# Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1.

Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = -X^8 + 2X^4 - 1$ 

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit 
$$P = 1 - X^{8}$$

Factoriser *P* dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  et enfin dans  $\mathbb{Q}[X]$ 

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit 
$$P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$$
. On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ 

- 1. Montrer que  $1 + j = -j^2$
- 2. Montrer que j est une racine multiple de P.
- 3. Trouver deux racines réelles évidentes de *P*.
- 4. Factoriser *P* en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit 
$$P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

- 1. Factoriser *P* dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- 2. Factoriser *P* dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- 3. Factoriser *P* dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

- 1. Déterminer les racines de P.
- 2. Factoriser *P* dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Soit  $P = -X^3 + X^2 - X + 1$  un polynôme.

Factoriser ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

2. Soit

$$P = 1 - X + X^{2} - \dots + (-1)^{n} X^{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} X^{k}$$

Déterminer les racines réelles et complexes de P.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit 
$$P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$$

On pose 
$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

- 1. Montrer que j est une racine multiple de P.
- 2. Factoriser *P* dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- 3. Factoriser *P* dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

- 1. Montrer que  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est une racine multiple de P.
- 2. En remarquant que *P* est un polynôme pair, donner toutes les racines de *P* ainsi que leur multiplicité.
- 3. Factoriser *P* dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit 
$$P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3i$$

- 1. Montrer que j est une racine double de P
- 2. Factoriser *P* dans  $\mathbb{C}[X]$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

- 1. Déterminer les racines réelles et complexes de  $(X + 1)^6 X^6$
- 2. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  défini par

$$P = (X+1)^7 - X^7 - a$$

Déterminer a pour que P admette une racine réelle multiple.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

- 1. Le polynôme  $A = X^4 + 3X + 1$ , est-il irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ ?
- 2. Le polynôme  $B = X^3 + 3X + 1$ , est-il irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ ?

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Déterminer les réels a, b et c tels que  $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$  soit factorisable par  $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$ 

Exercice 15.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que le polynôme  $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $B = X^2 - X + 1$ 

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit

$$P_n = (X+1)^n - X^n - 1$$

On pose  $n \equiv a$  [6] avec  $a \in \{0,1,2,3,4,5\}$ 

Pour quelles valeurs de  $n, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est-il racine de  $P_n$ ?

On pourra discuter selon les valeurs de a.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^n$  par  $X^2 + 1$ .

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Quel est le reste de la division euclidienne de  $P = X^n + X + 1$  par  $Q = (X - 1)^2$ ?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit  $R \in \mathbb{R}[X]$  le reste de la division euclidienne de  $(X+1)^n$  par  $(X-1)^2$ .

Déterminer R.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Quel est le reste de la division euclidienne de  $A_n = X^n + X + b$  par  $B = (X - a)^2$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \ge 2$ .

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $A = X^{2n} + 2X^n + 1$  par  $B = X^2 + 1$ 

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

- 1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^{4n} 1$  est divisible par  $X^4 1$ .
- 2. En déduire que le polynôme  $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$  avec a, b, c et d entiers naturels est divisible par  $O = X^3 + X^2 + X + 1$ .

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit  $P = X^3 + pX + q$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , on note  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ses racines.

- 1. Calculer  $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ .
- 2. Calculer  $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ .
- 3. Calculer  $C = \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 + \alpha^2 \gamma + \alpha \gamma^2 + \beta^2 \gamma + \beta \gamma^2$ .
- 4. On pose  $D = \alpha^3 \beta + \alpha \beta^3 + \alpha^3 \gamma + \alpha \gamma^3 + \beta^3 \gamma + \beta \gamma^3$ Calculer *D* en fonction de *p*.

Exercice 24.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme tel que XP(X-1) = (X-2)P(X)

- 1. Montrer que 0 et 1 sont racines de *P*.
- 2. Soit a une racine de P. Si  $a \ne 0$ , montrer que a 1 est racine. Si  $a \ne 1$ , montrer que a + 1 est racine.
- 3. On suppose que *P* n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de *P*.

Indication:

S'il existe une racine a telle que  $\Re(a) < 1$  différente de 0 ( $a \ne 0$ ), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine a telle que  $\Re(a) > 0$  différente de 1 ( $a \neq 1$ ), montrer qu'il y a une infinité de racines.

- 4. En déduire que P est de la forme  $\alpha X^k(X-1)^l$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}[X], k \in \mathbb{N}^*$  et  $l \in \mathbb{N}^*$ .
- 5. Quel est l'ensemble des polynômes de  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que XP(X-1) = (X-2)P(X).

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Effectuer la division suivante les puissances croissantes de  $X^4 + X^3 - 2X + 1$  par  $X^2 + X + 1$  à l'ordre 2.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

On considère le couple de polynôme à coefficients réels

$$P = X^3 - X^2 - X - 2$$
 et  $Q = X^3 - 1$ 

- 1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD(P,Q).
- 2. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- 3. Retrouvez le résultat de la question 1.
- 4. Décomposer P en facteur irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soient 
$$P = X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6$$
 et  $Q = X^4 + 2X^3 - X - 2$ 

Déterminer le *PGCD* de *P* et *Q* et en déduire les racines communes de *P* et *Q*.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Déterminer les P.G.C.D. des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$$
 et  $B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$ 

En utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduire les factorisations de A et B dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes  $P = (X - 1)^2$  et  $Q = X^2 + 1$ .

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

1. Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes

$$P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1$$
 et  $Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$ 

2. En déduire les racines communes de *P* et *Q*.

Exercice 31.

Soit 
$$P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$$

- 1. Calculer le PGCD de P et P'.
- 2. Quelles sont les racines communes à P et P'? Quelles sont les racines multiples de P dans  $\mathbb{C}$ ?
- 3. Montrer que  $(X^2 + 1)^2$  divise P.
- 4. Factoriser *P* dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  on désigne par P(X + 1) le polynôme obtenu en remplaçant X par X + 1 dans P.

- 1. Existe-t-il des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 3 tels que P(0) = 1?
- 2. Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme de degré 3, quel est le degré du polynôme P(X + 1) P(X)?
- 3. Existe-t-il des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré trois qui vérifient :

$$P(X+1) - P(X) = X^2 - 1$$
 et  $P(0) = 1$ 

(Indication : On pourra dériver le polynôme *P* dans l'équation ci-dessus.)

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit *n* un entier strictement positif.

- 1. Déterminer le pgcd des polynômes  $X^n 1$  et  $(X 1)^n$ .
- 2. Pour n = 3 démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Donnez-en un.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

1. Déterminer le *PGCD* et une identité de Bézout des polynômes *P* et *Q*.

$$P = (X^{2} - 3X + 2)(X^{2} + 1) = X^{4} - 3X^{3} + 3X^{2} - 3X + 2$$

$$Q = (X^{2} + 3X + 2)(X^{2} + 1) = X^{4} + 3X^{3} + 3X^{2} + 3X + 2$$

2. Factoriser *P* et *Q*.

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit

$$(X+1)^2A + (X-1)^2B = 1$$
 (E)

- 1. Trouver une solution particulière  $A_0, B_0 \in \mathbb{R}[X]$  de (E).
- 2. En déduire toutes les solutions de (E).
- 3. Déterminer tous les polynômes P tels que P-1 soit un multiple de  $(X+1)^2$  et que P+1 soit un multiple de  $(X-1)^2$ .

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soient P et Q deux polynômes définis par :

$$P(X) = X^6 - X^4 - X^2 + 1$$
 et  $Q(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$ 

Déterminer le PGCD de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité.

Exercice 37.

Quels sont les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que P' divise P.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soit 
$$P(X) = 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X + 2$$

On pose 
$$Y = X + \frac{1}{x}$$

- 1. Montrer qu'il existe un polynôme Q, de degré 2 tel que  $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$ .
- 2. Calculer les racines de Q.
- 3. En déduire les racines de P, puis la factorisatistion de P dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , on suppose que  $\sin(n\theta) \neq 0$ .

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^{k}$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle dans  $\mathbb{R}(X)$ :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

Allez à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X - 1)(X^2 - 1)}$$

Allez à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

- 1. Dans  $\mathbb{R}(X)$
- 2. Dans  $\mathbb{C}(X)$

Allez à : Correction exercice 42

Exercice 43.

Soit

$$F = \frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

Décomposer F en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ , dans  $\mathbb{C}(X)$ .

Exercice 44.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$F = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^{2010}}$$

Allez à : Correction exercice 44

Exercice 45.

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples.

$$F = \frac{X^8 + X + 1}{X^4 (X - 1)^3}$$

Allez à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Décomposer la fraction suivante en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

$$F = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 46

Exercice 47.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans  $\mathbb{R}(X)$  et dans  $\mathbb{C}(X)$ 

$$G = \frac{X^5}{(X^4 - 1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 47

Exercice 48.

- 1. Soit  $F = \frac{P}{Q}$ . Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une racine simple de Q, montrer que le coefficient de l'élément simple  $\frac{1}{X-\alpha}$  est  $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ .
- 2. Décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction

$$F = \frac{X}{X^n - 1}$$

Allez à : Correction exercice 48

Exercice 49.

On considère le polynôme  $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1$ 

- 1. Factoriser *P* dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$
- 2. Décomposer la fraction  $\frac{X+1}{P}$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$

Allez à : Correction exercice 49

## **CORRECTIONS**

Correction exercice 1.

Dans 
$$\mathbb{R}[X]$$
  
 $P = -(X^8 - 2X^4 + 1) = -(X^4 - 1)^2 = -(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2 = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2$   
Dans  $\mathbb{C}[X]$ 

$$P = -(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$$

Correction exercice 2.

