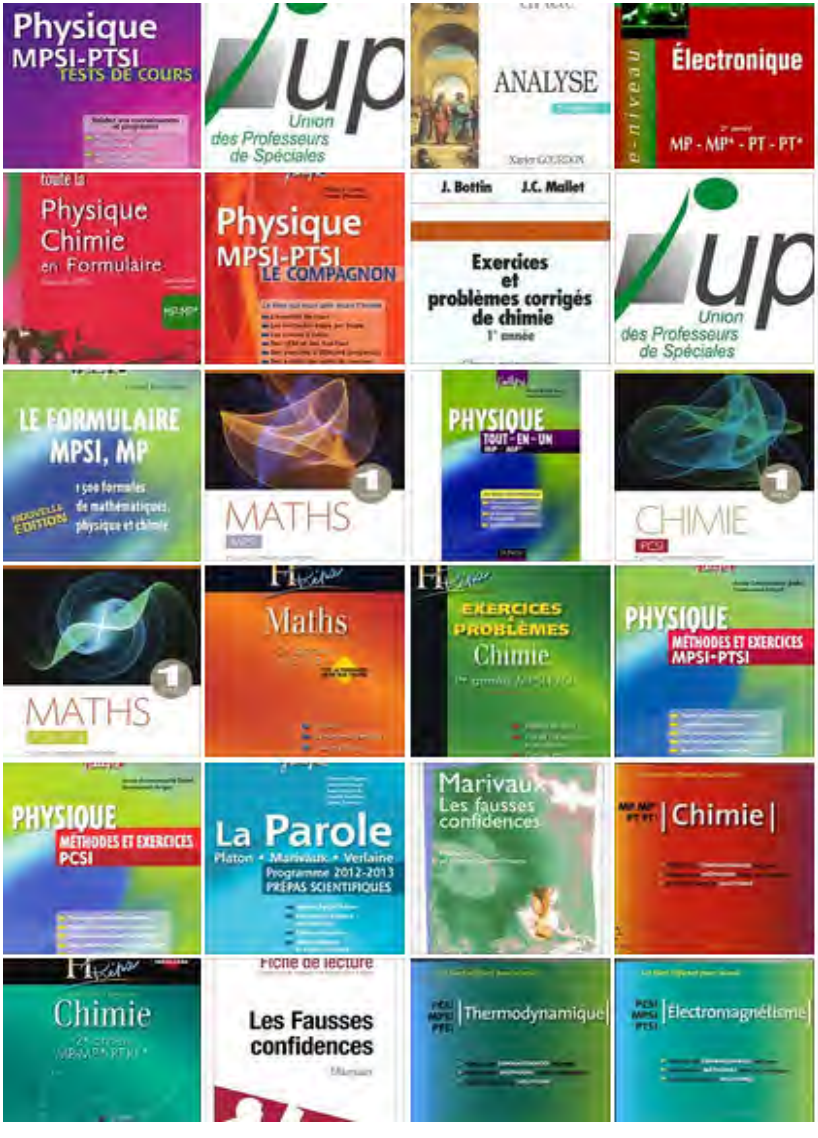
BIBLIOTHQUE ELECTRONIQUE DES CLASSES PREPA

partager le savoir gratuitement



pour plus de livres gratuit et exclusive visiter nous sur :

page facebook :

https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa

ou sur le forum :

http://prepa-book.forummaroc.net/

****

* © bibliothéque electronique des classes prepa™ ® *

****

PRÉFACE

Voici donc le quatrième et dernier tome, consacré à l'Algèbre bilinéaire et à la Géométrie, de ce nouveau cours de mathématiques.

Malgré les coupes sombres dont l'enseignement de cette science a été la cible depuis quelques années, nous avons voulu centrer cet ouvrage sur la Géométrie. A nos yeux, l'éclairage réciproque entre la Géométrie et les autres sciences demeure le moteur principal du développement de toutes les mathématiques, et qui transcende les systèmes d'axiomes utilisés aux époques successives.

C'est pourquoi nulle part nous n'avons renoncé à la rigueur, même en traitant des sujets aussi synthétiques que les courbes ou les surfaces. Au contraire, ces thèmes déjà complexes ont été l'occasion d'illustrer la puissance et l'efficacité de concepts mis en place aux tomes précédents et en algèbre bilinéaire. Par exemple, la fin du chapitre VII, consacré aux courbes, montre bien tout l'intérêt du calcul sur les polynômes en géométrie des courbes. Ainsi le lecteur pourra découvrir ou redécouvrir pas à pas l'interpénétration saisissante entre le calcul différentiel et la théorie des courbes et surfaces, et entre la notion de groupe, l'algèbre bilinéaire et la théorie des coniques et quadriques. Il pourra aussi constater l'extraordinaire universelle imbrication entre la Géométrie et la structure de groupe, si bien mise en lumière par l'exemple non évident du dodécaèdre, traité au chapitre VI.

Arrêtons-nous un instant sur ces coniques et quadriques. Elles furent naguère la pierre angulaire de tout enseignement en classe de Spéciales ; mais au fil du temps, on n'avait pas pu profiter, dans leur enseignement, des progrès de l'algèbre linéaire et bilinéaire. Quand on décida de diffuser sérieusement ces dernières, on réduisit l'enseignement des coniques et quadriques, dont pourtant l'algèbre bilinéaire est issue pour une large part. Mais chaque année, quelles que soient les modifications de programme, nos étudiants nous ont demandé des cours d'initiation sur les coniques et quadriques, ne serait-ce que parce qu'ils en ressentaient le besoin en Physique. A cette occasion, presque tous éprouvent un regain d'intérêt qui les étonne eux-mêmes pour l'algèbre bilinéaire, étudiée bien avant.

D'ailleurs, à la veille de la conquête du système solaire, peut-on raisonnablement envisager de renoncer à la Géométrie ? se résigner à des étudiants sans imagination face à un ellipsoïde ou un paraboloïde hyperbolique ? Pour juger de l'actualité des modestes notions introduites aux trois derniers chapitres, que le lecteur veuille bien se donner la peine de nous suivre dans notre captivant voyage autour de Saturne, accompli à partir d'une simple et unique photo de la NASA, et sur lequel nous avons tenu à conclure ce livre...

Au-delà des modes passagères, nous espérons contribuer à maintenir, peut-être à susciter, le goût de la Géométrie chez tous ceux qui se destinent aux sciences.

Nous ne saurions assez remercier les Editions Dunod, et tout particulièrement Gisèle Maïus et Pierre Riotort, à qui la réalisation matérielle de ces ouvrages doit tout. Nous remercions également ceux de nos lecteurs qui nous adressent remarques et suggestions, dont nous tenons toujours le plus grand compte.

J. M. ARNAUDIÈS, H. FRAYSSE

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. **Formes bilinéaires, formes quadratiques** 1

§ 1 Formes bilinéaires 1
§ 2 Formes bilinéaires en dimension finie 5
§ 3 Formes quadratiques 12
§ 4 Orthogonalité pour les formes bilinéaires symétriques ou alternées 17
§ 5 Classification des formes bilinéaires 26
§ 6 Algorithme de Gauss 35

CHAPITRE II. **Espaces euclidiens** 43

§ 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et conséquences 43
§ 2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel 50
§ 3 Familles orthonormales 57
§ 4 Première étude des groupes orthogonaux 70
§ 5 Produit mixte et produit vectoriel 83

CHAPITRE III. **Endomorphismes des espaces euclidiens** 89

§ 1 Générations d'un groupe euclidien 89
§ 2 Adjoint d'un endomorphisme 101
§ 3 Diagonalisation des endomorphismes symétriques 110
§ 4 Endomorphismes normaux d'un espace euclidien 119

CHAPITRE IV. **Formes hermitiennes, espaces hermitiens** 127

§ 1 Formes sesquilinéaires hermitiennes 127
§ 2 Formes hermitiennes en dimension finie 133
§ 3 Espaces préhilbertiens 142
§ 4 Matrices unitaires, groupes unitaires en dimension finie 152
§ 5 Adjoint d'un endomorphisme 159

CHAPITRE V. **Notions de géométrie affine** 175

§ 1 Espaces affines 175
§ 2 Applications affines, groupe affine 179
§ 3 Sous-espaces affines 184
§ 4 Barycentres 193
§ 5 Applications affines remarquables 204
§ 6 Convexité 211
§ 7 Géométrie affine en dimension 2 ou 3 216

CHAPITRE VI. **Espaces affines euclidiens** 221

§ 1 Généralités ; isométries 221
§ 2 Structure des isométries 229
§ 3 Exemples de groupes d'isométries 238
§ 4 Angles 246
§ 5 Distances, droites et plans 254
§ 6 Similitudes 261
§ 7 Cercles, sphères 263

CHAPITRE VII. **Courbes en géométrie affine** 273

§ 1 Courbes paramétrées 273
§ 2 $\mathscr{C}^k$-équivalence des courbes paramétrées 283
§ 3 Contact 289
§ 4 Etude locale affine des courbes paramétrées 300
§ 5 Exemples et applications 312

CHAPITRE VIII. **Enveloppes de droites d'un plan affine** 325

§ 1 Familles de droites à un paramètre 325
§ 2 Point caractéristique, enveloppe 327
§ 3 Exemples d'enveloppes de droites 338

CHAPITRE IX. **Courbes en géométrie euclidienne** 349

§ 1 Fonctions angulaires 349
§ 2 Longueur d'une courbe 356
§ 3 Abscisses curvilignes, courbure 364
§ 4 Courbure des courbes planes 375
§ 5 Courbes planes définies par leur courbure algébrique 390
§ 6 Développées, parallèles, développantes 396

CHAPITRE X. **Notions élémentaires sur les coniques** 411

§ 1 Polynômes de degré 2 sur $\mathscr{E}$ 411
§ 2 Zéros d'un polynôme de degré 2 sur $\mathscr{E}$ 420
§ 3 Intersection avec une droite 429
§ 4 Coniques en géométrie euclidienne 433

CHAPITRE XI. **Notions élémentaires sur les surfaces** 449

§ 1 Surfaces paramétrées 449
§ 2 Etude géométrique des plans tangents 456
§ 3 Cylindres, cônes, surfaces réglées 468
§ 4 Surfaces de révolution 479

CHAPITRE XII. **Notions élémentaires sur les quadriques** 487

§ 1 Fonctions polynomiales de degré 2 sur $\mathscr{E}$ 487
§ 2 Zéros d'une fonction $f \in \mathscr{P}_2$ 492
§ 3 Quadriques, droites et plans 505
§ 4 Quadriques en géométrie euclidienne 514
§ 5 Quelques problèmes classiques sur les quadriques 525

BIBLIOGRAPHIE 535

INDEX ALPHABÉTIQUE 537

Chapitre I

FORMES BILINÉAIRES, FORMES QUADRATIQUES

Dans tout ce chapitre, K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

§ I.1 *FORMES BILINÉAIRES*

DÉFINITION I.1.1

Soit E et F deux K-ev. Une ***forme bilinéaire*** *sur $E \times F$ est une application $f : E \times F \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ qui est K-linéaire en chacun des facteurs x et y quand on bloque l'autre.*

L'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est un sous-K-ev de $\mathscr{F}(E \times F, K)$ (cf. tome 1, § XIII.1), qui est nul lorsque E ou F est nul, et que nous notons $\mathrm{BL}(E, F\,;K)$.

Cas où $E = F$

Lorsque $E = F$, nous écrirons $\mathrm{BL}_2(E\,;K)$, ou $\mathrm{BL}_2(E)$, au lieu de $\mathrm{BL}(E, E\,;K)$. Dans ce cas, une forme bilinéaire $f \in \mathrm{BL}_2(E)$ est dite **symétrique** ssi $(\forall (x, y) \in E^2)\ f(x, y) = f(y, x)$; elle est dite **alternée** ssi $(\forall x \in E)\ f(x, x) = 0$. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques (resp. alternées) sur E forme un sous-K-ev de $\mathrm{BL}_2(E)$ que nous notons $\mathrm{S}_2(E)$ (resp. $\Lambda_2^*(E)$).

Soit $f \in \mathrm{BL}_2(\mathrm{E})$: pour que l'on ait $f \in \Lambda_2^*(E)$, il faut et il suffit que :

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad f(x, y) + f(y, x) = 0\,.$$

En effet, si (1) est satisfaite, en y faisant $x = y$ on en déduit : $2 \,.\, f(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$, d'où $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$ (car K a été supposé de caractéristique $\neq 2$), d'où $f \in \Lambda_2^*(E)$. Et réciproquement, si $f \in \Lambda_2^*(E)$, pour $(x, y) \in E^2$, on a : $f(x + y, x + y) = 0$, soit en développant :

$$f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + f(y, x) = f(x, y) + f(y, x) = 0 \,,$$

d'où (1). (Ce n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la proposition XIII.1.3 du tome 1).

THÉORÈME I.1.1

Soit E un K-ev. On a :

$$\mathrm{BL}_2(E) = \mathrm{S}_2(E) \oplus \Lambda_2^*(E) \,.$$

Démonstration :

Prouvons d'abord que $\mathrm{S}_2(E) \cap \Lambda_2^*(E) = \{0\}$: si $f \in \mathrm{S}_2(E) \cap \Lambda_2^*(E)$, on a en effet, pour tout $(x, y) \in E^2$, à la fois $f(x, y) = f(y, x)$ et $f(x, y) = -f(y, x)$, d'où $2 \,.\, f(x, y) = 0$, d'où $f(x, y) = 0$ car la caractéristique de K est $\neq 2$, d'où $f = 0$ comme attendu.

Prouvons ensuite que $\mathrm{S}_2(E) + \Lambda_2^*(E) = \mathrm{BL}_2(E)$: si $f \in \mathrm{BL}_2(E)$, désignons par g l'élément de $\mathrm{BL}_2(E)$ défini par $(x, y) \mapsto f(y, x)$ pour $(x, y) \in E^2$ et posons :

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + g) \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{2}(f - g) \,.$$

Il est de vérification immédiate que $f_1 \in \mathrm{S}_2(E)$, que $f_2 \in \Lambda_2^*(E)$ et que $f = f_1 + f_2$. ■

Formes non dégénérées, formes dégénérées

Reprenons le cas général où E et F sont deux K-ev donnés. Pour $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$, $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$ fixés, les applications

$$f_{[y_0]} : \quad E \longrightarrow K, \quad x \mapsto f(x, y_0)$$

et

$${}_{[x_0]}f : \quad F \longrightarrow K, \quad y \mapsto f(x_0, y)$$

sont par définition des *formes linéaires*. Cela permet de considérer les applications

(2) $\qquad J_f : \quad F \longrightarrow E^*, \quad y \mapsto f_{[y]}, \quad$ et

(3) $\qquad I_f : \quad E \longrightarrow F^*, \quad x \mapsto {}_{[x]}f,$

dont on vérifie immédiatement qu'elles sont K-linéaires.

DÉFINITION I.1.2

Soit E et F deux K-ev et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. On dit que f est ***non dégénérée*** *ssi les deux applications linéaires I_f et J_f définies par* (2) *et* (3) *sont* ***injectives,*** *i.e. ssi :*

$$\mathrm{Ker}\,(I_f) = \{0_E\} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ker}\,(J_f) = \{0_F\}\ .$$

On dit que f est ***dégénérée*** *ssi elle n'est pas non dégénérée.*

Orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire

DÉFINITION I.1.3

Soit E et F deux K-ev et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. Pour toute partie non vide A de E, on appelle ***f-orthogonal de A*** *l'ensemble, noté $A^{\perp}$, défini par :*

$$A^{\perp} = \{y \in F \mid (\forall x \in A),\ f(x, y) = 0\} = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Ker}\,({}_{[x]}f).$$

Pour toute partie non vide B de F, on appelle ***f-orthogonal de B*** *l'ensemble, noté ${}^{\perp}B$, défini par :*

$${}^{\perp}B = \{x \in E \mid (\forall y \in B),\ f(x, y) = 0\} = \bigcap_{y \in B} \mathrm{Ker}\,(f_{[y]})\ .$$

(Le fait de sous-entendre, dans les notations $A^{\perp}$ et ${}^{\perp}B$, la lettre f ne crée pas de confusion dans la pratique).

Les propriétés suivantes sont alors faciles à vérifier :

(Orth. 1) Pour $\varnothing \neq A \subset E$, $A^{\perp}$ est un sous-K-ev de F, et $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}\,(A))^{\perp}$.

De même, pour $\varnothing \neq B \subset F$, ${}^{\perp}B$ est un sous-K-ev de E, et ${}^{\perp}B = {}^{\perp}(\mathrm{Vect}\,(B))$.

(Orth. 2) $$\{0_E\}^{\perp} = F\ , \quad {}^{\perp}\{0_F\} = E\ .$$

(Orth. 3)

$$\text{Pour } \varnothing \neq A_1 \subset A_2 \subset E, \text{ on a :} \quad A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp}\ .$$
$$\text{Pour } \varnothing \neq B_1 \subset B_2 \subset F, \text{ on a :} \quad {}^{\perp}B_2 \subset {}^{\perp}B_1\ .$$

(Orth. 4) On a : $\mathrm{Ker}\,(I_f) = {}^{\perp}F$, et $\mathrm{Ker}\,(J_f) = E^{\perp}$. Donc :

$$(f \text{ est non dégénérée}) \Leftrightarrow ({}^{\perp}F = \{0_E\} \text{ et } E^{\perp} = \{0_F\}).$$

Exemple 1 : Soit E un K-ev et E^* son dual algébrique. Prenons pour f la *forme bilinéaire canonique :* $E \times E^* \longrightarrow K$, $(x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$ (cf. tome 1, § XII.1). Alors la f-orthogonalité n'est autre que l'orthogonalité définie en dualité (cf. *ibidem*).

Rappelons que dans ce cas, pour $\varnothing \neq A \subset E$ (resp. $\varnothing \neq B \subset E^*$), on note A^0 (resp. ${}^0B$), ce que nous avons noté ci-dessus $A^\perp$ (resp. ${}^\perp B$).

En fait, l'orthogonalité définie en dualité permet de reconstruire le f-orthogonal le plus général d'un sous-espace :

PROPOSITION I.1.1

Soit E et F deux K-ev et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$.
Pour $\varnothing \neq A \subset E$, on a : $A^\perp = {}^0(I_f(A))$.
Pour $\varnothing \neq B \subset F$, on a : ${}^\perp B = {}^0(J_f(B))$.

Démonstration :

Pour $\varnothing \neq A \subset E$, on a : $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Ker}\,({}_{[x]}f)$, et par définition même de ${}^0(I_f(A))$, on a :

$$ {}^0(I_f(A)) = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Ker}\,(I_f(x)). $$

Or $I_f(x) = {}_{[x]}f$ pour tout $x \in E$. D'où la première relation. La seconde se vérifie de même. ■

THÉORÈME II.1.2

Soit E un K-ev de dimension finie. *La forme bilinéaire canonique f sur $E \times E^*$ est non dégénérée.*

Démonstration :

On a : $\mathrm{Ker}\,(J_f) = \{0_{E^*}\}$ par définition même de la forme linéaire nulle sur E. D'autre part $\mathrm{Ker}\,(I_f) = {}^0(E^*) = \{0_E\}$ car, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) \neq 0$ (cf. tome 1, lemme 1 du § XII.2). ■

Exercice 1 : Soit E un K-ev *de dimension finie* $n \geqslant 1$. On identifie E à son bidual E^{**} (cf. tome 1, § XII.2). A chaque $f \in \mathrm{BL}_2(E)$, on associe $I_f : E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto {}_{[x]}f$.

a) Montrer que $f \mapsto I_f$ est un isomorphisme de $\mathrm{BL}_2(E)$ sur $\mathrm{Hom}_K(E, E^*)$.

b) Soit $f \in \mathrm{BL}_2(E)$. Pour que f soit symétrique, il faut et il suffit que $I_f = {}^t(I_f)$. Pour que f soit alternée, il faut et il suffit que $I_f = -{}^t(I_f)$.

c) Etablir des propriétés analogues avec $J_f : E \longrightarrow E^*$, $y \mapsto f_{[y]}$.

Exercice 2 : Soit E et F deux K-ev et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. On donne des sous-$K$-ev $V_1, \ldots, V_p$ de E. Pour la f-orthogonalité, démontrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} V_i\right)^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{p} (V_i^{\perp}).$$

Exercice 3 : Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $\alpha \in E$, on note B_α l'élément de $\mathrm{S}_2(E)$ défini par :

$$(\forall (f,g) \in E^2) \quad B_\alpha(f,g) = \int_0^1 \alpha f g\,.$$

a) Donner une CNS portant sur α pour que B_α soit non dégénérée.

b) On choisit α pour que B_α soit non dégénérée. Soit $\mathscr{P}$ le sous-$\mathbb{R}$-ev de E formé des fonctions *polynomiales :* $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{P}^{\perp} = \{0\}$.

Indication : Utiliser des polynômes du type $x \mapsto \left[\dfrac{1-(x-a)^2}{1-(b-a)^2}\right]^n$ pour $0 < a < b < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : On donne des réels $a_0, \ldots, a_n$ avec $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. On pose $J_k =]a_k, a_{k+1}[$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $I = [a_0, a_n]$. On note $\mathscr{F}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont *constantes sur chaque* J_k ; soit $\mathscr{P}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathscr{L}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions bornées intégrables : $I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit B la forme bilinéaire sur $\mathscr{L}$ définie par $\mathrm{B}(f,g) = \displaystyle\int_{a_0}^{a_n} fg$.

a) Trouver le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{P}^{\perp} \cap \mathscr{F}$ (l'orthogonalité étant la B-orthogonalité).

b) Soit $\mu_i \in \mathscr{P}$ défini par $\mu_i(t) = t^i$ $(t \in I)$. On note φ_i l'élément de $\mathscr{F}^*$ tel que $\varphi_i(f) = \displaystyle\int_{a_0}^{a_n} \mu_i f$ pour $f \in \mathscr{F}$. Etudier l'indépendance linéaire des formes $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5 : Soit deux réels a, b $(a < b)$. On note E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. On donne une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$.

$$\text{Pour} \quad (f,g) \in E^2, \quad \text{soit} \quad \mathrm{B}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(s_n)\, g(s_n).$$

Il est clair que $\mathrm{B} \in \mathrm{S}_2(E)$.

a) Trouver une CNS portant sur (s_n) pour que B soit non dégénérée.

b) La suite (s_n) vérifiant la condition trouvée en *a*), on donne $x \in [a,b]$. On pose $H_x = \{f \in E \mid f(x) = 0\}$. Trouver $H^{\perp}$ (pour la B-orthogonalité).

Exercice 6 : Soit E et F deux K-ev quelconques et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$ qui permet de définir la f-orthogonalité. Soit H un sous-K-ev de E et L un sous-K-ev de F. Montrer :

$$({}^{\perp}(H^{\perp}))^{\perp} = H^{\perp} \quad \text{et :} \quad {}^{\perp}(({}^{\perp}L)^{\perp}) = {}^{\perp}L\,.$$

§ I.2 *FORMES BILINÉAIRES EN DIMENSION FINIE*

Tous les K-ev considérés dans ce § sont supposés *de dimension finie.*

Rang d'une forme bilinéaire

Soit E et F deux K-ev de dimensions respectives n et p. Pour tout K-ev V (de dimension finie), notons $\theta_V : V \longrightarrow V^{**}$ l'isomorphisme canonique de V sur son bidual (cf. tome 1, théorème XII.2.4).

PROPOSITION I.2.1

Avec les notations ci-dessus, soit $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. On a :

$$^tI_f \circ \theta_F = J_f \quad \text{et} \quad {}^tJ_f \circ \theta_E = I_f\,.$$

En conséquence, les applications linéaires I_f et J_f ont **même rang.**

Démonstration :

Prouvons par exemple que $^tI_f \circ \theta_F = J_F$ (l'autre relation se prouvant de la même façon). Si $y \in F$, on a par définition :

$$(^tI_f \circ \theta_F)(y) = \theta_F(y) \circ I_f\,.$$

Pour $x \in E$, la forme linéaire $\theta_F(y) \circ I_f$ prend sur x la valeur

$$\theta_F(y)(I_f(x)) = \theta_F(y)({}_{[x]}f) = ({}_{[x]}f)(y) = \\ = f(x, y) = f_{[y]}(x) = (J_f(y))(x).$$

Donc $\theta_F(y) \circ I_f = J_f(y)$, c'est-à-dire :

$$(^tI_f \circ \theta_F)(y) = J_f(y) \quad \text{et c'est vrai pour tout } y \in F\,.$$

Donc $$^tI_f \circ \theta_F = J_f\,. \quad \blacksquare$$

Si on *identifie* E et E^{**} (resp. F et F^{**}) à l'aide de θ_E (resp. θ_F), la proposition I.2.1 signifie que *les applications I_f et J_f sont transposées l'une de l'autre.* Nous pouvons alors poser :

DÉFINITION I.2.1

Sous les hypothèses de la proposition I.2.1, *le rang commun des applications I_f et J_f s'appelle* **rang de la forme bilinéaire f.** *Nous le notons* rg (f).

Sous les mêmes conditions, si I_f est injective, nécessairement $\dim_K(F) \geqslant \dim_K(E)$; et si J_f est injective, nécessairement $\dim_K(F) \leqslant \dim_K(E)$. Donc, si f est non dégénérée, on a forcément $\dim_K(E) = \dim_K(F)$. En conséquence :

PROPOSITION I.2.2

Soit $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$, avec $\dim_K(E) = n$, $\dim_K(F) = p$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :
(I) *f est non dégénérée.*
(II) *I_f est bijective.*
(III) *J_f est bijective.*
Si ces conditions sont satisfaites, on a : $n = p$.

Orthogonalité en dimension finie

THÉORÈME I.2.1

Soit E et F deux K-ev, de dimensions respectives n et p $(n \geqslant 1, p \geqslant 1)$ et soit $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$.
Pour tout sous-K-ev H de E, on a :

(1) $\dim(H^{\perp}) + \dim(H) = p + \dim({}^{\perp}F \cap H)$.

Pour tout sous-K-ev L de F, on a :

(2) $\dim({}^{\perp}L) + \dim(L) = n + \dim(E^{\perp} \cap L)$.

Démonstration :

Nous allons prouver (1) (la preuve de (2) est analogue). Soit

$$\varphi = I_f|_H : H \longrightarrow F^*, \quad x \mapsto {}_{[x]}f .$$

D'après la proposition I.1.1, $H^{\perp} = {}^0(\mathrm{Im}(\varphi))$. *Par dualité* (cf. tome 1, théorème XII.2.5), on en déduit :

(3) $$\dim(H^{\perp}) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = p .$$

Mais $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(I_f) \cap H = {}^{\perp}F \cap H$. La formule du rang appliquée à φ donne donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim({}^{\perp}F \cap H) = \dim(H) .$$

En reportant cette relation dans (3), on en déduit bien (1). ■

(On remarquera que si $F = E^*$ et si f est la forme bilinéaire canonique sur $E \times E^*$, ce théorème I.2.1 se réduit au théorème XII.2.5 du tome 1.)

COROLLAIRE 1

Dans les conditions du théorème I.2.1, *si de plus f est* ***non dégénérée*** *(ce qui implique $n = p$), on a :*
a) *Pour tout sous-K-ev H de E,* $\dim(H) + \dim(H^{\perp}) = n$.
b) *Pour tout sous-K-ev L de F,* $\dim(L) + \dim({}^{\perp}L) = n$.
c) *Pour tout sous-K-ev H de E,* $H = {}^{\perp}(H^{\perp})$.
d) *Pour tout sous-K-ev L de F,* $L = ({}^{\perp}L)^{\perp}$.

Démonstration :

On a ici ${}^{\perp}F = \{0_E\}$ et $E^{\perp} = \{0_F\}$ et l'application du théorème I.2.1 donne immédiatement *a*) et *b*).

Ensuite, en appliquant *a*) à un sous-K-ev H de E, puis *b*) avec $L = H^{\perp}$, on obtient :

$\dim(H) = \dim({}^{\perp}(H^{\perp}))$, d'où, du fait que $H \subset {}^{\perp}(H^{\perp})$, l'égalité $H = {}^{\perp}(H^{\perp})$ (cf. tome 1, théorème IX.4.2).

L'assertion *d*) se prouve de la même façon. ■

COROLLAIRE 2

Pour tout K-ev et tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-K-ev de dimension k de V. Sous les hypothèses du corollaire 1 (d'où $n = p$), pour tout $q \in [\![0, n]\!]$, l'application $H \mapsto H^{\perp}$ est une bijection de $\mathscr{G}_q(E)$ sur $\mathscr{G}_{n-q}(F)$, dont la bijection réciproque est $L \mapsto {}^{\perp}L$.

Expression d'une forme bilinéaire dans des bases

DÉFINITION I.2.2

Soit E et F deux K-ev non nuls, de dimensions respectives n et p, de bases respectives $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$; et soit $f \in \mathrm{BL}(E, F ; K)$. On appelle ***matrice de f dans les bases α et β*** *la matrice définie par*

$$\mathrm{Mat}_{\alpha,\beta}(f) = [f(\alpha_i, \beta_j)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(K).$$

Si $E = F$ et $\alpha = \beta$, on notera $\mathrm{Mat}_{\alpha}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\alpha,\alpha}(f)$, et cette matrice sera appelée matrice de f dans la base α.

Avec les notations de cette définition, soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j \beta_j \in F$ ($(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $(y_1, \ldots, y_p) \in K^p$). En développant par bilinéarité $f(x, y)$, on obtient :

$$(4) \qquad \boxed{f(x, y) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} f(\alpha_i, \beta_j)\, x_i\, y_j}\,.$$

L'application $\mathrm{BL}(E, F ; K) \longrightarrow \mathfrak{M}_{n,p}(K)$, $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\alpha,\beta}(f)$ est K-linéaire, et (4) montre qu'elle est injective. Il est clair qu'elle est aussi surjective car, si $A = [a_{i,j}] \in \mathfrak{M}_{n,p}(K)$ est donnée, il est évident que l'application $g : E \times F \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_{i,j}\, x_i\, y_j$ est bilinéaire et qu'elle a justement pour matrice A. En résumé :

THÉORÈME I.2.2

Avec les notations et hypothèses de la définition I.2.2, *l'application* $\mathrm{BL}(E, F\,;K) \longrightarrow \mathfrak{M}_{n,p}(K)$, $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\alpha,\beta}\,(f)$ *est un* ***isomorphisme de K-ev.*** *En particulier,*

$$\dim\,(\mathrm{BL}(E, F\,;K)) = np\,.$$

Reprenons les conditions de la relation (4). Notons $A = \mathrm{Mat}_{\alpha,\beta}\,(f) = [a_{i,j}]$ et, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\alpha_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j\,\beta_j \in F$, soit X et Y les *vecteurs-colonnes* $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(K)$ et $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(K)$. En convenant d'identifier K et $\mathfrak{M}_{1,1}(K)$, on vérifie que (4) équivaut à la très importante relation matricielle suivante :

$$\text{(5)} \qquad \boxed{f(x, y) = {}^tXAY}\,.$$

Remarque 1 : De ce qui précède, on déduit notamment que si $M_1 \in \mathfrak{M}_{n,p}(K)$, $M_2 \in \mathfrak{M}_{n,p}(K)$ et si

$$(\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(K),\ \forall Y \in \mathfrak{M}_{p,1}(K)) \qquad {}^tXM_1\,Y = {}^tXM_2\,Y\,,$$

alors $M_1 = M_2$.

THÉORÈME I.2.3

Reprenons les hypothèses et notations en vigueur à la définition I.2.2. *Notons* $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ *et* $\beta^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_p^*)$ *les bases duales de* α *et de* β *et* $A = \mathrm{Mat}_{\alpha,\beta}\,(f) = [a_{i,j}]$.
Alors $A = \mathrm{Mat}_{\beta,\alpha^*}\,(J_f) = {}^t[\mathrm{Mat}_{\alpha,\beta^*}\,(I_f)]$.
En conséquence, le rang de A ne dépend que de f et non du choix de α *et* β *; et en fait, le rang de A n'est autre que le rang de f.*

Démonstration :

Compte tenu de la définition I.2.1 et de la proposition I.2.1, la seule chose à prouver est que $A = \mathrm{Mat}_{\beta,\alpha^*}\,(J_f)$.

Fixons $j \in [\![1, p]\!]$ et calculons $J_f(\beta_j)$. On a : $J_f(\beta_j) = f_{[\beta_j]}$. Or, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\alpha_i \in E$ $((x_1, \ldots, x_n) \in K^n)$, on a :

$$f_{[\beta_j]}(x) = f(x, \beta_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_i^*(x).$$

Donc $f_{[\beta_j]} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_i^* = J_f(\beta_j)$, ce qui prouve bien :

$$\mathrm{Mat}_{\beta,\alpha^*}(J_f) = [a_{ij}] = A\,. \quad \blacksquare$$

Changement de base

Reprenons deux K-ev E et F non nuls, de dimensions respectives n et p et une forme bilinéaire $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$.

Donnons-nous des bases $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ de E, et des bases $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ et $\beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_p)$ de F. Notons P la matrice de passage de α à α', et Q celle de β à β', d'où $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ et $Q \in \mathrm{GL}(p, K)$. Soit enfin $A = \mathrm{Mat}_{\alpha,\beta}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\alpha',\beta'}(f)$. Il s'agit de calculer A' en fonction de A, P, Q. Pour cela, soit $(x, y) \in E \times F$. Notons X (resp. X', Y, Y') le vecteur colonne des coordonnées de x dans α (resp. de x dans α', de y dans β, de y dans β'). On a :

$$X = PX'\,; \quad Y = QY'\,; \quad f(x, y) = {}^tXAY = {}^tX'A'Y'\,.$$

Mais ${}^tX = {}^tX'\,{}^tP$, d'où $f(x, y) = {}^tX'\,{}^tPAQY'$. C'est vrai pour tout $(x, y) \in E \times F$. D'où : $(\forall X' \in \mathfrak{M}_{n,1}(K),\ \forall Y' \in \mathfrak{M}_{p,1}(K))\ {}^tX'A'Y' = {}^tX'({}^tPAQ)\,Y'$ (associativité du produit de matrices rectangulaires). D'après la remarque 1 on aboutit donc à la formule fondamentale suivante, appelée **formule du changement de base pour les formes bilinéaires :**

$$\boxed{A' = {}^tPAQ} \tag{6}$$

(cette formule (6) confirme l'invariance du rang de A).

Cas où $E = F$ en dimension finie

Un cas particulier important est celui où $E = F$, $\alpha = \beta$ et $\alpha' = \beta'$. Alors (6) devient :

$$\boxed{A' = {}^tPAP}\,. \tag{7}$$

Vu l'importance de ce cas particulier introduisons une notion utile :

DÉFINITION I.2.3

Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, de base $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et $f \in \mathrm{BL}_2(E)$. On appelle ***discriminant de f dans la base α*** *le scalaire* $\det(\mathrm{Mat}_\alpha(f))$, *que nous noterons* $\mathrm{Discr}_\alpha(f)$.

Pour que f soit *non dégénérée,* il faut et il suffit qu'il existe une base α de E telle que $\mathrm{Discr}_\alpha\ (f) \neq 0$. S'il en est ainsi, alors $\mathrm{Discr}_\alpha\ (f) \neq 0$ pour *toute* base α de E (c'est une conséquence du théorème I.2.3, ou aussi de (7)).

Soit α et α' deux bases (ordonnées par $[\![1, n]\!]$ de E, et P la matrice de passage de α à α'. On déduit aussitôt de (7) la formule suivante, dite du **changement de base pour les discriminants**

$$(8) \qquad \boxed{\mathrm{Discr}_{\alpha'}\ (f) = (\det\ (P))^2\, \mathrm{Discr}_\alpha\ (f)}\ .$$

Pour achever ce paragraphe, revenons sur les formes bilinéaires symétriques ou alternées.

THÉORÈME I.2.4

Soit E un K-ev de dimension $n \geqslant 1$, et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une base de E. L'isomorphisme de K-ev

$$\mathrm{BL}_2(E) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(K), \quad f \mapsto \mathrm{Mat}_\alpha\ (f)$$

induit un isomorphisme de K-ev de $\mathrm{S}_2(E)$ sur le K-ev $\mathrm{Sym}\ (n, K)$ des matrices carrées symétriques d'ordre n sur K, et un isomorphisme de K-ev de $\Lambda_2^*(E)$ sur le K-ev $\mathrm{Asym}\ (n, K)$ des matrices carrées antisymétriques d'ordre n sur K. En conséquence, $\dim\ (\mathrm{S}_2(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim\ (\Lambda_2^*(E)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration :

Si f est symétrique (resp. alternée), alors $(\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2)$ $f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\alpha_j, \alpha_i)$ (resp. $f(\alpha_i, \alpha_j) = -f(\alpha_j, \alpha_i)$), d'où : $M_\alpha(f)$ est symétrique (resp. antisymétrique). Réciproquement, si $M_\alpha(f)$ est symétrique (resp. antisymétrique), la relation (5) montre aussitôt, en transposant les deux membres, que f est symétrique (resp. alternée). ■

Exercice 1 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathrm{S}_2(E) \cup \Lambda_2^*(E)$. Montrer que, pour tout sous-K-ev H de E, on a : $(H^\perp)^\perp = H + E^\perp$ (pour la f-orthogonalité).

Exercice 2 : Soit E et F deux K-ev de même dimension finie $n \geqslant 1$. On donne une forme bilinéaire *non dégénérée* $f \in \mathrm{BL}_2(E, F\ ;\ K)$. Montrer que, pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de F telle que $(\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2)$ $f(e_i, e'_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

Exercice 3 : Soit E et F deux K ev de même dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathrm{BL}_2(E, F\ ;\ K)$ non dégénérée. Soit H un sous-K-ev de E et $g = f|_{H \times F}$. Montrer que : rang de g = dim (H).

Exercice 4 : Soit E et F deux K-ev de dimension finie, $n = \dim_K E$, $p = \dim_K (F)$, et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. On considère la f-orthogonalité. Soit H un sous-K-ev de E et $g = f\,|_{H \times F}$. Montrer : $\dim ({}^{\perp}(H^{\perp})) = n - \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$.

Indication : Commencer par établir :

$$\dim ({}^{\perp}(H^{\perp})) = n - p + \dim\,(H) + \dim\,(E^{\perp}) - \dim\,({}^{\perp}F \cap H)\,.$$

Exercice 5 : Soit E et F deux K-ev et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, $(y_1, \ldots, y_p) \in F^p$ tels que $\det\,([f(x_i, y_j)]_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}) \neq 0$. Vérifier que chacune des suites $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ est libre, et en déduire que, si $H = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)$ et $L = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_p)$, alors $f\,|_{H \times L}$ est non dégénérée.

Exercice 6 : Soit E et F deux K-ev de même dimension finie $n \geqslant 1$, et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$. On considère la fonction $D_f : E^n \times F^n \to K$,

$$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto D_f(x, y) = \det\,([f(x_i, y_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2})\,.$$

a) Montrer que D_f est multilinéaire sur $E^n \times F^n$, et qu'elle est alternée en chacun des groupes de variables $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$.

b) Soit $u \in \mathrm{Hom}_K\,(E)$ et $v \in \mathrm{Hom}_K\,(F)$. Démontrer :

$$(\forall\,(x, y) \in E^n \times F^n) \quad D_f((u(x_1), \ldots, u(x_n)), (v(y_1), \ldots, v(y_n))) = \det\,(u) \det\,(v)\, D_f(x, y)\,.$$

Exercice 7 : Soit E et F deux K-ev de même dimension finie $n \geqslant 1$, et $f \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$ *non dégénérée.* A chaque $u \in \mathrm{Hom}_K\,(E)$ on associe ${}_u g \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$ définie par :

$$(\forall\,(x, y) \in E \times F) \quad {}_u g\,(x, y) = f(u(x), y)\,.$$

A chaque $v \in \mathrm{Hom}_K\,(F)$ on associe $g_v \in \mathrm{BL}(E, F\,;K)$ définie par $(\forall\,(x, y) \in E \times F)$ $g_v(x, y) = f(x, v(y))$.

a) Montrer que $L : u \mapsto {}_u g$ est un isomorphisme de K-ev entre $\mathrm{Hom}_K\,(E)$ et $\mathrm{BL}(E, F\,;K)$ et que $R : v \mapsto g_v$ est un isomorphisme de K-ev entre $\mathrm{Hom}_K\,(F)$ et $\mathrm{BL}(E, F\,;K)$.

b) Si $u \in \mathrm{Hom}_K\,(E)$, quelle est la CNS pour que ${}_u g$ soit non dégénérée ? Même question avec g_v si $v \in \mathrm{Hom}_K\,(F)$.

c) Etudier l'isomorphisme $\alpha = R^{-1} \circ L : \mathrm{Hom}_K\,(E) \to \mathrm{Hom}_K\,(F)$; en particulier, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ des bases de E et F : si $u \in \mathrm{Hom}_K\,(E)$ et $v = R^{-1} \circ L(u)$, exprimer $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\,(v)$ en fonction de $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(u)$ et de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\,(f)$.

d) Si $u \in \mathrm{Hom}_K\,(E)$ et $v = \alpha\,(u)$, vérifier que, pour la f-orthogonalité, $(\mathrm{Im}\,(u))^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(u)$.

§ I.3 *FORMES QUADRATIQUES*

DÉFINITION I.3.1

Soit E un K-ev. On appelle **forme quadratique** *sur E toute application $\Phi : E \to K$ de la forme $x \mapsto f(x, x)$ pour au moins une forme bilinéaire symétrique f sur E.*

Le K-ev E étant fixé, associons à toute forme bilinéaire symétrique $f \in \mathrm{S}_2(E)$ la forme quadratique $\Phi_f : x \mapsto f(x, x)$ sur E. L'application $\mathrm{S}_2(E) \to \mathscr{F}\,(E, K)$, $f \mapsto \Phi_f$ est K-linéaire ; son image est par définition l'ensemble des formes quadratiques sur E, ensemble que nous noterons Quadr (E) : donc Quadr (E) est un sous-K-ev de $\mathscr{F}\,(E, K)$.

THÉORÈME I.3.1

Soit E un K-ev. L'application $S_2(E) \to \text{Quadr}\,(E)$, $f \mapsto \Phi_f$ est un isomorphisme de K-ev. L'isomorphisme réciproque fait correspondre, à toute forme quadratique Φ sur E, la forme bilinéaire f_Φ sur E définie par :

$$(1)\begin{cases} (\forall (x,y) \in E^2) \qquad f_\Phi(x,y) = \dfrac{1}{2}\,[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \dfrac{1}{4}\,[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]\,. \end{cases}$$

Démonstration :

On sait déjà que $f \mapsto \Phi_f$ est une *surjection* de $S_2(E)$ sur Quadr (E). De plus, si $f \in S_2(E)$, il est clair que $(\forall (x,y) \in E^2)$

$$\Phi_f(x+y) = f(x+y, x+y) = \Phi_f(x) + \Phi_f(y) + 2\,f(x,y)\,,$$

et

$$\Phi_f(x-y) = \Phi_f(x) + \Phi_f(y) - 2\,f(x,y)\,.$$

D'où immédiatement, puisque K est de caractéristique $\neq 2$:

$$(2) \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}\,[\Phi_f(x+y) - \Phi_f(x) - \Phi_f(y)] = \frac{1}{4}\,[\Phi_f(x+y) - \Phi_f(x-y)]\,,$$

relations qui entraînent l'*injectivité* de $f \mapsto \Phi_f$ (car elles prouvent bien que $\Phi_f = 0 \Rightarrow f = 0$). Donc $f \mapsto \Phi_f$ définit bien un isomorphisme de K-ev de $S_2(E)$ sur Quadr (E). Le théorème entier en découle, compte tenu de (2). ■

DÉFINITION I.3.2

Soit E un K-ev. Si $f \in S_2(E)$, la forme quadratique $\Phi_f : x \mapsto f(x,x)$ est dite ***associée*** *à f. Si $\Phi \in$ Quadr (E), la forme bilinéaire symétrique f_Φ définie par* (1) *s'appelle* ***forme polaire*** *de Φ.*

La démonstration de la propriété suivante, tout à fait élémentaire, est laissée au lecteur :

PROPOSITION I.3.1

Soit E un K-ev et $\Phi : E \to K$ une application.
Soit f (resp. g) l'application $E^2 \to K$,

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\,[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)] \qquad \left(\textit{resp. } \frac{1}{4}\,[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]\right).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :
(I) $\Phi \in \text{Quadr}\ (E)$.
(II) f (*resp.* g) *est bilinéaire, et*

$$\forall (\lambda, x) \in K \times E \quad \Phi(\lambda x) = \lambda^2 \Phi(x).$$

(III) f (*resp.* g) *est bilinéaire, et* $\forall x \in E\ \Phi(2x) = 4\,\Phi(x)$.
Lorsque ces conditions sont satisfaites, la forme polaire de Φ *est* f (*resp.* g).

Exemple 1 : Soit E un K-ev. Pour $f \in \mathrm{BL}_2(E)$, l'application $Q_f : E \to K$, $x \mapsto f(x, x)$ vérifie trivialement les conditions (II) de la proposition I.3.1. Donc Q_f est une forme quadratique sur E. L'application $\mathrm{BL}_2(E) \to \text{Quadr}\ (E)$, $f \mapsto Q_f$ est linéaire ; son noyau est évidemment le K-ev $\Lambda_2^*(E)$ des formes bilinéaires alternées sur E ; et son image est Quadr (E) tout entier, car sa restriction à $\mathrm{S}_2(E)$ est l'isomorphisme $S_2(E) \to \text{Quadr}\ (E)$ envisagé au théorème I.3.1. On obtient ainsi un complément naturel au théorème I.1.1.

Formes quadratiques en dimension finie

Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base ordonnée de E. Nous avons vu au tome 1, à la fin du § XI.3, que pour chaque $d \in \mathbb{N}$, le K-ev des fonctions polynomiales homogènes de degré d en les formes coordonnées $\varphi_1 = e_1^*, \ldots, \varphi_n = e_n^*$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$: on l'appelle K-ev des *fonctions polynomiales homogènes de degré d sur E*. Notons $\mathscr{H}_d(E)$ ce K-ev.

THÉORÈME I.3.2

Soit E *un* K-ev *de dimension finie* $n \geqslant 1$. *On a :* $\dim\ (\text{Quadr}\ (E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. *Avec les notations ci-dessus, l'espace vectoriel* Quadr (E) *n'est autre que* $\mathscr{H}_2(E)$.

Démonstration :

Choisissons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

L'inclusion $\text{Quadr}\ (E) \subset \mathscr{H}_2(E)$ se déduit immédiatement de la formule (4) du § I.2 appliquée, avec la base $\mathscr{B}$, à la forme polaire f de toute forme quadratique Φ sur E. La dimension du K-ev Quadr (E) se déduit des théorèmes I.2.4 et I.3.1.

On a de plus une application linéaire et surjective $s_{\mathscr{B}}$ du K-ev Sym (n, K) sur $\mathscr{H}_2(E)$ qui associe à toute matrice $A = [a_{ij}] \in \text{Sym}\ (n, K)$

la fonction $\varphi \in \mathscr{H}_2(E)$ telle que

$$\left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E\right) \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d_{ij}\, x_i\, x_j\,,$$

ce qui prouve : $\dim(\mathscr{H}_2(E)) \leqslant \dim(\mathrm{Sym}\,(n, K)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Mais puisque Quadr (E) est un sous-K-ev de $\mathscr{H}_2(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, l'égalité Quadr $(E) = \mathscr{H}_2(E)$ en résulte. (Il découle en outre de cette preuve que $s_{\mathscr{B}} : \mathrm{Sym}\,(n, K) \to \mathscr{H}_2(E)$ est *bijective,* ce que l'on peut vérifier directement en tenant compte du fait que K est de caractéristique $\neq 2$). ■

Reprenons le K-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$ dont on a fixé une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si Φ est une forme quadratique sur E, f sa forme polaire, et si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = [a_{i,j}]$, la formule (4) du § I.2 montre que, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E$, on a :

$$\Phi(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, x_i^2\right) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}\, x_i\, x_j\,. \tag{3}$$

Autrement dit, *la matrice A n'est autre que l'unique $A \in \mathrm{Sym}\,(n, K)$ telle que $s_{\mathscr{B}}(A) = \Phi$.*

D'ailleurs (3) entraîne facilement (en notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ le vecteur générique de E et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathscr{B}$) :

$$(\forall i \in [\![1, n]\!])\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j^*(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, e_j^*(x)\,,$$

donc : $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, e_j^*$, ce qui signifie que :

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)}\,. \tag{4}$$

Exemple 2 : Soit $E = K^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E. Proposons-nous de déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi)$, où Φ est la forme quadratique sur E donnée par $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\substack{i<j \\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2}} (x_i - x_j)^2$.

Pour cela, utilisons (4). Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = (n-1)x_i - \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in [\![1,n]\!]}} x_k = nx_i - \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

Donc, si on note S la matrice $[s_{ij}]$ telle que $(\forall (i, j))\ s_{i,j} = 1$, on a : $A = nI_n - S$, c'est-à-dire :

$$A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Par convention, si E est un K-ev, tout concept attribué à une forme bilinéaire symétrique $f \in S_2(E)$ sera *ipso facto* attribué à la forme quadratique associée, et inversement tout concept attribué à une forme quadratique sera attribué à sa forme polaire. C'est ainsi qu'on parle de forme quadratique *non dégénérée* (ou *dégénérée*) et *d'orthogonalité* par rapport à une forme quadratique. Si E est de dimension finie, on parle de *rang* d'une forme quadratique, de sa *matrice dans une base,* de son *discriminant dans une base.* **Cette convention sera tacitement utilisée dans toute la suite.**

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ la forme quadratique sur K^n définie dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ par : $\left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in K^n\right)\ \Phi(x) = \sum_{i \leq i < j \leq n} a_{ij}(x_i - x_j)^2$ (où les a_{ij} sont donnés dans K). Calculer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi)$.

Exercice 2 : Soit E un K-ev de dimension 2 et Φ une forme quadratique non nulle sur E. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(I) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que le discriminant de Φ dans $\mathscr{B}$ soit l'opposé du carré d'un élément λ de K.

(II) Pour toute base $\mathscr{B}$ de E la propriété précédente est vérifiée.

(III) Il existe des formes linéaires φ et ψ sur E telles que $f_\Phi = \varphi\psi$.

Exercice 3 : Soit n et p des entiers tels que $3 \leq p \leq n$, et des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de K^*.

a) Démontrer que le polynôme homogène $\Phi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2$ est irréductible dans $K[X_1, \dots, X_n]$. (Attention, le fait que K est de caractéristique $\neq 2$ est ici essentiel !)

Indication : On identifie Φ à une forme quadratique sur $K^n = E$ *via* la base canonique de K^n. Si Φ n'était pas irréductible, pour la Φ-orthogonalité, vérifier qu'on aurait $\dim(E^\perp) \geq n - 2$ et conclure.

b) Soit $\Psi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2$. Montrer que, pour que Ψ soit non irréductible dans $K[X_1, \dots, X_n]$, il faut et il suffit qu'il existe $\rho \in K^*$ tel que $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\rho^2$.

Exercice 4 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{Q}^2$ définie dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_3)$ par

$$(\forall x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{Q}^2) \quad \Phi(x) = ax_1^2 + 2\,bx_1 x_2 + cx_2^2.$$

Prouver : $\exists x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \mid \quad |\Phi(x)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{|b^2 - ac|}$.

Indication : C'est facile si $b^2 - ac = 0$. Si $b^2 - ac < 0$, soit A la valeur minimum prise par $|\Phi|$ sur $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. Par transformation unimodulaire de matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ à coefficients entiers, on ramène Φ à une forme « équivalente » $Ax_1'^2 + 2\,b'\,x_1' x_2' + c'\,x_2'^2$, puis à une forme *réduite* $AX_1^2 + 2\,BX_1 X_2 + CX_2^2$, avec $|2\,B| \leqslant A \leqslant C$. Si $b^2 - ac > 0$, utiliser $\begin{bmatrix} n & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pour ramener Φ à $a'\,x_1'^2 + 2\,b'\,x_1' x_2' + c'\,x_2'^2$ avec $|a'| < \frac{3}{4}\,|a|$ jusqu'à ce que $|a^{(k)}| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{b^2 - ac}$.

N.B. Le lecteur intéressé pourra consulter l'énoncé du deuxième problème proposé au Concours d'entrée à Ulm en 1985 ou mieux le livre « Recherches arithmétiques » de Gauss, très accessible à un bon bachelier.

§ I.4 *ORTHOGONALITÉ POUR LES FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES OU ALTERNÉES*

Considérons un K-ev non nul E, et une forme bilinéaire f sur E, *symétrique ou alternée.* La relation binaire $\perp$ définie sur E par : $(\forall (x, y) \in E^2)\ x \perp y$ ssi $f(x, y) = 0$ est alors symétrique. On l'appelle **f-orthogonalité** (ou **orthogonalité** lorsqu'aucune ambiguïté sur f n'est à craindre). On dit aussi **f-conjugaison** (ou **conjugaison**).

Pour toute partie A de E, on a : $A^\perp = {}^\perp A$. On notera $A^\perp$ cet ensemble.

Si H et L sont deux sous-K-ev de E, les relations $H \subset L^\perp$ et $L \subset H^\perp$ sont équivalentes : on les traduit par l'expression « H et L sont orthogonaux », que l'on peut abréger en : $H \perp L$.

DÉFINITION I.4.1

Dans les conditions ci-dessus, et relativement à f : un sous-K-ev H de E est dit ***isotrope*** *ssi $H \cap H^\perp \neq \{0_E\}$,* ***totalement isotrope*** *ssi $H \subset H^\perp$; un vecteur $x \in E$ est dit* ***isotrope*** *ssi $x \neq 0_E$ et $f(x, x) = 0$. L'ensemble $\{x \in E \mid f(x, x) = 0\}$ formé de tous les vecteurs isotropes et du vecteur 0_E est appelé le* ***cône isotrope*** *(de f).*

Si une ambiguïté est à craindre, on précisera : vecteur **f-isotrope**, etc...

Soit H un sous-K-ev de E : pour que H soit f-isotrope, il faut et il suffit que la forme bilinéaire $f|_{H \times H}$ soit dégénérée. Pour que H soit totalement f-isotrope, il faut et il suffit que $f|_{H \times H} = 0$.

Si $\dim(H) = 1$, on a évidemment : (H est f-isotrope) $\Leftrightarrow$ (H est totalement f-isotrope) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in H \setminus \{0\}$, x est f-isotrope). Le cône isotrope d'une forme bilinéaire *alternée* est E tout entier. Lorsque f est *symétrique*, un sous-K-ev H de E est totalement isotrope ssi tous les $x \in H \setminus \{0\}$ sont isotropes (cf. relation (2) du § I.3).

Lorsque E est de dimension finie, on sait que pour tout sous-K-ev de E, on a : $\dim(H) + \dim(H^{\perp}) \geqslant \dim(E)$ (cf. théorème I.2.1). On en déduit immédiatement :

THÉORÈME I.4.1

Soit E un K-ev de dimension finie, et $f \in \mathrm{BL}_2(E)$ symétrique ou alternée. Soit H un sous-K-ev de E. Alors :
(H est non isotrope) $\Leftrightarrow E = H \oplus H^{\perp}$.

Remarque 1 : Dans le cas où la forme f, symétrique ou alternée, est **non dégénérée** sur E de dimension finie, on a :

$$(H \text{ est non isotrope}) \Leftrightarrow (H^{\perp} \text{ est non isotrope}), \quad \text{car} \quad H = H^{\perp\perp}.$$

Mais si f est dégénérée, il se peut que H soit non isotrope et que $H^{\perp}$ soit isotrope.

Exemple 1 : Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de K^3 et Φ la forme quadratique sur K^3 définie par :

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in K^3 \mapsto \Phi(x) = x_1^2 - x_2^2.$$

Alors la forme polaire f associée à Φ est de rang 2. La droite vectorielle $H = Ke_1$ est non isotrope puisque $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Cependant $H^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, d'où $H^{\perp} \cap H^{\perp\perp} = Ke_3 \neq \{0\}$, ce qui prouve que $H^{\perp}$ est isotrope.

Le lecteur désirant exploiter cet exemple vérifiera sans peine qu'ici, le cône isotrope est la réunion des deux plans qui ont pour équation dans $\mathscr{B}$: $x_1 = x_2$ et $x_1 = -x_2$. Les plans isotropes sont ceux qui contiennent e_3. Quant à K^3 tout entier, il est isotrope, puisque $(K^3)^{\perp} = Ke_3 \neq \{0\}$.

Espace singulier

Reprenons un K-ev $E \neq \{0\}$ et une forme bilinéaire f sur E, symétrique ou alternée.

DÉFINITION I.4.2

On appelle **espace singulier** (1) *de f le sous-K-ev de E, que nous noterons* Sing (f), *défini par :*

$$\text{Sing}\,(f) = E^{\perp} = \text{Ker}\,(I_f) = \text{Ker}\,(J_f).$$

Les éléments de Sing $(f)\setminus\{0\}$ *sont appelés* **vecteurs singuliers** *de f.*

D'après la définition I.1.2 f est non dégénérée ssi Sing $(f) = \{0\}$. Il est clair que tout vecteur singulier de f est isotrope, mais si Sing (f) est un sous-K-ev de E, il n'en est pas de même en général du cône isotrope de f (cf. exemple 1).

Exemple 2 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Notons Φ la forme quadratique sur K^n définie par :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mapsto \Phi(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} x_1^2\right) - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2.$$

Alors Φ est *non dégénérée* (sa matrice dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est $\text{Diag}\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-p \text{ fois}}\right)$), ce qui prouve qu'il n'y a pas de vecteur singulier. Cependant, par exemple, le vecteur $e_1 + e_n$ est isotrope. A titre d'exercice le lecteur pourra rechercher tous les vecteurs isotropes de la forme de Lorentz ($E = \mathbb{R}^4$, $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$) qui intervient dans la théorie de la Relativité restreinte.

Reprenons les notations de la définition I.4.2 ; nous allons décrire une détermination simple de l'espace Sing (f) à partir d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E lorsque E est de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit alors en effet $M = [a_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ la matrice de f dans $\mathscr{B}$, et soit $(e_1^*, \ldots, e_n^*) = \mathscr{B}^*$ la base duale de $\mathscr{B}$.

Appliquant le théorème I.2.3, on voit qu'un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est f-singulier ssi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, cela parce que $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}^*}(J_f)$. Le choix d'une base $\mathscr{B}$ de E ramène donc la détermination de Sing (f) à la résolution d'un système linéaire et homogène.

---

(1) On utilise aussi l'expression : noyau de f.

Familles orthogonales pour une forme quadratique

Soit f une *forme bilinéaire symétrique* sur le K-ev E, et Φ la forme quadratique associée.

DÉFINITION I.4.3

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite ***f-orthogonale*** *ssi $\forall (i, j) \in I^2$, $(i \neq j) \Rightarrow f(e_i, e_j) = 0$. Elle est dite* ***f-orthonormale*** *ssi $\forall (i, j) \in I^2$ $f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker dans K, i.e. $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1_K$ $(i \in I, j \in I)$.*

Si aucune confusion n'est à craindre sur f, on dit simplement famille *orthogonale* (resp. *orthonormale*).

PROPOSITION I.4.1

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille ***orthogonale*** *dans E formée de vecteurs* ***non nuls et non isotropes.*** *Alors cette famille est* ***libre.***

Démonstration :

Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$. Fixons $j \in I$. On a : $f\left(e_j, \sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0$, d'où $\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_j, e_i) = 0$, soit, puisque $(e_k)_{k \in I}$ est orthogonale : $\lambda_j f(e_j, e_j) = 0$. Mais l'hypothèse $e_j \neq 0$ et e_j non isotrope entraîne $f(e_j, e_j) \neq 0$. Il s'ensuit : $\lambda_j = 0$. Et c'est vrai pour tout $j \in I$, d'où la conclusion. ■

(En conséquence, **toute famille orthonormale est libre.**)

Voici maintenant le théorème capital sur les formes quadratiques :

THÉORÈME I.4.2

Soit E un K-ev ***de dimension finie*** *$n \geqslant 1$. Alors toute forme bilinéaire symétrique f définie sur E (et donc la forme quadratique associée Φ)* ***admet au moins une base orthogonale.***

Démonstration :

Il n'y a rien à prouver si $n = 1$ car alors toute base est orthogonale. On raisonne par récurrence sur $n = \dim(E)$. Supposons $n > 1$ et que le théorème soit vrai en dimension $n - 1$. Si $\Phi = 0$, alors $f = 0$ et toute base de E est orthogonale. Sinon il existe au moins un vecteur $e_n \in E$ tel que $\Phi(e_n) \neq 0$ (d'où $e_n \neq 0$) : la droite $\Delta = Ke_n$ est non isotrope,

donc (cf. théorème I.4.1) on a $E = \Delta \oplus H$, H désignant l'hyperplan $\Delta^{\perp}$. Soit $g = f|_{H \times H}$: comme dim $(H) = n - 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique à g. Considérons alors une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H qui soit g-orthogonale. Il est immédiat de vérifier que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base f-orthogonale de E. ■

Pour E et $f \in S_2(E)$ fixés, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il est clair que $\mathscr{B}$ est f-orthogonale ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est **diagonale,** ce qui équivaut à : il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ telle que :

$$(1) \qquad \left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E\right) \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 .$$

Lorsqu'il en est ainsi, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \mathrm{Diag}\,(a_1, \ldots, a_n)$.

Il y a en général beaucoup de bases de E qui sont f-orthogonales, mais n'importe laquelle d'entre elles donne des renseignements intrinsèques à f. Soit par exemple $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une telle base, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}\,(a_1, \ldots, a_n)$: le *rang de* f est celui de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, c'est donc l'entier card $(\{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i \neq 0\})$; *l'espace singulier* de f est l'ensemble des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ tels que la forme linéaire $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i z_i$ soit nulle, d'où Sing $(f) = \mathrm{Vect}\,((e_j)_{j \in [\![1, n]\!] \text{ et } a_j = 0})$; autrement dit : *dans une base orthogonale pour f, les vecteurs f-isotropes engendrent* Sing (f).

Proposition I.4.2 (théorème de la base orthogonale incomplète)

> *Avec les notations et hypothèses du théorème* I.4.2, *soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une suite* ***orthogonale*** *formée de vecteurs* ***non nuls et non isotropes*** *pour f. On peut alors* ***compléter*** *cette suite en une* ***base orthogonale*** $(e_1, \ldots, e_n)$ *de E pour f.*

Démonstration :

D'après l'hypothèse, la suite $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, d'où $p \leqslant n$ (cf. proposition I.4.1). Si $p = n$, la base orthogonale est déjà en place. On peut donc se borner au cas où $p < n$. Soit alors $H = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$. La forme bilinéaire symétrique $f|_{H \times H}$ admet la base orthogonale $(e_1, \ldots, e_p)$. Elle est non dégénérée car $f(e_i, e_i) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Donc H est non isotrope pour f. Donc $E = H \oplus H^{\perp}$. Soit $g = f|_{H^{\perp} \times H^{\perp}}$: en appliquant le théorème I.4.2 à g, on peut considérer une base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de $H^{\perp}$ qui soit g-orthogonale. Il est immédiat de vérifier que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E qui est f-orthogonale. ■

Attention ! s'il est vrai que toute forme quadratique admet une base orthogonale, en général elle n'admet pas de base *orthonormale.*

Exemple 3 : Soit Φ la forme quadratique $\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}$, $(x, y) \mapsto 2x^2 + 3y^2$. Montrons qu'elle n'admet aucune base orthonormale.

Dans le cas contraire il existerait des vecteurs $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $2\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + 3\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = 1$. Mais il est facile de se rendre compte que l'équation $2X^2 + 3Y^2 = Z^2$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. (On se ramène au cas où X, Y, Z sont premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui empêche X et Z de posséder le facteur premier 3, et on utilise le fait que 2 n'est pas un carré mod (3)).

Cependant :

PROPOSITION I.4.3

> *Soit f une forme bilinéaire symétrique* ***non dégénérée*** *sur le K-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$. Supposons le corps K* ***algébriquement clos.*** *Alors E admet une* ***base f-orthonormale.***

Démonstration :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base f-orthogonale de E. Posons $a_i = f(e_i, e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Puisque f est non dégénérée, on a $a_i \neq 0$ pour tout i. Soit alors, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, un élément $\alpha_i \in K$ tel que $\alpha_i^2 = a_i$, et posons $\varepsilon_i = \frac{1}{\alpha_i} e_i$. Il est clair que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E, et qu'elle est f-orthonormale. ■

Sommes directes orthogonales

Soit E un K-ev muni d'une forme quadratique Φ de forme polaire f. Considérons des sous-K-ev $H_1, \ldots, H_p$ de E. Nous dirons que E est **somme directe orthogonale** des H_i ssi les H_i sont deux à deux orthogonaux et vérifient de plus : $E = \bigoplus H_i$. Nous écrirons alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} H_i \quad (^1)$$

Si les H_i sont deux à deux orthogonaux *et sont de plus indépendants,* leur somme directe interne $\bigoplus_{i=1}^{p} H_i$ sera aussi notée $\bigoplus_{i=1}^{p} H_i$.

Lorsque E est *de dimension finie,* d'après l'étude précédente, pour tout sous-K-ev H de E, on a :

$$(H \text{ non isotrope}) \Leftrightarrow (E = H \oplus H^{\perp}) .$$

---

(1) Nous empruntons cette notation à *R. Deheuwels* (cf. [8]).

Forme duale d'une forme quadratique non dégénérée en dimension finie

Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, de forme quadratique associée Φ. On sait que $I_f : E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto {}_{[x]}f$ est alors un isomorphisme de E sur son dual E^*.

L'application $\tilde{f} : E^* \times E^* \longrightarrow K$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi((I_f)^{\langle -1 \rangle}(\psi))$ est bilinéaire. Pour $(\varphi, \psi) \in E^{*2}$, posons $x = I_f^{\langle -1 \rangle}(\varphi)$, $y = I_f^{\langle -1 \rangle}(\psi)$. On a $\tilde{f}(\varphi, \psi) = (I_f(x))(y) = f(x, y)$, d'où :

(2) $$\boxed{\tilde{f}(\varphi, \psi) = f(I_f^{\langle -1 \rangle}(\varphi), I_f^{\langle -1 \rangle}(\psi))}.$$

La relation (2) prouve que $\tilde{f}$ est symétrique. Nous dirons que $\tilde{f}$ est la **forme duale** de f.

Identifions E à son bidual E^{**} par la bijection canonique $x \mapsto \delta_x$, où $(\forall (x, \varphi) \in E \times E^*)\ \delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ (cf. tome 1, § XII.2).

Par définition, on a, pour $\varphi \in E^*$: $I_{\tilde{f}}(\varphi) = \varphi \circ I_f^{\langle -1 \rangle}$; pour $\psi \in E^*$, on en déduit :

$$(I_{\tilde{f}}(\varphi))(\psi) = \tilde{f}(\varphi, \psi) = \tilde{f}(\psi, \varphi) = \psi \circ (I_f^{\langle -1 \rangle}(\varphi)).$$

Donc, compte tenu de l'identification $E \xrightarrow{\cong} E^{**}$, on voit que $I_{\tilde{f}}(\varphi) = I_f^{\langle -1 \rangle}(\varphi)$, autrement dit :

(3) $$\boxed{I_{\tilde{f}} = (I_f)^{\langle -1 \rangle}}.$$

La relation (3) montre que $I_{\tilde{f}}$ est bijective, i.e. $\tilde{f}$ est non dégénérée. De plus, en appliquant (3) avec $\tilde{f}$ à la place de f, on obtient : $I_{\tilde{\tilde{f}}} = (I_{\tilde{f}})^{\langle -1 \rangle} = ((I_f)^{\langle -1 \rangle})^{\langle -1 \rangle} = I_f$, soit :

(4) $$\boxed{\tilde{\tilde{f}} = f}.$$

La relation (4) montre que *l'application $f \mapsto \tilde{f}$ définit une bijection de l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non dégénérées de E sur l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non dégénérées de E^*.*

THÉORÈME I.4.3

Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, de forme quadratique associée Φ. Les vecteurs isotropes de la forme duale $\tilde{f}$ de f sont les formes linéaires sur E dont le noyau est un hyperplan f-isotrope de E.

Démonstration :

Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Pour que H soit f-isotrope, il faut et il suffit qu'il existe $x \in H \setminus \{0\}$ tel que $H \subset \operatorname{Ker}(I_f(x))$, i.e. que

Ker $(\varphi) \subset$ Ker $(I_f(x))$, c'est-à-dire (cf. tome 1, théorème IX.5.2) que $I_f(x) = \lambda\varphi$ pour un $\lambda \in K$.

Si c'est le cas, $x = \lambda\,(I_f)^{\langle -1\rangle}(\varphi)$ et $\varphi(x) = 0$, d'où $\lambda \neq 0$, et $\varphi((I_f)^{\langle -1\rangle}(\varphi)) = 0$, donc $\tilde{f}(\varphi, \varphi) = 0$.

La réciproque est immédiate. ■

Exercice 1 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène de degré 2. Trouver une CNS pour que P soit irréductible, en s'aidant des exercices 2 et 3 du § I.3.

Exercice 2 : Soit K un corps *algébriquement clos* et Φ une forme quadratique sur un K-ev de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit Γ le *cône isotrope* de Φ. Montrer que si Φ est de rang $\geqslant 2$, alors Γ n'est contenu dans aucun hyperplan de E.

Exercice 3 : *a*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(K)$. On suppose le corps K algébriquement clos et M symétrique.

Démontrer : $\exists A \in \mathfrak{M}_n(K) \mid M = ({}^tA)A$.

b) Donner un contre-exemple avec $K = \mathbb{R}$.

c) Donner un contre-exemple avec $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier $\equiv 3 \bmod (4)$).

Exercice 4 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in S_2(E)$, non dégénérée. Soit $\tilde{f}$ sa forme duale. On donne une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale.

a) Ecrire la matrice de $\tilde{f}$ dans $\mathscr{B}^*$ en fonction de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

b) En déduire que si $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = 0$ est l'équation dans $\mathscr{B}$ d'un hyperplan H de $E((u_1, \ldots, u_n) \in K^n \setminus \{0\})$, la CNS pour que H soit f-isotrope est ${}^tU\tilde{M}U = 0$, où $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et où $\tilde{M}$ désigne la matrice complémentaire de M.

Exercice 5 : On reprend les hypothèses et notations de l'exercice 4. On note Φ la forme quadratique associée à f, et $\tilde{\Phi}$ celle associée à $\tilde{f}$.

Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\tilde{\Phi}(\varphi) \neq 0$. On pose $\varepsilon_n = I_f^{\langle -1\rangle}(\varphi)$. Soit $\gamma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ une base de $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. On note $\Psi = \Phi\,|_H$. Vérifier que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ est une base de E et qu'on a :

$$\mathrm{Discr}_\gamma(\Psi) = \frac{\mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}(\Phi)}{\tilde{\Phi}(\varphi)}.$$

Exercice 6 : Soit $M = [a_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que, pour que Φ soit *définie positive* (cf. définition V.7.2 du tome 3), il faut et il suffit que les *mineurs principaux* de M soient tous > 0.

b) On suppose maintenant que tous les mineurs de M centrés sur la diagonale principale (i.e. tous les $\Delta_{I,I}(M)$ avec $I \subset [\![1, n]\!]$ sont dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que Φ est *positive*.

La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

Indication : Utiliser *a*) pour montrer que Φ est adhérente à l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7 : On donne un entier $n \geqslant 2$ et un corps K algébriquement clos. Pour $\lambda \in K$ on note $D(\lambda)$ la matrice Diag $(1, \ldots, 1, \lambda) \in \mathfrak{M}_n(K)$.

a) Soit $M \in \mathrm{Sym}\,(n, K)$. Montrer :

$$\exists A \in \mathrm{SL}\,(n, K) \mid {}^tAMA = \begin{cases} D(\det(M)) \text{ si } M \text{ est inversible} \\ \mathrm{Diag}\,(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \ldots, 0) \text{ si rg}\,(M) = r < n. \end{cases}$$

b) Soit $P : \mathrm{Sym}\,(n, K) \longrightarrow K$ une fonction polynomiale homogène non constante telle que, pour une certaine fonction $\chi : \mathrm{GL}\,(n, K) \longrightarrow K^*$, on dit :

$$(\forall A \in \mathrm{GL}(n, K), \forall M \in \mathrm{Sym}\,(n, K)) \quad P({}^tAMA) = \chi(A)\,P(M)\,.$$

Montrer : $\exists q \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha \in K^* \mid (\forall M \in \mathrm{Sym}\,(n, K))\ P(M) = \alpha\,(\det\,(M))^q$; en particulier, en déduire que χ est de la forme $A \mapsto (\det\,(A))^{2q}$.

Exercice 8 : Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$ par :

$$\Phi\,(\forall x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3) \quad (x) = 12\,x_1^2 + 52\,x_2^2 + 12\,x_3^2 + 40\,x_2 x_3 + 12\,x_3 x_1 + 48\,x_1 x_2\,.$$

Trouver tous les plans vectoriels H de $\mathbb{R}^3$ tels que $\Phi\,|_H$ soit définie positive.

Indication : Exploiter l'exercice 5 ci-dessus.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E le K-ev $\mathfrak{M}_n(K)$.

a) Montrer que $f : E \times E \longrightarrow K,\ (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A\,{}^tB)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée admettant une base orthonormale.

b) Montrer que $g : E \times E \longrightarrow K,\ (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et en donner une base orthogonale.

Exercice 10 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et Φ une forme quadratique sur E, de forme polaire f et d'espace singulier S.

a) Soit H un supplémentaire de S dans E. Montrer que H est non isotrope et que $H^\perp = S$ (d'où $E = H \oplus S$).

b) Soit $E_1, \ldots, E_p$ des sous-K-ev de E tels que $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$. Soit S_i l'espace singulier de $\Phi\,|_{E_i}$. Prouver que $S = \bigoplus_{i=1}^{p} S_i$.

c) Soit H un sous-K-ev de E. Pour qu'il existe un sous-K-ev L de E tel que $H \oplus L = E$, il faut et il suffit qu'en notant S_H l'espace singulier de $\Phi\,|_H$, on ait $S_H \subset S$.

d) Soit $u \in \mathrm{Hom}_K\,(E)$. Prouver $u(S) \subset S \Leftrightarrow \exists v \in \mathrm{Hom}_K\,(E) \mid \forall\,(x, y) \in E^2\ f(u(x), y) = f(x, v(y))$.

Si $u(S) \subset S$, trouver alors tous les v vérifiant cette condition.

Exercice 11 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.

a) Vérifier qu'une forme quadratique Φ de rang r sur E admet un sous-K-ev non isotrope de dimension r.

b) On se propose d'établir un résultat plus fin. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(K)$. On suppose M de rang r et on ordonne totalement l'ensemble des r-parties de $[\![1, n]\!]$, sous la forme $(I_1, \ldots, I_N)$, avec $N = \binom{n}{r}$.

b_1) Soit A la matrice $[\Delta_{I_i, I_j}(M)]_{(i,j) \in [\![1, N]\!]^2}$ ayant pour éléments les (I_i, I_j)-mineurs de M. Prouver que A est de rang 1.

b_2) En déduire que si M est *symétrique* et de rang r, elle admet un r-mineur non nul centré sur la diagonale, i.e. du type $\Delta_{I_i, I_i}(M)$.

Exercice 12 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et Φ une forme quadratique sur E, de forme polaire f. On considère la f-orthogonalité dans E. On convient d'appeler SETI un sous-K-ev de E totalement f-isotrope, et SETIM un sous-K-ev totalement f-isotrope maximal pour l'inclusion.

a) Soit U et V deux SETI. Montrer : $\forall x \in U \cap V^\perp$, $V + Kx$ est un SETI.

b) Soit U et V deux SETI, M un supplémentaire de $U \cap V$ dans U et N un supplémentaire de $U \cap V$ dans V. Prouver : $U \cap V^{\perp} = (U \cap V) \oplus (M \cap N^{\perp})$.

c) Soit A et B deux sous-K-ev de E, de dimensions r et s. Prouver que $\dim (A \cap B^{\perp}) \geqslant r - s$ (considérer par exemple une base $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ de B et l'application linéaire $\varphi : A \longrightarrow K^s$, $x \mapsto (f(x, \beta_1), \ldots, f(x, \beta_s))$).

d) Soit U et V deux SETI tels que $\dim (V) < \dim (U)$. Prouver : $\exists x \in U \backslash V$ tel que $V + Kx$ soit un SETI. En déduire que tout SETI est contenu dans au moins un SETIM et que tous les SETIM ont même dimension.

e) On suppose f non dégénérée et on donne un SETIM noté U. Prouver qu'il existe un SETIM (noté V) et des bases $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ de U et V respectivement telles que :

$$(\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2) \quad f(e_i, f_j) = \delta_{ij}\,, \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker}.$$

Exercice 13 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et Φ une forme quadratique sur E, de forme polaire f.

On suppose que le cône isotrope Γ de f est un sous-K-ev de E. Démontrer que $\Gamma = \operatorname{Sing}(f)$.

Indication : Se ramener au cas où f est non dégénérée, en passant au quotient $E/\operatorname{Sing}(f)$, où l'on considérera la forme quadratique $\tilde{\Phi}$ telle que $\tilde{\Phi} \circ \mathrm{can} = \Phi$, can désignant l'application canonique $E \longrightarrow E/\operatorname{Sing}(f)$.

Puis utiliser le résultat de l'exercice 12*e* ci-dessus.

Exercice 14 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et f une forme bilinéaire alternée sur E. En s'inspirant de la démonstration du théorème I.4.2, prouver, lorsque $f \neq 0$, que $E = N \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_2$ avec $N = \operatorname{Sing}(f)$ et $\dim (N_i) = 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, les sous-$K$-ev $(N, H_1, \ldots, H_r)$ étant de surcroît *deux à deux f-orthogonaux*. En déduire que f est de rang pair $2r$. Donner une conséquence matricielle de la propriété obtenue : il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est un tableau diagonal de matrices égales à $J = \begin{bmatrix} 0 & -1_K \\ 1_K & 0 \end{bmatrix}$, ou bien d'une matrice nulle et de matrices égales à J.

§ I.5 *CLASSIFICATION DES FORMES BILINÉAIRES*

Soit E un K-ev non nul. Pour $f \in \mathrm{BL}_2(E)$ et $\varphi \in \mathrm{GL}_K(E)$, notons $\varphi * f$ la forme bilinéaire g sur E définie par :

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad g(x, y) = f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)).$$

L'application $\mathrm{GL}_K(E) \times \mathrm{BL}_2(E) \longrightarrow \mathrm{BL}_2(E)$, $(\varphi, f) \mapsto \varphi * f$ est une *action à gauche* du groupe $\mathrm{GL}_K(E)$ sur $\mathrm{BL}_2(E)$ (cf. tome 1, § V.6).

DÉFINITION I.5.1

Deux formes bilinéaires f et g sur un K-ev E sont dites **équivalentes** *ssi* $\exists \varphi \in \mathrm{GL}_K(E) \mid (\forall (x, y) \in E^2)$

$$g(x, y) = f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)).$$

Cela revient à dire que f et g appartiennent à la même orbite pour l'action du groupe $\mathrm{GL}_K(E)$ sur $\mathrm{BL}_2(E)$. L'équivalence entre formes bilinéaires sur E est un *relation d'équivalence* sur $\mathrm{BL}_2(E)$. Il est clair que chacun des ensembles $\mathrm{S}_2(E)$ et $\Lambda_2^*(E)$ est réunion d'orbites de l'action définie par (1). Autrement dit, si f et g sont deux formes bilinéaires sur E équivalentes, et si $f \in \mathrm{S}_2(E)$ (resp. $f \in \Lambda_2^*(E)$), alors $g \in \mathrm{S}_2(E)$ (resp. $g \in \Lambda_2^*(E)$).

Soit f et g deux formes bilinéaires *symétriques* sur E, de formes quadratiques associées Φ et Ψ : pour que f et g soient équivalentes, il faut et il suffit que :

$$\exists \varphi \in \mathrm{GL}_K(E) \mid \Psi = \Phi \circ \varphi^{-1}. \tag{2}$$

Reprenons deux formes bilinéaires f et g équivalentes sur E, et soit $\varphi \in \mathrm{GL}_K(E)$ vérifiant (1). Notons $\perp_f$ et $\perp_g$ la f-orthogonalité et la g-orthogonalité (à droite ou à gauche). On vérifie que, pour toute partie A de E, on a alors :

$$\varphi(A^{\perp_f}) = (\varphi(A))^{\perp_g} \quad \text{et} \quad \varphi({}^{\perp_f}A) = {}^{\perp_g}(\varphi(A)).$$

Cas où E est de dimension finie

Lorsque E est de dimension finie, ce qui précède entraîne que **deux formes bilinéaires sur E équivalentes ont même rang.** Lorsque *de plus* f et g sont symétriques ou antisymétriques, on a en particulier $\varphi(\mathrm{Sing}\,(f)) = \mathrm{Sing}\,(g)$.

PROPOSITION I.5.1

Soit f et g deux formes bilinéaires sur un K-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$. Pour que f et g soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe deux bases $\mathscr{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\mathscr{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de E telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{A}}\,(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(g).$$

Démonstration :

Supposons d'abord que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ existent. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{A}}\,(f)$ $(= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(g))$. Soit φ l'élément de $\mathrm{GL}_K(E)$ tel que $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On a alors $g(x, y) = f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$ pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i$ éléments de E, car alors $\varphi^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$, $\varphi^{-1}(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i$, et d'après la relation (5) du § I.2 :

$$g(x, y) = {}^tXMY = f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)), \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, supposons f et g équivalentes. Soit $\mathscr{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une base de E et posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{A}}(f)$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i \in E$, on a : $f(x, y) = {}^tXMY$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathrm{GL}_K(E)$ tel que (1) soit vérifié. On a :

$$g(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y) = {}^tXMY. \tag{3}$$

Notons $\mathscr{B}$ la base $(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n))$ de E. Alors $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i$, $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i$. Puisque (3) est vraie pour tous $(x, y) \in E^2$, les résultats du § I.2 montrent que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$. ■

Formes quadratiques en dimension finie avec K algébriquement clos

THÉORÈME I.5.1

Soit f et g deux formes bilinéaires ***symétriques*** *sur un K-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose le corps K* ***algébriquement clos.*** *Pour que f et g soient* ***équivalentes,*** *il faut et il suffit qu'elles aient* ***même rang.***

Démonstration :

On a déjà vu plus faut que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons que f et g aient même rang r. On peut se borner au cas où $r \geqslant 1$. Soit $\mathscr{A} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E qui soit f-orthogonale, et posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{A}}(f) = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$. On peut supposer, quitte à renuméroter les e_i, que $a_1 a_2 \ldots a_r \neq 0$ et que $a_i = 0$ si $i > r$. Soit $\alpha_i \in K$ tel que $\alpha_i^2 = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Posons $\varepsilon_i = \dfrac{1}{\alpha_i} e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $\varepsilon_i = e_i$ si $r < i \leqslant n$.

Dans la base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = I_{r,n} = \mathrm{Diag}\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \ldots, 0\right).$$

De même, on peut construire une autre base de E dans laquelle g a pour matrice $I_{r,n}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition I.5.1 pour voir que f et g sont équivalentes. ■

Notons que dans la base $\mathscr{B}$ construite dans cette démonstration, la forme quadratique Φ associée à f admet l'expression *réduite* suivante :

$\left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \varepsilon_i \in E\right)$ $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$. Si en particulier $r = n$, i.e. si f est non dégénérée, cette base $\mathscr{B}$ est orthonormale : on retrouve la proposition I.4.3.

Formes quadratiques en dimension finie avec $K = \mathbb{R}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in S_2(E)$ de forme quadratique associée Φ.

Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E qui soit *f-orthogonale*. Associons-lui les entiers $r(\mathscr{B}) = \text{card}\ \{i \in [\![1, n]\!] \mid \Phi(e_i) > 0\}$ et $s(\mathscr{B}) = \text{card}\ \{i \in [\![1, n]\!] \mid \Phi(e_i) < 0\}$. Il est clair que $r(\mathscr{B}) + s(\mathscr{B})$ est le *rang* de f: c'est donc un entier indépendant de $\mathscr{B}$. C'est moins évident pour chacun des deux nombres $r(\mathscr{B})$ et $s(\mathscr{B})$. Posons $\Phi(e_i) = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mathscr{I}_{\mathscr{B}}^{+} = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \Phi(e_i) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{I}_{\mathscr{B}}^{-} = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \Phi(e_i) < 0\}\ .$$

Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E$, on a :

$$\Phi(x) = \left(\sum_{i \in \mathscr{I}_{\mathscr{B}}^{+}} a_i\, x_i^2\right) + \sum_{i \in \mathscr{I}_{\mathscr{B}}^{-}} a_i\, x_i^2\,. \tag{4}$$

Soit enfin $V_{\mathscr{B}}^{+} = \text{Vect}\ ((e_i)_{i \in \mathscr{I}_{\mathscr{B}}^{+}})$ et $W_{\mathscr{B}} = \text{Vect}\ ((e_i)_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \mathscr{I}_{\mathscr{B}}^{+}})$. La relation (4) montre immédiatement que

$$(\forall x \in V_{\mathscr{B}}^{+} \setminus \{0\})\quad \Phi(x) > 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in W_{\mathscr{B}})\quad \Phi(x) \leqslant 0\,. \tag{5}$$

Proposition I.5.2 (loi d'inertie de Sylvester [1])

> *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, les entiers $r(\mathscr{B})$ et $s(\mathscr{B})$ sont indépendants du choix de la base f-orthogonale $\mathscr{B}$.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{B}'$ une autre base f-orthogonale. Appliquons (5) avec $V_{\mathscr{B}}^{+}$, $W_{\mathscr{B}}$, $V_{\mathscr{B}'}^{+}$ et $W_{\mathscr{B}'}$. On en déduit $V_{\mathscr{B}}^{+} \cap W_{\mathscr{B}'} = \{0\}$; d'où $\dim_{\mathbb{R}}\ (V_{\mathscr{B}}^{+}) + \dim_{\mathbb{R}}\ (W_{\mathscr{B}'}) \leqslant n$, c'est-à-dire :

$$r(\mathscr{B}) + n - r(\mathscr{B}') \leqslant n \quad \text{ou encore} \quad r(\mathscr{B}) \leqslant r(\mathscr{B}').$$

En échangeant les rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a de même $r(\mathscr{B}') \leqslant r(\mathscr{B})$, d'où finalement $r(\mathscr{B}) = r(\mathscr{B}')$.

---

[1] James Joseph *Sylvester*, avocat et mathématicien anglais (1814-1897).

Puisque $(rg(f)) = r(\mathscr{B}) + s(\mathscr{B}) = r(\mathscr{B}') + s(\mathscr{B}')$, on a aussi $s(\mathscr{B}) = s(\mathscr{B}')$. ■

DÉFINITION I.5.2

Avec les hypothèses et notations précédentes, on appelle **signature** *de f (ou : de Φ) le couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que, pour toute base f-orthogonale $\mathscr{B}$ de E on ait :*

$$r = r(\mathscr{B}), \quad s = s(\mathscr{B}).$$

La signature de la forme nulle est $(0, 0)$.

Si f est non nulle, soit (r, s) sa signature et $\mathscr{B}$ une base f-orthogonale de E. Quitte à renuméroter cette base, on peut supposer que $\Phi(e_i) > 0$ pour $i \leqslant r$ et $\Phi(e_i) < 0$ pour $r + 1 \leqslant i \leqslant r + s$ (d'où $\Phi(e_i) = 0$ pour $i > r + s$). Si $r = 0$ on aura donc $\Phi(e_i) < 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$; et si $s = 0$ on aura $\Phi(e_i) > 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$.

Définissons une nouvelle base f-orthogonale $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E ainsi :

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{|\Phi(e_i)|}} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant r + s \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = e_i \quad \text{si} \quad i > r + s.$$

Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \in E$, on a alors :

$$\Phi(x) = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right) - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2. \tag{6}$$

Autrement dit, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ est $L_{r,s}(n) = \mathrm{Diag}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, avec $\eta_i = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant r$, $\eta_i = -1$ si $r + 1 \leqslant i \leqslant r + s$ et $\eta_i = 0$ si $i > r + s$.

DÉFINITION I.5.3

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, et $f \in \mathrm{S}_2(E)$ de forme quadratique associée Φ. On appelle **base f-orthogonale réduite** *toute base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle Φ s'exprime sous la forme* (6), *i.e. telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = L_{r,s}(n)$, où (r, s) est la signature de f.*

Les assertions suivantes sont rendues quasi évidentes par la relation (6) :

• Une base f-orthogonale réduite est orthonormale ssi la signature de f est $(n, 0)$. Et cela équivaut à la propriété :

$$(\forall x \in E \setminus \{0\}) \quad \Phi(x) > 0$$

qu'on traduit en disant que Φ est **définie positive.**

Si la signature de f est $(0, n)$, on dit que Φ est définie négative car dans ce cas $(\forall x \in E \setminus \{0\})\ \Phi(x) < 0$.

