

Signaux Physiques

CHAPITRE 5

Régime sinusoïdal

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction

Nous allons étudier la réponse des circuits soumis à un signal $i(t)$ ou $u(t)$ de **forme sinusoïdale**, on parle **de signaux alternatifs (AC)**. Ces signaux jouent un rôle très important dans les sciences physiques:

- Ils sont présents dans de nombreux domaines (oscillations mécaniques, physiques des ondes, optique, physique quantique, électricité...)
 - Ils sont faciles à générer. CIE transport l'énergie électrique sous formes de signaux sinusoïdaux. Dans les télécoms, les informations sont transportées par des ondes électromagnétiques de forme sinusoïdale (ou plutôt par une somme d'ondes sinusoïdales).
 - On montre en mathématiques (analyse de Fourier) que tout signal périodique peut s'écrire comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales d'où le rôle universel joué par ces dernières. De plus, elles sont faciles à manipuler (dériver, intégrer...).
-

Définitions (1)

□ Un circuit électrique est en **régime sinusoïdal permanent** quand **tensions et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence**. Le circuit électrique doit être linéaire (c'est-à-dire composé de dipôles linéaires) et alimenté en permanence par une source d'énergie électrique sinusoïdale. Dans ce régime tous les signaux transitoires n'existent plus, seul le régime permanent existe.

□ **Une grandeur sinusoïdale** s'écrit :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

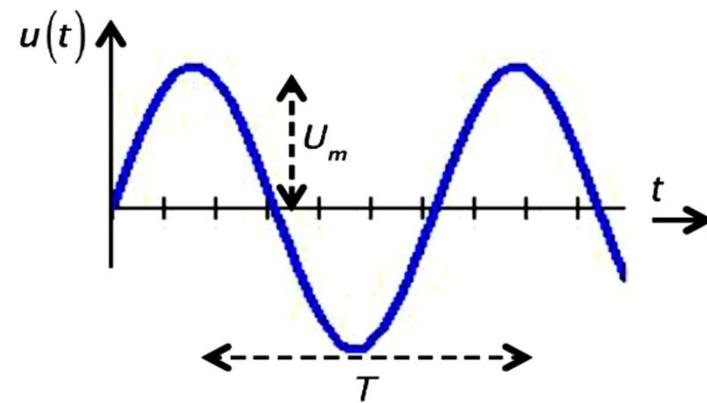
X_m = amplitude complexe ;

ω = pulsation en rad. s^{-1} ;

$\omega t + \varphi$ = la phase à l'instant t ;

φ est égal à la phase à l'origine.

La période est $T = 2\pi/\omega$



Définitions (2)

□ Valeur moyenne

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\langle \cos x \rangle = \langle \sin x \rangle = 0$$

□ Valeur efficace

Par définition **la valeur efficace d'un courant périodique**, notée I_{eff} (ou I_{RMS} en anglais), est le courant continu qui produirait **la même puissance moyenne** à travers une résistance qu'en régime périodique quelconque:

$$I_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$U_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Quelques rappels

- $|\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2|$ et $|\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| / |\underline{Z}_2|$
- $\text{Arg}(\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2) = \text{Arg}(\underline{Z}_1) + \text{Arg}(\underline{Z}_2)$
- $\text{Arg}\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = \text{Arg}(\underline{Z}_1) - \text{Arg}(\underline{Z}_2)$
- $\text{Arg}(a > 0) = 0$ et $\text{Arg}(a < 0) = \pi$
- $\text{Arg}(ja)(a > 0) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Arg}(ja)(a < 0) = -\frac{\pi}{2}$
- Si $\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}|e^{j\theta}$, alors :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} ; \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Re(\underline{Z})}{|\underline{Z}|} ;$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Im(\underline{Z})}{|\underline{Z}|} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\Im(\underline{Z})}{\Re(\underline{Z})}$$

Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale (1)

La représentation complexe de $x(t)$ est la fonction complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$$

$\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe, son module est : $X_m = |\underline{X_m}|$,
son argument est : $\varphi = \arg \underline{X_m}$

Définition de l'amplitude complexe: $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$

$$\underbrace{u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\underline{U} = U_m e^{j\varphi}}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$$

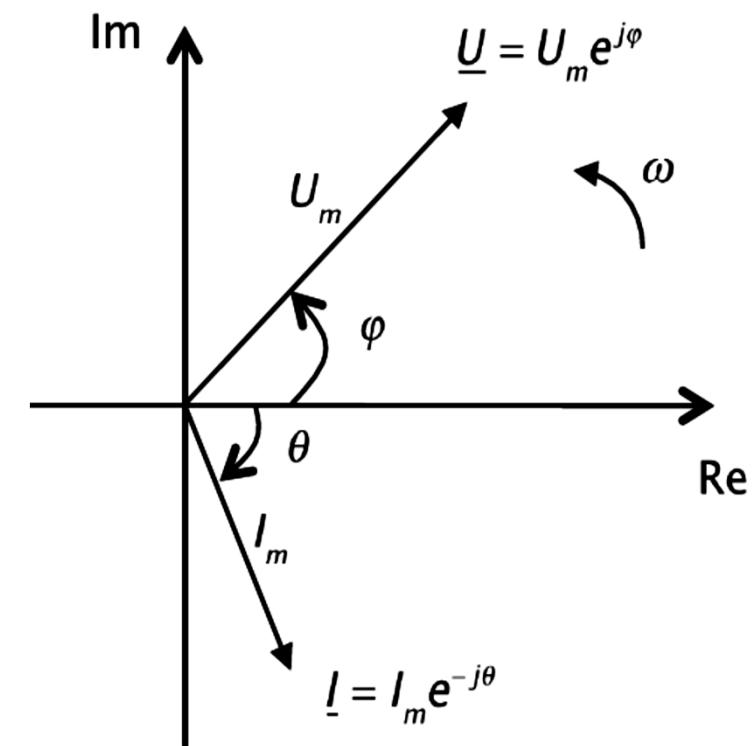


$$u(t) = \operatorname{Re}(\underline{U} e^{j\omega t})$$

Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale (2)

Nous verrons que dans un circuit en régime sinusoïdal forcé, **toutes les grandeurs électriques oscillent à la même pulsation ω en régime permanent**. Par contre **l'amplitude** et **la phase** seront propres à chaque grandeur, c'est pourquoi la grandeur pertinente à étudier est **l'amplitude complexe $X_m e^{j\varphi}$** .

Notre travail principal sera la détermination de l'amplitude X_m et de la phase φ . L'amplitude complexe a donc une amplitude (une norme) et une phase (direction), elle se comporte comme un vecteur. On peut donc représenter une amplitude complexe par un vecteur dans un diagramme dit de Fresnel.



L'amplitude complexe U est une « photo » à l'instant $t = 0$ du nombre complexe $U_m e^{j\omega t}$, dont la partie réelle correspond à $u(t)$. Ainsi, dans le plan complexe, $U_m e^{j\omega t}$ a un mouvement de rotation à la vitesse angulaire ω dans le sens trigonométrique.

Linéarité, dérivation et intégration dans le domaine complexe (1)

□ Linéarité

$$x_1(t) = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) ; \quad x_2(t) = X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1(t) + x_2(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = X_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + X_{2m} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\underline{X_m} = \underline{X_{1m}} + \underline{X_{2m}}}$$

L'addition de fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est équivalent à l'addition des amplitudes complexes en notation complexe.

□ Dérivation

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= j\omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Linéarité, dérivation et intégration dans le domaine complexe (2)

$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}(t)}$$

Dériver par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $j\omega$ en notation complexe.

□ Intégration

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \int x(t) dt = \frac{1}{\omega} X_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega} X_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega} X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega} X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)}$$

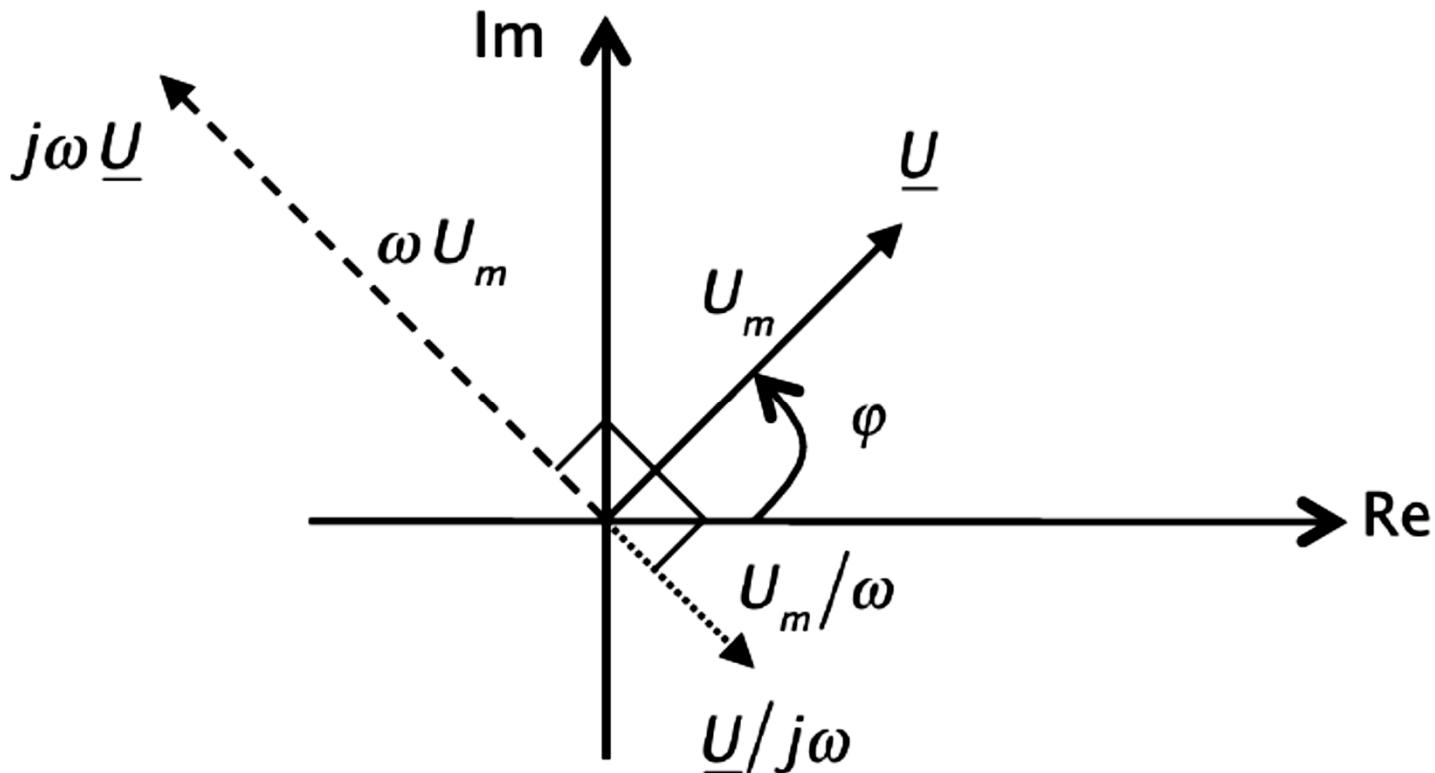
Intégrer par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $1/j\omega$ en notation complexe.

