de contrôler la position ou l’orientation des différents éléments :

- Les vis  $(V_1)$  et  $(V_2)$  permettent d’opérer un réglage « grossier » de l’orientation du miroir mobile ( $M_1$ ) ;
- La vis  $(V_3)$  est une vis micrométrique hélicoïdale qui permet de déplacer le miroir ( $M_1$ ). Le mouvement correspondant est appelé **chariotage** du miroir. Cette vis est munie d’un palmer qui permet de mesurer la position du miroir ( $M_1$ ) au centième de millimètre près.
- Les vis  $(V_4)$  et  $(V_5)$  permettent de régler finement l’orientation du miroir fixe ( $M_2$ ).

Le rôle des vis  $(V_6)$  et  $(V_7)$  est expliqué ci-après.

## 1.2 Les deux voies de l’interféromètre

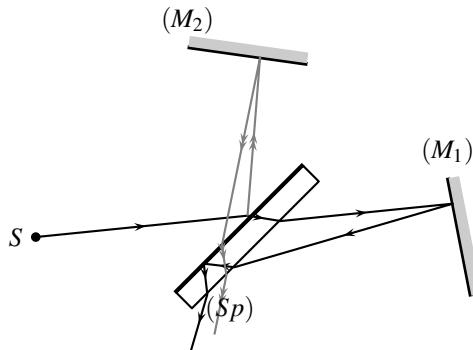
L’interféromètre de Michelson offre deux voies possibles à la lumière incidente :

- **Voie 1** : la lumière incidente est d’abord transmise par le dispositif séparateur, réfléchie ensuite par le miroir ( $M_1$ ), et enfin réfléchie par le dispositif séparateur avant d’émerger de l’interféromètre.
- **Voie 2** : la lumière incidente est d’abord réfléchie par le dispositif séparateur, réfléchie ensuite par le miroir ( $M_2$ ), et enfin transmise par le dispositif séparateur avant d’émerger de l’interféromètre.

## 1.3 Le dispositif séparateur

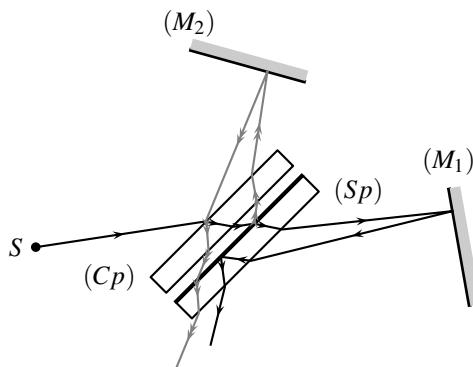
La lame séparatrice permet de séparer le faisceau lumineux incident en deux faisceaux d’éclairement moitié. Cependant, en l’absence de lame compensatrice, le rayon réfléchi par ( $M_1$ ) traverse trois fois la séparatrice (voir figure 9.2) alors que le rayon réfléchi par ( $M_2$ ) ne la traverse qu’une fois. Ceci entraîne une différence de chemin optique irréductible entre les deux voies de l’interféromètre. Et comme l’indice optique de la lame compensatrice dépend de la longueur d’onde (effet de dispersion), cette différence de chemins optiques varie avec la longueur d’onde. On pourrait la compenser en lumière monochromatique en rapprochant convenablement le miroir ( $M_1$ ) du dispositif séparateur. Mais cela devient inopérant en lumière polychromatique. Il faut donc rechercher une autre façon de compenser cette différence de marche.

Pour compenser la différence de marche introduite par la séparatrice, on ajoute au dispo-



**Figure 9.2 – Influence de la seule lame séparatrice.**

satif séparateur une lame identique (sans traitement de surface cette fois-ci). Ainsi, chaque rayon transitant par une des deux voies de l'interféromètre aura traversé quatre fois l'épaisseur d'une lame (voir figure 9.3). La présence de la lame compensatrice permet de rendre les deux voies de l'interféromètre équivalentes. Les vis ( $V_6$ ) et ( $V_7$ ) permettent de régler l'orientation de la lame compensatrice afin d'assurer le meilleur parallélisme possible avec la lame séparatrice.



**Figure 9.3 – Dispositif séparateur complet.**

Dans toute la suite du cours, on considérera que l'ensemble des lames séparatrice et compensatrice est équivalent à une lame séparatrice d'épaisseur idéalement nulle, n'introduisant aucune différence de marche résiduelle.

## 1.4 Schéma de principe de l'interféromètre

Nous raisonnons désormais sur le schéma de principe suivant, modélisant l'interféromètre de Michelson (figure 9.4).

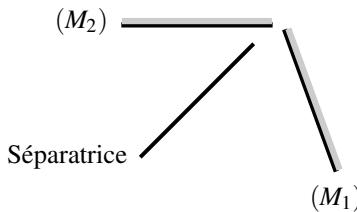


Figure 9.4 – Schéma de principe de l’interféromètre de Michelson.

Dans ce schéma, l’interféromètre est réduit à l’essentiel : deux miroirs ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) et une séparatrice idéale.

Le dispositif séparateur est conçu pour réfléchir 50% de l’intensité vibratoire incidente, quelle que soit le faisceau incident, et pour transmettre 50% de l’intensité vibratoire. Les flux énergétiques dans l’interféromètre de Michelson sont représentés sur la figure 9.5 (en supposant les miroirs parfaitement réfléchissants<sup>1</sup>).

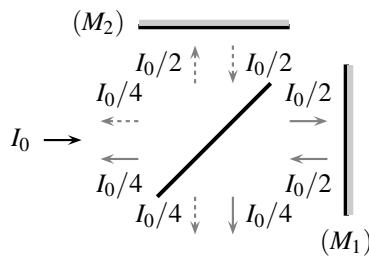


Figure 9.5 – Flux énergétiques.

La moitié de l’intensité vibratoire est dirigée vers la sortie de l’interféromètre, et l’autre moitié est renvoyée vers la source.

## 2 Configuration de la lame d’air éclairée par une source étendue

Dans les situations pratiques utiles, l’interféromètre de Michelson est éclairé par une source étendue.

### 2.1 Définition

On dit que l’interféromètre est configuré en **lame d’air** lorsque les deux miroirs ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) sont perpendiculaires aux axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) respectivement.

---

1. Dans le domaine optique, le coefficient de réflexion en énergie d’un miroir métallique est voisin de 96%.

## 2.2 Observation des franges

### a) Localisation des franges à l'infini

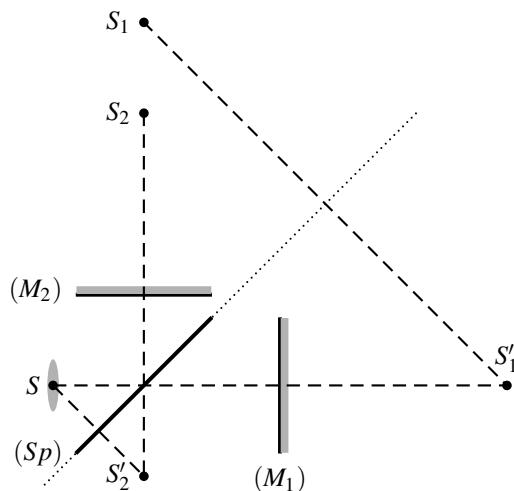
L'expérience montre que dans la configuration de la lame d'air éclairée par une source étendue, les interférences sont très peu visibles lorsqu'on place à la sortie de l'interféromètre un écran à distance finie de l'interféromètre. On observe que la visibilité des franges augmente au fur et à mesure que l'on éloigne l'écran. Elle est même maximale lorsque l'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. Cela signifie que la visibilité des franges est maximale à l'infini. On dit que les franges d'interférences sont **localisées à l'infini**.

Pour l'interféromètre de Michelson, réglé en **lame d'air**, et éclairé par une source spatialement étendue, les franges d'interférences sont **localisées à l'infini**.

### b) Schéma du dispositif

L'interféromètre est éclairé par une source étendue : on considère une source ponctuelle  $S$  appartenant à cette source. L'onde rayonnée par  $S$  est supposée monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0$ .

**Positions des deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  :**



**Figure 9.6 –** Construction des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  associées à une source ponctuelle  $S$ .

- **Voie 1 :** un rayon lumineux issu de  $S$  est transmis par la lame séparatrice ( $Sp$ ), réfléchi par

le miroir ( $M_1$ ) et réfléchi par la lame séparatrice. La succession des images de  $S$  est :

$$S \xrightarrow{(M_1)} S'_1 \xrightarrow{(Sp)} S_1.$$

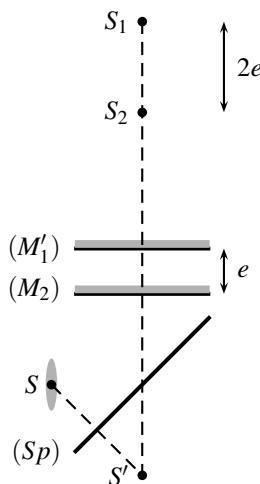
- **Voie 2 :** un rayon lumineux issu de  $S$  est réfléchi par la lame séparatrice ( $Sp$ ), réfléchi par le miroir ( $M_2$ ) et transmis par la lame séparatrice. La succession des images de  $S$  est :

$$S \xrightarrow{(Sp)} S'_2 \xrightarrow{(M_2)} S_2.$$

Les constructions géométriques correspondantes sont réalisées sur la figure 9.6. Sur cette même figure apparaît une symétrie du dispositif par rapport à l’axe de la séparatrice : si on considère le miroir ( $M'_1$ ) symétrique de ( $M_1$ ) par rapport à la lame séparatrice, on a aussi :

$$S \xrightarrow{(Sp)} S'_2 \xrightarrow{(M'_1)} S_1.$$

On choisit alors de renommer le point  $S'_2$  : il devient  $S'$ .  $S_1$  et  $S_2$  sont les images de  $S'$  dans les miroirs ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ) respectivement. Cette situation est représentée sur la figure 9.7.



**Figure 9.7** – Configuration de l’interféromètre « replié ».

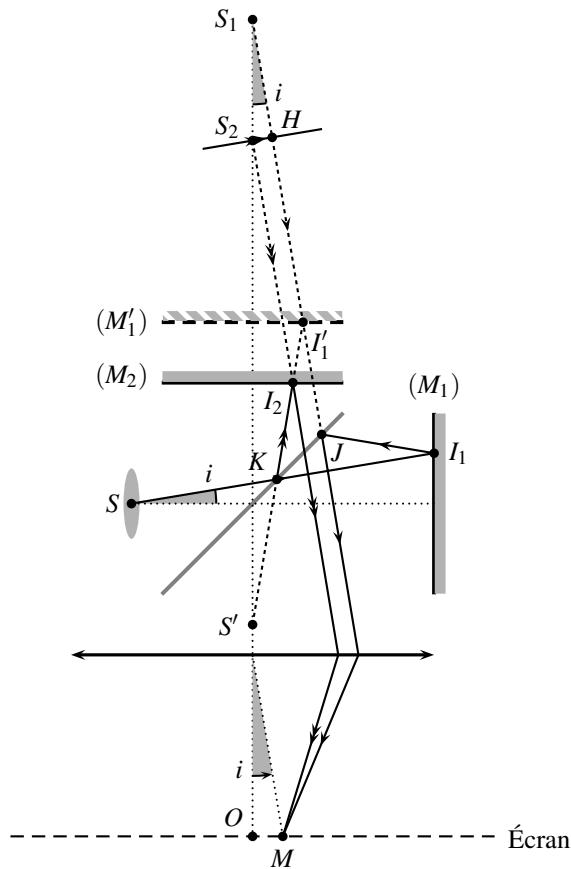
On appelle **épaisseur de la lame d’air** la distance entre ( $M_2$ ) et ( $M'_1$ ). On la note  $e$ . On peut alors montrer que la distance entre  $S_1$  et  $S_2$  est :  $S_1S_2 = 2e$ .

### Remarques

- La dénomination **lame d’air** provient du fait que tout se passe comme si une lame d’air, d’épaisseur  $e$ , était emprisonnée entre les miroirs ( $M_2$ ) et ( $M'_1$ ) qui sont parallèles.

- On peut définir le réglage en lame d'air par le fait que les miroirs ( $M_2$ ) et ( $M'_1$ ) sont parallèles.

**Marche des rayons lumineux jusqu'au point d'observation** : Le point d'observation  $M$  est à l'infini, soit en pratique dans le plan focal d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}$ ). Les rayons issus de  $S$  qui viennent interférer en  $M$  sont parallèles à la direction allant du centre de la lentille à  $M$ . Il semblent provenir des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ , ce qui permet de les tracer une fois que ces deux points sont placés.



**Figure 9.8** – Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source étendue. Le secteur angulaire grisé sur la figure correspond à un même angle noté  $i$ .

### c) Ordre d'interférences

Exprimons les chemins optiques de  $S$  à  $M$  pour les deux voies de l'interféromètre (se référer à la figure 9.8 pour la définition des différents points). On suppose que la réflexion sur les miroirs s'accompagne d'un chemin optique supplémentaire égal à  $\lambda_0/2$ . On choisit, par

souci de simplicité, de ne pas écrire les chemins optiques supplémentaires introduits par les réflexions sur la séparatrice idéale, en supposant qu’ils sont identiques sur les deux voies et qu’ils ne contribuent donc pas à la différence de marche.

$$(SM)_{\text{voie } 1} = (SI_1) + \frac{\lambda_0}{2} + (I_1J) + (JM) = nSI_1 + \frac{\lambda_0}{2} + nI_1J + (JM),$$

$$(SM)_{\text{voie } 2} = (SK) + (KI_2) + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M) = nSK + nKI_2 + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M),$$

Or, pour des raisons de symétrie,  $SI_1 = S'I'_1 = S_1I'_1$  et  $I_1J = I'_1J$  d’une part, et  $SK + KI_2 = S'K + KI_2 = S'I_2 = S_2I_2$  d’autre part. D’où :

$$(SM)_{\text{voie } 1} = nS_1I'_1 + nI'_1J + (JM) + \frac{\lambda_0}{2} = (S_1M) + \frac{\lambda_0}{2},$$

$$(SM)_{\text{voie } 2} = nS_2I_2 + (I_2M) + \frac{\lambda_0}{2} = (S_2M) + \frac{\lambda_0}{2}.$$

La différence de marche  $\delta(M) = (SM)_{\text{voie } 1} - (SM)_{\text{voie } 2}$  se réduit donc à :

$$\delta(M) = (S_1M) - (S_2M).$$

Pour calculer cette différence de marche, on a tracé sur la figure 9.8 un plan d’onde *relatif à une source fictive qui serait placée en M et passant par S<sub>2</sub> et H* (défini sur la figure 9.8). On en déduit que  $(S_2M) = (HM)$ , et que, par conséquent :

$$\delta(M) = nS_1H.$$

L’angle correspondant au secteur angulaire grisé sur la figure 9.8 est  $i$ , de sorte que :  $\delta(M) = 2ne \cos i$ , où l’angle  $i$  est défini par la position du point d’observation. Les expressions de la différence de phase et de l’ordre d’interférences au point  $M$  se déduisent de l’expression de la différence de marche.

Pour un interféromètre de Michelson, configuré en lame d’air, et éclairé par une source étendue, les franges d’interférences sont localisées à l’infini où la différence de marche, la différence de phase, l’ordre d’interférences et l’intensité vibratoire sont :

- **Différence de marche :**

$$\delta(M) = 2ne \cos i. \quad (9.1)$$

- **Différence de phase :**

$$\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi ne \cos i}{\lambda_0}. \quad (9.2)$$

- **Ordre d’interférences :**

$$p(M) = \frac{2ne \cos i}{\lambda_0}. \quad (9.3)$$

• **Intensité vibratoire :**

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n e \cos i}{\lambda_0} \right) \right), \quad (9.4)$$

où  $I_0$  est l'intensité vibratoire rayonnée par la source.

 On verra en exercice une autre méthode permettant d'obtenir l'expression de la différence de marche  $\delta(M)$ .

**d) Interprétation de la localisation des franges**

L'expression de l'ordre d'interférences à l'infini (c'est-à-dire en un point  $M$  dans le plan focal image de la lentille d'observation) montre qu'il ne dépend que de la position du point  $M$  et absolument pas de la position du point-source  $S$  dans la source étendue. Tous les volumes infiniment petits constituant la source étendue peuvent être assimilés à une collection de sources ponctuelles incohérentes, chacune produisant dans le plan focal de la lentille, son propre ensemble de franges d'interférences. Comme l'ordre d'interférences en  $M$  ne dépend que de la position du point  $M$ , tous ces systèmes de franges d'interférences coïncident *exactement*, et ce quelle que soit l'extension spatiale de la source primaire. Les franges d'interférences visibles dans le plan focal de la lentille sont donc particulièrement lumineuses.

**e) Notion de division d'amplitude**

La construction de la marche des rayons lumineux sur la figure 9.8 montre que l'interféromètre n'opère pas par division du front d'onde : il n'y a qu'un seul rayon qui émerge de la source  $S$  ! Il est ensuite divisé par la lame séparatrice<sup>2</sup>. On dit que l'interféromètre fonctionne par division d'amplitude. On admettra le résultat suivant :

Lorsqu'un dispositif interférentiel est éclairé par une **source étendue**, on peut constater l'existence d'une surface où la visibilité des franges d'interférences est maximale. Cette surface est appelée **surface de localisation** et on dit que l'on a des **franges localisées**.

La surface de localisation est constituée de l'ensemble des points  $M$  qui correspondent à l'intersection des deux rayons émergents de l'interféromètre qui sont issus d'un seul et même rayon émergent de la source. En ces points, le dispositif interférentiel fonctionne par **division d'amplitude**.

**f) Franges d'égale inclinaison**

Le dispositif étudié présente une symétrie de révolution autour de l'axe ( $S_1S_2$ ). Les franges d'interférences ont donc la même symétrie de révolution : elles sont circulaires. Plutôt que de parler de franges circulaires, on parle aussi d'**anneaux**.

L'ordre d'interférences  $p(M)$  donné par la relation (9.3) ne dépend que de l'angle  $i$ . Une frange brillante (ou sombre) donnée correspond à la même valeur de l'angle  $i$ . Comme cet

2. Il s'agit d'une division énergétique : les deux rayons produits sont associés à des intensités vibratoires réduites de moitié.

angle correspond à l’inclinaison des rayons lumineux (voir figure 9.8), on qualifie ces franges de **franges d’égale inclinaison**. Afin de voir sur l’écran un nombre important de franges brillantes, il est nécessaire que l’angle  $i$  varie de façon importante. En pratique, cela impose d’éclairer la lame d’air avec un éclairage le plus convergent possible.

**Rayon des anneaux successifs** : la relation (9.3) montre que l’ordre d’interférences est une fonction décroissante de  $i$ . La valeur maximale est donc réalisée au centre de la figure d’interférences, pour  $i = 0$ . On note  $p(i = 0) = p_0 + \varepsilon$ , où  $p_0$  est la partie entière de  $p(i = 0)$  et  $0 \leq \varepsilon < 1$ . On appelle  $\varepsilon$  l’excédent fractionnaire. Comme  $p$  est une fonction décroissante de  $i$ , le premier anneau brillant correspond à la valeur  $p_0$  de l’ordre de l’interférence. On appelle  $O$  le centre de la figure d’interférences (voir figure 9.8) et on pose  $r = OM$ . L’utilisation de la lentille dans les conditions de Gauss impose à  $i$  de garder des valeurs suffisamment faibles pour que  $i \simeq \tan i = \frac{r}{f'}$ . Le rayon  $r_1$  du premier anneau brillant et l’angle  $i_1$  correspondant vérifient donc :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos i_1 \simeq \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i_1^2}{2}\right) = \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right).$$

On en déduit le rayon  $r_1$  du premier anneau brillant :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} p_0\right)}.$$

Le deuxième anneau brillant, de rayon  $r_2$ , correspond à un ordre d’interférences égale à  $p_0 - 1$ , et le  $m$ -ième anneau brillant, de rayon  $r_m$ , correspond à un ordre d’interférences égal à  $p_0 - m + 1$ . En procédant comme pour le premier anneau brillant, on obtient :

$$r_m = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} (p_0 - m + 1)\right)}.$$

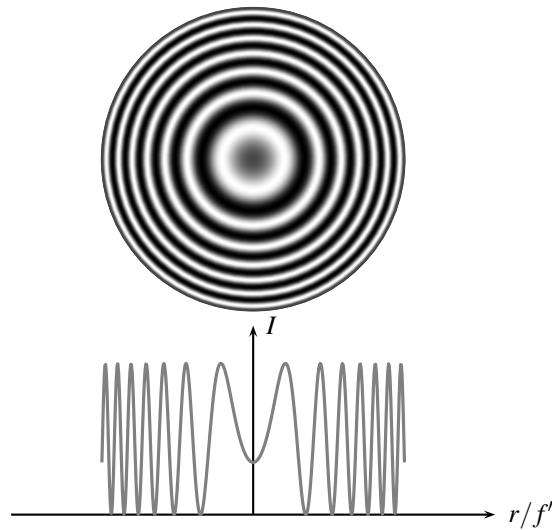
En pratique, on a tout intérêt à utiliser une lentille convergente de plus grande distance focale possible, afin d’avoir de grands anneaux sur l’écran.

La figure 9.9 donne une représentation des franges circulaires et de l’intensité vibratoire correspondante.

### Remarque

Si  $p(i = 0)$  est entier,  $p_0 = p(i = 0) = \frac{2ne}{\lambda_0}$  et la formule devient :  $r_m = f' \sqrt{\frac{2(m-1)}{p_0}}$ .

Le premier anneau est alors réduit à un point lumineux ( $r_1 = 0$ ).



**Figure 9.9** – Figure d'interférences et intensité vibratoire dans le cas d'un interféromètre réglé en lame d'air.

**Évolution des anneaux lorsque l'épaisseur  $e$  varie** : il est important de connaître l'évolution du rayon des anneaux lorsqu'on fait varier l'épaisseur  $e$  de la lame d'air. Considérons un anneau d'ordre d'interférence  $p$  donné et correspondant à l'inclinaison  $i$  :  $p = 2ne \cos i$ . Comme  $p$  est fixé, on voit que  $i$  diminue lorsque  $e$  diminue.

Lorsqu'on diminue l'épaisseur  $e$  de la lame d'air, un anneau donné rétrécit et finit par disparaître au centre de la figure d'interférences.

On définit le **contact optique** comme étant la configuration de l'interféromètre où l'épaisseur de la lame d'air est  $e = 0$ . Si l'on veut, en pratique, se rapprocher du contact optique, on doit jouer sur la vis ( $V_3$ ) de sorte à faire rentrer les anneaux vers le centre pour en voir de moins en moins. Les anneaux qui restent visibles apparaissent de plus en plus gros. Lorsqu'on a atteint le contact optique ( $e = 0$ ), la différence de marche est nulle en tout point de l'écran, qui est donc uniformément brillant.

Au contact optique, l'écran est uniformément éclairé ; c'est la **teinte plate**.

## 2.3 Applications

### a) Mesure de l’écart du doublet du sodium

On a vu au chapitre précédent que les systèmes d’interférences correspondant aux deux longueurs d’onde d’un doublet se brouillent lorsque la différence de marche  $\delta$  est de la forme :

$$\delta = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma},$$

où  $m$  est un entier (voir page 242) et  $\Delta\sigma$  la différence des nombres d’onde. Pour les différences de marche proches de ces valeurs, les franges sombres de chaque longueur d’onde coïncident localement aux franges brillantes de l’autre.

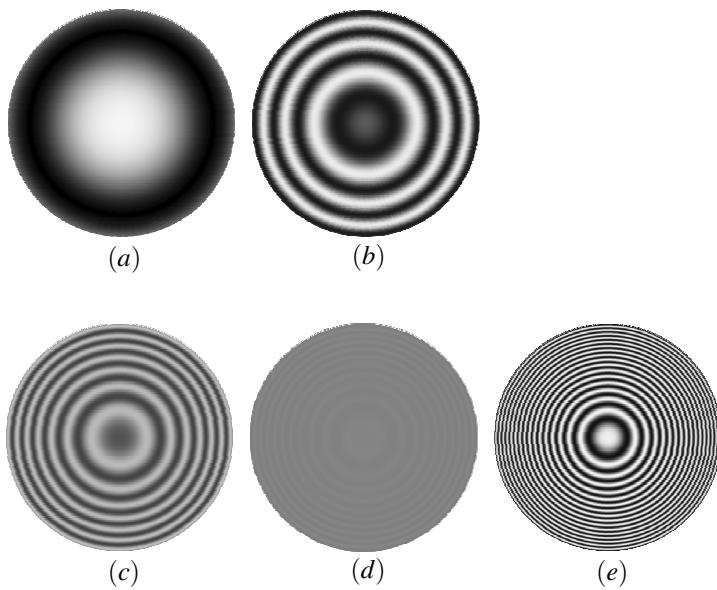
La lumière d’une lampe au sodium comporte deux raies jaunes très proches. Le phénomène de brouillage est inobservables avec un dispositif de trous de Young parce qu’on accède pas à des différences de marche suffisamment grandes, mais il est observé facilement avec l’interféromètre de Michelson ce qui permet de mesurer le très faible écart entre les longueurs d’onde du doublet.

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson dans la configuration de la lame d’air puis on remplace la source par une lampe au sodium. Si les anneaux n’apparaissent pas, c’est peut être parce qu’on est précisément dans une zone de brouillage. On déplace le miroir mobile en « chariot » pour voir des anneaux de plus en plus grands et se rapprocher du contact optique. On constate que le contraste des anneaux évolue et que les anneaux sont parfois brouillés.

Les simulations montrées sur la figure 9.10 donnent l’aspect de l’écran pour des épaisseurs croissantes de la lame d’air : (a) : on est proche du contact optique, on voit un anneau sombre de grande taille et bien contrasté ; (b) et (c) : l’épaisseur de la lame d’air est un peu plus grande, il y a de plus en plus d’anneaux et le contraste diminue ; (d) : les anneaux ne sont plus visibles, il y a brouillage ; (e) : pour une épaisseur plus grande les anneaux réapparaissent et il y en a de plus en plus.

On se place au contact optique (l’écran est uniformément éclairé et si charioite légèrement un anneau sombre de grand diamètre doit apparaître) et on note la position  $x_{C.O.}$  du chariot. Partant de cette position on charioite dans le sens où  $x$  augmente et on note les positions  $x_m$  du chariot pour lesquelles il y a brouillage des anneaux :  $x_{C.O.} < x_1 < x_2 \dots$  ; on revient au contact optique et on recommence dans l’autre sens pour trouver des positions pour lesquelles il y a brouillage :  $x_{C.O.} > x_{-1} > x_{-2} \dots$ . Toutes ces positions sont lues sur la vis micrométrique avec une précision typique  $\Delta x = 5 \mu\text{m}$ . Il faut tourner la vis très lentement car le déplacement des anneaux est rapide.



**Figure 9.10** – Simulations numériques de l'aspect de l'écran d'observation pour différentes valeurs de l'épaisseur de la lame d'air avec une lampe au sodium : (a) :  $e = 10 \mu\text{m}$  ; (b) :  $e = 50 \mu\text{m}$  ; (c) :  $e = 100 \mu\text{m}$  ; (d) :  $e = 150 \mu\text{m}$  ; (e) :  $e = 200 \mu\text{m}$ .

L'épaisseur de la lame d'air pour la position  $x$  est  $e = |x - x_{\text{C.O.}}|$  et la différence de marche au centre de la figure est  $\delta = 2e = 2|x - x_{\text{C.O.}}|$ . On a donc, pour  $k = 1, 2, \dots$

$$2(x_k - x_{\text{C.O.}}) = 2(x_{\text{C.O.}} - x_{-k}) = \frac{k - \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} \quad \text{d'où} \quad \Delta\sigma = \frac{k - \frac{1}{2}}{x_k - x_{-k}}.$$

Par ailleurs, notant  $\lambda_m$  la longueur d'onde moyenne du doublet et  $\Delta\lambda$  l'écart du doublet :  $\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_m - \Delta\lambda/2} - \frac{1}{\lambda_m + \Delta\lambda/2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2 - \Delta\lambda^2/4} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2}$ . On obtient donc l'écart du doublet par :

$$\Delta\lambda = \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_m^2}{x_k - x_{-k}}.$$

Dans une expérience on a mesuré :  $x_{\text{C.O.}} = 4,450 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 4,890 \text{ mm}$  et  $x_{-2} = 4,015 \text{ mm}$ . On sait que  $\lambda_m = 0,5893 \mu\text{m}$ . On en déduit :

$$\Delta\lambda = 5,95 \cdot 10^{-3} \mu\text{m} \pm 7 \cdot 10^{-2} \mu\text{m},$$

en tenant compte de l'incertitude sur la position du chariot.

### b) Mesure des longueurs d’ondes du doublet du mercure

Dans l’expérience précédente, on n’a obtenu que l’écart entre les deux longueurs d’onde du doublet. Pour mesurer la longueur d’onde moyenne  $\lambda_m$  on peut décider de compter les anneaux qui entrent (ou sortent) au centre de la figure pendant un déplacement du chariot. En effet, lorsque le chariot se déplace de  $\Delta x$ , la différence de marche au centre,  $\delta(i=0) = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ , varie de  $2\Delta x$ . Comme le centre est un anneau brillant de rayon nul entrant (ou sortant) chaque fois que  $\delta(i=0)$  est un multiple de  $\lambda_m$ , le nombre d’anneaux entrant (ou sortant) est  $N = \frac{2\Delta x}{\lambda_m}$  d’où  $\lambda_m = \frac{2\Delta x}{N}$ . Mais il y a une difficulté : l’incertitude sur  $x$  étant  $5 \mu\text{m} \sim 10\lambda_m$ , il faut compter un nombre d’anneaux très grand pour avoir une précision acceptable sur  $\lambda_m$ . On résout ce problème en utilisant un moteur pour déplacer le chariot à vitesse constante et un capteur relié à une carte d’acquisition d’ordinateur.

On illustre ci-dessous la méthode dans le cas du doublet jaune du mercure (dont l’écart est plus grand que celui du sodium).

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson dans la configuration de la lame d’air et on repère la position  $x_{C.O.}$  du chariot correspondant au contact optique. On place comme source une lampe au mercure munie d’un filtre interférentiel isolant le doublet jaune. Au centre des anneaux on place un récepteur de lumière relié à une carte d’acquisition d’ordinateur. On utilise le moteur pour déplacer le miroir ( $M_1$ ) en translation à la vitesse  $V$ , d’une position  $x_i < x_{-1}$  à une position  $x_f > x_1$  où  $x_{-1}$  et  $x_1$  sont les deux positions les plus proches du contact optique donnant un brouillage.

L’enregistrement du signal du capteur en fonction du temps a l’allure montrée sur la figure 9.11 : le signal a des oscillations très rapides dont l’amplitude est variable. À chaque maximum, un anneau apparaît (ou disparaît) au centre de la figure. On repère aisément le passage par les points de brouillage pour lesquels l’amplitude d’oscillation s’annule ; on peut ainsi mesurer la durée  $T_1$  entre les passages par les positions  $x_{-1}$  et  $x_1$ . On mesure aussi en dilatant l’échelle de temps la courbe la durée  $T_2$  correspondant à 20 oscillations.

D’après les calculs précédents on a :

$$T_1 = \frac{x_1 - x_{-1}}{V} = \frac{1}{2\Delta\sigma V} \simeq \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda V}.$$

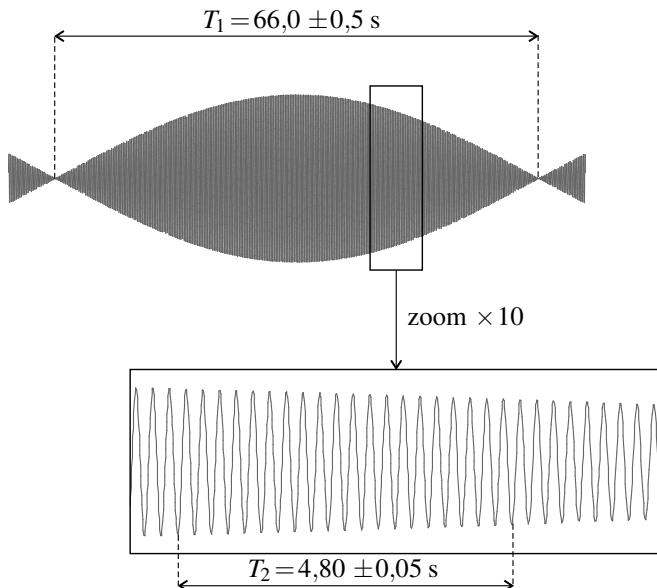
Par ailleurs, l’intensité est maximale chaque fois que la différence de marche  $\delta(i=0)$  est un multiple de  $\lambda_m$  ; étant donné que  $\delta(i=0) = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ , le chariot se déplace de  $\lambda_m/2$  entre deux maxima. Ainsi :

$$T_2 = 20 \times \frac{\lambda_m}{2V}.$$

Sans connaître la vitesse  $V$  on peut calculer :  $\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = \frac{20T_1}{T_2} = 275 \pm 5$ , résultat à com-

parer à la valeur tabulée qui est 274.

C'est le nombre d'oscillations du signal entre les deux brouillages puisqu'une oscillation dure  $\frac{T_2}{20}$  et le passage d'un point de brouillage à l'autre  $T_1$ . On vérifie d'ailleurs facilement que :  $\frac{x_1 - x_{-1}}{\lambda_m/2} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$ . Ce nombre peut être déterminé par un simple comptage (manuel ou informatisé) des oscillations.



**Figure 9.11** – Enregistrement du signal fourni par le détecteur au cours du temps.

Pour accéder à  $\lambda_m$  et  $\Delta\lambda$  il faut connaître la vitesse  $V$ . Pour cela on remplace la lampe au mercure par un laser hélium-néon de longueur d'onde connue  $\lambda_0 = 0,6238 \mu\text{m}$ . On enregistre le signal qui est alors quasiment sinusoïdal et on mesure la durée de 20 oscillations :  $T'_2 = 5,25 \pm 0,05$  s. On en déduit :  $V = \frac{20(\lambda_0/2)}{T'_2} = 1,2 \pm 0,01 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

On remarquera l'ordre de grandeur très inhabituel de cette vitesse (le déplacement est provoqué par la rotation très lente d'une vis micrométrique).

Finalement on trouve :  $\lambda_m = \frac{V T_2}{10} = 0,576 \pm 0,011 \mu\text{m}$  (valeur vraie :  $0,5780 \mu\text{m}$ ) et  $\Delta\lambda = (2,09 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$  (valeur vraie  $2,1 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ).

Il faut noter qu'on a supposé la vitesse  $V$  constante ce qui n'est pas forcément vrai.

### 3 Configuration du coin d’air éclairé par une source étendue

À partir de la position où l’interféromètre est réglé au contact optique, on modifie l’orientation du miroir ( $M_1$ ) (par action sur les vis ( $V_1$ ) et ( $V_2$ )). Les deux miroirs ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) ne sont alors plus parfaitement orthogonaux et les miroirs ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ) ne sont plus parallèles.

#### 3.1 Définition

On dit que l’interféromètre est configuré en **coin d’air** lorsque les deux miroirs ( $M'_1$ ), symétrique du miroir ( $M_1$ ) par rapport à la séparatrice, et ( $M_2$ ) ne sont *pas* parallèles.

L’angle  $\alpha$  entre les deux miroirs est, dans la pratique, très petit, de l’ordre de  $10^{-3}$  rad. Les deux miroirs ( $M_2$ ) et ( $M'_1$ ) emprisonnent un coin d’air (voir figure 9.12), ce qui justifie la dénomination de cette configuration.

#### 3.2 Observation des franges

##### a) Localisation des franges au voisinage des miroirs

L’interféromètre de Michelson en configuration du coin d’air doit être éclairé par une **source modérément étendue** placée dans le plan focal d’une lentille convergente (donc envoyée à l’infini). On constate expérimentalement que les interférences ne sont quasiment pas visibles lorsqu’on place un écran à la sortie de l’interféromètre mais qu’elles sont bien visibles lorsqu’on les observe au voisinage des miroirs. On admet que :

Pour l’interféromètre de Michelson, réglé en **coin d’air**, et éclairé par une source modérément étendue à l’infini, on a des franges d’interférences **localisées au voisinage des miroirs**.

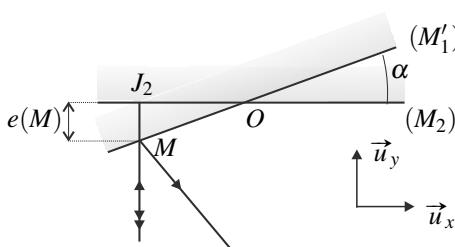
##### b) Différence de marche et ordre d’interférence

Comme les interférences sont localisées, l’interféromètre travaille en **division d’amplitude**. On s’intéresse donc à la différence de marche entre les deux rayons issus d’un même rayon incident au point où ils se rencontrent. On travaille avec le système équivalent : miroirs ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ).

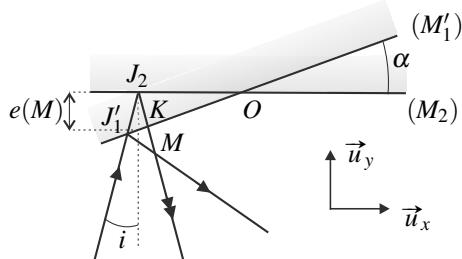
On considère tout d’abord le cas où les rayons incidents sont perpendiculaires au miroir ( $M_2$ ). Cette situation est représentée sur la figure 9.12 : le rayon se réfléchit sur lui-même lorsqu’il arrive sur le miroir ( $M_2$ ), par suite, le point d’intersection des deux rayons réfléchis est le point  $M$  d’incidence sur le miroir ( $M'_1$ ) (ce qui établit, dans ce cas, la localisation des interférences au voisinage des miroirs). Le rayon qui se réfléchit sur ( $M'_1$ ) revient en  $M$  après avoir fait un aller-retour entre les deux miroirs donc la différence de marche est :  $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = 2nMJ_2 = 2ne(M)$  où  $e(M)$  est l’**épaisseur locale** du coin d’air, définie comme la distance entre les deux miroirs au point  $M$  (voir figure 9.12).

Le programme demande d’admettre le résultat dans le cas d’un angle d’incidence non nul mais faible. *Le calcul suivant est donné uniquement à titre de complément.* On s’appuie sur la figure 9.13 où l’angle  $\alpha$  et l’angle d’incidence  $i$  sont exagérés pour la clarté du dessin :

ils sont en réalité très faibles de sorte que tous les rayons lumineux sont quasiment perpendiculaires aux deux miroirs, soit quasiment parallèles à  $\vec{u}_y$ . La différence de marche est :  $\delta(M) = n(J'_1 J_2 + J_2 M - J'_1 M) \simeq n \vec{u}_y \cdot (\vec{J}'_1 \vec{J}_2 - \vec{J}_2 \vec{M} + \vec{J}'_1 \vec{M})$ , en négligeant des termes d'ordre supérieur ou égal à deux en  $i$  ou  $\alpha$  (par exemple :  $\vec{u}_y \cdot \vec{J}'_1 \vec{J}_2 = J'_1 J_2 \cos i \simeq J'_1 J_2$ ). On trouve ensuite :  $\delta(M) = n \vec{u}_y \cdot (\vec{J}'_1 \vec{J}_2 - \vec{J}_2 \vec{K} - \vec{K} \vec{M} + \vec{J}'_1 \vec{M}) = n \vec{u}_y \cdot (\vec{J}'_1 \vec{J}_2 - \vec{J}_2 \vec{K} + \vec{J}'_1 \vec{K})$ ; or au premier ordre :  $\vec{u}_y \cdot \vec{J}'_1 \vec{J}_2 \simeq -\vec{u}_y \cdot \vec{J}_2 \vec{K} \simeq e(M)$  et  $\vec{u}_y \cdot \vec{J}'_1 \vec{K} \simeq 0$ . Finalement :  $\delta(M) \simeq 2ne(M)$ .



**Figure 9.12** – Coin d'air éclairé en incidence normale.



**Figure 9.13** – Coin d'air éclairé en incidence faible.

Pour un interféromètre de Michelson réglé en **coin d'air** et éclairé par une source modérément étendue à l'infini, les interférences sont **localisées** sur une **surface voisine des deux miroirs**. En un point  $M$  de cette surface, où l'épaisseur locale entre les deux miroirs est  $e(M)$ , la différence de marche  $\delta(M)$  et l'ordre d'interférences  $p(M)$  sont :

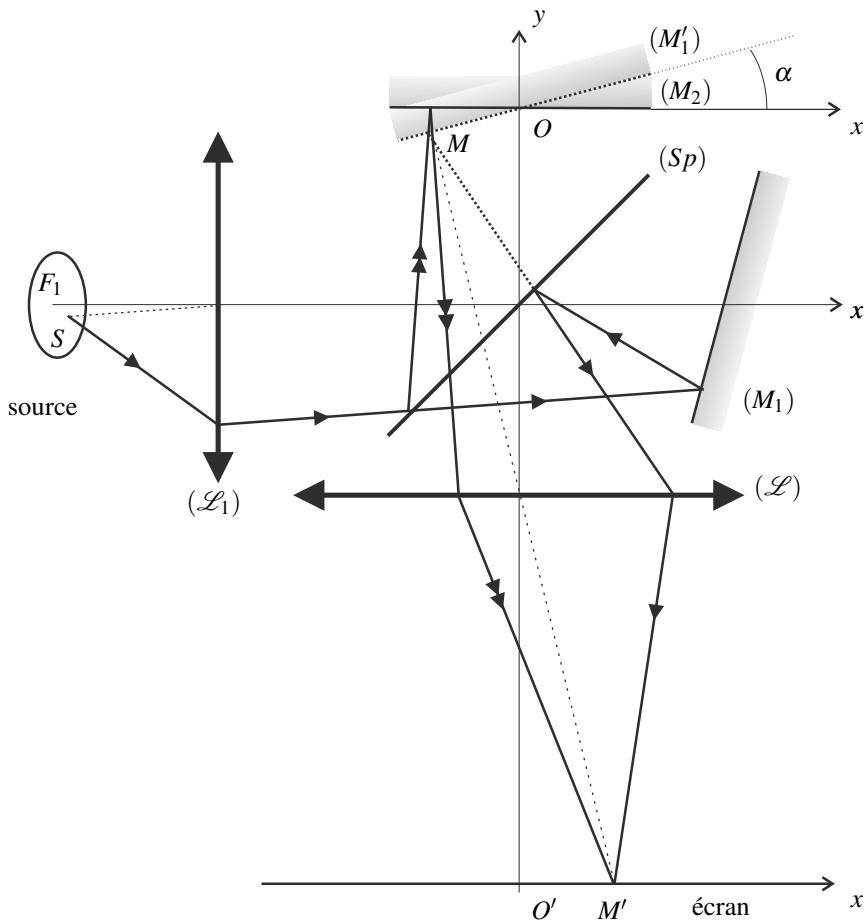
$$\delta(M) = 2ne(M) \quad \text{et} \quad p(M) = \frac{2ne(M)}{\lambda_0}.$$

Pour mémoriser facilement l'expression de la différence de marche, on peut retenir qu'elle correspond à un aller-retour sur l'épaisseur locale entre les miroirs, d'où l'expression  $2e(M)$ .

### c) Franges d'égale épaisseur

Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs. En pratique, pour les projeter sur un écran, on utilise une lentille de projection qui conjugue le plan des miroirs avec l'écran d'observation. Lorsque l'image des miroirs est nette sur l'écran, on voit les franges d'interférences.

La figure 9.14 donne le schéma de principe complet de l'expérience. La source étendue est placée dans le plan focal d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_1$ ). Son diamètre est petit devant la distance focale de ( $\mathcal{L}_1$ ) de sorte que **l'interféromètre est éclairé par un faisceau quasiment parallèle**. La lentille ( $\mathcal{L}$ ) forme l'image des miroirs ( $M_2$ ) et ( $M'_1$ ) (quasiment confondus) sur l'écran.



**Figure 9.14** – Montage pour l’observation des franges d’égal épaisseur.

Considérons une fringe d’ordre d’interférences  $p$  donné :  $p = \frac{2ne(M)}{\lambda_0}$ . Cette fringe est donc associée à une épaisseur  $e$  fixée. Elle passe par tous les points où l’épaisseur reste la même. On dit qu’il s’agit d’une **frange d’égal épaisseur**.

Dans le cas de deux miroirs plans, comme c’est le cas pour l’interféromètre de Michelson, l’épaisseur dépend de la distance à l’intersection des deux miroirs. Sur la figure 9.14 :

$$e(M) \simeq |\alpha x| ,$$

au premier ordre (on rappelle que l’angle  $\alpha$  est très petit).

L'intensité vibratoire est alors :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n \alpha x}{\lambda_0} \right) \right).$$

L'intensité vibratoire ne dépend que de  $x$  : on obtient donc des franges d'égale épaisseur rectilignes parallèles à l'intersection des deux miroirs. L'interfrange  $i$  correspond à la période spatiale de l'intensité vibratoire :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}.$$

#### Remarque

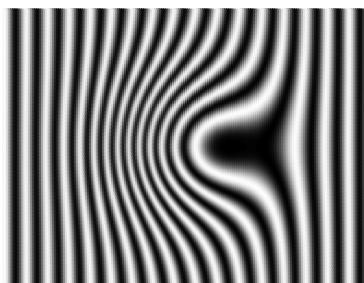
La lentille ( $\mathcal{L}$ ) introduit un grandissement  $\gamma$ . L'interfrange observable sur l'écran est donc  $\gamma \frac{\lambda_0}{2n\alpha}$ .

Avec  $\alpha \simeq 10^{-3}$  rad,  $\lambda \simeq 0,5 \mu\text{m}$  et  $\gamma \simeq 10$  cet interfrange est d'environ 2,5 mm.

### 3.3 Application : détection des défauts d'une lame de verre

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson pour observer les franges d'égale épaisseur du coin d'air en lumière de la lampe au sodium, considérée comme monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 0,590 \mu\text{m}$ . On introduit devant le miroir ( $M_1$ ) une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur  $e'$  et d'indice  $n'$  que l'on place parallèlement au miroir. On peut ainsi détecter les défauts de la lame qui n'a pas forcément un indice  $n'$  parfaitement homogène ou une épaisseur  $e'$  parfaitement égale en tout point. La figure 9.15 montre une simulation de la déformation des franges due à une « bosse » sur une lame d'indice  $n' = 1,5$  parfaitement homogène.



**Figure 9.15** – Frange du coin d'air déformées par un défaut d'une lame de verre.

Le sommet de la bosse est au centre de la figure, sur la frange la plus déformée qui se décale vers la gauche (perpendiculairement aux franges) d'environ 4 interfranges. C'est le signe que la lumière qui traverse la lame à cet endroit a un supplément de marche optique égal à environ  $4\lambda_0$  dû à la bosse. Or ce supplément de marche optique est  $2(n' - 1)\Delta e'$  où  $\Delta e'$  est la hauteur de la bosse (le facteur 2 tient compte de l'aller et retour de la lumière à travers la lame). On en déduit que :  $\Delta e' \simeq \frac{4\lambda_0}{2(n' - 1)} \simeq 2,4 \mu\text{m}$ .

Cette méthode est utilisée pour contrôler des éléments d'optique haute précision. On peut déceler facilement un déplacement d'un dixième d'interfrange donc déceler une bosse de hauteur de l'ordre de  $\frac{\lambda_0}{10}$ . Pour le contrôle des lentilles on remplace le miroir ( $M_1$ ) par un miroir sphérique.

### SYNTHESE

#### SAVOIRS

- configuration de la lame d'air
- configuration du coin d'air
- franges localisées à l'infini pour un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source spatialement étendue
- franges localisées au voisinage des miroirs pour un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source spatialement étendue
- définition des franges d'égale inclinaison
- définition des franges d'égale épaisseur
- expression de l'ordre d'interférences pour la lame d'air
- expression de la différence de marche pour le coin d'air

#### SAVOIR-FAIRE

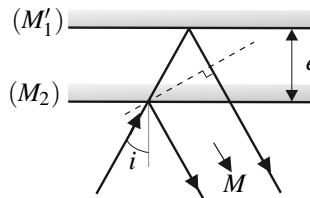
- décrire, mettre en œuvre et justifier les conditions d'éclairage d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et en coin d'air
- établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférences dans le cas de la lame d'air
- interpréter la différence de marche dans le cas du coin d'air
- utiliser l'expression de la différence de marche pour retrouver l'ordre d'interférences dans le cas du coin d'air
- retrouver l'expression de l'interfrange pour le coin d'air formé par deux miroirs plans

#### MOTS-CLÉS

- |                        |                               |                             |
|------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| • lame d'air           | • localisation des franges    | • franges d'égale épaisseur |
| • coin d'air           | • franges d'égale inclinaison |                             |
| • division d'amplitude |                               |                             |

## S'ENTRAÎNER

### 9.1 Différence de marche de la lame d'air (\*)



En utilisant la construction géométrique ci-dessus, établir l'expression de la différence de marche au point  $M$  situé à l'infini pour un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air.

### 9.2 Anneaux d'égale inclinaison (\*)

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. Il est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 0,546 \mu\text{m}$ .

1. Où doit-on placer l'écran pour observer des anneaux bien contrastés ?
2. On utilise une lentille convergente de distance focale  $f' = 50 \text{ cm}$ . On mesure sur l'écran les rayons du premier anneau brillant  $\rho_1 = 4,8 \pm 0,1 \text{ cm}$  et du cinquième anneau brillant  $\rho_5 = 13,3 \pm 0,1 \text{ cm}$ . En déduire l'épaisseur  $e$  de la lame d'air.

### 9.3 Angle du coin d'air (\*)

On observe les franges d'égale épaisseur produites par un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, et éclairé par une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ . Les miroirs de l'interféromètre sont circulaires, de diamètre  $d = 2,00 \text{ cm}$ . On peut compter 16 franges brillantes sur toute la largeur du miroir.

Estimer l'angle  $\alpha$  entre les deux miroirs.

### 9.4 Mesure de l'indice de l'air (\*\*)

Un interféromètre de Michelson est réglé de façon à observer des franges rectilignes avec une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 589 \text{ nm}$ . Sur l'une des voies, le faisceau traverse une cuve dont la longueur intérieure est  $\ell = 1,00 \text{ cm}$ .

Un détecteur mesure l'intensité en un point fixe du champ d'interférences. Initialement, la cuve est vide, et le détecteur est placé sur un maximum d'intensité.

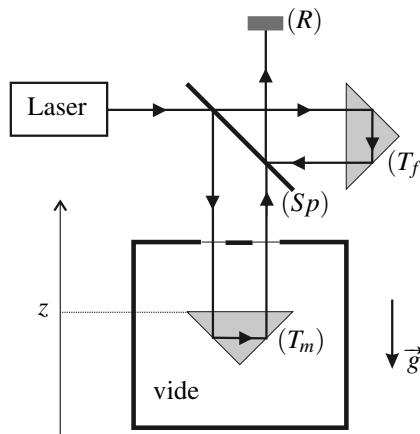
On fait entrer l'air dans la cuve, jusqu'à ce que la pression soit égale à la pression atmosphérique. On voit défiler alternativement 10 franges noires et 9 franges claires, et le détecteur indique finalement une intensité égale à la moitié de l'intensité maximale.

1. Expliquer comment il faut placer le détecteur si l'interféromètre est éclairé par une source étendue.
2. Déterminer l'indice de réfraction de l'air à la pression atmosphérique.

## APPROFONDIR

**9.5 Mesure interférométrique de l’accélération de la pesanteur (★)**

Le dispositif représenté ci-dessous permet une mesure extrêmement précise de l’accélération de la pesanteur  $g$ . Il s’agit d’un interféromètre de Michelson dont les miroirs sont remplacés par des trièdres rétroréflecteurs, constitués de trois miroirs plans orthogonaux deux à deux qui ont la propriété de renvoyer tout rayon lumineux dans la direction d’où il vient. L’un ( $T_f$ ) est fixe et l’autre ( $T_m$ ) mobile. L’appareil est éclairé par un laser Hélium-Néon de longueur d’onde dans le vide  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ . ( $R$ ) est un récepteur qui fournit un signal proportionnel à l’éclairement qui reçoit.



On lance ( $T_m$ ) verticalement vers le haut depuis une altitude  $z_i < z_0$  et il atteint une altitude maximale  $z_m > z_0$ . Il se déplace dans une enceinte où l’on a fait le vide. On mesure :

- la durée  $T$  entre les deux passages de ( $T_m$ ) à l’altitude  $z_0$ ,
- le nombre  $N$  de maxima du signal délivré par ( $R$ ) entre ces deux passages.

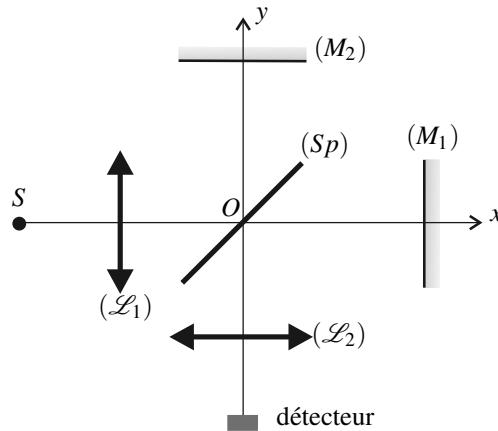
1. Relier  $g$ ,  $T$  et  $z_m - z_0$ . On pourra choisir l’origine des temps à l’instant où ( $T_m$ ) passe à l’altitude maximale  $z_m$ .

2. Exprimer  $z_m - z_0$  en fonction de  $N$  et  $\lambda_0$  puis  $g$  en fonction de  $N$ ,  $\lambda_0$  et  $T$ .

3. Pourquoi fait-on le vide dans l’enceinte ?

**9.6 Spectrométrie par transformation de Fourier (★★)**

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d’air et éclairé par une source ponctuelle  $S$ , monochromatique de longueur d’onde dans le vide  $\lambda_0$ , placée au foyer objet d’une lentille convergente ( $\mathcal{L}_1$ ) d’axe optique ( $Ox$ ). Un détecteur, placé au foyer image d’une seconde lentille convergente ( $\mathcal{L}_2$ ) d’axe optique ( $Oy$ ), délivre une tension  $U = kI$  où  $I$  est l’intensité qu’il reçoit et  $k$  une constante.



Dans un premier temps la source ponctuelle est réalisée avec un laser muni d'un objectif de microscope, de longueur d'onde  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$  pouvant être considéré dans les conditions de l'expérience comme une source parfaitement monochromatique.

**1.** On translate le miroir ( $M_1$ ) à vitesse constante  $V$  le long de l'axe ( $Ox$ ). Montrer que la tension  $u$  délivrée par le détecteur varie sinusoïdalement dans le temps. Quelle doit-être la vitesse  $V$  pour avoir une période  $T = 1,0 \text{ s}$ ? On prendra pour indice optique de l'air :  $n = 1$ . On éclaire maintenant l'interféromètre par une lampe à vapeur de mercure dont on isole la raie verte, de longueur d'onde moyenne  $\lambda_{0m}$ , à l'aide d'un filtre interférentiel. Cette source n'est pas monochromatique : la puissance qu'elle émet se répartit suivant les différentes radiations de fréquence  $v$  voisines de  $v_m = \frac{c}{\lambda_{0m}}$ . On définit la densité spectrale de puissance  $P_v(v)$  par la relation :  $dP(v) = P_v(v)dv$  où  $dP(v)$  est la puissance rayonnée par la source dans l'intervalle de fréquence  $[v, v + dv]$ . D'autre part, lorsqu'une voie de l'interféromètre est occultée (pas d'interférences), l'intensité  $dI_0(v)$  reçue par le détecteur, dans la bande de fréquence  $[v, v + dv]$  s'écrit :  $dI_0(v) = KdP(v)$  où  $K$  est une constante de proportionnalité indépendant de  $v$ , dépendant de la géométrie et de la transmission de l'interféromètre. On définit la densité spectrale d'intensité  $I_{0v}(v)$  par la relation  $dI_0(v) = I_{0v}(v)dv$ .

- 2.** Montrer que  $I_{0v}(v)$  est proportionnel à  $P_v(v)$ .
- 3.** Lorsque les deux voies de l'interféromètre fonctionnent montrer que l'intensité sur le détecteur s'écrit :  $I = 2 \int_0^{\infty} I_{0v}(v) (1 + \cos(2\pi v \tau)) dv$  avec  $\tau = \frac{\delta}{c}$  où  $\delta$  est la différence de marche au niveau du détecteur et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.
- 4.** On suppose que la raie a un profil lorentzien :  $I_{0v}(v) = \frac{A}{1 + a(v - v_0)^2}$  où  $A$  est une constante,  $v_0 \sim 10^{14} \text{ Hz}$  et  $a \sim 10^{-22} \text{ s}^2$ . Déterminer la largeur à mi-hauteur  $\Delta v$  de la raie, écart entre les deux fréquences pour lesquelles  $I_{0v} = \frac{A}{2}$ . Donner l'ordre de grandeur du temps de corrélation de la raie.
- 5.** Mettre l'intensité sous la forme :  $I = I_m (1 + \gamma(\tau) \cos(2\pi v_0 \tau))$  et donner les expressions

## CHAPITRE 9 – L’INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

de  $I_m$  et de la fonction  $\gamma(\tau)$ . On utilisera les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du &= \pi \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \cos(\alpha u) du &= \pi \exp(-\alpha) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \sin(\alpha u) du &= 0\end{aligned}$$

et, compte tenu de la très rapide décroissance de la fonction  $I_{0V}$  lorsque  $v$  s’écarte de  $v_m$ , on pourra étendre l’intégration à l’intervalle  $[-\infty, \infty]$ .

Quelle est la signification physique de  $\gamma(\tau)$ ? Exprimer le temps de corrélation  $\tau_c$  sachant que  $\gamma(\tau_c) = \frac{1}{e}$ . Interpréter physiquement le fait que  $\gamma(\tau) \rightarrow 0$  si  $\tau \rightarrow \infty$ . Représenter graphiquement  $I$  en fonction de  $\tau$ .

**6.** On translate le miroir ( $M_1$ ), à la vitesse constante  $V$  déterminée à la première question, le long de l’axe ( $Ox$ ) en partant du contact optique et on enregistre le signal  $u(t)$  fourni par le détecteur. Montrer qu’on peut ainsi mesurer  $\tau_c$ . Estimer la durée minimale de l’enregistrement.

### 9.7 Détection de très faibles variations d’indice optique (★★★)

Un interféromètre de Michelson est réglé en coin d’air d’angle  $\alpha \simeq 10^{-3}$  rad et éclairé en lumière monochromatique, de longueur d’onde  $\lambda_0 = 590$  nm, avec une source **modérément étendue** en éclairage quasi-parallèle. On rappelle que les franges obtenues sont alors **localisées** au voisinage des miroirs et qu’il s’agit de franges d’égale épaisseur pour lesquelles la différence de marche au point  $M$  vaut  $\delta = 2\alpha x$  (voir figure 1).

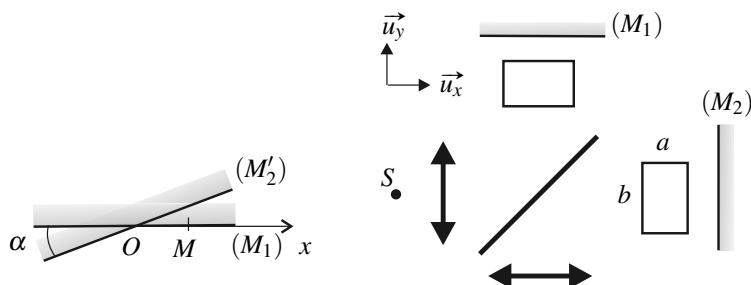


Figure 1

écran

Figure 2

Dans l'un des bras de l'interféromètre, on intercale une cuve parallélépipédique de longueur  $c$  selon la verticale  $\vec{u}_z$  et de section rectangulaire de cotés  $a = 1 \text{ cm}$  et  $b$  respectivement selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . Cette cuve contient un solvant d'indice  $n_0$  et des cristaux d'une substance soluble ; du fait que la concentration en soluté varie selon la verticale l'indice optique du liquide dans le tube varie légèrement avec  $z$  selon une loi de la forme  $n(z) = n_0 + n_1 \exp\left(-\frac{z^2}{d^2}\right)$ , où  $n_1 \simeq 10^{-4}$  est une constante et  $d$  une distance augmentant lentement au cours du temps. Dans l'autre bras on intercale un cuve compensatrice identique contenant uniquement le solvant. On admettra que les rayons lumineux traversent les cuves sous incidence normale sur une épaisseur  $a$  et que les dimensions  $b$  et  $c$  sont suffisantes couvrir tout le champ d'observation.

- 1.** Étudier de manière qualitative l'effet de la présence de la cuve compensatrice sur le contraste de la figure d'interférence.
- 2.** Établir l'expression de la différence de marche  $\delta$  en fonction de  $x$ ,  $\alpha$ ,  $n(z) - n_0$  et  $a$ .
- 3.** On fait l'image du coin d'air sur un écran le grandissement est  $\gamma = -10$ .
  - a.** Donner l'équation de la frange brillante d'ordre  $m$  en notant  $x'$  et  $z'$  les coordonnées du point courant  $M'$  de l'écran.
  - b.** On appelle interfrange  $i$  la distance entre deux franges brillantes successives lorsque  $z' \gg |\gamma|d$ . Évaluer numériquement  $i$ . Quel est, en interfrange, la déviation maximale des franges parallèlement à  $\vec{u}_x$  ?
  - c.** Représenter les franges observées :
    - en début d'expérience, lorsque  $d \ll c$  ;
    - en milieu d'expérience, lorsque  $d \simeq c$  ;
    - en fin d'expérience, lorsque  $d \gg c$ .

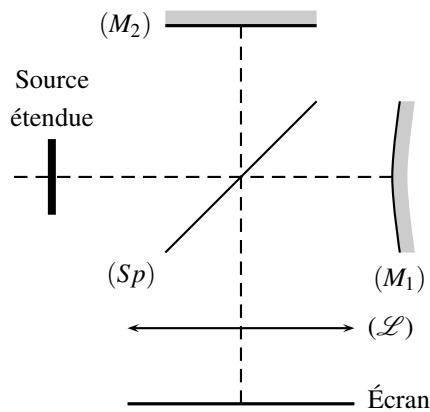
### 9.8 Interféromètre de Michelson avec un miroir sphérique ( $\star\star\star$ )

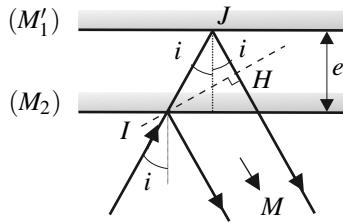
On considère un interféromètre de Michelson comportant un miroir non parfaitement plan et assimilé à un miroir sphérique convexe ( $M_1$ ) de rayon de courbure  $R = 10,0 \text{ m}$ . L'image ( $M'_1$ ) de ce miroir par la séparatrice est tangente au miroir plan ( $M_2$ ), conformément au schéma ci-après. L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 630 \text{ nm}$ .

On observe la figure d'interférence dans le plan conjugué de ( $M_2$ ) par rapport à la lentille ( $\mathcal{L}$ ) de courte focale. Ce plan est situé loin de la lentille (ce que ne montre pas la figure ci-dessus pour des raisons d'encombrement) et le grandissement transversal est  $\gamma = 5$ .

- 1.** Obtient-on des franges d'égale épaisseur ou d'égale inclinaison ? Comment doit-on placer la source étendue ?
- 2.** Déterminer les rayons des franges brillantes successives observées sur l'écran.
- 3.** Si les miroirs ont un diamètre de 2 cm, quelle est la valeur maximale du rayon de courbure que l'on peut détecter ?

## CHAPITRE 9 – L'INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON



**CORRIGÉS****9.1 Différence de marche de la lame d'air**

D'après le théorème de Malus,  $I$  et  $H$  sont dans un même *plan d'onde relatif au point  $M$* , donc  $(IM) = (HM)$  et  $\delta(M) = n(IJ + JH)$ . Or :  $IJ = \frac{e}{\cos i}$  et  $JH = IJ \cos(2i) = e \frac{\cos(2i)}{\cos i}$ . Il vient :  $\delta(M) = ne \frac{1 + \cos(2i)}{\cos i} = 2ne \cos i$ .

**9.2 Anneaux d'égale inclinaison**

- On doit placer l'écran à grande distance ou dans le plan focal image d'une lentille convergente.
- On sait que l'ordre d'interférence pour les rayons ayant l'angle d'incidence  $i$  est  $p(i) = \frac{2ne}{\lambda} \cos i$ ; de plus :  $\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2} \simeq 1 - \frac{\rho^2}{2f'^2}$  car  $i = \arctan \frac{\rho}{f'} \simeq \frac{\rho}{f'}$ . Si  $p_0$  est l'ordre d'interférence correspondant au premier anneau brillant, l'ordre d'interférence correspondant au cinquième est  $p_0 - 4$ , donc :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{\rho_1^2}{2f'^2} \right) \quad \text{et} \quad p_0 - 4 = \frac{2ne}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{\rho_5^2}{2f'^2} \right).$$

On en déduit :  $4 = \frac{ne}{\lambda_0 f'^2} (\rho_5^2 - \rho_1^2) \Leftrightarrow e = \frac{4\lambda_0 f'^2}{n(\rho_5^2 - \rho_1^2)} = 35,5 \pm 0,8 \mu\text{m}$  (avec  $n = 1$ ).

**9.3 Angle du coin d'air**

Si l'on compte 16 franges brillantes sur toute la largeur du miroir, on peut estimer que le diamètre du miroir correspond à 15 fois l'interfrange :  $d = 15i$ . Or  $i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}$  (voir cours), soit  $\alpha = \frac{\lambda_0}{2ni}$ , ou encore  $\alpha = \frac{15\lambda_0}{2nd}$ . Numériquement (avec  $n \simeq 1$ ) :  $\alpha \simeq 2,1,0 \times 10^{-4}$  rad.

**9.4 Mesure de l'indice de l'air**

- Les franges observées sont des franges d'égale épaisseur localisées au voisinage des miroirs. On doit donc placer le détecteur dans le plan conjugué des miroirs par une lentille convergente.

## CHAPITRE 9 – L’INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

- 2.** La variation de l’ordre d’interférence au point fixe d’observation est :  $\Delta p = \frac{2(n-1)d}{\lambda_0} = 9,75$ , d’où  $n-1 = \frac{9,75\lambda_0}{2d}$ . L’application numérique donne :  $n-1 = 3 \times 10^{-4}$ .

**9.5 Mesure interférométrique de l’accélération de la pesanteur**

- 1.** Le trièdre mobile ( $T_m$ ) est soumis uniquement à son poids ; le principe fondamental de la dynamique donne :  $\ddot{z} = -g$ . Avec l’origine des temps à l’instant où il passe à son altitude maximale  $z_m$  :  $\dot{z}(t=0) = 0$  et  $z(t=0) = z_m$ . L’équation différentielle s’intègre en :  $z(t) = z_m + \frac{1}{2}gt^2$ . Le trièdre passe à l’altitude  $z_0$  aux instants  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$  donc :  $z_m - z_0 = \frac{1}{8}gT^2$ .

- 2.** L’éclairement reçu par le détecteur est maximal chaque fois que la différence de marche  $\delta$  des deux faisceaux est un multiple de la longueur d’onde  $\lambda_0$ . Or  $\delta$  dépend de  $z$  selon une loi de la forme  $\delta = -2z + \text{constante}$  ; quand  $z$  passe de  $z_0$  à  $z_m$ ,  $\delta$  diminue de  $2n(z_m - z_0)$  et quand  $z$  revient de  $z_m$  à  $z_0$ ,  $\delta$  augmente de  $2n(z_m - z_0)$ . Ainsi, le nombre de maxima détectés est :  $N = \frac{4n(z_m - z_0)}{\lambda_0}$ . Il vient donc :  $\frac{1}{8}gT^2 = \frac{N\lambda_0}{4n}$  soit  $g = \frac{2N\lambda_0}{nT^2}$ . Dans cette formule  $n$  est l’indice du « vide » obtenu dans l’enceinte où se déplace ( $T_m$ ). On fait l’approximation  $n \simeq 1$

- 3.** En faisant le vide dans l’enceinte :

- on élimine le frottement fluide sur le trièdre mobile,
- l’approximation  $n \simeq 1$  est meilleure.

**9.6 Spectrométrie par transformation de Fourier**

- 1.** La différence de marche au niveau du détecteur est  $\delta = 2nVt$  ; celui-ci délivre un signal proportionnel à l’intensité qu’il reçoit, donnée par la formule des interférences :

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n V t}{\lambda_0} \right) \right)$$

C’est un signal périodique de période  $T = \frac{\lambda_0}{2nV}$ . Pour avoir  $T = 1,0$  ms, il faut déplacer le miroir à la vitesse  $V = 3,2 \cdot 10^{-7}$  m.s<sup>-1</sup>.

- 2.**  $dI_0(v) = KdP(v) = KP_v(v)dv$  et  $dI_0(v) = I_{0v}(v)dv$ , donc  $I_{0v}(v) = KP_v(v)$ .

- 3.** Le déphasage au niveau du détecteur des ondes de fréquence  $v$  (donc de longueur d’onde dans le vide  $\lambda_0 = \frac{c}{v}$ ) est  $\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi v \delta}{c} = 2\pi v \tau$ . D’après la formule des interférences, l’intensité au niveau du détecteur due à l’émission de la source dans la bande de fréquence  $[v, v+dv]$  est  $dI = 2dI_0(v)(1 + \cos(2\pi v \tau))$ . L’intensité totale au niveau du détecteur est la somme de ces intensités car on additionne les intensités d’ondes de fréquences différentes, ainsi :  $I = \int_0^\infty 2I_0(v)(1 + \cos(2\pi v \tau))dv$ .

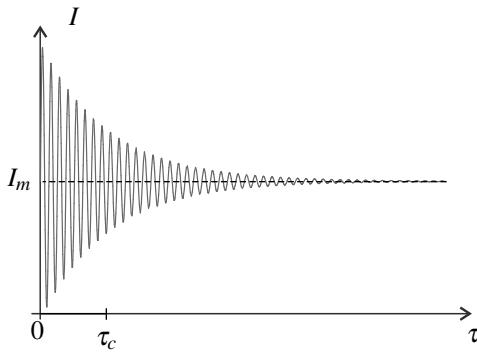
- 4.**  $I_{0v}(v) = \frac{A}{2}$  pour  $v_1 = v_0 - \frac{1}{\sqrt{a}}$  et  $v_2 = v_0 + \frac{1}{\sqrt{a}}$  ;  $\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$ . D’après les valeurs numériques :  $\Delta v \ll v_0$ . Le temps de corrélation est :  $\tau_c \sim \frac{1}{\Delta v} = \frac{\sqrt{a}}{2} \sim 10^{-11}$  s.

5. Avec l'approximation suggérée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
 I &\simeq 2A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a(v-v_0)^2} (1 + \cos(2\pi v\tau)) dv \\
 &= \frac{2A}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \left( 1 + \cos \left( 2\pi \left( v_0 + \frac{u}{\sqrt{a}} \right) \tau \right) \right) du \\
 &= \frac{2A}{\sqrt{a}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du + \cos(2\pi v_0 \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi \tau u / \sqrt{a})}{1+u^2} du \right. \\
 &\quad \left. - \sin(2\pi v_0 \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi \tau u / \sqrt{a})}{1+u^2} du \right) \\
 &= \underbrace{\frac{2\pi A}{\sqrt{a}}}_{I_m} \left( 1 + \underbrace{\exp \left( -\frac{2\pi \tau}{\sqrt{a}} \right)}_{\gamma(\tau)} \cos(2\pi v_0 \tau) \right)
 \end{aligned}$$

D'après l'énoncé :  $\gamma(\tau_c) = \frac{1}{e}$  donc :  $\tau_c = \frac{\sqrt{a}}{2\pi}$ . Pour  $\tau \gg \tau_c$ ,  $\gamma(\tau) \simeq 0$  : le contraste est quasiment nul et les interférences ne sont plus visibles quand le décalage temporel  $\tau$  des deux ondes dépasse le temps de corrélation  $\tau_c$ .

La courbe  $I(\tau)$  oscille avec la période  $\frac{1}{v_0}$  entre les courbes  $1 + \gamma(\tau)$  et  $1 - \gamma(\tau)$ . L'allure est donnée ci-dessous (pour plus de clarté on n'a pas représentée les oscillations aussi serrées qu'elles sont) :



6. Quand on déplace le miroir à vitesse  $V$ ,  $\tau = \frac{\delta}{c} = \frac{2nV}{c}t$ . Ainsi, la courbe  $u(t)$  donnant la tension fournie par le détecteur en fonction du temps reproduit la courbe  $I(\tau)$  précédente. Pour mesurer  $\tau_c$ , on repère sur l'enregistrement de  $u(t)$  l'instant  $t_1$  pour lequel le contraste est  $\gamma = \frac{1}{e}$  : on a  $\tau_c = \frac{2nV}{c}t_1$ . avec les valeurs numériques de l'exercice,  $t_1 \sim 1000$  s ; c'est l'ordre de grandeur de la durée minimale de l'enregistrement.

### 9.7 Détection d'une faible variation d'indice

1. Sans la cuve compensatrice, on observerait des franges mal contrastées pour deux raisons :
  - les éclairements des deux faisceaux sortant de l'interféromètre seraient très différents en raison des pertes par réflexion et absorption sur le bras contenant la cuve ;
  - la différence de marche serait trop forte (le trajet dans les parois de la cuve et le solvant n'étant pas compensé) ce qui diminuerait le contraste, la longueur de cohérence de la source n'étant pas infinie.
2. La différence de marche contient un terme supplémentaire puisque le rayon réfléchi sur ( $M_2$ ) parcourt deux fois la distance  $a$  dans un milieu d'indice  $n(z)$  alors que le rayon réfléchi sur ( $M_1$ ) parcourt deux fois cette distance dans un milieu d'indice  $n_0$  :  $\delta = 2\alpha x + 2(n(z) - n_0)a$ .
3. a. La frange brillante d'ordre  $m$  est donnée par  $\delta = m\lambda_0$  soit :

$$x = m \frac{\lambda_0}{2\alpha} - \frac{(n(z) - n_0)a}{\alpha}$$

Le point  $(x, y)$  du miroir correspond au point  $(x', y') = (\gamma x, \gamma y)$  sur l'écran. La frange brillante sur l'écran a donc pour équation :

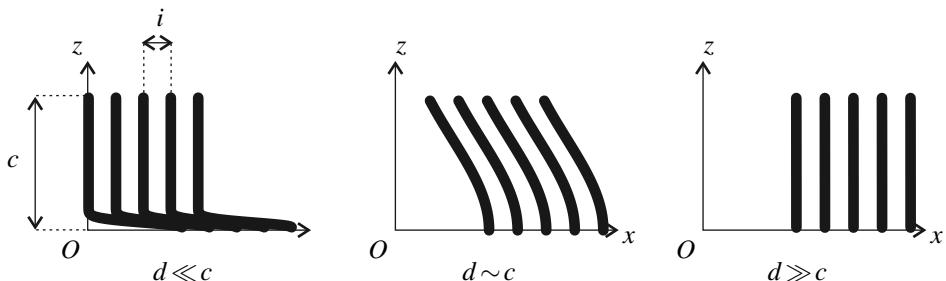
$$x' = m \frac{\gamma \lambda_0}{2\alpha} - \frac{\gamma n_1 a}{\alpha} \exp\left(-\frac{z'^2}{\gamma^2 d^2}\right)$$

où l'on a remplacé  $n(z) - n_0$  par son expression.

- b. Pour  $z' \gg |\gamma|d$ , l'équation de la frange devient  $x = m \frac{\gamma \lambda_0}{2\alpha}$  ; les franges sont alors quasi-rectilignes et distantes de  $i = \frac{|\gamma| \lambda_0}{2\alpha} \simeq 3$  mm.

L'écart de la frange à la droite précédente est maximal pour  $z = 0$  et vaut alors  $\Delta x = \frac{|\gamma| n_1 a}{\alpha} = \frac{2 n_1 a}{\lambda_0} i = 3,4i$ .

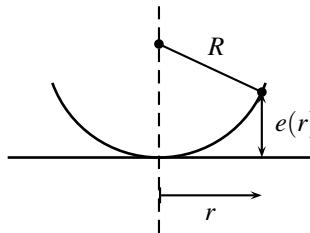
- c. La figure représente les franges brillantes d'ordre  $m = 0, -1, -2, -3, -4$  pour  $d = \frac{c}{20}$ ,  $d = c$  et  $d = 20c$ .



### 9.8 Interféromètre de Michelson avec un miroir sphérique

**1.** L'épaisseur entre les deux miroirs est variable : les franges seront des franges d'égale épaisseur localisées au voisinage des miroirs.

**2.** On considère la figure suivante, qui représente le miroir ( $M_2$ ) et le miroir ( $M'_1$ ), image de ( $M_1$ ) par la séparatrice (la courbure du miroir ( $M'_1$ ) est exagérée pour une meilleure lecture).



L'épaisseur locale  $e(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ ; Compte tenu que  $R \gg r$ , cette expression se simplifie en :  $e(r) = \frac{r^2}{2R}$ . La différence de marche correspondante s'écrit :  $\delta(r) = 2n_{\text{air}}e(r) = \frac{n_{\text{air}}r^2}{R}$ .

L'ordre d'interférence s'en déduit :  $p = \frac{n_{\text{air}}r^2}{\lambda_0 R}$ . L'ordre d'interférence est nul au centre, qui est donc brillant, et croît en fonction de  $r$ . Les anneaux brillants successifs sont caractérisés par des ordres d'interférence entiers :  $r_p = \sqrt{\frac{R\lambda_0}{n_{\text{air}}}} p$ .

**3.** La valeur limite du rayon de courbure que l'on peut détecter correspond à la situation où le premier anneau sombre ( $p = 1/2$ ) coïncide avec le bord du miroir (dans ce cas, l'éclairement semble quasiment uniforme sur tout le miroir, comme c'est le cas avec deux miroirs plans au contact optique). On a donc :  $R_{\max} = \frac{n_{\text{air}}d^2}{4\lambda_0}$ . L'application numérique donne :  $R_{\max} = 159 \text{ m}$  !



# 10

# Interférences de $N$ ondes cohérentes

Après avoir étudié au chapitre 7 la superposition de deux ondes lumineuses, on s'intéresse maintenant à la superposition de  $N$  ondes lumineuses, d'abord sur le plan théorique puis dans une application pratique : le réseau de diffraction.

## 1 Superposition de $N$ ondes lumineuses

Dans ce paragraphe on étudie les interférences de  $N$  ondes émises par  $N$  sources  $S_1, S_2, \dots, S_N$  quasi-monochromatiques de même pulsation  $\omega$  et mutuellement cohérentes deux à deux.

On suppose de plus qu'au point  $M$  où elles parviennent :

- les  $N$  ondes ont toutes la même amplitude  $s_0$ ,
- la différence entre les retards de phase des ondes émises par deux sources consécutives  $S_{m+1}$  et  $S_m$  est une constante :

$$\varphi_{m+1}(M) - \varphi_m(M) = \varphi.$$

### Remarque

Conformément à un usage répandu, on note ce déphasage  $\varphi$  plutôt que  $\Delta\varphi$  ce qui allège les écritures.

### 1.1 Expression de la vibration lumineuse résultante

La vibration lumineuse rayonnée par la source  $S_m$  s'écrit au point  $M$ , en notation complexe :

$$\underline{s}_m(M, t) = s_0 \exp\left(i(\omega t - \varphi_m(M))\right).$$

On en déduit l'expression de  $\underline{s}_{m+1}(M, t)$  en fonction de  $\underline{s}_m(M, t)$  :

$$\underline{s}_{m+1}(M, t) = \underline{s}_p(M, t) \exp\left(i(\varphi_p(M, t) - \varphi_{m+1}(M, t))\right) = \underline{s}_m(M, t) \exp(-i\varphi). \quad (10.1)$$

L'équation (10.1) étant vraie quel que soit l'indice  $m$  on peut écrire :

$$\underline{s}_m(M, t) = \underline{s}_{m-1}(M, t) \exp(-i\varphi) = \underline{s}_{m-2}(M, t) \exp(-2i\varphi) = \dots = \underline{s}_1(M, t) \exp(-i(m-1)\varphi).$$

La vibration lumineuse résultante au point  $M$  est :

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{m=1}^N \underline{s}_m(M, t) = \sum_{m=1}^N \underline{s}_1(M, t) \exp(-i(m-1)\varphi).$$

Cette somme peut être explicitée car il s'agit de la somme d'une progression géométrique. On obtient :

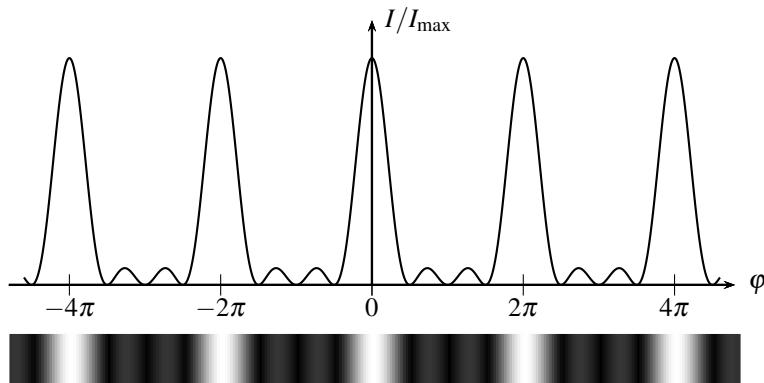
$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) \frac{1 - \exp(-iN\varphi)}{1 - \exp(-i\varphi)} \\ &= \underline{s}_1(M, t) \exp\left(-i\frac{(N-1)\varphi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

## 1.2 Intensité vibratoire résultante

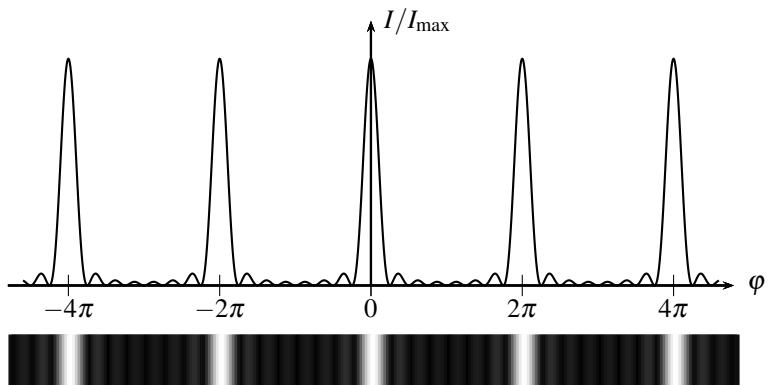
L'intensité vibratoire résultante au point  $M$  peut être calculée à partir de la vibration lumineuse résultante  $\underline{s}(M, t)$ . On obtient le résultat suivant :

$$I(M) = \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \cdot \underline{s}^*(M, t) = I_{\max} \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

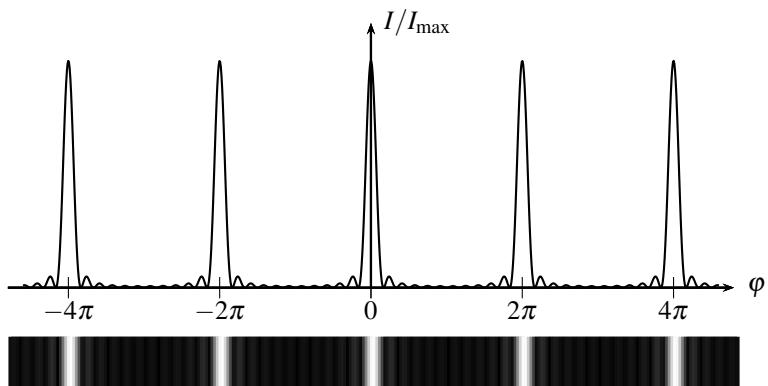
où  $I_{\max}$  représente l'intensité vibratoire maximale. Les figures 10.1, 10.2 et 10.3 donnent une représentation de  $I/I_{\max}$  en fonction de  $\varphi$ .



**Figure 10.1** – Représentation de l'intensité vibratoire pour  $N = 4$ .



**Figure 10.2 –** Représentation de l'intensité vibratoire pour  $N = 8$ .



**Figure 10.3 –** Représentation de l'intensité vibratoire pour  $N = 12$ .

La représentation de l'intensité vibratoire (voir figures 10.1 à 10.3) pour différentes valeurs de  $N$  appelle les commentaires suivants :

- la représentation de  $I$  fait apparaître une série de pics, au centre desquels  $I$  prend sa valeur maximale ;
- chacun de ces pics correspond à une frange brillante correspond à des interférences totalement constructives ( $\varphi = 2k\pi$ , avec  $k$  entier) ;
- on voit aussi apparaître des annulations de l'intensité vibratoire : ce sont les franges sombres qui correspondent aux interférences totalement destructives ;
- on voit aussi apparaître des franges secondaires, moins brillantes, correspondant à des interférences partiellement constructives. Mais ces franges secondaires deviennent de moins en moins visibles au fur et à mesure que  $N$  augmente ;
- on constate que la finesse des franges les plus brillantes augmente avec  $N$ .

**Remarque**

$I_{\max}$  est proportionnelle à  $N^2$ , ce qui n'apparaît pas sur les figures précédentes, puisqu'on a représenté  $I/I_{\max}$ .

L'intensité vibratoire résultant de la superposition de  $N$  ondes cohérente est maximale lorsque le déphasage entre deux ondes successives est :

$$\varphi = 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10.2)$$

Lorsque  $N$  est grand l'intensité est quasiment nulle en dehors de pics centrés autour de ces valeurs.

**1.3 Maxima principaux d'intensité**

Ces pics sont d'autant plus étroits que  $N$  est grand. On souhaite trouver leur largeur c'est-à-dire la différence entre les deux premières valeurs de  $\varphi$  de part et d'autre de la valeur  $2k\pi$  pour lesquelles l'intensité  $I$  s'annule. Or pour que  $I$  soit nulle il faut que :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N\varphi}{2} = q\pi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{2q\pi}{N},$$

où  $q \in \mathbb{Z}$ . L'intensité est nulle pour les valeurs précédentes de  $\varphi$  si  $q$  n'est pas un multiple de  $N$ . Si  $q$  est multiple de  $N$  on tombe sur les valeurs pour lesquelles  $I$  est maximale (dans ce cas le sinus du numérateur de l'expression de  $I$  s'annule en même temps que le sinus du dénominateur, de sorte que l'intensité n'est pas nulle mais maximale).

Ainsi, entre les deux maxima principaux repérés par  $k = 0$  ( $\varphi = 0$ ) et  $k = 1$  ( $\varphi = 2\pi$ ), on trouve  $N - 1$  annulations de l'intensité vibratoire correspondant à  $1 \leq q \leq N - 1$ . De même, de façon symétrique, entre les deux maxima principaux repérés par  $k = 0$  ( $\varphi = 0$ ) et  $k = -1$  ( $\varphi = -2\pi$ ), on trouve aussi  $N - 1$  annulations de l'intensité vibratoire correspondant à  $1 - N \leq q \leq -1$ . On résume ces résultats sur la figure 10.7.

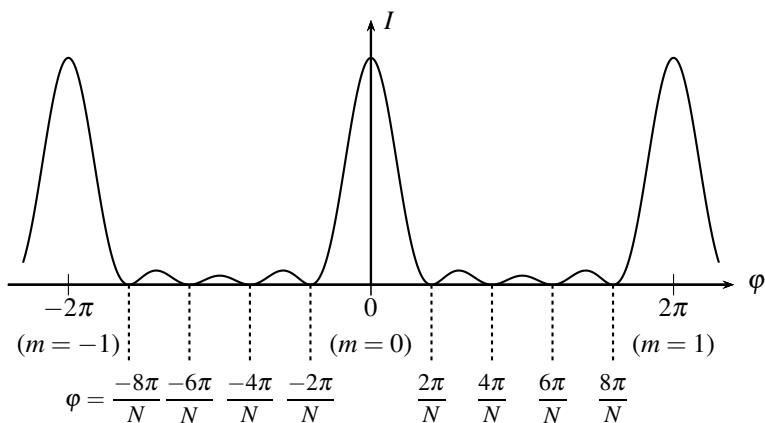


Figure 10.4 – Maxima principaux et minima de l'intensité vibratoire ( $N = 5$ ).

On définit la largeur  $\delta\varphi$  d'un pic principal comme étant la variation de  $\varphi$  entre les deux annulations de l'intensité vibratoire qui bordent ce pic. Sur la figure 10.4, on lit directement :

$$\delta\varphi_N = \frac{4\pi}{N}. \quad (10.3)$$

Cette largeur est d'autant plus faible que  $N$  est élevée. Cela confirme l'observation qualitative faite sur les figures 10.1 à 10.3.

La finesse  $\mathcal{F}_N$  d'un pic est définie comme étant le rapport :

$$\mathcal{F}_N = \frac{2\pi}{\delta\varphi_N} = \frac{N}{2}. \quad (10.4)$$

On obtient que la finesse des pics croît avec  $N$ . Cette propriété importante est mise à profit pour faire de la spectroscopie, c'est-à-dire pour mesurer des longueurs d'onde comme nous le verrons ultérieurement.

## 1.4 Interprétation à l'aide de la représentation de Fresnel

On peut trouver les résultats précédents par un raisonnement géométrique utilisant la **construction de Fresnel**.

**Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe** : considérons une vibration lumineuse de la forme  $\underline{s} = s_0 \exp(-i\theta)$ , que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\underline{s} = s_0 \cos \theta - i s_0 \sin \theta.$$

On choisit de représenter cette grandeur complexe par un vecteur  $\vec{s}$  dans le plan ( $Oxy$ ) défini par :

$$\vec{s} = \operatorname{Re}(\underline{s}) \vec{u}_x + \operatorname{Im}(\underline{s}) \vec{u}_y = s_0 \cos \theta \vec{u}_x - i s_0 \sin \theta \vec{u}_y.$$

Ce vecteur est appelé **vecteur de Fresnel**. Comme le montre la figure 10.5, ce vecteur fait un angle  $-\theta = \arg(\underline{s})$  avec le vecteur  $\vec{u}_x$ .

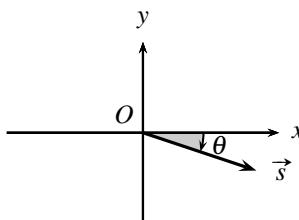
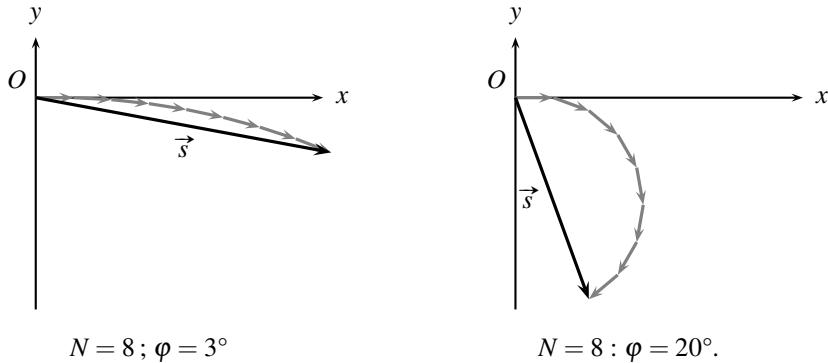


Figure 10.5 – Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe.

**Représentation de la vibration lumineuse résultante** : pour représenter la vibration lumineuse résultante  $\underline{s}(M)$ , nous représentons chacune des vibrations lumineuses  $\underline{s}_m(M)$  par un

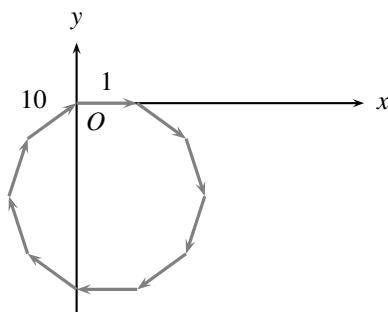
vecteur de Fresnel. En faisant l’addition vectorielle de ces  $N$  vecteurs, on obtient le vecteur de Fresnel associé à la vibration lumineuse  $\underline{s}(M)$ . La relation (10.1) montre que le vecteur  $\vec{s}_{m+1}$  forme un angle  $-\varphi$  avec le vecteur  $\vec{s}_m$ . On représente ces vecteurs bout à bout en faisant une rotation de  $-\varphi$  en passant d’un vecteur au vecteur suivant. La construction correspondante est représentée sur la figure 10.6.



**Figure 10.6** – Construction de Fresnel de la vibration lumineuse résultante pour  $N = 8$ .

**Interférences totalement constructives** : on obtient des interférences totalement constructives lorsque le vecteur  $\vec{s}$  a une norme maximale : cela correspond à la situation où  $\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Tous les vecteurs de Fresnel  $\vec{s}_m$  sont alors colinéaires et alignés selon l’axe ( $Ox$ ). Dans ce cas, l’intensité vibratoire  $I(M)$  est maximale.

**Interférences totalement destructives** : on obtient des interférences totalement destructives lorsque le vecteur  $\vec{s}$  a une norme nulle : cela correspond à la situation où, en plaçant les vecteurs  $\vec{s}_m$  bout à bout, on effectue un nombre entier de tours comme le montre la figure 10.7.



**Figure 10.7** – Construction de Fresnel correspondant à l’annulation de la vibration lumineuse résultante pour  $N = 10$ .

Dans cette situation,  $N\varphi = 2q\pi$  où  $q \in \mathbb{Z}$  avec  $q$  différent de zéro et de tout multiple de  $N$ ,

pour éviter de retomber sur la condition d'interférences totalement constructives où  $\varphi$  est un multiple de  $2\pi$ .

## 2 Réseaux de diffraction

### 2.1 Définition

Un **réseau de diffraction** est un objet plan présentant une structure périodique selon un axe ( $Ox$ ) avec une période spatiale  $a$  de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde de la lumière visible qui est appelée **pas du réseau**.

Dans la pratique, un réseau est constitué d'une suite de  $N$  motifs identiques. Ces motifs sont appelés **traits du réseau**. En appelant ( $Oxy$ ) le plan du réseau, les traits sont invariants par translation le long de l'axe ( $Oy$ ) et décalés chaque fois de  $a$  suivant ( $Ox$ ).

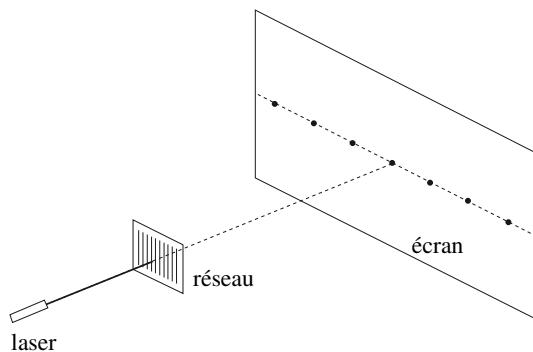
L'ordre de grandeur du pas  $a$  est de 1 à  $10 \mu\text{m}$ . Le nombre  $N$  de motifs varie entre quelques centaines et quelques milliers : il est toujours très grand.

Dans la suite, on parlera uniquement de **réseaux par transmission** : la lumière subit un phénomène de diffraction en traversant le réseau. Il existe aussi des **réseaux par réflexion** fonctionnant de la même manière mis à part que la lumière diffractée est réfléchie (voir exercices).

### 2.2 Diffraction par un réseau

**Expérience**

On éclaire un réseau par un faisceau laser approximativement orthogonal à son plan, l'observation se faisant sur un écran situé loin du réseau.



**Figure 10.8 – Réseau éclairé par un laser.**

Sur l'écran, on observe une succession de petites taches lumineuses régulièrement espacées dont l'une est dans le prolongement du faisceau (c'est la tache centrale correspondant à la lumière non diffractée). Si on translate le réseau dans son plan, la

figure observée ne change pas. Si on remplace le réseau par un réseau de pas  $a$  plus grand, les taches sont plus resserrées, si on le remplace par un réseau de pas plus petit, elles sont plus espacées.

Il est intéressant d'évaluer le nombre  $N$  de traits du réseau éclairés dans cette expérience. Le diamètre du faisceau laser est typiquement  $d = 2 \text{ mm}$  et le pas du réseau  $a = 5 \mu\text{m}$ , ainsi :

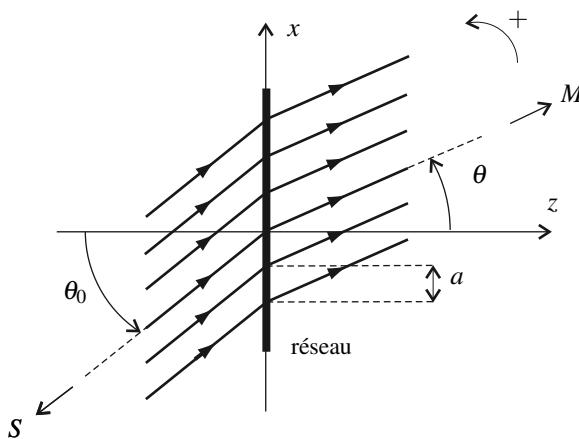
$$N \simeq \frac{d}{a} = 400.$$

## 2.3 Formule fondamentale des réseaux

### a) Principe du calcul

On interprète l'expérience précédente par les interférences entre les  $N$  ondes diffractées par les  $N$  motifs du réseau qui sont éclairés : les directions dans lesquels on trouve de la lumière diffractée sont celles pour lesquelles ces interférences sont constructives.

Pour les calculs on choisit un repère ( $Oxyz$ ) est tel que ( $Oz$ ) est la direction normale au plan du réseau et ( $Oy$ ) est parallèle aux traits. Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0$ , se propageant dans une direction perpendiculaire aux traits, c'est-à-dire parallèle au plan ( $Ozx$ ) et faisant l'angle  $\theta_0$  avec la normale au réseau ( $Oz$ ). Cette onde provient d'une source à l'infini  $S$ . La lumière diffractée par le réseau se propage *a priori* dans toutes les directions du plan ( $Ozx$ ) ; on repère une direction quelconque de ce plan par l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec ( $Oz$ ) et on appelle  $M$  le point à l'infini dans cette direction (voir figure 10.9).



**Figure 10.9** – Diffraction par un réseau dans une direction  $\theta$ .



Sur la figure 10.9 on a représenté les rayons arrivant en un point  $M$  à l'infini particulier ; ces  $N$  rayons sont parallèles mais *l'onde diffractée par le réseau n'est pas plane*.

**b) Différence de marche, différence de phase et ordre d'interférence**

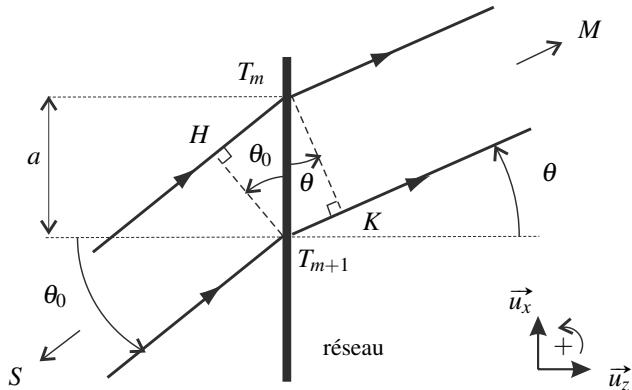


Figure 10.10 – Calcul de la différence de marche.

Soient  $T_1, T_2, \dots, T_N$  les centres des traits éclairés. On veut calculer la différence de marche en  $M$  entre les ondes diffractées par deux traits consécutifs de numéros  $m$  et  $m + 1$ . Pour cela on fait apparaître les projections orthogonales  $H$  et  $K$  de  $T_{m+1}$  et  $T_m$  respectivement, sur les rayons  $ST_m$  et  $T_{m+1}M$  respectivement. En utilisant le théorème de Malus, on peut dire que :

- $T_{m+1}$  et  $H$  sont sur un même plan d'onde de l'onde plane arrivant sur le réseau, donc  $(ST_{m+1}) = (SH)$  ;
- de manière analogue  $(T_m M) = (KM)$ . Cette égalité proviendrait de l'argument précédent si l'onde était issue de  $M$  et les rayons parcourus en sens inverse ; on dit que  $T_m$  et  $K$  sont sur un même *plan d'onde relatif au point  $M$* .



Il ne faut pas dire que le plan contenant  $T_m$  et  $K$  est un plan d'onde pour l'onde qui émerge du réseau car cette onde n'est pas plane !

Il vient :

$$\begin{aligned}\delta_{m+1/m}(M) &= (ST_{m+1}M) - (ST_m M) = \left( (ST_{m+1}) - (ST_m) \right) + \left( (T_{m+1}M) - (T_m M) \right), \\ &= -(HT_m) + (T_{m+1}K) .\end{aligned}$$

D'après la figure 10.10 :  $(HT_m) = na \sin \theta_0$  et  $(T_{m+1}K) = na \sin \theta$ . La différence de marche est indépendante de  $m$  : on décide de ne plus mentionner cet indice. On obtient les expressions de la différence de marche  $\delta(M)$ , de la différence de phase  $\Delta\phi(M)$  et de l'ordre d'interférences  $p(M)$  suivantes :

- Différence de marche entre deux rayons consécutifs :

$$\delta(M) = na(\sin \theta - \sin \theta_0). \quad (10.5)$$

- Différence de phase entre deux rayons consécutifs :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi na}{\lambda_0}(\sin \theta - \sin \theta_0). \quad (10.6)$$

- Ordre d'interférences :

$$p(M) = \frac{na}{\lambda_0}(\sin \theta - \sin \theta_0). \quad (10.7)$$

### c) Formule fondamentale des réseaux

La situation étudiée se ramène à celle que nous avons rencontrée au paragraphe précédent. Les ondes lumineuses diffractées par chaque trait du réseau constituent  $N$  ondes cohérentes, de même amplitude, et dont les phases sont en progression arithmétique. On peut donc appliquer les résultats que nous avons déjà établis.

- Les maxima d'intensité vibratoire correspondent aux directions  $\theta$  pour lesquelles il y a interférence totalement constructive des  $N$  ondes. Cela se traduit par :  $p(M) = k \in \mathbb{Z}$  ce qui revient, d'après (10.7), à  $\theta = \theta_k$  avec :  $\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{na}$ .
- Le nombre  $N$  de traits éclairés étant très grand, l'intensité vibratoire est négligeable en dehors des directions repérées par  $\theta_k$  (voir paragraphe précédent).

On retiendra que :

Un réseau de pas  $a$  diffracte la lumière uniquement dans les directions  $\theta_k$  données par la **relation fondamentale des réseaux** :

$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{na}, \quad (10.8)$$

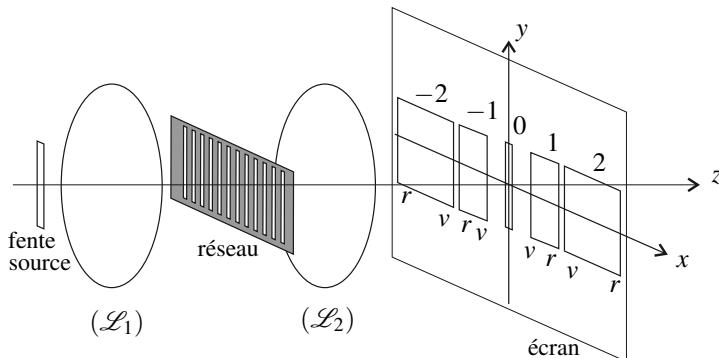
où  $k$  est un entier relatif appelé **ordre de diffraction**.

## 2.4 Principe du spectromètre à réseau

D'après la formule des réseaux, les directions  $\theta_p$  dépendent de la longueur d'onde : le réseau est **dispersif**. Comme avec un prisme, on peut observer le spectre d'une lumière et mesurer des longueurs d'onde en utilisant un réseau.

Le principe du **spectromètre à réseau** est illustré par l'expérience représentée sur la figure 10.11. On réalise un collimateur, en plaçant une fente source dans le plan focal d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_1$ ), pour éclairer un réseau dont les traits sont parallèles à la fente. Celle-ci est éclairée par de la lumière blanche. Dans le plan focal d'une deuxième lentille convergente ( $\mathcal{L}_2$ ), on observe :

- au centre, l'image géométrique de la fente source qui est blanche ;
- de part et d'autre en s'éloignant du centre, des spectres correspondant aux ordres de diffraction  $\pm 1, \pm 2 \dots$  dans lesquels le violet ( $v$  sur la figure) est le plus proche du centre et le rouge ( $r$  sur la figure) le plus éloigné du centre.



**Figure 10.11** – Expérience illustrant le principe du spectromètre à réseau.

 La lumière diffractée dans une direction  $\theta$  est recueillie sur l'écran au foyer image secondaire correspondant, dont la position  $x$  est reliée à  $\theta$  par la relation :

$$x = f'_2 \tan \theta,$$

$f'_2$  étant la distance focale image de  $(\mathcal{L}_2)$ . Dans les conditions de Gauss cette relation devient :  $x \simeq f'_2 \theta$ .

### Remarques

1. La disposition des couleurs dans le spectre est conforme à la formule des réseaux puisque  $\theta_k$  croît avec la longueur d'onde et que la lumière rouge a une longueur d'onde plus grande que la lumière violette.
2. À partir de l'ordre  $k = 2$  les spectres donnés par un réseau se recouvrent partiellement. En effet, la radiation rouge de plus grande longueur d'onde ( $\lambda_r = 0,75 \mu\text{m}$ ) correspond, dans le spectre d'ordre 2, à un angle donné par  $\sin \theta_{r2} = \sin \theta_0 + \frac{2\lambda_r}{a}$  et la radiation violette de plus petite longueur d'onde ( $\lambda_v = 0,40 \mu\text{m}$ ) correspond, dans le spectre d'ordre 3, à un angle donné par  $\sin \theta_{v3} = \sin \theta_0 + \frac{3\lambda_v}{a}$ . Or  $2\lambda_r = 1,50 \mu\text{m}$  et  $3\lambda_v = 1,20 \mu\text{m}$ . On constate que  $\theta_{r2} < \theta_{v3}$ , c'est-à-dire que la raie violette du spectre d'ordre 3 est plus près du centre que la raie rouge du spectre d'ordre 2.

**SYNTHÈSE**

*SAVOIRS*

- largeur d'un pic d'interférences constructives à  $N$  ondes
- formule fondamentale des réseaux de diffraction

*SAVOIR-FAIRE*

- établir la largeur des pics principaux dans le cas d'interférences à  $N$  ondes
- établir la relation fondamentale des réseaux

*MOTS-CLÉS*

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| • construction de Fresnel | • réseau de diffraction |
| • finesse d'un pic        | • pas du réseau         |

## S'ENTRAÎNER

### 10.1 Trois trous d'Young (★★)

Trois trous d'Young  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , distants de  $a$ , sont éclairés par une source ponctuelle, émettant une radiation monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ , placée au foyer principal objet d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_1$ ). On observe les interférences à l'infini, c'est-à-dire en un point  $M$  dans le plan focal d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_2$ ) de distance focale image  $f'$ .

- Représenter le montage étudié sur un schéma.
- Tracer les rayons, issus de  $S$ , qui arrivent au même point  $M$  de l'écran après avoir traversé chacun des trois trous.
- Évaluer la différence de marche  $\delta_{1/2}(M)$  du rayon passant par  $S_1$  par rapport au rayon passant par  $S_2$ . Exprimer de même  $\delta_{3/2}(M)$ .
- Les trois ondes qui interfèrent au point  $M$  sont-elles cohérentes ? Justifier votre réponse.
- En déduire l'intensité vibratoire observée sur l'écran et représenter ses variations en fonction de la position du point d'observation  $M$ .

### 10.2 Nombre d'ordres observables (\*)

On éclaire un réseau ayant 500 traits par millimètre par un faisceau parallèle d'incidence normale ( $\theta_0 = 0$ ) et de longueur d'onde  $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ . Combien de pics de diffraction peut-on observer au maximum ?

### 10.3 Choix du pas d'un réseau (\*)

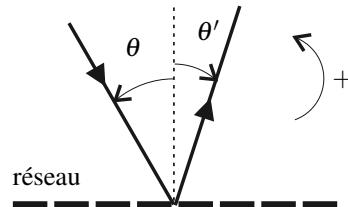
Un réseau optique doit être tel que, pour toute longueur d'onde du domaine visible :

- on puisse observer au moins un ordre de diffraction non nul en incidence normale,
- l'angle entre les directions des lumières diffractées dans deux ordres consécutifs soit au moins égal à  $0,1 \text{ rad}$ .

Comment doit-on choisir le pas  $a$  du réseau ?

### 10.4 Réseau plan par réflexion (★★)

Dans un réseau plan par réflexion, les fentes transparentes sont remplacées par des bandes rectangulaires réfléchissantes séparées par des traits pratiquement non réfléchissants. Un faisceau lumineux parallèle, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  tombe sur ce réseau avec un angle d'incidence algébrique  $\theta$ .

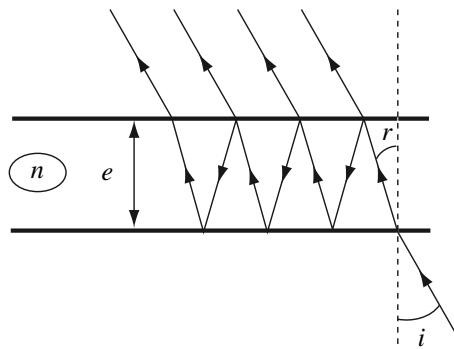


- Établir la relation, faisant intervenir un entier relatif quelconque  $k$ , donnant les angles  $\theta'$  repérant les directions dans lesquelles on trouve de la lumière réfléchie.
- On envoie sous l'incidence  $\theta = 30^\circ$  un faisceau parallèle de lumière blanche. Déterminer la(les) longueur(s) d'onde(s) qui est(sont) diffractée(s) dans la direction du faisceau incident sachant que le réseau comporte 1000 traits par millimètres.

## APPROFONDIR

## 10.5 Filtre interférentiel (★★)

Un filtre interférentiel est une lame transparente, d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$ , dont les faces sont traitées. Elles réfléchissent la lumière avec un coefficient de réflexion en amplitude  $\rho$  tel que  $|\rho| \simeq 1$  et la transmettent avec un coefficient de transmission en amplitude  $\tau$ . Pour un rayon lumineux arrivant sous l'incidence  $i$ , ce dispositif donne une infinité de rayons transmis qui ont subi 0, 2, 4, ...,  $2p$ , ... réflexions à l'intérieur de la lame. Ces réflexions n'introduisent aucun déphasage.



**1.** Dans cette question,  $i = 0$ .

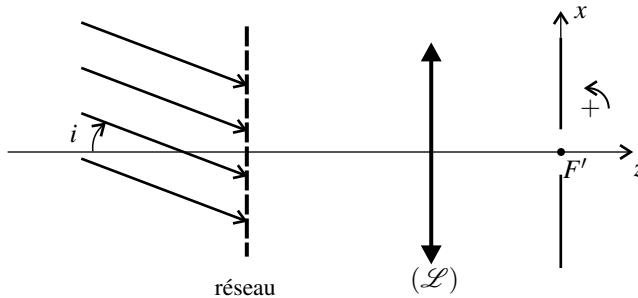
- a. Exprimer le déphasage  $\varphi$  entre deux rayons transmis successifs.
- b. Les nombres de vibrations qui interfèrent étant très élevé, l'intensité transmise sera non nulle uniquement si toutes les ondes qui interfèrent sont en phase. On considère que le filtre ne laisse passer que les longueurs d'onde pour lesquelles les interférences sont constructives. Quelle épaisseur doit avoir la lame pour que la seule radiation visible soit la raie verte du mercure de longueur d'onde  $\lambda = 546$  nm. On prendra  $n = 1.5$ .

**2.** Dans cette question,  $i \neq 0$ .

- a. Exprimer le déphasage  $\varphi$  entre deux rayons transmis successifs en fonction de l'angle  $r$  et de l'indice  $n$ .
  - b. De quelle couleur apparaît le filtre de la question 1 lorsqu'on regarde à travers sous un angle  $i = 60^\circ$  ?
  - c. Calculer l'amplitude de rayon transmis ayant subi  $p$  réflexions sur chaque face en fonction de l'amplitude  $A_0$  du rayon incident,  $\rho$ ,  $\tau$  et  $\varphi$ .
- Calculer l'éclairement transmis pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ . Effectuer l'application numérique avec  $\rho = 0.99$ .  
 Établir l'expression de l'éclairement transmis  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\varphi$  et tracer la courbe  $\mathcal{E}(\varphi)$ . Commenter.

### 10.6 Principe du monochromateur à réseau (\*\*)

Un monochromateur à réseau est un dispositif permettant d'obtenir une onde quasi monochromatique à partir d'une source de lumière blanche. Le réseau a 500 traits par mm et  $N = 10000$  traits au total. Il est éclairé sous l'incidence  $i$  par un faisceau parallèle de lumière blanche. Une lentille convergente mince de distance focale image  $f' = 20$  cm a son axe normal au plan du réseau et une fente fine se trouve centrée au foyer image de la lentille  $F'$ .



- Déterminer l'angle d'incidence  $i$  sachant que la lumière de longueur d'onde  $\lambda_0 = 550$  nm diffractée dans l'ordre 2 parvient en  $F_0$ .
- Pour une longueur d'onde  $\lambda$  un peu différente de  $\lambda_0$  les rayons diffractés par le réseau dans l'ordre 2 convergent en un foyer secondaire image  $\phi'$  de la lentille d'abscisse  $x$ ; donner une expression approchée de  $x$  en fonction de  $\lambda - \lambda_0$  si l'on ne considère que les longueurs d'onde voisines de  $\lambda_0$ .
- Calculer la demi-largeur  $\Delta x$  dans le plan focal de la lentille d'un pic de diffraction.
- La fente placée au foyer de la lentille a une largeur  $b = 0,1$  mm et ne laisse donc passer que les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre  $\lambda_0 - \Delta\lambda/2$  et  $\lambda_0 + \Delta\lambda/2$ . Calculer l'intervalle  $\Delta\lambda$ .

### 10.7 Capacité de stockage d'un CD (\*\*\*)

Sur la surface du disque compact (CD) est gravée une piste unique en forme de spirale de pas  $a$ . Cette surface peut être modélisée, localement, par un ensemble de  $N$  miroirs parallèles identiques entre eux, régulièrement espacés d'une distance  $a$  (voir figure 10.12). L'indice de l'air est supposé confondu avec celui du vide.

- Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan ( $yOz$ ). Les rayons lumineux réfléchis par le CD sont aussi contenus dans le plan ( $yOz$ ). Le disque est éclairé sous un angle d'incidence  $i$ .
  - Par analogie avec le traitement effectué pour le réseau par transmission, déterminer l'expression de la différence de marche entre deux rayons réfléchis consécutifs.
  - Définir les directions  $\theta_k$ , où  $k$  est un nombre entier, appelé ordre d'interférence, dans lesquelles les ondes réfléchies par les miroirs interfèrent de façon totalement constructive.

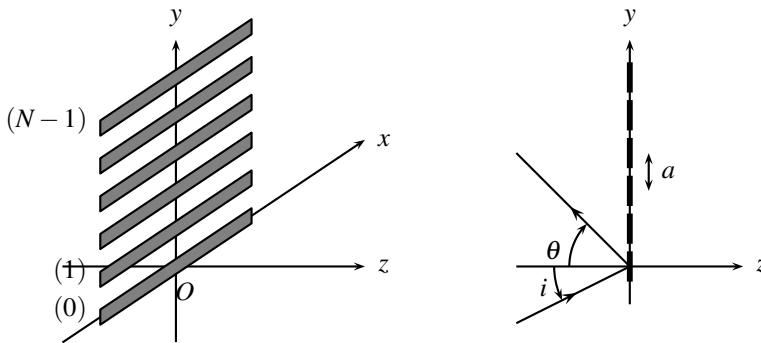
CHAPITRE 10 – INTERFÉRENCES DE  $N$  ONDES COHÉRENTES

Figure 10.12 – Modélisation de la surface réfléchissante du CD.

**2.** On réalise l’expérience suivante. Le disque compact est éclairé en incidence normale. On tourne ensuite le disque d’un angle  $\alpha$  afin que le faisceau diffracté par le disque dans l’ordre  $|k| = 1$  soit dirigé dans la direction du faisceau lumineux incident (voir figure 10.13).

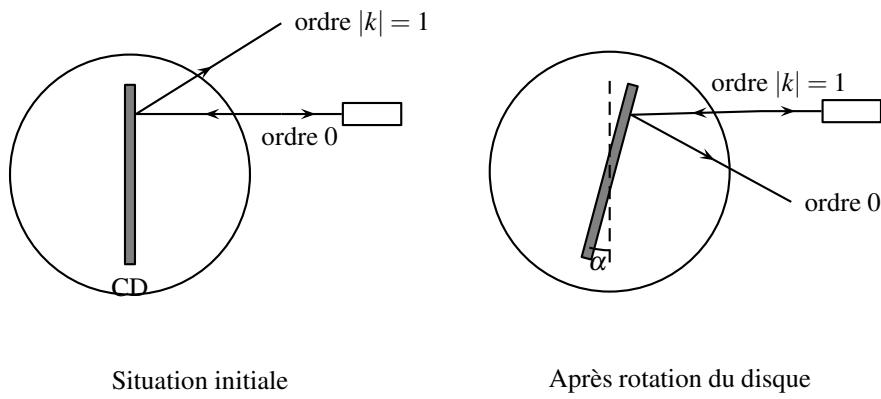


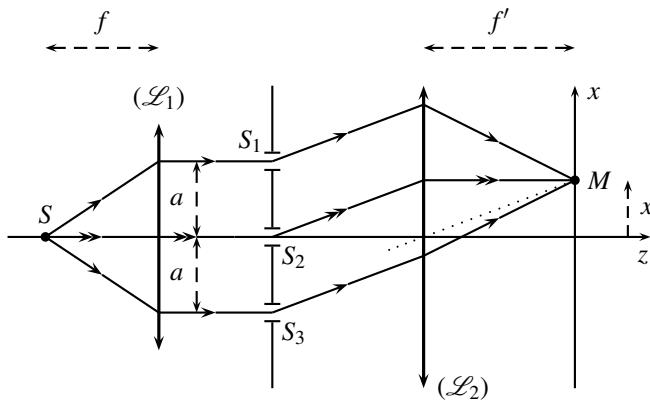
Figure 10.13 – Représentation de l’expérience réalisée.

- Établir la relation liant  $a$ ,  $\lambda_0$  et  $\alpha$ .
- Pour  $\lambda_0 = 650,0 \text{ nm}$ , on mesure  $\alpha = 12^\circ 40'$ . En déduire une valeur numérique de  $a$ . Est-il possible d’observer la spirale gravée sur le disque à l’aide d’un microscope optique ?
- La spirale est gravée depuis l’intérieur du disque (rayon égal à 2,1 cm) vers l’extérieur (rayon égal à 5,9 cm). Estimer la longueur de cette spirale sur un CD.
- Sur la spirale sont gravés des motifs (creux ou plats), d’une longueur voisine du micromètre. Chacun de ces motifs peut être associé à un bit. En déduire une estimation de la capacité de ce CD en Mo, sachant qu’un Mo représente  $10^6$  octets et que chaque octet est un ensemble de 8 bits.

## CORRIGÉS

## 10.1 Trois trous d'Young

1. Le schéma du montage est représenté dans la figure suivante. On y a représenté la marche des rayons lumineux qui interfèrent en  $M$ .



2. a. En utilisant les résultats du cours, on obtient :  $\delta_{1/2}(M) = \frac{nax}{f'}$  et  $\delta_{3/2}(M) = -\frac{nax}{f'}$ .

b. Les trois ondes qui interfèrent en  $M$  sont issues d'une même source ponctuelle qui émet une radiation supposée parfaitement monochromatique. Elles sont donc cohérentes.

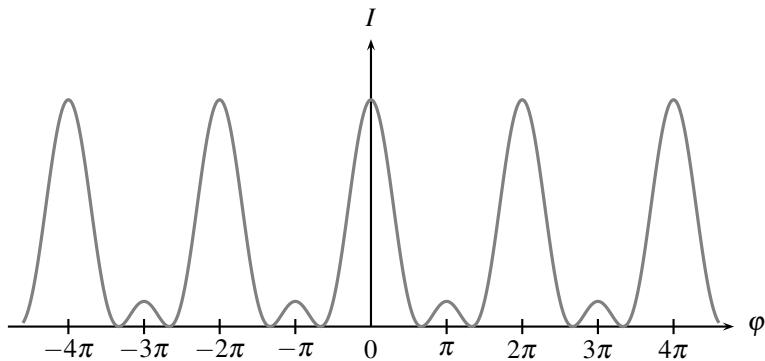
c. On commence par ajouter les amplitudes vibratoires en  $M$  :  $\underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) + \underline{s}_2(M) + \underline{s}_3(M)$ . On pose  $\varphi = \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'}$ , de sorte que :  $\underline{s}_1(M) = \underline{s}_2(M) \exp(i\varphi)$  et  $\underline{s}_3(M) = \underline{s}_2(M) \exp(-i\varphi)$ . On obtient :

$$\underline{s}(M) = \underline{s}_2(M) \left( \exp(i\varphi) + 1 \exp(-i\varphi) \right) = \underline{s}_2(M) \left( 1 + 2 \cos \varphi \right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I(M) &= \frac{1}{2} \underline{s}(M) \cdot \underline{s}^*(M) = I_0 \left( 1 + 4 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi \right), \\ &= I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'} \right) + 4 \cos^2 \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'} \right) \right), \end{aligned}$$

où  $I_0$  est l'intensité vibratoire uniforme produite par le seul trou  $S_2$ . Le graphe suivant représente l'intensité vibratoire  $I$  en fonction de  $\varphi$ .

CHAPITRE 10 – INTERFÉRENCES DE  $N$  ONDES COHÉRENTES**10.2 Nombre d'ordres observables**

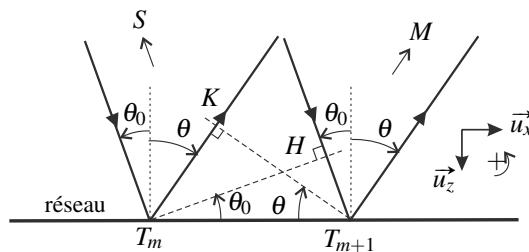
Le pas du réseau est  $a = \frac{1}{500}$  mm = 2,00 μm. La formule fondamentale des réseaux s'écrit, dans le cas de l'incidence normale :  $\sin \theta_p = p \frac{\lambda_0}{n_{\text{air}} a}$ . Comme  $|\sin \theta_p| \leq 1$ ,  $|p| \leq \frac{n_{\text{air}} a}{\lambda_0} = 3,33$ ; les valeurs possibles de  $p$  sont : -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3. On observe donc au maximum 7 pics de diffraction.

**10.3 Choix du pas d'un réseau**

Les conditions posées s'écrivent :

- $\frac{n_{\text{air}} a}{\lambda_0} > 1$  (voir exercice précédent),
- $\theta_{p+1} - \theta_p > \frac{1}{10}$  ce qui implique  $\sin \theta_{p+1} - \sin \theta_p > \frac{1}{10}$  soit  $\frac{n_{\text{air}} \lambda}{a} > \frac{1}{10}$ .

Il faut donc (avec  $n_{\text{air}} = 1$ ) :  $\lambda_0 < a < 10\lambda_0$  pour toute longueur d'onde du domaine visible [0,400 μm ; 0,750 μm] soit finalement :  $a \in [0,750 \mu\text{m} ; 4 \mu\text{m}]$ .

**10.4 Réseau plan par réflexion**

1. On note  $T_m$  et  $T_{m+1}$  deux traits consécutifs du réseau ;  $H$  est le projeté orthogonal de  $T_m$  sur le rayon incident en  $T_{m+1}$  et  $K$  le projeté orthogonal de  $T_{m+1}$  sur le rayon diffracté en  $T_m$ .  $T_m$  et  $H$  sont dans un même plan d'onde de l'onde incidente donc :  $(ST_m) = (SH)$ .  $T_{m+1}$  et  $K$  sont dans un même plan d'onde relatif au point  $M$  situé à l'infini dans la direction  $\theta$  donc :  $(KM) = (T_{m+1}M)$ . La différence de marche en  $M$  entre les ondes diffractées par  $T_m$  et  $T_{m+1}$  est

$$\delta_{m+1/m} = (ST_{m+1}M) - (ST_mM) = (HT_{m+1}) - (T_mK) = na(\sin \theta_0 + \sin \theta),$$

où  $n$  est l'indice optique du milieu dans lequel est le réseau. **Attention**, on travaille avec des angles algébriques,  $\theta_0 > 0$  et  $\theta < 0$ .

Les directions dans lesquelles on trouve de la lumière diffractée sont celles pour lesquelles  $\delta = k\lambda_0$  où  $k$  est un entier relatif. Elles sont données par la formule du réseau par réflexion :

$$\sin \theta_k + \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{na}.$$

**2.** On cherche les longueurs d'onde pour lesquelles il existe un entier  $k$  tel que :  $k = \frac{2a \sin \theta}{\lambda_0}$  (on prend l'indice de l'air égal à 1). Or,  $\lambda_0$  est comprise entre les limites du domaine visible,  $\lambda_{0\min} = 0,4 \mu\text{m}$  et  $\lambda_{0\max} = 0,75 \mu\text{m}$ ;  $\frac{2a \sin \theta}{\lambda_0}$  est donc compris entre 1,33 et 2,5 donc la seule valeur possible est  $k = 2$ . Finalement, une seule longueur d'onde est diffractée dans la direction de la lumière incidente :  $\lambda_0 = a \sin \theta = 0,5 \mu\text{m}$ .

### 10.5 Filtre interférentiel

**1. a.** La différence de marche entre deux rayons transmis successifs est  $\delta = 2ne$  et leur déphasage  $\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0}$ .

**b.** Pour que la radiation choisie ( $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ ) soit transmise, il faut que  $\frac{4\pi ne}{\lambda_0} = 2k\pi$ , où  $k$  est un entier, soit que  $e = k \times \frac{\lambda_0}{2n} = k \times 0,182 \mu\text{m}$ .

Il faut que cette radiation soit la seule transmise. Une autre radiation éventuellement transmise a une longueur d'onde  $\lambda'_0$  telle que  $\lambda'_0 = \frac{2ne}{k'} = \frac{k}{k'} \lambda_0$  où  $k'$  est un entier différent de  $k$ . D'autre part cette radiation est visible si  $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda'_0 \leq 0,75 \mu\text{m}$  donc si :  $\frac{0,4}{0,546} = 0,732 \leq \frac{k}{k'} \leq \frac{0,75}{0,546}$ .

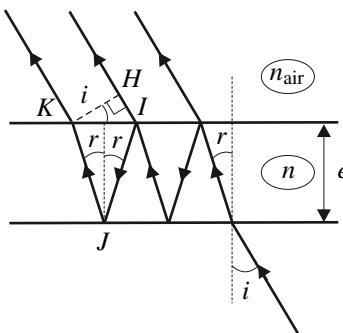
Si  $k = 1$  ou  $k = 2$  on constate facilement qu'aucun entier  $k'$  ne peut convenir. Pour  $k \geq 3$ ,  $\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \geq 1 - \frac{1}{4} = 0,75$  et bien sûr  $\frac{k}{k+1} \leq 1$ ; il y a donc au moins une autre radiation visible transmise.

Conclusion : pour que la seule radiation visible transmise soit la raie verte du mercure il faut que  $e = 0,182$  ou  $0,364 \mu\text{m}$ .

**2. a.**  $\delta = nIJ + nJK - n_{\text{air}}IH$  (voir figure) car  $K$  et  $H$  sont dans un même plan d'onde relatif au point à l'infini dans la direction  $i$ . Or :  $IJ = JK = \frac{e}{\cos r}$  et  $IH = IK \sin i = 2e \tan r \sin i$ . Donc :

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2ne}{\cos r} - 2n_{\text{air}}e \tan r \sin i = \frac{2ne}{\cos r} \left( 1 - \frac{n_{\text{air}}}{n} \sin r \sin i \right) \\ &= 2ne \frac{1 - \sin^2 r}{\cos r} = 2ne \cos r.\end{aligned}$$

D'où  $\varphi = \frac{4\pi ne \cos r}{\lambda_0}$ .

CHAPITRE 10 – INTERFÉRENCES DE  $N$  ONDES COHÉRENTES

**b.** La longueur d'onde traversant le filtre sous l'incidence  $i$  est  $\lambda_0'' = \lambda_0 \cos r$  où :

$$r = \arcsin \left( \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1,5} \right) = 0,615 \text{ rad}, \quad \cos r = 0,816$$

donc  $\lambda_0'' = 0,446 \mu\text{m}$ . C'est du bleu.

**c.** Le rayon transmis numéro  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) a subit deux transmissions,  $m$  réflexions sur chaque face et son retard de phase à l'infini est  $m\varphi + \Phi_0$ , où  $\Phi_0$  est le retard de phase à l'infini du rayon numéro 0. Si l'on prend pour référence des phases le rayon numéro 0, c'est-à-dire en posant  $\Phi_0 = 0$ , la vibration complexe du rayon numéro  $m$  est :  $s_m = s_0 \tau^2 \rho^{2m} \exp(i(\omega t - m\varphi))$ .

Ces rayons sont cohérents entre eux, la vibration complexe de l'onde transmise est donc la somme de ces vibrations complexes soit :

$$\underline{s} = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{s}_m = \tau^2 s_0 \exp(i\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} (\rho^2 \exp(-i\varphi))^m = \frac{\tau^2 s_0}{1 - \rho^2 \exp(-i\varphi)} \exp(i\omega t).$$

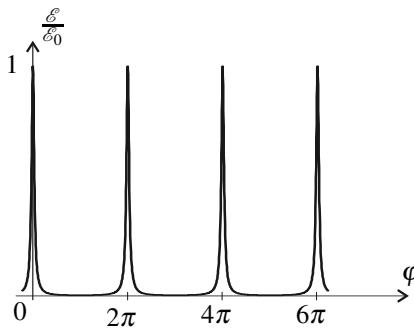
Nous en déduisons l'éclairement transmis :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} K \underline{s} \underline{s}^* = \frac{1}{2} K s_0^2 \frac{\tau^4}{(1 - \rho^2 \exp(i\varphi))(1 - \rho^2 \exp(-i\varphi))} = \mathcal{E}_0 \frac{(1 - \rho^2)^2}{1 - 2\rho^2 \cos \varphi + \rho^4}$$

où  $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} K s_0^2$  est l'éclairement de l'onde incidente.

On a  $\frac{\mathcal{E}(\varphi = 0)}{\mathcal{E}_0} = 1$  et  $\frac{\mathcal{E}(\varphi = \pi)}{\mathcal{E}_0} = \frac{(1 - \rho^2)^2}{(1 + \rho^2)^2} = 0,003$  avec  $\rho = 0,95$ .

La courbe de  $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}$  en fonction de  $\varphi$  pour  $\rho = 0,95$  s'obtient aisément à l'aide d'une calculette graphique (voir graphique ci-après). L'éclairement est maximal et égal à l'éclairement de l'onde incidente pour  $\varphi = 2k\pi$  où  $k$  est un entier; il décroît très rapidement lorsque  $\varphi$  s'éloigne de ces valeurs ce qui justifie l'analyse faite plus haut.



On considère que la bande passante du filtre est l'intervalle de longueur d'onde pour lequel  $\mathcal{E} \geq \frac{\mathcal{E}_0}{2}$ . On montre facilement que  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2}$  si  $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1-\rho^2}{\rho} \right)^2$ , soit ( $\rho$  étant proche de 1) pour  $\varphi \simeq 2k\pi \pm \frac{1-\rho^2}{\rho}$ . On a donc  $\mathcal{E} \geq \frac{\mathcal{E}_0}{2}$  pour  $\varphi \in \left[ 2k\pi - \frac{1-\rho^2}{\rho}; 2k\pi + \frac{1-\rho^2}{\rho} \right]$ , intervalle de largeur  $\Delta\varphi = \frac{2(1-\rho^2)}{\rho}$ . Cette largeur est faible de même que la largeur  $\Delta\lambda$  de la bande passante ; on peut les relier en les assimilant à des variations élémentaires et en différenciant la relation qui lie ces grandeurs :

$$\varphi = \frac{4\pi n e \cos r}{\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 4\pi n e \cos r \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = 2k\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Finalement :  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{(1-\rho^2)}{k\pi\rho} = 0,016$  avec  $k = 2$  et  $\rho = 0,95$ . Le filtre est très sélectif.

### 10.6 Principe du monochromateur à réseau

- La formule fondamentale des réseaux donne la direction  $\theta_2$  de la lumière diffractée dans l'ordre 2 pour une longueur d'onde  $\lambda$  :  $\sin \theta_2 - \sin i = \frac{2n_{\text{air}}\lambda}{a}$  où  $a = \frac{1}{500} \text{ mm} = 2 \mu\text{m}$  est le pas du réseau. La lumière de longueur d'onde  $\lambda_0$  parvient en  $F'$  si  $\theta_2(\lambda_0) = 0$  ce qui fixe l'angle d'incidence à la valeur :  $i = -\arcsin \frac{2n_{\text{air}}\lambda_0}{a} = -0,58 \text{ rad} = -33^\circ$  (avec  $n_{\text{air}} = 1$ ).
- Pour une longueur d'onde  $\lambda$  voisine de  $\lambda_0$ ,  $\theta_2(\lambda)$  est petit donc on peut faire une approximation du premier ordre dans la formule des réseaux :  $\theta_2(\lambda) \simeq \sin i + \frac{2n_{\text{air}}\lambda}{a} = \frac{2n_{\text{air}}}{a}(\lambda - \lambda_0)$ . La position du foyer secondaire  $\phi'$  correspondant à cet angle est donnée par le rayon passant par le centre de la lentille qui n'est pas dévié, ainsi :

$$x = f' \tan(\theta_2(\lambda)) \simeq f' \theta_2(\lambda) = \frac{2n_{\text{air}}f'}{a}(\lambda - \lambda_0).$$

- Avec  $N = 10^4$  traits éclairés, les pics de diffraction ont une demi-largeur angulaire :  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ . Dans le plan focal de la lentille ils donnent des taches de demi-largeur  $\Delta x = f' \Delta\theta = f' \frac{2\pi}{N} = 0,13 \text{ mm}$ .

CHAPITRE 10 – INTERFÉRENCES DE  $N$  ONDES COHÉRENTES

- 4.** Une longueur d'onde  $\lambda$  traverse la fente dès que :  $-\frac{b}{2} - \Delta x < x < \frac{b}{2} + \Delta x$ , donc dès que  $\lambda_0 - \Delta\lambda/2 < \lambda < \lambda_0 + \Delta\lambda/2$  avec :  $\Delta\lambda = \frac{a}{2n_{\text{air}}f'} \left( \frac{b}{2} + \Delta x \right) = 1,2 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ .

**10.7 Capacité de stockage d'un CD**

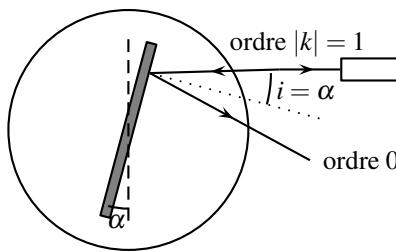
- 1. a.** Le calcul a été fait dans un exercice précédent. En prenant l'indice de l'air égal à 1 :

$$\delta_{m+1/m}(M) = a(\sin \theta + \sin i).$$

- b.** L'ordre d'interférences  $p(M)$  au point d'observation est :  $p(M) = \frac{\delta_{m+1/m}(M)}{\lambda_0}$ , d'où  $p(M) = \frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta + \sin i)$ . Pour que les  $N$  ondes réfléchies soient toutes en phase au point d'observation, il suffit que les deux ondes considérées le soient puisque la différence de marche est la même pour tous les couples de rayons réfléchis par deux miroirs consécutifs. La condition d'interférences totalement constructives s'écrit,  $k$  étant un entier relatif quelconque :

$$k = \frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta_k + \sin i) \Leftrightarrow \sin \theta_k = k \frac{\lambda_0}{a} - \sin i.$$

- 2. a.** Reprenons la figure 10.13 :



Une fois qu'on a fait tourner le disque d'un angle  $\alpha$ , on constate sur la figure ci-dessus que  $i = \alpha = \theta_l$ . La relation établie à la question précédente, avec  $k = 1$ , donne :

$$1 = \frac{a}{\lambda_0} (2 \sin \alpha) \Leftrightarrow a = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}.$$

- b.** Avec les valeurs numériques proposées dans l'énoncé, on obtient  $a = 1,48 \mu\text{m}$ . Cette distance est deux fois supérieure à la plus grande des longueurs d'onde optiques. En principe, le sillon du CD peut être imaginé par microscopie optique, mais on atteint quasiment là la limite de résolution de ces appareils.

- c.** La surface utile du CD est  $S = \pi(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) = 9,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Cela permet d'estimer la longueur  $L$  de la piste :  $S = La$  donne  $L = S/a = 6,5 \text{ km}$ . C'est considérable !

- d.** Sur la longueur  $L$ , on peut écrire  $6,5 \times 10^9$  bits de longueur égale à  $1 \mu\text{m}$ . Cela correspond à  $8,1 \times 10^8$  octets, soit une capacité de l'ordre de 800 Mo. L'ordre de grandeur obtenu est le bon : les CD usuels ont une capacité de stockage de 650 à 700 Mo.

**Quatrième partie**

**Électromagnétisme**



# Champ électrostatique

11

La notion de champ a été rencontrée en première année par la présentation du champ magnétique. Dans ce chapitre, à partir de la loi de Coulomb décrivant l’interaction entre deux charges ponctuelles, on introduit la notion de champ électrostatique et on étudie ses propriétés fondamentales.

## 1 Charge électrique

### 1.1 Rappels

On a vu en première année que certains corps sont susceptibles d’accepter ou de perdre des particules chargées, c’est-à-dire de s’électriser. Cette propriété est connue depuis l’Antiquité, et s’interprète par la notion de charge électrique obtenue grâce aux travaux de Charles-Augustin Coulomb et à la découverte de l’électron par Sir Joseph John Thomson, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

La charge électrique peut exister sous deux formes, que l’on qualifie de positive et de négative. Elle est additive et la charge totale d’un système isolé se conserve au cours du temps.

L’ensemble des expériences réalisées à ce jour indique que toute charge électrique rencontrée dans la nature est un multiple entier d’une charge élémentaire,  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C. La charge électrique est donc quantifiée, toute charge étant un multiple entier de  $e$  :  $q = Ze$ , où  $Z \in \mathbb{Z}$ .

Par convention, la charge de l’électron a été choisie négative, elle est égale à  $-e$ .

### 1.2 Charges ponctuelles

La notion de charge électrique s’applique à des particules dont l’extension spatiale est négligeable devant les distances entre particules. On parlera alors de **charges ponctuelles**.

Ce modèle des charges ponctuelles sera valable tant que les distances entre particules seront grandes par rapport aux dimensions de la charge.

Comme en thermodynamique, on distinguera les trois échelles de longueurs suivantes : microscopique, macroscopique et mésoscopique.

Dans toute la suite, un volume élémentaire sera toujours un volume à l’échelle mésoscopique. Le nombre de particules dans un volume à cette échelle est suffisamment important et ses fluctuations suffisamment faibles pour que la notion de valeur moyenne ait un sens. On obtient

ainsi un lissage des grandeurs permettant une description continue.

De plus, le nombre de charges élémentaires dans un volume mésoscopique est tellement grand (de l'ordre de  $10^{10}$  atomes dans un cube de un micromètre de côté dans un solide ou un liquide) que la quantification de la charge n'est pas détectable à cette échelle : la charge électrique sera une grandeur continue, comme la masse par exemple.

### 1.3 Distributions continues de charges

#### a) Densité volumique de charge

On considère un volume élémentaire  $d\tau_P$  autour d'un point  $P$ , la charge totale  $dQ_P$ .

On définit la **densité volumique de charge** au point  $P$ ,  $\rho(P)$ , par :

$$dQ_P = \rho(P)d\tau_P . \quad (11.1)$$

La densité volumique de charge est, dans le cas général, une fonction du point  $P$ . Si elle est indépendante de  $P$ , on dit qu'elle est uniforme.

La charge totale contenue dans un volume  $\mathcal{V}$  s'obtient en sommant l'ensemble des charges des volumes élémentaires :

$$Q = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \rho(P)d\tau_P .$$



La densité volumique de charge dépend *a priori* du point. On ne peut écrire  $\rho = \frac{Q}{V}$  pour un volume  $V$  portant la charge  $Q$  que si celle-ci est uniformément répartie.

#### Exemple

On assimile un proton à une sphère de rayon  $R = 1$  fermi  $= 1.10^{-15}$  m, portant la charge totale  $e = 1,6.10^{-19}$  C uniformément répartie dans son volume.

La densité volumique de charge du proton est donc :

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 4.10^{25} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

#### b) Densité surfacique de charge

**Premier exemple** On considère la plaque métallique chargée, représentée sur la figure 11.1.

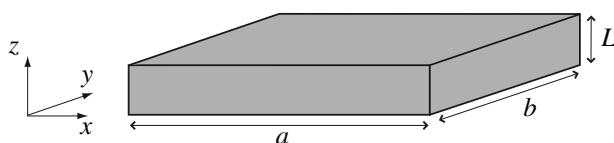


Figure 11.1 – Plaque métallique chargée.

Les dimensions sont telles que  $a$  et  $b$  sont très supérieurs à  $L$ . L'expérience montre que les charges ne se répartissent pas dans la totalité du volume mais se localisent au voisinage de la surface de séparation entre la plaque et l'extérieur. On adopte le modèle suivant : la charge volumique ne dépend que de  $z$  et s'exprime par :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) & \text{si } z \in [0, L[ \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

où  $\delta \ll L$ . À une distance de quelques fois  $\delta$  du bord de la plaque,  $\rho(z) \approx 0$  pour  $0 < z < L$ . Dans ce cas, il est tentant au niveau macroscopique de négliger l'« épaisseur  $\delta$  » de la répartition de charges. On est amené alors à considérer une distribution surfacique et non pas volumique.

La charge  $Q$  portée par le parallélépipède de surface de base  $S$  et de longueur  $L$  est :

$$Q = S \int_0^L \rho(z) dz = S \rho_0 \delta \left( 1 - \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right) \simeq S \rho_0 \delta$$

compte tenu du fait que  $\delta \ll L$ . Tout se passe comme si la surface  $S$  portait la charge par unité de surface  $\sigma = \rho_0 \delta$ . La grandeur  $\sigma$  est appelée **densité surfacique de charge**.

**Deuxième exemple** On considère maintenant la distribution de charges représentées sur la figure 11.2, caractérisée par la densité volumique de charge  $\rho(P)$ . La dimension  $e$  est très

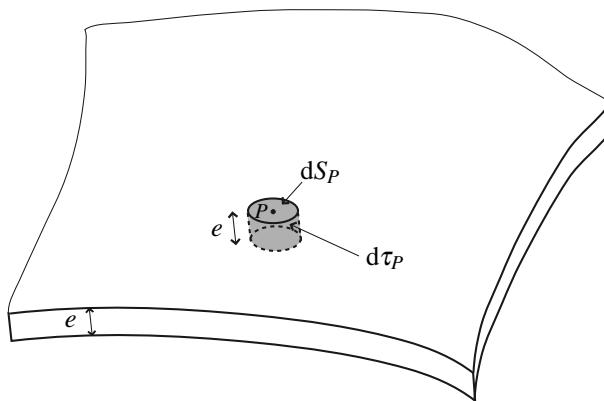


Figure 11.2 – Distribution de charges assimilable à une surface.

inférieure aux autres dimensions du volume.

Le volume mésoscopique  $d\tau_P = edS_P$  porte la charge  $dq_P = \rho(P)d\tau_P = (\rho(P)e)dS_P$ . On peut alors définir la densité surfacique de charge  $\sigma(P) = e\rho(P)$ , telle que :  $dq_P = \sigma(P)dS_P$ .

**Récapitulation** Chaque fois qu'une des dimensions caractéristiques  $e$  de la distribution de charges sera très petite devant les deux autres, on pourra passer d'une modélisation volumique à une modélisation surfacique en posant  $\sigma(P) = e\rho(P)$ .

La charge totale de la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est :

$$Q = \iint_{P \in \mathcal{D}} \sigma(P) dS_P$$

L'inconvénient de cette modélisation est de créer une discontinuité artificielle de charges au niveau de la surface entre la distribution de charges et l'extérieur. Ceci peut se résoudre, si le besoin s'en fait sentir, en introduisant au niveau local une densité volumique de charge  $\rho$  sur une faible épaisseur  $e$  telle que  $\rho = \frac{\sigma}{e}$ . Il faudra alors avoir une estimation correcte de la valeur de  $e$ , ce qui justifiera ou non l'introduction de cette densité volumique de charge.

### c) Densité linéique de charge

De la même façon, les charges peuvent se localiser le long d'un fil dans le cas, par exemple, d'un conducteur très long pour lequel on peut négliger le rayon devant la longueur.

La charge de la portion de fil de longueur  $dl_P$  autour d'un point  $P$  peut se mettre sous la forme :  $dQ_P = \lambda(P)dl_P$  où  $\lambda(P)$  est la **densité linéique de charge**.

La charge totale de la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est :

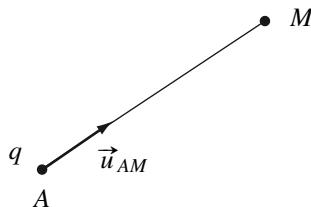
$$Q = \int_{P \in \mathcal{D}} \lambda(P) dl_P$$

Là encore, on introduit des discontinuités de charges qu'on peut résoudre comme précédemment en réintroduisant une densité volumique de charge au niveau local.

## 2 Champ créé par une charge ponctuelle

### 2.1 Loi de Coulomb

Charles-Augustin Coulomb a établi expérimentalement que l'interaction électrostatique est une interaction newtonienne, c'est-à-dire une interaction à force centrale qui décroît en  $1/r^2$  où  $r$  est la distance entre les deux charges électriques en interaction. Il a énoncé cette loi en 1785 à la suite de mesures réalisées grâce à une balance de torsion (voir cours de mécanique de première année pour l'expression du couple de torsion) qu'il a mise au point pour mesurer des forces de très faible intensité.



**Figure 11.3** – Interaction entre deux charges ponctuelles.

On suppose qu'une charge ponctuelle  $q$  est située au point  $A$  (figure 11.3). Une charge  $q_1$

placée en un point  $M$  subit la force donnée par la **loi de Coulomb** :

$$\vec{F}_{A \rightarrow M} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{AM}}{AM^2} \quad (11.2)$$

où  $\epsilon_0$  est la **permittivité du vide** :  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

Cette force est attractive si les deux charges sont de signe contraire, répulsive si elles sont de même signe. On note là une différence fondamentale avec l'interaction newtonienne vue en première année qui, elle, est toujours attractive.

#### Remarque

Dans un milieu matériel, il faut remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  où  $\epsilon_r$  est une grandeur sans dimension caractéristique du milieu. Dans l'air, on prend  $\epsilon_r = 1$  avec une bonne approximation (la différence entre  $\epsilon_r$  et 1 se fait à partir de la quatrième décimale). Dans l'eau,  $\epsilon_r = 80$  : la force d'interaction entre deux particules chargées est 80 fois plus faible dans l'eau que dans l'air, ce qui explique par exemple que du sel de cuisine se dissout dans l'eau.

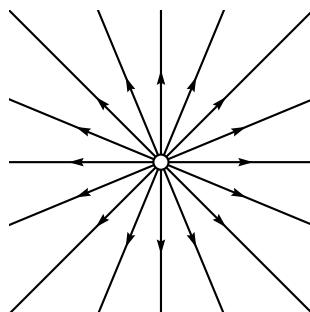
## 2.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Pour étudier l'action d'une charge électrique (la charge source  $q$  située en  $A$ ), l'utilisation de la force qu'elle exerce sur une autre charge (la charge test  $q_1$  située en  $M$ ) n'est pas pertinente puisque cette force dépend à la fois de la charge source et de la charge test. Pour ne faire apparaître que le rôle de la source et pas celui du détecteur, on est amené à définir le **champ électrostatique** créé en  $M$  par la charge  $q$  située en  $A$  par la relation :

$$\vec{E}_A(M) = \frac{\vec{F}_{A \rightarrow M}}{q_1}.$$

Le champ électrostatique créé en  $M$  par la charge  $q$  située en  $A$  est :

$$\vec{E}_A(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{AM}}{AM^2} \quad (11.3)$$



**Figure 11.4** – Lignes de champ électrostatique créé par une charge positive.

On rappelle qu'une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au champ  $\vec{E}$ . Elle est orientée dans le sens de  $\vec{E}$ . Ceci sera plus développé en fin de chapitre. La carte des lignes de champ électrostatique d'une charge ponctuelle est donc constituée de demi-droites passant toutes par la charge, fuyant la charge si  $q > 0$ , convergeant vers elle si  $q < 0$ .

### 3 Champ créé par une distribution de charges

#### 3.1 Principe de superposition

On considère une charge ponctuelle  $q$  placée en  $M$ .

Dans un premier temps, on place en  $M_1$  une charge  $q_1$ . La charge  $q$  subit alors la force :

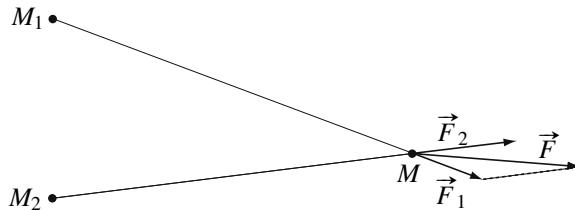
$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{(MM_1)^3} \overrightarrow{M_1 M}$$

Dans une autre expérience, on ôte la charge  $q_1$  et on place en  $M_2$  une charge  $q_2$ . La charge  $q$  subit alors la force :

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{(MM_2)^3} \overrightarrow{M_2 M}$$

Si on place maintenant simultanément une charge  $q_1$  en  $M_1$  et une charge  $q_2$  en  $M_2$ , la présence de  $q_2$  ne modifie pas l'action de  $q_1$  et réciproquement. On peut alors déduire la force  $\vec{F}$  subie par la charge  $q$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



**Figure 11.5 –** Principe de superposition (les charges sont de même signe).

L'étude de l'interaction entre plusieurs charges est alors considérablement simplifiée : il suffit de se ramener au problème de l'interaction entre deux charges ponctuelles et de sommer les effets. C'est l'indépendance de l'interaction de deux particules chargées vis-à-vis de la présence ou non d'autres charges qui permet d'obtenir ce résultat.

#### 3.2 Champ créé par une distribution discrète de charges ponctuelles

Le principe de superposition se généralise au champ électrostatique. Soit une répartition discrète de charges ponctuelles  $q_i$  situées aux points  $A_i$ . Le principe de superposition permet d'écrire le champ électrostatique créé en un point  $M$  par cette distribution :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_{A_i}(M) \quad \text{soit} \quad \vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{A_i M}}{A_i M^2} . \quad (11.4)$$

Cette propriété est illustrée sur la figure 11.6, où on a tracé la carte des lignes de champ créé par deux charges ponctuelles identiques positives. On a représenté en un point du plan médiateur des deux charges le champ  $\vec{E}_1$  créé par la charge  $q_1$ , le champ  $\vec{E}_2$  créé par la charge  $q_2$  et le champ  $\vec{E}$  créé par l'ensemble des deux.

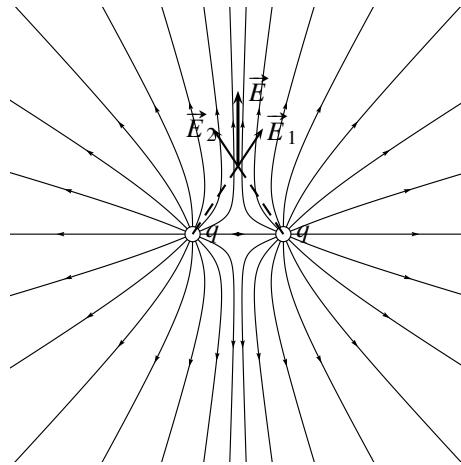


Figure 11.6 – Lignes de champ électrostatique créé par deux charges positives

### 3.3 Champ créé par une distribution continue de charges

On s'intéresse maintenant au champ créé par une distribution de charges  $\mathcal{D}$  contenue dans le volume  $\mathcal{V}$ , dont la densité volumique est  $\rho(P)$ . Chaque petit élément de volume mésoscopique  $d\tau(P)$  est assimilable à une charge ponctuelle et crée en un point  $M$  le champ :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{dq_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau_P$$

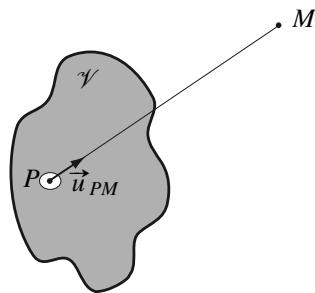


Figure 11.7 – Champ créé par une charge répartie en volume.

Le champ créé en  $M$  par la distribution  $\mathcal{D}$  contenue dans le volume  $\mathcal{V}$  est :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau_P$$

Pour la lisibilité de la figure, on a représenté le point  $M$  en dehors de la distribution  $\mathcal{D}$  mais cette formule est valable en tout point de l'espace, y compris à l'intérieur de la distribution. Cette formule est valable aussi, en l'adaptant, pour une distribution surfacique sur une surface  $\mathcal{S}$  :

$$\vec{E}(M) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS_P,$$

ou une distribution linéique sur une courbe  $\mathcal{C}$  :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \mathcal{C}} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl_P.$$

### Remarque

La mise en œuvre de ces formules demande une certaine technicité mathématique et ne fait pas partie des compétences exigibles du programme.

## 4 Propriétés de symétrie

### 4.1 Symétries usuelles des distributions de charges

#### a) Symétrie plane

Considérons un plan  $\Pi$  et la symétrie  $\mathcal{S}_\Pi$  par rapport à  $\Pi$ .

La distribution de charges  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport au plan  $\Pi$  si et seulement si :

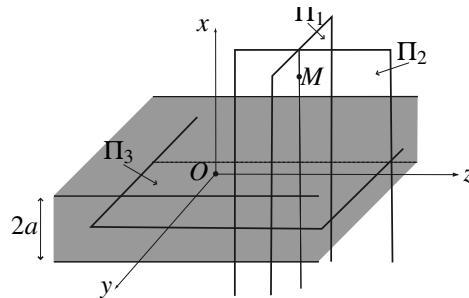
- $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{S}_\Pi(M) \in \mathcal{D}$ ,
- $\rho(M') = \rho(M)$ .

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport au plan ( $xOy$ )  $\Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$  pour tout point  $M(x, y, z)$  élément de  $\mathcal{D}$ , en supposant que  $M'(x, y, -z)$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$ .

#### Exemple

Soit la distribution de charges, infinie dans les directions parallèles à ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ), définie par la densité volumique :

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \text{pour } x \in ]-\infty, -a[ \\ \rho(x) = \rho_0 & \text{pour } x \in [-a, a] \\ \rho(x) = 0 & \text{pour } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$



**Figure 11.8 –** Distribution de charges présentant des plans de symétrie.

En un point  $M$  quelconque de l'espace, les plans  $\Pi_1 = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et  $\Pi_2 = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges.

Le plan  $\Pi_3 = (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est également un plan de symétrie de la distribution de charges.

### b) Antisymétrie plane

Considérons un plan  $\Pi^*$  et la symétrie  $\mathcal{S}_{\Pi^*}$  par rapport à  $\Pi^*$ .

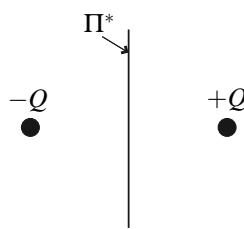
La distribution de charges  $\mathcal{D}$  est antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^*$  si et seulement si :

- $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{S}_{\Pi^*}(M) \in \mathcal{D},$
- $\rho(M') = -\rho(M).$

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est antisymétrique par rapport au plan  $(xOy) \Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$  pour tout point  $M(x, y, z)$  élément de  $\mathcal{D}$ , en supposant que  $M'(x, y, -z)$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$ .

#### Exemple

La distribution de charges constituées de deux petites sphères chargées, l'une avec la charge  $+Q$ , l'autre avec la charge  $-Q$  admet le plan médiateur des deux sphères (plan  $\Pi^*$  sur la figure 11.9) comme plan d'antisymétrie.



**Figure 11.9 –** Distribution de charges présentant un plan d'antisymétrie.

### c) Invariance par translation

On considère un vecteur  $\vec{a}$  et la translation  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$  de vecteur  $\vec{a}$ .

La distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation de vecteur  $\vec{a}$  si et seulement si :

- $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M) \in \mathcal{D},$
- $\rho(M') = \rho(M).$

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation de vecteur  $\vec{a} = a\vec{u}_x$  si et seulement si  $\rho(x, y, z) = \rho(x + a, y, z)$  pour tout point  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{D}$ , en supposant que  $M'(x + a, y, z)$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$ .

Si la distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par toute translation de vecteur parallèle à  $\vec{u}_x$  alors  $\rho(M)$  ne dépend pas de  $x$ .

#### Exemple

La distribution de la figure 11.8 étudiée plus haut est invariante par toute translation de vecteurs parallèles à  $\vec{u}_y$  et à  $\vec{u}_z$ .

#### d) Invariance par rotation

On considère un axe  $\Delta$ , un angle  $\theta_0$  et la rotation  $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$  d'angle  $\theta_0$  autour de l'axe  $\Delta$ .

La distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par la rotation d'angle  $\theta_0$  autour de  $\Delta$  si et seulement si :

- $\forall M \in \mathcal{D}, M' = \mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M) \in \mathcal{D},$
- $\rho(M') = \rho(M).$

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est invariante par la rotation d'angle  $\theta_0$  autour de l'axe ( $Oz$ ) si et seulement si  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta + \theta_0, z)$  pour tout point  $M(r, \theta, z)$  de  $\mathcal{D}$  (décrite en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ )), en supposant que  $M'(r, \theta + \theta_0, z)$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$ .

Si la distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par toute rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), alors  $\rho(M)$  ne dépend pas de  $\theta$ . On parle alors de symétrie de révolution et d'axe de révolution.

#### Exemple

La distribution de la figure 11.8 étudiée plus haut est invariante par toute rotation autour d'un axe ( $M, \vec{u}_x$ ).

#### e) Symétrie cylindrique

Une répartition de charges à symétrie cylindrique d'axe ( $Oz$ ) est une répartition invariante par toute translation de vecteur parallèle à ( $Oz$ ) et par toute rotation autour de ( $Oz$ ). En coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) d'axe ( $Oz$ ), la densité volumique de charge est indépendante de  $\theta$  et de  $z$  :  $\rho(M) = \rho(r)$ .

### Exemple

On considère un cylindre très long (on fera l'approximation d'un cylindre de longueur infinie), d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $a$ , chargé uniformément en volume. La densité volumique de charge associée est, en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) :

$$\begin{cases} \rho(r) = 0 & \text{pour } r > a \\ \rho(r) = \rho_0 & \text{pour } r \leq a \end{cases}$$

Cette distribution de charges possède la symétrie cylindrique : elle est invariante par toute translation parallèle à ( $Oz$ ) et par toute rotation autour de ( $Oz$ ).

### f) Symétrie sphérique

Une répartition de charges à symétrie sphérique de centre  $O$  est une répartition invariante par toute rotation autour de n'importe quel axe qui passe par  $O$ . En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$ , la densité volumique de charge est indépendante de  $\theta$  et  $\varphi$  :  $\rho(M) = \rho(r)$ .

### Exemple

Une sphère de rayon  $R$  chargée uniformément en volume correspond à une distribution de charges à symétrie sphérique, elle est bien invariante par toute rotation autour de n'importe quel axe qui passe par  $O$ .

## 4.2 Symétries du champ

L'étude des symétries et invariances de la distribution de charges et de leurs conséquences donnent de nombreux renseignements sur le champ créé.

### a) Principe de Curie

**Principe de Curie** : Les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets.

C'est un principe général que l'on rencontre dans tous les domaines de la physique. Ici, il se traduit par : les éléments de symétrie des distribution de charges se retrouvent dans le champ électrostatique créé. On va le vérifier sur un exemple et on admettra la généralité de la propriété.

### b) Invariance par translation

Si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$  alors :

$$\vec{E}(\mathcal{T}_{\vec{a}}(M)) = \vec{E}(M).$$

En effet, en  $M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M)$ , on « voit » exactement la même distribution qu'en  $M$ , le champ est donc identique en  $M$  et en  $M'$ .

Si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par toute translation  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$  de vecteur  $\vec{a}$  parallèle à  $\vec{u}_z$  (par exemple) alors  $\vec{E}(M)$  ne dépend pas de  $z$ .

### Exemple

On reprend l'exemple de la distribution de la figure 11.8. Elle est invariante par toute translation de vecteur parallèle à  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ , donc  $\vec{E}(M)$  ne dépend ni de  $y$  ni de  $z$ , il ne dépend que de  $x$ .

### c) Invariance par rotation

Si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par la rotation  $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$  alors :

$$\vec{E}(\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M)) = \mathbf{R}_{\Delta, \theta_0}(\vec{E}(M)),$$

où  $\mathbf{R}_{\Delta, \theta_0}$  est la rotation vectorielle associée à la rotation affine  $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$ .

Si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par toute rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) (par exemple) alors, en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) les composantes  $E_r$ ,  $E_\theta$  et  $E_z$  du vecteur  $\vec{E}(M)$  ne dépendent pas de l'angle de  $\theta$ .

### Exemple

On peut voir la distribution de l'exemple de la figure 11.8 comme une distribution invariante par toute rotation autour de l'axe ( $Ox$ ). Alors les composantes dans la base cylindrique de  $\vec{E}(M)$  ne dépendent que de la distance à l'axe,  $r$ , et de  $x$ . La conclusion est moins forte qu'au paragraphe précédent.

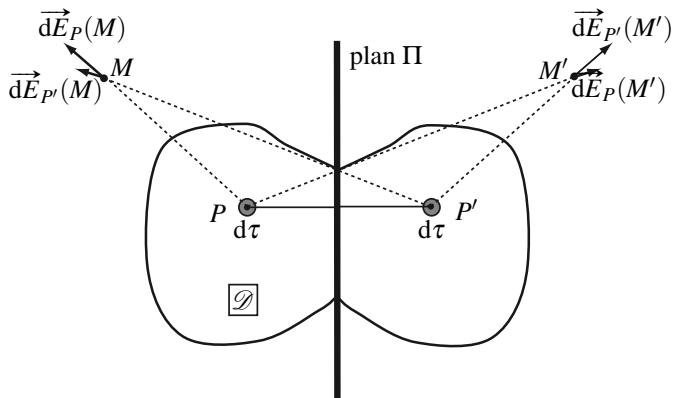
### d) Symétrie plane

On considère dans ce paragraphe une distribution de charges  $\mathcal{D}$  symétrique par rapport à un plan  $\Pi$  (voir figure 11.10).

$P'$  est le symétrique de  $P$  par rapport à  $\Pi$ , et  $M'$  celui de  $M$ . Le champ élémentaire  $d\vec{E}_P(M)$  créé en  $M$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P$  est le symétrique par rapport à  $\Pi$  du champ élémentaire  $d\vec{E}_{P'}(M')$  créé en  $M'$  par le volume  $d\tau$  autour de  $M'$ , de même le champ  $d\vec{E}_P(M')$  créé en  $M'$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P$  est le symétrique par rapport à  $\Pi$  du champ  $d\vec{E}_{P'}(M)$  créé en  $M$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P'$  (il suffit d'écrire les expressions de ces champs).

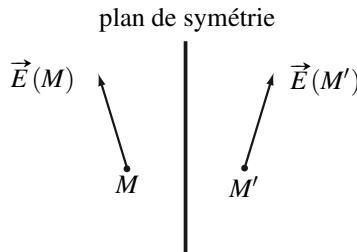
Donc  $d\vec{E}_P(M) + d\vec{E}_{P'}(M)$  est le symétrique par rapport à  $\Pi$  de  $d\vec{E}_P(M') + d\vec{E}_{P'}(M')$ .

Ce qu'on a fait ici pour deux points particuliers  $P$  et  $P'$  de  $\mathcal{D}$  peut être fait pour tous les points de la distribution : cette étude confirme le principe de Curie.



**Figure 11.10** – Distribution présentant un plan de symétrie.

On a résumé ces résultats sur la figure 11.11.



**Figure 11.11** – Le champ électrique en  $M'$ , point symétrique de  $M$  par rapport au plan de symétrie, est le symétrique du champ électrique en  $M$ .

Dans le cas d'un point  $M$  appartenant à  $\Pi$ ,  $M' = M$  donc  $\vec{E}(M)$  est son propre symétrique : il appartient donc au plan  $\Pi$ . Finalement :

Si une distribution de charges admet le plan  $\Pi$  comme plan de symétrie :

- pour tout point  $M$ ,  $\vec{E}(\mathcal{S}_\Pi(M)) = \mathbf{S}_\Pi(\vec{E}(M))$  où  $\mathbf{S}_\Pi$  est la symétrie vectorielle associée à la symétrie affine  $\mathcal{S}_\Pi$ ,
- en tout point  $M$  appartenant au plan  $\Pi$ ,  $\vec{E}(M)$  est parallèle à  $\Pi$ .

### Exemple

La carte des lignes de champ tracée sur la figure 11.6 correspond à une distribution présentant le plan médiateur de deux charges comme plan de symétrie. On observe bien sur la figure que les lignes de champ sont symétriques par rapport à ce plan et que, en un point de ce plan, elles sont contenues dedans.

## e) Antisymétrie plane

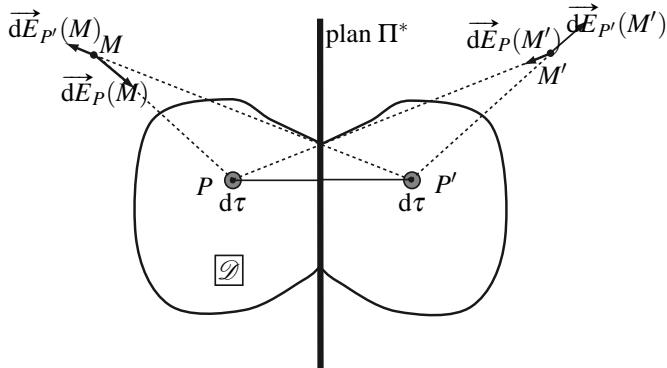
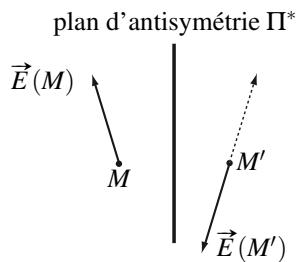


Figure 11.12 – Distribution présentant un plan d’antisymétrie.

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de charges antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^*$  (voir figure 11.12).  $P'$  est le symétrique de  $P$  par rapport à  $\Pi^*$ , et  $M'$  le symétrique de  $M$ . Le champ élémentaire  $d\vec{E}_P(M)$  créé en  $M$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P$  est l’opposé du symétrique par rapport à  $\Pi^*$  du champ élémentaire  $d\vec{E}_{P'}(M')$  créé en  $M'$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P'$ , de même le champ  $d\vec{E}_P(M')$  créé en  $M'$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P$  est l’opposé du symétrique par rapport à  $\Pi^*$  du champ  $d\vec{E}_{P'}(M)$  créé en  $M$  par le volume  $d\tau$  autour de  $P'$  (là aussi, il suffit d’écrire les expressions de ces champs).

Donc  $d\vec{E}_P(M) + d\vec{E}_{P'}(M)$  est l’opposé du symétrique par rapport à  $\Pi$  de  $d\vec{E}_P(M') + d\vec{E}_{P'}(M')$ . Ce qu’on a fait ici pour deux points particuliers  $P$  et  $P'$  de  $\mathcal{D}$  peut être fait pour tous les points de la distribution : cette étude confirme le principe de Curie.

On a résumé ces résultats sur la figure 11.13.

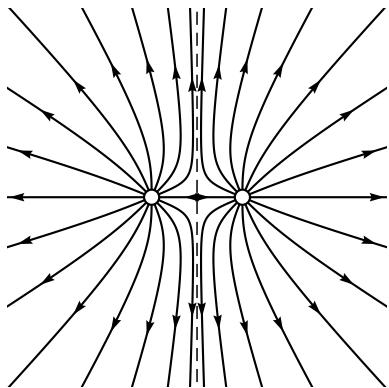

 Figure 11.13 – Le champ électrique en  $M'$ , symétrique de  $M$ , est l’opposé du symétrique du champ électrique en  $M$ .

Dans le cas où  $M$  appartient à  $\Pi^*$ ,  $M' = M$  donc  $\vec{E}(M)$  est égal à l’opposé de son symétrique : il est donc orthogonal au plan  $\Pi^*$ . Finalement :

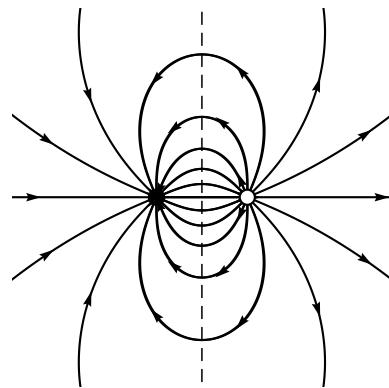
Si une distribution de charges admet le plan  $\Pi^*$  comme plan d'antisymétrie :

- pour tout point  $M$ ,  $\vec{E}(\mathcal{S}_{\Pi^*}(M)) = -\mathbf{S}_{\Pi^*}(\vec{E}(M))$ ,
- en tout point  $M$  appartenant au plan  $\Pi^*$ ,  $\vec{E}(M)$  est orthogonal à  $\Pi^*$ .

#### f) Application : comparaison de deux distributions



**Figure 11.14** – Lignes de champ électrostatique créé par deux charges positives identiques.



**Figure 11.15** – Lignes de champ électrostatique créé par deux charges égales et opposées.

La ligne en tiretés représente la trace du plan médiateur des deux charges.

La figure 11.14 représente la carte des lignes de champ d'un ensemble de deux charges positives identiques. Le plan médiateur est un plan de symétrie de la distribution de charges, on observe bien que les lignes de champ, au niveau de ce plan, sont contenues dedans. On observe également qu'elles sont symétriques de part et d'autre de ce plan.

La figure 11.15 représente la carte des lignes de champ d'un ensemble de deux charges égales et opposées. Le plan médiateur est un plan d'antisymétrie de la distribution, on observe que les lignes de champ, au niveau de ce plan, lui sont orthogonales. On observe également qu'elles sont antisymétriques de part et d'autre de ce plan (bien remarquer l'orientation des flèches).

Enfin, dans les deux cas, on a représenté les lignes de champ dans un plan de symétrie de la distribution, ce qui explique qu'elles sont situées dans ce plan.

## 5 Circulation du champ électrostatique, potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique est une grandeur physique se définissant à partir de l'intégrale du champ électrostatique le long d'une chemin, appelée circulation.

## 5.1 Circulation d'un champ de vecteurs

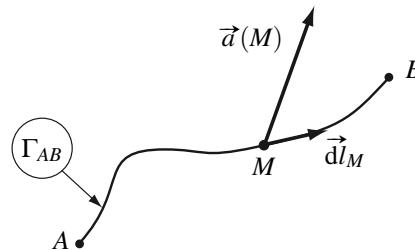
Soit  $\vec{a}(M)$  un champ de vecteurs (le champ électrostatique par exemple).

### a) Circulation élémentaire

On appelle **circulation élémentaire** du champ  $\vec{a}(M)$  dans un déplacement  $\vec{dl}_M$  à partir du point  $M$  la grandeur élémentaire :

$$d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot \vec{dl}_M .$$

### b) Circulation le long d'un chemin



**Figure 11.16** – Circulation d'un champ de vecteur le long d'un chemin.

Soit une courbe, appelée **chemin**,  $\Gamma_{AB}$  allant d'un point  $A$  à un point  $B$ . On appelle **circulation** du champ de vecteurs  $\vec{a}(M)$  de  $A$  à  $B$ , le long du chemin  $\Gamma_{AB}$  la grandeur :

$$\mathcal{C}_{A \rightarrow B} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a}(M) \cdot \vec{dl}_M .$$

### Remarques

1. En général,  $\mathcal{C}$  dépend du chemin  $\Gamma_{AB}$ , pas uniquement des points de départ et arrivée  $A$  et  $B$ .
2. Quand  $A = B$ , le chemin  $\Gamma$  est fermé, on dit que c'est un **contour** et on note :

$$\mathcal{C} = \oint_{M \in \Gamma} \vec{a}(M) \cdot \vec{dl}_M$$

le cercle sur le symbole de l'intégrale rappelant qu'il s'agit d'un chemin fermé.

## 5.2 Potentiel électrostatique

### a) Cas d'une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle  $q$  située au point  $A$ . On a vu au début de ce chapitre qu'elle crée en un point  $M$  de l'espace le champ électrostatique :

$$\vec{E}_A(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3}$$

La circulation élémentaire de ce champ est :

$$d\mathcal{C} = \vec{E}_A(M) \cdot d\overrightarrow{AM}$$

Or :  $\overrightarrow{AM} \cdot d\overrightarrow{AM} = d(\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}^2) = d(\frac{1}{2}AM^2) = AM dAM$ . On en déduit que :

$$d\mathcal{C} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d(AM)}{AM^2} = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AM}\right)$$

La circulation du champ électrostatique créé par la charge ponctuelle  $q$  située au point  $A$  entre deux points  $C$  et  $D$  le long du chemin  $\Gamma_{CD}$  s'écrit :

$$\mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \int_{P \in \Gamma_{CD}} -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AM}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AC} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AD},$$

soit :

$$\mathcal{C}_{C \rightarrow D} = V_A(C) - V_A(D),$$

où :

$$V_A(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AM}. \quad (11.5)$$

$V_A(M)$  est le **potentiel électrostatique** créé en  $M$  par la charge ponctuelle  $q$  située au point  $A$ .

Ainsi, la circulation du champ électrique ne dépend pas du chemin  $\Gamma_{CD}$  choisi pour le calcul mais uniquement des points  $C$  et  $D$  puisqu'on peut l'exprimer en fonction du potentiel électrostatique en ces deux points. On dit que le champ électrostatique  $\vec{E}_A$  est un **champ à circulation conservative**.

Cette propriété permet de noter la circulation entre les deux points de la manière suivante :  $\mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \int_C^D \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}_M$ , sans préciser le chemin suivi entre les deux points.

#### Remarque

La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est nulle puisque dans ce cas  $D = C$ .

### b) Cas d'une distribution de charges

Cette propriété s'étend au champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles grâce au théorème de superposition. En effet,  $\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_{A_i}(M)$  donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{C \rightarrow D} &= \int_{M \in \Gamma_{CD}} \sum_i \vec{E}_{A_i}(M) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \sum_i \int_{M \in \Gamma_{CD}} \vec{E}_{A_i}(M) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \sum_i (V_{A_i}(C) - V_{A_i}(D)) = V(C) - V(D),\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$V(M) = \sum_i V_{A_i}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 A_i M} .$$

$V(M)$  est le potentiel créé par la distribution de charges. C'est la somme des potentiels créés individuellement par chaque charge. On a donc pour le potentiel aussi un théorème de superposition.

Le résultat se généralise au cas d'une distribution continue de charge : le potentiel créé en un point  $M$  par la distribution  $\mathcal{D}$  contenue dans le volume  $\mathcal{V}$  (voir figure 11.7) est :

$$V(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} d\tau_P \quad (11.6)$$

### 5.3 Lien entre le champ et le potentiel électrostatiques

On a défini le potentiel électrostatique de manière à ce que la circulation du champ électrostatique entre deux points  $M$  et  $N$  soit :

$$\mathcal{C}_{M \rightarrow N} = \int_M^N \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}_M = V(M) - V(N) . \quad (11.7)$$

Dans le cas où  $N$  est un point infiniment proche de  $M$ , cette relation devient :

$$d\mathcal{C} = -dV,$$

où  $d\mathcal{C}$  est la circulation élémentaire sur le déplacement  $\overrightarrow{MN} = \vec{dl}_M$  et  $dV = V(N) - V(M)$  la variation du potentiel due à ce déplacement, ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{dl}_M = -dV . \quad (11.8)$$

En rapprochant cette relation de la relation définissant le gradient du potentiel électrostatique (voir appendice mathématique) :

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot \vec{dl}_M,$$

il apparaît que :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) . \quad (11.9)$$

On dit que le champ électrostatique  $\overrightarrow{E(M)}$  dérive du potentiel électrostatique  $V(M)$ .

Les trois relations (11.7), (11.8) et (11.9) sont équivalentes. Elles expriment le lien entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique créés par une distribution quelconque de charges.

Le potentiel électrostatique s'exprime en volts (V). L'unité couramment utilisée pour le champ électrique est le  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### Remarques

1. (11.7), (11.8) et (11.9) restent vérifiées si l'on ajoute une constante quelconque à  $V(M)$ . C'est pourquoi le potentiel électrostatique est défini à une constante additive près. Quand la distribution  $\mathcal{D}$  est d'extension finie, on choisira le potentiel nul à l'infini ce qui fixe cette constante : c'est ce qu'on a fait plus haut pour la charge ponctuelle  $q$  placée en un point  $A$ . Attention, si  $\mathcal{D}$  est d'extension infinie (ce peut être le cas d'un modèle idéalisé), il ne sera en général pas possible de choisir  $V$  nul à l'infini.
2. Le potentiel est une fonction continue des coordonnées spatiales.

## 5.4 Propriétés de symétrie du potentiel

En reprenant la démarche utilisée pour étudier le lien entre les invariances et les symétries de charges et celle du champ électrostatiques qu'elles créent, on établit sans difficulté les résultats suivants :

- Invariance par translation : si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation  $\mathcal{T}_{\vec{d}}$  alors :

$$V(\mathcal{T}_{\vec{d}}(M)) = V(M).$$

- Invariance par rotation : si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est invariante par la rotation  $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$  alors :

$$V(\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M)) = V(M).$$

- Symétrie plane : si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport au plan  $\Pi$ , alors :

$$V(\mathcal{S}_{\Pi}(M)) = V(M).$$

- Antisymétrie plane : si la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^*$ , alors :

$$V(\mathcal{S}_{\Pi^*}(M)) = -V(M).$$

Cette dernière relation n'est valable que si le potentiel est pris nul à l'infini, donc dans le cas où la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est d'extension finie.

## 5.5 Énergie potentielle d'une charge placée dans un champ extérieur

Le potentiel électrostatique a une signification physique profonde : c'est l'énergie potentielle par unité de charge.

On considère une charge ponctuelle  $q$  placée dans un champ électrostatique  $\vec{E}(M)$ . Elle est soumise à la force électrostatique :

$$\vec{F} = q\vec{E}(M).$$

Le travail de cette force lors d'un déplacement du point  $A$  au point  $B$ , en suivant le chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} q\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}_M = -q \int_{M \in \Gamma_{AB}} \text{grad} V(M) \cdot d\vec{l}_M \\ &= -q \int_{M \in \Gamma_{AB}} dV(M) = qV(A) - qV(B). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Il est indépendant du chemin ce qui montre que la force électrique est conservative. Par définition, l'énergie potentielle  $E_p$  dont elle dérive, est telle que :

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B).$$

Ainsi :

L'**énergie potentielle** d'une charge ponctuelle  $q$  soumise à la force exercée par le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est :

$$E_p(M) = qV(M).$$

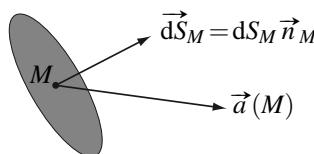
## 6 Flux du champ électrostatique - Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est une propriété fondamentale du champ électrostatique dont l'expression mathématique fait intervenir la notion de flux.

### 6.1 Flux d'un champ de vecteurs

Soit  $\vec{a}(M)$  un champ de vecteurs, le champ électrostatique par exemple.

#### a) Flux élémentaire



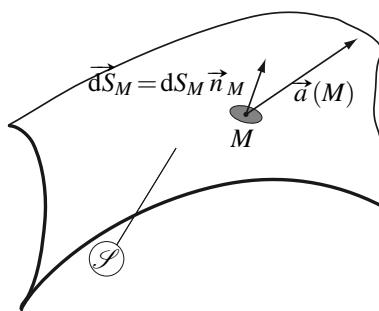
**Figure 11.17** – Flux élémentaire.

Soit  $dS_M$  une surface élémentaire autour d'un point  $M$ . Le vecteur surface élémentaire est par définition :  $\vec{dS}_M = dS_M \vec{n}_M$  où  $\vec{n}_M$  est un vecteur unitaire orthogonal à la surface. Il y a deux choix possibles d'orientation de ce vecteur normal. Ce choix est complètement arbitraire et laissé à celui qui calcule le flux.

Le **flux élémentaire** de  $\vec{a}$  à travers  $\vec{dS}_M$  autour du point  $M$  est :

$$d\Phi_a = \vec{a}(M) \cdot \vec{dS}_M .$$

### b) Flux à travers une surface



**Figure 11.18 – Flux à travers une surface.**

On oriente la surface  $\mathcal{S}$  arbitrairement en choisissant un sens pour  $\vec{n}_{M_0}$  en un point  $M_0$  de  $\mathcal{S}$ . Le vecteur  $\vec{n}_M$  en tout autre point de  $\mathcal{S}$  se déduit de proche en proche à partir de  $\vec{n}_{M_0}$  par continuité.

Le **flux** de  $\vec{a}$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  est :

$$\Phi_a = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{a}(M) \cdot \vec{dS}_M .$$

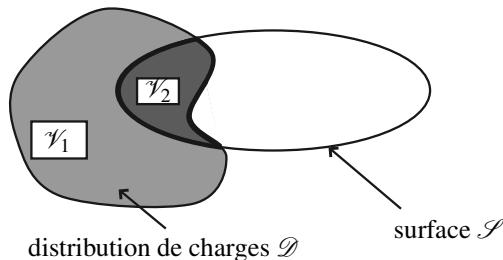
Le flux  $\Phi_a$  est une grandeur algébrique dont le signe dépend du sens dans lequel on a pris les vecteurs surface élémentaire  $d\vec{S}_M$ .

*Dans le cas d'une surface fermée  $\mathcal{S}$ , la convention est d'orienter  $\vec{dS}_M$  vers l'extérieur.* On calcule alors le flux sortant de la surface. L'intégrale est notée de la manière suivante :

$$\Phi_a = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{a}(M) \cdot \vec{dS}_M ,$$

où le cercle rappelle qu'il s'agit d'une surface fermée.

## 6.2 Théorème de Gauss



**Figure 11.19** – Théorème de Gauss : les charges de la distribution  $\mathcal{D}$  sont dans le volume  $\mathcal{V}_{\text{source}} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ .

Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée et  $\mathcal{D}$  une distribution de charges. Le **théorème de Gauss**, qui sera admis ici, relie le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par  $\mathcal{D}$  à travers la surface  $\mathcal{S}$ , noté  $\Phi_E$ , à la somme des charges de  $\mathcal{D}$  qui sont à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ , notée  $Q_{\text{int}}$ . Sur la figure 11.19,  $Q_{\text{int}}$  est la charge contenue dans le volume  $\mathcal{V}_2$ ; il est d'usage de l'appeler « charge intérieure à la surface  $\mathcal{S}$  ».

**Théorème de Gauss :** Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée quelconque  $\mathcal{S}$ ,  $\Phi_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M$ , est relié à la somme des charges de la distribution créant le champ qui se trouvent à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ ,  $Q_{\text{int}}$  par la relation :

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}. \quad (11.11)$$



La présence de  $Q_{\text{int}}$  dans l'expression du théorème de Gauss ne doit pas faire croire que le champ n'est créé que par les charges situées à l'intérieur de la surface  $\mathcal{S}$ , donc par les charges situées dans le volume  $\mathcal{V}_2$  sur la figure. Le champ dont on exprime le flux est créé par la **totalité** des charges, donc par toutes les charges contenues dans  $\mathcal{V}_{\text{source}} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ .

## 7 Topographie du champ électrostatique

### 7.1 Lignes de champ et équipotentielles

Les **lignes de champ** du champ électrostatique sont par définition des lignes tangentes en chaque point au champ électrostatique.

Les **équipotentielles** sont des surfaces sur lesquelles le potentiel électrostatique a une même valeur.

Les lignes de champ sont définies mathématiquement par la condition  $d\vec{l}_M$  colinéaire à  $\vec{E}(M)$

qui s'exprime en coordonnée cartésiennes par :

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)}.$$

Ces équations différentielles peuvent être intégrées numériquement avec un logiciel dédié. On obtient ainsi une figure visualisant la géométrie du champ électrostatique.

Les équipotielles sont des surfaces dans l'espace : à chaque valeur du potentiel est associée une surface différente. Dans la pratique on représente les courbes intersections de ces surfaces avec le plan de la figure.

## 7.2 Propriétés des lignes de champ électrostatique et des équipotielles

### a) Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ

On sait que la circulation élémentaire du champ électrostatique est reliée à la variation du potentiel électrostatique par :  $d\mathcal{C} = -dV$ . Si l'on se déplace le long d'une ligne de champ, dans le sens du champ électrique,  $d\mathcal{C} = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}_M > 0$ , donc  $dV < 0$ . Ainsi, le potentiel électrostatique diminue le long d'une ligne de champ électrostatique.

Les lignes de champ électrostatique sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Il en résulte qu'une ligne de champ électrostatique ne peut être une courbe fermée : si c'était le cas, en faisant le tour de cette courbe on verrait le potentiel diminuer constamment et valoir finalement la même valeur qu'au point de départ !

Les lignes de champ électrostatique ne se referment jamais sur elles-mêmes.

### b) Convergence et divergence des lignes de champ

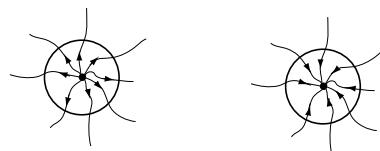
Si le potentiel est extrémal en un point, alors le champ électrostatique en ce point est nul et les lignes de champ en ce point peuvent prendre des directions quelconques.

On déduit du paragraphe précédent la propriété suivante :

- si le potentiel est maximal en un point, les lignes de champ divergent de ce point,
- si le potentiel est minimal en un point, les lignes de champ convergent vers ce point.

### c) Le potentiel n'admet pas d'extremum en dehors des charges

On considère un point de l'espace où le potentiel admet un maximum ou un minimum. Comme les lignes de champ divergent ou convergent à partir de ce point, le flux du champ électrostatique à travers une petite sphère entourant ce point est non nul. On déduit du théorème de Gauss que la charge à l'intérieur de la petite sphère est non nulle : dans le cas d'un maximum le flux sortant de la sphère est strictement positif donc la charge contenue est strictement positive (voir figure 11.20), elle est strictement négative dans le cas d'un minimum.



**Figure 11.20** – Extrema du potentiel électrostatique.

Le potentiel électrostatique n'a pas d'extremum dans une région vide de charge.

#### d) Position relative des équipotentielles et des lignes de champ

Soit un déplacement élémentaire  $\vec{dl}_M$  tangent à la surface équipotentielle passant par  $M$ ; la variation du potentiel  $dV$  associée à ce déplacement élémentaire est nulle puisqu'on se déplace sur l'équipotentielle. Mais on sait que :  $dV = -d\mathcal{C} = -\vec{E}(M) \cdot \vec{dl}_M$ , on a donc :  $\vec{E}(M) \cdot \vec{dl}_M = 0$ . Ainsi : le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est perpendiculaire, en  $M$ , à la surface équipotentielle passant par  $M$ .

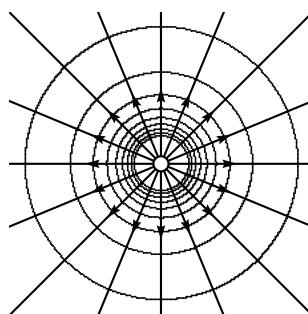
C'est une propriété générale du champ de gradient : le champ vectoriel  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$  est orthogonal aux surfaces iso- $f$  d'équation :  $f(M) = \text{constante}$  (voir cours de première année).

Il en résulte que :

Les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

En utilisant cette propriété, on peut tracer les lignes de champ quand on connaît les équipotentielles et réciproquement.

Par exemple, pour une charge ponctuelle, la carte des lignes de champ est donnée par la figure 11.4. Les lignes de champ sont les demi droites issues du point où se trouve la charge : les équipotentielles sont les sphères centrées en ce point.



**Figure 11.21** – Lignes de champ électrostatique et équipotentielles d'une charge positive

### e) Évolution de la norme du champ électrostatique le long d'une ligne de champ

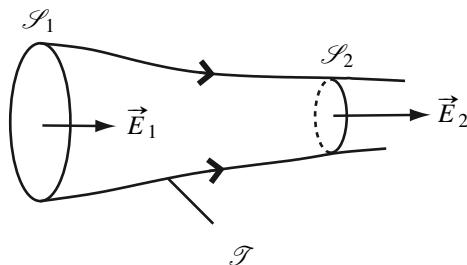
Dans ce paragraphe on se place dans une zone vide de charge. On va démontrer le résultat suivant :

Dans une zone vide de charge, la norme du champ électrique du champ électrique :

- augmente le long d'une ligne de champ dans la direction où les lignes de champ se resserrent,
- diminue le long d'une ligne de champ dans la direction où les lignes de champ s'écartent.

Pour cela on va utiliser la notion de **tube de champ**. Par définition, un tube de champ est une surface constituée par des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

On considère une portion de tube de champ  $\mathcal{T}$  comprise entre deux surfaces planes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  (voir figure 11.22).



**Figure 11.22 –** Tube de champ : la surface  $\mathcal{T}$  est constituée par des lignes de champ.

La surface  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{S}_2$  est une surface fermée. Si l'on applique le théorème de Gauss à cette surface il vient :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

puisque il n'y a pas de charges à l'intérieur (la région étant vide de charge). Or :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{T}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Mais, le champ électrique ne traverse pas la surface du tube de champ  $\mathcal{T}$  puisqu'il lui est tangent :  $\iint_{\mathcal{T}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . Il vient donc :

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

On suppose maintenant que les surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont suffisamment petites pour que le champ électrostatique puisse être considéré comme uniforme sur chacune de ces deux surfaces, égal respectivement à  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ . On suppose aussi, quitte à changer l'inclinaison des

surfaces, que le champ électrique est orthogonal à chacune d'elle comme représenté sur la figure 11.22. L'égalité précédente donne alors :

$$\|\vec{E}_1\|S_1 = \|\vec{E}_2\|S_2,$$

en notant  $S_1$  et  $S_2$  les aires des surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Ainsi, si  $S_2$  est plus petite que  $S_1$ ,  $\|\vec{E}_2\|$  est plus grand que  $\|\vec{E}_1\|$ . Le résultat est donc établi.

### Exemple

Sur la figure 11.21, on constate qu'en s'éloignant de la charge, deux lignes de champ données s'éloignent l'une de l'autre : la norme du champ électrostatique décroît quand on s'éloigne de la charge.

### f) Comment évaluer le champ à partir d'un réseau d'équipotentielles ?

Les équipotentielles représentées sur la figure 11.21 correspondent à des valeurs du potentiel variant de 4 (à l'extérieur) à 20 (à l'intérieur) par sauts de 2 dans une unité arbitraire. On constate que les équipotentielles sont plus espacées quand on s'éloigne des charges, c'est-à-dire quand la norme du champ diminue, ce qui est parfaitement compatible avec la relation entre  $\vec{E}$  et  $V$  :  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ .

Si deux équipotentielles consécutives, de potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$  avec  $V_2 = V_1 + \delta V$  où  $|\delta V| \ll V_1$ , sont distantes de  $\delta\ell$ , on peut assimiler la petite variation du potentiel à sa différentielle et écrire :

$$E\delta\ell = -\delta V .$$

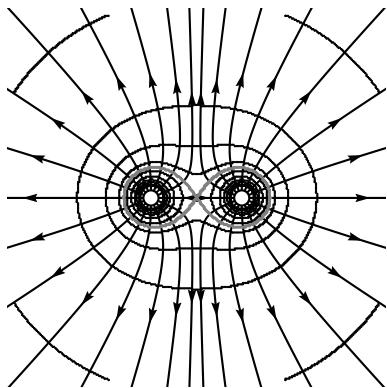
Ainsi, la donnée des valeurs du potentiel sur un réseau d'équipotentielles permet de calculer la valeur du champ électrostatique entre deux équipotentielles.

## 7.3 Quelques exemples

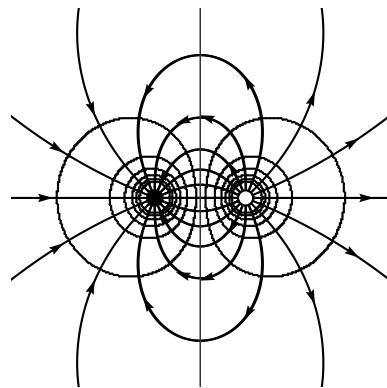
### a) Deux charges de même valeur absolue

On complète les figures 11.14 et 11.15 en rajoutant les équipotentielles ce qui donne les figures 11.23 et 11.24. Sur ces deux figures, on observe bien que les lignes de champ et les équipotentielles sont orthogonales entre elles.

Les équipotentielles sont plus resserrées près des charges, là où le champ est le plus intense. On constate que les lignes de champ divergent d'un point où se trouve une charge négative et qu'elles convergent vers un point où se trouve une charge positive. On peut ainsi à partir d'une carte de lignes de champ repérer d'éventuelles sources du champ et connaître leur signe. Sur la figure 11.24, la charge positive est à droite et la charge négative à gauche.



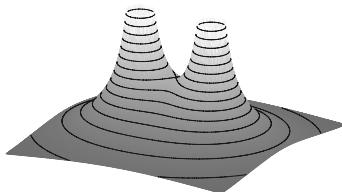
**Figure 11.23** – Deux charges positives égales.



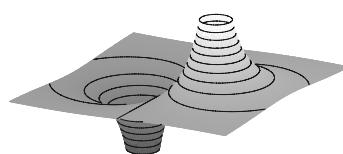
**Figure 11.24** – Deux charges égales et opposées.

Sur la figure 11.23, on remarque deux familles d'équipotentielles : celles qui entourent une seule charge et celles qui entourent les deux. On a tracé une équipotentielle particulière en traits plus gros et plus clair. C'est l'**équipotentielle critique**, le potentiel y prend la valeur  $V_{cr}$ , elle passe par le point de champ nul (au milieu des deux charges) et sépare les deux familles d'équipotentielles. Celles qui correspondent à une valeur du potentiel supérieure à  $V_{cr}$  sont formées de deux morceaux, un autour de chaque charge, celles qui correspondent à une valeur du potentiel inférieure à  $V_{cr}$  sont formées d'un seul morceau et entourent les deux charges. Cette situation se rencontrera chaque fois qu'il y aura un point où le champ est nul. Le champ créé par la distribution de la figure 11.24 n'est jamais nul, il n'y a pas d'équipotentielle critique.

Pour mieux voir cela, on représente sur la figure 11.25, la surface  $V(x,y)$  dans les deux cas.



Deux charges positives égales.



Deux charges égales et opposées.

**Figure 11.25** – Surfaces équipotentielles pour deux charges.

Le niveau de gris traduit l'intensité relative du potentiel. On voit bien l'équipotentielle critique et les deux familles d'équipotentielles sur la figure de gauche.

b) Charges de valeurs différentes

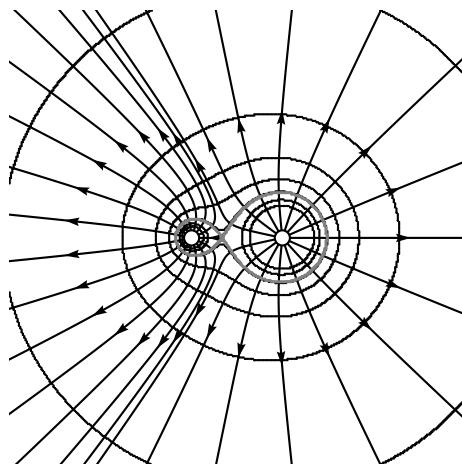


Figure 11.26 – Une distribution de charges inconnue.

Que peut-on déduire de cette figure ?

Tout d'abord, il y a deux charges, toutes les deux positives puisque les lignes de champ divergent à partir de deux points.

On observe un point de champ nul, là où l'équipotentielle critique se croise elle-même. Si on mesure sa position, il est deux fois plus près de la charge de gauche que de celle de droite : on peut en déduire que la charge de droite est quatre fois plus grande que celle de gauche, puisque le champ électrique est proportionnel à la charge et inversement proportionnel au carré de la distance.

Loin des deux charges, les équipotentielles se rapprochent de celles créées par une charge unique.

## 8 Analogie avec le champ gravitationnel

### 8.1 Interaction gravitationnelle

L'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles a une expression formellement analogue à la loi de Coulomb.

On peut établir l'analogie suivante :

| gravitation   | électrostatique  |
|---|--|
| masse $m$   | charge électrique $q$  |
| force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^3} \vec{M}_1 \vec{M}_2$                              | force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(M_1 M_2)^3} \vec{M}_1 \vec{M}_2$                           |
| constante universelle de gravitation :<br>$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ | constante dépendant de la permittivité dans le vide $\epsilon_0$ :<br>$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ |

#### Remarque

Il faut noter le changement de signe entre la force gravitationnelle et la force électrique : deux masses (positives obligatoirement) s'attirent alors que deux charges électriques de même signe (positif ou négatif) se repoussent.

### 8.2 Champ de gravitation

#### a) Définition du champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle

On définit le **champ gravitationnel**  $G(M)$  de manière analogue au champ électrostatique. De même que la force électrostatique subie par une charge ponctuelle  $q$  est  $\vec{F} = q\vec{E}(M)$  la force gravitationnelle subie par une masse  $m$  ponctuelle est :

$$\vec{F} = m\vec{G}(M),$$

où  $\vec{G}(M)$  est le champ gravitationnel. Le champ gravitationnel  $\vec{G}_A(M)$  créé en  $M$  par la masse ponctuelle  $m$  située en  $A$  est :

$$\vec{G}_A(M) = -\mathcal{G}m \frac{\vec{u}_{AM}}{AM^2}$$

#### b) Champ gravitationnel créé par une distribution quelconque de masses

En utilisant le principe de superposition comme pour le champ électrostatique, on obtient les expressions du champ gravitationnel créé par une distribution de masse volumique  $\mu(P)$  :

$$\vec{G}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} -\mathcal{G}\mu(P) \frac{\vec{P}M}{PM^3} d\tau_P \quad (11.12)$$

### 8.3 Propriétés du champ de gravitation

Dans le cadre de l'analogie entre l'électrostatique, le théorème de Gauss pour la gravitation s'écrit :

$$\Phi_G = -4\pi G M_{\text{int}} \quad (11.13)$$

où  $\Phi_G$  est le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée et  $M_{\text{int}}$  la masse contenue à l'intérieur de la surface.

On notera le signe «  $-$  » dans le théorème de Gauss.

Les propriétés de symétries de  $\vec{G}$  sont les mêmes que celles du champ électrostatique, sauf que les masses négatives n'existent pas, il n'y aura donc jamais de plan d'antisymétrie des sources en gravitation.

**SYNTHESE****SAVOIRS**

- loi de Coulomb
- champ créé par une charge ponctuelle
- potentiel créé par une charge ponctuelle
- distributions continues de charges
- principe de superposition
- le champ électrostatique est à circulation conservative
- $\vec{E} = -\text{grad } V$
- énergie potentielle d'une charge  $q$  dans un champ  $\vec{E}$
- $\vec{E}$  appartient à tout plan de symétrie de la distribution de charges qui le crée
- $\vec{E}$  est orthogonal à tout plan d'antisymétrie de la distribution de charges qui le crée
- $\vec{E}$  est symétrique de part et d'autre d'un plan de symétrie de la distribution de charges
- $\vec{E}$  est antisymétrique de part et d'autre d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charges
- théorème de Gauss

**SAVOIR-FAIRE**

- choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée
- relier le champ électrostatique au potentiel
- exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges
- citer l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes
- orienter les lignes de champ créées par une distribution de charges
- exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir les propriétés du champ et du potentiel créés
- représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement
- associer l'évolution de la norme de  $\vec{E}$  à la position relative des lignes de champ
- vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances des sources
- mettre en évidence et utiliser les analogies formelles entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel

**MOTS-CLÉS**

- |                             |                              |                                    |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| • champ électrostatique     | • plan d'antisymétrie        | electrostatique                    |
| • potentiel électrostatique | • invariance par translation | • champ à circulation conservative |
| • superposition             | • invariance par rotation    | • flux du champ électrostatique    |
| • ligne de champ            | • symétrie cylindrique       | • champ gravitationnel             |
| • surface équipotentielle   | • symétrie sphérique         |                                    |
| • plan de symétrie          | • circulation du champ       |                                    |

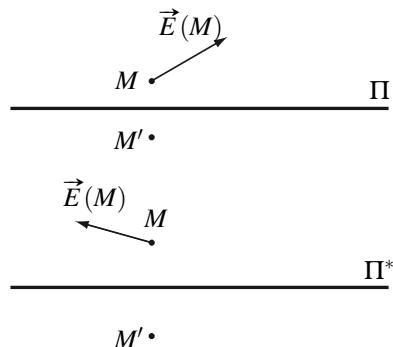
## S'ENTRAÎNER

**11.1 Symétries du champ électrostatique (1) (★)****1.**

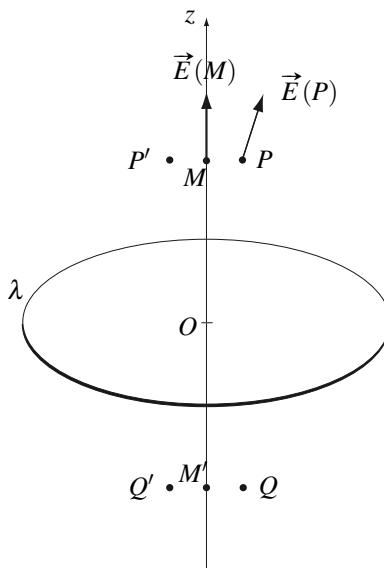
Le plan  $\Pi$  est un plan de symétrie d'une distribution de charges  $\rho(P)$ . Le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $\Pi$ . Compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point  $M'$ .

**2.**

Le plan  $\Pi^*$  est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges  $\rho(P)$ . Le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $\Pi^*$ . Compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point  $M'$ .

**11.2 Symétries du champ électrostatique (2) (★)**

On considère un cerceau d'axe ( $Oz$ ) chargé uniformément (densité linéique de charge  $\lambda$ ). On donne le champ électrique en  $M$  et en  $P$ .



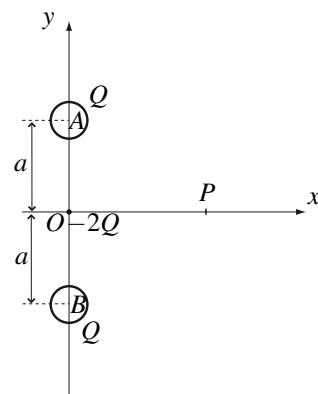
**1.** Représenter le champ électrique en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au cerceau, en  $P'$  symétrique de  $P$  par rapport à l'axe, en  $Q$  symétrique de  $P$  par rapport au cerceau et en  $Q'$  symétrique de  $Q$  par rapport à l'axe.

**2.** Sans calcul, déterminer le champ électrostatique au centre  $O$  de l'anneau.

### 11.3 Charges ponctuelles (\*)

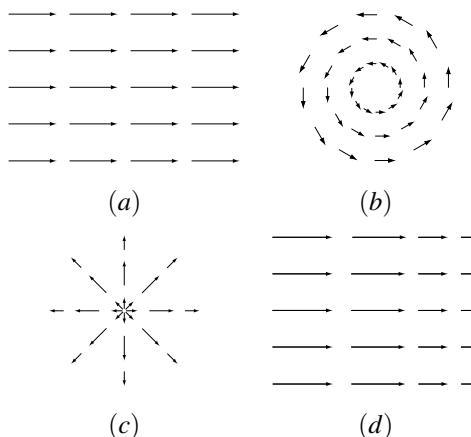
Deux sphères portent la charge positive  $Q$  uniformément répartie sur leur surface. On admet qu'à l'extérieur, elles créent le même champ électrique qu'une charge ponctuelle  $Q$  qui serait situé en leur centre. Leurs centres  $A$  et  $B$  distants de  $2a$  sont situés sur l'axe  $Oy$  symétriquement par rapport à l'origine  $O$ . Une charge ponctuelle  $-2Q$  se trouve au point  $O$ .

1. On pose  $\vec{E}(P) = E(x) \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire. Déterminer  $\vec{u}$ .
2. Étudier la parité de la fonction  $E(x)$ .
3. Calculer  $E(x)$  en fonction de  $Q$ ,  $a$ ,  $\epsilon_0$  et  $x$ .



### 11.4 Lignes de champ (\*\*)

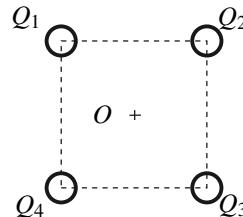
Les figures ci-dessous représentent, dans un plan  $z = \text{cste}$ , quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme :  $\vec{a}(x, y) = a_x(x, y) \vec{u}_x + a_y(x, y) \vec{u}_y$ .



Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique et quand c'est possible, dire si des charges sont présentes dans la région représentée.

### 11.5 Champ au centre d'un carré formé par quatre charges ponctuelles (\*\*)

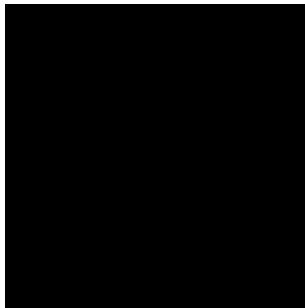
Quatre sphères, assimilées à des charges ponctuelles, sont situées aux sommets  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  et  $O_4$  d'un carré de centre  $O$ , de côté  $2a$ . Elles portent les charges respectives  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  et  $Q_4$ .



**CHAPITRE 11 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE**

On donne la carte des lignes de champ des équipotentielles dans les cas où les charges sont dans les rapports ( $Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4$ ) suivants : (1 : 1 : 1 : 1); (-1 : 1 : -1 : 1); (-1 : -1 : 1 : 1); (1 : 2 : 1 : 2). Dans chacun des quatre cas répondre aux questions suivantes :

- 1.** Quels sont les plans de symétrie ? d'antisymétrie ?
- 2.** Que peut-on dire du champ au centre ?
- 3.** Y a-t-il des points où le champ est nul ?
- 4.** Commenter soigneusement ces cartes de lignes de champ et d'équipotentielles.

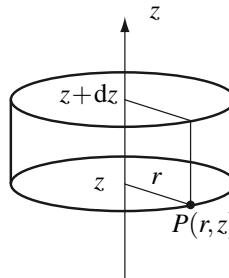








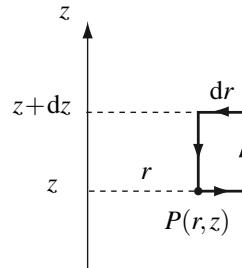
## CHAPITRE 11 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE



Calculer le flux du champ électrostatique à travers ce cylindre et en déduire l'expression de  $E_r(r, z)$  en fonction de  $E_0(z)$  et/ou de sa dérivée.

**5.** Justifier le fait que  $E_z(r, z) - E_z(0, z)$  est au moins d'ordre deux en  $r$ .

**6.** On considère le rectangle ci-dessous :



On a choisi  $\frac{r}{L^*}$  infiniment petit d'ordre 1 et  $\frac{dr}{L^*}$  et  $\frac{dz}{L^*}$  infiniment petits d'ordre 2.

En calculant la circulation de  $\vec{E}$  le long de ce rectangle, montrer que

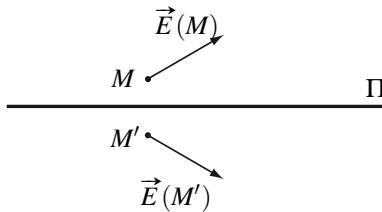
$$E_z(r, z) = E_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 E_0}{dz^2}(z)$$

**7.** Récapituler l'expression de  $\vec{E}(P)$  au premier ordre en  $r$ , puis au deuxième ordre en  $r$ .

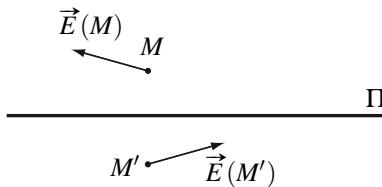
## CORRIGÉS

## 11.1 Symétries du champ électrostatique

1. Le champ électrostatique en  $M'$  est le symétrique du champ électrostatique en  $M$  :



2. Le champ électrostatique en  $M'$  est l'opposé du symétrique du champ électrostatique en  $M$  :



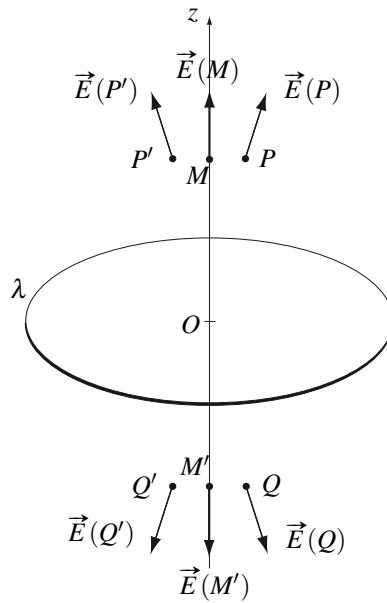
## 11.2 Symétries du champ électrostatique (2)

1. Le plan contenant l'axe ( $Oz$ ) et orthogonal au vecteur  $\vec{MP}$  est plan de symétrie du cerceau. Le point  $P'$  est le symétrique de  $P$  par rapport à ce plan donc le champ en  $P'$  est le symétrique du champ en  $P$ . De même le champ en  $Q'$  est le symétrique du champ en  $Q$ .

Le plan du cerceau est un plan de symétrie des charges. Les champs en  $M'$ ,  $P'$  et  $Q'$  sont donc les symétriques des champs en  $M$ ,  $P$  et  $Q$  respectivement.

Voir figure à la fin de l'exercice.

2. Le plan du cerceau est plan de symétrie de la distribution de charge donc  $\vec{E}(O)$  est contenu dans ce plan, il est orthogonal à  $\vec{u}_z$ . Par ailleurs, tout plan contenant l'axe est également plan de symétrie du cerceau donc  $\vec{E}(O)$  appartient à tous ces plans, il est donc dirigé par  $\vec{u}_z$ . Finalement :  $\vec{E}(O) = \vec{0}$ .



### 11.3 Charges ponctuelles

**1.** Soit  $P$  un point de l'axe ( $Ox$ ).  $P$  appartient au plan ( $Oxy$ ), plan de symétrie de la distribution donc  $\vec{E}(P)$  appartient au plan engendré par  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ .  $P$  appartient aussi au plan ( $Oxz$ ) plan médiateur de  $AB$  qui est aussi plan de symétrie de la distribution :  $\vec{E}(P)$  appartient au plan engendré par  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$ . On en déduit que  $\vec{E}(P)$  est porté par  $\vec{u}_x$ .

**2.** Le plan ( $xOz$ ) est plan de symétrie des charges donc  $\vec{E}(P)$  est symétrique par rapport à ce plan, d'où  $E(x) = -E(-x)$ , la fonction est impaire.

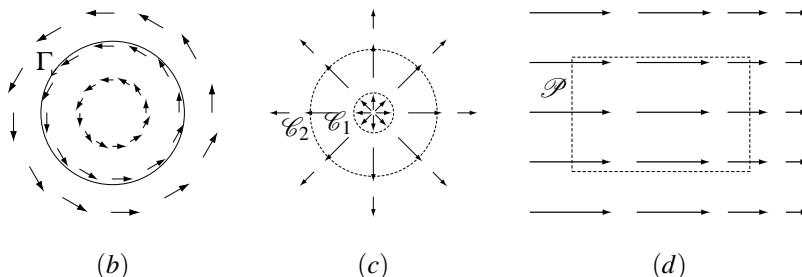
**3.** Le théorème de superposition donne  $\vec{E}(P) = \vec{E}_A(P) + \vec{E}_B(P) + \vec{E}_C(P)$ , soit :

$$\vec{E}(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{AP}}{(AP)^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{BP}}{(BP)^3} - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OP}}{(OP)^3}$$

Par symétrie  $AP = BP = \sqrt{x^2 + a^2}$  et  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{OP} = 2x\vec{u}_x$ , donc :

$$E(x) = \frac{2Qx}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^3} \right)$$

## 11.4 Lignes de champ



Les lignes de champ correspondent à celles d'un champ électrostatique si la circulation du champ le long de toute courbe fermée est nulle. Donc si on peut mettre en évidence un contour le long duquel la circulation n'est pas nulle, le champ ne pourra pas être un champ électrostatique. C'est le cas du champ de la figure (b) qui a des lignes de champ circulaires le long desquelles il ne change pas d'orientation. Sa circulation le long du contour  $\Gamma$  est strictement positive.

Le champ de la figure (a) est un champ uniforme donc sa circulation le long de tout contour fermé est nulle et son flux à travers toute surface fermée est nul. Il s'agit peut s'agir d'un champ électrostatique et dans ce cas, aucune des charges créant ce champ ne se trouve dans la zone représentée.

Le champ de la figure (c) a un flux positif à travers tout cylindre d'axe parallèle à ( $Oz$ ) tel que les cylindres  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  dont les traces sont représentées sur la figure. S'il s'agit d'un champ électrostatique, la charge contenue dans chacun de ces cylindres est positive. De plus le flux à travers  $\mathcal{C}_2$  est supérieur au flux à travers  $\mathcal{C}_1$  (car le champ est plus intense et la surface est plus grande) donc il y a des charges positives entre les deux cylindres.

Le champ de la figure (d) a un flux sortant négatif à travers le parallélépipède  $\mathcal{P}$  dont la trace est représentée sur la figure et qui a quatre faces parallèles à  $(Oz)$ . S'il s'agit d'un champ électrostatique, la charge contenue dans  $\mathcal{P}$  est négative.

## 11.5 Champ au centre d'un carré formé par quatre charges ponctuelles

- 1.** Dans tous les cas, le plan de la figure, c'est-à-dire le plan ( $Oxy$ ) est plan de symétrie de la distribution de charges.

  - Cas (a) : les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = y$  et  $x = -y$  sont plans de symétrie de la distribution de charges.
  - Cas (b) : les plans  $x = 0$  et  $y = 0$  sont plans d'antisymétrie et les plans  $x = y$  et  $x = -y$  plans de symétrie de la distribution de charges.
  - Cas (c) : le plan  $x = 0$  est plan de symétrie et les plans  $y = 0$ ,  $x = y$  et  $x = -y$  plans d'antisymétrie de la distribution de charges.
  - Cas (d) : les plans  $x = y$  et  $x = -y$  sont plans de symétrie de la distribution de charges.

**2.** Dans les cas (a), (b) et (d), le point  $O$  est à l'intersection de trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, il appartient à ces trois plans, il est donc nul.

## CHAPITRE 11 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Dans le cas (c), il appartient à l'intersection des plans vectoriels associés à ( $Oxy$ ) et à ( $Oyz$ ), il est donc porté par  $\vec{u}_y$ .

**3.** Il existe des points de champ nul si des lignes de champ convergent en ce point, l'équipotentielle passant par ce point se recoupe. Dans les cas (a), (c) et (d), les équipotentielles représentées en gris sont les équipotentielles critiques qui passent par des points de champ nul à l'endroit où elles se coupent. Dans les cas (a), (b) et (d), le champ au centre est nul, les lignes de champ convergent en ce point (deux lignes de champ ne peuvent se couper qu'en un point de champ nul).

**4.** Les lignes de champs sont bien contenues dans les plans de symétrie et orthogonales aux plans d'antisymétrie en un point de ces plans. Elles sont symétriques de part et d'autre d'un plan de symétrie et antisymétriques de part et d'autre d'un plan d'antisymétrie. Les équipotentielles, elles, sont symétriques, aussi bien de part et d'autre d'un plan de symétrie que de part et d'autre d'un plan d'antisymétrie.

Au voisinage des charges, les lignes de champ sont des droites fuyant la charge ou convergant vers elle selon le signe de celle-ci, les traces des équipotentielles dans le plan ( $xOy$ ) sont des cercles.

### 11.6 Expérience de Coulomb

**1.** À l'équilibre, le couple de torsion compense le moment de la force électrostatique. En notant  $f$  celle-ci,  $R$  la distance de la balle  $A$  à l'axe du dispositif,  $C$  la constante de torsion du fil et  $\Delta\alpha$  l'angle de torsion, la condition d'équilibre s'écrit donc :  $fR = C\Delta\alpha$ .

Si la corde du cercle est confondue avec son arc, la distance entre les balles est  $r = R\alpha$ , où  $\alpha$  est la position angulaire lue sur la graduation  $G_2$ . On cherche à vérifier si le produit  $fr^2$  est le même pour les trois mesures. Comme  $fr^2 = CR\alpha^2\Delta\alpha$ , et  $C$  et  $R$  sont des constantes, il suffit de vérifier que  $\alpha^2\Delta\alpha$  est le même pour les trois mesures. On trouve :

- $\alpha_1^3 = 46656^{\circ 3}$  pour la première mesure,
- $\alpha_2^2(\alpha_2 + \alpha_{20}) = 46656^{\circ 3}$  pour la seconde, et
- $\alpha_3^2(\alpha_3 + \alpha_{30}) = 41580^{\circ 3}$  pour la troisième.

À 10 % près, les mesures sont compatibles avec la loi en  $1/r^2$ .

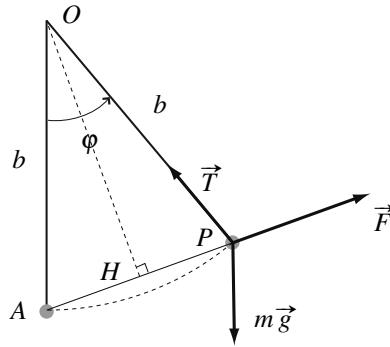
**2.** On reste étonné du petit nombre de mesures sur lequel Coulomb base ses conclusions ; il n'a en effet fourni aucune autre donnée relative à des charges de même signe. On peut même considérer que ces mesures constituent une preuve expérimentale insuffisante de la loi en  $1/r^2$ .

Contestées de son temps à l'étranger, les conclusions de Coulomb sont difficiles à établir, même de nos jours en suivant la même démarche expérimentale : l'expérience, très délicate, est très sensible à l'environnement électrique et reste imprécise même avec un grand nombre de mesures.

**3.** La charge  $q$  des balles vérifie :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2\alpha_1^2} = f_1 \Rightarrow q = R\alpha_1 \sqrt{4\pi\epsilon_0 f_1} = 3 \times 10^{-10} \text{ C}$$

### 11.7 Électromètre



1. Chaque sphère porte la charge  $\frac{Q}{2}$ . La force électrostatique qui s'exerce sur  $P$  est donc :  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4AP^2} \vec{u}_{A \rightarrow P}$ . Pour calculer sa norme, on développe

$$AP^2 = AO^2 + OP^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OP} = 2b^2 - 2b^2 \cos \varphi = 4b^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)$$

donc  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{16b^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$ . Elle est dirigé de  $A$  vers  $P$ , c'est une force répulsive.

2. Le point  $P$  étant en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$ , horizontal et passant par  $O$ , on étudie son mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique par rapport à  $\Delta$ . Le point est soumis à la force électrostatique, à son poids et à la tension du fil. À l'équilibre la somme des moments par rapport à l'axe  $\Delta$  des forces s'exerçant sur le point  $P$  est nul.

- La droite d'action de la tension passe par  $O$  donc son moment par rapport à  $\Delta$  est nul.
- Le poids a tendance à faire diminuer l'angle  $\varphi$  et le bras de levier est  $b \sin \varphi$ , le moment du poids par rapport à  $\Delta$  est :

$$\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}) = -mgb \sin \varphi$$

- La force électrostatique a tendance à faire augmenter l'angle  $\varphi$  et le bras de levier est  $OH = b \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ , le moment de la force électrostatique par rapport à  $\Delta$  est :

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = +Fb \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right)$$

À l'équilibre :  $mgb \sin \varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2 \cos \left( \frac{\varphi_e}{2} \right)}{16b \sin^2 \left( \frac{\varphi_e}{2} \right)}$ . En utilisant la formule  $\sin \varphi = 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ , on obtient :

$$\sin^3 \frac{\varphi_e}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{32mgb^2}$$

3. Si on connaît  $\varphi_e$ , on peut déterminer  $Q$  d'après la relation précédente.

4.  $Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \times 32mgb^2 \sin^3 \frac{\varphi_e}{2}}$ . L'application numérique donne :  $Q = 4,00 \times 10^{-7} \text{ C}$ .

## CHAPITRE 11 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

**5.** L'énergie potentielle de pesanteur du point  $P$  est :  $E_{p,\text{poids}} = -mgb \cos \varphi + \text{cste.}$   
L'énergie d'interaction électrostatique entre les deux charges est :

$$E_{p,\text{élec}} = \frac{Q}{2} V_A(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Au total :  $E_p = -mgb \cos \varphi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$

**6.** Les positions d'équilibre éventuelles correspondent à des extrema de l'énergie potentielle. La courbe nous montre qu'il existe un minimum entre  $O$  et  $\pi/2$ , c'est donc une position d'équilibre stable. On détermine la valeur de l'angle en résolvant l'équation  $E'_p(\varphi_e) = 0$ , c'est-à-dire :

$$mgb \sin \varphi - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 8b} \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 0$$

ce qui donne bien la même expression que précédemment (on lit d'ailleurs sur la courbe une valeur proche de 1, c'est-à-dire proche de  $\pi/3$ ).

