



Corrigé du concours national commun 2008	Filière : MP
188 Massira 1A Marrakech Tel 024 34 30 09 Mprepa@menara.ma	Physique I

1 Thermodiffusion dans une barre

1.1 Équations générales

1.1.1

Le vecteur courant thermique diffusif $\vec{j}_Q(M, t)$ représente la puissance thermique surfacique (quantité de chaleur qui traverse une surface unité par unité de temps).

On a : $j_Q = \delta^3 Q / d^2 S dt$ donc : $[j_Q] = [Q] / L^2 T = [Energie] / L^2 T = M.L^2.T^{-2} / L^2 T$

La dimension de j_Q est alors $M.T^{-3}$. Il s'exprime dans le S.I. en $W.m^{-2}.K^{-1}$

1.1.2

Effectuons un bilan énergétique sur un tronçon de la barre compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$:

À l'abscisse x , la quantité de chaleur qui entre pendant dt est : $\delta Q_e = j(x, t).S.dt$.

À l'abscisse $x + dx$, la quantité de chaleur qui entre pendant dt est : $\delta Q_s = j(x + dx, t).S.dt$.

En supposant qu'il n'y a pas d'échange d'énergie autre que par conduction, le premier principe s'écrit : $dU = \delta Q_e - \delta Q_s$.

dU étant la variation d'énergie interne du volume considéré dont la température varie de dt , soit :

$dU = S.dx.du = S.dx.\frac{\partial u}{\partial t}.dt$. u étant l'énergie interne volumique. Donc :

$$S.dx.\frac{\partial u}{\partial t}.dt = [j(x, t) - j(x + dx, t)].S.dt$$

Ce qui donne après simplification :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

1.1.3

La loi de FOURIER s'écrit :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

L'unité S.I. de λ est $W.m^{-1}.K^{-1}$

Soit, à une dimension :

$$j(x, t) = -\lambda.\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

1.1.4

L'énergie interne volumique est donnée par :

$$u(x, t) = \mu.c.T(x, t) + u_0$$

1.1.5

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu.c. \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

D'après 1.1.2. , on aura :

$$\mu.c. \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

1.1.6

L'équation précédente peut se mettre sous la forme : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$ en introduisant le coefficient de diffusion thermique D donné par :

$$D = \frac{\lambda}{\mu.c}$$

Équation aux dimensions : $\frac{\Theta}{L^2} = \frac{1}{D} \frac{\Theta}{T}$. la dimension de D est alors : $L^2.T^{-1}$

1.2 Régime stationnaire

1.2.1

En régime stationnaire, la température T ne dépend plus du temps. Elle ne dépend que de x . L'équation (1) devient :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

1.2.2

La solution de l'équation précédente est alors : $T(x) = a.x + b$. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T(0) = T_1 \Rightarrow b = T_1 \\ T(L) = T_2 \Rightarrow a = (T_2 - T_1)/L \end{cases} \text{ . Soit :}$$

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$$

D'où la représentation de $T(x)$ dans le cas où $T_2 > T_1$:

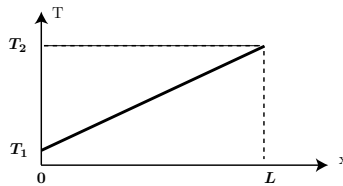


FIG. 1 –

1.2.3

$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$ donc :

$$\vec{j}_Q = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{L} \vec{e}_x$$

La puissance thermique surfacique est indépendante de x et t ; résultat naturel en régime stationnaire.

1.3 Régime transitoire

1.3.1

$$T_0 = 373 \text{ K} \quad ; \quad T_1 = 293 \text{ K} \quad ; \quad T_2 = 333 \text{ K}$$

1.3.2

1.3.2.1 Pour maintenir l'extrémité droite de la barre à la température ambiante, il suffit par exemple de la refroidir par convection à l'aide d'un courant d'air à la température ambiante de telle sorte que le flux reçu par diffusion thermique soit égale au flux perdue par convection forcée. En augmentant la ventilation on augmente la masse d'air qui vient, par unité de temps, au contact du solide, toutes choses égales par ailleurs, le flux thermique évacué par l'air.