Linéarité, dérivation et intégration dans le domaine complexe (3)

$$\begin{array}{ccc} \frac{du(t)}{dt} & \Leftrightarrow & j\omega \underline{U} \\ \text{REPRESENTATION TEMPORELLE} & & \text{REPRESENTATION COMPLEXE} \\ \\ \int u(t) dt & \Leftrightarrow & \frac{\underline{U}}{j\omega} \\ \text{REPRESENTATION TEMPORELLE} & & \text{REPRESENTATION COMPLEXE} \end{array}$$

Linéarité, dérivation et intégration dans le domaine complexe (4)

Sur le diagramme de Fresnel ci-dessous on a représenté les amplitudes complexes \underline{U} , $j\omega \underline{U}$ et $\underline{U}/j\omega$. $j\omega \underline{U}$ est avance de $\pi/2$ sur \underline{U} . $\underline{U}/j\omega$ est en retard de $\pi/2$ sur \underline{U} .



Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (1)

□ On appelle **impédance complexe** :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e} = \frac{\underline{U}_m e^{j\varphi_u}}{\underline{I}_m e^{j\varphi_i}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} e^{j\varphi_u} e^{-j\varphi_i} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arg \underline{Z}$$

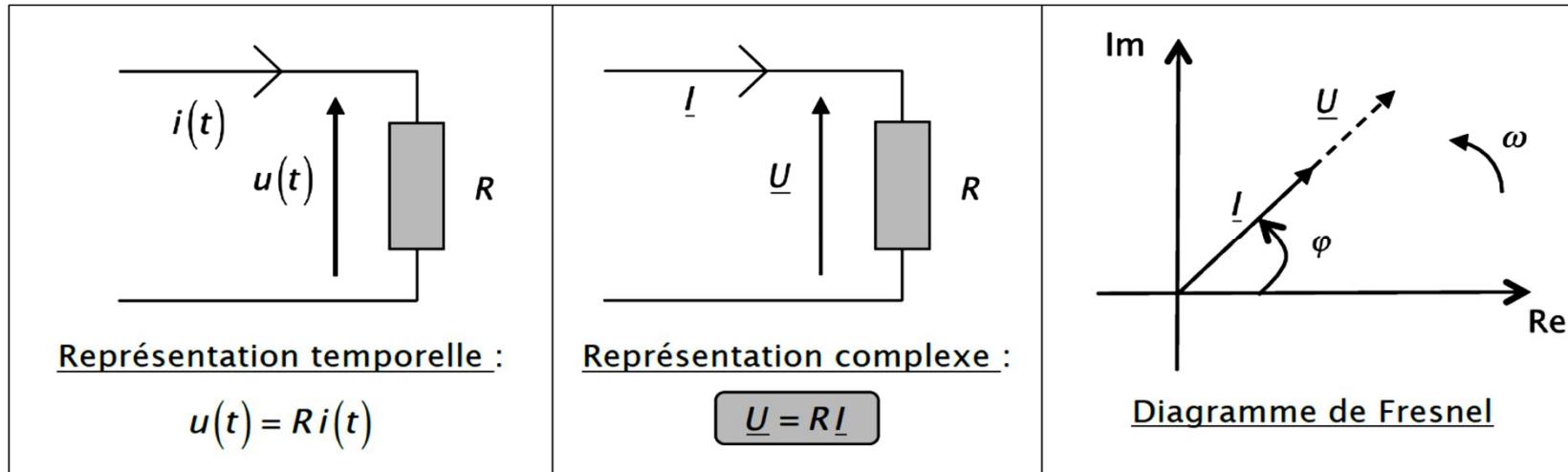
φ : déphasage entre u et i

□ L'**admittance complexe** est l'inverse de l'impédance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} e^{-j\varphi}$$

Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (2)

□ Résistance

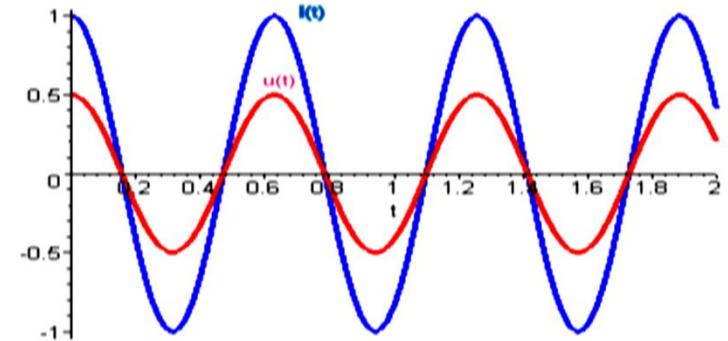


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$$

$$u(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{U}_m = R \underline{I}_m$$

$$\underline{Z}_R = R \Rightarrow Z_R = R$$

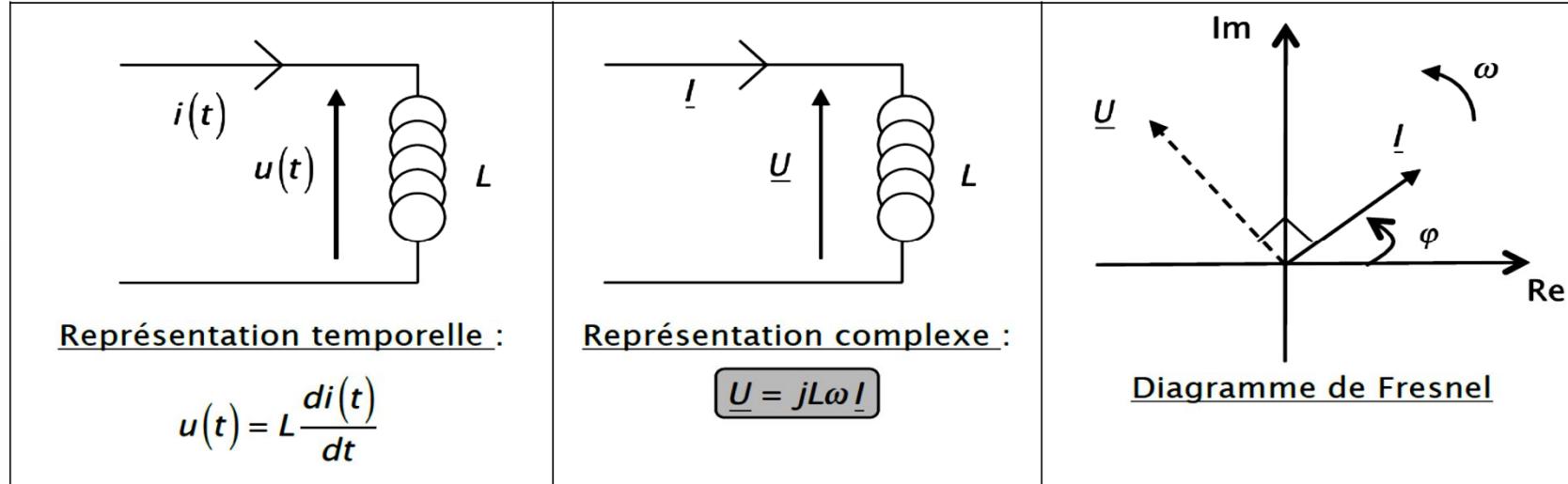
$$\varphi_R = 0$$



$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase

Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (3)

□ Bobine

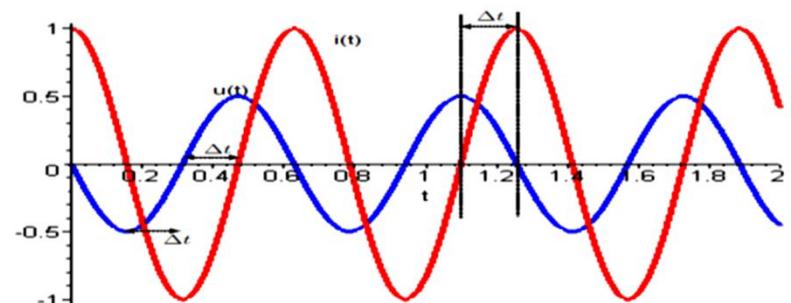


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi}$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \underline{U_m} = jL\omega \underline{I_m}$$