### 11.8 Étude d'une carte d'équipotentielles

**1.** Les charges sont situées au centre des équipotentialles qui ressemblent à des cercles (près d'une charge, l'influence des autres charges est négligeable). Ils s'agit des trois sommets du triangle équilatéral formé par les points  $A(0, 1)$ ,  $B(\sqrt{3}/2, -1/2)$  et  $C(-\sqrt{3}/2, -1/2)$

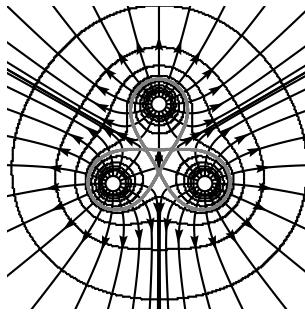
**2.** La distribution de charge est invariante par rotation d'angle  $2\pi/3$  autour de l'axe passant par  $O$  et perpendiculaire au plan de la figure. Elle est symétrique par rapport au plan de la figure (plan ( $xOy$ )) et par rapport au plan d'équation  $x = 0$ .

Elle est également symétrique par rapport au plan contenant la droite  $OB$  et perpendiculaire au plan de la figure et par rapport au plan contenant la droite  $OC$  et également perpendiculaire au plan de la figure.

**3.** La courbe plus épaisse tracée en gris est l'équipotentielle critique. Elle sépare les équipotentielles en un seul morceau qui entourent les trois charges et les équipotentielles en plusieurs morceaux qui entourent chacune des charges. Elle se croise sur elle-même au niveau des points de champ nul.

**4.** Les lignes de champ sont en tout point orthogonales aux équipotentielles. Elles divergent depuis les charges. Loin de la distribution, elles sont semblables à celle d'une seule charge située en  $O$ .

Elles appartiennent aux plans de symétrie en un point de ce plan. Il suffit de les dessiner dans un tiers de plan, on les reproduit ensuite par rotation d'angle  $2\pi/3$ .



### 11.9 Anneau chargé

**1.** Le plan contenant le point  $P$  et l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie de la distribution de charges. Or ce plan a pour vecteurs directeurs les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$  donc le champ  $\vec{E}$  en  $P$  qui appartient à ce plan n'a pas de composante suivant  $\vec{u}_\theta$ .

**2.** La distribution de charges est invariante par rotation d'axe ( $Oz$ ) donc les composantes de  $\vec{E}$  sont indépendantes de  $\theta$ .

**3.** Une surface fermée au voisinage de l'axe ne contient pas de charges. D'après le théorème de Gauss, le flux à travers cette surface est nul.

La circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé est nulle.

**4.** Le flux de  $\vec{E}$  à travers ce cylindre est :

$$\begin{aligned}\Phi &= -E_z(0, z)\pi r^2 + E_r(r, z)2\pi r dz + E_z(0, z + dz)\pi r^2 \\ &= \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z)dz\pi r^2 + E_r(r, z)2\pi r dz\end{aligned}$$

On a vu que ce flux est nul. On en déduit, après simplification par  $rdz$  :

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z) = -\frac{r}{2} E'_0(z)$$

**5.** Le développement limité de  $E_z(r, z)$  en fonction de  $r$  ne comporte que des termes de puissances paires à cause de l'invariance par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ). Donc  $E_z(r, z) - E_z(0, z)$  est au moins d'ordre deux en  $r$ .

**6.** La circulation de  $\vec{E}$  le long du rectangle est nulle. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= E_r(r, z)dr + E_z(r + dr, z)dz - E_r(r, z + dz)dr - E_z(r, z)dz = 0 \\ &= -\frac{\partial E_r}{\partial z}(r, z)dzdr + \frac{\partial E_z}{\partial z}(r, z)drdz\end{aligned}$$

On en déduit, après simplification par  $drdz$  :  $\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, z) = \frac{\partial E_r}{\partial z}(r, z)$ .

En utilisant l'expression de  $E_r(r, z)$  établie à la question précédente, on obtient :  $\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, z) = -\frac{r}{2} E''_0(z)$  qui s'intègre (entre 0 et  $r$ ) en :

$$E_z(r, z) = E_0(z) - \frac{r^2}{4} E''_0(z)$$

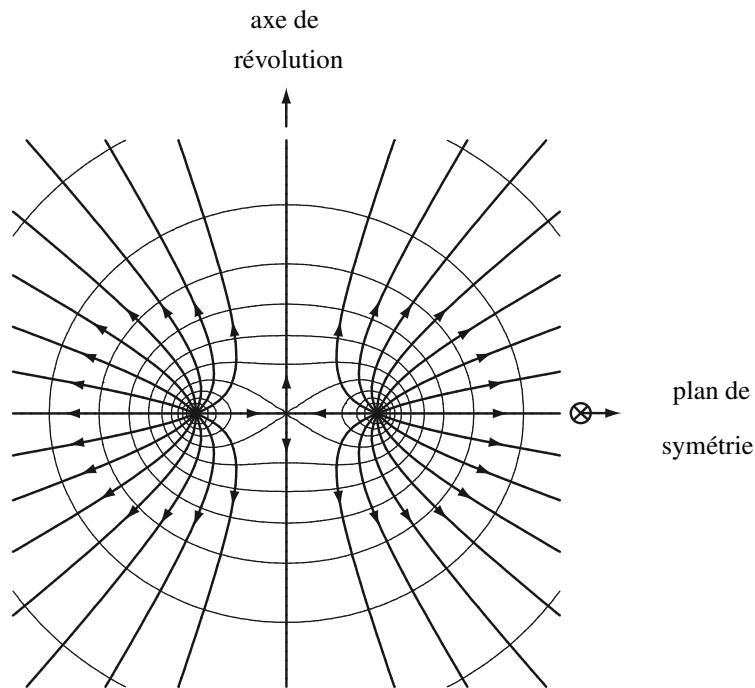
## CHAPITRE 11 – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

7. Sur l'axe :  $\vec{E}(M) = E_z(0, z) \vec{u}_z = E_0(z) \vec{u}_z$ .

Au voisinage de l'axe :

- au premier ordre en  $r$  :  $\vec{E}(M) = -\frac{r}{2}E'_0(z) \vec{u}_r + E_0(z) \vec{u}_z$
- au deuxième ordre en  $r$  :  $\vec{E}(M) = -\frac{r}{2}E'_0(z) \vec{u}_r + \left(E_0(z) - \frac{r^2}{4}E''_0(z)\right) \vec{u}_z$

Les lignes de champ dans un plan contenant l'axe ont l'allure suivante :



# Exemples de champs électrostatiques

Les propriétés générales du champ électrostatique nous permettent d'étudier le champ créé par des distributions modélisant par exemple un noyau atomique ou un condensateur.

## 1 Méthodes d'étude des champs et des potentiels

Quelles sont les méthodes dont on dispose pour calculer le champ et le potentiel créés par une distribution de charges connue ?

- *Calcul direct* : on effectue le calcul du champ et du potentiel à partir de la loi de Coulomb. Dans le cadre du programme, cette méthode ne sera utilisée que pour des distributions discrètes.
- *Utilisation du théorème de Gauss* : si l'étude des symétries nous permet de connaître *a priori* la direction de  $\vec{E}$  et de quelle(s) variable(s) il dépend, un choix judicieux d'une surface fermée à travers laquelle on peut facilement exprimer le flux de  $\vec{E}$  nous permettra d'utiliser le théorème de Gauss pour déterminer  $\vec{E}$ . On en déduira  $V$ .

Ces méthodes sont des méthodes globales. On verra dans le chapitre *Équations de Maxwell* des méthodes basées sur les lois locales vérifiées par le champ et le potentiel.

Dans les deux cas, l'étude préalable des invariances et des symétries de la distribution et de leurs conséquences sur le champ et le potentiel est indispensable. Elle permet de connaître *a priori* la direction de  $\vec{E}$  et de quelle(s) variable(s) d'espace il dépend. Sans ces renseignements, aucune des méthodes présentées ne peut aboutir.



- La surface de Gauss est choisie pour que le calcul du flux à travers elle soit immédiat. On choisira donc une surface composée de surfaces ou bien tangentes au champ ou bien perpendiculaires au champ et telles que le champ électrostatique soit uniforme sur ces surfaces. Dans le premier cas, le flux à travers la surface sera nul. Dans le second, le produit scalaire entre vecteur surface orienté et champ électrique est égal au produit de la norme du champ électrostatique en tout point de cette surface multipliée par l'aire de celle-ci, en faisant attention au signe (on remarquera qu'il s'agit d'une équipotentielle).

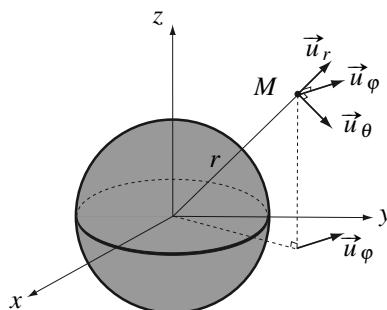
On n'oubliera pas non plus la règle de base suivante : *la surface de Gauss doit passer par le point où on cherche à calculer le champ.*

- Si on cherche la direction du champ en un point, les plans de symétrie ou d'antisymétrie considérés doivent *passer par ce point*.
- Un plan de symétrie ou d'antisymétrie nous donne des renseignements sur le champ de part et d'autre de ce plan et sur le champ en un point de ce plan.

## 2 Exemple de problème à symétrie sphérique : sphère uniformément chargée.

On considère une boule de rayon  $R$  portant la charge  $Q$  uniformément répartie dans son volume. Nous allons utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le champ créé par cette distribution, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur.

### 2.1 Étude des symétries



**Figure 12.1** – Exemple de distribution de charges à symétrie sphérique.

La distribution  $\mathcal{D}$  de charges ne dépend que de la distance  $r$  à un point fixe  $O$ . L'espace est donc repéré par les coordonnées sphériques d'origine  $O$ . Le champ électrostatique en  $M$  s'écrit *a priori* :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi.$$

- Tout plan contenant la droite  $OM$  est plan de symétrie de  $\mathcal{D}$  donc  $\vec{E}(M)$  appartient à tous ces plans, il est porté par la droite  $OM$  :  $\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r$ .
- La distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par toute rotation autour de tout axe passant par  $O$  donc  $E_r(M)$  et  $V(M)$  ne dépendent que de  $r$ .

Conclusion :

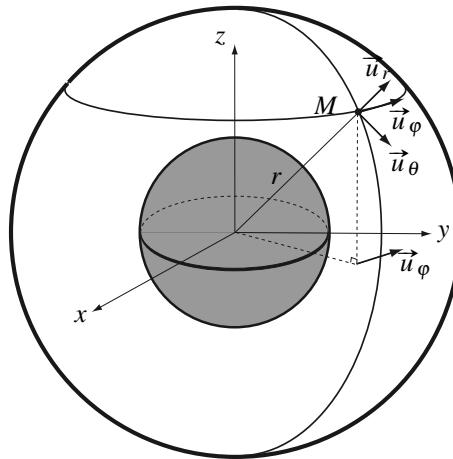
$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V(M) = V(r).$$

**Remarque**

Si  $V(M) = V(r)$  alors  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  est porté par  $\vec{u}_r$

## 2.2 Application du théorème de Gauss

On applique alors le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $O$  passant par  $M$ .



**Figure 12.2 –** Choix de la surface de Gauss.

Le flux du champ électrostatique à travers  $\mathcal{S}$  est :

$$\Phi_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r) \times dS_P,$$

puisque  $d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_r$  est colinéaire à  $\vec{E}$ . On en déduit :

$$\Phi_E = E(r) \iint_{P \in \mathcal{S}} dS_P = 4\pi r^2 E(r).$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

On exprime la charge intérieure  $Q_{\text{int}}$  en s'appuyant sur la figure 12.3 :

- pour  $r < R$ ,  $Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$  car la sphère  $\mathcal{S}$  est entièrement remplie de charge,
- pour  $r > R$ ,  $Q_{\text{int}} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ , car les charges n'occupent que la sphère de rayon  $R$ .

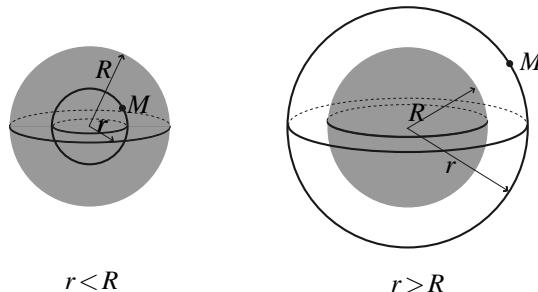


Figure 12.3 – Calcul de la charge intérieure.

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} & \text{si } r < R, \\ \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

### 2.3 Champ et potentiel créés par la sphère.

L'application du théorème de Gauss donne  $E(r)$  ; on en déduit le potentiel  $V(r)$  par intégration de la formule :  $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ . On trouve ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } r < R : \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + A \\ \text{pour } r > R : \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + B \end{cases}$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes réelles qu'il faut déterminer.

La distribution est d'extension finie, on prendra donc le potentiel nul à l'infini, ce qui donne  $B = 0$ . Le potentiel est une fonction continue dans tout l'espace, ce qui nous permet de déterminer la constante  $A$ . En  $r = R$  :  $V(R^-) = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + A = V(R^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$  d'où

$$A = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}.$$

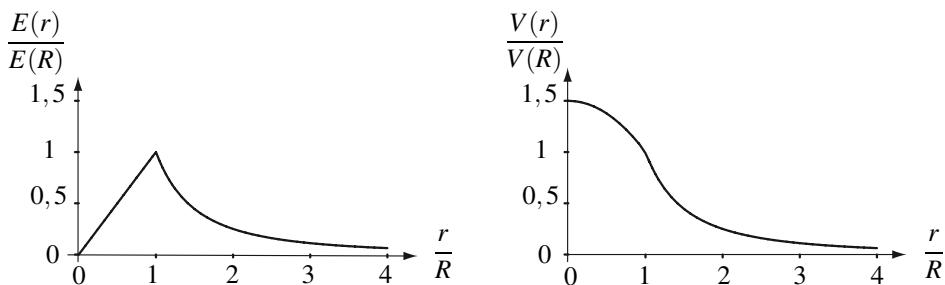
Finalement :

$$\begin{cases} \text{pour } r < R : \quad V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - 3R^2) \\ \text{pour } r > R : \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \end{cases}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } r < R : & \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \\ \text{pour } r > R : & \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \end{array} \right.$$

On peut représenter graphiquement ces résultats :



**Figure 12.4 –** Champ et potentiel créés par une sphère uniformément chargée en volume.

Le champ électrostatique ne subit pas de discontinuité en  $r = R$ , cela se traduit par un raccord continu et dérivable (pas de point anguleux) pour le potentiel en  $r = R$ .

Tout problème à symétrie sphérique se traitera de la même façon. L'étude des symétries et des invariances et le choix de la surface de Gauss sont identiques. La seule chose qui change, c'est le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss qu'il faut adapter à chaque situation.

L'expression du champ électrique pour  $r > R$  est identique à celle du champ d'une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $O$ . Ceci est une propriété générale :

Dans le cas d'une distribution à symétrie sphérique de centre  $O$  contenue dans une sphère de rayon  $R$ , le champ électrostatique à l'extérieur de cette sphère, soit pour  $r > R$  est *identique au champ que crée une charge ponctuelle  $Q$  égale à la charge totale de la distribution et placée en  $O$* .

### 3 Exemple de problème à symétrie cylindrique : cylindre uniformément chargé

On considère un cylindre très long, de rayon  $a$ , uniformément chargé en volume. On étudie ses effets à une distance du fil assez petite devant sa longueur pour pouvoir le supposer infini.

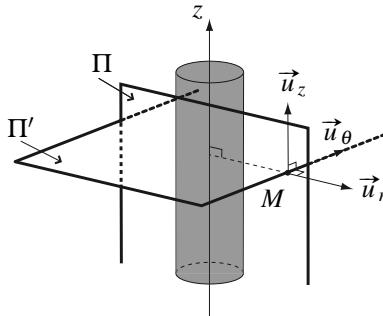


Figure 12.5 – Distribution de charges à symétrie cylindrique.

#### 3.1 Étude des symétries

La densité volumique de charge ne dépend que de la distance  $r$  à un axe fixe ( $Oz$ ). L'espace est donc repéré par les coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ). Le champ électrostatique en  $M$  s'écrit *a priori* :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

On observe les propriétés de symétrie suivantes :

- Le plan  $\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie de  $\mathcal{D}$ . Le plan  $\Pi' = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est également plan de symétrie de  $\mathcal{D}$  puisqu'on considère le cylindre infini.  $\vec{E}(M)$  appartient à ces deux plans, il est donc porté par  $\vec{u}_r$  :  $\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r$ .
- La distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par toute rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) et par toute translation parallèlement à l'axe ( $Oz$ ) donc  $E_r(M)$  et  $V(M)$  ne dépendent que de  $r$  :  $E_r(M) = E(r)$  et  $V(M) = V(r)$ .

Conclusion :

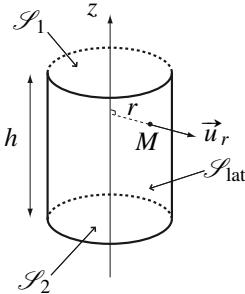
$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V(M) = V(r).$$

#### Remarque

Si  $V(M) = V(r)$  alors  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  est porté par  $\vec{u}_r$ .

#### 3.2 Application du théorème de Gauss

On applique alors le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée le cylindre  $\mathcal{C}$  d'axe ( $Oz$ ), passant par  $M$ , de hauteur  $h$  arbitraire :

**Figure 12.6 – Flux à travers un cylindre.**

Pour  $P \in \mathcal{S}_1$  et pour  $P \in \mathcal{S}_2$ ,  $\vec{E}(P)$  est orthogonal à  $d\vec{S}_P$ , le flux de  $\vec{E}$  à travers les surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est donc nul. Pour  $P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}$ ,  $\vec{E}(P)$  et  $d\vec{S}_P$  sont colinéaires, donc :

$$\Phi_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(r) \times dS_P = E(r) \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} dS_P = 2\pi rhE(r)$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$\Phi_E = 2\pi rhE(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Il ne reste plus qu'à exprimer  $Q_{\text{int}}$ . De manière analogue à ce qu'on a vu dans le cas de la sphère :

- pour  $r < a$ ,  $Q_{\text{int}} = \rho\pi r^2 h$ ,
- pour  $r > a$ ,  $Q_{\text{int}} = \rho\pi a^2 h$ .

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$2\pi rhE(r) = \begin{cases} \frac{\pi\rho r^2 h}{\epsilon_0} & \text{si } r < a, \\ \frac{\pi\rho a^2 h}{\epsilon_0} & \text{si } r > a. \end{cases}$$

### 3.3 Champ et potentiel électrostatiques créés par le cylindre

L'application du théorème de Gauss donne  $E(r)$  ; on en déduit le potentiel  $V(r)$  par intégration de la formule :  $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ . On trouve ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } r < a : \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r & \text{et } V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + A \\ \text{pour } r > a : \vec{E}(r) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{et } V(r) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \end{cases}$$

où  $r_0$  et  $A$  sont des constantes d'intégration. Une relation entre les constantes  $A$  et  $r_0$  est donnée par la continuité du potentiel en  $r = a$ . On ne peut pas aller plus loin dans la détermination

des constantes d'intégration car il y a des charges à l'infini, ce qui empêche de prendre  $V = 0$  à l'infini. Pour déterminer toutes les constantes, il faut se donner la valeur du potentiel en un point donné.

 Tout problème à symétrie cylindrique se traitera de la même façon. L'étude des symétries et des invariances et le choix de la surface de Gauss sont identiques. La seule chose qui change, c'est le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss qu'il faut adapter à chaque situation.

## 4 Exemples de problèmes à symétrie plane

On reprend une des distributions de charges étudiées au chapitre précédent : la distribution de charges, infinie dans les directions parallèles à  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , définie par la densité volumique :

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \text{pour } x \in ]-\infty, -a[ \\ \rho(x) = \rho_0 & \text{pour } x \in [-a, a] \\ \rho(x) = 0 & \text{pour } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

### 4.1 Étude des symétries

L'espace est repéré par les coordonnées cartésiennes. Nous avons déjà étudié les symétries et invariances de cette distribution de charges (voir chapitre 11) :

- La distribution est invariante par toute translation parallèlement à  $(Oy)$  ou à  $(Oz)$  donc  $\vec{E}(M) = \vec{E}(x)$  et  $V(M) = V(x)$ .
- En un point  $M$  quelconque de l'espace, les plans  $\Pi_1 = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et  $\Pi_2 = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges, donc  $\vec{E}(M)$  appartient à ces deux plans, il est porté par  $\vec{u}_x$  :  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_x$ .

Conclusion :

$$\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x \quad \text{et} \quad V(M) = V(x).$$

D'autre part, le plan  $\Pi_3 = (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est également un plan de symétrie de la distribution de charges donc, si  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $\Pi_3$ ,  $\vec{E}(M')$  est le symétrique de  $\vec{E}(M)$  par rapport au plan vectoriel associé et  $V(M') = V(M)$ .

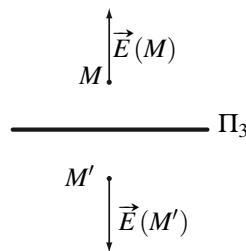


Figure 12.7 – Symétrie du champ électrique.

On en déduit que :

$$E(-x) = -E(x) \quad \text{et} \quad V(x) = V(-x).$$

La fonction  $E(x)$  est impaire et la fonction  $V(x)$  est paire.

## 4.2 Calcul du champ par le théorème de Gauss

On applique le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée le cylindre  $\mathcal{C}$  d'axe ( $Ox$ ), de section  $S$  arbitraire, situé entre les plans de cote  $x$  (point  $M$ ) et  $-x$  (point  $M'$ ). La cote  $x$  du point  $M$  est positive. Pour la lisibilité du dessin, on a choisi  $x > a$  mais le résultat est valable également pour  $x < a$ .

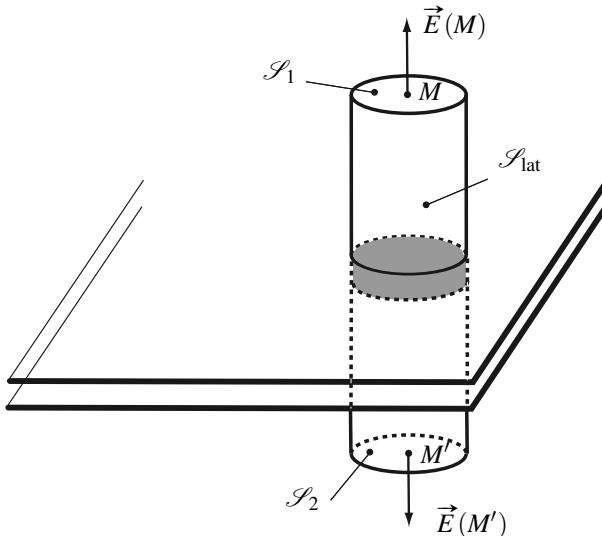


Figure 12.8 – Surface de Gauss.

On a  $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_{\text{lat}} \cup \mathcal{S}_2$ . Le flux du champ électrique à travers  $\mathcal{C}$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \iint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P + \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P + \iint_{P \in \mathcal{S}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \\ &= E(x)S + 0 - E(-x)S = 2E(x)S, \end{aligned}$$

car le champ électrique est tangent à  $\mathcal{S}_{\text{lat}}$  et uniforme sur  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , et en utilisant la propriété  $E(x) = -E(-x)$ .

Il reste à exprimer  $Q_{\text{int}}$ . Deux cas sont à distinguer :

- si  $x > a$ ,  $Q_{\text{int}} = 2a\rho_0S$ ,
- si  $0 < x < a$ ,  $Q_{\text{int}} = 2x\rho_0S$ .

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$2SE(x) = \begin{cases} \frac{2x\rho_0 S}{\epsilon_0} & \text{pour } 0 < x < a, \\ \frac{2a\rho_0 S}{\epsilon_0} & \text{pour } x > a, \end{cases}$$

On en déduit, en complétant en utilisant l'imparité de la fonction  $E(x)$  :

$$\begin{cases} E(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a & \text{pour } x \in ]-\infty, -a[ \\ E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}x & \text{pour } x \in [-a, a] \\ E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}a & \text{pour } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

### 4.3 Expression du potentiel

Le potentiel vérifie  $E(x) = -\frac{dV}{dx}$  d'où :

$$\begin{cases} V(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}ax + A' & \text{pour } x \in ]-\infty, -a[ \\ V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{x^2}{2} + B' & \text{pour } x \in [-a, a] \\ V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}ax + C' & \text{pour } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

où  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont trois constantes d'intégration

La fonction  $V(x)$  est paire donc  $C' = A'$ . Il est continu en  $x = -a$  et en  $x = a$ , ce qui nous donne deux fois la même relation. il reste deux constantes à déterminer et on ne dispose que d'une relation : le potentiel ne tend pas vers zéro à l'infini, il diverge même quand on s'éloigne de la distribution. C'est dû à la présence de charges à l'infini. On choisira donc arbitrairement une origine des potentiels et le plus simple est de prendre  $V(0) = 0$ .

On en déduit :

$$\begin{cases} V(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( ax + \frac{a^2}{2} \right) & \text{pour } x \in ]-\infty, -a[ \\ V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{x^2}{2} & \text{pour } x \in [-a, a] \\ V(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( -ax + \frac{a^2}{2} \right) & \text{pour } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

Les courbes représentatives de  $E(x)$  et  $V(x)$  sont :

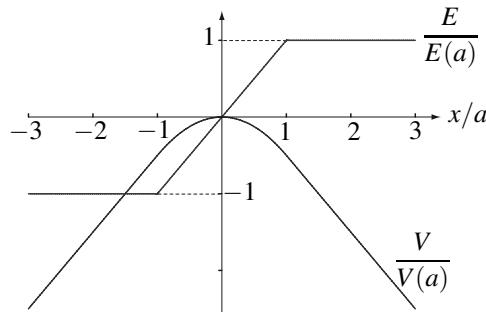


Figure 12.9 – Champ et potentiel.

#### 4.4 Modélisation surfacique

On suppose maintenant que la distance à laquelle on étudie le champ soit très grande devant  $2a$  (tout en restant très petite devant les autres dimensions de la distribution, sinon on ne peut plus faire l'approximation d'une distribution infinie).

Le cylindre d'axe ( $Ox$ ), de surface de base  $dS$  et de hauteur  $2a$  contient la charge  $dq = \rho_0 2adS$ . On peut définir la charge par unité de surface de la distribution par :

$$\sigma = 2a\rho_0,$$

de sorte que :  $dq = \sigma dS$ .

Si on considère dès le départ une distribution infinitement fine, on peut reprendre l'étude précédente. Les symétries sont exactement les mêmes.

On applique alors le théorème de Gauss comme précédemment, mais maintenant il n'y a plus qu'un seul cas pour exprimer la charge contenue dans la surface de Gauss et :  $Q_{\text{int}} = \sigma S$ . On trouve ainsi :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{pour } x > 0 \\ \vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

ce que l'on peut résumer par :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est la normale au plan, fuyant le plan.

Il vient ensuite par intégration :

$$\begin{cases} V(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x + A & \text{pour } x > 0 \\ V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x + B & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de  $V$  en  $x = 0$  impose  $A = B$ . On ne peut pas en dire plus à cause de la présence de charges à l'infini, sauf si on choisit  $V(0) = 0$  comme précédemment.

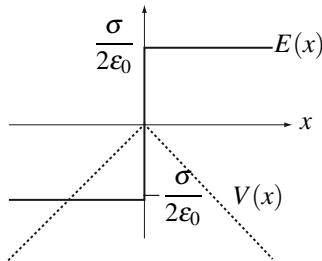


Figure 12.10 – Champ et potentiel créés par un plan uniformément chargé.

On remarque que dans cette modélisation, le champ électrique n'est pas défini en  $x = 0$ . Il subit une discontinuité à la traversée d'une surface chargée. Mais il ne faut pas oublier que cette modélisation surfacique n'est qu'un cas limite de la modélisation volumique. En réalité, le champ varie de  $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  à  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  sur une épaisseur  $2a$ , toute petite devant les distances auxquelles on étudie le champ.

#### 4.5 Application au condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures planes, parallèles, de même forme de surface  $S$  et espacées d'une distance  $e$ . Ces deux armatures portent des charges opposées. On suppose que  $e$  est très faible devant les dimensions des plaques ce qui nous permet de les considérer comme « infinies ». L'état électrique ne dépend alors que de la coordonnée  $x$  le long d'un axe perpendiculaire aux plaques et les densités surfaciques peuvent être considérées comme uniformes. Ce modèle est convenable loin du bord des plaques : on néglige les **effets de bord**.

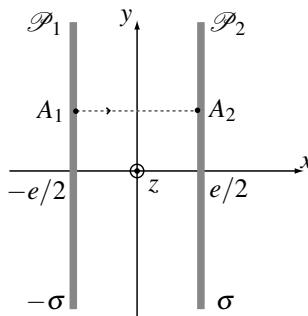


Figure 12.11 – Condensateur plan.

Afin de relier entre elles la charge et la différence de potentiel entre les deux armatures, il faut calculer le champ électrostatique entre les armatures.

On appelle  $\mathcal{P}_1$  le plan portant la densité surfacique de charge  $-\sigma$ , situé en  $x = -\frac{e}{2}$  et  $\mathcal{P}_2$  le plan portant la densité surfacique de charge  $+\sigma$ , situé en  $x = \frac{e}{2}$ . Le plan  $\mathcal{P}_1$  porte la charge

totale  $Q = \sigma S$  et le plan  $\mathcal{P}_2$  la charge  $-Q$ .

Les résultats obtenus aux paragraphes précédents nous permettent d'exprimer le champ électrostatique créé par le plan  $\mathcal{P}_1$  est :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{si } x \leq -\frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{si } x \geq \frac{e}{2} \end{cases}$$

et celui créé par  $\mathcal{P}_2$  :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{si } x \leq \frac{e}{2} \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{si } x \geq \frac{e}{2} \end{cases}$$

Le champ électrostatique créé par l'ensemble du condensateur est, par superposition :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } |x| \geq \frac{e}{2} \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x & \text{si } |x| \leq \frac{e}{2} \end{cases}$$

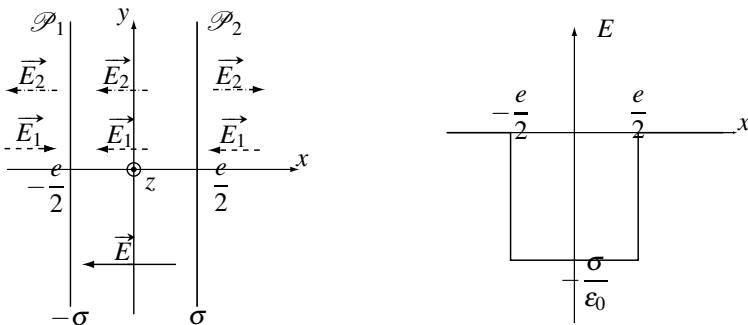


Figure 12.12 – Champ électrostatique créé par un condensateur plan.

La différence de potentiel  $U$  entre les armatures s'obtient en calculant la circulation du champ électrostatique sur une ligne de champ reliant deux points  $A_1$  et  $A_2$  sur les armatures (voir figure 12.11) :

$$U = V(A_2) - V(A_1) = \int_{A_2}^{A_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \int_{A_2}^{A_1} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \right) \cdot (dx \vec{u}_x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times e$$

Par ailleurs,  $\sigma = \frac{Q}{S}$ , donc  $U = \frac{Qe}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{C}$  où  $C$  est la capacité du condensateur.

La capacité du condensateur plan est :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\epsilon} \quad (12.1)$$

### Remarque

Si l'espace entre les armatures est un milieu de permittivité  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , il suffit de remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$  dans l'expression de la capacité. En pratique, on utilise un milieu de permittivité comprise entre 2 et 3, ce qui permet, pour une géométrie identique, d'augmenter la capacité du condensateur.

### SYNTHESE

#### SAVOIRS

- modéliser un condensateur plan
- exprimer la capacité d'un condensateur plan

#### SAVOIR-FAIRE

- étudier les symétries et les invariances des distributions de charges
- choisir la méthode d'étude du champ électrostatique d'une distribution donnée
- choisir une surface de Gauss adaptée aux symétries du champ
- utiliser le théorème de Gauss pour déterminer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie
- établir et énoncer qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant toute la charge de la distribution et placée au centre
- établir l'expression du champ créé par un plan uniformément chargé en surface
- établir l'expression du champ créé par un condensateur plan
- déterminer la capacité d'un condensateur plan
- utiliser le théorème de Gauss de la gravitation

#### MOTS-CLÉS

- |              |                     |            |
|--------------|---------------------|------------|
| • symétrie   | • théorème de Gauss | • capacité |
| • invariance | • condensateur plan |            |

**S'ENTRAÎNER****12.1 Grotte sphérique (\*)**

Une cavité sphérique de centre  $O'$  est creusée à l'intérieur d'un astre sphérique homogène de centre  $O$  et de masse volumique  $\rho$ .

Déterminer le champ gravitationnel dans la cavité.

**12.2 Sphère chargée non uniformément (\*)**

Soit une boule de rayon  $R$ , chargée en volume.

1. Déterminer la distribution volumique de charges  $\rho(r)$  pour que le champ électrostatique soit de module constant  $E_0$  à l'intérieur de la boule.

2. Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique en tout point de l'espace.

**12.3 Modélisation d'un nuage mince (\*)**

On considère, dans le vide et loin de toute charge, un nuage électrique  $\Pi$  suffisamment étendu pour le considérer d'épaisseur négligeable, d'équation  $z = h$  et chargé avec la densité surfacique constante négative  $\sigma$ .

1. Déterminer le champ électrique créé par le nuage en tout point  $M$  de l'espace.

2. On considère maintenant que le plan  $xOy$  représentant le sol porte une densité de charge opposée à celle du nuage. Déterminer le champ total créé par le sol et le nuage pour  $0 < z < h$ .

3. Déterminer le potentiel total créé par le sol et le nuage pour  $0 < z < h$  sachant que  $V(0) = 0$ .

4. Ce condensateur modélise un nuage carré de 10 km de côté à une hauteur  $h = 2$  km. Déterminer la capacité du condensateur ainsi formé et effectuer l'application numérique.

5. On considère maintenant un nuage d'orage. Sachant que lorsque l'éclair se forme, le champ électrique a pour valeur  $25 \text{ kV.m}^{-1}$ , déterminer le potentiel  $V_0$  du nuage.

**12.4 Atome d'hydrogène (\*\*)** 

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, est équivalent à une distribution de charges qui crée un potentiel donné par l'expression, en coordonnées sphériques :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

où  $q$  et  $a$  sont positifs.

1. Déterminer la charge  $Q(r)$  comprise dans la sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ .

2. Caractériser entièrement la distribution de charges à la source de ce potentiel (densité volumique de charge  $\rho(r)$ , éventuelles charges ponctuelles). Vérifier la compatibilité avec l'atome d'hydrogène.

3. Étudier et représenter la densité radiale de charge  $\frac{dQ}{dr} = f(r)$ . Interpréter.

4. Définir puis exprimer l'énergie de liaison de ce système.

## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

**12.5 Champ de gravitation terrestre (★★)**

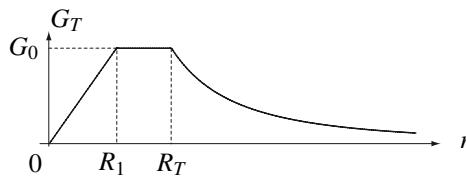
**1.** La Terre est assimilée à une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R_T = 6,38 \times 10^3$  km, de masse  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg, uniformément répartie dans tout le volume.

**a.** Déterminer le champ gravitationnel  $\vec{G}_T$  en tout point de l'espace.

**b.** Tracer  $G_T = \|\vec{G}_T\|$  en fonction de  $r$ .

**c.** Calculer la norme  $G_0$  de  $\vec{G}_T$  à la surface de la Terre.

**2.** L'étude des ondes sismiques montre que le modèle d'une masse uniformément répartie n'est pas réaliste. Le modèle décrit par la courbe ci-dessous est plus conforme aux observations, avec  $R_1 = 3,50 \times 10^3$  km :



**a.** Tracer sur le même graphe la courbe obtenue à la question précédente quand on supposait une masse volumique uniforme, en précisant soigneusement le raisonnement.

**b.** Calculer la masse volumique moyenne du noyau terrestre ( $0 < r < R_1$ ).

**c.** Tracer l'allure de la masse volumique  $\rho(r)$  de la Terre. Préciser en particulier si  $\rho(r)$  est croissante ou décroissante dans le manteau terrestre ( $R_1 < r < R_T$ ).

**APPROFONDIR****12.6 Énergie coulombienne de noyaux miroirs (★★)**

**1.** On cherche à déterminer l'énergie de constitution d'une sphère de rayon  $R$  et de charge  $Q$  uniformément répartie dans son volume.

Cette énergie est définie comme le travail qu'il faut fournir pour construire la sphère en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on la construit. On la construit par couches sphériques concentriques successives. On considère qu'on construit la sphère très lentement et que le travail que l'on doit fournir ne sert pas à la modification de l'énergie cinétique des charges, que l'on supposera donc à chaque instant en équilibre sous l'action de l'opérateur qui construit la sphère et de l'interaction électrostatique avec la portion de sphère déjà créée.

Établir alors l'expression de cette énergie en fonction de  $Q$ ,  $R$  et  $\epsilon_0$ .

**2.** On utilise le résultat précédent pour estimer le rayon d'un noyau atomique de nombre de masse  $A$  impair ; pour cela, on considère les énergies de liaison  $B_1$  et  $B_2$  des deux noyaux « miroirs » de nombre de masse  $A$  et de numéros atomiques respectifs  $Z_1 = \frac{A-1}{2}$  et  $Z_2 = \frac{A+1}{2}$ . On admettra que la charge du noyau est uniformément répartie dans une sphère dont le

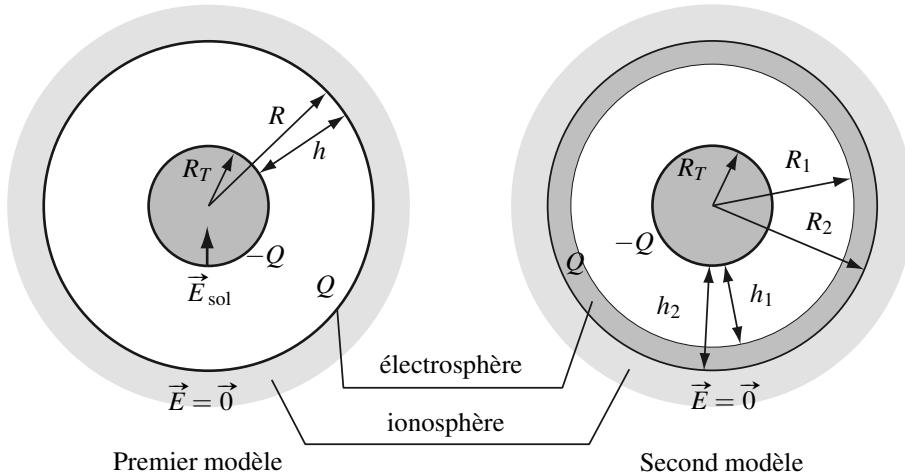
rayon  $R$  ne dépend que de  $A$  et que la contribution de l'interaction forte à l'énergie de liaison est la même pour les deux noyaux « miroirs ».

Comparer  $B_1$  et  $B_2$  et exprimer  $R$  en fonction de  $B_1$ ,  $B_2$  et  $A$ . Calculer  $R$  pour les noyaux donnés dans le tableau ci-dessous. Commenter.

| $A$ | $Z_1$ | Noyau 1                        | $B_1$ (MeV) | $Z_2$ | Noyau 2                          | $B_2$ (MeV) |
|-----|-------|--------------------------------|-------------|-------|----------------------------------|-------------|
| 17  | 8     | $^{17}_8\text{O}$ (stable)     | 131,76      | 9     | $^{17}_9\text{F}$ (instable)     | 128,22      |
| 19  | 9     | $^{19}_9\text{F}$ (stable)     | 143,57      | 10    | $^{19}_{10}\text{Ne}$ (instable) | 139,06      |
| 21  | 10    | $^{21}_{10}\text{Ne}$ (stable) | 162,72      | 11    | $^{21}_{11}\text{Na}$ (instable) | 157,88      |
| 23  | 11    | $^{23}_{11}\text{Na}$ (stable) | 181,41      | 12    | $^{23}_{12}\text{Mg}$ (instable) | 176,06      |
| 25  | 12    | $^{25}_{12}\text{Mg}$ (stable) | 199,96      | 13    | $^{25}_{13}\text{Al}$ (instable) | 194,39      |

3. En admettant la loi  $R = r_C A^{1/3}$  où  $r_C$  est une constante, déterminer l'influence relative de l'énergie de constitution sur l'énergie de liaison pour les noyaux  $^{17}_8\text{O}$  et  $^{238}_{92}\text{U}$ ; commenter. On donne l'énergie de liaison du noyau  $^{238}_{92}\text{U}$ :  $B = 1759,4 \text{ MeV}$ .

### 12.7 Caractéristiques électrostatiques du voisinage de la Terre (\*)



On observe à la surface de la terre, par temps clair, un champ électrostatique vertical descendant  $\vec{E}_{\text{sol}}$  de l'ordre de  $100 \text{ V.m}^{-1}$  et on a mis en évidence l'existence d'une couche conductrice de l'atmosphère, l'ionosphère, à partir d'une altitude  $h \approx 70 \text{ km}$ , ce qui conduit à modéliser de façon simplifiée l'état électrique de l'atmosphère par un condensateur sphérique dont la surface de la terre et la base de l'ionosphère, appelée électrosphère, sont les armatures

## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

respectivement négative et positive (voir figure ci-dessus). On suppose que la surface de la terre et l'électrosphère sont des surfaces sphériques portant des charges opposées uniformément réparties (respectivement  $-Q$  et  $Q$ , avec  $Q > 0$ ). On rappelle que le rayon de la terre vaut  $R_T = 6370$  km.

1. Déterminer le champ électrique régnant en tout point de l'espace compris entre les armatures. En déduire la valeur de  $Q$  et de la densité surfacique de charge  $\sigma$  au niveau du sol terrestre.
2. Calculer le potentiel dans la même région. En déduire la différence de potentiel entre la surface de la terre et l'électrosphère. Commenter.
3. On envisage un second modèle plus réaliste où la charge de l'électrosphère est répartie entre les altitudes  $h_1 = 60$  km et  $h_2 = 70$  km (voir figure ci-dessus). Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme de cette charge, déterminer le champ électrique et le potentiel à une distance  $r$  du centre de la Terre comprise entre  $R_T$  et  $R_2 = R_T + h_2$ . Donner leurs allures en fonction de  $r$ .

### 12.8 Jonction P-N (★★)

Le germanium pur est un bon isolant électrique : tous les électrons sont engagés dans des liaisons chimiques et ne peuvent participer à la conduction électrique. Lorsqu'on introduit, en très faible concentration, des atomes ayant cinq électrons sur leur couche de valence (le germanium en a quatre) la conductivité électrique augmente : chaque atome étranger libère un électron de conduction dans le réseau cristallin. On obtient un semi-conducteur dopé **de type N** dont la conduction électrique est assurée par des électrons libres, de charge  $-e$ . En introduisant des atomes ayant trois électrons de valence, on obtient un semi-conducteur dopé **de type P** dont la conduction électrique est due à des porteurs positifs, appelés trous, de charge électrique  $+e$ .

On considère une jonction P-N constituée par l'association en  $x = 0$  d'un semi conducteur de type P (occupant le demi espace  $x < 0$ ) et d'un semi conducteur de type N (occupant le demi espace  $x > 0$ ). On note  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) le nombre de trous (resp. d'électrons libres) par unité de volume dans le semi-conducteur de type P (resp. de type N).

Au moment de la création de la jonction les électrons du semi-conducteur dopé N ont tendance à diffuser dans le semi conducteur dopé P en même temps que les porteurs de charge positifs du semi conducteur dopé P ont tendance à diffuser dans le semi-conducteur dopé N. Finalement, la région  $0 < x < L_2$ , initialement neutre est vidée de ses électrons et devient uniformément chargée positivement avec une densité volumique de charge  $\rho(x) = N_2 e$  et la région  $-L_1 < x < 0$ , est vidée de ses porteurs de charge positifs et devient uniformément chargée négativement avec une densité volumique de charge  $\rho(x) = -N_1 e$ . Il n'y a pas de modification des semi-conducteurs dans les zones  $x < -L_1$  et  $x > L_2$ . La jonction est suffisamment large pour être considérée comme invariante par toute translation dans le plan ( $Oyz$ ).

1. La jonction étant globalement neutre, écrire la relation vérifiée par  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $L_1$  et  $L_2$ . Représenter la distribution volumique de charge  $\rho(x)$ .
2. En utilisant les résultats du cours sur le champ créé par un plan infini, que peut-on dire du champ électrostatique pour  $x \ll -L_1$  et  $x \gg L_2$  ?

**3.** On admettra que les lois de l'électrostatique s'appliquent dans les semi-conducteurs à condition de remplacer la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  où est  $\epsilon_r$  la permittivité relative. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(x)$  en tout point de l'espace en fonction de  $x$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $L_1$  et  $L_2$ ,  $e$  et  $\epsilon$ . Représenter la composante non nulle de  $\vec{E}(x)$  en fonction de  $x$ .

**4.** Déterminer le potentiel électrique  $V(x)$  en tout point de l'espace en fonction de  $x$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $L_1$  et  $L_2$ ,  $e$  et  $\epsilon$ . On prendra  $V(0) = 0$ . Représenter graphiquement  $V(x)$

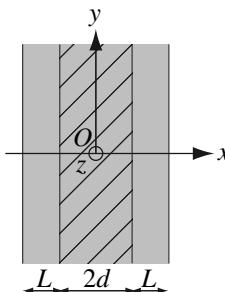
Exprimer la différence de potentiel  $V_D$  entre les régions N et P.

**5. Application numérique :** Dans le cas d'une diode au silicium,  $N_1 = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ,  $N_2 = 2 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ,  $\epsilon_r = 11,3$ ,  $V_D = 0,7 \text{ V}$ . Calculer l'épaisseur  $d = L_1 + L_2$  de la jonction. On rappelle que  $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ SI}$  et  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### 12.9 Séparation de charges dans un plasma à une dimension (★★)

Un plasma est un milieu gazeux ionisé dans lequel la répartition des charges négatives (principalement des électrons) et des charges positives (les cations) satisfait approximativement la neutralité électrique. Une éventuelle séparation des charges positives et négatives fait en effet naître un champ électrique qui tend à la faire disparaître. Dans cet exercice, on examine ce champ électrique et on introduit la longueur de Debye qui caractérise la séparation des charges due à l'agitation thermique des charges du plasma.

Pour simplifier, on considère le plasma comme un milieu continu à une dimension constitué de cations mono-chargés immobiles et d'électrons en agitation thermique à la température  $T$ . Les cations sont uniformément répartis, en concentration  $n$ , entre deux plans parallèles infinis distants de  $2d$ . Les électrons, en même nombre global que les cations, sont uniformément répartis dans un volume qui englobe celui qu'occupent les cations et a une épaisseur supplémentaire  $L$  de chaque côté (voir figure ci-dessous). On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cartésiennes dans le repère ( $Oxyz$ ) dont l'origine est sur le plan médian de la distribution et l'axe Ox est normal aux plans limitant les distributions de charges.



**1.** Indiquer les propriétés de symétrie de la distribution de charges et leurs conséquences sur le champ électrique et le potentiel créés en tout point de l'espace.

**2. a.** Déterminer le champ électrique  $\vec{E}_c$  créé en tout point de l'espace par les cations.

**b.** En déduire le potentiel électrostatique  $V_c$  correspondant.

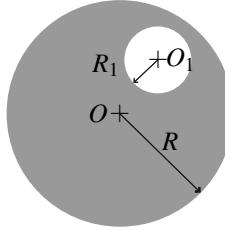
**c.** Représenter graphiquement les variations du champ et du potentiel.

## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

- 3. a.** Déterminer le champ  $\vec{E}_e$  et le potentiel  $V_e$  créés en tout point de l'espace par les électrons.
- b.** En déduire une représentation graphique du champ  $E$  et du potentiel  $V$  créés par l'ensemble du plasma.
- c.** Calculer la variation d'énergie potentielle d'un électron du plasma se déplaçant entre les abscisses  $x = d$  et  $x = d + L$ .
- 4. a.** En admettant que la barrière d'énergie potentielle qui vient d'être mise en évidence est de l'ordre de l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique  $\frac{1}{2}k_B T$ ,  $k_B$  étant la constante de Boltzmann, et que  $L \ll d$ , estimer la longueur  $L$  appelée longueur de Debye.
- b.** Commenter la variation de  $L$  avec la densité  $n$  du plasma et la température  $T$  des électrons.
- c.** Application numérique : calculer  $L$  pour  $n = 10^6$  ou  $10^{14}$  cations par  $\text{cm}^3$  et  $T = 300$  ou  $10^8$  K.

## CORRIGÉS

## 12.1 Grotte sphérique



On va utiliser le théorème de superposition en décomposant le système en une boule pleine  $\mathcal{B}_1$ , de rayon  $R$ , de centre  $O$ , de masse volumique  $\rho$  et une boule pleine  $\mathcal{B}_2$  de rayon  $R_1$ , de centre  $O_1$ , de masse volumique  $-\rho$ . Dans la grotte, on aura bien par superposition une masse volumique nulle  $((+\rho) + (-\rho)) = 0$ .

D'autre part, on utilise l'analogie entre l'électrostatique et la gravitation.

Une sphère de masse volumique uniforme possède la symétrie sphérique. On travaille bien sûr en coordonnées sphériques de centre  $O$ .

Tout plan contenant son centre et le point  $M$  où on cherche le champ est plan de symétrie de la distribution de masse donc le champ gravitationnel en  $M$ , qui appartient à tous ces plans, est porté par  $\vec{u}_r : \vec{G}(M) = G(M) \vec{u}_r$ .

Par ailleurs, la distribution de masse est invariante par toute rotation autour d'un axe qui passe par  $O$ , donc  $G(M)$  ne dépend que de  $r$ .

Finalement :  $\vec{G}(M) = G(r) \vec{u}_r$ .

On utilise alors le théorème de Gauss de la gravitation  $\Phi_G = -4\pi GM_{\text{int}}$ , en calculant le flux de  $\vec{G}$  à travers la sphère de centre  $O$  et passant par  $M$ , donc de rayon  $r$ . On obtient :

$$4\pi r^2 G(r) = -4\pi GM_{\text{int}}.$$

Seul le champ à l'intérieur de la sphère nous intéresse puisque un point  $M$  intérieur à la grotte est intérieur à la fois à  $\mathcal{B}_1$  et à  $\mathcal{B}_2$ .

Dans ce cas,  $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  et  $\vec{G}(r) = -\frac{4}{3}\pi\rho G r \vec{u}_r = -\frac{4}{3}\pi\rho G \overrightarrow{OM}$ .

Le champ créé par  $\mathcal{B}_1$  en  $M$  est  $\vec{G}_1(M) = -\frac{4}{3}\pi\rho G \overrightarrow{OM}$  et le champ créé par  $\mathcal{B}_2$  est  $\vec{G}_2(M) = \frac{4}{3}\pi\rho G \overrightarrow{O_1M}$ . Le champ total est donc :

$$\vec{G}(M) = \vec{G}_1(M) + \vec{G}_2(M) = -\frac{4}{3}\pi\rho G \overrightarrow{OO_1}.$$

Le champ gravitationnel est uniforme à l'intérieur de la grotte.

## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

**12.2 Sphère chargée non uniformément**

**1.** Le problème est à symétrie sphérique. Le champ électrostatique à l'intérieur de la boule est  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_r$ . Le théorème de Gauss à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r < R$  donne la charge  $Q(r)$  contenue dans cette sphère :  $Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E_0$ .

Or :  $Q(r) = \int_0^r \rho(u) 4\pi u^2 du$ . En dérivant cette équation par rapport à  $r$ , on obtient :

$$\rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}.$$

**2.** Pour  $r < R$  :  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_r$ .

Pour  $r > R$  on utilise le théorème de Gauss et on trouve :  $\vec{E} = E_0 R^2 / r^2 \vec{u}_r$ .

Pour déterminer  $V$ , on utilise la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  avec  $V$  continu en  $r = R$  et  $V$  tend vers 0 loin de la boule. On en déduit : pour  $r < R$ ,  $V(r) = E_0(2R - r)$  et pour  $r > R$ ,  $V(r) = E_0 R^2 / r$ .

**12.3 Modélisation d'un nuage mince**

**1.** Le calcul du champ créé par un plan infini a été fait dans le cours. Il vaut  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  pour  $z > h$  et  $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  pour  $z < h$ .

**2.** On utilise le théorème de superposition. Le champ créé par le plan (chargé  $-\sigma$ ) représentant le sol est  $\vec{E}_s = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$ .

Le champ total est la somme des deux, soit pour  $0 < z < h$  :  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ .

**3.** La relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  donne ici :  $-\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0}$ , compte tenu du fait que  $V(0) = 0$ .

**4.** La différence de potentiel entre le sol et le nuage est  $\Delta V = V(h) - V(0) = \sigma h / \epsilon_0$ . La charge portée par une armature du condensateur est  $Q = \sigma S$  où  $S$  est la surface du nuage. On en déduit la capacité :  $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S\epsilon_0}{h} = 0,44 \mu\text{F}$ .

**5.**  $\Delta V = V_0 = |E| h$ . L'application numérique donne  $V_0 = 50 \text{ MV}$ .

**12.4 Atome d'hydrogène**

**1.** La charge  $Q(r)$  s'obtient grâce au théorème de Gauss. Pour cela, il faut commencer par calculer le champ électrostatique. Or  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$ . Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

On applique ensuite le théorème de Gauss en prenant pour surface une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  :  $\Phi_E = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$  avec  $\Phi_E = 4\pi r^2 E(r)$ . On en déduit :

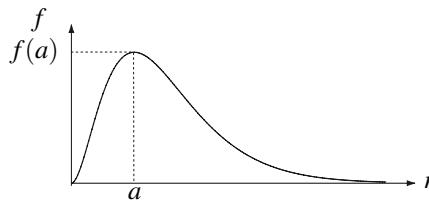
$$Q(r) = q \left( 1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

**2.** La charge de la pellicule sphérique  $\{r, r + dr\}$  est :  $dQ = Q(r + dr) - Q(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ .  
On en déduit la densité volumique de charge :  $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dr} = -\frac{q}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ .

Par ailleurs,  $Q(0) = q$  donc en  $r = 0$  se trouve une charge ponctuelle de valeur  $q$ , c'est le noyau de l'atome d'hydrogène.

Enfin, quand  $r$  tend vers l'infini,  $Q(r)$  tend vers 0. L'atome est neutre, la charge négative  $-q$  est répartie dans tout l'espace.

**3.** La courbe représentative de  $f(r)$  est :



$f(r)$  est nulle en  $r = 0$  et tend vers zéro quand  $r$  tend vers l'infini. Elle passe par un maximum pour  $r = a$ , qui représente le rayon de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.

**4.** L'énergie de liaison peut être définie comme l'énergie à fournir pour « casser » le système. Si on appelle  $V_e$  le potentiel créé par le nuage électronique seul,  $\mathcal{E}_{\text{liaison}} = q(V_e(\infty) - V_e(0))$ .

Or  $V_e(r) = V(r) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ , c'est à dire le potentiel créé par l'ensemble de l'atome, moins le potentiel créé par le noyau. D'où  $V_e(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) - 1 \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ .

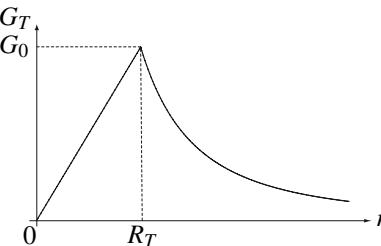
Finalement :  $\mathcal{E}_{\text{liaison}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

## 12.5 Champ de gravitation terrestre

**1. a.** En suivant la même démarche que dans le cours et en utilisant le théorème de Gauss pour la gravitation, on établit :

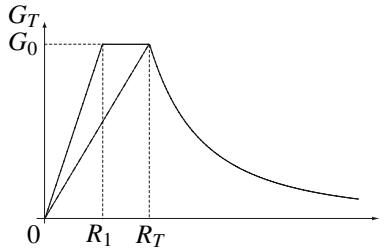
$$\begin{cases} \text{pour } r < R_T : & \vec{G}(r) = -\frac{4\pi\mathcal{G}}{3} \rho r \vec{u}_r = -\frac{M_T \mathcal{G}}{R_T^3} r \vec{u}_r \\ \text{pour } r > R_T : & \vec{G}(r) = -\frac{\mathcal{G} M_T}{r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

**b.** La courbe représentative de  $G(r)$  est :



## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

c.  $G_0 = \frac{M_T \mathcal{G}}{R_T^2} = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$ .



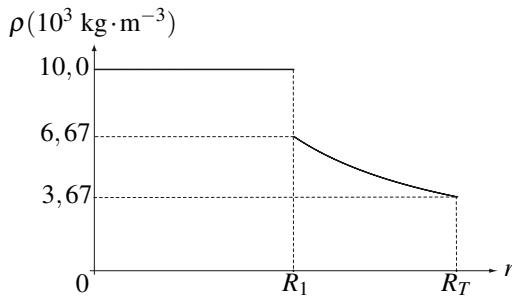
2. a. La courbe en traits mixtes représente le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre quand la répartition de masse est uniforme. Pour  $r > R_T$ , les deux champs sont identiques puisque la masse contenue dans la sphère de rayon  $r \geq R_T$  est celle de la Terre, que la répartition de masse soit uniforme ou non. ce qui explique également que  $G_0$  est le même dans les deux cas.

b. Dans ce modèle, le noyau terrestre est homogène. Sa masse  $M_1$  est telle que  $G_0 = \frac{M_1 \mathcal{G}}{R_1^2}$ , donc  $M_1 = \left( M_T \frac{R_1}{R_T} \right)^2$ , il a donc une masse volumique  $\rho_1 = \frac{3M_T}{4\pi R_1 R_T^2} = 10,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  qui est  $\frac{R_T}{R_1}$  plus grande que la masse volumique moyenne de la Terre complète.

c. Dans le manteau terrestre, la masse volumique décroît en  $1/r$  comme on l'a vu dans l'exercice sur la sphère non uniformément chargée (le raisonnement est le même). En procédant comme dans l'exercice évoqué, on obtient :  $\rho(r) = \frac{2G_0}{4\pi \mathcal{G} r} = \frac{2M_T}{4\pi R_T^2 r}$ .

Récapitulons (on appelle  $\rho_0$  la masse volumique moyenne de la Terre) :

- pour  $r < R_1$ ,  $\rho(r) = \rho_0 \frac{R_T}{R_1}$  ;
- pour  $R_1 < r < R_T$ ,  $\rho(r) = \rho_0 \frac{2R_T}{3r}$ .



On constate une discontinuité de la masse volumique à l'interface manteau/noyau.

## 12.6 Énergie coulombienne de noyaux miroirs

**1.** On suppose qu'une sphère de rayon  $r$  a déjà été construite portant la densité volumique de charge  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$  de la sphère finale donc la charge  $q(r) = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$ . On va calculer le travail que l'opérateur doit fournir pour apporter une couche supplémentaire d'épaisseur  $dr$  de même densité volumique de charge. Il doit amener la charge  $dq = \rho \times 4\pi r^2 dr$  depuis l'infini, où le potentiel électrostatique est nul, jusqu'à la distance  $r$  où il vaut  $V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$  d'après le calcul effectué dans le cours. Le travail à fournir est égal à la variation d'énergie potentielle de la charge  $dq$ , soit :  $\delta W_{\text{op}} = dq(V(r) - 0) = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr$ . Ce travail est positif car l'opérateur doit constamment vaincre la force de répulsion coulombienne entre charges de même signe.

L'énergie de constitution de la sphère de rayon  $R$  complète est :

$$\mathcal{E} = \int \delta W_{\text{op}} = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R}.$$

**2.** On applique le résultat précédent avec  $Q = Z_1 e$  ou  $Z_2 e$ . On en déduit :

$$B_2 - B_1 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (Z_2^2 - Z_1^2)$$

d'où

$$R = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z_2^2 - Z_1^2)}{B_2 - B_1} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{A}{B_2 - B_1}.$$

Les valeurs de  $R$  calculées à partir de l'expression précédente sont données dans le tableau ci-dessous.

| A                        | 17  | 19  | 21  | 23  | 25  |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $R (10^{-15} \text{ m})$ | 4,1 | 3,6 | 3,7 | 3,7 | 3,9 |

L'énergie électrostatique du noyau 2 est plus forte que celle du noyau 1, ce qui diminue son énergie de liaison.

**3.**  $E_{pe} = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{4\pi\epsilon_0 r_C A^{1/3}}$  en joules et  $E_{pe} = \frac{3 \times 10^{-6}}{5} \frac{e Z^2}{4\pi\epsilon_0 r_C A^{1/3}}$  en MeV.

Avec  $r_C = 1,3 \times 10^{-15} \text{ m}$ , on obtient pour l'oxygène,  $E_p = 16,5 \text{ MeV}$  (13% de  $B_1$ ) et pour l'uranium,  $E_p = 907,7 \text{ MeV}$  (52% de  $B_1$ ). L'influence de l'énergie potentielle électrostatique sur l'énergie de liaison croît avec le nombre atomique.

## 12.7 Caractéristiques électrostatiques du voisinage de la Terre

**1.** La distribution de charges considérée ayant une symétrie sphérique,  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques. Pour tout point  $M$  tel que  $R_T < r < R$  avec  $R = R_T + h$ , le flux de  $\vec{E}$  à travers la sphère passant par  $M$  est :  $\Phi_E = 4\pi r^2 E(r)$ . D'après le théorème de Gauss :

## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

$\Phi_E = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0}$ , où  $Q(r)$  est la charge contenue dans la sphère de rayon  $r$ , soit ici :  $Q(r) = -Q$ .

Il vient donc :  $E(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Pour  $r$  très légèrement supérieur à  $R_T$ ,  $E(r) = -E_{\text{sol}}$  (le signe – vient du fait que le champ est dirigé vers le sol). Il vient donc :  $Q = 4\pi\epsilon_0 R_T^2 E_{\text{sol}}$  d'où  $\sigma = \frac{-Q}{4\pi R_T^2} = -\epsilon_0 E_{\text{sol}}$ .

Numériquement :  $Q = 4,5 \times 10^5$  C et  $\sigma = -8,8 \times 10^{-10}$  C.m<sup>-2</sup> =  $5,5 \cdot 10^6$  charges électriques par mètre carré.

2.  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}$ , donc  $V(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + h}\right)$  en choisissant l'origine des potentiels sur l'armature positive. La différence de potentiel demandée est donc

$$U = V(R_T + h) - V(R_T) = E_{\text{sol}} R_T \frac{h}{R_T + h}.$$

Numériquement :  $U = 6,9$  MV. On note que, comme  $h \ll R_T$ ,  $U \approx h E_{\text{sol}}$ , qui serait obtenu avec un condensateur plan.

3. Pour le calcul de  $\vec{E}$ , on utilise la même méthode qu'en 1, qui donne :

$$E(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{pour } R_T < r < R_1 = R_T + h \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( -Q + Q \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{R_2^3 - r^3}{R_2^3 - R_1^3} & \text{pour } R_1 < r < R_2. \end{cases}$$

Pour le calcul de  $V$ , on fait circuler  $\vec{E}$  le long d'une ligne de champ de  $R_1$  à  $R_2$ , puis de  $R_T$  à  $R_1$  en assurant la continuité du potentiel, ce qui conduit à :

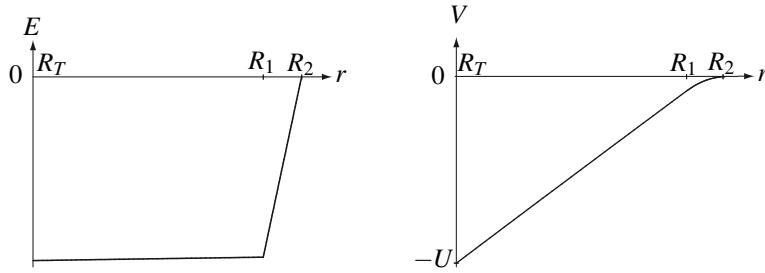
$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{3}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \right) & \text{pour } R_T < r < R_1 \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2^3 - R_1^3} \left( \frac{R_2^3}{r} + \frac{1}{2}(r^2 - 3R_2^2) \right) & \text{pour } R_1 < r < R_2, \end{cases}$$

l'origine des potentiels étant choisie en  $r = R_2$ . La différence de potentiel cherchée est alors :

$$U = R_T E_{\text{sol}} \left( 1 - \frac{3}{2} R_T \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \right),$$

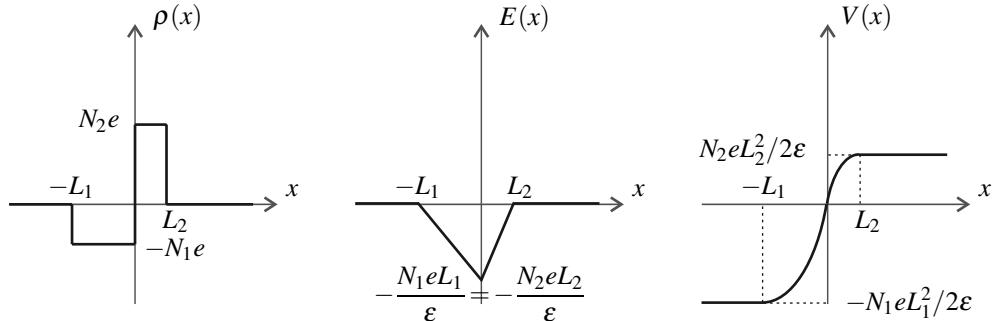
c'est-à-dire, numériquement,  $U = 6,4 \times 10^6$  MV.

L'examen de la courbe représentative de  $E(r)$  (figure ci-après à gauche) montre que  $E$  est pratiquement uniforme entre  $R_T$  et  $R_1$  ; il varie très rapidement entre  $R_1$  et  $R_2$ , ce qui est imposé par le modèle. Lorsque  $R_1 = R_2$ , on retrouve le modèle précédent. Quant au potentiel  $V(r)$  (figure ci-après à droite), il ne présente pas de point anguleux en  $r = R_1$ , puisque la dérivée en ce point, donnée par  $E$ , est continue.



### 12.8 Jonction P-N

1. La charge de la zone positive est équilibrée par la charge de la zone négative donc :  $N_1 L_1 = N_2 L_2$ .



2. Loin de la jonction, celle-ci apparaît comme deux plans infinis portant des charges surfaciques opposées. En utilisant le principe de superposition comme dans le cours lors de l'étude du condensateur, on montre que le champ électrostatique est nul loin de la distribution de charges.

3. Le problème étant invariant par translation parallèlement à ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ), le potentiel et le champ électrique ne dépendent que de  $x$ . De plus :  $\vec{E}(x) = -\nabla V(x) = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x = E(x) \vec{u}_x$ .

On utilise le théorème de Gauss pour calculer  $E(x)$ . Pour cela, on exprime le flux de  $\vec{E}$  à travers un cylindre de surface de base  $S$ , d'axe parallèle à  $\vec{u}_x$  compris entre les plans  $x = x_1$  et  $x = x_2$ . On choisit  $x_2 > L_2$ . On a alors :

$$\Phi_E = E(x_2)S - E(x_1)S = -E(x_1)S$$

puisque le champ est nul à l'extérieur.

Il faut maintenant distinguer les cas selon la position de  $x_1$  pour exprimer la charge intérieure.

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -L_1 \\ -N_1 e x_1 + N_2 e L_2 = -N_1 e (x_1 + L_1) & \text{si } -L_1 < x < 0 \\ N_2 e (x_1 - L_2) & \text{si } 0 < x < L_2 \\ 0 & \text{si } x > L_2 \end{cases}$$

## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient :

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -L_1 \\ \frac{-N_1 e}{\epsilon}(x + L_1) & \text{si } -L_1 < x < 0 \\ \frac{N_2 e}{\epsilon}(x - L_2) & \text{si } 0 < x < L_2 \\ 0 & \text{si } x > L_2 \end{cases}$$

**Remarque**

Le champ électrique est continu en  $x = 0$  grâce à la relation trouvée à la première question.

- 4.** On intègre la relation entre le champ et le potentiel en tenant compte de  $V(0) = 0$  et de la

continuité du potentiel :  $V(x) = \begin{cases} -\frac{N_1 e L_1^2}{2\epsilon} & \text{si } x < -L_1 \\ \frac{-N_1 e}{\epsilon}(\frac{x^2}{2} + L_1 x) & \text{si } -L_1 < x < 0 \\ \frac{N_2 e}{\epsilon}(\frac{x}{2} - L_2 x) & \text{si } 0 < x < L_2 \\ \frac{N_2 e L_2^2}{2\epsilon} & \text{si } x > L_2 \end{cases}$

**5.**  $V_D = \frac{N_1 e L_1^2 + N_2 e L_2^2}{2\epsilon}$ .

**6.**  $L_1 = \sqrt{\frac{N_2}{N_1(N_1 + N_2)} \frac{2\epsilon V_D}{e}} = 2,9 \times 10^{-6} \text{ m}$  et  $L_2 = \frac{N_1}{N_2} L_1 = 1,5 \times 10^{-8} \text{ m}$ . La largeur de la jonction est  $d = L_1 + L_2 \simeq L_1 = 2,9 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

**12.9 Séparation de charges dans un plasma à une dimension**

- 1.** Pour tout point  $M$ , la droite parallèle à  $Ox$  passant par  $M$  est axe de révolution, donc  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_x$ . La distribution de charges est invariante par toute translation parallèlement à  $Oyz$ , donc  $E(M)$  ne dépend que de  $x$ . En définitive,  $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$  et  $V(M) = V(x)$ .

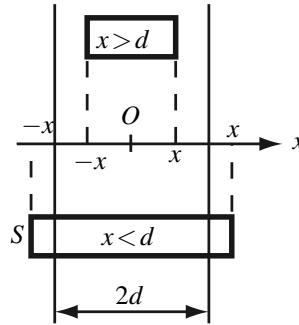
De plus,  $Oyz$  est plan de symétrie de la distribution donc,  $E(-x) = -E(x)$  et  $V(-x) = V(x)$ .

- 2. a.** Pour  $x > 0$ , on applique le théorème de Gauss à un cylindre (figure ci-dessous) de longueur  $2x$ , de section  $S$ , symétrique par rapport à  $Oyz$  et d'axe parallèle à  $(Ox)$  (voir figure). Dans les deux cas,  $\Phi_E = 2E(x)S$ . La charge intérieure est  $Q_{\text{int}} = 2xS \times ne$  pour  $x < d$  et  $Q_{\text{int}} = 2dS \times ne$  pour  $x > d$ .

D'où :  $\vec{E}_c(M) = \frac{ne}{\epsilon_0} x \vec{u}_x$  pour  $-d \leq x \leq d$ ,  $\vec{E}_c(M) = \frac{ned}{\epsilon_0} \vec{u}_x$  pour  $x \geq d$ , et  $\vec{E}_c(M) = -\frac{ned}{\epsilon_0} \vec{u}_x$  pour  $x \leq -d$  puisque  $E(x)$  est une fonction impaire.

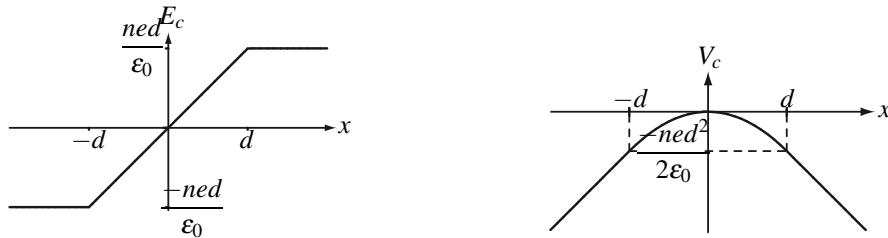
**b.**  $\frac{dV_c}{dx} = -E$  et  $V_c$  est continu, d'où, en choisissant l'origine des potentiels en  $x = 0$ ,

$$V_c(x) = -\frac{ne}{2\epsilon_0} x^2 \text{ pour } -d \leq x \leq d, V_c(x) = -\frac{ned}{\epsilon_0} \left(x - \frac{d}{2}\right) \text{ pour } x \geq d \text{ et } V_c(x) = \frac{ned}{\epsilon_0} \left(x + \frac{d}{2}\right)$$



pour  $x \leq -d$ , puisque  $V(x)$  est une fonction paire.

c. Courbes de  $E_c(x)$  et  $V_c(x)$  :



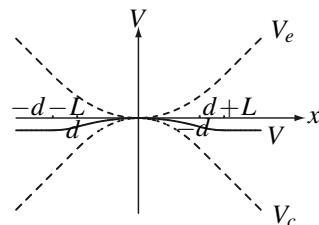
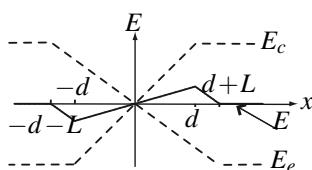
3. a. La neutralité électrique impose  $nd = n_e(d + L)$ ,  $n_e$  étant la concentration d'électrons.  
Pour  $0 \leq x \leq d + L$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_e(M) = -\frac{n_e}{\epsilon_0} \frac{d}{d+L} x \vec{u}_x \\ V_e(M) = \frac{n_e}{2\epsilon_0} \frac{d}{d+L} x^2 \end{cases}$$

et pour  $x \geq d + L$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_e(M) = -\frac{n_e d}{\epsilon_0} \vec{u}_x \\ V_e(M) = \frac{n_e d}{\epsilon_0} \left( x - \frac{d+L}{2} \right) \end{cases}$$

b. Pour construire les courbes de  $E(x)$  et  $V(x)$ , on ajoute les contributions des cations et des électrons :



## CHAPITRE 12 – EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

**c.** L'énergie potentielle d'un électron du plasma situé à l'abscisse  $x$  est  $E_p = -eV(x)$ , donc pour un électron se déplaçant de l'abscisse  $d$  à l'abscisse  $d + L$ , la variation d'énergie potentielle est :

$$\Delta E_p = E_p(d + L) - E_p(d) = \frac{ne^2}{2\epsilon_0} \frac{dL^2}{d + L}.$$

On observe que  $\Delta E_p$  est positive, ce qui représente une barrière d'énergie potentielle que l'électron considéré ne peut franchir que si son énergie cinétique initiale est supérieure à  $\Delta E_p$ .

**4. a.** Si  $\Delta E_p \simeq \frac{1}{2}kT \Leftrightarrow L \simeq \left( \frac{\epsilon_0 k T}{n e^2} \right)^{1/2}$ , les électrons situés à  $x = d$  ont la possibilité de franchir cette barrière d'énergie potentielle.

**b.**  $L$  diminue lorsque  $n$  augmente, car le champ électrique dû à la séparation de charges est alors plus fort et  $T$  fixe la barrière de potentiel que peuvent franchir les électrons grâce à leur énergie cinétique ;  $\vec{E}$  agit donc sur une longueur plus courte.

$L$  augmente lorsque  $T$  augmente, car la barrière de potentiel que peuvent franchir les électrons est plus grande ;  $\vec{E}$  agit donc sur une longueur plus longue.

**c.** Les valeurs de  $L$  sont rassemblées dans le tableau ci-contre.

Dans le cas (2), la neutralité électrique du plasma, qui nécessite  $d \gg L$ , est difficilement réalisée.

| cas | $n (\text{cm}^{-3})$ | $T (\text{K})$ | $L$                |
|-----|----------------------|----------------|--------------------|
| (1) | $10^6$               | 300            | 1,2 mm             |
| (2) | $10^6$               | $10^8$         | 69 cm              |
| (3) | $10^{14}$            | 300            | 0,12 $\mu\text{m}$ |
| (4) | $10^{14}$            | $10^8$         | 69 $\mu\text{m}$   |

# Dipôle électrostatique

L'étude du dipôle électrostatique, ensemble de deux charges électrique égales et opposées, revêt une grande importance notamment en chimie. Ce modèle permet d'expliquer par exemple les interactions de nature électrostatique qui existent à l'échelle microscopique.

On va s'intéresser au dipôle électrostatique sous deux aspects : un aspect actif en étudiant le champ et le potentiel créés à grande distance et un aspect passif en étudiant les actions subies par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur.

## 1 Potentiel et champ créés

### 1.1 Introduction

La matière est globalement neutre. Certaines molécules, comme la molécule d'HCl ou celle d'H<sub>2</sub>O sont neutres mais le barycentre des charges positives (les noyaux) et celui des charges négative (les électrons) ne sont pas confondus. Cela est dû à des électronégativités différentes des atomes composant la molécule et/ou à la géométrie de celle-ci.

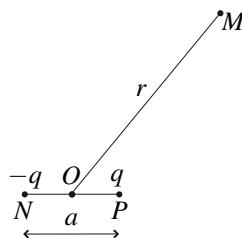
De plus, sous l'action d'un champ électrique extérieur, un atome ou une molécule va se déformer, les charges positives étant attirées dans un sens et les charges négatives dans l'autre.

La distribution de charges constituée de deux charges de même valeur absolue mais de signes contraires se rencontre donc couramment à l'échelle microscopique. C'est ce type de distribution qui fait l'objet de ce chapitre.

### 1.2 Dipôle électrostatique, approximation dipolaire

Un **dipôle électrostatique** est un ensemble de deux charges opposées  $-q$  et  $q$  avec  $q > 0$ , assimilées à des charges ponctuelles, dont on étudie les effets à une distance grande devant leur distance mutuelle (voir figure 13.1).

Plus généralement, le dipôle électrostatique constitue un modèle simple de distributions de charges totale nulle lorsque l'on cherche à décrire leur action à un distance grande devant la taille caractéristique de la distribution. Dans ce cas, le point  $N$  sera le barycentre des charges négatives, le point  $P$  celui des charges positives et la charge  $q$  la somme des charges positives de la distribution.

Figure 13.1 – Dipôle électrostatique ( $r \gg a$ ).**Remarque**

Deux charges de signes opposés ont tendance à s'attirer. Si les deux charges restent à une distance donnée, c'est que d'autres interactions interviennent.

### 1.3 Moment dipolaire

Le moment dipolaire de la distribution est :  $\vec{p} = q\vec{NP}$ .

Le vecteur moment dipolaire est dirigé de la charge négative vers la charge positive.

Le module du moment dipolaire,  $p = qa$ , s'exprime en C.m.

À l'échelle d'une molécule,  $q$  est de l'ordre de grandeur de la charge élémentaire et  $a$  de la taille d'un atome. L'ordre de grandeur des moments dipolaires moléculaire est donc de  $10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$ . On préfère souvent les donner en debye, de symbole D, de valeur :  $1 \text{ D} = 3,336 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$ .

#### a) Analyse des symétries et des invariances

Le système de coordonnées choisi pour étudier le potentiel et le champ créés par le dipôle est celui des coordonnées sphériques d'axe celui du dipôle, que l'on appellera ( $Oz$ ).

La distribution de charge est invariante par rotation autour de l'axe du dipôle, donc le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  et le potentiel  $V(M)$  ne dépendent pas de l'angle  $\varphi$ , mais uniquement de  $r$  et de  $\theta$ .

De plus, le plan qui contient le point  $M$  où on cherche le champ et l'axe ( $Oz$ ) est un plan de symétrie de la distribution de charges puisque celle-ci est entièrement contenue dedans : le champ électrostatique créé par le dipôle en  $M$  appartient à ce plan, il n'a donc pas de composante selon  $\vec{u}_\varphi$ .

On se place donc dans un plan  $\varphi = \text{constante}$  et on repère un point  $M$  par ses deux autres coordonnées sphériques :  $r$  et  $\theta$ . L'origine du repère est prise en  $O$ , milieu du segment  $NP$  (voir figure 13.2).

**Remarque**

Les coordonnées  $r$  et  $\theta$  sont aussi les coordonnées polaires du point  $M$  dans le plan  $\varphi=\text{constante}$ .

## 1.4 Potentiel créé par un dipôle électrostatique

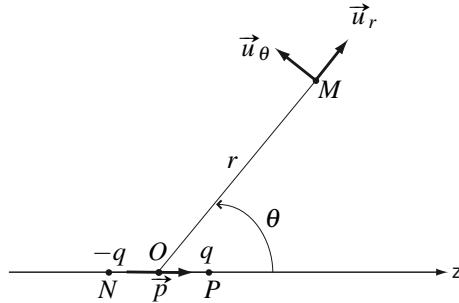


Figure 13.2 – Dipôle électrostatique.

Le potentiel créé en  $M$  par le dipôle est :

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 MN} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 MP} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right).$$

Il faut maintenant tenir compte du fait que  $r \gg a$ .

Pour cela, on exprime :

$$\begin{aligned} MP^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP})^2 = MO^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= r^2 + \frac{a^2}{4} - 2r \frac{a}{2} \cos \theta = r^2 \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right), \end{aligned}$$

puis :  $\frac{1}{MP} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$ , au premier ordre en  $\frac{a}{r}$ .

De même :

$$\begin{aligned} NP^2 &= (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP})^2 = NO^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= r^2 + \frac{a^2}{4} + 2r \frac{a}{2} \cos \theta = r^2 \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right), \end{aligned}$$

puis :  $\frac{1}{NP} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$ , au premier ordre en  $\frac{a}{r}$ .

On en déduit  $V(M)$  dans le cadre de l'approximation dipolaire, c'est-à-dire au premier ordre en  $\frac{a}{r}$  :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos \theta}{r^2}.$$

On remarque que :  $qa \cos \theta = p \cos \theta = \vec{p} \cdot \vec{u}_r = \vec{p} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ .

Le potentiel créé par le dipôle est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3}. \quad (13.1)$$

### Remarque

La deuxième expression du potentiel ne dépend pas du système de coordonnées choisi, c'est une expression intrinsèque qui sera intéressante quand on superposera les effets de plusieurs dipôles.

## 1.5 Champ créé par un dipôle électrostatique

Le champ se déduit du potentiel grâce à la relation :  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$ .

Avec l'expression du gradient en coordonnées sphériques (voir appendice mathématique) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi,$$

on obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta.$$

Cette expression est équivalente à la formule intrinsèque (c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées) suivante :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 OM^5} \left( 3(\vec{p} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - OM^2 \vec{p} \right).$$

Pour le vérifier il suffit de remplacer les différents termes :  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ ,  $OM = r$ ,  $\vec{p} = p \cos \theta \vec{u}_r - p \sin \theta \vec{u}_\theta$  et  $\vec{p} \cdot \vec{OM} = pr \cos \theta$ .

Le champ créé par le dipôle est :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 OM^5} \left( 3(\vec{p} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - OM^2 \vec{p} \right). \end{aligned} \quad (13.2)$$

### Remarque

Champ et potentiel électrostatiques s'expriment en fonction du moment dipolaire  $\vec{p}$  et non en fonction de  $a$  et de  $q$  séparément : le moment dipolaire est bien la grandeur caractéristique du dipôle.



La méthode utilisée : calcul du potentiel puis de son gradient pour trouver le champ, est la plus simple. Le calcul direct du champ électrostatique est beaucoup plus compliqué car les champs créés par les deux charges ne sont pas colinéaires et le développement limité est bien plus délicat à effectuer.

## 1.6 Topographie du champ

### a) Analyse qualitative

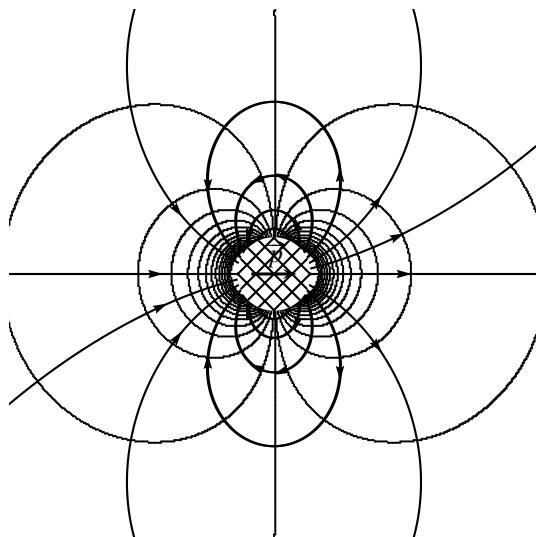
Le potentiel créé par le dipôle décroît en  $\frac{1}{r^2}$  et le champ en  $\frac{1}{r^3}$  alors que pour une charge ponctuelle, il décroissent respectivement en  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r^2}$  : les effets d'un dipôle se font ressentir à moins grande distance que ceux d'une charge seule.

Le plan  $\theta = \pi/2$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges s'identifie à  $-\vec{u}_z$  en un point de ce plan), il est bien orthogonal au plan.

Le plan  $\theta = 0$  est un plan de symétrie de la distribution de charges. En un point de ce plan,  $\vec{E}$  est porté uniquement par  $\vec{u}_r$ , qui est égal à  $\vec{u}_z$  en un point de l'axe ( $Oz$ ), il appartient bien au plan.

### b) Carte de lignes de champ et des équipotentielles

La carte des lignes de champ et des équipotentielles du dipôle, obtenue à l'aide d'un logiciel d'intégration numérique est représentée sur la figure 13.3.



**Figure 13.3 –** Lignes de champ et équipotentielles créées par un dipôle électrostatique.

La zone hachurée est trop proche des charges et l'approximation dipolaire n'y est pas valable. On observe bien que les équipotentielles et les lignes de champ sont orthogonales en tout point.

La figure en trois dimensions s'obtient par rotation de celle-ci autour de l'axe du dipôle.

## 1.7 Application aux molécules polaires

Les atomes dans leur état fondamental sont neutres et on peut en première approximation les considérer comme à symétrie sphérique. On en déduit que :

- la somme des charges est nulle ;
- le barycentre des charges positives et celui des charges négatives sont confondus. Le moment dipolaire des atomes est nul.

En revanche, les molécules, bien que globalement neutres, peuvent présenter un moment dipolaire non nul. En effet, la disposition spatiale des atomes et/ou leur différence de propriétés les rendent dissymétriques : les barycentres des charges positives et des charges négatives peuvent ne pas être confondus. Dans ce cas, on a une distribution dipolaire. On parle alors de **moment dipolaire permanent**.

On peut noter que les moments dipolaires permanents sont d'autant plus grands que la molécule est dissymétrique.

Comme on l'a déjà signalé, on n'utilise pas l'unité du système international le coulomb mètre (C.m) : cette unité n'est pas adaptée aux ordres de grandeurs rencontrés en chimie. On préfère le debyé de symbole D :  $1 \text{ D} = 3,336 \times 10^{-30} \text{ C.m}$

| Molécule                                  | Moment dipolaire permanent (D) |
|---|--------------------------------|
| chlorure d'hydrogène HCl                  | 1,08                           |
| eau $\text{H}_2\text{O}$                  | 1,85                           |
| monoxyde de carbone CO                    | 0,11                           |
| ammoniac $\text{NH}_3$                    | 1,49                           |
| acide nitrique $\text{HNO}_3$             | 2,17                           |
| propène $\text{CH}_3\text{CHCH}_2$        | 0,35                           |
| éthanol $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ | 1,70                           |
| éthanal $\text{CH}_3\text{CHO}$           | 2,70                           |

Tableau 13.1 – Quelques valeurs de moments dipolaires moléculaires.

## 2 Action d'un champ extérieur sur un dipôle

### 2.1 Cas d'un champ uniforme

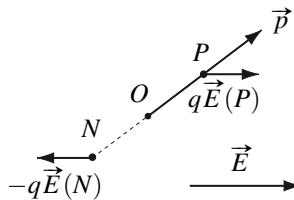
On s'intéresse tout d'abord à l'action subie par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur uniforme.

#### a) Force exercée sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur uniforme

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est la somme des forces exercées par le champ extérieur sur chacune des deux charges :

$$\vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N).$$

Si le champ est uniforme  $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$  et  $\vec{F} = \vec{0}$ .



**Figure 13.4 – Action d'un champ électrostatique uniforme sur un dipôle.**

La résultante des actions subies par un dipôle dans un champ électrostatique uniforme est nulle.

### b) Moment exercé sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur uniforme

De la même manière, le moment qui s'exerce sur le dipôle est :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_0 &= \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge q\vec{E}(N) \\ &= q(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E} \\ &= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ &= \vec{p} \wedge \vec{E}.\end{aligned}$$

On notera que le moment obtenu est indépendant du point où on le calcule.

Le moment des actions subies par un dipôle dans un champ électrostatique uniforme est égal à  $\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}$ . Il est indépendant du point où on le calcule.

### c) Analyse qualitative de l'action d'un champ électrostatique extérieur uniforme sur un dipôle

On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  et  $\vec{k}$  un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$ . Le moment des actions subies par le dipôle s'écrit :

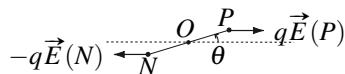
$$\vec{\mathcal{M}}_0 = pE \sin \theta \vec{k}.$$

D'après le théorème du moment cinétique, le dipôle sera en équilibre si  $\vec{\mathcal{M}}_0$  est nul donc si  $\sin \theta = 0$ , donc si  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

Les positions d'équilibre d'un dipôle dans un champ électrostatique uniforme correspondent à des positions parallèle ou antiparallèle au champ électrostatique.

Ces positions sont-elles stables ? Pour le savoir, on regarde comment évolue le dipôle si on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre.

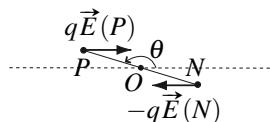
- $\theta = 0$  :



**Figure 13.5** – Stabilité de la position parallèle.

Les forces sur les deux charges tendent à ramener le dipôle dans sa position d'équilibre, donc la position  $\theta = 0$  est stable.

- $\theta = \pi$  :



**Figure 13.6** – Stabilité de la position antiparallèle.

Les forces sur les deux charges tendent à éloigner le dipôle de sa position d'équilibre, donc la position  $\theta = \pi$  est instable.

Un champ électrostatique uniforme tend à orienter les dipôles suivant les lignes de champ.

## 2.2 Cas d'un champ non uniforme

Dans le cadre du programme, les expressions de la résultante et du moment résultant de l'action d'un champ extérieur non uniforme seront toujours fournies. Il est quand même intéressant de savoir d'où viennent ces expressions, c'est pourquoi on donnera une idée de leur démonstration. L'analyse qualitative du phénomène est, elle, à retenir.

### a) Force exercée sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur non uniforme

La force s'exprime par :

$$\vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N) = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N)).$$

Le champ extérieur n'étant pas uniforme, cette force n'est pas nulle : il faut tenir compte des variations du champ entre  $P$  et  $N$ . Or la définition d'un dipôle impose à la distance  $PN$  d'être faible devant les distances caractéristiques du problème donc en particulier devant la distance caractéristique des variations du champ électrostatique extérieur auquel le dipôle est soumis. Par conséquent, on peut effectuer un développement limité du champ électrostatique en  $P$  et en  $N$ . Il s'agit du développement limité de chacune des trois composantes cartésiennes du champ extérieur, chacune de ces composantes étant fonction des trois coordonnées  $(x, y, z)$ .

Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées du milieu de  $[PN]$  et  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  les composantes de  $\overrightarrow{NP}$ . Les coordonnées des points  $P$  et  $N$  sont donc respectivement :  $(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2})$  et  $(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2})$ .

On en déduit pour la composante suivant  $Ox$  de la résultante de l'action subie par le dipôle :

$$F_x = q \left( E_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - E_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right).$$

Or  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont petites devant la distance caractéristique  $D$  de variation de  $E_x$ , ce qui justifie le développement au premier ordre en  $\Delta x/D$ ,  $\Delta y/D$  et  $\Delta z/D$ . Le calcul que nous ne détaillerons pas ici donne :

$$F_x = q \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta z \right) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

on montre de même que :

$$F_y = q \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_y}{\partial z} \Delta z \right) = p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

et que :

$$F_z = q \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta z \right) = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Ces formules ne sont pas à retenir : elles seront fournies si elles sont nécessaires.

Il existe une formule plus simple dans le cas d'un **dipôle rigide**. Un dipôle est rigide si la norme de son moment dipolaire est constante. Il est en particulier indépendant du champ appliqué. Dans ce cas, on peut utiliser l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  (voir ci-dessous) et on a l'expression plus simple :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

### b) Moment exercé sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur non uniforme

On pose  $\vec{E}(P) = \vec{E}(O) + \delta \vec{E}(P)$  et  $\vec{E}(N) = \vec{E}(O) + \delta \vec{E}(N)$ .

On procède pour le moment comme pour la force en limitant les développements limités au premier ordre non nul :

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \overrightarrow{OP} \wedge q \vec{E}(P) + \overrightarrow{ON} \wedge (-q \vec{E}(N)) \\ &= q \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{E}(O) + \delta \vec{E}(P)) - q \overrightarrow{ON} \wedge (\vec{E}(O) + \delta \vec{E}(N)) \\ &= q (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E}(O) + q (\overrightarrow{OP} \wedge \delta \vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge \delta \vec{E}(N)) \\ &\simeq q \overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}(O) \\ &= \vec{p} \wedge \vec{E}(O) \end{aligned}$$

en négligeant les termes du premier ordre par la suite pour ne garder que le terme d'ordre zéro qui est non nul. Finalement, l'expression du moment ne change pas par rapport au cas du champ uniforme.

**c) Analyse qualitative de l'action d'un champ électrostatique extérieur non uniforme sur un dipôle rigide**

L'effet d'un champ extérieur non uniforme dépend à la fois de la résultante et du moment qui s'exercent sur le dipôle.

Le moment tend, comme dans le cas du champ uniforme, à orienter le dipôle dans le sens des lignes de champ. Ce sera l'action principale d'un champ extérieur, qu'il soit ou non uniforme. En effet, à l'échelle du dipôle, tout champ est en première approximation uniforme.

L'effet principal d'un champ extérieur sur un dipôle est de l'orienter suivant les lignes de champ.

Quand le champ n'est pas uniforme, on doit ajouter l'effet de la résultante exprimée plus haut. Prenons l'exemple d'un champ électrostatique  $\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$  avec  $E(x) > 0$ , et d'un dipôle orienté dans la direction de ce champ,  $\vec{p} = p \vec{u}_x$ . Dans ce cas  $\vec{F} = p \frac{dE}{dx} \vec{u}_x = F \vec{u}_x$ . Si le dipôle est de même sens que le champ,  $p > 0$ , donc  $F$  a le signe de  $\frac{dE}{dx}$  : la force est orientée dans le sens des champs croissants.

Un dipôle orienté dans le sens du champ est attiré vers les zones de champ intense.

### 2.3 Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique extérieur

**a) Expression de l'énergie potentielle**

On s'intéresse maintenant à l'énergie potentielle électrostatique d'un dipôle dans un champ extérieur.

Soit  $V$  le potentiel associé au champ dans lequel est placé le dipôle.

L'énergie potentielle du dipôle dans le champ extérieur est la somme des énergies potentielles de chacune de ses charges :

$$\mathcal{E}_p = qV(P) - qV(N) = q(V(P) - V(N)).$$

On appelle  $O$  le milieu du segment  $[PN]$  et on suppose les dimensions du dipôle faibles devant la distance caractéristique de variation du champ. Par définition du gradient :

$$V(P) - V(O) \simeq \overrightarrow{\text{grad}} V(O) \cdot \overrightarrow{OP} = -\vec{E}(O) \cdot \overrightarrow{OP},$$

$$\text{et de même : } V(N) - V(O) = \overrightarrow{\text{grad}} V(O) \cdot \overrightarrow{ON} \simeq -\vec{E}(O) \cdot \overrightarrow{ON}.$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_p = -q\vec{E}(O) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) = -q\overrightarrow{NP} \cdot \vec{E}(O) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(O).$$

L'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ extérieur est :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (13.3)$$

Cette énergie correspond à l'énergie que doit fournir un opérateur extérieur pour amener le dipôle supposé rigide et déjà constitué depuis l'infini jusqu'à sa position actuelle.

**Remarque**

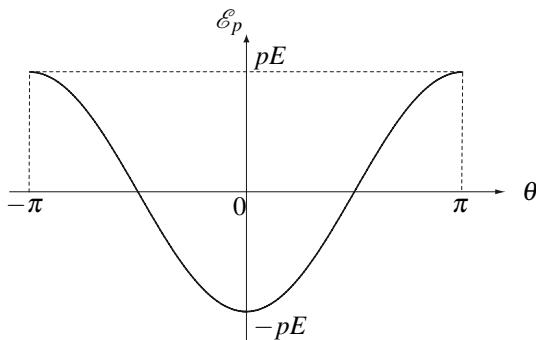
L'action d'un champ extérieur, résultante, moment et énergie, s'exprime en fonction du vecteur moment dipolaire et non de la charge et de la distance entre les deux charges séparément. Le vecteur moment dipolaire permet d'exprimer le champ créé et les actions subies, c'est bien la grandeur appropriée pour décrire une distribution dipolaire.

**b) Retour sur l'étude des positions d'équilibre**

On peut à partir de l'énergie potentielle, retrouver les résultats relatifs à l'équilibre d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur et à leur stabilité.

En effet,  $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$  en notant  $\theta$  l'angle entre le champ électrostatique et le dipôle.

La courbe représentative de l'énergie potentielle en fonction de  $\theta$  est :



**Figure 13.7 –** Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ extérieur.

La position  $\theta = 0$  correspond à un minimum d'énergie potentielle donc à une position d'équilibre stable.

La position  $\theta = \pi$  correspond à un maximum d'énergie potentielle donc à une position d'équilibre instable.

On retrouve des résultats de l'étude menée à partir du moment des actions exercées par le champ sur le dipôle.

**SYNTHESE**

*SAVOIRS*

- définir l'approximation dipolaire
- définir le moment dipolaire
- établir l'expression du potentiel créé par un dipôle
- en déduire le champ créé par un dipôle
- comparer la décroissance avec la distance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge et dans le cas d'un dipôle
- connaître l'allure des lignes de champ et des équipotentielles
- action mécanique subie par un dipôle dans un champ extérieur
- énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ extérieur

*SAVOIR-FAIRE*

- évaluer des ordres de grandeur dans le domaine microscopique
- tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles d'un dipôle
- utiliser les expressions de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment résultant pour étudier l'action d'un champ extérieur sur un dipôle
- prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle dans un champ extérieur

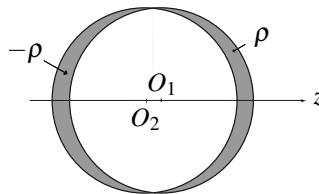
*MOTS-CLÉS*

- moment dipolaire
- approximation dipolaire

## S'ENTRAÎNER

**13.1 Deux sphères de charges opposées (\*)**

Deux sphères, de centre  $O_1$  et  $O_2$ , de même rayon  $R$ , sont chargées uniformément en volume avec des densités volumiques de charge opposées  $+\rho$  et  $-\rho$ . Leurs centres sont décalés de  $a$  :  $\vec{O_1 O_2} = a \vec{u}_z$ , avec  $a \ll R$ .



**1.** Déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace intérieur et dans tout l'espace extérieur aux deux sphères (la zone intérieure à l'une et extérieure à l'autre est trop petite pour être intéressante).

**2.** Montrer que l'on peut définir un moment dipolaire  $\vec{p}$  pour l'ensemble tel que le champ à l'extérieur soit égal à celui que crée ce dipôle.

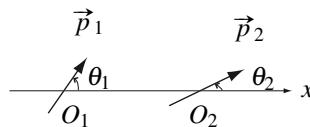
**13.2 Interaction d'une charge ponctuelle et d'un dipôle électrostatique (\*)**

On place un dipôle électrostatique rigide  $\vec{p}$  en un point  $M$ , à proximité d'une charge ponctuelle  $q$  située en  $O$ .

- 1.** Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à la charge  $q$ .
- 2.** Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle, en supposant qu'il s'est préalablement orienté selon la direction de la question précédente. On rappelle qu'un dipôle rigide soumis à un champ électrostatique subit la force :  $\vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E})$ .
- 3.** Même question pour la charge  $q$ .
- 4.** Que peut-on en conclure ?

**13.3 Interaction entre deux dipôles électrostatiques (\*)**

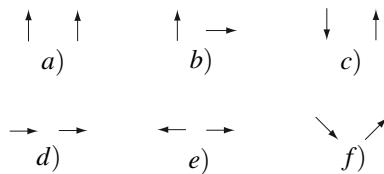
Deux dipôles électrostatiques de moment dipolaire  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , libres de tourner autour des points  $O_1$  et  $O_2$  :



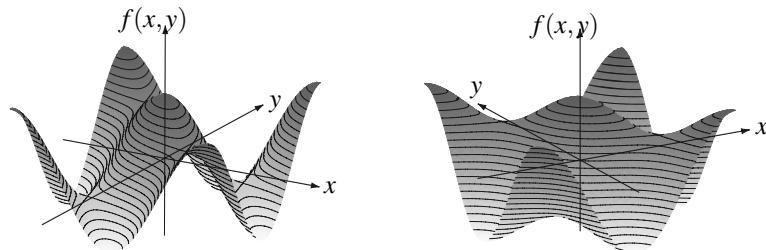
On suppose  $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\|$ .

Parmi les configurations représentées ci-dessous, indiquer en justifiant votre réponse, celle(s) qui correspond(ent) à une position d'équilibre stable :

## CHAPITRE 13 – DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE



On pourra s'aider de la figure ci-dessous, représentant le graphe de la fonction  $f : (x, y) \mapsto \cos(x - y) - 3\cos(x)\cos(y)$ , pour  $x$  et  $y$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ , vu sous deux orientations différentes :

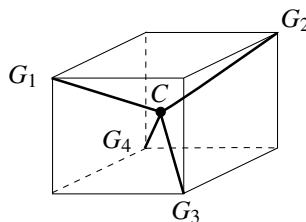


## APPROFONDIR

**13.4 Modèle de solvation d'un ion (★★★)**

On peut représenter la molécule d'eau par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $p = 6,2 \times 10^{-30}$  C.m.

On considère quatre molécules d'eau situées aux sommets  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  et  $G_4$  d'un tétraèdre régulier. La distance séparant le centre du tétraèdre d'un sommet est  $d = CG_i = 0,3$  nm.



On impose que l'axe des dipôles soit colinéaire au vecteur  $CG_i$ , mais pas forcément de même sens. Pour un couple quelconque de points  $(G_i, G_k)$ ,  $\widehat{G_i CG_k} = \beta = 109^\circ 28'$ .

- Établir l'expression de l'énergie d'interaction de 2 dipôles en fonction de  $p$ ,  $d$  et  $\beta$ . Montrer que trois cas peuvent se présenter.
- En déduire les expressions de l'énergie d'interaction de ces quatre molécules d'eau en fonction de  $p$ ,  $d$  et  $\beta$  pour les cinq arrangements des quatre dipôles respectant les conditions imposées.

**3.** On complète l'édifice en plaçant en C un ion positif de charge  $q = e = 1,6 \times 10^{-19}$  C. Exprimer de nouveau les énergies d'interaction correspondant aux cinq arrangements de la question 2.

**4. Application numérique :** calculer ces énergies en eV ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ). On donne :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ SI}$ .

**5.** Quel est l'arrangement le plus stable des quatre molécules d'eau autour de l'ion ?

**6.** Que pensez-vous du modèle sachant que l'énergie de solvatation d'un ion de cette taille est environ  $-240 \text{ kJ.mol}^{-1}$  ?

### 13.5 Cristal de NaCl soumis à un champ (★★)

L'application d'un champ électrique à un monocrystal de chlorure de sodium se traduit par des déplacements des ions qui le composent.

Soit  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  le champ électrostatique imposé aux ions du cristal, par exemple en appliquant une tension à des électrodes planes plaquées sur les faces opposées d'un échantillon parallélépipédique. Sous l'effet de ce champ, les ions  $\text{Na}^+$  se déplacent en bloc selon  $Ox$  de  $\delta_+$  et les ions  $\text{Cl}^-$  de  $\delta_-$ , le centre de masse de l'ensemble restant immobile. On posera  $x = \delta_+ - \delta_-$ .

Avant tout déplacement le moment dipolaire global du cristal est nul par symétrie de la répartition. On note  $N$  le nombre d'ions sodium et chlorure par unité de volume et  $e$  la valeur absolue de la charge de l'électron.

**1.** Montrer que ces déplacements ioniques se traduisent par un moment dipolaire réparti dans le volume du cristal, de densité volumique  $\vec{P} = P \vec{u}_x$  et exprimer  $P$  en fonction de la charge élémentaire  $e$ , de  $x$  et du nombre  $N$  de paires d'ions  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$  par unité de volume.

**2. a.** L'expérience montre que la relation entre  $P$  et  $E$  est linéaire, de la forme  $P = \epsilon_0 \chi_{\text{ion}} E$  où  $\chi_{\text{ion}}$  est un coefficient positif caractéristique du cristal. En déduire que le groupe d'ions  $\text{Na}^+$  est soumis à des forces de rappel élastique dont la moyenne par ion est de la forme  $\vec{f} = -Kx \vec{u}_x$ , les ions  $\text{Cl}^-$  étant soumis à des forces opposées.

**b.** Exprimer la constante  $K$  en fonction de  $N$ ,  $e$ ,  $\epsilon_0$  et  $\chi_{\text{ion}}$ .

**3. a.** Après suppression du champ  $\vec{E}$ , les deux groupes d'ions évoluent librement. Écrire l'équation du mouvement d'un ion  $\text{Na}^+$  et celle d'un ion  $\text{Cl}^-$ ; on désignera par  $m_+$  et  $m_-$  leurs masses respectives.

**b.** Montrer que le mouvement relatif des deux ions est une oscillation à une pulsation  $\omega_T$  que l'on explicitera en fonction de  $N$ ,  $e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\chi_{\text{ion}}$ ,  $m_+$  et  $m_-$ . Pour cela, on fera les combinaisons linéaires des équations du mouvement des deux ions qui permettent d'obtenir les équations

vérifiées par  $x_G = \frac{m_+ \ddot{\delta}_+ + m_- \ddot{\delta}_-}{m_+ + m_-}$  et par  $x = \delta_+ - \delta_-$ .

## CORRIGÉS

## 13.1 Deux sphères de charges opposées

1. On applique le principe de superposition. Le champ créé par une sphère de rayon  $R$ , de centre  $O$ , de charge volumique  $\rho$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r < R : \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM} \\ \text{pour } r > R : \vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 (OM)^3} \overrightarrow{OM} \end{array} \right.$$

Donc :

- à l'intérieur des deux sphères, c'est-à-dire pour  $r < R$  puisque  $a \ll R$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2},$$

- à l'extérieur des deux sphères, c'est-à-dire pour  $r > R$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 (O_1 M)^3} \overrightarrow{O_1 M} - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 (O_2 M)^3} \overrightarrow{O_2 M}.$$

À l'intérieur, le champ est uniforme.

2. À l'extérieur, on reconnaît l'expression du champ créé par deux charges ponctuelles, l'une positive, égale à  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  située en  $O_1$ , l'autre négative, égale à  $-Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  située en  $O_2$ . Comme  $r \gg a$  (puisque  $r > R$  et que  $R \gg a$ ), nous sommes exactement dans le cadre de l'approximation dipolaire et le champ à l'extérieur est celui d'un dipôle de moment dipolaire :

$$\vec{p} = Q \overrightarrow{O_2 O_1} = \frac{4\pi\rho R^3 a}{3} \vec{u}_z.$$

## 13.2 Interaction d'une charge ponctuelle et d'un dipôle électrostatique\*

1. La charge  $q$  crée le champ électrostatique  $\vec{E} = \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ . Le dipôle subit un moment  $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$  : il sera en équilibre par rapport aux mouvements de rotation si ce moment est nul donc si  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont colinéaires. Le dipôle s'oriente selon les lignes de champ c'est-à-dire radialement par rapport à la charge. L'équilibre est stable si les deux vecteurs sont de même sens donc si :  $\vec{p} = p \vec{u}_r$  avec  $p > 0$ .

2. D'après la formule fournie :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) = -\frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r.$$

Le dipôle, une fois qu'il est aligné sur le champ électrostatique de la charge ponctuelle, est attiré par celle-ci.

**3.** Le dipôle électrostatique situé en  $M$  crée en  $O$  le champ électrostatique :

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{MO}) \vec{MO} - OM^2 \vec{p}}{OM^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(-pr)(-r\vec{u}_r) - r^2 p \vec{u}_r}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \vec{u}_r$$

La charge  $q$  subit donc la force :  $\vec{F}' = q\vec{E}' = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$ . Elle est attirée par le dipôle.

**4.** On a donc  $\vec{F}' = -\vec{F}$  : la troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques) est donc respectée.

### 13.3 Interaction entre deux dipôles électrostatiques

L'énergie mutuelle d'interaction des dipôles  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  est  $U_m = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(O_1) = \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(O_2)$

On utilise l'expression intrinsèque du champ créé par un dipôle :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 OM^5} \left( 3(\vec{p} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - OM^2 \vec{p} \right),$$

ce qui donne :

$$U_m = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^5} \left( 3(\vec{p}_2 \cdot \vec{O_2 O_1})(\vec{p}_1 \cdot \vec{O_2 O_1}) - d^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \right).$$

Tous calculs faits, on obtient :  $U_m = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} (\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_2 \cos \theta_1)$ . On reconnaît l'opposé de la fonction dont le graphe est donné dans l'énoncé.

- a)  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$ .  $U_m$  est stationnaire en ce point, on voit sur le graphe qu'il s'agit d'un col : minimum pour  $\theta_1$  mais maximum pour  $\theta_2$ . Cette position est globalement instable.
- b)  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = 0$ .  $U_m$  n'est pas extrémale ou stationnaire en ce point. Cette position n'est pas une position d'équilibre.
- c)  $\theta_1 = -\pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$ . Même conclusion que le cas a).
- d)  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = 0$ .  $U_m$  possède un minimum absolu en ce point, c'est une position d'équilibre stable.
- e)  $\theta_1 = \pi$  et  $\theta_2 = 0$ .  $U_m$  possède un maximum absolu en ce point, c'est une position d'équilibre instable.
- f)  $\theta_1 = -\pi/4$  et  $\theta_2 = \pi/4$ .  $U_m$  n'est pas extrémale ou stationnaire en ce point. Cette position n'est pas une position d'équilibre.

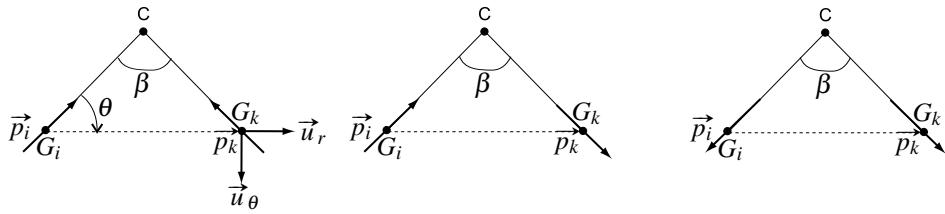
### 13.4 Modèle de solvatation d'un ion

**1.** L'énergie d'interaction entre les dipôles placés en  $G_i$  et  $G_k$  est égale à l'énergie du dipôle  $\vec{p}_k$  dans le champ  $\vec{E}_i$  créé par le dipôle  $\vec{p}_i$ , soit :  $\mathcal{E} = -\vec{p}_k \cdot \vec{E}_i$ . On peut sans changer le résultat inverser les rôles des deux dipôles.

On a représenté les trois cas d'orientation possibles des dipôles sur la figure ci-après. Sur le schéma de gauche l'angle  $\theta$  est positif et donné par la relation :  $2\theta + \beta = \pi$  soit  $\theta = \frac{\pi - \beta}{2}$ .

La distance entre les centres des deux dipôles est :  $G_i G_k = r = 2d \sin \frac{\beta}{2}$ .

## CHAPITRE 13 – DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE



Dans le premier cas à gauche, le champ créé par  $\vec{p}_i$  à la position de  $G_k$  est  $\vec{E}_i = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$ ; par ailleurs  $\vec{p}_k = -p(\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$ . L'énergie d'interaction est donc :

$$\mathcal{E}_1 = -\vec{p}_k \cdot \vec{E}_i = -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -U,$$

$$\text{où : } U = \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 d^3 \sin(\beta/2)} \left( \frac{2}{\tan^2(\beta/2)} + 1 \right).$$

Dans le deuxième cas au centre, le champ créé par  $G_i$  à la position de  $G_k$  est le même que dans le premier cas et le dipôle  $\vec{p}_k$  est changé en son opposé. L'énergie d'interaction est donc :  $\mathcal{E}_2 = U$ .

Dans le troisième cas à droite, le dipôle  $\vec{p}_i$  est dans le sens opposé par rapport au premier cas, donc le champ électrique  $\vec{E}_i$  est changé en son opposé et le dipôle  $\vec{p}_k$  est aussi changé en son opposé. L'énergie d'interaction est donc :  $\mathcal{E}_3 = -U$ .

**2.** Il faut faire attention à ne compter qu'une fois l'énergie d'interaction entre deux dipôles. On peut procéder de la manière suivante : compter les trois interactions de  $G_1$  avec les trois autres, puis celles de  $G_2$  avec  $G_3$  et  $G_4$ , puis enfin celle de  $G_3$  avec  $G_4$ . Il y a cinq possibilités :

1. les quatre dipôles pointent vers le centre, alors :  $\mathcal{E} = 3\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 = -6U$  ;
2. trois pointent vers le centre et un dans le sens opposé (par exemple  $G_1$ ), alors :  $\mathcal{E} = 3\mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 = 0$  ;
3. deux pointent vers le centre (par exemple  $G_1$  et  $G_2$ ) et deux dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2) + 2\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = 2U$  ;
4. un pointe vers le centre (par exemple  $G_1$ ) et trois dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = 3\mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_3 = 0$  ;
5. les quatre pointent dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = 3\mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_3 = -6U$ .

**3.** Le point  $C$  est sur l'axe des dipôles. Le potentiel en  $C$  est  $\pm \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^2}$  avec le signe + quand le dipôle pointe vers le centre et le signe - quand il est dans l'autre sens. L'énergie d'interaction avec la charge est donc  $\pm U'$  avec  $U' = \frac{pe}{4\pi\epsilon_0 d^2}$  pour chaque dipôle. L'énergie d'interaction totale est donc :

1. les quatre dipôles pointent vers le centre, alors :  $\mathcal{E} = -6U + 4U' ;$
2. trois pointent vers le centre et un dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = 0 + 3U' - U' = 2U' ;$

3. deux pointent vers le centre et deux dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = 2U + 2U' - 2U' = 2U$  ;  
 4. un pointe vers le centre et trois dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = 0 + U' - 3U' = 2U'$  ;  
 5. les quatre pointent dans le sens opposé, alors :  $\mathcal{E} = -6U - 4U'$ .
- 4.** L'application numérique pour les cinq cas dans le même ordre donne :
1.  $\mathcal{E} = 3,0 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,9 \text{ eV}$  ;
  2.  $\mathcal{E} = 2,0 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,2 \text{ eV}$  ;
  3.  $\mathcal{E} = 3,3 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,1 \text{ eV}$  ;
  4.  $\mathcal{E} = -2,0 \times 10^{-19} \text{ J} = -1,9 \text{ eV}$  ;
  5.  $\mathcal{E} = -5,0 \times 10^{-19} \text{ J} = -3,1 \text{ eV}$ .

- 5.** L'arrangement le plus stable est celui de plus basse énergie donc le numéro (5).  
**6.** Si on multiplie l'énergie trouvée pour le cas (5) par le nombre d'Avogadro cela donne  $-300 \text{ kJ.mol}^{-1}$ . C'est un peu trop grand mais du bon ordre de grandeur, ce qui n'est pas si mal pour une modélisation assez simple.

### 13.5 Cristal de NaCl soumis à un champ

**1.** Le moment dipolaire global est nul avant le déplacement. Après le déplacement, la variation du moment dipolaire pour une paire d'ions est :  $d\vec{p} = (e\delta_+ - e\delta_-)\vec{u}_x = ex\vec{u}_x$ , donc globalement :  $\vec{P} = Nex\vec{u}_x$ .

**2. a.** À la position d'équilibre, un ion sodium est soumis à deux forces : la force électrique et une autre force  $f$  qui l'empêche de s'éloigner d'avantage (force de rappel).

**b.** La relation d'équilibre projetée sur  $Ox$  entraîne :

$$0 = eE + f \Rightarrow f = -eE = -\frac{eP}{\epsilon_0 \chi_{\text{ion}}} = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 \chi_{\text{ion}}}x$$

**3. a.** La projection de la relation fondamentale de la dynamique en absence de champ pour les deux ions donne :  $\begin{cases} m_+\ddot{\delta}_+ = -Kx &= -K(\delta_+ - \delta_-) \\ m_-\ddot{\delta}_- = Kx &= -K(\delta_- - \delta_+) \end{cases}$

**b.** La somme des deux équations entraîne  $m_+\ddot{\delta}_+ + m_-\ddot{\delta}_- = 0$ , ce qui prouve que le mouvement du centre de gravité de l'ensemble est une translation uniforme (ou qu'il est immobile). Pour avoir le mouvement relatif des ions par rapport au centre de gravité, on peut combiner les deux équations en divisant la première par  $m_+$  et en soustrayant la seconde divisée par  $m_-$ , ce qui donne :

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_T^2 x = 0$$

où  $\omega_T = \sqrt{\frac{K}{m}}$  avec  $m = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-}$ . Finalement :

$$\omega_T = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0 \chi_{\text{ion}}}}$$



# Champ magnétostatique

Le champ magnétique a été introduit dans le cours de première année. Dans ce chapitre on va compléter son étude dans le cas du régime stationnaire. On parle alors de **champ magnétostatique**.

## 1 Courant électrique

### 1.1 Vecteur densité de courant

Le courant électrique a été présenté dans le cours de première année. Il s'agit du transport de charge électrique résultant d'un mouvement d'ensemble de particules chargées. On va définir un **vecteur densité de courant électrique** décrivant ce phénomène de transport.

Pour cela, on considère une surface élémentaire  $dS_M$  autour d'un point  $M$ , et un vecteur  $\vec{dS}_M$ , normal à la surface. Dans un premier temps, on ne considère qu'un seul type de porteurs de charge mobiles, dont la vitesse moyenne au point  $M$  à l'instant  $t$  est  $\vec{v}_1(M, t)$ <sup>1</sup>. La densité volumique de charge due à ces porteurs est  $\rho_1(M, t)$ .

Quelle est la charge électrique  $d^2q(M, t)$  qui traverse  $dS_M$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , dans le sens défini par le vecteur  $\vec{dS}_M$ ? Cette charge est contenue, à l'instant  $t$ , dans le cylindre s'appuyant sur la surface  $dS_M$  dont les génératrices sont parallèles à  $\vec{v}_1$  et de longueur  $v_1 dt$ , où  $v_1 = \|\vec{v}_1\|$  (voir figure 14.1).

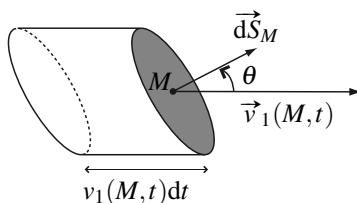


Figure 14.1 – Flux de charges à travers une surface élémentaire.

1. Il s'agit de la vitesse moyenne des porteurs de charges d'un volume de taille mésoscopique autour du point  $M$ .

Soit  $\theta$  l'angle entre la direction normale à  $dS_M$  et la vitesse des charges. Ce cylindre a pour volume :

$$d\tau = dS_M(v_1 dt) \cos \theta = \vec{v}_1 \cdot \vec{dS}_M$$

On a donc :

$$\begin{aligned} d^2q(M, t) &= \rho_1(M, t)d\tau \\ &= \rho_1(M, t)\vec{v}_1(M, t) \cdot \vec{dS}_M dt \\ &= (\rho_1 \vec{v}_1)(M, t) \cdot \vec{dS}_M dt \end{aligned}$$

 La notation  $d^2q$  souligne le fait que cette charge est doublement élémentaire : parce que la surface  $dS_M$  est élémentaire et parce que la durée  $dt$  l'est aussi.

**Le vecteur densité de courant électrique**,  $\vec{j}(M, t)$ , est tel que la charge électrique qui traverse la surface  $dS_M$  dans le sens du vecteur  $\vec{dS}_M$  pendant la durée  $dt$  est :

$$d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS}_M dt \quad (14.1)$$

$\|\vec{j}\|$  s'exprime en  $A \cdot m^{-2}$ .

Dans le cas où il y a un seul type de porteur de charge ce vecteur est :

$$\vec{j}(M, t) = (\rho_1 \vec{v}_1)(M, t)$$

Dans le cas, plus général, où il y a différents types de porteurs de charge numérotés par  $i$ , on ajoute les charges des différents porteurs traversant la surface et :

$$\vec{j}(M, t) = \left( \sum_i \rho_i \vec{v}_i \right) (M, t) \quad (14.2)$$

### Exemple

- Dans un métal, les porteurs de charge sont les ions du réseau cristallin et les électrons de conduction. La densité volumique de courant est :

$$\vec{j}(M, t) = (\rho_{el} \vec{v}_{el})(M, t)$$

dans le référentiel lié au métal où les ions sont fixes.

- Dans un électrolyte contenant des ions  $A^+$  et  $B^-$ , la densité volumique de courants est :

$$\vec{j}(M, t) = (\rho_{A^+} \vec{v}_{A^+} + \rho_{B^-} \vec{v}_{B^-})(M, t)$$

Lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique ces deux types d'ions se déplacent en sens inverse ; ils donnent alors des contributions de même sens à la densité volumique de courant, car  $\rho_{A^+}$  et  $\rho_{B^-}$  sont de signes contraires.

## 1.2 Intensité traversant une surface orientée

Considérons une surface  $\mathcal{S}$  orientée. La charge traversant  $\mathcal{S}$  entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  est d'après (14.1) :

$$dq = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \, dt$$

Ainsi, le débit de charge à travers  $\mathcal{S}$ , appelé **intensité** traversant  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t$ , est :

$$I_{\mathcal{S}}(t) = \frac{dq}{dt} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \quad (14.3)$$

L'intensité traversant une surface est égale au flux du vecteur densité de courants à travers cette surface.

## 1.3 Distributions filiformes

L'intensité traversant un fil conducteur est donnée par la relation (14.3) : c'est l'intensité qui traverse n'importe quelle section  $\mathcal{S}$  de ce fil (voir figure 14.2). Le choix de l'orientation de la surface correspond au choix d'un sens positif pour  $I$  le long du fil.

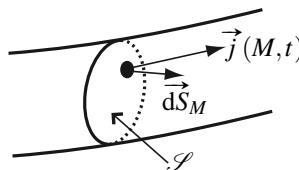


Figure 14.2 – Intensité traversant un fil.

# 2 Propriétés globales du champ magnétostatique

## 2.1 Flux du champ magnétostatique

### a) Conservation du flux magnétique

On admet la propriété suivante :

Le champ magnétostatique est un **champ à flux conservatif**, c'est-à-dire que son flux à travers toute surface fermée  $\mathcal{S}$  est nul :

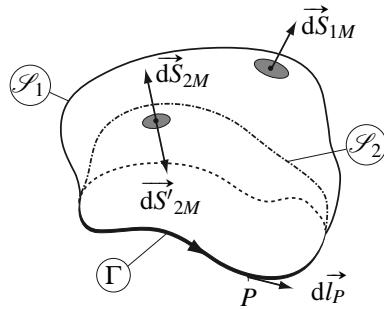
$$\Phi_B = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0.$$

### b) Flux à travers un contour

Une conséquence de la propriété précédente est que le flux du champ magnétique est le même à travers toute surface  $\mathcal{S}_{\gamma}$  s'appuyant sur contour orienté  $\Gamma$  (voir appendice mathématique).

Ceci permet notamment de définir le flux magnétique à travers un circuit qui intervient dans le phénomène d'induction (voir cours de première année).

La démonstration de ce résultat s'appuie sur la figure 14.3.



**Figure 14.3** – Deux surfaces orientées  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'appuyant sur le même contour.

La surface  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  est une surface fermée donc le flux de  $\vec{B}$  sortant de cette surface est nul, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \iint_{M \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \vec{B}(M) \cdot \vec{dS}_M = 0 \\ \Leftrightarrow & \iint_{M \in \mathcal{S}_1} \vec{B}(M) \cdot \vec{dS}_{1M} + \iint_{M \in \mathcal{S}_2} \vec{B}(M) \cdot \vec{dS}'_{2M} = 0 \\ \Leftrightarrow & \iint_{M \in \mathcal{S}_1} \vec{B}(M) \cdot \vec{dS}_{1M} - \iint_{M \in \mathcal{S}_2} \vec{B}(M) \cdot \vec{dS}_{2M} = 0, \end{aligned}$$

car, compte tenu des orientations de  $\mathcal{S}_2$  et de la surface fermée  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ ,  $\vec{dS}'_{2M} = -\vec{dS}_{2M}$ . On en déduit l'égalité des flux de  $\vec{B}$  à travers  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ .

## 2.2 Circulation du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère

Soit  $\Gamma$  un contour fermé orienté quelconque et  $\mathcal{S}_\Gamma$  une surface s'appuyant sur  $\Gamma$ .

La circulation du champ magnétostatique le long de  $\Gamma$  est :

$$\mathcal{C}_B = \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P) \cdot \vec{dl}_P.$$

L'intensité traversant  $\mathcal{S}_\Gamma$  est :

$$I(\mathcal{S}_\Gamma) = \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}_M.$$

En régime stationnaire,  $I(\mathcal{S}_\Gamma)$  ne dépend en fait que du contour  $\Gamma$  et pas de la surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  choisie pour l'exprimer (le champ vectoriel  $\vec{j}(M)$  est un champ à flux conservatif, comme le champ magnétostatique). On l'appelle **intensité enlacée** par le contour  $\Gamma$  et on la note  $I_{\text{enlacée}}$ .

Ces deux grandeurs sont liées par la propriété suivante que l'on admet :

**Théorème d'Ampère :**

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{enlacée}}. \quad (14.4)$$

Ce théorème permet de calculer les champ magnétostatiques comme le théorème de Gauss pour les champs électrostatiques.

### 3 Symétries et invariances du champ magnétique

Les sources du champ magnétostatique sont les distributions de courants, tout comme les sources du champ électrostatique sont les distributions de charges électriques. On va donc commencer par étudier les symétries et les invariances usuelles des distributions de courants.

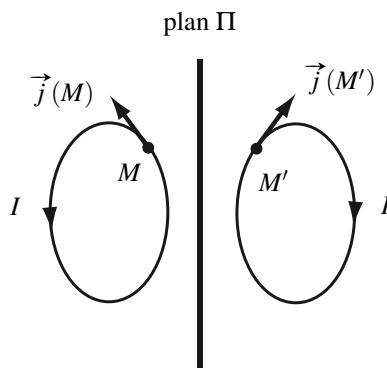
#### 3.1 Symétries et invariances usuelles des distributions de courants

##### a) Symétrie plane

Considérons un plan  $\Pi$ , la symétrie  $\mathcal{S}_{\Pi}$  par rapport à  $\Pi$  et  $\mathbf{S}_{\Pi}$  la symétrie vectorielle associée.

La distribution de courants  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport au plan  $\Pi$  si et seulement si :

- pour tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$ ,  $M' = \mathcal{S}_{\Pi}(M)$  est dans  $\mathcal{D}$ ,
- $\vec{j}(M') = \mathbf{S}_{\Pi}(\vec{j}(M))$ .



**Figure 14.4 –** Exemple de distribution de courants présentant un plan de symétrie.

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport au plan ( $xOy$ ) si et seulement si dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ,  $j_x(x, y, -z) = j_x(x, y, z)$ ,  $j_y(x, y, -z) = j_y(x, y, z)$  et  $j_z(x, y, -z) = -j_z(x, y, z)$  pour tout point  $M(x, y, z)$  élément de  $\mathcal{D}$ , en supposant que  $M'(x, y, -z)$  appartienne aussi à  $\mathcal{D}$ .

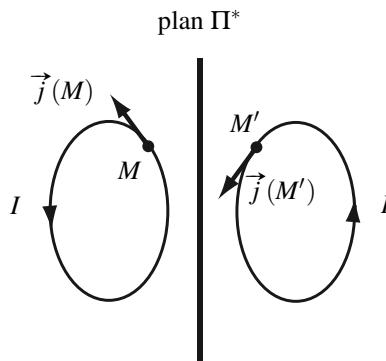
##### Remarque

En un point  $M$  d'un plan de symétrie,  $\vec{j}(M)$  appartient à ce plan, les lignes de courant (lignes de champ de  $\vec{j}$ ) sont tangentes à ce plan.

**b) Antisymétrie plane**

La distribution de courants  $\mathcal{D}$  est antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^*$  si et seulement si :

- pour tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$ , le point  $M' = \mathcal{S}_{\Pi^*}(M)$  est aussi dans  $\mathcal{D}$ ,
- $\vec{j}(M') = -\mathbf{S}_{\Pi^*}(\vec{j}(M))$ .



**Figure 14.5** – Exemple de distribution de courants présentant un plan d'antisymétrie.

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est antisymétrique par rapport au plan ( $xOy$ ) si et seulement si dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ,  $j_x(x, y, -z) = -j_x(x, y, z)$ ,  $j_y(x, y, -z) = -j_y(x, y, z)$  et  $j_z(x, y, -z) = j_z(x, y, z)$  pour tout point  $M(x, y, z)$  élément de  $\mathcal{D}$ , en supposant que  $M'(x, y, -z)$  appartienne aussi à  $\mathcal{D}$ .

**Remarque**

En un point d'un plan d'antisymétrie,  $\vec{j}$  est orthogonal à ce plan, les lignes de courant sont perpendiculaires à ce plan.

**c) Invariance par translation**

On considère un vecteur  $\vec{a}$  et la translation  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$  de vecteur  $\vec{a}$ .

La distribution de courants  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation de vecteur  $\vec{a}$  si et seulement si :

- pour tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$ , le point  $M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M)$  est aussi dans  $\mathcal{D}$ ,
- $\vec{j}(M') = \vec{j}(M)$ .

Par exemple,  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation de vecteur  $\vec{a} = a\vec{u}_x$  si et seulement si  $\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x + a, y, z)$  pour tout point  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{D}$ , si  $M'(x + a, y, z)$  appartient aussi à  $\mathcal{D}$ .

Si la distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par toute translation de vecteur parallèle à  $\vec{u}_x$  alors  $\vec{j}(M)$  ne dépend pas de  $x$ .

#### d) Invariance par rotation

On considère un axe  $\Delta$ , un angle  $\theta_0$  et la rotation  $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$  d'angle  $\theta_0$  autour de l'axe  $\Delta$  et  $\mathbf{R}_{\Delta, \theta_0}$  la rotation vectorielle associée.

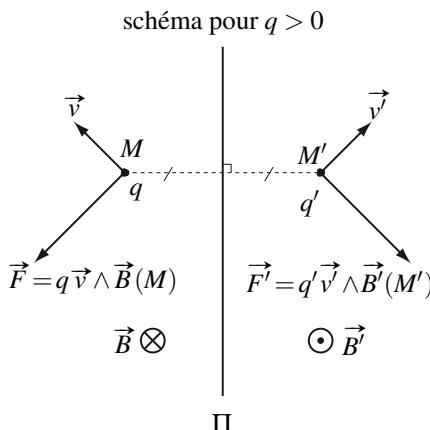
La distribution de courants  $\mathcal{D}$  est invariante par la rotation d'angle  $\theta_0$  autour de  $\Delta$  si et seulement si :

- pour tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$  le point  $M' = \mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M)$  est aussi dans  $\mathcal{D}$ ,
- $\vec{j}(M') = \mathbf{R}_{\Delta, \theta_0}(\vec{j}(M))$ .

## 3.2 Symétries du champ magnétique

### a) Transformation du champ magnétique par une symétrie plane

On cherche la manière dont est transformé le champ magnétique par une symétrie par rapport à un plan. Pour cela, on revient à relation entre le champ magnétique et la force de Lorentz.



**Figure 14.6 –** Champ magnétique et symétrie par rapport à un plan.

Soit une charge ponctuelle  $q$  placée en  $M$  où règne un champ magnétique  $\vec{B}(M)$  et animée d'une vitesse  $\vec{v}$ . Elle subit la force :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}(M)$$

On considère la symétrie par rapport au plan  $\Pi$ . La charge  $q$  devient la charge  $q' = q$  et se retrouve en  $M' = \mathcal{S}_\Pi(M)$ , symétrique de  $M$  par rapport à  $\Pi$ . Elle est animée d'une vitesse  $\vec{v}' = \mathbf{S}_\Pi(\vec{v})$ , symétrique de  $\vec{v}$  par rapport à  $\Pi$  et elle subit une force  $\vec{F}' = \mathbf{S}_\Pi(\vec{F})$  symétrique de  $\vec{F}$  par rapport à  $\Pi$  (voir figure 14.6).

L'invariance des lois de l'électromagnétisme permet d'avoir la même écriture pour la relation entre force, vitesse et champ magnétique :

$$\vec{F}' = q \vec{v}' \wedge \vec{B}'(M') \quad \text{soit} \quad \mathbf{S}_\Pi(\vec{F}) = q \mathbf{S}_\Pi(\vec{v}) \wedge \vec{B}'(M').$$

Or une symétrie plane change l'orientation de l'espace (l'image d'une main droite est une main gauche) donc :  $\mathbf{S}_\Pi(\vec{a}) \wedge \mathbf{S}_\Pi(\vec{b}) = -\mathbf{S}_\Pi(\vec{a} \wedge \vec{b})$ . On a donc nécessairement :

$$\vec{B}'(M') = -\mathbf{S}_\Pi(\vec{B}(M)).$$

L'image par la symétrie par rapport à un plan  $\Pi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  est égale à l'opposé du symétrique de  $\vec{B}$  par rapport au plan  $\Pi$ .

L'étude qui vient d'être faite correspond au cas où le champ magnétique  $\vec{B}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  et perpendiculaire à la vitesse  $\vec{v}$ . Elle se généralise à toutes les positions relatives du champ magnétique  $\vec{B}$ .

Une telle propriété caractérise les **pseudo-vecteurs** (appelés aussi **vecteurs axiaux**) : le champ magnétique  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur.

### b) Champ créé par une distribution symétrique par rapport à un plan

On considère une distribution  $\mathcal{D}$  de densité de courant  $\vec{j}$  et  $\mathcal{D}'$  la distribution symétrique de  $\mathcal{D}$  par rapport à un plan  $\Pi$  donné. En notant  $\vec{j}'$  sa densité de courant, on a pour tout point  $M$  :

$$\vec{j}'(M') = \mathbf{S}_\Pi(\vec{j}(M)), \quad (14.5)$$

où  $M' = \mathcal{S}_\Pi(M)$  est le symétrique de  $M$ . D'autre part, on vient de voir que :

$$\vec{B}'(M') = -\mathbf{S}_\Pi(\vec{B}(M)), \quad (14.6)$$

en notant  $\vec{B}'(M')$  le champ créé par  $\mathcal{D}'$  en  $M'$ .

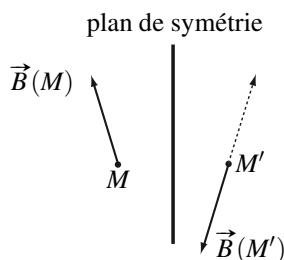
On suppose maintenant que la distribution  $\mathcal{D}$  est **symétrique par rapport au plan  $\Pi$** . Dans ce cas, les distributions  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont identiques. Donc le champ magnétique créé en un point  $M'$  est le même que ce soit par  $\mathcal{D}$  ou par  $\mathcal{D}'$  :

$$\vec{B}'(M') = \vec{B}(M').$$

En utilisant la relation (14.6), on obtient donc :

$$\vec{B}(M') = -\mathbf{S}_\Pi(\vec{B}(M))$$

Cette situation est résumée sur la figure suivante :



**Figure 14.7** – Quand la distribution de courants admet un plan de symétrie, le champ magnétique en  $M'$ , symétrique de  $M$ , est l'opposé du symétrique du champ magnétique en  $M$ .

Dans le cas particulier où  $M$  appartient au plan  $\Pi$ ,  $\mathcal{S}_\Pi(M) = M$  donc  $\vec{B}(M)$  est égal à l'opposé de son symétrique par rapport au plan  $\Pi$ , il est donc orthogonal au plan  $\Pi$ .

Si la distribution de courants admet un **plan de symétrie**  $\Pi$  :

- pour tout point  $M$ ,  $\vec{B}(\mathcal{S}_\Pi(M)) = -\mathbf{S}_\Pi(\vec{B}(M))$ ,
- pour tout point  $M$  appartenant à  $\Pi$ ,  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à  $\Pi$ .

### c) Champ créé par une distribution antisymétrique par rapport à un plan

On considère une distribution  $\mathcal{D}$  de densité de courant  $\vec{j}$  et  $\mathcal{D}'$  la distribution antisymétrique de  $\mathcal{D}$  par rapport à un plan  $\Pi^*$  donné. En notant  $\vec{j}'$  sa densité de courant, on a donc pour tout point  $M$  de l'espace :

$$\vec{j}'(M') = -\mathbf{S}_{\Pi^*}(\vec{j}(M)) \quad (14.7)$$

où  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport au plan  $\Pi^*$ . D'autre part, on a toujours :

$$\vec{B}'(M') = -\mathbf{S}_{\Pi^*}(\vec{B}(M)), \quad (14.8)$$

en notant  $\vec{B}'(M')$  le champ créé par  $\mathcal{D}'$  en  $M'$ .

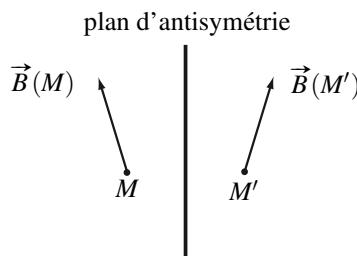
On suppose maintenant que la distribution  $\mathcal{D}$  est **antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^*$** . Dans ce cas, les distributions  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont opposées. Donc :

$$\vec{B}'(M') = -\vec{B}(M').$$

En utilisant la relation (14.8), on obtient :

$$\vec{B}(M') = \mathbf{S}_{\Pi^*}(\vec{B}(M))$$

La situation est représentée sur la figure suivante :



**Figure 14.8** – Quand la distribution de courants admet un plan d'antisymétrie, le champ magnétique en  $M'$ , symétrique de  $M$ , est le symétrique du champ magnétique en  $M$ .

Dans le cas particulier où  $M$  appartient au plan  $\Pi^*$ ,  $\mathcal{S}_{\Pi^*}(M) = M$  donc  $\vec{B}(M)$  est son propre symétrique, il appartient donc au plan  $\Pi^*$ .

Si la distribution de courants admet un **plan d'antisymétrie**  $\Pi^*$  :

- pour tout point  $M$ ,  $\vec{B}(\mathcal{S}_{\Pi^*}(M)) = \mathbf{S}_{\Pi^*}(\vec{B}(M))$ ,
- pour tout point  $M$  appartenant à  $\Pi^*$ ,  $\vec{B}(M)$  est parallèle à  $\Pi^*$ .

#### d) Invariances du champ magnétique

**Invariance par translation** Si la distribution de courants  $\mathcal{D}$  est invariante par la translation  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ , pour tout point  $M$  :

$$\vec{B}(\mathcal{T}_{\vec{a}}(M)) = \vec{B}(M).$$

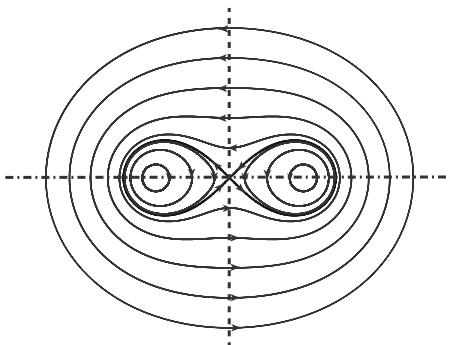
 Si la distribution de courants  $\mathcal{D}$  est invariante par toute translation  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$  de vecteur  $\vec{a}$  parallèle à l'axe ( $Oz$ ) (par exemple), alors  $\vec{B}(M)$  ne dépend pas de  $z$ .

**Invariance par rotation** Si la distribution de courants  $\mathcal{D}$  est invariante par la rotation  $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$  :

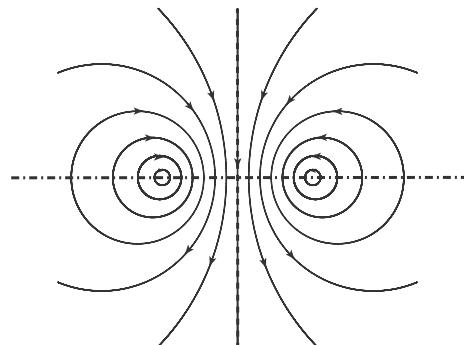
$$\vec{B}(\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M)) = \mathbf{R}_{\Delta, \theta_0}(\vec{B}(M)).$$

 Si la distribution de courants  $\mathcal{D}$  est invariante par toute rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) (par exemple), en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe ( $Oz$ ) les composantes de  $\vec{B}(M)$  dans la base cylindrique locale ne dépendent pas de l'angle  $\theta$ .

#### e) Application : comparaison de deux distributions



**Figure 14.9** – Deux fils parcourus par des courants identiques.



**Figure 14.10** – Deux fils parcourus par des courants opposés.

La figure 14.9 représente la carte des lignes de champ d'un ensemble de deux fils rectilignes parallèles parcourus par des courants de même sens et de même intensité. Le plan médiateur et le plan contenant les deux fils (dont les traces dans le plan de figure sont représentés en

trait tireté) sont des plans de symétrie de la distribution de courants, on observe bien que les lignes de champ, au niveau de ces plans, les coupent orthogonalement. On observe également qu'elles sont antisymétriques de part et d'autre de ces plans (bien remarquer l'orientation des flèches).

La figure 14.10 représente la carte des lignes de champ d'un ensemble de deux fils rectilignes parallèles parcourus par des courants opposés. Le plan médiateur est un plan d'antisymétrie de la distribution, on observe que les lignes de champ, au niveau de ce plan, lui appartiennent. On observe également qu'elles sont symétriques de part et d'autre de ce plan. Le plan contenant les deux fils est toujours un plan de symétrie de la distribution de courants. Les lignes de champ le coupent orthogonalement et elles sont antisymétriques de part et d'autre de ce plan. On remarque sur la figure 14.9 une ligne de champ particulière, qui forme une sorte de huit. En fait, cette courbe est composée de deux lignes de champ, chaque moitié du huit.

## 4 Topographie du champ magnétostatique

### 4.1 Propriétés des lignes de champ du champ magnétostatique

#### a) Forme des lignes de champ

Le champ magnétique étant à flux conservatif, son flux à travers une surface fermée est nul. Par conséquent, les lignes de champ ne peuvent pas diverger à partir des sources comme celles du champ électrostatique. Elles sont fermées et entourent les sources.

Les lignes de champ magnétique sont fermées et entourent les sources.

#### Remarque

Si la modélisation des sources du champ conduit à une distribution infinie, certaines lignes de champs peuvent sembler ouvertes, mais elles se ferment à l'infini.

D'après le théorème d'Ampère, elles sont orientées, autour les sources, dans le sens donné par la règle de la main droite : si on place la main droite de telle manière que le pouce droit pointe dans le sens du courant électrique, la ligne de champ est orientée dans le sens des doigts (voir cours de première année).

#### Exemple

Les deux fils de la figure 14.9 sont donc parcourus par des courants orientés vers l'avant, alors que sur la figure 14.10, le fil de gauche est parcouru par un courant qui pointe vers le fond et le fil de droite par un courant qui pointe vers l'avant.

#### b) Évolution de la norme du champ magnétostatique le long d'un tube de champ

Le champ magnétique est à flux conservatif. Le raisonnement qui a été fait pour le champ électrostatique dans une zone vide de charge peut être transposé au champ magnétique. Ainsi :

Le long d'une ligne de champ, la norme du champ magnétostatique décroît quand les lignes de champ voisines s'écartent et elle augmente quand les lignes de champ voisines se rapprochent.

## 4.2 Comment distinguer une carte de champ électrostatique d'une carte de champ magnétostatique ?

Si on observe une carte de lignes de champ, comment savoir si cette carte peut correspondre à un champ électrostatique ou à un champ magnétostatique ?

### a) Flux et circulation

Le champ électrostatique est à circulation conservative, le champ magnétostatique à flux conservatif.

Si on peut mettre en évidence une surface fermée à travers laquelle le flux n'est pas nul, alors il ne peut pas s'agir d'un champ magnétostatique.

Si on peut mettre en évidence un chemin fermé (appelé **contour**) le long duquel la circulation n'est pas nulle, alors il ne peut pas s'agir d'un champ électrostatique.

### b) Au voisinage de sources

Si des sources sont présentes dans la partie représentée :

- les lignes de champ électrostatique divergent depuis les charges ou convergent vers elles selon leur signe ;
- les lignes de champ magnétostatique s'enroulent autour des courants, l'orientation des lignes permet de déterminer le sens des courants.

### c) Loin des sources

On verra au chapitre 16 que dans une région où il n'y a ni charges ni courants les équations vérifiées par les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont les mêmes : rien ne permet de distinguer les deux champs.

## 4.3 Exemples

### a) Carte des lignes de champ créé par une spire

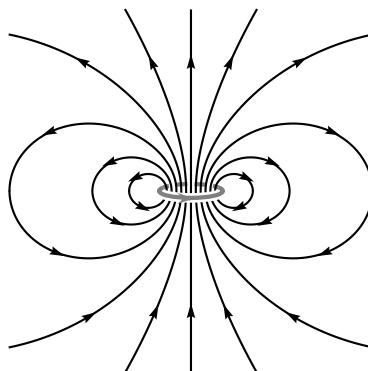
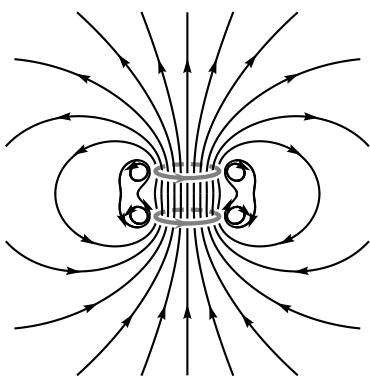


Figure 14.11 – Lignes de champ magnétique d'une spire.

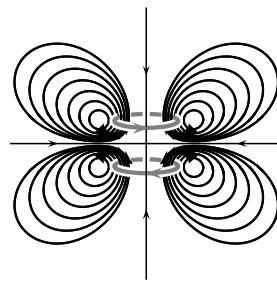
Le plan de la spire est plan de symétrie de la distribution de courants : les lignes de champ coupent ce plan orthogonalement et sont antisymétriques de part et d'autre de ce plan.

Tout plan contenant l'axe de la spire est plan d'antisymétrie de la distribution de courants : les lignes de champ sont symétriques de part et d'autre de ce plan et en un point de ce plan lui appartiennent.

### b) Carte des lignes de champ créé par deux spires



**Figure 14.12** – Deux spires parcourues par des courants de même sens.



**Figure 14.13** – Deux spires parcourues par des courants en sens contraire.

Dans le cas de la figure 14.12, le plan parallèle aux spires et équidistant des deux est un plan de symétrie de la distribution de courants. Les lignes de champ coupent ce plan orthogonalement et sont antisymétriques de part et d'autre de ce plan.

Dans le cas de la figure 14.13, c'est un plan d'antisymétrie. Les lignes de champ sont symétriques de part et d'autre de ce plan et en un point de ce plan lui appartiennent.

Dans les deux cas, tout plan qui contient l'axe des spires est un plan d'antisymétrie. Les lignes de champ en un point de ce plan lui appartiennent et sont symétriques de part et d'autre de ce plan.

Enfin, dans le cas de la figure 14.13, le point  $O$ , centre de la figure, est à l'intersection de trois plans d'antisymétrie orthogonaux deux à deux (le plan parallèle aux spires et équidistant des deux et deux plans orthogonaux contenant l'axe des spires). Le champ  $\vec{B}(O)$  appartient donc à trois plans orthogonaux deux à deux : il ne peut qu'être nul.

## 5 Exemples de calculs de champ magnétostatique

### 5.1 Comment appliquer le théorème d’Ampère ?

L’étude préalable des symétries permet de connaître *a priori* la direction de  $\vec{B}$  et de quelle(s) variable(s) il dépend. L’application du théorème d’Ampère à un contour choix judicieusement choisi, le long duquel on peut facilement exprimer la circulation de  $\vec{B}$ , permet ensuite de déterminer le champ magnétique.



- Le contour d’Ampère est choisi de manière à rendre simple le calcul de la circulation. Le meilleur choix est souvent la ligne de champ (fermée) passant par le point où l’on souhaite calculer le champ. Si les lignes de champs ne sont pas fermées, on choisira un contour composé de parties ou bien perpendiculaires au champ ou bien tangentes au champ et telles que la norme du champ soit uniforme le long de cette partie du contour. Dans le premier cas, la circulation sera nulle. Dans le second, le produit scalaire entre vecteur déplacement orienté et champ magnétique est égal au produit de la norme du champ magnétostatique en tout point de cette portion de contour multiplié par la longueur de celle-ci, en faisant attention au signe.

On n’oubliera pas non plus la règle de base suivante : **le contour d’Ampère doit passer par le point où on cherche à calculer le champ.**

- Si on cherche la direction du champ en un point, les plans de symétrie ou d’antisymétrie considérés doivent **passer par ce point**.
- Un plan de symétrie ou d’antisymétrie particulier donne des renseignements sur le champ de part et d’autre de ce plan et sur le champ en un point de ce plan.

### 5.2 Exemple de problème à symétrie cylindrique : fil infini, de rayon $a$ , parcouru par un courant uniformément réparti en volume

Un fil cylindrique, d’axe ( $Oz$ ) et de rayon  $a$ , est parcouru par un courant d’intensité  $I$  uniformément répartie. On étudie le champ magnétique créé par le fil à une distance  $r$  petite devant sa longueur, on le supposera donc infini.

On va appliquer le théorème d’Ampère pour exprimer ce champ magnétique, aussi bien à l’extérieur qu’à l’intérieur du fil.

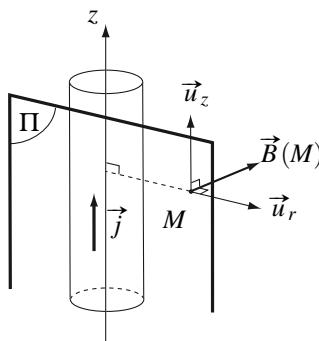


Figure 14.14 – Exemple de distribution de courants à symétrie cylindrique.

### a) Étude des symétries

La distribution de courants ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ). L'espace est donc repéré par les coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ). Le champ magnétostatique en  $M$  s'écrit *a priori* :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

La distribution de courants a les éléments de symétrie suivants :

- Le plan  $\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie de  $\mathcal{D}$ ,  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan, il est donc porté par  $\vec{u}_\theta$  :  $\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{u}_\theta$ .
- La distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par toute rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) et par toute translation parallèlement à l'axe ( $Oz$ ) donc  $B_\theta(M)$  ne dépend que de  $r$  :  $B_\theta(M) = B(r)$ .

**Remarque**

Le plan passant par  $M$  et orthogonal à ( $Oz$ ) est plan d'antisymétrie de  $\mathcal{D}$  (plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ), donc  $\vec{B}(M)$  appartient à ce plan, ce qui est en accord avec le résultat précédent.

En conclusion :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta.$$

### b) Application du théorème d'Ampère

On applique alors le théorème d'Ampère en prenant pour contour orienté le cercle  $\Gamma$  d'axe ( $Oz$ ), passant par  $M$ .

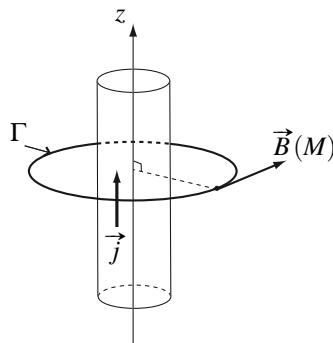


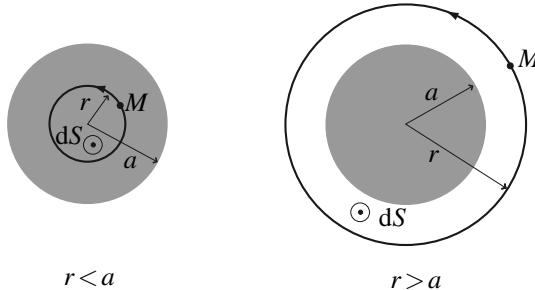
Figure 14.15 – Choix du contour pour le théorème d'Ampère.

La circulation du champ magnétique est :

$$\mathcal{C}_B = \oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}_M = \oint_{M \in \Gamma} B(r) dl_M = B(r) \oint_{M \in \Gamma} dl_M = B(r) \times 2\pi r$$

On calcule l'intensité enlacée  $I_{\text{enlacée}}$  en s'appuyant sur la figure 14.16. C'est le flux du vecteur densité de courant à travers le disque délimité par  $\Gamma$  et orienté dans un sens que l'on déduit de

l'orientation de  $\Gamma$  par la règle de la main droite (ce sens est indiqué sur la figure). Le vecteur densité de courant est :  $\vec{j} = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z & \text{si } r < a, \\ 0 & \text{si } r > a. \end{cases}$



**Figure 14.16** – Calcul de l'intensité enlacée.

Il vient :

- pour  $r < a$ ,  $I_{\text{enlacée}} = j\pi r^2 = \frac{Ir^2}{a^2}$ ,
- pour  $r > a$ ,  $I_{\text{enlacée}} = j\pi a^2 = I$ .

Le théorème d'Ampère s'écrit donc :

$$2\pi r B(r) = \begin{cases} \mu_0 j\pi r^2 = \frac{\mu_0 Ir^2}{a^2} & \text{si } r < a, \\ \mu_0 j\pi a^2 = \mu_0 I & \text{si } r > a. \end{cases}$$

### c) Champ magnétique créé par le fil

On trouve donc le champ magnétique :

$$\begin{cases} \text{pour } r < a : \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 jr}{2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \text{pour } r > a : \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 ja^2}{2r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 a^2}{2} \frac{\vec{j} \wedge \overrightarrow{OH}}{OH^2}, \end{cases}$$

où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe du fil. La dernière expression est intéressante car elle ne dépend pas du système de coordonnées.

Tout problème à symétrie cylindrique se traitera de la même façon. L'étude des symétries et des invariances et le choix du contour d'Ampère sont identiques. La seule chose qui change, c'est le calcul de l'intensité des courants enlacés par le contour qu'il faut adapter à chaque situation.

### d) Limite du fil infiniment fin

Si  $a$  tend vers 0, le fil devient infiniment fin et seul le deuxième cas existe.

Le champ magnétique créé par un fil infiniment fin confondu avec l'axe ( $Oz$ ) et parcouru par un courant d'intensité  $I$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{HM}}{HM^2}, \quad (14.9)$$

où  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur le fil.

Tout circuit filiforme étudié à une distance faible devant les autres dimensions du circuit est assimilable à un fil infini : les lignes de champ au voisinage des circuits filiformes seront toujours des cercles. Les différents exemples rencontrés plus haut le confirment.

### 5.3 Solénoïde long

L'expression du champ créé par une bobine longue a été vue en première année. Grâce au théorème d'Ampère, nous allons établir cette expression.

#### a) Dispositif

On considère un solénoïde constitué de  $N$  spires circulaires enroulées sur un cylindre de longueur  $\ell$ , de rayon  $a$ .

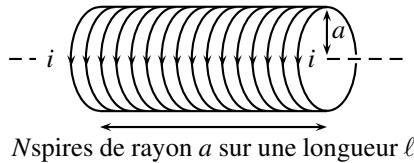


Figure 14.17 – Bobine longue ou solénoïde.

#### b) Rappel du cours de première année

La carte des lignes de champ magnétique créé par la bobine de la figure (14.17) a été étudiée en première année. La figure 14.18 montre l'allure de ces lignes de champ.

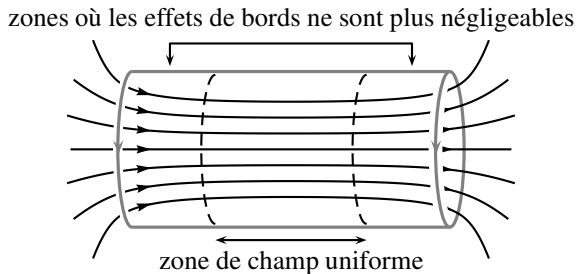


Figure 14.18 – Lignes de champ magnétique d'une bobine.

Le résultat suivant a été admis : à l'intérieur d'une bobine longue, le champ magnétique est

quasiment uniforme, parallèle à l'axe ( $Oz$ ) de la bobine et vaut

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$$

où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur.

Dans la suite, nous allons étudier le champ dans la zone où les effets de bords sont négligeables. Dans la pratique, cette zone est d'autant plus grande que le rapport  $a/\ell$  est petit.

### c) Champ créé par un solénoïde infini

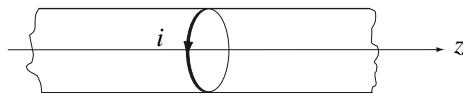


Figure 14.19 – Solénoïde infini.

Le solénoïde, de rayon  $a$ , comporte  $n$  spires par unité de longueur. Sa longueur  $L$  est très grande devant son rayon  $a$ , on le considère comme infini.

#### Étude des symétries

- Le plan contenant le point  $M$  où on cherche le champ et orthogonal à ( $Oz$ ) est plan de symétrie de la distribution de courants donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan :  $\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{u}_z$ .
- Le solénoïde est invariant par toute translation selon l'axe ( $Oz$ ) et par toute rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), donc :  $B_z(M) = B(r)$ .

En conclusion :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z.$$

**Utilisation du théorème d'Ampère** On applique le théorème d'Ampère en prenant pour contour orienté un rectangle situé dans un plan  $\theta$  constant, de longueur  $h$  arbitraire.

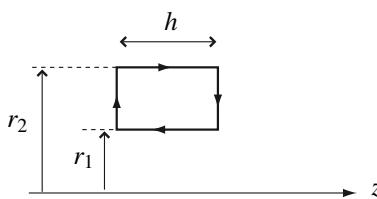


Figure 14.20 – Circulation du champ le long d'un rectangle.

La circulation de  $\vec{B}$  le long de ce contour est :

$$\mathcal{C}_B = B(r_2)h + 0 - B(r_1)h + 0$$

Si  $r_1$  et  $r_2$  sont inférieurs à  $a$ , le contour est entièrement à l'intérieur du solénoïde donc il n'enlace aucun courant. Le théorème d'Ampère s'écrit :  $\mathcal{C}_B = 0$  et, d'après l'expression de

$\mathcal{C}_B : B(r_2) = B(r_1)$ . Le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde. On le note  $\vec{B}_{\text{int}} = B_{\text{int}} \vec{u}_z$ .

Si  $r_1$  et  $r_2$  sont supérieurs à  $a$ , le contour est entièrement à l'extérieur du solénoïde donc il n'enlace aucun courant. On trouve de même :  $B(r_1) = B(r_2)$ . Le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoïde. On le note  $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \vec{u}_z$ .

Pour un contour « à cheval » sur le solénoïde ( $r_1 < a < r_2$ ),  $I_{\text{enlacée}} = -nIh$  (attention à l'orientation respective du vecteur surface et du courant, voir figure 14.21).

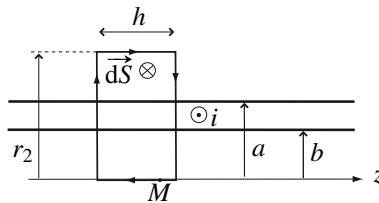


Figure 14.21 – Circulation du champ le long d'un rectangle.

Le théorème d'Ampère s'écrit pour ce contour :

$$B_{\text{ext}}h - B_{\text{int}}h = -\mu_0nIh \quad (14.10)$$

On admet que le champ à l'extérieur du solénoïde infini est rigoureusement nul :  $B_{\text{ext}} = 0$ . Il vient alors  $B_{\text{int}} = \mu_0nI$ .

Un solénoïde infini crée le champ magnétique :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0nI \vec{u}_z \\ \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{cases} \quad (14.11)$$

**SYNTHÈSE****SAVOIRS**

- vecteur densité de courant
- $\vec{B}$  est à flux conservatif
- théorème d'Ampère
- $\vec{B}$  est orthogonal à tout plan de symétrie de la distribution de courants qui le crée
- $\vec{B}$  appartient à tout plan d'antisymétrie de la distribution de courants qui le crée
- $\vec{B}$  est antisymétrique par rapport à tout plan de symétrie de la distribution de courants qui le crée
- $\vec{B}$  est symétrique par rapport à tout plan d'antisymétrie de la distribution de courants qui le crée
- champ créé par un fil rectiligne infini
- champ créé par un solénoïde long sans effets de bords

**SAVOIR-FAIRE**

- déterminer l'intensité du courant électrique traversant une surface orientée
- étude des symétries de la distribution de courants
- étude des invariances de la distribution de courants
- exploiter les symétries et invariances de la distribution de courants pour prévoir les propriétés du champ créé
- choisir un contour et une surface adaptés aux symétries de la situation pour appliquer le théorème d'Ampère
- reconnaître le caractère conservatif ou non du flux d'un champ de vecteur dont la carte des lignes de champ est donnée
- orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants
- associer l'évolution de la norme de  $\vec{B}$  à l'évasement des tubes de champ
- vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution de courants
- déterminer le champ créé par un fil infini
- déterminer le champ créé par un solénoïde long sans effets de bords sachant que le champ est nul à l'extérieur

**MOTS-CLÉS**

- |                    |                        |                                       |
|--------------------|------------------------|---------------------------------------|
| • flux conservatif | • plan d'antisymétrie  | • fil infini                          |
| • circulation      | • invariance           | • solénoïde long sans effets de bords |
| • plan de symétrie | • symétrie cylindrique |                                       |

## S'ENTRAÎNER

**14.1 Propriétés des lignes de champ (★)**

Pour les distributions de charges ou de courants stationnaires d'extension finie, sélectionner l'affirmation exacte :

- les lignes de champ magnétique sont fermées mais celles de champ électrique sont ouvertes ;
- les lignes de champ électrique sont fermées mais celles de champ magnétique sont ouvertes ;
- les lignes de champ magnétique et électrique sont fermées ;
- les lignes de champ magnétique et électrique sont ouvertes.

**14.2 Symétries du champ magnétostatique (★)**

On considère une spire circulaire d'axe ( $Oz$ ) parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On donne le champ magnétique en  $M$  et en  $P$  (voir figure 14.22).

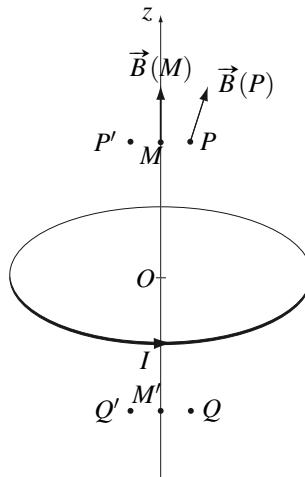
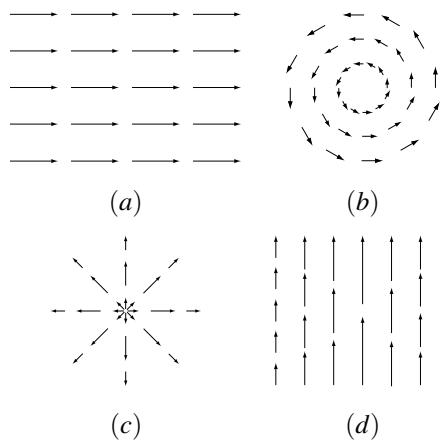


Figure 14.22

Représenter le champ magnétique en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan de la spire, en  $P'$  symétrique de  $P$  par rapport à l'axe, en  $Q$  symétrique de  $P$  par rapport au plan de la spire et en  $Q'$  symétrique de  $Q$  par rapport à l'axe.

**14.3 Lignes de champ (★★)** Les figures ci-dessous représentent, dans un plan  $z = \text{cste}$ , quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme :  $\vec{d}(x, y) = a_x(x, y)\vec{u}_x + a_y(x, y)\vec{u}_y$ .

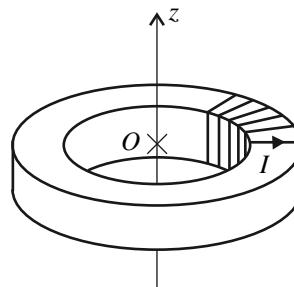
## CHAPITRE 14 – CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE



Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ magnétostatique, quand c'est possible, dire si des courants sont présents dans la région représentée.

**14.4 Bobine torique (\*)**

On considère un tore d'axe ( $Oz$ ) dont la section par un plan méridien est un carré. On réalise une bobine en enroulant un fil sur le tore en  $N$  spires très serrées et régulièrement réparties.



Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace lorsqu'on fait passer un courant d'intensité  $I$  dans cette bobine.

**14.5 Champ au voisinage de l'axe d'une spire (\*\*)** 

On considère une spire circulaire de rayon  $a$ , d'axe ( $Oz$ ), parcourue par un courant  $I$ .

1. Justifier qu'en un point de l'axe ( $Oz$ ), le champ  $\vec{B}$  est de la forme :  $\vec{B} = B_0(z) \vec{u}_z$ .

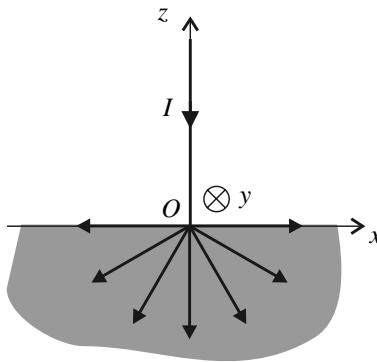
L'expression de la fonction  $B_0(z)$  est inutile pour la suite de l'exercice.

2. On se place près de l'axe. Montrer que, au deuxième ordre en  $r/a$  :

$$\vec{B}(M) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz}(z) \vec{u}_r + \left( B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2}(z) \right) \vec{u}_z$$

**14.6 Champ magnétique d'un éclair (★★)**

La distribution de courants ci-dessous modélise le courant d'un éclair tombant verticalement sur le sol.



Un courant d'intensité  $I$  descend l'axe ( $Oz$ ) et se répand de manière isotrope dans le demi-espace  $z < 0$ . Déterminer la densité volumique de courant en un point du demi-espace  $z < 0$  situé à distance  $r$  de  $O$ . Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

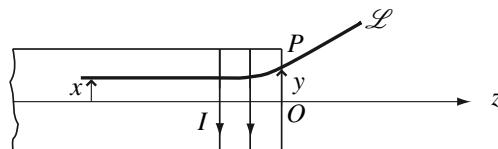
L'aire d'une calotte sphérique de rayon  $r$  et demi-angle au centre  $\alpha$  est  $2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ .

**14.7 Solénoïde semi-infini (★★)**

On considère un solénoïde infiniment fin, de rayon  $a$ , d'axe ( $Oz$ ), comportant  $n$  spires par unité de longueur, et parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Il est semi-infini, il s'étend le long du demi-axe  $z < 0$ . On appelle  $O$  le centre de la face terminale.

1. Déterminer l'expression de la composante suivant ( $Oz$ ) du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le solénoïde en un point  $M$  de sa face terminale.

2. Soit  $\mathcal{L}$  une ligne de champ magnétique. Elle coupe la face terminale en un point  $P$  situé à la distance  $y$  de  $O$ . À l'intérieur du solénoïde, elle tend à se confondre avec une parallèle à l'axe  $Oz$ . Pourquoi ? Soit  $x$  la distance à l'axe de cette parallèle. Déterminer la relation entre  $x$  et  $y$ .



## APPROFONDIR

**14.8 Production de champs magnétiques intenses et homogènes (★★)**

Pour traiter la fin de cet exercice, il faut avoir étudié le chapitre 17.

On utilise un solénoïde d'axe ( $Oz$ ), parcouru par un courant continu, pour produire un champ magnétique. On choisit un système de coordonnées cylindro-polaires d'axe ( $Oz$ ), dont on note  $(r, \theta, z)$  les coordonnées et  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  le repère orthonormé direct.

**1.** On suppose que tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Quelles conditions le vecteur densité de courant  $\vec{j} = (j_r, j_\theta, j_z)$  doit-il vérifier pour cela ?

**2.** Quelles conséquences en résulte-t-il pour le champ magnétique  $\vec{B} = (B_r, B_\theta, B_z)$  ?

**3.** On suppose que  $j_\theta$  est uniforme à l'intérieur d'un cylindre de révolution creux de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1 < R_2$ , et de longueur  $L$  très grande devant  $R_2$ .

Donner l'expression de la valeur  $B_0$  du champ magnétique au centre.

**4.** La conductivité ohmique du matériau, notée  $\gamma$ , est supposée uniforme. Donner l'expression de la puissance dissipée dans le solénoïde par effet Joule.

**5.**  $B_0$ ,  $L$  et  $R_2$  étant fixés, comment faut-il choisir  $R_1$  pour minimiser la puissance dissipée ?

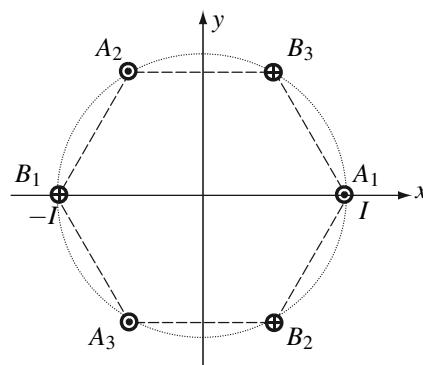
**6.** On considère un solénoïde de cuivre de longueur  $L = 1,0$  m produisant un champ  $B_0 = 1,3$  T.

Calculer une borne inférieure de la puissance dissipée. Comparer à la puissance d'un radiateur électrique ordinaire. On donne :  $\gamma = 6 \times 10^7$  S.m<sup>-1</sup>.

**7.**  $B_0$  étant fixé, comment choisir  $R_2$  pour minimiser l'élévation de température du solénoïde due à l'effet Joule ? On demande un raisonnement qualitatif.

**14.9 Dispositif de confinement de neutrons (★★★)**

Six fils rectilignes infiniment longs, parallèles à l'axe ( $Oz$ ), sont disposés de telle sorte que leur trace sur un plan qui leur est perpendiculaire soient les six sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre  $O$ , de rayon  $a$ . Dans deux fils voisins, les intensités sont  $I$  et  $-I$ .



1. Exprimer le champ  $\vec{B}_{A_1}(M)$  créé par le fil  $A_1$  en un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ), l'origine des angles étant prises sur la droite  $B_1A_1$ .
2. Comment peut-on déduire de l'expression de  $\vec{B}_{A_1}(M)$  le champ  $\vec{B}_{B_1}(M)$  créé en  $M$  par le fil  $B_1$  ?
3. Comment passe-t-on du couple de fils  $A_1 + B_1$  aux couples  $A_2 + B_2$  et  $A_3 + B_3$  pour le calcul du champ magnétique en  $M$  ?
4. Compléter la carte des lignes de champ donnée par la figure (14.23) en indiquant la trace des fils sur la figure, en orientant les lignes de champ tracées et en traçant autour des autres fils les lignes de champ orientées correspondant à celles qui sont représentées autour du fil de trace  $A_1$ .  
Que vaut le champ au centre ?

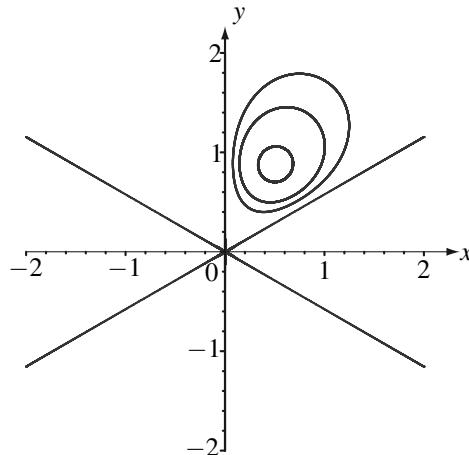


Figure 14.23 – Carte de lignes de champ à compléter

5. On se place au voisinage du centre  $O$ . On donne le développement limité à l'ordre 3 en  $u = r/a$  du champ magnétique  $\vec{B}_{A_1}(M)$  (on a posé  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ ) :

$$\begin{aligned}\vec{B}_{A_1}(M) = & -B_0 \sin \theta (1 + 2u \cos \theta + (-1 + 4 \cos^2 \theta) u^2) \vec{e}_r \\ & -B_0 \cos \theta \left( 1 + \left( 2 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right) u + (-2 + 4 \cos^2 \theta) u^2 \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

En déduire que le champ au voisinage de l'axe est de la forme :

$$\vec{B}(M) = B_0 \frac{r^2}{a^2} (f(\theta) \vec{e}_r + g(\theta) \vec{e}_\theta)$$

Le calcul, non demandé, donne :  $\vec{B}(M) = -6 < B_0 \frac{r^2}{a^2} (\sin 3\theta \vec{e}_r + \cos 3\theta \vec{e}_\theta)$ .

6. Calculer le module  $B(M)$  du champ total et établir l'équation des lignes « isomodule » dans le plan ( $Oxy$ ) telles que  $B(M) = \text{cste}$ .

## CHAPITRE 14 – CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

**14.10 Compression magnétique d'un plasma (★★)**

Un plasma neutre est localisé dans la partie centrale d'un tube cylindrique de rayon  $R_0$  et d'axe ( $Oz$ ), où il occupe l'intérieur d'un volume cylindrique coaxial de rayon  $R_1$ ; la partie extérieure comprise entre ce volume et le tube (correspondant à  $R_1 < r < R_0$  avec  $r$  distance à l'axe ( $Oz$ )) est vide et la pression y est nulle.

Un courant électrique d'intensité totale  $I$  circule parallèlement à ( $Oz$ ) dans la zone correspondant à  $R_2 < r < R_1$  où la densité volumique de courant est uniforme.

**1.** Déterminer le champ magnétique pour  $r < R_0$ .

**2.** On admet que la force de Laplace s'exerçant sur un volume élémentaire  $d\tau$  est :  $\vec{dF}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$  (ceci sera vu au chapitre 17). On néglige la gravitation et on appelle  $p$  la pression en un point du plasma. En écrivant l'équilibre d'un élément de volume mésoscopique, établir l'expression de  $\frac{dp}{dr}$  pour  $r < R_1$ .

**3.** Exprimer la pression pour  $r < R_2$ . On suppose désormais que  $R_2 \simeq R_1$ . Exprimer la pression dans le plasma en fonction de  $\mu_0, I, R_1$ .

$$\text{On donne, pour } u \simeq 1 : \frac{1}{(1-u^2)^2} \left( \frac{1-u^2}{2} - u^2 \ln \frac{1}{u} \right) \simeq \frac{1}{4} - \frac{1}{6}(u-1).$$

**4.** Le plasma est constitué d'ions et d'électrons de concentrations égales ; soit  $N$  cette concentration commune. On assimile le plasma à un gaz parfait et on admet en particulier que la température  $T$  des électrons considérés comme « particules » du gaz, est la même que celle des ions.

Exprimer cette température en fonction de  $I, R_1, N, \mu_0$  et  $k_B$ . Calculer numériquement  $T$  pour  $I = 1,0 \times 10^6$  A,  $R_1 = 10$  cm et  $N = 1,0 \times 10^{21}$  m<sup>-3</sup>.

**CORRIGÉS****14.1 Propriétés des lignes de champ**

Les lignes de champ électrostatique ne peuvent être fermées car le champ électrostatique dérive d'un potentiel et ce potentiel décroît strictement le long d'une ligne de champ.

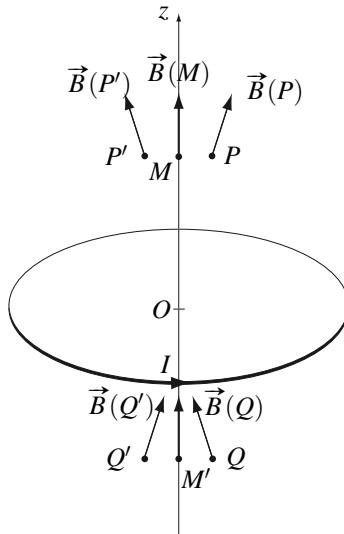
Les lignes de champ magnétique sont fermées, elles « entourent » les lignes de courant.

La réponse correcte est donc l'affirmation a).

**14.2 Symétries du champ magnétostatique**

Le plan contenant l'axe  $Oz$  et orthogonal au vecteur  $\vec{MP}$  est plan d'antisymétrie de la spire. Le point  $P'$  est le symétrique de  $P$  par rapport à ce plan donc le champ en  $P'$  est le symétrique du champ en  $P$ . De même le champ en  $Q'$  est le symétrique du champ en  $Q$ .

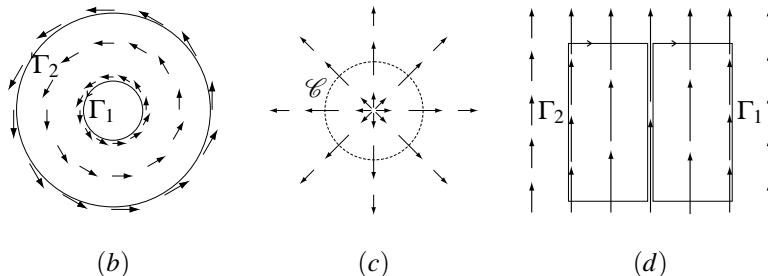
Le plan de la spire est un plan de symétrie des courants. Les champs en  $M'$ ,  $P'$  et  $Q'$  sont donc les opposés des symétriques des champs en  $M$ ,  $P$  et  $Q$  respectivement (voir figure).

**14.3 Lignes de champ**

Les lignes de champ correspondent à celles d'un champ magnétostatique si le flux du champ à travers toute surface fermée est nul. Donc si on peut mettre en évidence une surface fermée à travers laquelle le flux n'est pas nul, le champ ne pourra pas être un champ magnétostatique. C'est le cas du champ (c) : son flux sortant à travers le cylindre  $\mathcal{C}$  d'axe parallèle à  $(Oz)$  dont la trace est représentée sur la figure est strictement positif.

Le champ (a) est un champ uniforme donc son flux à travers toute surface fermée est nul et sa circulation le long de tout contour fermé est nulle. Il s'agit peut s'agir d'un champ magnétostatique et dans ce cas, aucune des courants créant ce champ ne se trouve dans la zone représentée.

## CHAPITRE 14 – CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE



Le champ (b) a une circulation positive à travers tout cercle d'axe parallèle à ( $Oz$ ) tel que les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  représentés. S'il s'agit d'un champ magnétostatique, l'intensité enlacée par chacun de ces cercles est positive. De plus la circulation le long de  $\Gamma_2$  est supérieure à la circulation le long de  $\Gamma_1$  (car le champ est plus intense et le périmètre plus grand) donc un courant dirigé vers l'avant de la figure circule entre ces deux cercles.

Le champ (d) a une circulation positive à travers le rectangle  $\Gamma_1$  et une circulation négative à travers le rectangle  $\Gamma_2$ . S'il s'agit d'un champ magnétostatique, on peut dire qu'il circule à travers  $\Gamma_1$  un courant dirigé vers l'arrière de la figure et à travers  $\Gamma_2$  un courant dirigé vers l'avant de la figure.

#### 14.4 Bobine torique

On utilise des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Pour tout point  $M$  de l'espace, le plan contenant  $M$  et l'axe ( $Oz$ ) (plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ ) est plan de symétrie de la bobine ; le champ magnétique en  $M$  est donc orthogonal à ce plan soit :  $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$ . D'autre part, la distribution est invariante par rotation autour de  $Oz$  donc  $B(r, \theta, z)$  ne dépend pas de  $\theta$ . Finalement :  $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$ .

On applique le théorème d'Ampère en prenant pour contour fermé le cercle d'axe ( $Oz$ ) de rayon  $r$  passant par  $M$  orienté dans le sens direct autour de  $Oz$  :

- $\mathcal{C}_B = \oint_{\text{ cercle}} (B(r, z) \vec{u}_\theta) \cdot (dl u_\theta) = 2\pi r \times B(r, z) ;$

- $I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \text{ est à l'intérieur du tore} \\ 0 & \text{si } M \text{ est à l'extérieur du tore} \end{cases}$  (bien regarder le sens du courant sur la figure);

De la relation  $\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$  on tire :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } M \text{ est à l'intérieur du tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \text{ est à l'extérieur du tore} \end{cases}$$

#### 14.5 Champ au voisinage de l'axe d'une spire

1. Soit  $P$  un point de l'axe ( $Oz$ ), de coordonnées  $(0, 0, z)$ . Tous les plans contenant l'axe ( $Oz$ ) sont plans d'antisymétrie de la distribution de courants donc, comme  $\vec{B}(P)$  appartient à tous ces plans,  $\vec{B}(P) = B_0(z) \vec{u}_z$ .

2. Considérons maintenant un point  $M$  situé au voisinage de l'axe mais pas sur l'axe. En ce point, on peut écrire de manière générale :

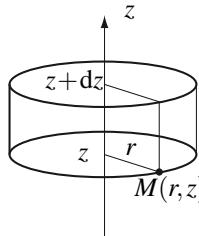
$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Le plan  $(M, Oz)$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, donc  $\vec{B}(M)$  appartient à ce plan :  $B_\theta(r, \theta, z) = 0$ . La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  donc  $B_r(M)$  et  $B_z(M)$  ne dépendent que de  $r$  et de  $z$ . Finalement :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

avec  $B_r(0, z) = 0$  et  $B_z(0, z) = B_0(z)$ .

Soit le cylindre élémentaire de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$ , situé entre les plans de cote  $z$  et  $z + dz$ . On choisit  $r$  et  $dz$  tels que  $r \ll L^*$  et  $dz \ll L^*$  où  $L^*$  est la distance caractéristique des variations spatiales des composantes du champ  $\vec{B}$  soit  $L^* \sim a$ , rayon de la spire.



Le flux de  $\vec{B}$  à travers ce cylindre est nul. En supposant le champ quasiment uniforme sur les disques de rayon  $r$  (car  $r \ll L^*$ ) et en calculant au premier ordre en  $dz$  ce flux s'écrit :

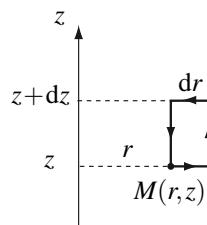
$$\Phi = -B_z(0, z)\pi r^2 + B_r(r, z)2\pi r dz + B_z(0, z + dz)\pi r^2 = \frac{\partial B_r}{\partial z}(0, z)\pi r^2 + B_r(r, z)2\pi r dz.$$

La relation  $\Phi = 0$  donne, après simplification par  $2\pi r dz$  :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z) = -\frac{r}{2} B'_0(z).$$

Le développement limité de  $B_z(r, z)$  en fonction de  $r$  ne comporte que des termes de puissances paires à cause de l'invariance par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ . Donc  $B_z(r, z) - B_z(0, r)$  est au moins d'ordre deux en  $r$ . Ainsi, au premier ordre en  $r$ ,  $B_z(r, z) = B_z(0, z) = B_0(z)$

Quel est le terme suivant du développement limité de  $B_z(r, z)$  en fonction de  $r$ ? Pour le déterminer, on calcule la circulation de  $\vec{B}$  le long du rectangle ci-dessous :



## CHAPITRE 14 – CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

La circulation de  $\vec{B}$  le long de ce contour est nul puisqu'il n'enlace aucun courant. Elle s'écrit, au premier ordre en  $dr$  et  $dz$  :

$$\mathcal{C}_B = B_r(r, z)dr + B_z(r + dr, z)dz - B_r(r, z + dz)dr - B_z(r, z)dz = \left( \frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z) - \frac{\partial B_r}{\partial z}(r, z) \right) drdz.$$

La relation  $\mathcal{C}_B = 0$  donne, après simplification par  $drdz$  :  $\frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z) = \frac{\partial B_r}{\partial z}(r, z)$ . En utilisant l'expression de  $B_r(r, z)$  établie précédemment, on obtient :  $\frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z) = -\frac{r}{2}B_0''(z)$ . On intègre enfin cette relation entre 0 et  $r$  pour obtenir :

$$B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}B_0''(z),$$

qui est le résultat demandé.

#### 14.6 Champ magnétique d'un éclair

On utilise toujours les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ . Dans le demi-espace  $z < 0$  la densité volumique de courant est de la forme :  $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ . Toute demi-sphère  $\mathcal{D}(r)$  de centre  $O$  et rayon  $r$  est traversée par l'intensité  $I$  :

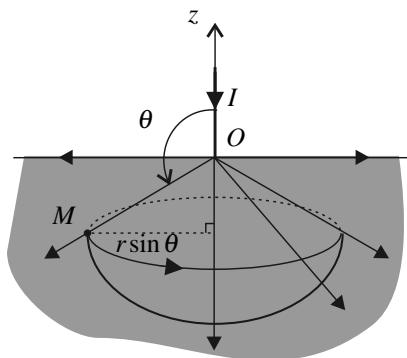
$$I = \iint_{\mathcal{D}(r)} (\vec{j}(r)\vec{u}_r) \cdot (dS\vec{u}_r) = 2\pi r^2 j(r) \Rightarrow \vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{u}_r$$

Soit  $M(r, \theta, \varphi)$  un point quelconque où on souhaite calculer le champ. La distribution de courant est symétrique par rapport au plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  donc  $\vec{B}(M) = B(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi$ . De plus elle est invariante par rotation autour de  $(Oz)$  donc  $B(r, \theta, \varphi)$  ne dépend pas de  $\varphi$ . Finalement :

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta)\vec{u}_\varphi.$$

On applique le théorème d'Ampère en prenant comme contour le cercle d'axe  $(Oz)$  passant par  $M$ , de rayon  $r \sin \theta$ .

- $\mathcal{C}_B = \oint_{\text{cercle}} (B(r, \theta)\vec{u}_\varphi) \cdot (dl\vec{u}_\varphi) = 2\pi r \sin \theta \times B(r, \theta)$  ;
- Pour  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  l'intensité du courant enlacé est évidemment  $I_{\text{enlacé}} = I$ .



Pour  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , l'intensité enlacée est égale à l'intensité traversant n'importe quelle surface s'appuyant sur le cercle (en régime permanent la densité volumique de courant est à flux conservatif) ; le plus facile est de calculer l'intensité traversant la calotte sphérique s'appuyant sur le cercle (voir figure) :

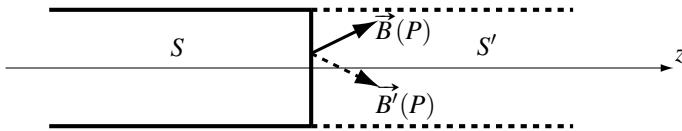
$$I_{\text{enlacé}} = \iint_{\text{calotte}} (j(r) \vec{u}_r) \cdot (dS \vec{u}_r) = j(r) \times 2\pi r^2 (1 - \cos(\pi - \theta)) = I(1 + \cos \theta)$$

Du théorème d'Ampère  $\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$  on tire :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} \vec{u}_\varphi & \text{si } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\mu_0 I(1 + \cos \theta)}{2\pi r \sin \theta} \vec{u}_\varphi & \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

### 14.7 Solénoïde semi-infini

1. On appelle  $S'$  le solénoïde qui complète  $S$  en un solénoïde infini.  $S'$  se déduit de  $S$  par symétrie par rapport au plan de la face terminale de  $S$ . Le champ  $\vec{B}'(P)$  créé par  $S'$  en  $P$  est donc l'opposé du symétrique du champ  $\vec{B}(P)$  créé par  $S$  en  $P$  par rapport à ce plan.



En ajoutant les deux solénoïdes semi-infinis  $S$  et  $S'$  on constitue un solénoïde infini créant en tout point  $M$  le champ  $\vec{B}(M) + \vec{B}'(M)$ . L'expression de ce champ est par ailleurs bien connue. En se plaçant au point  $P$  précédent, on a donc :

$$\vec{B}(P) + \vec{B}'(P) = \mu_0 n I \vec{u}_z.$$

On en déduit, en projetant cette relation sur  $(Oz)$  :

$$B_z(P) + B'_z(P) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad \text{soit} \quad 2B_z(P) = \mu_0 n I \quad \text{soit} \quad B_z(P) = \frac{1}{2} \mu_0 n I.$$

2. À l'intérieur du solénoïde, loin de la face terminale, celui-ci apparaît comme infini, les lignes de champ sont donc parallèles à l'axe  $(Oz)$ .

On considère alors le tube de champ qui s'appuie sur les cercles de rayon  $x$  et  $y$  et d'axe  $(Oz)$ . Le flux de  $\vec{B}$  est le même à travers toute section de ce tube de champ d'où :

$$\mu_0 n I \pi x^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n I \pi y^2 = 0 \quad \text{soit} \quad y = \sqrt{2}x.$$

### 14.8 Production de champs magnétiques intenses et homogènes

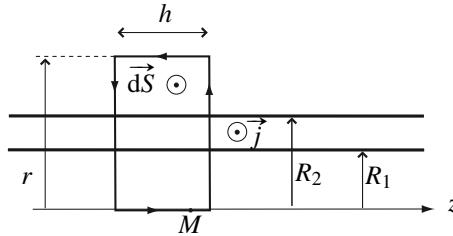
1. Soit un point  $M$  quelconque et  $\Pi$  le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ .  $\Pi$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants donc  $\vec{j}(M)$  est égal à l'opposé de son symétrique par rapport à  $\Pi$ , ce qui n'est possible que si  $j_r = j_z = 0$ . Finalement :  $\vec{j}(M) = j_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$ .

De plus, si tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie, la norme de  $\vec{j}$  est invariante par toute rotation autour de  $(Oz)$ , donc  $j_\theta$  ne dépend pas de  $\theta$ .

2.  $\vec{B}$  appartient à tout plan d'antisymétrie et sa norme est invariante par rotation autour de  $(Oz)$ , d'où :  $\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$ .

3. Loin des bords, le solénoïde apparaît comme infini, donc le plan qui contient le point  $M$  où on cherche le champ et qui est perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie de la distribution de courant,  $\vec{B}(M)$  est donc porté par  $\vec{u}_z$ . Par ailleurs, la distribution est maintenant considérée comme invariante par toute translation selon  $(Oz)$ . On en déduit :  $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z$ .

Comme dans le cours, on applique le théorème d'Ampère en prenant comme contour un rectangle situé dans un plan  $\theta$  constant, de longueur  $h$  arbitraire. On fera attention à l'orientation du contour. On sait que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.



La circulation de  $\vec{B}$  le long de ce contour est donc :  $\mathcal{C}_B = B_0 h$ . L'intensité enlacée est égale à  $(R_2 - R_1) j_\theta h$  ( $j_\theta$  est uniforme). Le théorème d'Ampère donne donc :

$$B_0 = \mu_0 (R_2 - R_1) j_\theta$$

4. La puissance volumique dissipée dans le solénoïde par effet Joule est égale à  $\mathcal{P}_V = \frac{j_\theta^2}{\gamma}$ ,

elle est uniformément répartie donc :  $\mathcal{P}_J = \frac{j_\theta^2}{\gamma} \pi (R_2^2 - R_1^2) L$ .

5. On exprime  $\mathcal{P}_J$  en fonction de  $B_0$  :  $\mathcal{P}_J = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$ . La fonction qui a  $x$  associe  $\frac{1+x}{1-x}$  est croissante sur  $[0, 1]$  donc  $\mathcal{P}_J$  est minimale pour  $R_1 = 0$ .

6.  $\mathcal{P}_{\min} = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L = 50 \text{ kW}$ .

La puissance d'un radiateur ordinaire est de l'ordre de 2 kW. La puissance calculée est grande, environ 20 fois plus importante que celle d'un radiateur ordinaire.

7. Quel que soit le mode de transfert thermique, la puissance évacuée l'est par la surface latérale du solénoïde alors que la capacité thermique est proportionnelle à son volume. La

variation de température au cours du temps varie donc comme la surface sur le volume du cylindre, elle décroît quand  $R_2$  augmente.

### 14.9 Dispositif de confinement de neutrons

**1.** Voir cours : le champ magnétique créé par un fil s'écrit, en coordonnées cylindriques d'axe le fil :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Or  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$ , on en déduit l'expression intrinsèque du champ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{A}_1 \vec{M}}{A_1 M^2}$$

On remarque que l'invariance par translation selon l'axe ( $Oz$ ) permet de se limiter au plan  $z = 0$ .

En coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ),  $\vec{A}_1 \vec{M} = r \vec{u}_r - a \vec{u}_x = (r - a \cos \theta) \vec{u}_r + a \sin \theta \vec{u}_\theta$  et le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-a \sin \theta \vec{u}_r + (r - a \cos \theta) \vec{u}_\theta}{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}$$

**2.** Pour obtenir le champ du fil passant par  $B_1$ , il suffit de remplacer  $I$  par  $-I$  et  $\theta$  par  $\theta + \pi$ .  $\sin \theta$  devient donc  $-\sin \theta$  et  $\cos \theta$  devient  $-\cos \theta$ .

**3.** Pour passer du couple de fils passant par  $A_1$  et  $B_1$  au couple de fils passant par  $A_2$  et  $B_2$ , on remplace  $\theta$  par  $\theta + \frac{2\pi}{3}$  et pour passer au couple de fils passant par  $A_3$  et  $B_3$ , on remplace  $\theta$  par  $\theta + \frac{4\pi}{3}$ .

**4.** Les lignes de champ tournent dans le sens trigonométrique autour d'un fil parcouru par le courant  $I$  et dans le sens horaire autour d'un fil parcouru par le courant  $-I$ . Les lignes de champ autour des différents fils se déduisent les une des autres par rotation d'angle  $\pi/3$ .

Le point  $O$  est à l'intersection de trois plans de symétrie distincts (les plans passant par deux fils opposés), il est nul.

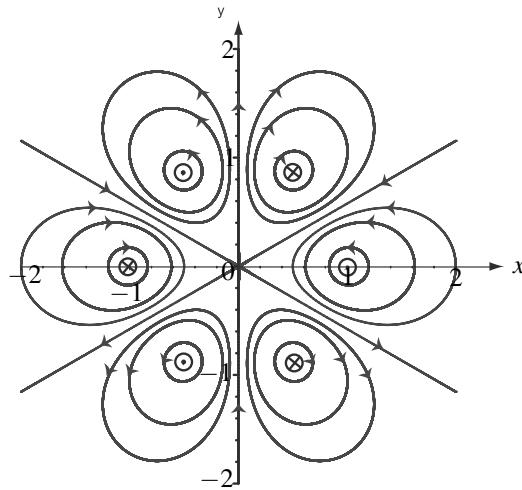
**5.** Pour obtenir le champ magnétique créé par l'ensemble des fils, il suffit d'appliquer le principe de superposition et de sommer les contributions des couples de fils passant respectivement par  $A_1$  et  $B_1$ ,  $A_2$  et  $B_2$  et  $A_3$  et  $B_3$ . On utilise le fait que :

$$\begin{cases} \sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \\ \cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

et on obtient le résultat demandé.

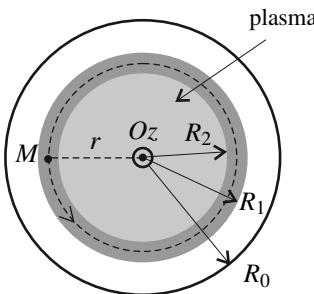
**6.**  $B(r) = B_0 \frac{r^2}{a^2}$ . Les lignes isomodules sont les cercles centrés sur  $O$ .

## CHAPITRE 14 – CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE



## 14.10 | Compression magnétique d'un plasma

1. Soit  $M$  un point quelconque de coordonnées  $(r, \theta, z)$  (coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ ). La distribution de courants admet le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  comme plan de symétrie et elle est invariante par translation parallèlement à  $(Oz)$  et rotation autour de  $(Oz)$ ; le champ magnétique en  $M$  est donc de la forme :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$ .



On applique le théorème d'Ampère en prenant pour contour le cercle d'axe  $(Oz)$  passant par  $M$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens direct autour de  $Oz$ .

$$\bullet \mathcal{C}_B = \oint_{\text{cercle}} (B(r) \vec{u}_\theta) \cdot (\mathrm{d}l \vec{u}_\theta) = 2\pi r \times B(r);$$

$$\bullet I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_2 \\ I \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ I & \text{si } R_1 < r < R_0 \end{cases}.$$

Du théorème d'Ampère :  $\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ , on tire :  $\vec{B}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \vec{u}_\theta & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } R_1 < r < R_0 \end{cases}$

**2.** La force de Laplace exercée sur le volume  $d\tau$  est  $d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$ .

L'équilibre entre cette force et la force de pression  $d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}} p d\tau$  donne la relation :  $\vec{\text{grad}} p = \vec{j} \wedge \vec{B}$ . On va expliciter ce gradient.

La densité volumique est égale à  $\vec{j} = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$  dans la couche  $R_2 < r < R_1$  ; elle est nulle dans le reste de l'espace. La relation précédente donne un gradient de pression colinéaire à  $\vec{u}_r$  (ce qui était prévisible puisque, par symétrie,  $p$  ne peut dépendre que de  $r$ ) et :

$$\frac{dp}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_2 \\ -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2(R_1^2 - R_2^2)^2} \frac{r^2 - R_2^2}{r} & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ 0 & \text{si } R_1 < r < R_0 \end{cases}$$

On constate que la pression est uniforme pour  $r < R_2$ .

**3.** La pression est nulle pour  $r > R_1$  ; pour  $r < R_2$  elle vaut :

$$p(r < R_2) = - \int_{R_2}^{R_0} \frac{dp}{dr} dr = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{dp}{dr} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2(R_1^2 - R_2^2)^2} \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{2} - R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right)$$

On suppose que  $R_2 \simeq R_1$ . On pose  $u = R_2/R_1$  et on utilise la formule donnée dans l'énoncé. On a donc à l'ordre le plus bas :

$$p(r < R_2) \simeq \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^2} = \frac{B(R_1)^2}{2\mu_0}$$

**4.** La loi des gaz parfaits s'écrit :  $p = 2Nk_B T$  (en tenant compte des deux sortes de particules).

$$\text{Il vient donc : } T = \frac{p}{2Nk_B} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi^2 R_1^2 N k_B} = 58 \times 10^6 \text{ K}$$



# Dipôle magnétique

Le dipôle magnétique est l'analogue en magnétostatique du dipôle électrique en électrostatique. Dans ce chapitre on complète les connaissances de première année sur le sujet en montrant l'analogie entre les deux types de dipôles.

## 1 Moments magnétiques

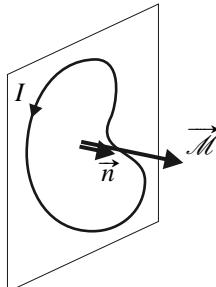
### 1.1 Notion de moment magnétique

La comparaison des cartes de lignes de champ magnétique créé par une spire, une bobine longue ou un aimant montre que le champ à grande distance a la même allure. Par ailleurs, ces lignes de champ ressemblent également aux lignes de champ électrostatique à grande distance d'un dipôle électrostatique (doublet de charges opposées).

Ces constatations amènent à définir le moment magnétique  $\vec{M}$  d'une distribution de courant. Pour un circuit filiforme plan parcouru par un courant d'intensité  $I$  :

$$\vec{M} = IS\vec{n},$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur orthogonal au circuit, dans le sens correspondant au sens positif de  $I$  selon la règle de la main droite (voir figure 15.1).



**Figure 15.1 –** Moment magnétique d'un circuit filiforme plan.

Dans le cas d'un enroulement de fil, le moment magnétique est la somme des moments ma-

gnétiques des spires constituant l'enroulement. En particulier, le moment magnétique d'une bobine comportant  $N$  spires identiques de surface  $S$  est :  $\vec{\mathcal{M}} = NIS\vec{n}$ .

L'expression du moment magnétique d'une distribution quelconque ne figure pas au programme.

### Remarques

1. Le moment magnétique ne dépend pas du sens conventionnel choisi pour l'intensité : si l'on change le sens positif du courant, on inverse aussi le vecteur normal  $\vec{n}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  n'est pas changé.
2. En revanche, le sens du moment magnétique dépend de l'orientation de l'espace (choix d'un trièdre direct et règle de la main droite), c'est donc un pseudo-vecteur (ou vecteur axial).

La notion de moment magnétique est étendue aux aimants puisque les lignes de champ magnétique d'un aimant et d'une boucle de courant à grande distance sont identiques.



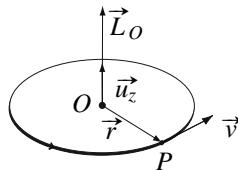
**Figure 15.2** – Équivalence entre un aimant et une boucle de courant.

L'unité du moment magnétique est l'ampère mètre carré ( $A \cdot m^2$ ) dans les unités du Système International.

## 1.2 Ordres de grandeur

### Exemple

Dans un modèle d'atome classique, l'électron décrit une orbite autour du noyau. L'interaction entre le noyau et l'électron est une interaction attractive de type newtonien, la trajectoire la plus simple pour l'électron est une trajectoire circulaire. C'est ce modèle, appelé **modèle planétaire**, que l'on adoptera : l'électron décrit un cercle autour du noyau.



**Figure 15.3** – Moment cinétique de l'électron d'un atome d'hydrogène.

Le moment cinétique de l'électron dans son mouvement autour du noyau s'écrit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}_z \quad (15.1)$$

L'orbite de l'électron est équivalente à une boucle de courant circulaire, parcourue par un courant d'intensité  $I = q/T$ , où  $q = -e$  est la charge de l'électron et  $T$  la période de son mouvement. Le moment magnétique associé est donc  $\vec{\mathcal{M}} = \frac{q}{T}\pi r^2\vec{u}_z$ . Or  $T = \frac{2\pi r}{v}$ , d'où

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 \vec{u}_z = \frac{qvr}{2} \vec{u}_z = \frac{q}{2m} \vec{L}_O = -\frac{e}{2m} \vec{L}_O.$$

Ce calcul met en évidence une relation de proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique. Le rapport de proportionnalité  $\gamma = -\frac{e}{2m}$ , tel que  $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L}_O$ , est appelé rapport gyromagnétique de l'électron.

D'après la théorie quantique, l'ordre de grandeur d'un moment cinétique atomique est la quantité  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . On en déduit que l'ordre de grandeur d'un moment magnétique atomique est  $\frac{e\hbar}{2m}$ .

L'ordre de grandeur du moment magnétique d'un atome est le **magnéton de Bohr** :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \simeq 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Pour un aimant, on peut considérer que son moment magnétique est dû à la présence de moments magnétiques atomiques, tous de cet ordre de grandeur. Le moment magnétique maximal de l'aimant sera obtenu quand tous les petits moments atomiques seront parallèles. Si il y a  $n$  atomes par unité de volume, le moment magnétique volumique maximal sera égal à  $M_{\max} = n\mu_B$ . Or dans un solide,  $n \simeq 10^{29}$  atomes par mètre-cube. Finalement :  $M_{\max} \simeq 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ . Avec cette valeur on calcule pour une aiguille d'une boussole un moment magnétique de l'ordre de  $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

Le moment magnétique de la Terre vaut  $7,5 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Le pôle Nord de la Terre correspond au pôle Sud du dipôle magnétique qui modélise le comportement magnétique de la planète. En effet, on a historiquement appelé pôle Nord le pôle vers lequel se dirige le pôle Nord de la boussole. Ce dernier étant attiré par un pôle Sud, le pôle Nord de la Terre est un pôle Sud pour l'aimant correspondant.

## 2 Champ créé par un dipôle magnétique

### 2.1 Approximation dipolaire

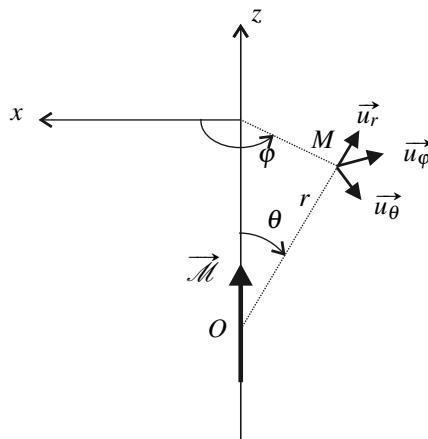
On appelle **dipôle magnétique** une distribution de courants de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  non nul dont la taille caractéristique  $a$  est infiniment petite devant les autres longueurs du problème.

La notion abstraite de dipôle magnétique est applicable :

- pour modéliser le champ magnétique d'une distribution de courants réelle de taille caractéristique  $a$  à distance très grande devant  $a$ , on parle alors de **dipôle actif**;
- pour calculer l'action d'un champ magnétique extérieur sur une distribution de courants réelle de taille  $a$  lorsque la distance caractéristique de variation du champ extérieur est très grande devant  $a$ , on parle alors de **dipôle passif**.

## 2.2 Champ magnétique créé par le dipôle

On considère un dipôle magnétique, de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$ , placé en  $O$ . On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et dont l'axe ( $Oz$ ) est dirigé suivant le moment magnétique.



**Figure 15.4** – Dipôle magnétique : définition des coordonnées sphériques.

Le champ magnétique créé par le dipôle en  $M$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}})\vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5} \quad (15.2)$$

En coordonnées sphériques :

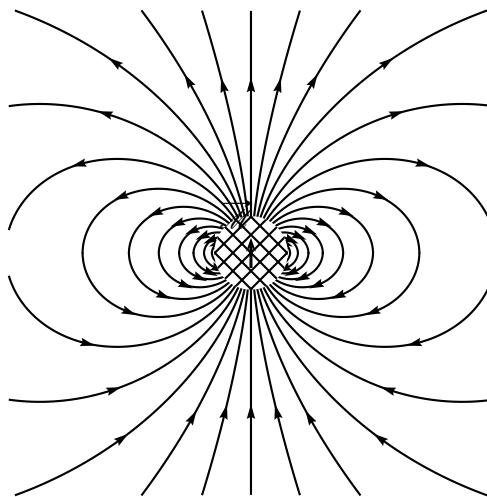
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathcal{M}r \cos \theta)(r \vec{u}_r) - r^2 \mathcal{M}(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)}{r^5} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (15.3)$$

Ces expressions ne sont pas à retenir : elles seront fournies si elles sont nécessaires.

### Remarque

Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique a une expression identique à celle du champ électrostatique d'un dipôle électrostatique (voir chapitre 13) au remplacement près de  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  par  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  et de  $\vec{p}$  par  $\vec{\mathcal{M}}$ .

Les lignes de champ sont représentées sur la figure 15.5.



**Figure 15.5 – Lignes de champ magnétique d'un dipôle magnétique.**

On peut comparer cette carte de champ à celle du champ électrostatique d'un dipôle électrostatique (voir le chapitre *Dipôle électrostatique*). Elles sont identiques, car les champs ont la même expression. Dans les deux cas, la zone hachurée est trop proche de la distribution de courant pour que l'approximation soit valable.

### 3 Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique

Dans ce paragraphe on considère un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique extérieur, c'est-à-dire un champ créé par une autre distribution de courants. Pour que la notion de dipôle soit pertinente il faut que la distance caractéristique de variation de ce champ soit très supérieure à la taille de la distribution de courants que l'on représente par le dipôle.

#### 3.1 Actions subies par un dipôle dans un champ magnétique uniforme

On a vu dans le cours de première année qu'un champ magnétique extérieur *uniforme*  $\vec{B}$  exerce sur le dipôle un couple de Laplace de moment :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B},$$

qui a pour effet d'aligner le vecteur  $\vec{\mathcal{M}}$  sur le vecteur  $\vec{B}$  de manière à ce qu'il ait même direction et même sens.

On admet que ce couple est associé à une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} ,$$

qui est bien minimale lorsque  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont de même direction et même sens.

On peut remarquer l'analogie entre ces expressions et les formules correspondantes pour le dipôle électrostatique qui sont identiques en remplaçant  $\vec{M}$  par  $\vec{p}$  et  $\vec{B}$  par  $\vec{E}$ .

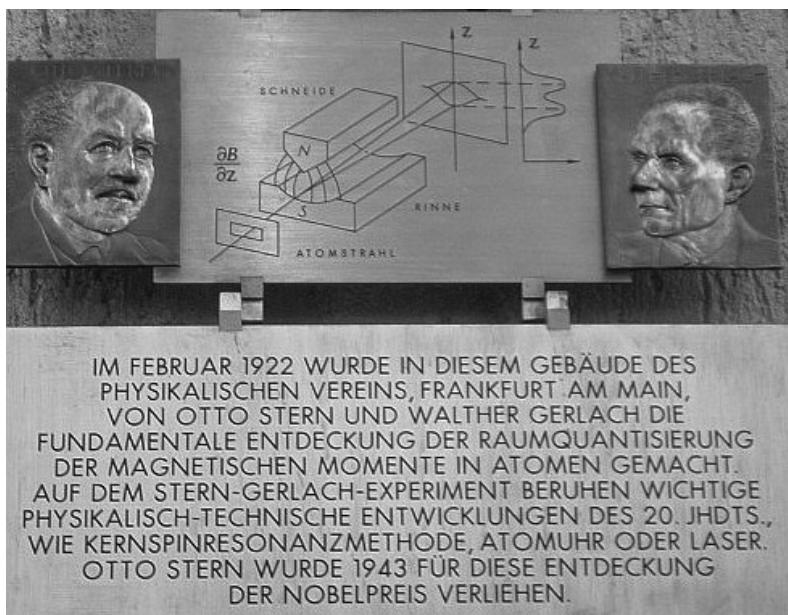
### 3.2 Actions subies par un dipôle dans un champ magnétique non uniforme

Dans le cas où le champ magnétique n'est pas uniforme, l'effet dominant de l'action qu'il exerce sur le dipôle magnétique est le couple  $\vec{\Gamma}_L$  précédent qui tend à aligner le dipôle sur le champ.

Il apparaît, en plus une force dont l'expression, relativement complexe n'est pas à connaître. Elle est identique à celle qui a été donnée pour le dipôle électrostatique (au remplacement près de  $\vec{p}$  par  $\vec{M}$  et de  $\vec{E}$  par  $\vec{B}$  et sera fournie chaque fois qu'elle sera nécessaire). Comme dans le cas électrostatique, la force a pour effet d'attirer le dipôle, préalablement aligné sur le champ électrique par le couple, vers les zones où le champ est le plus intense.

Ces résultats sont valables pour les aimants d'après la modélisation proposée en début de chapitre.

### 3.3 Approche documentaire : l'expérience Stern et Gerlach



**Figure 15.6** – Plaque commémorative de l'expérience de Stern et Gerlach (Institut de Physique de Francfort). Photographie publiée sous licence CC BY-SA 3.0 à l'adresse <http://en.wikipedia.org/wiki/File:SternGerlach2.jpg>

**Traduction :** En février 1922, c'est dans ce bâtiment de l'Association de Physique de Francfort-sur-le-Main qu'Otto Stern et Walther Gerlach ont fait la découverte fondamentale de la quantification spatiale du moment magnétique de l'atome. Des évolutions importantes dans le domaine de la physique du XXe siècle, telles que la méthode de la résonance magnétique nucléaire, l'horloge atomique ou le laser, reposent sur l'expérience de Stern et Gerlach. Le prix Nobel a été décerné à Otto Stern en 1943 pour cette découverte.

### a) Description de l'expérience et résultats

Le schéma du dispositif expérimental est représenté sur la figure 15.7. Pour la rendre plus lisible nous n'avons pas respecté l'échelle. Par exemple la déviation du jet atomique est beaucoup plus faible.

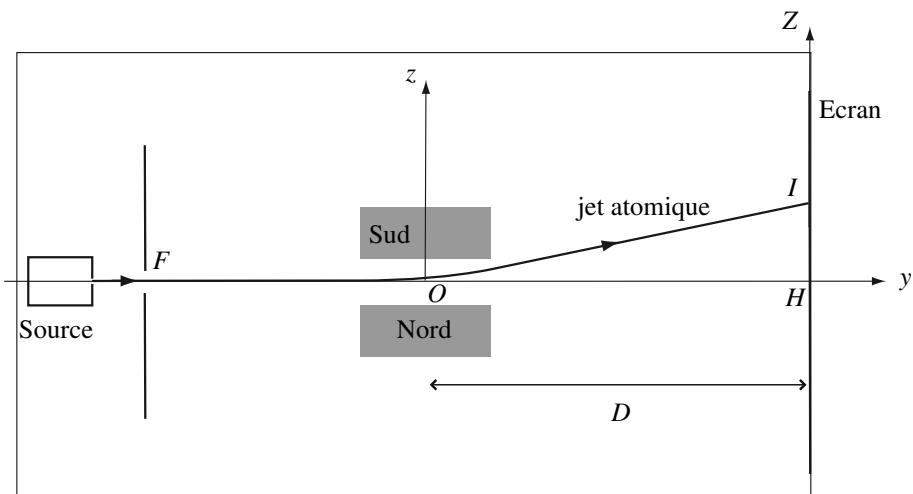


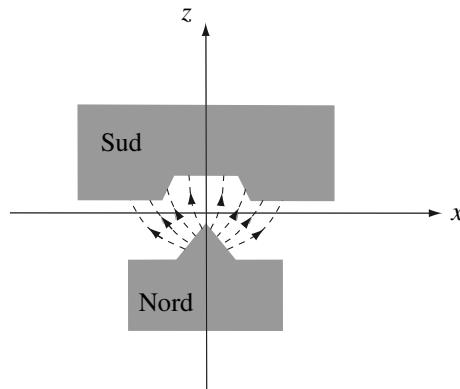
Figure 15.7 – Schéma du dispositif expérimental de Stern et Gerlach.

Tout le dispositif est placé dans un vide poussé où règne une pression inférieure au millipascal. Des atomes d'argent s'échappent par un petit orifice d'une enceinte (la source) chauffée à haute température. Ils se déplacent en ligne droite jusqu'à une fente ( $F$ ) qui sélectionne les atomes qui ont une vitesse parallèle à l'axe ( $Oy$ ).

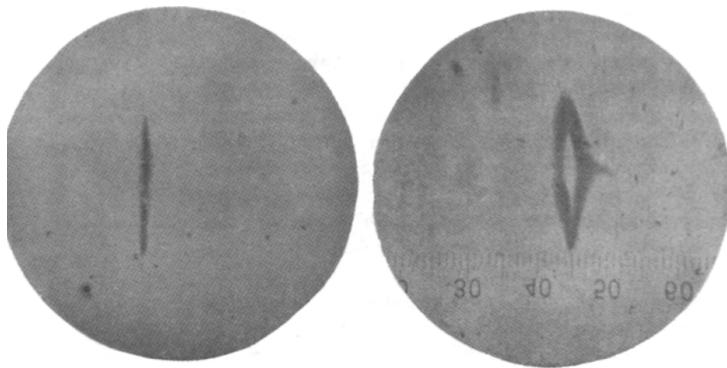
Le jet atomique pénètre alors dans l'entrefer d'un électroaimant dont les pièces polaires ont une forme cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la direction ( $Oy$ ) et dont la forme est choisie pour que le champ magnétique ne soit pas uniforme. L'allure de leur coupe dans le plan ( $xOz$ ) est donnée sur la figure 15.8.

Le jet atomique est dévié par ce champ inhomogène. Quand il sort de l'électroaimant, il continue en ligne droite jusqu'à un écran où sont repérés les impacts des atomes. Cet écran est refroidi pour éviter que les atomes ne se déplacent par la suite.

La figure 15.9 donne les résultats obtenus, issus de la publication originale de Stern et Gerlach (Zeitschrift für Physik 9 (1922)).



**Figure 15.8** – Coupe de l'électro-aimant dans le plan ( $xOz$ ). Les lignes de champ magnétique sont représentées en tiretés.



**Figure 15.9** – Résultats originaux de l'expérience de Stern et Gerlach. La figure de gauche est obtenue sans champ magnétique, celle de droite avec champ magnétique.

### b) Action du champ magnétique sur les atomes

Le champ magnétique est approximativement de la forme :  $\vec{B} = B_z(z) \vec{u}_z$ .

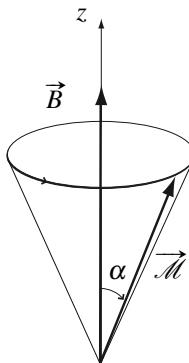
Les atomes d'argent possèdent un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$ , relié à leur moment cinétique  $\vec{L}$  par  $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L}$  où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique. Placés dans un champ magnétique, ils possèdent l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_P = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$ . Ils sont soumis à une force  $\vec{F} = \text{grad}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$  de moment, par rapport à la position  $A$  de l'atome  $\vec{\Gamma}_A = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(A)$ .

Le théorème du moment cinétique appliqué à un atome, en son centre, donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mathcal{M}}$$

On en déduit :  $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = 0$  donc l'angle entre les vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  reste constant.

Le moment magnétique décrit un cône d'axe  $\vec{B}$ , il tourne autour du champ magnétique avec la vitesse angulaire :  $\omega_0 = -\gamma B$ . On appelle ce mouvement un mouvement de précession.



**Figure 15.10 –** Précession du moment magnétique autour du champ.

Les composantes du moment magnétique de l'atome selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  subissent une variation sinusoïdale très rapide au cours du temps et sont en moyenne nulles. Tout se passe donc comme si l'atome était soumis à la force :  $\vec{F} = \mathcal{M}_z \frac{dB_z}{dz} \vec{u}_z$ .

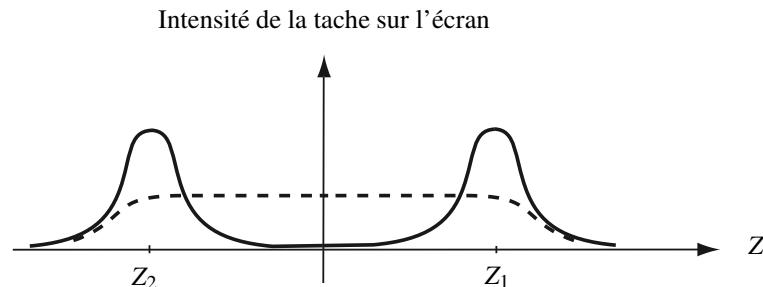
Dans l'entrefer, l'atome est donc soumis à une force orientée selon  $\vec{u}_z$ . Cette force le dévie selon la direction  $\vec{u}_z$ . À la sortie de l'entrefer, il continue en ligne droite jusqu'à l'écran. La position du point d'impact  $I$  dépend de la vitesse des atomes, de la longueur  $\ell$  de l'électroaimant, de la distance  $D$  entre l'électroaimant et l'écran, du gradient de la composante  $B_z$  du champ magnétique et de la composante  $\mathcal{M}_z$  du moment magnétique de l'atome. Tous les paramètres de l'expérience sont connus, la mesure de la position du point d'impact est une mesure de la composante  $\mathcal{M}_z$ .

### c) Résultats et importance historique de l'expérience

Avant la traversée de l'entrefer, les atomes d'argent du jet atomique ont un moment magnétique orienté au hasard. Dans le cadre de la mécanique classique, la projection sur  $\vec{u}_z$  de ces moments magnétiques prend toutes les valeurs comprises entre  $-\|\vec{\mathcal{M}}\|$  et  $+\|\vec{\mathcal{M}}\|$ . Le jet devrait donc former sur la plaque une seule tache symétrique par rapport au point  $H$  (voir figure 15.7). Les limites de cette tache correspondent aux valeurs maximale et minimale de  $\mathcal{M}_z$ . En fait, la fente  $F$  n'est pas infiniment fine et les vitesses des atomes ne sont pas toutes identiques, la tache présente donc une certaine largeur autour du point correspondant à la déviation des atomes ayant pour vitesse la vitesse moyenne des atomes du jet.

Lorsque Stern et Gerlach réalisent l'expérience, ils n'obtiennent pas une zone uniforme comme le prévoit la théorie classique mais deux taches symétriques par rapport au point  $H$  (voir figure 15.9, comme le schématisé la figure 15.11).

On en conclut que la composante  $\mathcal{M}_z$  du moment magnétique de l'atome d'argent ne peut



**Figure 15.11** – Taches observées sur l’écran. La courbe en tiretés représente la prévision classique, la courbe en traits pleins les taches réellement observées.

prendre que deux valeurs, celles qui correspondent aux points d’impact de cote  $Z_1$  ou  $Z_2$ . On doit rejeter l’image classique d’un vecteur  $\vec{M}$  faisant un angle  $\alpha$  avec le champ magnétique qui peut prendre toutes les valeurs possibles. Cet angle ne peut prendre que les valeurs 0 ou  $\pi$ .

Cette quantification spatiale du moment cinétique d’un atome était prévue par Sommerfeld en 1916 mais n’avait jamais été observée. L’expérience de Stern et Gerlach en a apporté la preuve expérimentale.

#### d) Données numériques

##### Paramètres de l’expérience de Stern et Gerlach

- longueur de l’électroaimant :  $\ell = 3,5 \text{ cm}$  ;
- distance entre l’électroaimant et l’écran :  $D = \ell/2$  : dans l’expérience originale, la plaque recueillant les atomes est placée immédiatement à la sortie de l’aimant ;
- gradient de champ magnétique :  $dB_z/dz \simeq 500 \text{ T.m}^{-1}$  ;
- pression dans l’enceinte :  $P \simeq 1 \text{ mPa}$  ;
- température dans le jet :  $T \simeq 1000^\circ\text{C}$ .

##### Caractéristiques de l’argent

- masse molaire :  $M = 107 \text{ g.mol}^{-1}$  ;
- numéro atomique :  $Z = 47$  ;
- rayon de l’atome :  $R_{\text{Ag}} = 160 \text{ pm}$ .

##### Constantes fondamentales

- constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  ;
- charge élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$  ;
- masse de l’électron :  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

## Questions

- 1.** On donne l'expression du libre parcours moyen  $\ell$  (voir le chapitre *Éléments de thermodynamique statistique*) en fonction de la densité volumique d'atomes,  $n$ , et du rayon  $R$  d'un atome :  $\ell = \frac{1}{4\pi R^2 n}$ . La vapeur d'argent est assimilée à un gaz parfait. Déterminer la valeur numérique de  $\ell$  et justifier le choix d'une pression aussi faible.
- 2.** D'après la figure 15.8, le champ magnétique est-il plus intense près du pôle nord ou près du pôle sud ? Dans quel sens est orienté  $\vec{\text{grad}} B_z$  ?
- 3.** Expliquer la phrase : « Les composantes du moment magnétique de l'atome selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  subissent une variation sinusoïdale très rapide au cours du temps et sont en moyenne nulles ». Justifier cette affirmation en comparant deux durées caractéristiques pertinentes. On prendra pour le rapport gyromagnétique celui de l'électron  $\gamma = -\frac{e}{2m}$  qui a été calculé page 452.
- 4.** Pourquoi Stern et Gerlach ont-ils pris un électroaimant et non un aimant permanent ?
- 5.** La déviation  $Z$  est égale à :  $Z = \mathcal{M}_z \frac{dB_z}{dz} \frac{\ell D}{3k_B T}$  (voir figure 15.7).  
Sur la figure 15.9, le grossissement du microscope est de x20 et les graduations que l'on voit sont des millimètres.  
Estimer à partir des données la valeur du moment magnétique atomique  $\mathcal{M}_z$ .
- 6.** Combien d'électrons de valence comporte l'atome d'argent dans son état fondamental ? En admettant que seuls les électrons de valence participent au moment magnétique de l'atome, conclure quant au résultat de la question précédente.

