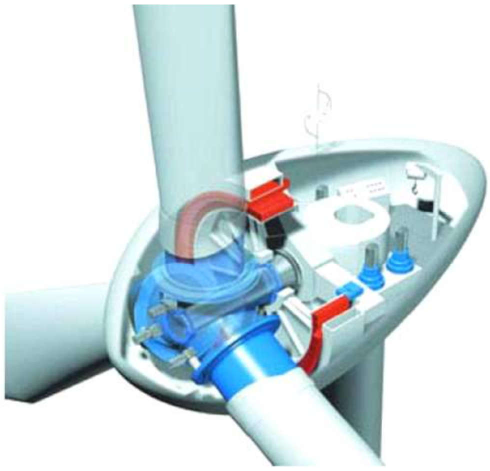
Introduction à la dynamique des solides





Les axes numériques des machines-outils les plus performantes par exemple les machines de pose de composants électroniques sont capables de fournir des accélérations voisines de 10 m/s^2. La masse du coulisseau étant connue, en supposant que l'on utilise un moteur linéaire, l'ingénieur doit connaître la force de poussée que doit fournir l'actionneur pour obtenir l'accélération souhaitée... Les éoliennes sont équipées de génératrices de courant électrique qui ont un rendement optimal au voisinage d'une certaine vitesse de rotation. Un des objectifs de l'ingénieur est d'évaluer la régularité de vitesse sous l'effet de la variation de vitesse du vent (et donc du couple exercé sur l'hélice)…

Exemple de problèmes de dynamique

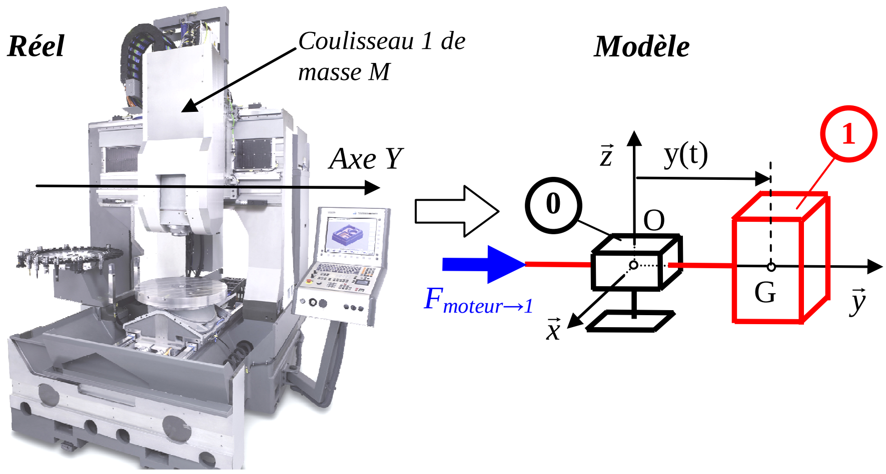
Dimensionnement des actionneurs, recherche des lois du mouvement, calcul des actions mécaniques transmissibles dans les liaisons ...

1. Principe Fondamental de la Dynamique - Applications simples *(pour se fixer les idées)*

1.1. Cas d'un solide en mouvement de translation

Exemple de l'axe Y de la machine outil

La masse M du coulisseau 1 étant connue on cherche la force de poussée F que doit fournir en le moteur linéaire pour obtenir l'accélération a souhaitée.



On utilise pour cela le théorème de la résultante dynamique projeté sur l'axe de la translation :

$$\rightarrow \Sigma_{forces/axe\ Y} = M.a_y \text{ soit } F_{moteur \rightarrow 1} = M.\ddot{y}$$

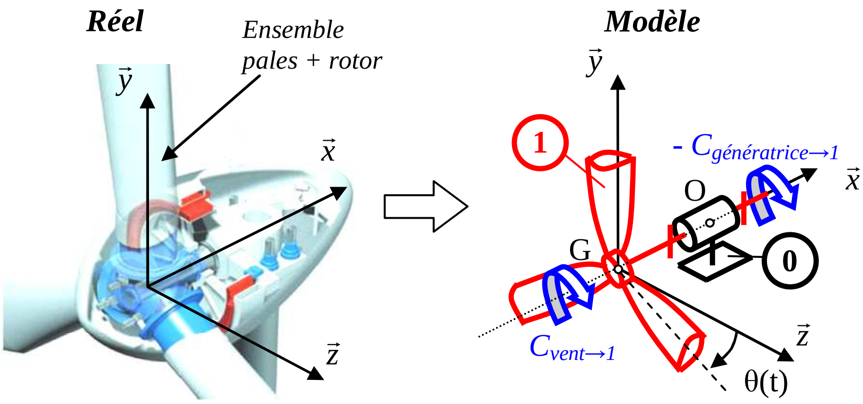
avec : $F_{moteur \rightarrow 1}$ action mécanique du moteur sur le solide 1 ; M masse du coulisseau ; $\ddot{y}$ accélération du solide 1 suivant l'axe Y.

