Fonctions usuelles 4

I Fonctions logarithmes et exponentielles

1 Fonction logarithme népérien

En Terminale, la fonction exponentielle a été introduite comme solution de l'équation différentielle $y' = y$ (mais sans en prouver l'existence) et la fonction logarithme comme fonction réciproque de la précédente, ce qui a permis de montrer que la dérivée de la fonction logarithme est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$

Pour l'instant nous ne pouvons pas encore justifier directement l'existence d'une solution de l'équation différentielle $y' = y$ (ce qui sera fait en seconde année) ; c'est pourquoi, nous allons commencer par introduire la fonction logarithme en tant que primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, puis en déduire la fonction exp comme fonction réciproque.

Rappel de résultats vus en Terminale Nous admettrons :

- que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I ;
- que deux primitives sur un intervalle I d'une même fonction (continue) diffèrent d'une constante.

Ces résultats seront démontrés dans le chapitre 11.

On peut alors énoncer la définition suivante.

Définition 1

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}\cdot$$

Par suite, cette fonction logarithme est strictement croissante puisque sa dérivée ne prend que des valeurs strictement positives.

Proposition 1

La fonction logarithme vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x\,y) = \ln x + \ln y.$$

Principe de démonstration. Fixer $y \in \mathbb{R}_+^*$ et dériver la fonction $u_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \ln(x\,y). \end{array}$

Corollaire 2

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(x^n) = n \ln x$.

Démonstration. Conséquences immédiates de la proposition précédente et de $x = y\,\dfrac{x}{y}\cdot$ □

Remarque En particulier, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

Exercice 1 Calculer la dérivée de la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot \end{array}$

Exercice 2 Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, que peut-on dire de la limite de la suite $\big(\ln(a^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indication : distinguer les cas $a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.

Proposition 3

La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

Démonstration.

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puisque sa dérivée ne prend que des valeurs strictement positives. Par suite, en $+\infty$ elle admet une limite ℓ finie ou infinie (ce résultat, intuitivement évident, sera justifié au corollaire 34 de la page 507).
  Comme, d'après l'exercice précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty$, on en déduit $\ell = +\infty$.
- Comme $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$, on a (par composition) $\lim\limits_{0} \ln = -\infty$.
- Ainsi la fonction logarithme est une bijection strictement croissante de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle $]\lim\limits_{-\infty} \ln, \lim\limits_{+\infty} \ln[$ qui est égal à $\mathbb{R}$. □

Remarque Il existe donc un unique réel, noté e, tel que $\ln e = 1$. Un outil de calcul permet, par exemple, d'obtenir l'encadrement suivant :

$$2{,}718281 \leqslant e \leqslant 2{,}718282.$$

2 Fonction exponentielle

Définition 2

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Proposition 4

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\exp 0 = 1$ ainsi que :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\exp' = \exp$.

Principe de démonstration. Conséquences des propriétés des fonctions réciproques.

Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y\,, \quad \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y} \quad \text{et} \quad \exp(n\,x) = (\exp x)^n.$$

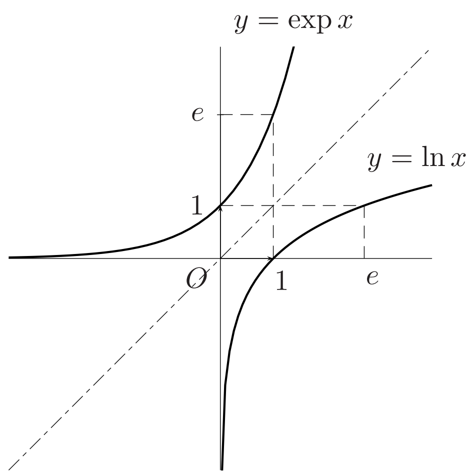
Principe de démonstration. Utiliser les résultats de la proposition 1 de la page précédente et de son corollaire, en posant $u = \exp x$ et $v = \exp y$.

3 Représentation graphique des fonctions $\ln$ et $\exp$

De ce qui précède, on déduit les tableaux de variations des fonctions $\ln$ et $\exp$ ainsi que leurs représentations graphiques.