*Les réponses aux questions se trouvent page 467.*

**SYNTHÈSE**

*SAVOIRS*

- moment magnétique d'une boucle de courant
- approximation dipolaire
- action mécanique subie par un dipôle dans un champ extérieur
- énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ extérieur
- importance historique des résultats de l'expérience de Stern et Gerlach

*SAVOIR-FAIRE*

- évaluer des ordres de grandeur de moment magnétique dans les domaines microscopique et macroscopique
- représenter les lignes de champ d'un dipôle magnétique
- exploiter l'expression fournie du champ magnétique créé par un dipôle
- expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle dans un champ extérieur
- utiliser les expressions de la résultante et du moment résultant pour étudier l'action d'un champ extérieur sur un dipôle
- citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur

*MOTS-CLÉS*

- |                     |                                    |                               |                                       |
|---------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| • moment magnétique | • résultante des forces de Laplace | • moment de forces de Laplace | dipôle rigide dans un champ extérieur |
|                     |                                    | • énergie potentielle d'un    |                                       |

## S'ENTRAÎNER

### 15.1 Champ magnétique terrestre (\*)

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  situé au centre de la Terre et dirigé du pôle Nord vers le pôle Sud. On assimile la Terre à une sphère de rayon  $R_T = 6360$  km. L'intensité du champ magnétique au pôle Nord terrestre est  $B_0 = 6 \times 10^{-5}$  T.

Quelle est la valeur de  $\mathcal{M}$ ? Que valent les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre en un lieu de latitude  $\lambda = 49^\circ$  (latitude de Paris) ?

### 15.2 Expérience d'Oersted (\*)

L'aiguille d'une boussole, placée au voisinage d'un fil conducteur orienté dans la direction Nord-Sud, dévie si l'on fait passer un courant dans le fil.

1. Pour observer l'effet, faut-il placer l'aiguille dans le plan horizontal contenant le fil ou bien dans le plan vertical contenant le fil ?
2. Que se passe-t-il si le fil est orienté dans la direction Est-Ouest ?

### 15.3 Oscillations d'une boussole (\*\*)

Une boussole est animée de petites oscillations dues à un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et constant, orthogonal à son axe de rotation. Suite à une modification de  $\vec{B}$ , la pulsation des oscillations est multipliée par 5.

Comment a été modifié  $\vec{B}$  ?

### 15.4 Interaction entre deux moments magnétiques (\*)

On donne le champ magnétique créé en un point  $P$  par un dipôle de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  placé en  $A$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_{AP}) \vec{u}_{AP} - \vec{\mathcal{M}}}{AP^3} \quad \text{où} \quad \vec{u}_{AP} = \frac{\vec{AP}}{AP}.$$

Deux dipôles magnétiques de moments  $\vec{\mathcal{M}}_1$  et  $\vec{\mathcal{M}}_2$  sont respectivement en  $O$  et  $M$ .

1. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de  $\vec{\mathcal{M}}_1$  et  $\vec{\mathcal{M}}_2$ ,  $\vec{OM}$  et  $OM$ .
2. On suppose que  $\vec{\mathcal{M}}_1$  et  $\vec{\mathcal{M}}_2$  sont colinéaires à  $\vec{OM}$ . Exprimer la force entre les dipôles. À quelle condition est-elle attractive ?
3. Même question si  $\vec{\mathcal{M}}_1$  et  $\vec{\mathcal{M}}_2$  sont colinéaires entre eux et perpendiculaires  $\vec{OM}$ .
4. Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique.

À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$ ? Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

## APPROFONDIR

**15.5 Mouvement d'un spin nucléaire dans un champ magnétique (★★)**

**1.** Un proton de vitesse nulle possède un moment magnétique intrinsèque  $\vec{\mu}$ , dont la norme  $\mu$  est constante, mais la direction peut varier. L'imagerie par résonance magnétique utilise l'interaction des protons des atomes d'hydrogène de l'eau avec un champ magnétique.

Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, notée  $U$ , d'un proton (assimilé à un dipôle magnétique) avec un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

Application numérique : on donne  $B_0 = 1,5$  T et le moment magnétique du proton  $\mu = 1,4 \times 10^{-26}$  A.m<sup>2</sup>. Calculer les valeurs maximale et minimale de  $U$ .

**2.** Rappeler l'expression du couple exercé par le champ magnétique  $\vec{B}_0$  sur le dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mu}$ .

**3.** Un proton de vitesse nulle est animé d'un mouvement de rotation propre. Ce mouvement lui confère un moment cinétique intrinsèque, nommé spin et noté  $\vec{S}$ , de norme constante  $S = \hbar/2$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. On note  $\gamma$  le rapport gyromagnétique correspondant.

Montrer que le moment magnétique  $\vec{\mu}$  est animé d'un mouvement de précession de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$ , et donner l'expression de  $\omega_0$  dite pulsation de Larmor, en fonction de  $B_0$  et  $\gamma$ . Calculer  $\omega_0$  pour  $B_0 = 1,5$  T.

**4.** L'imagerie par résonance magnétique utilise d'une part un champ uniforme et constant  $\vec{B}_0$ , qu'on supposera dirigé suivant l'axe  $Oz$ , et d'autre part un champ dépendant du temps  $\vec{B}_1(t)$ , avec  $\|\vec{B}_1\| \ll \|\vec{B}_0\|$ .

**a.** On place dans le champ un échantillon comportant  $N$  protons. On assimile chacun de ces protons à un dipôle magnétique soumis au couple exercé par le champ magnétique total  $\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$ . Écrire l'équation du mouvement d'un proton et définir le nouveau vecteur rotation  $\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)$  en fonction de  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1(t)$ .

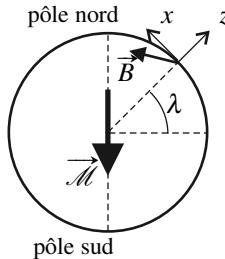
**b.** Le champ auxiliaire  $\vec{B}_1(t)$  est un champ tournant autour de  $\vec{B}_0$  et perpendiculaire à celui-ci. Dans un référentiel galiléen de repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , ses coordonnées sont  $(B_1 \cos(\omega t), B_1 \sin(\omega t), 0)$ . On définit le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{u}_X(t), \vec{u}_Y(t), \vec{u}_Z(t))$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $Oz$  et coïncidant avec  $\mathcal{R}$  à  $t = 0$ , de telle sorte que  $\vec{B}_1(t) = B_1 \vec{u}_X(t)$ .

Écrire l'équation du mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}_0$ .

**c.** Le champ  $\vec{B}_1$  est appliqué au temps  $t = 0$ ,  $\vec{\mu}$  étant alors parallèle à  $Oz$ . À quelle condition pourra-t-on observer un retournement de  $\vec{\mu}$  ?

## CORRIGÉS

## 15.1 Champ magnétique terrestre



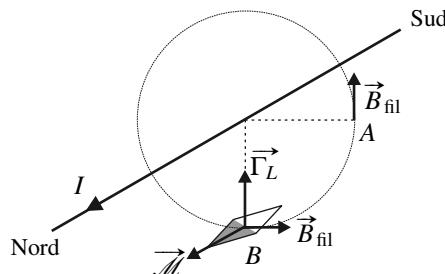
On a immédiatement :  $B_x = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \cos \lambda}{4\pi R_T^3}$  et  $B_z = -\frac{2\mu_0 \mathcal{M} \sin \lambda}{4\pi R_T^3}$  (le champ est dirigé vers le bas).

Au pôle nord ( $\lambda = 90^\circ$ ),  $B_z = -B_0$  d'où  $\mathcal{M} = \frac{2\pi R_T^3 B_0}{\mu_0} = 7,7 \times 10^{22} \text{ A.m}^2$ .

À la latitude  $\lambda = 49^\circ$ ,  $B_x = \frac{B_0}{2} \sin \lambda = 2,3 \times 10^{-5} \text{ T}$  et  $B_z = -B_0 \cos \lambda = 3,9 \times 10^{-5} \text{ T}$ .

## 15.2 Expérience d'Oersted

**1.** L'aiguille de la boussole tourne autour de son axe qui est vertical. Pour qu'elle dévie, il faut que le moment du couple  $\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{fil}}$  ait une composante verticale. Si l'aiguille est placée en  $A$ , le champ magnétique du fil est vertical donc l'aiguille ne tourne pas. Il faut placer l'aiguille en  $B$ , c'est à dire dans le plan vertical contenant le fil.



**2.** Si le fil est orienté Est-Ouest, l'aiguille est initialement perpendiculaire au fil donc colinéaire à  $\vec{B}_{\text{fil}}$ . Le moment  $\vec{\Gamma}_L$  est donc nul et l'aiguille ne dévie pas.

## CHAPITRE 15 – DIPÔLE MAGNÉTIQUE

**15.3 Oscillations d'une boussole**

On suppose que la boussole tourne librement autour de son axe  $\Delta = (O, \vec{u})$ . Elle est soumise au couple exercé par le champ magnétique. On appelle  $J$  son moment d'inertie par rapport à son axe. Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation appliquée à l'aiguille aimantée s'écrit :  $J \frac{d\theta}{dt} = \mathcal{M}B_0 \sin \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre le moment magnétique de la boussole et le champ magnétique. La pulsation des petites oscillations est donc :  $\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B_0}{J}}$  si la pulsation a été multipliée par 5, c'est que le champ magnétique a été multiplié par 25.

**15.4 Interaction entre deux moment magnétiques**

**1.** L'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles est l'énergie potentielle d'un des deux dipôles dans le champ magnétique de l'autre :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{B}_1(M) = -\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{B}_2(O)$$

où  $\vec{B}_i$  est le champ magnétique créé par  $\vec{\mathcal{M}}_i$

En utilisant l'expression fournie du champ d'un dipôle, on obtient :

$$E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{u}_r)(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{u}_r) - \vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2}{r^3}$$

où  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$  et  $r = OM$ .

**2.** Si les dipôles sont colinéaires à  $\vec{u}_r$  :

$$E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^3} \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^4} \vec{u}_r$$

L'interaction est attractive.

**3.** Si les dipôles sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à  $\vec{u}_r$  :

$$E_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^3} \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^4} \vec{u}_r$$

L'interaction est répulsive. L'expérience est très facile à faire avec des petits aimants.

**4.** Le moment magnétique des atomes est de l'ordre de grandeur du magnéton de Bohr, la distance entre deux atomes est de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres. L'énergie d'interaction est donc :  $U \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_B^2}{r^3} \simeq \frac{10^{-7} \times 10^{-46}}{(5 \times 10^{-10})^3} \simeq 8 \times 10^{-24} \text{ J}$ .

La température pour laquelle  $U \sim k_B T$  est donc de l'ordre de 0,6 K : c'est extrêmement faible. Ce n'est pas l'interaction dipôle-dipôle qui est à l'origine du magnétisme de la matière.

**15.5 Mouvement d'un spin nucléaire dans un champ magnétique**

**1.**  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$  donc  $-\mu B_0 \leq U \leq +\mu B_0$ .

L'application numérique donne :  $+\mu B_0 = 2,1 \times 10^{-26} \text{ J}$ .

**2.**  $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$ .

**3.** Le proton est soumis uniquement au couple  $\vec{\Gamma}$ . On lui applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\mu}$$

On en déduit :  $\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$  donc la norme de  $\vec{\mu}$  est constante (conforme aux hypothèses de l'énoncé).

Puis :  $\vec{B}_0 \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$  donc l'angle entre les vecteurs  $\vec{B}_0$  et  $\vec{\mu}$  reste constant.

Le moment magnétique décrit un cône d'axe  $\vec{B}_0$ , il tourne autour du champ magnétique avec le vecteur rotation angulaire :  $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$ . C'est un mouvement de précession.

Application numérique :  $\omega_0 = \gamma B_0 = \frac{2\mu}{\hbar} B_0 = 3,8 \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ .

**4. a.** L'équation d'évolution de  $\vec{\mu}$  est la même qu'à la question précédente en remplaçant  $\vec{B}_0$  par  $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$ , soit :  $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{\mu}$  avec  $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$  et  $\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$ .

**b.** On écrit les vecteurs  $\vec{u}_X$  et  $\vec{u}_Y$  dans la base fixe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  :

$$\begin{cases} \vec{u}_X = \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y \\ \vec{u}_Y = -\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y \end{cases}$$

On calcule les dérivées par rapport au temps de ces vecteurs :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_X}{dt} = -\omega \sin(\omega t) \vec{e}_x + \omega \cos(\omega t) \vec{e}_y = \omega \vec{e}_z \wedge \vec{u}_X \\ \frac{d\vec{u}_Y}{dt} = -\omega \cos(\omega t) \vec{e}_x - \omega \sin(\omega t) \vec{e}_y = \omega \vec{e}_z \wedge \vec{u}_Y \end{cases}$$

donc :  $\left( \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left( \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} - \vec{\omega} \wedge \vec{\mu}$ . La notation  $\left( \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}$  désigne la dérivée du vecteur par rapport au temps pour un observateur fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

Finalement :  $\left( \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = ((\omega_0 - \omega) \vec{e}_z + \omega_1 \vec{u}_X) \wedge \vec{\mu}$ .

**c.**  $\vec{\mu}$  se retourne au cours de son mouvement si et seulement si son axe de rotation est perpendiculaire à sa direction initiale. Puisqu'il est initialement selon  $\vec{e}_z$  il faut donc que :  $\omega = \omega_0 = \gamma B_0$ .

### 15.6 Réponse aux questions de la page 461

**1.** On calcule la densité volumique  $n$  à partir de l'équation d'état des gaz parfaits, écrite sous la forme :  $P = nk_B T$ . On en déduit :  $n \simeq 6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$ . Le libre parcours moyen  $\ell$  est alors de l'ordre de  $\ell \simeq 50 \text{ m}$ . C'est très grand devant les dimensions de l'enceinte, les atomes du jet ne subissent pas d'interaction entre eux.

## CHAPITRE 15 – DIPÔLE MAGNÉTIQUE

**2.** Le champ magnétique est à flux conservatif : il est plus intense là où les lignes de champs sont le plus resserrées donc près du pôle nord de l'aimant. Le vecteur  $\text{grad}B_z$  est donc orienté dans le sens positif de l'axe ( $Oz$ ).

**3.** Il faut comparer la période  $T$  du mouvement de précession de l'atome et la durée  $\tau$  qu'il met pour traverser le dispositif.

$$\tau \simeq \frac{\ell}{v} \text{ où } v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. v \simeq 500 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } \tau \simeq 0,1 \text{ s.}$$

$$T = \frac{2\pi}{|\gamma|B}. \text{ Or pour un électron, } |\gamma| = \frac{e}{2m}. \text{ On prend } B \simeq 1 \text{ T et on trouve : } T \simeq 10^{-10} \text{ s.}$$

On a donc  $T \ll \tau$  : la composante  $\mathcal{M}_x$  ne peut intervenir que par sa valeur moyenne qui est nulle. La composante  $\mathcal{M}_z$  peut être prise égale à sa valeur moyenne.

**4.** Un électroaimant permet de faire l'expérience en champ nul, ce que ne permet pas un aimant classique.

**5.** On mesure sur la figure 15.9 un écart maximal entre les milieux des deux taches d'environ 4 mm, ce qui correspond à un écart réel  $2Z = 0,2$  mm compte tenu du grossissement du microscope, ou encore  $Z \simeq 0,1$  mm.

On en déduit :  $\mathcal{M}_z = \frac{3k_B TZ}{\frac{dB_z}{dz} \ell D} \simeq 2 \times 10^{-23} \text{ A.m}^2$ , ce qui est l'ordre de grandeur du magnéton de Bohr.

**6.** La configuration électronique de l'argent dans son état fondamental est : [Kr](3d)<sup>10</sup>5s<sup>1</sup>. Un atome d'argent possède donc un seul électron de valence. C'est lui qui confère à l'atome le moment magnétique considéré jusqu'à présent.

# 16

## Équations de Maxwell

À partir de ce chapitre, on ne se place plus en régime stationnaire. Les champs dépendront désormais *a priori* de la position  $M$  dans l'espace et de l'instant  $t$ . Il apparaît alors un lien entre le champ électrique et le champ magnétique qui oblige à considérer une nouvelle entité physique : le champ électromagnétique ( $\vec{E}(M,t)$ ,  $\vec{B}(M,t)$ ).

Dans ce chapitre on va s'intéresser aux propriétés locales du champ électromagnétique et aux liens entre ce champ avec ses sources qui sont la densité volumique de charge  $\rho(M,t)$  et la densité volumique de courant  $\vec{j}(M,t)$ .

### 1 La loi de la conservation de la charge électrique

Un des postulats fondamentaux de l'électromagnétisme est la loi de **conservation de la charge électrique** : il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique.

Ainsi, la charge électrique contenue à l'intérieur d'une surface fermée ne peut varier dans le temps que s'il existe un courant de charge traversant cette surface. En faisant le bilan de charge pour une surface fermée on établit une équation locale qui exprime la propriété de conservation de la charge.

#### 1.1 Cas unidimensionnel

Dans ce paragraphe on suppose que la densité volumique de charge et la densité volumique de courant ne dépendent que d'une coordonnée  $x$  :

$$\rho(M,t) = \rho(x,t) \quad \text{et} \quad \vec{j}(M,t) = j(x,t) \vec{u}_x$$

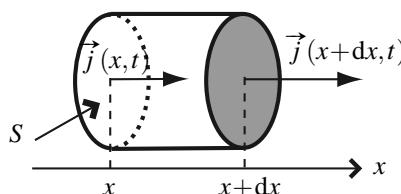


Figure 16.1 – Bilan de charge à une dimension

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

On fait un bilan des charges électriques présentes dans le cylindre de section  $S$ , de longueur  $dx$  et de volume  $d\tau = Sdx$  présenté sur la figure 16.1, noté  $\Sigma$  dans la suite, entre  $t$  et  $t + dt$ .

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

- la charge électrique entrant par la face située à l'abscisse  $x$  est :

$$\delta Q_x = \vec{j}(x, t) \cdot (S \vec{u}_x) dt = j(x, t) Sdt,$$

- la charge électrique entrant par la face située à l'abscisse  $x + dx$  est :

$$\delta Q_{x+dx} = \vec{j}(x + dx, t) \cdot (-S \vec{u}_x) dt = -j(x + dx, t) Sdt.$$

La charge électrique qui est entrée dans le volume  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est donc :

$$\delta Q_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = (j(x, t) - j(x + dx, t)) Sdt,$$

soit en développant au premier ordre en  $dx$  :

$$\delta Q_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} Sdxdt \quad (16.1)$$

La charge électrique contenue dans le volume  $\Sigma$  a varié entre les instants  $t$  et  $t + dt$  de la quantité :

$$dQ = (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)) Sdx$$

soit en développant au premier ordre en  $dt$  :

$$dQ = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} Sdxdt$$

Cette variation s'explique uniquement par le transfert des charges qui ont traversé la surface soit :

$$dQ = \delta Q_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}$$

Nous obtenons l'équation de conservation de la charge après simplification par  $Sdxdt$  :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (16.2)$$

### Remarques

1. La surface  $S$  a été choisie arbitrairement, il est donc normal qu'elle n'apparaisse pas dans le bilan final.
2. Cette équation a une forme mathématique analogue à l'équation locale de bilan thermique (voir chapitre *transferts thermiques*).

## 1.2 Cas général

Dans le cas unidimensionnel,  $\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = \text{div } \vec{j}$ . L'équation (16.2) s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M,t) = 0 \quad (16.3)$$

On admet que l'équation (16.3) est tout à fait générale et qu'elle traduit la conservation de la charge électrique. C'est l'**équation locale de conservation de la charge électrique**.

 S'il est nécessaire d'appliquer l'équation (16.3) dans une géométrie cylindrique ou sphérique, l'expression correspondant de l'opérateur divergence sera fournie.

## 2 Champ électromagnétique - Équations de Maxwell

### 2.1 Définition du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est défini par son action sur une charge ponctuelle  $q$ . Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  où cette particule se trouve au point  $M$  à l'instant  $t$ , animée de la vitesse  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(t)$ , la **force de Lorentz** qu'elle subit de la part du champ électromagnétique est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{f} = q(\vec{E}_{/\mathcal{R}}(M,t) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M,t)) \quad (16.4)$$

Cette relation définit le champ électromagnétique  $(\vec{E}_{/\mathcal{R}}(M,t), \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M,t))$  au point  $M$ , à l'instant  $t$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

La définition même du champ électromagnétique prouve qu'il dépend du référentiel dans lequel on l'étudie. Néanmoins, pour ne pas alourdir les notations dans ce qui suit, on omettra la mention du référentiel  $\mathcal{R}$ .

### 2.2 Équations de Maxwell

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$  vérifie les quatre **équations de Maxwell**, qui constituent le postulat de base du cours d'électromagnétisme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) \\ \operatorname{rot} \vec{B}(M,t) = \mu_0 \left( \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t) \right) \end{array} \right. \quad (16.5)$$

Les constantes  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la **permittivité diélectrique** et la **perméabilité magnétique** du vide. Elles ont déjà été rencontrées. On rappelle leurs valeurs et leurs unités :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F.m}^{-1} = 8,84 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

Nous verrons qu'elles sont reliées à la vitesse de la lumière dans le vide par l'équation :

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (16.6)$$

La valeur donnée de  $\mu_0$  est exacte, celle de  $\varepsilon_0$  calculée d'après la relation (16.6).

Dans ces équations,  $\rho(M, t)$  et  $\vec{j}(M, t)$  représentent la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant électrique au point  $M$  à l'instant  $t$ , quelles que soient l'origine et la nature de ces charges.

Pour alléger les notations, nous omettrons la plupart du temps de préciser que ces équations s'écrivent au point  $M$  à l'instant  $t$ , mais ce sera sous-entendu.

L'équation :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  sera appelée **équation de Maxwell-Gauss**, et notée parfois en

abrégé (M.G.). De même, l'équation :  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$  est l'**équation de Maxwell-Ampère**,

et on la notera (M.A.), tandis que l'équation :  $\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est l'**équation de Maxwell-Faraday**, notée (M.F.). Quant à la dernière équation,  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , elle porte parfois le nom d'**équation de Maxwell-Thomson**, nous l'appellerons plutôt **équation de Maxwell-flux** et la noterons (M.Φ).

### Remarque

Le terme  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  apparaissant dans l'équation de Maxwell-Ampère a la même homogénéité que la densité volumique courant. Pour des raisons historiques, il est appelé parfois **courant de déplacement**.

## 2.3 Remarques et commentaires

### a) Linéarité

Les équations de Maxwell sont des équations linéaires, le principe de superposition s'applique donc au champ électromagnétique.

### b) Structure des équations

Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère relient le champ électromagnétique à ses sources « matérielles », à savoir  $\rho(M, t)$  et  $\vec{j}(M, t)$ .

L'équation de Maxwell-Faraday et l'équation de Maxwell-Ampère relient un des vecteurs (électrique ou magnétique) du champ électromagnétique aux variations temporelles de l'autre. Ces deux vecteurs forment une **entité indissociable** en régime variable.

Les sources de champ électrique apparaissent donc comme étant une densité volumique de charge  $\rho(M, t)$  et un champ magnétique dépendant du temps. Parallèlement, les sources de champ magnétique apparaissent comme étant une densité volumique de courant électrique  $\vec{j}(M, t)$  et un champ électrique dépendant du temps. Mais, par exemple, s'il existe un champ magnétique dépendant du temps, c'est que quelque part dans le milieu étudié, il existe une

densité volumique de courant dépendant du temps. Donc, globalement, nous pouvons dire que l'ensemble d'une densité volumique de charge  $\rho(M, t)$  et d'une densité volumique de courant  $\vec{j}(M, t)$  constitue la source du champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ .

## 2.4 Compatibilité des équations de Maxwell avec la loi de conservation de la charge

Calculons la divergence de l'équation de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle (voir annexe mathématique), il vient :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Les variables d'espace et de temps étant indépendantes, l'opérateur divergence, qui ne porte que sur les variables d'espace, commute avec la dérivée partielle par rapport au temps, qui ne porte que sur la variable de temps. Finalement :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{E})}{\partial t} = 0$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Nous retrouvons l'équation locale de conservation de la charge. Les équations de Maxwell sont donc compatibles avec la loi de conservation de la charge électrique.

En fait, la démarche de Maxwell a justement été de modifier l'équation connue à son époque,  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , valable en régime permanent ou en régime lentement variable (que nous préciserons dans la suite du chapitre), seuls cadres accessibles à l'expérience à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, pour la rendre compatible avec l'équation de conservation de la charge. Il a opté pour la solution la plus simple, à savoir de rajouter le terme  $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Les conclusions théoriques découlant de cette idée se sont révélées parfaitement conformes à l'expérience par la suite.

## 3 Forme intégrale des équations de Maxwell

On va associer à chaque équation de Maxwell sa forme intégrale en régime variable, issue des théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski (voir annexe mathématique).

### 3.1 Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss : théorème de Gauss

Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée quelconque et  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$  le volume qu'elle délimite. Le flux  $\Phi_E(t)$  du champ  $\vec{E}(M, t)$  à travers  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$\Phi_E(t) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \operatorname{div} \vec{E}(M, t) d\tau_M,$$

en utilisant le théorème d'Ostrogradski. On en déduit, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\Phi_E(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} d\tau_M = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\epsilon_0}$$

où  $Q_{\text{int}}(t)$  est la charge électrique contenue à l'instant  $t$  dans le volume  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ .

**Théorème de Gauss** : Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée quelconque. Le flux du champ électrique à travers  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t$ ,  $\Phi_E(t) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_P$ , est égal à la charge contenue dans  $\mathcal{S}$  à cet instant,  $Q_{\text{int}}(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \rho(M, t) d\tau_M$ , divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\Phi_E(t) = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\epsilon_0}. \quad (16.7)$$

#### Remarque

Ce théorème généralise le théorème de Gauss de l'électrostatique.

### 3.2 Forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux

De la même manière, on peut écrire :

$$\Phi_B(t) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \operatorname{div} \vec{B}(M, t) d\tau_M = 0,$$

en utilisant l'équation de Maxwell-flux.

**Conservation du flux magnétique** : Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul :

$$\Phi_B(t) = 0. \quad (16.8)$$

Le champ magnétique est à flux conservatif.

### 3.3 Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday : loi de Faraday

#### a) Démonstration de la loi de Faraday

Soit  $\Gamma$  un contour fermé orienté fixe quelconque et  $\mathcal{S}_{\Gamma}$  une surface s'appuyant sur  $\Gamma$  dont l'orientation provient de celle de  $\Gamma$  par la règle de la main droite (voir appendice mathématique).

La circulation à l'instant  $t$  du champ électrique le long de  $\Gamma$  s'écrit :

$$\mathcal{C}_E = \oint_{P \in \Gamma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{l}_P = \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \text{rot } \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_M,$$

en utilisant le théorème de Stokes. On en déduit, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\mathcal{C}_E = - \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\vec{S}_M.$$

La surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  étant fixe et indéformable, la dérivation par rapport au temps et le calcul du flux à travers  $\mathcal{S}_\Gamma$  commutent, donc :

$$\mathcal{C}_E = - \frac{d}{dt} \left( \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \right) = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

en notant  $\Phi_B(t)$  le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface  $\mathcal{S}_\Gamma$ . Ce flux est indépendant du choix de  $\mathcal{S}_\Gamma$  puisque le champ magnétique est un champ à flux conservatif et on l'appelle flux magnétique à travers  $\Gamma$ .

**Loi de Faraday** : La circulation du champ électrique le long d'un contour fermé orienté quelconque,  $\mathcal{C}_E(t) = \oint_{P \in \Gamma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{l}_P$ , et le flux du champ magnétique à travers ce contour,  $\Phi_B(t) = \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$ , vérifient :

$$\mathcal{C}_E(t) = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt}. \quad (16.9)$$



En régime variable, le champ électrique n'est plus à circulation conservative.

### b) Lien avec le phénomène d'induction

En première année, l'étude de l'induction électromagnétique était basée sur le fait que le courant induit dans le circuit siège du phénomène d'induction électromagnétique est égal à celui que produirait un générateur de force électromotrice  $e$  telle que :

$$e = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (16.10)$$

Ces deux « lois de Faraday » sont-elles les mêmes ?

Considérons un circuit filiforme de contour  $\Gamma$ , le travail de la force électrique qui s'exerce sur un porteur de charge  $q$  (un électron dans le cas d'un fil métallique) parcourant le circuit est :

$$\mathcal{T} = \oint_{M \in \Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}_M = q \oint_{M \in \Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = q\mathcal{C}_E.$$

Or le travail reçu par ce porteur s'il traverse un générateur de force électromotrice  $e$  est justement  $\mathcal{T} = qe$ . Ainsi, la force électromotrice du générateur équivalent au champ électrique à circulation non conservative est :

$$e = \mathcal{C}_E,$$

et la relation (16.9) est bien la loi de Faraday qui a été vue dans le cours de première année.

### 3.4 Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère : théorème d'Ampère généralisé

On procède de même pour l'équation de Maxwell-Ampère.

La circulation à l'instant  $t$  du champ magnétique le long d'un contour fixe orienté  $\Gamma$  est :

$$\mathcal{C}_B = \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{l}_P = \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \text{rot } \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_M,$$

d'après le théorème de Stokes. L'équation de Maxwell-Ampère permet alors d'écrire :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \cdot d\vec{S}_M.$$

La surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  étant fixe et indéformable, la dérivation par rapport au temps et le calcul du flux à travers  $\mathcal{S}_\Gamma$  commutent. On en déduit :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \right)$$



Attention, la somme de ces deux termes ne dépend pas du choix de la surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  mais, séparément, chacun d'eux en dépend.

**Théorème d'Ampère généralisé** : La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté quelconque,  $\mathcal{C}_B = \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{l}_P$ , est liée à l'intensité traversant une surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  s'appuyant sur  $\Gamma$ ,  $I(\mathcal{S}_\Gamma, t) = \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$ , et au flux électrique à travers cette surface,  $\Phi_E(\mathcal{S}_\Gamma, t) = \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$ , par la relation :

$$\mathcal{C}_B(t) = \mu_0 I(\mathcal{S}_\Gamma, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E(\mathcal{S}_\Gamma, t)}{dt}. \quad (16.11)$$

#### Remarque

Ce théorème généralise le théorème d'Ampère de la magnétostatique. En régime stationnaire,  $I(\mathcal{S}_\Gamma)$  ne dépend pas du choix de la surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  car la densité de courant est alors un champ à flux conservatif (d'après l'équation locale de conservation de la charge électrique qui devient :  $\text{div } \vec{j}(M) = 0$ ).  $I(\mathcal{S}_\Gamma)$  est alors l'intensité enlacée par le contour  $\Gamma$  que l'on a notée  $I_{\text{enlacée}}$  en magnétostatique.

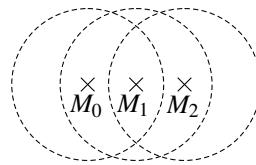
## 4 Équation de propagation des champs dans un milieu vide de charge et de courant

### 4.1 Couplage spatio-temporel entre le champ électrique et le champ magnétique

Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère montrent un couplage entre les variations temporelles de  $\vec{B}$  et les variations spatiales de  $\vec{E}$  (équation de Maxwell-Faraday), ainsi qu'entre les variations temporelles de  $\vec{E}$  et les variations spatiales de  $\vec{B}$  (équation de Maxwell-Ampère). Il en résulte la possibilité d'une propagation du champ électromagnétique.

On peut le comprendre intuitivement de la manière suivante :

- s'il existe en un point  $M_0$  un champ magnétique variable, d'après (M.F.) il existe tout autour de  $M_0$  un champ électrique variable, en particulier en  $M_1$ ,
- s'il existe en  $M_1$  un champ électrique variable, d'après (M.A.) il existe tout autour de  $M_1$  un champ magnétique variable, en particulier en  $M_2$ , etc.



**Figure 16.2 – Mécanisme de propagation.**

Le double couplage entre les variations spatiales de chaque champ et les variations temporelles de l'autre champ présent dans les équations de Maxwell est à l'origine du phénomène de propagation du champ électromagnétique.

Sur le plan mathématique, on peut établir, à partir des équations de Maxwell, pour chacun des deux champs, une équation du second ordre appelée équation de propagation.

### 4.2 Démonstration de l'équation de propagation

On se place dans une région où il n'y a ni charges ni courants, c'est-à-dire dans une région qui n'englobe pas les sources du champ électromagnétique. Les équations de Maxwell s'écrivent dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{MG}) : \quad \text{div } \vec{E} = 0 \\ (\text{M}\Phi) : \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ (\text{MF}) : \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\text{MA}) : \quad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

puisque  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ . Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

Les opérateurs rotationnel et dérivation par rapport au temps portent sur des variables indépendantes donc ils commutent. L'équation précédente s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

D'autre part, d'après une formule générale d'analyse vectorielle (voir appendice mathématique) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E},$$

puisque  $\text{div}\vec{E} = 0$  d'après l'équation de Maxwell-Gauss. Ainsi, le champ électrique vérifie l'équation :

$$\Delta\vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}(M,t) \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (16.12)$$

On peut faire de même en utilisant les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \epsilon_0\mu_0\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial(\vec{\text{rot}}\vec{E})}{\partial t} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},$$

et :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

compte-tenu de l'équation de Maxwell-flux. Ainsi, le champ magnétique vérifie l'équation :

$$\Delta\vec{B}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}(M,t). \quad (16.13)$$

Les équations (16.12) et (16.13) sont des **équations de d'Alembert**. L'équation de d'Alembert a des solutions se propageant à la vitesse  $c$  qui seront étudiées en détail au chapitre 18.

### 4.3 Nature de l'onde lumineuse

La théorie de Maxwell, qui date de 1865, a permis de découvrir, la nature de l'onde lumineuse. En effet, elle prouve l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse :  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ . La valeur de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  est déterminée par des mesures faites dans des expériences electrostatique, celle de la perméabilité du vide  $\mu_0$  est déterminée par des expériences de magnétostatique. La vitesse  $c$  que l'on « fabrique » avec ces deux valeurs est proche du résultat de la mesure de la vitesse de la lumière faite à la même époque par Fizeau. Après avoir prouvé qu'il peut exister des champs électromagnétiques se propageant à cette vitesse, Maxwell en déduit que la lumière est une onde électromagnétique. Cette idée était corroborée par des expériences faites quinze ans plus tôt par Faraday et montrant l'effet d'un champ électrique ou magnétique sur de la lumière polarisée. Elle ne fut pas acceptée par la majorité des physiciens de l'époque, même après les expériences de Hertz qui produisit et détecta en 1886 les premières ondes électromagnétiques artificielles.

## 5 Champs statiques

### 5.1 Équations de Maxwell en régime stationnaires

Dans le cas du régime stationnaire où aucun champ ne dépend du temps, les équations de Maxwell deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{M.G}) : \quad \text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \\ (\text{M.}\Phi) : \quad \text{div } \vec{B}(M) = 0 \\ (\text{M.F}) : \quad \vec{\text{rot}} \vec{E}(M) = 0 \\ (\text{M.A}) : \quad \vec{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M) \end{array} \right.$$

Les champs électrique et magnétique ne sont plus couplés.

Un champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  vérifie les équations de Maxwell-Gauss,  $\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$ , et de Maxwell-Faraday,  $\vec{\text{rot}} \vec{E}(M) = \vec{0}$ .

Un champ magnétostatique vérifie les équations de Maxwell-flux,  $\text{div } \vec{B}(M) = 0$ , et de Maxwell-Ampère,  $\vec{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$ .

Ces deux champs sont donc complètement indépendants l'un de l'autre comme nous l'avons vu dans les chapitres 11 et 14.

### 5.2 Théorème de Gauss et théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell-Gauss prend la même forme en statique et en régime variable. Il est donc naturel que le théorème de Gauss, forme intégrale de cette équation locale, prenne également la même forme.

En procédant comme pour le régime variable, on établit le théorème d'Ampère de la magnétostatique à partir de l'équation de Maxwell-Ampère et du théorème de Stokes.

Les propriétés globales de champs présentées dans les chapitres 11 et 14 se retrouvent donc à partir des équations de Maxwell, qui constituent en quelque sorte le principe fondamental de l'électromagnétisme.

### 5.3 Existence d'un potentiel électrostatique

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, le champ électrostatique est à rotationnel nul. C'est donc un champ à circulation conservative (voir annexe mathématique), propriété qui a été étudiée au chapitre 11.

De plus, la propriété  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$  est équivalente à l'existence d'un potentiel  $V(M)$  tel que  $\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)$ , ce potentiel étant défini à une constante additive près. Ici encore les propriétés locales du champ électrostatique issues des équations de Maxwell permettent de retrouver une propriété rencontrée précédemment.

## 5.4 Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique

En injectant la relation  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$  dans l'équation de Maxwell-Gauss on obtient :

$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}V)(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad -\Delta V(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0},$$

puisque'on a de manière générale  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \Delta f$  (voir annexe mathématique).

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'**équation de Poisson** :

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad (16.14)$$

Dans une zone vide de charge, dans laquelle  $\rho(M) = 0$ , cette équation devient l'**équation de Laplace** :

$$\Delta V(M) = 0 \quad (16.15)$$

L'équation de Laplace apparaît dans de nombreux domaines de la physique. En électrostatique nous verrons que l'on peut déterminer aisément le potentiel de nombreuses distributions de charges ; chacune de ces fonctions est une solution de l'équation de Laplace en dehors des charges. Lorsqu'on doit résoudre l'équation de Laplace, dans quelque domaine de la physique que ce soit, il est souvent fructueux de réutiliser ces solutions ; elles peuvent être additionnées puisque l'équation est linéaire.

Par ailleurs, le potentiel est une fonction continue des variables spatiales ce qui nous permettra de déterminer entièrement les constantes d'intégration qui apparaissent quand on résout l'équation de Poisson.

### Remarque

Dans le cadre des répartitions volumiques de charges, le champ électrique est lui aussi une fonction continue des variables spatiales.

## 6 Approche numérique : résolution de l'équation de Laplace

### 6.1 Méthodes de résolution numérique

De très nombreux problèmes de physique sont décrits par un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. Les exercices et problèmes proposés dans les études supérieures sont souvent choisis de manière à ce que des calculs littéraux puissent être menés jusqu'au bout. Il ne faudrait pas généraliser trop rapidement et en conclure que tous les problèmes admettent des solutions littérales. Au contraire l'écrasante majorité des problèmes n'admet pas de telles solutions. Il faut dans ce cas faire appel à une **RÉSOLUTION NUMÉRIQUE** (voir dans le cours d'informatique commune de première année les méthodes de Newton, d'Euler, etc...)

De nombreux possibilités sont offertes de nos jours pour réaliser ces résolutions : langages de programmation, logiciels dédiés. Il n'est pas dans l'objectif du programme d'étudier l'aspect

technique de ces outils (qui constitue une science en soi), mais de montrer comment on les utilise et le type de résultat qu'on peut obtenir.

Le point commun à toutes les méthodes de résolution numérique est la nécessité de passer par une *discrétisation* du problème car les calculateurs ne peuvent manipuler qu'un nombre fini (même si très grand) de données. On retrouve là la même idée que dans le chapitre *Électronique numérique*. Si le problème est stationnaire on se limite à une discrétisation de l'espace (à deux ou à trois dimensions). Si le problème étudié n'est pas stationnaire, il faut en plus discréteriser le temps.

Il est très important de comprendre que la description complète d'un problème nécessite d'avoir déterminé :

- l'**équation aux dérivées partielles** satisfait par la grandeur étudiée, par exemple l'équation de Laplace :  $\Delta V(M) = 0$  pour un problème d'électrostatique dans le vide,
- les **conditions aux limites** vérifiées par cette grandeur sur les bords du domaine étudié (ce domaine doit être fini en raison des limitations des calculateurs).

La résolution numérique d'un problème peut se faire avec un logiciel dédié, s'appuyant sur la méthode dite des éléments finis, très largement utilisée dans le monde de la recherche et de l'industrie. On pourra essayer par exemple avec la version dite étudiante du logiciel Flexpde, disponible gratuitement à l'adresse <http://www.pdesolutions.com/>.

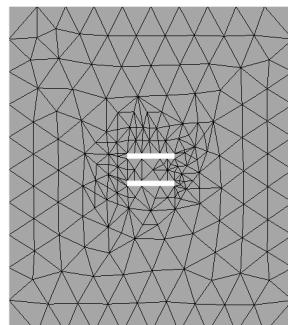
On donne ci-dessous deux exemples d'études réalisées avec ce logiciel.

## 6.2 Premier exemple : condensateur plan fini

### a) Maillage de l'espace

La première étape correspond au découpage de l'espace en petits volumes pour obtenir un **maillage**. Le logiciel calculera les valeurs numériques des grandeurs étudiées aux sommets de ces petits volumes. On obtient ensuite les valeurs en tout autre point par des interpolations. En général le maillage n'est pas uniforme. Il faut avoir un maillage serré dans les zones où les grandeurs sont susceptibles de varier rapidement et beaucoup plus lâche dans les zones de faibles variations.

La figure 16.3 représente le maillage à deux dimensions calculé par le logiciel pour l'étude d'un condensateur plan. Dans une unité de longueur arbitraire les armatures ont une épaisseur  $e = 1$ , une longueur  $l = 10$  dans le plan de la figure et sont distantes de  $d = 4$ . Selon la direction perpendiculaire au plan de la figure la longueur est supposée infinie, de manière à pouvoir faire une étude à deux dimensions. On observe un maillage plus dense près des armatures, en particulier près des arêtes des armatures.



**Figure 16.3 – Maillage de l'espace pour un condensateur plan.**

### b) Position du problème

On cherche le potentiel électrostatique  $V(M)$  lorsqu'on impose une différence de potentiel connue entre les deux armatures. Ce potentiel vérifie :

- l'équation de Laplace :  $\Delta V(M) = 0$ ,
- les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} V = -5 \text{ V} & \text{sur la surface de l'armature supérieure} \\ V = +5 \text{ V} & \text{sur la surface de l'armature inférieure} \\ V = 0 \text{ V} & \text{aux bords du domaine de calcul} \end{cases} .$$

#### Remarque

Les conditions aux limites du calcul ne correspondent pas exactement aux conditions aux limites théoriques. En effet, en théorie le potentiel s'annule à l'infini et dans la pratique il est pris nul aux bords du domaine de calcul qui, bien que relativement éloignés du condensateur (voir figure 16.3), sont à distance finie.

### c) Résultats

Après la phase de résolution, on peut obtenir la représentation des équipotentielles. La figure 16.4 montre ces équipotentialles autour des armatures du condensateur (elle ne représente qu'une petite partie du domaine sur lequel le calcul a été mené).

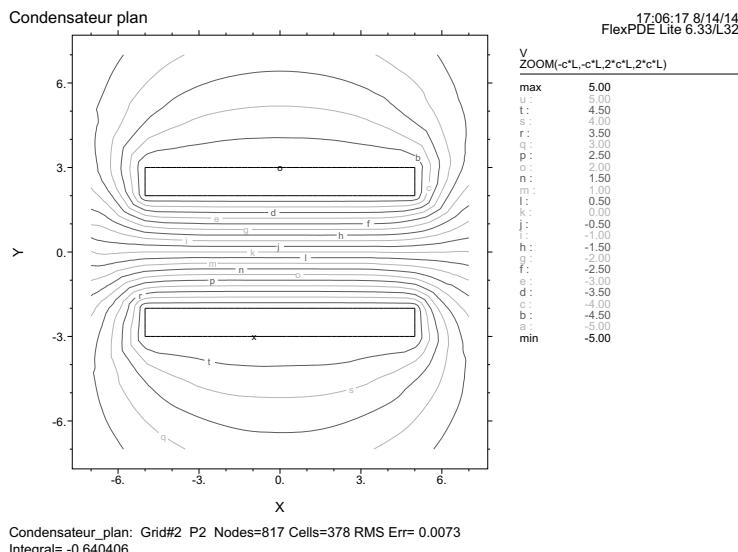


Figure 16.4 – Équipotentialles du condensateur plan fini.

On constate que la résolution amène des équipotentialles qui respectent la symétrie du problème (alors que ce n'était pas le cas pour le maillage !).

Les équipotentielles sont beaucoup plus resserrées entre les armatures qu'à l'extérieur. Cela signifie que le champ électrique est beaucoup plus intense entre les armatures. On note toutefois que contrairement au cas du condensateur plan infini, le champ n'est pas nul à l'extérieur des armatures.

De même on peut voir que, sur plus de 90% de la longueur des armatures, les équipotentielles séparées par des mêmes écarts de potentiel sont régulièrement espacées. Sur le reste de la longueur les équipotentielles ne s'écartent finalement qu'assez peu des directions rectilignes. Cela signifie que l'on peut, pour ce condensateur, considérer le champ comme quasiment uniforme entre les armatures (on justifie ainsi la possibilité de négliger les effets de bord).

On peut cependant s'intéresser plus spécifiquement aux effets de bord : en imaginant des lignes coupant perpendiculairement les équipotentielles, on voit que sur les bords les lignes de champ "sortent" du condensateur. Ceci est confirmé sur la figure 16.5 où des petits segments de ligne de champ ont été calculés par la simulation.

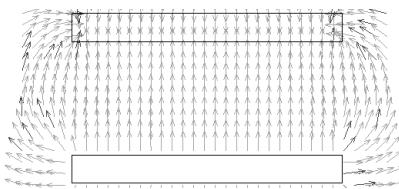


Figure 16.5 – Lignes de champ du condensateur plan fini.

### 6.3 Deuxième exemple : capteur capacitif

On s'intéresse maintenant à un condensateur utilisé comme capteur capacitif dans les écrans tactiles. Les deux armatures ne sont plus en face l'une de l'autre, mais sont dans le même plan (voir figures 16.6 et 16.7). Les valeurs numériques utilisées sont  $b = 5.10^{-5}$  m pour l'épaisseur d'une électrode,  $e = 5.10^{-4}$  m distance entre les deux armatures,  $d = 1.10^{-3}$  m longueur d'une électrode dans le plan de figure,  $\ell = 1.10^{-2}$  m longueur d'une électrode perpendiculairement au plan de figure.

La figure 16.6 donne le potentiel calculé par le logiciel. À partir de ce potentiel, le logiciel peut calculer le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  et la densité volumique d'énergie électrostatique  $u_{em}(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M)$  (voir chapitre suivant). Le logiciel offre une possibilité d'intégrer cette densité sur tout le domaine étudié, ce qui permet d'accéder à l'énergie électrostatique totale  $\mathcal{E}_{el}$  du condensateur. La capacité s'en déduit par  $C = \frac{2\mathcal{E}_{el}}{U^2}$  (voir cours de première année),  $U$  étant la différence de potentiel entre les armatures. Le logiciel est capable de calculer tout ceci numériquement et de présenter le résultat. Ceci est illustré sur la figure 16.7 qui représente la densité d'énergie électrostatique pour ce dispositif et qui donne en bas à gauche de la figure la valeur numérique calculée :  $C = 0,188$  pF.

On peut remarquer au passage la plus forte densité d'énergie entre les deux armatures, et en particulier près des arêtes.

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

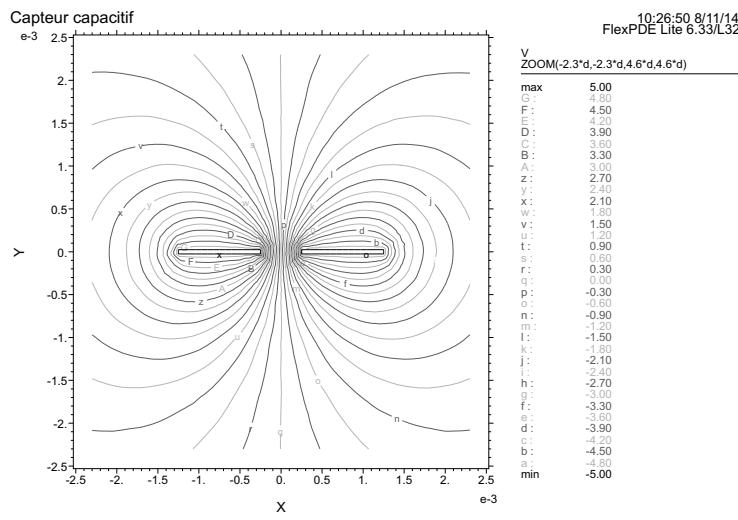


Figure 16.6 – Équipotentielles du capteur capacitif.

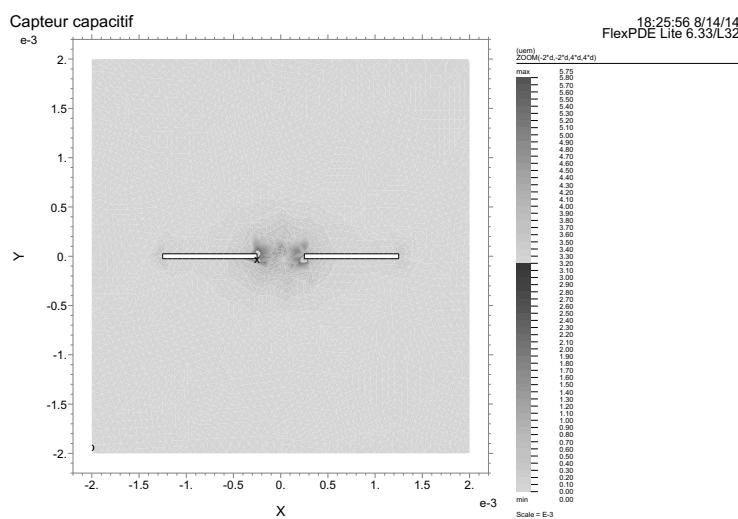


Figure 16.7 – Densité d'énergie électrostatique et calcul de capacité.

**SYNTÈSE****SAVOIRS**

- équation locale de conservation de la charge
- équations locales de Maxwell et leur forme intégrale
- compatibilité avec l'équation locale de conservation de la charge
- équation de propagation des champs dans le vide
- équation de Maxwell pour les champs statiques
- équations de Poisson et de Laplace pour le potentiel électrostatique

**SAVOIR-FAIRE**

- établir l'équation locale de conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas unidimensionnel
- associer à chaque équation de Maxwell sa forme intégrale
- utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale
- associer la loi de Faraday vue en première année et la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday
- vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de conservation de la charge
- associer le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation
- établir les équations de propagation des champs dans une région vide de charge et de courant
- établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell
- établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique

**MOTS-CLÉS**

- |                           |                           |                       |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------|
| • champ électromagnétique | • loi de Faraday          | • équation de Poisson |
| • équations de Maxwell    | • théorème d'Ampère       | • équation de Laplace |
| • théorème de Gauss       | • équation de propagation |                       |

## S'ENTRAÎNER

**16.1 Une solution des équations de Maxwell (★)**

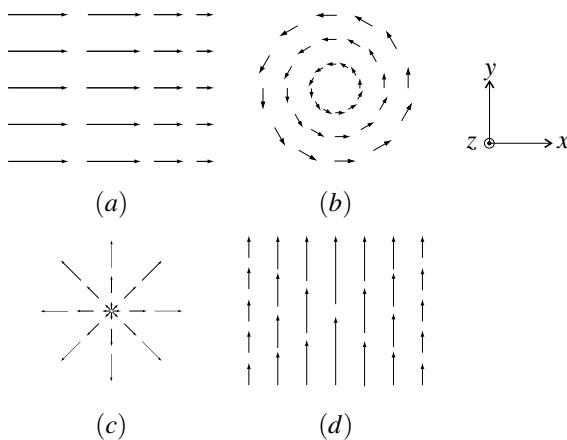
On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courant est donné par l'expression suivante :

$$\vec{E}(M, t) = f(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = g(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_y$$

1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux sont-elles vérifiées ?
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une expression de  $g(z)$  en fonction de  $f'(z)$ .
3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une expression de  $f(z)$  en fonction de  $g'(z)$ .
4. En déduire  $f(z)$  supposant que  $f(z)$  est pair et que  $\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{u}_x$ . Donner l'expression du champ électromagnétique.

**16.2 Champ statiques (★)**

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan  $z = \text{cste}$ , quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme :  $\vec{a}(x, y) = a_x(x, y) \vec{u}_x + a_y(x, y) \vec{u}_y$ .

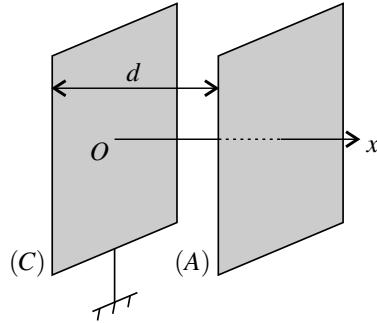


Chaque champ est de la forme  $\vec{a} = a_\alpha(\beta) \vec{u}_\alpha$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux coordonnées (éventuellement identiques) d'un repère de l'espace adapté.

Dans chaque cas, préciser le signe de  $\operatorname{div} \vec{a}$  et la direction de  $\operatorname{rot} \vec{a}$ ; indiquer si le champ  $\vec{a}$  peut être un champ électrostatique et/ou un champ magnétostatique. On utilisera le formulaire page 492.

### 16.3 Diode à vide (\*\*)

Une diode à vide est constituée de deux plaques métalliques planes parallèles ( $C$ ) et ( $A$ ), de même surface  $S$  et distantes de  $d$ , entre lesquelles a été fait le vide. La cathode ( $C$ ) est maintenue au potentiel 0. Elle émet des électrons de vitesse négligeable qui se dirigent vers l'anode ( $A$ ) qui est portée au potentiel  $U > 0$ . On admet pour simplifier que les trajectoires des électrons sont rectilignes perpendiculaires aux plaques. On se place en régime permanent. L'intensité passant de ( $A$ ) à ( $C$ ) est appelée  $I$ .



On note  $V(x)$  le potentiel électrostatique,  $\rho(x)$  la densité volumique de charge et  $v(x)$  la vitesse des électrons entre les plaques à la distance  $x$  de ( $C$ ).

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de  $v(x)$  en fonction de  $V(x)$  et des caractéristiques d'un électron (masse  $m$ , charge  $-e$ ).
2. Montrer que  $\rho(x)v(x) = \text{constante}$  et exprimer la constante en fonction de  $I$  et  $S$ .
3. Exprimer  $\rho(x)$  en fonction de  $V(x)$ ,  $\alpha = \frac{I}{S\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$  et  $\epsilon_0$ .
4. Écrire une équation différentielle vérifiée par  $V(x)$ .
5. On admet que le champ électrique est nul en  $x = 0$ . Intégrer l'équation précédente après l'avoir multipliée par  $\frac{dV}{dx}$  pour obtenir  $\frac{dV}{dx}$  en fonction de  $V(x)$ .
6. En déduire  $I$  en fonction de  $U$ , pour  $U > 0$ . Que dire de  $I$  si  $U < 0$  ?

### 16.4 Effet Meissner dans une plaque supraconductrice (\*\*)

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant  $\vec{j}$  liée au champ magnétique  $\vec{B}$  par la relation  $\vec{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$  (appelée **équation de London**) où  $\lambda$  est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique  $\vec{B}$ .

On rappelle la relation :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ .

2. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur  $2d$ , dont les faces sont de dimensions très grandes devant  $d$  pour pouvoir négliger les effets de bord. On choisit l'origine d'un repère orthonormé direct ( $Oxyz$ ) au milieu de la plaque, l'axe  $Oz$  étant perpendiculaire à ses faces qui ont pour équation  $z = -d$  et  $z = +d$ . Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme, égal à  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$ .

- a. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur de la plaque en supposant que  $\vec{B}(d) = \vec{B}(-d) = \vec{B}_0$ .

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

- b.** En déduire le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à l'intérieur de la plaque.
- 3.** Un modèle microscopique donne  $\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$  où  $m$  est la masse de l'électron,  $e$  la charge élémentaire et  $n_s$  la densité volumique d'électrons supraconducteurs.  
On donne :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ ,  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  et  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .
- a.** Calculer  $\lambda$  pour  $n_s = 1,0 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$ .
- b.** Tracer les graphes des composantes non nulles de  $\vec{B}$  et de  $\vec{j}$  en fonction de  $z$ .
- c.** Calculer l'épaisseur minimale  $2d_m$  de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à  $B_0/100$ .
- d.** Pour  $d \gg \lambda$ , à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?

## APPROFONDIR

**16.5** Électrolyte entre les plaques d'un condensateur (★★)

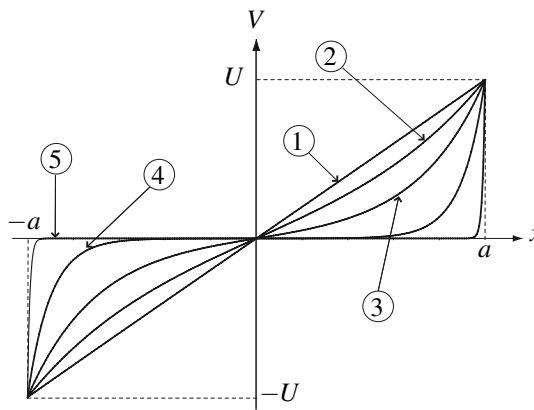
Les armatures d'un condensateur plan, portées au potentiel  $U$  et  $-U$ , sont respectivement assimilées à des plans infinis, d'équations  $x = a$  et  $x = -a$ . On note  $V(x)$  le potentiel en un point d'abscisse  $x$ . On introduit entre les armatures un électrolyte constitué de cations et d'anions de charges individuelles respectives  $+q$  et  $-q$ . En l'absence de champ (donc pour  $U = 0$ ), les anions et les cations ont la même densité particulaire  $n_0$ . L'ensemble est à l'équilibre thermique à la température  $T$ .

Le nombre  $n$  de particules par unité de volume qui ont l'énergie  $E$  est  $n = n_0 \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

1. Exprimer la densité volumique de charge en fonction des données et de  $V(x)$ .
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $V(x)$ .
3. Que devient-elle si on suppose  $|qV| \ll k_B T$  ?

Cette hypothèse étant supposée réalisée en tout point, déterminer la fonction  $V(x)$ . On fera apparaître une longueur caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction de  $k_B$ ,  $T$ ,  $\epsilon_0$ ,  $n_0$  et  $q$ .

4. On donne l'allure de la courbe  $V(x)$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha = \delta/a$  :



Les courbes sont tracées pour :

- courbe 1 :  $\alpha = 5$  ;
- courbe 2 :  $\alpha = 0,6$  ;
- courbe 3 :  $\alpha = 0,3$  ;
- courbe 4 :  $\alpha = 0,1$  ;
- courbe 5 :  $\alpha = 0,01$ .

Commenter soigneusement ces courbes.

### 16.6 Potentiel électrique autour d'une particule colloïdale (★★)

Une solution colloïdale est une suspension dans de l'eau de particules de dimensions de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$  m, petite à l'échelle macroscopique et grande à l'échelle moléculaire. En dehors des particules colloïdales, la solution contient des ions de charge  $\pm e$  qui seront considérés comme ponctuels.

On considère une particule colloïdale sphérique, de centre  $O$  et rayon  $R$ , portant une charge  $Q$ . On suppose que le potentiel électrique autour de cette particule ne dépend que de  $r = OM$ .

Si  $V(M) = V(r)$  :  $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2}$ . D'autre part, la densité numérique  $N_+$  des cations et la densité numérique  $N_-$  des anions suivent la loi de Boltzmann et s'écrivent :

$$N_+(r) = N_0 \exp\left(\frac{-eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad N_-(r) = N_0 \exp\left(\frac{+eV(r)}{k_B T}\right)$$

où  $N_0$  est une constante,  $V(M)$  le potentiel électrostatique,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue.

**1.** Exprimer la densité volumique de charge  $\rho(r)$  en fonction de  $V(r)$ . Dans toute la suite on supposera que  $|eV(r)| \ll k_B T$  ; simplifier alors l'expression précédente.

**2.** Quelle équation différentielle vérifie la fonction  $U(r) = rV(r)$  ?

Montrer que  $V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$  où  $A$  est une constante encore indéterminée et  $\lambda$  une longueur caractéristique à exprimer en fonction des données.

**3.** Exprimer le champ électrique autour de la particule colloïdale. Déterminer la constante  $A$ .

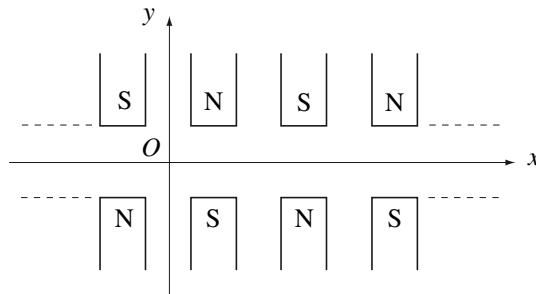
## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

- 4.** Quelle est la charge  $Q(r)$  contenue dans la sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ ? Déterminer  $\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r)$  et commenter le résultat.
- 5.** Pourquoi dit-on que l’interaction électrostatique entre particules colloïdale est « écranée » par les ions ?
- 6.** La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique entre les particules colloïdales sans laquelle les particules s’attireraient mutuellement et précipiteraient au fond du récipient (floculation). Montrer que l’ajout de sel dans la solution peut provoquer la floculation.

**16.7 Réalisation d’un onduleur (★★★)**

On veut réaliser un champ magnétique, dans une région de l’espace vide de charges et de courants, de la forme :

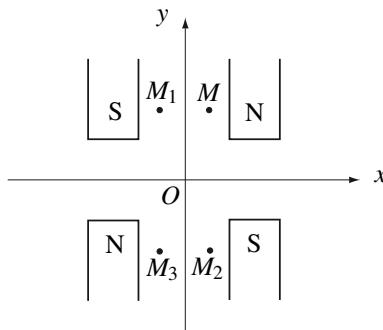
$$\vec{B} = B_0 \sin(k_0 x) \hat{u}_y$$



Pour tenter de réaliser de manière approchée un tel champ, on dispose périodiquement un système d’aimants permanents, la périodicité spatiale étant  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ . Les plans  $Oxy$  et  $Oxz$  sont plans de symétrie géométrique du système. On suppose en outre les aimants très allongés dans la direction  $Oz$  de telle sorte que le champ peut être considéré comme indépendant de  $z$ . On prendra :  $B_0 = 0,4$  T et  $\lambda_0 = 8$  cm. La longueur totale est de 1,6 m, soit  $N = 20$  périodes spatiales.

Pour étudier les symétries de la source de champ magnétique, on pourra utiliser l’équivalence entre un aimant et une petite spire vue en première année et rappelée dans le chapitre précédent.

- Montrer que l’expression proposée plus haut pour le champ magnétique ne convient pas.
- On isole par la pensée deux paires d’aimants :



Dessiner sans calculs l'allure des lignes de champ. Que se passe-t-il au point  $O$  ?

**3.** En considérant le vecteur  $\vec{B}$  au point  $M(x, y, 0)$ , dessiner le vecteur  $\vec{B}$  correspondant aux points  $M_1(-x, y, 0)$ ,  $M_2(x, -y, 0)$  et  $M_3(-x, -y, 0)$ .

**4.** On cherche le champ magnétique sous la forme :

$$\vec{B} = f(x, y) \vec{u}_x + B_0 g(y) \sin(k_0 x) \vec{u}_y$$

avec  $f(x, 0) = 0$  et  $g(0) = 1$ .

Prévoir la périodicité et la parité des fonctions  $f(x, y)$  et  $g(y)$ . Que vaut  $g'(0)$  ?

**5.** Déterminer entièrement les fonctions  $f(x, y)$  et  $g(y)$ .

On montrera au préalable que  $g(y)$  vérifie l'équation différentielle  $g''(y) = k_0^2 g(y)$ .

**6.** Le champ n'est destiné à agir que dans le domaine  $y < 0,2$  mm. Montrer que dans ces conditions l'expression du début est une bonne approximation.

### 16.8 Effet de striction des filets de courant ( $\star\star\star$ )

Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent sous l'action des forces magnétiques. Le même effet d'attraction se manifeste entre les filets infinitésimaux de courant à l'intérieur d'un conducteur, modifiant ainsi la répartition de courant, usuellement supposée uniforme sur toute la section du fil.

On considère un conducteur cylindrique, de longueur infinie et de rayon  $a$ . Il contient  $n_0$  charges positives  $q$  fixes par unité de volume et  $n$  porteurs de charges mobiles, de charge électrique  $-q$ , animés d'une vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_z$  uniforme et stationnaire par rapport au conducteur, orientée selon l'axe du conducteur. On propose de déterminer la densité volumique non uniforme de porteurs de charges  $n(r)$  en régime stationnaire.

**1.** Donner les expressions de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  et de la densité volumique totale de charge  $\rho$  qui décrivent cette distribution. Vérifier l'équation de conservation locale de la charge électrique.

**2.** Écrire les équations fondamentales vérifiées par les champs électrique et magnétique en un point du faisceau de charges mobiles. On précisera l'orientation des champs électrique et magnétique en un point  $M$  à l'intérieur du conducteur.

**3.** En étudiant le mouvement d'un porteur de charge, de vitesse  $\vec{v}$  uniforme et stationnaire, exprimer la densité volumique de porteurs de charges mobiles  $n(r)$  dans le faisceau en fonction de  $n_0$  et  $\beta = v/c$ . On utilisera le formulaire ci-dessous.

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

**4.** En écrivant la neutralité électrique d'une tranche  $dz$  de conducteur, montrer que l'expression de la densité  $n(r)$  est non nulle seulement pour  $r \leq b$ . On exprimera  $b$  en fonction de  $a$  et  $\beta$ .

**5. Application numérique :** Pour un fil de cuivre métallique, de section  $S = 1,0 \text{ mm}^2$ , parcouru par un courant d'intensité 10 A, évaluer  $a - b$ . Commenter le résultat obtenu.

*Données :* masse volumique du cuivre  $\mu = 8,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ; masse molaire  $M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On considérera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

*Formulaire :*

Expressions de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

et

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

## CORRIGÉS

**16.1 Une solution des équations de Maxwell**

**1.** L'équation de Maxwell-Gauss, qui s'écrit ici  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  car  $\rho = 0$ , est bien vérifiée car  $\vec{E}$  n'a de composante que sur une direction ( $\vec{u}_x$ ) et ne dépend pas de la coordonnée correspondant à cette direction (coordonnée  $x$ ). Pour la même raison, l'équation de Maxwell-flux est bien vérifiée.

**2.** L'équation de Maxwell-Faraday nous donne :  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -f'(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_y$ . Or :  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\alpha g(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_y$ . Il vient donc :  $g(z) = \frac{1}{\alpha} f'(z)$ .

**3.** L'équation de Maxwell-Ampère, avec  $\vec{j} = \vec{0}$ , nous donne :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} g'(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_x$$

Or :  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\alpha f(z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_x$ . On en déduit :  $f(z) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \alpha} g'(z)$ .

**4.** Il vient :  $f(z) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \alpha^2} f''(z)$ . La solution de cette équation différentielle est :

$$f(z) = A \exp(-\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha z) + B \exp(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha z)$$

$A = B$  car  $f(z)$  est paire. La condition initiale  $\vec{E}(O, 0) = E_0 \vec{u}_x$  donne  $A = \frac{E_0}{2}$ . Donc :  $f(z) = E_0 \sinh(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha z)$ .

Il vient ensuite :  $g(z) = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 \cosh(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha z)$ .

Finalement :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= E_0 \sinh(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_x \\ \text{et } \vec{B}(M, t) &= \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 \cosh(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha z) \exp(-\alpha t) \vec{u}_y \end{aligned}$$

**16.2 Champ statiques**

Le champ (a) est de la forme :  $a_x(x) \vec{u}_x$ .  $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{da_x}{dx}$  est négative.  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{a} = \vec{0}$  car  $\vec{a}$  est porté par un seul vecteur unitaire et ne dépend que de la coordonnée correspondant à ce vecteur unitaire. Il peut s'agir d'un champ électrostatique car le rotationnel est nul ; il ne peut pas s'agir d'un champ magnétostatique car sa divergence n'est pas nulle.

Le champ (b) est de la forme :  $a_\theta(r) \vec{u}_\theta$  en coordonnées cylindrique d'axe ( $Oz$ ).  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  car  $\vec{a}$  est porté par un seul vecteur unitaire et ne dépend pas de la coordonnée correspondant à ce vecteur unitaire.  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{d(r a_\theta)}{dr} \vec{u}_z$  est dirigé vers l'avant. Il ne peut pas s'agir d'un champ électrostatique car le rotationnel n'est pas nul ; il peut s'agir d'un champ magnétostatique car sa divergence est nulle.

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

Le champ (*c*) est de la forme :  $a_r(r)\vec{u}_r$  en coordonnées cylindriques d'axe (*Oz*).  $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{d(r a_r)}{dr}$  est positive.  $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$  car  $\vec{a}$  est porté par un seul vecteur unitaire et ne dépend que de la coordonnée correspondant à ce vecteur unitaire. Il peut s'agir d'un champ électrostatique car le rotationnel est nul ; il ne peut pas s'agir d'un champ magnétostatique car sa divergence n'est pas nulle.

Le champ (*d*) est de la forme :  $a_y(x)\vec{u}_y$ .  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  car  $\vec{a}$  est porté par un seul vecteur unitaire et ne dépend pas de la coordonnée correspondant à ce vecteur unitaire.  $\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{da_y}{dx}\vec{u}_z$  est dirigé vers l'avant sur la moitié gauche de la figure et vers l'arrière sur la moitié droite. Il ne peut pas s'agir d'un champ électrostatique car le rotationnel n'est pas nul ; il peut s'agir d'un champ magnétostatique car sa divergence est nulle.

### 16.3 Diode à vide

**1.** Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron entre sa sortie de la cathode (*C*) et son passage à l'abscisse *x* s'écrit :  $\frac{1}{2}mv(x)^2 - 0 = e(V(x) - 0)$  donc :  $v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}$ .

**2.** La densité volumique de courant est  $\vec{j} = \rho(x)v(x)\vec{u}_x$ . D'après la loi de conservation de la charge :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$  ; or  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  puisqu'on est en régime stationnaire, donc :

$$j(x) = \rho(x)v(x) = \text{constante.}$$

L'intensité passant de (*A*) à (*C*) est :  $I = \vec{j} \cdot (-S\vec{u}_x) = -j(x)S$  (attention au sens de l'intensité). Finalement :  $\rho(x)v(x) = -\frac{I}{S}$ .

**3.** En combinant les résultats des deux questions précédentes on trouve :

$$\rho(x) = -\frac{I}{Sv(x)} = -\frac{I}{S} \sqrt{\frac{m}{2e} V(x)} = -\frac{\epsilon_0 \alpha}{\sqrt{V(x)}}.$$

**4.** L'équation de Poisson,  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ , donne ici :  $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{V(x)}}$ .

**5.** Il vient :  $\frac{d^2V}{dx^2} \frac{dV}{dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{V(x)}} \frac{dV}{dx}$  d'où en intégrant :  $\frac{1}{2} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = 2\alpha \sqrt{V(x)} + \text{constante.}$

La constante est nulle car  $V(0) = 0$  et  $\frac{dV}{dx}(0) = 0$ . Finalement :  $\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{\alpha}(V(x))^{\frac{1}{4}}$ .

**6.** On sépare les variables dans l'équation précédente :  $\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{\alpha}dx$  d'où en intégrant  $\frac{4}{3} \left( (V(x))^{\frac{3}{4}} - (V(0))^{\frac{3}{4}} \right) = 2\sqrt{\alpha}(x - 0)$ . Sachant que  $V(0) = 0$  et  $V(d) = U$  il vient :

$$\frac{4}{3}U^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\alpha}d \quad \text{soit} \quad I = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U^{\frac{3}{2}}.$$

Si  $U < 0$ , les électrons émis par (*C*) sont repoussés par le champ électrique au lieu d'être accélérés donc  $I = 0$ . La diode ne laisse passer le courant que dans un seul sens.

### 16.4 Effet Meissner dans une plaque supraconductrice

**1.** L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, en régime statique,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Prenons le rotationnel de cette équation. Il vient :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

D'autre part :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

Finalement, le champ magnétique vérifie l'équation :  $\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$ .

**2. a.** Le problème est invariant par toute translation le long des axes  $Ox$  et  $Oy$  donc le champ magnétique ne dépend que de  $z$ .

L'équation de Maxwell-flux donne  $\frac{dB_z}{dz} = 0$  donc  $B_z$  est indépendant de  $z$ . Les conditions aux limites étant  $\vec{B}(d) = \vec{B}(-d) = B_0 \vec{u}_x$ ,  $B_z$  est nul.

L'équation de la question 1 s'écrit, en projection sur l'axe  $Ox$  :  $\frac{d^2 B_x}{dz^2} = \frac{1}{\lambda^2} B_x$ . Cette équation s'intègre en :

$$B_x = \alpha \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) + \beta \exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

Les conditions aux limites  $B_x(d) = B_x(-d) = B_0$  permettent de déterminer les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . Tous calculs faits, il vient :

$$B_x = B_0 \frac{\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)}$$

La composante  $B_y$  vérifie la même équation différentielle mais s'annule en  $z = \pm d$ , les constantes d'intégration sont donc toutes les deux nulles.

Finalement :

$$\vec{B} = B_0 \frac{\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{u}_x$$

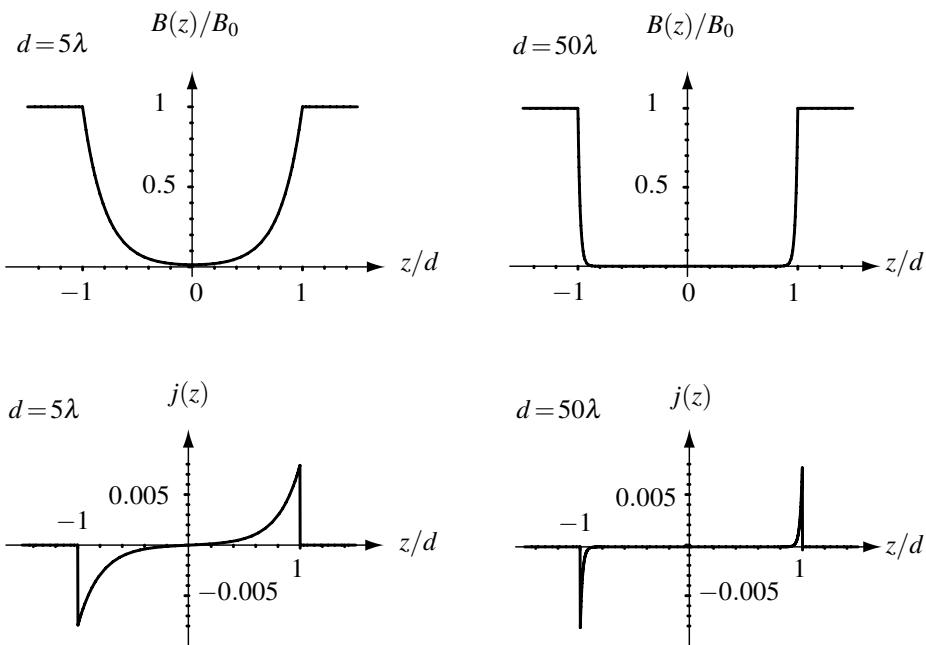
**b.** La densité volumique de courant se calcule à partir de l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . On obtient :

$$\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{u}_y$$

**3. a.** L'application numérique donne :  $\lambda = 17 \text{ nm}$ .

**b.** Les courbes représentatives de  $B(z)$  et de  $j(z)$  sont données ci-dessous. On a tracé  $B(z)/B_0$  et  $j(z)$ , en  $\text{A.m}^{-2}$  pour  $B_0 = 1T$  et  $\lambda = 17 \text{ nm}$ , en fonction de  $z/d$  pour  $d = 5\lambda$  puis pour  $d = 50\lambda$  :

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL



Dès que  $d$  est assez grand,  $B$  et  $j$  sont nuls dans toute la plaque sauf sur les bords.

c. On cherche  $d$  telle que  $\frac{B_0}{\cosh(\frac{d}{\lambda})} < \frac{B_0}{100}$ , ou encore  $\cosh(\frac{d}{\lambda}) > 100$ , c'est-à-dire  $d > 5,3\lambda$ , ce qui représente une épaisseur minimale  $2d_m = 1,8 \times 10^{-7}$  m.

d. On cherche  $z$  tel que  $j(z) < \frac{j(d)}{100}$ , c'est-à-dire  $\sinh(\frac{z}{\lambda}) < \frac{1}{100} \sinh(\frac{d}{\lambda})$ . Comme  $d$  et  $z$  sont très grands par rapport à  $\lambda$ , cette équation se simplifie en  $\exp(\frac{z}{\lambda}) < \frac{1}{100} \exp(\frac{d}{\lambda})$ , soit  $d - z > \lambda \ln(100) = 77$  nm.

Le courant est nul dans toute la plaque, il est concentré à la surface. De même, le champ magnétique est nul dans presque toute la plaque dès que  $d \gg \lambda$ . Ces calculs sont bien en accord avec les graphes tracés précédemment.

### 16.5 Électrolyte entre les plaques d'un condensateur

1. La densité volumique de charge : est  $\rho = -2n_0q \operatorname{sh}(qV/k_B T)$ .

2. Le potentiel vérifie l'équation de Poisson :  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ , qui s'écrit ici :

$$\frac{d^2V}{dx^2} - 2\frac{n_0q}{\epsilon_0} \operatorname{sh}(qV/k_B T) = 0$$

3. Si  $qV \ll k_B T$ , l'équation se simplifie en :  $\frac{d^2V}{dx^2} - 2\frac{n_0q^2}{\epsilon_0 k_B T} V(x) = 0$ .

La solution de cette équation est :  $V(x) = A \operatorname{ch}(x/\delta) + B \operatorname{sh}(x/\delta)$  où  $\delta = \sqrt{\frac{k_B T \epsilon_0}{2n_0 q^2}}$ .

Compte tenu des conditions aux limites  $V(a) = U$  et  $V(-a) = -U$ , on obtient :

$$V(x) = U \frac{\operatorname{sh}(x/\delta)}{\operatorname{sh}(a/\delta)}$$

**4.** La longueur  $\delta$  apparaît comme la distance caractéristique sur laquelle se fait ressentir l'influence de l'électrolyte. C'est aussi la longueur caractéristique sur laquelle s'accumulent les anions et les cations respectivement sur chaque armature puisque  $\rho(x)$  est proportionnel à  $V(x)$  dans l'approximation traitée.

Si  $a \ll \delta$ , ce qui est le cas de la courbe 1, la présence de l'électrolyte entre les plaques du condensateur ne modifie quasiment pas la répartition du potentiel entre les armatures.

Si  $a \gg \delta$ , ce qui est le cas de la courbe 5, la présence de l'électrolyte masque complètement l'effet des charges des armatures du condensateur sur le potentiel.

Dans les cas intermédiaires, la répartition de potentiel entre les deux armatures est influencée par les deux types de charges, les ions de l'électrolyte et les charges portées par les armatures du condensateur.

## 16.6 Potentiel électrique autour d'une particule colloïdale

$$1. \rho(r) = eN_+(r) - eN_-(r) = eN_0 \left( \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \right).$$

Dans l'approximation  $|eV(r)| \ll k_B T$ ,  $\rho(r) \simeq -\frac{2N_0 e^2}{k_B T} V(r)$ .

$$2. \text{L'équation de Poisson } \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \text{ devient : } \frac{d^2 U(r)}{dr^2} - \frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T} U(r) = 0.$$

La solution est

$$U(r) = A \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) + B \exp\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes et  $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2N_0 e^2}}$ . Alors :  $V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) + \frac{B}{r} \exp\left(\frac{r}{\lambda}\right)$  ; mais il n'est pas physique que  $V(r)$  tende vers l'infini lorsque  $r$  tend vers l'infini ; donc  $B = 0$  et finalement :  $V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$ .

### Remarque

La longueur  $\lambda$  est appelée longueur de Debye.

$$3. \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = A \left( \frac{1}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) \vec{u}_r.$$

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

**Remarque**

Ce champ est créé par la particule colloïdale d'une part, et d'autre part les ions qui l'entourent.

Le théorème de Gauss appliqué à travers une sphère de rayon très légèrement supérieur à  $R$  donne :  $\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$  puisque la seule charge présente à l'intérieur de cette sphère est celle de la particule colloïdale. Or le flux de  $\vec{E}$  à travers cette sphère est  $\Phi_E = 4\pi R^2 E(R)$ , donc  $A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R + \lambda} \exp\left(\frac{R}{\lambda}\right)$ .

4. D'après le théorème de Gauss :  $Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = Q \frac{r + \lambda}{R + \lambda} \exp\left(-\frac{r - R}{\lambda}\right)$ .

On en déduit  $\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0$ ; les ions entourant la particule colloïdale ont une charge totale exactement opposée à la charge de la particule colloïdale soit  $-Q$ .

5. Une autre particule colloïdale subit la force  $Q\vec{E}$  de la part de la première. Si elle est située à une distance supérieure à quelques  $\lambda$ , cette force est quasiment nulle. L'interaction entre les particules colloïdales est écrantée par les ions qui viennent se placer entre elles.

6. Pour que la répulsion électrostatique entre particules colloïdales ait un effet, il faut que la distance moyenne  $d$  entre deux particules soit nettement inférieure à  $\lambda$ . En ajoutant du sel, on fait augmenter  $N_0$  et donc diminuer  $\lambda$ . En abaissant  $\lambda$  en dessous de  $d$  on provoque la flocculation.

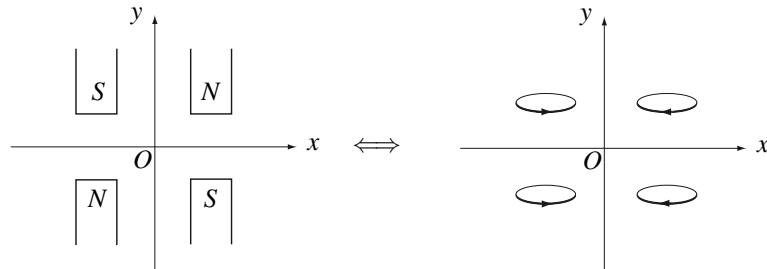
**16.7 Réalisation d'un onduleur**

1. Le champ proposé vérifie bien l'équation de Maxwell-flux mais pas celle de Maxwell-Ampère. En effet, on est dans une région vide de courant et  $\text{rot } \vec{B} = k_0 B_0 \cos(k_0 x) \vec{u}_z \neq \vec{0}$ .

2. On peut modéliser un aimant par une spire selon le schéma suivant :



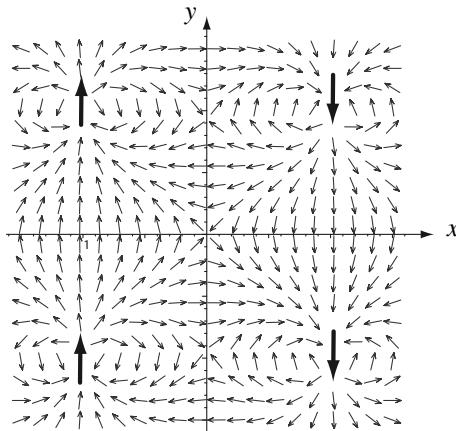
L'ensemble des quatre aimants est donc équivalent à :



Le plan de la figure (plan  $xOy$ ) est plan d'antisymétrie de la source de champ magnétique, le champ est contenu dans ce plan.

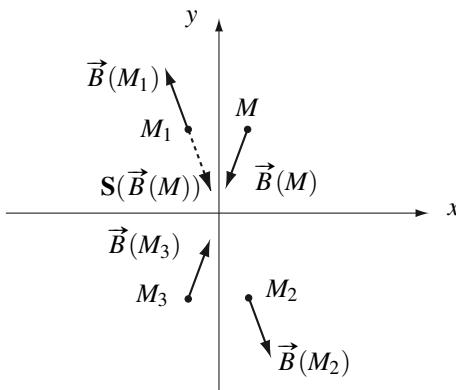
Le plan  $xOz$  est donc plan de symétrie de la source de champ magnétique, tout comme le plan  $yOz$ . Les lignes de champs coupent les deux axes orthogonalement. Au point  $O$ , le champ est à la fois perpendiculaire à  $\vec{u}_y$  et à  $\vec{u}_x$ . Le champ en  $O$  est nul.

L'allure des lignes de champ est la suivante :



Les flèches plus grosses représentent les moments magnétiques des aimants.

3.  $\vec{B}(M_1) = -\mathbf{S}(\vec{B}(M))$  puisque le plan ( $yOz$ ) est plan de symétrie de la source de  $\vec{B}$ . On construit de même les champs en  $M_2$  et  $M_3$  :



4.  $\vec{B}(x, -y)$  est l'opposé du symétrique de  $\vec{B}(x, y)$  par rapport au plan ( $xOz$ ) donc la composante selon  $\vec{u}_y$  est inchangée et celle selon  $\vec{u}_x$  change de signe. On en déduit que  $g(y)$  est paire et que  $f(x, y)$  est impaire en  $y$ .

De plus,  $\vec{B}(x + p\lambda_0, y) = \vec{B}(x, y)$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ . La fonction  $f(x, y)$  est donc périodique de période  $\lambda_0$  en  $x$ . La périodicité pour la composante selon ( $Oy$ ) est contenue dans le choix

## CHAPITRE 16 – ÉQUATIONS DE MAXWELL

d'une fonction sinusoïdale.

Enfin, comme  $g(y)$  est paire,  $g'(y)$  est impaire donc  $g'(0) = 0$ .

**5.** L'équation de Maxwell-flux,  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , donne :  $\frac{\partial f}{\partial x} + B_0 \sin(k_0 x) g'(y) = 0$ .

L'équation de Maxwell-Ampère, ici  $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0}$ , donne :  $k_0 B_0 \cos(k_0 x) g(y) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

On dérive la première équation par rapport à  $y$  et la deuxième par rapport  $x$  et on utilise le fait que  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ .

On obtient l'équation vérifiée par  $g(y)$  :  $g''(y) = k_0^2 g(y)$ .

Cette équation s'intègre en  $g(y) = \alpha \cosh(k_0 y) + \beta \sinh(k_0 y)$ .  $g(y)$  est paire donc  $\beta = 0$  et  $g(0) = 1$  donc  $\alpha = 1$ . Finalement :  $g(y) = \cosh(k_0 y)$ .

On reporte dans les équations précédentes et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -B_0 k_0 \sinh(k_0 y) \sin(k_0 x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = +B_0 k_0 \cosh(k_0 y) \cos(k_0 x) \end{cases}$$

On en déduit :  $f(x, y) = B_0 \sinh(k_0 y) \cos(k_0 x) + \gamma$  où  $\gamma$  est une constante. Or  $f(x, y)$  est impaire en  $y$  donc  $f(x, 0) = 0$ , ce qui donne  $\gamma = 0$ .

Il reste :

$$\vec{B} = B_0 \sinh(k_0 y) \cos(k_0 x) \vec{u}_x + B_0 \cosh(k_0 y) \sin(k_0 x) \vec{u}_y$$

**6.**  $|y| < 0,2$  mm donc  $|k_0 y| < \frac{2\pi \times 0,2}{80} = 1,7 \times 10^{-2}$ . D'où  $|\sinh(k_0 y)| < 1,7 \times 10^{-2}$  et  $1 < \cosh(k_0 y) < 1,0001$ . L'expression donnée en début d'énoncé est donc une bonne approximation.

### 16.8 Effet de striction des filets de courant

**1.** La densité volumique de courant est  $\vec{j} = -n(r)q \vec{v}$  (seules les charges  $-q$  sont mobiles). La densité volumique de charge est  $\rho = (n_0 - n(r))q$ .

$\operatorname{div} \vec{j} = 0$  et  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  donc l'équation locale de conservation de la charge est bien vérifiée.

**2.** La symétrie cylindrique du dispositif implique que  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$  et  $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$  (Cf. cours).

Les équations de Maxwell s'écrivent ici :

- $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = (n_0 - n(r)) \frac{q}{\epsilon_0}$  ;
- $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  ;
- $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ;
- $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = -n(r)\mu_0 q \vec{v}$ .

La deuxième et la troisième équations sont bien compatibles avec les invariances et symétries des champs.

**3.** Un porteur de charge est soumis à la force de Lorentz (on néglige son poids). Il est animé d'une vitesse uniforme et stationnaire, son accélération dans le référentiel du conducteur est nulle. On en déduit :  $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ , soit  $E(r) = vB(r)$ .

L'équation de Maxwell-Gauss donne :  $\frac{1}{r} \frac{d(rE(r))}{dr} = (n_0 - n(r)) \frac{q}{\epsilon_0}$ .

L'équation de Maxwell-Ampère donne :  $\frac{1}{r} \frac{d(rB(r))}{dr} = -n(r)\mu_0 qv$ .

Tous calculs faits, on trouve :  $n(r) = \frac{n_0}{1 - \beta^2}$  où  $\beta = \frac{v}{c}$ .

**4.**  $n(r)$  étant différent de  $n_0$ , les porteurs mobiles sont présents dans un cylindre de rayon  $b < a$ . La charge contenue dans une tranche de longueur  $dz$  est donc ( $n(r)$  est uniforme) :

$$\delta q = -n(r)\pi b^2 q + n_0\pi a^2 q = n_0 q \left( a^2 - \frac{b^2}{1 - \beta^2} \right).$$

Cette charge est nulle donc :  $b = a\sqrt{1 - \beta^2}$ .

$$\textbf{5. } j = \frac{I}{\pi b^2} = \frac{I}{\pi a^2(1 - \beta^2)} = nev = \frac{n_0 ev}{1 - \beta^2} \text{ d'où } v = \frac{I}{\pi a^2 n_0 e}.$$

Le nombre d'électrons par unité de volume est égal au nombre d'atomes de cuivre par unité de volume, à savoir :  $n_0 = \frac{\mu N_A}{M} = 8,3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (attention à bien exprimer la masse molaire en  $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

On en déduit :  $v = 0,75 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit  $\beta = 2,5 \times 10^{-12}$ . C'est très faible :  $a = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \simeq 560 \mu\text{m}$  donc  $a - b \simeq \frac{1}{2}\beta^2 a = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ m}$ , ce qui est absolument négligeable (très inférieur à la taille d'un noyau atomique). C'est inférieur à la taille d'un atome.



# Énergie du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  est une entité physique à laquelle on peut associer une quantité de mouvement, un moment cinétique et une énergie. Ce chapitre est consacré à l'énergie du champ électromagnétique.

## 1 Interaction entre le champ électromagnétique et la matière

Dans un premier temps on s'intéresse à l'interaction du champ électromagnétique avec la matière, c'est-à-dire les charges électriques présentes.

### 1.1 Densité volumique de force électromagnétique

Une particule de charge  $q$  se trouvant au point  $M$  à l'instant  $t$  et animée de la vitesse  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(t)$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  subit de la part du champ électromagnétique la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q (\vec{E}_{/\mathcal{R}}(M, t) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M, t)), \quad (17.1)$$

expression qui est la définition même du champ électromagnétique. Dans la suite du cours, pour ne pas alourdir les notations, on omet la mention du référentiel  $\mathcal{R}$ .

Si le milieu comporte  $n_1$  porteurs de charges  $q_1$  par unité de volume, animés de la vitesse  $\vec{v}_1$ , le volume mésoscopique  $d\tau$  subit, de la part du champ électromagnétique, la force :

$$d\vec{f}_1 = n_1 d\tau_M q_1 (\vec{E}(M, t) + \vec{v}_1 \wedge \vec{B}(M, t))$$

Or  $n_1 q_1 = \rho_1$  est la contribution des porteurs de ce type à la densité volumique de charges, et  $n_1 q_1 \vec{v}_1 = \rho_1 \vec{v}_1$  leur contribution au vecteur densité volumique de courant. Si la matière contient différents types  $i$  de porteurs de charge (électrons, ions...), la force subie par toutes les charges contenues dans le volume mésoscopique est :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \left( \sum_i (\rho_i \vec{E}(M, t) + \rho_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}(M, t)) \right) d\tau_M \\ &= \left( (\sum_i \rho_i) \vec{E} + (\sum_i \rho_i \vec{v}_i) \wedge \vec{B} \right) d\tau_M = (\rho \vec{E}(M, t) + \vec{j} \wedge \vec{B}(M, t)) d\tau_M \end{aligned}$$

La **densité volumique de force électromagnétique** est :

$$\vec{f}_V(M, t) = \rho(M, t) \vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) \quad (17.2)$$

La force électromagnétique s'exerçant sur les charges contenues dans un volume élémentaire  $d\tau_M$  autour de  $M$  est :

$$d\vec{F} = \vec{f}_V(M, t) d\tau_M. \quad (17.3)$$

## 1.2 Puissance volumique

Le champ électromagnétique en agissant sur les particules chargées constituant la matière peut lui communiquer de l'énergie. On va calculer la puissance volumique  $\mathcal{P}_V(M, t)$  cédée par le champ électromagnétique à la matière.

Un porteur de charge  $q_1$ , animé de la vitesse  $\vec{v}_1$ , subit la force de Lorentz  $\vec{f}_1 = q_1(\vec{E} + \vec{v}_1 \wedge \vec{B})$ . La puissance de cette force est :

$$\mathcal{P}_1 = \vec{f}_1 \cdot \vec{v}_1 = q_1 \vec{E} \cdot \vec{v}_1$$

### Remarque

La partie magnétique de la force de Lorentz est perpendiculaire à la vitesse des porteurs de charge donc sa puissance est nulle.

Si le milieu comporte  $n_1$  porteurs de charges de ce type par unité de volume, le volume mésoscopique  $d\tau_M$  reçoit, de la part du champ électromagnétique, la puissance :

$$d\mathcal{P} = (n_1 d\tau_M) \mathcal{P}_1 = n_1 q_1 \cdot \vec{E} d\tau_M$$

Si la matière contient différents types  $i$  de porteurs de charge la puissance reçue par toutes les charges contenues dans le volume mésoscopique est :

$$d\mathcal{P} = \left( \sum_i \rho_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{E} d\tau_M = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau_M$$

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière est :

$$\mathcal{P}_V(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t).$$

La puissance cédée à un volume élémentaire  $d\tau_M$  autour de  $M$  est :

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}_V(M, t) d\tau_M. \quad (17.4)$$

### 1.3 Cas d'un conducteur ohmique

#### a) Loi d'Ohm locale

Les conducteurs sont des corps à l'intérieur desquels il existe des porteurs de charge pouvant se déplacer librement, par exemple :

- les métaux dans lesquels les porteurs de charge mobiles sont des électrons appelés électrons de conduction ;
- les solutions ioniques dans lesquelles la conduction est due à des ions des deux signes ;
- les semi-conducteurs dopés dans lesquels la conduction est due à des électrons (cas des semi-conducteurs de type N) ou des lacunes électroniques appelées « trous » (cas des semi-conducteurs de type P) ;
- les polymères conducteurs (polyacétylène dopé par exemple), matières plastiques conduisant l'électricité utilisés notamment dans les écrans tactiles.

La mise en mouvement des porteurs de charges nécessite l'action d'un champ électrique au sein de la matière.

La **loi d'Ohm locale** relie la densité de courant  $\vec{j}(M,t)$  au champ électrique local  $\vec{E}(M,t)$  par l'équation :

$$\vec{j}(M,t) = \gamma \vec{E}(M,t) ,$$

où  $\gamma$  est une constante appelée **conductivité** qui s'exprime en  $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Il s'agit d'une loi phénoménologique qui postule une simple proportionnalité entre la densité volumique de courant et le champ électrique qui l'entretient. Un conducteur dans lequel la loi d'Ohm est vérifiée est dit ohmique. La conductivité dépend du matériau conducteur et elle mesure la facilité avec laquelle le courant passe à l'intérieur. Elle varie avec la température du matériau.

La conductivité d'un métal est typiquement de l'ordre de quelques  $10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  (la loi d'Ohm est vérifié dans un métal si le temps caractéristique de variation du champ électrique est grand devant  $10^{-14} \text{ s}$ ). La conductivité de l'eau de mer est de quelques  $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . La conductivité du silicium qui est un semi conducteur, vaut  $3,77 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  à 298 K .

#### b) Densité volumique de puissance Joule

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur ohmique prend la forme :

$$\mathcal{P}_V(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \vec{E}(M,t) = \gamma E(M,t)^2 = \frac{j(M,t)^2}{\rho} . \quad (17.5)$$

Elle est toujours positive : le champ fournit de l'énergie au conducteur. C'est l'**effet Joule**.

Cet apport d'énergie fait augmenter la température du conducteur qui l'évacue ensuite vers le milieu ambiant sous forme de transfert thermique.

## 2 Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting

### 2.1 Définitions

Le champ électromagnétique qui est capable de céder de l'énergie à la matière possède une énergie que nous appelons **énergie électromagnétique**.

La répartition de l'énergie électromagnétique dans l'espace est donnée par la **densité volumique d'énergie électromagnétique** notée  $u_{em}(M, t)$  telle que l'énergie électromagnétique contenue dans un volume  $d\tau_M$  autour de  $M$  à l'instant  $t$  est :

$$dU_{em} = u_{em}(M, t) d\tau_M. \quad (17.6)$$

De plus cette énergie est susceptible de se déplacer. C'est ainsi par exemple que nous pouvons recevoir sur Terre de l'énergie électromagnétique qui est créée à la surface du Soleil. On décrit le déplacement d'énergie par le vecteur densité de courant d'énergie plus fréquemment appelé vecteur de Poynting.

Le **vecteur de Poynting**  $\vec{\Pi}(M, t)$  est tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface  $d\vec{S}_M$  autour de  $M$  entre les instant  $t$  et  $t + dt$  est :

$$d^2U_{em} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \, dt, \quad (17.7)$$

ou encore la puissance électromagnétique traversant la surface  $d\vec{S}_M$  à l'instant  $t$  est :

$$d\mathcal{P} = \frac{d^2U_{em}}{dt} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M. \quad (17.8)$$

 Dans les équations (17.7) et (17.8), l'énergie et la puissance sont algébriques : positifs si l'énergie électromagnétique traverse la surface dans le sens du vecteur  $d\vec{S}_M$  et négatifs si elle traverse dans l'autre sens.

#### Remarque

Le couple  $(u_{em}(M, t), \vec{\Pi}(M, t))$  décrivant l'énergie électromagnétique est analogue au couple  $(\rho(M, t), \vec{j}(M, t))$  d'écrivant la charge électrique. Les équations (17.6) et (17.7) sont analogues respectivement aux équations (11.1) page 320 et (14.1) page 416.

### 2.2 Expressions

Conformément au programme des classes préparatoires on admet les expressions de la densité volumique d'énergie et du vecteur de Poynting.

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est :

$$u_{em}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M, t)}{2} + \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0} \quad (17.9)$$

Le **vecteur de Poynting** ou vecteur densité de courant d'énergie est :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) \quad (17.10)$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}(M, t)$  est égale à la somme d'un terme d'origine électrique :

$$u_{el}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M, t)}{2}$$

et d'un terme d'origine magnétique :

$$u_m(M, t) = \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0}$$

On peut vérifier l'homogénéité de ces expressions :

- $E$  s'exprime en  $\text{V.m}^{-1}$  et  $\frac{B}{\mu_0}$  en  $\text{A.m}^{-1}$  (d'après par exemple l'expression du champ magnétique créé par un fil infini). Le module du vecteur de Poynting s'exprime donc en  $\text{V.A.m}^{-2}$ , c'est donc bien une puissance par unité de surface (le produit d'une tension par une intensité est homogène à une puissance comme on l'a vu dans le cours d'électricité de première année).
- $\epsilon_0 E$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-2}$  (d'après par exemple l'expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle), donc  $u_e$  s'exprime en  $\text{C.V.m}^{-3}$ , c'est bien une énergie par unité de volume (le produit d'une charge par un potentiel est homogène à une énergie, d'après par exemple l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un potentiel électrostatique).
- $u_m$  s'exprime en  $\text{T.A.m}^{-1}$ . Or le produit d'un champ magnétique par une intensité est homogène à une force par unité de longueur (d'après l'expression de la force de Laplace donnée dans le cours de première année). Donc  $u_m$  s'exprime en  $\text{N.m}^{-2}$  ou encore en  $\text{J.m}^{-3}$ , c'est bien une énergie par unité de volume.

## 2.3 Quelques ordres de grandeur

La puissance d'un laser hélium-néon utilisé lors des activités expérimentales est de l'ordre de 1 mW. Le diamètre du faisceau est de l'ordre du millimètre. Le flux surfacique moyen est donc de l'ordre de  $\langle \Pi \rangle \simeq 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ .

Le flux thermique solaire est de l'ordre de  $1400 \text{ W.m}^{-2}$  au niveau de la Terre.

En revanche, le signal reçu ou émis par un téléphone portable est beaucoup plus faible. Sur le site <http://www.cartoradio.fr>, on peut trouver des mesures d'exposition aux ondes radios. Le niveau global d'exposition est le résultat de la mesure des champs électromagnétiques émis

globalement par l'ensemble des émetteurs environnant le point de mesure, visibles ou non, qui sont en fonctionnement au moment de la mesure. Pour une mesure effectuée à l'intérieur d'une habitation, dans le 11ème arrondissement à Paris au mois de mai 2014, on peut lire le résultat suivant :

$$\text{Niveau global d'exposition : } 2,39 \text{ V.m}^{-1}$$

Ce champ électrique correspond à un flux surfacique  $\langle \Pi \rangle \simeq 8 \text{ mW.m}^{-2}$ . Par ailleurs, quand le téléphone émet un appel, le champ électrique émis est de l'ordre de  $20 \text{ V.m}^{-1}$  tout contre le téléphone ce qui correspond à  $\langle \Pi \rangle \simeq 0,5 \text{ W.m}^{-2}$ .

### 3 Bilan d'énergie électromagnétique

#### 3.1 Bilan global

On considère une surface de contrôle  $\mathcal{S}$  fermée et fixe quelconque. On note  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$  le volume délimité par  $\mathcal{S}$ . L'énergie électromagnétique contenue à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t$  est :

$$U_{em}(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} u_{em}(M, t) d\tau_M.$$

Cette énergie varie dans le temps, pour deux raisons :

- l'énergie électromagnétique se déplace et traverse la surface  $\mathcal{S}$  ;
- il y a une perte d'énergie électromagnétique à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ .

On va exprimer les deux puissances correspondantes :

- La puissance électromagnétique traversant  $\mathcal{S}$  vers l'extérieur est :

$$\mathcal{P}_{\text{sortant}} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(P, t) \cdot \vec{dS}_P = \Phi_{\Pi},$$

flux du vecteur de Poynting à travers  $\mathcal{S}$ .

 Une surface fermée  $\mathcal{S}$  est, par convention, obligatoirement orientée vers l'extérieur.

- La puissance perdue par le champ électromagnétique à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  est la puissance qu'il donne aux charges :

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}_V(M, t) d\tau_M = \iiint_{M \in \mathcal{V}} (\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t) d\tau_M.$$

Le bilan d'énergie électromagnétique pour la surface  $\mathcal{S}$  est :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{sortant}} - \mathcal{P}_{\text{perdue}}.$$

Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface de contrôle fermée  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} u_{em}(M, t) d\tau_M \right) + \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = - \iiint_{M \in \mathcal{V}} (\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t) d\tau_M, \quad (17.11)$$

ou encore, de manière abrégée :

$$\frac{dU_{em}}{dt} + \Phi_{\Pi} = -\mathcal{P}_{\text{perdue}}. \quad (17.12)$$

## 3.2 Équation locale de Poynting

L'équation (17.11) peut être remplacée par une équation locale équivalente. En permutant dans le premier terme l'intégrale portant sur les variables d'espace et la dérivation par rapport au temps et en transformant le deuxième terme à l'aide du théorème d'Ostrogradski (voir annexe mathématique), on obtient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M, t) d\tau_M + \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) d\tau_M \\ &= - \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} (\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t) d\tau_M \end{aligned}$$

Cette équation étant valable quel que soit le volume  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ , on en déduissons l'équation locale qui traduit le bilan d'énergie électromagnétique appelée **équation locale de Poynting** :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) = -(\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t) \quad (17.13)$$

Cette équation n'est pas à connaître mais il faut savoir en interpréter chaque terme :

- le terme  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M, t)$  traduit la variation de la quantité d'énergie présente, c'est le « terme de stockage » ;
- le terme  $\operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t)$  correspond au déplacement d'énergie, c'est le « terme de transfert » ;
- le terme  $-(\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t)$  correspond à la production (ou la consommation s'il est négatif) local d'énergie, c'est le « terme de production ».

### Remarque

L'équation locale de conservation de la charge (16.3) page 471 est analogue à l'équation locale de Poynting, mais avec un terme de production égal à 0 car la charge électrique se conserve.

## 3.3 Complément : justification des expressions de la densité volumique d'énergie et du vecteur de Poynting

Ce paragraphe n'est pas au programme de la section MP. Le calcul qui suit est donné uniquement à titre d'approfondissement.

On peut exprimer  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  en fonction des seuls champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'aide des équations de Maxwell. L'équation de Maxwell-Ampère permet en effet d'exprimer  $\vec{j}$  sous la forme :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La relation (17.5) s'écrit donc :

$$\mathcal{P}_V = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Or on sait que :  $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$ . Il vient donc :

$$\begin{aligned} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \cdot \vec{E} &= \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \\ &= -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday pour exprimer  $\vec{\text{rot}} \vec{E}$ . On en déduit :

$$\mathcal{P}_V = -\text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (17.14)$$

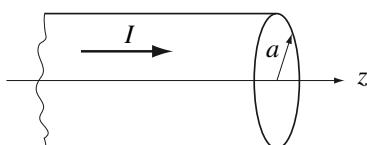
On constate que les expressions  $u_{em}(Mt)$  et  $\vec{\Pi}(M, t)$  données au paragraphe 2.2 sont bien compatibles avec l'équation locale de Poynting. Ceci valide le choix de ces expressions mais ne les démontre pas.

## 4 Exemples

### 4.1 Régime stationnaire

#### a) Résistance électrique en régime stationnaire

Considérons un cylindre conducteur, de conductivité électrique  $\gamma$ , de rayon  $a$  et d'axe ( $Oz$ ), parcouru par le courant  $I$  uniformément réparti en volume :



**Figure 17.1** – Cylindre conducteur.

Le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  dans le conducteur est tel que son flux à travers une section droite du conducteur est égal à  $I$ . Il vaut donc :  $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$ . Le champ électrique créé par ce conducteur est donc égal, à l'intérieur du conducteur, à :

$$\vec{E} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \vec{u}_z$$

Le champ magnétique a été étudié au chapitre 16 . À l'intérieur du conducteur, il vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a^2} r \vec{u}_\theta$$

Le vecteur de Poynting à l'intérieur du cylindre est donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{I^2}{2 \gamma \pi^2 a^4} r \vec{u}_r$$

On prend pour surface de contrôle  $\mathcal{S}$  un cylindre de rayon  $a$  et de hauteur  $h$ , de même axe que le fil. L'énergie du champ électromagnétique contenue à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  est :

$$U_{em} = \iiint_{\mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) d\tau$$

soit :

$$\begin{aligned} U_{em} &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{I}{\gamma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h + \int_0^a \frac{1}{2 \mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2 \pi a^2} r \right)^2 2 \pi h r dr \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{I^2 h}{\gamma^2 \pi a^2} + \frac{\mu_0 I^2 h}{16 \pi} \end{aligned}$$

Elle est constante car le champ électromagnétique est permanent.

La puissance fournie par le champ électromagnétique à la portion du conducteur à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  et perdue par le champ électromagnétique (elle est dissipée par effet Joule) s'écrit :

$$\mathcal{P}_{perdue} = \iiint_{\mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \frac{I^2}{\gamma \pi^2 a^4} d\tau = \frac{I^2 h}{\gamma \pi a^2}$$

La puissance électromagnétique sortant de  $\mathcal{S}$  est :

$$\mathcal{P}_{sortant} = \Phi_\Pi = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P.$$

Le vecteur de Poynting étant porté par  $\vec{u}_r$ , ce flux se réduit au flux à travers la partie latérale de  $\mathcal{S}$ . Sur cette partie,  $r = a$  donc  $\vec{\Pi} = -\frac{I^2}{2 \gamma \pi^2 a^4} a \vec{u}_r$ . Il vient donc :

$$\Phi_\Pi = -\frac{I^2}{2 \gamma \pi^2 a^4} a \times 2 \pi a h = -\frac{I^2 h}{\gamma \pi a^2}.$$

On vérifie qu'on a bien :  $\frac{dU_{em}}{dt} + \Phi_{\Pi} = \Phi_{\Pi} = -\mathcal{P}_{\text{perdue}}$ , conformément au bilan d'énergie fait plus haut.

Dans la situation présente la puissance perdue n'est autre que la puissance  $\mathcal{P}_J$  dissipée par effet Joule dans un tronçon de conducteur de longueur  $h$ . La relation précédente peut s'écrire :  $-\Phi_{\Pi} = \mathcal{P}_J$ , ou encore :  $\mathcal{P}_{\text{entrant}} = \mathcal{P}_J$ . La puissance électromagnétique entre dans le fil pour y être dissipée par effet Joule (elle entre à travers la surface latérale).

Par ailleurs on a vu dans le cours de première année l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance  $R$  :  $\mathcal{P}_J = RI^2$ . Le calcul précédent fournit donc l'expression de la résistance électrique d'un tronçon de fil de longueur  $h$  :

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{h}{\pi a^2}.$$

### Remarque

Cette expression est tout à fait analogue à l'expression de la résistance thermique d'une plaque de surface  $S$  et épaisseur  $e$  :  $R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda} \frac{e}{S}$  (voir chapitre sur les transferts thermiques).

### b) Condensateur en régime stationnaire

Dans le chapitre 11, on a étudié le champ électrostatique créé par un condensateur plan dont les armatures, perpendiculaires à l'axe ( $Oz$ ) et de surface  $S$ , sont séparées d'une distance  $e$ .

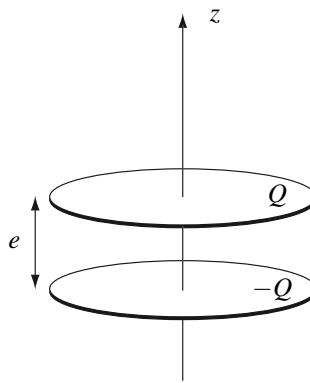


Figure 17.2 – Condensateur plan.

L'armature supérieure porte la charge  $Q$  et l'armature inférieure la charge  $-Q$ . On a montré que le champ électrostatique est nul à l'extérieur et vaut :

$$\vec{E} = \frac{-Q}{S\epsilon_0} \vec{u}_z$$

à l'intérieur. Ce résultat approché est valable si  $e$  est beaucoup plus petite que la taille caractéristique des armatures, les effets de bord étant alors négligeables. Dans cette approximation, l'énergie du champ électrostatique créé par le condensateur est, en notant  $\mathcal{V}$  le volume à l'intérieur du condensateur :

$$U_e = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2(M, t)}{2} d\tau_M = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{S\epsilon_0} \right)^2 \times Se = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} \left( \frac{Qe}{S\epsilon_0} \right)^2$$

On reconnaît dans l'équation ci-dessus l'expression de la capacité du condensateur plan,  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  et celle de la différence de potentiel aux bornes du condensateur,  $U = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$ .

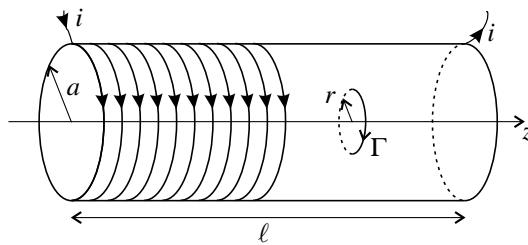
Finalement, l'énergie électromagnétique du champ créé par le condensateur est égale à :

$$U_e = \frac{1}{2} CU^2$$

C'est l'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur établie en première année dans le cours d'électrocinétique de première année.

### c) Solénoïde en régime stationnaire

On considère un long solénoïde de rayon  $a$  et longueur  $\ell \gg a$ , comportant  $n$  spires par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité constante  $i = I_0$ .



**Figure 17.3 –** Solénoïde et contour  $\Gamma$  pour la loi de Faraday.

Dans le chapitre 14, on a montré que le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long est :

$$\begin{cases} \vec{B}(M) = \mu_0 ni \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde,} \\ \vec{B}(M) = \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde.} \end{cases} \quad (17.15)$$

Dans le cas d'un solide de longueur  $\ell$  finie cette expression est une approximation possible si  $\ell$  est très grand devant le rayon du solénoïde. Dans cette approximation, l'énergie du champ magnétostatique créé par le solénoïde est, en notant  $\mathcal{V}$  le volume à l'intérieur du solénoïde :

$$U_m = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{B^2(M)}{2\mu_0} d\tau_M = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 ni)^2 \times \pi a^2 \ell = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \right) i^2,$$

où  $N = n\ell$  est le nombre total de spires du solénoïde. On reconnaît dans l'équation ci-dessus l'expression de l'inductance propre du solénoïde vue dans le cours de première année,  $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$ .

Finalement, l'énergie électromagnétique du champ créé par le solénoïde est égale à :

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

C'est l'expression de l'énergie emmagasinée dans le solénoïde établie en première année dans le cours d'électrocinétique.

## 4.2 Solénoïde en régime variable

On considère maintenant ce solénoïde en supposant que le courant qui l'alimente varie sinusoïdalement dans le temps :  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . On fait l'hypothèse que le champ magnétique est toujours donné par l'expression (17.15). La validité de cette approximation sera discutée plus bas.

Le champ magnétique est maintenant un champ  $\vec{B}(M, t)$  variable dans le temps. Dès lors, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, il existe un champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  non nul, tel que :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , puisque le second membre de cette équation est non nul. Quelle est la géométrie de ce champ ? On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $(Oz)$ . Pour tout point  $M$ , le plan méridien passant par  $M$  et contenant l'axe  $(Oz)$  est plan d'*antisymétrie* pour le solénoïde ; par suite  $\vec{E}(M, t)$  est orthogonal à ce plan donc porté par le vecteur  $\vec{u}_\theta$ . De plus le solénoïde est invariant par rotation autour de  $(Oz)$ , donc la composante non nulle du champ électrique ne dépend pas de  $\theta$ . Finalement :  $\vec{E}(M, t) = E(r, z, t) \vec{u}_\theta$ .

On va calculer ce champ à l'intérieur du solénoïde. Pour cela on applique la loi de Faraday à un cercle  $\Gamma$  d'axe,  $(Oz)$  et de rayon  $r$  quelconque orienté dans le sens direct autour de  $(Oz)$  en prenant pour surface  $\mathcal{S}_\Gamma$  le disque délimité par ce cercle orienté dans le sens de  $(Oz)$  (voir figure 17.3). La circulation du champ électrique est :

$$\mathcal{C}_E = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} (E(r, z, t) \vec{u}_\theta) \cdot (dl \vec{u}_\theta) = 2\pi r E(r, z, t).$$

Le flux du champ magnétique :

$$\Phi_B = \iint_{\mathcal{S}_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_\Gamma} (\mu_0 n i(t) \vec{u}_z) \cdot (dS \vec{u}_z) = \pi r^2 \mu_0 n i(t).$$

La relation :  $\mathcal{C}_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  s'écrit :  $2\pi r E(r, z, t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di}{dt}$ , soit :  $E(r, z, t) = -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{di}{dt} r$ . Finalement :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta.$$

Connaissant les champs magnétique et électrique à l'intérieur du solénoïde on peut calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) r \vec{u}_r.$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le solénoïde (cylindre d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $a$  et longueur  $\ell$ ) est :

$$\Phi_{\Pi} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) a \times 2\pi a \ell,$$

car, du fait que  $\vec{\Pi}$  est porté par  $\vec{u}_r$ , ce flux est uniquement le flux à travers la surface latérale de  $\mathcal{S}$  sur laquelle  $r = a$ . D'après la signification physique du vecteur de Poynting,  $\Phi_{\Pi}$  est la puissance électromagnétique sortant du solénoïde.

Par ailleurs, on sait exprimer en électrocinétique (voir cours de première année) la puissance instantanée reçue par un dipôle électrique parcouru par un courant  $i(t)$  et aux bornes duquel la tension est  $u(t)$  :

$$\mathcal{P} = u(t)i(t).$$

Dans le cas de ce solénoïde :  $u(t) = L \frac{di}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 I_0 \omega \sin(\omega t)$ , de sorte que :

$$\mathcal{P} = -\mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 I_0 \omega \sin(\omega t) \times I_0 \sin(\omega t) = -\Phi_{\Pi}.$$

Ainsi, la puissance reçue par le solénoïde en tant que dipôle électrocinétique, dans la modélisation électrocinétique est bien égale à la puissance entrant dans le volume du solénoïde dans la modélisation électromagnétique.

Comment s'exprime le bilan d'énergie électromagnétique pour la surface de contrôle  $\mathcal{S}$ ? Il n'y a pas de matière à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  donc  $\mathcal{P}_{\text{perdue}} = 0$ . L'énergie électromagnétique contenue dans  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$  est :

$$U_{em} = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t) \right) d\tau_M = U_e + U_m = U_e + \frac{1}{2} L i(t)^2,$$

d'après le résultat du calcul fait plus haut pour le régime stationnaire qui est encore valable. Ainsi :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{dU_e}{dt} + L \frac{di}{dt} i(t) = \frac{dU_e}{dt} + u(t)i(t) = \frac{dU_e}{dt} - \Phi_{\Pi}.$$

La relation générale (17.12) n'est pas vérifiée ! Ceci provient de l'approximation que l'on a faite en prenant pour le champ magnétique l'expression (17.15) qui n'est valable rigoureusement qu'en magnétostatique. Il est intuitif que l'approximation est valable si l'intensité du courant ne varie « pas trop vite », c'est-à-dire si la pulsation  $\omega$  n'est « pas trop grande ». Il faut préciser ce critère de validité.

Le champ magnétique (17.15) vérifie dans le solénoïde l'équation de Maxwell de la magnétostatique :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$  qui est différente de l'équation de Maxwell dans le régime variable :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Pour tester l'approximation, on détermine les ordres de grandeurs des différents termes :

- l'ordre de grandeur du champ magnétique est  $B^* = \mu_0 n I_0$ ; la distance caractéristique de variation étant  $a$ , l'ordre de grandeur de  $\text{rot } \vec{B}$ , s'il est non nul, est :  $\frac{B^*}{a} = \frac{\mu_0 n I_0}{a}$ ;

## CHAPITRE 17 – ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

- l'ordre de grandeur du champ électrique est  $E^* = \mu_0 n I_0 \omega a$  et l'ordre de grandeur du terme  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est :  $\frac{\omega E^*}{c^2} = \frac{\mu_0 n I_0 \omega^2 a}{c^2}$ .

Ainsi, l'approximation faite est valable si :  $\frac{\mu_0 n I_0}{a} \gg \frac{\mu_0 n I_0 \omega^2 a}{c^2}$ , soit si :  $\omega \ll \frac{c}{a}$ .

Cette condition s'écrit aussi, en faisant apparaître la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  :  $a \ll cT$ . On reconnaît la condition de validité de l'**approximation des régimes quasipermanents** qui est à la base de l'électrocinétique (voir cours de première année).

On peut enfin remarquer que l'ordre de grandeur du rapport des contributions électrique et magnétique à l'énergie électromagnétique est :  $\frac{\epsilon_0 E^{*2}}{B^{*2}/\mu_0} = \frac{\epsilon_0 (\mu_0 n I_0 \omega a)^2}{\mu_0 (n I_0)^2} = \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2$ . Dans l'approximation des régimes quasipermanents, ce rapport est un infiniment petit du second ordre. On peut donc écrire :  $U_{em} \simeq U_m = L i^2$ . Ainsi, l'équation bilan d'énergie électromagnétique (17.12) est bien vérifiée.

### SYNTHESE

#### SAVOIRS

- densité volumique de force électromagnétique
- puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charges
- loi d'Ohm locale
- puissance volumique cédée par le champ à un conducteur, effet Joule
- vecteur de Poynting
- densité volumique d'énergie
- équation locale de Poynting

#### SAVOIR-FAIRE

- utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges
- cas particulier des milieux ohmiques
- utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée
- effectuer un bilan d'énergie sous forme locale ou globale
- interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting
- citer des ordres de grandeur de flux énergétiques

#### MOTS-CLÉS

- |                    |                               |                       |
|--------------------|-------------------------------|-----------------------|
| • loi d'Ohm locale | • densité volumique d'énergie | • vecteur de Poynting |
| • puissance Joule  |                               |                       |

## S'ENTRAÎNER

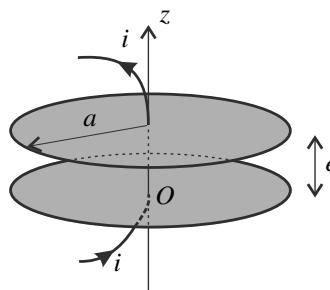
**17.1 Bilan d'énergie dans un milieu ohmique** (★)

L'espace compris entre les plans  $z = -\frac{a}{2}$  et  $z = \frac{a}{2}$  est rempli d'un milieu conducteur ohmique, de conductivité  $\gamma$ , parcouru par une densité volumique de courant uniforme et constante  $\vec{j}(M) = j\vec{u}_x$ .

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par cette distribution en un point  $M$ . En déduire  $\vec{B}(M)$  à l'intérieur du milieu conducteur en intégrant l'une des équations de Maxwell.
2. Exprimer le vecteur de Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique, la puissance volumique dissipée dans le conducteur.
3. Faire un bilan d'énergie électromagnétique pour le volume parallélépipédique  $[x, x+dx] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ .

**17.2 Bilan d'énergie d'un condensateur plan en régime lentement variable** (★★)

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon  $a$ , distants de  $e$ , d'axe  $Oz$ . Il est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .



1. Exprimer la charge  $q(t)$  portée par l'armature inférieure du condensateur en admettant que sa moyenne temporelle est nulle. En déduire la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur, en convention récepteur par rapport au courant  $i(t)$ .
2. Donner l'expression du champ électrostatique, en supposant qu'il est identique au champ d'un condensateur plan en électrostatique sans effets de bords.
3. Montrer qu'il existe un champ magnétique non nul à l'intérieur du condensateur. Calculer ce champ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un cercle quelconque d'axe ( $Oz$ ).
4. En déduire le vecteur de Poynting. On appelle  $\mathcal{S}$  la surface délimitant le condensateur (cylindre de rayon  $a$  et hauteur  $e$ ). Calculer le flux  $\Phi_{\Pi}$  sortant de  $\mathcal{S}$ . Conclure.
5. Déterminer un critère de validité pour l'expression approchée du champ électrique utilisée dans l'exercice.

## CHAPITRE 17 – ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

**17.3 Cylindre dans un four à induction (★★)**

Un cylindre de rayon  $a$ , hauteur  $h$  et d'axe ( $Oz$ ), constitué d'un métal ohmique de conductivité  $\gamma$ , est plongé dans un champ magnétique uniforme variable :  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ , où  $B_0$  et  $\omega$  sont des constantes. On suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du cylindre.

- Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre de la forme  $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{u}_\theta$ , en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe ( $Oz$ ). En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale à un cercle quelconque d'axe ( $Oz$ ), déterminer  $E(r, z, t)$ . En déduire la densité de courant volumique dans le cylindre.
- Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
- Trouver l'*ordre de grandeur* du champ magnétique créé par les courants qui se développent dans le cylindre. En déduire une condition pour que l'hypothèse faite dans l'énoncé soit valable.

**APPROFONDIR****17.4 Décharge d'un conducteur dans l'air (★★)**

Une boule conductrice, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , porte initialement la charge  $Q_0$  uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité  $\gamma$  et initialement localement neutre ( $\rho(M, t = 0) = 0$  en tout point  $M$  à l'extérieur de la boule).

On cherche le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  en un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre  $O$ .

- Déterminer  $\vec{E}(M, t = 0)$  à l'extérieur de la boule.
- Déterminer  $\vec{B}(M, t)$  à l'extérieur de la boule.
- En utilisant l'identité de Poynting,  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ , trouver le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  à l'extérieur de la boule.
- Montrer  $\rho(M, t) = 0$  à l'extérieur de la boule.
- Déterminer la charge  $Q(t)$  portée par la boule à l'instant  $t$ .
- Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants  $t = 0$  et  $t = \infty$ . Commenter.

**17.5 Sphère radioactive (★★)**

Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point  $O$ , émet, à partir de l'instant  $t = 0$ , des particules  $\alpha$  avec une vitesse  $v_0$  supposée constante et de façon isotrope : à l'instant  $t$ , la charge électrique située en  $O$  est  $q(t) = q_0 \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right)$ .

- Calculer le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  pour  $t > 0$  en tout point de l'espace. Commenter.

**2.** Exprimer la densité volumique de charge  $\rho(M, t)$  et la densité volumique de courant  $\vec{j}(M, t)$  pour  $t > 0$ .

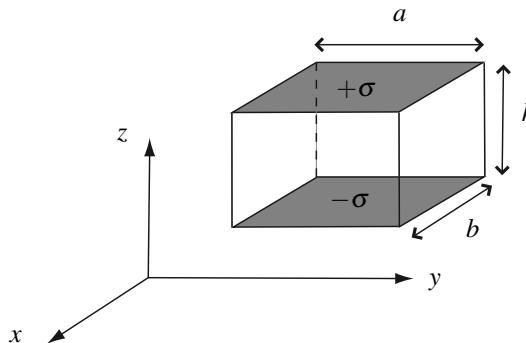
**3.** Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec la relation locale de conservation de la charge et avec les équations de Maxwell.

On donne, pour un champ  $\vec{a} = a(r, t) \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques :  $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a)}{\partial r}$ .

**4.** En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique, le vecteur de Poynting et la puissance volumique fournie par le champ électromagnétique aux particules  $\alpha$ . Commenter.

### 17.6 Quantité de mouvement du champ électromagnétique (★★★)

On considère le dispositif suivant :



On suppose que  $h \ll a$  et  $h \ll b$ .

Les deux parois horizontales sont chargées  $+σ$  et  $-σ$ , les autres parois sont isolantes.

Dans la boîte règne un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_y$ .

À l'instant  $t = 0$ , on éteint le champ magnétique.

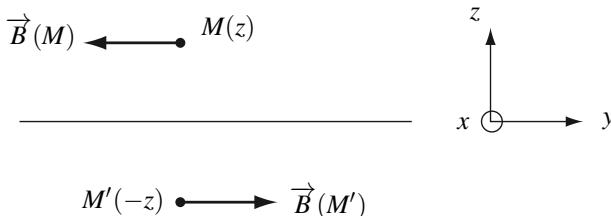
**1.** Calculer la variation de quantité de mouvement de la boîte.

**2.** On peut associer au champ électromagnétique la densité volumique de quantité de mouvement :  $\frac{d\vec{p}_{em}}{d\tau} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}$  où  $\vec{\Pi}$  est le vecteur de Poynting. Calculer la variation de quantité de mouvement du champ électromagnétique puis conclure quant à la conservation de la quantité de mouvement.

## CORRIGÉS

## 17.1 Bilan d'énergie dans un milieu ohmique

1. La distribution de courant est invariante par toute translation selon  $Ox$  et  $Oy$  donc le champ magnétique ne dépend que de  $z$ . Le plan  $Mxz$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique au point  $M$  est orthogonal à ce plan. On en déduit :  $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_y$ . De plus, le plan  $Oxy$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$  ; le champ étant parallèle à ce plan, on a donc  $B(z) = -B(-z)$  (voir figure).



L'équation de Maxwell-Ampère en régime statique s'écrit :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Compte tenu de l'étude des symétries et des invariances effectuée précédemment, cette équation donne, à l'intérieur de la plaque :  $\frac{dB}{dz} = -\mu_0 j$ . Nous en déduisons par intégration et en tenant compte de l'imparité de  $B(z)$  :  $B(z) = -\mu_0 jz$  dans le conducteur.

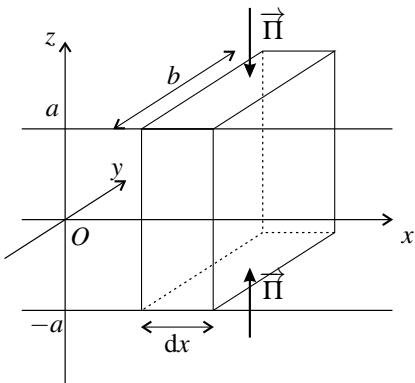
2. À l'intérieur du conducteur, d'après la loi d'Ohm :  $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$ . Nous en déduisons :

$$\vec{\Pi} = -\frac{j^2}{\gamma} z \vec{u}_z, \quad u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 j^2}{2\gamma^2} + \frac{\mu_0 j^2 z^2}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}.$$

3. La puissance sortant du volume de contrôle est égale au flux du vecteur de Poynting qui se réduit ici au flux à travers les faces supérieures et inférieures du parallélépipède :

$$\mathcal{P}_{\text{sortant}} = \Phi_{\Pi} = \left(-\frac{j^2 a}{\gamma} \vec{u}_z\right) \cdot (b dx \vec{u}_z) + \left(-\frac{j^2 a}{\gamma} \vec{u}_z\right) \cdot (b dx \vec{u}_z) = -\frac{2j^2 ab dx}{\gamma}.$$

L'énergie électromagnétique contenue dans le parallélépipède ne varie pas car on est en régime permanent :  $\frac{dU_{em}}{dt} = 0$ .



La puissance perdue par le champ électromagnétique est la puissance dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = \mathcal{P}_J = \frac{j^2}{\gamma} \times 2abdx. \quad \text{Le bilan est exact : } \frac{dU_{em}}{dt} + \Phi_{\Pi} = -\mathcal{P}_{\text{perdue}}.$$

## 17.2 Bilan d'énergie d'un condensateur plan en régime lentement variable

1. Par définition de l'intensité :  $i(t) = \frac{dq}{dt}$ , donc :  $q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)$ .

La capacité du condensateur est  $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{e}$  et  $q(t) = Cu(t)$ . On a donc :

$$u(t) = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{eI_0}{\pi\epsilon_0 a^2 \omega} \sin(\omega t).$$

2.  $\vec{E}(M,t) = \begin{cases} \frac{u(t)}{e} \vec{u}_z = \frac{I_0}{\pi\epsilon_0 a^2 \omega} \sin(\omega t) \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du condensateur} \\ 0 & \text{à l'extérieur du condensateur} \end{cases}$

3. Le champ électrique dépend du temps, donc d'après l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (la densité volumique de courant est nulle à l'intérieur du condensateur), il existe nécessairement un champ magnétique non nul.

On calcule ce champ en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ). Pour tout point  $M$ , le plan méridien contenant  $M$  et l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie, donc  $\vec{B}(M,t)$  qui est un pseudo-vecteur est orthogonal à ce plan, donc porté par le vecteur  $\vec{u}_\theta$ . De plus, le condensateur est invariant par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) donc la composante de  $\vec{B}$  ne dépend pas de  $\theta$ . Finalement :  $\vec{B}(M,t) = B(r,z,t) \vec{u}_\theta$ .

Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit :  $\mathcal{C}_B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ , avec (en notant  $r$  le rayon du cercle) :  $\mathcal{C}_B = 2\pi r B(r,z,t)$  et  $\Phi_E = \pi r^2 \frac{I_0}{\pi\epsilon_0 a^2 \omega} \sin(\omega t)$ . Finalement on trouve :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2} \cos(\omega t) \vec{u}_\theta.$$

4. Le vecteur de Poynting est :  $\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = -\frac{I_0^2 r}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4 \omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_r$ .

Son flux sortant à travers  $\mathcal{S}$  est :

$$\Phi_\Pi = -\frac{I_0^2 a}{2\pi^2 \epsilon_0 a^4 \omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \times 2\pi a e = -\frac{e I_0^2}{\pi \epsilon_0 a^2 \omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -u(t) i(t).$$

La puissance électrocinétique fournie par le circuit au condensateur n'est autre que la puissance électromagnétique qui y entre par rayonnement.

5. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , le champ magnétique variable induit un champ électrique supplémentaire que l'on a négligé. L'ordre de grandeur du champ magnétique est :  $B^* = \frac{\mu_0 I_0}{a}$ ; l'ordre de grandeur du champ électrique induit vérifie :  $\frac{E'^*}{a} = \omega B^*$ , donc :  $E'^* = \mu_0 I_0 \omega$ . L'ordre de grandeur du champ pris en compte est :  $E^* = \frac{I_0}{\epsilon_0 a^2 \omega}$ . La condition  $E'^* \ll E^*$  est équivalente à  $a\omega \ll c$ . Le calcul est valable dans l'approximation des régimes quasi-permanents.

## CHAPITRE 17 – ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

**17.3 Cylindre dans un four à induction**

**1.** Le plan contenant un point  $M$  du cylindre et l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie du disque et du champ magnétique, source de champ électrique. Mais, le champ magnétique étant un pseudo-vecteur, un plan de symétrie pour  $\vec{B}$  est en fait un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants qui est à la source de  $\vec{B}$ . C'est donc un plan d'antisymétrie pour le champ électrique : celui-ci est donc orthoradial. Le système est invariant par toute rotation autour de l'axe  $Oz$ , donc  $\vec{E}(M, t) = E(r, z, t) \vec{u}_\theta$ .

Pour calculer ce champ, on utilise la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :  $\mathcal{C}_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  en calculant la circulation de  $\vec{E}$  le long du cercle de rayon  $r$  et d'axe  $Oz$  et le flux de  $\vec{B}$  à travers le disque associé. On trouve :  $\mathcal{C}_E = 2\pi r E(r, z, t)$  et  $\Phi_B = \pi r^2 B_0 \cos(\omega t)$ . On en déduit :  $E(r, z, t) = \frac{1}{2} r B_0 \omega \sin(\omega t)$ .

La densité volumique de courant est :  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2} \gamma r B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$ .

**2.** La puissance volumique dissipée par effet Joule est égale à  $\mathcal{P}_V = \gamma E^2$ . La puissance dissipée par effet Joule dans tout le cylindre est :

$$\mathcal{P}_J = \int_{r=0}^a \gamma \left( \frac{1}{2} r B_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2 2\pi h r dr = \frac{\pi}{8} \gamma h B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) a^4,$$

et la puissance moyenne :  $\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\pi}{16} \gamma h B_0^2 \omega^2 a^4$ .

**3.** L'ordre de grandeur de la densité courant dans le cylindre est  $j^* = \gamma a B_0 \omega$ . Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique qu'elle crée ? Un champ magnétique est homogène à  $\mu_0$  multiplié par une densité volumique de courant et multiplié par une longueur (d'après l'équation de Maxwell-Ampère). Dans ce problème la seule longueur pertinente est le rayon  $a$  du cylindre. On en déduit que l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par ces courants est :  $B^* = \mu_0 j^* a = \mu_0 \gamma a^2 B_0 \omega$ . Ce champ est négligeable devant le champ extérieur si :

$$B^* \ll B_0 \Leftrightarrow \mu_0 \gamma a^2 B_0 \omega \ll B_0 \Leftrightarrow a \ll \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

**17.4 Décharge d'un conducteur dans l'air**

**1.** La distribution de charges et de courants résultant de la décharge de la boule dans l'air est à symétrie sphérique. Le champ magnétique est donc nul puisque tous les plans qui contiennent le point  $M$  où on cherche de champ et le centre  $O$  de la sphère sont plans de symétrie de la distribution de charges et de courants, le champ magnétique étant orthogonal à tous ces plans est nul.

**2.** Le champ électrique est de la forme  $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$ . Le théorème de Gauss appliqué à la sphère de rayon  $r > R$  à l'instant  $t = 0$  s'écrit :  $4\pi r^2 E(r, t = 0) = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$  puisque par hypothèse il n'y a aucune charge dans l'air à cet instant. Il vient donc pour  $r > R$  :

$$\vec{E}(M, t = 0) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

**3.** Dans le cas présent, étant donné que le champ magnétique est nul :  $u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r,t)$ ,  $\vec{\Pi} = \vec{0}$  donc  $\operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$ . De plus, l'air étant un conducteur ohmique :  $-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\gamma E^2(r,t)$ . L'intensité de Poynting donne donc :

$$\varepsilon_0 E(r,t) \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} = -\gamma E^2(r,t) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} E(r,t).$$

La solution de cette équation différentielle est :  $E(r,t) = E(r,t=0) \exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon_0}\right)$ . Ainsi :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon_0}\right) \vec{u}_r.$$

**4.** Il faut appliquer l'équation de Maxwell-Gauss,  $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$ . On peut aller chercher l'expression de la divergence en coordonnées sphériques dans un formulaire ou bien remarquer que, puisque le champ électrique à l'instant  $t$  est égal au champ à l'instant initial multiplié par  $\exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon_0}\right)$ , il en est de même pour sa divergence et donc pour la densité volumique de charge. Or celle-ci est nulle à  $t = 0$ , donc :  $\rho(M,t) = \rho(M,t=0) \exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon_0}\right) = 0$ .

**5.** Le théorème de Gauss appliqué à la sphère de rayon  $r > R$ , à l'instant  $t$  s'écrit :

$$4\pi r^2 E(r,t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}.$$

On en tire :

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon_0}\right).$$

La boule se décharge avec le temps caractéristique  $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$  qui est d'autant petit que la conductivité de l'air est grande. Donc, plus l'air est humide, plus elle se déchargera vite (et plus il sera difficile de faire des expériences d'électrostatique).

**6.** L'énergie dissipée dans le milieu est d'une part égale à l'énergie cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges, d'autre part égale à l'opposé de la variation d'énergie électromagnétique de l'espace privé de la boule entre les instants  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ .

### Énergie cédée par le champ à la matière :

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P} dt \quad \text{avec} \quad \mathcal{P} = \iiint_{M \in (\mathbb{R}^3 - \text{boule})} \gamma E^2(M,t) d\tau_M.$$

En découplant l'espace en pellicules sphériques de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ , on obtient :

$$\mathcal{P} = \int_R^\infty \frac{\gamma Q^2(t)}{4\pi\varepsilon_0^2 r^2} dr = \frac{\gamma Q^2(t)}{4\pi\varepsilon_0^2 R}$$

d'où

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{\gamma Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2 R} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{Q_0^2 \gamma \tau}{8\pi\varepsilon_0^2 R} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

## CHAPITRE 17 – ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

**Variation d'énergie électromagnétique :**

À l'instant  $t$ , l'énergie électromagnétique de l'espace privé de la boule est :

$$U_{em}(t) = \iiint_{M \in (\mathbb{R}^3 - \text{boule})} \epsilon_0 \frac{E^2(M, t)}{2} d\tau_M = \frac{Q^2(t)}{8\pi\epsilon_0 R}$$

La variation d'énergie électromagnétique au cours de la décharge de la boule est :

$$\Delta U_{em} = U_{em}(\infty) - U_{em}(0) = 0 - \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

L'énergie totale dissipée dans le milieu est :  $\mathcal{E} = -\Delta U_{em}$ . On retrouve bien le résultat précédent.

### 17.5 Sphère radioactive

**1.** La symétrie sphérique du problème donne, comme dans l'exercice précédent :  $\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u}_r$  et  $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$ .

On calcule  $\vec{E}(M, t)$  grâce au théorème de Gauss, il faut donc connaître la charge  $q(r, t)$  contenue dans la sphère de rayon  $r$  à l'instant  $t$ .

À l'instant  $t$ , les charges émises par le point  $O$  ont parcouru au plus la distance  $v_0 t$ . En  $r > v_0 t$ , il n'y a donc pas encore de charges d'où  $\rho(r, t) = 0$ . Les charges qui arrivent en  $r < v_0 t$  à l'instant  $t$  ont mis la durée  $\frac{r}{v_0}$  pour atteindre le point considéré, elles ont donc été émises à l'instant  $t - \frac{r}{v_0}$  : la charge  $Q(r, t)$  comprise, à l'instant  $t$ , à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$  est donc égale à la charge présente en  $O$  à l'instant  $t - \frac{r}{v_0}$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \text{pour } r > v_0 t, & \vec{E}(r, t) = \vec{0} \\ \text{pour } r < v_0 t, & \vec{E}(r, t) = \frac{q \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

Quand  $t \rightarrow 0$ , le champ est nul (la charge en  $O$  est nulle). Quand  $t \rightarrow \infty$  toutes les charges émises sont à l'infini, il reste la charge ponctuelle  $-q_0$  au point  $O$ . On vérifie bien que le champ tend vers  $\vec{E}(r, t) = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

**2.** La charge comprise entre les deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$  à l'instant  $t$  est égale à :

$$Q(r + dr, t) - Q(r, t) = \frac{\partial Q}{\partial r} dr = 4\pi r^2 dr \rho(r, t)$$

Or nous avons vu dans la première question que  $Q(r, t) = q \left( t - \frac{r}{v_0} \right)$ . On en déduit :

$$\rho(r, t) = \frac{q_0}{4\pi r^2 \tau v_0} \exp \left( -\frac{1}{\tau} \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \right)$$

puis :  $\vec{j}(r, t) = \rho(r, t) \vec{v}_0 = \rho(r, t) v_0 \vec{u}_r$ .

**3.** Il suffit de calculer pour vérifier que  $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  et que  $\vec{0} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (équation de Maxwell-Ampère).

**4.** La densité volumique d'énergie électromagnétique est uniquement sous forme électrique puisque le champ magnétique est nul. Elle vaut :

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2(r,t)}{2} = \frac{q^2 \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

Le vecteur de Poynting est nul.

La puissance volumique cédée par le champ aux particules  $\alpha$  est :

$$\mathcal{P}_V = \gamma E^2(r,t) = \frac{\gamma q^2 \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}$$

L'équation locale de conservation de l'énergie du champ électromagnétique s'écrit ici :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathcal{P}_V$$

ce que l'on vérifie aisément grâce aux expressions de  $u_{em}$  et de  $\mathcal{P}_V$  ci-dessus.

## 17.6 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

**1.** La boîte est soumise à un champ magnétique variable dans le temps donc à un champ électrique. Comme elle porte des charges électriques, elle est soumise à une force qui va la mettre en mouvement et donc faire varier sa quantité de mouvement. Dans un premier, il s'agit donc de déterminer le champ électrique créé par le champ magnétique variable.

L'équation de Maxwell-Faraday projetée sur les trois axes s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{dB}{dt} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

L'analyse en ordre de grandeur de la première équation donne :  $\frac{E_z}{a} \sim \frac{E_y}{h}$ . Mais comme  $h \ll a$ , on peut dire que  $E_y \ll E_z$ .

De même, la troisième équation donne :  $\frac{E_y}{b} \sim \frac{E_x}{a}$ .

Pour comparer les ordres de grandeur de  $E_x$  et  $E_z$ , il faut utiliser l'équation de Maxwell-Gauss, qui s'écrit à l'intérieur de la boîte :  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , soit :  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ . En

## CHAPITRE 17 – ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

ordre de grandeur, en utilisant les résultats précédents, on obtient :  $\frac{2E_x}{b} \sim \frac{E_z}{h}$  donc  $E_z \ll E_x$ . Finalement :  $\vec{E} \simeq E(x, y, z, t) \vec{u}_x$ .

Dans l'équation obtenue en projetant sur  $\vec{u}_y$  l'équation de Maxwell-Faraday, il reste à comparer l'importance relative de  $\frac{\partial E_x}{\partial z}$  et de  $\frac{\partial E_z}{\partial x}$  :  $\frac{\frac{\partial E_x}{\partial z}}{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \sim \frac{E_x}{h} \frac{b}{E_z} \sim \frac{b^2}{h^2} \gg 1$ . L'équation se

simplifie donc en :  $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{dB}{dt}$ . On en déduit :  $E_x(x, y, z, t) = -\frac{dB}{dt}z + f(x, y, t)$ . Mais le plan  $z = 0$  est plan de symétrie de la boîte et du champ magnétique. C'est donc un plan d'antisymétrie de  $E_x$ , qui est donc une fonction impaire de  $x$ . On en déduit que  $f(x, t, t) = 0$ . Le champ électrique dû aux variations temporelles de  $\vec{B}$  est donc :

$$\vec{E}_B = -\frac{dB}{dt}z \vec{u}_x$$

À ce champ se rajoute le champ statique créé par les parois de la boîte. Nous avons vu dans le cours que ce champ est égal à  $\vec{E}_S = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ .

La boîte est soumise à la force électrostatique :  $\vec{F} = \sigma ab \vec{E}(z = h/2) - \sigma ab \vec{E}(z = -h/2)$  où  $\vec{E}$  est le champ total, somme du champ statique et du champ  $\vec{E}_B$ . Les contributions du champ statique s'éliminent, celles du champ  $\vec{E}_B$  s'ajoutent. Il vient :  $\vec{F} = -\frac{dB}{dt}h\sigma ab \vec{u}_x$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la boîte s'écrit :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , qui s'intègre en :

$$\Delta \vec{p}_{\text{boîte}} = \sigma B_0 ab h \vec{u}_x$$

**2.** Avant la modification du champ magnétique, le vecteur de Poynting est nul à l'extérieur de la boîte (le champ électrostatique l'est), et vaut :  $\vec{\Pi} = \vec{E}_S \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} B_0 \vec{u}_x$ .

Après extinction du champ magnétique, le vecteur de Poynting est nul.

La quantité de mouvement du champ électromagnétique a donc varié de :

$$\Delta \vec{p}_{em} = -ab h \frac{\sigma}{\epsilon_0} B_0 \vec{u}_x = -\Delta \vec{p}_{\text{boîte}}$$

La quantité de mouvement gagnée par la boîte a été prélevée au champ électromagnétique, ce qui est conforme à la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé.

# Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

Ce chapitre est consacré aux ondes électromagnétiques se propageant dans le vide. On suppose que l'espace est **vide de charge et de courant**, soit :

$$\rho(M, t) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j}(M, t) = \vec{0},$$

mais qu'il existe un champ électromagnétique, créé par des charges et des courants situés en dehors de la zone d'étude.

## 1 Équation de d'Alembert

### 1.1 Définition

On a vu au chapitre 16 que dans une zone vide de charge et de courant les champs électrique et magnétique vérifient les équations de propagation :

$$\Delta \vec{E}(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M, t) \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(M, t),$$

avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Ces équations sont des équations de d'Alembert.

On appelle **équation de d'Alembert** l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta \vec{a}(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}(M, t), \tag{18.1}$$

pour un champ vectoriel  $\vec{a}(M, t)$ , ou encore :

$$\Delta U(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(M, t). \tag{18.2}$$

pour un champ scalaire  $U(M, t)$ .  $c$  est une constante ayant la dimension d'une vitesse appelée **célérité** ou **vitesse de propagation**.

**Remarque**

Un champ vectoriel  $\vec{a}(M, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert si et seulement si ses trois composantes en coordonnées cartésiennes  $a_x(M, t)$ ,  $a_y(M, t)$  et  $a_z(M, t)$  vérifient l'équation de d'Alembert car :  $\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{u}_x + \Delta a_y \vec{u}_y + \Delta a_z \vec{u}_z$ .

## 1.2 Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

Il faut connaître les solutions de l'équation de d'Alembert dans le cas unidimensionnel où le champ  $U$  ne dépend que d'une seule coordonnée cartésienne, par exemple :  $U(M, t) = U(z, t)$ . Dans ce cas l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(z, t). \quad (18.3)$$

Toute solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle (18.3) est de la forme :

$$U(z, t) = F(z - ct) + G(z + ct), \quad (18.4)$$

où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions quelconques deux fois dérивables. Elle peut aussi se mettre sous la forme :

$$U(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right), \quad (18.5)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions quelconques deux fois dérivables.

Dans le cours de première année on a appris à interpréter la forme mathématique de ces solutions :

- si  $U(z, t) = F(z - ct)$  ou  $f\left(t - \frac{z}{c}\right)$  il s'agit d'une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction de l'axe ( $Oz$ ), *dans le sens positif* ;
- si  $U(z, t) = G(z + ct)$  ou  $g\left(t + \frac{z}{c}\right)$  il s'agit d'une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction de l'axe ( $Oz$ ), *dans le sens négatif*.

Ainsi toute solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle (18.3) est la superposition de deux ondes se propageant dans les deux sens de l'axe ( $Oz$ ).

 Il est important de savoir vérifier qu'un champ de la forme (18.4) ou (18.5) est bien solution de l'équation de d'Alembert.

Par exemple dans le cas où  $U(z, t) = F(z - ct) = F(\xi)$  :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dF}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = F'(\xi) \times 1 = F'(z - ct)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dF}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = F'(\xi) \times (-c) = -cF'(z - ct)$$

(ce calcul est très détaillé mais on peut aller plus vite avec un peu d'habitude).

De même :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial (F'(z - ct))}{\partial z} = F''(z - ct)$$

et

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial (-cF'(z - vt))}{\partial t} = c^2 F''(z - ct).$$

L'équation de d'Alembert est clairement vérifiée.

### 1.3 Complément : démonstration de la solution

On donne à titre de complément (18.3) la démonstration mathématique du résultat admis au paragraphe précédent.

Pour résoudre l'équation (18.3) on effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi &= z - ct \\ \eta &= z + ct \end{cases} \quad (18.6)$$

On cherche alors la fonction de deux variables  $\mathcal{U}(\xi, \eta) = U(z, t)$ . On a :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} + c \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}.$$

Puis, de même :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \eta^2}$$

en utilisant le fait que  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \eta \partial \xi}$ , puis de même on obtient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \eta^2} \right)$$

L'équation de d'Alembert (18.3) devient ainsi :  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ . Cette dernière équation s'intègre facilement car  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} \right) = 0$  signifie que  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}$  est une fonction  $g(\eta)$  de la variable  $\eta$  seulement (on suppose ici  $\mathcal{U}$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ ). L'équation  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = g(\eta)$  s'intègre en :

$$\mathcal{U}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

où la fonction  $G$  est une primitive de la fonction  $g$  (quand on intègre par rapport à une variable la « constante d'intégration » est une fonction de l'autre variable). Il vient donc :

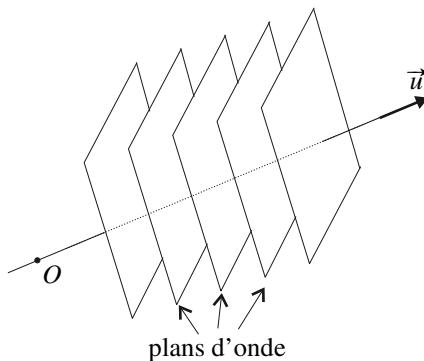
$$U(z, t) = \mathcal{U}(\xi, \eta) = F(z - ct) + G(z + ct).$$

## 2 Onde électromagnétique plane progressive dans le vide

### 2.1 Définition d'une onde plane progressive (OPP)

On appelle **onde plane** toute solution d'une équation de propagation (l'équation de d'Alembert par exemple) *non constante* prenant des valeurs uniformes sur tous les plans perpendiculaires à une direction  $\vec{u}$ .

Les plans perpendiculaires à  $\vec{u}$  sont appelés **plans d'onde** (voir figure 18.1).



**Figure 18.1** – Onde plane.

Les plans d'onde ont des équations de la forme  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{constante}$ , où  $O$  est un point origine. Ainsi une onde plane dépend uniquement du temps et de  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$  qui est la coordonnée de  $M$  sur l'axe ( $O\vec{u}$ ). Dans un repère cartésien tel que  $\vec{u}_z = \vec{u}$ , elle ne dépend que de la coordonnée  $z$  et du temps  $t$ .

On appelle **onde plane et progressive** (en abrégé OPP) toute solution d'une équation de propagation (l'équation de d'Alembert par exemple) *non constante* de la forme :

$$U(M, t) = f \left( t - \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}}{c} \right),$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire et  $c$  une constante. Cette onde se propage dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}$  avec la célérité  $c$ .

Cette onde plane progressive peut aussi se mettre sous la forme équivalente :

$$U(M, t) = F \left( \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - ct \right).$$

Dans un repère cartésien tel que  $\vec{u}_z = \vec{u}$ , :  $U(M, t) = F(z - ct)$  ou  $U(M, t) = f \left( t - \frac{z}{c} \right)$ . Elle est donc solution de l'équation de d'Alembert (18.2).

## 2.2 Structure de l'OPP électromagnétique dans le vide

Une onde électromagnétique est composée de deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  qui doivent vérifier non seulement l'équation de d'Alembert, mais aussi vérifier les équations de Maxwell. Il en résulte des propriétés que l'on va établir ici. Pour les calculs on prend un repère cartésien tel que la direction de propagation est  $\vec{u} = \vec{u}_z$ , mais à la fin on exprimera les conclusions sous une forme indépendante du repère.

On cherche donc un champ électromagnétique sous la forme d'une OPP :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ f_y\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ f_z\left(t - \frac{z}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} h_x\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ h_y\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ h_z\left(t - \frac{z}{c}\right) \end{pmatrix}$$

où  $f_x, f_y, f_z, h_x, h_y$  et  $h_z$  sont six fonctions deux fois dérivables. Cette forme mathématique assure que les champs vérifient (18.1). On va maintenant imposer aux champs de vérifier les équations de Maxwell.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit, dans le vide et en l'absence de charge :

$$0 = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial (f_z\left(t - \frac{z}{c}\right))}{\partial z} = -\frac{1}{c} f'_z\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

donc  $f'_z = 0$ , soit  $f_z = \text{constante}$ . Une composante du champ d'une onde ne peut être constante donc nécessairement  $f_z = 0$ . Ainsi, la composante du champ électrique le long de la direction de propagation est nulle.

De la même manière l'équation de Maxwell-flux entraîne la nullité de la composante du champ magnétique le long de la direction de propagation.

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une **OPP électromagnétique dans le vide** sont perpendiculaires à la direction de propagation. On dit qu'ils sont **transversaux** et que l'onde est **transversale**. Ceci provient de la nullité de leur divergence.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial (f_y\left(t - \frac{z}{c}\right))}{\partial z} = -\frac{\partial (h_x\left(t - \frac{z}{c}\right))}{\partial t} \\ \frac{\partial (f_x\left(t - \frac{z}{c}\right))}{\partial z} = -\frac{\partial (h_y\left(t - \frac{z}{c}\right))}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c} f'_y = -h'_x \\ \frac{1}{c} f'_x = h'_y \end{cases}$$

Nous en déduisons, en négligeant les constantes d'intégration qui donnent des champs ne faisant pas partie d'une onde :

$$\frac{1}{c} f_y = -h_x \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} f_x = h_y.$$

L'équation de Maxwell-Ampère n'apporte pas de condition supplémentaire et conduit aux mêmes relations. Finalement la forme la plus générale d'une OPP électromagnétique se propagant dans le vide dans la direction du vecteur  $\vec{u}_z$  est :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x \left( t - \frac{z}{c} \right) \\ f_y \left( t - \frac{z}{c} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} f_y \left( t - \frac{z}{c} \right) \\ \frac{1}{c} f_x \left( t - \frac{z}{c} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18.7)$$

Les trois relations  $E_x = cB_y$ ,  $E_y = -cB_x$  et  $E_z = 0$  se résument dans l'équation vectorielle :

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}_z.$$

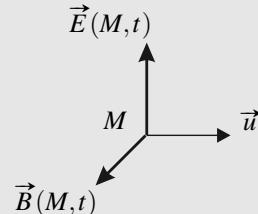
De même les relations  $B_x = -\frac{E_y}{c}$ ,  $B_y = \frac{E_x}{c}$ ,  $B_z = 0$  se résument dans l'équation vectorielle :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}.$$

En conclusion :

**La structure de l'OPP électromagnétique dans le vide** est la suivante :

- les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation  $\vec{u}$ ,
- les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux,
- le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct ;
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ .



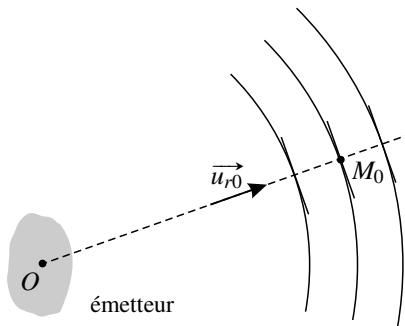
Tout ceci est donné par les deux relations vectorielles dites **relations de structure** :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u} . \quad (18.8)$$

## 2.3 Lien du modèle de l'OPP électromagnétique avec la réalité

L'OPP électromagnétique est un modèle idéalisé à la géométrie extrêmement simple. Dans la réalité l'onde émise par un émetteur est beaucoup plus complexe.

Cependant, si l'on s'intéresse à l'onde loin de l'émetteur, c'est-à-dire à une distance grande devant la taille de l'émetteur, on peut assimiler celui-ci, à une source quasi-ponctuelle en  $O$  (voir figure 18.2). Dans ce cas, l'onde est naturellement décrite en coordonnées sphériques



**Figure 18.2 –** Approximation locale par une onde plane : les plans d'onde sont tangents aux surfaces d'onde réelles.

$(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et elle dépend peu des angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Si de plus on restreint le domaine d'étude à un petit volume autour d'un point  $M_0$  de coordonnées  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  (la taille du volume doit être petite devant  $r_0$ ) on peut dans le calcul de l'onde faire les approximations :

$$r = \vec{u}_r \cdot \overrightarrow{OM} \simeq \vec{u}_{r0} \cdot \overrightarrow{OM}, \quad \theta \simeq \theta_0 \quad \text{et} \quad \varphi \simeq \varphi_0,$$

en notant  $\vec{u}_{r0}$  le vecteur radial en  $M_0$ . Dans cette approximation les champs de l'onde en  $M$  ne dépendent plus que de  $\vec{u}_{r0} \cdot \overrightarrow{OM}$  : c'est quasiment une onde plane progressive se propageant dans la direction de  $\vec{u}_{r0}$ .

L'OPP électromagnétique est un modèle idéal qui décrit convenablement la structure locale de l'onde électromagnétique produite par un émetteur à grande distance de celui-ci.

### 3 Onde électromagnétique plane progressive et monochromatique dans le vide

#### 3.1 Définition d'une onde plane progressive et monochromatique (OPPM)

Dans l'expression (18.7), les fonctions de  $f_x$  et  $f_y$  sont quelconques. Dans le cas où il s'agit de fonctions sinusoïdales de même pulsation  $\omega$ , l'onde est dite **monochromatique** et on a une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique électromagnétique, en abrégé « OPPM électromagnétique ».

Une OPPM électromagnétique se propageant dans le direction et le sens de  $\vec{u}_z$  est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_{0x}\right) \\ E_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_{0y}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} E_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_{0y}\right) \\ \frac{1}{c} E_{0x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_{0x}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18.9)$$

où  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  sont deux constantes ayant la dimension d'un champ électrique et  $\varphi_{0x}$  et  $\varphi_{0y}$  deux constantes sans dimension.

L'OPPM est une fonction sinusoïdale à la fois de la variable  $t$  avec pour pulsation temporelle  $\omega$  et de la variable  $z$  avec pour pulsation spatiale le **module d'onde** :

$$k = \frac{\omega}{c} .$$

La période spatiale est la **longueur d'onde** :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT ,$$

où  $T$  est la période temporelle. La fréquence spatiale est le **nombre d'onde** :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} .$$

Les grandeurs relatives à la double périodicité de l'OPPM sont rassemblées dans le tableau 18.1.

|        | Période   | Fréquence | Pulsation |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| Temps  | $T$       | $f$       | $\omega$  |
| Espace | $\lambda$ | $\sigma$  | $k$       |

Tableau 18.1 – Grandeurs caractérisant la double périodicité de l'OPPM.

### 3.2 Expression générale d'une OPPM et notation complexe

La composante sur  $\vec{u}_x$  du champ électrique de l'onde (18.9) se propageant dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_z$  est :

$$E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0x}) = E_{0x} \cos\left(\omega t - k\vec{u}_z \cdot \vec{OM} + \varphi_{0x}\right) = E_{0x} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0x}\right) ,$$

en posant  $\vec{r} = \vec{OM}$  et  $\vec{k} = k\vec{u}_z$ . Ce vecteur  $\vec{k}$  ayant pour norme le module d'onde  $k$  et pour direction et sens la direction et le sens de propagation de l'onde est appelé **vecteur d'onde**.

Plus généralement, l'expression des champs électrique et magnétique d'une OPPM se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un vecteur  $\vec{u}$  quelconque est :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0x}) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}, \quad (18.10)$$

où  $\vec{k} = k \vec{u}$  est le vecteur d'onde,  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  et  $E_{0z}$  sont trois constantes ayant la dimension d'un champ électrique et  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$  et  $\varphi_{0z}$  trois constantes. Ces six constantes doivent être telles que  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\vec{k}$ .

L'expression (18.10) est lourde à manipuler. On a une expression plus légère en notation complexe. Le champ électrique complexe est :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \text{ avec } \underline{\vec{E}_0} = \begin{pmatrix} E_{0x} \exp(i\varphi_{0x}) \\ E_{0y} \exp(i\varphi_{0y}) \\ E_{0z} \exp(i\varphi_{0z}) \end{pmatrix}, \quad (18.11)$$

où  $i$  est la racine carré de  $-1$ . Le lecteur vérifiera aisément que le champ électrique réel est la partie réelle du champ complexe :

$$\vec{E} = \operatorname{Re}(\underline{\vec{E}}).$$

### 3.3 Lien du modèle de l'OPPM électromagnétique avec la réalité

L'OPPM électromagnétique est un modèle idéal, d'une part parce que c'est une OPP et d'autre part parce qu'elle est monochromatique (l'adéquation du modèle de l'OPP avec la réalité a été discutée plus haut). Les ondes monochromatiques ne sont pas des ondes réelles : par exemple elles n'ont ni début ni fin. L'intérêt des ondes monochromatiques vient de la notion d'analyse spectrale : tout signal réel peut être reconstitué par la superposition (autrement dit la somme) d'une infinité d'ondes sinusoïdales (ce résultat a été vu dans le cours de première année). De plus les équations de Maxwell et l'équation de propagation sont des équations linéaires, ce qui permet de traiter les différentes composantes sinusoïdales indépendamment les unes des autres.

L'OPPM est un modèle idéalisé qui n'existe pas dans la réalité mais toute onde réelle est superposition d'OPPM.

### 3.4 Spectre électromagnétique

La gamme de fréquences (ou de longueurs d'onde) couverte par les ondes électromagnétiques est très vaste. Selon les valeurs de la fréquence  $f$  ou de la longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{f}$ , on classe les ondes électromagnétiques dans différents domaines répertoriés sur la figure 18.3.

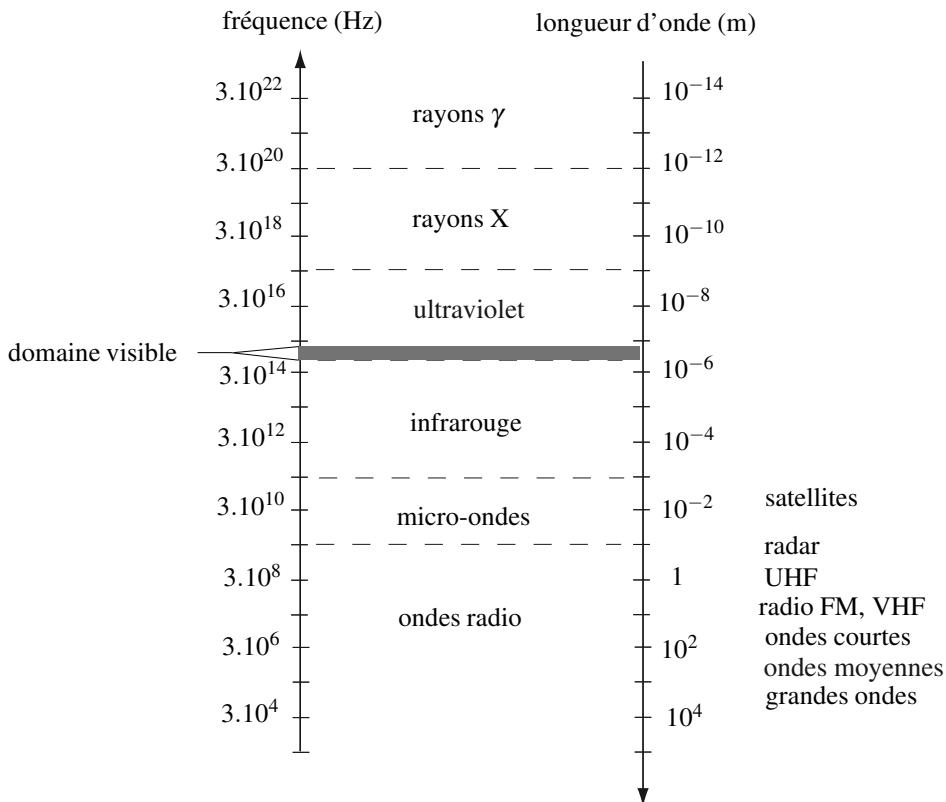


Figure 18.3 – Spectre électromagnétique.

Les ondes électromagnétiques ont des applications multiples qui diffèrent suivant le domaine spectral :

- Les **rayons  $\gamma$** , produits par les désexcitations des noyaux atomiques, sont utilisés pour la radiostérilisation à froid du matériel médico-chirurgical (seringues jetables, etc.) car ils détruisent les micro-organismes (champignons, bactéries, virus...).
- Les **rayons X**, produits dans des tubes à rayons X par le freinage d'un faisceau d'électrons, sont utilisés en radiothérapie pour soigner le cancer, et en radiographie médicale parce qu'ils ont la capacité de traverser la matière. Cette propriété est appliquée aussi dans les aéroports pour le contrôle des bagages ou dans l'industrie pour repérer des défauts dans un matériau. Les rayons X sont aussi utilisés en recherche pour sonder la matière à l'échelle atomique (cristallographie par exemple).
- Les **ultraviolets**, présents dans la lumière solaire ou produits par des lampes à décharge (dont l'ampoule doit être en quartz car le verre ne laisse pas passer les ultraviolets) sont utilisés pour la spectroscopie et la microscopie de fluorescence en laboratoire, le contrôle d'authenticité des billets de banque, la fabrication des masques de gravure des circuits intégrés électroniques.
- Les ondes électromagnétiques du **domaine visible** sont omniprésentes dans l'activité hu-

maine, y compris dans des applications qui n'ont pas de rapport avec la vision comme les disques optiques numériques.

- Les **infrarouges** sont produits par les corps chauffés. Les infrarouges sont utilisés pour les télécommandes domestiques (longueur d'onde 850 nm), pour les télécommunications par fibre optique (longueur d'onde entre 0,7 et 1,4  $\mu\text{m}$ ). La caméra thermique, sensible aux infrarouges, sert au contrôle d'installations industrielles (déttection de point chaud) ou de l'isolation thermique d'un bâtiment.
- Les **micro-ondes**, comme les ondes radios, sont produites par des dispositifs électriques macroscopiques. L'application la plus connue est le four à micro-ondes (fréquence de 2,4 GHz). Les micro-ondes sont utilisées dans les radars, pour la communication avec les satellites car elles traversent facilement l'ionosphère terrestre (voir chapitre suivant), dans le protocole de communication Wi-Fi (fréquences autour de 2,4 GHz) et en téléphonie mobile (par exemple le système GSM utilise deux bandes de fréquences situées autour de 900 et 1800 MHz).
- Les **ondes radio** sont utilisées pour la radiodiffusion à modulation d'amplitude (ondes longues de 30 à 300 kHz, ondes courtes de 3 à 30 MHz) ou à modulation de fréquence (fréquence comprise entre 87,5 et 108 MHz) et pour la télédiffusion sur les bandes de fréquence VHF (174 à 230 MHz) et UHF (470 à 860 MHz).

## 4 Polarisation rectiligne

Par définition :

Une onde électromagnétique a une **polarisation rectiligne** si, en tout point  $M$ , le champ électrique  $\vec{E}(M,t)$  garde une direction fixe au cours du temps.

La direction du champ électrique est appelée **direction de polarisation**.

À quelle condition une OPPM est-elle polarisée rectilignement ?

On considère tout d'abord l'onde (18.9), page 534. En un point  $M$  donné, les composantes  $E_x$  et  $E_y$  sont deux fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation dont le déphasage est :

$$\Delta\varphi = (\omega t - kz + \varphi_{0x}) - (\omega t - kz + \varphi_{0y}) = \varphi_{0x} - \varphi_{0y}.$$

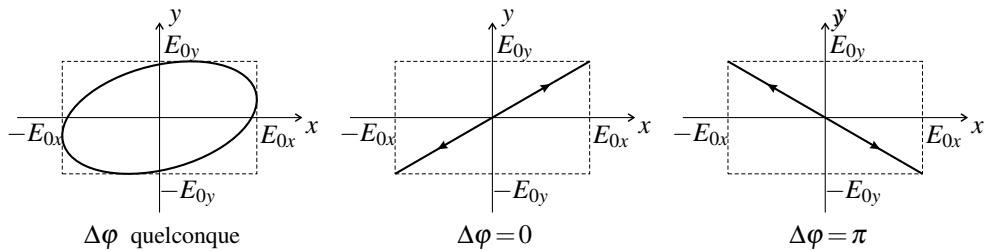
Or, quand on visualise à l'oscilloscope en mode XY deux signaux sinusoïdaux de même pulsation on observe en général une ellipse et cette ellipse se réduit à un segment de droite lorsque les signaux sont soit en phase soit en opposition de phase (il en découle une méthode utilisée en première année pour déterminer expérimentalement si deux signaux sont en phase ou en opposition de phase).

De manière analogue l'extrémité du vecteur  $\vec{E}(M,t)$  dessine une ellipse dans le cas général et un segment de droite dans les deux cas suivants :

- $\Delta\varphi = 0$ , alors  $\vec{E}(M,t) = (E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}\vec{u}_y) \cos((\omega t - kz - \varphi_{0x}))$  ;
- $\Delta\varphi = \pi$ , alors  $\vec{E}(M,t) = (E_{0x}\vec{u}_x - E_{0y}\vec{u}_y) \cos(\omega t - kz - \varphi_{0x})$  ;

Dans ces deux cas, représentés sur la figure 18.4, l'OPPM est polarisée rectilignement.

D'une manière générale :



**Figure 18.4** – Les deux cas où l’OPPM (18.9) est polarisée rectilignement.

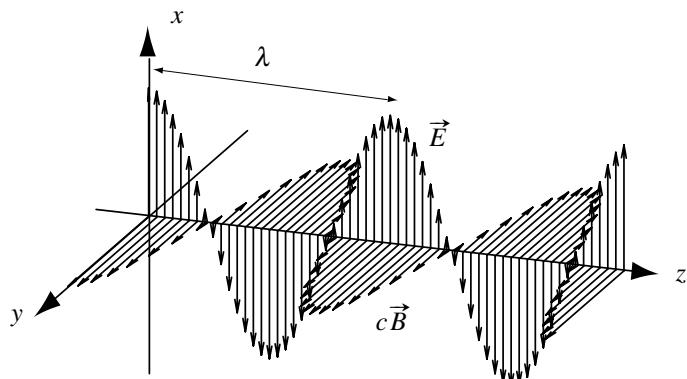
Une OPPM est polarisée rectilignement si et seulement si ses composantes non nulles sont en phase ou en opposition de phase deux à deux.

### Exemple

La figure 18.5 représente, à l’instant  $t = 0$ , le champ électromagnétique de l’OPPM se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_z$  et polarisée rectilignement dans la direction du vecteur  $\vec{u}_x$  suivante :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

On peut y observer la périodicité spatiale de période  $\lambda$ , la structure de l’onde avec le trièdre direct ( $\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}$ ) et le fait que les deux champs sont en phase avec  $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ .



**Figure 18.5** – OPPM se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_z$  et polarisée rectilignement dans la direction de  $\vec{u}_x$ .

## 5 Étude énergétique des OPP électromagnétiques

### 5.1 Expressions des grandeurs énergétiques

Dans ce paragraphe on considère une OPP électromagnétique non nécessairement monochromatique qui se propage dans le vide selon le vecteur  $\vec{u}$ .

**Densité volumique d'énergie électromagnétique** La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t).$$

Or, pour une OPP électromagnétique dans le vide,  $\|\vec{E}(M, t)\| = c \|\vec{B}(M, t)\|$ , donc :  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(M, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 B^2(M, t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t)$ . Il vient donc :

$$u_{em}(M, t) = \epsilon_0 E^2(M, t) = \frac{1}{\mu_0} B^2(M, t) . \quad (18.12)$$

Il y a équpartition de l'énergie électromagnétique entre les deux formes, électrique et magnétique.

**Vecteur de Poynting** Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}(M, t) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}(M, t)) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left( E^2(M, t) \vec{u} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{E}(M, t))}_{=0} \vec{E}(M, t) \right) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2(M, t) \vec{u} = \end{aligned} \quad (18.13)$$

Or  $\epsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c}$ , donc :

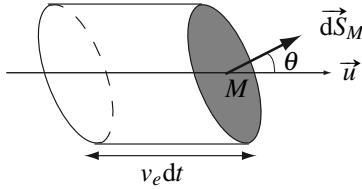
$$\vec{\Pi}(M, t) = \epsilon_0 c E^2(M, t) \vec{u} . \quad (18.14)$$

 Les formules (18.12) et (18.14) se retrouvent facilement. Il n'est pas nécessaire de les retenir.

**Vitesse de l'énergie** Le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie sont liés par la relation :

$$\vec{\Pi}(M, t) = c u_{em}(M, t) \vec{u}.$$

Cette équation traduit le fait que l'énergie d'une OPP électromagnétique se déplace dans le vide à la vitesse  $\vec{v}_e = c \vec{u}$ . En effet, considérons une surface élémentaire  $dS_M$  en  $M$ .



**Figure 18.6** – Vitesse de déplacement de l'énergie.

L'énergie électromagnétique  $d^2U_{em}$  qui la traverse entre  $t$  et  $t + dt$  est, par définition du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(M, t)$  :

$$d^2U_{em} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M \, dt.$$

D'autre part, cette énergie est l'énergie contenue dans le cylindre oblique de surface de base  $d\vec{S}_M$ , de longueur  $\vec{v}_e \, dt$  où  $\vec{v}_e$  est la vitesse de l'énergie donc de volume  $\vec{v}_e \, dt \cdot d\vec{S}_M$ ; elle est égale à :

$$d^2U_{em} = u_{em}(M, t) (\vec{v}_e \, dt \cdot d\vec{S}_M).$$

La comparaison des deux expressions montre que :

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{\Pi}(M, t)}{u_{em}(M, t)} = c \vec{u} . \quad (18.15)$$

## 5.2 Cas des OPPM électromagnétiques, valeurs moyennes

On considère maintenant le cas particulier des OPPM et on suppose le champ électrique donné par l'expression générale (18.10). Le vecteur de Poynting en  $M$  à l'instant  $t$  est, d'après (18.14) :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \epsilon_0 c \left( E_{0x}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0x}) + E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \right. \\ &\quad \left. + E_{0z}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0z}) \right) \vec{u}. \end{aligned}$$

Ce vecteur varie avec une fréquence double de la fréquence de l'onde. Seule sa moyenne temporelle présente un intérêt physique. Elle s'écrit :

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \vec{u}. \quad (18.16)$$

### Exemple

On modélise l'onde d'un faisceau laser de puissance  $\mathcal{P} = 1,0 \text{ W}$  et de section  $S = 1,0 \text{ mm}^2$  par une onde OPPM se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_z$  et polarisée rectilignement dans la direction de  $\vec{u}_x$ . Quelle est l'amplitude du champ électrique ?

Le champ électrique s'écrit :  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{u}_x$ . On cherche  $E_0$ .

Le vecteur de Poynting moyen est :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$ . La puissance du laser est la puis-

sance électromagnétique moyenne traversant la section du faisceau, soit :

$$\mathcal{P} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot (S \vec{u}_z) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S.$$

$$\text{On en déduit : } E_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{\epsilon_0 c S}} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

## 6 La notation complexe pour les OPPM

### 6.1 Choix d'une convention de notation complexe

On a vu plus haut que les champs d'une OPPM électromagnétique sont de la forme générale :

$$\vec{a}(M,t) = \begin{pmatrix} a_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0x}) \\ a_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \\ a_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} = \text{Re}(\underline{\vec{a}}(M,t))$$

où

$$\underline{\vec{a}}(M,t) = \underline{\vec{a}}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{a}}_0 = \begin{pmatrix} a_{0x} \exp(i\varphi_{0x}) \\ a_{0y} \exp(i\varphi_{0y}) \\ a_{0z} \exp(i\varphi_{0z}) \end{pmatrix}.$$

Ceci définit un vecteur complexe  $\underline{\vec{a}}$  associé au vecteur réel  $\vec{a}$  de l'OPPM.

 Il existe une autre convention de notation complexe :

$$\underline{\vec{a}}'(M,t) = \underline{\vec{a}}'_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{a}}'_0 = \begin{pmatrix} a_{0x} \exp(-i\varphi_{0x}) \\ a_{0y} \exp(-i\varphi_{0y}) \\ a_{0z} \exp(-i\varphi_{0z}) \end{pmatrix}.$$

On a toujours :  $\vec{a}(M,t) = \text{Re}(\underline{\vec{a}}'(M,t))$ . Les deux vecteurs complexes sont tels que :  $\underline{\vec{a}}' = \underline{\vec{a}}^*$  où  $*$  est la conjugaison complexe.

Les deux conventions peuvent être utilisées dans un sujet de concours. Elles conduisent aux mêmes résultats réels mais diffèrent, dans les calculs complexes, par le changement de  $i$  en  $-i$ . Il faut donc bien regarder quelle convention on utilise.

### 6.2 Dérivation et notation complexe

L'intérêt de la notation complexe est que les opérations de dérivation par rapport au temps ou aux variables d'espace s'expriment de manière très simple.

En effet, les vecteurs complexes dépendent du temps et de l'espace à travers le facteur :

$$\exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_z z).$$

Ainsi, la dérivation par rapport à  $t$  devient une multiplication par  $i\omega$ , la dérivation par rapport à  $x$ ,  $y$ , ou  $z$  une multiplication par  $-ik_x$ ,  $-ik_y$  ou  $-ik_z$  respectivement. Il en découle les règles de calcul suivantes :

Règles de dérivation temporelle des OPPM en notation complexe :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\vec{a}}}{\partial t} &= i\omega \underline{\vec{a}} \\ \frac{\partial^2 \underline{\vec{a}}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \underline{\vec{a}};\end{aligned}$$

règles de dérivation spatiale :

$$\begin{aligned}\text{rot } \underline{\vec{a}} &= -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{a}} \\ \text{div } \underline{\vec{a}} &= -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{a}} \\ \Delta \underline{\vec{a}} &= -k^2 \underline{\vec{a}}.\end{aligned}$$

 Les règles de calcul ci-dessus se retrouvent rapidement en considérant que le vecteur symbolique « nabla » (voir annexe mathématique) est égal à  $-i \vec{k}$ .

### 6.3 Équations de Maxwell en représentation complexe

Les équations de Maxwell pour les champs complexes s'écrivent dans le cas général :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{MG}) : -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ (\text{M}\Phi) : -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ (\text{MF}) : -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \\ (\text{MA}) : -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \epsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}} \end{array} \right. \quad (18.17)$$

### 6.4 Grandeurs énergétiques en notation complexe



Il n'est pas possible de calculer les valeurs instantanées des grandeurs quadratiques en représentation complexe.

On peut en revanche obtenir leurs valeurs moyennes dans le temps. Pour cela on utilise un résultat mathématique que l'on va établir. Soient  $f(M,t) = f_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$  et  $g(M,t) = g_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi)$ , deux composantes de champs d'une OPPM. En utilisant la formule de transformation d'un produit de cosinus en somme de cosinus on trouve :

$$\langle fg \rangle = \left\langle \frac{1}{2} f_0 g_0 \left( \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) \right) \right\rangle = \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos(\varphi - \psi);$$

par ailleurs :

$$\underline{\vec{f}} \underline{\vec{g}}^* = f_0 \exp(i\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \times g_0 \exp(i(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} - \psi)) = f_0 g_0 \exp(i(\varphi - \psi)).$$

Il apparaît donc que :

$$\langle f(M, t)g(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{f} \underline{g}^*) . \quad (18.18)$$

On en déduit l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting d'une OPPM :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) , \quad (18.19)$$

et de la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \left( \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right) = \frac{1}{4} \left( \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) , \quad (18.20)$$

en notant :

$$|\vec{a}|^2 = \underline{a}_{0x} \underline{a}_{0x}^* + \underline{a}_{0y} \underline{a}_{0y}^* + \underline{a}_{0z} \underline{a}_{0z}^* = a_{0x}^2 + a_{0y}^2 + a_{0z}^2.$$

Dans (18.20) il est inutile de mettre la partie réelle.

## 6.5 Application à une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide

La notation complexe permet de retrouver rapidement la plupart des résultats concernant l'OPPM électromagnétique dans le vide.

L'équation de d'Alembert, vérifiée par le champ électrique dans le vide, s'écrit en notation complexe sous la forme très simple :

$$k^2 \underline{E} = \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \underline{E}) .$$

On en déduit immédiatement,  $\vec{E}$  ne devant pas être nul, que :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  donc  $k = \frac{\omega}{c}$ .

On applique très facilement les équations de Maxwell sous la forme (18.17). L'équation de Maxwell-Gauss donne :  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  donc  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{k}$ , c'est-à-dire au vecteur unitaire de la propagation  $\vec{u}$ . L'équation de Maxwell-flux s'applique de la même manière pour prouver que  $\vec{B}$  est orthogonal à  $\vec{u}$ .

L'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe (voir (18.17)) donne immédiatement :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{E} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \underline{E} ,$$

qui est la relation de structure. Enfin, en utilisant (18.19) on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \vec{E} \wedge \left( \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \underline{E} \right)^* \right) = \frac{1}{2\mu_0 c} \operatorname{Re} ((\vec{E} \cdot \underline{E})^* \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \underline{E}^*) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}|^2 \vec{u} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \vec{u} \end{aligned} , \quad (18.21)$$

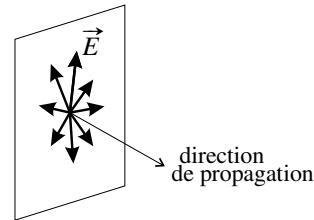
soit la formule (18.16) trouvée plus haut en travaillant en notation réelle.

## 7 Approche expérimentale : polarisation rectiligne de la lumière

### 7.1 Lumière naturelle

La **lumière naturelle**, telle qu'elle est produite par la plupart des sources (Soleil, lampes diverses...), est **non polarisée**.

Le champ électrique d'une lumière naturelle a une direction quelconque dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, appelé dans la suite plan transverse, qui varie aléatoirement au cours du temps sans qu'il y ait une direction privilégiée. Ainsi, la lumière naturelle a une symétrie de révolution autour de sa direction de propagation. La non-polarisation de la lumière naturelle masque le caractère vectoriel de cette onde.



**Figure 18.7 –** Lumière naturelle : non polarisée.

### 7.2 Le polariseur (ou polaroïd)

Un **polariseur** idéal est une lame qui, traversée par une lumière se propageant perpendiculairement à ses faces,

- transmet la totalité de l'énergie associée à un champ électrique parallèle à une direction particulière de son plan, appelée **direction de transmission privilégiée**,
- absorbe la totalité de l'énergie associée à un champ électrique perpendiculaire à cette direction.

Dans la suite, on notera  $\vec{v}_P$  un vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée du polariseur. Notons que le plan du polariseur est un plan transverse puisque la lumière traverse la lame perpendiculairement.

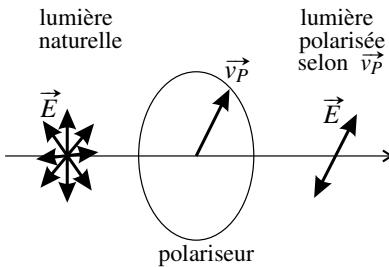
Le polariseur utilisé en travaux pratiques, appelé aussi **polaroïd**<sup>1</sup>, se rapproche de cet idéal. La principale différence est qu'on a, même pour une onde polarisée rectilignement dans la direction de  $\vec{v}_P$ , des pertes d'énergie, notamment dues à la réflexion sur la lame. Un polariseur idéal laisse passer 50% de l'énergie lumineuse d'une lumière naturelle (voir remarque plus bas), mais dans la pratique un polaroïd en laisse passer seulement environ 40%. Le polaroïd est constitué par un film de polymère étiré, ce qui a pour effet d'aligner les molécules. Sa direction de transmission privilégiée est la direction perpendiculaire aux molécules.

### 7.3 Production de lumière polarisée rectilignement

La première utilisation du polaroïd est la production de lumière polarisée. Il joue dans ce cas le rôle de polariseur :

1. Polaroïd est en fait le nom de la société créée par l'inventeur du polariseur moderne, E.H. Land, qui inventa et commercialisa avec grand succès un appareil photographique à développement instantané.

Un polariseur transforme une lumière naturelle en lumière polarisée rectilignement selon sa direction de transmission privilégiée  $\vec{v}_P$ .



**Figure 18.8** – Production de lumière polarisée rectilignement avec un polariseur.

Ce n'est pas la seule manière de fabriquer une lumière polarisée rectilignement. Ce type de lumière existe dans la nature. Par exemple, lorsque de la lumière naturelle se réfléchit sur la surface d'un milieu transparent d'indice  $n$  (surface de l'eau, vitre...) et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de Brewster  $i_B$  tel que  $\tan i_B = n$ , la lumière réfléchie est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

## 7.4 Loi de Malus

La deuxième utilisation d'un polariseur est la reconnaissance d'une lumière polarisée rectilignement. Il joue dans ce cas le rôle d'analyseur.

Si l'on envoie à travers un polariseur une onde lumineuse déjà polarisée rectilignement et que l'angle entre la direction de transmission privilégiée du polariseur et la direction du champ électrique de l'onde est égal à  $\frac{\pi}{2}$ , alors l'énergie de l'onde est totalement absorbée par le polariseur. Réciproquement, l'extinction de l'onde par un polariseur est la preuve expérimentale que cette onde est polarisée rectilignement : quand le polariseur absorbe entièrement l'onde on est certain que son champ électrique n'a pas de composante selon sa direction de transmission privilégiée.

Une onde lumineuse totalement absorbée par un polariseur est une onde polarisée rectilignement, dont le champ électrique est perpendiculaire à la direction de transmission privilégiée du polariseur.

### Remarque

Sur de nombreux polariseurs, l'aiguille indiquant la position de la lame est perpendiculaire au vecteur  $\vec{v}_P$ . Ainsi, quand on constate qu'une onde est polarisée rectilignement parce qu'elle est éteinte par le polariseur, on sait aussi que sa direction de polarisation est celle de l'aiguille.

La **loi de Malus** est un résultat quantitatif, relatif à l'éclairement de l'onde lumineuse sortant

du polariseur, pour un angle  $\alpha$  quelconque entre la direction de polarisation de la lumière et la direction de transmission privilégiée du polariseur.

On vient de voir que l'éclairement est nul pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Qu'en est-il pour une valeur quelconque de  $\alpha$  ?

Comme représenté sur la figure ci-contre, le champ électrique  $\vec{E}$  avant le polariseur fait un angle  $\alpha$  avec la direction de transmission privilégiée, notée ici  $\vec{v}_A$  pour rappeler le rôle d'analyseur joué par le polariseur. Le polariseur ne transmet que la projection  $\vec{E}'$  de  $\vec{E}$  sur  $\vec{v}_A$  dont la norme est :

$$\|\vec{E}'\| = \|\vec{E}\| \cos \alpha. \quad (18.22)$$

L'éclairement  $\mathcal{E}$  est défini en optique comme le flux surfacique d'énergie lumineuse arrivant sur l'écran d'observation. Dans la théorie électromagnétique le vecteur courant d'énergie est le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ . On a donc, pour un écran d'observation perpendiculaire à la direction de propagation :

$$\mathcal{E}(M) = \langle \left\| \vec{\Pi}(M, t) \right\| \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2(M, t) \rangle, \quad (18.23)$$

d'après la formule (18.14).

Il résulte des équations (18.22) et (18.23) que les éclairements  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  avant et après le polariseur sont liés par la relation :

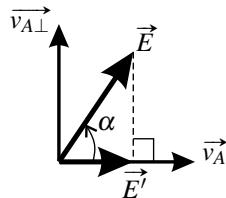
$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cos^2 \alpha.$$

Cette relation est la **loi de Malus**. Elle donne bien un éclairement nul pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

### Remarque

Lorsqu'un polariseur est traversé par de la lumière naturelle, contenant toutes les directions de polarisation rectiligne possibles, on a tous les angles  $\alpha$  à la fois et l'éclairement est donc multiplié par la moyenne de  $\cos^2 \alpha$  sur tous les angles, moyenne égale à  $\frac{1}{2}$ .

Ainsi, un polariseur idéal laisse passer 50% du flux lumineux d'une lumière naturelle. Le coefficient de transmission d'un polariseur est plus faible suite aux pertes par réflexion notamment.



**Figure 18.9** – Action de l'analyseur sur le champ électrique.

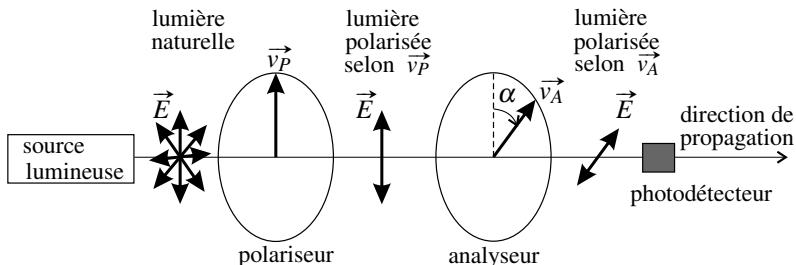
### Expérience

Expérimentalement l'éclairement se mesure à l'aide d'un photorécepteur. Quelle que soit sa nature, un photorécepteur fournit un signal électrique, tension ou intensité, proportionnel à la puissance lumineuse qu'il reçoit sur sa surface sensible, donc à l'éclairement. On peut mesurer ce signal à l'aide d'un multimètre électronique.

Le principe de l'expérience est représenté sur la figure 18.10. La lumière d'une source passe successivement à travers deux polariseurs. Le premier polariseur joue le rôle de polariseur, le deuxième d'analyseur ;  $\vec{v}_P$  et  $\vec{v}_A$  sont leurs directions de transmission privilégiée respectives. Un photodétecteur fournit une tension continue proportionnelle à l'éclairement en sortie du deuxième polariseur.

On fait tourner l'analyseur progressivement en notant à chaque fois la position  $\theta$  de son index sur son rapporteur et la tension  $u$  correspondante. On détermine la valeur  $\theta_0$  de  $\theta$  pour laquelle  $u$  est maximale, alors  $\alpha = \theta - \theta_0 \approx \pi$  près.

On peut alors tracer  $U$  en fonction de  $\cos^2 \alpha$  et constater que les points expérimentaux s'alignent sur une droite.



**Figure 18.10 –** Expérience démontrant la loi de Malus.



Les polariseurs usuels ne fonctionnent pas dans l'infrarouge. De ce fait, l'expérience précédente ne peut être réalisée qu'avec une diode ou une diode laser.

**SYNTHÈSE**

*SAVOIRS*

- solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension
- structure d'une onde plane progressive dans le vide
- caractère idéal du modèle de l'OPPM
- domaines du spectre électromagnétique et leurs applications

*SAVOIR-FAIRE*

- utiliser la notation complexe
- reconnaître une onde polarisée rectilignement
- utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus

*MOTS-CLÉS*

- |                          |   |                  |                |
|--------------------------|---|------------------|----------------|
| • équation de d'Alembert | • onde plane progressive et monochromatique | • vecteur d'onde | • polariseur   |
| • célérité               |   |                  | • loi de Malus |
| • onde plane             |   |                  |                |
| • onde plane progressive | • polarisation rectiligne                   |                  |                |

## S'ENTRAÎNER

### 18.1 OPPM électromagnétique (★)

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique  $\vec{E}(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}(M, t)$ .

2. On suppose que le champ électrique est de la forme :  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ .

a. À quelle équation doit satisfaire  $k$  pour que ce champ soit solution de l'équation rappelée à la question 1 ?

b. Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?

c. Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

d. Quelle est la structure de cette onde ?

e. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé à  $\vec{E}$  ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde.

3. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface  $S = 4 \text{ mm}^2$  orthogonale à sa direction de propagation est  $\mathcal{P} = 10 \text{ W}$ . Calculer les amplitudes  $E_0$  et  $B_0$  des champs électrique et magnétique.

### 18.2 OPPM électromagnétique de direction quelconque (★)

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad E_x = E_0 \exp\left(i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t\right)\right).$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est  $\lambda = 6.10^{-7} \text{ m}$ .

1. Calculer la fréquence de l'onde.

2. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?

3. Calculer la valeur numérique de la constante  $k$ .

4. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

5. Exprimer  $E_y$  en fonction de  $E_x$ .

6. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  de cette onde.

7. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.

8. Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

### 18.3 Onde électromagnétique (★★)

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \\ \underline{\alpha} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \end{cases}$$

où  $\underline{\alpha}$  est complexe et  $k_0$  positif.

## CHAPITRE 18 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

1. Déterminer  $\alpha$  et  $k_0$  en fonction de  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $a$  et  $c$ .
2. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  de cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse électrique ? transverse magnétique ?
4. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.

**18.4 Rotation d'une polarisation linéaire (★)**

1. On place sur le trajet d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction de l'axe ( $Oz$ ) et polarisée rectilignement dans la direction de  $\vec{u}_x$  un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à ( $Oz$ ) et faisant un angle  $\theta$  par rapport au vecteur  $\vec{u}_x$ .

a. Écrire l'expression du champ électrique de l'onde avant la traversée du polariseur en introduisant les notations nécessaires.

b. En déduire l'expression du champ électrique de l'onde après traversée du polariseur (on appelle  $\varphi_0$  le déphasage dû à la traversée du polariseur). Quel est le coefficient de transmission du polariseur défini comme le rapport de l'éclairement de l'onde sortant du polariseur à l'éclairement de l'onde arrivant sur le polariseur ?

2. On place maintenant sur le trajet de l'onde une suite de  $N$  polariseurs. Le polariseur  $n$  est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle  $n\theta$  par rapport à la polarisation initiale de l'onde.

a. Quel est l'éclairement de l'onde transmise après traversée des  $N$  polariseurs ?

b. Montrer que, pour une valeur de  $N$  suffisamment grand, le dispositif permet de faire tourner une polarisation linéaire de  $90^\circ$  avec une perte d'énergie négligeable. Combien de polariseurs faut-il utiliser pour que les pertes d'énergie de ce système soient inférieures à 1 % ?

**APPROFONDIR****18.5 Étude d'un polaroïd (★★)**

Dans cet exercice, on étudie un polaroïd utilisé en travaux pratiques. Ce polariseur rectiligne n'est pas idéal.  $T_1$  désigne le coefficient de transmission en énergie, selon la direction de transmission privilégiée du polariseur et  $T_2$  le coefficient de transmission analogue, selon la direction perpendiculaire. On supposera  $T_2 < T_1$ . Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, arrive normalement sur la face d'entrée d'un polaroïd selon l'axe ( $Oz$ ) ; le vecteur champ électrique de l'onde fait un angle  $\theta$  avec la direction de transmission privilégiée du polaroïd, supposée parallèle à l'axe ( $Ox$ ).

1. Calculer le coefficient de transmission  $T$  en énergie de l'onde à travers ce polaroïd en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et de  $\theta$ . Commenter en envisageant le cas particulier du polariseur idéal.
2. Une onde de lumière naturelle arrive normalement, selon l'axe ( $Oz$ ), sur un ensemble constitué de deux polaroïds identiques, disposés en série, perpendiculairement à l'axe ( $Oz$ ).

Les directions de transmission privilégiée des deux polariseurs font un angle  $\alpha$ . Les polariseurs ne sont pas idéaux ; ils sont caractérisés par les coefficients  $T_1$  et  $T_2$  définis précédemment.

**a.** On admet qu'on peut écrire le champ électrique complexe associé à la lumière naturelle sous la forme simplifiée :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(kz - \omega t + \varphi_x(t))) \vec{u}_x + E_0 \exp(i(kz - \omega t + \varphi_y(t))) \vec{u}_y$$

où les phases  $\varphi_x(t)$  et  $\varphi_y(t)$  varient très rapidement et de manière aléatoire au cours du temps. Exprimer l'éclairement de cette onde en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $c$  et  $E_0$ .

**b.** Exprimer, pour un angle quelconque  $\alpha$ , le coefficient de transmission  $T_\alpha$  en énergie de l'ensemble des deux polariseurs en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $\alpha$ . On rappelle que les détecteurs optiques classiques ont un temps de réponse très grand devant la durée des trains d'onde de la lumière, et leur réponse est donc proportionnelle à la moyenne temporelle du flux d'énergie capté.

**c.** En déduire, en fonction de  $T_1$  et  $T_2$ , le coefficient de transmission  $T_0$  de l'ensemble des deux polariseurs quand  $\alpha = 0$ . En déduire de même le coefficient de transmission  $T_{90}$  de l'ensemble des deux polariseurs quand  $\alpha = 90^\circ$ . Montrer que ces deux résultats étaient prévisibles sans calcul.

**d.** Montrer que, dans l'approximation  $T_2 \ll T_1$ , on retrouve la loi de Malus. Comment vérifier expérimentalement cette loi ?

### 18.6 Quantité de mouvement du photon (\*\*)

On considère l'interaction entre une onde électromagnétique  $(\vec{E}(z, t), \vec{B}(z, t))$  plane, progressive, harmonique, de période  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{v}$ , se propageant dans le vide selon la direction et le sens de  $(Oz)$  et une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$ , animée – sous l'action de la force de Lorentz et d'autres forces non décrites ici – d'un mouvement périodique de période  $T$  dans le plan  $z = 0$  par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R} = (Oxyz)$ . La polarisation de l'onde et le mouvement forcé ne sont pas *a priori* rectilignes.

**1.** Exprimer, en notation réelle et dans le cas d'une polarisation quelconque, les composantes du champ électrique  $\vec{E}(z, t)$ . En déduire les composantes du champ magnétique  $\vec{B}(z, t)$ . Que vaut  $\int_{t_0}^{t_0+T} \vec{E}(z, t) dt$  où  $t_0$  est un instant quelconque ?

**2. a.** Exprimer la force de Lorentz  $\vec{F}$  subie par la particule.

Montrer que  $\int_{t_0}^{t_0+T} \vec{F} dt = \frac{1}{c} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} (q\vec{E}(0, t) \cdot \vec{v}) dt \right) \vec{u}_z$ , où  $t_0$  est un instant quelconque.

On donne la formule du double produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ .

**b.** En déduire une relation entre la quantité de mouvement  $\vec{p}_{cd}$  et l'énergie  $\mathcal{E}_{cd}$  cédées en une période par le champ à la particule.

**c.** En considérant que la particule absorbe des photons d'énergie  $h\nu$  trouver l'expression de la quantité de mouvement des photons.

**18.7 Pression de radiation (★)**

**1.** Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence  $v$ , se propageant dans la direction et le sens de  $\vec{u}_x$ , dont le champ électrique est  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ . On rappelle que l'éclairement  $\mathcal{E}$  est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.

Exprimer  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $c$  et  $E_0$ .

**2.** On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de  $\vec{u}_x$ .

**a.** Exprimer le nombre  $N_0$  de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à  $(Ox)$  en fonction de  $\mathcal{E}$ , de  $v$  et de la constante de Planck  $h$ .

**b.** L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à  $(Ox)$ , d'aire  $S$ , parfaitement réfléchissante. On étudie le rebondissement des photons sur cette surface.

Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi ?

Quelle est la force subie par la paroi en fonction de  $\mathcal{E}$ ,  $S$  et  $c$  ?

Exprimer la pression  $p$  subie par la paroi en fonction de  $\mathcal{E}$  et  $c$  puis en fonction de  $\epsilon_0$  et  $E_0$ .

**c.** Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement absorbante.

**d.** Calculer  $\mathcal{E}$ ,  $E_0$  et  $p$  sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre  $d = 5,0$  mm et une puissance moyenne  $\mathcal{P} = 1,0 \cdot 10^2$  W (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles).

**3. a.** L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon  $a$ , bien inférieur au rayon du faisceau. Quelle est, en fonction de  $\mathcal{E}$ ,  $a$  et  $c$  la force  $\vec{F}$  subie par la sphère ?

**b.** Le Soleil donne au voisinage de la Terre (juste au-dessus de l'atmosphère terrestre) l'éclairement  $\mathcal{E} = 1,4 \cdot 10^3$  W.m<sup>-2</sup>. L'émission est isotrope, la distance Terre-Soleil est égale à  $D = 150 \cdot 10^6$  km et sur une surface de dimensions petites devant  $D$ , l'onde arrivant du Soleil est quasi-plane.

Quelle est la puissance  $\mathcal{P}_0$  émise par le Soleil ?

Un objet sphérique, de rayon  $a$ , de masse volumique  $\mu$ , est, dans le vide interplanétaire, à la distance  $r$  du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire. Évaluer le rapport entre la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :

- cas d'une météorite :  $\mu = 3,0 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $a = 1,0$  m,
- cas d'une poussière interstellaire :  $\mu = 1,0 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $a = 0,10$  μm.

Commenter.

On donne la constante de la gravitation universelle  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>.kg<sup>-2</sup> et la masse du Soleil :  $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$  kg.

**CORRIGÉS****18.1 OPPM électromagnétique**

**1.** Le champ électrique et le champ magnétique vérifient l'équation d'onde de d'Alembert.

Pour le champ électrique, par exemple :  $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ .

**2.** **a.**  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**b.** L'onde se propage dans le sens positif de l'axe des  $z$  à la vitesse  $c$ .

**c.** Le champ électrique est polarisé rectilignement selon l'axe ( $Ox$ ).

**d.** La structure d'une onde plane progressive se propageant dans le sens positif de l'axe ( $Oz$ ) est la suivante : les vecteurs ( $\vec{u}_z, \vec{E}, \vec{B}$ ) forment un trièdre direct et  $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$ .

**e.** Donc :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ . Le vecteur de Poynting est égal à :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

**3.**  $P = \langle \Pi \rangle$   $S = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S$ . L'application numérique donne :

$$E_0 = 43,4 \text{ kV.m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 0,14 \text{ mT.}$$

**18.2 OPPM électromagnétique de direction quelconque**

**1.** Le vecteur d'onde est  $\vec{k} = \frac{k}{3}(2\vec{u}_x + 2\vec{u}_y + \vec{u}_z)$ . Sa norme est égale à  $k$ . La relation de dispersion étant  $\omega = kc$ , les définitions  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  et  $\omega = 2\pi f$  donnent :  $f = \frac{c}{\lambda} = 5.10^{14} \text{ Hz}$ .

**2.** L'onde fait partie du domaine visible.

**3.**  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10,5.10^6 \text{ m}^{-1}$ .

**4.** Un plan d'onde est un plan équiphase donc son équation est :  $2x + 2y + z = \text{cste}$  (on vérifie que les plans d'onde sont orthogonaux au vecteur  $\vec{k}$ ).

**5.** Le champ électrique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide :  $\text{div } \vec{E} = 0$ , soit  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ , ce qui donne, tous calculs faits,  $E_y = -E_x$ .

**6.** L'onde est plane progressive, on peut donc appliquer la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_x}{3c} (\vec{u}_x + \vec{u}_y - 4\vec{u}_z).$$

**7.**  $\langle u_{em} \rangle = 2 \langle u_{el} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x E_x^* + E_y E_y^*) = \epsilon_0 E_0^2$ .

## CHAPITRE 18 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

**8.**  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde. La relation  $\langle \vec{\Pi} \rangle = c \langle u_{em} \rangle \vec{u}$  traduit le fait que l'énergie se déplace à la vitesse  $c$  dans la direction  $\vec{u}$ .

**18.3 Onde électromagnétique**

**1.** Le champ électrique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide :  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  et l'équation de d'Alembert dans le vide. Nous en déduisons :

$$\frac{\pi}{a} + ik_0 \underline{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Donc :

$$k_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad \underline{\alpha} = \frac{i\pi}{ak_0}.$$

**2. Attention**, l'onde n'est pas plane, on ne peut donc pas calculer le champ magnétique grâce à la relation de structure des ondes planes progressives. Il faut revenir à l'équation de Maxwell-Faraday. Tous calculs faits, il vient, en utilisant les relations de la question précédente et en annulant tout champ statique :

$$\vec{B} = -\frac{\omega}{k_0 c^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{u}_x.$$

**3.** L'onde n'est pas plane, elle se propage dans le sens des  $z$  croissants, elle est harmonique de pulsation  $\omega$ . Elle est transverse magnétique mais pas transverse électrique.

**4.**

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{E}_{\text{réel}} \wedge \frac{\vec{B}_{\text{réel}}}{\mu_0} \\ &= \frac{\pi \omega}{a k_0^2 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - k_0 z) \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y \\ &\quad + \frac{\omega}{k_0 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - k_0 z) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Sa valeur moyenne est :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\omega}{2k_0 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{u}_z$ . L'énergie se déplace bien en moyenne dans le sens où l'onde se propage.

**Remarque**

L'onde dont il est question dans cet exercice est une onde guidée entre deux plans métalliques parallèles, perpendiculaires à  $(Oy)$  et distants de  $a$ .

**18.4 Rotation d'une polarisation linéaire**

**1. a.**  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ ,  $E_0$  amplitude,  $\omega$  pulsation et  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**b.** Après le polariseur :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos \theta \cos(\omega t - kz - \varphi_0) \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y.$$

Pour l'onde arrivant sur le polariseur :  $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ . Pour l'onde sortant du polariseur :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_0 \cos \theta)^2 = \mathcal{E}_0 \cos^2 \theta.$$

**2. a.** Après la traversée des  $N$  polariseurs l'amplitude du champ électrique est  $E_0 \times \cos^N \theta$  et l'éclairement  $\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_0 \cos^{2N} \theta$ .

**b.** Il faut prendre  $\theta = \frac{\pi}{2N}$ . Pour  $N$  grand,  $\theta \ll 1$  et on peut écrire :

$$\mathcal{E}_N \simeq \mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^{2N} \simeq \mathcal{E}_0 (1 - N\theta^2) = \mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{\pi^2}{4N}\right).$$

Pour  $N$  grand  $\mathcal{E}_N$  se rapproche (en théorie) de  $\mathcal{E}_0$ . D'après ce calcul, la diminution relative d'éclairement est inférieure à 1 % si  $N > \frac{\pi^2}{4 \times 0,01} = 246,7$ .

### Remarque

Avec les polaroïds utilisés dans les lycées, en travaux pratiques, les pertes par réflexion et absorption feraient diminuer considérablement l'éclairement transmis.

## 18.5 Étude d'un Polaroid

**1.** Soit  $E_0$  l'amplitude de l'onde incidente ; on peut décomposer cette onde en la somme d'une onde d'amplitude  $E_0 \cos \theta$  polarisée rectilignement suivant ( $Ox$ ) (direction de transmission privilégiée) et d'une onde d'amplitude  $E_0 \sin \theta$  polarisée suivant ( $Oy$ ) ; elle transporte l'éclairement :

$$\mathcal{E} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E_0^2 \cos^2 \theta + E_0^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

À la sortie du polariseur les ondes polarisées rectilignement selon ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) auront des amplitudes respectives  $\sqrt{T_1} E_0 \cos \theta$  et  $\sqrt{T_2} E_0 \sin \theta$  ; l'éclairement de l'onde est alors :

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (T_1 E_0^2 \cos^2 \theta + T_2 E_0^2 \sin^2 \theta) = \underbrace{(T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta)}_{\mathcal{E}} \mathcal{E}$$

Nous trouvons  $T = 0$  pour  $\theta = 90^\circ$  uniquement dans le cas d'un polariseur idéal pour lequel  $T_1 = 1$  et  $T_2 = 0$ .

**2. a.** L'éclairement de cette onde est :  $\mathcal{E} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 = \epsilon_0 c E_0^2$ .

**b.** On peut supposer que la direction de transmission privilégiée du premier polariseur est ( $Ox$ ). À la sortie de ce polariseur le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}' = \sqrt{T_1} E_0 \exp(i(kz - \omega t + \varphi_x(t))) \vec{u}_x + \sqrt{T_2} E_0 \exp(i(kz - \omega t + \varphi_y(t))) \vec{u}_y.$$

## CHAPITRE 18 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

Notons  $\vec{u}_X$  la direction de transmission privilégiée du second polariseur et  $\vec{u}_Y$  la direction orthogonale ;  $\vec{u}_x = \cos \alpha \vec{u}_X - \sin \alpha \vec{u}_Y$  et  $\vec{u}_y = \sin \alpha \vec{u}_X + \cos \alpha \vec{u}_Y$ . On a donc (en omettant la dépendance en  $t$  de  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  pour alléger les notations) :

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= (\sqrt{T_1} \cos \alpha \exp(i\varphi_x) + \sqrt{T_2} \sin \alpha \exp(i\varphi_y)) E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \vec{u}_X \\ &\quad + (-\sqrt{T_1} \sin \alpha \exp(i\varphi_x) + \sqrt{T_2} \cos \alpha \exp(i\varphi_y)) E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \vec{u}_Y\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire le champ à la sortie du second polariseur :

$$\begin{aligned}\vec{E}'' &= (T_1 \cos \alpha \exp(i\varphi_x) + \sqrt{T_1 T_2} \sin \alpha \exp(i\varphi_y)) E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \vec{u}_X \\ &\quad + (-\sqrt{T_1 T_2} \sin \alpha \exp(i\varphi_x) + T_2 \cos \alpha \exp(i\varphi_y)) E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \vec{u}_Y\end{aligned}$$

L'éclairement de cette onde est :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'' &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c \left\langle |(T_1 \cos \alpha \exp(i\varphi_x) + \sqrt{T_1 T_2} \sin \alpha \exp(i\varphi_y)) E_0|^2 \right. \\ &\quad \left. + |(-\sqrt{T_1 T_2} \sin \alpha \exp(i\varphi_x) + T_2 \cos \alpha \exp(i\varphi_y)) E_0|^2 \right\rangle,\end{aligned}$$

où le facteur  $\frac{1}{2}$  provient de la moyenne du terme  $\cos^2(\omega t - kz)$  sur une période et où la moyenne porte sur les angles  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ .

Or, par exemple :

$$\begin{aligned}\langle |T_1 \cos \alpha \exp(i\varphi_x) + \sqrt{T_1 T_2} \sin \alpha \exp(i\varphi_y)|^2 \rangle &= \langle T_1^2 \cos^2 \alpha + 2T_1 \sqrt{T_1 T_2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + T_1 T_2 \sin^2 \alpha \rangle \\ &= T_1^2 \cos^2 \alpha + T_1 T_2 \sin^2 \alpha,\end{aligned}$$

puisque  $\langle \cos(\varphi_x - \varphi_y) \rangle = 0$ , les angles  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  variant aléatoirement et indépendamment l'un de l'autre.

Finalement :  $\mathcal{E}'' = \frac{1}{2} (T_1^2 \cos^2 \alpha + 2T_1 T_2 \sin^2 \alpha + T_2^2 \cos^2 \alpha) \epsilon_0 c E_0^2$ . Le coefficient de transmission des deux polariseurs est :

$$T_\alpha = \frac{1}{2} (T_1^2 \cos^2 \alpha + 2T_1 T_2 \sin^2 \alpha + T_2^2 \cos^2 \alpha).$$

**c.**  $T_0 = \frac{1}{2} (T_1^2 + T_2^2)$  ; ce résultat se retrouve plus rapidement : les amplitudes suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  sont multipliées respectivement par  $\sqrt{T_1} \times \sqrt{T_1} = T_1$  et  $\sqrt{T_2} \times \sqrt{T_2} = T_2$ .

$T_{90} = T_1 T_2$  ; ce résultat se retrouve aussi : les amplitudes suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  sont multipliées chacune par  $\sqrt{T_1} \times \sqrt{T_2}$ .

**d.** Si  $T_1 \gg T_2$ , en ne gardant que le terme dominant on a :  $T_\alpha \simeq \frac{1}{2} T_1^2 \cos^2 \alpha$ . Alors l'éclairement  $\mathcal{E}''$  est bien proportionnel à  $\cos^2 \alpha$ , conformément à la loi de Malus.

Le montage expérimental permettant la vérification de cette loi est donné dans le cours. On trace la courbe donnant le signal du photodétecteur en fonction de  $\cos^2 \alpha$  ; selon la loi de Malus il s'agit d'une droite.

## 18.6 Quantité de mouvement du photon

1. Le champ électrique est transverse donc :

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{u}_y.$$

Le champ magnétique se calcule grâce à la relation de structure de l'onde plane dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E} = -\frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{u}_x + \frac{E_{0x}}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

L'intégrale  $\int_{t_0}^{t_0+T} \vec{E}(z,t) dt$  est nulle.

2. a.  $\vec{F} = q (\vec{E}(0,t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(0,t))$  puisque la particule reste dans le plan  $z = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{F} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} q \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(0,t) dt \\ &= \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_0+T} q \vec{v}(t) \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{E}(0,t)) dt \\ &= \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_0+T} (q \vec{E}(0,t) \cdot \vec{v}) \vec{u}_z dt - \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_0+T} (q \vec{v} \cdot \vec{u}_z) \vec{E}(0,t) dt \\ &= \frac{1}{c} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} (q \vec{E}(0,t) \cdot \vec{v}) dt \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

car  $\vec{v}$  est contenu dans un plan orthogonal à  $\vec{u}_z$ .

b. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule dans le référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  donc l'intégrale  $\int_{t_0}^{t_0+T} \vec{F} dt$  représente la quantité de mouvement cédée par le champ à la particule en une période. Or la puissance fournie par le champ à la particule est égale à  $\mathcal{P}(t) = q \vec{v}(t) \cdot \vec{E}(0,t)$  puisque la force magnétique ne travaille pas. La relation établie à la question précédente est donc équivalente à :  $\vec{p}_{cd} = \frac{1}{c} \mathcal{E}_{cd} \vec{u}_z$ .

c.  $\mathcal{E}_{cd} = Nhv$  où  $N$  est le nombre de photons absorbés pendant une période et  $\vec{p}_{cd} = N \vec{p}_{\text{photon}}$ . Finalement :  $\vec{p}_{\text{photon}} = \frac{hv}{c} \vec{u}_z$ .

## 18.7 Pression de radiation

1. L'éclairement est le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface d'aire unité orthogonale à la direction de propagation. Tous calculs faits, nous obtenons :  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$  (voir cours).

2. a. Chaque photon a une énergie  $h\nu$  donc l'énergie électromagnétique qui traverse la surface  $S$  pendant la durée  $\Delta t$  est  $\Delta U_{em} = N_0 h\nu S \Delta t$ . Elle est d'autre part égale à  $\Delta U_{em} = \mathcal{E} S \Delta t$ . Nous en déduisons :  $N_0 = \frac{\mathcal{E}}{h\nu}$ .

## CHAPITRE 18 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

**b.** La quantité de mouvement du photon incident est  $\vec{p}_i = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$ . Le photon rebondit sur la surface, la quantité de mouvement du photon réfléchi est donc  $\vec{p}_r = -\frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$ . La paroi reçoit donc la quantité de mouvement  $\delta \vec{p}_{\text{paroi}} = -\delta \vec{p}_{\text{photon}} = 2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$ .

Entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , il y a  $N_0 S \Delta t$  photons qui arrivent sur la paroi, celle-ci reçoit donc la quantité de mouvement  $\Delta \vec{p} = N_0 S \Delta t \frac{2h\nu}{c} \vec{u}_x = \vec{F} \Delta t$ . La force subie par la paroi est :  $\vec{F} = N_0 S \frac{2h\nu}{c} \vec{u}_x = 2\mathcal{E} \frac{S}{c} \vec{u}_x$ . La pression subie par la paroi est donc :  $p = 2 \frac{\mathcal{E}}{c} = \epsilon_0 E_0^2$ .

**c.** Si la paroi est totalement absorbante, elle reçoit la quantité de mouvement  $\frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$  au cours d'un choc donc la pression est dans ce cas :  $p' = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ .

**d.**  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{4\mathcal{P}}{\pi d^2} \simeq 5,1 \text{ MW.m}^{-2}$ ,  $E_0 = 62 \text{ kV.m}^{-1}$  et  $p = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ . Bien que la puissance du laser soit importante, cette pression est faible.

**3. a.** Les photons reçus et absorbés par la sphère sont ceux que recevrait un disque de rayon  $a$  perpendiculaire à  $\vec{u}_x$ ; la sphère subit donc la force que subirait ce disque c'est-à-dire :  $\vec{F} = \pi a^2 p' \vec{u}_x = \frac{\pi a^2 \mathcal{E}}{c} \vec{u}_x$ .

**b.**  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{E} 4\pi D^2 = 4,0 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .

La force gravitationnelle subie par la météorite est :  $F_{\text{grav}} = \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi a^3 \mu \frac{M_S}{r^2}$ . Elle est dirigée vers le Soleil.

À la distance  $r$  du Soleil, l'éclairement est  $\mathcal{E}(r) = \frac{\mathcal{P}_0}{4\pi r^2}$ , donc la force due à l'absorption du rayonnement solaire s'écrit :  $F_{\text{abs}} = \pi a^2 \frac{\mathcal{E}(r)}{c} = \frac{a^2}{4r^2} \frac{\mathcal{P}_0}{c}$ , dirigée en sens inverse de la force gravitationnelle.

Le rapport des deux vaut  $\alpha = \frac{3\mathcal{P}_0}{16c\mathcal{G}M_S\pi a\mu}$ . L'application numérique donne :  $\alpha \simeq 2,0 \cdot 10^{-7}$  dans le cas de la météorite et  $\alpha \simeq 5,9$  dans le cas de la poussière interstellaire. Dans le cas d'une météorite, la force due à l'absorption solaire est tout à fait négligeable devant l'attraction gravitationnelle. En revanche, dans le cas d'une poussière interstellaire, elle peut devenir plus importante que celle-ci et la résultante des forces sur la poussière est dirigée à l'opposé du Soleil ; la poussière « fuit » le Soleil. C'est ce qui permet par exemple d'interpréter l'orientation de la queue des comètes vers l'extérieur de leur trajectoire autour du Soleil.

# Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma, dispersion

Dans ce chapitre on étudie la propagation d'OPPM électromagnétiques dans un milieu, c'est-à-dire un espace rempli de matière. L'exemple au programme est celui d'un plasma dilué. Dans ce cas la vitesse de propagation n'est plus égale à  $c$  et dépend de la pulsation de l'onde. C'est le phénomène de dispersion.

## 1 Onde électromagnétique plane progressive dans un plasma

### 1.1 Interaction entre une OPPM et un plasma

**Modélisation du plasma** Le plasma considéré est constitué d'ions positifs, de charge  $+e$  et de masse  $m_i$ , et d'électrons, de charge  $-e$  et de masse  $m_e$ . Le plasma est globalement neutre : il comporte donc autant d'ions que d'électrons. On note  $n_0$  la densité numérique commune aux ions et aux électrons. Cette densité est uniforme à l'équilibre. On la suppose suffisamment faible pour que les interactions entre les charges électriques du plasma puissent être négligées (hypothèse de plasma dilué).

**Modélisation de l'onde électromagnétique** On envisage la propagation dans le plasma d'une OPPM électromagnétique qu'on suppose, conformément au programme, transverse. Son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

où  $\vec{E}_0$  est orthogonal à  $\vec{k}$  puisque l'onde est transverse. Dans cette expression on connaît  $\omega$  (c'est la pulsation de l'émetteur de l'onde qui se propage), on connaît la direction et le sens du vecteur  $\vec{k}$  (parce qu'on sait où est placé l'émetteur) mais on ne connaît pas *a priori* le module d'onde  $k$ . Le but du calcul est justement de trouver l'expression de  $k$ .

L’onde propage aussi le champ magnétique de représentation complexe :

$$\underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}_0} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$$

**Mouvements des charges du plasma** Sous l’action du champ électromagnétique, les particules chargées du plasma vont se mettre en mouvement. Mais les ions sont beaucoup plus lourds que les électrons. On supposera donc qu’ils sont immobiles et on ne considérera que le mouvement des électrons. Enfin on suppose que la vitesse des électrons est très inférieure à  $c$ , célérité de la lumière dans le vide, ce qui permet d’appliquer les lois de la mécanique classique (électrons non relativistes).

Le principe fondamental de la dynamique appliquée à un électron soumis à la force de Lorentz exercée par le champ électromagnétique de l’onde est :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \underline{\vec{E}}(M, t) - e \vec{v} \wedge \underline{\vec{B}}(M, t) \quad (19.1)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de l’électron et  $M$  sa position.

Dans l’hypothèse où les électrons ne sont pas relativistes cette équation se simplifie parce que le terme  $\vec{v} \wedge \underline{\vec{B}}$  peut être négligé devant  $\underline{\vec{E}}$ . En effet, en notant  $E^*$  l’ordre de grandeur du champ électrique et  $B^*$  l’ordre de grandeur du champ magnétique on a  $B^* \sim \frac{E^*}{c}$  par analogie avec le cas de l’OPPM dans le vide (pour laquelle  $\|\underline{\vec{B}}\| = \frac{1}{c} \|\underline{\vec{E}}\|$ ). D’autre part, l’ordre de grandeur de la vitesse de l’électron  $v^*$  est tel que  $v^* \ll c$  puisque l’électron est non relativiste. Il vient donc :

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \underline{\vec{B}}\|}{\|\underline{\vec{E}}\|} \sim \frac{v^* B^*}{E^*} \sim \frac{v^*}{c} \ll 1.$$

On peut donc remplacer l’équation du mouvement (19.1) par l’approximation :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq -e \underline{\vec{E}}(M, t).$$

On s’intéresse au mouvement oscillant de l’électron sous l’action du champ de l’onde. On peut donc passer en notation complexe et poser  $\vec{v} = \text{Re}(\underline{\vec{v}})$ , avec  $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0} \exp(i\omega t)$ . On a alors :

$$m_e(i\omega) \underline{\vec{v}} \simeq -e \underline{\vec{E}}(M, t)$$

soit :

$$\underline{\vec{v}} = i \frac{e}{m_e \omega} \underline{\vec{E}}(M, t).$$

**Densité de courant volumique et densité volumique de charge** Il existe ainsi une densité de courant volumique dans le plasma qui est :

$$\underline{\vec{j}}(M, t) = -n_0 e \underline{\vec{v}} = -i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega} \underline{\vec{E}}(M, t) .$$

On remarque que la densité de courant créée par l’OPPM est elle-même une OPPM.