• Pour que la signature de f soit $(r, 0)$, il faut et il suffit que :

$$(\forall x \in E) \quad \Phi(x) \geqslant 0$$

propriété qu'on traduit en disant que Φ est **positive.**

De même la signature est $(0, s)$ ssi : $(\forall x \in E)\ \Phi(x) \leqslant 0$.

• Lorsque f est *non dégénérée,* le cône isotrope de f est $\neq \{0\}$ ssi la signature de f est (r, s) avec $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$.

THÉORÈME I.5.2

Soit f et g deux formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$. Pour que f et g soient ***équivalentes,*** *il faut et il suffit qu'elles aient* ***même signature.***

Démonstration :

Si f et g ont même signature (r, s), il suffit de considérer une base f-orthogonale réduite $\mathscr{B}$, une base g-orthogonale réduite $\mathscr{C}$, et d'appliquer la proposition I.5.1, pour voir que f et g sont équivalentes.

Inversement si f et g sont équivalentes, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base f-orthogonale réduite, et $\varphi \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2\ g(x, y) = f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$. Notons (r, s) la signature de f, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = L_{r,s}(n)$. On vérifie alors que dans la base $\mathscr{C} = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ de E, la matrice de g est $L_{r,s}(n)$; donc $\mathscr{C}$ est g-orthogonale réduite, et (r, s) est la signature de g. ■

Exemple 1 : *Formes quadratiques sur un plan vectoriel réel.*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 et Φ une forme quadratique sur E, de forme polaire f, et supposée donnée par sa matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E. Posons $\Delta = ac - b^2 = \mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}(f)$.

Supposons f non dégénérée, i.e. $\Delta \neq 0$. On a :

$$(\forall x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in E) \quad \Phi(x) = ax_1^2 + 2\,bx_1 x_2 + cx_2^2 .$$

Raisonnons dans le cas $a \neq 0$; pour que $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in E \setminus \{0\}$ soit isotrope, il faut et il suffit que $x_2 \neq 0$ et que $\lambda = \dfrac{x_1}{x_2}$ vérifie : $a\lambda^2 + 2\,b\lambda + c = 0$, ce qui implique $\Delta < 0$; réciproquement, si $\Delta < 0$, soit λ une racine de $aX^2 + 2\,bX + c$: alors $x = \lambda e_1 + e_2$ est non nul et isotrope. Donc le *cône isotrope* de f est $\neq \{0\}$ ssi $\Delta < 0$, résultat qui reste vrai si $a = 0$.

En conclusion, f est de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ ssi $\Delta > 0$; f est de signature $(1, 1)$ ssi $\Delta < 0$. En particulier le signe de Δ est indépendant du choix de la base $\mathscr{B}$.

(Si $\Delta > 0$ on dit que f est *elliptique,* et *hyperbolique* si $\Delta < 0$).

Exemple 2 : *Forme de signature* $(2, 1)$ *en dimension* 3 *sur* $\mathbb{R}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit Φ la forme quadratique sur E de matrice $L = \text{Diag}\ (1, 1, -1)$. La forme polaire f de Φ est non dégénérée.

Le cône isotrope de f est un *cône du second degré,* comme on le verra dans le Chapitre sur les quadriques. Les plans f-isotropes sont les *plans tangents* à Γ. D'après le théorème I.4.3, un plan d'équation $ux + vy + wz = 0$ dans $\mathscr{B}$ est f-isotrope ssi on a : $u^2 + v^2 - w^2 = 0$ (cf. § I.4, exercice 4). Posons $F(u, v, w) = u^2 + v^2 - w^2$. Il est facile de vérifier qu'un plan H d'équation $ux + vy + wz = 0$ dans $\mathscr{B}$ (avec $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) vérifie $H \cap \Gamma = \{0\}$ ssi $F(u, v, w) < 0$ et rencontre Γ en deux droites distinctes ssi $F(u, v, w) > 0$. Plaçons-nous dans ce dernier cas, et soit G_1 et G_2 les deux droites. Notons $H_i = G_i^\perp$ ($i \in \{1, 2\}$) ; H_1 et H_2 sont deux plans isotropes, et comme $H_i \cap \Gamma = G_i$, ils sont distincts, donc $D = H_1 \cap H_2$ est une droite. On a : $D = G_1^\perp \cap G_2^\perp = (G_1 \oplus G_2)^\perp = H^\perp$, d'où $D^\perp = H$ puisque f est non dégénérée (cf. fig. 1).

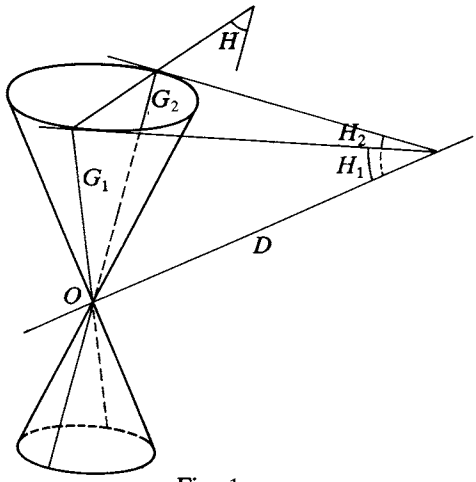


Fig. 1.

Supposons maintenant que $H \cap \Gamma = \{0\}$. Puisque f est non dégénérée, $D = H^\perp$ est une droite vectorielle. Un vecteur directeur $\vec{V}$ de D est $\vec{V} = ue_1 + ve_2 - we_3$ (cf. § I.4, exercice 4). Puisque $F(u, v, w) < 0$, la droite D est *intérieure* au cône Γ. Tout plan P passant par D rencontre Γ en deux droites distinctes G_1 et G_2. Comme $D \subset P$, on a : $P^\perp \subset D^\perp$; de plus $D^\perp = H^{\perp\perp} = H$ car f est non dégénérée ; donc $P^\perp \subset H$. Mais d'après l'étude ci-dessus, $P^\perp$ est l'intersection

des plans $H_1 = G_1^\perp$ et $H_2 = G_2^\perp$ tangents à Γ le long de G_1 et G_2. Lorsque P pivote autour de D, la droite $P^\perp$ balaie le plan H en pivotant autour de O (cf. fig. 2).

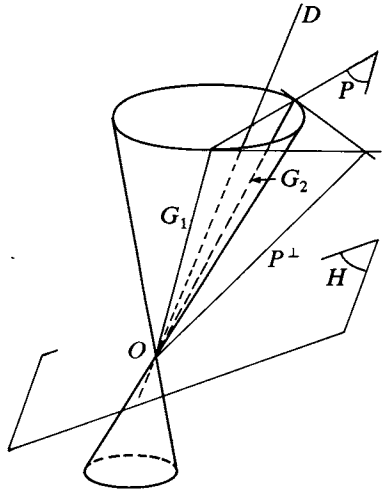


Fig. 2.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une forme quadratique Φ de signature (r, s). Soit deux sous-espaces F', F'' de E tels que $E = F' \oplus F''$ (pour la Φ-orthogonalité), et notons (r', s') (resp. (r'', s'')) la signature de $\Phi\,|_{F'}$ (resp. $\Phi\,|_{F''}$). Montrer que $(r, s) = (r' + r'', s' + s'')$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et Φ une forme quadratique sur E de signature $(n-1, 1)$. On donne un sous-$\mathbb{R}$-ev H de E de dimension $d \geqslant 1$. On suppose qu'il existe un élément x de H tel que $\Phi(x) < 0$. Prouver que H est non isotrope, et que la signature de $\Phi\,|_H$ est $(d-1, 1)$. Si $(\forall x \in H)\ \Phi(x) \geqslant 0$, quelle est la signature de $\Phi\,|_H$?

Exercice 3 : Donner la signature de la forme quadratique $M \mapsto \mathrm{Tr}\,(M^2)$ sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leqslant n$. On donne $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p. Donner la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A\,{}^tA$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$. On considère $M = \begin{bmatrix} O & A \\ A & O \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Donner la signature de la forme quadratique Ψ sur $\mathbb{R}^{2n}$ de matrice M dans la base canonique, en fonction de la signature de la forme quadratique Φ sur $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique.

Exercice 6 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$. Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{C}$. On suppose tous les mineurs principaux de A non nuls. On les note, dans l'ordre : $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, avec $\Delta_i = \det\,(M_{[\![1,i]\!],\,[\![1,i]\!]}(A))$. Montrer que la signature de Φ est (p, q), où p désigne le nombre de termes > 0 dans la suite $\left(\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$, et où $q = n - p$.

Exercice 7 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On note r la somme des multiplicités des racines réelles de P et $2s$ la somme des multiplicités des racines non réelles de P. Soit $\mathscr{R}$ *l'ensemble* des racines dans $\mathbb{C}$ de P, et E le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On définit sur E la forme quadratique Φ par : $(\forall H \in E)\ \Phi(H) = \sum_{z \in \mathscr{R}} (H(z))^2$.

a) Quel est l'espace singulier de Φ ? Condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit non dégénérée ?

b) Si Φ est non dégénérée, quelle est la signature de Φ ?

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \geqslant 2$, de norme notée $\|\cdot\|$. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + q = n$, soit $\mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques de signature (p, q) sur E. On note $\mathrm{Quadr}^*(E) = \bigcup_{p+q=n} \mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$.

a) Prouver que la fonction $\nu : \mathrm{Quadr}(E) \longrightarrow \mathbb{R},\ \Phi \mapsto \operatorname*{Max}_{x \in E,\ \|x\| = 1} |\Phi(x)|$ est une norme.

Prouver que $\mathrm{Quadr}^*(E)$ est un ouvert dense du $\mathbb{R}$-ev $\mathrm{Quadr}(E)$.

b) On fixe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p + q = n$. Soit $\Phi_0 \in \mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$. Montrer qu'on peut trouver deux sous-$\mathbb{R}$-ev F et G de E tels que : $G \oplus F = E$, $\dim(F) = p$, $\dim(G) = q$, et que $\Phi_0|_F$ soit définie positive ainsi que $(-\Phi_0)|_G$.

Ayant ainsi choisi F et G, montrer : toutes les $\Phi \in \mathrm{Quadr}(E)$ assez voisines de Φ_0 sont telles que $\Phi|_F$ et $(-\Phi)|_G$ soient définies positives. En déduire que $\mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{Quadr}(E)$.

c) Montrer que chaque ouvert $\mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$ est connexe.

(*Indication :* Utiliser la connexité de $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, cf. tome 2, § XI.3, exercice 23).

En déduire que les $(\mathrm{Quadr}_{p,q}(E))$ sont les composantes connexes de $\mathrm{Quadr}^*(E)$.

Exercice 9 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et des $a_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$. Signature de la forme quadratique Φ définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(x) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x_i - x_j)^2$.

Exercice 10 : Trouver la signature des formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ par les formules suivantes :

a) $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} [\sin(i + j)\theta]\, x_i x_j$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

b) $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (i + j - 1)\, x_i x_j$

c) $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mathrm{Min}(i, j)\, x_i x_j$

d) $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, où les a_i sont donnés dans $\mathbb{R}$

e) $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{1}{1 + |i - j|} x_i x_j$.

Exercice 11 : *a*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer : $\exists (U, V) \in (\mathbb{R}[X])^2 \mid P = U^2 + V^2$ (cf. tome 1, § VII.6, exercice 7).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Déduire de *a*) l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(I) Pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, le polynôme $Q_{a,P} = \sum_{i=0}^{2n} \frac{a_i}{i!} P^{(i)}$ vérifie $Q_{a,P}(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

(II) La forme quadratique $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2} a_{i+j} x_i x_j$ est positive.

Indication : Prouver que (I) $\Leftrightarrow$ $[(\forall P \in \mathbb{R}^{2n}[X] \mid P(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+)\, Q_{a,P}(0) \geqslant 0]$; puis appliquer cette dernière condition avec $P = (t_0 + t_1 x + \cdots + t_n x^n)^2$ pour $(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 12 : Soit deux réels a, b $(a < b)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On donne des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ éléments de $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, et on pose $a_{ij} = \int_a^b f_i f_j$ $((i, j) \in [\![1, n]\!]^2)$. Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{ij} x_i x_j$.

a) Montrer que Φ est positive, et même définie positive si les f_i sont linéairement indépendantes. Si les f_i sont quelconques, quelle est la signature de Φ ?

b) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels $> \frac{1}{2}$; montrer que la forme quadratique $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(x) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{x_i x_j}{\lambda_i + \lambda_j}$ est définie positive. Généraliser avec des $\lambda_i > 0$.

Exercice 13 : Trouver toutes les matrices $M = [a_{ij}] \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$ telles que $(\forall (i, j)\ a_{ij} \neq 0)$ et que les deux formes quadratiques : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{ij} x_i x_j$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{1}{a_{ij}} x_i x_j$ soient positives.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S(t) = [s_{i,j}(t)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ une matrice symétrique ($S(t) \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$) dépendant continûment du paramètre $t \in [0, 1]$. On suppose $(\forall t \in [0, 1])$ la forme quadratique $Q_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de matrice $S(t)$ dans la base canonique est positive (resp. définie positive). Prouver que la forme quadratique $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \int_0^1 \left(\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} s_{ij}(t) x_i x_j \right) dt$ est positive (resp. définie positive).

Appliquer à $s_{i,j}(t) = t^{|i-j|}$ (utiliser le résultat de l'exercice 6 ci-dessus).

§ I.6 *ALGORITHME DE GAUSS*

Réduction en carrés

Dans ce §, E désigne un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.

DÉFINITION I.6.1

Soit Φ une forme quadratique de rang $r \geqslant 1$ sur E. On appelle ***réduction en carrés*** *de Φ toute décomposition du type*

$$\Phi = \lambda_1 \varphi_1^2 + \cdots + \lambda_p \varphi_p^2, \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \lambda_i \in K^*,$$

et où $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont des ***formes linéaires sur E linéairement indépendantes.***

Nous allons voir que la donnée d'une réduction en carrés de Φ équivaut à celle d'une base Φ-orthogonale dans E, et que le nombre p des « carrés » dans une telle réduction est nécessairement égal au rang r de Φ.

Soit en effet d'abord une base Φ-orthogonale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Posons $(\forall i \in [\![1, n]\!])\ \lambda_i = \Phi(e_i)$. Quitte à renuméroter les e_i, on peut supposer que $\lambda_i \neq 0$ ssi $i \leqslant r$. Notons alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ la *base duale* de $\mathscr{B}$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a : $(\forall i \in [\![1, n]\!])\ x_i = \varphi_i(x)$. D'où

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\varphi_i(x))^2 .$$

Et par suite : $\Phi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i^2$, ce qui constitue bien une réduction en carrés de Φ, avec $p = r$.

Réciproquement, soit $\Phi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i^2$ une réduction en carrés de Φ. Complétons $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de E^*, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de E dont $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale (cf. tome 1, corollaire 2 du théorème XII.2.4). On a alors : $(\forall x \in E)\ x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$, d'où (en posant $x_i = \varphi_i(x)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$) : $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2$. Donc la base $\mathscr{B}$ est Φ-orthogonale, et p est le rang r de Φ, puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, 0, \ldots, 0)$.

La méthode de Gauss

Soit donc F un polynôme non nul, homogène de degré 2, en n lettres $X_1, \ldots, X_n$, à coefficients dans K :

$$F = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2\right) + 2 \sum_{i<j} a_{ij} X_i X_j .$$

Il s'agit d'écrire ce polynôme sous la forme $F = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i^2$, avec des $\lambda_i \in K^*$ et des φ_i polynômes homogènes de degré 1 en $X_1, \ldots, X_n$ et *linéairement indépendants.*

Si $n = 1$, la réduction est toute faite.

Si $n > 1$, supposons que la réduction soit effectivement possible pour tout polynôme non nul G à coefficients dans K, homogène de degré 2, en p lettres, avec $p < n$.

1er cas : $\exists i \mid a_i \neq 0$. On peut alors supposer par exemple que $a_1 \neq 0$. F s'écrit $a_1 X_1^2 + 2 X_1 A + B$, où A est un polynôme homogène de degré 1 en $(X_2, \ldots, X_n)$, et B un polynôme homogène de degré 2 en $(X_2, \ldots, X_n)$, d'où :

$$F = a_1 \left(X_1 + \frac{1}{a_1} A \right)^2 + B - \frac{1}{a_1} A^2 .$$

Le polynôme $G = B - \dfrac{1}{a_1} A^2$ est homogène de degré 2 en $(X_2, \ldots, X_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il s'écrit $G = \lambda_2 \varphi_2^2 + \cdots + \lambda_\rho \varphi_\rho^2$ avec des $\lambda_i \in K^*$ et $(\varphi_2, \ldots, \varphi_\rho)$ polynômes homogènes de degré 1 en $(X_2, \ldots, X_n)$ et linéairement indépendants, ou éventuellement $G = 0$ (mais alors la réduction de F est achevée). Posons $\lambda_1 = a_1$ et $\varphi_1 = X_1 + \dfrac{1}{a_1} A$; $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\rho)$ sont linéairement indépendants car $\varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ ne dépendent pas de X_1 contrairement à φ_1. Finalement $F = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i \varphi_i^2$ est une réduction du type recherché.

2ème cas : $(\forall i)\ a_i = 0$. Alors $\exists (i, j) \mid i < j$ et $a_{ij} \neq 0$. On peut supposer par exemple $a_{12} \neq 0$; F s'écrit $2 a_{12} X_1 X_2 + C X_1 + D X_2 + H$, où C et D sont des polynômes homogènes de degré 1, et où H est un polynôme homogène de degré 2 en $(X_3, \ldots, X_n)$ (si $n = 2$, on pose $C = D = H = 0$). Ecrivons :

$$F = 2 a_{12} \left(X_1 + \frac{1}{2 a_{12}} D \right) \left(X_2 + \frac{1}{2 a_{12}} C \right) + H - \frac{1}{2 a_{12}} CD ,$$

puis posons :

$$G = H - \frac{1}{2 a_{12}} CD, \quad \varphi_1 = X_1 + X_2 + \frac{1}{2 a_{12}} (C + D) ,$$

$$\varphi_2 = X_1 - X_2 - \frac{1}{2 a_{12}} (C - D) .$$

Les polynômes G, φ_1, φ_2 sont homogènes, de degrés respectifs 2, 1, 1 en $(X_1, \ldots, X_n)$ et G ne dépend ni de X_1 ni de X_2. Et F s'écrit :

$$F = \lambda_1 \varphi_1^2 + \lambda_2 \varphi_2^2 + G, \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} a_{12} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} a_{12} .$$

Si $G = 0$ la réduction est terminée ; sinon d'après l'hypothèse de récurrence, G s'écrit $\sum_{i=3}^{\rho} \lambda_i \varphi_i^2$, avec des λ_i $(3 \leq i \leq n)$ dans K^* et des φ_i polynômes

homogènes de degré 1 en $(X_3, \ldots, X_n)$ linéairement indépendants. Mais $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ sont eux-mêmes linéairement indépendants car, de $\sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i \varphi_i = 0 \quad ((\forall i)\, \alpha_i \in K)$, on déduit en annulant le coefficient de X_1 : $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, puis en annulant le coefficient de X_2 : $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, et les autres α_i sont nuls par indépendance de $\varphi_3, \ldots, \varphi_\rho$. Finalement l'écriture $F = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i \varphi_i^2$ est une réduction du type cherché.

Remarque 1 : Si $K = \mathbb{R}$, la procédure ci-dessus fournit non seulement le rang, mais aussi la *signature* de la forme quadratique F de départ.

Remarque 2 : L'algorithme de Gauss décrit ci-dessus ne fait intervenir que des opérations *rationnelles* sur les coefficients de la forme quadratique de départ.

Exemple 1 : Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique par $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$. Appliquons à Φ l'algorithme de Gauss. On a d'abord :

$$\Phi = x_1^2 - 4x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 = \varphi_1^2 + G, \quad \text{avec}$$

$$\varphi_1 = x_1 - 2x_3 \quad \text{et} \quad G = -x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2.$$

Ensuite $G = -(x_2^2 - 2x_2x_3) - 4x_3^2 = -\varphi_2^2 - 3x_3^2$, avec $\varphi_2 = x_2 - x_3$. Finalement :

$$\Phi = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - 3\varphi_3^2 \tag{1}$$

avec $\varphi_1 = x_1 - 2x_3$, $\varphi_2 = x_2 - x_3$, $\varphi_3 = x_3$ linéairement indépendantes. Donc Φ est non dégénérée, de signature (1, 2), et la formule (1) en donne une réduction en carrés.

En revanche, si Φ était définie par la même formule sur $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$, elle serait dégénérée.

Exercice 1 : Effectuer une réduction de Gauss des formes quadratiques suivantes :

a) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha - 2zx\cos\beta - 2xy\cos\gamma$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

b) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \mapsto x^2 + 2y^2 - z^2 + 2t^2 + 2xy + 2xt + 2yt + 2yz - 2zt$.

c) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 12yz - 4zx + 2xy$.

d) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 - bx_4^2 + 2ax_1x_2 - 2(a-1)x_1x_4 + 2x_3x_4$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

e) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \mapsto 4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4yt + 8zt + \lambda t^2$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \mapsto yz + zx + xy + \mu(x + y + z)t + \lambda t^2$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

g) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y)^2 + z(\lambda x + \mu y + \nu z) + t(ax + by + cz + dt)$, où a, b, c, d, λ, μ, ν sont des paramètres réels.

Exercice 2 : Effectuer une réduction de Gauss pour les formes quadratiques suivantes :

a) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$

Indication : Considérer $X_n = x_n$ et $X_p = x_p + \frac{1}{p+1}(x_{p+1} + \cdots + x_n)$ si $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

b) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{1}{i+j} x_i x_j.$

Indication : Considérer $y_i = \frac{1}{\sqrt{i}} x_i$, puis $L_n = y_n + 2 \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{\sqrt{i \cdot n}}{i+n} y_i, \ldots,$

$$L_{n-p} = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)} y_{n-p} + \\ + 2 \sum_{1 \leqslant i < n-p} \frac{\sqrt{i(n-p)}}{i+n-p} \frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-p+1)}{(n+i)(n+i-1)\ldots(n+i-p+i)} y_i .$$

c) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n + x_n x_1.$
Préciser la signature pour n entier $\geqslant 2$.

Exercice 3 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, et Φ une forme quadratique sur E, de rang r. On suppose trouvées des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sur E et des scalaires $\lambda_1 \in K, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que $\Phi = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (\varphi_j)^2$. Montrer que le rang du système $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est $\geqslant r$.

§ I.7 *AUTOMORPHISMES D'UNE FORME QUADRATIQUE*

Soit E un K-ev et $f \in \mathrm{BL}_2(E)$. Il est immédiat que l'ensemble des $u \in \mathrm{GL}_K(E)$ tels que

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad f(u(x), u(y)) = f(x, y)$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_K(E)$.

DÉFINITION I.7.2

Soit E un K-ev et $f \in \mathrm{BL}_2(E)$. Le groupe des automorphismes $\mu \in \mathrm{GL}_K(E)$ vérifiant (1) *s'appelle en général* ***groupe des automorphismes de f,*** *et se note alors* Aut (f). *Lorsque f est* ***symétrique,*** *de forme quadratique associée Φ, le groupe* Aut (f) *s'appelle* ***groupe orthogonal de f*** *(ou : de Φ), et se note* $\mathbf{O}(f)$ *ou* $\mathbf{O}(\Phi)$. *Lorsque f est* ***alternée,*** *le groupe* Aut (f) *s'appelle* ***groupe symplectique de f*** *et se note* **Sp** (f).

Avec ces notations, supposons f symétrique, de forme quadratique associée Φ. D'après la relation (1) du § I.3, pour qu'un élément μ de $\mathrm{GL}_K(E)$ appartienne à $\mathbf{O}(\Phi)$, il faut et il suffit qu'il vérifie

$$(2) \qquad \Phi \circ u = \Phi .$$

Les éléments de $\mathbf{O}(\Phi)$ s'appellent ici les automorphismes **Φ-orthogonaux** (ou **orthogonaux,** si aucune confusion n'est à craindre).

Nous n'étudierons que très peu, dans cet ouvrage, les groupes du type Aut (f). Nous allons ici nous borner à quelques indications en dimension finie.

THÉORÈME I.7.1

Supposons le K-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $f \in \mathrm{BL}_2(E)$, de matrice A dans $\mathscr{B}$. Donnons-nous $u \in \mathrm{Hom}_K(E)$ de matrice M dans $\mathscr{B}$. Pour qu'on ait : $u \in \mathrm{Aut}(f)$, il faut et il suffit que u soit inversible et vérifie

$$(3) \qquad {}^tMAM = A .$$

Lorsque de plus f est non dégénérée, la condition (3) *est nécessaire et suffisante pour que : $u \in \mathrm{Aut}(f)$.*

Démonstration :

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E$, et X, Y les matrices colonnes respectives des coordonnées (x_i) et (y_j). Les matrices colonnes X' et Y' des coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $u(x)$ et $u(y)$ sont alors respectivement MX et MY.

On a : $f(x, y) = {}^tXAY$, et : $f(u(x), u(y)) = {}^tX'AY' = ({}^tX\,{}^tM)A(MY) = {}^tX({}^tMAM)Y$, donc les conditions (1) et (3) sont équivalentes, d'où la première assertion.

Si f est non dégénérée, A est inversible, donc $\det(A) \neq 0$, d'où en prenant les déterminants dans (3) : $\det({}^tM)\det(A)\det(M) = \det(A)$, d'où $(\det(M))^2 \neq 0$, d'où u est inversible ; donc dans ce cas, (3) entraîne bien : $u \in \mathrm{Aut}(f)$. ■

COROLLAIRE

Avec les notations et hypothèses du théorème I.7.1, *supposons de plus f non dégénérée. Alors*

$$(\forall u \in \mathrm{Aut}(f)) \quad \det(u) \in \{-1_K, 1_K\} .$$

(C'est une conséquence évidente de la preuve du théorème I.7.1, et de l'existence d'au moins une base dans E.)

Plaçons-nous dans les conditions du corollaire ci-dessus.

L'application $u \mapsto \det(u)$, de $\mathrm{Aut}(f)$ dans le groupe multiplicatif $\Gamma = \{-1_K, 1_K\}$, est alors un homomorphisme de groupes, dont le noyau est appelé **groupe des automorphismes spéciaux de f** et sera noté en général $\mathrm{SAut}(f)$. Lorsque f est symétrique, de forme quadratique associée Φ, le groupe $\mathrm{SAut}(f)$ s'appelle **groupe spécial orthogonal de f** (ou : **de Φ**) et se note $\mathbf{SO}(f)$ ou $\mathbf{SO}(\Phi)$. Dans tous les cas, on a : $\mathrm{SAut}(f) \lhd \mathrm{Aut}(f)$, et si $\mathrm{SAut}(f) \neq \mathrm{Aut}(f)$, l'indice $[\mathrm{Aut}(f) : \mathrm{SAut}(f)]$ vaut 2.

Il est facile de voir que lorsque f est symétrique, $[\mathbf{O}(f) : \mathbf{SO}(f)] = 2$, et que lorsque f est alternée, $\mathrm{SAut}(f) = \mathrm{Aut}(f) = \mathbf{Sp}(f)$. (Voir par exemple [11] et exercices 2 et 3 ci-dessous).

Les groupes $\mathrm{Aut}(f)$ et $\mathrm{Saut}(f)$ les plus intéressants sont ceux obtenus avec $K = \mathbb{R}$ et f symétrique, de signature (p, q). Nous étudierons plus en détail aux chapitres II et III ceux de ces groupes relatifs à une forme f symétrique *définie positive* (i.e. de signature $(n, 0)$) ; mais signalons que lorsque $n = 4$ et que f est de

signature (3, 1), les groupes $\mathbf{O}(f)$ et $\mathbf{SO}(f)$ jouent un rôle central en théorie de la *relativité restreinte* (théorie des transformations de Lorentz).

Exercice 1 : Soit E un K-ev de dimension 2 et Φ une forme quadratique non dégénérée sur E. Pour $u \in \mathrm{SO}(\Phi)$ donnée, étudier la matrice de u dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E qui est Φ-orthogonale. En déduire que $\mathbf{SO}(\Phi)$ est abélien.

Exercice 2 : Soit E un K-ev de dimension $n \geqslant 1$, Φ une forme quadratique non dégénérée sur E, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base Φ-orthogonale de E. On donne $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1_K, 1_K\}^n$ et on note u l'élément de $\mathrm{GL}_K(E)$ de matrice diag $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ dans $\mathscr{B}$. Prouver que $u \in \mathbf{O}(\Phi)$. En déduire que $[\mathbf{O}(\Phi) : \mathbf{SO}(\Phi)] = 2$.

Exercice 3 : Soit E un K-ev de dimension finie $2n$ $(n \geqslant 1)$ et f une forme bilinéaire et alternée sur E, supposée non dégénérée. On note J_f l'application $E \longrightarrow E^*$, $y \mapsto f(.,y)$. Pour $(\varphi, v_0) \in E^* \times E$, soit $\tau_{\varphi, v_0} \in \mathrm{Hom}_K(E)$ défini par $\tau_{\varphi, v_0}(x) = x + \varphi(x) v_0$ pour tout $x \in E$.

a) On donne $(\varphi, v_0) \in E^* \times (E \setminus \{0\})$. Montrer que : $\tau_{\varphi, v_0} \in \mathbf{Sp}(f)$ ssi $\exists \lambda \in K \mid \varphi = \lambda J_f(v_0)$.

b) Montrer que l'ensemble $\{\tau_{J_f(v_0), v_0}\}_{v_0 \in E \setminus \{0\}} = \mathscr{T}$ engendre $\mathbf{Sp}(f)$ (raisonner par récurrence sur la dimension de Ker $(u - \mathrm{Id}_E)$ pour prouver que tout $u \in \mathbf{Sp}(f)$ est produit d'automorphismes éléments de $\mathscr{T}$.) En déduire que det $(u) = 1_K$ pour tout $u \in \mathbf{Sp}(f)$.

Chapitre II

ESPACES EUCLIDIENS

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$.

§ II.1 *INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ ET CONSÉQUENCES*

DÉFINITION II.1.1

a) *Soit E un* $\mathbb{R}$-ev non nul. *Une forme quadratique Φ sur E est dite* ***positive*** *ssi* $\Phi(E) \subset \mathbb{R}_+$, *et* ***définie positive*** *ssi* $\Phi(E \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
b) *On appelle* ***produit scalaire*** *sur E toute forme bilinéaire symétrique sur E qui est la forme polaire d'une forme quadratique définie positive.*
c) *On appelle* ***espace préhilbertien réel*** *tout* $\mathbb{R}$-ev *muni d'un produit scalaire. On appelle* ***espace euclidien*** *tout espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Si une forme quadratique est définie positive, elle est *a fortiori* positive, et son cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$: on dit qu'elle est *anisotrope*.

THÉORÈME II.1.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit Φ une forme quadratique ***positive*** *sur un* $\mathbb{R}$-ev *E, de forme polaire f.*
a) *On a :* $(\forall (x, y) \in E^2)\ |f(x, y)|^2 \leqslant \Phi(x)\,\Phi(y)$.
b) *Si de plus Φ est définie positive, pour qu'on ait l'égalité dans* a), *il faut et il suffit que x et y soient colinéaires.*

Démonstration :

a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \Phi(x + ty) = \Phi(y)\,t^2 + 2\,f(x, y)\,t + \Phi(x)$. La fonction polynomiale φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si

$\Phi(y) = 0$, étant affine, elle est nécessairement constante, d'où $f(x, y) = 0$, ce qui vérifie l'inégalité. Si $\Phi(y) > 0$, la fonction φ est de degré 2 ; étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, son discriminant est $\leqslant 0$, i.e. $|f(x, y)|^2 - \Phi(x)\,\Phi(y) \leqslant 0$, d'où encore l'inégalité voulue.

b) Supposons Φ définie positive et $|f(x, y)|^2 = \Phi(x)\,\Phi(y)$. On peut supposer que $\Phi(x) > 0$ et $\Phi(y) > 0$, sinon $x = 0$ ou $y = 0$. Alors φ est de degré 2 et a un discriminant nul, donc φ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$, pour $t = t_0 = -\dfrac{f(x, y)}{\Phi(y)}$. Donc $\Phi(x + t_0 y) = 0$, d'où $x + t_0 y = 0$, et x et y sont bien colinéaires. ■

COROLLAIRE 1

> *Soit Φ une forme quadratique* ***positive*** *sur un* $\mathbb{R}$-ev *E, de forme polaire f. Le* ***cône isotrope de Φ*** *est égal à l'****espace singulier de f.*** *En particulier, f est* ***non dégénérée*** *ssi Φ est* ***définie positive.***

Démonstration :

Cela revient à voir que tout vecteur isotrope de Φ est f-singulier. Soit donc $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\Phi(x) = 0$. Pour tout $y \in E$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à x et y montre que $f(x, y) = 0$. Donc pour la f-orthogonalité, on a bien : $x \in E^{\perp} = \mathrm{Sing}\,(f)$. ■

Notons qu'un produit scalaire est non dégénéré.

Si E est de dimension finie, on avait déjà obtenu au § I.5 la deuxième partie du corollaire 1, avec la théorie de la *signature*.

COROLLAIRE 2

> *Soit Φ une forme quadratique* ***positive*** *sur un* $\mathbb{R}$-ev *E, et soit* $\nu : E \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \mapsto (\Phi(x))^{1/2}$.
>
> a) *La fonction ν est une* ***semi-norme*** *sur E.*
>
> b) *Si Φ est* ***définie positive,*** *ν est une* ***norme*** *sur E, et de plus, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $\nu(x + y) = \nu(x) + \nu(y)$ ssi x et y sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires.*

Démonstration (abrégée) :

a) Soit f la forme polaire de Φ et $(x, y) \in E^2$. On a :

$$(\nu(x + y))^2 = \Phi(x + y) = (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + 2\,f(x, y) \leqslant$$
$$\leqslant (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + 2\,|f(x, y)| \leqslant (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + 2\,\nu(x)\,\nu(y)$$

(à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), autrement dit :
$(\nu(x + y))^2 \leqslant (\nu(x) + \nu(y))^2$, d'où $\nu(x + y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$.

b) Soit Φ définie positive, alors $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prenons $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$ tels que $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$. Alors le calcul du *a*) montre que nécessairement $f(x, y) = \nu(x)\,\nu(y)$. Le théorème II.1.1*b*) montre l'existence de $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $x = \rho y$; d'où $f(\rho y, y) = \nu(\rho y)\,\nu(y) = |\rho|\,(\nu(y))^2 = \rho\,(\nu(y))^2$, d'où $\rho = |\rho|$, i.e. $\rho \in \mathbb{R}_+$. ■

Un espace préhilbertien réel sera systématiquement muni de sa norme et de la topologie associée.

DÉFINITION II.1.2

> *On appelle espace* ***hilbertien réel*** *tout espace préhilbertien réel qui est* ***complet.***

Par exemple, un espace **euclidien** est **hilbertien réel,** puisque tout $\mathbb{R}$-evn de dimension finie est complet. La topologie d'un espace euclidien (E, Φ) n'est autre que la topologie des normes sur E (cf. tome 2, § XI.1).

Notation : Le produit scalaire d'un espace préhilbertien réel E est noté le plus souvent $(.\,|\,.)$, c'est-à-dire que, pour $(x, y) \in E^2$, le produit scalaire de x et y est noté $(x\,|\,y)$. On trouve également la notation $\langle x\,|\,y\rangle$. Quant à la norme, elle est habituellement notée $\|.\|$.

En appliquant le théorème X.6.5 du tome 2, on obtient comme conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

PROPOSITION II.1.1

> *Soit* $(E, (.\,|\,.))$ *un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire* $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x\,|\,y)$ *est continu (lorsqu'on munit* $E \times E$ *de la topologie produit).*

Construction d'espaces préhilbertiens réels

• **Comme sous-espace.** Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace préhilbertien réel et F un sous-$\mathbb{R}$-ev de E. Il est clair que l'application : $F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x\,|\,y)$ est un produit scalaire sur F (dit **induit** par celui de E) pour lequel on garde généralement la même notation. On se réfère à la structure préhilbertienne réelle ainsi construite sur F (dite **induite** par celle de E) en parlant du **sous-espace préhilbertien réel** F de E.

• **Par produit externe.** Soit $E_1, \ldots, E_p$ des espaces préhilbertiens réels, dont nous noterons ici $f_1, \ldots, f_p$ les produits scalaires. Munissons le $\mathbb{R}$-ev $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ de la forme bilinéaire symétrique f ainsi définie : pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$ et $y = (y_1, \ldots, y_p) \in E$, $f(x, y) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i, y_i)$.

Il est immédiat que f est un produit scalaire sur E. L'espace préhilbertien réel (E, f) est appelé **produit externe** des (E_i, f_i). La norme ν de (E, f) vérifie : $(\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in E)$ $(\nu(x))^2 = \sum_{i=1}^{p} (\nu_i(x_i))^2$, où, pour tout i, ν_i est la norme de $(E_i\ f_i)$.

Le théorème XI.2.3 du tome 2 montre que, *si chaque* (E_i, f_i) *est hilbertien, le produit externe* (E, f) *des* (E_i, f_i) $(1 \leqslant i \leqslant p)$ *est encore hilbertien.*

Isomorphismes d'espaces préhilbertiens réels ; groupes orthogonaux

DÉFINITION II.1.3

Soit (E_1, f_1) *et* (E_2, f_2) *deux espaces préhilbertiens réels (où* f_i *désigne le produit scalaire de* E_i*). On appelle* ***isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels*** *de* E_1 *sur* E_2 *tout isomorphisme de* $\mathbb{R}$-ev $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ ***qui respecte les produits scalaires,*** *i.e. tel que*

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E_1^2) \qquad f_2(\varphi(x), \varphi(y)) = f_1(x, y)\,.$$

Les espaces préhilbertiens réels E_1 *et* E_2 *sont dits* ***isomorphes*** *ssi il existe au moins un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels de* E_1 *sur* E_2*. Lorsque* $E_1 = E_2 = E$*, un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels de* E *sur* E *est encore appelé un* ***automorphisme orthogonal*** *de* E*.*

- Le composé de deux isomorphismes d'espaces préhilbertiens réels en est encore un.
- Le réciproque d'un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels en est encore un.
- L'application identique $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels si E est un tel espace.

On a donc affaire à une relation réflexive, symétrique et transitive entre espaces préhilbertiens réels.

Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2)$, une CNS pour que φ soit un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels de E_1 sur $\varphi(E_1)$ est que φ soit *isométrique,* i.e. vérifie : $(\forall x \in E_1)$ $\nu_2(\varphi(x)) = \nu_1(x)$, où ν_i désigne la norme de E_i $(i \in \{1, 2\})$; et φ sera isométrique ssi elle vérifie (1), puisque f_i est connue en fonction de ν_i.

Attention ! Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifie (1), cela ne suffit pas pour que φ soit un isomorphisme car, en général, on a $\varphi(E) \neq E$ (cf. exercice 8). Cependant, lorsque E est *de dimension finie,* pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, la condition (1) est nécessaire et suffisante pour que φ soit un automorphisme orthogonal.

Des propriétés (•) ci-dessus résulte immédiatement :

THÉORÈME II.1.2

Soit $(E, (.\mid.))$ *un espace préhilbertien réel. L'ensemble des* ***automorphismes orthogonaux*** *de* E *forme un* ***sous-groupe*** *de* $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$.

DÉFINITION II.1.4

Le groupe défini dans le théorème II.1.2 *ci-dessus s'appelle* ***groupe orthogonal*** *de* E. *On le note* $\mathbf{O}(E)$.

Les groupes $\mathbf{O}(E)$ seront étudiés aux §§ II-4 et III.1 pour E *euclidien.*

Exemple 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i \in E$, posons $s_{\mathscr{B}}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$. Alors $s_{\mathscr{B}}$ est un produit scalaire sur E, pour lequel la base $\mathscr{B}$ est orthonormale (cf. § I.5), et c'est évidemment le seul pour lequel $\mathscr{B}$ soit orthonormale.

Puisque E admet au moins une base, cela prouve déjà qu'il existe au moins une structure euclidienne sur E.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} =$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, la structure euclidienne ainsi obtenue sur $\mathbb{R}^n$ s'appelle **structure euclidienne canonique.**

Considérons alors l'espace euclidien canonique $(\mathbb{R}^n, (.\mid.))$ de base canonique $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, et soit (E, s) un espace euclidien quelconque de dimension n. D'après l'étude menée au § I.5, l'espace (E, s) admet au moins une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Désignons par $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev tel que $\varphi(\varepsilon_i) = e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Il est clair que pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n$, on a : $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = s(\varphi(x), \varphi(y))$ car $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$. Donc φ est un isomorphisme d'espaces euclidiens. En conclusion *les espaces euclidiens de dimension donnée n sont tous isomorphes à* $\mathbb{R}^n$ *euclidien canonique.* Il faut cependant remarquer qu'il n'y a pas d'isomorphisme *privilégié* entre $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique et un espace euclidien de dimension n donnée.

Exemple 2 : Rappelons que l'ensemble, noté $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que la série $\sum_n u_n^2$ converge, est un $\mathbb{R}$-ev. Pour

$u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans ce $\mathbb{R}$-ev, la série $\sum_n u_n v_n$ est absolument convergente, donc convergente, car $(\forall n)\ |u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$. Posons : $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. On vérifie que l'on définit ainsi un *produit scalaire* sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Notons N_2 la norme associée à ce produit scalaire.

Il s'agit de prouver que $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, *muni de ce produit scalaire, est un espace hilbertien réel.* Pour cela, montrons qu'il est complet.

Soit $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, où $(\forall p)\ s_p = (u_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Comme dans l'exemple 2 du § XI.2 du tome 2, on vérifie d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{p,n})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge donc dans $\mathbb{R}$ vers un élément λ_n, puis qu'en posant $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a : $\lambda \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Soit alors ε réel > 0, puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_2(s_p - s_q) \leqslant \varepsilon$ dès que $n \leqslant p < q$. Fixons $p \geqslant n$; alors $\forall q \in \mathbb{N}\ (q > p)$ et $\forall r \in \mathbb{N}$, on a : $\left(\sum_{k=0}^{r} |u_{p,k} - u_{q,k}|^2\right)^{1/2} \leqslant N_2(s_p - s_q) \leqslant \varepsilon$. Passant à $\lim_{q \to \infty}$ en laissant r fixe, on en déduit : $\left(\sum_{k=0}^{r} |u_{p,k} - \lambda_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon$. C'est vrai $\forall r \in \mathbb{N}$, d'où en passant à $\lim_{r \to \infty}$: $N_2(s_p - \lambda) \leqslant \varepsilon$. Et c'est vrai $\forall p \geqslant n$. Donc $N_2(s_p - \lambda) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $s_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$. Finalement $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), (. \mid .))$ est bien un espace hilbertien réel.

Exemple 3 : Soit deux réels a et b $(a < b)$. Notons E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions *bornées intégrables :* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour f et g éléments de E, posons : $\beta(f, g) = \int_a^b fg$. La fonction $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique *positive*. L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\forall (f, g) \in E^2) \qquad (\beta(f, g))^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right),$$

qui constitue le théorème VII.8.1 du tome 2, découle donc en fait du théorème II.1.1 ci-dessus.

Soit alors F le sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ de E : la restriction $\beta|_{F \times F} : (f, g) \mapsto (f \mid g)$ est *définie positive* (cf. corollaire de la proposition VII.3.5 du tome 2). La norme associée $\nu_2 : F \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ f \mapsto \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$ s'appelle **norme de la convergence en moyenne quadratique sur *F*.** Mais l'espace préhilbertien réel $(F, (. \mid .))$ *n'est pas* hilbertien réel (cf. exercice 2 du § XI.2 du tome 2).

Exercice 1 : Soit f une forme bilinéaire symétrique *positive* sur un $\mathbb{R}$-ev E, et ν la semi-norme associée. On note F le $\mathbb{R}$-ev quotient $E/_{\mathrm{Sing}\,(f)}$, et $\varpi : E \longrightarrow F$ l'application canonique.

a) Montrer qu'il existe une et une seule application $s : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\forall (x, y) \in E^2)$ $s(\varpi(x), \varpi(y)) = f(x, y)$.

b) Prouver que s est un produit scalaire sur F.

c) On prend $E = \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$ (où a et b sont deux réels donnés, $a < b$), et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \int_a^b uv$. Déterminer Sing (f). Montrer ensuite que (F, s) n'est pas hilbertien.

Exercice 2 : On considère l'espace hilbertien réel $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (cf. exemple 2 ci-dessus). Montrer que c'est un espace séparable (on rappelle qu'un espace métrique est dit *séparable* ssi il admet une partie dénombrable partout dense).

Indication : On pourra se reporter à l'exercice 2 du § X.2 du tome 2, où l'on propose aussi de prouver que l'espace préhilbertien réel F de l'exemple 3 ci-dessus est lui aussi séparable.

Exercice 3 : Soit $(E_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces préhilbertiens réels, où pour tout n, s_n désigne le produit scalaire de E_n et soit ν_n la norme associée à s_n. On note H le sous-ensemble du $\mathbb{R}$-ev produit $E = \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ formé des suites $x = (x_n) \in E$ telles que la série $\sum (y_n(x_n))^2$ converge.

a) Prouver que H est un sous-$\mathbb{R}$-ev de E.

b) Soit $x = (x_n) \in H$ et $y = (y_n) \in H$. Prouver que la série $\sum_n s_n(x_n, y_n)$ converge. Montrer que l'application $s : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_n, y_n)$ est un produit scalaire sur H.

c) Prouver que si chaque (E_n, s_n) est hilbertien réel, alors (H, s) l'est aussi. Réciproque ?

d) Prouver que si chaque (E_n, s_n) est *séparable* (cf. exercice 2 ci-dessus), alors (H, s) l'est aussi.

Exercice 4 : Soit E les $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est donné, avec $a < b$. On donne $\alpha \in E$ et, pour $(u, v) \in E^2$, on pose $s_\alpha(u, v) = \int_a^b \alpha uv$.

a) Donner une CNS portant sur α pour que s_α soit un produit scalaire sur E.

b) On donne $\alpha \in E$ et $\beta \in E$ telles que s_α et s_β soient des produits scalaires. Comparer les normes associées.

c) Soit maintenant $\alpha \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$. Pour u et v dans E, on pose $s_\alpha(u, v) = \int_a^b \alpha uv$. Reprendre dans ce cas les questions *a*) et *b*). Existe-t-il $\alpha \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$ telle que (E, s_α) soit hilbertien réel ?

Exercice 5 : Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On donne une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0, 1]$. Pour $(u, v) \in E^2$, soit $s_a(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(a_n) v(a_n)$.

a) Donner une CNS portant sur a pour que s_a soit un produit scalaire sur E.

b) On donne $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$, suites de réels de $[0, 1]$ telles que s_a et s_b soient des produits scalaires. Comparer les normes associées.

c) Existe-t-il $a = (a_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que (E, s_a) soit hilbertien réel ?

Exercice 6 : Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace préhilbertien réel non nul.

a) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $H_x = \{y \in E \mid (x \mid y) = 0\}$. Montrer que H_x est un hyperplan fermé de E, qui ne contient pas x.

b) On suppose que la boule unité $\tilde{\mathbf{B}} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\} = \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ de E est *compacte*. Soit $L = \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1) \backslash \mathbf{B}\left(0_E, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \in E \mid \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\right\}$. Montrer que L est un compact de E. A l'aide de *a*), prouver qu'il existe un nombre fini d'hyperplans $H_1, \ldots, H_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) fermés de E tels que $L \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) = \varnothing$. En déduire que E est de dimension finie.

N.B. On a ainsi une preuve particulièrement simple du *théorème de Riesz* (cf. tome 2, théorème XI.1.8) pour les espaces préhilbertiens réels.

Exercice 7 : Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$ telle que $(\forall b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}))$ la série $\sum_n a_n b_n$ converge. Montrer que nécessairement $a \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit E le $\mathbb{R}$-ev préhilbertien réel $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On considère $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ défini par : $(\forall x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E)$ $\varphi(x) = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, avec $y_0 = 0$, et $y_k = x_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que φ est isométrique, et que $\varphi(E) \neq E$.

§ II.2 *ORTHOGONALITÉ DANS UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL*

Considérons un **espace préhilbertien réel** non nul $(E, (.\mid.))$ dans lequel nous allons étudier la $(.\mid.)$-orthogonalité systématiquement notée $\perp$.

Une propriété capitale du produit scalaire $(.\mid.)$ est d'être **anisotrope,** i.e. son cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$, d'où l'on déduit :

THÉORÈME II.2.1

> *Pour tout sous-*$\mathbb{R}$-ev *H de E, on a : $H \cap H^{\perp} = \{0_E\}$. Autrement dit, tout sous-*$\mathbb{R}$-ev *de E est* ***non isotrope.***

COROLLAIRE 1

> *Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-*$\mathbb{R}$-ev *de E* ***deux à deux orthogonaux*** *(i.e. tels que $\forall (i, j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow H_i \perp H_j$). Alors la* ***somme vectorielle*** $\sum_{i \in I} H_i$ *est* ***directe.***

Démonstration :

Fixons $i \in I$. Pour $j \in I$, $j \neq i$, on a : $H_j \subset H_i^{\perp}$. D'où : $\sum_{j \in I, j \neq i} H_j \subset H_i^{\perp}$. Par application du théorème II.2.1 :

$H_i \cap \left(\sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} H_j\right) = \{0_E\}$; c'est vrai $\forall i \in I$, d'où le résultat. ■

THÉORÈME II.2.2

Soit $H_1, \ldots, H_n$ des sous-$\mathbb{R}$-ev de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$. Munissons chaque H_i de la structure préhilbertienne réelle induite par E, et soit $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ le produit externe des espaces préhilbertiens réels H_i. L'isomorphisme naturel de $\mathbb{R}$-ev $s : H \longrightarrow E$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un ***isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels.***

On a en particulier le théorème de Pythagore :

$$(1) \qquad (\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in H) \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Démonstration :

Tout revient à prouver (1). Or, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$, on a :

$$\|x\|^2 = (x \mid x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j \right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (x_i \mid x_j) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 ,$$

car $(x_i \mid x_j) = 0$ pour $i \neq j$. ■

Injection canonique dans le dual

Comme d'habitude, nous noterons E^* le *dual algébrique* de E, et E' son *dual topologique*. Soit $I : E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto I_x = (x \mid .)$ l'application linéaire canonique associée au produit scalaire $(. \mid .)$ de E. On sait que I est *injective* puisque tout produit scalaire est non dégénéré.

THÉORÈME II.2.3

L'application $\mathbb{R}$-linéaire I est à valeurs dans E'. Si on munit E' de la norme (notée $|||\,.\,|||$) associée à celle de E, l'application I est ***isométrique****, i.e.*

$$(\forall x \in E) \quad |||\, I_x \,||| = \|x\| .$$

Démonstration :

Soit $x \in E$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre : $(\forall y \in E)\ |I_x(y)| \leqslant \|x\| \,.\, \|y\|$. Donc I_x est continue (cf. théorème X.6.3 du tome 2), et de plus $|||\, I_x \,||| \leqslant \|x\|$. Si $x \neq 0_E$, avec $z = \dfrac{1}{\|x\|} x$, on a $|I_x(z)| = \|x\|$ et $\|z\| = 1$, d'où $|||\, I_x \,||| = \sup_{y \in E,\ \|y\| = 1} |I_x(y)| = \|x\|$. ■

Remarque 1 : Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, la forme linéaire $I_x = (x \mid .)$ sur E est *continue* et vérifie $I_x(x) \neq 0$.

COROLLAIRE 1

Si E est ***euclidien*** *(i.e. si E est de dimension finie), alors I est un* ***isomorphisme de*** $\mathbb{R}$***-ev*** *de E sur $E^* = E'$; et cet isomorphisme devient* ***isométrique*** *quand on munit E^* de la norme $|||\,.\,|||$ associée à la norme de E.*

Supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

DÉFINITION II.2.1

Deux sous-$\mathbb{R}$-ev *F et G de E sont dits* ***supplémentaires orthogonaux*** *ssi on a : $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.*

Il revient au même de dire que G et F sont supplémentaires orthogonaux. Dans ce cas $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$; en effet, de $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$, on déduit : $G \subset F^\perp$, d'où $F + F^\perp = E$. Mais puisque $F \cap F^\perp = \{0\}$, il s'ensuit $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, d'où $G = F^\perp$ car $G \subset F^\perp$. On voit de même que $G^\perp = F$. On en déduit notamment : $F = F^{\perp\perp}$ et $G = G^{\perp\perp}$.

Soit alors F un sous-$\mathbb{R}$-ev de E : on dit que F *admet un supplémentaire orthogonal,* ou encore que c'est un *facteur direct préhilbertien* de E, ssi il existe un sous-$\mathbb{R}$-ev G de E tel que $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$. Si tel est le cas, un tel G est unique car, d'après ce qui précède, c'est $G = F^\perp$; de plus, si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, alors $F^\perp$ admet un supplémentaire orthogonal, qui est F, et $F = F^{\perp\perp}$.

Remarque 2 : Sans hypothèse particulière sur E, un sous-$\mathbb{R}$-ev quelconque F de E *n'admet en général pas* de supplémentaire orthogonal.

Exemple 1 : Soit $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b)$ muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto \int_a^b uv$ (cf. exemple 2 du § II.1). Notons $\mathscr{P}$ le sous-$\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales éléments de E. On voit de façon élémentaire que $\mathscr{P}^\perp = \{0\}$ (cf. exercice 3 du § I.1). Or $\mathscr{P} \neq E = \mathscr{P}^{\perp\perp}$, ce qui montre que $\mathscr{P}$ n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

DÉFINITION II.2.2

Dans E on appelle ***projecteur orthogonal*** *tout projecteur $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $E = \mathrm{Im}\,(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(f)$.*

Un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ est un projecteur orthogonal ssi c'est l'un des deux projecteurs associés à une décomposition de E en la somme de deux sous-$\mathbb{R}$-ev F et G supplémentaires orthogonaux : $E = F \oplus G$. Cette condition équivaut à la suivante :

$$f^2 = f \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in E) \quad (x \mid f(x)) = \|f(x)\|^2 .$$

Il en résulte aussitôt :

PROPOSITION II.2.1

Soit F un sous-$\mathbb{R}$-ev de E. Pour qu'il existe un projecteur orthogonal f d'image F, il faut et il suffit que F soit facteur direct préhilbertien dans E. Ce projecteur est alors unique : c'est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Si simple soit-il, le théorème suivant est essentiel :

THÉORÈME II.2.4

Soit F un sous-$\mathbb{R}$-ev de E, facteur direct préhilbertien. Soit f le projecteur orthogonal d'image F dans E. Pour tout $x \in E \backslash F$, et tout $y \in F$, $y \neq f(x)$, on a :

$$\|x - y\| > \|x - f(x)\| .$$

En conséquence, pour tout $x \in E$, il existe un unique $z \in F$ tel que $\|x - z\|$ = distance de x à F ; ce z est $z = f(x)$.

Démonstration :

Soit $x \in E \backslash F$ et $y \in F$. On a : $x - y = x - f(x) + f(x) - y$, et : $(x - f(x) \mid f(x) - y) = 0$ car $x - f(x) \in F^{\perp}$ et $f(x) - y \in F$. Le théorème de Pythagore donne alors :

$$\|x - y\|^2 = \|x - f(x)\|^2 + \|f(x) - y\|^2 \geqslant \|x - f(x)\|^2 ,$$

l'égalité ayant lieu ssi $\|f(x) - y\| = 0$, i.e. si $y = f(x)$. ■

COROLLAIRE 1

Si F est un sous-$\mathbb{R}$-ev facteur direct préhilbertien dans E, c'est un sous-$\mathbb{R}$-ev ***fermé*** *de E.*

(En effet, pour $x \in E \backslash F$, on a : distance de x à $F > 0$) (1).

(1) L'exercice 1 ci-dessous propose une autre démonstration de ce corollaire.

Remarque 3 : Attention ! Un sous-$\mathbb{R}$-ev fermé de E *n'est en général pas* facteur direct préhilbertien de E (cf. exercice 2 ci-dessous), et cela même si ce sous-$\mathbb{R}$-ev est un hyperplan.

On appelle **involution** de E un élément $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u^2 = \mathrm{Id}_E$. Un élément $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ est une involution ssi il existe deux sous-$\mathbb{R}$-ev F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et $u = \mathrm{Id}_F \oplus (-\mathrm{Id}_G)$. Si c'est le cas, on a : $F = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$ et on dit encore que u est la *symétrie autour de F parallèlement à G.* Cela dit :

DÉFINITION II.2.3

Une involution u de E est dite ***orthogonale*** *ssi* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = E$. *On dit aussi que u est la* ***symétrie orthogonale*** *autour de* $F = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$.

Si F est un sous-$\mathbb{R}$-ev de E, pour qu'il existe une symétrie orthogonale u autour de F, i.e. telle que $F = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, il faut et il suffit que F soit facteur direct préhilbertien. On a alors : $u = \mathrm{Id}_F \oplus (-\mathrm{Id}_{F^\perp})$.

PROPOSITION II.2.2

Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ une ***involution.*** *Pour que u soit une involution* ***orthogonale,*** *il faut et il suffit que u soit un* ***automorphisme orthogonal*** *de E (i.e. $u \in \mathbf{O}(E)$).*

Démonstration :

Soit $F = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$.

Si l'involution u est orthogonale, on a : $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$. Alors, pour $x = y + z \in E$ $(y \in F, z \in G)$, on obtient : $u(x) = y - z$, d'où $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|u(x)\|^2$, donc $u \in \mathbf{O}(E)$.

Réciproquement, si $u \in \mathbf{O}(E)$, pour $(y, z) \in F \times G$, on a : $u(y) = y$, $u(z) = -z$ et $(u(y) \mid u(z)) = (y \mid z) = -(y \mid z)$, d'où $(y \mid z) = 0$. Donc $F \perp G$ et par suite $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ puisque déjà $E = F \oplus G$. ■

Un cas particulier important

Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$, et D_a la droite vectorielle $\mathbb{R}a$. Le sous-$\mathbb{R}$-ev $H_a = D_a^\perp = \{a\}^\perp$ est alors un *hyperplan,* car c'est $\mathrm{Ker}\,(I_a)$, d'où immédiatement : $E = D_a \overset{\perp}{\oplus} H_a$.

Pour $x \in E$, on a : $(x - (x \mid a)\,a) \perp a$, car :

$$(x - (x \mid a)\,a \mid a) = (x \mid a) - (x \mid a)(a \mid a) = (x \mid a) - (x \mid a) = 0\,.$$

Donc $x = (x \mid a)\, a + (x - (x \mid a)\, a)$, avec $(x \mid a)\, a \in D_a$ et $x - (x \mid a)\, a \in H_a$. Donc si on note f_a, g_a et s_a respectivement les projecteurs orthogonaux d'images D_a et H_a et la symétrie orthogonale autour de H_a, on a, pour tout $x \in E$, compte tenu du fait que $s_a = g_a - f_a$:

$$\boxed{f_a(x) = (x \mid a)\, a\ ;\quad g_a(x) = x - (x \mid a)\, a\ ;\quad s_a(x) = x - 2\,(x \mid a)\, a}\ .$$

Cas d'un espace euclidien

Supposons maintenant *E euclidien,* i.e. de dimension finie $n \geqslant 1$. En appliquant les résultats ci-dessus et le théorème I.2.1, on obtient :

THÉORÈME II.2.5

Dans l'espace euclidien E, tout sous-$\mathbb{R}$-ev *H est facteur direct préhilbertien. De plus, si on note comme d'habitude, pour* $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{G}_k(E)$ *l'ensemble des sous-*$\mathbb{R}$-ev *de dimension k de E, on a :* $(\forall p \in [\![0, n]\!])$ *l'application* $\mathscr{G}_p(E) \longrightarrow \mathscr{G}_{n-p}(E)$, $H \mapsto H^{\perp}$ *est bijective. Enfin, l'application naturelle* $I : E \longrightarrow E^* = E'$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}$-ev, *qui est isométrique si on munit* E' *de la norme* $|||\,.\,|||$ *associée à celle de E.*

Sous-espaces de dimension finie d'un espace préhilbertien réel

THÉORÈME II.2.6

Dans un espace préhilbertien réel E, tout sous-$\mathbb{R}$-ev *H* ***de dimension finie*** *est* ***facteur direct préhilbertien.***

Démonstration :

Il s'agit de voir que $H + H^{\perp} = E$. Or, soit $x \in E$; notons $F = H + \mathbb{R}x$: c'est un sous-espace de dimension finie de E, donc un espace euclidien pour la structure préhilbertienne induite par E. En appliquant le théorème II.2.5 à l'espace euclidien F, on obtient $y \in H$ et $z \in F$ tels que $x = y + z$, avec z élément de l'orthogonal de H *dans* F ; d'où $z \in H^{\perp}$. Cela prouve bien que $E = H + H^{\perp}$. ■

Exercice 1 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace préhilbertien réel. Montrer que pour tout sous-$\mathbb{R}$-ev H de E, le sous-$\mathbb{R}$-ev $H^{\perp}$ est fermé, et que $H^{\perp} = (\mathrm{Adh}\,(H))^{\perp}$. En déduire une autre démonstration du corollaire 1 du théorème II.2.4, compte tenu de $F = F^{\perp\perp}$.

Exercice 2 : Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto \int_0^1 uv$. On donne $c \in\,]0, 1[$, et on note α la forme linéaire $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \int_0^c u$.

a) Vérifier que α est continue.

b) Montrer que $H = \mathrm{Ker}\,(\alpha)$ est un hyperplan fermé de E, mais que $H^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 3 : *a*) Soit $(E, (.\mid.))$ un espace préhilbertien réel et H un sous-$\mathbb{R}$-ev de E de *codimension* finie. Prouver que H est facteur direct préhilbertien ssi $H^{\perp\perp} = H$.

b) On prend $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $(f, g) \in E^2$: $(f \mid g) = \int_0^1 fg$. Soit H le sous-$\mathbb{R}$-ev de E formé des fonctions $f \in E$ telles que $f\Big|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} = 0$. Déterminer $H^{\perp}$. Vérifier que $H^{\perp\perp} = H$, et que cependant H *n'est pas* faeteur direct préhilbertien.

Exercice 4 : Soit C une partie non vide, *convexe* et *complète* d'un espace préhilbertien réel $(E, (.\mid.))$ telle que $0_E \notin C$. On pose $d = d(0_E, C)$ (d'où $d > 0$).

a) Si $x \in \mathbb{N}^*$, $x \in C$, $y \in C$ avec $\|x\| \leqslant d + \frac{1}{n}$, $\|y\| \leqslant d + \frac{1}{n}$, prouver que $\|x - y\|^2 \leqslant \frac{4}{n^2} + 8\frac{d}{n}$.

b) En déduire qu'il existe $z \in C$ unique tel que $\|z\| = d$.

Indication : Utiliser les ensembles $C \cap \tilde{B}\left(0_E, d + \frac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, et le théorème XI.2.4 du tome 2. Prouver en outre que cet élément z vérifie : $(\forall t \in C)\ (z \mid t - z) \geqslant 0$, et que z est le seul élément de C ayant cette propriété.

En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $\varphi(x) \in C$ tel que $\|x - \varphi(x)\| = d(x, C)$, et que $\varphi(x)$ est l'unique élément $z \in C$ tel que $(\forall t \in C)$ $(z - x \mid t - z) \geqslant 0$.

L'application φ (considérée comme application de E dans E) s'appelle *projection orthogonale sur C*.

c) Prouver que la projection orthogonale φ sur C est 1-lipschitzienne.

Exercice 5 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace *hilbertien* réel.

a) Prouver que, pour tout sous-$\mathbb{R}$-ev H de H, on a : H est fermé $\Leftrightarrow E = H \oplus H^{\perp} \Leftrightarrow H = H^{\perp\perp}$ (si H est fermé, on utilisera la projection orthogonale φ sur H, dont l'existence est assurée par l'exercice 4 ci-dessus). En déduire que $H \mapsto H^{\perp}$ est une bijection involutive de l'ensemble des sous-$\mathbb{R}$-ev *fermés* de E sur lui-même.

b) Montrer que l'application $I : E \longrightarrow E'$, $x \mapsto I_x = (x \mid .)$ (où E' est le dual topologique de E) est une *bijection* isométrique de E sur $(E', |||.|||)$.

Exercice 6 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace *hilbertien* réel et H un sous-$\mathbb{R}$-ev de E. Montrer que $H^{\perp\perp} = \mathrm{Adh}_E(H)$. Vérifier qu'en général la propriété est en défaut si E est seulement préhilbertien réel (cf. exercice 2 ci-dessus).

Exercice 7 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des hyperplans H de E tels que $H \oplus H^{\perp} = E$. Pour tout $H \in \mathscr{H}$, soit s_H la symétrie orthogonale autour de H. On donne $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $(\forall H \in \mathscr{H})\ u \circ s_H = s_H \circ u$. Prouver que u est une homothétie.

Exercice 8 (Généralisation du précédent) : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace préhilbertien réel *de dimension infinie*, et p un entier $\geqslant 1$. On note $\mathscr{G}_p(E)$ l'ensemble des sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension p de E, et, pour chaque $V \in \mathscr{G}_p(E)$, on note s_V la symétrie orthogonale autour de $V^{\perp}$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $(\forall V \in \mathscr{G}_p(E))\ u \circ s_V = s_V \circ u$. Prouver que u est une homothétie.

Exercice 9 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace *euclidien*, p et q deux projecteurs orthogonaux de E, d'images respectives F et G. Montrer : $p \circ q = q \circ p \Leftrightarrow$ les sous-espaces $(F \cap G)^{\perp} \cap F$ et $(F \cap G)^{\perp} \cap G$ sont orthogonaux.

§ II.3 *FAMILLES ORTHONORMALES*

Dans ce §, nous considérons à nouveau un **espace préhilbertien réel** $(E, (\,.\mid .\,))$, non nul, de norme associée notée $\|\,.\,\|$. Sur E, on considère la $(\,.\mid .\,)$-orthogonalité notée $\perp$.

Rappelons qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite **orthogonale** ssi $(\forall (i,j)\in I^2)\ i\neq j \Rightarrow (e_i\mid e_j)=0$, et qu'elle est dite **orthonormale** ssi $(\forall (i,j)\in I^2)\ (e_i\mid e_j)=\delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

L'étude du § I.4 montre immédiatement que *toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre* et que *toute famille orthonormale est libre.* Il est de plus évident que toute sous-famille d'une famille orthonormale (resp. orthogonale) l'est encore.

L'inégalité de Bessel-Parseval

THÉORÈME II.3.1

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille **orthonormale** *de E. Pour tout $x\in E$ et toute partie finie J de I, on a :*

(1) $$\sum_{i\in J} |(e_i\mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Démonstration :

Pour toute partie J de I, notons $\mathscr{V}_J = \mathrm{Vect}\,((e_i)_{i\in J})$. notons $\mathscr{F}(I)$ l'ensemble des parties *finies* de I.

Soit $J\in\mathscr{F}(I)$, $J\neq\varnothing$. Le sous-espace $\mathscr{V}_J$ est alors de dimension finie égale à $p=\mathrm{card}\,(J)$. On sait que dans E, la projection orthogonale Φ_J sur $\mathscr{V}_J$ existe (cf. théorème II.2.6). On a : $(\forall x\in E)$ $\Phi_J(x)=\sum_{i\in J}\varphi_i(x)\,e_i$, où $(\forall i\in J)\ \varphi_i = e_i^*\circ\Phi_J$ (en notant $(e_i^*)_{i\in J}$ la base duale de la base $(e_i)_{i\in J}$ de $\mathscr{V}_J$).

Il est facile de calculer les formes linéaires φ_i, car si $x\in E$, de : $\Phi_J(x)-x\in\mathscr{V}_J^{\perp}$, on déduit : $(\forall j\in J)$ $(\Phi_J(x)-x\mid e_j)=0$, i.e. $(\Phi_J(x)\mid e_j)=(x\mid e_j)$, ou encore : $\sum_{i\in J}\varphi_i(x)\ (e_i\mid e_j)=(x\mid e_j)$, c'est-à-dire, en tenant compte de l'orthonormalité des (e_l) : $\varphi_j(x)=(x\mid e_j)=(e_j\mid x)$. D'où la formule fondamentale :

(2) $$\boxed{(\forall x\in E)\quad \Phi_J(x)=\sum_{i\in J}(e_i\mid x)\,e_i}\ .$$

(Remarquons au passage que, réciproquement, *si on définissait* Φ_J par (2), on vérifierait sans peine que cette application est un projecteur orthogonal d'image $\mathscr{V}_J$, ce qui permettrait de se passer du théorème II.2.6.)

Soit maintenant $x \in E$. Posons $\Psi_J = \mathrm{Id}_E - \Phi_J$. Alors : $x = \Phi_J(x) + \Psi_J(x)$, où $\Phi_J(x) \in \mathscr{V}_J$ et $\Psi_J(x) \in \mathscr{V}_J^{\perp}$. On a : $\|x\|^2 = \|\Phi_J(x)\|^2 + \|\Psi_J(x)\|^2 \geqslant \|\Phi_J(x)\|^2$. Or, toujours par orthogonalité des (e_i), on a aussi :

$$\|\Phi_J(x)\|^2 = \sum_{i \in J} |(e_i \mid x)|^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i \in J} |(e_i \mid x)|^2 .$$

D'où finalement : $\sum_{i \in J} |(e_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$. ■

Dans le cas particulier où E est **euclidien,** on a des résultats plus précis :

THÉORÈME II.3.2

Soit E un espace **euclidien** *de dimension $n \geqslant 1$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.*
Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k \quad \textit{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(e_k \mid x)|^2 .$$

Démonstration :

Soit $x \in E$. Posant $y = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k$, il est immédiat de vérifier que $(x - y \mid e_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $x - y \in E^{\perp} = \{0\}$, d'où $x = y$. La relation $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(e_k \mid x)|^2$ s'en déduit aussitôt pour $\mathbb{R}$-bilinéarité de $(. \mid .)$, compte tenu de l'orthonormalité des (e_i). ■

PROPOSITION II.3.1 (théorème de la base orthonormale incomplète)

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une suite **orthonormale** *de l'espace euclidien E $(1 \leqslant p < n = \dim(E))$. On peut alors compléter cette suite en une* **base orthonormale** *$(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.*

Démonstration :

Soit $V = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$. Il suffit de prendre pour suite $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ n'importe quelle base orthonormale de $V^{\perp}$. ■

Familles totales

DÉFINITION II.3.1

Une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de l'espace préhilbertien réel E est dite **totale** *ssi le sous-$\mathbb{R}$-ev* Vect $((a_i)_{i \in I})$ *est* **partout dense** *dans E.*

Si une famille $(a_i)_{i \in I}$ est totale, on voit facilement que $(\text{Vect}\,(a_i)_{i \in I})^{\perp} = \{0\}$, mais la réciproque est fausse (cf. exercice 2 du § II.2). Cependant si E est *hilbertien réel,* alors la condition $(\text{Vect}\,(a_i)_{i \in I})^{\perp} = \{0\}$ est nécessaire et suffisante pour que $(a_i)_{i \in I}$ soit totale (cf. exercice 6 du § II.2).

THÉORÈME II.3.3

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille **orthonormale** *de E. Pour que ce soit une famille* **totale,** *il faut et il suffit que*

$$(3) \qquad (\forall x \in E) \quad \sup_{J \subset I,\, J \text{ fini}} \left(\sum_{i \in J} |(e_i \mid x)|^2 \right) = \|x\|^2$$

ce qui revient à dire (cf. tome 2, § IX.7*) que la famille $(|(e_i \mid x)|^2)_{i \in I}$ est sommable et que $\sum_{i \in I} |(e_i \mid x)|^2 = \|x\|^2$.*

Lorsqu'il en est ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que, pour toute partie finie J de I contenant J_ε, on ait :

$$\left\| x - \sum_{i \in J} (e_i \mid x)\, e_i \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration :

Reprenons les notations de la démonstration du théorème II.3.1. On a : $\text{Vect}\,((e_i)_{i \in I}) = \bigcup_{J \in \mathscr{F}(I)} \mathscr{V}_J$.

Supposons d'abord $(e_i)_{i \in I}$ totale, et soit $x \in E$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $J_\varepsilon \in \mathscr{F}(I)$ et $y \in \mathscr{V}_{J_\varepsilon}$ tels que $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. Soit $J \in \mathscr{F}(I)$, avec $J_\varepsilon \subset J$. On a (cf. théorème II.2.4) :

$$\|x - \Phi_J(x)\| \leqslant \|x - y\| \leqslant \varepsilon\,, \quad \text{où} \quad \Phi_J(x) = \sum_{i \in J} (e_i \mid x)\, e_i\,.$$

Le théorème de Pythagore donne alors :

$$\|x\|^2 = \|x - \Phi_J(x)\|^2 + \|\Phi_J(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \|\Phi_J(x)\|^2 = \varepsilon^2 + \sum_{i \in J} |(e_i \mid x)|^2\,,$$

ce qui prouve (3).

Réciproquement, si (3) est satisfaite, soit $x \in E$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, puis $J \in \mathscr{F}(I)$ tel que $\|\Phi_J(x)\|^2 \geqslant \|x\|^2 - \varepsilon^2$. Alors : $\|x - \Phi_J(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\Phi_J(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2$, d'où $\|x - \Phi_J(x)\| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que la distance de x à Vect $(e_i)_{i \in I}$ est nulle. Donc la famille $(e_i)_{i \in I}$ est bien totale. ■

Orthonormalisation de Gram-Schmidt [1]

THÉORÈME II.3.4

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_N)$ une ***suite libre*** *dans le $\mathbb{R}$-ev préhilbertien réel E. Il existe une et une seule suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$* ***orthonormale*** *de E telle que $(\forall k \in [\![1, N]\!])$:*

$$\text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) \quad \textit{et} \quad (e_k \mid \varepsilon_k) > 0\,.$$

Démonstration :

On procède par récurrence sur N. Si $N = 1$, le théorème est évident, l'unique vecteur ε_1 cherché étant alors $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|} e_1$. Supposons $N \geqslant 2$ et le théorème vrai à l'ordre $N - 1$. Notons $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1})$ la suite orthonormale telle que $(\forall k \in [\![1, N-1]\!])$ $\text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $(e_k \mid \varepsilon_k) > 0$. Si une suite $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_N)$ satisfait les conditions requises, il est clair que nécessairement $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant N - 1$ (car $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{N-1})$ satisfait alors les conditions requises à l'ordre $N - 1$ avec $(e_1, \ldots, e_{N-1})$). Il reste à déterminer $\varepsilon_N \in E$ tel que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1}, \varepsilon_N)$ vérifie les conditions imposées par le théorème.

Analyse : Si ε_N existe, on a : $\varepsilon_N \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_N) = \text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1}, e_N)$, d'où $\varepsilon_N = \lambda e_N + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k \varepsilon_k$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et des α_k réels. Puisque $(\varepsilon_N \mid \varepsilon_i) = 0$ pour $i \in [\![1, N-1]\!]$, il en résulte :

$$0 = \lambda\,(e_N \mid \varepsilon_i) + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k (\varepsilon_k \mid \varepsilon_i) = \lambda\,(e_N \mid \varepsilon_i) + \alpha_i\,,$$

d'où $\varepsilon_N = \lambda v$, avec $v = e_N - \sum_{k=1}^{N-1} (e_N \mid \varepsilon_k)\,\varepsilon_k$.

De plus on doit avoir $\|\varepsilon_N\| = 1$, donc $|\lambda|\,\|v\| = 1$, d'où $v \neq 0$ et $|\lambda| = \dfrac{1}{\|v\|}$. La dernière condition $(\varepsilon_N \mid e_N) > 0$ se traduit par $\left(\lambda v \mid v + \sum_{k=1}^{N-1} (e_N \mid \varepsilon_k)\,\varepsilon_k\right) > 0$, i.e. $\lambda\,\|v\|^2 > 0$, donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement, $\lambda = \dfrac{1}{\|v\|}$ et $\varepsilon_N = \dfrac{1}{\|v\|} v$.

Synthèse : Soit donc $v = e_N - \sum_{k=1}^{N-1} (e_N \mid \varepsilon_k)\,\varepsilon_k$. On a $v \neq 0$ car

---

[1] Jórgen Pedersen *Gram*, mathématicien danois (1850-1916), Erhard *Schmidt*, mathématicien allemand né en Russie (1876-1959).

$e_N \notin \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{N-1}) = \text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1})$. Il est alors immédiat de vérifier que $\varepsilon_N = \dfrac{1}{\|v\|} v$ est tel que la suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ satisfait toutes les conditions requises. ■

Remarque 1 : Les formules de récurrence

$$(4) \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et} \quad (\forall k \in [\![1, N-1]\!]) \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{\|v_k\|} v_k\,,$$
$$\text{avec} \quad v_k = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_j)\, \varepsilon_j$$

permettent de *construire* effectivement la suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ à partir de $(e_1, \ldots, e_N)$ par un algorithme efficace se prêtant bien à la programmation. Ces formules (4) présentent de plus un intérêt théorique considérable : soit E un espace euclidien rapporté à une base $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$. L'application $\text{Hom}_{\mathbf{R}}\,(E) \longrightarrow E^n$, $\varphi \mapsto (\varphi\,(c_1), \ldots, \varphi\,(c_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev (cf. tome 1, théorème VI.3.2). L'image de $\text{GL}_{\mathbf{R}}(E)$ par cet isomorphisme est l'ensemble $\mathbf{B}$ des bases ordonnées $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, qui est donc un ouvert de E^n. Cela dit, les formules (4) montrent immédiatement que *l'application* $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ *qui associe à toute base* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de* E *son orthonormalisée* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *est* ***continue.***

En itérant le théorème II.3.4, on obtient :

COROLLAIRE 1

Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *une suite infinie* ***libre*** *dans* E. *Il existe une et une seule suite* ***orthonormale*** $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *dans* E *telle que* $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) \quad \textit{et} \quad (e_k \mid \varepsilon_k) > 0\,.$$

Cette suite est définie par la récurrence suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \textit{et} \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{1}{v_k} v_k\,,$$
$$\textit{avec} \quad v_k = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (e_{k+1} \mid \varepsilon_j)\, \varepsilon_j\,.$$

DÉFINITION II.3.2

Soit $(e_1, \ldots, e_N)$, $N \in \mathbb{N}^*$ *(resp.* $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$*) une suite* ***libre*** *dans le* $\mathbb{R}$-ev E. *On appelle* ***orthonormalisée (de Gram-Schmidt)*** *de cette suite, la suite* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ *(resp.* $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$*) construite au théorème* II.3.4 *(resp. à son corollaire* 1*).*

Exemple 1 : *Polynômes orthogonaux.*

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et soit $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_a^b \alpha$ converge et que $\alpha^{-1}(0)$ soit sans point intérieur. Notons E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Pour $\varphi \in E$, l'intégrale $\int_a^b \alpha\varphi$ est absolument convergente, et les hypothèses sur α entraînent que l'application $\mathbb{R}$-bilinéaire : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto (f \mid g) = \int_a^b \alpha fg$ est *un produit scalaire* sur E.

Considérons alors la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par $(\forall n \geqslant 0)$ $(\forall x \in [a, b])$ $e_n(x) = x^n$. Elle engendre dans E le sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{P}_{a,b}$ des fonctions polynomiales $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dont elle constitue une base. Son *orthonormalisée* $(P_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace préhilbertien $(E, (. \mid .))$ est une base orthonormale de $(\mathscr{P}_{a,b}, (. \mid .))$ vérifiant deg $(P_{n,\alpha}) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qui de plus jouit de propriétés remarquables.

Montrons par exemple que $(\forall n \geqslant 1)$ $P_{n,\alpha}$ *est dissocié à facteurs simples dans* $\mathbb{R}[X]$ *et que ses racines appartiennent toutes à l'intervalle* $]a, b[$. Pour cela, fixons $n \geqslant 2$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ les racines réelles d'ordre impair de $P_{n,\alpha}$ appartenant à $]a, b[$, s'il en existe, et $Q = (X - a_1) \ldots (X - a_p)$ (s'il n'y en a pas, on pose $Q = e_0$). Alors les racines réelles de $R = Q \times P_{n,\alpha}$ appartenant à $]a, b[$ sont toutes d'ordre pair. Donc $R([a, b]) \subset \mathbb{R}_+$ ou $R([a, b]) \subset \mathbb{R}_-$. Mais les polynômes Q et $P_{n,\alpha}$ étant formellement $\neq 0$, R ne peut pas s'annuler en tout point de $[a, b]$ et par conséquent $\int_a^b \alpha Q P_{n,\alpha} \neq 0$. Mais si l'on avait : $p < n$, on en déduirait : $Q \in \text{Vect}\,(e_0, \ldots, e_{n-1}) = \text{Vect}\,(P_{0,\alpha}, \ldots, P_{n-1,\alpha})$, d'où par orthogonalité des $P_{k,\alpha}$: $\int_a^b \alpha P_{n,\alpha}\, Q = (P_{n,\alpha} \mid Q) = 0$, ce qui est contradictoire. En conséquence $p = n$, ce qui établit le résultat annoncé.

Avec $a = -1$, $b = 1$ et $\alpha : t \mapsto (1 - t)^\beta (1 + t)^{\beta'}$ $(\beta > -1, \beta' > -1)$, les $P_{n,\alpha}$ obtenus s'appellent *polynômes de Jacobi.* En particulier, pour $\beta = \beta' = 0$ on obtient les *polynômes de Legendre ;* pour $\beta = \beta' = \dfrac{-1}{2}$ les *polynômes de Tchebytchev de première espèce ;* pour $\beta = \beta' = \dfrac{1}{2}$ les *polynômes de Tchebytchev de deuxième espèce.* Nous en proposons l'étude en exercice ainsi que celle d'autres exemples classiques.

Déterminants de Gram

Revenons à l'espace préhilbertien réel abstrait $(E, (. \mid .))$, et fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, posons :

$$G(x_1, \ldots, x_p) = \det\left([(x_i \mid x_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}\right).$$

Le déterminant $G(x_1, \ldots, x_p)$ est appelé le **déterminant de Gram** de $x_1, \ldots, x_p$. Si les (x_i) sont liés, toute relation de dépendance linéaire entre les

x_i entraîne *la même* relation entre les colonnes de la matrice $[(x_i|x_j)]$, d'où $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

Si la suite $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, $G(x_1, \ldots, x_p)$ est évidemment le discriminant, dans la base $(x_1, \ldots, x_p)$ du sous-$\mathbb{R}$-ev $V = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)$ de E, de la forme bilinéaire $(.\,|\,.)|_{V \times V}$. Cette forme bilinéaire étant un produit scalaire, ce discriminant est donc $\neq 0$. En fait on a même alors : $G(x_1, \ldots, x_p) > 0$. En effet, soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une *base orthonormale* de V.

On a : $G(e_1, \ldots, e_p) = \det\,(I_p) = 1$. Si P désigne la matrice de passage des (e_i) aux (x_i), on sait que $G(x_1, \ldots, x_p) = (\det\,(P))^2\, G(e_1, \ldots, e_p)$ (cf. formule (8) du § I.2), d'où $G(x_1, \ldots, x_p) > 0$. En résumé :

Si $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, on a les équivalences [1] :

$$(5) \qquad \boxed{\begin{aligned} G(x_1, \ldots, x_p) > 0 &\Leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_p) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{la suite } (x_1, \ldots, x_p) \text{ est libre} \end{aligned}}\,.$$

L'intérêt de la fonction G ci-dessus réside en la propriété suivante :

THÉORÈME II.3.5

Soit V un sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$ de E, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$, et soit $x \in E$.
La distance d de x à V est donnée par :

$$d^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, \ldots, e_p)}\,.$$

Démonstration :

Soit y la projection orthogonale de x sur V, et $z = x - y$, d'où $d = \|z\|$, et $(e_i|y) = (e_i|x)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Tenant compte de : $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y\|^2 + d^2$, on voit que les matrices

---

[1] Cette équivalence revêt une signification très profonde, car elle est indissolublement liée à la propriété de base suivante de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$: une somme de réels $\geqslant 0$ est nulle ssi chacun de ses termes est nul.

Si K est un corps commutatif algébriquement clos, et si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs d'un K-ev V de dimension $n > p$, la dépendance linéaire des x_i s'exprime par l'annulation d'un nombre fini de fonctions polynomiales, parmi lesquelles on peut prouver qu'il doit y avoir au moins $n - p + 1$ fonctions algébriquement indépendantes sur K. Le fait que dans (5) cette dépendance se traduise par *la seule* condition polynomiale $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ est expliqué dans l'exercice 4 du § II.5.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} (e_i \,|\, e_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} & \begin{matrix} (e_1 \,|\, x) \\ \vdots \\ (e_p \,|\, x) \end{matrix} \\ \hline (x \,|\, e_1) \dots (x \,|\, e_p) & (x \,|\, x) \end{array}\right] \quad \text{et} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} (e_i \,|\, e_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} & \begin{matrix} (e_1 \,|\, y) \\ \vdots \\ (e_p \,|\, y) \end{matrix} \\ \hline (e_1 \,|\, y) \dots (e_p \,|\, y) & \|y\|^2 + d^2 \end{array}\right]$$

sont égales. En décomposant le dernier vecteur colonne de B en la somme $((e_1 \,|\, y), \dots, (e_p \,|\, y), \|y\|^2) + (0, \dots, 0, d^2)$, la linéarité du déterminant en chaque colonne donne :
$\det(B) = \det(M) + \det(N)$, avec :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} (e_i \,|\, e_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} & \begin{matrix} (e_1 \,|\, y) \\ \vdots \\ (e_p \,|\, y) \end{matrix} \\ \hline (e_1 \,|\, y) \dots (e_p \,|\, y) & \|y\|^2 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad N = \left[\begin{array}{c|c} (e_i \,|\, e_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline (e_1 \,|\, y) \dots (e_p \,|\, y) & d^2 \end{array}\right];$$

or $\det(M) = G(e_1, \dots, e_p, y) = 0$ car $y \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) = V$, et $\det(N) = d^2 G(e_1, \dots, e_p)$ (développer suivant la $(p+1)$-ième colonne). Finalement $G(e_1, \dots, e_p, x) = \det(A) = \det(B) = \det(M) + \det(N) = \det(N) = d^2 G(e_1, \dots, e_p)$. ■

Exercice 1 : Soit n un entier $\geqslant 3$. On munit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique, et on note H le sous-$\mathbb{R}$-ev $\Delta^\perp$, où $\Delta = \mathbb{R}u$, avec $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désignant la base canonique de E. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^n$: $W_k = \sum_{j=1}^{n} w_{k,j} e_j$, avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, définis par : pour $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, $w_{k,1} = 0$ et $w_{k,j} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin \frac{2k(j-1)\pi}{n}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$; pour $\frac{n}{2} < k \leqslant n-1$, $w_{k,j} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos \frac{2k(j-1)\pi}{n}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$; enfin, au cas où n serait pair, pour $k = \frac{n}{2}$, $w_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{2k(j-1)\pi}{n}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Montrer que $(W_1, \dots, W_{n-1})$ est une base orthonormée de H.

Exercice 2 : Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace *hilbertien réel*. On suppose trouvée une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *orthonormale* et *totale*.

a) Prouver que si $x \in E$, la série $\sum_n (e_n \,|\, x) e_n$ converge dans E et a pour somme x, et que la série $\sum_n |(e_n \,|\, x)|^2$ converge et a pour somme $\|x\|^2$.

b) Soit $a = (a_n) \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_n a_n e_n$ converge dans E vers un élément $x = \varphi(a)$, qui vérifie : $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = (e_n \,|\, x)$.

Indication : Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$. Vérifier, pour $n < p$: $\|S_p - S_n\| = \left(\sum_{k=n+1}^{p} a_k^2\right)^{1/2}$ et appliquer le critère de Cauchy des séries.

c) Prouver que $\varphi : l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow E$, $a \mapsto \varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels.

En déduire qu'en général, pour $x \in E$, la série $\sum (e_n \mid x)\, e_n$ n'est pas absolument convergente.

d) Montrer qu'un espace hilbertien réel est séparable ssi il admet une suite orthogonale totale.

Indication : Utiliser le corollaire 1 du théorème II.3.4 (cf. exercice 2 du § II.1).

Exercice 3 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace préhilbertien réel de dimension infinie. On suppose obtenue une famille $(e_i)_{i \in I}$ orthonormale et totale dans E. Montrer que E est séparable ssi I est dénombrable.

