Signaux Physiques

CHAPITRE 3

Circuits linéaires du 1er ordre

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction

Ce chapitre concerne l'étude **des réponses à un échelon de tension** de quelques circuits simples comprenant des condensateurs, des résistances et des bobines (circuit RC série, circuit RL série).

Définitions (1)

- **Un système du premier ordre** est un système dont le comportement est décrit par une équation différentielle du premier ordre.
- **Un système du second ordre** est un système dont le comportement est décrit par une équation différentielle du second ordre.
- **Un système est linéaire** si son équation différentielle est linéaire.
- On appelle **excitation** ou contrainte toute action de la part de l'extérieur, susceptible de modifier le comportement

Définitions (2)

du système. On note $e(t)$ la grandeur qui caractérise l'excitation

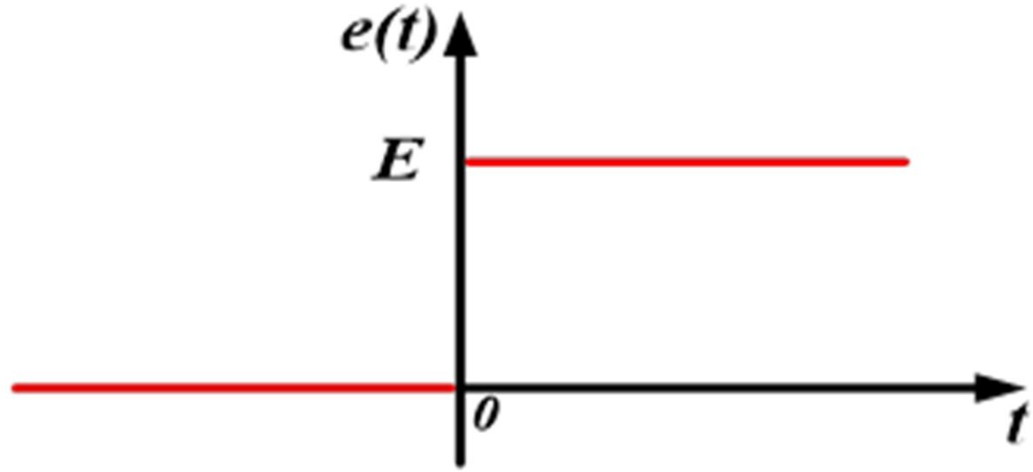
- On appelle **réponse d'un système**, le comportement qu'il adopte face à une excitation extérieure. On note $s(t)$ la grandeur qui caractérise ce comportement.

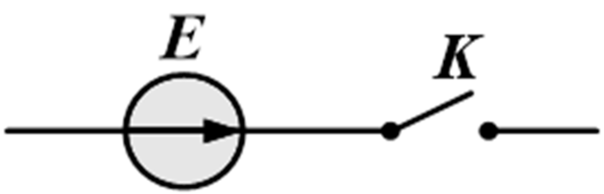
☞ **En électricité, l'excitation peut résulter de la présence d'un générateur continu ou alternatif, mais aussi de la fermeture ou l'ouverture d'un circuit. En mécanique cela peut se traduire par la présence d'un moteur ou le déplacement d'un support par exemple**

Définitions (3)

- On appelle **échelon** la variation brusque et très rapide d'une contrainte imposée au système. La fonction $e(t)$ représentant l'excitation correspond à la forme idéale représentée ci-dessus

$$e(t) = \begin{cases} 0 \;\; si\; t < 0 \\ E \;\; si\; t \geq 0 \end{cases}$$





l'échelon de tension

Lorsque l'échelon de tension alimente un circuit, il donne naissance dans ce circuit au régime transitoire appelé aussi "**réponse à l'échelon de tension**"

Définitions (4)

- Un système est en **régime permanent** ou **régime établi** si les grandeurs qui le caractérisent sont soit stationnaires (constantes dans le temps), soit périodiquement variables dans le temps.
- Un système est en **régime transitoire** si les grandeurs qui le caractérisent évoluent pendant une durée déterminée.
- On appelle **état zéro**, l'état d'un système dont les contraintes n'ont pas changé depuis longtemps (dipôle électrique hors circuit, système mécanique au repos…) Toutes les grandeurs électriques qui le caractérisent sont nulles et donc $s = 0$.

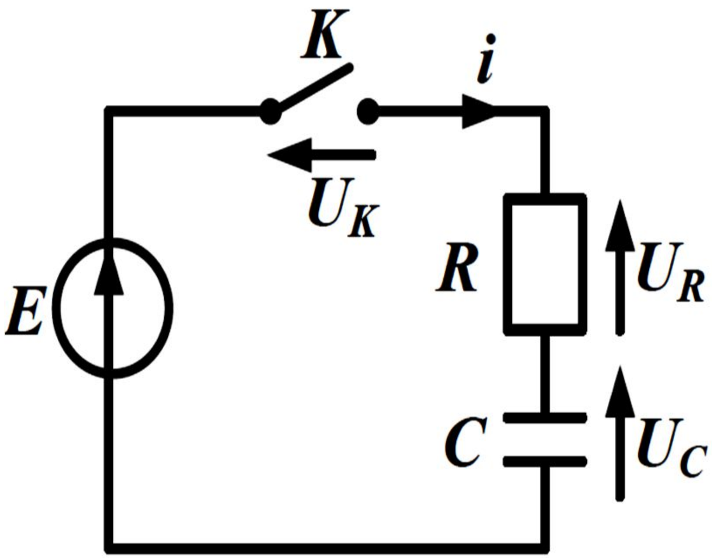
Définitions (5)

- **La réponse à un échelon** est le régime transitoire adopté par un système initialement dans son état zéro (régime permanent) lorsqu'il est soumis à un échelon.

- **Le régime libre** est le régime transitoire adopté par un système initialement dans un état permanent diffèrent de son état zéro (suite par exemple à un échelon) lorsqu'il subit une modification de contrainte (par exemple l'annulation de l'échelon) et revient librement vers son état zéro.

Circuit RC série: régime forcé et régime libre

Régime forcé (1)



- un générateur de tension continue de $f.é.m.$ est branché aux bornes du circuit RC ;
- pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

- Dans ce circuit, i est l'intensité du courant, U_K la tension aux bornes de l'interrupteur, U_C la tension aux bornes du condensateur et U_R la tension aux bornes de la résistance. En convention récepteur on a :

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{U_R = Ri} \\ \boldsymbol{i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{U_R = RC\frac{dU_C}{dt}}$$

Régime forcé (2)

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert :

$$\boldsymbol{i = 0; \quad U_R = 0; \quad U_C = 0; \quad U_K = E}$$

- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé : $U_K = 0$ (tension aux bornes d'un fil, donc même potentiel).

$$\boldsymbol{U_R + U_C = E}$$

Du fait que $U_R = RC\, dU_C/dt$, on conclut que **la tension U_C aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle du premier ordre** :

$$\boxed{\boldsymbol{RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E}}$$

Régime forcé (3)

- On définit **la constante de temps τ** du circuit RC par le produit :

$$\boxed{\tau = RC}$$

où τ (s) ; R (Ω) ; C (F).

