Quelques aspects de la Physique des plasmas

1ère Partie
Réponse d'un plasma à un champ électromagnétique

1.1. Préliminaires

1.1.1.

$$\vec{f}_e = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{f}_e\right\| = \frac{m_e}{\tau}\left\|\vec{v}\right\| \quad \Rightarrow \quad \tau = m_e\frac{v}{f}$$

$$\Rightarrow \quad [f] = MLT^{-2}\,, \quad [v] = LT^{-1} \text{ et } [m_e] = M$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[\tau] = M\frac{LT^{-1}}{MLT^{-2}} = T}$$

On conclut que le paramètre τ est homogène à un temps (exprimé en seconde s).

1.1.2. La force $\vec{f}$, de nature électromagnétique, résulte des interactions répulsives entre électrons et des attractions des ions.

1.1.3. Le référentiel d'étude étant galiléen, le PFD appliqué à un électron (poids et force magnétiques négligés) s'écrit :

$$\boxed{m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = m_e\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = -e\vec{E} - \frac{m_e}{\tau}\vec{v}}$$

Si T est un temps caractéristique de l'évolution temporelle du mouvement des électrons.

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \approx \dfrac{v}{T} \\ \left\|\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right\| \approx \dfrac{v^2}{\lambda} = \dfrac{v^2}{c_0T}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\left\|\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right\|}{\left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\|} \approx \frac{v}{c_0} \ll 1$$

le mouvement des électrons étant non relativiste, donc :

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}} \qquad (1)$$

1.1.4. Les ions étant fixes :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = -n_e e \overrightarrow{v}} \qquad (2)$$

1.1.5. On déduit de (1) et (2) l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{j}$:

$$(2) \Rightarrow \overrightarrow{v} = -\frac{1}{n_e e}\overrightarrow{j}$$

On remplace $\overrightarrow{v}$ par son expression dans (1), pour obtenir :

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{j}}{\tau} = \frac{n_e e^2}{m_e}\overrightarrow{E}} \qquad (3)$$

1.2. Pulsation plasma

1.2.1. Des équations de M-G et M-A, on peut retrouver l'équation de conservation de la charge ; en effet :

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \left[\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right] \quad \text{car} \quad \frac{1}{c_0^2} = \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\overrightarrow{\nabla}.\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}\right) = 0$$

or :

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0$$

donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad (4)$$

L'application de l'opérateur divergence à l'équation (3) donne :

$$\frac{\partial\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j}\right)}{\partial t} + \frac{\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j}\right)}{\tau} = \frac{n_e e^2}{m_e}\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}\right)$$

or $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j}$ est donné par l'équation (4), soit

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{n_e e^2}{m_e}\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

enfin :

$$\boxed{\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho=0} \quad (5)$$

1.2.2. En négligeant les causes d'amortissement (on prend τ infini), l'équation (5) devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\rho=0} \quad (6)$$

Dans ces conditions, le plasma est le siège d'une oscillation d'ensemble du gaz électronique, de pulsation :

$$\boxed{\omega_p=\sqrt{\frac{n_e}{m_e\varepsilon_0}}e} \quad (7)$$

1.2.3. Ordre de grandeur de ω_p et $\lambda_p=\frac{2\pi c_0}{\omega_p}$ en précisant le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient, dans les cas proposés :

Plasma	pulsation plasma $\boxed{\omega_p\,(\text{rad.s}^{-1})}$	longueur d'onde plasma $\boxed{\lambda_p\,(\text{m})}$	Domaine spectral
Ionosphère $\boxed{n_e\approx 10^{11}\ \text{m}^{-3}}$	$1,78\times10^{7}$	$1,06\times10^{2}$	Ondes métriques
Décharge dans un gaz $\boxed{n_e\approx 10^{21}\ \text{m}^{-3}}$	$1,78\times10^{12}$	$1,06\times10^{-3}$	Ondes millimétriques
Sodium métallique $\boxed{C_{Na}\approx 6,02\times10^{28}\ \text{m}^{-3}}$	$1,38\times10^{16}$	$1,36\times10^{-7}$	Ondes UV
Aluminium métallique $\boxed{C_{Al}\approx 2,65\times10^{28}\ \text{m}^{-3}}$	$1,59\times10^{16}$	$1,18\times10^{-7}$	Ondes UV

1.3. Conductivité électrique

1.3.1. En régime sinusoïdal $\dfrac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{j}}$
soit, d'après (3) et (7) :

$$\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right) \underline{\vec{j}} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{\vec{E}}$$

d'où :

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \frac{\varepsilon_0 \tau \omega_p^2}{1 - i\tau\omega} \underline{\vec{E}}} \tag{8}$$

1.3.2. Le plasma vérifie la loi d'OHM généralisée donnée par la relation (8) telle que :

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}(\omega)\, \underline{\vec{E}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \tau \omega_p^2}{1 - i\tau\omega}} \tag{9}$$

2ème Partie
Autoconfinement d'une colonne de plasma

2.1. La colonne de plasma est parcourue par le courant de densité volumique :

$$\begin{cases} \vec{j} = \dfrac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z & \text{pour } r \leqslant R \\ \vec{j} = \vec{0} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

Considérations de symétrie : tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution de courant, soit :

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta = B(r,\theta,z)\vec{u}_\theta$$

Considérations d'invariance : la distribution est invariante par translation et par rotation par rapport Oz, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

Par application du théorème d'AMPÈRE à un contour fermé $\mathscr{C}$, de rayon r et d'axe Oz, on a :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$$\text{si } r < R \ : \ I_{\text{enlacé}} = j\pi r^2 = I\frac{r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}\overrightarrow{u}_\theta} \tag{10}$$

$$\text{si } r > R \ : \ I_{\text{enlacé}} = j\pi R^2 = I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\overrightarrow{u}_\theta} \tag{11}$$

2.2. La force magnétique $d\overrightarrow{F}_m$ due au courant I qui s'exercice sur un élément de volume $d\tau$ de plasma est :

$$d\overrightarrow{F}_m = \overrightarrow{j}\, d\tau(M) \times \overrightarrow{B}(M) = \left(\frac{I}{\pi R^2}\overrightarrow{u}_z \times \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}\overrightarrow{u}_\theta\right) d\tau(M)$$

