Cinématique

Exercice 1 Soit $t \mapsto M(t)$ un mouvement tel que $t \mapsto \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$ est constante.

Montrer que $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 2 Montrer que les mouvements rectilignes uniformes sont ceux d'accélération nulle.

Exercice 3 Le mouvement d'un point $M(t)$ est circulaire de centre O et à accélération de centre O.
Montrer que ce mouvement est uniforme.

Exercice 4 On suppose que le mouvement d'un point $M(t)$ est tel que $\vec{a}(t)$ soit colinéaire à $\overrightarrow{OM}(t)$ (on dit qu'il s'agit d'un mouvement à accélération de centre O).

a) Montrer que l'application $t \mapsto \mathrm{Det}(\overrightarrow{OM(t)}, \vec{v}(t))$ est constante.

b) Montrer que si de plus le mouvement est circulaire, il est uniforme.

Courbes en coordonnées cartésiennes

Exercice 5 Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 2t \end{cases}$.

Exercice 6 Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = 2\cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$.

Exercice 7 Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ y = t^3/(1+t^2) \end{cases}$.

Exercice 8 Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = 1/t \\ y = (t^3+2)/t \end{cases}$.

Exercice 9 Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = t^2 \end{cases}$.

On déterminera le point d'inflexion ainsi que l'équation de la tangente en ce point.

Courbes cartésiennes classiques

Exercice 10 Astroïde :

a) Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

b) On note A et B les points d'intersection des axes (Ox) et (Oy) avec tangente au point de paramètre $t \neq 0 \quad [\pi/2]$ de la courbe précédente. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

Exercice 11 Lemniscate de Bernoulli (1654-1705) :

a) Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y = \dfrac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases}$.

b) On introduit les points $F\left|\begin{matrix}1/\sqrt{2}\\0\end{matrix}\right.$ et $F'\left|\begin{matrix}-1/\sqrt{2}\\0\end{matrix}\right.$.

Montrer que pour tout point M de la courbe ci-dessus : $MF\times MF'=1/2$.

Exercice 12 Tractrice :

a) Etudier la courbe définie par : $\begin{cases}x=t-\operatorname{th}t\\y=1/\operatorname{ch}t\end{cases}$.

b) On note A le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente au point M de paramètre t de la courbe ci-dessus. Préciser la nature du mouvement du point A ainsi que la valeur de la distance AM.

Exercice 13 Cardioïde

Etudier la courbe définie par : $\begin{cases}x(t)=2\cos t+\cos 2t\\y(t)=2\sin t+\sin 2t\end{cases}$.

Exercice 14 Deltoïde

Etudier la courbe définie par : $\begin{cases}x(t)=2\cos t+\cos 2t\\y(t)=2\sin t-\sin 2t\end{cases}$.

Problèmes relatifs aux tangentes

Exercice 15 a) Etudier la courbe $\begin{cases}x(t)=3t^2\\y(t)=2t^3\end{cases}$.

b) Déterminer les droites qui sont à la fois tangente et normale à cette courbe.

Exercice 16 Etudier et représenter la courbe définie par $\begin{cases}x(t)=4t^3\\y(t)=3t^4\end{cases}$.

Former une équation de la tangente au point de paramètre $t\in\mathbb{R}$.
Déterminer un paramétrage du lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la courbe précédente orthogonales et étudier cette courbe.

Exercice 17 Soit $t\mapsto M(t)$ un arc régulier tel que en tout point $M(t)$ la tangente est $D_t:(t^3+3t)x-2y=t^3$.
Réaliser un paramétrage en coordonnées cartésiennes de l'arc étudié et le représenter.

Courbes en coordonnées polaires

Exercice 18 Etudier la courbe d'équation polaire $\rho=\cos^2\theta$.

Exercice 19 Etudier la courbe d'équation polaire $\rho=\cos 3\theta$.

Exercice 20 Etudier la courbe : $\rho=\cos 3\theta-1$.

Exercice 21 Etudier la courbe d'équation polaire $\rho=\tan\theta$.

Exercice 22 Etudier la courbe : $\rho=1+2\cos 2\theta$.

Exercice 23 Etudier la courbe $\rho=\dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$.

Exercice 24 Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

Montrer que les pieds des normales à cette courbes issues de O sont situées sur un même cercle.

Courbes polaires classiques

Exercice 25 On considère la cardioïde Γ d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$ de point courant $M(\theta)$.

a) Etudier et représenter la courbe Γ.

b) Montrer que le milieu $I(\theta)$ du segment d'extrémités $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\begin{vmatrix}1/2\\0\end{vmatrix}$ et passant par O. Calculer la longueur $I(\theta)M(\theta)$.

c) On note $J(\theta)$ le point du cercle $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point $I(\theta)$.

