TD M5 : Théorème du moment cinétique et mouvement à force centrale

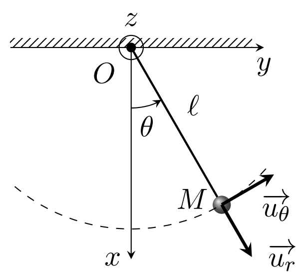
Questions de cours à savoir refaire

Théorème du moment cinétique (TMC)

Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point ou un axe : définition et propriétés. Moment d'une force par rapport à un point ou un axe. Théorème du moment cinétique par rapport à un point ou un axe fixe pour un point matériel.

1 Pendule simple à l'aide du TMC

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle $M(m)$ attachée au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ, l'autre extrémité étant reliée en O, centre d'un repère cartésien dont l'axe (Ox) coïncide avec la direction de l'accélération de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{u_x}$. On associe une repère polaire mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ dans la direction du pendule. Le pendule est lâché avec un angle initial θ_0, sans vitesse initiale.



1. Effectuer un bilan des forces s'appliquant en M puis calculer leurs moments par rapport à O.
2. En projetant le TMC dans les directions x et y, montrer à l'aide des conditions initiales que $L_{Ox} = L_{Oy} = 0$. En déduire que le mouvement est dans le plan (Oxy).
3. Calculer l'expression du moment cinétique de M en coordonnées cylindriques puis appliquer le TMC pour établir l'équation différentielle vérifiée par θ.
4. Retrouver cette équation différentielle avec le TMC projeté sur (Oz) et l'expression de $\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P})$ en fonction du bras de levier d.

Mouvement à force centrale et forces newtoniennes

Force centrale conservative. Conservation du moment cinétique et conséquences. Force newtonienne, énergie potentielle effective et types de trajectoires. Cas du mouvement circulaire. Satellite géostationnaire. Vitesses cosmiques.

2 Force centrale et énergie potentielle

On s'intéresse à point matériel de masse m soumis à une force centrale du type $\overrightarrow{F} = -\dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{u}_r$ où $r = OM$ est la distance au centre du repère et K une constante positive.

1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du point est une constante du mouvement. Quelle conséquences (il y en a deux) cette conservation implique-t-elle sur la trajectoire ?
2. On considère un mouvement quelconque, pas nécessairement circulaire. Établir l'expression de l'énergie cinétique E_c du point en fonction de m, $\dot{r}$, r et $\mathcal{C}$, la constante des aires.
3. Établir l'expression de l'énergie potentielle E_p du point puis en déduire l'expression de l'énergie mécanique du point en faisant apparaitre l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$.
4. Tracer l'allure de cette énergie potentielle effective et discuter les différents états possibles selon le signe de K.

3 Satellite en mouvement circulaire autour de la Terre

On considère un satellite supposé ponctuel de masse m, en mouvement circulaire par rapport à un astre de masse m', de centre O et de rayon R. La distance entre le satellite et le centre de l'astre vaut r et on a $r > R$. On note $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle. On se place dans le référentiel, supposé galiléen, lié à l'astre.

1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du satellite est une constante du mouvement. Quelle conséquences (il y en a deux) cette conservation implique-t-elle sur la trajectoire ?
2. Donner l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{grav}}}(M)$ créée par l'astre en un point M extérieur à l'astre et en déduire l'expression de l'énergie potentielle de gravitation du satellite (référence nulle à l'infini).

3. Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon r_0, exprimer à l'aide du PFD la vitesse v_0 du satellite, puis sa période de révolution T et son énergie mécanique E_m. Commenter le signe de E_m.

4 Vitesse de libération

Un vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre de masse m_A, décrite à la vitesse v_0. On allume brièvement le moteur, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre.

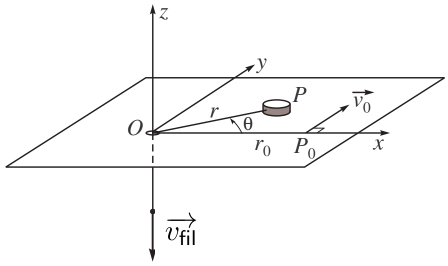
1. Évaluer la vitesse v_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre, en fonction de $\mathcal{G}$, m_A et r_0.

Le commandant de bord augmente brusquement la vitesse du vaisseau, la faisant passer à $5v_0$ en un temps très bref.

2. Évaluer la vitesse finale du vaisseau, à l'infini, en fonction de v_0.