Application numérique et unités : Pour une masse de coulisseau de 50 Kg et une accélération de 10 m/s^2 il faut donc que le moteur linéaire puisse fournir une force de 500 N lors des accélérations.

1.2. Cas d'un solide en mouvement de rotation

Exemple de l'éolienne

L'objectif est d'évaluer la régularité de la vitesse de rotation du rotor sous l'effet de la variation de la vitesse du vent (et donc du couple exercé sur l'hélice).



On utilise pour cela le théorème du moment dynamique projeté sur l'axe de rotation du rotor :

$$\rightarrow \Sigma_{Moments/axe\ (O,x)} = J.\ddot{\theta} \quad \text{soit} \quad C_{vent \to 1} - C_{génératrice \to 1} = J.\ddot{\theta}$$

avec : Cvent →1 action mécanique du vent sur le solide 1 ; Cgénératrice →1=cte action mécanique de la génératrice sur le solide 1 (couple résistant) ; J moment d'inertie du rotor autour de l'axe $(O, \vec{x})$ *;* $\ddot{\theta}$ *accélération en rotation du solide 1 suivant l'axe* $(O, \vec{x})$*.*

J est le moment d'inertie du rotor autour de l'axe $(O, \vec{x})$*. C'est une grandeur mécanique qui caractérise la disposition de la matière autour de l'axe de rotation. Pour les solides, on définira ultérieurement les moments d'inertie à partir de la matrice d'inertie. La valeur de J influe sur la plus ou moins grande facilité à faire accélérer le solide lorsqu'on exerce un moment (couple) sur celui-ci.*

Application numériques et unités : On a $J = 100\ Kg.m^2$*. Lorsque la vitesse du vent est constante,* $C_{vent \to 1} = C_{génératrice \to 1} \rightarrow \ddot{\theta} = 0\ rd/s^2 \rightarrow$ *le rotor ne subit pas d'accélération. Si une augmentation brutale de la vitesse du vent provoque une augmentation de 100 N.m du couple total exercé sur le rotor, cela produit une accélération angulaire* $\ddot{\theta}$ *ayant pour valeur* $100 / 100 = 1\ rd/s^2$*.*

2. Principe Fondamental de la Dynamique – Cas général

Dans le cas général, les mouvements des systèmes ne s'effectuent pas seulement selon une seule direction comme les exemples simples donnés précédemment. Le PFD permet d'établir une relation entre les actions mécaniques qui sont appliquées à un ensemble matériel (E) et les mouvements qui en résultent selon toutes les directions de l'espace.

2.1. Référentiel Galiléen

Un référentiel Galiléen est l'association d'un repère géométrique et d'un repère temporel pour lequel le PFD est vrai. En SII, on considère Galiléen :

- Tout repère **fixe** (i.e. sans mouvement) par rapport à la Terre.
- Ou tout repère en mouvement de **translation rectiligne** (i.e. sa trajectoire est une droite) **uniforme** (sa vitesse est constante) par rapport à la terre.

2.2. Chronologie

Elle est obtenue par les horloges classiques (oscillation d'un quartz).

2.3. Enoncé du PFD

Il existe au moins un repère galiléen ou absolu noté R et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne ou absolue, tels que, pour tout système matériel (E), le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées à (E) soit égal au torseur dynamique de (E) dans son mouvement par rapport à R.

$$\left\{\mathscr{D}_{E/R}\right\}=\left\{F_{\bar{E}\to E}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{d\ S/R}}\\ \overrightarrow{\delta_{A,\,S/R}}\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}}\end{matrix}\right\}_A$$ où A est un point quelconque

⇙ ⇘

$$\left\{\mathscr{D}_{E/R}\right\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{d\ S/R}}\\ \overrightarrow{\delta_{A,\,S/R}}\end{matrix}\right\}_A$$: Torseur dynamique

$$\left\{F_{\bar{E}\to E}\right\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}}\end{matrix}\right\}_A$$: Torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur E

Les démarches pour le calcul du torseur dynamique seront vues **cours 15 et 16**.
La démarche de calcul du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur E est la même que celle vu lors de l'utilisation du PFS (ce sont les mêmes torseurs).