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp$	0	1	e	$+\infty$



4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque

Définition 3

Si a est un réel strictement positif et différent de 1, on appelle **logarithme de base a** la fonction, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Exemples

1. Si $a = e$, on retrouve le logarithme népérien.
2. Si $a = 10$, on obtient le **logarithme décimal** que l'on note aussi $\log$ et qui, historiquement, a joué un rôle important car il a permis de faire de nombreux calculs avant l'avènement des ordinateurs et des calculatrices. Il est toujours utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).
3. Si $a = 2$, on obtient le **logarithme binaire** utilisé en informatique.

Propriétés Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Des propriétés de la fonction $\ln$, on déduit :

- $\log_a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$;
  - ∗ si $a > 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante ;
  - ∗ si $0 < a < 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \ ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\log_a(x^n) = n \log_a x.$$

Exercice 3 Soit n est un entier strictement positif. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à la partie entière de $1 + \log n$.

Définition 4

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$, la fonction **exponentielle de base a** est la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a.

Propriétés Si a est un réel strictement positif et différent de 1, alors :

- $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$;
  - $*$ si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante ;
  - $*$ si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, si l'on pose $y = \exp_a x$, alors on a $x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$ et donc $\ln y = x \ln a$, ce qui entraîne $\exp_a x = \exp(x \ln a)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp_a(x+y) = \exp_a x \, \exp_a y \quad \text{et} \quad \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y} \ ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\exp_a(n\,x) = (\exp_a x)^n.$$

Notation définitive Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Comme pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp_a n = a^n$, on étend la notation a^x à tout $x \in \mathbb{R}$, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = \exp_a x = \exp(x \ln a).$$

- Ainsi, si $a = e$, on a $\exp_a x = \exp x = e^x$.
- Si, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $1^x = 1$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a^x = \exp(x \ln a).$$

Point méthode

La relation $a^x = \exp(x \ln a)$ se retrouve aisément à l'aide de $\ln(a^x) = x \ln a$.

II Fonctions puissances

1 Définition

Notation Pour $a \in \mathbb{R}$, dans toute la suite de ce chapitre on note :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & x^a = \exp(a \ln x). \end{array}$$

Définition 5

Les fonctions φ_a sont appelées **fonctions puissances**.

Cas particuliers :

- la fonction φ_0 est la fonction constante égale à 1 ;
- la fonction φ_1 est l'identité de $\mathbb{R}_+^*$;

- lorsque $a \in \mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{Z}_-^*$), la fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R}^*$), et cela sans utiliser la moindre fonction exponentielle. La fonction φ_a en est alors la restriction à $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 Suivant le signe de a déterminer les limites de φ_a en 0 et en $+\infty$.

Proposition 6

Pour a et b réels, $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$x^a\, y^a = (x\, y)^a \qquad x^a\, x^b = x^{a+b} \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

$$1^a = 1 \qquad x^0 = 1 \qquad \ln(x^a) = a\, \ln x$$

Principe de démonstration. Conséquences des propriétés de la fonction exponentielle.

Remarque Les résultats de la première ligne ci-dessus confortent le bien fondé de la notation puissance prise page 208, puisque qu'ils généralisent les règles de calcul que l'on connaît déjà sur les puissances entières.

Proposition 7

Pour tout tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_a'(x) = a\, x^{a-1}.$$

Principe de démonstration. Utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_a(x) = \exp(a\, \ln x)$.

Prolongement à $\mathbb{R}_+$ dans le cas $a > 0$

Lorsque $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0}(a \log x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{0} \varphi_a = 0$; par suite, on peut prolonger la fonction φ_a par continuité en 0, en posant $\varphi_a(0) = 0$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{\varphi_a(x)}{x} = \varphi_{a-1}(x)$, on en déduit que :

- si $a > 1$, alors la fonction φ_a est dérivable en 0 et $\varphi_a'(0) = 0$;
- si $0 < a < 1$, alors la fonction φ_a n'est pas dérivable en 0 mais son graphe possède une tangente verticale à l'origine ;
- si $a = 1$, alors φ_a est l'identité, qui est donc dérivable en 0, et $\varphi_a'(0) = 1$.