Exercice 4 : Soit $(E, (.\mid.))$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ une suite libre dans E. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, soit M_p la matrice $[(e_i \mid e_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $G_p = \det(M_p) = G(e_1, \ldots, e_p)$. Pour $p \in [\![2, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, soit $\Delta_{j,p}$ le cofacteur de $(e_j \mid e_p)$ dans M_p.

Désignons par $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ l'orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_n)$.

Démontrer : $(\forall p \in [\![2, n]\!])\ \varepsilon_p = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\Delta_{j,p}}{\sqrt{G_{p-1}\, G_p}} e_j$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2\, \mathrm{d}x$.

a) Montrer que f admet un *minimum* μ, atteint en un point unique de $\mathbb{R}^n$, et calculer ce minimum.

Indication : Munir le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto (P \mid Q) = \int_0^1 PQ$. Utiliser le théorème II.2.4. Pour le calcul de μ on peut utiliser le théorème II.3.5. On trouve $\mu = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

b) Soit $(E, (.\mid.))$ l'espace préhilbertien réel indiqué ci-dessus. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit e_k la fonction $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^k$. Prouver que l'orthonormalisée de $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$, où $(\forall k \in \mathbb{N})\ H_k(t) = \lambda_k \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(t^k(t-1)^k)$, $H_k(0)$ et λ_k étant à préciser.

c) Soit E_n le sous-$\mathbb{R}$-ev de E égal à $\mathrm{Vect}\,(e_0, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{H}_n = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$.

*c*1) Prouver que $\mathscr{H}_n^{\perp} \cap E_n = \mathbb{R}g$, où $g = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, les b_k étant définis par la condition $\dfrac{(X-1)\ldots(X-n)}{\prod_{0 \leqslant k \leqslant n}(k+1+X)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{b_k}{k+1+X}$. Retrouver ainsi $\mu = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

*c*2) Soit $\gamma = e_n^*$, où $(e_0^*, \ldots, e_n^*)$ est la base duale de la base $(e_0, \ldots, e_n)$ de E_n. Soit $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_n)$ défini par $(\forall \varphi \in E_n)$ $(\forall t \in [0, 1])$ $(h(\varphi))(t) = t\varphi(t) - \gamma(\varphi) H_{n+1}(t)$. Démontrer : $\chi_h(X) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(X)$.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2\, \mathrm{d}x$.

a) Montrer que f admet un *minimum* μ, atteint en un point unique de $\mathbb{R}^n$, et calculer ce minimum.

Indication : Munir le $\mathbb{R}$-ev E des fonctions polynomiales $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ du produit scalaire défini par $(P, Q) \mapsto (P \mid Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} P(x) Q(x)\, \mathrm{d}x$ et agir comme à l'exercice 5. On trouve $\mu = \dfrac{1}{n+1}$.

b) Soit $e_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^k (k \in \mathbb{N})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit E_n le sous-$\mathbb{R}$-ev égal à Vect $(e_0, \ldots, e_n)$ de l'espace préhilbertien réel $(E, (.|.))$ indiqué en *a*), et $\mathscr{H}_n =$ Vect $(e_1, \ldots, e_n)$. Considérons la suite $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des *polynômes de Hilbert*, définie par $H_0 = 1$ et, pour $k \geqslant 1$, $H_k(X) = \frac{1}{k!}(X+1)\ldots(X+k)$. Soit $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie par $(X-1)\ldots(X-n) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k(X)$. Démontrer que $g = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} X^k$ dirige la droite vectorielle $\mathscr{H}_n^{\perp} \cap E_n$. Utiliser ce résultat pour retrouver $\mu = \frac{1}{n+1}$, μ étant le minimum demandé en *a*).

Exercice 7 (*Polynômes de Legendre*) : Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{-1}^{1} fg$. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $(\forall n \geqslant 0)$ $(\forall x \in [-1,1])\, e_n(x) = x^n$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de la suite (e_n).

a) Montrer que si $n \geqslant p \geqslant 1$, il existe une primitive p-ième de P_n admettant 1 et -1 pour racines. En déduire :

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} [(X^2-1)^n]$$

b) On pose $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} [(X^2-1)^n]$. Montrer, si $n \geqslant 2$:

(1) $\quad (\forall n) \quad (n+1) L_{n+1}(X) - (2n+1) X L_n(X) + n L_{n-1}(X) = 0$

(2) $\quad (\forall n) \quad (X^2-1) L_n''(X) + 2 X L_n'(X) - n(n+1) L_n(X) = 0$.

Indication : Pour (1) on pourra vérifier que $L_{n+1}(X) - \frac{2n+1}{n+1} X L_n(X)$ est orthogonal à Vect $(L_0, \ldots, L_{n-2})$ et appartient à Vect (L_{n-1}, L_n). Pour (2) on pourra poser $W_n(X) = (X^2-1)^n$, d'où $(X^2-1) W_n'(X) = 2nXW_n(X)$ et dériver à l'ordre $n+1$.

c) On considère la fonction $]-1,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, u) \mapsto \Phi(x, u) = (1 - 2xu + u^2)^{-1/2}$. Montrer que $\Phi(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) u^n$.

Indication : On pourra par exemple prouver que $\Phi(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) u^n$, où $(\forall n)\, Q_n$ est un polynôme, avec $Q_0 = L_0$, $Q_1 = L_1$ et que la suite (Q_n) vérifie la récurrence (1).

Exercice 8 (*Polynômes de Tchebytchev*) : Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les polynômes de Tchebytchev de 1e et de 2e espèce définis par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall \theta \in \mathbb{R})\, T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ et $(\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})\, U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

a) On reprend les notations de l'exemple 1, avec $a = -1$ et $b = 1$ et la fonction $\alpha :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (1-t^2)^{-1/2}$. Vérifier que $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de (e_n). Montrer que le polynôme T_n vérifie l'équation différentielle : $(1-x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0$.

b) De même, avec $\alpha :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (1-t^2)^{1/2}$, vérifier que $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de (e_n), et que U_n vérifie l'équation différentielle : $(1-x^2) y'' - 3xy' + n(n+2) y = 0$.

Exercice 9 (*Polynômes de Gegenbauer*) : On reprend les notations de l'exemple 1, avec $a = -1$, $b = 1$ et $\alpha :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (1-t^2)^{\beta}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$Q_n(X) = (1-X^2)^{-\beta}\dfrac{d^n}{dX^n}(1-X^2)^{\beta+n} \in \mathbb{R}[X]$ (on identifie polynômes formels éléments de $\mathbb{R}[X]$ et fonctions polynomiales $]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$). On suppose β réel > -1.

a) Vérifier que Q_n est un polynôme de degré n, que la suite (Q_n) est orthogonale, et que Q_n vérifie l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2(\beta+1)xy' + n(n+2\beta+1)y = 0.$$

Prouver enfin que le coefficient dominant de Q_n est :

$$\gamma_n = (-1)^n(2\beta+2n)(2\beta+2n-1)\dots(2\beta+n+1).$$

b) En raisonnant comme à l'exercice 7, montrer, pour $n \geqslant 2$ $Q_{n+1}(X) + A_n XQ_n(X) + B_n Q_{n-1}(X) = 0$, où A_n et B_n sont des réels ne dépendant que de n et β, que l'on calculera.

Réponse : $A_n = \dfrac{2(\beta+n+1)(2\beta+2n+1)}{2\beta+n+1}$, $B_n = \dfrac{4n(\beta+n)(\beta+n+1)}{2\beta+n+1}$. Prouver alors que l'orthonormalisée de (e_n) est $(\lambda_n^{-1}Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\lambda_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$\lambda_n = (I_0 \times 2^{2n}n!)^{1/2}\,[(\beta+1)\dots(\beta+n)][(2\beta+2)\dots(2\beta+n)]^{-1/2},$$

avec $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\beta\,dt$.

c) Soit $\Phi(x,u) = (1-2xu+u^2)^{-\beta-1/2}$, avec $(x,u) \in]-1,1[^2$. Prouver que $\Phi(x,u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n Q_n(x)u^n$, avec $\rho_0 = 1$ et $(\forall n \geqslant 1)$ $\rho_n = (-1)^n\dfrac{(2\beta+n)(2\beta+n-1)\dots(2\beta+1)}{2^n n!\,(\beta+n)(\beta+n-1)\dots(\beta+1)}$ (cf. exercice 7).

Exercice 10 (*Une application classique des polynômes de Legendre au calcul approché d'intégrales*) : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Legendre définie dans l'exercice 7. Si $n \in \mathbb{N}$, soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ la liste des zéros de P_{n+1} dont on sait (cf. exemple 1) qu'ils sont tous réels, simples et situés dans $]-1,1[$. Classons-les de façon que $-1 < x_0 < \dots < x_n < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ désignons par E_n le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $\delta_x \in E_n^*$ l'application qui, à chaque polynôme $f \in E_n$ associe le réel $\delta_x(f) = f(x)$. Enfin soit $\varphi \in E_n^*$ défini par $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f$ pour $f \in E_n$.

a) Prouver : $\varphi \in \mathrm{Vect}\,(\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$.

b) Prouver : $(*)\ \varphi = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\,\delta_{x_i}$, avec $(\forall i)\,a_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_i^2$, et

$$Q_i(X) = \prod_{\substack{j\neq i\\ 0\leqslant j\leqslant n}}\frac{X-x_j}{x_i-x_j}.$$

c) Soit $z_i \in [-1,1]$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ tels que $(\forall f \in E_n)$ $\varphi(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(z_i)$.

Montrer : $\{z_i\}_{i\in[\![0,n]\!]} = \{x_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$.

N.B. La formule $(*)$ ramène, pour $f \in E_n$, le calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f$ à celui des zéros $x_0, \dots, x_n$ de P_{n+1}, lesquels sont indépendants de f. Si $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$), alors $\Delta_n = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} g\right) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\,g(x_i)$ vaut $\displaystyle\int_{-1}^{1}(g-f)$, où f est l'interpolateur de Lagrange (resp. de Hermite, cf. tome 1, exercice 6 du § VII.5) de

g pour $(x_0, \ldots, x_n)$. Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^{2n}$, on en déduit :

$$|\Delta_n| \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(2n)}(x)| \right) \times (2n+1)\, 2^{2n-1} (n!)^4 / [(2n)!]^3 .$$

L'idée de la méthode est due à Gauss.

Exercice 11 (*Polynômes de Hermite*) : Soit $\mathscr{P}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, identifié à $\mathbb{R}[X]$.

a) Pour $(F, G) \in \mathscr{P}^2$, montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} F(t)\, G(t)\, dt$ converge et que, si on note $(F \mid G)$ sa valeur, la fonction $(. \mid .)$ définit sur $\mathscr{P}$ un produit scalaire. On se place désormais dans l'espace préhilbertien réel $(\mathscr{P}, (. \mid .))$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note e_n la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n$, de sorte que $\mathscr{P} = \operatorname{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \dfrac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2})$. Prouver que $H_n \in \mathscr{P}$, et que $\deg(H_n) = n$. Prouver que $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base *orthogonale* de $\mathscr{P}$.

c) Montrer que $(\forall n \geqslant 1)\, H_n$ vérifie les relations

(1) $$H_n''(X) - XH_n'(X) + nH_n(X) = 0$$

(2) $$H_{n+1}(X) - XH_n(X) + nH_{n-1}(X) = 0$$

(3) $$H_n'(X) = nH_{n-1}(X)$$

(4) $$\|H_n\|^2 = \sqrt{2\pi} \times n! .$$

En déduire l'orthonormalisée de la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'expression développée de chaque H_n.

d) Prouver que $(\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2)\ e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \dfrac{t^n}{n!}$.

Exercice 12 (*Polynômes de Laguerre* [1]) : Soit $\mathscr{P}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, identifié à $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n \in \mathscr{P}$ égale au monôme X^n, et $\mathscr{L}_n \in \mathscr{P}$ définie par $\mathscr{L}_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$. Vérifier que $\mathscr{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{n!}{k!} \dbinom{n}{k} x^k$.

a) Montrer qu'on peut définir l'application $\mathscr{P} \times \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto (u \mid v) = \int_0^{+\infty} e^{-t} u(t)\, v(t)\, dt$, et que cette application $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{P}$. On se place désormais dans l'espace préhilbertien réel $(\mathscr{P}, (. \mid .))$.

b) Montrer que la suite $(\mathscr{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale dans $\mathscr{P}$. Déterminer l'orthonormalisée de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer les relations

(1) $$X\mathscr{L}_n''(X) + (1 - X)\, \mathscr{L}_n'(X) + n\mathscr{L}_n(X) = 0 , \quad \text{et}$$

(2) $$\mathscr{L}_{n+1}(X) + (X - (2n+1))\, \mathscr{L}_n(X) + n^2 \mathscr{L}_{n-1}(X) = 0 .$$

d) Si $(x, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, on pose $g(x, t) = \dfrac{1}{1-t} \exp\left(\dfrac{-xt}{1-t} \right)$. Montrer : $g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{L}_n(x) \dfrac{t^n}{n!}$.

e) Si $t \in]-1, 1[$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\Gamma_t(x) = g(x, t) \quad \text{et} \quad S_{N,t}(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathscr{L}_n(x) \frac{t^n}{n!} .$$

---

[1] Edmond Nicolas *Laguerre*, officier et mathématicien français (1834-1886), surtout connu par ses travaux sur les fractions continues et par une formule de géométrie projective.

*e*1) Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} u^2(t)\,dt$ converge. Vérifier que $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$, que $\mathscr{V}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et qu'on définit un produit scalaire sur $\mathscr{V}$ en posant $(u \mid v) = \int_0^{-\infty} e^{-t} u(t) v(t)\,dt$.

*e*2) Pour $t \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, prouver : $\left(\Gamma_t \mid \frac{\mathscr{L}_n}{n!}\right) = t^n$.

*e*3) Pour $t \in]-1, 1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $\|\Gamma_t\|^2$ et $\|S_{N,t}\|^2$. Soit $I_N(t) = \|\Gamma_t - S_{N,t}\|^2$. Prouver que $I_N(t) = \frac{1}{1-t^2} - \sum_{n=0}^{N} t^{2n}$.

*e*4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\mathscr{E}_\alpha \in \mathscr{V}$ définie par $\mathscr{E}_\alpha(t) = \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) t\right)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$. Si on donne $\alpha > 0$, prouver : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\psi \in \mathscr{P}$ tel que $\|\mathscr{E}_\alpha - \psi\| \leqslant \varepsilon$ (utiliser *e*3) et la surjectivité de l'application $]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{1+t}{1-t}$).

*e*5) Soit $F \in \mathscr{V}$. Montrer : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ tous > 0 ainsi que des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ tels que : $\left\|F - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathscr{E}_{\alpha_i}\right\| \leqslant \varepsilon$.

Indication : Poser $x = -\operatorname{Log} t$ pour ramener l'intervalle d'intégration à $]0, 1]$. Puis utiliser le théorème XII.4.2 du tome 2 pour prouver que, pour toute fonction continue $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(0) = 0$ et pour tout réel $\eta > 0$, il existe un polynôme $G \in \mathbb{R}[X]$ *sans terme constant* tel que $(\forall t \in [0, 1])$ $|G(t) - h(t)| \leqslant \eta$.

En déduire : $\mathscr{P}$ est partout dense dans $(\mathscr{V}, (. \mid .))$.

*e*6) Soit $F \in \mathscr{V}$. Montrer : $\|F\|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\left(\frac{\mathscr{L}_\nu}{\nu!} \mid F\right)\right|^2$ (cf. exercice 2). Montrer que si $(\forall s \in \mathbb{R}_+^*)$ $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\,dt = 0$, alors $F = 0$.

Indication : Dériver l'intégrale par rapport à s.

Exercice 13 *(Théorème de Müntz) :* Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(. \mid .)$ défini par $(\forall (u, v) \in E^2)$ $(u \mid v) = \int_0^1 uv$. On note $\mathscr{P}$ le sous-$\mathbb{R}$-ev de E formé des fonctions polynomiales. On identifie $\mathscr{P}$ et $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n(t) = t^n$ $(t \in [0, 1])$.

a) Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite *strictement croissante* d'entiers $\geqslant 0$, et soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. On pose $F = \operatorname{Vect}((e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}})$. Soit $k \in \mathbb{N}$; montrer :

$$\frac{G(e_m, e_{n_0}, e_{n_1}, \ldots, e_{n_k})}{G(e_{n_0}, \ldots, e_{n_k})} = \frac{1}{2m+1} \left[\frac{\prod_{i=0}^{k} (n_i - m)}{\prod_{i=0}^{k} (m + n_i + 1)}\right]^2.$$

b) Montrer que, pour que la distance de e_m à F soit nulle, il faut et il suffit que la série $\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{n_i}$ diverge.

c) Montrer que, si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$\left\|e_m - \sum_{i=1}^{p} a_i e_{n_i}\right\| \leqslant \operatorname*{Max}_{t \in [0,1]} \left|t^m - \sum_{i=1}^{p} a_i t^{n_i}\right| \leqslant m \left\|e_{m-1} - \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{m} a_i e_{n_i - 1}\right\|.$$

d) Prouver : pour qu'il existe une suite (T_k) d'éléments de F qui converge uniformément vers e_m sur $[0, 1]$, il faut et il suffit que la série $\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{n_i}$ diverge.

e) On suppose la série $\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{n_i}$ divergente. Montrer que toute fonction continue $\varphi \in E$ telle que $\varphi(0) = 0$ est limite uniforme d'au moins une suite d'éléments de F.

f) Donner une CNS portant sur la suite (n_i) pour que *toute* fonction $\varphi \in E$ soit limite uniforme d'au moins une suite d'éléments de F.

Exercice 14 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Montrer qu'on ne peut pas trouver $n+2$ éléments $e_1, \ldots, e_{n+2}$ non nuls de E tels que $(\forall (i,j) \in [\![1, n+2]\!]^2)$ $i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) < 0$.

Indication : Supposons trouvée une telle suite. Soit $C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\}_{\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0}$. Prouver que, si $z \in E$ est tel que $(z \mid x) \geqslant 0$ pour tout $x \in C$, alors $z \in C$. Puis obtenir une contradiction en prenant $z = -e_{n+1}$.

Exercice 15 : Soit E un espace euclidien de dimension 3 et (V_1, V_2, V_3) une base de E. On note Δ_i la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}_+ V_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). Trouver trois demi-droites vectorielles D_1, D_2, D_3 telles que : Δ_1 (resp. Δ_2, Δ_3) soit bissectrice intérieure de D_2, D_3 (resp. de D_3, D_1 ; de D_1, D_2).

Indication : Cela revient à chercher U_1, U_2, U_3 vecteurs *unitaires* de E et des réels $\geqslant 0$ ρ_1, ρ_2, ρ_3 tels que $U_1 = -\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \rho_3 V_3$, $U_2 = \rho_1 V_1 - \rho_2 V_2 + \rho_3 V_3$ et $U_3 = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 - \rho_3 V_3$.

Exercice 16 (*amélioration de l'exercice* 14 *ci-dessus*) : Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_p)$ une suite de E telle que $p \geqslant 2$ et $(e_i \mid e_j) < 0$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$. Montrer que toute sous-suite à $p-1$ termes de cette suite est libre.

Indication : Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i = 0$. Prouver que $\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i = 0$, puis conclure en multipliant scalairement par e_p.

§ II.4 *PREMIÈRE ÉTUDE DES GROUPES ORTHOGONAUX*

Matrices orthogonales réelles

Ci-dessous, n désigne un entier $\geqslant 1$.

DÉFINITION II.4.1

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** *(réelle d'ordre n) ssi ${}^tMM = I_n$ et* **orthogonale directe** *(réelle d'ordre n) ssi ${}^tMM = I_n$ et* $\det(M) = 1$.

L'ensemble des matrices orthogonales (resp. orthogonales directes) réelles d'ordre n est noté $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$).

Pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\quad M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$

(2) $\quad M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^tM$

(3) $\quad M\,{}^tM = I_n$.

THÉORÈME II.4.1

> $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. *Si* $M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, *on a :* $\det(M) \in \{-1, 1\}$. $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ *est un sous-groupe distingué d'indice* 2 *dans* $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration :

Le fait que $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se vérifie immédiatement. La seconde assertion résulte de $\det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = (\det(M))^2 = \det(I_n) = 1$.

Soit μ_2 le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$. L'application $\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mu_2$, $M \mapsto \det(M)$ est un homomorphisme de groupes de noyau $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. Donc $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) \lhd \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $[\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) : \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})] \in \{1, 2\}$. Il reste à voir que cet homomorphisme est *surjectif.* Or soit $M = \mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$. On a : $M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $\det(M) = -1$. ■

Soit $M = [a_{ij}] \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Une CNS pour que $M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ est :

(4) $(\forall (j, k) \in [\![1, n]\!]^2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{jk}$, ou

(5) $(\forall (j, k) \in [\![1, n]\!]^2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, a_{ki} = \delta_{jk}$ (δ_{jk} = symbole de Kronecker).

Ces relations (4) et (5) signifient que, pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, les vecteurs-colonnes (resp. les vecteurs-lignes) de M sont *tous unitaires et deux à deux orthogonaux,* i.e. *forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME II.4.2

> *Les groupes* $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ *et* $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ *sont* ***compacts.***

Démonstration :

Pour $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$, soit $F_{jk} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $M = [a_{ij}] \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_{ik}\right) - \delta_{jk}$, et soit det l'application déterminant : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Les applications det et $F_{j,k}$ sont polynomiales, donc continues. On a :

$$\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) = \bigcap_{(j,k) \in [\![1,n]\!]^2} F_{j,k}^{-1}(0) \quad \text{et} \quad \mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1) \cap \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$$

donc $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ sont des parties *fermées* de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. tome 2, théorème X.5.1).

Si $M = [a_{ij}] \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, on a $(\forall i \in [\![1, n]\!])\ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 = 1$; d'où $\forall (i, j)$ $|a_{ij}| \leq 1$. Donc $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ sont des parties *bornées* de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Etant fermées et bornées, elles sont donc *compactes* dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. tome 2, corollaire du théorème XI.1.5). ■

Dans le cas particulier $n = 1$, en identifiant $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, on voit que $\mathbf{O}(1, \mathbb{R}) = \mu_2$ et $\mathbf{SO}(1, \mathbb{R}) = \{1\}$.

Le cas $n = 2$ est très remarquable :

THÉORÈME II.4.3

$\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

L'application $\mu : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, $a \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,(z) & -\mathrm{Im}\,(z) \\ \mathrm{Im}\,(z) & \mathrm{Re}\,(z) \end{bmatrix}$ est un isomorphisme du groupe $\mathbb{U}$ sur $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, donc $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ est ***abélien.*** *En conséquence, l'application $\mathscr{E} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, $\theta \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ est un homomorphisme* ***surjectif*** *du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration :

Il est immédiat de vérifier que, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a^2 + b^2 = 1$, on a $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ et que μ est un homomorphisme *injectif* du groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ dans le groupe $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$. Il reste à prouver la *surjectivité* de μ, et tout le reste du théorème en découlera.

Soit donc $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire par hypothèse :

(6) $\quad ad - bc = 1$

(7) $\quad a^2 + b^2 = 1\ ,\quad c^2 + d^2 = 1\ ,\quad a^2 + c^2 = 1\ ,\quad b^2 + d^2 = 1$

(8) $\quad ac + bd = 0\ ,\quad ab + cd = 0\ .$

Les relations (7) montrent que $c = \varepsilon b$ $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$ et $d = \varepsilon' a$ $(\varepsilon' \in \{-1, 1\})$. Portant dans (8), il vient : $ab(\varepsilon + \varepsilon') = 0$.

Si $a = 0$, $b^2 = 1$ et d'après (6) $c = -b$, d'où $M = \mu(\mathrm{i})$ ou $\mu(-\mathrm{i})$.

Si $b = 0$, $a^2 = 1$ et d'après (6) $d = +a$, d'où $M = \mu(1)$ ou $\mu(-1)$.

Si $ab \neq 0$, $\varepsilon = -\varepsilon'$ et d'après (6) $\varepsilon'(a^2 + b^2) = 1$, d'où $\varepsilon' = +1$ et $\varepsilon = -1$, et alors $M = \mu(a + \mathrm{i}b)$, avec $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{U}$. ■

COROLLAIRE 1

Les éléments de $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})\backslash\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ *sont les matrices du type* $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, *avec* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $a^2 + b^2 = 1$. *Ces matrices ont toutes pour carré* I_2.

Démonstration :

Il suffit dans la preuve précédente de remplacer (6) par

$$ad - bc = -1 \tag{6'}$$

pour obtenir $c = +b$ et $d = -a$, et alors $M^2 = I_2$.

Cela n'a rien d'étonnant car on passe de $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$ à $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})\backslash\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ par la bijection : $M \mapsto MD$, où $D = \mathrm{Diag}\ (1, -1)$. ■

Si $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, i.e. si $a^2 + b^2 = 1$, le nombre $a = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (M)$ se note $\mathbf{Cos}\ (M)$ et le nombre b se note $\mathbf{Sin}\ (M)$. On voit alors que $\chi_M(X) = X^2 - 2X\,\mathbf{Cos}\ (M) + 1$ et M n'a donc de valeurs propres réelles que ssi $\Delta' = \mathbf{Cos}^2\ (M) - 1 = -\mathbf{Sin}^2\ (M) \geqslant 0$, c'est-à-dire ssi $b = \mathbf{Sin}\ (M) = 0$, autrement dit ssi $M = I_2$ ou $M = -I_2$.

En revanche, si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \in \mathbf{O}(2, \mathbb{R})\backslash\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$, on a : $\chi_M(X) = X^2 - 1$ et M, ayant pour valeurs propres 1 et -1, est diagonalisable.

Groupes euclidiens

Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}\ (E)$ *conserve le produit scalaire* ssi

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad (\varphi(x) \,|\, \varphi(y)) = (x \,|\, y)\,. \tag{9}$$

Lorsqu'il en est ainsi, on a :

$$(\forall x \in E) \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|\,. \tag{10}$$

En particulier φ est *isométrique,* car $\forall (x, y) \in E^2$

$$\|\varphi(x - y)\| = \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\| \quad \text{et} \quad \varphi(0_E) = 0_E :$$

on dit que φ est une *isométrie vectorielle.*

Une telle φ est *injective,* donc $\varphi \in \mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(E)$.

Inversement, si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifie (10), alors φ vérifie (9) puisque

$$\begin{aligned}(\varphi(x) \mid \varphi(y)) &= \frac{1}{4}\left[\|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x-y)\|^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] = (x \mid y).\end{aligned}$$

Grâce à (9) ou (10), il est immédiat de vérifier que l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ qui conservent le produit scalaire est un *sous-groupe* de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$.

DÉFINITION II.4.2

Le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ *formé des* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ *qui conservent le produit scalaire est appelé* ***groupe orthogonal de E*** *(ou :* ***groupe euclidien*** *de E), et noté* $\mathbf{O}(E)$. *Ses éléments sont appelés* ***endomorphismes orthogonaux*** *de E (ou, ce qui revient au même,* ***automorphismes orthogonaux*** *de E).*

Remarque 1 : Ces groupes euclidiens sont un cas particulier des groupes orthogonaux des formes quadratiques abstraites définis au § I.7.

PROPOSITION II.4.1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de E et* $\mathscr{S}_{\mathscr{B}} = [(e_i \mid e_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. *Soit* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ *et* $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$. *Pour que* $\varphi \in \mathbf{O}(E)$, *il faut et il suffit que l'on ait :*

$$(11) \qquad {}^tM\mathscr{S}_{\mathscr{B}} M = \mathscr{S}_{\mathscr{B}}.$$

Démonstration :

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$. Notons X et Y les matrices-colonnes telles que ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$ et ${}^tY = (y_1, \ldots, y_n)$. Les matrices-colonnes des coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont respectivement MX et MY. Or on sait que : $(x \mid y) = {}^tX\mathscr{S}_{\mathscr{B}} Y$, et de même : $(\varphi(x) \mid \varphi(y)) = {}^t(MX)\mathscr{S}_{\mathscr{B}}(MY) = {}^tX\,{}^tM\mathscr{S}_{\mathscr{B}} MY$. Par suite, $\varphi \in \mathbf{O}(E)$ ssi : $(\forall (x,y) \in E^2)\ {}^tX\mathscr{S}_{\mathscr{B}} Y = {}^tX\,{}^tM\mathscr{S}_{\mathscr{B}} MY$, et cette condition équivaut à : ${}^tM\mathscr{S}_{\mathscr{B}} M = \mathscr{S}_{\mathscr{B}}$. ■

COROLLAIRE 1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une* ***base orthonormale*** *de E. L'application* $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ *définit un* ***isomorphisme*** *du groupe* $\mathbf{O}(E)$ *sur le groupe* $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. *En conséquence,* $\mathbf{O}(E)$ *est isomorphe à* $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, *et si* $\varphi \in \mathbf{O}(E)$, *on a :* $\det(\varphi) \in \mu_2$.

Démonstration :

La matrice $\mathscr{S}_{\mathscr{B}}$ est en effet I_n et (11) se réduit à ${}^tMM = I_n$. Les dernières assertions du corollaire proviennent du fait qu'il existe au moins une base orthonormale dans E, et des propriétés déjà vues du groupe $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. ■

L'application $\mathbf{O}(E) \longrightarrow \mu_2$, $\varphi \mapsto \det(\varphi)$ est un homomorphisme de groupes surjectif, dont le noyau est isomorphe à $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$.

DÉFINITION II.4.3

Le sous-groupe de $\mathbf{O}(E)$ *formé des* $\varphi \in \mathbf{O}(E)$ *de déterminant* 1 *s'appelle* ***groupe spécial orthogonal de E*** *(ou :* ***groupe spécial euclidien*** *de E, ou encore :* ***groupe des rotations de E****) et se note* $\mathbf{SO}(E)$.

D'après le corollaire 1 ci-dessus, compte tenu de l'*existence* de bases orthonormales dans E, on a immédiatement :

PROPOSITION II.4.2

Pour toute base ***orthonormale*** $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de E, l'application* $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ *définit un* ***isomorphisme*** *du groupe* $\mathbf{SO}(E)$ *sur le groupe* $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. *En conséquence,* $\mathbf{SO}(E)$ *est un sous-groupe distingué, d'indice* 2, *de* $\mathbf{O}(E)$.

Le théorème II.4.2 entraîne immédiatement :

THÉORÈME II.4.4

Les groupes $\mathbf{O}(E)$ *et* $\mathbf{SO}(E)$ *sont* ***compacts.***

Lorsque $n(= \dim(E)) = 1$, on a : $\mathbf{O}(E) = \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$ et $\mathbf{SO}(E) = \{\mathrm{Id}_E\}$.

Lorsque $n = 2$, la situation est remarquable :

THÉORÈME II.4.5

Supposons $\dim(E) = 2$. *Alors le groupe* $\mathbf{SO}(E)$ *est* ***abélien,*** *isomorphe à* $\mathbb{U}$. *Et l'ensemble* $\mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$ *est formé des involutions orthogonales du type* $\mathrm{Id}_D \oplus (-\mathrm{Id}_\Delta)$, *où* D *et* Δ *sont deux droites vectorielles de E telles que* $D \overset{\perp}{\oplus} \Delta = E$.

Démonstration :

L'assertion sur $\mathbf{SO}(E)$ découle immédiatement du théorème II.4.3. Il est clair que si D et Δ sont deux droites vectorielles de E

telles que $D \oplus \Delta = E$, l'involution orthogonale $\gamma = \mathrm{Id}_D \oplus (-\mathrm{Id}_\Delta)$ est de déterminant -1, donc élément de $\mathbf{O}(E) \backslash \mathbf{SO}(E)$. Réciproquement si $\varphi \in \mathbf{O}(E) \backslash \mathbf{SO}(E)$, on a $\chi_\varphi(X) = X^2 - 1$ (prendre la matrice de φ dans une base orthogonale quelconque), donc φ est une involution de la forme $\varphi = \mathrm{Id}_D \oplus (-\mathrm{Id}_\Delta)$, avec D et Δ droites vectorielles supplémentaires dans E. Mais comme $\varphi \in \mathbf{O}(E)$, d'après la proposition II.2.2, on a : $D \oplus \Delta = E$. ■

Lorsque $n = \dim(E) = 2$, pour $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, le scalaire $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\varphi)$ se notera $\mathbf{Cos}(\varphi)$: on a donc alors $\chi_\varphi(X) = X^2 - 2X\,\mathbf{Cos}(\varphi) + 1$.

Action du groupe orthogonal sur les bases orthonormales

Reprenons un espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$, de dimension $n \geqslant 1$. Nous noterons $\mathbf{B}_{\mathrm{o.n.}}$ l'ensemble des suites $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ qui sont des bases orthonormales de E.

THÉORÈME II.4.6

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{B}_{\mathrm{o.n.}}$ et, pour tout endomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, soit $\mathscr{B}_\varphi = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \in E^n$. L'application $\varphi \mapsto \mathscr{B}_\varphi$ définit une **bijection** *de $\mathbf{O}(E)$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{o.n.}}$.*
En conséquence, soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in E^n$, de matrice M dans la base $\mathscr{B}$. On a : $\mathscr{C} \in \mathbf{B}_{\mathrm{o.n.}}$ ssi $M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration :

Le fait que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \longrightarrow E^n$, $\varphi \mapsto \mathscr{B}_\varphi$ est bijective est bien connu (cf. tome 1, théorème VI.3.2). Si de plus $\varphi \in \mathbf{O}(E)$, la conservation du produit scalaire prouve que $\mathscr{B}_\varphi \in \mathbf{B}_{\mathrm{o.n.}}$. Réciproquement si $\mathscr{B}_\varphi \in \mathbf{B}_{\mathrm{o.n.}}$, pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$, on a :

$$(\varphi(x) \,|\, \varphi(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j) \right) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} x_i y_j (\varphi(e_i) \,|\, \varphi(e_j))$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = \text{symbole de Kronecker})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x \,|\, y),$$

d'où $\varphi \in \mathbf{O}(E)$, ce qui achève d'établir la première assertion. Pour la seconde, introduisons l'endomorphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u(e_i) = \varepsilon_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = M$. Alors $\mathscr{C} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$ ssi $u \in \mathbf{O}(E)$, ce qui d'après le corollaire de la proposition II.4.1 équivaut à : $M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. ■

Pour étudier l'action du groupe $\mathbf{SO}(E)$ sur $\mathbf{B}_{\text{o.n.}}$, nous avons besoin de la notion d'**orientation** d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Soit donc V un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $N \geqslant 1$. L'application déterminant, $\det : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, est un homomorphisme de groupes ; l'image réciproque du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ par cet homomorphisme est donc un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, noté $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+(V)$, et il est clair que $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+(V) \lhd \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, avec l'indice 2, car il existe du moins un automorphisme de V de déterminant < 0 (prendre par exemple une symétrie pour un hyperplan H de V).

Soit $\mathbf{B}$ l'ensemble des suites $(e_1, \ldots, e_n) \in V^n$ qui sont des **bases** de V. Le théorème VI.3.2 du tome 1 montre que si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{B}$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbf{B}$, il y a un et un seul élément $\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$ tel que $\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(e_i) = \varepsilon_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et on a : $\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$. Pour $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ dans $\mathbf{B}$, il est clair que $\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = \varphi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} \circ \varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$, d'où $\det(\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{D}}) = \det(\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}) \times \det(\varphi_{\mathscr{C},\mathscr{D}})$. On en déduit que la relation binaire définie sur $\mathbf{B}$ par $\det(\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}) > 0$ est une **relation d'équivalence.** Et comme $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+(V)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, pour cette relation d'équivalence **il y a exactement deux classes.** Par définition, ces deux classes sont appelées les **classes d'orientation** de $\mathbf{B}$ (ou : de V).

Deux bases $\mathscr{B} \in \mathbf{B}$ et $\mathscr{C} \in \mathbf{B}$ sont dites **de même sens** ssi elles sont dans la même classe, **de sens contraire** sinon. Pour que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ soient de même sens, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{C}$ soit > 0.

Par définition, **orienter** V, c'est choisir l'une des classes d'orientation de $\mathbf{B}$ comme ensemble des bases ordonnées **directes** de V, les autres bases étant alors dites **indirectes** (ou **rétrogrades**). Il y a exactement deux orientations possibles de V.

Cela dit, revenons à l'espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$, soit $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ les classes d'orientation de E, et $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$ l'ensemble des bases ordonnées de E.

Pour $\mathscr{B} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$ et $\mathscr{C} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$, d'après le théorème II.4.6, on a : $\det(\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})) \in \mu_2$. Donc $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont de même sens ssi $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})) = +1$, c'est-à-dire ssi $\varphi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \in \mathbf{SO}(E)$, d'où :

THÉORÈME II.4.7

Soit $\mathscr{B} \in \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$. L'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \longrightarrow E^n$, $\varphi \mapsto \mathscr{B}_\varphi$ définit une bijection de $\mathbf{SO}(E)$ sur l'ensemble $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_{\text{o.n.}} = \mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)}$ et une bijection de $\mathbf{O}(E) \backslash \mathbf{SO}(E)$ sur l'ensemble $\mathbf{B}_2 \cap \mathbf{B}_{\text{o.n.}} = \mathbf{B}_{\text{o.n.}(2)}$.

Il y a d'importantes simplifications dans le cas où $n = \dim(E) = 2$. En conservant les notations ci-dessus et en notant, pour chaque $\mathscr{B} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$, $\Psi_{\mathscr{B}}$ l'isomorphisme de groupes $\mathbf{SO}(E) \longrightarrow \mathbf{SO}(2, n)$, $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, on a :

THÉORÈME II.4.8

Pour $n = 2$, les isomorphismes $(\Psi_{\mathscr{B}})_{\mathscr{B} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}(i)}}$ sont tous égaux à un même isomorphisme Θ_i ($i \in \{1,2\}$). Pour tout $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, on a : $\Theta_1(\varphi)\,\Theta_2(\varphi) = I_2$, i.e. $\Theta_2(\varphi) = (\Theta_1(\varphi))^{-1} = {}^t\Theta_1(\varphi)$.

Démonstration :

Soit $\mathscr{B} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}(i)}$ et $\mathscr{B}' \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}(i)}$ pour un certain $i \in \{1, 2\}$, et soit M la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$. D'où $M \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$. Pour $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$ on sait que $\Psi_{\mathscr{B}'}(\varphi) = M^{-1}\,\Psi_{\mathscr{B}}(\varphi)\,M$. Mais comme $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ est abélien, cela s'écrit $\Psi_{\mathscr{B}'}(\varphi) = M^{-1}M\Psi_{\mathscr{B}}(\varphi) = \Psi_{\mathscr{B}}(\varphi)$, d'où la première assertion.

Soit maintenant $\mathscr{B} = (e_1, e_2) \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)}$. *Alors* $\mathscr{B}' = (e_1, -e_2) \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}(2)}$ et, pour $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, il est immédiat de vérifier que $\Psi_{\mathscr{B}'}(\varphi) = {}^t\Psi_{\mathscr{B}}(\varphi)$; d'où $\Theta_2(\varphi) = {}^t\Theta_1(\varphi)$. ■

Orientons maintenant le plan euclidien E, par exemple de façon que $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)}$ soit l'ensemble des bases orthonormales directes. On peut alors définir, pour chaque $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, le scalaire $\mathbf{Sin}(\varphi)$ (comme étant $\mathbf{Sin}(\Theta_1(\varphi))$, de sorte que $\Theta_1(\varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{Cos}(\varphi) & -\mathbf{Sin}(\varphi) \\ \mathbf{Sin}(\varphi) & \mathbf{Cos}(\varphi) \end{bmatrix}$.

Tout réel θ tel que $\mathbf{Cos}(\varphi) = \mathbf{cos}\,\theta$ et $\mathbf{Sin}(\varphi) = \mathbf{sin}\,\theta$ est alors appelé **une détermination de l'angle orienté de la rotation** φ dans le **plan euclidien orienté** $(E, \mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)})$.

Les déterminations ainsi définies forment une classe de $\mathbb{R}$ mod $(2\pi\mathbb{Z})$. Si on change l'orientation de E, la fonction **Sin** se change en $-$ **Sin**, et si γ est l'ensemble des déterminations de l'angle orienté de $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, dans l'ancienne orientation, il se change en $-\gamma = \{-\theta\}_{\theta \in \gamma}$ après changement d'orientation.

Action de $\mathbf{O}(E)$ et $\mathbf{SO}(E)$ sur les sous-$\mathbb{R}$-ev de E

Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, avec ses deux classes d'orientation de bases orthonormales $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)}$ et $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(2)}$. Pour $p \in [\![0, n]\!]$ désignons par $\mathscr{G}_p(E)$ l'ensemble des sous-$\mathbb{R}$-ev de E de dimension p.

PROPOSITION II.4.3

Pour $p \in [\![1, n-1]\!]$, soit $V \in \mathscr{G}_p(E)$ et $V' \in \mathscr{G}_p(E)$. Il existe $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$ (resp. $\varphi \in \mathbf{O}(E) \backslash \mathbf{SO}(E)$) tel que $\varphi(V) = V'$.

Démonstration :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n) \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$ telles que $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ soient des bases respectivement pour V et V' (cf. proposition II.3.1). Alors $\mathscr{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_n) = (e'_1, \ldots, e'_{n-1}, -e'_n)$ est une base orthonormale de E de sens contraire à celui de $\mathscr{B}'$. Soit $\varphi' \in \mathbf{O}(E)$ (resp. $\varphi'' \in \mathbf{O}(E)$) tel que $\varphi'(e_i) = e'_i$ (resp. $\varphi''(e_i) = e''_i$) pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\varphi'(V) = \varphi''(V) = V'$; et par ce qui précède $\det(\varphi'') = -\det(\varphi')$. Donc φ' et φ'' appartient l'un à $\mathbf{SO}(E)$, l'autre à $\mathbf{O}(E) \backslash \mathbf{SO}(E)$. ■

Les propriétés suivantes seront souvent utilisées par la suite :

PROPOSITION II.4.4.

(I) *Soit V un sous-$\mathbb{R}$-ev de E et $\varphi \in \mathbf{O}(E)$ tel que $\varphi(V) = V$. Alors $\varphi\|_V \in \mathbf{O}(V)$ et $\varphi(V^\perp) = V^\perp$.*
(II) *Inversement, soit V et W deux sous-$\mathbb{R}$-ev de E tels que $E = V \oplus W$. Pour tous $v \in \mathbf{O}(V)$ et $w \in \mathbf{O}(W)$ (resp. $v \in \mathbf{SO}(V)$ et $w \in \mathbf{SO}(W)$), on a : $v \oplus w \in \mathbf{O}(E)$ (resp. $v \oplus w \in \mathbf{SO}(E)$.*

Démonstration :

Pour le (I) $\varphi\|_V \in \mathbf{O}(V)$ à cause de la conservation du produit scalaire. Et si $z \in V^\perp$, pour $y \in V$, l'élément $x = \varphi^{-1}(y)$ est dans V, et on a : $(y \mid \varphi(z)) = (\varphi(x) \mid \varphi(z)) = (x \mid z) = 0$. Donc $\varphi(z) \in V^\perp$. Pour le (II) la vérification facile est laissée au lecteur. ■

Orthonormalisée d'une base et matrices orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, dont nous notons $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique.

Donnons-nous une matrice inversible $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ qui a pour matrice M dans $\mathscr{C}$. Notons $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ l'orthonormalisée de $\mathscr{B}$. On sait déjà que $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{E})$ est orthogonale, et il est clair que la matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{B})$ est trigonale supérieure, à éléments diagonaux > 0. Par transitivité des matrices de passage, on a : $M = T\Omega$. Réciproquement une décomposition $M = T'\,\Omega'$, avec T' trigonale supérieure à éléments diagonaux > 0 et $\Omega' \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, permet en remontant le calcul précédent de réaliser l'orthonormalisation de $\mathscr{B}$, et comme l'orthonormalisée est unique, il en résulte $T' = T$ et $\Omega' = \Omega$.

En résumé, *toute matrice* $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *s'écrit de façon unique* $M = T\Omega$, *avec* T *trigonale supérieure à éléments diagonaux* > 0 *et* $\Omega \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. De plus, d'après la remarque 1 du § II.3, *l'application* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, $M \mapsto \Omega$ *est continue.*

En transposant, on voit que *toute matrice* $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *s'écrit de façon unique* $M = \Omega' T'$, *avec* $\Omega' \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ *et* T' *trigonale inférieure à éléments diagonaux* > 0, *l'application* $M \mapsto \Omega'$ *étant continue.*

Connexité de SO(*E*)

Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Il est facile de voir que *le groupe* $\mathrm{GL}^+_{\mathbb{R}}(E)$ *est connexe par arcs* car cela revient à prouver que le groupe $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ des matrices $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ à déterminant > 0 est connexe par arcs. Or, si $M \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, on peut la décomposer sous la forme $M = DT_1 T_2 \dots T_r$, où $D = \mathrm{Diag}\,(1, \dots, 1, \lambda)$ et où, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, T_i est une matrice de transvection, i.e. du type $T_i = I_n + \lambda_i E_{\alpha_i, \beta_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \beta_i$ ($(E_{k,l})$ désignant la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$) (cf. tome 1, théorème XI.5.1). On a : $\lambda = \det(M)$. Pour $t \in [0, 1]$, soit $D(t) = \mathrm{Diag}\,(1, \dots, 1, 1 + t(\lambda - 1))$ et $T_i(t) = I_n + t\lambda_i E_{\alpha_i, \beta_i}$. Posons $M(t) = D(t)\, T_1(t) \dots T_r(t)$. On a $\det(M(t)) = \det(D(t)) = 1 + t(\lambda - 1) > 0$, car $\lambda > 0$. Donc $M(t) \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Comme il est clair que l'application $t \mapsto M(t)$ est continue, que $M(0) = I_n$ et que $M(1) = M$, on voit que l'on peut joindre I_n à M par un chemin continu à valeurs dans $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, ce qui prouve bien que $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs.

A partir de là, on obtient sans peine :

THÉORÈME II.4.9

|| *Le groupe* $\mathbf{SO}(E)$ *est* ***connexe par arcs.***

Démonstration :

Le groupe $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Soit $\omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. Il existe un chemin continu $M : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, $t \mapsto M(t)$ tel que $M(0) = I_n$ et $M(1) = \omega$. Pour $t \in [0, 1]$, décomposons $M(t)$ sous la forme $M(t) = T(t)\,\Omega(t)$, où $T(t)$ est trigonale supérieure à éléments diagonaux > 0, et où $\Omega(t) \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. On a donc : $\Omega(0) = I_n$, $\Omega(1) = \omega$.

Puisque $\det(M(t)) > 0$ et $\det(T(t)) > 0$, il en résulte $\det(\Omega(t)) > 0$, d'où $\Omega(t) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. Mais nous avons vu qu'en associant à toute matrice $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ la matrice R du couple (U, R) tel que $UR = A$, avec U trigonale supérieure à éléments diagonaux > 0 et $R \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, on a une application *continue* $g : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. Donc $t \mapsto \Omega(t) = g(M(t))$ est fonction continue de $t \in [0, 1]$. On a donc pu joindre I_n à ω par un chemin continu à valeurs dans $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ et le théorème II.4.9 en résulte. ■

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ trigonales supérieures à éléments diagonaux > 0. Vérifier que $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{R})$ est *un ouvert* de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{T}_{+}(n, \mathbb{R})$ des matrices $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ trigonales supérieures. De même $\mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{T}_{-}(n, \mathbb{R})$. Montrer que l'application $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,

$(T, \Omega) \mapsto T\Omega$ est un *homéomorphisme* et que l'application $\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \times \mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $(\Omega', T') \mapsto \Omega' T'$ est un homéomorphisme.

Par restriction, cela donne des homéomorphismes $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ et $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) \times \mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes entre elles, qui sont $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \backslash \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Exercice 3 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On reprend les notations $\mathbf{B}_{\text{o.n.}}$, $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)}$ et $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(2)}$ du théorème II.4.7. Montrer que ces trois ensembles sont des parties compactes de E^n, et que $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(1)}$ et $\mathbf{B}_{\text{o.n.}(2)}$ sont les composantes connexes de $\mathbf{B}_{\text{o.n.}}$ (si l'on ne veut pas utiliser le théorème II.4.9, on pourra raisonner directement, par récurrence sur n).

Exercice 4 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Trouver tous les couples d'involutions orthogonales u et v de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Trouver l'ensemble $\{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \mid \forall u \in \mathbf{SO}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$. (Attention au cas $n = 2$.)

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{R}^*$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $g(\theta) = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (on reconnaît $g(\theta) = \dfrac{1}{n+1} U_n(\cos\theta)$, où U_n est le polynôme de Tchebytchev de seconde espèce d'ordre n).

a) Prouver que si $z = e^{i\theta}$, on a : $U_n(\cos\theta) = e^{-in\theta}(1 + z^2 + \cdots + z^{2n})$ et en déduire : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} g\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{n+1}\right) g\left(\frac{\nu\pi}{n+1} - \beta\right) = g(\alpha - \beta)$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, on pose $S_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Si $\alpha \neq 0$, on définit $S_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1})$ par $S_\alpha : (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \mapsto (y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, où $(\forall p \in [\![0, n]\!])$

$$y_p = \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^{n} \frac{\sin\alpha\pi}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}(p - q + \alpha)\right)} x_q.$$

Montrer : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)\ S_\alpha \circ S_\beta = S_{\alpha+\beta}$.

Prouver enfin que, pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, chaque S_α est *orthogonal*.

c) Montrer : $\exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid (\forall\alpha \in \mathbb{R})\ S_\alpha = \exp(\alpha f)$. Calculer f.

(d'après *POLYÁ-SZEGÖ*, cf. [27])

Exercice 7 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On donne $u \in \mathbf{O}(E)$ et $v = \mathrm{Id}_E - u$.

a) Prouver $E = \mathrm{Ker}(v) \perp\!\!\!\oplus \mathrm{Im}(v)$.

b) Soit ϖ la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Ker}(v)$. Prouver :

$$\frac{1}{k} \sum_{q=0}^{k} u^q \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \varpi.$$

Exercice 8 : On donne $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des normes ν du $\mathbb{R}$-ev $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall\Omega \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, $\nu(\Omega M) = \nu(M)$.

a) Soit $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On identifie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ à l'aide de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit ν la norme $|\!|\!|\ .\ |\!|\!|$ associée sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à la norme de $\mathbb{R}^n$. Montrer : $\nu \in \mathscr{N}$.

b) Soit $\nu \in \mathscr{N}$. Montrer que la distance d de I_n à $\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \backslash \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est atteinte et que $d > 0$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \backslash \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ telles que $\nu(I_n - B) = d$.

Exercice 9 : *a*) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $\exp(\theta J)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \text{Asym}\,(n, \mathbb{R})$ une matrice antisymétrique d'ordre n sur $\mathbb{R}$. Démontrer : $\exp(A) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. L'application $\text{Asym}\,(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto \exp(A)$ est-elle injective ?

c) Utiliser le théorème d'inversion locale (cf. tome 3, théorème VI.2.1) pour montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un voisinage ouvert V de I_n dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ tels que $\exp : U \longrightarrow V$, $M \mapsto \exp(M)$ soit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme ; et prouver que ce $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme transforme $\text{Asym}\,(n, \mathbb{R}) \cap U$ en $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) \cap V$ pourvu que u et v soient assez petits.

d) En utilisant des *translations* de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ du type $\tau_S : M \mapsto MS$ (où $S \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$), déduire de *c*) que $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est une *sous-variété* de classe $\mathscr{C}^\infty$ (cf. définition VI.3.1 du tome 3) et de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

N.B. On verra plus loin (exercice 2, § III.1) que $\exp : \text{Asym}\,(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est surjective.

Exercice 10 (*paramétrisation de Cayley de certains ouverts relatifs de* $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$).

On donne $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $A \in \text{Asym}\,(n, \mathbb{R})$. Vérifier que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles. Prouver que $\Omega = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, que $\Omega + I_n$ est inversible et que $A = (I_n + \Omega)^{-1}(I_n - \Omega) = (I_n - \Omega)(I_n + \Omega)^{-1}$.

b) Réciproquement, soit $\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ telle que $I_n + \Omega \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Prouver que $A = (I_n + \Omega)^{-1}(I_n - \Omega) \in \text{Asym}\,(n, \mathbb{R})$ et que $\Omega = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

c) Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble $\{(I_n - A)(I_n + A)^{-1}\}_{A \in \text{Asym}\,(n, \mathbb{R})}$. Montrer que, relativement à $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, l'ensemble $\mathscr{U}$ est une partie ouverte, dense et connexe, et que l'application (dite de Cayley) $\text{Asym}\,(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{U}$, $A \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est un *plongement* (cf. tome 3, définition VI.3.3).

Exercice 11 : Soit E un plan euclidien ($\dim(E) = 2$) et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que $\mathbf{SO}(E)$ possède un et un seul sous-groupe G_n de cardinal n, et que G_n est cyclique.

b) Pour toute droite droite vectorielle Δ, soit s_Δ l'involution orthogonale $\text{Id}_\Delta \oplus (-\text{Id}_{\Delta^\perp})$. Pour Δ donnée, montrer que G_n et s_Δ engendrent un sous-groupe $D_{n,\Delta}$ de $\mathbf{O}(E)$ qui est de cardinal $2n$. Si $A \in \Delta \setminus \{0_E\}$, la $D_{n,\Delta}$-orbite de A est aussi sa G_n-orbite : c'est un *polygone régulier* de centre 0_E à n sommets, que nous noterons $\text{Orb}\,(A)$. Prouver que $D_{n,\Delta}$ est le groupe des $\varphi \in \mathbf{O}(E)$ tels que $\varphi(\text{Orb}\,(A)) = \text{Orb}\,(A)$, et prouver que $G_n = D_{n,\Delta} \cap \mathbf{SO}(E)$.

Quels sont les polygones réguliers P de centre 0_E tels que $D_{n,\Delta} = \{\varphi \in \mathbf{O}(E) \mid \varphi(P) = P\}$?

Si $M \in E \setminus \{0_E\}$, déterminer la G_n-orbite et la $D_{n,\Delta}$-orbite de M ; pour quels M la $D_{n,\Delta}$-orbite est-elle un polygone régulier ?

c) Trouver tous les sous-groupes finis Γ de $\mathbf{O}(E)$ tels que $\Gamma \cap \mathbf{SO}(E) = G_n$.

d) On considère l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; soit D_n le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ engendré par la *translation* $\tau : x \mapsto x + \bar{1}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la *symétrie centrale* $\sigma : x \mapsto -x$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Montrer que $\text{card}\,(D_n) = 2n$ et que D_n est isomorphe à chacun des groupes $D_{n,\Delta}$ du *a*) (D_n s'appelle le *groupe diédral* d'ordre n). Soit $C_n = \text{Gr}\,(\tau)$: vérifier que $C_n \lhd D_n$ et donner les sous-groupes de D_n.

Exercice 12 : Soit E un plan euclidien. On reprend les notations de l'exercice 11. On considère deux entiers $n \geqslant 1$ et $n' \geqslant 1$ et deux droites vectorielles Δ et Δ' de E. Trouver $D_{n,\Delta} \cap D_{n,\Delta'}$ et trouver le groupe engendré par $D_{n,\Delta} \cup D_{n,\Delta'}$. Généraliser à un nombre fini $(n_1, \Delta_1), \ldots, (n_k, \Delta_k)$ d'éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathscr{G}_1(E)$.

§ II.5 *PRODUIT MIXTE ET PRODUIT VECTORIEL*

Dans ce §, on considère un espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$ de dimension $n \geqslant 1$ et *orienté*. On note $\mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$ (resp. $\mathbf{B}^-_{\text{o.n.}}$) l'ensemble des bases ordonnées orthonormales directes (resp. rétrogrades) de E.

Produit mixte

LEMME 1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$. *La fonction* $\det_{\mathscr{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ *ne dépend pas du choix de* $\mathscr{B}$.

Démonstration :

Considérons deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$. La matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ appartient alors à $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, donc $\det(M) = 1$. Or, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on a : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(M) \times \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$ (cf. tome 1, théorème XIII.3.1 : formule de Chasles pour les déterminants de n vecteurs), d'où $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$. ■

Remarque 1 : On voit de même que si $\mathscr{B} \in \mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$ et $\mathscr{B}' \in \mathbf{B}^-_{\text{o.n.}}$, les fonctions $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$ sont *opposées* et indépendantes du choix de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

DÉFINITION II.5.1

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. *On appelle* ***produit mixte*** *de* $x_1, \ldots, x_n$ *pris dans cet ordre, et nous noterons* $[x_1, \ldots, x_n]$, *le scalaire égal à* $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ *pour toute base* $\mathscr{B} \in \mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$.

Les propriétés des déterminants montrent que le produit mixte $E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1, \ldots, x_n]$ est une application ***n*-linéaire et alternée sur *E*.** D'après la remarque 1, un changement d'orientation de E change cette fonction en son *opposée*.

Pour toute $\mathscr{B} \in \mathbf{B}^-_{\text{o.n.}}$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on a : $[x_1, \ldots, x_n] = -\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Interprétation du produit mixte

Considérons deux bases orthonormales quelconques $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E. On peut leur associer respectivement les intégrales $\displaystyle\int_E^{\mathscr{B}} f$ et $\displaystyle\int_E^{\mathscr{B}'} f$ pour

les fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact et bornées intégrables (cf. tome 3, § VII.6). Puisque $|\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')| = 1$, ces intégrales coïncident. On convient alors, sur l'espace euclidien E, de privilégier cette intégrale en la notant plus simplement $\int_E f$. On a vu au tome 3 (cf. § VII.6 : invariance affine de l'intégrale) que pour tout repère affine $\mathscr{R}$ de E, de vecteurs de base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a :

$$\int_E^{\mathscr{R}'} = \rho^{-1} \int_E, \quad \text{avec} \quad \rho = |[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]| .$$

La convention ci-dessus revient donc à choisir pour « unité de volume n-dimensionnel géométrique » sur E n'importe quel parallélotope engendré par une base orthonormale.

Dans ces conditions, pour toute suite $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, le scalaire $|[x_1, \ldots, x_n]|$ représente le **volume n-dimensionnel du parallélotope construit sur $(x_1, \ldots, x_n)$**. Quant au produit mixte $[x_1, \ldots, x_n]$, c'est le volume précédent affecté du signe + ssi $(x_1, \ldots, x_n)$ est une **base directe** de E et du signe − ssi $(x_1, \ldots, x_n)$ est une **base rétrograde** de E. Il est nul ssi $x_1, \ldots, x_n$ sont **liés**. Nous dirons que $[x_1, \ldots, x_n]$ est le *volume n-dimensionnel algébrique* du parallélotope construit sur $(x_1, \ldots, x_n)$, le signe rendant compte de l'*orientation* de la suite $(x_1, \ldots, x_n)$.

Produit vectoriel

On suppose maintenant $n \geqslant 2$. Pour $(x_1, \ldots, x_n)$ fixé dans E^{n-1}, l'application $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto [x_1, \ldots, x_{n-1}, x]$ est linéaire. D'après le corollaire 1 du théorème II.2.3 il existe donc un vecteur $v \in E$ bien déterminé, ne dépendant que de la suite $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ tel que cette application soit de la forme $x \mapsto (v \mid x)$.

DÉFINITION II.5.2

Si $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E^{n-1}$, on appelle **produit vectoriel** *de cette suite l'unique vecteur $v \in E$ tel que $(\forall x \in E)\ [x_1, \ldots, x_{n-1}, x] = (v \mid x)$. Nous noterons $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ ce vecteur v.*

Remarque 1 : Cette notation peut être trompeuse : en fait il ne s'agit pas de l'itération d'une quelconque loi de composition sur E mais d'un *symbole fonctionnel* défini sur E^{n-1}. Ce n'est que pour $n = 3$ qu'on a affaire à une véritable loi de composition interne sur E (1).

(1) Pour $n = 3$ le produit vectoriel $x_1 \wedge x_2$ est souvent noté $x_1 \times x_2$.

Remarque 2 : Pour $n = 2$, le produit vectoriel est une application de E dans E que nous noterons $\wedge$, en plaçant le symbole *à gauche* de la variable : $E \longrightarrow E$, $x \mapsto \wedge x$. Il s'agit en fait d'une rotation de $+\pi/2$ (cf. remarque 4).

Remarque 3 : Si on change l'orientation de E, la fonction produit vectoriel se change en son *opposée*.

Du fait que le produit mixte est multilinéaire alterné sur E^n, on déduit aussitôt que **le produit vectoriel** $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ **est une application** $(n-1)$**-linéaire et alternée de** E^{n-1} **dans** E.

PROPOSITION II.5.1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E^{n-1}$ *et* $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = [x_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}$.

Formons la matrice carrée $N = [[M]\, Y]$, *où* Y *est le vecteur colonne générique, de coordonnées* $(y_1, \ldots, y_n)$, *de* $\mathbb{R}^n$. *Alors* $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} A_i\, e_i$, *où* $A_1, \ldots, A_n$ *sont respectivement les* ***cofacteurs*** *de* $y_1, \ldots, y_n$ *dans* N.

Démonstration :

Soit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$. On a : $[x_1, \ldots, x_{n-1}, y] = \det(N)$. En développant suivant la dernière colonne : $\det(N) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\, e_i \,|\, y\right)$, et c'est vrai $\forall y$, d'où $\sum_{i=1}^{n} A_i\, e_i = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$. ■

Remarque 4 : En particulier si $n = 2$, on a : $\wedge(a_1 e_1 + a_2 e_2) = -a_2 e_1 + a_1 e_2$ pour toute base $(e_1, e_2) \in \mathbf{B}^+_{\text{o.n.}}$. On voit que, pour $x \in E \setminus \{0\}$, $\wedge x$ est l'unique vecteur $y \in E$ tel que $\|x\| = \|y\|$, que $x \perp y$ et que la base (x, y) soit *directe*.

Pour $n = 3$, le lecteur vérifiera sans difficulté la formule suivante, dite du **double produit vectoriel**

$$(1) \qquad (\forall (x, y, z) \in E^3) \quad \boxed{x \wedge (y \wedge z) = (x \,|\, z)\, y - (x \,|\, y)\, z}\,.$$

On en déduit aussitôt *l'identité de Jacobi :*

$$(2) \qquad x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0\,.$$

Signalons aussi *l'identité de Lagrange*

$$(3) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad \|x \wedge y\|^2 + |(x \mid y)|^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2 .$$

Enfin, toujours pour $n = 3$, on obtient facilement :

$$(4) \qquad (\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E^4) \quad (x_1 \wedge x_2 | x_3 \wedge x_4) = \begin{vmatrix} (x_1 | x_3) & (x_2 | x_3) \\ (x_1 | x_4) & (x_2 | x_4) \end{vmatrix} .$$

(Il suffit d'exploiter (1) et le fait que $(x_1 \wedge x_2 | x_3 \wedge x_4) = [x_1, x_2, x_3 \wedge x_4] = [x_3 \wedge x_4, x_1, x_2] = ((x_3 \wedge x_4) \wedge x_1 | x_2)$.)

Exercice 1 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$. Montrer que $(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n) \; |[x_1, \ldots, x_n]| \leqslant \|x_1\| \times \|x_2\| \times \cdots \times \|x_n\|$, et que, lorsque les x_i sont tous $\neq 0$, l'égalité a lieu ssi les (x_i) forment une base *orthogonale* de E (*inégalité de Hadamard*).

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$. Démontrer :

$$(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n) \quad |[x_1, \ldots, x_n]|^2 = \det ([x_i | x_j]_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2}) = G(x_1, \ldots, x_n) ,$$

avec la notation des *déterminants de Gram* (cf. la fin du § II.3). Interpréter alors le théorème II.3.5 en termes de volumes.

Exercice 3 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 2$. On donne $x_1, \ldots, x_{n-1}$, éléments de E linéairement indépendants. On note $H = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $v = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$.

a) Vérifier que $v \in H^\perp$.

b) On oriente H. Vérifier qu'il existe $\vec{v} \in H^\perp$ unique tel que $\|\vec{v}\| = 1$ et que, pour toute base orthonormale directe $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H, la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, \vec{v})$ est directe.

Prouver alors : $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = [x_1, \ldots, x_{n-1}] \, \vec{v}$, en désignant par $[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ le produit mixte des x_i dans l'espace euclidien orienté H.

c) Déduire de *b*) et de l'exercice 2 ci-dessus :

$$(\forall (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E^{n-1}) \; G(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\|^2 .$$

Pour $n = 3$, retrouver ainsi l'identité de Lagrange (2).

Exercice 4 (*Une généralisation du théorème de Pythagore*) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. On donne $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Pour toute partie $J \subset [\![1, n]\!]$, soit ϖ_J la projection orthogonale de E sur $V_J = \mathrm{Vect}\,((e_i)_{i \in J})$. Montrer :

$$G(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{J \subset [\![1, n]\!], \, \mathrm{card}\,(J) = p} G(\varpi_J(x_1), \ldots, \varpi_J(x_p)) .$$

(Cf. l'exercice 23 du § XIII.5 du tome 1).

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Pour $(x, y, z) \in E^3$, prouver :

$$[y \wedge z, z \wedge x, x \wedge y] = ([x, y, z])^2 ; \quad \text{et :}$$
$$(x \wedge y) \wedge (x \wedge z) = [x, y, z] \, x .$$

Exercice 6 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On donne $a \in E$ et $b \in E$ $(a \neq 0_E)$. Prouver que l'équation à l'inconnue $x \in E : a \wedge x = b$ admet des solutions ssi $(a \mid b) = 0$.

Cette condition étant réalisée, montrer que l'ensemble des solutions de $a \wedge x = b$ est $\left\{ \dfrac{1}{\|a\|^2} b \wedge a + \lambda a \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Exercice 7 : Soit $(E, (. \mid .))$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

a) Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une suite libre dans E. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, soit $\mathscr{V}_i = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_i)$ et ϖ_i la projection orthogonale de E sur $\mathscr{V}_i$. Soit enfin $v_1 = x_1$ et $v_{i+1} = x_{i+1} - \varpi_i(x_{i+1})$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Prouver qu'il existe des réels $\theta_i \in [0, \pi/2]$ *uniques* $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ tels que $\cos \theta_i = \dfrac{(x_{i+1} \mid v_{i+1})}{\|x_{i+1}\| \, \|v_{i+1}\|}$, et montrer :

$$G(x_1, \ldots, x_p) = \left(\prod_{i=1}^{p} \|x_i\| \right) \times \prod_{j=1}^{p-1} \cos^2 \theta_j .$$

Retrouver ainsi l'inégalité de Hadamard (cf. exercice 1).

b) Soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et $y = (y_1, \ldots, y_q) \in E^q ((p, q) \in [\![1, n]\!]^2)$. On note Gram (x, y) la matrice $[(x_i \mid y_j)]_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]}$ et $\Gamma(x, y)$ son déterminant. $\mathscr{B}$ désigne une base de Vect $(x_1, \ldots, x_p)$ et $\mathscr{C}$ une base de Vect $(y_1, \ldots, y_q)$.

*b*1) Prouver : Gram $(x, y) = {}^tP$ Gram $(\mathscr{B}, \mathscr{C})\, Q$, P et Q étant des matrices à préciser. Lorsque $p = q$ et que x ou y est lié, prouver que $\Gamma(x, y) = 0$.

*b*2) On suppose $p = q$, x et y étant tous deux des systèmes libres.

Soit $L_0 = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)$ et $M_0 = \text{Vect}\,(y_1, \ldots, y_p)$. Prouver par récurrence qu'il existe une base orthonormale $(b_1, \ldots, b_p)$ de L_0 et une base orthonormale $(c_1, \ldots, c_p)$ de M_0 et des sous-$\mathbb{R}$-ev $L_1, \ldots, L_{p-1}$ de L_0 et $M_1, \ldots, M_{p-1}$ de M_0 vérifiant les conditions suivantes :

(I) $b_1 \in L_0$, $c_1 \in M_0$ et $(b_1 \mid c_1) = \text{Max}\,\{(b \mid c) \mid (b, c) \in L_0 \times M_0 \text{ et } \|b\| = \|c\| = 1\}$;

(II) pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $L_i = L_{i-1} \cap \{b_i\}$ et $M_i = M_{i-1} \cap \{c_i\}^{\perp}$;

(III) pour $1 \leqslant i \leqslant p-2$, on a : $b_{i+1} \in L_i$, $c_{i+1} \in M_i$ et $(b_{i+1} \mid c_{i+1}) = \text{Max}\,\{(b \mid c) \mid (b, c) \in L_i \times M_i \text{ et } \|b\| = \|c\| = 1\}$.

Prouver en outre que dans cette construction on peut choisir b_p et c_p pour que (IV) $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_p) > 0$ et $\det_{\mathscr{C}}(y_1, \ldots, y_p) > 0$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant les bases trouvées.

*b*3) Montrer qu'alors, pour $i \neq j$, on a : $(b_i \mid c_j) = 0$.

Indication : Considérer la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(t) = \left(b_i \,\middle|\, \dfrac{c_i + tc_j}{\|c_i + tc_j\|} \right)$.

*b*4) Soit $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ (resp. $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$) les réels construits comme en *a*) à partir de $(x_1, \ldots, x_p)$ (resp. de $(y_1, \ldots, y_p)$). Montrer :

$$(1) \quad \begin{cases} \Gamma(x, y) = \sqrt{G(x_1, \ldots, x_p)\, G(y_1, \ldots, y_p)} \displaystyle\prod_{j=1}^{p} (b_j \mid c_j) \\ \qquad\quad = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p-1} \cos \theta_i \cos \eta_i \right) \displaystyle\prod_{j=1}^{p} (b_j \mid c_j) \|x_j\| \, \|y_j\| \text{, et} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} (b_1 \mid c_1) \geqslant (b_2 \mid c_2) \geqslant \cdots \geqslant (b_{p-1} \mid c_{p-1}) \geqslant 0 \\ (b_{p-1} \mid c_{p-1}) \geqslant (b_p \mid c_p) . \end{cases}$$

*b*5) Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, puis $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ deux couples de bases orthonormales de L_0 et M_0 construites pour que (I), (II), (III) et (IV) soient satisfaites. On pose $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_p)$, $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_p)$, $\mathscr{B}' = (b'_1, \ldots, b'_p)$ et $\mathscr{C}' = (c'_1, \ldots, c'_p)$. Prouver que si $(b_i \mid c_i) > (b_j \mid c_j)$ pour

tous (i, j) tels que $1 \leqslant i < j < p$, alors $\exists (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{-1, 1\}^p \left| \prod_{j=1}^{p} \varepsilon_j = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1, p]\!] \right.$ $b'_i = \varepsilon_i b_i$ et $c'_i = \varepsilon_i c_i$. Que dire dans le cas général ?

En déduire que les listes $((b_i \mid c_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $((b'_i \mid c'_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont égales à une même liste $(\lambda_i(L_0, M_0))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ ne dépendant que du couple (L_0, M_0).

c) Soit (L_0, M_0) et (L'_0, M'_0) deux couples de sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension p de E. On suppose qu'il existe $u \in \mathbf{O}(E)$ tel que $u(L_0) = L'_0$ et $u(M_0) = M'_0$. Vérifier que $\lambda_i(L_0, M_0) = \lambda_i(L'_0, M'_0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. La réciproque est-elle vraie ?

d) Avec les hypothèses et notations de *b*2), prouver :

$$\Gamma(x, y) = 0 \Leftrightarrow L_0 \cap M_0^{\perp} \neq \{0\} \ , \quad \text{et}$$

$$\operatorname{rg}(\operatorname{Gram}(x, y)) = p - \dim(L_0 \cap M_0^{\perp}) .$$

Exercice 8 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E. On note $H_k = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $H_0 = \{0\}$.

a) On pose $y_1 = x_1$; pour $1 \leqslant k \leqslant n$, soit y_k la projection orthogonale de x_k sur $H_{k-1}^{\perp}$. Avec la notation des déterminants de Gram (cf. fin du § II.3), démontrer ;

$$(\forall p \in [\![1, n-1]\!]) \quad G(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_p) \times \prod_{j=p+1}^{n} \|y_j\|^2 .$$

En déduire : $G(x_1, \ldots, X_n) \leqslant G(x_1, \ldots, x_p) \times \prod_{p+1 \leqslant j \leqslant n} \|x_j\|^2$ (généralisation de l'exercice 1 ci-dessus).

b) Démontrer que $\prod_{j=p+1}^{n} \|y_j\|^2 \leqslant G(x_{p+1}, \ldots, x_n)$, d'où l'inégalité plus fine :

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant G(x_1, \ldots, x_p) \times G(x_{p+1}, \ldots, x_n) .$$

Dans quel cas cette dernière inégalité est-elle une égalité ?

Chapitre III

ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

§ III.1 *GÉNÉRATIONS D'UN GROUPE EUCLIDIEN*

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Considérons des sous-$\mathbb{R}$-ev $F_1, \ldots, F_p$ de E et des applications linéaires $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Nous dirons qu'un endomorphisme u de E est *somme directe interne orthogonale* des u_i ssi on a : $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$ et $u = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i$, conditions que nous abrégerons en l'écriture suivante : $u = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i$.

LEMME 1

Soit V un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$. Si P est un diviseur non constant de $\chi_u(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \notin \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.

Démonstration :

Fixons une base quelconque de V et soit M la matrice de u dans cette base. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors dans $\mathbb{C}[X]$ on a : $P(X) = (X - \lambda)\, Q(X)$. Par hypothèse $P(X) \mid \chi_u(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il en résulte que λ est une valeur propre (complexe) de M, c'est-à-dire $\det(M - \lambda I_n) = 0$. D'où $\det(P(M)) = \det(M - \lambda I_n) \det(Q(M)) = 0$. Donc $P(M)$ est non inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 1 : En fait cette propriété purement algébrique reste vraie avec un corps commutatif quelconque K à la place de $\mathbb{R}$. On la déduit alors des résultats du tome 1, § XV.5.

Structure du groupe $\mathbf{O}(E)$

Remarquons d'abord que si $u \in \mathbf{O}(E)$, les seules valeurs propres *réelles* possibles de u sont 1 et -1. En effet, si $x \in E \setminus \{0\}$ est vecteur propre pour la valeur propre λ, on a :

$$\|u(x)\| = \|x\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \text{d'où} \quad |\lambda| = 1 .$$

THÉORÈME III.1.1

Soit $u \in \mathbf{O}(E)$. Notons $N_+ = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $N_- = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$. Alors u est ***somme directe interne orthogonale*** *de Id_{N_+}, de $-\mathrm{Id}_{N_-}$, et d'une famille finie (éventuellement vide) de rotations planes.*

Démonstration :

Pour $n = 1$, c'est évident car $\mathbf{O}(E) = \{-\mathrm{Id}_E, \mathrm{Id}_E\}$. Raisonnons alors par récurrence sur n : supposons $n > 1$ et le théorème vrai en toute dimension $< n$.

1^cr^ *cas : u admet une valeur propre réelle ε*

Dans ce cas, soit $N = \operatorname{Ker}(u - \varepsilon\,\mathrm{Id}_E)$: c'est un sous-espace u-stable, donc $N^\perp$ est aussi u-stable (cf. proposition II.4.3), et $v = u\|_{N^\perp} \in \mathbf{O}(N^\perp)$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à v (qui n'admet plus ε pour valeur propre) pour conclure.

2e *cas : u n'admet pas de valeur propre réelle*

Alors nécessairement n est pair, et tout facteur irréductible de $\chi_u(X)$ est de degré 2. Soit $P = X^2 - 2\alpha X + \beta$ $(\alpha^2 - \beta < 0)$ l'un de ces facteurs. D'après le lemme 1, $\operatorname{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$. Soit alors $x \in \operatorname{Ker}(P(u)) \setminus \{0\}$ et $H = \operatorname{Vect}(x, u(x))$: H est un plan puisque u est sans valeur propre réelle ; et H est u-stable car $u(x) \in H$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x \in H$. Donc $L = H^\perp$ est u-stable, et de plus : $v = u\|_H \in \mathbf{O}(H)$, $w = u\|_L \in \mathbf{O}(L)$, ni v ni w n'ont de valeur propre réelle. L'étude du § II.4 (groupe euclidien d'un plan) montre alors que nécessairement $v \in \mathbf{SO}(H) \setminus \{\mathrm{Id}_H, -\mathrm{Id}_H\}$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence s'applique à w, ce qui emporte la conclusion. ■

Rappelons (cf. § II.4) qu'une rotation d'un plan euclidien ayant C pour **Cosinus** admet dans une base orthonormale (e_1, e_2) une matrice de la forme $\mu(C, S) = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$, où $C^2 + S^2 = 1$, qui ne dépend que de la classe d'orientation de la base (e_1, e_2), l'effet d'un changement d'orientation étant de changer S en $-S$.

Disons maintenant que deux matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont **orthogonalement semblables** (resp. **directement orthogonalement semblables**) ssi il existe $\Omega \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$) telle que $M' = \Omega^{-1} M \Omega$ (i.e. $M' = {}^t\Omega M \Omega$). On obtient alors la version matricielle suivante du théorème III.1.1 :

COROLLAIRE 1

Soit $M \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. Alors M est directement orthogonalement semblable à un tableau diagonal : Diag $(N_1, \ldots, N_p)$ *de matrices carrées N_i de l'un des types suivants : I_k (matrice unité d'ordre k dans $\mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$) ; $-I_k$; ou $\mu(C, S)$ avec $S \neq 0$, et cela de façon que parmi les N_i il y ait au plus une matrice du type I_k ($k \in \mathbb{N}^*$) et au plus une du type $-I_k$.*

Pour $u \in \mathbf{O}(E)$, on peut donc choisir une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de l'une des formes suivantes :

(I) $M = I_{\alpha,\beta}(n) = \mathrm{Diag}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_i = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant \alpha$ et $\varepsilon_i = -1$ pour $\alpha + 1 \leqslant i \leqslant n$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \alpha + \beta = n)$.

(II) $M = \mathrm{Diag}\,(N_1, \ldots, N_p)$, avec $N_i = \begin{bmatrix} C_i & -S_i \\ S_i & C_i \end{bmatrix}$ où $C_i^2 + S_i^2 = 1$ et $S_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ $(2p = n)$.

(III) $M = \mathrm{Diag}\,(I_{\alpha,\beta}(n - 2p), N_1, \ldots, N_p)$, avec $p \geqslant 1$, $\alpha + \beta \geqslant 1$, $\alpha + \beta + 2p = n$, chaque N_i étant du type indiqué en (II).

• On arrive au cas (I) ssi u est une **involution orthogonale.** Dans ce cas, $\chi_u(X) = (-1)^n (X - 1)^\alpha (X + 1)^\beta$ et le polynôme minimal $Q_u(X)$ de u est $X + 1$ si $\alpha = 0$, $X - 1$ si $\beta = 0$, $X^2 - 1$ si $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$. On a alors : $u = \mathrm{Id}_F \oplus (-\mathrm{Id}_G)$, avec $F = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - u)$ et $G = F^\perp = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E + u)$.

• Le cas (II) advient ssi u est *sans valeur propre réelle.* Dans ce cas $n = 2p$ et $u \in \mathbf{SO}(E)$. On a : $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X^2 - 2C_k X + 1)$, et en regroupant les facteurs égaux : $\chi_u(X) = \prod_{q=1}^{r} (X^2 - 2a_q X + 1)^{\nu_q}$, avec des a_q réels distincts éléments de $]-1, 1[$ et des exposants ν_q entiers $\geqslant 1$ tels que $\sum_{q=1}^{r} \nu_q = p$. Soit $\mathscr{N}_k$ le plan de E correspondant à N_k. En notant H_q le sous-$\mathbb{R}$-ev, de dimension $2\nu_q$, égal à $\bigoplus_{k \in J} \mathscr{N}_k$, où $J = \{k \mid C_k = a_q\}$, on constate que H_q $(1 \leqslant q \leqslant r)$ est u-stable et que $E = \bigoplus_{q=1}^{r} H_q$. De plus, si on pose $u_q = u\|_{H_q}$, on a évidemment : $\chi_{u_q}(X) = (X^2 - 2a_q X + 1)^{\nu_q}$ et $X^2 - 2a_q X + 1$, annulé par u_q et irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, est le polynôme minimal $Q_{u_q}(X)$ de u_q. Enfin, les $(Q_{u_q}(X))_{1 \leqslant q \leqslant r}$

étant premiers entre eux deux à deux, on en déduit que le polynôme minimal $Q_u(X)$ de u est $Q_u(X) = \prod_{q=1}^{r} (X^2 - 2\,a_q\,X + 1)$. Le *lemme des noyaux* (cf. tome 1, théorème XV.5.1) montre alors que $E = \bigoplus_{q=1}^{r} \operatorname{Ker}(Q_{u_q}(u))$, et comme $H_q \subset \operatorname{Ker}(Q_{u_q}(u))$, c'est que $H_q = \operatorname{Ker}(Q_{u_q}(u))$. Le lemme des noyaux appliqué à $\chi_u(X)$ montrerait de même que $H_q = \operatorname{Ker}(Q_{u_q}^{\nu_q}(u))$.

• Le cas (III) se rencontre lorsque u admet au moins une valeur propre réelle sans être diagonalisable. Si F désigne la somme des sous-espaces propres de u et si $G = F^{\perp}$, alors $v = u\|_F$ est une involution orthogonale de F (cas n° I) et $w = u\|_G$ est sans valeur propre réelle (cas n° II). En résumé :

COROLLAIRE 2

Soit $u \in \mathbf{O}(E)$ et soit $P_1, \ldots, P_s$ les facteurs irréductibles normalisés deux à deux premiers entre eux de $\chi_u(X)$, de sorte que $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{s} (P_j)^{\alpha_j}$ ($s \geqslant 1$, les $\alpha_j \geqslant 1$). Alors $E = \bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{Ker}(P_j(u))$,

$\dim(\operatorname{Ker}(P_j(u))) = \alpha_j \deg(P_j)$;

$$(\forall j \in [\![1, s]\!])\quad \operatorname{Ker}(P_j(u)) = \operatorname{Ker}((P_j(u))^{\alpha_j}).$$

Le polynôme minimal $Q_u(X)$ de u est $\prod_{j=1}^{s} P_j(X)$. Si $\deg(P_j) = 2$, on a : $P_j(X) = X^2 - 2\,b_j\,X + 1$, avec $|b_j| < 1$, et $u\|_{\operatorname{Ker}(P_j(u))}$ est somme directe orthogonale de rotations planes ayant toutes le même ***Cosinus,*** *égal à b_j.*

En particularisant u, on en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 3

Si $u \in \mathbf{SO}(E)$, $\dim(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E))$ a même parité que n.
Si $u \in \mathbf{SO}(E)$ et si n est impair, alors 1 est valeur propre de u.
Si $u \in \mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$, alors -1 est valeur propre de u, et $\dim(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E))$ a la parité opposée à celle de n.
Si $u \in \mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$, et si n est pair, -1 et 1 sont valeurs propres de u.

Signalons que dans le corollaire 2, pour $\deg(P_j) = 2$, il n'y a en général pas unicité de la décomposition de $u|_{\operatorname{Ker}(P_j(u))}$ en somme directe orthogonale de rotations planes de cosinus égal à b_j.

Etude du cas où $n = 3$

Pour décrire complètement les éléments de $\mathbf{SO}(E)$ et de $\mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$ dans le cas où $\dim(E) = 3$, introduisons le concept de rotation axiale (vectorielle) : si D est une droite vectorielle de E, on appelle **rotation d'axe** D tout élément $u \in \mathbf{SO}(E)$ de la forme $u = \mathrm{Id}_D \oplus v$, où $v \in \mathbf{SO}(D^\perp)$. Une telle rotation est Id_E ssi $v = \mathrm{Id}_{D^\perp}$; sinon (cf. § II.4) 1 en est valeur propre simple et $D = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, ce qui prouve que l'axe D de la rotation est alors unique et il est loisible de poser $\mathbf{Cos}\, u = \mathbf{Cos}\, v$ (on convient que $\mathbf{Cos}\,\mathrm{Id}_E = 1$). La rotation u sera alors dite *axiale*.

Une rotation $u = \mathrm{Id}_D \oplus v$ d'axe D, autre que Id_E, est une involution orthogonale ssi $v = -\mathrm{Id}_{D^\perp}$, ce qui revient à dire ssi $\chi_u(X) = (1 - X)(1 + X)^2$.

Si la rotation $u = \mathrm{Id}_D \oplus v$ d'axe D n'est pas une involution orthogonale, on a : $\chi_u(X) = (1 - X)(X^2 - 2\,X\,\mathbf{Cos}\, u + 1)$, avec $|\mathbf{Cos}\, u| < 1$.

PROPOSITION III.1.1

Lorsque $\dim(E) = 3$, $\mathbf{SO}(E)\backslash\{\mathrm{Id}_E\}$ *est l'ensemble des* ***rotations axiales vectorielles*** *de* E.

Démonstration :

Soit $u \in \mathbf{SO}(E)$, admettant donc la valeur propre 1. Si la multiplicité de cette valeur propre est 3, c'est que $u = \mathrm{Id}_E$. Si c'était 2, on aurait forcément $\chi_u(X) = -(1 - X)^2(1 + X)$, d'où $\det(u) = -1$, en contradiction avec $u \in \mathbf{SO}(E)$; si 1 est valeur propre simple, posons $D = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$: c'est une droite vectorielle et $v = u\|_{D^\perp}$ est élément de $\mathbf{SO}(D^\perp)$ car $\det(u) = 1 = \det(v)\det(u\|_D) = \det(v)\det(\mathrm{Id}_D) = \det(v)$. Donc $u = \mathrm{Id}_E \oplus v$ est bien une rotation axiale, d'axe D. ■

Soit maintenant $u \in \mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$ (on dit souvent que c'est une *antirotation*). Pour tout élément $\alpha \in \mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$, l'application $u \mapsto u\alpha$ (resp. $u \mapsto \alpha u$) est une bijection de $\mathbf{SO}(E)$ sur $\mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$. Parmi les éléments de $\mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$, réservons un sort particulier aux involutions, qui sont : $-\mathrm{Id}_E$ (seul cas où -1 est valeur propre triple) et les **réflexions** du type $(-\mathrm{Id}_D) \oplus \mathrm{Id}_{D^\perp}$, où D est une droite vectorielle quelconque.

PROPOSITION III.1.2

Si $\dim(E) = 3$, *soit* $u \in \mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$, *avec* $u^2 \neq \mathrm{Id}_E$. *Alors il existe un unique couple* (s, ρ), *où* s *est une réflexion et* ρ *une rotation axiale, tel que* $u = s\rho = \rho s$. *L'axe de la rotation axiale* ρ *est* $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration :

La valeur propre -1 de u est nécessairement de multiplicité 1. Alors $D = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle. Posons $v = u\|_{D^\perp}$: puisque $u = (-\mathrm{Id}_D) \oplus v$ et $\det(u) = -1 = -\det(v)$, on a : $v \in \mathbf{SO}(D^\perp)$. Donc en notant ρ la rotation d'axe D égale à $\mathrm{Id}_D \oplus v$ et s la réflexion $(-\mathrm{Id}_D) \oplus (\mathrm{Id}_{D^\perp})$, on a bien : $u = \rho s = s\rho$. Il reste à prouver l'unicité du couple (s, ρ).