2.4. Théorèmes généraux – Traduction vectorielle du PFD

L'énoncé du PFD conduit à l'écriture de deux équations vectorielles soit :

- Le **théorème de la résultante dynamique** : $\overrightarrow{R_{d\ S/R}}=\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}}$
- Le **théorème du moment dynamique** : $\overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}}=\overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}}$

2.5. Equations de mouvement

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « Intégrale première du mouvement » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

3. Conseils pratiques pour la résolution des problèmes de dynamique

3.1. Problèmes types

On distingue généralement 2 grands types de problèmes en dynamique :

Problème de type 1 (cours 18)

On connait :
- Les actionneurs
- Les inerties

⇩

On cherche à déterminer
- Les lois du mouvement
- Les actions mécaniques des liaisons

Problème de type 2 (cours 17)

On connait :
- Les lois du mouvement
- Les inerties

⇩

On cherche à déterminer
- Les caractéristiques des actionneurs
- Les actions mécaniques des liaisons

3.2. Algorithme de résolution

Pour chaque application du PFD, il est important de se forcer à mettre en place les étapes suivantes du raisonnement.

On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème

↓

On isole le solide ou le système de solides considéré

Récapituler les particularités de certains torseurs d'actions mécaniques (composantes nulles pour les torseurs de liaisons pivot ou glissière, actions connues dans certaines liaisons (couple moteur ou forces résistantes…), …)

Utilisation du graphe d'analyse pour faire l'inventaire des données et élaborer la stratégie de résolution

↓

On s'aide d'un dessin si on peut

↓

On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé

Actions à distance (pesanteur,…)
Actions de contact (liaisons,…)

↓

On écrit le PFD

Toujours préciser l'axe de projection pour le thm de la résultante dynamique et le point + l'axe pour le thm du moment dynamique

↓

On projette les relations vectorielles sur les axes choisis

↓

On injecte les lois de comportement (ressort, lois de coulomb, …)

↓

On effectue la résolution

On s'assure que le pb est isostatique

Pour déterminer les lois du mouvement dans un problème de type 1, il faut rechercher les équations particulières (autant d'équations de mouvement que de paramètres cinématiques inconnus) qui n'introduisent pas d'inconnues de liaison. Deux cas fréquents doivent être recherchés :

- Pour un solide (ou un ensemble de solides) en liaison pivot (parfaite) par rapport à un autre solide, l'équation du moment dynamique écrit sur l'axe de rotation permet d'exprimer la dérivée seconde du paramètre de position angulaire en fonction du couple appliqué (couple connu).
- Pour un solide (ou un ensemble de solides) en liaison glissière (parfaite) par rapport à un autre solide, l'équation de la résultante dynamique projetée sur la direction de la liaison permet d'exprimer la dérivée seconde du paramètre de position linéaire en fonction de l'effort (connu) appliqué.

Pour déterminer les caractéristiques des actionneurs dans les problèmes de type 2, il faut rechercher les lois d'entrée-sortie d'actions mécaniques (autant d'équations que de caractéristiques d'actionneur à déterminer). Il faut donc rechercher les équations particulières qui n'introduisent pas d'inconnues de liaison. Exemples fréquents :

- Somme des moments autour de l'axe de rotation pour un solide (ou un ensemble de solides) en liaison pivot, pour rechercher le couple qui anime le solide.
- Somme des forces en projection sur l'axe de translation pour un solide (ou un ensemble de solides) en liaison glissière, pour rechercher l'effort qui génère le mouvement.

Il faut toujours chercher à écrire le moins d'équations possibles, en utilisant en priorité les équations associées à des mouvements de solides ou d'ensemble de solides.