$$\underline{Z_L} = jL\omega \Rightarrow Z_L = L\omega$$

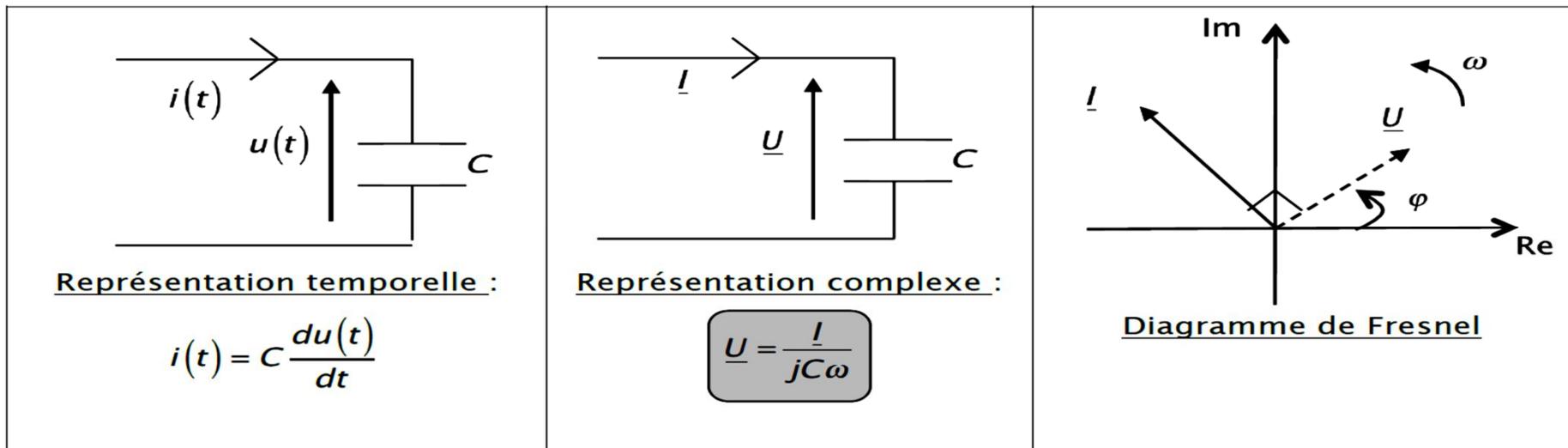
$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$$



$\varphi_L > 0 \Rightarrow u(t)$ est en quadrature avance par rapport à $i(t)$

Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (4)

□ Condensateur

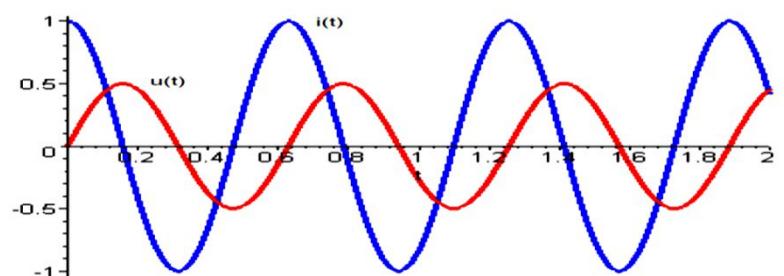


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi}$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \underline{U_m} = \frac{1}{jC\omega} I_m$$

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{C\omega}$$

$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$



$\varphi_C < 0 \Rightarrow u(t)$ est en quadrature retard par rapport à $i(t)$

Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (5)

Récapitulatif

Elément	Représentation temporelle	Représentation complexe
R	$u = Ri$	$\underline{U} = R \underline{I}$
L	$u = L \frac{di}{dt}$	$\underline{U} = jL\omega \underline{I}$
C	$i = C \frac{du}{dt}$	$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$

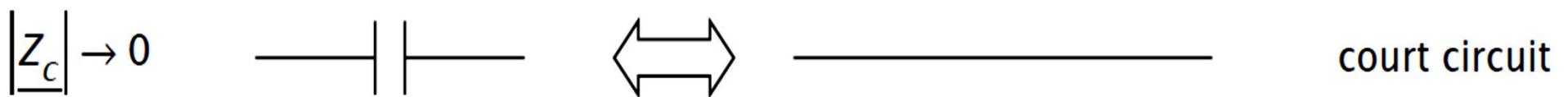
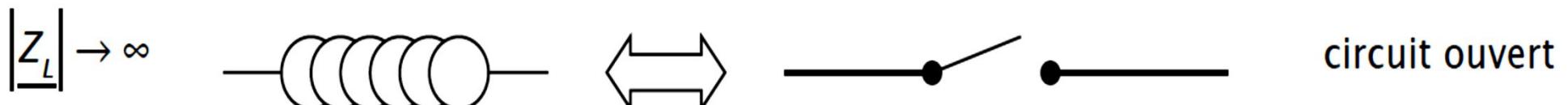
Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (6)

Récapitulatif

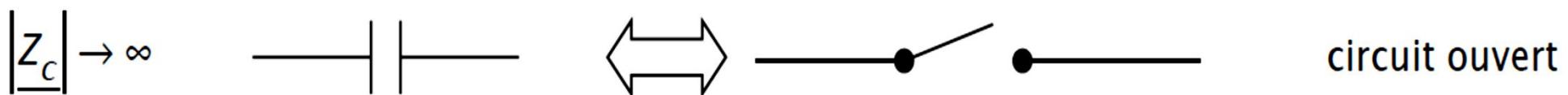
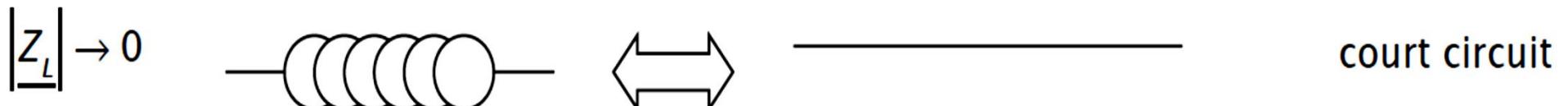
Elément	Impédance	Admittance
R	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$
L	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$
C	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$

Loi d'Ohm, admittance et impédance en notation complexe (7)

- $\omega \rightarrow \infty$ (haute fréquence)



- $\omega \rightarrow 0$ (basse fréquence)



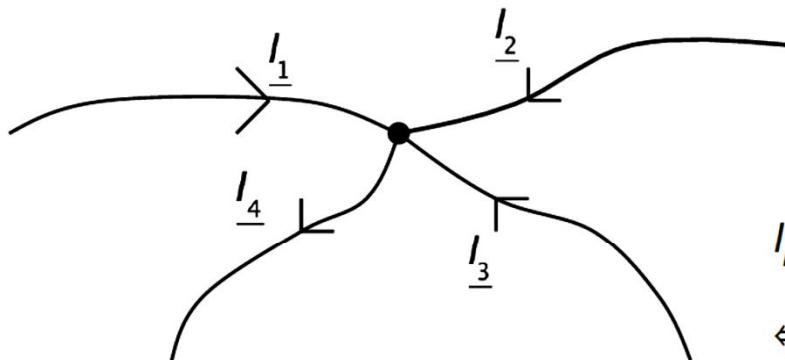
Théorèmes généraux en notation complexe (1)

Dans ce paragraphe, tous les théorèmes généraux énoncés dans le chapitre 2 concernant des circuits purement résistifs sont repris, et généralisés pour des circuits comportant résistances, bobines et condensateurs. Nous allons vérifier qu'en fait, tous les théorèmes précédemment rencontrés se généralisent très bien en **remplaçant les résistances R par des impédances Z.**

Théorèmes généraux en notation complexe (2)

□ Loi des nœuds

$$\sum_n \varepsilon_n \underline{I_n} = 0 \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_n = +1 \text{ si } \underline{I_n} \text{ arrive au noeud} \\ \varepsilon_n = -1 \text{ si } \underline{I_n} \text{ repart du noeud} \end{cases}$$



$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} - \underline{I_4} = 0$$

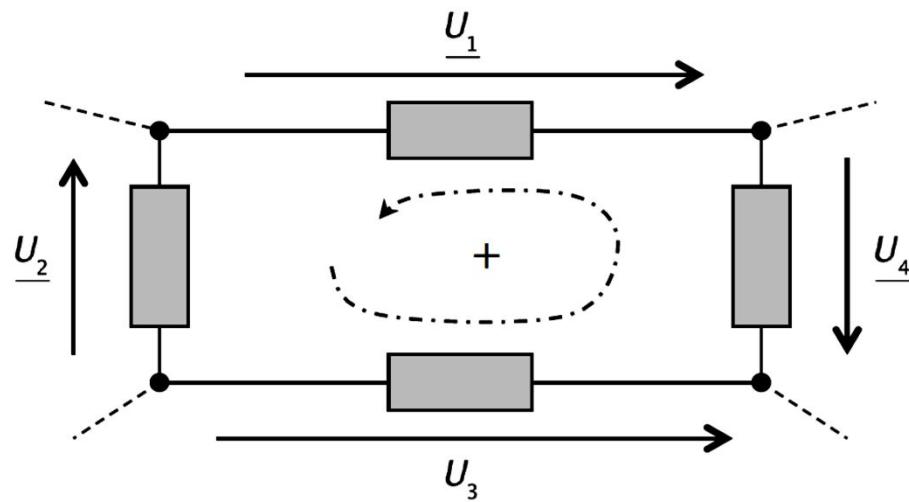
En effet si $i_1 = I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \dots,$

$$I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \dots - I_{m4} \cos(\omega t + \varphi_4) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(I_{m1} e^{j(\omega t + \varphi_1)} \dots - I_{m4} e^{j(\omega t + \varphi_4)}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left[\underline{I_1} \dots - \underline{I_4}\right] e^{j\omega t} = 0 \Leftrightarrow \underline{I_1} \dots - \underline{I_4} = 0.$$

Théorèmes généraux en notation complexe (3)