- **La tension U_C aux bornes du condensateur** d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension E a pour expression :

$$\boxed{U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

- **L'intensité i du courant** est :

$$\boxed{i = C\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow i = \frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Régime forcé (4)

- Dans le cas où le condensateur est chargé sous une tension U_0 pour $t < 0$, **La tension U_C aux bornes du condensateur** d'un circuit RC série soumis à l'échelon de tension E a pour expression :

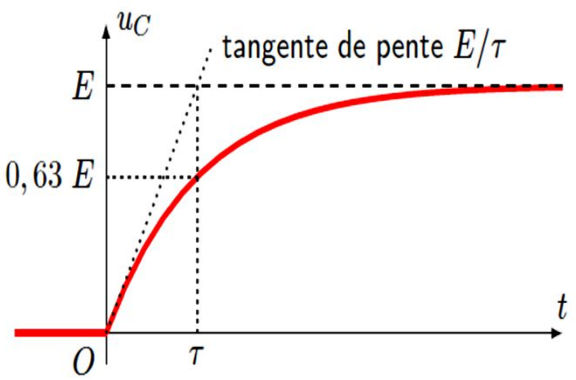
$$\boxed{U_C = \begin{cases} U_0 & \textbf{pour} \quad t < 0 \\ E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}} & \textbf{pour} \quad t > 0 \end{cases}}$$

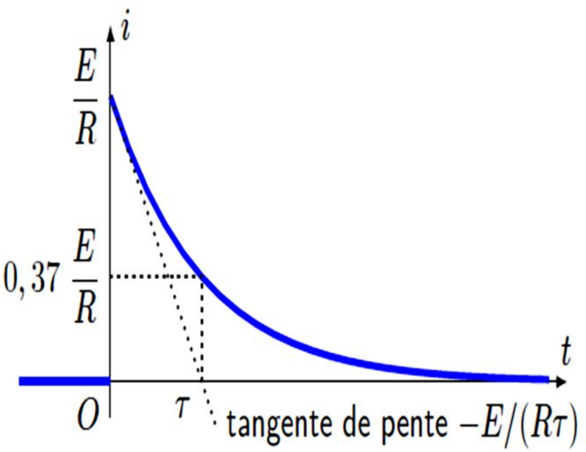
- **L'intensité i du courant** est :

$$\boxed{i = C\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow i = \frac{C(E - U_0)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{(E - U_0)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Régime forcé (5)

❑ Représentations graphiques



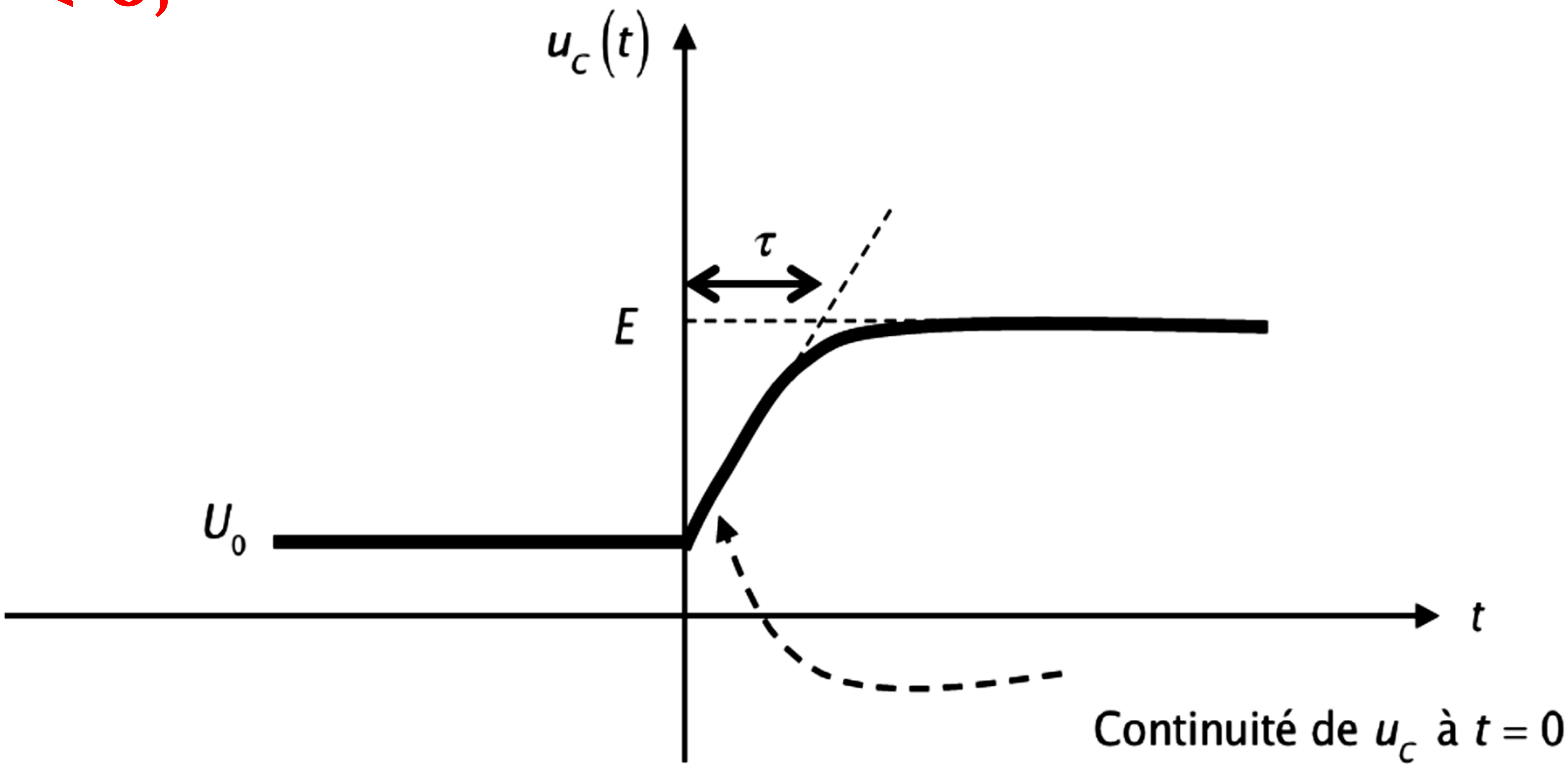


- la tension U_C aux bornes du condensateur est continue ;
- l'intensité i du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur $(t = 0)$;
- pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$;
- $0{,}63\ E = 63\%\ E$ correspond à $t = \tau$;
- la charge du condensateur correspond à un régime transitoire (le courant dans le circuit varie) ;
- lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, le régime permanent est atteint (le courant dans le circuit est constant). On a alors $U_C = E$ et $i = 0$;

Régime forcé (6)