Exercices

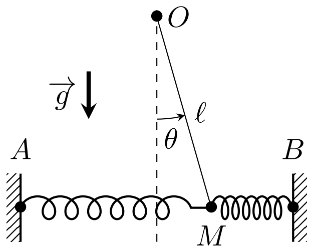
5 Point matériel tiré par une corde (*)



Un palet P de masse m, attaché à un fil, glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) percé d'un trou à l'origine O. Sa position est repérée par les coordonnées polaires r et θ, d'axe (Oz).
L'expérimentateur lance le palet, à la distance r_0 du point O, avec une vitesse angulaire initiale ω_0 (on prendra $\theta(t = 0) = 0$), et tire sur le fil à vitesse constante $\overrightarrow{v_{\text{fil}}} = -v_1\,\overrightarrow{u_z}$ vers le bas. On suppose que le fil reste toujours tendu.

1. Donner l'expression de $r(t)$ puis évaluer le moment cinétique du palet en fonction de ses coordonnées.
2. Appliquer le TMC au palet et en déduire l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\omega(t)$.
3. Calculer l'énergie cinétique du palet et commenter la limite de ce mouvement.

6 Pendule à deux ressorts (**)

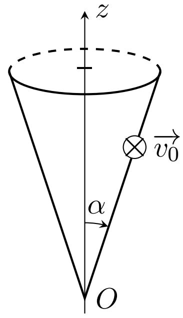


On considère un pendule constitué d'une tige de longueur ℓ rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité supérieure O. À l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. Par ailleurs, ce point M est relié à deux ressorts identiques (k, l_0) eux-mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est verticale. On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.

En appliquant le théorème du moment cinétique en O, montrer que, pour de petites oscillations, le mouvement est harmonique et que la périodes s'écrit $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}}$.

7 Mouvement sur un cône (***)

Une bille ponctuelle de masse m glisse sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle α et d'axe (Oz). La bille est lancée à une altitude h repérée sur l'axe (Oz) par rapport au sommet du cône O avec une vitesse v_0 horizontale (selon $\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées cylindriques).



1. Montrer que l'énergie mécanique E_m et que le moment cinétique scalaire L_{Oz} se conservent.
2. Calculer l'expression générale du moment cinétique projeté puis sa valeur initiale et en déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r, h, α et v_0.
3. Exprimer l'énergie mécanique sous forme d'une fonction de r et $\dot{r}$ et montrer que ce problème est équivalent à un problème "effectif" unidimensionnel dont on précisera l'énergie potentielle effectives $E_{p,\text{eff}}$.
4. Tracer l'allure de la courbe $E_{p,\text{eff}}(r)$. En déduire le mouvement ultérieur de la bille. En réalité, quelle caractéristique de la bille l'empêche d'atteindre le point O ?

8 Énergie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite (*)

On étudie le mouvement d'un satellite de masse $m = 6$ tonnes en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre (rayon $R_T = 6400$ km et masse $m_T = 6,0.10^{24}$ kg), ainsi que le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point P de la surface de la Terre.

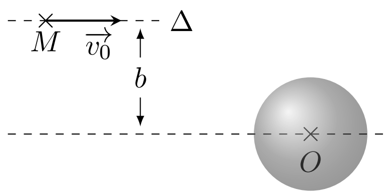
1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique du satellite en fonction de $\mathcal{G} = 6,7.10^{-11}$ u.s.i., m, m_T, R_T et z.

Pour lancer un satellite, il faut lui communiquer l'énergie mécanique $\Delta E_m = E_m - E_{m0}$ où E_{m0} est l'énergie qu'il a au point P. Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe fixe Nord-Sud à une vitesse angulaire Ω.

2. En déduire l'expression de la vitesse du point P dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ en fonction de Ω, du rayon terrestre et de la latitude du lieu λ.
3. Exprimer alors l'énergie mécanique initiale E_{m0} du satellite posé au sol au point P.
4. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tir Baïkonour au Kazakhstan ($\lambda_1 = 46^\circ$), Cap Canaveral aux USA ($\lambda_2 = 28,5^\circ$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_3 = 5,2^\circ$), lequel est le plus adapté ?
5. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse depuis Kourou.
6. Sachant que 1 kWh d'électricité coute environ 0,15€, estimer le coût théorique de la satellisation d'un kilogramme de charge utile. Ce coût est en réalité de l'ordre de 1000€/kg. Commenter.
7. Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

9 Distance minimale d'approche d'un météorite (**)

On repère un météorite M très éloigné de la Terre et on mesure sa vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On observe que $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ est portée par une droite Δ qui est située à une distance b du centre de la Terre. On suppose qu'à l'instant où on la repère (instant initial), le météorite est suffisamment éloigné que son énergie potentielle de gravitation avec la Terre est nulle. On note m la masse du météorite, m_T celle de la Terre, R_T le rayon du Soleil et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.