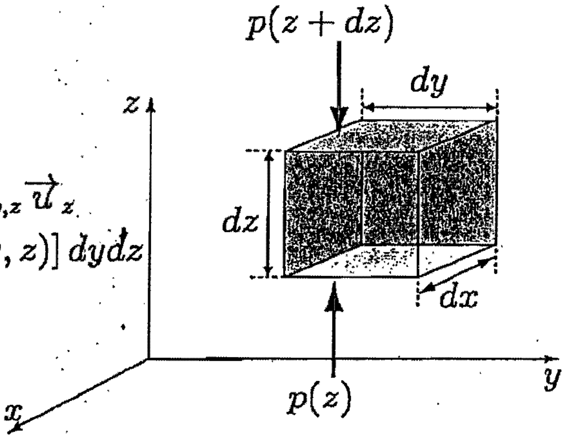
d'où :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_m = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\frac{r}{R^4}d\tau(M)\,\overrightarrow{u}_r} \tag{12}$$

Cette force est centripète (dirigée selon $-\overrightarrow{u}_r$), elle tend donc à comprimer radialement la colonne de plasma.

2.3. La force de pression qui s'exercice sur l'élément de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$ est :

On a :



$$d\overrightarrow{F}_p = dF_{p,x}\overrightarrow{u}_x + dF_{p,y}\overrightarrow{u}_y + dF_{p,z}\overrightarrow{u}_z$$

$$dF_{p,x} = \left[P(x,y,z) - P(x+dx,y,z)\right] dydz$$

$$\boxed{dF_{p,x} = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau}$$

Idem pour $dF_{p,y}$ et $dF_{p,z}$:

$$\boxed{dF_{p,y} = -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial y}d\tau} \qquad \boxed{dF_{p,z} = -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau}$$

soit donc :

$$d\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z\right) d\tau = -\vec{\nabla}_M p\,(M)\, d\tau$$

avec :

$$d\vec{F}_p = \vec{f}_p\,(M)\, d\tau = -\vec{\nabla}_M p\,(M)\, d\tau$$

d'où :

$$\boxed{\vec{f}_p\,(M) = -\vec{\nabla}_M p\,(M)} \qquad (13)$$

2.4. Localement au point M, la condition d'équilibre thermodynamique s'écrit :

$$\vec{f}_p + \vec{f}_m = \vec{0}$$

où $\vec{f}_m = \dfrac{d\vec{F}_m}{d\tau}$ est la densité volumique des forces magnétiques :

$$\vec{f}_m = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\frac{r}{R^4}\vec{u}_r$$

donc :

$$\vec{\nabla}_M p\,(M) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\frac{r}{R^4}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial r} = -\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\dfrac{r}{R^4} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array}\right.$$

ceci montre que $p(M)$ ne dépend que de r et on a :

$$dp = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\frac{r}{R^4}dr = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}d\left(r^2\right)$$

$$\int dp = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}\int d\left(r^2\right) \quad \Rightarrow \quad p\,(r) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}r^2 + cte$$

et puisque la colonne de plasma est plongée dans le vide, on peut écrire $p(R) = 0$, soit :

$$p\,(R) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}R^2 + cte = 0 \quad \Rightarrow \quad cte = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}$$

Finalement, la pression $p(r)$ à l'équilibre thermodynamique local :

$$\boxed{p(r) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \qquad (14)$$

2.5. La colonne de plasma, de rayon R et de hauteur h, contient un nombre de particules égal à :

$$\mathcal{N}_{\text{particules}} = Nh \quad \text{avec} \quad N = \frac{N_{\text{particules}}}{h} = \iint n(r)\, dS$$

N est le nombre total des particules localisées sur la surface $dS = r dr d\theta$, soit :

$$N = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R n(r) r dr$$

$$N = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R n(r) r dr \quad \text{avec} \quad n(r) = \frac{p(r)}{k_B T} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 (k_B T)}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$N = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R^2 (k_B T)} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R^2 (k_B T)} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R$$

d'où :

$$\boxed{N = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k_B T}} \qquad (15)$$

2.6. L'énergie cinétique moyenne d'une particule est : $E_c = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow k_B T = \frac{2}{3} E_c$. On peut donc tirer l'expression de l'intensité du courant I pour confiner la colonne de plasma de diamètre $\phi = 30$ cm, soit :

$$I = \left(\frac{8\pi N k_B T}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad N = n_0 S = n_0 \pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = n_0 \pi R^2$$

d'où :

$$\boxed{I = \left(\frac{16\pi^2 n_0 R^2 E_c}{3\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (16)$$

Application numérique : $I \simeq 1,74 \times 10^6$ A.

3ème Partie
Effet d'écran dans un plasma

3.1. Loi de BOLTZMANN

3.1.1. Dans ce cas, la condition d'équilibre des charges s'écrit :

$$\vec{f}_e(M) + \vec{f}_p(M) = \vec{0}$$

avec $\vec{f}_e(M)$ la densité volumique des forces électriques dont l'expression est :

$$\vec{f}_e(M) = n(M)\,q\vec{E}(M) = -n(M)\,q\vec{\nabla}_M V(M)$$

Puisque $\vec{f}_p(M) = -\vec{\nabla}_M p(M)$, la condition d'équilibre s'écrit :

$$\boxed{n(M)\,q\vec{\nabla}_M V(M) + \vec{\nabla}_M p(M) = \vec{0}} \qquad (17)$$

or :

$$p(M) = n(M)\,k_B T \quad \Rightarrow \quad n(M)\,q\vec{\nabla}_M V(M) + k_B T\vec{\nabla}_M n(M) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{\nabla}_M n(M)}{n(M)} + \frac{q}{k_B T}\vec{\nabla}_M V(M) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{\nabla}_M n(M)}{n(M)}.\overrightarrow{dOM} + \frac{q}{k_B T}\vec{\nabla}_M V(M).\overrightarrow{dOM} = 0$$

on en déduit l'équation différentielle demandée :

$$\boxed{\frac{dn(M)}{n(M)} + \frac{q}{k_B T}dV(M) = 0} \qquad (18)$$

3.1.2. L'intégration de l'équation (18) donne :

$$\frac{dn(M)}{n(M)} = -\frac{q}{k_B T}dV(M) \quad \Leftrightarrow d\ln n(M) = -\frac{q}{k_B T}dV(M)$$