1.3.2.2 Tracé qualitatif des profils de température au sein de la barre à différents instants :

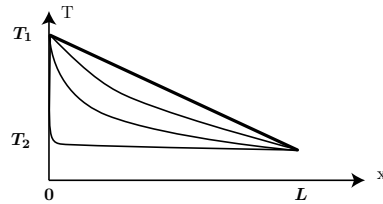


FIG. 2 –

2 Contacts thermiques

2.1 Modèle statique

2.1.1

En tenant compte des questions précédentes, la température dans chacun des cylindres C_a et C_b , s'écrit :

$$T_a(x) = T_0 - (T_1 - T_0) \frac{x}{L_1}$$

$$T_b(x) = T_0 + (T_2 - T_0) \frac{x}{L_2}$$

2.1.2

Dans les deux cylindres, le vecteur courant thermique diffusif s'écrit :

$$\vec{j}_{Qa} = \lambda_1 \frac{(T_1 - T_0)}{L_1} \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{j}_{Qb} = \lambda_2 \frac{(T_0 - T_2)}{L_2} \vec{e}_x$$

2.1.3

En régime stationnaire, on a : $\vec{j}_{Qa} = \vec{j}_{Qb}$, soit : $\lambda_1 \frac{(T_1 - T_0)}{L_1} = \lambda_2 \frac{(T_0 - T_2)}{L_2}$ donc :

$$T_0 = \frac{\lambda_1 L_2 T_1 + \lambda_2 L_1 T_2}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1}$$

2.1.4

Lorsque $L_1 = L_2$, la température du contact est :

$$T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Les résultats numériques sont groupés dans le tableau suivant :

	$\theta_2 = 100^\circ C$	$\theta_2 = 10^\circ C$
T_0 (en $^\circ C$)	42,7	35,5
T'_0 (en $^\circ C$)	94,3	21,5

Pour $\theta_2 = 100^\circ C$, le bois semble plus froid que l'acier alors que pour $\theta_2 = 10^\circ C$, le bois semble plus chaud que l'acier : l'acier est meilleur conducteur thermique que la main, la température de contact est proche de celle de l'acier alors que le bois est moins bon conducteur thermique que la main, la température de contact est proche de celle de la main.

2.2 Modèle dynamique

2.2.1

Il suffit pour cela de vérifier que l'expression de $T(u)$ proposée vérifie bien l'équation de la chaleur.

$$T(u) = A + \frac{2B}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp -v^2 dv$$

$$\frac{dT(u)}{du} = \frac{2B}{\sqrt{\pi}} \exp -u^2 \quad ; \quad \frac{d^2T}{du^2} = -\frac{4B}{\sqrt{\pi}} u \exp -u^2$$

$$\frac{d^2T}{du^2} + 2u \frac{dT(u)}{du} = -\frac{4B}{\sqrt{\pi}} u \exp -u^2 + 2u \frac{2B}{\sqrt{\pi}} \exp -u^2 = 0$$

Ainsi, $T(u) = A + B \operatorname{erf}(u)$ est bien solution de l'équation de la diffusion thermique.

2.2.2

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} * \quad T(-\infty, t) = T_1 &\Rightarrow T(u = -\infty) = T_1 \text{ donc : } A_1 - B_1 = T_1 \\ * \quad T(0, t) = T_0 &\Rightarrow T(u = 0) = T_0 \text{ donc : } A_1 = A_2 = T_0 \\ * \quad T(+\infty, t) = T_2 &\Rightarrow T(u = +\infty) = T_2 \text{ donc : } A_2 + B_2 = T_2 \end{aligned}$$

Donc :

$$B_1 = T_0 - T_1 \quad ; \quad B_2 = T_2 - T_0$$

2.2.3

Le vecteur courant thermique de diffusion est :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x = -\lambda \frac{dT}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x = -\lambda \frac{2B}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \vec{e}_x = -\frac{\lambda}{\sqrt{\pi Dt}} B \exp(-u^2) \vec{e}_x$$

puisque $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ alors $\vec{j}_Q = -B \frac{\sqrt{\lambda c \mu}}{\sqrt{\pi t}} \exp(-u^2) \vec{e}_x$

Pour le cylindre C_a , il suffit de remplacer B_1 par son expression, en posant :

$$E_1 = \sqrt{\lambda_1 c_1 \mu_1}$$

Et on remplaçant u^2 par $x^2/4D_1t$, on trouve :

$$\vec{j}_Q^{(a)} = -(T_0 - T_1) \frac{E_1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1t}\right) \vec{e}_x$$