Première méthode

 $P(X) = 1 - X^8 = (1 - X^4)(1 + X^4)$ ,  $(1 - X^4)$  se décompose facilement en (1 - X)(1 + X)(i - X)(i + X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i), mais pour décomposer  $1 + X^4$ , c'est beaucoup plus délicat, il faut utiliser une bonne ruse, allons-y

$$1 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4 - 2X^2 = (1 + X^2)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (1 + X^2 - \sqrt{2}X)(1 + X^2 + \sqrt{2}X)$$

 $1 + X^2 - \sqrt{2}X = X^2 - \sqrt{2}X + 1$  et  $1 + X^2 + \sqrt{2}X = X^2 + \sqrt{2}X + 1$  sont deux polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  car leur discriminant sont négatifs. Donc la décomposition de P(X) dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P(X) = -(X-1)(1+X)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

Pour la décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  il suffit de trouver les racines complexes de  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$  et  $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ 

Le discriminant de  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$  est  $\Delta_1 = (-\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ , ses racines sont  $X_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$  et  $X_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Le discriminant de  $X^2 + \sqrt{2}X + 1$  est  $\Delta_1 = (\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ , ses racines sont  $X_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$  et  $X_4 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$ .

$$P(X) = -(X-1)(1+X)(X-i)(X+i)\left(X - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de  $1 - X^8 = 0$ 

$$X^8 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}} \text{ avec } k \in \{0,1;2,3,4,5,6,7\}$$

Ce qui donne  $X_0=1,\ X_1=e^{\frac{i\pi}{4}},\ X_2=e^{\frac{i\pi}{2}}=i,\ X_3=e^{\frac{3i\pi}{4}},\ X_4=e^{i\pi}=-1,\ X_5=e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}},\ X_6=e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i,\ X_7=e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$ 

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P(X) = -(X - 1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Pour la décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$ , on regroupe les conjugués

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^{2} + 1)\left(X^{2} - \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X^{2} - \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}} + e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-3i\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= -(X - 1)(X + 1)(X^{2} + 1)\left(X^{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^{2} - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right)$$

$$= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^{2})\left(X^{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right)\left(X^{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right)$$

$$= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^{2})(X^{2} - \sqrt{2}X + 1)(X^{2} + \sqrt{2}X + 1)$$

Dans  $\mathbb{Q}[X]$  on regroupe les deux derniers polynômes

$$P(X) = -(X - 1)(X + 1)(1 + X^{2})(X^{2} + 1 - \sqrt{2}X)(X^{2} + 1 + \sqrt{2}X)$$

$$= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^{2})((X^{2} + 1)^{2} - (\sqrt{2}X)^{2})$$

$$= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^{2})(X^{4} + 1)$$

Correction exercice 3.

1.

$$1+j=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=-j^2$$

Ou mieux

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

Car 
$$j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

2.  $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6 j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12} j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$   $P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$   $P'(j) = 7((j+1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1-1) = 0$ 

Donc *j* est au moins racine double.

- 3.  $P(0) = (0+1)^7 0^7 1 = 1^7 1 = 0$  et  $P(-1) = (-1+1)^7 (-1)^7 1 = 0 (-1) 1 = 0$ Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.
- 4. Le début de la formule du binôme de (X + 1)<sup>7</sup> est X<sup>7</sup> + 7X<sup>6</sup> (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.
  D'autre part, j est racine double (au moins) donc j̄ = j² est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et −1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme d°P = 6 on a toutes les racines. La factorisation dans C[X] est :

$$P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$ :

$$(X-j)(X-\overline{j}) = (X-j)(X-j^2) = X^2 - (j+j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1$$

Donc

$$P = 7X(X+1)\left((X-j)(X-\overline{j})\right)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$P(X) = 1 + X + X^{2} + X^{3} + X^{4} + X^{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - X^{6}}{1 - X} = 0 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - X^{6} = 0 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^{6} = 1 \\ X \neq 1 \end{cases}$$

Or  $X^6=1 \Leftrightarrow X_k=e^{\frac{2ik\pi}{6}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}$  avec  $k \in \{0,1;2,3,4,5\}$ 

Ce qui donne  $X_0 = 1$ ,  $X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\overline{j} = -j^2$ ,  $X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ ,  $X_3 = e^{i\pi} = -1$ ,  $X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$ ,  $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -j$ Les 5 racines de P sont  $X_1 = -j^2$ ,  $X_2 = j$ ,  $X_3 = -1$ ,  $X_4 = j^2$  et  $X_5 = -j$ .

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P(X) = 1 \times (X + j^2)(X - j)(X + 1)(X - j^2)(X + j) = (X + j^2)(X - j)(X + 1)(X - j^2)(X + j)$$

La décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P(X) = (X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j^2)(X+j) = (X+1)(X^2-(j+j^2)X+j^3)(X^2+(j+j^2)X+j^3)$$
$$= (X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$$P = 1 + X + X^{2} + X^{3} + X^{4} + X^{5} + X^{6} + X^{7} = \frac{1 - X^{8}}{1 - X}$$

Pour  $X \neq 1$ 

Les racines de P vérifient  $\begin{cases} X^8 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, & k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{ik\pi}{4}}, & k \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \end{cases}$   $X_k = e^{\frac{i\pi}{4}}, X_k = e^{\frac{i\pi}{4$ 

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2. On rappelle que

Donc

$$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta) + 1$$

$$P = (X + 1)(X - i)(X + i)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

$$= (X + 1)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right)$$

$$= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

3.

$$P = (X+1)(X^2+1)(X^2+1-\sqrt{2}X)(X^2+1+\sqrt{2}X) = (X+1)(X^2+1)((X^2+1)^2-(\sqrt{2}X)^2)$$
$$= (X+1)(X^2+1)(X^4+2X^2+1-2X^2) = (X+1)(X^2+1)(X^4+1)$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$P(X) = 1 + \left(\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^3 + \left(\frac{X}{2}\right)^4 + \left(\frac{X}{2}\right)^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6}{1 - \frac{X}{2}} = 0 \\ \frac{X}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \end{cases}$$

Or 
$$\left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = 2e^{\frac{2ik\pi}{6}} = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$$
 avec  $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$  donc  $X_k = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$ 

Ce qui donne 
$$X_0 = 2$$
,  $X_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = -2\overline{j} = -2j^2$ ,  $X_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j$ ,  $X_3 = 2e^{i\pi} = -2$ ,  $X_4 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2j^2$ ,  $X_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = -2j$ 

Les 5 racines de P sont  $X_1 = -2j^2$ ,  $X_2 = 2j$ ,  $X_3 = -2$ ,  $X_4 = 2j^2$  et  $X_5 = -2j$ . On a enlevé X = 2. La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P(X) = \frac{1}{32} \times (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j)$$
$$= (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j)$$

La décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P(X) = \frac{1}{32}(X+2)(X-2j)(X-2j^2)(X+2j^2)(X+2j)$$

$$= \frac{1}{32}(X+2)(X^2-2(j+j^2)X+4j^3)(X^2+2(j+j^2)X+4j^3)$$

$$= \frac{1}{32}(X+1)(X^2+2X+4)(X^2-2X+4)$$

Correction exercice 7.

1.

$$P = 1 + (-X) + (-X)^{2} + (-X)^{3} + (-X)^{4} = \frac{1 - (-X)^{5}}{1 - (-X)} = \frac{1 + X^{5}}{1 + X}$$

Pour  $X \neq -1$ 

Les racines vérifient

$$\begin{cases} X^{5} = -1 \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |X^{5}| = |-1| \\ \arg(X^{5}) = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \arg(X) = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ X \neq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ |X| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ |X| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ |X| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = \frac{2k+1}{5}i\pi, \ k \in \{0,1,2,3,4\} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, \ X \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi$$

On élimine  $X_3 = -1$ 

2. Dans  $\mathbb{C}[X]$ 

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$ 

$$P = \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. 
$$P = X^2(-X+1) + (-X+1) = -(X-1)(X^2+1)$$
 dans  $\mathbb{R}[X]$   
 $P = -(X-1)(X-i)(X+i)$  dans  $\mathbb{C}[X]$ 

2. Si  $X \neq -1$ .

$$P = \sum_{k=0}^{2n-1} (-X)^k = \frac{1 - (-X)^{(n+1)}}{1 - (-X)} = \frac{1 - (-X)^{n+1}}{1 + X}$$

Les racines de P vérifie  $X^{(n+1)} = 1$  et  $X \neq -1$ .

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-X)^{n+1} = 1 \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -X = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \end{cases} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{1, \dots, n\}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$P(j) = j^{6} + 2j^{5} + 4j^{4} + 4j^{3} + 4j^{2} + 2j + 1 = 1 + 2j^{2} + 4j + 4 + 4j^{2} + 2j + 1 = 6j^{2} + 6j + 6$$

$$= 6(j^{2} + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^{5} + 10X^{4} + 16X^{3} + 12X^{2} + 8X + 2$$

$$P'(j) = 6j^{5} + 10j^{4} + 16j^{3} + 12j^{2} + 8j + 2 = 6j^{2} + 10j + 16 + 12j^{2} + 8j + 2 = 18j^{2} + 18j + 18$$

$$= 18(j^{2} + j + 1) = 0$$

Donc j est racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels,  $\bar{j}$  est aussi racine double. On peut essayer de voir si j ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on a l'intuition de voir que i est racine (et que donc -i est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser P par

$$(X - j)^{2} (X - \overline{j})^{2} = ((X - j)(X - \overline{j}))^{2} = (X^{2} + X + 1)^{2} = X^{4} + X^{2} + 1 + 2X^{3} + 2X^{2} + 2X$$

$$= X^{4} + 2X^{3} + 3X^{2} + 2X + 1$$

$$X^{6} + 2X^{5} + 4X^{4} + 4X^{3} + 4X^{2} + 2X + 1$$

$$X^{6} + 2X^{5} + 3X^{4} + 2X^{3} + X^{2}$$

$$X^{4} + 2X^{3} + 3X^{2} + 2X + 1$$

$$X^{4} + 2X^{3} + 3X^{2} + 2X + 1$$

$$X^{4} + 2X^{3} + 3X^{2} + 2X + 1$$

$$0$$

$$P = (X - j)^2 \left(X - \overline{j}\right)^2 (X - i)(X + i)$$

3.

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 + 1)$$

#### Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

$$P(j) = j^8 + 2X^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3j^2 + 3j + 3 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$
  
  $j$  est une racine de  $P$ 

$$P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$$

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12j^2 + 12j + 12 = 12(j^2 + j + 1) = 0$$
*j* est racine au moins double, *j* est donc une racine multiple.