$$\Rightarrow \quad \ln n(M) = -\frac{q}{k_B T}V(M) + K_1 \quad \text{avec } K_1 \text{ est une constante}$$

soit :
$$n(M) = K\exp\left[-\frac{qV(M)}{k_B T}\right]$$

La constante K peut être déterminée par les conditions aux limites c'est-à-dire $n(M) = n_0$ uniforme à l'équilibre et en l'absence de la charge test $Q_t \Rightarrow V(M) = 0$, d'où :

$$\boxed{n(M) = n_0\exp\left[-\frac{qV(M)}{k_B T}\right]} \qquad (19)$$

3.2. Longueur de Debye

3.2.1. L'énoncé affirme que les ions portent une seule charge élémentaire positive $+e$ et ayant pour densité moyenne n_0 ; et puisque le plasma est globalement neutre, la densité moyenne des électrons est aussi n_0.

3.2.2. La densité particulaire des ions $n_i(M)$ et celle des électrons $n_e(M)$ obéissent à la loi de Boltzmann.

3.2.2.1. En un point M de plasma, la densité volumique de charge $\rho(M)$ a pour expression :

$$\rho(M) = \rho_i(M) + \rho_e(M) = [n_i(M)\, e] + [-n_e(M)\, e]$$

Sachant que les deux densités $n_i(M)$ et $n_e(M)$ obéissent à la loi de Boltzmann, on écrit :

$$n_i(M) = n_0 \exp\left(-\frac{eV(M)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_e(M) = n_0 \exp\left(\frac{eV(M)}{k_B T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(M) = n_0 \left\{\exp\left(-\frac{eV(M)}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{eV(M)}{k_B T}\right)\right\}} \qquad (20)$$

3.2.2.2. Dans le cadre de l'approximation de faible perturbation, on peut écrire :

$$eV \ll k_B T \quad \Rightarrow \quad \exp(X) \approx 1 + X \quad \text{en posant } \frac{eV}{k_B T} = X \ll 1$$

La relation (20) implique :

$$\rho(M) \approx n_0 \left[\left(1 - \frac{eV(M)}{k_B T}\right) - \left(1 + \frac{eV(M)}{k_B T}\right)\right]$$

d'où :

$$\boxed{\rho(M) \approx -\frac{2n_0 e^2}{k_B T} V(M)} \qquad (21)$$

3.2.3. Potentiel régnant autour d'un ion positif placé à l'origine :

3.2.3.1. La relation liant champ électrostatique au potentiel est :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}_M V$$

En remplaçant $\vec{E}(M)$ par son expression dans l'équation de MAXWELL-GAUSS $\vec{\nabla}_M.\vec{E}(M) = \dfrac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$, on obtient l'équation de POISSON :

$$\boxed{\Delta_M V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0} \tag{22}$$

3.2.3.2. $V(M)$ ne dépend que de la variable r car il est à symétrie sphérique. Son laplacien s'écrit :

$$\Delta_M V(M) = \frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2}$$

Les deux équations (21) et (22) combinées conduisent à :

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2n_0e^2}{\varepsilon_0 k_B T}V = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2n_0e^2}{\varepsilon_0 k_B T}rV = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{(rV)}{\lambda_D^2} = 0} \tag{23}$$

où λ_D, la longueur de DEBYE, a pour expression :

$$\boxed{\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2n_0e^2}}} \tag{24}$$

3.2.3.3. La solution de l'équation (23) est de la forme :

$$rV(r) = \alpha\exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) + \beta\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad \Rightarrow \quad V(r) = \alpha\frac{\exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r} + \beta\frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r}$$

Les constantes d'intégration α et β sont déterminées grâce aux conditions aux limites suivantes :

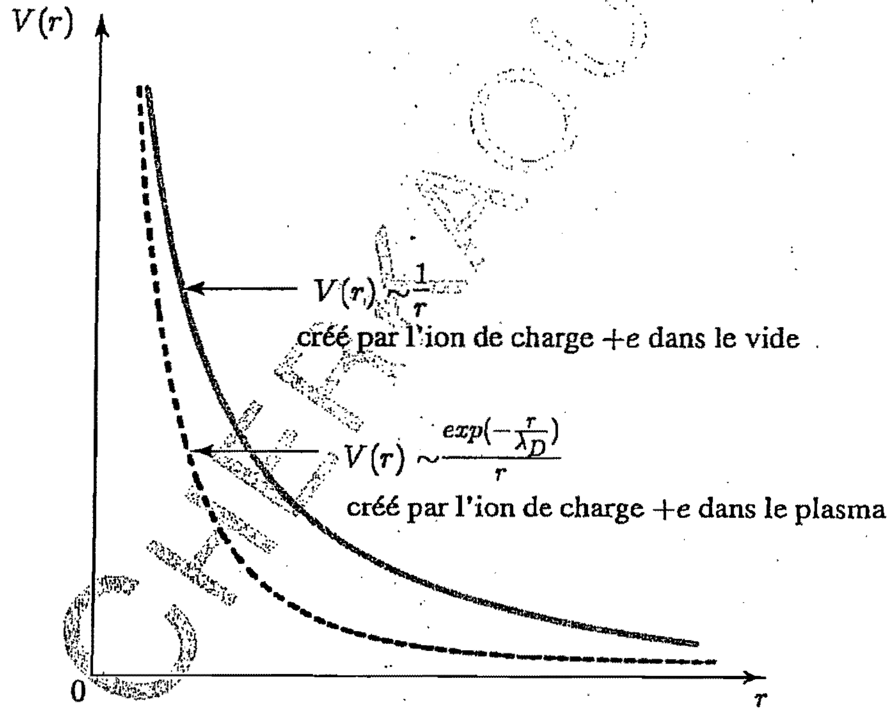
- loin de l'ion, le potentiel électrostatique $V(\infty)$ doit rester fini, soit donc $\alpha = 0$;
- au voisinage de l'ion tel que $r \ll \lambda_D$ ($\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \approx 1$), il y a absence d'effet d'écran, et le potentiel aura l'expression :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\beta}{r} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$$

d'où :

$$\boxed{V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r}} \qquad (25)$$

3.2.3.4. Allure de potentiel $V(r)$ déterminé et du potentiel créé par un ion de charge $+e$ dans le vide :



En comparant les deux courbes, on constate que la décroissance du potentiel $V(r)$ est plus rapide dans le cas de plasma que dans le cas du vide.