Dans le S.I., E_1 s'exprime en

$$J.m^{-2}.K^{-1}.s^{-1/2}$$

2.2.4

De même, dans C_b , le vecteur courant thermique diffusif s'écrit :

$$\vec{j}_Q^{(b)} = -(T_2 - T_0) \frac{E_2}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_2t}\right) \vec{e}_x$$

Où l'effusivité E_2 est donnée par :

$$E_2 = \sqrt{\lambda_2 c_2 \mu_2}$$

2.2.5

La continuité de \vec{j}_Q en $x = 0$ permet d'écrire : $(T_1 - T_0) E_1 = (T_0 - T_2) E_2$, donc :

$$T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

Dans le modèle classique, l'expression est comparable si on remplace E_1 par $\lambda_1 L_2$ et E_2 par $\lambda_2 L_1$.

2.2.6

Les résultats numériques sont groupés dans le tableau suivant :

	$\theta_2 = 100^\circ C$	$\theta_2 = 10^\circ C$
T_0 (en $^\circ C$)	48,5	32,1
T'_0 (en $^\circ C$)	92,8	13,1

2.3

Dans l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique, l'eau contenue dans les différentes bouteilles aura la même température!!!

3 Analogies thermoélectriques

3.1 Résistances thermiques

3.1.1

$T(x)$ est donnée par :

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \times \frac{x}{L}$$

Alors :

$$\vec{j}_{th}(x) = -\lambda \frac{T_L - T_0}{L} \vec{e}_x$$

et

$$\Phi_{th}^c = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{ds} = \lambda S \left(\frac{T_0 - T_L}{L} \right)$$

C'est à dire :

$$T(0) - T(L) = \frac{L}{\lambda S} \Phi_{th}^c = R_{th}^c \times \Phi_{th}^c$$

Avec :

$$R_{th}^c = \frac{L}{\lambda S}$$

3.1.2

3.1.2.1 La loi d'OHM locale s'écrit en un point M à l'instant t et dans le cadre de l'ARQS :

$\vec{J}(M, t) = \gamma \times \vec{E}(M, t)$. γ est la conductivité électrique du milieu.

$\vec{E}(M, t)$ est le champ électrique au point M à l'instant t.

3.1.2.2 La loi d'OHM $\vec{J}(M, t) = \gamma \times \vec{E}(M, t) = -\gamma \times \overrightarrow{grad} V(M, t)$ comparée à la loi de FOURIER $\vec{J}_{th}^c(M, t) = -\lambda \times \overrightarrow{grad} T(M, t)$ donne les analogies suivantes :

Grandeurs thermodynamiques	Grandeurs électriques
$\Phi_{th}^c = \iint_S \vec{j}_{th}(M, t) \cdot \vec{ds}$	$I = \iint_S \vec{j}(M, t) \cdot \vec{ds}$
T(0)-T(L)	V(0)-V(L)
λ (conductivité thermique)	γ (conductivité électrique)

3.1.3

Deux résistances électriques montées en série ont pour équivalent thermique deux résistances thermiques montées en série c'est à dire traversées par le même flux thermique :

$$R_{eqth} = R_{th1} + R_{th2} = \frac{L_1}{\lambda_1 S_1} + \frac{L_2}{\lambda_2 S_2}$$

Dans le cas d'une association en parallèle l'expression de la résistance équivalente s'écrit :

$$R_{eqth} = \frac{R_{th1} \times R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}}$$

3.1.4

Par analogie avec le cas précédent :

$$T(0) - T(L) = R_{th}^c \times \Phi_{th}^c$$

Le flux thermique conducto-convectif est définie à partir de :

$$T - T_a = R_{th}^{cc} \times \Phi_{th}^{cc}$$

3.1.5

3.1.5.1 La loi de STEPHAN s'écrit :

- Pour le corps solide : $\varphi_s = \sigma \times T^4$
- Pour l'environnement ambiant : $\varphi_a = \sigma \times T_a^4$