Représentation graphique des fonctions puissances

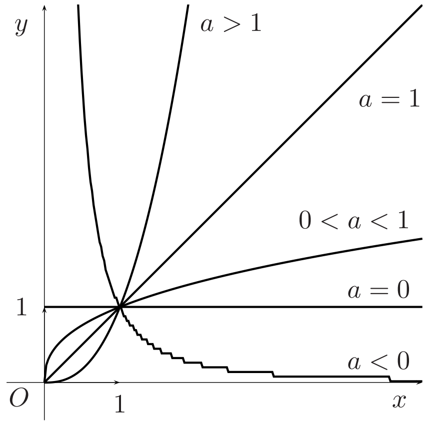
En fonction du signe de a, on en déduit immédiatement les variations de φ_a ainsi que sa courbe représentative :

cas $a > 0$

x	0		1		$+\infty$
φ_a	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

cas $a < 0$

x	0		1		$+\infty$
φ_a	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



Point méthode

Pour se souvenir des différentes formes de courbes ci-dessus, ne pas avoir peur de penser aux cas particuliers connus : le cas $a = 2$ pour $a > 1$, le cas $a = \frac{1}{2}$ pour $0 < a < 1$, et enfin le cas $a = -1$ pour $a < 0$.

Exercice 5 *(Approfondissement)* Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, comparer la fonction $\varphi_{\frac{1}{n}}$ avec la fonction $\sqrt[n]{}$ vue dans l'exemple de la page 49.

Point méthode

Soit f définie à l'aide de deux fonctions u et v par $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

- Si la fonction v est constante, alors on utilise directement les propriétés des fonctions puissances.
- Sinon, il est indispensable, avant tout, d'écrire $f(x) = \exp\big(v(x)\,\ln u(x)\big)$, ce qui nécessite évidemment (et rappelle donc) la condition $u(x) > 0$.

Exercice 6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ainsi que $u \in \mathbb{R}^I$ et $v \in \mathbb{R}^I$ dérivables, avec $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Calculer la dérivée de $f : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x)^{v(x)}. \end{array}$

Exercice 7 Étudier les variations de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x. \end{array}$

On ne demande pas, pour l'instant, d'étudier les limites aux extrémités de l'intervalle.

2 Croissances comparées

Proposition 8

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$.

Principe de démonstration.

- Pour $x \geqslant 1$, on peut majorer $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ par $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ qui s'exprime facilement (sans $\ln$).

  Le théorème d'existence de limite par encadrement donne alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- Pour la seconde limite, changer x en $\frac{1}{x}\cdot$

Exercice 8

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x^x \end{array}$ Montrer que $\lim\limits_{0} f = 1$.
2. On prolonge f par continuité, en posant $f(0) = 1$. En utilisant $\lim\limits_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, vérifier que le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Corollaire 9 (Propriété de croissances comparées)

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{(\ln x)^b}{x^a}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^a |\ln x|^b\right) = 0.$

Principe de démonstration. Écrire $\dfrac{(\ln x)^b}{x^a}$ sous la forme $k\left(\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}\right)^\beta\cdot$

La seconde limite se déduit de la première.

Attention La valeur absolue est indispensable dans la seconde relation car la fonction logarithme est négative sur l'intervalle $]0,1]$.

Exercice 9 Pourquoi dans les énoncés précédents a-t-on limité a et b à $\mathbb{R}_+^*$?

Proposition 10

Si a et b sont deux réels strictement positifs, on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp(a\,x)}{x^b}\right)=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(|x|^b\exp(a\,x)\right)=0.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer x par $\exp x$ dans les relations précédentes. □

Corollaire 11

En particulier, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp x}{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x\exp x)=0$.

Point méthode

On utilise les résultats précédents pour justifier l'existence de limites dans certains « cas d'indétermination », et quand on y fait appel, on utilise la formulation « par croissances comparées des fonctions … ».

Exemple Détermination de la limite en $+\infty$ de $f : x\mapsto x^{1/x^2}$.

Pour tout $x>0$, on a $f(x)=\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)$ et, par croissances comparées des fonctions puissances et logarithme, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=0$.