Commentaire : La décroissance rapide de potentiel $V(r)$ dans le plasma est due à l'effet d'écran. Ce dernier est d'autant plus grand que le plasma est dense : si n_0 est élevé alors λ_D est petit.

3.2.4. Champ électrostatique et charge dans le plasma.

3.2.4.1. Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M du plasma s'écrit :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\lambda_D r}\right)\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)\vec{u}_r$$

soit :

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{\lambda_D}\right)\frac{\exp\left(-r/\lambda_D\right)}{r^2}\vec{u}_r} \tag{26}$$

3.2.4.2. La charge électrique totale $Q_{\text{totale}}(R)$ contenue dans la sphère de rayon R centrée sur l'origine est déterminée par application du théorème de GAUSS à la sphère de rayon R, soit :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E}(M)\,.\vec{dS}=\frac{Q_{\text{totale}}(R)}{\varepsilon_0}=4\pi R^2 E(R)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{\text{totale}}(R)=e\left(1+\frac{R}{\lambda_D}\right)\exp\left(-\frac{R}{\lambda_D}\right)} \tag{27}$$

Lorsque R est très grand devant la longueur de DEBYE λ_D ($R \gg \lambda_D$), on a :

$$\exp\left(-\frac{R}{\lambda_D}\right)\to 0 \quad \text{et} \quad \boxed{Q_{\text{totale}}(R)=0}$$

Commentaire : Tout volume du plasma, dont les dimensions caractéristiques sont sensiblement supérieures à la longueur de DEBYE λ_D, est électriquement neutre.

4$^{\text{ème}}$ Partie
Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

4.1. Relations générales

4.1.1. Ondes planes

4.1.1.1. Onde plane, onde plane transversale, onde plane longitudinale.

- **Onde plane** : une onde plane est une grandeur scalaire ou vectorielle qui se propage et qui ne dépend que d'une seule coordonnée cartésienne d'espace et du temps. Elle prend la même valeur, à un instant donné, en tout point d'un plan orthogonal à la direction de propagation.
- **Onde plane transversale** : une onde plane est transversale si elle vibre selon une direction orthogonale à la direction de propagation.
- **Onde plane longitudinale** : une onde plane est longitudinale si elle vibre selon une direction parallèle à la direction de propagation.

4.1.1.2. Les équations de MAXWELL permettent de montrer l'existence d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ et d'un potentiel scalaire ϕ. Soit :

$$\vec{\nabla}.\vec{B}(M,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \vec{A}(M,t) \ / \ \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{\nabla}_M \times \vec{A}(M,t)} \qquad (28)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(M,t)\right)}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\dfrac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}\right) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(M,t) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}(M,t) + \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \exists \phi(M,t) \ / \quad \vec{E}(M,t) + \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(M,t) = -\vec{\nabla}_M \phi(M,t) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}} \qquad (29)$$

4.1.1.3. Soit $(\vec{A}, \phi)$ et $(\vec{A}', \phi')$ deux déterminations des potentiels vecteurs et scalaires pour le même champ électromagnétique $[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)]$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

donc :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} - \vec{A}'\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{A} - \vec{A}'\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\exists \varphi \ / \ \vec{A} - \vec{A}' = \vec{\nabla}\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

Conclusion : Il est possible de changer le potentiel vecteur $\vec{A}$ par le potentiel vecteur $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\varphi$, sans modifier le même champ électromagnétique $[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)]$, à condition de changer le potentiel scalaire ϕ par le potentiel scalaire $\phi' = \phi + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$.
On en déduit que les potentiels vecteur et scalaire ne sont pas uniques.

En résumé :

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\varphi \text{ et } \phi' = \phi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'}$$

4.1.2. La condition supplémentaire imposée est $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

4.1.2.1. Soit $\vec{A} = \vec{A}_{//} + \vec{A}_{\perp}$.

Dans le cas d'une onde plane progressive dans la direction et le sens de $\vec{u}_z$, le vecteur nabla $\vec{\nabla}$ s'écrit :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

La condition supplémentaire s'écrit alors :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}.\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}_{//} + \vec{\nabla}.\vec{A}_{\perp} = 0 \\ \vec{\nabla}.\vec{A}_{\perp} = 0 \text{ car } \vec{u}_z.\vec{A}_{\perp} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{A}_{//} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{u}_z.\vec{A}_{//}\right) = 0$$

soit, en ne considérant que des champs variables :

$$\frac{\partial A_{//}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \boxed{A_{//} = 0}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_{\perp}} \qquad (30)$$

4.1.2.2. Dans le cas de champ magnétique, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp} \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{B}_{//} + \underbrace{\vec{\nabla}.\vec{B}_{\perp}}_{=0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{B}_{//} = \frac{\partial B_{//}}{\partial z} = 0$$

soit en l'absence de tout champ uniforme :

$$\boxed{B_{//} = 0}$$

On en déduit la relation simple suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_\perp = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{u}_z . \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial z}} \qquad (31)$$

4.1.2.3. Pour exprimer $\overrightarrow{E}_{//}$ en fonction de ϕ, on écrit :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{E}_{//} + \overrightarrow{E}_\perp \text{ avec } \overrightarrow{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial z}\overrightarrow{u}_z \text{ et } \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}_\perp$$

et puisque $\overrightarrow{E}_\perp \perp \overrightarrow{u}_z$, on tire :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{//} = -\overrightarrow{\nabla}\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial z}\overrightarrow{u}_z} \qquad (32)$$

4.1.2.4. De même pour exprimer $\overrightarrow{E}_\perp$ en fonction de $\overrightarrow{A}$, on écrit, d'après le résultat de 4.1.2.3. :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_\perp = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}_\perp}{\partial t}} \qquad (33)$$

4.1.3. Équations de POISSON :

4.1.3.1. D'après l'équation de MAXWELL-GAUSS, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}.\left(-\overrightarrow{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}\right)}_{=0}$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}^2\phi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0} \qquad (34)$$

4.1.3.2. D'après l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\mu_0\vec{j}+\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\underbrace{\vec{\nabla}.\vec{A}}_{=0}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad -\vec{\nabla}^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c_0^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\quad\text{avec}\quad\vec{\nabla}^2\vec{A}=\Delta\vec{A}$$

soit alors :

$$\boxed{\Delta\vec{A}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\mu_0\vec{j}=\frac{1}{c_0^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\qquad(35)$$

L'équation de POISSON en $\vec{A}$ fait intervenir le potentiel scalaire ϕ, on dit que $\vec{A}$ et ϕ sont couplés par l'équation de POISSON car les champs électrique et magnétiques sont couplés par les équations de MAXWELL.

