Rationnels et irrationnels

Exercice 1 Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Exercice 3 Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels $a,b>0$ tels que a^b soit rationnels.

Exercice 4 Soit $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ telle que $\forall x,y\in\mathbb{Q}, f(x+y)=f(x)+f(y)$.

a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?

On revient au cas général.

b) Calculer $f(0)$.

c) Montrer que $\forall x\in\mathbb{Q}, f(-x)=-f(x)$.

d) Etablir que $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{Q}, f(nx)=nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n\in\mathbb{Z}$.

e) On pose $a=f(1)$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{Q}, f(x)=ax$.

Nombres réels

Exercice 5 Montrer $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $ab\le\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Exercice 6 Montrer $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$.

Exercice 7 Soit $a\in[1,+\infty[$. Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Exercice 8 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application telle que : $\begin{cases} 1) & \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y) \\ 2) & \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=f(x)f(y) \\ 3) & \exists x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0 \end{cases}$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

b) Déterminer $f(x)$ pour $x\in\mathbb{Z}$ puis pour $x\in\mathbb{Q}$.

c) Démontrer que $\forall x\ge 0, f(x)\ge 0$. En déduire que f est croissante.

d) Conclure que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Partie entière

Exercice 9 Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 10 Montrer que $\forall x,y\in\mathbb{R}, E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+1$.

Exercice 11 Montrer que, pour $x,y\in\mathbb{R}$, $E(x)+E(x+y)+E(y)\le E(2x)+E(2y)$.

Exercice 12 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$.

Exercice 13 Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$

Exercice 14 Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Etablir $\text{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) + E(1-a)$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.

b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 16 Soit $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$.

Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 17 Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Comparer $\inf A, \sup A, \inf B$ et $\sup B$.

Exercice 18 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b$.

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 19 Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Montrer que $\sup A, \sup B$ et $\sup A \cup B$ existent et $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 20 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

On forme $A + B = \{a + b / (a,b) \in A \times B\}$.

Montrer que $A+B$ est majorée et $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 21 Soit (u_n) une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\limits_{p \geq n} u_p$ et $w_n = \inf\limits_{p \geq n} u_p$.

Etudier les monotonies des suites (v_n) et (w_n).

Exercice 22 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0,1]} f_n(x)$

Exercice 23 Déterminer $\inf \left\{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}\right) / x_1, \ldots, x_n > 0\right\}$.

Equations et systèmes

Exercice 24 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $x = 2x - 1 \quad [1]$ b) $3x = 2 - x \quad [\pi]$ c) $nx = 0 \quad [\pi]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 25 Observer que $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ est solution d'une équation de la forme $x^3 = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Résoudre cette dernière et déterminer x.

Exercice 26 Résoudre les systèmes d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$

Exercice 27 Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ xyz=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+3z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$.

Exercice 28 Résoudre le système $\begin{cases} x-ay+z=2 \\ x+(a+1)z=3 \\ x+ay+3z=4 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.