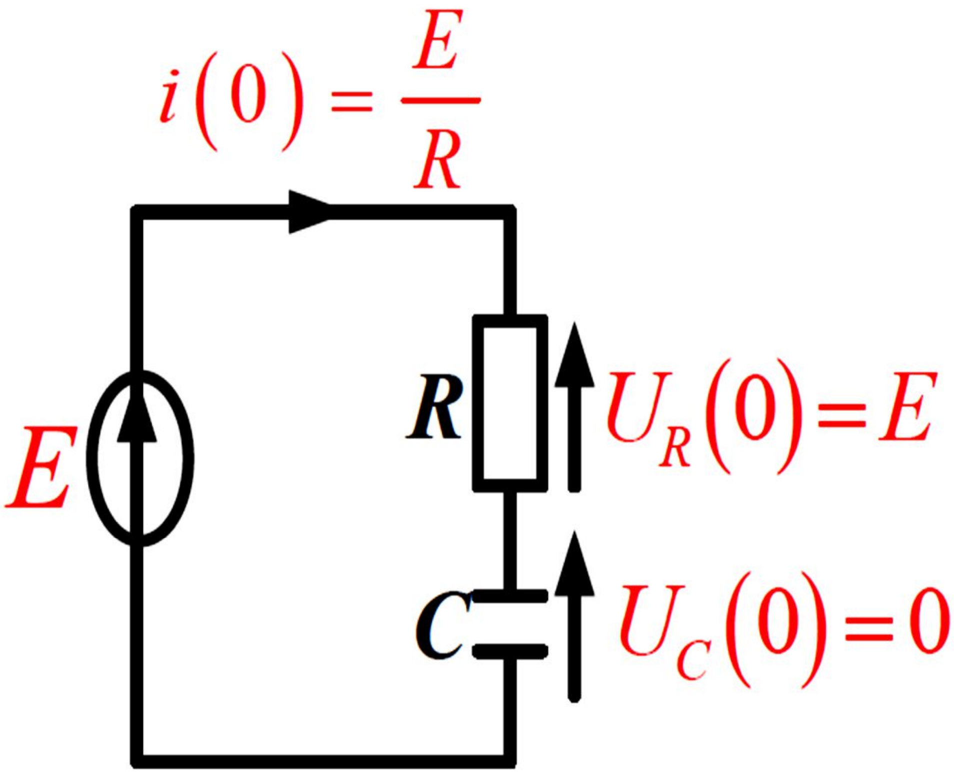
- Représentations graphiques

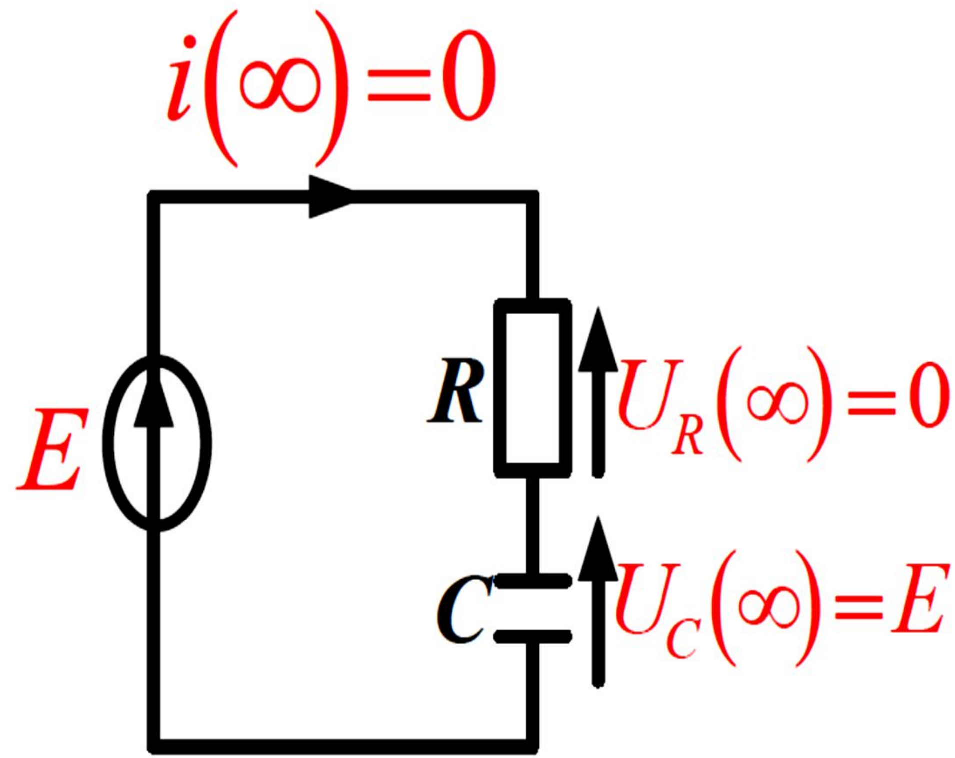
Cas où le condensateur est chargé sous une tension U_0 pour $t < 0$,



Régime forcé (7)

- L'état du circuit quand $\boldsymbol{t = 0}$ et quand $\boldsymbol{t \to \infty}$ est ainsi représenté :





Régime forcé (8)

Réponse complète du condensateur	=	réponse purement TRANSITOIRE (partie temporaire)	+	réponse du régime PERMANENT (partie permanente)
⇓		⇓		⇓
$u_C(t)$	=	$(U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$	+	E

Quand $t \longrightarrow +\infty$, $U_C = E$, C se comporte donc comme un **interrupteur ouvert.** La réponse du régime transitoire disparaît (meurt) rapidement, **seule à long terme la réponse du régime permanent demeure.**

Régime forcé (9)

On peut écrire la réponse complète $U_C(t)$ sous la forme suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = U_C(+\infty) + [U_C(0) - U_C(+\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}}$$

Si l'instant initial est tel que $t = t_0 \neq 0$, on écrira

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = U_C(+\infty) + [U_C(t_0) - U_C(+\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}}$$

Régime forcé (10)

En résumé, pour connaitre la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension, il faut connaitre 3 choses:

- **La tension initiale du circuit $\boldsymbol{U_C(0)}$.**
- **La tension finale du circuit $\boldsymbol{U_C(+\infty)}$**
- **La constante de temps du circuit $\boldsymbol{\tau}$**

Régime forcé (11)

Bilan énergétique

Lors de la charge du condensateur, on a : $E = U_R + U_C = Ri + U_C$

Pour obtenir des puissances, on multiplie par i :

$$\boldsymbol{Ei = Ri^2 + CU_C \frac{dU_C}{dt} = Ri^2 + \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}}$$

- ✓ Ei : Puissance P_g positive fournie par le générateur de tension ;
- ✓ Ri^2 : Puissance P_j positive reçue par la résistance et dissipée par effet joule ;
- ✓ $d(\frac{1}{2}CU_C^2)/dt$: Puissance positive reçue par le condensateur et emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique.

On constate que la puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance et sert à augmenter l'énergie du condensateur.

Régime forcé (12)

- Soit W_g l'énergie électrique fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_g = \int_0^t Ei\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = \frac{E^2}{R} \times RC\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = CE^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_g = CE^2}}$

- Soit W_J l'énergie dissipée par effet joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_J = \int_0^t Ri^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt = \frac{E^2}{R} \times \frac{RC}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}CE^2\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_J = \frac{1}{2}CE^2}}$

Régime forcé (13)

- Soit W_C l'énergie emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

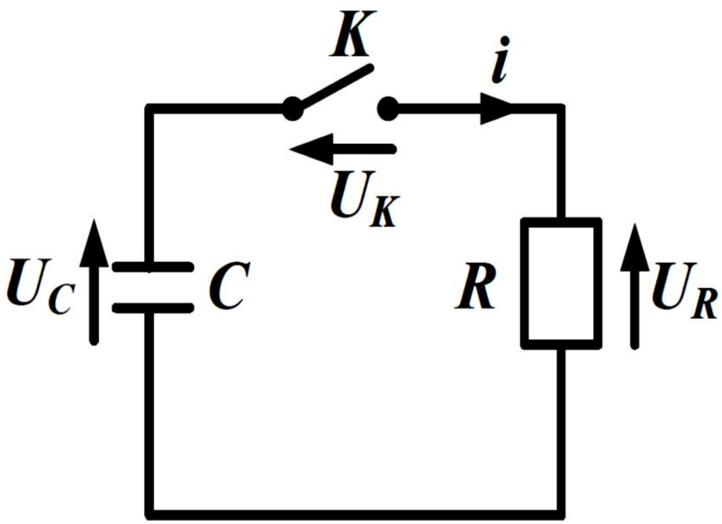
$$W_C = \int_0^t \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}dt = \int_0^t d(\frac{1}{2}CU_C^2) = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}CE^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_C = \frac{1}{2}CE^2}}$

On constate que : $\boldsymbol{W_g = W_J + W_C = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2}$

On conclut finalement qu'au cours de la charge la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur.