2. Comme P est pair, -j est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc  $\overline{j} = j^2$  est racine double et  $\overline{-j} = -j^2$  est aussi racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ 

$$P = (X - j)^{2}(X - j^{2})^{2}(X + j)^{2}(X + j^{2})^{2}$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$ 

$$P = [(X - j)(X - j^{2})]^{2}[(X + j)(X + j^{2})]^{2} = [X^{2} + X + 1]^{2}[X^{2} - X + 1]^{2}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$P(j) = 2j^{3} + 3j^{2} + 6j + 1 + 3j = 2 + 3j^{2} + 6j + 1 - 3j = 3j^{2} + 3j + 3 = 3(j^{2} + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^{2} + 6X + 6$$

$$P'(i) = 6i^{2} + 6i + 6 = 6(i^{2} + i + 1) = 0$$

Donc *j* est une racine double de *P*.

2. La somme des racines de P est  $-\frac{3}{2}$ , si on appelle  $\alpha$  la troisième racine on a

$$\alpha + 2j = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2} - 2j = -\frac{3}{2} - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$$

Donc

$$P = 2(X - j)^{2} \left(X + \frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right)$$

Correction exercice 12.

1.

$$(X+1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X}\right)^6 = 1$$

Il est clair que 0 n'est pas racine. Mais attention  $(X + 1)^6 - X^6$  est un polynôme de degré 5

$$(X+1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X}\right)^6 = 1$$
  
 $\frac{X+1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ 

La racine « en trop » est celle qui aurait vérifié  $\frac{X+1}{X} = 1$  qui n'a pas de solution, on enlève donc k = 0.

$$1 + \frac{1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow X = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1}, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)}, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Les cinq racines sont

$$X_{k} = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

2. Pour que *P* admette une racine multiple réelle (donc au moins double), *P* et *P'* ont une racine réelle commune.

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

Les racines réelles et complexes de P' vérifient  $(X + 1)^6 - X^6 = 0$ 

On cherche les racines réelles donc  $\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$  ce qui équivaut à k = 0 (mais on a éliminé ce cas) et k = 3

$$X_3 = \frac{\cos(\pi) - 1}{2 - 2\cos(\pi)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

P ademt une racine double si et seulement si  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ .

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \times \frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^6}$$

Et alors

$$P = (X+1)^7 - X^7 - \frac{1}{2^6}$$

#### Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

- 1. La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.
- 2. Les limites de la fonction polynômiale définie par  $B(x) = x^3 + 3x + 1$  en  $-\infty$  vaut  $-\infty$  et en  $+\infty$  vaut  $+\infty$ , cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraine qu'il existe  $x_0$  tel que  $B(x_0) = 0$ . B admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

 $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$  est factorisable par  $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$  si et seulement si -1, 1 et 3 sont racines de P.

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^5 - 2 \times (-1)^4 - 6 \times (-1)^3 + a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 0 \\ P(1) = 1^5 - 2 \times 1^4 - 6 \times 1^3 + a \times 1^2 + b + c = 0 \\ P(3) = 3^5 - 2 \times 3^4 - 6 \times 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 + 6 + a - b + c = 0 \\ 1 - 2 - 6 + a + b + c = 0 \\ 3^4(3 - 2 - 2) + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 \begin{cases} a - b + c = -3 \\ a + b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 81 \end{cases}$$

 $L_2 - L_1$  entraine que 2b = 10 donc b = 5

Et  $L_2 + L_1$  entraine que 2a + 2c = 4 donc  $a + c = 2 : L'_1$ 

On remplace b = 5 dans  $L_3 : 9a + 15 + c = 81$  donc  $9a + c = 66 : L_2'$ 

 $L'_2 - L'_1$  entraine que 8a = 64 donc a = 8 et donc c = 2 - 8 = -6

Finalement  $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$ 

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

 $A_n$  est divisible par B si et seulement si les racines de B sont aussi des racines de  $A_n$ .

Le discriminant de  $X^2 - X + 1$  est  $\Delta = 1 - 4 = -3$  donc les deux racines de B sont :

$$X_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$
$$X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$

Remarque :  $X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow (-X)^2 + (-X) + 1 = 0$ 

Donc les racines du polynôme B vérifient

$$-X = j \quad \text{ou} \quad -X = j^2$$

$$A_n(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^n (j^2)^2 + (-j)^{2n} (-j) = j^{2n} j^4 - j^{2n} j = 0$$

Comme  $A_n$  est un polynôme à coefficients réels,  $-\bar{j} = -j^2$  est aussi racine.

On conclut que  $X^2 - X + 1$  divisise  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ .

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

Si 
$$n = 6p$$
  

$$P_{6p}(j) = j^{12p} - j^{6p} - 1 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$$
Si  $n = 6p + 1$   

$$P_{6p+1}(j) = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$
Si  $n = 6p + 2$   

$$P_{6p+2}(j) = j^{12p+4} - j^{6p+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$
Si  $n = 6p + 3$   

$$P_{6p+3}(j) = -j^{12p+6} - j^{6p+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$
Si  $n = 6p + 4$   

$$P_{6p+4}(j) = j^{12p+8} - j^{6p+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$
Si  $n = 6p + 5$   

$$P_{6p+5}(j) = -j^{12p+10} - j^{6p+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

Il existe  $A, R \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$X^{n} + X + 1 = A(X - 1)^{2} + R$$
 (\*)

Avec  $d^{\circ}R < 2$  donc il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que R = aX + b, ce qui entraine que R' = a

Prenons X = 1

$$3 = R(1) = a + b$$

On dérive (\*)

$$nX^{n-1} + 1 = A'(X-1)^2 + A(X-1) + R'$$

On prend X = 1

$$n + 1 = a$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n + 1) = 2 - n$$

Et finalement

$$R = (n+1)X + 2 - n$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

$$(X+1)^n = (X^2+1)Q + R$$

Or  $d^{\circ}R < 2$  et donc R = aX + b.

On pose X = i.

$$(i+1)^n = ai + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^n = b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{ni\pi}{4}}$$
$$= b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Donc

$$R = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X + \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes, avec  $d^{\circ}R < 2$  tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2Q + R$$

Il existe a et b réels tels que R = aX + b

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + aX + b$$
 (\*)

On pose X = 1

$$2^n = a + b$$

On dérive (\*)

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + a$$

On pose X = 1

$$n2^{n-1} = a$$

Donc  $b = 2^n - n2^{n-1}$ 

**Finalement** 

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Il existe  $Q_n$  et  $R_n$  tels que :

$$A_n = BQ_n + R_n \Leftrightarrow X^n + X + b = (X - a)^2 Q_n + R_n$$

Avec  $d^{\circ}R_n < 2$ . Donc il existe  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que :

$$X^{n} + X + b = (X - a)^{2}Q_{n} + \alpha_{n}X + \beta_{n}$$
 (1)

En dérivant on trouve

$$nX^{n-1} + 1 = (X - a)[2Q_n + (X - a)^2 Q_n'] + \alpha_n$$
 (2)

On fait X = a dans (1) et dans (2).

$$\begin{cases} a^{n} + a + b = \alpha_{n}a + \beta_{n} \\ na^{n-1} + 1 = \alpha_{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{n} = na^{n} + 1 \\ \beta_{n} = a^{n} + a + b - (na^{n-1} + 1)a = -(n-1)a^{n} + b \end{cases}$$

Donc

$$R_n = (na^n + 1)X - (n - 1)a^n + b$$

## Allez à : Exercice 20

#### Correction exercice 21.

Il existe Q et R tels que A = BQ + R et  $d^{\circ}R < d^{\circ}B = 2$  donc degré de R est inférieur ou égal à 1 on a alors R = aX + b où a et b sont des réels.

$$A(i) = B(i)Q(i) + R(i) \Leftrightarrow i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \operatorname{car} B(i) = i^2 + 1 = 0$$

$$\operatorname{Si} n = 2p i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \Leftrightarrow i^{4p} + 2i^{2p} + 1 = ai + b \Leftrightarrow 1 + 2(-1)^p + 1 = ai + b \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 + 2(-1)^p \end{cases}$$

$$\operatorname{Donc} R = 2 + 2(-1)^p$$

$$\operatorname{Si} n = 2p + 1$$

$$i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \Leftrightarrow i^{4p+2} + 2i^{2p+1} + 1 = ai + b \Leftrightarrow -1 + 2(-1)^p i + 1 = ai + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(-1)^p \\ b = 0 \end{cases}$$

 $Donc R = 2(-1)^p X$ 

## Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

- 1. Les quatre racines de  $X^4 1 = 0$ , c'est-à-dire  $\{1, i, -1, -i\}$  vérifie  $X^4 = 1$  donc  $(X^4)^n 1 = 1^n 1 = 0$  donc ces racines sont des racines de  $X^{4n} 1$ , on peut mettre  $X^4 1$  en facteur dans ce polynôme.
- 2.

#### Première méthode:

D'après la première question il existe  $Q_a$ ,  $Q_b$ ,  $Q_c$  et  $Q_d$  tels que :

$$\begin{split} X^{4a} - 1 &= Q_a(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4a} = Q_a(X^4 - 1) + 1 \\ X^{4b} - 1 &= Q_b(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4b} = Q_b(X^4 - 1) + 1 \\ X^{4c} - 1 &= Q_c(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4c} = Q_c(X^4 - 1) + 1 \\ X^{4d} - 1 &= Q_d(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4d} = Q_d(X^4 - 1) + 1 \end{split}$$

Donc

$$\begin{split} P &= X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^{4a}X^3 + X^{4b}X^2 + X^{4c}X + X^{4d} \\ &= (Q_a(X^4-1)+1)X^3 + (Q_b(X^4-1)+1)X^2 + (Q_c(X^4-1)+1)X + Q_d(X^4-1) \\ &+ 1 = (X^4-1)[Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d] + X^3 + X^2 + X + 1 \\ &= (X-1)(X^3 + X^2 + X + 1)[Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d] + X^3 + X^2 + X + 1 \\ &= (X^3 + X^2 + X + 1)((X-1)(Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d) + 1) \end{split}$$

Deuxième méthode :  $X^{4n} - 1 \equiv 0 \ [X^4 - 1] \Leftrightarrow X^{4n} \equiv 1 \ [X^4 - 1]$ 

Donc

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^{4a}X^3 + X^{4b}X^2 + X^{4c}X + X^{4d}$$
  

$$\equiv 1 \times X^3 + 1 \times X^2 + 1 \times X + 1 \ [X^4 - 1] \equiv X^3 + X^2 + X + 1 \ [X^4 - 1]$$

Donc il existe Q tel que

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = (X^4 - 1)Q + X^3 + X^2 + X + 1$$
$$= (X^3 + X^2 + X + 1)((X - 1)Q + 1)$$

Correction exercice 23.