Soit donc s' une réflexion et ρ' une rotation axiale telles que $u = s'\rho' = \rho' s'$. Posons $D' = \operatorname{Ker}(s' + \mathrm{Id}_E)$. Si $x \in D' \setminus \{0\}$, on a :

$$u(x) = s'(\rho'(x)) = \rho'(s'(x)) = -\rho'(x),$$

d'où
$$\rho'(x) \in \operatorname{Ker}(s' + \mathrm{Id}_E) = D'.$$

Si l'on avait $\rho'(x) = -x$, ρ' admettrait -1 pour valeur propre et serait donc une rotation de la forme $\mathrm{Id}_\Delta \oplus (-\mathrm{Id}_{\Delta^\perp})$, où Δ est une droite orthogonale à D', mais cela entraînerait $u^2 = \mathrm{Id}_E$, cas exclu par hypothèse. Donc $\rho'(x) = x$, donc $u(x) = -x$, et $x \in \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = D$. Finalement $D' = D$, d'où $s = s'$, d'où $\rho = \rho'$. ■

Remarque 2 : Si $u = -\mathrm{Id}_E$, la proposition III.1.2 dégénère, en ce sens que, pour toute réflexion s de E, on a : $u = s(-s) = (-s)s$, et $-s$ est bien une rotation, d'axe $D = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. De même, si u est une réflexion, posons $P = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, $D = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$, et, pour toute droite vectorielle $\Delta \subset P : H_\Delta = \Delta \oplus D$, $s_\Delta =$ réflexion $\mathrm{Id}_{H_\Delta} \bigoplus (-\mathrm{Id}_{H_\Delta^\perp})$, $\rho_\Delta =$ rotation axiale $\mathrm{Id}_\Delta \bigoplus (-\mathrm{Id}_{\Delta^\perp})$. Alors on a :

$$u = s_\Delta \rho_\Delta = \rho_\Delta s_\Delta .$$

Pour en terminer avec le cas $n = 3$, définissons la notion d'**angle d'une rotation.** Pour cela, supposons E *orienté*, et soit D une droite vectorielle de E. Si $u \in \mathbf{SO}(E)$ est une rotation d'axe D, on a : $u = \mathrm{Id}_D \oplus v$, avec $v \in \mathbf{SO}(D^\perp)$. Choisissons un vecteur unitaire $\vec{v}$ de D, et considérons sur $H = D^\perp$ l'orientation (dite *associée* à $\vec{v}$) telle que, pour toute base directe (e_1, e_2) de H, la base $(e_1, e_2, \vec{v})$ de E soit directe. Cette orientation nous permet de définir **Sin** v et les déterminations de l'angle de v (cf. § II.4). L'ensemble de ces déterminations est appelé l'**ensemble des déterminations de l'angle de u autour de $\vec{v}$.** Si Θ est cet ensemble, le changement de $\vec{v}$ en $-\vec{v}$ (resp. de l'orientation de E en l'orientation opposée) change Θ en $-\Theta = \{-\theta\}_{\theta \in \Theta}$. Pour toute base orthonormale directe (e_1, e_2) de H, et toute détermination θ de l'angle de u autour de $\vec{v}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1, e_2, \vec{v})}(u) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit notamment :

$$\mathrm{Tr}\,(u) = 2\,\mathbf{Cos}\,u + 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathbf{Cos}\,u = \frac{1}{2}\,(\mathrm{Tr}\,(u) - 1)}.$$

Génération de $\mathbf{O}(E)$ par les réflexions et de $\mathbf{SO}(E)$ par les retournements [1]

Replaçons-nous dans le cas où E est de dimension quelconque $n \geqslant 1$. Une involution orthogonale $u \in \mathbf{O}(E)$ est appelée une **réflexion** (resp. un **retournement**) ssi $\mathrm{Codim}\,(\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)) = 1$ (resp. $\mathrm{Codim}\,(\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)) = 2$). En posant $H = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, on dit que u est la **réflexion d'hyperplan H** (resp. le **retournement autour de H**).

Si $n = 1$, la seule réflexion est $-\mathrm{Id}_E$, et il n'y a pas de retournement. Si $n = 2$, le seul retournement est $-\mathrm{Id}_E$.

Parmi les involutions orthogonales de E autres que Id_E, les réflexions (resp. les retournements) sont les éléments de $\mathbf{O}(E)\backslash\mathbf{SO}(E)$ (resp. de $\mathbf{SO}(E)$) ayant le plus possible de points fixes.

THÉORÈME III.1.2

Soit $u \in \mathbf{O}(E)$, $u \neq \mathrm{Id}_E$, et $\nu = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E))$. Il existe des réflexions $s_1, \ldots, s_{n-\nu}$ telles que

$$u = s_1\, s_2 \ldots s_{n-\nu}$$

Et u n'est pas le produit d'un nombre $< n - \nu$ de réflexions.

Démonstration :

Supposons qu'il existe des réflexions $s_1, \ldots, s_k$ d'hyperplans respectifs $H_1, \ldots, H_k$ telles que $u = s_1 \ldots s_k$. Alors $\dim\,(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geqslant n - k$, et $H_1 \cap \cdots \cap H_k \subset \mathrm{Ker}\,(s_1 \ldots s_k - \mathrm{Id}_E)$, d'où nécessairement $\nu \geqslant n - k$, ce qui prouve la deuxième assertion.

Raisonnons maintenant par récurrence descendante sur ν, en commençant par $\nu = n - 1$. Dans ce cas, en posant $F = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, on a : $u = (\mathrm{Id}_F) \oplus (-\mathrm{Id}_{F^\perp})$, i.e. u est la réflexion d'hyperplan F. Soit alors $\nu < n - 1$ et supposons le théorème vrai si $\dim\,(F) \geqslant \nu + 1$; soit $x \in E\backslash F$ et $z = u(x) - x$ (d'où $z \neq 0_E$). Notons D la droite $\mathbb{R}z$, $H = D^\perp$ et s la réflexion d'hyperplan H. On a : $F \subset H$ (car pour $y \in F$, $(u(x) - x \mid y) = (u(x) \mid y) - (x \mid y) = (u(x) \mid u(y)) - (x \mid y) = 0$). De plus $s(u(x)) = x$. Donc $v = s \circ u \in \mathbf{O}(E)$ et $F \oplus \mathbb{R}x \subset \mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{Id}_E)$, d'où $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{Id}_E)) \geqslant \nu + 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique à v,

---

[1] On trouve parfois le terme *renversement* au lieu de *retournement*.

d'où l'existence de réflexions $s_1, \ldots, s_q$ avec $q \leqslant n - \nu - 1$ telles que $v = s_1 \ldots s_q$. Par suite $u = s \circ v = s \cdot s_1 \ldots s_q$, et comme u n'est pas le produit d'un nombre $< n - \nu$ de réflexions, forcément $q = n - \nu - 1$. ■

Remarque 3 : Lorsque $n = 2$, le lecteur pourra rapprocher ce résultat de l'étude, menée dans le tome 1, des rotations vectorielles (§ VI.9) et des symétries orthogonales du plan d'Argand-Cauchy (§ VI.10).

PROPOSITION III.1.3

Soit $u \in \mathbf{SO}(E)$, où E est de dimension $n \geqslant 3$, et où $\nu = \dim(\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)) = n - 2$. Si u n'est pas un retournement, il existe une infinité de couples (ρ_1, ρ_2) de retournements tels que $u = \rho_1 \rho_2$.

Démonstration :

Notons $H = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, $P = H^\perp$ et $v = u\|_P$. On a : $u = \mathrm{Id}_H \oplus v$, d'où $1 = \det(u) = \det(v)$. Donc $v \in \mathbf{SO}(P)$, et de plus $v \notin \{\mathrm{Id}_P, -\mathrm{Id}_P\}$ car u n'est pas un retournement, ni égal à Id_E. *Dans le plan* P, la rotation v peut être décomposée (d'une infinité de façons) en produit de deux réflexions s_1 et s_2, autour de deux droites vectorielles D_1 et D_2. Soit alors L un hyperplan de H et Δ la droite vectorielle $L^\perp \cap H$. Notons ρ_i ($i \in \{1, 2\}$) le retournement autour de $H_i = L \oplus D_i$. On a : $\rho_i = \mathrm{Id}_{H_i} \oplus (-\mathrm{Id}_\Delta) \oplus (-\mathrm{Id}_{D_i^\perp \cap P})$, d'où immédiatement : $\rho_1 \rho_2 = s_1 s_2 \oplus \mathrm{Id}_H = u$. ■

Remarque 4 : Lorsque $n = 3$, la construction utilisée dans la preuve de la proposition III.1.3 donne même *tous* les couples (ρ_1, ρ_2) de retournements tels que $\rho_1 \rho_2 = u$. En effet si $F_i = \mathrm{Ker}\,(\rho_i - \mathrm{Id}_E)$ ($i = 1$ ou 2), $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ (car $u \neq \mathrm{Id}_E$), et donc $F_1^\perp \cap F_2^\perp$ est la droite $D = (F_1 \oplus F_2)^\perp$. Comme $D \subset \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, on a ici $D = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, d'où $D_1 \subset D^\perp$ et $D_2 \subset D^\perp$.

Pour la fin de ce §, introduisons la notion de sous-espaces perpendiculaires :

DÉFINITION III.1.1

Deux sous-$\mathbb{R}$-ev V et W de E sont dits ***perpendiculaires*** *ssi $V^\perp \perp W^\perp$.*

La relation de perpendicularité entre sous-$\mathbb{R}$-ev de E est évidemment symétrique. Pour que deux sous-$\mathbb{R}$-ev de E soient perpendiculaires, il faut et il suffit que $E = (V \cap W) \oplus V^\perp \oplus W^\perp$; si c'est le cas, on a : $V = (V \cap W) \oplus W^\perp$ et $W = (V \cap W) \oplus V^\perp$. En d'autres termes, pour que V et W, de codimensions

respectives p et q, soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'on ait $p + q \leqslant n$ et qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$V = \mathrm{Vect}\ ((e_i)_{i \in [\![1,n]\!] \setminus [\![1,p]\!]}) \quad \text{et} \quad W = \mathrm{Vect}\ ((e_i)_{i \in [\![1,n]\!] \setminus [\![p+1,p+q]\!]}).$$

Proposition III.1.4

Supposons $n \geqslant 2$ et soit H_1 et H_2 deux hyperplans perpendiculaires dans E. Si s_1 et s_2 désignent les réflexions d'hyperplans respectifs H_1 et H_2, alors $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 =$ le retournement autour de $H = H_1 \cap H_2$.

Démonstration :

Puisque $H_1 \neq H_2$, on a $\mathrm{Codim}\ (H) = 2$. Soit $D_i = H_i^{\perp}$ ($i \in \{1, 2\}$). On a :

$$E = H \oplus D_1 \oplus D_2\,, \quad H_1 = H \oplus D_2\,, \quad H_2 = H \oplus D_1\,,$$

$$s_1 = \mathrm{Id}_H \oplus (-\mathrm{Id}_{D_1}) \oplus \mathrm{Id}_{D_2} \quad \text{et} \quad s_2 = \mathrm{Id}_H \oplus \mathrm{Id}_{D_1} \oplus (-\mathrm{Id}_{D_2}),$$

d'où $s_1 s_2 = s_2 s_1 = \mathrm{Id}_H \oplus (-\mathrm{Id}_{D_1}) \oplus (-\mathrm{Id}_{D_2}) = \mathrm{Id}_H \oplus (-\mathrm{Id}_{H^{\perp}})$. ■

Théorème III.1.3

Soit E de dimension $n \geqslant 3$ et $u \in \mathbf{SO}(E)$. Posons $F = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E)$, $\nu = \dim\ (F)$ et supposons que $\nu \leqslant n - 3$. Alors u est égal à au moins un produit de $\dfrac{n-\nu}{2}$ retournements, mais n'est égal à aucun produit d'un nombre $< \dfrac{n-\nu}{2}$ de retournements.

Démonstration :

On sait que $n - \nu$ est pair (cf. corollaire 3 du théorème III.1.1). Posons $p = \dfrac{n-\nu}{2}$ (donc $p \geqslant 2$).

Supposons qu'il existe des retournements $\rho_1, \ldots, \rho_k$ autour respectivement des sous-espaces de codimension 2 : $H_1, \ldots, H_k$, tels que $u = \rho_1 \ldots \rho_k$. Alors $H = \bigcap_{i=1}^{k} H_i \subset F$, et $\dim\ (H) \geqslant n - 2k$, d'où $\nu \geqslant n - 2k$, d'où $k \geqslant \dfrac{n-\nu}{2} = p$, ce qui prouve la deuxième assertion du théorème.

Pour prouver l'existence de la décomposition de $u \in \mathbf{SO}(E)$ en produit de retournements, utilisons le théorème III.1.1. Il existe des plans vectoriels $P_1, \ldots, P_p$ et des éléments $u_i \in \mathbf{SO}(P_i)$ ($1 \leqslant i \leqslant p$, l'éventualité où certains des u_i seraient égaux à $-\mathrm{Id}_{P_i}$ n'étant pas exclue) tels que $E = F \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_p$ et $u = \mathrm{Id}_F \oplus u_1 \oplus \ldots \oplus u_p$.

Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, la rotation u_i peut être décomposée en le produit de deux réflexions σ_i et σ_i' *du plan* P_i, autour respectivement des droites Δ_i et Δ_i'. Notons H_i l'hyperplan $P_i^{\perp} \oplus \Delta_i$ de E et H_i' l'hyperplan $P_i^{\perp} \oplus \Delta_i'$, puis s_i (resp. s_i') la réflexion de E d'hyperplan H_i (resp. H_i'). Notons D_i (resp.

D_i') la droite supplémentaire orthogonale de Δ_i (resp. de Δ_i') dans P_i. Alors $H_i^\perp = D_i$, $H_i'^\perp = D_i'$, d'où, pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ et $i \neq j$: $H_i^\perp \perp H_j^\perp$, $H_i'^\perp \perp H_j'^\perp$ et $H_i^\perp \perp H_j'^\perp$ (car $P_i \perp P_j$), autrement dit, H_i et H_j (resp. H_i' et H_j', H_i et H_j') sont *perpendiculaires*.

On a alors : $u = \mathrm{Id}_F \oplus (\sigma_1 \circ \sigma_1') \oplus \cdots \oplus (\sigma_p \circ \sigma_p')$, ce qui entraîne

$$u = (s_1 \circ s_1') \circ (s_2 \circ s_2') \circ \ldots \circ (s_p \circ s_p').$$

Or s_p est permutable avec s_i et s_i' pour $1 \leqslant i < p$ (cf. proposition III.1.4), ce qui permet d'écrire u sous la forme :

$$u = (s_1 \circ s_p) \circ (s_1' \circ s_2) \circ (s_2' \circ s_3) \circ \ldots \circ (s_{p-2}' \circ s_{p-1}) \circ (s_{p-1}' \circ s_p').$$

Mais comme chacun des couples (H_1, H_p), (H_1', H_2), ..., (H_{p-2}', H_{p-1}) et (H_{p-1}', H_p') est formé d'hyperplans perpendiculaires, la proposition III.1.4 montre que $\rho_1 = s_1 \circ s_p$, $\rho_2 = s_1' \circ s_2$, ..., $\rho_{p-1} = s_{p-2}' \circ s_{p-1}$ et $\rho_p = s_{p-1}' \circ s_p'$ sont des retournements, et on a : $u = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_p$. ■

Exercice 1 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On donne un vecteur unitaire $\vec{v} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ et un réel θ. Ecrire la matrice M de la rotation u d'angle θ autour de $\vec{v}$, en remarquant que $u(x) = [(\vec{v} \wedge x) \wedge \vec{v}] \cos\theta + (\vec{v} \wedge x) \sin\theta + (\vec{v} \mid x)\, \vec{v}$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le corollaire 1 du théorème III.1.1 pour retrouver la connexité par arcs de $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le corollaire 1 du théorème III.1.1 pour prouver que l'application $\mathrm{Asym}\,(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto \exp(A)$ est surjective. On commencera par le cas $n = 2$.

Exercice 4 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et u et v des éléments de $\mathbf{O}(E)$.

a) Montrer que u et v sont conjugués dans $\mathbf{O}(E)$ ssi $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

b) On suppose u et v directs et $\chi_u(X) = \chi_v(X)$. Peut-on en conclure que u et v sont conjugués dans $\mathbf{SO}(E)$?

Soit $\mathscr{C} = \{w \in \mathbf{SO}(E) \mid \chi_w(X) = \chi_u(X)\}$. Vérifier que $\mathscr{C}$ est union d'un nombre fini de classes de conjugaison de $\mathbf{SO}(E)$; préciser ce nombre.

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$. Pour $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, soit $\mathscr{R}_p = \{u \in \mathbf{SO}(\mathbf{E}) \mid u^p = \mathrm{Id}_E\}$. Vérifier que $\mathscr{R}_p$ est un compact de $\mathbf{SO}(E)$ et donner les composantes connexes de $\mathscr{R}_p$. Montrer que $\mathscr{R}_p$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de dimension $\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E)$.

On commencera par étudier le cas $n = 3$.

Exercice 6 : Soit E l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, et $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On donne une matrice antisymétrique $S \in \mathrm{Asym}\,(3, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ qui s'écrit $S = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$. On rappelle que $I_n + S$ est inversible (cf. exercice 10 du § II.4). Soit $U = (I_n - S)(I_n + S)^{-1}$. On note u et s les endomorphismes de E de matrices U et S dans

$\mathscr{C}$. On rappelle que $u \in \mathbf{SO}(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$ (cf. *ibid.*). On choisit sur E l'orientation canonique (i.e. telle que $\mathscr{C}$ soit directe).

a) Montrer que l'axe de la rotation u est $D = \mathbb{R}\vec{v}$, où $\vec{v} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

b) Soit $\vec{v} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. Trouver l'angle de la rotation u autour de $\vec{v}$.

Exercice 7 : Soit A la matrice $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer : $A \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ ssi dans $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - X^2 + \lambda \ , \quad \text{avec} \quad \lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right].$$

b) La condition du *a*) étant réalisée, donner l'axe et un angle de la rotation que représente A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique (on pourra poser $\lambda = \dfrac{4}{27}\sin^2\varphi$).

Exercice 8 : Soit E un espace euclidien de dimension $2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et soit $u \in \mathbf{O}(E)$ sans valeur propre réelle. On se propose de prouver que u admet un plan stable sans faire appel au lemme 1. Pour cela on note S la sphère unité de E : $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

a) Prouver que la fonction $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \|u(x) - x\|$ admet un minimum m.

b) Soit $a \in S$ tel que $\varphi(a) = m$. Posons $z = \dfrac{1}{2}(a + u(a))$.

*b*1) Démontrer que $\|z - u(z)\| = \|z - u(a)\| + \|u(a) - u(z)\|$ en remarquant que $u(z) = \dfrac{1}{2}(u(a) + u^2(a))$ vérifie $\|u(z) - u(a)\| = \|z - a\|$.

*b*2) En déduire que a, $u(a)$ et $u^2(a)$ sont linéairement dépendants, puis, que le plan $\mathrm{Vect}\,(a, u(a))$ est u-stable.

Exercice 9 : Soit E un espace euclidien de dimension 3 et D_1, D_2 deux droites vectorielles distinctes dans E. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathscr{R}_i$ le sous-groupe de $\mathbf{SO}(E)$ formé par les rotations vectorielles d'axe D_i. Démontrer que $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$ engendre $\mathbf{SO}(E)$.

Exercice 10 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, D et Δ deux droites vectorielles distinctes *non orthogonales*, et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. On note ρ le retournement autour de Δ et $\mathscr{R}$ le groupe engendré par la rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire $\vec{v} \in D$. Montrer que le groupe G engendré par $\mathscr{R} \cup \{\rho\}$ est partout dense dans $\mathbf{SO}(E)$.

Exercice 11 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

a) Trouver le centre de $\mathbf{O}(E)$ et celui de $\mathbf{SO}(E)$.

b) Si $n \geqslant 3$, prouver que le groupe des commutateurs de $\mathbf{SO}(E)$, groupe que l'on note $[\mathbf{SO}(E), \mathbf{SO}(E)]$ et qui est engendré par les $uvu^{-1}v^{-1}$ pour u et v parcourant $\mathbf{SO}(E)$, est égal à $\mathbf{SO}(E)$.

Exercice 12 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

PARTIE I (ici $n = 3$)

On donne un sous-groupe *distingué* Γ de $\mathbf{SO}(E)$ autre que $\{\mathrm{Id}_E\}$. Si $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, on posera : $\mathbf{Cos}\,(\varphi) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,(\varphi) - 1)$.

a) Montrer qu'il existe $\varphi \in \Gamma$ tel que $\mathbf{Cos}\,(\varphi) < 0$.

b) Un tel φ étant choisi, montrer qu'il existe dans E un couple (D', D'') de droites vectorielles orthogonales telles que $\varphi(D') = D''$. Deux telles droites étant fixées, soit ρ' le retournement autour de D'. Prouver que $\psi = \rho' \circ \varphi \circ \rho' \circ \varphi^{-1}$ est un retournement et que $\psi \in \Gamma$.

c) En déduire que $\Gamma = \mathbf{SO}(E)$.

PARTIE II (ici $n \geqslant 5$)

Soit Γ un sous-groupe *distingué* de $\mathbf{SO}(E)$ tel que $\Gamma \not\subset \{\mathrm{Id}_{E'} - \mathrm{Id}_E\}$.

a) Montrer qu'il existe $\psi \in \Gamma$ tel que $\psi \neq \pm \mathrm{Id}_E$ et admettant 1 pour valeur propre. Pour cela on distinguera deux cas :

1er cas : S'il existe $\varphi \in \Gamma$ ($\varphi \neq \pm \mathrm{Id}_E$) n'admettant ni 1 ni -1 pour valeur propre, soit P un plan stable par φ. Chercher ψ sous la forme $\psi = \rho \circ \varphi \circ \rho \circ \varphi$, où ρ est un retournement convenable dont l'espace des points fixes rencontre $P^\perp$ suivant un sous-espace de dimension $n-3$.

2^e^ cas : S'il existe $\varphi \in \Gamma$ ($\varphi \neq \pm \mathrm{Id}_E$) admettant -1 pour valeur propre, soit D une droite vectorielle de E telle que $\varphi(x) = -x$ pour $x \in D$. Chercher ψ sous la forme $\rho \circ \varphi \circ \rho \circ \varphi$, où ρ est un retournement convenable dont l'espace des points fixes est inclus dans l'hyperplan $H = D^\perp$.

b) Un tel ψ étant fixé, soit D une droite vectorielle incluse dans $\mathrm{Ker}\,(\psi - \mathrm{Id}_E)$.

*b*1) Montrer qu'il existe un plan $P \subset D^\perp$ qui soit ψ-stable et tel que : $\psi|_P \neq \mathrm{Id}_P$ et $\psi|_P \in \mathbf{SO}(P)$. On fixe alors P et on pose : $F = P \oplus D$, $G = F^\perp$. Vérifier que F est ψ-stable. On note $f = \psi\|_F$.

*b*2) Prouver : $f \neq \mathrm{Id}_F$ et $f \in \mathbf{SO}(F)$. En déduire : $\exists g \in \mathbf{SO}(F) \mid g \circ f \neq f \circ g$.

*b*3) Soit $\gamma = g \oplus \mathrm{Id}_G$ et $\eta = \gamma \circ \psi \circ \gamma^{-1} \circ \psi^{-1}$. Vérifier que F est η-stable. On pose $h = \eta\|_F$. Montrer que $h \neq \mathrm{Id}_F$ et $h \in \mathbf{SO}(F)$. En déduire (cf. I) que le sous-groupe distingué de $\mathbf{SO}(F)$ engendré par h est $\mathbf{SO}(F)$.

*b*4) En déduire que tout retournement de E dont l'espace des points fixes contient G appartient à Γ. Conclure : $\Gamma = \mathbf{SO}(E)$.

PARTIE III (ici $n = 4$)

Tous les groupes euclidiens de même dimension étant isomorphes, nous allons d'abord construire un espace euclidien particulier H de dimension 4.

A) *Corps des quaternions*

On note H le sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \mathbb{R}e, \quad F = \mathrm{Vect}\,(i, j, k).$$

Si $q \in H$, $q = ae + bi + cj + dk$, on pose : $\bar{q} = ae - bi - cj - dk$, $\mathrm{Tr}\,(q) = \frac{1}{2}(q + \bar{q})$ et $N(q) = q\bar{q}$. Si de plus $q' = a'e + b'i + c'j + d'k \in H$, on pose : $qq' = Ae + Bi + Cj + Dk$, avec : $A = aa' - bb' - cc' - dd'$, $B = ab' + ba' + cd' - dc'$, $C = ac' + ca' + db' - bd'$, $D = ad' + da' + bc' - cb'$.

a) Dresser la table de multiplication de l'ensemble $Q = \{e, -e, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Prouver que, muni de sa multiplication, le $\mathbb{R}$-ev H devient une $\mathbb{R}$-algèbre unifère associative.

b) Pour $q_1 \in H$ et $q_2 \in H$, calculer $N(q_1 q_2)$. Prouver que l'anneau H est un *corps* et déterminer le *centre* de ce corps. Calculer $\widetilde{q_1 q_2}$. Si $q \in H$, on note u_q l'élément de

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H)$ défini par : $(\forall x \in H)\ u_q(x) = qx$. Interpréter $\mathrm{Tr}(q)$ et $N(q)$ à l'aide de u_q.

B) *Quaternions et rotations*

On munit H de la structure euclidienne définie par $(x \mid y) = \mathrm{Tr}(x\bar{y})$. Alors (e, i, j, k) est une base orthonormale et on a : $F = E^{\perp}$. On se propose d'étudier le groupe $\mathbf{SO}(F)$ en utilisant le groupe multiplicatif $H^* = H \setminus \{0\}$.

a) Si $q \in H^*$ on note $\varphi(q)$ l'endomorphisme de H défini par : $(\forall x \in H)\ [\varphi(q)](x) = qxq^{-1}$. Prouver que $\varphi(q)$ est un automorphisme de la $\mathbb{R}$-algèbre H. Déterminer les $q \in H^*$ tels que $\varphi(q) = \mathrm{Id}_H$. Comparer $\mathrm{Tr}(x)$ et $\mathrm{Tr}(qxq^{-1})$, et en déduire que F est $\varphi(q)$-stable.

b) Pour $q \in H^*$, on note $\psi(q)$ l'automorphisme de F induit par $\varphi(q)$. Démontrer : $\psi(q) \in \mathbf{SO}(F)$. Quel est l'axe de la rotation $\psi(q)$? Prouver que si $q \in H^* \cap F$, la rotation $\psi(q)$ est un retournement. En déduire que l'application $H^* \longrightarrow \mathbf{SO}(F)$, $q \mapsto \psi(q)$ est surjective.

c) Soit $S_3 = \{x \in H \mid N(x) = 1\}$ la sphère unité de H. Etudier la restriction de ψ au sous-groupe multiplicatif S_3 de H (noyau, image).

d) Etablir que tout $q \in H^*$ est, d'une infinité de manières, produit de deux éléments de $H^* \cap F$. En déduire $\mathbf{Cos}\ (\psi(q))$.

C) *Groupe* $\mathbf{SO}(H)$

a) Soit $\Phi : S_3 \times S_3 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H)$, $(a, b) \mapsto \Phi(a, b)$, endomorphisme de H défini par : $x \mapsto axb^{-1}$. Montrer que Φ est un homomorphisme du groupe produit $S_3 \times S_3$ dans le groupe $\mathbf{SO}(H)$. Préciser $\mathrm{Ker}\ (\Phi)$.

b) Prouver que tout retournement $\rho \in \mathbf{SO}(H)$ appartient à $\mathrm{Im}\ (\Phi)$.

Indication : Soit P le plan des points fixes de ρ. Montrer que si $E \subset P$, F est ρ-stable et que $\rho \|_F$ est un retournement de F. En déduire grâce à B) qu'il existe alors $q \in S_3 \cap F$ tel que $\rho = \Phi(q, q)$. Dans le cas général, soit $x \in S_3 \cap P$: appliquer la méthode précédente à $\rho' = \Phi(e, x) \circ \rho \circ \Phi(e, \tilde{x})$.

c) En déduire que Φ est *surjectif* sur $\mathbf{SO}(H)$.

d) Définir, *de deux manières distinctes,* une suite d'homomorphismes injectifs de groupes : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} S_3 \xrightarrow{g} \mathbf{SO}(H)$ tels que $\mathrm{Im}\ (f)$ (resp. $\mathrm{Im}\ (g)$) soit un sous-groupe distingué de S_3 (resp. dc $\mathbf{SO}(H)$), et que chacun des groupes quotients soit isomorphe à $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$. Comparer ce résultat avec ceux obtenus dans les parties I et II.

§ III.2 *ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME*

Pour tout espace euclidien E, nous noterons I_E l'isomorphisme canonique de E sur son dual E^*, qui envoie chaque $x \in E$ sur la forme linéaire $(x \mid .)$.

Nous aurons souvent besoin du lemme suivant :

LEMME 1

Soit E un espace euclidien, f et g deux applications : $E \longrightarrow E$. Pour qu'on ait $f = g$, il faut et il suffit qu'on ait :

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad (x \mid f(y)) = (x \mid g(y)).$$

Démonstration :

En effet, si (1) est satisfaite, l'application $h = f - g$ vérifie $(x \mid h(y)) = 0$ pour tous $(x, y) \in E^2$. Donc, pour $y \in E$ fixé, on a : $h(y) \in E^{\perp} = \{0\}$, d'où $h(y) = 0$. C'est vrai $\forall y \in E$, donc $h = 0$. ■

PROPOSITION III.2.1

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.
Il existe une unique application $v : E \longrightarrow E$ qui vérifie :

$$(2) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad (u(x) \mid y) = (x \mid v(y)).$$

Cette application v est linéaire.

Démonstration :

Fixons $y \in E$; l'application : $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (u(x) \mid y)$ est linéaire, n'étant autre que $\varphi_y = I_E(y) \circ u$. Notant $z = I_E^{\langle -1 \rangle}(\varphi_y)$, on a donc, pour tout $x \in E$:

$$(u(x) \mid y) = (y \mid u(x)) = (z \mid x) = (x \mid z).$$

Donc, en posant $v(y) = I_E^{\langle -1 \rangle}(\varphi_y) = I_E^{\langle -1 \rangle}(I_E(y) \circ u) = (I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E)(y)$, on a bien défini une application $v : E \longrightarrow E$ qui vérifie (2).

De plus la formule $v(y) = I_E^{\langle -1 \rangle}(I_E(y) \circ u)$ montre que v est linéaire. L'unicité de v parmi les *applications* qui vérifient (2) résulte du lemme 1. ■

DÉFINITION III.2.1

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.
L'unique application v qui vérifie (2) s'appelle ***endomorphisme adjoint*** *de u, et se note u^*.*

Voici rassemblées les propriétés élémentaires de l'adjoint :

PROPOSITION III.2.2

Soit E un espace euclidien.
(I) *L'application* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $u \mapsto u^*$ *est un automorphisme du* $\mathbb{R}$-ev $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. *Cet automorphisme est involutif, i.e.* $(u^*)^* = u$ *pour tout* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.
(II) *Pour u et v dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, *on a :* $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
(III) *Pour* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, *on a :* $u^* = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E$.
(IV) *Pour* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, *on a :* $\mathrm{Ker}\,(u^*) = \mathrm{Im}\,(u)^{\perp}$ *et* $\mathrm{Im}\,(u^*) = \mathrm{Ker}\,(u)^{\perp}$.

Démonstration :

(I) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in E^2$ et u, v éléments de $\underset{\shortparallel}{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{R}}(E)$, on a :

$$\begin{aligned}((\lambda u + \mu v)(x) \mid y) &= (x \mid (\lambda u + \mu v)^*(y)) = (\lambda u(x) + \mu v(x) \mid y) = \\ &= \lambda (u(x) \mid y) + \mu (v(x) \mid y) = \lambda (x \mid u^*(y)) + \mu (x \mid v^*(y)) \\ &= (x \mid \lambda u^*(y) + \mu v^*(y)) = (x \mid (\lambda u^* + \mu v^*)(y)),\end{aligned}$$

d'où $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$ à cause du lemme 1.

De même $(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)) = (u^*(y) \mid x) = (y \mid (u^*)^*(x)) = ((u^*)^*(x) \mid y)$, d'où $u = (u^*)^*$ par le lemme 1.

(II) Soit $(x, y) \in E^2$. Alors : $((u \circ v)(x) \mid y) = (x \mid (u \circ v)^*(y)) = (u(v(x)) \mid y) = (v(x) \mid u^*(y)) = (x \mid (v^* \circ u^*)(y))$, d'où $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ par le lemme 1.

(III) Dans la preuve de la proposition III.2.1, on a vu que, si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, alors $(\forall x \in E)$ $u^*(x) = I_E^{\langle -1 \rangle}(I_E(x) \circ u)$. Mais $I_E(x) \circ u = ({}^t u)(I_E(x)) = ({}^t u \circ I_E)(x)$ (cf. définition de la transposée au début du Chap. XII du tome 1), donc $u^*(x) = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E(x)$. Finalement, $u^* = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E$.

(IV) Soit $y \in E$. La relation $y \in \mathrm{Im}\,(u)^\perp$ signifie :

$$(\forall x \in E) \quad (u(x) \mid y) = 0\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\forall x \in E) \quad (x \mid u^*(y)) = 0\,,$$

i.e. $u^*(y) \in E^\perp$, i.e. $u^*(y) = 0$. D'où $\mathrm{Ker}\,(u^*) = \mathrm{Im}\,(u)^\perp$. On voit de même que $\mathrm{Im}\,(u^*) = \mathrm{Ker}\,(u)^\perp$. ■

THÉORÈME III.2.1

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons $S = [(e_i \mid e_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = S^{-1}\,{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\,S$.

En particulier, si la base $\mathscr{B}$ est ***orthonormale :***

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

Démonstration :

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$. Notons X et Y les vecteurs colonnes de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ respectivement.

Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*)$. Alors (en identifiant $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$) : $(u(x) \mid y) = {}^t(MX)\,SY = {}^tX\,{}^tMSY = (x \mid u^*(y)) = {}^tXSM'\,Y$, d'où (puisque c'est vrai $\forall (x, y) \in E^2$) ${}^tMS = SM'$. La matrice S est inversible, donc $M' = S^{-1}\,{}^tMS$.

La base $\mathscr{B}$ est orthonormale ssi $S = I_n$, et alors : $M' = {}^tM$. ■

PROPOSITION III.2.3

Soit E un espace euclidien et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, soit $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_i)$. Posons $u = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i$. Alors : $u^* = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i^*$.

En conséquence, chaque E_i est u^*-stable et $u^*\|_{E_i} = u_i^*$.

Démonstration :

Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i \in E$, où pour tout i, $x_i \in E_i$ et $y_i \in E_i$. On a, en posant $v = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i^*$:

$$(u(x) \mid y) = \sum_{i=1}^{p} (u_i(x_i) \mid y_i) = \sum_{i=1}^{p} (x_i \mid u_i^*(y_i)) = (x \mid v(y)).$$

Donc $v = u^*$ à cause du lemme 1. ■

Remarque 1 : Soit E un espace euclidien, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ et F un sous-$\mathbb{R}$-ev ***u*-stable** de E. En général, *F n'est pas u^*-stable* (prendre par exemple pour u un projecteur non orthogonal). Cependant, **$F^\perp$ est u^*-stable,** car pour $(x, y) \in F \times F^\perp$, on a $(u(x) \mid y) = 0$ (puisque $u(x) \in F$), d'où $(x \mid u^*(y)) = 0$, d'où en bloquant $y : u^*(y) \in F^\perp$.

En particulier, si F est à la fois u-stable et u^*-stable, tenant compte de $(u^*)^* = u$, on voit que $F^\perp$ est lui aussi u-stable et u^*-stable, et de plus, par le lemme 1, on a dans ce cas :

$$(u\|_F)^* = u^*\|_F \quad \text{et} \quad (u\|_{F^\perp})^* = u^*\|_{F^\perp}.$$

Endomorphismes normaux, endomorphismes symétriques, endomorphismes antisymétriques

DÉFINITION III.2.2

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$;
*u est dit **normal** ssi $u \circ u^* = u^* \circ u$;*
*u est dit **autoadjoint** (ou **symétrique**) ssi $u = u^*$;*
*u est dit **antisymétrique** ssi $u^* = -u$.*

L'ensemble des endomorphismes normaux (resp. symétriques, antisymétriques) sera noté $\mathcal{N}(E)$ (resp. Sym (E), Asym (E)).

Il est clair que Sym (E) et Asym (E) sont des sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ d'intersection nulle, que chacun d'eux est inclus dans $\mathcal{N}(E)$ et que Sym (E) contient toute homothétie de E. Quant à $\mathcal{N}(E)$ ce n'est pas un sous-$\mathbb{R}$-ev, mais un *cône :* si $u \in \mathcal{N}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u \in \mathcal{N}(E)$. Le lemme 1 montre immédiatement : si $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$,

$$(3)\quad \boxed{\begin{array}{ll} u \text{ est symétrique} & \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) \\ u \text{ est antisymétrique} & \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) + (x \mid u(y)) = 0 \end{array}}.$$

Le théorème III.2.1 permet la caractérisation matricielle et donne la dimension de Sym (E) et de Asym (E).

PROPOSITION III.2.4

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormale** *de E. L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ définit un isomorphisme de* $\mathbb{R}$-ev *entre* Sym (E) *et* Sym $(n, \mathbb{R})$ *(resp. entre* Asym (E) *et* Asym $(n, \mathbb{R})$*).*
En conséquence :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Sym}\,(E)) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et}$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Asym}\,(E)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

De même, la proposition III.2.3 a pour conséquence :

PROPOSITION III.2.5

Soit E un espace euclidien et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-$\mathbb{R}$-ev *de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, soit $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_i)$. Posons $u = \bigoplus_{i=1}^{p} u_i$. Si chaque u_i est normal (resp. symétrique, antisymétrique), alors u est normal (resp. symétrique, antisymétrique).*

Cela permet de construire des endomorphismes normaux (resp. symétriques, antisymétriques). Par exemple une homothétie est symétrique, donc toute somme directe orthogonale d'homothéties est symétrique. En particulier, *tout projecteur orthogonal est symétrique* car c'est une somme directe interne orthogonale d'homothéties. Mieux :

PROPOSITION III.2.6

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Pour que p soit ***symétrique,*** *il faut et il suffit qu'il soit* ***orthogonal.***

Démonstration :

Supposons p symétrique. Si $x \in \operatorname{Ker}(p)$ et $y \in \operatorname{Im}(p)$, on a : $0 = (p(x) \mid y) = (x \mid p(y)) = (x \mid y)$. Donc $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont orthogonaux, ce qui entraîne que p est orthogonal. ■

Remarque 2 : En raison de la proposition III.2.2 (IV), si u est un opérateur symétrique ou antisymétrique d'un espace euclidien, on a toujours : $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

THÉORÈME III.2.2

Soit E un espace euclidien et $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.
Les propriétés (I), (II), (III), (IV) *ci-après sont équivalentes :*

(I) $u \in \mathbf{O}(E)$ (II) $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$

(III) $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$ (IV) $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ et $u^{-1} = u^*$.

Démonstration :

Soit $(x, y) \in E^2$. On a : $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid u^* \circ u(y))$. Le lemme 1 et la définition de $\mathbf{O}(E)$ montrent donc que (I) $\Leftrightarrow$ (II). De plus, l'équivalence entre (II), (III) et (IV) est immédiate. ■

En conséquence, si $u \in \mathbf{O}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λu est normal ; λu est appelé une **similitude** de E (cf. § III.4). Il résulte de la proposition III.2.5 que toute somme directe orthogonale de similitudes est un endomorphisme normal.

Adjoint et formes bilinéaires

Reprenons un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$. Pour chaque $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, l'application B_u : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (u(x) \mid y)$ est bilinéaire. On définit ainsi une application $\mathscr{B}_E$: $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \longrightarrow \mathrm{BL}_2(E)$, $u \mapsto B_u$, et cette application $\mathscr{B}_E$ est visiblement linéaire.

PROPOSITION III.2.7

L'application $\mathscr{B}_E$ définie ci-dessus est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev entre $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ et $\mathrm{BL}_2(E)$. Par restriction, $\mathscr{B}_E$ définit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de $\operatorname{Sym}(E)$ sur $S_2(E)$ (resp. de $\operatorname{Asym}(E)$ sur $\Lambda_2^*(E)$).

Démonstration :

Le lemme 1 montre immédiatement que $\mathscr{B}_E$ est *injective*. On se souvient que dim $(\mathrm{BL}_2(E)) = n^2$ (cf. théorème I.2.2) ; c'est aussi la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, et par suite $\mathscr{B}_E$ est *bijective*. Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. Pour que B_u soit symétrique (resp. antisymétrique) il faut et il suffit que $(\forall (x, y) \in E^2)\ (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$ (resp. $(u(x) \mid y) + (x \mid u(y)) = 0$), d'où la dernière assertion, en tenant compte de (3). ■

Si $B \in \mathrm{BL}_2(E)$, il est aisé d'expliciter $u = \mathscr{B}_E^{\langle -1 \rangle}(B)$ à l'aide de l'isomorphisme $I_E : E \longrightarrow E^*$. Soit en effet $I_{E,B} : E \longrightarrow E^*$ l'application $x \mapsto B(x, .)$ définie par B. Pour $(x, y) \in E^2$, la relation $B(x, y) = (u(x) \mid y)$ s'écrit : $[I_{E,B}(x)](y) = [(I_E \circ u)(x)](y)$; d'où $I_{E,B}(x) = (I_E \circ u)(x)$, et cela pour tout $x \in E$, soit $I_E \circ u = I_{E,B}$, i.e. $u = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ I_{E,B}$. Donc :

(4) $\boxed{\text{Pour toute forme bilinéaire } B \text{ sur } E\ ,\quad \mathscr{B}_E^{\langle -1 \rangle}(B) = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ I_{E,B}}$.

DÉFINITION III.2.3

Avec les notations ci-dessus, un endomorphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ et une forme bilinéaire B sur E sont dits **associés** *ssi $B = B_u$, i.e. ssi $(\forall (x, y) \in E^2)\ B(x, y) = (u(x) \mid y)$, ou de façon équivalente ssi $u = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ I_{E,B}$. On dit alors que B est la* **forme bilinéaire associée à u,** *ou que u est l'***opérateur associé à B.**

Lorsque B est symétrique, de forme quadratique associée Φ, on dit aussi que u et Φ sont **associés.**

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base donnée de E. Cherchons la relation entre $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)$ quand u et B sont associés. Pour cela notons S la matrice $[(e_i \mid e_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. Soit $(x, y) \in E^2$, X (resp. Y) la matrice-colonne des coordonnées de x (resp. y) dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$B(x, y) = {}^tXNY = (u(x) \mid y) = {}^t(MX)\,SY = {}^tX\,{}^tMSY\,.$$

Comme c'est vrai pour tous (x, y), on a : $N = {}^tMS$, ou : $M = S^{-1}\,{}^tN$. En résumé :

(5) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \text{ et } B \in \mathrm{BL}_2(E) \textbf{ associés}, \text{ et pour toute} \\ \text{base ordonnée } \mathscr{B} \text{ de } E, \text{ on a : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = S^{-1}\,{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)\end{array}}$,

S désignant la matrice de $(. \mid .)$ dans $\mathscr{B}$. En particulier,

(6) $\boxed{\text{Si } \mathscr{B} \text{ est } \textbf{orthonormale}, \text{ on a : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)}$.

Lorsque $\mathscr{B}$ est **orthonormale,** dans le cas particulier où u est *symétrique* (ce qui revient à dire que la forme bilinéaire associée B est symétrique), on a donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B)$; et si u est *antisymétrique* (i.e. si B est alternée), on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B) = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B).$$

Noyau de l'opérateur associé à une forme quadratique

Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E et u son opérateur associé. Cherchons l'espace singulier Sing (B). Si $x \in E$, on a : $x \in \mathrm{Sing}(B)$ ssi $B(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$, c'est-à-dire (puisque $B(x, y) = (u(x) \mid y)$) ssi $u(x) \in E^{\perp}$, ce qui équivaut à : $u(x) = 0$. Donc :

PROPOSITION III.2.8

L'espace singulier d'une forme bilinéaire symétrique B sur E est le noyau de son opérateur associé.

Matrices symétriques positives, endomorphismes symétriques positifs

Un endomorphisme symétrique $u \in \mathrm{Sym}(E)$ est dit **positif** (resp. **défini positif**) ssi la forme bilinéaire symétrique associée B_u est positive (resp. définie positive). Autrement dit :

u est positif ssi $\quad (\forall x \in E) \quad (u(x) \mid x) \geqslant 0$
u est défini positif ssi $\quad (\forall x \in E \setminus \{0\}) \quad (u(x) \mid x) > 0$.

Soit à présent une matrice symétrique $M \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. Dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, M représente un endomorphisme symétrique u_M. Par définition, M est dite **positive** (resp. **définie positive**) ssi u_M est positif (resp. défini positif). Autrement dit :

M est positive ssi $\quad (\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \quad {}^tXMX \geqslant 0$.
M est définie positive ssi $\quad (\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \quad {}^tXMX > 0$.

Soit $u \in \mathrm{Sym}(E)$, $\mathscr{B}$ une base *orthonormale* de E, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Pour que u soit positif (resp. défini positif), il faut et il suffit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit positive (resp. définie positive).

Remarque 3 : Soit $M \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ une matrice positive. Alors $(\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}))\ {}^t\bar{X}MX \in \mathbb{R}_+$. En effet, écrivons : $X = V + \mathrm{i}W$, avec $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a : ${}^t\bar{X}MX = {}^tVMV + {}^tWMW + \mathrm{i}({}^tVMW - {}^tWMV) = {}^tVMV + {}^tWMW$ car ${}^tVMW$ est symétrique. De même, si M est définie positive, $(\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})\ {}^t\bar{X}MX \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1 : Soit deux espaces euclidiens E et F, et soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$.

a) Montrer qu'il existe une unique $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ telle que

$$(\forall (x, y) \in E \times F) \quad (f(x) \mid y) = (x \mid g(y)).$$

Pour $\mathscr{B}$ base ordonnée de E et $\mathscr{C}$ base ordonnée de F, comparer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g)$.

Donner une CNS sur g pour que f soit injectif (resp. surjectif).

b) Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme symétrique positif. Quand $g \circ f$ est-il défini positif ? Etudier de même $f \circ g$.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et F un sous espace non nul strict de E. On donne une forme quadratique Q sur E, d'opérateur associé u. Soit v l'opérateur associé à $Q|_F$ dans l'espace euclidien F. Montrer : $v = \varpi \circ (u|_F)$, où ϖ est la projection orthogonale de E sur F.

Exercice 3 (théorème de Fisher-Cochran) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On considère des formes quadratiques $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ sur E ($p \in [\![1, n]\!]$) de rangs respectifs $r_1, \ldots, r_p$, telles que $n = \sum_{k=1}^{p} r_k$, et que $(\forall x \in E)$ $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \Phi_k(x)$. Soit u_k l'opérateur associé à Φ_k.

a) Prouver : $\sum_{k=1}^{p} u_k = \mathrm{Id}_E$.

b) Prouver : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Im}\,(u_k)$.

c) Pour $x \in E$ et $k \in [\![1, p]\!]$, vérifier : $u_k(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i\, u_k(x)$; en déduire que les u_k sont des projecteurs et que $u_k\, u_l = 0$ pour $k \neq l$.

d) En déduire que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Im}\,(u_k)$. Conclure.

Exercice 4 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ associée à la norme $\|\,.\,\|$ de E.

a) Pour toute série formelle $S = \sum_{p \geqslant 0} a_p X^p \in \mathbb{R}[[X]]$ de rayon $R > 0$, et tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $|\!|\!|\, u \,|\!|\!| < R$, prouver que $(S(u))^* = S(u^*)$.

b) En particulier $\forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $(\exp(u))^* = \exp(u^*)$.

Exercice 5 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Prouver que A est symétrique positive ssi $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tBB$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $V \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{T}_+(n, \mathbb{R})$, avec les termes diagonaux de T dans $\mathbb{R}_+$, telles que $M = VT$ (on pourra utiliser la fin du § II.4).

Exercice 7 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et u un projecteur de E. On munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ associée à la norme $\|\,.\,\|$ de E. Montrer que si $|\!|\!|\, u \,|\!|\!| \leqslant 1$, alors u est un projecteur orthogonal. Si v est un autre projecteur de E et si $|\!|\!|\, u - v \,|\!|\!| < 1$, prouver que u et v ont même rang.

Exercice 8 : *a*) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et Φ une forme quadratique définie positive sur E. Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{Sym}\,(E)$ tel que

$$(1) \qquad (\forall x \in E) \quad \Phi(x) = \|v(x)\|^2 .$$

(*Indication :* Utiliser le théorème I.5.2.)

b) Soit $v_0 \in \mathrm{Sym}\,(E)$ vérifiant (1). Montrer que l'ensemble des $v \in \mathrm{Sym}\,(E)$ qui vérifient (1) est $\{\omega v_0\}_{\omega \in O(E)}$.

c) Soit $M \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$. Déduire de ce qui précède : pour que M soit définie positive, il faut et il suffit qu'il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E telle que $M = [(x_i \mid x_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Prouver que cette condition équivaut à l'existence de $N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que $M = {}^tNN$; et lorsqu'elle est satisfaite, si $M = {}^tN_0 N_0$ avec $N_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, trouver toutes les $N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telles que $M = {}^tNN$.

§ III.3 *DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES*

Nous avons remarqué au § III.2 que dans un espace euclidien, toute somme directe interne *orthogonale* d'homothéties est un endomorphisme *symétrique.* Il est très réconfortant que la réciproque soit vraie : parmi les nombreuses démonstrations existantes de ce résultat, présentons-en une de type « variationnel ».

THÉORÈME III.3.1

> *Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme* ***symétrique*** *de E. Alors u est somme directe interne orthogonale d'homothéties ; autrement dit : u est* ***diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux ;*** *ou de façon équivalente :* ***E admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de u.***

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n. Le théorème est trivial si $n = 0$ ou 1. Supposons donc $n \geqslant 2$ et le théorème vrai pour toute dimension $< n$. Soit S la sphère unité de E, i.e. l'ensemble $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$: c'est un compact non vide de E. La forme quadratique $\Phi_u : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto B_u(x, x) = (u(x) \mid x)$ est continue sur E, donc admet sur S un maximum, que nous notons λ_0. Soit a un point de S tel que $\Phi_u(a) = \lambda_0$.

Montrons que la forme quadratique $\Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\lambda_0 x - u(x) \mid x)$ associée à $\lambda_0 \mathrm{Id}_E - u$ est positive. En effet, si $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $y = \dfrac{1}{\|x\|} x$ est de norme 1, d'où $(u(y) \mid y) \leqslant \lambda_0 = \lambda_0 (y \mid y)$, d'où $(\lambda_0 y - u(y) \mid y) = \Psi(y) \geqslant 0$; et par conséquent : $\Psi(x) = \Psi(\|x\|\, y) = \|x\|^2\, \Psi(y) \geqslant 0$, ce qui prouve que Ψ est positive. Par ailleurs $\|a\| = 1$ et $\Psi(a) = \lambda_0 - (u(a) \mid a) = 0$. Donc a est isotrope pour Ψ, donc *singulier* pour Ψ (cf. corollaire du théorème II.1.1). Donc $(\lambda_0 \mathrm{Id}_E - u)(a) = 0$ (cf.

proposition III.2.7), autrement dit : a est vecteur propre de u et λ_0 est la valeur propre correspondante. Soit alors $F_0 = \operatorname{Ker}(\lambda_0 \operatorname{Id}_E - u)$; puisque F_0 est u-stable et $u = u^*$, le sous-espace $G_0 = F_0^{\perp}$ est aussi u-stable (cf. remarque 1 ci-dessus), et posant $v = u\|_{G_0}$, on a : $v^* = u^*\|_{G_0} = u\|_{G_0} = v$. Puisque $\dim(G_0) < n$, l'hypothèse de récurrence s'applique à v. En juxtaposant une base orthonormale de G_0 formée de vecteurs propres de v à n'importe quelle base orthonormale de F_0, on obtient une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u. ■

COROLLAIRE 1

(I) *Si u est un endomorphisme* ***symétrique*** *de E, le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$.*
(II) *Toute matrice symétrique $M \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ $(n \geqslant 1)$ est* ***diagonalisable*** *sur $\mathbb{R}$, et en particulier le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$.*

(Dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, une matrice symétrique $M \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ représente un endomorphisme symétrique, d'où II).)

COROLLAIRE 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$. Il existe une matrice ***diagonale*** *$D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice* ***orthogonale directe*** *$\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ telles que* $\boxed{M = \Omega D\, {}^t\Omega}$.

Démonstration :

Soit u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique représenté par M dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Notons $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base *orthonormale* de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u, et Ω la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$. Quitte à changer ε_n en $-\varepsilon_n$, on peut supposer $\mathscr{B}$ de même orientation que $\mathscr{C}$. Alors $\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ et si λ_i est la valeur propre de u pour ε_i, et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $D = \Omega^{-1} M \Omega$, soit $D = {}^t\Omega M \Omega$, d'où $M = \Omega D\, {}^t\Omega$. ■

COROLLAIRE 3

Soit u un endomorphisme ***symétrique*** *d'un espace euclidien $E \neq \{0\}$. Pour que u soit positif (resp. défini positif), il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de u appartiennent à $\mathbb{R}_+$ (resp. à $\mathbb{R}_+^*$).*
De même une matrice $M \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est positive (resp. définie positive) ssi toutes ses valeurs propres appartiennent à $\mathbb{R}_+$ (resp. à $\mathbb{R}_+^*$).

Démonstration :

Il suffit de démontrer la première assertion, l'autre en découlant.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u, et soit $D = \text{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E$, on a : $(u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i^2$, ce qui permet aisément de conclure. ■

Exemple 1 : Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E)$. L'endomorphisme $u^* u = v$ est évidemment symétrique. Montrons qu'il est positif : si $x \in E$, on a : $(v(x) \mid x) = (u^* u(x) \mid x) = (u(x) \mid u^{**}(x)) = (u(x) \mid u(x)) = \|u(x)\|^2 \geqslant 0$. Si de plus u est inversible, le même calcul montre que, pour $x \neq 0_E$, $(v(x) \mid x) = \|u(x)\|^2 > 0$, et dans ce cas v est défini positif.

Diagonalisation simultanée

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$, et Φ_1 une forme quadratique sur E. Le théorème III.3.1 permet de trouver une base de E orthonormale pour Φ_1, et à partir de là on peut en construire une infinité d'autres. Une question naturelle qui se pose, Φ_2 étant une seconde forme quadratique sur E, est celle de l'existence de bases de E orthogonales à la fois pour Φ_1 et pour Φ_2. Voici une réponse partielle à cette question :

THÉORÈME III.3.2

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, Φ_1 une forme quadratique ***définie positive*** *sur E, et Φ_2 une forme quadratique sur E. Il existe une base de E* ***orthonormale pour Φ_1 et orthogonale pour Φ_2.***

Démonstration :

Considérons la structure euclidienne définie sur E par Φ_1. Soit u l'opérateur associé à Φ_2 et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E orthonormale dans (E, Φ_1) et formée de vecteurs propres de u. On sait que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\,(\Phi_2) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\,(u)$ (cf. relation (6) du § III.2). Donc la base $\mathscr{B}$ est Φ_2-orthogonale puisque $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\,(\Phi_2)$ est diagonale. ■

Exemple 2 : *Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les deux formes quadratiques Φ_1 et Φ_2 définies dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$* par : $(\forall x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2)$ $\Phi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1\, x_2$ *et* $\Phi_2(x) = x_1^2 - 4\, x_1\, x_2$. *Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ à la fois Φ_1-orthogonale et Φ_2-orthogonale.*

Solution : Il apparaît d'abord clairement que Φ_1 est *définie positive* tandis que Φ_2 est de signature (1, 1). Le théorème III.3.2 peut donc s'appliquer. On a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi_1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans l'espace euclidien (E, Φ_1), l'opérateur u associé à Φ_2 a pour matrice $N' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = M^{-1}N$ (cf. formule (5) du § III.2). Or $M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$. On en déduit $\chi_u(X) = X^2 + \frac{4}{3}X - \frac{16}{3}$, d'où les valeurs propres de u : $\frac{-2}{3}(1 \pm \sqrt{13})$, puis une base de vecteurs propres de façon tout à fait classique (cf. tome 1, § XV.3). Cela donne par exemple la base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = 4e_1 + (1 + \sqrt{13})e_2$ et $\varepsilon_2 = 4e_1 + (1 - \sqrt{13})e_2$ qui est à la fois Φ_1-orthogonale et Φ_2-orthogonale. Pour la rendre Φ_1-orthonormale, il suffit de prendre $\mathscr{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(\varepsilon_1)}}\varepsilon_1, \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(\varepsilon_2)}}\varepsilon_2\right)$.

En fait, au lieu de suivre la méthode théorique, il serait plus rapide ici de chercher directement deux vecteurs $e_1 + \alpha e_2$ et $e_1 + \beta e_2$ qui soient Φ_1-orthogonaux et Φ_2-orthogonaux, d'où $1 + \alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 0$ et $1 - 2(\alpha + \beta) = 0$, ce qui conduit à la base $\left(\frac{\varepsilon_1}{4}, \frac{\varepsilon_2}{4}\right)$.

Le théorème III.3.2 peut également servir à la *recherche de la signature* d'une forme quadratique Φ sur un $\mathbb{R}$-ev E donné, de dimension finie $n \geqslant 1$: il suffit de choisir sur E une structure euclidienne. Un tel choix opéré, soit u l'opérateur associé à Φ dans cet espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$. Dans une base orthonormale de $(E, (.\,|\,.))$ formée de vecteurs propres de u, la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de u est aussi celle de la matrice de Φ (cf. (6) du § III.2). Donc la signature de Φ est le couple (p, q), où $p = \mathrm{card}\,\{i \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_i > 0\}$ et $q = \mathrm{card}\,\{i \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_i < 0\}$. Or $\chi_u(X) = (\lambda_1 - X) \ldots (\lambda_n - X)$. On est donc ramené, pour avoir la signature de Φ, à déterminer d'abord $\chi_u(X)$, ce qui est aisé avec la relation (5) du § III.2, puis à trouver le signe des racines de $\chi_u(X)$, ce qui en général relève de techniques classiques d'Analyse numérique (cf. [17] par exemple). Supposons Φ donnée par sa matrice M dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On peut par exemple choisir pour structure euclidienne sur E celle pour laquelle $\mathscr{B}$ est orthonormale. Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = M$, et donc

$\chi_u(X) = \det(M - XI_n) = \chi_M(X)$. Pour toute suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, nous pouvons appeler *signature de cette suite* le couple (k, l) où $k = \operatorname{card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid \alpha_i > 0\}$ et $l = \operatorname{card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid \alpha_i < 0\}$. On aboutit alors à la règle ci-dessous :

Règle pratique : *Si M est la matrice, dans une base donnée d'un $\mathbb{R}$-ev donné de dimension $n \geqslant 1$, d'une forme quadratique Φ, la signature de Φ est égale à la signature de toute liste des racines de $\chi_M(X)$.*

Exemple 3 : *Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 3)$. Trouver la signature de la forme quadratique Φ définie dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n\right) \quad \Phi(x) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j .$$

Solution : On a $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(\Phi) = [a_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} = M$, avec $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$ pour tout i. Le calcul de $\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$ est facile (en ajoutant toutes les colonnes à la première, $n - 1 - X$ se factorise, et dans le déterminant restant on retranche la première ligne aux autres). On trouve $\chi_M(X) = (-1)^{n-1}(n - 1 - X)(1 + X)^{n-1}$. En conséquence, la signature de Φ est donc $(1, n - 1)$. Munissons $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et soit alors u l'opérateur associé à Φ, d'où $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = M$. Les sous-espaces propres de u sont $D = \mathbb{R}\varepsilon_1$ où $\varepsilon_1 = e_1 + \cdots + e_n$, et $H = D^{\perp} = \left\{x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$. Pour toute base orthonormale $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de H, on a :

$$\operatorname{Mat}_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}(u) = \operatorname{Mat}_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}(\Phi) = \operatorname{Diag}(n - 1, -1, \ldots, -1),$$

d'où $$\left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n\right) \quad \Phi(x) = (n-1) y_1^2 - \sum_{i=2}^{n} y_i^2 .$$

On a ainsi une réelle alternative à la méthode de Gauss pour la réduction en carrés des formes quadratiques.

Diagonalisation simultanée générale

Il serait illusoire d'espérer trouver une base orthogonale à la fois pour Φ_1 et Φ_2 si Φ_1 et Φ_2 sont des formes quadratiques quelconques sur E (reprendre l'exemple 2 avec $\Phi_1(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $\Phi_2(x) = 2x_1x_2$ pour s'en convaincre). Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit possible en nous plaçant dans le cadre plus général de formes quadratiques sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$.

THÈORÈME III.3.3

Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, sur lequel on donne une forme quadratique Φ_1 **non dégénérée,** *et une forme quadratique Φ_2, de formes polaires respectives B_1 et B_2. Soit $I_{B_i} : E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto B_i(x \mid .)$ ($i \in \{1, 2\}$). Pour que E admette une* **base orthogonale à la fois pour B_1 et pour B_2,** *il faut et il suffit que l'endomorphisme $u = I_{B_1}^{\langle -1 \rangle} \circ I_{B_2}$ de E soit* **diagonalisable.**

(On sait (cf. proposition I.2.2*) que I_{B_1} est un isomorphisme de K-*ev).

Démonstration :

Supposons que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthogonale à la fois pour B_1 et pour B_2. Alors $D_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B_1)$ et $D_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(B_2)$ sont diagonales. Or (cf. théorème I.2.3) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = D_1^{-1} D_2$, donc u est diagonalisée dans $\mathscr{B}$, ce qui prouve que la condition de l'énoncé est nécessaire.

Réciproquement, supposons u diagonalisable, et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes, avec les sous-espaces propres correspondants $F_1, \ldots, F_p$. Sur chaque F_i, on a : $B_2|_{F_i} = \lambda_i B_1|_{F_i}$, car pour $(x, y) \in F_i^2$: $I_{B_1}^{\langle -1 \rangle} \circ I_{B_2}(x) = \lambda_i x$, d'où

$$I_{B_2}(x) = \lambda_i I_{B_1}(x) . \tag{1}$$

Il en résulte : $B_2(x, y) = [I_{B_2}(x)](y) = \lambda_i [I_{B_1}(x)](y) = \lambda_i B_1(x, y)$. Donc toute base de F_i qui est B_1-orthogonale est aussi B_2-orthogonale. Soit alors $i \neq j$ ($1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant p$). Montrons que F_i et F_j sont à la fois B_1-orthogonaux et B_2-orthogonaux. Soit $(x_i, x_j) \in F_i \times F_j$. On voit que $B_2(x_i, x_j) = [I_{B_2}(x_i)](x_j) = \lambda_i [I_{B_1}(x_i)](x_j) = \lambda_i B_1(x_i, x_j)$ est une conséquence de (1). Mais $B_2(x_i, x_j) = B_2(x_j, x_i)$, d'où en échangeant les rôles de i et j : $B_2(x_i, x_j) = \lambda_j B_1(x_j, x_i) = \lambda_j B_1(x_i, x_j)$. Par différence $(\lambda_i - \lambda_j) B_1(x_i, x_j) = 0$, et comme $\lambda_i \neq \lambda_j$: $B_1(x_i, x_j) = 0$. Enfin $B_2(x_i, x_j) = \lambda_i B_1(x_i, x_j) = 0$, ce qu'on voulait établir.

Finalement, en choisissant dans chaque F_i une base B_1-orthogonale, et en juxtaposant ces bases, on obtient une base de E qui est à la fois B_1-orthogonale et B_2-orthogonale. ■

Les idées développées dans la preuve ci-dessus conduisent à une intéressante propriété pour les groupes orthogonaux généraux des formes quadratiques.

THÉORÈME III.3.4

Avec les notations et hypothèses du théorème III.3.3, *supposons que l'endomorphisme $u = I_{B_1}^{\langle -1 \rangle} \circ I_{B_2}$ de E soit diagonalisable. Alors l'intersection des groupes orthogonaux $\mathbf{O}(\Phi_1)$ et $\mathbf{O}(\Phi_2)$ est le groupe des $u \in \mathrm{GL}_K(E)$ de la forme $u_1 \oplus \cdots \oplus u_p$, avec $(\forall i)\ u_i \in \mathbf{O}(\Phi_i|_{F_i})$. En conséquence, on a un isomorphisme de groupes :*

$$\mathbf{O}(\Phi_1|_{F_1}) \times \cdots \times \mathbf{O}(\Phi_1|_{F_p}) \longrightarrow \mathbf{O}(\Phi_1) \cap \mathbf{O}(\Phi_2), \quad (u_1, \ldots, u_p) \mapsto \bigoplus_{i=1}^{p} u_i .$$

Démonstration :

Nous venons de voir, dans la démonstration du théorème III.3.3, que $(\forall i \in [\![1, p]\!])\ I_{B_2}|_{F_i} = \lambda_i I_{B_1}|_{F_i}$, et en particulier $B_2|_{F_i} = \lambda_i B_1|_{F_i}$. Il en résulte évidemment

$$\mathbf{O}(\Phi_1|_{F_i}) \subset \mathbf{O}(\Phi_2|_{F_i}) . \tag{2}$$

Comme on sait que les F_i sont à la fois B_1-orthogonaux et B_2-orthogonaux, on déduit facilement de (2) que pour $(u_1, \ldots, u_p) \in G = \mathbf{O}(\Phi_1|_{F_1}) \times \cdots \times \mathbf{O}(\Phi_1|_{F_p})$, on a : $\bigoplus_{i=1}^{p} u_i \in \mathbf{O}(\Phi_1) \cap \mathbf{O}(\Phi_2)$. On a donc bien défini une application $g : G \longrightarrow \mathbf{O}(\Phi_1) \cap \mathbf{O}(\Phi_2)$, $(u_1, \ldots, u_p) \mapsto \bigoplus_{i=1}^{p} u_i$ dont on vérifie sans peine que c'est un homomorphisme de groupes injectif. La seule chose restant à prouver est que g est surjectif.

Soit $u \in \mathbf{O}(\Phi_1) \cap \mathbf{O}(\Phi_2)$. A cause de (2) tout revient à prouver que chaque F_i est u-stable. Fixons donc $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $j \in [\![1, p]\!] \setminus \{i\}$ et soit $x \in F_i$ et $y \in F_j$. On a :

$$B_2(u(x), y) = B_2(x, u^{-1}(y)) = [I_{B_2}(x)](u^{-1}(y)) = \\ = \lambda_i [I_{B_1}(x)](u^{-1}(y)) = \lambda_i B_1(x, u^{-1}(y)) .$$

De même :

$$B_2(u(x), y) = B_2(y, u(x)) = \lambda_j B_1(y, u(x)) = \lambda_j B_1(u(x), y) .$$

Mais comme $u \in \mathbf{O}(\Phi_1)$, il en découle $B_1(u(x), y) = B_1(x, u^{-1}(y))$. Puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on en conclut : $B_1(u(x), y) = 0$, d'où en utilisant la Φ_1-orthogonalité : $u(x) \in F_j^{\perp}$. C'est vrai pour tout $j \in [\![1, p]\!] \setminus \{i\}$, donc $u(x) \in \left(\bigoplus_{j \neq i} F_j\right)^{\perp}$. Mais puisque Φ_1 est *non dégénérée* et que les F_k sont deux à deux Φ_1-orthogonaux, on a : $F_i^{\perp} = \bigoplus_{j \neq i} F_j$, et $F_i^{\perp\perp} = \left(\bigoplus_{j \neq i} F_j\right)^{\perp} = F_i$ (cf. corollaire du théorème I.2.1). Donc $u(x) \in F_i$, ce qui prouve bien que F_i est u-stable. ■

Exercice 1 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathrm{Sym}\,(E)$.

a) Si $p \in \mathbb{N}^*$ est impair, il existe $v \in \mathrm{Sym}\,(E)$ unique tel que $v^p = u$.

b) Si $p \in \mathbb{N}^*$ est pair, existe-t-il $v \in \mathrm{Sym}\,(E)$ tel que $v^p = u$? En supposant que u est *positif*, prouver qu'il existe $v \in \mathrm{Sym}\,(E)$ positif unique tel que $v^p = u$.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $S \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$. Pour que S soit définie positive (resp. positive), il faut et il suffit qu'il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E (resp. une suite $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$) telle que $[(x_i \mid x_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} = S$. (cf. exercice 8 du § III.2).

Indication : On peut utiliser l'exercice 1.*b*) ou encore l'exercice 5 du § III.2.

Exercice 3 : Dans un espace euclidien, tout endomorphisme qui est à la fois normal et diagonalisable est symétrique.

Exercice 4 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On donne deux projecteurs orthogonaux f et g de E.

a) Prouver que fg est diagonalisable.

b) Prouver : pour que l'ensemble des valeurs propres de fg soit contenu dans $\{0, 1\}$, il faut et il suffit que fg soit un projecteur orthogonal, ce qui équivaut à : $fg = gf$.

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et Q une forme quadratique sur E d'opérateur symétrique associé u. Montrer : pour qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs isotropes de Q, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$. Si c'est le cas, trouver toutes les bases orthonormales qui conviennent.

Exercice 6 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

a) On donne une application polynomiale $f : \mathrm{Quadr}\,(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ possédant la propriété suivante :

$$(1) \qquad (\forall u \in \mathbf{O}(E), \forall Q \in \mathrm{Quadr}\,(E)) \quad f(Q \circ u) = f(Q)\,.$$

Notons u_Q l'opérateur symétrique associé à $Q \in \mathrm{Quadr}\,(E)$, et $\chi_{u_Q}(X) = (-1)^n[X^n - C_1(Q)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n(Q)]$. Démontrer : il existe $\Phi \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $(\forall Q \in \mathrm{Quadr}\,(E))\ f(Q) = \Phi(C_1(Q), \ldots, C_n(Q))$.

b) Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f : \mathrm{Quadr}\,(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (1). Montrer que $\mathscr{I}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}(\mathrm{Quadr}\,(E), \mathbb{R})$, et utiliser *a*) pour montrer que $\mathscr{I}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes à n lettres $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$.

Exercice 7 (qui enrichit le précédent) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et $\vec{v}$ un vecteur unitaire de E, d'hyperplan orthogonal H. On donne une forme quadratique Φ sur E, d'opérateur associé u ; on note v l'opérateur associé, dans l'espace euclidien H, à la forme quadratique $\Psi = \Phi\,|_H$. Que dire de l'application $\mathrm{Sym}\,(E) \longrightarrow \mathrm{Sym}\,(H)$, $u \mapsto v$?

a) Φ étant désormais fixée, soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E)$ définie par $f(x) = u(x) - (u(\vec{v})\,|\,x)\,\vec{v} - (\vec{v}\,|\,x)\,u(\vec{v})$ pour $x \in E$. Vérifier que f est symétrique et que $f\,|_H = v$.

b) On suppose u inversible. Soit $\tilde{u} = \det\,(u)\,u^{-1}$. Dans une base ordonnée arbitraire de E, quelle est la matrice de $\tilde{u}$?

*b*1) Démontrer que $\det\,(v) = (\tilde{u}(\vec{v})\,|\,\vec{v})$ en utilisant une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que $\varepsilon_n = \vec{v}$.

En déduire que $\det\,(f) = -\,(\tilde{u}(\vec{v})\,|\,\vec{v})\,\Phi(\vec{v}) = -\,(\tilde{u}(\vec{v})\,|\,\vec{v}) \times (u(\vec{v})\,|\,\vec{v})$.

*b*2) Pour $t \in \mathbb{R}$, prouver que

$$(1) \qquad \chi_v(t) = -\,((u - t\,\mathrm{Id}_E)(\vec{v})\,|\,\vec{v})\,, \quad \text{et}$$

$$(2) \qquad \chi_f(t) = -\,((u - t\,\mathrm{Id}_E)(\vec{v})\,|\,\vec{v}) \times ((u(\vec{v})\,|\,\vec{v}) - t)\,.$$

c) Prouver que (1) et (2) restent vraies même si u n'est pas inversible.

Si on pose : $\chi_u(X) = (-1)^n(X^n - I_1(u)\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^n I_n(u))$

ct : $\chi_v(X) = (-1)^{n-1}(X^{n-1} - I_1(v)\,X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} I_{n-1}(v))$,

en supposant $n \geqslant 3$, prouver en particulier : $I_1(v) = I_1(u) - (u(\vec{v})\,|\,\vec{v})$ et $I_2(v) = I_2(u) - I_1(u) \times (u(\vec{v})\,|\,\vec{v}) + \|u(\vec{v})\|^2$.

Exercice 8 : (Il offre une preuve *purement algébrique* du fait que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $M \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$, alors $\chi_M(X)$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique $(.\,|\,.)$.

a) Soit $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de M. Vérifier que

$$M^2 = [(C_i\,|\,C_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}\,.$$

b) Soit I une partie non vide de $[\![1, n]\!]$. Prouver que $\det([(C_i)\, C_j]_{(i,j)\in I^2}) = \Delta_I(M^2)$ est un réel $\geqslant 0$. On rappelle que

$$\chi_{M^2}(X) = (-1)^n \left(X^n + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p X^{n-p} \left(\sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(I) = p}} \Delta_I(M^2) \right) \right)$$

(cf. tome 1, § XV.1). Déduire de ce qui précède que $\chi_{M^2}(X)$ n'a aucune racine dans $\mathbb{R}_-^*$.

c) Prouver que $\chi_{M^2}(X^2) = \chi_M(X) \cdot \chi_M(-X)$, et en déduire que $\chi_M(X)$ n'a aucune racine imaginaire pure $\neq 0$.

d) En déduire que $\chi_M(X)$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \operatorname{Sym}(E)$ de polynôme caractéristique $\prod_{k=1}^{n} (\rho_k - X)$, avec $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \cdots \geqslant \rho_n$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que $(u(e_i) \mid e_i) = \rho_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $u(e_i) = \rho_i\, e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exercice 10 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{U}$ une partie non vide de $\operatorname{Sym}(E)$ telle que $(\forall (u, v) \in \mathscr{U}^2)\ uv = vu$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(\forall u \in \mathscr{U})$, $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de u.

Exercice 11 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Montrer que l'ensemble P des endomorphismes $u \in \operatorname{Sym}(E)$ définis positifs est un ouvert connexe de $\operatorname{Sym}(E)$.

Exercice 12 : Soit A et B deux matrices dans $\operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer l'équivalence des propriétés (I), (II) et (III) ci-après : (I) $AB = BA$; (II) $AB \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$; (III) $\exists V \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \mid V^{-1}AV$ et $V^{-1}BV$ sont diagonales.

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que l'application
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto (A \mid B) = \operatorname{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.

Prouver, pour la norme associée à ce produit scalaire :

$$(\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})) \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

et trouver tous les couples (A, B) pour lesquels cette inégalité est une égalité.

Exercice 14 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

a) On donne $u \in \operatorname{Sym}(E)$, u défini positif. Montrer qu'il existe un unique $v \in \operatorname{Sym}(E)$ tel que $\exp(v) = u$. On notera $\operatorname{Log} u$ cet élément v.

b) Soit $\operatorname{Sym}_+^*(E)$ le cône des $u \in \operatorname{Sym}(E)$ qui sont définis positifs, dont on vérifiera qu'il est *ouvert* dans $\operatorname{Sym}(E)$.

*b*1) Pour u et v dans $\operatorname{Sym}_+^*(E)$ tels que $uv = vu$, prouver que $\operatorname{Log}(uv) = \operatorname{Log} u + \operatorname{Log} v$.

*b*2) On munit $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ associée à la norme $\|\cdot\|$ de E. Prouver que si $u \in \operatorname{Sym}(E)$ vérifie $|\!|\!|u|\!|\!| < 1$, alors $\mathrm{Id}_E + u \in \operatorname{Sym}_+^*(E)$, et $\operatorname{Log}(\mathrm{Id}_E + u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} u^k$.

c) Prouver que l'application $\operatorname{Sym}(E) \longrightarrow \operatorname{Sym}_+^*(E)$, $u \mapsto \exp(u)$ est un homéomorphisme.

Exercice 15 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. Prouver que u^*u et uu^* sont orthogonalement semblables.

Exercice 16 (Décomposition polaire) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

a) Soit $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ et $v = u^*u$: v est donc autoadjoint défini positif (cf. exemple 1). Soit w l'unique endomorphisme autoadjoint positif de E tel que $w^2 = v$ (cf. exercice 1 ci-dessus).

Montrer que $\rho = uw^{-1} \in \mathbf{O}(E)$; puis prouver, en notant $\mathrm{Sym}_+^*(E)$ le cône des $u \in \mathrm{Sym}(E)$ qui sont définis positifs, que l'application $\mathbf{O}(E) \times \mathrm{Sym}_+^*(E) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho w$ est bijective. Prouver que c'est même un homéomorphisme.

b) Etudier de même l'application $\mathrm{Sym}_+^*(E) \times \mathbf{O}(E) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(E)$, $(w, \rho) \mapsto w\rho$.

c) Soit $\mathrm{Sym}_+(E)$ l'ensemble des $u \in \mathrm{Sym}(E)$ qui sont positifs. Montrer que l'application $\mathbf{O}(E) \times \mathrm{Sym}_+(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho w$ est surjective (on pourra utiliser la compacité de $\mathbf{O}(E)$). Est-elle injective ?

Etudier de même l'application $\mathrm{Sym}_+(E) \times \mathbf{O}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E)$, $(w, \rho) \mapsto w\rho$.

d) Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Déduire du *a*) qu'il existe $U \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, $V \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, D diagonale à termes diagonaux > 0, telles que $M = UDV$. Discuter l'unicité du triplet (U, D, V). Etudier l'extension de la propriété à des matrices quelconques $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, *A définie positive.*

a) Prouver par récurrence sur n qu'il existe une unique matrice $T \in \mathscr{T}_-(n, \mathbb{R})$ trigonale inférieure à termes diagonaux > 0 telle que $A = T\,{}^tT$.

Indication : Pour le passage de $n-1$ à n, soit $M(\lambda)$ obtenue en remplaçant a_{nn} par $\lambda \in \mathbb{R}$ dans A. Remarquer que la fonction $\lambda \mapsto D(\lambda) = \det(M(\lambda))$ est affine *croissante* et que $D(a_{nn}) > 0$; puis prouver que si $U = [t_{ij}]$ est la matrice trigonale inférieure à termes diagonaux > 0 telle que $U\,{}^tU = [a_{ij}]_{(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2}$, et si $(t_{n,1}, \ldots, t_{n,n-1})$ est la solution du système de Cramer $\sum_{k=1}^{n} t_{n,k}\, t_{j,k} = a_{nj}$ $(j \leqslant n-1)$, alors $D\left(\sum_{k=1}^{n-1} t_{n,k}^2\right) = 0$. Conclure.

N.B. Cette factorisation de la matrice A symétrique définie positive, très utilisée en Analyse numérique, est appelée méthode de *Cholesky*.

b) Soit $B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ l'unique matrice *définie positive* telle que $B^2 = A$ (cf. exercice 1 ci-dessus). Retrouver le résultat du *a*) en appliquant à B la décomposition $M = T\Omega$ du § II.4.

Exercice 18 : Soit E un espace euclidien de dimension $2n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On donne deux sous-$\mathbb{R}$-ev de E, soit F et G, tous deux de dimension n et tels que $E = F \oplus G$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbf{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Indication d'une méthode possible : on pourra prouver d'abord (cf. exercice 16*d*) ci-dessus) qu'il existe des bases orthonormales $(e_1, \ldots, e_n)$ de F et $(f_1, \ldots, f_n)$ de G telles que, notant $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$, on ait :

$$[(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j)]_{(i,j) \in [\![1, 2n]\!]^2} = \begin{bmatrix} I_n & D \\ D & I_n \end{bmatrix},$$

avec $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et D *diagonale.* Puis utiliser la proposition II.4.1.

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si M est une matrice symétrique définie positive et N une matrice symétrique (M et N dans $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$), alors MN est diagonalisable.

§ III.4 *ENDOMORPHISMES NORMAUX D'UN ESPACE EUCLIDIEN*

Similitudes vectorielles

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Nous noterons $\mathscr{H}(E)$ le groupe des *homothéties vectorielles* de E (i.e. le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ formé des $\lambda\,\mathrm{Id}_E$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$) et $\mathscr{H}_+(E)$ le groupe des homothéties de E de rapport > 0 (i.e. le sous-groupe du précédent formé des $\lambda\,\mathrm{Id}_E$,

$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). Rappelons que $\mathscr{H}(E)$ est le *centre* de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ (cf. tome 1, théorème IX.6.3), quitte à n'utiliser que la propriété évidente que tout élément de $\mathscr{H}(E)$ est *central*, i.e. *permutable* avec tout $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$. A cause de ce fait, il est clair que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ engendré par $\mathbf{O}(E)$ et $\mathscr{H}(E)$ est l'ensemble $\{\lambda u\}_{(\lambda, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbf{O}(E)}$.

DÉFINITION III.4.1

Etant donné un espace euclidien E, on appelle **groupe des similitudes** *(vectorielles) de E le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ *égal à* $\{\lambda u\}_{(\lambda, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbf{O}(E)}$. *Les éléments de ce sous-groupe sont appelés* **similitudes (vectorielles)** *de E.*

Le groupe des similitudes vectorielles de E sera noté $\vec{\mathscr{S}}(E)$ dans toute la suite.

PROPOSITION III.4.1

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. *L'application* $S : \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{O}(E) \longrightarrow \vec{\mathscr{S}}(E)$, $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ *est un isomorphisme de groupes du groupe-produit* $(\mathbb{R}_+^*, \times) \times \mathbf{O}(E)$ *sur* $\vec{\mathscr{S}}(E)$.

Démonstration :

Que S soit un homomorphisme de groupes découle immédiatement du fait que toute homothétie est centrale.

Soit $\lambda u \in \vec{\mathscr{S}}(E)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$, $u \in \mathbf{O}(E)$). Si $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$, on a : $\varepsilon u \in \mathbf{O}(E)$, $\varepsilon\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda u = (\varepsilon\lambda)(\varepsilon u) \in \mathrm{Im}\,(S)$. Donc S est surjectif. Il reste à prouver que S est injectif. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $u \in \mathbf{O}(E)$ tels que $\lambda u = \mathrm{Id}_E$. Alors, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\|x\| = \|(\lambda u)(x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| = \lambda \|u(x)\| = \lambda \|x\|$, d'où $\lambda = 1$, car $E \neq \{0\}$, et il reste $u = \mathrm{Id}_E$. Finalement $\mathrm{Ker}\,(S) = \{(1, \mathrm{Id}_E)\}$, donc S est injectif. ■

DÉFINITION III.4.2

Soit s une similitude vectorielle d'un espace euclidien non nul E. Soit (λ, u) *l'unique élément de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbf{O}(E)$ *tel que* $s = \lambda u$. *Le réel strictement positif* λ *s'appelle* **rapport** *de la similitude s. L'automorphisme u s'appelle* **partie orthogonale** *de s.*

Fixons un espace euclidien $E \neq \{0\}$. Voici quelques conséquences immédiates de la proposition III.4.1 :

- L'application $\vec{\mathscr{S}}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $s \mapsto$ (rapport de s) est un *homomorphisme de groupes,* de noyau $\mathbf{O}(E)$. Cet homomorphisme est surjectif car

$\mathscr{H}(E) \subset \vec{\mathscr{S}}(\mathscr{E})$. On a en particulier : $\mathbf{O}(E) \lhd \vec{\mathscr{S}}(E)$, et le groupe quotient $\vec{\mathscr{S}}(E)/_{\mathbf{O}(E)}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

• L'application $\vec{\mathscr{S}}(E) \longrightarrow \mathbf{O}(E)$, $s \mapsto$ (partie orthogonale de s) est un *homomorphisme de groupes,* surjectif car $\mathbf{O}(E) \subset \vec{\mathscr{S}}(E)$, et de noyau $\mathscr{H}_+(E)$. Donc $\mathscr{H}_+(E) \lhd \vec{\mathscr{S}}(E)$, et le groupe quotient $\vec{\mathscr{S}}(E)/_{\mathscr{H}_+(E)}$ est isomorphe à $\mathbf{O}(E)$.

• Les similitudes $s \in \vec{\mathscr{S}}(E)$ dont la partie orthogonale appartient à $\mathbf{SO}(E)$ forment un sous-groupe de $\vec{\mathscr{S}}(E)$.

DÉFINITION III.4.3

Soit E un espace euclidien non nul. Le groupe des similitudes $s \in \vec{\mathscr{S}}(E)$ dont la partie orthogonale appartient à $\mathbf{SO}(E)$ est appelé ***groupe des similitudes directes*** *de E, et sera noté $\vec{\mathscr{S}}_+(E)$. Ses éléments sont appelés* ***similitudes directes.*** *Les éléments de $\vec{\mathscr{S}}(E) \setminus \vec{\mathscr{S}}_+(E)$ sont appelés* ***similitudes rétrogrades*** *(ou* ***indirectes****).*

On a immédiatement les propriétés suivantes :

• Toute homothétie positive est une similitude directe.

• L'application $\mathbb{R}_+^* \times \mathbf{SO}(E) \longrightarrow \vec{\mathscr{S}}_+(E)$, $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ est un isomorphisme de groupes.

• L'application $\vec{\mathscr{S}}_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $s \mapsto$ (rapport de s) est un homomorphisme de groupes surjectif, de noyau $\mathbf{SO}(E)$. Donc $\mathbf{SO}(E) \lhd \vec{\mathscr{S}}_+(E)$ et le groupe quotient $\vec{\mathscr{S}}_+(E)/_{\mathbf{SO}(E)}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

• L'application $\vec{\mathscr{S}}_+(E) \longrightarrow \mathbf{SO}(E)$, $s \mapsto$ (partie orthogonale de s) est un homomorphisme de groupes surjectif, de noyau $\mathscr{H}_+(E)$. Donc $\mathscr{H}_+(E) \lhd \vec{\mathscr{S}}_+(E)$ et le groupe quotient $\vec{\mathscr{S}}_+(E)/_{\mathscr{H}_+(E)}$ est isomorphe à $\mathbf{SO}(E)$. Enfin, $\vec{\mathscr{S}}_+(E) \lhd \vec{\mathscr{S}}(E)$ et $\vec{\mathscr{S}}(E)/\vec{\mathscr{S}}_+(E) \cong \{-1, 1\}$.

Voici comment caractériser les similitudes :

THÉORÈME III.4.1

Soit E un espace euclidien non nul et $s \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \setminus \{0\}$. Pour que s soit une ***similitude,*** *il faut et il suffit que soit satisfaite l'une des conditions équivalentes* (I) *et* (II) *ci-dessous :*

(I) $\exists C \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall (x, y) \in E^2) \quad (s(x) \mid s(y)) = C(x \mid y)$

(II) $(\forall (x, y) \in E^2) \quad (x \mid y) = 0 \Rightarrow (s(x) \mid s(y)) = 0$.

Démonstration :

Si $s \in \vec{\mathscr{S}}(E)$, en notant λ son rapport et u sa partie orthogonale, on a, pour $(x, y) \in E^2$, $(s(x) \mid s(y)) = \lambda^2(u(x) \mid u(y)) = \lambda^2(x \mid y)$, d'où (I), et il est clair que (I) $\Rightarrow$ (II).

Réciproquement, supposons (II) satisfaite. Fixons $y \in E \setminus \{0\}$. La forme linéaire $x \mapsto (s(x) \mid s(y))$ est nulle sur l'hyperplan noyau de la forme linéaire $x \mapsto (x \mid y)$, d'où l'existence de $f(y) \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall x \in E)$ $(s(x) \mid s(y)) = f(y)(x \mid y)$ (cf. tome 1, théorème IX.5.2). On définit ainsi $f : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $(x \mid y) \neq 0$, on a :

$$(s(x) \mid s(y)) = f(y)(x \mid y) = (s(y) \mid s(x)) = f(x)(y \mid x) = f(x)(x \mid y),$$

d'où $f(x) = f(y)$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $(x \mid y) = 0$, en posant $z = x + y$, on a : $(x \mid y) = \|x\|^2 \neq 0$ et $(y \mid z) = \|y\|^2 \neq 0$, ce qui donne $f(x) = f(z) = f(y)$. En résumé la fonction f est constante. Désignons sa valeur par C. Il est clair qu'alors :

$$(3) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad (s(x) \mid s(y)) = C(x \mid y).$$

Pour voir que (II) $\Rightarrow$ (I) il suffit de vérifier que $C \in \mathbb{R}_+^*$. Or, pour $a \in E \setminus \{0\}$ fixé, on a : $(s(a) \mid s(a)) = C(a \mid a)$, d'où $C = \dfrac{\|s(a)\|^2}{\|a\|^2} \geqslant 0$, et nécessairement $C > 0$, car par hypothèse $s \neq 0$.

Il reste à prouver que s est une similitude. Pour cela posons $\lambda = \sqrt{C}$ et $u = \dfrac{1}{\lambda} s$. De (3) on déduit : $(\forall (x, y) \in E^2)$ $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$. Donc $u \in \mathbf{O}(E)$, et $s = \lambda u \in \vec{\mathscr{S}}(E)$. Quant à $\lambda = \sqrt{C}$, c'est le rapport de s. ■

Endomorphismes normaux

THÉORÈME III.4.2

> *Soit E un* ***plan euclidien*** *et $s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E)$ un endomorphisme* ***normal*** *et* ***sans valeur propre réelle.*** *Alors s est une* ***similitude directe.***

Démonstration :

Posons $v = s^* \circ s$ $(= s \circ s^*)$: c'est clairement un endomorphisme symétrique de E, auquel on peut appliquer le théorème III.3.1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de v, $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda, \mu)$ la matrice de v dans $\mathscr{B}$, et $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ la matrice de s dans $\mathscr{B}$. Nécessairement $b \neq 0$ puisque s est sans valeur propre réelle. Ecrivons que ${}^tMM = M\,{}^tM = D$. On obtient entre autres : $a^2 + c^2 = a^2 + b^2 = \lambda$, d'où $b^2 = c^2$, et $ab + cd = 0 = ac + bd$. On ne peut avoir $c = b$, sinon M, donc s, serait symétrique (cf. proposition III.2.4) et s admettrait des valeurs propres réelles contrairement à l'hypothèse. Donc $c = -b \neq 0$. Portant dans $ab + cd = 0$, on en tire $d = a$, d'où $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec

$b \neq 0$. Il suffit alors de poser $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha = \dfrac{a}{\rho}$, $\beta = \dfrac{b}{\rho}$ et $\Omega = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ pour reconnaître que $M = \rho\Omega$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Omega \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$. Comme $\mathscr{B}$ est orthonormale, cela prouve bien que $s \in \vec{\mathscr{S}}_+(E)$, le rapport de s étant ρ, et sa partie orthogonale la rotation de matrice Ω dans $\mathscr{B}$. ■

THÉORÈME III.4.3

Soit E un espace euclidien non nul et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme ***normal.*** *Alors u est somme directe interne orthogonale d'homothéties et de similitudes planes directes.*

Démonstration :

Elle se fait par récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$, il n'y a rien à prouver. Supposons $n \geqslant 2$ et le théorème vrai en toute dimension $< n$.