4.1.3.3. L'équation (35) permet d'obtenir l'équation différentielle reliant le potentiel vecteur $\vec{A}$ à $\vec{j}_\perp$, car on a :

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\phi.\vec{u}_\perp=0$$

et donc l'équation (35) implique :

$$\frac{\partial^2\vec{A}_\perp}{\partial z^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}_\perp}{\partial t^2}+\mu_0\vec{j}_\perp=\vec{0}$$

or on sait que $\vec{A}=\vec{A}_\perp$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\mu_0\vec{j}_\perp=\vec{0}}\qquad(36)$$

4.1.3.4. De même, on a :

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\phi.\vec{u}_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}\quad\text{et}\quad\vec{A}.\vec{u}_z=0$$

l'équation (35) se transforme en :

$$\mu_0 \vec{j}_{//} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\vec{u}_z$$

d'où :

$$\boxed{\vec{j}_{//} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t}\vec{u}_z} \tag{37}$$

4.1.4. Mouvement des électrons du plasma provoqué par l'onde.

4.1.4.1. L'équation de mouvement d'un électron du plasma siège de l'onde électromagnétique est :

$$m_e \vec{a}(t) = m_e \vec{g} - e\vec{E} - e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$m_e \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = m_e \vec{g} - e\vec{E} - e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

- le poids de l'électron étant négligeable devant la force électrique :

$$\|m_e \vec{g}\| \ll \left\|-e\vec{E}\right\|$$

- le terme $\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}$, du second terme, est négligeable devant le terme du premier ordre $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$:

$$\left\|\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right\| \ll \left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|$$

- la force magnétique appliquée à l'électron étant négligeable devant la force électrique :

$$\left\|-e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right\| \ll \left\|-e\vec{E}\right\|$$

L'équation de mouvement de l'électron devient :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}} \tag{38}$$

4.1.4.2. La projection de l'équation (38) sur le vecteur $\vec{u}_\perp$ donne :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\vec{u}_\perp = -\frac{e}{m_e}\vec{E}.\vec{u}_\perp \Rightarrow \frac{\partial v_\perp}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}E_\perp$$

D'après l'équation (33), on a $\vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et par suite, on écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = \frac{e}{m_e}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_\perp = \frac{e}{m_e}\vec{A}} \tag{39}$$

en ne considérant que des champs variables, c'est pourquoi la constante d'intégration est prise nulle.

4.1.4.3. Expression de $\vec{j}$.

$$\vec{j} = -n(z,t)\, e\vec{v} = -[n_0 + \Delta n(z,t)]\, e\vec{v}$$

$\|\Delta n(z,t)\, \vec{v}\|$ étant un infiniment petit d'ordre 2 et à l'ordre le plus bas non nul, on obtient :

$$\boxed{\vec{j} \approx -n_0 e\vec{v}} \tag{40}$$

4.1.5. Étant donné que $\vec{v}_\perp = \frac{e}{m_e}\vec{A} = \frac{e}{m_e}\vec{A}_\perp$ d'après (30) et (39), on a :

$$(40) \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_\perp = -n_0 e\vec{v}_\perp = -\frac{n_0 e^2}{m_e}\vec{A}_\perp = -\frac{n_0 e^2}{m_e}\vec{A}$$

L'équation (36) s'écrit encore sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}\vec{A} = \vec{0}} \tag{41}$$

4.2. Conditions de propagation

4.2.1. L'onde électromagnétique plane progressive et monochromatique étant décrite par le potentiel vecteur

$$\underline{\vec{A}} = \vec{A}_0 \exp i(kz - \omega t)$$

Ce dernier vérifie l'équation (41), soit :

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}\underline{\vec{A}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}\right)\underline{\vec{A}} = \vec{0}$$

Sachant que $\mu_0\varepsilon_0 c_0^2 = 1$, la relation de dispersion s'écrit :

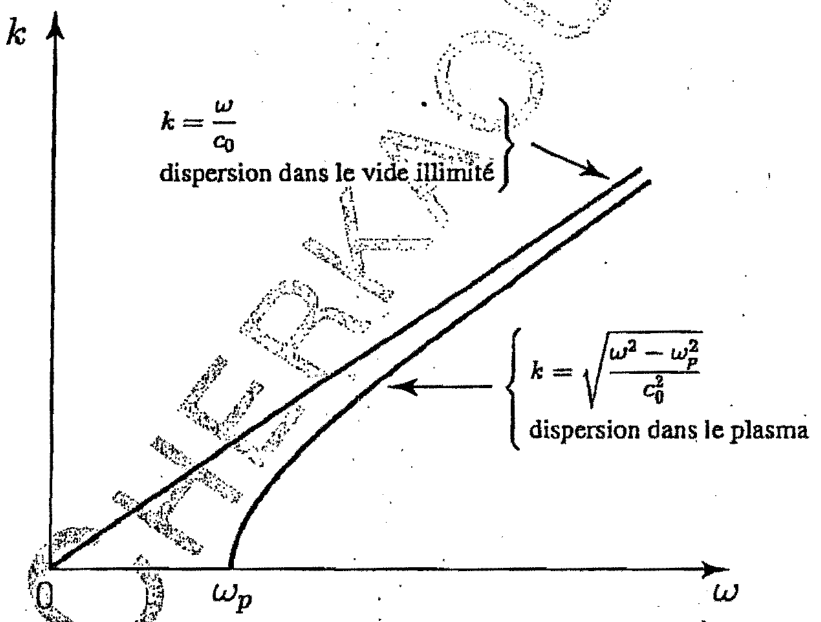
$$k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{n_0 e^2}{m_e\varepsilon_0 c_0^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - \frac{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{m_e\varepsilon_0}}{c_0^2} = 0$$

soit, en posant $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$:

$$\boxed{k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2} = 0} \qquad (42)$$

4.2.2. Étude de la relation de dispersion $k = k(\omega)$.