□ Loi des mailles

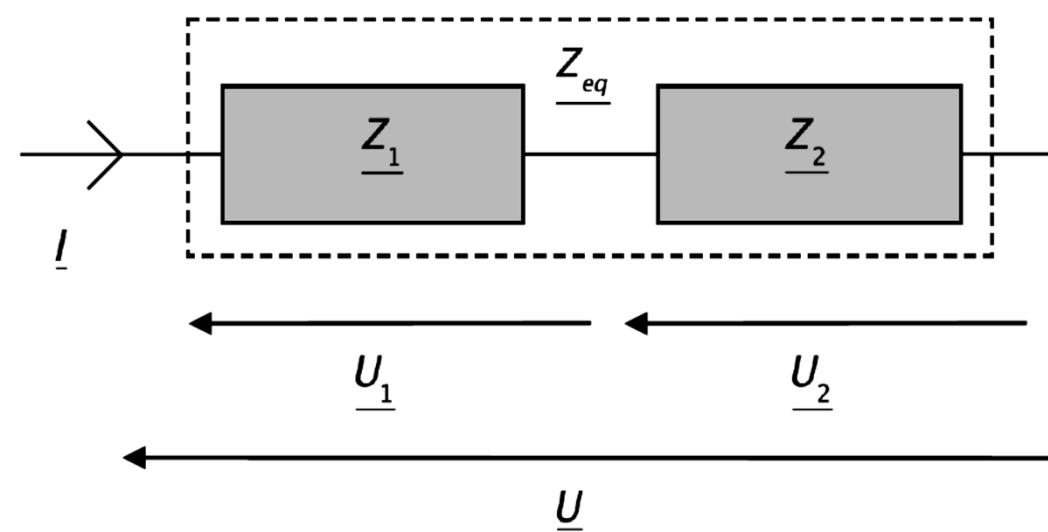
$$\sum_n \varepsilon_n \underline{U}_n = 0 \text{ avec} \begin{cases} \varepsilon_n = +1 \text{ si } \underline{U}_n \text{ orienté dans le sens de la maille} \\ \varepsilon_n = -1 \text{ si } \underline{U}_n \text{ orienté dans le sens contraire de la maille} \end{cases}$$



$$-\underline{U}_1 - \underline{U}_2 - \underline{U}_4 + \underline{U}_3 = 0$$

Théorèmes généraux en notation complexe (4)

□ Association en série et Pont diviseur de tension



$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \right) \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \underline{I}$$

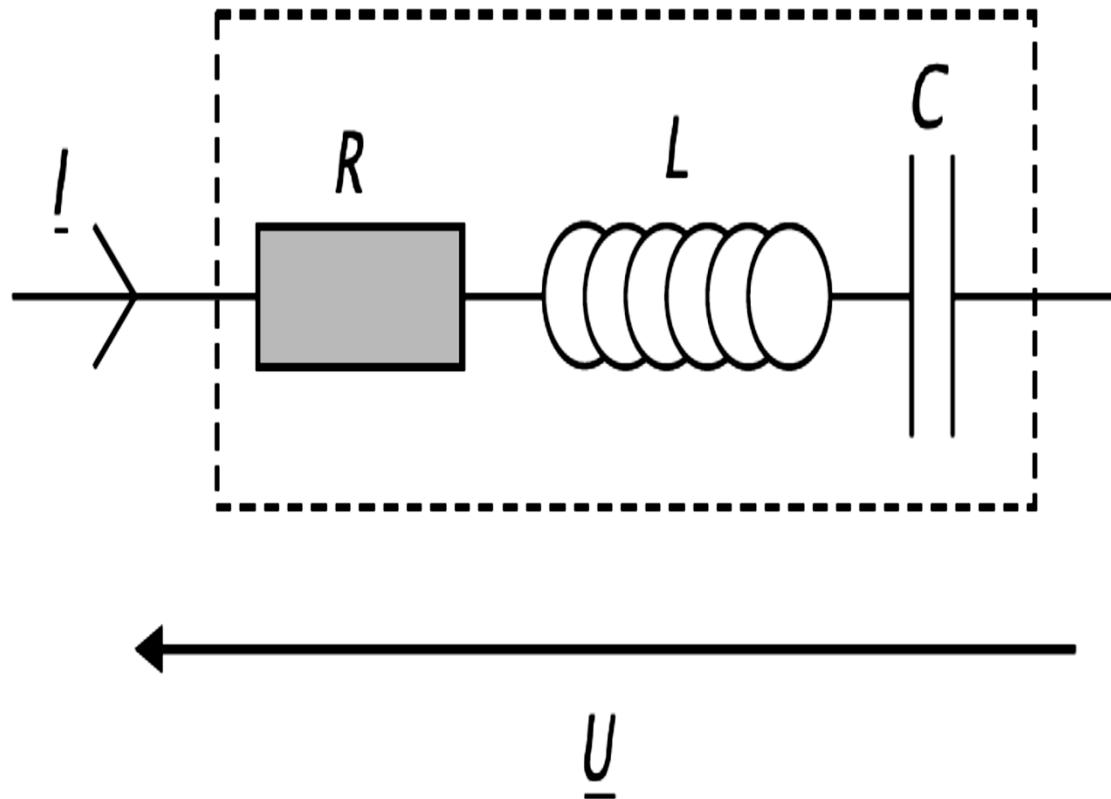
La généralisation à N impédances en série est immédiate :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N = \sum_{n=1}^N \underline{Z}_n$$

Pont diviseur de tension:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

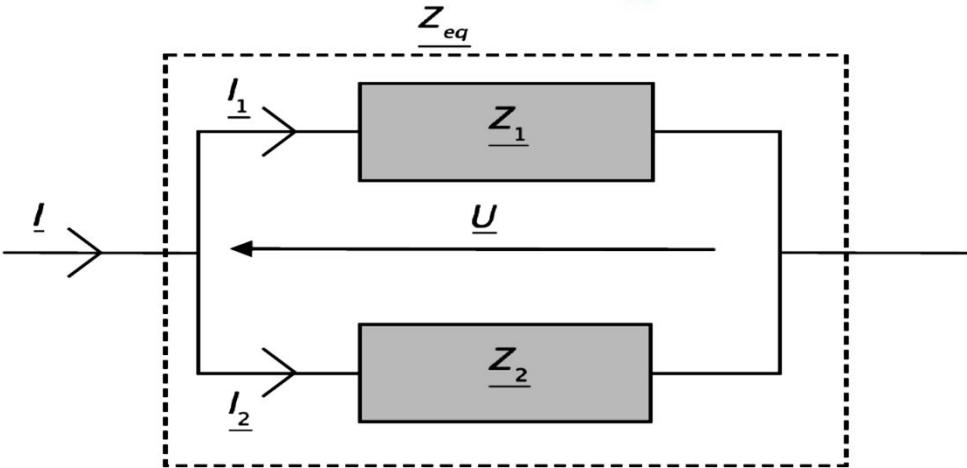
Théorèmes généraux en notation complexe (5)



$$\underline{Z}_{eq} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Théorèmes généraux en notation complexe (6)

□ Association en parallèle et Pont diviseur de courant



$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N = \sum_{n=1}^N \underline{Y}_n$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_n}$$

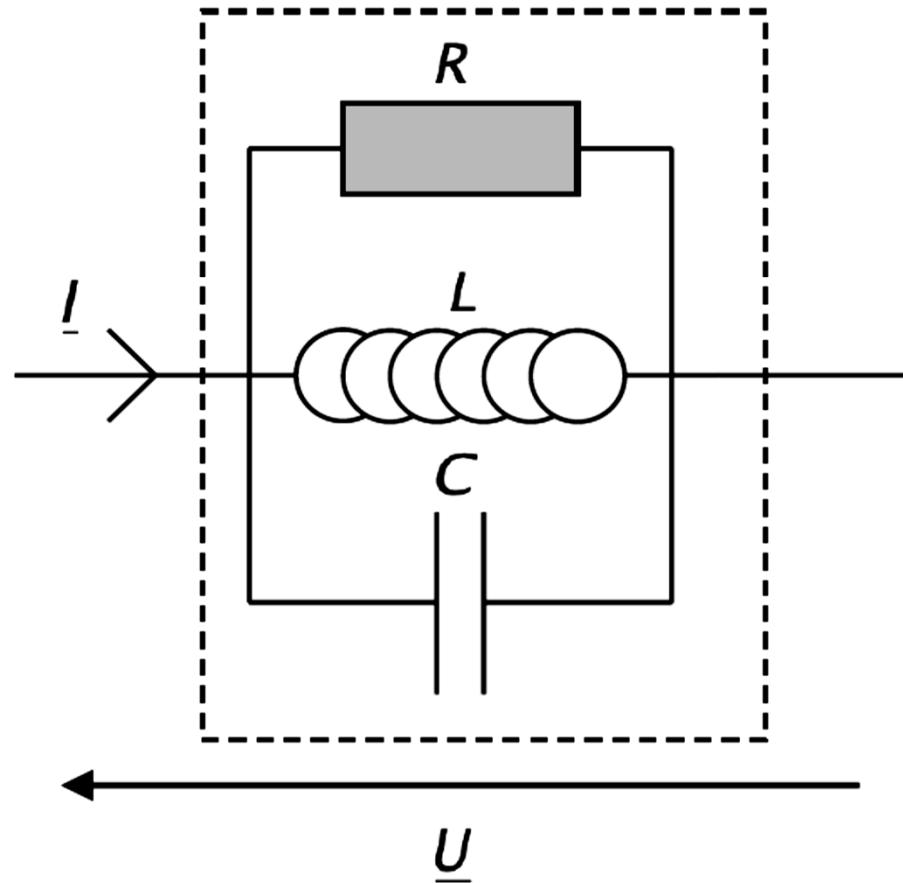
$$I = I_1 + I_2 = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} = \underbrace{\left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \right)}_{\underline{Y}_{eq}} \underline{U} = \underline{Y}_{eq} \underline{U}$$

Pont diviseur de courant:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}$$

Théorèmes généraux en notation complexe (7)



$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (1)

□ Définitions

✓ **Un oscillateur forcé** est un oscillateur soumis à une excitation $e(t)$ variable dans le temps et permanente, son comportement étant traduit par l'équation différentielle de la forme ci-dessous, dont la solution $s(t)$ décrit le **régime forcé** adopté par l'oscillateur, autrement dit **sa réponse à l'excitation**.