Quelle est la densité volumique de charge ? On peut la chercher aussi sous la forme d'une OPPM en notation complexe. L'équation de Maxwell-Gauss permet alors d'écrire :

$$\underline{\rho}(M, t) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \epsilon_0 (-i \vec{k} \cdot \vec{E}) = 0,$$

puisque le champ électrique de l'onde est transversal par hypothèse. Le plasma reste donc localement neutre en présence de l'onde électromagnétique.

### Remarques

- On définit la conductivité complexe du plasma  $\underline{\gamma} = -i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega}$  telle que  $\underline{j} = \underline{\gamma} \underline{E}$ . Elle est imaginaire pure donc :

$$\langle \underline{j} \cdot \underline{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{j} \cdot \underline{E}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{\gamma} \underline{E} \cdot \underline{E}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{\gamma}) |\underline{E}|^2 = 0.$$

La puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au plasma est nulle.

- En tenant compte du mouvement des ions, il vient :  $\underline{j} = -i \frac{n_0 e^2}{\omega} \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \underline{E}$ .

Comme  $m_i \gg m_e$  (il y a trois ordres de grandeur de différence) l'expression obtenue en supposant les ions fixes est parfaitement valable.

## 1.2 Relation de dispersion du plasma

**Application des équations de Maxwell** On écrit les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère en représentation complexe et en tenant compte de l'expression précédente de la densité volumique de courant :

$$\begin{aligned} (\text{M.F.}) : \quad & -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i \omega \underline{\vec{B}} \\ (\text{M.A.}) : \quad & -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} (i \omega \underline{\vec{E}}) = -i \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e \omega} \underline{\vec{E}} + \frac{i \omega}{c^2} \underline{\vec{E}}. \end{aligned}$$

Effectuons le produit vectoriel de l'équation de Maxwell-Faraday par  $i \vec{k}$ . Il vient :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}.$$

 Pour continuer le calcul on doit utiliser la formule du double produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ , valable pour tous vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ .

Or,  $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}) \vec{k} - k^2 \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$ , puisque  $\underline{\vec{E}}$  est transverse. Il vient donc, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = \left( \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{\vec{E}}.$$

Finalement, le champ  $\underline{\vec{E}}$  n'étant pas nul, on a nécessairement :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e} = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e} \right).$$

Le module d’onde  $k$  d’une OPPM se propageant dans le plasma est lié à la pulsation  $\omega$  de l’onde par la **relation de dispersion** :

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2), \quad (19.2)$$

où  $\omega_p$  est la **pulsation plasma** définie par :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}. \quad (19.3)$$

**Interprétation de la relation de dispersion** La pulsation plasma joue un rôle déterminant pour la propagation :

- si  $\omega > \omega_p$ ,  $k^2 > 0$  donc  $k$  est réel :  $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ ;
- si  $\omega < \omega_p$ ,  $k^2 < 0$  donc  $k$  est une nombre complexe imaginaire pur ce qui n’est pas compatible avec la propagation d’une onde.

La pulsation plasma est une **pulsation de coupure**, valeur minimale en dessous de laquelle l’onde ne peut pas se propager dans le plasma.

### 1.3 Vitesse de phase, dispersion

#### a) Définition de la vitesse de phase

On appelle **vitesse de phase**  $v_\varphi$  la vitesse de propagation d’une OPPM.

On peut écrire le champ électrique d’une OPPM en notation complexe de la manière suivante :

$$\vec{E} = \underline{E}_0 \exp i \left( \omega \left( t - \frac{k}{\omega} \vec{u} \cdot \vec{OM} \right) - \varphi_0 \right),$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}$ . L’exponentielle étant de la forme  $f \left( t - \frac{k}{\omega} \vec{u} \cdot \vec{OM} \right)$ , il apparaît que l’OPPM se propage à la vitesse :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}. \quad (19.4)$$

Pourquoi ce nom de « vitesse de phase » ? La phase est l’argument de l’exponentielle. Si l’on suit au cours du temps un point  $M$  où la phase a une valeur constante  $\Phi$ , on a :

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_0 = \Phi \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{OM} = -\frac{\Phi + \varphi_0}{k} + \frac{\omega}{k} t = -\frac{\Phi + \varphi_0}{k} + v_\varphi t$$

donc  $M$  se déplace à la vitesse  $v_\varphi$  dans la direction et le sens de  $\vec{u}$ .

**Exemple**

La vitesse de phase d'une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide est :  $v_\varphi = c$  car  $k = \frac{\omega}{c}$ . C'est normal car toutes les OPP électromagnétiques se propagent dans le vide à la vitesse  $c$ .

**b) Phénomène de dispersion**

Il y a **dispersion** quand la vitesse de phase dépend de la pulsation  $\omega$  de l'OPPM.

Dans le vide  $v_\varphi = c$  est indépendant de  $\omega$  : il n'y a pas dispersion.

Dans le plasma, pour  $\omega > \omega_P$  :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}}.$$

La vitesse de phase diminue si  $\omega$  augmente : le plasma est un **milieu dispersif**. On remarque aussi que  $v_\varphi$  est supérieure à  $c$ , ce qui est *a priori* surprenant car la théorie de la relativité d'Einstein enseigne qu'il ne peut pas y avoir de vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. En fait  $v_\varphi$  est la vitesse d'une OPPM *qui n'est pas un objet réel* (on a vu que les ondes réelles sont des *superpositions* d'OPPM en nombre infini). Il n'est donc pas gênant que sa vitesse de propagation dépasse la vitesse de la lumière.

**Remarque**

Si  $\omega \gg \omega_P$ ,  $k \simeq \frac{\omega}{c}$  et  $v_\varphi \simeq c$ , ce qui est normal puisque les variations du champ électrique sont alors trop rapides pour être suivies par les électrons. L'onde traverse le milieu sans interagir avec lui, elle se propage comme dans le vide.

Par définition, l'**indice optique** est :

$$n = \frac{c}{v_\varphi}.$$

Pour le plasma on trouve :

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}.$$

Contrairement aux indices des milieux transparents rencontrés dans le cours d'optique, l'indice optique du plasma est inférieur à 1. Il dépend de la pulsation, parce qu'il y a dispersion.

**Remarque**

De manière analogue, il est connu que l'indice optique d'un verre dépend de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  (pour une onde électromagnétique, la donnée de  $\lambda$  est équivalente à celle de  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ), ce qui provoque la dispersion géométrique de la lumière par le prisme.

## 1.4 Complément : étude du cas où $\omega > \omega_P$

### a) Structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma

L'équation de Maxwell-Faraday donne :  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{1}{v_\phi} \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}$ .

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{c^2 \omega}{\omega_p^2 - \omega^2} \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{k^2} \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = v_\phi \underline{\vec{B}} \wedge \vec{u}.$$

En prenant la partie réelle,  $k$  étant réel, on trouve les mêmes relations entre les champs réels.

$$\vec{B} = \frac{1}{v_\phi} \vec{u} \wedge \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{E} = v_\phi \vec{B} \wedge \vec{u}. \quad (19.5)$$

Ces relations expriment la structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma. Elles sont analogues aux relations de structure pour l'OPP dans le vide,  $c$  étant remplacée par la vitesse de phase dans le plasma. Cependant, alors que les relations de structure sont valables pour toutes les OPP dans le vide, elles sont valables **uniquement pour les OPPM** dans le plasma.

### b) Aspect énergétique

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \underline{\vec{E}} \wedge \left( \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}^* \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \operatorname{Re} \left( \left( \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right) \vec{k} - \underbrace{\left( \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \right) \underline{\vec{E}}^*}_{=0} \right) = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |\underline{\vec{E}}|^2 \vec{k}. \end{aligned}$$

La densité volumique d'énergie du champ électromagnétique est, en valeur moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left( \epsilon_0 \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* + \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{B}}^* \right) = \frac{\epsilon_0}{4} |\underline{\vec{E}}|^2 + \frac{k^2}{4\mu_0 \omega^2} |\underline{\vec{E}}|^2 = \frac{\epsilon_0}{4} |\underline{\vec{E}}|^2 \left( 1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right).$$

La densité volumique moyenne d'énergie cinétique des électrons est :  $\langle u_c \rangle = n_0 \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 \right\rangle$ .

Or  $\vec{v} = -i \frac{e}{m_e \omega} \underline{\vec{E}}$ . On en déduit :

$$\langle u_c \rangle = \frac{n_0 e^2}{4 m_e \omega^2} |\underline{\vec{E}}|^2 = \frac{\epsilon_0}{4} |\underline{\vec{E}}|^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

L'énergie volumique moyenne totale est donc :

$$\langle u \rangle = \langle u_{em} \rangle + \langle u_c \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |\underline{\vec{E}}|^2 \left( 1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\epsilon_0}{2} |\underline{\vec{E}}|^2,$$

en utilisant la relation de dispersion. Par analogie avec ce que nous avons vu au chapitre précédent, on définit la vitesse de propagation de l'énergie  $\vec{v}_e$  par

$$\vec{v}_e = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} \vec{k} = \frac{c^2}{\omega} \vec{k}.$$

On reviendra sur cette vitesse ultérieurement.

## 1.5 Complément : étude du cas où $\omega < \omega_P$

### a) Onde évanescante

Lorsque  $\omega < \omega_P$  le module d'onde est imaginaire pur, de la forme  $k = \pm ik''$  avec :

$$k'' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_P^2 - \omega^2}.$$

On peut donner une signification physique à ce résultat *a priori* surprenant. Pour la suite on choisit un repère cartésien tel que l'émetteur envoie l'onde dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_z$ . Ainsi :

$$\vec{k} = k \vec{u}_z = \pm i k'' \vec{u}_z.$$

Quel signe choisir ? Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} \exp(i(\omega t - (\pm i k'') z)) = \underline{\vec{E}_0} \exp(\pm k'' z) \exp(i\omega t).$$

Le signe « + » donne un champ électromagnétique qui croît exponentiellement quand la distance à l'émetteur augmente, ce qui n'est pas physique. Il faut donc prendre le signe « - ». Le champ électrique est alors :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} \exp(-k'' z) \exp(i\omega t).$$

Ce champ électrique ne se propage pas car il n'y a pas de terme de la forme «  $t - \frac{z}{v}$  » et son amplitude décroît exponentiellement. Une telle onde est appelée **onde évanescante**.

### b) Aspect énergétique

Le vecteur de Poynting moyen est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \underline{\vec{E}} \wedge \left( \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}^* \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \operatorname{Re} \left( |\underline{\vec{E}}|^2 \vec{k} - \underbrace{(\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}) \underline{\vec{E}}^*}_{=0} \right) = \frac{1}{2\mu_0 \omega} \operatorname{Re} \left( -i |\underline{\vec{E}}|^2 k'' \vec{u}_z \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

L'onde évanescante ne transporte pas d'énergie.

## 1.6 Approche documentaire : ionosphère et télécommunications

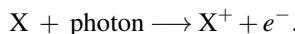
### a) L'ionosphère

**L'ionosphère** est la région la plus élevée de l'atmosphère, comprise entre 80 et 800 km d'altitude. Elle est soumise au rayonnement solaire direct qui provoque l'ionisation d'une partie des molécules et la formation du plasma ionosphérique.

On distingue trois couches dans l'ionosphère :

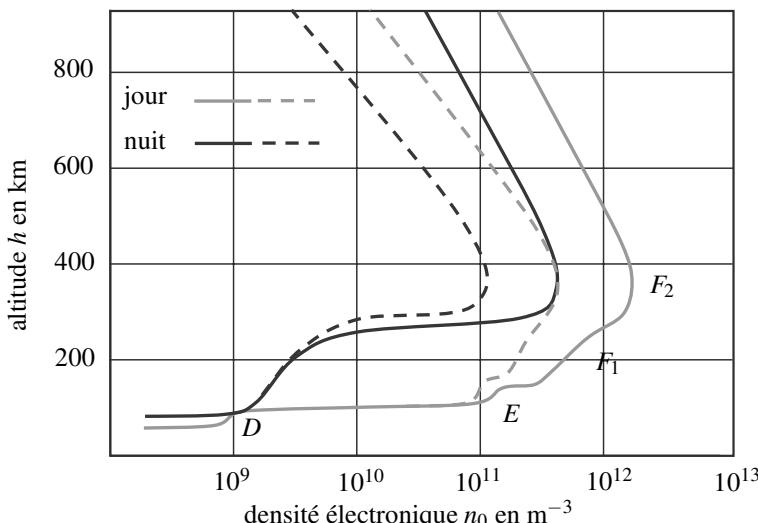
- entre 80 et 100 km la **couche D**, composée principalement de molécules de dioxygène et de diazote, partiellement ionisées,
- entre 100 et 150 km une zone de transition appelée **couche E**,
- au dessus de 150 km la **couche F** principalement composée d'oxygène atomique partiellement ionisé.

Le processus d'ionisation d'un atome ou d'une molécule X peut s'écrire :



Les photons mis en jeu sont principalement des photons du domaine ultraviolet dans les couches E et F et des photons X dans la couche D.

La densité électronique  $n_0$  au sein de l'ionosphère dépend fortement du flux solaire. Elle présente donc des variations diurnes (elle est plus grande le jour que la nuit), saisonnières (elle est plus grande l'été que l'hiver) et elle dépend de l'activité solaire qui présente des cycles d'une période moyenne de 11 ans.



**Figure 19.1** – Densité électronique  $n_0$  en fonction de l'altitude  $z$  en un lieu de latitude moyenne, le jour (courbes gris clair) et la nuit (courbes gris foncé), pour une activité solaire maximale (courbes en trait plein) ou minimale (courbes en tireté).

La figure 19.1 montre des courbes typiques de variation de  $n_0$  avec l'altitude  $z$ . Remarquer l'échelle logarithmique. Les ordres de grandeur sont :

- $n_0 \sim 10^9 \text{ m}^{-3}$  dans la couche  $D$ ,
- $n_0 \sim 10^{10} \text{ m}^{-3}$  dans la couche  $E$ ,
- $n_0 \sim 10^{11} \text{ à } 10^{12} \text{ m}^{-3}$  dans la couche  $F$ .

#### Remarque

La couche  $E$  n'existe que le jour et la couche  $F$  peut se diviser en deux couches  $F_1$  et  $F_2$  de jour pendant une période où l'activité solaire est maximale.

### b) Télécommunications à travers l'ionosphère

La communication avec un satellite situé au delà de l'ionosphère et les télécommunications par satellite nécessitent de faire propager des ondes à travers l'ionosphère. Or seule une onde de pulsation supérieure à la pulsation  $\omega_P$  peut se propager dans un plasma. D'autre part la pulsation plasma augmente avec la densité électronique, puisque :

$$\omega_P = K\sqrt{n_e} \quad \text{où} \quad K = \frac{e}{\sqrt{m_e \epsilon_0}} = 56,3 \text{ USI},$$

c'est donc dans la couche  $F$  qu'elle est la plus grande. Ainsi, la pulsation de coupure de l'ionosphère est  $(\omega_P)_{\text{couche } F} \sim 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et sa fréquence de coupure :

$$f_{C,\text{ionosphère}} = (f_P)_{\text{couche } F} \sim 10 \text{ MHz} .$$

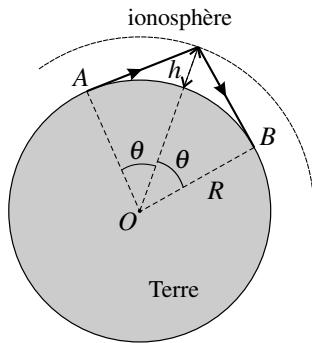
 Il faut retenir cet ordre de grandeur.

Les communications entre un satellite et le sol se font à des fréquences de quelques centaines de mégahertz, ce qui correspond bien à des fréquences pouvant se propager dans l'ionosphère. La télévision par satellite utilise des fréquences de l'ordre de 10 GHz et le système GPS deux fréquences voisines de 11 GHz pour éliminer l'erreur due à l'ionosphère (voir exercices). Toutes ces fréquences sont largement supérieures à la fréquence de coupure.

### c) Influence de l'ionosphère sur les télécommunications terrestres

Une onde de fréquence inférieure  $f_{C,\text{ionosphère}}$  envoyée en direction de l'ionosphère ne peut la traverser ; elle est réfléchie par la couche de plasma comme par un métal (voir chapitre suivant).

On utilise cette possibilité de réflexion pour augmenter la portée des émetteurs comme le montre la figure 19.2 : l'onde émise en  $A$  atteint le point  $B$  grâce à la réflexion sur une couche ionosphérique située à la hauteur  $h$  au dessus du sol. La portée est maximale si l'onde est émise horizontalement ; l'observation de la figure montre alors que :  $\cos \theta = \frac{R}{R+h}$  où  $R$  est le rayon terrestre ; on en déduit la distance entre les points  $A$  et  $B$  à la surface de la Terre :  $\widehat{AB} = 2R\theta = 2R \arccos \frac{R}{R+h}$ . Pour une onde émise dans une direction faisant l'angle  $\alpha$  avec le sol, on trouve :  $\widehat{AB} = 2R \left( \arccos \left( \frac{R}{R+h} \cos \alpha \right) - \alpha \right)$ . Numériquement :



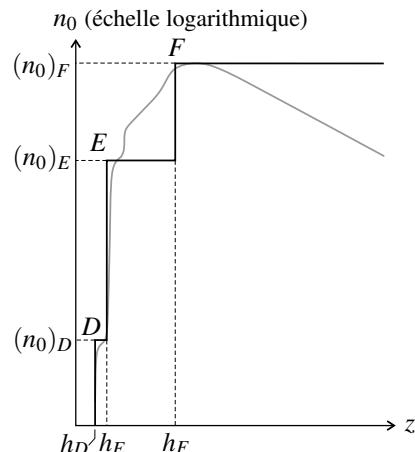
**Figure 19.2** – Réflexion d'une onde sur l'ionosphère.

- avec une réflexion sur la couche  $E$  d'altitude  $h_E = 100$  km, la portée maximale théorique vaut environ 2200 km et pour  $\alpha = \pi/8$  la distance atteinte est d'environ 450 km,
- avec une réflexion sur la couche  $F$  d'altitude  $h_F = 300$  km, la portée maximale vaut environ 3800 km et pour  $\alpha = \pi/8$  la distance atteinte est d'environ 1200 km.

Pour étudier plus précisément le phénomène on modélise l'ionosphère de manière très simplifiée en la supposant constituée par trois couches dans lesquelles la densité numérique des ions est uniforme. Les paramètres du modèles sont rassemblés dans le tableau ci-dessous ; ils sont choisis de manière à coller au plus près d'une courbe expérimentale (voir figure) correspondant à des mesures faites de jour avec une activité solaire maximale. Les caractéristiques de l'ionosphère évoluant constamment, ces valeurs sont seulement des valeurs typiques.

| Couche | Altitude en km | Densité électronique en $\text{m}^{-3}$ |
|--------|----------------|---|
| $D$    | $h_D = 50$     | $(n_0)_D = 1.10^{10}$                   |
| $E$    | $h_E = 100$    | $(n_0)_E = 1,2.10^{11}$                 |
| $F$    | $h_F = 300$    | $(n_0)_F = 1,7.10^{12}$                 |

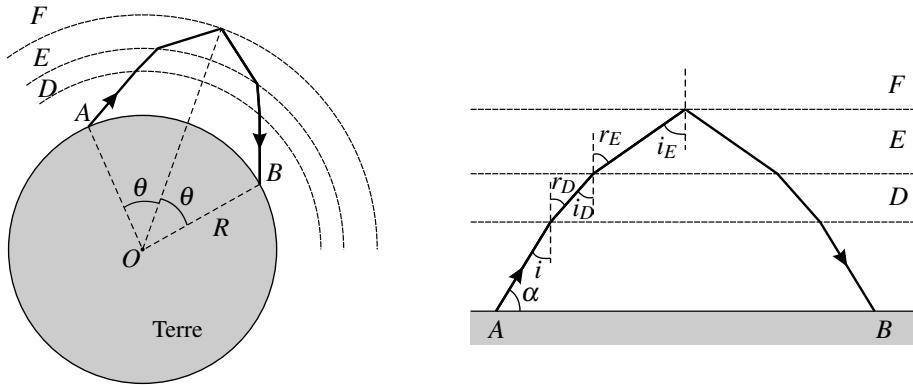
**Tableau 19.1** – Paramètres du modèle d'ionosphère



**Figure 19.3** – Densité électronique en fonction de l'altitude : courbe expérimentale (en gris) et modélisation (en noir).

Les trois couches ont des densités électroniques telles que :  $(n_0)_D < (n_0)_E < (n_0)_F$ , donc des fréquences plasma telles que :  $(f_P)_D < (f_P)_E < (f_P)_F$ , donc des indices optiques tels

que, lorsqu'ils sont définis :  $1 > n_D > n_E > n_F$ . Ainsi, une onde envoyée depuis la surface terrestre en direction de l'ionosphère est, à chaque changement de couche, soit réfractée, soit totalement réfléchie puisque l'indice de la couche suivante est plus faible. Elle ne peut être que réfléchie si sa fréquence est telle que la couche suivante ne la laisse pas se propager.



**Figure 19.4 –** Trajectoire de l'onde et modélisation simplifiée ne tenant pas compte de la courbure de la surface terrestre.

Intéressons-nous à une onde se réfléchissant sur la couche  $F$ . Cette situation est représentée sur la partie gauche de la figure 19.4. Pour simplifier les calculs on va l'étudier en ignorant la courbure de la surface terrestre, en s'appuyant sur le schéma donné sur la partie droite de cette figure. L'onde, émise dans une direction faisant l'angle  $\alpha$  avec le sol, arrive sur la couche  $D$  avec un angle d'incidence  $i = \pi/2 - \alpha$ ; elle est réfractée selon la loi de Descartes  $\sin i = n_D \sin r_D$  (en prenant l'indice de l'air atmosphérique égal à 1) puis arrive sur la couche  $E$  avec un angle d'incidence  $i_D = r_D$ , subit une deuxième réfraction avec  $n_D \sin i_D = n_E \sin r_E$  et arrive sur la couche  $F$  avec l'angle d'incidence  $i_E = r_E$ . Si la fréquence de l'onde est telle qu'elle peut se propager dans la couche  $F$  (c'est-à-dire si l'indice  $n_F$  est défini), la condition pour qu'elle soit totalement réfléchie est :

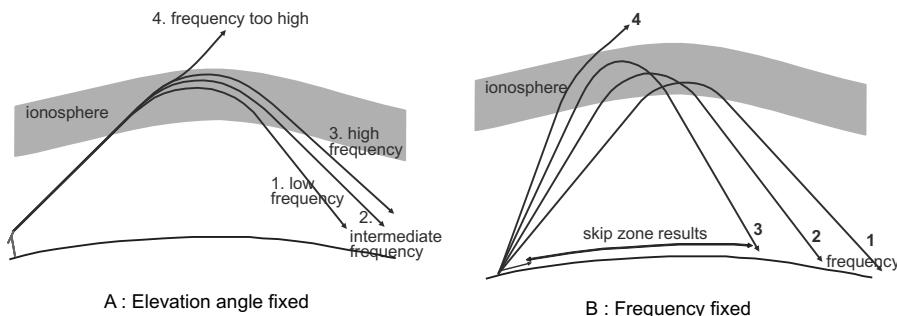
$$n_E \sin i_E > n_F \Leftrightarrow \sin i > n_F,$$

compte tenu des deux lois de Descartes précédemment écrites. Or :  $\sin i = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  et  $n_F = \sqrt{1 - \left(\frac{(f_P)_F}{f^2}\right)^2}$ ; la condition précédente s'écrit donc :  $f < \frac{(f_P)_F}{\sin \alpha}$ . Ainsi, pour « profiter » de la réflexion sur la couche  $F$ , il faut une émettre à une fréquence inférieure à une fréquence maximale qu'il est d'usage d'appeler MUF, acronyme de l'expression anglaise *maximum usable frequency*. Si l'on tient compte de la courbure de la Terre, le calcul est plus compliqué et la condition devient :  $f < \frac{(f_P)_F}{\sqrt{1 - \xi + \xi \sin^2 \alpha}}$  où  $\xi = \left(\frac{R}{R + h_F}\right)^2$ ; avec les paramètres du modèle,  $\xi = 0,91$ .

La MUF est supérieure à la fréquence plasma de la couche  $F$ . Elle dépend du temps et du

lieu ; de nombreux sites internet donnent la valeur de la fréquence  $(f_P)_F$ , appelée couramment FOF2 en n'importe quel point du globe en temps réel (ces valeurs sont fournies par des logiciels de prédition). Avec les valeurs données plus haut et  $\alpha = \pi/8$  on calcule une MUF de 31 MHz. Si l'on veut que l'onde se réfléchisse sur les couches  $E$ , il faut calculer la MUF avec la fréquence  $(f_P)_E$  de cette couche. On peut ainsi régler régler la portée en modifiant la fréquence émise.

Dans la réalité,  $n_0$  varie continument et la trajectoire de l'onde rayon est une courbe dont l'allure est schématisée sur la figure 19.5. L'altitude  $z_m$  du point le plus haut de la trajectoire est donnée par la condition :  $\sin \alpha = n(z_m)$ , où  $n(z)$  est l'indice optique du plasma à l'altitude  $z$ . Ainsi, en faisant varier l'angle d'élévation  $\alpha$  on modifie l'altitude de réflexion et par conséquent la portée de l'émission ; ceci est illustré sur la figure 19.5-C.



**Figure 19.5** – A : trajectoires de l'onde de pour un angle d'élévation  $\alpha$  fixé et différentes fréquences ; B : trajectoire de l'onde pour une fréquence fixée et une angle d'élévation variable.

Pour un trajet avec réflexion sur la couche  $F$  la fréquence doit non seulement être inférieure à la MUF, mais aussi supérieure à une fréquence appelée LUF pour *lower usable frequency*. Les raisons en sont les suivantes :

- l'onde doit pouvoir traverser la couche  $E$ ,
- les fréquences trop basses sont fortement absorbées par la couche  $D$  du fait des collisions nombreuses entre les électrons et les molécules dans cette couche.

La LUF dépend du taux d'affaiblissement maximum accepté.

### Questions

1. Quel processus explique la diminution de la densité électronique la nuit ?
2. Comment justifier l'utilisation de l'optique géométrique dans ce document ?
3. Le sol est conducteur donc réfléchit les ondes électromagnétiques. Comment peut-on en tirer parti ?
4. Justifier l'influence de la fréquence sur la figure 19.5-A.
5. Pourquoi l'absorption est-elle la plus forte dans la couche  $D$  ?

Les réponses aux questions se trouvent page 589.

## 2 Propagation d'un paquet d'ondes

Le phénomène de dispersion existe dans tous les milieux de propagation (mis à part le vide). On va étudier son influence sur les ondes réelles qui ne sont pas des ondes monochromatiques mais des superpositions d'ondes monochromatiques. On s'intéresse à la propagation dans un milieu dispersif (qui peut être un plasma par exemple) dont la relation de dispersion  $k(\omega)$  est supposée connue. On note  $s(z, t)$  une composante quelconque du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde étudiée et  $\underline{s}(z, t)$  la composante correspondante du champ électrique complexe  $\underline{\vec{E}}$  s'il est défini.

### 2.1 Le modèle du paquet d'ondes

On appelle **paquet d'ondes** la superposition d'un nombre fini ou infini d'OPPM de pulsations proches d'une pulsation moyenne  $\omega_0$ .

L'écriture mathématique la plus générale d'un paquet d'ondes se propageant dans la direction et le sens de  $\vec{u}_z$  est :

$$s(z, t) = \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)z)) d\omega \right),$$

où la fonction d'amplitude  $\underline{A}(\omega)$  ne prend de valeur appréciable que si la pulsation est un intervalle  $\left[ \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} \right]$  avec  $\delta\omega \ll \omega_0$ .

Le paquet d'ondes est un signal à durée limitée dans le temps, durée  $\tau$  d'autant plus grande que la largeur  $\delta\omega$  de l'intervalle de fréquence est petite. On montre en effet que :

$$\delta\omega \times \tau \sim 1.$$

#### Exemple

On appelle paquet d'ondes gaussien une onde telle que :

$$s(0, t) = s_0 \exp \left( -\left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \right) \cos(\omega_0 t),$$

où  $\omega_0$  et  $t_0$  sont des constantes telles que  $\omega_0 t_0 \gg 1$ . Ce signal ne prend de valeur appréciable que pour  $t$  compris entre  $-2,5t_0$  et  $2,5t_0$  (car  $\exp(-2,5^2) \simeq 0,002$ ). On peut dire qu'il dure environ  $\tau = 5t_0$ .

Pour ce signal la fonction d'amplitude est :  $\underline{A}(\omega) \simeq \frac{s_0 t_0}{2\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{1}{4} t_0^2 (\omega - \omega_0)^2 \right)$ . Elle est quasiment nulle en dehors de l'intervalle  $\left[ \omega_0 - \frac{5}{t_0}, \omega_0 + \frac{5}{t_0} \right]$  : il s'agit d'un paquet d'ondes de largeur  $\delta\omega = \frac{10}{t_0} \ll \omega_0$ . On a :  $\delta\omega \times \tau = 2$ .

Ce signal et son spectre sont représentés sur la figure 19.6 dans le cas où  $\omega_0 t_0 = 10\pi$

(valeur pas trop grande pour que les oscillations du signal restent visibles).

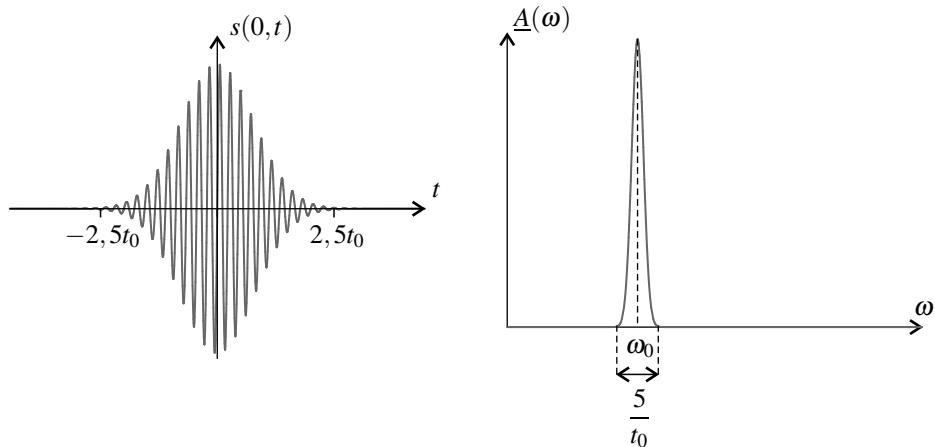


Figure 19.6 – Signal comportant deux fréquences voisines.

## 2.2 Étude de deux exemples

### a) Signal comportant deux fréquences voisines

On considère tout d'abord le cas facilement calculable (mais peu réaliste) où le paquet d'ondes se réduit à deux composantes sinusoïdales de pulsations  $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}$  et  $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}$  avec  $\delta\omega \ll \omega_0$ , et de même amplitude  $s_0$  :

$$s(z, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k(\omega_1)z) + s_0 \cos(\omega_2 t - k(\omega_2)z + \varphi).$$

Puisque  $\delta\omega$  est petit on peut écrire au premier ordre, en posant  $k_0 = k(\omega_0)$  :

$$k(\omega_1) = k_0 - \frac{\delta k}{2} \quad \text{et} \quad k(\omega_2) = k_0 + \frac{\delta k}{2} \quad \text{avec} \quad \delta k = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \delta\omega.$$

En utilisant la formule de trigonométrie :  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$  on peut écrire  $s(z, t)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} s(z, t) &= 2s_0 \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k(\omega_1) + k(\omega_2)}{2} z + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k(\omega_1) - k(\omega_2)}{2} z - \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= 2s_0 \cos \left( \omega_0 t - k_0 z + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\delta\omega}{2} t - \frac{\delta k}{2} z + \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

La pulsation  $\omega_0$  du premier terme est très supérieure à la pulsation  $\frac{\delta\omega}{2}$  du second terme. Les variations temporelles du premier terme sont donc beaucoup plus rapides que celles du

second : le signal est constitué d'une sinusoïde de période  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , dont l'amplitude est

modulée par une sinusoïde de période  $T_{\text{mod}} = \frac{4\pi}{\delta\omega}$  beaucoup plus grande. Sur la figure 19.7, la sinusoïde qui oscille lentement « enveloppe » la sinusoïde qui oscille rapidement.

Le premier terme est une onde plane progressive monochromatique de célérité  $\frac{\omega_0}{k_0}$ , qui n'est autre que la vitesse de phase  $v_\phi(\omega_0)$  pour la pulsation moyenne  $\omega_0$ . Le second terme est une onde plane progressive monochromatique de célérité :

$$\frac{\delta\omega}{\delta k} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{1}{\left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}}.$$

Cette vitesse est appelée vitesse de groupe et notée  $v_g(\omega_0)$ .

On peut observer ces deux vitesses sur la figure 19.7 où le signal est représenté aux instants  $t = 0$  et  $t = \frac{5\pi}{\omega_0} = t_1$ . Entre ces deux instants la crête qui est en  $z = 0$  à  $t = 0$  s'est déplacée de  $\Delta z_1 = v_\phi(\omega_0)t_1$ , alors que le point d'annulation de l'enveloppe s'est déplacé de  $\Delta z_2 = v_g(\omega_0)t_1$ .

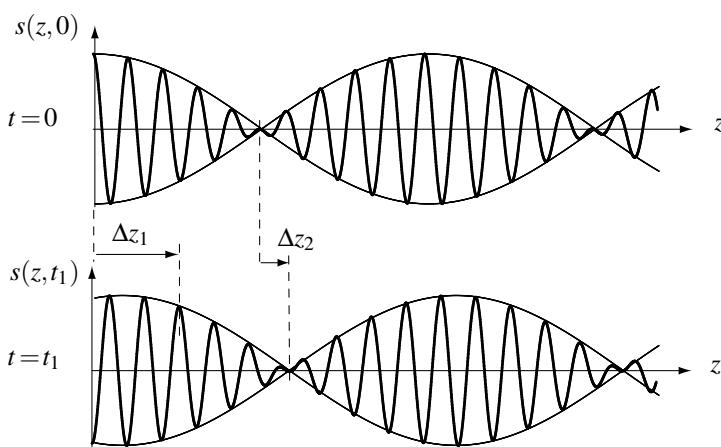
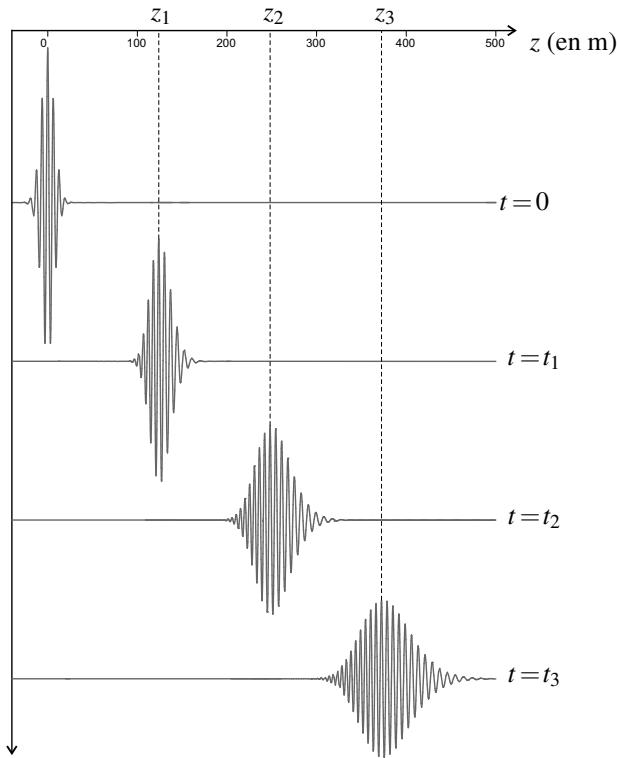


Figure 19.7 – Signal comportant deux fréquences voisines.

### b) Propagation d'un paquet d'ondes gaussien

La figure 19.8 montre la propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans un milieu de propagation ayant la relation de dispersion :  $k(\omega) = \alpha\omega^2$  où  $\alpha$  est une constante. Pour la figure on a pris :  $\omega_0 = 250 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $t_0 = 0,08 \text{ s}$  et  $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ USI}$ . Les instants successifs sont :  $t_1 = 1 \text{ s}$ ,  $t_2 = 2 \text{ s}$  et  $t_3 = 3 \text{ s}$ .



**Figure 19.8** – Propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans un milieu dispersif.

**Vitesse du paquet d'ondes** Le paquet d'ondes est localisé dans l'espace. Il se déplace dans le sens positif le long de l'axe ( $Oz$ ) avec une vitesse que l'on peut évaluer, en mesurant les positions  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  du maximum du signal aux instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  (ce maximum est en 0 à  $t = 0$ ). On trouve :

$$v_{\text{paquet}} = \frac{z_1}{t_1} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} = 124 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

À quoi correspond cette valeur ? La vitesse de phase pour la pulsation moyenne du paquet d'ondes  $\omega_0$  est :

$$v_\varphi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} = \frac{1}{\alpha\omega_0} = 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ce n'est pas cette vitesse que l'on a mesurée car elle est deux fois plus grande. La vitesse de groupe trouvée au paragraphe précédent est :

$$v_g(\omega_0) = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}} = \frac{1}{2\alpha\omega_0} = 125 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse de groupe est bien la vitesse du paquet d'ondes .

**Déformation du paquet d'ondes** On observe aussi que l'extension spatiale du paquet d'ondes augmente au fur et à mesure qu'il se propage et que sa valeur maximale diminue. Ceci est dû au fait que la vitesse de groupe  $v_g(\omega) = \frac{1}{2\alpha\omega}$  dépend de  $\omega$ . Elle diminue avec  $\omega$  donc les ondes ayant les plus faibles pulsations se propagent le plus rapidement; or ce sont celles qui ont les plus grandes longueurs d'onde puisque  $\lambda = v_\phi T = v_\phi \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\alpha\omega^2}$ . On peut effectivement observer que les oscillations spatiales sont plus écartées à l'avant du paquet d'ondes et plus resserrées à l'arrière.

## 2.3 Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

On admet la généralité des résultats observés sur les exemples précédents :

Un paquet d'ondes se met sous la forme d'une onde moyenne se propageant à la vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$  dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{1}{\left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}}.$$

De plus, si la vitesse de groupe dépend elle aussi de la pulsation, le paquet d'ondes se propage en se déformant.

La vitesse de groupe, vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes, a une importance pratique très grande car il s'agit aussi de la **vitesse de l'information**. Par exemple :

- dans une transmission par modulation d'amplitude, l'information est contenue dans les variations d'amplitude de l'onde, donc dans l'enveloppe du paquet d'ondes (qui a dans ce cas une très grande durée),
- dans une transmission numérique, l'information est une série de bits correspondant chacun à une impulsion courte donc à un paquet d'ondes de durée très brève.

Pour cette raison, la vitesse de groupe est obligatoirement inférieure à la célérité de la lumière dans le vide  $c$  pour respecter la théorie de la relativité d'Einstein.

### Expérience

À l'entrée d'un câble de transmission de signaux électriques (câble coaxial), on envoie une impulsion rectangulaire. Le signal est observé à la sortie du câble de longueur 100 m. Le signal d'entrée est relié à l'entrée CH1 de l'oscilloscope, le signal de sortie à la voie CH2 (voir figure 19.9).

On observe bien la déformation et l'atténuation du signal.

On peut aussi déterminer la **vitesse de groupe** du signal : l'impulsion met  $\Delta t = 500$  ns à parcourir la longueur  $L = 100$  m, la vitesse de groupe, c'est-à-dire la vitesse de

propagation de l'enveloppe du signal, est donc égale  $v_g = \frac{L}{\Delta t} = 2 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

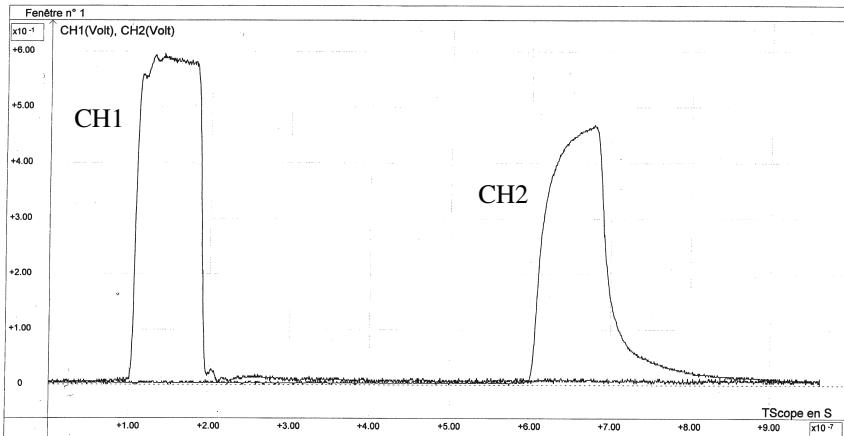


Figure 19.9 – Propagation d'une impulsion dans un câble de transmission.

## 2.4 Complément : étude théorique de l'évolution du paquet d'ondes

On considère un paquet d'ondes quelconque en notation complexe :

$$\underline{s}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i(\omega t - k(\omega)z) \, d\omega,$$

où l'on restreint le domaine d'intégration à l'intervalle sur lequel la fonction d'amplitude est non nulle. Cette expression peut également se mettre sous la forme :

$$\underline{s}(z, t) = \exp i(\omega_0 t - k_0 z) \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i((\omega - \omega_0)t - (k(\omega) - k_0)z) \, d\omega,$$

où  $k_0 = k(\omega_0)$ . C'est le produit de l'onde moyenne  $\exp i(\omega_0 t - k_0 z)$  par la fonction :

$$\mathcal{J}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i((\omega - \omega_0)t - (k(\omega) - k_0)z) \, d\omega.$$

La grandeur  $\omega - \omega_0$  varie dans l'intervalle  $\left[-\frac{\delta\omega}{2}, \frac{\delta\omega}{2}\right]$  avec  $\delta\omega \ll \omega_0$  donc les variations temporelles de  $\mathcal{J}(z, t)$  sont lentes devant celles de l'onde moyenne. Ainsi  $\mathcal{J}(z, t)$  « enveloppe » les oscillations de l'onde moyenne.

La pulsation  $\omega$  restant proche de  $\omega_0$ , on peut effectuer un développement limité de  $k(\omega)$  au voisinage de  $\omega_0$ , en se limitant, dans un premier temps, au premier ordre :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}.$$

L'expression de  $\mathcal{J}(z, t)$  devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(z, t) &= \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp \left( i(\omega - \omega_0) \left( t - z \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right) \right) d\omega \\ &= \mathcal{J} \left( 0, t - z \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right). \end{aligned}$$

L'enveloppe de l'onde  $\mathcal{J}(z, t)$  se propage à la vitesse  $v_g(\omega_0) = \frac{1}{\left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}$ , qui

est la vitesse de groupe. À cet ordre d'approximation, la fonction  $\mathcal{J}(z, t)$  se propage sans se déformer.

### Remarque

Si on pousse le développement limité à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k_0 + (\omega - \omega_0) \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left( \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \\ &= k_0 + (\omega - \omega_0) \left( \frac{1}{v_g(\omega_0)} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \left( \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \right). \end{aligned}$$

L'expression de  $\mathcal{J}(z, t)$  devient :

$$\mathcal{J}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega - \omega_0)(t - \alpha(\omega)z)) d\omega$$

$$\text{où } \alpha(\omega) = \frac{1}{v_g(\omega_0)} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \left( \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}.$$

Pour terminer le calcul, il faudrait connaître  $\underline{A}(\omega)$  et  $\alpha(\omega)$ .

La vitesse de propagation  $\frac{1}{\alpha(\omega)}$  dépend de  $\omega$  : la fonction  $\mathcal{J}(z, t)$  change au cours de la propagation, le paquet d'ondes se déforme.

## 2.5 Retour sur la propagation dans un plasma

On a trouvé plus haut la relation de dispersion du plasma :

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_P^2}.$$

La vitesse de phase est :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}}.$

La vitesse de groupe est :  $v_g = \frac{dk}{d\omega} = \frac{c^2 k}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_P^2}} = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}}{\omega} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}.$

On a bien comme annoncé  $v_g < c$ . Les vitesses de phase et de groupe sont liées par la relation :

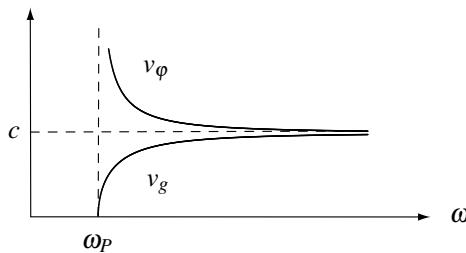
$$v_g v_\varphi = c^2 .$$

Cette relation se démontre très facilement en différenciant la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2} \Rightarrow 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow \frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = c^2 \Leftrightarrow v_g v_\varphi = c^2.$$

Le calcul ci-dessus est d'ailleurs le moyen le plus efficace pour arriver à l'expression de la vitesse de groupe. La relation  $v_\varphi v_g = c^2$  est liée à la forme particulière de la relation de dispersion (appelée *relation de Klein-Gordon*).

Les courbes de ces vitesses en fonction de la fréquence sont données ci-dessous :



**Figure 19.10** – Vitesse de phase et vitesse de groupe.

Si  $\omega \gg \omega_P$ ,  $v_g \simeq v_\varphi \simeq c$ , l'onde se propage comme dans le vide car le champ électromagnétique varie trop rapidement pour provoquer des mouvements de charge dans le plasma.

Par ailleurs, on a démontré page 564 que la vitesse de l'énergie dans le plasma est :

$$v_e = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g.$$

Dans le plasma, pour  $\omega > \omega_P$ , la vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de groupe.

**SYNTHÈSE***SAVOIRS*

- connaître l'ordre de grandeur de la fréquence plasma de l'ionosphère
- utiliser des données sur l'ionosphère pour expliquer certains aspects des télécommunications

*SAVOIR-FAIRE*

- utiliser la notation complexe
- établir la relation de dispersion du plasma
- décrire la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

*MOTS-CLÉS*

- |   |                    |                        |
|---|--------------------|------------------------|
| • onde plane progressive et monochromatique | • fréquence plasma | • vitesse de groupe    |
| • relation de dispersion                    | • paquet d'ondes   | • vitesse de l'énergie |
|   | • vitesse de phase |                        |

**S'ENTRAÎNER**

*Données numériques :*

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| masse de l'électron                | $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$                           |
| charge de l'électron               | $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$                              |
| permittivité du vide               | $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| vitesse de la lumière dans le vide | $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$              |

**19.1 Ondes longitudinales dans un plasma (★)**

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense en utilisant la notation complexe :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  et  $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ .

On suppose la densité volumique de charges  $\rho$  non nulle.

1. Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse  $m_e$ , associé à la densité  $n_e$  et de charge  $-e$  en faisant les approximations qui sembleront nécessaires. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe  $\gamma$  pour le plasma.

2. À l'aide des équations de Maxwell et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de  $\gamma$  en fonction de  $\omega$  et  $\epsilon_0$ .

3. Montrer que  $\vec{B} = 0$ . En déduire la position relative des vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$ . Montrer que la pulsation  $\omega$  ne peut avoir qu'une seule valeur.

**19.2 Relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe (★)**

Quelle est la forme générale d'une relation de dispersion telle que l'on ait la relation :

$$v_g \times v_\varphi = c^2 ?$$

**19.3 Vaporisation d'une cible par un laser (★)**

Dans une expérience de fusion nucléaire par confinement inertiel, une cible reçoit un rayon laser dit Mégajoule de longueur d'onde dans le vide  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ; en absorbant l'énergie de ce rayonnement, la cible se vaporise en un plasma de densité particulière en électrons  $n$ . Expliquer pourquoi  $n$  ne peut dépasser une valeur maximale  $n_{\max}$  que l'on calculera.

**19.4 Propagation dans l'ionosphère, influence du champ magnétique terrestre (★)**

Un plasma est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$ ; une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement se propage dans ce plasma dans une direction perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ .

1. L'équation de dispersion du plasma est-elle modifiée lorsque les directions du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde et de  $\vec{B}_0$  sont parallèles ou perpendiculaires ?

Dans le cas où cette théorie est modifiée, on montre que la relation de dispersion s'écrit alors :

$$k^2 c^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 - \omega_c^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2},$$

où  $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$  et  $\omega_p$  est la pulsation plasma.

**2.** Tracer l'allure de la fonction  $k^2 c^2 = f(\omega^2)$ . En déduire pour quelles pulsations des ondes peuvent réellement se propager dans le milieu.

**3.** On envoie verticalement selon ( $Ox$ ) une onde sur l'ionosphère dont la densité électro-nique  $n_0$  est supposée ici uniforme. Lorsque l'émission de l'onde est telle que la direction du champ électrique est parallèle à celle du champ magnétique terrestre  $\vec{B}_0$ , il y a écho (donc réflexion) pour une longueur d'onde émise supérieure à  $\lambda_0 = 42,70$  m. Lorsque les directions du champ électrique de l'onde et de  $\vec{B}_0$  sont perpendiculaires, l'écho se produit pour une longueur d'onde supérieure à  $\lambda'_0 = 38,90$  m.

**a.** Déduire de ces deux mesures le nombre  $n_0$  d'électrons par mètre cube de l'ionosphère ainsi que la valeur du champ magnétique  $B_0$  qui y règne.

**b.** Le champ magnétique terrestre décroît en fonction de l'altitude suivant la loi :

$B_0(x) = B_0(0) \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}$ , où  $B_0(0) = 4700 \cdot 10^{-8}$  T est sa valeur au sol et  $R = 6360$  km le rayon terrestre. Calculer l'altitude de la couche réfléchissante. Quel peut être l'intérêt de cette propriété ?

## APPROFONDIR

### 19.5 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant dilué (★★)

On se propose d'étudier le modèle simplifié suivant de la propagation d'une onde dans un milieu neutre dilué. On appelle  $n_0$  le nombre d'électrons par unité de volume et on suppose que seul le mouvement des électrons est à prendre en compte. Sous l'action du champ électrique  $\vec{E} = E\vec{u}_x$ , les électrons ont un mouvement qui lui est colinéaire et que l'on peut caractériser par l'équation différentielle :  $m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f \frac{dx}{dt} - eE$  où  $x$  est le déplacement de l'électron,  $k$  et  $f$  des constantes du modèle. On posera :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m_e}$ ,  $\tau = \frac{m_e}{f}$  et  $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$ .

Une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$ , de polarisation rectiligne selon  $\vec{u}_x$ , se propage dans la direction de  $\vec{u}_z$  dans ce milieu, son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x.$$

**1.** Comparer l'équation différentielle à celle du modèle de plasma vu dans le cours. Quels sont les termes supplémentaires ? À quelles propriétés physiques correspondent-ils ?

**2.** Chercher la solution correspondant au régime forcé, soit :

$$\underline{x}(z, t) = \underline{x}_0 \exp i(\omega t - kz).$$

**3.** En déduire, en notation complexe, la densité volumique de courant due au mouvement des électrons. Montrer que la densité volumique de charge est nulle.

**4.** À partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles liant  $\vec{E}$  et la densité volumique de courant.

## CHAPITRE 19 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN PLASMA, DISPERSION

**5.** En déduire la relation de dispersion du milieu. Quel phénomène traduit le fait que  $k$  est complexe ?

**6.** Dans cette question, on suppose que  $f = 0$  et que  $\omega_0 \gg \omega$ . L'indice du milieu pour la pulsation  $\omega$  est défini par la relation :  $v_\varphi = \frac{c}{n}$  où  $v_\varphi$  est la vitesse de phase.

Montrer que le modèle permet de retrouver la loi de Cauchy :  $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide d'une onde de pulsation  $\omega$  et  $A$  et  $B$  des constantes caractéristiques du milieu. Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $\omega_P$  et  $c$ .

### 19.6 Correction ionosphérique pour le système G.P.S. (★)

Un satellite  $S$ , supposé ponctuel, se trouve au-dessus de l'ionosphère, d'épaisseur  $H$ , à la verticale d'un point  $P$  de la terre. On note  $D$  la distance  $SP$ . On assimile la partie de l'atmosphère autre que l'ionosphère au vide. On note  $f_P$  la fréquence plasma de l'ionosphère.

**1.** Le satellite émet simultanément à  $t = 0$  deux paquets d'ondes très étroits, centrés autour de deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  telles que :  $f_1 > f_2 \gg f_P$ . Ils arrivent en  $P$  aux dates  $t_1$  et  $t_2$  respectivement. Exprimer en fonction de  $H$ ,  $c$ ,  $f_P$ ,  $f_1$  et  $f_2$  le décalage temporel  $\Delta t = t_2 - t_1$  entre la réception des deux signaux en  $P$ . Simplifier cette expression en remarquant qu'au voisinage de 0 on a :  $(1 - x)^k \simeq 1 - kx$ .

**2.** Établir l'expression du temps  $t$  mis par une onde de fréquence  $f \gg f_P$  pour parvenir du satellite jusqu'au point  $P$  en fonction de  $D$ ,  $H$ ,  $f$  et  $f_P$ .

**3.** En déduire à l'aide des résultats précédents que  $D = ct - d$ , où l'on exprimera  $d$  en fonction de  $c$ ,  $\Delta t$ ,  $f$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .

**4.** Le terme  $d$  est appelé correction ionosphérique, il est obtenu par mesure de  $\Delta t$  en temps réel. Il est de l'ordre du cm. Commenter cette valeur pour différentes applications du G.P.S. dont vous avez connaissance.

### 19.7 Dispersion dans le plasma interstellaire (★★)

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse  $m_e$ , de charge  $-e$ , de nombre volumique  $n_0$ , en mouvement non relativiste, et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes électromagnétiques. Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de Maxwell sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques (appelées OPPM dans la suite) de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , de pulsation  $\omega$  :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}_0} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

et

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}_0} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)).$$

**1. a.** Montrer que de telles solutions n'existent que si la densité de courant  $\vec{j}$  des électrons est elle-même une OPPM de même vecteur d'onde et de même pulsation, c'est-à-dire de la forme :  $\underline{\vec{j}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{j}_0} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ .

**b.** Montrer que  $\underline{\vec{j}}$  est orthogonal à  $\vec{k}$ .

**2.** Écrire l'équation du mouvement de l'électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable. Montrer que les vecteurs  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont colinéaires et déterminer la conductivité  $\underline{\sigma}$  du plasma. Commenter.

**3.** À l'aide des équations de Maxwell, exprimer  $\vec{j}_0$  en fonction de  $\omega$ ,  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$ . En déduire une nouvelle expression de  $\underline{\sigma}$ .

**4.** En déduire la relation de dispersion  $\omega(k)$ . En posant  $K = \sqrt{\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}}$ , établir les expressions des vitesses de phase et de groupe des ondes électromagnétiques dans le plasma. Quelle relation vérifient-elles ?

**5.** Deux trains d'ondes de longueurs d'onde respectives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 > \lambda_1$  sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance  $L$ . En supposant  $K^2 \lambda_1^2 \ll 1$  et  $K^2 \lambda_2^2 \ll 1$ , montrer que le terme principal dans la différence  $\delta t = t_2 - t_1$  des temps de réception des deux signaux est donné par :

$$\delta t = \frac{LK^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2).$$

*Application numérique* : des mesures de dispersion à partir de signaux émis par le pulsar du Crabe conduisent à une limite supérieure égale à  $2,8 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$  pour le nombre volumique  $n$  des électrons du plasma interstellaire. Quelle serait dans ces conditions la limite supérieure de  $\delta t$  pour  $\lambda_1 = 0,4 \text{ }\mu\text{m}$  et  $\lambda_2 = 0,8 \text{ }\mu\text{m}$  et des signaux émis par une étoile située à  $L = 10^3$  années-lumière ?

## CORRIGÉS

## 19.1 Ondes longitudinales dans un plasma

1. Voir le cours. On trouve  $\underline{\gamma} = -\frac{i n_0 e^2}{m_e \omega}$ .

2. L'équation locale de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss donnent, compte tenu de la relation  $\underline{j} = \underline{\gamma} \underline{E}$  :

$$\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \frac{\underline{\gamma}}{\epsilon_0} \underline{\rho} = 0 \text{ soit } \left( i\omega + \frac{\underline{\gamma}}{\epsilon_0} \right) \underline{\rho} = 0.$$

Puisque  $\underline{\rho}$  n'est pas nul,  $\underline{\gamma} = -i\omega \epsilon_0$ .

3. Dans ce cas,  $\underline{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = (\underline{\gamma} + i\omega \epsilon_0) \underline{E} = \vec{0}$ . Donc l'équation de Maxwell-Ampère donne :  $\vec{\text{rot}} \underline{B} = \vec{0}$ . Finalement, le champ magnétique est à divergence nulle et à rotationnel nul. En notations complexes, cela donne :  $\vec{k} \cdot \underline{B} = 0$  et  $\vec{k} \wedge \underline{B} = \vec{0}$ . Le champ  $\underline{B}$  est nul. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\vec{\text{rot}} \underline{E} = \vec{0}$  donc  $\underline{E}$  et  $\vec{k}$  sont parallèles : le champ est longitudinal.

4. On égalise les deux expressions de  $\underline{\gamma}$  et on obtient :  $\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} = \omega_p^2$ . L'onde longitudinale est nécessairement de pulsation égale à la pulsation plasma.

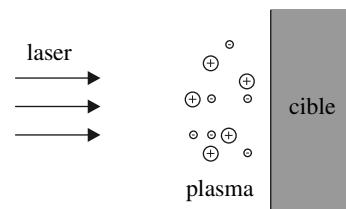
## 19.2 Relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe

$v_g \times v_\varphi = \frac{d\omega}{dk} \frac{\omega}{k} = \frac{d(\omega^2)}{d(k^2)}$ . La relation  $v_g \times v_\varphi = c^2$  s'écrit  $d(\omega^2) = c^2 d(k^2)$  ce qui est équivalent à  $\omega^2 = c^2 k^2 + C$  où  $C$  est une constante.

## 19.3 Vaporisation d'une cible par un laser

La pulsation de coupure  $\omega_p$  du plasma croît en même temps que la densité particulaire des électrons  $n_0$  ; lorsque  $\omega_p$  atteint la pulsation  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  du laser, son rayonnement ne peut plus traverser le plasma. La valeur maximale de  $n_0$  est donc :

$$n_{0,\max} = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_e}{e^2 \lambda^2} = 1,1 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}.$$



## 19.4 Propagation dans l'ionosphère, influence du champ magnétique terrestre

1. Le mouvement des électrons en l'absence du champ  $\vec{B}_0$  est parallèle au champ  $\vec{E}$  ; si  $\vec{B}_0$  est parallèle à  $\vec{E}$  la force magnétique est nulle et ce mouvement n'est pas modifié. La relation de dispersion est modifiée pour  $\vec{E}$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ .

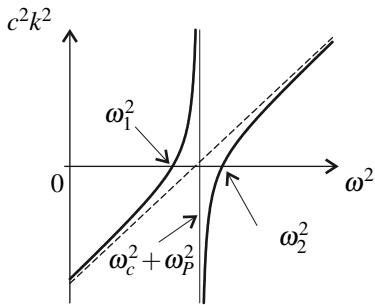
**2.** La courbe admet une asymptote verticale pour la pulsation  $\sqrt{\omega_c^2 + \omega_P^2}$ ; elle s'annule pour les pulsations :

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_P^2})$$

et

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_P^2}).$$

La courbe de dispersion du plasma en l'absence du champ  $\vec{B}_0$  est tracée en tireté.



Les pulsations pouvant se propager sont celles pour lesquelles  $k^2 > 0$ ; elles sont comprises dans l'intervalle  $[\omega_1, \sqrt{\omega_c^2 + \omega_P^2}]$  ou dans l'intervalle  $[\omega_2, \infty]$ .

**3. a.** Pour l'onde polarisée parallèlement au champ magnétique terrestre, la réflexion a lieu pour une pulsation inférieure à la pulsation plasma  $\omega_P$ . Ainsi,  $\omega_P = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$  ce qui s'écrit

$$\frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e} = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_0^2} \text{ d'où } n_0 = \frac{4\pi^2 m_e}{\mu_0 e^2 \lambda_0^2} = 6,116 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}.$$

Dans le cas de l'onde polarisée perpendiculairement au champ magnétique, la réflexion a lieu pour une longueur d'onde  $\lambda'_0$  plus faible donc une pulsation plus élevée. C'est la pulsation  $\omega_2$  (et non  $\omega_1$ ) donc  $\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda'_0}$ . On en tire :

$$\omega_c = \frac{\omega_2^2 - \omega_P^2}{\omega_2} = \frac{2\pi c (\lambda_0^2 - \lambda'^2_0)}{\lambda'_0 \lambda_0^2} = 8,235 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{puis} \quad B_0 = \frac{m_e \omega_c}{e} = 4,683 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

**b.** L'altitude de la couche est :  $x = R \sqrt{\left( \frac{B_0}{B(0)} \right)^{-2/3} - 1} \simeq 300 \text{ km.}$  On peut ainsi mesurer l'altitude de la couche ionisée.

### 19.5 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant dilué

**1.** L'équation différentielle est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti excité par la force du champ électrique. Par rapport au modèle du plasma, il y a deux termes supplémentaires :

- le terme  $-kx$  qui est une force de rappel modélisant le fait que l'électron est lié à une molécule fixe;
- le terme  $-f \frac{dx}{dt}$  qui est une force de friction traduisant une perte d'énergie pour l'électron (si l'électron a un mouvement d'accélération non nulle, il y a notamment une perte d'énergie par rayonnement, voir le chapitre sur le rayonnement).

Comme dans le cas du plasma on néglige l'action du champ magnétique de l'onde. Ce modèle est appelé modèle de l'électron élastiquement lié car la force de rappel est analogue à une force élastique.

## CHAPITRE 19 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN PLASMA, DISPERSION

**2.** On cherche une solution en régime forcé :  $\underline{x}(z, t) = x_0 \exp i(\omega t - kz)$ . L'équation différentielle s'écrit, le terme  $\exp(ikz)$  étant constant car le mouvement est suivant ( $Ox$ ) :

$$-m_e \omega^2 \underline{x} = -k\underline{x} - \frac{im_e \omega}{\tau} \underline{x} - e\underline{E} \Leftrightarrow \underline{x} = \frac{-eE_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \exp i(\omega t - kz).$$

**3.** La densité de courant due à ce mouvement des électrons est :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= n_0(-e) \frac{dx}{dt} \vec{u}_x = \frac{i\omega \frac{n_0 e^2 E_0}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x \\ &= \frac{-i\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega}{\tau}} \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x. \end{aligned}$$

La densité volumique de charge est nulle puisque le champ électrique est transversal : plus précisément, il est de la forme  $E \vec{u}_x$  et dépend uniquement de  $z$  et  $t$  donc :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0$ . Alors, d'après l'équation de Maxwell-Gauss,  $\rho = 0$ .

**4.** On suit la méthode qui permet d'établir l'équation de d'Alembert dans le vide, mais ici la densité volumique de courant est non nulle. On écrit donc :

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E},$$

et en utilisant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

En comparant ces deux équation on trouve :  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ .

En notation complexe cette équation s'écrit :  $\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = \mu_0(i\omega) \vec{j}$ . En utilisant l'expression ci-dessus de la densité volumique de courant, on déduit la relation :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega}{\tau}} \right).$$

Cette relation conduit à un vecteur d'onde complexe que l'on note  $k = k' - ik''$ .

L'expression du champ électrique est alors  $\underline{E} = E_0 \exp(-k'z) \exp i(\omega t - k''z)$ . On vérifie facilement que  $k'k'' = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(k^2)$  est positif. Pour une onde se propageant dans la direction de

$\vec{u}_z$ ,  $k'$  et  $k''$  sont positifs ; la partie imaginaire du vecteur d'onde donne un terme en exponentielle décroissante : l'amplitude du champ électrique diminue. Cette diminution correspond à une perte d'énergie de l'onde, énergie qui est absorbée par le milieu. C'est le phénomène d'absorption. (voir chapitre suivant).

5. Par définition :  $n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck'}{\omega}$ .

Dans le cas où  $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$ ,  $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$ . Si de plus  $\omega_0 \gg \omega$ , on peut écrire en se limitant aux termes du deuxième ordre en  $\frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \simeq \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega_0^4}} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ &\simeq \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} + 2\pi^2 c^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

car  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ . On trouve la loi de Cauchy avec :  $A = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}$  et  $B = 2\pi^2 c^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}$ .

### 19.6 Correction ionosphérique pour le système G.P.S.

1. Dans la partie de l'atmosphère autre que l'ionosphère les deux paquets d'ondes se déplacent à la même vitesse  $c$  (dans le vide la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont toutes les deux égales à  $c$ ). Dans l'ionosphère un paquet d'ondes de fréquence moyenne  $f$  se propage avec la vitesse de groupe :  $v_g(f) = c \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}$ . Le décalage des dates de réception est dû à la traversée de l'épaisseur  $H$  de l'ionosphère. Ainsi :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{H}{v_g(f_1)} - \frac{H}{v_g(f_2)} = \frac{H}{c} \left( \left( 1 - \frac{f_p^2}{f_2^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 - \frac{f_p^2}{f_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Or,  $f_1 > f_2 \gg f_p$ , donc :  $\Delta t \simeq \frac{H}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{f_p^2}{f_2^2} - \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{f_p^2}{f_1^2} \right) \right) = \frac{H f_p^2}{2c} \left( \frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right)$ .

2. Il s'agit encore d'un paquet d'ondes, donc la vitesse à utiliser est la vitesse de groupe. Ainsi :  $t = \frac{D - H}{c} + \frac{H}{v_g(f)} = \frac{D}{c} + H \left( \left( 1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \simeq \frac{D}{c} + \frac{H}{c} \frac{f_p^2}{2f^2}$ .

3. Le système G.P.S. mesure le temps  $t$  pour calculer la distance. La formule sans correction est  $D = ct$  mais en réalité :  $D = ct - H \frac{f_p^2}{2f^2} = ct - d$ . On ne connaît ni  $f_p$  ni  $H$  (qui varient dans

## CHAPITRE 19 – ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN PLASMA, DISPERSION

le temps) mais on peut déduire  $Hf_P^2$  de la mesure de  $\Delta t$  :  $Hf_P^2 = 2c\Delta t \frac{f_2^2 f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}$ . La correction ionosphérique est finalement :  $d = c\Delta t \frac{f_1^2 f_2^2}{f^2(f_1^2 - f_2^2)}$ .

**4.** Pour les applications grand public comme la localisation d'une automobile cette correction n'est pas nécessaire. En revanche pour les applications de recherche scientifique comme la sismologie cette correction doit être prise en compte.

### 19.7 Dispersion dans le plasma interstellaire



La convention de notation complexe utilisée dans cet exercice est différente de celle qui est utilisée dans le cours.

**1. a.** L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, avec la convention de notation complexe de l'énoncé :  $i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} - i\epsilon_0 \omega \vec{E})$  soit :

$$\vec{j} = i\epsilon_0 c^2 \left( \vec{k} \wedge \vec{B}_0 + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \right) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)).$$

**b.** L'équation locale de conservation de la charge s'écrit ici  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  puisque le milieu reste localement neutre. En notation complexe, elle devient  $i\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$ ; le vecteur  $\vec{j}$  est donc orthogonal à  $\vec{k}$ .

**2.** Les électrons étant non relativistes, la force magnétique est négligeable devant la force électrique et le champ électrique apparaît uniforme à l'échelle du déplacement des électrons (voir cours). L'équation du mouvement d'un électron s'écrit donc, en notation complexe :

$-im_e \omega \vec{v} = -e \vec{E}$ . Sachant que  $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$ , on obtient :  $\vec{j} = i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega} \vec{E}$ . La conductivité du plasma est donc égale à  $\underline{\sigma} = i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega}$ . Elle est imaginaire pure : le vecteur densité volumique de courant et le champ électrique sont en quadrature de phase, la puissance moyenne fournie par le champ au plasma est donc nulle (c'est normal car on n'a pris en compte aucun effet dissipatif dans l'équation du mouvement).

**3.** L'équation de Maxwell-Faraday donne, en notation complexe :  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ . En reportant cette expression dans la relation de la première question, on obtient :

$$\vec{j}_0 = i\epsilon_0 c^2 \left( \vec{k} \wedge \left( \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} \right) + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \right).$$

En développant le double produit vectoriel et en utilisant le fait que  $\vec{E}_0$  est orthogonal à  $\vec{k}$ , nous obtenons :

$$\vec{j}_0 = \frac{i\epsilon_0}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E}_0.$$

- 4.** Les deux équations reliant  $\vec{j}_0$  et  $\vec{E}_0$  donnent :  $\underline{\sigma} = \frac{i\varepsilon_0}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2)$ , soit  $\omega^2 = c^2 (k^2 + K^2)$ , avec  $K = \sqrt{\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}}$ . Les vitesses de phase et de groupe sont :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}}$$

et

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}}}.$$

Elles sont reliées par  $v_\varphi \times v_g = c^2$ , relation caractéristique d'une relation de dispersion de la forme ci-dessus.

- 5.** Les trains d'ondes se propagent à une vitesse égale à la vitesse de groupe. L'instant de réception d'un train d'onde est donc :  $t = \frac{L}{v_g}$ . Nous en déduisons :

$$\delta t = L \left( \frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right) = \frac{L}{c} \left( \sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2 K^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 K^2}{4\pi^2}} \right).$$

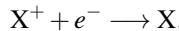
Compte tenu de l'approximation suggérée par l'énoncé, cette durée se simplifie en :

$$\delta t = \frac{L}{c} \left( \frac{\lambda_2^2 K^2}{8\pi^2} - \frac{\lambda_1^2 K^2}{8\pi^2} \right) = \frac{LK^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2).$$

- 6.** L'application numérique donne  $\delta t \leq 0,19$  ps.

### 19.8 Réponses aux questions de la page 570

- 1.** Il s'agit de la recombinaison entre un ion et un électron :



- 2.** L'approximation de l'optique géométrique est valable si la longueur d'onde est très petite devant les distances caractéristiques intervenant. Ici, il s'agit d'ondes de fréquence de l'ordre de 100 MHz, de longueur d'onde dans le vide de l'ordre du mètre et la densité électronique du plasma varie sur des distances de l'ordre de 10 km. Un traitement par l'optique géométrique est justifié.

- 3.** On peut envoyer une onde qui se réfléchit successivement sur l'ionosphère et le sol plusieurs fois. Dans de bonnes conditions on peut atteindre un point situé aux antipodes.

- 4.** Le point de réflexion est à une altitude  $z_m$  telle que  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{f_P(z_m)}{f} \right)^2}$ , en notant  $f_P(z)$  la fréquence plasma à l'altitude  $z$ . Ainsi, lorsque  $f$  augmente,  $f_P(z_m)$  augmente, donc la densité électronique  $n_0(z_m)$  augmente, donc  $z_m$  augmente.

- 5.** La couche  $D$  est plus basse donc plus dense que les autres, donc les collisions y sont plus fréquentes.



# Onde électromagnétique dans un conducteur, réflexion

Dans ce chapitre on étudie la propagation d'une onde électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur, puis la réflexion d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur dans le modèle du conducteur parfait.

## 1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur

On étudie la propagation d'une OPPM dans un conducteur en suivant la même démarche que pour le plasma au chapitre précédent. L'onde s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$$

### 1.1 Conductivité d'un métal en régime variable

On considère tout d'abord le cas où le conducteur est un métal comprenant :

- des ions positifs fixes,
- des électrons de conduction de masse  $m_e$ , de densité particulaire  $n_0$ , libres de se déplacer dans le métal.

Le métal étant un milieu dense (à la différence du plasma du chapitre précédent) on doit tenir compte des collisions entre les électrons et les ions du réseau. Pour cela on fait l'hypothèse que chaque électron est soumis de la part du réseau cristallin à une force égale à  $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'électron et  $\tau$  une constante appelée temps de collision.

**Mouvement des électrons** Le champ électromagnétique de l'onde agit sur les électrons de conduction et les met en mouvement, ce qui crée dans le métal une densité volumique de courant que l'on souhaite exprimer. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un

électron de masse  $m_e$  s'écrit :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}(M, t) - e \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t).$$

Comme dans le cas du plasma (voir chapitre précédent), on peut négliger la force exercée par le champ magnétique de l'onde si la vitesse des électrons est très inférieure à la vitesse de la lumière, ce que l'on supposera. Dans ce cas l'équation se simplifie en :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}(M, t). \quad (20.1)$$

On cherche la vitesse sous la forme  $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0} \exp(i\omega t)$ . L'équation (20.1) devient :

$$m_e(i\omega) \underline{\vec{v}} = -\frac{m_e}{\tau} \underline{\vec{v}} - e \underline{\vec{E}} \Leftrightarrow \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m_e(1+i\tau\omega)} \underline{\vec{E}}. \quad (20.2)$$

**Densité volumique de courant** La densité volumique de courant est donc égale à :

$$\underline{\vec{j}} = n_0(-e) \underline{\vec{v}} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e(1+i\tau\omega)} \underline{\vec{E}}.$$

Cette équation permet de définir une conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  par  $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}$ , soit :

$$\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m(1+i\tau\omega)}.$$

Dans le cas où  $\omega = 0$ ,  $\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}$ , c'est la conductivité  $\gamma$  en régime stationnaire. On peut en déduire l'ordre de grandeur de  $\tau$ ; en effet  $n_0$  est de l'ordre de grandeur du nombre d'atomes par unité de volume soit  $n_0 \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $\frac{e^2}{m_e} \sim 10^{-8} \text{ C}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ , pour un métal  $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  donc :  $\tau = \frac{m_e \gamma}{n_0 e^2} \sim \frac{10^7}{10^{28} \times 10^{-8}} = 10^{-13} \text{ s}$ .

Dans le cas où  $\omega\tau \ll 1$ , c'est-à-dire si  $\omega \ll \frac{1}{\tau} \simeq 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\underline{\gamma} \simeq \gamma$ . La conductivité étant réelle, on peut écrire avec les champs réels :  $\underline{\vec{j}}(M, t) = \gamma \underline{\vec{E}}(M, t)$ . Ainsi :

La loi d'Ohm locale  $\underline{\vec{j}}(M, t) = \gamma \underline{\vec{E}}(M, t)$  est applicable dans un métal pour des fréquences très inférieures à  $10^{13} \text{ Hz}$ .

### Remarque

Dans le cas où  $\omega\tau \gg 1$ ,  $\underline{\gamma} \simeq -i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega}$ . On retrouve l'expression de la conductivité complexe du plasma.

## 1.2 Relation de dispersion d'un conducteur ohmique

### a) Hypothèses

Dans la suite on considère un conducteur (métal ou autre) tel que :

- la loi d'ohm locale,  $\vec{j}(M,t) = \gamma \vec{E}(M,t)$ , est valable,
- la densité volumique de charge  $\rho(M,t)$  est nulle.

#### Remarque

L'équation locale de conservation de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div} \vec{j}(M,t) = 0$  s'écrit dans le conducteur ohmique  $\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + \gamma \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = 0$ ; en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss,  $\operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$ , on en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(M,t) = 0.$$

Cette équation différentielle fait apparaître le temps  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ . Sa solution est :

$$\rho(M,t) = \rho(M,0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Ainsi, quand on parvient à créer une densité volumique de charge dans le conducteur, elle disparaît en une durée de l'ordre de quelques  $\tau$ .

Dans le cas d'un métal bon conducteur,  $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ , on a  $\tau \sim 10^{-19}$  s. Dans le cas de l'eau de mer  $\gamma \sim 1 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  et  $\tau \sim 10^{-12}$  s. La faiblesse de  $\tau$  justifie dans les deux cas l'hypothèse  $\rho(M,t) = 0$ .

### b) Équations de Maxwell dans le conducteur

En tenant compte de ces hypothèses, les équations de Maxwell dans le conducteur s'écrivent, en notation complexe :

$$\begin{cases} (\text{M.G}) : & -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ (\text{M.}\Phi) : & -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ (\text{M.F}) : & -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \\ (\text{M.A}) : & -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 (\underline{\vec{j}} + i\omega \epsilon_0 \underline{\vec{E}}) = \mu_0 (\gamma + i\omega \epsilon_0) \underline{\vec{E}} \end{cases}.$$

### c) Obtention de la relation de dispersion

On procède comme pour le plasma au chapitre précédent en multipliant vectoriellement l'équation de Maxwell-Faraday par  $i \vec{k}$ . Il vient :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}};$$

or  $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}) \vec{k} - k^2 \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$ , d'après l'équation de Maxwell-Gauss ; il vient donc, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = \left( i\mu_0\gamma\omega - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{\vec{E}}.$$

Finalement, le champ  $\underline{\vec{E}}$  n'étant pas nul, on a nécessairement :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega . \quad (20.3)$$

L'équation (20.3) est la **relation de dispersion** du conducteur. Elle conduit à un module d'onde complexe, que l'on notera désormais  $\underline{k} = k' - ik''$ . Elle s'écrit, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{et} \quad 2k'k'' = \mu_0\gamma\omega.$$

 Avec l'autre convention de notation complexe «  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$  » la relation de dispersion est :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0\gamma\omega$  et on définit  $\underline{k} = k' + ik''$ .

#### d) Interprétation physique

Que signifie un module d'onde complexe ? Supposons que  $\vec{k} = \underline{k}\vec{u}_z$ , alors  $\vec{k} \cdot \vec{r} = \underline{k}z = k'z - ik''z$  et le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - k'z + ik''z)) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(-k''z) \exp(i(\omega t - k'z)).$$

La relation de dispersion donne  $\underline{k}^2$  donc autorise deux valeurs de  $\underline{k}$  égales et opposées. Choisissons celle pour laquelle  $k' > 0$ . Dans ce cas, le terme «  $\exp(i(\omega t - k'z))$  » traduit le fait que l'onde se propage dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_z$  avec la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'}.$$

Le terme «  $\exp(-k''z)$  » traduit une atténuation de l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage (donc que  $z$  augmente) car  $k'' = \frac{2\mu_0\gamma\omega}{k'} > 0$ . Cette atténuation est due à l'**absorption** d'énergie par le milieu conducteur. Dans le cas d'un métal il s'agit de l'effet Joule. On définit la distance caractéristique d'atténuation :

$$\delta = \frac{1}{k'},$$

telle que l'amplitude de l'onde est divisée par  $\exp(1)$  après une propagation sur une distance de  $\delta$ .

Un vecteur d'onde complexe  $\vec{k} = \underline{k}\vec{u}$  avec  $\underline{k} = k' - ik''$  et tel que  $k' > 0$  et  $k'' > 0$  traduit :

- la propagation de l'onde dans la direction et le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}$  avec la **vitesse de phase** :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ ,
- l'atténuation de l'onde avec la **distance caractéristique d'atténuation** :  $\delta = \frac{1}{k''}$ .

### 1.3 Cas des basses fréquences, effet de peau

#### a) Approximation de la relation de dispersion aux basses fréquences

L'**approximation des basses fréquences** consiste à négliger le terme en  $\omega^2$  dans la relation de dispersion (20.3) devant le terme en  $\omega$ . Ceci est possible si :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\gamma\omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega \ll \mu_0 c^2 \gamma = \frac{\gamma}{\epsilon_0} .$$

#### Exemple

Dans le cas d'un métal :  $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ , donc la condition est  $\omega \ll 10^{18} \text{ rad} \cdot s^{-1}$  ; elle est largement vérifiée dans le domaine des micro-ondes et des ondes hertziennes qui nous intéresse.

Dans le cas de l'eau de mer,  $\gamma \sim 1 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ , la condition est :  $\omega \ll 10^{11} \text{ rad} \cdot s^{-1}$  ; elle est vérifiée pour les ondes radio.

Avec cette approximation, la relation de dispersion devient :

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega .$$

#### b) Une autre démonstration de l'équation de dispersion aux basses fréquences

L'approximation des basses fréquences peut être introduite dans les équations de Maxwell valables à l'intérieur du conducteur. On compare les ordres de grandeurs des deux termes du second membre de l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ . En notant  $E^*$  l'ordre de grandeur du champ électrique et  $\omega$  la pulsation de l'onde :

$$\|\vec{j}\| = \gamma \|\vec{E}\| \sim \gamma E^* \quad \text{et} \quad \|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \sim \epsilon_0 \omega E^* .$$

Ainsi, le courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  peut être négligé devant la densité volumique de courant dès que :

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} ,$$

qui est la condition de validité de l'approximation des basses fréquences.

Dans cette approximation l'équation de Maxwell-Ampère prend la forme approchée :  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . On peut alors écrire :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

et, en appliquant une formule d'analyse vectorielle et en se souvenant que la densité volumique de charge dans le conducteur est nulle :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}.$$

En rapprochant ces deux résultats on trouve une équations aux dérivées partielles dont le champ électrique est solution :

$$\Delta \vec{E}(M, t) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (M, t) .$$

### Remarques

Cette équation est une équation de diffusion (voir appendice mathématique).

On montre par un calcul analogue que le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  vérifie la même équation aux dérivées partielles.

Si l'on injecte dans cette équation l'expression complexe du champ électrique il vient :

$$-k^2 \underline{\vec{E}}(M, t) = \mu_0 \gamma (i\omega \underline{\vec{E}}(M, t)),$$

ce qui implique, le champ électrique n'étant pas identiquement nul :

$$k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega .$$

### c) Vitesse de phase et vitesse de groupe

Compte tenu de la relation  $(1-i)^2 = -2i$ , cette relation de dispersion conduit à l'un des deux vecteurs d'ondes complexes :

$$\underline{k} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}.$$

Comme plus haut on choisit  $\underline{k} = k' - ik''$  avec  $k' > 0$  pour avoir une propagation dans la direction et le sens de  $\vec{u}_z$ . Ainsi :

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}.$$

La vitesse de phase de l'OPPM est alors :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}}.$$

Elle dépend de  $\omega$  : le milieu ohmique est dispersif. La vitesse de groupe, vitesse d'un paquet d'ondes, est :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} = 2v_\varphi.$$

Elle dépend de  $\omega$  : un paquet d'ondes se propageant à travers le milieu ohmique est déformé.

#### d) Distance caractéristique d'atténuation, effet de peau

Dans l'approximation des basses fréquences :  $\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ . Il faut retenir ce résultat :

Dans un milieu ohmique de conductivité  $\gamma$ , la **distance caractéristique d'atténuation** d'une OPPM de pulsation  $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$  est :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}. \quad (20.4)$$

#### Exemple

Pour le cuivre dont la conductivité est  $\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ , on calcule :

- à une fréquence de 50 Hz,  $\delta = 9,2 \text{ mm}$  ;
- à une fréquence de 1,0 MHz,  $\delta = 65 \mu\text{m}$  ;
- à une fréquence de 5,0 GHz,  $\delta = 0,92 \mu\text{m}$ .

Pour l'eau de mer, de conductivité  $\gamma \sim 1 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ,

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\gamma f}} \sim \frac{500}{\sqrt{f \text{ (en Hz)}}} \text{m.}$$

Les sous-marins doivent utiliser pour communiquer des ondes radio de très basse fréquence, comprise entre 3 et 30 kHz.

Les valeurs de  $\delta$  données ci-dessus pour le cuivre sont très petites et typiques de ce qu'on obtient dans le cas d'un métal : l'onde est atténuée sur une très courte distance quand elle pénètre dans le métal. On peut dire que le champ électromagnétique est quasiment nul en dehors d'une couche d'épaisseur égale à quelques fois  $\delta$  au voisinage de la surface d'un métal. Ce phénomène est l'**effet de peau** et dans ce cadre  $\delta$  est appelée **épaisseur de peau**. L'épaisseur diminue avec la fréquence de l'onde et la conductivité du métal.

### e) Champ électromagnétique dans le conducteur

Pour simplifier les écritures, on se place désormais dans le cas où :

- l'onde se propage selon le vecteur  $\vec{u}_z$ , alors :  $\vec{k} = (k' - ik'')\vec{u}_z = \left(\frac{1-i}{\delta}\right)\vec{u}_z$ ;
- l'onde est polarisée rectilignement selon le vecteur  $\vec{u}_x$ , alors :  $\underline{\underline{E}} = \underline{E_0}\vec{u}_x$ .

#### Remarque

D'après l'équation de Maxwell-Gauss et l'hypothèse  $\rho(M, t) = 0$ , le champ électrique est nécessairement transversal, soit orthogonal à  $\vec{u}_z$ .

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{E_0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x.$$

Le champ magnétique peut se calculer grâce à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{\omega} k \vec{u}_z \wedge \underline{\underline{E}} = \frac{k}{\omega} \underline{E_0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y \\ &= \frac{1-i}{\delta\omega} \underline{E_0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y. \end{aligned}$$

 En posant  $\underline{E_0} = E_0 \exp(i\varphi)$  on peut exprimer les champs réels :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \vec{u}_x \\ \text{et } \vec{B} &= \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left( \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \right) \vec{u}_y \\ &= \sqrt{2} \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y. \end{aligned}$$

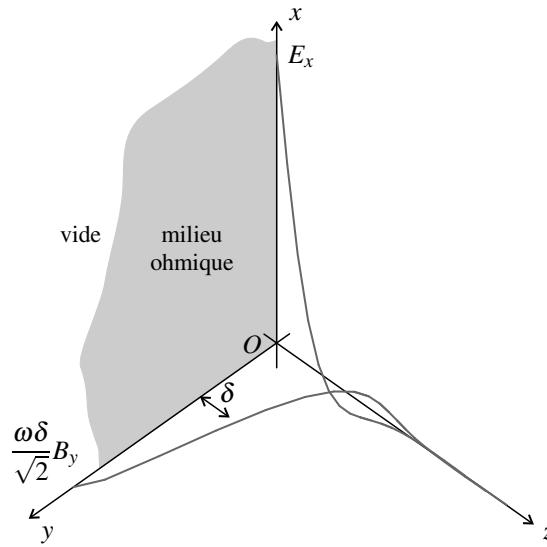
L'onde est représentée sur la figure 20.1 page 599 ; les oscillations spatiales des champs ne sont pratiquement pas visibles car, pour  $z = \lambda = \frac{2\pi}{k'} = 2\pi\delta$ , les amplitudes sont multipliées par  $\exp(-2\pi) \simeq 2.10^{-3}$ .

### f) Densité de courant dans le conducteur

D'après la loi d'Ohm locale, la densité volumique de courant dans le conducteur est :

$$\vec{j} = \gamma \underline{\underline{E}} = \gamma \underline{E_0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x.$$

Elle ne prend de valeur appréciable dans une couche d'épaisseur de quelques  $\delta$  à la surface du conducteur. C'est une manifestation de l'effet de peau. Si l'épaisseur de peau est très faible devant toutes les autres longueurs mises en jeu, on peut envisager de considérer ce courant comme surfacique.



**Figure 20.1** – Onde électromagnétique dans un milieu ohmique occupant le demi-espace  $z > 0$ .

### g) Aspect énergétique

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est égale à :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \frac{1+i}{\delta\omega} |\underline{E}_0|^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{u}_z \right) \\ &= \frac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0\omega\delta} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{u}_z. \end{aligned}$$

La puissance moyenne transportée par l'onde s'atténue avec une distance caractéristique égale à  $\frac{\delta}{2}$ . La valeur moyenne de la puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \gamma |\underline{E}_0|^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right).$$

L'équation locale de Poynting,  $\operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle = 0$ , est bien vérifiée.

 On peut aussi calculer  $\vec{\Pi}$  et  $\mathcal{P}_{V,J}$  à partir des champs réels, puis prendre les moyennes dans le temps. Ceci est proposé dans les exercices.

## 2 Réflexion d'une OPPM électromagnétique sur un conducteur parfait

Dans cette partie on étudie la réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur. Conformément au programme on se restreint au cas d'une OPPM arrivant sur un plan conducteur en incidence normale. Le modèle du conducteur parfait qui permet de traiter simplement ce problème est introduit en s'appuyant sur les résultats de la partie précédente.

### 2.1 Le modèle du conducteur parfait

#### a) Propriétés du conducteur parfait

Un **conducteur parfait** est un conducteur ohmique à toute fréquence dont la conductivité tend vers l'infini.

Quelles sont les conséquences de cette définition sur le champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur ? La puissance volumique cédée par le champ au conducteur est

$$\mathcal{P}_V(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \vec{E}(M,t) = \gamma E^2(M,t).$$

Si  $\vec{E}(M,t) \neq \vec{0}$ , comme  $\gamma$  tend vers l'infini,  $\mathcal{P}_V$  tend vers l'infini, ce qui n'est pas physiquement acceptable. Le champ électrique ne peut donc être que nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.

En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday, on trouve alors  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) = -\operatorname{rot} \vec{E}(M,t) = \vec{0}$ . Il ne peut donc y avoir qu'un champ magnétique constant à l'intérieur d'un conducteur parfait, c'est-à-dire un champ nul quand on s'intéresse à une onde.

Le champ électromagnétique d'une onde ne peut qu'être nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.

Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation de Maxwell-Ampère donnent en tout point  $M$  à l'intérieur d'un conducteur parfait :

$$\rho(M,t) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j}(M,t) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}(M,t) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t) = \vec{0}.$$

Les densités volumiques de charge et courant sont nulles à l'intérieur d'un conducteur parfait.

#### b) Lien du modèle du conducteur parfait avec la réalité

Comme on l'a vu dans la première partie de ce chapitre, une OPPM de pulsation  $\omega$  pénètre dans un conducteur réel de conductivité  $\gamma$  finie, jusqu'à une distance de quelques  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$  et la densité volumique de courant est non nulle seulement dans une couche

d'épaisseur égale à quelques  $\delta$ . Si  $\gamma$  tend vers l'infini,  $\delta$  tend vers zéro et ces résultats rejoignent les propriétés du conducteur parfait qui sont énoncées au paragraphe précédent. Considérer le conducteur comme parfait revient donc à négliger l'épaisseur de peau.

On peut appliquer le modèle du conducteur parfait si l'épaisseur de peau  $\delta$  est négligeable, c'est-à-dire si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\delta$  est très petite devant la longueur d'onde dans le vide de l'onde  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  ce qui revient à avoir :  $\delta\omega \ll c$  ;
- $\delta$  est très petite devant les dimensions géométriques du conducteur.

### Remarque

$\frac{\delta\omega}{c} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 c^2 \gamma}} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\gamma}}$ . On a supposé plus haut que  $\frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} \ll 1$  (approximation des basses fréquences) mais la condition  $\delta \ll \lambda$  est plus contraignante.

### c) Densité surfacique de courant

La densité volumique de courant est nulle dans le volume d'un conducteur parfait. Si ce conducteur est traversé par courant, ce courant doit donc circuler à la surface du conducteur. La distribution de courants est alors donnée par une densité surfacique de courant notée  $\vec{s}_S(P, t)$  qui est définie en tout point  $P$  appartenant à la surface du conducteur.

#### Exemple

On fait passer un courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  dans le sens de l'axe ( $Ox$ ) à l'intérieur d'un conducteur de conductivité  $\gamma$  de forme parallélépipédique de dimensions  $a$  et  $b$  respectivement selon ( $Ox$ ), ( $Oy$ ) et de dimension infinie selon ( $Oz$ ) (voir figure).

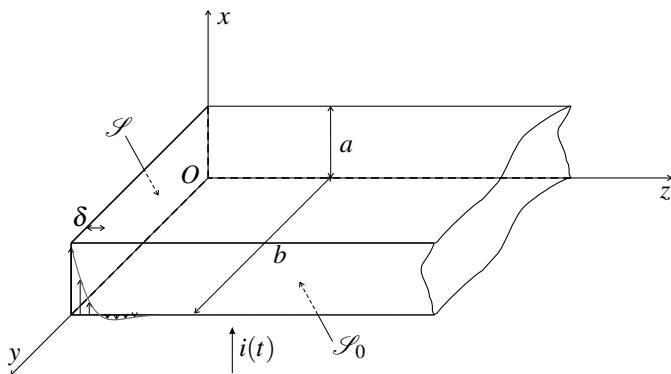


Figure 20.2 – Effet de peau dans un barreau conducteur.

Dans cette géométrie la répartition des courants est de la forme mathématique trouvée

dans la première partie :

$$\vec{j}(M, t) = j_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \vec{u}_x,$$

où  $j_0$  et  $\varphi$  sont des constantes. Pour les déterminer, on impose que l'intensité traversant la traverse la surface inférieure  $\mathcal{S}_0$  du barreau soit égale à  $i(t)$  :

$$\begin{aligned} i(t) &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_{z=0}^{\infty} \left( j_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) \vec{u}_x \right) \cdot (dy dz \vec{u}_x) \\ &\simeq j_0 b \int_{z=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) dz. \end{aligned}$$

On peut s'aider pour le calcul de cette intégrale d'un logiciel de calcul formel. Il vient :

$i(t) = \frac{j_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ . On en tire :  $j_0 = \frac{\sqrt{2} I_0}{b \delta}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Finalement la distribution de courants est :

$$\vec{j}(M, t) = \frac{\sqrt{2} I_0}{b \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_x.$$

Elle est représentée sur la figure ci-dessus : les courants sont confinés dans un volume dont la dimension suivant ( $Oz$ ) est de quelques  $\delta$ .

Dans la limite du conducteur parfait  $\delta$  tend vers 0. L'amplitude  $j_0$  de la densité volumique de courant tend vers l'infini et les courants sont quasiment sur la surface  $\mathcal{S}$  du conducteur. Pour les décrire on utilise la densité surfacique de courant :

$$\vec{j}_S(x, y, t) = \int_{z=0}^{\infty} \vec{j}(x, y, z, t) dz = \frac{I_0}{b} \cos(\omega t) \vec{u}_x,$$

d'après un calcul qui est le même que celui fait plus haut. Cette densité est définie sur la surface  $\mathcal{S}$  et elle est uniforme.

La **densité surfacique de courant**  $\vec{j}_S(P, t)$  en un point  $P$  de la surface d'un conducteur dans le modèle du conducteur parfait décrit de manière globale les courants circulant dans le conducteur réel sous la surface, au voisinage  $P$ , dans une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de l'épaisseur de peau  $\delta$ .

Sa norme se mesure en  $A \cdot m^{-1}$ .

D'un manière générale lorsque des courants sont confinés au voisinage d'une surface  $\mathcal{S}$  dans une pellicule d'épaisseur d'ordre de grandeur  $\delta$ , il est possible de les décrire par une densité surfacique  $\vec{j}_S(P, t)$  définie en tout point  $P$  de  $\mathcal{S}$ . L'ordre de grandeur  $j^*$  de la densité volumique de courant dans la pellicule est relié à l'ordre de grandeur  $j_S^*$  de la densité surfacique de courant par :

$$j_S^* = j^* \times \delta.$$

#### d) Conditions aux limites pour le champ électromagnétique à la surface d'un conducteur parfait

La surface d'un conducteur parfait peut aussi porter une **densité surfacique de charge**  $\sigma(P,t)$ . La notion de densité surfacique de charge a été introduite dans le cours d'électrostatique. La seule différence est qu'ici elle peut dépendre du temps.

Les densités surfaciques de charge  $\sigma(P,t)$  et de courant  $\vec{j}_S(P,t)$  en un point  $P$  de la surface du conducteur sont reliées au champ électromagnétique  $(\vec{E}(P,t), \vec{B}(P,t))$  en ce point par les **conditions aux limites** suivantes :

$$\vec{E}(P,t) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(P,t) \vec{n} \quad (20.5)$$

$$\text{et } \vec{B}(P,t) = \mu_0 \vec{j}_S(P,t) \wedge \vec{n}, \quad (20.6)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire orthogonal en  $P$  au conducteur parfait et dirigé vers l'extérieur du conducteur (voir figure 20.3).

*Ces relations ne sont pas à connaître, elles seront fournies si elles sont nécessaires.*

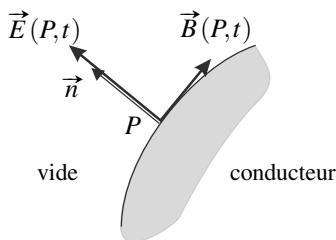


Figure 20.3 – Champ électromagnétique à la surface d'un conducteur parfait.

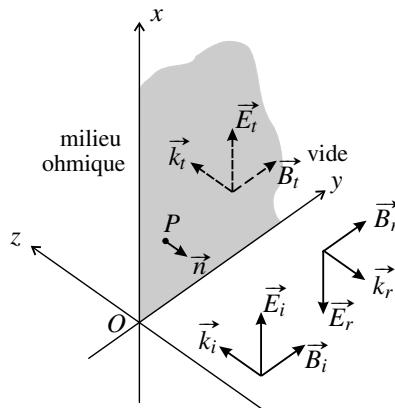
Dans les relations (20.5) et (20.6),  $\vec{E}(P,t)$  et  $\vec{B}(P,t)$  sont les champs en  $P$  du côté extérieur au conducteur. Les champs en  $P$  du côté intérieur sont nuls.

## 2.2 Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur

Lorsqu'une onde se propageant dans le vide rencontre un conducteur elle donne naissance à une onde réfléchie. Après avoir posé le problème dans le cas d'un conducteur quelconque, on présente le calcul de l'onde réfléchie pour un conducteur parfait et, en complément hors programme, pour un conducteur réel.

### a) Position du problème

Le plan  $z = 0$  est la surface d'un milieu conducteur ohmique qui occupe tout le demi-espace  $z > 0$ . Il reçoit une **onde incidente** qui se propage dans le vide (ou dans l'air) dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_z$ . L'onde incidente donne naissance à une **onde transmise** qui se propage dans le milieu conducteur dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_z$  et une **onde réfléchie** qui se propage dans le vide dans la direction et le sens du vecteur  $-\vec{u}_z$  (voir figure 20.4).



**Figure 20.4** – Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un milieu conducteur.

Quelle est l'origine physique de l'onde réfléchie ? Le champ électrique de l'onde incidente exerce une force oscillante sur les porteurs de charge mobiles du conducteur (les électrons de conduction s'il s'agit d'un métal) et leur communique ainsi un mouvement oscillant. C'est ce mouvement de charge qui est à la source de l'onde réfléchie. Le courant électrique est concentré au voisinage de la surface du conducteur du fait de l'effet de peau ; dans le modèle du conducteur parfait, c'est un courant surfacique.

La source de l'onde réfléchie est le courant électrique oscillant créé par le champ électromagnétique de l'onde incidente dans le conducteur.

La loi d'Ohm étant linéaire, la pulsation du courant électrique est identique à la pulsation de l'onde incidente et par linéarité des équations de Maxwell l'onde réfléchie a aussi la même pulsation que l'onde incidente.

Pour simplifier les écritures, on se place dans le cas où l'onde incidente est une OPPM polarisée rectilignement dans la direction de  $\vec{u}_x$ . Ses champs s'écrivent, en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = \underline{E}_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

$$\text{et } \underline{\vec{B}}_i(M, t) = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_i = \frac{1}{c} \underline{E}_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$  car l'onde se propage dans le vide ; son vecteur d'onde est  $\vec{k}_i = k \vec{u}_z$ .

#### Remarque

Le choix d'une OPPM ne restreint pas la généralité du calcul car toute onde plane est superposition d'OPPM.

Le choix d'une OPPM polarisée n'est pas non plus restrictif car toute OPPM se propageant suivant  $\vec{u}_z$  est somme d'une OPPM polarisée suivant  $\vec{u}_x$  et d'une OPPM polarisée suivant  $\vec{u}_y$ .

On admet que l'onde réfléchie est aussi une OPPM de même polarisation :

$$\begin{aligned}\vec{E}_r(M,t) &= \underline{r} E_0 \exp i(\omega t + kz) \vec{u}_x \\ \text{et } \vec{B}_r(M,t) &= -\frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_r = -\frac{1}{c} \underline{r} E_0 \exp i(\omega t + kz) \vec{u}_y\end{aligned}$$

où  $\underline{r}$  est le **coefficent de réflexion** pour le champ électrique. Noter le changement de signe dans les exponentielles complexes et dans l'expression du champ magnétique : l'onde réfléchie se propage suivant  $-\vec{u}_z$  et son vecteur d'onde est  $\vec{k}_r = -k\vec{u}_z$ .

L'onde transmise est aussi une OPPM de même polarisation mais se propageant dans le milieu ohmique :

$$\begin{aligned}\vec{E}_t(M,t) &= \underline{t} E_0 \exp \left( -\frac{z}{\delta} \right) \exp i \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \vec{u}_x \\ \text{et } \vec{B}_t(M,t) &= \frac{1-i}{\delta \omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_t = \frac{(1-i)}{\delta \omega} \underline{t} E_0 \exp \left( -\frac{z}{\delta} \right) \exp i \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \vec{u}_y,\end{aligned}$$

où  $\underline{t}$  est le **coefficent de transmission** pour le champ électrique.

Pour déterminer les coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ , on doit utiliser les conditions de continuité du champ électromagnétique à la surface du milieu conducteur (plan  $z = 0$ ). Ces conditions sont appelées **conditions de passage**.

### b) Cas où le conducteur est parfait

**Coefficients de réflexion et de transmission** Dans le cas d'un conducteur parfait il n'y a pas d'onde transmise donc :

$$\underline{t} = 0 .$$

Les **conditions de passage** découlent des conditions aux limites (20.5) et (20.6) et sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{E}(P,t) &\text{ orthogonal à la surface du conducteur} \\ \text{et } \vec{B}(P,t) &\text{ parallèle à la surface du conducteur,}\end{aligned}$$

en tout point  $P$  du plan  $z = 0$ . *Ces conditions seront fournies si elles sont nécessaires.*

Le champ électromagnétique qui doit vérifier ces conditions est le champ *total* existant dans le vide, c'est-à-dire la superposition des champs des ondes incidente et réfléchie. Ainsi, il faut :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(z=0,t) + \vec{E}_r(z=0,t) &\text{ dirigé suivant } \vec{u}_z \\ \text{et } \vec{B}_i(z=0,t) + \vec{B}_r(z=0,t) &\text{ perpendiculaire à } \vec{u}_z.\end{aligned}$$

La deuxième condition est automatiquement vérifiée car le champ magnétique est porté par  $\vec{u}_y$  donc perpendiculaire à  $\vec{u}_z$ . En revanche le champ électrique est porté par  $\vec{u}_x$  et la première condition impose alors qu'il soit nul. Ainsi :

$$E_0 \exp(i\omega t) + \underline{r} E_0 \exp(i\omega t) = 0 \Leftrightarrow \underline{r} = -1 .$$

En  $z = 0$  les champs électriques des ondes incidente et réfléchie sont donc de même amplitude et en opposition de phase.

**Aspect énergétique** On peut exprimer les vecteurs de Poynting moyens des deux ondes :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\underline{\vec{E}}_i \wedge \underline{\vec{B}}_i^*) = \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

et

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\underline{\vec{E}}_r \wedge \underline{\vec{B}}_r^*) = -\frac{|rE_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

On définit le **coefficient de réflexion en énergie** comme le rapport de la puissance moyenne réfléchie par le plan conducteur à la puissance qu'il reçoit, soit :

$$R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-\vec{u}_z)}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{u}_z} = |r|^2. \quad (20.7)$$

Dans le cas où le conducteur est parfait :

$$R = 1,$$

ce qui signifie que toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Il en est ainsi parce qu'il n'y a pas de perte d'énergie par effet Joule dans le conducteur.

**Complément : expression de la densité de courant surfacique** La condition aux limites relative au champ magnétique permet de calculer la densité de courant surfacique à la surface du conducteur puisque :

$$\begin{aligned} \mu_0 \underline{\vec{j}}_S \wedge (-\vec{u}_z) &= \underline{\vec{B}}_i(z=0,t) + \underline{\vec{B}}_r(z=0,t) = (1-r) \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) \vec{u}_y \\ \Rightarrow \underline{\vec{j}}_S &= \frac{2E_0}{\mu_0 c} \exp(i\omega t) \vec{u}_x. \end{aligned}$$

On a déjà dit que ce courant surfacique est à la source de l'onde réfléchie. Il crée aussi une onde qui se propage vers l'intérieur du conducteur et qui est exactement opposée à l'onde incidente, de sorte que l'onde transmise dans le conducteur est nulle.

### c) Complément : cas où le conducteur a une conductivité finie

Dans ce cas, les conditions de passage dans le cas d'un conducteur de conductivité finie sont :

$\vec{E}(P,t)$  continu à la traversée de la surface du conducteur  
et  $\vec{B}(P,t)$  continu à la traversée de la surface du conducteur.

*Ces conditions seront fournies si elles sont nécessaires.*

Le champ électromagnétique dans le vide est la somme des champs électromagnétiques des deux ondes incidente et réfléchie, dans le milieu conducteur il est égal au champ de l'onde transmise. Ainsi on doit avoir :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}_l}(z=0,t) + \underline{\vec{E}_r}(z=0,t) &= \underline{\vec{E}_t}(z=0,t) \\ \text{et } \underline{\vec{B}_l}(z=0,t) + \underline{\vec{B}_r}(z=0,t) &= \underline{\vec{B}_t}(z=0,t),\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\underline{E}_0 \exp(i\omega t) + \underline{r} \underline{E}_0 \exp(i\omega t) &= \underline{t} \underline{E}_0 \exp(i\omega t) \\ \text{et } \frac{1}{c} \underline{E}_0 \exp(i\omega t) - \frac{\underline{r}}{c} \underline{E}_0 \exp(i\omega t) &= \frac{1-i}{\delta\omega} \underline{t} \underline{E}_0 \exp(i\omega t).\end{aligned}$$

On en tire le système :  $\begin{cases} 1+\underline{r}=\underline{t} \\ 1-\underline{r}=(1-i)\frac{c}{\delta\omega}\underline{t} \end{cases}$  que l'on résout pour trouver :

$$\underline{r} = -\frac{1-i-\frac{\delta\omega}{c}}{1-i+\frac{\delta\omega}{c}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\frac{\delta\omega}{c}}{1-i+\frac{\delta\omega}{c}}.$$

On peut assimiler le conducteur à un conducteur parfait quand  $\frac{\delta\omega}{c} \ll 1$ . Dans ce cas,  $\underline{r} \simeq -1$  et  $\underline{t} \simeq 0$ . On retrouve les résultats du paragraphe précédent.

Le coefficient de réflexion en énergie est :

$$R = |\underline{r}|^2 = \frac{1 + \left(1 - \frac{\delta\omega}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\delta\omega}{c}\right)^2}.$$

$R$  est inférieur à 1 car il y a une perte d'énergie par effet Joule à l'intérieur du conducteur.

Quand  $\frac{\delta\omega}{c} \ll 1$ ,  $R \simeq 1 - 2\frac{\delta\omega}{c}$ .

Enfin, la densité volumique de courant à l'intérieur du conducteur est :

$$\underline{\vec{j}} = \gamma \underline{\vec{E}} = \gamma \underline{t} \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x.$$

Elle est concentrée sur une épaisseur de l'ordre de quelques  $\delta$  au voisinage de la surface. Si  $\delta$  devient très faible, ce courant est quasiment surfacique.

## 2.3 Onde électromagnétique stationnaire

On s'intéresse maintenant à l'onde existant dans le vide devant le conducteur qui est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. On se place dans le cas où le conducteur est parfait.

### a) Champ électromagnétique résultant

Le champ électromagnétique existant dans le vide est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M,t) &= \underline{\vec{E}_i}(M,t) + \underline{\vec{E}_r}(M,t) \\ &= \underline{E_0}(\exp i(\omega t - kz) - \exp i(\omega t + kz)) \vec{u_x} \\ &= \underline{E_0}(\exp(-ikz) - \exp(ikz)) \exp(i\omega t) \vec{u_x} = -2i\underline{E_0} \sin(kz) \exp(i\omega t) \vec{u_x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}}(M,t) &= \underline{\vec{B}_i}(M,t) + \underline{\vec{B}_r}(M,t) \\ &= \frac{1}{c} \underline{E_0}(\exp i(\omega t - kz) + \exp i(\omega t + kz)) \vec{u_y} \\ &= \frac{1}{c} \underline{E_0}(\exp(-ikz) + \exp(ikz)) \exp(i\omega t) \vec{u_y} = \frac{2}{c} \underline{E_0} \cos(kz) \exp(i\omega t) \vec{u_y}.\end{aligned}$$

En notation réelle, en posant  $\underline{E_0} = E_0 \exp(i\varphi)$  :

$$\vec{E}(M,t) = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi) \vec{u_x} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = 2\frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \varphi) \vec{u_y}.$$

Cette onde ne se propage pas car il n'y a pas de terme dépendant d'une combinaison  $\omega t \pm kz$ . Elle vibre sur place, ce qu'illustre la figure 20.5. Il s'agit d'une **onde stationnaire**.

Sur la figure 20.5 on observe qu'il existe des points où le champ électrique est constamment nul. Ces points sont appelés **nœuds de vibration** électriques. Ils sont situés aux points de cotes  $z_n$  tels que :

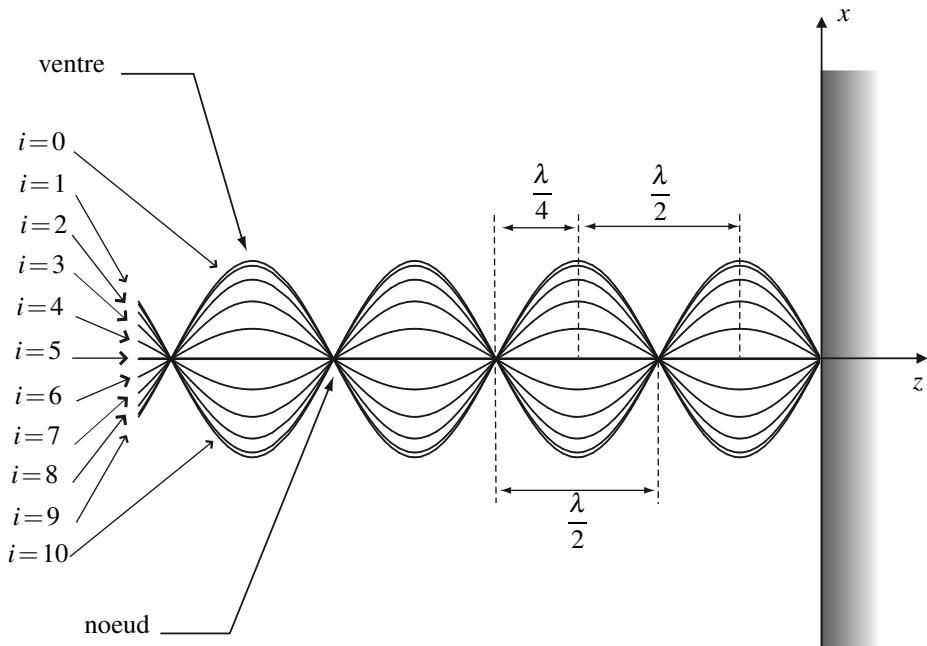
$$\sin(kz_n) = 0 \Leftrightarrow kz_n = n\pi \Leftrightarrow z_n = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2},$$

où  $n \in \mathbb{Z}$  (les nœuds observés sur la figure correspondent à  $n = 0, -1, -2, -3$  et  $-4$ ). La distance entre deux nœuds est égale à la moitié de la longueur d'onde.

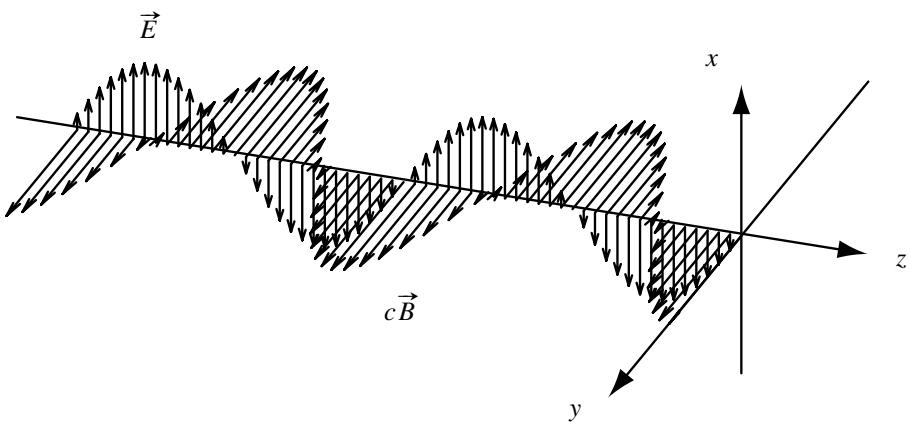
Il existe aussi des points pour lesquels l'amplitude de vibration du champ électrique est maximale. Ces points sont appelés **ventres de vibration** électriques. Ils sont situés aux points de cote  $z'_n$  tels que :

$$\cos(kz'_n) = \pm 1 \Leftrightarrow kz'_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow z'_n = \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$$

où  $n \in \mathbb{Z}$ . La distance entre deux ventres est égale à  $\frac{\lambda}{2}$ ; un nœud et un ventre consécutifs sont distants de  $\frac{\lambda}{4}$ .



**Figure 20.5 –** Champ électrique de l'onde stationnaire résultante : courbes de  $E_x(z, t)$  en fonction de  $z$  aux instants  $t_i$  tels que  $\omega t_i + \varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{i}{10}\pi$  avec  $i = 0$  à  $10$ .



**Figure 20.6 –** Onde résultante à un instant tel que  $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{6}$ .

Il existe aussi des nœuds et ventres de vibration magnétiques tels que l'amplitude de vibration de  $B_z$  est respectivement nulle et maximale. Les nœuds de vibration magnétiques coïncident avec les ventres de vibration électriques et réciproquement. Ceci se voit sur la figure 20.6.

### Remarque

Le champ électrique et le champ magnétique de l'onde sont en double quadrature de phase, pour la variable spatiale et pour la variable temporelle.

Le vecteur de Poynting de l'onde stationnaire est :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}(M,t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t) = \frac{4}{\mu_0 c} E_0^2 \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) \cos(kz) \sin(kz) \vec{u}_z \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) \sin(2kz) \vec{u}_z.\end{aligned}$$

Il est nul au niveau des nœuds de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$  et, de plus, sa moyenne temporelle  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  est nulle en tout point.

L'onde stationnaire ne propage pas d'énergie.

La densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde stationnaire est :

$$\begin{aligned}u_{em}(M,t) &= \frac{1}{2} E^2(M,t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M,t) \\ &= 2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{2}{\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(kz) \cos^2(\omega t + \varphi),\end{aligned}$$

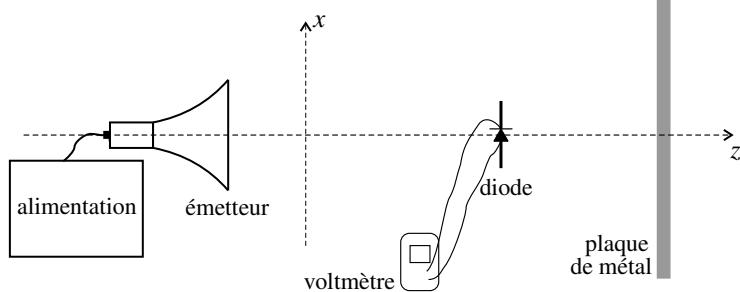
et sa moyenne dans le temps :

$$\langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) + \frac{1}{\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(kz) = \epsilon_0 E_0^2,$$

car  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ . La densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne de l'onde stationnaire est uniforme.

### Expérience

L'expérience représentée sur la figure 20.7 permet d'observer une onde électromagnétique stationnaire et de mesurer sa longueur d'onde. L'émetteur comporte une diode émettrice (diode gun), une cavité résonante (voir paragraphe suivant) et un cornet permettant de produire une onde sphérique, assimilable à une onde plane au voisinage de l'axe ( $Oz$ ) de l'appareil et de fréquence  $f$  de l'ordre de 10 GHz. Cette onde se réfléchit sur une plaque conductrice disposée à environ 50 cm de l'émetteur et perpendiculaire à ( $Oz$ ). Le récepteur est une diode réceptrice (diode Shottky) dont les contacts sont prolongés par deux fils faisant antenne ; il est sensible à la composante du champ électrique  $E_x$  parallèle aux fils et fournit une tension proportionnelle à  $\langle E_x^2 \rangle$ . Il est monté sur un support coulissant sur un banc de guidage gradué et parallèle à ( $Oz$ ).



**Figure 20.7 – Mesure de la longueur d'onde d'une onde centimétrique.**

On place la diode réceptrice à environ 20 cm de la plaque et on cherche une position du récepteur pour laquelle l'indication du voltmètre est maximale ; on relève cette position  $z_0$ . On éloigne ensuite le détecteur du cornet émetteur jusqu'à un minimum de tension ; on note cette position  $z_1$ . On renouvelle l'opération jusqu'à avoir vu 5 maxima, de positions  $z_0, z_2, \dots, z_8$  et 5 minima, de positions  $z_1, z_3, \dots, z_9$ . En théorie,

$$z_n = z_0 + n \frac{\lambda}{4}.$$

On trace  $z_n$  en fonction de  $n$  : les points s'alignent plus ou moins bien sur une droite de pente  $p$  et on en déduit la longueur d'onde :  $\lambda = 4p$ . Un résultat typique est  $\lambda = 2,90$  cm, ce qui correspond  $f = 10,3$  GHz.

Il faut noter que les minima de tension ne sont pas nuls parce que le détecteur n'est pas ponctuel et aussi parce que la plaque métallique n'est pas parfaitement réfléchissante.

### b) Recherche des ondes stationnaires

On appelle **onde stationnaire** toute solution réelle non constante d'une équation de propagation (l'équation de d'Alembert par exemple) de la forme :

$$U(M, t) = f(M)g(t),$$

où  $f(M)$  est une fonction de l'espace uniquement et  $g(t)$  une fonction du temps uniquement.



Attention, cette définition ne vaut que pour les ondes *réelles* et non pour leur représentations complexes.

La **méthode de séparation des variables** permet de trouver toutes les ondes planes stationnaires solutions de l'équation de d'Alembert :  $\Delta U(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ . Si l'onde ne dépend que

de  $z$ , en injectant  $U(M, t) = f(z)g(t)$  dans cette équation on trouve :

$$f''(z)g(t) = \frac{1}{c^2}f(z)g''(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Dans cette dernière équation, le membre de gauche ne dépend pas de  $t$ , et le membre de droite ne dépend pas de  $M$ ; on en déduit que les deux ne dépendent ni de  $t$  ni de  $M$ . Il existe donc une constante  $A$  telle que :

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = c^2A \quad \text{et} \quad \frac{g''(t)}{g(t)} = A.$$

On vient d'obtenir deux équations différentielles séparées pour les fonctions  $f(z)$  et  $g(t)$ . On considère d'abord l'équation différentielle pour  $g(t)$ . La solution dépend du signe de  $A$  :

- si  $A > 0$ ,  $g(t) = \alpha \exp(\sqrt{At}) + \beta \exp(-\sqrt{At})$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes,
- si  $A = 0$ ,  $g(t) = \alpha t + \beta$ ,
- si  $A < 0$ ,  $g(t) = \alpha \cos(\sqrt{-At}) + \beta \sin(\sqrt{-At})$ .

Seul le troisième cas présente un intérêt physique. On pose donc :  $A = -\omega^2$  et ainsi :

$$g(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t).$$

L'équation pour  $f(z)$  s'écrit alors, en posant  $k = \frac{\omega}{c}$  :  $f''(z) = -k^2 f(z)$ . Sa solution est :

$$f(z) = \alpha' \cos(kz) + \beta' \sin(kz),$$

où  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont des constantes. Finalement, les ondes stationnaires planes d'intérêt physique sont toutes de la forme  $U(z, t) = (\alpha' \cos(kz) + \beta' \sin(kz))(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$ , ou encore :

$$U(z, t) = A \cos(kz + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c},$$

où  $A$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont des constantes.

## 2.4 Onde électromagnétique dans une cavité

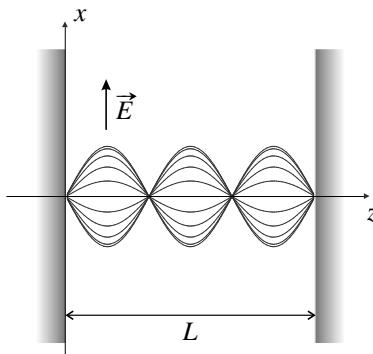
Une cavité électromagnétique est un volume vide délimité par des parois conductrices. Si un champ électromagnétique est excité à l'intérieur d'une cavité (en y introduisant une source), il peut s'y produire des ondes stationnaires. Les fréquences de ces ondes ont des valeurs bien précises, déterminées par la géométrie et les dimensions de la cavité appelées **fréquences propres** de la cavité. La cavité permet de sélectionner dans le spectre émis par la source une fréquence particulière et de produire ainsi une onde monochromatique.

### a) Position du problème

On constitue une cavité à une dimension en disposant deux plans conducteurs parallèles face à face à distance  $L$  l'un de l'autre. Pour l'étude, on prend un repère ( $Oxyz$ ) tel que les plans

conducteurs sont les plans  $z = 0$  et  $z = L$ , les demi-espaces  $z < 0$  et  $z > 0$  étant remplis par la matière conductrice. L'espace  $0 < z < L$  est vide de charges et de courants.

On suppose les conducteurs parfaits.



**Figure 20.8 –** Cavité à une dimension et mode propre d'ordre  $n = 3$ .

On cherche une onde électromagnétique plane, dépendant de  $z$ , pouvant exister dans la cavité, entre les deux plans conducteurs. S'il existe une onde progressive, se propageant dans le sens de  $\vec{u}_z$  par exemple, cette onde se réfléchit sur le plan  $z = L$  ce qui donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens de  $-\vec{u}_z$ . La superposition de ces deux ondes donne une onde stationnaire à l'intérieur de la cavité. Le raisonnement est identique s'il y a au départ une onde progressive se propageant dans le sens de  $-\vec{u}_z$ . Ainsi, l'onde existant dans la cavité est nécessairement une onde stationnaire.

### b) Recherche des ondes stationnaires pouvant exister dans la cavité

On cherche une onde stationnaire polarisée selon  $\vec{u}_x$ ; son champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = f(z)g(t)\vec{u}_x.$$

Le champ pourrait aussi avoir une composante suivant  $\vec{u}_y$  mais il n'a pas de composante suivant  $\vec{u}_z$ . En effet, pour une onde plane ne dépendant que de  $z$  et  $t$ , dans la cavité vide :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ ;  $E_z$  est indépendant de  $z$  donc nul car un champ uniforme ne fait pas partie d'une onde.

Dans l'espace vide entre les conducteurs, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert :  $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ . En projection sur  $\vec{u}_x$  cette équation donne :

$$f''(z)g(t) = \frac{1}{c^2} f(z)g''(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = A,$$

où  $A$  est une constante. On obtient ce dernier résultat par le raisonnement fait dans le paragraphe précédent. On s'intéresse d'abord à l'équation en  $f(z)$ . Sa solution est, suivant le signe de  $A$  :

- si  $A > 0$ ,  $f(z) = \alpha \exp(\sqrt{A}z) + \beta \exp(-\sqrt{A}z)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes,
- si  $A = 0$ ,  $f(z) = \alpha z + \beta$ ,
- si  $A < 0$ ,  $f(z) = \alpha \cos(\sqrt{-A}z) + \beta \sin(\sqrt{-A}z)$ .

Ici interviennent les **conditions aux limites** que doit vérifier le champ électrique. Elles imposent au champ d'être *orthogonal* aux surfaces des deux conducteurs. Or, par construction,  $\vec{E}$  est parallèle aux deux plans conducteurs. La seule manière de respecter la relation de passage est que le champ électrique soit *nul* sur les deux plans  $z = 0$  et  $z = L$ . Il faut pour cela que :

$$f(0) = f(L) = 0.$$

Ceci est possible sans que  $f(z)$  soit la fonction identiquement nulle, seulement si  $A < 0$  et dans ce cas il faut que :

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \cos(\sqrt{-A}L) + \beta \sin(\sqrt{-A}L) = 0.$$

Pour que  $f(z)$  ne soit pas la fonction nulle, il faut obligatoirement  $\beta \neq 0$  donc :

$$\sin(\sqrt{-A}L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-A}L = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad A = -n^2 \frac{\pi^2}{L},$$

où  $n$  est un entier naturel. Finalement :  $f(z) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$ . L'équation différentielle pour  $g(t)$  s'écrit maintenant :  $g''(t) = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}g(t)$ . Sa solution est :  $g(t) = A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right)$ , où  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes.

Finalement, le champ électrique de l'onde pouvant exister dans la cavité est :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{u}_x, \quad (20.8)$$

où  $E_0$  et  $\varphi$  sont des constantes quelconques.

Pour connaître l'onde électromagnétique il faut calculer le champ magnétique. Le plus simple est d'appliquer l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z\right) \wedge (E_x \vec{u}_x) = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y = -\frac{n\pi}{L} E_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{u}_y,$$

d'où, en prenant la constante d'intégration nulle (elle ne fait pas partie de l'onde) :

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{u}_y. \quad (20.9)$$

Le champ électromagnétique donné par (20.8) et (20.9) est un **mode propre** de la cavité. Il dépend d'un entier  $n$  et est appelé mode propre d'ordre  $n$ . Dans ce mode propre, il y a  $n+1$

nœuds de vibration électriques de cotes :

$$z_0 = 0, z_1 = \frac{L}{n}, z_2 = \frac{2L}{n}, \dots z_{n-1} = \frac{(n-1)L}{n}, z_n = L.$$

Les nœuds en  $z_0$  et  $z_n$  sont imposés par la présence des parois parfaitement conductrices.

La fréquence de vibration du mode propre d'ordre  $n$  est :

$$f_n = n \frac{c}{2L} .$$

Les fréquences  $f_n$  sont les **fréquences propres** de la cavité.

 On retrouve rapidement l'expression de  $f_n$  en utilisant le fait que la distance entre deux nœuds de vibration électriques est  $\frac{\lambda_n}{2}$  où  $\lambda_n = \frac{c}{f_n}$  est la longueur d'onde. Comme il y a  $n+1$  nœuds on a :

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Leftrightarrow L = n \frac{c}{2f_n} \Leftrightarrow f_n = n \frac{c}{2L} .$$

### c) Énergie d'un mode de vibration

La densité volumique d'énergie électrique est :

$$u_{el}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos^2\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) .$$

L'énergie électrique contenue à l'instant  $t$  dans la cavité est, en notant  $S$  la surface des plans :

$$\begin{aligned} U_{el}(t) &= S \int_0^L u_{el}(z, t) \, dz \\ &= S \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \, dz = \frac{SL}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) . \end{aligned}$$

La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$u_m(M, t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin^2\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) ,$$

en utilisant la relation  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ . L'énergie magnétique contenue à l'instant  $t$  dans la cavité :

$$\begin{aligned} U_m(t) &= S \int_0^L u_m(z, t) \, dz \\ &= \frac{1}{2} S \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \, dz = \frac{SL}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) . \end{aligned}$$

On remarque que :  $U_{el}(t) + U_{em}(t) = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 SL$ . L'énergie électromagnétique contenue dans la cavité est constante dans le temps. Elle oscille entre les deux formes d'énergie électrique et magnétique à la fréquence  $\frac{nc}{L} = 2f_n$ , qui est le double de la fréquence de l'onde.

**SYNTHESE**

**SAVOIRS**

- effet de peau
- propriétés du modèle du conducteur parfait
- réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur parfait
- définition d'une onde stationnaire
- structure d'une onde électromagnétique stationnaire
- modes propres d'une cavité à une dimension

**SAVOIR-FAIRE**

- établir l'expression de la distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans un milieu ohmique
- établir l'expression de l'onde réfléchie à partir de conditions de passage fournies
- interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface
- reconnaître et caractériser une onde stationnaire
- utiliser la méthode de la séparation des variables

**MOTS-CLÉS**

- |                      |   |                          |
|----------------------|---|--------------------------|
| • loi d'ohm locale   | • onde réfléchie                        | • cavité à une dimension |
| • effet de peau      | • coefficient de réflexion en amplitude | • mode propre            |
| • épaisseur de peau  | • coefficient de réflexion en énergie   | • fréquence propre       |
| • conducteur parfait |   |                          |
| • onde incidente     |   |                          |

**S'ENTRAÎNER****20.1 Épaisseur de la paroi d'un four à micro-ondes (★)**

La paroi d'un four à micro-ondes est en aluminium de conductivité  $\gamma = 2 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Quelle est l'épaisseur minimum de la paroi sachant qu'il faut que l'amplitude de l'onde soit réduite d'un facteur  $10^4$  dans la paroi et que la fréquence de l'onde est  $f = 2,5 \text{ GHz}$  ?

**20.2 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique (★★)**

Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité  $\gamma$ . Le champ électrique est :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x.$$

1. En utilisant une équation de Maxwell trouver l'expression du champ magnétique.
2. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting,  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \Pi \rangle \vec{u}_z$ .
3. Calculer la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée par effet Joule,  $\langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle$ .
4. Vérifier que  $\operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle = 0$ . Interpréter physiquement cette relation.

**20.3 Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur parfait (★)**

L'OPPM de champ électrique :  $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + 2E_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_z$  se propage dans le vide et rencontre en  $x = a$  un plan métallique parfaitement conducteur (le métal occupe le demi-espace  $x > a$ ). Trouver le champ électrique de l'onde réfléchie.

On rappelle les conditions de passage à la surface d'un conducteur parfait : le champ électrique doit être orthogonal à la surface et le champ magnétique parallèle à la surface.

**20.4 Microcoupures d'un téléphone mobile (★)**

En ville les ondes électromagnétiques utilisées par la téléphonie mobile sont perturbées par la présence des immeubles. Dans une modélisation très simplifiée on suppose que l'onde électromagnétique devant une façade d'immeuble assimilée au plan  $x = L$  a pour champ électrique :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(2\pi f t + \varphi) \sin\left(\frac{2\pi f}{c}(x - L)\right) \vec{u}_z,$$

expression valable pour  $x \leq L$  dans laquelle  $E_0$  est une constante,  $f = 900 \text{ MHz}$  et  $c$  est la vitesse de la lumière.

1. Commenter l'expression du champ électrique.
2. On admet que la puissance  $\mathcal{P}$  reçue par le récepteur (téléphone mobile) est proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique. On suppose qu'il existe une puissance  $\mathcal{P}_S$  en dessous de laquelle la réception d'un signal est impossible et que la moyenne suivant  $x$  de  $\mathcal{P}$  est égale à  $10\mathcal{P}_S$ . Le téléphone mobile, porté par un piéton, se déplace à la vitesse  $v = 4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  suivant l'axe des  $x$ . Calculer la fréquence des coupures ainsi que leur durée.

**20.5 Modes propres d'une cavité sans pertes (\*)**

Une cavité sans pertes d'axe ( $Ox$ ) et de longueur  $L$  est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans  $x = 0$  et  $x = L$ . On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon  $\vec{u}_z$  a pour représentation complexe :

$$\vec{E}(x, t) = \underline{E}_1 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z + \underline{E}_2 \exp(i(\omega t + kx)) \vec{u}_z.$$

On rappelle que le champ électrique doit obligatoirement être normal à une surface parfaitement conductrice.

1. De la condition imposée par la présence d'un métal parfait en  $x = 0$ , déduire l'expression de  $\underline{E}_2$  en fonction de  $\underline{E}_1$ .
2. De la condition imposée par la présence d'un métal parfait en  $x = L$ , déduire la suite  $f_n$  des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité, en fonction d'un entier naturel  $n$  non nul, de  $L$  et de  $c$ .
3. a. Établir l'expression  $\vec{E}_n(x, t)$  du champ électrique dans la cavité à la fréquence  $f_n$  en fonction de  $\underline{E}_1$ ,  $n$ ,  $x$ ,  $L$  et  $c$ . De quel type d'onde s'agit-il ?  
b. Montrer qu'il existe des abscisses  $x_p$  où le champ électrique est constamment nul. Donner la distance entre deux valeurs consécutives de  $x_p$ .  
c. En déduire le champ magnétique  $\vec{B}_n(x, t)$  associé à cette onde. Expliciter les abscisses  $x'_p$  des points où le champ magnétique est constamment nul.

## APPROFONDIR

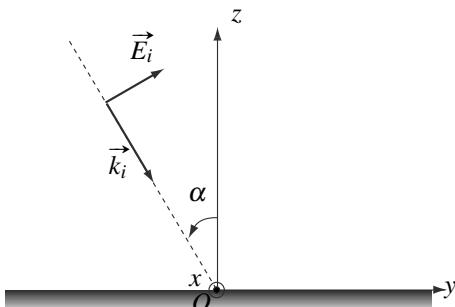
**20.6 Réflexion sur un métal sous incidence oblique (\*\*)** 

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation  $\omega$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  se propage dans le vide et arrive avec l'angle d'incidence  $\alpha = (-\vec{u}_z, \vec{k}_i)$  sur la surface d'un métal parfaitement conducteur qui occupe le demi-espace  $z < 0$ .  $\vec{k}_i$  est contenu dans le plan ( $Oyz$ ).

Dans un premier temps on suppose que le champ électrique  $\vec{E}_i$  de l'onde incidente est compris dans le plan d'incidence ( $Oyz$ ). Il est représenté sur la figure tel qu'il est à l'instant  $t = 0$  au point  $O$  (les dimensions de la figure sont très inférieures à la longueur d'onde) ; sa norme a alors sa valeur maximale  $E_0$ .

On rappelle que le champ électrique (resp. magnétique) doit être obligatoirement orthogonal (resp. tangent) à la surface d'un conducteur parfait.

1. Exprimer  $\vec{E}_i(M, t)$ .



2. Montrer qu'il doit exister une onde réfléchie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde  $\vec{k}_r$  est donnée par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter  $\vec{k}_r$ .

3. Montrer sans calcul que son champ électrique  $\vec{E}_r$  est tel que  $\|\vec{E}_r(O,t)\| = \|\vec{E}_i(O,t)\|$ .

4. Représenter  $\vec{E}_r$  et les champs magnétiques  $\vec{B}_i$  et  $\vec{B}_r$  des deux ondes tels qu'ils sont à  $t = 0$  en  $O$ .

5. Exprimer  $\vec{E}_r(M,t)$ .

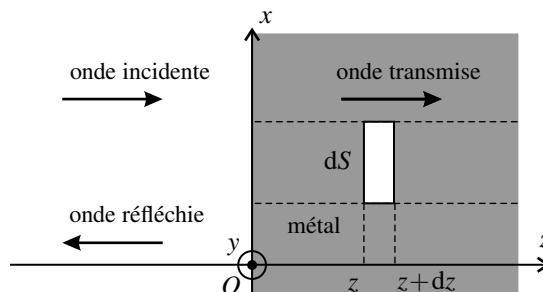
6. Reprendre l'exercice dans le cas où  $\vec{E}_i$  est perpendiculaire au plan d'incidence en supposant  $\vec{E}(O,t=0) = E_0 \vec{u}_x$ ,  $E_0$  étant la valeur maximale de la norme du champ électrique.

7. Quelles sont les composantes du champ électromagnétique qui subissent un déphasage de  $\pi$  à la réflexion sur le métal parfait ?

### 20.7 Pression de radiation (★★)

Une OPPM de pulsation  $\omega$  tombe en incidence normale sur la surface (plan  $z = 0$ ) d'un métal de conductivité  $\gamma$ . Elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise dans le métal dont le champ magnétique est, dans l'approximation des basses fréquences :

$$\vec{B}_t = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$



1. Déterminer la densité volumique de courant  $\vec{j}$  dans le métal (on négligera le courant de déplacement).

2. On considère que le métal contient des ions de charge  $q_i = +e$  fixes et dont le nombre par unité de volume est  $n_i$ , ainsi que des électrons de charge  $q_e = -e$ , animés localement tous de la même vitesse  $\vec{v}_e$  et dont le nombre par unité de volume est  $n_e$ .

a. Exprimer la force exercée par le champ électromagnétique  $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$  sur un ion et sur un électron.

b. Pourquoi a-t-on localement  $n_e = n_i$  ?

c. Montrer que la force électromagnétique s'exerçant sur un élément de volume du métal est :  $d\vec{F} = \vec{f}_V d\tau$  avec  $\vec{f}_V = \vec{j} \wedge \vec{B}_t$  (densité volumique de force électromagnétique).

## CHAPITRE 20 – ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDUCTEUR, RÉFLEXION

- d.** Exprimer  $\langle \vec{f}_V \rangle$ , moyenne temporelle de  $\vec{f}_V$  en fonction de  $B_0$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $z$ .
- 3.** On considère, à l'intérieur du métal, un petit parallélépipède de longueur  $dx$  et de base de surface  $dS$  parallèle à l'interface. Exprimer la force moyenne  $d^2\vec{F}$  qui s'exerce dessus. En déduire l'expression de la force moyenne totale  $\vec{dF}$  s'exerçant sur tout le métal s'appuyant sur  $dS$  en fonction de  $B_0$ .
- 4.** Dans la limite  $\delta \rightarrow 0$ , on peut considérer que cette force s'applique sur la surface  $dS$ . Exprimer la pression correspondante, appelée pression de radiation, en fonction de  $\langle u_{em} \rangle$  densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne dans le vide au niveau de la surface du métal, en admettant que le champ magnétique dans le vide est :  $\vec{B}_{\text{vide}} = B_0 \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$ .

**20.8 Cavité réelle, coefficient de qualité (★★)**

On délimite une cavité avec deux plans métalliques parallèles coïncidant avec les plans  $z = 0$  et  $z = L$ . On prend pour expression du champ magnétique dans la cavité :

$$\vec{B}_{\text{cavité}} = B_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\pi c}{L},$$

et dans le demi-espace  $x > L$  occupé par le métal de conductivité  $\gamma$  :

$$\vec{B}_{\text{métal}} = -B_0 \exp\left(-\frac{z-L}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z-L}{\delta}\right) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

- 1.** On donne :  $L = 3 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 2.10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . Calculer la fréquence et vérifier que, dans le métal, le terme  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est négligeable devant la densité volumique de courant. Comparer aussi  $\delta$  et  $L$ .
- 2.** Exprimer l'énergie électromagnétique moyenne  $\langle U_{em} \rangle$  contenue dans la cavité en fonction de  $B_0$ ,  $L$  et  $S$  surface des plans conducteurs.
- 3.** Exprimer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule en un point d'abscisse  $z > L$  en fonction de  $B_0$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $z$ . En déduire la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P}_J \rangle$  dissipée par effet Joule dans tout le volume du conducteur  $z > L$ , en fonction de  $B_0$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $S$ .
- 4.** On définit le facteur de qualité  $Q$  par :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie dissipée pendant une période}}.$$

Exprimer le facteur de qualité de la cavité en fonction de  $L$  et  $\delta$ , puis en fonction de  $\gamma$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  associée à la fréquence propre de la cavité.

**20.9 Réflexion-transmission d'une onde à la surface d'un plasma (★★)**

Un plasma dont la pulsation propre est  $\omega_p$  occupe le demi-espace  $x > 0$ . Une OPPM polarisée rectilignement se propage dans le vide (demi-espace  $x < 0$ ) et atteint sous incidence normale le plasma. Le champ électrique de cette onde est noté  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$ . L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise.

1. On note  $\underline{E}_0$  l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et  $\underline{E}_0$  celle du champ électrique de l'onde transmise. Écrire en notation complexe les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise. On introduira l'indice optique  $n$  du plasma défini par la relation  $k_{\text{plasma}} = \frac{n\omega}{c}$ .

2. Le champ électromagnétique est continu à la traversée du plan  $x = 0$ . En déduire les expressions de  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  en fonction de  $n$ .

3. Exprimer  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_P$  en distinguant les cas  $\omega < \omega_P$  et  $\omega > \omega_P$ .

4. On définit les facteurs de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en énergie par :

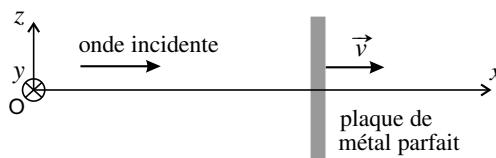
$$R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r(0,t) \rangle \cdot (-\vec{u}_x)}{\langle \vec{\Pi}_i(0,t) \rangle \cdot \vec{u}_x} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \vec{\Pi}_t(0,t) \rangle \cdot \vec{u}_x}{\langle \vec{\Pi}_i(0,t) \rangle \cdot \vec{u}_x}.$$

Exprimer  $R$  et  $T$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_P$  en distinguant les cas  $\omega < \omega_P$  et  $\omega > \omega_P$ . Commenter.

### 20.10 Réflexion sur un miroir mobile, effet Doppler (\*)

Une plaque métallique parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à  $(Ox)$  se déplace à la vitesse uniforme  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ ; elle coïncide à l'instant  $t$  avec le plan d'équation  $x = vt$ .

Une onde électromagnétique dont le champ électrique est :  $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos\left(\omega_i\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$  se réfléchit sur cette surface, le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrivant :  $\vec{E}_r(x,t) = E_r \cos\left(\omega_r\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$ .



1. Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  et dans lequel la plaque est immobile. En notant  $(\vec{E}, \vec{B})$  un champ électromagnétique dans  $\mathcal{R}$  et  $(\vec{E}', \vec{B}')$  le même champ évalué dans  $\mathcal{R}'$ , on indique que :  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$  et  $\vec{B}' = \vec{B}$ .

- a. Exprimer  $\vec{B}_i$  en fonction de  $E_0$ ,  $c$ ,  $\omega_i$ ,  $t$  et  $x$ , puis  $\vec{E}'_i$  en fonction de  $E_0$ ,  $c$ ,  $\omega_i$ ,  $t$ ,  $x$  et  $v$ .
- b. Exprimer  $\vec{E}'_r$  en fonction de  $E_r$ ,  $c$ ,  $\omega_r$ ,  $t$ ,  $x$  et  $v$ .
- c. À la surface de la plaque  $\vec{E}'_i + \vec{E}'_r$  doit être orthogonal à la plaque. En déduire  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_i$ ,  $v$  et  $c$ .

2. a. Donner  $E_r$  en fonction de  $E_0$ ,  $v$  et  $c$ .

- b. Soit  $R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-\vec{u}_x)}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{u}_x}$  où  $\langle \vec{\Pi}_i \rangle$  et  $\langle \vec{\Pi}_r \rangle$  sont les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting des ondes incidente et réfléchie respectivement. Donner la signification physique de  $R$ . Exprimer  $R$  en fonction de  $v$  et  $c$ . Comment expliquez-vous le fait que  $R < 1$  ?

## CORRIGÉS

**20.1 Épaisseur de la paroi d'un four à micro-ondes**

Il faut que :  $\exp\left(-\frac{e}{\delta}\right) < 10^{-4}$  où  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\gamma f}}$ , soit :  $e > 4\ln(10)\sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\gamma f}} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .

**20.2 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique**

1. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z\right) \wedge \left(E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x\right) \\ &= \frac{E_0}{\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y,\end{aligned}$$

d'où :  $\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y$ .

2.  $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0\delta\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \left(\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$ ,

et :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{u}_z$ .

3.  $\mathcal{P}_{V,J} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma E_0^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$ , donc :  $\langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)$ .

4.  $\operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle = -\frac{E_0^2}{\mu_0\delta^2\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) + \frac{\gamma E_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) = 0$  car  $\delta^2 = \frac{2}{\mu_0\gamma\omega}$ . Cette relation traduit le bilan local d'énergie électromagnétique : l'énergie perdue par le champ électromagnétique est dissipée par effet Joule dans le conducteur. C'est l'effet Joule qui explique atténuation de l'onde.

**20.3 Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur parfait**

L'onde réfléchie a même pulsation que l'onde incidente ; elle se propage dans le sens et la direction de  $-\vec{u}_x$ . Elle s'écrit :

$$\vec{E}_r(x, t) = E_{0y} \cos(\omega t + kx + \varphi_y) \vec{u}_y + E_{0z} \cos(\omega t + kx + \varphi_z) \vec{u}_z.$$

En  $x = a$ , le champ électrique doit être orthogonal au plan parfaitement conducteur ; puisqu'il est tangent à celui-ci, il ne peut être que nul :  $\vec{E}_i(a, t) + \vec{E}_r(a, t) = \vec{0}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}E_{0y} \cos(\omega t + ka + \varphi_y) &= -E_0 \cos(\omega t - ka) \\ \text{et } E_{0z} \cos(\omega t + ka + \varphi_z) &= -2E_0 \cos\left(\omega t - ka + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Deux fonctions sinusoïdales égales ont obligatoirement même amplitude et même phase initiale. On a donc :  $E_{0y} = E_0$ ,  $E_{0z} = 2E_0$ ,  $\varphi_y = \pi - 2ka$ ,  $\varphi_z = \pi + \frac{\pi}{4} - 2ka$ . Et finalement :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx - 2ka) \vec{u}_y - 2E_0 \cos\left(\omega t + kx - 2ka + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_z.$$

## 20.4 Microcoupures d'un téléphone mobile

1. Le champ donné correspond à une onde stationnaire. Cette onde modélise la superposition d'une onde et de l'onde réfléchie sur la façade qui est assimilée à un plan parfaitement conducteur (approximation très grossière). L'onde incidente est supposée plane et en incidence normale.

2. La puissance reçue est :  $\mathcal{P} = K \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} K E_0^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi f}{c} (x - L) \right)$  et sa moyenne suivant  $x$  :  $\langle \mathcal{P} \rangle_x = \frac{1}{4} K E_0^2 = 10 \mathcal{P}_S$  d'après l'énoncé. Donc :  $\mathcal{P} = 20 \mathcal{P}_S \sin^2 \left( \frac{2\pi f}{c} (x - L) \right)$ .

Il y a coupure chaque fois que l'on passe sur un nœud de vibration électrique ; la distance entre deux nœuds étant  $\frac{\lambda}{2}$ , la période de répétition des coupures est :  $\frac{\lambda}{2v} = \frac{c}{2fv} = 0,15$  s.

La coupure dure tant que :  $\mathcal{P} < \mathcal{P}_S$  soit tant que :  $\sin^2 \left( \frac{2\pi f}{c} (x - L) \right) < \frac{1}{20}$ . La distance  $d$  sur laquelle il y a coupure est :  $d = \frac{c}{2\pi f} \times 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{20}}$  et la durée de la coupure est :

$$\frac{d}{v} = 0,072 \frac{c}{fv} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$



Pour le calcul de la valeur numérique de la fonction arcsinus il faut que la calculette calcule les angles en radians (et pas en degrés).

## 20.5 Modes propres d'une cavité sans pertes

1. Le champ électrique en  $x = 0$  doit être selon  $\vec{u}_x$ ; or il est par hypothèse selon  $\vec{u}_z$ , il est donc nécessairement nul ce qui impose :  $E_2 = -E_1$ .

2. De même le champ électrique est nul en  $x = L$  donc  $E_1 \exp(-ikL) + E_2 \exp(ikL) = 0$  soit  $E_1(\exp(-ikL) - \exp(-ikL)) = -2iE_1 \sin(kL) = 0$ . Comme  $E_1$  est non nul, sinon il n'y a pas d'onde, il vient  $\sin(kL) = 0$ . On en déduit que  $kL = n\pi$  avec  $n$  entier positif, soit  $\frac{2\pi f}{c} L = n\pi$  soit  $f = n \frac{c}{2L} = f_n$ .

3. a. Les résultats précédents permettent d'écrire :

$$\vec{E}_n(x, t) = -2iE_1 \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \exp(i\omega_n t) \vec{u}_z \quad \text{où} \quad \omega_n = 2\pi f_n.$$

b. En notation réelle,  $\vec{E}_n(x, t) = 2E_1 \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin(\omega_n t) \vec{u}_z$ . L'onde ne se propage pas, c'est une onde stationnaire.

c. Le champ électrique est constamment nul aux points d'abscisse  $x_p$  tels que  $\sin \left( \frac{n\pi x_p}{L} \right) = 0$ , soit :  $x_p = p \frac{L}{n} = p \frac{\lambda_n}{2}$  où  $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$  est la longueur d'onde de l'onde dans le mode  $n$  et  $p$  un entier.  $x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_n}{2}$ .

## CHAPITRE 20 – ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDUCTEUR, RÉFLEXION

**d.** Pour calculer le champ magnétique, deux méthodes sont possibles : on part du champ électrique que l'on vient de trouver et on applique l'équation de Maxwell-Faraday, ou bien on utilise le champ électrique sous la forme d'une somme de deux ondes planes progressives donnée par l'énoncé et pour chacune d'elles, on utilise la relation de structure des OPP. On trouve :

$$\vec{B}_n(x, t) = -\frac{2E_1}{c} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp(i\omega_n t) \vec{u}_y.$$

Le champ magnétique est constamment nul aux points d'abscisse  $x'_p$  tels que  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$ , soit :  $x'_p = (2p+1)\frac{L}{2n} = p\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4}$ .

### 20.6 Réflexion sur un métal sous incidence oblique

**1.** En observant la figure on trouve :  $\vec{k}_i = k(\sin \alpha \vec{u}_y - \cos \alpha \vec{u}_z)$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$  puisque l'onde incidente se propage dans le vide.

Le champ électrique est orthogonal au vecteur d'onde et dans le plan d'incidence donc on voit sur la figure que :  $\vec{E}_i(O, t=0) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_z)$ . L'onde polarisée rectilignement est de la forme :  $\vec{E}_i(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi)$ . Comme la norme du champ en  $O$  est maximale à  $t=0$ , on peut prendre  $\varphi=0$  et alors  $\vec{E}_0 = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_z)$ . Finalement :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_z) \cos(\omega t - k \sin \alpha y + k \cos \alpha z).$$

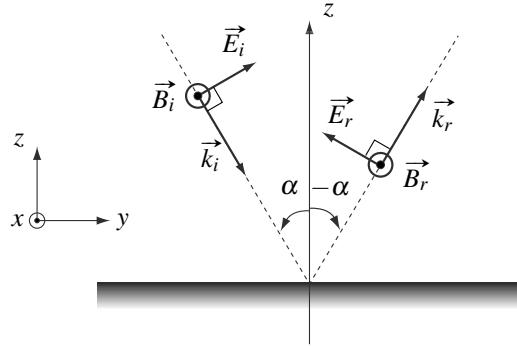
**2.** On voit sur la figure que le champ électrique de l'onde incidente en  $O$  n'est pas orthogonal à la surface du métal. Il existe nécessairement une onde réfléchie telle que le champ total, superposition du champ de l'onde incidente et du champ de l'onde réfléchie, soit orthogonal à la surface du conducteur.

D'après la loi de Descartes, le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est symétrique de celui de l'onde incidente par rapport au plan  $Oxy$  (voir figure).

**3.** Le vecteur de Poynting d'une OPP se propageant dans le vide est  $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire donnant la direction et le sens de propagation. Pour l'onde incidente :  $\vec{\Pi}_i = \epsilon_0 c E_i^2 (\sin \alpha \vec{u}_y - \cos \alpha \vec{u}_z)$ ; pour l'onde réfléchie :  $\vec{\Pi}_r = \epsilon_0 c E_r^2 (\sin \alpha \vec{u}_y + \cos \alpha \vec{u}_z)$ .

Le conducteur est parfait donc il n'absorbe aucune énergie. Soit un élément de surface du conducteur  $d\vec{S}$  autour de  $O$ . La puissance électromagnétique qui arrive sur  $dS$  avec l'onde incidente est :  $d\mathcal{P}_{em,i} = \vec{\Pi}_i \cdot (-d\vec{S} \vec{u}_z) = \epsilon_0 c E_i(O, t)^2 \cos \alpha dS$ ; la puissance électromagnétique qui quitte  $dS$  avec l'onde réfléchie :  $d\mathcal{P}_{em,r} = \vec{\Pi}_r \cdot (d\vec{S} \vec{u}_z) = \epsilon_0 c E_r(O, t)^2 \cos \alpha dS$ . Le conducteur étant parfait :  $d\mathcal{P}_{em,r} = d\mathcal{P}_{em,i}$  donc  $\|\vec{E}_r(O, t)\| = \|\vec{E}_i(O, t)\|$ .

**4.** Le champ électrique  $\vec{E}_r$  est orthogonal à  $\vec{k}_r$ . Pour que  $\vec{E}_i + \vec{E}_r$  soit orthogonal au conducteur, il faut qu'il soit dans le plan d'incidence et qu'il pointe « vers la gauche » (voir figure). Les champs magnétiques se déduisent de la structure des OPP.



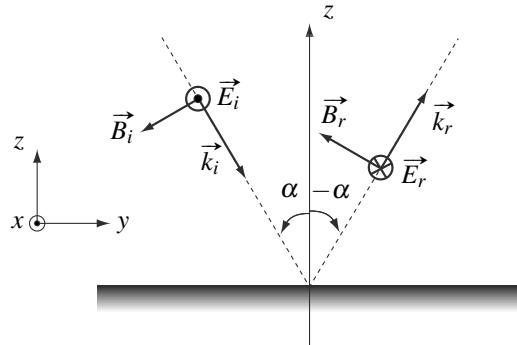
La réflexion métallique s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$  uniquement pour la composante  $E_y$  qui seule change de signe lors de la réflexion.

**5.** En suivant la même méthode que pour le champ de l'onde incidente on trouve :

$$\vec{E}_r(M, t) = E_0 (-\cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_z) \cos(\omega t - k \sin \alpha y - k \cos \alpha z).$$

**6.** Les vecteurs d'ondes sont les mêmes. Le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence donc suivant le vecteur  $\vec{u}_x$  :  $\vec{E}_i(O, t=0) = E_0 \vec{u}_x$ . On trouve de la même manière :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t - k \sin \alpha y + k \cos \alpha z).$$



Le champ électrique  $\vec{E}_r(O, t)$  a une composante sur  $\vec{u}_x$  égale et opposée à celle de  $\vec{E}_i(O, t)$  car ces composantes doivent s'annuler dans la somme des champs; comme  $\|\vec{E}_r(O, t)\| = \|\vec{E}_i(O, t)\|$  on a nécessairement  $\vec{E}_r(O, t) = -\vec{E}_i(O, t)$ . Les champs magnétiques se déduisent de la structure des OPP.

$$\vec{E}_r(M, t) = -E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t - k \sin \alpha y - k \cos \alpha z).$$

**7.** La réflexion métallique s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$  (c'est-à-dire d'un changement de signe) pour les composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $B_z$ .

## CHAPITRE 20 – ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDUCTEUR, RÉFLEXION

**20.7 Pression de radiation**

1. On utilise l'équation de Maxwell-Ampère dans laquelle on néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction :

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}_t = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge \left( B_0 \exp \left( -\frac{z}{\delta} \right) \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \vec{u}_y \right) \\ &= \frac{B_0}{\mu_0 \delta} \exp \left( -\frac{z}{\delta} \right) \left( \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \sin \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right) \vec{u}_x.\end{aligned}$$

2. a. La force exercée par le champ électromagnétique sur un ion de vitesse  $\vec{v}_i$  est :  $\vec{F}_i = q_i (\vec{E}_t + \vec{v}_i \wedge \vec{B}_t)$ ; et sur un électron de vitesse  $\vec{v}_e$  :  $\vec{F}_e = q_e (\vec{E}_t + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_t)$ .

b. Le métal étant localement neutre  $\rho = n_i q_i + n_e q_e = (n_i - n_e) e = 0$ .

c. Le volume  $d\tau$  contenant  $n_i d\tau$  ions et  $n_e d\tau$  électrons est soumis, de la part du champ électromagnétique, à la force totale :

$$d\vec{F} = n_i d\tau \vec{F}_i + n_e d\tau \vec{F}_e = (n_i q_i + n_e q_e) \vec{E}_t d\tau + (n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e) \wedge \vec{B}_t d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B}_t d\tau,$$

car  $n_i q_i + n_e q_e = 0$  et  $\vec{j} = n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e$ .

d.  $\vec{f}_V = \frac{B_0^2}{\mu_0 \delta} \exp \left( -\frac{2z}{\delta} \right) \left( \cos^2 \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \sin \left( \omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right) \vec{u}_z$  et en moyenne dans le temps :  $\langle \vec{f}_V \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0 \delta} \exp \left( -\frac{2z}{\delta} \right) \vec{u}_z$ .

3.  $d^2\vec{F} = \langle \vec{f}_V \rangle dS dz$ , et :

$$d\vec{F} = \int_{z=0}^{\infty} \langle \vec{f}_V \rangle dS dz = \frac{B_0^2}{2\mu_0 \delta} dS \vec{u}_z \int_{z=0}^{\infty} \exp \left( -\frac{2z}{\delta} \right) dz = \frac{B_0^2}{4\mu_0} dS \vec{u}_z.$$

4. La pression de radiation est définie par  $\overline{d\vec{F}} = p_{\text{rad}} dS \vec{u}_z$  donc  $p_{\text{rad}} = \frac{B_0^2}{4\mu_0}$ .

Dans le vide l'onde électromagnétique est une onde stationnaire. En  $z = 0$  on a un ventre de vibration magnétique donc un nœud de vibration électrique. Alors :

$$u_{em}(z = 0, t) = \frac{1}{2\mu_0} B_{\text{vide}}^2(z = 0, t) = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \langle u_{em} \rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}$$

(la densité moyenne d'énergie électromagnétique est uniforme pour l'onde stationnaire dans le vide, donc il est inutile de préciser qu'on l'a calculée en  $z = 0$ ). Finalement :  $p_{\text{rad}} = \langle u_{em} \rangle$ .

**20.8 Cavité réelle, coefficient de qualité**

$$1. f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2L} = \frac{3.10^8}{2 \times 3.10^{-2}} = 5 \text{ GHz.}$$

L'ordre de grandeur du terme  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (appelé courant de déplacement) est  $\varepsilon_0 \omega E^*$  où  $E^*$  est l'ordre de grandeur du champ électrique ; l'ordre de grandeur de la densité volumique de courant est  $\gamma E^*$ . Or :  $\varepsilon_0 \omega = \varepsilon_0 2\pi f = 8,85 \cdot 10^{-12} \times 2\pi \times 5.10^9 = 3.10^{-1} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ce qui est

très inférieur à  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Le courant de déplacement est donc négligeable devant la densité volumique de courant.

$$\text{Enfin : } \delta = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c^2}{\gamma\omega}} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c L}{\pi\gamma}} \simeq 2 \mu\text{m}. \text{ Donc : } \delta \ll L.$$

**2.** Il faut calculer le champ électrique dans la cavité ; on utilise l'équation de Maxwell-Ampère, avec  $\vec{j} = \vec{0}$  puisque c'est dans la cavité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}_{\text{cavité}}}{\partial t} &= c^2 \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{cavité}} = c^2 \left( \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge \left( B_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y \right) \\ &= \frac{\pi}{L} c^2 B_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_x. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \vec{E}_{\text{cavité}} = c B_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_x, \text{ en utilisant } \omega = \frac{\pi c}{L}.$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique dans la cavité est :

$$u_{em,\text{cavité}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos^2(\omega t),$$

et sa moyenne :  $\langle u_{em,\text{cavité}} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 c^2 B_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) = \frac{1}{4} \epsilon_0 c^2 B_0^2$ , en utilisant  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ . Finalement, l'énergie électromagnétique moyenne dans la cavité est :

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 c^2 B_0^2 LS.$$

**3.** Il faut calculer la densité volumique de courant dans le métal ; on utilise l'équation de Maxwell-Ampère, en négligeant le courant de déplacement :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}_{\text{métal}} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge \left( -B_0 \exp\left(-\frac{z-L}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z-L}{\delta}\right) \vec{u}_y \right) \\ &= \frac{B_0}{\mu_0 \delta} \exp\left(-\frac{z-L}{\delta}\right) \left( -\cos\left(\omega t - \frac{z-L}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{z-L}{\delta}\right) \right) \vec{u}_x. \end{aligned}$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\mathcal{P}_{V,J} = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta^2} \exp\left(-\frac{2(z-L)}{\delta}\right) \left( -\cos\left(\omega t - \frac{z-L}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{z-L}{\delta}\right) \right)^2,$$

$$\text{et sa moyenne dans le temps est : } \langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta^2} \exp\left(-\frac{2(z-L)}{\delta}\right).$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le métal est :

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \int_{z=L}^{\infty} \langle \mathcal{P}_{V,J} \rangle S dz = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta^2} S \int_{z=L}^{\infty} \exp\left(-\frac{2(z-L)}{\delta}\right) dz = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta^2} S \times \frac{\delta}{2} = \frac{B_0^2 S}{2 \mu_0^2 \gamma \delta}.$$

## CHAPITRE 20 – ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDUCTEUR, RÉFLEXION

**4.** Par définition :  $Q = 2\pi \frac{\langle U_{em} \rangle}{2\langle \mathcal{P}_J \rangle \times \frac{2\pi}{\omega}}$ , où le facteur 2 provient du fait qu'il y a perte par effet Joule dans les deux parois de la cavité. Il vient :  $Q = \frac{1}{4}\mu_0\gamma\omega\delta L = \frac{L}{2\delta}$ . Avec les valeurs de la première question  $Q \simeq 1.10^4$ .

La longueur d'onde est :  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{L}{2}$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\mu_0c\gamma}}$ . Ainsi :  $Q = \sqrt{\pi\mu_0c\gamma\lambda}$ .  $Q$  augmente avec  $\gamma$  et  $\lambda$ . Il est plus facile d'avoir un facteur de qualité élevé pour les ondes radio que pour les micro-ondes. On peut aussi jouer sur la conductivité des parois.

### 20.9 Réflexion-transmission d'une onde à la surface d'un plasma

**1.** Les équations étant linéaires, les ondes incidente, réfléchie et transmise ont même pulsation. Elles s'écrivent :

- *Onde incidente* :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{k}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$$

- *Onde réfléchie* :

$$\vec{E}_r = r E_0 \exp(i(\omega t + kx)) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = -\frac{k}{\omega} r E_0 \exp(i(\omega t + kx)) \vec{u}_z$$

- *Onde transmise* :

$$\vec{E}_t = t E_0 \exp(i(\omega t - \underline{n}kx)) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_t = \frac{\underline{n}k}{\omega} t E_0 \exp(i(\omega t - \underline{n}kx)) \vec{u}_z$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ .

**2.** La continuité du champ électrique et du champ magnétique en  $x = 0$  conduit au système :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \underline{n}t \end{cases}$$

puis en résolvant on trouve :  $r = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$  et  $t = \frac{2}{1 + \underline{n}}$ .

**3.** Pour  $\omega > \omega_p$  :  $\underline{n}$  est réel, égal à  $\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ . Les coefficients de réflexion et de transmission sont réels :

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

Pour  $\omega < \omega_P$  :  $k_{\text{plasma}}$  est imaginaire pur, égal à  $\pm ik'' = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ . On choisit le signe  $-$  car l'onde doit s'atténuer au fur et à mesure de sa pénétration dans le plasma. Ainsi :  $\underline{n} = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ . Les coefficients de réflexion et de transmission sont complexes :

$$\underline{r} = \frac{1 + i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1 - i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 - i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}.$$

Le coefficient  $\underline{r}$  est de module 1.

**4.** Les vecteurs de Poynting moyens des ondes incidente, réfléchie et transmise peuvent se calculer à partir de la formule :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*).$$

On trouve ainsi immédiatement :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x, \quad \langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{|\underline{r}|^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{\text{Re}(\underline{n}) |\underline{t}|^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x.$$

Donc :  $R = |\underline{r}|^2$  et  $T = |\underline{t}|^2 \text{Re}(\underline{n})$ .

$$\text{Pour } \omega > \omega_P, R = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right)^2}. \quad \text{On vérifie que } R + T = 1,$$

relation traduisant la conservation de l'énergie.

Pour  $\omega > \omega_P$ ,  $R = 1$  et  $T = 0$  (car  $\text{Re}(\underline{n}) = 0$ ). Le plasma se comporte comme un miroir parfait.

### 20.10 Réflexion sur un miroir mobile, effet Doppler

**1. a.** L'onde incidente est une OPPM se propageant dans la vide dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_x$ ; d'après la relation de structure :  $\vec{B}_i = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_i = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega_i \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_y$ . D'après la formule fournie :  $\vec{E}'_i = \vec{E}_i + (v\vec{u}_x) \wedge \vec{B}_i = \left(1 - \frac{v}{c}\right) E_0 \cos\left(\omega_i \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$ .

$$\text{b. } \vec{B}_r = \frac{1}{c} (-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}_r = \frac{E_r}{c} \cos\left(\omega_r \left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_y,$$

et  $\vec{E}'_r = \vec{E}_r + (v\vec{u}_x) \wedge \vec{B}_r = \left(1 + \frac{v}{c}\right) E_r \cos\left(\omega_r \left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_z$ .

**c.** Le champ électrique ne peut pas être orthogonal à la plaque sans être nul, donc :  $(\vec{E}'_i + \vec{E}'_r)_{x=v t} = \vec{0}$ . Ceci s'écrit :

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) E_0 \cos\left(\omega_i \left(1 - \frac{v}{c}\right) t\right) = -\left(1 + \frac{v}{c}\right) E_r \cos\left(\omega_r \left(1 + \frac{v}{c}\right) t + \varphi_r\right).$$

## CHAPITRE 20 – ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDUCTEUR, RÉFLEXION

Cette égalité entre deux fonctions sinusoïdales implique l'égalité de leurs amplitudes, pulsations et phases à l'origine, donc :  $\left(1 - \frac{v}{c}\right) \omega_i = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \omega_r$  soit  $\omega_r = \frac{c-v}{c+v} \omega_i$ . Pour  $v \ll c$ ,  $\omega_r \simeq \omega_i \left(1 - \frac{2v}{c}\right)$ .

La fréquence de l'onde réfléchie sur le miroir mobile est différente de la fréquence de l'onde incidente ; c'est une manifestation de l'effet Doppler.

**2. a.** L'égalité des amplitudes s'écrit :  $E_r = \frac{c-v}{c+v} E_0 \simeq \left(1 - \frac{2v}{c}\right) E_i$ .

**b.**  $R$  est le pourcentage de l'énergie électromagnétique incidente qui revient dans l'onde réfléchie.

L'onde incidente étant une OPP se propageant dans le vide :  $\vec{\Pi}_i = \frac{1}{\mu_0 c} E_i^2 \vec{u}_x$  donc  $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$ . De même :  $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{E_r^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$ . Ainsi :  $R = \frac{E_r^2}{E_0^2} = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2$ .

$R < 1$  donc toute l'énergie de l'onde incidente ne revient pas dans l'onde réfléchie. Cela n'est pas dû à une absorption d'énergie par la plaque (elle est parfaitement conductrice) mais au fait qu'il y a de plus en plus d'énergie électromagnétique devant la plaque.

# Rayonnement dipolaire électrique

Dans les deux chapitres précédents, on a décrit les propriétés des ondes électromagnétiques sans les relier aux caractéristiques de leurs sources. Dans ce chapitre on considère la plus simple des sources d'onde électromagnétique, le dipôle électrique oscillant.

## 1 Dipôle électrique oscillant

### 1.1 Moment dipolaire électrique

Le dipôle électrique statique, introduit dans le cours d'électrostatique, est un ensemble de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$  respectivement placées aux points fixes  $P$  et  $N$ . En se plaçant à une distance des charges grande devant  $\ell = NP$ , on a pu trouver des expressions du potentiel et du champ électrostatiques dépendant uniquement du moment dipolaire :  $\vec{p} = q\vec{NP}$ .

On peut généraliser la définition à un ensemble de charge globalement neutre quelconque, composé de charges ponctuelles  $q_i$ , situées aux points  $P_i$ , et de charges  $-q_i$ , situées aux points  $N_i$ . Le moment dipolaire de cette distribution de charges est la somme des moments dipolaires des charges  $q_i$  et  $-q_i$  prises deux à deux, soit :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{N}_i \vec{P}_i = - \sum_i q_i \vec{O} \vec{N}_i + \sum_i q_i \vec{O} \vec{P}_i = - \left( \sum_i q_i \right) \vec{OG}_- + \left( \sum_i q_i \right) \vec{OG}_+,$$

où  $G_-$  (resp.  $G_+$ ) est le barycentre des points  $N_i$  (resp.  $P_i$ ) affectés des poids  $q_i$ , soit le barycentre des charges négatives (resp. positives). En notant  $Q = \sum_i q_i$  on a :

$$\vec{p} = Q \vec{G}_- \vec{G}_+ .$$

D'après le théorème de superposition, le potentiel et le champ électrostatiques créés par la distribution, à une distance grande devant sa taille caractéristique  $\ell$ , sont donnés par les mêmes formules que pour le système de deux charges.

## 1.2 Définition d'un dipôle électrique oscillant

Un **dipôle électrique oscillant** est un ensemble de charges électriques globalement neutre, de taille caractéristique  $\ell$  et de moment dipolaire  $\vec{p}(t)$  tel que :

- $\vec{p}(t)$  varie périodiquement avec une période  $T$  et a une moyenne nulle,
- $\ell \ll r$  où  $r$  est la distance entre le dipôle et le point où l'on calcule son champ électromagnétique.
- $\ell \ll \lambda$  où  $\lambda = cT$  est la longueur d'onde associée à la période d'oscillation du moment dipolaire,

Comme en électrostatique, le dipôle électrique oscillant doit être « de petite taille ». La première condition,  $\ell \ll r$  s'appliquait déjà en électrostatique mais la deuxième condition,  $\ell \ll \lambda$  est nouvelle. On peut lui donner deux interprétations physiques :

- on peut négliger le délai de propagation, à la célérité  $c$ , entre deux points de la distribution de charge devant la période d'oscillation, ce délai étant de l'ordre de  $\frac{\ell}{c} \ll T$  ;
- les mouvements de charges de la distribution sont non **non relativistes**, puisque l'ordre de grandeur de leurs vitesses est  $\frac{\ell}{T} \ll c$ .

### Exemple

L'exemple le plus simple de dipôle oscillant est un ensemble de deux charges  $+q$  et  $-q$  dont la première est fixe en  $P = O$  et la deuxième oscille de sorte que sa position  $N$  est :  $\vec{ON} = \ell \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On a alors :

$$\vec{p}(t) = -q\ell \cos(\omega t) \vec{u}_z = -p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z,$$

avec  $p_0 = q\ell$ . Il faut que :  $\ell \ll \frac{2\pi c}{\omega}$ .

On peut modéliser ainsi un atome d'hydrogène émettant de la lumière visible ou du proche ultraviolet : le noyau, de charge  $+e$  est fixe et l'électron, de charge  $-e$  oscille avec une amplitude  $\ell$  de l'ordre grandeur du rayon de l'atome, égal à 0,53 nm. La longueur d'onde de la lumière émise étant de l'ordre de 0,1 μm on a bien  $\ell \ll \lambda$ .

## 2 Champ électromagnétique créé par un dipôle oscillant

On considère un dipôle électrique oscillant sinusoïdalement suivant la direction ( $Oz$ ) :

$$\vec{p} = p_0 \cos(\omega t + \psi) \vec{u}_z,$$

où  $p_0$  et  $\psi$  sont des constantes. Cette distribution de charges, supposée seule dans l'espace, crée dans le vide un champ électromagnétique que l'on se propose d'étudier.

## Remarques

- Le choix d'un dipôle électrique oscillant ayant une direction fixe n'est pas restrictif. En effet, le dipôle électrique oscillant sinusoïdalement le plus général est :

$$\vec{p} = p_0x \cos(\omega t + \psi_x) \vec{u}_x + p_0y \cos(\omega t + \psi_y) \vec{u}_y + p_0z \cos(\omega t + \psi_z) \vec{u}_z;$$

il peut être vu comme la somme de trois dipôles oscillant suivant les directions ( $Ox$ ), ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ). Le champ électromagnétique créé est, d'après le théorème de superposition, la somme des trois champs créés par ces trois dipôles.

- Le choix d'un dipôle oscillant de manière sinusoïdale n'est pas non plus restrictif car toute fonction périodique peut se décomposer en somme de fonctions sinusoïdales d'après l'analyse de Fourier.

On repère tout point  $M$  de l'espace par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et d'axe ( $Oz$ ) (voir figure 21.1).

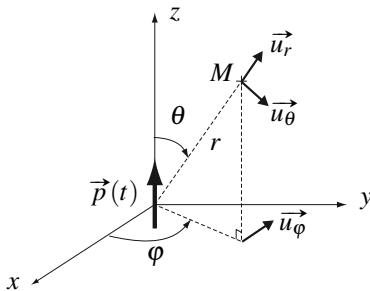


Figure 21.1 – Repérage d'un point de l'espace.

## 2.1 Étude des symétries

Comme en électrostatique et en magnétostatique les **symétries** permettent d'obtenir des renseignements sur le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$  sans faire de calcul. Ici les deux champs ont pour source commune le dipôle électrique oscillant.

- Le dipôle électrique est *invariant par rotation autour de l'axe ( $Oz$ )* donc les composantes  $E_r, E_\theta, E_\varphi, B_r, B_\theta$  et  $B_\varphi$  du champ ne dépendent pas de l'angle  $\varphi$ .
- Pour tout point  $M$ , le dipôle électrique admet le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  (plan méridien passant par  $M$ ) pour *plan de symétrie*. On en déduit que  $\vec{E}(M,t)$ , qui est un vrai vecteur, est compris dans ce plan et que  $\vec{B}(M,t)$ , qui est un pseudo-vecteur, est orthogonal à ce plan, soit :

$$E_\varphi = 0 \quad \text{et} \quad B_r = B_\theta = 0.$$



Ceci est vrai uniquement parce que le moment dipolaire  $\vec{p}(t)$  est un vecteur normal. Si on avait à la place un moment dipolaire magnétique, qui est un pseudo-vecteur, le plan méridien serait un plan d'antisymétrie et les conclusions concernant le champ électrique et le champ magnétique seraient inversées.

Finalement le champ électromagnétique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_r(r, \theta, t) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = B_\phi(r, \theta, t) \vec{u}_\phi. \quad (21.1)$$

### Remarque

En tout point de ( $Oz$ ) passe une infinité de plans de symétrie (tous les plans méridiens) ; le champ électrique est contenu dans tous ces plans donc parallèle à  $\vec{u}_z$  ; le champ magnétique est perpendiculaire à tous ces plans donc nul. Ainsi :

$$E_\theta(r, \theta = 0 \text{ ou } \pi, t) = 0 \quad \text{et} \quad B_\phi(r, \theta = 0 \text{ ou } \pi, t) = 0.$$

## 2.2 Zone de rayonnement

Un point est dans la **zone de rayonnement** si sa distance  $r$  au dipôle électrique oscillant est telle que :  $r \gg \lambda$ .

C'est la zone la plus importante d'un point de vue pratique.

En optique par exemple, les longueurs d'onde sont de l'ordre de 500 nm, on observe les phénomènes à quelques dizaines de centimètres des sources (ou plus) : il s'agit bien de la zone de rayonnement.

Pour les ondes radio en modulation de fréquence, les longueurs d'ondes sont de l'ordre de quelques mètres ; les récepteurs, à distance de l'émetteur variant entre la centaine de mètres et quelques dizaines de kilomètres, sont bien dans la zone de rayonnement.

En revanche, pour les grandes ondes où les longueurs d'onde sont de l'ordre du kilomètre, le modèle n'est applicable que si les récepteurs ne sont pas trop près des émetteurs.

## 2.3 Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement

### a) Expression

Dans la zone de rayonnement, le champ électromagnétique créé par le dipôle électrique oscillant est, en posant  $k = \frac{\omega}{c}$  :

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos(\omega t - kr + \psi) \vec{u}_\theta \\ \vec{B}(M,t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c r} \cos(\omega t - kr + \psi) \vec{u}_\phi \end{cases} \quad (21.2)$$

*Ces expressions ne sont pas à retenir, il faut seulement savoir en dégager le sens physique.*

 Il faut savoir vérifier l'homogénéité de ces expressions. On peut commencer par comparer les expressions des deux champs : le champ magnétique a la dimension du champ électrique divisée par une vitesse,  $c$  dans les expressions précédentes. Après l'avoir remarqué il suffit de vérifier l'homogénéité de l'expression d'un des deux champs.

Pour cela, la méthode la plus simple est de comparer l'expression à une expression connue pour le même type de champ. Par exemple, on peut comparer l'expression du champ magnétique ci-dessus au champ d'un fil infini  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  : pour que les deux expressions soient de même unité il faut que  $\frac{p_0 \omega^2}{c}$  soit homogène à une intensité  $I$ , ce qui est bien le cas puisque :  $\left[ \frac{p_0 \omega^2}{c} \right] = \frac{\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{C} \cdot \text{s}^{-1} = [I]$ .

Pour vérifier l'homogénéité du champ électrique, il est préférable de remplacer la constante fondamentale  $\mu_0$  par  $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$  ; l'expression a donc l'homogénéité de  $\frac{p_0 \omega^2}{\epsilon_0 c^2 r}$ .

Si on la compare au champ d'une charge ponctuelle  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  on constate que les deux expressions ont la même unité si  $\frac{p_0 \omega^2}{c^2}$  est homogène à  $\frac{q}{r}$  ; c'est bien le cas puisque :  $\left[ \frac{p_0 \omega^2}{c^2} \right] = \frac{\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{C} \cdot \text{m}^{-1} = \left[ \frac{q}{r} \right]$ .

### b) Interprétation physique

Dans les formules (21.2), les caractéristiques du dipôle électrique oscillant apparaissent à travers le terme :

$$-\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr + \psi) = -\omega^2 p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi\right) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t_{\text{ret}} + \psi) = p''(t_{\text{ret}}),$$

où  $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$ . Ainsi le champ électromagnétique, en  $M$  et à l'instant  $t$ , dépend de l'état du dipôle à l'**instant retardé**  $t_{\text{ret}}$ , instant antérieur à l'instant  $t$ . La différence entre  $t$  et  $t_{\text{ret}}$  correspond au délai de propagation, à la célérité  $c$ , entre le dipôle et le point  $M$ .

#### Remarque

Le dipôle n'étant pas ponctuel ce délai de propagation est en réalité différent entre chacune des charges de la distribution et le point  $M$ . Mais la distance entre les charges et  $M$  est comprise entre  $r - \ell$  et  $r + \ell$  donc la différence entre deux délais de propagation est inférieure à  $\frac{2\ell}{c} \ll T$  puisque  $\ell \ll \lambda$ . Elle est donc négligeable.

D'autre part, le terme  $\cos(\omega t - kr + \psi)$  fait penser au  $\cos(\omega t - kz + \psi)$  apparaissant dans l'expression d'une OPPM se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_z$ . Par analogie, on a une onde se propageant localement dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}_r$ , c'est-à-dire radialement à partir du dipôle.

### c) Structure locale d'onde plane

Il apparaît clairement sur les formules (21.2) que :

$$\|\vec{B}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|, \quad \vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{et} \quad \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}_r.$$

Dans la zone de rayonnement le champ électromagnétique a localement la structure d'une onde plane progressive se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_r$ .

Ceci est illustré sur la figure 21.2.

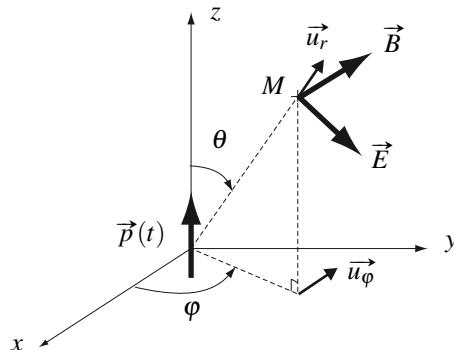


Figure 21.2 – Structure du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement.

#### d) Polarisation rectiligne

De plus, le champ électrique en  $M$  garde constamment la direction du vecteur  $\vec{u}_\theta$ . Ceci est dû au fait que l'on a pris un dipôle oscillant gardant une direction fixe. Plus généralement :

L'onde électromagnétique rayonnée par un dipôle oscillant de direction fixe est polarisée rectilignement en tout point  $M$ . La direction de polarisation est contenue dans le plan contenant  $M$  et le dipôle et perpendiculaire à la direction de propagation.

#### e) Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting de l'onde s'écrit :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(\omega t - kr + \psi) \vec{u}_r.$$

et sa moyenne dans le temps :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r.$$

Ce vecteur est dirigé suivant  $\vec{u}_r$  : l'énergie électromagnétique se déplace radialement, en s'éloignant du dipôle.

### 2.4 Anisotropie du rayonnement

Les champs électrique et magnétique sont proportionnels à  $\sin \theta$  et le vecteur de Poynting moyen à  $\sin^2 \theta$ . Cela signifie que l'émission dipolaire est **anisotrope**. Elle est maximale pour

$\theta = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire dans les directions perpendiculaires au moment dipolaire et elle est nulle pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire dans la direction du dipôle.

On peut illustrer cela en traçant l'**indicatrice de rayonnement**. Il s'agit de la surface définie en coordonnées sphériques par :

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|(\theta, \varphi)}{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\max}} = \sin^2 \theta.$$

C'est une surface de révolution autour de ( $Oz$ ) car  $R$  ne dépend pas de  $\varphi$ . La figure 21.3 en donne la coupe par un plan méridien  $\varphi = \text{constante}$ .

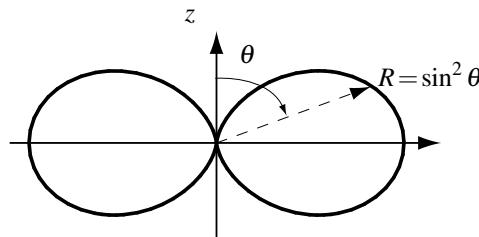


Figure 21.3 – Indicateur de rayonnement d'un dipôle électrique oscillant parallèle à ( $Oz$ ).

## 2.5 Affaiblissement de l'onde avec la distance

Les champs électrique et magnétique sont proportionnels à  $\frac{1}{r}$  et le vecteur de Poynting à  $\frac{1}{r^2}$ . Cet **affaiblissement** de l'onde lorsque la distance à la source augmente ne doit pas être confondu avec une atténuation (observée par exemple lors de la propagation d'une onde plane dans un conducteur ohmique au chapitre précédent). Elle n'est pas due à une perte d'énergie, qui ne pourrait exister puisque l'onde se propage dans le vide, mais à un effet purement géométrique : la puissance émise se répartit sur des sphères de plus en plus grandes. La surface de la sphère de rayon  $r$  étant proportionnelle à  $r^2$ , il est tout à fait normal que le vecteur de Poynting soit proportionnel à  $\frac{1}{r^2}$ .

Calculons la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle$  traversant la sphère  $\mathcal{S}(r)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ , de l'intérieur vers l'extérieur :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \iint_{\mathcal{S}(r)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}(r)} \left( \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r \right) \cdot (dS \vec{u}_r) \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \times 2\pi \\ &= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}, \end{aligned}$$

en utilisant  $\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3}$ . Dans ce calcul, la dépendance en  $\frac{1}{r^2}$  du vecteur de Poynting fait que  $r$  disparaît du résultat. Ainsi, toutes les sphères de centre  $O$  sont traversées par la même puissance moyenne, ce qui traduit la **conservation de l'énergie** : entre deux sphères de centre  $O$  il n'y a pas d'énergie électromagnétique produite ni consommée, la puissance traversant les deux sphères doit donc être la même. Cette puissance est la puissance rayonnée par le dipôle électrique oscillant.

L'affaiblissement des champs électrique et magnétique de l'onde rayonnée en  $\frac{1}{r}$  traduit la conservation de l'énergie.

### Remarques

1. Toutes les ondes sphériques dans l'espace à trois dimensions ont un affaiblissement des champs en  $\frac{1}{r}$  et du vecteur de Poynting en  $\frac{1}{r^2}$ .
2. De manière analogue, une onde cylindrique a un affaiblissement en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  pour les champs et en  $\frac{1}{r}$  pour le vecteur de Poynting car la surface d'un cylindre de rayon  $r$  est proportionnelle à  $r$ .
3. Une onde plane n'a pas de facteur d'affaiblissement parce que l'énergie électromagnétique traverse des surfaces planes successives qui ont toutes la même aire.

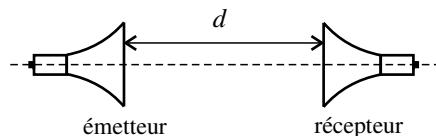
Il faut remarquer pour conclure qu'en étant proportionnel à  $\frac{1}{r}$  le champ électromagnétique du dipôle oscillant est un champ à *longue portée*. Il décroît en effet bien plus lentement que le champ d'une charge ponctuelle en électrostatique qui est en  $\frac{1}{r^2}$ , et surtout que le champ d'un dipôle électrostatique qui est en  $\frac{1}{r^3}$ . Par exemple, à une distance de 10 km d'un émetteur radio, l'amplitude du champ électrique reçu ne varie que de 10% sur une zone de 1 km de long.

### Expérience

Les deux expériences suivantes étudient le rayonnement d'un cornet émetteur d'ondes centimétriques que l'on peut comparer au rayonnement dipolaire électrique étudié dans ce chapitre.

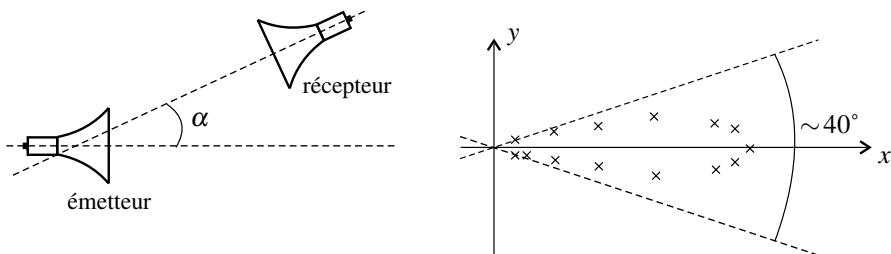
L'émetteur a été présenté au chapitre précédent. Le récepteur utilisé est un cornet analogue au cornet émetteur : il contient une diode réceptrice placée dans une cavité résonante. On le relie à un boîtier dédié qui contient un dispositif d'amplification (éventuelle) et de filtrage, fournissant une tension continue  $U$  proportionnelle à la moyenne du carré du champ électrique que l'on mesure au voltmètre. La mesure nécessite une tarage préliminaire : après avoir placé la main devant le cornet récepteur,

on joue sur le bouton de réglage du boîtier pour annuler la tension lue.



Dans une première expérience, on place le récepteur et l'émetteur face à face, à distance  $d$  l'un de l'autre (voir figure). On fait varier  $d$  de 30 cm à 60 cm par pas de 5 cm et on mesure la tension  $U$  à chaque fois. On trace  $U$  en fonction de  $\frac{1}{d^2}$  : les points s'alignent approximativement sur une droite, ce qui montre que l'amplitude du champ électrique de l'onde varie en  $\frac{1}{d}$ . On peut aussi, si l'on dispose d'un logiciel de traitement des résultats, modéliser la fonction  $U = f(d)$  par une expression de la forme  $\frac{A}{(d+B)^2}$ , ce qui est plus proche de la réalité car la distance entre le centre de l'onde émise et le récepteur n'est en fait pas exactement égale à  $d$ .

Dans une deuxième expérience, on place le récepteur toujours à la même distance  $d_0$  de l'émetteur, dans une direction faisant l'angle  $\alpha$  avec l'axe de symétrie de l'émetteur. On fait varier  $\alpha$  par pas de  $3^\circ$  et on mesure la tension  $U(\alpha)$  (on peut repérer la valeur  $\alpha = 0$  car elle correspond à la valeur maximale de  $U$ ).



En portant sur un graphe le point de coordonnées polaires  $(\frac{U(\alpha)}{U_{\max}}, \alpha)$  on obtient l'indicatrice de rayonnement du cornet émetteur. Un résultat typique est montré sur la partie droite de la figure : il correspond à  $d_0 = 50$  cm et l'angle d'ouverture du faisceau émis est voisin de  $40^\circ$ . On peut répéter les mesures pour différentes distances  $d_0$ .

## 2.6 Puissance totale rayonnée

La puissance moyenne traversant toutes les sphères centrées en  $O$  est la **puissance totale rayonnée** par le dipôle oscillant. On a calculé au paragraphe précédent :

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}.$$

Cette puissance est proportionnelle à  $\omega^4$ . Elle augmente très rapidement avec la fréquence émise ; elle diminue très rapidement avec la longueur d'onde. On verra dans l'approche documentaire qui suit une conséquence très importante de cette propriété.

Par ailleurs  $\mathcal{P}_{\text{rayonnée}}$  est proportionnelle à  $p_0 \omega^4$  donc à la valeur moyenne du carré de l'accélération des charges en mouvement. En effet, si l'on revient à l'exemple de dipôle oscillant donné en début de chapitre,  $p_0 = \ell q$  et l'accélération de la charge  $q$  est  $a(t) = -\ell \omega^2 \cos(\omega t)$  de sorte que :

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2} \ell^2 \omega^4 = \frac{p_0^2 \omega^4}{2q^2}.$$

On peut ainsi écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \langle a^2 \rangle = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \langle a^2 \rangle.$$

Cette formule est la *formule de Larmor*, formule générale qui relie la puissance rayonnée par une charge  $q$  non relativiste au carré de son accélération. Selon cette formule, toute charge électrique *subissant une accélération* émet dans l'espace une puissance électromagnétique donc perd de l'énergie.

## 3 Approche documentaire : diffusion Rayleigh

### 3.1 Couleur du ciel

Le champ électromagnétique d'une onde interagit avec les atomes et les molécules du milieu qu'il traverse. Ces atomes ou molécules se comportent alors comme des dipôles oscillants et émettent à leur tour une onde électromagnétique correspondant au champ qui a été étudié dans les paragraphes précédents. Cette onde étant émise dans des directions différentes de la direction de l'onde excitatrice, on dit qu'il y a **diffusion**.

L'onde excitatrice peut par exemple être la lumière provenant du Soleil et le milieu traversé l'atmosphère. La lumière que nous observons dans le ciel est la lumière diffusée par les molécules composant l'atmosphère, excitées par le champ électromagnétique émis par le Soleil. La diffusion de la lumière par des particules de taille très inférieure à la longueur d'onde (par exemple des molécules) est appelée **diffusion Rayleigh**. Nous pouvons comprendre pourquoi dans ce cas la lumière diffusée est bleue.

Le *modèle de l'électron élastiquement lié* représente les électrons des molécules comme des oscillateurs harmoniques pouvant être excités par un champ électrique et ayant une fréquence de résonance située dans l'ultraviolet. La lumière solaire a dans le visible une densité spectrale d'éclairement à peu près constante (voir le chapitre d'introduction à l'optique ondulatoire) ; l'amplitude du champ électrique est donc la même pour toutes les longueurs d'onde.

La fréquence de résonance étant en dehors du domaine visible, on peut considérer que l'amplitude  $p_0$  d'oscillation des dipôles est (à peu près) la même pour toutes les pulsations du domaine visible. Mais la puissance rayonnée par un dipôle est proportionnelle à  $\omega^4$ . Ainsi, le rapport des puissances rayonnées à l'extrémité rouge du spectre visible  $\lambda_{\text{rouge}} = 0,8 \mu\text{m}$  et à l'extrémité violette  $\lambda_{\text{violet}} = 0,4 \mu\text{m}$  est :

$$\frac{\langle \mathcal{P}_{\text{violet}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{rouge}} \rangle} = \left( \frac{\omega_{\text{violet}}}{\omega_{\text{rouge}}} \right)^4 = \left( \frac{\lambda_{\text{rouge}}}{\lambda_{\text{violet}}} \right)^4 = 16.$$

La puissance diffusée est donc environ 16 fois plus intense dans le violet que dans le rouge, ce qui explique que le ciel est bleu (l'œil étant peu sensible au violet, c'est bien bleu et non violet que nous voyons le ciel).

Le phénomène est identique la nuit mais la lumière diffusée par la Lune n'est pas assez intense pour que le ciel de nuit, même à la pleine Lune, nous apparaisse bleu.

En revanche, les nuages sont blancs car ils sont constitués de particules dont la taille n'est pas petite par rapport à la longueur d'onde et, dans ce cas, l'étude de la lumière diffusée ne rentre plus dans le cadre du modèle de la diffusion Rayleigh et du dipôle oscillant mais elle est du ressort de l'optique géométrique. La diffusion de la lumière par des particules de taille supérieure à  $0,1 \mu\text{m}$  est la **diffusion de Mie** ; la puissance rayonnée par ces particules ne dépend pas de la longueur d'onde.

La diffusion Rayleigh permet aussi de comprendre la couleur orangée du Soleil couchant. En effet, lorsque la lumière traverse l'atmosphère elle perd une partie de son énergie du fait de la diffusion (l'énergie de la lumière diffusée qui part dans toutes les directions). La diffusion Rayleigh étant beaucoup plus efficace pour les petites longueurs d'ondes, la lumière solaire perd plus d'énergie dans le bleu que dans le rouge. Ainsi, le Soleil apparaît jaune au milieu de la journée quand l'épaisseur d'atmosphère traversée est plus petite et rouge-orangé au coucher quand l'épaisseur traversée est plus importante.

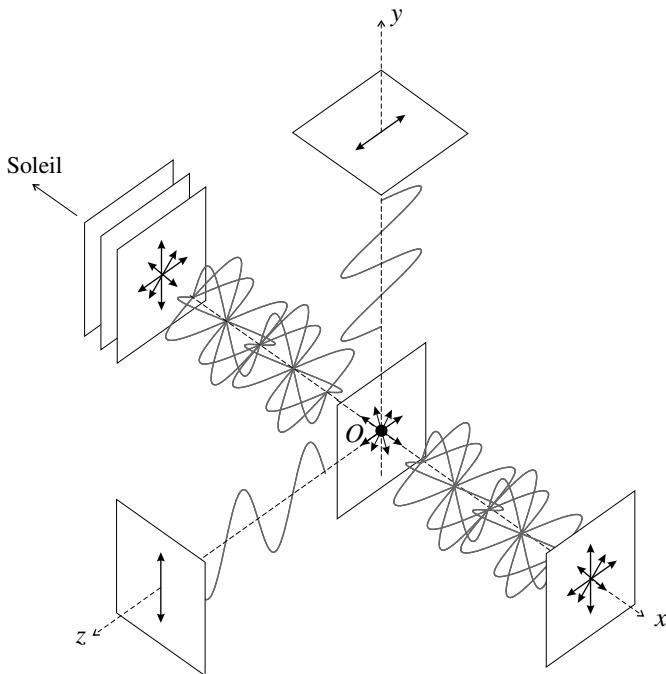
### 3.2 Polarisation par diffusion Rayleigh

La lumière diffusée par l'atmosphère est partiellement polarisée (ce dont nous pouvons nous rendre compte avec des lunettes de soleil polarisantes ou avec un filtre polarisant pour appareil photo : en tournant les lunettes ou le filtre, le ciel s'assombrit, surtout si la direction d'observation est à  $90^\circ$  de celle du Soleil). La diffusion Rayleigh permet d'interpréter cette propriété.

La lumière émise par le Soleil n'est pas polarisée. Elle présente en même temps toutes les directions de polarisation perpendiculaires à son vecteur de propagation que l'on suppose ici être  $\vec{u}_x$  (voir figure 21.4). Ainsi, elle induit des dipôles vibrants dans toutes ces directions.

Mais on sait qu'un dipôle oscillant n'envoie pas de rayonnement dans sa propre direction. Ainsi, la composante  $p_y$  d'un dipôle ne donne pas d'onde dans la direction de  $\vec{u}_y$  ; dans cette direction, le champ électrique est uniquement dû à la composante  $p_z$  des dipôles oscillants : ce champ est polarisé rectilignement dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}_y$  et contenue dans le plan ( $Oyz$ ), c'est donc  $\vec{u}_z$  (voir figure 21.2).

Ce raisonnement peut se faire aussi pour la lumière diffusée dans la direction de  $\vec{u}_z$  : elle est polarisée selon  $\vec{u}_y$  (voir figure 21.4). Plus généralement, la lumière diffusée dans la direction



**Figure 21.4** – Polarisation de la lumière solaire par la diffusion Rayleigh (d'après E. Hecht, *Optics*, Addison-Wesley 1998)

d'un vecteur  $\vec{u}$  perpendiculaire  $\vec{u}_x$  est polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire à la fois à  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_x$ .

Ainsi, si on regarde un ciel bleu dans une direction orthogonale à la direction du Soleil, on voit de la lumière polarisée rectilignement.

### Questions

1. Pourquoi une goutte d'eau de  $1 \mu\text{m}$  de diamètre ne fait-elle pas une diffusion Rayleigh ?
2. Sur les photos prises par la mission Apollo, quelle est la couleur du ciel au-dessus du sol lunaire ? Quelle est la couleur de la Terre dans ce ciel ?
3. Vaut-il mieux chercher à voir la polarisation de la lumière du ciel à midi ou au coucher du Soleil ?
4. Comment trouver la direction du Soleil après qu'il a disparu sous l'horizon ?

*Les réponses aux questions se trouvent page 656.*

**SYNTHÈSE***SAVOIRS*

- justifier le choix du modèle du dipôle électrique oscillant
- citer des exemples de dipôles oscillants
- conditions  $\ell \ll \lambda$  et  $\ell \ll r$
- définition de la zone de rayonnement
- structure locale d'onde plane dans la zone de rayonnement

*SAVOIR-FAIRE*

- vérifier l'homogénéité de l'expression du champ électromagnétique
- étudier les symétries du champ électromagnétique du dipôle oscillant
- interpréter l'affaiblissement en  $\frac{1}{r}$  des champs
- calculer la puissance totale rayonnée
- représenter l'indicatrice de rayonnement
- expliquer certaines propriétés optiques de l'atmosphère (couleur bleue du ciel, couleur du Soleil couchant, polarisation)

*MOTS-CLÉS*

- |                               |                              |                              |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| • dipôle électrique oscillant | • indicatrice de rayonnement | • diffusion Rayleigh         |
| • zone de rayonnement         |                              | • polarisation par diffusion |
| • anisotropie                 | • affaiblissement            |                              |

## S'ENTRAÎNER

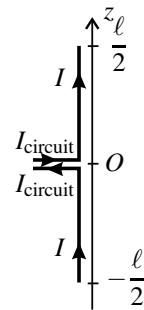
**21.1 Antenne assimilable à un dipôle oscillant (★)**

On considère une antenne hertzienne de taille  $\ell$  très petite, alimentée en son milieu par un circuit qui délivre l'intensité :

$$I_{\text{circuit}}(t) = I_0 \cos(\omega t).$$

Dans l'antenne, l'intensité  $I$  dépend de  $z$  et du temps et elle est nulle aux deux extrémités de cote  $z = \pm \frac{\ell}{2}$ ; la longueur  $\ell$  étant petite on la modélise par la loi linéaire :

$$I(z, t) = I_{\text{circuit}}(t) \left( 1 - \frac{2|z|}{\ell} \right).$$



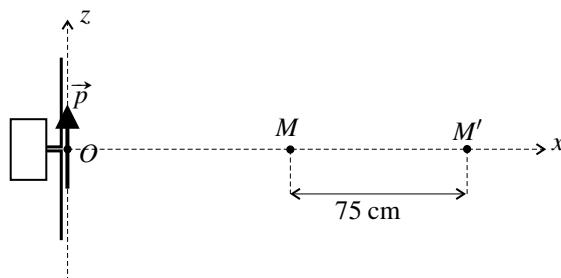
1. Préciser l'hypothèse «  $\ell$  est très petite » pour que l'antenne soit un dipôle oscillant.

2. En utilisant la loi locale de conservation de la charge sous la forme  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$ , trouver la densité linéique de charge  $\lambda(z, t)$  le long du fil.

3. En déduire le moment dipolaire instantané de l'antenne.

**21.2 Structure du champ rayonné par un dipôle oscillant (★)**

On assimile une antenne rectiligne à un dipôle électrique oscillant  $\vec{p}(t)$  placé au milieu de l'antenne et parallèle à l'antenne. L'antenne est alimentée en courant sinusoïdal de fréquence  $f = 200$  MHz. On considère deux points  $M$  et  $M'$  tels que  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM'}$  sont perpendiculaires à  $\vec{p}$  et  $MM' = 75$  cm.



1. À quelle condition (non respectée sur la figure)  $M$  et  $M'$  sont-ils dans la zone de rayonnement du dipôle oscillant ? Que signifie la phrase : « Dans la zone de rayonnement l'onde émise par un dipôle oscillant a localement la structure d'une onde plane progressive dans le vide » ? Répondre aussi précisément que possible.

2. Compléter la figure en représentant les champs électriques et magnétiques en  $M$  et en  $M'$  et à un même instant quelconque. Justifier la réponse par des arguments qualitatifs à l'exclusion de tout calcul.

### 21.3 Champ électromagnétique du dipôle électrique oscillant (★)

On donne l'expression du champ électromagnétique créé dans le vide par un dipôle électrique oscillant  $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$  placé en O, en un point de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  (avec  $r \gg \ell$ , taille caractéristique du dipôle) :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{p_0 \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{r^2} \cos(\omega t - kr) - \frac{\omega}{cr} \sin(\omega t - kr) \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{r^2} \cos(\omega t - kr) - \frac{\omega}{cr} \sin(\omega t - kr) - \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kr) \right) \vec{u}_\theta,\end{aligned}$$

et

$$\vec{B} = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c r} \left( -\frac{\omega}{cr} \sin(\omega t - kr) - \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kr) \right) \vec{u}_\phi,$$

en notant  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**1.** Vérifier l'homogénéité de ces expressions.

**2.** Simplifier ces expressions dans le cas où  $kr \ll 1$  en ne gardant pour chaque champ que le(s) terme(s) sinusoïdal(aux) de plus forte amplitude. Commenter les expressions simplifiées. Comparer les densités volumiques moyennes d'énergie électrique et magnétique dans ce cas.

**3.** Reprendre la questions précédente dans le cas où  $kr \gg 1$ .

### 21.4 Puissance d'un émetteur radio (★)

L'antenne d'un émetteur radio est assimilée à un dipôle électrique oscillant vertical placé au niveau du sol.

La puissance de l'émetteur est  $\mathcal{P}$ . Exprimer l'amplitude d'oscillation du champ électrique  $E_m$  en un point situé au sol, à distance  $d$  de l'émetteur.

On rappelle que le champ électrique du dipôle électrique oscillant, en coordonnées sphériques d'axe parallèle au dipôle, est de la forme :  $\vec{E} = \frac{A \sin \theta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi) \vec{u}_\theta$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$ .

*Application numérique :*  $\mathcal{P} = 200 \text{ W}$ ,  $d = 1,0 \cdot 10^3 \text{ m}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ . Calculer  $E_m$  (il faut multiplier le résultat par 2 pour tenir compte du sol qui est conducteur).

### 21.5 Dipôle magnétique oscillant (★)

Une spire circulaire de centre O, de rayon  $a$  et d'axe ( $Oz$ ) est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et dont l'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  est la même à chaque instant en tout point du circuit. Elle a un moment magnétique instantané  $\vec{m}(t) = m_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$  où  $m_0$  est une constante et crée dans sa zone de rayonnement un champ électromagnétique ayant dans le système de coordonnées sphériques d'axe ( $Oz$ ) les expressions suivantes :

$$\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r c} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta.$$

**1.** Exprimer  $m_0$  en fonction de  $I_0$  et  $a$ .

## CHAPITRE 21 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

**2.** Identifier dans les deux expressions ci-dessus celle du champ électrique  $\vec{E}(M,t)$  et celle du champ magnétique  $\vec{B}(M,t)$ . Donner le plus possible d'arguments pour justifier votre réponse.

**3.** Que vaut le rapport  $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$ ? Décrire la structure du champ électromagnétique rayonné par le dipôle magnétique oscillant. Comparer au champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant.

**4.** Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  ainsi que sa moyenne dans le temps.

**5.** Calculer la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle$  rayonnée dans tout l'espace. Montrer qu'elle se met sous la forme  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2$  où  $R_0$  s'exprime en fonction de  $\mu_0$  et  $c$  uniquement. Calculer la valeur numérique de  $R_0$  (on rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

## APPROFONDIR

**21.6 Atome de Thompson (★★)**

À la suite de ses travaux sur les rayons cathodiques et sa découverte de l'électron en 1897, Joseph John Thomson, physicien anglais, émit l'hypothèse que les électrons étaient contenus dans les atomes. Il proposa un modèle de l'atome qu'il surnomma lui-même « plum pudding model ». Les atomes de Thomson sont constitués :

- d'une sphère pleine positivement et uniformément chargée dont le rayon est de l'ordre du nanomètre ;
- d'électrons ponctuels qui peuvent vibrer librement à l'intérieur de la sphère.

L'atome reste électriquement neutre. Ainsi l'atome d'hydrogène est représenté dans cet exercice par une sphère de rayon  $R$  (charge  $+e$ ), de centre  $O$  et un électron (charge  $-e$ , masse  $m_e$ ).

**1.** Exprimer le moment dipolaire de l'atome d'hydrogène à un instant où l'électron se trouve en  $M$  tel que  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ .

**2.** Montrer que le champ électrique auquel l'électron est soumis est  $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r\vec{u}_r$ .

**3.** L'électron est initialement à la position  $\vec{OM}(0) = z_0\vec{u}_z$  et n'a pas de vitesse initiale. Exprimer la loi horaire de son mouvement  $z(t)$ . Calculer la pulsation  $\omega_0$  du mouvement sachant que  $R = 0,10 \text{ nm}$ ,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-elle ? Exprimer l'énergie mécanique  $E$  de l'électron en fonction de  $z_0$ ,  $m_e$  et  $\omega_0$ .

**4.** Le mouvement de l'électron est amorti du fait des pertes par rayonnement. On se propose de déterminer le temps caractéristique d'amortissement, temps supposé très supérieur à la période d'oscillation. On rappelle que la puissance rayonnée par un dipôle oscillant de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $p_0$  est :  $\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$ .

**a.** Exprimer la puissance rayonnée par l'électron en fonction de l'amplitude de ses oscillations  $z_0$ , puis en fonction de l'énergie mécanique  $E$ .

**b.** En déduire que  $E$  décroît exponentiellement avec un temps caractéristique que l'on exprimera et que l'on calculera.

### 21.7 Rayonnement d'une antenne demi-onde (\*)

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe  $Oz$ , de longueur  $l = \frac{\lambda}{2}$ , centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité :

$$\underline{I}(z, t) = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \exp(i\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  d'origine  $O$ , d'axe  $Oz$ . On se place dans la zone de rayonnement,  $r \gg \lambda$ .

On admet que le champ magnétique total rayonné en  $M$  par l'antenne est :

$$\vec{B}(M, t) = i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\varphi,$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation  $\vec{u}_r$ .

**1.** Calculer le vecteur de Poynting en  $M$  et sa valeur moyenne dans le temps. Dans quelle direction l'antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie ? Représenter l'indicatrice de rayonnement.

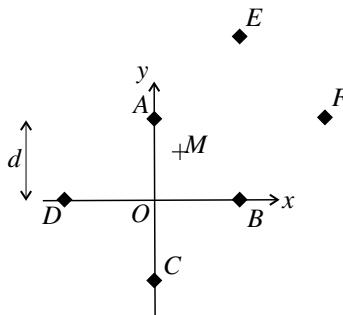
**2.** Calculer la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon  $r$ .

On donne :  $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$ .

En déduire la résistance de rayonnement  $R$  de l'antenne définie par  $\mathcal{P} = RI_{\text{eff}}^2$ . Calculer numériquement  $R$ . Quelle serait la valeur de l'intensité maximale  $I_0$  pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est  $\mathcal{P} = 2100 \text{ kW}$  (puissance de l'émetteur Grandes Ondes de France Inter à Allouis).

### 21.8 Positionnement par comparaison de puissance (\*)

Un téléphone portable capte les signaux émis par des antennes relais  $A, B, C, D, E$  et  $F$  réparties sur un réseau carré de demi-diagonale  $d$ , comme représenté sur la figure. Il s'agit d'une vue de dessus, et le plan  $(Oxy)$  correspond au plan horizontal. Au point  $M$ , la puissance du signal provenant d'une antenne est inversement proportionnelle à la distance de  $M$  à cette antenne, la constante de proportionnalité étant la même pour toutes les antennes, qui sont identiques. La position  $M$  du téléphone portable est repérée par ses coordonnées  $(x, y)$ .



1. Exprimer simplement  $K_1 = \frac{\frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_C}}{\frac{1}{P_B} - \frac{1}{P_D}}$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis  $K_2 = \frac{\frac{1}{P_E} - \frac{1}{P_B}}{\frac{1}{P_F} - \frac{1}{P_A}}$  en fonction de  $d$ ,  $x$  et  $y$ .
2. Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $d$ ,  $K_1$  et  $K_2$ .

### 21.9 Bleu du ciel et rouge du soleil couchant (★★)

Pour décrire l'interaction entre les molécules de l'atmosphère et le rayonnement électromagnétique du soleil on adopte le modèle suivant appelé *modèle de l'électron élastiquement lié* :

- les noyaux atomiques sont fixes ;
- chaque électron (de masse  $m_e$ ) est traité indépendamment des autres et considéré comme soumis, en plus de la force exercée par le champ électromagnétique, à une force de rappel élastique  $\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$ , où  $\vec{r}$  est le déplacement de l'électron par rapport à sa position au repos, et à une force dissipative modélisée comme un frottement fluide  $\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

On prend pour valeurs des paramètres du modèle :  $\omega_0 = 2,0 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\tau \simeq 10^{-8} \text{ s}$ .

1. On étudie le mouvement forcé d'un électron sous l'action du champ électromagnétique d'une onde excitatrice. Le champ électrique de cette onde est donné, en notation complexe, par  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ . On admet que la vitesse de l'électron reste très inférieure à la vitesse de la lumière  $c$ .

- Écrire l'équation du mouvement de l'électron en faisant une approximation classique.
- On cherche la solution sous la forme  $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(i(\omega t - kz))$ . Déterminer  $\vec{r}_0$ .
- En déduire le moment dipolaire induit par l'onde sous la forme  $\vec{p} = \underline{p}_0 \exp(i(\omega t - kz))$ . On notera  $e$  la valeur absolue de la charge de l'électron.
- Simplifier l'expression de  $\underline{p}_0$  en tenant compte des valeurs numériques données et sachant que l'onde excitatrice est une onde lumineuse.
- Exprimer la puissance moyenne  $\mathcal{P}_{\text{ray}}$  rayonnée par ce dipôle oscillant en fonction de  $E_0$  et  $\omega$  et de paramètres caractéristiques du modèle.
- Expliquer à l'aide de ce modèle la couleur bleue du ciel.

2. a. Rappeler l'expression de l'intensité  $I$  de l'onde excitatrice (moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting) en fonction de  $E_0$ .

b. Exprimer la puissance rayonnée sous la forme  $\mathcal{P}_{\text{ray}} = \sigma(\omega)I$ . Quelle est la dimension de  $\sigma(\omega)$  ?

c. On suppose que le milieu contient  $N$  électrons par unité de volume. L'énergie rayonnée par ces électrons est prélevée à l'onde incidente ce qui fait que l'intensité  $I(z)$  diminue avec  $z$ . En faisant un bilan d'énergie sur un cylindre dont les bases sont dans les plans de cotés  $z$  et  $z + dz$ , établir une équation différentielle de la forme  $\frac{dI}{dz} + \frac{1}{\delta}I(z) = 0$  où  $\delta$  est fonction de  $\omega$  et des paramètres du modèle. Résoudre cette équation. Quelle est la signification physique de  $\delta$  ?

d. Application numérique :  $N = 3,0.10^{26} \text{ m}^{-3}$ ,  $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$ ;  $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$ ,  $c = 3,0.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ . Calculer  $\delta$  pour une lumière bleue ( $\lambda_{\text{bleu}} = 0,45 \mu\text{m}$ ) et pour une lumière rouge ( $\lambda_{\text{rouge}} = 0,75 \mu\text{m}$ ).

e. Expliquez à l'aide de ce modèle la couleur du soleil couchant.

## CORRIGÉS

## 21.1 Antenne assimilable à une dipôle oscillant

1. Il faut que  $\ell \gg \frac{2\pi c}{\omega}$ .

$$2. \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \text{sgn}(z) \frac{2I_0}{\ell} \cos(\omega t) \Rightarrow \lambda(z, t) = \text{sgn}(z) \frac{2I_0 \sin(\omega t)}{\ell \omega}.$$

3. Ainsi, la moitié supérieure de l'antenne porte la charge :  $Q = \frac{\ell}{2} \times \frac{2I_0 \sin(\omega t)}{\ell \omega} = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)$ , et la moitié inférieure la charge  $-Q$ . Le barycentre des charges positives (resp. négatives) est en  $G_+$ , point de cote  $z = \frac{\ell}{2}$  (resp.  $z = -\frac{\ell}{2}$ ) car elles sont uniformément réparties. Le moment dipolaire de l'antenne est :

$$\vec{p}(t) = Q \overrightarrow{G_- G_+} = Q \frac{\ell}{2} \vec{u}_z = \frac{I_0 \ell}{2 \omega} \sin(\omega t) \vec{u}_z.$$

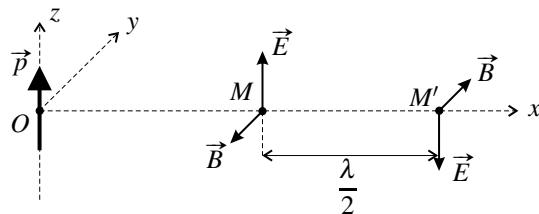
Dans la pratique les antennes ont le plus souvent des tailles comparables aux longueurs d'onde émises. Dans ce cas on découpe l'antenne en morceaux élémentaires qui peuvent être assimilés à des dipôles électriques oscillants parallèles à l'antenne.

## 21.2 Structure du champ rayonné par un dipôle oscillant

1. Il faut que  $OM$  et  $OM'$  soient très supérieurs à la longueur d'onde du rayonnement  $\lambda = \frac{c}{f} = 1,5$  m. La phrase de l'énoncé signifie que :

- $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au vecteur radial  $\vec{u}_r$ ,
- $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct (dans cet ordre),
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$ .

2. Quelle est la direction du champ électrique en  $M$ ? Le plan ( $Ozx$ ) est plan de symétrie du dipôle oscillant et contient  $M$  donc  $\vec{E}(M, t)$  est compris dans ce plan ; le plan ( $Oxy$ ) est plan d'antisymétrie du dipôle oscillant et contient  $M$  donc  $\vec{E}(M, t)$  est porté par ( $Oz$ ). On peut choisir un instant pour lequel  $\vec{E}(M, t)$  est dirigé vers le haut ; on trouve ensuite  $\vec{B}(M, t)$  en utilisant le fait que  $(\vec{u}_x, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct. Enfin,  $M$  et  $M'$  sont espacés d'une demi-longueur d'onde dans le sens de la propagation : les champs électromagnétiques y sont en opposition de phase, soit opposés.



### 21.3 Champ électromagnétique du dipôle électrique oscillant

1. Vérifions tout d'abord l'homogénéité des termes à l'intérieur des parenthèses :

$$\left[ \frac{\omega}{c} \right] = \frac{s^{-1}}{m \cdot s^{-1}} = m^{-1} \text{ donc } \left[ \frac{1}{r^2} \right] = \left[ \frac{\omega}{cr} \right] = \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \right] = m^{-2}.$$

Vérifions l'homogénéité de l'expression du champ électrique : on compare au champ d'une charge ponctuelle  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  ; comme  $p_0$  est une charge multipliée par une longueur,  $\frac{p_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$  est bien un champ électrique.

Enfin pour le champ magnétique l'homogénéité de l'expression se déduit de celle du champ électrique puisque l'unité de son expression est celle de l'expression du champ électrique divisée par la vitesse  $c$ .

2. Si  $kr = \frac{\omega r}{c} \ll 1$ , alors  $\frac{1}{r^2} \gg \frac{\omega}{cr} \gg \frac{\omega^2}{c^2}$ . De plus :  $\omega t - kr \simeq \omega t$ . Il vient :

$$\vec{E} = \frac{p_0 \cos(\omega t) \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p_0 \cos(\omega t) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = -\frac{\omega p_0 \sin(\omega t) \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \vec{u}_\phi.$$

Le champ électrique à l'instant  $t$  est égal au champ d'un dipôle électrostatique égal à  $\vec{p}(t)$ . Les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique moyennes sont :

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left( \frac{p_0}{2\pi\epsilon_0 r^3} \right)^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \quad \text{et} \quad \langle u_m \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \left( \frac{\omega p_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \right)^2 \sin^2 \theta,$$

et leur rapport est :  $\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_{el} \rangle} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\omega^2 r^2}{c^4} \frac{4 \tan^2 \theta}{4 + \tan^2 \theta} = (kr)^2 \frac{4 \tan^2 \theta}{4 + \tan^2 \theta} \ll 1$ . L'énergie électrique prédomine sur l'énergie magnétique.

3. Si  $kr = \frac{\omega r}{c} \gg 1$ , alors  $\frac{1}{r^2} \ll \frac{\omega}{cr} \ll \frac{\omega^2}{c^2}$ . Il vient :

$$\vec{E} = -\frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = -\frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 cr} \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\phi.$$

On retrouve les formules données dans le cours. Les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique moyennes sont :

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left( \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)^2 \quad \text{et} \quad \langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \left( \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \right)^2.$$

Leur rapport est :  $\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_{el} \rangle} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} = 1$ . L'énergie électromagnétique est équirépartie entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique.

### 21.4 Puissance d'un émetteur radio

On sait que l'onde rayonnée a la structure d'une onde plane se propageant dans la direction  $\vec{u}_r$ .

Ainsi le vecteur de Poynting est :  $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{u}_r = \frac{A^2 \sin^2 \theta}{\mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kr - \varphi) \vec{u}_r$ . Sa valeur moyenne est :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{A^2 \sin^2 \theta}{2\mu_0 c r^2} \vec{u}_r$ .

## CHAPITRE 21 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

La puissance rayonnée par l'émetteur traverse toute sphère  $\mathcal{S}(r)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  :

$$\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}(r)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{A^2 \sin^2 \theta}{2\mu_0 c r^2} \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi = \frac{\pi A^2}{\mu_0 c} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\pi A^2}{3\mu_0 c}.$$

Ainsi :  $A = \sqrt{\frac{3\mu_0 c \mathcal{P}}{4\pi}}$ . L'amplitude du champ électrique à distance  $d$  de l'émetteur, dans une direction perpendiculaire au dipôle est :  $E_m(d) = \frac{A}{d} = \sqrt{\frac{3\mu_0 c \mathcal{P}}{4\pi}} \frac{1}{d}$ .

Numériquement : en tenant compte du sol,  $E_m = 0,27 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 21.5 Dipôle magnétique oscillant

**1.**  $m_0 = \pi a^2 I_0$ .

**2.** Soit  $M$  un point quelconque. Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , plan contenant  $M$  et l'axe  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie (dans la symétrie par rapport à ce plan, le sens du courant dans la spire est inversé). Donc  $\vec{E}(M, t)$  est orthogonal à ce plan, soit porté par le vecteur  $\vec{u}_\phi$  et  $\vec{B}(M, t)$  est parallèle à ce plan donc n'a de composante que suivant  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ . Ainsi :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta.$$

L'homogénéité peut aussi servir d'argument. Le deuxième champ donné a l'unité de  $\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^2}{rc^2}$

ou  $\frac{\mu_0 I_0 a^2 \omega^2}{rc^2}$  ou encore  $\frac{\mu_0 I_0}{r}$  puisque  $\frac{\omega a}{c}$  est un rapport de deux vitesses sans dimension.

Si l'on compare à l'expression du champ magnétique d'un fil infini,  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , on constate qu'il s'agit bien d'un champ magnétique.

**3.** On a clairement  $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$  et  $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \vec{E}$ . L'onde a localement une structure d'onde plane se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_r$ . Elle est polarisée rectilignement selon le vecteur  $\vec{u}_\phi$  soit perpendiculairement au plan contenant le point  $M$  et le dipôle, alors que l'onde rayonnée par un dipôle électrique est polarisée dans ce plan.

$$\mathbf{4.} \vec{\Pi} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c^3 r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r \text{ et } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^3 r^2} \vec{u}_r.$$

$$\mathbf{5.} \mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \iint_{\mathcal{S}(r)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \times 2\pi \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} = \frac{\pi \mu_0 a^4 I_0^2 \omega^4}{12c^3}.$$

En substituant  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , on obtient :  $\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \frac{1}{2} \frac{8\pi^5 \mu_0 c}{3} \frac{a^4}{\lambda^4} I_0^2$ , soit la formule attendue avec :  $R_0 = \frac{8\pi^5}{3} \mu_0 c = 308 \text{ k}\Omega$ .

## 21.6 Atome de Thompson

**1.** Le barycentre des charges positives est  $G_+ = O$ , le barycentre des charges négative  $G_- = M$ , donc le moment dipolaire de l'atome est  $\vec{p} = -e\vec{OM} = -er\vec{u}_r$ .

**2.** Ce calcul de champ est fait dans le cours d'électrostatique. La symétrie sphérique impose  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$  et le théorème de Gauss appliqué à toute sphère de centre  $O$  et de rayon  $r < R$  s'écrit :  $4\pi r^2 E(r) = \frac{er^3}{\epsilon_0 R^3}$ . Donc :  $\vec{E} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{u}_r$ .

**3.** L'électron est soumis à la force exercée par la sphère :  $\vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}r\vec{u}_r = -k\vec{OM}$

avec  $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ , force analogue à une force de rappel élastique. On néglige le poids.

Le principe fondamental de la dynamique pour l'électron s'écrit :  $m_e \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -k\vec{OM}$  soit  $\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{OM}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}}$ . Il s'agit d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique à trois dimensions, de pulsation propre  $\omega_0$ .

Les conditions initiales sont telles que l'électron reste sur l'axe ( $Oz$ ) et la solution de l'équation différentielle obtenue par projection,  $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_0^2 z$ , est :  $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$ . Numériquement :  $\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La longueur d'onde correspondante est  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 0,12 \mu\text{m}$  : elle appartient au domaine des ultraviolets.

L'énergie mécanique de l'électron est :  $E = \frac{1}{2}m_e \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 z(t)^2 = \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 z_0^2$ .