4.2.2.1. Tracé de la courbe $k = k(\omega)$:



4.2.2.2. Il y a propagation de l'onde dans le plasma si la norme du vecteur d'onde k est réel. Ceci est réalisé dans le cas où $\omega > \omega_p$:

$$\boxed{\text{propagation si } k \in \mathbb{R}^* \quad \text{donc pour } \omega > \omega_p}$$

Dans l'autre domaine $\omega < \omega_p$, k est imaginaire pur; il y a donc phénomène d'absorption de l'onde de plasma.

$$\boxed{\text{pas de propagation si } k \in i\mathbb{R}^* \quad \text{donc pour } \omega < \omega_p}$$

Dans ce cas, k peut s'écrire :

$$k^2 = -\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c_0^2} = i^2 \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c_0^2} \Rightarrow \boxed{k = i\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c_0} = i\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c_0} \quad \text{est réel positif}$$

et le potentiel vecteur $\underline{\vec{A}}$ prend alors l'expression :

$$\underline{\vec{A}} = \vec{A}_0 \exp\left[-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c_0}z\right] \exp -i\omega t = \vec{A}_0 \exp(-\alpha z) \exp -i\omega t$$

Enfin, le potentiel vecteur réel $\vec{A}$ est :

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_0 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t) = \vec{A}_m \cos(\omega t)}$$

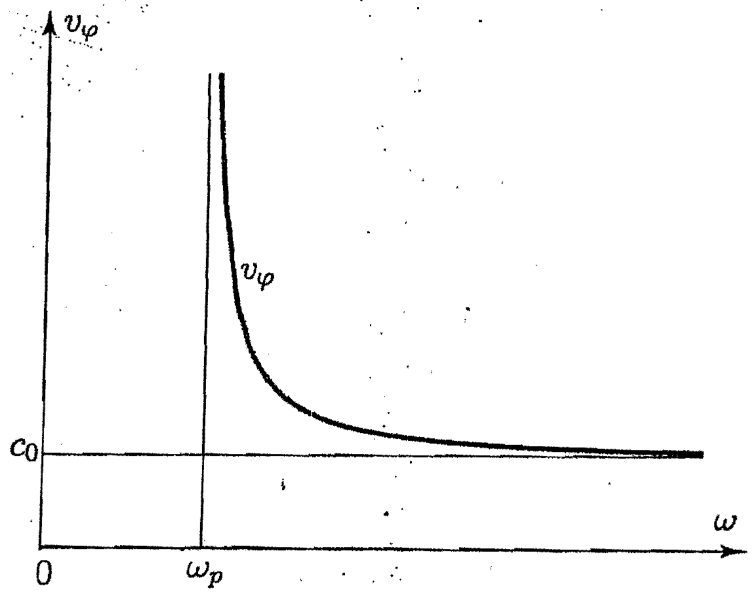
Commentaire : On reconnaît bien l'expression d'une onde évanescente d'après la décroissance exponentielle ($\exp(-\alpha z)$) de l'amplitude $\vec{A}_m = \vec{A}_0 \exp(-\alpha z)$ de l'onde qui traduit l'absorption de l'onde par le plasma dans une longueur de quelques $\frac{1}{\alpha}$.

4.2.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe.

4.2.3.1. Dans le cas où il y a propagation (k réel), la vitesse de phase est la vitesse des plans équiphases, soit :

$$kz - \omega t = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad kdz - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c_0^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\varphi = \frac{c_0}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}} \tag{43}$$



Commentaire : La vitesse de phase v_φ est supérieure à la célérité de la lumière dans le vide c_0 sans violer la théorie de La Relativité, car cette vitesse n'est pas associée à un transport d'information ou d'énergie mais au déplacement des plans équiphases et par suite v_φ n'a pas de réalité physique.

4.2.3.2. La vitesse de groupe est la vitesse de transport de l'énergie ; elle est définie par :

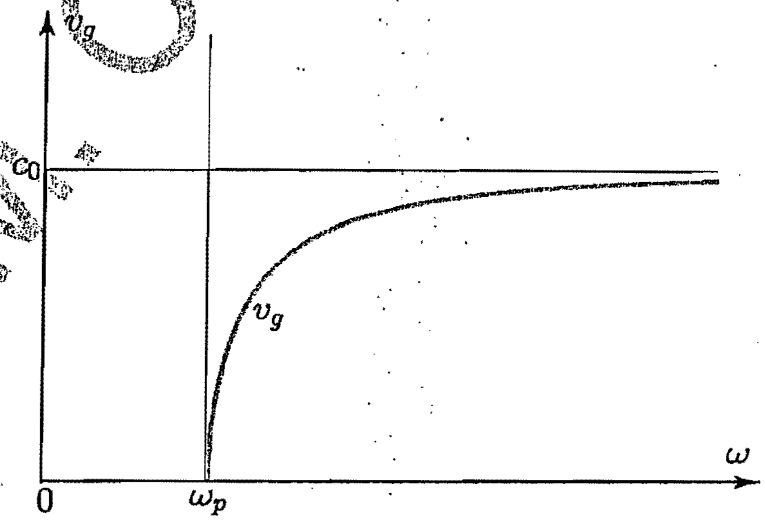
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}}$$

$$dk = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega d\omega}{c_0^2}\right)\left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0^2}{\omega}\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}}$$

d'où :

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = c_0\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \qquad (44)$$

Commentaire : c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide, qui est aussi la vitesse limite du transport de l'énergie ; soit donc $v_g < c_0$.