1er cas : u admet au moins une valeur propre réelle λ

Soit alors $F = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$: c'est un sous-$\mathbb{R}$-ev u-stable de E, et aussi u^*-stable, puisque pour tout $x \in F$, $u^*u(x) = uu^*(x) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$, d'où $(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)\,u^*(x) = 0$, i.e. $u^*(x) \in F$.

Donc $G = F^\perp$ est à la fois u-stable et u^*-stable, ce qui entraîne, en posant $v = u\|_G$, que dans l'espace euclidien G, on a $v^* = u^*\|_G$ (cf. remarque 1 du § III.2). Donc v est normal et l'hypothèse de récurrence s'applique à v dans G qui est de dimension $< n$. D'où le résultat voulu pour u.

2e cas : u est sans valeur propre réelle

Soit alors $Q(X) = X^2 - 2\,\alpha X + \beta$ un facteur irréductible de $\chi_u(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ $(\alpha^2 - \beta < 0)$ et $N = \mathrm{Ker}\,(Q(u)) \neq \{0\}$ (cf. lemme 1 du § III.1). Notons que N est évidemment u-stable, mais aussi u^*-stable, car $u^*Q(u) = Q(u)\,u^*$ (conséquence de $u^*u = uu^*$). En posant $\varphi = u\|_N$, on a donc $\varphi^* = u^*\|_N$ (cf. remarque 1 du § III.2), d'où $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$. Mais l'endomorphisme $\varphi^*\varphi$ de N est symétrique : soit ρ l'une de ses valeurs propres et $x \in N$ un vecteur propre correspondant. Forcément $\rho \neq 0$ puisque φ, étant sans valeur propre réelle, est inversible. Posons $V = \mathrm{Vect}\,(x, u(x))$: c'est un plan, et ce plan est u-stable car $u^2(x) = 2\,\alpha u(x) - \beta x \in V$. Montrons que V est aussi u^*-stable. D'abord : $uu^*(x) = u^*u(x) = \rho x$, d'où $u^2u^*(x) = u^*u^2(x) = \rho u(x)$, i.e. $u^*(2\,\alpha u(x) - \beta x) = \rho u(x)$, c'est-à-dire

$$\beta u^*(x) = -\rho u(x) + 2\,\alpha u^*u(x) = -\rho u(x) + 2\,\alpha\rho x$$

d'où, puisque $\beta \neq 0$: $u^*(x) = -\dfrac{\rho}{\beta}u(x) + \dfrac{2\,\alpha\rho}{\beta}x \in V$.

Ensuite $u^*[u(x)] = \varphi^*\varphi(x) = \rho x \in V$, ce qui achève de prouver que V est u^*-stable.

Pour terminer, posons $W = V^\perp$, $v = u\|_V$ et $w = u\|_W$ (cela a un sens car W est à la fois u-stable et u^*-stable (cf. remarque 1 du § III.2)).

On sait que dans V (resp. dans W) $v^* = u^*\|_V$ (resp. $w^* = u^*\|_W$).

Donc v et w sont normaux, et tout comme u, ils sont sans valeur propre réelle. Le théorème III.4.2 nous apprend que v est une similitude plane directe. Quant à w, on

peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque dim $(W) < n$. La conclusion voulue en résulte pour $u = v \oplus w$. ■

Remarque 1 : On sait déjà que toute similitude de l'espace euclidien E est un endomorphisme normal ainsi que toute somme directe interne orthogonale de similitudes. Le théorème III.4.3 *caractérise* donc les endomorphismes normaux. On peut également l'utiliser pour redémontrer le théorème III.1.1.

Qualifions maintenant de **normale** toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que ${}^tMM = M\,{}^tM$. Pour tout espace euclidien E de dimension n, et toute base *orthonormale* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, un endomorphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ est normal ssi la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est normale (cf. théorème III.2.1). Cela conduit au

Corollaire 1

> *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice* ***normale.*** *Alors M est orthogonalement semblable à une matrice N diagonale par blocs du type $N = \mathrm{Diag}\,(N_1, \ldots, N_q)$, l'un au plus des blocs étant une matrice diagonale, tous les autres étant de la forme $N_i = \lambda_i\,\Omega_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Omega_i \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R}) \setminus \{I_2, -I_2\}$.*

(Réciproquement, toute matrice du type $\Omega N \Omega^{-1}$, avec N du type indiqué dans le corollaire et $\Omega \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, est évidemment normale.)

Application : endomorphismes antisymétriques

Soit E un espace euclidien fixé de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathrm{Asym}\,(E)$. Pour tout sous-$\mathbb{R}$-ev u-stable F de E, on voit que $u\|_F$ est antisymétrique et que $F^\perp$ est u-stable.

Inversement, il est facile de vérifier que toute somme directe interne *orthogonale* d'endomorphismes antisymétriques l'est encore.

Si $n = 1$, le seul endomorphisme antisymétrique est l'endomorphisme nul.

Si $n = 2$, le $\mathbb{R}$-ev Asym (E) est de dimension 1 (cf. proposition III.2.4). Il y a alors exactement deux éléments $u \in \mathbf{SO}(E)$ tels que $\mathbf{Cos}\,(u) = 0$: en effet les matrices $M \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ telles que $\mathbf{Cos}\,M = 0$ sont évidemment $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $-J$. Soit alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E. Notant $\delta_{\mathscr{B}}$ l'endomorphisme de E de matrice J dans $\mathscr{B}$, les $u \in \mathbf{SO}(E)$ tels que $\mathbf{Cos}\,(u) = 0$ sont donc $\delta_{\mathscr{B}}$ et $-\delta_{\mathscr{B}}$, qui sont évidemment antisymétriques puisque J l'est. En fin de compte, Asym $(E) = \mathbb{R}\delta_{\mathscr{B}}$.

Orientons le plan E, et notons δ l'élément de $\mathbf{SO}(E)$ tel que $\delta = \delta_{\mathscr{B}}$ pour toute base orthonormale *directe :* δ s'interprète comme étant l'*endomorphisme produit vectoriel* de E, à savoir $\wedge : E \longrightarrow E$, $x \mapsto \wedge x$. Comme δ et $-\delta$ sont les deux rotations d'angle droit de E, les éléments non nuls de Asym (E) peuvent être appelés *similitudes directes d'angle droit* de E.

Si n est quelconque, pour que u soit antisymétrique, il faut et il suffit que

$$(\forall x \in E) \quad (u(x) \mid x) = 0\,. \tag{5}$$

C'est évidemment nécessaire, et réciproquement de (5) on déduit, pour $(x, y) \in E^2$ $(u(x+y) \mid x+y) = 0$, soit en développant et en tenant compte de (5) : $(u(x) \mid y) + (u(y) \mid x) = 0$, ce qui signifie que $u \in \text{Asym}\ (E)$.

Une description complète de Asym (E) est fournie par :

THÉORÈME III.4.4

Soit $u \in \text{Asym}\ (E)$. Alors u est somme directe interne orthogonale de l'endomorphisme nul de Ker (u) *et de similitudes planes directes d'angle droit.*

Démonstration :

Appliquons le théorème III.4.3 : u est somme directe interne orthogonale d'un endomorphisme diagonalisable v et de similitudes planes directes $s_i \neq 0$. Mais puisque v est antisymétrique et diagonalisable, $v = 0$. Et chaque s_i étant une similitude plane directe antisymétrique non nulle, c'est nécessairement une similitude directe d'angle droit. ■

En voici la traduction matricielle :

COROLLAIRE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute matrice antisymétrique $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs N du type suivant :
a) *si M est inversible, $N = \text{Diag}\ (N_1, \ldots, N_q)$, où chaque N_i est de la forme $\lambda_i J$ $(\lambda_i \in \mathbb{R}^*)$,*
b) *si* rg $(M) = r < n$, $N = \text{Diag}\ (O_{\mathfrak{M}_{n-r}(\mathbb{R})}, N_1, \ldots, N_q)$, *où chaque N_i est de la forme $\lambda_i J$ $(\lambda_i \in \mathbb{R}^*)$.*
Dans chaque cas, le rang de M est pair, égal à $2q$.

Exercice 1 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Démontrer que le normalisateur $\mathcal{N}$ de $\mathbf{O}(E)$ dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(E,)$ c'est-à-dire le groupe $\{u \in \mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(E) \mid \forall v \in \mathbf{O}(E)\ uvu^{-1} \in \mathbf{O}(E))$ est le groupe $\mathcal{S}(E)$ des similitudes vectorielles de E.
Indication : Pour $u \in \mathcal{N}$, étudier usu^{-1} lorsque s est une réflexion.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. En utilisant le théorème III.4.4, redémontrer (cf. exercice 3 du § III.1) que l'application Asym $(E) \longrightarrow \mathbf{SO}(E)$, $u \mapsto \exp(u)$ est surjective.

Exercice 3 : Soit u et v deux endomorphismes normaux d'un espace euclidien E. Pour que u et v soient orthogonalement semblables, il faut et il suffit que les polynômes caractéristiques $\chi_u(X)$ et $\chi_v(X)$ soient égaux.

Exercice 4 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Donner les composantes connexes de l'ensemble des *automorphismes* normaux de E.

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme normal de E. Montrer que si $\exp(u) \in \mathbf{O}(E)$, alors u est antisymétrique. Montrer à l'aide d'un exemple que la propriété cesse d'être vraie si u n'est pas supposé normal.

Chapitre IV

FORMES HERMITIENNES, ESPACES HERMITIENS

§ IV.1 *FORMES SESQUILINÉAIRES HERMITIENNES* [1]

Dans ce chapitre sont étudiés des espaces vectoriels complexes. Rappelons que, pour tout $\mathbb{C}$-ev V, la notation $V_{(\mathbb{R})}$ désigne le $\mathbb{R}$-ev déduit de V *par restriction des scalaires* à $\mathbb{R}$ (cf. tome 1, § VI.1, exemple 3).

DÉFINITION IV.1.1

Soit E un $\mathbb{C}$-ev. On appelle **forme sesquilinéaire hermitienne** *sur E toute application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(I) (*linéarité à droite de h*)
$(\forall x \in E)$, *l'application $E \longrightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto h(x, y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire*
(II) (*semi-linéarité à gauche de h*)
$(\forall x \in E)$, *l'application $E \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto h(x, y)$ est semi-linéaire, ce qui signifie qu'elle vérifie*

$$(\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2),\ (\forall (x_1, x_2) \in E^2) \quad h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \\ = \bar{\lambda}_1 h(x_1, y) + \bar{\lambda}_2 h(x_2, y)$$

(III) (*h est hermitienne*)

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad h(y, x) = \overline{h(x, y)}\,.$$

---

[1] Charles *Hermite*, mathématicien français (1822-1901) qui fut un grand algébriste, fit progresser l'étude des fonctions elliptiques et démontra le premier la transcendance de e (1873).

Les propriétés (I) et (II) expriment la **sesquilinéarité** de h. Les formes sesquilinéaires hermitiennes sur E sont aussi appelées, pour abréger, **formes hermitiennes** sur E ; l'ensemble de ces formes sera noté $\mathscr{H}\text{er}\,(E)$: il est immédiat que $\mathscr{H}\text{er}\,(E)$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev du $\mathbb{R}$-*ev* $[\mathscr{F}(E \times E, \mathbb{C})]_{(\mathbb{R})}$.

Restitution et polarisation

Soit h une forme hermitienne sur le $\mathbb{C}$-ev E ; notons u et v ses parties réelle et imaginaire : $h = u + \mathrm{i}v$.

De (I), (II) et (III) on déduit que $u : E_{(\mathbb{R})} \times E_{(\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire symétrique, et que $v : E_{(\mathbb{R})} \times E_{(\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire alternée. De plus, pour tous x et y dans E, on a : $h(\mathrm{i}x, \mathrm{i}y) = h(x, y)$ et $h(\mathrm{i}x, y) = -\mathrm{i}h(x, y)$, d'où :

$$u(\mathrm{i}x, \mathrm{i}y) = u(x, y) \tag{1}$$
$$u(\mathrm{i}x, y) = v(x, y)\,. \tag{2}$$

Réciproquement, soit u une forme bilinéaire symétrique sur $E_{(\mathbb{R})}$ *qui vérifie* (1). En lui associant $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto u(x, y) + \mathrm{i}u(\mathrm{i}x, y)$, on voit que h est une forme hermitienne sur E.

Désignons par $S_{2,H}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E qui vérifient (1). C'est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $S_2(E_{(\mathbb{R})})$, et de ce qui précède, on déduit facilement :

PROPOSITION IV.1.1

Soit E un $\mathbb{C}$-ev. L'application qui, à chaque $h \in \mathscr{H}\text{er}\,(E)$, associe la fonction $u = \mathrm{Re}\,(h) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev entre $\mathscr{H}\text{er}\,(E)$ et $S_{2,H}(E)$.
L'isomorphisme réciproque associe, à chaque $u \in S_{2,H}(E)$, la forme hermitienne h sur E définie par

$$(\forall\,(x, y) \in E^2) \quad h(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}u(\mathrm{i}x, y)\,. \tag{3}$$

Reprenons la forme hermitienne $h = u + \mathrm{i}v$ sur le $\mathbb{C}$-ev E. La fonction $Q_h : x \mapsto h(x, x)$ définie sur E est à valeurs réelles à cause de (III) ; c'est la forme quadratique associée à u sur $E_{(\mathbb{R})}$, puisque $h(x, x) = u(x, x)$ pour tout $x \in E$. On dit que Q_h est la **forme quadratique hermitienne** associée à h.

Notons $\mathrm{Quadrat}_H\,(E)$ le $\mathbb{R}$-ev des formes quadratiques sur $E_{(\mathbb{R})}$ dont la forme polaire appartient à $S_{2,H}(E)$. L'application qui, à $u \in S_{2,H}(E)$ fait correspondre sa forme quadratique associée, est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de $S_{2,H}(E)$ sur $\mathrm{Quadrat}_H\,(E)$ (cf. théorème I.3.1). En tenant compte de la proposition IV.1.1, on en déduit que l'application $h \mapsto Q_h$ définit un

isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev entre $\mathscr{H}\text{er}\,(E)$ et $\text{Quadrat}_H\,(E)$, et que l'isomorphisme réciproque associe, à $Q \in \text{Quadrat}_H\,(E)$, la forme hermitienne h définie par : $\forall\,(x, y) \in E^2$

$$(4) \qquad \boxed{h(x, y) = \frac{1}{4}\,[Q(x+y) - Q(x-y) + \mathrm{i}Q(x-\mathrm{i}y) - \mathrm{i}Q(x+\mathrm{i}y)]}\,.$$

La formule (4) sera appelée **formule de restitution ;** la forme hermitienne h définie par (4) sera appelée **forme hermitienne polaire** de Q.

Remarque 1 : Le lecteur pourra vérifier que $\text{Quadrat}_H\,(E)$ n'est autre que le $\mathbb{R}$-ev des formes quadratiques Q sur $E_{(\mathbb{R})}$ telles que la fonction $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par (4) soit élément de $\mathscr{H}\text{er}\,(E)$.

Applications semi-linéaires

Soit V un $\mathbb{C}$-ev. On obtient une nouvelle structure de $\mathbb{C}$-ev sur V en conservant sa loi de groupe additif, et en prenant pour nouvelle loi externe sur V l'application $\mathbb{C} \times V \longrightarrow V$, $(\lambda, x) \mapsto \bar{\lambda} x$; le nouveau $\mathbb{C}$-ev ainsi défini s'appelle le **$\mathbb{C}$-ev conjugué de V,** et peut être noté $\bar{V}$. Il est évident que $\bar{V}$ admet les mêmes sous-$\mathbb{C}$-ev que V, les mêmes familles libres, les mêmes familles génératrices, donc les mêmes bases. En particulier, un sous-$\mathbb{C}$-ev W de V est de dimension finie ssi il l'est dans $\bar{V}$, et si c'est le cas sa dimension est la même comme sous-$\mathbb{C}$-ev de V ou de $\bar{V}$. On a aussi : $V_{(\mathbb{R})} = (\bar{V})_{(\mathbb{R})}$.

Soit maintenant deux $\mathbb{C}$-ev E et F. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **semi-linéaire** ssi c'est un homomorphisme de groupes additifs de $(E, +)$ dans $(F, +)$ qui vérifie : $(\forall\,(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E) \quad f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$, ce qui revient à dire que f est linéaire de E dans $\bar{F}$, ou de $\bar{E}$ dans F (1). Visiblement :

- Si $f : E \longrightarrow F$ est semi-linéaire, elle est $\mathbb{R}$-linéaire de $E_{(\mathbb{R})}$ dans $F_{(\mathbb{R})}$.
- Si $f : E \longrightarrow F$ est semi-linéaire, $\text{Ker}\,(f) = f^{-1}(0)$ et $\text{Im}\,(f)$ sont respectivement un sous-$\mathbb{C}$-ev de E, et un sous-$\mathbb{C}$-ev de F. Lorsque de plus E est de dimension finie, on a la *formule du rang* :

(1) On prendra garde au fait qu'en général $\text{Hom}_{\mathbb{C}}\,(E, \bar{F}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}\,(\bar{E}, F) \neq \text{Hom}_{\mathbb{C}}\,(E, F)$. En particulier $(\bar{E})^*$ et E^* sont des *ensembles* en général distincts, tandis que les ensembles sous-jacents à E^* et $\overline{E^*}$ sont égaux.

dim (Ker (f)) + dim (Im (f)) = dim (E), et on peut appeler *rang de f* l'entier dim (Im (f)).

• Soit E, F, G des $\mathbb{C}$-ev et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Si f et g sont semi-linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire. Si f est linéaire (resp. semi-linéaire) et g semi-linéaire (resp. linéaire), alors $g \circ f$ est semi-linéaire.

• La conjugaison : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ est l'exemple le plus simple d'application semi-linéaire.

Exemples fondamentaux de formes hermitiennes

Exemple 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'application $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, associe $\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{x}_k y_k$ est une forme hermitienne. La forme quadratique hermitienne associée est : $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k |x_k|^2$.

Exemple 2 : Notons $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ le sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formée des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_k |u_k|^2$ converge. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite *réelle* et *bornée*. Pour $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ éléments de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, posons $h_\alpha(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{u}_k v_k$ (ce qui a un sens car la série écrite est absolument convergente donc convergente). La fonction h_α ainsi définie est une forme hermitienne sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Exemple 3 : Soit a et b éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble E_α des fonctions $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornées intégrables telles que l'intégrale $\int_a^b |\alpha| |f|^2$ converge est un sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathscr{F}(]a, b[, \mathbb{C})$. Si $f \in E_\alpha$ et $g \in E_\alpha$, l'intégrale $\int_a^b \alpha \bar{f} g$ converge absolument, donc converge. En posant $h_\alpha(f, g) = \int_a^b \alpha \bar{f} g$, on définit une forme hermitienne h_α sur E_α.

Formes non dégénérées, formes dégénérées

Soit E sur $\mathbb{C}$-ev et h une forme hermitienne sur E. Pour chaque $y_0 \in E$, l'application $h_{[y_0]} : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto h(x, y_0)$ est semi-linéaire ; et pour

chaque $x_0 \in E$, l'application ${}_{[x_0]}h : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto h(x_0, y)$ est linéaire. On définit alors les applications

$$I_h : E \longrightarrow E^*, x \mapsto {}_{[x]}h \quad \text{et} \quad J_h : E \longrightarrow (\bar{E})^* = \bar{E}^*, y \mapsto h_{[y]}.$$

L'application I_h est semi-linéaire tandis que J_h est linéaire. En raison de la partie (III) de la définition IV.1.1, on voit que Ker (I_h) = Ker (J_h), donc l'injectivité de I_h équivaut à celle de J_h.

DÉFINITION IV.1.2

Avec les notations ci-dessus, la forme hermitienne h sur le $\mathbb{C}$-ev *E est dite* ***non dégénérée*** *ssi* I_h *est* ***injective*** *(i.e. ssi* J_h *est injective). On dit que h est* ***dégénérée*** *ssi* I_h *est non injective (i.e. ssi* J_h *est non injective).*

Orthogonalité par rapport à une forme hermitienne

Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $h \in \mathscr{H}\text{er}\,(E)$. La notion de *h-orthogonalité* se définit par analogie avec l'orthogonalité relative à une forme quadratique étudiée au chapitre I : deux vecteurs x et y de E sont dits ***h*-orthogonaux** (ou *orthogonaux* lorsqu'aucune confusion sur h n'est à craindre) ssi $h(x, y) = 0$. La relation $h(x, y) = 0$ équivaut à $h(y, x) = 0$ (car h est hermitienne) et s'écrit $x \perp y$.

Pour toute partie non vide A de E, on appelle ***h*-orthogonal de *A*** (ou **orthogonal de *A***), et on note $A^\perp$, l'ensemble $\{x \in E \mid \forall y \in A, x \perp y\} = \bigcap_{x \in A} \text{Ker}\,({}_{[x]}h) = \bigcap_{x \in A} \text{Ker}\,(h_{[x]})$.

Deux sous-$\mathbb{C}$-ev H et L de E sont dits ***h*-orthogonaux** ssi $x \perp y$ pour tous $(x, y) \in H \times L$, et on écrit alors $H \perp L$. La relation $H \perp L$ équivaut à : $H \subset L^\perp$, ou aussi à $L \subset H^\perp$.

- Pour $\varnothing \neq A \subset E$, $A^\perp$ est un sous-$\mathbb{C}$-ev de E, et $A^\perp = (\text{Vect}\,(A))^\perp$.
- On a : $\{0_E\}^\perp = E$, et : $E^\perp = \text{Ker}\,(I_h) = \text{Ker}\,(J_h)$. En particulier ***h* est non dégénérée ssi** $E^\perp = \{0_E\}$.
- Pour $\varnothing \neq A_1 \subset A_2 \subset E$, on a : $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.

Enfin, comme à la proposition I.1.1, on prouve :

(5) $$\text{Pour } \varnothing \neq A \subset E, \text{ on a : } A^\perp = {}^0(I_h(A)).$$

Isotropie

DÉFINITION IV.1.3

Soit E sur $\mathbb{C}$-ev *et* $h \in \mathscr{H}\text{er}\,(E)$. *Un vecteur* $x \in E$ *est dit* ***h*-isotrope** *(ou, si aucune confusion n'en résulte,* ***isotrope****) ssi* $x \neq 0_E$ *et* $h(x, x) = 0$.

Un sous-$\mathbb{C}$-ev H de E est dit ***h-isotrope*** *(ou :* ***isotrope****) ssi $H \cap H^{\perp} \neq \{0_E\}$, et* ***totalement h-isotrope*** *(ou :* ***totalement isotrope****) ssi $H \subset H^{\perp}$.*
L'ensemble $\{x \in E \mid h(x, x) = 0\}$ est appelé ***cône isotrope*** *de h.*
Le sous-$\mathbb{C}$-ev $E^{\perp}$ de E est appelé ***espace singulier*** *de h, et noté* Sing (h) ; *les éléments de* Sing $(h) \setminus \{0_E\}$ *sont appelés* ***vecteurs h-singuliers*** *(ou :* ***vecteurs singuliers****).*

Dans ces conditions, un sous-$\mathbb{C}$-ev H de E est h-isotrope (resp. totalement h-isotrope) ssi la forme hermitienne $h|_{H \times H}$ est dégénérée (resp. est nulle). Si dim $(H) = 1$, (H est h-isotrope) $\Leftrightarrow$ (H est totalement h-isotrope) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in H \setminus \{0\}$, x est h-isotrope). De manière générale, pour que H soit totalement h-isotrope, il faut et il suffit que $h(x, x) = 0$ pour tout $x \in H$.

Soit Q_h la forme quadratique hermitienne issue de h, et $u = \mathrm{Re}\,(h)$ la forme polaire de Q_h sur $E_{(\mathbb{R})}$. Le cône isotrope de h est celui de Q_h. Si H est un sous-$\mathbb{C}$-ev de E, la formule (3) montre que le h-orthogonal de H est égal au u-orthogonal de H. Donc H est h-isotrope (resp. totalement h-isotrope) ssi H est u-isotrope (resp. totalement u-isotrope), et Sing $(h) =$ Sing (u). En particulier h est non dégénérée ssi u est non dégénérée.

Familles orthogonales, familles orthonormales

DÉFINITION IV.1.4

Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$. Une famille $(a_k)_{k \in I}$ d'éléments de E est dite ***h-orthogonale*** *(ou :* ***orthogonale****) ssi $h(a_k, a_l) = 0$ pour tout $(k, l) \in I^2$ avec $k \neq l$, et* ***h-orthonormale*** *(ou :* ***orthonormale****) ssi $h(a_k, a_l) = \delta_{k,l}$ pour tout $(k, l) \in I^2$, $\delta_{k,l}$ désignant le symbole de Kronecker.*

Comme à la proposition I.4.1, on prouve que *toute famille orthogonale de vecteurs non nuls et non isotropes est libre,* et que *toute famille orthonormale est libre.* Par ailleurs, il est clair que toute sous-famille d'une famille orthogonale (resp. orthonormale) l'est encore.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_n \in \mathbb{C}[X]$. On pose $M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. Montrer que $M \geqslant 1$; puis prouver que $M = 1$ ssi $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

Indication : Soit E le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}_n[X]$. Considérer sur E la forme sesquilinéaire hermitienne $(f, g) \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})}\, g(e^{i\theta})\, d\theta$.

Exercice 2 : Dans l'exemple 2 (resp. dans l'exemple 3), chercher les suites α (resp. les fonctions α) telles que la forme hermitienne h_α soit non dégénérée.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Dans l'ensemble Sesq (E) des formes sesquilinéaires sur E, on définit l'addition et le produit par un scalaire de la manière habituelle. Montrer que Sesq (E) est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{C}$-ev. Quelle est sa dimension si $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n$? Prouver que $\mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$ est un sous-groupe additif, mais n'est pas un sous-$\mathbb{C}$-ev de Sesq (E).

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension > 1.

a) Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$ tel que $(\forall x \in E \setminus \{0\})\, \exists \lambda_x \in \mathbb{C},\ u(x) = \lambda_x x$. Montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid u = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.

b) On suppose de plus que E est de dimension *finie* et on donne $v \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$ qui ne soit pas une homothétie du $\mathbb{C}$-ev E.

Déduire du *a)* qu'il existe une forme quadratique hermitienne Q sur E telle que $Q \circ v \neq Q$. En déduire le groupe $\bigcap_{Q \in \mathrm{Quadrat}_H(E)} \mathrm{O}(Q)$.

Exercice 5 : Soit E et F deux $\mathbb{C}$-ev. Démontrer :

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F))_{(\mathbb{R})} \oplus (\mathrm{Hom}'_{\mathbb{C}}(E, \bar{F}))_{(\mathbb{R})} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})}, F_{(\mathbb{R})}),$$

où $\bar{F}$ désigne le $\mathbb{C}$-ev *conjugué* de F.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev non nul. On donne une *bijection* $\mathbb{R}$-linéaire $u : E_{(\mathbb{R})} \longrightarrow E_{(\mathbb{R})}$ telle que

$$(\forall x \in E \setminus \{0\}),\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}^*)\quad \exists \rho \in \mathbb{C}^* \mid u(\lambda x) = \rho u(x).$$

Démontrer que u est soit $\mathbb{C}$-linéaire, soit $\mathbb{C}$-semi-linéaire.

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{C}$ ev non nul et $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$. Prouver qu'il existe dans E des vecteurs non h-isotropes si h n'est pas l'application nulle.

§ IV.2 *FORMES HERMITIENNES EN DIMENSION FINIE*

Matrices hermitiennes

Soit n et p deux entiers $\geqslant 1$, et $M = [a_{kl}] \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On appelle **conjuguée** de la matrice M la matrice $[\overline{a_{k,l}}]_{(k,l) \in [\![1,n]\!] + [\![1,p]\!]}$, et on la note $\bar{M}$.

Si $M = [a_{kl}] \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il est immédiat que ${}^t(\bar{M}) = \overline{{}^tM}$: c'est la matrice $[b_{kl}]$ où $b_{kl} = \overline{a_{lk}}$ pour tous k et l dans $[\![1, n]\!]$. Cette matrice ${}^t(\bar{M}) = \overline{{}^tM}$ est alors appelée la **transconjuguée** de M et notée M^*.

Il est évident que l'application $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto M^*$ est *semi-linéaire*, *involutive* ($M^{**} = M$ pour toute $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$) et qu'elle *renverse le produit*, i.e. vérifie $(MN)^* = N^* M^*$ pour toute $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et toute $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

De plus, pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(M^*) = \overline{\det(M)}$.

DÉFINITION IV.2.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **hermitienne** *ssi $H^* = H$.*

Nous noterons $\mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont hermitiennes. Il est clair que *toute matrice symétrique réelle est hermitienne* : $\mathrm{Sym}\ (n, \mathbb{R}) \subset \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$.

On voit facilement que $\mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))_{(\mathbb{R})}$ et on remarque que si $H = [a_{kl}] \in \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$, alors $a_{k,k} \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. De plus, $\det\ (H) = \det\ (\bar{H}) = \overline{\det\ (H)}$, d'où $\det\ (H) \in \mathbb{R}$.

Soit $H = A + \mathrm{i}B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A = \mathrm{Re}\ (H) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \mathrm{Im}\ (H) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On a : $H^* = {}^tA - \mathrm{i}\ {}^tB$; donc H est hermitienne ssi $A = {}^tA$ et $B = -\ {}^tB$. Etant donné que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{M}_n(\mathfrak{R}) \oplus \mathrm{i}\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui précède prouve que :

$$(1)\mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C}) = \mathrm{Sym}\ (n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}\ \mathrm{Asym}\ (n, \mathbb{R})\,.$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{R}}\ (\mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C})) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = n^2$.

Remarque 1 : Considérons les matrices $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $H^* = -H$ (on les appelle parfois *antihermitiennes*). Elles forment un sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{V}$ de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))_{(\mathbb{R})}$ isomorphe à $\mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$ puisque H est antihermitienne ssi $\mathrm{i}H \in \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$, d'où $\mathscr{V} = \mathrm{i}\ \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$. Cela montre qu'il y a une grande différence entre les matrices complexes hermitiennes et les matrices symétriques réelles : en effet $\mathrm{Asym}\ (n, \mathbb{R})$ ne saurait être isomorphe à $\mathrm{Sym}\ (n, \mathbb{R})$ puisqu'il est de dimension strictement inférieure tandis que $\mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{i}\ \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$ sont deux exemplaires du même $\mathbb{R}$-ev.

Dans toute la suite de ce §, E désigne un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.

Matrice d'une forme hermitienne dans une base

DÉFINITION IV.2.2

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\ (E)$. On appelle ***matrice de h dans $\mathscr{B}$*** *la matrice $[h(e_k, e_l)]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Nous noterons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (h)$ cette matrice. Le scalaire $\det\ (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (h))$ est appelé* ***discriminant de h dans $\mathscr{B}$*** *et noté $\mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}\ (h)$.*

Dans ces conditions, posons $A = [a_{kl}] = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (h)$, et soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j \in E$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \in E$. *En développant $h(x, y)$ par sesquilinéarité*, on obtient :

$$(2) \qquad h(x, y) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \overline{x_j}\, y_k\, h(e_j, e_k) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} a_{jk}\, \overline{x_j}\, y_k.$$

En introduisant les vecteurs-colonnes $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, et en identifiant comme d'habitude $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$, la relation (2) prend la forme réduite :

$$(3) \qquad \boxed{h(x, y) = {}^t\overline{X}AY}\,.$$

Compte tenu de $h(e_k, e_l) = \overline{h(e_l, e_k)}$ pour tous indices k et l, on voit que

$$\boxed{A \in \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})}\,.$$

Réciproquement, si on donne une matrice $A \in \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$, la fonction h définie sur E^2 par la formule (3) est une forme hermitienne sur E, de matrice A dans $\mathscr{B}$, d'où :

PROPOSITION IV.2.1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application $\mathscr{H}\mathrm{er}\ (E) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{er}\ (n, \mathbb{C})$, $h \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (h)$ est un ***isomorphisme de*** $\mathbb{R}$***-ev****. En conséquence, le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{H}\mathrm{er}\ (E)$ est de dimension finie, égale à n^2.*

En raisonnant de la même façon qu'au § I.2, on démontre :

PROPOSITION IV.2.2 *(Changement de base pour les formes hermitiennes)*

Soit $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\ (E)$, et soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases ordonnées de E, P désignant la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. On a :

$$(4) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\ (h) = P^* \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (h)\ P\ .$$

En conséquence (puisque $\det\ (P^*) = \overline{\det\ (P)}$*) :*

$$(5) \qquad \mathrm{Discr}_{\mathscr{C}}(h) = |\det\ (P)|^2\, \mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}\ (h)\ .$$

THÉORÈME IV.2.1

Conservons les notations de la définition IV.1.2, *et soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathscr{B}$ dans E^*.*
Désignons par $\overline{\mathscr{B}^*} = (\overline{e_1^*}, \ldots, \overline{e_n^*})$ la base de $\overline{E}^*$ formée des fonctions $\overline{e_k^*} : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \overline{e_k^*(x)}$.

Notons enfin $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = [a_{kl}]$. *Alors :*

(6) $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \overline{\mathscr{B}^*}}(J_h) = A$$

et si l'on considère I_h *comme application* $\mathbb{C}$*-linéaire de* E *dans* $\overline{E^*}$:

(7) $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}^*}(I_h) = A\,.$$

En conséquence, le rang de A *ne dépend que de* h *et non de la base* $\mathscr{B}$: *c'est l'entier* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}\,(I_h)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}\,(J_h))$.

Démonstration :

Comme dans la preuve du théorème I.2.3, on voit que :

$$(\forall k \in [\![1, n]\!])\quad I_h(e_k) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, e_l^* \quad \text{et} \quad J_h(e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\, \overline{e_j^*}\,.$$

D'où immédiatement (6) à condition de se rappeler que $\mathscr{B}^*$ étant une base de E^*, $\overline{\mathscr{B}^*}$ en est une de $\overline{E}^*$.

Si maintenant on note $\#$ la loi externe de $\overline{E^*}$, la relation $I_h(e_k) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, e_l^*$ s'écrit aussi $I_h(e_k) = \sum_{l=1}^{n} \overline{a_{kl}} \# e_l^*$, ce qui entraîne (7), compte tenu de $A = A^*$. ■

Dans ces conditions l'entier $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}\,(I_h)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}\,(J_h))$ s'appelle le **rang** de h et on le note rg (h). Ce théorème IV.2.1 entraîne évidement :

COROLLAIRE 1

Dans les conditions du théorème IV.2.1, *pour que* h *soit* ***non dégénérée****, il faut et il suffit que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h)$ *soit inversible, i.e. que* $\mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}(h) \neq 0$.

COROLLAIRE 2

Dans les conditions du théorème IV.2.1, *le sous-espace singulier de* h *est l'ensemble des* $x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E$ *tels que* $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, x_k = 0$ *pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$.

Fixant toujours la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$, considérons la base $\beta = (e_1, \ldots, e_n, \mathrm{i}e_1, \ldots, \mathrm{i}e_n)$ de $E_{(\mathbb{R})}$, et la partie réelle u de h. Soit $A = U + \mathrm{i}V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h)$, avec $U \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$ et $V \in \mathrm{Asym}\,(n, \mathbb{R})$. La relation (3) du § IV.1 montre que

(8) $$\mathrm{Mat}_{\beta}(u) = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}.$$

Orthogonalité en dimension finie

En reprenant avec des modifications mineures la preuve du théorème I.2.1, on démontre :

THÉORÈME **IV.2.2**

Soit h une forme hermitienne sur E. Pour tout sous-$\mathbb{C}$-ev H de E, et relativement à la h-orthogonalité, on a :

$$\dim (H^{\perp}) + \dim (H) = n + \dim (H \cap \operatorname{Sing} (h)) .$$

Ce théorème entraîne, comme aux §§ I.2 et I.4 :

COROLLAIRE **1**

Sous les hypothèses du théorème IV.2.2, *pour qu'un sous-$\mathbb{C}$-ev H de E soit* ***non isotrope****, il faut et il suffit que : $E = H \oplus H^{\perp}$.*

COROLLAIRE **2**

Soit h une forme hermitienne sur E ***non dégénérée****. Alors pour tout sous-$\mathbb{C}$-ev H de E, on a :*

$$\dim (H^{\perp}) + \dim (H) = n \; ; \quad et : \quad H = H^{\perp\perp} .$$

COROLLAIRE **3**

Sous les hypothèses du corollaire 2 ci-dessus, pour tout entier $q \in [\![0, n]\!]$, l'application $H \mapsto H^{\perp}$ définit une bijection de $\mathscr{G}_q(E)$ sur $\mathscr{G}_{n-q}(E)$.

De même, il suffit de calquer les démonstrations du théorème I.4.2 et de la proposition I.4.2 pour obtenir :

THÉORÈME **IV.2.3**

Soit $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$. Le $\mathbb{C}$-ev E admet au moins une base h-orthogonale.

PROPOSITION **IV.2.3** *(théorème de la base orthogonale incomplète)*

Soit $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une suite ***h-orthogonale*** *de E formée de vecteurs* ***non nuls*** *et* ***non h-isotropes****. On peut alors compléter cette suite en une* ***base h-orthogonale*** *$(e_1, \ldots, e_n)$ de E.*

Soit toujours $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour que $\mathscr{B}$ soit h-orthogonale, il faut et il suffit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(h)$ soit diagonale, ce qui équivaut à l'existence de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$(9) \qquad \left(\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E\right) \quad Q_h(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, |x_j|^2, \text{ i.e.}$$

$$\left(\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E, \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \in E\right) \quad h(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j\, \bar{x}_j\, y_j\,.$$

Si $\mathscr{B}$ est h-orthogonale, avec $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(h) = \mathrm{Diag}\,(a_1, \ldots, a_n)$, on voit comme au § I.4 que le rang de h est $\mathrm{card}\,(\{j \in [\![1, n]\!] \mid a_j \neq 0\})$ et que $\mathrm{Sing}\,(h)$ est le $\mathbb{C}$-ev engendré par les vecteurs (e_k) tels que $a_k = 0$.

Formes hermitiennes équivalentes

DÉFINITION IV.2.3

Deux formes hermitiennes f et g sur un $\mathbb{C}$-ev V sont dites ***équivalentes*** *ssi il existe $\varphi \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ tel que*

$$(\forall\,(x, y) \in V^2) \quad g(x, y) = f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))\,,$$

ce qui équivaut, avec les formes quadratiques hermitiennes associées Q_f et Q_g, à : $Q_g = Q_f \circ \varphi^{-1}$.

En fait, avec ces notations, si $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(V)$ et $\varphi \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, l'application $\varphi * h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto h(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$ est encore une forme hermitienne. La loi $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V) \times \mathscr{H}\mathrm{er}\,(V) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{er}\,V$, $(\varphi, h) \mapsto \varphi * h$ est une *action à gauche* de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ sur $\mathscr{H}\mathrm{er}\,(V)$, et deux formes hermitiennes sur V sont équivalentes ssi elles sont dans la même orbite de cette action.

Soit f et g deux formes hermitiennes *équivalentes* sur le $\mathbb{C}$-ev V, et soit $\varphi \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ tel que $Q_g = Q_f \circ \varphi^{-1}$. Notant $\perp_f$ et $\perp_g$ respectivement la f-orthogonalité et la g-orthogonalité, pour toute partie A de V, on vérifie que $\varphi\,(A^{\perp_f}) = (\varphi\,(A))^{\perp_g}$. Si de plus V est de dimension finie, cela entraîne que f et g ont même rang, et que $\varphi\,(\mathrm{Sing}\,(f)) = \mathrm{Sing}\,(g)$.

Revenons au $\mathbb{C}$-ev E, de dimension finie $n \geqslant 1$. On prouve exactement comme pour la proposition I.5.1 :

PROPOSITION IV.2.4

Soit f et g deux formes hermitiennes sur E. Pour que f et g soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe deux bases

> $\mathscr{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *et* $\mathscr{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *de* E *telles que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{A}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

Signature

Soit maintenant $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}(E)$, de forme quadratique hermitienne associée Q, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base *h-orthogonale* de E.

Associons-lui les entiers $r(\mathscr{B}) = \mathrm{card}\,\{j \in [\![1, n]\!] \mid Q(e_j) > 0\}$ et $s(\mathscr{B}) = \mathrm{card}\,\{j \in [\![1, n]\!] \mid Q(e_j) < 0\}$. L'entier $r(\mathscr{B}) + s(\mathscr{B})$ est le rang de $H = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \mathrm{Diag}\,(Q(e_1), \ldots, Q(e_n))$, donc ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$. Exactement comme pour la proposition I.5.2, on démontre, en exploitant la relation (9) :

Proposition IV.2.5 (loi d'inertie)

> *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, les entiers* $r(\mathscr{B})$ *et* $s(\mathscr{B})$ *sont indépendants du choix de la base h-orthogonale* $\mathscr{B}$.

On est ainsi conduit à la

Définition IV.2.4

> *Avec les notations et hypothèses de la proposition* IV.2.5, *le couple* $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ *tel que, pour toute base h-orthogonale* $\mathscr{B}$ *de E, on ait* $r = r(\mathscr{B})$ *et* $s = s(\mathscr{B})$, *est appelé* **signature** *de h.*

On peut alors définir, pour $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}(E)$, la notion de **base *h*-orthogonale réduite :** c'est une base ordonnée h-orthogonale $\mathscr{C}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = L_{r,s}(n) = \mathrm{Diag}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

avec $\varepsilon_k = 1$ si $k \leqslant r$, $\varepsilon_k = -1$ pour $r < k \leqslant r + s$ et $\varepsilon_k = 0$ pour $k < r + s$, où (r, s) est la signature de h. Une telle base réduite s'obtient à partir d'une base ordonnée h-orthogonale quelconque par un procédé analogue à celui vu au § I.5.

La signature de h est $(n, 0)$ ssi $Q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, les bases h-orthogonales réduites sont des bases **orthonormales,** et la forme Q est dite *définie positive.*

La signature de h est $(0, n)$ ssi $Q(x) < 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, ce qu'on traduit en disant que Q est définie négative.

La signature de h est $(\mathrm{rg}\,(h), 0)$ ssi $Q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$; elle est $(0, \mathrm{rg}\,(h))$ ssi $Q(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Enfin, si h est non dégénérée, son cône isotrope est $\neq \{0\}$ ssi sa signature est (r, s) avec $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$.

En calquant presque mot par mot la preuve du théorème I.5.2, on obtient :

THÉORÈME IV.2.4

> *Pour que deux formes hermitiennes sur E soient* ***équivalentes,*** *il faut et il suffit qu'elles aient* ***même signature.***

Considérons maintenant une forme hermitienne h sur E de signature (r, s), de forme quadratique hermitienne associée Q, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E h-orthogonale réduite. Notons $\beta = (e_1, \mathrm{i}e_1, e_2, \mathrm{i}e_2, \ldots, e_n, \mathrm{i}e_n)$: c'est une base de $E_{(\mathbb{R})}$. Pour tout $z = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k \in E$, posons $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, avec $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. On a :

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{r} |z_j|^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} |z_k|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} (|x_k|^2 + |y_k|^2) - \sum_{k=r+1}^{r+s} (|x_k|^2 + |y_k|^2),$$

ce qui prouve immédiatement que la base β est orthogonale réduite pour la forme quadratique Q et que la signature de Q, en tant que forme quadratique sur $E_{(\mathbb{R})}$, est $(2r, 2s)$.

Exemple 1 : *Formes hermitiennes en dimension 2.*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2, $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$ une forme hermitienne non nulle, de matrice $H = \begin{bmatrix} a & \bar{b} \\ b & c \end{bmatrix}$ dans une base donnée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E. Notons Q la forme quadratique hermitienne issue de h et posons $\Delta = \mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}\ (h) = ac - |b|^2$.

On sait que h est *dégénérée* ssi $\Delta = 0$. Dans ce cas, la signature de h est (1, 0) ou (0, 1).

Supposons maintenant h *non dégénérée*. On reconnaîtra que sa signature est (1, 1) à l'existence d'au moins un vecteur isotrope. Cela se produit certainement si $ac = 0$ (si $a = 0$, $Q(e_1) = a = 0$ et e_1 est isotrope). Notons que dans ce cas $\Delta = -|b|^2 < 0$.

Il reste à étudier le cas où $\Delta \neq 0$ et $ac \neq 0$. Calculons d'abord, pour $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 \in E$, $Q(z) = a|z_1|^2 + c|z_2|^2 + \bar{b}\bar{z}_1 z_2 + b z_1 \bar{z}_2 = a|z_1|^2 + c|z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{b}\bar{z}_1 z_2)$ et posons $\bar{b} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Si $z = z_1 e_1 + z_2 e_2$ est h-isotrope, nécessairement $z_1 z_2 \neq 0$ (car $Q(e_1) = a \neq 0$) et $Q(e_2) = c \neq 0$), et $\dfrac{z}{z_2} = v$ est h-isotrope. Posons $\dfrac{z_1}{z_2} = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, avec

$(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a : $0 = Q(v) = a\rho^2 + 2r\rho\cos(\theta - \varphi) + c$, ce qui prouve que le trinôme $g = aX^2 + 2r\cos(\theta - \varphi)X + c \in \mathbb{R}[X]$ a une racine réelle, d'où $r^2\cos^2(\theta - \varphi) - ac \geqslant 0$ et *a fortiori* $r^2 - ac \geqslant 0$, d'où $\Delta < 0$. Réciproquement si $\Delta < 0$, c'est que le trinôme $f = aX^2 + 2rX + c \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine λ dans $\mathbb{R}^*$ et alors le vecteur $z = \lambda\, e^{i\theta} e_1 + e_2$ est h-isotrope, puisque $Q(z) = f(\lambda) = 0$ et $z \neq 0$.

En résumé **la signature de h est $(1, 1)$ ssi $\Delta < 0$.** Finalement **la signature de h est $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ ssi $\Delta > 0$.**

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier : $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))_{(\mathbb{R})} = \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{i}\,\mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$.

Exercice 2 : Avec les notations de la relation (8), démontrer que

$$\mathrm{Discr}_\beta\,(u) = |\mathrm{Discr}_{\mathscr{B}}\,(h)|^2.$$

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que les matrices hermitiennes de rang 1 sont les matrices du type $[\bar{a}_k a_l]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$, avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

b) Une matrice $M \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ est dite positive (resp. définie positive) ssi la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ qu'elle représente dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est positive (resp. définie positive). Soit $A = [a_{kl}] \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ et $B = [b_{kl}] \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ deux matrices positives (resp. définies positives). Montrer que la matrice $C = [a_{kl}\, b_{kl}]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ est elle-même positive (resp. définie positive).

Indication : Commencer par le cas où B est de rang 1.

c) Soit $A \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ positive. Montrer que $\exp(A) \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ et que $\exp(A)$ est définie positive.

Exercice 4 : *a*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est hermitienne *positive* (cf. la définition dans l'exercice 3) ssi il existe $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = M^* M$. Montrer que A est *définie positive* ssi il existe $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $A = M^* M$.

b) Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que M et $M^* M$ ont le même rang.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [a_{kl}] \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ *positive* (cf. exercice 3) et telle que $a_{kl} \neq 0$ pour tous k et l. Montrer que, pour que la matrice $B = \left[\dfrac{1}{a_{kl}}\right]$ soit positive, il faut et il suffit que A soit de rang 1.

Exercice 6 : *a*) Reprendre l'exercice 1 du § I.5 avec un $\mathbb{C}$-ev et une forme sesquilinéaire hermitienne.

b) Reprendre l'exercice 6 du § I.5 avec $A \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ et avec la forme hermitienne h de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

c) Reprendre l'exercice 8 du § I.5 avec un $\mathbb{C}$-ev et des formes hermitiennes (la connexité de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ fait l'objet des exercices 16 et 23 du § XI.3 du tome 2).

Exercice 7 : Trouver une base orthogonale réduite pour chacune des formes quadratiques hermitiennes suivantes :

a) $Q : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (z_1, z_2) \mapsto |z_1|^2 + (1 + \mathrm{i})\bar{z}_1 z_2 + (1 - \mathrm{i}) z_1 \bar{z}_2 + 2|z_2|^2$.

b) $Q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (z_1, z_2, z_3) \mapsto a\bar{z}_1 z_2 + \bar{a} z_1 \bar{z}_2 + b z_2 \bar{z}_3 + \bar{b} \bar{z}_2 z_3$, où a et b sont des paramètres complexes.

Exercice 8 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et Q la forme quadratique hermitienne

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |z_k - z_l|^2.$$

a) Quelle est la signature de Q ?
b) Donner la matrice de Q dans la base canonique.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et h une forme hermitienne sur E de signature (p, q). On note $\mathscr{G}_+$ (resp. $\mathscr{G}_-$) l'ensemble des sous-$\mathbb{C}$-ev F de E tels que $h|_{F \times F}$ soit définie positive (resp. définie négative).

a) Montrer : pour tout $V \in \mathscr{G}_+$ (resp. $V \in \mathscr{G}_-$), on a : $\dim(V) \leqslant p$ (resp. $\dim(V) \leqslant q$), et il existe $W \in \mathscr{G}_+$ (resp. $W \in \mathscr{G}_-$) tel que $\dim(W) = p$ (resp. $\dim(W) = q$).

b) Soit $V \in \mathscr{G}_+$ tel que $\dim(V) = p$. Prouver qu'il existe $W \in \mathscr{G}_-$ tel que $\dim(W) = q$ et $E = V \oplus \operatorname{Sing}(h)$, avec $V \perp W$.

Exercice 10 : Soit $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n = E$. On note V le sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ de $E_{(\mathbb{R})}$ dont $\mathscr{C}$ est aussi la base canonique. On donne une matrice $M \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ qui définit une forme bilinéaire symétrique B sur V et aussi une forme hermitienne h sur E.

a) Vérifier que h est la seule forme hermitienne sur E qui prolonge B.

b) Montrer que c'est le même couple d'entiers (r, s) qui définit la signature de B et celle de h (utiliser l'exercice 6.*b*) ci-dessus).

§ IV.3 *ESPACES PRÉHILBERTIENS*

Avertissement. Ce § introduit les produits scalaires complexes et développe des propriétés parallèles à celles vues aux §§ II.1, II.2 et II.3. Chaque fois que les démonstrations des nouveaux résultats sont quasi identiques, à des modifications mineures près, à celles des résultats correspondants du chapitre II, nous conviendrons de ne pas les écrire et d'indiquer simplement la bonne référence.

Inégalité de Cauchy-Schwarz et conséquences

DÉFINITION IV.3.1

(I) *Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Une forme hermitienne h sur E, de forme quadratique hermitienne associée Q, est dite* ***positive*** *ssi $Q(E) \subset \mathbb{R}_+$ et* ***définie positive*** *ssi $Q(E \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}_+^*$.*
(II) *On appelle* ***produit scalaire*** *sur le $\mathbb{C}$-ev E toute forme hermitienne* ***définie positive*** *sur E.*
(III) *On appelle* ***espace préhilbertien*** *(sous-entendu :* ***complexe****) tout $\mathbb{C}$-ev muni d'un produit scalaire. On appelle* ***espace hermitien*** *tout espace préhilbertien* ***de dimension finie.***

On prendra garde au fait qu'un produit scalaire hermitien n'est pas commutatif puisque $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$.

Pour qu'une forme hermitienne h soit définie positive, il faut et il suffit qu'elle soit positive et que son cône isotrope soit réduit à $\{0_E\}$.

Il est clair que, pour tout sous-$\mathbb{C}$-ev F de E, si h est positive (resp. définie positive), alors $h|_{F\times F}$ est positive (resp. définie positive).

Remarque 1 : Pour qu'une forme hermitienne h sur E soit définie positive, par définition même, il faut et il suffit que sa forme quadratique hermitienne associée le soit sur $E_{(\mathbb{R})}$, autrement dit que la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{Re}(h)$ sur $E_{(\mathbb{R})}$ soit définie positive.

THÉORÈME IV.3.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

> *Soit une forme hermitienne* ***positive*** *h sur le $\mathbb{C}$-ev E, de forme quadratique hermitienne associée Q.*
> (I) *On a :* $(\forall (x,y)\in E^2)\quad |h(x,y)|^2 \leqslant Q(x)\,Q(y)$.
> (II) *Si de plus h est définie positive, pour qu'on ait l'égalité dans* (I), *il faut et il suffit que x et y soient $\mathbb{C}$-colinéaires.*

Démonstration :

(I) Si x et y sont $\mathbb{C}$-colinéaires, il est immédiat que $|h(x,y)|^2 = Q(x)\,Q(y)$. Si x et y sont linéairement indépendants, soit F le plan Vect (x,y), de base (x,y). Comme $h|_{F\times F}$ est une forme hermitienne positive en dimension 2, l'exemple 1 du § IV.2 montre que $Q(x)\,Q(y) - |h(x,y)|^2 \geqslant 0$.

(II) Si h est définie positive et si x et y sont linéairement indépendants, soit à nouveau $F = \mathrm{Vect}\,(x,y)$. En appliquant l'exemple 1 du § IV.2 à $h|_{F\times F}$ qui est de signature $(2,0)$, on voit que $Q(x)\,Q(y) - |h(x,y)|^2 > 0$. On ne peut donc avoir ici $|h(x,y)|^2 = Q(x)\,Q(y)$ que si x et y sont colinéaires, et, dans ce cas, on a bien l'égalité dans (I). ■

COROLLAIRE 1

> *Soit h une forme hermitienne* ***positive*** *sur un $\mathbb{C}$-ev E. Le* ***cône isotrope*** *de h est égal à* Sing (h). *En particulier, h est* ***non dégénérée*** *ssi elle est* ***définie positive.***

(Cf. corollaire 1 du théorème II.1.1.)

COROLLAIRE 2

> *Soit h une forme hermitienne* ***positive*** *sur un $\mathbb{C}$-ev E, de forme quadratique hermitienne associée Q, et soit*
> $$\nu : E \longrightarrow \mathbb{R}_+\ ,\quad x \mapsto (Q(x))^{1/2}\,.$$
> (I) *La fonction ν est une* ***semi-norme*** *sur E.*
> (II) *Si h est un* ***produit scalaire,*** *ν est une* ***norme*** *sur E ; et de plus, pour $(x,y)\in E^2$, on a l'égalité $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$ ssi x et y sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires.*

Démonstration :

Si h est positive, pour $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}(\nu(x+y))^2 = Q(x+y) &= (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + h(x,y) + h(y,x) \\ &= (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(h(x,y)) \\ &\leqslant (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + |h(x,y)|\,.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$(\nu(x+y))^2 \leqslant (\nu(x))^2 + (\nu(y))^2 + 2\,\nu(x)\,\nu(y)\,.$$

A partir de là, on peut suivre pas à pas la démonstration du corollaire 2 du théorème II.1.1. ■

Un espace préhilbertien sera systématiquement muni de la norme ν ci-dessus et de la topologie associée.

DÉFINITION IV.3.2

On appelle espace **hilbertien** *(ou mieux :* **espace de Hilbert** [1]*) tout espace préhilbertien qui est* **complet** *pour la métrique définie par la norme ν ci-dessus.*

Par exemple, tout espace **hermitien** est un espace de Hilbert puisque tout $\mathbb{C}$-evn de dimension finie est complet.

On notera qu'un espace préhilbertien E étant donné, de norme ν, le $\mathbb{R}$-ev $E_{(\mathbb{R})}$ hérite d'une *structure préhilbertienne réelle* définie par la forme quadratique définie positive $x \mapsto (\nu(x))^2$. Cette structure sera dite *sous-jacente* à celle de E.

Par exemple, si E est *hermitien*, il lui est ainsi associé l'espace *euclidien* sous-jacent $E_{(\mathbb{R})}$.

Notation : Dans cet ouvrage, le produit scalaire d'un espace préhilbertien sera le plus souvent noté $(.\,|\,.)$, la norme correspondante étant notée $\|\cdot\|$.

---

[1] David *Hilbert,* mathématicien prussien (1862-1943), auteur de travaux fondamentaux dans plusieurs branches des mathématiques, notamment en Algèbre et sur les fondements de la géométrie. Il énonça en 1900 une liste de 23 problèmes ouverts dont certains ne sont pas encore résolus. Son nom reste attaché au *théorème des zéros de Hilbert* (ou *Nullstellensatz*), outil de base de la géométrie algébrique moderne.

PROPOSITION IV.3.1

Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace préhilbertien. Lorsqu'on munit $E \times E$ de la topologie produit, le produit scalaire $E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto (x\,|\,y)$ est ***continu.***

(Cf. proposition II.2.1.)

Sous-espaces et espaces produits d'espaces préhilbertiens

• Soit d'abord $(E, (.\,|\,.))$ un espace préhilbertien et F un sous-$\mathbb{C}$-ev de E. L'application $F \times F \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto (x\,|\,y)$ est un produit scalaire sur F (dit **induit** par celui de E), qu'on note généralement comme celui de E. L'espace préhilbertien $(F, (.\,|\,.))$ ainsi construit s'appelle le **sous-espace préhilbertien** F de E.

• Soit maintenant $E_1, \ldots, E_p$ des espaces préhilbertiens, de produits scalaires $f_1, \ldots, f_p$. Munissons le $\mathbb{C}$-ev $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ de la forme hermitienne f définie par : $(\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in E,\ \forall y = (y_1, \ldots, y_p) \in E)$

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x_j, y_j)\,.$$

On vérifie que (E, f) est un espace préhilbertien : on l'appelle **produit externe** des E_k. Sa norme ν vérifie :

$$(\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in E) \quad (\nu(x))^2 = \sum_{j=1}^{p} (\nu_j(x_j))^2 \ (\nu_j = \text{norme de } E_j)\,.$$

Si en particulier chaque E_j est hilbertien, alors (E, f) l'est aussi (cf. tome 2, théorème XI.2.3).

Isomorphismes d'espaces préhilbertiens

Soit (E_1, f_1) et (E_2, f_2) deux espaces préhilbertiens. On appelle **isomorphisme d'espaces préhilbertiens** de E_1 sur E_2 tout isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ tel que

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E_1^2) \quad f_2(\varphi(x), \varphi(y)) = f_1(x, y)\,.$$

On dit que (E_1, f_1) et (E_2, f_2) sont **isomorphes** ssi il existe au moins un isomorphisme d'espaces préhilbertiens de E_1 sur E_2.

Si $(E_1, f_1) = (E_2, f_2) = (E, f)$, un isomorphisme d'espaces préhilbertiens de (E, f) sur (E, f) est appelé un **automorphisme unitaire** de (E, f). Nous les étudierons au § IV.4 dans le cas hermitien, i.e. en dimension finie.

On vérifie aisément que le composé de deux isomorphismes d'espaces préhilbertiens en est un ; que le réciproque d'un isomorphisme d'espaces préhilbertiens en est un ; que pour tout espace préhilbertien (E, f), l'application Id_E est un automorphisme unitaire de (E, f).

Pour que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$ soit un isomorphisme d'espaces préhilbertiens de E_1 sur $\varphi(E_1)$, il faut et il suffit que φ soit **isométrique.** Si $E_1 = E_2 = E$, un endomorphisme φ de E peut être isométrique sans être bijectif, mais cet inconvénient disparaît si E est de dimension finie, et pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, la condition (1) devient nécessaire et suffisante pour que φ soit un automorphisme unitaire de E.

Pour tout espace préhilbertien E, il est clair que *l'ensemble des automorphismes unitaires de E forme un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$: ce sous-groupe est appelé **groupe unitaire** de E et noté $\mathbf{U}(E)$.

Exemples d'espaces préhilbertiens

Exemple 1 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$, posons $h_{\mathscr{B}}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$: on constate que $(E, h_{\mathscr{B}})$ est un espace hermitien ; le produit scalaire $h_{\mathscr{B}}$ est l'unique produit scalaire sur E pour lequel $\mathscr{B}$ soit orthonormale. Cela prouve (puisque E admet au moins une base) que E admet des structures hermitiennes. Lorsque $E = \mathbb{C}^n$ et $\mathscr{B}$ = base canonique de $\mathbb{C}^n$, la structure hermitienne ainsi définie s'appelle **structure hermitienne canonique** sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et comparons-le à $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique. On sait (cf. théorème IV.2.3) que E admet au moins une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On vérifie que l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev $\varphi_{\mathscr{B}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow E$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ est un *isomorphisme d'espaces hermitiens*, ce qui prouve que les espaces hermitiens de dimension donnée sont tous isomorphes entre eux (sans qu'il y ait d'isomorphisme privilégié entre deux tels espaces).

Exemple 2 : Soit l'ensemble $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_n |u_n|^2$ converge. C'est un sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont dans ce $\mathbb{C}$-ev, la série $\sum_n \overline{u_n} v_n$ converge absolument, donc converge. Posant $(u \,|\, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} v_n$, on définit un *produit*

scalaire sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$; l'espace préhilbertien $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), (.\,|\,.))$ ainsi construit est en fait *hilbertien* (cf. exemple 2 du § II.1).

Exemple 3 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. Notons E le $\mathbb{C}$-ev des fonctions bornées intégrables : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $(f, g) \in E^2$, soit $s(f, g) = \int_a^b \bar{f}g$: la fonction s ainsi définie est une *forme hermitienne positive* sur E, ce qui redonne l'inégalité

$$(\forall (f, g) \in E^2) \quad |s(f, g)|^2 \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right)$$

déjà rencontrée au tome 2 (cf. théorème VII.8.1).

Soit F le sous-$\mathbb{C}$-ev $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ de E : la restriction $s|_{F \times F}$ est un produit scalaire sur F (cf. exemple 3 du § II.1), mais l'espace préhilbertien ainsi construit n'est pas hilbertien.

Orthogonalité dans un espace préhilbertien

Jusqu'à la fin de ce §, nous considérons un espace préhilbertien $(E, (.\,|\,.))$ dans lequel l'orthogonalité est notée $\perp$. On prouve d'abord (cf. théorème II.2.1) que, pour tout sous $\mathbb{C}$-ev H de E, on a : $H \cap H^\perp = \{0_E\}$, i.e. H est *non isotrope*, et on en déduit que, *pour toute famille* $(H_j)_{j \in I}$ *de sous-*$\mathbb{C}$-ev *de* E *deux à deux orthogonaux, la somme vectorielle* $\sum_{j \in I} H_j$ *est directe.* Lorsqu'il en est ainsi, cette somme vectorielle sera notée $\bigoplus_{j \in I} H_j$.

Le théorème II.2.2 s'étend immédiatement :

THÉORÈME IV.3.2

Soit $H_1, \ldots, H_n$ *des sous-*$\mathbb{C}$-ev *de* E *tels que* $E = \bigoplus_{j=1}^{n} H_j$.

Soit $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ *le produit externe des sous-espaces préhilbertiens* H_k. *L'isomorphisme naturel de* $\mathbb{C}$-ev : $H \longrightarrow E$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j$ *est un* ***isomorphisme d'espaces préhilbertiens.***

En particulier, on a le ***théorème de Pythagore***

$$(2) \qquad (\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in H) \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 .$$

Injection canonique dans le dual

Soit E^* le dual algébrique de E, et E' son dual topologique. Notons I l'application $E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto I_x = (x \mid .)$. On sait que I est injective, puisque tout produit scalaire $(. \mid .)$ est non dégénéré, et on sait que I est *semi-linéaire.*

THÉORÈME IV.3.3

L'application I définie ci-dessus est à valeurs dans E'. Si on munit E' de la norme $|||\,.\,|||$ associée à celle de E, l'application I est ***isométrique.*** *Si de plus E est* ***de dimension finie,*** *I est une* ***bijection semi-linéaire*** *de E sur $E' = E^*$.*

(Cf. le théorème II.2.3 et son corollaire.)

Supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Deux sous-$\mathbb{C}$-ev de E vérifiant $F \oplus G = E$ sont dits *supplémentaires orthogonaux* (et alors $F = F^{\perp\perp}$). Un sous-$\mathbb{C}$-ev F de E est dit *facteur direct préhilbertien* ssi $E = F \oplus F^{\perp}$ ce qu'on exprime par : *F admet un supplémentaire orthogonal.*

Les projecteurs $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ tels que $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$ sont appelés *projecteurs orthogonaux* de E. Soit F un sous-$\mathbb{C}$-ev de E : pour qu'il existe un projecteur orthogonal d'image F, il faut et il suffit que F soit facteur direct préhilbertien (cf. proposition II.2.1).

THÉORÈME IV.3.4

Soit F un sous-$\mathbb{C}$-ev de E facteur direct préhilbertien, et soit f le projecteur orthogonal d'image F. Pour tout $x \in E \backslash F$ et tout $y \in F \backslash \{f(x)\}$, on a : $\|x - y\| > \|x - f(x)\|$. Donc, pour tout $x \in E$, il y a un et un seul $z \in F$ tel que $\|x - z\|$ = distance de x à F : c'est $z = f(x)$. En particulier, F est fermé dans E.

(Cf. théorème II.2.4.)

La notion d'*involution orthogonale* vue au § II.2 se transpose sans difficulté : une involution $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ est dite **unitaire** ssi $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = E$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $u \in \mathbf{U}(E)$, d'où son nom (cf. proposition II.2.2).

Si $a \in E$ est donné de norme 1, soit $D_a = \mathbb{C}a$, $H_a = D_a^{\perp}$, f_a (resp. g_a) le projecteur orthogonal d'image D_a (resp. H_a) et s_a l'involution unitaire $\mathrm{Id}_{H_a} \oplus (-\mathrm{Id}_{D_a})$. Alors :

$$(\forall x \in E) \quad f_a(x) = (a \mid x)\,a,\ g_a(x) = x - (a \mid x)\,a,\ s_a(x) = x - 2\,(a \mid x)\,a.$$

Lorsque E est *hermitien*, de dimension $n \geqslant 1$, tout sous $\mathbb{C}$-ev de E est facteur direct préhilbertien, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'application $\mathscr{G}_k(E) \longrightarrow \mathscr{G}_{n-k}(E)$, $H \mapsto H^\perp$ est bijective (cf. théorème II.2.5).

Sans hypothèse de dimension sur E, *tout sous-*$\mathbb{C}$-ev *de dimension finie de E est facteur direct préhilbertien* (cf. théorème II.2.6).

Familles orthonormales dans E

Les résultats du § II.3 s'étendent aux espaces préhilbertiens, avec des modifications mineures dans les preuves que nous laissons à la diligence du lecteur. Contentons-nous de les énoncer.

THÉORÈME IV.3.5

Soit $(e_k)_{k \in I}$ une famille **orthonormale** *de E. Pour tout $x \in E$ et toute partie finie J de I, on a :*

$$(3) \qquad \sum_{j \in J} |(e_j \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (\textbf{\textit{Inégalité de Bessel}}),$$

et la projection orthogonale de x sur Vect $(e_j)_{j \in J}$ *est* $\sum_{j \in J} (e_j \mid x)\, e_j$.

THÉORÈME IV.3.6

Si E est hermitien de dimension $n \geqslant 1$, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormale** *de E et $x \in E$. On a :*

$$x = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(e_k \mid x)|^2 .$$

THÉORÈME IV.3.7 *(théorème de la base orthonormale incomplète)*

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une **suite orthonormale** *de l'espace hermitien E $(1 \leqslant p < n = \dim_{\mathbb{C}}(E))$. On peut* **compléter** *cette suite en une* **base orthonormale** *$(e_1, \ldots, e_n)$ de E.*

Une famille $(a_j)_{j \in I}$ d'éléments de E est dite **totale** ssi le sous-$\mathbb{C}$-ev Vect $((a_j)_{j \in I})$ est **partout dense** dans E.

THÉORÈME IV.3.8

Soit $(e_j)_{j \in I}$ une famille **orthonormale** *de E. Pour qu'elle soit* **totale,** *il faut et il suffit que :*

$$(\forall x \in E) \quad \sup_{J \subset I,\, J \text{ fini}} \left(\sum_{j \in J} |(e_j \mid x)|^2 \right) = \|x\|^2 ,$$

i.e. la famille $(|(e_j \mid x)|^2)_{j \in I}$ est sommable et $\sum_{j \in I} |(e_j \mid x)|^2 = \|x\|^2$.

THÉORÈME IV.3.9

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_N)$ une suite libre de E (resp. soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite libre de E). Il existe une et une seule suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ (resp. $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$) orthonormale de E telle que $(\forall k \in [\![1, N]\!])$ (resp. $\forall k \in \mathbb{N}^*$) $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $(e_k \mid \varepsilon_k) \in \mathbb{R}_+^*$.

La suite (ε_k) définie par ce théorème s'appelle **l'orthonormalisée** (de **Gram-Schmidt**) de la suite (e_k) de départ.

Enfin la théorie des *déterminants de Gram* s'étend : si $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, on pose $G(x_1, \ldots, x_p) = \det([(x_k \mid x_l)]_{(k,l) \in [\![1,p]\!]^2})$. C'est le déterminant de Gram de la suite $(x_1, \ldots, x_p)$. On a :
$G(x_1, \ldots, x_p) \neq 0 \Leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$ la suite $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

De plus :

THÉORÈME IV.3.10

Soit V un sous-$\mathbb{C}$-ev de E, de dimension finie $p \geqslant 1$, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$. Soit $x \in E$ et d la distance de x à V. On a :

$$d^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, \ldots, e_p)}.$$

Exercice 1 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Avec la notation des déterminants de Gram, montrer que, pour toute base *orthonormale* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a :

$$G(x_1, \ldots, x_n) = |\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)|^2.$$

Exercice 2 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons $H_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $H_0 = \{0\}$, et y_k la projection orthogonale de e_k sur $H_{k-1}^{\perp}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

a) Montrer : $(\forall k \in [\![1, n-1]\!])$

$$G(e_1, \ldots, e_n) = G(e_1, \ldots, e_k) \|y_{k+1}\|^2 \cdots \|y_n\|^2$$

et en déduire : $G(e_1, \ldots, e_n) \leqslant G(e_1, \ldots, e_k) \|e_{k+1}\|^2 \cdots \|e_n\|^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ? Qu'obtient-on pour $k = 1$?

b) Soit $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$. Démontrer :

$$G(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = |\det(u)|^2 G(e_1, \ldots, e_n).$$

c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et φ_k la projection orthogonale de E sur $H_k^{\perp}$.
Montrer que $G(\varphi_k(e_{k+1}), \ldots, \varphi_k(e_n)) = \|y_{k+1}\|^2 \times \cdots \times \|y_n\|^2$ (utiliser *b*)).
En déduire que $\|y_{k+1}\|^2 \times \cdots \times \|y_n\|^2 \leqslant G(e_{k+1}, \ldots, e_n)$, d'où :

$$(*) \quad G(e_1, \ldots, e_n) \leqslant G(e_1, \ldots, e_k) \times G(e_{k+1}, \ldots, e_n).$$

Indication : On pourra utiliser l'existence (prouvée par la proposition IV.4.2) de $u \in \mathbf{U}(E)$ tel que $u(H_k^{\perp}) = \text{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

Dans quel cas (*) est-elle une égalité ?

Exercice 3 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}\,(E)$.

a) Prouver qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E qui trigonalise u.

b) Soit $\mathscr{U} \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}\,(E)$ tel que $\forall (u, v) \in \mathscr{U}^2 \quad uv = vu$.

Prouver qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E qui trigonalise chaque $u \in \mathscr{U}$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [a_{kl}] \in \mathscr{H}\text{er}\,(n, \mathbb{C})$ définie positive (cf. exercice 3 du § IV.2 pour la définition).

a) Montrer par récurrence sur n qu'il existe une unique matrice T trigonale inférieure à termes diagonaux > 0 telle que $A = TT^*$ (cf. méthode de Cholesky, exercice 17 du § III.3).

b) En déduire que $\det\,(A) \leqslant a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$, l'égalité ayant lieu ssi A est diagonale.

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. Pour toute forme hermitienne h définie positive sur E, et pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on pose $\nu_{\mathscr{B}}(h) = \dfrac{1}{\sqrt{\text{Discr}\,(h)}}$, et on note $B_h = \{x \in E \mid h(x,x) \leqslant 1\}$. Soit alors h_1 et h_2 deux formes hermitiennes définies positives sur E et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E.

Prouver : $B_{h_2} \subset B_{h_1} \Rightarrow \nu_{\mathscr{B}}(h_1) \geqslant \nu_{\mathscr{B}}(h_2)$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A et B deux éléments de $\mathscr{H}\text{er}\,(n, \mathbb{C})$ toutes deux positives (resp. définies positives). Montrer que $\text{Tr}\,(AB) \geqslant 0$ (resp. $\text{Tr}\,(AB) > 0$) en utilisant l'exercice 4 du § IV.2.

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et G un sous-groupe fini de $\text{GL}_{\mathbb{C}}(E)$. Prouver qu'il existe au moins une forme hermitienne h définie positive telle que $G \subset \mathbf{U}(E)$ (le groupe $\mathbf{U}(E)$ étant relatif à la structure hermitienne définie par h).

Exercice 8 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note Γ la matrice $[(e_k \mid e_l)]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$.

Soit $[a_{kl}]$ la matrice Γ^{-1}. Démontrer :

$$(\forall x \in E) \quad \sum_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} a_{k,l}\,(x \mid e_k)\overline{(x \mid e_l)} \leqslant \|x\|^2 .$$

Exercice 9 : Soit E un espace *préhilbertien* non nul. Reprendre l'exercice 4 du § II.2. Avec les notations de cet exercice, on prouvera que l'unique $z \in \mathbb{C}$ de norme d est caractérisé par $(\forall t \in \mathbb{C})\ \text{Re}\,(z \mid t - z) \geqslant 0$, puis que, si $y \in \mathbb{C}$, on a : $y = z$ ssi $(\forall t \in \mathbb{C})\ \text{Re}\,(z - y \mid t) \geqslant 0$. A ces modifications près, tous les résultats de l'exercice susdit se transposent.

Exercice 10 : Prouver que l'espace préhilbertien de l'*exemple 3* n'est pas hilbertien.

Exercice 11 : Soit E un espace préhilbertien, et $(a, b, c, d) \in E^4$. Montrer :

$$\|a - c\| \cdot \|b - d\| \leqslant \|a - b\| \cdot \|c - d\| + \|b - c\| \cdot \|a - d\| .$$

Quand y a-t-il égalité ?

Indication : Se ramener au cas $a = 0$, puis penser à la transformation $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

§ IV.4 *MATRICES UNITAIRES, GROUPES UNITAIRES EN DIMENSION FINIE*

Matrices unitaires

DÉFINITION IV.4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice M est dite **unitaire** *(d'ordre n) ssi elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

(1) $M^* M = I_n$; (2) $MM^* = I_n$;

(3) $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $M^{-1} = M^*$.

On dit que M est **spéciale unitaire** *(d'ordre n) ssi M est unitaire et vérifie de plus :* $\det(M) = 1$.

L'ensemble des matrices unitaires d'ordre n sera noté $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$; l'ensemble des matrices spéciales unitaires d'ordre n sera noté $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$.

Remarquons tout de suite que si $M \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, alors

$$|\det(M)|^2 = \overline{\det(M)} \det(M) = \det(M^*) \det(M) = \det(M^* M) = 1 ,$$

donc $\det(M) \in \mathbb{U}$.

THÉORÈME IV.4.1

$\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$. Le groupe quotient $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})/\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ est isomorphe à U et on a :

$$\mathbf{U}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{U} ; \quad \mathbf{SU}(1, \mathbb{C}) = \{1\} .$$

Démonstration :

Il est clair que $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Or l'application $D : \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{U}$, $M \mapsto \det(M)$ est un homomorphisme de groupes dont le noyau est par définition $\mathrm{Ker}(D) = \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$. Donc $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ est bien un sous-groupe distingué de $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$.

Par passage au quotient, D définit un isomorphisme du groupe quotient $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})/\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ sur $\mathrm{Im}(D)$ (cf. tome 1, théorème V.7.3). Mais si $\rho \in \mathbb{U}$, alors la matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ égale à $\mathrm{Diag}(\rho, 1, \ldots, 1)$ appartient à $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et a son déterminant égal à ρ, donc D est *surjectif*, d'où $\mathbb{U} = \mathrm{Im}(D)$. ■

On peut remarquer que $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et que $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$. Notons aussi que si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

est unitaire, toute valeur propre λ de M appartient nécessairement à $\mathbb{U}$ car $\bar{\lambda}$ est valeur propre de M^* et $(1) \Rightarrow \bar{\lambda}\lambda = 1$.

Soit $M = [a_{jk}] \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. En explicitant (1), on voit que : $M \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ se traduit par l'une des relations équivalentes (4) ou (5) :

$$(4) \qquad (\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2) \quad \sum_{l=1}^{n} \overline{a_{jl}}\, a_{kl} = \delta_{jk} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

$$(5) \qquad (\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2) \quad \sum_{l=1}^{n} \overline{a_{lj}}\, a_{lk} = \delta_{jk}\,.$$

En particulier, si $M \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, on a :

$$(6) \qquad (\forall j \in [\![1,n]\!]) \quad \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 = 1\,.$$

Les relations (4), (5) et (6) signifient que *dans $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique, les vecteurs-lignes (resp. les vecteurs-colonnes) de M forment une base orthonormale.*

THÉORÈME IV.4.2

Les groupes $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ sont des parties **compactes** *de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration :

Les relations (6) montrent déjà que $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ est une partie bornée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. L'application $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $M \mapsto \det(M)$ est continue, donc $\det^{-1}(1) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ est fermé dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, soit $f_{jk} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $M = [a_{\alpha\beta}] \mapsto \left(\sum_{l=1}^{n} \overline{a_{jl}}\, a_{kl}\right) - \delta_{jk}$. C'est une application continue car elle est polynomiale, non pas évidemment sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, mais sur le $\mathbb{R}$-ev $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))_{(\mathbb{R})}$. Donc $f_{jk}^{-1}(0)$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Or, $\mathbf{U}(n, \mathbb{C}) = \bigcap_{(j,k) \in [\![1,n]\!]^2} f_{jk}^{-1}(0)$, donc $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. De même $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C}) = \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \cap \det^{-1}(1)$ est fermé dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Etant fermés et bornés, $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ sont bien des compacts de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. ■

Dans le cas particulier $n = 2$, le groupe $\mathbf{SU}(2, \mathbb{C})$, comme $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ admet une description simple que nous allons expliciter, mais attention ! ici il est loin d'être abélien.

PROPOSITION IV.4.1

Le groupe $\mathbf{SU}(2, \mathbb{C})$ *est l'ensemble des matrices* $\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$, *avec* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Démonstration :

Cherchons les matrices $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant la relation

$$ad - bc = 1 \tag{7}$$

et l'égalité (1) qui se traduit ici par :

$$\bar{a}a + \bar{b}b = 1, \quad \bar{c}c + \bar{d}d = 1 \quad \text{et} \quad \bar{a}c + \bar{b}d = 0\,. \tag{8}$$

Par soustraction : $a(d - \bar{a}) - b(c + \bar{b}) = 0$, et comme (7) montre que a et b ne sont pas tous deux nuls, on en déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $c = -\bar{b} + \lambda a$ et $d = \bar{a} + \lambda b$. En reportant dans la dernière des égalités (8), on obtient : $\lambda(a\bar{a} + b\bar{b}) = 0$, d'où $\lambda = 0$, ce qui donne $c = -\bar{b}$ et $d = \bar{a}$. Finalement $M = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$, avec $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. La réciproque est immédiate. ■

Groupes unitaires

Jusqu'à la fin de ce §, nous fixons un espace *hermitien* $(E, (.|.))$ de dimension $n \geqslant 1$. On sait (cf. § IV.3) que si un endomorphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ conserve le produit scalaire, il est *isométrique*, donc injectif, donc bijectif puisque E est de dimension finie. Grâce à la *formule de restitution* (formule (4) du § IV.1), cela se traduit par

$$(\forall x \in E) \quad \|u(x)\|^2 = \|x\|^2\,, \quad \text{ou} \tag{9}$$

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad \|u(x - y)\| = \|x - y\|\,. \tag{10}$$

L'ensemble des $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ qui vérifient (9) est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

DÉFINITION IV.4.2

Le groupe des $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ *qui vérifient* (9) *est appelé* **groupe unitaire** *de* E *et noté* $\mathbf{U}(E)$. *Le groupe des* $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ *de déterminant 1 qui vérifient* (9) *est appelé* **groupe spécial unitaire** *de* E *et noté* $\mathbf{SU}(E)$. *Donc* $\mathbf{SU}(E) = \mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(E) \cap \mathbf{U}(E)$.

Les éléments de $\mathbf{U}(E)$ sont parfois appelés *isométries vectorielles* de E, l'adjectif « vectorielles » faisant référence à la structure de $\mathbb{C}$-ev de E.

THÉORÈME IV.4.3

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{S}_{\mathscr{B}} = [(e_k \mid e_l)_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}]$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Pour qu'on ait $u \in \mathbf{U}(E)$, il faut et il suffit que :

$$M^* \mathscr{S}_{\mathscr{B}} M = \mathscr{S}_{\mathscr{B}} . \tag{11}$$

(Cf. propositions II.4.1 et IV.2.2.)

COROLLAIRE 1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une ***base orthonormale*** *de E. L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ définit un* ***isomorphisme*** *du groupe $\mathbf{U}(E)$ sur le groupe $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, et un* ***isomorphisme*** *du groupe $\mathbf{SU}(E)$ sur le groupe $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$. En conséquence : si $u \in \mathbf{U}(E)$, on a :* $\det(u) \in \mathbb{U}$. *De plus $\mathbf{SU}(E) \lhd \mathbf{U}(E)$, et les groupes $\mathbf{U}(E)$ et $\mathbf{SU}(E)$ sont des parties compactes de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$.*

(Il existe au moins une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, et alors $\mathscr{S}_{\mathscr{B}} = I_n$.)
En conséquence de ce corollaire 1, *les groupes $\mathbf{U}(E)$ et $\mathbf{SU}(E)$ ne dépendent, à isomorphisme près, que de $n = \dim(E)$* sans que, pour $n \geqslant 2$, il y ait d'isomorphisme privilégié entre $\mathbf{U}(E)$ et $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, ni entre $\mathbf{SU}(E)$ et $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$.

Action du groupe $\mathbf{U}(E)$ sur les bases orthonormales et sur les sous-$\mathbb{C}$-ev de E

Notons $\mathbf{B}_{\text{o.n.}}$ l'ensemble des suites $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ qui sont des bases orthonormales de E, et pour toute suite $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ et tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ notons a_u la suite $(u(a_1), \ldots, u(a_n))$.
Exactement comme pour le théorème II.4.6, on prouve :

THÉORÈME IV.4.4

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}}$. L'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E) \longrightarrow E^n$, $u \mapsto \mathscr{B}_u$ définit une ***bijection*** *de $\mathbf{U}(E)$ sur $\mathbf{B}_{\text{o.n.}}$. En conséquence, soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in E^n$, de matrice M dans $\mathscr{B}$. Alors : $\mathscr{C} \in \mathbf{B}_{\text{o.n.}} \Leftrightarrow M \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$.*

On en déduit par la même méthode qu'à la preuve de la proposition II.4.3 en utilisant le théorème IV.3.7 (de la base orthonormale incomplète) :

PROPOSITION IV.4.2

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ et V, W deux sous-$\mathbb{C}$-ev de E, de même dimension p. Il existe un élément $u \in \mathbf{U}(E)$ tel que $u(V) = W$.

De même le lecteur pourra vérifier l'analogue de la proposition II.4.4 :

PROPOSITION IV.4.3

(I) *Soit V un sous-$\mathbb{C}$-ev de E et $u \in \mathbf{U}(E)$ tel que $u(V) = W$. Alors $u\|_V \in \mathbf{U}(V)$ et $u(V^\perp) = V^\perp$.*
(II) *Soit V et W deux sous-$\mathbb{C}$-ev de E supplémentaires orthogonaux. Pour tous $v \in \mathbf{U}(V)$ et $w \in \mathbf{U}(W)$ (resp. $v \in \mathbf{SU}(V)$ et $W \in \mathbf{SU}(W)$), on a : $v \oplus w \in \mathbf{U}(E)$ (resp. $v \oplus w \in \mathbf{SU}(E)$).*

Enfin, notons Q la forme quadratique hermitienne $x \mapsto \|x\|^2$ sur $E_{(\mathbb{R})}$. Soit $J \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$ défini par $J(x) = ix$ pour tout $x \in E$. Un élément $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi $u \circ J = J \circ u$. D'autre part, si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$, il vérifie (9) ssi $u \in \mathbf{O}(Q)$, et par suite u est dans $\mathbf{U}(E)$ ssi il vérifie (9) et est de plus $\mathbb{C}$-linéaire. Autrement dit $\mathbf{U}(E) = \{u \in \mathbf{O}(Q) \mid u \circ J = J \circ u\}$, i.e. *le groupe $\mathbf{U}(E)$ est le commutant de J dans le groupe euclidien $\mathbf{O}(Q)$.*

Orthonormalisées et matrices unitaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En raisonnant comme à la fin du § II.4 et en utilisant les théorèmes IV.4.4 et IV.3.9, on voit que *toute matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme $M = TU$, avec T trigonale supérieure à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$ et $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$.* De plus, l'application $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, $M \mapsto U$ est *continue.*

De même, *toute matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ s'écrit de façon unique $M = U'T'$, avec $U' \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et T' trigonale inférieure à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$*, l'application $M \mapsto U'$ étant *continue.*

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ζ une racine primitive n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Vérifier que la matrice $\Omega_n(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{n}}[\zeta^{(k-1)(l-1)}]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ est *unitaire.* Dans $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique, elle définit, relativement à la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ soit l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ dans $\mathscr{C}$. (Cf. aussi l'exercice 9 du § XV.4 du tome 1.)

Exercice 2 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. On donne u et v dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) $\exists \omega \in \mathbf{U}(E) \mid v = \omega \circ u$
(II) $(\forall x \in E) \quad \|u(x)\| = \|v(x)\|$.

Exercice 3 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$.

a) Soit G un sous-groupe *compact* de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$. Si $u \in G$, montrer que toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{U}$. En déduire que tout élément de G est diagonalisable.

b) Soit alors $u \in \mathbf{U}(E)$. Montrer que u est diagonalisable, puis, que les sous-$\mathbb{C}$-ev propres de u sont deux à deux orthogonaux, ce qui sera vu d'une autre façon au § IV.5 (cf. corollaire 1 du théorème IV.5.3). Vérifier que $\mathbf{U}(E)$ est l'ensemble des $\bigoplus_{k=1}^{p} \lambda_k \mathrm{Id}_{E_k}$, avec $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E$ et $(\forall k)\, \lambda_k \in \mathbb{U}$.

Exercice 4 : Sur un $\mathbb{C}$-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$, trouver les couples de structures hermitiennes pour lesquelles le groupe unitaire associé est le même.

Exercice 5 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$.

a) On suppose $|||u||| \leqslant 1$ et $\det(u) = 1$. Montrer : $u \in \mathbf{SU}(E)$.

b) Si u appartient à un sous-groupe compact G de $\mathbf{U}(E)$, a-t-on nécessairement $|||u||| \leqslant 1$?

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $\mathscr{T}_+(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{T}_-(n, \mathbb{C})$) la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ trigonales supérieures (resp. inférieures) ; $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{C})$) l'ensemble des $M \in \mathscr{T}_+(n, \mathscr{C})$ (resp. $\mathscr{T}_-(n, \mathbb{C})$) à éléments diagonaux > 0. Vérifier que $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathscr{T}_+(n, \mathbb{C})$ et que $\mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{C})$ l'est dans $\mathscr{T}_-(n, \mathbb{C})$. Déterminer $\mathrm{Adh}\,(\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{C}))$ et $\mathrm{Adh}\,(\mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{C}))$.

a) Prouver que les applications $\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{C}) \times \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $(T, \Omega) \mapsto T\Omega$ et $\mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \times \mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $(\Omega', T') \mapsto \Omega' T'$ sont des homéomorphismes.

b) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver qu'il existe un couple $(T, \Omega) \in \mathrm{Adh}\,(\mathscr{T}_{++}(n, \mathbb{C})) \times \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ tel que $M = T\Omega$, et un couple $(\Omega', T') \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{Adh}\,(\mathscr{T}_{--}(n, \mathbb{C}))$ tel que $M = \Omega' T'$. Ces couples sont-ils uniques ?