Par composition des limites, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$.

III Fonctions circulaires réciproques

1 Fonction Arc tangente

Définition 6

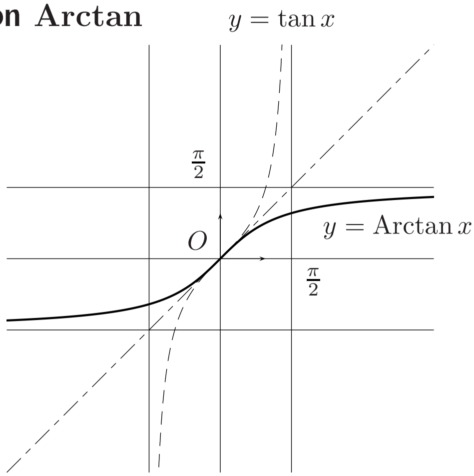
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; elle définit une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, dont la réciproque est appelée **Arc tangente** et notée Arctan.

Conséquence La fonction Arc tangente est donc une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

Représentation graphique de la fonction Arctan

Arctan étant la fonction réciproque de la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan, on en déduit son tableau de variations et son graphe qui s'obtient en prenant le symétrique du graphe de $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



Exercice 10 Déterminer $\operatorname{Arctan} 1$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan \pi)$.

De la définition de la fonction Arc tangente, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 12

Pour tout nombre réel x, le réel $\operatorname{Arctan} x$ est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

Relations fondamentales Par suite, on retrouve très facilement que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$ puisque la tangente de « l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x » est évidemment x ;
- pour tout $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$ puisque « l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\tan \alpha$ » est évidemment α.

Bien remarquer la dissymétrie entre les deux points précédents :

- $\tan(\operatorname{Arctan} x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$;
- $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha)$ n'est pas défini que pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mais on n'a justifié $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$ que pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; par exemple, $\operatorname{Arctan}(\tan \pi) = 0$.

Exercice 11 Montrer que $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$ si, et seulement si, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cdot$

Point méthode

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour justifier $y = \operatorname{Arctan} x$, il suffit de prouver :

$$x = \tan y \qquad \text{et} \qquad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cdot$$

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour $x > 0$, simplifier $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)$ et en déduire :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\cdot$$

- Que vaut $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour $x < 0$?

Exercice 13 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Vérifier que f est périodique. Qu'en déduit-on pour son graphe ?
3. Vérifier que le graphe de f admet O comme centre de symétrie.
4. En déduire le graphe de f.

Exercice 14 Soit x un réel quelconque.

- En utilisant la relation classique entre $\cos^2$ et $\tan^2$, simplifier $\cos^2(\operatorname{Arctan} x)$.
- En déduire $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ puis $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Dérivation de la fonction Arctan

Proposition 13

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Principe de démonstration. Utiliser $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$.

Exercice 15 Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ et retrouver la simplification de cette expression.

Point méthode

Le résultat de l'exercice précédent permet de ramener en 0 l'étude d'une forme indéterminée impliquant la fonction Arc tangente en l'infini.

Exemple La fonction définie par $f(x) = x \operatorname{Arctan} x$ admet, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ puisque pour $x > 0$, on a :

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x = x\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}\right) = -x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

et que $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{Arctan} u}{u} = \operatorname{Arctan}'(0) = 1$.

2 Fonctions Arc sinus et Arc cosinus

Définition 7

La fonction sinus est continue et elle est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; elle définit une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, dont la réciproque est appelée **Arc sinus** et notée Arcsin.

Conséquence La fonction Arc sinus est donc une bijection strictement croissante et continue de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

Exercice 16 Simplifier $\operatorname{Arcsin} 1$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{Arcsin} -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Arcsin} 2$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi)$.

De la définition de la fonction Arc sinus, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 14

Pour nombre réel x de l'intervalle $[-1,1]$, le réel $\operatorname{Arcsin} x$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x.