Régime libre (1)



- Le condensateur a été chargé sous la tension E constante ;
- pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur chargé est égale à E et l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K
- Dans ce circuit, i est l'intensité du courant, U_K la tension aux bornes de l'interrupteur, U_C la tension aux bornes du condensateur et U_R la tension aux bornes de la résistance. En convention récepteur on a :

$$\left.\begin{array}{c} U_R = Ri \\ i = -\dfrac{dq}{dt} = -C\dfrac{dU_C}{dt} \end{array}\right\} \Longrightarrow U_R = -RC\frac{dU_C}{dt}$$

Régime libre (2)

❑ Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert :

$$\boldsymbol{i = 0; \quad U_R = 0; \quad U_C = E; \quad U_K = E}$$

❑ Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé : $U_K = 0$ (tension aux bornes d'un fil, donc même potentiel).

$$\boldsymbol{U_R - U_C = 0}$$

Du fait que $U_R = -RC\, dU_C/dt$, on conclut que **la tension U_C aux bornes du condensateur de capacité C se déchargeant dans une resistance R vérifie l'équation différentielle du premier ordre** :

$$\boxed{\boldsymbol{RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = \tau\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0}}$$

Régime libre (3)

- **la constante de temps τ** du circuit RC est :

$$\boxed{\tau = RC}$$

- **La tension U_C aux bornes du condensateur** de capacité C se déchargeant dans une résistance R a pour expression :

$$\boxed{U_C = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$

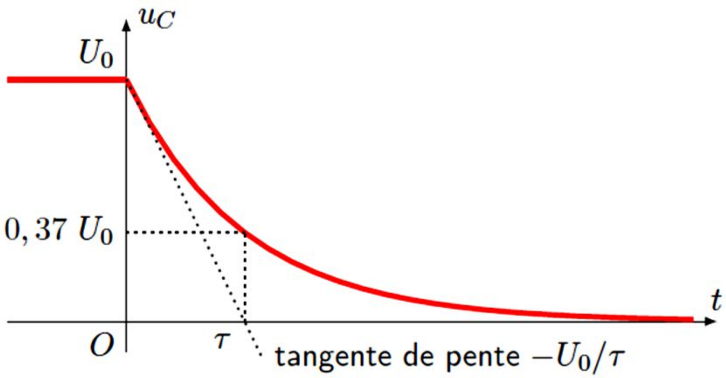
- **L'intensité i du courant** est :

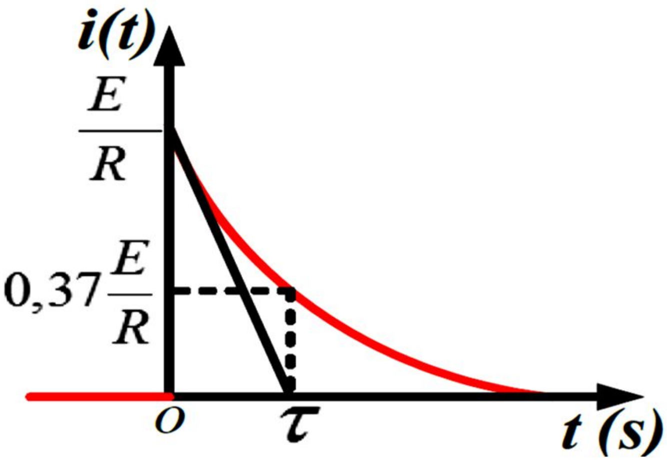
$$\boxed{i = -C\frac{dU_C}{dt} \Longrightarrow i = \frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

La décroissance de l'intensité est la même lors de la charge et lors de la décharge du condensateur.

Régime libre (4)

Représentations graphiques





- La tension U_C aux bornes du condensateur est continue.
- L'intensité i du courant subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur $(t = 0)$.
- Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$.
- La décharge du condensateur correspond à un régime transitoire (le courant dans le circuit varie).
- Lorsque le régime permanent est atteint. On a alors $U_C = 0\ \ et\ i = 0$.

Régime libre (5)

❑ Bilan énergétique

Lors de la décharge du condensateur, on a : $U_C = U_R = Ri$

Pour obtenir des puissances, on multiplie par i :

$$U_C i = -\frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt} = Ri^2$$

✓ $-d(\frac{1}{2}CU_C^2)/dt$: Puissance positive fournie par le condensateur

✓ Ri^2 : Puissance P_j positive reçue par la résistance et dissipée par effet joule

On constate que la puissance fournie par le condensateur correspond à une diminution de l'énergie électrostatique emmagasinée. Elle est dissipée par effet joule dans la résistance.

Régime libre (6)

- Soit W_J l'énergie dissipée par effet joule dans la résistance R entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_J = \int_0^t Ri^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt = \frac{E^2}{R}\times\frac{RC}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}CE^2\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

Lorsque le condensateur est déchargé ($t \to \infty$), il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_J = \frac{1}{2}CE^2}}$

- Soit W_C l'énergie emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

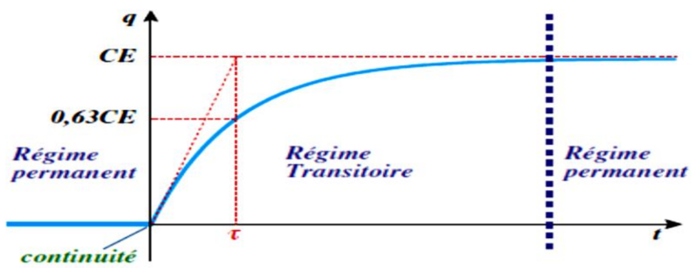
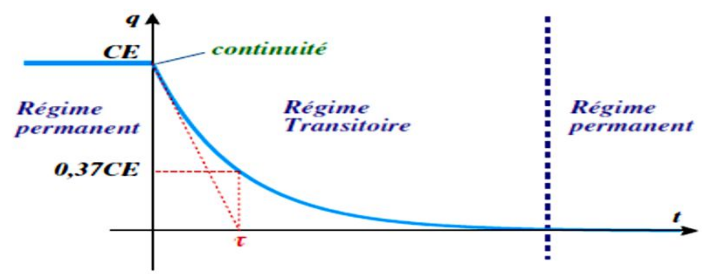
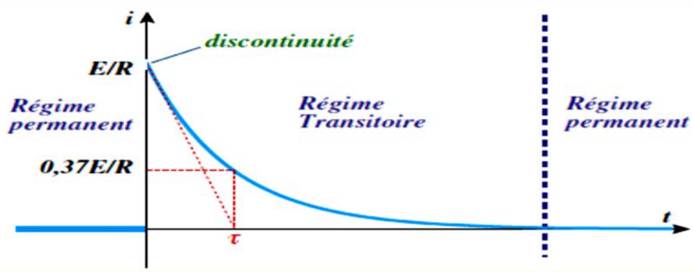
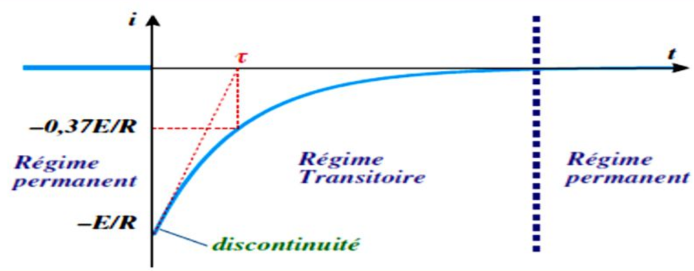
$$W_C = \int_0^t \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}dt = \int_0^t d(\frac{1}{2}CU_C^2) = \frac{1}{2}CU_C^2$$

Lorsque le condensateur est déchargé ($U_C = 0$), il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_C = 0}}$

Régime libre (7)

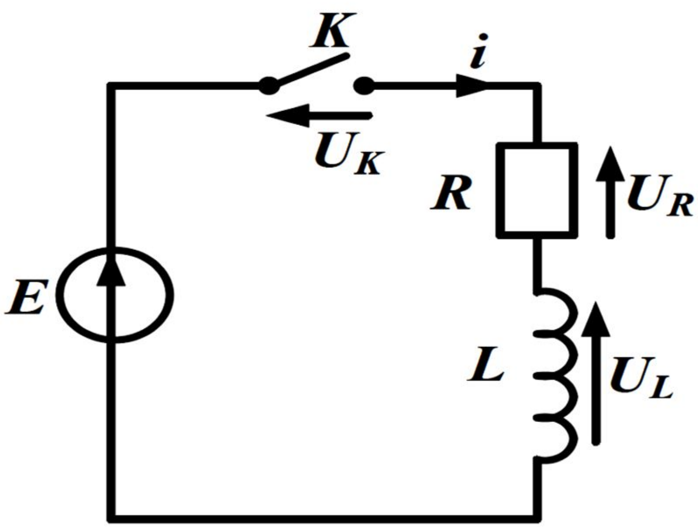
On conclut finalement qu'au cours de la décharge, l'énergie électrostatique initialement emmagasinée dans le condensateur est entièrement dissipée par effet joule dans la résistance.