**4. a.** En supposant que le mouvement de l'électron, très faiblement amorti, reste quasiment sinusoïdal, l'atome est un dipôle électrique oscillant  $\vec{p}(t) = -ez_0 \cos(\omega_0 t)\vec{u}_z$  qui rayonne dans tout l'espace la puissance :

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \frac{(ez_0)^2 \omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e} E = \frac{e^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 R^3 m_e^2} E.$$

**b.** En fait l'atome perd l'énergie qu'il émet dans l'espace et le bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} \quad \text{soit} \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\tau} E,$$

avec  $\tau = \frac{24\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 R^3 m_e^2}{e^4}$ . Cette équation différentielle se résout en :  $E(t) = E(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

Numériquement :  $\tau = 6,3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ ,  $\omega_0 \tau \simeq 10^7 \gg 1$  donc l'approximation d'un mouvement restant quasi-sinusoïdal était valable.  $\tau$  est l'ordre de grandeur de la durée d'un train d'onde (voir cours d'optique) émis par un atome.

## CHAPITRE 21 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

**21.7 Rayonnement d'une antenne demi-onde**

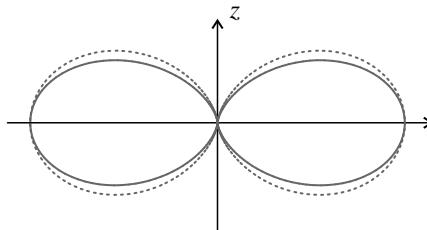
1. La relation de structure de l'onde plane donne :  $\underline{\vec{E}} = c \underline{\vec{B}} \wedge \vec{u}_r$ , soit :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = i \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta.$$

Le vecteur de Poynting moyen est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \vec{u}_r.$$

Le vecteur de Poynting est en  $\frac{1}{r^2}$  donc la puissance traversant une sphère centrée sur l'origine est indépendante de son rayon. Il est nul pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et de norme maximale pour  $\theta = \pi/2$  : l'antenne ne rayonne pas dans sa propre direction et rayonne le maximum d'énergie dans son plan équatorial, comme le dipôle. L'indicatrice de rayonnement, tracée à l'aide d'un grapheur est représentée ci-dessous (on a tracé en pointillés l'indicatrice de rayonnement du dipôle électrique oscillant pour comparaison).



2. La puissance rayonnée à travers la sphère  $\mathcal{S}(r)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  est :

$$\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}(r)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1,22 \mu_0 c I_0^2}{4\pi}.$$

La résistance de rayonnement de l'antenne est donc égale à  $R = \frac{1,22 \mu_0 c}{2\pi} = 73,2 \Omega$ .

**21.8 Positionnement par comparaison de puissance**

$$1. K_1 = \frac{AM^2 - CM^2}{BM^2 - DM^2} = \frac{x^2 + (y-d)^2 - (x^2 - (y+d)^2)}{(x-d)^2 + y^2 - ((x+d)^2 + y^2)} = \frac{(y-d)^2 - (y+d)^2}{(x-d)^2 - (x+d)^2} = \frac{y}{x}.$$

$$K_2 = \frac{EM^2 - BM^2}{FM^2 - AM^2} = \frac{(x-d)^2 + (y-2d)^2 - ((x-d)^2 + y^2)}{(x-2d)^2 + (y-d)^2 - (x^2 - (y-d)^2)} = \frac{(y-2d)^2 - y^2}{(x-2d)^2 - x^2} = \frac{y-d}{x-d}.$$

2.  $x = d \frac{K_2 - 1}{K_2 - K_1}$  et  $y = d \frac{K_1(K_2 - 1)}{K_2 - K_1}$ . La mesure des puissances permet de déterminer la localisation du téléphone mobile.

### 21.9 Bleu du ciel et rouge du soleil couchant

**1. a.** La vitesse de l'électron étant très inférieure à  $c$ , on peut négliger l'action du champ magnétique de l'onde devant l'action de son champ électrique (voir le cours sur la propagation dans un plasma). L'équation du mouvement de l'électron s'écrit alors :

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d \vec{r}}{dt} - e E_0 \vec{u}_x \exp(i(\omega t - kz)).$$

**b.** Remarquons que, comme l'électron se déplace parallèlement au champ électrique soit selon  $\vec{u}_x$ , sa coordonnée  $z$  est constante. Ainsi :  $\frac{d \vec{r}}{dt} = i\omega \vec{r}$  et  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}$ . L'équation du mouvement s'écrit alors, après simplification par  $\exp(i(\omega t - kz))$  :

$$-m_e \omega^2 \vec{r}_0 = -m_e \omega_0^2 \vec{r}_0 - \frac{m_e}{\tau} i\omega \vec{r}_0 - e E_0 \vec{u}_z \Rightarrow \vec{r}_0 = \frac{-\frac{e}{m_e} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{u}_x.$$

**c.**  $\vec{p} = -e \vec{r}$ , donc :  $\vec{p}_0 = \frac{\frac{e^2}{m_e} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{u}_x$ .

**d.** Pour une onde lumineuse, dont la longueur d'onde typique est  $0,5 \mu\text{m}$ ,  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \sim 4.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ . Alors :  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sim 0,04$ ;  $\frac{\omega}{\tau \omega_0} \sim 10^{-9}$ . Nous pouvons donc écrire avec une très bonne approximation :  $\vec{p}_0 = \frac{e^2 E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{u}_x$ .

**e.** En utilisant la formule du cours (qu'il n'est pas nécessaire de mémoriser) on a :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3 m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

**f.** La fonction  $f(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$  est croissante ; en prenant  $\lambda_{\text{bleu}} = 0,45 \mu\text{m}$  soit :  $\omega_{\text{bleu}} = 4,2.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\lambda_{\text{rouge}} = 0,75 \mu\text{m}$  soit :  $\omega_{\text{rouge}} = 2,5.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ , on trouve :

$$\frac{f(\omega_{\text{bleu}})}{f(\omega_{\text{rouge}})} = 8,4.$$

Ainsi, la puissance rayonnée par l'atmosphère est bien plus grande dans le bleu que dans le rouge, d'où la couleur bleue du ciel.

**2. a.**  $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ .

## CHAPITRE 21 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

**b.** La puissance rayonnée par un électron soumis à une onde d'intensité  $I$  peut donc s'écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2} f(\omega) I = \sigma(\omega) I \quad \text{où} \quad \sigma(\omega) = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2} f(\omega).$$

$\sigma(\omega)$  a la dimension d'une surface.

**c.** Faisons le bilan de puissance d'un cylindre dont les bases, de surface  $S$ , sont dans les plans de cotes  $z$  et  $z + dz$  :

- la puissance moyenne entrant en  $z$  est égale à  $\mathcal{P}(z) = I(z)S$ ,
- la puissance moyenne qui sort en  $z + dz$  est égale à  $\mathcal{P}(z + dz) = I(z + dz)S$ ,
- la puissance moyenne diffusée par les électrons contenus dans le volume considéré est  $\mathcal{P}_{\text{diff}} = NSdz \times \mathcal{P}_{\text{ray}} = NS\sigma(\omega)I(z)dz$ .

Le bilan de puissance s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z + dz) - \mathcal{P}_{\text{diff}} &= 0 \Leftrightarrow -S \frac{dI}{dz} - NS\sigma(\omega)I(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dI}{dz} + \frac{1}{\delta} I(z) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{N\sigma(\omega)} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est  $I(z) = I(0) \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$ ;  $\delta$  est la distance caractéristique d'atténuation de l'onde.

**d.**  $\delta_{\text{bleu}} = 24 \text{ km}$  et  $\delta_{\text{rouge}} = 2,0.10^2 \text{ km}$

**e.**  $\delta_{\text{bleu}} < \delta_{\text{rouge}}$  donc le bleu est plus absorbé par l'atmosphère que le rouge. Au soleil couchant, quand l'onde a traversé une couche d'atmosphère suffisamment épaisse, le bleu est très atténué alors que le rouge l'est beaucoup moins ; la lumière arrivant directement du soleil couchant est donc rouge.

### 21.10 Réponses aux questions de la page 642

1. La goutte d'eau n'a pas une taille très inférieure aux longueurs d'onde lumineuses.
2. Le ciel au dessus du sol lunaire est noir car il n'y a pas d'atmosphère pour diffuser la lumière. La Terre, vue de la Lune, est bleue à cause de la diffusion Rayleigh par les molécules de l'atmosphère qui l'entoure.
3. La polarisation de la lumière diffusée est totale à  $90^\circ$  de la direction du Soleil. À midi il faut regarder près de l'horizon ce qui n'est pas toujours possible ; c'est plus facile le soir.
4. En regardant le ciel à travers un polariseur, on voit une bande sombre. Le Soleil est dans la direction perpendiculaire à cette bande, en dessous de l'horizon.

# **Cinquième partie**

# **Thermodynamique**



# Systèmes ouverts en régime stationnaire

Ce chapitre reprend les deux principes de la thermodynamique qui ont été introduits en première année dans deux cas nouveaux : le cas d'une transformation infinitésimale d'un système fermé entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  infiniment proches et le cas d'un système ouvert en régime stationnaire. Ces résultats seront appliqués à des systèmes concrets en utilisant le diagramme thermodynamique ( $\ln P, h$ ).

## 1 Énergie et entropie d'un système

### 1.1 Équilibre thermodynamique et équilibre thermodynamique local

#### a) Système thermodynamique

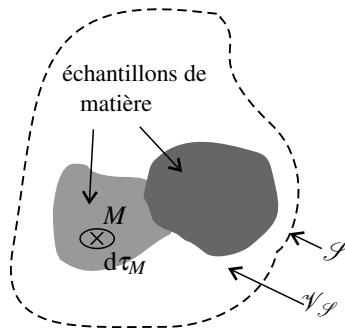
Un **système thermodynamique**  $\Sigma$  est défini par une surface abstraite  $\mathcal{S}$  de taille macroscopique appelée **surface de contrôle**. Il est constitué par les différents échantillons de matière se trouvant à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ . On note  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$  le volume abstrait délimité par la surface de contrôle (voir figure 22.1).

Le système est **fermé** si aucune matière ne traverse la surface de contrôle. Il est dit **ouvert** dans le cas contraire.

#### b) Équilibre thermodynamique

Un système est à l'équilibre thermodynamique si :

- il n'y a pas de mouvement macroscopique de matière à l'intérieur du système,
- la température a une valeur uniforme dans tout le système (condition d'équilibre thermique),
- la pression a une valeur uniforme dans tout le système (condition d'équilibre mécanique)
- le potentiel chimique (voir cours de chimie) de chaque espèce a une valeur uniforme dans le système (condition d'équilibre de diffusion).



**Figure 22.1** – Système thermodynamique  $\Sigma$ , surface de contrôle  $\mathcal{S}$  et volume  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ .

### c) Fonctions d'état d'un échantillon de matière à l'équilibre

Le système thermodynamique le plus simple est un échantillon de matière homogène de taille macroscopique. Il est caractérisé par sa nature chimique et sa masse  $m$  (ou sa quantité de matière  $n$ ).

L'état d'un échantillon de matière à l'équilibre est décrit par différents paramètres physiques appelés **paramètres d'état** : son volume  $V$ , sa température  $T$ , sa pression  $P$  etc.

À cet état, on associe des **fonctions d'état** telles que : l'énergie interne  $U$  (en J), l'enthalpie  $H = U + PV$  (en J) et l'entropie  $S$  (en  $J.K^{-1}$ ).

Les valeurs de ces fonctions sont proportionnelles à la masse (ou à la quantité de matière) de l'échantillon : elles sont **extensives**. Ainsi :  $U = mu$ ,  $H = mh$  et  $S = ms$ , où  $u$  est l'énergie interne massique  $u$  (en  $J.kg^{-1}$ ),  $h$  l'enthalpie massique (en  $J.kg^{-1}$ ) et  $s$  l'entropie massique (en  $J.K^{-1}.kg^{-1}$ ).

Les grandeurs massiques ne dépendent plus de la taille de l'échantillon : elles sont **intensives**.

 La température et la pression sont d'autres grandeurs intensives.

### d) Équilibre thermodynamique local

L'expérience montre que dans un système thermodynamique hors d'équilibre il est souvent possible de mesurer, avec des capteurs adéquats, une température locale ou une pression locale. Ceci est bien connu en ce qui concerne l'air atmosphérique en météorologie. Cette constatation suggère l'hypothèse d'**équilibre thermodynamique local** :

**L'équilibre thermodynamique local (ETL)** est réalisé si on peut découper le système en volumes mésoscopiques pouvant être considérés comme des systèmes à l'équilibre thermodynamique.

 Un volume mésoscopique est très petit devant l'échelle macroscopique et encore très grand devant l'échelle microscopique. On note  $d\tau_M$  un volume mésoscopique autour du point  $M$  (voir figure 22.1).

Dans l'hypothèse de l'ETL, la température et la pression sont définies en chaque point  $M$  à l'intérieur du système. Elles dépendent *a priori* de  $M$  et de l'instant  $t$  et sont notées  $T(M, t)$  et  $P(M, t)$ . Le volume  $d\tau_M$  étant assimilé à un échantillon de matière à l'équilibre, on calcule sa masse volumique  $\mu(M, t)$ , son énergie interne massique  $u(M, t)$ , son enthalpie massique  $h(M, t)$ , son entropie massique  $s(M, t)$  à partir des modèles et des tables valables à l'équilibre. Dans toute la suite du chapitre on fait l'hypothèse de l'ETL.

## 1.2 Énergie d'un système thermodynamique

L'énergie  $E$  d'un système est par définition la somme de toutes les formes d'énergie pouvant appartenir au système. Elle est composée de :

- l'énergie interne  $U$ ,
- l'énergie cinétique macroscopique  $E_c$ ,
- l'énergie potentielle macroscopique extérieure  $E_{p,\text{ext}}$ .

Ainsi :

$$E = U + E_c + E_{p,\text{ext}} .$$

### a) Énergie interne

L'**énergie interne** est associée aux mouvements à l'échelle microscopique et aux interactions entre les particules microscopiques.

L'énergie interne est une grandeur **additive** : on calcule l'énergie interne  $U$  d'un système  $\Sigma$  à l'équilibre thermodynamique ou seulement à l'ETL, en additionnant les énergies internes de tous les volumes mésoscopiques constituant  $\Sigma$ .

La masse de  $d\tau_M$  est  $dm = \mu(M, t)d\tau_M$  et son énergie interne est  $u(M, t)\mu(M, t)d\tau_M$ , où  $u(M, t)$  est l'énergie interne massique. L'énergie interne de  $\Sigma$  est ainsi :

$$U(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_S} u(M, t)\mu(M, t)d\tau_M. \quad (22.1)$$

#### Remarque

Les propriétés d'extensivité et d'additivité sont liées et souvent confondues. Toute grandeur additive est extensive mais la réciproque n'est pas exacte.

### b) Énergie cinétique

L'**énergie cinétique**  $E_c$  est associée au mouvement macroscopique de matière. Si  $c(M, t)$  est la vitesse du volume mésoscopique  $d\tau_M$ , son l'énergie cinétique est égale à  $\frac{1}{2}c^2(M, t)dm$ .

L'énergie cinétique massique est donc :

$$e_c(M, t) = \frac{1}{2} c^2(M, t) .$$

L'énergie cinétique du système est ainsi :

$$E_c(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_\mathcal{S}} e_c(M, t) \mu(M, t) d\tau_M.$$

### c) Énergie potentielle macroscopique extérieure

Le système peut aussi avoir une **énergie potentielle macroscopique**  $E_{p,\text{ext}}$  associée à une interaction, à l'échelle macroscopique, avec l'extérieur. :

$$E_{p,\text{ext}}(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_\mathcal{S}} e_{p,\text{ext}}(M, t) \mu(M, t) d\tau_M,$$

où  $e_{p,\text{ext}}(M, t)$  est l'**énergie potentielle extérieure massique**.

#### Remarque

Le plus souvent, l'énergie potentielle macroscopique est l'énergie potentielle de pesanteur (interaction avec la Terre). L'énergie potentielle du volume  $d\tau_M$  est égale dans ce cas à  $dm \cdot gz$  où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $z$  la cote de  $M$  le long d'un axe ( $Oz$ ) vertical dirigé vers le haut. L'énergie potentielle de pesanteur massique est donc :

$$e_{p,\text{poids}}(M, t) = gz .$$

## 1.3 Entropie d'un système thermodynamique

L'**entropie** est une fonction d'état extensive et additive. L'entropie du volume mésocopique  $d\tau_M$  est  $\mu(M, t)s(M, t)d\tau_M$  où  $s(M, t)$  est l'entropie massique. L'entropie du système  $\Sigma$  est :

$$S(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}_\mathcal{S}} s(M, t) \mu(M, t) d\tau_M. \quad (22.2)$$

En résumé, les formules (22.1) et (22.2) permettent de définir théoriquement l'énergie interne et l'entropie d'un système thermodynamique quelconque qui n'est pas à l'équilibre thermodynamique mais seulement en ETL.

#### Remarque

Leur application demande de savoir calculer l'énergie interne massique  $u$  et l'entropie massique  $s$  d'un échantillon de matière en équilibre thermodynamique dans n'importe quel état. Pour cela, on dispose de modèles théoriques simplifiés qui ont été vus dans le cours de première année : le gaz parfait et la phase condensée incompressible et indilatatable. Pour une évaluation plus précise on utilise des diagrammes thermodynamiques réalisés à partir de mesures expérimentales et de modèles plus élaborés.

## 2 Les deux principes de la thermodynamique pour un système fermé

Dans cette partie le système considéré est un **système fermé**, c'est-à-dire un système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur.

### 2.1 Le premier principe

#### a) Premier principe entre deux instants $t_1$ et $t_2$

On considère un système fermé  $\Sigma$  qui évolue dans le temps. On considère le système à deux instants successifs  $t_1$  et  $t_2 > t_1$  et on note :

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1) \quad (22.3)$$

la variation de l'énergie du système  $\Sigma$  entre ces deux instants.  $\Delta E$  est la somme de la variation  $\Delta U$  de l'énergie interne, de la variation  $\Delta E_c$  de l'énergie cinétique et de la variation  $\Delta E_{p,\text{ext}}$  de l'énergie potentielle extérieure de  $\Sigma$ .

D'après le premier principe, l'énergie de  $\Sigma$  ne peut varier que si des échanges d'énergie entre  $\Sigma$  et l'extérieur ont lieu. Ces échanges peuvent prendre deux formes :

- le **travail mécanique**  $W$ ,
- le **transfert thermique**  $Q$ .

Le travail mécanique  $W$  provient d'une action mécanique exercée par l'extérieur sur le système à l'échelle macroscopique. Le transfert thermique  $Q$  résulte de phénomènes à l'échelle microscopique selon des mécanismes qui seront détaillés dans le chapitre suivant.

Ainsi :

**Le premier principe de la thermodynamique** pour un système fermé entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit :

$$\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_{p,\text{ext}} = W + Q. \quad (22.4)$$

  $W$  et  $Q$  sont algébriques : positives si l'énergie est gagnée par  $\Sigma$  (donc perdue par l'extérieur) et négatives si l'énergie est perdue par  $\Sigma$  (donc gagnée par l'extérieur).

Les termes de l'équation (22.4) n'ont pas tous le même statut :

- $\Delta U$ ,  $\Delta E_c$  et  $\Delta E_{p,\text{ext}}$  sont des **variations** de grandeurs instantanées relatives au système et on peut les calculer à partir de mesures faites sur le système à l'instant initial  $t_1$  et à l'instant final  $t_2$  uniquement ;
- $Q$  et  $W$  ne peuvent être calculés que si l'on connaît toute l'évolution du système entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

Cette différence est soulignée par la notation : les variations sont repérées par un «  $\Delta$  » que les termes de transfert n'ont pas. La notation doit être absolument respectée.



Il ne faut surtout pas écrire «  $\Delta Q$  », ni «  $\Delta W$  ». Le transfert thermique et le travail *ne* sont *pas* les variations de grandeurs instantanées !

**b) Premier principe entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + dt$** 

On considère maintenant un système  $\Sigma$  qui évolue entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + dt$ . Concrètement, la durée  $dt$  est très faible devant le temps  $\tau$  caractéristique de l'évolution de  $\Sigma$  et elle est traitée sur le plan mathématique comme une quantité infinitésimale. Entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ , l'énergie du système varie d'une quantité très faible appelée **variation infinitésimale** :

$$dE = E(t + dt) - E(t). \quad (22.5)$$

De même, l'énergie interne de  $\Sigma$  varie de  $dU$ , son énergie cinétique de  $dE_c$  et son énergie potentielle de  $dE_p$ . Ces variations infinitésimales vérifient :

$$dE = dU + dE_c + dE_{p,ext}.$$

 Dans le cas où le système est un échantillon de gaz parfait ou de phase condensée idéale (indilatante et incompressible) de température  $T$  uniforme à chaque instant, la variation infinitésimale de l'énergie interne est :

$$dU = C_V dT,$$

où  $C_V$  est la capacité thermique à volume constant du système.

Par ailleurs on note  $\delta W$  l'énergie reçue par  $\Sigma$  sous forme de travail et  $\delta Q$  l'énergie reçue par  $\Sigma$  par transfert thermique entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .  $\delta W$  et  $\delta Q$  sont appelés **travail élémentaire** et **transfert thermique élémentaire**. Ces quantités sont infiniment petites puisque l'intervalle de temps  $dt$  est infiniment petit.



Il ne faut surtout pas confondre une quantité élémentaire (notée avec un «  $\delta$  ») et une variation infinitésimale (notée avec un «  $d$  »).



Dans le cas, très fréquent, où  $\Sigma$  est soumis uniquement à des forces de pression le travail élémentaire de ces forces est :

$$\delta W = -P_{ext} dV, \quad (22.6)$$

où  $P_{ext}$  est la pression extérieure s'exerçant sur le système (qui est supposée uniforme sur toute la surface du système) et  $dV$  la variation infinitésimale du volume de  $\Sigma$ . Cette formule a été établie dans le cours de première année.

**Le premier principe de la thermodynamique** pour un système fermé, au cours d'une **transformation infinitésimale** entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  infiniment proches s'écrit :

$$dE = dU + dE_c + dE_{p,ext} = \delta W + \delta Q. \quad (22.7)$$

 Noter la règle de « traduction » entre les équations (22.4) et (22.7) :

- un terme avec un «  $\Delta$  » devient un terme avec un «  $d$  »,
- un terme sans marque particulière devient un terme avec un «  $\delta$  ».

### c) Premier principe en terme de puissances

La **puissance mécanique**  $\mathcal{P}$  reçue par le système  $\Sigma$  à l'instant  $t$  est définie par :

$$\delta W = \mathcal{P} dt .$$

De même on définit la **puissance thermique** ou **flux thermique**  $\Phi$  par :

$$\delta Q = \Phi dt .$$

$\mathcal{P}$  et  $\Phi$  se mesurent en watts. La notion de puissance mécanique a été étudiée dans le cours de mécanique de première année. La notion de flux thermique sera étudiée en détail dans le chapitre suivant.

En divisant les deux membres de (22.7) par  $dt$ , on obtient la formulation du **premier principe en terme de puissances** :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_{p,ext}}{dt} = \mathcal{P} + \Phi . \quad (22.8)$$

### d) Exemple 1 : trempe d'un solide

**Modélisation** Un solide de volume  $V$ , constitué d'un matériau indilatable de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$ , initialement à la température  $T_i$ , est plongé dans un grand volume de liquide de température  $T_{\text{liq}}$  supposée constante (voir figure 22.2). Le flux thermique passant du liquide au solide est modélisé par la formule :  $\Phi(t) = Ah(T_{\text{liq}} - T(t))$  où  $A$  est l'aire de la surface du solide,  $h$  une constante et  $T(t)$  la température du solide à l'instant  $t$ , température qui sera ici supposée uniforme.

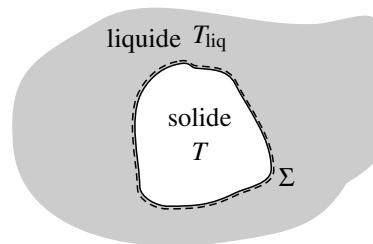


Figure 22.2 – Exemple 1 : trempe d'un solide.

**Premier principe pour le système  $\Sigma = \{\text{solide}\}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$** 

- La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  est :  $dU = C_VdT = \mu cVdT$ .
- $\Sigma$  n'étant pas en mouvement, son énergie cinétique est identiquement nulle donc :  $dE_c = 0$ .
- $\Sigma$  n'étant pas en mouvement, son énergie potentielle est constante donc :  $dE_{p,\text{ext}} = 0$ .
- $\Sigma$  étant de volume constant, le travail des forces de pression est nul ; en effet,  $\delta W = -P_{\text{ext}}dV$  (voir cours de première année) et  $dV = 0$ , donc  $\delta W = 0$ .
- Le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  du liquide est :  $\delta Q = \Phi dt = Ah(T_{\text{liq}} - T(t))dt$ .

Le premier principe pour  $\Sigma$  entre les deux instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$dU = C_VdT = \delta Q \quad \text{soit} \quad \mu cVdT = Ah(T_{\text{liq}} - T(t))dt. \quad (22.9)$$

**Température  $T(t)$  du solide** En divisant cette équation par  $dt$  on obtient une équation différentielle vérifiée par  $T(t)$  :

$$\frac{\mu cV}{Ah} \frac{dT}{dt} + T(t) = T_{\text{liq}}.$$

Dans cette équation apparaît le temps caractéristique :  $\tau = \frac{\mu cV}{Ah}$ . La solution vérifiant la condition initiale  $T(0) = T_i$  est :

$$T(t) = T_{\text{liq}} + (T_i - T_{\text{liq}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Ainsi la température de  $\Sigma$  atteint la température finale  $T(\infty) = T_{\text{liq}}$  (ce résultat était prévisible intuitivement) en une durée de l'ordre de 5 à 6 fois  $\tau$ .

**Premier principe pour  $\Sigma$  entre les instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = \infty$**  Le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  de la part du liquide au cours de l'expérience est :

$$Q = \int \delta Q = \int_{t=0}^{\infty} \Phi dt = \int_{t=0}^{\infty} hA(T_{\text{liq}} - T_i) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = hA(T_{\text{liq}} - T_i)\tau.$$

En utilisant l'expression de  $\tau$ , on trouve :

$$Q = \mu cV(T_{\text{liq}} - T_i) = C_V(T_{\text{liq}} - T_i) = C_V(T(\infty) - T(0)) = \Delta U,$$

relation qui n'est autre que le premier principe pour la transformation du système entre l'instant  $t_1 = 0$  et l'instant  $t_2 = \infty$ , transformation dans laquelle le solide passe de l'état initial de température  $T(0)$  à l'état final de température  $T(\infty)$ .

**e) Exemple 2 : compression lente d'un gaz parfait**

**Modélisation** Un échantillon de  $n$  moles d'un gaz parfait de capacité thermique molaire à volume constant  $C_{V,m}$  est contenu dans un récipient fermé par un piston mobile de masse  $m_p$  et surface  $A$  (voir figure 22.3). On comprime le gaz en déplaçant lentement le piston vers la droite ; pour cela on exerce sur lui une pression  $P_{\text{ext}}$  supérieure à la pression  $P$  du gaz qui s'applique au piston sur son autre face. Le piston est en outre soumis à une force de

frottement fluide de norme  $F_f$ . Le volume  $V$  du gaz diminue ; en notant  $v_p$  la norme de la vitesse du piston on a :

$$\frac{dV}{dt} = -Av_p.$$

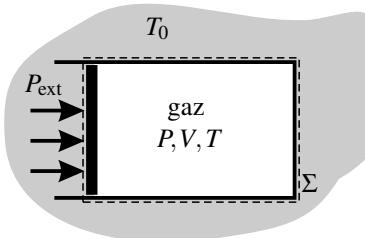
On fait l'hypothèse que le gaz a à chaque instant une température uniforme  $T$ . Cette hypothèse nécessite que la vitesse de déplacement du piston soit très lente.

Le piston a une capacité thermique  $C_p$  et il est à la même température  $T$  que le gaz.

D'autre part le récipient est plongé dans un milieu extérieur de température  $T_0$  constante (thermostat). Lorsque sa température est  $T$ , le gaz reçoit de ce thermostat le flux thermique

$$\Phi = K(T_0 - T),$$

où  $K$  est une constante positive. Ce flux thermique traverse les parois du récipient qui ont une capacité thermique négligeable.



**Figure 22.3 – Exemple 2 : compression réversible d'un gaz parfait.**

**Premier principe pour le système  $\Sigma = \{\text{gaz} + \text{récipient} + \text{piston}\}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$**

- La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  est :

$$dU = dU_{\text{gaz}} + dU_{\text{récipient}} + dU_{\text{piston}} \simeq nC_{V,m}dT + 0 + C_pdT.$$

- Le piston étant la seule partie en mouvement, l'énergie cinétique de  $\Sigma$  est  $\frac{1}{2}m_p v_p^2$ , donc :

$$dE_c = d\left(\frac{1}{2}m_p v_p^2\right) = m_p v_p dv_p.$$

- L'énergie potentielle  $\Sigma$  est constante :  $dE_{p,\text{ext}} = 0$ .
- La force de pression s'exerçant sur le piston est  $P_{\text{ext}}A$ , son travail lorsque le piston se déplace de  $v_p dt$  est :

$$\delta W = P_{\text{ext}}A v_p dt = -P_{\text{ext}}dV.$$

Il n'y a pas lieu de calculer le travail de la force de pression du gaz sur le piston ni le travail de la force de frottement car ce ne sont pas des forces exercées par l'*extérieur* sur le système  $\Sigma$ .

- Le transfert thermique élémentaire reçu par  $\Sigma$  est :

$$\delta Q = \Phi dt = K(T_0 - T)dt.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :  $dU + dE_c + dE_p = \delta W + \delta Q$ , soit :

$$CdT + mv_p dv_p = -P_{\text{ext}} dV + K(T_0 - T)dt, \quad (22.10)$$

en posant  $C = nC_{V,m} + C_p$  qui est la capacité thermique du système  $\Sigma$ .

**Principe fondamental de la dynamique pour le piston** Le piston est soumis aux deux forces de pression et à la force de frottement. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = P_{\text{ext}}A - PA - F_f. \quad (22.11)$$

En multipliant cette équation par  $v_p dt$  on trouve :

$$m_p v_p dv_p = (P_{\text{ext}} - P)Av_p dt - F_f v_p dt = -(P_{\text{ext}} - P)dV - \mathcal{P}_f dt,$$

en notant  $\mathcal{P}_f = F_f v_p$  la valeur absolue de la puissance de la force de frottement. En retranchant cette équation à l'équation (22.10) on obtient :

$$CdT = -PdV + \mathcal{P}_f dt + K(T_0 - T)dt,$$

et finalement, avec l'équation d'état du gaz parfait :  $PV = nRT$  et après division par  $dt$  on obtient :

$$C \frac{dT}{dt} = -\frac{nRT}{V} \frac{dV}{dt} + \mathcal{P}_f + K(T_0 - T). \quad (22.12)$$

**Loi d'évolution de la température du gaz** Dans l'équation (22.12), les deux premiers termes du membre de droite tendent à faire augmenter la température et le troisième tend à la ramener vers la température  $T_0$  du thermostat (milieu extérieur). Cette équation peut être résolue pour déterminer l'évolution de la température du gaz, si l'on connaît la loi d'évolution du volume  $V(t)$  (c'est-à-dire la loi horaire du déplacement du piston) et l'expression de  $\mathcal{P}_f$ .

On se place dans le cas où :

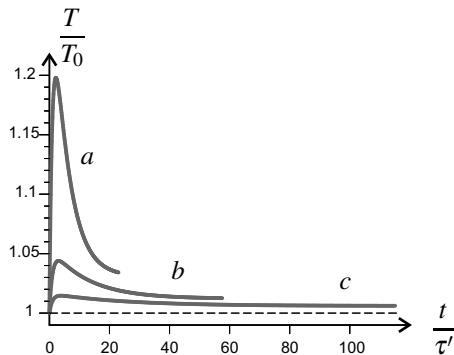
- $V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ , où  $V_0$  est le volume initial et  $\tau$  une constante de temps ;
- $F_f = -\lambda v_p$  où  $\lambda$  est une constante, donc :  $\mathcal{P}_f = \lambda v_p^2 = \frac{\lambda}{A^2} \left(\frac{dV}{dt}\right)^2$ .

Dans ce cas l'équation (22.12) se ramène à :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C} \left(1 - \frac{nR}{\tau K}\right) T = \frac{K}{C} T_0 - \frac{\lambda V_0^2}{A^2 C \tau^2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right).$$

On remarque que si  $\tau$  tend vers l'infini, l'équation devient :  $\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C}T = \frac{K}{C}T_0$ . Elle admet la solution constante  $T(t) = T_0$ ; si  $T(0) = T_1 \neq T_0$ , alors  $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$  où  $\tau' = \frac{C}{K}$ , donc  $T(t) \simeq T_0$  au bout de 5 à 6 fois le temps caractéristique  $\tau'$ . Mais  $\tau'$  est très court devant  $\tau$ . On peut donc dire que si la compression du gaz est infiniment lente, elle est quasiment isotherme.

Si  $\tau$  est grand devant  $\tau'$  mais fini, la température  $T(t)$ , même initialement égale à  $T_0$ , s'écarte de la température du thermostat. La figure 22.4 montre une simulation de  $T(t)$  lors d'une compression de  $V_0$  à  $\frac{V_0}{10}$  pour différentes valeurs de  $\tau$ , avec  $\frac{\lambda V_0^2}{A^2 K} = 25$  et  $\frac{nR}{C} = 0,3$ . On observe que la température monte en début de compression d'autant plus que  $\tau$  est petit.



**Figure 22.4** – Température du gaz en fonction du temps : pour  $\tau = 10\tau'$ (courbe a), pour  $\tau = 25\tau'$ (courbe b) et pour  $\tau = 50\tau'$ (courbe c).

## 2.2 Le second principe

### a) Second principe entre deux instants $t_1$ et $t_2$

Le second principe de la thermodynamique concerne la fonction **entropie**  $S$ . Il introduit une différence entre les transformations **réversibles** et les transformations **irréversibles**.

La variation d'entropie  $\Delta S = S(t_2) - S(t_1)$  d'un système fermé  $\Sigma$  entre deux instants successifs  $t_1$  et  $t_2 > t_1$  peut être due :

- d'une part à un échange d'entropie entre le système et l'extérieur,
- d'autre part à une création d'entropie à l'intérieur du système.

L'entropie  $S_{\text{éch}}$  reçue par  $\Sigma$  de l'extérieur a pour expression :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_S} ,$$

où  $Q$  est l'énergie reçue par transfert thermique entre  $t_1$  et  $t_2$  et  $T_S$  la température de la surface

du système traversée par ce transfert thermique (température supposée uniforme et constante entre les deux instants).

L'entropie  $S_{\text{créée}}$  créée à l'intérieur de  $\Sigma$  a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S_{\text{créée}} &= 0 && \text{si la transformation est réversible,} \\ S_{\text{créée}} &> 0 && \text{si la transformation est irréversible.} \end{aligned}$$

**Le second principe de la thermodynamique** pour un système fermé  $\Sigma$ , au cours d'une **transformation finie** entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}, \quad (22.13)$$

où  $S_{\text{éch}}$  est l'entropie reçue par  $\Sigma$  et  $S_{\text{créée}}$  l'entropie créée à l'intérieur de  $\Sigma$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

### Remarque

$\Delta S$  ne dépend que des états aux deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , mais  $S_{\text{éch}}$  et  $S_{\text{créée}}$  dépendent de l'évolution détaillée du système entre ces deux instants.

### b) Second principe pour une transformation infinitésimale

La variation infinitésimale  $dS = S(t + dt) - S(t)$  de l'entropie d'un système fermé  $\Sigma$  entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  est la somme de :

- l'entropie élémentaire  $\delta S_{\text{éch}}$  reçue de l'extérieur entre les instants  $t$  et  $t + dt$  donnée par :

$$\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_S},$$

où  $\delta Q$  est le transfert thermique élémentaire et  $T_S$  la température de la surface du système traversée par le transfert thermique (température supposée uniforme),

- l'entropie élémentaire  $\delta S_{\text{créée}}$  créée dans le système entre les instants  $t$  et  $t + dt$  telle que :

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{créée}} &= 0 && \text{si la transformation est réversible,} \\ \delta S_{\text{créée}} &> 0 && \text{si la transformation est irréversible.} \end{aligned}$$

$\delta S_{\text{éch}}$  et  $\delta S_{\text{créée}}$  sont des quantités élémentaires, mais *ne* sont *pas* des variations infinitésimales.

**Le second principe de la thermodynamique** pour un système fermé, au cours d'une **transformation infinitésimale** entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  infiniment proches s'écrit :

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{créée}}. \quad (22.14)$$

 Noter la règle de « traduction » entre les équations (22.13) et (22.14) :

- un terme avec un «  $\Delta$  » devient un terme avec un «  $d$  »,
- un terme sans marque particulière devient un terme avec un «  $\delta$  ».

### c) Exemple : trempe d'un solide

**Modélisation** On reprend le modèle de l'exemple de la page 665.

**Second principe pour le système  $\Sigma = \{\text{solide}\}$  entre les instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = \infty$**

On va exprimer la variation d'entropie, l'entropie échangée et en déduire l'entropie créée. L'entropie de  $\Sigma$ , dans le modèle du solide indilatable, est donnée par la formule :

$$S = C_V \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + S_0,$$

où  $C_V = \mu cV$  est la capacité thermique à volume constant du solide,  $T$  la température du solide (supposée uniforme),  $T_0$  et  $S_0$  des constantes. Pour le système  $\Sigma$  entre les instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = \infty$  :

- la variation d'entropie est (sachant que  $T(0) = T_i$  et  $T(\infty) = T_{\text{liq}}$ ) :

$$\Delta S = \left( C_V \ln \left( \frac{T(\infty)}{T_0} \right) + S_0 \right) - \left( C_V \ln \left( \frac{T(0)}{T_0} \right) + S_0 \right) = C_V \ln \left( \frac{T(\infty)}{T(0)} \right) = C_V \ln \left( \frac{T_{\text{liq}}}{T_i} \right);$$

- l'entropie reçue est :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_S} = \frac{C_V(T_{\text{liq}} - T_i)}{T_{\text{liq}}} = C_V \left( 1 - \frac{T_i}{T_{\text{liq}}} \right).$$

 Dans ce calcul on a pris  $T_S = T_{\text{liq}}$  parce que le système  $\Sigma$  est délimité par une surface à l'intérieur du liquide, très proche de la surface du solide (voir figure 22.2, page 665).  $\Sigma$  englobe ainsi la fine couche de liquide, appelée couche limite thermique, à l'intérieur de laquelle la température locale varie de  $T_{\text{liq}}$  à  $T(t)$ . C'est dans cette couche qu'il y a création d'entropie.

Le second principe permet alors de calculer l'entropie créée au cours de cette transformation :

$$S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} = C_V \left( \ln \left( \frac{T_{\text{liq}}}{T_i} \right) - 1 + \frac{T_i}{T_{\text{liq}}} \right).$$

On vérifie, en traçant la courbe représentative de la fonction  $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ , que  $f(x) > 0$  si  $x \neq 1$  donc l'entropie créée est strictement positive pour  $T_i \neq T_{\text{liq}}$ . La transformation est irréversible.

**Second principe pour le système  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$** 

- La variation infinitésimale d'entropie est :

$$dS = d \left( C_V \ln T \underbrace{- C_V \ln T_0 + S_0}_{\text{constante}} \right) = C_V \frac{dT}{T} = \frac{\delta Q}{T},$$

car d'après le premier principe (équation (22.9) page 666) :  $\delta Q = C_V dT$ .

- L'entropie reçue élémentaire est :  $\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_S} = \frac{\delta Q}{T_{\text{liq}}}$ .

On en déduit l'entropie créée élémentaire entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$\delta S_{\text{créée}} = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{liq}}} \right) \delta Q.$$

Le transfert thermique entre le liquide et le solide s'accompagne donc de création d'entropie ( $\delta S_{\text{créée}} \neq 0$ ) tant que la température du solide est différente de la température du liquide. D'autre part, étant donné que :  $\delta Q = \Phi dt = Ah(T_{\text{liq}} - T)dt$ , il vient :

$$\delta S_{\text{créée}} = Ah \frac{(T_{\text{liq}} - T)^2}{TT_{\text{liq}}} dt.$$

Ainsi, la prescription du second principe  $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$  impose que  $h > 0$  (la surface  $A$  et les températures sont des grandeurs positives), c'est-à-dire que le solide *reçoit* effectivement du transfert thermique du liquide lorsque sa température est *inférieure* à celle du liquide. Le second principe impose donc le sens du transfert thermique : le système dont la température est la plus élevée donne de l'énergie au système dont la température est la plus basse.

**Remarque**

L'entropie créée entre  $t_1 = 0$  et  $t_2 = \infty$  peut s'obtenir en calculant :

$$S_{\text{créée}} = \int \delta S_{\text{créée}} = \int_{t=0}^{\infty} Ah \frac{(T_i - T_{\text{liq}})^2 \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right)}{\left(T_{\text{liq}} + (T_i - T_{\text{liq}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) T_{\text{liq}}} dt.$$

Cette intégrale s'évalue avec un logiciel de calcul formel et on trouve, en utilisant la relation  $Ah\tau = C_V$ , le même résultat que plus haut.

**d) Exemple 2 : compression lente d'un gaz parfait**

**Modélisation** On reprend le modèle de l'exemple 2 en page 666.

**Second principe pour le système  $\Sigma = \{\text{gaz} + \text{récipient} + \text{piston}\}$  entre  $t$  et  $t + dt$** 

On va exprimer la variation élémentaire d'entropie  $dS$ , l'entropie élémentaire échangée  $\delta S_{\text{éch}}$  et en déduire l'entropie élémentaire produite  $\delta S_{\text{créée}}$ .

On rappelle l'expression de l'entropie d'un échantillon de  $n$  moles de gaz parfait :

$$S_{\text{gaz}} = nC_{V,m} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0,$$

où  $T_0$ ,  $V_0$  et  $S_0$  sont des constantes. L'entropie du piston est donnée par la formule :

$$S_p = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + S'_0,$$

où  $S'_0$  est une constante.

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$  la variation élémentaire d'entropie du gaz est :

$$dS_{\text{gaz}} = d \left( nC_{V,m} \ln T + nR \ln V - \underbrace{nC_{V,m} \ln T_0 - nR \ln V_0 + S_0}_{\text{constante}} \right) = nC_{V,m} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V},$$

la variation élémentaire d'entropie du piston est, par un calcul analogue :  $dS_p = C_p \frac{dT}{T}$ , et la variation élémentaire d'entropie de  $\Sigma$  est :

$$dS = (nC_{V,m} + C_p) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}.$$

L'entropie élémentaire reçue par  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_S} = \frac{K(T_0 - T)dt}{T_0},$$

car la surface traversée par le transfert thermique est à la température  $T_0$  (voir figure 22.3).

On en déduit :

$$\delta S_{\text{créée}} = dS - \delta S_{\text{éch}} = (nC_{V,m} + C_p) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} - \frac{K(T_0 - T)dt}{T_0}. \quad (22.15)$$

**Interprétation de la production d'entropie** En combinant l'équation (22.15) et l'équation (22.10) de la page 668, on obtient :

$$\delta S_{\text{créée}} = \frac{\mathcal{P}_f dt}{T} + \frac{K(T_0 - T)^2}{T_0 T} dt.$$

Dans cette expression les deux termes sont strictement positifs. Ainsi, la création d'entropie est due :

- aux frottements sur le piston,
- au transfert thermique entre le milieu extérieur et le gaz parce que leurs températures sont différentes.

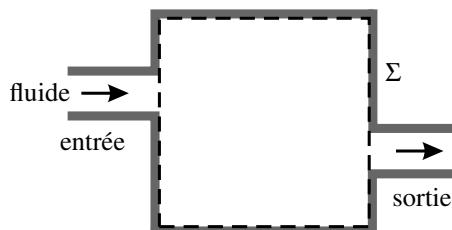
### 3 Principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire

Dans une machine thermique l'énergie est transportée par un fluide qui circule entre différents éléments. Lorsqu'on étudie l'un de ces éléments séparément, on est amené à considérer le système  $\Sigma$  constitué par cet élément et le fluide qu'il contient.  $\Sigma$  est un système ouvert car il y a constamment du fluide qui rentre et qui sort de l'élément. On utilise alors les deux principes de la thermodynamique sous une forme particulière qui va être établie dans ce paragraphe. Conformément au programme, on se limitera au cas du régime stationnaire.

#### 3.1 Système ouvert

##### a) Définition

Un **système ouvert** est par définition un système dont la surface de contrôle  $\mathcal{S}$  est traversée par de la matière. La figure 22.5 montre un système ouvert  $\Sigma$  avec une entrée et une sortie. On ne considérera pas de système avec plus d'une entrée ou plus d'une sortie.



**Figure 22.5 – Système ouvert  $\Sigma$  à une entrée et une sortie.**

Conformément au programme, on se limite au cas où l'écoulement du fluide est **unidimensionnel** : la vitesse du fluide, ainsi que toutes les grandeurs intensives qui le caractérisent (masse volumique, température, pression...) sont uniformes sur la section d'entrée, ainsi que sur la section de sortie du système. Ces grandeurs seront notées avec un  $e$  (pour entrée) ou un  $s$  (pour sortie) en indice sans donner plus de précision. Par exemple  $c_e$  sera la vitesse du fluide à l'entrée et  $c_s$  la vitesse du fluide en sortie.

##### b) Masses entrante et sortante, débits massiques

Les flux de matière entrant et sortant du système sont caractérisés par des **débits massiques**. Il y a un débit massique d'entrée  $D_{m,e}$  et un débit massique de sortie  $D_{m,s}$ . Par définition, la masse  $dm_e$  entrant dans le système entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$  et la masse  $dm_s$  en sortant sont :

$$dm_e = D_{m,e} dt \quad \text{et} \quad dm_s = D_{m,s} dt.$$

$D_{m,e}$  et  $D_{m,s}$  se mesurent en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### c) Système ouvert en régime stationnaire

Conformément au programme, on ne considérera que des systèmes ouverts en **régime stationnaire**. En régime stationnaire, toutes les caractéristiques du fluide contenu à l'intérieur du système  $\Sigma$  sont invariables dans le temps. Le fluide contenu dans  $\Sigma$  est constamment renouvelé ( $\Sigma$  ne contient jamais les mêmes molécules) mais *il est à chaque instant dans le même état*.

En particulier, la masse de fluide contenue dans  $\Sigma$  est la même à tout instant. Or entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$ , il entre dans  $\Sigma$  la masse  $dm_e = D_{m,e}dt$  et il en sort la masse  $dm_s = D_{m,s}dt$ . La masse dans  $\Sigma$  étant la même à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + dt$ , nécessairement :

$$dm_e = dm_s \quad \text{soit} \quad D_{m,e} = D_{m,s}.$$

On définit le débit massique de fluide  $D_m$  à travers le système par :  $D_m = D_{m,e} = D_{m,s}$ . La masse de fluide entrant ou sortant de  $\Sigma$  entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$  est :

$$dm = D_m dt .$$

### 3.2 Bilan d'une grandeur extensive $Y$ en régime stationnaire

Dans ce paragraphe on désigne par  $Y$  une grandeur extensive et additive quelconque. Dans les applications il s'agira par exemple de l'énergie interne  $U$  ou de l'entropie  $S$ . On note  $y$  la grandeur massique associée à  $Y$  (par exemple l'énergie interne massique  $u$  ou l'entropie massique  $s$ ),  $y_e$  sa valeur à l'entrée du système ouvert et  $y_s$  sa valeur à la sortie.

  $y$  est une grandeur intensive.

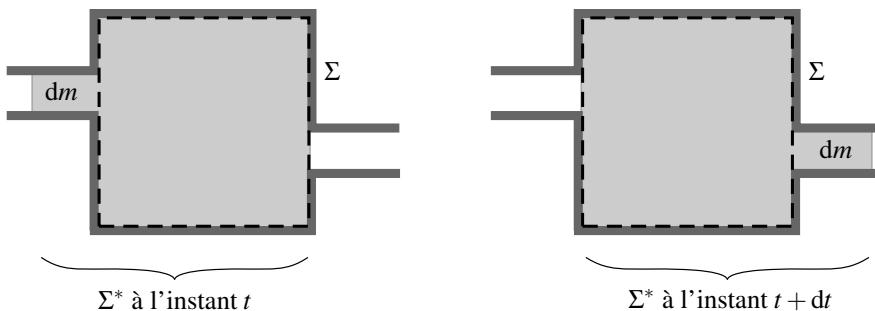


Figure 22.6 – Système fermé  $\Sigma^*$ .

On va raisonner sur un système fermé  $\Sigma^*$  qui est défini à partir de  $\Sigma$  de la manière suivante (voir figure 22.6) :

- à l'instant  $t$ ,  $\Sigma^*$  est la réunion de  $\Sigma$  et de la masse  $dm$  de fluide qui entre dans  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,

- à l'instant  $t + dt$ ,  $\Sigma^*$  est la réunion de  $\Sigma$  et de la masse  $dm$  de fluide qui sort de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .

On note  $Y_\Sigma$  la valeur de  $Y$  pour le système  $\Sigma$ ; cette valeur est la même à tout instant car on a fait l'hypothèse que le régime est stationnaire. En revanche la valeur de  $Y$  pour  $\Sigma^*$  dépend du temps. Par additivité  $Y_{\Sigma^*}$  est la somme de  $Y_\Sigma$  et la valeur de  $Y$  pour la masse  $dm$ . Sa variation élémentaire entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$dY_{\Sigma^*} = Y_{\Sigma^*}(t + dt) - Y_{\Sigma^*}(t) = (y_s dm + Y_\Sigma) - (y_e dm + Y_\Sigma),$$

soit :

$$dY_{\Sigma^*} = dm(y_s - y_e) = dm[y]_e^s , \quad (22.16)$$

en posant  $[y]_e^s = y_s - y_e$ .

### 3.3 Premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire

Dans ce paragraphe on va appliquer le premier principe de la thermodynamique au le système fermé  $\Sigma^*$  entre les deux instants  $t$  et  $t + dt$ . On en déduira une relation qui est le « premier principe pour un système ouvert » appliquée au système ouvert  $\Sigma$ .

#### a) Travail utile massique et transfert thermique massique

Le fluide à l'intérieur de  $\Sigma$  peut recevoir de l'énergie sous forme de travail et sous forme de transfert thermique.

Il reçoit du travail lorsque l'élément de machine correspondant à  $\Sigma$  contient au moins une pièce mobile (par exemple une hélice). On note  $\mathcal{P}_u$  la puissance mécanique correspondante, comptée positivement lorsque l'énergie est effectivement reçue par le fluide (voir figure 22.7). En régime stationnaire cette puissance est indépendante du temps.

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$  le travail élémentaire reçu par  $\Sigma$  est :

$$\delta W_u = \mathcal{P}_u dt.$$

Il est d'usage de définir le **travail utile massique**  $w_u$  par la relation :

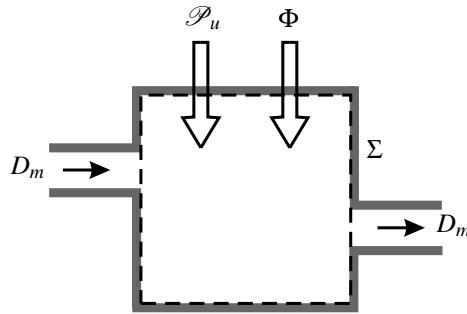
$$\delta W_u = w_u dm ,$$

où  $dm$  est la masse de fluide qui traverse l'élément de machine entre ces mêmes instants.  $w_u$  s'exprime en  $J \cdot kg^{-1}$ . Étant donné que  $dm = D_m dt$ , on a :

$$w_u = \frac{\mathcal{P}_u}{D_m} .$$

#### Remarque

Le qualificatif « utile » sert à distinguer ce travail du travail des forces de pression interne au fluide qui est calculé au paragraphe suivant.



**Figure 22.7 – Transferts d'énergie vers le système  $\Sigma$ .**

Le fluide à l'intérieur de  $\Sigma$  peut aussi recevoir du transfert thermique. On note  $\Phi$  la puissance thermique (ou flux thermique) correspondante, comptée positivement lorsque l'énergie est effectivement reçue par le fluide (voir figure 22.7). En régime stationnaire cette puissance est indépendante du temps.

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$  le transfert thermique élémentaire reçu par  $\Sigma$  est :

$$\delta Q = \Phi dt.$$

Il est d'usage de définir le **transfert thermique massique**  $q$  par la relation :

$$\delta Q = q dm .$$

$q$  s'exprime en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Étant donné que  $dm = D_m dt$ , on a :

$$q = \frac{\Phi}{D_m} .$$

### b) Travail des forces de pression interne au fluide

Pour appliquer le premier principe au système  $\Sigma^*$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , il faut aussi calculer le travail fourni à ce système par le fluide avec lequel il est en contact. L'action du fluide sur  $\Sigma^*$  est la suivante :

- le fluide situé en amont pousse le fluide de  $\Sigma^*$  et lui fournit un travail positif :  $+P_e dV_e$  où  $P_e$  est la pression à l'entrée et  $dV_e$  le volume de fluide entrant dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  ;
- le fluide situé en aval le retient et lui fournit un travail négatif :  $-P_s dV_s$  où  $P_s$  est la pression à la sortie et  $dV_s$  le volume de fluide sortant de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$ .

Ainsi, le travail des forces de pression reçu par  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta W_{\text{pression}} = P_e dV_e - P_s dV_s = P_e v_e dm - P_s v_s dm,$$

en notant  $v_e$  et  $v_s$  les volumes massique du fluide en entrée et en sortie respectivement. Finalement :

$$\delta W_{\text{pression}} = (P_e v_e - P_s v_s) dm = -dm [Pv]_e^s .$$

**c) Expression du premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire**

Pour le système *fermé*  $\Sigma^*$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  le premier principe s'écrit :

$$dU + dE_c + dE_{p,\text{ext}} = \delta W + \delta Q.$$

En utilisant la formule (22.16) on peut écrire :

$$dU + dE_c + dE_{p,\text{ext}} = dm [u + e_c + e_{p,\text{ext}}]_e^s,$$

en notant  $u$  l'énergie interne massique,  $e_c = \frac{1}{2}c^2$  l'énergie cinétique massique et  $e_{p,\text{ext}}$  l'énergie potentielle extérieure massique. D'autre part :  $\delta W = \delta W_u + \delta W_{\text{pression}}$ . Il vient donc :

$$dm [u + e_c + e_{p,\text{ext}}]_e^s = w_u dm - [Pv]_e^s dm + q dm,$$

soit, en regroupant les termes et simplifiant par  $dm$  :

$$[u + Pv + e_c + e_{p,\text{ext}}]_e^s = w_u + q.$$

Dans cette formule apparaît l'**enthalpie massique**  $h = u + Pv$ . Il est aussi d'usage d'introduire la notation :

$$\Delta y = [y]_e^s = y_s - y_e,$$

variation d'une grandeur intensive  $y$  entre l'entrée et la sortie du système.

**Le premier principe pour un système ouvert, en régime stationnaire** s'écrit :

$$[h + e_c + e_{p,\text{ext}}]_e^s = w_u + q \quad \text{ou} \quad \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_{p,\text{ext}} = w_u + q. \quad (22.17)$$



Les termes de cette équation sont en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .



$\Delta h$  n'est pas la variation d'enthalpie du système ouvert  $\Sigma$  ! C'est la variation d'enthalpie massique du fluide lorsqu'il traverse le système ouvert.

**Remarque**

Dans la majorité des applications l'énergie potentielle  $e_{p,\text{ext}}$  est l'énergie de pesanteur :  $e_{p,\text{poids}} = gz$  où  $z$  est la cote le long d'un axe ( $Oz$ ) vertical orienté vers le haut. Le premier principe pour un système ouvert s'écrit alors :

$$\left[ h + \frac{1}{2}c^2 + gz \right]_e^s = w_u + q \quad \text{ou} \quad \Delta h + \Delta \left( \frac{1}{2}c^2 \right) + \Delta(gz) = w_u + q. \quad (22.18)$$

#### d) Cas particuliers

**Compresseur, pompe** Un compresseur (resp. une pompe) est un dispositif destiné à accroître la pression d'un gaz (resp. d'un liquide). Le fluide y reçoit de la part de pièces mécaniques mobiles un travail massique  $w_u > 0$ . Le transfert thermique est le plus souvent négligeable ( $q \simeq 0$ ). Les variations d'énergie cinétique et potentielle de pesanteur sont négligeables ( $\Delta e_c \simeq 0$  et  $\Delta e_{p,\text{poids}} \simeq 0$ ). Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit, pour un compresseur ou une pompe :

$$\Delta h \simeq w_u > 0.$$

**Turbine** Le fluide traversant une turbine fournit du travail à une pièce mécanique mobile :  $w_u < 0$ . Sa pression et sa température diminuent. Le transfert thermique est en général négligeable ( $q \simeq 0$ ), de même que la variation d'énergie potentielle de pesanteur ( $\Delta e_{p,\text{poids}} \simeq 0$ ). Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit, pour une turbine :

$$\Delta h + \Delta e_c \simeq w_u < 0.$$

**Détendeur** Un détendeur est un dispositif utilisé pour abaisser la pression d'un fluide. Il s'agit d'une soupape ajustable, d'un bouchon poreux ou bien d'un tube capillaire (c'est-à-dire un tube très fin). Le fluide qui le traverse ne reçoit aucun travail ( $w_u = 0$ ) car il n'y a pas de pièce mécanique mobile et quasiment aucun transfert thermique ( $q \simeq 0$ ). Les variations d'énergie cinétique et potentielle de pesanteur sont négligeables ( $\Delta e_c \simeq 0$  et  $\Delta e_{p,\text{poids}} \simeq 0$ ). Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta h \simeq 0 \quad \text{soit} \quad h_s = h_e.$$

**Tuyère** Une tuyère est un conduit de section variable dont le rôle est d'accroître la vitesse d'écoulement d'un gaz. Le gaz qui la traverse ne reçoit pas de travail ( $w_u = 0$ , car il n'y a pas de pièce mobile), et peu de transfert thermique ( $q \simeq 0$ ). La variation d'énergie potentielle de pesanteur est négligeable ( $\Delta e_{p,\text{poids}} \simeq 0$ ). Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta h + \Delta e_c \simeq 0 \quad \text{soit} \quad c_s \simeq \sqrt{c_e^2 + 2(h_s - h_e)}.$$

Dans l'hypothèse où le gaz est un gaz parfait de masse molaire  $M$  et rapport des capacités thermiques  $\gamma$ ,  $h = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{R}{M} T + \text{constante}$ , de sorte que :  $c_s \simeq \sqrt{c_e^2 + \frac{2\gamma R}{(\gamma-1)M} (T_s - T_e)}$ .

**Évaporateur, condenseur** Dans un évaporateur ou un condenseur, le fluide (un liquide, une vapeur ou un mélange liquide vapeur) ne reçoit pas de travail ( $w_u = 0$ ). Les variations d'énergie cinétique et potentielle de pesanteur sont négligeables ( $\Delta e_c \simeq 0$  et  $\Delta e_{p,\text{poids}} \simeq 0$ ). Dans un évaporateur le fluide reçoit du transfert thermique ( $q > 0$ ) et dans un condenseur il cède du transfert thermique ( $q < 0$ ). Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta h = q.$$

La variation d'enthalpie correspond, suivant le cas, à une vaporisation ou une condensation .

### 3.4 Second principe pour un système ouvert en régime stationnaire

Dans ce paragraphe on va appliquer le second principe de la thermodynamique au système fermé  $\Sigma^*$  entre les deux instants  $t$  et  $t + dt$ . On en déduira une relation qui est le « second principe pour un système ouvert » appliquée au système ouvert  $\Sigma$ .

#### a) Entropie créée par unité de masse de fluide

Dans le système  $\Sigma$  il peut y avoir des phénomènes irréversibles qui produisent de l'entropie : déséquilibres mécaniques, gradients thermiques, frottements... On note  $\delta S_{\text{créée}}$  l'entropie élémentaire créée entre les instants  $t$  et  $t + dt$  à l'intérieur de  $\Sigma$ . Cette création d'entropie est proportionnelle à la durée  $dt$  :

$$\delta S_{\text{créée}} = \dot{S}_{\text{créée}} dt,$$

où  $\dot{S}_{\text{créée}}$  est le taux de création d'entropie qui se mesure en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le second principe de la thermodynamique impose que  $\dot{S}_{\text{créée}} \geq 0$  et  $\dot{S}_{\text{créée}} = 0$  s'il n'y a aucun phénomène cause d'irréversibilité dans  $\Sigma$ .

En régime stationnaire  $\dot{S}_{\text{créée}}$  est indépendant du temps. On définit l'**entropie créée par unité de masse**  $s_{\text{créée}}$  par :

$$\delta S_{\text{créée}} = s_{\text{créée}} dm ,$$

où  $dm = S_m dt$  est la masse de fluide traversant le système entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .  $s_{\text{créée}}$  se mesure en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Elle est reliée au taux de création d'entropie par :

$$s_{\text{créée}} = \frac{\dot{S}_{\text{créée}}}{D_m}.$$

D'après le second principe :

- $s_{\text{créée}} \geq 0$ ,
- $s_{\text{créée}} = 0$  s'il ne se produit aucun phénomène irréversible à l'intérieur de  $\Sigma$ .

#### b) Entropie échangée par unité de masse de fluide

De même, l'entropie élémentaire  $\delta S_{\text{éch}}$  reçue par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est proportionnelle à la durée  $dt$  :

$$\delta S_{\text{éch}} = \dot{S}_{\text{éch}} dt,$$

où  $\dot{S}_{\text{éch}}$  est le taux d'échange d'entropie qui se mesure en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En régime stationnaire  $\dot{S}_{\text{éch}}$  est indépendant du temps et on définit l'**entropie échangée par unité de masse**  $s_{\text{éch}}$  par :

$$\delta S_{\text{éch}} = s_{\text{éch}} dm .$$

$s_{\text{éch}}$  se mesure en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Elle est reliée au taux d'échange d'entropie par :

$$s_{\text{éch}} = \frac{\dot{S}_{\text{éch}}}{D_m}.$$

L'entropie échangée par  $\Sigma$  est reliée au transfert thermique  $\delta Q$  reçu par  $\Sigma$  :  $\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_S}$ , où  $T_S$  est la température de la surface traversée par ce transfert thermique, température supposée uniforme pour simplifier. Étant donné que  $\delta Q = qdm$  et  $\delta S_{\text{éch}} = s_{\text{éch}}dm$ , il vient :

$$s_{\text{éch}} = \frac{q}{T_S}.$$

### Remarque

Dans le cas où le système  $\Sigma$  ne reçoit pas de transfert thermique, c'est-à-dire dans le cas où le fluide subit une transformation adiabatique :  $s_{\text{éch}} = 0$ .

### c) Expression du deuxième principe

Le second principe de la thermodynamique pour le système *fermé*  $\Sigma^*$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{créée}},$$

soit, en utilisant la formule (22.16) pour la fonction d'état extensive et additive  $Y = S$  :

$$dm[s]_e^s = s_{\text{éch}}dm + s_{\text{créée}}dm.$$

**Le second principe pour un système ouvert, en régime stationnaire** s'écrit :

$$[s]_e^s = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}} \quad \text{ou} \quad \Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}}. \quad (22.19)$$



Les termes de cette équation sont en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .



$\Delta s$  n'est pas la variation d'entropie du système ouvert ! C'est la variation d'entropie massique du fluide lorsqu'il traverse le système ouvert.

## 3.5 Premier et second principes pour un système ouvert sous forme infinitésimale

On considère un fluide s'écoulant en régime stationnaire dans une canalisation à l'intérieur d'une machine. On suppose que :

- la canalisation est localement rectiligne, parallèle à un axe ( $Ox$ ),
- l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local est vérifiée.

On considère le système ouvert  $\Sigma$  constitué par le fluide (différent à chaque instant) qui se trouve entre deux sections d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Les deux principes s'appliquent à ce système sous la forme vue plus haut.

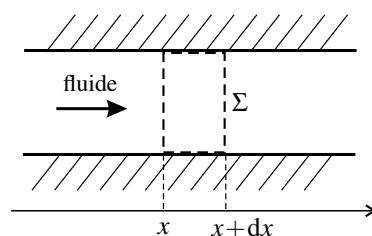


Figure 22.8 – Système ouvert infinitésimal.

Cependant, le transfert thermique massique et le travail massique utile reçus par le fluide entre ces deux sections très proches sont très petits et pour cette raison on les note  $\delta q$  et  $\delta w_u$ . De même l'enthalpie massique, l'énergie cinétique massique et l'énergie potentielle extérieure massique varient très peu et on note leurs variations :

$$dh = h(x + dx) - h(x), \quad de_c = e_c(x + dx) - e_c(x), \quad de_{p,\text{ext}} = e_{p,\text{ext}}(x + dx) - e_{p,\text{ext}}(x).$$

Le premier principe pour le système ouvert  $\Sigma$  en régime stationnaire s'écrit ainsi :

$$dh + de_c + de_{p,\text{ext}} = \delta w_u + \delta q . \quad (22.20)$$

Pour le second principe on note  $ds = s(x + dx) - s(x)$  la variation d'entropie,  $\delta s_{\text{éch}}$  l'entropie échangée par unité de masse de fluide et  $\delta s_{\text{créée}}$  l'entropie créée par unité de masse de fluide. Le second principe pour le système ouvert  $\Sigma$  en régime stationnaire s'écrit :

$$ds = \delta s_{\text{éch}} + \delta s_{\text{créée}} . \quad (22.21)$$

## 4 Diagramme ( $\ln P, h$ ) d'un fluide

Les diagrammes thermodynamiques visualisent les propriétés thermodynamiques d'un fluide et permettent d'évaluer les différentes fonctions d'état du fluide. Le programme MP prévoit l'utilisation uniquement du diagramme ( $\ln P, h$ ), dans lequel le logarithme de la pression  $P$  est porté en ordonnée et l'enthalpie massique  $h$  en abscisse et qui est appelé **diagramme des frigoristes**.

### 4.1 Principe d'un diagramme thermodynamique

L'état d'un fluide, qu'il soit monophasé (liquide seul ou vapeur seule) ou diphasé (mélange liquide–vapeur), est toujours déterminé par la valeur de *deux* paramètres ou fonctions d'état intensifs. On peut donc représenter l'ensemble des états du fluide sur un diagramme plan avec deux grandeurs thermodynamiques intensives en abscisse et en ordonnée.

Le diagramme comporte différents réseaux de courbes : réseau de **courbes isothermes**, de **courbes isobares**, de **courbes isochores**, de **courbes isentropes** ou de **courbes isenthalpes**. Lorsqu'on a reconnu un réseau de courbes sur le diagramme, il est aisément de connaître en n'importe quel point du plan la valeur du paramètre (ou de la fonction) d'état qui lui correspond : température  $T$ , pression  $P$ , volume massique  $v$ , entropie massique  $s$  ou enthalpie massique  $h$ . Certains logiciels comme Coolpack (logiciel téléchargeable gratuitement) donnent une visualisation à l'écran du diagramme et la possibilité de lire (en général au bas de l'écran) la valeur de tous les paramètres et fonctions d'état du fluide pour l'état du fluide pointé avec la souris.

#### Remarque

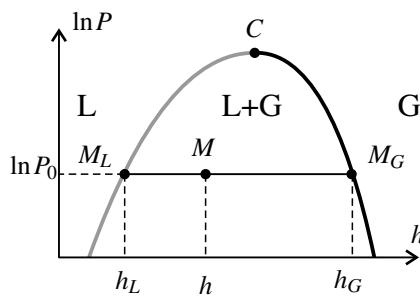
Pour chaque fluide les diagrammes sont calculés à partir de mesures expérimentales en s'appuyant sur des modèles thermodynamiques éprouvés. Les valeurs données par un logiciel ont une précision de l'ordre de 0,1%.

## 4.2 Zone d'équilibre entre le liquide et le gaz et courbe isotrope

Sur le diagramme une courbe délimite la zone L+G du diagramme dans laquelle le fluide est diphasé (voir figure 22.9). Cette courbe est en deux parties :

- la **courbe d'ébullition** qui sépare cette zone de la zone L où le fluide est liquide,
- la **courbe de rosée** qui la sépare de la zone G où le fluide est à l'état de vapeur (ou gaz).

Ces deux courbes se rejoignent au **point critique C**.



**Figure 22.9 –** Zone d'équilibre entre le liquide et le gaz : en gris la courbe d'ébullition, en noir la courbe de rosée.

Sur un diagramme  $(\ln P, h)$ , tout segment de droite joignant un point  $M_L$  de la courbe d'ébullition et un point  $M_G$  de la courbe de rosée est à la fois un morceau d'une isobare, puisque la pression est portée en ordonnée, et d'une isotherme puisque l'équilibre entre le liquide et le gaz impose que :

$$T = T_{\text{eb}}(P),$$

où  $T_{\text{eb}}(P)$  est la température d'ébullition à la pression  $P$ . Cette relation est équivalente à

$$P = P_{\text{sat}}(T),$$

où  $P_{\text{sat}}(T)$  est la pression de vapeur saturante à la température  $T$ .

Tout point  $M$  du segment  $[M_L, M_G]$  sur la figure 22.9 représente un mélange liquide vapeur à la pression  $P_0$  et à la température  $T_0 = T_{\text{eb}}(P_0)$ . Chaque point  $M$  correspond à un mélange de **titre massique en gaz**  $x$  différent. On peut relier la valeur de  $x$  à la position de  $M$  sur le segment.

L'abscisse de  $M_L$  (resp.  $M_G$ ) est la valeur  $h_L$  (resp.  $h_G$ ) de l'enthalpie massique pour le liquide (resp. le gaz) à la température  $T_0$  et à la pression  $P_0$ . Un échantillon de masse  $m$  dans l'état représenté par le point  $M$  contient une masse  $(1-x)m$  de liquide et une masse  $xm$  de gaz. La fonction enthalpie étant extensive et additive, on a pour cet échantillon :

$$H = m(1-x) \times h_L + mx \times h_G, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{H}{m} = (1-x)h_L + xh_G.$$

On en déduit que :

$$x = \frac{h - h_L}{h_G - h_L} \quad \text{soit} \quad x = \frac{M_L M}{M_L M_G} . \quad (22.22)$$

Il y a deux cas particuliers importants :

- pour  $M = M_L$ ,  $x = 0$  donc le mélange est entièrement liquide, c'est le **liquide saturant** ;
- pour  $M = M_G$ ,  $x = 1$  le mélange est entièrement gazeux, c'est la **vapeur saturante**.

#### Remarque

Cette formule s'applique aussi dans le diagramme de Clapeyron, diagramme  $(P, v)$  qui a été vu en première année.

Le diagramme peut comporter des courbes **isotitres** sur lesquelles  $x$  a une valeur constante. Ces courbes n'existent bien sûr que dans la zone L+G. Leur utilisation dispense alors d'appliquer la formule précédente.

 La largeur du palier  $M_L M_G$  est :  $h_G - h_L = \Delta_{\text{vap}} h(T_0)$ , enthalpie massique de vaporisation à la température  $T_0$ .

### 4.3 Le diagramme $(\ln P, h)$ ou diagramme des frigoristes

Le diagramme des frigoristes pour l'eau est représenté sur la figure 22.10, page 685.

Le point critique de l'eau a pour coordonnées :  $(P_C, h_C) = (220,89 \text{ bar}, 2,08 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1})$  ; de plus  $T_C = 374,14^\circ\text{C}$  et  $v_C = 3,155 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . La courbe d'ébullition est en gris et la courbe de rosée en noir.

On observe les différents réseaux de courbes :

Les **isobares** sont des droites horizontales : on lit la pression sur l'axe des ordonnées. Remarquer que cet axe porte des graduations non équidistantes (échelle logarithmique).

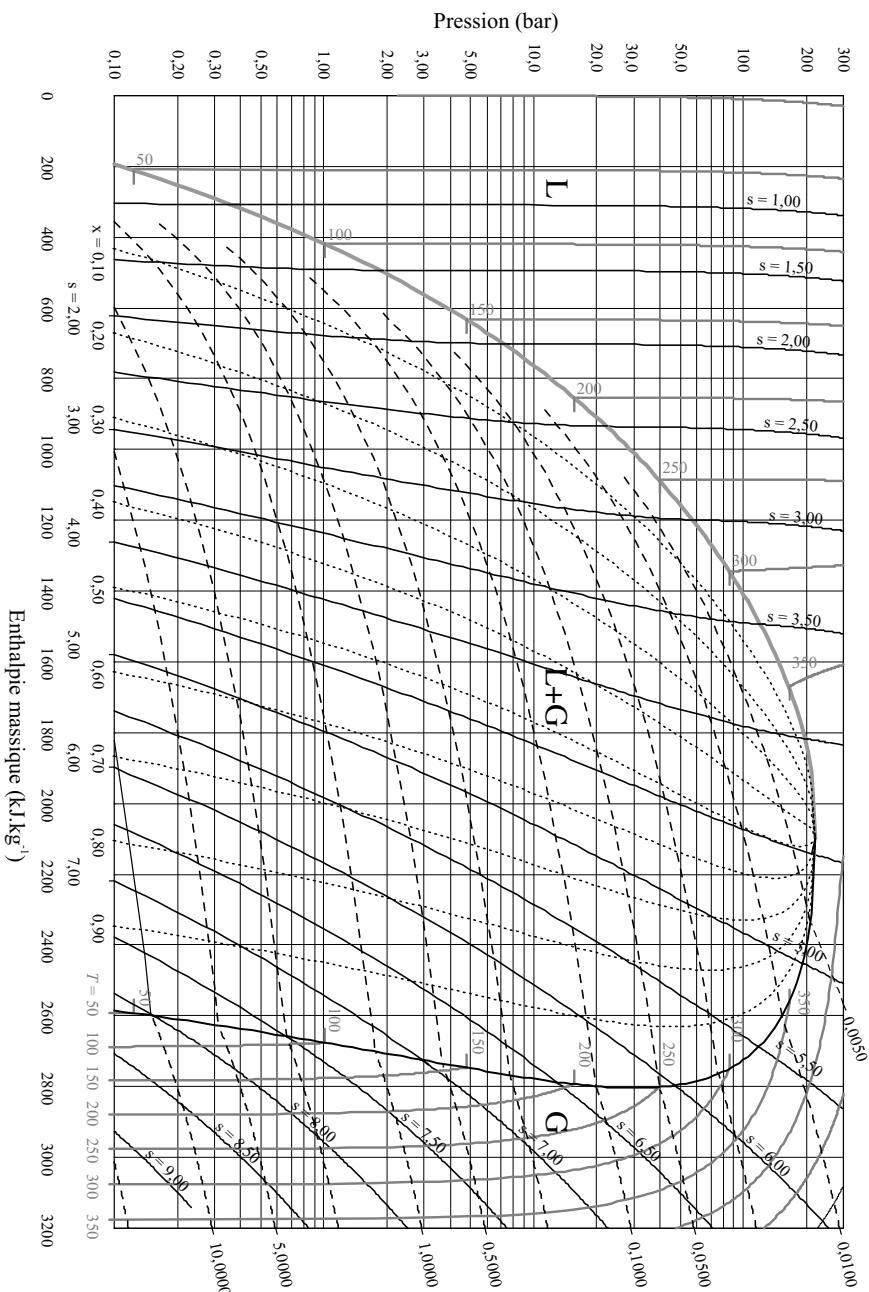
Les **isenthalpes** sont des droites verticales : on lit l'enthalpie massique sur l'axe des abscisses (graduations les plus basses).

Les **isothermes** sont des courbes quasi-verticales dans la zone L, des courbes décroissantes dans la zone G et des segments de droite horizontaux dans la zone L+G. Elles sont représentées en gris sur la figure 22.10 (la partie rectiligne des isothermes n'est pas tracée pour éviter de surcharger la figure). La valeur en degrés Celsius de la température est indiquée à chaque extrémité du palier horizontal (chiffres en gris), ainsi qu'en bas à droite de la figure pour certaines isothermes. On constate que l'isotherme  $T = 100^\circ\text{C}$  présente un palier horizontal à la pression  $P = 1 \text{ bar}$ .

#### Remarque

On remarque sur la figure 22.10 que les isothermes sont quasiment des droites verticales :

- dans la zone G, aux faibles pressions,
- dans la zone L pour des pressions faibles ou moyennes.



**Figure 22.10 –** Diagramme  $(P, h)$  de l'eau. L'échelle de pression est logarithmique. Les températures sont en  $^{\circ}\text{C}$ , les entropies massiques en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et les volumes massique en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Ces constatations s’interprètent en faisant référence aux modèles du gaz parfait et du liquide incompressible et indilatable. Pour un gaz parfait, l’enthalpie est fonction uniquement de la température (deuxième loi de Joule). Il en est de même pour le liquide incompressible et indilatable. Alors une courbe isotherme est aussi une courbe isenthalpe, c’est-à-dire une droite verticale. On constate ainsi sur le diagramme que :

- la vapeur d’eau se comporte approximativement comme un gaz parfait aux faibles pressions,
- l’eau liquide se comporte approximativement comme un liquide incompressible et indilatable aux pressions faibles et moyennes.

Les **isochores** sont des courbes croissantes avec une rupture de pente lorsqu’elles coupent la courbe de rosée. Elles sont représentées en tireté noir. La valeur du volume massique en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  est indiquée à l’extrémité droite de l’isochore.

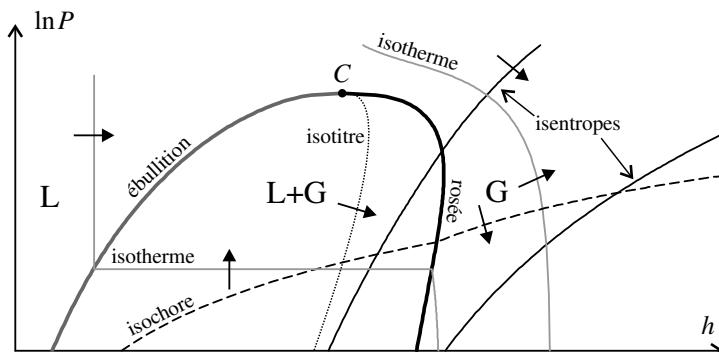
Les **isentropes** sont des courbes sans rupture de pente à la limite de la zone L+G. Elles sont représentées en trait continu noir et la valeur de l’entropie massique en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  est indiquée en bas de la figure et/ou à l’extrémité supérieure de la courbe.

#### Remarque

Dans la zone L, pour des pressions faibles ou moyennes, les isentropes sont quasi-médiennes des droites verticales. Ceci correspond au modèle du liquide indilatable et incompressible pour lequel :  $h = c(T - T_0) + h_0$  (où  $T_0$  et  $h_0$  sont des constantes) et  $s = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0$  (où  $s_0$  est une constante) donc  $s = c \ln\left(\frac{h - h_0 + cT_0}{cT_0}\right) + s_0$ , de sorte que l’entropie massique  $s$  est constante si et seulement si l’enthalpie massique  $h$  est constante.

Les **isotrites** sont représentées en pointillés noirs dans la zone L+G. La valeur du titre  $x$  en vapeur est lisible pour chaque courbe au bas du diagramme.

La figure 22.11 rappelle l’allure des différentes courbes qu’il faut savoir reconnaître sur le diagramme de n’importe quel fluide.



**Figure 22.11** – Courbes du diagramme ( $\ln P, h$ ). Les flèches indiquent la direction dans laquelle la grandeur constante sur la courbe augmente.

## 4.4 Application des deux principes à l'aide du diagramme

Le diagramme est une véritable table des propriétés thermodynamiques d'un fluide réel. Après avoir placé les points représentant l'état initial et l'état final d'une transformation, on peut lire sur le diagramme les valeurs de toutes les grandeurs thermodynamiques intensives du fluide dans ces deux états et calculer :

- la variation d'énergie interne  $\Delta U$  et la variation d'entropie  $\Delta S$  si on applique les principes à un système fermé contenant une masse  $m$  de fluide,
- la variation d'enthalpie massique  $\Delta h$  et la variation d'entropie massique  $\Delta s$  si on applique les principes à un système ouvert en régime stationnaire.

Dans la suite du chapitre on se limitera à ce deuxième cas.

 Les valeurs ainsi calculées sont bien plus fiables que les résultats que l'on obtient en utilisant les modèles idéalisés du gaz parfait ou du liquide incompressible et indilatable.

De plus les échanges d'énergie (travail et transfert thermiques) sont visualisés sur le diagramme  $(\ln P, h)$ . En effet, si l'on place les points  $A$  et  $B$  correspondant respectivement à l'état du fluide à l'entrée et à la sortie d'un système ouvert, la somme du travail massique utile  $w_u$  et du transfert thermique massique  $q$  reçus par le fluide lors de son passage à travers le système est égale au déplacement horizontal algébrique sur le diagramme  $(P, h)$  entre  $A$  et  $B$  (voir figure 22.12) puisque :

$$h_B - h_A = \Delta h = w_u + q,$$

d'après le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire. Le fluide reçoit de l'énergie (resp. en cède) si son point représentatif se déplace vers la droite (resp. la gauche) sur le diagramme  $(P, h)$ .

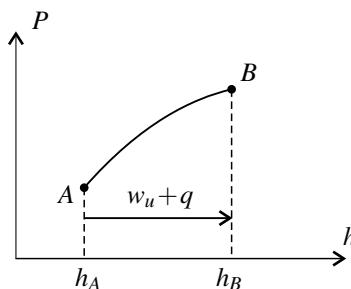


Figure 22.12 – Visualisation des échanges énergétiques en diagramme  $(P, h)$ .

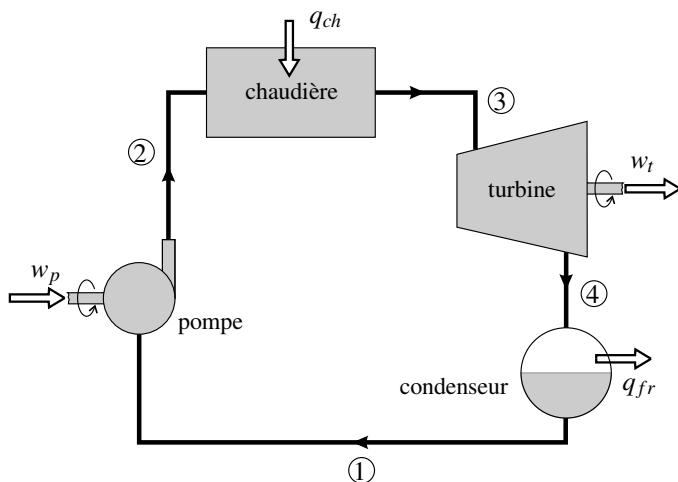
## 5 Exemples d'application des principes de la thermodynamique pour un système ouvert

Dans ce paragraphe on va utiliser les deux principes pour un système ouvert en régime stationnaire pour étudier une machine thermodynamique fournissant du travail et une machine thermodynamique produisant du froid. Ces études seront rendues quantitatives grâce à l'utilisation des diagrammes ( $\ln P, h$ ).

### 5.1 Application 1 : étude du circuit d'eau d'une centrale électrique thermique

La plupart des centrales électriques fonctionnent avec un circuit dans lequel de l'eau subit des transformations entre l'état liquide et l'état gazeux permettant de transformer un transfert thermique, provenant de la combustion du charbon ou du réacteur nucléaire, en travail mécanique. Ce travail mécanique est transformé par un alternateur en énergie électrique.

#### a) Le cycle de Rankine



**Figure 22.13** – Schéma de principe du circuit d'eau d'une centrale électrique thermique. Les flèches indiquent le sens réel des échanges d'énergie.

Le schéma de principe d'un circuit de fluide produisant du travail à partir d'énergie thermique est représenté sur la figure 22.13. Le fluide circule en régime stationnaire dans la machine et passe par quatre états successifs :

- état 1 : le fluide sort du condenseur à l'état liquide saturant à la température  $T_1$  et la pression  $P_1 = P_{\text{sat}}(T_1)$ , pression de vapeur saturante à la température  $T_1$  ;
- transformation 1 – 2 : dans la pompe le liquide subit une compression adiabatique et réversible ;

- état 2 : le fluide est à l'état liquide à la pression  $P_2 > P_1$  et à une température  $T_2 \simeq T_1$  ;
- transformation 2 – 3 : dans la chaudière le fluide reçoit du transfert thermique à pression constante, il monte en température, est totalement transformé en vapeur et monte encore en température ;
- état 3 : le fluide est à l'état de vapeur sèche à la température  $T_3 > T_2$  et à la pression  $P_3 = P_2$  ;
- transformation 3 – 4 : dans la turbine le liquide subit une détente adiabatique et réversible ;
- état 4 : le fluide est à l'état de mélange liquide-vapeur de titre massique en vapeur  $x_4$ , à température  $T_4 = T_1$  et à la pression  $P_4 = P_1 = P_{\text{sat}}(T_1)$  ;
- transformation 4 – 1 : dans le condenseur la vapeur se condense totalement de manière isobare et isotherme.

Ce cycle de transformation est appelé **cycle de Rankine**.

Les échanges d'énergie entre le fluide et l'extérieur au cours du cycle sont les suivants :

- dans la pompe le fluide reçoit du travail, on appelle  $w_p$  le travail massique correspondant,  $w_p > 0$  ;
- dans la chaudière le fluide reçoit du transfert thermique d'un thermostat « chaud » de température  $T_{ch}$ , on appelle  $q_{ch}$  le transfert thermique massique correspondant,  $q_{ch} > 0$  ;
- dans la turbine le fluide cède du travail, on appelle  $w_t$  le travail massique correspondant,  $w_t < 0$  ;
- dans le condenseur le fluide cède du transfert thermique à un thermostat « froid » de température  $T_{fr}$ , on appelle  $q_{fr}$  le transfert thermique massique correspondant,  $q_{fr} < 0$ .

 Le fluide n'échange pas de travail, ni dans la chaudière, ni dans le condenseur car ces éléments ne comportent pas de partie mobile.

### b) Application des deux principes

Chacun des éléments est un système ouvert en régime stationnaire auquel on peut appliquer les deux principes de la thermodynamique sous la forme vue dans la partie précédente.

Il est légitime de négliger les variations d'énergie cinétique  $\Delta e_c$  et d'énergie potentielle  $\Delta e_p$ . En effet les énergie massiques mises en jeu sont de l'ordre de  $1000 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Or, si la vitesse passe de 10 à  $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\Delta e_c = \frac{1}{2} (40^2 - 10^2) = 750 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  seulement. De même, l'énergie potentielle extérieure est l'énergie potentielle de pesanteur et  $\Delta e_{p,\text{poids}} = g\Delta z$  vaut  $1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  pour  $\Delta z = \frac{1000}{9,8} = 102 \text{ m}$  !

Le premier principe pour un système ouvert s'écrit, si l'on note  $h_i$  l'enthalpie massique du fluide dans l'état  $i$  :

- pour la pompe :  $h_2 - h_1 = w_p$  ;
- pour la chaudière :  $h_3 - h_2 = q_{ch}$  ;
- pour la turbine :  $h_4 - h_3 = w_t$  ;
- pour le condenseur :  $h_1 - h_4 = q_{fr}$ .

En faisant la somme de ces équations on trouve :

$$w_p + w_t + q_{ch} + q_{fr} = 0. \quad (22.23)$$

Le second principe pour un système ouvert s'écrit, si l'on note  $s_i$  l'enthalpie massique du fluide dans l'état  $i$  :

- pour la pompe :  $s_2 - s_1 = 0$  car il n'y a ni échange d'entropie (la transformation est adiabatique), ni création d'entropie (elle est réversible) ;
- pour la chaudière :  $s_3 - s_2 = \frac{q_{ch}}{T_{ch}} + s_{\text{créée},c}$  en notant  $s_{\text{créée},c}$  l'entropie créée par unité de masse dans la chaudière ;
- pour la turbine :  $s_4 - s_3 = 0$  comme pour la pompe ;
- pour le condenseur :  $s_1 - s_4 = \frac{q_{fr}}{T_{fr}} + s_{\text{créée},f}$  en notant  $s_{\text{créée},f}$  l'entropie créée par unité de masse dans le condenseur.

En faisant la somme de ces équations on trouve :

$$\frac{q_{ch}}{T_{ch}} + \frac{q_{fr}}{T_{fr}} + s_{\text{créée},c} + s_{\text{créée},f} = 0. \quad (22.24)$$

### c) Rendement

D'une manière générale le rendement est le rapport entre l'énergie utile et l'énergie coûteuse (voir le cours de première année).

Dans le cas présent, l'énergie utile est le travail fourni par la machine  $|w_t| - w_p$ . Dans une centrale électrique la turbine fait tourner un alternateur grâce auquel ce travail est converti en énergie électrique.

L'énergie coûteuse est le transfert thermique  $q_{ch}$ . Dans une centrale électrique, le fluide à l'intérieur de la chaudière est en contact thermique soit avec les gaz chauffés par la combustion du charbon soit avec l'eau pressurisée du circuit primaire dans le cas d'une centrale nucléaire (cette eau est elle-même chauffée par un transfert thermique provenant du réacteur nucléaire).

Le rendement est ainsi :

$$\rho = \frac{|w_t| - w_p}{q_{ch}}. \quad (22.25)$$

En combinant les équations (22.23) et (22.24) on obtient l'expression :

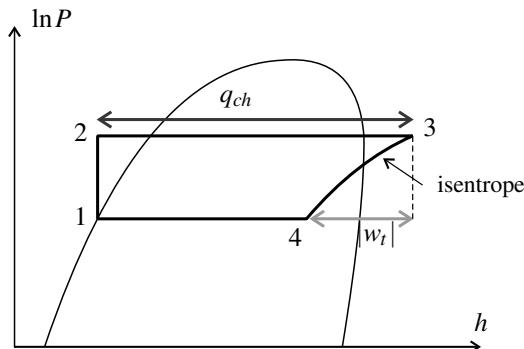
$$\rho = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} - \frac{T_{fr}(s_{\text{créée},c} + s_{\text{créée},f})}{q_{ch}}. \quad (22.26)$$

Les entropies créées étant positives, ce rendement est inférieur au rendement de Carnot (voir cours de première année) :

$$\rho_C = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}.$$

### d) Représentation du cycle de Rankine dans le diagramme ( $\ln P, h$ )

L'allure du cycle de Rankine dans le diagramme ( $\ln P, h$ ) est donnée sur la figure 22.14.



**Figure 22.14 – Cycle de Rankine dans le diagramme  $(\ln P, h)$ .**



Le point 1 est sur la courbe d'ébullition (liquide saturant).

La transformation 1 – 2 suit une isentropique, qui est, dans la zone du liquide, très proche d'une droite verticale. De plus, la pression augmentant dans la pompe, le point 2 est au dessus du point 1.

La transformation 2 – 3 est isobare donc suit une droite horizontale et amène le fluide dans la zone G du gaz.

La transformation 3 – 4 suit une isentropique (vers le bas puisque la pression diminue) et amène le fluide dans la zone L+G.

La transformation 4 – 1 est isobare donc suit une droite horizontale.

### Remarque

Si on assimile l'isentrope 1 – 2 à une droite verticale, on aboutit à  $w_p = h_2 - h_1 \simeq 0$ . C'est une approximation valable : on peut démontrer que  $h_2 - h_1 = v(P_2 - P_1)$  où  $v$  est le volume massique du liquide. Pour l'eau  $v \sim 1.10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , et comme  $P_2 - P_1 \sim 1.10^7 \text{ Pa}$  dans les centrales actuelles,  $h_2 - h_1 \sim 10 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  ce qui est 100 fois moins que les autres variations d'enthalpie mises en jeu. Dans cette approximation :

$$\rho \simeq \frac{-w_t}{q_{ch}}.$$

Les échanges énergétiques apparaissent sur le diagramme (voir figure 22.14), notamment :

$$|w_t| = h_3 - h_4, \quad w_p = h_2 - h_1 \simeq 0 \quad \text{et} \quad q_{ch} = h_3 - h_2.$$

On a donc sur le diagramme une visualisation du rendement de la machine :

$$\rho = \frac{h_3 - h_4 + h_1 - h_2}{h_3 - h_2} \simeq \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_2}.$$

### e) Exemple de valeurs numériques

On considère le cas du circuit d'une centrale thermique. Le fluide est l'eau dont le diagramme ( $\ln P, h$ ) se trouve page 685. Le cycle est déterminé par :

- la pression basse :  $P_1 = P_4 = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ ,
- la pression haute :  $P_2 = P_3 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,
- la température à la sortie de la chaudière :  $T_3 = 613 \text{ K}$

À partir de ces données il est possible de placer sur le diagramme les points correspondant aux états 1 à 4 du fluide. Ceci est fait sur la figure 22.15 page 693.

Une fois les points reportés on trouve par lecture du diagramme les valeurs des paramètres d'états aux différents points du cycle : les températures  $T_1 = T_4 \simeq 60^\circ\text{C}$ ,  $T_2 \simeq T_1$  et la fraction massique de vapeur dans l'état  $x_4 \simeq 0,72$ .



Avec un diagramme imprimé, on doit déterminer ces valeurs par extrapolation entre deux courbes isothermes ou isotropes. Avec un logiciel il suffit de placer la souris sur les points correspondants et de lire la valeur affichée.

On peut aussi déterminer les valeurs des échanges d'énergie :

- le transfert thermique massique reçu dans la chaudière :  $q_{ch} = h_3 - h_2 \simeq 2600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  est obtenu en mesurant la longueur du segment 2 – 3 ;
- le travail massique fourni par le fluide dans la turbine :  $|w_t| = |h_4 - h_3| = h_3 - h_4 \simeq 920 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  est obtenu en mesurant la différence entre les abscisses des points 3 et 4 ;
- le travail massique reçu par le fluide dans la pompe :  $w_p = h_2 - h_1 \simeq 15 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  est obtenu en mesurant la différence des abscisses des points 1 et 2 (ce travail est bien négligeable puisque  $\frac{w_p}{|w_t|} \simeq 1,5\%$ ).

On en déduit le rendement :  $\rho \simeq \frac{920}{2600} \simeq 0,35$ . C'est une valeur tout à fait typique pour une centrale thermique. Pour comparaison on peut calculer le rendement de Carnot en supposant la source chaude à la température  $T_{ch} = T_3$  et la source froide à la température  $T_{fr} = 288 \text{ K}$  (température de l'eau d'une rivière). On trouve :  $\rho_C = 0,53$ , valeur supérieure à  $\rho$  comme l'impose le second principe.

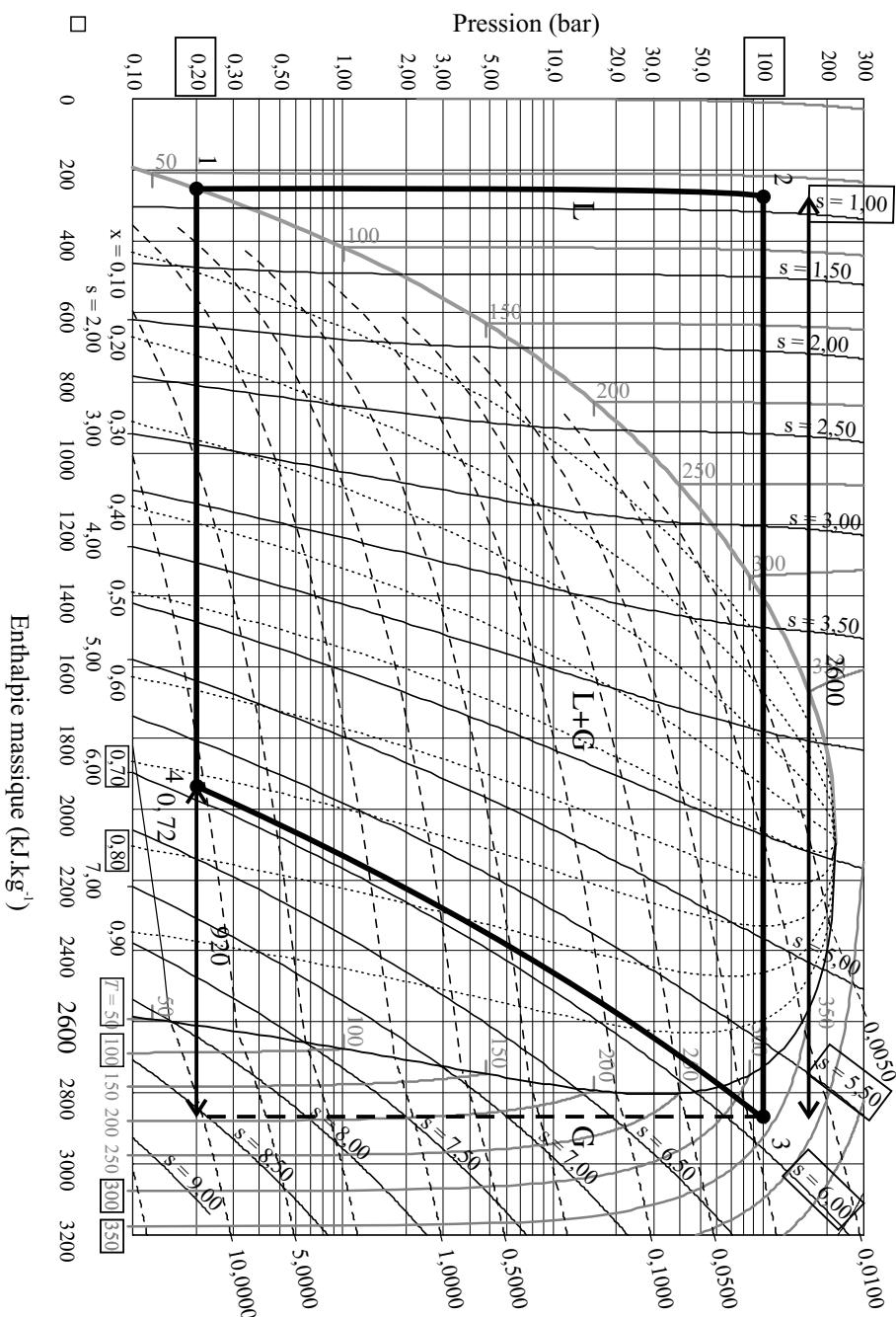
Enfin, on peut calculer les variations d'entropie :

- entre l'entrée et la sortie de la chaudière :  $s_3 - s_2 \simeq 5,9 - 0,8 = 5,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,
- entre l'entrée et la sortie du condenseur :  $s_1 - s_4 = s_3 - s_2$  car  $s_1 = s_2$  et  $s_3 = s_4$ .

On en déduit la création d'entropie par unité de masse de fluide :

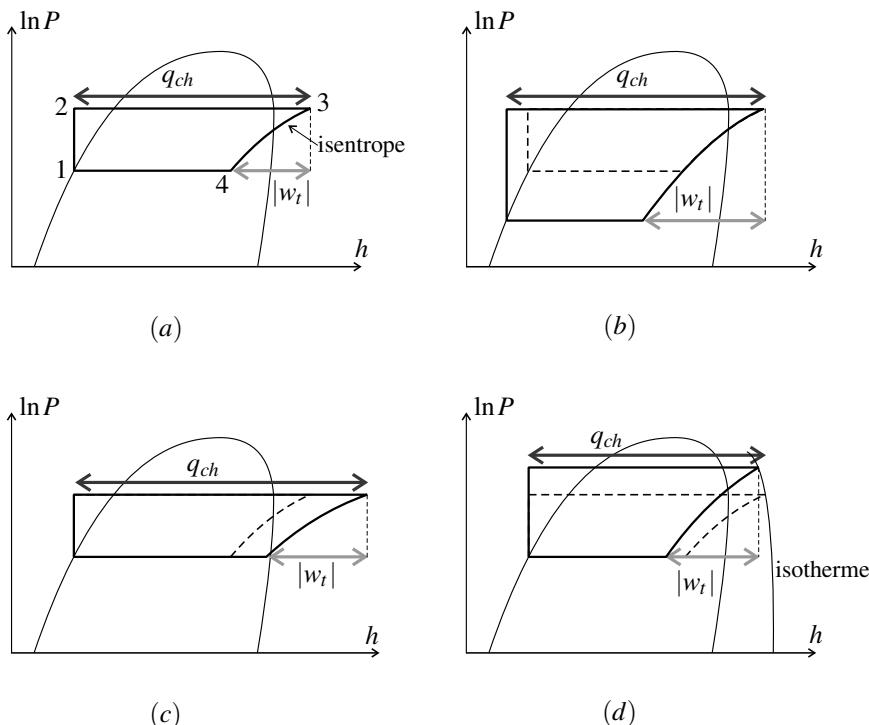
- dans la chaudière :  $s_{\text{créée},c} = s_3 - s_2 - \frac{q_{ch}}{T_{ch}} \simeq 0,9 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,
- dans le condenseur :  $s_{\text{créée},f} = s_1 - s_4 - \frac{q_{fr}}{T_{fr}} \simeq 0,7 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Ces créations d'entropie sont dues à la différence entre la température de la source ( $T_{ch}$  ou  $T_{fr}$ ) et la température du fluide lorsqu'il échange du transfert thermique avec cette source (irréversibilité thermique).



**Figure 22.15 – Diagramme ( $\ln P, h$ ) de l'eau.** L'échelle de pression est logarithmique. Les températures sont en °C, les entropies massiques en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et les volumes massiques en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

## f) Comment peut-on améliorer le rendement ?



**Figure 22.16** – Effet de la modification de certains paramètres sur le cycle de Rankine.

**Effet d'une diminution de la pression dans le condenseur** La figure 22.16(b) montre l'allure du cycle si l'on abaisse la pression dans le condenseur, la pression dans la chaudière restant la même. On observe que  $q_{ch}$  et  $|w_t|$  augmentent tous les deux. Le rendement augmente-t-il ?

Sur le diagramme ( $\ln P, h$ ) de l'eau, la pente de la courbe d'ébullition est voisine de la pente des isentropes du côté de la courbe de rosée (voir figure 22.10, page 685). Ainsi  $|w_t|$  et  $q_{ch}$  augmentent d'à peu près la même quantité. Comme le rendement est de l'ordre de 0,3 – 0,4, il augmente.

En pratique, la pression dans les condenseurs des centrales thermiques est prise aussi basse que possible. Mais plus la pression dans le condenseur est basse, plus la température y est basse puisque  $P_1$  est la pression de vapeur saturante de l'eau à la température  $T_1$  (la pression de vapeur saturante augmente avec la température, voir le cours de première année). Or la température du condenseur ne peut être inférieure à la température de la source froide à laquelle le fluide cède le transfert thermique  $q_{fr}$ . En pratique la source froide est le plus souvent une rivière dont l'eau est à 15°C environ ce qui permet d'avoir, par exemple,  $T_1 = 25^\circ\text{C}$  donc  $P_1 = P_{\text{sat}}(T_1) = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ .

**Effet d'une augmentation de la température à la sortie de la chaudière** La figure 22.16(c) montre l'allure du cycle si l'on augmente la température  $T_3$ . Le point 3 est déplacé vers la droite car l'enthalpie  $h_3$ , fonction croissante de la température, est plus grande. On constate que  $q_{ch}$  et  $|w_t|$  augmentent tous les deux. Le rendement augmente-t-il ?

On constate sur la figure 22.10 page 685 que l'écart horizontal entre deux isentropes augmente légèrement avec la pression. Ainsi  $q_{ch}$  augmente légèrement plus que  $|w_t|$ . Comme le rendement est de l'ordre de 0,3 – 0,4, il augmente.

Il y a un autre avantage à augmenter  $T_3$ . Le fluide sortant de la turbine est un mélange liquide-vapeur, or les gouttelettes de vapeur peuvent endommager la turbine. En augmentant  $T_3$  on déplace le point 4 vers la droite, donc le titre en vapeur  $x_4$  augmente et il y a moins de gouttes de liquide. Cependant on évite d'augmenter trop cette température pour ne pas endommager les aubages de la turbine. Dans la pratique  $T_3$  vaut environ 620 K, ce qui est assez proche de la température critique de l'eau (647 K).

**Effet d'une augmentation de la pression dans la chaudière** La figure 22.16(d) montre l'allure du cycle si l'on augmente la pression dans la chaudière. Le point 2 est déplacé vers le haut verticalement, le point 3 est déplacé vers le haut le long de l'isotherme correspondant à la température  $T_3$ . On constate que  $q_{ch}$  diminue légèrement et que  $|w_t|$  augmente, donc le rendement augmente.

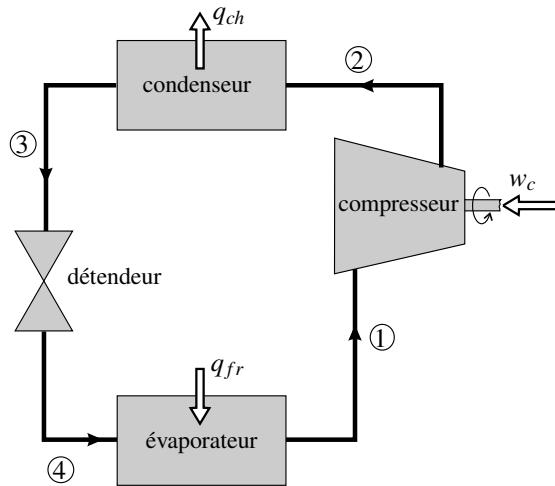
Il y a en revanche un inconvénient : le titre massique en vapeur  $x_4$  diminue, mais on peut l'augmenter en augmentant  $T_3$ . En pratique, la pression dans la chaudière d'une centrale électrique actuelle est de l'ordre de  $3.10^7$  Pa.

## 5.2 Application 2 : étude d'une machine frigorifique

### a) Le cycle d'une machine frigorifique à évaporation

Le schéma de principe d'une machine frigorifique à évaporation est représenté sur la figure 22.17. Le fluide circule dans la machine en régime stationnaire et passe par quatre états successifs :

- état 1 : le fluide sort de l'évaporateur à l'état de vapeur saturante à la température  $T_1$  et à la pression  $P_1 = P_{\text{sat}}(T_1)$  ;
- transformation 1 – 2 : dans le compresseur la vapeur subit une compression adiabatique et réversible ;
- état 2 : le fluide est à l'état de vapeur à la pression  $P_2 > P_1$  et à une température  $T_2 > T_1$  ;
- transformation 2 – 3 : dans le condenseur la vapeur cède du transfert thermique à pression constante, elle baisse en température puis est totalement transformée en liquide ;
- état 3 : le fluide est à l'état de liquide saturant à la température  $T_3 < T_2$  et à la pression  $P_3 = P_2 = P_{\text{sat}}(T_3)$  ;
- transformation 3 – 4 : dans le détendeur le liquide subit une détente adiabatique irréversible ;
- état 4 : le fluide est à l'état de mélange liquide-vapeur de titre massique en vapeur  $x_4$ , à température  $T_4 = T_1$  et à la pression  $P_4 = P_1$ .
- transformation 4 – 1 : dans l'évaporateur, le liquide se transforme en vapeur de manière isobare et isotherme.



**Figure 22.17** – Schéma de principe d'une machine frigorifique. Les flèches indiquent le sens réel des échanges d'énergie.

Les échanges d'énergie entre le fluide et l'extérieur au cours du cycle sont les suivants :

- dans le compresseur le fluide reçoit du travail, on appelle  $w_c$  le travail massique correspondant,  $w_c > 0$  ;
- dans le condenseur le fluide cède du transfert thermique à un thermostat « chaud » de température  $T_{ch}$ , on appelle  $q_{ch}$  le transfert thermique massique correspondant,  $q_{ch} < 0$  ;
- dans le détendeur le fluide n'échange ni transfert thermique ni travail (il n'y a pas de partie mobile dans cet élément) ;
- dans l'évaporateur le fluide reçoit du transfert thermique d'un thermostat « froid » de température  $T_{fr}$ , on appelle  $q_{fr}$  le transfert thermique massique correspondant,  $q_{fr} > 0$ .

### b) Application des deux principes

Chacun des éléments est un système ouvert en régime stationnaire auquel on peut appliquer les deux principes de la thermodynamique sous la forme vue plus haut.

De même que pour la machine à vapeur, il est légitime de négliger les variations d'énergie cinétique  $\Delta e_c$  et d'énergie potentielle  $\Delta e_{p,\text{poids}}$ . Le premier principe pour un système ouvert s'écrit :

- pour le compresseur :  $h_2 - h_1 = w_c$  ;
- pour le condenseur :  $h_3 - h_2 = q_{ch}$  ;
- pour le détendeur :  $h_4 - h_3 = 0$  ;
- pour l'évaporateur :  $h_1 - h_4 = q_{fr}$ .

En faisant la somme de ces équations on trouve :

$$w_c + q_{ch} + q_{fr} = 0. \quad (22.27)$$

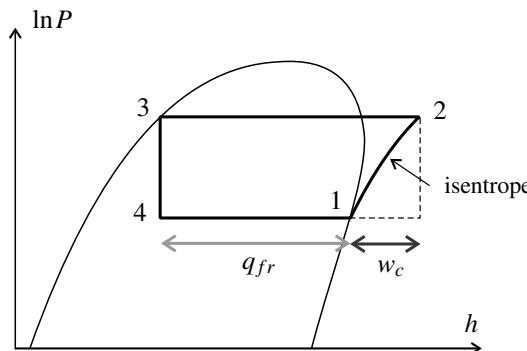
Le second principe pour un système ouvert s'écrit :

- pour le compresseur :  $s_2 - s_1 = 0$  ;
- pour le condenseur :  $s_3 - s_2 = \frac{q_{ch}}{T_{ch}} + s_{\text{créée},c}$  en notant  $s_{\text{créée},c}$  l'entropie créée par unité de masse dans le condenseur ;
- pour le détendeur :  $s_4 - s_3 = s_{\text{créée},d}$ , entropie créée dans le détendeur ;
- pour l'évaporateur :  $s_1 - s_4 = \frac{q_{fr}}{T_{fr}} + s_{\text{créée},e}$  en notant  $s_{\text{créée},e}$  l'entropie créée par unité de masse dans l'évaporateur.

En faisant la somme de ces équations on trouve :

$$\frac{q_{ch}}{T_{ch}} + \frac{q_{fr}}{T_{fr}} + s_{\text{créée},c} + s_{\text{créée},d} + s_{\text{créée},e} = 0. \quad (22.28)$$

### c) Représentation du cycle dans le diagramme ( $\ln P, h$ )



**Figure 22.18** – Cycle de la machine frigorifique dans le diagramme ( $\ln P, h$ ).

Le cycle est représenté dans le diagramme ( $\ln P, h$ ) sur la figure 22.18.

- ☞ Le point 1 est sur la courbe de rosée (vapeur saturante).  
 La transformation 1 – 2 suit une courbe isentrope.  
 La transformation 2 – 3 est isobare donc suit une droite horizontale et aboutit sur la courbe d'ébullition (liquide saturant).  
 La transformation 3 – 4 suit une isenthalpe, droite verticale.  
 La transformation 4 – 1 est isobare donc suit une droite horizontale.

### d) Coefficient d'efficacité COP

Dans le cas d'une machine frigorifique, le but est de prendre du transfert thermique à la source froide. L'énergie utile est donc  $q_{fr}$ . L'énergie coûteuse est le travail de compression  $w_c$ . On

définit le coefficient de performance COP par :

$$\text{COP} = \frac{q_{fr}}{w_c}. \quad (22.29)$$

En combinant les équations (22.27) et (22.28), on obtient l'expression suivante du COP :

$$\text{COP} = \left( \frac{T_{ch}}{T_{fr}} - 1 + \frac{T_{ch}}{q_{fr}} (s_{\text{crée},c} + s_{\text{crée},d} + s_{\text{crée},e}) \right)^{-1}. \quad (22.30)$$

Le COP est inférieur à la valeur qu'il a pour un cycle réversible ou cycle de Carnot (voir cours de première année) :

$$\text{COP}_C = \frac{T_{fr}}{T_{ch} - T_{fr}}.$$

Le diagramme ( $\ln P, h$ ) donne une visualisation du COP. En effet :  $w_c = h_2 - h_1$  et  $q_{fr} = h_1 - h_4$  (voir figure 22.18).

### e) Exemple

Le fluide réfrigérant est le R-134a dont le diagramme est donné page 699.

On choisit  $T_1 = 253$  K, donc  $P_1 = P_4 = P_{\text{sat}}(T_1) = 1,3$  bar d'après les tables.

On choisit aussi  $P_2 = P_3 = 8$  bar donc  $T_3 = 304$  K.

En plaçant les points 1 à 4 sur le diagramme de la figure 22.19 (pour cela il faut tracer l'isentrope 1 – 2 par analogie avec les isentropes les plus proches), on constate que :

$$x_4 \simeq 0,32.$$

On peut alors mesurer sur le diagramme :

$$q_{fr} \simeq 141 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad w_c \simeq 38,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1},$$

ce qui permet de calculer le coefficient d'efficacité :  $\text{COP} \simeq 3,7$ . C'est une valeur typique pour un réfrigérateur.

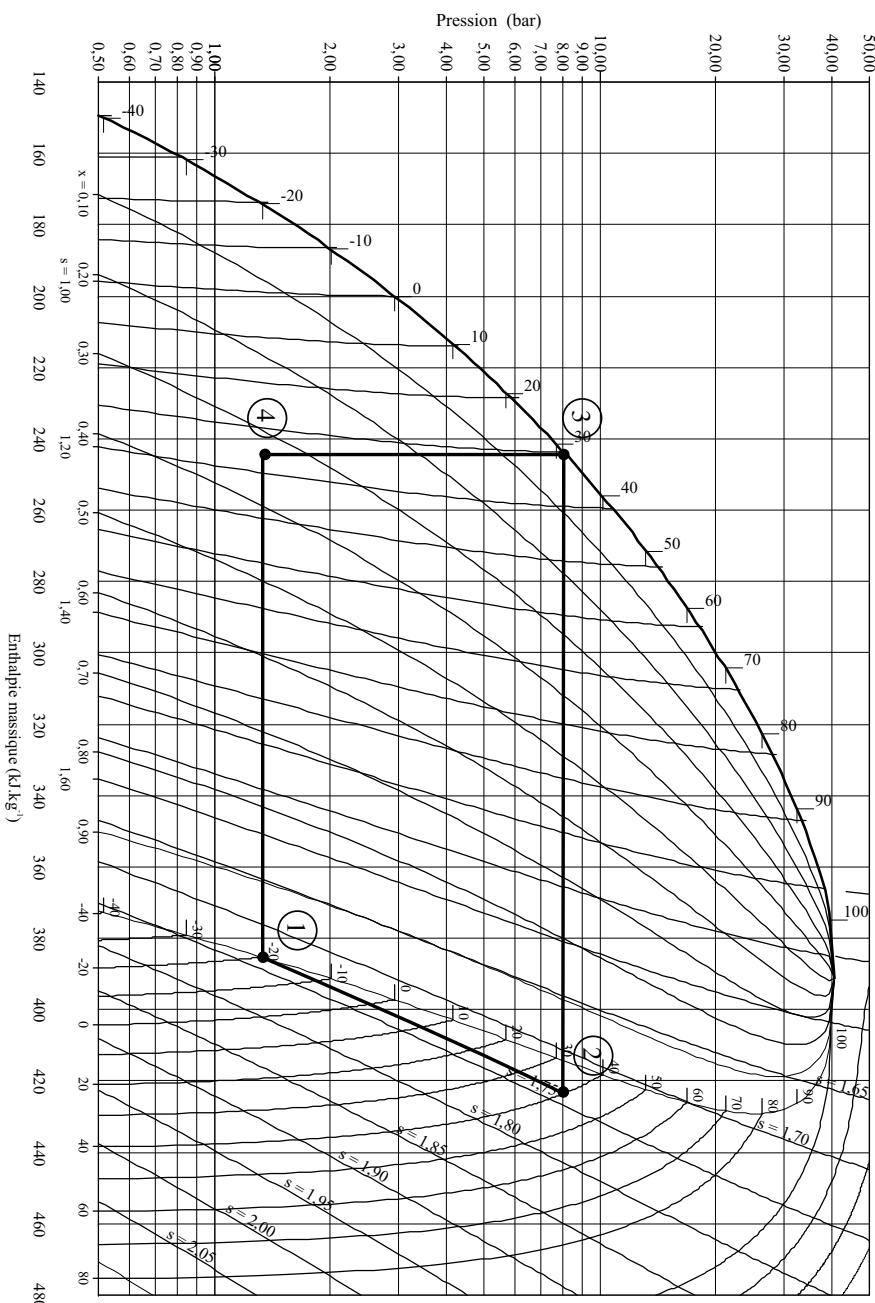
En prenant  $T_{ch} = 298$  K et  $T_{fr} = 255$  K on calcule un coefficient d'efficacité de Carnot :  $\text{COP}_C = 5,9$  qui est bien supérieur au COP.

On peut aussi calculer les créations d'entropie :

- dans le condenseur : on lit sur le diagramme  $s_3 - s_2 \simeq 1,15 - 1,74 = 0,59 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  ;  
on en déduit :  $s_{\text{crée},c} = s_3 - s_2 - \frac{q_{ch}}{T_{ch}} = s_3 - s_2 + \frac{q_{fr} + w_c}{T_{ch}} \simeq 0$  ;
- dans le détendeur :  $s_{\text{crée},d} = s_4 - s_3 \simeq 1,18 - 1,15 = 0,03 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  ;
- dans l'évaporateur :  $s_{\text{crée},e} = s_1 - s_4 - \frac{q_{fr}}{T_{fr}} \simeq 1,74 - 1,18 - \frac{141}{255} \simeq 0$ .

La principale source d'irréversibilité est donc le détendeur. L'entropie créée serait plus faible (et le COP plus important) si on remplaçait le détendeur par une turbine isentropique mais cela n'est pas rentable compte tenu du supplément de coût que cela entraînerait.

EXEMPLES D'APPLICATION DES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE POUR UN SYSTÈME OUVERT



**Figure 22.19 – Diagramme ( $\ln P, h$ ) du fluide réfrigérant R-134a. Les températures sont en degrés celsius et les entropies massique en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$**

**SYNTHÈSE**

*SAVOIRS*

- formulation du premier principe pour une transformation élémentaire
- formulation du second principe pour une transformation élémentaire
- formulation du premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire
- formulation du second principe pour un système ouvert en régime stationnaire

*SAVOIR-FAIRE*

- utiliser avec rigueur les notation  $d$  et  $\delta$  en leur attachant une signification
- établir la relation  $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_{p,\text{ext}} = w_u + q$
- établir la relation  $\Delta s = s_e + s_c$
- utiliser un diagramme  $(\ln P, h)$  pour étudier une machine thermique

*MOTS-CLÉS*

- |                       |                                |                          |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------|
| • travail             | • travail massique             | • réversibilité          |
| • transfert thermique | • transfert thermique massique | • irréversibilité        |
| • énergie interne     | • enthalpie massique           | • machine thermique      |
| • enthalpie           | • entropie massique            | • rendement              |
| • entropie            |                                | • diagramme $(\ln P, h)$ |

## S'ENTRAÎNER

### 22.1 Transformation polytropique d'un gaz parfait (★)

Un échantillon de gaz parfait, de masse molaire  $M$  et rapport des capacités thermiques  $\gamma$ , subit une transformation au cours de laquelle sa pression  $P$  et son volume massique  $v$  suivent la loi dite polytropique :  $Pv^k = \text{cte}$ , où  $k$  est une constante. La transformation est de plus mécaniquement réversible : à chaque instant la pression extérieure  $P_{\text{ext}}$  et la pression du gaz  $P$  sont égales.

1. Trouver une loi de la forme  $f(v, T) = \text{cte}$  vérifiée au cours de cette transformation. En déduire une relation entre  $\frac{dv}{v}$  et  $\frac{dT}{T}$ .
2. Exprimer le transfert thermique massique élémentaire  $\delta q$  entre deux états très proches en fonction de la différence de température  $dT$  et des caractéristiques du gaz. Commenter le résultat dans les cas suivants :  $k = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = \gamma$  et  $k = \infty$ .
3. On indique que l'entropie massique du gaz parfait est de la forme :

$$s = \frac{R}{M} \left( \frac{1}{\gamma - 1} \ln T + \ln v \right) + \text{constante.}$$

Le système est en contact thermique avec un thermostat de température  $T_0$ .

- a. Exprimer l'entropie massique élémentaire créée en fonction de  $dT$ ,  $T_0$  et des caractéristiques du gaz.
- b. La température initiale du gaz est  $T_0$ . Quelle condition doit vérifier  $k$  pour qu'une évolution polytropique soit possible ?

### 22.2 Identité thermodynamique (★)

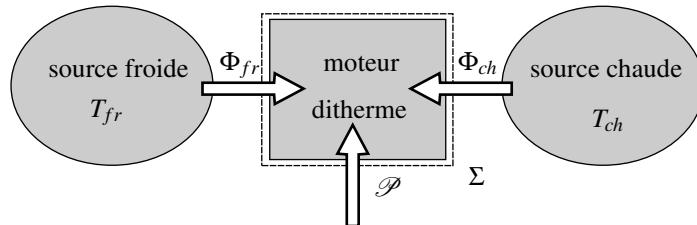
L'identité thermodynamique, valable pour un échantillon de corps pur soumis uniquement aux forces de pression est la relation :  $dU = TdS - PdV$  où  $dU$ ,  $dS$  et  $dV$  sont les variations élémentaires d'énergie interne, d'entropie et de volume lors d'une transformation élémentaire.

1. En supposant la transformation élémentaire *réversible*, établir l'identité thermodynamique.
2. Montrer que l'identité est valable pour toute transformation élémentaire, qu'elle soit réversible ou non.
3. En déduire une expression de  $dH$  en fonction de  $dS$  et  $dP$ .
4. Le logiciel Coolpack donne pour deux états voisins du gaz N<sub>2</sub> les valeurs :

|        | $T$ (°C) | $P$ (bar) | $v(\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$ | $h(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$ | $s(\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1})$ |
|--------|----------|-----------|--------------------------------------|-------------------------------------|--|
| état 1 | 300,00   | 10,0000   | 0,17083                              | 801,90                              | 3882,55  |
| état 2 | 301,00   | 10,1000   | 0,16944                              | 802,97                              | 3881,45  |

Calculer  $h_2 - h_1$  directement, puis en utilisant l'identité thermodynamique.

### 22.3 Moteur ditherme en régime stationnaire (\*)



Un moteur ditherme est en contact thermique avec une source froide de température  $T_{fr}$  et une source chaude de température  $T_{ch} > T_{fr}$ . Les flux thermiques échangés avec les sources sont  $\Phi_{ch}$  et  $\Phi_{fr}$  et la puissance mécanique échangée avec l'extérieur est  $\mathcal{P}$ . Ces transferts sont comptés positivement quand ils sont effectivement reçus par le moteur (voir figure).

La machine fonctionne en régime stationnaire.

- Quels sont les signes de  $\Phi_{ch}$ ,  $\Phi_{fr}$  et  $\mathcal{P}$  ?
- Appliquer le premier principe au système  $\Sigma = \{\text{moteur}\}$  entre  $t$  et  $t + dt$ .
- Appliquer le deuxième principe au système  $\Sigma = \{\text{moteur}\}$  entre  $t$  et  $t + dt$ .
- En déduire l'expression du rendement du moteur dans le cas où il n'y a aucune source d'irréversibilité interne au moteur.

### 22.4 Temps de réponse d'un thermomètre au mercure (\*)

On souhaite mesurer la température  $T_{\text{liq}}$  d'un liquide avec un thermomètre à mercure. La partie utile du thermomètre est un cylindre de rayon  $a$  et hauteur  $H$  qui a une masse volumique moyenne  $\mu$  et une capacité thermique massique moyenne  $c$ . Le transfert thermique entre le thermomètre et le liquide est modélisé de la manière suivante : la puissance thermique reçue par le thermomètre est  $\Phi = hS(T_{\text{liq}} - T)$  où  $T$  est la température du thermomètre,  $h$  une constante positive et  $S$  la surface du thermomètre.

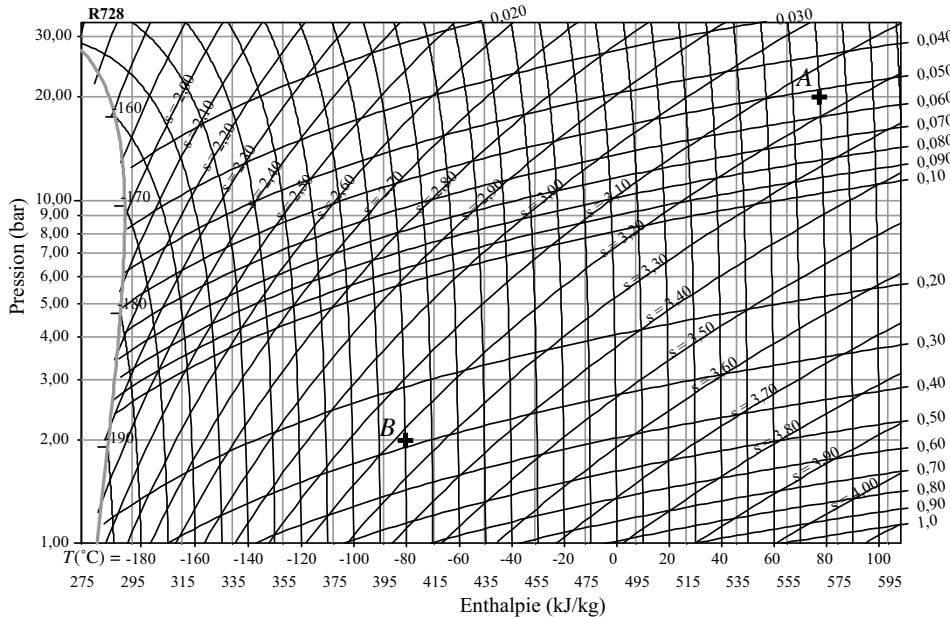
On immerge le thermomètre à l'instant  $t = 0$ , sa température initiale étant  $T_0$ .

- Écrire l'équation différentielle pour  $T(t)$ .
- À quel instant  $t_1$  a-t-on  $T(t_1) - T_{\text{liq}} = \frac{T_0 - T_{\text{liq}}}{100}$  ?
- Application numérique :*  $H = 1,5 \text{ cm}$ ,  $a = 3 \text{ mm}$ ,  $\mu = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c = 140 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $h = 28,4 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Calculer  $t_1$ .

### 22.5 Le fluide R728 (\*\*)

On peut voir sur la figure une partie du diagramme ( $\ln P, h$ ) du fluide R728, dans le domaine où ce fluide est gazeux. Les températures sont en  $^\circ\text{C}$ , les volumes massiques en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , les entropies massiques en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

- Le gaz se comporte-t-il comme un gaz parfait ? Dans quelle partie du diagramme s'en rapproche-t-il le plus ?



2. Évaluer la capacité thermique massique à pression constante du fluide pour  $P = 1$  bar en la supposant constante sur tout le domaine de température représenté. Sachant qu'il s'agit d'un gaz diatomique, déterminer sa masse molaire et en déduire la nature du fluide R728.

### 22.6 Étude d'une transformation dans le diagramme ( $\ln P, h$ ) (★)

Le fluide de l'exercice précédent passe de l'état correspondant au point A à l'état correspondant au point B (voir figure de l'exercice précédent) en s'écoulant à travers une machine.

- Quelles sont, parmi les grandeurs suivantes, celles que l'on peut calculer à partir de valeurs lues sur le diagramme (les notations non explicitées sont celles du cours) :  $\Delta h$ ,  $\Delta u$  (différence des énergies internes massiques),  $q$ ,  $w_u$ ,  $w_{\text{pression}}$  (travail massique des forces de pression),  $\Delta s$ ,  $s_{\text{éch}}$ ,  $s_{\text{créée}}$ .

- Cette transformation se fait dans une tuyère horizontale, adiabatique et ne comportant aucune pièce mobile. Évaluer :

- la vitesse du gaz à la sortie de la tuyère sachant que la vitesse à l'entrée est quasiment nulle,
- l'entropie créée par unité de masse de gaz dans la tuyère.

### 22.7 Compression adiabatique et diagramme ( $\ln P, h$ ) (★)

Un compresseur parfaitement isolé thermiquement fait passer un fluide en écoulement stationnaire de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2 > P_1$ .

- Quel est le signe de la variation d'enthalpie massique  $\Delta h$  à la traversée du compresseur ?

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

2. Quel est le signe de la variation d'entropie massique  $\Delta s$  à la traversée du compresseur ?
3. Sur un diagramme ( $\ln P, h$ ) placer un point 1 correspondant au fluide entrant dans le compresseur. Tracer qualitativement les isobares  $P = P_1$  et  $P = P_2$ , ainsi que l'isentrope  $s = s_1$  ( $s_1$  entropie massique à l'entrée). Où peut être situé le point 2 ?
4. Sur le schéma précédent, comment apparaît le travail massique reçu par le fluide ? Pour quelle position du point 2 ce travail massique est-il minimal ? À quelle condition en est-il ainsi ?

**22.8 Détente adiabatique et diagramme ( $\ln P, h$ ) (★)**

Un fluide passant en écoulement stationnaire dans une turbine subit une détente adiabatique de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2 < P_1$ .

1. Quel est le signe de la variation d'enthalpie massique  $\Delta h$  à la traversée de la turbine ?
2. Quel est le signe de la variation d'entropie massique  $\Delta s$  à la traversée de la turbine ?
3. Sur un diagramme ( $\ln P, h$ ) placer un point 1 correspondant au fluide entrant dans la turbine. Tracer qualitativement les isobares  $P = P_1$  et  $P = P_2$ , ainsi que l'isentrope  $s = s_1$  ( $s_1$  entropie massique à l'entrée). Où peut être situé le point 2 ?
4. Sur le schéma précédent, comment apparaît le travail cédé à la turbine par unité de masse de fluide ? Pour quelle position du point 2 ce travail massique est-il maximal ? A quelle condition en est-il ainsi ?

**22.9 Diagramme ( $\ln P, h$ ) et COP (★★)**

1. Sur un diagramme ( $\ln P, h$ ), tracer l'allure des courbes d'ébullition et de rosée puis représenter un cycle (1 – 2 – 3 – 4) ayant les caractéristiques suivantes :

- dans l'état 1 le fluide est à l'état de vapeur saturante à la pression  $P_1$ ,
- la transformation 1 – 2 est une compression adiabatique réversible jusqu'à la pression  $P_2$ ,
- la transformation 2 – 3 est isobare sans travail utile,
- dans l'état 3 le fluide est à l'état de liquide saturant à la pression  $P_2$ ,
- la transformation 3 – 4 est une détente sans transfert thermique ni travail utile jusqu'à la pression  $P_1$ ,
- la transformation 4 – 1 est isobare sans travail utile.

Comment voit-on sur ce schéma le COP de la machine dans le cas d'une machine frigorifique ? Même question dans le cas d'une pompe à chaleur.

2. La transformation 1 – 2 est en fait irréversible : le point 2 devient un point 2'. Préciser la position de 2' sur le schéma en justifiant votre réponse. *En utilisant le schéma*, montrer que le coefficient d'efficacité de la machine (COP) est réduit aussi bien dans le cas d'une pompe à chaleur que dans le cas d'une machine frigorifique.
3. La transformation 1 – 2 est de nouveau réversible. On modifie le cycle en augmentant la pression  $P_1$  : les points 1, 2 et 4 deviennent des points 1'', 2'' et 4''. Déduire du graphique l'influence sur le COP de cette modification dans le cas d'une machine frigorifique et dans le cas d'une pompe à chaleur.

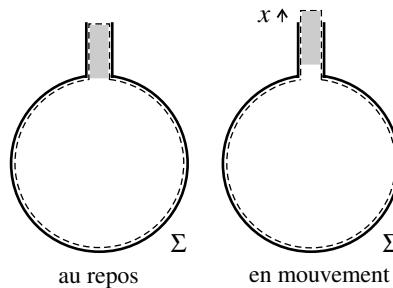
## APPROFONDIR

## 22.10 Résonateur de Helmholtz (★★★)

Un résonateur de Helmholtz est constitué par une sphère de volume  $V_0$  reliée à un conduit cylindrique de longueur  $h$  et section  $A$ . L'air contenu dans le résonateur est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M$  et rapport des capacités thermiques  $\gamma$ . On se propose d'étudier un mode de vibration du résonateur tel que :

- l'air contenu dans le conduit se déplace en bloc (comme si c'était un bouchon solide) d'une très petite longueur  $x$ , algébrique et comptée positivement vers l'extérieur du résonateur (voir figure),
- l'air contenu dans le résonateur n'a pas d'échange thermique avec l'extérieur.

On appelle  $P_0$  et  $T_0$  la pression et la température de l'air atmosphérique et  $P$  et  $T$  la pression et la température dans le résonateur.



1. Exprimer la masse  $m$  d'air dans le conduit et la quantité d'air  $n$  dans la sphère lorsque le résonateur est au repos en fonction de  $h$ ,  $A$ ,  $V_0$ ,  $M$ ,  $P_0$  et  $T_0$ .

2. En négligeant la variation d'énergie interne de l'air du conduit et la variation d'énergie cinétique de l'air dans la sphère, montrer que l'application du premier principe au système fermé  $\Sigma = \{\text{gaz dans le résonateur au repos}\}$  mène à la relation :  $\frac{nR}{\gamma - 1}dT + m\ddot{x}dx = -P_0Adx$ .

3. De même, établir la relation :  $\frac{nR}{\gamma - 1}dT = -PAdx$ .

4. Montrer que  $\frac{Adx}{V_0 + Ax} = -\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$  puis que  $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{Adx}{V_0 + Ax}$ . Exprimer  $P$  au premier ordre en  $x$ , en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $A$  et  $x$ .

5. Montrer que :  $m\ddot{x} = -\frac{\gamma P_0 A^2}{V_0}x$ . Quelle est la fréquence  $f_0$  du mode d'oscillation étudié ?

6. On indique que la vitesse du son dans l'air est  $c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$ . Exprimer la longueur d'onde  $\lambda_0$  d'une onde sonore de fréquence  $f_0$  en fonction de  $V_0$ ,  $A$  et  $h$ .

7. Application numérique : la sphère a un rayon  $r = 6,0$  cm, le conduit est un cylindre de rayon  $a = 1,0$  cm et hauteur  $h = 4,0$  cm,  $M = 0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Calculer  $\lambda_0$ . Commenter la valeur trouvée.

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

**22.11 Mesure d'une capacité thermique (★★)**

On considère un échantillon de capacité thermique  $C$  supposée indépendante de la température. Les échanges thermiques de cet échantillon sont d'une part l'apport par une source électrique d'une puissance  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_0(1 + \cos \omega t)$  et d'autre part d'une "fuite thermique" telle que le flux thermique perdu est  $\Phi = K(T - T_0)$  où  $K$  est une constante,  $T_0$  la température d'un bain thermostaté et  $T$  la température de l'échantillon supposée uniforme à tout instant dans son volume.

1. Expliquer comment réaliser expérimentalement la puissance alternative  $\mathcal{P}(t)$ .
2. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température  $T(t)$  de l'échantillon.
3. Résoudre cette équation différentielle en considérant qu'au temps  $t = 0$ , la température de l'échantillon est  $T_0$ . Exprimer la solution comme la somme de trois contributions que l'on qualifiera physiquement. Donner l'allure de  $T(t)$  sur un graphe.
4. Quel est le temps caractéristique  $\tau$  de passage du régime transitoire au régime permanent ?
5. Montrer que la mesure de l'amplitude de la composante alternative de la température de l'échantillon à différentes fréquences permet d'accéder à la valeur de sa capacité thermique.

**22.12 Température d'un conducteur ohmique (★★)**

Un fil de cuivre, de longueur  $L$  et de section circulaire de rayon  $a = 0,5$  mm, est parcouru par un courant électrique continu d'intensité  $I$ . Ce fil est plongé dans l'air qui est à la température  $T_0 = 273$  K auquel il cède le flux thermique  $\Phi = hA(T - T_0)$  où  $T$  est la température du fil,  $A$  sa surface latérale et  $h$  une constante :  $h = 14 \text{ W.K}^{-1}\text{m}^{-2}$ .

On donne les caractéristiques du cuivre :

- résistivité dépendant de la température :  $\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$  avec  $\rho_0 = 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  et  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,
- masse volumique :  $\mu = 8,89 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ;
- capacité thermique massique :  $c = 420 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

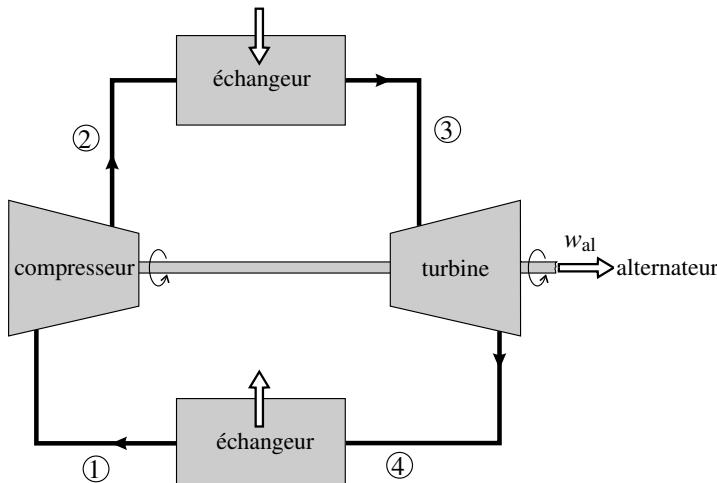
On rappelle que la résistance électrique du fil est  $R = \frac{\rho L}{\pi a^2}$ .

1. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le fil.
2. On suppose que le fil a une température  $T_p$  constante. En appliquant le premier principe en termes de puissances, déterminer l'expression de  $T_p$  en fonction des données. Faire l'application numérique pour  $I = 10$  A.
3. Le fil est initialement à la température  $T_0$  et on fait passer le courant d'intensité  $I$  à partir de l'instant  $t = 0$ . Soit  $T(t)$  la température du fil.
  - a. En appliquant le premier principe au fil entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , établir une équation différentielle vérifiée par  $T(t)$ .
  - b. Montrer que suivant les valeurs de  $I$ , il existe théoriquement trois types possibles d'évolution pour la température.

### 22.13 Turbine à gaz (\*)

Les centrales nucléaires de la génération 6 prévues vers les années 2030 devront être sûres et présenter un rendement important. Une option étudiée parmi 6 grands choix est le réacteur à très haute température refroidi à l'hélium. Ce type de réacteur offrirait l'avantage d'améliorer l'efficacité de la conversion énergétique, compte tenu de la température élevée de la source chaude et de permettre en sus la production d'hydrogène. Dans ces installations de forte puissance, on utilise le cycle de Brayton (ou cycle de Joule) pour extraire le travail et, en fin de compte, produire de l'électricité.

Le gaz utilisé dans la centrale est l'hélium, qui sera assimilé à un gaz parfait de caractéristiques suivantes :  $c_P = \frac{5R}{2M_{\text{He}}}$  avec  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_{\text{He}} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$ .



Le gaz circule dans une installation (voir figure) en régime stationnaire. Il échange du travail avec l'extérieur dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. Les transferts thermiques ont lieu dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton. Ce cycle est constitué de deux isobares et de deux isentropiques :

- compression adiabatique réversible du point 1 avec une température  $T_1 = 300 \text{ K}$  et une pression  $P_1 = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  vers le point 2 à la pression  $P_2 = 80 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,
- chauffage isobare du point 2 vers le point 3 à la température  $T_3 = 1300 \text{ K}$ ,
- détente adiabatique réversible de 3 vers 4 (de  $P_3 = P_2$  à  $P_4 = P_1$ ),
- refroidissement isobare de 4 vers 1.

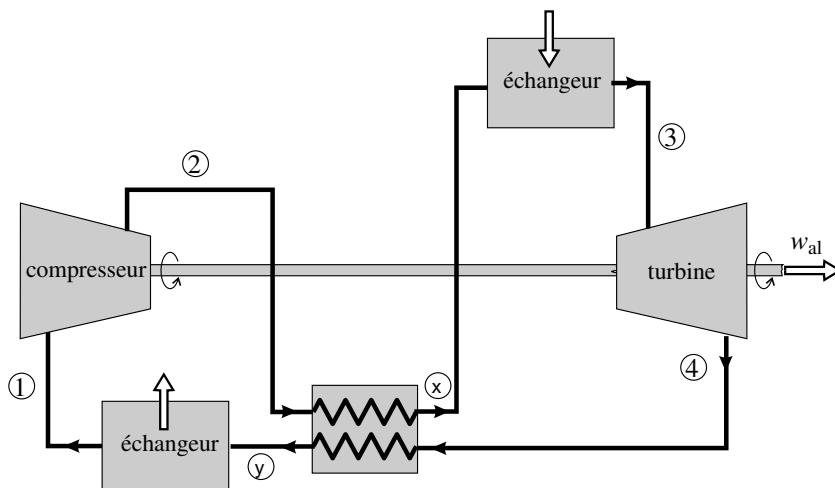
Dans toutes les transformations les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du fluide sont négligeables. On pose  $r_p = \frac{P_2}{P_1}$ .

## 1. Cycle de Brayton

- a. Pour une transformation isentropique, justifier que la relation entre  $T$  et  $P$  peut se mettre sous la forme :  $\frac{T}{P^\beta} = \text{Cste}$  où  $\beta$  est un nombre que l'on précisera.
- b. Déterminer les températures  $T_2$  et  $T_4$ . Effectuer l'application numérique.
- c. Exprimer et calculer les travaux utiles massiques  $w_{u,12}$  et  $w_{u,34}$  échangés avec l'extérieur (travaux utiles reçus par le gaz) lors des transformations isentropiques  $1 \rightarrow 2$  et  $3 \rightarrow 4$ .
- d. Exprimer et calculer les transferts thermiques massiques reçus par le gaz  $q_{23}$  et  $q_{41}$ .
- e. Montrer que l'efficacité est :  $e = 1 - \frac{1}{r_p^\beta}$ .
- f. Calculer numériquement cette efficacité et comparer à l'efficacité de Carnot obtenue en utilisant les deux températures extrêmes du cycle.
- g. Exprimer le travail massique  $w_{al}$  cédé par la turbine à l'alternateur en fonction des températures extrêmes  $T_3$  et  $T_1$ , de  $c_p$ , de  $\beta$  et du rapport des pressions  $r_p$ .
- h. Montrer que  $w_{al}$  passe par une valeur maximale en fonction du rapport des pressions pour :  $r_p = r_{pm} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^\beta$ . Calculer numériquement  $r_{pm}$  et l'efficacité pour  $r = r_{pm}$ .

## 2. Cycle de Brayton avec régénérateur.

L'utilisation d'un régénérateur (ou récupérateur de chaleur) pendant les deux transformations isobares peut se révéler judicieux dans certaines conditions que nous allons déterminer. Si la température à la sortie de la turbine est plus élevée que la température du gaz comprimé à la sortie du compresseur, une partie de l'énergie du gaz sortant de la turbine peut être cédée (en recourant à un régénérateur) au gaz allant vers l'échangeur chaud et ainsi améliorer l'efficacité du cycle de Brayton. On suppose que les transferts thermiques associés au régénérateur sont internes.



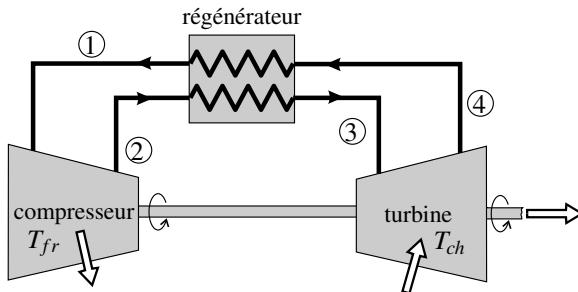
Dans le cycle, nous rajoutons deux lettres x et y afin d'isoler la partie échangée dans le régénérateur. Le cycle est donc composé comme indiqué sur la figure :

- compression adiabatique réversible du point 1 vers le point 2,
- échauffement isobare du point 2 vers le point x dans le régénérateur puis du point x au point 3 en contact avec le thermostat chaud,
- détente adiabatique réversible du point 3 vers le point 4,
- refroidissement isobare du point 4 vers le point y dans le régénérateur puis du point y au point 1 en contact avec le thermostat froid.

En supposant un régénérateur parfait, on a :  $T_x = T_4$  et  $T_y = T_2$ .

- Exprimer les transferts thermiques  $q_{x3}$  et  $q_{y1}$  provenant des thermostats.
- En déduire que l'efficacité est :  $e = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^\beta$ . Effectuer l'application numérique avec  $r_p = 4$ .

#### 22.14 Cycle d'Ericsson (★★)



Un gaz parfait circule en régime stationnaire dans une machine et subit le cycle de transformations suivant :

- transformation 1 – 2 : compression réversible et isotherme, à la température  $T_{fr}$  de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2 > P_1$ ,
- transformation 2 – 3 : échauffement isobare de  $T_{fr}$  à  $T_{ch} > T_{fr}$  ;
- transformation 3 – 4 : détente réversible et isotherme, à la température  $T_{ch}$ , de  $P_2$  à  $P_1$ ,
- transformation 4 – 1 : refroidissement isobare de  $T_{ch}$  à  $T_{fr}$ .

Les transformations 2 – 3 et 4 – 1 ont lieu à l'intérieur d'un régénérateur : échangeur thermique où le fluide échange du transfert thermique avec lui-même. Le régénérateur est supposé isolé thermiquement de l'extérieur. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

La turbine entraîne le compresseur, ainsi qu'un alternateur produisant de l'énergie électrique. On rappelle l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$  :

$$s(T, P) = c_P \ln T - \frac{R}{M} \ln P + \text{Cste},$$

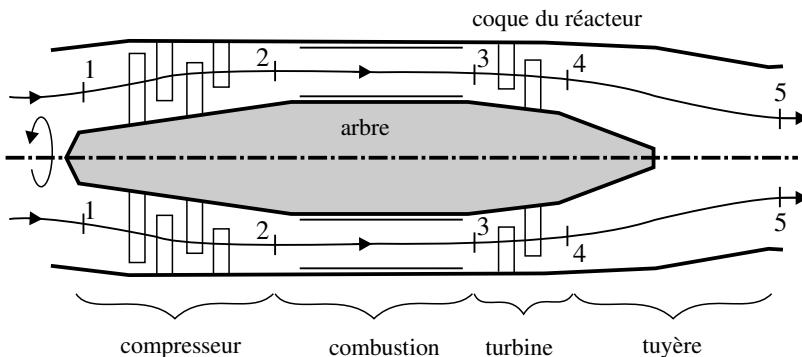
où  $c_P$  est la capacité thermique massique et  $M$  la masse molaire du gaz.

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

- Exprimer les transferts thermiques massiques  $q_{12}$  et  $q_{23}$  reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine.
- Exprimer les travaux massiques utiles  $w_{u,12}$  et  $q_{u,23}$  reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine.
- En déduire le rendement de la machine. Commenter le résultat.

**22.15 Turboréacteur (★)**

Le turboréacteur est un système de propulsion essentiellement utilisé pour les avions. La poussée résulte de l'accélération de l'air entre l'entrée (manche à air) et la sortie (tuyère), par la combustion d'un carburant, généralement du kérozène, dans l'oxygène de l'air. Une partie de l'énergie produite est récupérée par une turbine qui sert à faire tourner le compresseur au niveau de l'entrée d'air.



On fait les hypothèses de travail suivantes :

- l'air est considéré comme un gaz parfait de constante énergétique  $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,4$ , sa capacité thermique à pression constante est  $c_P = 1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .
- L'écoulement d'air est supposé unidimensionnel et le régime est permanent.
- Les variations d'énergie potentielle sont négligées.
- L'énergie cinétique de l'air est négligée sauf, bien entendu, à la sortie de la tuyère.
- Les évolutions dans le compresseur, la turbine et la tuyère sont isentropiques.
- L'évolution dans la chambre de combustion est isobare.
- Les particularités de l'air, notamment sa composition, son débit massique  $D_m$  et ses caractéristiques énergétiques  $c_P$  et  $\gamma$ , ne sont pas perturbées par la combustion : le mélange gazeux au cours de l'écoulement (avant et après la combustion) est assimilé à l'air.
- Le pouvoir thermique massique du carburant utilisé (kérozène) dans la chambre de combustion est :  $\rho_k = 50.10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Les caractéristiques de l'écoulement de l'air dans le turboréacteur sont :

- Étape 1 → 2 : l'air ambiant ( $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $P_1 = 1 \text{ bar}$ ) est aspiré et comprimé par le com-

compresseur, de taux de compression  $\tau = \frac{P_2}{P_1} = 10,0$ ; puis cet air pénètre à la température  $T_2$  et sous la pression  $P_2$  dans la chambre de combustion où le carburant est injecté.

- Étape  $2 \rightarrow 3$  : grâce à la combustion du kérozène, l'air subit un réchauffement isobare ( $P_3 = P_2$ ) jusqu'à la température  $T_3 = 1200$  K.
- Étape  $3 \rightarrow 4$  : le mélange gazeux se détend partiellement dans la turbine.
- Étape  $4 \rightarrow 5$  : les gaz sont admis dans la tuyère, conduite de section variable, où leur détente se poursuit jusqu'à la pression ambiante  $P_5 = P_1 = 1,00$  bar.

Le débit massique de l'air aspiré (et aussi de l'air refoulé) par le turboréacteur vaut  $D_m = 50,0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**1.** Établir les expressions littérales :

- de la température  $T_2$  à la sortie du compresseur (donc à l'entrée de la chambre de combustion) ;
- du travail utile massique  $w_{u,1 \rightarrow 2}$  mis en jeu dans le compresseur.

**2.** Le travail utile massique au niveau du compresseur vaut  $w_{u,1 \rightarrow 2} = 279 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . En exploitant cette dernière donnée :

- déterminer la valeur numérique de la température  $T_2$  ;
- même question pour la température  $T_4$  à la sortie de la turbine.

**3.** Exprimer littéralement, puis numériquement :

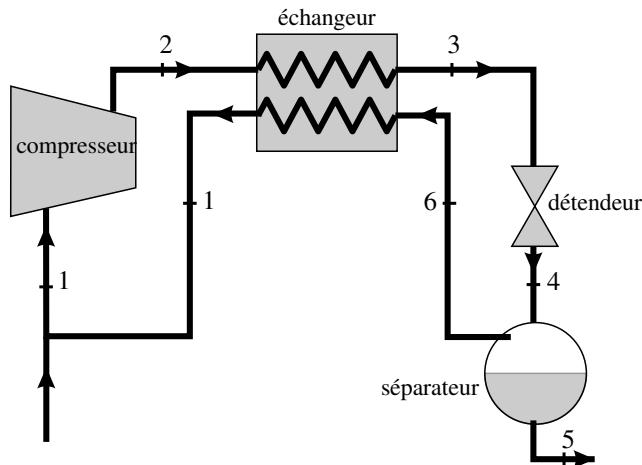
- la pression  $P_4$  à la sortie de la turbine ;
- la température  $T_5$  à la sortie de la tuyère.

**4.** Par définition la puissance cinétique du turboréacteur est :  $\mathcal{P}_{\text{cin}} = D_m e_{c,5}$  où  $e_{c,5}$  est l'énergie cinétique massique à la sortie du turbocompresseur.

- Exprimer  $\mathcal{P}_{\text{cin}}$  en fonction de  $T_4$  et  $T_5$ .
- La calculer numériquement.

**5.** Le rendement thermique du turboréacteur est par définition :  $\eta_{\text{th}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{cin}}}{\mathcal{P}_{\text{th}}}$  où  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  est la puissance thermique reçue par l'air dans la chambre de combustion.

- Exprimer  $\eta_{\text{th}}$  sous la forme d'un rapport de différences de températures.
  - Calculer numériquement  $\eta_{\text{th}}$ .
- 6.** Calculer le débit massique  $D_k$  du kérosène consommé dans le turboréacteur.

**22.16 | Procédé de Linde-Hampson pour la liquéfaction du diazote (★★)**


La figure ci-dessus représente le schéma de principe du procédé Linde-Hampson utilisé pour produire de l'azote liquide (état 5). L'azote entre dans le compresseur dans l'état 1 ( $P_1 = 1$  bar ;  $T_1 = 293$  K) ; il y subit une compression isotherme qui l'amène à l'état 2. Il est alors refroidi à pression constante ( $P_3 = P_2$ ) dans l'échangeur, avant d'être détendu jusqu'à la pression atmosphérique ( $P_4 = P_5 = P_6 = P_1 = 1$  bar) dans le détendeur. L'azote liquide est extrait du séparateur ; la vapeur saturée sèche d'azote (état 6) est utilisée pour refroidir l'azote dans l'échangeur ; on admettra que cette vapeur d'azote est ramenée à l'état 1 à la sortie de l'échangeur. L'étude de ce procédé de liquéfaction sera effectuée en utilisant les propriétés thermodynamiques réelles lues sur le diagramme ( $\ln P, h$ ) fourni ci-après. Sur ce diagramme les températures sont en °C, les volumes massiques en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , les entropies massiques en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Dans tout le problème, en négligera les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. On étudie le fonctionnement de l'installation en régime stationnaire.

**1.** On admet que la compression de l'azote s'effectue de façon isotherme réversible de l'état 1 jusqu'à l'état 2 ( $P_2 = 200$  bar).

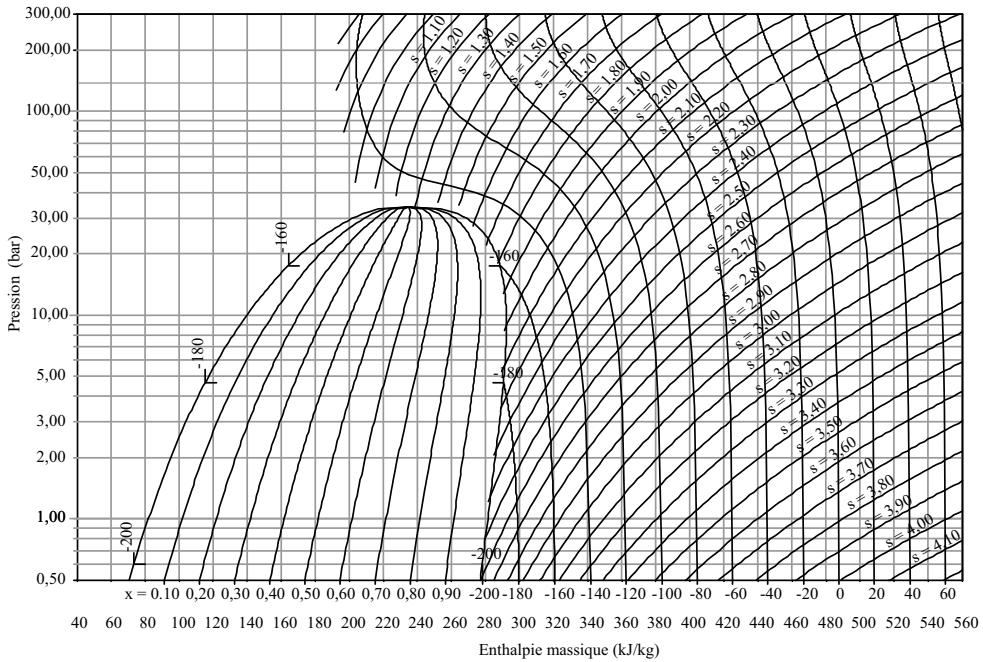
**a.** Placer les points 1 et 2 sur le diagramme du diazote et déterminer leurs enthalpies et entropies massiques.

**b.** Par application du second principe, calculer le transfert thermique massique  $q_C$  reçu par le gaz dans le compresseur.

**c.** En déduire le travail utile massique  $w_{u,C}$  reçu par le gaz dans le compresseur.

**2.** La transformation, qui s'effectue dans le détendeur, fait passer l'azote de 200 bar à 1,0 bar et le détendeur ne comporte pas de parties mobiles. Le détendeur, le séparateur, l'échangeur et tous les circuits de liaison sont supposés parfaitement calorifugés.

**a.** Quelle propriété remarquable a cette transformation ?



**b.** En déduire, en utilisant le diagramme, qu'il faut que la température  $T_3$  dans l'état 3 soit inférieure à une température  $T_{\max}$ , pour que le fluide dans l'état 4 soit un mélange liquide-vapeur. Donner une valeur approchée de  $T_{\max}$ .

**c.** Placer les points 5 et 6 sur le diagramme et déterminer leurs enthalpies massiques.

**3.** Dans l'échangeur thermique, les fluides s'écoulent en sens inverse dans les deux conduites échangeant du transfert thermique entre eux. Il n'y a pas de pièce mobile et l'échangeur est parfaitement calorifugé. On note  $D_m$  le débit massique dans la conduite 2 – 3 et  $D'_m$  le débit massique dans la conduite 6 – 1. On note  $\Phi$  la puissance thermique passant de la conduite 2 – 3 à la conduite 6 – 1.

**a.** Exprimer les transferts thermiques massiques  $q$  et  $q'$  reçus par le fluide respectivement dans les conduites 2 – 3 et 6 – 1.

**b.** En déduire que :  $D_m(h_3 - h_2) + D'_m(h_1 - h_6) = 0$ .

**4.** On note  $y$  la fraction massique d'azote liquide dans l'état 4.

**a.** Exprimer  $h_4$  en fonction de  $h_5$ ,  $h_6$  et  $y$ .

**b.** Exprimer le débit massique  $D'_m$  dans la conduite 6 – 1 en fonction du débit massique  $D_m$  dans la conduite 2 – 3 et de  $y$ . En déduire une relation liant  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_6$  et  $y$ .

**c.** Montrer que  $y = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_5}$ .

**d.** Calculer numériquement  $y$  puis  $h_3$  et  $h_4$ . Placer les points 3 et 4 sur le diagramme.

**5.** Calculer le travail de compression dépensé par kilogramme d'azote liquide produit. En déduire la puissance du compresseur lorsqu'on produit 50 kg par heure d'azote liquide.

## CORRIGÉS

## 22.1 Transformation polytropique d'un gaz parfait

**1.** D'après la loi des gaz parfaits  $P = \frac{RT}{Mv}$  donc  $\frac{RT}{Mv}v^k = \text{cste}$ , soit  $Tv^{k-1} = \text{cste}$ . On trouve en prenant le logarithme :  $\ln T + (k-1)\ln v = \text{cste}$ , d'où  $d(\ln T) + (k-1)d(\ln v) = 0$ , soit :

$$\frac{dT}{T} + (k-1)\frac{dv}{v} = 0.$$

**2.** On applique le premier principe à l'échantillon de gaz (de masse  $m$ ) pour la transformation élémentaire :  $dU = \delta Q + \delta W$  soit  $mdu = m\delta q - P_{\text{ext}}dV = m\delta q - mPdv$  (puisque  $P_{\text{ext}} = P$ ) d'où :  $\delta q = du + Pdv$ .

Par ailleurs :  $du = c_vdT = \frac{R}{M(\gamma-1)}dT$  et  $Pdv = \frac{RT}{Mv}dv = -\frac{1}{k-1}\frac{R}{M}dT$ , en utilisant la relation de la première question. Finalement :  $\delta q = \frac{R}{M}\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)dt$ .

Pour  $k = 0$ , il vient :  $\delta q = \frac{R}{M}\frac{\gamma}{\gamma-1}dt = c_Pdt$ , ce qui est tout à fait normal car la loi polytropique est dans ce cas  $P = \text{cste}$ .

Pour  $k = 1$ , il vient :  $\delta q = \infty \times dt$ ; en fait dans ce cas  $T = \frac{MPv}{R} = \text{cste}$  donc  $dt = 0$  et  $\delta q$  n'est pas déterminée par cette relation.

Pour  $k = \gamma$ , il vient :  $\delta q = 0$ , ce qui est tout à fait normal car la loi polytropique est dans ce cas la loi de Laplace correspondant à une transformation réversible et adiabatique.

Pour  $k = \infty$ , il vient :  $\delta q = \frac{R}{M}\frac{1}{\gamma-1}dt = c_vdt$ , ce qui est tout à fait normal car la loi polytropique (qui peut s'écrire  $P^{\frac{1}{k}}v = \text{cste}$ ) donne dans ce cas  $v = \text{cste}$ .

**3. a.** On applique le second principe à l'échantillon de gaz (de masse  $m$ ) pour la transformation élémentaire :  $ds = \frac{\delta Q}{T_0} + \delta S_{\text{créée}}$  soit  $mds = \frac{m\delta q}{T_0} + m\delta S_{\text{créée}}$ . Il vient donc :

$$\delta S_{\text{créée}} = ds - \frac{\delta q}{T_0}.$$

D'après l'expression donnée :  $ds = \frac{R}{M}\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{dT}{T} + \frac{dv}{v}\right) = \frac{R}{M}\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{dT}{T}$ .

Il vient donc, en utilisant l'expression de  $\delta q$  trouvée à la question précédente :

$$\delta S_{\text{créée}} = \frac{R}{M}\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)dt.$$

**b.** D'après le deuxième principe,  $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$ . Or, si la température augmente  $dt > 0$  et  $\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} < 0$  (la température initiale est  $T_0$ ), si la température diminue ces deux signes sont inversés. Donc on a nécessairement  $k \leq \gamma$ , sans quoi le système ne peut évoluer.

## 22.2 Identité thermodynamique

**1.** Le travail élémentaire reçu par le système est :  $\delta W = -P_{\text{ext}}dV = -PdV$  puisque la transformation est réversible (donc en particulier mécaniquement réversible).

D'après le deuxième principe :  $\delta Q = T_S \delta S_{\text{éch}} = T_S(dS - \delta S_{\text{crée}})$ . La transformation étant réversible :  $T_S = T$  et  $\delta S_{\text{crée}} = 0$ . Ainsi :  $\delta Q = TdS$ .

D'après le premier principe :  $dU = \delta W + \delta Q$  soit :

$$dU = TdS - PdV.$$

**2.** Cette relation fait intervenir des variations de paramètres et grandeurs thermodynamiques (avec un « d ») qui ne dépendent que de l'état initial et de l'état final. Dans le cas d'une transformation irréversible, on peut toujours trouver une transformation réversible qui part du même état initial et aboutit au même état final. Le raisonnement de la question précédente s'applique à cette transformation réversible, ce qui valide la relation (qui est la même pour les deux transformations). En revanche, dans le cas où la transformation est irréversible,  $\delta W$  et  $\delta Q$  ne sont pas *a priori* égaux à  $-PdV$  et  $TdS$ .

**3.** Par définition  $H = U + PV$ , donc  $dH = dU + d(PV) = dU + PdV + VdP = TdS - PdV + PdV + VdP$  soit :

$$dH = TdS + VdP.$$

**4.**  $h_2 - h_1 = 1,07 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On peut aussi écrire en assimilant les variations entre les deux états à des variations élémentaires, les deux états étant très proches et en utilisant l'identité thermodynamique pour l'unité de masse,  $dh = Tds + vdP$  :

$$h_2 - h_1 \simeq \frac{T_1 + T_2}{2}(s_2 - s_1) + \frac{v_1 + v_2}{2}(P_2 - P_1) = 1,07 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

## 22.3 Moteur ditherme en régime stationnaire

**1.** Le moteur reçoit du transfert thermique de la source chaude :  $\Phi_{ch} > 0$ , en cède à la source froide :  $\Phi_{fr} < 0$  et fournit du travail :  $\mathcal{P} < 0$ .

**2.** • L'énergie interne, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de  $\Sigma$  sont identiques à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + dt$  puisque le moteur fonctionne en régime stationnaire. Ainsi :

$$dE = dU + dE_c + dE_p = 0.$$

- Le transfert thermique élémentaire reçu par  $\Sigma$  est :  $\delta Q = \Phi_{fr}dt + \Phi_{ch}dt$ .

- Le travail mécanique élémentaire reçu par  $\Sigma$  est :  $\delta W = \mathcal{P}dt$ .

Le premier principe pour  $\Sigma$  entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$0 = \delta Q + \delta W \quad \text{d'où} \quad \Phi_{ch} + \Phi_{fr} + \mathcal{P} = 0. \quad (22.31)$$

**3.** Le moteur fonctionnant en régime stationnaire, la variation d'entropie élémentaire de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est nulle :

$$dS = 0.$$

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

L'entropie élémentaire reçue entre  $t$  et  $t + dt$  est :  $\delta S_{\text{recue}} = \frac{\Phi_{fr}dt}{T_{fr}} + \frac{\Phi_{ch}dt}{T_{ch}}$ . Le second principe donne donc :

$$\frac{\Phi_{fr}}{T_{fr}} + \frac{\Phi_{ch}}{T_{ch}} = -\frac{\delta S_{\text{créée}}}{dt} \leq 0. \quad (22.32)$$

**4.** Le rendement est :  $\rho = \frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance coûteuse}} = -\frac{\mathcal{P}}{\Phi_{ch}}$ . Puisqu'il n'y a pas de source d'irréversibilité interne au moteur  $\delta S_{\text{créée}} = 0$ . Les équations (22.31) et (22.32) conduisent alors à :

$$\rho = \frac{\Phi_{fr} + \Phi_{ch}}{\Phi_{ch}} = 1 + \frac{\Phi_{fr}}{\Phi_{ch}} = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} = \rho_C,$$

rendement de Carnot du moteur thermique (voir cours de première année).

#### 22.4 Temps de réponse d'un thermomètre au mercure

**1.** Le flux thermique reçu par le thermomètre de la part du fluide est :  $\Phi = hS(T_f - T(t))$  où  $S = 2\pi aH + \pi a^2$  est la surface du thermomètre en contact avec le liquide. Le premier principe s'écrit pour le thermomètre entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :  $dU = \delta Q = \Phi dt$  avec  $dU = \mu c \times \pi a^2 H \times dT$ . Il vient donc :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{h(2H + a)}{\mu caH}(T - T_f) = 0$$

**2.** La solution est :  $T(t) = T_0 + (T_f - T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{\mu caH}{h(2H + a)}$ . La différence de température est divisée par 100 à l'instant :  $t_1 = \ln(100)\tau$ .

**3.** Numériquement :  $\tau = 104,7$  s et  $t_1 \simeq 8$  min.

#### 22.5 Le fluide R728

**1.** Si le gaz se comportait comme un gaz parfait, les isothermes seraient des droites verticales car l'enthalpie massique (qui est en abscisse) ne dépend que de la température. Or les isothermes sont incurvées vers la gauche aux grandes pressions. C'est dans la partie la plus basse du diagramme que le gaz se rapproche le plus d'un gaz parfait.

**2.** On lit sur le diagramme sur l'isobare  $P = 1$  bar : pour  $T_1 = -180^\circ\text{C}$ ,  $h_1 = 295 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et pour  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $h_2 = 590 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ . En admettant que la capacité thermique est indépendante de  $T$ , on en déduit :  $c_p = \frac{h_2 - h_1}{T_2 - T_1} = \frac{590 - 295}{100 + 180} = 1,05 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Pour un gaz parfait diatomique de masse molaire  $M$ , aux températures usuelles :  $c_P = \frac{7}{2} \frac{R}{M}$ .

On peut donc calculer la masse molaire du fluide :  $M = \frac{7R}{2c_p} = 0,028 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Il s'agit de la masse molaire du diazote  $\text{N}_2$ .

## 22.6 Étude d'une transformation dans le diagramme ( $\ln P, h$ )

**1.** On peut lire sur le diagramme les valeurs de toutes les grandeurs intensives du fluide dans l'état A et dans l'état B. On peut donc calculer  $\Delta h$  par simple lecture de la distance horizontale sur le diagramme entre les points A et B :  $\Delta h = 405 - 570 = -165 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Par lecture de l'ordonnée on a les pressions  $P_A = 20 \text{ bar}$  et  $P_B = 2 \text{ bar}$ , et en utilisant les courbes isochores, par interpolation, les volumes massiques  $v_A = 0,053 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $v_B = 0,29 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ; on peut donc calculer  $\Delta u = \Delta(h - Pv) = \Delta h - P_B v_B + P_A v_A$ .

En utilisant les isentropes on détermine par interpolation  $s_A = 3,16 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $s_B = 3,23 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  donc  $\Delta s = s_B - s_A = 0,07 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Mais on ne peut pas attribuer de valeur à  $w_u$ ,  $q$ ,  $s_{\text{éch}}$ ,  $s_{\text{créée}}$  car ces grandeurs dépendent du trajet du fluide entre les états A et B, ce que leurs notations (sans  $\Delta$ ) soulignent. Mais, curieusement, on peut calculer indirectement :  $w_{\text{pression}} = \Delta u - \Delta h$ .

**2.** Le premier principe pour un système ouvert s'écrit :  $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = 0$  car  $q = 0$  (la tuyère est adiabatique) et  $w_u = 0$  (la tuyère n'a aucune pièce mobile). L'énergie potentielle est uniquement due au poids, et sa variation est nulle car la tuyère est horizontale. Il vient donc, notant  $c$  la vitesse du fluide :  $\Delta h + \frac{1}{2}c_B^2 - \frac{1}{2}c_A^2 = 0$  d'où :

$$c_B = \sqrt{c_A^2 - 2\Delta h} \simeq \sqrt{-2\Delta h} = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le second principe pour un écoulement ouvert s'écrit :  $\Delta s = s_{\text{créée}}$  car il n'y a pas d'entropie échangée, la turbine étant adiabatique. Ainsi :

$$s_{\text{créée}} = s_B - s_A = 0,07 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

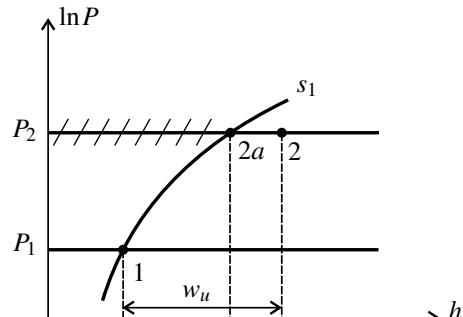
## 22.7 Compression adiabatique et diagramme ( $\ln P, h$ )

**1.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire appliquée au compresseur s'écrit :  $\Delta h = w_u + q$ , où  $w_u$  est le travail massique utile, positif dans le cas d'un compresseur, et  $q$  le transfert thermique massique, nul ici. Ainsi :  $\Delta h > 0$ .

**2.** Le second principe pour un système ouvert en régime stationnaire appliquée au compresseur s'écrit :  $\Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}}$ , où  $s_{\text{éch}}$  est l'entropie échangée, nulle ici puisqu'il n'y a pas de transfert thermique, et  $s_{\text{créée}}$  l'entropie créée qui est toujours positive ou nulle. Ainsi :  $\Delta s \geq 0$ .

**3.**  $s_2 = s_1 + \Delta s \geq s_1$  donc le point 2 se trouve à droite de l'isentrope  $s_1$ . 2 est sur l'isobare  $P_2$  à droite du point d'intersection  $2a$  entre cette isobare et l'isentrope  $s_1$ .

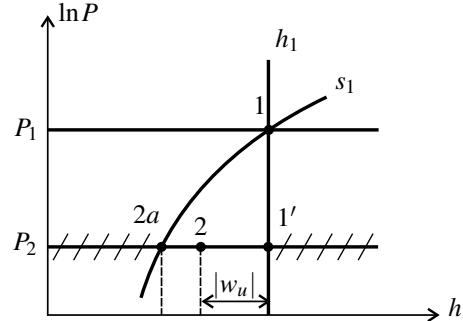
**4.**  $w_u$  est la distance horizontale entre les points 1 et 2.  $w_u$  est minimal quand  $2 = 2a$  c'est-à-dire quand la transformation dans le compresseur est réversible.



### 22.8 Détente adiabatique et diagramme ( $\ln P, h$ )

**1.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire appliqué à la turbine s'écrit :  $\Delta h = w_u + q$ , où  $w_u$  est le travail massique utile, négatif dans le cas d'une turbine, et  $q$  le transfert thermique massique, nul ici. Ainsi :  $\Delta h < 0$ .

**2.** Le second principe pour un système ouvert en régime stationnaire appliqué à la turbine s'écrit :  $\Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{crée}}$ , où  $s_{\text{éch}}$  est l'entropie échangée, nulle ici puisqu'il n'y a pas de transfert thermique, et  $s_{\text{crée}}$  l'entropie créée qui est toujours positive ou nulle. Ainsi :  $\Delta s \geq 0$ .



**3.**  $s_2 = s_1 + \Delta s \geq s_1$  donc le point 2 se trouve à droite de l'isentrope  $s_1$  :  $h_2 = h_1 + \Delta h < h_1$  donc 2 est à gauche de l'isenthalpe  $h_1$ . 2 est sur l'isobare  $P_2$  entre les points d'intersection 1' et 2a de cette isobare avec l'isenthalpe  $h_1$  et l'isentrope  $s_1$  respectivement.

**4.**  $w_u < 0$  et  $|w_u|$  est la distance horizontale entre les points 1 et 2.  $|w_u|$  est maximal quand  $2 = 2a$  c'est-à-dire quand la transformation dans la turbine est réversible.

### 22.9 Diagramme ( $\ln P, h$ ) et COP

**1.** Voir schéma ci-contre. On voit sur le diagramme les valeurs des différentes énergies massiques échangées. Le COP est :

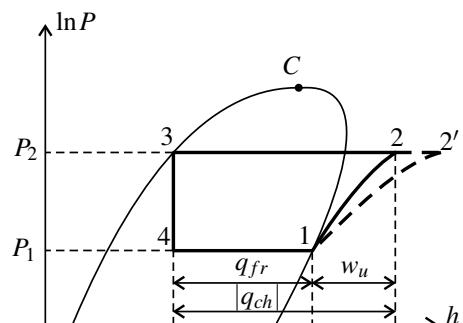
- dans le cas d'une machine frigorifique :

$$\text{COP}_R = \frac{q_{fr}}{w_u};$$

- dans le cas d'une pompe à chaleur :

$$\text{COP}_P = \frac{|q_{ch}|}{w_u} > 1.$$

**2.**  $2'$  est sur la même isobare que 2, à droite de 2 car :  $s_{2'} = s_1 + s_{\text{crée}}$ ,  $s_{1-2'} > s_1 = s_2$ .



On constate sur la figure que :  $q_{fr}$  ne change pas,  $w_u$  augmente donc l'efficacité du cycle en réfrigérateur  $\text{COP}_R$  diminue.

D'autre part  $|q_{ch}|$  augmente de la même quantité  $\Delta$  que  $w_u$  donc le COP de la pompe à chaleur devient :  $\text{COP}'_P = \frac{|q_{ch}| + \Delta}{w_u + \Delta} < \frac{|q_{ch}| + \text{COP}_P \Delta}{w_u + \Delta} = \frac{\text{COP}_P w_u + \text{COP}_P \Delta}{w_u + \Delta} = \text{COP}_P$ . L'efficacité de la pompe à chaleur diminue aussi.

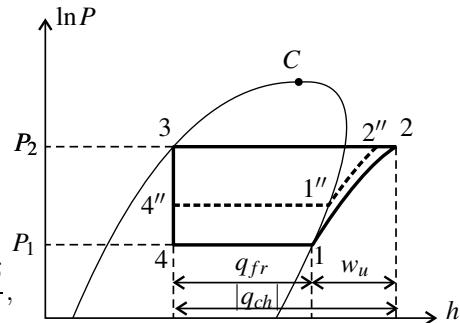
3. On constate que  $2''$  est à gauche de  $2$  et, du fait que la courbe de rosée a une pente positive,  $1''$  est à droite de  $1$ . Ainsi,  $w_u$  diminue et  $q_{fr}$  augmente. Ainsi le  $COP_R$  augmente.

Comment évolue le COP en pompe à chaleur ?  $|q_{ch}|$  diminue, mais d'une quantité  $\delta'$  plus petite que la quantité  $\delta$  dont  $w_u$  diminue.

Ainsi :

$$COP'_P = \frac{|q_{ch}| - \delta'}{w_u - \delta} > \frac{|q_{ch}| - \delta}{w_u - \delta} > \frac{|q_{ch}| - COP_P \delta}{w_u - \delta},$$

car  $COP_P > 1$ . Étant donné que  $q_{ch} = COP_P w_u$ , il reste :  $COP'_P > COP_P$ . Ainsi le COP en tant que pompe à chaleur est aussi amélioré.



## 22.10 Résonateur de Helmholtz

1. D'après la loi des gaz parfaits :  $m = \frac{MP_0Ah}{RT_0}$  et  $n = \frac{P_0V_0}{RT_0}$ .

2. Pour le système  $\Sigma$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$  ; en négligeant la variation d'énergie interne de l'air du conduit on a :  $dU = nC_{V,m}dT = \frac{nR}{\gamma - 1}dT$ , en négligeant l'énergie cinétique de l'air dans la sphère :  $dE_c = d\left(\frac{1}{2}mx^2\right) = mx\ddot{x}dt = m\ddot{x}dx$  et en négligeant le poids :  $dE_{p,ext} = 0$ .

Le travail reçu vient de la pression de l'air atmosphérique :  $\delta W = -P_0dV = -P_0Adx$ .

Le premier principe s'écrit :  $\frac{nR}{\gamma - 1}dT + m\ddot{x}dx = -P_0Adx$ .

3. Pour le système  $\Sigma' = \{\text{air dans la sphère}\}$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$  on a :  $dU' = \frac{nR}{\gamma - 1}dT$ ,

et si on néglige l'énergie cinétique de l'air dans la sphère et le poids :  $dE'_c = 0$  et  $dE'_{p,ext} = 0$ .

Le travail reçu vient de la pression de l'air du conduit :  $\delta W' = -PdV' = -PAdx$ . Le premier principe s'écrit :  $\frac{nR}{\gamma - 1}dT = -PAdx$ .

4. D'après l'équation d'état du gaz parfait, pour le gaz qui au repos est dans la sphère :

$$P = \frac{nRT}{V_0 + Ax} ; \text{ en remplaçant dans l'équation précédente on a : } \frac{Adx}{V_0 + Ax} = -\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}.$$

De plus :  $\frac{dP}{P} = d(\ln P) = d\left(\underbrace{\ln(nR)}_{\text{cste}} + \ln T - \ln(V_0 + Ax)\right) = \frac{dT}{T} - \frac{Adx}{V_0 + Adx}$ . En utilisant la première relation on trouve :  $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{Adx}{V_0 + Ax}$ .

Sachant que  $P = P_0$  pour  $x = 0$  on intègre cette relation en :  $\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\gamma \ln\left(\frac{V_0 + Ax}{V_0}\right)$ ,

soit :  $P = P_0 \left(1 + \frac{Ax}{V_0}\right)^{-\gamma} \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Ax}{V_0}\right)$ . Remarque : il s'agit de la loi de Laplace.

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

**5.** En retranchant les relations trouvées aux question 2 et 3, on trouve :  $m\ddot{x}dx = (P - P_0)Adx$ , d'où en simplifiant par  $dx$  et en remplaçant  $P$  :  $\ddot{x} = -\frac{\gamma P_0 A^2}{mV_0}x$ . Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de fréquence :  $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P_0 A^2}{mV_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma RT_0 A}{MhV_0}}$ .

**6.**  $\lambda_0 = \frac{c_{\text{son}}}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{V_0 h}{A}}$ . Il est remarquable que  $\lambda_0$  soit indépendante des conditions de température et pression. Cela fait du résonateur un étalon de fréquence sonore.

**7.**  $\lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4r^3 h}{3a^2}} = 2,1$  m. On trouve une valeur bien supérieure à  $h$ , ce qui légitime l'hypothèse d'un déplacement en bloc de l'air du conduit. Par ailleurs la longueur d'onde est étonnamment grande par rapport aux dimensions du résonateur (si l'on se réfère à un instrument de musique).

**22.11 Mesure d'une capacité thermique**

**1.** En faisant passer une intensité  $i(t) = I_0 \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$  dans une résistance  $R$  on provoque par effet Joule le dégagement d'une puissance :  $\mathcal{P} = Ri^2(t) = \frac{1}{2}RI_0^2(1 + \cos\omega t)$ .

**2.** Le premier principe s'écrit pour l'échantillon entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$CdT = \mathcal{P}(t)dt - K(T - T_0)dt \quad \text{soit} \quad \frac{C}{K} \frac{dT}{dt} + T = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K} + \frac{\mathcal{P}_0}{K} \cos\omega t.$$

**3.** La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, de la forme  $T_h(t) = A \exp\left(-\frac{K}{C}t\right)$ , et d'une solution particulière de l'équation complète. On cherche cette solution du type :  $T_p(t) = a + b \cos\omega t + c \sin\omega t$ . On injecte cette expression dans l'équation puis on identifie les termes constants, les termes en  $\sin\omega t$  et les termes en  $\cos\omega t$ , ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K} \\ \frac{C\omega}{K}c + b & = & \frac{\mathcal{P}_0}{K} \\ -\frac{C\omega}{K}b + c & = & 0 \end{array} \right. .$$

Après résolution, on a :  $T_p(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K} + \frac{\mathcal{P}_0}{K} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{C\omega}{K}\right)^2} \cos\omega t + \frac{\frac{C\omega}{K}}{1 + \left(\frac{C\omega}{K}\right)^2} \sin\omega t \right)$ .

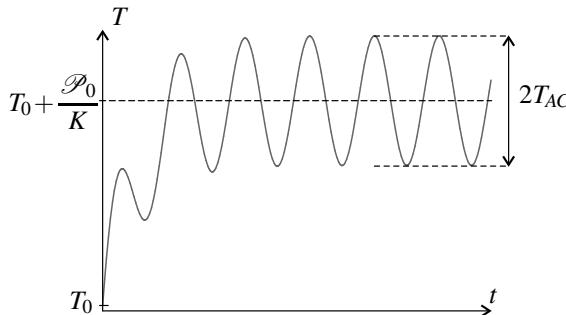
**Remarque**

On peut également chercher dans un premier temps une solution particulière constante, qu'on trouve égale à  $T_{p1}(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K}$ , puis une solution particulière sinusoïdale en passant en notation complexe, qu'on trouve égale à  $T_{p2}(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{\mathcal{P}_0}{K+iC\omega} \exp(i\omega t) \right)$ . La solution  $T_p$  est égale à  $T_{p1} + T_{p2}$ .

La solution complète est  $T(t) = T_h(t) + T_p(t)$ . La condition initiale  $T(0) = T_0$  détermine la constante  $A$  et il vient finalement :

$$T(t) = -\frac{\mathcal{P}_0}{K} \left( 1 + \frac{1}{1 + \left( \frac{C\omega}{K} \right)^2} \right) \exp \left( -\frac{K}{C} t \right) + T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K} + \frac{\mathcal{P}_0}{K} \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{C\omega}{K} \right)^2} \cos \omega t + \frac{\frac{C\omega}{K}}{1 + \left( \frac{C\omega}{K} \right)^2} \sin \omega t \right).$$

L'allure du graphe de  $T(t)$  est représentée ci-dessous : après un régime transitoire dont la durée est de quelques  $\frac{C}{K}$ , la température oscille autour de  $T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K}$ .



4. Ce temps est  $\tau = \frac{C}{K}$ .

5. L'amplitude de la composante alternative est :  $T_{AC} = \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{\mathcal{P}_0}{K} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{C\omega}{K} \right)^2}}$ .

On peut mesurer  $T_{AC}$  pour  $\omega = 0$  puis chercher la pulsation  $\omega_c$  pour laquelle  $T_{AC}$  est divisée par  $\sqrt{2}$ ; alors :  $C = \frac{K}{\omega_c}$ .

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

**22.12 Température d'un conducteur ohmique**

**1.** La puissance dissipée par effet Joule dans le fil est :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = RI^2 \quad \text{où} \quad R = \frac{\rho_0 L}{\pi a^2} (1 + \alpha(T - T_0)).$$

**2.** Le fil n'a pas d'énergie cinétique et une énergie potentielle constante. Le premier principe s'écrit en termes de puissances :  $\frac{dU}{dt} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} - \Phi$  (le signe – provient du fait que  $\Phi$  est cédé par le fil à l'air).

Le flux thermique cédé par le fil à l'air est :  $\Phi = h(T - T_0) \times 2\pi a L$ .

Quand la température du fil est constante,  $\frac{dU}{dt} = 0$ . Il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} - \Phi = 0 \quad \text{soit} \quad T = T_p = T_0 + \frac{\rho_0 I^2}{2\pi^2 a^3 h - \alpha \rho_0 I^2}.$$

Numériquement : pour  $I = 10$  A,  $T_p - T_0 = 65,8$  K.

On remarque que  $T_p$  tend vers l'infini lorsque  $I$  tend vers  $I_C = \sqrt{\frac{2\pi^2 a^3 h}{\alpha \rho_0}}$ .

**3. a.** Le premier principe de la thermodynamique pour le fil entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :  $dU = -\Phi dt + \mathcal{P}_{\text{Joule}} dt$  soit (en simplifiant par  $L$ ) :

$$\pi a^2 \mu c \frac{dT}{dt} + \left( 2\pi a h - \frac{\alpha \rho_0 I^2}{\pi a^2} \right) T = \left( 2\pi a h - \frac{\alpha \rho_0 I^2}{\pi a^2} \right) T_0 + \frac{\rho_0 I^2}{\pi a^2}.$$

**b.** Si  $I < I_C = \sqrt{\frac{2\pi^2 a^3 h}{\alpha \rho_0}}$  la solution est :  $T(t) = T_p + (T_0 - T_p) e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{\pi a^2 \mu c}{2\pi a h - \frac{\rho_0 I^2 \alpha}{\pi a^2}}$ .

La température tend exponentiellement vers la valeur déterminée précédemment.

Si  $I = I_C$ , la solution est :  $T(t) = \frac{\rho_0 I^2}{\pi^2 a^4 \mu c} t + T_0$ . La température augmente de manière linéaire.

Si  $I > I_C$ , la solution est :  $T(t) = T_p + (T_0 - T_p) e^{\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{\pi a^2 \mu c}{\frac{\rho_0 I^2 \alpha}{\pi a^2} - 2\pi a h}$ . La température diverge exponentiellement.

**22.13 Turbine à gaz**

**1. a.** Lors d'une transformation isentropique d'un gaz parfait, d'après la loi de Laplace :  $Pv^\gamma = \text{Cste}$ . Comme de plus :  $v = \frac{RT}{M_{\text{He}} P}$  cela donne :  $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cste}$ , soit  $\frac{T}{P^\beta} = \text{Cste}$ , avec  $\beta = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{5}{2}$ .

**b.** Les transformations dans la turbine, comme dans le compresseur, sont adiabatiques et réversibles donc isentropiques. On peut leur appliquer le résultat précédent. Il vient donc :  $T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^\beta = T_1 r_p^\beta$  et  $T_4 = T_3 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^\beta = \frac{T_3}{r_p^\beta}$ . Numériquement :  $T_2 = 522$  K et  $T_4 = 747$  K.

**c.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit, pour le compresseur :  $h_2 - h_1 = w_{u,12}$  car les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables et car il n'y a pas de transfert thermique. Ainsi :  $w_{u,12} = c_p(T_2 - T_1)$ .

De même, pour la turbine  $w_{u,34} = c_p(T_4 - T_3)$ .

**d.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire, appliqué à chacun des échangeurs, s'écrit :  $\Delta h = q$  car les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables et car il n'y a pas de pièce mobile. Ainsi :  $q_{23} = c_p(T_3 - T_2)$  et  $q_{41} = c_p(T_1 - T_4)$ .

**e.** L'efficacité est le rapport « énergie utile sur énergie coûteuse ». L'énergie utile est le travail fourni à l'alternateur  $w_{al}$ . Ce travail provient de la turbine qui fournit aussi du travail au compresseur donc :  $w_{al} = |w_{u,34}| - w_{u,12} = -w_{u,34} - w_{u,12} = c_p(T_3 - T_4 - T_2 + T_1)$ . L'énergie coûteuse est le transfert thermique provenant de la source chaude soit  $q_{23}$ .

Ainsi :  $e = \frac{w_{al}}{q_{23}} = \frac{T_3 - T_4 - T_2 + T_1}{T_3 - T_2} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$ . En utilisant les expressions des températures  $T_2$  et  $T_1$  trouvées plus haut, on obtient :  $e = 1 + \frac{T_2 r_p^{-\beta} - T_3 r_p^{-\beta}}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{r_p^\beta}$ .

**f.** Numériquement :  $e = 0,43$ . Un moteur thermique de Carnot travaillant avec une source chaude de température  $T_3$  et une source froide de température  $T_1$  a une efficacité (rendement) :  $e_C = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0,77$ . Conformément au théorème de Carnot on a  $e < e_C$  parce que le fonctionnement de la machine n'est pas réversible à cause des gradients thermiques dans les deux échangeurs.

**g.**  $w_{al} = c_p(T_1 + T_3 - T_1 r_p^\beta - T_3 r_p^{-\beta})$ . On a donc :  $\frac{dw_{al}}{dr_p} = c_p \beta (-T_1 r_p^{\beta-1} + T_3 r_p^{-\beta-1})$ . Cette dérivée s'annule pour  $r_p = r_{pm} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$ , valeur supérieure à 1. Pour cette valeur de  $r_p$ ,  $w_{al}$  passe par un extremum qui est un maximum puisque  $\left(\frac{dw_{al}}{dr_p}\right)_{r_p=1} = c_p \beta (T_3 - T_1) > 0$ .

Numériquement :  $r_{pm} = 6,25$  et pour cette valeur de  $r_p$ ,  $e = 0,52$ .

**2. a.** De même que plus haut :  $q_{x3} = c_p(T_3 - T_x)$  et  $q_{y1} = c_p(T_y - T_1)$ .

**b.** Il vient à présent :  $e = \frac{w_{al}}{q_{x3}} = \frac{T_3 - T_4 - T_2 + T_1}{T_3 - T_x} = \frac{T_3 - T_4 - T_2 + T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}$ , soit :  $e = 1 - \frac{T_1 r_p^\beta - T_1}{T_3 - T_3 r_p^{-\beta}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^\beta$ . Numériquement, avec  $r_p = 4$ ,  $e = 0,60$ . L'utilisation du régénérateur fait augmenter l'efficacité.

## 22.14 Cycle d'Ericsson

**1.** Le second principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit, pour le compresseur :  $s_2 - s_1 = \frac{q_{12}}{T_{fr}}$ , puisque la transformation est réversible ( $s_{crée} = 0$ ) et que la surface du système est (comme tout le système) à la température  $T_{fr}$ . Il vient donc :

$$q_{12} = T_{fr}(s_2 - s_1) = -RT_{fr} \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

De même :  $q_{34} = T_{ch}(s_4 - s_3) = RT_{ch} \ln \frac{P_2}{P_1}$ .

**2.** Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit, pour le compresseur :  $h_2 - h_1 = q_{12} + w_{u,12}$ , puisque la variation d'énergie cinétique et la variation d'énergie potentielle sont négligeables. La transformation étant isotherme :  $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 0$  donc  $w_{u,12} = -q_{12} = RT_{fr} \ln \frac{P_2}{P_1}$ . De même :  $w_{u,34} = -q_{34} = -RT_{ch} \ln \frac{P_2}{P_1}$ .

L'énergie utile est le travail fourni par la turbine à l'alternateur, qui vaut, par unité de masse de fluide :  $w_{alt} = |w_{u,34}| - w_{u,12} = -w_{u,34} - w_{u,12} = R(T_{ch} - T_{fr}) \ln \frac{P_2}{P_1}$ .

Le rendement de la machine est donc :  $\rho = \frac{w_{alt}}{q_{34}} = \frac{R(T_{ch} - T_{fr}) \ln \frac{P_2}{P_1}}{RT_{ch} \ln \frac{P_2}{P_1}} = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$ .

**3.** Le rendement que l'on a trouvé est le rendement de Carnot, ce qui signifie que le fonctionnement de la machine est réversible.

### 22.15 Turboréacteur

**1. a.** La transformation dans le compresseur est adiabatique et réversible, donc d'après la loi de Laplace :  $T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}$ . Ainsi :  $T_2 = T_1 \tau^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ .

**b.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit, pour le compresseur :  $h_2 - h_1 = w_{u,1 \rightarrow 2}$ , car la transformation est adiabatique ( $q = 0$ ) et on peut négliger les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Donc :  $w_{u,1 \rightarrow 2} = c_p(T_2 - T_1)$ .

**2. a.** En utilisant le résultat précédent à l'envers on a :  $T_2 = T_1 + \frac{w_{u,1 \rightarrow 2}}{c_p} = 579$  K.

**b.** Les hypothèses valables dans le compresseur sont aussi valables dans la turbine, donc :  $w_{u,3 \rightarrow 4} = c_p(T_4 - T_3)$ . De plus, c'est le travail fourni par le gaz dans la turbine qui permet au compresseur de fonctionner, donc :  $w_{u,3 \rightarrow 4} = -w_{u,1 \rightarrow 2}$ . Donc  $T_4 = T_3 - \frac{w_{u,1 \rightarrow 2}}{c_p} = 921$  K.

**3.** Dans la turbine et la tuyère, les transformations sont adiabatiques et réversibles donc, d'après la loi de Laplace :

$$\text{a. } T_3^\gamma P_3^{1-\gamma} = T_4^\gamma P_4^{1-\gamma}, \text{ d'où : } P_4 = P_3 \left( \frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 3,96 \text{ bar.}$$

$$\text{b. } T_3^\gamma P_3^{1-\gamma} = T_5^\gamma P_5^{1-\gamma}, \text{ d'où : } T_5 = T_3 \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = T_3 \tau^{\frac{1}{\gamma}} = 621 \text{ K.}$$

**4. a.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit, pour la tuyère :  $h_5 - h_4 + e_{c,5} = 0$  puisque la tuyère est adiabatique ( $q_{4 \rightarrow 5} = 0$ ), elle ne comporte pas de partie mobile ( $w_{u,4 \rightarrow 5} = 0$ ) et la variation d'énergie potentielle est négligeable. Il vient donc :  $e_{c,5} = h_4 - h_5 = c_p(T_4 - T_5)$ . Finalement :  $\mathcal{P}_{cin} = D_m c_p(T_4 - T_5)$ .

**b.** Numériquement :  $\mathcal{P}_{cin} = 15,0$  kW.

**5. a.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit, pour la chambre de combustion :  $h_3 - h_2 = q_{2 \rightarrow 3}$  car les variations d'énergie cinétique et d'énergie

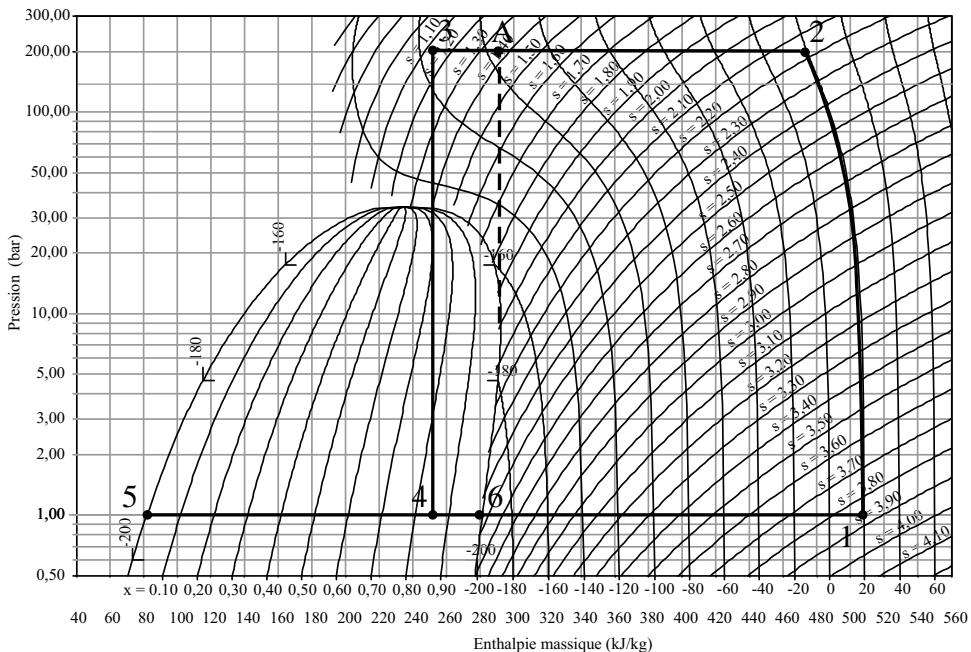
potentielle sont nulles et il n'y a pas de pièce mobile (donc  $w_{u,2 \rightarrow 3} = 0$ ). Étant donné que  $\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m q_{2 \rightarrow 3}$  et que  $h_3 - h_2 = c_P(T_3 - T_2)$ , il vient :  $\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m c_P(T_3 - T_2)$ .

$$\text{Finalement : } \eta_{\text{th}} = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_2}.$$

**b.** Numériquement :  $\eta_{\text{th}} = 48,3\%$ .

$$6. D_k = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{\rho_k} = \frac{c_P(T_3 - T_2)}{\rho_k} = 12,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### 22.16 Procédé de Linde-Hampson pour la liquéfaction du diazote



1. a. Le point 1 est à l'intersection de l'isobare  $P = 1$  bar et de l'isotherme  $T = 20^\circ\text{C}$ ; le point 2 est sur la même isotherme et sur l'isobare  $P = 200$  bar.

On lit sur le diagramme :  $h_1 = 508 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $h_2 = 475 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  (abscisses interpolées),  $s_1 = 3,86 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $s_2 = 2,17 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

b. Le second principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit pour le compresseur :  $s_2 - s_1 = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}} = \frac{q_C}{T_1} + 0$ , car : le fonctionnement du compresseur est réversible et dans le cas d'une transformation isotherme réversible tout le système (y compris sa surface) est à la température  $T_1$ . Ainsi :  $q_C = T_1(s_2 - s_1) = -495 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

c. Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit dans le cas du compresseur :  $h_2 - h_1 = w_{u,C} + q_C$  car on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Donc :  $w_{u,C} = h_2 - h_1 - q_C = 462 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

## CHAPITRE 22 – SYSTÈMES OUVERTS EN RÉGIME STATIONNAIRE

**2. a.** Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit dans le cas du détendeur :  $h_4 - h_3 = 0$  car le travail massique utile est nul (il n'y a pas de pièce mobile), le transfert thermique aussi (le détendeur est parfaitement calorifugé) et on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. La transformation est isenthalpique.

**b.** Ainsi les points 3 et 4 sont sur une même verticale. On voit sur le diagramme que 4 est dans la zone d'équilibre liquide-vapeur uniquement si 3 est à gauche du point A indiqué sur la figure. En A, la température vaut  $T_{\max} = -95^\circ\text{C}$  (par extrapolation entre deux courbes isothermes). Comme la température le long d'une isobare augmente vers la droite, il faut que  $T_3 < T_{\max}$ .

**c.** Les points 5 et 6 sont sur l'isobare  $P = 1 \text{ bar}$  et sur la courbe d'ébullition et de rosée respectivement. On lit alors :  $h_5 = 82 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et  $h_6 = 281 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

**3. a.** Le transfert thermique reçu par le fluide dans une conduite ne provient que de l'autre conduite puisque l'échangeur est parfaitement calorifugé. Ainsi :  $q = -\frac{\Phi}{D_m}$  et  $q' = \frac{\Phi}{D'_m}$  (il faut faire attention au sens de  $\Phi$ ).

**b.** On applique le premier principe pour un système ouvert aux deux portions de conduite. Pour la conduite 2 – 3, il n'y a pas de travail utile (pas de pièce mobile) et le transfert thermique massique est  $q$ ; en négligeant l'énergie cinétique et la variation d'énergie potentielle on a :  $\Delta h = h_3 - h_2 = q$ . De même pour la conduite 6 – 1 :  $\Delta h = h_1 - h_6 = q'$ .

Alors :  $D_m(h_3 - h_2) + D'_m(h_1 - h_6) = D_m q + D'_m q' = -\Phi + \Phi = 0$ .

**4. a.** L'enthalpie étant une fonction d'état additive :  $h_4 = yh_5 + (1-y)h_6$ .

**b.**  $D'_m = (1-y)D_m$ . La formule de l'échangeur thermique établie dans la question précédente s'écrit :  $D_m(h_3 - h_2) + D'_m(h_1 - h_6) = 0$  d'où  $(h_3 - h_2) + (1-y)(h_1 - h_6) = 0$ .

**c.** La relation  $h_3 = h_4$  s'écrit, en utilisant les deux questions précédentes :

$$yh_5 + (1-y)h_6 = h_2 - (1-y)(h_1 - h_6) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_5}.$$

**d.**  $y = \frac{508 - 475}{508 - 82} = 0,077$ .

Il vient ensuite :  $h_3 = h_4 = 0,077 \times 82 + (1 - 0,077) \times 281 = 266 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ , ce qui permet de placer les points 3 et 4 sur le diagramme.

**5.** Le travail de compression par kilogramme d'azote liquide produit est :

$$w'_{u,C} = \frac{w_{u,C}}{y} = 6,0 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Pour une production de  $50 \text{ kg}\cdot\text{h}^{-1} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  il faut fournir une puissance égale à  $6,0 \cdot 10^6 \times 1,4 \cdot 10^{-2} \simeq 83 \text{ kW}$ .

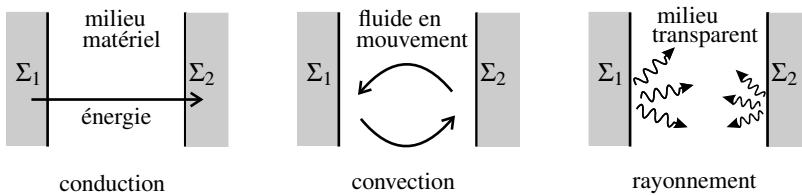
# Transferts thermiques

Ce chapitre est consacré aux transferts thermiques et plus particulièrement aux transfert thermiques par conduction. La loi de la conduction thermique a été découverte en 1822 par Joseph Fourier qui en déduisit l'équation de diffusion thermique connue aussi sous le nom d'équation de la chaleur. De nos jours, cette équation est utilisée dans les logiciels de modélisation thermique.

## 1 Les trois modes de transfert thermique

Un **transfert thermique** peut s'opérer entre deux systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  quand leurs températures sont différentes. Le système dont la température est la plus élevée cède de l'énergie au système dont la température est la plus basse. Ce transfert d'énergie se passe à l'échelle microscopique et il n'est perceptible à l'échelle macroscopique que par la transformation des systèmes qu'il provoque : variation de température, changement d'état...

Il existe trois **modes de transfert thermique** schématisés sur la figure 23.1.



**Figure 23.1** – Les trois modes de transfert thermique entre un système  $\Sigma_1$  de température  $T_1$  et un système  $\Sigma_2$  de température  $T_2 < T_1$ .

### 1.1 Transfert thermique conductif

La **conduction thermique** est le mode de transfert thermique entre deux systèmes séparés par un milieu matériel immobile, par exemple une paroi solide. Le transfert d'énergie résulte des collisions entre les particules microscopiques (molécules ou atomes) des systèmes et celles de la paroi. Ces particules sont animées d'un mouvement d'agitation thermique. Les particules du système ayant la température la plus élevée (« système chaud ») ont une énergie

cinétique d’agitation thermique supérieure à celle du système ayant une température plus basse (« système froid »). Lors des chocs, les premières cèdent de l’énergie aux particules de la paroi alors que les deuxièmes reçoivent de l’énergie de la paroi. Dans la paroi l’énergie est transportée de proche en proche par les vibrations des particules qui sont liées entre elles.

Par exemple le transfert thermique à travers les murs d’une maison ou à travers le fond d’une casserole est un transfert conductif.

## 1.2 Transfert thermique convectif

La **convection thermique** met en jeu un fluide en mouvement. Le fluide passe d’un système à l’autre, reçoit de l’énergie du système chaud et cède de l’énergie au système froid.

On parle de **convection naturelle** lorsque le mouvement de fluide est provoqué par la différence de température elle-même. Par exemple, dans une pièce chauffée par le sol, l’air situé au niveau du sol, plus chaud donc plus léger que l’air situé au-dessus, tend à s’élancer.

On parle de **convection forcée** lorsque le mouvement de fluide est provoqué par une cause extérieure. Par exemple les circuits intégrés d’un ordinateur sont refroidis par transfert convectif à l’aide d’un petit ventilateur.

## 1.3 Transfert thermique radiatif

Le transfert thermique radiatif ou **rayonnement thermique** a lieu entre deux systèmes de températures différentes séparés par un milieu transparent (pouvant éventuellement être le vide).

Il met en jeu les phénomènes d'**émission thermique** et d'**absorption**. Les particules microscopiques des deux systèmes, du fait de leur mouvement d’agitation thermique, émettent des ondes électromagnétiques, appartenant le plus souvent au domaine infrarouge. La puissance émise augmente très fortement avec la température du système. Les photons émis par chacun des systèmes sont reçus par l’autre qui en absorbe une partie. Il y a ainsi transfert d’énergie dans les deux sens, mais du fait que le système chaud émet plus d’énergie que le système froid, le transfert d’énergie global se fait du système chaud vers le système froid.

Par exemple lorsqu’on se chauffe au soleil ou encore devant un feu de cheminée, on reçoit un transfert thermique radiatif (dans le premier cas le transfert thermique a traversé l’espace vide entre le Soleil et la Terre).

 Comment reconnaître un mode de transfert thermique ?

Un transfert thermique par conduction est possible si les deux systèmes sont séparés par un milieu matériel qui peut être solide ou fluide. La convection thermique est possible s’ils sont séparés par un fluide en mouvement. Le rayonnement thermique est possible s’ils sont séparés par un milieu transparent aux infrarouges.

Les trois modes de transferts thermiques peuvent coexister.

### Exemple

Le transfert thermique entre l’intérieur d’une habitation et l’extérieur est :

- conductif à travers un mur ou une fenêtre fermée ;

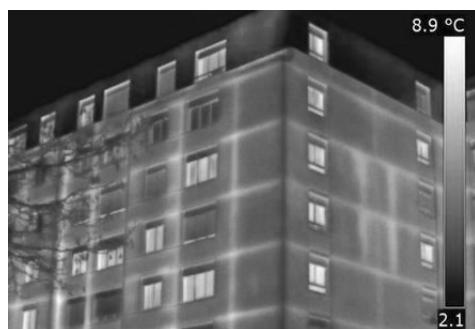
- convectif à travers une fenêtre ouverte,
- radiatif quand le rayonnement du soleil entre à travers une vitre.

La cuisson d'un plat dans un four électrique classique est due à un transfert thermique entre la résistance chauffante du four et le plat pour l'essentiel radiatif et pour une petite part conductif à travers l'air. Dans un four dit « à chaleur tournante » un ventilateur provoque un mouvement d'air à l'intérieur du four qui ajoute un transfert par convection très efficace.

### Expérience

Le flux d'énergie électromagnétique émis par rayonnement thermique dépend fortement de la température et ceci est utilisé dans certains dispositifs pour mesurer la température de la surface d'un corps. C'est le principe du thermomètre à infrarouge et de la caméra thermique. Le thermomètre à infrarouge affiche une température déterminée à partir de la mesure du flux d'énergie électromagnétique provenant de la surface visée. La loi reliant ces deux grandeurs dépend en fait de la nature de la surface émettrice, notamment de sa couleur. La valeur de température affichée sur l'appareil n'est exacte que pour une surface noire et mate.

La caméra thermique est en quelque sorte un appareil photographique numérique sensible aux infrarouges. Elle fournit une image en fausses couleurs où la couleur de chaque point correspond à sa température selon une échelle indiquée. Là aussi, la valeur de la température n'est pas très fiable sauf pour une surface noire et mate, mais l'appareil permet de visualiser la répartition de température. Par exemple, sur l'image d'un immeuble d'habitation en hiver (voir figure 23.2) on observe que la température du mur extérieur est supérieure d'environ 2°C là où il y a un mur ou un sol. Ceci indique que les pertes thermiques sont plus fortes en ces points.



**Figure 23.2 –** Image d'un immeuble d'habitation prise avec une caméra thermique (source : [La Nouvelle République.fr](http://LaNouvelleRepublique.fr)).

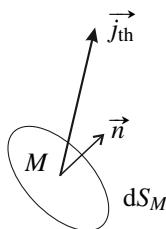
La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude du transfert thermique conductif à travers un matériau solide et opaque (dans ce cas il ne peut y avoir ni transfert convectif, ni transfert radiatif).

## 2 Le courant thermique

Le transfert thermique par conduction est transporté par un courant d'énergie à l'intérieur de la matière appelé **courant thermique**. Il apparaît un courant thermique à travers tout matériau dont la température n'est pas uniforme. Dans cette situation on n'a pas équilibre thermodynamique, mais on fait l'hypothèse de l'**équilibre thermodynamique local** (voir chapitre précédent). On note  $T(M, t)$  la température en un point  $M$  quelconque du matériau à l'instant  $t$ .

### 2.1 Vecteur densité de courant thermique

Le courant thermique est décrit par un champ vectoriel  $\vec{j}_{\text{th}}(M, t)$ , appelé **densité de courant thermique**.



**Figure 23.3** – Définition du vecteur densité de courant thermique.

On se place en un point  $M$  quelconque à l'intérieur du matériau et on considère une surface élémentaire  $dS_M$  autour de  $M$  (voir figure 23.3). On choisit un vecteur unitaire  $\vec{n}$  orthogonal à cette surface (il y a deux possibilités). La définition du vecteur de  $\vec{j}_{\text{th}}(M, t)$  est la suivante :

La quantité d'énergie qui traverse  $dS_M$  dans le sens du vecteur  $\vec{n}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta^2 Q = \vec{j}_{\text{th}}(M, t) \cdot \vec{n} dS_M dt. \quad (23.1)$$

Le vecteur  $\vec{j}_{\text{th}}$  donne la direction dans laquelle l'énergie se déplace ; sa norme indique l'importance du courant d'énergie. Par exemple,  $\delta^2 Q$  est nul si  $\vec{j}_{\text{th}}$  est tangent à la surface (perpendiculaire à  $\vec{n}$ ) : l'énergie longe la surface sans la traverser.

#### Remarques

1. Le transfert thermique  $\delta^2 Q$  est algébrique : positif si l'énergie passe dans le sens du vecteur  $\vec{n}$  et négatif si elle passe dans l'autre sens.
2. La notation «  $\delta^2 Q$  » indique que ce transfert thermique est deux fois élémentaire : parce que la surface  $dS_M$  est élémentaire et parce que la durée  $dt$  est élémentaire.

Quelle est l'unité de  $\|\vec{j}_{\text{th}}\|$  ? D'après l'équation (23.1) on a la relation suivante entre unités :

$$J = [\|\vec{j}_{\text{th}}\|] \cdot m^2 \cdot s,$$

donc  $\|\vec{j}_{\text{th}}\|$  se mesure en  $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ , soit en  $W \cdot m^{-2}$ .

## 2.2 Flux thermique

Comme au chapitre précédent, on appelle **flux thermique** la puissance du transfert thermique. Ainsi, le flux thermique élémentaire traversant la surface  $dS_M$  dans le sens de  $\vec{n}$  est :

$$d\Phi = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_{\text{th}}(M, t) \cdot \vec{n} dS_M.$$

En utilisant, comme en électromagnétisme, le vecteur surface élémentaire  $\vec{dS}_M = dS_M \vec{n}$ , on écrit ce flux thermique élémentaire sous une forme plus compacte qu'il faut retenir :

$$d\Phi = \vec{j}_{\text{th}}(M, t) \cdot \vec{dS}_M. \quad (23.2)$$

C'est le flux thermique traversant  $\vec{dS}_M$ . On a souvent besoin de calculer le flux thermique traversant une surface, abstraite ou réelle, à l'intérieur du matériau. Cette surface doit être orientée car il faut définir un sens positif pour le passage de l'énergie thermique.

Le flux thermique traversant  $\mathcal{S}$  dans le sens de ses vecteurs surface élémentaire  $\vec{dS}_M$  est :

$$\Phi(t) = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}}(M, t) \cdot \vec{dS}_M. \quad (23.3)$$

### Remarque

Le flux thermique traversant  $\vec{dS}_M$  n'est autre que le flux (au sens mathématique) du champ de vecteurs  $\vec{j}_{\text{th}}$  à travers  $\mathcal{S}$ .

## 3 Loi de Fourier - Conductivité thermique

### 3.1 Loi phénoménologique de Fourier

Le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{\text{th}}$  est lié au gradient du champ de température  $T(M, t)$  dans le matériau par la **loi de Fourier** :

$$\vec{j}_{\text{th}}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t), \quad (23.4)$$

où  $\lambda$  est une grandeur positive appelée **conductivité thermique** du matériau.

Quelle est l'unité de la conductivité thermique ? On a vu que  $\|\vec{j}_{\text{th}}\|$  est en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\|\overrightarrow{\text{grad}} T\|$  est en  $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$ . L'homogénéité de la relation (23.4) s'écrit :

$$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} = [\lambda] \cdot \text{K} \cdot \text{m}^{-1},$$

donc  $\lambda$  se mesure en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Remarques

1. Le signe «  $-$  » dans la loi de Fourier traduit le fait que l'énergie se déplace des régions chaudes vers les régions froides puisque, d'après les propriétés du gradient, le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} T$  pointe dans la direction dans laquelle la température augmente. Ce sens du transfert thermique est déterminé par le second principe de la thermodynamique.
2. La loi de Fourier traduit un phénomène irréversible. En effet, si on inverse le sens du temps, le vecteur  $\vec{j}_{\text{th}}$  change de sens, mais pas le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} T$  donc la loi de Fourier n'est plus vérifiée.

## 3.2 Limites de validité de la loi de Fourier

La loi de Fourier est une *loi phénoménologique*, c'est-à-dire une relation permettant de décrire efficacement des phénomènes observés mais qui n'a pas de fondement théorique. Une loi phénoménologique ne se démontre pas.

En tant que loi phénoménologique, la loi de Fourier n'est pas valable dans tous les cas :

- Si le gradient thermique est trop fort, la relation entre le flux thermique et ce gradient cesse d'être assimilable à une loi linéaire.
- Si le gradient thermique varie trop rapidement dans le temps, la relation entre le flux thermique et ce gradient cesse d'être instantanée ; il y a un retard dans l'établissement du flux thermique.
- Il existe des milieux anisotropes dont la conductivité thermique dépend de la direction de l'espace : par exemple le graphite a une conductivité 400 fois plus forte dans une direction parallèle aux couches atomiques que perpendiculairement à celles-ci. Dans un tel milieu le flux thermique n'est plus nécessairement colinéaire au gradient de température.

## 3.3 Ordre de grandeur des conductivités thermiques

La conductivité thermique dépend du matériau, et varie avec la température.

Les métaux purs solides ont les conductivités thermiques les plus fortes, typiquement de l'ordre de  $100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . En première approximation la conductivité thermique d'un métal est proportionnelle à sa conductivité électrique. Le cuivre est ainsi un très bon conducteur de la chaleur avec lequel on fait des casseroles de très bonne qualité, et un très bon conducteur électrique avec lequel on fait des fils électriques.

Les solides non métalliques ont des conductivités thermiques allant, en ordre de grandeur, de  $10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  à  $10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Les liquides ont des conductivités thermiques de l'ordre de  $10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  à  $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . La conductivité thermique d'un gaz est de l'ordre de  $10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Les « isolants thermiques » sont des matériaux composites. Une première possibilité est d'avoir un matériau solide finement dispersé dans un volume essentiellement rempli d'air ce qui est le cas de la laine de verre. Dans un matériau comme le polystyrène expansé, une matrice solide contient de nombreuses cavités remplies d'air. Le transfert thermique à l'intérieur de tels matériaux peut faire intervenir plusieurs modes : conduction dans la partie solide,

conduction et rayonnement dans les interstices ou les cavités (on évite la convection s'ils sont petits). On peut mesurer une conductivité thermique effective qui est en général de l'ordre de  $10^{-2} - 10^{-1} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

| matériaux                         | $\lambda$ à 300 K en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
|-----------------------------------|---|
| cuivre                            | $4,0 \cdot 10^2$  |
| acier                             | $\simeq 50$   |
| verre                             | $\simeq 1$  |
| eau                               | $6,0 \cdot 10^{-1}$   |
| air (sous $P = 10^5 \text{ Pa}$ ) | $2,6 \cdot 10^{-2}$   |

Tableau 23.1 – Quelques valeurs de conductivité thermique.

Le tableau 23.1 donne quelques valeurs de conductivités thermiques dont il faut savoir citer l'ordre de grandeur.

#### Remarque

L'échelle des conductivités thermiques est assez réduite : il y a seulement un facteur  $10^4$  entre la valeur la plus faible et la valeur la forte observées. L'échelle des conductivités électriques est bien plus étendue.

## 4 Équation locale de bilan thermique

L'application du **premier principe de la thermodynamique** entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$  à un volume élémentaire d'un matériau parcouru par un courant thermique permet d'obtenir une équation locale reliant le champ de température  $T(M, t)$  et le vecteur densité de courant thermique  $j_{\text{th}}$  dans le matériau. On établira cette équation dans trois géométries, avant d'en admettre la généralisation.

On suppose que le matériau est un solide indilatable et incompressible. Il est caractérisé par trois grandeurs que l'on supposera constantes :

- sa masse volumique  $\mu$ ,
- sa capacité thermique massique  $c$ ,
- sa conductivité thermique  $\lambda$ .

### 4.1 Bilan thermique local à une dimension

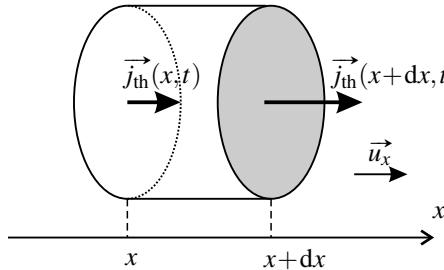
Dans ce paragraphe on suppose que la température ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace,  $x$  par exemple, et du temps :  $T(M, t) = T(x, t)$ .

Alors,  $\overrightarrow{\text{grad}} T(M, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$  et, d'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant thermique est :  $\vec{j}_{\text{th}}(M, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$ . Il est de la forme :

$$\vec{j}_{\text{th}}(M, t) = j_{\text{th}}(x, t) \vec{u}_x.$$

On prend pour système  $\Sigma$  la portion de matériau contenue dans un cylindre droit dont les deux

bases, de surface  $S$ , sont comprises dans les plans  $x$  et  $x + dx$ . Le volume de  $\Sigma$  est  $Sdx$  (voir figure 23.4), sa masse  $\mu Sdx$  et sa capacité thermique  $\mu c Sdx$ .



**Figure 23.4** – Surface de contrôle pour un bilan thermique à 1 dimension.

On veut appliquer le premier principe de la thermodynamique à  $\Sigma$  entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$ . Dans le cadre d'une approximation du premier ordre en  $dx$  on peut considérer que la température dans  $\Sigma$  est uniformément égale à  $T(x, t)$ . La variation élémentaire d'énergie interne de  $\Sigma$  est alors :

$$d^2U = \mu c Sdx(T(x, t + dt) - T(x, t)) = \mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} Sdxdt,$$

en faisant un développement limité au premier ordre en  $dt$ .

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  ne reçoit aucun travail, car le matériau solide est indilatable et incompressible :

$$\delta^2W = 0.$$

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  reçoit par conduction du transfert thermique de la part du reste du matériau. En appliquant la formule (23.1) page 730 on exprime :

- le transfert thermique à travers la face d'abscisse  $x$  :

$$\delta Q_x = \vec{j}_{th}(x, t) \cdot \vec{u}_x Sdt = j_{th}(x, t) Sdt,$$

- le transfert thermique à travers la face d'abscisse  $x + dx$  :

$$\delta Q_{x+dx} = \vec{j}_{th}(x + dx, t) \cdot (-\vec{u}_x) Sdt = -j_{th}(x + dx, t) Sdt.$$

Le transfert thermique *reçu* par  $\Sigma$  traverse la base d'abscisse  $x$  (resp.  $x + dx$ ) dans le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}_x$  (resp.  $-\vec{u}_x$ ).

Le transfert thermique total reçu par  $\Sigma$  est :

$$\delta^2Q = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = (j_{th}(x, t) - j_{th}(x + dx, t)) Sdt = -\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} Sdxdt,$$

en faisant un développement limité au premier ordre en  $dx$ .

Le premier principe pour  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$d^2U = \delta^2W + \delta^2Q \quad \text{soit} \quad \mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} Sdxdt = 0 - \frac{\partial j_{\text{th}}(x,t)}{\partial x} Sdxdt.$$

En simplifiant par  $Sdxdt$  on obtient l'**équation locale de bilan thermique** à 1 dimension :

$$\mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}(x,t)}{\partial x} = 0 . \quad (23.5)$$

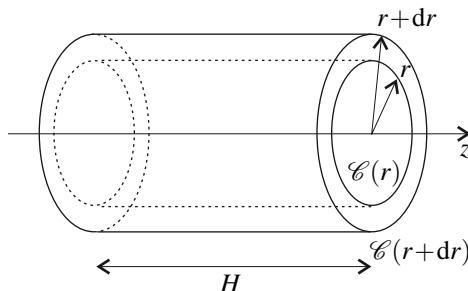
## 4.2 Bilan thermique local en symétrie cylindrique

On considère dans ce paragraphe le cas où la répartition de température dans le matériau est à symétrie cylindrique autour d'un axe ( $Oz$ ). On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  autour de cet axe. La température n'est fonction que de  $r$  et de  $t$  :  $T(M, t) = T(r, t)$ .

Alors,  $\overrightarrow{\text{grad}}T(M, t) = \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$  et, d'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant thermique est :  $\vec{j}_{\text{th}}(M, t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$ . Il est de la forme :

$$\vec{j}_{\text{th}}(M, t) = j_{\text{th}}(r, t) \vec{u}_r.$$

On considère comme système  $\Sigma$  la portion de matériau comprise entre les cylindres  $\mathcal{C}(r)$  et  $\mathcal{C}(r+dr)$  d'axe ( $Oz$ ), de rayons respectifs  $r$  et  $r+dr$  et de même hauteur  $H$  (voir figure 23.5). Le volume de  $\Sigma$  est  $2\pi H r dr$ , sa masse  $\mu 2\pi H r dr$  et sa capacité thermique  $\mu c 2\pi H r dr$ .



**Figure 23.5 –** Système  $\Sigma$  pour un bilan thermique en symétrie cylindrique.

Dans le cadre d'un calcul au premier ordre en  $dr$  on peut considérer que la température dans  $\Sigma$  est uniformément égale à  $T(r, t)$ . La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est alors :

$$d^2U = \mu c 2\pi H r dr \times (T(r, t + dt) - T(r, t)) = \mu c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} 2\pi H r dr dt,$$

au premier ordre en  $dt$ .