Relations fondamentales Par suite, on retrouve très facilement que :

- pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$;
- pour tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha) = \alpha$. $\quad (*)$

Bien remarquer la dissymétrie entre les deux points précédents :

- $\sin(\operatorname{Arcsin} x)$ n'est définie que pour $x \in [-1,1]$;
- $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha)$ est défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ mais on n'a justifié l'égalité $(*)$ que pour $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; on a par exemple $\operatorname{Arcsin}(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}\cdot$

Exercice 17 Montrer que $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha) = \alpha$ si, et seulement si, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\cdot$

Point méthode

Soit $x \in [-1,1]$. Alors, pour prouver $y = \operatorname{Arcsin} x$, il suffit de montrer :

$$x = \sin y \quad \text{et} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\cdot$$

Exercice 18 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Vérifier que f est périodique. Qu'en déduit-on pour son graphe Γ_f ?
3. Quelle autre propriété permet de réduire l'étude de f à $[0,\pi]$?
4. Vérifier que Γ_f admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
5. En déduire le graphe de f.

Définition 8

La fonction cosinus est continue et elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$; elle définit une bijection de l'intervalle $[0,\pi]$ sur l'intervalle $[-1,1]$, dont la réciproque est appelée **Arc cosinus** et notée Arccos.

Conséquence La fonction Arc cosinus est donc une bijection strictement décroissante et continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

Exercice 19 Simplifier $\operatorname{Arccos} 1$, $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$, $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\operatorname{Arccos}(\cos 2\pi)$.

Comme pour la fonction Arc sinus, on a immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 15

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1,1]$, le réel $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

Relations fondamentales Comme pour Arc sinus, on prouve que :

- pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$;
- pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, on a $\operatorname{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha$.

On a toujours la même dissymétrie entre les deux points puisque :

- $\cos(\operatorname{Arccos} x)$ n'est définie que pour $x \in [-1,1]$;
- $\operatorname{Arccos}(\cos\alpha)$ est défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ mais l'égalité $\operatorname{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha$ est vraie si, et seulement si, $\alpha \in [0,\pi]$.

Point méthode

Soit $x \in [-1,1]$. Alors, pour prouver $y = \operatorname{Arccos} x$, il suffit de montrer :

$$x = \cos y \quad \text{et} \quad y \in [0,\pi].$$

Exercice 20 Pour x dans $[-1,1]$, simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right)$ et en déduire :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

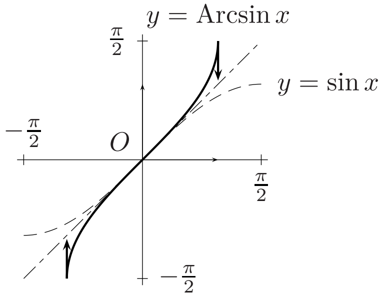
Exercice 21 En vous inspirant de ce qui a été fait pour la courbe d'équation $y = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$, représenter la courbe d'équation $y = \operatorname{Arccos}(\cos x)$.

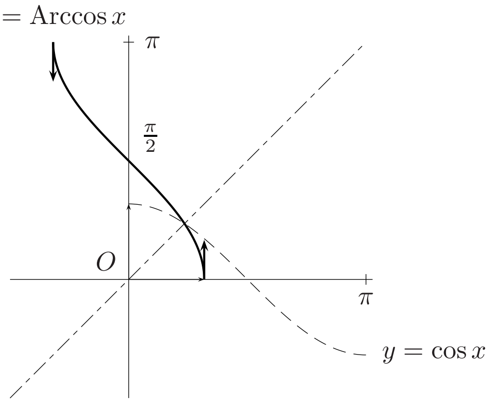
Quelle simplification peut-on donner de $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ lorsque $x \in [-\pi,\pi]$?

Représentation graphique des fonctions Arcsin et Arccos

On peut maintenant tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

- Le graphe Γ_s de Arcsin est le symétrique, par rapport à la première bissectrice, du graphe γ_s de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Comme γ_s possède des tangentes horizontales en ses extrémités, le graphe Γ_s possède des tangentes verticales en ses extrémités, ce qui signifie que la fonction Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.
- En symétrisant le graphe γ_c de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$, on obtient le graphe Γ_c de Arccos qui possède des tangentes verticales aux points d'abscisses ± 1.