Récapitulatif

	① charge du condensateur (réponse à un échelon)	② décharge du condensateur (régime libre)
État initial	$q(t=0^-)=0$ et $i(t=0^-)=0$	$q(t=0^-)=Q_0=CE$ et $i(t=0^-)=0$
Loi des mailles	$u_R+u_C=E$	$u_R+u_C=0$
Équation différentielle	$R\dot{q}+\dfrac{q}{C}=E$ ou $\dot{q}+\dfrac{q}{\tau}=\dfrac{E}{R}$	$R\dot{q}+\dfrac{q}{C}=0$ ou $\dot{q}+\dfrac{q}{\tau}=0$
Condition initiale	$q(t=0^+)=q(t=0^-)=0$	$q(t=0^+)=q(t=0^-)=Q_0=CE$
Temps caractéristique	$\tau=RC$	$\tau=RC$
Solutions $q(t)$	$q(t)=CE(1-e^{-t/\tau})=Cu_C(t)$	$q(t)=Q_0e^{-t/\tau}=CEe^{-t/\tau}=Cu_C(t)$
Courbe $q(t)$		
Intensité $i(t)$	$i(t)=\dot{q}=\dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$ $(i>0)$	$i(t)=\dot{q}=-\dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$ $(i<0)$
Courbe $i(t)$		

Circuit RL série: régime forcé et régime libre

Régime forcé (1)



- un générateur de tension continue de $f.é.m$ est branché aux bornes du circuit RL ;
- pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert ;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.
- dans ce circuit i est l'intensité du courant, U_K la tension aux bornes de l'interrupteur, U_L la tension aux bornes de l'inductance et U_R la tension aux bornes de la résistance. En convention récepteur on a :

$$U_R = Ri \text{ et } U_L = L\frac{di}{dt}$$

Régime forcé (2)

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert :

$$i = 0; \quad U_R = 0; \quad U_L = 0; \quad U_K = E$$

- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé : $U_K = 0$ (tension aux bornes d'un fil donc même potentiel). En appliquant la loi des mailles on a : $U_R + U_L = E$
- Du fait que $U_L = L\, di/dt$ on conclut que **l'intensité *i* traversant un circuit *RL* série soumis à l'échelon de tension *E* vérifie l'équation différentielle du premier ordre :**

$$\boxed{\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}}$$

Régime forcé (3)

- On définit **la constante de temps τ** du circuit RC par : $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}}$

où τ (s) ; R (Ω) ;L (H).

- **L' intensité i du courant traversant un** circuit RL série soumis à l'échelon de tension E a pour expression :

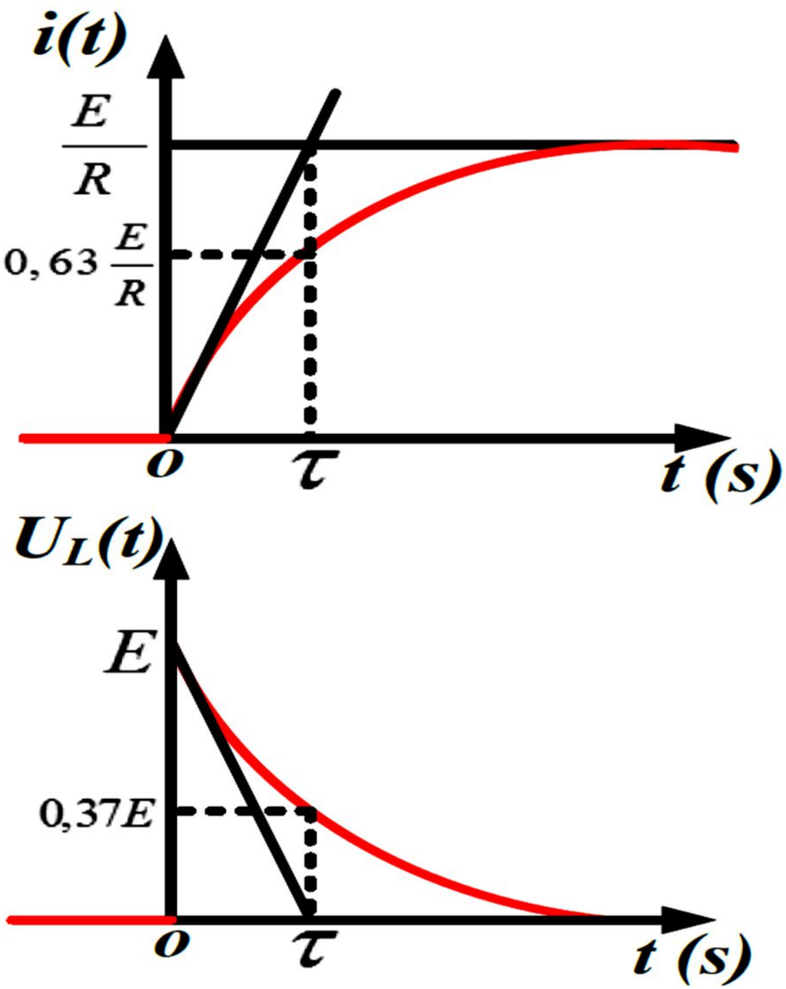
$$\boxed{i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

- **La tension U_L aux bornes de l'inductance** est :

$$\boxed{U_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow U_L = \frac{LE}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Régime forcé (4)