1. On rappelle que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ,  $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$  et  $\alpha\beta\gamma = -q$ 

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

Donc

$$A = 0^2 - 2p = -2p$$

2.  $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$  entraine que  $\alpha^3 = -p\alpha - q$ , idem pour  $\beta$  et  $\gamma$ .

$$B = -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q = -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q = -3q$$

3.

$$C = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma) = \alpha\beta(-\gamma) + \alpha\gamma(-\beta) + \beta\gamma(-\alpha) = -3\alpha\beta\gamma = 3q$$

4.

$$D = \alpha^{3}\beta + \alpha\beta^{3} + \alpha^{3}\gamma + \alpha\gamma^{3} + \beta^{3}\gamma + \beta\gamma^{3} = \alpha\beta(\alpha^{2} + \beta^{2}) + \alpha\gamma(\alpha^{2} + \gamma^{2}) + \beta\gamma(\beta^{2} + \gamma^{2})$$

$$= \alpha\beta(-2p - \gamma^{2}) + \alpha\gamma(-2p - \beta^{2}) + \beta\gamma(-2p - \alpha^{2})$$

$$= -2p(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma^{2} - \alpha\beta^{2}\gamma - \alpha^{2}\beta\gamma = -2p^{2} - \alpha\beta\gamma(\gamma + \beta + \alpha)$$

$$= -2p^{2} - (\alpha) \times 0 = -2p^{2}$$

#### Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. 
$$0 \times P(-1) = (0-2)P(0) \Leftrightarrow 0 = -2P(0) \Leftrightarrow P(0) = 0$$
  
 $1 \times P(0) = (1-2)P(1) \Leftrightarrow P(0) = -P(1) \Leftrightarrow 0 = P(1)$ 

Donc 0 et 1 sont des racines de *P*.

2. Soit  $a \neq 0$  tel que P(a) = 0.  $aP(a-1) = (a-2)P(a) \Leftrightarrow aP(a-1) = 0 \Leftrightarrow P(a-1) = 0$  a-1 est une racine de P.

Soit  $a \neq 1$  tel que P(a) = 0.

$$(a+1)P(a+1-1) = (a+1-2)P(a+1) \Leftrightarrow (a+1)P(a) = (a-1)P(a+1) \Leftrightarrow 0$$
  
=  $(a-1)P(a+1)$ 

Donc P(a + 1) = 0, a + 1 est une racine de P.

3. Supposons que P admette une racine a telle que  $\Re(a) < 1$  différente de 0 alors a-1 est racine, a-1 est différent de 0, donc a-2 est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , a-k est racine de P, ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.

Supposons que P admette une racine a telle que  $\Re(a) > 1$  différente de 1 alors a+1 est racine, a+1 est différent de 1, donc a+2 est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , a+k est racine de P, ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.

0 et 1 sont les deux seules racines de *P* si *P* n'est pas le polynôme nul.

- 4. Si *P* n'est pas le polynôme nul, comme 0 et 1 sont les seules racines de *P* il existe  $\alpha \neq 0$  tels que  $P = \alpha X^k (X 1)^l$ , et si P = 0 alors  $P = 0 \times X^k (X 1)^l$  (c'est-à-dire que  $\alpha = 0$ ).
- 5. Si P vérifie XP(X-1) = (X-2)P(X) alors P est de la forme  $P = \alpha X^k (X-1)^l$ , il faut étudier la réciproque, c'est-à-dire chercher parmi ces polynômes lesquels sont effectivement solution.

On remplace  $P = \alpha X^k (X - 1)^l$  dans XP(X - 1) = (X - 2)P(X), on trouve que :

$$X\alpha(X-1)^k(X-2)^l = (X-2)\alpha X^k(X-1)^l$$

Les puissances en X - 2 sont les mêmes donc l = 1.

Les puissances en X-1 sont les mêmes donc k=l=1

On vérifie qu'alors les puissances en X sont les mêmes, finalement

$$P = \alpha X(X - 1)$$

Correction exercice 25.

$$1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + X + X^2)(1 - 3X + X^2) + X^3(2 - X)$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1.

$$\begin{array}{c|cccc}
X^3 - X^2 - X - 2 & X^3 - 1 \\
X^3 & -1 & 1 \\
\hline
-X^2 - X - 1 & 1
\end{array}$$

$$X^3 - X^2 - X - 2 = (X^3 - 1) \times 1 + (-X^2 - X - 1)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
X^3 & -1 & X^2 + X + 1 \\
X^3 + X^2 + X & X - 1 \\
-X^2 - X - 1 & & & \\
\hline
-X^2 - X - 1 & & & \\
\hline
0 & & & & \\
\end{array}$$

$$X^{3} - 1 = (X^{2} + X + 1)(X - 1)$$

$$PGCD(P, Q) = \frac{-X^{2} - X - 1}{-1} = X^{2} + X + 1$$

2.  $X^2 + X + 1$  est un diviseur de P (et de Q bien sur) donc on peut mettre  $X^2 + X + 1$  en facteur dans P.

$$\begin{array}{c|ccccc}
X^3 - X^2 & -X - 2 & X^2 + X + 1 \\
X^3 + X^2 & + X & X - 2 \\
\hline
-2X^2 - 2X - 2 & \\
-2X^2 - 2X - 2 & \\
\hline
0 & & & \\
\end{array}$$

Comme  $X^2 + X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , la factorisation de P est :

$$P = (X-2)(X^2 + X + 1)$$

Et il est évident d'après la deuxième division de l'algorithme d'Euclidienne

$$Q = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

3. Il est alors clair que

$$PGCD(P,Q) = X^2 + X + 1$$

4. Les deux racines complexes de  $X^2 + X + 1$  sont  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $\overline{j} = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ Donc

$$P = (X - 2)(X - j)(X - j^{2})$$

Correction exercice 27.

On peut « éliminer » le -4 dans  $-4X^3 + 4$ 

$$\begin{array}{c|cccc}
X^4 + 2X^3 & -X - 2 & X^3 - 1 \\
X^4 & -X & X + 2 \\
\hline
2X^3 & -2 & \\
2X^3 & -2 & \\
\hline
0 & & & \\
\end{array}$$

Donc le PGCD de P et Q est

$$D = \frac{-4X^3 + 4}{-4} = X^3 - 1$$

Les racines communes de P et Q sont celles de  $X^3 - 1$ , c'est-à-dire 1, j et  $j^2$ .

#### Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

$$\begin{array}{c|ccccc}
X^4 + 3X^3 + 3X^2 & -2 & 2X^3 + 2X^2 - 4 \\
X^4 + X^3 & -2X & \frac{1}{2}X + 1 \\
\hline
2X^3 + 3X^2 + 2X - 2 & \\
2X^3 + 2X^2 & -4 & \\
\hline
X^2 + 2X + 2 & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
2X^3 + 2X^2 & -4 & X^2 + 2X + 2 \\
2X^3 + 4X^2 + 4X & 2X \\
\hline
-2X^2 - 4X - 4 & \\
-2X^2 - 4X - 4 & \\
\hline
0 & & & \\
\end{array}$$

Le P.G.C.D. est le dernier reste non nul unitaire donc  $X^2 + 2X + 2$ 

A et B sont divisible par  $X^2 + 2X + 2$  (qui n'a pas de racine réelle)

Donc

$$A = (X^2 + 2X + 2)(X^3 - 1)$$

Comme  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  et que  $X^2 + X + 1$  n'a pas de racine réelle, la factorisation de A dans  $\mathbb{R}[X]$  est

$$A = (X - 1)(X^2 + 2X + 2)(X^2 + X + 1)$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 X^4 + 3X^3 + 3X^2 & -2 & X^2 + 2X + 2 \\
 X^4 + 2X^3 + 2X^2 & X^2 + X - 1 \\
 \hline
 X^3 + X^2 & -2 & X^2 + 2X \\
 -X^2 - 2X - 2 & -X^2 - 2X - 2 \\
 & 0
 \end{array}$$

Donc

$$B = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + X - 1)$$

 $X^2 + X - 1$  admet deux racines réelles

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$B = (X^2 + 2X + 2) \left( X + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$P = X^{2} - 2X + 1$$

$$X^{2} - 2X + 1$$

$$X^{2} + 1$$

$$X^{2} - 2X + 1 = 1 \times (X^{2} + 1) + (-2X)$$

$$X^{2} + 1$$

$$X^{2} + 1 = -2X \times \left(-\frac{1}{2}X\right) + 1$$

$$1 = (X^{2} + 1) + (-2X)\left(-\frac{1}{2}X\right) = (X^{2} + 1) + \left((X^{2} - 2X + 1) - 1 \times (X^{2} + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}X\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(1 + \frac{1}{2}X\right)(X^{2} + 1) + \left(-\frac{1}{2}X\right)(X - 1)^{2}$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1.

$$Q = (X-2)(2X^3 + 3X^2 - 3X - 2) + 6X^2 - 3X - 3$$
$$2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 \mid 6X^2 - 3X - 3$$

$$\frac{2X^{3} - X^{2} - X}{4X^{2} - 2X - 2} = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$$

$$6X^{2} - 3X - 3 = Q - (X - 2)(2X^{3} + 3X^{2} - 3X - 2) = Q - (X - 2)(P - Q)$$

$$= -(X - 2)P + (X - 1)Q$$

$$X^{2} - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}(X - 2)P + \frac{1}{6}(X - 1)Q$$

2. Les racines communes de P et Q sont celles de leur PGCD, c'est-à-dire celles de  $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$  soit  $X_1 = 1$  et  $X_2 = -\frac{1}{2}$ .