Tableaux de variations (qui se lisent aussi sur les graphes précédents)

x	-1	0	$+1$
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

x	-1	0	$+1$
Arccos	π ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0

Exercice 22

1. Quelle symétrie voit-on entre les graphes des fonctions $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et $\cos_{|[0,\pi]}$? Justifier cette propriété.
2. Retrouver la relation classique entre Arcsin et Arccos.

Dérivation des fonctions Arcsin et Arccos

Exercice 23 Pour $x \in [-1,1]$, montrer que $\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 24 Pour $x \in [-1,1]$, simplifier de même $\sin(\mathrm{Arccos}\, x)$.

Proposition 16

Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Principe de démonstration. Utiliser le théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

Remarque La fonction Arcsin (resp. Arccos) n'est pas dérivable en ± 1, puisque la dérivée de sa fonction réciproque s'annule en $\pm\frac{\pi}{2}$ (resp. en 0 et π).

Point méthode

La non-dérivabilité des fonctions Arcsin et Arccos en ± 1 se « voit » immédiatement sur les représentations graphiques.

IV Fonctions hyperboliques

1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 9

Les deux fonctions **sinus hyperbolique**, notée sh (ou sinh), et **cosinus hyperbolique**, notée ch (ou cosh), sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On en déduit immédiatement les résultats de la proposition suivante.

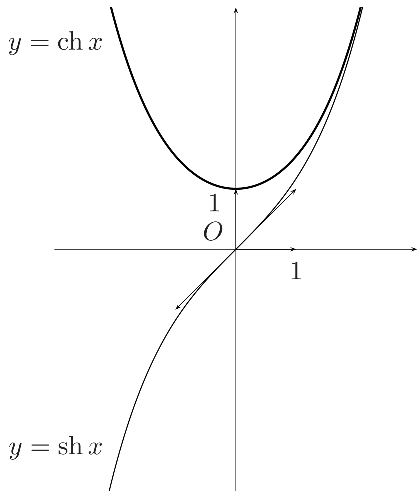
Proposition 17

La fonction sinus hyperbolique est impaire, la fonction cosinus hyperbolique est paire. Elles sont toutes deux dérivables, avec $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

Représentation graphique des fonctions sh et ch

La fonction cosinus hyperbolique étant strictement positive, on en déduit d'abord les variations de sinus hyperbolique, puis celles de cosinus hyperbolique.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$



La continuité de ces fonctions ainsi que leurs variations montrent que :

- la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$;
- la fonction cosinus hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

Formules de base de la trigonométrie hyperbolique

Proposition 18

Pour tout réel t, on a :

$$\exp t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t, \quad \exp(-t) = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Démonstration. Les deux premières relations sont évidentes, et la dernière en découle puisque :

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) = \exp(-t)\,\exp t = 1. \qquad \square$$

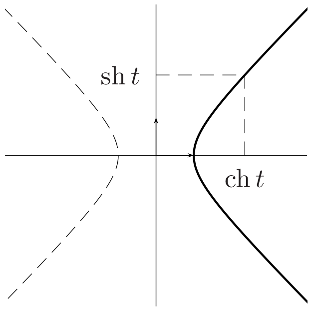
Remarques

- La relation $\exp t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t$, ainsi que les propriétés de parité des fonctions sinus et cosinus hyperboliques, permettent de dire que ces fonctions sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle (voir éventuellement exercice 17 de la page 325).
- *(Culture générale)* De même que les fonctions sinus et cosinus permettent de paramétrer un cercle, la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ peut s'interpréter géométriquement en considérant l'hyperbole équilatère H d'équation :

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Comme la fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout point (x, y) de H d'abscisse positive, il existe un unique réel t tel $y = \operatorname{sh} t$. On a alors $x = \operatorname{ch} t$. Donc la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \end{array}$$



est un paramétrage de la partie **de droite** de l'hyperbole H, l'autre branche étant paramétrée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t). \end{array}$$

2 Fonction tangente hyperbolique

Définition 10

La fonction **tangente hyperbolique**, notée th (ou tanh), est définie, pour tout réel x, par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\cdot$

Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} x > 0$, ce qui prouve que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 19