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,  $\Sigma$  ne reçoit pas de travail car le matériau solide est indilatable et incompressible :

$$\delta^2 W = 0.$$

Pour calculer le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  on appelle  $\Phi(r,t)$  le flux thermique traversant le cylindre  $\mathcal{C}(r)$  dans le sens du vecteur  $\vec{u}_r$ . D'après la formule (23.3) page 731 :

$$\Phi(r,t) = \iint_{M \in \mathcal{C}(r)} (j_{\text{th}}(r,t) \vec{u}_r) \cdot (\text{d}S_M \vec{u}_r) = j_{\text{th}}(r,t) \iint_{M \in \mathcal{C}(r)} \text{d}S_M = j_{\text{th}}(r,t) \times 2\pi H r.$$

Le transfert thermique *reçu* par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

- à travers le cylindre  $\mathcal{C}(r)$  :  $\delta Q_r = \Phi(r,t)dt$ ,
  - à travers le cylindre  $\mathcal{C}(r+dr)$  :  $\delta Q_{r+dr} = -\Phi(r+dr,t)dt$ ,
- soit au total :

$$\begin{aligned} \delta^2 Q &= \delta Q_r + \delta Q_{r+dr} = (\Phi(r,t) - \Phi(r+dr,t)) dt = -\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r} dr dt \\ &= -\frac{\partial (r j_{\text{th}}(r,t))}{\partial r} 2\pi H dr dt, \end{aligned}$$

au premier ordre en  $dr$ .

 Le signe «  $-$  » devant le flux  $\Phi(r+dr,t)$  est nécessaire car ce flux thermique traverse  $\mathcal{C}(r+dr)$  vers l'*extérieur* du système  $\Sigma$ .

Le développement limité au premier ordre de la différence  $\Phi(r+dr,t) - \Phi(r,t)$  fait apparaître le facteur  $dr$ .

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour  $\Sigma$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$d^2 U = \delta^2 W + \delta^2 Q \quad \text{soit} \quad \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} 2\pi H r dr dt = 0 - \frac{\partial (r j_{\text{th}}(r,t))}{\partial r} 2\pi H dr dt.$$

En divisant par  $2\pi H r dr dt$ , on obtient l'équation locale de bilan thermique en symétrie cylindrique :

$$\mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{\text{th}}(r,t))}{\partial r} = 0. \quad (23.6)$$

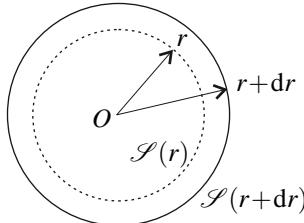
### 4.3 Bilan thermique local en symétrie sphérique

On considère dans ce paragraphe le cas où la répartition de température dans le matériau est à symétrie sphérique autour d'un point  $O$ . On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  autour de ce point. La température n'est fonction que de  $r$  et de  $t$  :  $T(M,t) = T(r,t)$ .

Alors,  $\overrightarrow{\text{grad}} T(M,t) = \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r$  et, d'après la loi de Fourier, le vecteur densité de courant thermique est :  $\overrightarrow{j_{\text{th}}}(M,t) = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r$ . Il est de la forme :

$$\overrightarrow{j_{\text{th}}}(M,t) = j_{\text{th}}(r,t) \vec{u}_r.$$

On considère comme système  $\Sigma$  la portion de matériau comprise entre les sphères  $\mathcal{S}(r)$  et  $\mathcal{S}(r+dr)$  de centre  $O$ , de rayons respectifs  $r$  et  $r+dr$  (voir figure 23.6). Le volume de  $\Sigma$  est  $4\pi r^2 dr$ , sa masse  $\mu c 4\pi r^2 dr$  et sa capacité thermique  $\mu c 4\pi r^2 dr$ .



**Figure 23.6 –** Système  $\Sigma$  pour un bilan thermique en symétrie sphérique.

Dans le cadre d'un calcul au premier ordre en  $dr$  on peut considérer que la température dans  $\Sigma$  est uniformément égale à  $T(r,t)$ . La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t+dt$  est alors :

$$d^2U = \mu c 4\pi r^2 dr \times (T(r,t+dt) - T(r,t)) = \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt,$$

au premier ordre en  $dt$ .

Entre les instants  $t$  et  $t+dt$ ,  $\Sigma$  ne reçoit pas de travail car le matériau solide est indilatable et incompressible :

$$\delta^2 W = 0.$$

Pour calculer le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  on appelle  $\Phi(r,t)$  le flux thermique traversant la sphère  $\mathcal{S}(r)$  dans le sens du vecteur  $\vec{u}_r$ . D'après la formule (23.3) :

$$\Phi(r,t) = \iint_{M \in \mathcal{S}(r)} (j_{th}(r,t) \vec{u}_r) \cdot (dS_M \vec{u}_r) = j_{th}(r,t) \iint_{M \in \mathcal{S}(r)} dS_M = j_{th}(r,t) \times 4\pi r^2.$$

Le transfert thermique *reçu* par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t+dt$  est :

- à travers la sphère  $\mathcal{S}(r)$  :  $\delta Q_r = \Phi(r,t) dt$ ,
  - à travers la sphère  $\mathcal{S}(r+dr)$  :  $\delta Q_{r+dr} = -\Phi(r+dr,t) dt$ ,
- soit au total :

$$\begin{aligned} \delta^2 Q &= \delta Q_r + \delta Q_{r+dr} = (\Phi(r,t) - \Phi(r+dr,t)) dt = -\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r} dr dt \\ &= -\frac{\partial (r^2 j_{th}(r,t))}{\partial r} 4\pi dr dt, \end{aligned}$$

au premier ordre en  $dr$ .

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour  $\Sigma$ , entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :

$$d^2U = \delta^2 W + \delta^2 Q \quad \text{soit} \quad \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt = 0 - \frac{\partial (r^2 j_{th}(r,t))}{\partial r} 4\pi dr dt.$$

En divisant par  $4\pi r^2 dr dt$ , on obtient l'équation locale de bilan thermique en symétrie sphérique :

$$\mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{\text{th}}(r,t))}{\partial r} = 0 . \quad (23.7)$$

 Il n'est pas demandé de mémoriser les équations (23.5), (23.6) et (23.7), mais de savoir faire le raisonnement qui y conduit.

#### 4.4 Complément : équation locale de bilan thermique

Les équations (23.5), (23.6) et (23.7) sont les expressions dans trois cas particuliers d'une équation générale qui s'écrit :

$$\mu c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}}(M,t) = 0 . \quad (23.8)$$

Cette équation se démontre en appliquant le premier principe de la thermodynamique entre  $t$  et  $t + dt$  au système  $\Sigma$  constitué par la matière à l'intérieur d'une surface de contrôle  $\mathcal{S}$  quelconque délimitant un volume  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ .

La variation d'énergie interne de  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est, au premier ordre en  $dt$  :

$$dU = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} (T(M, t + dt) - T(M, t)) (\mu c d\tau_M) = \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} d\tau_M \right) dt .$$

$\Sigma$  ne reçoit aucun travail car le matériau solide est indilatable et indéformable. Le transfert thermique *reçu* par  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta Q = \left( - \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}}(P, t) \cdot \vec{dS}_P \right) dt ,$$

où le signe «  $-$  » provient du fait que la surface fermée  $\mathcal{S}$  est, par convention, orientée vers l'extérieur.

Le premier principe s'écrit ainsi, après simplification par  $dt$  :

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} d\tau_M = - \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}}(P, t) \cdot \vec{dS}_P .$$

Le deuxième terme de la formule précédente peut se transformer par le théorème d'Ostrogradski (voir appendice mathématique) :

$$\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}}(P, t) \cdot \vec{dS}_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}}(M, t) d\tau_M .$$

Il vient donc :

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \left( \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{th}}(M, t) \right) d\tau_M = 0.$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ , on a nécessairement l'équation (23.8).

## 5 Équation de la diffusion thermique

L'équation de diffusion thermique est une équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de température  $T(M, t)$  dans un matériau solide. Elle est à la base de la simulation informatique du comportement thermique des systèmes.

### 5.1 Diffusion thermique en l'absence de sources

#### a) Équation de la diffusion thermique à une dimension

On considère dans ce paragraphe le cas où la température dans le matériau ne dépend que de la coordonnée  $x$  :  $T(M, t) = T(x, t)$ .

Dans l'équation locale de bilan thermique  $\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x} = 0$  on peut introduire l'expression  $j_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$  donnée par la loi de Fourier. Il vient :

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}.$$

On appelle **diffusivité thermique** du matériau la quantité :

$$a = \frac{\lambda}{\mu c} .$$

Le champ de température  $T(x, t)$  dans le matériau vérifie l'**équation de diffusion thermique à une dimension** :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} . \quad (23.9)$$

#### b) Diffusivité thermique

Quelle est l'unité de la diffusivité thermique  $a$  ? D'après l'équation (23.9) :

$$\text{K} \cdot \text{s}^{-1} = [a] \times \text{K} \cdot \text{m}^{-2}$$

donc  $a$  se mesure en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut vérifier ce résultat sur l'expression de  $a$  :

$$[a] = \frac{[\lambda]}{[\mu][c_v]} = \frac{\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^{-2} \cdot \text{J}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le tableau 23.2 donne la diffusivité thermique de quelques matériaux.

| matériaux                           | $a \cdot 10^6$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ |
|-------------------------------------|--|
| cuivre                              | 117  |
| acier                               | $\simeq 10$  |
| verre                               | 0,34   |
| eau                                 | 0,14   |
| air (sous $P = 1.10^5 \text{ Pa}$ ) | 20   |

**Tableau 23.2** – Quelques valeurs de diffusivité thermique.**c) Échelles de longueur et de temps associées**

L'équation de diffusion qui relie une dérivée partielle par rapport au temps à une dérivée partielle par rapport à la coordonnée d'espace introduit un lien entre l'échelle de temps  $\tau$  caractéristique des variations temporelles de la température et l'échelle de longueur  $L$  caractéristique des variations spatiales.

**Premier point de vue :** On définit des grandeurs  $t^*$  et  $x^*$  sans dimension par :  $t^* = \frac{t}{\tau}$  et  $x^* = \frac{x}{L}$ . Si on remplace  $x$  et  $t$  par  $Lx^*$  et  $\tau t^*$  dans (23.9), celle-ci devient :

$$\frac{\partial T}{\partial(\tau t^*)} = a \frac{\partial^2 T}{\partial(Lx^*)^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial T}{\partial t^*} = \frac{a\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}}.$$

Les dérivées partielles intervenant dans cette équation sont du même ordre de grandeur par définition même de  $\tau$  et  $L$ . On en déduit :

$$L \sim \sqrt{a\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \tau \sim \frac{L^2}{a}. \quad (23.10)$$

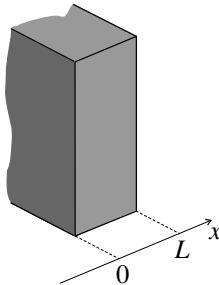
**Second point de vue :** On peut raisonner à partir des ordres de grandeurs. L'ordre de grandeur de  $\frac{\partial T}{\partial t}$  est  $\frac{T^*}{\tau}$  où  $T^*$  est l'ordre de grandeur de  $T$ . Celui de  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  est  $\frac{T^*}{L^2}$ . Ainsi l'équation (23.9) indique que :

$$\frac{T^*}{\tau} \sim a \frac{T^*}{L^2} \quad \Leftrightarrow \quad L \sim \sqrt{a\tau}.$$

On retrouve le même résultat.

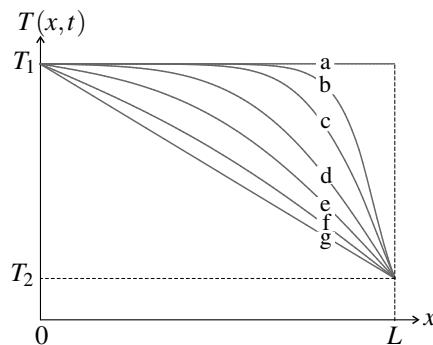
### Exemple

On considère une plaque plane perpendiculaire à l'axe ( $Ox$ ), d'épaisseur  $L$  et de dimensions très grandes devant  $L$  selon les axes ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ).



On suppose que la température dans la plaque est initialement uniformément égale à  $T_1$  et qu'à partir de  $t = 0$  on impose la température  $T_2 < T_1$  à la face  $x = L$  de la plaque tout en maintenant la face  $x = 0$  à la température  $T_1$ .

À partir de l'instant  $t = 0$  la température à l'intérieur de la plaque évolue. Ses dimensions suivant ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ) étant très grandes on peut considérer que le champ de température dépend seulement de la coordonnée  $x$  :  $T(M, t) = T(x, t)$ . Il vérifie l'équation (23.9). La figure 23.7 montre le résultat d'une résolution numérique de cette équation.



**Figure 23.7 –** Température à l'intérieur d'une plaque d'épaisseur  $L$  à différents instants : a :  $t = 0$ , b :  $t = \frac{\tau}{100}$ , c :  $t = \frac{\tau}{50}$ , d :  $t = \frac{\tau}{20}$ , e :  $t = \frac{\tau}{10}$ , f :  $t = \frac{\tau}{5}$ , g :  $t = \tau$  et  $t \gg \tau$ , avec  $\tau = \frac{L^2}{a}$ .

La température initialement est égale à  $T_1$  en tout point (courbe a) évolue avec le temps caractéristique  $\tau = \frac{L^2}{a}$  (courbes b à g). Pour  $t \gg \tau$  la température n'évolue plus ; le profil de température dans la plaque est alors linéaire (ce point sera démontré page 747).

#### d) Cas des symétries cylindrique et sphérique

Dans le cas où le champ de température a la symétrie cylindrique ou sphérique, on peut combiner de la même manière que plus haut l'équation de bilan local d'énergie et la loi de Fourier.

En symétrie cylindrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{\text{th}}(r,t))}{\partial r} = 0 \\ j_{\text{th}}(r,t) = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \end{array} \right. \Rightarrow \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = 0,$$

soit :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right). \quad (23.11)$$

En symétrie sphérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{\text{th}}(r,t))}{\partial r} = 0 \\ j_{\text{th}}(r,t) = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \end{array} \right. \Rightarrow \mu c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = 0,$$

soit :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right). \quad (23.12)$$

Les équations (23.11) et (23.12) sont l'expression de l'équation de diffusion thermique en symétrie cylindrique et sphérique respectivement. Il faut savoir les établir mais elles ne sont pas à retenir.

#### e) Cas d'une géométrie quelconque

Qu'y a-t-il de commun entre les équations (23.9), (23.11) et (23.12) ? Il s'agit de l'expression dans trois cas particuliers de l'équation de diffusion thermique sous sa forme générale.

L'équation de la diffusion thermique s'écrit dans une géométrie quelconque :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M,t), \quad (23.13)$$

où  $\Delta T$  est le laplacien du champ de température et  $a$  la **diffusivité thermique**.

Pour établir cette équation, on suit la même démarche que plus haut : on injecte l'expression du vecteur densité de courant thermique de la loi de Fourier (23.4) dans l'équation de bilan local d'énergie (23.8). Il vient :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \left( -\lambda \vec{\operatorname{grad}} T \right) = 0,$$

ce qui donne bien l'équation (23.13) puisque  $\operatorname{div}(\vec{\text{grad}}) = \Delta$ .

L'équation de diffusion thermique est d'une grande utilité pratique car elle permet de calculer la température  $T(M, t)$  au sein d'un matériau. Cependant, une résolution analytique n'est possible que pour des géométries très simples. Dans le cas où la géométrie est plus compliquée il faut recourir à des méthodes de résolution numérique.

## 5.2 Diffusion thermique en présence de sources

Il existe des matériaux à l'intérieur desquels s'opère un processus dégageant (ou absorbant) de l'énergie. Par exemple :

- l'effet Joule dans un conducteur ohmique parcouru par un courant électrique,
- des réactions nucléaires dans un matériau radioactif.

Le dégagement d'énergie est modélisé par la **puissance volumique produite**, que l'on notera  $\mathcal{P}_V(M, t)$ . Par définition, la puissance dégagée dans un volume élémentaire  $d\tau_M$  autour d'un point  $M$  à l'instant  $t$  est :

$$d\mathcal{P}_{\text{prod}} = \mathcal{P}_V(M, t)d\tau_M .$$

L'unité de  $\mathcal{P}_V$  est donnée par l'homogénéité de cette relation :  $\text{W} = [\mathcal{P}_V] \times \text{m}^3$ , donc  $\mathcal{P}_V$  se mesure en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### Exemple

Dans un conducteur ohmique de conductivité électrique  $\gamma$  parcouru par un courant de densité volumique  $\vec{j}(M, t)$ , la puissance volumique dissipée par effet Joule est, d'après le cours d'électromagnétisme :

$$\mathcal{P}_{V, \text{Joule}}(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) = \frac{1}{\gamma} j^2(M, t),$$

où  $\vec{E}(M, t)$  est le champ électrique relié à la densité de courant électrique par la loi d'Ohm :  $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$ .

Attention dans ce cas à ne pas confondre le vecteur densité de courant électrique  $\vec{j}$  avec le vecteur densité de courant thermique  $j_{\text{th}}$  !

Dans un tel matériau, l'équation de diffusion thermique (23.13) n'est pas valable car elle ne tient pas compte de la production d'énergie thermique. On la remplace par l'équation de la diffusion thermique en présence de sources donnée ci-dessous.

**L'équation de la diffusion thermique en présence de sources** s'écrit :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T(M, t) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_V(M, t). \quad (23.14)$$

La démonstration de cette équation n'est pas au programme. On la donne ici dans le cas unidimensionnel à titre de complément. La variation d'énergie interne du cylindre  $\Sigma$  représenté sur la figure 23.4 page 733, entre les instant  $t$  et  $t + dt$ , est :  $d^2U = \mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt$ .  $\Sigma$  ne reçoit

pas de travail ; il reçoit le transfert thermique conductif :  $\delta^2 Q = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dx dt$  et de plus reçoit de la part des sources l'énergie :

$$d\mathcal{P}_{prod} dt = \mathcal{P}_V(x, t) S dx dt.$$

Le premier principe pour  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit alors :

$$d^2 U = \delta^2 W + \delta^2 Q + d\mathcal{P}_{prod} dt$$

soit :

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dx dt + \mathcal{P}_V(x, t) S dx dt$$

d'où :

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}}{\partial x} = \mathcal{P}_V(x, t),$$

qui est l'équation locale de bilan thermique modifiée pour tenir compte du terme source. Si l'on introduit l'expression  $j_{th}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$  dans cette relation on trouve :

$$\frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_V(x, t),$$

qui est l'équation (23.14) dans le cas particulier unidimensionnel.

### 5.3 Conditions aux limites pour le champ de température

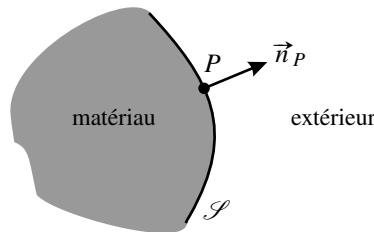


Figure 23.8 – Conditions aux limites.

Pour résoudre l'équation de diffusion thermique (avec ou sans terme source) il faut déterminer les **conditions aux limites** qui sont vérifiées en chaque point de la surface  $S$  délimitant le matériau dans lequel on calcule la température. On note  $P$  un point de cette surface et  $\vec{n}_P$  le vecteur normal à la surface en ce point dirigé vers l'extérieur du matériau.

#### a) Cas d'un contact parfait entre deux matériaux solides

Dans ce cas, il y a en  $P$  :

- continuité du champ de température :

$$(T(P,t))_{\text{solide } 1} = (T(P,t))_{\text{solide } 2},$$

- continuité de la composante normale du vecteur densité de courant thermique :

$$(\vec{j}_{\text{th}}(P,t))_{\text{solide } 1} \cdot \vec{n}_P = (\vec{j}_{\text{th}}(P,t))_{\text{solide } 2} \cdot \vec{n}_P.$$

Cette condition est nécessaire car le flux thermique à travers une surface  $dS_P$  autour de  $P$  est identique, qu'on le calcule du côté du solide 1 ou du côté du solide 2 :

$$d\Phi = (\vec{j}_{\text{th}})_{\text{solide } 1} \cdot (dS_P \vec{n}_P) = (\vec{j}_{\text{th}})_{\text{solide } 2} \cdot (dS_P \vec{n}_P).$$

### Remarque

Si le contact thermique n'est pas parfait (par exemple il y a une poche d'air entre les deux solides), la première condition n'est plus valable.

## b) Cas d'un contact avec un fluide, loi de Newton

Lorsque le matériau solide est en contact en  $P$  avec un fluide de température  $T_f$ , le flux thermique élémentaire passant du solide au fluide à travers la surface  $dS_P$  est donné par la **loi de Newton** :

$$d\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T(P,t) - T_f)dS_P , \quad (23.15)$$

où  $h$  est une constante appelée **coefficent de transfert thermique de surface**. L'unité de ce coefficient est donnée par l'homogénéité de la relation (23.15) :  $\text{W} = [\text{h}] \times \text{K} \times \text{m}^2$ , donc  $h$  se mesure en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Sa valeur dépend de la nature du fluide et de sa vitesse, ainsi que de l'état de la surface solide.  $h$  augmente avec la conductivité thermique du fluide ; il est plus grand pour un liquide que pour un gaz.  $h$  est plus fort pour une convection forcée que pour une convection naturelle. Des valeurs typiques sont données dans le tableau 23.3.

| fluide        | type de transfert    | $h$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ |
|---------------|----------------------|---|
| gaz           | convection naturelle | 5 – 30  |
|               | convection forcée    | 10 – 300  |
| eau           | convection naturelle | 100 – 1000  |
|               | convection forcée    | 300 – 12000   |
| métal liquide | convection forcée    | 6000 – 110000   |

Tableau 23.3 – Ordre de grandeur du coefficient de transfert de la loi de Newton

Dans le cas où la loi de Newton s'applique, la condition aux limites en  $P$  exprime le fait que le flux thermique passant du solide au fluide à travers  $dS_P$  est le même qu'on le calcule du côté du solide, avec le vecteur densité de courant thermique (flux conductif), ou du côté du liquide par (23.15) :  $d\Phi = \vec{j}_{\text{th}}(P,t) \cdot (dS_P \vec{n}_P) = h(T(P,t) - T_f)dS_P$  soit :

$$\vec{j}_{\text{th}}(P,t) \cdot \vec{n}_P = h(T(P,t) - T_f).$$

**Remarque**

Si le coefficient  $h$  tend vers l'infini, cette condition implique que  $T(P,t) = T_f$  (car la norme du vecteur densité de courant thermique ne peut être infinie). Dans ce cas le fluide impose sa température au solide. C'est une modélisation courante.

**c) Cas où le flux thermique est imposé**

Une paroi adiabatique impose que le flux thermique  $d\Phi$  à travers  $dS_P$  est nul. Dans cette modélisation :

$$\vec{j}_{\text{th}}(P,t) \cdot \vec{n}_P = 0.$$

On peut aussi imposer un flux d'énergie de puissance surfacique connue  $j_0(t)$ . Dans ce cas :

$$\vec{j}_{\text{th}}(P,t) \cdot \vec{n}_P = -j_0(t),$$

avec un signe – si  $j_0$  est dirigé vers le matériau.

**5.4 Champ de température en régime stationnaire**

Dans ce paragraphe on se place en **régime stationnaire** : la température et le vecteur densité de courant thermique ne dépendent pas du temps. On les notera donc  $T(M)$  et  $\vec{j}_{\text{th}}(M)$ .

**a) Cas où il n'y a pas de sources**

En régime stationnaire le champ de températures dans un matériau dépourvu de sources de chaleur vérifie l'**équation de Laplace** :

$$\Delta T(M) = 0. \quad (23.16)$$

Il s'agit de l'équation de diffusion sans terme source (23.13) dans laquelle  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ .

L'équation de Laplace se résout aisément dans les géométries simples :

**Cas unidimensionnel** Si la température ne dépend que de  $x$  l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

 L'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

doit être connue.

On peut utiliser ici le symbole « d droit » car  $x$  est ici la seule variable dont la

température dépend.

On en déduit :  $\frac{dT}{dx} = A$ , puis  $T(x) = Ax + B$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Ces constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites s'appliquant à la surface du matériau. Si, par exemple, le matériau s'étend entre  $x = 0$  et  $x = L$  et que l'on impose les températures  $T(0) = T_1$  et  $T(L) = T_2$ , il vient :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x. \quad (23.17)$$

**Cas de la symétrie cylindrique** Si la température ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ) l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

 Il s'agit de l'équation (23.11) dans le cas où la température ne dépend pas de  $t$ . On peut utiliser ici le symbole « d droit » car  $r$  est ici la seule variable dont  $T$  dépend.

On peut aussi écrire cette équation à partir de l'expression (fournie par un énoncé) du laplacien en coordonnées cylindriques.

On en déduit :  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$  puis  $r \frac{dT}{dr} = A$  puis  $T(r) = A \ln r + B$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Ces constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites s'appliquant à la surface du matériau. Si, par exemple, le matériau s'étend entre  $r = R_1$  et  $r = R_2$  et que l'on impose les températures  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ , il vient :

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln \left( \frac{r}{R_1} \right)}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}. \quad (23.18)$$

**Cas de la symétrie sphérique** Si la température ne dépend que de la distance  $r$  au point  $O$ , l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

 Il s'agit de l'équation (23.12) dans le cas où la température ne dépend pas de  $t$ . On peut utiliser ici le symbole « d droit » car  $r$  est ici la seule variable dont  $T$  dépend.

On peut aussi écrire cette équation à partir de l'expression (fournie par un énoncé) du laplacien en coordonnées cylindriques.

On en déduit :  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$  puis  $r^2 \frac{dT}{dr} = A$  puis  $T(r) = \frac{A}{r} + B$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Ces constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites s'appliquant à

la surface du matériau. Si, par exemple, le matériau s'étend entre  $r = R_1$  et  $r = R_2$  et que l'on impose les températures  $T(R_1) = T_1$  et  $T(R_2) = T_2$ , il vient :

$$T(r) = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1} - \frac{(T_2 - T_1) R_1 R_2}{(R_2 - R_1) r}. \quad (23.19)$$

### b) Cas où il existe des sources

En régime permanent, l'équation de la diffusion thermique avec source (23.14) s'écrit :

$$\Delta T(M) = -\frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_V(M). \quad (23.20)$$

#### Exemple

Un matériau dans lequel une puissance volumique constante et uniforme  $\mathcal{P}_V(M) = \mathcal{P}_0$  est produite remplit la portion d'espace comprise entre les plans  $x = 0$  et  $x = L$ . La paroi  $x = 0$  est adiabatique et la paroi  $x(L)$  maintenue à la température  $T_0$ . Quelle est la température maximale dans le matériau en régime permanent ?

On va chercher la température  $T(x)$  dans le matériau en régime permanent. L'équation (23.20) s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\mathcal{P}_0}{\lambda}.$$

On en déduit :  $\frac{dT}{dx} = -\frac{\mathcal{P}_0}{\lambda}x + A$ , puis  $T(x) = -\frac{\mathcal{P}_0}{2\lambda}x^2 + Ax + B$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Les conditions aux limites sont :

- en  $x = 0$ , la paroi est adiabatique donc :

$$j_{\text{th}}(0) = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda \frac{dT}{dx}(0) = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda A = 0 ;$$

- en  $x = L$ , la température est imposée  $T(L) = T_0$  donc :

$$-\frac{\mathcal{P}_0}{2\lambda}L^2 + AL + B = T_0.$$

Il vient donc  $A = 0$  et  $B = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0 L^2}{2\lambda}$ . Finalement :  $T(x) = \frac{\mathcal{P}_0}{2\lambda}(L^2 - x^2) + T_0$ . La température maximale est :

$$T_{\max} = T(0) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0 L^2}{2\lambda}.$$

## 5.5 Approche numérique : exemples de résolution de l'équation de diffusion thermique

### a) Étude en régime variable

L'équation de diffusion, sans ou avec terme source, peut être résolue par simulation numérique. Dans le cas d'une étude en régime variable, le problème est défini par :

- une **condition initiale**, de la forme  $T(M, 0) = T_i(M)$  où  $T_i(M)$  est une fonction connue,
- des **conditions aux limites** pour toute la frontière du domaine spatial sur lequel on calcule la température.

Il existe des logiciels qui fournissent une approximation de la solution  $T(M, t)$  pour des conditions initiale et aux limites données.

**Exemple de modélisation** À titre d'exemple, on étudie une « trempe », opération qui consiste à plonger un corps à une température  $T_1$  dans un liquide de température  $T_2$ . On se propose de dégager les conditions dans lesquelles on peut supposer que la température de l'objet reste quasiment uniforme au cours de l'expérience.

On fait un modèle unidimensionnel : le matériau occupe la partie d'espace comprise entre les plans  $x = 0$  et  $x = L$  (voir figure page 741) et on suppose que la température ne dépend que de la coordonnée  $x$  et du temps :  $T(M, t) = T(x, t)$ .

Le matériau a une conductivité thermique  $\lambda$ , une masse volumique  $\mu$ , une capacité thermique massique  $c$  et une diffusivité thermique  $a$ .

On modélise l'échange thermique entre le matériau et le liquide par une loi de Newton avec un coefficient de transfert thermique de surface  $h$ .

**Nécessité de travailler avec des grandeurs adimensionnées** En simulation numérique on travaille avec des grandeurs sans dimension afin d'éviter de calculer avec des nombres très grands ou bien très petits, ce qui dégraderait la précision du calcul numérique. Il est donc nécessaire de trouver une échelle caractéristique pour chaque grandeur physique et de définir une grandeur adimensionnée.

Par exemple, on définit ici la température adimensionnée  $T^*$  par :  $T^* = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$ . Ainsi, en tout point du matériau  $T^*$  varie de 1 à 0 au cours de l'expérience.

Pour la coordonnée  $x$  l'échelle caractéristique est évidemment  $L$  et on travaillera avec la coordonnée adimensionnée :  $x^* = \frac{x}{L}$  qui prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 1.

**Choix d'une échelle de temps** L'échelle de longueur  $L$  donne une échelle de temps correspondant à la diffusion thermique à l'intérieur du matériau :

$$\tau_d = \frac{L^2}{a}.$$

Il y a aussi un autre temps caractéristique qui est associé au transfert thermique convectif entre le matériau solide et le liquide. En effet, on a vu au chapitre précédent, page 666, que la température, supposée uniforme, d'un solide de volume  $V$  et surface  $A$  en contact avec un

liquide suit une évolution exponentielle de temps caractéristique  $\frac{\mu cV}{Ah}$ . Appliqué à la plaque de surface  $S$ , volume  $V = SL$  et surface en contact avec le liquide  $A = 2S$ , ce résultat donne le temps :

$$\tau_c = \frac{\mu c L}{2h}.$$

On choisit de prendre pour échelle de temps  $\tau_c$  et on définit :  $t^* = \frac{t}{\tau_c}$ .

L'autre temps caractéristique interviendra dans les calculs par le paramètre sans dimension  $\tau_d^* = \frac{\tau_d}{\tau_c}$ . On peut remarquer que :

$$\tau_d^* = \frac{2hL}{\mu ca} = \frac{2hL}{\lambda}.$$

**Condition initiale et conditions aux limites** Initialement la plaque est à la température  $T_1$  donc :

$$T^*(x^*, 0) = 1 \quad \text{pour tout } x^* \in [0, 1].$$

La condition en  $x = 0$  est :  $\vec{j}_{\text{th}}(0, t) \cdot (-\vec{u}_x) = h(T(0, t) - T_2)$  soit  $\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = h(T(0, t) - T_2)$ .

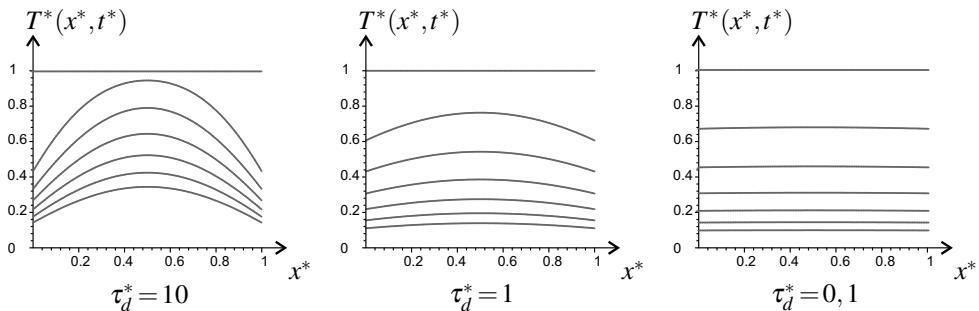
Avec les grandeurs adimensionnées elle s'écrit :  $\frac{\lambda(T_1 - T_2)}{L} \frac{\partial T^*}{\partial x^*}(0, t^*) = h(T_1 - T_2)T^*(0, t^*)$  soit :

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(0, t^*) = \frac{1}{2}\tau_d^*T^*(0, t^*) \quad \text{pour tout } t^* > 0.$$

De manière symétrique, la condition en  $x = L$  s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(1, t^*) = -\frac{1}{2}\tau_d^*T^*(1, t^*) \quad \text{pour tout } t^* > 0.$$

**Résultats** Avec ces conditions initiales on obtient les graphes représentés sur la figure 23.9 pour différentes valeurs de  $\tau_d^*$ .



**Figure 23.9** – Simulation d'une trempe. De haut en bas, chaque courbe correspond à un instant  $t^*$  variant de 0 à 2,4 par pas de 0,4.

On observe clairement que la température dans la plaque tend à rester uniforme au cours du temps si  $\tau_d^*$  devient petit devant 1, soit si :  $\lambda \gg 2hL$ . Dans ce cas la modélisation de la page 666 est valable.

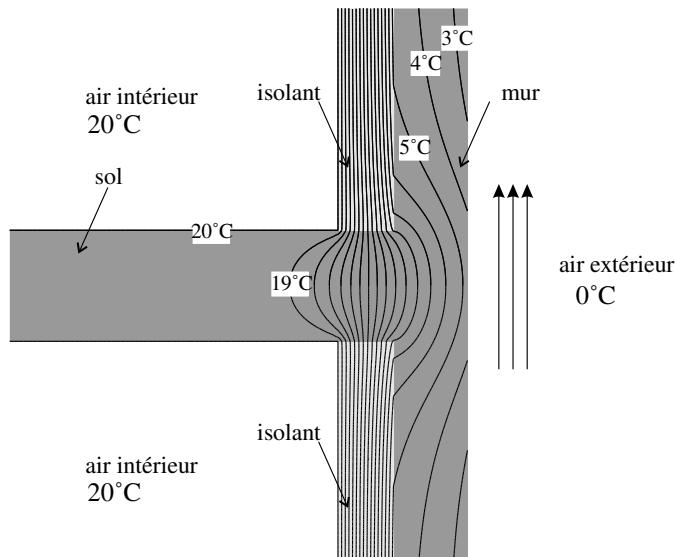
### b) Étude en régime permanent

Pour obtenir la simulation d'une répartition de température en régime stationnaire, il suffit de préciser les conditions aux limites vérifiées par le champ de température et/ou le vecteur densité de courant thermique.

À titre d'exemple, on présente sur la figure 23.10 la simulation d'un mur de maison recouvert par une couche d'isolant thermique qui est interrompue par le sol d'un étage. Le sol et le mur sont en béton de conductivité thermique  $\lambda_1 = 1 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  et l'isolant a une conductivité thermique  $\lambda_2 = \frac{1}{10}\lambda_1$ . L'épaisseur du mur est de  $e_1 = 30 \text{ cm}$ , celle de la couche d'isolant  $e_2 = \frac{3}{4}e_1$  et celle du sol  $e'_1 = \frac{3}{2}e_1$ .

Les conditions aux limites choisies sont :

- les surfaces en contact avec l'air ambiant sont à la température imposée  $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ ,
- la surface extérieure du mur a un échange thermique avec l'air extérieur de température  $T_{\text{ext}} = 0^\circ\text{C}$  qui suit la loi de Newton et le coefficient de transfert thermique de surface est  $h = 3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- les contacts thermiques sol-isolant ou mur-isolant sont des contacts solide-solide thermiquement parfaits.



**Figure 23.10** – Simulation d'un « pont thermique ». Les courbes représentées sont des isothermes. L'écart de température entre deux isothermes est de 1°C.

On observe une déformation des isothermes à l'endroit où l'isolant thermique est interrompu. À cet endroit, les isothermes dans le béton sont plus serrées qu'ailleurs (dans le béton), signe que le gradient thermique est plus fort, donc, d'après la loi de Fourier, que le vecteur densité de courant thermique est plus fort. Il y a donc un supplément de perte thermique dans cette zone : c'est l'effet de « pont thermique ». Par ailleurs, la température de la face extérieure du mur augmente d'environ  $2^{\circ}\text{C}$  à l'endroit où le sol arrive. Cet effet est bien visible sur la photo de la figure 23.2 page 729.

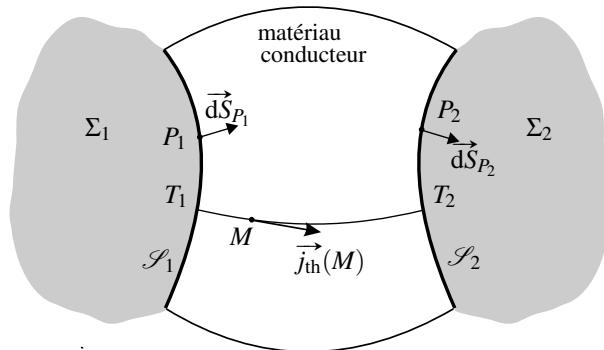
## 6 Résistance thermique

Dans ce paragraphe on s'intéresse au transfert thermique conductif entre un système  $\Sigma_1$  et un système  $\Sigma_2$  séparés par un matériau solide  $\Sigma$  de conductivité thermique  $\lambda$ . On se place en **régime stationnaire** et on suppose que le matériau ne contient pas de source d'énergie thermique.

### 6.1 Définition

Soit  $\mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}_2$ ) la surface de contact entre  $\Sigma_1$  (resp.  $\Sigma_2$ ) et le matériau conducteur. On oriente  $\mathcal{S}_1$  dans le sens  $\Sigma_1 \rightarrow$  conducteur et  $\mathcal{S}_2$  dans le sens conducteur  $\rightarrow \Sigma_2$  (voir figure 23.11).

On suppose la température de la surface  $\mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}_2$ ) uniforme et on la note  $T_1$  (resp.  $T_2$ ).



**Figure 23.11** – Deux systèmes séparés par un conducteur thermique.

Le flux thermique partant de  $\Sigma_1$  à travers le conducteur est :  $\iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \vec{j}_{\text{th}}(P_1) \cdot \vec{dS}_{P_1}$ ; le flux thermique arrivant à  $\Sigma_2$  à travers le conducteur est :  $\iint_{P_2 \in \mathcal{S}_2} \vec{j}_{\text{th}}(P_2) \cdot \vec{dS}_{P_2}$ .

Dans l'hypothèse où toutes les lignes de courant thermique (c'est-à-dire les lignes de champ du vecteur densité de courant thermique) partant de  $\mathcal{S}_1$  arrivent à  $\mathcal{S}_2$ , toute l'énergie partant de  $\Sigma_1$  arrive à  $\Sigma_2$  :

ces deux flux sont donc égaux. Le flux thermique passant par conduction de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$  est alors :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \vec{j}_{\text{th}}(P_1) \cdot \vec{d}\vec{S}_{P_1} = \iint_{P_2 \in \mathcal{S}_2} \vec{j}_{\text{th}}(P_2) \cdot \vec{d}\vec{S}_{P_2}.$$

$\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est proportionnel au courant thermique : si on multiplie le courant thermique par un nombre  $\alpha$ , le flux thermique est lui aussi multiplié par  $\alpha$ .

Par ailleurs, le courant thermique dans le matériau conducteur est donné par la loi de Fourier  $\vec{j}_{\text{th}}(M) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(M)$ . On peut alors écrire :

$$T_1 - T_2 = - \int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2} \overrightarrow{\text{grad}} T(M) \cdot \vec{dl}_M = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2} \vec{j}_{\text{th}}(M) \cdot \vec{dl}_M,$$

où l'intégrale est calculée le long d'une ligne de courant quelconque allant de  $\mathcal{S}_1$  à  $\mathcal{S}_2$ . Ainsi, la différence de température  $T_2 - T_1$  est proportionnelle au courant thermique comme le flux thermique.

Il en résulte que  $T_1 - T_2$  et  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  sont proportionnels entre eux : si on multiplie le courant thermique par un nombre  $\alpha$ , ils sont tous les deux multipliés par  $\alpha$ . Cette propriété permet de poser la définition suivante :

On appelle **résistance thermique**  $R_{\text{th}}$  du conducteur thermique entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , le rapport :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}. \quad (23.21)$$

La résistance thermique s'exprime en  $\text{W}^{-1} \cdot \text{K}$ .

On définit aussi la **conductance thermique** :

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{T_1 - T_2}. \quad (23.22)$$

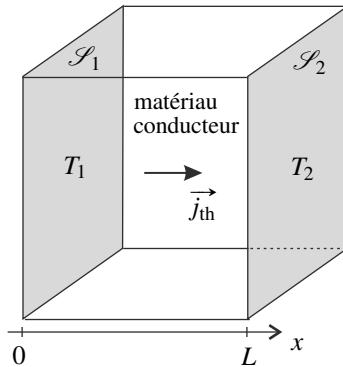
La conductance thermique s'exprime en  $\text{W.K}^{-1}$ .

### Remarque

Une paroi parfaitement diathermique a une résistance thermique nulle et une conductance thermique infinie. Ainsi elle impose :  $T_1 = T_2$ .

Une paroi parfaitement adiabatique a une résistance thermique infinie et une conductance thermique nulle. Ainsi elle impose :  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = 0$ .

## 6.2 Résistance thermique dans le cas d'un transfert unidimensionnel



**Figure 23.12** – Résistance thermique entre deux plans parallèles.

On suppose que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont deux surfaces planes parallèles de même aire  $S$  et séparées par une distance  $L$  (voir figure 23.12). Si  $L$  est petite devant les dimensions des deux surfaces (ce qui n'est pas respecté sur la figure pour une raison de clarté), on peut négliger les effets de bord. La température dans le matériau conducteur ne dépend alors que de la coordonnée  $x$  le long d'un axe perpendiculaire à  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ .

En régime stationnaire et en l'absence de sources, la température dans le matériau est donnée par l'équation (23.17) :  $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$ . On en déduit, par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{\text{th}}(M) = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{u}_x.$$

On calcule ensuite :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \vec{j}_{\text{th}}(P_1) \cdot \vec{d}S_{P_1} = \left( \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{u}_x \right) \cdot (S \vec{u}_x) = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2).$$

On trouve ainsi l'expression de la résistance thermique qu'il faut mémoriser :

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}. \quad (23.23)$$

### Exemple

La résistance thermique d'une vitre d'épaisseur  $e = 5,0$  mm et de surface  $S = 1,0 \text{ m}^2$  vaut  $R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda_{\text{verre}} S} = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  avec  $\lambda_{\text{verre}} = 0,78 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### 6.3 Résistance thermique en géométries cylindrique et sphérique

#### a) Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux

On suppose que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont deux surfaces cylindriques de même axe ( $Oz$ ), de même hauteur  $H$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$  (voir figure 23.13). Si  $R_2 - R_1$  est petit devant  $H$  on peut négliger les effets de bord. La température dans le matériau conducteur ne dépend alors que de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ).

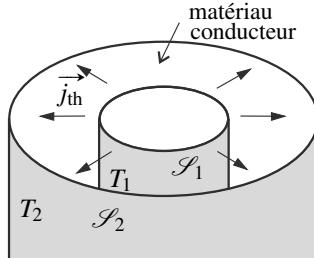


Figure 23.13 – Résistance thermique entre deux cylindres.

En régime stationnaire et en l'absence de sources, la température dans le matériau est donnée par l'équation (23.18) :  $T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$ . On en déduit, par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{\text{th}}(M) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r} \vec{u}_r.$$

On calcule ensuite :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \vec{j}_{\text{th}}(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} = \iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \left( \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{R_1} \vec{u}_r \right) \cdot (dS_{P_1} \vec{u}_r) = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{R_1} 2\pi R_1 H.$$

On trouve ainsi l'expression de la résistance thermique :

$$R_{\text{th}} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi H \lambda}. \quad (23.24)$$

#### Remarque

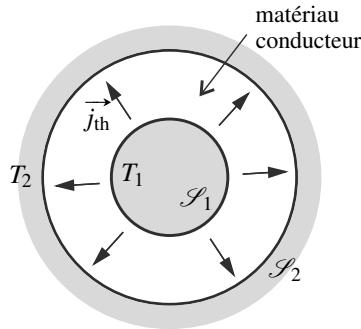
On constate que, pour tout  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = 2\pi r H j_{\text{th}}(r).$$

Ainsi, tous les cylindres coaxiaux entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont traversés par le flux thermique  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ . Cette relation peut être prise pour point de départ du calcul de la résistance thermique (voir exercices).

### b) Résistance thermique entre deux sphères concentriques

On suppose que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont deux sphères de même centre  $O$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$  (voir figure 23.14). Par symétrie, la température dans le matériau conducteur ne dépend que de la distance  $r$  au point  $O$ .



**Figure 23.14** – Résistance thermique entre deux sphères.

En régime stationnaire et en l'absence de sources, la température dans le matériau est donnée par l'équation (23.19) :  $T(r) = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1} - \frac{(T_2 - T_1) R_1 R_2}{(R_2 - R_1) r}$ . On en déduit, par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{\text{th}}(M) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = \lambda \frac{(T_1 - T_2) R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r.$$

On calcule ensuite :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \vec{j}_{\text{th}}(P_1) \cdot d\vec{S}_{P_1} = \iint_{P_1 \in \mathcal{S}_1} \left( \lambda \frac{(T_1 - T_2) R_2}{(R_2 - R_1) R_1} \vec{u}_r \right) \cdot (dS_{P_1} \vec{u}_r) = \lambda \frac{(T_1 - T_2) R_2}{(R_2 - R_1) R_1} 4\pi R_1^2.$$

On trouve ainsi l'expression de la résistance thermique :

$$R_{\text{th}} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_1 R_2 \lambda}. \quad (23.25)$$

#### Remarque

On constate que, pour tout  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = 4\pi r^2 j_{\text{th}}(r).$$

Ainsi, toutes les sphères concentriques entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont traversées par le flux thermique  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ . Cette relation peut être prise pour point de départ du calcul de la résistance thermique.

## 6.4 Lois d'association des résistances thermiques

Dans ce paragraphe conducteurs thermiques différents  $A$  et  $B$  séparent les systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

### a) Association de résistances thermiques en série

Les conducteurs thermiques  $A$  et  $B$  sont en **association série** quand :

- le flux thermique  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  traverse le conducteur  $A$  puis le conducteur  $B$ ,
- la surface de jonction des conducteurs est isotherme.

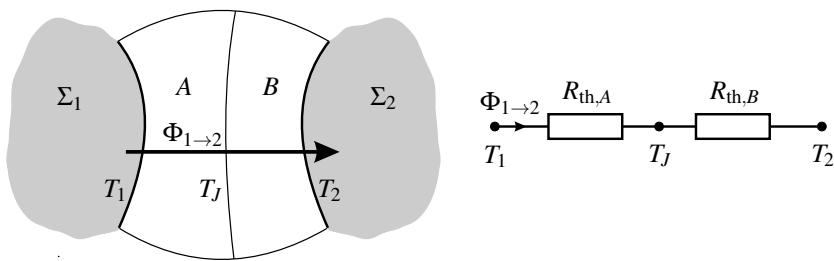


Figure 23.15 – Associations de résistances thermiques en série.

Dans ce cas, on peut définir les résistances thermiques  $R_{\text{th},A}$  et  $R_{\text{th},B}$  des conducteurs  $A$  et  $B$ . En notant  $T_J$  la température de la surface de jonction entre les conducteurs on peut écrire :

$$T_1 - T_J = R_{\text{th},A} \Phi_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad T_J - T_2 = R_{\text{th},B} \Phi_{1 \rightarrow 2}.$$

Il vient donc :

$$T_1 - T_2 = (T_1 - T_J) + (T_J - T_2) = R_{\text{th},A} \Phi_{1 \rightarrow 2} + R_{\text{th},B} \Phi_{1 \rightarrow 2} = (R_{\text{th},A} + R_{\text{th},B}) \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

Ainsi, les deux conducteurs associés en série ont une résistance thermique équivalente :

$$R_{\text{th,eq}} = R_{\text{th},A} + R_{\text{th},B}. \quad (23.26)$$

Les résistances thermiques s'ajoutent quand elles sont en série. Le schéma électrocinétique correspondant à cette situation est donné sur la partie droite de la figure 23.15. Le flux thermique joue le rôle de l'intensité et la température le rôle du potentiel.

On trouve en appliquant la loi du diviseur de tension de l'électrocinétique :

$$T_J - T_1 = \frac{R_{\text{th},A}}{R_{\text{th},A} + R_{\text{th},B}} (T_2 - T_1), \quad \text{donc} \quad T_J = \frac{R_{\text{th},B} T_1 + R_{\text{th},A} T_2}{R_{\text{th},A} + R_{\text{th},B}}.$$

On calcule ainsi facilement la température de la jonction.

### Exemple

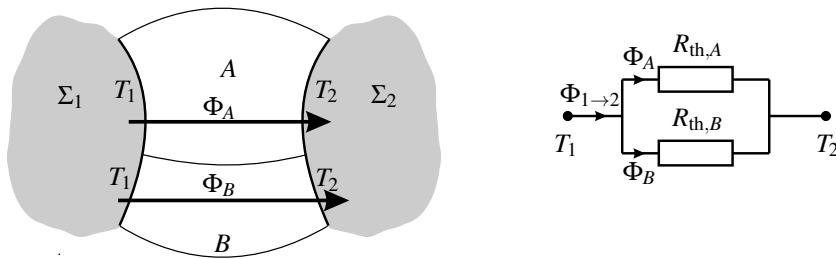
La résistance thermique d'un mur recouvert d'une couche d'isolant est la somme de la résistance thermique de l'isolant et de la résistance thermique du mur.

### b) Association de résistances thermiques en parallèle

Les conducteurs thermiques  $A$  et  $B$  sont en **association parallèle** quand les lignes de courant thermique partant de  $\mathcal{S}_1$  traversent l'un ou l'autre des deux conducteurs (voir figure 23.16). Le flux thermique passant de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$  est dans ce cas :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_A + \Phi_B,$$

où  $\Phi_A$  (resp.  $\Phi_B$ ) est le flux traversant le conducteur  $A$  (resp.  $B$ ).



**Figure 23.16** – Associations de résistances thermiques en parallèle.

Soit  $G_{\text{th},A}$  et  $G_{\text{th},B}$  les conductances thermiques respectives des conducteurs  $A$  et  $B$ . On a :

$$\Phi_A = G_{\text{th},A}(T_1 - T_2) \quad \text{et} \quad \Phi_B = G_{\text{th},B}(T_1 - T_2).$$

Il vient donc :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_A + \Phi_B = \left( \frac{1}{R_{\text{th},A}} + \frac{1}{R_{\text{th},B}} \right) (T_1 - T_2).$$

Ainsi, les deux conducteurs associés en parallèle ont une conductance thermique équivalente :

$$G_{\text{th,eq}} = G_{\text{th},A} + G_{\text{th},B} . \quad (23.27)$$

Les conductances thermiques associées en parallèle s'ajoutent. On en déduit la loi d'association parallèle des résistances thermiques :

$$\frac{1}{R_{\text{th,eq}}} = \frac{1}{R_{\text{th},A}} + \frac{1}{R_{\text{th},B}} \quad \Leftrightarrow \quad R_{\text{th,eq}} = \frac{R_{\text{th},A}R_{\text{th},B}}{R_{\text{th},A} + R_{\text{th},B}} . \quad (23.28)$$

Le schéma électrocinétique correspondant à cette situation est donné sur la partie droite de la figure 23.16. La relation  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_A + \Phi_B$  correspond à la loi des noeuds.

#### Exemple

Une fenêtre et le mur qui l'entoure sont deux conducteurs thermiques associés en parallèle entre l'intérieur et l'extérieur de la maison.

## 6.5 Résistance thermique d'une interface solide-fluide

### Exemple

Une paroi plane de surface  $S$ , d'épaisseur  $L$  et de conductivité thermique  $\lambda$  sépare deux fluides de températures  $T_1$  et  $T_2$ . Les coefficients de transferts au niveau des deux parois sont  $h_1$  et  $h_2$ . Quel est le flux thermique passant d'un liquide à l'autre ?

En régime stationnaire, la température à l'intérieur de la paroi (matériau sans sources d'énergie thermique) est de la forme (23.17) :  $T(x) = Ax + B$ . Les conditions aux limites sont :

$$j_{\text{th}}(0) = h_1(T_1 - T(0)) \quad \text{et} \quad j_{\text{th}}(L) = h_2(T(L) - T_2).$$

Sachant que  $j_{\text{th}}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda A$  on réécrit ces conditions :

$$-\lambda A = h_1(T_1 - B) \quad \text{et} \quad -\lambda A = h_2(AL + B - T_2).$$

On en tire :  $A = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{\lambda}{h_1} + L + \frac{\lambda}{h_2}}$  (l'expression de  $B$  n'est pas nécessaire pour la suite).

On peut maintenant exprimer le flux thermique traversant la plaque :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{\text{th}}(0)S = -\lambda AS = (T_1 - T_2) \frac{1}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}}.$$

Ainsi, la résistance thermique entre les deux fluides est :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}.$$

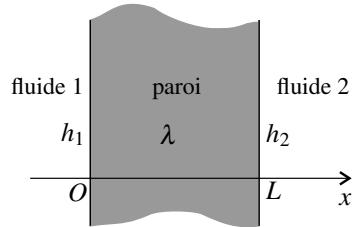
C'est la somme de trois résistances thermiques en série. La deuxième est la résistance de la paroi ; les deux autres les résistances thermiques des interfaces solide-fluide.

D'une manière générale :

Une interface solide-fluide de surface  $S$  a pour résistance thermique :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{h S}$$

où  $h$  est le coefficient de transfert thermique de surface de la loi de Newton.



**Figure 23.17 –** Transfert thermique entre deux fluides à travers une paroi solide.

## 6.6 Cas du régime lentement variable

Peut-on encore utiliser l'expression :  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}}$  quand les températures  $T_1$  et  $T_2$  dépendent du temps ? Il faudrait pour cela que la distribution de température au sein du matériau soit à chaque instant celle qui correspond, en régime stationnaire, aux conditions aux limites de cet instant. C'est approximativement le cas si le temps caractéristique de variation des températures  $T_1$  et  $T_2$  est très grand devant le temps caractéristiques de la diffusion thermique dans le matériau conducteur. On parle alors de **régime lentement variable**.

La notion de résistance thermique est valable quand les températures  $T_1$  et  $T_2$  des systèmes évoluent avec un temps caractéristique très supérieur à  $\tau = L^2/a$  où  $L$  est la taille caractéristique et  $a$  la diffusivité thermique du conducteur.

## 7 Comment déterminer expérimentalement une conductivité thermique ?

Dans ce paragraphe on étudie deux expériences réalisables en laboratoire de lycée qui permettent de déterminer la conductivité thermique d'un matériau.

### 7.1 Mesure de conductivité thermique

Le principe de l'expérience est de mesurer le gradient de température correspondant à un flux thermique imposé. On trouve dans les collections des lycées des appareils dédiés.

**Dispositif expérimental** Une barre de section  $S$  constante est calorifugée sur sa surface latérale et équipée d'un dispositif de chauffage à une extrémité (résistance électrique par exemple) et d'un dispositif qui maintient son autre extrémité à température constante (circulation d'eau froide par exemple). Des sondes de température régulièrement espacées sont disposées le long de la barre (voir figure 23.18).

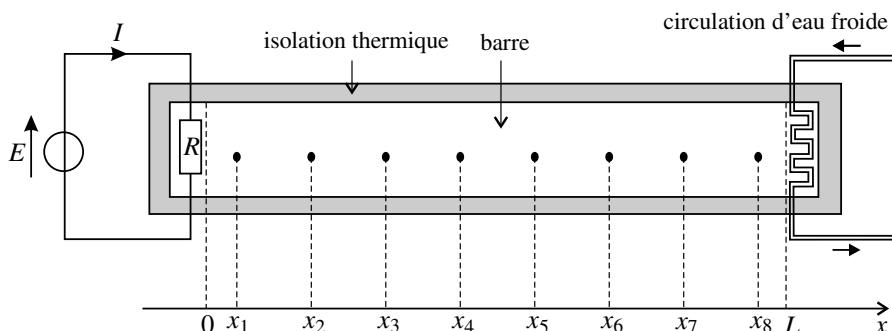


Figure 23.18 – Expérience pour la mesure d'une conductivité thermique.

**Expérience** En début d'expérience la barre a une température uniforme. On met en route le dispositif de chauffage et on enregistre, à l'aide d'un ordinateur, la température des différentes sondes au cours du temps. Un exemple d'enregistrement est visible sur la figure 23.19 avec une barre de cuivre. On constate que la température du capteur en  $x_1$ , le plus proche de la source de puissance, commence à augmenter la première, puis celle du capteur en  $x_2$  et ainsi de suite. On observe ainsi la diffusion progressive de l'énergie thermique dans la barre. Au bout d'une quinzaine de minutes la température de chaque capteur est stabilisée : le système a atteint un régime stationnaire.

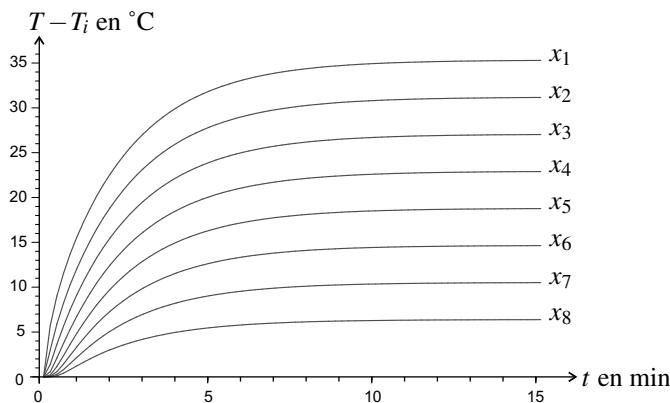


Figure 23.19 – Températures des 8 capteurs en fonction du temps (simulation).

**Modélisation du régime stationnaire** On peut observer sur la figure 23.19 que la barre atteint un régime stationnaire après 12 à 15 minutes. Pour la modélisation on fait l'hypothèse que la température est fonction seulement de la coordonnée  $x$  le long de la barre (voir figure 23.18). Dans ce cas la température à l'intérieur de la barre (matériau dépourvu de source interne) est en régime stationnaire de la forme  $T(x) = Ax + B$  (voir le paragraphe 5.4). Les conditions aux limites sont les suivantes :

- En  $x = 0$ , le flux thermique arrivant dans la barre est égal à la puissance  $\mathcal{P}_{\text{Joule}}$  dissipée par effet Joule dans la résistance, donc :  $Sj_{\text{th}}(0) = \mathcal{P}_{\text{Joule}}$ . En appliquant la loi de Fourier on en tire :  $\frac{dT}{dx}(0) = -\frac{\mathcal{P}_{\text{Joule}}}{S\lambda}$  où  $\lambda$  est la conductivité thermique de la barre.
- La température en bout de barre est  $T(L) = T_{\text{eau}}$ , température de l'eau du circuit de refroidissement.

On en déduit :  $T(x) = \frac{\mathcal{P}_{\text{Joule}}}{S\lambda}(L - x) + T_{\text{eau}}$ .

**Détermination de la conductivité thermique de la barre** On connaît la distance entre deux capteurs :  $d = 22 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Par ailleurs on mesure la puissance dissipée par effet Joule. En notant  $\delta T$  l'écart de température constant en régime permanent entre deux capteurs consécutifs,

on a :  $\delta T = \frac{\mathcal{P}_{\text{Joule}} d}{S\lambda}$ . Ainsi la mesure de  $\delta T$  conduit à la valeur de  $\lambda$ .

Par exemple, la figure 23.19 correspond à une barre de cuivre de section  $S = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  et une puissance de chauffage  $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = 15 \text{ W}$ . On observe en régime stationnaire un écart de température  $\delta T = 4,13^\circ\text{C}$  constant d'un capteur au capteur suivant. On en déduit :

$$\lambda_{\text{Cu}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{Joule}} d}{S\delta T} = \frac{15 \times 22 \cdot 10^{-3}}{2,0 \cdot 10^{-4} \times 4,13} = 4,0 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

### Remarque

Connaissant la masse volumique du cuivre  $\mu_{\text{Cu}} = 8954 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et sa capacité thermique massique  $c_{\text{Cu}} = 383 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , on peut calculer le temps caractéristique de la diffusion thermique dans la barre de longueur  $L = 19 \text{ cm}$  :

$$\tau = \frac{L^2}{a_{\text{Cu}}} = \frac{\mu_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} L^2}{\lambda_{\text{Cu}}} = 3,1 \cdot 10^2 \text{ s} \simeq 5 \text{ min.}$$

Ce résultat est cohérent avec l'observation expérimentale.

## 7.2 Mesure de résistance thermique

Le principe de l'expérience est de mesurer la résistance thermique d'une plaque réalisée dans le matériau dont on veut connaître la conductivité thermique.

**Expérience** On réalise une boîte en matériau isolant thermique (polystyrène extrudé par exemple) que l'on sépare en deux compartiments avec la plaque dont on veut mesurer la résistance thermique. Les compartiments sont rendus étanches avec du joint silicone. On remplit les deux compartiments avec précisément le même volume  $V_{\text{eau}}$  d'eau : eau chaude dans le compartiment 1 et eau froide dans le compartiment 2. On mesure au cours du temps dans chaque compartiment la température de l'eau qui est rendue uniforme par l'action d'un agitateur magnétique (voir figure 23.20).

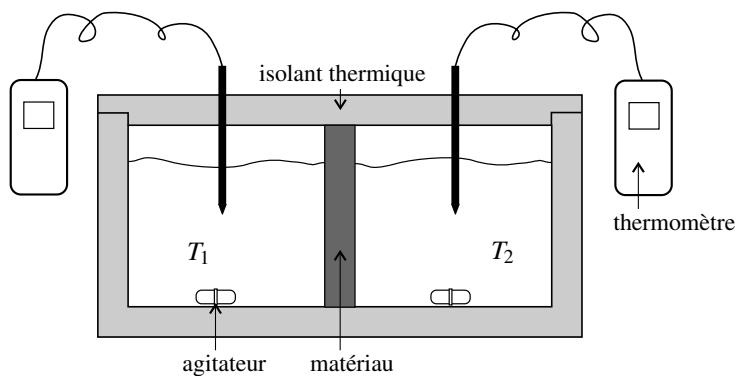


Figure 23.20 – Mesure de la résistance thermique d'une plaque.

**Modélisation** On néglige les résistances thermiques des interfaces solides-fluide devant la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  que l'on mesure. On suppose aussi que le temps caractéristique d'évolution des températures est suffisamment lent pour qu'on puisse utiliser la résistance thermique. Le flux thermique passant du compartiment 1 au compartiment 2 est alors :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{\text{th}}}.$$

On néglige les pertes thermiques à travers l'isolant thermique. Le premier principe en terme de puissance pour l'eau contenue dans le compartiment 1 s'écrit :  $C_{\text{eau}} \frac{dT_1}{dt} = -\Phi_{1 \rightarrow 2}$ , en notant  $C_{\text{eau}} = \mu_{\text{eau}} c_{\text{eau}} V_{\text{eau}}$ , la capacité thermique de l'eau dans le compartiment. Le signe « - » provient du fait que le flux thermique est perdu par le compartiment 1. Le premier principe en terme de puissance pour l'eau contenue dans le compartiment 2 s'écrit :  $C_{\text{eau}} \frac{dT_2}{dt} = \Phi_{1 \rightarrow 2}$ .

En faisant la différence de ces deux équations on obtient :  $C_{\text{eau}} \frac{d(T_1 - T_2)}{dt} = -2\Phi_{1 \rightarrow 2}$  soit :

$$\frac{d(T_1 - T_2)}{dt} = -\frac{2}{R_{\text{th}} C_{\text{eau}}} (T_1(t) - T_2(t)).$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre dont la solution est :

$$T_1(t) - T_2(t) = (T_1(0) - T_2(0)) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{R_{\text{th}} C_{\text{eau}}}{2}.$$

 Le produit (capacité thermique  $\times$  résistance thermique) est homogène à un temps, de même que le produit (capacité électrique  $\times$  résistance électrique).

**Détermination de la résistance thermique** On porte sur un graphe  $\ln \frac{T_1(t) - T_2(t)}{T_1(0) - T_2(0)}$  en fonction du temps. Les points expérimentaux s'alignent sur une droite passant par l'origine de pente  $\frac{1}{\tau}$  et on accède ainsi à la valeur de  $\tau$ .

### Remarques

Si les températures évoluent peu pendant l'expérience :  $\frac{T_1(t) - T_2(t)}{T_1(0) - T_2(0)} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$  et il n'est pas nécessaire de calculer le logarithme.

Si on dispose d'un ordinateur équipé d'un logiciel de traitement des résultats expérimentaux, on peut obtenir facilement la valeur de  $\tau$  donnant la modélisation en meilleur accord avec les mesures.

De la valeur de  $\tau$  on tire  $R_{\text{th}} = \frac{2\tau}{C_{\text{eau}}}$ , puis  $\lambda = \frac{e}{S R_{\text{th}}}$  où  $e$  et  $S$  sont l'épaisseur et la surface de la plaque du matériau étudié.

**Exemple**

L'échantillon est une plaque de verre carrée de côté  $a = 5,2\text{cm}$  et d'épaisseur  $e = 5,0\text{mm}$ . On a rempli chaque compartiment avec  $V_{\text{eau}} = 160\text{mL} = 1,60 \cdot 10^{-4} \text{m}^3$  d'eau. On trouve  $\tau = 8,0 \cdot 10^2 \text{s} \simeq 13\text{min}$ . On en tire :

$$R_{\text{th}} = \frac{2\tau}{\mu_{\text{eau}} c_{\text{eau}} V_{\text{eau}}} = \frac{2 \times 8,0 \cdot 10^2}{1000 \times 4180 \times 1,60 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \text{ W}^{-1} \cdot \text{K},$$

puis :  $\lambda_{\text{verre}} = \frac{e}{a^2 R_{\text{th}}} = \frac{5,0 \cdot 10^{-3}}{(5,2 \cdot 10^{-2})^2 \times 2,4} = 7,7 \cdot 10^{-1} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

## 8 Complément : irréversibilité du phénomène de conduction thermique

### 8.1 Irréversibilité

Le phénomène conduction thermique est un **phénomène irréversible**.

L'irréversibilité apparaît dans la loi de Fourier. En effet, si l'on renverse le sens du temps, le vecteur densité courant thermique  $j_{\text{th}}$  est changé en son opposé (l'énergie se déplaçant en sens inverse) alors que le gradient du champ de température n'est pas modifié. La loi de Fourier cesse donc d'être vérifiée.

L'irréversibilité apparaît aussi dans l'équation de diffusion thermique (23.13). Pour le montrer, on considère une solution quelconque de cette équation,  $T(M, t)$ . Si l'on renverse le temps à partir de l'instant de date  $t_0$ , on obtient le champ de température :

$$T_{\text{renv}}(M, t) = T(M, 2t_0 - t).$$

On a ainsi :  $\Delta T_{\text{renv}} = \Delta T$  et  $\frac{\partial T_{\text{renv}}}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial t}$  de sorte que  $T_{\text{renv}}$  ne vérifie pas l'équation de diffusion. Ceci est dû au fait que c'est une dérivée partielle par rapport au temps d'ordre *impair* qui intervient dans l'équation de diffusion thermique.

### 8.2 Production d'entropie

La conduction thermique s'accompagne donc d'une création d'entropie qu'il est possible d'exprimer.

On reprend la situation de la conduction thermique à une dimension du paragraphe 4.1 et on souhaite faire le bilan entropique du système  $\Sigma$  représenté sur la figure 23.4 page 733 entre  $t$  et  $t + dt$ . La surface  $S$  est maintenant notée  $A$  pour ne pas confondre avec l'entropie.

L'entropie échangée par  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\begin{aligned} \delta^2 S_{\text{éch}} &= \frac{\delta Q_x}{T(x, t)} + \frac{\delta Q_{x+dx}}{T(x+dx, t)} \\ &= \frac{j_{\text{th}}(x, t)Adt}{T(x, t)} - \frac{j_{\text{th}}(x+dx, t)Adt}{T(x+dx, t)} \simeq - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_{\text{th}}}{T} \right)(x, t) \right) Adxdt, \end{aligned}$$

au premier ordre en  $dx$ . En utilisant la loi de Fourier, on obtient :

$$\delta^2 S_{\text{éch}} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) Adxdt = \left( -\frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) Adxdt.$$

L'entropie de  $\Sigma$  à l'instant  $t$  est  $dS(x, t) = s(x, t)\mu Adx$ , où  $s(x, t)$  est l'entropie massique du matériau, en  $x$  à  $t$ . Pour un solide indilatable et incompressible,  $s = s_0 + c \ln \left( \frac{T}{T_0} \right)$ . La variation d'entropie du système  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est donc :

$$d^2S = dS(x, t + dt) - dS(x, t) \simeq \frac{\partial}{\partial t} \left( c \ln \left( \frac{T(x, t)}{T_0} \right) \mu Adx \right) dt = \mu c \frac{1}{T(x, t)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} Adxdt.$$

D'après le second principe, l'entropie créée à l'intérieur de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\begin{aligned} \delta^2 S_{\text{créée}} &= d^2S - \delta^2 S_{\text{éch}} \\ &= \mu c \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} Adxdt - \left( -\frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) Adxdt \\ &= \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 Adxdt, \end{aligned} \quad (23.29)$$

en utilisant l'équation de la diffusion thermique. Elle est strictement positive dès que la température n'est pas uniforme. On retrouve le fait que la conduction thermique est un processus irréversible. On peut exprimer l'entropie créée par unité de temps et de masse de matériau :

$$\dot{s}_{\text{créée}}(x, t) = \frac{\delta^2 S_{\text{créée}}}{\mu Adxdt} = \frac{\lambda}{\mu T(x, t)^2} \left( \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2.$$

**SYNTHESE**

*SAVOIRS*

- les trois modes de transfert thermique
- loi de Fourier
- ordre de grandeur de conductivité thermique : air, eau, verre, acier
- équation de diffusion thermique sans terme source
- équation de diffusion thermique avec terme source
- échelles de temps et de longueur associées
- définition de la résistance thermique
- expression de la résistance thermique d'une plaque
- lois d'association série ou parallèle des résistances thermiques
- loi de Newton pour le transfert thermique entre un fluide et un solide

*SAVOIR-FAIRE*

- reconnaître un mode de transfert thermique
- calculer un flux thermique algébrique à travers une surface
- faire un bilan local d'énergie interne pour une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique
- établir l'équation de diffusion thermique sans terme source dans ces trois cas
- utiliser l'équation de diffusion thermique avec ou sans terme source
- mettre en œuvre un outil de résolution numérique de l'équation de diffusion
- écrire des conditions aux limites
- mesurer une conductivité thermique

*MOTS-CLÉS*

- |                         |                        |                          |
|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| • conduction thermique  | • flux thermique       | • conditions initiales   |
| • convection thermique  | • diffusion thermique  | • conditions aux limites |
| • rayonnement thermique | • résistance thermique |                          |

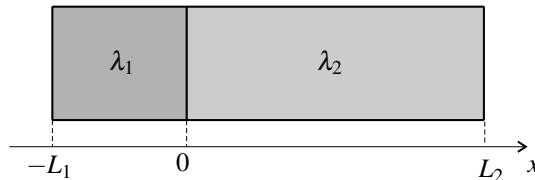
## S'ENTRAÎNER

**23.1 Cuisson d'un œuf** (★)

La cuisson d'un œuf (de poule) à la coque dure 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 g. Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1,2 et 1,8 kg ?

**23.2 Deux conducteurs thermiques** (★)

Deux barres de conductivités thermiques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  et de même section  $S$  sont mises bout à bout. Leur surface latérale est parfaitement calorifugée. On se place en régime stationnaire et on suppose que la température ne dépend que de la coordonnée  $x$  le long d'un axe parallèle aux barres. On impose les températures  $T(-L_1) = T_1$  et  $T(L_2) = T_2$ .

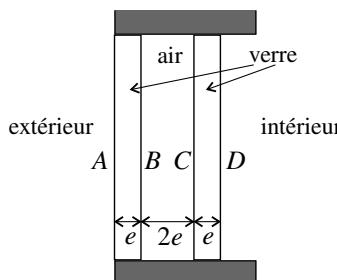


- Déterminer la température  $T(x)$  dans les barres (indication : utiliser les conditions de continuité en  $x = 0$ ).
- En déduire le flux thermique traversant les barres. Quelle propriété retrouve-t-on ?

**23.3 Double vitrage** (★)

1. Une fenêtre simple vitrage est constituée d'une plaque de verre de surface  $S$  et d'épaisseur  $e$ . La conductivité thermique du verre est  $\lambda_v = 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Les pertes dues au cadre de la fenêtre sont négligées.

Exprimer la puissance thermique perdue à travers la fenêtre,  $P_f$ , en fonction de  $\lambda_v$ ,  $e$ ,  $S$ ,  $T_i$  température à l'intérieur de la maison et  $T_e$  température à l'extérieur.



- Un fenêtre double vitrage est composée de deux vitres identiques d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$ , séparées par une épaisseur  $2e$  d'air (voir figure). La conductivité thermique de l'air est  $\lambda_a = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

On appelle  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les quatre surfaces indiquées sur la figure. Les températures des surfaces  $A$  et  $D$  sont  $T(A) = T_e$  et  $T(D) = T_i$ .

- Exprimer les résistances thermiques  $R_{\text{th},AB}$ ,  $R_{\text{th},BC}$  et  $R_{\text{th},CD}$  en fonction de  $e$ ,  $\lambda_v$ ,  $\lambda_a$  et  $S$ .
- Exprimer la résistance thermique totale  $R_{\text{th},AD}$ .
- Montrer que la puissance thermique perdue à travers la fenêtre double vitrage  $P'_f$  est telle que  $\frac{P'_f}{P_f} \simeq \frac{\lambda_a}{2\lambda_v}$ . Conclure.
- Représenter le schéma électrocinétique équivalent à la fenêtre double vitrage.
- En déduire l'expression de  $T_B - T_C$  en fonction de  $T_i - T_e$  et des résistances thermiques, puis en fonction de  $T_i - T_e$ ,  $\lambda_v$  et  $\lambda_a$ . Faire l'application numérique et conclure.

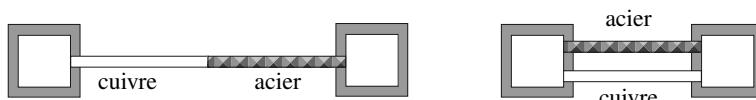
**23.4 Le paradoxe de l'isolant (★)**

Un tuyau d'eau chaude est entouré par une gaine isolante de conductivité thermique  $\lambda$ , de rayon intérieur  $r_1$  (égal au rayon extérieur du tuyau) et de rayon extérieur  $r_2$ . La gaine est en contact avec l'air ambiant avec lequel elle a un échange thermique suivant la loi de Newton, avec un coefficient d'échange  $h$ .

- Pour une longueur  $l$  de tuyau exprimer les résistances thermiques et de la gaine isolante et de l'interface gaine isolante/air.
- Étudier les variations de la résistance thermique équivalente avec  $r_2$ . Quel résultat paradoxal trouve-t-on ?

**23.5 Associations de résistances thermiques (★★)**

Les parois sont adiabatiques. Si la barre de métal est en cuivre, la glace fond en 20 minutes. Si elle est en acier, elle fond en 40 minutes. En combien de temps fond la glace dans les deux configurations représentées ci-dessous ?

**23.6 Fusible (★)**

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire  $S$ , de longueur utile  $L$ , de conductivité électrique  $\gamma$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité  $I$  et il est enfermé dans une capsule

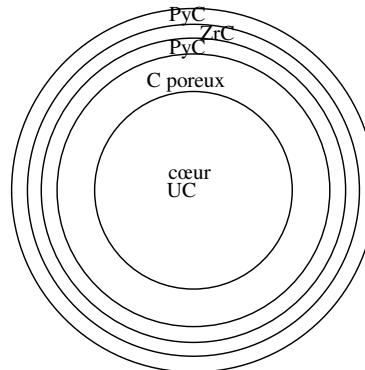
remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures aux extrémités du fil,  $x = 0$  et  $x = L$ , sont imposées et égales à la température  $T_0$  du milieu ambiant. On se place en régime stationnaire.

- Écrire l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$  dans le fil. La résoudre et représenter graphiquement la fonction de  $T(x)$ .
- Le matériau constituant le fil fond à  $T_F$ . On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale  $I_{\max}$ . Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de  $I_{\max}$ . Déterminer l'expression littérale de l'aire  $S$  à prévoir. Faire l'application numérique avec :  $\lambda = 65 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ;  $\gamma = 1,2 \times 10^6 \text{ SI}$ ;  $T_0 = 290 \text{ K}$ ;  $L = 2,5 \text{ cm}$ ;  $T_F = 390 \text{ K}$ ;  $I_{\max} = 16 \text{ A}$ .
- Exprimer le flux thermique  $\Phi(0)$  à travers la section en  $x = 0$  en fonction de la résistance électrique du fil,  $R = \frac{L}{\gamma S}$ , et  $I$ . Préciser si ce flux est reçu ou fourni par le fil. Commenter.

### 23.7 Particule de combustible nucléaire (\*)

Un combustible pour centrale nucléaire est constitué de petites sphères multicouches appelées particules TRISO (voir figure). Le cœur de matériau fissile est entouré de plusieurs couches successives ayant pour rôle d'assurer la protection du noyau et le confinement des produits de fission. Le matériau du cœur est le carbure d'uranium UC ; les couches protectrices sont en carbone poreux, carbone pyrolytique (PyC) ou carbure de zirconium ZrC. La constitution de la particule est précisée dans le tableau et sur la figure ci-après :

| Matériau | Rayon extérieur (m)        | Conductivité thermique (USI) |
|----------|----------------------------|------------------------------|
| UC       | $r_1 = 2,50 \cdot 10^{-4}$ | $\lambda_1 = 12$             |
| C poreux | $r_2 = 3,45 \cdot 10^{-4}$ | $\lambda_2 = 0,50$           |
| PyC      | $r_3 = 3,85 \cdot 10^{-4}$ | $\lambda_3 = 4$              |
| ZrC      | $r_4 = 4,20 \cdot 10^{-4}$ | $\lambda_4 = 20$             |
| PyC      | $r_5 = 4,60 \cdot 10^{-4}$ | $\lambda_5 = 4$              |



Dans tout l'exercice on se place en régime stationnaire.

- Écrire l'équation de diffusion thermique dans le cœur en notant la puissance par unité de volume produite dans ce matériau fissile  $\sigma$ . Sachant que le laplacien d'un champ scalaire  $f(r)$  en coordonnées sphériques s'écrit :  $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left( r^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \right)$ , déterminer  $T(r)$  pour  $r \leq R_1$ . On notera  $T_0$  la température en  $r = 0$ .
- Calculer numériquement la variation de température entre les abscisses  $r = 0$  et  $r = r_1$ . La puissance volumique  $\sigma$  vaut  $5,0 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

**3.** Afin de calculer la température dans les différentes couches de la particule TRISO, on va utiliser le concept de résistance thermique.

- a. Montrer que le flux thermique se met sous la forme :  $\Phi = B \frac{dT}{dr} \left( \frac{1}{r} \right)$ , où la constante  $B$

est à exprimer en fonction des données du problème.

- b. Exprimer la résistance thermique  $R_{\text{th},12}$  de la couche de C poreux.  
c. Calculer numériquement les résistances thermiques  $R_{\text{th},12}$ ,  $R_{\text{th},23}$ ,  $R_{\text{th},34}$  et  $R_{\text{th},45}$  des couches successives.  
d. En déduire les températures aux interfaces  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  si la température extérieure  $T_5$  vaut 1300 K.

### 23.8 Épaisseur d'un igloo (\*)

Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs d'un igloo, contenant un seul habitant, si la température extérieure est de  $-20^\circ\text{C}$ ? La conductivité de la glace sera prise égale à  $\lambda = 0,05 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , la température intérieure minimale nécessaire à la survie égale à  $10^\circ\text{C}$  et on considérera que le métabolisme de l'habitant dégage une puissance  $\mathcal{P} = 50 \text{ W}$ .

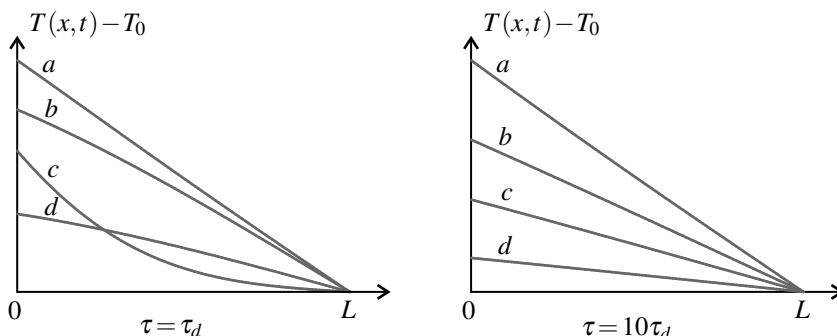
### 23.9 Matériaux chauffés par un flux d'énergie variable (\*\*)

Un matériau conducteur de diffusivité thermique  $a$  et conductivité thermique  $\lambda$  occupe la portion d'espace comprise entre les plans  $x = 0$  et  $x = L$ . À l'instant initial sa température est uniformément égale à  $T_0$ . À partir de  $t = 0$ , on le soumet la face  $x = 0$  à un flux d'énergie de puissance surfacique :

$$j(t) = j_{\max} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

où  $j_{\max}$  et  $\tau$  sont des constantes, tandis que la face  $x = L$  est maintenue à la température  $T_0$ .

1. Quelle est la condition aux limites en  $x = 0$  pour le champ de température  $T(x, t)$  à l'intérieur du matériau ?
2. Donner l'expression de  $\tau_d$ , temps caractéristique de la diffusion thermique dans le matériau.
3. La figure représente le résultat de deux calculs de simulation numérique dans les deux cas  $\tau = \tau_d$  et  $\tau = 10\tau_d$ . Dans chaque cas on a tracé  $T(x, t)$  en fonction de  $x$  aux quatre instants :  $t = 0, 1\tau; t = 0,6\tau; t = 1,1\tau; t = 2,2\tau$ .

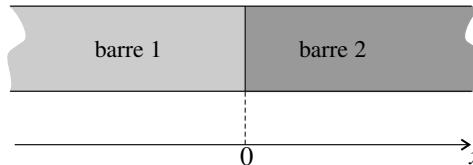


a. Identifier les instants correspondant aux courbes  $a, b, c, d$  dans chaque cas. Que remarque-t-on pour  $T(0, t)$  dans le cas où  $\tau = \tau_d$  ?

b. Interpréter l'allure de la figure pour  $\tau = 10\tau_d$ .

### 23.10 Sensation de froid et de chaud (★★)

Deux barres de très grande longueur et de même section  $S$  ont des conductivités thermiques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , des masses volumiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et des capacités thermiques massiques  $c_1$  et  $c_2$ . Ces deux barres, initialement de températures uniformes  $T_1$  et  $T_2$ , sont mises en contact en  $x = 0$  à l'instant  $t = 0$ . Leurs surfaces latérales sont parfaitement calorifugées.



1. Écrire l'équation de diffusion thermique pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$ . Donner les expressions des diffusivités thermiques  $D_1$  et  $D_2$  des deux barres.

2. On admet que la fonction  $f_D(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2\sqrt{Dt}}{\exp(-u^2)} du$  est solution de l'équation de diffusion thermique ( $D$  étant la diffusivité thermique) et que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_D(x, t) = \pm 1$ .

Vérifier que :  $f_D(0, t) = 0$  et  $\frac{\partial f_D}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}$ .

3. En cherchant le champ de température sous la forme :

$$T_1(x, t) = A_1 + B_1 f_{D_1}(x, t) \text{ pour } x < 0 \quad \text{et} \quad T_2(x, t) = A_2 + B_2 f_{D_2}(x, t) \text{ pour } x > 0,$$

déterminer la température  $T_J$  à la jonction des deux barres. Exprimer  $T_J$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ , et des effusivités thermiques des deux barres :  $E_1 = \sqrt{\mu_1 c_1 \lambda_1}$  et  $E_2 = \sqrt{\mu_2 c_2 \lambda_2}$ .

4. Calculer la température de contact entre la main ( $T_{\text{main}} = 37^\circ\text{C}$ ) et un objet de température  $T_{\text{objet}} = 20^\circ\text{C}$  lorsque cet objet est en bois ou en acier. On donne  $E_{\text{main}} = 1,80 \times 10^3 \text{ USI}$ ,  $E_{\text{bois}} = 0,40 \times 10^3 \text{ USI}$  et  $E_{\text{acier}} = 14,0 \times 10^3 \text{ USI}$ . Commenter.

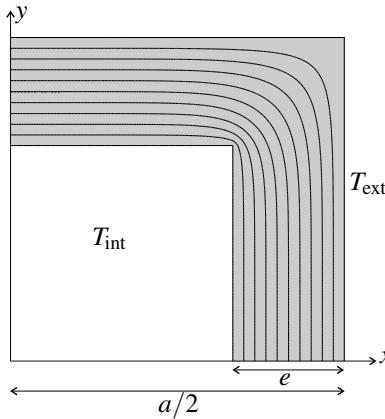
### APPROFONDIR

### 23.11 Simulation d'un champ de température (\*)

On considère une boîte parallélépipédique de dimensions extérieures  $a, a$  et  $L \gg a$ , dont les parois ont la même épaisseur  $e$ . La température à l'intérieur de la boîte est uniformément égale à  $T_{\text{int}}$  et à l'extérieur elle vaut  $T_{\text{ext}}$ . La figure montre le résultat d'un calcul de simulation numérique dont les hypothèses sont les suivantes : la température ne dépend pas de la coordonnée  $z$  le long d'un axe parallèle à la grande dimension de la boîte, la température de la surface intérieure (resp. extérieure) de la boîte est  $T_{\text{int}}$  (resp.  $T_{\text{ext}}$ ), le régime est stationnaire.

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

Les isothermes représentées correspondent aux températures  $T = T_{\text{int}} + \frac{i}{10}(T_{\text{ext}} - T_{\text{int}})$  avec  $i = 0, 1, 2 \dots 10$ .

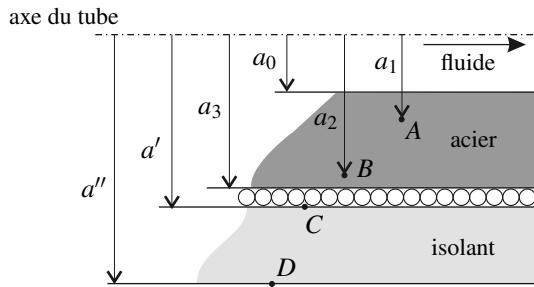


1. Justifier l'hypothèse d'un champ de température de la forme  $T(x, y)$ . Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $T(x, y)$  ?
2. Commenter l'allure des isothermes loin du « coin ».
3. Dessiner quelques lignes de courant thermique.
4. En assimilant la boîte à 4 plaques d'épaisseur  $e$  et de dimension  $L \times a$ , exprimer la résistance thermique  $R_{\text{th},0}$  entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte en fonction de  $L$ ,  $a$ ,  $e$  et de  $\lambda$ , conductivité thermique du matériau constituant la boîte.
5. La simulation fournit une valeur de  $R_{\text{th},1}$  pour cette résistance thermique. Quel est le bon résultat :  $R_{\text{th},1} = 0,91R_{\text{th},0}$ ,  $R_{\text{th},1} = R_{\text{th},0}$  ou  $R_{\text{th},1} = 1,09R_{\text{th},0}$  ?

**23.12 Détermination expérimentale du coefficient de transfert thermique surfacique d'une interface solide-fluide (★)**

On fait circuler un mélange fluide, de température uniforme et constante  $\theta_f$ , dans un tube cylindrique d'acier de longueur  $L$ , de rayon intérieur  $a_0$ , de rayon extérieur  $a_3$ , et de conductivité thermique  $k_a$ . Autour du tube, horizontal, on a disposé un enroulement électrique dans lequel on dissipe une puissance électrique  $\mathcal{P}_{\text{el}}$ . L'ensemble est recouvert d'un manchon cylindrique de rayon extérieur  $a''$ , de rayon intérieur  $a'$ , et de conductivité thermique  $k_i$ . Ce manchon doit isoler thermiquement ce qu'il recouvre de l'air ambiant. La figure représente une demi-coupe axiale de l'ensemble.

Aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , on a placé des capteurs de température de dimensions telles qu'ils ne perturbent pas sensiblement les échanges de chaleur : ainsi, dans l'acier, le capteur  $A$  se trouve à la distance  $a_1$  de l'axe et le capteur  $B$  à la distance  $a_2$  et, dans l'isolant, on a placé le capteur  $C$  au niveau de la paroi intérieure et le capteur  $D$  au niveau de la paroi extérieure. On a relevé des températures  $\theta_1$  en  $A$ ,  $\theta_2$  en  $B$ ,  $\theta'$  en  $C$ ,  $\theta''$  en  $D$ .



Les données sont :

- $a_0 = 10,0 \text{ mm}$ ;  $a_1 = 12,0 \text{ mm}$ ;  $a_2 = 16,0 \text{ mm}$ ,  $a' = 20,0 \text{ mm}$ ;  $a'' = 70,0 \text{ mm}$ ;  $L = 1 \text{ m}$ ;
- $k_i = 0,040 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ;
- $\mathcal{P}_{\text{el}} = 1,00 \text{ kW}$ ;
- $\theta_f = -30,00^\circ\text{C}$ ;  $\theta_1 = -20,48^\circ\text{C}$ ;  $\theta_2 = -19,48^\circ\text{C}$ ;  $\theta' = +10,00^\circ\text{C}$ ;  $\theta'' = +20,00^\circ\text{C}$ .

1. a. Exprimer la résistance thermique  $R_i$  de l'isolant en fonction des données. Calculer numériquement  $R_i$ .

b. Exprimer le flux thermique (puissance thermique)  $\Phi_i$  qui le traverse vers l'intérieur en fonction des données. Calculer numériquement  $\Phi_i$  (préciser dans quel sens se fait la propagation de la chaleur).

2. a. Calculer numériquement le flux thermique  $\Phi_f$  reçu par le fluide. L'isolant est-il efficace ?

b. Exprimer la conductivité thermique  $k_a$  de l'acier en fonction de  $\Phi_f$  et des données. Calculer numériquement  $k_a$ .

c. Exprimer la température  $\theta_0$  de la paroi intérieure du tube d'acier en fonction des données. Calculer numériquement  $\theta_0$ .

d. Exprimer le coefficient de convection  $h$  de l'interface fluide-acier en fonction de  $\theta_0$ ,  $\Phi_f$  et des données. Calculer numériquement  $h$ .

### 23.13 Planète radioactive (\*)

On considère une planète sphérique de rayon  $R$ , conductrice de la chaleur en l'absence de tout transfert d'énergie autre que conductif, où la température  $T(r)$  décroît avec le rayon  $r$ . La planète a une conductivité thermique  $\lambda$ , une masse volumique  $\rho$  et une capacité thermique massique  $c$ , toutes trois uniformes. Elle contient des sources radioactives qui dégagent une puissance thermique par unité de masse  $H(r)$  (en  $\text{W.kg}^{-1}$ ) qui peut varier avec le rayon.

1. On donne l'expression du laplacien d'un champ de température  $T(r,t)$  à symétrie sphérique :  $\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$ . Écrire l'équation de diffusion thermique qui s'applique à l'intérieur de la planète dans le cas général.

2. On se place en régime stationnaire et on suppose qu'il n'y a pas de sources radioactives de  $r = 0$  à  $r = r_m$  et que  $H$  est uniforme entre les rayons  $r_m$  et  $R$ . La température en surface est  $T = T_0$ .

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

a. Résoudre l'équation de la chaleur en faisant intervenir quatre constantes d'intégration.

b. Quelle(s) condition(s) doit-on appliquer en  $r = 0$ ? En  $r = R$ ? En  $r = r_m$ ? Écrire alors quatre équations qui permettent de calculer les constantes d'intégration.

La résolution de ces équations conduit au résultat :

$$\begin{cases} \text{pour } r \in [0, r_m], \quad T(r) = \frac{\rho H}{6\lambda} \left( R^2 - 3r_m^2 + 2\frac{r_m^3}{R} \right) + T_0 \\ \text{pour } r \in [r_m, R], \quad T(r) = \frac{\rho H}{6\lambda} \left( R^2 - r^2 + 2\frac{r_m^3}{R} - 2\frac{r_m^3}{r} \right) + T_0 \end{cases}$$

c. Tracer l'allure de la fonction  $T(r)$ . Quelle est la température maximale? Si la Terre était en régime conductif, stationnaire, avec tous ses éléments radioactifs contenus dans la croûte ( $R = 6370$  km,  $r_m = 6340$  km,  $\rho = 2800$  kg.m $^{-3}$ ,  $H = 5 \cdot 10^{-10}$  W.kg $^{-1}$ ,  $\lambda = 4$  W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ,  $T_0 = 290$  K), quelle serait la valeur du gradient de température  $\frac{dT}{dr}$ , en K.km $^{-1}$ , près de la surface de la Terre? Quelle serait la température au centre de la Terre? Commenter.

3. Exprimer le flux thermique total en surface de la planète en fonction de la quantité totale de puissance radioactive dissipée. Commenter.

### 23.14 Âge de la Terre selon Lord Kelvin (★★)

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace  $z > 0$ . On admet que la température ne dépend que de la profondeur  $z$  (comptée positivement vers le bas) et du temps  $t$ . La planète a une conductivité thermique  $\lambda$ , une masse volumique  $\rho$  et une capacité thermique massique  $c$ , toutes trois uniformes. On note  $j_{\text{th}}(z, t)$  la densité de courant thermique.

1. Montrer que :  $\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial T} = D \frac{\partial^2 j_{\text{th}}}{\partial z^2}$  (équation (1)) où  $D$  est la diffusivité thermique,  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ .

Au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme  $T_0$  au moment  $t = 0$ . Instantanément sa surface a été soumise à une température  $T_S$ . Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en  $z = 0$  lorsque  $t$  tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini? Quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique à une profondeur  $z$  non nulle lorsque  $t$  tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini?

3. Lord Kelvin proposa la solution :  $j_{\text{th}}(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$  où  $t$  est le temps écoulé depuis la formation de la Terre. On admet qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation (1). Vérifier qu'elle est compatible avec la condition initiale et les conditions aux limites. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

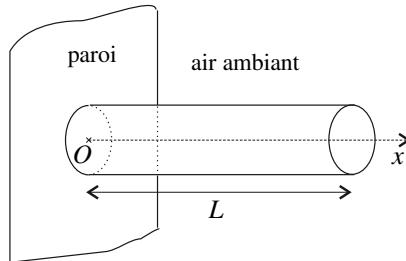
4. On suppose que  $A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c^\delta$  où  $a$  est un facteur numérique et où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des exposants éventuellement nuls. Calculer  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.

**5.** On peut montrer que  $a = 1/\sqrt{\pi}$ . Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre  $\partial T / \partial z$ . Lord Kelvin a admis que  $T_0 - T_S$  était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que  $D$  est proche de  $1.10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . L'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de  $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ . Quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?

**6.** Que pensez-vous de l'estimation précédente de l'âge de la Terre ? Quel est (ou quels sont) le (ou les) ingrédient(s) physique(s) que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ? Pourquoi l'a-t-il (ou les a-t-il) négligé(s) ?

### 23.15 Ailette de refroidissement (\*\*)

Une ailette de refroidissement, constituée par un cylindre d'axe ( $Ox$ ), rayon  $r$  et longueur  $L$ , est fixée par sa base  $x = 0$  sur une paroi dont la température est  $T_1$ . La paroi et l'ailette sont en contact avec l'air ambiant de température  $T_e$ , avec lequel ils ont des échanges thermiques régis par la loi de Newton avec un coefficient de transfert surfacique  $h$ . On souhaite calculer le flux thermique passant de la paroi à l'air ambiant par l'intermédiaire de l'ailette. On se place en régime stationnaire et on fait l'hypothèse que la température dans l'ailette ne dépend que de  $x$ .



**1.** En appliquant le premier principe à la portion d'ailette comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  montrer que  $T(x)$  vérifie l'équation suivante :  $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h}{r\lambda} (T(x) - T_e)$ .

**2.** Montrer que  $T(x)$  peut se mettre sous la forme :  $T(x) = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) + T_e$ , où  $\delta$  est une constante à déterminer. Quelles sont les conditions aux limites du problème ? Ces conditions conduisent aux expressions suivantes :

$$A = \frac{(T_1 - T_e)\alpha \exp(-2\frac{L}{\delta})}{1 + \alpha \exp(-2\frac{L}{\delta})}, \quad B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \alpha \exp(-2\frac{L}{\delta})} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda - h\delta}{\lambda + h\delta}.$$

**3.** Exprimer le flux thermique passant de la paroi à l'ailette en gardant  $A$  et  $B$  dans les calculs sans les remplacer par leurs expressions.

**4.** Le rôle de l'ailette est d'augmenter l'échange thermique entre la paroi et l'air ambiant. Définir un nombre sans dimension caractérisant l'efficacité de l'ailette et en donner une expression.

*Application numérique :  $r = 1 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 400 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $h = 150 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . L'ailette est-elle efficace ?*

**CORRIGÉS****23.1 Cuisson d'un œuf**

La durée caractéristique de la conduction thermique sur une distance  $L$  est :  $\tau = L^2/a$  où  $a$  est la diffusivité thermique. La masse de l'œuf est proportionnelle à  $L^3$  donc  $\tau$  est proportionnel à  $M^{2/3}$ . En supposant que les diffusivités thermiques de l'œuf de poule et de l'œuf d'autruche sont les mêmes et que les deux œufs ont la même forme mais ne diffèrent que par leur taille,  $\tau_{\text{autruche}} = \tau_{\text{poule}} \left( \frac{M_{\text{autruche}}}{M_{\text{poule}}} \right)^{2/3}$ . En prenant une masse de 60 g pour l'œuf de poule et de 1,5 kg pour l'œuf d'autruche, on obtient une durée de cuisson de 26 minutes environ pour l'œuf d'autruche.

**23.2 Deux conducteurs thermiques**

1. Le problème est unidimensionnel, on est en régime stationnaire et il n'y a pas de source donc la température vérifie :  $\Delta T = \frac{d^2T}{dx^2} = 0$ . La température est donc de la forme :

$$T(x) = A_1x + B_1 \quad \text{pour } x \in [-L_1, 0] \quad \text{et} \quad T(x) = A_2x + B_2 \quad \text{pour } x \in [0, L_2],$$

où  $A_1, B_1, A_2$  et  $B_2$  sont des constantes.

Les conditions aux limites sont :  $T_1 = -A_1L_1 + B_1$ ,  $T_2 = A_2L_2 + B_2$ . De plus, la température est continue en  $x = 0$  donc :  $B_1 = B_2$ , et  $\vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{u}_x$  aussi donc (avec la loi de Fourier) :  $\lambda_1 A_1 = \lambda_2 A_2$ . Ces quatre relations permettent de trouver :

$$B_1 = B_2 = \frac{\lambda_1 T_1 L_2 + \lambda_2 T_2 L_1}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1}, \quad A_1 = \frac{\lambda_2 (T_2 - T_1)}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\lambda_1 (T_2 - T_1)}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1}.$$

2. Le courant thermique dans la barre 1 est :  $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda_1 A_1 \vec{u}_x = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (T_2 - T_1)}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1} \vec{u}_x$ . Il est le même dans la barre 2. Le flux thermique traversant les barres est :  $\Phi = \vec{j}_{\text{th}} \cdot (\vec{S} \vec{u}_x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 S (T_2 - T_1)}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1}$ . La résistance thermique de l'ensemble des deux barres est :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1}{\lambda_1 \lambda_2 S} = \frac{L_1}{\lambda_1 S} + \frac{L_2}{\lambda_2 S}.$$

C'est bien la somme des résistances thermiques des deux barres.

**23.3 Double vitrage**

1. On connaît l'expression de la résistance thermique de la vitre :  $T_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda_v S}$ . La puissance thermique traversant la vitre est :  $P_f = \frac{T_i - T_e}{R_{\text{th}}} = (T_i - T_e) \frac{\lambda_v S}{e}$ .

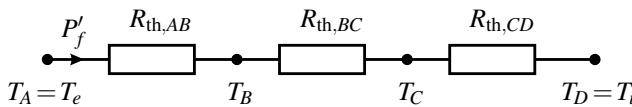
2. a.  $R_{\text{th},AB} = R_{\text{th},CD} = \frac{e}{\lambda_v S}$  et  $R_{\text{th},BC} = \frac{2e}{\lambda_a S}$ .

**b.** Les résistances sont en série donc :  $R_{\text{th},AD} = R_{\text{th},AB} + R_{\text{th},BC} + R_{\text{th},CD} = \frac{2e}{S} \left( \frac{1}{\lambda_v} + \frac{1}{\lambda_a} \right)$ .

**c.**  $P'_f = \frac{T_i - T_e}{R_{\text{th},AD}} = (T_i - T_e) \frac{S}{2e} \frac{\lambda_a \lambda_v}{\lambda_a + \lambda_v} \simeq (T_i - T_e) \frac{\lambda_a S}{2e}$  car  $\lambda_a \ll \lambda_v$ .

Ainsi :  $\frac{P'_f}{P_f} \simeq \frac{\lambda_a}{2\lambda_v} = 1,0 \cdot 10^{-2}$ . Les pertes thermiques sont bien plus faibles avec le double vitrage.

**d.** Le schéma electrocinétique équivalent est :



On en déduit, par la formule du diviseur de tension :

$$T_C - T_B = (T_i - T_e) \frac{R_{\text{th},BC}}{R_{\text{th},AB} + R_{\text{th},BC} + R_{\text{th},CD}} = (T_i - T_e) \frac{\frac{2e}{\lambda_a S}}{\frac{2e}{\lambda_v S} + \frac{2e}{\lambda_a S}} = (T_i - T_e) \frac{\lambda_v}{\lambda_a + \lambda_v}.$$

Numériquement :  $T_C - T_B = 0,98(T_i - T_e)$ . La chute de température se fait presque entièrement dans la couche d'air parce qu'elle a une résistance thermique bien plus forte que les vitres.

### 23.4 Le paradoxe de l'isolant

**1.** On donne ici une méthode de calcul différente de celle qui est exposée dans le cours. En régime stationnaire, le flux thermique  $\Phi(r)$  à travers un cylindre de rayon  $r$  et de longueur  $l$  est indépendant de  $r$  (pour  $r$  compris entre  $r_1$  et  $r_2$ ). Ainsi :  $\Phi = 2\pi r l j_{\text{th}}(r) = -2\pi \lambda l r \frac{dT}{dr}$  d'où  $-dT = \frac{\Phi}{2\pi \lambda l} \frac{dr}{r}$ . On intègre entre  $r_1$  et  $r_2$  :

$$T(r_1) - T(r_2) = \frac{\Phi}{2\pi \lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

La résistance thermique d'une longueur  $l$  de gaine est donc :  $R_{\text{th,gaine}} = \frac{1}{2\pi \lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

A l'interface gaine isolante/air, le flux thermique est égal à  $\Phi = h(T(r_2) - T_{\text{air}}) 2\pi r_2 l$ , ce qui permet de définir la résistance thermique :

$$R_{\text{gaine/air}} = \frac{T(r_2) - T_{\text{air}}}{\Phi} = \frac{1}{2\pi r_2 l h}.$$

**2.** Ces résistances thermiques sont associées en série. Elles sont équivalentes à une résistance unique égale à

$$R_{\text{th,totale}} = R_{\text{th,gaine}} + R_{\text{gaine/air}} = \frac{1}{2\pi \lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 l h}.$$

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

Calculons  $\frac{dR_{\text{th,totale}}}{dr_2} = \frac{1}{2\pi\lambda lr_2} - \frac{1}{2\pi hlr_2^2}$ . Cette dérivée s'annule pour  $r_2 = r_c = \frac{\lambda}{h}$ . La dérivée seconde en  $r_c$ ,  $\frac{d^2R_{\text{th,totale}}}{dr^2}(r_c) = -\frac{1}{2\pi\lambda lr_c^2} + \frac{1}{\pi hlr_c^3} = \frac{h^2}{2\pi\lambda^3 l}$ , est positive : il s'agit d'un minimum.

Pour  $r_2 < r_c$ , la résistance thermique diminue avec l'épaisseur de la couche isolante : une couche plus épaisse isole moins bien ! L'explication de ce paradoxe est la suivante : la résistance de la gaine augmente avec  $r_2$  mais la résistance associée au transfert gaine/air diminue car la surface exposée à l'air augmente. Dans la pratique on choisit un matériau isolant tel que  $r_c < r_2$ .

### 23.5 Associations de résistances thermiques

Dans tous les cas, le transfert thermique à fournir pour faire fondre la glace est le même (il vaut  $m\Delta_{\text{fus}}h$  où  $m$  est la masse de glace et  $\Delta_{\text{fus}}h$  l'enthalpie massique de fusion de l'eau). La différence de température est la même. Le flux thermique traversant la barre est donc inversement proportionnel à la résistance thermique. Donc la durée est proportionnelle à la résistance thermique.

Le premier renseignement nous permet de dire que la résistance thermique de la barre de cuivre est égale à la moitié de celle de la barre d'acier :  $R_{\text{Cu}} = \frac{1}{2}R_{\text{acier}}$ .

Si les deux barres sont montées en série, les résistances thermiques s'additionnent et la résistance totale est :  $R_{\text{série}} = 3R_{\text{Cu}}$ , donc la durée pour faire fondre la glace est 3 fois 20 minutes, soit 1 heure.

Si les deux barres sont montées en parallèle, ce sont les conductances thermiques qui s'additionnent et la conductance totale est :  $G_{\text{parallèle}} = \frac{3}{2}G_{\text{Cu}}$ , ou encore  $R_{\text{parallèle}} = \frac{2}{3}R_{\text{Cu}}$ , donc la durée pour faire fondre la glace est 2/3 fois 20 minutes, soit 13 minutes.

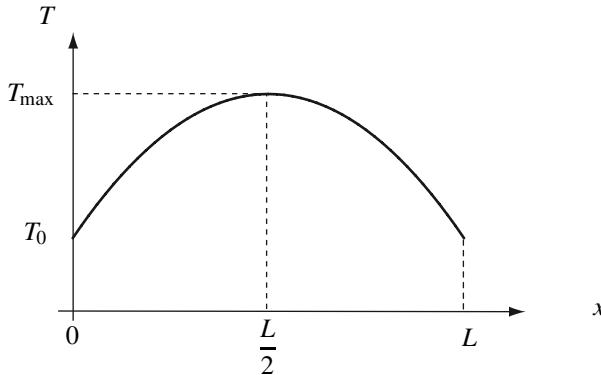
### 23.6 Fusible

1. À l'intérieur du fil l'effet Joule dégage la puissance volumique :  $\mathcal{P}_{V,\text{Joule}} = \frac{j^2}{\gamma}$  où  $j = \frac{I}{S}$  est la densité de courant volumique, soit :  $\mathcal{P}_{V,\text{Joule}} = \frac{I^2}{\gamma S^2}$ .

L'équation de diffusion thermique avec terme source est vérifiée en tout point du fil. Elle s'écrit en régime stationnaire :  $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{I^2}{\lambda \gamma S^2} = 0$ . Compte tenu des conditions aux limites ( $T(0) = T(L) = T_0$ ), cette équation s'intègre en :

$$T(x) = T_0 + \frac{I^2 L^2}{2\lambda \gamma S^2} \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right).$$

La courbe représentative de  $T(x)$  a l'allure suivante :



Conformément à ce qu'on attend, l'effet Joule chauffe le fil (en l'absence de courant, la température serait égale à  $T_0$  tout le long du fil).

**2.** La température est maximale au milieu du fil. Si celui-ci fond, c'est en  $x = L/2$  que cela se produit. On veut  $T(L/2) = T_F$ , ce qui donne :

$$S = I_{\max} L \sqrt{\frac{1}{8\lambda \gamma(T_F - T_0)}} = 1,6 \text{ mm}^2.$$

**3.** Le flux à travers la section  $x = 0$  est :

$$\Phi(0) = j_{\text{th}}(0)S = -\lambda \frac{dT}{dx}(0)S = -\frac{I^2 L}{2\gamma S} = -\frac{1}{2} R I^2.$$

Ce flux est cédé par le fil à l'extérieur et il est égal en valeur absolue à la moitié de la puissance  $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = RI^2$  dissipée par effet Joule dans le fil. L'autre moitié est évacuée en  $x = L$ .

### 23.7 Particule de combustible nucléaire

**1.** L'équation de diffusion thermique avec terme source en régime stationnaire s'écrit pour le cœur de la particule de combustible :  $\Delta T + \frac{\sigma}{\lambda_1} = 0$ .

Il vient :  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\sigma}{\lambda_1} r^2$  puis  $r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma}{3\lambda_1} r^3$  (la constante d'intégration est nulle car les deux membres de l'égalité sont nuls pour  $r = 0$ ). On trouve ensuite :  $\frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma}{3\lambda_1} r$  et finalement :  $T(r) = T_0 - \frac{\sigma}{6\lambda_1} r^2$ .

**2.**  $T(0) - T(r_1) = \frac{\sigma r_1^2}{6\lambda_1} = 4,34 \text{ K}$ .

**3. a.** D'après la loi de Fourier, la densité de courant thermique est :  $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda_i \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = j_{\text{th}}(r) \vec{u}_r$ . Le flux thermique traversant une sphère de rayon  $r$  quelconque est :

$$\Phi = 4\pi r^2 j_{\text{th}}(r) = -4\pi \lambda_i r^2 \frac{dT}{dr} = 4\pi \lambda_i \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

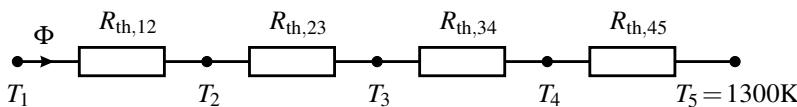
## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

**b.** En régime stationnaire,  $\Phi$  est une constante indépendante de  $r$ .

On a, pour  $r$  compris entre  $r_1$  et  $r_2$  :  $d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{4\pi\lambda_2}{\Phi}dT$ . En intégrant cette relation entre  $r_1$  et  $r_2$  il vient :  $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{4\pi\lambda_2}{\Phi}(T(r_2) - T(r_1))$ . La résistance thermique de la couche de C poreux est donc :  $R_{\text{th},12} = \frac{T(r_1) - T(r_2)}{\Phi} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\lambda_2 r_1 r_2}$ .

**c.**  $R_{\text{th},12} = 175 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ ,  $R_{\text{th},23} = 5,99 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ ,  $R_{\text{th},34} = 0,86 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ ,  $R_{\text{th},45} = 4,12 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

**d.** On utilise le schéma électrocinétique équivalent :



Comment trouver  $\Phi$ ? On connaît  $T(r)$  pour  $r \leq r_1$ , on en déduit  $j_{\text{th}}(r) = -\lambda_1 \frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma r}{3}$ , puis  $\Phi = 4\pi r_1^2 j_{\text{th}}(r_1) = \frac{4}{3}\pi\sigma r_1^3$ . En fait, il s'agit de la puissance totale dégagée par les réactions nucléaires dans le cœur. Numériquement :  $\Phi = 0,327 \text{ W}$ .

On peut alors calculer :  $T_4 = T_5 + R_{\text{th},45}\Phi = 1301,3 \text{ K}$ ,  $T_3 = T_4 + R_{\text{th},34}\Phi = 1301,6 \text{ K}$ ,  $T_2 = T_3 + R_{\text{th},23}\Phi = 1303,6 \text{ K}$  et  $T_1 = T_2 + R_{\text{th},12}\Phi = 1361 \text{ K}$ .

### 23.8 Épaisseur d'un igloo

Supposons que l'igloo soit hémisphérique, de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2 = R_1 + e$ . Il faut déterminer sa conductance thermique. Nous sommes dans un problème à symétrie sphérique,  $T = T(r)$  et  $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r)\vec{u}_r$  dans les murs. En régime stationnaire, le flux thermique est le même à travers toute demi-sphère de rayon  $r$  :  $\Phi_0 = 2\pi r^2 j_{\text{th}}(r)$ , d'où  $j_{\text{th}}(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi r^2} = -\lambda \frac{dT}{dr}$  avec la loi de Fourier. On isole  $\frac{dT}{dr}$  et on intègre l'équation obtenue de  $R_1$  à  $R_2$ . On obtient :  $T_1 - T_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ . La conductance thermique de l'igloo est donc :  $G_{\text{th}} = 2\pi\lambda \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ .

En régime stationnaire, le bilan énergétique de l'ensemble {igloo+occupant} s'écrit :  $\mathcal{P} = G_{\text{th}}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$ . Pour l'application numérique, on prendra  $R_1 = 1 \text{ m}$ . On trouve :  $e \simeq 14 \text{ cm}$ .

Si on avait fait l'hypothèse  $e \ll R_1$ , on aurait pu utiliser l'expression de la conductance thermique unidimensionnelle :  $G_{\text{th}} = \frac{\lambda S}{e} = \frac{\lambda 2\pi R_1^2}{e}$ . On aurait obtenu :  $e \simeq 13 \text{ cm}$ . L'approximation est satisfaisante pour trouver un ordre de grandeur de l'épaisseur.

### 23.9 Matériaux chauffés par un flux d'énergie variable

**1.** La densité de courant thermique en  $x = 0$  doit être égale à la puissance surfacique reçue :  $\vec{j}_{\text{th}}(0, t) \cdot \vec{u}_x = j(t)$ . Avec la loi de Fourier cette condition se traduit par :  $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{j(t)}{\lambda}$ .

**2.**  $\tau_d = \frac{L^2}{a}$ .

**3. a.**  $j(t)$  décroît avec  $t$ , donc plus  $t$  est grand moins la pente à l'origine de la courbe est négative. L'ordre chronologique des courbes est donc :

- pour  $\tau = \tau_d : c, a, b, d$  ;
- pour  $\tau = 10\tau_d : a, b, c, d$ .

On peut remarquer que  $T(0,t)$  passe par une valeur maximale à environ  $t = 0,6\tau$ .

**b.** Dans le cas  $\tau = 10\tau_d$ ,  $T(x,t)$  les courbes sont des droites : la température est pratiquement une fonction affine de  $x$  parce qu'on est en régime lentement variable.

### 23.10 Sensation de froid et de chaud

**1.** L'équation de diffusion thermique est : pour  $x < 0$ ,  $\frac{1}{D_1} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , avec  $D_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 c_1}$  et pour  $x > 0$ ,  $\frac{1}{D_2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , avec  $D_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2 c_2}$ .

**2.**  $f_D(0,t) = 0$  est évident.  $\frac{\partial f_D}{\partial x}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \times \exp(-\frac{x^2}{4Dt})$  donc  $\frac{\partial f_D}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}$ .

**3.** Les conditions aux limites sont :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} T_1(x,t) = T_1$  car à l'instant  $t$  la diffusion thermique, partant de la jonction, s'est faite sur une distance caractéristique  $\sqrt{Dt}$  donc pour  $x \gg \sqrt{Dt}$ ,  $T_1(x,t) \simeq T_1$  ; on peut donc écrire :  $A_1 - B_1 = T_1$  ;
- de même,  $\lim_{x \rightarrow \infty} T_2(x,t) = T_2$  soit :  $A_2 + B_2 = T_2$  ;
- en  $x = 0$ , la température est continue :  $T_J = T_1(0,t) = T_2(0,t)$  soit  $T_J = A_1 = A_2$  ;
- en  $x = 0$ , le courant thermique est continu :  $j_{\text{th},1}(0,t) = j_{\text{th},2}(0,t)$ .

Or, d'après la loi de Fourier :

$$j_{\text{th},1}(0,t) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t) = -\lambda_1 B_1 \frac{\partial f_{D_1}}{\partial x}(0,t) = -\frac{\lambda_1 B_1}{\sqrt{\pi D_1 t}} = \frac{E_1 B_1}{\sqrt{\pi t}}.$$

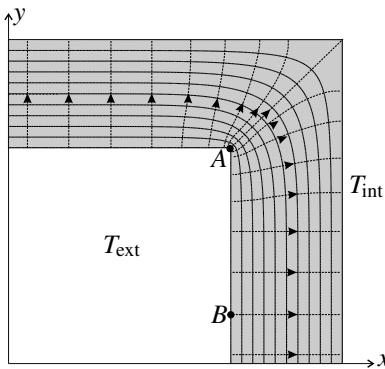
De même  $j_{\text{th},2}(0,t) = \frac{E_2 B_2}{\sqrt{\pi t}}$ . La continuité du courant thermique s'écrit donc :  $E_1 B_1 = E_2 B_2$ .

On en déduit :  $E_1(A_1 - T_1) = E_2(T_2 - A_2)$  soit  $E_1(T_J - T_1) = E_2(T_2 - T_J)$  et finalement :

$$T_J = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}.$$

**4.** L'application numérique donne : pour un contact main-bois :  $T_J = 33,9^\circ\text{C}$ , pour un contact main-acier :  $T_J = 21,9^\circ\text{C}$ . La température de contact est plus froide dans le cas de l'acier que dans le cas du bois. C'est pourquoi l'objet en acier semble plus froid que l'objet en bois alors qu'il est à la même température. En hiver dans un parc public, il vaut mieux s'asseoir sur un banc en bois que sur une chaise en métal !

## 23.11 | Simulation d'un champ de température



1. Si  $L \gg a$  on peut négliger les effets de bord et supposer que la boîte est infinie dans la direction de l'axe ( $Oz$ ). Dans ce cas la température ne dépend plus de  $z$ .

En régime stationnaire, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $T(x, y)$  est :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

2. Loin du coin, les isothermes sont quasiment des droites parallèles soit à ( $Ox$ ) soit à ( $Oy$ ) et elles sont régulièrement espacées. C'est normal car on peut à ces endroits négliger l'effet de bord et assimiler la paroi de la boîte à une plaque infinie. Dans la zone du point  $B$  de la figure par exemple on peut faire l'approximation :  $T(M) \simeq T(x)$  ; l'équation de Laplace s'écrit alors  $\Delta T \simeq \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$  et a pour solution  $T(x) = Ax + B$ . Ceci donne bien des isothermes rectilignes parallèles à ( $Oy$ ) et régulièrement espacées (pour des valeurs de la température régulièrement espacées).

3. Les lignes de courant thermique sont , d'après la loi de Fourier, identiques aux lignes de champ de  $\vec{\text{grad}}T$  (au sens près) ; elles sont donc orthogonales aux surfaces isothermes, ce qui permet de les tracer.

4. La résistance thermique de l'une des 4 plaques est :  $R_{\text{th, plaque}} = \frac{e}{\lambda La}$ . Ces quatre résistances thermiques sont en parallèle donc :  $\frac{1}{R_{\text{th,0}}} = 4 \times \frac{1}{R_{\text{th, plaque}}}$  soit  $R_{\text{th,0}} = \frac{e}{4\lambda aL}$ .

5. L'expression de  $R_{\text{th,0}}$  ne tient pas compte des effets de bord. Or, au voisinage du point  $A$  les isothermes sont plus serrées que dans la région de  $B$ , signe que  $\|\vec{\text{grad}}T\|$  est plus fort en  $A$  et donc, d'après la loi de Fourier,  $\|\vec{j}_{\text{th}}\|$  aussi. Le flux thermique sur la surface autour de  $A$  est donc plus important dans la réalité qu'en l'absence d'effet de bord. Ainsi la conductance thermique simulée est plus forte et la résistance thermique plus faible. Donc :  $R_{\text{th,1}} = 0,91R_{\text{th,0}}$ .

**23.12 Détermination expérimentale du coefficient de transfert thermique surfacique d'une interface solide-fluide**

1. a. Voir une première méthode de calcul dans le cours et une deuxième méthode dans l'exercice « le paradoxe de l'isolant ». On trouve :  $R_i = \frac{\ln\left(\frac{a''}{a'}\right)}{2\pi k_i L} = 5,0 \text{ K.W}^{-1}$ .

b.  $\Phi_i = \frac{\theta'' - \theta'}{R_i} = 2,0 \text{ W}$ . Ce transfert thermique va de l'extérieur vers l'intérieur.

2. a. Le flux thermique reçu par le fluide est égal à la puissance électrique fournie à laquelle s'ajoute le flux provenant de l'extérieur à travers l'isolant (l'ensemble du dispositif est à basse température donc les fuites thermiques sont vers l'intérieur) :  $\Phi_f = \mathcal{P}_{el} + \Phi_i = 1002 \text{ W}$ . On peut dire que l'isolant est efficace puisque  $\Phi_i \ll \mathcal{P}_{el}$ .

b. D'après la formule de la résistance thermique d'un manchon cylindrique (ici entre les rayons  $a_1$  et  $a_2$ ) :  $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\Phi_f}{2\pi k_a L} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ . On en déduit que :

$$k_a = \frac{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}{2\pi L} \frac{\Phi_f}{\theta_2 - \theta_1} = 46 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}.$$

c. Toujours d'après le même résultat,  $\theta_2 - \theta_0 = \frac{\Phi_f}{2\pi k_a L} \ln\left(\frac{a_2}{a_0}\right)$ . D'où :

$$\theta_0 = \theta_2 - \frac{\Phi_f}{2\pi k_a L} \ln\left(\frac{a_2}{a_0}\right) = \theta_2 - (\theta_2 - \theta_1) \frac{\ln\left(\frac{a_2}{a_0}\right)}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} = -21 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

**Remarque**

On aurait pu utiliser le fait que, dans l'acier, le champ de température est de la forme :

$$\theta(r) = A \ln\left(\frac{r}{a_0}\right) + \theta_0.$$

d.  $\Phi_f = 2\pi a_0 L \times h(\theta_0 - \theta_f)$ , d'où :  $h = \frac{\Phi_f}{2\pi a_0 L (\theta_0 - \theta_f)} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ . C'est une valeur assez élevée.

**23.13 Planète radioactive**

1. L'équation de diffusion thermique en régime quelconque et avec terme source s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho H(r).$$

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

**2. a.** Pour  $r < r_m$ , l'équation de diffusion thermique se simplifie en :  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$ , ce qui s'intègre en :  $r^2 \frac{dT}{dr} = A'$  puis en :  $T(r) = \frac{A}{r} + B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégration.

Pour  $r_m < r < R$ , l'équation de la chaleur devient :  $\lambda \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \rho H = 0$ , ce qui donne :

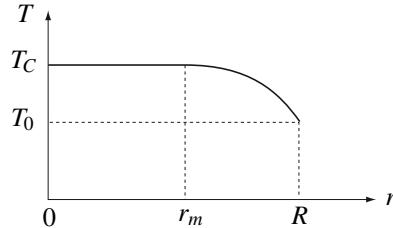
$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho H}{\lambda} r^2 \Leftrightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H}{3\lambda} r^3 + C \Leftrightarrow T(r) = -\frac{\rho H}{6\lambda} r^2 - \frac{C}{r} + D,$$

où  $C$  et  $D$  sont deux nouvelles constantes d'intégration.

**b.** En  $r = 0$ , la température doit rester finie. En  $r = R$ , la température est égale à  $T_0$  et en  $r = r_m$  il y a continuité de la température et du flux thermique donc de  $\frac{dT}{dr}$  (car la conductivité thermique ne change pas). Nous en déduisons :

$$\begin{cases} A = 0 \\ -\frac{\rho H}{6\lambda} R^2 - \frac{C}{R} + D = T_0 \\ -\frac{\rho H}{6\lambda} r_m^2 - \frac{C}{r_m} + D = B \\ -\frac{\rho H}{3\lambda} r_m + \frac{C}{r_m^2} = 0 \end{cases}$$

**c.** La courbe représentative a l'allure suivante :



La température est uniforme pour  $r < r_m$  : la puissance fournie par la croûte radioactive chauffe le cœur de la planète jusqu'à ce que cette température soit uniforme quand le régime permanent est atteint.

La température maximale est celle du cœur de la planète :

$$T_{\max} = \frac{\rho H}{6\lambda} \left( R^2 - 3r_m^2 + 2 \frac{r_m^3}{R} \right) + T_0.$$

Le gradient de température à la surface est  $\frac{dT}{dr}(R) = \frac{\rho H}{3\lambda} \left( \frac{r_m^3}{R^2} - R \right)$ . L'application numérique donne :  $(dT/dr)(R) = -10 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  et  $T_C = 447 \text{ K}$ . La valeur du gradient de température est correcte mais celle de la température au centre est beaucoup plus faible que la valeur réelle.

**3.**  $\Phi(R) = -\lambda \frac{dT}{dr}(r=R) \times 4\pi R^2 = \frac{4\pi H\rho}{3} (R^3 - r_m^3)$ . Ce flux thermique est exactement égal à la puissance radioactive dégagée entre les rayons  $r_m$  et  $R$ . En régime stationnaire, toute la puissance dégagée par les désintégrations radioactives est évacuée à la surface de la planète.

### 23.14 Âge de la Terre selon Lord Kelvin

**1.** La température vérifie l'équation de la chaleur :  $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ . En dérivant cette équation par rapport à  $x$  et en utilisant la loi de Fourier, qui s'écrit ici  $j_{\text{th}}(z,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ , on montre que la densité de courant thermique vérifie la même équation, à savoir que :  $\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_{\text{th}}}{\partial x^2}$ .

**2.** En  $z = 0$  :  $\lim_{t \rightarrow \infty} j_{\text{th}}(0,t) = 0$ ; de plus la température subit une brusque discontinuité à  $t = 0$ , en  $z = 0$  uniquement, ce qui provoque un gradient de température infini et donc, d'après la loi de Fourier, un flux thermique infini :  $\lim_{t \rightarrow 0} j_{\text{th}}(0,t) = \infty$ .

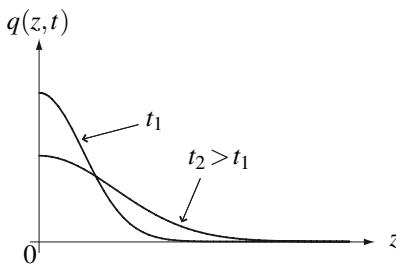
En  $z \neq 0$ , la densité de courant thermique est nulle à  $t = 0$  et à  $t \rightarrow \infty$  (la température est devenue uniforme, il n'y a plus de transfert thermique).

**3.** La fonction proposée vérifie l'équation de la diffusion thermique. Il reste à vérifier qu'elle satisfait aux conditions aux limites et aux conditions initiales.

Pour  $z = 0$ ,  $j_{\text{th}}(0,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}}$  donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} j_{\text{th}}(0,t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} j_{\text{th}}(0,t) = \infty$ .

Pour  $z \neq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} j_{\text{th}}(z,t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} j_{\text{th}}(z,t) = 0$ .

La solution proposée par Lord Kelvin est bien la bonne. Elle a l'allure suivante :



**4.**  $j_{\text{th}}$  s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $D$  en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  donc  $A$  s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3}$ . D'autre part,  $\lambda$  s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $c$  en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . On en déduit :

$$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} = \text{K}^\alpha \times (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1})^\beta \times (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})^\gamma \times (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1})^\delta$$

d'où :

$$\alpha - \beta - \delta = 0, \quad \beta + \gamma = 1, \quad \beta - 3\gamma + 2\delta = 1, \quad \text{et} \quad -3\beta - 2\delta = -3$$

ce qui donne :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \delta = 0$ . Finalement,  $A = a(T_0 - T_S)\lambda$ .

## CHAPITRE 23 – TRANSFERTS THERMIQUES

**5.**  $\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{j_{\text{th}}(z, t)}{\lambda}$ . Au voisinage de  $z = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z}(0) = \frac{T_0 - T_S}{\sqrt{\pi D t}}$ . Donc l'âge de la Terre est :  $t = \frac{(T_0 - T_S)^2}{\pi D} \frac{1}{((\partial T / \partial z)(0))^2}$ . L'application numérique donne entre de 11 et 45 millions d'années.

**6.** Il est connu maintenant que l'âge de la Terre est d'environ 4,5 milliards d'années, soit environ 100 fois le résultat de Lord Kelvin. L'erreur provient de ce qu'il aurait fallu prendre en compte la radioactivité de la croûte terrestre qui ralentit son refroidissement. Mais la radioactivité n'a été découverte par Becquerel qu'en 1896 donc après le travail de Lord Kelvin.

**23.15 Ailette de refroidissement**

**1.** Entre les instant  $t$  et  $t + dt$  la tranche  $[x, x + dx]$  reçoit les transferts thermiques suivants :

- à travers la section d'abscisse  $x$  :  $\delta Q_x = j_{\text{th}}(x) \times \pi r^2 \times dt$ ,
- à travers la section d'abscisse  $x + dx$  :  $\delta Q_{x+dx} = -j_{\text{th}}(x + dx) \times \pi r^2 \times dt$ ,
- à travers la surface latérale :  $\delta^2 Q_{\text{lat}} = h(T_e - T(x)) \times 2\pi r dx \times dt$ ,

soit au total :

$$\begin{aligned}\delta^2 Q &= \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} + \delta^2 Q_{\text{lat}} = (j_{\text{th}}(x) - j_{\text{th}}(x + dx))\pi r^2 dt + h(T_e - T(x))2\pi r dx dt \\ &= -\frac{d j_{\text{th}}(x)}{dx} \pi r^2 dx dt + h(T_e - T(x))2\pi r dx dt.\end{aligned}$$

Le premier principe s'écrit pour cette tranche  $d^2 U = \delta^2 Q$  avec  $d^2 U = 0$  puisqu'on est en régime stationnaire. Il vient donc, après simplification :  $-\frac{d j_{\text{th}}(x)}{dx} + \frac{2h}{r}(T_e - T(x)) = 0$ .

En utilisant la loi de Fourier,  $j_{\text{th}}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$  on obtient ensuite :  $\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2h}{r\lambda}(T(x) - T_e)$ .

**2.** Cette équation s'intègre en :  $T(x) = A \exp(x/\delta) + B \exp(-x/\delta) + T_e$  où  $\delta = \sqrt{\frac{r\lambda}{2h}}$ . Les conditions aux limites sont :

- en  $x = 0$  :  $T(0) = T_1$ ,
- en  $x = L$  :  $j_{\text{th}}(L) = h(T(L) - T_e) \Leftrightarrow -\lambda \frac{dT}{dx}(L) = h(T(L) - T_e)$ .

Les constantes  $A$  et  $B$  vérifient donc le système :

$$A + B = T_1 - T_e \quad \text{et} \quad -\lambda \frac{A}{\delta} \exp(L/\delta) + \lambda \frac{B}{\delta} \exp(-L/\delta) = h(A \exp(L/\delta) + B \exp(-L/\delta)),$$

dont la solution est donnée dans l'énoncé.

$$\mathbf{3.} \Phi_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}} = j_{\text{th}}(0)\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dx}(0)\pi r^2 = -\frac{\lambda \pi r^2}{\delta}(A - B) = 2\pi r h \delta (B - A).$$

**4.** On définit l'efficacité de l'ailette par :

$$\eta = \left| \frac{\Phi_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}}}{\Phi_{\text{paroi} \rightarrow \text{air, sans ailette}}} \right| = \left| \frac{\Phi_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}}}{h\pi r^2(T_1 - T_e)} \right| = \frac{2\delta}{r} \frac{B - A}{T_1 - T_e} = \frac{2\delta}{r} \frac{1 - \alpha \exp(-2L/\delta)}{1 + \alpha \exp(-2L/\delta)}.$$

L'ailette joue son rôle si  $\eta > 1$ . L'application numérique donne :  $\delta = 3,7 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 0,97$  et  $\exp(-2L/\delta) = 4,2 \times 10^{-3}$ , donc :  $\eta \simeq \frac{2\delta}{r} = 7,4$ . L'ailette est bien efficace.

# **Sixième partie**

# **Physique quantique**



# Introduction à la mécanique quantique.

À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, les lois de la Physique s'intègrent dans un édifice théorique général qui distingue la *matière* du *rayonnement électromagnétique*. La matière est constituée de particules matérielles, individualisées et caractérisées par une extension spatiale que l'on réduit parfois avec la notion de particule ponctuelle. L'état instantané de chacune d'entre elles est complètement déterminé par la donnée de 6 variables dynamiques (3 coordonnées d'espace et 3 composantes de la quantité de mouvement) dont l'évolution, dans un référentiel donné, obéit aux lois de la mécanique de Newton. Le rayonnement électromagnétique, lui, est régi par la théorie de Maxwell. Sa description utilise une infinité de variables, les composantes des champs électrique et magnétique en chaque point de l'espace. Il présente un comportement manifestement ondulatoire (phénomènes de propagation, d'interférences et de diffraction), et semble impossible à scinder en particules individualisées.

Pourtant, à l'aube du XX<sup>ème</sup> siècle, l'étude expérimentale des interactions entre la matière et le rayonnement électromagnétique va venir bouleverser ce tableau et conduire à l'émergence progressive d'une nouvelle théorie, la mécanique quantique, qui va concilier les aspects ondulatoires et particulaires de la matière et du rayonnement.

## 1 Ondes ou particules ?

En guise d'introduction, commençons par rappeler la notion de **dualité onde-particule** vue en première année.

### 1.1 Interférences avec des ondes lumineuses

#### a) Description de l'expérience

Considérons une expérience récente, réalisée au Laboratoire de Photonique Quantique et Moléculaire de l'ENS Cachan par Vincent Jacques [13]. Le dispositif expérimental est un interféromètre à division du front d'onde constitué d'un biprisme de Fresnel, dont le schéma est donné sur la figure 24.1.

Le biprisme est éclairé en incidence normale. Chaque moitié du faisceau est déviée par un

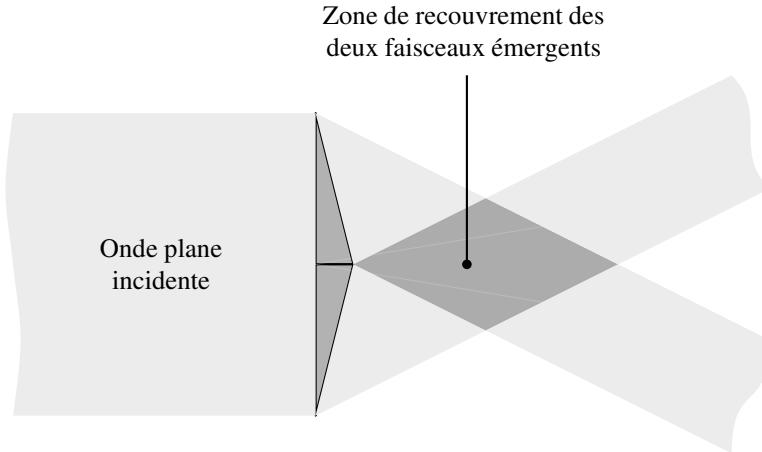


Figure 24.1 – Dispositif du biprisme de Fresnel.

des deux prismes. Les deux faisceaux déviés se superposent à la sortie du dispositif dans un volume de l'espace. D'un point de vue classique, ce dispositif offre deux chemins à la lumière, qui peut passer par le prisme supérieur ou inférieur. La source lumineuse utilisée dans cette expérience est une source à photons uniques. Elle est capable de délivrer les photons les uns après les autres. De façon très imagée, un photon peut être considéré comme une « particule de lumière ». Son énergie  $E_{\text{photon}}$  et sa quantité de mouvement  $p_{\text{photon}}$  sont des quantités indivisibles et sont respectivement appelées *quantum* d'énergie et de quantité de mouvement. L'énergie  $E_{\text{photon}}$  est liée à la fréquence  $\nu$  de l'onde électromagnétique associée par la **relation de Planck-Einstein** [9] :

$$E_{\text{photon}} = h\nu. \quad (24.1)$$

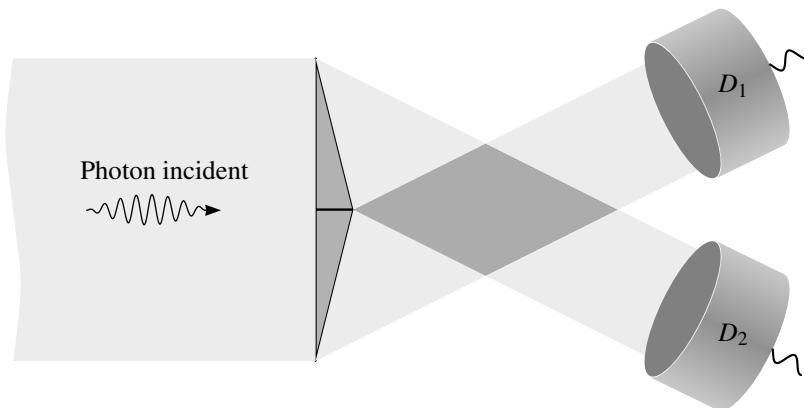
où  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  est la constante de Planck. Le photon est une particule relativiste pour laquelle  $E_{\text{photon}} = p_{\text{photon}}c$ , ce qui conduit à la relation :

$$p_{\text{photon}} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (24.2)$$

où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde dans le vide de l'onde électromagnétique associée au photon.

### b) Aspect particulaire

Dans une première configuration de l'expérience, deux détecteurs sont placés dans les positions  $D_1$  et  $D_2$  (voir figure 24.2).

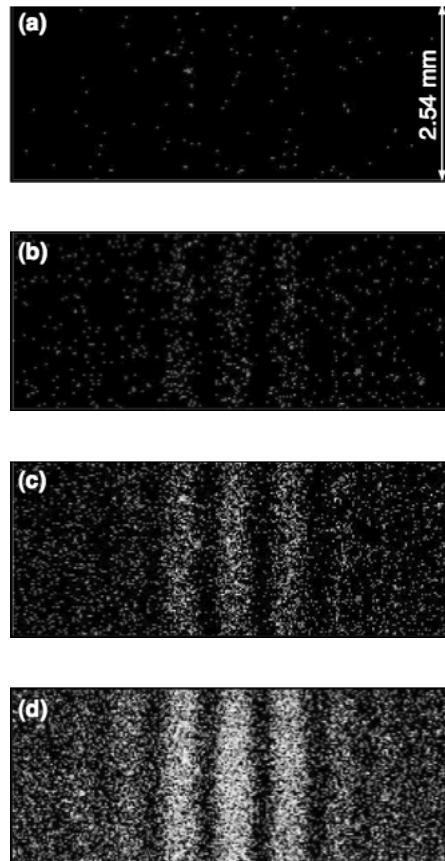


**Figure 24.2** – Détection d'un photon sur l'une des deux voies.

Un dispositif électronique compte les événements, appelés coïncidences, où les deux détecteurs délivrent *simultanément* un signal. L'expérience montre l'absence de coïncidences et atteste d'un comportement particulier de la lumière. Selon une image classique, le photon passe par la voie supérieure ou inférieure, il ne se scinde pas. Mais ce n'est qu'une image : le résultat de l'expérience certifie que l'énergie indivisible associée au photon est détectée par *un seul* des deux détecteurs mais jamais les deux à la fois. Le modèle ondulatoire de la lumière n'exclut pas que les deux détecteurs puissent recevoir simultanément une même quantité d'énergie lumineuse, provenant de la scission de l'énergie du photon selon les deux voies de l'interféromètre : c'est en désaccord avec l'expérience.

### c) Aspect ondulatoire

Dans une seconde configuration de l'expérience, on place un détecteur dans le champ d'interférences, c'est-à-dire dans la zone de recouvrement des deux faisceaux lumineux qui émergent du biprisme (voir figure 24.1). Chaque image acquise par le détecteur correspond à une durée de comptage d'une seconde et à la détection d'une dizaine de photons environ. Ces images sont cumulées. Sur la figure 24.3, les images (a), (b), (c) et (d) présentées correspondent respectivement à l'accumulation de 10, 100, 500 et 2000 clichés.



**Figure 24.3** – Construction de la figure d'interférences photon après photon [13].

On visualise la construction progressive des franges d'interférences au fur et à mesure que les photons sont détectés. Les mesures s'accordent remarquablement bien avec la distribution d'éclairement prévue par l'optique ondulatoire. Cette expérience est complémentaire de la précédente : elle n'apporte pas d'information sur la voie de l'interféromètre suivie par un photon détecté. Lorsqu'on observe la figure d'interférences, on ne peut pas savoir par quelle voie est passé chaque photon détecté. La notion de rayon lumineux, en tant que trajectoire des photons, n'a donc ici pas de sens.

#### d) Conclusion

Il faut renoncer à utiliser une description classique (onde ou particule) pour décrire de façon satisfaisante et unique la lumière. Dans un langage de physique « classique », la première

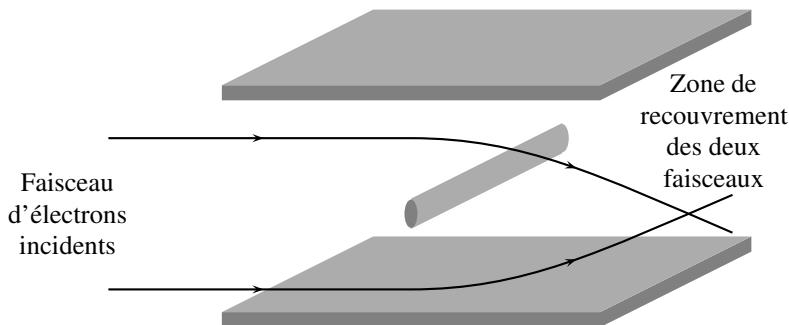
expérience présentée trouve son interprétation dans une description particulière et la seconde dans une interprétation ondulatoire. La mécanique quantique offre une description unique et précise de la lumière. Elle permet de calculer la probabilité de détection d'un photon en un point donné. Cette probabilité est proportionnelle à l'amplitude au carré de la vibration lumineuse en ce point. Le lien entre les descriptions particulière et ondulatoire de la lumière se fait par l'intermédiaire d'une description statistique et de la relation de Planck-Einstein (24.1).

## 1.2 Interférences avec des ondes de matière

En 1923, Louis de Broglie émet l'hypothèse que la notion de dualité onde-particule peut être étendue à la matière [8]. À une particule matérielle de quantité de mouvement de norme  $p$ , est associée une longueur d'onde  $\lambda_{DB}$ , donnée par la **relation de de Broglie** :

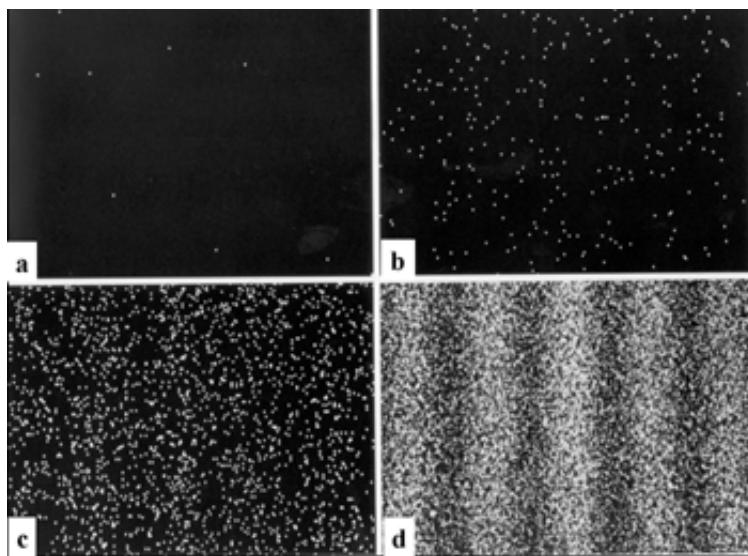
$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}. \quad (24.3)$$

Afin d'illustrer les idées de L. de Broglie, nous présentons une expérience d'interférences avec des électrons. Le dispositif interférentiel utilisé par Tonomura en 1989 est analogue à un biprisme de Fresnel [21] (figure 24.4).



**Figure 24.4 –** Dispositif interférentiel à deux voies pour des électrons : un système d'électrodes divise le faisceau électronique ; les deux faisceaux déviés se recouvrent en sortie du dispositif.

Des électrons, émis par une électrode, sont accélérés sous une différence de potentiel de 50 kV (il s'agit d'électrons relativistes) et dirigés vers un ensemble de trois électrodes. Une électrode centrale cylindrique, de diamètre inférieur au micromètre, est portée à un potentiel de 10 V supérieur à celui de deux électrodes planes latérales reliées à la Terre. La distance entre les deux électrodes latérales est de 10 mm. Le champ électrique créé par les électrodes dévie les électrons qui passent dans le dispositif. Sur la figure 24.4, on a représenté deux trajectoires possibles. Le faisceau d'électrons incident est divisé en deux faisceaux qui se recouvrent à la sortie du dispositif.



**Figure 24.5** – Impact successifs des électrons sur le détecteur, qui reconstruisent peu à peu la figure d'interférence à deux ondes. (a) : 8 électrons détectés ; (b) : 270 ; (c) : 2000 ; (d) : 60000.

La détection des électrons est réalisée dans un plan situé dans la zone de recouvrement des deux faisceaux déviés. Sur la figure 24.5, on constate qu'une figure d'interférences se construit progressivement au fur et à mesure que les électrons s'accumulent dans le plan de détection.

Comme dans l'expérience d'optique équivalente, la distribution des points d'impact des électrons sur le détecteur suit une loi statistique particulière. L'observation de la figure d'interférence ne donne aucune information sur la trajectoire suivie par chaque électron. La notion de trajectoire des électrons n'a donc pas de sens dans l'expérience réalisée. Si l'on souhaite déterminer par quelle voie passe chaque électron, on doit réaliser une autre expérience en plaçant par exemple deux détecteurs à la sortie du dispositif, dans le prolongement des deux faisceaux déviés. Mais alors, la figure d'interférence n'est plus observable.

D'autres expériences d'interférences ont été conduites avec d'autres particules matérielles : neutrons [6], atomes d'hélium [19] ou même des molécules de fullerène [1]. La distribution statistique des impacts des particules matérielles sur le détecteur dépend de leur longueur d'onde de de Broglie et des caractéristiques géométriques du dispositif, indépendamment de leur nature physique.

### 1.3 Principe de complémentarité de Bohr

Les faits expérimentaux présentés ci-dessus nous amènent au **principe de complémentarité**, énoncé par Niels Bohr [4] :

Selon l'expérience réalisée, la lumière et la matière présentent un comportement ondulatoire ou particulaire. Il n'existe pas de description classique cohérente, en termes d'onde ou de particule, permettant d'interpréter les différents phénomènes observés.

La mécanique quantique a été élaborée de façon à donner une description unique et précise de tous les phénomènes observés, qu'il s'agisse de la lumière ou de la matière. La probabilité de détecter un photon ou une particule matérielle en un point donné suit une loi qui est déterminée par l'onde elle-même.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la théorie ondulatoire de la matière, qui permet de déterminer la probabilité de présence d'une particule matérielle au voisinage d'un point de l'espace à un instant donné.

Dans la suite du cours, nous appellerons *particule quantique*, ou parfois *particule* lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, les objets physiques étudiés qui pourront révéler un comportement quantique. Par opposition, les particules qui suivent les lois de la mécanique classique, seront nommées *particules classiques*.

## 2 La fonction d'onde et l'équation de Schrödinger

La mécanique ondulatoire a pour origine les travaux de Louis de Broglie. Elle a été développée par Erwin Schrödinger [18]. Pour étudier la propagation des ondes de matière, ce dernier introduit un champ scalaire à valeurs complexes,  $\psi(M, t)$ , la **fonction d'onde**.

### 2.1 Description de l'état d'une particule

La description complète de l'état dynamique d'une particule quantique, de masse  $m$ , à un instant  $t$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , se fait au moyen d'une *fonction d'onde*  $\psi(M, t)$  à valeurs complexes. La probabilité de présence de la particule, à l'instant  $t$ , dans un volume mésoscopique  $d\tau$  centré au point  $M$  est donnée par la relation :

$$dP(M, t) = \psi(M, t)\psi^*(M, t)d\tau = |\psi(M, t)|^2 d\tau.$$

Par état dynamique de la particule, on entend la totalité des grandeurs physiques qui caractérisent le mouvement de la particule dans le référentiel  $\mathcal{R}$  : en particulier la position, la quantité de mouvement, le moment cinétique ou encore l'énergie de la particule.

#### Remarque

Conformément au programme, on se limitera à des problèmes unidimensionnels où la fonction d'onde ne dépendra que d'une seule variable spatiale, que nous choisissons de nommer  $x$ . La **probabilité de présence** de la particule, à l'instant  $t$ , entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est donnée par :

$$dP = |\psi(x, t)|^2 dx.$$

Dans cette approche unidimensionnelle, la fonction d'onde a la dimension d'une longueur à la puissance  $-\frac{1}{2}$ .

## 2.2 Amplitude de probabilité et condition de normalisation

La fonction d'onde  $\psi(x,t)$  est appelée **amplitude de probabilité**. C'est une fonction à valeurs complexes. On appelle *densité de probabilité de présence* la quantité réelle  $|\psi(x,t)|^2$ . La densité de probabilité de présence est une quantité accessible à la mesure, comme on le verra dans le paragraphe suivant, et possède donc une réalité physique.

La fonction d'onde  $\psi(x,t)$  est définie à un facteur de phase près : on admettra que les fonctions d'onde  $\psi_1(x,t)$  et  $\psi_2(x,t) \exp(i\phi)$ , où  $\phi$  est une constante, représentent le même état physique d'une particule quantique.

Notons  $\mathcal{D}$  le domaine de l'espace accessible à la particule. Celle-ci se trouve *certainement* dans le domaine  $\mathcal{D}$ . Cela se traduit mathématiquement par la **relation de normalisation** suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} |\psi(x,t)|^2 dx = 1. \quad (24.4)$$

La fonction d'onde est dite de carré sommable. Ainsi, l'aire totale sous la courbe de la figure 24.6 (b) est égale à l'unité.

## 2.3 Interprétation probabiliste

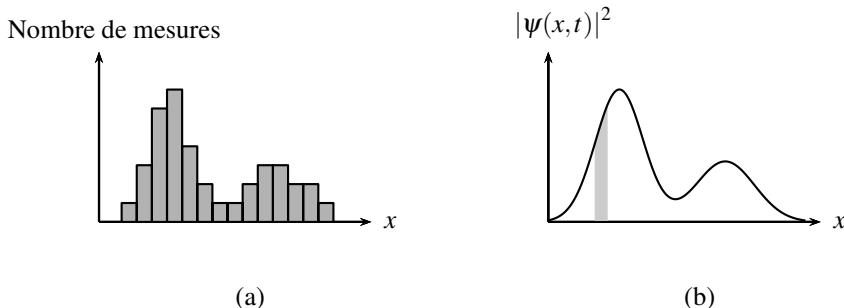
L'interprétation de la fonction d'onde en termes de probabilité est due à Max Born [5]. La probabilité de présence  $dP(M,t)$  représente la probabilité que la particule quantique puisse être détectée au voisinage du point  $M$  par une mesure réalisée à l'instant  $t$ .

Pour mesurer la **densité de probabilité de présence**, il faudrait pouvoir répéter, à un même instant  $t$ , un nombre important de mesures indépendantes de la position de la particule quantique et dresser un histogramme des valeurs obtenues. Il est équivalent de considérer  $N$  particules quantiques identiques, indépendantes, toutes dans le même état représenté par la fonction d'onde  $\psi(M,t)$ . À un instant  $t$  donné, on mesure la position des  $N$  particules. On obtient une représentation de la distribution des particules dans l'espace, comme l'illustre la figure 24.6.

La distribution des positions des  $N$  particules donne accès à la probabilité de présence d'*une* particule. C'est ainsi qu'à partir des figures 24.3 et 24.5, on peut tirer des informations sur la probabilité de présence d'une particule.

La position d'une particule quantique n'est pas certaine : la particule est a priori *délocalisée* dans tout l'espace accessible. Il en résulte que parler de *la* valeur instantanée de la position de la particule n'a pas de sens. On peut seulement déterminer la probabilité qu'une mesure de cette grandeur à un instant fixé donne telle ou telle valeur. Il en est de même pour la quantité de mouvement de la particule.

Un autre changement important s'opère par rapport à la mécanique newtonienne : la définition de l'état dynamique d'une particule à un instant donné requiert, en mécanique quantique, la connaissance d'une infinité de variables, à savoir la valeur de la fonction d'onde en chaque point de l'espace à l'instant  $t$ .



**Figure 24.6 –** (a) Exemple de distribution des positions de  $N$  particules quantiques identiques. La hauteur cumulée des barres de l'histogramme est égale au nombre  $N$  de particules ; (b) Densité de probabilité de présence correspondante. L'aire colorée correspond à la probabilité de présence  $dP(x,t)$  au voisinage de l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . L'aire totale sous la courbe est égale à l'unité.

## 2.4 L'équation de Schrödinger

### a) Énoncé

On considère le mouvement d'une particule quantique de masse  $m$ , dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . La particule est en interaction avec d'autres systèmes physiques, ce que l'on traduit par une énergie potentielle, notée  $V(M,t)$  (par abus de langage, cette énergie potentielle sera aussi appelée *potentiel*).

L'équation décrivant l'évolution dans l'espace et dans le temps de la fonction d'onde d'une particule quantique a été proposée par E. Schrödinger. Cette équation ne se démontre pas. Elle est un postulat fondamental de la mécanique quantique. Les résultats théoriques qu'on en déduit sont validés par l'expérience. C'est ce qui lui donne sa légitimité. Elle s'écrit comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(M,t) + V(M,t) \psi(M,t).$$

Conformément au programme, nous nous limiterons à l'étude de problèmes unidimensionnels (nous choisissons de travailler avec la coordonnée d'espace  $x$ ) où l'énergie potentielle de la particule quantique est indépendante du temps. Dans ces conditions, l'**équation de Schrödinger** prend la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x,t). \quad (24.5)$$

### Remarques

- L'équation de Schrödinger fait intervenir la constante de Planck réduite  $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- Cette équation est du premier ordre par rapport à la variable temporelle. Ainsi, si

la fonction d'onde est complètement connue à un instant initial  $t_0$ , elle le sera à tout instant ultérieur. L'état de la particule quantique pourra alors être complètement déterminé à tout instant à partir d'un état initial connu.

- On doit considérer que cette équation joue en mécanique ondulatoire le même rôle que la deuxième loi de Newton. Elle est même plus fondamentale puisque, comme on le verra ultérieurement, la théorie quantique englobe la théorie classique.
- Comme en mécanique classique, l'énergie potentielle peut être définie à une constante additive près. Si l'on pose  $V'(x) = V(x) + V_0$ , où  $V_0$  est constante réelle, alors c'est la fonction d'onde  $\psi'(x,t) = \psi(x,t) \exp(-iV_0t/\hbar)$  qui vérifie l'équation de Schrödinger écrite avec  $V'(x)$ . Les deux fonctions d'onde  $\psi(x,t)$  et  $\psi'(x,t)$  correspondent à la même probabilité de présence.

### b) Principe de superposition

Comme l'équation de Schrödinger est *linéaire*, on peut superposer des solutions pour construire d'autres solutions. Ainsi, si  $\psi_1(x,t)$  et  $\psi_2(x,t)$  sont deux solutions, alors

$$\alpha_1 \psi_1(x,t) + \alpha_2 \psi_2(x,t),$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux constantes complexes, est aussi une solution acceptable pourvu qu'elle soit correctement normalisée. Cette propriété est cruciale pour interpréter correctement le phénomène d'interférence, comme nous le verrons ultérieurement.

## 2.5 L'équation de Schrödinger indépendante du temps

### a) Définition d'un état stationnaire

On appelle **état stationnaire** un état du système caractérisé par une fonction d'onde *factorisée* sous la forme  $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$ , où  $\varphi$  et  $f$  sont a priori deux fonctions à valeurs *complexes*.

 On prendra garde au sens *différent* que prend le mot *stationnaire* en mécanique quantique et en physique ondulatoire classique, où une onde stationnaire correspond à une forme factorisée sous la forme d'un produit d'une fonction *réelle* de l'espace et d'une fonction *réelle* du temps.

### b) Recherche d'une solution par séparation des variables

L'énergie potentielle  $V(x)$  est par hypothèse indépendante du temps. On recherche alors des solutions de l'équation de Schrödinger en écrivant la fonction d'onde  $\psi(x,t)$  sous la forme d'un produit d'une fonction  $\varphi(x)$  ne dépendant que de  $x$  et d'une fonction  $f(t)$  ne dépendant que du temps :

$$\psi(x,t) = \varphi(x)f(t).$$

**Propriétés d'une solution à variables séparées :** écrivons la condition de normalisation de la fonction d'onde (on suppose que  $x \in \mathcal{D}$ ) :

$$\int_{\mathcal{D}} |\psi(x, t)|^2 dx = |f(t)|^2 \int_{\mathcal{D}} |\varphi(x)|^2 dx = 1.$$

Cela implique que  $|f(t)|$  est une constante indépendante du temps. Comme  $\psi(x, t) = f(t)\varphi(x)$ , on peut tout à fait choisir  $|f(t)| = 1$  et faire « rentrer » la constante dans  $\varphi(x)$ . Cela impose à la fonction  $\varphi(x)$  d'être normalisée comme suit :

$$\int_{\mathcal{D}} |\varphi(x)|^2 dx = 1$$

On peut donc écrire la fonction d'onde sous la forme suivante :

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(i\alpha(t)),$$

où  $\alpha(t)$  est une fonction du temps, indéterminée pour le moment. La fonction d'onde factorisée  $\psi(x, t)$  est celle d'un état stationnaire. Il lui correspond une densité de probabilité de présence  $|\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2$  indépendante du temps.

Nous retiendrons ce résultat important :

La densité de probabilité de présence  $|\psi(x, t)|^2$  associée à un état *stationnaire* est **indépendante du temps**.

**Équation de Schrödinger indépendante du temps :** on injecte l'expression factorisée de la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger (24.5) :

$$i\hbar \frac{\partial (\varphi(x) \exp(i\alpha(t)))}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 (\varphi(x) \exp(i\alpha(t)))}{\partial x^2} + V(x) (\varphi(x) \exp(i\alpha(t))),$$

soit encore :

$$-\hbar \varphi(x) \dot{\alpha}(t) \exp(i\alpha(t)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \exp(i\alpha(t)) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x) \varphi(x) \exp(i\alpha(t)).$$

En factorisant par le produit  $\varphi(x) \exp(i\alpha(t))$  (pour une valeur de  $x$  telle que  $\varphi(x) \neq 0$ ), on obtient :

$$\varphi(x) \exp(i\alpha(t)) \left( -\hbar \dot{\alpha}(t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - V(x) \right) = 0.$$

Comme la fonction d'onde  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(i\alpha(t))$  n'est pas identiquement nulle, on déduit de la relation précédente, une équation où les variables  $x$  et  $t$  sont complètement séparées :

$$-\hbar \dot{\alpha}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x).$$

Comme le membre de droite de cette équation est indépendant du temps, il en résulte que  $\dot{\alpha}$  est une constante indépendante du temps, homogène à une pulsation. Posons  $\dot{\alpha} = -\omega$  (le choix du signe sera justifié ultérieurement). Le produit  $\hbar\omega$  est homogène à une énergie. Aussi, on pose  $E = \hbar\omega$ . Nous verrons ultérieurement que  $E$  représente l'**énergie totale** de la particule quantique.

L'équation ci-dessus prend alors la forme suivante, connue sous le nom d'**équation de Schrödinger indépendante du temps** :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (24.6)$$

### Remarque

L'équation de Schrödinger indépendante du temps (24.6) est appelée **équation aux valeurs propres**. En effet, dans le langage de la théorie des équations aux dérivées partielles,  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  est un opérateur différentiel qui agit sur la fonction  $\varphi(x)$ . Cet opérateur est appelé **hamiltonien**. Écrite avec l'opérateur  $\hat{H}$ , l'équation (24.6) devient :

$$[\hat{H}\varphi](x) = E\varphi(x).$$

Cette équation montre que les solutions  $\varphi(x)$  sont les fonctions propres de l'opérateur  $\hat{H}$  associées aux valeurs propres  $E$ . Pour cette raison, nous appellerons **fonctions d'onde propres** les solutions de cette équation.

### c) Conditions imposées à la fonction d'onde propre

Toute solution  $\varphi(x)$  de l'équation (24.6), définie sur un intervalle  $\mathcal{D}$ , doit vérifier les propriétés suivantes :

**Propriété 1 :** la fonction  $\varphi(x)$  ne peut prendre qu'une seule valeur à l'abscisse  $x$ .

**Propriété 2 :** la fonction  $\varphi(x)$  est normalisée :  $\int_{\mathcal{D}} |\varphi(x)|^2 dx = 1$ . Cette condition interdit à  $\varphi(x)$  de diverger en  $\pm\infty$  (ceci n'étant à prendre en compte que si  $\mathcal{D}$  s'étend jusqu'à l'infini).

**Propriété 3 :** la fonction  $\varphi(x)$  est continue.

**Propriété 4 :** la fonction dérivée  $\frac{d\varphi(x)}{dx}$  est continue en tout point où l'énergie potentielle  $V(x)$  est continue ou ne présente pas de discontinuité d'amplitude infinie.

L'équation (24.6) montre que la dérivée  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$  est bornée pourvu que  $E$  et  $V(x)$  le soient.

Cependant  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$  n'est bornée, que si  $\frac{d\varphi}{dx}$  est continue, ce qui correspond à la propriété 4 énoncée ci-dessus. L'existence même de  $\frac{d\varphi}{dx}$  est liée à la continuité de  $\varphi(x)$ , qui est imposée par l'utilisation d'une équation différentielle.

Il se trouve que, dans de nombreux cas, les solutions physiquement acceptables qui vérifient toutes ces conditions ne correspondent qu'à certaines valeurs discrètes de l'énergie  $E$ . Pour une particule quantique donnée dans un potentiel donné, toutes les valeurs de l'énergie  $E$  ne sont pas autorisées : c'est là qu'apparaît la *quantification de l'énergie*.

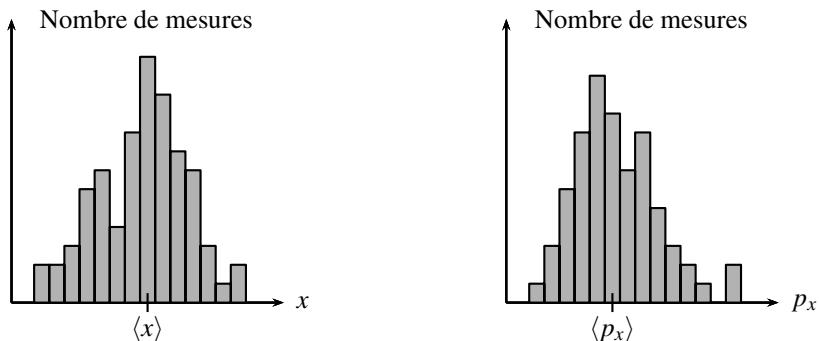
### 3 Inégalités de Heisenberg

#### 3.1 Inégalité de Heisenberg spatiale

##### a) Indétermination quantique

Considérons  $2N$  particules quantiques, toutes préparées dans un même état initial donné par  $\psi(x, t = 0)$ . À un instant  $t$ , on procède à une mesure de la position selon ( $Ox$ ) pour  $N$  de ces particules et pour les  $N$  autres on mesure la quantité de mouvement selon ( $Ox$ ).

Comme la mesure de la position ou de la quantité de mouvement de chaque particule ne livre pas une valeur certaine, on obtient des distributions de positions et de quantités de mouvement, du même type que celles qui sont représentées sur la figure 24.7. On suppose  $N \gg 1$  afin que l'on puisse faire un traitement statistique des résultats.



**Figure 24.7 –** Distributions typiques des mesures simultanées de position et de quantité de mouvement selon ( $Ox$ ).

On peut définir les valeurs moyennes suivantes :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ; \langle p_x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_{xj} ; \langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \text{ et } \langle p_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_{xj}^2.$$

Chacune de ces deux distributions peut être caractérisée par une dispersion statistique des mesures autour de la valeur moyenne. On note  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  l'amplitude de ces fluctuations statistiques autour de la valeur moyenne. On les appelle **indéterminations quantiques** sur la position et la quantité de mouvement. Elles sont définies comme suit :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}.$$

### b) Énoncé

Des considérations théoriques, hors de propos ici, permettent de montrer qu'il existe une valeur minimale pour le produit des indéterminations sur la position  $\Delta x$  et sur la quantité de mouvement selon ( $Ox$ )  $\Delta p_x$  :  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ . Cette inégalité est connue sous le nom de **inégalité de Heisenberg spatiale**. Elle s'applique quelle que soit la fonction d'onde décrivant le système.

La mesure simultanée de la position et de la quantité de mouvement ne peut donc pas se faire avec une précision supérieure à la limite imposée par l'inégalité de Heisenberg, quelle que soit la qualité des mesures et des détecteurs utilisés. Elle exprime donc une limitation quantique intrinsèque.

On retiendra le résultat suivant :

On ne peut pas attribuer simultanément à une particule quantique une position rigoureusement précise et une quantité de mouvement rigoureusement précise. Il existe une limitation intrinsèque à la définition simultanée de la position et de la quantité de mouvement imposée par l'inégalité de Heisenberg spatiale :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (24.7)$$

## 3.2 Inégalité temps - énergie

Considérons les signaux temporels représentés sur la figure 24.8. On constate que la pulsation moyenne d'un signal est d'autant mieux définie que sa durée est importante. Autrement dit, l'indétermination sur la pulsation, notée  $\Delta\omega$ , diminue lorsque la durée du signal, notée  $\tau$ , augmente. L'inégalité suivante, qui découle d'arguments théoriques également hors de propos ici, exprime cette idée :

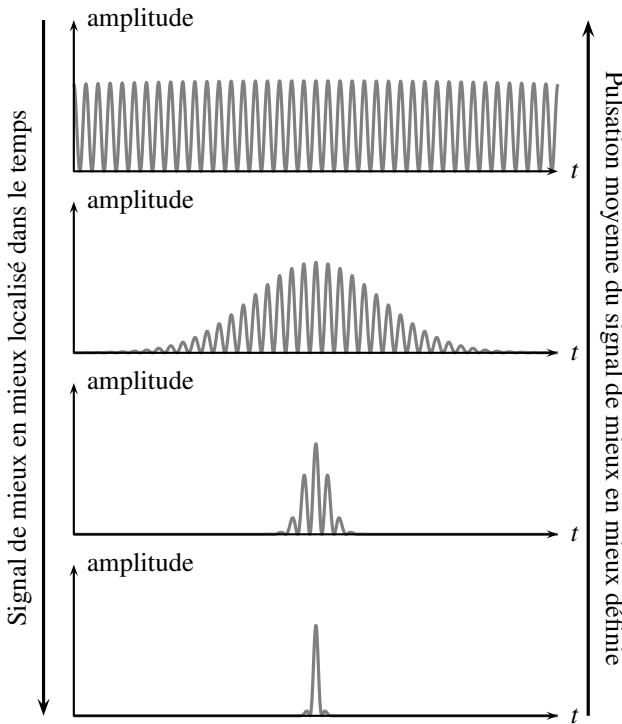
$$\tau \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}.$$

En utilisant la relation  $E = \hbar\omega$ , on obtient l'**inégalité temps-énergie** :

$$\tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (24.8)$$

Dans cette relation,  $\tau$  est la durée caractéristique d'évolution d'un système et  $\Delta E$  l'amplitude des fluctuations statistiques de l'énergie du système autour de sa valeur moyenne. Cette relation est similaire à l'inégalité (24.7). Pour autant, elle n'a pas le même statut, car  $\tau$  désigne ici une durée caractéristique d'évolution et non une dispersion statistique autour d'une valeur moyenne (le temps  $t$  échappe à toute quantification, à la différence de la position, de la quantité de mouvement ou de l'énergie).

Un état stationnaire est caractérisé par une densité de probabilité indépendante du temps. Un tel état, invariant dans le temps, peut être caractérisé par un temps caractéristique d'évolution infini :  $\tau \rightarrow +\infty$ . Il en résulte que  $\Delta E \rightarrow 0$ . On retiendra le résultat suivant :



**Figure 24.8** – Illustration du lien entre l’indétermination sur la pulsation moyenne et la durée du signal.

L’énergie associée à un état stationnaire est parfaitement définie.

## 4 De la limite quantique à la limite classique

La fonction d’onde donne accès à la probabilité de présence d’une particule quantique. Mais il est aussi possible de calculer, en mécanique classique, la probabilité de présence d’une particule. Il est instructif de voir comment se réalise le passage de la description quantique à la description classique en comparant les probabilités de présence quantique et classique. À titre d’exemple, nous proposons d’examiner le cas d’un oscillateur harmonique unidimensionnel.

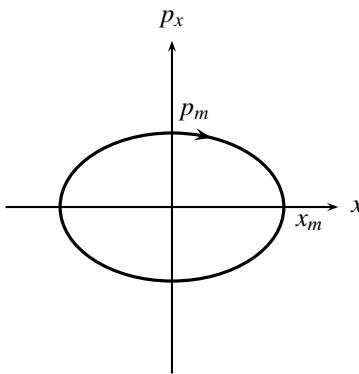
### 4.1 Exemple de l’oscillateur harmonique

Dans le cadre de la mécanique classique, l’**oscillateur harmonique** unidimensionnel est un système conservatif dont l’énergie peut être écrite sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

où  $x$  est la position de l'oscillateur, comptée depuis la position d'équilibre,  $m$  sa masse et  $\omega$  la pulsation propre. L'énergie  $E$  est déterminée par les conditions initiales. On peut choisir par exemple de libérer l'oscillateur depuis une élévation  $x_m$  avec une vitesse initiale nulle :  $E = \frac{1}{2}m\omega^2x_m^2$ . La position  $x$  de l'oscillateur peut prendre toutes les valeurs comprises, au sens large, entre  $-x_m$  et  $x_m$ .

Le mouvement de l'oscillateur peut être représenté par un portrait de phase, comme cela a été vu en première année. L'orbite correspondant à une énergie mécanique  $E$  fixée, est tracée sur la figure 24.9, dans l'*espace des phases* associé aux axes  $x$  et  $p_x = m\dot{x}$ . Elle est formée de tous les couples  $(x, p_x)$  où  $x$  est une abscisse accessible au système et  $p_x$  la quantité de mouvement à cette abscisse. Cette orbite est une ellipse, toujours parcourue dans le sens horaire.



**Figure 24.9** – Représentation de l'orbite d'énergie  $E$  fixée d'un oscillateur harmonique dans l'espace des phases.

Les quantités  $x_m$  et  $p_m$  désignent l'amplitude maximale des variables  $x(t)$  et  $p_x(t)$ . On peut montrer que  $p_m = m\omega x_m$ . L'aire intérieure de l'orbite elliptique est égale à :  $S = \pi x_m p_m$ , soit :  $S = \pi m \omega x_m^2$ . On peut exprimer  $S$  en fonction de l'énergie  $E$  :

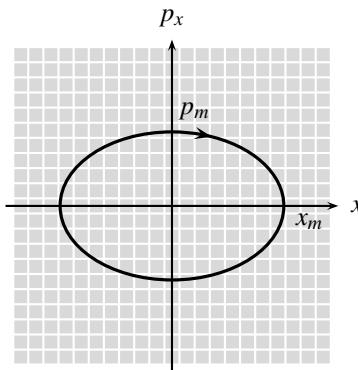
$$S = 2\pi \frac{E}{\omega} = ET, \quad (24.9)$$

où  $T = 2\pi/\omega$  est la période de l'oscillateur. La quantité  $S$ , homogène au produit de l'énergie de l'oscillateur et de sa période, est appelée **action** caractéristique de l'oscillateur.

L'inégalité de Heisenberg spatiale (24.7), impose une discréétisation de l'espace des phases. Plutôt que de concevoir cet espace comme un ensemble continu de points de coordonnées  $(x, p_x)$ , la mécanique quantique impose de le considérer comme pavé de cellules élémentaires d'aire incompressible égale à  $\hbar/2$ , compte tenu des indéterminations quantiques irréductibles qui pèsent sur la définition simultanée de la position et de la quantité de mouvement.

À l'état du système associé aux coordonnées  $(x, p_x)$  correspond donc, non plus le point  $(x, p_x)$ , mais une cellule centrée sur le point  $(x, p_x)$  et d'aire  $\hbar/2$ .

L'orbite d'énergie  $E$  fixée contient un nombre  $N$  de ces cellules, comme on l'illustre sur la figure 24.10.



**Figure 24.10** – Discréétisation de l'espace des phases. Chaque cellule grisée a une aire égale à  $\hbar/2$ .

En écrivant  $S = N\hbar/2$ , on constate que  $S$  peut être comptée en unités de  $\hbar$ . La constante de Planck réduite correspond donc à une action élémentaire. On la désigne parfois sous la dénomination de *quantum d'action*. Deux cas limites se présentent alors :

$N \gg 1$  : L'orbite contient un nombre très élevé de cellules élémentaires. Si l'on décompte le nombre de cellules dans l'orbite, une erreur de quelques cellules est sans importance. Il n'est alors pas nécessaire de prendre en compte la discréétisation de l'espace des phases. Autrement dit, on peut considérer que lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , alors  $\hbar \rightarrow 0$ . Cette situation où les effets quantiques sont négligeables correspond à la *limite classique*. Pour un oscillateur de pulsation donnée, on remarque que cette situation correspond à une énergie  $E$  très largement supérieure à  $\hbar\omega$ .

$N \sim 1$  : L'orbite contient alors un nombre faible de cellules élémentaires. On doit alors nécessairement tenir compte de la discréétisation de l'espace des phases. Les effets quantiques sont prépondérants : il s'agit de la *limite quantique*. Pour un oscillateur de pulsation donnée, cette situation correspond à une énergie  $E$  dont l'ordre de grandeur est donné par  $\hbar\omega$ .

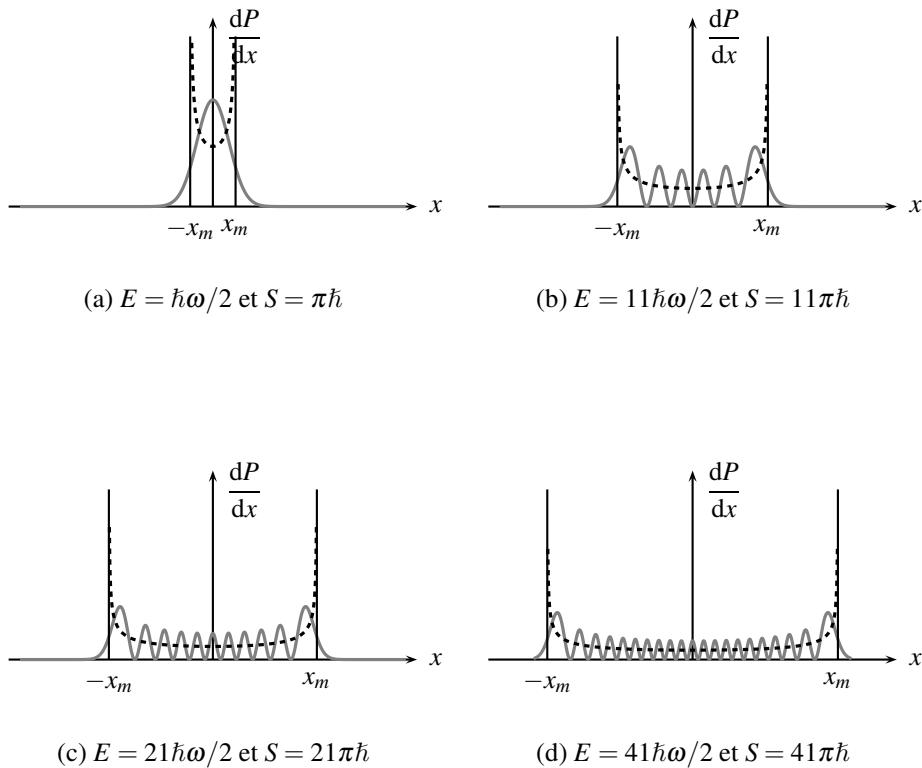
Illustrons maintenant la transition de la limite quantique vers la limite classique en comparant les densités de probabilité de présence quantique et classique pour des valeurs différentes de l'action  $S$  de l'oscillateur harmonique.

**Densité de probabilité de présence quantique** : la densité de probabilité de présence quantique est obtenue par résolution de l'équation de Schrödinger (24.5). L'aspect technique de cette résolution sort du cadre du cours.

**Densité de probabilité de présence classique** : la densité de probabilité de présence classique entre  $x$  et  $x + dx$  est proportionnelle à la durée de présence au voisinage de l'abscisse  $x$  :  $dt = dx / |\dot{x}|$ . En utilisant les lois de la mécanique classique et en normalisant correctement la densité de probabilité obtenue, on parvient à l'expression suivante :  $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{x_m^2 - x^2}}$ .

La densité de probabilité de présence est minimale au voisinage de la position d'équilibre  $x = 0$ . C'est là que la vitesse de l'oscillateur est la plus grande : l'oscillateur y passe donc peu de temps. À l'inverse, la densité de probabilité de présence diverge lorsque la vitesse s'annule (en  $x \rightarrow \pm x_m$ ) car c'est là que l'oscillateur passe le plus de temps.

**Comparaison des théories classique et quantique :** sur les graphes de la figure 24.11, on a tracé les probabilités de présence quantique et classique pour différentes valeurs de l'action caractéristique.



**Figure 24.11** – Comparaison de la densité de probabilité de présence classique (en tirets) et quantique (en trait continu).

Lorsque l'action caractéristique  $S$  est de l'ordre de  $\hbar$  (voir le graphe (a) de la figure 24.11), le désaccord entre les descriptions quantique et classique est flagrant : on obtient même des comportements contradictoires ! Lorsque l'action caractéristique augmente et devient bien plus grande que  $\hbar$ , on se convainc, à l'examen des graphes (c) et (d) de la figure 24.11, que la loi de probabilité quantique tend vers la loi de probabilité classique. Remarquons toutefois un fait troublant : la probabilité de présence quantique est non nulle en dehors de l'intervalle  $[-x_m; x_m]$ , région pourtant interdite par la mécanique classique. Cet effet purement quantique sera discuté ultérieurement.

On entrevoit, à travers cet exemple, le caractère plus général de la théorie quantique qui, dans les conditions adaptées, redonne le comportement classique, alors que la mécanique classique se révèle bien incapable d'expliquer le comportement quantique.

On peut faire une comparaison avec l'optique, où la même hiérarchie s'impose à l'optique ondulatoire et à l'optique géométrique. L'approximation de l'optique géométrique correspond à un cas limite de l'optique ondulatoire, celui où la longueur d'onde du rayonnement est infiniment petite à l'échelle des longueurs caractéristiques du système optique. La propagation de la lumière y est alors décrite en termes de rayons lumineux qui constituent les trajectoires des photons. En revanche, les phénomènes d'interférence et de diffraction s'inscrivent dans le cadre de l'optique ondulatoire. De même, lorsque la longueur d'onde de de Broglie d'une particule est si petite que les effets ondulatoires ne se manifestent pas, on utilise la mécanique classique où la particule classique se déplace selon une trajectoire clairement définie. Lorsque les effets ondulatoires commencent à se manifester, les trajectoires des particules classiques deviennent progressivement plus floues et diffuses, au point de s'évanouir lorsqu'on a atteint le régime quantique.

La mécanique classique peut donc être vue comme une approximation de la mécanique quantique lorsque la longueur d'onde de de Broglie est suffisamment faible.

## 4.2 Quantique ou classique ?

### a) Critère portant sur l'action caractéristique

Les résultats obtenus précédemment pour l'oscillateur harmonique peuvent être généralisés : la *limite classique* correspond à la situation où l'*action caractéristique* d'un système physique est très largement supérieure à  $\hbar$ .

La comparaison de l'*action caractéristique* d'un système et de  $\hbar$  donne une indication sur le comportement quantique ou classique du système étudié. Pour déterminer l'*action caractéristique* d'un système, on pourra utiliser les relations suivantes :

$$\text{action} = \text{énergie} \times \text{durée} .$$

$$\text{action} = \text{quantité de mouvement} \times \text{distance} .$$

$$\text{action}^2 = \text{énergie} \times \text{masse} \times \text{longueur}^2 .$$

### Exemples

*Oscillateur mécanique* : on considère un pendule constitué d'une masse  $m = 10\text{ g}$  attachée à un fil de longueur  $\ell = 20\text{ cm}$ , évoluant dans le champ de pesanteur terrestre  $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . L'énergie caractéristique du système est  $mgl$  et la durée caractéristique est  $\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ . On obtient  $S = mg^{1/2}\ell^{3/2}$ , soit  $S \approx 10^{31}\hbar$ . C'est donc bien la mécanique classique qui est adaptée à l'étude du mouvement de cet oscillateur.

*Électron dans un atome* : l'énergie de liaison typique d'un électron dans un atome est de l'ordre de la dizaine d'eV ( $1\text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{ J}$ ), la masse de l'électron est  $m = 10^{-30}\text{ kg}$  et la taille caractéristique d'un atome est de  $10^{-10}\text{ m}$ . Ces valeurs donnent une action caractéristique  $S \approx \hbar$ . La modélisation théorique d'un atome ne peut pas se passer d'une

| approche quantique.

**b) Critère portant sur la longueur d'onde de de Broglie**

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, les effets quantiques se manifestent dès que la longueur d'onde de de Broglie n'est plus négligeable devant les distances caractéristiques du système.

On considérera que les effets quantiques sont négligeables lorsque la longueur d'onde de de Broglie est inférieure de plusieurs ordres de grandeur aux distances caractéristiques du système étudié.

Des exemples d'application de ce critère sont proposés en exercice et montrent que l'interprétation de ce critère n'est pas toujours simple.

### **4.3 Principe de correspondance de Bohr**

Le rapprochement des prédictions quantique et classique dans la limite classique correspond au **principe de correspondance** de Bohr :

Dans les conditions où les résultats classiques et quantiques doivent concorder, la théorie quantique doit se ramener au résultat classique.

Comme le monde quantique échappe souvent à notre intuition, nous utiliserons ce principe comme un critère de pertinence des résultats que nous serons amenés à établir.

**SYNTHESE****SAVOIRS**

- relation de Planck-Einstein
- relation de de Broglie
- principe de complémentarité de Bohr
- interprétation probabiliste de la fonction d'onde
- équation de Schrödinger
- définition d'un état stationnaire
- équation de Schrödinger indépendante du temps
- l'énergie d'un état stationnaire est fixée
- propriétés de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première
- notion d'indétermination quantique
- inégalité de Heisenberg spatiale
- inégalité temps-énergie
- distinguer un comportement classique d'un comportement quantique
- principe de correspondance de Bohr

**SAVOIR-FAIRE**

- calculer l'énergie d'un photon à partir de la fréquence et réciproquement
- calculer la quantité de mouvement d'un photon à partir de la longueur d'onde et réciproquement
- calculer une densité de probabilité de présence à partir d'une fonction d'onde
- normaliser une fonction d'onde
- distinguer un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire en physique classique
- utiliser l'inégalité de Heisenberg spatiale ou l'inégalité temps-énergie
- mettre en œuvre un critère permettant de distinguer un comportement classique d'un comportement quantique
- confronter les effets quantiques et les prédictions classiques en se basant sur des estimations numériques et le principe de correspondance de Bohr

**MOTS-CLÉS**

- |                           |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| • dualité onde-corpuscule | • comportement quantique  | • équation de Schrödinger |
| • constante de Planck     | • fonction d'onde         | • état stationnaire       |
| • comportement classique  | • probabilité de présence | • inégalité de Heisenberg |

## CHAPITRE 24 – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.

## S'ENTRAÎNER

Certaines valeurs numériques, en particulier celles des constantes fondamentales, peuvent être volontairement absentes des énoncés proposés. Il relève de votre initiative de les connaître ou de les rechercher.

**24.1 Longueur d'onde de de Broglie (\*)**

1. Calculer la longueur d'onde de de Broglie pour :

- un électron, d'énergie cinétique égale à 10 eV.
- une personne, de masse  $m = 70$  kg, se déplaçant à une vitesse de l'ordre du mètre par seconde.

Commenter les ordres de grandeur obtenus.

2. À ce jour, les fullerènes  $C_{60}$  sont les molécules les plus grosses pour lesquelles des phénomènes ondulatoires ont été observés. Dans les expériences correspondantes, les molécules ont une vitesse moyenne de  $220 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer la longueur d'onde de Broglie de ces molécules. Comment se compare-t-elle aux dimensions de la molécule (de l'ordre du nanomètre) ?

**24.2 Quantique ou classique ? (\*)**

Dites si l'étude des systèmes suivants vous semblent relever du domaine de la physique quantique ou classique.

1. Un oscillateur électrique  $LC$  portant une charge  $q = 5,0 \times 10^{-7}$  C avec  $L = 40$  mH et  $C = 1,0 \times 10^{-7}$  F.

2. Pour une personne de masse  $m = 70$  kg, est-il envisageable de mettre en évidence un régime de chute libre quantique dans le champ de pesanteur terrestre ? Même question pour un neutron de masse  $m = 1,7 \times 10^{-27}$  kg.

3. Une « box » Wi-Fi, de puissance 0,10 W, émet sur la fréquence 2,4 GHz. Déterminer le nombre moyens de photons émis par unité de temps. Déterminer l'action caractéristique de ce système.

4. Un vase rempli d'hélium superfluide est mis en rotation. On observe que l'hélium reste au repos hormis à l'intérieur de tourbillons filiformes parallèles à l'axe de rotation du vase. Chaque tourbillon est caractérisé par un diamètre de l'ordre du dixième de millimètre et une fréquence de rotation de l'ordre de 10 Hz. Évaluer numériquement l'action caractéristique d'un atome d'hélium dans le tourbillon. Conclure.

**24.3 Gaz quantique ou classique (\*\*)** 

On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est égale à  $E = \frac{3}{2}k_B T$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

1. a. Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium.

**b.** Calculer la longueur d'onde de de Broglie correspondante. La comparer à la distance moyenne entre atomes d'hélium.

**c.** On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle lorsque la longueur d' onde de Broglie est de l'ordre de grandeur ou plus grande que la distance moyenne interatomique. Expliquer pourquoi et dites si l'étude de ce gaz d'hélium vous semble relever ou pas de la mécanique quantique.

**2.** Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome du cristal fournit un électron. L'ensemble de ces électrons libre constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de l'électron-volt. La distance moyenne entre électrons est supposée égale à la distance moyenne entre atomes.

**a.** Reprendre les arguments développés précédemment pour le gaz d'hélium dans le cas du gaz d'électrons libres dans un métal. On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes relatives au cuivre :  $M_{\text{Cu}} = 63 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $\mu_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

**b.** La conduction de l'électricité dans un métal est liée au gaz d'électrons libres. Relève-t-elle d'un traitement quantique ou classique ?

#### 24.4 Le modèle de Bohr (★)

Pour expliquer la stabilité de l'atome, Bohr imagina que les électrons devaient se mouvoir sur des orbites circulaires. Sur la première orbite, de rayon  $a_0$ , la quantité de mouvement de l'électron vérifie :  $p_0 = \hbar/a_0$ .

**1.** Afin qu'on puisse parler de trajectoire au sens classique du terme, quelle limitation doit-on imposer aux indéterminations  $\Delta r$  et  $\Delta p$  pour l'orbite de Bohr considérée ?

**2.** Montrer que ces limitations sont incompatibles avec l'inégalité de Heisenberg spatiale.

**3.** Que doit-on en déduire pour le modèle de Bohr ?

#### 24.5 Largeur spectrale (★)

Un atome se trouve dans un état excité dont l'énergie est supérieure à celle du niveau fondamental de 4,7 eV. Le temps de vie de l'état excité est égal à  $1,0 \times 10^{-13} \text{ s}$

**1.** Déterminer la fréquence et la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique émis lors de la désexcitation de l'atome.

**2.** Quelle est l'indétermination minimale sur l'énergie du photon émis lorsque l'atome se désexcite ?

**3.** En déduire la largeur spectrale de la raie d'émission correspondante (on l'exprimera à la fois en termes de fréquence puis de longueur d'onde).

#### 24.6 Portée de l'interaction électromagnétique (★)

L'interaction électromagnétique est de portée infinie : une charge électrique, même infiniment éloignée d'une autre charge électrique, ressent l'influence de cette dernière. Les deux charges interagissent en échangeant des photons. C'est pourquoi l'on dit que le photon est la particule « médiatrice » de l'interaction électromagnétique. Cependant, ce résultat, comme l'invariance de la célérité de la lumière, est lié au fait que la masse du photon est nulle. La théorie de l'électromagnétisme classique n'est donc valable que si les photons ont une masse nulle.

**CHAPITRE 24 – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.**

Plusieurs expériences ont testé la possibilité que la masse du photon soit non nulle. Par exemple, l'étude du champ magnétique de Jupiter par les sondes Pioneer a permis de conclure à une masse nulle du photon, avec une incertitude  $\Delta m = 10^{-51}$  kg [7]. On admet qu'à cette incertitude correspond une indétermination de l'énergie d'un photon donnée par  $\Delta E = c^2 \Delta m$ , où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide.

1. En déduire une estimation de la valeur minimale de la durée de vie  $\tau$  d'un photon.
2. Pendant cette durée de vie, le photon est capable de se déplacer d'une distance  $\ell$  à la vitesse  $c$ . On identifie cette distance à la portée de l'interaction électromagnétique. Donner la valeur numérique de la portée minimale de l'interaction électromagnétique. Pour analyser des expériences d'électromagnétisme réalisées à l'échelle d'un laboratoire de physique, peut-on se fier à la théorie de l'électromagnétisme classique ?

**24.7 Émission d'un photon par un atome (★★)**

Un atome, de masse  $m$ , émet un photon de fréquence  $f_0$  lorsqu'il est immobile. En mouvement le long de l'axe ( $Ox$ ), à la vitesse  $\vec{v} = v \hat{u}_x$ , il émet un photon dont la fréquence  $f$  perçue par le récepteur est donnée par la relation suivante, caractéristique de l'effet Doppler :

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

On suppose que l'atome se rapproche du récepteur et que  $v$  est une grandeur positive.

1. Le décalage Doppler  $\Delta f = f - f_0$  est utilisé pour mesurer  $v$ . Quelle durée minimale  $\tau$  de la mesure correspond à une indétermination sur  $f$  égale au décalage Doppler ?
2. On admet que  $\tau$  représente la durée pendant laquelle intervient l'émission du photon. En déduire l'indétermination  $\Delta x$  sur la position de l'atome lors de l'émission du photon.
3. En déduire une condition sur l'indétermination  $\Delta p_x$  de la quantité de mouvement de l'atome. Interpréter le résultat.

**24.8 Énergie minimale d'un oscillateur harmonique (★★)**

Un oscillateur harmonique unidimensionnel a une masse  $m$ , une pulsation propre  $\omega_0$ . Il est soumis à une énergie potentielle  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ . La position moyenne  $\langle x \rangle$  et la quantité de mouvement moyenne  $\langle p_x \rangle$  de l'oscillateur sont nulles. Utiliser la relation d'incertitude de Heisenberg spatiale pour montrer que la valeur moyenne de l'énergie de cet oscillateur est bornée inférieurement :

$$\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2,$$

où  $\Delta x$  représente l'indétermination quantique sur la position  $x$  de l'oscillateur.

1. Déterminer la valeur minimale que peut prendre la valeur moyenne de l'énergie de l'oscillateur en fonction de  $\hbar$  et  $\omega_0$ . Exprimer l'amplitude de l'indétermination quantique  $\Delta x$  en fonction de  $m$ ,  $\hbar$  et  $\omega_0$ .
2. À température non nulle, en raison de l'agitation thermique, il existe aussi des fluctuations  $\Delta x_T$  de la position de l'oscillateur autour de sa valeur moyenne. On donne  $\Delta x_T = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}$ , où  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann.

**a.** Donner l'expression de la température  $T_c$  en dessous de laquelle les fluctuations quantiques sont plus importantes que les fluctuations thermiques.

**b. Application numérique.**

• Donner la valeur numérique de  $T_c$  dans le cas d'un oscillateur mécanique constitué d'une masse suspendue à un ressort. Choisir une fréquence d'oscillation correspondant à une expérience réalisable au laboratoire de physique. Commenter la valeur obtenue pour  $T_c$ .

• En 2010, une équipe de l'Université de Californie à Santa Barbara a atteint le régime quantique en amenant un microrésonateur piézo-électrique de fréquence très élevée (6,0 GHz) à une température de 25 mK.

Commenter le choix d'un oscillateur de fréquence élevée et d'une température aussi faible.

## APPROFONDIR

**24.9 Oscillateur harmonique quantique (★★)**

On considère une particule quantique, de masse  $m$ , soumise à une énergie potentielle de la forme  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ . Dans un état stationnaire d'énergie  $E$ , on écrit la fonction d'onde sous la forme :  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ .

**1.** Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.

**2.** Pour l'état fondamental, on a  $\varphi(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$ .

**a.** Déterminer la constante de normalisation  $\mathcal{N}$ .

**b.** Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire, sans calcul, la valeur de la position moyenne  $\langle x \rangle$  de la particule.

**c.** Déterminer l'expression de l'énergie  $E$  et de  $a$  en fonction de  $\hbar$ ,  $m$  et de  $\omega$ .

On donne :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ .

**24.10 Diffraction d'une onde électromagnétique par une fente (★★)**

On considère l'expérience de **diffraction** d'une onde électromagnétique plane, de longueur d'onde  $\lambda_0 = 633$  nm, à travers une fente de largeur  $a = 0,070$  mm selon l'axe ( $Ox$ ), et de longueur infinie selon ( $Oy$ ). La figure de diffraction est observée sur un écran lointain, placé à une distance  $D = 2,00$  m. L'éclairement observé sur l'écran se concentre le long de l'axe ( $Ox$ ). Il est donné par la relation :

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi ax}{\lambda_0 D}}{\frac{\pi ax}{\lambda_0 D}} \right)^2.$$

**CHAPITRE 24 – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.**

- 1.** On admet que la densité de probabilité de présence d'un photon au voisinage d'un point de l'écran est proportionnelle à l'éclairement en ce point :

$$dP(x,t) = C \mathcal{E}(x) dx.$$

Déterminer l'expression de la constante  $C$ .

- 2.** Déterminer la probabilité  $P$  qu'un photon soit détecté à l'intérieur de la tache centrale de diffraction correspondant à  $|x| \leq \frac{\lambda_0 D}{a}$ .

On donne les valeurs numériques suivantes :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 du = \pi$  et  $\int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 du \simeq 2,84$ .

**24.11 Particule dans une boîte unidimensionnelle (★★★)**

Une particule, de masse  $m$ , d'énergie  $E$ , est confinée dans l'intervalle  $0 \leq x \leq L$  où son énergie potentielle est choisie nulle :  $V(x) = 0$ .

- 1.** On adopte dans cette question seulement un traitement *classique*. On admet que la densité de probabilité de présence classique de la particule entre  $x$  et  $x + dx$  est proportionnelle à la durée de passage  $dt$  entre ces deux abscisses.

a. En exploitant la conservation de l'énergie, exprimer la vitesse classique  $v(x)$  de la particule à l'abscisse  $x$ .

b. Montrer qu'après normalisation, la densité de probabilité de présence classique s'exprime ainsi :  $\frac{dP_{\text{cl}}}{dx} = \frac{1}{L}$ .

c. Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$ .

- 2.** On adopte maintenant un traitement quantique. L'énergie  $E$  de la particule correspond à un état stationnaire représenté par la fonction d'onde :

$$\psi_n(x,t) = A_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right),$$

où  $n$  est un entier strictement positif.

a. Déterminer la constante  $A_n$  en normalisant correctement cette fonction d'onde.

b. Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$ .

c. Que devient ce dernier résultat dans la limite où  $n \gg 1$ . Comment ce résultat se compare-t-il au résultat de la théorie classique ?

**CORRIGÉS****24.1 Longueur d'onde de de Broglie**

1. • À l'énergie  $E = 10 \text{ eV}$  correspond une quantité de mouvement  $p = \sqrt{2m_e E} = 1,7 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , et une longueur d'onde de de Broglie :  $\lambda_{DB} = h/p = 3,9 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Cette valeur montre que l'aspect ondulatoire de l'électron se manifeste à l'échelle atomique.
- Pour la personne :  $p = mv = 70 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une longueur d'onde de de Broglie :  $\lambda_{DB} = h/p = 9,4 \times 10^{-36} \text{ kg}$ . Cette valeur est si petite que les effets quantiques ne se manifestent pas.
2. La masse d'une molécule de  $\text{C}_{60}$  est  $m = 60m_C = 2,0 \times 10^{-26} \text{ kg}$ . La quantité de mouvement de la molécule s'en déduit :  $p = mv = 4,4 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . D'où une longueur d'onde de de Broglie :  $\lambda_{DB} = 1,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ , inférieure à la taille de la molécule.

**24.2 Quantique ou classique ?**

1. Pour former l'action caractéristique d'un circuit  $RLC$ , on peut écrire qu'elle est égale au produit d'une énergie  $q^2/C$  et d'une durée caractéristique  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , soit :  $S = 2\pi q^2 \sqrt{L/C}$ . On trouve :  $S = 10^{23}\hbar$ . Il s'agit donc d'un oscillateur classique et non quantique.
2. Considérons une chute libre sur une hauteur  $H$ . L'énergie potentielle de pesanteur  $mgH$  tient lieu d'énergie caractéristique de la chute libre. On peut alors écrire l'action caractéristique :  $S^2 = (mgH) \cdot m \cdot H^2$ , soit  $S = mg^{1/2}H^{3/2}$ . La hauteur de chute pour laquelle  $S \approx \hbar$  s'écrit :  $H = \hbar^{2/3}g^{-1/3}m^{-2/3}$ . Pour une personne de 70 kg, on trouve  $H = 6 \times 10^{-25} \text{ m}$ . Cette hauteur est inférieure à la taille typique du noyau atomique : elle n'a donc aucune signification concrète. Il n'existe pas de régime de chute libre quantique pour cette personne. Pour un neutron, on obtient  $H = 7 \mu\text{m}$  : il s'agit d'une échelle caractéristique de hauteur qu'il est envisageable de mesurer. D'ailleurs, des expériences révélant des hauteurs de rebond quantifiées pour des neutrons dans le champ de pesanteur ont été réalisées en 2002 à l'Institut Laue-Langevin de Grenoble par V. Nesvizhevski.
3. L'énergie  $d\mathcal{E}$  émise pendant une durée  $dt$  s'écrit :  $d\mathcal{E} = Pdt$  en utilisant la puissance  $P$ , mais aussi  $d\mathcal{E} = hv dN$  en utilisant le nombre  $dN$  de photons émis et l'énergie véhiculée par chaque photon. En identifiant ces deux expressions, on obtient :  $dN/dt = P/(hv)$ , soit  $6 \times 10^{22}$  photons par seconde. Avec un flux de photons aussi important, on ne peut pas les détecter un à un et le caractère particulaire de la lumière ne se manifeste pas. L'action caractéristique du système peut s'écrire sous la forme :  $S = P/v$  (soit  $S = 10^{23}\hbar$ ). L'action caractéristique représente, à un facteur  $2\pi$  près, le nombre de photons émis par unité de temps.
4. On peut estimer la quantité de mouvement d'un atome d'hélium dans un tourbillon :  $p = mr\omega = 2\pi mrf$ , soit  $p = 4 \times 10^{-29} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'action caractéristique peut être écrite comme le produit de cette quantité de mouvement et du rayon  $r$  :  $S = 40\hbar$ . Le mouvement de l'atome d'hélium doit être traité par la théorie quantique.

**24.3 Gaz quantique ou classique**

1. a. En écrivant  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$ , on obtient  $v = \sqrt{3k_B T/m}$ . Numériquement :  $v = 1,3 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (avec  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $T = 293 \text{ K}$  et  $m = 6,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).

## CHAPITRE 24 – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.

- b.** La longueur d'onde de Broglie des atomes d'hélium s'écrit :  $\lambda_{DB} = h/(mv)$ . Elle vaut :  $\lambda_{DB} = 7 \times 10^{-11}$  m. Pour estimer la distance moyenne entre atomes d'hélium, il faut d'abord déterminer le nombre d'atomes d'hélium par unité de volume. Pour cela, on utilise la loi des gaz parfaits sous la forme :  $P = nk_B T$ . On en déduit :  $n = P/(k_B T) = 3 \times 10^{25}$  m<sup>-3</sup>. La distance moyenne entre atomes d'hélium peut s'écrire ainsi :  $d = n^{-1/3}$ , soit  $d = 3$  nm.
- c.** On obtient  $\lambda_{DB} \ll d$  : il n'est pas utile d'utiliser une description quantique du gaz d'hélium.
- 2. a.** Commençons par calculer la longueur d'onde de Broglie d'un électron dans le cristal :  $\lambda_{DB} = h/\sqrt{2m_e E}$ , soit  $\lambda_{DB} = 1$  nm. Déterminons ensuite la distance moyenne entre atomes, qui s'identifie à la distance moyenne entre électrons. Comme précédemment, on calcule d'abord le nombre d'atomes par unité de volume :  $n = \frac{\mu_{Cu}}{M_{Cu}} N_A$ , où  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  mol<sup>-1</sup> est le nombre d'Avogadro. On obtient  $n = 8 \times 10^{28}$  m<sup>-3</sup>. La distance moyenne entre atomes, et donc entre électrons, vaut :  $d = n^{-1/3} = 2 \times 10^{-10}$  m.
- b.** On obtient  $\lambda_{DB} > d$  : l'étude de la conduction électrique relève donc de la mécanique quantique.

### 24.4 Le modèle de Bohr

1. Pour que la trajectoire de rayon  $a_0$  soit bien définie, il est nécessaire que  $\Delta r \ll a_0$ . De même, pour que la quantité de mouvement  $p_0$  sur cette trajectoire soit bien définie, il faut aussi que  $\Delta p \ll p_0$ .
2. Pour qu'une la trajectoire soit clairement définie, les deux conditions précédentes imposent que  $\Delta r \cdot \Delta p \ll a_0 p_0$ . Comme  $a_0 p_0 = \hbar$ , on obtient :  $\Delta r \cdot \Delta p \ll \hbar$ . Cette relation est clairement incompatible avec l'inégalité de Heisenberg spatiale.
3. La limite que l'inégalité de Heisenberg spatiale impose aux indéterminations  $\Delta r$  et  $\Delta p$  est incompatible avec l'existence d'orbites circulaires comme celles qui apparaissent dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

### 24.5 Largeur spectrale

1. La fréquence du rayonnement émis est  $v_0 = \delta E/h$  où  $\delta E = 4,7$  eV. On trouve  $v_0 = 1,1 \times 10^{15}$  Hz. On peut en déduire la longueur d'onde dans le vide correspondante :  $\lambda_0 = c/v_0 = 2,7 \times 10^{-7}$  m. Il s'agit d'un rayonnement ultraviolet.
2. On utilise l'inégalité temps-énergie :  $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau}$ . L'application numérique donne :  $\Delta E_{\min} = 5,3 \times 10^{-22}$  J, ce qui correspond à 3,3 meV.
3. La largeur spectrale en fréquence s'en déduit immédiatement :  $\Delta\nu = \Delta E_{\min}/h = 8,0 \times 10^{11}$  Hz, soit 800 GHz. On constate que  $\Delta\nu \ll v_0$  : les largeurs spectrales peuvent être traitées comme des infiniment petits. On utilise donc un calcul différentiel :  $d\lambda_0 = -\frac{c}{v_0^2} dv_0$ . D'où :  $\Delta\lambda = \frac{c}{v_0^2} \Delta\nu$ . On obtient :  $\Delta\lambda = 2,0 \times 10^{-10}$  m (on vérifie bien que  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ ). La largeur spectrale que nous venons de calculer correspond à la largeur naturelle de la raie d'émission considérée.

## 24.6 Portée de l'interaction électromagnétique

**1.** L'inégalité temps-énergie permet d'écrire :  $\tau \geq \frac{\hbar}{2\Delta E}$ . L'application numérique donne :  $\tau \geq 0,6$  s.

**2.** La distance  $\ell$  est donnée par :  $\ell = c\tau \geq \frac{\hbar}{2c\Delta m}$ . On obtient :  $\ell \geq 2 \times 10^8$  m. Si la masse du photon est majorée par une valeur de l'ordre de  $10^{-51}$  kg alors la portée de l'interaction électromagnétique est supérieure à 200 millions de mètres. Pour des expériences d'électromagnétisme réalisées à l'échelle d'un laboratoire, on peut considérer que la portée de l'interaction électromagnétique est infinie et se fier à la théorie de l'électromagnétisme classique.

## 24.7 Émission d'un photon par un atome

**1.** L'inégalité temps-énergie peut aussi s'écrire sous la forme :  $\tau\Delta f \geq 1/2$ . Pour  $\Delta f = f_0\nu/c$ , on obtient :  $\tau \geq c/(2\nu f_0)$ . La durée minimale de la mesure est :  $\tau = \frac{c}{2\nu f_0}$ .

**2.** Si l'atome se déplace à la vitesse  $v$ , pendant la durée  $\tau$  de l'émission d'un photon, il se déplace d'une distance  $\Delta x$  égale à  $v\tau$  :  $\Delta x = c/(2f_0)$ .

**3.** On admet que l'expression de  $\Delta x$  représente l'indétermination quantique sur la position de l'atome. L'inégalité de Heisenberg spatiale impose :  $\Delta p_x \geq 1/(2\Delta x)$ , soit :  $\Delta p_x \geq \hbar f_0/c$ . Le système { atome + photon } est supposé isolé, sa quantité de mouvement doit se conserver. Lorsque l'atome émet un photon, ce dernier emporte une quantité de mouvement égale à  $\hbar f_0/c$ . En conséquence, l'atome a un mouvement de recul et voit sa quantité de mouvement varier de  $-\hbar f_0/c$ . On constate que l'indétermination minimale sur la quantité de mouvement de l'atome est précisément de l'ordre de grandeur de  $\hbar f_0/c$ , la quantité de mouvement de recul de l'atome. La quantité de mouvement de l'atome ne peut pas être précisément définie : elle fluctue en raison de l'émission de photons par l'atome.

## 24.8 Énergie minimale d'un oscillateur harmonique

**1.** On dérive l'expression  $\frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2$  par rapport à  $\Delta x$  pour trouver la valeur de  $\Delta x$  qui permet de la minimiser :

$$-\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega_0^2(\Delta x) = 0 \text{ donne } (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}.$$

On obtient alors  $E_{\min} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$  et  $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$ .

**2. a.** Les fluctuations quantiques deviennent prépondérantes lorsque  $\Delta x \gg \Delta x_T$ , c'est-à-dire lorsque  $\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \gg \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}$ . Cela conduit à la condition :  $T \ll \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$ . La température  $T_c$  en dessous de laquelle les fluctuations thermiques deviennent négligeables devant les fluctuations quantiques est  $T_c = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$ , ou encore  $T_c = \frac{h f_0}{2k_B}$  avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

## CHAPITRE 24 – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.

**b. Application numérique.**

- Pour un oscillateur harmonique mécanique usuel, on choisit une fréquence  $f_0 = 10$  Hz. La température  $T_c$  correspondante vaut  $2 \times 10^{-10}$  K. Il est impossible en pratique de refroidir un dispositif mécanique usuel à des températures aussi basses.
- Plus la fréquence est élevée et plus  $T_c$  est importante : il est donc utile de choisir un oscillateur de fréquence propre élevée si l'on veut pouvoir se placer dans des conditions où  $T \ll T_c$ . Pour une fréquence de 6,0 GHz, on obtient  $T_c = 0,14$  K. La température choisie (25 mK) est bien inférieure à  $T_c$ .

**24.9 Oscillateur harmonique quantique**

**1.** Avec  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ , l'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\varphi(x) = E\varphi(x).$$

**2. a.** On détermine la constante  $\mathcal{N}$  en normalisant la fonction d'onde propre :

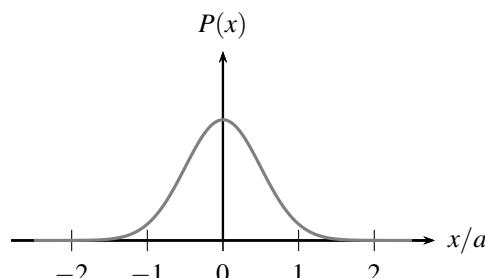
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}^2 \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) dx = 1.$$

Or :

$$\mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) dx = \mathcal{N}^2 \sqrt{\frac{\pi a^2}{2}}.$$

On en déduit :  $\mathcal{N} = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}$ .

**b.** La densité de probabilité de présence s'écrit :  $P(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right)$ . La figure suivante représente l'allure de  $P(x)$ .



La densité de probabilité de présence est paire. On en déduit que  $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx = 0$ .

c. On commence par calculer la dérivée seconde de  $\varphi(x)$  :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= \mathcal{N} \frac{-2x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 2\mathcal{N} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{2x^2}{a^4} - \frac{1}{a^2}\right), \\ &= \left(\frac{4x^2}{a^4} - \frac{2}{a^2}\right) \varphi(x).\end{aligned}$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps donne alors :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{4x^2}{a^4} - \frac{2}{a^2} \right) \varphi(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \varphi(x) = E \varphi(x),$$

ou encore :

$$\varphi(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{4x^2}{a^4} - \frac{2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - E \right) = 0.$$

La relation ci-dessus doit être vérifiée quelle soit la valeur de  $x$ . Comme la fonction d'onde propre n'est pas identiquement nulle, on en déduit que :

$$-\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{2x^2}{a^4} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - E = 0,$$

quelle que soit la valeur de  $x$ . D'où :

$$-\frac{2\hbar^2}{ma^4} + \frac{1}{2} m \omega^2 = 0 \text{ et } \frac{\hbar^2}{ma^2} - E = 0.$$

Il vient :  $a = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$  et  $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ .

### 24.10 Diffraction d'une onde électromagnétique par une fente

1. On détermine  $C$  en normalisant la probabilité de présence :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} C \mathcal{E}(x) dx = C \frac{\lambda_0 D}{\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 du = C \frac{\lambda_0 D}{a}.$$

On obtient :  $C = \frac{a}{\lambda_0 D}$ .

2. La probabilité qu'un photon soit détecté entre  $-\frac{\lambda_0 D}{a}$  et  $\frac{\lambda_0 D}{a}$  (c'est-à-dire dans la tache centrale de diffraction) s'écrit :

$$\begin{aligned}P &= \int_{-\lambda_0 D/a}^{\lambda_0 D/a} \frac{a}{\lambda_0 D} \mathcal{E}(x) dx, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 du, \\ &\simeq 0,90.\end{aligned}$$

**CHAPITRE 24 – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.**

Chaque photon a donc une probabilité égale à 0,90 d'être détecté à l'intérieur de la tache centrale de diffraction.

**24.11 Particule dans une boîte unidimensionnelle**

**1. a.** La conservation de l'énergie mécanique de la particule s'écrit :  $E = \frac{1}{2}mv^2 + 0$  puisque  $V(x) = 0$ . On en déduit que la vitesse  $v$  est une constante, égale à  $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ , qu'on note  $v_0$ .

**b.** La durée de passage  $dt$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  s'écrit :  $dt = dx/v_0$ . La densité de probabilité de présence s'en déduit :  $dP_{\text{cl}} = Cdt = Cdx/v_0$  où  $C$  est une constante. On détermine la constante  $C$  en normalisant la densité de probabilité de présence :

$$1 = \int_0^L C \frac{dx}{v_0} = C \frac{L}{v_0}.$$

On en déduit que  $C = v_0/L$  et donc :  $dP_{\text{cl}} = \frac{dx}{L}$ . On obtient bien le résultat demandé.

**c.** La probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$  s'écrit :

$$P_{\text{cl}} = \int_0^{L/4} \frac{dx}{L} = \frac{1}{4}.$$

**2. a.** La densité de probabilité de présence correspondant à la fonction d'onde  $\psi_n(x, t)$  s'écrit :

$$\frac{dP}{dx} = |\psi_n(x, t)|^2 = A_n^2 \sin^2 \left( n\pi \frac{x}{L} \right).$$

Il faut normaliser la densité de probabilité de présence :

$$\begin{aligned} 1 &= A_n^2 \int_0^L \sin^2 \left( n\pi \frac{x}{L} \right) dx, \\ &= A_n^2 \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 u du, \\ &= A_n^2 \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit :  $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$ .

**b.** La densité de probabilité de présence s'écrit :  $\frac{dP}{dx} = \frac{2}{L} \sin^2 \left( n\pi \frac{x}{L} \right)$ . On en déduit la pro-

babilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$  :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{L/4} \frac{2}{L} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx, \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{n\pi/4} \sin^2(u) du, \\ &= \frac{1}{n\pi} \left( \frac{n\pi}{4} - [\sin(2u)]_0^{n\pi/4} \right), \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}. \end{aligned}$$

c. Dans la limite où  $n \rightarrow \infty$ , on obtient  $P \rightarrow 1/4$  : on retrouve la valeur prévue par la théorie classique, dans la limite des grands nombres quantiques, conformément au principe de correspondance de Bohr.



# Évolution d'une particule quantique libre

Nous allons utiliser le formalisme présenté dans le chapitre précédent pour étudier l'évolution dans l'espace et dans le temps d'une particule quantique.

## 1 La particule quantique libre

### 1.1 Définition

On appelle **particule quantique libre**, une particule quantique évoluant dans le vide sans interaction.

On peut considérer que la *particule quantique libre* est isolée et que son mouvement est en particulier caractérisé par une énergie potentielle identiquement nulle. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , la quantité de mouvement de la particule quantique est notée  $\vec{p}$  et son énergie mécanique  $E$  se confond avec son énergie cinétique.

L'évolution de la fonction d'onde d'une particule quantique libre est donc donnée par l'équation de Schrödinger (24.5) où l'on a imposé  $V(x) = 0$  :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}. \quad (25.1)$$

La particule quantique libre peut se déplacer de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

### 1.2 États stationnaires d'une particule quantique libre

#### a) Onde plane progressive harmonique

Comme précédemment, nous recherchons une solution où la fonction d'onde est factorisée sous la forme d'un produit d'une fonction de  $t$  et d'une fonction de  $x$ . Nous savons que cette fonction d'onde peut se mettre sous la forme :  $\psi(x,t) = \varphi(x) \exp(-i\omega t)$ , où  $\varphi(x)$  est solution

de l’équation de Schrödinger indépendante du temps (24.6) avec  $V(x) = 0$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\hbar\omega\varphi(x),$$

ou encore :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m\omega}{\hbar}\varphi(x) = 0 \quad (25.2)$$

**Cas où  $\omega < 0$**  : dans ce cas, la forme générale de la solution de l’équation (25.2) s’écrit :

$$\varphi(x) = A \exp(kx) + B \exp(-kx),$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes complexes et avec  $k = \sqrt{\frac{2m(-\omega)}{\hbar}}$ . Comme  $|\varphi(x)|^2$  diverge lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , cette solution n’est pas acceptable. On a donc nécessairement  $A = B = 0$ . Finalement, le cas où  $\omega < 0$  conduit à aucune solution physiquement acceptable.

**Cas où  $\omega = 0$**  : la forme générale de la solution de l’équation différentielle (25.2) s’écrit sous la forme :  $\varphi(x) = Ax + B$ . Comme  $|\varphi(x)|^2$  ne doit pas diverger lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , on a nécessairement  $A = 0$ . La contrainte de normalisation  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$  impose  $B = 0$ . Finalement, la fonction d’onde est identiquement nulle, ce qui n’a aucun intérêt. On écarte donc la possibilité  $\omega = 0$ .

**Cas où  $\omega > 0$**  : la forme générale de la solution s’écrit sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx),$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes complexes et avec  $k = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$ , une constante réelle.

L’expression complète de la fonction d’onde est la suivante :

$$\psi(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t)) + B \exp(-i(kx + \omega t)),$$

avec  $\omega > 0$ . On reconnaît là l’expression de la superposition d’une *onde plane harmonique* progressant dans le sens des  $x$  croissants  $A \exp(i(kx - \omega t))$  et d’une onde plane harmonique progressant dans le sens des  $x$  décroissants  $B \exp(-i(kx + \omega t))$ .

En écrivant la solution sous la forme  $\exp(-i\omega t) \left( A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \right)$ , on obtient

$$|\psi(x, t)|^2 = |A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)|^2.$$

La densité de probabilité de présence est indépendante du temps ; il s’agit donc bien d’un **état stationnaire**. Ce résultat tient à ce que les deux ondes superposées ont la même pulsation.

### b) Convention d'écriture de la phase d'une onde harmonique

La résolution de l'équation de Schrödinger pour une particule quantique libre a conduit à ne retenir que la solution où  $\omega > 0$ . La partie temporelle de la fonction d'onde s'écrit alors nécessairement sous la forme  $\exp(-i\omega t)$ . On veillera donc à respecter cette convention, qui résulte de la forme de l'équation de Schrödinger elle-même.

 En mécanique quantique, on convient de toujours écrire la dépendance temporelle d'une fonction d'onde harmonique sous la forme  $\exp(-i\omega t)$  avec  $\omega > 0$ . L'écriture du terme  $i\hbar \frac{\partial \psi(M,t)}{\partial t}$  dans l'équation de Schrödinger (24.5) est adaptée à cette convention.

### c) Relation de dispersion et vitesse de phase

La résolution de l'équation (25.1) a conduit à la **relation de dispersion** suivante, caractéristique de la propagation d'une onde libre :

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (25.3)$$

La **vitesse de phase**  $v_\phi$  de l'onde plane progressive harmonique peut être déduite de la relation de dispersion :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}. \quad (25.4)$$

La vitesse de phase dépend de  $k$  : la propagation d'une onde libre est *dispersive*. Nous allons en examiner quelques conséquences dans le paragraphe 1.3.

### d) Quel sens physique associer à une onde plane progressive ?

Nous venons de voir que les états stationnaires d'une particule quantique libre sont des *ondes planes progressives harmoniques*. Une onde plane progressive harmonique, de la forme  $\psi(x,t) = A \exp(i(kx - \omega t))$ , correspond à une probabilité de présence uniforme  $|A|^2$  dans tout l'espace. Une telle fonction d'onde ne peut pas être normalisée. Elle n'a donc, en toute rigueur, pas de réalité physique.

- Néanmoins, on peut lui donner un sens en donnant une interprétation statistique à la fonction d'onde. Considérons un faisceau de  $N$  particules quantiques libres, indépendantes et identiques, toutes dans le même état stationnaire représenté par la fonction d'onde  $A \exp(i(kx - \omega t))$ . Le nombre moyen de particules  $dN$  que l'on pourrait détecter, par une mesure à l'instant  $t$ , entre  $x$  et  $x + dx$  s'écrit en fonction du nombre total  $N$  de particules et de la probabilité de présence d'une particule au voisinage de l'abscisse  $x$  :

$$\begin{aligned} dN &= N dP(x,t), \\ &= N |A|^2 dx. \end{aligned}$$

On en déduit que  $N|A|^2$  représente la *densité linéique de particules*  $\rho$  du faisceau. Il est alors plus commode de travailler avec la fonction d’onde  $\psi_N(x, t) = \sqrt{\rho} \exp(i(kx - \omega t))$  pour représenter le faisceau de particules quantiques. Alors  $\int_{\mathcal{D}} |\psi_N(x, t)|^2 dx$  représente le nombre de particules situées dans le domaine  $\mathcal{D}$ .

- L’onde plane progressive harmonique, en tant que solution élémentaire de l’équation de propagation, est un outil mathématique utile. On peut en effet construire par superposition d’états stationnaires, une fonction d’onde, sous la forme d’un paquet d’ondes, qui pourra être normalisée correctement, et qui permettra de représenter une particule quantique unique, dont la probabilité de présence prend des valeurs significatives sur un support fini. Cette construction est l’objet du paragraphe suivant.

### 1.3 Représentation d’une particule quantique par un paquet d’ondes

#### a) Construction d’un paquet d’ondes quasi-monochromatique

Nous allons donc envisager la propagation d’une superposition d’ondes harmoniques de pulsations et de vecteurs d’onde proches des valeurs  $\omega_0$  et  $k_0$  liées par la relation de dispersion :

$$\omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}.$$

Plus précisément, on superpose  $N$  ondes harmoniques, avec  $N \gg 1$ . Leurs vecteurs d’onde sont supposés régulièrement distribués dans l’intervalle  $[k_1; k_2]$ . On pose  $\Delta k = k_2 - k_1$  et  $k_0 = (k_1 + k_2)/2$ . On fait l’hypothèse que  $\Delta k \ll k_0$ . Cette approximation définit un **paquet d’ondes quasimonochromatique**.