3.1.5.2 Le solide émis le flux thermique surfacique φ_s et reçoit le flux thermique surfacique φ_a . Le flux radiatif total échangé par le corps avec le milieu ambiant est alors :

$$\Phi_{th}^r = S \times \Phi_s - S \times \Phi_a = S\sigma(T^4 - T_a^4)$$

3.1.5.3 Comme précédemment la résistance thermique de rayonnement est définie à partir de la relation :

$$R_{th}^r = \frac{T - T_a}{\Phi_{th}^r}$$

Or $\Phi_{th}^r = S\sigma(T^4 - T_a^4) = S\sigma(T - T_a)(T^3 + T^2T_a + TT_a^2 + T_a^3)$ et si $T - T_a$ est faible ($T \simeq T_a$) alors : $\Phi_{th}^r = S\sigma(T^4 - T_a^4) = S\sigma(T - T_a) \times 4T_a^3$. Donc :

$$R_{th}^r = \frac{1}{4\sigma ST_a^3}$$

3.1.5.4 AN :

$$R_{th}^r = 0,11 K.W^{-1}$$

3.2 Bilan thermique du corps humain

3.2.1

3.2.1.1 La production métabolique journalière est $PMJ = 13MJ/jour$, cette valeur exprimée en J/s devient :

$$P_m = 150,46 J/s \simeq 150W$$

Le flux radiatif est :

$$\Phi_{th}^r = \frac{T - T_a}{R_{th}^r} = \frac{\theta - \theta_a}{R_{th}^r} \simeq 75,2W$$

De même le flux conducto-convectif est :

$$\Phi_{th}^r = \frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}} = \frac{\theta - \theta_a}{R_{th}^{cc}} = 59,88W \simeq 60W$$

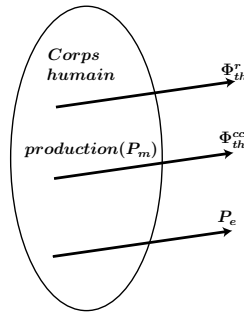


FIG. 3 –

3.2.1.2 L'évaporation thermique de 1kg d'eau nécessite 2,4MJ, celle de 0,3kg nécessite $2,4MJ \times 0,3 = 0,72MJ$. On en déduit que :

$$P_e = m_e \times L = 8,33W$$

3.2.1.3 La puissance résiduelle (restante) est :

$$P_s = P_m - (\Phi_{th}^r + \Phi_{th}^{cc} + P_e)$$

AN :

$P_s = 7,07W \simeq 7W$. Cette puissance sert à maintenir constante la température du corps humain.

3.2.1.4 Le schéma de l'énoncé (figure 4) est équivalent au schéma suivant :

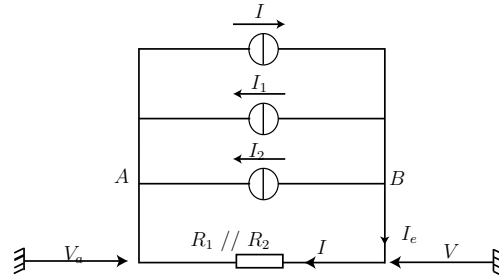


FIG. 4 –

$$V - V_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times I_e$$

Avec : $-I_e - I_1 - I_2 + I = 0$ (loi des nœuds au point B). Donc :

$$V - V_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times (I - I_1 - I_2)$$

3.2.1.5 Les deux résistances représentent les analogues électriques de R_{th}^{cc} et R_{th}^r .

La différence $P_m - (P_e + P_s) = \Phi_{th}^{cc} + \Phi_{th}^r$ représente l'analogue du courant $I_e = I - (I_1 + I_2)$, d'où le schéma analogue de la figure 5.

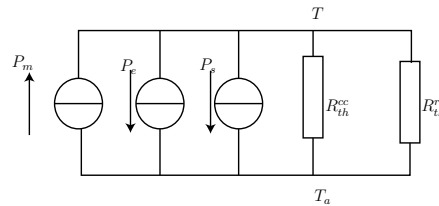


FIG. 5 –

3.2.1.6 La représentation de NORTON (figure 6) est l'association d'une source de courant P_N en parallèle avec une résistance R_N .

$$P_N = P_m - P_e - P_s \text{ et } R_N = \frac{R_{th}^{cc} R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}$$