La fonction tangente hyperbolique est impaire ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

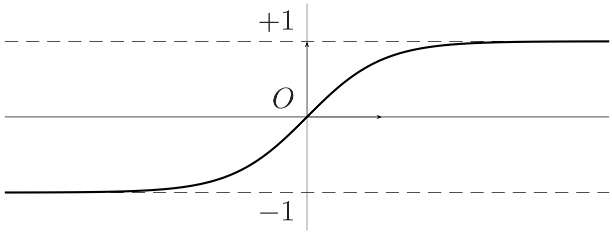
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

Principe de démonstration. Pour dériver, faire le calcul de deux manières : quotient, produit.

Représentation graphique de la fonction th

On en déduit le taleau de variations et la représentation graphique.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+1$



V Fonctions à valeurs complexes

1 Dérivée d'un fonction complexe

La dérivation des fonctions à valeurs complexes sera étudiée en détail au chapitre 10, mais nous allons ici en donner quelques propriétés dont nous aurons besoin, dans le chapitre suivant, pour le calcul de primitives et la résolution des équations différentielles.

Dans toute la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ désigne une fonction définie sur I et à valeurs complexes c'est-à-dire une fonction qui, à tout réel $t \in I$, associe son image $f(t) \in \mathbb{C}$.

Notations Pour une telle fonction f, on définit alors les fonctions :

- **partie réelle de f**, notée $\operatorname{Re} f$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Re}\big(f(t)\big) \end{array}$;
- **partie imaginaire de f**, notée $\operatorname{Im} f$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Im}\big(f(t)\big) \end{array}$;
- **module de f**, notée $|f|$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & |f(t)| \end{array}$;
- **conjuguée de f**, notée $\bar{f}$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \overline{f(t)}. \end{array}$

En définissant les opérations comme pour les fonctions à valeurs réelles, on a :

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \qquad \text{et} \qquad |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = f\,\bar{f}.$$

Définition 11

Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est **dérivable** sur I si ses parties réelle et imaginaire sont dérivables sur I.

La **dérivée** de $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ est alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + i\,(\operatorname{Im} f)'$.

Exemples

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$ est dérivable.
- Toute fonction constante est dérivable, et sa dérivée est nulle.

Exercice 25 Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\bar{f}$ est dérivable.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 20

Soit f et g deux fonctions à valeurs complexes, définies et dérivables sur I ainsi que λ et μ deux complexes. Alors :

1. la fonction $\lambda\, f + \mu\, g$ est dérivable sur I et $(\lambda\, f + \mu\, g)' = \lambda\, f' + \mu\, g'$; cette propriété s'appelle **linéarité de la dérivation** ;
2. la fonction $f\,g$ est dérivable sur I et $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.

Principe de démonstration. Regarder les parties réelles et imaginaires.

Exemples

- Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. On prouve aisément, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la fonction f^n est dérivable sur I et que $(f^n)' = n\, f' f^{n-1}$.
- Considérons $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{C}^{n+1}$. La fonction polynomiale $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, t^k \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est telle que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad p'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_k\, t^{k-1}$.

Proposition 21

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction f/g est définie et dérivable sur I, et l'on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}.$$

Principe de démonstration.

Écrire f sous la forme $\dfrac{f}{g} = f \times \overline{g} \times \dfrac{1}{g\overline{g}}$ et remarquer que la fonction $g\overline{g}$ est à valeurs réelles.

Exemples

1. Soit f une fonction dérivable sur I, et qui ne s'annule pas sur I. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors la fonction f^n est dérivable sur I est sa dérivée est $nf'f^{n-1}$. On a déjà vu cette propriété lorsque $n \in \mathbb{N}$, et on la justifie par passage à l'inverse lorsque $n \in \mathbb{Z}_-^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et a un complexe *non réel*.

   La fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (t-a)^n \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_n'(t) = n\,(t-a)^{n-1}.$$

Proposition 22

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction dérivable de I dans J, et g une fonction dérivable de J dans $\mathbb{C}$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'.$$

Principe de démonstration. Appliquer la propriété correspondante aux parties réelle et imaginaire de la fonction g.