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. 
$$P' = 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$$

$$X^{5} + X^{4} + 2X^{3} + 2X^{2} + X + 1$$

$$X^{5} + \frac{4}{5}X^{4} + \frac{6}{5}X^{3} + \frac{4}{5}X^{2} + \frac{X}{5}$$

$$\frac{1}{5}X^{4} + \frac{4}{5}X^{3} + \frac{6}{5}X^{2} + \frac{4}{5}X + 1$$

$$\frac{1}{5}X^{4} + \frac{4}{25}X^{3} + \frac{6}{25}X^{2} + \frac{4}{25}X + \frac{1}{25}$$

$$\frac{16}{25}X^{3} + \frac{24}{25}X^{2} + \frac{16}{25}X + \frac{24}{25}$$

Pour éviter les fractions on remarque que  $\frac{16}{25}X^3 + \frac{24}{25}X^2 + \frac{16}{25}X + \frac{24}{25} = \frac{8}{25}(2X^3 + 3X^2 + 2X + 3)$ 

Pour éviter les fractions on remarque que  $\frac{25}{4}X^2 + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}(X^2 + 1)$ 

Le PGCD de P et P' est  $X^2 + 1$ .

- 2. Les racines communes à P et P' sont i et -i, les racines multiples de P sont i et -i. Ce sont au moins des racines doubles. Ce ne sont pas des racines triples car sinon P auraient 6 racines en comptant leurs multiplicités.
- 3. *P* est divisible par  $(X i)^2 (X + i)^2 = [(X i)(X + i)]^2 = [X^2 + 1]^2$ .
- 4. il reste à diviser P par  $(X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$  et on trouve, après calculs, X + 1, donc  $P = (X^2 + 1)^2(X + 1)$

Correction exercice 32.

1. Oui ! Par exemple  $P = X^3 + 1$ 

2. Si  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , avec  $a \ne 0$ , pour qu'il soit de degré exactement 3.

$$P(X+1) - P(X) = a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d$$

$$= a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d$$

$$= 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c$$

Le degré de ce polynôme est 2 puisque  $a \neq 0$ 

3.

$$\begin{cases}
P(X+1) - P(X) = X^2 - 1 \\
P(0) = 1
\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}
(3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a+b+c = X^2 - 1 \\
P(0) = 1
\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}
L_1 \\
L_2 \\
L_3 \\
L_4
\end{cases} \begin{cases}
3a = 1 \\
3a+2b = 0 \\
a+b+c = -1
\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}
a = \frac{1}{3} \\
2b = -3a = -1 \\
c = -1-a-b \\
d = 1
\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}
a = \frac{1}{3} \\
b = -\frac{1}{2} \\
c = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \\
d = 1
\end{cases}$$

$$P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{6}X + 1$$

## Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1.  $(X-1)^n$  n'a qu'une racine X=1, or 1 est racine simple de  $X^n-1$  donc

$$PGCD((X^n-1),(X-1)^n) = X-1$$

2. D'après le théorème de Bézout il existe (U, V) tels que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Cette équation équivaut à :

$$(X^2 + X + 1)U + (X^2 - 2X + 1) = 1$$
Car  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  et  $(X - 1)^3 = (X - 1)(X^2 - 2X + 1)$ 

$$X^2 - 2X + 1$$
  $X^2 + X + 1$   $1$   $-3X$ 

Donc

$$X^2 - 2X + 1 = 1 \times (X^2 + X + 1) + (-3X)$$

Donc

$$X^{2} + X + 1 = (-3X)\left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right) + 1$$

On en tire que:

$$1 = (X^{2} + X + 1) - (-3X)\left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)$$

$$= X^{2} + X + 1 - \left((X^{2} - 2X + 1) - 1 \times (X^{2} + X + 1)\right)\left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)(X^{2} - 2X + 1) + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)\right)(X^{2} + X + 1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)(X^{2} - 2X + 1) + \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right)(X^{2} + X + 1)$$

Donc

$$U = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$$

Et

$$V = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$$

## Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1.

$$X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2 = (X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2) \times 1 + (-6X^3 - 6)$$

$$X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (-6X^3 - 6X)\left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2}\right) + 2X^2 + 2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
-6X^3 - 6X & 2X^2 + 2 \\
-6X^3 - 6X & -\frac{1}{3}X \\
\hline
0 & & & \\
\end{array}$$

$$-6X^3 - 6X = (2X^2 + 2)\left(-\frac{1}{3}X\right)$$

Donc

$$PGCD(X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2, X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) = \frac{2X^2 + 2}{2} = X^2 + 1$$

On trouve une identité de Bézout de la façon suivante :

$$2X^{2} + 2 = X^{4} + 3X^{3} + 3X^{2} + 3X + 2 + (-6X^{3} - 6X)\left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2}\right)$$

$$= X^{4} + 3X^{3} + 3X^{2} + 3X + 2$$

$$- (X^{4} - 3X^{3} + 2X^{2} - 3X + 2 - (X^{4} + 3X^{3} + 2X^{2} + 3X + 2) \times 1)\left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (X^{4} + 3X^{3} + 3X^{2} + 3X + 2)\left(1 - \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+ (X^{4} - 3X^{3} + 2X^{2} - 3X + 2)\left(\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (X^{4} + 3X^{3} + 3X^{2} + 3X + 2)\left(\frac{1}{6}X + \frac{3}{2}\right)$$

$$+ (X^{4} - 3X^{3} + 2X^{2} - 3X + 2)\left(\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}\right)$$

Puis il reste à diviser par 2

$$X^{2} + 1 = (X^{4} + 3X^{3} + 3X^{2} + 3X + 2)\left(\frac{1}{12}X + \frac{3}{4}\right) + (X^{4} - 3X^{3} + 2X^{2} - 3X + 2)\left(\frac{1}{12}X + \frac{1}{4}\right)$$

2. En divisant P par  $X^2 + 1$ , on trouve :

$$P = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser  $X^2 - 3X + 2$ , ce polynôme a deux racines réelles 1 et 2 donc

$$P = (X - 1)(X - 2)(X^2 + 1)$$

En divisant Q par  $X^2 + 1$ , on trouve :

$$Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser  $X^2 + 3X + 2$ , ce polynôme a deux racines réelles -1 et -2 donc

$$Q = (X + 1)(X + 2)(X^2 + 1)$$

## Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

1. Je vais juste écrire les résultats des divisions successives de l'algorithme d'Euclide

$$X^{2} + 2X + 1 = 1 \times (X^{2} - 2X + 1) + 4X$$
$$X^{2} - 2X + 1 = \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) \times 4X + 1$$

On en déduit une identité de Bézout

$$1 = (X - 1)^{2} - \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) \times 4X = (X - 1)^{2} - \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right)((X + 1)^{2} - 1 \times (X - 1)^{2})$$
$$= \left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X + 1)^{2} + \left(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X - 1)^{2}$$

On note

$$A_0 = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$$
 et  $B_0 = \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$ 

2. On a

$$\begin{cases} (X+1)^2 A + (X-1)^2 B = 1\\ (X+1)^2 A_0 + (X-1)^2 B_0 = 1 \end{cases}$$

En faisant la soustraction de ces deux équations

 $(X+1)^2(A-A_0)+(X-1)^2(B-B_0)=0 \Leftrightarrow (X+1)^2(A-A_0)=-(X-1)^2(B-B_0)$  $(X+1)^2$  divise  $-(X-1)^2(B-B_0)$  comme  $(X+1)^2$  et  $(X-1)^2$  sont premiers entre eux (ils n'ont aucune racine en commun), d'après le théorème de Gauss  $(X+1)^2$  divise  $-(B-B_0)$ , il existe  $U \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$-(B - B_0) = U(X + 1)^2 \Leftrightarrow B = B_0 - U(X + 1)^2$$

On remplace dans  $(X + 1)^2(A - A_0) = -(X - 1)^2(B - B_0)$ 

$$(X+1)^2(A-A_0) = (X-1)^2U(X+1)^2 \Leftrightarrow A-A_0 = (X-1)^2U \Leftrightarrow A=A_0+U(X-1)^2$$

L'ensemble des couples  $(A = A_0 + U(X - 1)^2, B_0 - U(X + 1)^2)$  avec  $U \in \mathbb{R}[X]$  quelconque sont les solutions de (E).

3. On cherche les polynômes P qui sont de la forme

$$\begin{cases}
P - 1 = (X + 1)^2 Q_1 \\
P + 1 = (X - 1)^2 Q_2
\end{cases}$$

Où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux polynômes.

En faisant la soustraction de ces deux égalités

$$2 = (X-1)^2 Q_2 - (X+1)^2 Q_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}Q_1\right)(X+1)^2 + \left(\frac{1}{2}Q_2\right)(X-1)^2 = 1$$

D'après la deuxième question, il existe  $U \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}Q_1 = A_0 + U(X-1)^2 \\ \frac{1}{2}Q_2 = B_0 - U(X+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = -2A_0 - 2U(X-1)^2 \\ Q_2 = 2B_0 - 2U(X+1)^2 \end{cases}$$

Ce qui entraine que

$$P - 1 = (X + 1)^{2}(-2A_{0} - 2U(X - 1)^{2}) \Leftrightarrow P = 1 - 2A_{0}(X + 1)^{2} - 2U(X + 1)^{2}(X - 1)^{2}$$

$$1 - 2A_{0}(X + 1) = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X + 1) = 1 + \left(\frac{1}{2}X - 1\right)(X^{2} + 2X + 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}X^{3} + X^{2} + \frac{1}{2}X - X^{2} - 2X - 1 = \frac{1}{2}X^{3} - \frac{3}{2}X$$

On pose aussi V = -2U. Par conséquent

$$P = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + V(X^2 - 1)^2, \quad V \in \mathbb{R}[X]$$

Il faut faire une réciproque

 $\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1$  admet -1 comme racine double (c'est facile à vérifier) et 2 comme racine simple.

$$P - 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1 + V(X^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(X + 1)^2(X - 2) + V(X + 1)^2(X - 1)^2$$
$$= (X + 1)^2 \left[\frac{1}{2}(X - 2) + V(X - 1)^2\right]$$

 $\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1$  admet 1 comme racine double (c'est facile à vérifier) et -2 comme racine simple.

$$P + 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1 + V(X^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(X - 1)^2(X + 2) + V(X + 1)^2(X - 1)^2$$
$$= (X - 1)^2 \left[\frac{1}{2}(X + 2) + V(X + 1)^2\right]$$

La réciproque est vérifiée

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

$$PGCD(P,Q) = PGCD(Q, -4X^3 - 4X^2 + 4X + 4) = PGCD(Q, X^3 + X^2 - X - 1)$$

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$$
  $X^3 + X^2 - X - 1$ 

Donc  $PGCD(P,Q) = X^3 + X^2 - X - 1 = X^2(X+1) - (X+1) = (X^2-1)(X+1) = (X-1)(X+1)^2$ Les racines complexes communes à P et Q sont 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

On pose  $d^{\circ}P = n$ .