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e(t)$$

Solutions de la forme : $s(t) = s_H(t) + s_P(t)$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (2)

- ✓ $s_H(t)$ est la solution générale de l'équation homogène, dont il a été démontré qu'elle s'amortit de façon exponentielle, avec une constante de temps τ (où $\tau = 2Q/\omega_0$), cette solution correspond au **régime transitoire de l'oscillateur libre amorti**.
 - ✓ $s_P(t)$ est une solution particulière de même nature que l'excitation du second membre. Au bout de quelques τ , on peut considérer le régime transitoire comme terminé, $s(t)$ se limite alors à la solution particulière $s(t) = S_P(t)$. L'oscillateur a alors atteint son **régime forcé permanent**.
 - ✓ Lorsque l'excitation est sinusoïdale, alors la réponse est sinusoïdale de même fréquence et le régime forcé est dit **régime forcé harmonique**
-

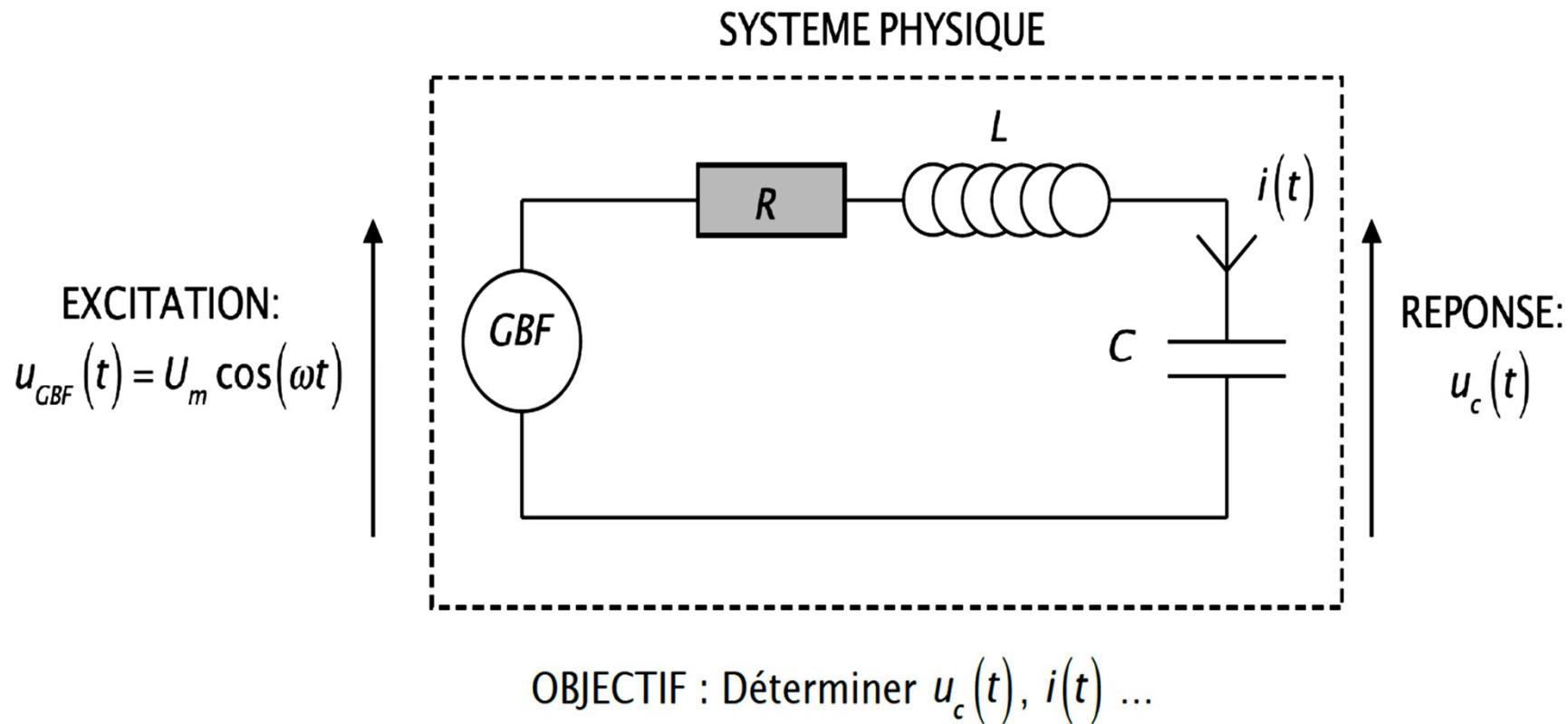
Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (3)

□ Propriétés

- ✓ **Un oscillateur forcé** en régime permanent harmonique oscille à la période imposée par l'oscillateur, contrairement à un régime libre où la période ou pseudo-période est caractéristique du système.
 - ✓ A une excitation de la forme $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, la réponse est de la forme: $s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$
-

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (4)

□ Position du problème



Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (5)

□ Equation intégro-différentielle qui gouverne l'intensité

La loi des mailles nous donne :

$$u_{GBF}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

On dérive cette équation par rapport au temps :

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \underbrace{\left[\frac{R}{L} \right]}_{\omega_0/Q} \frac{di(t)}{dt} + \underbrace{\left[\frac{1}{LC} \right]}_{\omega_0^2} i(t) = -\frac{\omega}{L} U_m \sin(\omega t)$$

Solution: $i(t) = i_{RT}(t) + i_{RP}(t)$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (6)

$i_{RT}(t)$ = solution générale sans second membre, **solution du régime transitoire (libre)**

DÉJÀ VU:

- $Q > \frac{1}{2}$ régime pseudo-périodique
- $Q < \frac{1}{2}$ régime apériodique
- $Q = \frac{1}{2}$ régime critique

ce régime va disparaître au bout de quelques $\tau \equiv \frac{L}{R}$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (7)

$i_{RP}(t)$ = solution particulière avec second membre, **solution du régime permanent (forcé)**

NOUVEAU : Quelle solution prendre ?

Le générateur va imposer à toutes les grandeurs du circuit (tension, intensité) d'osciller à la même pulsation que lui donc :

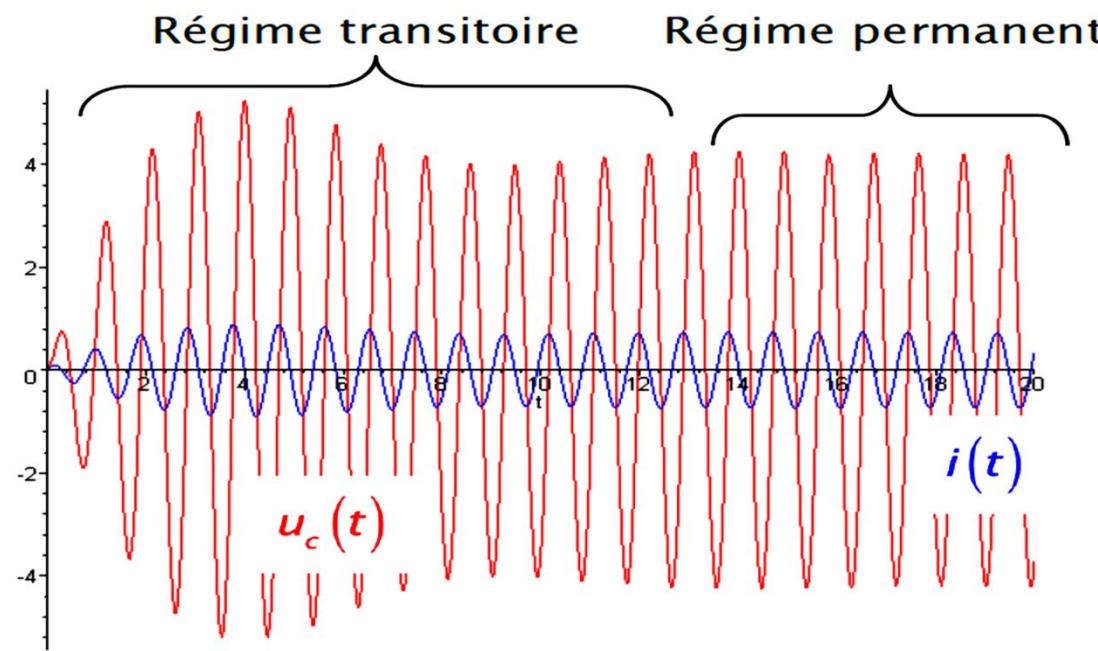
$$i_{RP}(t) = \boxed{I_m} \cos(\omega t + \boxed{\varphi})$$

ω : connue, imposée par la générateur

I_m et φ : inconnue, à déterminer

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (8)

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser uniquement à la détermination de $i_{RP}(t)$ que nous noterons simplement $i(t)$. En effet lorsque $t > \tau$, $i(t) \cong i_{RP}(t)$, nous sommes alors en régime permanent dont l'étude est l'objectif principal de ce chapitre.



Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (9)

□ Recherche de la solution du régime permanent (forcé)

REPRESENTATION TEMPORELLE

$$u_{GBF}(t) = U_m \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$\int dt$$

$$u_{GBF}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{i(0)}^{i(t)} i(t) dt$$

REPRESENTATION COMPLEXE

$$\underline{U} = U_m e^{j\theta} = U_m$$

$$\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$$

$$\times j\omega$$

$$\times \frac{1}{j\omega}$$

$$\underline{U} = RI + jL\omega I + \frac{1}{jC\omega} I$$

Equation différentielle, difficile à résoudre

Inconnue $i(t)$

Equation algébrique, facile à résoudre

Inconnue \underline{I}

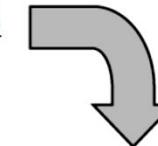
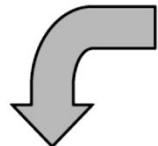
Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (10)

Nous allons donc résoudre l'équation algébrique :

$$R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \underline{U} \Rightarrow \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = \underline{U}$$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)}}$$

EGALITE ENTRE DEUX NOMBRES COMPLEXES



Egalité des modules :

$$I_m(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

Egalité des arguments :

$$\tan \varphi(\omega) = -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (11)

En faisant apparaître les grandeurs suivantes :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \text{Pulsation propre du circuit}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} : \text{Facteur de qualité (sans unité)}$$

$$x = \omega/\omega_0 : \text{Pulsation réduite (sans unité)}$$

On a:

$$I_m(x) = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi(x) = -Q \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (12)

□ Résonance en intensité

- On constate que pour $x = 1$ ($\omega = \omega_0$), I_m atteint sa valeur maximale, quelque soit la valeur de Q , on parle de **RESONANCE EN INTENSITE**.