4.2.3.3. On peut remarquer ici la relation :

$$v_\varphi v_g = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} c_0\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\varphi v_g = c_0^2}$$

4.3. Onde longitudinale

4.3.1. On a, d'après l'équation (37) :

$$\vec{\jmath}_{//} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \vec{u}_z$$

Le potentiel scalaire complexe de l'onde électromagnétique plane progressive et monochromatique a pour expression :

$$\underline{\phi} = \phi_0 \exp i\,(kz - \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} = ik\underline{\phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial z \partial t} = k\omega\underline{\phi}$$

$$(37) \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{\jmath}}_{//} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial z \partial t} \vec{u}_z = \varepsilon_0 k\omega \underline{\phi} \vec{u}_z$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\jmath}_{//} = \mathcal{R}e\left(\underline{\vec{\jmath}}_{//}\right) = \varepsilon_0 k\omega \phi \vec{u}_z} \qquad (45)$$

4.3.2. Pour $\vec{v}_{//}$, on a l'expression suivante $\vec{v}_{//} = -\frac{1}{n_0 e} \vec{\jmath}_{//}$, d'où :

$$\boxed{\vec{v}_{//} = -\frac{\varepsilon_0 k\omega}{n_0 e} \phi \vec{u}_z} \qquad (46)$$

4.3.3. L'équation de mouvement de l'électron (38)

$$\frac{\partial \underline{\vec{v}}_{//}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \underline{\vec{E}}$$

appliquée à la vitesse $\vec{v}_{//}$ donne :

$$-i\omega \underline{\vec{v}}_{//} = -\frac{e}{m_e}\left(-\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z}\right) \vec{u}_z \Rightarrow i\omega \underline{\vec{v}}_{//} = -\frac{e}{m_e} ik\underline{\phi} \vec{u}_z \Rightarrow \underline{\vec{v}}_{//} = -\frac{ke}{\omega m_e} \underline{\phi} \vec{u}_z$$

soit donc :

$$\boxed{\vec{v}_{//} = \mathcal{R}e\left(\underline{\vec{v}}_{//}\right) = -\frac{ke}{\omega m_e} \phi \vec{u}_z} \qquad (47)$$

4.3.4. Pour k quelconque, les deux expressions (46) et (47) sont identiques si on a :

$$\frac{e}{\omega m_e} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{n_0 e} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} = \omega_p^2 \,,$$

d'où :

$$\boxed{\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}}$$

Commentaire : Pour qu'une onde longitudinale puisse se propager dans le plasma, elle doit avoir une pulsation ω égale à la pulsation plasma ω_p.

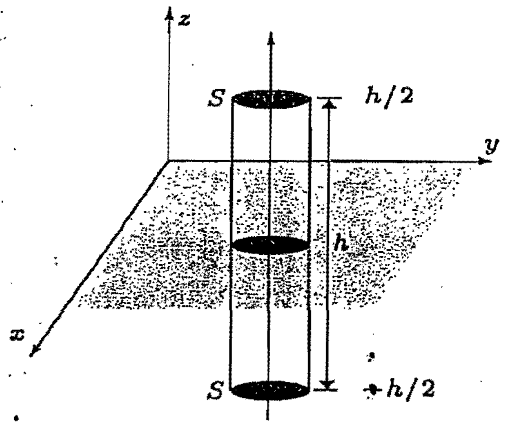
5$^{\text{ème}}$ Partie
Effets collectifs dans un plasma. Plasmons

5.1. Préliminaires

5.1.1. La distribution de charge, placée dans le vide, est infinie pour des distances h très faible devant les dimensions linéaires caractéristiques de la distribution. Elle est invariante par translation selon les axes Ox et Oy, donc le potentiel s'écrit $V = V(z)$, ce qui implique que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\dfrac{dV}{dz}\overrightarrow{u}_z$ est de la forme $\overrightarrow{E} = E(z)\overrightarrow{u}_z$.

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des charges, donc de $\overrightarrow{E}$: $E(z)$ est une fonction impaire de z, soit $E(h/2) = -E(-h/2)$.

Appliquons le théorème de GAUSS à un cylindre de génératrices parallèles à l'axe Oz et clos par deux sections symétriques S par rapport au plan chargé par surfaciquement par σ :



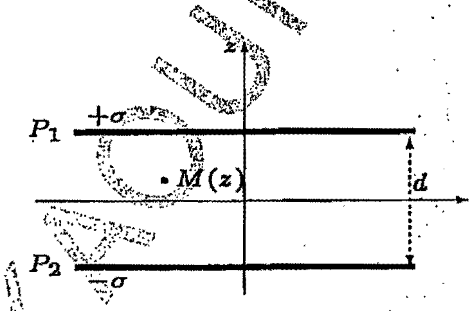
$$E\,(h/2)\,S - E\,(-h/2)\,S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \text{et } E\,(h/2) = -E\,(-h/2) \quad \Rightarrow \quad 2E\,(h/2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

soit alors :

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } z > 0 & : \quad \vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \\ \text{si } z < 0 & : \quad \vec{E}(M) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \end{cases}}$$

5.1.2. Les deux distributions sont séparées d'une distance d très faible devant leurs dimensions linéaires caractéristiques ; elles peuvent être considérées comme infinies

L'expression du champ électrique qui règne dans l'espace compris entre les deux distributions est déterminée en ajoutant les champs électriques produits par les plans P_1 et P_2 :



$$\text{pour } z < \frac{d}{2} \qquad \text{on a } \vec{E}_{(+\sigma)} = -\left(\frac{+\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_z$$

$$\text{pour } -\frac{d}{2} < z \quad \text{on a } \vec{E}_{(-\sigma)} = +\left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_z$$

$$\text{Si } \quad -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \quad ; \quad \vec{E} = \vec{E}_{(+\sigma)} + \vec{E}_{(-\sigma)} = -\left(\frac{+\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_z + \left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_z$$

soit donc :

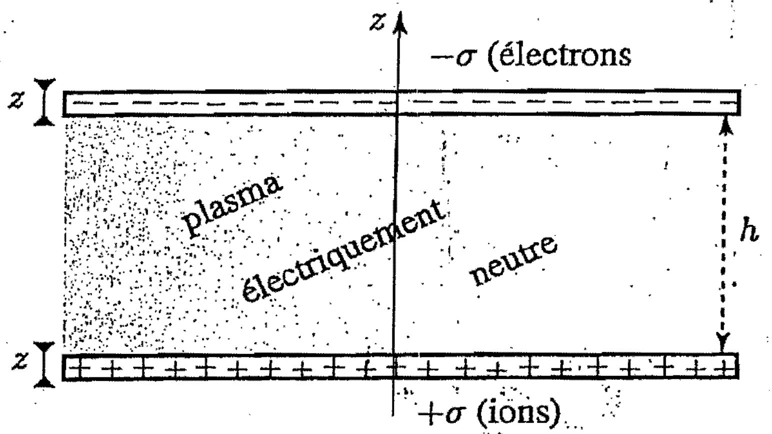
$$\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z} \qquad (48)$$

5.2. Oscillations longitudinales d'une colonne de plasma

5.2.1. Compte tenu du rapport des masses $\dfrac{m_i}{m_e} \gg 1$, on peut considérer les ions comme étant fixes en première approximation.