P' divise P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

$$P = QP'$$
 
$$d^{\circ}P = n \text{ et } d^{\circ}P' = n-1 \Rightarrow d^{\circ}Q = 1$$

Donc Q admet une racine complexe  $\alpha$ .

On pose Q = aX + b et  $P = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0$  (avec  $a_n \neq 0$ ) alors  $P' = na_nX^{n-1} + \dots + a_1$ En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$a_n = na \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

Première méthode:

La formule de Taylor pour le polynôme P en  $\alpha$  donne

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X - \alpha)^k = a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_n (X - \alpha)^n$$

Donc

$$P' = \sum_{k=0}^{n} a_k k(X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k(X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k k(X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (X - \alpha)^k$$
$$= a_1 + 2a_2 (X - \alpha) + \dots + na_n (X - \alpha)^{n-1}$$

En changeant k en k + 1.

Comme Q est un polynôme de degré 1 dont  $\alpha$  est une racine donc  $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$ 

On remplace ces deux expressions dans P = QP'.

$$a_{0} + a_{1}(X - \alpha) + a_{2}(X - \alpha)^{2} + \dots + a_{n}(X - \alpha)^{n}$$

$$= a(X - \alpha)[a_{1} + 2a_{2}(X - \alpha) + \dots + na_{n}(X - \alpha)^{n-1}]$$

$$\Leftrightarrow a_{0} + a_{1}(X - \alpha) + a_{2}(X - \alpha)^{2} + \dots + a_{k}(X - \alpha)^{k} + \dots + a_{n}(X - \alpha)^{n}$$

$$= \frac{1}{n}a_{1}(X - \alpha) + \frac{2}{n}a_{2}(X - \alpha)^{2} + \dots + \frac{k}{n}a_{k}(X - \alpha)^{k} \dots + a_{n}(X - \alpha)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{0} = 0 \\ a_{1} = \frac{2}{n}a_{1} \\ \vdots \\ a_{k} = 0 \\ \vdots \\ a_{n} = a_{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{0} = 0 \\ a_{1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n} = a_{n} \end{cases}$$

Donc

$$P = a_n (X - \alpha)^n$$

Deuxième méthode:

En dérivant P = QP', et on rappelle que  $Q' = \frac{1}{n}$ 

$$P' = Q'P' + QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n}P' + QP'' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1}QP''$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1}Q^2P''$$

En dérivant  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP''$ 

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)P^{\prime\prime} = Q^{\prime}P^{\prime\prime} + QP^{\prime\prime\prime} = \frac{1}{n}P^{\prime\prime} + QP^{\prime\prime\prime} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right)P^{\prime\prime} = QP^{\prime\prime\prime} \Leftrightarrow P^{\prime\prime} = \frac{n}{n-2}QP^{\prime\prime\prime}$$

Donc

$$P = \frac{n}{n-1}Q^2P'' = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout  $k \in \{0,1,...,n-1\}$ . On montre par récurrence que

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)} Q^{k+1} P^{(k+1)}$$

On dérive  $\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$ 

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right) P^{(k+1)} = Q' P^{(k+1)} + Q P^{(k+2)} = \frac{1}{n} P^{(k+1)} + Q P^{(k+2)} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) P^{(k+1)} = Q P^{(k+2)} \\ \Leftrightarrow P^{(k+1)} = \frac{n}{n-k-1} Q P^{(k+2)}$$

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)} = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}\frac{n}{n-k-1}Q^{k+2}$$
$$= \frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))}Q^{k+2}P^{(k+2)}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout  $k \le n - 1$ .

On l'applique au rang n-1:

$$P = \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)...(n-(n-1))} Q^n P^{(n)}$$

 $P^{(n)} = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 \times a_n$  (ce qui est important c'est que c'est une constante).

Peu importe la constante, il est clair que  $P = KQ^n$ , comme Q est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P = \lambda (X - \alpha)^n$$

#### Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1.

$$\frac{P(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$

Comme

$$Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2} \Rightarrow X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2$$

On a

$$\frac{P(X)}{X^2} = 2\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 3\left(X + \frac{1}{X}\right) - 1 = 2(Y^2 - 2) + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5$$

Les racines de Q sont 1 et  $-\frac{5}{2}$ 

Donc les racines de P vérifient

$$\begin{cases} X + \frac{1}{X} = 1 \\ X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 = X \\ \text{ou} \\ X^2 + 1 = \frac{5}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - X + 1 = 0 \\ \text{ou} \\ X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0 \end{cases}$$

Les racines de  $X^2 - X + 1 = 0$  sont

$$-j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
 et  $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

Et celles de  $X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0$  sont

$$\frac{1}{2}$$
 et 2

On en déduit la factorisation de P dans  $\mathbb{R}[X]$ 

$$P(X) = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 2)(X^2 - X + 1)$$

Et dans  $\mathbb{C}[X]$ 

$$P(X) = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 2)(X + j)(X + j^2)$$

### Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

1. Comme  $\sin(n\theta) \neq 0$ ,  $d^{\circ}P = n$ .

$$P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} X^{k}$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta} X^{k} - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-ik\theta} X^{k} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( e^{i\theta} X \right)^{k} - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( e^{-i\theta} X \right)^{k}$$

$$= \frac{1}{2i} \left( 1 + e^{i\theta} X \right)^{n} - \frac{1}{2i} \left( 1 + e^{-i\theta} X \right)^{n}$$

Les racines  $z \in \mathbb{C}$  de P vérifient

$$\begin{split} \frac{1}{2i} \left(1 + e^{i\theta}z\right)^n - \frac{1}{2i} \left(1 + e^{-i\theta}z\right)^n &= 0 \Leftrightarrow \left(1 + e^{i\theta}z\right)^n = \left(1 + e^{-i\theta}z\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1 + e^{i\theta}z}{1 + e^{-i\theta}z}\right)^n = 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{1 + e^{i\theta}z}{1 + e^{-i\theta}z} &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 1 + e^{i\theta}z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \left(1 + e^{-i\theta}z\right) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, e^{i\theta}z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z \left(e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\right) &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \end{split}$$

Il faut quand même vérifier que  $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta} \neq 0$ 

$$e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, 2\theta = \frac{2k\pi}{n} + 2l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n}$$

Ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\}, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$$

Les n racines de P sont les complexes  $z_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$  avec  $k \in \{0,1,...,n-1\}$ 

$$\overline{z_k} = \frac{\overline{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}\right)} = \frac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta} - e^{i\theta}}$$
$$= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}} = z_k$$

Donc ces complexes sont des réels

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}$$

Je multiplie par X - 1 puis X = 1

$$a = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1$$

Je multiplie par X + 1 puis X = -1

$$b = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X^2 + 1)} \right]_{X = -1} = \frac{-6 + 3 - 5}{-2 \times 2} = 2$$

Je multiplie par *X*, puis *X* tend vers l'infini.

$$6 = a + b + c$$
, donc  $c = 6 - 1 - 2 = 3$ 

$$X = 0$$

$$5 = -5 + b + d$$
 donc  $d = 5 + 1 - 2 = 4$ 

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{X + 1} + \frac{3X + 4}{X^2 + 1}$$

Allez à : Exercice 40

Correction exercice 41.

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser  $X^4 - X + 2$  par  $(X - 1)(X^2 - 1) = X^3 - X^2 - X + 1$ 

$$\begin{array}{c|ccccc}
X^4 & -X+2 & X^3-X^2-X+1 \\
\hline
X^4-X^3-X^2+X & X+1 \\
\hline
X^3+X^2-2X+2 & X+1 \\
\hline
2X^2-X+1 & \\
\hline
2X^2-X+1 & \\
\end{array}$$

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X - 1)(X^2 - 1)} = X + 1 + \frac{2X^2 - X + 1}{(X - 1)(X^2 - 1)}$$

On pose

$$G(X) = \frac{2X^2 - X + 1}{(X - 1)(X^2 - 1)} = \frac{2X^2 - X + 1}{(X - 1)^2(X + 1)} = \frac{a}{(X - 1)^2} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}$$

Je multiplie par  $(X - 1)^2$  puis X = 1

$$a = \left[ \frac{2X^2 - X + 1}{X + 1} \right]_{Y = 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Je multiplie par X + 1 puis X = -1

$$c = \left[\frac{2X^2 - X + 1}{(X - 1)^2}\right]_{Y = -1} = \frac{4}{4} = 1$$

Je multiplie par *X* puis *X* tend vers l'infini.

2 = b + c donc b = 1.

Donc

$$F(X) = X + 1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$$

Allez à : Exercice 41

Correction exercice 42.

1.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}$$

Je multiplie par X - 1 puis X = 1

$$a = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1$$

Je multiplie par X + 1 puis X = -1

$$b = \left[ \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X^2 + 1)} \right]_{X = -1} = \frac{-6 + 3 - 5}{-2 \times 2} = 2$$

Je multiplie par *X*, puis *X* tend vers l'infini.

$$6 = a + b + c$$
, donc  $c = 6 - 1 - 2 = 3$ 

$$X = 0$$

$$5 = -5 + b + d$$
 donc  $d = 5 + 1 - 2 = 4$ 

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{X + 1} + \frac{3X + 4}{X^2 + 1}$$

2. Il reste à décomposer dans  $\mathbb{C}[X]$ 

$$\frac{3X+4}{X^2+1} = \frac{3X+4}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{\overline{a}}{X+i}$$

Je multiplie par X - i, puis X = i.

$$a = \left[\frac{3X+4}{X+i}\right]_{X-i} = \frac{3i+4}{2i} = \frac{(3i+4)(-i)}{2} = \frac{3}{2} - 2i$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{X + 1} + \frac{\frac{3}{2} - 2i}{X - i} + \frac{\frac{3}{2} + 2i}{X + i}$$

Allez à : Exercice 42

Correction exercice 43.