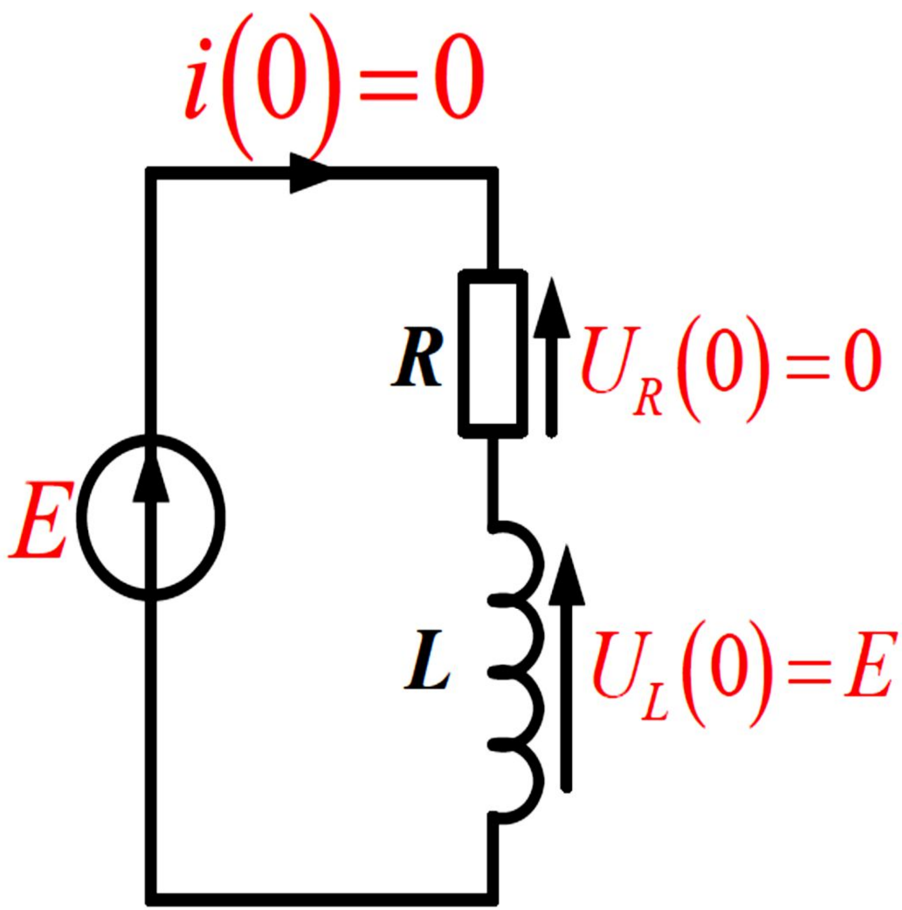
❑ Représentations graphiques

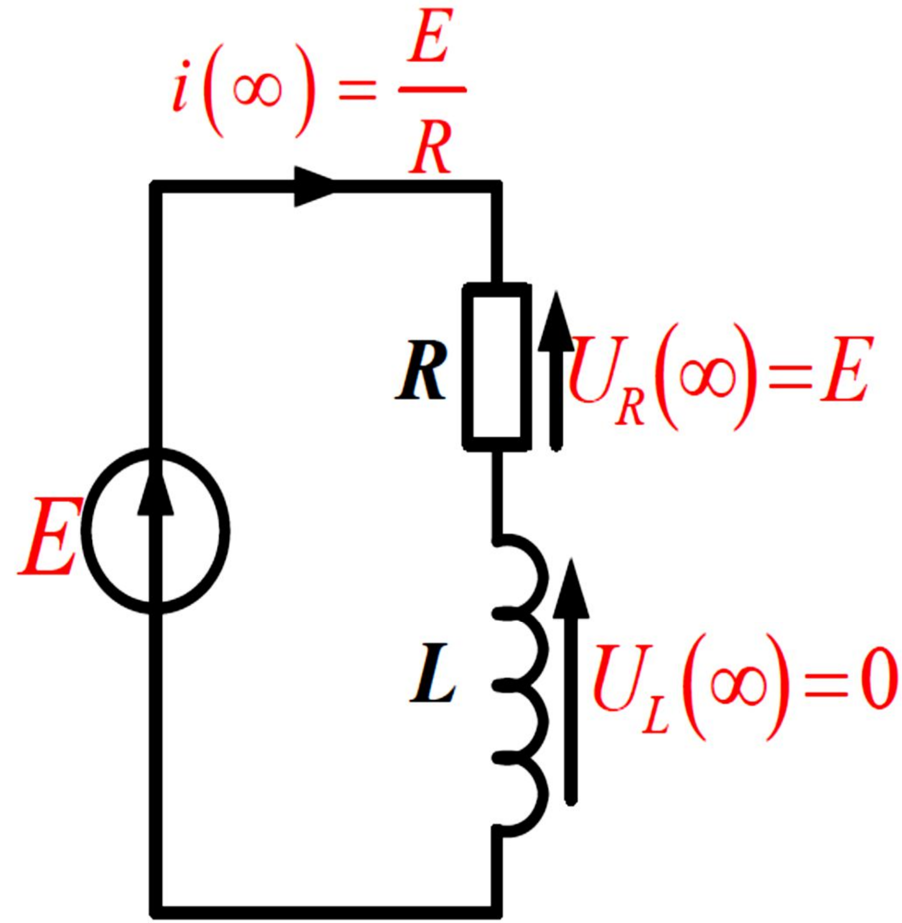


- L'intensité i du courant dans l'inductance est continue
- La tension U_L aux bornes de l'inductance L subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur $(t = 0)$.
- Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$.
- L'établissement du courant correspond à un régime transitoire
- Lorsque le régime permanent est atteint (le courant dans le circuit est constant). On a alors $i = E/R$ et $U_L = 0$.

Régime forcé (5)

- L'état du circuit quand $\boldsymbol{t = 0}$ et quand $\boldsymbol{t \to \infty}$ est ainsi représenté :





Régime forcé (6)

Réponse complète du circuit en $i(t)$	=	réponse purement TRANSITOIRE (partie temporaire) Maths ⇔ SGSSM	+	réponse du régime PERMANENT (partie permanente) Maths ⇔ SPASM
⇓		⇓		⇓
$i(t)$	=	$-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$	+	$\frac{E}{R}$

Quand $t \longrightarrow +\infty$, $i = E/R$, L se comporte donc comme un **fil sans résistance**. La réponse du régime transitoire disparaît (meurt) rapidement, **seule à long terme la réponse du régime permanent demeure**.

Régime forcé (7)

On peut écrire la réponse complète $i(t)$ sous la forme suivante :

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{i(t) = i(+\infty) + [i(0) - i(+\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}}}$$

Si l'instant initial est tel que $t = t_0 \neq 0$, on écrira

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{i(t) = i(+\infty) + [i(t_0) - i(+\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}}}$$

Régime forcé (8)

En résumé, pour connaitre la réponse d'un circuit RL à un échelon de tension, il faut connaitre 3 choses:

- ❑ **L'intensité initiale du circuit $i(0)$.**
- ❑ **L'intensité finale du circuit $i(+\infty)$**
- ❑ **La constante de temps du circuit τ**

Régime forcé (9)

❑ Bilan énergétique

Lors de l'établissement du courant, on a :

$$E = U_R + U_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = Ri^2 + \frac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt}$$

✓ Ei : Puissance P_g positive fournie par le générateur de tension

✓ Ri^2 : Puissance P_j positive reçue par la résistance et dissipée par effet joule

✓ $d(\frac{1}{2}Li^2)/dt$: Puissance positive reçue par la bobine et emmagasinée dans la bobine L sous forme magnétique.

Régime forcé (10)

On constate que la puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance et sert à augmenter l'énergie de la bobine :

$$P_g = P_j + \frac{dE_{mag}}{dt}$$

Quand le courant est établi, l'intensité dans le circuit est $i(\infty) = E/R$. En régime permanent, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine n'augmente plus :

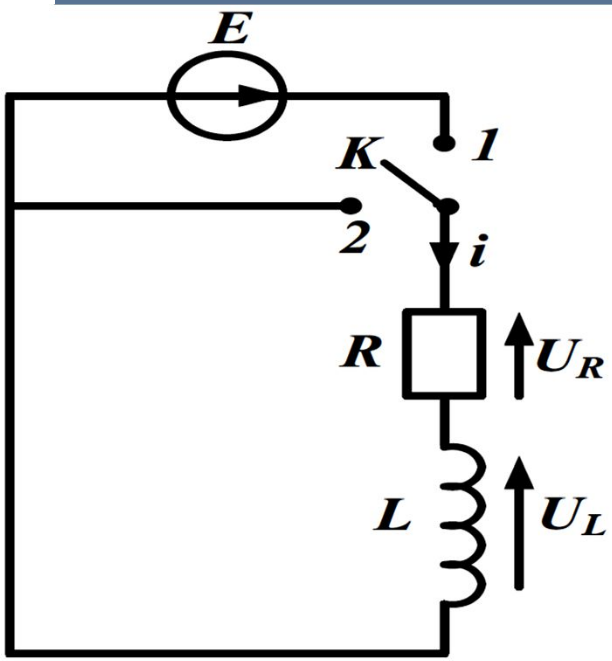
$$E_{mag} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R}\right)^2 = cte \Longrightarrow \frac{dE_{mag}}{dt} = 0$$

Il vient : $\boxed{\boldsymbol{P_g = P_j = Ri^2 = R\, i(\infty)^2 = \frac{E^2}{R}}}$

Régime forcé (11)

On conclut finalement que lorsque le courant est établi, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine reste constante. L'énergie électrique fournie par le générateur est alors entièrement dissipée par effet joule dans la résistance.