Exprimer $\overrightarrow{OJ(\theta)}$ en fonction de θ et du vecteur $\vec{v}_\theta$ de la base polaire.

d) A quelle(s) condition(s) a-t-on $J(\theta) = M(\theta)$? On suppose désormais ce cas exclu.

e) Montrer que la droite joignant les points $J(\theta)$ et $M(\theta)$ est orthogonale à la tangente à Γ en $M(\theta)$

f) Des informations précédentes, déterminer un procédé permettant, à l'aide du cercle $\mathcal{C}$, de construire les points $M(\theta)$ et les tangentes à Γ en ces points.

Exercice 26 Cissoïde droite :

a) Etudier la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$.

b) Soit M un point de cette courbe autre que O. On note P l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$ et Q le point de l'axe (Oy) de même ordonnée que P. Montrer que le triangle (MPQ) est rectangle en M.

c) En déduire un procédé permettant de construire la courbe étudiée.

Exercice 27 Strophoïde droite :

a) Etudier la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$.

b) On note $F\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ et on considère P un point de l'axe (Ox) autre que O.

Montrer que les points M intersection de la droite (FP) et de la courbe sont tels que $PM = PO$.

c) En déduire un procédé permettant de construire la courbe étudiée.

Exercice 28 Trisectrice de Mac Laurin (1698-1746):

a) Etudier la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos(\theta/3)}$ pour $\theta \in \left]-3\pi/2, 3\pi/2\right[$.

On précisera notamment la tangente en $\theta = \pi$.

b) Etablir, pour tout $\theta \in \left]-3\pi/2, 3\pi/2\right[$ la formule : $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + 2\cos(\theta/3)} = \dfrac{\sin(\theta/3)}{\cos(\theta/3)}$.

c) On note Ω le point double de la courbe et M un point de cette courbe autre que Ω.
La droite (ΩM) coupe la médiatrice du segment $[\Omega, O]$ en un point P.

Montrer que $OP = OM$ et que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega P})$ est le tiers de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

d) Donner un procédé permettant de construire la courbe étudiée.

Exercice 29 Lemniscate de Bernoulli

Soit $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$.

Former une équation polaire du lieu Γ des points M tels que $MF.MF' = 1$.
Etudier et représenter la courbe correspondante.

Longueur d'une courbe

Exercice 30 Pour $a > 0$, calculer la longueur de l'astroïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 31 Pour $a > 0$, calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Courbure

Exercice 32 Obtenir une détermination angulaire sur les courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes suivantes et en déduire la courbure en tout point régulier :

a) la portion d'astroïde de paramétrage : $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ obtenue pour $t \in [0, \pi/2]$.

b) l'arche de cycloïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$

c) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = 3\cos t + 3\cos 2t + \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t + 3\sin 2t + \sin 3t \end{cases}$.

Exercice 33 Obtenir une détermination angulaire sur les courbes paramétrées en coordonnées polaires suivantes et en déduire la courbure en tout point régulier :

a) la cardioïde d'équation polaire : $\rho = \cos\theta + 1$

b) la lemniscate d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$

Exercice 34 Calculer la courbure en tout point des courbes suivantes :

a) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$

b) la chaînette d'équation cartésienne $y = \operatorname{ch} x$.

c) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$.

d) la courbe d'équation cartésienne $2e^{x+y} = (1+e^x)(1+e^y)$.

Exercice 35 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

a) Montrer que f peut être prolongée en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

b) Déterminer le rayon de courbure au graphe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 36 Déterminer quels sont les arcs réguliers de classe $\mathcal{C}^2$ de courbure constante.

Exercice 37 En tout point d'une courbe donnée par une équation polaire, on note V une mesure de l'angle entre $\vec{u}_\theta$ et le vecteur tangent $\vec{T}$ au point considéré.

a) Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$.

b) Montrer que pour $\theta \in]-3\pi/2, 3\pi/2[$ on a $4\sin V = 3\gamma\rho$.

c) Soit une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ avec ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant pas.

On suppose qu'elle vérifie la relation : $4\sin V = 3\gamma\rho$.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ.

d) Résoudre cette dernière en réalisant le changement de fonction inconnue $z = \frac{\rho'}{\rho}$.

e) Quelle lien existe-t-il entre cette courbe et celle initialement étudiée ?

Forme différentielles

Exercice 38 Les formes différentielles ω suivantes sont-elles exactes ? Si oui, déterminer les primitives de ω :

a) $\omega = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$ b) $\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ c) $\omega = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - y\,\mathrm{d}y$.

Exercice 39 Calculer :

a) $I = \int_\gamma x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$ où γ paramètre l'arc de parabole $y = x^2$ allant de O à $A(2,4)$.

b) $I = \int_\gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$ où γ est un paramétrage direct du triangle (OIJ) avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$.

c) $I = \int_\gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$ où γ est un paramétrage direct du cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R > 0$.

Exercice 40 Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par :

a) l'ellipse paramétrée par $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$.

b) l'astroïde paramétrée par $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$.

c) l'arche de la cycloïde $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$ et l'axe des abscisses.

Exercice 41 Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par :

a) la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

b) la boucle de la lemniscate $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ obtenue pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

c) la boucle de la strophoïde droite d'équation polaire $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ obtenue pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.