5.2.2. Pour $z \neq 0$, la distribution de charge $\mathcal{D}_2$, résultante du déplacement des électrons de la distance z petite devant h, sera équivalent à la distribution de charge $\mathcal{D}_1$ décrite à la question 5.1. si la même surface $d\Sigma$ de chacune des distributions porte la même charge, soit :

$$dq_1 = dq_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma d\Sigma = n_0 d\tau e \;\; \text{avec} \;\; d\tau = z d\Sigma$$



d'où :

$$\boxed{\sigma = n_0 z e} \tag{49}$$

5.2.3. La force qui agit sur un électron du plasma s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_e = -e\overrightarrow{E}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_z \quad \text{et} \quad \sigma = n_0 z e$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F}_e = -\frac{n_0 z e^2}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_z} \tag{50}$$

5.2.4. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à l'électron dans son mouvement sous la force électrique $\overrightarrow{F}_e$, on écrit :

$$\overrightarrow{F}_e = m_e\overrightarrow{a}_e = m_e\frac{d\overrightarrow{v}_e}{dt}$$

Le mouvement étant selon Oz ; par projection suivant $\overrightarrow{u}_z$, on trouve l'équation différentielle demandée :

$$m_e\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{n_0 z e^2}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{n_0 e^2}{m_e\varepsilon_0}z = 0} \tag{51}$$

5.2.5. Les électrons du plasma effectuent des oscillations collectives. En effet, l'équation (51) fait apparaître la pulsation ω_0 telle que :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e\varepsilon_0}}$$

On remarque que :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}} = \omega_p}$$

Commentaire : La pulsation propre des oscillations des électrons dans le plasma vaut la valeur de la pulsation plasma ω_p.

5.3. Plasmon

5.3.1. Expression de l'énergie cinétique $E_c^{(1)}$ d'un électron ayant excité un seul plasmon.

À la sortie, un électron ayant excité un seul plasmon aura l'énergie cinétique $E_c^{(1)}$ telle que :

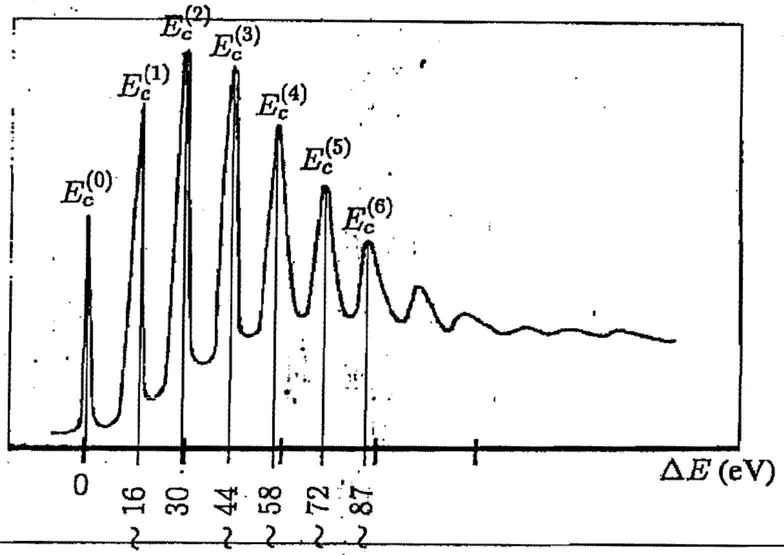
$$E_{ci} = E_c^{(1)} + \hbar\omega_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_c^{(1)} = E_{ci} - \hbar\omega_p} \tag{52}$$

5.3.2. À la sortie, un électron ayant excité n plasmons aura l'énergie cinétique $E_c^{(n)}$ telle que :

$$E_{ci} = E_c^{(n)} + n\hbar\omega_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_c^{(n)} = E_{ci} - n\hbar\omega_p} \tag{53}$$

5.3.3. Utilisation du spectre des pertes d'énergie subies par les électrons d'énergie cinétique initiale donnée.

5.3.3.1. Énergie de plasmon :



$$\Delta E_c^{(n)} = E_{ci} - E_c^{(n)} = n\hbar\omega_p$$

$\Delta E_c^{(n)}$ (eV)	0	16	30	45	58	74	88
$n\hbar\omega_p$ (eV)	0	$\hbar\omega_p \approx 16$	$2\hbar\omega_p \approx 30$	$3\hbar\omega_p \approx 45$	$4\hbar\omega_p \approx 58$	$5\hbar\omega_p \approx 74$	$6\hbar\omega_p \approx 88$
$\hbar\omega_p$ (eV)	0	15	15	14,5	14,8	14,8	14,7

L'énergie de plasmon de volume de la couche mince d'aluminium est :

$$\boxed{E_{\text{plasmon}} = (\hbar\omega_p)_{\text{moyenne}} \approx 14,8 \text{ eV}}$$

5.3.3.2. Densité électronique n_0 de la couche mince d'aluminium considérée.

$$E_{\text{plasmon}} = (\hbar\omega_p)_{\text{moyenne}} \approx 14,8 \text{ eV}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_p = \frac{(\hbar\omega_p)_{\text{moyenne}} \times 1,6 \times 10^{-19}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_p \approx 2,3 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}}$$

Écrions la relation liant ω_p à n_0 :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_0 = \frac{m_e \varepsilon_0}{e^2}\omega_p^2 = \frac{m_e}{\mu_0 c_0^2 e^2}\omega_p^2}$$

Application numérique :

$$n_0 = \frac{(9,1 \times 10^{-31})}{(4\pi \times 10^{-7})(3,0 \times 10^8)^2 (1,6 \times 10^{-19})^2} \left(2,3 \times 10^{16}\right)^2$$

$$\boxed{n_0 \approx 1,7 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}}$$

FIN DE LA CORRECTION