$$\left. \begin{array}{l} I_m(\omega = \omega_0) \equiv I_m^{\max} = \frac{U_m}{R} \\ \varphi(\omega = \omega_0) = 0 \end{array} \right\} \text{quelque soit la valeur de } Q$$

- On appelle **BANDE PASSANTE** l'intervalle $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ou ($\Delta x = x_2 - x_1$) tel que:

$$I_m \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (13)

En résolvant l'équation on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \\ x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \end{array} \right.$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$$
$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

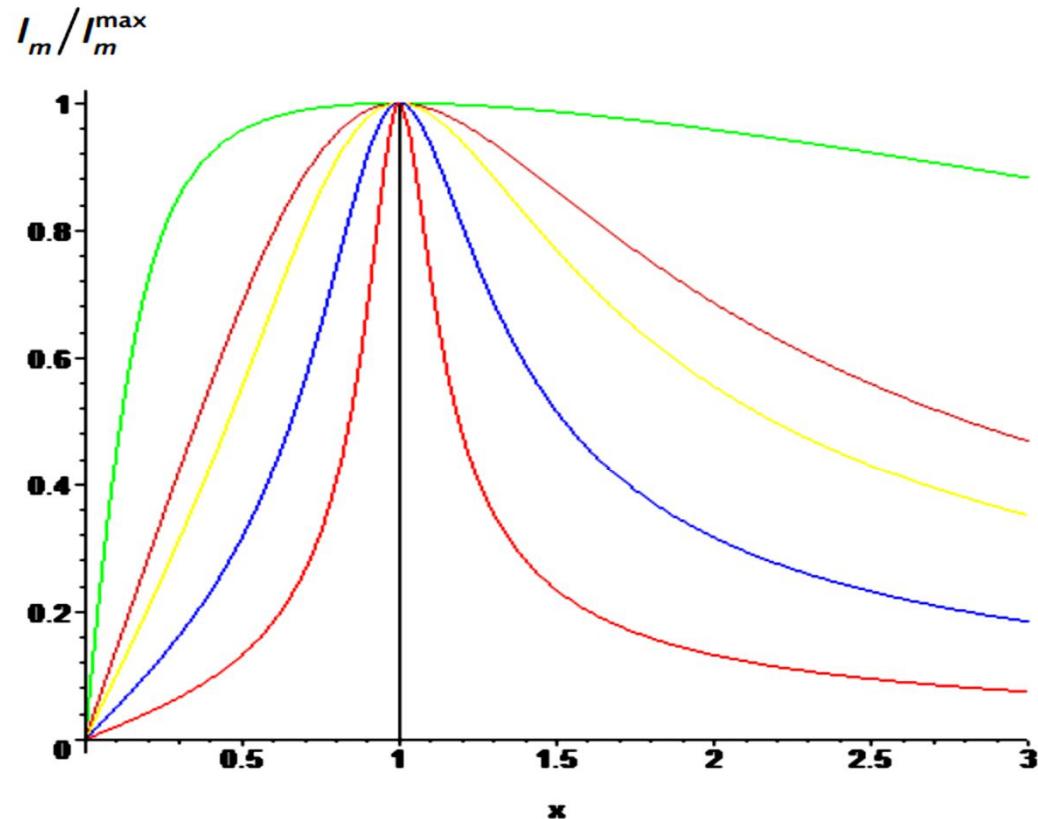
On constate que plus le facteur de qualité est grand (faible amortissement) plus la résonance est étroite.

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (14)

□ Représentations graphiques de l'amplitude et de la phase

a) Graphe de $I_m(x)$

- Quand $x \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $I_m \rightarrow 0$.
- Quand $x \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$, $I_m \rightarrow 0$.
- Quand $x \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow \omega_0$, $I_m = \frac{U_m}{R}$.



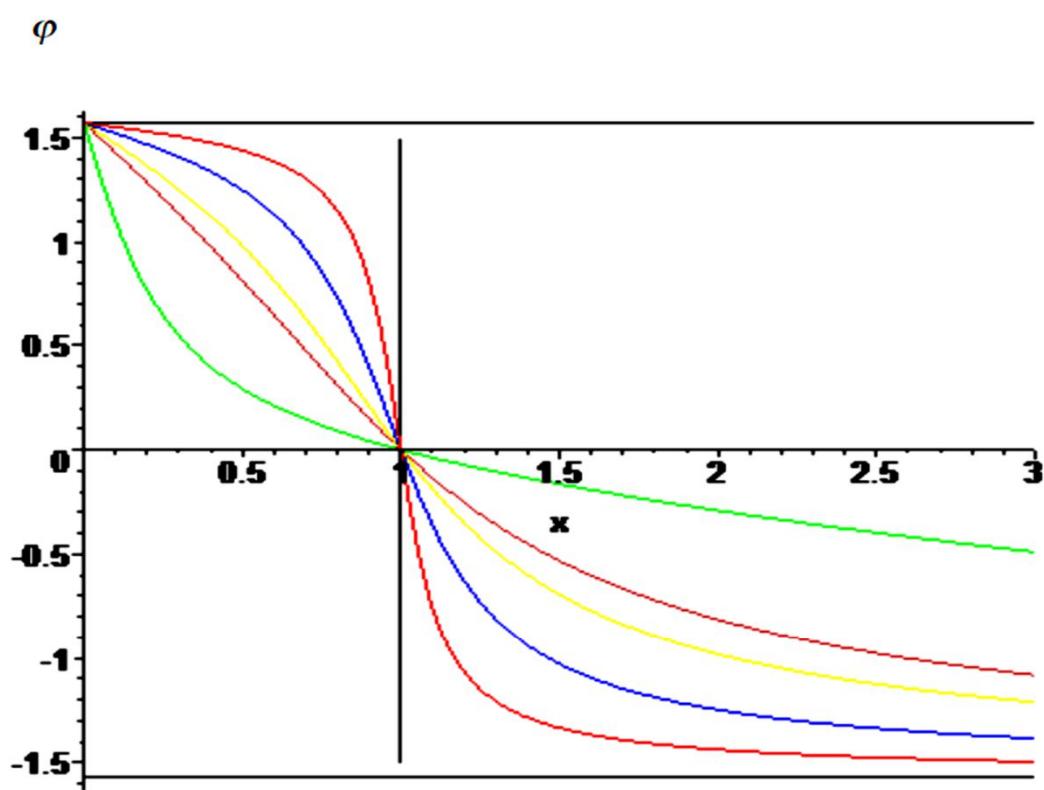
$$Q = 5; 2; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0,2$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (15)

b) Graphe de $\varphi(x)$

- Quand $x \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
- Quand $x \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.
- Quand $x \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow \omega_0$, $\varphi = 0$.
- Quand $x = x_{1,2}$, $\varphi = -\arctan(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{4}$.

Pour chaque valeur de $\omega \rightarrow \omega_0$, il y a une valeur de x_1 et x_2 différente.



$$Q = 5; 2; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0,2$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (16)

Le phénomène de résonance est très général en physique (mécanique, optique, physique des particules). Il y a résonance quand on excite un système avec une fréquence identique à sa fréquence propre.

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (17)

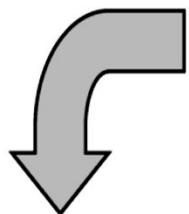
□ Résonance en tension

Nous cherchons à présent à déterminer $u_c(t)$ aux bornes du condensateur sous la forme $u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c)$. Il faut donc trouver U_{cm} et φ_c qui dépendant de la pulsation ω du générateur. Nous passons en représentation complexe

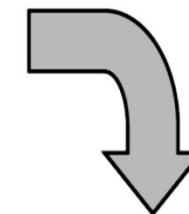
$$u_C(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c) \Rightarrow \underline{u}_C(t) = U_{cm} e^{j\varphi_c} e^{j\omega t} = \underline{U}_{cm} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \underline{i} = jC\omega \underline{u}_C \Rightarrow \underline{u}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} \\ &\Rightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \frac{\underline{U}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{\underline{U}}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \end{aligned}$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (18)



EGALITE ENTRE DEUX NOMBRES COMPLEXES



Egalité des modules :

$$U_{cm}(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Egalité des arguments :

$$\tan \varphi_c(\omega) = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$$

Il y a **RESONANCE EN TENSION** aux bornes du condensateur quand U_{cm} est maximale

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (19)

Cherchons si U_{Cm} présente un extremum ;

$$\frac{dU_C}{dx} = -E \frac{x \left[2(x^2 - 1) + \frac{1}{Q^2} \right]}{\left[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right]^{3/2}}$$

- U_{Cm} présente en $x = 0 \Rightarrow \omega = 0$ (signal continu) un extremum.
- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: U_{Cm} présente un extremum en

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (20)

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance en tension et $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ ou $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas de résonance en tension.