Pour former le paquet d’ondes, on choisit d’ajouter des composantes de même amplitude :

$$\psi_n(x, t) = A \exp(i(k_n x - \omega_n t)),$$

avec  $k_n = \frac{\Delta k}{N-1}(n-1) + k_1$  et  $\omega_n = \frac{\hbar k_n^2}{2m}$  et où  $1 \leq n \leq N$ . En mettant en facteur l’onde de pulsation et de vecteur d’onde moyens, on arrive à :

$$\psi_n(x, t) = A \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \exp\left((k_n - k_0)x - (\omega_n - \omega_0)t\right).$$

Posons  $\delta k_n = k_n - k_0$ . Pour évaluer  $\delta \omega_n = \omega_n - \omega_0$ , on utilise la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{\hbar k_n^2}{2m}, \\ \omega_0 + \delta \omega_n &= \frac{\hbar}{2m}(k_0 + \delta k_n)^2, \\ &= \frac{\hbar k_0^2}{2m} + \frac{\hbar k_0}{m}\delta k_n + \frac{\hbar}{2m}\delta k_n^2, \end{aligned}$$

soit, puisque  $\omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$  :

$$\delta \omega_n = \frac{\hbar k_0}{m}\delta k_n + \frac{\hbar}{2m}\delta k_n^2. \quad (25.5)$$

On remarque que  $\frac{\hbar k_0}{m} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$  représente la **vitesse de groupe**, que l'on note désormais  $v_g$  :

$$v_g = \frac{\hbar k_0}{m}. \quad (25.6)$$

On évalue l'ordre de grandeur du rapport des deux termes qui composent  $\delta\omega_n$  :

$$\left| \frac{\frac{\hbar}{2m} \delta k_n^2}{\frac{\hbar k_0}{m} \delta k_n} \right| = \left| \frac{\delta k_n}{2k_0} \right| \ll 1.$$

On peut se contenter, dans une première analyse, de l'expression simplifiée :  $\delta\omega_n = v_g \delta k_n$ . La fonction d'onde obtenue par superposition des  $N$  ondes harmoniques s'écrit :

$$\psi(x, t) = A \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \sum_{n=1}^N \exp(i\delta k_n (x - v_g t)).$$

La densité de probabilité de présence s'en déduit :

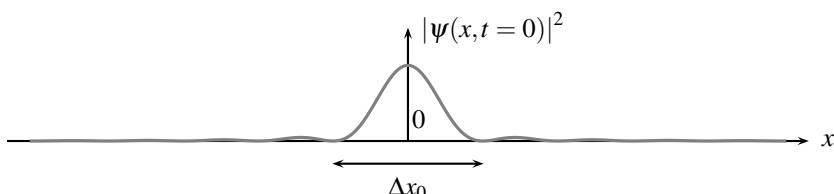
$$|\psi(x, t)|^2 = |A|^2 \left| \sum_{n=1}^N \exp(i\delta k_n (x - v_g t)) \right|^2. \quad (25.7)$$

### b) Structure du paquet d'ondes à l'instant initial

À l'instant initial  $t = 0$ , la densité de probabilité s'écrit :

$$|\psi(x, t=0)|^2 = |A|^2 \left| \sum_{n=1}^N \exp(i\delta k_n x) \right|^2. \quad (25.8)$$

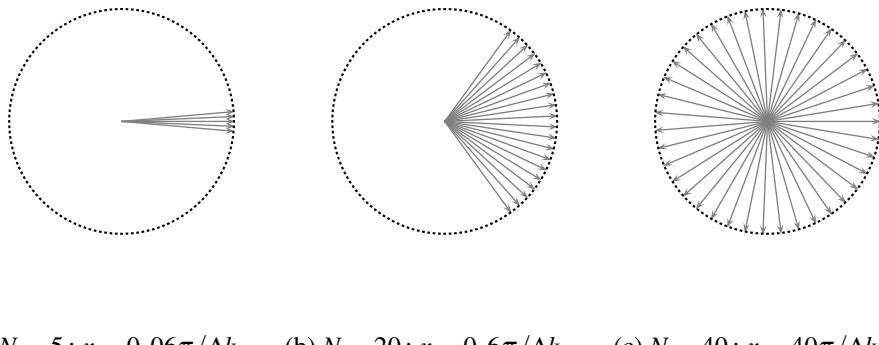
La figure 25.1 représente le graphe de  $|\psi(x, t=0)|^2$  en fonction de  $x$ , et appelle plusieurs commentaires.



**Figure 25.1** – Représentation de la densité de probabilité initiale pour  $N = 100$ . L'unité des abscisses est arbitraire.

- Dans l’expression de  $|\psi(x, t = 0)|^2$ , la somme correspond à un terme d’interférences à  $N$  ondes, avec  $N \gg 1$ . Chaque composante y est caractérisée par une phase égale à  $\delta k_n \cdot x$ .
- Pour  $x = 0$ , on constate que toutes ces ondes s’ajoutent en phase (interférences totalement constructives). La densité de probabilité est alors maximale, ce que montre bien le graphe de la figure 25.1.
- Sur le graphe, on constate que la densité de probabilité de présence prend des valeurs non nulles essentiellement au voisinage de  $x = 0$  et reste très faible au-delà.

Sur la figure 25.2, on a représenté, pour différentes valeurs de  $x$ , chaque terme de la somme figurant dans l’expression (25.8) par un vecteur unitaire formant un angle  $\delta k_n \cdot x$  avec l’axe ( $Ox$ ) (**représentation de Fresnel**). La probabilité de présence est proportionnelle à la norme du vecteur égal à la somme de tous ces vecteurs.



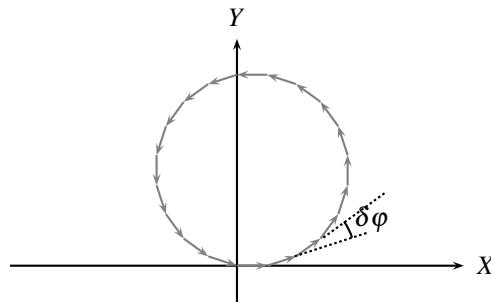
**Figure 25.2** – Représentation de Fresnel associée à la relation (25.8)

**Figure 25.2 (a) :** pour  $|x| \Delta k \ll 1$ , les ondes sont quasiment toutes en phase car  $\delta k_n \cdot x$  prend des valeurs proches de zéro. Tous les vecteurs correspondants sont quasiment colinéaires : le vecteur résultant a une norme importante. La densité de probabilité est donc importante.

**Figure 25.2 (b) :** pour une valeur plus élevée de  $|x|$ , les variations de la phase  $\delta k_n \cdot x$  sont plus importantes et le vecteur résultant voit sa norme réduite. La densité de probabilité est donc plus faible que dans le cas précédent.

**Figure 25.2 (c) :** pour  $|x| \Delta k \gg 1$ , pourvu que  $N$  soit suffisamment élevé, il est quasiment possible de regrouper tous les vecteurs par paires de vecteurs opposés (représentant deux ondes en interférence destructive), de sorte que le vecteur résultant soit à peu près nul. La densité de probabilité est donc elle aussi quasiment nulle.

L’angle entre deux vecteurs associés à deux termes consécutifs de la somme est égal à  $\delta\varphi = \delta k_{n+1}x - \delta k_n x = \frac{\Delta k}{N-1}x$ . Pour certaines valeurs de  $x$ , la somme de tous ces vecteurs peut être nulle. Comme l’illustre la figure 25.3, il suffit que  $N\delta\varphi$  soit un multiple de  $2\pi$ .



**Figure 25.3 –** Construction de Fresnel : vecteur résultant nul pour  $N = 20$  composantes.

On peut déterminer les abscisses où le vecteur résultant, et donc la probabilité de présence, s'annule :

$$N\delta\varphi = 2p\pi \implies x_p = \frac{N-1}{N} \frac{2p\pi}{\Delta k} \approx \frac{2p\pi}{\Delta k} \text{ dans la limite où } N \gg 1,$$

avec  $p$  un entier relatif. Les deux premières annulations, de part et d'autre du maximum, correspondent à  $p = \pm 1$ , soit aux abscisses  $\pm \frac{2\pi}{\Delta k}$ . On peut en déduire la largeur de l'intervalle où la probabilité de présence prend des valeurs non nulles de part et d'autre du maximum :

$$\Delta x_0 = \frac{4\pi}{\Delta k}.$$

À l'intérieur de cet intervalle, l'interférence des  $N$  ondes est suffisamment constructive pour donner une valeur non nulle à la densité de probabilité de présence. La relation précédente peut être écrite sous la forme :  $\Delta x_0 \cdot \Delta k = 4\pi$ . Elle est compatible avec l'inégalité de Heisenberg spatiale qui impose  $\Delta x_0 \Delta k \geq 1/2$ .

Il importe de retenir qu'un paquet d'ondes construit par superposition d'ondes planes progressives harmoniques dont les vecteurs d'onde sont distribués dans un intervalle de largeur  $\Delta k$  a une extension spatiale  $\Delta x_0$  qui varie comme l'inverse de  $\Delta k$ , conformément à l'**inégalité de Heisenberg spatiale** :

$$\Delta x_0 \Delta k \geq 1/2.$$

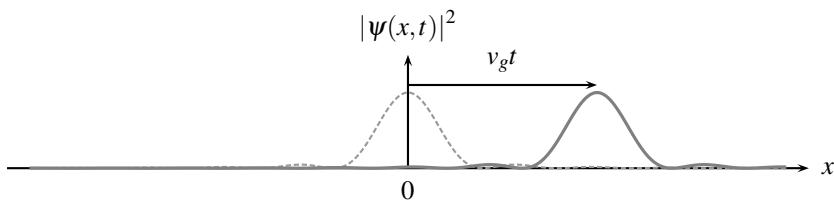
### Remarques

- Le paquet d'ondes étudié est caractérisé par une extension spatiale finie  $\Delta x_0$ . La quantité de mouvement est distribuée dans un intervalle de largeur  $\Delta p = \hbar \Delta k$ . La relation  $\Delta x_0 \Delta p = 4\pi \hbar$  vérifie l'inégalité de Heisenberg, et s'applique encore, à la limite, à l'onde plane progressive harmonique : son extension spatiale est infinie ( $\Delta x_0 \rightarrow +\infty$ ) et la quantité de mouvement prend une valeur unique liée à la valeur unique du vecteur d'onde ( $\Delta p \rightarrow 0$ ).
- L'interférence constructive des  $N$  composantes se produit lorsque  $\delta\varphi = 2p\pi$  où  $p$  est

un entier, c'est-à-dire pour  $x_p = (N - 1) \frac{2p\pi}{\Delta k}$ . C'est seulement lorsqu'on superpose une infinité de composantes ( $N \rightarrow +\infty$ ) que le maximum de la densité de probabilité de présence se réalise uniquement en  $x = 0$  (pour  $p = 0$ ). La superposition s'écrit alors avec une intégrale plutôt qu'une somme discrète.

### c) Structure du paquet d’ondes à un instant ultérieur

On considère maintenant l'expression (25.7). Par comparaison avec l'état initial, on peut remarquer que le maximum de densité de probabilité se situe maintenant à l'abscisse  $x = v_g t$ . Le graphe de l'expression (25.7) de la densité de probabilité est représenté sur la figure 25.4.



**Figure 25.4** – Représentation de la densité de probabilité à un instant  $t > 0$  (trait plein) et à l'instant initial  $t = 0$  (tirets) pour  $N = 100$ . L'unité des abscisses est arbitraire.

Comme précédemment, il existe une région de l'espace, d'extension limitée, où la densité de probabilité de présence est maximale. Cette région se déplace à la vitesse de groupe. Ce résultat était prévisible puisque la densité de probabilité (25.7) est fonction de la seule variable  $x - v_g t$ , ce qui est synonyme d'une propagation sans déformation à la vitesse  $v_g$ .

#### Remarque

En toute rigueur, si l'on reprend l'expression complète (25.5) sans négliger le second terme, on constate que le paquet d'ondes s'étale au cours de sa propagation. Cet effet est lié à la dispersion de la vitesse de groupe. On en propose une interprétation qualitative en exercice.

### d) Relations onde-particule

Le vecteur d'onde moyen  $\vec{k}_0$  du paquet d'ondes correspond à une longueur d'onde de de Broglie moyenne  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ . Pour faire le lien entre la propagation du paquet d'ondes et la description particulaire, on utilise la relation de de Broglie en associant une quantité de mouvement  $\vec{p}_0$  à la longueur d'onde  $\lambda_0$ . Il est naturel d'orienter la quantité de mouvement moyenne dans le sens de propagation du paquet d'ondes :  $\vec{p}_0 = \frac{\hbar}{\lambda_0} \vec{u}_x$ , ce qui donne :

$$\vec{p}_0 = \hbar \vec{k}_0 = m \vec{v}_g .$$

On est donc amené à identifier la vitesse de déplacement de la particule quantique à la vitesse de groupe du paquet d'ondes.

Transformons la relation de dispersion sous la forme suivante  $\omega_0 = p_0^2/2m\hbar$ , ou encore :  $\hbar\omega_0 = p_0^2/2m$ . En mécanique classique, la quantité  $\vec{p}_0^2/2m$  représente l'énergie cinétique, qui se confond ici avec l'énergie mécanique  $E_0$  puisque la particule quantique est libre. Par analogie avec la relation de Planck-Einstein caractéristique des photons (24.1), on pose

$$E_0 = \hbar\omega_0,$$

Afin de ne pas alourdir inutilement les notations, nous choisissons de laisser tomber l'indice 0 pour indiquer la pulsation moyenne ou le vecteur d'onde moyen.

Comme dans le paragraphe 2.5 où nous avons établi l'équation de Schrödinger indépendante du temps (24.6), on retrouve la relation  $E = \hbar\omega$  où  $E$  représente l'énergie de la particule quantique. En fait, l'équation de Schrödinger (24.5) est une traduction quantique de la **conservation de l'énergie** d'une particule quantique.

On retiendra qu'on peut représenter une particule quantique par un **paquet d'ondes quasimonochromatique** de vecteur d'onde moyen  $\vec{k} = k\hat{\vec{u}}_x$  et de pulsation moyenne  $\omega$ . La quantité de mouvement  $\vec{p}$  et l'énergie  $E$  de la particule quantique sont données par les relations :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (25.9)$$

$$E = \hbar\omega. \quad (25.10)$$



Même si les relations (25.9) et (25.10) sont similaires à celles qu'on écrit pour le photon, il ne faut pas perdre de vue que la relation de dispersion  $\omega = ck$  ne s'applique qu'au photon et surtout pas à une particule quantique matérielle !

## 1.4 Vecteur densité de courant de probabilité

### a) Expression pour une particule quantique (paquet d'ondes quasi-monochromatique)

La probabilité de présence, à l'instant  $t$ , d'une particule quantique entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est donnée par la relation  $dP = |\psi(x, t)|^2 dx$ . Cette particule quantique peut être représentée par un paquet d'ondes, de vecteur d'onde moyen  $k$ , qui se déplace à la vitesse de groupe de norme  $v_g = \hbar k/m$ . Le paquet d'ondes parcourt donc la distance  $dx$  pendant la durée  $dt = dx/v_g$ , ce qui permet d'écrire :

$$dP = |\psi(x, t)|^2 dx = v_g |\psi(x, t)|^2 dt = \frac{\hbar k}{m} |\psi(x, t)|^2 dt.$$

On peut considérer que cette relation met en évidence un « débit » de probabilité de présence  $\frac{dP}{dt}$  à l'abscisse  $x$  à travers une surface unité, que l'on peut exprimer au moyen d'un **vecteur densité de courant de probabilité** :

$$\vec{j}(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}. \quad (25.11)$$

La probabilité de présence qui « s'écoule » à travers une abscisse  $x$  pendant une durée  $dt$  est :  $dP = \vec{j}(x, t) \cdot \vec{u}_x dt$ .

### Remarque

Dans cette approche unidimensionnelle,  $\|\vec{j}\|$  s'exprime en  $s^{-1}$ .

### b) Interprétation « hydrodynamique »

Une onde plane progressive harmonique de la forme  $\psi_N(x, t) = \sqrt{\rho} \exp(i(kx - \omega t))$  correspond à la limite d'un paquet d'ondes de largeur spectrale  $\Delta k$  tendant vers 0. Dans cette limite, l'expression (25.11) du vecteur densité de courant de probabilité devient :  $\vec{j}_N = \rho \frac{\hbar \vec{k}}{m}$ .

Or, comme on l'a vu, la fonction d'onde  $\psi_N(x, t) = \sqrt{\rho} \exp(i(kx - \omega t))$  permet de représenter un faisceau de particules quantiques pourvu que  $\rho$  s'identifie à la densité linéique de particules. Cela permet d'identifier  $\vec{j}_N$  à un vecteur densité de courant de particules associé à une onde plane progressive harmonique.

Pour une onde plane progressive harmonique  $\psi_N(x, t) = \sqrt{\rho} \exp(i(kx - \omega t))$  telle que  $\rho$  désigne la densité linéique de particules quantiques, le vecteur

$$\vec{j}_N = \rho \frac{\hbar \vec{k}}{m}, \quad (25.12)$$

représente le *vecteur densité de courant de particules*.

Le vecteur densité de courant de particules  $\vec{j}_N$ , donné par la relation (25.12), apparaît sous la forme du produit de la densité linéique de particules  $\rho$  et de la vitesse de déplacement moyenne d'une particule  $\frac{\hbar \vec{k}}{m}$ . Il est analogue au vecteur densité de courant de masse en hydrodynamique, ou au vecteur densité de courant électrique en électromagnétisme.

Le *flux algébrique de particules*  $\Phi$ , compté positivement dans le sens de  $\vec{u}_x$ , qui caractérise ce faisceau est alors :  $\Phi = \vec{j}_N \cdot \vec{u}_x$ . Ce flux représente le nombre de particules qui passent à une abscisse donnée par unité de temps.

Récapitulons : lorsqu'on considère une seule particule, on utilise le vecteur  $\vec{j}$  (relation (25.11)) qui permet de calculer le débit de probabilité de présence de cette particule à une abscisse donnée. Lorsqu'on considère un faisceau de  $N$  particules, on utilise une description « hydrodynamique » où le vecteur  $\vec{j}_N$  (relation (25.12)) permet de calculer le flux de particules à une abscisse donnée.

### Exemple

On considère un faisceau d'électrons libres, de masse  $m_e = 9 \times 10^{-31}$  kg, d'énergie  $E = 3$  eV, correspondant à un courant électrique de 1 mA. On souhaite déterminer le vecteur densité de courant de particules et les caractéristiques de l'onde représentant ce faisceau électronique.

La fonction d'onde représentant les électrons de ce faisceau peut être écrite sous la

forme :

$$\psi(x, t) = \sqrt{\rho} \exp(i(px - Et)/\hbar).$$

La quantité de mouvement d'un électron est  $p = \sqrt{2m_e E} = 9 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le flux d'électrons est  $\Phi = I/e = 6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Le vecteur densité de courant de particules a une norme égale à  $\Phi$  :  $j_N = 6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . On en déduit  $\rho = m_e j_N / p = 6 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$ , ce qui signifie que ce faisceau comporte  $6 \times 10^9$  électrons par mètre.



L'expression donnée du vecteur densité de courant de probabilité ou de particules n'est en rien générale. Elle ne peut être utilisée que pour un état stationnaire représenté par une fonction d'onde sous forme d'onde plane progressive harmonique ou de paquet d'ondes quasimonochromatique.

## SYNTHESE

### SAVOIRS

- relation de dispersion pour une particule libre
- onde de de Broglie plane progressive harmonique
- caractère idéal de l'onde plane progressive harmonique
- définition d'un paquet d'ondes
- relation entre l'extension spatiale et la largeur spectrale du paquet d'ondes
- vecteur densité de courant de probabilité

### SAVOIR-FAIRE

- utiliser la relation de dispersion pour une particule libre
- identifier la vitesse de groupe à la vitesse de la particule
- utiliser l'expression du vecteur densité de courant de probabilité
- connaître l'interprétation du vecteur densité de courant de probabilité sous la forme du produit de la densité de probabilité et de la vitesse de la particule
- utiliser l'inégalité de Heisenberg spatiale pour lier l'extension spatiale d'un paquet d'onde à sa largeur spectrale
- utiliser des analogies avec les interférences étudiées en optique

### MOTS-CLÉS

- |                          |                              |                 |
|--------------------------|------------------------------|-----------------|
| • particule libre        | • paquet d'ondes             | de probabilité  |
| • relation de dispersion | • vecteur densité de courant | • interférences |

**S'ENTRAÎNER**

Certaines valeurs numériques, en particulier celles des constantes fondamentales, peuvent être volontairement absentes des énoncés proposés. Il relève de votre initiative de les connaître ou de les rechercher.

**25.1 Interférences (★)**

On considère une expérience d'interférences, où un faisceau de particules quantiques est dirigé vers trois fentes contenues dans un même plan. La détection des particules est effectuée en un point  $M$  à grande distance du plan contenant les trois fentes.

Lorsque la seule fente n°1 est ouverte, l'amplitude de probabilité en  $M$  vaut :  $\psi_1(M) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Lorsque la seule fente n°2 est ouverte, l'amplitude de probabilité en  $M$  vaut  $\psi_2(M) = \frac{i}{\sqrt{2}}$ .

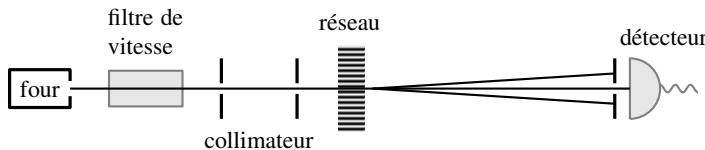
Lorsque la seule fente n°3 est ouverte, l'amplitude de probabilité en  $M$  vaut :  $\psi_3(M) = \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-i\pi}$ .

Déterminer la probabilité de détection d'une particule au voisinage du point  $M$  lorsque :

- a. seule la fente 2 est ouverte.
- b. les fentes 1 et 2 sont ouvertes.
- c. les fentes 1 et 3 sont ouvertes.
- d. toutes les fentes sont ouvertes.

**APPROFONDIR****25.2 Diffraction de molécules par une onde lumineuse (★★★)**

On considère une expérience de diffraction de molécules de fullerène  $C_{60}$  par une onde stationnaire lumineuse. Un four contenant de la poudre de fullerène est chauffé à une température proche de 900 K. Un dispositif permet de sélectionner dans le faisceau de fullerène sortant du four des molécules de vitesse moyenne égale à  $v = 120 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et dont la dispersion relative de vitesse est  $\frac{\Delta v}{v} = 0,17$ . Le faisceau est collimaté par deux fentes verticales successives de largeurs respectivement égales à  $a = 7 \mu\text{m}$  et  $b = 5 \mu\text{m}$ , et séparées de  $D' = 1,13 \text{ m}$ . Le faisceau de molécules est ensuite diffracté par une onde stationnaire lumineuse. On admettra que, du point de vue des molécules de fullerène, l'onde lumineuse stationnaire, agit comme un réseau plan de diffraction, constitué de  $N$  fentes, infiniment fines et équidistantes de  $d = 257 \text{ nm}$ . Un détecteur, situé à une distance  $D = 1,2 \text{ m}$  après le réseau, permet de compter les molécules de  $C_{60}$ . Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 25.5.



**Figure 25.5** – Dispositif expérimental utilisé pour étudier la diffraction de molécules  $C_{60}$  par un réseau.

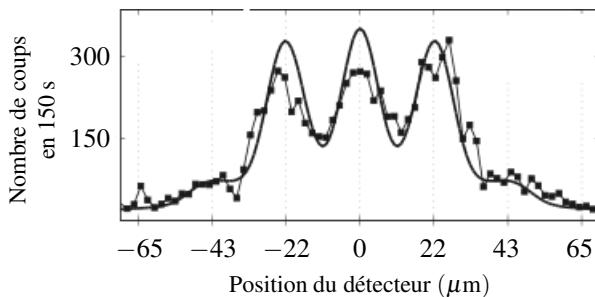
**1. a.** Déterminer la longueur d'onde de Broglie des molécules de fullerène qui sont sélectionnées par le filtre de vitesse.

**b.** Déterminer la dispersion  $\Delta\lambda_{DB}$  de la longueur de de Broglie.

**c.** Que représente la longueur  $\ell_c = \frac{\lambda_{DB}^2}{\Delta\lambda_{DB}}$ ? Calculer sa valeur numérique.

**2.** Expliquer quel est l'intérêt des fentes de collimation. En utilisant l'inégalité de Heisenberg spatiale, évaluer l'ouverture angulaire du faisceau moléculaire produite par chacune des deux fentes.

**3.** La figure 25.6 représente un exemple de figures d'interférences obtenue expérimentalement.

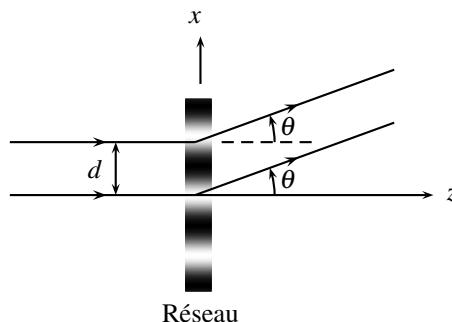


**Figure 25.6** – Exemple de figure d'interférences obtenue pour des molécules de  $C_{60}$ .

Figure reproduite avec la permission des auteurs [17]. Copyright (2001) by The American Physical Society.

**a.** On suppose que le détecteur permet d'observer les interférences à l'infini du faisceau moléculaire diffracté. Pour interpréter les résultats expérimentaux, on se ramène au schéma suivant :

## CHAPITRE 25 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE LIBRE



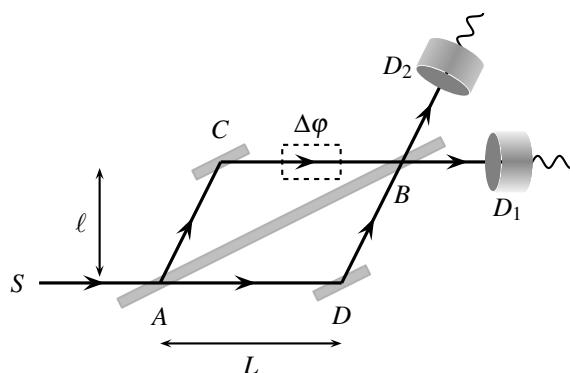
On suppose que la longueur d'onde de de Broglie n'est pas modifiée par le passage à travers le réseau. Déterminer les directions  $\theta$  pour lesquelles il y a interférence constructive des faisceaux diffractés.

**b.** Interpréter l'allure de la courbe expérimentale de la figure 25.6. En déduire la valeur numérique de la vitesse moyenne des molécules de  $C_{60}$  et la comparer à la valeur donnée par les auteurs de l'expérience.

**c.** Montrer, en utilisant des arguments similaires à ceux développés dans le chapitre d'optique, que le défaut de **cohérence temporelle** du faisceau permet d'expliquer le nombre limité de franges visibles.

### 25.3 Interférométrie neutronique et gravité (★★★)

On considère l'interféromètre à neutrons réalisé par Colella, Overhauser et Werner en 1975 (expérience COW [6]).



Un faisceau incident de neutrons, monochromatique, est émis par la source  $S$ . Un cristal de silicium, placé en  $A$  et représenté par un rectangle grisé sur la figure, joue le rôle d'une lame séparatrice. Une partie du faisceau est transmise, avec une amplitude de probabilité  $t$ , vers le point  $D$ . Une autre partie est réfléchie, avec une amplitude de probabilité  $r$ , vers le point

C. Les amplitudes de probabilité  $r$  et  $t$  vérifient :  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ , avec  $r$  réel et  $t = i|t|$ . Ces deux faisceaux sont ensuite réfléchis par deux lames cristallines en  $C$  et  $D$ , caractérisées par les mêmes amplitudes de probabilité  $r$  et  $t$  que la première lame. Ils sont enfin recombinés par une troisième lame en  $B$ , caractérisée elle aussi par les mêmes amplitudes de probabilité. Deux compteurs  $D_1$  et  $D_2$  permettent de détecter les neutrons.

On admet qu'il existe une différence de phase entre le trajet supérieur par rapport au trajet inférieur. On la note  $\Delta\varphi$ . Il peut avoir diverses origines : différences de longueur entre les deux trajets, influence de la gravité, passage dans un champ magnétique, par exemple. L'interférométrie neutronique a pour but de mesurer cette différence de phase.

**1.** Montrer que l'amplitude de probabilité qu'un neutron soit détecté par  $D_1$  s'écrit :

$$\psi_1 = \psi_0 \left( rrt + \exp(i\Delta\varphi) trr \right),$$

où  $\psi_0$  est une constante. En déduire la probabilité  $P_1$  de détection d'un neutron par le détecteur  $D_1$  en fonction de  $|\psi_0|^2$ ,  $R = |r|^2$  et de  $\Delta\varphi$ .

**2.** Exprimer de même l'amplitude de probabilité  $\psi_2$  correspondant à la détection d'un neutron par  $D_2$ . En déduire ensuite la probabilité de détection correspondante  $P_2$ .

**3.** Normaliser les probabilités  $P_1$  et  $P_2$ .

**4.** Dans l'expérience COW, le retard de phase  $\Delta\varphi$  est lié à la gravité. On note  $\lambda_{DB0}$ , la longueur d'onde de de Broglie des neutrons incidents, et  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{DB0}}$  la norme du vecteur d'onde

correspondant. L'énergie cinétique d'un neutron peut être écrite sous la forme  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$ , où  $k$  est le module du vecteur d'onde et  $m_n$  la masse du neutron.

Toutes les données numériques nécessaires pour cette question sont données à la fin de l'énoncé.

**a.** En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer l'expression du module du vecteur d'onde  $k(z)$  à une altitude  $z$  en fonction du module du vecteur d'onde  $k_0$  à l'altitude  $z = 0$ , de  $m_n$ ,  $g$ ,  $\hbar$  et  $z$ . Comparer les valeurs numériques des termes constituant  $k(z)$ . On prendra  $z = 1$  cm (conditions expérimentales de l'expérience COW). En déduire une simplification pour l'expression donnant  $k(z)$  en fonction de  $z$ .

**b.** Le plan  $ABCD$  est initialement horizontal. On le fait tourner autour de l'axe ( $AD$ ) d'un angle  $\theta$  par rapport à la position horizontale. Le bras ( $AD$ ) reste à l'altitude  $z = 0$  tandis que le bras ( $CB$ ) de l'interféromètre se trouve à altitude  $z = \ell \sin \theta$ .

On admet que le « chemin optique » sur chacun des deux bras s'identifie à  $k(z)L$  où  $z$  est l'altitude du bras considéré.

Montrer que la rotation induit un retard de phase pour le trajet supérieur par rapport au trajet inférieur :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_{DB0}}{\hbar^2} \sin \theta,$$

où  $S = L\ell$  est l'aire du losange  $ABCD$ .

**c.** La figure suivante représente le nombre de neutrons détectés par le détecteur  $D_1$  en fonction de l'inclinaison  $\theta$  du plan ( $ABCD$ ).

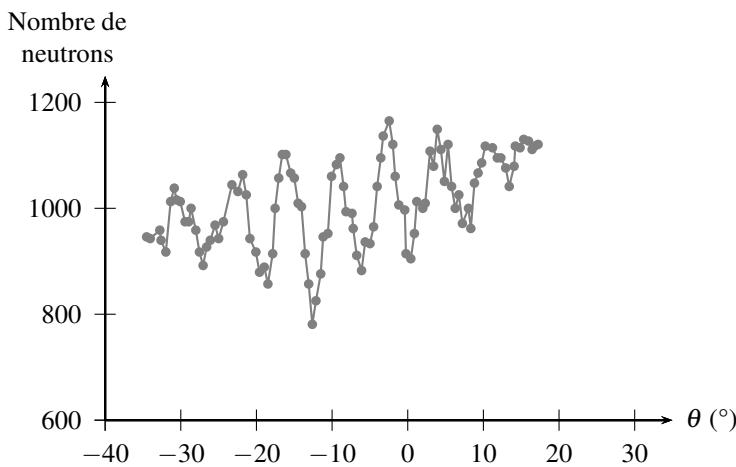


Figure 25.7 – Nombre de neutrons détectés en fonction de l'inclinaison  $\theta$ .

On distingue le défilement de plusieurs franges d'interférences lorsque  $\theta$  varie de  $-30$  à  $20^\circ$ . Peut-on déduire de la figure une valeur numérique de  $g$ ? Si oui, proposez aussi une évaluation de l'incertitude sur  $g$ .

**Données numériques :**  $\lambda_{DB_0} = 1,4 \times 10^{-10}$  m;  $S = L\ell = 9,2 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>;  $m_n = 1,67 \times 10^{-27}$  kg.

#### 25.4 Étalement du paquet d'ondes (★★★)

On considère une particule quantique libre de masse  $m$ .

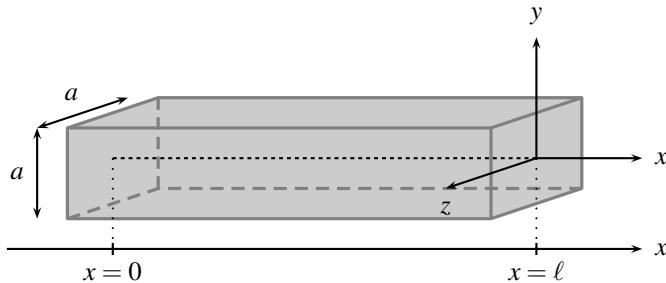
1. Retrouver rapidement la relation de dispersion correspondante.  
2. On considère que l'état de la particule quantique est représenté par un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives, dont les vecteurs d'ondes sont distribués autour d'une valeur moyenne  $k_0$  avec une dispersion  $\Delta k$ , qui détermine l'extension spatiale initiale  $\Delta x_0$  du paquet d'ondes à l'instant  $t = 0$ . La pulsation moyenne correspondant à  $k_0$  est notée  $\omega_0$ .

- a. Rappeler la définition de la vitesse de groupe  $v_{g0}$  et déterminer son expression.
- b. Montrer en utilisant la relation de dispersion qu'à la largeur  $\Delta k$  correspond une dispersion de la vitesse de groupe  $\Delta v_g$  autour de la valeur moyenne  $v_{g0}$ . Exprimer  $\Delta v_g$  en fonction de  $\hbar$ ,  $m$  et  $\Delta x_0$ .
- c. En déduire la largeur du paquet d'ondes  $\Delta x(t)$  après un déplacement d'une durée  $t$  depuis l'origine. Déterminer l'instant  $t_0$  pour lequel la largeur du paquet d'ondes a doublé.
- d. **Application numérique.** Calculer  $t_0$  pour :
  - un électron, de masse  $m = 10^{-30}$  kg, initialement confiné dans un atome  $\Delta x_0 = 10^{-10}$  m.
  - une gouttelette d'eau, de rayon égal à  $10 \mu\text{m}$  et de masse  $m = 4 \times 10^{-12}$  kg.

Commenter les valeurs numériques obtenues.

## 25.5 Fil quantique (★★★)

On étudie la conduction électronique dans un fil quantique : il s'agit d'un matériau dans lequel des électrons peuvent se déplacer d'une extrémité à l'autre. Sa géométrie est celle d'un parallélépipède, de section carrée, de côté  $a$ , et de longueur  $\ell \gg a$  (typiquement,  $a$  est l'ordre du nanomètre alors que  $\ell$  est de l'ordre du micromètre : ce qui justifie la dénomination de « fil »). Pour des raisons géométriques, il existe donc un fort confinement latéral de l'électron, qui ne lui laisse plus que la possibilité de se déplacer selon l'axe ( $Ox$ ) du fil (voir figure 25.8). Les électrons à l'intérieur du fil sont traités comme des particules quantiques, de masse  $m$ , libres de se déplacer dans la direction ( $Ox$ ) du fil.



**Figure 25.8 –** Géométrie du fil quantique considéré.

La fonction d'onde propre qui représente alors un état stationnaire d'un électron, d'énergie  $E$ , dans le fil s'écrit sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = A \exp(ikx),$$

où  $A$  une constante réelle de normalisation.

1. a. Commenter la forme choisie pour  $\varphi(x)$ . Que représente  $k$  ?
- b. Normaliser la fonction d'onde propre.
- c. En utilisant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, exprimer l'énergie  $E$  de l'électron en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\hbar$ . Exprimer la vitesse de déplacement  $v_x$  d'un électron selon ( $Ox$ ) en fonction de  $k$ ,  $\hbar$  et  $m$ .

2. a. Montrer que la densité de probabilité de présence  $\frac{dP(x)}{dx}$  de l'électron est uniforme le long du fil et donner son expression.

- b. On admet que la probabilité de présence entre  $x$  et  $x + dx$ , d'un électron, dont le vecteur d'onde  $k$  est compris entre  $k$  et  $k + dk$  est :  $dP_k(x) = \frac{dP(x)}{dx} \frac{\ell}{\pi} dx dk$ .

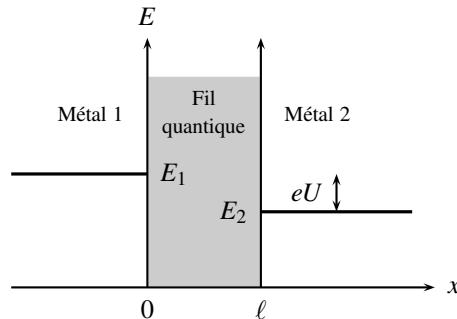
Montrer que la contribution au courant électrique qui traverse le fil, *dans le sens des x croissant*, d'un électron dont le vecteur d'onde est compris entre  $k$  et  $k + dk$  est :

$$dI = \frac{-ev_x}{\pi} dk,$$

où  $e$  désigne la charge élémentaire.

## CHAPITRE 25 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE LIBRE

**3.** Le fil quantique est disposé entre deux métaux, soumis à une différence de potentiel électrique  $U$ . La figure 25.9 représente les niveaux d’énergie des électrons dans les deux métaux.



**Figure 25.9** – Niveaux d’énergie dans les deux métaux.

Dans le métal 1, du côté  $x \leq 0$ , les électrons de conduction occupent tous les niveaux d’énergie jusqu’à une valeur maximale notée  $E_1$ . Dans le métal 2, situé de l’autre côté du fil quantique ( $x \geq \ell$ ), les électrons de conduction occupent tous les niveaux d’énergie jusqu’à une valeur maximale notée  $E_2 = E_1 - eU$ . Un électron du métal 1 dont l’énergie est comprise entre  $E_1$  et  $E_2$  peut transiter à travers le fil quantique vers le métal 2. Cet électron a un vecteur d’onde  $k$  compris entre  $k_1$  et  $k_2$ . Les énergies  $E_1$  et  $E_2$  sont liées à  $k_1$  et  $k_2$  par la relation déterminée à la question 1.c..

- Montrer que l’intensité  $I$  du courant électrique qui traverse le fil *dans le sens des x croissants* s’exprime en fonction de  $U$  sous la forme suivante :  $I = -GU$ , où  $G$  s’exprime simplement en fonction de  $e$  et de la constante de Planck  $h$ .
- Commenter l’expression de  $G$  et donner sa valeur numérique, ainsi que celle de la grandeur  $R = 1/G$ .

**CORRIGÉS****25.1 Interférences**

La probabilité de détection d'une particule quantique au voisinage de  $M$  est donnée par :  $P = |\sum_i \psi_i(M)|^2$  où la somme porte sur les fentes  $i$  ouvertes.

**a.** Ainsi, lorsque seule la fente 2 est ouverte, la probabilité de détection d'une particule quantique au voisinage de  $M$  vaut :  $P_2(M) = |\psi_2(M)|^2 = 1/2$ .

**b.** Lorsque seules les fentes 1 et 2 sont ouvertes, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{12}(M) &= |\psi_1(M) + \psi_2(M)|^2 = |\psi_1(M)|^2 + |\psi_2(M)|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi_1(M) \cdot \psi_2^*(M)), \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\operatorname{Re}\left(\frac{-i}{\sqrt{6}}\right), \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

**c.** Lorsque seules les fentes 1 et 3 sont ouvertes :

$$\begin{aligned} P_{13}(M) &= |\psi_1(M) + \psi_3(M)|^2 = |\psi_1(M)|^2 + |\psi_3(M)|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi_1(M) \cdot \psi_3^*(M)), \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 2\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{\sqrt{18}}\right), \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

soit  $P_{13}(M) = 0,030$ .

**d.** Lorsque toutes les fentes sont ouvertes :

$$\begin{aligned} P_{123}(M) &= |\psi_1(M) + \psi_2(M) + \psi_3(M)|^2, \\ &= |\psi_1(M)|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi_1(M) \cdot \psi_2^*(M) + \psi_1(M) \cdot \psi_3^*(M) + \psi_2(M) \cdot \psi_3^*(M)), \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 2\operatorname{Re}\left(\frac{-i}{\sqrt{6}} + \frac{-1}{\sqrt{18}} + \frac{-i}{\sqrt{12}}\right), \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

soit  $P_{123}(M) = 0,19$ .

**25.2 Diffraction de molécules par une onde lumineuse**

**1. a.** La masse molaire du carbone est  $M = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On en déduit la masse d'un atome de carbone  $m_c = \frac{M}{N_A}$ , où  $N_A$  est le nombre d'Avogadro. On obtient ensuite la masse d'une molécule de fullerène :  $m = 60m_c = 60 \frac{M}{N_A} = 1,2 \times 10^{-24} \text{ kg}$ . On peut alors calculer la longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 4,6 \text{ pm}.$$

## CHAPITRE 25 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE LIBRE

À noter que la longueur d'onde de Broglie est inférieure à la taille de la molécule  $C_{60}$ , qui est de l'ordre de 1000 pm.

**b.** En différentiant la relation  $\lambda_{DB} = \frac{h}{mv}$ , on obtient :  $d\lambda_{DB} = -\frac{h}{mv^2}dv = -\lambda_{DB}\frac{dv}{v}$ . On en déduit :

$$\Delta\lambda_{DB} = \lambda_{DB}\frac{\Delta v}{v} = 0,78 \text{ pm}.$$

**c.** La longueur  $\ell_c = \frac{\lambda_{DB}^2}{\Delta\lambda_{DB}}$  représente la longueur de cohérence temporelle de l'onde de Broglie. Sa valeur numérique est :  $\ell_c = 27 \text{ pm}$ .

**2.** Les fentes de collimation permettent de limiter la composante transverse de la quantité de mouvement des molécules. On peut alors considérer que l'onde de Broglie incidente sur le réseau est une onde plane, avec un vecteur d'onde parallèle à l'axe du dispositif. Les fentes de collimation permettent donc d'améliorer la cohérence spatiale de l'onde incidente. Chaque fente impose un confinement de l'onde. L'indétermination quantique sur la position transverse (c'est-à-dire orthogonale à la direction de propagation de l'onde) d'une molécule qui passe à travers une fente est de l'ordre de grandeur de la largeur  $a$  de la fente. Selon l'inégalité de Heisenberg spatiale, il lui correspond une indétermination quantique  $\Delta p_x$  de la quantité de mouvement transverse donnée par (en se plaçant à la limite inférieure) :

$$\Delta p_x \simeq \frac{\hbar}{2a} = 7,5 \times 10^{-30} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cela correspond à une ouverture angulaire  $\frac{\Delta p_x}{p} = 5,2 \times 10^{-8} \text{ rad}$  du faisceau moléculaire après la fente. Les molécules qui ont traversé la première fente, peuvent traverser la seconde fente à condition que leur quantité de mouvement forme avec l'axe un angle inférieur à  $\frac{b}{D} = 4,4 \times 10^{-6} \text{ rad}$  (cet angle est supérieur à l'ouverture angulaire produite par la diffraction à travers la première fente : la diffraction ne joue donc pas de rôle significatif dans l'élargissement angulaire du faisceau moléculaire). On obtient bien, à la sortie de la seconde fente, un faisceau de particules très peu divergent ; on dit qu'il est *collimaté*.

**3. a.** La différence de marche entre les deux faisceaux représentés se calcule comme en optique et vaut :  $\delta = d \sin \theta \simeq d\theta$ . Les interférences sont totalement constructives si et seulement si  $\delta = p\lambda_{DB}$  où  $p \in \mathbb{Z}$ . On obtient :

$$\theta_p = p \frac{\lambda_{DB}}{d}.$$

**b.** Sur la figure 25.6, on distingue trois pics, correspondant à des interférences totalement constructives. La position du détecteur  $x$  est liée à  $\theta$  par la relation  $x = D\theta$ . Les maxima correspondent donc à des positions du détecteur données par la relation :  $x_p = p \frac{D\lambda_{DB}}{d}$ . D'où :

$\Delta x = \frac{D\lambda_{DB}}{d}$ . Sur la figure, on voit les ordres d'interférence  $p = 0$ ,  $p = 1$  et  $p = -1$ . On y lit que  $\Delta x = 22 \mu\text{m}$ . Il vient alors :

$$\lambda_{DB} = \frac{d}{D} \Delta x = 4,7 \times 10^{-12} \text{ m} \implies v = \frac{h}{m\lambda_{DB}} = 1,2 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'accord entre la mesure et la valeur donnée par les auteurs de l'expérience est très bon.

**c.** On peut penser qu'un défaut de cohérence temporelle peut être à l'origine de l'observation d'un nombre limité de franges d'interférences. Utilisons le critère de visibilité vu dans le cours d'optique :  $|\Delta p| < \frac{1}{2}$  où  $\Delta p$  est la variation de l'ordre d'interférences consécutive à une variation de la longueur d'onde. À partir de  $p = \frac{\delta}{\lambda_{DB}}$ , et pour une différence de marche  $\delta$  fixée, on obtient en différentiant :  $dp = -\frac{\delta}{\lambda_{DB}^2}d\lambda_{DB}$ . D'où :  $|\Delta p| = \frac{|\delta|}{\ell_c}$ . Le critère de visibilité donne :  $\delta \leq \frac{\ell_c}{2}$ , soit encore :

$$|p| \leq \frac{\ell_c}{2\lambda_{DB}} = 2,9.$$

On conclut que le défaut de cohérence temporelle du faisceau est un facteur limitant la visibilité des franges d'interférence : seuls les ordres  $|p| \leq 2$  sont a priori visibles. Cela correspond à ce que l'on peut voir sur la figure 25.6.

### 25.3 Interférométrie neutronique et gravité

1. Un neutron qui est détecté par  $D_1$  est passé par le chemin  $SADBD_1$  ou  $SACBD_1$ .
- le long du chemin  $SADBD_1$ , un neutron subit une transmission en  $A$ , une réflexion en  $D$ , une réflexion en  $B$  et parvient au détecteur  $D_1$ . L'amplitude de probabilité correspondant à ce trajet est donc :

$$\psi_1^{(1)} = rrt\psi_0.$$

- le long du chemin  $SACBD_1$ , un neutron subit une réflexion en  $A$ , une réflexion en  $C$ , une transmission en  $B$ . De plus, le « chemin optique » est allongé, ce qui se traduit par une différence de phase  $\Delta\varphi$ . L'amplitude de probabilité correspondant à ce trajet est donc :

$$\psi_1^{(2)} = trr\exp(i\Delta\varphi)\psi_0.$$

L'amplitude de probabilité correspondant à la détection d'un neutron en  $D_1$  est la somme des deux amplitudes de probabilités correspondant aux deux voies de l'interféromètre :

$$\psi_1 = \psi_0 \left( rrt + trr\exp(i\Delta\varphi) \right) = rrt\psi_0 \left( 1 + \exp(i\Delta\varphi) \right).$$

La probabilité de détection d'un neutron en  $D_1$  s'en déduit :

$$P_1 = |\psi_1|^2 = 2|\psi_0|^2 R^2 (1 - R) \left( 1 + \cos \Delta\varphi \right).$$

2. Le même type de raisonnement permet d'obtenir l'amplitude de probabilité  $\psi_2$  :

$$\psi_2 = \psi_0 \left( trt + rr\exp(i\Delta\varphi) \right).$$

On en déduit la probabilité de détection correspondante  $P_2$  :

$$P_2 = |\psi_2|^2 = |\psi_0|^2 R \left( (1 - R)^2 + R^2 - 2R(1 - R) \cos \varphi \right).$$

## CHAPITRE 25 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE LIBRE

**3.** Un neutron est détecté par  $D_1$ , ou par  $D_2$ , mais jamais par les deux détecteurs à la fois. Donc :  $P_1 + P_2 = 1$ , ce qui se traduit par :

$$1 = R |\psi_0|^2 \left( 2R(1-R) + (1-R)^2 + R^2 + 2R(1-R)\cos\varphi - 2R(1-R)\cos\varphi \right) = R |\psi_0|^2 .$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_1 &= 2R(1-R) \left( 1 + \cos\Delta\varphi \right), \\ P_2 &= 1 - 2R(1-R) \left( 1 + \cos\Delta\varphi \right). \end{aligned}$$

**4. a.** La référence d'énergie potentielle est prise à l'altitude du faisceau incident ( $z=0$ ). La conservation de l'énergie mécanique donne :  $E_c(z=0) = E_c + m_n g z$ , soit :

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n} + m_n g z \implies k(z) = \sqrt{k_0^2 - \frac{2m_n^2 g}{\hbar^2} z}.$$

Avec les données numériques proposées, on trouve :  $k_0 = 4,5 \times 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\sqrt{\frac{2m_n^2 g}{\hbar^2}} z = 7,0 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ . On a donc  $\frac{2m_n^2 g}{\hbar^2} z \ll k_0^2$ . D'où la simplification suivante :

$$k(z) = k_0 \sqrt{1 - \frac{2m_n^2 g}{k_0^2 \hbar^2} z} \simeq k_0 \left( 1 - \frac{m_n^2 g}{k_0^2 \hbar^2} z \right).$$

**b.** La rotation fait que les bras ( $AD$ ) et ( $CB$ ) ne sont plus équivalents. Au premier bras ( $AD$ ) correspond le vecteur d'onde  $k_0$  et au bras ( $CD$ ) correspond  $k(z)$ . Il en résulte une différence de phase :

$$\Delta\varphi = k_0 L - k(z)L = \frac{m_n^2 g}{k_0 \hbar^2} \ell \sin\theta L = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_{DB0}}{\hbar^2} \sin\theta .$$

**c.** La figure 25.7 révèle des franges d'interférences. Il existe en effet des valeurs de l'inclinaison pour lesquelles le nombre de neutrons détectés est maximum : les deux ondes qui se propagent sur les deux voies de l'interfémètre interfèrent de façon constructive. D'un maximum à un autre,  $\Delta\varphi$  varie de  $2\pi$ . On constate que pour  $\theta$  variant de  $\theta_1 = -32^\circ$  à  $\theta_2 = 12^\circ$ , on voit défiler 6 franges. D'où :

$$6 \times 2\pi = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_{DB0}}{\hbar^2} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) .$$

On en déduit  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut estimer que les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont estimés à  $2^\circ$  près :  $u(\theta_1) = u(\theta_2) = 3,5 \times 10^{-2} \text{ rad}$ . L'incertitude qui en résulte sur la différence des sinus

$\Delta \sin \theta = \sin \theta_2 - \sin \theta_1$  est :

$$\begin{aligned} u(\Delta \sin \theta) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta \sin \theta}{\partial \theta_1}\right)^2 u^2(\theta_1) + \left(\frac{\partial \Delta \sin \theta}{\partial \theta_2}\right)^2 u^2(\theta_2)}, \\ &= u(\theta_1) \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2}. \\ &= 0,045. \end{aligned}$$

Comme  $g \times \Delta \sin \theta$  est une constante, on obtient après différentiation :  $\frac{dg}{g} = -\frac{d\Delta \sin \theta}{\Delta \sin \theta}$ .

D'où :  $u(g) = g \frac{u(\Delta \sin \theta)}{\Delta \sin \theta} = 0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . On obtient donc :  $g = (9,8 \pm 0,6) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Afin de mesurer aussi précisément que possible l'accélération de la pesanteur  $g$ , il est nécessaire de mesurer avec une grande précision les angles d'inclinaison.

#### 25.4 Étalement du paquet d'ondes

1. Voir cours :  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ .

2. a. La vitesse de groupe du paquet d'ondes considéré est :  $v_{g0} = \left(\frac{dw}{dk}\right)_{k=k_0}$ . On obtient :  $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$ , d'où :  $v_{g0} = \frac{\hbar k_0}{m}$ .

b. À partir de  $v_g = \frac{\hbar k}{m}$ , on obtient :  $\Delta v_g = \frac{\hbar}{m} \Delta k$ . L'inégalité de Heisenberg spatiale permet d'écrire que :  $\Delta k = 1/(2\Delta x_0)$ , en considérant la limite inférieure. D'où :

$$\Delta v_g = \frac{\hbar}{2m\Delta x_0}.$$

c. Le paquet d'ondes étudié peut être décomposé en paquets d'ondes quasi-monochromatiques, chacun d'entre eux correspondant à un ensemble d'ondes sinusoïdales dont le vecteur d'onde est compris dans l'intervalle  $[k; k + dk]$  et se déplaçant à une vitesse, égale à la vitesse de groupe  $v_g(k)$ . La grandeur  $\Delta v_g$  représente donc l'ordre de grandeur de la différence des vitesses de déplacement de tous ces paquets d'ondes quasi-monochromatiques. À un instant  $t$ , l'extension spatiale du paquet d'ondes a augmenté de  $\Delta v_g \times t$ . On écrit donc :

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + \frac{\hbar}{2m\Delta x_0} t.$$

Le paquet d'ondes voit son extension doubler après une durée d'évolution  $t_0$  donnée par :  $t_0 = \frac{2m\Delta x_0^2}{\hbar}$ .

#### Remarque

On remarque que la dispersion de la vitesse de groupe est liée à la dérivée  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ . Lorsque cette dérivée est nulle, il n'y a pas de dispersion de la vitesse de groupe et pas de déformation du paquet d'ondes lors de sa propagation. Au signe positif de cette dérivée correspond un étalement du paquet d'ondes.

## CHAPITRE 25 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE LIBRE

**d.** On réalise les applications numériques demandées :

- cas d'un électron :  $t_0 = 2 \times 10^{-16}$  s. Cette durée est du même ordre de grandeur que la période de révolution sur une orbite du modèle de Bohr. Cela montre que l'hypothèse de Bohr selon laquelle l'électron suit trajectoire localisée est à rejeter : pendant la durée d'une révolution, la probabilité de présence de l'électron s'étale dans tout le volume de l'atome. Cela souligne la nécessité d'un traitement quantique de l'atome.
- cas d'une gouttelette d'eau :  $t_0 = 8 \times 10^{12}$  s. Cette durée, de l'ordre de  $2 \times 10^5$  années, est considérable. Pendant toute la durée de son existence, la goutte reste un système matériel localisé.

### 25.5 Fil quantique

**1. a.** Il n'y a pas de confinement de l'électron dans la direction ( $Ox$ ) : le facteur exponentiel correspond à une onde plane progressive harmonique dans le sens des  $x$  croissants, où  $k$  représente le module du vecteur d'onde.

**b.** La densité de probabilité de présence est :  $|\varphi(x)|^2 = A^2$ . On en déduit :

$$\int_0^\ell |\varphi(x)|^2 dx = 1 \text{ soit } A^2 \ell = 1 \implies A = \frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

La fonction d'onde propre s'écrit :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \exp(ikx).$$

**c.** L'équation de Schrödinger indépendante du temps donne :  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  (on retrouve bien sûr l'expression de l'énergie cinétique d'une particule libre). En écrivant  $E = \hbar\omega$ , on obtient la relation de dispersion suivante :  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ . La vitesse de déplacement de l'électron est donnée par la vitesse de groupe  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$  :

$$v_x = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m}.$$

**2. a.** La densité de probabilité de présence de l'électron est uniforme :

$$\frac{dP(x)}{dx} = |\varphi(x)|^2 = \frac{1}{\ell}.$$

**b.** On considère une section droite du fil à l'abscisse  $x$ . Comme un électron se déplace à la vitesse  $v_x$ , la probabilité qu'il traverse la section considérée pendant la durée  $dt$  est égale à sa probabilité de présence sur une longueur  $v_x dt$  située juste en amont de cette surface. La charge électrique qui traverse cette surface, dans le sens des  $x$  croissants, pendant la durée  $dt$  est :

$$\delta Q = (-e) \frac{1}{\ell} \frac{\ell}{\pi} (v_x dt) dk = -\frac{e \hbar k}{\pi m} dt dk.$$

L'intensité du courant électrique correspondant s'en déduit :

$$dI = \frac{\delta Q}{dt} = -\frac{e \hbar k}{\pi m} dk.$$

**3. a.** On intègre l'expression de  $dI$  pour  $k$  variant entre  $k_2$  et  $k_1$  :

$$I = \int_{k_2}^{k_1} \frac{-e\hbar k}{\pi m} dk = \frac{-e\hbar}{\pi m} (k_1^2 - k_2^2).$$

Or,  $E_1 - E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2 - k_2^2)$ . D'où  $k_1^2 - k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E_1 - E_2)$ , soit  $k_1^2 - k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}eU$ . D'où :

$$I = -\frac{2e^2}{h}U.$$

**b.** La conductance du fil ne dépend pas de sa géométrie, mais uniquement des constantes  $e$  et  $h$ . L'application numérique donne :  $G = 7,73 \times 10^{-5}$  S. La grandeur inverse  $R = 1/G = 12,9$  kΩ représente un quantum de résistance électrique qui constitue un étalon de résistance électrique, utile en métrologie (le lecteur intéressé pourra se renseigner sur la balance du watt).



# Évolution d'une particule quantique dans un potentiel

Après l'étude de la particule quantique libre, on envisage maintenant l'étude, dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , d'une particule quantique en interaction avec un système physique. Cette interaction est modélisée par une énergie potentielle, supposée stationnaire, notée  $V(x)$ .

L'évolution de la fonction d'onde de la particule quantique est régie par l'**équation de Schrödinger** (24.5) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t).$$

Nous allons maintenant déterminer quelques solutions particulières correspondant à des modèles usuels. Comme nous nous limitons à des situations où l'énergie potentielle de la particule quantique est indépendante du temps, nous allons rechercher des solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme d'état stationnaire  $\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ . Il suffira donc de résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps (24.6) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x).$$

Dans chaque cas étudié, la démarche que nous suivrons est la suivante :

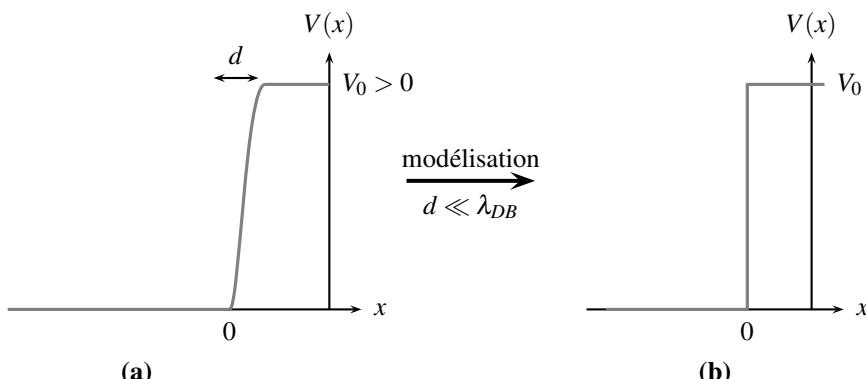
- Pour chaque profil d'énergie potentielle étudiée, nous rechercherons les états stationnaires d'une particule quantique.
- Lorsque les états stationnaires se présentent sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques, il y a deux possibilités d'interprétation.
  - une interprétation statistique où l'on considère un faisceau de particules quantiques identique et indépendantes, toutes dans l'état stationnaire étudié.
  - pour une particule quantique unique, la superposition d'états stationnaires sous forme d'ondes planes progressives harmoniques permet de construire un paquet d'ondes et de connaître son évolution dans l'espace et dans le temps, comme nous l'avons fait pour la

particule quantique libre. Cette construction, souvent complexe, sera seulement abordée à titre d’exercice.

- Il est toujours instructif de confronter les résultats de l’approche quantique avec ceux prévus par la mécanique classique pour mieux apprêhender les effets purement quantiques.

## 1 Marche de potentiel

Afin d’étudier une situation simple d’une particule quantique soumise à une interaction, on étudie le modèle simple de la marche de potentiel, qui correspond au profil d’énergie potentielle représenté sur la figure 26.1 (a).



**Figure 26.1** – Modélisation d’une variation brusque d’énergie potentielle par une marche de potentiel

On se place dans une situation où la longueur d’onde de de Broglie des particules est très supérieure à la distance caractéristique de variation du potentiel de sorte qu’on considère un profil idéalisé d’énergie potentielle représenté sur la figure 26.1(b). Le potentiel  $V(x)$  correspondant est :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ (région II),} \end{cases}$$

Ce modèle permet d’étudier des situations d’intérêt pratique dont nous donnons ici quelques exemples.

Les électrons de conduction dans un métal constituent un gaz de particules quantiques libres, à ceci près que l’énergie cinétique d’un électron est insuffisante pour lui permettre de s’extraire du métal. Seul un apport d’énergie extérieur permet d’arracher un électron au métal (c’est ce que montre l’effet photoélectrique). Il existe donc au voisinage de la surface du métal une interaction qui s’oppose à la sortie des électrons. Cette interaction peut être modélisée par une marche de potentiel.

Citons aussi le cas de la surface de contact entre deux métaux qui seraient portés à des potentiels électriques différents.

Du point de vue de la mécanique classique, une particule qui arrive sur la marche de potentiel avec une énergie  $E$  inférieure à la hauteur de la marche est forcément réfléchie : elle fait demi-tour sans avoir la possibilité de passer du côté  $x \geq 0$ , même de façon transitoire. Si son énergie  $E$  est supérieure à la hauteur de la marche de potentiel, alors elle poursuit son mouvement, avec une énergie cinétique réduite et égale à  $E - V_0$ .

Quels phénomènes prévoit la théorie quantique pour une particule quantique incidente, ou un faisceau de particules quantiques incidentes, sur une marche de potentiel ?

## 1.1 Premier cas : $E > V_0$

Le profil d'énergie potentielle étudié est indépendant du temps. Nous allons donc rechercher une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Autrement dit, nous allons rechercher les états stationnaires d'une particule quantique soumise à cette énergie potentielle. La fonction d'onde propre, associée à un état stationnaire d'énergie  $E$ , est notée  $\varphi(x)$ . Nous choisissons de commencer par étudier la situation où  $E > V_0$ .

### a) Expression des fonctions d'onde propres

La fonction d'onde propre est solution de l'équation (24.6) qui prend la forme suivante dans chacune des deux régions :

$$\begin{aligned} \text{Régions I} &: \varphi''(x) + k_1^2 \varphi(x) = 0, \\ \text{Région II} &: \varphi''(x) + k_2^2 \varphi(x) = 0, \end{aligned}$$

avec :

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

Les solutions mathématiques des équations différentielles précédentes sont :

$$\text{Région I : } \varphi(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x), \quad (26.1)$$

$$\text{Région II : } \varphi(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x). \quad (26.2)$$

Dans la région I, la fonction d'onde propre apparaît sous la forme de la superposition d'une onde plane progressant dans le sens des  $x$  croissants (terme  $A_1 \exp(ik_1 x)$ ), qui représente l'*onde incidente*, et d'une onde plane progressant dans le sens des  $x$  décroissants (terme  $B_1 \exp(-ik_1 x)$ ), qui représente l'*onde réfléchie*.

Dans la région II, la fonction d'onde propre apparaît également sous la forme d'une superposition de deux ondes planes progressives : le terme  $A_2 \exp(ik_2 x)$  correspond à l'*onde transmise* et le terme  $B_2 \exp(-ik_2 x)$  à une onde réfléchie. En l'absence de source du côté positif qui émet des particules quantiques vers les  $x$  décroissants, nous prendrons  $B_2 = 0$ .

Le potentiel  $V(x)$  présente une discontinuité d'amplitude finie en  $x = 0$ . On doit donc assurer non seulement la continuité de la fonction d'onde propre en  $x = 0$ , mais aussi la continuité de sa dérivée première.

- Continuité de  $\varphi(x)$  en  $x = 0$  :

$$A_1 + B_1 = A_2.$$

- Continuité de  $\phi'(x)$  en  $x = 0$  :

$$ik_1(A_1 - B_1) = ik_2 A_2.$$

Nous obtenons deux équations pour trois inconnues : il est donc possible d’exprimer deux inconnues en fonction de la troisième. Choisissons d’exprimer  $B_1$  et  $A_2$  en fonction de  $A_1$ . On obtient :

$$B_1 = A_1 \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ et } A_2 = A_1 \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

Ces expressions sont valables quelles que soient les valeurs de  $k_1$  et de  $k_2$ , pourvu que  $E > V_0$ . Nous ne voyons pas apparaître ici de quantification de l’énergie  $E$  de la particule quantique : toutes les valeurs de  $E$  telles que  $E > V_0$  sont possibles et donnent une solution physiquement acceptables.

### b) Probabilité de réflexion et de transmission

Les fonctions d’onde de la particule quantique dans chaque région s’écrivent comme suit :

$$\text{Région I : } \psi(x, t) = A_1 \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \left( \exp(ik_1 x) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \exp(-ik_1 x) \right),$$

$$\text{Région II : } \psi(x, t) = A_1 \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \exp\left(i(k_2 x - \frac{E}{\hbar}t)\right).$$

On peut en déduire l’expression des vecteurs densité de courant de probabilité correspondant aux ondes incidentes, réfléchies et transmises :

$$\text{Onde incidente : } \vec{j}_i(x) = |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x,$$

$$\text{Onde réfléchie : } \vec{j}_r(x) = -|A_1|^2 \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x,$$

$$\text{Onde transmise : } \vec{j}_t(x) = |A_1|^2 \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)^2 \frac{\hbar k_2}{m} \vec{u}_x.$$



On rappelle que l’expression  $\vec{j} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$  n’est valable que pour un paquet d’onde quasi-monochromatique ou une onde plane progressive harmonique.

On peut ensuite exprimer les probabilités de réflexion et de transmission :

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \text{ et } T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

En fonction de  $E$  et  $V_0$ , ces mêmes probabilités s’expriment ainsi :

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}\right)^2, \quad (26.3)$$

$$T = \frac{4\sqrt{1 - V_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - V_0/E})^2}. \quad (26.4)$$

Le graphe représentant les variations de  $R$  et de  $T$  en fonction de  $E$  est donné dans la figure 26.4. Les expressions de  $R$  et de  $T$  appellent les commentaires suivants :

- la probabilité de réflexion  $R$  n'est jamais nulle : il est donc toujours possible qu'une particule quantique incidente soit réfléchie. Cet effet est purement quantique et n'a pas d'équivalent en mécanique classique.
- En ajoutant  $R$  et  $T$ , on obtient 1 :

$$R + T = 1. \quad (26.5)$$

Ce résultat exprime la conservation de la probabilité de présence : une particule quantique est soit réfléchie par la barrière, soit transmise, sans autre possibilité<sup>1</sup>.

- dans la limite où  $E \gg V_0$ , on obtient  $R \rightarrow 0$  et  $T \rightarrow 1$ . L'influence de la marche de potentiel est gommée lorsque son amplitude est faible devant l'énergie cinétique de la particule incidente.

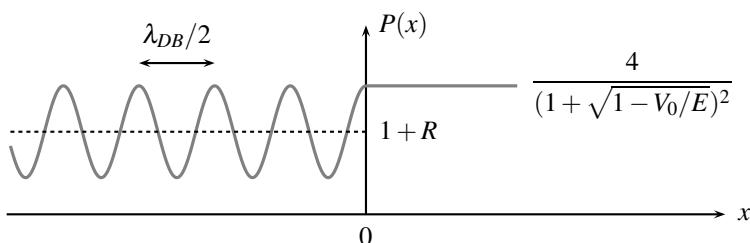
### c) Représentation de la densité de probabilité de présence

On choisit de fixer  $A_1 = 1$ . Il est alors possible d'exprimer la densité de probabilité de présence  $P(x) = |\psi(x, t)|^2$  dans les deux régions :

$$\text{Région I :} \quad P(x) = 1 + R + 2\sqrt{R}\cos(2k_1x),$$

$$\text{Région II :} \quad P(x) = \frac{4}{(1 + \sqrt{1 - V_0/E})^2}.$$

La figure 26.2 donne une représentation de  $P(x)$ .



**Figure 26.2** – Représentation de la densité de probabilité de présence d'une particule quantique en fonction de  $x$ . La longueur d'onde de de Broglie indiquée sur la figure est celle de la particule quantique incidente :  $\lambda_{DB} = 2\pi/k_1$ .

Du côté  $x \leq 0$ , les oscillations de la densité de probabilité de présence résultent de l'**interférence** entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Cet effet est purement quantique. La distance séparant deux maxima consécutifs de la densité de probabilité de présence est égale à  $\lambda_{DB}/2$ , où  $\lambda_{DB} = h/\sqrt{2mE}$  est la longueur d'onde de de Broglie de la particule quantique incidente.

1. En électromagnétisme, la même relation relie les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sur la surface d'un plasma ou d'un bon conducteur et exprime la conservation de l'énergie.

### Remarques

- La particule quantique n'est pas confinée dans une région de l'espace et la densité de probabilité de présence s'étend à l'infini : on dit que la particule est dans un état de *diffusion*.
- Dans une interprétation « hydrodynamique » le graphe de la figure 26.2 représente la densité linéaire de particules. Pour une particule quantique unique, on l'interprète comme la densité de probabilité de présence.

## 1.2 Second cas : $E < V_0$

On envisage maintenant la situation où l'énergie cinétique de la particule incidente est inférieure à la hauteur de la marche de potentiel.

### a) Expression des fonctions d'onde propres

La fonction d'onde propre s'obtient en résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps (24.6) qui prend la forme suivante dans chacune des deux régions :

$$\begin{array}{ll} \text{Régions I} & : \quad \varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0, \\ \text{Région II} & : \quad \varphi''(x) - q^2\varphi(x) = 0, \end{array}$$

avec :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Les solutions mathématiques des équations différentielles précédentes sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Région I :} & \varphi(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x), \\ \text{Région II :} & \varphi(x) = A_2 \exp(-qx) + B_2 \exp(qx). \end{array}$$

Dans la région I, la fonction d'onde propre apparaît, comme dans le cas précédent, sous la forme de la superposition d'une onde plane progressant dans le sens des  $x$  croissant (*onde incidente*) et d'une onde plane progressant dans le sens des  $x$  décroissant (*onde réfléchie*). Dans la région II, on doit s'assurer que la fonction d'onde ne diverge pas lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Cela impose  $B_2 = 0$ . On remarque alors que la forme mathématique de la fonction d'onde dans la région II peut être déduite de l'expression (26.2) à condition d'y remplacer  $k_2$  par  $iq$ .

Comme dans le cas précédent, on doit écrire la continuité de  $\varphi(x)$  et de  $\frac{d\varphi(x)}{dx}$  en  $x = 0$ . En remplaçant  $k_2$  par  $iq$  dans les expressions précédemment établies et en renommant  $k_1$  en  $k$ , on en déduit :

$$B_1 = A_1 \frac{k - iq}{k + iq} \text{ et } A_2 = A_1 \frac{2k}{k + iq}.$$

### Remarque

Envisageons le cas où  $E = 0$ . Alors  $k = 0$ . On obtient :  $A_2 = 0$  et  $B_1 = -A_1$ . Ces deux relations imposent la nullité de la fonction d'onde propre. La situation où l'énergie cinétique de la particule incidente est nulle n'a donc aucun intérêt physique.

### b) Densité de probabilité de présence

On peut exprimer la fonction d'onde  $\psi(x,t)$  dans chacune des deux régions :

$$\text{Région I : } \psi(x,t) = A_1 \exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right) \left( \exp(ikx) + \frac{k-iq}{k+iq} \exp(-ikx) \right),$$

$$\text{Région II : } \psi(x,t) = A_1 \frac{2k}{k+iq} \exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right) \exp(-qx).$$

On peut remarquer que le coefficient  $\frac{k-iq}{k+iq}$  a un module égal à l'unité et peut donc être écrit sous la forme suivante :  $\frac{k-iq}{k+iq} = \exp(-i\theta)$  avec  $\tan \theta = \frac{2kq}{k^2 - q^2}$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Alors :

$$\text{Région I : } \psi(x,t) = A_1 \exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right) \left( \exp(ikx) + \exp(-ikx - i\theta) \right),$$

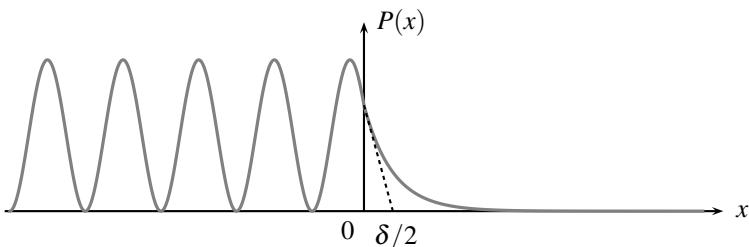
$$\text{Région II : } \psi(x,t) = A_1 \frac{2k}{k+iq} \exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right) \exp(-qx).$$

La densité de probabilité de présence  $P(x) = |\psi(x)|^2$  dans les deux régions s'en déduit (en choisissant  $A_1 = 1$ ) :

$$\text{Région I : } P(x) = 2 + 2 \cos(2kx + \theta),$$

$$\text{Région II : } P(x) = \frac{4k^2}{k^2 + q^2} \exp(-2qx) = \frac{4E}{V_0} \exp(-2qx).$$

La figure 26.3 donne une représentation de la probabilité de présence.



**Figure 26.3 –** Représentation de la densité de probabilité de présence d'une particule quantique en fonction de  $x$ .

On constate que, dans la région II, qui est une région interdite au sens de la mécanique classique, la densité de probabilité de présence de la particule n'est pas nulle. Cela signifie que la mesure de la position de la particule peut conduire à une valeur positive de son abscisse ! La densité de probabilité de présence s'étend dans la région II sur une distance caractéristique  $\delta/2$ , représentée sur la figure 26.3.

**La profondeur de pénétration** de la particule quantique d'énergie  $E < V_0$  dans la région interdite par la mécanique classique est :

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}. \quad (26.6)$$

 On retiendra que l'expression de  $\delta$  fait intervenir la hauteur  $V_0 - E$  de la barrière de potentiel « vue » par la particule quantique.

- Il n'est pas surprenant de constater que  $\delta$  est proportionnelle à  $\hbar$  puisque l'effet étudié ici est purement quantique.
- On observe que  $\delta$  est d'autant plus grande que l'énergie  $E$  de la particule quantique est proche de  $V_0$ .
- La profondeur de pénétration  $\delta$  est d'autant plus faible que la masse  $m$  de la particule quantique est élevée : les effets quantiques sont toujours plus marqués pour les particules quantiques de faible masse.
- La fonction d'onde dans la région II ne correspond pas à une onde plane progressive mais à une **onde évanescante**. L'atténuation de la densité de probabilité de présence dans la région II est tout à fait analogue à l'**effet de peau** étudié en électromagnétisme.

#### Exemple

Un électron de conduction dans un métal « voit » à la surface du métal une marche de potentiel de hauteur de l'ordre de quelques électron-volts. Cette énergie est appelée **travail d'extraction**. Avec  $V_0 - E = 4,3$  eV (travail d'extraction du zinc), on obtient :  $\delta = 94$  pm. Cela donne une idée de l'ordre de grandeur de l'extension de la fonction d'onde électronique au-delà de la surface du métal.

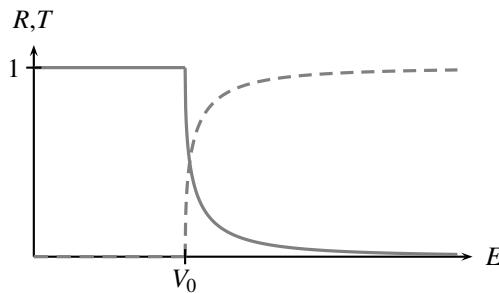
#### c) Probabilités de réflexion et de transmission

Le calcul de la probabilité de réflexion se fait comme précédemment, puisque les ondes incidente et réfléchie sont des ondes planes progressives. On obtient :

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \left| \frac{k - iq}{k + iq} \right|^2 = 1.$$

On ne peut pas calculer la probabilité de transmission en utilisant l'expression  $\vec{j} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$  car l'onde transmise n'est pas une onde progressive, mais une onde évanescante. On admet la généralité de la relation (26.5) pour en déduire que  $T = 0$ . La particule quantique est forcément réfléchie par la marche de potentiel. Le fait qu'elle puisse néanmoins pénétrer à l'intérieur de la marche de potentiel explique la présence du retard de phase  $\theta$  dans l'expression de la fonction d'onde propre de l'onde réfléchie [3].

La figure 26.4 représente l'évolution des coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en fonction de l'énergie  $E$  et de  $V_0$ .



**Figure 26.4** – Évolution des probabilités de réflexion (en trait plein) et de transmission (en tirets) en fonction de l'énergie  $E$  dans le cas d'une marche de potentiel.

## 2 Barrière de potentiel et effet tunnel

L'étude de la marche de potentiel a mis en évidence la pénétration de la fonction d'onde, sous forme d'onde évanescante, dans des régions inaccessibles au sens de la mécanique classique. Nous allons étudier le cas d'une **barrière de potentiel**, qui n'est autre qu'une marche de potentiel d'extension limitée. Si la décroissance de la fonction d'onde dans la barrière de potentiel est suffisamment lente, on peut s'attendre à ce que la probabilité de présence soit non nulle de l'autre côté de la barrière. Nous illustrerons cet effet spectaculaire, nommé **effet tunnel**, en évoquant quelques une de ses manifestations.

Le problème étudié correspond à celui d'un faisceau de particules quantiques incidentes, d'énergie  $E$ , provenant de  $x \rightarrow -\infty$  et se dirigeant vers une barrière de potentiel. On modélise celle-ci en considérant que chaque particule quantique est soumise à un champ de force qui dérive du potentiel suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{a}{2} \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ (région II),} \\ 0 & \text{pour } x > \frac{a}{2} \text{ (région III),} \end{cases}$$

représenté sur la figure 26.5 (les discontinuités apparentes du potentiel résultent d'une modélisation : en ces points, on suppose que le potentiel évolue sur une échelle spatiale très inférieure à la longueur d'onde de de Broglie.)

La région  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$  constitue la **barrière de potentiel**, de largeur  $a$  et de hauteur  $V_0$ .

Du point de vue de la mécanique classique, si une particule *classique* incidente a une énergie  $E$  supérieure à  $V_0$ , elle peut aller au-delà de la barrière de potentiel et atteindre  $x \rightarrow +\infty$ . Dans le cas inverse, elle ne peut pas aller au-delà de  $x = -a/2$  et rebrousse chemin.

Quel est le comportement prévu par la théorie quantique ?

Afin de répondre à cette question, nous souhaitons déterminer les probabilités de réflexion et de transmission. Nous limiterons notre étude au cas où l'énergie  $E$  de la particule quantique est inférieure à  $V_0$  :  $E \leq V_0$ .

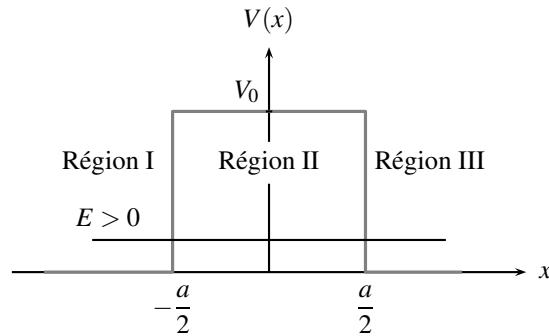


Figure 26.5 – Barrière de potentiel de hauteur finie.

## 2.1 Expression de la fonction d’onde propre

On recherche une solution sous forme d’état stationnaire en résolvant l’équation de Schrödinger indépendante du temps. La fonction d’onde propre doit vérifier les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Régions I et III :} & \varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0, \\ \text{Région II :} & \varphi''(x) - q^2\varphi(x) = 0, \end{array}$$

avec :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Les solutions mathématiques des équations différentielles précédentes sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Région I :} & \varphi(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx) \\ \text{Région II :} & \varphi(x) = A_2 \operatorname{ch}(qx) + B_2 \operatorname{sh}(qx) \\ \text{Région III :} & \varphi(x) = A_3 \exp(ikx) + B_3 \exp(-ikx) \end{array}$$



Comme la région II correspond à un intervalle symétrique autour de  $x = 0$ , il est préférable d’écrire la solution sous la forme d’une combinaison linéaire d’une fonction paire (ch) et d’une fonction impaire (sh) plutôt que sous la forme d’une combinaison linéaire d’exponentielles croissante et décroissante.

Dans la région I, la fonction d’onde retenue correspond à la somme d’une onde plane harmonique progressant dans le sens des  $x$  croissants (qui correspond à l’*onde incidente*) et d’une onde plane harmonique progressant dans le sens des  $x$  décroissants (qui correspond à l’*onde réfléchie*). Dans la région III, la fonction d’onde retenue s’écrit aussi sous la forme d’une somme de deux ondes progressant dans deux sens opposés. Nous supposons qu’il n’existe, au-delà de  $x > \frac{a}{2}$ , aucune source émettant des particules quantiques vers la barrière, et donc aucune onde provenant de  $+\infty$  : nous pouvons donc imposer  $B_3 = 0$  et ne considérer, pour

$x > \frac{a}{2}$ , qu'une onde progressant dans le sens des  $x$  croissants : l'*onde transmise*. Dans la région II, la fonction d'onde peut être écrite sous la forme d'une superposition de deux **ondes évanescentes**.

Le potentiel  $V(x)$  présente des discontinuités d'amplitude finie en  $x = -a/2$  et en  $x = a/2$ . Nous devons donc imposer non seulement la continuité de la fonction d'onde propre, mais aussi la continuité de sa dérivée première en  $x = -a/2$  et en  $x = a/2$ .

- Continuité de  $\varphi(x)$  en  $-\frac{a}{2}$  :

$$A_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) + B_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right) - B_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right).$$

- Continuité de  $\varphi(x)$  en  $\frac{a}{2}$  :

$$A_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right) + B_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right)$$

- Continuité de  $\varphi'(x)$  en  $-\frac{a}{2}$  :

$$ikA_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) - ikB_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = -qA_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right).$$

- Continuité de  $\varphi'(x)$  en  $\frac{a}{2}$  :

$$ikA_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = qA_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right).$$

Nous obtenons quatre équations pour cinq inconnues. Il est donc toujours possible d'exprimer quatre des inconnues en fonction de la cinquième, quelles que soient les valeurs de  $k$  et de  $q$ . Nous ne voyons donc pas apparaître ici de quantification de l'énergie. C'est dû au fait que la particule quantique n'est pas confinée.

## 2.2 Probabilités de réflexion et de transmission. Effet tunnel

Commençons par écrire les expressions des fonctions d'onde des ondes incidente, réfléchie et transmise, en posant  $\omega = E/\hbar$  :

Onde incidente :  $\psi_i(x, t) = A_1 \exp(i(kx - \omega t))$ ,

Onde réfléchie :  $\psi_r(x, t) = B_1 \exp(-i(kx + \omega t))$ ,

Onde transmise :  $\psi_t(x, t) = B_3 \exp(i(kx - \omega t))$

Les vecteurs densité de courant de probabilité s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Onde incidente : } & \vec{j}_i = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |\psi_i(x, t)|^2 = |A_1|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}, \\ \text{Onde réfléchie : } & \vec{j}_r = -\frac{\hbar \vec{k}}{m} |\psi_r(x, t)|^2 = -|B_1|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}, \\ \text{Onde transmise: } & \vec{j}_t = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |\psi_t(x, t)|^2 = |A_3|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m} \end{aligned}$$

On peut en déduire les probabilités de réflexion et de transmission :

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} \text{ et } T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}.$$

Du système des cinq équations précédentes, il suffit d’extraire l’expression des rapports  $\frac{B_1}{A_1}$  et  $\frac{A_3}{A_1}$  en fonction de  $k, q$  et  $a$ . On obtient finalement les résultats suivants :

$$R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(qa)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(qa)}, \quad (26.7)$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(qa)}. \quad (26.8)$$

Ces expressions appellent les commentaires suivants.

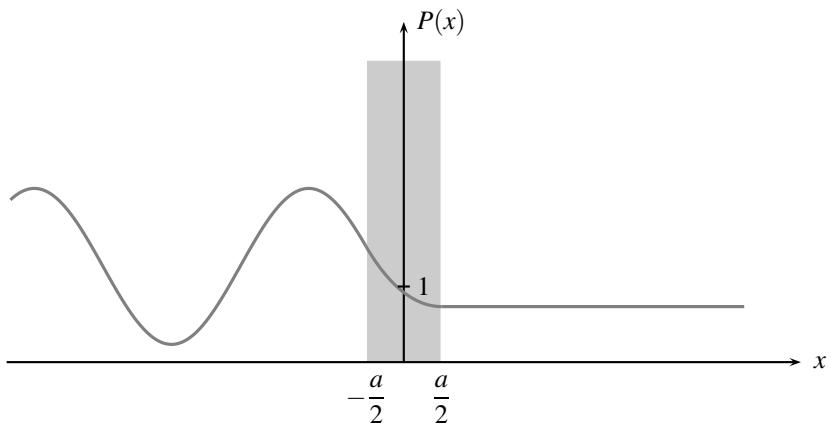
- La probabilité de transmission  $T$  n’est jamais nulle : une particule quantique a donc toujours la possibilité de traverser la barrière de potentiel. Cet effet, inexplicable par les lois de la mécanique classique, est purement quantique. Il porte le nom d'**effet tunnel**. Il est dû à l’existence d'**ondes évanescentes** dans la barrière de potentiel.
- En ajoutant les deux expressions ci-dessus, on obtient :  $R + T = 1$ . Comme dans le cas de la marche de potentiel, ce résultat exprime la conservation de la probabilité de présence : une particule quantique est soit réfléchie par la barrière, soit transmise, sans autre possibilité.

## 2.3 Représentation de la densité de probabilité de présence

En exprimant tous les coefficients en fonction de  $A_1$ , choisi par exemple égal à l’unité, on a la possibilité de déterminer la fonction d’onde propre et donc la densité de probabilité de présence  $P(x) = |\psi(x, t)|^2$ . Cette dernière est représentée sur la figure 26.6.

**Région I :** la densité de probabilité de présence  $P(x)$  s’écrit :

$$P(x) = 1 + R + 2\sqrt{R} \cos(2kx - \theta).$$



**Figure 26.6** – Représentation de la densité de probabilité de présence d'une particule quantique en fonction de  $x$ . La partie colorée correspond à la barrière de potentiel. Pour la résolution numérique, on a choisi  $ka = \sqrt{3}/2$  et  $qa = 1/2$ .

où  $\theta$  désigne l'argument du rapport  $B_1/A_1$ . La densité de probabilité n'est pas uniforme dans la région I car on y observe un phénomène d'**interférences** de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, analogue à celui mis en évidence lors de l'étude de la marche de potentiel. La distance séparant deux maxima ou deux minima consécutifs de  $P(x)$  est  $\lambda_{DB}/2$  où  $\lambda_{DB}$  est la longueur d'onde de de Broglie de la particule quantique (déterminée par l'énergie cinétique  $E$  de la particule quantique incidente).

**Région II :** la densité de probabilité de présence décroît à l'intérieur de la barrière de potentiel sur une distance caractéristique égale à  $\delta = 1/q = \hbar/\sqrt{2m(V_0 - E)}$ . À la sortie de la barrière de potentiel la densité de probabilité de présence est non nulle.

**Région III :** la densité de probabilité de présence est uniforme et égale à  $T$ .

## 2.4 Approximation d'une barrière épaisse

Dans la région II, comme le montre la figure 26.6, la densité de probabilité de présence décroît sur une distance de l'ordre de la distance de pénétration  $\delta$ . Une situation courante correspond au cas où la largeur  $a$  de la barrière peut être considérée comme très grande devant  $\delta$  :

$$a \gg \delta, \quad \text{c'est-à-dire : } a \gg \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}.$$

Cette inégalité définit l'**approximation d'une barrière épaisse**. Dans cette limite, on peut simplifier l'expression de  $T$  :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right). \quad (26.9)$$

 La décroissance exponentielle qui caractérise  $T$  est directement liée à l’existence d’une onde évanescante dans la barrière de potentiel.

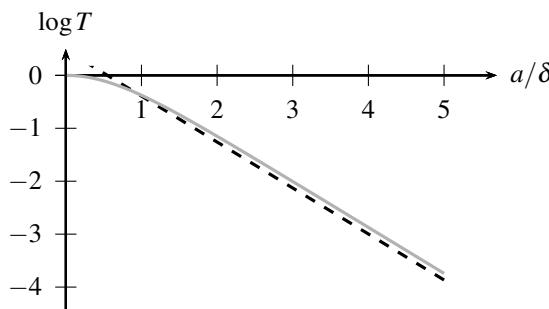
Pour  $E$  variant de 0 à  $V_0$ , le préfacteur  $f\left(\frac{E}{V_0}\right) = 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)$  s’annule pour  $E/V_0 = 0$  ou 1 et prend sa valeur maximale, égale à 4, pour  $E/V_0 = 1/2$ . La valeur moyenne de  $f(x)$  sur l’intervalle  $[0; 1]$  est égale à  $8/3$ , qui est une valeur proche de 3.

Pour une estimation de l’ordre de grandeur de la probabilité de transmission à travers une barrière épaisse, on pourra utiliser l’expression approchée suivante :

$$T \approx f\left(\frac{E}{V_0}\right) \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right), \quad (26.10)$$

Si  $E$  diffère de 0 ou  $V_0$ , on peut remplacer  $f(E/V_0)$  par sa valeur moyenne, proche de 3.

Comme le montre le graphe de la figure 26.7, la relation approchée livre un ordre de grandeur de  $T$  satisfaisant dès que  $a$  est supérieur à  $2\delta$ .



**Figure 26.7** – Probabilité de transmission  $T$  à travers une barrière : comparaison des expressions approchée (26.10) (avec un préfacteur égal à 3) et exacte (26.8) (pour  $E = V_0/2$ ).

La probabilité de transmission varie de façon très sensible avec la masse des particules quantiques, la largeur et la hauteur de la barrière, comme l’illustre l’application numérique suivante où l’on a choisi  $E = V_0/2$ . La valeur de  $\delta$  a été indiquée afin de valider le choix d’utiliser l’expression approchée (26.10).

| Particule | $m$ (kg)   | $V_0$ (eV) | $a$ (nm) | $\delta$ (nm)      | $T$         |
|-----------|------------|------------|----------|--------------------|-------------|
| Électron  | $10^{-30}$ | 4          | 0,3      | 0,1                | $10^{-2}$   |
| Électron  | $10^{-30}$ | 40         | 0,3      | $4 \times 10^{-2}$ | $10^{-6}$   |
| Électron  | $10^{-30}$ | 4          | 3        | 0,1                | $10^{-20}$  |
| Proton    | $10^{-27}$ | 4          | 0,3      | $4 \times 10^{-3}$ | $10^{-63}$  |
| Proton    | $10^{-27}$ | 4          | 3        | $2 \times 10^{-3}$ | $10^{-628}$ |

La probabilité de transmission est d'autant plus importante que la barrière de potentiel est d'amplitude faible, de faible largeur et que la masse est plus faible. On constate une fois encore que les effets quantiques sont plus marqués pour les particules les moins massives.

## 2.5 Interprétation qualitative de l'effet tunnel

En utilisant l'inégalité temps-énergie, on peut donner une interprétation qualitative de l'effet tunnel. La particule quantique est représentée par un paquet d'ondes quasimonochromatique, qui est un état non stationnaire : son énergie peut fluctuer autour d'une valeur moyenne. Lorsque la particule quantique interagit avec la barrière, une fluctuation  $\Delta E$  de son énergie peut être suffisamment importante ( $E + \Delta E \geq V_0$ ) pour que la particule quantique puisse passer au-dessus de la barrière de potentiel avec une vitesse de l'ordre de :

$$v = \sqrt{\frac{2(E + \Delta E - V_0)}{m}}.$$

Cependant, l'inégalité temps-énergie impose que cette fluctuation d'énergie ne peut se maintenir que pendant une durée  $\tau$  donnée, en ordre de grandeur, par :

$$\tau \approx \frac{\hbar}{2\Delta E}.$$

On en déduit que pendant cette durée la particule quantique peut parcourir la distance :

$$v\tau = \sqrt{\frac{2(E + \Delta E - V_0)}{m}} \frac{\hbar}{2\Delta E}.$$

La valeur maximale de cette distance est obtenue pour  $\Delta E = 2(V_0 - E)$ . Elle a pour expression :

$$\frac{\hbar}{4\sqrt{2m(V_0 - E)}} \approx \delta.$$

On retrouve ainsi, à un facteur numérique près sans importance tant qu'on s'intéresse à des ordres de grandeur, la profondeur de pénétration de la fonction d'onde dans la barrière de potentiel.

Reprendons l'expression approchée (26.9) de la probabilité de transmission :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right).$$

Pour une énergie  $E$  et une hauteur de barrière  $V_0$  données, on constate alors que la probabilité de traverser n'est pas trop faible si la largeur  $a$  de la barrière n'est pas trop grande devant  $\delta$ . Autrement dit, une particule quantique, au gré d'une fluctuation suffisante de son énergie, peut parvenir à avancer suffisamment loin et se retrouver au-delà de la barrière. Ce n'est bien sûr qu'une image qui nous conduit à penser que, contrairement à ce que laisse croire la dénomination « effet tunnel », une particule quantique passe au-dessus de la barrière de potentiel plutôt qu'à travers.

Cette interprétation permet de comprendre pourquoi la probabilité de transmission, pour une particule quantique donnée et une largeur de barrière donnée, diminue lorsque la hauteur de

la barrière augmente. Seule une fluctuation d’énergie importante permet à la particule quantique de passer au-dessus d’une barrière élevée. En vertu de l’inégalité temps-énergie, cette fluctuation perdure pendant une durée relativement courte, si bien que la particule quantique avance peu et ne parvient pas de l’autre côté de la barrière.

### 3 Applications de l’effet tunnel

Nous allons maintenant aborder quelques applications de l’effet tunnel. Le microscope à effet tunnel et la radioactivité  $\alpha$  sont présentés sous la forme d’une approche documentaire : un texte est proposé, des questions sont ensuite posées, les réponses figurent dans les corrigés. Au-delà de ces deux applications, il convient de signaler que l’effet tunnel a trouvé de nombreuses applications technologiques : citons, entre autres, les diodes à effet tunnel, les mémoires flash USB, ou encore des détecteurs ultra-sensibles de champ magnétique…

#### 3.1 Première approche documentaire : le microscope à effet tunnel

Les microscopies à sonde locale, de développement récent, ont ouvert une nouvelle ère dans le domaine de la microscopie en raison de leur capacité à sonder diverses propriétés de la matière à l’échelle atomique. La microscopie à effet tunnel est la première de ces nouvelles techniques de microscopie à avoir été développée.

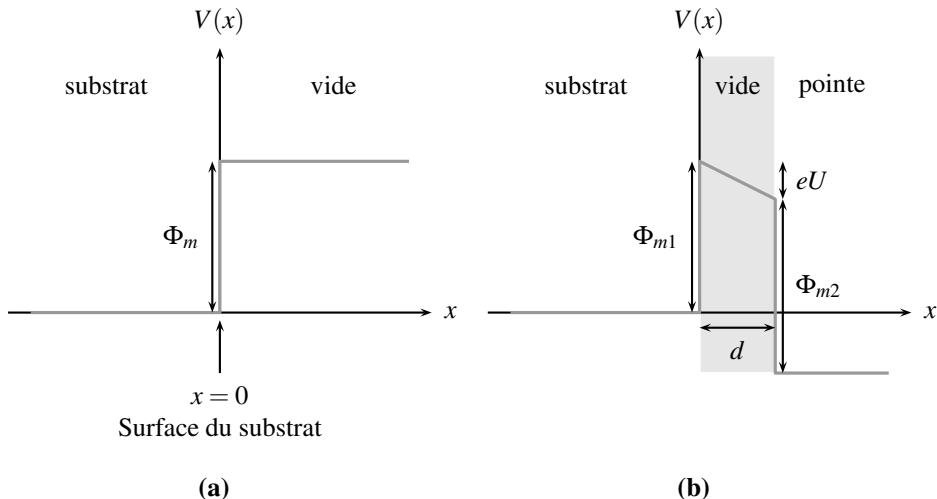
Le **microscope à effet tunnel** a été mis au point en 1984, dans les laboratoires IBM à Zürich, par G. Binnig et H. Rohrer, qui ont reçu le Prix Nobel de Physique en 1986. Dans ce microscope, pour explorer la surface d’un substrat conducteur, on approche une pointe métallique très fine à proximité de cette surface.

##### a) Principe de fonctionnement

On peut considérer que les électrons de conduction contenus dans le substrat métallique dont la surface est exposée au vide, « voient » un profil d’énergie potentielle qui peut être modélisé par une marche de potentiel, comme sur la figure 26.8 (a). La hauteur de la marche,  $\Phi_m$ , représente l’énergie minimale qu’il faut fournir pour extraire les électrons du métal (par effet photoélectrique, par exemple). L’énergie  $\Phi_m$  est appelée **travail d’extraction** du métal.

La probabilité de présence d’un électron dans la marche de potentiel, du côté  $x > 0$  est non nulle, mais elle est faible et décroît exponentiellement avec la distance à la surface du conducteur (la fonction d’onde propre décrivant l’électron pour  $x \geq 0$  correspond en effet à une onde évanescante). La distance caractéristique de décroissance de la fonction d’onde propre dans la marche de potentiel est  $\delta = \hbar/\sqrt{2m\Phi_m}$ , où  $\Phi_m$  représente le travail d’extraction du métal, qui vaut typiquement 4 eV. La valeur typique de  $\delta$  est donc  $6 \times 10^{-10}$  m.

On approche maintenant un second conducteur (la pointe) à proximité du premier (le substrat sondé), et l’on applique une différence de potentiel électrique  $U$  entre les deux conducteurs. Il apparaît alors une barrière de potentiel (voir figure 26.8 (b)) que les électrons du substrat peuvent franchir par effet tunnel. Il en résulte un flux d’électrons entre le substrat et la pointe, c’est-à-dire un courant électrique, que l’on appelle **courant tunnel**. Son intensité est proportionnelle à la probabilité de transmission d’un électron à travers la barrière, soit à  $e^{-2d/\delta}$ . De



**Figure 26.8** – Profil d'énergie potentielle : (a) substrat conducteur seul face au vide ; (b) substrat et pointe, distants de  $d$ , et séparés par du vide.

façon approchée, on peut donc écrire :

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{2d}{\delta}\right), \quad (26.11)$$

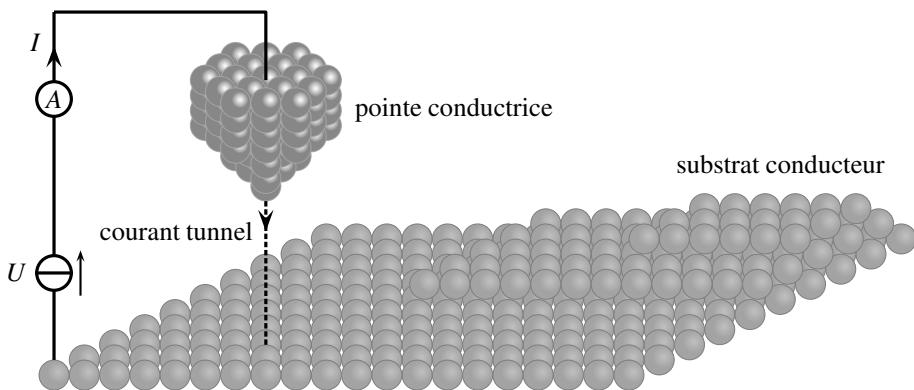
où le préfacteur  $I_0$  dépend, entre autres paramètres, de la tension appliquée  $U$ . Compte tenu de l'ordre de grandeur de  $\delta$ , on comprend qu'il est nécessaire d'approcher la pointe à des distances inférieures au nanomètre si l'on veut récupérer un courant tunnel mesurable.

La figure 26.9 représente la pointe conductrice et la surface étudiée. Presque tout le courant tunnel passe par l'extrémité de la pointe. Cela offre la possibilité de localiser le courant tunnel d'autant mieux que la pointe est fine. On peut espérer ainsi obtenir une cartographie des propriétés physiques locales du substrat étudié. Par ailleurs, on doit veiller à obtenir un courant tunnel suffisant. En somme, pour avoir la possibilité d'étudier les atomes du substrat un à un, on doit :

- avoir une pointe très fine, dont l'extrémité soit constituée d'un seul atome ;
  - l'approcher à moins d'un nanomètre du substrat à étudier ;
  - être capable de contrôler les déplacements de la pointe et de les mesurer à mieux que  $10^{-11}$  m près ! Ceci est réalisé à l'aide de trois quartz piézoélectriques qui permettent de déplacer la pointe dans 3 directions orthogonales ;
  - éliminer les vibrations qui perturbent la mesure.

#### b) Différents types de mesures effectuées

Pour effectuer des mesures avec un microscope à effet tunnel, on impose toujours une différence de potentiel  $U$  entre le substrat et la pointe et on mesure le courant tunnel  $I$ . La tension appliquée est typiquement de l'ordre de la dizaine de millivolts et le courant tunnel mesuré a une intensité de l'ordre de quelques nanoampères. On peut en fait jouer sur cinq variables :



**Figure 26.9** – Schématisation de la pointe conductrice et du substrat conducteur sondé.

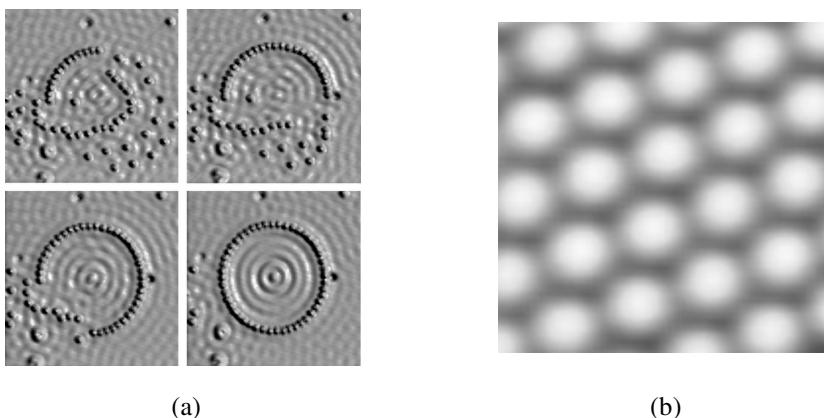
la différence de potentiel  $U$ , le courant tunnel  $I$ , la position  $x$ ,  $y$  ou  $z$  de la pointe par rapport au substrat. La mesure du courant tunnel revient à mesurer la décroissance exponentielle de la fonction d’onde, ce qui souligne sa réalité physique.

- *Topographie* : pour réaliser une carte topographique de la surface du substrat, on fixe la différence de potentiel  $U$  constant et on maintient le courant tunnel  $I$  constant en jouant sur la position verticale  $z$  de la pointe.

Comme le courant tunnel ne dépend alors que de la distance  $d$  entre la pointe et le substrat, maintenir  $I$  constant revient à maintenir  $d$  constant. Les mouvements verticaux de la pointe reproduisent alors les variations de hauteur de la surface du substrat.

- *Spectroscopie* : la pointe est positionnée au-dessus d'un point fixe du substrat (les variables  $x$  et  $y$  sont fixées). On modifie alors la position verticale  $z$  de la pointe, ou la tension appliquée  $U$ , et l'on enregistre les variations du courant tunnel  $I$ . On peut ainsi avoir accès à des propriétés physiques locales du substrat, comme la valeur du travail d'extraction  $\Phi_m$  par exemple. Cela permet d'identifier la nature chimique locale du substrat. Lorsqu'on reproduit ce type de mesure pour différents points  $(x,y)$  du substrat, on peut obtenir une cartographie de sa composition chimique.

La figure 26.10 présente quelques images spectaculaires réalisées à partir d'un microscope à effet tunnel.

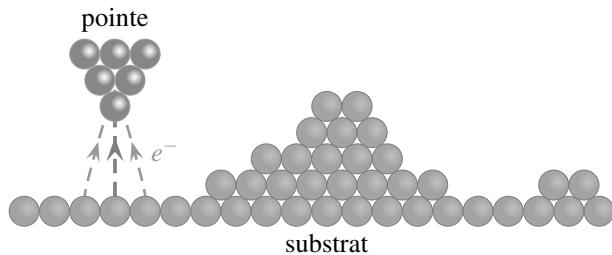


**Figure 26.10 –** (a) Réalisation d'un enclos d'atomes de fer pour confiner des électrons à la surface d'un échantillon de cuivre (l'image révèle clairement la nature ondulatoire des électrons). Les atomes de fer ont été déplacés par la pointe d'un microscope à effet tunnel. Cette image est une création originale d'IBM Corporation. (b) Visualisation d'atomes de silicium à la surface d'un cristal de carbone de silicium. Image réalisée à l'aide d'un microscope à effet tunnel par G. Baffou (LPPM Orsay).

### Questions

- Expliquer pourquoi le microscope à effet tunnel fait partie des microscopes à sonde locale. Connaissez-vous d'autres exemples de microscopes à sonde locale ?
- L'affinité électronique d'un semi-conducteur représente l'énergie à fournir à un électron de conduction pour l'extraire du semi-conducteur et le placer dans le vide. Par exemple, le carbure de silicium a une affinité électronique de 4,2 eV. Peut-on utiliser un microscope à effet tunnel sur un tel substrat ?
- Expliquer le plus précisément possible ce que l'on voit sur la figure 26.10 (b). En particulier, on s'interrogera sur l'origine du contraste de la figure. L'expression (26.11) montre que l'intensité du **courant tunnel** dépend de la distance  $d$ . La constante multiplicative  $I_0$  ne dépend pas seulement de la tension appliquée. Identifier une propriété importante du substrat qui détermine aussi l'intensité du courant tunnel.
- Quel paramètre détermine essentiellement le sens de passage des électrons à travers la barrière ?
- À quelle variation relative de l'intensité du courant tunnel correspond un déplacement de la pointe de l'ordre de  $10^{-11}$  m ? Commenter le résultat et expliquer pourquoi il est nécessaire de contrôler précisément la position verticale de la pointe.
- La mouvement de la pointe est contrôlé à l'aide de cristaux piézoélectriques. Qu'est-ce qu'un cristal piézoélectrique ? Quel est le physicien à l'origine de la découverte de cet effet ?
- Il existe deux modes de fonctionnement du microscope : balayage de la surface à

courant constant ou à hauteur constante.



**Figure 26.11** – Représentation schématique de la pointe et de la surface du substrat.

Reproduire le schéma de la figure 26.11. Dans le mode à courant tunnel constant, représenter le déplacement vertical de la pointe lorsque la surface est balayée de gauche à droite. Quel inconvénient présente un balayage de la surface dans le mode à hauteur constante ?

**8.** La résolution latérale du microscope à effet tunnel est de l'ordre de la taille d'un atome. Est-il possible de distinguer des atomes individualisés grâce à un microscope optique ? Pourquoi ?

*Les réponses aux questions figurent après les corrigés des exercices à la page 917.*

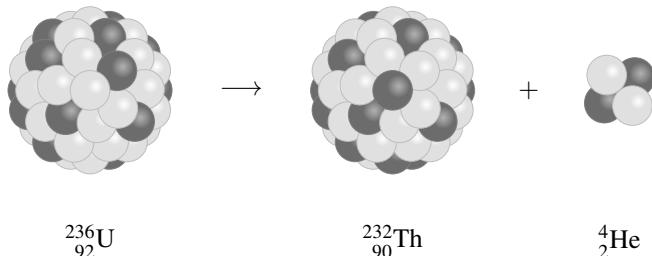
### 3.2 Deuxième approche documentaire : la radioactivité $\alpha$

La **radioactivité** résulte de l'instabilité d'un noyau atomique qui se désintègre. Elle a été découverte par Wilhelm Röntgen, Henri Becquerel et Marie Curie à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Si la radioactivité a donné lieu à des applications technologiques (méthodes de datation, énergie nucléaire civile, armes nucléaires), elle présente souvent un danger pour les organismes vivants en raison des rayonnements ionisants qu'elle produit.

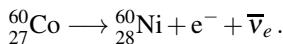
La **désintégration** d'un noyau peut prendre différentes formes :

- **Radioactivité  $\alpha$**  : elle correspond à l'émission, par un noyau instable, d'une particule  $\alpha$ , qui est en réalité un noyau d'hélium  ${}^4_2\text{He}$ . Le noyau d'hélium, qui contient 2 protons et 2 neutrons, est un noyau particulièrement stable. La radioactivité  $\alpha$  permet aux noyaux lourds, contenant un nombre important de protons, de diminuer la répulsion électrostatique des protons par émission d'une particule  $\alpha$ , qui emporte deux protons.

Par exemple, le noyau  ${}^{236}_{92}\text{U}$  donne lieu à ce mode de désintégration :



- *Radioactivité  $\beta$*  : elle correspond à l'émission d'une particule  $\beta$  par un noyau instable. On distingue la radioactivité  $\beta^-$  de la radioactivité  $\beta^+$ . La désintégration  $\beta^-$  correspond à la conversion d'un neutron en proton et à l'émission d'une particule  $\beta^-$  (électron) et d'un antineutrino électronique. La désintégration  $\beta^+$  correspond à la conversion d'un proton en neutron et à l'émission d'une particule  $\beta^+$  (positron) et d'un neutrino électronique. Par exemple, l'isotope radioactif de cobalt 60 se transforme en nickel 60 par une désintégration  $\beta^-$  :



- *Radioactivité  $\gamma$*  : elle correspond à l'émission d'un photon  $\gamma$  par un noyau se trouvant dans un état excité et revenant dans un état d'énergie inférieure.

Nous allons nous intéresser à la radioactivité  $\alpha$ .

La **demi-vie** d'un isotope radioactif représente la durée au bout de laquelle la population de noyaux radioactifs a été divisée par un facteur 2. Pour le noyau  $^{238}_{92}\text{U}$ , elle est de  $4,5 \times 10^9$  années, alors qu'elle est seulement de  $3 \times 10^{-7}$  s pour le noyau  $^{212}_{84}\text{Po}$ . Il est rare qu'une grandeur physique varie sur autant d'ordres de grandeur. Construire un modèle théorique rendant compte de ces variations gigantesques se présente comme un véritable défi.

### a) Les résultats expérimentaux

Dans l'étude de la radioactivité  $\alpha$ , l'approche expérimentale a précédé la modélisation théorique. Les demi-vies de différents isotopes radioactifs et l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  émise ont été mesurées. Le tableau 26.1 recense différentes valeurs.

| Noyer                  | Demi-vie $\tau_{1/2}$ (s) | $E$ (MeV) | Noyer                  | Demi-vie $\tau_{1/2}$ (s) | $E$ (MeV) |
|------------------------|---------------------------|-----------|------------------------|---------------------------|-----------|
| $^{212}_{83}\text{Bi}$ | $4,0 \times 10^4$         | 6,2       | $^{226}_{88}\text{Ra}$ | $5,4 \times 10^{10}$      | 4,9       |
| $^{212}_{84}\text{Po}$ | $3,0 \times 10^{-7}$      | 9,0       | $^{232}_{90}\text{Th}$ | $4,4 \times 10^{17}$      | 4,0       |
| $^{215}_{85}\text{At}$ | $1,0 \times 10^{-4}$      | 8,1       | $^{236}_{92}\text{U}$  | $7,2 \times 10^{14}$      | 4,4       |
| $^{222}_{86}\text{Ra}$ | $3,3 \times 10^5$         | 5,6       | $^{242}_{96}\text{Cm}$ | $1,4 \times 10^7$         | 6,2       |

**Tableau 26.1** – Demi-vies  $\tau_{1/2}$  et énergie cinétique  $E$  de la particule  $\alpha$  émise pour différents noyaux radioactifs.

On constate que l’énergie cinétique de la particule  $\alpha$  émise s’échelonne entre 4 et 10 MeV. On observe aussi que la demi-vie  $\tau_{1/2}$  semble d’autant plus grande que l’énergie cinétique  $E$  est plus faible. Dès 1911, Geiger et Nuttal avaient remarqué cette dépendance et établi la loi empirique :

$$\ln \tau_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}, \quad (26.12)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes.

### b) Le modèle de Gamow, Gurney et Condon

Pour interpréter ces résultats, Gamow propose en 1928 un modèle théorique basé sur l’effet tunnel [11]. Le même modèle théorique fut publié de façon concomitante et indépendante par Gurney et Condon [12]. On suppose que la particule  $\alpha$  existe à l’intérieur du noyau. Celui-ci est composé de  $A$  nucléons, dont  $Z$  protons. Il est considéré comme sphérique de rayon  $R = r_0 A^{1/3}$ , avec  $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}$  m.

La particule  $\alpha$  est traitée comme une particule quantique dont le mouvement est unidimensionnel (on note  $x$  la variable de position). Elle est soumise à une énergie potentielle résultant des effets suivants :

**Pour  $|x| \leq R$  :** la particule est essentiellement soumise à l'**interaction forte** qui assure la cohésion du noyau. C’est une interaction à très courte portée et qui se limite aux nucléons plus proches voisins, dont le nombre reste à peu près le même tant que la particule  $\alpha$  reste dans le noyau. Dans ce modèle, l’énergie d’interaction de la particule  $\alpha$  est donc constante, indépendante de sa position. On modélise donc l’intérieur du noyau comme un puits de potentiel où la particule  $\alpha$  est dans un état lié.

**Pour  $|x| \geq R$  :** comme l’interaction forte est à très courte portée, on la suppose inopérante à l’extérieur du noyau. La particule  $\alpha$  est alors seulement soumise à la répulsion électrostatique exercée par les  $Z - 2$  protons restés dans le noyau.

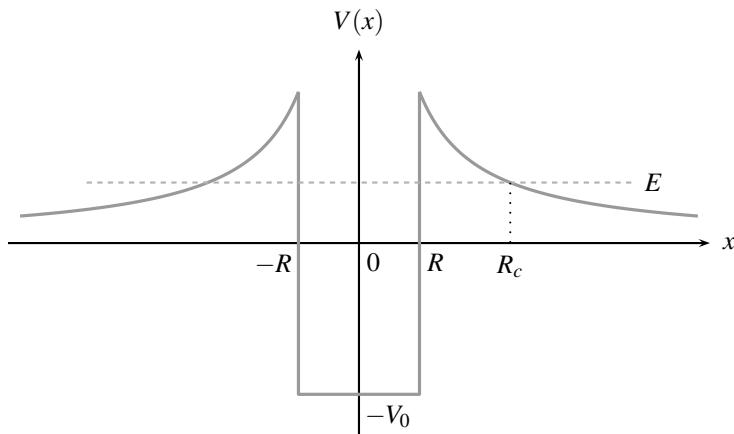
La figure 26.12 représente le profil d’énergie potentielle  $V(x)$  utilisé dans le modèle de Gamow, Gurney et Condon. La référence d’énergie potentielle est choisie nulle lorsque la particule  $\alpha$  est infiniment éloignée du noyau.

La profondeur du puits de potentiel est notée  $-V_0$ . Usuellement, on choisit  $V_0 = 40$  MeV. Même si la particule  $\alpha$  est piégée dans le noyau, la probabilité qu’elle franchisse la **barrière de potentiel** par effet tunnel n’est pas nulle. Pour calculer la probabilité de transmission  $T$  à travers la barrière, Gamow d’une part, mais aussi Gurney et Condon d’autre part, utilisent l’expression approchée suivante :

$$\ln T \approx -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_c} \sqrt{2m_\alpha \left( \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)} dx, \quad (26.13)$$

où  $Z' = Z - 2$  et où  $R_c$  est défini sur la figure 26.12 :  $R_c - R$  représente l’épaisseur de la barrière de potentiel. Au terme des calculs, on arrive à la relation suivante :

$$\ln T = -\frac{\pi RV_m}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} + 2R \frac{\sqrt{V_m m_\alpha}}{\hbar}, \quad (26.14)$$



$$\text{où } V_m = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

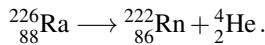
Compte tenu de son énergie cinétique, la particule  $\alpha$  fait des aller-retour dans le noyau et ne cesse de « rebondir » contre la barrière de potentiel. À chaque « collision » sur la barrière de potentiel, la particule  $\alpha$  a une probabilité  $T$  d'être transmise au-delà du noyau. Autrement dit, il lui faut en moyenne  $1/T$  collisions pour sortir du noyau. Si l'on note  $\tau_0$  la durée de traversée du noyau, le temps moyen que la particule  $\alpha$  passe dans le noyau vaut  $\tau = \tau_0/T$ . Un modèle statistique permet ensuite de montrer que la demi-vie  $\tau_{1/2}$  se déduit simplement de  $\tau$  :  $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$ .

La relation exprimant  $\tau_{1/2}$  et découlant de (26.14) s'accorde assez bien avec la loi de Geiger-Nuttal et valide les idées développées par Gamow, Gurney et Condon. S'il est bien sûr possible d'améliorer la modélisation théorique, il n'en reste pas moins que le mérite de ce modèle est de montrer que la radioactivité  $\alpha$  résulte d'un effet purement quantique : l'**effet tunnel**. C'est la grande sensibilité de la probabilité de transmission par effet tunnel à la masse et à l'énergie de la particule  $\alpha$  qui est responsable des variations importantes de la demi-vie des noyaux radioactifs sur plusieurs ordres de grandeur.

De même qu'il est possible qu'une particule  $\alpha$  s'échappe du noyau par effet tunnel, réciproquement, on peut envisager qu'un proton, par exemple puisse, pénétrer dans un noyau par effet tunnel pour former un nouveau noyau. De fait, l'effet tunnel joue un rôle important dans les **réactions nucléaires** faisant intervenir des particules chargées.

## Questions

**1.** Considérons la désintégration  $\alpha$  du radium 226 :



On donne les masses atomiques suivantes :  $m_{\text{Ra}} = 226,0254 \text{ u}$ ;  $m_{\text{Rn}} = 222,0175 \text{ u}$  et  $m_{\text{He}} = 4,0026 \text{ u}$ . L’unité de masse atomique vaut :  $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ . Calculer la variation de masse, puis l’énergie libérée par cette transformation nucléaire. Pourquoi peut-on dire qu’elle correspond à l’énergie cinétique emportée par la particule  $\alpha$  ?

**2.** À l’aide des données numériques fournies dans le tableau 26.1, représenter  $\ln \tau_{1/2}$  en fonction de  $E^{-1/2}$ , en gardant les valeurs numériques de  $\tau_{1/2}$  en s et celles de  $E$  en MeV. Vérifier la concordance avec la loi de Geiger-Nuttal (26.12). En déduire une estimation numérique des constantes  $A$  et  $B$ .

**3.** Comment interprétez-vous la quantité  $r_0$  qui intervient dans l’expression du rayon  $R$  du noyau en fonction du nombre de masse  $A$  ?

**4.** Expliquer comment on passe de l’expression (26.9) de la probabilité de transmission à travers une barrière épaisse à l’expression (26.13).

**5.** *Ordres de grandeur pour le radium* : on considère la désintégration  $\alpha$  du radium 226.

a. Calculer le rayon  $R$  de ce noyau.

b. À partir de la valeur de l’énergie  $E$  de la particule  $\alpha$  émise, calculer le rayon  $R_c$ .

c. On modélise grossièrement la barrière de potentiel vue par cette particule  $\alpha$  par une barrière rectangulaire de largeur  $R_c - R$  et de hauteur de l’ordre de  $E$ . En déduire une estimation de  $\delta$ .

d. Estimer la probabilité  $T$  de transmission de la particule  $\alpha$  à travers cette barrière.

**6.** Évaluer ensuite  $\tau_0$ , puis la durée de vie moyenne  $\tau$  du noyau.

**7.** On admet que le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent entre  $t$  et  $t + dt$  s’écrit :  $dN = \frac{N(t)}{\tau} dt$  où  $N(t)$  est le nombre de noyaux non désintégrés à l’instant  $t$ . En déduire la loi d’évolution de  $N(t)$ . Établir le lien entre  $\tau$  et la demi-vie  $\tau_{1/2}$ .

**8.** Estimer la demi-vie du radium 226 et comparer à la valeur figurant dans le tableau 26.1. Commenter le résultat.

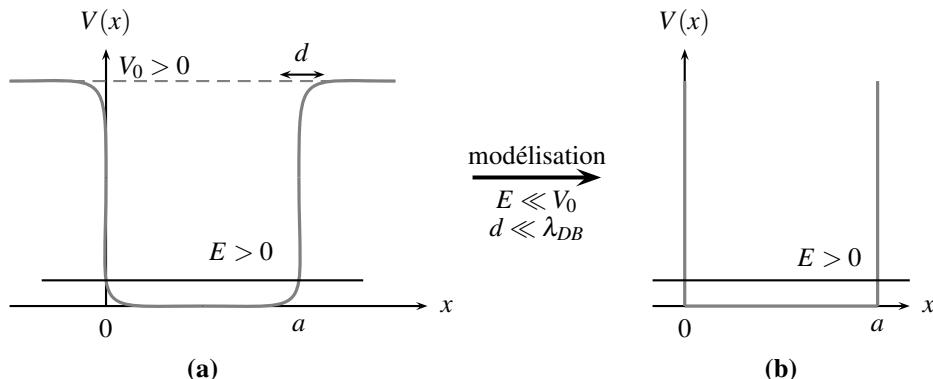
**9.** Le neutron fut découvert en 1934 par Chadwick, bien après la publication du modèle théorique de la radioactivité  $\alpha$  par Gamow, Gurney et Condon. On sait depuis cette découverte que le noyau est constitué de protons et de neutrons. Quelle hypothèse du modèle de Gamow, Gurney et Condon est remise en cause ?

*Les réponses aux questions figurent après les corrigés des exercices à la page 918.*

## 4 Puits de potentiel infiniment profond

Il n'est pas rare qu'en physique, les objets étudiés soient piégés dans un volume délimité : par exemple, les molécules d'une phase gazeuse ou liquide peuvent être contenues dans un récipient clos, les électrons de conduction sont confinés dans l'échantillon conducteur. On sait réaliser aujourd'hui des systèmes physiques véritablement confinés dans des boîtes de dimensions nanométriques (on parle de « boîtes quantiques »), et même confiner des électrons à une dimension dans un « puits quantique » où chaque électron est susceptible de se déplacer sur de grandes distances selon les deux directions  $y$  et  $z$  alors que son mouvement selon  $x$  est limité à l'échelle de quelques nanomètres.

Afin d'étudier théoriquement de tels systèmes, on considère une situation modèle : le **puits de potentiel infiniment profond**, en se limitant à une approche unidimensionnelle. La particule quantique est supposée soumise à un champ de force qui dérive du potentiel ayant l'allure représentée sur la figure 26.13 a. La région comprise entre 0 et  $a$  est appelée **puits de potentiel**.



**Figure 26.13 –** Modélisation d'un puits de potentiel par un puits infiniment profond.

Lorsque l'énergie de la particule  $E$  est très inférieure à la profondeur réelle du puits  $V_0$  et lorsque le potentiel varie rapidement à l'échelle de la longueur d'onde de de Broglie de la particule, on peut modéliser le potentiel par un puits de potentiel infiniment profond comme celui qui est représenté sur la figure 26.13 b. On considère alors le potentiel suivant :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0, \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & \text{pour } x > a. \end{cases}$$

### 4.1 Fonctions d'onde propres

Lorsque  $V(x) \rightarrow +\infty$ , l'équation de Schrödinger indépendante du temps (24.6) impose nécessairement  $\varphi(x) \rightarrow 0$ .

Les régions de l’espace où le potentiel est infiniment élevé sont interdites à la particule quantique.

Pour  $0 \leq x \leq a$ , l’équation (24.6) prend la forme suivante :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0.$$

On est amené à distinguer deux cas :

**a) Cas où  $E \leq 0$**

Si  $E < 0$ , on pose alors  $k = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$  et la solution s’écrit :

$$\varphi(x) = A \exp(kx) + B \exp(-kx).$$

La continuité de la fonction d’onde en 0 et en  $a$  impose :  $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ . On obtient alors que  $A = B = 0$ , ce qui correspond à une fonction d’onde identiquement nulle. On conclut que le cas  $E < 0$  est sans intérêt.

Dans le cas où  $E = 0$ , la fonction d’onde propre s’écrit  $\varphi(x) = Ax + B$ . Les conditions aux limites  $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$  imposent encore une fois  $A = B = 0$ . On retrouve la situation d’une fonction d’onde identiquement nulle, ce qui n’a pas d’intérêt.

**b) Cas où  $E > 0$**

On pose  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et la solution s’écrit :

$$\varphi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

On a privilégié ici une écriture avec les fonctions sin et cos plutôt qu’avec deux exponentielles complexes conjuguées, car cela facilite l’écriture des conditions aux limites. On doit en effet écrire les conditions de continuité de la fonction d’onde en 0 et en  $a$  :  $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ . On obtient :

$$\begin{aligned}\varphi(0) = 0 &\implies B = 0, \\ \varphi(a) = 0 &\implies A \sin(ka) = 0.\end{aligned}$$

Afin d’éviter la solution  $A = B = 0$ , on impose  $\sin(ka) = 0$ . Les seules valeurs permises pour le vecteur d’onde sont les valeurs :

$$k_n = n \frac{\pi}{a}$$

où  $n$  est un nombre entier strictement positif. La fonction d’onde propre  $\varphi_n(x)$  correspondant à la valeur  $k_n$  du vecteur d’onde peut alors se mettre sous la forme :

$$\varphi_n = A_n \sin\left(k_n x\right) = A_n \sin\left(n \pi \frac{x}{a}\right).$$

La constante  $A_n$  doit être déterminée par la condition de normalisation :  $\int_0^a |\varphi_n(x)|^2 dx = 1$ .

On obtient  $A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$ . La fonction d'onde propre normalisée s'écrit donc comme suit :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

À partir de la relation  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , on obtient les valeurs possibles de l'énergie de la particule quantique :

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

On se limite à des valeurs strictement positives de  $n$ . En effet,  $n$  et  $-n$  correspondent au même état :  $\varphi_n(x)$  et  $\varphi_{-n}(x)$  ne diffèrent que par un facteur de phase multiplicatif ( $-1 = e^{i\pi}$ ), donnent la même densité de probabilité ( $|\varphi_n|^2 = |\varphi_{-n}|^2$ ) et correspondent à la même énergie. De plus, la valeur  $n = 0$  conduit à une fonction d'onde identiquement nulle, ce qui est sans intérêt.

L'expression complète des fonctions d'onde obtenues est la suivante :

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) \quad \text{avec } E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (26.15)$$

### Remarque

- On notera que les dérivées  $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$  ne sont pas continues en  $x = 0$  et  $x = a$ , en raison de la discontinuité d'amplitude infinie du potentiel en ces points.
- On remarquera que  $\psi_n(x, t)$  se présente sous la forme factorisée d'une fonction (réelle) dépendant de  $x$  et d'une fonction (complexe) dépendant du temps  $t$ . Il s'agit donc bien d'un état stationnaire.

## 4.2 Niveaux d'énergie

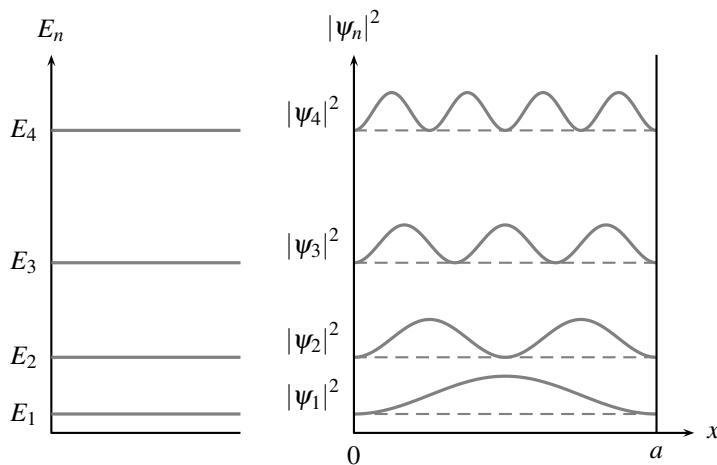
Nous avons obtenu une suite discrète de valeurs de l'énergie : les énergies possibles sont *quantifiées* et l'entier  $n$  est un **nombre quantique**. Cette suite discrète est appelée **spectre d'énergie** de la particule quantique.

À chaque valeur du nombre quantique  $n$ , correspond une valeur précise de l'énergie  $E_n$ , associée à une fonction d'onde  $\psi_n(x, t)$ . Chacune de ces valeurs définit un **niveau d'énergie**.

La figure 26.14 donne une représentation graphique de quelques niveaux d'énergie et des densités de probabilité de présence correspondantes.

Le niveau d'énergie le plus bas, appelé **niveau fondamental**, est obtenu pour  $n = 1$  :

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$



**Figure 26.14** – Premiers niveaux d’énergie du puits infiniment profond.

Ainsi, alors qu’une particule *classique* piégée dans un puits de potentiel infiniment profond peut avoir une énergie arbitrairement petite, nous constatons que l’énergie d’une particule *quantique* ne peut pas être inférieure au niveau d’énergie fondamental  $E_1$ . L’énergie minimale de la particule quantique est d’autant plus élevée que la largeur  $a$  du puits est petite, c’est-à-dire que la particule quantique est mieux localisée.

On notera aussi que le niveau d’énergie fondamental est d’autant plus faible que la masse  $m$  est élevée. Les effets quantiques ont tendance à s’estomper lorsque, toutes choses égales par ailleurs, la masse devient plus importante.

Les niveaux d’énergie de nombre quantique strictement supérieur à 1 sont appelés *niveaux excités*.

On remarque que plus le nombre quantique  $n$  est élevé et plus la fonction d’onde propre  $\varphi_n(x)$  présente de nœuds (qui sont définis comme les points où la fonction d’onde propre, réelle, change de signe.).

 Ce dernier résultat peut être généralisé et nous l’utiliserons : l’énergie d’un état stationnaire lié est d’autant plus élevée que la fonction d’onde propre (réelle) présente un nombre important de nœuds.

### 4.3 Interprétation de l’existence d’un état d’énergie minimale

L’inégalité de Heisenberg spatiale permet d’interpréter l’existence du niveau d’énergie fondamental.

Nous avons montré ci-dessus que la fonction d’onde  $\psi_n(x, t)$  pouvait s’écrire comme la somme de deux ondes harmoniques planes progressant dans des sens opposés, caractérisées par des vecteurs d’onde  $\vec{k}_n = k_n \vec{u}_x$  et  $-\vec{k}_n = -k_n \vec{u}_x$ . À ces deux ondes correspondent des

quantités de mouvement opposées  $\vec{p}_n = \hbar \vec{k}_n$  et  $-\vec{p}_n$ . On conclut que la quantité de mouvement moyenne de la particule quantique est nulle, quel que soit le niveau d'énergie considéré :

$$\langle p_x \rangle = 0.$$

Comme  $\langle p_x \rangle = 0$ , l'indétermination sur la quantité de mouvement est égale à :  $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$ . Dans le puits infini, la particule quantique est confinée dans un domaine de largeur  $a$ . L'indétermination quantique sur la position de la particule est donc inférieure à  $a$  :  $\Delta x \leq a$ . L'inégalité de Heisenberg spatiale donne alors la valeur minimale de l'indétermination  $\Delta p_x$  :

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2a}.$$

On en déduit que l'énergie cinétique de la particule quantique confinée dans le puits est bornée par une valeur minimale :

$$E_{c,\min} = \frac{\langle p_x^2 \rangle_{\min}}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

À un facteur numérique près, on retrouve l'expression de l'énergie minimale de la particule quantique dans un puits de potentiel infini<sup>2</sup>.

On retiendra que l'énergie cinétique minimale d'une particule quantique confinée est d'autant plus élevée que la particule est piégée dans un domaine d'extension spatiale réduite. On l'appelle **énergie de localisation** ou **énergie de confinement**. Son ordre de grandeur est donné par la relation :

$$E_{c,\min} \approx \frac{\hbar^2}{ma^2},$$

où  $a$  représente la largeur de confinement.

Cela explique en particulier pourquoi la physique de l'infiniment petit et des particules élémentaires est aussi la physique des hautes énergies : l'exploration de la matière à des échelles toujours plus petites nécessite des énergies toujours plus élevées.

### Exemples

**Électron dans un atome** : avec  $m = 10^{-30}$  kg et  $a = 10^{-10}$  m, on obtient  $E_{c,\min} \approx 1 \times 10^{-18}$  J soit 7 eV. On retrouve l'ordre de grandeur des énergies impliquant les électrons dans les atomes, qui fixe l'ordre de grandeur des énergies mises en jeu dans les transformations chimiques.

**Nucléon dans un noyau** : la masse d'un nucléon (proton ou neutron) est approximativement  $m = 10^{-27}$  kg ; la taille caractéristique du noyau atomique est  $a = 10^{-15}$  m. On obtient :  $E_{c,\min} \approx 1 \times 10^{-11}$  J, soit 70 MeV. Les énergies de liaison par nucléon dans un noyau atomique sont de l'ordre de la dizaine de Mev. L'ordre de grandeur obtenu est satisfaisant compte tenu de la simplicité des arguments utilisés.

2. À l'intérieur du puits de potentiel, l'énergie potentielle de la particule est nulle : son énergie cinétique est donc égale à son énergie mécanique.

## 4.4 Densité de probabilité de présence

La densité de probabilité de présence dans le puits de potentiel infini est donnée, pour  $0 \leq x \leq a$ , par la relation suivante :  $P_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{a}\right)$ . Elle est nulle en dehors du puits de potentiel. La représentation de la densité de probabilité de présence est représentée sur la figure 26.14 pour les premières valeurs du nombre quantique  $n$ .

### Remarque

La probabilité de présence ne prend des valeurs non nulles que dans l'intervalle  $[0; a]$  ; elle est nulle en dehors de cet intervalle. Il est donc impossible à la particule quantique de parvenir à l'infini. Cette situation correspond à un *état lié* de la particule quantique.

### a) Propriétés de symétrie de la densité de probabilité de présence

Nous constatons, au vu de la figure 26.14, que la densité de probabilité de présence  $|\psi_n(x)|^2$  est symétrique par rapport à  $x = a/2$ . Ceci est une conséquence directe de la symétrie du potentiel  $V(x)$  par rapport à  $x = a/2$ .



Il s'agit là d'une propriété importante : les propriétés de symétrie du potentiel se retrouvent dans la fonction d'onde propre.

### b) Limite classique

Une particule *classique* piégée dans un puits de potentiel infiniment profond a une énergie cinétique et donc une vitesse qui gardent la même valeur, quelle que soit la position de la particule. La durée de passage d'une particule classique au voisinage d'un point donné reste la même quel que soit ce point. La particule classique a donc des probabilités égales de se trouver n'importe où entre  $x = 0$  et  $x = a$ . La densité de probabilité de présence classique vaut donc :  $P_{\text{cl}}(x) = \frac{1}{a}$ .

Pour de grandes valeurs du nombre quantique  $n$ , la probabilité de présence quantique  $P_n(x)$  présente de nombreuses oscillations entre  $x = 0$  et  $x = a$  liées au facteur  $\sin^2(n\pi x/a)$ . La valeur moyenne de  $\sin^2(n\pi x/a)$  entre  $x = 0$  et  $x = a$  est donc calculée sur de nombreuses oscillations : sa valeur est donc très proche de  $1/2$ . Pour des valeurs de  $n$  élevées, la probabilité quantique tend vers  $1/a$ , c'est-à-dire vers la probabilité classique. Ce résultat est conforme au principe de correspondance de Bohr.

## 5 États non stationnaires d'une particule quantique

### 5.1 Premier exemple : puits de potentiel infiniment profond

#### a) Fonction d'onde non stationnaire

Imaginons qu'une particule quantique, piégée dans un puits de potentiel infiniment profond, soit préparée à l'instant initial  $t = 0$  dans un état quantique formé par une superposition d'états stationnaires :

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t = 0) \varphi_n(x).$$

Cette expression est une combinaison linéaire de solutions de l'équation de Schrödinger. Or, cette équation est une équation différentielle linéaire. On peut montrer, et nous l'admettrons, que cette expression constitue une solution acceptable de l'équation de Schrödinger, pourvu qu'elle soit correctement normalisée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2(t = 0) = 1.$$

On souhaite déterminer l'expression de la fonction d'onde  $\psi(x, t > 0)$  de la particule quantique à un instant ultérieur. On recherche une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme de la série suivante<sup>3</sup> :

$$\psi(x, t > 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t) \varphi_n(x),$$

avec  $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2(t > 0) = 1$ . On remarque qu'à l'instant initial  $t = 0$ , cette expression est bien égale à  $\psi(x, t = 0)$ . On injecte cette expression dans l'équation de Schrödinger, et l'on obtient :

$$\frac{dc_n(t)}{dt} + i\frac{E_n}{\hbar} c_n(t) = 0.$$

La solution s'écrit :  $c_n(t) = c_n(t = 0) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$ . À un instant  $t > 0$ , la fonction d'onde est :

$$\psi(x, t > 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t = 0) \varphi_n(x) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right).$$

Toute fonction d'onde non stationnaire peut être écrite comme une combinaison linéaire des fonctions d'onde stationnaires :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \text{ avec } \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = 1.$$

3. L'ensemble des fonctions d'onde propres  $\varphi_n(x)$  constitue une base (hilbertienne) de l'espace des fonctions d'onde, qui permet d'écrire la fonction d'onde sous la forme d'une série convergente lorsque la fonction d'onde est correctement normalisée.

### b) Exemple d’une combinaison linéaire de deux états stationnaires

La figure 26.15 représente un exemple particulier de l’évolution temporelle d’une fonction d’onde construite comme une combinaison linéaire de deux fonctions d’onde stationnaires :

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_3(x)$$

En vertu du résultat établi précédemment, on peut écrire la fonction d’onde à un instant quelconque ultérieur :

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x) \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_3(x) \exp\left(-i\frac{E_3}{\hbar}t\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)\left(\varphi_1(x) + \varphi_3(x) \exp\left(-i\frac{E_3 - E_1}{\hbar}t\right)\right).\end{aligned}$$

On peut alors calculer la densité de probabilité de présence :

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1^2(x) + \varphi_3^2(x) + 2\varphi_1(x)\varphi_3(x) \cos\left(\frac{E_3 - E_1}{\hbar}t\right)\right).$$

La densité de probabilité de présence dépend explicitement du temps : il s’agit bien d’un état non stationnaire. Elle oscille périodiquement dans le temps à la fréquence :

$$\nu = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}.$$

La période correspondante est  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\hbar}{E_3 - E_1}$ . En utilisant les expressions de  $E_3$  et  $E_1$ , on obtient :  $T = \frac{ma^2}{\hbar}$ .

On admettra la généralité du résultat obtenu ici en étudiant un cas particulier.

La superposition de deux états stationnaires d’énergie  $E_1$  et  $E_2 > E_1$  conduit à une probabilité de présence qui oscille à la fréquence  $\nu$  vérifiant la relation :

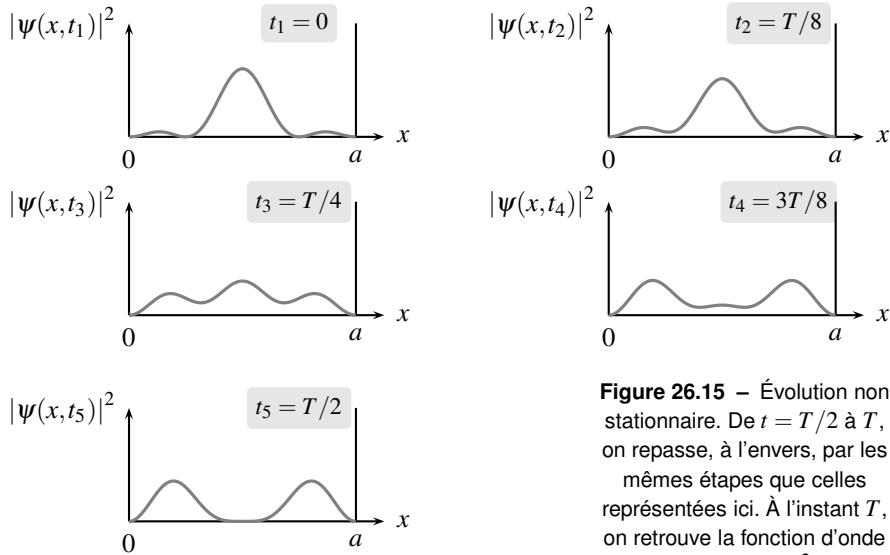
$$h\nu = E_2 - E_1. \quad (26.16)$$

La figure 26.15 donne une représentation de la densité de probabilité de présence pour le cas particulier étudié.

La fonction d’onde initiale permet de représenter une particule quantique plutôt localisée au centre du puits de potentiel. On obtient ensuite une évolution non stationnaire : la fonction d’onde s’étale sur toute la largeur du puits, et suite aux réflexions sur les deux bords, vient reprendre sa forme initiale au centre du puits.

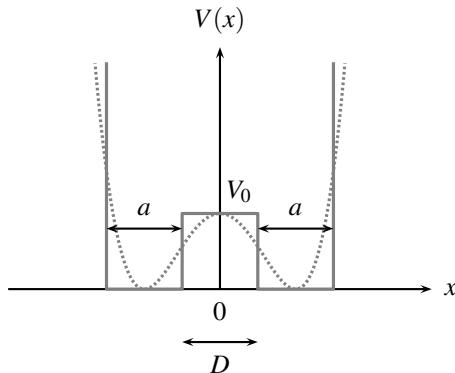
## 5.2 Second exemple : le double puits de potentiel symétrique

Comme autre exemple, on propose d’étudier le cas d’une particule quantique dans un profil d’énergie potentielle qui présente deux positions d’équilibres stables symétriques (potentiel



**Figure 26.15** – Évolution non stationnaire. De  $t = T/2$  à  $T$ , on repasse, à l'envers, par les mêmes étapes que celles représentées ici. À l'instant  $T$ , on retrouve la fonction d'onde initiale. ( $T = ma^2/h$ )

tracé en tirets sur la figure 26.16). Afin de saisir l'essentiel du comportement de la particule quantique dans ce potentiel, il est suffit de considérer un profil d'énergie potentielle simplifié comme celui qui est tracé en trait continu sur la figure 26.16.



**Figure 26.16** – Double puits de potentiel symétrique : en tirets, le potentiel réel ; en trait continu : le potentiel modèle.

Nous verrons que les résultats obtenus suffiront pour analyser quelques situations physiques réelles.

### a) États stationnaires dans un double puits infini

Commençons par envisager la situation simplifiée d'un double puits infini ( $V_0 \rightarrow \infty$ ), représenté sur la figure 26.17.

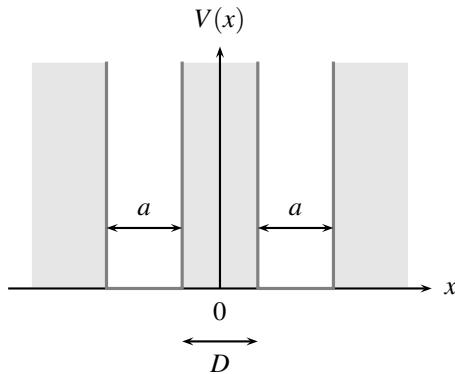


Figure 26.17 – Double puits de potentiel infini.

Il s’agit de déterminer les états stationnaires d’une particule quantique dans le double puits. Dans les régions où le potentiel est nul, on sait que l’on doit trouver des fonctions d’onde propres sinusoïdales, et que partout ailleurs, les fonctions d’onde propres doivent être idéalement nulles.

Les fonctions d’ondes propres des deux puits, pris séparément, satisfont à ces conditions. On en déduit que les états stationnaires d’une particule quantique correspondent à la réunion des états stationnaires de chacun des deux puits.

On note  $E_n$  l’énergie d’un état stationnaire. La fonction d’onde  $\varphi_n(x)$  peut s’identifier à  $\varphi_n^{(G)}(x)$ , fonction d’onde propre associée au puits de gauche, ou à  $\varphi_n^{(D)}(x)$ , fonction d’onde propre associée au puits de droite (on utilise les relations (26.15)) :

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^{(G)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > \frac{D}{2} + a \text{ ou pour } |x| < \frac{D}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi \frac{x+a+D/2}{a}\right) & \text{pour } -a - \frac{D}{2} \leq x \leq -\frac{D}{2}, \\ 0 & \text{pour } \frac{D}{2} \leq x \leq \frac{D}{2} + a, \end{cases}$$

ou

$$\varphi_n(x) = \varphi_n^{(D)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > \frac{D}{2} + a \text{ ou pour } |x| < \frac{D}{2}, \\ 0 & \text{pour } -a - \frac{D}{2} \leq x \leq -\frac{D}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi \frac{x-a-D/2}{a}\right) & \text{pour } \frac{D}{2} \leq x \leq \frac{D}{2} + a, \end{cases}$$

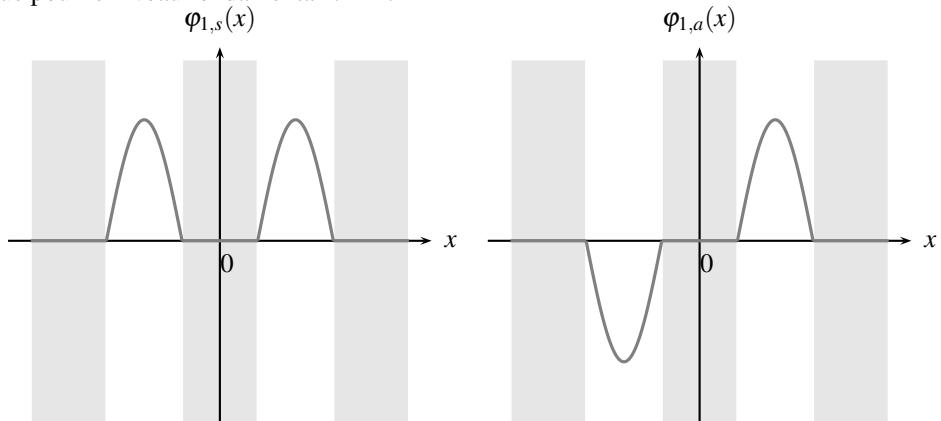
Chaque état stationnaire d’énergie  $E_n$  est en quelque sorte double : il lui correspond deux fonctions d’onde linéairement indépendantes. On dit que le niveau d’énergie  $E_n$  est *doublement dégénéré*. À partir des fonctions d’onde propres  $\varphi_n^{(G)}(x)$  et  $\varphi_n^{(D)}(x)$ , on peut construire deux nouvelles fonctions d’onde propres, linéairement indépendantes, symétriques (paire) et

antisymétrique (impaire) :

$$\varphi_{n,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_n^{(D)}(x) + \varphi_n^{(G)}(x)),$$

$$\varphi_{n,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_n^{(D)}(x) - \varphi_n^{(G)}(x)).$$

Sur la figure 26.18, on a représenté les deux fonctions d'onde propre symétrique et antisymétrique pour le niveau fondamental  $n = 1$ .

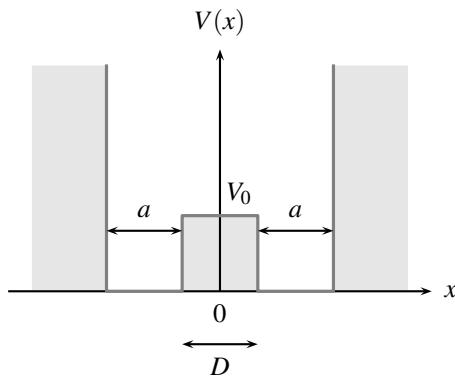


**Figure 26.18** – Fonctions d'onde propres symétrique (à gauche) et antisymétrique (à droite) pour le niveau fondamental du double puits de potentiel infini.

Si la particule est localisée dans un des deux puits, elle y reste piégée puisque la barrière de potentiel qui sépare les deux puits est de hauteur infinie.

### b) États stationnaires dans un double puits symétrique

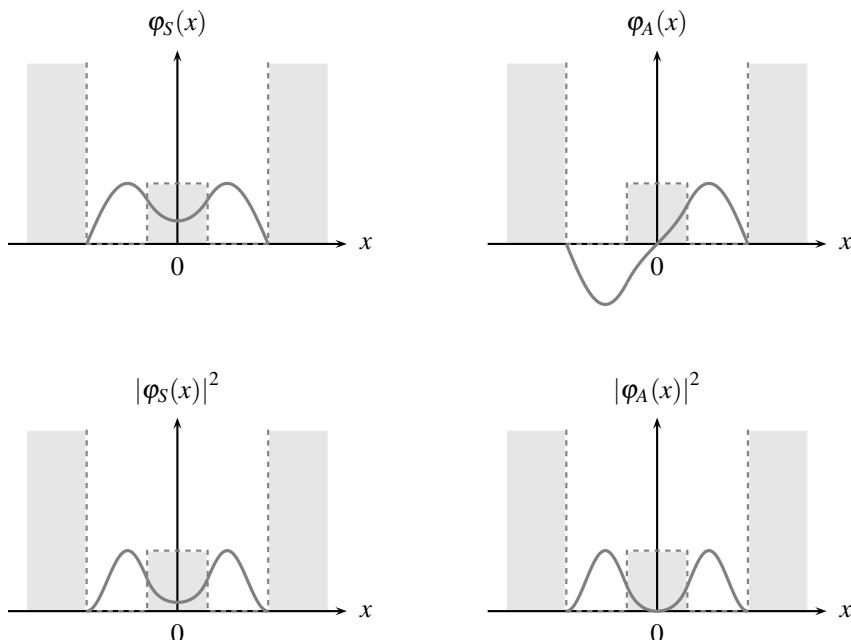
On en vient maintenant à la situation du double puits symétrique représenté sur la figure 26.19.



**Figure 26.19** – Double puits de potentiel symétrique.

On cherche les états stationnaires d’une particule quantique d’énergie  $E < V_0$ . Comme la barrière de potentiel qui sépare les deux puits est de hauteur et de largeur finie, on doit s’attendre à ce que la particule puisse franchir cette barrière par effet tunnel. On dit que les deux puits de potentiel sont *couplés par effet tunnel*. La particule quantique « voit » donc un puits de potentiel dont la largeur effective est plus importante que si elle était confinée dans un puits de potentiel infini de largeur  $a$ . Le confinement de la particule étant moindre, on doit donc s’attendre à un abaissement des niveaux d’énergie par rapport au double puits infini.

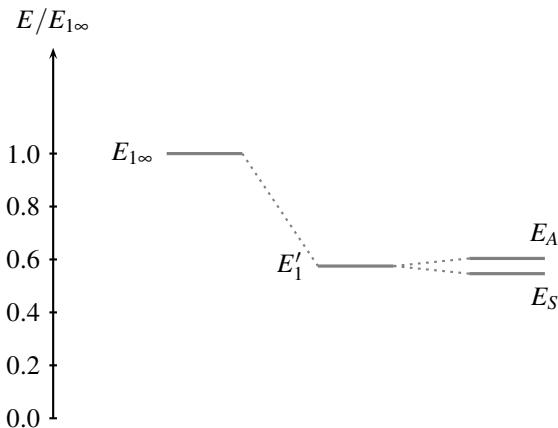
Il est possible de rechercher l’expression analytique des fonctions d’onde propres. Le calcul des niveaux d’énergie s’avère assez fastidieux et doit être fait de façon numérique, sauf si l’on procède à quelques approximations. Nous nous contenterons ici de présenter directement les résultats obtenus par résolution numérique de l’équation de Schrödinger indépendante du temps.



**Figure 26.20** – Fonctions d’onde propres des deux premiers états stationnaires symétrique et antisymétrique. Densité de probabilité de présence associées.

Sur la figure 26.20, on a représenté les fonctions d’onde propres correspondant aux deux états de plus faible énergie. On obtient des fonctions d’onde propres qui ont des parités bien définies : l’une est paire, on la qualifie de fonction d’onde propre *symétrique* ( $\phi_S(x)$ ), l’autre est impaire, on la qualifie de fonction d’onde propre *antisymétrique* ( $\phi_A(x)$ ).

On constate que la fonction d’onde propre de l’état stationnaire antisymétrique présente, en  $x = 0$ , un nœud de plus que pour l’état symétrique. On peut en déduire que l’énergie associée à l’état antisymétrique est plus élevée que l’énergie de l’état symétrique. C’est ce que l’on constate sur la figure 26.21, où l’on a représenté les niveaux d’énergie correspondant à ces deux premiers états stationnaires.



**Figure 26.21** – Diagramme énergétique. Le niveau fondamental du double puits infini est  $E_{1\infty}$ ; les niveaux des états symétrique et antisymétrique du double puits symétrique sont respectivement notés  $E_S$  et  $E_A$ . Leur valeur moyenne est  $E'_1$ .

Le diagramme énergétique appelle plusieurs commentaires importants :

- l'énergie moyenne  $E'_1$  des deux premiers niveaux d'énergie est plus faible que l'énergie du niveau fondamental du double puits infini. C'est une conséquence de l'effet tunnel qui contribue à un élargissement effectif du puits de potentiel : la particule, en franchissant la barrière de potentiel centrale par effet tunnel, explore un puits de potentiel élargi.
- alors que pour le double puits de potentiel infini, les deux niveaux d'énergie symétrique et antisymétrique sont de même valeur, on constate qu'une autre conséquence du couplage des deux puits de potentiel par effet tunnel est la séparation des deux niveaux d'énergie des états symétrique et antisymétrique. On dit que le couplage par effet tunnel lève la dégénérescence des niveaux d'énergie.

### c) Évolution temporelle d'une superposition de deux états

Par superposition des fonctions d'onde symétrique et antisymétrique, on peut construire deux nouveaux états :

$$\begin{aligned}\psi_+(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S(x,t) + \psi_A(x,t)), \\ \psi_-(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S(x,t) - \psi_A(x,t)).\end{aligned}$$

Chacune de ces fonctions d'onde représentent un état *non* stationnaire puisqu'elle est obtenue par combinaison linéaire de deux fonctions d'onde d'énergies différentes. Pour s'en

convaincre, il suffit d’expliciter  $\psi_+(x, t)$  et  $\psi_-(x, t)$ , avec  $E_m = (E_S + E_A)/2$  et  $2A = E_A - E_S$  :

$$\begin{aligned}\psi_+(x, t) &= \frac{e^{-iE_mt/\hbar}}{\sqrt{2}} \left( \varphi_S(x) \exp(iAt/\hbar) + \varphi_A(x) \exp(-iAt/\hbar) \right), \\ \psi_-(x, t) &= \frac{e^{-iE_mt/\hbar}}{\sqrt{2}} \left( \varphi_S(x) \exp(iAt/\hbar) - \varphi_A(x) \exp(-iAt/\hbar) \right).\end{aligned}$$

et d’exprimer les densités de probabilité de présence, qui varient dans le temps :

$$\begin{aligned}|\psi_+(x, t)|^2 &= \frac{1}{2}(|\varphi_S(x)|^2 + |\varphi_A(x)|^2 + 2\varphi_S(x)\varphi_A(x) \cos(\Omega t)), \\ |\psi_-(x, t)|^2 &= \frac{1}{2}(|\varphi_S(x)|^2 + |\varphi_A(x)|^2 - 2\varphi_S(x)\varphi_A(x) \cos(\Omega t)),\end{aligned}$$

où l’on a posé  $\Omega = 2A/\hbar = (E_A - E_S)/\hbar$ . La période correspondante s’écrit :  $T = h/(E_A - E_S)$ . Considérons, par exemple, qu’à l’instant  $t = 0$ , l’état de la particule est représenté par la fonction d’onde  $\psi_+(x, t = 0)$ . La figure 26.22 représente l’évolution dans l’espace et dans le temps de la densité de probabilité de présence correspondante. On donne en annexe le code écrit dans le langage Python qui permet de calculer et de représenter cette densité de probabilité de présence.

L’état  $\psi_+(x, t = 0)$  correspond à une situation où la particule est plus vraisemblablement localisée dans le puits de droite. Mais on constate qu’elle n’y reste pas : elle oscille d’un puits à l’autre à la fréquence de Bohr  $v$  donnée par :

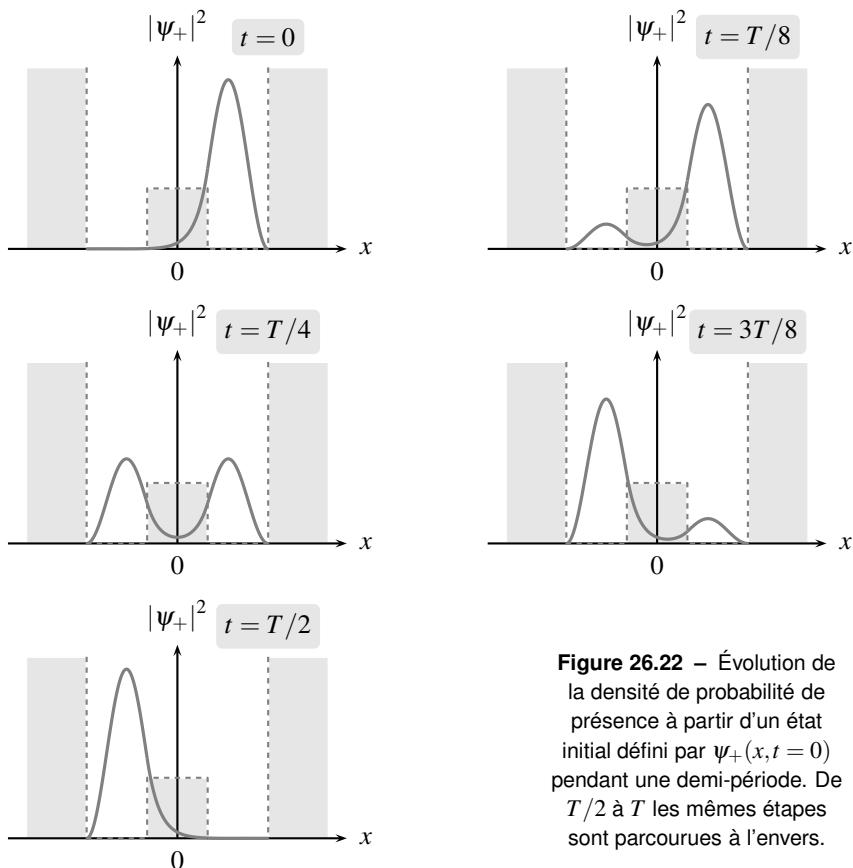
$$v = \frac{E_A - E_S}{h}. \quad (26.17)$$

L’état représenté par  $\psi_-(x, t)$  est aussi caractérisé par une oscillation de la densité de probabilité de présence à la même fréquence.

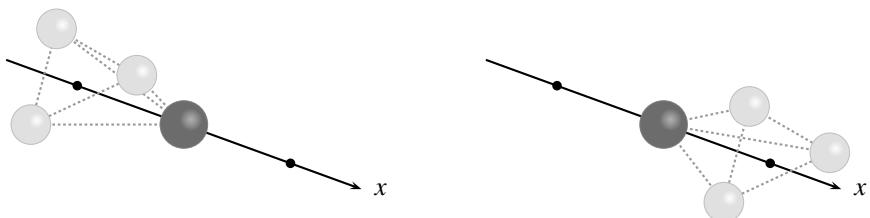
Un exemple concret qui relève de cette situation est celui de la molécule d’ammoniac  $\text{NH}_3$ . Dans son état d’énergie la plus faible, elle adopte une forme pyramidale. Les trois atomes d’hydrogène forment un triangle équilatéral. L’atome d’azote se situe sur l’axe de symétrie de la molécule, orthogonal au plan des trois atomes d’hydrogène. Le mouvement de plus faible énergie de la molécule  $\text{NH}_3$  correspond à une oscillation du plan contenant les atomes d’hydrogène de part et d’autre de l’atome d’azote (voir figure 26.23), à l’image d’un parapluie qui se retournerait.

Le mouvement des trois atomes d’hydrogène peut être décrit comme celui d’une particule quantique, de masse  $m$ , qui évolue dans un potentiel qui présente deux positions d’équilibres symétriques, c’est-à-dire dans un potentiel en forme de double puits symétrique. L’étude précédente montre que ce mouvement, de nature purement quantique, est une conséquence de l’effet tunnel.

Au mouvement d’oscillation du plan des atomes d’hydrogène correspond un renversement périodique du moment dipolaire de la molécule d’ammoniac. Il s’agit d’un exemple concret



**Figure 26.22 –** Évolution de la densité de probabilité de présence à partir d'un état initial défini par  $\psi_+(x, t = 0)$  pendant une demi-période. De  $T/2$  à  $T$  les mêmes étapes sont parcourues à l'envers.



**Figure 26.23 –** Configurations d'équilibre de la molécule d'ammoniac.

de dipôle électrique oscillant rayonnant une onde électromagnétique (voir cours d’électromagnétisme). La fréquence de l’onde émise est de<sup>4</sup> :

$$\nu_{\text{NH}_3} = 23870 \text{ MHz.}$$

La longueur d’onde électromagnétique correspondante est  $\lambda_0 = 1,25 \text{ cm}$  (domaine des ondes centimétriques ou micro-ondes). La molécule d’ammoniac est aussi susceptible d’absorber une onde électromagnétique à cette fréquence. Cette raie d’absorption constitue une signature de l’ammoniac. L’écart entre les deux niveaux d’énergie symétrique et antisymétrique se déduit de cette fréquence :

$$E_A - E_S = h\nu_{\text{NH}_3} = 10^{-4} \text{ eV.}$$

Le MASER à ammoniac, réalisé par C.H. Townes, exploite le processus d’émission stimulée entre les deux niveaux  $E_A$  et  $E_S$  pour émettre des ondes électromagnétiques à la fréquence  $\nu_{\text{NH}_3}$ . Cet oscillateur a été le précurseur du **laser**.

---

4. Cette valeur numérique est extraite de la Conférence Nobel de C. H. Townes, qui reçut en 1964 Prix Nobel de Physique en partie pour ses travaux sur la réalisation d’un oscillateur à ammoniac, nommé **maser** (M pour Microwave), précurseur du LASER.

## Appendice : approche numérique du double puits de potentiel

Voici un exemple de programme, écrit dans le langage Python, qui permet de représenter la densité de probabilité de présence de la figure 26.22.

```

1 import numpy as np
2 from scipy import optimize
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 if 'qt' in plt.get_backend().lower():
6     try:
7         from PyQt4 import QtGui
8     except ImportError:
9         from PySide import QtGui
10
11 plt.ion()
12
13 # Constantes utiles
14 pi = np.pi
15 D = 1.0 # largeur de la barrière centrale adimensionnée par la largeur  $a$  de chaque puits
16 V = 1.2 # hauteur de la barrière  $V_0$  adimensionnée par  $E_1$  (fondamental puits infini de largeur  $a$ )
17
18 # Bornes de variation pour l'abscisse adimensionnée par  $a$ 
19 xmin = -D/2. - 1.
20 xmax = D/2. + 1.
21
22 # Niveau d'énergie état symétrique
23 def Esym(x):
24     """ Fonction dont les racines sont l'énergie du niveau symétrique
25     """
26     return np.sqrt(V-x)*np.tan(pi*np.sqrt(x))+np.sqrt(x)/(np.tanh(pi*D*np.sqrt(V-x)/2.))
27
28 # Niveau d'énergie état antisymétrique
29 def Eantisym(x):
30     """ Fonction dont les racines sont l'énergie du niveau antisymétrique
31     """
32     return np.sqrt(V-x)*np.tan(pi*np.sqrt(x))+np.sqrt(x)*np.tanh(pi*D*np.sqrt(V-x)/2.)
33
34 # Résolution numérique des équations définissant les énergies des deux niveaux
35
36 ES = optimize.brentq(Esym,0.3,1.0)
37 EA = optimize.brentq(Eantisym ,0.3,1.0)
38
39 def FOsym(x):
40     """ Retourne la valeur de la fonction d'onde propre symétrique
41     x = position adimensionnée  $x/a$ 
42     Région I ( $-D/2 - 1 < x < -D/2$ ):
43          $\phi_{+S}(x) = \sin(\pi * \sqrt{ES/E_1}) * (x + 1 + D/2)$ 
44     Région II ( $-D/2 < x < D/2$ ):
45          $\phi_{+S}(x) = \sin(\pi * \sqrt{ES/E_1}) * \cosh(\pi * \sqrt{V_0 - ES} / E_1) * x / \cosh(\pi * \sqrt{V_0 - ES} / E_1) * (D/2)$ 
46     Région III ( $D/2 < x < D/2 + 1$ ):
47          $\phi_{+S}(x) = -\sin(\pi * \sqrt{ES/E_1}) * (x - 1 - D/2)$ 
48     """
49     if (np.abs(x) < D/2. + 1.):
50         if (np.abs(x+1.+D/2.) < 1.):
51             return np.sin(pi*np.sqrt(ES)*(x+1.+D/2.))

```

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

```

52     elif (np.abs(x)< D/2.):
53         return np.sin(pi*np.sqrt(ES))*np.cosh(pi*np.sqrt(V-ES)*x)/np.cosh(pi*np.sqrt(V-ES)*(D/2.))
54     else :
55         return -np.sin(pi*np.sqrt(ES)*(x-1.-D/2.))
56     else :
57         return 0.
58
59 def FOantisym(x):
60     """ Retourne la valeur de la fonction d'onde propre antisymétrique
61     x = position adimensionnée x/a
62     Région I (-D/2-I < x < -D/2):
63         phi_A(x) = - sin ( pi*sqrt(ES/EI) * (x + I + D/2))
64     Région II (-D/2 < x < D/2):
65         phi_A(x) = sin ( pi*sqrt(ES/EI))*sinh(pi. sqrt(V0-ES/EI)*x)/sinh(pi. sqrt(V0-ES/EI)*(D/2))
66     Région III (D/2 < x < D/2 + I):
67         phi_A(x) = -sin ( pi*sqrt(ES/EI) * (x - I - D/2))
68     """
69     if (np.abs(x) < D/2. + 1.):
70         if (np.abs(x+1.+D/2.) < 1.):
71             return -np.sin(pi*np.sqrt(EA)*(x+1.+D/2.))
72         elif (np.abs(x)< D /2.):
73             return np.sin(pi*np.sqrt(EA))*np.sinh(pi*np.sqrt(V-EA)*x)/np.sinh(pi*np.sqrt(V-EA)*(D/2.))
74         else :
75             return -np.sin(pi*np.sqrt(EA)*(x-1.-D/2.))
76     else :
77         return 0.
78
79 def ProbaPlus(x,t):
80     """ Retourne la valeur de la densité de probabilité de présence en x à t
81     """
82     return (FOsym(x)**2+(FOantisym(x))**2+2.*Fosym(x)*FOantisym(x)*np.cos(2.*pi*t)
83
84 # Le temps est adimensionné par la période T = h / (EA-ES)
85
86 for tt in range (0,80):
87     plt . axis ([xmin,xmax,0,5])
88     x = np. linspace (xmin,xmax,500)
89     y = [ProbaPlus(xx, tt /20.) for xx in x]
90     plt . plot (x,y, 'b-')
91     plt . xlabel ("x/a")
92     plt . ylabel ("P(x,t)")
93     plt . draw()
94     if 'qt' in plt . get_backend ().lower ():
95         QtGui.QApp.processEvents()
96     plt . clf ()
97

```

**SYNTHESE****SAVOIRS**

- modèle du puits de potentiel infini ou fini
- analogies et différences avec les modes propres d'une corde vibrante
- l'énergie d'un état stationnaire est d'autant plus élevée que le nombre de nœuds de la fonction d'onde propre est grand
- énergie de localisation ou de confinement
- état lié, état de diffusion
- les états stationnaires liés ont des énergies quantifiées
- existence d'ondes évanescentes dans la région classiquement interdite
- profondeur de pénétration associée aux ondes évanescentes
- la profondeur de pénétration est à l'origine de l'abaissement des niveaux d'énergie
- le nombre de niveaux d'énergie est fini dans le cas du puits de potentiel fini et dépend de la profondeur du puits
- expression simplifiée de la probabilité de transmission par effet tunnel
- expression de la fréquence de Bohr associée à un écart d'énergie.

**SAVOIR-FAIRE**

- écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un potentiel  $V(x)$  uniforme par morceaux
- établir les expressions des fonctions d'onde propres des états stationnaires
- distinguer une onde propagative d'une onde évanescante
- retrouver l'énergie de localisation ou de confinement en utilisant l'inégalité de Heisenberg spatiale
- écrire et utiliser les conditions aux limites qui s'imposent à la fonction d'onde
- utiliser le vecteur densité de courant de probabilité pour déterminer des probabilités de réflexion et de transmission
- utiliser l'expression simplifiée de la probabilité de transmission à travers une barrière
- utiliser le principe de superposition pour construire la fonction d'onde d'un état non stationnaire
- expliquer les différences des comportements classique et quantique

**MOTS-CLÉS**

- |                             |                           |                    |
|-----------------------------|---------------------------|--------------------|
| • marche de potentiel       | gie                       | • onde évanescente |
| • barrière de potentiel     | • niveaux d'énergie       | • effet tunnel     |
| • puits de potentiel        | • énergie de confinement  |                    |
| • quantification de l'éner- | • réflexion, transmission |                    |

**S’ENTRAÎNER**

Certaines valeurs numériques, en particulier celles des constantes fondamentales, peuvent être volontairement absentes des énoncés proposés. Il relève de votre initiative de les connaître ou de les rechercher.

**26.1 Niveaux d’énergie du puits de potentiel infiniment profond (★)**

1. Représenter l’allure de la fonction d’onde propre pour les 3 premiers niveaux d’énergie d’une particule quantique dans un puits de potentiel infiniment profond, de largeur  $a$ .
2. En déduire dans chaque cas l’expression de la longueur d’onde de de Broglie en fonction de  $a$ ,  $\hbar$  et de la masse de la particule quantique  $m$ , puis la valeur de l’énergie  $E$  de chaque niveau.
3. En généralisant, retrouver l’expression de l’énergie  $E_n$  du  $n^{\text{ième}}$  niveau en fonction de  $n$ ,  $m$ ,  $\hbar$  et  $a$ .

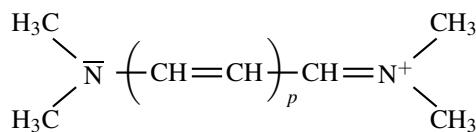
**26.2 Émission d’un photon (★)**

Un électron est confiné dans un puits quantique formé d’une couche de GaAs (matériau semi-conducteur) prise en « sandwich » entre deux couches de GaAlAs. Pour déterminer les états stationnaires de l’électron, on considère une particule quantique de masse  $m_e^* = 0,067m_e$  (où  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg est la masse de l’électron) évoluant dans un puits de potentiel infini, de largeur  $a = 3,0$  nm.

On considère la transition du niveau d’énergie  $n = 2$  au niveau d’énergie fondamental  $n = 1$ . Déterminer la longueur d’onde de la radiation émise lors de cette transition. La situer dans le spectre électromagnétique.

**26.3 Colorants organiques et modèle de Kuhn (★★)**

En 1949, Hans Kuhn proposa, pour calculer les propriétés électroniques d’une molécule présentant des liaisons conjuguées, comme celle représentée ci-dessous, d’oublier le squelette d’atomes de carbone, d’azote et d’hydrogène, et d’attribuer les propriétés optiques dans le domaine visible au seul nuage d’électrons  $\pi$  [14]. Dans un modèle simple, Kuhn propose que les  $N$  électrons  $\pi$  sont prisonniers d’un puits de potentiel infiniment profond, de longueur  $L$ .



1. La molécule représentée ci-dessus appartient à la famille des cyanines symétriques. En incluant les atomes d’azote, quel est, en fonction de  $p$ , le nombre  $N$  d’électrons délocalisés ?

On note  $\ell$  la longueur moyenne d'une liaison carbone-carbone ou carbone-azote. Dans son modèle, Kuhn propose  $L = N\ell$ .

2. Rappeler les valeurs des différents niveaux d'énergie en fonction de  $\hbar$ , de la masse de l'électron  $m_e$ , de  $L$ . On introduira un nombre quantique entier  $n$ .
3. On admet que les électrons se répartissent dans les différents niveaux d'énergie en respectant la **règle de Hund** et le **principe de Pauli**. Justifier que l'existence d'une bande d'absorption est due à une transition électronique entre le niveau d'énergie occupé le plus haut vers le niveau d'énergie libre le plus bas. Identifier ces deux niveaux.
4. En déduire l'expression de la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique absorbé en fonction de  $m$ ,  $c$ , de la constante de Planck  $h$ , de  $L$  et  $N$ .
5. Pour la famille des cyanines symétriques, les raies d'absorption ont été mesurées :

| $p$              | 2   | 3   | 4   | 4   | 5   |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\lambda_0$ (nm) | 313 | 416 | 519 | 625 | 735 |

On donne  $\ell = 0,139$  nm. Comparer ces valeurs expérimentales aux valeurs fournies par le modèle de Kuhn. Quelles peuvent être les origines des écarts constatés ?

#### 26.4 Courant tunnel (★)

Un faisceau d'électrons, correspondant à une intensité  $I = 0,1$  mA, est envoyé sur une barrière de potentiel de largeur  $d = 1,0$  nm et de hauteur  $V_0 = 2$  eV. L'énergie cinétique d'un électron incident est  $E = 1,0$  eV.

1. Peut-on se placer dans l'approximation d'une barrière épaisse ?
2. Estimer l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière.
3. Toutes choses égales par ailleurs, on remplace les électrons par des protons. Déterminer la nouvelle valeur de l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière.

#### 26.5 Fusion thermonucléaire au cœur du Soleil (★)

On envisage la **fusion thermonucléaire** de deux noyaux d'hydrogène. Le noyau incident, d'énergie  $E$ , doit traverser par effet tunnel une barrière de potentiel lié à la répulsion électrostatique avec l'autre noyau d'hydrogène.

On admet que le problème doit être traité en considérant une seule particule quantique, de masse  $\frac{m_p}{2}$ , où  $m_p = 1,7 \times 10^{-27}$  kg est la masse d'un proton, soumise à la même interaction électrostatique que celle qu'un noyau exerce sur l'autre. Pour obtenir un ordre de grandeur de la probabilité de traversée de la barrière de potentiel par effet tunnel, on utilise une expression analogue à la relation (26.14).

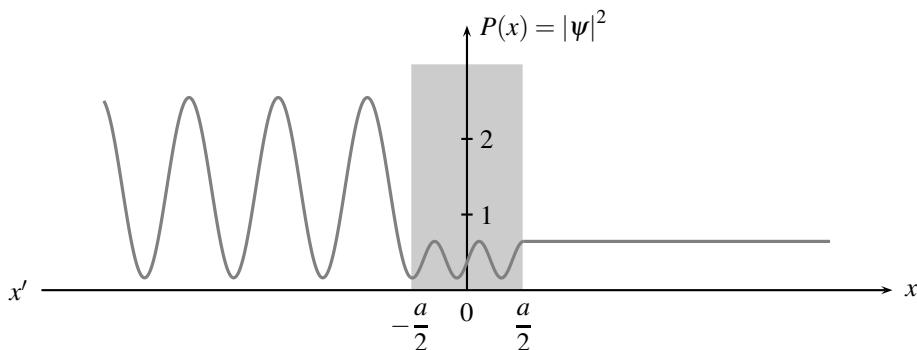
1. Adapter l'expression (26.14) à la situation étudiée.
2. Au centre du Soleil, la température est estimée à  $T_S = 1,5 \times 10^7$  K. En admettant que l'énergie de la particule quantique incidente est liée à l'agitation thermique au centre du soleil, son ordre de grandeur est donné par  $k_B T_S$ , où  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J·K<sup>-1</sup> est la constante de Boltzmann.

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

- a. Donner l’ordre de grandeur numérique de  $E$  et le comparer à la hauteur maximale de la barrière de potentiel. Commenter.
- b. Donner une estimation de la probabilité de fusion de ces deux noyaux. Combien de collisions faut-il en moyenne pour réaliser la fusion des deux noyaux ? Pourquoi dit-on que la température au centre du Soleil est suffisamment importante pour amorcer des réactions de fusion nucléaire en son cœur ?

**26.6 Évolution d’une particule quantique dans un potentiel inconnu (★★)**

Un faisceau de particules quantiques incidentes, de masse  $m$  et d’énergie  $E$ , provient de  $x \rightarrow -\infty$ . Chaque particule est astreinte à se déplacer le long de l’axe ( $x' Ox$ ). Elle est soumise à un champ de force qui dérive de l’énergie potentielle  $V(x)$ . On admet que cette énergie s’annule quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ . Sur le graphe suivant est représentée la densité de probabilité de présence  $P(x) = |\psi|^2$  d’une particule quantique. Les oscillations qui apparaissent sont sinusoïdales.



1. L’état de chaque particule quantique est-il un état « lié » ou un état de « diffusion » ?
2. Quelle interprétation peut-on donner aux oscillations de la densité de probabilité de présence pour  $x \leq 0$  ? Le même comportement est-il observable en mécanique classique ?
3. L’énergie potentielle  $V(x)$  de la particule est constante par morceaux. Déterminer son allure possible en fonction de  $x$ .
4. La fonction d’onde associée à cet état stationnaire est notée  $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ . Dans la mesure du possible, proposer une expression de  $\varphi(x)$  pour chacune des trois régions  $x \leq -a/2$ ,  $|x| \leq a/2$  et  $x \geq a/2$ . Donner les conditions de raccordement qui doivent être vérifiées en  $\pm a/2$ .

**26.7 Marche de potentiel (★★)**

On étudie le mouvement d’une particule quantique dans le potentiel  $V(x)$  (marche de potentiel) représenté sur la figure suivante et défini par :

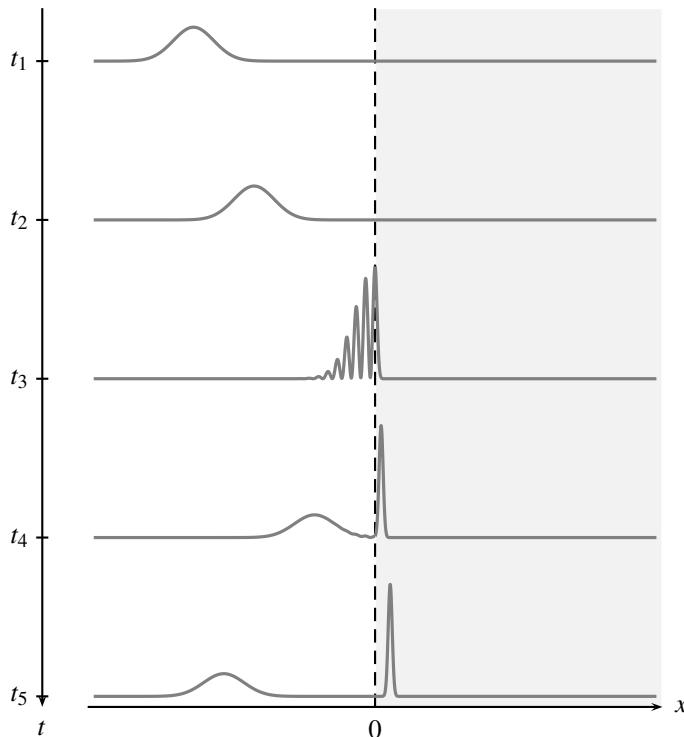
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ (région II).} \end{cases}$$

On envisage le cas d'une particule quantique incidente d'énergie  $E > V_0$ . On pose  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$ .

**1.** Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde propre :  $\phi(x) = A \exp(ik_1 x) + rA \exp(-ik_1 x)$  pour  $x < 0$  (région I) et  $\phi(x) = t \exp(ik_2 x)$  pour  $x \geq 0$  (région II), où  $A$  est une constante non nulle.

**2.** Écrire les relations de raccordement en  $x = 0$  et en déduire les expressions de  $r$  et de  $t$ . Examiner le cas où  $E \gg V_0$  et commenter.

**3.** En superposant des états stationnaires d'énergies voisines de  $E$ , on forme un **paquet d'ondes** représentant une particule quantique incidente. La figure 26.24 représente l'évolution dans l'espace et dans le temps de ce paquet d'ondes. La zone colorée correspond à la région II ( $x \geq 0$ ) où  $V(x) = V_0$ . Le temps s'écoule du haut vers le bas de la figure.



**Figure 26.24 –** Réflexion et transmission d'un paquet d'ondes sur une marche de potentiel.

Commenter aussi précisément que possible ces graphes.

**4.** Dans la situation où  $E < V_0$ , l'expression de la fonction d'onde propre dans la région I peut être conservée. Expliquer cependant comment est modifié  $k_2$  et par suite, le coefficient  $r$ . En déduire alors l'expression de la probabilité de réflexion  $R$  de la particule. Commenter.

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

**26.8 Enrichissement isotopique (★★)**

Cet exercice reprend les résultats établis dans l’exercice précédent.

On étudie le mouvement d’une particule quantique dans le potentiel  $V(x)$  (marche de potentiel) représenté sur la figure suivante et défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ (région II).} \end{cases}$$

Une source envoie, depuis  $-\infty$ , un faisceau de particules quantiques, constitué d’un mélange de deux isotopes. On souhaite utiliser le phénomène de réflexion sur la marche de potentiel pour modifier la composition isotopique du mélange.

**1.** Expliquer pourquoi il est nécessaire que l’énergie  $E$  des particules quantiques soit supérieure à la hauteur de la marche de potentiel  $V_0$  si l’on veut modifier la composition isotopique du mélange. Prévoir qualitativement si le faisceau réfléchi est plus riche ou plus pauvre en isotope de plus grande masse.

**2.** Les particules quantiques ont une masse  $m$  et une énergie  $E > V_0$ . En reprenant les résultats de l’exercice précédent, déterminer la probabilité de réflexion  $R$  d’une particule quantique par la marche de potentiel. Représenter l’allure de  $R$  en fonction de  $E$  pour  $E > V_0$ . Compléter ce graphe en représentant aussi  $R$  pour  $E < V_0$ .

**3.** On se place dans la limite où  $E \gg V_0$ .

**a.** Donner l’expression approchée de  $R$  correspondant à cette limite.

**b.** On note  $m_1$  et  $m_2$  les masses des deux isotopes qui forment le faisceau de particules quantiques incidentes. Toutes ces particules quantiques sont envoyées avec la même vitesse. Expliquer pourquoi les coefficients de réflexion  $R_1$  et  $R_2$  diffèrent pour les deux isotopes et exprimer le rapport  $R_1/R_2$  en fonction du rapport des masses  $m_1/m_2$ .

**c.** Le faisceau réfléchi est-il enrichi en isotope le plus lourd ou le plus léger ?

**26.9 Barrière de potentiel (★★)**

On cherche à déterminer certains états stationnaires d’une particule quantique de masse  $m$  évoluant dans le potentiel suivant (barrière de potentiel) :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{a}{2} \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ (région II),} \\ 0 & \text{pour } x > \frac{a}{2} \text{ (région III).} \end{cases}$$

On se limite au cas où  $E > V_0$ . On pose  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $K = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$ .

**1.** Décrire qualitativement le mouvement de la particule dans le cas où il peut être décrit dans le cadre de la mécanique classique.

**2.** Dans le cadre d'une description quantique, l'état de la particule est décrit par la fonction d'onde  $\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\varphi(x)$  dans chacune des trois régions.

**3.** En l'absence de source de particules quantiques du côté  $x > a/2$ , proposer une forme adéquate de  $\varphi(x)$  dans chacune des trois régions.

Préciser les conditions aux limites et les conditions de raccordement qui doivent être vérifiées par  $\varphi(x)$ .

**4.** Les conditions de raccordement permettent d'en déduire les expressions des probabilités de transmission au-delà de la barrière,  $T$ , et de réflexion par la barrière,  $R$ . On donne :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2 \left( \frac{a\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \right)}.$$

**a.** Déterminer l'expression de  $R$  à partir de l'expression de  $T$ .

**b.** Représenter l'allure de  $T$  et de  $R$  en fonction de  $E$  pour  $E > V_0$ . Commenter.

**5.** Des électrons d'énergie cinétique égale à 10 eV s'approchent d'une barrière de potentiel de 4 eV de haut. Déterminer les épaisseurs de la barrière pour laquelle la transmission du faisceau électronique est totale. Comparer, dans cette situation, l'épaisseur de la barrière à la longueur d'onde de de Broglie des électrons dans la barrière.

## APPROFONDIR

### 26.10 Molécule de benzène (★★★)

Les orbitales  $\pi$  de la molécule de benzène peuvent être modélisées de façon très approximative en considérant les fonctions d'onde et les énergies d'une particule quantique astreinte à se déplacer sur un cercle, de rayon  $a$ . On adopte une modélisation unidimensionnelle en supposant qu'une particule contrainte de se déplacer sur le cercle se déplace en fait sur le segment  $0 \leq x \leq 2\pi a$ , avec une énergie potentielle  $V(x) = 0$ . Un état stationnaire de cette particule est représenté par la fonction d'onde :  $\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ .

**1.** On cherche une fonction d'onde propre sous la forme  $\varphi(x) = A \exp(ikx)$ . Déterminer  $k$  et justifier qu'on peut choisir  $A$  réel. Normaliser cette fonction d'onde propre sur l'intervalle  $[0; 2\pi a]$ .

**2.** On adopte des conditions aux limites dites périodiques :  $\varphi(0) = \varphi(2\pi a)$ .

**a.** Interpréter ce choix.

**b.** Montrer qu'on aboutit à une quantification des niveaux d'énergie. On utilisera un nombre quantique, noté  $m$ . Interpréter pourquoi certains niveaux d'énergie sont doublement dégénérés (c'est-à-dire que deux valeurs distinctes de  $m$  conduisent à une même valeur de l'énergie).

**c.** Représenter sur un diagramme énergétique les premiers niveaux d'énergie.

**3.** On traite les 6 électrons  $\pi$  du benzène comme des particules quantiques astreintes à se déplacer sur un cercle de rayon  $a$ .

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

- a. Ces électrons occupent les niveaux d’énergie en respectant les règles de Hund et de Pauli. Représenter l’état fondamental du système sur un diagramme énergétique.
- b. Sachant que le benzène présente une bande d’absorption à 255 nm, en déduire une valeur numérique de  $a$ .
- c. Sachant que la longueur de la liaison C-C vaut 142 pm, commenter le résultat obtenu.

**26.11 Diffusion quantique par un puits de potentiel (☆☆)**

On étudie la diffusion d’une onde de matière sur un puits de potentiel de profondeur finie. Le puits de potentiel considéré vaut :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ (région I),} \\ -V_0 & \text{pour } 0 \leq x \leq d \text{ (région II),} \\ 0 & \text{pour } x > d \text{ (région III),} \end{cases}$$

avec  $V_0 > 0$ .

1. On commence par envisager le cas d’une particule *classique* d’énergie  $E = mv_0^2/2 > 0$  se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants (de  $x \rightarrow -\infty$  vers  $x \rightarrow +\infty$ ).

Décrire le mouvement de cette particule dans chacune des trois régions (on donnera en particulier la vitesse de déplacement de la particule classique dans chacune des trois régions).

2. On souhaite maintenant déterminer les états stationnaires d’une particule quantique, d’énergie  $E > 0$ , soumise à l’énergie potentielle  $V(x)$ . On pose  $\hbar q = \sqrt{2m(E + V_0)}$ .

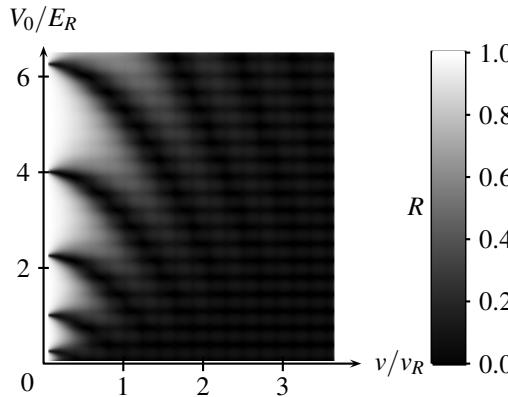
- a. Dans la région I, la fonction d’onde se met sous la forme :

$$\psi(x < 0, t) = (\exp(ikx) + r \exp(-ikx)) \exp(-iEt/\hbar).$$

Dans la région III, on écrit :  $\psi(x > d, t) = t \exp(ikx) \exp(-iEt/\hbar)$ . On admet que les constantes  $r$  et  $t$  sont réelles. La constante  $k$  est un réel positif.

Interpréter l’écriture proposée pour la fonction d’onde dans les régions I et III. Établir la relation liant la constante  $k$  à l’énergie  $E$ .

- b. Exprimer la fonction d’onde dans la région II en faisant intervenir  $q$ .
- 3. Écrire les relations de raccordement en  $x = 0$  et en  $x = d$ .
- 4. Donner, sans calcul, la relation liant  $|r|^2$  et  $|t|^2$ . Quel est son sens physique ?
- 5. Montrer que, dans la limite où  $E \rightarrow 0$ , on a  $r \rightarrow -1$  si l’on suppose  $\sin(qd) \neq 0$ . Ce résultat a-t-il un équivalent en mécanique classique ou est-il de nature purement quantique ?
- 6. Toujours dans la limite où  $E \rightarrow 0$ , que vaut  $r$  lorsque  $\sin(qd) = 0$  ?
- 7. La figure suivante représente la probabilité de réflexion  $R$  en fonction de la vitesse  $v$  de la particule et de la profondeur  $V_0$  du puits de potentiel. L’échelle spatiale caractéristique  $d$  permet de construire deux grandeurs  $v_R = h/m d$ , homogène à une vitesse, et  $E_R = mv_R^2/2$ , homogène à une énergie, qui permettent d’utiliser des variables sans dimensions  $v/v_R$  et  $V_0/E_R$ .



La couleur blanche correspond à une réflexion totale ( $R = 1$ ) et la couleur noire correspond à une transmission totale ( $T = 1$ ).

- Contrôler que les valeurs de  $R$  sur le graphe correspondent à l'analyse effectuée précédemment pour  $v \rightarrow 0$ .
- Interpréter la transmission totale à « grande » vitesse.
- On considère un faisceau incident de particules, dont les vitesses se distribuent entre  $0,2v_R$  et  $0,8v_R$ , avec une vitesse moyenne  $v = v_R/2$ . La profondeur du puits est ajustée à  $V_0 = 2E_R$ . Décrire la distribution des vitesses des particules transmises. Cette configuration réalise un filtre passe-haut de vitesse.
- Comment peut-on choisir la profondeur du puits de potentiel pour réaliser un filtre passe-bas avec la même distribution initiale des vitesses ?
- Ordres de grandeur* : ces filtres sélectifs de vitesse ont été développés par l'équipe de D. Guéry-Odelin, à l'Université Paul Sabatier de Toulouse [10]. Ce sont des atomes de rubidium qui sont utilisés, de masse  $m = 1,45 \times 10^{-25}$  kg, sur un réseau de puits de potentiel de largeur  $d = 660$  nm. Donner la valeur numérique de  $v_R$ , de  $E_R$  et de  $T_R = E_R/k_B$  (la constante  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J·K<sup>-1</sup> est la constante de Boltzmann).

### 26.12 Puits infini : état non stationnaire (★★★)

On étudie l'évolution d'une particule quantique, de masse  $m$ , piégée dans un puits de potentiel infini de largeur  $a$  :  $V(x) = 0$  pour  $0 < x < a$  et  $V(x) \rightarrow +\infty$  en dehors de cet intervalle.

On considère un état stationnaire de la particule quantique, d'énergie  $E_n$ , associé à une fonction d'onde de la forme :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right),$$

où  $n = 1, 2, 3, \dots$

- Donner la valeur de l'énergie  $E_n$ . On pose  $E_1 = \hbar\omega_0$ . Exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $a$ ,  $m$  et  $\hbar$ . Exprimer ensuite  $E_n$  en fonction de  $n$ ,  $\hbar$  et  $\omega_0$ .
- On considère l'état décrit par la fonction d'onde  $\psi_n(x, t)$  telle que  $\psi_n(x, t=0) = \varphi_n(x)$ . Donner l'expression de  $\psi_n(x, t)$  pour  $t > 0$ .

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

**3.** On considère maintenant l'état décrit par la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  telle que  $\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$ .

- En utilisant le résultat de la question précédente, donner l'expression de  $\psi(x, t)$  pour  $t > 0$ .
- On définit les deux états suivants :

$$\begin{aligned}\varphi_g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)), \\ \varphi_d(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)).\end{aligned}$$

Exprimer  $\psi(x, t)$  en fonction de  $\varphi_d(x)$  et  $\varphi_g(x)$ . En déduire l'expression de la densité de probabilité de présence  $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ . Montrer qu'elle oscille à une fréquence  $\nu$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_0$  et  $h$ , puis en fonction de  $E_2$ ,  $E_1$  et  $h$ .

- Représenter l'allure de  $\varphi_d(x)$ , de  $\varphi_g(x)$  et des densités de probabilités de présence associées. En déduire l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule quantique en fonction du temps.

### 26.13 Étoile à neutrons (★★)

Une **étoile à neutrons** se forme à la suite de l'explosion d'une supernova (forme ultime de l'évolution d'une étoile très massive). Elle est caractérisée par un faible diamètre (de l'ordre de la dizaine de kilomètres) et une masse comparable à celle du Soleil. Il en résulte qu'elle forme un astre très dense.

On considère une étoile à neutrons de masse  $M = 2,0 \times 10^{30}$  kg, exclusivement constituée de neutrons de masse  $m = 1,7 \times 10^{-27}$  kg. On suppose que la densité de neutrons est uniforme à l'intérieur de l'étoile, qui est assimilée à une boule de rayon  $R$ . Les neutrons forment un gaz de particules quantiques sans interaction.

**1.** Calculer le nombre  $N$  de neutrons dans l'étoile.

**2.** On admet que l'énergie cinétique de chaque neutron peut être évaluée en supposant qu'il est confiné dans un volume  $V/N$ , où  $V$  est le volume de l'étoile.

**a.** Exprimer l'échelle de longueur caractéristique du confinement d'un neutron en fonction de  $V$  et  $N$ .

**b.** En déduire que l'énergie cinétique totale des neutrons s'écrit, à une constante multiplicative près, sous la forme suivante :

$$E_c \simeq \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}.$$

**3.** Du fait de l'attraction gravitationnelle que les neutrons exercent entre eux, l'étoile possède une énergie de cohésion gravitationnelle  $E_g$  qui s'exprime simplement en fonction de la constante de gravitation universelle  $G$ , de sa masse  $M$  et de son rayon  $R$ .

Déterminer, par analyse dimensionnelle, une expression de  $E_g$  (à une constante multiplicative près). On précisera le signe à donner à  $E_g$ .

**4.** Représenter l'allure de l'énergie totale de l'étoile  $E = E_c + E_g$  et montrer qu'il existe un rayon d'équilibre stable pour l'étoile. Calculer ce rayon d'équilibre et en déduire la masse volumique de l'étoile.

**5.** Comparer cette masse volumique à celle d'un noyau atomique, qu'on peut assimiler à une distribution de masse sphérique de densité uniforme et de rayon  $r = r_0 A^{1/3}$  où  $A$  est le nombre de nucléons du noyau et  $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}$  m.

#### 26.14 Du puits de profondeur infinie au puits de profondeur finie (\*\*)

Considérons un puits de potentiel infini, compris entre  $-a/2$  et  $a/2$ . Les niveaux d'énergie successifs d'une particule quantique de masse  $m$  piégée dans ce puits sont notés  $E_n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ . On propose dans cet exercice d'utiliser la distance caractéristique  $\delta$  d'atténuation de l'amplitude de la fonction d'onde dans une région interdite par la mécanique classique, pour modifier l'énergie  $E_n$  de façon à reproduire l'extension de la fonction d'onde au-delà de  $\pm a/2$  lorsque le puits de potentiel devient de hauteur finie  $V_0$ .

Pour simplifier les calculs, on exprimera toutes les valeurs de l'énergie en unités de  $\frac{\hbar^2}{ma^2}$ , c'est-à-dire qu'on exprimera les valeurs de l'énergie  $E$  en donnant la valeur numérique de  $\frac{ma^2}{\hbar^2}E$ .

**1.** Donner les valeurs numériques de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .

**2.** Pour mettre en place le processus d'itération, on pose  $\delta_n = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E_n)}}$ .

Calculer  $\delta_1$  et  $\delta_2$  en fonction de  $a$  pour  $V_0 = 32 \frac{\hbar^2}{ma^2}$ .

**3.** Pour traduire la délocalisation de la fonction d'onde, on élargit le puits de potentiel infini en utilisant une largeur effective  $a'_n = a + 2\delta_n$ .

Calculer les nouvelles valeurs numériques de l'énergie  $E'_1$  et  $E'_2$ .

**4.** On propose d'effectuer une seconde itération.

**a.** Exprimer  $\delta'_n$  en fonction de  $E'_n$  et poser  $a''_n = a + 2\delta'_n$  pour  $1 \leq n \leq 2$ .

**b.** Calculer les valeurs numériques de  $E''_n$  pour  $1 \leq n \leq 2$ .

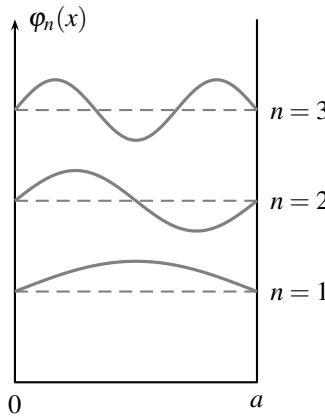
**5.** Expliquer pourquoi ce processus est inopérant pour le niveau  $n = 3$ .

**6.** Écrire un programme dans le langage Python, basé sur ce processus itératif et qui permet d'obtenir les valeurs numériques approchées des deux premiers niveaux d'énergie du puits de profondeur fini étudié, ainsi que les valeurs numériques approchées de  $\delta_n/a$  pour chacun des deux niveaux d'énergie.

## CORRIGÉS

## 26.1 Niveaux d'énergie du puits de potentiel infiniment profond

1. L'allure de la fonction d'onde propre pour les 3 premiers niveaux d'énergie est représentée sur la figure suivante.



2. • Pour le niveau  $n = 1$  : on constate qu'on obtient une demi-longueur d'onde sur la largeur du puits :  $\frac{\lambda_{DB_1}}{2} = a$ .

- Pour le niveau  $n = 2$  : sur la largeur du puits, on obtient une longueur d'onde :  $\lambda_{DB_2} = a$ .
- Pour le niveau  $n = 3$  : sur la largeur du puits, on obtient une longueur d'onde et une demi-longueur d'onde :  $\frac{3}{2}\lambda_{DB_3} = a$ .

À l'intérieur du puits, l'énergie potentielle de la particule quantique est nulle. L'énergie de la particule se confond donc avec son énergie cinétique :  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m\lambda_{DB}^2}$ . On obtient donc :

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}; E_2 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \text{ et } E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

3. Les expressions précédentes de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  s'accordent avec la relation suivante :

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

## 26.2 Émission d'un photon

La différence des énergies des niveaux  $n = 2$  et  $n = 1$  est :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2m_e^* a^2}.$$

La longueur  $\lambda$  d'onde de l'onde électromagnétique émise lorsque l'électron passe du niveau  $n = 2$  au niveau  $n = 1$  est telle que :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2m_e^*a^2} \implies \lambda = \frac{4m_e^*ca^2}{3\pi\hbar} = 3,3 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Il s'agit d'un rayonnement infrarouge.

### 26.3 Colorants organiques et modèle de Kuhn

**1.** Les électrons délocalisés correspondent aux électrons  $\pi$  des  $p + 1$  liaisons doubles et au doublet non liant de l'atome d'azote :  $N = 2p + 4$ .

**2.** L'analogie avec la corde vibrante se base sur une représentation graphique de la fonction d'onde propre. On en déduit ensuite le lien entre la longueur d'onde de de Broglie et la largeur du puits. C'est l'objet du premier exercice dont nous utilisons directement les résultats :

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}.$$

**3.** Selon la règle de Pauli, on peut placer au plus deux électrons par niveaux d'énergie. Le nombre d'électrons  $N = 2p + 4$  est pair : ils remplissent  $p + 2$  niveaux d'énergie. Le dernier électron est placé sur le niveau  $p + 2$ . Le niveau d'énergie occupé le plus haut est repéré par l'indice  $p + 2$  et le niveau d'énergie libre le plus bas correspond à l'indice  $p + 3$ .

**4.** On considère la transition électronique entre ces deux niveaux. La longueur d'onde  $\lambda_p$  du rayonnement électromagnétique associé à cette transition vérifie la relation :

$$\frac{hc}{\lambda_p} = E_{p+3} - E_{p+2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2} ((p+3)^2 - (p+2)^2) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2} (2p+5).$$

D'où :

$$\lambda_p = \frac{4m_e c L^2}{(2p+5)\pi\hbar} = \frac{8m_e c \ell^2}{h} \frac{N^2}{N+1}.$$

**5.** Le tableau ci-dessous reprend les valeurs fournies dans l'énoncé et on y a rajouté dans la dernière ligne les valeurs des longueurs d'onde calculées à partir de la relation établie à la question précédente :

| $p$                          | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\lambda_{\text{exp}}$ (nm)  | 313 | 416 | 519 | 625 | 735 |
| $\lambda_{\text{Kuhn}}$ (nm) | 328 | 453 | 579 | 706 | 833 |

Compte tenu de la simplicité des arguments invoqués, l'accord entre les valeurs mesurées et les valeurs théoriques est satisfaisant.

### 26.4 Courant tunnel

**1.** Commençons par calculer la distance de pénétration dans la barrière :  $\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = 1,9 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Le rapport  $d/\delta$  vaut un peu plus de 5. On peut donc considérer que la barrière est épaisse.

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

**2.** La valeur approchée de la probabilité de transmission est  $T \simeq 3 \exp\left(-\frac{2d}{\delta}\right) = 1,0 \times 10^{-4}$

(en tenant compte du préfacteur  $\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}$  on obtient  $T = 1,4 \times 10^{-4}$ , l'expression approchée donne donc le bon ordre de grandeur). L'intensité du courant transmis s'obtient en faisant le produit de l'intensité du courant incident et de la probabilité de transmission :  $I_{\text{transmis}} = TI = 10 \text{ nA}$ .

**3.** Remplacer les électrons par des protons revient à modifier la masse dans l'expression de la distance de pénétration :  $\delta' = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_p(V_0 - E)}} = 4,5 \times 10^{-12} \text{ m}$ . La barrière peut toujours être

considérée comme épaisse. On obtient :  $T' = 3 \exp\left(-\frac{2d}{\delta'}\right) = 1,7 \times 10^{-191}$ . La probabilité de transmission est très faible. Le calcul donne un courant transmis si faible qu'on peut le considérer comme nul.

### 26.5 Fusion thermonucléaire au cœur du Soleil

**1.** On envisage la fusion de deux protons. La formule (26.14) peut être adaptée comme suit à la situation envisagée :

$$\ln T = -\frac{\pi RV_m}{\hbar} \sqrt{\frac{m_p}{E}} + 2R \frac{\sqrt{V_m m_p}}{\sqrt{2}\hbar},$$

avec  $V_m = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$  et  $R \simeq r_0 = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ .

**2. a.** L'énergie d'agitation thermique  $E$  de la particule quantique est :  $E = 2 \times 10^{-16} \text{ J}$ . La hauteur maximale de la barrière de potentiel correspond à la valeur de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique à une distance  $r_0$  : il s'agit de  $V_m$ . On obtient :  $V_m = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 2 \times 10^{-13} \text{ J}$ . On constate que  $E \ll V_m$  : du point de vue de la mécanique classique, les deux protons ne peuvent pas fusionner.

**b.** En utilisant la relation ci-dessus, on peut obtenir une estimation numérique de  $T$  :  $T = 3 \times 10^{-9}$ . Il faut donc en moyenne  $\frac{1}{T} = 3 \times 10^8$  collisions pour réaliser la fusion des deux noyaux. Pour des températures plus faibles, l'énergie  $E$  est réduite et la probabilité  $T$  est considérablement diminuée, rendant le processus de fusion beaucoup moins probable.

### 26.6 Évolution d'une particule quantique dans un potentiel inconnu

La figure fait apparaître trois régions :  $x \leq a/2$  correspond à la région I,  $|x| \leq a/2$  à la région II et  $x \geq a/2$  à la région III.

**1.** La probabilité de présence s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$  : la particule est dans un état de diffusion.

**2.** Les oscillations de la densité de probabilité de présence dans la région I correspondent à des interférences quantiques qui résultent de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Ce comportement n'existe pas en mécanique classique.

**3.** Dans chacune des trois régions, on peut définir  $k = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$  où  $E$  est l'énergie de la particule et  $V$  la valeur de l'énergie potentielle dans la région considérée.

- Dans la région I, la période spatiale des interférences quantiques, à savoir  $\frac{\pi}{k}$ , est invariable : comme  $E$  est fixée, on en déduit que  $V$  est uniforme et égal à sa valeur en  $-\infty$ , qui est nulle d'après l'énoncé.
- Dans la région II, les oscillations sont caractérisées par une période spatiale plus faible. Cela correspond à une augmentation de  $k$ , et donc à une diminution de l'énergie potentielle. L'énergie potentielle de la particule est donc négative pour  $|x| \geq \frac{a}{2}$ . Notons  $-V_0$  cette valeur (avec  $V_0 \geq 0$ ).
- Dans la région III, la probabilité de présence est uniforme. C'est celle d'une onde plane progressive. L'énergie potentielle de la particule est donc uniforme pour  $x \geq \frac{a}{2}$  et égale à sa valeur en  $+\infty$ , qui est nulle selon l'énoncé.

La situation étudiée correspond donc à la diffusion de particules quantiques par un puits de potentiel fini, de profondeur  $V_0$ . On peut évaluer la profondeur du puits, en comparant les valeurs de  $k$  dans les régions I ( $x \leq a/2$ ) II ( $|x| \leq a/2$ ). En effet, à partir de  $k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  et  $k_{II}^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}$ , on obtient :  $V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}(k_{II}^2 - k_I^2)$ .

#### Remarque

Le profil d'énergie potentielle peut être complètement déterminé ici car, en plus du graphe, l'énoncé donne des informations complémentaires (énergie potentielle constante par morceaux et nulle à l'infini). Dans le cas général, la connaissance de la densité de probabilité de présence ne permet pas de déterminer complètement l'énergie potentielle.

- Pour la fonction d'onde propre, on peut proposer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Région I : } & \quad \varphi_I(x) = A_1 \exp(ik_I x) + B_1 \exp(-ik_I x) \\ \text{Région II : } & \quad \varphi_{II}(x) = A_2 \exp(ik_{II} x) + B_2 \exp(-ik_{II} x) \\ \text{Région III : } & \quad \varphi_{III}(x) = A_3 \exp(ik_{III} x), \end{aligned}$$

où  $k_I = k_{III} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$ . En  $x = \pm a/2$ , on doit assurer la continuité de la fonction d'onde propre, ainsi que la continuité de sa dérivée première puisque les discontinuités d'énergie potentielle sont d'amplitude finie.

#### 26.7 Marche de potentiel

- On note  $\varphi(x)$  la fonction d'onde propre associée à un état stationnaire de la particule quantique d'énergie  $E$ . L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit ainsi dans les deux régions :

$$\begin{aligned} \text{Région I : } & \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x), \\ \text{Région II : } & \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V_0\varphi(x) = E\varphi(x). \end{aligned}$$

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

ou encore :

$$\text{Région I : } \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k_1^2\varphi(x) = 0,$$

$$\text{Région II : } \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k_2^2\varphi(x) = 0,$$

avec  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$ . On en déduit l'expression de la fonction d'onde propre dans chacune des deux régions :

$$\text{Région I : } \varphi(x) = A \exp(ik_1x) + rA \exp(-ik_1x),$$

$$\text{Région II : } \varphi(x) = tA \exp(ik_2x).$$

En l'absence de source en  $+\infty$  émettant des particules de vers  $-\infty$ , on peut supposer qu'on n'a, dans la région II, qu'une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, qui correspond à l'onde transmise.

**2.** Les conditions des raccordement en  $x = 0$  correspondent à la continuité de la fonction d'onde propre et à la continuité de sa dérivée première puisque la discontinuité du potentiel en  $x = 0$  est d'amplitude finie. On obtient :

$$\varphi(x = 0^-) = \varphi(x = 0^+) \implies A(1+r) = At,$$

$$\varphi'(x = 0^-) = \varphi'(x = 0^+) \implies ik_1A(1-r) = ik_2tA.$$

Comme  $A$  est non nul, on en déduit :  $1+r=t$  et  $1-r=\frac{k_2}{k_1}t$ . En résolvant ce système, on arrive aux expressions suivantes de  $r$  et de  $t$  :

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

Dans le cas où  $E \gg V_0$ , on obtient  $k_1 \simeq k_2$  et alors  $r \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow 1$ . On retrouve la situation de la mécanique classique : la particule poursuit son mouvement du côté  $x > 0$ .

- 3.** • Aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , on observe sur l'approche du paquet d'ondes incident sur la marche de potentiel. Sa vitesse de déplacement est égale à la vitesse de groupe  $\frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x$ .
- À l'instant  $t_3$ , on observe les interférences quantiques entre l'onde incidente et l'onde réfléchie, au voisinage de la barrière où ces deux ondes se superposent. La période spatiale des interférences est égale à une demi-longueur d'onde de de Broglie de la particule.
- À l'instant  $t_4$ , on observe que le paquet d'ondes incident s'est dissocié en un paquet d'ondes réfléchi et un paquet d'ondes transmis du côté  $x > 0$ . Les amplitudes maximales des ondes réfléchies et transmises est déterminée par les probabilité de réflexion et de transmission.
- De l'instant  $t_4$  à l'instant  $t_5$ , on observe le déplacement des paquets d'ondes réfléchi et transmis. On peut constater que le paquet d'ondes transmis se déplace à une vitesse inférieure à celle du paquet d'ondes réfléchi. C'est en accord avec la diminution de l'énergie cinétique de la particule du côté  $x > 0$  qui est consécutive à l'augmentation de l'énergie potentielle.

**4.** Dans la situation où  $E < V_0$ , on constate que  $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} < 0$ . On peut donc écrire  $k_2 = iq$ , avec  $q > 0$ , de sorte que  $\varphi(x > 0) = tA \exp(-qx)$  (on vérifie que le choix du signe de  $q$  est tel que  $\varphi(x > 0)$  ne diverge pas à l'infini comme il se doit). Le coefficient de réflexion  $r$  pour l'amplitude de probabilité devient :

$$r = \frac{k_1 - iq}{k_1 + iq}.$$

On remarque qu'alors  $|r| = 1$ , ce qui conduit à  $R = 1$ .

Dans la situation où  $E < V_0$ , la particule quantique est forcément réfléchie par la barrière de potentiel. Néanmoins, sa probabilité de présence dans la barrière de potentiel, région interdite par les lois de la mécanique classique, est non nulle. La probabilité de présence s'étend dans la barrière de potentiel sur une distance  $1/(2q)$ .

## 26.8 Enrichissement isotopique

**1.** Dans le cas où l'énergie  $E$  des particules est inférieure à la hauteur de la marche de potentiel, toutes les particules sont réfléchies, quelle que soit leur masse. Il est alors impossible d'obtenir un comportement pour les différents isotopes.

Pour une énergie  $E$  supérieure à la hauteur de la barrière, il apparaît un phénomène de réflexion et de transmission. Le phénomène de réflexion qui apparaît dans cette situation n'a pas d'équivalent classique. Comme les effets quantiques sont toujours plus marqués pour les particules quantiques de masse plus faible, on en déduit que la probabilité de réflexion de celles-ci est plus grande. Autrement dit, le faisceau transmis sera enrichi en isotope de plus grande masse et le faisceau réfléchi sera appauvri en isotope de plus grande masse.

**2.** Dans l'exercice précédent, nous avons obtenu l'expression du coefficient de réflexion pour l'amplitude de probabilité sous la forme :  $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$  avec  $\hbar k_1 = \sqrt{2mE}$  et  $\hbar k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}$ . On en déduit la probabilité de réflexion :

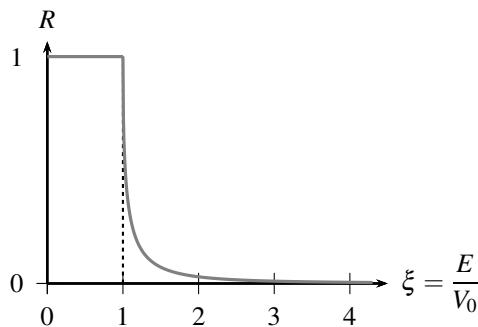
$$R = |r|^2 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \right)^2.$$

En posant  $\xi = \frac{E}{V_0}$ , on peut écrire :

$$R(\xi) = \left( \frac{2\xi - 2\sqrt{\xi(\xi - 1)} - 1}{2\xi + 2\sqrt{\xi(\xi - 1)} - 1} \right).$$

Pour  $E < V_0$  (*i.e.*  $\xi < 1$ ), nous avons montré dans l'exercice précédent que  $R = 1$ . Le graphe de  $R(\xi)$  en fonction de  $\xi$  est représenté ci-dessous.

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL



**3. a.** On considère la limite où  $E \gg V_0$ , c'est-à-dire la limite où  $\xi \gg 1$ . Dans cette limite :  $2\sqrt{\xi(\xi-1)} = 2\xi\sqrt{1-\frac{1}{\xi}} = 2\xi\left(1 - \frac{1}{2\xi} - \frac{1}{8\xi^2} + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right)\right) \simeq 2\xi - 1 - \frac{1}{4\xi}$ . On en déduit :

$$R = \frac{2\xi - 2\xi\sqrt{1-\frac{1}{\xi}} - 1}{2\xi + 2\xi\sqrt{1-\frac{1}{\xi}} - 1} \simeq \frac{\frac{1}{4\xi}}{\frac{1}{4\xi}} = \frac{1}{16\xi^2}.$$

D'où :  $R \simeq \frac{V_0^2}{16E^2}$ .

**b.** La vitesse des particules correspond à  $v = \frac{\hbar k}{m} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ . Si toutes les particules ont la même vitesse, comme leurs masses diffèrent, alors leurs énergies diffèrent. Aux particules de masse  $m_1$ , on associe l'énergie  $E_1$  et aux particules de masse  $m_2$ , l'énergie  $E_2$ . Dans la limite discutée à la question précédente, on peut calculer le rapport des probabilités de réflexion :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{E_2^2}{E_1^2} = \left(\frac{\frac{1}{2}m_2v^2}{\frac{1}{2}m_1v^2}\right)^2 = \frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

Si  $m_1 > m_2$ , alors on obtient  $R_1 < R_2$  : les particules de masse plus importante ont une probabilité de réflexion plus faible. On en déduit que le faisceau réfléchi est enrichi en isotope de masse la plus faible, conformément à l'analyse qualitative de la première question.

### 26.9 Barrière de potentiel

**1.** Une particule classique d'énergie  $E > V_0$  est en mouvement rectiligne uniforme dans chacune des trois régions. Lorsqu'elle passe dans la région II, son énergie cinétique est diminuée. Elle retrouve son énergie cinétique initiale quand elle passe dans la région III.

**2.** L'équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde propre dans chacune des trois ré-

gions est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Région I : } & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x), \\ \text{Région II : } & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V_0\varphi(x) = E\varphi(x), \\ \text{Région III : } & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x). \end{aligned}$$

**3.** En l'absence de sources de particules dans la région III, on peut proposer les solutions suivantes :

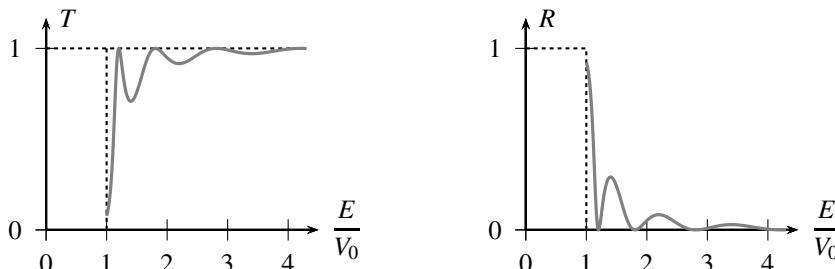
$$\begin{aligned} \text{Région I : } & \varphi(x) = A \exp(ikx) + rA \exp(-ikx), \\ \text{Région II : } & \varphi(x) = \alpha \exp(iKx) + \beta \exp(-iKx), \\ \text{Région III : } & \varphi(x) = tA \exp(ikx). \end{aligned}$$

Comme le potentiel présente des discontinuités d'amplitude finie en  $\pm\frac{a}{2}$ , on doit écrire la continuité de la fonction d'onde propre en  $\pm a/2$ , mais aussi la continuité de sa dérivée première.

**4. a.** On utilise la relation  $R + T = 1$  qui traduit qu'une particule quantique est soit réfléchie, soit transmise par la barrière, sans autre possibilité. On en déduit :

$$R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\right)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\right)}.$$

**b.** Les deux graphes suivants donnent l'allure de  $R$  et  $T$  en fonction de la variable  $\xi = E/V_0$ , pour une valeur de  $\frac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar} = 7$ .



On constate, que contrairement à ce prévoient les lois de la mécanique classique, la probabilité de transmission de la particule n'est pas identiquement égale à 1. De même, l'existence d'une probabilité de réflexion non nulle est un effet purement quantique. On constate qu'il existe des valeurs discrètes de l'énergie pour lesquelles on a néanmoins  $T = 1$  et  $R = 0$ .

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

Lorsque l'énergie des particules quantiques devient élevée, les effets quantiques sont gommés : les probabilités de réflexion et de transmission tendent vers leurs valeurs classiques respectives.

**5.** Pour  $E \neq V_0$ , la transmission est totale lorsque  $T = 1$ , ce qui est réalisé lorsque :

$$\sin^2\left(\frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\right) = 0 \implies \frac{a\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = n\pi,$$

où  $n$  est un entier. Calculons la longueur de de Broglie des électrons dans la barrière :

$$\lambda_{DB} = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-V_0)}}.$$

On peut donc écrire la condition de transmission totale sous la forme suivante :  $a = n \frac{\lambda_{DB}}{2}$ .

L'application numérique donne :  $\lambda_{DB} = 5,0 - 10$  m. Cela donne  $a = n \times 0,25$  nm.

### 26.10 Molécule de benzène

**1.** La fonction d'onde propre vérifie l'équation différentielle :  $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$ . En injectant la solution proposée, on trouve  $k = \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ . Ces deux valeurs correspondent aux deux sens de propagation possibles. On peut choisir  $A$  réel, car un éventuel argument de  $A$  peut être compensé par une modification de l'origine des temps. Posons  $A = |A| \exp(i\theta)$ . Alors :

$$A \exp(ikx - i\frac{E}{\hbar}t) = |A| \exp(ikx - i\frac{E}{\hbar}t + i\theta) = |A| \exp(ikx - i\frac{E}{\hbar}(t - t_0)),$$

où l'on a posé  $\theta = \frac{E}{\hbar}t_0$ . Quitte à choisir convenablement l'origine des temps, on peut supposer que  $A$  est une constante réelle.

Normalisons maintenant cette fonction d'onde sur l'intervalle considéré :

$$\int_0^{2\pi a} |\varphi(x)|^2 dx = 1 \implies A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}.$$

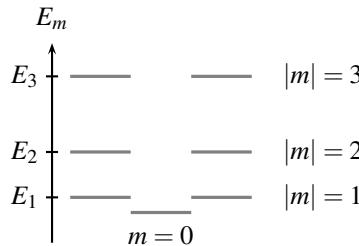
**2. a.** La prise en compte de conditions aux limites périodiques permet de rendre compte de la possibilité qu'a la particule quantique de tourner sans cesse le long du cercle.

**b.** Exprimons cette condition :  $\varphi(0) = \varphi(2\pi a)$  conduit à  $A = A \exp(2i\pi ka)$ , soit :  $2\pi ka = 2m\pi$ , ou encore  $k_m = \frac{m}{a}$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . L'énergie de la particule  $E$  est donnée par la relation :  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . Comme  $k$  est quantité, les énergies de la particule sont aussi quantifiées :

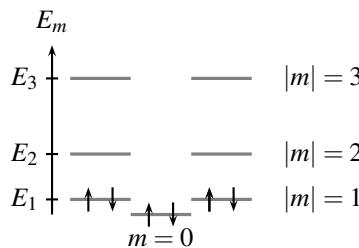
$E_m = m^2 \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ , avec  $m \in \mathbb{Z}$ . À l'exception de  $m = 0$ , les valeurs  $m$  et  $-m$  correspondent à la même valeur de l'énergie  $E_m$  et à des valeurs opposées de  $k$ . Autrement dit, à chaque valeur d'énergie  $E_m$ , pour  $m$  non nul, correspondent deux états stationnaires qui correspondent

à deux ondes se propageant dans des sens opposés le long du cercle. À ces deux états stationnaires correspondent en fait deux valeurs opposées du moment cinétique orbital de la particule quantique.

c. Le graphe suivant représente les premiers niveaux d'énergie, en tenant compte de leur dédoublement.



3. a. Les électrons remplissent les niveaux d'énergie en respectant les règles de Hund et de Pauli. On obtient alors le diagramme suivant :



b. La transition d'énergie la plus faible correspond à une transition du niveau  $m = 1$  au niveau  $m = 2$  (ou du niveau  $m = -1$  au niveau  $m = -2$ ). On en déduit l'énergie correspondante, et la longueur d'onde  $\lambda_0$  du rayonnement électromagnétique correspondant :

$$\Delta E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} = E_2 - E_1 = \frac{3\hbar^2}{2ma^2} \implies a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\hbar\lambda}{2mc}}.$$

On en déduit que :  $a = 153$  pm. Malgré l'extrême simplicité des arguments utilisés, on constate que le modèle est en bon accord avec les valeurs expérimentales.

### 26.11 Diffusion quantique par un puits de potentiel

1. Au sens de la mécanique classique :

- dans la région I, la particule a une énergie cinétique égale à  $E$  et son mouvement est rectiligne uniforme.
- dans la région II, l'énergie potentielle de la particule est  $-V_0$ . La conservation de l'énergie donne :  $E = E_{cII} - V_0$ , ce qui donne :  $E_{cII} = E + V_0$ . La particule a donc une énergie supérieure dans la zone II et sa vitesse est :  $v_{II} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2V_0}{m}}$ . Le mouvement de la particule est toujours rectiligne et uniforme.

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

- dans la région III, la particule retrouve la même énergie cinétique et la même vitesse  $v_0$  que dans la région I.

**2. a.** Dans la région I, la fonction d'onde proposée fait apparaître une onde incidente et une onde réfléchie. Dans la région III, l'écriture proposée correspond à une onde transmise. Dans la région I, la fonction d'onde propre  $\varphi(x)$  vérifie l'équation différentielle :  $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$ . En injectant la forme proposée  $\varphi(x) = \exp(ikx) + r\exp(-ikx)$  dans

cette équation, on obtient :  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  (on ne retient que la solution positive puisque selon l'énoncé  $k$  est un réel positif).

- b.** Dans la région II, la fonction d'onde propre vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}\varphi(x) = 0 \text{ soit : } \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + q^2\varphi(x) = 0.$$

On peut écrire la solution sous la forme suivante :  $\varphi(x) = A\exp(iqx) + B\exp(-iqx)$ .

**3.** En  $x = 0$  et en  $x = d$ , on doit écrire la continuité de la fonction d'onde propre et de sa dérivée première car le potentiel y présente des discontinuités d'amplitude finie. Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + r &= A + B, \\ k(1 - r) &= q(A - B), \\ A\exp(iqd) + B\exp(-iqd) &= t\exp(ikd), \\ q\left(A\exp(iqd) - B\exp(-iqd)\right) &= kt\exp(ikd). \end{aligned}$$

**4.** Une particule incidente est soit réfléchie, soit transmise, sans autre possibilité. Ceci se traduit par la relation :  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ .