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} \quad (*)$$

On multiplie par  $(X - 1)^2$ , puis X = 1

$$d = \left[ \frac{3}{X^2 + X + 1} \right]_{Y = 1} = 1$$

Première méthode

On multiplie par  $X^2 + X + 1$ , puis X = j

$$aj + b = \left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=j} = \frac{3}{(j-1)^2} = \frac{3}{j^2 - 2j + 1} = \frac{3}{-3j} = -\frac{1}{j} = -j^2 = 1 + j$$

Donc b = 1 et a = 1

On prend X = 0 dans (\*)

$$3 = b - c + d \Rightarrow c = -3 + b + d = -3 + 1 + 1 = -1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Deuxième méthode

X = 0 dans (\*)

$$3 = b - c + d \Leftrightarrow b - c = 3 - d = 2 \Leftrightarrow b = 2 + c$$

On multiplie par X, puis  $X \to +\infty$ 

$$0 = a + c \Leftrightarrow a = -c$$

$$X = -1 \text{ dans } (*)$$

$$\frac{3}{4} = -a + b - \frac{c}{2} + \frac{d}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = c + (2 + c) - \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow c = -1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Pour la décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$ , il suffit de décomposer  $\frac{X+1}{X^2+X+1}$ , comme

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

Il existe  $A \in \mathbb{C}$  tel que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)} = \frac{A}{X-j} + \frac{\overline{A}}{X-j^2}$$

On multiplie par X - j, puis X = j

$$A = \left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j} = \frac{j+1}{j-j^2} = \frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$\frac{X+1}{X^2 + X + 1} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}$$
$$\frac{3}{(X^2 + X + 1)(X-1)^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Allez à : Exercice 43

Correction exercice 44.

$$F = \frac{X^2 + 1 - 1}{(X^2 + 1)^{2010}} = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + 1)^{2010}} - \frac{1}{(X^2 + 1)^{2010}} = \frac{1}{(X^2 + 1)^{2009}} - \frac{1}{(X^2 + 1)^{2010}}$$

Allez à : Exercice 44

Correction exercice 45.

Il faut d'abord diviser le numérateur par le dénominateur.

$$X^{4}(X-1)^{3} = X^{4}(X^{3} - 3X^{2} + 3X - 1) = X^{7} - 3X^{6} + 3X^{5} - X^{4}$$

$$\frac{X^8 + X + 1}{X^4 (X - 1)^3} = \frac{(X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4)(X + 3) + 6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4 (X - 1)^3}$$
$$= X + 3 + \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4 (X - 1)^3}$$

On pose alors

$$G(X) = \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X - 1)^3}$$

0 est un pôle d'ordre 4 du dénominateur on effectue alors la division suivant les puissances croissantes de

$$1 + X + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6$$
 par  $(X - 1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$  à l'ordre  $4 - 1 = 3$  (Le 4 est le 4 de  $X^4$ )

On en tire

$$1 + X + 3X^{4} - 8X^{5} + 6X^{6}$$

$$= (-1 + 3X - 3X^{2} + X^{3})(-1 - 4X - 9X^{2} - 16X^{3}) + 28X^{4} - 47X^{5} + 22X^{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6X^{6} - 8X^{5} + 3X^{4} + X + 1}{(X - 1)^{3}}$$

$$= \frac{(-1 + 3X - 3X^{2} + X^{3})(-1 - 4X - 9X^{2} - 16X^{3}) + 28X^{4} - 47X^{5} + 22X^{6}}{(X - 1)^{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6X^{6} - 8X^{5} + 3X^{4} + X + 1}{(X - 1)^{3}} = -1 - 4X - 9X^{2} - 16X^{3} + \frac{28X^{4} - 47X^{5} + 22X^{6}}{(X - 1)^{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6X^{6} - 8X^{5} + 3X^{4} + X + 1}{X^{4}(X - 1)^{3}} = \frac{-1 - 4X - 9X^{2} - 16X^{3}}{X^{4}} + \frac{X^{4}(28 - 47X + 22X^{2})}{X^{4}(X - 1)^{3}}$$

$$\Leftrightarrow G = -\frac{1}{X^{4}} - \frac{4}{X^{3}} - \frac{9}{X^{2}} - \frac{16}{X} + \frac{28 - 47X + 22X^{2}}{(X - 1)^{3}}$$

On pose alors

$$H = \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X - 1)^3} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{(X - 1)^3}$$

On multiplie par  $(X-1)^3$ , puis X=1.

$$c = [28 - 47X + 22X^2]_{X=1} = 3$$

On multiplie par X, puis  $X \to +\infty$ 

$$22 = a$$

X=0.

$$28 = -a + b - c \Leftrightarrow -28 = -22 + b - 3 \Leftrightarrow b = -33$$

Donc

$$H = \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X - 1)^3} = \frac{22}{X - 1} + \frac{53}{(X - 1)^2} + \frac{3}{(X - 1)^3}$$

Et alors

$$F = X + 3 - \frac{1}{X^4} - \frac{4}{X^3} - \frac{9}{X^2} - \frac{16}{X} + \frac{22}{X - 1} - \frac{3}{(X - 1)^2} + \frac{3}{(X - 1)^3}$$

#### Allez à : Exercice 45

Correction exercice 46.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{eX + f}{(X^2 + X + 1)^2}$$

On multiplie par  $X^2$ , puis X = 0.

$$b = \left[ \frac{X^4 + 1}{(X^2 + X + 1)^2} \right]_{X = 0} = 1$$

On multiplie par  $(X^2 + X + 1)^2$ , puis X = j.

$$ej + f = \left[\frac{X^4 + 1}{X^2}\right]_{X=j} = \frac{j^4 + 1}{j^2} = \frac{j+1}{j^2} = \frac{-j^2}{j^2} = -1$$

Donc e = 0 et f = -1.

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par *X* puis faire tendre *X* vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et bonjour les fractions pénibles, alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{-1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

J'appelle

$$G = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

C'est une fraction rationnelle, d'après l'unicité de sa décomposition en élément simple, qui est, d'après la ligne ci-dessus,  $\frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$ , on doit pouvoir, en réduisant au même dénominateur, trouver que le dénominateur de G est  $X(X^2+X+1)$ . On y va.

$$G = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} = \frac{X^4 + 1 - (X^2 + X + 1)^2 + X^2}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$

$$= \frac{X^4 + X^2 + 1 - (X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X)}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-2X^3 - 2X^2 - 2X}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$

$$= \frac{-2}{X(X^2 + X + 1)}$$

On a donc

$$\frac{-2}{X(X^2+X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On multiplie par X, puis X = 0

$$a = \left[\frac{-2}{X^2 + X + 1}\right]_{X=0} = -2$$

On multiplie par  $X^2 + X + 1$ , puis X = i.

$$cj + d = \left[\frac{-2}{X^2}\right]_{Y=i} = \frac{-2}{i^2} = -2j$$

Donc c = -2 et d = 0

**Finalement** 

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{-2X}{X^2 + X + 1} + \frac{-1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

Allez à : Exercice 46

Correction exercice 47.

Ensuite je diviserai par 16

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{16X^5}{(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2}$$
$$= \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2} + \frac{e}{X - i} + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{\bar{e}}{X + i} + \frac{\bar{f}}{(X + i)^2}$$

Avec a, b, c et d réels et e et f complexes.

Il est facile de trouver b, d et f.

Je multiplie par  $(X-1)^2$ , puis X=1

$$b = \left[ \frac{16X^5}{(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2} \right]_{X=1} = \left[ \frac{16X^5}{(X+1)^2(X^2+1)^2} \right]_{X=1} = 1$$

Je multiplie par  $(X + 1)^2$ , puis X = -1

$$d = \left[ \frac{16X^5}{(X-1)^2(X-i)^2(X+i)^2} \right]_{X=1} = \left[ \frac{16X^5}{(X-1)^2(X^2+1)^2} \right]_{X=-1} = -1$$

Je multiplie par  $(X - i)^2$ , puis X = i

$$f = \left[ \frac{16X^5}{(X+1)^2(X-1)^2(X+i)^2} \right]_{X-1} = \left[ \frac{16X^5}{(X^2-1)^2(X+i)^2} \right]_{X-i} = \frac{16i^5}{(-2)^2(2i)^2} = \frac{16i}{4(-4)} = -i$$

F est impaire donc F(-X) = -F(X), soit encore : -F(-X) = F(X)

$$-F(-X) = -\left(\frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e}{-X-i} + \frac{f}{(-X-i)^2} + \frac{\bar{e}}{-X+i} + \frac{\bar{f}}{(-X+i)^2}\right)$$
$$-F(-X) = \frac{a}{X+1} - \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-1} - \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{e}{X+i} - \frac{f}{(X+i)^2} + \frac{\bar{e}}{X-i} - \frac{\bar{f}}{(X-i)^2}$$

En identifiant les coefficients avec ceux de F(X), on a :

$$a = c, b = -d, e = \bar{e}$$
 et  $f = -\bar{f}$ 

b=-d, çà on le savait déjà,  $e=\bar{e}$  donc e est réel et  $f=-\bar{f}$  entraine que f est un imaginaire pur, ce que l'on savait déjà.

X = 0 donne

$$F(0) = 0 = -a + b + c + d + ie - f - i\bar{e} - \bar{f} = -a + c + i(e - \bar{e})$$

Car b + d = 0 et  $-f - \bar{f} = i - i = 0$ 

Cela donne 
$$0 = -a + c + i(e - \bar{e}) - a + c + 2i(i\text{Im}(e)) = -a + c - 2\text{Im}(e)$$

Or a = c donc Im(e) = 0 autrement dit e est réel.