Contrairement à la résonance en intensité, la résonance en tension n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. De

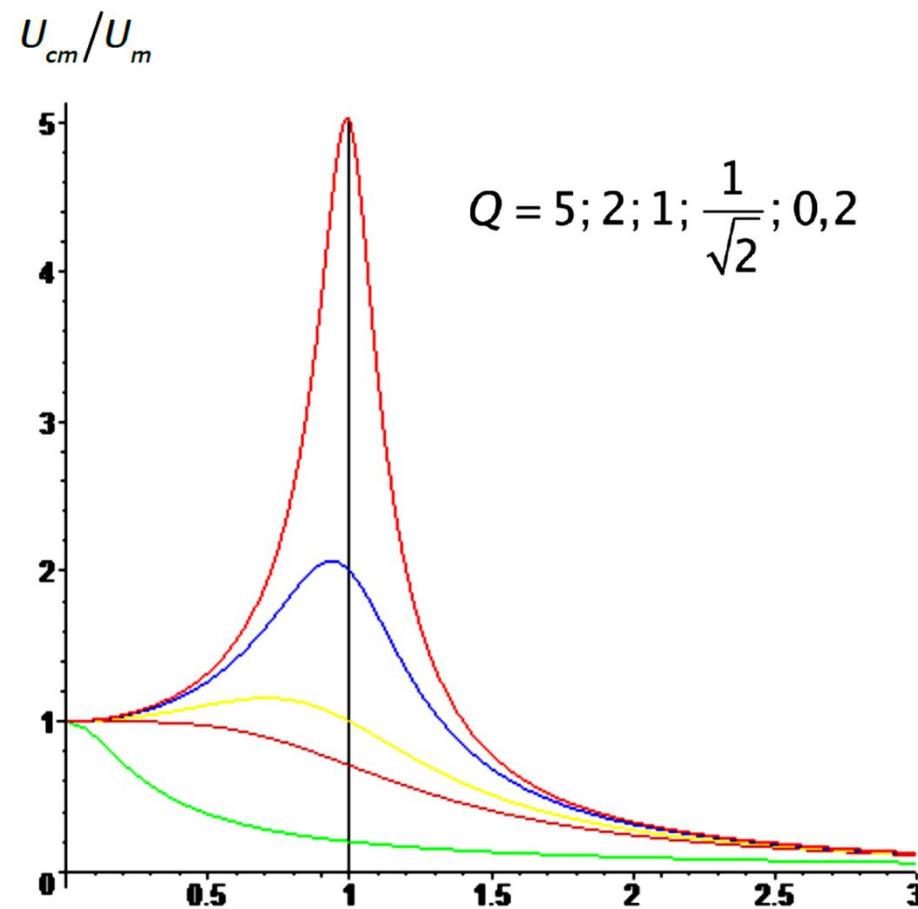
plus la pulsation de résonance ω_r dépend du facteur de qualité Q .

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (21)

□ Représentations graphiques de l'amplitude et de la phase

Graphe de $U_{cm}(x)$

- Quand $x \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $U_{cm} \rightarrow U_m$.
- Quand $x \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$, $U_{cm} \rightarrow 0$.
- Quand Q augmente et $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x_r \rightarrow 1$



Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (22)

Graphe de $\varphi(x)$



Il y a une subtilité ici car la fonction tan est défini à π près.

- Quand $x \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $\varphi_c \rightarrow 0$.

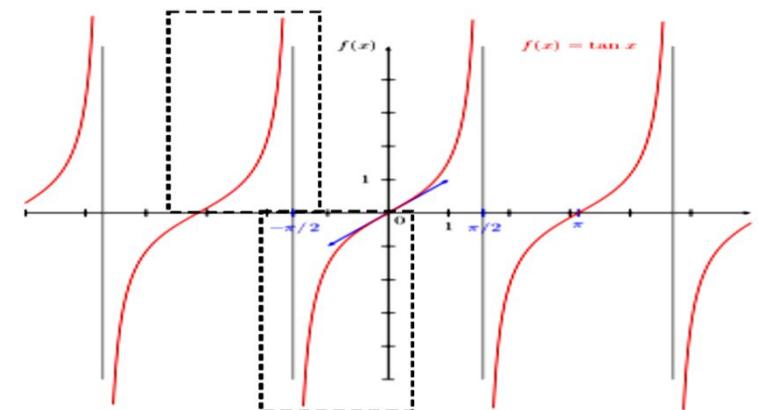
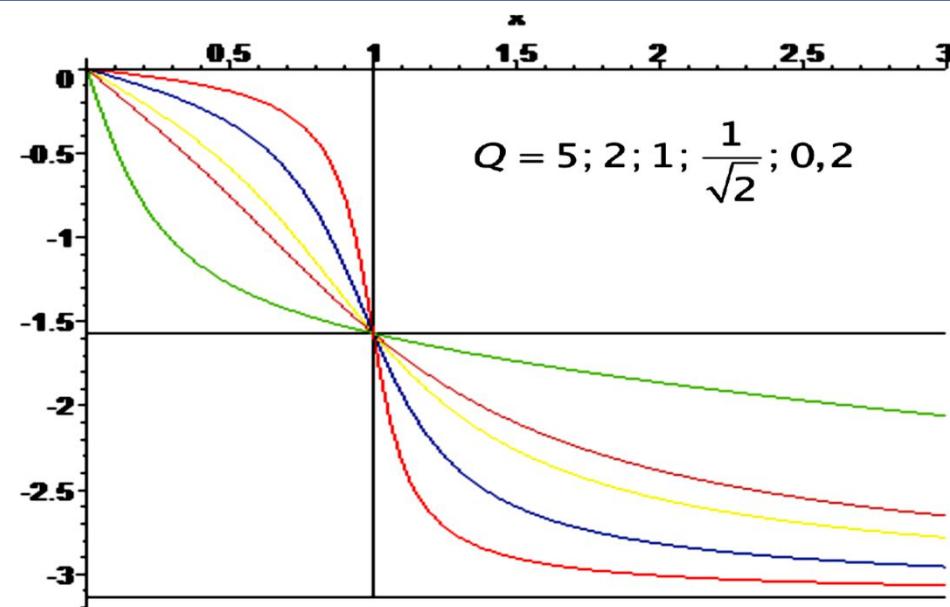
$0 \leq x \leq 1$ ainsi $\tan \varphi_c \leq 0$ donc

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_c \leq 0.$$

- Quand $x \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$, $\boxed{\varphi_c \rightarrow -\pi}$!

$x \geq 1$ ainsi $\tan \varphi_c \geq 0$. On choisit le

domaine $-\pi \leq \varphi_c \leq -\frac{\pi}{2}$ car φ_c doit être continue (cf figure ci-dessous).



Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (23)

- On appelle **BANDE PASSANTE** l'intervalle $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ou $(\Delta\omega = x_2 - x_1)$ tel que:

$$U_C \geq \frac{U_{C(\max)}}{\sqrt{2}}$$

$$U_C \geq \frac{U_{C(\max)}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \\ x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \end{array} \right.$$

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (24)

si $Q \gg 1 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \cong \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \\ \omega_2 \cong \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{Q}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \end{array} \right.$$

La largeur de la bande passante à $-3dB$ est :

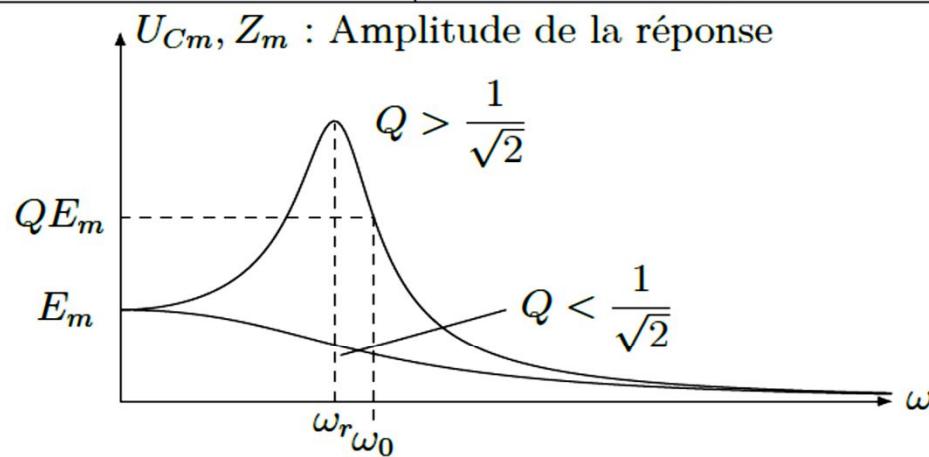
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Analogie Electromécanique (1)

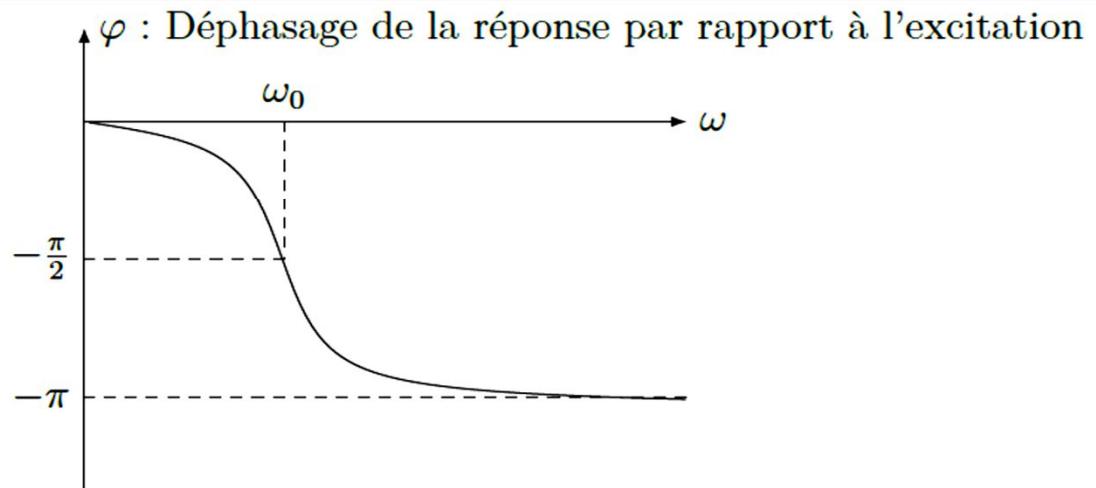
	Résonance en élongation	RLC série aux bornes de C
Excitation	$z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + jZ(t) = z_A(t)$	$L\frac{d^2u_c}{dt^2} + R\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{C}u_c = \frac{1}{C}e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$Z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$	$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$Z_m(\omega) = \frac{Z_{Am}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$	$U_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Paramètres de l'oscillateur	α	R
	m	L
	k	$\frac{1}{C}$

Analogie Electromécanique (2)

Graphe de l'amplitude



Graphe de la phase



Facteur de puissance (1)

Le facteur de puissance autrement dit le $\cos \varphi$ d'un appareil électrique est égal au rapport de la puissance active P (kW) sur la puissance apparente S(kVA) et peut varier de 0 à 1 :

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{P_m}{U_{eff} I_{eff}}$$

- il joue un rôle très important dans la consommation des installations électriques. Ainsi le déphasage entre la tension et l'intensité, $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, est primordial. P est maximale si $\cos \varphi = 1$.