1. Montrer que l'énergie mécanique E_m du météorite est une constante et déterminer sa valeur initiale.
2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du météorite par rapport à O est une constante et déterminer sa valeur initiale. Rappeler les deux conséquences de la conservation du moment cinétique.
3. Définir des coordonnées polaires adaptées et établir l'expression du moment cinétique à chaque instant.
4. Établir l'expression de l'énergie mécanique et identifier l'énergie potentielle effective en fonction des constantes du problème et de la distance r.
5. Tracer l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature de la trajectoire du météorite.
6. Déterminer la distance minimale d'approche r_{min} en fonction des constantes du problème.
7. À quelle condition sur r_{min} le météorite n'ira pas s'écraser sur la surface de la Terre ?

10 Vecteur excentricité (***)

On se propose d'étudier le mouvement d'un satellite de masse m autour de la Terre. La seule force est l'attraction newtonienne de la Terre $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\mathcal{G}mm_T}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. Le satellite M de masse m est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ).

1. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathcal{G}m_T}{r^2\dot{\theta}}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$ puis intégrer cette équation sous la forme $\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{e})$ où $\overrightarrow{e}$ est un vecteur constant appelé vecteur excentricité et α s'exprime en fonction des paramètres et de la constante des aires $\mathcal{C}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_\theta}$ de deux façons différentes et en déduire l'équation polaire de la trajectoire sous la forme : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ où $e = ||\overrightarrow{e}||$ et $\theta - \theta_0$ est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{e}$ et le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ à un instant donné. On exprimera p en fonction de G, m_T et $\mathcal{C}$.
3. Montrer que l'on peut exprimer l'énergie mécanique E_m sous la forme : $E = k(e^2 - 1)$ où k s'exprime en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, $\mathcal{C}$ et m.

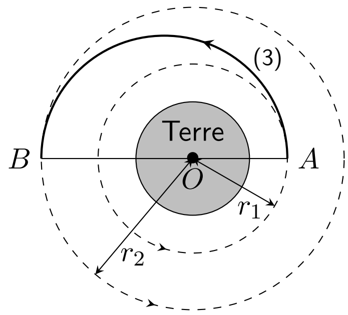
11 Freinage par l'atmosphère (**)

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre, de masse m_T et de rayon R_T. Un satellite situé sur une orbite à $1,0.10^3$ km d'altitude descend d'environ 2 m par jour. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère sur le satellite de masse m par une force de frottements fluides de la forme $\overrightarrow{F} = -\alpha m v \overrightarrow{v}$ où α est une constante. Cette force est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la trajectoire quasi-circulaire.

1. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite en mouvement circulaire à une altitude h en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, m et $r = R_T + h$.
2. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir l'expression de $\dot{r}$ et montrer que h ne peut que diminuer.
3. Combien de tours effectue le satellite en une journée ? En considérant que $\dot{r}$ est constant sur un tour, calculer la valeur de α.
4. Comment évolue la vitesse évolue-t-elle lorsque r diminue. Pourquoi est-ce surprenant ?

12 Transfert d'orbite (**)

On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6400 + 500$ km (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = 6400 + 36000$ km. Pour cela, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite ellipse de HOHMANN dont la Terre est un foyer. Données : masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}$ kg ; constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}$N.m^2.kg^{-1}.



1. Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.
2. Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_{m1} sur sa trajectoire basse.
3. Exprimer l'énergie mécanique du satellite E_{m3} sur l'ellipse de transfert.
4. Que faire pour que le satellite au point A passe de sa trajectoire circulaire initiale à l'ellipse de HOHMANN ? Exprimer et calculer l'écart de vitesse $\Delta v_A = v_{A(3)} - v_{A(1)}$ nécessaire.
5. Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ? Exprimer et calculer l'écart de vitesse $\Delta v_B = v_{B(2)} - v_{B(3)}$ nécessaire.
6. Exprimer et calculer la durée du transfert (entre A et B).

13 Force en $1/r^3$ (***)

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à une force d'expression $\overrightarrow{F} = -\dfrac{a}{r^3}\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques de centre O, a étant une constante positive.

À l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\overrightarrow{u_x}$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\alpha \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha \overrightarrow{u_y}$.

1. Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.
2. Montrer que la force $\overrightarrow{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $E_p(r)$ dont elle dérive (on prendre $E_p(\infty) = 0$).
3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{\mathsf{p,eff}}$ compte tenu des conditions initiales.
4. r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion.
5. La particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
   (a) Établir que $\dot{r} = \dfrac{r_0 v_0}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ En déduire que $\dot{r} = -r_0 v_0 f'(\theta)$ avec $f(\theta) = 1/r(\theta)$ et $f'(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$.
   (b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique en fonction de la variable f et de $f'(\theta)$.
   (c) En déduire que f vérifie l'équation : $f'' + \eta^2 f = 0$ où $\eta = \sqrt{1 - \dfrac{a}{m r_0^2 v_0^2}}$.
   (d) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.
   (e) Donner l'allure de la trajectoire pour $\eta = 0,1$, $\theta_0 = 0$ et $r_0 = 1$m.