Je multiplie par X, puis je fais tendre X vers  $\infty$ .

$$0 = a + c + e + \bar{e} = 2a + 2e$$

Donc e = -a

Comme c = a, b = 1, d = -1 et f = -i

On a:

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{a}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{a}{X - i} - \frac{i}{(X - i)^2} - \frac{a}{X + i} + \frac{i}{(X + i)^2}$$

Ceci étant vrai pour tout  $X \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1,-i,i\}$ , je prends X = 2

$$\frac{16 \times 32}{(16-1)^2} = \frac{a}{2-1} + \frac{1}{(2-1)^2} + \frac{a}{2+1} - \frac{1}{(2+1)^2} - \frac{a}{2-i} - \frac{i}{(2-i)^2} - \frac{a}{2+i} + \frac{i}{(2+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = a + 1 + \frac{a}{3} - \frac{1}{9} - \frac{a(2+i)}{5} - \frac{i(2+i)^2}{5^2} - \frac{a(2-i)}{5} + \frac{i(2-i)^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{4a}{3} + \frac{8}{9} - \frac{4a}{5} - \frac{i(3+4i)}{25} + \frac{i(3-4i)}{25}$$
$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{3^2 \times 5^2} = \frac{20-12}{15}a + \frac{8}{9} + \frac{8}{25}$$

 $\Leftrightarrow 16 \times 32 = 8 \times 15a + 8 \times 25 + 8 \times 9 \Leftrightarrow 2 \times 32 = 15a + 25 + 9 \Leftrightarrow 30 = 15a \Leftrightarrow a = 2$ 

Donc

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{2}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{2}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{2}{X - i} - \frac{i}{(X - i)^2} - \frac{2}{X + i} + \frac{i}{(X + i)^2}$$

Il reste à diviser par 16:

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{X-i} - \frac{\frac{i}{16}}{(X-i)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{X+i} + \frac{\frac{i}{16}}{(X+i)^2}$$

Ensuite pour décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$  il faut réunir les conjugués.

$$\frac{X^{5}}{(X^{4}-1)^{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^{2}} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}\right)$$

$$-\frac{i}{16} \left(\frac{1}{(X-i)^{2}} - \frac{1}{(X+i)^{2}}\right)$$

$$\frac{X^{5}}{(X^{4}-1)^{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^{2}} - \frac{\frac{X}{4}}{X^{2}+1} - \frac{i}{16} \frac{(X+i)^{2} - (X-i)^{2}}{(X^{2}+1)^{2}}$$

$$\frac{X^{5}}{(X^{4}-1)^{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^{2}} - \frac{\frac{X}{4}}{X^{2}+1} - \frac{i}{16} \frac{4iX}{(X^{2}+1)^{2}}$$

$$\frac{X^{5}}{(X^{4}-1)^{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^{2}} - \frac{\frac{X}{4}}{X^{2}+1} + \frac{\frac{X}{4}}{(X^{2}+1)^{2}}$$

Je vais maintenant décomposer directement cette fraction dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Comme dans  $\mathbb{C}[X]$  je vais décomposer  $F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2}$ 

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\delta}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{\eta X + \theta}{(X^2 + 1)^2}$$

De la même façon, on trouve que  $\beta = 1$  et  $\delta = -1$ 

Je multiplie par  $(X^2 + 1)^2$ , puis je prends X = i

$$\eta i + \theta = \left[ \frac{16X^5}{(X^2 - 1)^2} \right]_{Y=i} = \frac{16i^5}{(-1 - 1)^2} = 4i$$

Donc  $\eta = 4$  et  $\theta = 0$ .

F est impaire donc -F(-X) = F(X)

$$-F(-X) = -\left(\frac{\alpha}{-X - 1} + \frac{\beta}{(-X - 1)^2} + \frac{\gamma}{-X + 1} + \frac{\delta}{(-X + 1)^2} + \frac{-\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{-\eta X + \theta}{(X^2 + 1)^2}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{X + 1} - \frac{\beta}{(X + 1)^2} + \frac{\gamma}{X - 1} - \frac{\delta}{(X - 1)^2} + \frac{\varepsilon X - \zeta}{X^2 + 1} + \frac{\eta X - \theta}{(X^2 + 1)^2}$$

$$-F(-X) = F(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\delta \\ \zeta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

On savait déjà que  $\beta = -\delta$  et que  $\theta = 0$ .

Pour l'instant on en est à :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

Je multiplie par X, puis on fait tendre X vers  $\infty$ .

$$0 = \alpha + \gamma + \varepsilon$$

Comme  $\alpha = \gamma$ , on a  $\varepsilon = -2\gamma$ .

On peut essayer X = 0 mais cela redonne  $\alpha = \gamma$ .

Pour l'instant on en est à :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\gamma}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{2\gamma X}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

Comme dans  $\mathbb{C}[X]$ , je vais prendre X=2

$$\frac{16 \times 32}{(16-1)^2} = \gamma + 1 + \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{9} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{5^2} \Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{4\gamma}{3} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{9} + \frac{8}{25} \Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{8\gamma}{15} + \frac{8 \times 34}{9 \times 25}$$

$$\Leftrightarrow 16 \times 32 = 8 \times 15\gamma + 8 \times 34 \Leftrightarrow 2 \times 32 = 15\gamma + 34 \Leftrightarrow \gamma = 2$$

$$F(X) = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{2}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{2}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{4X}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

On divise par 16 et voilà.

A partir de là, on peut retrouver la décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$ , pour cela il suffit de décomposer

$$\frac{4X}{X^2+1} = \frac{a}{X-i} + \frac{\bar{a}}{X+i}$$

Et

$$\frac{4X}{(X^2+1)^2} = \frac{b}{X-i} + \frac{\overline{b}}{X+i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{\overline{c}}{(X+i)^2}$$

A faire.

Troisième méthode

On repart de

$$F(X) = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

On va calculer

$$\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{(X+1)^2(X^2+1)^2 - (X-1)^2(X^2+1)^2 + 4X(X-1)^2(X+1)^2}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{((X+1)^2 - (X-1)^2)(X^2+1)^2 + 4X(X^2-1)^2}{(X^2-1)^2(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{(X^2+2X+1-X^2+2X-1)(X^4+2X^2+1) + 4X(X^4-2X^2+1)}{(X^4-1)^2}$$

$$= \frac{4X(X^4+2X^2+1) + 4X(X^4-2X^2+1)}{(X^4-1)^2} = \frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}$$

Donc

$$F = \frac{16X^{5}}{(X^{4} - 1)^{2}} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^{2}} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^{2}} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1} + \frac{4X}{(X^{2} + 1)^{2}}$$

$$= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1} + \frac{8X(X^{4} + 1)}{(X^{4} - 1)^{2}} \Leftrightarrow F - \frac{8X(X^{4} + 1)}{(X^{4} - 1)^{2}}$$

$$= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1} \Leftrightarrow \frac{16X^{5}}{(X^{4} - 1)^{2}} - \frac{8X(X^{4} + 1)}{(X^{4} - 1)^{2}} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16X^{5} - 8X(X^{4} + 1)}{(X^{4} - 1)^{2}} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16X^{5} - 8X^{5} - 8X}{(X^{4} - 1)^{2}} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X^{5} - 8X}{(X^{4} - 1)^{2}} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X(X^{4} - 1)}{(X^{4} - 1)^{2}} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X}{X^{4} - 1} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X}{(X - 1)(X + 1)(X^{2} + 1)} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^{2} + 1}$$

On multiplie par X - 1, puis X = 1

$$\alpha = \left[ \frac{8X}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{Y=1} = 2$$

On multiplie par X + 1, puis X = -1

$$\beta = \left[ \frac{8X}{(X-1)(X^2+1)} \right]_{Y=-1} = 2$$

On multiplie par  $X^2 + 1$ , puis X = i

$$\epsilon + i\zeta = \left[\frac{8X}{X^2 - 1}\right]_{X = i} = -4i \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ et } \zeta = -4$$

Donc

$$\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} - \frac{4X}{X^2 + 1}$$

Et enfin

$$F = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{2}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{2}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{4X}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

Il ne reste qu'à diviser par 16

Allez à : Exercice 47

Correction exercice 48.

1.  $\alpha$  est une racine simple de Q donc il existe  $Q_1$  tel que  $Q = (X - \alpha)Q_1$  avec  $Q_1(\alpha) \neq 0$ 

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha)Q_1} = \frac{\alpha}{X - \alpha} + \cdots$$

En multipliant par  $X - \alpha$ , puis en faisant  $X = \alpha$ , on trouve (classiquement)

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

D'autre part

$$Q = (X - \alpha)Q_1 \Rightarrow Q' = Q_1 + (X - \alpha)Q_1'$$

En faisant  $X = \alpha$  dans cette dernière expression on trouve que  $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$ Par conséquent

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

2.

$$X^{n} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Donc il existe  $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$  tels que :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

En appliquant le résultat du 1°), avec P = X et  $Q' = nX^{n-1}$ 

$$a_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2ik(1-(n-1))\pi}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2ik(2-n)\pi}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{4ik\pi}{n}}$$

Donc

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n} e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

## Allez à : Exercice 48

Correction exercice 49.

1. 
$$P = X^5 - X^3 + X^2 - 1 = X^3(X^2 - 1) + (X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^3 + 1)$$

-1 est racine de  $X^3 + 1$  donc on peut factoriser par X + 1, et on trouve, à l'aide d'une division élémentaire  $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ .  $X^2 - X + 1$  n'a pas de racine réelle

On déduit de tout cela que la décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P = (X-1)(X+1)(X+1)(X^2-X+1) = (X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)$$

 $X^2 - X + 1$  admet deux racines complexes conjuguées

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$
 et  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$ 

La décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P = (X - 1)(X + 1)^{2}(X + j)(X + j^{2})$$

2. Il existe a, b, c et d réels tels que :

$$\frac{X+1}{P} = \frac{X+1}{(X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)} = \frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2-X+1)}$$
$$= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

On multiplie par X-1, puis X=1

$$a = \left[\frac{1}{(X+1)(X^2 - X + 1)}\right]_{Y=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par X + 1, puis X = -1

$$b = \left[\frac{1}{(X-1)(X^2 - X + 1)}\right]_{X=-1} = -\frac{1}{6}$$

On pose X = 0

$$-1 = -a + b + d \Rightarrow d = -1 + a - b = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

On multiplie par X, puis X tend vers l'infini

$$0 = a + b + c \Rightarrow c = -a - b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$
$$\frac{X+1}{P} = \frac{\frac{1}{2}}{Y-1} - \frac{\frac{1}{6}}{Y+1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}}{Y^2 - Y + 1}$$