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [a_{kl}] \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ *positive* (cf. § IV.2, exercice 3).

a) Montrer : $\operatorname*{Max}_{k,l} |a_{k,l}| = \operatorname*{Max}_{k} |a_{k,k}|$.

b) Montrer que la matrice complémentaire $\tilde{A}$ de A est positive (vérifier d'abord que si A est définie positive, $\tilde{A}$ l'est aussi).

Exercice 8 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et H une matrice hermitienne *définie positive* d'ordre n. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $H = [(e_k \mid e_l)]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ (cf. exercice 3 du § IV.2). Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est l'une de ces bases, prouver que l'ensemble des bases répondant à la question est $\{(u(e_1), \ldots, u(e_n))\}_{u \in \mathbf{U}(E)}$ (cf. exercice 8 du § III.2).

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe *fini* de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.
Montrer : $\exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid (\forall M \in G) \quad P^* MP \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$.

Exercice 10 : Soit n un entier $\geqslant 2$. On donne une fonction continue $A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et on considère l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}) \quad Y'(t) = A(t) \,.\, Y(t)$$

où la fonction inconnue Y est à valeurs dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. (Les propriétés fondamentales de ces équations sont étudiées au § IX.5 du tome 3.) On identifie $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique.

On note $\mathscr{S}$ de $\mathbb{C}$-ev des $\mathbb{R}_+$-solutions de $(\mathscr{E})$. On sait que $\mathscr{E}$ est de dimension n. On fait maintenant l'hypothèse suivante : $(\forall X \in \mathscr{S}) \lim_{t \longrightarrow +\infty} \|X(t)\|$ existe (on notera $L(X)$ cette limite). Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) $\quad \exists X \in \mathscr{S} \setminus \{0\} \mid L(X) = 0$

(II) $\operatorname{Re}\left(\int_0^t \operatorname{Tr}(A(u))\,\mathrm{d}u\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Indication pour (II) $\Rightarrow$ (I) : Supposons (II) satisfaite. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathscr{S}$ et supposons $L(X_j) > 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\gamma_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto G(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ (= déterminant de Gram de $X_1(t), \ldots, X_n(t)$: cf. fin du § IV.3, exercice 2 du § IV.3, exercice 8 ci-dessus) ; soit k le plus grand des $p \in [\![1, n]\!]$ tels que $\gamma_p(t)$ n'admette pas θ pour valeur d'adhérence en $+\infty$. Vérifier que k existe et que $k \leqslant n-1$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $q \in [\![1, n]\!]$, soit $H_{q,t} = \operatorname{Vect}(X_1(t), \ldots, X_q(t))$ et $H_{0,t} = \{0\}$. Soit $V_q(t)$ la projection orthogonale que $X_q(t)$ sur $(H_{q-1,t})^\perp$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$. Noter $X_q(t) - V_q(t) = C_{q,1}(t)X_1(t) + \cdots + C_{q,q-1}(t)X_{q-1}(t)$. Prouver alors que les fonctions $C_{k,j}(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ et conclure avec un argument de compacité pour construire $X = X_k - \lambda_1 X_1 - \cdots - \lambda_{k-1} X_{k-1} \in \mathscr{S}$ telle que $L(X) = 0$.

Exercice 11 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme unitaire. On pose $v = \mathrm{Id}_E - u$. Montrer que $\operatorname{Ker}(v) = (\operatorname{Im}(v))^\perp$ et que $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} u^k(x)$ n'est autre que la projection orthogonale de x sur $\operatorname{Ker}(v)$.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Si $A \in \mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C})$, montrer que $A + \mathrm{i}I_n$ et $A - \mathrm{i}I_n$ sont inversibles et que $\Omega = (A + \mathrm{i}I_n)(A - \mathrm{i}I_n)^{-1} \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$. Si de plus $\det(A) \neq 0$, alors $\Omega + I_n$ et $\Omega - I_n$ sont inversibles et $A = \mathrm{i}(\Omega + I_n)(\Omega - I_n)^{-1}$.

b) Réciproquement, si $\Omega \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ et $\det(\Omega - I_n) \neq 0$, alors

$$A = \mathrm{i}(\Omega + I_n)(\Omega - I_n)^{-1} \in \mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C}).$$

c) Soit $\mathscr{H}\mathrm{er}^*(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ et soit

$$\Gamma = \{\Omega \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C}) \mid \det(\Omega \pm I_n \neq 0)\}.$$

Vérifier que Γ est un ouvert de $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$, que $\mathscr{H}\mathrm{er}^*(n, \mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C})$ et que l'application $A \mapsto (A + \mathrm{i}I_n)(A - \mathrm{i}I_n)^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathscr{H}\mathrm{er}^*(n, \mathbb{C})$ sur Γ.

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Trouver le centre du groupe $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$.

b) Trouver le groupe des commutateurs de $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$, i.e. le groupe engendré par les $uvu^{-1}v^{-1}$ quand (u, v) décrit $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C}) \times \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$. Trouver de même le groupe des commutateurs de $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 1$. A toute base ordonnée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on associe le sous-groupe $T_{\mathscr{B}}$ de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ formé des $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{U}^n$. Les groupes $T_{\mathscr{B}}$ ainsi obtenus en faisant varier $\mathscr{B}$ seront appelés les n-tores de E.

a) Vérifier que tout n-tore de E est un sous-groupe abélien compact de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, et que deux n-tores sont conjugués dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

b) Soit $\mathscr{U}$ une partie non vide de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables et deux à deux permutables. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise chaque $u \in \mathscr{U}$.

c) Soit G un sous-groupe *compact* et *abélien* de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$. En utilisant le résultat *b*) ci-dessus et les résultats de l'exercice 3, montrer que G est contenu dans un n-tore de E. Quels sont les sous-groupes compacts et abéliens de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ maximaux pour l'inclusion ?

d) On suppose maintenant E *hermitien*. Déterminer les sous-groupes abéliens de $\mathbf{U}(E)$. Quels sont les sous-groupes abéliens *finis* de $\mathbf{U}(E)$? En déduire les sous-groupes abéliens finis d'un groupe *euclidien*.

e) On revient aux hypothèses du début. Un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ sera dit *pré-unitaire* ssi il existe une structure hermitienne de E telle que G soit égal au groupe unitaire de cette structure.

Trouver tous les sous-groupes pré-unitaires de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ contenant un n-tore donné de E.

§ IV.5 *ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME*

Pour tout espace hermitien E, nous noterons I_E la bijection semi-linéaire canonique $E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto (x \mid .)$.

On vérifie, comme pour le lemme 1 du § III.2 :

LEMME 1

Soit E un espace hermitien, f et g deux applications : $E \longrightarrow E$. On a $f = g$ ssi

$$(1) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad (x \mid f(y)) = (x \mid g(y)),$$

ou, de manière équivalente

$$(2) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad (f(x) \mid y) = (g(x) \mid y).$$

Puis on établit :

PROPOSITION IV.5.1

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. Il existe une unique application $v : E \longrightarrow E$ qui vérifie :

$$(3) \qquad (\forall (x, y) \in E^2) \quad (u(x) \mid y) = (x \mid v(y)).$$

Cette application v est $\mathbb{C}$-linéaire ; c'est $v = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E$.

Démonstration :

On procède comme pour la proposition III.2.1, en prenant garde à la semi-linéarité. Si $y \in E$ est fixé, l'application $\varphi_y = I_E(y) \circ u$, $x \mapsto (y \mid u(x))$ est linéaire de E dans $\mathbb{C}$. D'où, en posant $z = I_E^{\langle -1 \rangle}(\varphi_y)$: $(\forall x \in E)\ (y \mid u(x)) = (z \mid x)$, i.e.

$$(u(x) \mid y) = (x \mid z) = (x \mid (I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E)(y)).$$

Donc l'application $v = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E$ convient, et c'est la seule d'après le lemme 1. Enfin v est $\mathbb{C}$-linéaire car ${}^t u$ est linéaire, tandis que I_E et $I_E^{\langle -1 \rangle}$ sont semi-linéaires. ■

DÉFINITION IV.5.1

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. On appelle **adjoint** *de u, et on note u^*, l'application $v = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ {}^t u \circ I_E$ trouvée à la proposition* IV.5.1, *c'est-à-dire l'unique $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ telle que $(\forall (x, y) \in E^2)\ (u(x) \mid y) = (x \mid v(y))$.*

On vérifie élémentairement les propriétés suivantes :

(Adj. 1) L'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, $u \mapsto u^*$ est une **bijection semi-linéaire ;** elle est **involutive,** i.e. $(\forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E))\ u^{**} = u$.

(Adj. 2) Pour u et v dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, on a : $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(Adj. 3) Pour $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, on a : $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\mathrm{Ker}\,(u))^{\perp}$.

THÉORÈME IV.5.1

Soit E un espace hermitien de dimension $n = 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons $S = [(e_k \mid e_l)]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = S^{-1}[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)]^* S$.
En particulier, si $\mathscr{B}$ est **orthonormale :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)]^*$.

(Cf. la preuve du théorème III.2.1.)

PROPOSITION IV.5.2

Soit E un espace hermitien et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-$\mathbb{C}$-ev de E tels que $E = \bigoplus_{j=1}^{p} F_j$. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, soit $u_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F_j)$.

Posons $u = \bigoplus_{j=1}^{p} u_j$. Alors $u^* = \bigoplus_{j=1}^{p} u_j^*$. Donc, chaque F_j est u^*-stable, et $u^* \|_{F_j} = u_j^*$.

(Cf. la preuve de la proposition III.2.3.)

Remarque 1 : Soit F un sous-$\mathbb{C}$-ev d'un espace hermitien E.

Supposons que F soit u-stable pour $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ donné. En général, F n'est pas u^*-stable tandis que $F^{\perp}$ est, lui, u^*-stable (cf. remarque 1 du § III.2).

Si maintenant F est à la fois u-stable et u^*-stable, on voit que $F^{\perp}$ est à la fois u-stable et u^*-stable (utiliser $u^{**} = u$), et que de plus (cf. lemme 1) : $(u \|_F)^* = u^* \|_F$, $(u \|_{F^{\perp}})^* = u^* \|_{F^{\perp}}$.

Endomorphismes normaux, endomorphismes autoadjoints

DÉFINITION IV.5.2

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$; u est dit ***normal*** *ssi $u \circ u^* = u^* \circ u$; u est dit* ***autoadjoint*** *ssi $u = u^*$.*

Pour E fixé, nous noterons $\mathcal{N}(E)$ (resp. Autoad (E)) l'ensemble des endomorphismes normaux (resp. autoadjoints). Il est clair que $\mathcal{N}(E)$ est un *cône* de E ; quant à Autoad (E), c'est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E))_{(\mathbb{R})}$.

On vérifie immédiatement que *toute homothétie de E appartient à $\mathcal{N}(E)$*, et que *toute homothétie de rapport* ***réel*** *de E appartient à* Autoad (E).

Le lemme 1 permet de caractériser les endomorphismes de E qui sont autoadjoints :

(4) $(\forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E))$

$$\boxed{u \in \mathrm{Autoad}\,(E) \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2) \qquad (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))}\ .$$

Remarque 2 : Les $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ tels que $u^* = -u$ vérifient $(\mathrm{i}u)^* = \mathrm{i}u$. Ils forment donc un sous-$\mathbb{R}$-ev de $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E))_{(\mathbb{R})}$ image de Autoad (E) par l'homothétie $\mathrm{i}\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)}$, donc isomorphe à Autoad (E). C'est là une différence notable avec le cas euclidien.

Du théorème IV.5.1, on déduit aussitôt :

PROPOSITION IV.5.3

Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base ***orthonormale*** *de E. L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ définit un isomorphime de $\mathbb{R}$-ev entre* Autoad (E) *et* $\mathcal{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$. *En conséquence,*

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Autoad}\,(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})) = n^2 .$$

De même, la proposition IV.5.2 entraîne la conséquence suivante :

PROPOSITION IV.5.4

Soit E un espace hermitien et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-$\mathbb{C}$-ev de E tels que $E = \bigoplus_{j=1}^{p} F_j$. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, soit $u_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F_j)$; posons $u = \bigoplus_{j=1}^{p} u_j$. Si chaque u_j est normal (resp. autoadjoint), alors u est normal (resp. autoadjoint).

Le lecteur vérifiera (cf. la méthode pour prouver la proposition III.2.6) que dans un espace hermitien E, *un projecteur f est autoadjoint ssi il est orthogonal.*

THÉORÈME IV.5.2

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. Il y a équivalence entre les propriétés (I) *à* (IV) *ci-après :*
(I) $u \in \mathbf{U}(E)$; (II) $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$; (III) $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$
(IV) $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ *et* $u^{-1} = u^*$.

(Cf. la preuve du théorème III.2.2.)

Il en résulte que si $u \in \mathbf{U}(E)$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λu est normal : λu est appelé une **similitude hermitienne** de E.

On définit également les **matrices normales :** une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **normale** ssi $MM^* = M^*M$. Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est la matrice, dans une base **orthonormale** $\mathscr{B}$ d'un espace hermitien E, d'un endomorphisme u de E, alors $u \in \mathscr{N}(E)$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est normale.

Adjoint et formes hermitiennes

Considérons un espace hermitien E de dimension $n \geqslant 1$. Pour $u \in \mathrm{Autoad}(E)$ et $(x, y) \in E^2$, posons $s_u(x, y) = (u(x) \mid y)$.

Il est clair que $s_u : E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est *sesquilinéaire* ; de plus $(\forall (x, y) \in E^2)$ $s_u(y, x) = (u(y) \mid x) = (y \mid u(x)) = \overline{(u(x) \mid y)} = \overline{s_u(x, y)}$. Donc s_u est une forme hermitienne sur E.

On a donc défini une application HER : $\mathrm{Autoad}(E) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{er}(E)$, $u \mapsto s_u$, application visiblement $\mathbb{R}$-linéaire. En vertu du lemme 1, l'application HER est aussi injective. Comme $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Autoad}(E)) = n^2 = \dim(\mathscr{H}\mathrm{er}(E))$ (cf. propositions IV.2.1 et IV.5.3), on obtient finalement :

PROPOSITION IV.5.5

Avec les notations ci-dessus, l'application HER : $\mathrm{Autoad}(E) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{er}(E)$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}$-ev.

DÉFINITION IV.5.3

Soit E un espace hermitien. Un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathrm{Autoad}(E)$ et une forme hermitienne $h \in \mathscr{H}\mathrm{er}(E)$ sont dits ***associés*** *ssi $h = s_u = (u(.) \mid .)$, i.e.*

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad h(x, y) = (u(x) \mid y).$$

On dit aussi que h est la ***forme hermitienne associée*** *à u, ou que u est* ***l'opérateur (autoadjoint) associé*** *à h.*

Soit alors u et h associés. Notons $I_{E,h}$ l'application semi-linéaire $E \longrightarrow E^*$, $x \mapsto h(x \mid .)$ définie par h. La formule (4) du § III.2 est remplacée par :

(5) $$\boxed{u = I_E^{\langle -1 \rangle} \circ I_{E,h}}$$

formule qui explicite l'application réciproque $\text{HER}^{\langle -1 \rangle}$.

Fixons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et posons $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, $H = \text{Mat}_{(\mathscr{B})}(h)$. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ représentant $x \in E$ et $y \in E$. En notant S la matrice $[(e_k \mid e_l)]_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$, on a :

$$h(x, y) = {}^t\bar{X}HY = (u(x) \mid y) = {}^t(\overline{MX})\, SY = {}^t\bar{X}M^* SY .$$

C'est vrai pour tout (x, y), d'où $M^* S = H$, soit, en tenant compte de $S^* = S$ et $H^* = H$:

(6) $$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = S^{-1} H}\ .$$

En particulier, si $\mathscr{B}$ est **orthonormale,** cela donne :

(7) $$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = H = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(h)}\ .$$

Laissons au lecteur le soin de vérifier que *l'espace singulier d'une forme hermitienne est le noyau de son opérateur associé* (cf. proposition III.2.8).

Matrices hermitiennes positives, endomorphismes autoadjoints positifs

Soit E un espace hermitien donné, de dimension $n \geqslant 1$. Un opérateur autoadjoint $u \in \text{Autoad}(E)$ est dit **positif** (resp. **défini positif**) ssi la forme hermitienne associée h est positive (resp. définie positive). Autrement dit, u est positif ssi $(\forall x \in E)\ (u(x) \mid x) \in \mathbb{R}_+$, u est défini positif si $(\forall x \in E \setminus \{0\})\ (u(x) \mid x) \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit alors une matrice hermitienne $M \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C})$. Dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique, M représente $u \in \text{Autoad}(\mathbb{C}^n)$. Par définition M est dite **positive** (resp. **définie positive**) ssi u est positif (resp. défini positif).

En d'autres termes (en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{C})$) :

$$M \text{ est positive ssi } (\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}))\quad {}^t\bar{X}MX \in \mathbb{R}_+$$

$$M \text{ est définie positive ssi } (\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})\quad {}^t\bar{X}MX \in \mathbb{R}_+^* .$$

Si $u \in \text{Autoad}\ (E)$ et si $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base **orthonormale** de E, pour que u soit positif (resp. défini positif), il faut et il suffit que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\ (u)$ soit positive (resp. définie positive).

Nous renvoyons le lecteur à la remarque 3 du § III.2.

Sous-espaces propres des endomorphismes normaux

Dans un espace hermitien, toute somme directe interne orthogonale d'homothéties est un endomorphisme normal (cf. proposition IV.5.4). Autrement dit, *tout endomorphisme qui admet une base orthonormale de vecteurs propres est normal.* Il est très remarquable que l'on obtienne ainsi tous les endomorphismes normaux. En effet :

THÉORÈME IV.5.3

Soit E un espace hermitien non nul, et u un endomorphisme ***normal*** *de E. Il existe une* ***base orthonormale*** *de E formée de* ***vecteurs propres*** *de u. Autrement dit :* ***u est diagonalisable*** *et* ***ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.***

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur $n = \dim\ (E)$. Si $n = 1$, il n'y a rien à prouver. Supposons $n > 1$ et le théorème vrai avec tout espace hermitien de dimension $\leqslant n - 1$. Notons λ une valeur propre de u (il en existe au moins une), et soit $F = \text{Ker}\ (u - \lambda\ \text{Id}_E)$. Ou bien u est l'homothétie de rapport λ (resp. $u = 0$), et dans ce cas toute base orthonormale de E convient, ou bien $d = \dim_{\mathbb{C}}\ (F) \in [\![1, n-1]\!]$, et $\dim_{\mathbb{C}}\ (F^{\perp}) = n - d \in [\![1, n-1]\!]$. Le sous-$\mathbb{C}$-ev F est u-stable. Il est aussi u^*-stable, car $u \circ u^* = u^* \circ u$ (si $x \in F$, $u^* \circ u(x) = \lambda u^*(x) = u \circ u^*(x)$, d'où $u^*(x) \in \text{Ker}\ (u - \lambda\ \text{Id}_E) = F$). Donc $F^{\perp}$ est aussi u-stable et u^*-stable. Posant $v = u\|_{F^{\perp}}$, on a aussi : $v^* = u^*\|_{F^{\perp}}$ (cf. remarque 1) et $v^* \circ v = v \circ v^*$, i.e. v est normal. Par l'hypothèse de récurrence, $F^{\perp}$ admet donc une base orthonormale formée de vecteurs propres de v. Il suffit alors de juxtaposer à cette base une base orthonormale arbitraire de F pour obtenir une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u. ■

COROLLAIRE 1

Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}\ (E)$.
(I) *Pour que u soit* ***autoadjoint,*** *il faut et il suffit que u soit somme directe interne orthogonale d'homothéties de rapport* ***réel,*** *i.e. il faut et il suffit que u ait toutes ses valeurs propres réelles, soit diagonalisable et ait ses sous-espaces propres deux à deux orthogonaux.*

(II) *Pour que u soit* **unitaire,** *il faut et il suffit que u soit somme directe interne orthogonale d'homothéties de rapport $\in \mathbb{U}$, i.e. il faut et il suffit que u ait toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{U}$, soit diagonalisable et que ses sous-espaces propres soient deux à deux orthogonaux.*

Démonstration :

On vérifie facilement que la condition indiquée dans (I) (resp. (II)) est suffisante. Il s'agit de montrer qu'elle est nécessaire.

Supposons u autoadjoint (resp. unitaire). Alors u est normal, donc E admet une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de u ; $\mathscr{B}$ étant ainsi choisie, soit $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(u)$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(u^*) = D^* = \mathrm{Diag}\,(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$ (cf. théorème IV.5.1), d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(u^* \circ u) = D^* D = \mathrm{Diag}\,(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)\,.$$

Si u est autoadjoint, on a $u = u^*$, d'où $D = D^*$ i.e. $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$ pour tout j, ce qui prouve que les λ_j sont tous réels.

Si u est unitaire, on a $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$, d'où $\mathrm{Diag}\,(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2) = I_n$, i.e. $\lambda_j \in \mathbb{U}$ pour tout j. ■

COROLLAIRE 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ est **dissocié** *dans $\mathbb{R}[X]$ et M est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

(Pour $M \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$, on obtient ainsi en partie le corollaire 1 du théorème III.3.1.)

Démonstration :

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique de matrice M dans la base canonique $\mathscr{C}$: u est autoadjoint car $\mathscr{C}$ est orthonormale et M hermitienne. On peut donc appliquer à u le corollaire 1 ci-dessus. ■

DÉFINITION IV.5.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ sont dites **unitairement semblables** *ssi il existe une matrice unitaire $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ telle que $N = U^* MU$.*

En traduisant matriciellement les résultats ci-dessus, compte tenu du corollaire 1 du théorème IV.4.3, du théorème IV.4.4 et de la proposition IV.5.3, on obtient :

THÉORÈME IV.5.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour que M soit ***normale,*** *il faut et il suffit qu'elle soit unitairement semblable à une matrice* ***diagonale.***
Pour que M soit ***hermitienne,*** *il faut et il suffit qu'elle soit unitairement semblable à une matrice* ***diagonale réelle.***
Pour que M soit ***unitaire,*** *il faut et il suffit qu'elle soit unitairement semblable à une matrice* ***diagonale à éléments diagonaux dans*** $\mathbb{U}$.

Application aux endomorphismes autoadjoints

Rappelons que toute suite finie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ a pour *signature* le couple (r, s), où $r = \text{card}\ \{j \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_j > 0\}$ et $s = \text{card}\ \{j \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_j < 0\}$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$ a la même signature que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Si donc $P \in \mathbb{R}[X]$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$ et de degré n, la signature de toutes les *listes de racines* de P (i.e. les suites $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telles que $P = a \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$, $a \in \mathbb{R}^*$) est la même et ne dépend que de P : nous dirons que c'est la *signature des racines de P.*

PROPOSITION IV.5.6

Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in$ Autoad (E) de forme hermitienne associée h. Alors la ***signature*** *de h est égale à la* ***signature des racines*** *du polynôme $\chi_u(X)$.*
En particulier, u est ***positif*** *(resp.* ***défini positif****) ssi* ***ses valeurs propres sont toutes dans*** $\mathbb{R}_+$ *(resp.* ***toutes dans*** $\mathbb{R}_+^*$*).*

Démonstration :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E formée avec des vecteurs propres de u, et soit $D = \text{Diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\ (u)$. On sait (cf. formule (7)) que $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\ (h)$, donc la signature de la suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est celle de h, d'où le résultat puisque $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X)$. ■

THÉORÈME IV.5.5

Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, h_1 une forme hermitienne ***définie positive*** *sur V, et h_2 une forme hermitienne sur V. Il existe une base*

de V qui est à la fois **orthonormale pour** h_1 *et* **orthogonale** *pour* h_2.

(Cf. démonstration du théorème III.3.2.)

Il est facile d'en déduire une *règle pratique* pour trouver la signature d'une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev V de dimension finie $n \geqslant 1$: *si M est la matrice de h dans une base donnée de V, la signature de h est celle des racines du polynôme $\chi_M(X)$.*

Application aux groupes $\mathbf{SU}(E)$ et $\mathbf{U}(E)$

THÉORÈME **IV.5.6**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les groupes $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ sont connexes par arcs. En conséquence, pour tout espace hermitien non nul E, les groupes $\mathbf{U}(E)$ et $\mathbf{SU}(E)$ sont connexes par arcs.

Démonstration :

Soit $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$. On peut l'écrire (cf. théorème IV.5.4) sous la forme $U = \Omega^* D\Omega$, avec $\Omega \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et $D = \mathrm{Diag}\,(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $D_t = \mathrm{Diag}\,(e^{it\theta_1}, \ldots, e^{it\theta_n})$ et $U_t = \Omega^* D_t\, \Omega$. L'application $t \mapsto U_t$ est continue, à valeurs dans $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, et on a : $U_0 = I_n$, $U_1 = U$.

Si en particulier $U \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$, on peut choisir les θ_k tels que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$, et alors $U_t \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ pour tout t.

En résumé tout $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ (resp. $U \in \mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$ peut être joint à I_n par un chemin continu à valeurs dans $\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ (resp. dans $\mathbf{SU}(n, \mathbb{C})$). ■

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $H \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ de mineurs principaux $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$.
Prouver que H est définie positive ssi $(\forall k \in [\![1, n]\!])\ \Delta_k \in \mathbb{R}_+^*$.
En déduire qu'une matrice *symétrique réelle* définie positive est aussi *hermitienne* définie positive (cf. aussi l'exercice 9 du § IV.2).

Exercice 2 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\,(E)$.
Montrer l'équivalence des huit propriétés ci-après :
(I) u est normal
(II) $(\forall x \in E)\quad \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$
(III) Tout sous-$\mathbb{C}$-ev de E qui est u-stable est aussi u^*-stable
(IV) Pour tous $\mathbb{C}$-ev F de E qui est u-stable, le $\mathbb{C}$-ev $F^\perp$ est aussi u-stable
(V) $\exists P \in \mathbb{C}[X] \mid u^* = P(u)$
(VI) Si $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X)$ et si $v = u \circ u^*$, alors $\chi_v(X) = \prod_{j=1}^{n} (|\lambda_j|^2 - X)$
(VII) Si $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X)$ et si $w = u + u^*$, alors $\chi_w(X) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j + \bar{\lambda}_j - X)$
(VIII) $\mathrm{Tr}\,(u \circ u^*) = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2$.

Exercice 3 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$.

a) Prouver : $u = u^* \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ (u(x) \mid x) \in \mathbb{R}$.

b) On suppose u autoadjoint défini positif. Prouver : $(\forall x \in E)$

$$\|u(x)\|^4 \leqslant (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x)).$$

Exercice 4 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{U}$ une partie non vide de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ telle que : $u \in \mathscr{U} \Rightarrow u^* \in \mathscr{U}$ et $(\forall (u, v) \in \mathscr{U}^2)$, $uv = vu$. En raisonnant par récurrence sur n, montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E qui diagonalise chaque $u \in \mathscr{U}$. En déduire une autre preuve du théorème IV.5.3.

Exercice 5 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. Notons $\mathrm{Autoad}_+^*(E)$ l'ensemble des $u \in \mathrm{Autoad}(E)$ *définis positifs*. Vérifier que $\mathrm{Autoad}_+^*(E)$ est *ouvert* dans $\mathrm{Autoad}(E)$. Montrer que l'application $u \mapsto \exp(u)$ définit un homéomorphisme de $\mathrm{Autoad}(E)$ sur $\mathrm{Autoad}_+^*(E)$.

Exercice 6 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. Montrer que $u^* u$ et uu^* sont unitairement semblables.

Exercice 7 : Soit, $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit $\chi_M(X) = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \mathrm{i}\beta_j - X)$. On pose $A = \frac{1}{2}(M + M^*)$ et $B = \frac{1}{2\mathrm{i}}(M - M^*)$. On désigne par λ_A la plus petite valeur propre de A et par μ_A la plus grande valeur propre de A et on définit de même λ_B et μ_B. Prouver :

$$(\forall j \in [\![1, n]\!])\quad \alpha_j \in [\lambda_A, \mu_A] \quad \text{et} \quad \beta_j \in [\lambda_B, \mu_B].$$

Exercice 8 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. On note λ la plus petite valeur propre de $u^* u$ et Λ sa plus grande valeur propre ; et de même μ la plus petite valeur propre de $v^* v$ et M sa plus grande valeur propre. Prouver :

a) $(\forall x \in E)$ $\lambda \|x\|^2 \leqslant \|u(x)\|^2 \leqslant \Lambda \|x\|^2$

$\mu \|x\|^2 \leqslant \|v(x)\|^2 \leqslant M \|x\|^2$.

b) Si ρ est valeur propre de $u \circ v$, alors $\lambda\mu \leqslant |\rho|^2 \leqslant \Lambda M$.

Exercice 9 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ un endomorphisme autoadjoint *positif*. Pour tout entier $k \geqslant 1$, montrer qu'il existe un unique $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ autoadjoint positif tel que $v^k = u$. Trouver aussi tous les $v \in \mathrm{Autoad}(E)$ tels que $v^k = u$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Prouver qu'il existe $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, $V \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout j telles que $A = UDV$. Prouver que la liste $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est unique à l'ordre près.

Exercice 11 (*Décomposition polaire*) : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

a) On pose $v = u^* u$. Soit w l'unique élément de $\mathrm{Autoad}(E)$ positif tel que $w = v$ (cf. exercice 9). Montrer : $\rho = uw^{-1} \in \mathbf{U}(E)$.

En déduire que l'application $\mathbf{U}(E) \times \mathrm{Autoad}_+^*(E) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho \circ w$ est un *homéomorphisme* (cf. notation de l'exercice 5).

b) Prouver de même que l'application $\mathrm{Autoad}_+^*(E) \times \mathbf{U}(E) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, $(w', \rho') \mapsto w' \circ \rho'$ est un homéomorphisme.

c) Montrer que les applications $\mathbf{U}(E) \times \mathrm{Autoad}_+(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho \circ w$ et $\mathrm{Autoad}_+(E) \times \mathbf{U}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, $(w', \rho') \mapsto w' \circ \rho'$ sont *surjectives*. Sont-elles injectives ? (*Réponse :* non ; si par exemple $u = w\rho_0$, avec $w \in \mathrm{Autoad}_+(E)$ et $\rho_0 \in \mathbf{U}(E)$,

w est forcément l'élément de $\text{Autoad}_+(E)$ de carré uu^*. Et l'ensemble $\{\rho \in \mathbf{U}(E) \mid u = w\rho\}$ est alors $\{(\text{Id}_E - \tau)\rho_0\}$ où $\tau\tau^* = \tau + \tau^*$ et $\text{Im}(\tau) \subset \text{Ker}(u^*)$.)

Traduire ces résultats en termes matriciels.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $V \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C})$ *définie positive.* Soit $W \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C})$ *la* matrice définie positive telle que $W^2 = V$ (cf. exercice 9). Utiliser l'exercice 6 du § IV.4 pour retrouver le résultat *a)* de l'exercice 4 du § IV.3.

Exercice 13 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \text{Autoad}(E)$. On note S la sphère unité de E et Q la forme quadratique hermitienne associée à u.

a) En raisonnant comme dans la preuve du théorème III.3.1, retrouver le fait que E admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de u et que $\chi_u(X)$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$.

b) On range les valeurs propres distinctes de u par ordre décroissant : $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$ et on pose $N_k = \text{Ker}(\lambda_k \text{Id}_E - u)$ et $L_k = N_k \oplus N_{k+1} \oplus \cdots \oplus N_p$ $(k \in [\![1, p]\!])$. Montrer : $(\forall k)\ \lambda_k = \underset{x \in S \cap L_k}{\text{Max}}\ Q(x)$.

c) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que $(\forall j \in [\![1, n]\!])$ $(u(e_1) \mid e_1) \geqslant \cdots \geqslant (u(e_n) \mid e_n)$ et que $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (u(e_j) - X)$. Prouver que chaque e_j est vecteur propre de u.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne $A \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C})$ toutes deux définies positives. Démontrer :

$$(\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n} \leqslant (\det(A + B))^{1/n},$$

et préciser quand on a l'égalité.

Indication : On est ramené à prouver $(1 + a_1 \ldots a_n)^n \leqslant (1 + a_1^n) \ldots (1 + a_n^n)$ pour $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$. Utiliser la *convexité* de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \text{Log}(1 + e^{nx})$.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $H \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C})$, H étant *positive.* On note

$$\mathscr{H} = \{A \in \mathscr{H}\text{er}(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ est définie positive et } \det(A) \geqslant 1\}.$$

a) Démontrer : $\underset{A \in \mathscr{H}}{\text{Inf}}\ (\text{Tr}(AH)) = n(\det(H))^{1/n}$.

Indication : On se ramène au cas où H est diagonale. Pour $A = [a_{kl}] \in \mathscr{H}$, utiliser $\det(A) \leqslant a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ (cf. exercice 4 du § IV.3), puis l'inégalité arithmético-géométrique.

b) Si H est *définie positive*, prouver : $n(\det(H))^{1/n} = \underset{A \in \mathscr{H}}{\text{Min}}\ (\text{Tr}(AH))$. Cela reste-t-il vrai si H n'est plus définie positive ?

Exercice 16 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. On donne $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $v \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ supposés tous deux unitaires (resp. tous deux autoadjoints). Montrer que u et v sont semblables ssi u et v sont unitairement semblables.

Exercice 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On donne $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois *symétrique* et *unitaire.* On pose $D = U + \text{i}V$, avec U et V dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ telle que $D = \exp(\text{i}S)$. Montrer : $U^2 + V^2 = I_n$ et $UV = VU$.

En déduire : $\exists Q \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, $\exists \Delta_s = \text{Diag}(s_1, \ldots, s_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\exists \Delta_t = \text{Diag}(t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid U = Q\Delta_s Q^{-1} \quad \text{et} \quad V = Q\Delta_t Q^{-1}.$$

Prouver l'existence de $\theta_1, \ldots, \theta_n$ réels tels que $s_k = \cos\theta_k$ et $t_k = \sin\theta_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. En déduire que $S = Q\Delta_\theta Q^{-1}$ convient, avec $\Delta_\theta = \text{Diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

b) Soit $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$. Prouver qu'il existe $S \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = \exp(2\,\mathrm{i}S)$. Montrer que $Q = U\exp(-\,\mathrm{i}S)$ est unitaire et vérifie ${}^tQQ = I_n$. En déduire $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, puis $U = Q\exp(\mathrm{i}S)$, avec $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$.

Pour U donné, (Q, S) est-il unique ?

Exercice 18 (difficile) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne C et D dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C^*C = D^2$, avec $D \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$. Démontrer :

$$\exists U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \mid C = UD\,.$$

(On commencera par le cas où C est inversible.)

Exercice 19 : *a*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B dans $\mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$, toutes deux *positives*.

Prouver : $\mathrm{Tr}\,(AB) \leqslant \mathrm{Tr}\,(A)\,\mathrm{Tr}\,(B)$.

b) Pour $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\mathscr{N}(X) = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(X^*X)}$. Déduire du *a*) que $\forall (M, N) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\mathscr{N}(MN) \leqslant \mathscr{N}(M)\,\mathscr{N}(N)$.

Exercice 20 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $A \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$, avec A positive. Prouver : $|\det(A + \mathrm{i}B)| \geqslant \det(A)$, l'inégalité étant stricte si : ($B \neq 0$ et A est définie positive).

b) Soit $S \in \mathrm{Sym}\,(n, \mathbb{R})$ et $T \in \mathrm{Asym}\,(n, \mathbb{R})$, avec S positive. Prouver : $\det(S + T) \geqslant \det(S)$. Si S est définie positive et $T \neq 0$, prouver que l'inégalité est stricte.

Exercice 21 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. On note Δ le *coin* $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n\}$. Pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, soit $\rho(u)$ l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ autoadjoint positif tel que $(\rho(u))^2 = u$ (cf. exercice 9). Soit $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\forall u \in \mathbf{U}(E), \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E))$ $\varphi(fu) = \varphi(uf) = \varphi(f)$. Pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, on note $\alpha(f)$ l'élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Delta$ tel que $\chi_{\rho(f)}(X) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X)$.

Prouver qu'il existe $\psi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \psi \circ \alpha$.

Exercice 22 : *a*) Soit p et q deux entiers $\geqslant 1$. On donne $U \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $V \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{C})$. Prouver : $\det(UU^* + VV^*) \geqslant \det(VV^*)$.

b) Soit $A \in \mathscr{H}\mathrm{er}\,(n, \mathbb{C})$ définie positive, avec $n = p + q$. On décompose A en blocs :

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline C & A_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\,p \\ \\ \}\,q \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{p} & \underbrace{\qquad}_{q} \end{array} \end{array}.$$

Utiliser *a*) et l'exercice 4 du § IV.3 pour prouver que $\det(A) \leqslant \det(A_1) \cdot \det(A_2)$, inégalité déjà rencontrée sous une autre forme (cf. exercice 2 du § IV.3).

Exercice 23 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{G}_k$ désigne l'ensemble des sous-$\mathbb{C}$-ev de dimension k de E. On note S la sphère unité de E. Pour tout $u \in \mathrm{Autoad}\,(E)$, on désigne par $(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u))$ l'unique élément $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (\rho_j - X)$ et $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \cdots \geqslant \rho_n$.

a) Prouver : $\forall k \in [\![1, n]\!]$

$$\lambda_k(u) = \operatorname*{Max}_{L \in \mathscr{G}_k} \left(\operatorname*{Min}_{x \in L \cap S} (u(x) \mid x) \right) = \operatorname*{Min}_{L \in \mathscr{G}_{n-k+1}} \left(\operatorname*{Max}_{x \in L \cap S} (u(x) \mid x) \right)$$

(égalité de Courant-Fischer).

b) Soit F un sous-$\mathbb{C}$-ev de E et $v = f \circ u$, où f désigne la projection orthogonale sur F (si h est la forme hermitienne associée à u, on vérifiera que v est l'endomorphisme associé à $h|_{F \times F}$). Soit $p = \dim(F)$. Montrer que $\lambda_1(u) \geqslant \lambda_1(v) \geqslant \lambda_2(u) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p(u) \geqslant \lambda_p(v)$.

c) Soit $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $u = \alpha^* \alpha$. On note $\chi_\alpha(X) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X)$ et $\mu_k = \lambda_k(u)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Soit $\rho_1, \ldots, \rho_k$ des éléments de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tous distincts. Déduire de *b*) que $|\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_k|^2 \leqslant \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k$.

Exercice 24 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. Pour $u \in \mathrm{Autoad}(E)$, on reprend la notation $(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u))$ de l'exercice précédent. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que l'application $\lambda_k : \mathrm{Autoad}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne (utiliser le *a*) de l'exercice 23).

Exercice 25 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ on note

$$\omega(C) = \left\{ {}^t\overline{X} C X \mid X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad {}^t\overline{X} X = 1 \right\}.$$

a) Prouver : si $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\omega(UCU^*) = \omega(C)$. Prouver que $\omega(C)$ contient les valeurs propres de C et ses termes diagonaux.

b) Trouver $\omega(C)$ si $C \in \mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C})$.

c) Si $C \in \mathscr{H}\mathrm{er}(n, \mathbb{C})$, prouver que $\mathscr{E} = \left\{ X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \mid {}^t\overline{X} C X = 0 \right\}$ est vide ou connexe par arcs.

d) Soit $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit C sous la forme $A + \mathrm{i}B$, avec A et B hermitiennes (cf. exercice 7). En déduire que $\mathbb{R} \cap \omega(C)$ est un intervalle. Prouver enfin que $\omega(C)$ est un compact connexe (remarquer que $\omega(aC + bI_n) = a\omega(C) + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$).

Exercice 26 : Soit E hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et G un sous-groupe *compact* de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ contenant $\mathbf{U}(E)$. Montrer que $G = \mathbf{U}(E)$.

Indication : Soit $u \in G$. On l'écrit $u = w\rho$, avec $w \in \mathrm{Autoad}_+^*(E)$, $\rho \in \mathbf{U}(E)$ (cf. exercice 11). Puis on utilise l'exercice 3 du § IV.4 pour prouver que $w = \mathrm{Id}_E$ en étudiant les valeurs propres de w.

Exercice 27 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$ et u et v deux éléments de $\mathbf{U}(E)$. Montrer que u et v sont conjuguées dans $\mathbf{U}(E)$ ssi $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

Si u et v appartiennent à $\mathbf{SU}(E)$ et si $\chi_u(X) = \chi_v(X)$, u et v sont-ils conjugués dans $\mathbf{SU}(E)$?

Exercice 28 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. Si v est un opérateur *autoadjoint* de E, on désigne par $(\lambda_1(v), \ldots, \lambda_n(v))$ l'unique suite complète des valeurs propres de v telle que $\lambda_1(v) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(v)$. On sait (cf. exercice 11) que si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, il existe un unique endomorphisme autoadjoint *positif* v tel que $v^2 = u \circ u^*$. On note $s_k(u) = \lambda_k(v)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer que $s_k(u^*) = s_k(u)$, et que pour tout $\varphi \in \mathbf{U}(E)$, on a $s_k(\varphi \circ u) = s_k(u \circ \varphi) = s_k(u)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

b$_1$) Soit $w \in \mathbf{U}(E)$ tel que $u = vw$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de v $(v(e_k) = s_k(u)\, e_k)$. On pose $e'_k = w^{-1}(e_k)$. Démontrer que :

$$(1) \qquad (\forall x \in E) \quad u(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k(u)(x \mid e'_k)\, e_k .$$

b$_2$) Pour que u soit *normal*, il faut et il suffit que $(s_k(u))_{k \in [\![1,n]\!]}$ soit une suite complète des *modules* des valeurs propres de u.

b$_3$) Pour que u soit normal, il faut et il suffit qu'il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $s_k(u) = |(u(e_k) \mid e_k)|$ pour tout k.

c_1) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |(u(e_k)|e_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(u). \tag{2}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

c_2) Soit alors $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ une suite complète des valeurs propres de u. Utiliser (2) pour montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} |\rho_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(u). \tag{3}$$

(Chercher d'abord $\varphi \in \mathrm{U}(E)$ tel que $u \circ \varphi$ ait pour valeurs propres $|\rho_1|, \ldots, |\rho_n|$.)

c_3) Par une méthode analogue, démontrer :

$$\sum_{k=1}^{n} |\rho_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k^2(u). \tag{4}$$

Montrer que dans (3) et (4) on a l'égalité ssi u est normal.

d) Démontrer : $\sum_{k=1}^{n} s_k(u) = \operatorname*{Max}_{\varphi \in \mathrm{U}(E)} (|\mathrm{Tr}\,(u \circ \varphi)|)$.

En déduire, pour $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $u_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$:

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(u_1 + u_2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(u_1) + \sum_{k=1}^{n} s_k(u_2).$$

e) Démontrer les relations suivantes :

$$\sum_{(j,k) \in [\![1,n]\!]^2} |\rho_k - \rho_j|^2 = n\left(\sum_{k=1}^{n} |\rho_k|^2\right) - |\mathrm{Tr}\,(u)|^2 \tag{5}$$

$$\operatorname*{Max}_{(j,k) \in [\![1,n]\!]^2} |\rho_k - \rho_j| \leqslant \left(2\left[\mathrm{Tr}\,(u \circ u^*) - \frac{1}{n}|\mathrm{Tr}\,(u)|^2\right]\right)^{1/2}. \tag{6}$$

(Utiliser (4) et (5).)

(7) Pour $j + k \leqslant n - 1$ et $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, $u_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, on a :

$$s_{j+k+1}(u_1 + u_2) \leqslant s_{j+1}(u_1) + s_{k+1}(u_2)$$

et

$$s_{j+k+1}(u_1 \circ u_2) \leqslant s_{j+1}(u_1)\, s_{k+1}(u_2).$$

Exercice 29 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$.

a) Trouver les $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ tels que les deux décompositions polaires $u = \rho w$ et $u = w' \rho'$ (cf. exercice 11) soient telles que $(\rho, w) = (\rho', w')$.

b) Trouver les sous-groupes abéliens de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ contenus dans $\mathcal{N}(E)$.

Exercice 30 : Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. Dans le $\mathbb{R}$-ev $E_{(\mathbb{R})}$, on choisit l'unité de volume associée aux bases orthonormales de l'espace euclidien $E_{(\mathbb{R})}$ sous-jacent à E. (Voir tome 3, page 308.)

Pour toute forme hermitienne h définie positive sur E, on note Q_h la forme quadratique hermitienne associée, $B_h = \{x \in E \mid Q_h(x) \leqslant 1\}$ et $\mathcal{S}_h = \{x \in E \mid Q_h(x) = 1\}$. L'ensemble des formes hermitiennes définies positives sur E sera noté $\mathcal{H}\mathrm{er}_+^*(E)$.

a) Soit $h \in \mathcal{H}\mathrm{er}_+^*(E)$ et soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une liste des valeurs propres de son opérateur autoadjoint associé u_h. Montrer que le volume 2 n-dimensionnel de B_h est (cf. tome 3, § VIII.3, remarque 3)

$$\mathrm{Mes}_{[2n]}(B_h) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \times \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_n}, \quad \text{noté} \quad \frac{V_n}{\lambda_1 \ldots \lambda_n}.$$

b) Soit L une partie compacte de E admettant 0_E pour point intérieur. On note $\mathscr{E}_L = \{h \in \mathscr{H}\mathrm{er}_+^*(E) \mid L \subset B_h\}$.

I) Prouver que $\mathscr{E}_L$ est fermé relativement à $\mathscr{H}\mathrm{er}_+^*(E)$; soit $\bar{\mathscr{E}}_L$ l'adhérence de $\mathscr{E}_L$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$: préciser l'ensemble $\Phi = \bar{\mathscr{E}}_L \backslash \mathscr{E}_L$ et montrer que pour tout réel $A > 0$, il existe un voisinage U de Φ dans $\mathscr{H}\mathrm{er}\,(E)$ tel que $(\forall h \in U \cap \mathscr{E}_L)\ \mathrm{Mes}_{[2n]}(B_h) \geqslant A$. En déduire l'existence dans $\mathbb{R}_+^*$ de $\mu = \operatorname*{Min}_{h \in \mathscr{E}_L} (\mathrm{Mes}_{[2n]}(B_h))$.

II) On se propose de prouver qu'il y a une et une seule $h \in \mathscr{E}_L$ telle que $\mathrm{Mes}_{[2n]}(B_h) = \mu$. Pour cela on suppose qu'il en existe deux distinctes, notées h_0 et h. Prouver qu'on peut se ramener au cas où $u_{h_0} = \mathrm{Id}_E$, i.e. $h_0 = (.\mid.)$, ce qu'on supposera désormais. Soit alors $\chi_{u_h}(X) = (-1)^n \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - \lambda_k)$ et $\Phi(t) = \det(tu_{h_0} + (1-t)u_h)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Expliciter le polynôme $\Phi(t)$. En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, démontrer que $\varphi'(0) > 0$. En déduire une contradiction et conclure.

c) Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ et soit C la boule unité $\{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ de E. Soit $L = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(C)$.

I) Vérifier que L est un compact de E ayant 0_E pour point intérieur.

II) Avec les notations de *b*)-I), notons h_0 l'unique élément $h \in \mathscr{E}_L$ tel que $\mathrm{Mes}_{[2n]}(B_{h_0}) = \mu$. Prouver : $(\forall \varphi \in G)\ \varphi(B_{h_0}) = B_{h_0}$ et $\varphi(\mathscr{S}_{h_0}) = \mathscr{S}_{h_0}$, puis : $Q_{h_0} \circ \varphi = Q_{h_0}$. En déduire que G est inclus dans le groupe unitaire (noté $\mathrm{U}_{h_0}(E)$) de la forme hermitienne h_0. En utilisant l'exercice 26, en déduire les sous-groupes compactes maximaux pour l'inclusion de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, et vérifier qu'ils sont deux à deux conjugués dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

d) Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{U}(E)$. Un sous-$\mathbb{C}$-ev F de E est dit *G-irréductible* ssi F est G-stable (i.e. $\forall \varphi \in G,\ \varphi(F) \subset F$), non nul et ne contient pas de sous-$\mathbb{C}$-ev G-stable de E autres que F et $\{0_E\}$. Montrer qu'il existe des sous-$\mathbb{C}$-ev $F_1, \ldots, F_p$ de E qui sont G-irréductibles et vérifiant $\bigoplus_{j=1}^{p} F_j = E$, et montrer que deux décompositions de E de ce type ne diffèrent que par l'ordre des facteurs.

Exercice 31 : Reprendre tout l'exercice 30 ci-dessus en remplaçant E par un espace *euclidien* V et les formes hermitiennes de E par les formes quadratiques définies positives de V.

Chapitre V

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE AFFINE

Depuis les *Eléments* d'Euclide, la Géométrie a été longtemps considérée comme une science modèle, ayant pour objet l'étude des figures de l'espace usuel. Elle s'est enrichie au XIXe siècle avec la découverte des géométries non euclidiennes, l'essor de la géométrie projective puis de la géométrie vectorielle. Mais après le *programme d'Erlangen* de Félix Klein (1872), le point de vue qui prévaut en Géométrie est celui de l'étude de propriétés invariantes par des groupes de transformations opérant sur des ensembles très divers, ce qui entraîne à la fois une très grande variété de géométries possibles, et l'utilisation systématique de l'outil algébrique, plus particulièrement de l'algèbre linéaire.

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$; *les* $\mathbb{R}$-ev *considérés sont de dimension finie.* Le langage introduit et la plupart des propriétés algébriques ainsi que leurs démonstrations peuvent être étendus en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps commutatif quelconque, mais pas les théories utilisant les propriétés particulières de $\mathbb{R}$ (orientation, convexité, topologie).

§ V.1 *ESPACES AFFINES*

DÉFINITION V.1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. *On appelle* **espace affine sur E** *tout ensemble non vide $\mathscr{E}$ muni d'une opération* **fidèle** *et* **transitive** *du groupe additif de E sur $\mathscr{E}$, i.e. : muni d'une application $E \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ (que nous noterons $(t, x) \mapsto x \dotplus t$) vérifiant les axiomes suivants :*

(I) $(\forall (t_1, t_2) \in E^2, \forall x \in \mathscr{E}) \quad (x \dotplus t_1) \dotplus t_2 = x \dotplus (t_1 + t_2)$
et $\quad x \dotplus 0_E = x.$

(II) $\forall (x, y) \in \mathscr{E}^2 \quad \exists t \in E \mid y = x \dotplus t.$

(III) *Le seul $t \in E$ tel que $x \dotplus t = x$ pour tout $x \in \mathscr{E}$ est $t = 0_E$.*

L'axiome (I) exprime que l'application $E \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(t, x) \mapsto x \dotplus t$ est une *action à gauche* du groupe $(E, +)$ sur $\mathscr{E}$ (cf. tome 1, § V.6).

L'axiome (II) exprime que cette action est transitive, et (III) qu'elle est fidèle.

Dans les conditions de cette définition, on dit que E est **l'espace (vectoriel) directeur** de $\mathscr{E}$ (souvent noté $\vec{\mathscr{E}}$), ou que E **dirige** $\mathscr{E}$. L'entier $n = \dim_{\mathbf{R}}(E)$ est appelé **dimension** de $\mathscr{E}$: si $n = 1$ (resp. $n = 2$), on dit que $\mathscr{E}$ est une *droite affine* (resp. un *plan affine*).

PROPOSITION V.1.1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur le $\mathbb{R}$-ev E. Pour tout $x \in \mathscr{E}$, l'application $\xi_x : E \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto x \dotplus t$ est bijective.

Démonstration :

Soit $x \in \mathscr{E}$. D'après l'axiome (II), l'application ξ_x est *surjective*. Soit $(t_1, t_2) \in E^2$ tels que $x \dotplus t_1 = x \dotplus t_2$; en posant $u = t_2 - t_1$, on a : $x \dotplus u = x \dotplus 0_E = x$. Donnons-nous $y \in \mathscr{E}$, puis $t \in E$ tel que $y = x \dotplus t$; alors $y \dotplus u = (x \dotplus t) \dotplus u = x \dotplus (t + u) = x \dotplus (u + t) = (x \dotplus u) \dotplus t = x \dotplus t = y$. Donc $(\forall y \in \mathscr{E})\ y \dotplus u = y$, d'où $u = 0_E$ (axiome (III)), d'où $t_1 = t_2$, ce qui prouve que ξ_x est injective. ■

La proposition V.1.1 permet de *transporter* sur $\mathscr{E}$ une structure de $\mathbb{R}$-ev isomorphe à celle de E : il suffit de choisir $x \in \mathscr{E}$ et d'utiliser la bijection ξ_x pour obtenir la *structure de* $\mathbb{R}$-ev *d'origine x sur $\mathscr{E}$*, dont le vecteur nul est x.

Translations

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur le $\mathbb{R}$-ev E. Pour $t \in E$, l'application $\tau_t : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $x \mapsto x \dotplus t$ est bijective, et l'application $E \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$, $t \mapsto \tau_t$ est un homomorphisme de groupes injectif (cf. tome 1, § V.6). L'image de cet homomorphisme est appelée **groupe des translations** de $\mathscr{E}$, et sera notée $T(\mathscr{E})$; le groupe $T(\mathscr{E})$ est ainsi canoniquement isomorphe à $(E, +)$. Si $\varphi \in T(\mathscr{E})$, l'unique $t \in E$ tel que $\varphi = \tau_t$ est appelé le **vecteur de la translation** φ.

Vecteurs, repères affines, coordonnées

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur le $\mathbb{R}$-ev. Si $(x, y) \in \mathscr{E}^2$, la proposition V.1.1 montre qu'il existe un unique vecteur $t \in E$ tel que $y = x \dotplus t$; on convient de noter ce vecteur $t = \overrightarrow{xy}$ et on vérifie immédiatement la *formule de Chasles*, valable pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$(1) \qquad \boxed{(\forall (x_1, \ldots, x_k) \in \mathscr{E}^k) \quad \overrightarrow{x_1x_k} = \overrightarrow{x_1x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_{k-1}x_k}}\ .$$

Sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$, la relation binaire R définie par

$$\overrightarrow{x_1y_1} = \overrightarrow{x_2y_2} \tag{2}$$

est d'équivalence, et il y a une bijection naturelle entre l'ensemble quotient $\mathscr{E} \times \mathscr{E}/_R$ et l'ensemble E.

La « règle du parallélogramme » consiste en l'équivalence de la relation (2) et de

$$\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{y_1y_2} \tag{3}$$

et se vérifie aisément. On l'exprime sous une autre forme en disant que (x_1, y_2) et (x_2, y_1) ont *même milieu,* le milieu de deux points distincts x et y de $\mathscr{E}$ se définissant comme l'unique point [1] $z \in \mathscr{E}$, tel que $\overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zy} = 0_E$, et le milieu de deux points confondus étant confondu avec eux.

Les éléments de $\mathscr{E} \times E$ sont parfois appelés **vecteurs liés** de $\mathscr{E}$: si (x, t) est un tel vecteur lié, on dit que x est son *origine,* $x \dotplus t$ son *extrémité,* et t son *vecteur associé.*

Supposons maintenant $n = \dim(E) \geqslant 1$. Un **repère affine** de $\mathscr{E}$ est, par définition, un élément $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E} \times E^n$ tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une **base** de E. Le point O s'appelle l'**origine** du repère $\mathscr{R}$ et les e_i en sont les **vecteurs de base.** D'après la proposition V.1.1, l'application $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{E}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto x = O \dotplus \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i$ est bijective : les ξ_i sont appelés les **coordonnées** de x dans $\mathscr{R}$.

Soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (O'\,; e'_1, \ldots, e'_n)$ deux repères affines de $\mathscr{E}$. Notons P la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ à la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de E et C la matrice-colonne des coordonnées de O' dans $\mathscr{R}$. Pour $x \in \mathscr{E}$, notons X (resp. X') la matrice-colonne des coordonnées dans $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$) de x. De la relation $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'x}$, on déduit la *formule de changement de coordonnées*

$$\boxed{X = C + PX'}. \tag{4}$$

Orientation d'un espace affine

Par définition, *orienter* un espace affine $\mathscr{E}$, c'est choisir une orientation sur l'espace directeur $\vec{\mathscr{E}}$ supposé de dimension $n \geqslant 1$. Deux repères de $\mathscr{E}$

---

[1] Si l'on veut étendre la notion de milieu de deux points avec un corps commutatif K à la place de $\mathbb{R}$, on prendra bien soin de choisir K de caractéristique $\neq 2$.

sont alors dits de même sens (resp. de sens contraire) ssi leurs bases associées le sont (rappelons que cela dépend du signe du déterminant de la matrice de passage). Si $\mathscr{S}$ est l'ensemble des repères ordonnés de $\mathscr{E}$, la relation binaire « les bases de $\vec{\mathscr{E}}$ associées aux repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ ont même orientation » est d'équivalence sur $\mathscr{S}$ et détermine deux classes d'équivalence qui correspondent aux deux classes d'orientation de $\vec{\mathscr{E}}$: l'une des classes est formée des repères dont la base associée est directe (ces repères sont dits *directs*), l'autre classe est formée des repères dont la base associée est rétrograde (ces repères sont dits *indirects,* ou *rétrogrades*).

Exemple fondamental d'espace affine

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Prenons $\mathscr{E} = E$, et pour $(t, x) \in E \times \mathscr{E}$, posons $x \dotplus t = x + t$. On constate que cela suffit pour munir E d'une structure d'espace affine, dite *structure affine naturelle* de E. C'est cette structure naturelle d'espace affine qui a déjà été utilisée au § XIV.1 du tome 1.

Espace affine produit

Soit $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_p$ des espaces affines, d'espaces directeurs $E_1, \ldots, E_p$ $(p \geqslant 1)$. Notons E le $\mathbb{R}$-ev produit $E_1 \times \cdots \times E_p$, et $\mathscr{E}$ l'ensemble produit $\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_p$. Pour $t = (t_1, \ldots, t_p) \in E$ et $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{E}$, il suffit de poser $x \dotplus t = (x_1 \dotplus t_1, \ldots, x_p \dotplus t_p)$ pour définir sur $\mathscr{E}$ une structure d'espace affine sur E. L'espace affine ainsi construit s'appelle **espace affine produit** des $\mathscr{E}_i$. Il est clair que la structure affine naturelle de E n'est autre que le produit des structures affines naturelles des $\mathbb{R}$-ev $E_1, \ldots, E_p$.

Topologie d'un espace affine

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Pour toute norme ν sur E, la formule $(\forall (x, y) \in \mathscr{E}^2)\ d_\nu(x, y) = \nu(x - y)$ définit une **distance** sur $\mathscr{E}$, dite **associée** à ν. Comme les normes ν sont toutes équivalentes entre elles (car E est supposé de dimension finie), les distances d_ν sont aussi équivalentes entre elles et définissent donc une même topologie sur $\mathscr{E}$, appelée **topologie naturelle** de $\mathscr{E}$. Il est quasi évident que, pour tout $a \in \mathscr{E}$, l'application $\xi_a : E \longrightarrow \mathscr{E},\ t \mapsto a \dotplus t$ est un homéomorphisme de E muni de la topologie des normes sur $\mathscr{E}$ muni de la topologie naturelle (en effet, pour toute norme ν de E, si d est la distance issue de ν, ξ_a est *isométrique* de (E, d) sur $(\mathscr{E}, d_\nu)$).

Un espace affine $\mathscr{E}$ sera systématiquement équipé de sa topologie naturelle. En particulier, si E est muni de sa structure affine naturelle, on retombe sur la topologie des normes.

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Pour tout repère affine $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$, la bijection $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{E}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto O \dotplus \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathscr{E}$ (cf. tome 2, corollaire 2 du théorème XI.1.7).

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines équipés de leur topologie naturelle. On étend sans peine aux applications $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ les notions de continuité, différentiabilité, classe $\mathscr{C}^\infty$, compte tenu de la structure vectorielle des espaces directeurs $\vec{\mathscr{E}}$ et $\vec{\mathscr{F}}$.

Exercice 1 : Montrer que la loi $\mathbb{R} \times \mathbb{U} \mapsto \mathbb{U}$, $(t, z) \mapsto z \dotplus t = z\,\mathrm{e}^{it}$ est une action à gauche transitive de $(\mathbb{R}, +\,)$ sur $\mathbb{U}$. Pourquoi cette loi ne fait-elle pas de $\mathbb{U}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un ensemble non vide ; on suppose donnée en chaque point $a \in \mathscr{E}$ une structure de $\mathbb{R}$-ev d'origine a, notée $\mathscr{E}_a$, et pour chaque $(a, b) \in \mathscr{E}^2$ un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev $J_{b,a} : \mathscr{E}_a \longrightarrow \mathscr{E}_b$ vérifiant les axiomes suivants :

(I) $(\forall a \in \mathscr{E})\ \ J_{a,a} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}_a}$.

(II) $(\forall (a, b, c) \in \mathscr{E}^3)\ \ J_{c,b} \circ J_{b,a} = J_{c,a}$.

(III) $(\forall (a, b, a') \in \mathscr{E}^3)\ \ J_{b,a}(a') = J_{a',a}(b)$.

a) Montrer que la relation binaire $\equiv$ définie sur $\mathscr{E}^2$ par

$$(\forall (a, b) \in \mathscr{E}^2, \forall (a', b') \in \mathscr{E}^2) \quad (a, b) \equiv (a', b') \quad \text{ssi} \quad J_{b,a}(a') = b'$$

est une relation d'équivalence (appelée *équipollence*). On notera E l'ensemble quotient $\mathscr{E}^2/_{(\equiv)}$, et $(a, b) \mapsto \overrightarrow{ab}$ l'application canonique $\mathscr{E}^2 \longrightarrow E$.

b) Montrer que E admet une et une seule structure de $\mathbb{R}$-ev telle que $(\forall a \in \mathscr{E})$ l'application $\xi_a : \mathscr{E} \longrightarrow E$, $x \mapsto \overrightarrow{ax}$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev.

c) Montrer que la loi $E \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(t, x) \mapsto x \dotplus t := \xi^{\langle -1 \rangle}(t)$ munit $\mathscr{E}$ d'une structure d'espace affine sur E, qui est la seule pour laquelle en chaque point $a \in \mathscr{E}$ la structure vectorielle associée soit précisément $\mathscr{E}_a$.

d) L'axiome (III) est-il conséquence des axiomes (I) et (II) ?

§ V.2 *APPLICATIONS AFFINES, GROUPE AFFINE*

PROPOSITION V.2.1

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines, d'espaces directeurs respectifs E et F, et soit $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ une application. Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

(I) *Il existe $x \in \mathscr{E}$ tel que l'application $u_x : E \longrightarrow F$, $t \mapsto \overrightarrow{\varphi(x)\,\varphi(x \dotplus t)}$ soit $\mathbb{R}$-linéaire.*

(II) *$(\forall x \in \mathscr{E})$, l'application u_x définie ci-dessus est $\mathbb{R}$-linéaire.*

De plus, si ces conditions sont satisfaites, toutes les applications u_x sont égales entre elles.

Démonstration :

Soit $a \in \mathscr{E}$ tel que $u_a \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$; posons $s = \overrightarrow{ax}$. Pour $x \in \mathscr{E}$ et $t \in E$, on a : $\overrightarrow{\varphi(a)\,\varphi(x)} = u_a(s)$ et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi(a)\,\varphi(x \dotplus t)} &= \overrightarrow{\varphi(a)\,\varphi(a \dotplus (s+t))}\\ &= u_a(s+t) = u_a(s) + u_a(t)\,,\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi(x)\,\varphi(x \dotplus t)} &= \overrightarrow{\varphi(x)\,\varphi(a)} + \overrightarrow{\varphi(a)\,\varphi(x \dotplus t)}\\ &= -\,u_a(s) + u_a(s) + u_a(t) = u_a(t)\,.\end{aligned}$$

Donc $u_x = u_a$, ce qui établit toutes les assertions désirées. ■

DÉFINITION V.2.1

Avec les notations de la proposition V.2.1, *on appelle* ***application affine*** *de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ toute application $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ qui vérifie les conditions équivalentes* (I) *et* (II) *de cette proposition. Etant donnée une telle application affine φ, on appelle* ***partie linéaire*** *de φ, et on note $\vec{\varphi}$, l'unique $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ tel que $(\forall x \in \mathscr{E})$ $u = u_x$, i.e. tel que*

$$(\forall (t, x) \in E \times \mathscr{E}) \quad \varphi(x \dotplus t) = \varphi(x) \dotplus u(t)\,.$$

On appelle ***isomorphisme d'espaces affines*** *entre $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ toute bijection $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ telle que φ et $\varphi^{\langle -1 \rangle}$ soient affines. Enfin $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont dits* ***isomorphes*** *ssi il existe un isomorphisme d'espaces affines de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$.*

Dans les conditions de la proposition V.2.1, on notera que les bijections $\xi_{x,E} : E \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto x \dotplus t\,(x \in \mathscr{E})$ et $\xi_{y,F} : F \longrightarrow \mathscr{F}$, $t \mapsto y \dotplus t$ $(y \in \mathscr{F})$ sont affines, de parties linéaires respectives Id_E et Id_F, et que pour $a \in \mathscr{E}$, on a :

$$(1) \qquad \boxed{\vec{\varphi} = \xi_{\varphi(a),F}^{\langle -1 \rangle} \circ \varphi \circ \xi_{a,E}}\,,$$

ce qui équivaut à : $\varphi = \xi_{\varphi(a),F} \circ \vec{\varphi} \circ \xi_{a,E}^{\langle -1 \rangle}$.

En notant, pour $x \in \mathscr{E}$ (resp. $y \in \mathscr{F}$), E_x (resp. F_y) la structure de $\mathbb{R}$-ev d'origine x dans $\mathscr{E}$ (resp. d'origine y dans $\mathscr{F}$), on voit ainsi clairement qu'une application affine φ est, pour tout $a \in \mathscr{E}$, linéaire de E_a dans $F_{\varphi(a)}$, et réciproquement.

L'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ sera noté $\mathrm{Aff}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ (qu'on abrège en $\mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ si $\mathscr{F} = \mathscr{E}$). Il contient au moins toutes les applications *constantes* $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ (ce sont les applications affines φ telles que $\vec{\varphi} = 0$).

Si $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$, le rang de $\vec{\varphi}$ sera appelé **rang** de φ et noté $\mathrm{rg}\,(\varphi)$. La relation (1) rend évidente la proposition suivante :

PROPOSITION V.2.2

Dans les conditions de la définition V.2.1, *soit* $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$. *Pour que* φ *soit injective (resp. surjective, bijective), il faut et il suffit que* $\vec{\varphi}$ *soit injective (resp. surjective, bijective). Lorsque* φ *est* ***bijective,*** *c'est un* ***isomorphisme d'espaces affines,*** *et on a :* $\overrightarrow{\varphi^{\langle -1 \rangle}} = (\vec{\varphi})^{\langle -1 \rangle}$. *En conséquence, si* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *sont* ***isomorphes,*** *ils ont* ***même dimension.***

Exemple 1 : Soit $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$. La bijection $\varphi_{\mathscr{R}} :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{E},\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto O \dotplus \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i$ est un isomorphisme de l'espace affine naturel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathscr{E}$ (ce qui prouve que *tout espace affine de dimension n est isomorphe à l'espace affine naturel* $\mathbb{R}^n$).

Exemple 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Les *translations* de $\mathscr{E}$ sont les applications affines $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ telles que $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}}$.

Exemple 3 : Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines. Donnons-nous $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E, F)$ et fixons $a \in \mathscr{E}$ et $b \in \mathscr{F}$. Visiblement l'application $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F},\ x \mapsto b \dotplus u(\overrightarrow{ax})$ est affine, de partie linéaire u. Par suite, l'application $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E, F),\ \varphi \mapsto \vec{\varphi}$ est toujours *surjective.*

THÉORÈME V.2.1

Soit $\mathscr{E}$ *un espace affine de dimension* $n \geqslant 1$, $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, \ldots, e_n)$ *un repère de* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *un espace affine. Pour tout élément* $(O'\,;\, e'_1, \ldots, e'_n) \in \mathscr{F} \times (\vec{\mathscr{F}})^n$, *il existe une et une seule application affine* $\varphi :\ \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ *telle que* $\varphi(O) = O'$ *et* $\varphi(e_i) = e'_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$; φ *est* ***injective*** *ssi* $(e'_1, \ldots, e'_n)$ *est libre,* ***surjective*** *ssi* $(e'_1, \ldots, e'_n)$ *est génératrice,* ***bijective*** *ssi* $(O'\,;\, e'_1, \ldots, e'_n)$ *est un repère affine de* $\mathscr{F}$.

Démonstration :

En raisonnant sur la partie linéaire de φ, on est ramené au théorème VI.3.2 du tome 1. ■

THÉORÈME V.2.2

Soit $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *trois espaces affines. Si* $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ *et* $\psi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, *alors* $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{G})$ *et* $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$.

Démonstration :

Soit $a \in \mathscr{E}$ et $t \in E$. On a :

$$(\psi \circ \varphi)(a \dotplus t) = \psi[\varphi(a) \dotplus \vec{\varphi}(t)] = \psi \circ \varphi(a) \dotplus \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}(t),$$

ce qui, compte tenu de $\vec{\psi} \circ \vec{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, G)$ et de la proposition V.2.1, prouve bien que $\psi \circ \varphi$ est affine, de partie linéaire $\vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$. ■

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines de dimensions respectives $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Munissons-les des repères $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (O'\,; f_1, \ldots, f_p)$. Notons X (resp. Y) la matrice-colonne des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de $x \in \mathscr{E}$ dans $\mathscr{R}$ (resp. des coordonnées $(y_1, \ldots, y_p)$ de $y \in \mathscr{F}$ dans $\mathscr{R}'$). Soit $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ et A la matrice de $\vec{\varphi}$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$. Soit enfin B la matrice-colonne des coordonnées $(b_1, \ldots, b_p)$ de $\varphi(O)$ dans $\mathscr{R}'$. Alors :

$$(2) \qquad \boxed{y = \varphi(x) \Leftrightarrow Y = AX + B}\,.$$

Groupe affine d'un espace affine

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. D'après ce qui précède, l'ensemble des isomorphismes d'espaces affines de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$ coïncide avec l'ensemble des *bijections affines* de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$ et forme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$. Ce groupe appelé **groupe affine de** $\mathscr{E}$ sera noté $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$: d'après la proposition V.2.2, c'est l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ telles que $\vec{\varphi} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, et le théorème V.2.2 montre que **l'application $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $\varphi \longmapsto \vec{\varphi}$ est un homomorphisme de groupes.**

THÉORÈME V.2.3

> *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. L'homomorphisme de groupes $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$ est* ***surjectif****, et son noyau est le groupe $T(\mathscr{E})$ des translations de $\mathscr{E}$.*

Démonstration :

La surjectivité résulte de l'exemple 3 et de la proposition V.2.2. De plus, on a vu à l'exemple 2 que si $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E})$, on a $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}}$ ssi $\varphi \in T(\mathscr{E})$. Or $T(\mathscr{E}) \subset \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, ce qui achève la démonstration. ■

Une conséquence importante du théorème V.2.3 est que $T(\mathscr{E}) \lhd \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, et que le groupe quotient $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/T(\mathscr{E})$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$.

Déterminant

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Pour $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$, le scalaire $\det\,(\vec{\varphi})$ sera appelé **déterminant** de φ et noté $\mathrm{Det}\,(\varphi)$ ou $\det\,(\varphi)$. Il est clair que $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ ssi $\mathrm{Det}\,(\varphi) \neq 0$. Si $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$ et $\psi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$, on a : $\mathrm{Det}\,(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Det}\,(\psi) \times \mathrm{Det}\,(\varphi)$.

L'application $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$, $\varphi \mapsto \mathrm{Det}\,(\varphi)$ est un homomorphisme de groupes, dont le noyau est appelé **groupe spécial affine** de $\mathscr{E}$, et noté $\mathrm{SA}(\mathscr{E})$, autrement dit (cf. tome 1, page 531) :

$$\mathrm{SA}(\mathscr{E}) = \{\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid \mathrm{Det}\,(\varphi) = 1\} = \left\{\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid \vec{\varphi} \in \mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathscr{E}})\right\}.$$

L'application $\mathrm{Det} : \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est surjective (cf. exemple 3 ci-dessus et exemple 1 du tome 1, § XIII.3). Finalement, $\mathrm{SA}(\mathscr{E}) \lhd \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et le groupe quotient $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/_{\mathrm{SA}(\mathscr{E})}$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Groupe des homothéties et translations

Pour tout $\mathbb{R}$-ev non nul V, notons $\mathbf{H}(V)$ la *$\mathbb{R}$-algèbre des homothéties* de V (c'est un corps isomorphe à $\mathbb{R}$), et $\mathbf{H}^*(V)$ le *groupe des homothéties* de rapport $\neq 0$ de V. On sait que $\mathbf{H}^*(V)$ est le centre du groupe linéaire $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ (cf. tome 1, théorème IX.6.3). En particulier, $\mathbf{H}^*(V) \lhd \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.

Soit maintenant $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$, d'espace directeur E. Notons L l'homomorphisme de groupes $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$. D'après ce qui précède, $L^{-1}(\mathbf{H}^*(E))$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ (et le groupe quotient $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/_{L^{-1}(\mathbf{H}^*(E))}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)/_{H^*(E)}$, ce dernier groupe étant noté classiquement $\mathbf{PGL}(E)$).

Le groupe $L^{-1}(\mathbf{H}^*(E))$ s'appelle **groupe des homothéties et translations** de $\mathscr{E}$. Nous le noterons $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ et reprendrons son étude au § V.5.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines de dimensions n et p, d'espaces directeurs E et F.

a) Montrer que $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, F)$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev du $\mathbb{R}$-ev des applications de $\mathscr{E}$ dans F, et que sa dimension est $(n+1)p$.

b) Pour $\alpha \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, F)$ et $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$, on note $\varphi \dotplus \alpha$ l'application $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$, $x \mapsto \varphi(x) \dotplus \alpha(x)$. Montrer que $\varphi \dotplus \alpha \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ et qu'on définit ainsi une structure d'espace affine ayant pour espace directeur $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, F)$ sur $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$. Cette structure sera dite *naturelle* sur $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ une *application*. On suppose : $\forall x \in \mathscr{E}$, $\exists V$ voisinage de x dans $\mathscr{E}$, $\exists \psi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ tels que $\psi|_V = \varphi|_V$. Montrer que $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. On munit $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$ de sa structure affine naturelle (cf. exercice 1). Montrer que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est un ouvert de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$, et que $\mathrm{SA}(\mathscr{E})$ est un fermé de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$. Quelle est l'adhérence dans $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$ du groupe $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$?

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Montrer que toute *involution affine* φ de $\mathscr{E}$ (i.e. $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$) admet au moins un point fixe. En déduire que les involutions affines de $\mathscr{E}$ sont les bijections affines de la forme $M \mapsto O \dotplus f(\overrightarrow{OM})$, où $f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathscr{E}})$ est une involution, i.e. de la forme $f = \mathrm{Id}_F \oplus (-\mathrm{Id}_G)$ avec F et G sous-$\mathbb{R}$-ev supplémentaires de $\vec{\mathscr{E}}$. Ces propriétés restent-elles vraies si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un corps de base quelconque ?

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soit $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ une *application* telle que $(\forall (M, N) \in \mathscr{E}^2)$ $\overrightarrow{\varphi(M)\,\varphi(N)} = \overrightarrow{MN}$.
Montrer que $\varphi \in T(\mathscr{E})$.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$.
a) Montrer que le centre du groupe $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est réduit à $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$.
b) Trouver les $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$ permutables avec toute translation de $\mathscr{E}$.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Prouver que
$$\mathscr{H}_T(\mathscr{E}) = \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \quad \text{ssi} \quad n = 1\,.$$

§ V.3 *SOUS-ESPACES AFFINES*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine dirigé par le $\mathbb{R}$-ev E. Rappelons que, pour tout $a \in \mathscr{E}$, nous désignons par ξ_a (ou $\xi_{a,E}$ si des ambiguïtés sont à craindre) la bijection : $E \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto a \dotplus t$; cette bijection est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev lorsqu'on munit $\mathscr{E}$ de la structure de $\mathbb{R}$-ev d'origine a ($\mathscr{E}$ muni de cette structure sera noté E_a ou $\vec{\mathscr{E}}_a$). Pour $(a, b) \in \mathscr{E}^2$, $\xi_b \circ \xi_a^{\langle -1 \rangle}$ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de E_a sur E_b, et on vérifie que $\xi_b \circ \xi_a^{\langle -1 \rangle}$ n'est autre que *la translation* $\tau_{\overrightarrow{ab}}$ *de vecteur* $\overrightarrow{ab}$ *dans* $\mathscr{E}$.

DÉFINITION V.3.1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur un $\mathbb{R}$-ev *E, et soit V un sous-*$\mathbb{R}$-ev *de E. On appelle* ***sous-espace affine dirigé par*** *V de $\mathscr{E}$ toute partie $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ de la forme $\xi_a(V)$ (noté aussi $a \dotplus V$) pour au moins un $a \in \mathscr{E}$. Dans ce cas V s'appelle la* ***direction*** *(ou l'****espace directeur****) de $\mathscr{V}$, et l'entier* $\dim(V)$ *est appelé la* ***dimension*** *de $\mathscr{V}$ et noté* $\dim(\mathscr{V})$ *; si* $\dim(\mathscr{V}) = 1$ *on dit que $\mathscr{V}$ est une* ***droite affine*** *de $\mathscr{E}$, si* $\dim(\mathscr{V}) = 2$ *on dit que $\mathscr{V}$ est un* ***plan affine*** *de $\mathscr{E}$. L'entier* $\mathrm{Codim}_E(V)$ *est appelé* ***codimension*** *de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{E}$ et noté* $\mathrm{Codim}_{\mathscr{E}}(\mathscr{V})$ *ou en abrégé* $\mathrm{Codim}\,(\mathscr{V})$. *On dit que $\mathscr{V}$ est un* ***hyperplan affine*** *de $\mathscr{E}$ ssi* $\mathrm{Codim}\,(\mathscr{V}) = 1$, *i.e. ssi* $\dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathscr{E}) - 1$.

Voici quelques conséquences immédiates de cette définition : désignant par $\mathscr{V}$ un sous-espace affine dirigé par V de l'espace affine $\mathscr{E}$, avec $\mathscr{V} = \xi_a(V)$,

- $\mathscr{V}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de E_a isomorphe à V (et $a \in \mathscr{V}$, donc $\mathscr{V} \neq \varnothing$).

• Soit $b \in \mathscr{V}$: alors $\mathscr{V} = \xi_b(V)$. En effet $b \in \mathscr{V}$ signifie exactement que $\overrightarrow{ab} \in V$, d'où $\xi_b = \xi_a \circ T_{\overrightarrow{ab}}$ en notant $T_{\overrightarrow{ab}}$ la translation $t \mapsto t + \overrightarrow{ab}$ dans V (qui est une bijection de V sur V). En conséquence :

$$(1) \qquad \boxed{\forall (t, x) \in V \times \mathscr{V} \quad x \dotplus t \in \mathscr{V}}.$$

• La loi $V \times \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$, $(t, x) \mapsto x \dotplus t$ *définit sur* $\mathscr{V}$ *une structure d'espace affine d'espace directeur* V, et pour cette structure, l'injection canonique $\mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{E}$ est une application affine, dont la partie linéaire est l'injection canonique de V dans E.

Cette propriété admet la réciproque suivante, dont la vérification est laissée au lecteur : soit $\mathscr{V}$ une partie non vide de $\mathscr{E}$ et V un sous-$\mathbb{R}$-ev de E vérifiant (1) et tels que la loi $V \times \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$, $(t, x) \mapsto x \dotplus t$ fasse de $\mathscr{V}$ un espace affine sur V. Alors $\mathscr{V}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par V (pour cette raison, on notera aussi $V = \vec{\mathscr{V}}$).

• $\mathscr{V}$ est *l'unique sous-espace affine de* $\mathscr{E}$ *dirigé par* V *et qui passe par* a : car si $\mathscr{W} = \xi_b(V)$ avec $b \in \mathscr{E}$ et si $a \in \mathscr{W}$, on a vu ci-dessus que $\xi_a(V) = \xi_b(V)$, d'où $\mathscr{V} = \mathscr{W}$.

• $\mathscr{V}$ est un singleton ssi $V = \{0_E\}$, i.e. ssi $\dim(\mathscr{V}) = 0$.

• Lorsque $\mathscr{E} = E$ muni de sa structure affine naturelle, les sous-espaces affines dirigés par un sous-$\mathbb{R}$-ev V de E ne sont autres que *les translatés* $a + V$ $(a \in E)$ de V dans $\mathscr{E}$ (cf. tome 1, § XIV.1).

Sous-variétés linéaires affines

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Une partie $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ sera appelée **sous-variété linéaire affine** de $\mathscr{E}$ (en abrégé **s.v.l.a.** de $\mathscr{E}$) ssi c'est soit $\varnothing$, soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. On attribue à la s.v.l.a. $\varnothing$ de $\mathscr{E}$ la dimension -1. Si $\mathscr{V}$ est une s.v.l.a. non vide de $\mathscr{E}$, on peut parler de sa *direction,* de sa *dimension,* etc...

Intersection de sous-espaces affines

PROPOSITION V.3.1

Soit $\mathscr{E}$ *un espace affine sur un* $\mathbb{R}$-ev E *et* $(\mathscr{V}_i)_{i \in I}$ *une famille de sous-espaces affines de* $\mathscr{E}$ ***d'intersection non vide.*** *Alors* $\mathscr{V} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{V}_i$ *est un sous-espace affine de* $\mathscr{E}$. *Notant, pour* $i \in I$, V_i *la direction de* $\mathscr{V}_i$, *la direction de* $\mathscr{V}$ *est* $\bigcap_{i \in I} V_i$.

Démonstration :

Soit $a \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{V}_i$ et $x \in \mathscr{E}$. La relation $x \in \mathscr{V}$ équivaut à $(\forall i \in I)\ \overrightarrow{ax} \in V_i$, i.e. à $\overrightarrow{ax} \in V$. Donc $\mathscr{V} = a \dotplus V$. ■

COROLLAIRE 1

Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$, de directions respectives V et W. Si $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} \neq \varnothing$, les relations $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$ et $V \subset W$ sont équivalentes. En conséquence, si $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$, les relations $\mathscr{V} = \mathscr{W}$ et $\dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathscr{W})$ *sont équivalentes.*

COROLLAIRE 2

Dans un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $\geqslant 1$, les sous-espaces affines $\mathscr{V} \neq \mathscr{E}$ de $\mathscr{E}$ ***maximaux pour l'inclusion*** *sont les* ***hyperplans affines.***

PROPOSITION V.3.2

Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$. Si $\vec{\mathscr{V}} \oplus \vec{\mathscr{W}} = \vec{\mathscr{E}}$, alors $\mathscr{V} \cap \mathscr{W}$ est un singleton.

Démonstration :

Supposons donc $\vec{\mathscr{V}} \oplus \vec{\mathscr{W}} = \vec{\mathscr{E}}$. Soit $a \in \mathscr{V}$ et $b \in \mathscr{W}$; on a : $\overrightarrow{ab} = t + u$ avec $t \in \vec{\mathscr{V}}$ et $u \in \vec{\mathscr{W}}$. Donc $a \dotplus t = b \dotplus (-u)$ et par suite le point $c = a \dotplus t = b \dotplus (-u)$ appartient à $\mathscr{V} \cap \mathscr{W}$. Puisque $\overrightarrow{\mathscr{V} \cap \mathscr{W}} = \vec{\mathscr{V}} \cap \vec{\mathscr{W}} = \{0\}$, on en déduit bien que $\mathscr{V} \cap \mathscr{W}$ est un singleton. ■

Considérons maintenant une famille non vide $(a_i)_{i \in I}$ de points d'un espace affine $\mathscr{E}$. L'ensemble des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ contenant chacun des a_i est non vide (il contient $\mathscr{E}$). D'après la proposition V.3.1, l'intersection de tous ces sous-espaces affines est un sous-espace affine non vide de $\mathscr{E}$: on dit que c'est le **sous-espace affine de $\mathscr{E}$ engendré par les a_i** et on le notera $\mathrm{Vaff}\,((a_i)_{i \in I})$. On définit de même le **sous-espace affine engendré** par une partie non vide A de $\mathscr{E}$, et on le note $\mathrm{Vaff}\,(A)$. On vérifie facilement que *l'espace directeur de* $\mathrm{Vaff}\,((a_i)_{i \in I})$ *est égal, pour tout* $j \in I$, *à* $\mathrm{Vect}\,((\overrightarrow{a_j a_l})_{l \in I})$.

PROPOSITION V.3.3

Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} \neq \varnothing$, on a :

$$\dim(\mathrm{Vaff}\,(\mathscr{V} \cup \mathscr{W})) = \dim(\mathscr{V}) + \dim(\mathscr{W}) - \dim(\mathscr{V} \cap \mathscr{W})\,;$$

si $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \varnothing$, on a :

$$\dim(\mathrm{Vaff}\,(\mathscr{V} \cup \mathscr{W})) = \dim(\mathscr{V}) + \dim(\mathscr{W}) - \dim(\vec{\mathscr{V}} \cap \vec{\mathscr{W}}) + 1\,.$$

Démonstration :

Posons $\mathscr{L} = \text{Aff}\,(\mathscr{V} \cup \mathscr{W})$ et $\mathscr{I} = \mathscr{V} \cap \mathscr{W}$. Si $\mathscr{I} \neq \varnothing$, soit $a \in \mathscr{I}$. Alors $\vec{\mathscr{L}} = \vec{\mathscr{V}} + \vec{\mathscr{W}}$ et $\vec{\mathscr{I}} = \vec{\mathscr{V}} \cap \vec{\mathscr{W}}$, donc l'assertion découle du corollaire 3 du théorème IX.4.4 du tome 1.

Si $\mathscr{I} = \varnothing$, soit $a \in \mathscr{V}$, $b \in \mathscr{W}$ et soit $t = \overrightarrow{ab}$. On a : $t \notin \vec{\mathscr{V}} + \vec{\mathscr{W}}$ (sinon, écrivant $t = v + w$ avec $(v, w) \in \vec{\mathscr{V}} \times \vec{\mathscr{W}}$, le point $a \dotplus v = b \dotplus (-w)$ appartiendrait à $\mathscr{I}$). De plus, $\vec{\mathscr{L}} = (\vec{\mathscr{V}} + \vec{\mathscr{W}}) \oplus \mathbb{R}t$, donc $\dim(\vec{\mathscr{L}}) = \dim(\vec{\mathscr{V}} + \vec{\mathscr{W}}) + 1$, d'où la conclusion. ■

Applications affines et sous-espaces affines

THÉORÈME V.3.1

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $\varphi \in \text{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.
a) *Pour tout sous-espace affine $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$, l'ensemble $\varphi(\mathscr{V})$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$, et on a :*

$$\dim(\mathscr{V}) = \dim(\varphi(\mathscr{V})) + \dim(\text{Ker}\,(\vec{\varphi})). \tag{2}$$

De plus, $\vec{\varphi}(\vec{\mathscr{V}}) = \overrightarrow{\varphi(\mathscr{V})}$.
b) *Pour tout sous-espace affine $\mathscr{W}$ de $\mathscr{F}$, l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathscr{W})$ est une* s.v.l.a. *de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{W} \subset \varphi(\mathscr{E})$, alors $\varphi^{-1}(\mathscr{W})$ est non vide et l'on a :*

$$\dim(\varphi^{-1}(\mathscr{W})) = \dim(\mathscr{W}) + \dim(\text{Ker}\,(\vec{\varphi})). \tag{3}$$

Démonstration :

a) Si $a \in \mathscr{V}$ et $b = \varphi(a)$, on sait que φ est linéaire de $\vec{\mathscr{E}}_a$ dans $\vec{\mathscr{F}}_b$, d'où (2) avec la formule du rang ; $\vec{\varphi}(\vec{\mathscr{V}}) = \overrightarrow{\varphi(\mathscr{V})}$ est quasi évident.

b) Si $\varphi^{-1}(\mathscr{W}) \neq \varnothing$, soit $a \in \mathscr{E}$ tel que $b = \varphi(a) \in \mathscr{W}$. On sait que φ est linéaire de $\vec{\mathscr{E}}_a$ dans $\vec{\mathscr{F}}_b$ et que $\mathscr{W}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\vec{\mathscr{F}}_b$, donc $\varphi^{-1}(\mathscr{W})$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\vec{\mathscr{E}}_a$, i.e. un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Si de plus $\mathscr{W} \subset \varphi(\mathscr{E})$, $\mathscr{W} = \varphi(\varphi^{-1}(\mathscr{W}))$, d'où d'après (2) : $\dim(\mathscr{W}) + \dim(\text{Ker}\,(\vec{\varphi})) = \dim(\varphi^{-1}(\mathscr{W}))$. ■

On peut ajouter au *b*) que si $\varphi^{-1}(\mathscr{W}) \neq \varnothing$, alors $\overrightarrow{\varphi^{-1}(\mathscr{W})} = \vec{\varphi}^{-1}(\vec{\mathscr{W}})$.