Attention Dans la proposition précédente, f est à valeurs réelles !

3 Caractérisation des fonctions constantes

Proposition 23

Soit f une fonction dérivable de l'intervalle I dans $\mathbb{C}$.

La fonction f est constante si, et seulement si : $\forall t \in I \quad f'(t) = 0$.

Principe de démonstration. Appliquer la propriété correspondante aux parties réelle et imaginaire de la fonction f.

4 Dérivées successives

Définition 12

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$. On pose $f^{(0)} = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit, par récurrence, la fonction dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée, si elle existe, de $f^{(n-1)}$ qui est la dérivée $(n-1)$-ième.

Remarque La fonction complexe f admet une dérivée n-ième sur I si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire admettent une dérivée n-ième sur l'intervalle I et alors :

$$\operatorname{Re}\big(f^{(n)}\big) = \big(\operatorname{Re} f\big)^{(n)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\big(f^{(n)}\big) = \big(\operatorname{Im} f\big)^{(n)}.$$

Proposition 24

Soit f et g deux fonctions complexes n fois dérivables sur I. Si λ et μ sont deux complexes, alors $(\lambda f + \mu g)$ est n fois dérivable sur I, et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration. Immédiat par récurrence. □

Exercice 26 Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t-a} \end{array}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de sa dérivée n-ième.

5 Dérivée de e^{φ}

Proposition 25

Soit φ une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$.

Alors la fonction $e^{\varphi} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\varphi(t)} \end{array}$ est dérivable sur I, et $(e^{\varphi})' = \varphi' \, e^{\varphi}$.

Principe de démonstration. On ne peut pas ici appliquer la proposition 22 de la page ci-contre, il faut s'intéresser aux parties réelle et imaginaire de e^{φ}.

Exemple Si ρ et θ sont deux fonctions réelles dérivables sur I, alors la fonction f définie sur I par $f(t) = \rho(t)\, e^{i\theta(t)}$ est dérivable, et elle a pour dérivée :

$$f'(t) = \rho'(t)\, e^{i\theta(t)} + i\, \rho(t)\, \theta'(t)\, e^{i\theta(t)}.$$

Le calcul précédent permet, en physique ou en SI, d'obtenir les composantes du vecteur vitesse en coordonnées polaires.

Corollaire 26

Si $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi_a : t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi_a' = a\, \varphi_a$.

Exercice 27 Soit $r \in \mathbb{C}$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{r\,t}$.

Exprimer les dérivées successives de f.

S'entraîner et approfondir

4.1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
2. $\operatorname{Arccos}\left(\cos \dfrac{2\,\pi}{3}\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(-\cos \dfrac{2\,\pi}{3}\right), \quad \operatorname{Arccos}(\cos 4\pi)$
3. $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$
4. $\cos(5 \operatorname{Arctan} x)$, $\sin(4 \operatorname{Arctan} x)$ et $\tan(6 \operatorname{Arctan} x)$
5. $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$

4.2 Résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ \ln x - \ln y = \ln 2 \end{cases}$.

4.3 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$;
2. $2 \sin 2x - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)(\cos x - \sin x) = 2 + \sqrt{3}$;
3. $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

4.4 Courbes représentatives des fonctions définie par les relations suivantes :

1. $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
2. $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$;
3. $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$;
4. $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot$

4.5 Établir $\dfrac{\pi}{4} = 5 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{3}{79}\cdot$

$\star$ **4.6** Que pensez vous de la relation $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-x\,y}$?

4.7 Résoudre les équations

1. $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$;
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.

4.8 Simplifier : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+k\,y)$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k\,y)$.

⋆ **4.9** Étant donné a, b et c des paramètres réels, résoudre l'équation :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$$

4.10 Simplifier :

1. $\ln\sqrt{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$;
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+k\,y)$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k\,y)$.

⋆ **4.11** Étant donné a, b et c des paramètres réels, résoudre l'équation :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$$

4.12 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ il existe un unique $y \in [0, \pi/2[$ tel que

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$$

Vérifier alors $\operatorname{sh} x = \tan y$ et $\tanh(\frac{x}{2}) = \tan(y/2)$.