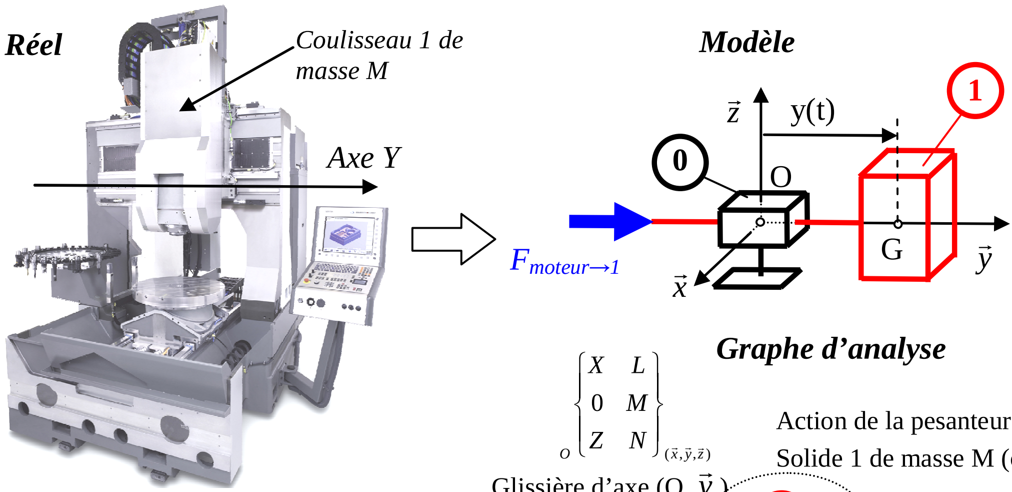
L'utilisation du PFD pour établir les équations recherchées impose toujours des choix précis fait à partir des particularités des actions mécaniques (de liaison notamment) pour n'effectuer que les calculs de cinétique nécessaire. Par conséquent il est extrêmement important de prendre le temps et de réfléchir aux 2 premières étapes de l'algorithme. « Se réfugier dans les calculs de manière brouillonne, inefficace et douloureuse, tout en pestant contre ces maudits calculs est un défaut banal. Ne le cultivez pas ! » (J.C. Bône)

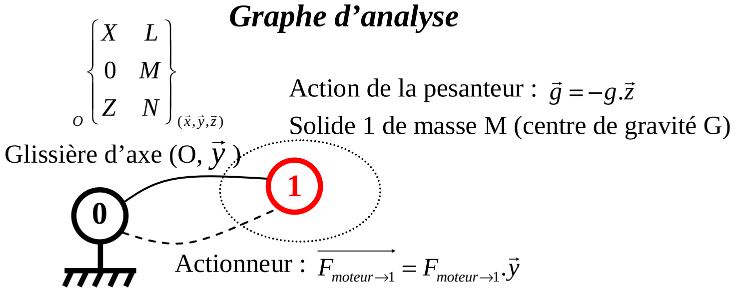
3.3. Graphe d'analyse

Le graphe d'analyse est un outil important pour mener à bien un problème de dynamique, il permet notamment :

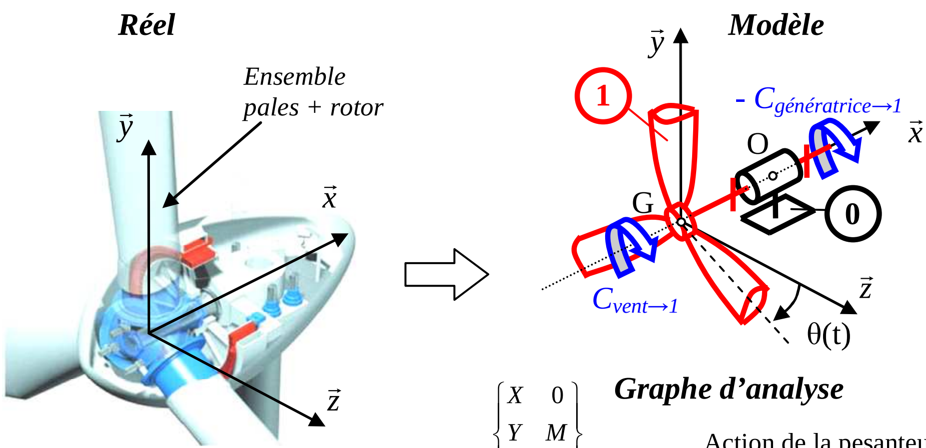
- de faire le bilan des actions mécaniques complet du problème,
- de réaliser le BAME associé à un isolement,
- et surtout d'élaborer les stratégies de résolution par rapport à un objectif d'étude.