COROLLAIRE 1

Toute ***bijection affine*** *φ d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$ permute entre eux les sous-espaces affines de* ***même dimension*** *$p \in [\![0, n]\!]$.*

Démonstration :

D'après (2), si $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, tout sous-espace affine $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ est transformé par φ en un sous-espace affine de même dimension. Inversement, soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de même dimension $p \in [\![0, n-1]\!]$. Grâce au théorème de la base incomplète, on peut trouver des repères affines $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (O'\,;e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathscr{E}$ tels que $(O\,;e_1, \ldots, e_p)$ et $(O'\,;e'_1, \ldots, e'_p)$ soient des repères affines respectivement de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$. L'unique bijection affine φ de $\mathscr{E}$ telle que $\varphi(O) = O'$ et $\varphi(e_i) = e'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ vérifie alors $\varphi(\mathscr{V}) = \mathscr{V}'$. ■

On notera que *l'injection canonique* $\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}$ d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une *application affine.* Par suite, toute restriction à $\mathscr{F}$ d'une application affine de $\mathscr{E}$ dans un espace affine $\mathscr{E}'$ appartient à $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{F}, \mathscr{E}')$.

THÉORÈME V.3.2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$.
a) *L'ensemble $\mathscr{F} = \{x \in \mathscr{E} \mid \varphi(x) = x\}$ des* **points fixes** *de φ est une* s.v.l.a. ; *si $\mathscr{F} \neq \varnothing$, on a : $\vec{\mathscr{F}} = \mathrm{Ker}\,(\vec{\varphi} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}})$.*
b) *Pour que $\mathscr{F}$ soit un* **singleton,** *il faut et il suffit que* 1 *ne soit pas valeur propre de $\vec{\varphi}$.*

Démonstration :

Si $\mathscr{F} \neq \varnothing$, soit a un point fixe de φ. On vérifie immédiatement que $\mathscr{F} = a \dotplus \mathrm{Ker}\,(\vec{\varphi} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}})$. En particulier, si $\mathscr{F}$ est un singleton, $\vec{\mathscr{F}} = \{0\}$, ce qui prouve que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{\varphi}$. Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{\varphi}$, c'est que $u = \vec{\varphi} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}}$ est bijective. L'application $g : \mathscr{E} \longrightarrow \vec{\mathscr{E}}$, $x \mapsto \overrightarrow{x\varphi(x)}$ est affine, et $\vec{g} = u$. Puisque u est bijective, il existe $x \in \mathscr{E}$ unique tel que $g(x) = 0_{\vec{\mathscr{E}}}$, i.e. tel que $\varphi(x) = x$. ■

Paramétrisations affines d'un sous-espace affine

Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de dimension $p \geqslant 1$ d'un espace affine $\mathscr{E}$. On a vu au § V.1 que, pour tout point $a \in \mathscr{V}$ et toute base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\vec{\mathscr{V}}$, l'application affine définie par

$$(4) \qquad \boxed{\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathscr{V}, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \mapsto a \dotplus \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i}$$

est bijective.

Toute bijection du type (4) est appelée *représentation paramétrique affine* de $\mathscr{V}$ (ou : représentation *par point et vecteurs* de $\mathscr{V}$). De telles représentations sont particulièrement utilisées pour $p = 1$ (représentations affines des droites affines de $\mathscr{E}$) et pour $p = 2$ (représentations affines des plans affines de $\mathscr{E}$).

On dit souvent que $e_1, \ldots, e_p$ sont des *vecteurs directeurs* de $\mathscr{V}$, ou que $\mathscr{V}$ *est dirigé* par $(e_1, \ldots, e_p)$, pour exprimer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\vec{\mathscr{V}}$.

Parallélisme

DÉFINITION V.3.2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Deux sous-espaces affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$ sont dits **parallèles** *ssi on a : $\vec{\mathscr{V}} \subset \vec{\mathscr{W}}$ ou $\vec{\mathscr{W}} \subset \vec{\mathscr{V}}$.*

On remarque que si $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont parallèles et si $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} \neq \varnothing$, alors $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$ ou $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$. En particulier deux sous-espaces affines parallèles *de même dimension* sont confondus ou disjoints.

Sur l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ *de dimension donnée p,* le parallélisme est une relation d'équivalence, chaque classe d'équivalence correspondant bijectivement à un élément V de $\mathscr{G}_p(\vec{\mathscr{E}})$.

On prendra garde que $\mathscr{V} \cap \mathscr{W}$ *peut être vide sans que* $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{W}$ *soient parallèles* (penser à deux droites affines de l'espace physique). On dit souvent qu'un vecteur $t \in \vec{\mathscr{E}}$ est parallèle à $\mathscr{V}$ pour exprimer que $t \in \vec{\mathscr{V}}$.

Fonctions affines et sous-espaces affines

DÉFINITION V.3.3

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. On appelle **fonction affine** *sur $\mathscr{E}$ toute application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.*

Ci-après, l'espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$ et dirigé par E est fixé. L'ensemble Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ des fonctions affines sur $\mathscr{E}$ forme un sous-$\mathbb{R}$-ev du $\mathbb{R}$-ev des fonctions $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$. En fait, soit $\mathbf{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions constantes : $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $a \in \mathscr{E}$. Notant $\mathrm{Aff}_a\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ le sous-$\mathbb{R}$-ev des fonctions affines $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ nulles en a, il est clair que :

$$\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R}) = \mathrm{Aff}_a\,(\mathscr{E}, \mathbb{R}) \oplus \mathbf{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R}) \tag{5}$$

et que $\mathrm{Aff}_a\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ n'est autre que le dual du $\mathbb{R}$-ev E_a. De (5) on déduit que Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ est de dimension finie, égale à $n + 1$.

THÉORÈME V.3.3

Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de dimension $p \in [\![0, n-1]\!]$ de $\mathscr{E}$. L'ensemble $\check{\mathscr{V}}$ des fonctions affines $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ ***nulles sur*** *$\mathscr{V}$ forme un sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension $n-p$ de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$. De plus, $\bigcap_{\varphi \in \check{\mathscr{V}}} \varphi^{-1}(0) = \mathscr{V}$.*

Démonstration :

Il est évident que $\check{\mathscr{V}}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$, et que $\check{\mathscr{V}} \cap \mathrm{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R}) = \{0\}$. Fixons $a \in \mathscr{V}$ et soit E_a le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}$ d'origine a. Alors $\mathscr{V}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension p de E_a, et $\check{\mathscr{V}}$ n'est autre que l'orthogonal $\mathscr{V}^0$ de $\mathscr{V}$ dans le dual E_a^*. Le résultat découle donc du théorème XII.2.5 du tome 1 et de son corollaire 1. ■

COROLLAIRE 1

a) *Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $\mathscr{E}$. L'ensemble $\check{\mathscr{H}}$ est une droite vectorielle de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$; tout élément $\varphi \in \check{\mathscr{H}} \setminus \{0\}$ est non constant et vérifie $\varphi^{-1}(0) = \mathscr{H}$.*
b) *Réciproquement, soit $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R})$. Alors, $\varphi^{-1}(0) \neq \varnothing$, et $\varphi^{-1}(0)$ est un hyperplan affine de $\mathscr{E}$.*

Démonstration :

L'assertion *a*) est une conséquence immédiate du théorème V.3.3, avec $p = n-1$. Quant à l'assertion *b*), elle découle de la formule (3) du théorème V.3.1 si l'on tient compte que « φ est non constante » se traduit par « $\vec{\varphi} \neq 0$ », et entraîne « $\vec{\varphi}$ surjective ». ■

Remarque 1 : Plus généralement, le lecteur vérifiera, toujours à l'aide du théorème XII.2.5 du tome 1, que pour toute partie non vide $\mathscr{A}$ de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ telle que $\mathscr{V}_{\mathscr{A}} = \bigcap_{\varphi \in \mathscr{A}} \varphi^{-1}(0)$ soit non vide, $\mathscr{V}_{\mathscr{A}}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, égal à $\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{A})} \varphi^{-1}(0)$, et que : $\dim\,(\mathscr{V}_{\mathscr{A}}) = n - \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{A}))$ et $\check{\mathscr{V}}_{\mathscr{A}} = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{A})$.

PROPOSITION V.3.4

Soit $\mathscr{A}$ un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ tel que $\mathscr{V}_{\mathscr{A}} = \bigcap_{\varphi \in \mathscr{A}} \varphi^{-1}(0) \neq \varnothing$. Soit A le sous-$\mathbb{R}$-ev $\{\vec{\varphi}\}_{\varphi \in \mathscr{A}}$ de E^* ; alors A est isomorphe à $\mathscr{A}$, et $\vec{\check{\mathscr{V}}}_{\mathscr{A}} = {}^0A$.

Démonstration :

L'application $\mathscr{A} \longrightarrow E^*$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$ est $\mathbb{R}$-linéaire ; son image est A ; et elle est injective car $\mathscr{A} \cap \mathrm{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R}) = \{0\}$ du fait que

$\mathscr{V}_{\mathscr{A}} \neq \varnothing$. Donc A est bien un sous-$\mathbb{R}$-ev de E^*, isomorphe à $\mathscr{A}$. Fixons $a \in \mathscr{V}_{\mathscr{A}}$. Pour $t \in E$ et $\varphi \in \mathscr{A}$, on a : $\varphi(a \dotplus t) = \vec{\varphi}(t)$, donc $a \dotplus t \in \mathscr{V}_{\mathscr{A}} \Leftrightarrow t \in {}^0A$, i.e. $t \in \vec{\mathscr{V}}_{\mathscr{A}} \Leftrightarrow t \in {}^0A$. ■

Remarque 2 : Dans la proposition V.3.4, $\vec{\mathscr{V}}_{\mathscr{A}}$ ne dépend que de A. Donc tous les sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{A}$ de Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ tels que $\mathscr{V}_{\mathscr{A}} \neq \varnothing$ et qui conduisent au même sous-$\mathbb{R}$-ev A de E^* définissent des sous-espaces affines $\mathscr{V}_{\mathscr{A}}$ *parallèles entre eux et de même dimension* $n - \dim(A)$. Mieux : du fait que $({}^0A)^0 = A$, on voit que si pour un sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{B}$ de Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ on a $\dim(\mathscr{V}_{\mathscr{B}}) = \dim(\mathscr{V}_{\mathscr{A}})$ et $\mathscr{V}_{\mathscr{B}}$ parallèle à $\mathscr{V}_{\mathscr{A}}$, alors le $\mathbb{R}$-ev $\{\vec{\varphi}\}_{\varphi \in \mathscr{B}}$ est égal à A.

Exemple 1 : *Equations affines d'un point*

Soit $a \in \mathscr{E}$; posons $\mathscr{V} = \{a\}$: c'est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension 0, donc $\vec{\mathscr{V}}$ est de dimension n. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une *base arbitraire* de E^* : les fonctions affines $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ définies par $(\forall i \in [\![1, n]\!])$ $(\forall x \in \mathscr{E})$ $\varphi_i(x) = f_i(\overrightarrow{ax})$, forment une base de $\vec{\mathscr{V}}$. Donc $\mathscr{V} = \{x \in \mathscr{E} \mid f_i(\overrightarrow{ax}) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n\}$, et $\vec{\mathscr{V}} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Le lecteur pourra faire le rapprochement avec le lemme 1 du § VII.2 du tome 1.

Exemple 2 : *Fonctions polynomiales sur* $\mathscr{E}$

Soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Notons $(f_{1,\mathscr{R}}, \ldots, f_{n,\mathscr{R}})$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ et $\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}}$ les fonctions affines définies par $(\forall i \in [\![1, n]\!])$ $(\forall x \in \mathscr{E})$ $\varphi_{i,\mathscr{R}}(x) = f_{i,\mathscr{R}}(\overrightarrow{Ox})$. Les $\varphi_{i,\mathscr{R}}$ sont *caractérisées* par la propriété suivante :

$$(\forall x \in \mathscr{E}) \quad \overrightarrow{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,\mathscr{R}}(x)\, e_i\,,$$

autrement dit $\varphi_{i,\mathscr{R}}(x)$ est la i-ième coordonnée de x dans $\mathscr{R}$. Soit $\mathscr{V} = \{O\}$. D'après l'exemple 1, $(\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}})$ est une base de $\mathscr{V}$.

Soit alors $\Phi_{\mathscr{R}}$ la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée (dans l'algèbre de toutes les fonctions : $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$) par $\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}}$. Du fait que $\mathbb{R}$ est infini, on verrait, comme au § XI.3 du tome 1, que $\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}}$ sont *algébriquement libres,* i.e. que $\Phi_{\mathscr{R}}$ est une *algèbre de polynômes en les n lettres* $\varphi_{i,\mathscr{R}}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Si on fait varier $\mathscr{R}$, les formules (4) du § V.1 montrent que toutes les algèbres $\Phi_{\mathscr{R}}$ sont égales à une même algèbre Φ que l'on appelle, par définition, **$\mathbb{R}$-algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathscr{E}$.**

Les formules (4) du § V.1 montrent aussi que si $P \in \Phi \setminus \{0\}$, le degré de P par rapport à $\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}}$ est indépendant du choix du repère $\mathscr{R}$: l'entier égal à ces degrés est appelé ***degré de P.*** (Lorsque $\mathscr{E} = E$ muni de sa structure affine naturelle, on retrouve les fonctions de la définition XI.3.4 du tome 1). Par convention, si $P = 0_{\Phi}$, le degré de P est $-\infty$.

Montrons pour finir que Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ *n'est autre que l'ensemble des fonctions polynomiales de degré* $\leqslant 1$ sur $\mathscr{E}$. En effet, soit $\mathscr{A} = \text{Vect}\,(\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}})$. On a : $\dim(\mathscr{A}) = n$, $\mathscr{A} \cap \mathrm{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R}) = \{0\}$, donc $\text{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R}) = \mathscr{A} \oplus \mathrm{C}(\mathscr{E}, \mathbb{R})$. Autrement dit, Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $\varphi = C + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi_{i,\mathscr{R}}$ (et pour $\varphi \in \text{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ donnée, cette écriture est *unique*) : cela signifie exactement que Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 1$ en $\varphi_{1,\mathscr{R}}, \ldots, \varphi_{n,\mathscr{R}}$, d'où l'assertion.

THÉORÈME V.3.4

> *Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines, $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_p)$ un repère de $\mathscr{F}$, et une application $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$, $M \mapsto O + f_1(M)\, e_1 + \cdots + f_p(M)\, e_p$. Pour que f soit affine, il faut et il suffit que les fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ soient affines, i.e. polynomiales de degré $\leqslant 1$.*

(On applique le théorème IX.2.1 du tome 1 aux parties linéaires soit de f, soit des f_i.)

THÉORÈME V.3.5

> *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Soit $q \in [\![1, n]\!]$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ des fonctions affines dont les parties linéaires $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_q$ sont* ***linéairement indépendantes.***
> *Alors $\mathscr{V} = \bigcap_{i \in [\![1,q]\!]} \varphi_i^{-1}(0) \neq \varnothing$. C'est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dont la dimension est $p = n - q$.*

Démonstration :

Considérons l'application $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $M \mapsto (\varphi_1(M), \ldots, \varphi_q(M))$. D'après le théorème V.3.4, c'est une application affine. Sa partie linéaire $\vec{\varphi} : \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est **surjective** en vertu du théorème XII.2.3 du tome 1 à cause de l'indépendance des $\vec{\varphi}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$. Donc (cf. proposition V.2.2) φ est surjective. En particulier $0_{\mathbb{R}^q}$ est une valeur prise par φ, ce qui prouve bien que $\mathscr{V} = \bigcap_{i \in [\![1,q]\!]} \varphi_i^{-1}(0)$ n'est pas vide. Posons $A = \text{Vect}\,(\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_q)$: c'est un sous-espace vectoriel de dimension q de E^* tel que ${}^0A$ a pour dimension $p = n - q$, qui est aussi la dimension du sous-espace affine $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$. ■

Signalons enfin qu'en utilisant les résultats du tome 2 (exemple 8 du § X.5 et corollaire 2 du théorème XI.1.7) on voit facilement :

- Toute application affine entre espaces affines est *continue.*
- Toute bijection affine entre espaces affines est un *homéomorphisme.*

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$ et des points de $\mathscr{E}$: A_0, $A_1, \ldots, A_n$ tous *distincts*. Sur chaque droite Dr (A_iA_{i+1}) on choisit un point B_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, et sur Dr (A_0A_n) on choisit un point B. On considère les réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et λ tels que :

$$(\forall i) \quad \overrightarrow{B_iA_i} = \lambda_i \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \; ; \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BA_n} = \lambda \overrightarrow{A_0A_n} \, .$$

Montrer : pour que $B_0, \ldots, B_{n-1}$ et B appartiennent à un même hyperplan affine de $\mathscr{E}$, il faut et il suffit que

$$(\lambda - 1) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \lambda_i) = \lambda \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \, .$$

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$.

a) On suppose $n \in \{2, 3\}$. On fait opérer le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sur l'ensemble Γ des couples $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$ de deux droites affines distinctes de $\mathscr{E}$, en associant à $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et à $\gamma = (\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) \in \Gamma$ le couple $\varphi \cdot \gamma = (\varphi(\mathscr{D}_1), \varphi(\mathscr{D}_2))$. Caractériser les $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$-orbites de Γ. Combien y en a-t-il ?

b) On suppose $n = 3$. Soit Γ l'ensemble des triplets $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3)$ de trois droites affines distinctes de $\mathscr{E}$. On fait opérer $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sur Γ par

$$(\varphi, \gamma = (\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3)) \mapsto \varphi \cdot \gamma = (\varphi(\mathscr{D}_1), \varphi(\mathscr{D}_2), \varphi(\mathscr{D}_3)) \quad (\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}), \gamma \in \Gamma) \, .$$

Mêmes questions qu'en *a*). Si $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma' \in \Gamma$ sont dans la même orbite, y a-t-il unicité de $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ tel que $\varphi(\gamma) = \gamma'$?

c) On suppose $n \geqslant 4$. Soit $p \in [\![2, n]\!]$ et Γ l'ensemble des suites $(\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_p)$ de droites affines distinctes de $\mathscr{E}$. On fait opérer $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sur Γ en associant à $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et à $\gamma = (\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_p) \in \Gamma$ le p-uple $\varphi \cdot \gamma = (\varphi(\mathscr{D}_1), \ldots, \varphi(\mathscr{D}_p))$. Y a-t-il un nombre fini de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$-orbites dans Γ ?

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$, d'espace directeur E, V et W deux sous-espaces supplémentaires de E, et $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction V. Pour tout $M \in \mathscr{E}$, soit $\varpi(M)$ l'unique point commun à $\mathscr{V}$ et du sous-espace affine $M \dotplus W$ de $\mathscr{E}$. L'application ϖ est appelée *projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{V}$ parallèlement à W*.

a) Montrer que ϖ est affine, que $\varpi \circ \varpi = \varpi$. Quels sont les points fixes de ϖ ?

b) Prouver que toute application $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ peut s'écrire sous la forme $\varphi = \psi \circ \varpi$ (resp. $\varphi = \varpi' \circ \psi'$) où $\psi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et où ϖ est une certaine *projection* de $\mathscr{E}$ (resp. où $\psi' \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et où ϖ' est une certaine projection de $\mathscr{E}$).

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$ et soit $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré $d \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction polynomiale $f_\infty : \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *homogène* de degré d telle que, pour tout point $O \in \mathscr{E}$, la fonction polynomiale $g_O : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto f(M) - f_\infty(\overrightarrow{OM})$ soit de degré $\leqslant d - 1$ (f_∞ s'appelle la *forme à l'infini* de f).

Soit $\mathscr{R} = (O \, ; e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Montrer que si on note h_k la composante homogène de degré k du polynôme $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f\left(O \dotplus \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \, , \quad \text{alors} \quad f_\infty\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = h_d(x_1, \ldots, x_n) \, .$$

§ V.4 *BARYCENTRES*

Rappelons que, pour tout ensemble $I \neq \varnothing$, on note $\mathbb{R}^{(I)}$ le $\mathbb{R}$-ev des familles $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ *à support fini*, i.e. telles que l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ soit fini.

THÉORÈME V.4.1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de points de $\mathscr{E}$.
Pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$ telle que $\Lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que

$$(1) \qquad \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 .$$

Démonstration :

Soit $O \in \mathscr{E}$. On a, pour tout point $\Omega \in \mathscr{E}$:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i'} = \sum_{i \in I} \lambda_i(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_i}) = \Lambda \overrightarrow{O\Omega} + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} ;$$

donc $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} = 0$ ssi $\Lambda \overrightarrow{O\Omega} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Autrement dit, il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ vérifiant (1) : c'est le point G défini par :

$$(2) \qquad \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i OA_i} . \quad \blacksquare$$

Ci-après, une famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, où $I \neq \varnothing$, d'éléments de $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$ telle que $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$ sera appelée **famille massique à support fini :** pour chaque $i \in I$, le réel λ_i est la **masse** attribuée à A_i ; le réel $\sum_{i \in I} \lambda_i$ s'appellera la **masse totale** de la famille. L'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est appelé le **support** de cette famille.

DÉFINITION V.4.1

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille massique à support fini ***de masse totale non nulle*** *dans un espace affine $\mathscr{E}$. Le point $G \in \mathscr{E}$ qui vérifie* (1) *s'appelle le* ***barycentre*** *de cette famille.*

On dit aussi que G est le barycentre des points A_i affectés des coefficients λ_i. Il est clair que si l'on remplace $(\lambda_i)_{i \in I}$ par $(C\lambda_i)_{i \in I}$ avec un $C \in \mathbb{R}^*$, la nouvelle famille obtenue $(A_i, C\lambda_i)_{i \in I}$ est encore de masse non nulle et admet *le même barycentre* que $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. En posant $\Lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$ et en prenant $C = \dfrac{1}{\Lambda}$, on peut ainsi se ramener au cas où la masse totale est 1.

Si tel est le cas $\left(\sum_{i \in I} \mu_i = 1\right)$, le barycentre G de $(A_i, \mu_i)_{i \in I}$ est défini par :

(3) $$\overrightarrow{OG} = \sum_{i \in I} \mu_i \overrightarrow{OA_i} \quad (O \text{ arbitraire dans } \mathscr{E}) .$$

Soit $\chi : J \longrightarrow I$ une bijection d'un ensemble J sur I. Posons $B_j = A_{\chi(j)}$ et $\mu_j = \lambda_{\chi(j)}$ pour tout $j \in J$. Il est clair que les familles massiques $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ et $(B_j, \mu_j)_{j \in J}$ ont même barycentre. *(Commutativité du barycentre.)*

Dans le cas particulier où $I = [\![1, n]\!]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et où les A_i sont affectés de masses égales $m \in \mathbb{R}^*$, le barycentre G des (A_i, m) prend le nom d'**isobarycentre** des A_i (pour $n = 2$, on retrouve le *milieu* de (A_1, A_2)).

Remarque 1 : Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille massique à support fini d'un espace affine $\mathscr{E}$, de masse Λ. La fonction $F : \mathscr{E} \longrightarrow E$, $M \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ est affine, sa partie linéaire étant l'homothétie de rapport Λ de E. Donc $\Lambda = 0$ ssi F est constante, et si $\lambda \neq 0$, F est bijective.

Interprétation vectorielle du barycentre

Pour tout espace affine $\mathscr{E}$, notons $\mathscr{E}^{\#}$ le $\mathbb{R}$-ev Aff $(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{E}^{\#*}$ son dual. On sait que si $\mathscr{E}$ est de dimension n, $\mathscr{E}^{\#}$ est de dimension $n + 1$. Fixons $\mathscr{E}$ et considérons l'application naturelle $\delta : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{\#*}$, $x \mapsto \delta_x$, avec $\delta_x : \mathscr{E}^{\#} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$. C'est évidemment une application affine, dont la partie linéaire peut s'écrire $\vec{\delta} : \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \mathscr{E}^{\#*}$, $t \mapsto \tilde{t} \circ L$, en notant L l'application linéaire $\mathscr{E}^{\#} \longrightarrow \vec{\mathscr{E}}^*$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$ et $\tilde{t}$ l'application linéaire $\vec{\mathscr{E}}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \alpha(t)$. On sait que $t \mapsto \tilde{t}$ est une bijection linéaire de $\vec{\mathscr{E}}$ sur $\vec{\mathscr{E}}^{**}$ (cf. tome 1, théorème XII.2.4) ; comme L est surjective, on en déduit facilement que $\vec{\delta}$, donc δ, est **injective** et que $\delta(\mathscr{E})$ est de dimension n.

A l'aide de δ, *on peut donc identifier $\mathscr{E}$ à un hyperplan affine du* $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}^{\#*}$ (cf. exercice 4 pour plus de détails).

Pour éviter des confusions, la loi externe de $\mathscr{E}^{\#*}$ sera notée $\#$, i.e. $\mathbb{R} \times \mathscr{E}^{\#*} \longrightarrow \mathscr{E}^{\#*}$, $(\lambda, s) \mapsto \lambda \# s$. Soit alors une famille massique $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ à support fini de $\mathscr{E}$, de masse totale $\Lambda \neq 0$. Avec l'identification ci-dessus, le barycentre de cette famille n'est autre que l'élément $G \in \mathscr{E}^{\#*}$ défini par :

(4) $$\boxed{G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i} .$$

Cette relation (4) met en évidence la commutativité du barycentre signalée plus haut.

Proposition V.4.1 (Associativité)

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille massique à support fini et de masse $\Lambda \neq 0$ d'un espace affine $\mathscr{E}$, de barycentre G. Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in L}$ une ***partition finie*** *de I, telle que $(\forall \alpha \in L)$ le réel $\Lambda_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} \lambda_i$ soit $\neq 0$. Pour tout $\alpha \in L$, notons G_α le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I_\alpha}$. Alors G est le barycentre de la famille $(G_\alpha, \Lambda_\alpha)_{\alpha \in L}$.*

Démonstration :

En calculant dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}^{\#*}$, on a (puisque $\sum_{\alpha \in L} \Lambda_\alpha = \Lambda$) :

$$G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i = \sum_{\alpha \in L} \frac{\Lambda_\alpha}{\Lambda} \# \left(\sum_{i \in I_\alpha} \frac{\lambda_i}{\Lambda_\alpha} \# A_i \right) = \sum_{\alpha \in L} \frac{\Lambda_\alpha}{\Lambda} \# G_\alpha . \quad \blacksquare$$

Barycentres et sous-espaces affines

Soit A et B deux points *distincts* dans un espace affine $\mathscr{E}$. Par A et B *il passe une et une seule droite affine,* à savoir la droite $A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{AB}$. L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $\lambda \mapsto \lambda \# A + (1 - \lambda) \# B$ définit une bijection affine de $\mathbb{R}$ sur cette droite qui sera notée $\mathrm{Dr}\,(A, B)$. Il est clair que $\mathrm{Dr}\,(A, B)$ *est le sous-espace affine engendré par* $\{A, B\}$.

Proposition V.4.2

Soit $\mathscr{V}$ une partie non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$. Pour que $\mathscr{V}$ soit un ***sous-espace affine*** *de $\mathscr{E}$, il faut et il suffit que :*

$$(5) \qquad (\forall (A, B) \in \mathscr{V}^2) \quad (A \neq B) \Rightarrow \mathrm{Dr}\,(A, B) \subset \mathscr{V} .$$

Démonstration :

La condition (5) est évidemment nécessaire (cf. § V.3). Réciproquement supposons (5) vérifiée. Soit $\Omega \in \mathscr{V}$. Il s'agit de voir que $\{\overrightarrow{\Omega M}\}_{M \in \mathscr{V}}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\vec{\mathscr{E}}$. Soit $(A, B) \in \mathscr{V}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: tout revient à prouver que $\Omega \dotplus (\alpha \overrightarrow{\Omega A} + \beta \overrightarrow{\Omega B}) \in \mathscr{V}$. Choisissons $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. D'après (5), les points M et N définis par :

$$M = \Omega \dotplus \frac{\alpha}{\rho} \overrightarrow{\Omega A} \quad = \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right) \# \Omega + \frac{\alpha}{\rho} \# A$$

$$N = \Omega \dotplus \frac{\beta}{1 - \rho} \overrightarrow{\Omega B} = \left(1 - \frac{\beta}{1 - \rho}\right) \# \Omega + \frac{\beta}{1 - \rho} \# B$$

appartiennent à $\mathscr{V}$. Donc le point $P = \rho \# M + (1-\rho) \# N = \Omega \dotplus (\alpha \overrightarrow{\Omega A} + \beta \overrightarrow{\Omega B})$ appartient à $\mathscr{V}$ [1]. ■

THÉORÈME V.4.2

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de points d'un espace affine $\mathscr{E}$. Le sous-espace affine $\mathscr{V}$ **engendré** *par cette famille est l'ensemble des barycentres $G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i$ lorsque (λ_i) parcourt la partie $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^{(I)}$ définie par la condition $\Lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$.*

Démonstration :

Fixons $\Omega = A_{i_0}$ $(i_0 \in I)$. Si $(\lambda_i) \in \mathscr{U}$ et si Λ est la masse correspondante, le barycentre G de ces $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ vérifie : $G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i = \Omega \dotplus \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \overrightarrow{\Omega A_i}$. Or on sait que $\vec{\mathscr{V}} = \mathrm{Vect}\,((\overrightarrow{\Omega A_i})_{i \in I})$. Donc $G \in \Omega \dotplus \vec{\mathscr{V}} = \mathscr{V}$. Réciproquement, soit G un point de $\mathscr{V}$. On a donc $\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I, i \neq i_0} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}$, avec $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{(I \setminus \{i_0\})}$. Posons $\lambda_{i_0} = 1 - \sum_{i \in I, i \neq i_0} \lambda_i$; alors $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathscr{U}$ car $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. De plus $\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}$, d'où $G = \sum_{i \in I} \lambda_i \# A_i$. C'est donc un barycentre qui convient. ■

Barycentres et applications affines

THÉORÈME V.4.3

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(I) *φ est affine*

(II) *φ conserve les barycentres, i.e. pour toute famille massique $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de masse $\Lambda \neq 0$ de points de $\mathscr{E}$, on a :*

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i\right) = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# \varphi(A_i).$$

(III) *Pour tous points A et B de $\mathscr{E}$ et tout réel λ, on a :*

$$\varphi(\lambda \# A + (1-\lambda) \# B) = \lambda \# \varphi(A) + (1-\lambda) \# \varphi(B).$$

---

[1] La proposition V.4.2 et sa preuve restent vraies avec un corps de base K à la place de $\mathbb{R}$ à condition que $K \setminus \{0, 1\} \neq \varnothing$, c'est-à-dire ssi $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration :

Montrons que (I) $\Rightarrow$ (II). Supposons φ affine et soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille massique de points de $\mathscr{E}$ telle que $\Lambda \neq 0$, de barycentre $G = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i$.

Soit $O \in \mathscr{E}$, d'où $\overrightarrow{OG} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \overrightarrow{OA_i}$. Alors :

$$\vec{\varphi}(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(G)} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \vec{\varphi}(\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A_i)},$$

d'où
$$\varphi(G) = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# \varphi(A_i).$$

Montrons que (II) $\Rightarrow$ (I). Supposons que $\varphi : \mathscr{E} \mapsto \mathscr{F}$ conserve les barycentres. Soit $\Omega \in \mathscr{E}$ et $\Omega' = \varphi(\Omega)$. Il s'agit de prouver que l'application $f : \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \vec{\mathscr{F}}$, $t \mapsto \overrightarrow{\Omega'\varphi(\Omega \dotplus t)}$ est linéaire. Soit $(t_1, t_2) \in \vec{\mathscr{E}}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $A_1 = \Omega \dotplus t_1$, $A_2 = \Omega \dotplus t_2$ et $A = \Omega + (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)$. Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, alors $A = \alpha_1 \# A_1 + \alpha_2 \# A_2$, donc $\varphi(A) = \alpha_1 \# \varphi(A_1) + \alpha_2 \#(A_2)$, d'où

$$\overrightarrow{\Omega'\varphi(A)} = \alpha_1 \overrightarrow{\Omega'\varphi(A_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{\Omega'\varphi(A_2)},$$

et par suite $f(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) = \alpha_1 f(t_1) + \alpha_2 f(t_2)$. Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 1$, soit $m = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$; alors (puisque $\overrightarrow{\Omega A} - \alpha_1 \overrightarrow{\Omega A_1} - \alpha_2 \overrightarrow{\Omega A_2} = 0$) $\Omega = \frac{1}{m} \# A - \frac{\alpha_1}{m} \# A_1 - \frac{\alpha_2}{m} \# A_2$, d'où

$$\Omega' = \frac{1}{m} \# \varphi(A) - \frac{\alpha_1}{m} \# \varphi(A_1) - \frac{\alpha_2}{m} \# \varphi(A_2),$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{\Omega'\varphi(A)} = \alpha_1 \overrightarrow{\Omega'\varphi(A_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{\Omega'\varphi(A_2)},$$

i.e. $f(t) = \alpha_1 f(t_1) + \alpha_2 f(t_2)$. Donc f est bien linéaire.

Il est clair que (II) $\Rightarrow$ (III).

Il reste à démontrer que (III) $\Rightarrow$ (I). On utilise pour cela une technique analogue à celle de la preuve de la proposition V.4.2, et nous laissons au lecteur le soin de l'expliciter [1]. ■

---

[1] Tandis que l'équivalence de (I) et (II) reste vraie si $\mathbb{R}$ est remplacé par un corps commutatif K, il est clair que si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'importe quelle application $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ satisfait à (III).

Coordonnées barycentriques

LEMME 1

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de points d'un espace affine $\mathscr{E}$. Les assertions (I) *et* (II) *sont équivalentes :*
(I) $\exists i \in I$, *la famille* $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ *est linéairement indépendante dans* $\vec{\mathscr{E}}$.
(II) $\forall i \in I$, *la famille* $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ *est linéairement indépendante dans* $\vec{\mathscr{E}}$.

Démonstration :

Il s'agit de voir que (I) $\Rightarrow$ (II). Soit donc $i_0 \in I$ vérifiant (I), et soit $i \in I \setminus \{i_0\}$. Considérons $(\lambda_j) \in \mathbb{R}^{(I \setminus \{i\})}$ tel que $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} = 0$.

Posons $\mu_j = \lambda_j$ pour $j \in I \setminus \{i_0, i\}$ et $\mu_i = -\sum_{k \in I \setminus \{i\}} \lambda_k$. Alors $(\mu_j) \in \mathbb{R}^{(I \setminus \{i_0\})}$ et $\sum_{j \in I \setminus \{i_0\}} \mu_j \overrightarrow{A_{i_0}A_j} = 0$ (car $0 = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \lambda_j (\overrightarrow{A_iA_{i_0}} + \overrightarrow{A_{i_0}A_j})$). Donc $\mu_j = 0$ pour tout $j \in I \setminus \{i_0\}$, d'où on déduit : $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in I \setminus \{i\}$. On a donc prouvé l'indépendance linéaire des $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$, d'où (II). ■

Rappelons que si $\mathscr{V} = \mathrm{Vaff}\,((A_i)_{i \in I})$, alors $(\forall i \in I)$ $\vec{\mathscr{V}} = \mathrm{Vect}\,((A_iA_j)_{j \in I \setminus \{i\}})$, ce qui permet de remplacer les propriétés (I) et (II) respectivement par :

(I′) $(\exists i \in I) \mid (\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est une base de $\overrightarrow{\mathrm{Vaff}\,((A_i)_{i \in I})}$.

(II′) $(\forall i \in I)$ $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est une base de $\overrightarrow{\mathrm{Vaff}\,((A_i)_{i \in I})}$.

DÉFINITION V.4.2

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de points d'un espace affine $\mathscr{E}$ est dite ***affinement libre*** *ssi elle vérifie les conditions équivalentes* (I), (II), (I′), (II′).
Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de points de $\mathscr{V}$ est appelée une ***base affine*** *de $\mathscr{V}$ ssi elle est affinement libre et vérifie* $\mathrm{Vaff}\,((A_i)_{i \in I}) = \mathscr{V}$ *(cette dernière condition s'exprime aussi sous la forme : « la famille $(A_i)_{i \in I}$* ***engendre affinement*** *$\mathscr{V}$ »).*

Nous voyons immédiatement que si $(A_i)_{i \in I}$ est une base affine de $\mathscr{V}$, nécessairement $\mathrm{card}\,(I) = 1 + \dim\,(\mathscr{V})$.

Exemple 1 : Si $\mathscr{V}$ est une droite affine de $\mathscr{E}$, les parties-bases affines de $\mathscr{V}$ sont tout simplement les paires $\{A, B\}$ de points de $\mathscr{V}$ distincts.

Dans tout ce qui suit, il sera commode, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, de noter $\mathscr{T}_n$ l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.

PROPOSITION V.4.3

Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de dimension $p \geqslant 1$ d'un espace affine $\mathscr{E}$, et soit $(A_0, \ldots, A_p) \in \mathscr{V}^{p+1}$. Pour que $(A_0, \ldots, A_p)$ soit une ***base affine*** *de $\mathscr{V}$, il faut et il suffit que l'application $\beta : \mathscr{T}_p \longrightarrow \mathscr{V}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \mapsto \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \# A_i$ soit* ***bijective.***

Démonstration :

Le fait que β est bien à valeurs dans $\mathscr{V}$ résulte du théorème V.4.2. C'est évidemment une application affine ; $\vec{\mathscr{T}}_p$ est l'hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{p+1}$ d'équation $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 0$. Fixons $\Omega \in \mathscr{V}$. L'application linéaire $\vec{\beta}$ associe, à $\lambda = (\lambda_i) \in \vec{\mathscr{T}}_p$ le vecteur $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} - \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{\Omega A_0} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}$, d'où $\mathrm{Im}\,(\vec{\beta}) = \mathrm{Vect}\,((\overrightarrow{A_0 A_i})_{1 \leqslant i \leqslant p})$. Puisque $\dim(\mathscr{T}_p) = p = \dim(\mathscr{V})$, pour que β soit bijective, il faut et il suffit que le rang du système de vecteurs $(\overrightarrow{A_0 A_i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ soit égal à p, i.e. que $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ soit une base affine de $\mathscr{V}$. ■

DÉFINITION V.4.3

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$ et $(A_0, \ldots, A_n)$ une ***base affine*** *de $\mathscr{E}$. On appelle* ***suite des coordonnées barycentriques*** *d'un point $M \in \mathscr{E}$ dans cette base la suite $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{T}_n$ telle que $M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \# A_i$.*

On appelle suite de ***coordonnées barycentriques homogènes*** *d'un point $M \in \mathscr{E}$ dans cette base $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ toute suite de la forme $(\rho\lambda_0, \ldots, \rho\lambda_n)$ avec $\rho \in \mathbb{R}^*$, et où $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ désigne la suite des coordonnées barycentriques de M dans la base $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.*

Ainsi, les suites de coordonnées barycentriques *homogènes* de $M \in \mathscr{E}$ sont les suites $(\mu_0, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telles que $\sum_{i=0}^{n} \mu_i \neq 0$ et que $M = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{\mu_i}{\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \mu_j} \# A_i$.

THÉORÈME V.4.4

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$, $(A_0, \ldots, A_n)$ une base affine de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{F}$ un espace affine. Pour toute suite $(B_0, \ldots, B_n) \in \mathscr{F}^{n+1}$, il existe une ***unique application affine*** *$\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ telle que $\varphi(A_i) = B_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Cette application φ est* ***injective*** *ssi $(B_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est* ***affinement libre*** *; φ est* ***surjective*** *ssi $(B_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$* ***engendre affinement*** *$\mathscr{F}$; donc φ est* ***bijective*** *ssi $(B_0, \ldots, B_n)$ est une* ***base affine*** *de $\mathscr{F}$.*

Démonstration :

Posons $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ et $\varepsilon_i = \overrightarrow{B_0B_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi $(A_0 ; e_1, \ldots, e_n)$ est un repère affine de $\mathscr{E}$. Pour que $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ vérifie $\varphi(A_i) = B_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$, il faut et il suffit que $\varphi(A_0) = B_0$ et $\vec{\varphi}(e_i) = \varepsilon_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On applique alors le théorème V.2.3. ■

En vertu de la proposition V.4.3 et du théorème V.4.3, on peut préciser que l'unique $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ du théorème V.4.4 est **définie** par :

$$(6) \qquad \boxed{(\forall (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{T}_n) \qquad \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \# A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \# B_i} .$$

Exemple 2 : *Représentations barycentriques d'une droite affine*

Dans un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$, soit une droite affine $\mathscr{D}$ et deux points A et B de $\mathscr{D}$ distincts.

L'application : $\mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \# A + \mu \# B$ définit une bijection affine de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{D}$ (cf. proposition V.4.3). Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda + \mu \neq 0$; d'après ce qui précède, l'application définie par

$$(7) \qquad \varphi_{A,B} : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{D}\,, \quad (\lambda, \mu) \mapsto \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \# A + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \# B$$

est surjective, et deux couples $(\lambda, \mu) \in \mathscr{U}$ et $(\lambda', \mu') \in \mathscr{U}$ donnent le même point de $\mathscr{D}$ ssi $\exists \rho \in \mathbb{R}^* \mid (\lambda', \mu') = (\rho\lambda, \rho\mu)$. Pour cette raison, les applications du type $\varphi_{A,B}$ sont appelées **représentations barycentriques** (homogènes) de $\mathscr{D}$.

Pour $\lambda \neq 0$, posons $\dfrac{\mu}{\lambda} = \xi$. Alors l'application définie par

$$(8) \qquad \psi_{A,B} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathscr{E}\,, \quad \xi \mapsto \frac{1}{1+\xi} \# A + \frac{\xi}{1+\xi} \# B$$

définit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sur $\mathscr{D}\setminus\{B\}$. Les applications du type $\psi_{A,B}$ sont encore appelées **représentations barycentriques** (déshomogénéisées) de $\mathscr{D}$. En adjoignant à $\mathbb{R}$ un point ∞ dit « à l'infini » ($\infty \notin \mathbb{R}$), et en convenant que $\psi_{A,B}(\infty) = B$, on peut obtenir la droite $\mathscr{D}$ tout entière.

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Notons-y $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ les coordonnées respectives de A et B. Désignons par $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du point $\varphi_{A,B}(\lambda, \mu)$ (resp. de $\psi_{A,B}(\xi)$). Alors les représentations paramétriques (7) et (8) s'écrivent respectivement dans $\mathscr{R}$ sous les formes (9) et (10) ci-après :

(9) $$\boxed{x_i = \frac{\lambda a_i + \mu b_i}{\lambda + \mu}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n}$$

(10) $$\boxed{x_i = \frac{a_i + \xi b_i}{1 + \xi}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n}$$

On pourrait de même donner des représentations barycentriques d'un plan affine de $\mathscr{E}$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$.

a) On donne trois points A_1, A_2, A_3 non alignés et on considère l'isobarycentre de ces points. Quelle propriété du triangle $A_1A_2A_3$ remarque-t-on ?

b) On donne quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de $\mathscr{E}$, trois d'entre eux n'étant jamais alignés et on considère l'isobarycentre de ces quatre points. Montrer qu'il est situé sur 7 droites remarquables.

c) On donne cinq points de $\mathscr{E}$ et leur isobarycentre. Que peut-on noter d'intéressant ?

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine $\mathbb{R}^3$ canonique. On donne les trois points A, B, C de coordonnées respectives $(1, 2, 3)$, $(-1, 3, 1)$, $(3, 1, 5)$. Quelle est la dimension du sous-espace affine engendré par (A, B, C) ? En donner une représentation barycentrique.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine, A, B, C trois points de $\mathscr{E}$ non alignés et α, β, γ trois réels tous différents de 1. Soit L (resp. M ; resp. N) le barycentre des points massiques $(B, 1)$ et $(C, -\alpha)$ [resp. $(C, 1)$ et $(A, -\beta)$; resp. $(A, 1)$ et $(B, -\gamma)$]. De même, soit L' (resp. M' ; resp. N') le barycentre des points massiques $(C, 1)$ et $(B, -\alpha)$ [resp. $(A, 1)$ et $(C, -\beta)$; resp. $(B, 1)$ et $(A, -\gamma)$].

a) Quelle est la relation algébrique entre α, β, γ qui exprime que les points L, M, N sont alignés ? Si c'est le cas, déterminer μ et ν pour que L soit le barycentre des points massiques (M, μ) et (N, ν).

b) Si L, M et N sont alignés sur une droite Δ, montrer que L', M' et N' sont alignés sur une droite Δ', dite *isotomique* de Δ par rapport au triangle ABC.

c) Montrer que si L, M, N sont alignés, les milieux des segments AL, BM et CN sont aussi alignés (*droite de Newton* des 4 droites AB, BC, CA et LMN).

Trouver une relation remarquable entre la droite de Newton, le centre de gravité du triangle ABC et l'isotomique $L'M'N'$ de LMN.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. On l'identifie à un hyperplan affine de $\mathscr{E}^{\#*}$ (cf. interprétation vectorielle du barycentre) à l'aide de l'injection affine $\delta : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{\#*}$. Notons Γ la fonction constante $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$. Soit $\Theta \in \mathscr{E}^{\#**}$ définie par $\Theta(\xi) = \xi(\Gamma)$ pour tout $\xi \in \mathscr{E}^{\#*}$.

Démontrer que l'hyperplan $\mathscr{E}$ de $\mathscr{E}^{\#*}$ est l'ensemble $\{\xi \in \mathscr{E}^{\#*} \mid \Theta(\xi) = 1\}$, i.e. l'ensemble d'équation $\Theta(\xi) = 1$ dans $\mathscr{E}^{\#*}$.

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $a \in \mathscr{E}$.

a) Notons $\mathrm{GA}_a(\mathscr{E})$ le sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ formé des $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(a) = a$. Montrer que les applications $T(\mathscr{E}) \times \mathrm{GA}_a(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, $(\tau, \varphi) \mapsto \tau \circ \varphi$ et $\mathrm{GA}_a(\mathscr{E}) \times T(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, $(\varphi, \tau) \mapsto \varphi \circ \tau$ sont bijectives.

b) Notons $\mathrm{Aff}_a(\mathscr{E}) = \{\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E}) \mid \varphi(a) = a\}$. Soit $\psi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E}) \backslash \mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Trouver tous les couples $(\tau, \varphi) \in T(\mathscr{E}) \times \mathrm{Aff}_a(\mathscr{E})$ tels que $\psi = \tau \circ \varphi$ et tous les couples $(\varphi, \tau) \in \mathrm{Aff}_a(\mathscr{E}) \times T(\mathscr{E})$ tels que $\psi = \varphi \circ \tau$.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et G un sous-groupe *fini* de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Montrer qu'il existe un point $O \in \mathscr{E}$ tel que $(\forall \varphi \in G)$, $\varphi(O) = 0$. Cela reste-t-il vrai si l'on remplace le corps de base $\mathbb{R}$ par un corps commutatif K quelconque ?

Exercice 7 : Sous les hypothèses du théorème V.4.4, on prend la formule (6) comme *définition* d'une application $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$. Montrer que cette application φ conserve les barycentres et qu'elle est donc affine (utiliser le principe de Fubini sur les sommes finies, cf. tome 1, § III.1).

Exercice 8 : Soit V un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et soit E un hyperplan affine de V tel que $0_V \notin E$. On munit V de la structure affine naturelle.

a) Vérifier qu'une base affine de E n'est autre qu'une base du $\mathbb{R}$-ev V dont les vecteurs appartiennent à E.

b) Soit G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ formé des $u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ tels que $u(E) = E$. Montrer que si $u \in G$, alors $u\|_E \in \mathrm{GA}(E)$; puis montrer que l'application $G \longrightarrow \mathrm{GA}(E)$, $u \mapsto u\|_E$ est un isomorphisme de groupes.

c) Soit $\vec{E}$ l'hyperplan directeur de E dans V. On note Γ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ égal à $\left\{u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid u(\vec{E}) = \vec{E}\right\}$.

*c*1) Si $u \in \Gamma$, prouver : $(\forall x \in E)\ \exists \rho_x \in \mathbb{R}^*$ (ρ_x unique) $\mid \varphi_x u(x) \in E$. Pour chaque $x \in E$, on posera $\varphi_u(x) = \rho_x u(x)$. Prouver : $\varphi_u \in \mathrm{GA}(E)$.

*c*2) Prouver que l'application $\Gamma \longrightarrow \mathrm{GA}(E)$, $u \mapsto \varphi_u$ est un homomorphisme surjectif de groupes, de noyau $H^*(V)$, et vérifier que $\varphi_u = u\|_E$. (On rappelle que $H^*(V)$ désigne le groupe des homothéties de V de rapport $\neq 0$).

Exercice 9 *(Calcul des coordonnées barycentriques d'un point)* **:** Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$ et $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ une base affine de $\mathscr{E}$. On sait qu'à tout point $M \in \mathscr{E}$ correspond une suite $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{T}_n$ telle que $M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \# A_i$. On se propose de calculer les λ_i. Dans ce but, on se donne une *forme n-linéaire alternée* F sur $\vec{\mathscr{E}}$.

a) Montrer que $\dfrac{F(\overrightarrow{MA_0}, \ldots, \overrightarrow{MA_{k-1}}, \overrightarrow{MA_{k+1}}, \ldots, \overrightarrow{MA_n})}{\lambda_k}$ est indépendant de $k \in [\![0, n]\!]$ (pour $k = 0$ le numérateur est $F(\overrightarrow{MA_1}, \ldots, \overrightarrow{MA_n})$ et pour $k = n$, c'est $F(\overrightarrow{MA_0}, \ldots, \overrightarrow{MA_{n-1}})$. On convient de plus que la nullité d'un dénominateur entraîne celle du numérateur).

b) En déduire les λ_k en fonction de F et montrer que le résultat ne dépend pas de F.

§ V.5 *APPLICATIONS AFFINES REMARQUABLES*

Avant d'étudier quelques applications affines simples de l'espace affine $\mathscr{E}$ dans lui-même, considérons les endomorphismes les plus simples de $\vec{\mathscr{E}}$.

Endomorphismes particuliers d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. Outre les *projecteurs* de E (cf. tome 1, § IX.1) et les *homothéties* de E (*ibid.*, § VI.1), il existe d'autres endomorphismes simples de E : les *affinités*, les *dilatations* et les *transvections*. Considérons d'abord deux sous-espaces supplémentaires F et G de E, avec $G \neq \{0\}$. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on appelle **affinité (vectorielle) de base F et de rapport λ, parallèlement à (la direction) G** l'automorphisme $\alpha = \mathrm{Id}_F \oplus \lambda\, \mathrm{Id}_G$ de E. Si $\lambda = -1$, on dit que α est la **symétrie autour de F parallèlement à G** (les symétries sont les seules involutions de E, cf. § II.2). La base d'une affinité α est $F = \mathrm{Ker}\ (\alpha - \mathrm{Id}_E)$, sa *direction* $G = \mathrm{Ker}\ (\alpha - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$, où λ (rapport de l'affinité) est la valeur propre de α autre que 1. Pour $F = \{0\}$ on retrouve les homothéties (vectorielles) comme affinités particulières.

Une affinité dont la base est un hyperplan H est appelée **dilatation (vectorielle) d'hyperplan H.** Pour que $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\ (E)$ soit une dilatation de rapport λ, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (\alpha) = \mathrm{Diag}\ (1, \ldots, 1, \lambda)$. Donc *deux dilatations de E sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ ssi elles ont même rapport.*

DÉFINITION V.5.1

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension $n \geqslant 2$. On appelle ***transvection (vectorielle) d'hyperplan H*** *tout automorphisme de E du type*

$$(1) \qquad \tau : x \mapsto x + \varphi(x)\, v_0\,, \quad \text{où} \quad v_0 \in H \setminus \{0\}$$

et où φ est une forme linéaire sur E de noyau H.

Il est clair que la formule (1) définit bien un automorphisme de E, l'automorphisme réciproque étant la transvection $\tau^{-1} : x \mapsto x - \varphi(x)\, v_0$. On a : $\mathrm{Ker}\ (\tau - \mathrm{Id}_E) = H$, et $(\forall x \in E)\ \tau(x) - x \in H$.

PROPOSITION V.5.1

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension $n \geqslant 2$, et soit $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\ (E)$ tel que $\tau \neq \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Im}\ (\tau - \mathrm{Id}_E) \subset H$ et $H \subset \mathrm{Ker}\ (\tau - \mathrm{Id}_E)$. Alors τ est une transvection d'hyperplan H.

Démonstration :

Il résulte des hypothèses que Ker $(\tau - \mathrm{Id}_E) = H$. Soit $x_0 \in E \backslash H$, d'où $E = H \oplus \mathbb{R}x_0$, et soit $v_0 = \tau(x_0) - x_0$, d'où $v_0 \in H \backslash \{0\}$. Notons φ l'unique forme linéaire sur E telle que $\varphi(x_0) = 1$ et Ker $(\varphi) = H$. La transvection $\tau' : E \longrightarrow E$, $x \mapsto x + \varphi(x) v_0$ coïncide avec l'endomorphisme τ en tout $x \in H$, et en x_0, donc $\tau' = \tau$. ■

Dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $e_1 = x_0$, $e_2 = \varphi(x_0) v_0$, et $e_i \in H$ pour $i \geqslant 2$, la matrice de la transvection τ définie par (1) est $T_{21}(1) = I_n + E_{21}$ (cf. tome 1, § XI.5), et en particulier det $(\tau) = 1$, i.e. $\tau \in \mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(E)$. Réciproquement toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $\lambda \neq 0$ représente, dans n'importe quelle base de E, une transvection.

Il s'ensuit que deux transvections quelconques sont conjuguées dans le groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ et le théorème XI.5.1 du tome 1 entraîne :

THÉORÈME V.5.1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. Le groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ est engendré par la réunion de l'ensemble des transvections et de l'ensemble des dilatations de E. Le groupe $\mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections de E.

Considérons maintenant un espace affine $\mathscr{E}$, de dimension $n \geqslant 1$, d'espace directeur E. Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, on appelle **direction supplémentaire** de $\mathscr{F}$ (ou : sous-$\mathbb{R}$-ev supplémentaire de $\mathscr{F}$) tout sous-$\mathbb{R}$-ev G de E supplémentaire de $\vec{\mathscr{F}}$ dans E. On sait qu'alors tout sous-espace affine $\mathscr{G}$ de $\mathscr{E}$ de direction G rencontre $\mathscr{F}$ en un point unique (cf. proposition V.3.2).

Projections et affinités dans $\mathscr{E}$ (1)

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ distinct de $\mathscr{E}$, et soit G une direction supplémentaire de $\mathscr{F}$.

• Pour tout point $M \in \mathscr{E}$, soit $\varpi(M)$ l'unique point commun à $\mathscr{F}$ et au sous-espace affine $M \dotplus G$ de $\mathscr{E}$. L'application ϖ est appelée **la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G.** Il est clair que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des points fixes de ϖ, que $\vec{\varpi}$ est le projecteur de E sur $\vec{\mathscr{F}}$ parallèlement à G. Pour tout $a \in \mathscr{F}$, on a donc $(\forall x \in \mathscr{E})\ \varpi(x) = a \dotplus \vec{\varpi}(\overrightarrow{ax})$, d'où $\varpi \circ \varpi = \varpi$.

(1) Pour $\mathscr{E}$ de dimension 3, le lecteur est invité à développer son imagination en construisant lui-même des figures pour chacune des applications envisagées jusqu'à la fin du §.

• Donnons-nous alors un réel $\lambda \notin \{0, 1\}$. L'application affine

$$\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}, M \mapsto \varpi(M) \dotplus \lambda \overrightarrow{\varpi(M)M} \tag{2}$$

est appelée **affinité de base $\mathscr{F}$ et de rapport λ parallèlement à G.** Sa partie linéaire n'est autre que $\mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{F}}} \oplus \lambda\, \mathrm{Id}_G$, affinité de E. L'ensemble des points fixes de φ est $\mathscr{F}$.

Lorsque $\mathscr{F}$ est un hyperplan, φ est appelée la **dilatation affine d'hyperplan $\mathscr{F}$ et de rapport λ parallèlement à la droite vectorielle G.**

• En particulier si $\lambda = -1$, on dit que φ est **la symétrie autour de $\mathscr{F}$ parallèlement à G.** Dans ce cas, φ est involutive : $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$. Réciproquement, *toute involution affine φ de $\mathscr{E}$ est une symétrie.* En effet φ admet au moins un point fixe (par exemple, si $A \in \mathscr{E}$, le milieu de $\{A, \varphi(A)\}$ est invariant). Dès lors, l'ensemble $\mathscr{F}$ des points φ-invariants de $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,(\vec{\varphi} - \mathrm{Id}_E)$, et en posant $G = \mathrm{Ker}\,(\vec{\varphi} + \mathrm{Id}_E)$, on voit facilement que $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{F}}} \oplus (-\mathrm{Id}_G)$.

Une involution affine φ telle que $\mathscr{F} = \{M \in \mathscr{E} \mid \varphi(M) = M\}$ soit un singleton $\{O\}$ est appelée **la symétrie centrale de centre O.**

• Un autre cas particulier remarquable d'affinité est celui où l'ensemble des points fixes de φ est un singleton $\{O\}$ de $\mathscr{E}$. Alors l'affinité unique φ de base $\mathscr{F} = \{O\}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ s'appelle **l'homothétie (affine) de centre O et de rapport λ.**

Dans ce cas, $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $M \mapsto O \dotplus \lambda \overrightarrow{OM}$ est une bijection affine. Le centre O d'homothétie est défini de façon unique puisque c'est l'unique point fixe de φ, et $\vec{\varphi} = \lambda\, \mathrm{Id}_E$. (On convient que $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ peut être considérée comme une homothétie affine de rapport 1 et de centre O arbitraire dans $\mathscr{E}$). Les homothéties affines de rapport -1 sont les *symétries centrales.*

Groupe des homothéties et translations de $\mathscr{E}$

Nous avons déjà introduit au § V.2 la notation $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ pour désigner le sous-groupe des bijections affines : $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de E. Justifions son nom :

THÉORÈME V.5.2

> *Le groupe $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ est la réunion $\mathscr{U}$ du groupe $T(\mathscr{E})$ des translations de $\mathscr{E}$ et de l'ensemble des homothéties affines de $\mathscr{E}$.*

Démonstration :

Si τ est une translation, $\vec{\tau} = \mathrm{Id}_E$; si h est une homothétie affine, $\vec{h} \in H^*(E)$; donc $\mathscr{U} \subset \mathscr{H}_T(\mathscr{E})$. Inversement, soit $\varphi \in \mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ et $f = \vec{\varphi}$. Si $f = \mathrm{Id}_E$, on sait que $\varphi \in T(\mathscr{E})$. Sinon $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$ avec

$\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. Considérons l'application $\psi : \mathscr{E} \longrightarrow E$, $M \mapsto \overrightarrow{M\varphi(M)}$: c'est une application affine, et $\vec{\psi} = (\lambda - 1)\,\mathrm{Id}_E$ est bijective, donc ψ est bijective. Il existe donc un point unique $O \in \mathscr{E}$ tel que $\psi(O) = 0_E$, i.e. tel que $\varphi(O) = O$. Il est alors évident que $\varphi(M) = O \dotplus \lambda\,\overrightarrow{OM}$ pour tout $M \in \mathscr{E}$, donc que φ est l'homothétie affine de centre O et de rapport λ, d'où $\varphi \in \mathscr{U}$. En définitive $\mathscr{U} = \mathscr{H}_T(\mathscr{E})$. ■

Transvections de $\mathscr{E}$

DÉFINITION V.5.2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathscr{V}$ un hyperplan affine de $\mathscr{E}$. On appelle ***transvection (affine) d'hyperplan*** $\mathscr{V}$ *toute application affine $\theta : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ de la forme :*

$$M \mapsto \theta(M) = M \dotplus \varphi(M)\,\vec{v}_0\,, \tag{3}$$

où $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathbb{R})$ définit $\mathscr{V} = \varphi^{-1}(0)$ et où $\vec{v}_0 \in \vec{\mathscr{V}} \setminus \{0\}$.

La partie linéaire de la transvection affine θ définie par (3) est la transvection vectorielle $\tau : E \longrightarrow E$ d'hyperplan $\vec{\mathscr{V}}$ définie par $x \mapsto x + \vec{\varphi}(x)\,\vec{v}_0$ (ce qui a un sens car $\mathrm{Ker}\,(\vec{\varphi}) = \vec{\mathscr{V}}$). Par suite $\theta \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et $\det(\theta) = 1$. L'ensemble des points fixes de θ est $\mathscr{V}$; donc pour tout point $O \in \mathscr{V}$, on a : $(\forall M \in \mathscr{E})\ \ \theta(M) = O \dotplus \tau(\overrightarrow{OM})$. La proposition suivante caractérise les transvections affines de $\mathscr{E}$:

PROPOSITION V.5.2

Pour une bijection affine donnée $\theta : \mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(I) *θ est une transvection.*
(II) *$\tau = \vec{\theta}$ est une transvection vectorielle.*
(III) *θ admet au moins un point fixe $A \in \mathscr{E}$, et il existe un hyperplan vectoriel V de E tel que $\overrightarrow{M\theta(M)} \in V$ pour tout $M \in \mathscr{E}$.*

Démonstration :

Il est clair que (I) $\Rightarrow$ (II), et l'équivalence de (I) et (III) se déduit facilement de la proposition V.5.1. Il reste à prouver que (II) $\Rightarrow$ (I) ; soit $\theta \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ telle que $\tau = \vec{\theta}$ soit une transvection vectorielle, d'hyperplan noté V : $(\forall x \in E)\ \tau(x) = x + f(x)\,v_0$, où $v_0 \in V \setminus \{0\}$ et où $f \in E^*$ admet V pour noyau.

L'endomorphisme $g = \tau - \mathrm{Id}_E$ de E est de rang 1, son image est $\mathbb{R}v_0$ et son noyau est V. De plus, g est la partie linéaire de l'application affine $\gamma : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $M \mapsto \overrightarrow{M\theta(M)}$. Soit $O \in \mathscr{E}$, et supposons que

$\theta(O) \neq O$. Alors $u = \overrightarrow{O\theta(O)} \in \mathbb{R}v_0$, i.e. $u = \rho v_0$, $\rho \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in E$, on a :

$$\theta(O \dotplus t) = O \dotplus (u + t + f(t)\, v_0)\,.$$

Puisque $f \in E^* \setminus \{0\}$, on a donc au moins un $t_0 \in E$ tel que $f(t_0) = -\rho$. Pour un tel t_0, on trouve : $\theta(O \dotplus t_0) = O \dotplus t_0$, ce qui prouve que θ admet au moins le point fixe $A_0 = O \dotplus t_0$, et l'on en déduit aisément que θ est une transvection d'hyperplan $\mathscr{V} = A_0 \dotplus V$. ■

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. On considère une *application* $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ telle que $(\forall (M, N) \in \mathscr{E}^2)\ \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \lambda \overrightarrow{MN}$. Montrer que φ est une homothétie affine de rapport λ. Et si $\lambda = 1$?

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$.

a) Montrer que les $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi \circ \varphi = \varphi$ sont les *projections* de $\mathscr{E}$.

b) Déterminer tous les sous-groupes *finis* de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$.

c) Montrer que les seuls sous-groupes G de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ qui sont des parties *compactes* de $\mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ sont les sous-groupes finis de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Pour tout sous-groupe G de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, on appelle *point fixe de* G tout point $A \in \mathscr{E}$ tel que $\varphi(A) = A$ pour tout $\varphi \in G$.

a) Soit deux homothéties affines φ et φ' de $\mathscr{E}$, de rapports respectifs $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $\lambda' \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, de centres respectifs O et O'. Vérifier que $\psi = \varphi' \circ \varphi$ est une translation ssi $\lambda\lambda' = 1$, et une homothétie affine ssi $\lambda\lambda' \neq 1$. Si $\lambda\lambda' = 1$, préciser le vecteur de la translation. Si $\lambda\lambda' \neq 1$, déterminer le centre de l'homothétie ψ en fonction de O, O', λ et λ'. Trouver tous les couples (φ, φ') d'homothéties affines *permutables*.

b) Donner un exemple de sous-groupe G de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ *sans point fixe* tel que $G \cap T(\mathscr{E}) = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$.

Indication : Penser aux nombres premiers !

c) Soit G un sous-groupe de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ sans point fixe tel que $G \cap T(\mathscr{E}) = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$. Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des centres des homothéties $\varphi \in G \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$. Démontrer que $\mathscr{C}$ est infini ; $\mathscr{C}$ peut-il être borné ?

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$.

a) Montrer que l'union de $T(\mathscr{E})$ et de l'ensemble des symétries centrales de $\mathscr{E}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, qu'on notera Δ. Caractériser le groupe quotient $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/\Delta$.

b) Soit G un sous-groupe distingué de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ non contenu dans $T(\mathscr{E})$. Montrer que $T(\mathscr{E}) \subset G$. En déduire qu'il existe un sous-groupe Γ de $H^*(\vec{\mathscr{E}})$ tel que $G = \{\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid \vec{\varphi} \in \Gamma\}$. En déduire que $G \lhd \mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

c) Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ contenus dans $T(\mathscr{E})$?

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{E}$ un espace affine sur E.

a) Montrer en détail que deux transvections vectorielles de E sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$. Prouver que si $n \geqslant 3$, deux transvections vectorielles de E sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(E)$.

b) En déduire que deux transvections de $\mathscr{E}$ sont conjuguées dans $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, et que si $n \geqslant 3$ elles le sont dans $\mathrm{SA}(\mathscr{E})$.

c) On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est engendré par l'ensemble des transvections de $\mathscr{E}$. Montrer que toute transvection τ de $\mathscr{E}$ peut s'écrire comme produit de deux symétries par

rapport à des hyperplans. En déduire que l'ensemble des symétries par rapport à des hyperplans engendre le groupe $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Cela resterait-il vrai en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps commutatif quelconque ?

d) Soit $\mathscr{V}$ un hyperplan affine de $\mathscr{E}$ (dim $(\mathscr{E}) \geqslant 2$). Notons $G_{\mathscr{V}}$ le sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ formé des $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ laissant fixe chaque point de $\mathscr{V}$. Prouver que $G_{\mathscr{V}}$ est l'union des transvections d'hyperplan $\mathscr{V}$, des dilatations d'hyperplan $\mathscr{V}$ et de $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$. Prouver aussi que l'union $\mathscr{T}$ des transvections d'hyperplan $\mathscr{V}$ et de $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$ est un sous-groupe distingué de $G_{\mathscr{V}}$, le groupe quotient $G_{\mathscr{V}}/\mathscr{T}$ étant isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$. Vérifier que deux groupes du type $G_{\mathscr{V}}$ sont conjugués dans $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 1$. Montrer que tout sous-groupe *abélien* de $\mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ est un sous-groupe de $T(\mathscr{E})$.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$. On considère une application injective $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathscr{E}^2, \quad (A \neq B) \Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{\varphi(A)\,\varphi(B)} = \rho \overrightarrow{AB}.$$

Démontrer que $\varphi \in \mathscr{H}_T(\mathscr{E})$.

Exercice 8 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$.

a) On considère une dilatation $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ d'hyperplan $\mathscr{V}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ parallèlement à une direction D. Soit A un point de $\mathscr{E} \setminus \mathscr{V}$; on pose $A' = \varphi(A)$. Pour tout $M \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{V}$ $(M \neq A)$, on posera aussi $M' = \varphi(M)$.

*a*1) Si $\overrightarrow{AM} \in \vec{\mathscr{V}}$, vérifier que $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

*a*2) Sinon, montrer que la droite $\mathrm{Dr}\,(A, M)$ rencontre $\mathscr{V}$ en un unique point I, et que M' est l'unique point commun à la droite $\mathrm{Dr}\,(A', I)$ et à la droite $\mathscr{D}$ de direction D passant par M.

b) On considère dans $\mathscr{E}$ une transvection τ d'hyperplan $\mathscr{V}$ et un point $A \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{V}$; on pose $A' = \tau(A)$. Pour tout $M \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{V}$ $(M \neq A)$, on posera encore $M' = \tau(M)$.

*b*1) Si $\overrightarrow{AM} \in \vec{\mathscr{V}}$, vérifier que $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

*b*2) Sinon, montrer que la droite $\mathrm{Dr}\,(A, M)$ rencontre $\mathscr{V}$ en un unique point I, et que M' est l'unique point commun à la droite $\mathrm{Dr}\,(A', I)$ et à la droite passant par M dirigée par $\overrightarrow{AA'}$.

N.B. Le lecteur est prié de faire les figures.

Exercice 9 : Dans ce qui suit, K désigne un corps commutatif, et E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 2$.

PRÉLIMINAIRES

On rappelle (cf. théorème V.5.1) que le groupe $\mathrm{SL}_K(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections, et que la réunion de l'ensemble des transvections et de l'ensemble des dilatations engendre le groupe $\mathrm{GL}_K(E)$. Si $\mathcal{G}$ est un groupe quelconque, pour $a \in \mathcal{G}$ et $b \in \mathcal{G}$ l'élément $aba^{-1}b^{-1}$ s'appelle le *commutateur* de a et b. Le sous-groupe distingué engendré par l'ensemble de tous les commutateurs est noté $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ (cf. tome 1, § V.7, exercice 3). Si $\mathcal{A}$ est abélien, pour tout homomorphisme $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}$, il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : \mathcal{G}/_{[\mathcal{G}, \mathcal{G}]} \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que $\bar{f} \circ p = f$ (où $p : \mathcal{G} \longrightarrow [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est l'homomorphisme canonique). Tout sous-groupe distingué $\mathcal{K}$ de $\mathcal{G}$ tel que le groupe $\mathcal{G}/_{\mathcal{K}}$ soit abélien vérifie : $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{K}$. Enfin on rappelle que pour tous $x, y \in E \setminus \{0_E\}$, il existe $u \in \mathrm{SL}_K(E)$ tel que $u(x) = y$ et que deux transvections quelconques sont toujours conjuguées dans $\mathrm{GL}_K(E)$, et même dans $\mathrm{SL}_K(E)$ si $n \geqslant 3$ (cf. exercice 5 ci-dessus).

PARTIE I

a) On suppose $n = 2$ et on note $\mathscr{P}_2$ l'image de l'endomorphisme $\alpha \mapsto \alpha^2$ du groupe multiplicatif K^*. Montrer que deux transvections quelconques sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_K(E)$ ssi $\mathscr{P}_2 = K^*$.

*b*1) Prouver : $[\mathrm{GL}_K(E), \mathrm{GL}_K(E)] \subset \mathrm{SL}_K(E)$.

*b*2) Soit H un hyperplan de E. Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}_H$ union de $\{\mathrm{Id}_E\}$ et des transvections d'hyperplan H forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_K(E)$.

Soit $p : \mathrm{GL}_K(E) \longrightarrow \mathrm{GL}_K(E)/[\mathrm{GL}_K(E), \mathrm{GL}_K(E)]$ l'homomorphisme canonique. Si τ est une transvection, montrer que $p(\tau)$ ne dépend pas de τ.

*b*3) Montrer que si $\mathscr{T}_H$ contient au moins deux transvections distinctes, alors $p(\tau)$ est l'élément neutre du groupe quotient. En déduire que si $n \geqslant 3$, on a toujours $\mathrm{SL}_K(E) = [\mathrm{GL}_K(E), \mathrm{GL}_K(E)]$; et que si $n = 2$ c'est encore vrai si $K \neq \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$.

*c*1) On suppose $n \geqslant 3$. Soit τ une transvection de E. Montrer qu'il existe une transvection v telle que $v^{-1} \circ \tau$ soit une transvection. En déduire qu'il existe $w \in \mathrm{SL}_K(E)$ tel que $\tau = vwv^{-1}w^{-1}$, et, de là, que $\mathrm{SL}_K(E) = [\mathrm{SL}_K(E), \mathrm{SL}_K(E)]$.

*c*2) On suppose $n = 2$. On fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E, et $\lambda \in K^*$. Soit u et v les automorphismes de E dont les matrices dans $\mathscr{B}$ sont respectivement $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $uvu^{-1}v^{-1}$. Montrer que si $\lambda^2 \neq 1_K$, ce produit est une transvection. En déduire que si K n'est isomorphe ni à $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$, ni à $\mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$, on a : $\mathrm{SL}_K(E) = [\mathrm{SL}_K(E), \mathrm{SL}_K(E)]$.

PARTIE II

On rappelle que $H^*(E)$ est le centre du groupe $\mathrm{GL}_K(E)$ (cf. théorème IX.6.3 du tome 1). Dans toute la suite, on désigne par Δ un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_K(E)$ non contenu dans $H^*(E)$.

*a*1) Montrer qu'il existe $u \in \Delta$, et une droite vectorielle D de E tels que $u(D) \neq D$. En déduire que pour toutes droites vectorielles D_1, D_2 de E, il existe $v \in \Delta$ tel que $v(D_1) = D_2$. (Etablir d'abord que $\mathrm{SL}_K(E)$ opère deux fois transitivement sur l'ensemble des droites vectorielles de D).

*a*2) On fixe D ; on note Φ_D le sous-groupe de $\mathrm{SL}_K(E)$ formé des $u \in \mathrm{SL}_K(E)$ tels que $u(D) = D$. Déduire de *a*1) que :

$$\Delta \,.\, \Phi_D = \Phi_D \,.\, \Delta = \mathrm{SL}_K(E)\,.$$

b) Soit Γ_D l'ensemble union de $\{\mathrm{Id}_E\}$ et des transvections τ telles que $(\forall x \in E)$ $\tau(x) - x \in D$. Montrer que Γ_D est un sous-groupe distingué de Φ_D. Montrer que l'union des conjugués de Γ_D dans $\mathrm{SL}_K(E)$ engendre $\mathrm{SL}_K(E)$. Montrer que le groupe Γ_D est abélien.

c) On suppose $n \geqslant 3$ ou bien $n = 2$, mais avec $K \not\cong \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ et $K \not\cong \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$.

*c*1) Montrer que $\Delta \,.\, \Phi_D = \Delta \,.\, \Gamma_D = \Gamma_D \,.\, \Delta = \mathrm{SL}_K(E)$.

*c*2) En déduire que le groupe quotient $\mathrm{SL}_K(E)/_{\Delta}$ est abélien.

*c*3) En déduire $\Delta = \mathrm{SL}_K(E)$. Montrer enfin que le groupe quotient $\mathrm{SL}_K(E)/(H^*(E) \cap \mathrm{SL}_K(E))$ est simple (on le note $\mathrm{PSL}_K(E)$).

d) Soit G un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_K(E)$. Montrer que : ou bien G est un sous-groupe de $H^*(E)$, ou bien il existe un sous-groupe Γ de $(K^*, \times)$ tel que $G = \{u \in \mathrm{GL}_K(E) \mid \det(u) \in \Gamma\}$.

PARTIE III

a) On suppose $n = 2$ et $K = \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$. Calculer card $(\mathrm{SL}_K(E))$. En faisant opérer $\mathrm{SL}_K(E)$ sur les droites vectorielles de E, montrer que $\mathrm{SL}_K(E)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

b) On suppose $n = 2$ et $K = \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$. Calculer card $(\mathrm{SL}_K(E))$. Montrer que $H^*(E) \subset \mathrm{SL}_K(E)$. Montrer qu'il y a exactement *quatre* droites vectorielles dans E. En faisant opérer

$\mathrm{SL}_K(E)/H^*(E)$ sur ces droites, montrer que le groupe $\mathrm{SL}_K(E)/H^*(E)$ est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$, et vérifier que le groupe $\mathrm{SL}_K(E)$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

PARTIE IV

Soit $\mathscr{E}$ un espace *affine* sur E satisfaisant à la condition du II *c*). Décrire les sous-groupes distingués du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. (On montrera d'abord qu'un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ autre que $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$ contient nécessairement $T(\mathscr{E})$.

Exercice 10 *(théorème de Menelaüs) :* Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{E}_2$. On prend $A' \in \mathrm{Dr}\,(B, C)\setminus\{B, C\}$, $B' \in \mathrm{Dr}\,(C, A)\setminus\{C, A\}$ et $C' \in \mathrm{Dr}\,(A, B)\setminus\{A, B\}$ et on considère l'homothétie H_1 de centre A', de rapport $\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, H_2 de centre B' et de rapport $\mu = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et enfin H_3 de centre C' et de rapport $\nu = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$. Montrer que $H_1 \circ H_2 \circ H_3$ ne peut être une translation différente de l'identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}_2}$. En déduire que, pour que A', B' et C' soient alignés, il faut et il suffit que $\lambda\mu\nu = 1$ (cf. exercice 3*a*).

Généraliser à n points (A_i) affinement indépendants d'un espace affine $\mathscr{E}$.

§ V.6 *CONVEXITÉ*

Dans un espace affine $\mathscr{E}$, soit A et B deux points distincts. On appelle **segment fermé** (resp. **ouvert, semi-ouvert en *A*, semi-ouvert en *B***) d'extrémités A et B l'ensemble image de $[0, 1]$ (resp. de $]0, 1[$, de $]0, 1]$, de $[0, 1[$) par la bijection affine $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Dr}\,(A, B)$, $\lambda \mapsto \lambda \# A + (1 - \lambda) \# B$. Ce segment sera noté $[A, B]$ (resp. $]A, B[$, $]A, B]$, $[A, B[$).

DÉFINITION V.6.1

Une partie Γ d'un espace affine $\mathscr{E}$ est dite **convexe** *ssi*
$(\forall (A, B) \in \Gamma^2) \quad (A \neq B) \Rightarrow [A, B] \subset \Gamma$, *i.e.*
$(\forall (\lambda, A, B) \in [0, 1] \times \Gamma^2) \quad \lambda \# A + (1 - \lambda) \# B \in \Gamma$.

Exemple 1 : Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Toute s.v.l.a. d'un espace affine $\mathscr{E}$ est une partie convexe de $\mathscr{E}$ (cf. proposition V.4.2).

Exemple 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, ν une norme sur $\vec{\mathscr{E}}$ et d_ν la distance associée sur $\mathscr{E}$. Toute boule ouverte $B = \mathbf{B}(a, r)$ (resp. toute boule fermée $B = \tilde{\mathbf{B}}(a, r)$) de $\mathscr{E}$ est une partie convexe de $\mathscr{E}$. En effet il suffit de l'établir lorsque $\mathscr{E} = \vec{\mathscr{E}}$ muni de sa structure affine naturelle, et on se ramène au cas

où $a = 0_{\vec{\mathscr{E}}}$. Or si $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a : $\nu(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda \nu(x) + (1 - \lambda) \nu(y)$. D'où, si $\nu(x) < r$ et $\nu(y) < r$ (resp. si $\nu(x) \leqslant r$ et $\nu(y) \leqslant r$) : $(\lambda x + (1 - \lambda) y) < r$ (resp. $\nu(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant r$).

Exemple 4 : Soit X un ensemble non vide et E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$. Les ensembles $\mathscr{F}(X, \mathbb{R}_+)$ et $\mathscr{F}(X, \mathbb{R}_+^*)$ sont des parties convexes de E.

Exemple 5 : Soit Γ une partie convexe non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$. Une fonction $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* ssi

$$(\forall (\lambda, x, y) \in [0, 1] \times \Gamma^2) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Une fonction f étant donnée, associons-lui l'ensemble $G_f = \{(x, \rho) \in \Gamma \times \mathbb{R} \mid \rho \geqslant f(x)\}$. On vérifie immédiatement que f est convexe ssi G_f est une partie convexe de l'espace affine produit $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$.

PROPOSITION V.6.1

Dans un espace affine, toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

(C'est une conséquence immédiate de la définition V.6.4.)

Ensembles convexes et barycentres

THÉORÈME V.6.1

Soit Γ une partie non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$. Pour que Γ soit convexe, il faut et il suffit que, pour toute famille massique $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ à support fini et de masse 1 de ***points de Γ*** *dont toutes les masses sont $\geqslant 0$, on ait $\sum_{i \in I} \lambda_i \# A_i \in \Gamma$.*

Démonstration :

D'après la définition V.6.1, la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de le prouver lorsque $I = [\![1, p]\!]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 2$. Raisonnons alors par récurrence sur p. Si $p = 2$, l'assertion découle de la définition V.6.1. Supposons $p \geqslant 3$ et l'assertion établie à l'ordre $p - 1$. Considérons $(A_1, \ldots, A_p) \in \Gamma^p$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$. On peut déjà supposer les λ_i tous > 0 (sinon on est ramené à l'ordre $p - 1$). Alors, par associativité,

en posant $\Lambda = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i$, on a :

$$\sum_{i=n}^{n} \lambda_i \# A_i = \Lambda \# G + (1-\lambda) \# A_p, \quad \text{où} \quad G = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \# A_i .$$

Or $G \in \Gamma$ par l'hypothèse de récurrence, d'où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \# A_i \in \Gamma$ d'après la définition V.6.1. ■

Ensembles convexes et applications affines

THÉORÈME V.6.2

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}, \mathscr{F})$. Pour toute partie convexe Δ de $\mathscr{F}$, l'ensemble $\varphi^{-1}(\Delta)$ est convexe dans $\mathscr{E}$. Pour toute partie convexe Γ de $\mathscr{E}$, l'ensemble $\varphi(\Gamma)$ est convexe dans $\mathscr{F}$.

Démonstration :

D'après le théorème V.4.3, pour tous $(\lambda, A, B) \in \mathbb{R} \times \mathscr{E}^2$, on a : $\varphi(\lambda \# A + (1-\lambda) \# B) = \lambda \# \varphi(A) + (1-\lambda) \# \varphi(B)$, d'où le résultat. ■

Exemple 6 : *Demi-espaces*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine non constante, définissant l'hyperplan affine $\mathscr{V} = \varphi^{-1}(0)$. On sait que φ est continue, donc les ensembles $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$ sont fermés dans $\mathscr{E}$, et les ensembles $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ sont ouverts dans $\mathscr{E}$. Toute autre fonction affine $\psi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathscr{V} = \psi^{-1}(0)$ est de la forme $\lambda\varphi$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donc $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) = \psi^{-1}(\mathbb{R}_+)$, et de même pour les trois autres.

Les ensembles $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$ (resp. $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$) s'appellent **demi-espaces fermés** (resp. **ouverts**) délimités par $\mathscr{V}$. D'après le théorème V.6.2, ces quatre ensembles sont convexes. Il est clair que $\mathrm{Adh}\,(\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)) = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cup \mathscr{V}$ et que $\mathrm{Adh}\,(\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)) = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-) = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup \mathscr{V}$. Si $A \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $B \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$, l'ensemble $[A, B] \cap \mathscr{V}$ est un singleton. De même si $A \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $B \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

La relation binaire définie sur $\mathscr{E} \backslash \mathscr{V}$ par $[A, B] \cap \mathscr{V} = \varnothing$ est d'équivalence et ses classes sont les deux demi-espaces ouverts délimités par $\mathscr{V}$. Chacun des quatre demi-espaces délimités par $\mathscr{V}$ admet $\mathscr{V}$ pour frontière.

Enveloppe convexe

DÉFINITION V.6.2

Soit Γ une partie non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$. On appelle **enveloppe convexe** *de Γ, et on note $\widehat{\Gamma}$, l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathscr{E}$ contenant Γ.*

Soit $\mathscr{E}$ fixé. D'après la proposition V.6.1, $\widehat{\Gamma}$ est donc, pour l'inclusion, *le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathscr{E}$ contenant $\widehat{\Gamma}$.* Il est clair que $\Gamma \subset \widehat{\Gamma}$, l'égalité ayant lieu ssi Γ est convexe. En conséquence, pour toute partie non vide Γ de $\mathscr{E}$, on a : $\widehat{\Gamma} = \widehat{\widehat{\Gamma}}$.

THÉORÈME V.6.3

Soit Γ une partie non vide d'un espace affine $\mathscr{E}$.
L'enveloppe convexe $\widehat{\Gamma}$ de Γ est l'ensemble B des barycentres des familles massiques à support fini et **de masse 1 à masses positives** *de points de Γ.*

Démonstration :

On sait que $B \subset \widehat{\Gamma}$ par le théorème V.6.1. Pour voir que $\widehat{\Gamma} \subset B$, il suffit de prouver que B est convexe. Or B est l'ensemble des barycentres $\sum_{x \in \Gamma} \lambda_x \# x$ pour les $(\lambda_x)_{x \in \Gamma} \in \mathbb{R}^{(\Gamma)}$ vérifiant $\sum_{x \in \Gamma} \lambda_x = 1$ et $\lambda_x \geqslant 0$ pour tout x. Soit donc $M = \sum_{x \in \Gamma} \lambda_x \# x$ et $N = \sum_{x \in \Gamma} \mu_x \# x$ deux éléments de B ((λ_x) et (μ_x) vérifiant les conditions idoines). Pour $\rho \in [0, 1]$, on a : $\rho \# M + (1 - \rho) \# N = \sum_{x \in \Gamma} (\rho \lambda_x + (1 - \rho) \mu_x) \# x$, où $(\forall x) \quad \rho \lambda_x + (1 - \rho) \mu_x \geqslant 0$ et où $\sum_{x \in \Gamma} (\rho \lambda_x + (1 - \rho) \mu_x) = 1$. Donc $\rho \# M + (1 - \rho) \# N \in B$. ■

Dans les exercices ci-après, on donne un $\mathbb{R}$-ev E de dimension $n \geqslant 1$, muni de sa structure affine naturelle.

Exercice 1 : Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe de E sont des parties convexes de E.

Exercice 2 : Soit C une partie convexe de E d'intérieur non vide, et soit $O \in \operatorname{Int}(C)$. Pour tout point $M \in \operatorname{Adh}(C)$, montrer que $[O, M[\subset \operatorname{Int}(C)$. En déduire : $\operatorname{Adh}(C) = \operatorname{Adh}(\operatorname{Int}(C))$ et $\operatorname{Int}(C) = \operatorname{Int}(\operatorname{Adh}(C))$.

Exercice 3 (Lemme de Kakutani) : Soit C_1 et C_2 deux parties de E non vides, convexes, disjointes, telles que $C_1 \cup C_2 \neq E$, et soit $x \in E \setminus (C_1 \cup C_2)$. Soit Γ_i l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup C_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Montrer que $\Gamma_1 \cap C_2 = \varnothing$ ou $\Gamma_2 \cap C_1 = \varnothing$.

Exercice 4 : Soit C_1 et C_2 deux parties non vides convexes de E. Montrer que l'ensemble Γ des milieux des segments qui joignent un point de C_1 à un point de C_2 est convexe.

Exercice 5 *(Théorème de Carathéodory) :*

a) Soit p un entier $\geqslant n+2$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. Montrer :

$$\exists (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \mid \sum_{i=1}^{p} \beta_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i = 0 .$$

Soit maintenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ réels $\geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, et $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$. Montrer l'existence de $k \in [\![1, p]\!]$ et de réels positifs $(\gamma_i)_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\}}$ tels que $\sum_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\}} \gamma_i = 1$ et $x = \sum \gamma_i x_i$.

Indication : Soit $J = \{i \in [\![1, p]\!] \mid \beta_i > 0\}$. Considérer $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\dfrac{\alpha_k}{\beta_k} = \operatorname*{Min}_{i \in J} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$.

b) Soit C une partie non vide de E. A l'aide de *a)* montrer que l'enveloppe convexe $\hat{C}$ de C est l'ensemble $\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right\}$ lorsque $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ parcourt C^{n+1} et lorsque $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est une suite de réels positifs assujettie à la seule condition $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

c) En déduire que si C est compacte, $\widehat{C}$ l'est aussi.

d) Donner un exemple où C est fermée mais où $\widehat{C}$ n'est pas fermée.

Exercice 6 *(Théorème de Hahn-Banach en dimension finie, version géométrique)* [1] *:* Dans cet exercice, on suppose le $\mathbb{R}$-ev E muni d'une structure euclidienne, mais les résultats obtenus sont indépendants du choix de cette structure.

a) Soit C une partie non vide de E fermée et convexe. Montrer que C est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent (utiliser l'exercice 4 du § II.2).

b) Soit C un ouvert convexe de E non vide et distinct de E. Vérifier que $\operatorname{Fr}(C) \neq \varnothing$. Soit $a \in \operatorname{Fr}(C)$. On désigne par φ la projection orthogonale sur $\operatorname{Adh}(C)$ (cf. exercice 4 du § II.2). Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble W_ε des $x \in E \setminus \operatorname{Adh}(C)$ tel que $\|a - x\| \leqslant \varepsilon$ est non vide. On pose : $\mathcal{N}_\varepsilon = \left\{\dfrac{1}{\|x-a\|}(x-a)\right\}_{x \in W_\varepsilon}$. Prouver que $\mathcal{N} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \mathcal{N}_\varepsilon \neq \varnothing$.