Régime libre (1)



- un générateur de tension continue de $f.é.m$ branché aux bornes du circuit RL a permis d'établir un courant permanent d'intensité positive ;
- pour $t < 0$, l'interrupteur K relie le circuit RL au générateur (position 1);
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K en position 2 : le circuit RL est alors en court-circuit.
- dans ce circuit i est l'intensité du courant, U_L la tension aux bornes de l'inductance et U_R la tension aux bornes de la résistance. En convention récepteur on a :

$$U_R = Ri \quad et \quad U_L = L\frac{di}{dt}$$

Régime libre (2)

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est en position 1 :

$$\boldsymbol{i = \frac{E}{R}; \quad U_R = E; \quad U_L = 0;}$$

- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé : $U_K = 0$ (tension aux bornes d'un fil donc même potentiel). En appliquant la loi des mailles on a :

$$\boldsymbol{U_R + U_L = 0}$$

Du fait que $U_L = L\,di/dt$ **on conclut l'intensité $\boldsymbol{i}$ traversant un circuit $\boldsymbol{RL}$ série en court-circuit vérifie l'équation différentielle du premier ordre** :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = 0}}$$

Régime libre (3)

- L'intensité i du courant traversant un circuit RL série en court-circuit a pour expression :

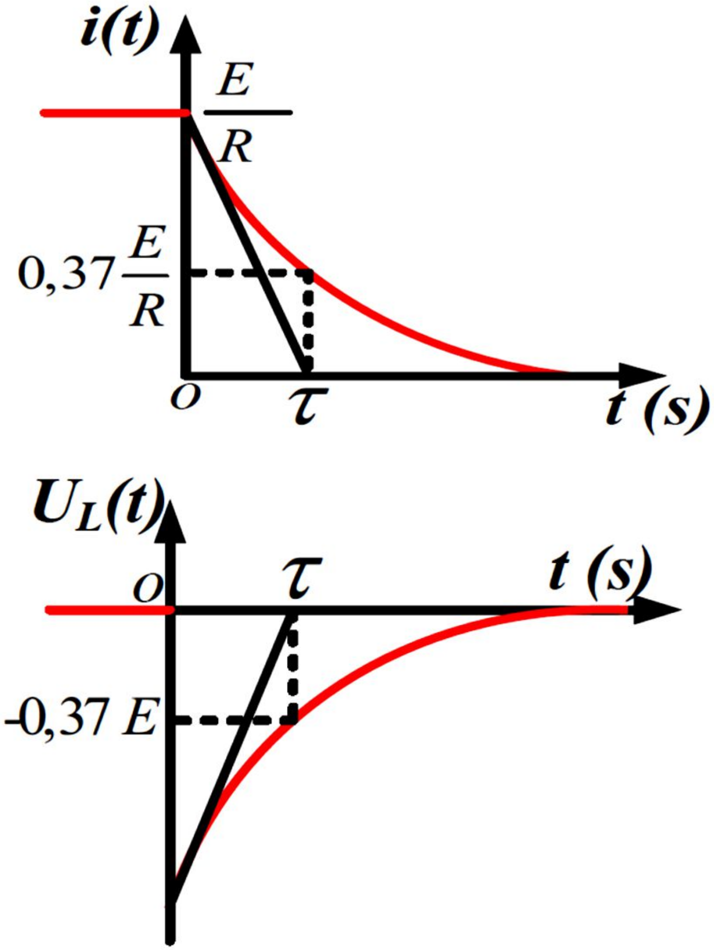
$$\boxed{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

- La tension U_L aux bornes de l'inductance L est proportionnelle à la dérivée de l'intensité i du courant:

$$U_L = L\frac{di}{dt} \Longrightarrow U_L = -\frac{LE}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Régime libre (4)

❑ Représentations graphiques



- L'intensité i du courant dans l'inductance est continue
- La tension U_L aux bornes de l'inductance L subit une discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur $(t = 0)$.
- Pour les deux courbes, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe asymptote au point d'abscisse $t = \tau$.
- L'arrêt du courant correspond à un régime transitoire
- Lorsque le régime permanent est atteint (le courant dans le circuit est constant). On a alors $i = 0$ et $U_L = 0$.

Régime libre (5)

❑ Bilan énergétique

Lors de l'établissement du courant, en appliquant la loi des mailles, on a :

$$0 = U_R + U_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Pour obtenir des puissances, on multiplie par i :

$$0 = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} \Longrightarrow Ri^2 = -\frac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt}$$

✓ Ri^2 : Puissance P_j positive reçue par la résistance et dissipée par effet joule

✓ $-d(\frac{1}{2}Li^2)/dt$: Puissance positive fournie par la bobine

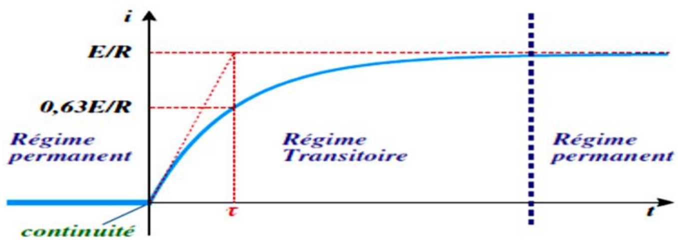
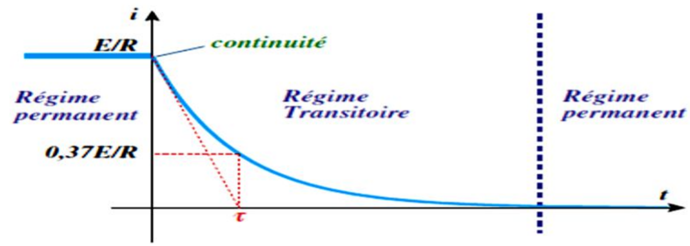
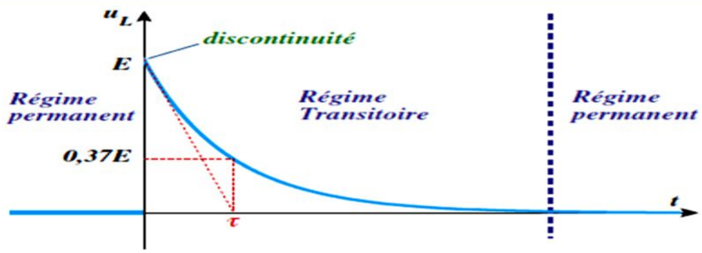
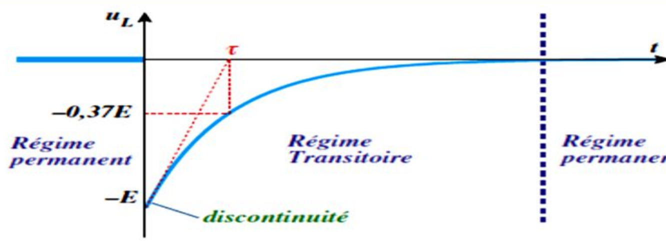
Régime libre (6)

La puissance fournie par la bobine correspond **à une diminution de l'énergie magnétique emmagasinée**. Elle est dissipée par effet joule dans la résistance:

$$P_j = -\frac{dE_{mag}}{dt}$$

Au cours de l'arrêt du courant, l'énergie magnétique E_{mag} initialement emmagasinée dans la bobine est entièrement dissipée par effet joule dans la résistance.