On en déduit la représentation de THÉVENIN (figure 7) :

$$P_{TH} = P_N \times R_N \text{ et } R_{TH} = R_N = \frac{R_{th}^{cc} R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}$$

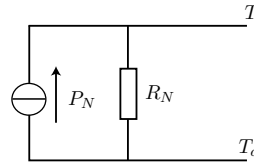


FIG. 6 –

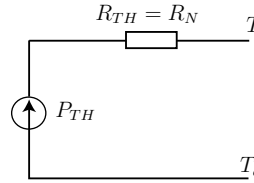


FIG. 7 –

3.2.2

3.2.2.1 Le premier principe de la thermodynamique (bilan énergétique) appliqué au corps humain s'écrit :

$$dU = CdT = \delta Q + \delta W = \delta Q$$

Car $\delta W = 0$ (on néglige les variations du volume), c'est à dire :

$$dU = \delta Q = [P_m - (P_e + P_s)]dt - \delta Q_{th}^r - \delta Q_{th}^{cc}$$

Avec : $\delta Q_{th}^r = \frac{T-T_a}{R_{th}^r}dt$ et $\delta Q_{th}^{cc} = \frac{T-T_a}{R_{th}^{cc}}dt$.

Donc :

$$C \frac{dT}{dt} + (T - T_a) \left(\frac{1}{R_{th}^{cc}} + \frac{1}{R_{th}^r} \right) = P_m - (P_e + P_s) \quad (*)$$

Qui s'écrit :

$$C \frac{dT}{dt} + \frac{T - T_a}{\tau} = \Lambda$$

Avec :

$$\tau = \frac{R_{th}^{cc} \times R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}$$

et

$$\Lambda = \frac{P_m - (P_e + P_s)}{C}$$

3.2.2.2 Le cas stationnaire est obtenue par un instant $t \gg \tau$, c'est à dire en négligeant le terme $\frac{dT}{dt}$ devant $\frac{T-T_a}{\tau}$. Dans ce cas on obtient :

$$\underbrace{\frac{T - T_a}{R_{th}^r}}_{\Phi_{th}^r} + \underbrace{\frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}}}_{\Phi_{th}^{cc}} = P_m - (P_e + P_s)$$

C'est bien l'équation du 3.2.1.5

3.2.2.3 Pour obtenir le schéma du circuit thermique équivalent, on tient compte de la capacité thermique C . L'équation (*) traduit la loi des nœuds, le terme $C \frac{dT}{dt}$ est analogue à un courant électrique traversant un condensateur de capacité C : D'où le schéma suivant :

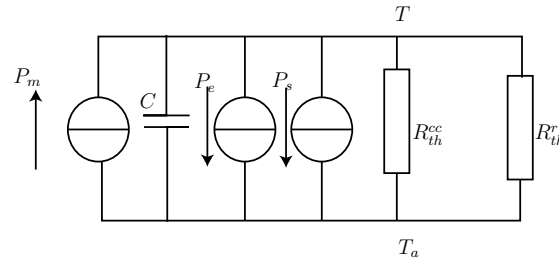


FIG. 8 –

3.2.2.4 La solution de l'équation différentielle (2) de l'énoncé :

$$\frac{d(T - T_a)}{dt} + \frac{T - T_a}{\tau} = \Lambda$$

S'écrit : $(T - T_a) = \Gamma \times \tau + A \times e^{-t/\tau}$, A est une constante.

À $t = 0$: $T(0) - T_a = \Gamma \times \tau + A \Rightarrow A = T(0) - T_a - \Gamma \times \tau$

Donc :

$$T(t) = T_a + \Lambda \times \tau + (T(0) - T_a - \Lambda \times \tau)e^{-t/\tau}$$

3.2.2.5 À l'équilibre (pour $t \gg \tau$) : $T = T_e = T_a + \Lambda \times \tau$

AN : $T_e = 306K$.