- 5.** On considère le cas où  $k \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $k \rightarrow 0$ . Les relations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} 1 + r &= A + B, \\ 0 &= q(A - B), \\ A\exp(iqd) + B\exp(-iqd) &= t, \\ q\left(A\exp(iqd) - B\exp(-iqd)\right) &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation impose  $A = B$ . La dernière relation donne alors  $2iqA\sin(qd) = 0$ . Comme on suppose  $\sin(qd) \neq 0$ , on obtient nécessairement que  $A = 0$ , et donc  $B = 0$ . La première équation impose alors  $r = -1$ . Dans cette situation, la probabilité de réflexion tend vers 1 : c'est un effet purement quantique, sans équivalent classique.

**6.** On reprend le raisonnement précédent en supposant que  $\sin(qd) = 0$ . Alors  $\cos(qd) = \pm 1$ . La troisième équation donne  $t = 2A\cos(qd) = \pm 2A$ . La première équation donne  $1 + r = 2A = \pm t$ . On en déduit que  $(1 + r)^2 = t^2$ , soit  $1 + 2r + r^2 = 1 - r^2$ . On en déduit que  $r = 0$ .

**7. a.** Pour  $v \rightarrow 0$ , on constate que la probabilité de réflexion  $R$  s'annule pour des valeurs discrètes de  $\frac{V_0}{E_R}$ . Nous avons vu à la question précédente que  $r \rightarrow 0$  lorsque  $v \rightarrow 0$  dans le

cas où  $\sin(qd) = 0$ . Cette relation se traduit par :  $\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}d = n\pi$ , soit encore :  $\sqrt{\frac{V_0}{E_R}} = \frac{n}{2}$ , ou enfin :  $\frac{V_0}{E_R} = \frac{n^2}{4}$ . Sur la figure proposée, on distingue clairement que  $R = 0$  lorsque  $v \rightarrow 0$  et  $\frac{V_0}{E_R} = \frac{n^2}{4}$ .

**b.** À grande vitesse, l'énergie  $E$  devient très supérieure à  $V_0$  et les effets quantiques sont progressivement gommés. On retrouve le comportement classique correspondant à  $T \rightarrow 1$ .

**c.** En lisant la figure, on constate que les particules de vitesses approximativement comprises entre  $0,2v_R$  et  $0,5v_R$  sont plus probablement réfléchies alors que les particules de vitesses comprises entre  $0,5v_R$  et  $0,8v_R$  sont plus probablement transmises.

**d.** Pour obtenir un filtre passe-bas en vitesse, on peut régler la profondeur du puits de potentiel à  $V_0 = E_R$ .

**e. Ordres de grandeur :** avec les valeurs proposées, on trouve :  $v_R = 7,0 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ;  $E_R = 3,5 \times 10^{-30} \text{ J}$  et  $T_R = 0,25 \mu\text{K}$ . Afin de réaliser de telles expériences, il est nécessaire de ralentir au préalable considérablement les atomes de rubidium.

## 26.12 Puits infini : état non stationnaire

**1.** Pour  $0 < x < a$ , la fonction d'onde propre vérifie l'équation différentielle :  $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$ . En injectant dans cette équation l'expression de  $\varphi_n(x)$ , on obtient :

$$-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\varphi_n(x) + \frac{2mE_n}{\hbar^2}\varphi(x) = 0.$$

On en déduit :  $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ . L'énergie du niveau  $n = 1$  est  $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \hbar\omega_0$  avec  $\omega_0 = \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$ . On peut alors écrire :  $E_n = n^2\hbar\omega_0$ .

**2.** La fonction d'onde telle que  $\psi_n(x, t=0) = \varphi_n(x)$  s'écrit, à l'instant  $t > 0$  :  $\psi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$ , soit :  $\psi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp(-in^2\omega_0 t)$

**3.** On considère maintenant la fonction d'onde, telle qu'à  $t = 0$  :  $\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$ .

**a.** On utilise le résultat de la question précédente pour écrire que, pour  $t > 0$  :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) \exp(-i\omega_0 t) + \varphi_2(x) \exp(-4i\omega_0 t)).$$

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

**b.** On peut écrire que  $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_g(x) + \varphi_d(x))$  et  $\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_g(x) - \varphi_d(x))$ . On en déduit :

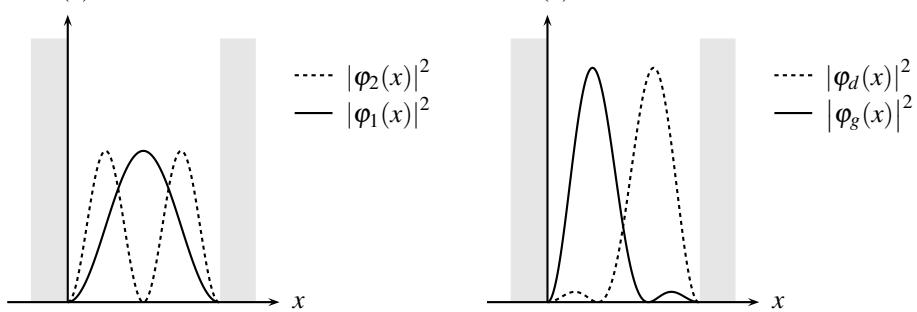
$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{1}{2} \left( (\exp(-i\omega_0 t) + \exp(-4i\omega_0 t)) \varphi_g(x) + (\exp(-i\omega_0 t) - \exp(-4i\omega_0 t)) \varphi_d(x) \right), \\ &= \exp(-i\frac{5}{2}\omega_0 t) \left( \cos(\frac{3}{2}\omega_0 t) \varphi_g(x) + i \sin(\frac{3}{2}\omega_0 t) \varphi_d(x) \right).\end{aligned}$$

On peut en déduire l'expression de la densité de probabilité de présence de la particule quantique :

$$\begin{aligned}P(x,t) &= \cos^2\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right) |\varphi_g(x)|^2 + \sin^2\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right) |\varphi_d(x)|^2, \\ &= \frac{1}{2} \left( |\varphi_g(x)|^2 + |\varphi_d(x)|^2 \right) + \frac{1}{2} \left( |\varphi_g(x)|^2 - |\varphi_d(x)|^2 \right) \cos(3\omega_0 t).\end{aligned}$$

La probabilité de présence oscille à la pulsation  $3\omega_0$ , c'est-à-dire à une fréquence  $v = \frac{3\omega_0}{2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{h}$ .

**c.** La figure qui suit représente les différentes probabilités de présence.



La particule quantique oscille dans le puits de potentiel de la moitié gauche vers la moitié droite, avec une période  $T_0 = \frac{h}{E_2 - E_1}$ .

### 26.13 | Étoile à neutrons

**1.** Le nombre de neutrons est  $N = \frac{M}{m} = 1,2 \times 10^{57}$ .

**2. a.** On admet que chaque neutron est confiné dans un volume  $\frac{V}{N} = \frac{4}{3N}\pi R^3$ . On assimile ce volume à une sphère de rayon  $r : \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3N}\pi R^3$ . On en déduit  $r = \frac{R}{N^{1/3}}$ . C'est l'échelle de longueur caractéristique du confinement d'un neutron.

b. À une constante multiplicative près, l'énergie de confinement d'un neutron s'écrit :

$$E_{c\text{neutron}} \simeq \frac{\hbar^2}{mr^2} = \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{mR^2}.$$

L'énergie cinétique totale des neutrons s'en déduit, toujours à une constante multiplicative près :

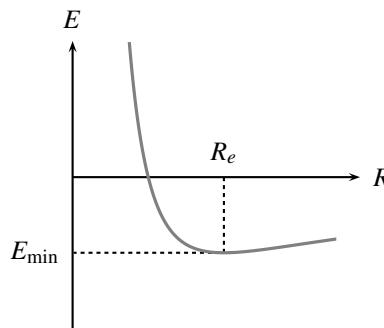
$$E_c = NE_{c\text{neutron}} \simeq \frac{\hbar^2}{mr^2} = \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}.$$

3. On procède par analyse dimensionnelle :  $[E_g] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$ ;  $[M] = \text{M}$ ;  $[R] = \text{L}$  et  $[\mathcal{G}] = \text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$ . On dispose de 4 paramètres qui font intervenir 3 dimensions indépendantes. On peut donc former 1 nombre sans dimension, par exemple :  $C = \frac{\mathcal{G}M^2}{RE_g}$ . La constante  $C$  est de

l'ordre de l'unité<sup>5</sup>. On écrit donc :  $E_g \simeq -\frac{\mathcal{G}M^2}{R}$ . Le signe  $-$  est nécessaire pour traduire le fait que la matière regroupée dans une sphère est un état plus stable, du point de vue gravitationnel, que si elle était dispersée.

On écrit l'énergie de cohésion gravitationnelle en faisant intervenir le nombre de neutrons  $N$  :  $E_g \simeq -\frac{\mathcal{G}N^2m^2}{R}$ .

4. L'énergie totale est :  $E = E_c + E_p \simeq \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2} - \frac{\mathcal{G}N^2m^2}{R}$ . L'allure de  $E$  en fonction de  $R$  est la suivante :



Il existe un rayon  $R_e$  tel que  $E$  est minimale. On calcule  $\frac{dE}{dR}$  et on cherche la valeur de  $R$  qui permet d'annuler cette dérivée. On obtient :  $R_e = \frac{2\hbar^2}{\mathcal{G}N^{1/3}m^3}$  (vu qu'on traite ce problème à des facteurs numériques près, on peut ne pas considérer le facteur 2). L'application numérique donne :  $R_e = 3 \text{ km}$ . L'ordre de grandeur obtenu est satisfaisant vu la simplicité des arguments utilisés (on n'en est pas à un facteur 10 près !). La masse volumique de l'étoile est de l'ordre de  $\frac{M}{R_e^3} \simeq 6 \times 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

5. On peut montrer que cette constante vaut  $-3/5$ .

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

5. À titre de comparaison, la masse volumique d'un noyau atomique est de l'ordre de  $\frac{m}{r_0^3} \simeq 10^{18} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Les masses volumiques d'une étoile à neutrons et d'un noyau atomique sont comparables.

### 26.14 Du puits de profondeur infinie au puits de profondeur finie

1. On rappelle que pour le puits infini l'énergie du niveau  $n$  s'écrit :  $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ . Sous forme adimensionnée, on écrit simplement  $\varepsilon_n = \frac{ma^2}{\hbar^2} E_n = n^2 \frac{\pi^2}{2}$ . Le tableau ci-dessous donne les valeurs numériques demandées.

| $n$             | 1    | 2     | 3     |
|-----------------|------|-------|-------|
| $\varepsilon_n$ | 4,93 | 19,74 | 44,41 |

2. On peut mettre  $\delta_n$  sous la forme suivante, en remplaçant  $V_0$  par l'expression donnée dans l'énoncé et  $E_n$  par son expression en fonction de  $\varepsilon_n$  :

$$\delta_n = \frac{\hbar}{\sqrt{2m \left( 32 \frac{\hbar^2}{ma^2} - \frac{\hbar^2}{ma^2} \varepsilon_n \right)}} = \frac{a}{\sqrt{2(32 - \varepsilon_n)}} \implies \frac{\delta_n}{a} = \frac{1}{\sqrt{2(32 - \varepsilon_n)}}.$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de  $\delta_n/a$  pour  $n = 1$  et  $2$ .

| $n$          | 1     | 2     |
|--------------|-------|-------|
| $\delta_n/a$ | 0,136 | 0,202 |

3. On commence par calculer les nouvelles largeurs  $a'_n = a + 2\delta_n$  pour  $n = 1$  et  $2$ , puis on en déduit les nouvelles valeurs des énergies :  $E'_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma'^2_n}$ , soit  $\varepsilon'_n = n^2 \frac{\pi^2}{2} \frac{a^2}{a'^2_n}$ . Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

| $n$              | 1     | 2      |
|------------------|-------|--------|
| $a'_n$           | 1,272 | 1,404  |
| $\varepsilon'_n$ | 3,051 | 10,015 |

4. On réalise maintenant une seconde itération en utilisant la distance  $\delta'_n$  qui est définie par :  $\frac{\delta'_n}{a} = \frac{1}{\sqrt{2(32 - \varepsilon'_n)}}$ . Une fois  $\delta'_n$  calculée, on peut en déduire une nouvelle estimation de la

largeur effective du puits  $a''_n = a + 2\delta'_n$  et ensuite affiner la valeur de l'énergie :  $\varepsilon''_n = n^2 \frac{\pi^2}{2} \frac{a^2}{a''_n^2}$ . Le tableau suivant regroupe les résultats numériques obtenus pour cette seconde itération.

| $n$               | 1     | 2      |
|-------------------|-------|--------|
| $\delta'_n/a$     | 0,131 | 0,151  |
| $a''_n$           | 1,263 | 1,302  |
| $\varepsilon''_n$ | 3,094 | 11,651 |

**5.** Le processus est inopérant pour  $n = 3$ , car la valeur de l'énergie  $E_3$ , obtenue à partir du modèle de puits infini, est supérieure à la profondeur du puits ( $\varepsilon_3 = 44,41 > 32$ ).

**6.** On peut utiliser Python pour faire le calcul numérique des valeurs approchées des niveaux d'énergie. Le code suivant fournit les valeurs approchées des deux premiers niveaux d'énergie après 10 itérations.

```
import numpy as np
e = np.pi ** 2 * 0.5 * np.arange(1, 3) ** 2
a = np.ones(2)

for iter in range(10):
    delta = 1 / np.sqrt(2 * (32 * np.ones(2) - 2 * e))
    a = np.ones(2) - 2 * delta
    e = np.pi ** 2 * 0.5 * np.arange(1, 3) ** 2 / (a ** 2)
```

On obtient  $\varepsilon_1 = 3,093$  et  $\varepsilon_2 = 11,466$ .

### 26.15 Réponses aux questions de la page 867

**1.** Le microscope à effet tunnel permet d'explorer les propriétés physiques de la surface du substrat, à l'échelle atomique. C'est pourquoi on parle de sonde locale. Le microscope à force atomique est un autre exemple de microscope à sonde locale.

**2.** L'affinité électronique du semi-conducteur est du même ordre de grandeur que le travail d'extraction du métal. La hauteur de la barrière que les électrons doivent franchir est donc comparable à celle que voient les électrons d'un métal. Les probabilités de transmission à travers ces barrières sont donc comparables. Pour autant, la densité électronique des électrons de conduction est plus faible dans un semi-conducteur que dans un métal. Inévitablement, cela limite l'intensité du courant tunnel.

**3.** Sur l'image 26.10, l'intensité du courant tunnel est transcrise par une couleur d'autant plus intense que l'intensité est importante. L'intensité dépend non seulement de la distance  $d$ , de la différence de potentiel appliquée, mais aussi de la densité électronique de la zone que survole la pointe.

**4.** C'est le signe de la différence de potentiel entre la pointe et le substrat métallique qui détermine le sens de passage des électrons. Sur la figure 26.8 (b), on constate que les électrons de la pointe (métal 2) voient une marche de potentiel, qu'il leur est impossible de traverser, car tous les états électroniques de même énergie sont déjà occupés dans le substrat (les électrons sont soumis au principe d'exclusion de Pauli). Les électrons du substrat (métal 1) voient une barrière de potentiel de largeur finie, qu'ils peuvent franchir par effet tunnel pour aller occuper les états électroniques vacants dans la pointe (métal 2). On obtient, dans le cas de la figure 26.8 (b), un courant orienté du substrat vers la pointe.

**5.** On différentie la relation donnant l'intensité et on obtient :  $\frac{dI}{I} = -\frac{2d(d)}{\delta}$ . La variation relative de l'intensité correspondant à une variation de la distance de 10 pm est :  $\frac{\Delta I}{I} = \frac{2\Delta d}{\delta}$ , soit 3%. Le courant varie de façon sensible lorsque  $d$  varie d'une dizaine de picomètres. Cette

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D’UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

sensibilité est un atout du microscope à effet tunnel. Encore faut-il contrôler précisément  $d$  pour en profiter.

**6.** La piézoélectricité est la propriété de certains cristaux qui acquièrent une polarisation électrique sous l’effet d’une contrainte mécanique. L’effet est réversible : une différence de potentiel appliquée au cristal entraîne une déformation mécanique. C’est Pierre Curie qui est à l’origine de la découverte de l’effet piézoélectrique.

**7.** Si la surface est homogène (c’est-à-dire  $I_0$  constant), alors un courant d’intensité constante correspond à une distance  $d$  constante : le mouvement de la pointe reproduit le profil topographique de la surface. Dans le mode à surface constante, il existe le risque de heurter la surface avec la pointe, ce qui peut l’endommager.

**8.** La résolution d’un microscope optique est de l’ordre de la longueur d’onde utilisée (de l’ordre de quelques dixièmes de micromètres), ce qui ne permet pas d’observer des atomes individualisés.

### 26.16 Réponses aux questions de la page 872

**1.** La variation de masse qui correspond à la transformation nucléaire proposée est :

$$\Delta m = m_{\text{He}} + m_{\text{Rn}} - m_{\text{Ra}} = -0,0053 \text{ u.}$$

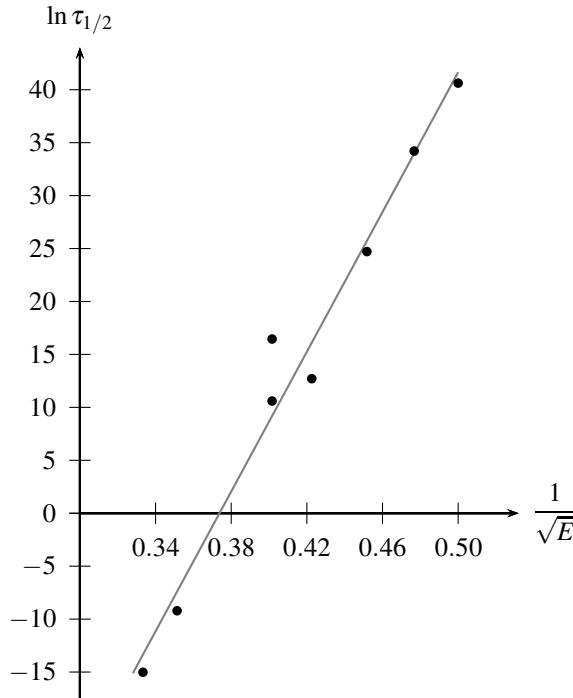
La transformation s’accompagne d’une diminution de la masse, qui correspond à une énergie libérée donnée par la relation d’Einstein :

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 4,93 \text{ MeV.}$$

Le système étudié peut être approximativement considéré comme isolé pendant le processus de désintégration. L’énergie libérée par la désintégration est emportée sous forme d’énergie cinétique par la particule  $\alpha$  et le noyau produit. Comme celui est bien plus massif, on peut supposer que c’est la particule  $\alpha$  qui emporte l’énergie libérée sous forme d’énergie cinétique.

**2.** Sur le graphe suivant, on a tracé  $\ln \tau_{1/2}$  en fonction de  $\frac{1}{\sqrt{E}}$ . On constate que les valeurs expérimentales s’accordent bien avec la loi empirique de Geiger-Nuttal. On peut calculer une régression linéaire à l’aide de Python :

```
import numpy as np
from scipy import stats
tau = np.array([4E4, 3E-7, 1E-4, 3.3E5,
               5.4E10, 4.4E17, 7.2E14, 1.4E7])
E = np.array([6.2, 9.0, 8.1, 5.6, 4.9, 4.0, 4.4, 6.2])
y = np.log(tau)
x = 1. / np.sqrt(E)
stats.linregress(x,y)
(329.99036220787616,
 -123.34433276312573,
 0.98571610361461881,
 7.20801785150247e-06,
 23.017370244197028)
```



Les deux premières valeurs retournées correspondent à la pente et à l'ordonnée à l'origine. On obtient :  $A = -123$  et  $B = 330$ .

3. La quantité  $r_0$  correspond au rayon d'un nucléon. Plus précisément, il s'agit du rayon d'une sphère à l'intérieur de laquelle la probabilité de présence du nucléon est importante.

4. On peut « découper » une barrière épaisse d'épaisseur  $a$ , en une juxtaposition de  $N$  barrières élémentaires. La barrière numéro  $i$  est caractérisée par une largeur  $a_i = \frac{a}{N}$  et une probabilité de transmission  $T_i$ . La probabilité de transmission à travers la barrière épaisse s'écrit ainsi :

$$T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_N \implies \ln T = \ln T_1 + \ln T_2 + \cdots + \ln T_N.$$

En utilisant la relation (26.9), on obtient :

$$\ln T = - \sum_{i=1}^N \frac{2a_i}{\delta_i},$$

à une constante numérique additive près. On passe ensuite à la limite continue où  $N \rightarrow \infty$ . Alors la somme devient une intégrale et  $a_i$  doit être remplacé par  $dx$ . À la barrière comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , on doit associer la profondeur de pénétration  $\delta(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_\alpha(V(x)-E)}}$  avec

## CHAPITRE 26 – ÉVOLUTION D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN POTENTIEL

$V(x) = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0x}$ . On obtient alors l'expression (26.13).

**5. Ordres de grandeur pour le radium :**

a. Avec  $A = 226$ , on obtient  $R = 7,3 \times 10^{-15}$  m.

b. Pour le radium,  $Z = 88$ , donc  $Z' = Z - 2 = 86$ . Le rayon  $R_c$  vérifie  $E = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0R_c}$ . Avec  $E = 4,9$  MeV, on en déduit :

$$R_c = \frac{172e^2}{4\pi\epsilon_0E} = 5,0 \times 10^{-14} \text{ m.}$$

c. Pour une barrière rectangulaire de hauteur de l'ordre de  $E$ , on obtient :

$$\delta = \frac{\hbar}{2m_\alpha E} = 1,0 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

d. La probabilité de transmission est :

$$T \simeq 3 \exp\left(-\frac{2(R_c - R)}{\delta}\right) = 2,2 \times 10^{-36}.$$

6. La durée  $\tau_0$  peut être écrite en utilisant la vitesse  $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}$  de la particule  $\alpha$  :

$$\tau_0 = \frac{2R}{v_0} = \frac{2R\sqrt{m}}{\sqrt{2E}} = 9,5 \times 10^{-22} \text{ s.}$$

La durée de vie moyenne du noyau est obtenue en utilisant la relation donnée dans le texte :

$$\tau = \frac{\tau_0}{T} = 4,2 \times 10^{14} \text{ s.}$$

7. On écrit un bilan du nombre de noyaux de radium entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$N(t + dt) = N(t) - \frac{N(t)}{\tau} dt \implies \frac{dN(t)}{dt} + \frac{N(t)}{\tau} = 0.$$

Cette équation différentielle s'intègre en  $N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  où  $N_0$  est le nombre de noyaux à l'instant  $t = 0$ . La demi-vie  $\tau_{1/2}$  est définie comme la durée au bout de laquelle la population de noyaux a été divisée par 2 :

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 \exp\left(-\frac{\tau_{1/2}}{\tau}\right) \implies \tau_{1/2} = \tau \ln 2.$$

8. On peut alors estimer la valeur numérique de la demi-vie :  $\tau_{1/2} = 2,9 \times 10^{14}$  s. On obtient un résultat qui surestime de quatre ordres de grandeur la valeur mesurée expérimentalement et qui est bien reproduite par la loi de Geiger-Nuttal. C'est lié au fait que la modélisation retenue ici est simplifiée à l'extrême. Pour autant, le modèle utilisé permet de rendre compte de valeurs particulièrement élevées de la demi-vie.

9. La découverte du neutron par Chadwick a permis de compléter la détermination de la structure du noyau, dans lequel il n'existe en réalité aucune particule  $\alpha$  préformée...

# Bibliographie

- [1] M. ARNDT et AL. : *Nature*, (401), 1999.
- [2] J.L. BASDEVANT : *12 Leçons de Mécanique Quantique*. Vuibert, 2006.
- [3] D. BOHM : *Quantum theory*. Dover, 1989.
- [4] N. BOHR : *Philosophical Magazine*, (26), 1913.
- [5] M. BORN : *Zeitschrift für Physik*, (37), 1926.
- [6] R. COLELLA, A.W. OVERHAUSER et S.A. WERNER : *Physical Review Letters*, (34), 1975.
- [7] L. DAVIS, A.S. GOLDHABER et M.M. NIETO : *Physical Review Letters*, (35), 1975.
- [8] L. de BROGLIE : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, (177), 1923.
- [9] A. EINSTEIN : *Annalen der Physik*, (17), 1905.
- [10] C.M. FABRE et AL. : *Physical Review Letters*, (107), 2011.
- [11] G. GAMOW : *Zeitschrift für Physik*, (52), 1928.
- [12] R.W. GURNEY et E.U. CONDON : *Nature*, (122), 1928.
- [13] V. JACQUES : *Source de photons uniques et interférences à un seul photon. De l'expérience des fentes d'Young au choix retardé*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2007.
- [14] H. KUHN : *The Journal of Chemical Physics*, (17), 1949.
- [15] J.M. LÉVY-LEBLOND et F. BALIBAR : *Quantique, rudiments*. Dunod, 2006.
- [16] A. MESSIAH : *Mécanique Quantique*. Dunod, 2003.
- [17] O. NAIRZ et AL. : *Physical Review Letters*, (87), 2001.
- [18] E. SCHRÖDINGER : *Annalen der Physik*, (79), 1926.
- [19] F. SHIMIZU, K. SHIMIZU et H. TAKUMA : *Physical Review A*, (46), 1992.
- [20] S. T. THORNTON et A. REX : *Physique Moderne*. De Boeck, 2010.
- [21] A. TONOMURA, J. ENDO, T. MATSUDA, T. KASAWAKI et H. ESAWA : *American Journal of Physics*, (57), 1989.



**Septième partie**

**Thermodynamique statistique**



# Éléments de thermodynamique statistique

Ce chapitre donne un aperçu des modes de raisonnement et des résultats obtenus en **thermodynamique statistique**. La thermodynamique statistique est une théorie qui permet de prévoir les propriétés d'un matériau en se basant sur les propriétés des particules microscopiques (atomes, molécules, électrons, ions...) qui le composent.

## 1 Monde microscopique, monde macroscopique

### 1.1 Ordres de grandeur moléculaires

Considérons un verre d'eau. L'eau liquide apparaît à notre échelle comme une matière continue : il semble qu'on peut en prélever une quantité arbitrairement petite. Pourtant l'eau présente à une échelle bien plus petite un aspect granulaire : elle est constituée de molécules H<sub>2</sub>O. Combien de molécules contient un volume donné d'eau ? Quel est l'ordre de grandeur de la taille des molécules ? Il est possible de répondre si l'on connaît la masse volumique de l'eau  $\mu = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , la masse molaire de l'eau  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , et le nombre d'Avogadro :

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

#### a) Nombre de molécules

Combien de molécules d'eau se trouvent dans un verre contenant  $V = 20 \text{ cm}^3 = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$  d'eau liquide ? La masse d'eau contenue dans le verre est :  $m = \mu V = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ . On en déduit la quantité de matière  $n = \frac{m}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\mu V}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = 1,1 \text{ mol}$ , et enfin le nombre de molécules :

$$N = n \mathcal{N}_A = \frac{\mu V \mathcal{N}_A}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = 6,6 \cdot 10^{23}.$$

Le nombre de molécules contenues dans un échantillon de matière dont la masse est de l'ordre de 1 g est de l'ordre de  $10^{23}$ .

### b) Distance intermoléculaire

**Cas de l'eau liquide** On peut calculer le volume  $V^*$  « occupé » par chaque molécule d'eau :

$$V^* = \frac{V}{N} = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mu \mathcal{N}_A} = 3,0 \cdot 10^{-29} \text{ m}^{-3}.$$

On accède ainsi à l'ordre de grandeur de la plus petite distance  $a$  entre deux molécules. Pour le comprendre on peut considérer, dans un premier temps, le cas de molécules sphériques formant un cristal cubique simple (voir cours de chimie de MPSI) qui est représenté sur la partie gauche de la figure 27.1 : les centres des molécules sont disposés sur un réseau cubique dont le paramètre de maille est  $a$  et chaque molécule occupe un cube d'arête  $a$  et de volume  $V^* = a^3$ . On se convainc facilement que cette relation entre  $V^*$  et  $a$  est valable, mais *en ordre de grandeur* seulement, dans tous les cas. Ainsi, on trouve pour l'eau liquide :

$$a \sim V^{*\frac{1}{3}} = 3,10^{-10} \text{ m.}$$

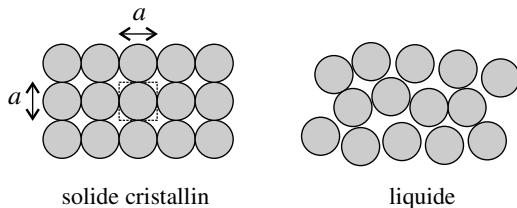


Figure 27.1 – Phases condensées à l'échelle moléculaire.

**Cas de la vapeur d'eau** Dans le cas d'un gaz, en revanche, la valeur de  $a$  est très variable et souvent bien plus grande que dans un liquide. Quel est l'ordre de grandeur de  $a$  dans la vapeur d'eau à la température  $T = 300 \text{ K}$  et sous la pression  $P = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ?

Pour répondre à cette question, on peut supposer que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait. Son volume molaire est alors :

$$V_m = \frac{RT}{P}.$$

On en déduit le volume par molécule,  $V^* = \frac{V_m}{\mathcal{N}_A} = \frac{RT}{\mathcal{N}_A P}$ , et l'ordre de grandeur de  $a$  :

$$a \sim V^{*\frac{1}{3}} = \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_A P} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{8,31 \times 300}{6,02 \cdot 10^{23} \times 1,00 \cdot 10^5} \right)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m.}$$

On remarque que  $a$  est 10 fois supérieur à sa valeur dans le liquide.

### Remarque

Le calcul précédent est valable pour tout gaz parfait, quelle que soit sa formule chimique.

### c) Taille des molécules

Dans un phase condensée, c'est-à-dire un solide ou un liquide,  $a$  est du même ordre de grandeur que la dimension  $d$  de la molécule (voir la figure 27.1). Ainsi, on a trouvé l'ordre de grandeur de la taille de la molécule d'eau :

$$d \sim 3.10^{-10} \text{ m.}$$

Les résultats que l'on vient de trouver dans le cas de l'eau ont une validité générale :

L'ordre de grandeur de la taille d'une molécule comportant peu d'atomes est de  $10^{-10} \text{ m}$ . La distance entre deux molécules est du même ordre dans un solide ou un liquide, et 10 à 100 fois supérieure dans un gaz.

## 1.2 Mouvements moléculaires

### a) Mouvement d'agitation thermique

Les molécules contenues dans un verre d'eau sont en mouvement permanent, même lorsque le liquide est immobile à l'échelle macroscopique. Ce mouvement, appelé **agitation thermique**, n'est pas détectable à notre échelle parce que le déplacement moyen d'une molécule en quelques secondes est très faible (de l'ordre d'une dizaine de microns), et parce que les déplacements des différentes molécules se font aléatoirement dans toutes les directions et se compensent en moyenne.

Lorsque de petites particules (taille de l'ordre du micromètre) sont en suspension dans l'eau, on peut observer au microscope le mouvement désordonné qu'elles ont suite aux collisions incessantes avec les molécules d'eau en mouvement d'agitation thermique. Ce mouvement est appelé *mouvement brownien* et la particule est dite brownienne. La trajectoire d'une de ces particules a l'allure visible sur la figure 27.2.



**Figure 27.2 –** Allure de la trajectoire d'une molécule dans un liquide ou un gaz : suite de segments rectilignes de longueur moyenne égale au libre parcours moyen  $\ell$ .

On ne peut pas observer expérimentalement le mouvement individuel d'une molécule d'eau, mais on peut en faire la simulation sur ordinateur. C'est l'objet de la *dynamique moléculaire*, qui consiste à résoudre les équations de la dynamique pour une assemblée de  $N$  molécules interagissant entre elles, à distance et lors de chocs. Un programme de dynamique moléculaire calcule au cours du temps  $6N$  coordonnées variables (3 coordonnées de position et 3 coordonnées de vitesse pour chaque molécule). La valeur de  $N$ , ainsi que la durée de la simulation sont limitées par la puissance de calcul et la taille mémoire de l'ordinateur. On réalise couramment des simulations portant sur  $10^6$  molécules pendant  $10^{-10}$  s. Les trajectoires moléculaires calculées ont la même allure que les trajectoires browniennes : elles changent de direction continuellement, à cause des chocs entre molécules.

### b) Libre parcours moyen

L'examen de ces trajectoires montre l'importance physique d'une autre longueur : le **libre parcours moyen**  $\ell$  qui est la distance parcourue par une molécule, entre deux chocs avec d'autres molécules. Un raisonnement en dehors du programme permet de montrer que

$$\ell \sim a \left( \frac{a}{d} \right)^2.$$

Ainsi :

- dans un liquide, le libre parcours moyen  $\ell$  est du même ordre de grandeur que la distance intermoléculaire  $a$  (elle-même de l'ordre du diamètre moléculaire  $d$ ),
- dans un gaz dans les conditions normales de températures et de pression, le libre parcours moyen  $\ell$  est supérieur à 100 fois la distance intermoléculaire.

## 1.3 Échelles macroscopique, mésoscopique et microscopique

Dans la description d'un système matériel on considère trois types d'échelle.

**L'échelle macroscopique** est notre échelle. Une longueur macroscopique est de l'ordre du mètre (ou bien plus grande).

**L'échelle microscopique** est l'échelle des molécules. Une longueur microscopique est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules (ou bien plus petite).

La très grande différence d'ordre de grandeur entre l'échelle macroscopique et l'échelle mésoscopique intervenant dans un système permet de définir une échelle intermédiaire appelée mésoscopique.

**Une échelle mésoscopique** est une échelle de longueur à la fois très grande devant l'échelle microscopique et très petite devant l'échelle macroscopique.

Par exemple, pour un liquide comme l'eau, l'échelle du micromètre est une échelle mésoscopique. Un volume d'eau de  $1 \mu\text{m}^3$ , bien que très petit par rapport à l'échelle macroscopique, contient environ  $3,3 \cdot 10^{10}$  molécules (il est conseillé au lecteur de retrouver ce résultat par lui-même) soit un nombre considérable de molécules.

## 2 Objet de la thermodynamique statistique

Le but de la thermodynamique statistique est de prévoir les propriétés thermodynamiques d'un système thermodynamique à partir des propriétés des particules microscopiques qui composent le système.

### 2.1 Système thermodynamique

On appelle **système thermodynamique** tout système constitué par un très grand nombre de particules.

Tout échantillon de matière de taille macroscopique ou mésoscopique constitue un système thermodynamique.

### 2.2 Macro-état et micro-état

La description d'un système thermodynamique dépend de l'échelle à laquelle on se place.

#### a) Description à une échelle macroscopique

À une échelle macroscopique la matière apparaît comme continue. La taille du système est donnée par le nombre de particules  $N$  ou la quantité de matière  $n$  ou la masse  $m$ . Ces paramètres sont fixés dans le cas d'un système fermé qui est le seul cas considéré dans la suite.

L'état du système à cette échelle, appelé **macro-état**, est caractérisé par des paramètres d'état tels que le volume  $V$ , la pression  $P$  et la température  $T$ .

La thermodynamique associe à un état macroscopique des fonctions d'état telles que l'énergie  $E$ , l'énergie interne  $U$ , l'enthalpie  $H$  et l'entropie  $S$ . Ces fonctions ont été définies dans le cours de thermodynamique de MPSI.

#### b) Description à une échelle mésoscopique

Un système de taille mésoscopique est décrit par les mêmes paramètres et fonctions d'état qu'à l'échelle macroscopique. Cependant, pour souligner le fait que le système est très petit par rapport aux dimensions macroscopiques, les grandeurs extensives sont notées avec un delta «  $\delta$  » : nombre de particules  $\delta N$ , quantité de matière  $\delta n$ , masse  $\delta m$ , volume  $\delta V$ , énergie  $\delta E$ , énergie interne  $\delta U$ , enthalpie  $\delta H$ , entropie  $\delta S$ .

#### Remarque

- Le «  $\delta$  » peut être remplacé par un «  $d$  ».
- La notation  $\delta N$  ne doit pas faire oublier que le nombre de particules du système mésoscopique est grand. En revanche la quantité de matière peut être petite.

Les grandeurs extensives n'ont pas de marque particulière puisqu'elles sont indépendantes de la taille du système : pression  $P$ , température  $T$ , masse volumique  $\mu = \frac{\delta m}{\delta V}$ , densité particulaire  $n^* = \frac{\delta N}{\delta V}$ .

### c) Description à une échelle microscopique

À l'échelle microscopique le système apparaît comme une assemblée d'un très grand nombre  $N$  de particules (atomes, molécules, ions...). L'état du système à l'échelle microscopique, ou **micro-état**, est donné par :

- les positions et vitesses de chacune des particules, dans le cadre d'une description par la mécanique classique,
- la fonction d'onde des particules dans le cadre d'une description par la mécanique quantique.

La description à l'échelle microscopique est beaucoup plus complète que la description à l'échelle macroscopique, mais elle demande de manipuler une quantité énorme d'informations étant donné l'ordre de grandeur ( $10^{23}$ ) du nombre de particules microscopiques d'un échantillon de taille normale.

## 2.3 Système à l'équilibre thermodynamique

Un système est à l'équilibre thermodynamique lorsque ses paramètres d'état ont des valeurs définies et constantes dans le temps.

Un système à l'**équilibre thermodynamique** est dans un macro-état invariable au cours du temps.

À l'échelle microscopique, en revanche, le micro-état du système change continuellement en raison des mouvements moléculaires, même lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique.

Un état d'équilibre thermodynamique correspond à un très grand nombre de micro-états différents compatibles avec les paramètres d'état.

Ce nombre est bien plus grand que le nombre de particules. Par exemple, dans le cas d'un système de  $N$  particules discernables pouvant exister dans 2 états différents, le nombre de micro-états possibles est  $2^N$ .

## 2.4 Probabilité d'un micro-état

Au cours du temps, un système à l'équilibre passe *a priori* par tous les micro-états compatibles avec son macro-état, cependant avec des fréquences différentes.

La probabilité d'un micro-état  $\alpha$  est à la fois :

- la fraction du temps passé par le système dans le micro-état  $\alpha$ , évaluée sur une durée longue devant l'échelle de temps microscopique,
- la probabilité de trouver le système dans le micro-état  $\alpha$  à un instant quelconque.

Comme il est certain que le système se trouve à chaque instant dans un des micro-états compatibles, on a :

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1,$$

où le symbole  $\sum_{\alpha}$  désigne la somme sur tous les micro-états possibles.

La thermodynamique statistique donne le moyen de calculer, pour un système à l'équilibre dans des conditions données, les probabilités  $p_{\alpha}$  des micro-états.

## 2.5 Valeurs moyennes et fluctuations

Soit  $A$  une grandeur physique attachée au système. On suppose que  $A$  dépend du micro-état et on note  $A_{\alpha}$  sa valeur dans le micro-état  $\alpha$ .

D'après ce qui précède  $A$  évolue dans le temps, même pour un système à l'équilibre thermodynamique. On dit que la valeur de  $A$  fluctue. La **valeur moyenne** de  $A$  est donnée par la formule :

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} A_{\alpha}.$$

On caractérise les fluctuations de  $A$  autour de sa valeur moyenne par la **variance**, appelée aussi **écart quadratique moyen** :

$$\text{Var}(A) = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2,$$

et l'**écart-type** :

$$\sigma(A) = \sqrt{\text{Var}(A)} .$$

Comme son nom l'indique, l'écart-type donne l'ordre de grandeur de l'écart entre la valeur instantanée de  $A$  et sa moyenne  $\langle A \rangle$ .

### Remarque

L'écart-type est souvent noté  $\Delta A$  mais il ne doit pas être confondu avec la variation de la grandeur  $A$  lors d'une transformation entre deux macro-états.

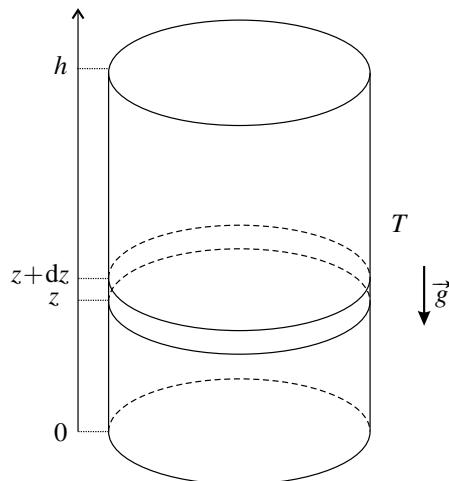
## 3 Facteur de Boltzmann

Dans le cas d'un système thermodynamique **à l'équilibre thermique avec un thermostat de température  $T$** , la loi de Boltzmann permet de calculer les probabilités  $p_{\alpha}$  des microétats. Cette loi sera établie dans le cas d'un gaz parfait dans le champ de pesanteur, puis on en donnera, sans démonstration, la formulation générale.

### 3.1 Pression dans une atmosphère isotherme

#### a) Pression dans un gaz parfait isotherme soumis au champ de pesanteur

On considère un cylindre vertical fermé, de section  $S$  et de hauteur  $h$ , qui contient un gaz parfait de masse molaire  $M$ . Le gaz à l'intérieur du cylindre est en contact avec un thermostat qui lui impose une température  $T$  uniforme et constante. On s'intéresse à l'effet de la pesanteur sur le gaz qui est au repos à l'échelle macroscopique.  $g$  est l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme sur toute la hauteur du cylindre et ( $Oz$ ) est un axe vertical ascendant.



**Figure 27.3 – Gaz parfait soumis au champ de pesanteur.**

**Analyse qualitative** À l'échelle microscopique, les molécules de gaz ont tendance à tomber sous l'action de leur poids. La pesanteur tend donc à « tasser » les molécules au fond du récipient. Au contraire, l'agitation thermique donne aux molécules un mouvement désordonné qui fait qu'elles occupent tout le volume du récipient.

Il en résulte un état d'équilibre dans lequel les grandeurs intensives du gaz telles que la masse volumique  $\mu$  et la pression  $P$  dépendent de la cote  $z$ . On les note  $\mu(z)$  et  $P(z)$ .

**Équilibre thermodynamique local** Le gaz à l'intérieur du cylindre n'est donc pas à l'équilibre thermodynamique puisque, par exemple, la pression n'y est pas uniforme. En revanche on fait l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

**Hypothèse d'équilibre thermodynamique local :**

- il existe une échelle mésoscopique très inférieure à la distance caractéristique de variation des grandeurs intensives,
- toute partie du système de taille correspondant à cette échelle est à l'équilibre thermodynamique.

On considère la tranche de gaz comprise entre les plans de cote  $z$  et  $z + dz$  (voir figure 27.3) où  $dz$  est une longueur mésoscopique très inférieure à la distance caractéristique de variation de  $\mu(z)$  et  $P(z)$ , traitée dans le calcul macroscopique qui suit comme infiniment petite.

Le volume de cette tranche est  $dV = Sdz$ , et sa masse  $dm(z) = \mu(z)dV = \mu(z)Sdz$ . La quantité de matière de gaz qu'elle contient est :  $dn(z) = \frac{dm(z)}{M} = \frac{\mu(z)Sdz}{M}$ . Par hypothèse la tranche

est à l'équilibre. Le gaz étant parfait, on peut appliquer l'équation d'état :

$$P(z)dV = dn(z)RT,$$

qui s'écrit aussi  $P(z)Sdz = \frac{\mu(z)SdzRT}{M}$  et d'où l'on tire :

$$\mu(z) = \frac{M}{RT}P(z). \quad (27.1)$$

**Équilibre mécanique** À l'échelle macroscopique, le gaz est à l'équilibre mécanique. On va écrire la condition d'équilibre mécanique pour la tranche précédente. Elle est soumise aux forces suivantes :

- son poids :  $dm(z)\vec{g} = -\mu(z)Sdzg\vec{u}_z$ ,
- la force de pression exercée sur la face inférieure de la tranche qui est dirigée vers le haut :  $P(z)S\vec{u}_z$ ,
- la force de pression exercée sur la face supérieure de la tranche qui est dirigée vers le bas :  $-P(z+dz)S\vec{u}_z$ .

 Il est important de tenir compte du fait que la pression est différente sur les deux faces de la tranche.

À l'équilibre mécanique, la somme de ces forces est nulle :

$$(-\mu(z)gSdz\vec{u}_z) + (P(z)S\vec{u}_z) + (-P(z+dz)S\vec{u}_z) = \vec{0},$$

soit, après projection sur  $\vec{u}_z$  et simplification :

$$-\mu(z)gdz + P(z) - P(z+dz) = 0.$$

Par ailleurs  $P(z+dz) = P(z) + \frac{dP(z)}{dz}dz$ . La condition d'équilibre devient finalement, après simplification par  $dz$  :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g. \quad (27.2)$$

### Remarque

L'équation (27.2) est **l'équation fondamentale de l'hydrostatique**. C'est la condition générale d'équilibre d'un fluide (liquide ou gaz) dans le champ de pesanteur. Il est recommandé de la retenir.

**Résolution du système** En injectant l'expression (27.1) de la masse volumique dans l'équation (27.2) on trouve :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{Mg}{RT}P(z). \quad (27.3)$$

Il s'agit d'une équation différentielle qui peut se réécrire  $\frac{dP}{dz} + \frac{1}{H}P(z) = 0$  avec :

$$H = \frac{RT}{Mg} .$$

$H$  est la distance caractéristique de la variation de la pression. La solution de l'équation différentielle est :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) , \quad (27.4)$$

en notant  $P(0) = P_0$ . On en déduit l'expression de la masse volumique en utilisant (27.1) :

$$\mu(z) = \mu_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) , \quad (27.5)$$

en notant  $\mu(0) = \mu_0 = \frac{MP_0}{RT}$ .

Numériquement, dans le cas du diazote de masse molaire  $M_{N_2} = 0,028 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , à la température  $T = 273 \text{ K}$  et avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , la distance caractéristique de variation trouvée vaut :  $H = \frac{8,314 \times 273}{28 \cdot 10^{-3} \times 9,8} = 8,3 \cdot 10^3 \text{ m}$ . Dans la pratique on ne peut pas construire un récipient de taille telle que la différence de pression entre le haut et le bas due à la pesanteur soit mesurable ! Cependant, ce résultat s'applique à l'atmosphère terrestre dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

### b) Application à l'atmosphère terrestre

Le modèle de l'**atmosphère isotherme** repose sur les hypothèses suivantes :

- l'air atmosphérique est assimilé à un gaz de masse molaire  $M_{\text{air}} = 0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , valeur moyenne pondérée des masses molaires du dioxygène  $O_2$  et du diazote  $N_2$  selon les proportions de ces deux gaz dans l'air. En effet :

$$0,80 \times M_{N_2} + 0,20 \times M_{O_2} = 0,80 \times 0,028 + 0,20 \times 0,032 \simeq 0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} ;$$

- l'air est assimilé à un gaz parfait, hypothèse raisonnable étant donné que la pression atmosphérique n'est pas trop grande ;
- l'atmosphère est à l'équilibre donc on suppose qu'il n'y a pas de vent ;
- la température au sein de l'atmosphère est uniforme ;
- l'accélération de la pesanteur est uniforme, hypothèse valable puisque l'épaisseur de l'atmosphère, qui est de quelques dizaines de kilomètres, est très inférieure au rayon de la Terre, de  $6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$  ;
- on néglige la courbure de la Terre, hypothèse tout à fait légitime pour la raison précédente.

Dans ce modèle, pression et masse volumique décroissent exponentiellement avec l'altitude, avec une distance caractéristique  $H = \frac{RT}{M_{\text{air}}g}$  qui est appelée **hauteur d'échelle**.

Pour  $T = 273 \text{ K}$ ,  $H = 8,0 \cdot 10^3 \text{ m}$ . Bien que le modèle soit extrêmement simplifié (l'hypothèse d'une température uniforme est inexacte) il donne le bon ordre de grandeur de l'épaisseur de

l'atmosphère. En effet, le résultat conduit à évaluer celle-ci à  $6H$  (pour  $z = 6H$  la pression est égale à la valeur à l'altitude 0 multipliée par  $\exp(-6) \simeq 0,002$ ), soit environ 50 km, ce qui est une valeur convenable.

### c) Interprétation probabiliste du résultat précédent

On revient au système modèle du gaz parfait contenu dans le récipient. Les molécules du gaz sont en mouvement permanent. Il est impossible de préciser où chaque molécule se trouve à un instant donné. En revanche, le résultat précédent permet de trouver la **probabilité**  $dP(z)$  pour une molécule de se trouver entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ .

En effet, le nombre moyen de molécules présentes dans la tranche  $[z, z + dz]$  représentée sur la figure 27.3 est :

$$dN(z) = \mathcal{N}_A \frac{dm(z)}{M} = \mathcal{N}_A \frac{\mu(z)Sdz}{M} = \frac{\mathcal{N}_A \mu_0 S}{M} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz.$$

Le nombre  $N$  de molécules contenues dans le récipient de hauteur  $h$  est :

$$N = \int_{z=0}^h dN(z) = \frac{\mathcal{N}_A \mu_0 S}{M} \int_{z=0}^h \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz = \frac{\mathcal{N}_A \mu_0 S H}{M} \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right)\right).$$

La probabilité  $dp(z)$  est égale à la proportion des molécules présentes dans la tranche, soit :

$$dp(z) = \frac{dN(z)}{N} = \frac{1}{H \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right)\right)} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz.$$

$dp(z)$  est proportionnelle à un facteur exponentiel dont on peut modifier l'expression :

$$\exp\left(-\frac{z}{H}\right) = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{m^*gz}{k_B T}\right),$$

en introduisant la masse d'une molécule  $m^* = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$  et la **constante de Boltzmann** :

$$k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = \frac{8,314 \text{ (J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ (mol}^{-1})} = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

L'argument de l'exponentielle est le rapport de deux énergies :

- $m^*gz$  est, à une constante additive près, l'*énergie potentielle de pesanteur* d'une molécule à l'altitude  $z$  que l'on note désormais  $E_p(z)$ ,
- $k_B T$  est l'*énergie d'agitation thermique* typiquement disponible par molécule, à la température  $T$ .

On peut écrire finalement :

$$dp(z) = \text{constante} \times \exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right) dz.$$

La probabilité  $dp(z)$  pour une molécule de se trouver entre les cotes  $z$  et  $z + dz$  est proportionnelle au **facteur de Boltzmann**  $\exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right)$ .

Cette probabilité est appelée **poids de Boltzmann**.

Ainsi, on interprète la diminution de la pression et de la densité avec  $z$  par le fait que, lorsque  $z$  augmente, l'énergie potentielle augmente et que de moins en moins de molécules ont une énergie aussi grande.

#### d) Influence de la température

Pour étudier l'influence de la température sur la répartition des molécules dans le récipient, on va exprimer la densité numérique  $n^*(z)$ , c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume à l'altitude  $z$ . On a :

$$n^*(z) = \frac{dN(z)}{dV} = \frac{N}{SH} \frac{\exp\left(-\frac{z}{H}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{z}{H}\right)} \quad \text{avec} \quad H = \frac{k_B T}{m^* g}.$$

On note  $T_0$  la température pour laquelle la distance caractéristique  $H$  est égale à la hauteur  $h$  du récipient, soit  $T_0 = \frac{m^* gh}{k_B}$ . Il est intéressant de considérer le comportement du système dans les cas  $T \gg T_0$  et  $T \ll T_0$  :

- Si  $T \gg T_0$ , alors  $H \gg h$  de sorte que, pour  $z$  compris entre 0 et  $h$  :

$$\exp\left(-\frac{z}{H}\right) \simeq 1, \quad 1 - \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \simeq \frac{z}{H} \quad \text{donc} \quad n^*(z) \simeq \frac{N}{Sh}.$$

Les molécules se répartissent uniformément dans le récipient : l'agitation thermique l'emporte sur la force de pesanteur. Il en est ainsi parce que l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$  est très supérieure à  $m^* gh$ , différence d'énergie potentielle entre le bas et le haut du récipient pour une molécule.

- Si  $T \ll T_0$ , alors  $H \ll h$  de sorte que :

$$1 - \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \simeq 1 \quad \text{donc} \quad n^*(z) \simeq \frac{N}{SH} \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

Les molécules se tassent dans le fond du récipient sur une hauteur de quelques  $H$  (pour  $z = 6H$ , la densité moléculaire est déjà 500 fois plus petite que pour  $z = 0$ ) : la pesanteur l'emporte sur l'agitation thermique. Il en est ainsi parce que la différence d'énergie potentielle pour une molécule entre le bas et le haut du récipient,  $m^* gh$ , est très supérieure à l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$ .

#### e) Énergie potentielle moyenne

Il est intéressant de calculer la valeur moyenne de l'énergie potentielle  $E_p(z) = m^* gz$  pour une molécule dans le cas où  $H \ll h$ . Il vient :

$$\langle E_p(z) \rangle = \langle m^* g z \rangle = \int_{z=0}^h m^* g z \, dp(z) = \frac{m^* g}{H \left( 1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right) \right)} \int_{z=0}^h z \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz.$$

Pour simplifier le calcul, on prend  $h = \infty$  (cas de l'atmosphère), alors :

$$\langle E_p(z) \rangle = \frac{m^* g}{H} \int_{z=0}^{\infty} z \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz = m^* g H = k_B T.$$

Ainsi,  $k_B T$  est bien l'ordre de grandeur de l'énergie disponible par molécule.

### 3.2 Poids de Boltzmann pour une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat

#### a) Hypothèses

Plus généralement, on considère un système thermodynamique **à l'équilibre thermique avec un thermostat de température  $T$** .

On suppose que le système est constitué de **particules indépendantes**, c'est-à-dire n'interagissant pas les unes avec les autres. Cette hypothèse est faite implicitement dans le paragraphe précédent puisque le système considéré est un gaz parfait.

Il devient alors possible de définir la probabilité pour *une* particule donnée d'être dans un certain état : état quantique (fonction d'onde) ou état classique (position et vitesse) suivant la modélisation choisie.

Une particule microscopique doit *a priori* être étudiée dans le cadre de la mécanique quantique. Son énergie est alors quantifiée et prend seulement des valeurs particulières  $E_1, E_2, E_3 \dots$  que l'on numérote par valeurs croissantes :  $E_1 < E_2 < E_3 \dots$

#### b) Loi de Boltzmann

Au sein du système, la particule peut *a priori* être dans tous les états quantiques. On admet la généralisation suivante du résultat établi dans le cas du gaz parfait soumis au champ de pesanteur :

Dans un système à l'équilibre thermique avec un thermostat de température  $T$ , la probabilité pour une particule microscopique indépendante d'être dans un état quantique d'énergie  $E_i$  est proportionnelle au **facteur de Boltzmann**  $\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$ .

Pour connaître les probabilités d'occupation du niveau d'énergie  $E_i$  il faut distinguer deux cas :

- si le niveau d'énergie est **non dégénéré**, c'est-à-dire s'il correspond à un et un seul état quantique, cette probabilité est proportionnelle à  $\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$ ;
- si le niveau d'énergie  $E_i$  est dégénéré elle est proportionnelle à  $g_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$  où  $g_i$  est le nombre d'états quantiques d'énergie  $E_i$ .

## 4 Systèmes à spectre discret d'énergie

Dans ce paragraphe on étudie l'énergie d'un système composé de particules indépendantes ayant des **niveaux d'énergie non dégénérés**. Le système est en équilibre à la température  $T$ .

### 4.1 Probabilité d'occupation d'un état quantique donné par une particule donnée

#### a) Normalisation de la probabilité

D'après la loi de Boltzmann, la probabilité pour une particule donnée d'occuper l'état quantique d'énergie  $E_i$  est :

$$p(E_i) = A \times \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right),$$

où  $A$  est une constante. On détermine  $A$  en utilisant le fait que la somme des probabilités des différents états possibles est égale à 1. Cette relation, appelée **condition de normalisation**, s'écrit :

$$\sum_i p(E_i) = 1,$$

où la somme porte sur les niveaux d'énergie qui correspondent chacun à un (et un seul) état quantique. Il vient alors :

$$A = \frac{1}{Z},$$

où  $Z$  est la **fonction de partition** de la particule :

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

Finalement :

$$p(E_i) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

#### b) Population d'un état quantique

Si  $N$  est le nombre total de particules dans le système (nombre très grand pour un système thermodynamique), le nombre moyen de particules du système occupant l'état quantique d'énergie  $E_i$  est :

$$\langle N_i \rangle = N \times p(E_i) = \frac{N}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

Dans la suite on appellera « population » de l'état d'énergie  $E_i$  ce nombre moyen  $\langle N_i \rangle$ .

### Remarque

Le nombre  $N_i$  des particules dans le système occupant l'état  $E_i$  à un instant quelconque (donc dans un micro-état pris au hasard) fluctue autour de  $\langle N_i \rangle$ . On peut montrer que l'écart-type relatif  $\frac{\sigma(N_i)}{\langle N_i \rangle}$  est inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{\langle N_i \rangle}}$ . Or, si l'on excepte les cas où la probabilité  $p(E_i)$  est extrêmement faible,  $\langle N_i \rangle$  est un très grand nombre, si bien que l'écart-type relatif est extrêmement faible. On a alors à chaque instant  $N_i \simeq \langle N_i \rangle$  avec une excellente précision.

### c) Rapport des probabilités

Le **rapport des probabilités** de deux états quantiques donne le rapport de leurs populations. Dans le cas de deux états d'énergies respectives  $E_i$  et  $E_j$  :

$$\frac{\langle N_j \rangle}{\langle N_i \rangle} = \frac{p(E_j)}{p(E_i)} = \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{k_B T}\right).$$

Ce rapport est piloté par la température et dépend de la comparaison entre  $k_B T$  et l'écart  $\Delta = |E_j - E_i|$  entre les deux énergies. D'après la formule ci-dessus :

Pour deux états quantiques dont la différence d'énergie est  $\Delta$  :

- si  $k_B T \ll \Delta$ , la population de l'état de plus haute énergie est négligeable devant la population du niveau le plus bas ;
- si  $k_B T \sim \Delta$ , les populations des deux états sont du même ordre de grandeur, la population de l'état de plus basse énergie étant la plus grande ;
- si  $k_B T \gg \Delta$ , les populations des deux niveaux d'énergie sont quasiment identiques.

## 4.2 Énergie moyenne

### a) Énergie moyenne d'une particule

Au cours du temps, l'énergie  $E_{\text{particule}}$  d'une particule donnée appartenant au système varie de manière aléatoire en passant par les différentes valeurs possibles  $E_i$ . Le temps pendant lequel la particule a l'énergie  $E_i$  est proportionnel à la probabilité  $p(E_i)$ . Ainsi la moyenne dans le temps de son énergie est :

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = \sum_i E_i p(E_i) = \frac{1}{Z} \sum_i E_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

### Remarque

$\langle E_{\text{particule}} \rangle$  est la même pour toutes les particules du système, mais à un instant donné deux particules n'ont pas forcément la même énergie.

Les fluctuations de l'énergie d'une particule sont caractérisées par la variance (ou écart quadratique) :

$$\text{Var}(E_{\text{particule}}) = \langle E_{\text{particule}}^2 \rangle - \langle E_{\text{particule}} \rangle^2 = \sum_i E_i^2 p(E_i) - (\sum_i E_i p(E_i))^2.$$

L'écart-type  $\sigma(E_{\text{particule}}) = \sqrt{\text{Var}(E_{\text{particule}})}$  peut être *a priori* du même ordre de grandeur que l'énergie moyenne.

### b) Énergie moyenne du système, énergie interne

L'énergie du système est la somme des énergies des  $N$  particules qui le composent :

$$E_{\text{système}} = \sum_{n=1}^N E_{\text{particule } n}.$$

Elle varie au cours du temps, puisque les énergies des différentes particules varient, et sa valeur moyenne est :

$$\langle E_{\text{système}} \rangle = \sum_{n=1}^N \langle E_{\text{particule } n} \rangle.$$

De plus, les particules ont toutes la même énergie moyenne,  $\langle E_{\text{particule}} \rangle$  donc :

$$\langle E_{\text{système}} \rangle = N \langle E_{\text{particule}} \rangle. \quad (27.6)$$

Quelle est la variance de  $E_{\text{système}}$ ? Les particules constituant le système sont supposées indépendantes donc leurs énergies sont des variables aléatoires indépendantes. Or la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances (voir cours de mathématiques). Ainsi :

$$\text{Var}(E_{\text{système}}) = \sum_{n=1}^N \text{Var}(E_{\text{particule } n}),$$

soit :

$$\text{Var}(E_{\text{système}}) = N \text{Var}(E_{\text{particule}}).$$

On en déduit immédiatement la relation entre l'écart-type de l'énergie du système et l'écart-type de l'énergie d'une particule :

$$\sigma(E_{\text{système}}) = \sqrt{N} \sigma(E_{\text{particule}}). \quad (27.7)$$

Il résulte des relations (27.6) et (27.7) que :

$$\frac{\sigma(E_{\text{système}})}{\langle E_{\text{système}} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sigma(E_{\text{particule}})}{\langle E_{\text{particule}} \rangle}.$$

Ce résultat montre que :

La fluctuation relative de l'énergie du système régresse lorsque la taille du système augmente.

Pour un système thermodynamique de  $N \sim 10^{22}$  particules, la fluctuation relative est divisée par  $10^{11}$  par rapport à ce qu'elle est pour une particule unique. Dans ce cas, la valeur de l'énergie du système  $E_{\text{système}}$  ne varie quasiment pas autour de sa valeur moyenne. Ainsi, l'égalité :

$$E_{\text{système}} \simeq \langle E_{\text{système}} \rangle,$$

est réalisée à chaque instant avec une excellente précision. On admettra que :

**L'énergie interne**  $U$  du système qui est utilisée en thermodynamique est égale à l'énergie moyenne du système :

$$U = \langle E_{\text{système}} \rangle \simeq E_{\text{système}}.$$

### 4.3 Système à deux niveaux d'énergie non dégénérés

On va poursuivre les calculs dans le cas particulier où les particules ont uniquement deux états quantiques :

- un état fondamental 1 d'énergie  $E_1 = -\varepsilon$ ,
- un état excité 2 d'énergie  $E_2 = +\varepsilon$ .

L'écart entre les deux niveaux d'énergie est :  $\Delta = 2\varepsilon$ .

#### Remarque

Un autre usage courant consiste à prendre l'énergie de l'état fondamental nul :  $E_1 = 0$  et  $E_2 = \Delta$ , ce qui revient à ajouter  $\varepsilon$  à toutes les énergies.

Des exemples de systèmes réels modélisables par un système à deux niveaux seront donnés plus loin.

#### a) Probabilités et populations moyennes des deux états

Les probabilités pour une particule du système d'être dans les états 1 et 2 sont :

$$p(E_1) = \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{Z} \quad \text{et} \quad p(E_2) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{Z},$$

avec :

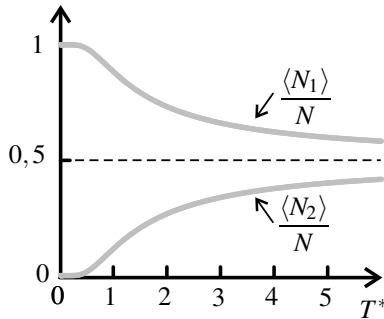
$$Z = \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) = 2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

On en déduit les populations moyennes des deux états :

$$\langle N_1 \rangle = N \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \quad \text{et} \quad \langle N_2 \rangle = N \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}.$$

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

La figure 27.4 montre les variations de  $\frac{\langle N_1 \rangle}{N}$  et  $\frac{\langle N_2 \rangle}{N}$  en fonction de la température adimensionnée  $T^* = \frac{k_B T}{\varepsilon}$ ; les deux fonctions représentées sont : 
$$\frac{\exp\left(\pm\frac{1}{T^*}\right)}{2\cosh\left(\frac{1}{T^*}\right)}$$
.



**Figure 27.4** – Populations moyennes des deux niveaux d'énergie en fonction de la température.

On observe que :

1. pour  $T^* \ll 1$  soit  $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$ , le niveau excité n'est quasiment pas peuplé et  $\langle N_1 \rangle \simeq N$ ;
2. pour  $T^* \gg 1$  soit  $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$ , les deux niveaux sont à peu près également peuplés et  $\langle N_1 \rangle \simeq \langle N_2 \rangle \simeq \frac{N}{2}$ , avec toutefois  $\langle N_1 \rangle > \langle N_2 \rangle$ .



À haute température, les particules *ne* sont *pas* toutes dans l'état excité !

### b) Énergie moyenne

Pour un tel système, on peut calculer de manière explicite les différentes grandeurs du 4.2. Ainsi, l'énergie moyenne par particule est :

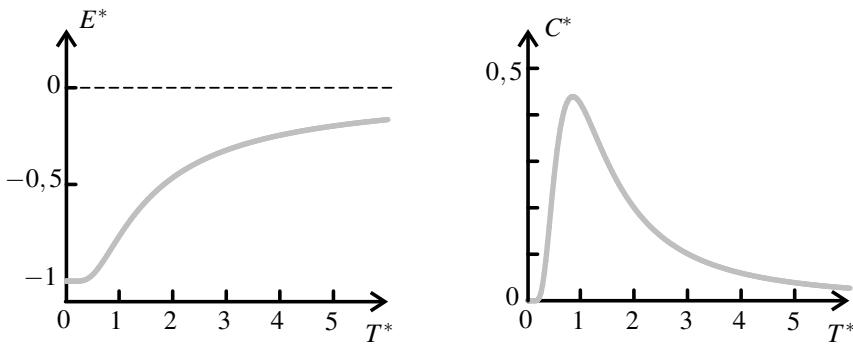
$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = p(E_1)E_1 + p(E_2)E_2 = \varepsilon \frac{-\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{Z} = -\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right),$$

et l'énergie moyenne du système est :

$$\langle E_{\text{système}} \rangle = -N\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

La figure 27.5 montre l'énergie adimensionnée  $E^* = \frac{\langle E_{\text{système}} \rangle}{N\varepsilon}$  en fonction de la température adimensionnée  $T^* = \frac{k_B T}{\varepsilon}$ ; la fonction représentée est :  $E^* = -\tanh\left(\frac{1}{T^*}\right)$ . Ce résultat appelle quelques commentaires :

1. L'énergie est toujours négative parce que le niveau de plus basse énergie ( $-\varepsilon$ ) est, à toute température, plus peuplé que le niveau de plus haute énergie ( $+\varepsilon$ ).
2. L'énergie est fonction croissante de la température car plus la température augmente plus la proportion de particules dans le niveau de plus haute énergie augmente.
3. Lorsque la température tend vers 0, la formule montre que l'énergie tend vers  $-N\varepsilon$ , ce qui correspond bien au fait que toutes les particules sont dans l'état de plus basse énergie ( $-\varepsilon$ ).
4. Lorsque la température tend vers l'infini, la formule montre que l'énergie tend vers 0, ce qui correspond bien au fait que les deux états sont alors également peuplés.



**Figure 27.5 –** Énergie et capacité thermique d'un système à deux niveaux.

### c) Capacité thermique

Par définition, la capacité thermique du système est :

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{d\langle E_{\text{système}} \rangle}{dT}.$$

$$\text{On a : } \frac{d\tanh(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

Il vient, en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée :

$$C = -N\varepsilon \frac{d}{dT} \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right) \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right) \right) = \frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right) \right) \quad (27.8)$$

La figure 27.5 montre la capacité thermique adimensionnée  $C^* = \frac{C}{Nk_B}$  en fonction de la température adimensionnée  $T^* = \frac{k_B T}{\varepsilon}$ ; la fonction représentée est  $C^* = \frac{1}{T^{*2}} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{1}{T^*} \right) \right)$ . On peut commenter plusieurs points :

1. La capacité thermique pour  $T^* \ll 1$ , soit pour  $T \ll \Theta = \frac{\varepsilon}{k_B}$ . Dans ce cas, l'agitation thermique n'est pas suffisante pour porter les particules dans l'état excité.
2. La capacité thermique passe par un maximum pour  $T^* \simeq 1$  soit pour une température proche de  $\Theta$ . C'est autour de cette température que les populations des deux niveaux varient le plus vite avec la température.
3. La capacité thermique tend vers 0 pour  $T^* \gg 1$  soit pour  $T \gg \Theta$ . À haute température, les populations des deux niveaux, quasiment égales, ne dépendent plus de la température.

#### d) Fluctuations de l'énergie

La moyenne du carré de l'énergie par particule est :

$$\langle E_{\text{particule}}^2 \rangle = p(E_1)E_1^2 + p(E_2)E_2^2 = (p(E_1) + p(E_2))\varepsilon^2 = \varepsilon^2,$$

et la variance de l'énergie d'une particule est :

$$\text{Var}(E_{\text{particule}}) = \langle E_{\text{particule}}^2 \rangle - \langle E_{\text{particule}} \rangle^2 = \varepsilon^2 \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right) \right).$$

Ainsi la variance de l'énergie du système est :

$$\text{Var}(E_{\text{système}}) = N\varepsilon^2 \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right) \right) = Ck_B T^2. \quad (27.9)$$

En comparant les formules (27.8) et (27.9) on constate que :

$$\text{Var}(E_{\text{système}}) = Ck_B T^2 \quad \text{soit} \quad \sigma(E_{\text{système}}) = \sqrt{Ck_B T} .$$

Ces relations entre les grandeurs caractérisant les fluctuations de l'énergie d'une part et la capacité thermique d'autre part, sont tout à fait générales et valables pour tout système thermodynamique en contact avec un thermostat.

#### Remarque

Pour  $T$  tendant vers 0 la variance et l'écart-type de l'énergie tendent vers 0 d'une part à cause du facteur  $T$  dans les expressions et d'autre part parce que la capacité thermique tend elle-même vers 0. Ceci s'interprète ainsi : toutes les particules sont de manière quasi-certaine dans l'état de plus basse énergie (l'état fondamental).

### e) Exemples de systèmes à deux niveaux

De nombreux systèmes réels sont des systèmes à 2 niveaux. On peut citer :

- un cristal paramagnétique qui contient des atomes ou des ions de spin  $\frac{1}{2}$  et que l'on soumet à un champ magnétique extérieur,
- les noyaux d'hydrogène  $\frac{1}{2}\text{H}$  (de spin  $\frac{1}{2}$ ) contenus dans un échantillon soumis à un champ magnétique dont on observe la résonance magnétique nucléaire (en abrégé RMN), phénomène à la base de la technique d'imagerie par résonance magnétique (IRM),
- les électrons non appariés de radicaux organiques ou d'ions de certains métaux de transition plongés dans un champ magnétique extérieur dont on observe la résonance paramagnétique électronique (RPE).

On peut aussi assimiler un système à plusieurs niveaux à un système à deux niveaux dans les deux situations suivantes :

- les deux premiers niveaux sont beaucoup plus proches que les autres et la température est telle que seuls ces deux niveaux sont peuplés,
- les niveaux excités sont tous très peu peuplés dans le domaine de température considéré et on néglige tous les niveaux excités mis à part le premier.

## 5 Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

Lors de l'étude du système à deux niveaux on a pu calculer l'énergie moyenne du système (énergie interne) et en déduire la capacité thermique. Dans ce paragraphe on va obtenir par la même méthode les capacités thermiques de gaz parfaits (monoatomiques ou diatomiques) ou de solides. Les résultats théoriques seront comparés aux valeurs expérimentales.

### 5.1 Théorème d'équirépartition de l'énergie

#### a) Approximation classique de la loi de Boltzmann

Lorsque les niveaux d'énergie  $E_1 < E_2, \dots < E_n < \dots$  des particules sont très serrés, c'est-à-dire que leurs écarts sont très faibles devant l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$ , on peut négliger la quantification de l'énergie et considérer que l'énergie varie de manière continue. Il s'agit de l'**approximation classique**.

Dans cette approximation on s'intéresse à la probabilité pour une particule d'avoir son énergie comprise dans un intervalle  $[E, E + dE]$ . D'après la loi de Boltzmann cette probabilité infinitésimale s'écrit :

$$dp(E) = A \times \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) g(E) dE,$$

où  $g(E)dE$  est le nombre d'états quantiques d'énergie comprise entre  $E$  et  $E + dE$  et  $A$  une constante de normalisation.

#### b) Degré de liberté quadratique

On appelle **degré de liberté**  $\xi$  d'une particule (atome, molécule...) :

- une coordonnée permettant de positionner cette particule dans l'espace,

- la dérivée temporelle d'une telle coordonnée.

**Exemple**

Une molécule monoatomique est assimilable à un point matériel dont la position est repérée par 3 coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ ; elle a ainsi 6 degrés de liberté :  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ .



L'expression degré de liberté a ici, en mécanique statistique, une signification différente de celle qu'on lui donne en mécanique et en SII.

Un degré de liberté  $\xi$  est dit **quadratique** si l'énergie de la particule est une fonction quadratique de  $\xi$ , c'est-à-dire si elle est de la forme :

$$E_{\text{particule}} = a\xi^2 + E',$$

où  $a$  est une constante et  $E'$  est une fonction des autres degrés de liberté.

**Exemple**

L'énergie cinétique d'une molécule monoatomique assimilée à un point matériel de masse  $m^*$  est :

$$E_{c,\text{translation}} = \frac{1}{2}m^*(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Cette molécule a 3 degrés de liberté quadratiques.

### c) Distribution de probabilité pour un degré de liberté quadratique

Dans ce qui suit on suppose les particules indépendantes et le système en équilibre avec un thermostat de température  $T$ . On considère un degré de liberté  $\xi$  supposé varier *continûment* entre  $-\infty$  et  $+\infty$ .

D'après la loi de Boltzmann, la probabilité  $dp(\xi)$  pour une molécule d'avoir son degré de liberté  $\xi$  compris entre  $\xi$  et  $\xi + d\xi$  est :

$$dp(\xi) = A \times \exp\left(-\frac{a\xi^2}{k_B T}\right) d\xi,$$

où  $A$  est une constante. On admet ici que le nombre d'états quantiques pour lesquels le degré de liberté est dans l'intervalle  $[\xi, \xi + d\xi]$  est indépendant de la valeur de  $\xi$ . La constante de normalisation  $A$  est déterminée par la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp(\xi) = 1.$$

Cette condition s'écrit :

$$A \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a\xi^2}{k_B T}\right) d\xi = 1,$$

soit :

$$\frac{1}{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a\xi^2}{k_B T}\right) d\xi = \sqrt{\frac{k_B T}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{a}},$$

en faisant le changement de variable  $u = \sqrt{\frac{a}{k_B T}} \xi$  et en utilisant la formule bien connue de l'intégrale de Gauss :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}$ . Finalement :

$$dp(\xi) = \sqrt{\frac{a}{\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{a\xi^2}{k_B T}\right) d\xi.$$

#### d) Énergie d'agitation thermique associée à un degré de liberté quadratique

On peut calculer la moyenne du terme dépendant de  $\xi$  dans l'énergie de la particule :

$$\begin{aligned} \langle a\xi^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} a\xi^2 \times dp(\xi) \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} a\xi^2 \exp\left(-\frac{Ca\xi^2}{k_B T}\right) d\xi \\ &= \frac{k_B T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\xi^2}{k_B T} \exp\left(-\frac{a\xi^2}{k_B T}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{k_B T}} d\xi\right) \\ &= \frac{k_B T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp(-u^2) du \\ &= \frac{1}{2} k_B T. \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a fait le changement de variable  $u = \sqrt{\frac{a}{k_B T}} \xi$  et on a utilisé la formule  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Le fait remarquable est que la moyenne est indépendante de  $a$ .

Le résultat est connu sous le nom de **théorème d'équirépartition de l'énergie** :

Dans un système à l'équilibre à la température  $T$ , l'énergie moyenne par molécule associée à un degré de liberté quadratique est :  $\langle a\xi^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ .

#### e) Contribution d'un degré de liberté quadratique à la capacité thermique molaire

Le degré de liberté quadratique  $\xi$  apporte  $\frac{1}{2} k_B T$  à l'énergie moyenne par particule :

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T + \langle E' \rangle.$$

On en déduit que l'énergie interne d'un système de  $N$  particules s'écrit :

$$U = \langle E_{\text{système}} \rangle = \frac{1}{2} N k_B T + N \langle E' \rangle,$$

et l'énergie interne molaire :

$$U_m = \frac{1}{2} \mathcal{N}_A k_B T + \mathcal{N}_A \langle E' \rangle = \frac{1}{2} R T + U'_m.$$

On en déduit enfin la capacité thermique molaire à volume constant :

$$C_{V,m} = \frac{dU_m}{dT} = \frac{1}{2} R + \frac{dU'_m}{dT}.$$

Chaque degré de liberté quadratique augmente de  $\frac{1}{2}R$  la capacité thermique molaire à volume constant.

## 5.2 Théorie classique de la capacité thermique des gaz parfaits

On va appliquer le résultat précédent à la détermination de la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait monoatomique, puis diatomique. On comparera le résultats à des valeurs expérimentales.

### a) Capacité thermique à volume constant d'un gaz monoatomique

Une molécule de gaz monoatomique est assimilable à un point matériel de masse  $m^*$  dont la position est repérée par trois coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Elle a 6 degrés de libertés :  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ .

Son énergie cinétique s'écrit :  $E_{c,\text{molécule}} = \frac{1}{2}m^*(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ .

Par ailleurs, dans un gaz parfait l'énergie potentielle des molécules du gaz parfait est nulle puisque les molécules n'interagissent pas entre elles. (On ne tient pas compte ici du poids.) Ainsi, l'énergie d'une molécule se réduit à son énergie cinétique :

$$E_{\text{molécule}} = E_{c,\text{molécule}} = \frac{1}{2}m^*(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Une molécule monoatomique, modélisée par un point matériel, a trois degrés de liberté quadratiques correspondant aux mouvements dans les trois directions de l'espace.

Il en résulte que la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait monoatomique est, d'après le théorème d'équirépartition :

$$C_{V,m} = \frac{3}{2}R.$$

Numériquement :  $C_{V,m} = \frac{3}{2} \times 8,314 = 12,47 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Expérimentalement, les valeurs des capacités thermiques extrapolées pour une pression quasi-nulle (conditions dans lesquelles les gaz réels se comportent comme des gaz parfaits) à  $T = 20^\circ\text{C}$  sont : pour l'hélium He,  $C_{V,m}^{\text{exp}} = 12,4 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  et pour l'argon Ar,  $C_{V,m}^{\text{exp}} =$

$12,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Ces valeurs correspondent bien à la prédiction théorique. De plus la capacité thermique de l'hélium est indépendante de la température sur un domaine de température large de 2000 K, ce qui est remarquable et conforme à la prédiction théorique.

### b) Capacité thermique à volume constant d'un gaz diatomique

La modélisation la plus simple d'une molécule diatomique consiste à l'assimiler à deux points matériels  $A$  et  $B$ , de masses respectives  $m_A^*$  et  $m_B^*$ , rigidement liés : la distance  $AB = \ell$  est fixée. Il est judicieux de repérer la position de la molécule par les coordonnées suivantes, représentées sur la figure 27.6 :

- les trois coordonnées  $x_G$ ,  $y_G$  et  $z_G$  du centre d'inertie  $G$  de la molécule (on rappelle que ce point est tel que  $m_A^* \vec{GA} + m_B^* \vec{GB} = \vec{0}$ ),
- l'angle  $\theta$  entre le vecteur  $\vec{AB}$  et l'axe ( $Gz$ ),
- l'angle  $\varphi$  entre le vecteur projeté de  $\vec{AB}$  sur le plan ( $Gxy$ ) et l'axe ( $Gx$ ).

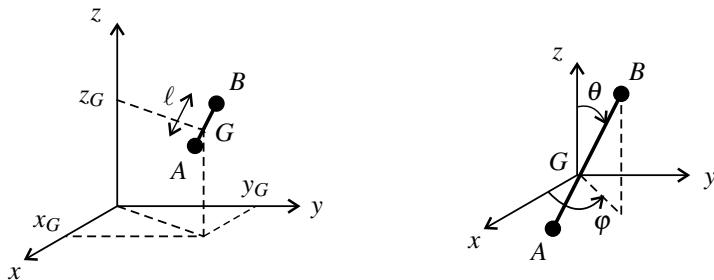


Figure 27.6 – Repérage de la position d'une molécule diatomique rigide.

Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont les deux angles des coordonnées sphériques.

On admet que l'énergie cinétique de la molécule se met sous la forme :

$$E_{c,\text{molécule}} = \frac{1}{2}(m_A^* + m_B^*) (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2} \frac{m_A^* m_B^*}{m_A^* + m_B^*} \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_A^* m_B^*}{m_A^* + m_B^*} (\ell \sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Comme dans le cas du gaz parfait monoatomique, l'énergie potentielle des molécules est nulle donc l'énergie d'une molécule se réduit à son énergie cinétique :

$$E_{\text{molécule}} = E_{c,\text{molécule}}.$$

On admettra que le fait que le facteur multiplicatif de  $\dot{\varphi}^2$  dans l'expression de  $E_{c,\text{molécule}}$  dépend de  $\theta$  n'empêche pas d'appliquer le théorème d'équirépartition à ce degré de liberté quadratique. Cette expression montre alors que :

Une molécule diatomique rigide a 5 degrés de liberté quadratiques :

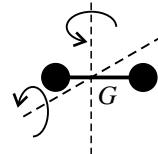
- 3 degrés de liberté de translation correspondant aux translations dans les trois directions de l'espace,
- 2 degrés de liberté de rotation .

Il en résulte que la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait diatomique est, d'après le théorème d'équirépartition :

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R.$$



On retient facilement le fait qu'une molécule diatomique a deux degrés de liberté de rotation, en considérant qu'elle peut tourner autour des deux axes passant par son centre d'inertie  $G$  et qui lui sont orthogonaux (voir figure).



Numériquement :  $C_{V,m} = \frac{5}{2} \times 8,314 = 20,79 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Pour la plupart des gaz diatomiques les valeurs expérimentales des capacités thermiques à  $T = 300 \text{ K}$  sont proches de cette estimation théorique : par exemple, pour le dihydrogène  $\text{H}_2$ ,  $C_{V,m}^{\text{exp}} = 20,5 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  et pour le diazote  $\text{N}_2$ ,  $C_{V,m}^{\text{exp}} = 20,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Le modèle de molécules diatomiques rigides est valable pour la plupart des gaz diatomiques aux températures usuelles.

Cependant à des températures plus élevées, on observe un écart croissant avec cette prédition théorique. Ceci est bien visible sur la figure 27.7 dans le cas du diazote.

### 5.3 Amélioration du modèle du gaz parfait diatomique

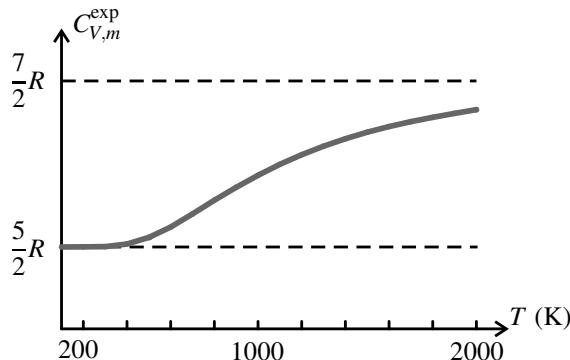
#### a) Mouvements de vibration

Pour améliorer la description du gaz diatomique il faut envisager, en plus des mouvements de translation et de rotation, des mouvements de **vibration**. Il s'agit de mouvements au cours desquels la distance  $\ell$  entre les deux atomes varie, les deux atomes vibrant comme s'ils étaient reliés par un ressort (ces mouvement n'existent pas dans le cas d'une molécule parfaitement rigide).

En notant  $\ell_{\text{équilibre}}$  la valeur moyenne de la distance  $\ell$  et  $\ell = \ell_{\text{équilibre}} + x$ , avec  $x \ll \ell_{\text{équilibre}}$ , on peut montrer que l'énergie associée à ces mouvements se met sous la forme :

$$E_{\text{vibration}} = \frac{1}{2} \frac{m_A^* m_B^*}{m_A^* + m_B^*} x^2 + \frac{1}{2} kx^2,$$

où  $k$  est une « constante de raideur moléculaire ». Il s'agit de l'énergie d'un oscillateur harmonique qui contient deux termes quadratiques.



**Figure 27.7** – Capacité thermique molaire à volume constant du diazote N<sub>2</sub> en fonction de la température (d'après les données du NIST).

La prise en compte du mouvement de vibration d'une molécule diatomique introduit 2 degrés de liberté quadratiques supplémentaires.

Par suite la capacité thermique molaire à volume constant d'un gaz parfait diatomique devient, d'après le théorème d'équirépartition :

$$C_{V,m} = \frac{7}{2}R.$$

C'est la valeur vers laquelle la capacité thermique du diazote semble tendre lorsque la température augmente (voir figure 27.7).

Le modèle classique n'explique cependant pas pourquoi la capacité thermique varie avec la température et pourquoi la molécule semble rigide aux températures usuelles et non rigide à des températures plus élevées. Pour cela il faut prendre en compte la quantification de l'énergie des molécules.

### b) Effet de la quantification de l'énergie

L'énergie associée à chaque mouvement moléculaire (translation, rotation, vibration) est en réalité quantifiée. La connaissance des niveaux d'énergie permet le calcul de la capacité thermique selon la méthode qui a été développée ci-dessus dans le cas du système à deux niveaux. Ceci dépasse le cadre du programme.

Sans faire ce calcul on peut donner des résultats approchés par analogie avec le système à deux niveaux. Il suffit de connaître l'ordre de grandeur  $\Delta$  de l'écart entre deux niveaux d'énergie (pour un mouvement donné) et de comparer  $T$  à  $\Theta = \frac{\Delta}{k_B}$ .

- Si  $T \gg \Theta$ , on peut ignorer la quantification de l'énergie puisque les niveaux sont très serrés et appliquer le théorème d'équirépartition de l'énergie. Le mouvement moléculaire contribue à la capacité thermique pour autant de fois  $\frac{1}{2}R$  qu'il y a de degrés de liberté quadratiques associés : 3 pour la translation, 2 pour la rotation, 2 pour la vibration.
- Si  $T \ll \Theta$ , l'agitation thermique n'est pas suffisante pour peupler les niveaux excités et le mouvement correspondant peut être considéré comme « gelé » à cette température. Il ne contribue pas à la capacité thermique.

Le tableau 27.1 donne les ordres de grandeur de la température caractéristique  $\Theta$  pour les différents mouvements moléculaires. On remarque que le théorème d'équirépartition s'applique aux degrés de liberté de translation quelle que soit la température.

| Type de mouvement | Ordre de grandeur de $\Theta$    |
|-------------------|----------------------------------|
| translation       | de $1.10^{-20}$ à $1.10^{-14}$ K |
| rotation          | de quelques K à 100 K            |
| vibration         | de 500 à 6000 K                  |

**Tableau 27.1** – Écart typique  $\Delta$  entre les niveaux d'énergie pour les différents types de mouvement d'une molécule diatomique.

### c) Application au diazote

Dans le cas du diazote,  $\Theta_{\text{rotation}} = \frac{\Delta_{\text{rotation}}}{k_B} = 2,9 \text{ K}$  et  $\Theta_{\text{vibration}} = \frac{\Delta_{\text{vibration}}}{k_B} = 3395 \text{ K}$  (ces valeurs proviennent des spectres infrarouges de rotation et de vibration). Ainsi :

- pour  $T$  compris entre 100 et 300 K :
  - $T \gg \Theta_{\text{translation}}$  et  $T \gg \Theta_{\text{rotation}}$ , ce qui permet de traiter ces degrés de liberté de manière classique et donc de leur appliquer le théorème d'équirépartition,
  - $T \ll \Theta_{\text{vibration}}$  de sorte que les mouvements de vibration sont « gelés ».

Alors la capacité thermique molaire du gaz est :

$$C_{V,m} \simeq \underbrace{3 \times \frac{1}{2}R}_{\text{translation}} + \underbrace{2 \times \frac{1}{2}R}_{\text{rotation}} = \frac{5}{2}R.$$

- pour  $T$  compris entre 300 et 2000 K, l'agitation thermique devient suffisante pour peupler des niveaux de vibration. Lorsque la température augmente, les niveaux excités sont de plus en plus peuplés et l'énergie interne ainsi que la capacité thermique augmentent. On a alors :

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R + (C_{V,m})_{\text{vibration}}.$$

### Remarque

Pour  $T \gg 3395$  K on peut appliquer le théorème d'équirépartition aux deux degrés de liberté de vibration, donc la capacité thermique serait :

$$C_{V,m} \simeq \underbrace{3 \times \frac{1}{2}R}_{\text{translation}} + \underbrace{2 \times \frac{1}{2}R}_{\text{rotation}} + \underbrace{2 \times \frac{1}{2}R}_{\text{vibration}} = \frac{7}{2}R.$$

Mais en réalité  $C_{V,m}$  passe au dessus de cette valeur à partir de 4000 K parce que les niveaux électroniques excités commencent à être peuplés par l'agitation thermique.

## 5.4 Capacité thermique à volume constant d'un solide

La capacité thermique d'un solide est la somme de plusieurs contributions :

- la capacité thermique du réseau cristallin,
- la capacité thermique des électrons de conduction dans le cas d'un métal,
- la capacité thermique des moments magnétiques nucléaires dans le cas d'un solide magnétique.

On s'intéressera ici uniquement à la capacité thermique du réseau donc les résultats ne concerneront *a priori* que des solides isolants non magnétiques. Toutefois, la contribution des électrons est faible à température ambiante, ce qui fait que les résultats pourront être appliqués avec succès à différents métaux.

On se limitera aussi à des solides monoatomiques.

### a) Théorie classique de la capacité thermique des solides

Les atomes d'un solide occupent des positions précises correspondant à la structure cristalline. Sous l'effet de l'agitation thermique, ils vibrent autour de ces positions. On peut repérer la position un l'atome par les trois coordonnées  $(x, y, z)$  de son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. L'atome a ainsi 6 degrés de liberté correspondant aux translations dans les trois directions de l'espace :  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$  et  $\dot{z}$ .

Son énergie cinétique s'écrit :

$$E_{c,\text{atome}} = \frac{1}{2}m^* (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

en notant  $m^*$  sa masse. Son énergie potentielle n'est pas nulle car dans un solide les atomes interagissent fortement entre eux (ce qui fait la cohésion du solide). On sait que cette énergie est minimale pour la position d'équilibre, soit pour  $x = y = z = 0$ . Le déplacement de l'atome restant faible, on peut donc écrire l'énergie potentielle sous la forme d'un développement limité du deuxième ordre :

$$E_{p,\text{atome}} = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes.

Finalement :

$$E_{\text{atome}} = \frac{1}{2}m^* (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + ax^2 + by^2 + cz^2,$$

Un atome dans un solide a 6 degrés de liberté quadratiques, dont 3 proviennent de l'énergie cinétique de translation et 3 proviennent de l'énergie potentielle.

D'après le théorème d'équirépartition, il en résulte que la capacité thermique molaire à volume constant d'un solide monoatomique est :

$$C_{V,m} = 6 \times \frac{1}{2}R = 3R.$$

Numériquement :  $C_{V,m} = 3 \times 8,31 = 24,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Ce résultat est la **loi de Dulong et Petit**, découverte en 1830, selon laquelle la capacité thermique molaire des cristaux est égale à  $25 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Cette loi est illustrée par le tableau 27.2 : les capacités thermiques massiques  $c_V$  ont des valeurs très variées, mais les capacités thermiques molaires (calculées par la formule  $C_{V,m} = c_V \times M$ ) sont assez proches pour la plupart des solides.

| Élément | $c_V (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$ | $M (\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1})$ | $C_{V,m} (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$ |
|---------|---|---------------------------------------|--|
| Mg      | $1,01 \cdot 10^3$   | $24,3 \cdot 10^{-3}$                  | 24,6   |
| Si      | $8,82 \cdot 10^2$   | $28,1 \cdot 10^{-3}$                  | 24,7   |
| Fe      | $3,98 \cdot 10^2$   | $55,8 \cdot 10^{-3}$                  | 22,2   |
| Cu      | $3,86 \cdot 10^2$   | $63,5 \cdot 10^{-3}$                  | 24,5   |
| Au      | $1,28 \cdot 10^2$   | $197 \cdot 10^{-3}$                   | 25,2   |

**Tableau 27.2** – Données relatives à quelques éléments solides à 298 K : capacité thermique massique  $c_V$ , masse molaire  $M$  et capacité thermique molaire  $C_{V,m}$ .

La théorie classique prédit une valeur de  $C_{V,m}$  proche de la valeur expérimentale pour de nombreux cristaux, à température ambiante. Mais elle ne rend pas du tout compte de la variation  $C_{V,m}$  avec la température. En effet, on constate expérimentalement que la capacité thermique de tous les cristaux diminue si la température baisse. Elle tend vers zéro lorsque la température tend vers zéro. Pour interpréter cette observation il faut tenir compte de la quantification de l'énergie des atomes.

### b) Modèle d'Einstein

Le **modèle d'Einstein**, datant de 1907, consiste à assimiler les atomes du solide à des oscillateurs harmoniques quantiques indépendants. Comme chaque atome se déplace dans 3 directions, il lui correspond 3 oscillateurs harmoniques à 1 dimension. De plus, on suppose pour simplifier les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  équivalentes, donc ces trois oscillateurs ont la même fréquence naturelle  $\nu$ . Cette fréquence est identique pour tous les atomes.

Finalement, un échantillon de solide de  $N$  atomes est équivalent à  $3N$  oscillateurs harmoniques identiques et indépendants. On supposera cet échantillon en équilibre avec un thermostat de température  $T$ .

On montre en mécanique quantique que l'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence

$\nu$  est quantifiée et qu'elle prend les valeurs :

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu,$$

où  $h$  est la constante de Planck et  $n$  un entier positif ou nul quelconque. La probabilité pour cet oscillateur d'être dans l'état d'énergie  $E_n$  est donnée par la loi de Boltzmann :

$$p(E_n) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_n) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

et :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n).$$

L'énergie moyenne de l'oscillateur s'écrit :

$$\langle E_{\text{oscillateur}} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-\beta E_n) = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta},$$

puisque  $\frac{d}{d\beta} (\exp(-\beta E_n)) = -E_n \exp(-\beta E_n)$ . La somme infinie dans l'expression de  $Z$  se calcule facilement car elle se ramène à la somme d'une progression géométrique de raison  $\exp(-\beta h\nu)$  :

$$Z = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta h\nu\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta h\nu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\beta h\nu\right)}{1 - \exp(-\beta h\nu)} = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)}.$$

On en déduit :

$$\langle E_{\text{oscillateur}} \rangle = -\frac{1}{2} \sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right) \times \frac{d}{d\beta} \left( \frac{2}{\sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)} \right) = \frac{h\nu}{2} \frac{\cosh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)}.$$

Pour la suite du calcul on introduit la température d'Einstein  $\Theta_E$  qui est définie par :

$$k_B \Theta_E = h\nu.$$

L'énergie interne d'un échantillon de solide comportant  $N$  atomes est  $U = 3N \times \langle E_{\text{oscillateur}} \rangle$ . L'énergie interne molaire du solide est :

$$U_m = 3\mathcal{N}_A \times \langle E_{\text{oscillateur}} \rangle = 3\mathcal{N}_A k_B \frac{\Theta_E}{2} \frac{\cosh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}{\sinh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)} = 3N_A k_B \frac{\Theta_E}{2} \frac{\cosh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}{\sinh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}.$$

On en déduit la capacité thermique à volume constant de cet échantillon :

$$C_{V,m} = \frac{dU_m}{dT} = 3N_A k_B \frac{\Theta_E}{2} \frac{d}{dT} \left( \frac{\cosh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}{\sinh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)} \right) = 3N_A k_B \frac{\Theta_E^2}{4T^2} \frac{\cosh^2\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right) - \sinh^2\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)}$$

soit finalement :

$$C_{V,m} = 3R \times \left( \frac{\frac{\Theta_E}{2T}}{\sinh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)} \right)^2.$$

Pour interpréter cette formule, on peut tracer avec un grapheur la capacité thermique adimensionnée  $C^* = \frac{C_{V,m}}{R}$  en fonction de la température adimensionnée  $T^* = \frac{2T}{\Theta_E}$ , soit la fonction :

$$C^* = \frac{3}{\left(T^* \sinh\left(\frac{1}{T^*}\right)\right)^2}.$$

On obtient la courbe représentée sur la figure 27.8.

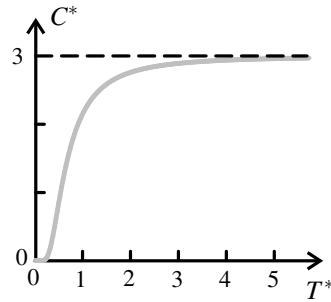


Figure 27.8 – Capacité thermique du solide d'Einstein.

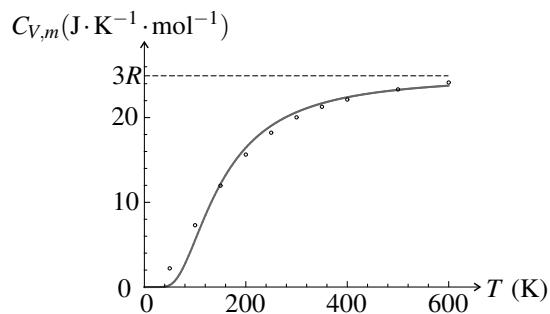
On observe que :

- la capacité thermique est fonction croissante de la température,
- la capacité thermique tend vers 0 si  $T$  tend vers 0,
- pour  $T$  tendant vers l'infini  $C_{V,m}$  tend vers  $3R$ , soit la valeur donnée par la théorie classique correspondant à la loi de Dulong et Petit .

Cette courbe est une courbe universelle à partir de laquelle on peut, en théorie, calculer la capacité thermique de n'importe quelle substance solide, si l'on connaît la température  $\Theta_E$  correspondante. En pratique, on peut chercher la valeur de  $\Theta_E$  pour laquelle il y a la meilleure coïncidence entre les valeurs calculées de  $C_{V,m}$  et les valeurs expérimentales. On trouve qu'il y a un accord qualitatif entre la théorie et l'expérience, mais non quantitatif, notamment aux basses températures, pour lesquelles la capacité thermique prédictive par la théorie d'Einstein tend trop rapidement vers 0 lorsque  $T$  tend vers 0.

### Exemple

La figure 27.9 illustre cette démarche. On a cherché la valeur de  $\Theta_E$  pour laquelle la somme des écarts au carré  $((C_{V,m})_{\text{exp}} - (C_{V,m})_{\text{th}})^2$  est la plus faible de manière à ce que la courbe théorique passe le plus près possible des points expérimentaux.



**Figure 27.9** – Capacité thermique du silicium cristallin en fonction de la température : valeurs expérimentales et courbe théorique avec  $\Theta_E = 456,3\text{ K}$ .

**SYNTHESE**

**SAVOIRS**

- échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique
- loi de Boltzmann
- système à deux niveaux
- lien entre les fluctuations d'énergie et la capacité thermique
- théorème d'équirépartition
- capacité thermique d'un gaz monoatomique, d'un gaz diatomique, d'un solide dans l'approximation classique

**SAVOIR-FAIRE**

- établir la variation de la pression avec l'altitude dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme
- reconnaître un facteur de Boltzmann
- comparer  $k_B T$  à un écart d'énergie et estimer les conséquences d'une variation de température
- exploiter un rapport de probabilités entre deux états
- exprimer la probabilité d'occupation d'un état d'énergie en utilisant la condition de normalisation
- exprimer, sous forme d'une somme portant sur les états quantiques, l'énergie moyenne et l'écart quadratique d'énergie d'une particule indépendante
- expliquer pourquoi les fluctuations de l'énergie régressent avec le nombre de particules
- déduire du nombre de degrés de liberté quadratiques la capacité thermique molaire d'un système

**MOTS-CLÉS**

- |  |                                |                            |
|--|--------------------------------|----------------------------|
| • atmosphère isotherme                         | • variance, écart quadratique  | • capacité thermique       |
| • constante de Boltzmann                       | • fluctuation                  | • gaz parfait monoatomique |
| • facteur de Boltzmann                         | • degré de liberté quadratique | • gaz parfait diatomique   |
| • probabilité d'occupation d'un état quantique | • énergie interne              | • loi de Dulong et Petit   |
| • valeur moyenne                               |                                |                            |

## S'ENTRAÎNER

### 27.1 Composition de l'air (★)

L'air atmosphérique est composé essentiellement de diazote  $N_2$  de masse molaire  $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et de dioxygène  $O_2$  de masse molaire  $M_{O_2} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Au niveau de la mer les fractions molaires de ces deux gaz sont telles que :  $x_{N_2} \simeq 4x_{O_2}$ .

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme à  $T = 290 \text{ K}$ , calculer  $\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}}$  à 4000 m d'altitude.

### 27.2 Atmosphère adiabatique (★)

Pour l'air atmosphérique de la troposphère (partie de l'atmosphère la plus proche du sol terrestre) le modèle de l'atmosphère adiabatique est plus réaliste que le modèle de l'atmosphère isotherme. Dans ce modèle, la pression locale  $P(z)$  et la masse volumique  $\mu(z)$  sont supposées vérifier la relation :

$$P(z)(\mu(z))^{-\gamma} = \text{constante},$$

où  $\gamma = \frac{7}{5}$  est le rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant de l'air qui est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . L'accélération de la pesanteur est supposée uniformément égale à  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- On note  $T(z)$  la température à l'altitude  $z$ . Montrer que :  $(P(z))^{1-\gamma}(T(z))^\gamma = \text{constante}$ .
- En dérivant le logarithme de cette équation et en utilisant l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur, établir que  $\frac{dT}{dz} = -\Gamma$  où  $\Gamma$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\gamma$  et  $R$  (constante des gaz parfaits). Calculer numériquement  $\Gamma$ . Expliquer pourquoi ce modèle n'est pas applicable sur toute la hauteur de l'atmosphère.
- Exprimer  $P(z)$  en fonction de  $P(0)$ ,  $T(0)$ ,  $\Gamma$ ,  $\gamma$  et  $z$ .

### 27.3 Expérience de Jean Perrin (★★)

Dans son livre *les atomes* publié en 1913 Jean Perrin décrit des expériences qui lui ont permis de mesurer le nombre d'Avogadro. Au terme d'une préparation décrite dans le livre, l'auteur obtient une suspension dans l'eau de grains de gomme-gutte sphériques, ayant tous le même rayon  $a$  de l'ordre du dixième de micron. Il observe ces grains au microscope, l'échantillon étant contenu dans une cuve de  $100 \mu\text{m}$  de profondeur. La gomme-gutte est une substance solide de densité  $d = 1,194$ .

- Chaque grain est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède (égale à l'opposé du poids de son volume en eau). Montrer que l'énergie potentielle  $E_p(z)$  d'un grain de coordonnée  $z$  le long d'un axe ( $Oz$ ) vertical ascendant est de la forme  $E_p(z) = Az$  où  $A$  est une constante. On exprimera  $A$  en fonction de  $g$ ,  $d$ ,  $a$  et de la masse volumique de l'eau  $\mu_{\text{eau}}$ .
- En faisant l'hypothèse que les grains suivent la loi de Boltzmann, déterminer une longueur  $h$ , dépendant de  $A$  et de la température  $T$  de l'échantillon, qui caractérise la répartition des grains selon l'axe ( $Oz$ ). Quel est l'ordre de grandeur de  $h$  à la température ambiante ? Commenter.

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

**3.** Lors d’expériences soignées avec des grains de rayon  $a = 0,212 \mu\text{m}$ , Perrin a trouvé que les concentrations des grains en quatre plans horizontaux équidistants traversant la cuve aux niveaux : 5, 35, 65 et  $95 \mu\text{m}$  sont proportionnelles respectivement aux nombres : 100, 47, 23 et 12. En déduire une valeur approchée du nombre d’Avogadro, sachant que la constante des gaz parfaits vaut  $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ , en prenant pour la température de l’échantillon la valeur (non précisée par l’auteur)  $T = 273 \text{ K}$ .

**27.4 Systèmes à trois niveaux d’énergie (★)**

On considère un système de  $N$  particules indépendantes pouvant exister dans 3 états quantiques d’énergies égales à 0,  $\varepsilon$  et  $2\varepsilon$ . Le système est en équilibre avec un thermostat de température  $T$ .

1. Quelle est l’énergie moyenne du système pour  $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$  ? pour  $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$  ?  $T = \frac{\varepsilon}{k_B}$  ? Justifier les réponses.
2. Quelle est la capacité thermique pour  $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$  ? pour  $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$  ? Justifier les réponses. Que peut-on en déduire ?

**27.5 Systèmes à deux niveaux d’énergie dégénérés (★)**

On considère un système de  $N$  particules pouvant exister dans 4 états quantiques différents : 1 état dans lequel l’énergie de la particule est nulle et 3 états dans lesquels l’énergie est égale à  $\varepsilon$ . Les particules, indépendantes entre elles, sont à l’équilibre avec un thermostat de température  $T$ . La probabilité pour une particule d’être dans un état quantique donné est proportionnelle au facteur de Boltzmann de cet état.

1. Exprimer pour une particule donnée :
  - la probabilité qu’elle soit dans l’état quantique d’énergie nulle,
  - la probabilité qu’elle soit dans un état quantique donné d’énergie  $\varepsilon$ ,
  - la probabilité qu’elle soit au niveau d’énergie nulle,
  - la probabilité qu’elle soit au niveau d’énergie  $\varepsilon$ .
2. Quelle est la condition pour que le système contienne, en moyenne, plus de particules d’énergie  $\varepsilon$  que de particules d’énergie nulle ?
3. Vers quelle limite tend l’énergie du système lorsque la température tend vers l’infini ?

**27.6 Niveaux de vibration (★)**

Les niveaux d’énergie de vibration d’une molécule diatomique sont  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_{\text{vibr}}$  où  $\nu_{\text{vibr}}$  est la fréquence de vibration et  $n$  est un entier positif quelconque. On considère un échantillon de ces molécules en équilibre avec un thermostat de température  $T$ .

1. Exprimer en fonction de  $h$ ,  $\nu_{\text{vibr}}$  et  $T$  :
  - le pourcentage des molécules qui sont dans l’état d’énergie  $E_1$ ,
  - le pourcentage de molécules qui sont dans les différents états excités  $E_n$  avec  $n \geq 1$ .
2. Faire les applications numériques à  $T = 298 \text{ K}$  dans le cas de la molécule de diiode  $I_2$  dont la fréquence de vibration, particulièrement basse, est  $\nu_{\text{vibr}} = 6,438 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ .

### 27.7 Fluctuations de l'énergie d'une particule (\*\*)

On considère, au sein d'un système thermodynamique en équilibre à la température  $T$ , une particule indépendante pouvant exister dans les niveaux d'énergie  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ . On pose  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  et  $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$ .

1. Montrer que la valeur moyenne de l'énergie  $\varepsilon$  de la particule est :  $\langle \varepsilon \rangle = -\frac{d \ln Z}{d \beta}$ .

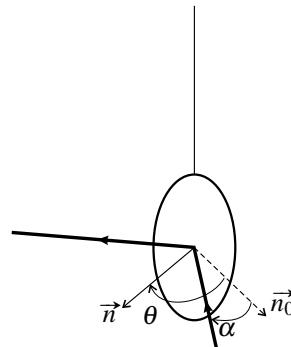
2. Montrer que :  $\frac{d \langle \varepsilon \rangle}{d \beta} = \langle \varepsilon \rangle^2 - \langle \varepsilon^2 \rangle$ .

3. Vérifier que :  $\frac{d \langle \varepsilon \rangle}{d \beta} = -k_B T^2 \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dT}$ .

4. On suppose que  $\langle \varepsilon \rangle = \alpha k_B T$  où  $\alpha$  est un nombre de l'ordre de l'unité et qui varie très peu sur le domaine de température considéré. Montrer que  $\sigma(\varepsilon)$ , écart type de l'énergie d'une particule, est du même ordre de grandeur que  $\langle \varepsilon \rangle$ .

### 27.8 Expérience de Kappler (\*)

L'expérience de Kappler (1931) a permis de mesurer la constante Boltzmann à partir des fluctuations de position d'un petit pendule de torsion placé dans une enceinte thermostatée de température  $T$ . Le pendule est constitué par un petit miroir suspendu au bout d'un fil de quartz. Ce miroir peut tourner autour de l'axe du fil et sa position est repérée par l'angle de torsion  $\theta$  du fil, angle entre la normale  $\vec{n}$  au miroir et la direction  $\vec{n}_0$  de celle-ci lorsque le fil n'est pas déformé. L'énergie potentielle associée à la torsion du fil est  $\frac{1}{2} C \theta^2$  où  $C$  est une constante caractérisant le fil.



1. Un rayon lumineux arrivant sur le miroir fait un angle  $\alpha$  avec  $\vec{n}_0$ . Quel est l'angle  $\alpha'$  entre le rayon réfléchi et  $\vec{n}_0$ ? Le rayon réfléchi arrive sur un film photographique situé à grande distance  $L$  du miroir. Exprimer le déplacement  $d$  du point d'impact lorsque  $\theta$  varie d'un angle très faible  $\Delta\theta$ .

2. Du fait des chocs des molécules du gaz contenu dans l'enceinte avec le miroir, l'angle  $\theta$  fluctue autour de 0.

a. En utilisant le théorème d'équirépartition de l'énergie exprimer  $\langle \theta^2 \rangle$ .

b. Avec les données suivantes :  $T = 287,1 \text{ K}$ ,  $C = 9,428 \cdot 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $L = 0,865 \text{ m}$ , Kappler a mesuré  $\langle d^2 \rangle = 1,250 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ . Quelle valeur de la constante de Boltzmann a-t-il trouvée ?

3. Le fil était en quartz, de longueur  $\ell$  et de diamètre  $\delta$ , et sa constante de raideur est  $C = G \frac{\pi \delta^4}{32\ell}$  où  $G = 31,14 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  est le module de rigidité du quartz. En supposant que  $\ell$  était de l'ordre de 1 m, déterminer l'ordre de grandeur de  $\delta$ .

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

**27.9 Capacité thermique du dihydrogène gazeux (★★)**

On s'intéresse à la capacité thermique du dihydrogène  $H_2$  lorsqu'il est gazeux. On rappelle que :  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  et  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**1.** L'écart entre deux niveaux d'énergie de translation d'une molécule  $H_2$  est de l'ordre de grandeur de  $\Delta_{\text{trans}} = \frac{h^2}{m^* L^2}$  où  $m^* = 3,345 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  est la masse de la molécule et  $L$  la taille

du récipient dans lequel le gaz est contenu. Calculer  $\Theta_{\text{trans}} = \frac{\Delta_{\text{trans}}}{k_B}$  pour une valeur réaliste de  $L$ . Conclure quant à l'utilisation du théorème d'équirépartition de l'énergie pour les degrés de liberté de translation.

**2.** La distance entre les deux noyaux d'hydrogène dans la molécule  $H_2$  est  $a = 74,14 \text{ pm}$ .

**a.** Vérifier que le moment d'inertie de la molécule par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe des noyaux est  $I \simeq \frac{1}{4} m^* a^2$ . Calculer numériquement  $I$ .

**b.** Rappeler les expressions du moment cinétique  $L$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un solide en rotation autour d'un axe fixe en fonction de son moment d'inertie  $I$  et de sa vitesse de rotation  $\omega$ . En déduire une expression de  $E_c$  en fonction de  $L$  et  $I$  uniquement.

**c.** En mécanique quantique l'expression de l'énergie de rotation en fonction du moment cinétique reste la même qu'en mécanique classique et le moment cinétique est quantifié : les valeurs possibles de  $L^2$  sont  $\ell(\ell+1)\hbar^2$  où  $\ell$  est un entier positif ou nul. Exprimer le plus petit écart  $\Delta_{\text{rot}}$  entre deux niveaux d'énergie de rotation de la molécule de dihydrogène en fonction de  $\hbar$  et  $I$ .

**d.** Calculer numériquement  $\Theta_{\text{rot}} = \frac{\Delta_{\text{rot}}}{k_B}$ .

**3.** On s'intéresse aux mouvements de vibration de la molécule. On note  $r$  la distance entre les deux noyaux d'hydrogène qui n'est plus nécessairement égale à  $a$ . L'énergie potentielle de déformation de la molécule est modélisée par :  $E_p = E_0 \left( e^{-2\alpha(r-a)} - 2e^{-\alpha(r-a)} + 1 \right)$  avec  $E_0 = 7,716 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  et  $\alpha = 2,002 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$ . L'énergie cinétique de vibration est  $E_c = \frac{1}{8} m^* \dot{r}^2$ .

**a.** Tracer la courbe donnant  $E_p$  en fonction de  $r$ .

**b.** On s'intéresse à des petites vibrations pour lesquelles  $\alpha(r-a) \ll 1$ . Trouver l'expression de la constante  $k$  telle que  $E_p \simeq \frac{1}{2} k(r-a)^2$ . Calculer numériquement  $k$ .

**c.** Exprimer l'énergie mécanique de vibration en fonction de  $u = r - a$  et  $\dot{u}$ . En déduire l'expression de la fréquence  $v$  de vibration. Calculer numériquement  $v$ .

**d.** En mécanique quantique les niveaux d'énergie de vibration sont  $\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar v$  où  $n$  est un entier. Exprimer le plus petit écart  $\Delta_{\text{vib}}$  entre deux niveaux d'énergie de vibration. Calculer numériquement  $\Theta_{\text{vib}} = \frac{\Delta_{\text{vib}}}{k_B}$ .

**4.** Estimer la capacité thermique du dihydrogène aux températures suivantes : 10 K, 100 K, 1000 K, 10000 K.

## APPROFONDIR

**27.10 Séparation isotopique par ultracentrifugation (★)**

Un cylindre de rayon  $a$  et hauteur  $h$  est rempli d'un gaz parfait de masse molaire  $M$ . Ce cylindre est animé, par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen, d'un mouvement de rotation autour de son axe ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$ . On admet que le gaz atteint un état d'équilibre dans le référentiel du cylindre et qu'il a une température uniforme  $T$ . On ne tient pas compte de la pesanteur.

**1.** Le référentiel lié au cylindre est-il galiléen ? Vérifier que l'énergie potentielle dans ce référentiel d'une molécule de masse  $m^*$  située au point de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est  $E_p = -\frac{1}{2}m^*\omega^2r^2$ .

**2.** On note  $n^*(r)$  la densité numérique moléculaire dans le cylindre à distance  $r$  de l'axe ( $Oz$ ). Exprimer  $\frac{n^*(r)}{n^*(0)}$  en fonction de  $M$ ,  $\omega$ ,  $r$ ,  $R$  (constante des gaz parfaits) et  $T$ .

**3.** Le dispositif précédent est à la base de la méthode d'enrichissement de l'uranium par ultracentrifugation. L'hexafluorure d'uranium  $\text{UF}_6$  est introduit dans des cylindres de rayon  $a = 20$  cm qui tournent à 10000 tours par minute. La température est  $T = 300$  K.

**a.** Calculer numériquement  $\frac{n^*(a)}{n^*(0)}$  dans le cas d'une molécule  $^{238}\text{UF}_6$  de masse molaire  $M_{238} = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , puis dans le cas d'une molécule  $^{235}\text{UF}_6$ .

**b.** Dans la nature la fraction molaire de l'isotope  $^{235}\text{U}$  est égale à 0,72% et l'opération d'enrichissement doit fournir un combustible contenant entre 3 et 5% de cet isotope. On note  $x_{235}$  la fraction molaire de molécules d'hexafluorure contenant  $^{235}\text{U}$ . Calculer  $\frac{x_{235}(0)}{x_{235}(a)}$ . Commenter, sachant qu'une installation comporte 100 à 1000 cylindres.

**27.11 Suspension colloïdale (★★)**

Un milieu fluide, de température uniforme  $T$  et de masse volumique  $\mu_f$ , contient des particules solides en suspension (que nous appellerons également colloïdes), en régime dilué. Cette solution est soumise au champ de pesanteur  $\vec{g} = -g\hat{u}_z$ . Les colloïdes sont sphériques, de rayon  $a$ , de volume  $v$  et de masse  $m$ . Nous notons  $n = n(z) = \frac{\delta N}{\delta V}$  leur nombre, par unité de volume, à l'altitude  $z$  (la grandeur  $n$  sera appelée concentration).

Pour les ordres de grandeur on considère des colloïdes en or de masse volumique  $\mu_{or} = 19,30 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $a = 50 \text{ nm}$ ,  $n = 1 \cdot 10^{18} \text{ particules} \cdot \text{m}^{-3}$ . Le fluide est de l'eau à  $T = 300$  K.

**1.** Nous admettons que les colloïdes suivent la loi de Boltzmann et nous notons  $n_0 = n(0)$ . Déterminer  $n(z)$  et exprimer sa longueur caractéristique de variation,  $L$ . On pourra poser  $\Delta\mu = \mu_{or} - \mu_f$ . Calculer  $L$ .

**2.** Exprimer  $\delta p$ , probabilité pour qu'une particule donnée se trouve dans l'intervalle  $[z, z + \delta z]$ , en fonction de  $z$ ,  $L$  et  $\delta z$ , dans le cas d'une solution de hauteur  $H$  telle que  $H \gg L$ .

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

**3.** Nous convenons que la comparaison du rapport  $L(a) = a$  à l'unité définit une frontière entre un état de suspension et celui d'un sédiment. Exprimer, en fonction de  $k_B T$  et  $\Delta\mu$ , la taille critique  $a_c$  associée à cette frontière. Exprimer le rapport  $\frac{L}{a}$  en fonction du rapport  $\frac{a}{a_c}$ .

Montrer que  $\frac{L}{a}$  est aussi le rapport de deux énergies que l'on précisera. Justifier le choix du critère adopté. Calculer  $a_c$ .

**4.** L'utilisation de la loi de Boltzmann suppose que les colloïdes sont indépendants entre eux. Indiquer la condition, portant sur  $a$  et  $n$ , pour que cette hypothèse soit valable. Est-elle, ici, satisfaita ?

**5.** La définition de la concentration locale  $n(z)$ , donnée dans l'introduction, présuppose une uniformité des grandeurs à l'échelle de  $\delta V$ . Indiquer comment doivent alors se situer la longueur caractéristique  $L$  et l'extension  $\delta z$  de l'élément de volume  $\delta V$ .

**6.** Indiquer quelle autre contrainte borne  $\delta z$ , cette fois inférieurement.

**7.** La solution préparée est de concentration initiale  $n_i$  homogène. Nous admettons qu'une particule, dans son mouvement au sein du fluide, subit de sa part une force  $\vec{F} = -6\pi a \eta \vec{v}_{\text{col}}$  (force de Stokes).  $\eta$  désigne la viscosité dynamique du liquide et  $\vec{v}_{\text{col}}$  la vitesse du colloïde par rapport au fluide. Exprimer le temps caractéristique  $\tau$  nécessaire à l'obtention du profil d'équilibre de la concentration, dans une solution de hauteur  $H$ . Estimer  $\tau$  pour de l'eau de viscosité  $\eta = 1.10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $H = 10 \text{ cm}$ . Quelle conclusion pratique doit-on en tirer ?

### 27.12 Mouvement brownien (★★)

On considère une particule de taille de l'ordre du micromètre plongée dans l'eau. Du fait des collisions incessantes avec les molécules d'eau, la particule a un mouvement aléatoire observable au microscope appelé mouvement brownien. On modélise ici ce mouvement en se limitant à sa projection sur une direction horizontale ( $Ox$ ). La particule a une masse  $m$  et sa position est  $x(t)$  avec  $x(0) = 0$ .

On prend en compte les chocs des molécules d'eau sur la particule de la manière suivante :

- si la particule est fixe, la force exercée par l'eau fluctue avec une échelle de temps (de l'ordre de la durée entre deux chocs) très courte devant la durée d'observation et sa moyenne sur une durée intermédiaire entre cette échelle de temps et le temps d'observation est nulle :  $F_{\text{eau},x} = F(t)$  avec  $\langle F(t) \rangle = 0$  ;
- si la particule a est en mouvement, les chocs avec les molécules d'eau ont pour effet de la freiner et l'eau exerce sur elle la force :  $F_{\text{eau},x} = -f\dot{x} + F(t)$  où  $f$  est une constante et  $F(t)$  la force aléatoire précédente.

On note  $\langle X \rangle$  la moyenne d'une grandeur  $X$  sur une durée intermédiaire entre le temps caractéristique des chocs et la durée d'observation. On admet que :  $\langle \frac{dX}{dt} \rangle = \frac{d\langle X \rangle}{dt}$ .

**1.** Écrire le principe fondamental de la dynamique pour une particule brownienne de masse  $m$  soumise uniquement à la force exercée par l'eau.

**2.** En admettant que  $\langle xF(t) \rangle = 0$ , montrer que :  $m \frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = m\langle \dot{x}^2 \rangle - f\langle x\dot{x} \rangle$ .

**3.** Que vaut  $\langle \dot{x}^2 \rangle$  si la température de l'eau est  $T$  ?

- 4.** Exprimer  $\langle x \ddot{x} \rangle$  en fonction de  $k_B T$ ,  $f$ ,  $\tau = \frac{m}{f}$  et  $t$ .
- 5.** Montrer que, pour  $t \gg \tau$ ,  $\langle x^2 \rangle \simeq 2Dt$  où  $D$  s'exprime en fonction de  $k_B T$  et  $f$ .
- 6.** La particule brownienne est une sphère de rayon  $a = 10 \mu\text{m}$ , de masse volumique  $\mu = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $T = 298 \text{ K}$  et  $f = 6\pi a \eta$  où  $\eta = 1,10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  est la viscosité de l'eau. Calculer numériquement  $\tau$  ainsi que la distance moyenne parcourue en 1 s.

### 27.13 Contribution électronique à la capacité thermique d'un gaz (\*\*)

La capacité thermique d'un gaz est la somme de contributions provenant des énergies de translation, de rotation et vibration et mais aussi de l'énergie des électrons.

- 1.** Les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène sont  $E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$  avec  $n$  entier supérieur ou égal à 1. On rappelle que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  et  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .
- Quelle est la différence d'énergie  $\Delta$  entre l'état fondamental et le premier niveau excité ?
  - Le niveau d'énergie  $E_n$  comporte  $2n^2$  états quantiques différents : on dit que sa dégénérescence est  $g_n = 2n^2$ . Sachant que chaque *état quantique* est peuplé par l'agitation thermique selon la loi de Boltzmann, calculer le rapport du nombre d'atomes d'hydrogène dans le premier niveau excité sur le nombre d'atomes au niveau fondamental, à l'équilibre à la température  $T = 298 \text{ K}$ .
  - Quelle est l'influence des niveaux d'énergie électroniques sur la capacité thermique de l'hydrogène atomique H à température ordinaire ?
- 2.** La plupart des atomes ont, comme l'atome d'hydrogène, des niveaux d'énergie électroniques trop élevés pour qu'ils soient peuplés par l'agitation thermique aux températures ordinaires mais les atomes d'halogène font exception. L'atome de chlore possède un niveau électronique fondamental de dégénérescence  $g_1 = 4$  et un premier niveau excité de dégénérescence  $g_2 = 2$  dont la différence d'énergie est  $\Delta = 0,109 \text{ eV}$  seulement. On ne tient compte dans la suite que de ces deux niveaux d'énergie.
- Calculer le rapport du nombre d'atomes de chlore dans le premier niveau excité sur le nombre d'atomes dans l'état fondamental, à l'équilibre à la température  $T = 298 \text{ K}$ . On prendra l'énergie du niveau fondamental nulle.
  - Exprimer, en fonction de  $\Delta$  et  $k_B T$ , l'énergie électronique moyenne  $\langle E_{\text{el}} \rangle$  d'un atome de chlore en équilibre avec un thermostat à la température  $T$ .
  - En déduire la contribution à la capacité thermique molaire du gaz Cl de l'énergie d'excitation électronique,  $C_{m,\text{el}}$ , en fonction  $R$ ,  $T$  et  $\Theta_{\text{el}} = \frac{\Delta}{k_B}$ . Tracer à l'aide d'une calculette la courbe donnant  $\frac{C_{m,\text{el}}}{R}$  en fonction de  $\frac{T}{\Theta_{\text{el}}}$ . Vérifier que  $C_{m,\text{el}}$  passe par un maximum pour la température  $T_m \simeq 0,45\Theta_{\text{el}}$ . Calculer numériquement  $\Theta_{\text{el}}$ ,  $T_m$  et  $C_{m,\text{el}}(T_m)$ .
  - On trouve sur le site du NIST, des formules donnant les capacités thermiques à pression constante de différents gaz dans différents domaines de température. Le site propose pour le gaz monoatomique Cl dans le domaine [298 K; 600 K] la formule :

$$(C_{P,m})_{\text{tab}} = 13,38 + 42,34t - 64,75t^2 + 33,00t^3 + \frac{63,32 \cdot 10^{-3}}{t^2} \quad (\text{en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$$

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

avec  $t = \frac{T}{1000}$ . Comparer cette formule avec le résultat de la question précédente.

**27.14 Gaz parfait à une dimension (★★)**

On considère un système  $\Sigma$  formé de  $N$  particules microscopiques de masse  $m^*$  indépendantes pouvant se déplacer le long de l'axe ( $Ox$ ) librement entre les plans d'abscisse  $x = 0$  et  $x = L$  où  $L$  est une dimension macroscopique. Le système  $\Sigma$  est à l'équilibre avec un thermostat de température  $T$ . Pour les applications numériques on prendra :  $L = 10,0\text{ cm}$ ,  $T = 300\text{ K}$  et  $m^* = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$  (masse d'un atome d'hydrogène).

**1.** On cherche la fonction d'onde d'une particule microscopique dans le puits de potentiel infini de largeur  $L$  sous la forme :  $\psi(x,t) = A \sin(kx) \exp(-i\omega t)$ .

a. En exploitant les conditions aux limites  $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$  déterminer les valeurs admissibles de  $k$  en fonction d'un entier  $n$  supérieur à 1 quelconque.

b. Déterminer les valeurs correspondantes de  $\omega$ .

c. En déduire que les niveaux d'énergie de la particule sont :  $E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8m^*L^2}$  avec  $n$  nombre entier supérieur à 1.

**2.** a. Calculer les nombres  $n_1$  et  $n_2$  tels que  $E_{n_1} = k_B T$  et  $E_{n_2} = 1,01k_B T$  avec  $T = 300\text{ K}$ . En déduire s'il est possible de considérer que l'énergie varie continûment quand on étudie le système à température ambiante.

b. Établir une condition pour que cette approximation soit valable à une température  $T$  donnée. Exprimer cette condition à l'aide de la *longueur d'onde thermique*  $\lambda_{\text{th}} = \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_B T}}$  et de  $L$ .

**3.** Dans la suite de l'exercice on se place dans le cas où la condition écrite à la question précédente est réalisée. Donner la relation  $n(E)$  exprimant le nombre quantique en fonction de l'énergie  $E$  de la particule. En déduire l'expression de  $w(E)$ , densité des niveaux d'énergie qui est définie de la manière suivante : le nombre de niveaux d'énergie compris entre  $E$  et  $E + dE$  et égal à  $w(E)dE$ .

**4.** Exprimer  $dp(E)$ , probabilité pour une particule d'avoir une énergie comprise entre  $E$  et  $E + dE$ , en fonction de  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $E$  et  $dE$ .

**5.** En déduire la valeur moyenne de l'énergie  $\langle E \rangle$  et sa variance  $\text{Var}(E)$  en fonction de  $T$ . Commenter ces expressions.

**6.** Quelle est la capacité thermique de  $\Sigma$  ?

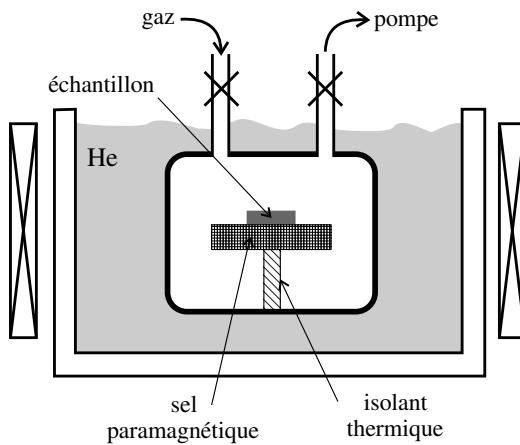
*Formulaire :*

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^\infty \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

**27.15 Refroidissement magnétique (★★★)**

La technique de refroidissement par désaimantation adiabatique d'un sel paramagnétique est utilisée pour refroidir un échantillon à une température extrêmement basse et permet d'atteindre des températures de l'ordre de  $100\text{ }\mu\text{K}$ .

L'échantillon à refroidir est en contact avec un cristal de sel paramagnétique. L'ensemble est placé dans une cellule plongée dans un bain d'hélium liquide de température  $T_{\text{He}} = 4,2 \text{ K}$  (voir figure). La cellule peut être remplie d'un gaz sous faible pression pour permettre l'échange thermique (par conduction et convection) entre le système {échantillon + sel paramagnétique} et l'hélium. Elle peut aussi être vidée à l'aide d'une pompe ce qui rend impossible cet échange thermique. De plus on peut soumettre le sel paramagnétique à un champ magnétique en faisant circuler un courant électrique dans une bobine.



**1.** Le sel paramagnétique contient des ions ayant un moment magnétique  $\vec{\mu}$ . On rappelle qu'un moment magnétique  $\vec{\mu}$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  a une énergie potentielle d'interaction avec le champ  $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . Par ailleurs, la mécanique quantique nous enseigne que la composante de  $\vec{\mu}$  sur tout vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  prend des valeurs quantifiées. Dans le cas considéré ici où les ions ont un spin  $\frac{1}{2}$  cette composante prend l'une des deux valeurs  $\pm \mu_B$  où  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  est le magnéton de Bohr.

On pose  $\vec{u}_z = \frac{\vec{B}}{B}$  avec  $B = \|\vec{B}\|$  et on convient de dire que le moment magnétique est « dans le sens de  $\vec{B}$  » lorsque  $\mu_z = +\mu_B$  et qu'il est « dans le sens inverse de  $\vec{B}$  » lorsque  $\mu_z = -\mu_B$ .

**a.** Exprimer, en fonction de  $\mu_B$  et  $B$ , l'écart  $\Delta$  entre les deux énergies possibles pour un moment magnétique. Calculer  $\Delta$  en eV pour  $B = 1 \text{ T}$ , ainsi que  $\Theta_{\text{spin}} = \frac{\Delta}{k_B}$ .

**b.** On note  $N_+$  (resp.  $N_-$ ) le nombre moyen de moment magnétiques dans le sens de  $\vec{B}$  (resp. dans le sens inverse de  $\vec{B}$ ). Exprimer  $\frac{N_+}{N_-}$  à l'équilibre en fonction de  $\mu_B$ ,  $B$ ,  $k_B$  et  $T$ .

**2.** Le sel paramagnétique est composé de deux systèmes, les moments magnétiques (spins) et le réseau cristallin et sa capacité thermique est la somme de la capacité thermique  $C_{\text{spin}}$  et

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

$C_{\text{réseau}}$  de ces deux systèmes. La capacité thermique molaire des spins, système à deux niveaux séparés de  $\Delta = k_B \Theta_{\text{spin}}$ , est :  $C_{\text{spin}} = R \left( \frac{\Theta_{\text{spin}}}{T} \right)^2 \exp \left( \frac{\Theta_{\text{spin}}}{T} \right) \left( \exp \left( \frac{\Theta_{\text{spin}}}{T} \right) + 1 \right)^{-2}$ . La capacité thermique du réseau cristallin est donnée par la théorie de Debye en fonction du rapport  $\frac{T}{\Theta_D}$  où  $\Theta_D$  est une température caractéristique du matériau, de l'ordre de 200 K. Les

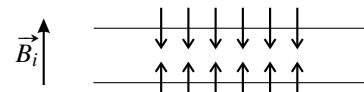
formes limites de cette expression sont :  $\frac{C_{\text{réseau}}}{3R} \simeq \frac{4}{5} \pi^4 \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^3$  pour  $T \ll \Theta_D$  et  $\frac{C_{\text{réseau}}}{3R} \simeq 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^2$  pour  $T \gg \Theta_D$ .

- a. Comparer en ordre de grandeur  $C_{\text{spin}}$  et  $C_{\text{réseau}}$  pour une température de l'ordre de  $\Theta_{\text{spin}}$ .  
b. Les spins et le réseau peuvent avoir des températures distinctes  $T_{\text{spin}}$  et  $T_{\text{réseau}}$  pendant une durée de l'ordre de  $t_1$ , temps caractéristique de l'échange thermique entre ces deux systèmes. Que peut-on dire de la température finale commune des deux systèmes,  $T_f$ , une fois que l'équilibre thermique est atteint (après un temps grand devant  $t_1$ ) si initialement  $T_{\text{spin}} \sim \Theta_{\text{spin}}$  et  $T_{\text{réseau}} \ll \Theta_D$  ?

3. L'expérience dont le montage est représenté sur la figure se déroule de la manière suivante :

- i) La cellule est remplie de gaz, le sel paramagnétique est en équilibre thermique avec le bain d'hélium de température  $T_{\text{He}}$  :  $T_{\text{spin}} = T_{\text{réseau}} = T_{\text{He}}$ . Aucun champ magnétique extérieur n'étant appliqué, les spins sont plongés dans un champ magnétique d'intensité  $B_i \simeq 1.10^{-2}$  T qui est le champ créé par les spins eux-mêmes.  
ii) On applique instantanément un fort champ magnétique extérieur : les spins sont alors plongés dans un champ magnétique d'intensité  $B = B_e + B_i \simeq B_e$  avec  $B_e = 5$  T.  
iii) Le sel atteint un nouvel équilibre thermique avec le bain d'hélium.  
iv) On fait le vide dans la cellule et on annule rapidement le champ magnétique extérieur. Après un temps très petit devant  $t_1$  les températures sont telles que  $T_{\text{spin}} \ll T_{\text{réseau}} = T_{\text{He}}$ .  
v) Après un temps supérieur à  $t_1$ , le réseau et les spins sont en équilibre thermique à la même température  $T_f$ .

a. Le schéma ci-contre montre les populations des deux niveaux d'énergie accessibles aux spins à l'étape i) de l'expérience. Une flèche verticale vers le haut (resp. le bas) représente un spin dirigé dans le sens du champ magnétique (resp. dans le sens inverse du champ magnétique).



Vérifier que le schéma respecte approximativement la valeur du rapport  $\frac{N_+}{N_-}$  des nombre de spins dans les deux états.

b. En admettant qu'aucun spin ne se retourne pendant que l'on modifie le champ magnétique, faire des schémas analogues correspondant aux étapes ii), iii) et iv). On tiendra compte des variations de l'écart entre les deux niveaux.

c. Déterminer la température  $T_{\text{spin}}$  correspondant à la répartition des spins entre les deux niveaux à l'étape iv). Donner une expression littérale en fonction de  $T_{\text{He}}$ ,  $B_i$  et  $B_e$  et une valeur numérique.

- d. Quelle est la température  $T_f$  ?
- e. Pourquoi appelle-t-on cette méthode « refroidissement par désaimantation adiabatique » ?
4. À quelle condition le refroidissement du sel paramagnétique entraîne-t-il celui de l'échantillon ?

**CORRIGÉS****27.1 Composition de l'air**

Notons  $n_0$  la densité numérique de molécules de dioxygène au niveau de la mer ; la densité numérique de molécules de diazote au niveau de la mer est  $4n_0$  puisque  $x_{\text{N}_2} = 4x_{\text{O}_2}$ . D'après la loi de Boltzmann, les densités numériques des molécules des deux gaz à l'altitude  $z$  sont :

$$n_{\text{O}_2}(z) = n_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{O}_2}gz}{RT}\right) \quad \text{et} \quad n_{\text{N}_2}(z) = 4n_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{N}_2}gz}{RT}\right).$$

Ainsi, à l'altitude  $z$ , le rapport des fractions molaires des deux gaz est :

$$\frac{x_{\text{N}_2}}{x_{\text{O}_2}} = \frac{n_{\text{N}_2}(z)}{n_{\text{O}_2}(z)} = 4 \exp\left(\frac{(M_{\text{O}_2} - M_{\text{N}_2})gz}{RT}\right) = 4 \exp\left(1,63 \cdot 10^{-5} z(\text{m})\right).$$

Pour  $z = 4000$  m, ce rapport vaut 4,3.

**27.2 Atmosphère adiabatique**

**1.** D'après l'équation d'état des gaz parfaits :  $\mu(z) = \frac{MP(z)}{RT(z)}$ . En remplaçant dans l'équation donnée on trouve :

$$P(z) \left(\frac{P(z)}{T(z)}\right)^{-\gamma} = \text{constante} \quad \text{soit} \quad (P(z))^{1-\gamma} (T(z))^\gamma = \text{constante}.$$

**2.** Le résultat précédent s'écrit :  $(1 - \gamma) \ln P(z) + \gamma \ln T(z) = \text{constante}$  d'où en dérivant par rapport à  $z$  :

$$\frac{1 - \gamma}{P(z)} \frac{dP}{dz} + \frac{\gamma}{T(z)} \frac{dT}{dz} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dT}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T(z)}{P(z)} \frac{dP}{dz}$$

Or la condition d'équilibre mécanique de l'atmosphère s'écrit :  $\frac{dP}{dz} = -\mu(z)g = -\frac{MP(z)}{RT(z)}g$ .

Il vient donc :  $\frac{dT}{dz} = -\Gamma$  avec  $\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Mg}{R} = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Ainsi la température dépend de l'altitude selon la loi :  $T(z) = T(0) - \Gamma z$ .

Cette formule donne une valeur négative absurde pour  $z > \frac{T(0)}{\Gamma} \simeq \frac{300}{10^{-2}} = 3 \cdot 10^4$  m, valeur inférieure à la hauteur d'atmosphère (de l'ordre de 100 km). Le modèle ne peut donc s'appliquer à l'ensemble de l'atmosphère.

**3.** D'après le résultat obtenu à la première question :  $P(z)(T(z))^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P(0)(T(0))^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$  d'où :

$$P(z) = P(0) \left(\frac{T(0)}{T(z)}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P(0) \left(1 - \frac{\Gamma z}{T(0)}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

### 27.3 Expérience de Jean Perrin

- 1.** Chaque grain est soumis à son poids :  $\vec{P} = -\frac{4}{3}\pi a^3 d \mu_{\text{eau}} g \vec{u}_z$ , et à la poussée d'Archimète :  $\vec{\Pi} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu_{\text{eau}} g \vec{u}_z$ , donc à la force totale :  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi a^3(d-1)\mu_{\text{eau}} g \vec{u}_z$ . L'énergie potentielle d'un grain est donc :

$$E_p = \frac{4}{3}\pi a^3(d-1)\mu_{\text{eau}} g z = Az \quad \text{avec} \quad A = \frac{4}{3}\pi a^3(d-1)\mu_{\text{eau}} g$$

- 2.** Le nombre moyen de grains se trouvant à altitude  $z$  est proportionnel au facteur de Boltzmann  $\exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{-Az}{k_B T}\right)$ . Ce facteur décroît exponentiellement avec l'altitude avec la distance caractéristique :

$$h = \frac{k_B T}{A} = \frac{3k_B T}{4\pi a^3(d-1)\mu_{\text{eau}} g}.$$

Sachant que  $a \sim 1.10^{-7}$  m,  $\mu_{\text{eau}} = 1.10^3$  kg·m<sup>-3</sup>,  $g = 9,8$  m·s<sup>-2</sup> et en prenant  $T \simeq 300$  K on trouve avec la formule précédente :  $h \sim 5.10^{-4}$  m.  $h$  est ainsi du même ordre de grandeur que la profondeur de la cuve donc il est possible d'observer au microscope la répartition des grains. La grande différence d'ordre de grandeur entre  $h$  et la distance caractéristique  $H$  trouvée dans le cours pour la répartition des molécules dans l'atmosphère à la même température s'explique par le changement d'ordre de grandeur entre la masse d'un grain et la masse d'une molécule (le grain est beaucoup plus lourd).

- 3.** Pour vérifier que la concentration des grains est proportionnelle à  $\exp\left(-\frac{z}{h}\right)$  et trouver la valeur de  $h$ , on porte sur la figure le logarithme du nombre  $N$  donné en fonction de la cote  $z$  du niveau en micromètres. Les points sont quasiment alignés et la droite passant le plus près de tous les points a pour équation :

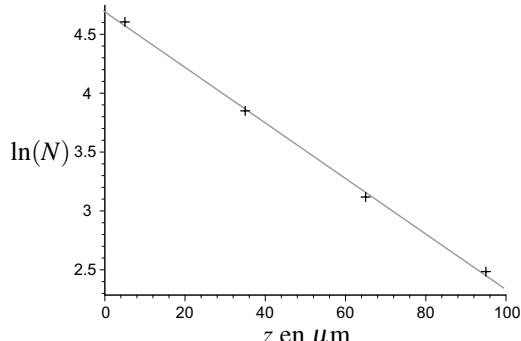
$$\ln(N) = -2,4.10^{-2}z \text{ (en } \mu\text{m}) + 4,7.$$

On trouve ainsi  $h = \frac{1}{2,4.10^{-2}} = 42 \mu\text{m}$ .

On en déduit une évaluation du nombre d'Avogadro :

$$\mathcal{N}_A = \frac{R}{k_B} = \frac{3RT}{4\pi a^3(d-1)\mu_{\text{eau}} g h} \simeq 7.10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

L'écart avec la valeur réelle est de 17%.



## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

**27.4 Système à trois niveaux d'énergie**

**1.** Pour  $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$  quasiment toutes les particules sont dans l'état fondamental donc l'énergie moyenne du système est :  $\langle E \rangle \simeq 0$ .

Pour  $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$  les trois niveaux d'énergie sont également peuplés donc l'énergie moyenne du système est :  $\langle E \rangle \simeq \frac{N}{3} \times 0 + \frac{N}{3} \times \varepsilon + \frac{N}{3} \times 2\varepsilon = N\varepsilon$ .

Pour  $T = \frac{\varepsilon}{k_B}$  les populations des niveaux d'énergie 0,  $\varepsilon$  et  $2\varepsilon$  sont respectivement proportionnels à  $1, e^{-1}$  et  $e^{-2}$ , donc l'énergie moyenne du système est :

$$\langle E \rangle = \frac{N}{1 + e^{-1} + e^{-2}} (1 \times 0 + e^{-1} \times \varepsilon + e^{-2} \times 2\varepsilon) = N\varepsilon \frac{e^{-1} + 2e^{-2}}{1 + e^{-1} + e^{-2}} = 0,42N\varepsilon.$$

**2.** Pour  $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$ , l'agitation thermique ne permet pas aux particules d'atteindre les niveaux excités, de sorte que l'énergie du système est quasiment nulle, indépendamment de la valeur de  $T$ . Donc la capacité thermique du système est  $C \simeq 0$ .

Pour  $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$ , l'agitation est telle que les trois niveaux sont également peuplés, de sorte que l'énergie du système est quasiment égale à  $N\varepsilon$ , indépendamment de la valeur de  $T$ . On a donc encore  $C \simeq 0$ .

La capacité thermique est positive et nulle pour  $T = 0$  et pour  $T = \infty$ . Elle passe donc par une valeur maximale (pour une température de l'ordre de  $\frac{\varepsilon}{k_B}$ ).

**27.5 Système à deux niveaux d'énergie dégénérés**

**1.** Le tableau ci-dessous récapitule les différents états avec leurs facteurs de Boltzmann (on pose  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ) :

|                      | état 1 | état 2                  | état 3                  | état 4                  |
|----------------------|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| énergie              | 0      | $\varepsilon$           | $\varepsilon$           | $\varepsilon$           |
| facteur de Boltzmann | 1      | $e^{-\beta\varepsilon}$ | $e^{-\beta\varepsilon}$ | $e^{-\beta\varepsilon}$ |

Le facteur de normalisation des probabilités est :  $Z = 1 + 3e^{-\beta\varepsilon}$ . Ainsi en notant  $P(\text{état } i)$  la probabilité pour une particule d'être dans l'état  $i$ , on a :

$$P(\text{état 1}) = \frac{1}{1 + 3e^{-\beta\varepsilon}} \quad \text{et} \quad P(\text{état 2}) = P(\text{état 3}) = P(\text{état 4}) = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 + 3e^{-\beta\varepsilon}}$$

La probabilité pour une particule d'être dans le niveau d'énergie 0 est :

$$P(0) = P(\text{état 1}) = \frac{1}{1 + 3e^{-\beta\varepsilon}},$$

et la probabilité d'être dans le niveau d'énergie  $\varepsilon$  :

$$P(\varepsilon) = P(\text{état 2}) + P(\text{état 3}) + P(\text{état 4}) = \frac{3e^{-\beta\varepsilon}}{1 + 3e^{-\beta\varepsilon}}.$$

**2.** Le système comporte plus de particules dans le niveau d'énergie excité que dans le niveau fondamental si  $P(\varepsilon) > P(0)$ , soit si  $3e^{-\beta\varepsilon} > 1$ , soit si :  $T > \frac{\varepsilon}{k_B \ln 3}$ .

**3.** Lorsque la température tend vers l'infini, les 4 états deviennent équiprobables, donc l'énergie du système tend vers  $N \left( \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \varepsilon + \frac{1}{4} \times \varepsilon + \frac{1}{4} \times \varepsilon \right) = \frac{3}{4}N\varepsilon$ .

## 27.6 Niveaux de vibration

**1.** On pose  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . Le facteur de normalisation des probabilités est :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta h\nu\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nh\nu) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\beta h\nu\right)}{1 - \exp(-\beta h\nu)}.$$

Ainsi :

- le pourcentage de molécules qui sont dans le premier état excité ( $n = 1$ ) est :

$$x_1 = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \frac{3}{2}h\nu\right) = \exp(-\beta h\nu)(1 - \exp(-\beta h\nu)).$$

- le pourcentage de molécules qui sont dans les différents états excités est :

$$x_{\text{excité}} = \sum_{n \geq 1} x_n = 1 - x_0 = 1 - \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \frac{1}{2}h\nu\right) = \exp(-\beta h\nu).$$

**2.** Numériquement :  $h\nu = 4,266 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ ,  $\beta h\nu = 1,037$  donc :  $x_1 = 0,23$  et  $x_{\text{excité}} = 0,36$ .

## 27.7 Fluctuations de l'énergie d'une particule

$$\text{1. } \langle \varepsilon \rangle = \sum_i p(E_i)E_i = \sum_i \frac{\exp(-\beta E_i)}{Z}E_i = -\frac{1}{Z} \frac{d}{d\beta} (\sum_i \exp(-\beta E_i)) = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -\frac{d \ln Z}{d\beta}.$$

$$\text{2. } \frac{d\langle \varepsilon \rangle}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left( -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{d\beta^2} + \left( \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \right)^2 = -\frac{1}{Z} \sum_i E_i^2 \exp(-\beta E_i) + \langle \varepsilon \rangle^2.$$

Or :  $\frac{1}{Z} \sum_i E_i^2 \exp(-\beta E_i) = \sum_i E_i^2 p(E_i) = \langle \varepsilon^2 \rangle$ . Ainsi :  $\frac{d\langle \varepsilon \rangle}{d\beta} = -\langle \varepsilon^2 \rangle + \langle \varepsilon \rangle^2$ .

$$\text{3. } \frac{d\varepsilon}{d\beta} = \frac{d\varepsilon}{dT} \times \frac{dT}{d\beta}. \text{ Or } \beta = \frac{1}{k_B T} \text{ donc } \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{k_B T^2}. \text{ Finalement : } \frac{d\varepsilon}{d\beta} = \frac{d\varepsilon}{dT} \times (-k_B T^2).$$

**4.** On peut écrire, en utilisant les relations trouvées aux questions précédentes :

$$\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2} = \sqrt{-\frac{d\langle \varepsilon \rangle}{d\beta}} = \sqrt{k_B T^2 \frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dT}} = \sqrt{k_B T^2 \times \alpha k_B} = k_B T \sqrt{\alpha} = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\sqrt{\alpha}}.$$

$\alpha$  étant de l'ordre de l'unité,  $\sigma(\varepsilon)$  est du même ordre de grandeur que  $\langle \varepsilon \rangle$ .

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

## 27.8 Expérience de Kappler

1. L'angle d'incidence du rayon sur le miroir est  $i = \theta - \alpha$ . D'après la loi de Descartes, le rayon réfléchi fait un angle  $i' = -i$  avec  $\vec{n}$ , donc un angle  $\alpha' = i' + \theta = 2\theta - i$  avec  $\vec{n}_0$ . Si le miroir tourne d'un angle  $\Delta\theta$  le rayon réfléchi tourne d'un angle  $\Delta\alpha' = 2\Delta\theta$  et se déplace sur la pellicule de  $d \simeq L\Delta\alpha' = 2L\Delta\theta$ .

2. a. D'après le théorème d'équirépartition  $\langle \frac{1}{2}C\theta^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$  donc  $\langle \theta^2 \rangle = \frac{k_B T}{C}$ .

b. L'angle  $\theta$  fluctuant autour de 0 le déplacement du point d'impact par rapport à la position moyenne est  $d = 2L|\theta|$  donc  $\langle d^2 \rangle = 4L^2\langle \theta^2 \rangle$ . Il vient donc :

$$k_B = \frac{C}{T}\langle \theta^2 \rangle = \frac{C}{4L^2 T}\langle d^2 \rangle = \frac{9.428 \cdot 10^{-16} \times 1,250 \cdot 10^{-5}}{4 \times 0.865^2 \times 287,1} = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

Résultat proche de la valeur tabulée :  $k_{B,\text{table}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

3.  $\delta = \left( \frac{32C\ell}{\pi G} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 4 \mu\text{m}$  avec  $\ell \simeq 1 \text{ m}$ .

## 27.9 Capacité thermique du dihydrogène gazeux

1. En prenant  $L = 10 \text{ cm}$  on calcule :  $\Theta_{\text{trans}} = \frac{h^2}{m^* L^2 k_B} = 9,5 \cdot 10^{-16} \text{ K}$ .  $\Theta_{\text{trans}}$  étant extrêmement faible, on peut considérer que les niveaux d'énergie de translation sont répartis continûment et appliquer le théorème d'équirépartition de l'énergie aux degrés de liberté de translation quelle que soit la température.

2. a. La masse de la molécule est concentrée dans les deux noyaux d'hydrogène car la masse des électrons est très faible devant celle des noyaux. Les deux noyaux sont quasiment des points matériels de masses égales à  $\frac{m^*}{2}$  et situés à distance  $\frac{a}{2}$  de l'axe de rotation donc :

$$I = \frac{m^*}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{m^*}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} m^* a^2.$$

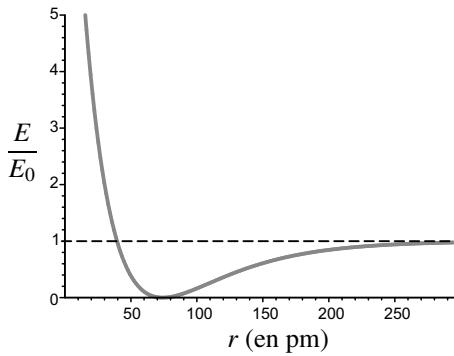
Numériquement :  $I = 4,597 \cdot 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

b. D'après le cours de première année que  $L = I\omega$  et  $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$ . On en déduit :  $E_c = \frac{L^2}{2I}$ .

c. Les niveaux d'énergie de rotation sont :  $E_\ell = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I}$  donc l'écart entre deux niveaux consécutifs est :  $E_{\ell+1} - E_\ell = (\ell+1) \frac{\hbar^2}{I}$ . Le plus petit écart est :  $\Delta_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{I}$ .

d.  $\Theta_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{k_B I} = 175,2 \text{ K}$ .

3. a. On trace facilement la courbe avec un grapheur. Attention aux unités : si l'on prend  $r$  en pm il faut prendre  $\alpha = 2,002 \cdot 10^{-2} \text{ pm}^{-1}$ . La courbe présente un minimum nul pour  $r = a$ .



**b.** Avec  $\exp(u) \simeq 1 + u + \frac{u^2}{2}$  pour  $u \ll 1$  on trouve :  $E_p(r) \simeq E_0 \alpha^2 (r - a)^2$  soit  $k = 2E_0 \alpha^2$ . Numériquement :  $k = 618,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**c.** L'énergie mécanique de vibration de la molécule est :  $E_{\text{vib}} = \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{8}m^*\dot{u}^2$ . C'est l'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence propre  $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m^*}}$ . Numériquement :  $\nu = 1,369 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

**d.**  $\Delta_{\text{vib}} = h\nu$  et  $\Theta_{\text{vib}} = \frac{h\nu}{k_B} = 6568 \text{ K}$ .

**4.** À  $T = 10 \text{ K}$ , température très inférieure à  $\Theta_{\text{rot}}$  et  $\Theta_{\text{vib}}$  les degrés de liberté de rotation et de vibration sont gelés ; le gaz a la capacité thermique correspondant aux 3 degrés de liberté de translation soit :  $C_{V,m} = 3 \times \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$ .

À  $T = 1000 \text{ K}$ , température bien supérieure à  $\Theta_{\text{rot}}$  mais très inférieure  $\Theta_{\text{vib}}$  les degrés de liberté de vibration sont gelés ; le gaz a la capacité thermique correspondant aux 3 degrés de liberté de translation et aux deux 2 de liberté de rotation soit :  $C_{V,m} = (3 + 2 + 2) \times \frac{1}{2}R = \frac{5}{2}R$ .

À  $T = 10000 \text{ K}$ , température bien supérieure à  $\Theta_{\text{rot}}$  et  $\Theta_{\text{vib}}$  le gaz a la capacité thermique correspondant aux 3 degrés de liberté de translation, aux 2 degrés de liberté de rotation et aux 2 degrés de liberté de vibration :  $C_{V,m} = (3 + 2 + 2) \times \frac{1}{2}R = \frac{7}{2}R$ .

À  $T = 100 \text{ K}$ , température proche de  $\Theta_{\text{rot}}$  et très inférieure à  $\Theta_{\text{vib}}$  les degrés de liberté de rotations ne peuvent pas être traités par l'approximation classique et les degrés de liberté de vibration sont gelés ; le gaz une capacité thermique  $C_{V,m}$  intermédiaire entre  $\frac{3}{2}R$  et  $\frac{5}{2}R$ .

## 27.10 Séparation isotopique par ultracentrifugation

**1.** Le référentiel lié au cylindre n'est pas galiléen parce qu'il a un mouvement de rotation par rapport au référentiel terrestre qui est galiléen. Dans ce référentiel, une particule de masse

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

$m^*$  situé en un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  subit la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_{\text{ie}} = m^* \omega^2 r \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right)$ . Cette force dérive de l'énergie potentielle  $E_p = -\frac{1}{2} m^* \omega^2 r^2$ .

2. D'après la loi de Boltzmann, en notant  $\beta = (k_B T)^{-1}$  :

$$\frac{n^*(r)}{n^*(0)} = \frac{\exp(-\beta E_p(r))}{\exp(-\beta E_p(0))} = \exp \left( \frac{1}{2} \beta m^* \omega^2 r^2 \right) = \exp \left( \frac{m^* \omega^2 r^2}{2 k_B T} \right) = \exp \left( \frac{M \omega^2 r^2}{2 R T} \right).$$

3. En appliquant le résultat précédent, on trouve :

- dans le cas de  $^{238}\text{UF}_6$  :  $\frac{n_{238}^*(a)}{n_{238}^*(0)} = \exp \left( \frac{0,352 \times (2\pi \times 10000/60)^2 \times 0,20^2}{2 \times 8.314 \times 300} \right) = 22,1$  ;
- dans le cas de  $^{235}\text{UF}_6$  :  $\frac{n_{235}^*(a)}{n_{235}^*(0)} = \exp \left( \frac{0,349 \times (2\pi \times 10000/60)^2 \times 0,20^2}{2 \times 8.314 \times 300} \right) = 21,5$ , car sa masse molaire est  $352 - 3 = 349 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

4. La fraction molaire en isotope 235 est :  $x_{235} = \frac{n_{235}^*}{n_{235}^* + n_{238}^*} \simeq \frac{n_{235}^*}{n_{238}^*}$  puisque cette fraction molaire est faible. Alors :  $\frac{x_{235}(0)}{x_{235}(a)} \simeq \frac{n_{235}^*(0)}{n_{235}^*(a)} \times \frac{n_{238}^*(a)}{n_{238}^*(0)} = \frac{22,1}{21,5} = 1,03$ .

Ainsi, le gaz recueilli près de l'axe de rotation est un peu plus riche en isotope  $^{235}\text{U}$ . En renouvelant l'opération de nombreuses fois on obtient la fraction molaire minimale nécessaire. L'installation doit nécessairement comprendre un grand nombre de cylindres dans lesquels le gaz passe successivement.

### 27.11 Suspension colloïdale

1. Comme à l'exercice 3 de ce chapitre, l'énergie potentielle d'une particule d'or en suspension, de volume  $v = \frac{4}{3} \pi a^3$ , soumise à son poids et à la poussée d'Archimède, s'écrit :  $E_p(z) = (\mu_{\text{or}} - \mu_{\text{eau}}) v g z = \Delta \mu v g z$ . La loi de Boltzmann donne donc :

$$n(z) = n(0) \exp \left( -\frac{E_p(z)}{k_B T} \right) = n_0 \exp \left( -\frac{\Delta \mu v g z}{k_B T} \right) = n_0 \exp \left( -\frac{z}{L} \right) \quad \text{avec} \quad L = \frac{k_B T}{\Delta \mu v g}.$$

Numériquement :  $v = 5,24 \cdot 10^{-22} \text{ m}^{-3}$  et  $L = 44 \text{ } \mu\text{m}$ .

2. La probabilité demandée est, en tenant compte de ce que  $H \gg L$  :

$$\delta p = \frac{n(z)}{\int_0^H n(z) dz} \delta z = \frac{e^{-\frac{z}{L}}}{\int_0^H e^{-\frac{z}{L}} dz} \delta z \simeq \frac{e^{-\frac{z}{L}}}{\int_0^\infty e^{-\frac{z}{L}} dz} \delta z = \frac{e^{-\frac{z}{L}}}{L} \delta z.$$

3. La taille critique  $a_c$  est telle que :  $a_c = \frac{k_B T 3}{4 \pi \Delta \mu a_c^3 g}$ , soit :  $a_c = \left( \frac{3 k_B T}{4 \pi \Delta \mu g} \right)^{\frac{1}{4}}$ .

Pour un rayon  $a$  quelconque :  $\frac{L}{a} = \frac{3 k_B T}{4 \pi \Delta \mu a^4 g} = \left( \frac{a_c}{a} \right)^4$ .

On peut aussi écrire :  $\frac{L}{a} = \frac{k_B T}{\Delta \mu v g a} = \frac{k_B T}{\Delta E_p}$ .  $\Delta E_p$  est la variation d'énergie potentielle d'un colloïde lorsqu'il s'élève d'une altitude égale à son propre rayon et  $k_B T$  est l'énergie d'agitation thermique.

Pour  $a$  inférieur d'un ordre de grandeur à  $a_c$ , le rapport  $\frac{L}{a}$  est supérieur à  $10^4$  : l'énergie d'agitation thermique est très supérieure à l'énergie nécessaire pour éléver un colloïde, donc on a une suspension. Pour  $a$  supérieur d'un ordre de grandeur à  $a_c$ , le rapport  $\frac{L}{a}$  est inférieur à  $10^{-4}$  : l'énergie d'agitation thermique n'est pas suffisante pour soulever les colloïdes qui se déposent au fond de l'échantillon.

Numériquement :  $a_c = 272$  nm. L'échantillon considéré à la première question contient bien une suspension.

**4.** Les colloïdes sont indépendants entre eux s'ils n'ont quasiment aucune interaction (il peut s'agir d'interaction électrostatique à longue portée ou bien d'interaction au cours de chocs). Pour réaliser cette hypothèse il faut que la distance moyenne entre colloïdes soit très supérieure à leur taille, soit :  $n^{-\frac{1}{3}} \gg a$ , soit  $na^3 \ll 1$ . Numériquement :  $na^3 = 1,25 \cdot 10^{-4}$  donc la condition est bien vérifiée.

**5.** Pour définir la concentration locale on doit utiliser une longueur  $\delta z \ll L$ .

**6.** Il faut aussi que  $\delta z$  soit très supérieure à la distance moyenne entre colloïdes pour que le volume  $\delta V$  contienne statistiquement un grand nombre de colloïdes (pour que les fluctuations soient négligeables). Il faut donc :  $\delta z \gg n^{-\frac{1}{3}}$ . Ainsi,  $\delta z$  doit être une dimension mésoscopique.

**7.** Un colloïde est soumis à son poids et à la force d'Archimède dont la somme est  $\Delta \mu v \vec{g}$ , ainsi qu'à force de Stokes  $\vec{F} = -6\pi a \eta \vec{v}_{\text{col}}$ . Le principe fondamental de la dynamique appliquée à ce colloïde s'écrit :  $\mu v \frac{d\vec{v}_{\text{col}}}{dt} = -\Delta \mu v \vec{g} - 6\pi a \eta \vec{v}_{\text{col}}$ , équation qui se met sous la forme  $\tau_1 \frac{d\vec{v}_{\text{col}}}{dt} + \vec{v}_{\text{col}} = \vec{v}_\infty$  avec  $\vec{v}_\infty = \frac{\Delta \mu v}{6\pi \eta a} \vec{g}$  et  $\tau_1 = \frac{\mu v}{6\pi a \eta}$ . Ainsi,  $\vec{v}_{\text{col}}$  atteint la valeur  $\vec{v}_\infty$  au bout d'une durée de quelques  $\tau_1$ . Numériquement  $\tau_1 \simeq 1.10^{-8}$  s. Ce temps étant extrêmement bref par rapport à la durée d'une expérience, on peut considérer le colloïde a immédiatement une vitesse constante et que :  $\vec{v}_{\text{col}} \simeq \frac{\Delta \mu v}{6\pi \eta a} \vec{g}$ .

Initialement les colloïdes sont répartis uniformément dans le récipient et à l'équilibre ils se répartissent sur une hauteur de l'ordre de  $L \sim 10^{-5}$  m au fond du récipient de hauteur  $H = 10^{-2}$  m. La durée nécessaire à l'établissement de cet équilibre est de l'ordre de la durée nécessaire à un colloïde pour parcourir la distance  $H$  soit de l'ordre de  $\tau = \frac{H}{\|\vec{v}_{\text{col}}\|} = \frac{6\pi \eta a H}{\Delta \mu v g}$ .

Numériquement  $\tau \simeq 1.10^6$  s  $\simeq 12$  jours. Si l'on veut atteindre cet équilibre il faut laisser l'échantillon au repos, sans le bouger pendant une durée très longue.

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

**27.12 Mouvement brownien**

- Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $m\ddot{x} = -f\dot{x} + F(t)$ .
- En multipliant l'équation du principe fondamental de la dynamique par  $x$  et en prenant la moyenne des deux membres on trouve :  $m\langle x\ddot{x} \rangle = -f\langle x\dot{x} \rangle$  puisque  $\langle xF(t) \rangle = 0$ . D'autre part :  $\frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = \langle \frac{d(x\dot{x})}{dt} \rangle = \langle \dot{x}^2 \rangle + \langle x\ddot{x} \rangle$ . Il vient donc :  $m\frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = m\langle \dot{x}^2 \rangle - f\langle x\dot{x} \rangle$ .
- La particule est en équilibre thermique avec l'eau autour d'elle qui est à la température  $T$ . Le théorème d'équirépartition de l'énergie s'écrit :  $\langle \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ .
- On a ainsi :  $\frac{m}{f}\frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} + \langle x\dot{x} \rangle = \frac{k_B T}{f}$ . La solution de cette équation différentielle avec la condition initiale  $\langle x\dot{x} \rangle_{t=0} = 0$ , puisque  $x = 0$  à  $t = 0$  est :  $\langle x\dot{x} \rangle = \frac{k_B T}{f} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$ .
- On a :  $\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2\langle x\dot{x} \rangle$ . Il vient donc en intégrant le résultat précédent, avec la condition initiale  $\langle x^2 \rangle = 0$  :  $\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{f} \left( t + \tau \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right) \right)$ . Pour  $t \gg \tau$ ,  $\langle x^2 \rangle \simeq \frac{2k_B T}{f} t$ .
- Numériquement :  $f = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu = 5,0 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$ ,  $\tau = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ ,  $D = \frac{k_B T}{f} = 2,2 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La distance moyenne parcourue en une durée  $t$  est  $\sqrt{2Dt}$  et pour  $t = 1 \text{ s}$  elle vaut  $2,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

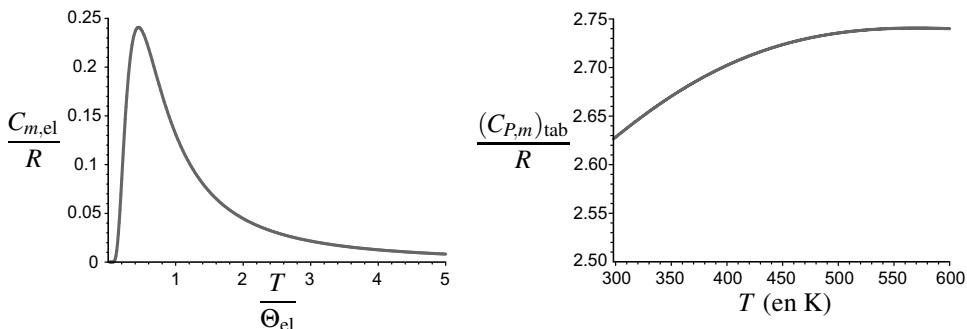
**27.13 Contribution électronique à la capacité thermique d'un gaz**

- a.  $\Delta = E_2 - E_1 = 13,6 \text{ (eV)} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 10,2 \text{ eV}$ .
- b. Soit  $N_n$  le nombre moyen d'atomes dans un état donné d'énergie  $E_n$ . D'après la loi de Boltzmann :  $\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{10,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298}\right) = 4 \cdot 10^{-173}$ . Comme il y a 8 états d'énergie  $E_2$  et 2 états d'énergie  $E_1$ , le rapport du nombre d'atomes d'énergie  $E_2$  au nombre d'atomes d'énergie  $E_1$  est  $\frac{8}{2} \times 4 \cdot 10^{-173} = 2 \cdot 10^{-172}$ . Le premier niveau d'énergie électronique n'est quasiment pas peuplé !
- c. Les niveaux d'énergie électroniques excités sont beaucoup trop élevés pour être peuplés à température ambiante. C'est comme si ils n'existaient pas ; ils n'ont aucune influence sur la capacité thermique .
- a. De manière analogue, le rapport du nombre d'atomes de chlore dans le premier niveau excité (*i.e.* occupant un des 4 états quantiques correspondants) divisé par le nombre d'atomes de chlore dans le niveau fondamental (*i.e.* occupant l'un des deux états quantiques correspondants) est :  $\frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right) = \frac{2}{4} \exp\left(-\frac{0,109 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298}\right) = 7,2 \cdot 10^{-3}$ .
- b. En notant  $\beta = (k_B T)^{-1}$  on a :  $\langle E_{\text{el}} \rangle = \frac{0 \times g_1 + \Delta \times g_2 e^{-\beta \Delta}}{g_1 + g_2 e^{-\beta \Delta}} = \frac{\Delta e^{-\beta \Delta}}{2 + e^{-\beta \Delta}}$ .

$$\mathbf{c.} C_{m,\text{el}} = \mathcal{N}_A \frac{d\langle E_{\text{el}} \rangle}{dT} = \mathcal{N}_A \frac{d\langle E_{\text{el}} \rangle}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} = \mathcal{N}_A k_B \frac{2(\beta\Delta)^2 e^{-\beta\Delta}}{(2 + e^{-\beta\Delta})^2} = \frac{2R\Theta_{\text{el}}^2 \exp\left(-\frac{\Theta_{\text{el}}}{T}\right)}{T^2 \left(2 + \exp\left(-\frac{\Theta_{\text{el}}}{T}\right)\right)^2}.$$

La figure ci-après à gauche représente  $\frac{C_{m,\text{el}}}{R}$  en fonction de  $\frac{T}{\Theta_{\text{el}}}$ . En traçant la courbe de la fonction dérivée on trouve que celle-ci s'annule et donc que  $C_{m,\text{el}}$  atteint son maximum à la température  $T_m = 0,449\Theta_{\text{el}}$ .

Numériquement :  $\Theta_{\text{el}} = 1,26 \cdot 10^3 \text{ K}$ ,  $T_m = 569 \text{ K}$  et  $C_{m,\text{el}}(T_m) = 0,24R$ .



**d.** La courbe ci-dessus à droite représente  $\frac{(C_{P,m})_{\text{tab}}}{R}$  en fonction de  $T$ . Cette courbe présente un maximum précisément à la température  $T_m$  (on le vérifie en traçant la courbe de la dérivée). La capacité thermique à molaire à pression constante est aussi supérieure à  $\frac{5}{2}R$ , valeur attendue pour un gaz parfait monoatomique. La différence correspond bien à  $C_{m,\text{el}}$  ce que l'on peut vérifier en traçant sur le même graphe  $\frac{5}{2} + \frac{C_{m,\text{el}}}{R}$  : les deux courbes sont presque confondues.

### 27.14 Gaz parfait à une dimension

**1. a.** Les conditions aux limites imposent  $\sin(k \times 0) = \sin(k \times L) = 0$ , soit  $k = n \frac{\pi}{L}$  avec  $n$  entier supérieur à 1.

**b.** Pour  $x \in [0, L]$ ,  $E_p(x) = 0$  et l'équation de Schrödinger s'écrit :  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ . En y injectant la fonction d'onde donnée on trouve :

$$\hbar\omega A \sin(kL) \exp(-i\omega t) = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 \sin(kL) \exp(-i\omega t) \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m^*}$$

**c.**  $E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ . Les niveaux d'énergie possibles sont :  $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} = n^2 \frac{\hbar^2}{8m^* L^2}$ .

**2. a.**  $n_1 = \frac{2L\sqrt{2m^* k_B T}}{h} = \frac{2 \times 0,100 \times \sqrt{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 1,12 \cdot 10^9$ .

## CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

$n_2 = \sqrt{1,01} \times n_1 = 1,13 \cdot 10^9$ . Il y a  $10^7$  niveaux d'énergie entre les énergies  $k_B T$  et  $1,01 k_B T$  ! Les niveaux sont tellement serrés qu'une description continue s'impose.

**b.** La condition est  $n_1 \gg 1$  soit  $L \gg \frac{h}{2\sqrt{2m^*k_B T}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\lambda_{\text{th}} = 1,06\lambda_{\text{th}}$  soit  $L \gg \lambda_{\text{th}}$ .

**3.**  $n(E) = \frac{2L\sqrt{2m^*E}}{h}$ .

On a :  $w(E)dE = n(E + dE) - n(E) = \frac{dn}{dE}dE$ , soit :  $w(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{2L\sqrt{2m^*}}{2h\sqrt{E}}$ .

**4.** La loi de Boltzmann s'écrit :  $dp(E) = \text{constante} \times \exp(-\beta E)w(E)dE = A \frac{\exp(-\beta E)}{\sqrt{E}}dE$ , où  $A$  est une constante que l'on peut déterminer en utilisant la condition de normalisation :  $\int_0^\infty dp(E) = 1$ . Il vient :  $\frac{1}{A} = \int_0^\infty \frac{\exp(-\beta E)}{\sqrt{E}}dE = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$  (dans ce calcul on a fait le changement de variable  $x = \beta E$ ). Finalement :

$$dp(E) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \frac{\exp(-\beta E)}{\sqrt{E}}dE.$$

**5.**  $\langle E \rangle = \int_0^\infty E dp(E) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_0^\infty E \frac{\exp(-\beta E)}{\sqrt{E}}dE = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{x}\exp(-x)dx = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , soit :  $\langle E \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2}k_B T$ . Ce résultat correspond au théorème d'équirépartition de l'énergie : les particules ont en effet un unique degré de liberté quadratique qui est la vitesse  $v_x$ .

$\langle E^2 \rangle = \int_0^\infty E^2 dp(E) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_0^\infty E\sqrt{E}\exp(-\beta E)dE = \frac{1}{\beta^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x\sqrt{x}\exp(-x)dx$ , soit :  $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{\beta^2\sqrt{\pi}} \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{4\beta^2} = \frac{3}{4}(k_B T)^2$ .

Ainsi :  $\text{Var}(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{1}{2}(k_B T)^2$ . Les fluctuations de l'énergie d'une particule sont importantes puisque :  $\frac{\sqrt{\text{Var}(E)}}{\langle E \rangle} = \sqrt{2}$ .

**6.** L'énergie du système  $\Sigma$  est :  $E_\Sigma = N\langle E \rangle = \frac{1}{2}Nk_B T$ , et sa capacité thermique :  $C_\Sigma = \frac{1}{2}Nk_B$ .

### 27.15 Refroidissement magnétique

**1. a.** L'énergie d'un moment magnétique plongé dans le champ magnétique est :  $E_p = -\mu_z B = \pm \mu_B B$  avec le signe « - » si le moment magnétique est dans le sens du champ magnétique et le signe « + » s'il est dans le sens inverse du champ magnétique. Il y a ainsi deux valeurs possibles de l'énergie d'écart :  $\Delta = 2\mu_B B$ .

Numériquement :  $\Delta = 1,85 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$  et  $\Theta_{\text{spin}} = \frac{\Delta}{k_B} = 1,34 \text{ K}$ .

**b.** D'après la loi de Boltzmann,  $\frac{N_+}{N_-} = \exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{2\mu_B B}{k_B T}\right)$ , car l'énergie des moments magnétiques dans le sens inverse du champ magnétique est supérieure de  $\Delta$  à l'énergie

des moments magnétiques dans le sens du champ magnétique.

**2. a.** À une température  $T \sim \Theta_{\text{spin}}$  :

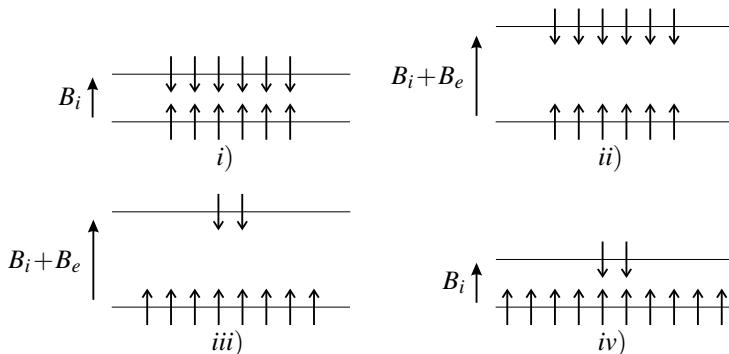
- la capacité thermique des spins  $C_{\text{spin}}$  est de l'ordre de  $R \frac{e}{(e+1)^2} \simeq 0,2R$  ;
- étant donné que  $\Theta_{\text{spin}} \ll \Theta_D$  la capacité thermique du réseau  $C_{\text{réseau}}$  est de l'ordre de  $R \frac{12}{5} \pi^4 \left( \frac{\Theta_{\text{spin}}}{\Theta_D} \right)^3 \sim 7.10^{-5} R$ , en prenant  $\Theta_D = 200$  K pour ce calcul d'ordre de grandeur.

Il apparaît que  $C_{\text{spin}} \gg C_{\text{réseau}}$  à une température de l'ordre de  $\Theta_{\text{spin}}$ .

**b.** Dans les conditions données la capacité thermique des spins est de l'ordre de  $R$  et la capacité du réseau très inférieure à  $R$ . Donc les spins imposent leur température au système et :  $T_f \simeq T_{\text{spin}}$ .

**3. a.** À l'étape *i*), d'après **1.b** :  $\frac{N_+}{N_-} = \exp \left( \frac{2 \times 9.27.10^{-24} \times 1.10^{-2}}{1.38.10^{-23} \times 4,2} \right) = 1,003$ . Les populations des deux niveaux d'énergie sont quasiment identiques (parce que  $k_B T \gg \Delta$ ) ce qui correspond bien au schéma de l'énoncé.

**b.** À l'étape *ii*), quand on augmente fortement le champ magnétique vu par les spins l'écart d'énergie augmente fortement; à l'étape *iii*) l'équilibrage thermique à la température  $T_{\text{He}}$  impose que  $\frac{N_+}{N_-} = \exp \left( \frac{2 \times 9.27.10^{-24} \times 5}{1.38.10^{-23} \times 4,2} \right) = 4,9$  donc un certain nombre de spins se retournent; à l'étape *iv*) la suppression du champ magnétique extérieur diminue fortement l'écart d'énergie.



**c.** La répartition des spins à l'étape *iv*) correspond à une température  $T_{\text{spin}}$  telle que :

$$\exp \left( \frac{\mu_B B_i}{k_B T_{\text{spin}}} \right) = \exp \left( \frac{\mu_B B_e}{k_B T_{\text{He}}} \right) \quad \text{soit} \quad T_{\text{spin}} = T_{\text{He}} \frac{B_i}{B_e}.$$

Numériquement :  $T_{\text{spin}} = 8,4.10^{-3}$  K.

**d.** À l'étape *iv*) on est dans les conditions de la question **2.b**, donc la température du sel à l'étape *v*) est  $T_f \simeq T_{\text{spin}}$ .

**CHAPITRE 27 – ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE**

- e.** La température des spins diminue lors de la transformation de l'étape *iv*) qui est adiabatique car de durée très courte devant  $t_1$ , temps nécessaire aux échanges thermiques entre les spins et le réseau.
- 4.** Après l'équilibrage thermique entre les spins et le réseau intervient l'équilibrage thermique entre le sel paramagnétique et l'échantillon. Celui-ci est refroidi efficacement si sa capacité thermique est petite devant celle du sel.

# **Huitième partie**

# **Appendice**



# Outils mathématiques

A

Cet appendice est consacré aux outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique MP. Ces outils s’ajoutent à ceux qui figurent dans l’appendice mathématique du *Physique tout-en-un MPSI/PTSI*. Les résultats encadrés en gris sont à connaître par cœur.

## 1 Analyse vectorielle

### 1.1 Gradient d'un champ scalaire

#### a) Définition

Le **gradient** d'un champ scalaire  $U(M)$  est un champ vectoriel noté  $\overrightarrow{\text{grad}}U(M)$ , défini de la manière suivante : la variation  $dU$  du champ pour un déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  à partir de  $M$  est :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}}U(M) \cdot d\vec{l}_M$$

$dU$  est appelée **différentielle** de  $U(M)$ .

Dans le cas d'un champ  $U(M, t)$  non stationnaire,  $dU$  est la différence entre les valeurs de  $U$  en deux points proches de  $M$  séparés de  $d\vec{l}_M$  au même instant  $t$ .

#### b) Conséquences

- Le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}U$  est orthogonal aux surfaces  $U = \text{cste}$  (surfaces de niveau).
- Le gradient est orienté dans le sens des  $U$  croissants.

#### c) Expressions du gradient en coordonnées cartésiennes

Le gradient d'une fonction  $U$  est une grandeur intrinsèque, indépendante du choix d'un système de coordonnées. Mais son expression dépend du système de coordonnées. L'expression du gradient doit être connue en coordonnées cartésiennes. On en donne ici une démonstration, qu'il n'est bien entendu pas nécessaire de connaître.

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :  $d\vec{l}_M = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$ ; la différentielle de

la fonction  $U(x, y, z)$  s'écrit :  $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ . Les coordonnées du gradient de  $U$  vérifient donc l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = (\overrightarrow{\text{grad}}U)_x dx + (\overrightarrow{\text{grad}}U)_y dy + (\overrightarrow{\text{grad}}U)_z dz$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z .$$

#### d) Expression du gradient dans les autres systèmes de coordonnées

Ces expressions ne sont pas à connaître ; elles doivent être fournies si elles sont nécessaires.

*Coordonnées cylindriques*

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :  $d\vec{l}_M = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$  ; donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z .$$

*Coordonnées sphériques*

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :  $d\vec{l}_M = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$  ; donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi .$$

## 1.2 Divergence d'un champ de vecteurs

La **divergence** du champ de vecteurs  $\vec{a}(M)$  est un champ scalaire noté  $\text{div } \vec{a}(M)$ .

Ce champ est indépendant du choix d'un système de coordonnées mais son expression dépend du système de coordonnées choisi.

#### a) Expressions de la divergence en coordonnées cartésiennes

L'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes, qu'il faut connaître, est :

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

### b) Formule d'Ostrogradski

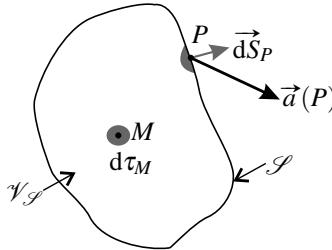


Figure A.1 – Théorème d'Ostrogradski.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface fermée quelconque et  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$  le volume délimité par  $\mathcal{S}$  (voir figure A.1). La **formule d'Ostrogradski** est :

$$\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{a}(P) \cdot \vec{d}S_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \operatorname{div} \vec{a}(M) \, d\tau_M. \quad (\text{A.1})$$



La surface  $\mathcal{S}$  doit obligatoirement être orientée vers l'extérieur : tous les vecteurs  $\vec{d}S_P$  sortent de  $\mathcal{S}$ .

### c) Expressions de la divergence dans les autres systèmes de coordonnées

Ces expressions ne sont pas à connaître ; elles seront fournies si elles sont nécessaires. Il ne faut surtout pas chercher à les « inventer ».

*Coordonnées cylindriques*

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

*Coordonnées sphériques :*

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

## 1.3 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Le **rotationnel** d'un champ de vecteurs  $\vec{a}(M)$  est un autre champ vectoriel. Ce champ est indépendant du choix d'un système de coordonnées, mais son expression dépend du système de coordonnées choisi.

**a) Expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes**

L'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, qu'il faut connaître est :

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z).$$



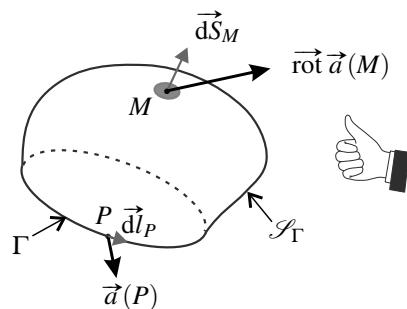
Il est facile de retenir l'expression du rotationnel sous la forme :

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},$$

expression dans laquelle le « produit » d'un symbole de dérivation partielle par une coordonnées est la dérivée partielle correspondante de cette coordonnée.

**b) Formule de Stokes**

Soit un contour orienté  $\Gamma$  et  $\mathcal{S}_\Gamma$  une surface délimitée par  $\Gamma$  dont l'orientation résulte de celle de  $\Gamma$  selon la règle de la main droite : si l'on place une main droite comme sur la figure A.2, le pouce donne le sens d'orientation de  $\mathcal{S}_\Gamma$  et les autres doigts celle de  $\Gamma$ .



**Figure A.2 – Théorème de Stokes.**

La **formule de Stokes** valable pour tout champ vectoriel  $\vec{a}(M)$  est :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{a}(P) \cdot d\vec{l}_P = \iint_{M \in \mathcal{A}_{\Gamma}} \text{rot } \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M . \quad (\text{A.2})$$

### c) Expression du rotationnel dans les autres systèmes de coordonnées

Comme pour la divergence, l'expression du rotationnel en coordonnées autres que cartésiennes sera donnée chaque fois qu'elle est nécessaire.

*Coordonnées cylindriques*

L'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques est :

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z).$$

*Coordonnées sphériques :*

L'expression du rotationnel en coordonnées sphériques est :

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta a_\phi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi).$$

## 1.4 Laplacien scalaire

Le **laplacien scalaire** d'un champ scalaire  $U(M)$  est un champ scalaire noté  $\Delta U(M)$ .

### a) Définition du laplacien scalaire

Par définition :

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U).$$

L'opérateur laplacien est un opérateur de dérivation du deuxième ordre.

Le laplacien d'un champ scalaire  $U$  est indépendant du choix des coordonnées, cependant son expression dépend du système de coordonnées choisi.

### b) Expression en coordonnées cartésiennes

L'expression du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes, qui doit être connue, est :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} .$$

Cette expression se retrouve facilement à partir de la définition et des expressions du gradient et de la divergence.

### c) Expressions du laplacien scalaire dans les autres systèmes de coordonnées

Ces expressions ne sont pas à connaître ; elles seront fournies si elles sont nécessaires.

*Coordonnées cylindriques*

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} .$$

*Coordonnées sphériques*

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} .$$

Dans le cas où  $U$  ne dépend que de  $r$  :

$$\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rU(r))}{dr^2} .$$

## 1.5 Laplacien vectoriel

### a) Définition du laplacien vectoriel

Par définition :

$$\Delta \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{a}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a})$$

L'opérateur laplacien vectoriel est un opérateur de dérivation du deuxième ordre.

Le laplacien d'un champ vectoriel  $\vec{a}$  est indépendant du choix des coordonnées, cependant son expression dépend du système de coordonnées choisi.

### b) Expression en coordonnées cartésiennes

L'expression du laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes, qui doit être connue, est :

$$\Delta \vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} .$$

Cette expression se retrouve facilement à partir de la définition et des expressions du rotationnel, du gradient et de la divergence.

## 1.6 Le vecteur symbolique "nabla"

On définit le vecteur "symbolique" *nabla* en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Tout seul, il n'a aucun sens, mais on l'appliquera à "quelque chose", il figurera toujours à gauche dans l'expression.

Les opérateurs définis précédemment peuvent s'écrire avec le vecteur nabla de la façon suivante :

- gradient de  $U$  devient  $\vec{\nabla} U$ , c'est-à-dire le produit du vecteur nabla par le scalaire  $U$  ;
- divergence de  $\vec{a}$  devient  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ , c'est-à-dire le produit scalaire du vecteur nabla et du vecteur  $\vec{a}$  ;
- rotationnel de  $\vec{a}$  devient  $\vec{\nabla} \wedge \vec{a}$ , c'est-à-dire le produit vectoriel du vecteur nabla et du vecteur  $\vec{a}$  ;
- laplacien de  $U$  devient  $\vec{\nabla}^2 U$ , c'est-à-dire le carré scalaire du vecteur nabla multiplié par  $U$  ;

Dans toutes les phrases ci-dessus, « multiplié par » veut dire « appliqué à ».

### Remarque

La relation  $\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$  a été donnée plus haut comme moyen pratique de retrouver rapidement l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes.



**Attention :** Il est très déconseillé d'utiliser le vecteur nabla dans les autres systèmes de coordonnées. En particulier il ne permet pas de retrouver les expressions de la divergence, du rotationnel et du laplacien.

## 1.7 Cas des champs proportionnels à $\exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$

On s'intéresse dans ce paragraphe à des champs qui sont en notation complexe de la forme :

$$\underline{U}(M,t) = \underline{U}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad \text{et} \quad \underline{\vec{a}}(M,t) = \underline{\vec{a}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})),$$

où  $\underline{U}_0$  et  $\underline{\vec{a}}_0$  sont des constantes. Pour ces champs, la dérivation par rapport au temps est une simple multiplication par  $i\omega$  :  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$  et le vecteur nabla est simplement :  $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} \underline{U} &= -i\underline{U}\vec{k} \\ \Delta \underline{U} &= -k^2 \underline{U} \end{aligned},$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \underline{\vec{a}} &= -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{a}} \\ \text{div} \underline{\vec{a}} &= -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{a}} \\ \Delta \underline{\vec{a}} &= -k^2 \underline{\vec{a}}\end{aligned}$$



Si les champs sont proportionnels à  $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ , alors :  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$  et le vecteur nabla est :  $\vec{\nabla} = +i \vec{k}$ . Il faut donc changer  $i$  en  $-i$  dans toutes les expressions ci-dessus.

## 2 Analyse de Fourier

### 2.1 Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier

#### a) Série de Fourier

Toute fonction  $f(t)$  périodique de période  $T$  c'est-à-dire telle que :  $f(t+T) = f(t)$ , peut se mettre sous la forme :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right),$$

où les  $A_n$  et les  $\varphi_n$  sont des constantes.

Tout signal périodique de période  $T$  est somme d'un signal constant et d'une infinité de signaux sinusoïdaux de périodes  $T, T/2, \dots, T/n$  etc.

#### b) Raisonnement par superposition

Cette propriété est utilisée dans le **raisonnement par superposition** : on cherche la réponse  $R(f(t))$  d'un système *linéaire* à une grandeur physique  $f(t)$  et on sait calculer la réponse  $R(1)$  à un signal constant égal à 1 et la réponse  $R(\cos(\omega t + \varphi))$  à un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  quelconque. Alors, par linéarité :

$$R(f(t)) = A_0 R(1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R\left(\cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right)\right).$$

#### c) Cas des fonctions spatiales

La décomposition de Fourier ne s'applique pas uniquement aux fonctions de la variable temps. Si  $g(x)$  est une fonction d'une coordonnée spatiale, périodique de période  $a$ , c'est-à-dire telle que :  $g(x+a) = g(x)$ , elle peut s'écrire :

$$g(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{a} + \psi_n\right),$$

où les  $B_n$  et les  $\psi_n$  sont des constantes. Elle est ainsi superposition d'une fonction constante et de fonctions sinusoïdales de **périodes spatiales**  $a, a/2, \dots, a/n$  etc.

## 2.2 Synthèse de Fourier d'un signal non périodique

### a) Notion de transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction  $f(t)$  représentant un signal physique réalisable est :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Il s'agit d'une nouvelle fonction dans laquelle la variable temporelle  $t$  est remplacée par la variable de pulsation  $\omega$ . Lorsque la fonction  $f(t)$  est une fonction continue, on démontre la formule de transformation inverse :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Pour un signal réel  $f(t)$  on a  $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)^*$ , on peut donc écrire :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\hat{f}(\omega) \exp(-i\omega t) + \hat{f}(\omega)^* \exp(i\omega t)) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(\hat{f}(\omega) \exp(-i\omega t)) d\omega.$$

Il n'est pas demandé de connaître cette formule mais uniquement son interprétation physique :

Tout fonction du temps réalisable physiquement, non périodique, est superposition de signaux sinusoïdaux ayant *a priori* toutes les pulsations  $\omega$  de 0 à l'infini.

### b) Lien entre l'extension temporelle et la largeur du spectre

En pratique, les pulsations présentes dans le signal occupent un intervalle de largeur  $\Delta\omega$  d'autant plus grande que le signal est bref.

Un signal de durée caractéristique  $\Delta t$  a une largeur spectrale  $\Delta\omega$  telle que :

$$\Delta t \times \Delta\omega \sim 1.$$

Cette propriété est illustrée ci-dessous dans le cas de signaux quasiment sinusoïdaux.

### c) Raisonnement par superposition

La synthèse de Fourier s'utilise pour faire un **raisonnement par superposition** : on cherche la réponse  $R(f(t))$  d'un système *linéaire* à une grandeur physique  $f(t)$  et on sait calculer la réponse  $R(\exp(-i\omega t))$  à un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  quelconque. Par linéarité :

$$R(f(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) R(\exp(-i\omega t)) d\omega.$$

### d) Exemples de signaux quasi-sinusoïdaux

Les signaux suivants modélisent des oscillations de pulsation  $\omega_m$  existant pendant une durée de l'ordre de  $\tau$ . Si  $\omega\tau \gg 1$  on peut les qualifier de quasi-sinusoïdaux. Dans chaque cas on vérifie que la largeur du spectre du signal  $\Delta\omega$  est inversement proportionnelle à  $\tau$ .

**Premier exemple**  $f(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_m t) & \text{si } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = A\tau \left( \frac{\sin((\omega - \omega_m)\tau/2)}{(\omega - \omega_m)\tau} + \frac{\sin((\omega + \omega_m)\tau/2)}{(\omega + \omega_m)\tau} \right)$$

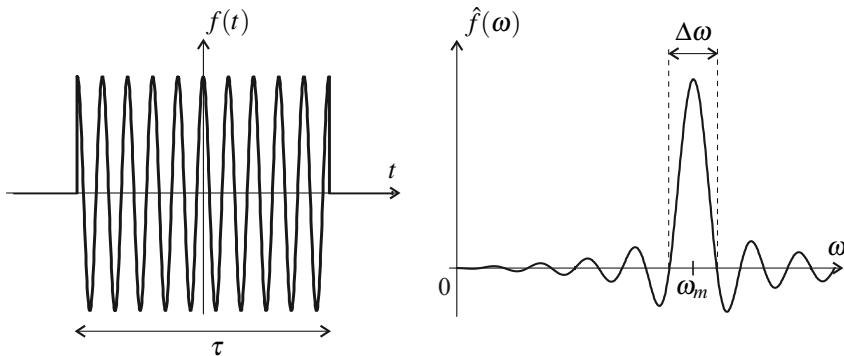


Figure A.3 – Exemple 1. La figure correspond à  $\omega_m\tau = 20\pi$ .

$\hat{f}(\omega)$  est une fonction paire, maximale en  $\pm\omega_m$  (voir figure). Elle ne prend de valeurs importantes que sur l'intervalle compris entre ses deux premiers points d'annulation de part et d'autre de  $\pm\omega_m$  qui sont  $\pm\omega_m \pm \frac{2\pi}{\tau}$ . Ainsi, les pulsations les plus importantes dans le signal occupent donc autour de  $\pm\omega_m$  un intervalle de largeur  $\Delta\omega = \frac{4\pi}{\tau}$ , inversement proportionnelle à sa durée.

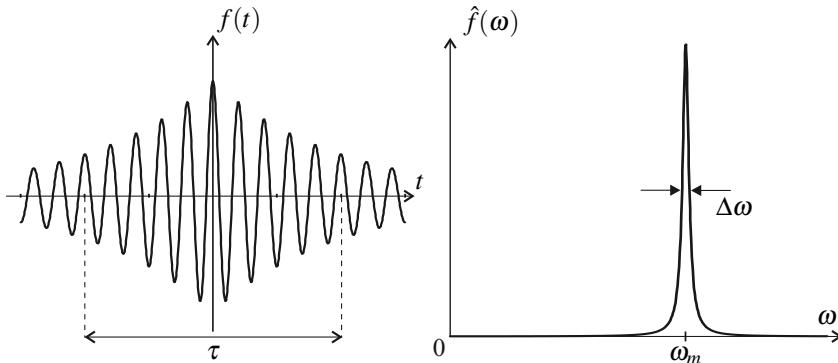
**Deuxième exemple**  $f(t) = A \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) \cos(\omega_m t)$

$$\hat{f}(\omega) = A\tau \left( \frac{1}{1 + ((\omega - \omega_m)\tau)^2} + \frac{1}{1 + ((\omega + \omega_m)\tau)^2} \right)$$

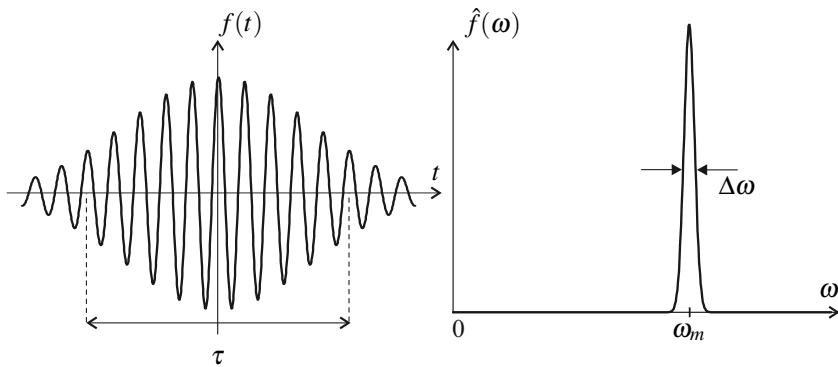
$\hat{f}(\omega)$  est une fonction paire présentant deux pics autour de  $\pm\omega_m$ . Chaque pic est caractérisé par sa **largeur à mi-hauteur**  $\Delta\omega$  : écart entre les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour lesquelles sa valeur est égale à la moitié de la valeur maximale. Pour le pic centré en  $\omega_m$ , en négligeant la présence de l'autre pic, on trouve :  $\omega_1 = \omega_m \pm \frac{1}{\tau}$  et  $\omega_2 = \omega_m + \frac{1}{\tau}$ . La largeur de l'intervalle contenant les fréquences significatives dans le signal,  $\Delta\omega = \frac{2}{\tau}$ , est inversement proportionnel à  $\tau$ .

**Troisième exemple**  $f(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \cos(\omega_m t)$ .

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A\tau \left( \exp\left(-\frac{1}{4}(\omega - \omega_m)^2 \tau^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{4}(\omega + \omega_m)^2 \tau^2\right) \right)$$



**Figure A.4** – Exemple 2. La figure correspond à  $\omega_m \tau = 20\pi$ .



**Figure A.5** – Exemple 3. La figure correspond à  $\omega_m \tau = 20\pi$ .

$\hat{f}(\omega)$  est une fonction paire présentant deux pics autour de  $\pm\omega_m$ . On calcule pour le pic centré en  $\omega_m$ , en négligeant l'autre pic, une largeur à mi-hauteur :  $\Delta\omega = \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\tau}$ , inversement proportionnelle à  $\tau$ .

### e) Cas des signaux spatiaux

La synthèse de Fourier est aussi utilisée pour les fonctions  $g(x)$  d'une variables spatiale  $x$  :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \exp(-ikx) dk.$$

Toute fonction non périodique de  $x$  est superposition de fonctions sinusoïdales de vecteurs d'ondes  $k$  prenant *a priori* toutes les valeurs de 0 à l'infini. Pour une fonction d'extension spatiale  $\Delta x$  les valeurs de  $k$  significatives occupent un intervalle de largeur  $\Delta k$  telle que :

$$\Delta k \times \Delta x \sim 1 .$$

### 3 Équations aux dérivées partielles

#### 3.1 Équations fondamentales

Une **équation aux dérivées partielles** est une relation imposée par les lois physiques entre les dérivées partielles d'un champ  $U(M, t)$  par rapport aux coordonnées spatiales et/ou par rapport à la variable temps. Une telle relation n'a de sens physique que si elle est indépendante du choix du système de coordonnées; ainsi les dérivées partielles spatiales correspondent nécessairement à un opérateur différentiel (ou un combinaison d'opérateurs différentiels), dans les exemples suivants il s'agit de l'opérateur laplacien  $\Delta$ .

Il faut savoir reconnaître les équations différentielles suivantes :

- l'**équation de Laplace** :

$$\Delta U(M) = 0 ;$$

- l'**équation de d'Alembert** :

$$\Delta U(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(M, t),$$

où  $c$  est une constante positive donnée ;

- l'**équation de diffusion** :

$$\Delta U(M, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t}(M, t),$$

où  $a$  est une constante positive donnée ;

- l'**équation de Schrödinger** pour une particule dans un potentiel  $V(M)$  :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(M, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(M, t) + V(M) \psi(M, t).$$

Ces équations sont linéaires : toute une combinaison linéaire de solution est une nouvelle solution.

De plus, les trois premières équations apparaissent dans différents domaines de la physique : par exemple l'équation de Laplace est vérifiée par le potentiel électrostatique dans une zone vide de charge (voir chapitre *Équations de Maxwell* mais aussi par le champ de température en régime permanent et en l'absence de sources d'énergie (voir chapitre *Transfert thermiques*). Les solutions mathématiques trouvées dans un domaine sont transposables dans un autre pour résoudre un autre problème.

#### Exemple

En électrostatique on sait que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$  placée à l'origine est :  $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ , que le potentiel électrostatique créé par un dipôle  $\vec{p} = p\hat{u}_z$  est :  $V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (ces expressions sont données en coordonnées sphériques d'axe ( $Oz$ )). Dans les deux cas il s'agit distributions de charges concentrées à l'origine  $O$ , donc le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace  $\Delta V(M) = 0$  en tout point  $M$  différent de  $O$ . On apprend ainsi que les fonctions  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{\cos \theta}{r^2}$ , en coor-

données sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , sont des solutions de l'équation de Laplace en dehors de l'origine. Ces solutions peuvent être utilisées pour tout problème se ramenant à l'équation de Laplace.

### 3.2 Résolution par substitution d'une forme donnée

On peut chercher des solutions d'une équation aux dérivées partielles en supposant une forme mathématique donnée, dépendant d'un paramètre  $\alpha$  inconnu au départ. En injectant la solution supposée dans l'équation on arrive à une équation déterminant  $\alpha$ .

#### Exemple

On cherche les solutions de l'équation de Laplace, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , de la forme  $U(M) = r^\alpha \cos(n\theta)$  où  $n$  est un entier non nul donné et  $\alpha$  un exposant que l'on veut déterminer. On remplace donc  $U$  par cette formule dans l'expression du laplacien en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \times \alpha r^{\alpha-1} \cos(n\theta)) + \frac{1}{r^2} \times (-n^2 r^\alpha \cos(n\theta)) = (\alpha^2 - n^2) r^{\alpha-2} \cos(n\theta).\end{aligned}$$

Ainsi :  $\Delta U = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm n$ . Donc les fonctions  $r^n \cos(n\theta + \varphi)$  et  $\frac{\cos(n\theta + \varphi)}{r^n}$  sont des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (le déphasage  $\varphi$  ne change rien au calcul).

En superposant ces solutions que l'on vient de trouver avec la solution évidente  $U = A$ , constante et la solution à symétrie cylindrique  $U = \ln r$  (qui est obtenue dans le chapitre *transfert thermiques*) on trouve une solution de la forme :

$$U(M) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n}{r^n} + B_n r^n \right) \cos(n\theta + \varphi_n),$$

où les  $A_n$ , les  $B_n$  et les  $\varphi_n$  sont des constantes quelconques. Pour  $r$  fixé, cette expression peut être vue comme la décomposition en série de Fourier, par rapport à la variable  $\theta$ , d'une fonction périodique de période  $2\pi$ . Toute solution de l'équation de Laplace indépendante de  $z$  et définie pour tout  $\theta$  est nécessairement de cette forme.

### 3.3 Conditions aux limites et conditions initiales

Une fois que l'on a trouvé une forme mathématique possible pour la solution d'une équation aux dérivées partielles il faut déterminer complètement cette solution, en calculant toutes les constantes qui interviennent dans cette expression. Pour cela on impose à la solution :

- des **conditions aux limites** qui doivent être réalisées aux limites du domaine spatiale de résolution,
- si l'équation fait intervenir la variable temps, des **conditions initiales** fixant le champ  $U(M, t = 0)$ .

## 4 Calcul différentiel

### 4.1 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

Soit  $f$  une fonction dépendant de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n : f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

La **dérivée partielle** de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , est la dérivée par rapport à  $x_i$  calculée comme si les autres variables  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  étaient des constantes.

#### Exemple

Pour  $f(x, y, z) = (y^2 + z^3) \ln(x)$  :  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 + z^3}{x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \ln(x)$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 \ln(x)$ .

### 4.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

La variation de  $f$  si la variable  $x_i$  varie d'une quantité élémentaire  $dx_i$  est :  $\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ . Dans le cas général les  $n$  variables varient simultanément et font toutes varier  $f$  de :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

$df$  est appelée **différentielle de  $f$** . Pour exprimer la différentielle, il faut calculer toutes les dérivées partielles par rapport aux différentes variables.

Inversement, il arrive que l'on trouve l'expression de la différentielle d'une fonction  $f$ . On peut alors reconnaître chacune des dérivées partielles : la dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$  est le facteur qui multiplie  $dx_i$  dans la différentielle de  $f$ .

#### Exemple

On dispose de la différentielle de l'énergie interne d'un gaz réel :

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV,$$

où  $C_V$  et  $a$  sont des constantes. Quelle est la fonction  $U(T, V)$  ?

On a :

$$\frac{\partial U}{\partial T} = C_V \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{a}{V^2}.$$

En intégrant la première dérivée partielle il vient :  $U = C_V T + f(V)$ , où l'on a mis au lieu d'une constante d'intégration une fonction  $f(V)$  de l'autre variable. En utilisant cette expression pour calculer la deuxième dérivée partielle on trouve :  $f'(V) = \frac{a}{V^2}$  donc  $f(V) = -\frac{a}{V} + C$  où  $C$  est une constante. Finalement :

$$U(T, V) = C_V T - \frac{a}{V} + C.$$

## 5 Variables aléatoires

### 5.1 Variables aléatoires discrètes

Une **variable aléatoire discrète**  $X$  est définie par :

- les valeurs possibles  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  qui forment un ensemble discret (fini ou infini),
- les probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  de ces valeurs :

$$p_i = \text{Prob}(X = X_i).$$

Ces probabilités vérifient la condition de normalisation :  $\sum_i p_i = 1$  qui exprime le fait que la valeur de  $X$  est de manière certaine l'une des valeurs  $X_i$ .

On appelle **espérance** de la variable aléatoire  $X$ , notée  $E(X)$  sa valeur moyenne :

$$E(X) = \sum_i p_i X_i .$$

On appelle **variance** de la variable aléatoire  $X$ , noté  $\text{Var}(X)$ , la moyenne du carré de son écart à sa valeur moyenne :

$$\text{Var}(X) = \sum_i p_i (X_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

On appelle **écart-type** de la variable aléatoire  $X$ , noté  $\sigma(X)$ , la racine carrée de la moyenne du carré de son écart à sa valeur moyenne :

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_i p_i (X_i - E(X))^2} .$$

### 5.2 Variables aléatoires à densité

Une **variable aléatoire continue**  $X$  est définie par :

- l'intervalle  $[X_{\min}, X_{\max}]$  dans lequel  $X$  prend ses valeurs ( $X_{\min}$  peut être égal à  $-\infty$  et  $X_{\max}$  à  $+\infty$ ),
- la fonction densité de probabilité  $p(X)$  définie  $[X_{\min}, X_{\max}]$  à valeur positive ou nulle telle que la probabilité que  $X$  soit compris entre  $x$  et  $x + dx$  est :

$$\text{Prob}(X \in [x, x + dx]) = p(x)dx.$$

Cette densité de probabilité vérifie la condition de normalisation :

$$\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} p(x) dx = 1,$$

qui exprime le fait que la valeur de  $X$  est de manière certaine l'intervalle  $[X_{\min}, X_{\max}]$ .

L'**espérance**  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$  se calcule dans ce cas par la formule :

$$E(X) = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} x p(x) dx .$$

# Index

- écart quadratique moyen, 931  
écart-type, 999  
échantillonnage du signal, 155  
échelle mésoscopique, 928  
échelle macroscopique, 928  
échelle microscopique, 928  
éclairement, 183, 185  
énergie électromagnétique, 506  
énergie cinétique, 661  
énergie cinétique massique, 662  
énergie de confinement, 877  
énergie de localisation, 877  
énergie interne, 661  
énergie potentielle, 338  
énergie potentielle extérieure massique, 662  
énergie potentielle macroscopique, 662  
épaisseur de la lame d'air, 268  
épaisseur de peau, 597  
épaisseur locale, 278  
équation aux dérivées partielles, 996  
équation de Laplace, 480, 746, 996  
équation de London, 487  
équation de Maxwell-Ampère, 472  
équation de Maxwell-Faraday, 472  
équation de Maxwell-Gauss, 472  
équation de Maxwell-Thomson, 472  
équation de Maxwell-flux, 472  
équation de Poisson, 480  
équation de Schrödinger, 797, 849, 996  
équation de Schrödinger indépendante du temps  
amplitude de probabilité, 796  
800  
équation de d'Alembert, 527, 996  
équation de diffusion, 996  
équation de diffusion thermique à une dimen-  
sion, 739  
équation de la diffusion thermique, 742  
équation de la diffusion thermique en présence  
de sources, 743  
équation différentielle du filtre, 116  
équation fondamentale de l'hydrostatique, 933  
équation locale de Poynting, 509  
équation locale de bilan thermique, 735  
équation locale de conservation de la charge  
électrique, 471  
équations de Maxwell, 471  
équations de d'Alembert, 478  
équilibre thermodynamique, 930  
équilibre thermodynamique local, 660, 730,  
932  
équipotentielles, 340  
état stationnaire, 798, 824  
étoile à neutrons, 900  
  
absorption, 594  
accélération complémentaire, 30  
accélération d'entraînement, 26, 30  
accélération de Coriolis, 30  
action, 804  
action de contact, 85  
additive, 661  
agitation thermique, 927  
aléatoire, 202  
aliasing, 159  
amplitude, 185  
anisotrope, 636  
anneaux, 271  
anticoïncidence, 242  
anticoïncidence, 242

- approximation classique, 945  
 approximation d'une barrière épaisse, 861  
 approximation des basses fréquences, 595  
 association parallèle, 758  
 association série, 757  
 atmosphère isotherme, 934
- bande passante à  $-3\text{dB}$ , 119  
 bandes atténueées, 120  
 barrière de potentiel, 857, 870
- célérité, 527  
 champ électrostatique, 323  
 champ à circulation conservative, 335  
 champ à flux conservatif, 417  
 champ d'interférences, 219  
 champ d'interférences, 219  
 champ gravitationnel, 347  
 champ magnétostatique, 415  
 charges ponctuelles, 319  
 chariotage, 264  
 chemin, 334  
 chemin optique, 187  
 circulation, 334  
 circulation élémentaire, 334  
 coïncidence, 242  
 coefficient de frottement dynamique, 88  
 coefficient de frottement statique, 88  
 coefficient de réflexion, 605  
 coefficient de réflexion en énergie, 606  
 coefficient de transfert thermique de surface, 745  
 coefficient de transmission, 605  
 cohérence temporelle, 224, 836  
 cohérentes, 213, 215, 216  
 coin d'air, 278, 279  
 coïncidence, 242  
 collimateur, 193, 195  
 composante continue, 112  
 composantes sinusoïdales, 113  
 composition spectrale, 196  
 condition de normalisation, 938  
 Condition de Nyquist-Shannon, 160  
 condition initiale, 749
- conditions aux limites, 481, 603, 744, 749, 997  
 conditions de passage, 605  
 conditions initiales, 997  
 conducteur parfait, 600  
 conduction thermique, 727  
 conductivité, 505  
 conductivité thermique, 731  
 conservation de l'énergie, 831  
 conservation de la charge électrique, 469  
 constante de Boltzmann, 935  
 construction de Fresnel, 299  
 contact optique, 273  
 contour, 334, 426  
 contraste, 220  
 convection forcée, 728  
 convection naturelle, 728  
 convection thermique, 728  
 convergente, 191  
 couche  $F$ , 566  
 courant de déplacement, 472  
 courant tunnel, 864, 867  
 courbe d'ébullition, 683  
 courbe de rosée, 683  
 courbes isobares, 682  
 courbes isochores, 682  
 courbes isothermes, 682
- débits massiques, 674  
 décalage, 112  
 dérivée partielle, 998  
 dérivateur, 122  
 désintégration, 868  
 développement en série de Fourier, 111  
 dans le référentiel lié à l'ascenseur, 77  
 degré de liberté, 945  
 demi-entier, 219  
 demi-vie, 869  
 densité de courant thermique, 730  
 densité de probabilité de présence, 796  
 densité linéique de charge, 322  
 densité spectrale d'éclairement, 196  
 densité surfacique de charge, 321, 603  
 densité surfacique de courant, 602

## INDEX

- densité volumique d'énergie électromagnétique,faisceau laser, 198  
506, 507 fermé, 659  
densité volumique de charge, 320 figure d'interférences, 220  
densité volumique de force électromagnétique, filtre, 116  
504 filtre anti-repliement, 161  
diagramme de Bode, 119 filtre passe bas, 119  
diagramme des frigoristes, 682 filtre passe-bande à bande large, 119  
diamètre apparent, 242 filtre passe-bande du deuxième ordre, 117  
différence de marche, 218 filtre passe-bande sélectif, 119  
différentielle, 985 filtre passe-bas du deuxième ordre, 117  
différentielle de  $f$ , 998 filtre passe-bas du premier ordre, 117  
diffraction, 181, 813, 834 filtre passe-haut, 119  
diffusion, 640 filtre passe-haut du deuxième ordre, 117  
diffusion Rayleigh, 640 filtre passe-haut du premier ordre, 117  
diffusivité thermique, 739, 742 finesse, 299  
dipôle électrique oscillant, 632 flux, 339  
dipôle electrostatique, 395 flux élémentaire, 339  
dipôle actif, 454 flux thermique, 731  
dipôle magnétique, 453 fonction d'onde, 795  
dipôle passif, 454 fonction de partition, 938  
dispersion, 563 fonction de phase, 118  
distance caractéristique d'atténuation, 595, 597 fonction de transfert, 117  
divergence, 986 fonctions d'état, 660  
divergente, 191 fonctions d'onde propres, 800  
division d'amplitude, 271, 278 fondamental, 113  
division du front d'onde, 228 force axifuge, 56  
domaine visible, 536 force centrifuge, 56  
doublet de longueurs d'onde, 242 force d'inertie d'entraînement, 46, 55  
dualité onde-particule, 789 force d'inertie de Coriolis, 55  
éclairement, 185 force de Lorentz, 471  
effet de peau, 597, 856 formule d'Ostrogradski, 987  
effet Joule, 505 formule de composition des accélérations, 26,  
effet tunnel, 857, 860, 871 30  
effets de bord, 376 formule de composition des vitesses, 26, 29  
enthalpie massique, 678 Formule de dérivation vectorielle, 29  
entier, 219 formule de Fresnel, 216  
entropie, 662, 669 formule de Stokes, 989  
entropie échangée par unité de masse, 680 fréquence d'échantillonnage, 156  
entropie créée par unité de masse, 680 fréquences propres, 612, 615  
espérance, 999 frange d'égale épaisseur, 280  
et, 239 franges  
expérience de Stern et Gerlach, 456 brillantes, 220  
extensives, 660 d'interférences, 220  
facteur de Boltzmann, 936, 937 sombres, 220  
franges d'égale inclinaison, 272

- franges d'interférences brillantes, 220  
 franges d'interférences sombres, 220  
 franges localisées, 271  
 fusion thermonucléaire, 893
- gain, 118  
 gain en décibel, 119  
 glissement, 87, 88  
 gradient, 985
- harmonique de rang  $n$ , 113  
 hauteur d'échelle, 934
- inégalité de Heisenberg spatiale, 802, 829, 876  
 inégalité temps-énergie, 802  
 interférence, 853  
 incohérentes, 215  
 indéterminations quantiques, 801  
 indicatrice de rayonnement, 637  
 indice optique, 563  
 infrarouges, 537  
 instant retardé, 635  
 intégrateur, 121  
 intensité, 417  
 intensité à travers une surface, 417  
 intensité enlacée, 418  
 intensité vibratoire, 185  
 intensives, 660  
 interaction forte, 870  
 interférence, 181  
 interférences, 213, 861  
 interféromètre de Michelson, 263  
 interféromètre
  - de Rayleigh, 248
 interfrange, 232, 233  
 inversion de contraste, 240  
 ionosphère, 566  
 irréversibles, 669  
 isotrites, 684
- l'équipotentielle critique, 345  
 lame compensatrice, 264  
 lame d'air, 266–268  
 lame séparatrice, 264  
 lampe spectrale, 197  
 laplacien scalaire, 989
- largeur à mi-hauteur, 994  
 laser, 888  
 libre parcours moyen, 928  
 lignes de champ, 340  
 liquide saturant, 684  
 localisées, 279  
 localisées à l'infini, 267  
 localisées au voisinage des miroirs, 278  
 loi d'Ohm locale, 505  
 loi de Coulomb, 323  
 loi de Dulong et Petit, 954  
 Loi de Faraday, 475  
 loi de Fourier, 731  
 loi de la puissance cinétique, 48, 57  
 loi de Malus, 545  
 loi de Newton, 745  
 lois de Coulomb, 85  
 lois phénoménologiques, 85  
 longueur
  - de cohérence, 200
 longueur d'onde, 534  
 longueur d'onde dans le vide, 185  
 longueur de cohérence, 200  
 longueur de cohérence spatiale, 241  
 longueur de cohérence temporelle, 244  
 longueur de cohérence
  - temporelle, 244
 longueur de cohérence temporelle, 222  
 lumière blanche, 197  
 lumière monochromatique, 185  
 lumière naturelle, 182, 544  
 lumière polarisée, 182  
 lumière quasimonochromatique, 202  
 lumière blanche, 197
- mécanique classique, 181  
 mécanique quantique, 181  
 méthode de séparation des variables, 611  
 macro-état, 929  
 magnéton de Bohr, 453  
 maser, 888  
 micro-état, 930  
 micro-ondes, 537  
 microscope à effet tunnel, 864  
 milieu dispersif, 563

## INDEX

- modèle d'Einstein, 954  
modèle des trains d'ondes aléatoires, 201  
mode propre, 614  
modes de transfert thermique, 727  
module d'onde, 534  
moment dipolaire  
    permanent, 400  
moment dipolaire permanent, 400  
monochromatique, 533  
montage de Fraunhofer, 234  
moyenne, 185  
moyenneur, 125  
  
nœuds de vibration, 608  
niveau d'énergie, 875  
niveau fondamental, 875  
nombre d'onde, 534  
nombre quantique, 875  
non dégénéré, 937  
non linéaire, 132  
non localisées, 229, 230  
non-glissement, 87, 88  
non-linéarité, 135  
numérique, 155  
numérisée, 155  
  
onde  
    plane, 192  
onde évanescante, 565, 856  
onde incidente, 603  
onde plane, 192, 530  
onde plane et progressive, 530  
onde réfléchie, 603  
onde sphérique, 191  
onde stationnaire, 611  
onde transmise, 603  
ondes évanescantes, 859, 860  
ondes radio, 537  
optique ondulatoire, 181  
ordre d'interférences, 219  
ordre de diffraction, 304  
ordre du filtre, 116  
Ordres de grandeur pour le radium :, 920  
Ordres de grandeur :, 913  
oscillateur harmonique, 803  
  
ouvert, 659  
  
période d'échantillonnage, 156  
périodes spatiales, 992  
paquet d'ondes, 895  
    étalement, 838  
paquet d'ondes , 571  
paquet d'ondes quasimonochromatique, 826,  
    831  
paramètres d'état, 660  
particule quantique libre, 823  
partie variable, 112  
pas du réseau, 301  
perméabilité magnétique, 471  
permittivité diélectrique, 471  
permittivité du vide, 323  
plan d'onde relatif à  $M$ , 235  
plans d'onde, 192, 530  
poids de Boltzmann, 936  
point coïncident, 32  
point critique, 683  
polarisation rectiligne, 537  
polariseur, 544  
potentiel électrostatique, 335  
premier principe de la thermodynamique, 663,  
    664  
premier principe pour un système ouvert, 678  
principe de complémentarité, 794  
principe de correspondance, 808  
Principe de Curie, 329  
principe de Pauli, 893  
principe fondamental de la dynamique, 46  
probabilité de présence, 795  
profondeur de pénétration, 856  
pseudo-vecteurs, 422  
puissance totale rayonnée, 640  
puissance volumique produite, 743  
puits de potentiel, 873  
puits de potentiel infiniment profond, 873  
pulsation, 185  
pulsation de coupure, 120, 562  
pulsation plasma, 562  
  
quantification du signal, 155  
  
réactions nucléaires, 871

- référentiel de Copernic, 66  
 référentiels galiléens, 45  
 réflexion sur un milieu plus réfringent, 189  
 réflexion sur une surface métallique, 189  
 régime lentement variable, 760  
 régime stationnaire, 675, 746  
 réseau de diffraction, 301  
 résistance thermique, 753  
 résolution numérique, 480  
 réversibles, 669  
 règle de Hund, 893  
 radioactivité, 868  
 raies spectrales, 198  
 raisonnement par superposition, 992, 993  
 rayonnement thermique, 728  
 rayons  $\gamma$ , 536  
 rayons X, 536  
 relation de de Broglie, 793  
 relation de dispersion, 562, 594, 825  
 relation de Planck-Einstein, 790  
 relation fondamentale des réseaux, 304  
 relations de structure, 532  
 repliement du spectre, 159  
 représentation de Fresnel, 828  
 retard, 219  
 retard de phase, 185  
 rotation uniforme, 27  
 rotationnel, 987
- second principe de la thermodynamique, 670  
 second principe pour un système ouvert, 681  
 source étendue, 271  
 source de faible largeur spectrale, 243  
 sources synchrones, 218  
 spectre, 156, 196  
 spectre d'énergie, 875  
 spectre en amplitude, 112  
 spectre en phase, 112  
 spectromètre à réseau, 304  
 structure de l'OPP électromagnétique dans le vide, 532  
 surface d'onde relative au point source  $S$ , 189  
 surface de contrôle, 659  
 surface de localisation, 271  
 surfaces brillantes, 220
- surfaces sombres, 220  
 symétries du champ magnétique, 421  
 système fermé, 663  
 système linéaire, 116  
 système ouvert, 674  
 système thermodynamique, 659, 929
- teinte plate, 273  
 temps de cohérence, 200  
 terme d'interférences, 215  
 théorème d'équirépartition de l'énergie, 947  
 Théorème d'Ampère, 419  
 Théorème d'Ampère généralisé, 476  
 Théorème de Gauss, 340, 474  
 théorème de Gauss, 340  
 théorème de l'énergie cinétique, 48, 49, 57  
 Théorème de Malus :, 190  
 théorème de superposition, 183  
 théorème du moment cinétique, 47, 56  
 théorème de Malus, 190  
 thermodynamique statistique, 925  
 titre massique en gaz, 683  
 totalement constructives, 218  
 train d'ondes, 200  
 traits du réseau, 301  
 transfert thermique, 663, 727  
 transfert thermique massique, 677  
 transformation de Fourier, 196  
 transformation de Galilée, 24  
 translation, 25  
 translation circulaire, 25  
 translation rectiligne, 25  
 travail d'extraction, 856, 864  
 travail mécanique, 663  
 travail utile massique, 676  
 tube de champ, 343
- ultraviolets, 536
- valeur moyenne, 112, 185, 931  
 vapeur saturante, 684  
 variable aléatoire continue, 999  
 variable aléatoire discrète, 999  
 variance, 999

## INDEX

variation infinitésimale, 664  
vecteur d'onde, 534  
vecteur de Fresnel, 299  
vecteur de Poynting, 506, 507  
vecteur densité de courant électrique, 415, 416  
vecteur densité de courant de probabilité, 831  
vecteur rotation, 27  
vecteurs axiaux, 422  
ventres de vibration, 608  
vibration, 950  
vibration complexe, 186  
vibration lumineuse, 182  
visibilité, 220  
vitesse d'entraînement, 26  
vitesse de glissement, 87  
vitesse de groupe, 575, 827  
vitesse de phase, 562, 595, 825  
vitesse de propagation, 527  
  
zone de rayonnement, 634