Facteur de puissance (2)

- P est maximale si $\cos \varphi = 1$ donc $\varphi = 0$, la tension et l'intensité sont alors en phase. CIE souhaite que les installations domestiques possèdent un facteur de qualité proche de 1 sinon il y a perte de puissance. Si $\cos \varphi = 1$, l'installation est purement résistive. Dans la réalité, ce n'est jamais le cas, il y a toujours des effets inductifs et capacitifs. Par exemple, une machine à laver possède un aspect inductif du fait de la présence de moteurs électriques qui comprennent des bobines.
- Il faut que $\cos \varphi$ soit le plus grand possible pour que I_{eff} soit minimal afin de minimiser les pertes joules.

$$I_{eff} = \frac{P_m}{U_{eff} \cos \varphi}$$

Puissance complexe

Par définition la puissance complexe \underline{P} est :

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{U_m} \cdot \underline{I_m}^* = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U_m} = U_m e^{j\varphi_u} \\ \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} \underline{U_m} \cdot \underline{I_m}^* = \frac{1}{2} U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{j\varphi_i} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j\varphi} = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi + j \sin \varphi] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi}_{P_m} + j \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi}_Q \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{P} = P_m + jQ}$$

Puissance aux bornes de R,L,C (1)

	Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Résistance	$P_m = RI_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$	0	1
Inductance	0	$Q = L\omega I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$	0
Condensateur	0	$Q = -C\omega U_{eff}^2 = \frac{I_{eff}^2}{C\omega}$	0

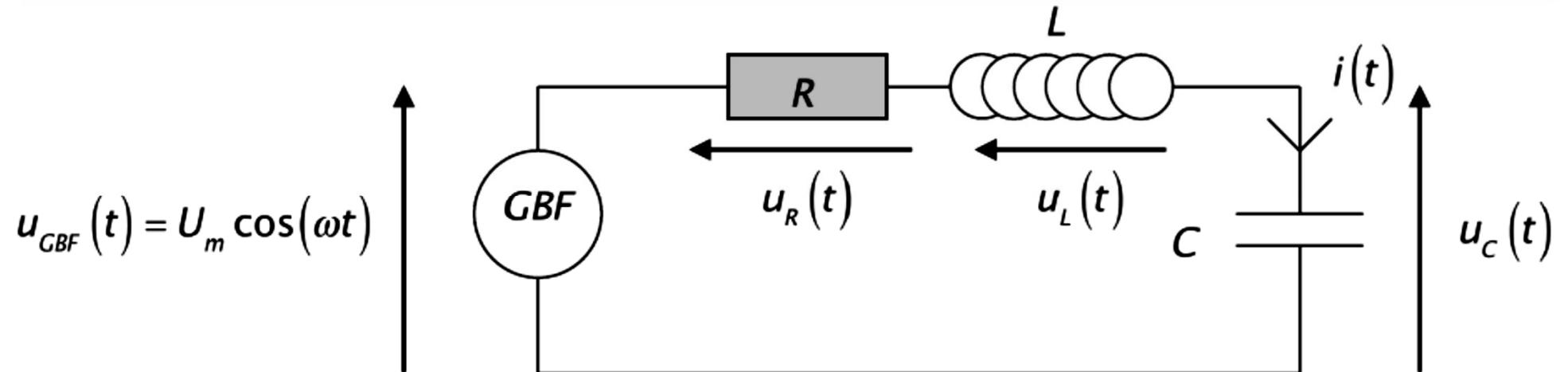
La puissance réactive Q passe alternativement de la bobine au condensateur mais reste constante. Elle représente l'énergie emmagasinée dans le circuit RLC .

Puissance aux bornes de R,L,C (2)

- Pendant $T/2$, le condensateur se comporte comme un générateur $P(t) < 0$ et pendant $T/2$, le condensateur se comporte comme un récepteur $P(t) > 0$.

 - Pendant $T/2$, la bobine se comporte comme un générateur $P(t) < 0$ et pendant $T/2$, la bobine se comporte comme un récepteur $P(t) > 0$. Quand la bobine est un récepteur, le condensateur est un générateur et inversement.
-

Puissance moyenne d'un groupement RLC série (1)



$$u_{GBF}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t)$$

On multiplie cette équation membre à membre par $i(t)$

$$u_{GBF}(t)i(t) = Ri^2(t) + Li(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) \frac{dq(t)}{dt}$$

Puissance moyenne d'un groupement RLC série (2)

On fait alors apparaître un bilan de puissance:

$$\underbrace{P_{GBF}(t)}_{\text{Puissance instantanée fournie par le GBF}} = \underbrace{Ri^2(t)}_{\text{Puissance instantanée absorbée par R}} + \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2}Li^2(t)}_{E_L(t)} + \underbrace{\frac{1}{2C}q^2(t)}_{E_C(t)} \right]$$

Puissance instantanée absorbée ou fournie par C et L

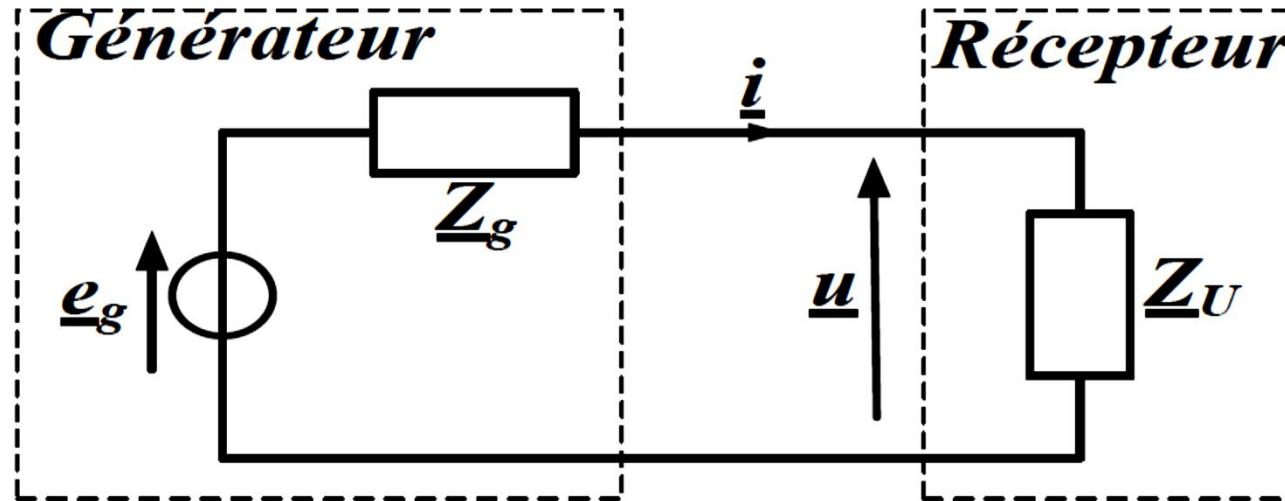
Si on fait une moyenne sur la période T:

$$P_{GBF} = \underbrace{\langle Ri^2(t) \rangle}_{=RI_{\text{eff}}^2} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2}Li^2(t)}_{E_L(t)} + \underbrace{\frac{1}{2C}q^2(t)}_{E_C(t)} \right]}_{=0} \Rightarrow P_{GBF} = RI_{\text{eff}}^2$$

Le condensateur et la bobine ne participent pas au bilan énergétique en régime sinusoïdal forcé alors qu'ils jouent un rôle essentiel dans le bilan énergétique pendant le régime transitoire.

Adaptation d'impédance (1)

Il s'agit d'un problème très général en sciences physiques : comment une source de puissance peut-elle transmettre le maximum de puissance à une charge ? Pour que le transfert de puissance soit maximal d'un générateur vers un récepteur, l'impédance du générateur et celle du récepteur doivent être adaptées l'une à l'autre. **On dit alors qu'il y a adaptation d'impédance (ou adaptation d'impédance en puissance).**



Adaptation d'impédance (2)

Calculons la valeur de Z_U pour laquelle la puissance active fournie est maximale :

$$\begin{cases} \text{générateur} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_g = R_g + jX_g \\ \underline{e}_g = \underline{E}_g e^{j\omega t} \end{cases} \\ \text{récepteur} \Rightarrow \underline{Z}_U = R_U + jX_U \end{cases}$$

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^*$$
$$\underline{i} = \frac{\underline{e}_g}{\underline{Z}_U + \underline{Z}_g} \Rightarrow \underline{i}^* = \frac{\underline{e}_g^*}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)^*}$$

$$\underline{u} = \underline{Z}_U \underline{i} \Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} \underline{Z}_U \underline{i} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} (R_U + jX_U) \frac{\underline{e}_g \underline{e}_g^*}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)^*}$$
$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} (R_U + jX_U) \frac{\underline{E}_g^2}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)^*}$$
$$= \frac{1}{2} (R_U + jX_U) \frac{\underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}$$

Adaptation d'impédance (3)

$$\Rightarrow \underline{P} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{R_U \underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}}_{P_m = P_{active}} + j \underbrace{\frac{1}{2} \frac{X_U \underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}}_Q$$

La puissance moyenne (puissance active) fournie à la charge est donnée par la partie réelle de la puissance complexe :

$$P_{active} = \frac{1}{2} \frac{R_U \underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}$$

P_{active} est maximale si :

$$\frac{dP_{active}}{dR_U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP_{active}}{dX_U} = 0$$

Adaptation d'impédance (4)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP_{active}}{dR_U} = 0 \Rightarrow R_g = R_U \\ \frac{dP_{active}}{dX_U} = 0 \Rightarrow X_U = -X_g \end{array} \right\} \Rightarrow P_{active max} = \frac{\underline{E}_g^2}{8R_g}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP_{active}}{dR_U} = 0 \Rightarrow R_g = R_U \\ \frac{dP_{active}}{dX_U} = 0 \Rightarrow X_U = -X_g \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Z}_U = R_U + jX_U = R_g - jX_g = \underline{Z}_g^*$$

La puissance active est maximale lorsque la condition d'adaptation d'impédance $\underline{Z}_U = \underline{Z}_g^*$ est réalisée.