3.2.2.6 Les représentations graphiques pour les trois cas sont les suivantes :

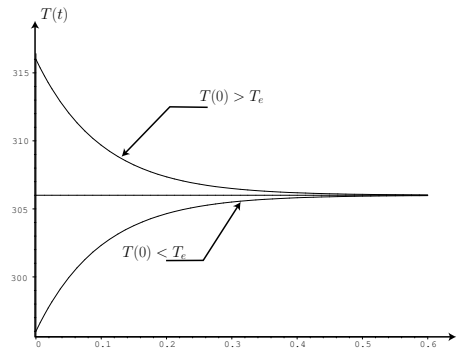


FIG. 9 –

Pour $T(0) > T_e$ ($/T(0) < T_e$) la température du corps humain diminue ($/$ augmente) pour atteindre T_e , la situation est analogue à la décharge ($/$ charge) d'un condensateur dans une résistance.

Pour déterminer la valeur de τ , il suffit de tracer la tangente à la courbe $T(t)$ au point correspondant à $t = 0$, l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec la droite $T = T_e$ est égale à la valeur de τ .

3.2.2.7 Un corps se refroidit 25 fois plus vite dans l'eau que dans l'air signifie que $\tau_{air} = 25 \times \tau_{eau}$. En remplaçant τ en fonction des résistances on obtient :

$$\tau_{air} = \frac{R_{th}^{cc}}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r} = 25 \times \tau_{eau} = 25 \times \frac{R_{th,eau}^{cc}}{R_{th,eau}^{cc} + R_{th}^r}$$

Ce qui donne :

$$R_{th,eau}^{cc} = \frac{R_{th}^r}{24 + \frac{R_{th}^r}{R_{th}^{cc}}}$$

AN : $R_{th,eau}^{cc} \simeq 5,4 \cdot 10^{-3} KW^{-1}$

La résistance de conducto-convection de l'eau est plus faible. L'eau conduit mieux l'énergie thermique que l'air.

3.3 Effet des vêtements sur le bilan thermique du corps

3.3.1

Comme la résistance est inversement proportionnelle à la surface, les résistances de conducto-convection et de rayonnement sont multipliées par 5 (la nouvelle surface $S' = 0,2 \times S = \frac{S}{5}$). Donc :

$$R_{th}^{cc,v} = 5 \times R_{th}^{cc} \text{ et } R_{th}^{r,v} = 5 \times R_{th}^r$$

AN :

$$R_{th}^{cc,v} = 835 \cdot 10^{-3} KW^{-1} \text{ et } R_{th}^{r,v} = 665 \cdot 10^{-3} KW^{-1}$$

3.3.2

Les parties couvertes ne peuvent plus échanger l'énergie thermique par radiation et conducto-convection mais par conduction, pour tenir compte de ce fait, il faut introduire une résistance supplémentaire $R_{th}^{cc,v}$.

3.3.3

Le nouveau schéma du circuit thermique est alors :

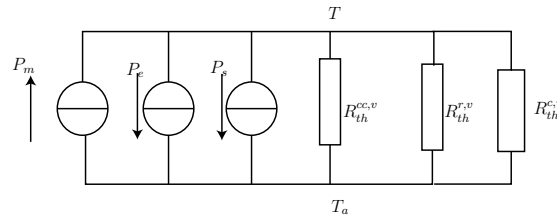


FIG. 10 –

3.3.4

La puissance est la même, il suffit d'écrire que $\frac{\Delta T}{R_{equi}} = \frac{\Delta T'}{R'_{equi}}$.

– En absence des vêtements :

$$R_{equi} = \frac{R_{th}^{cc}}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}$$

– En présence des vêtements :

$$R'_{equi} = \frac{1}{\frac{1}{5R_{th}^{cc}} + \frac{1}{5R_{th}^r} + \frac{1}{R_{th}^{c,v}}}$$

C'est à dire :

$$\frac{\Delta T}{\Delta T'} = \frac{R_{equi}}{R'_{equi}} = \frac{R_{th}^{cc} \times R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r} \left(\frac{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}{5 \times R_{th}^{cc} \times R_{th}^r} + \frac{1}{R_{th}^{c,v}} \right)$$

On en déduit que :

$$R_{th}^{c,v} = \frac{R_{th}^{cc} \times R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r} \times \frac{1}{\frac{\Delta T}{\Delta T'} - \frac{1}{5}}$$

AN :

$$R_{th}^{c,v} = 0,13 \text{ KW}^{-1}$$

Si vous avez des réponses plus élégantes, n'hésitez pas de nous les communiquer aux adresses suivantes :

cpgemaroc@yahoo.fr et lhaghazzaf@yahoo.fr