Récapitulatif

	❶ installation du courant (réponse à un échelon)	❷ extinction du courant (régime libre)
État initial	$u_L(t=0^-)=0$ et $i(t=0^-)=0$	$u_L(t=0^-)=0$ et $i(t=0^-)=i_0$
Loi des mailles	$u_L+u_R=E$	$u_L+u_R=0$
Équation différentielle	$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E$ ou $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{i}{\tau}=\dfrac{E}{L}$	$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$ ou $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{i}{\tau}=0$
Condition initiale	$i(t=0^+)=i(t=0^-)=0$	$i(t=0^+)=i(t=0^-)=i_0=E/R$
Temps caractéristique	$\tau=\dfrac{L}{R}$	$\tau=\dfrac{L}{R}$
Solutions $i(t)$	$i(t)=\dfrac{E}{R}(1-e^{-t/\tau})=i_0(1-e^{-t/\tau})$	$i(t)=i_0e^{-t/\tau}=\dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$
Courbe $i(t)$		
Tension $u_L(t)$	$u_L(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=Ee^{-t/\tau}$ $(u_L>0)$	$u_L(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-Ee^{-t/\tau}$ $(u_L<0)$
Courbe $u_L(t)$		

Méthodes

Méthodes : Détermination graphique de τ

<u>$1^{\text{ère}}$ méthode en utilisant la tangente à l'origine :</u>

1. Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_c(t)$.
2. Tracer l'asymptote à la courbe $u_c(t)$ (valeur atteinte pour $t \to +\infty$).
3. L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ.

<u>$2^{\text{ème}}$ méthode en utilisant la valeur de $u_c(\tau)$:</u>

1. Déterminer la valeur de la tension finale $u_c(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long.
2. Calculer $0,63 \times u_c(\infty)$.
3. Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_c(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_c(\infty)$.

Attention – Erreur à ne pas commettre

ATTENTION $\xcancel{\tau = 0,63E}$ N'A AUCUN SENS !

Propriétés communes aux deux systèmes RC et RL

Temps caractéristique (1)

Un temps caractéristique, noté τ, est une durée qui donne l'ordre de grandeur de l'échelle de temps de l'évolution d'un système. Le temps caractéristique apparaît naturellement dans les équations différentielles, mais on peut aussi le déterminer par analyse dimensionnelle. En effet, il ne dépend que des paramètres du système. Pour les deux circuits étudiés, on cherche donc, dans le premier cas, une expression homogène à un temps ne contenant que R et C, et dans le second cas ne contenant que R et L. **Il n'y a qu'une solution possible et le même temps caractéristique s'applique au régime libre ou en réponse à un échelon.**

Temps caractéristique (2)

Pour tous ces systèmes, on vérifie facilement les résultats du tableau suivant, indiqués en pourcentage d'avancement par rapport à l'état permanent final (0% début du régime transitoire, 100 % le régime permanent final est atteint).

$t = n\tau$	0	τ	2τ	5τ	10τ	∞
Avancement ($1-e^{-n}$)	0 %	63 %	86,5 %	99,3 %	99,995 %	100 %

- ***Le comportement permanent final étant asymptotique, il n'est en toute rigueur atteint qu'au bout d'un temps infini, cependant, on voit qu'au bout de quelques τ (selon la précision souhaitée), on peut considérer que le régime transitoire a cessé et que le nouveau régime permanent s'est installé.***
- *Pour les systèmes du premier ordre RC et RL, on obtient aisément t sur l'une des courbes, comme indiqué sur les graphes des tableaux précédents, soit en traçant la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote en $t = \tau$, soit en notant qu'au temps $t = \tau$, le système est à 63 % d'avancement vers l'état final.*

Portrait de phase

Définitions

- Un système dont l'évolution est décrite par la variable $s(t)$ peut être étudié dans le **plan de phase**, plan dans lequel on porte en abscisse la valeur de s et en ordonnée sa dérivée première ds/dt
- La courbe obtenue en représentant ds/dt en fonction de s, pour des conditions initiales données, est **la trajectoire de phase** (elle dépend des conditions initiales).
- L'ensemble de toutes les trajectoires de phase (chacune correspondant à des conditions initiales différentes), constitue le **portrait de phase** du système.

Propriétés

❑ Deux trajectoires de phase différentes ne peuvent se croiser.

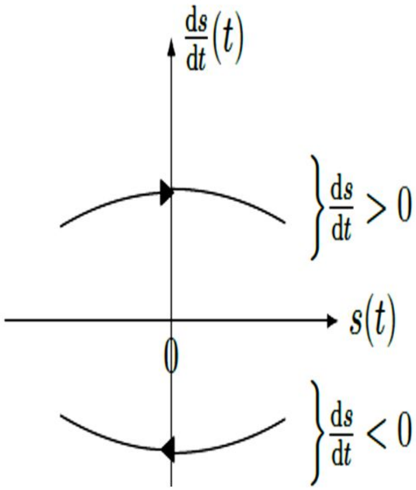
❑ **Sens de parcours** : Les trajectoires de phase sont parcourues

- de gauche à droite dans le demi-plan supérieur

$$\frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow s \nearrow$$

- de droite à gauche dans le demi-plan inférieur

$$\frac{ds}{dt} < 0 \Rightarrow s \searrow$$



Analyse d'un portrait de phase (1)

Dans l'analyse d'un système obéissant à une équation différentielle, **il est possible d'en prévoir l'évolution graphiquement à partir du portrait de phase**. Dans le cas des circuits linéaires du premier ordre, ce portrait de phase est le graphe :

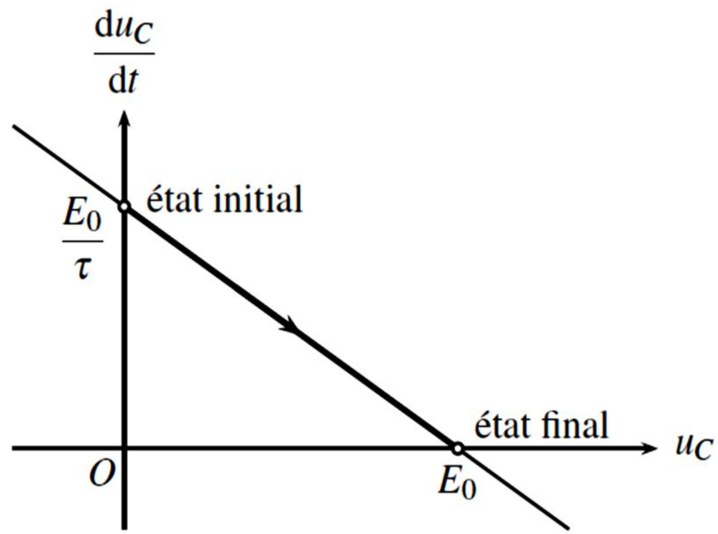
$$\left(u, \frac{du}{dt}\right) \quad \text{ou} \quad \left(i, \frac{di}{dt}\right)$$

Analyse d'un portrait de phase (2)

Lors de la charge du condensateur le portrait de phase est la représentation graphique de dU_C/dt en fonction de U_C.

$$RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{\tau}U_C + \frac{E}{\tau}$$

C'est une équation d'une droite de pente $-1/\tau$et d'ordonnée à l'origine E/τ



Analyse d'un portrait de phase (3)

- L'équation différentielle montre que le système se déplace sur une droite.
- À l'instant initial, la dérivée temporelle de la tension vaut E/τ
- La tension croit jusqu'à atteindre la valeur E.
- À l'instant final (en régime établi), la tension $U_C(t) = E$

Toutefois, le portrait de phase élimine le facteur temps. On ignore la durée prise par le système pour passer de l'état initial à l'état final.