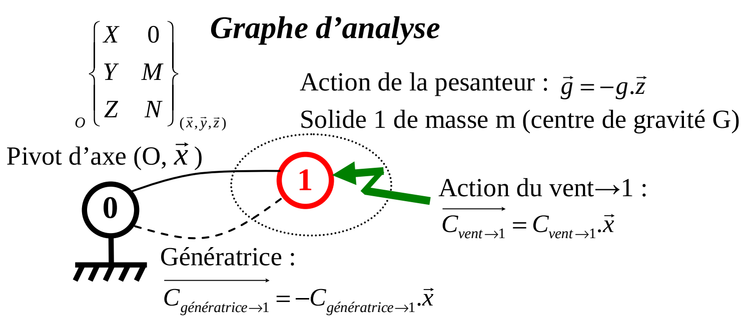
Exemple de l'axe Y de la machine outil





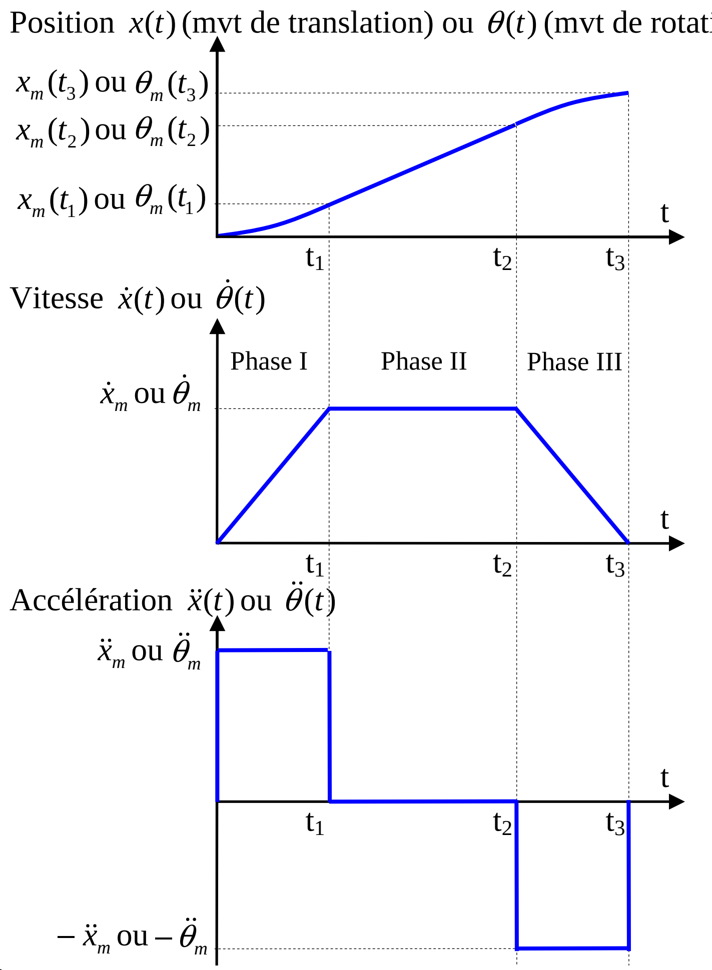
Exemple de l'éolienne





4. Loi de mouvement en trapèze de vitesse *(il en existe d'autres !)*

Dans de nombreux cas, un solide peut suivre un **mouvement (de rotation ou de translation) uniforme** ou un **mouvement (de rotation ou de translation) uniformément varié (accéléré ou décéléré)**.



***Phase I**: mouvement uniformément accéléré.*
L'accélération est la même au cours du mouvement. Graphiquement, on observe une portion de droite (segment de droite incliné)

***Phase II** : mouvement uniforme.*
La vitesse est la même au cours du mouvement. Graphiquement, on observe une fonction constante (segment de droite horizontal).

***Phase III** : mouvement uniformément décéléré.*
L'accélération est la même au cours du mouvement. Graphiquement, on observe une portion de droite (segment de droite incliné).

Mvt de rotation	Phase I	Phase II	Phase III
Equation position	$\theta(t)=\frac{1}{2}.\ddot{\theta}_m.t^2$	$\theta(t)=\dot{\theta}_m.(t-t_1)+\theta_m(t_1)$	$\theta(t)=-\frac{1}{2}.\ddot{\theta}_m.(t-t_2)^2+\dot{\theta}_m.(t-t_2)+\theta_m(t_2)$
Equation vitesse	$\dot{\theta}(t)=\ddot{\theta}_m.t$	$\dot{\theta}(t)=\dot{\theta}_m$	$\dot{\theta}(t)=-\ddot{\theta}_m.(t-t_2)+\dot{\theta}_m$
Equation accélération	$\ddot{\theta}(t)=\ddot{\theta}_m$	$\ddot{\theta}(t)=0$	$\ddot{\theta}(t)=-\ddot{\theta}_m$

Mvt de translation	Phase I	Phase II	Phase III
Equation position	$x(t)=\frac{1}{2}.\ddot{x}_m.t^2$	$x(t)=\dot{x}_m.(t-t_1)+x_m(t_1)$	$x(t)=-\frac{1}{2}.\ddot{x}_m.(t-t_2)^2+\dot{x}_m.(t-t_2)+x_m(t_2)$
Equation vitesse	$\dot{x}(t)=\ddot{x}_m.t$	$\dot{x}(t)=\dot{x}_m$	$\dot{x}(t)=-\ddot{x}_m.(t-t_2)+\dot{x}_m$
Equation accélération	$\ddot{x}(t)=\ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t)=0$	$\ddot{x}(t)=-\ddot{x}_m$