Prouver que, pour tout $\vec{v} \in \mathcal{N}$, l'hyperplan affine $\mathscr{V}_{\vec{v}}$ de E passant par a et orthogonal à $\vec{v}$ laisse $\operatorname{Adh}(C)$ dans l'un des demi-espaces fermés qu'il délimite (on dit que $\mathscr{V}_{\vec{v}}$ est *hyperplan d'appui* de $\operatorname{Adh}(C)$).

c) Avec C comme en *b)*, soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de E tel que $\mathscr{V} \cap C = \varnothing$. Déduire de *a)* qu'il existe un hyperplan affine de E qui contient $\mathscr{V}$ mais ne rencontre pas C (penser aux projections orthogonales).

Exercice 7 : Pour toute famille de *demi-droites* vectorielles fermées d'origine $O \in E$, on appelle *cône pointé* l'ensemble des points de ces demi-droites. Dans ce qui suit on appelle C un cône pointé convexe *fermé*.

a) Montrer que la réunion des *droites* vectorielles contenues dans C (s'il en existe) est égale au plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C.

---

[1] Pour une version analytique plus affinée, on se reportera à l'exercice 11 du § X.1 du tome 2 et aussi à l'exercice 11 du § X.6 du même tome.

b) Le cône C est dit *saillant* s'il ne contient aucune droite vectorielle. Démontrer que, si C est saillant, les relations $x_1 \in C$, ..., $x_p \in C$ et $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$ entraînent $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Réciproque.

c) On suppose C saillant. On choisit une norme ν sur E ; soit alors S la sphère unité de E et K l'ensemble $S \cap C$. On sait que $\widehat{K}$ est compacte (cf. exercice 5). Utiliser *b*) pour montrer que $O \notin \widehat{K}$.

d) Soit Γ l'ensemble des points λx, où x parcourt $\widehat{K}$ et λ décrit $[1, +\infty[$. Prouver que Γ est une partie convexe et fermée de E et que $O \notin \Gamma$.

e) En utilisant l'exercice 6, montrer qu'il existe un hyperplan affine H *séparant strictement* O et Γ (i.e. tel que l'un des demi-espaces ouverts de frontière H contienne Γ et que l'autre contienne O).

Prouver enfin que $H \cap C$ est compact, et que H rencontre toute demi-droite vectorielle contenue dans C.

Exercice 8 : Soit A une partie convexe de E. On dit qu'un point $a \in A$ est *point extrémal* de A s'il n'existe aucun segment non réduit à un point contenu dans A et dont a soit un point intérieur, autrement dit si les relations $x \in A$, $y \in A$, $a = \lambda x + (1 - \lambda) y$ avec $0 < \lambda < 1$ entraînent $x = y = a$.

a) Soit H un *hyperplan d'appui* de A (cf. exercice 6). Prouver que tout point extrémal de $A \cap H$ est point extrémal de A.

b) Soit K une partie convexe, compacte et non vide de E. Montrer que, pour tout hyperplan affine H_0, il existe au moins un hyperplan d'appui H de K parallèle à H_0 (si $f(x) = 0$ est une équation de H_0, considérer $\sup_{x \in K} f(x)$ et $\inf_{x \in K} f(x)$). En raisonnant par récurrence sur $n = \dim(E)$, en déduire que tout hyperplan d'appui H de K contient au moins un point extrémal de K.

c) K étant fixé, soit $\mathscr{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrémaux et $L = \widehat{\mathscr{E}(K)}$. Montrer que $\mathrm{Adh}(L) \subset K$. Puis si $x \in K \setminus \mathrm{Adh}(L)$, montrer qu'il existe un hyperplan d'appui H de K tel que $H \cap \mathrm{Adh}(L) = \varnothing$. En déduire enfin que $\mathrm{Adh}(L) = K$.

§ V.7 *GÉOMÉTRIE AFFINE EN DIMENSION 2 OU 3*

Les droites dans le plan affine

Soit un plan affine $\mathscr{E}_2$, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;\, i, j)$. Une droite affine $\mathscr{D}$ n'est autre qu'un hyperplan affine de $\mathscr{E}_2$. On peut donc la définir par *une* équation cartésienne de la forme $ux + vy + h = 0$, où $(u, v) \neq (0, 0)$ (cf. théorème V.3.5). Le triplet (u, v, h) est déterminé *à un facteur multiplicatif non nul près* (cf. corollaire 1 du théorème V.3.3). Par exemple, si a et b sont des réels non nuls, une équation de la droite passant par les points A de coordonnées $(a, 0)$ et $B(0, b)$ est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Une droite de vecteur directeur $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ a une équation de la forme $\beta x - \alpha y + h = 0$.

Le § V.3 (resp. V.4) permet d'obtenir des *paramétrages* affines (resp. barycentriques) d'une droite donnée.

On reconnaît que deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ (données par des équations respectives $ux + vy + h = 0$ et $u'x + v'y + h' = 0$ sont parallèles) à la CNS $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 0$. Sinon, elles sont dites *sécantes* (ou *concourantes*), et dans ce cas elles ont un point commun unique.

On reconnaît que trois points M_1, M_2, M_3 (de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) sont *alignés* à la CNS $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

On reconnaît que trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ (d'équations respectives $u_i x + v_i y + h_i = 0$ $(i \in \{1, 2, 3\})$) sont **concourantes ou parallèles** à la CNS $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$.

DÉFINITION V.7.1

Dans un plan affine $\mathscr{E}_2$, l'ensemble des droites affines passant par un point fixé $I \in \mathscr{E}_2$ est appelé le ***faisceau*** *(de droites) de sommet I. L'ensemble des droites de direction fixée δ est appelé le* ***faisceau*** *(de droites) de direction δ.*

Un faisceau Φ est déterminé par la donnée d'un couple $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ de droites distinctes lui appartenant, appelées **droites de base** du faisceau. Si $ux + vy + h = 0$ est une équation de $\mathscr{D}$ dans un repère $\mathscr{R}$, appelons D l'application affine : $\mathscr{E}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $M = (x, y) \mapsto D(M) = ux + vy + h$, et définissons de même D' à partir de $\mathscr{D}'$. Alors *le faisceau de base $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ est l'ensemble des droites d'équation $\lambda D + \lambda' D' = 0$.* Si l'on excepte la droite $\mathscr{D}'$, une équation de la droite générique $(\mathscr{D}_\rho)$ du faisceau Φ peut s'écrire $\boxed{D + \rho D' = 0}$ (en posant $\rho = \dfrac{\lambda'}{\lambda}$). Il est clair que par tout point M_0 du plan (autre que le sommet), il passe une droite et une seule du faisceau de base $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$: par exemple, si $M_0 \notin D'$, l'équation $D(M_0) + \rho D'(M_0)$ détermine ρ.

Exemple 1 : On donne dans le plan affine trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ qui se coupent deux à deux en trois points distincts A, B, C. Soit φ_i $(i \in [\![1, 3]\!])$ trois fonctions affines telles que $\varphi_i^{-1}(0) = \mathscr{D}_i$. On pose $\psi_1 = \varphi_2 + \lambda \varphi_3$, $\psi_2 = \varphi_3 + \mu \varphi_1$, $\psi_3 = \varphi_1 + \nu \varphi_2$ et on demande quelle condition vérifient les réels λ, μ, ν pour que les trois droites $\Delta_i =$

$\psi_i^{-1}(0)$ appartiennent à un même faisceau (i.e. soient concourantes ou parallèles).

Réponse : Par hypothèse les φ_i sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}_2, \mathbb{R}) = \mathscr{E}_2^{\#}$ et en constituent donc une base. Une CNS pour que les vecteurs ψ_i de $\mathscr{E}_2^{\#}$ soient liés est

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \mu & 0 & 1 \\ 1 & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\lambda\mu\nu = -1}.$$

Plans d'un espace affine de dimension 3

Soit un espace affine $\mathscr{E}_3$, de dimension 3, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;i, j, k)$. Un plan affine $\mathscr{P}$ n'est autre qu'un hyperplan affine de $\mathscr{E}_3$. On peut donc le définir par une équation cartésienne du type $ux + vy + wz + h = 0$, où $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$. Le quadruplet (u, v, w, h) est déterminé par $\mathscr{P}$ *à une constante multiplicative non nulle près.* Par exemple, si $abc \neq 0$, une équation du plan passant par $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ est $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Le plan parallèle à $\mathscr{P}$ passant par O a pour équation $ux + vy + wz = 0$. Une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur (α, β, γ) est donc parallèle à $\mathscr{P}$ ssi $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$. On reconnaît que deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, d'équations respectives $ux + vy + wz + h = 0$ et $u'x + v'y + w'z + h' = 0$, sont *parallèles* à la CNS

$$\mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{bmatrix}\right) = 1.$$

L'intersection de deux plans non parallèles *est une droite affine.*

On reconnaît que quatre points M_i de coordonnées respectives (x_i, y_i, z_i) $(i \in [\![1, 4]\!])$ sont *coplanaires* à la CNS

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Le plan $\mathscr{P}$ défini par la donnée du point $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{P}$ et de deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}' = (\alpha', \beta', \gamma')$ admet l'équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0\,.$$

DÉFINITION V.7.2

Dans l'espace affine $\mathscr{E}_3$, l'ensemble des plans affines contenant une droite donnée $\mathscr{D}$ est appelé le **faisceau** *(de plans) d'axe $\mathscr{D}$.*
L'ensemble des plans affines dont la direction est un plan vectoriel fixé $\Pi \in \vec{\mathscr{E}}_3$ est appelé **faisceau** *(de plans) de direction Π.*

Un faisceau Φ est déterminé par la donnée d'un couple $(\mathscr{P}, \mathscr{P}')$ de plans distincts lui appartenant, appelés **plans de base** du faisceau. Si $ux + vy + wz + h = 0$ est une équation de $\mathscr{P}$ dans un repère $\mathscr{R}$, notons P l'application affine : $\mathscr{E}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $M(x, y, z) \mapsto P(M) = ux + vy + wz + h$, et définissons de même P' à partir de $\mathscr{P}'$. Alors *le faisceau de base $(\mathscr{P}, \mathscr{P}')$ est l'ensemble des plans d'équation $\lambda P + \lambda' P' = 0$.* Si l'on excepte $\mathscr{P}'$, le plan courant $\mathscr{P}_\rho$ du faisceau a pour équation $\boxed{P + \rho P' = 0}$. Il est alors évident que pour tout point $M_0 \in \mathscr{E}_3$ (M_0 non situé sur l'axe) il passe un plan et un seul du faisceau Φ. La théorie générale du § V.3 montre en particulier que trois plans de $\mathscr{E}_3$ **ont en commun un point et un seul** ssi l'intersection de leurs plans vectoriels directeurs est réduite à $\{0\}$, i.e. si ces plans directeurs sont définis par des formes linéaires indépendantes.

On reconnaît que quatre plans $\mathscr{P}_i$, d'équations respectives $u_i x + v_i y + w_i z + h_i = 0$ ($i \in [\![1, 4]\!]$), ont un point commun, ou sont parallèles à un même vecteur non nul, à la CNS

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & h_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Enfin des *paramétrages* affines ou barycentriques de droites ou de plans de $\mathscr{E}_3$ sont très faciles à obtenir et souvent utiles.

Exercice 1 : On donne quatre droites $(\mathscr{D}_i)_{i \in [\![1,4]\!]}$ du plan affine $\mathscr{E}_2$ qui sont sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, le segment $[A, B]$ est appelé une *diagonale* du quadrilatère complet formé par les quatre droites. Montrer que les milieux des diagonales sont trois points alignés (choisir un bon repère).

Exercice 2 : On donne quatre droites distinctes $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ du plan affine $\mathscr{E}_2$ par leurs équations respectives $D = 0$, $D' = 0$, $L = 0$, $L' = 0$ dans un repère fixé. On suppose $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en I et $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sécantes en $J \neq I$. On demande de former une équation de la droite Dr (I, J) *sans calculer les coordonnées de I ni de J.* (Utiliser par exemple le faisceau de base $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$.)

Exercice 3 *(théorème de Desargues) :* On donne trois droites distinctes $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ du plan affine $\mathscr{E}_2$ qui sont soit parallèles, soit concourantes en I. On prend deux points A et A' sur $\mathscr{D}_1$, deux points B et B' sur $\mathscr{D}_2$ et deux points C et C' sur $\mathscr{D}_3$, tous distincts de I. Montrer

que les hypothèses : Dr (A, B) parallèle à Dr (A', B') et Dr (A, C) parallèle à Dr (A', C') entraînent comme conséquence Dr (B, C) parallèle à Dr (B', C').

Etudier une réciproque.

Exercice 4 : *(théorème de Pappus) :* On donne deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'un plan affine $\mathscr{E}_2$ sécantes en I. On prend deux points A et A' sur $\mathscr{D}_1$ et deux points B et B' sur $\mathscr{D}_2$, tous distincts de I. Pour A' on mène la parallèle à $\overrightarrow{AB'}$, qui coupe $\mathscr{D}_2$ en B'' et par B' on mène la parallèle à $\overrightarrow{BA'}$ qui coupe $\mathscr{D}_1$ en A''. Montrer que la droite Dr (A'', B'') est parallèle à Dr (A, B).

N.B. Ce théorème reste vrai si le plan affine est construit sur un corps de base K à la place de $\mathbb{R}$ à la CNS que K soit commutatif.

Exercice 5 *(théorèmes de Ceva et de Menelaüs) :* On donne trois points A, B, C non alignés du plan affine $\mathscr{E}_2$. Soit $A' \in \text{Dr}\,(B, C) \setminus \{B, C\}$, $B' \in \text{Dr}\,(C, A) \setminus \{C, A\}$, $C' \in \text{Dr}\,(A, B) \setminus \{A, B\}$. Montrer que les trois droites Dr (A, A'), Dr (B, B'), Dr (C, C') sont concourantes ou parallèles ssi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Montrer que les trois points A', B', C' sont alignés (au sens large, c'est-à-dire qu'on accepte le cas où l'un d'entre eux serait « rejeté à l'infini ») ssi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$ (cf. exercice 10 du § V.5 ou exercice 3 du § V.4).

Exercice 6 : On reprend les notations de l'exemple 1 et on pose $P_i = \mathscr{D}_i \cap \Delta_i$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$, quand un tel point existe. Montrer que P_1, P_2, P_3 sont alignés (au sens large) ssi $\lambda \mu \nu = 1$. Peut-on retrouver à partir de là les théorèmes de Menelaüs et de Ceva ?

Exercice 7 : Dans l'espace affine $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère $\mathscr{R}$, on donne les 2 plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $P = 0$ et $P' = 0$, puis 3 plans 2, 2', 2'' qui se coupent en I non situé sur $\mathscr{D} = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$, d'équations respectives $Q = 0$, $Q' = 0$, $Q'' = 0$. Former une équation du plan passant par $\mathscr{D}$ et I.

Exercice 8 : Dans l'espace affine $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère, on considère les trois droites $\mathscr{D}_1$ (d'équations $x = a$, $y = \alpha z$), $\mathscr{D}_2$ (d'équations $x = b$, $y = \beta z$) et $\mathscr{D}_3$ (d'équations $x = c$, $y = \gamma z$). Trouver la relation entre u, v, w, h pour que le plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ coupe les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ en trois points alignés.

Exercice 9 : On donne dans un espace affine de dimension $n \geqslant 3$ trois droites (A), (B), (C) concourantes en O et non coplanaires. Sur chacune d'elles on prend trois points (A_i), (B_i), (C_i) $(i \in [\![1, 3]\!])$. On suppose $\dfrac{2}{\overline{OA_2}} = \dfrac{1}{\overline{OA_1}} + \dfrac{1}{\overline{OA_3}}$, et des relations analogues sur les droites (B) et (C). Montrer que les 7 plans $A_i B_j C_k$ tels que $i + j + k = 6$ sont concourants.

Chapitre VI

ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

Rappelons qu'un espace euclidien E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, généralement noté $(.|.)$. Si $\dim(E) = n \geqslant 1$, et si $\mathscr{E}$ est un espace affine construit sur E, tout au long du chapitre on appellera *repère (affine)* de $\mathscr{E}$ un repère affine *ordonné,* i.e. un élément $(O\,;e_1, \ldots, e_n) \in \mathscr{E} \times \vec{\mathscr{E}}^n$ tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base ordonnée de $\vec{\mathscr{E}}$.

§ VI.1 *GÉNÉRALITÉS ; ISOMÉTRIES*

DÉFINITION VI.1.1

> *On appelle* **espace affine euclidien** *un espace affine dont l'***espace directeur** *est un* **espace euclidien.**

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, d'espace directeur E. On munit systématiquement $\mathscr{E}$ de la *distance* associée à la norme de E, i.e. définie par l'application $\mathscr{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(M, N) \mapsto \|\overrightarrow{MN}\|$. Ainsi, pour chaque point $A \in \mathscr{E}$, si on désigne par $\mathscr{E}_A$ la structure de $\mathbb{R}$-ev d'origine A sur $\mathscr{E}$, l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev $\xi_A : E \longrightarrow \mathscr{E}_A$, $t \mapsto A + t$ est une isométrie de E sur $\mathscr{E}$. La fonction $\mathscr{E}_A \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|$ est une norme sur $\mathscr{E}_A$, évidemment euclidienne, obtenue par *transport* de la norme de E à l'aide de ξ_A : $\mathscr{E}_A$ sera systématiquement muni de cette norme et du produit scalaire dont elle est issue, qui sera noté comme celui de E. Ainsi ξ_A *est, pour tout A, un isomorphisme d'espaces euclidiens.*

Si $\dim(\mathscr{E}) = n \geqslant 1$, un repère affine $(O\,;e_1, \ldots, e_n)$ sera dit **orthonormal** (ou **orthonormé**) ssi $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de $\mathscr{E}$ seront dits **orthogonaux** (resp. **perpendiculaires**) ssi les sous-$\mathbb{R}$-ev $\vec{\mathscr{F}}$ et $\vec{\mathscr{G}}$ sont orthogonaux (resp.

perpendiculaires) ; $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ seront dits **supplémentaires orthogonaux** ssi $\vec{\mathscr{F}} \oplus \vec{\mathscr{G}} = E$. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont supplémentaires orthogonaux, $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton (cf. proposition V.3.2), d'où : si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont perpendiculaires, $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$ (cf. définition III.1.1).

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$: un sous-$\mathbb{R}$-ev G de E sera dit **orthogonal** (resp. **perpendiculaire**) à $\mathscr{F}$ ssi $\vec{\mathscr{F}}$ et G sont orthogonaux (resp. perpendiculaires). On dit que G est **supplémentaire orthogonal** de $\mathscr{F}$ ssi $\vec{\mathscr{F}} \oplus G = E$: s'il en est ainsi, la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $G = \vec{\mathscr{F}}^{\perp}$ sera simplement appelée **projection orthogonale sur** $\mathscr{F}$; soit ϖ cette application : d'après l'étude du § II.2, il est immédiat que, pour tout $M \in \mathscr{E}$, $\varpi(M)$ est l'unique point $N \in \mathscr{F}$ tel que $\|\overrightarrow{MN}\|$ soit la distance de M à $\mathscr{F}$ (d'ailleurs $\vec{\varphi}$ est la projection orthogonale de E sur $\vec{\mathscr{F}}$).

Isométries affines, déplacements

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, de dimension $n \geqslant 1$, d'espace directeur E. Notons L l'homomorphisme de groupes : $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$ (cf. § II.1). Les images réciproques $L^{-1}(\mathbf{O}(E))$ et $L^{-1}(\mathbf{SO}(E))$ sont des sous-groupes du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

DÉFINITION VI.1.2

Dans les conditions ci-dessus, le groupe $L^{-1}(\mathbf{O}(E))$ est appelé ***groupe des isométries affines*** *de $\mathscr{E}$. Notons-le* **Is** $(\mathscr{E})$. *Le groupe $L^{-1}(\mathbf{SO}(E))$ est appelé groupe des* ***isométries affines directes*** *de $\mathscr{E}$, ou encore* ***groupe des déplacements*** *de $\mathscr{E}$. Nous le noterons* **Dep** $(\mathscr{E})$.

Les éléments de **Is** $(\mathscr{E})\backslash$**Dep** $(\mathscr{E})$ sont appelés isométries affines **indirectes** ou parfois aussi **antidéplacements** (1).

Comme L est surjectif, il est clair que **Dep** $(\mathscr{E})$ est un sous-groupe distingué d'indice 2 de **Is** $(\mathscr{E})$. Puisque Ker (L) est le groupe $T(\mathscr{E})$ des translations de $\mathscr{E}$, on voit aussi que $T(\mathscr{E})$ est un sous-groupe distingué de **Dep** $(\mathscr{E})$, le groupe quotient **Dep** $(\mathscr{E})/_{T(\mathscr{E})}$ étant isomorphe à $\mathbf{SO}(E)$. Enfin $T(\mathscr{E}) \lhd$ **Is** $(\mathscr{E})$ et le groupe quotient **Is** $(\mathscr{E})/_{T(\mathscr{E})}$ est isomorphe à $\mathbf{O}(E)$.

D'après les définitions mêmes, si l'on tient compte de l'étude précédant le théorème II.1.2, on voit qu'un élément $\varphi \in$ Aff $(\mathscr{E})$ appartient à **Is** $(\mathscr{E})$ ssi φ est une isométrie de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$.

---

(1) On trouve également les notations $\mathbf{O}_+(E)$ à la place de $\mathbf{SO}(E)$, $\mathbf{Is}_+(\mathscr{E})$ pour le groupe des déplacements et $\mathbf{Is}_-(\mathscr{E})$ pour l'ensemble des antidéplacements.

Autrement dit :

$$\mathbf{Is}\,(\mathscr{E}) = \{\varphi \in \mathrm{GA}\,(\mathscr{E}) \mid (\forall\,(M, N) \in \mathscr{E}^2) \quad \|\overrightarrow{\varphi(M)\,\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|\} =$$
$$= \{\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E}) \mid (\forall\,(M, N) \in \mathscr{E}^2)\|\overrightarrow{\varphi(M)\,\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|\}.$$

Isométries affines et repères orthonormaux

En combinant les théorèmes V.2.3, II.4.6 et II.4.7, on obtient immédiatement :

THÉORÈME **VI.1.1**

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Notons $\mathscr{R}_{\text{o.n.}}$ l'ensemble des repères orthonormaux de $\mathscr{E}$, et soit $\mathscr{R} = (O\,;\,e_1, \ldots, e_n) \in \mathscr{R}_{\text{o.n.}}$. Pour toute application $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$, notons $\mathscr{R}_\varphi$ l'élément $(\varphi(O)\,;\,\vec{\varphi}(e_1), \ldots, \vec{\varphi}(e_n))$ de $\mathscr{E} \times \vec{\mathscr{E}}^n$.

a) *L'application $\varphi \mapsto \mathscr{R}_\varphi$ établit une* **bijection** *du groupe* $\mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ *sur l'ensemble $\mathscr{R}_{\text{o.n.}}$.*

b) *Supposons $\mathscr{E}$ orienté de façon que $\mathscr{R}$ soit direct, et notons $\mathscr{R}^+_{\text{o.n.}}$ (resp. $\mathscr{R}^-_{\text{o.n.}}$) l'ensemble des repères orthonormaux directs (resp. indirects) de $\mathscr{E}$. L'application $\varphi \mapsto \mathscr{R}_\varphi$ établit une* **bijection** *de* $\mathbf{Dep}\,(\mathscr{E})$ *sur l'ensemble $\mathscr{R}^+_{\text{o.n.}}$, et une bijection de* $\mathbf{Is}\,(\mathscr{E})\backslash\mathbf{Dep}\,(\mathscr{E})$ *sur $\mathscr{R}^-_{\text{o.n.}}$.*

COROLLAIRE **1**

Dans les conditions du théorème VI.1.1, *soit $\mathscr{R} = (O\,;\,e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (O'\,;\,e'_1, \ldots, e'_n)$ deux repères orthonormaux de $\mathscr{E}$.*
L'unique bijection affine $\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(O) = O'$ et $\varphi(e_i) = e'_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ appartient à $\mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$. *Et on a : $\varphi \in \mathbf{Dep}\,(\mathscr{E})$ ssi $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont de même sens.*

COROLLAIRE **2**

Dans les conditions du théorème VI.1.1, *supposons $n \geqslant 2$. Pour tous éléments $(O\,;\,e_1, \ldots, e_{n-1})$ et $(O'\,;\,e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ de $\mathscr{E} \times \vec{\mathscr{E}}^{n-1}$ tels que les suites $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ et $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ soient* **orthonormales,** *il existe un et un seul* **déplacement** *φ de $\mathscr{E}$ tel que $\varphi(O) = O'$ et $\vec{\varphi}(e_i) = e'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Démonstration :

Orientons $\mathscr{E}$. Les deux suites $(O\,;\,(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1})$ et $(O'\,;\,(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1})$ se complètent *de manière unique* en deux repères orthonormaux *directs* $\mathscr{R} = (O\,;\,e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (O', e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathscr{E}$, et

si $\varphi \in \mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$ vérifie $\varphi(O) = O'$ et $\vec{\varphi}(e_i) = e'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, il vérife *de surcroît* $\vec{\varphi}(e_n) = e'_n$; d'où le résultat en appliquant le corollaire 1. ■

COROLLAIRE 3

> *Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de même dimension $p \in [\![1, n]\!]$. Il existe au moins un élément $\varphi \in \mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$ (resp. $\varphi \in \mathbf{Is}\ (\mathscr{E}) \backslash \mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$) tel que $\varphi(\mathscr{V}) = \mathscr{V}'$.*

Démonstration :

La proposition II.3.1 permet de construire des repères orthonormaux $\mathscr{R} = (O\ ; e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (O', e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathscr{E}$ tels que $(O\ ; e_1, \ldots, e_p)$ (resp. $(O'\ ; e'_1, \ldots, e'_p)$) soit un repère de $\mathscr{V}$ (resp. de $\mathscr{V}'$). L'unique bijection affine φ de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{R}_\varphi = \mathscr{R}'$ appartient à $\mathbf{Is}\ (\mathscr{E})$. Soit $\mathscr{R}'' = (O'\ ; e'_1, \ldots, e'_{n-1}, -e'_n)$, et ψ l'unique élément de $\mathrm{Aff}\ (\mathscr{E})$ tel que $\mathscr{R}_\psi = \mathscr{R}''$. Alors $\psi \in \mathbf{Is}\ (\mathscr{E})$. Comme $\mathscr{R}'$ et $\mathscr{R}''$ sont de sens contraires, il est clair que l'une des deux applications φ ou ψ appartient à $\mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$, l'autre appartient à $\mathbf{Is}\ (\mathscr{E}) \backslash \mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$, et $\varphi(\mathscr{V}) = \psi(\mathscr{V}) = \mathscr{V}'$. ■

Isométries involutives

Soit φ une involution affine d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$. C'est (cf. § V.3) une symétrie autour d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ parallèlement à une direction G supplémentaire de $\mathscr{F}$. D'après la proposition II.2.2, $\varphi \in \mathbf{Is}\ (\mathscr{E})$ ssi $\vec{\mathscr{F}} \oplus G = \vec{\mathscr{E}}$, i.e. ssi $G = \vec{\mathscr{F}}^{\perp}$ dans $\mathscr{E}$: lorsqu'il en est ainsi, on dit que la symétrie φ est *orthogonale.* Ainsi **les involutions affines de $\mathscr{E}$ qui appartiennent à $\mathbf{Is}\ (\mathscr{E})$ sont les symétries orthogonales** de $\mathscr{E}$.

La symétrie orthogonale autour d'un hyperplan $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est appelée **la réflexion d'hyperplan $\mathscr{F}$.** Si $n \geqslant 2$, la symétrie orthogonale autour d'un sous-espace $\mathscr{F}$ de dimension $n-2$ est appelée **le retournement autour de $\mathscr{F}$.** Evidemment, une symétrie orthogonale est une réflexion (resp. un retournement) ssi sa partie linéaire est une réflexion vectorielle (resp. un retournement vectoriel).

PROPOSITION VI.1.1

> *Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$. Les seuls éléments de $\mathbf{Is}\ (\mathscr{E})$ laissant fixe chaque point de $\mathscr{H}$ sont $\mathbf{Id}_{\mathscr{E}}$, et la réflexion $\rho_{\mathscr{H}}$ d'hyperplan $\mathscr{H}$.*

Démonstration :

Soit $\varphi \in \mathbf{Is}\ (\mathscr{E}) \backslash \{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$ laissant fixe chaque point de $\mathscr{H}$. Alors $\vec{\varphi} \in \mathbf{O}(E)$ et $\mathrm{Ker}\ (\vec{\varphi} - \mathrm{Id}_E)$ contient $\vec{\mathscr{H}}$ et est $\neq E$, donc

$\operatorname{Ker}(\vec{\varphi} - \mathrm{Id}_E) = \vec{\mathscr{H}}$. Puisque $\vec{\varphi} \in \mathbf{O}(E)$, $G = \vec{\mathscr{H}}^{\perp}$ est φ-stable et de dimension 1, d'où (du fait que $\vec{\varphi} \neq \mathrm{Id}_E$) : $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{H}}} \oplus (-\mathrm{Id}_G)$. Donc $\vec{\varphi}$ est la réflexion vectorielle d'hyperplan $\vec{\mathscr{H}}$, d'où $\varphi = \rho_{\mathscr{H}}$. ■

PROPOSITION VI.1.2

Soit $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux sous-espaces affines d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$. Notons s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale autour de $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$).
a) *Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont* **perpendiculaires,** *$s = s_2 \circ s_1$ est la symétrie orthogonale autour de $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$, et $s = s_1 \circ s_2$.*
b) *Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont* **orthogonales** *et se rencontrent en $O \in \mathscr{E}$, $s = s_2 \circ s_1$ est la symétrie orthogonale autour du sous-espace affine $\mathscr{G}$ qui passe par O et de direction supplémentaire orthogonale à* $\operatorname{Vaff}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2)$, *et $s = s_1 \circ s_2$.*

Démonstration :

a) Puisque $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \neq \varnothing$, l'assertion découle de la proposition III.1.4.

b) Soit $F_i = \vec{\mathscr{F}}_i$, $\sigma_i = \vec{s}_i$ ($i \in \{1, 2\}$), $V = F_1 \oplus F_2$ et $W = V^{\perp}$. Alors $V = \overrightarrow{\operatorname{Vaff}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2)}$. On a : $\sigma_1 = \mathrm{Id}_{F_1} \oplus (-\mathrm{Id}_{F_2}) \oplus (-\mathrm{Id}_W)$ et $\sigma_2 = (-\mathrm{Id}_{F_1}) \oplus \mathrm{Id}_{F_2} + (-\mathrm{Id}_W)$, d'où $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1 = (-\mathrm{Id}_V) \oplus (\mathrm{Id}_W)$, d'où l'on déduit le résultat. ■

Hyperplan médiateur

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et deux points *distincts* A et B de $\mathscr{E}$; l'hyperplan $\mathscr{V}$ de direction $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ et passant par le milieu O de $\{A, B\}$ s'appelle **hyperplan médiateur** de $\{A, B\}$. Puisque $\overrightarrow{AB} \in \mathscr{V}^{\perp}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 0$, on voit que *la réflexion d'hyperplan $\mathscr{V}$ échange A et B,* et c'est la seule réflexion qui échange A et B. Pour tout $M \in \mathscr{V}$, on a : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$. Réciproquement, soit $M \in \mathscr{E}$ vérifiant $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$; alors $\|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\|^2$, d'où $(\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OB} \mid \overrightarrow{OM})$, i.e. $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{OM}) = 0$, d'où $M \in \mathscr{V}$. En résumé :

PROPOSITION VI.1.3

Soit A et B deux points distincts dans un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$. L'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est l'hyperplan médiateur de $\{A, B\}$. L'hyperplan médiateur de $\{A, B\}$ est l'hyperplan des points fixes de l'unique réflexion qui échange A et B.

Isométries d'un espace affine euclidien

THÉORÈME VI.1.2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Les seules applications isométriques de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ sont les éléments de $\mathbf{Is}\,(\mathscr{E}) = L^{-1}(\mathbf{O}(\vec{\mathscr{E}}))$.

Démonstration :

Soit $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ une application isométrique. Donnons-nous un repère affine $\mathscr{R} = (A_0\,;\, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$. Posons $A_i = A_0 \dotplus e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $A_i' = \varphi(A_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $e_i' = \overrightarrow{A_0' A_i'}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

- Montrons d'abord :

$$(1) \qquad (\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2) \quad (e_i' \mid e_j') = (e_i \mid e_j)\,.$$

En fait : $\|e_i'\| = \left\|\overrightarrow{\varphi(A_0)\,\varphi(A_i)}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_0 A_i}\right\| = \|e_i\|$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Puis, pour $i \neq j$ $((i, j) \in [\![1, n]\!]^2)$, $\left\|\overrightarrow{\varphi(A_i)\,\varphi(A_j)}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\varphi(A_0)\,\varphi(A_j)} - \overrightarrow{\varphi(A_0)\,\varphi(A_i)}\right\|^2 = \|e_j' - e_i'\|^2 = \|e_j'\|^2 + \|e_i'\|^2 - 2(e_i' \mid e_j')$ $= \left\|\overrightarrow{A_i A_j}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{A_0 A_j} - \overrightarrow{A_0 A_i}\right\|^2 = \|e_j - e_i\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_i\|^2 - 2(e_i \mid e_j)$, d'où finalement : $(e_i' \mid e_j') = (e_i \mid e_j)$, qui reste évidemment valable pour $i = j$.

- Soit alors ψ l'unique application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $\psi(A_i) = A_i'$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. D'après (1), en prolongeant par linéarité, $\vec{\psi} \in \mathbf{O}(E)$ d'où $\psi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$. L'application $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ est isométrique, et vérifie $\theta(A_i) = A_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Soit $M \in \mathscr{E}$. Posons $M' = \theta(M)$. On a : $(\forall i \in [\![0, n]\!])\ \left\|\overrightarrow{A_i M}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_i M'}\right\|$. Si l'on avait $M' \neq M$, l'hyperplan médiateur de $\{M, M'\}$ contiendrait donc $\{A_0, \ldots, A_n\}$, ce qui est absurde puisque $(A_0, \ldots, A_n)$ est une base affine de $\mathscr{E}$. Donc $M' = M$. Finalement $\theta = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, d'où $\varphi = \psi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$. ■

Prolongement d'isométries

THÉORÈME VI.1.3

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et soit $\mathscr{I} : \Phi \longrightarrow \mathscr{E}$ une application isométrique définie sur une partie non vide Φ de $\mathscr{E}$.
Alors il existe $\varphi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ telle que $\varphi\,|_{\Phi} = \mathscr{I}$.
Si de plus Φ engendre $\mathscr{E}$ affinement, alors φ est unique.

Démonstration :

Considérons d'abord le cas où Φ engendre $\mathscr{E}$ affinement : soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une base affine de $\mathscr{E}$ formée de points de Φ. Posons $A_i' = \mathscr{I}(A_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. En raisonnant comme dans la preuve du théorème VI.1.2, on voit que l'unique application $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(A_i) = A_i'$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ appartient à $\mathbf{Is}(\mathscr{E})$, puis par linéarité que $\varphi|_\Phi = \mathscr{I}$ (l'unicité de φ découle du théorème V.2.3).

Supposons maintenant que $\mathscr{F} = \mathrm{Vaff}(\Phi) \neq \mathscr{E}$: soit $(A_0, \ldots, A_p)$ une base affine de $\mathscr{F}$ formée de points de Φ. Posons $A_i' = \mathscr{I}(A_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$, $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ et $e_i' = \overrightarrow{A_0'A_i'}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. On voit que $(e_i \mid e_j) = (e_i' \mid e_j')$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, donc que $(e_1', \ldots, e_p')$ est libre. Complétons alors $(e_1, \ldots, e_p)$ (resp. $(e_1', \ldots, e_p')$) en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ (resp. $(e_1', \ldots, e_n')$) de $\vec{\mathscr{E}}$ telle que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ (resp. $(e_{p+1}', \ldots, e_n')$) soit une base orthonormale de $G = (\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p))^\perp$ (resp. de $(G' = \mathrm{Vect}(e_1', \ldots, e_p')^\perp)$. Alors $(e_i \mid e_j) = (e_i' \mid e_j')$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Donc l'unique $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(A_i) = A_i'$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$ et $\vec{\varphi}(e_i) = e_i'$ pour $p + 1 \leqslant i \leqslant n$ appartient à $\mathbf{Is}(\mathscr{E})$. L'application $\theta = \varphi^{-1} \circ \mathscr{I} : \Phi \longrightarrow \Phi$ est isométrique et $\theta(A_i) = A_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$.

Pour $M \in \Phi$, soit $M' = \theta(M)$.

On a : $\|\overrightarrow{A_iM}\| = \|\overrightarrow{A_iM'}\|$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$. Si $M' \neq M$, l'hyperplan médiateur $\mathscr{V}$ de $\{M, M'\}$ contient $A_0, \ldots, A_p$, donc contient $\mathscr{F}$, ce qui est absurde car $M \in \Phi \subset \mathscr{F}$ et d'autre part $M \notin \mathscr{F}$ (car $M \notin \mathscr{V}$). Donc $\theta(M) = M$ pour tout $M \in \Phi$, i.e. $\varphi|_\Phi = \mathscr{I}$. ■

Voici une application capitale de ce théorème dans le cas où Φ **engendre** $\mathscr{E}$ **affinement.** Soit $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ le groupe des $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(\Phi) = \Phi$, et $\Gamma_{\langle\Phi\rangle}$ le groupe des *bijections isométriques* de Φ sur Φ. Alors **l'application naturelle** $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle} \longrightarrow \Gamma_{\langle\Phi\rangle}$, $\varphi \mapsto \varphi\|_\Phi$ **est un isomorphisme de groupes.** On identifie couramment ces deux groupes à l'aide de cet isomorphisme. Le groupe $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ est appelé **groupe des isométries** de Φ. Le sous-groupe $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle} \cap \mathbf{Dep}(\mathscr{E})$ est appelé **groupe des déplacements** de Φ et sera noté $\mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$ il est soit égal à $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$, soit d'indice 2 dans $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$.

En particulier, pour tout point $A \in \mathscr{E}$, le groupe des $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ (resp. $\varphi \in \mathbf{Dep}(\mathscr{E})$) telles que $\varphi(A) = A$ sera noté $\mathbf{Is}_A(\mathscr{E})$ (resp. $\mathbf{Dep}_A(\mathscr{E})$). L'application $L : \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(\vec{\mathscr{E}})$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{Is}_A(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{O}(\vec{\mathscr{E}})$ et un isomorphisme de $\mathbf{Dep}_A(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{SO}(\vec{\mathscr{E}})$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine. On pose $E = \vec{\mathscr{E}}$, $F = \vec{\mathscr{F}}$ et $G = F^\perp$.

a) Montrer que le groupe Γ des $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathscr{F}$ est isomorphe à $\mathbf{O}(G)$.

b) Soit Δ le groupe des $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$. Montrer que Δ est isomorphe à $\mathbf{O}(G) \times \mathbf{Is}(\mathscr{F})$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 2$, d'espace directeur E.

a) Soit φ une fonction affine : $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ non constante, et $\mathscr{H}$ l'hyperplan $\varphi^{-1}(0)$. On note $\vec{V}$ le vecteur de E tel que $\vec{\varphi} = (\vec{V} \mid .)$. Montrer que la projection orthogonale de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{H}$ est l'application $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $M \mapsto M \dotplus \left(\dfrac{-\varphi(M)}{\|\vec{V}\|^2} \vec{V} \right)$, et que la réflexion d'hyperplan $\mathscr{H}$ est donnée par $M \mapsto M \dotplus \left(\dfrac{-2\varphi(M)}{\|\vec{V}\|^2} \vec{V} \right)$.

b) Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$ de $\mathscr{E}$; posons $q = n - p$. Supposons $\mathscr{V}$ défini par $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_q = 0$, où $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ sont des fonctions affines sur $\mathscr{E}$ telles que $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_q$ soient indépendantes. Notons $\vec{V}_i$ le vecteur de E tel que $\vec{\varphi}_i = (\vec{V}_i \mid .)$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, et Γ la matrice $[(\vec{V}_i \mid \vec{V}_j)]_{(i,j) \in [\![1,q]\!]^2}$. Montrer que la projection orthogonale de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{V}$ associe à $M \in \mathscr{E}$, le point $M \dotplus \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \vec{V}_i$, où $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{bmatrix} = -\Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \vdots \\ \varphi_q(M) \end{bmatrix}$ et que la symétrie orthogonale autour de $\mathscr{V}$ associe, à $M \in \mathscr{E}$, le point $M \dotplus \sum_{i=1}^{q} \mu_i \vec{V}_i$, où $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} = -2\Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \vdots \\ \varphi_q(M) \end{bmatrix}$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, de dimension $n \geqslant 1$. On donne un ouvert connexe U de E et une application $\varphi : U \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $(\forall M \in U)\ d_M \varphi \in \mathbf{O}(E)$.

a) En appliquant le théorème des accroissements finis et le théorème d'inversion locale (cf. tome 3, théorème VI.2.1), prouver que, pour tout $M_0 \in U$, il existe un ouvert ω_0 tel que $\{M_0\} \subset \omega_0 \subset U$ et que $(\forall (M, N) \in \omega_0^2)\ \|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$.

b) En déduire, en utilisant le théorème VI.1.3, qu'il existe une unique $\psi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ telle que $\varphi = \psi|_U$.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $(A_0, \ldots, A_n)$ une suite de points de $\mathscr{E}$. L'enveloppe convexe de $\{A_0, \ldots, A_n\}$ sera notée S. En utilisant l'exercice 2 du § II.5, démontrer que le volume n-dimensionnel euclidien $\mathrm{Mes}_{[n]}(S)$ est $\dfrac{1}{n!}(G(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}))^{1/2}$, où G désigne comme d'habitude le déterminant de Gram. En déduire que, pour toute permutation σ de $[\![0, n]\!]$, on a :

$$G(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}) = G(\overrightarrow{A_{\sigma(0)}A_{\sigma(1)}}, \ldots, \overrightarrow{A_{\sigma(0)}A_{\sigma(n)}}).$$

Exercice 5 : On reprend les notations de l'exercice 4 et on pose $d_{i,j} = \|\overrightarrow{A_iA_j}\|$ et $y_{i,j} = d_{i,j}^2$ (pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$). Soit $\mathscr{G}(A_0, \ldots, A_n) = G(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $\Phi \in \mathbb{R}[(Y_{ij})_{0 \leqslant i < j \leqslant n}]$ unique tel que, pour tous $A_0, \ldots, A_n$, on ait : $\mathscr{G}(A_0, \ldots, A_n) = \Phi((y_{i,j})_{0 \leqslant i < j \leqslant n})$.

Indication : $(\overrightarrow{A_0A_i} \mid \overrightarrow{A_0A_j}) = \dfrac{1}{2}(d_{0,i}^2 + d_{0,j}^2 - d_{i,j}^2)$.

b) En utilisant l'exercice 2 du § II.5 et l'irréductibilité du déterminant général (cf. ci-dessous) démontrer que Φ est *irréductible* dans $\mathbb{R}[(Y_{ij})_{0 \leqslant i < j \leqslant n}]$.

N.B. Pour une expression de Φ sous forme d'un déterminant faisant intervenir symétriquement les Y_{ij}, voir par exemple [3], tome 2, § 9.7.

Indication : Etant donné n^2 variables X_{ij}, on appelle ***déterminant général*** le polynôme $\Delta = \det([X_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2})$. C'est un polynôme homogène de degré n qui prend la valeur 1 pour $X_{ij} = \delta_{ij}$ et qui est de degré 1 par rapport à chacune des variables X_{ij}. Si l'on avait une factorisation $\Delta = F \cdot G$, l'un des facteurs serait de degré 1 en X_{i_0, j_0} et l'autre n'en dépendrait

pas, chacun des facteurs étant nécessairement homogène. A cause de cette homogénéité, si X_{i_0, j_0} figure dans F, il en est de même de tous les X_{i, j_0} et de tous les $X_{i_0, j}$ et il en résulte finalement que G = constante, d'où l'irréductibilité de Δ.

Exercice 6 *(Théorème des trois perpendiculaires) :* Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{G}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ inclus dans $\mathscr{F}$. On note f la projection orthogonale de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$ et g la projection orthogonale de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{G}$. Montrer que $g = g \circ f$ et justifier le nom donné à cet énoncé.

§ VI.2 *STRUCTURE DES ISOMÉTRIES*

Dans ce §, on donne un espace affine euclidien $\mathscr{E}$, de dimension $n \geqslant 1$, d'espace directeur E. Pour toute bijection affine $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, nous notons $\mathscr{F}_\varphi$ la s.v.l.a. des *points fixes* de φ, i.e. $\{M \in \mathscr{E} \mid \varphi(M) = M\}$, et $\nu(\varphi)$ la dimension de $\mathscr{F}_\varphi$ ($\nu(\varphi) = -1$ si $\mathscr{F}_\varphi = \varnothing$). Pour tout endomorphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E)$, on pose $\nu(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E))$. Ainsi, lorsque $\mathscr{F}_\varphi \neq \varnothing$, on a $\nu(\varphi) = \nu(\vec{\varphi})$. En particulier, si $\nu(\vec{\varphi}) = 0$, on a $\mathrm{card}(\mathscr{F}_\varphi) = 1$ (cf. théorème V.3.2).

Une bijection affine $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sera dite **localement vectorielle** pour exprimer que $\mathscr{F}_\varphi \neq \varnothing$ (la terminologie rappelle que, si $A \in \mathscr{F}_\varphi$, alors φ est une bijection linéaire pour $\mathscr{E}_A$). Rien d'essentiel ne distingue alors φ de $\vec{\varphi}$.

Isométries et translations permutables

THÉORÈME VI.2.1

Soit $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$. Il existe un unique couple (ψ, τ) formé d'une isométrie $\psi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ localement vectorielle, et d'une translation $\tau \in T(\mathscr{E})$, telles que

$$\varphi = \psi \circ \tau = \tau \circ \psi \,. \tag{1}$$

Démonstration :

Posons $F = \mathrm{Ker}(\vec{\varphi} - \mathrm{Id}_E)$, $G = F^\perp$, et soit $\mathscr{G}$ un sous-espace affine de direction G dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}' = \varphi(\mathscr{G})$. Puisque F est $\vec{\varphi}$-stable, G l'est aussi, donc $\mathscr{G}'$ est parallèle à $\mathscr{G}$. Il y a une unique translation τ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $\tau(\mathscr{G}) = \mathscr{G}'$ et dont le vecteur t appartienne à F (tout sous-espace affine dirigé par F rencontre $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{G}'$) en un unique point A (resp. A'), et on a : $t = \overrightarrow{AA'}$). Montrons que l'isométrie $\psi = \tau^{-1} \circ \varphi$ est localement vectorielle, et que $\psi \circ \tau = \tau \circ \psi$, ce qui établira *l'existence* du couple (ψ, τ).

D'abord, pour tout $A \in \mathscr{E}$, soit $A' = \tau(A)$. Alors $\varphi(A') = \varphi(A) \dotplus \vec{\varphi}(t) = \varphi(A) \dotplus t$, d'où $\varphi \circ \tau(A) = \tau \circ \varphi(A)$; et de $\tau \circ \varphi = \varphi \circ \tau$ découle immédiatement $\psi \circ \tau = \tau \circ \psi = \varphi$.

Ensuite $\psi(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$, et la partie linéaire de $\psi\|_{\mathscr{G}}$ est $\vec{\psi}\|_G$, qui n'admet plus 1 comme valeur propre. D'après le théorème V.3.2, $\psi\|_{\mathscr{G}}$ admet un point fixe unique, et ψ est bien localement vectorielle. Il reste à prouver *l'unicité* du couple (ψ, τ). Supposons que $\varphi = \psi' \circ \tau' = \tau' \circ \psi'$ avec $\psi' \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ localement vectorielle et $\tau' \in T(\mathscr{E})$ de vecteur t'. Comme $\vec{\psi}' = \vec{\varphi} = \vec{\psi}$, nécessairement $\vec{\mathscr{F}}_{\psi'} = F$, donc $\mathscr{F}_{\psi'}$ (noté en abrégé $\mathscr{F}$) est supplémentaire orthogonal de $\mathscr{G}$ et de $\mathscr{G}'$, donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \{A\}$ $(A \in \mathscr{G})$ et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}' = \{A'\}$ $(A' \in \mathscr{G}')$. De $\tau' \circ \psi'(A) = \psi' \circ \tau'(A)$, on déduit : $\vec{\psi}'(t') = t'$, i.e. $\vec{\varphi}(t') = t'$, d'où $t' \in F$. Comme $\vec{\varphi}(G) = G$ et $A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$, on voit que $\psi'(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$. De même $\psi'(\mathscr{G}') = \mathscr{G}'$. Puisque $\varphi(\mathscr{G}) = \tau'(\psi'(\mathscr{G})) = \mathscr{G}'$, il en découle que $\tau'(\mathscr{G}) = \mathscr{G}'$. Donc τ' est l'unique translation à vecteur dans F qui transforme $\mathscr{G}$ en $\mathscr{G}'$, c'est-à-dire $\tau' = \tau$, ce qui entraîne $\psi' = \psi$. ■

La décomposition (1) sera appelée **décomposition canonique** de l'isométrie φ.

Remarque 1 : Pour que φ soit localement vectorielle, il faut et il suffit que la translation figurant dans (1) soit $\tau = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

Remarque 2 : Au cours de la démonstration du théorème VI.2.1, on a vu que *le vecteur de la translation τ figurant dans* (1) *est $\vec{\varphi}$-invariant,* et que *toute translation de vecteur $\vec{\varphi}$-invariant est permutable avec φ.*

Les isométries *localement vectorielles* de $\mathscr{E}$ se ramènent aux éléments de $\mathbf{O}(E)$. Le théorème VI.2.1 montre comment obtenir les isométries *sans point fixe* à l'aide des résultats du § III.1.

Description de Is $(\mathscr{E})$ pour $n \leqslant 3$

• *Pour* $n = 1$, le groupe **Dep** $(\mathscr{E})$ se réduit à $T(\mathscr{E})$, et **Is** $(\mathscr{E})\backslash$**Dep** $(\mathscr{E})$ est l'ensemble des symétries centrales (qui sont ici les réflexions). Notons que déjà, **Is** $(\mathscr{E})$ n'est pas abélien.

• *Pour* $n = 2$, les déplacements localement vectoriels autres que $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ ont un unique point fixe. Soit φ l'un d'eux et Ω son point fixe : $\vec{\varphi}$ est une rotation vectorielle, et $(\forall M \in \mathscr{E})\ \overrightarrow{\Omega\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{\Omega M})$; on dit que φ est une **rotation de centre Ω.** En convenant que $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ est aussi une rotation de centre Ω, on voit que, pour tout point $\Omega \in \mathscr{E}$, $\mathbf{Dep}_{\Omega}$ $(\mathscr{E})$ est l'ensemble des rotations de centre Ω de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ est orienté, on définit **l'angle orienté** de $\varphi \in \mathbf{Dep}_{\Omega}$ $(\mathscr{E})$ comme étant celui de $\vec{\varphi}$.

Les antidéplacements localement vectoriels sont **les réflexions** de $\mathscr{E}$, i.e. les symétries orthogonales autour d'une droite.

Il reste à décrire les isométries *sans point fixe* de $\mathscr{E}$. Si φ est l'une d'elles, on a : $\nu(\vec{\varphi}) \in \{1, 2\}$. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 2$, on a $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_E$, d'où $\varphi \in T(\mathscr{E})$. On obtient ainsi **les translations** $\neq \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 1$, on a : $\varphi = \psi \circ \tau = \tau \circ \psi$ (cf. théorème VI.2.1), où ψ est une réflexion autour d'une droite $\mathscr{D}$, et τ une translation de vecteur $t \in \vec{\mathscr{D}} \setminus \{0\}$. On obtient ainsi les **antidéplacements sans point fixe.**

• *Pour* $n = 3$, soit φ une isométrie localement vectorielle. Si $\varphi \in$ **Dep** $(\mathscr{E})$, nécessairement $\nu(\vec{\varphi}) \in \{1, 3\}$. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 3$, φ est une **translation.** Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 1$, l'ensemble des points fixes de φ est une droite affine $\mathscr{D}$, et $\vec{\varphi}$ est une rotation d'axe $\vec{\mathscr{D}}$, distincte de Id_E. Pour tous points $O \in \mathscr{D}$ et $M \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{O\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM})$; on dit que φ est une **rotation d'axe** $\mathscr{D}$. Lorsque $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}$ sont orientés, on définit *l'angle orienté de* φ autour de $\mathscr{D}$ orientée comme étant celui de $\vec{\varphi}$ autour de $\vec{\mathscr{D}}$ orientée. Notons en particulier que les retournements ne sont autres que les rotations d'angle π (parfois appelées demi-tours).

Si $\varphi \in$ **Is** $(\mathscr{E})\setminus$**Dep** $(\mathscr{E})$, alors $\nu(\vec{\varphi}) \in \{0, 2\}$. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 2$, φ est une **réflexion** autour d'un plan Π. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 0$, φ est soit une **symétrie centrale,** soit le produit *commutatif* d'une réflexion s et d'une rotation ρ, le couple (s, ρ) étant unique (cf. proposition III.1.2, et exercice 9 ci-dessous).

Soit maintenant φ une isométrie *sans point fixe.* Alors $\nu(\vec{\varphi}) \in [\![1, 3]\!]$. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 3$, φ est une **translation** (autre que $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$). Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 2$ (d'où $\varphi \in$ **Is** $(\mathscr{E})\setminus$**Dep** $(\mathscr{E})$), φ s'écrit de façon unique $\psi \circ \tau = \tau \circ \psi$, où ψ est une réflexion et τ une translation de vecteur parallèle à l'hyperplan de ψ. Pour $\nu(\vec{\varphi}) = 1$ (d'où $\varphi \in$ **Dep** $(\mathscr{E})\setminus\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$), φ s'écrit de façon unique comme produit commutatif d'une rotation $\psi \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de ψ. Un tel produit, si $\mathscr{D}$ est l'axe de ψ, est appelé **vissage d'axe** $\mathscr{D}$. Par convention, toute rotation d'axe $\mathscr{D}$ (y compris $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$) est considérée comme un vissage particulier d'axe $\mathscr{D}$ (dont la composante translation dans (1) est réduite à $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$) ; de même toute translation parallèle à $\mathscr{D}$ est considérée comme un vissage d'axe $\mathscr{D}$ (dont la composante rotation dans (1) est réduite à $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$). Ainsi *les déplacements de* $\mathscr{E}$ *ne sont autres que les vissages.*

Les antidéplacements de $\mathscr{E}$ sont : les *symétries centrales ;* les *rotations-réflexions* (= produit commutatif d'une rotation et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de la rotation) ; et les *réflexions-translations* (= produit commutatif d'une réflexion et d'une translation de vecteur parallèle au plan de la réflexion).

Génération de Is $(\mathscr{E})$ et de Dep $(\mathscr{E})$

Nous allons voir maintenant que les réflexions engendrent **Is** $(\mathscr{E})$, et que, si $n \geqslant 3$, les retournements engendrent **Dep** $(\mathscr{E})$.

Le cas des isométries *localement vectorielles* se traite pratiquement sans démonstration nouvelle à partir des résultats du § III.1.

THÉORÈME VI.2.2

Soit φ une ***isométrie localement vectorielle*** *de $\mathscr{E}$, et $\nu = \nu(\varphi)$.*
a) *Il existe des réflexions $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-\nu}$ telles que $\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{n-\nu}$, et φ n'est pas le produit d'un nombre $< n - \nu$ de réflexions.*
b) *Si $\varphi \in$* **Dep** *$(\mathscr{E})$, et $n \geqslant 3$ (dans ce cas n et ν ont même parité d'après le corollaire* 3 *du théorème* III.1.1) :
• *lorsque $\nu = n - 2$, φ est un retournement ou un produit de deux retournements*
• *lorsque $\nu \leqslant n - 4$, φ est égal à au moins un produit de $\dfrac{n-\nu}{2}$ retournements mais n'est pas le produit d'un nombre $< \dfrac{n-\nu}{2}$ de retournements.*

Démonstration :

L'existence des décompositions indiquées découle des théorèmes III.1.2 et III.1.3 et de la proposition III.1.3. Pour voir que le nombre $n - \nu$ ne peut être amélioré dans *a*), on remarque que si $\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$, où les σ_i sont des réflexions, alors $\vec{\varphi} = \vec{\sigma}_1 \circ \cdots \circ \vec{\sigma}_k$ et les $\vec{\sigma}_i$ sont des réflexions vectorielles, d'où $k \leqslant n - \nu(\vec{\varphi}) = n - \nu$, d'après le théorème III.1.2. On procède de façon analogue pour voir que le nombre $\dfrac{n-\nu}{2}$ ne peut être amélioré dans *b*). ■

Il reste à décomposer les isométries *sans point fixe* en produit de réflexions et les déplacements sans point fixe en produit de retournements. Le cas des translations autres que $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ est réglé par le lemme suivant :

LEMME 1

Soit $t \in E \setminus \{0\}$. Notons τ la translation de vecteur t. Choisissons un sous-espace affine $\mathscr{G}$ orthogonal à t, et soit $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \dot{+} \frac{1}{2} t$. Désignons par σ (resp. σ') la symétrie orthogonale autour de $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{G}'$). Alors $\tau = \sigma' \circ \sigma$.

(La vérification de ce lemme est immédiate.)

THÉORÈME VI.1.3

Soit φ une ***isométrie sans point fixe*** *de $\mathscr{E}$. Il existe des réflexions $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ telles que $\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p$, avec $p \leqslant n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$.*

Démonstration :

On peut écrire φ sous la forme $\psi \circ \tau$, où $\tau \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ est localement vectorielle et où τ est une translation. On a $\nu(\psi) = \nu(\vec{\varphi})$. Le théorème VI.2.2 permet de décomposer ψ en le produit de $k = n - \nu(\vec{\varphi})$ réflexions et le lemme 1 permet de décomposer τ en le produit de 2 réflexions, d'où le résultat. ■

Remarque 1 : Puisque φ est supposé sans point fixe, $\nu(\vec{\varphi}) \geqslant 1$, d'où $p \leqslant n + 1$. Le fait que le nombre $n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$ ne peut être amélioré est proposé comme exercice (cf. exercice 2).

Soit maintenant φ un *déplacement* sans point fixe. Le théorème VI.2.1 permet d'écrire $\varphi = \psi \circ \tau$, et en appliquant à τ (resp. à ψ) le lemme 1 (resp. le théorème VI.2.2), on voit que φ est un produit de retournements dès que $n \geqslant 3$. Autrement dit, *si $n \geqslant 3$, les retournements engendrent le groupe* **Dep** $(\mathscr{E})$.

Voici quelques précisions supplémentaires :

THÉORÈME VI.2.4

Supposons $n \geqslant 3$. Soit φ un déplacement de $\mathscr{E}$ sans point fixe. Posons $\nu = \nu(\vec{\varphi})$ et supposons $\nu = n - 2$. Alors φ est soit un retournement, soit le produit de deux retournements.

Démonstration :

Ecrivons la décomposition *canonique* de φ : $\varphi = \psi \circ \tau = \tau \circ \psi$. Le sous-espace affine $\mathscr{F}$ des points fixes de ψ est de dimension $n - 2$, et le vecteur t de τ appartient à $\vec{\mathscr{F}}$. Fixons $\Omega \in \mathscr{F}$, et soit $\mathscr{G}$ le plan passant par Ω dirigé par $\vec{\mathscr{F}}^{\perp}$; il est ψ-stable, et $\gamma = \psi \|_{\mathscr{G}}$ est une rotation de centre Ω dans $\mathscr{G}$. On a donc deux symétries orthogonales σ_1 et σ_2 du plan $\mathscr{G}$, autour de droites de $\mathscr{G}$ passant par Ω que nous notons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, telles que $\gamma = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par Ω et dirigée par t. On a : $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$. Notons $\mathscr{L}$ le sous-espace affine passant par Ω supplémentaire orthogonal de $\mathscr{D}$ *dans* $\mathscr{F}$. Appelons $\mathscr{V}_i$ le sous-espace affine engendré par $\mathscr{L} \cup \mathscr{D}_i$ $(i \in \{1, 2\})$: $\mathscr{V}_i$ est de codimension 2 dans $\mathscr{E}$. Notons alors ρ_i le retournement autour de $\mathscr{V}_i$: on vérifie que $\psi = \rho_1 \circ \rho_2$. Quant à τ, on peut l'écrire sous la forme $\rho_1' \circ \rho_1$, où ρ_1' est le retournement autour de $\mathscr{V}_1 \dotplus \frac{1}{2} t$ (cf. lemme 1). Finalement $\varphi = \tau \circ \psi = (\rho_1' \circ \rho_1) \circ (\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_1' \circ \rho_2$. ■

Le théorème VI.2.4 donne un résultat particulièrement remarquable lorsque $n = 3$ car alors $\nu(\vec{\varphi}) \in \{1, 3\}$. Si $\nu(\vec{\varphi}) = 3$, alors $\varphi \in T(\mathscr{E})$ et φ est le produit de deux retournements (cf. lemme 1). Si $\nu(\vec{\varphi}) = 1$ et φ sans point fixe, les hypothèses du théorème VI.2.4 sont satisfaites. Si $\nu(\vec{\varphi}) = 1$ et φ localement vectorielle, c'est une rotation qui se ramène facilement au produit de deux retournements (cf. théorème VI.2.2). En résumé :

Proposition VI.2.1

Si $\mathscr{E}$ est de dimension 3, tout déplacement de $\mathscr{E}$ (i.e. tout vissage) est soit un retournement, soit le produit (généralement non commutatif) de deux retournements.

A noter que pour $n = 3$, retournement est synonyme de déplacement involutif de $\mathscr{E}$ autre que $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

Théorème VI.2.5

Supposons $n \geqslant 5$. Soit φ un déplacement de $\mathscr{E}$ sans point fixe. Posons $\nu = \nu(\vec{\varphi})$ et supposons $\nu \leqslant n-4$. Alors φ est égal à au moins un produit de $1 + \dfrac{n-\nu}{2}$ retournements.

Démonstration :

Ecrivons à nouveau la décomposition canonique de $\varphi \in \mathbf{Dep}\,(\mathscr{E})$: $\varphi = \psi \circ \tau = \tau \circ \psi$. Soit Ω un point fixe de ψ et t le vecteur de τ. Notons $\mathscr{D}$ la droite dirigée par t qui passe par Ω, et $\mathscr{H}$ l'hyperplan dirigé par $(\mathbb{R}t)^{\perp}$ qui passe par Ω ; $\mathscr{H}$ est ψ-stable, car tout point de $\mathscr{D}$ est ψ-invariant.

L'isométrie $\psi' = \psi\,\|_{\mathscr{H}}$ est un déplacement de $\mathscr{H}$, et il est clair que $\nu(\vec{\psi}') = \nu(\vec{\psi}) - 1 = \nu - 1$. Posons $p = \dfrac{n-\nu}{2}$ (donc $p \geqslant 2$) et appliquons le théorème VI.2.2 à ψ' : on peut donc écrire $\psi' = \rho_1' \circ \rho_2' \circ \cdots \circ \rho_p'$, où, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, ρ_i' désigne un retournement *de* $\mathscr{H}$, autour d'un certain sous-espace affine $\mathscr{V}_i'$ de $\mathscr{H}$ passant par Ω et de dimension $n-3$. Soit alors ρ_i le retournement de $\mathscr{E}$ autour du sous-espace affine $\mathscr{V}_i$ engendré par $\mathscr{D} \cup \mathscr{V}_i'$. On a : $\psi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_p$.

Considérons maintenant deux droites affines Δ' et Γ' de $\mathscr{H}$ passant par Ω, orthogonales entre elles et orthogonales à $\mathscr{V}_1'$. Notons $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ les sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ engendrés respectivement par $\Delta' \cup \mathscr{V}_1'$ et $\Gamma' \cup \mathscr{V}_1'$; soit δ (resp. γ) le retournement de $\mathscr{E}$ autour de $\mathscr{U}$ (resp. de $\mathscr{V}$). On a $\rho_1 = \delta \circ \gamma$. D'autre part, d'après le lemme 1, $\tau = \delta' \circ \delta$, où δ' est le retournement autour de $\mathscr{U} + \dfrac{1}{2}t$. On obtient finalement :

$$\varphi = \tau \circ \psi = (\delta' \circ \delta) \circ (\delta \circ \gamma) \circ \rho_2 \circ \cdots \circ \rho_p = \delta' \circ \gamma \circ \rho_2 \circ \cdots \circ \rho_p\,,$$

ce qui exprime bien φ comme un produit de $1 + p = 1 + \dfrac{n-\nu}{2}$ retournements. ■

Remarque 2 : Instruits par l'exemple du cas où $\nu = n-2$, nous ne saurions affirmer qu'en toute circonstance le nombre de retournements trouvé $1 + \dfrac{n-\nu}{2}$ est le plus petit possible, alors que si φ est une isométrie localement vectorielle, il est certain que φ ne peut être le produit d'un nombre $< \dfrac{n-\nu}{2}$ de retournements pour $\nu \leqslant n-4$.

N.B. Dans tous les exercices ci-dessous, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien, de dimension $n \geqslant 1$, d'espace directeur E.

Exercice 1 : *a*) Montrer que le centre du groupe **Is** $(\mathscr{E})$ est $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$.

b) Montrer que, si $n \geqslant 2$, le centre du groupe **Dep** $(\mathscr{E})$ est $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}\}$.

Exercice 2 : Soit φ une isométrie sans point fixe de $\mathscr{E}$, et soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ des réflexions, d'hyperplans respectifs $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_p$ et telles que $\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p$.

a) Montrer que si $p < n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$, on a forcément $p = n - \nu(\vec{\varphi})$.

Indication : Penser à la parité de p.

b) On suppose que $p = n - \nu(\vec{\varphi})$. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des fonctions affines $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\alpha_i^{-1}(0) = \mathscr{H}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Montrer que $\dim \bigcap_{i=1}^{p} \vec{\mathscr{H}}_i = \nu$, et en déduire que $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_p$ sont linéairement indépendantes. Prouver enfin que $\bigcap_{i=1}^{p} \mathscr{H}_i \neq \varnothing$.

c) Déduire de ce qui précède que $p \geqslant n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$.

Exercice 3 : On suppose $n = 2$.

a) Soit u un antidéplacement de $\mathscr{E}$. Montrer que u^2 est une translation.

b) Soit σ_i une symétrie orthogonale autour d'une droite $\mathscr{D}_i$ de $\mathscr{E}$ $(i \in \{1, 2, 3\})$, et $u = (\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^2$. Utiliser *a*) pour montrer que u commute avec σ_1 et en déduire que u est une translation de direction $\vec{\mathscr{D}}_1$.

Exercice 4 : On suppose $n = 3$. On donne trois retournements ρ_1, ρ_2, ρ_3 autour de droites respectives $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$. Montrer que, pour que $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ soit un retournement, il faut et il suffit qu'il existe une droite rencontrant orthogonalement chacune des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$.

Exercice 5 : *a*) Montrer que deux réflexions de $\mathscr{E}$ sont conjuguées dans **Is** $(\mathscr{E})$; que si $n \geqslant 2$, deux retournements de $\mathscr{E}$ sont conjugués dans **Dep** $(\mathscr{E})$.

b) Montrer que deux isométries localement vectorielles φ_1 et φ_2 de $\mathscr{E}$ sont conjuguées dans **Is** $(\mathscr{E})$ ssi $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ sont conjuguées dans $\mathbf{O}(E)$; que deux déplacements localement vectoriels sont conjugués dans **Dep** $(\mathscr{E})$ ssi leurs parties linéaires sont conjuguées dans $\mathbf{SO}(E)$.

c) On suppose $n = 3$ et $\mathscr{E}$ orienté. Pour une rotation r d'angle θ autour d'une droite dirigée par le vecteur $\vec{v}$, le nombre $\cos\theta$ ne dépend que de r. On l'appelle cosinus de r et on le note **Cos** (r).

*c*1) Pour que deux rotations r et r' de $\mathscr{E}$ soient conjuguées dans **Is** $(\mathscr{E})$, il faut et il suffit que **Cos** $(r) =$ **Cos** (r').

*c*2) Si **Cos** $(r) =$ **Cos** (r'), les rotations r et r' de $\mathscr{E}$ sont-elles conjuguées dans **Dep** $(\mathscr{E})$?

*c*3) Soit φ et φ' deux vissages de $\mathscr{E}$, de décompositions canoniques $\varphi = r \circ \tau$ et $\varphi' = r' \circ \tau'$ (où r et r' sont des rotations, et τ et τ' des translations respectivement permutables avec r et r'). On note t et t' les vecteurs de τ et τ'. Montrer que φ et φ' sont conjugués dans **Is** $(\mathscr{E})$ ssi **Cos** $(r) =$ **Cos** (r') et $\|t\| = \|t'\|$. Ces conditions étant satisfaites, est-ce que φ et φ' sont conjugués dans **Dep** $(\mathscr{E})$?

Exercice 6 : On suppose $n = 3$. Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites non coplanaires de $\mathscr{E}$. On note $\mathscr{R}_1$ (resp. $\mathscr{R}_2$) l'ensemble des rotations d'axe $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$). Soit Γ le groupe engendré par $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$ dans **Dep** $(\mathscr{E})$.

a) Soit Ω l'ensemble $\{O \in \mathscr{E} \mid \exists (A_1, A_2) \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2,\ \exists (\rho_1, \rho_2) \in \mathscr{R}_1 \times \mathscr{R}_2 \mid \rho_1(A_2) = \rho_2(A_1) = O\}$. Prouver : card $(\Omega) \geqslant 2$. On notera O_1 et O_2 deux points de Ω distincts.

b) Prouver : $\mathbf{Dep}_{O_1}(\mathscr{E}) \cup \mathbf{Dep}_{O_2}(\mathscr{E}) \subset \Gamma$. En déduire : $\forall O \in \mathscr{E}$, $\mathbf{Dep}_O(\mathscr{E}) \subset \Gamma$.

c) Prouver : $\Gamma =$ **Dep** $(\mathscr{E})$.

Exercice 7 : On suppose $n = 3$. Soit φ un vissage d'axe $\mathscr{D}$. On suppose que $\vec{\varphi} \neq \mathrm{Id}_E$. Déterminer le sous-groupe $\{\psi \in \mathbf{Dep}(\mathscr{E}) \mid \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\}$ de **Dep** $(\mathscr{E})$ (*commutant* de φ dans **Dep** $(\mathscr{E})$). Quel est le commutant de φ dans **Is** $(\mathscr{E})$?

Exercice 8 (*Le paradoxe de Banach,* d'après une adaptation de M. Wirth, professeur de Mathématiques Spéciales M' au Lycée Charlemagne) : On prend $\mathscr{E} = E = \mathbb{R}^3$ affine euclidien canonique, de base canonique $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, orienté de façon que cette base soit directe. Si A et B sont deux parties de E, on écrira A **Eq** B ssi il existe $\varphi \in$ **Dep** (E) tel que $\varphi(A) = B$, ce qui définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$; on écrira $A \approx B$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des *partages* $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_n)$ de A et B respectivement tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ A_i **Eq** B_i.

PARTIE I

a) Soit A et A' (resp. B et B') deux parties de E disjointes. Montrer : $(A \approx B$ et $A' \approx B') \Rightarrow A \cup A' \approx B \cup B'$. Prouver que $\approx$ est une relation d'équivalence entre parties de E.

b) Soit $S = \{(x, y, z) \in E \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de E, et Γ le cercle section de S par le plan d'équation $z = 0$.

*b*1) Prouver que $\Gamma \approx (\Gamma \setminus \{(1, 0, 0)\})$. (On prendra pour A l'ensemble $\{(\cos n, \sin n, 0)_{n \in \mathbb{N}}\}$.)

*b*2) Montrer : $S \approx S \setminus \{(1, 0, 0)\}$.

*b*3) Soit $B = \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$. Montrer : $B \approx B \setminus \{(1, 0, 0)\}$, et : $B \approx B \setminus \{0_E\}$.

c) Soit A, B, A' et B' des parties de E, avec $A' \subset A$ et $B' \subset B$. On suppose que $A \approx B'$ et $A' \approx B$. Montrer que $A \approx B$, en adaptant la méthode utilisée pour prouver le théorème II.3.10 du tome 1 (soit $(A_1, \ldots, A_n)$ (resp. $(B_1, \ldots, B_p)$) un partage de A (resp. de B) et une bijection $f : A \longrightarrow B'$ (resp. $g : B \longrightarrow A'$) telle que $(\forall i)$ f (resp. g) coïncide sur A_i (resp. B_j) avec au moins un déplacement. On considère $\hat{f} : A \longrightarrow B$ et $\hat{g} : B \longrightarrow A$ de mêmes graphes que f et g. Soit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\hat{g} \circ \hat{f})^{\langle n \rangle} (A \setminus A')$ et $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\hat{f} \circ \hat{g})^{\langle n \rangle} (B \setminus B')$. Utiliser $h : A \longrightarrow B$ telle que $h(x) = f(x)$ si $x \in X$ et $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in A \setminus X$).

PARTIE II

Soit les matrices $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ et soit u et v les endomorphismes de E de matrices U et V dans $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

a) Vérifier que u et v sont des rotations. Exprimer u^n et v^n si $n \in \mathbb{Z}$. On notera G le groupe engendré par u et v dans **Dep** (E).

*b*1) Prouver que les éléments de G sont : Id_E, u, et les

$$r = u^{\varepsilon_1} \circ v^{n_1} \circ u \circ v^{n_2} \circ \cdots \circ u \circ v^{n_{k-1}} \circ u \circ v^{n_k} \circ u^{\varepsilon_2} \tag{1}$$

où k décrit $\mathbb{N}^*$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ décrit $\{0, 1\}^2$ et $(n_1, \ldots, n_k)$ décrit $\{1, 2\}^k$.

*b*2) Soit $r \in G$ écrit sous la forme (1) avec $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 1$, et R sa matrice. Prouver :

$$R = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\sqrt{3} \\ a_2 & b_2 & c_2\sqrt{3} \\ a_3\sqrt{3} & b_3\sqrt{3} & c_3 \end{bmatrix}_2$$

où les a_i, b_i, c_i appartiennent à $\mathbb{Z}$ avec une parité à préciser. En déduire $r \neq \mathrm{Id}_E$, et $r \neq u$. Prouver que si $r \in G \setminus \{\mathrm{Id}_E, u\}$, l'écriture (1) de r est unique.

c) Soit G_1, G_2, G_3 le partage de G ainsi défini : $\{(v^2 \circ u)^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G_1$, $\{u \circ (v^2 \circ u)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G_2$, $\{v \circ u \circ (v^2 \circ u)^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G_3$, les autres éléments de G étant mis dans

G_1 (resp. G_2, G_3) selon que leur décomposition (1) commence à gauche par u (resp. v, v^2).

Vérifier : $G_3 = v\,G_2$; $G_2 = v\,G_1$; $G_1 = u(G_2 \cup G_3)$.

d) Soit $D = \{M \in S \mid \exists r \in G \setminus \{\mathrm{Id}_E\}, r(M) = M\}$. Prouver que D est dénombrable et stable pour tout $r \in G$.

e) Si $M \in S \setminus D$, soit $\widehat{M}$ la *G-orbite* de M. Prouver que l'application $G \longrightarrow \widehat{M}$, $r \mapsto r(M)$ est bijective. Prouver que les G-orbites $(\widehat{M})_{M \in S \setminus D}$ forment une *partition* de $S \setminus D$. L'ensemble de ces G-orbites sera noté Ω.

f) Considérons une partie T de $S \setminus D$ qui rencontre chaque $\omega \in \Omega$ suivant un singleton (on admet l'axiome du choix). On pose : $A = G_1(T) = \{r(M) \mid r \in G_1, M \in T\}$, $B = G_2(T)$ et $C = G_3(T)$. Montrer que (A, B, C) est un partage de $S \setminus D$. Puis, montrer : C **Eq** B, B **Eq** A et A **Eq** $(B \cup C)$.

PARTIE III

a) Soit S' et S'' deux sphères disjointes de rayon 1, de centres O' et O''. Soit A', B', C', D' et A'', B'', C'', D'' les transformés de A, B, C, D (construits en II) par les translations de vecteurs $\overrightarrow{O_E O'}$ et $\overrightarrow{O_E O''}$. Prouver : $(S \setminus D) \approx ((S' \setminus D') \cup (S'' \setminus D''))$.

*b*1) Prouver : $\exists \delta \in S \mid \delta \notin D$ et $-\delta \notin D$. On choisit un tel δ.

*b*2) Prouver l'existence d'une rotation ρ d'axe $\mathbb{R}\delta$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall M \in D)$ $(\forall N \in D)$ $\rho^n(M) \neq N$.

On fait choix d'une telle ρ.

c) Montrer que les ensembles $(\rho^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. Si $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho^n(D)$, montrer : U **Eq** $(U \setminus D)$. En déduire :

$$S \approx (S \setminus D), \quad \text{puis} \quad S \approx (S' \cup S'').$$

d) Soit $B' = \tilde{\mathbf{B}}(O', 1)$ et $B'' = \tilde{\mathbf{B}}(O'', 1)$.

*d*1) Prouver : $B \setminus \{0_E\} \approx (B' \setminus \{0'_E\}) \cup (B'' \setminus \{0''_E\})$. En déduire $B \approx B' \cup B''$.

*d*2) Montrer que toute union finie de boules disjointes de rayon 1 est $\approx B$.

PARTIE IV

Soit X une partie bornée d'intérieur non vide de E. Soit $r > 0$ tel que X contienne une boule fermée de rayon r.

a) Prouver qu'il existe un partage $(X_1, \ldots, X_n)$ de X tel que chaque X_i soit contenu dans une boule fermée B_i de rayon r. On fixe les X_i et les B_i ainsi.

b) Soit $(B'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des boules fermées de rayon r deux à deux disjointes. Montrer : $\exists C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B'_i \mid X \approx C$.

c) Prouver : $X \approx \tilde{\mathbf{B}}(0_E, r)$.

d) Soit Y et Z deux parties de E bornées et d'intérieur non vide. Montrer : $Y \approx Z$.

N.B. C'est en cela que réside le *paradoxe de Banach-Tarski* (1923) car il paraît invraisemblable *a priori* qu'on puisse disséquer une boule en un nombre *fini* de morceaux et réassembler ensuite ces morceaux pour obtenir deux boules de même rayon que la première (Raphaël Robinson a montré en 1947 que 5 morceaux suffisent). C'est pourtant vrai dans $\mathbb{R}^n$ dès que $n \geqslant 3$. En revanche ce paradoxe n'a pas lieu pour $n = 1$ ou $n = 2$.

Exercice 9 : On suppose $n = 3$. Soit $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E}) \setminus \mathbf{Dep}(\mathscr{E})$, non involutive, localement vectorielle avec $\nu(\varphi) = 0$. Soit ρ une rotation et s une réflexion telles que $\varphi = \rho \circ s = s \circ \rho$. Montrer d'abord que le plan $\mathscr{H}$ de s et l'axe $\mathscr{D}$ de ρ sont sécants, puis, qu'ils sont orthogonaux. En déduire : le point fixe de φ est le point commun à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$. En déduire l'existence et l'unicité du couple (ρ, s).

§ VI.3 *EXEMPLES DE GROUPES D'ISOMÉTRIES*

Exemple 1 : Sous-groupes finis de Is ($\mathscr{E}$) quand $n = 2$

$\mathscr{E}$ désigne ici un espace affine euclidien de dimension 2, d'espace directeur E. Soit G un sous-groupe fini de **Is** ($\mathscr{E}$). Alors, pour tout point $A \in \mathscr{E}$, l'isobarycentre Ω de la famille $(\varphi(A))_{\varphi \in G}$ est invariant par tout $\varphi \in G$. L'isomorphisme $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$, $\mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathbf{O}(E)$ ramène le problème à l'étude des sous-groupes finis de $\mathbf{O}(E)$. Pour simplifier, nous orienterons $\mathscr{E}$.

Soit donc G un sous-groupe fini de $\mathbf{O}(E)$; son sous-groupe $G_+ = G \cap \mathbf{SO}(E)$ est soit d'indice 2 dans G, soit égal à G. Posons $N = \text{card}\ (G_+)$. Puisque $\mathbf{SO}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{U}$, il contient un unique sous-groupe de cardinal N que nous noterons Γ_N : on sait que Γ_N **est cyclique** (cf. tome 1, théorème VI.8.4), engendré par la rotation vectorielle ρ_N d'angle orienté $\dfrac{2\pi}{N}$. Donc $G_+ = \Gamma_N$. Si $[G : G_+] = 2$, soit s_0 un élément particulier de $G \backslash G_+$: c'est une réflexion vectorielle autour d'une droite vectorielle Δ_0. On a : card $(G) = 2N$, et comme G contient les symétries orthogonales $s_k = \rho_N^k s_0 \rho_N^{-k}$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$, dont les droites de points fixes sont respectivement $\Delta_k = \rho_N^k(\Delta_0)$, on voit que $G \backslash G_+ = \{s_0, \ldots, s_{N-1}\}$.

Inversement, soit σ une réflexion vectorielle de E. Le groupe $G_{N,\sigma}$ engendré par Γ_N et σ est de cardinal $2N$, égal à $\Gamma_N \cup \{\rho_N^k \sigma \rho_N^{-k}\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$, et vérifie $G_{N,\sigma} \cap \mathbf{SO}(E) = \Gamma_N$. Tout groupe tel que $G_{N,\sigma}$ est appelé un **groupe diédral** d'ordre N. Les groupes diédraux d'ordre donné N sont tous isomorphes entre eux.

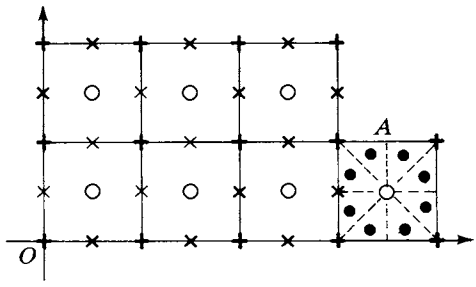
En résumé, les seuls sous-groupes finis de $\mathbf{O}(E)$ sont les groupes de rotations Γ_N $(N \in \mathbb{N}^*)$, et les groupes diédraux $(G_{N,\sigma})_{N \in \mathbb{N}^*,\ \sigma \text{ réflexion vectorielle}}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $A \in E \backslash \{0_E\}$ donné, la Γ_N-orbite $\mathscr{P}_{N,A}$ de A est l'ensemble des N sommets du polygone régulier convexe de centre 0_E à N sommets, parmi lesquels A. Il est clair que Γ_N est l'ensemble des rotations qui « conservent » ce polygone. Si Δ est la médiatrice de $\{A, \rho_N(A)\}$ $(N \geqslant 2)$, et σ la réflexion autour de Δ, le groupe diédral $G_{N,\sigma}$ n'est autre que $\mathbf{Is}_{\langle \mathscr{P}_{N,A} \rangle}$. (Pour plus de détails, cf. exercice 11 du § II.4).

Exemple 2 : Réseau canonique de $\mathbb{R}^2$

Prenons $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, muni de la structure affine naturelle. Soit $\Phi = \mathbb{Z}^2$; étudions le groupe $G = \mathbf{Is}_{\langle \Phi \rangle} =$

$\{\varphi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E}) \mid \varphi(\Phi) = \Phi\}$. Pour cela identifions $\mathscr{E}$ au plan d'Argand-Cauchy $\mathbb{C}$, ce qui nous permet d'utiliser les résultats du tome 1, § VI.10. On sait que $\mathbf{Dep}\,(\mathscr{E}) = \{\varphi_{a,b}\}_{(a,b)\in\mathbb{U}\times\mathbb{C}}$, où $\varphi_{a,b}(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; et que $\mathbf{Is}\,(\mathscr{E})\backslash\mathbf{Dep}\,(\mathscr{E}) = \{\psi_{a,b}\}_{(a,b)\in\mathbb{U}\times\mathbb{C}}$, où $\psi_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le groupe $G_+ = \mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle} = \mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle} \cap \mathbf{Dep}\,(\mathscr{E})$ est d'indice 2 dans G, car il est clair que $G\backslash G_+$ est non vide (il contient $\psi_{1,0}$). En écrivant la CNS pour que $\varphi_{a,b}(\Phi) = \Phi$ (resp. $\psi_{a,b}(\Phi) = \Phi$), on trouve immédiatement que G_+ est le groupe des $\{\varphi_{\mathrm{i}^q, k+\mathrm{i}l}\}$ où q décrit $[\![0, 3]\!]$ et (k, l) décrit $\mathbb{Z}^2$, et que $G\backslash G_+$ est l'ensemble des $\{\psi_{\mathrm{i}^q}, k + \mathrm{i}l\}$ où q parcourt $[\![0, 3]\!]$ et où (k, l) parcourt $\mathbb{Z}^2$. Désignons par C le groupe $G \cap T(\mathscr{E})$: c'est le sous-groupe de G formé des $\{\varphi_{1,k+\mathrm{i}l}\}$ où (k, l) parcourt $\mathbb{Z}^2$. Il est *distingué* dans G. En fait c'est le noyau de l'homomorphisme de groupes $G \mapsto \mathbf{O}(\mathbb{R}^2)$, $g \mapsto \vec{g}$. L'image Γ de cet homomorphisme est le groupe $\{\varphi_{1,0}, \varphi_{\mathrm{i},0}, \varphi_{-1,0}, \varphi_{-\mathrm{i},0}\,;\, \psi_{1,0}, \psi_{\mathrm{i},0}, \psi_{-1,0}, \psi_{-\mathrm{i},0}\}$, en lequel on reconnaît le *groupe du carré* (cf. tome 1, § V.7), c'est-à-dire le groupe diédral d'ordre 4 (cf. exemple 1). Le groupe quotient $G/_C$ est donc canoniquement isomorphe à Γ. De plus $\Gamma \cap \mathbf{SO}(\mathbb{R}^2) = \Gamma_+$ est le groupe cyclique de cardinal 4 engendré par $\varphi_{\mathrm{i},0}$, à savoir $\Gamma_+ = \{\varphi_{1,0}, \varphi_{\mathrm{i},0}, \varphi_{-1,0}, \varphi_{-\mathrm{i},0}\}$, et $G_+/_C \cong \Gamma_+$. Mais si l'on considère l'opération naturelle de G sur $\mathscr{E}$ (définie par $(f, M) \mapsto f(M)$) on constate que non seulement des points de $\mathbb{Z}^2$ peuvent être laissés fixes par f, mais également des points de $\mathbb{R}^2$ dont au moins l'une des coordonnées est demi-entière (par exemple $f = \psi_{1,\mathrm{i}}$ conserve tous les points de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$) ou non (par exemple $f = \psi_{\mathrm{i},0}$ conserve tous les points de la première bissectrice). Intéressons-nous plus particulièrement aux ensembles $\Theta = \left(\Phi + \frac{1}{2}\right) \cup \left(\Phi + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)$ et $\Psi = \Phi + \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$. Si $A \in \Theta$, cherchons le stabilisateur G_A de A. Prenons par exemple A d'affixe $m + \frac{1}{2} + \mathrm{i}n$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.



Points de Φ : +
Points de Ψ : ○
Points de Θ : ×
Orbite de A : •

Fig. 1.

On trouve dans G_A deux déplacements $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}} = \varphi_{1,0}$ et $\varphi_{-1,2m+1+2in}$ et deux antidéplacements $\psi_{1,2in}$ et $\psi_{-1,2m+1}$ (deux rotations et deux réflexions qui constituent le *groupe de Klein,* isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Si $A \in \Psi \cup \Phi$, on vérifie que G_A s'identifie au groupe du carré Γ. Globalement, G conserve non seulement Φ, mais aussi Ψ et Θ.

La G-orbite d'un point quelconque $A \in \mathscr{E}$ se déduit par toutes les translations de $\mathbb{Z}^2$ de sa Γ-orbite pour le groupe du carré, maille élémentaire du réseau Φ fermée et contenant le point A ; cette Γ-orbite ayant généralement 8 points (qui se réduisent à 4 si A est sur l'un des axes de symétrie du carré, où à 1 si A est le centre du carré).

Exemple 3 : Simplexes réguliers en dimension n

Appelons *simplexe régulier unité* de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 1$ toute partie $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ de $\mathscr{E}$ à $n+1$ éléments telle que $\|\overrightarrow{A_i A_j}\| = 1$ pour tous $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tels que $i \neq j$. Soit Φ un tel simplexe régulier unité de $\mathscr{E}$. Proposons-nous d'étudier le groupe $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$.

Un simplexe régulier unité est facile à construire : c'est évident pour $n = 1$. Supposons $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 2$ et supposons construit un simplexe régulier unité d'un hyperplan affine $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}$: $\{A_1, \ldots, A_n\}$ constituant une base affine de $\mathscr{H}$. Notons Ω l'isobarycentre de ces A_i et $\mathscr{D}$ la droite passant par Ω orthogonale à $\mathscr{H}$: c'est l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ équidistants de $A_1, \ldots, A_n$ et $(\forall i)\ \|\Omega\vec{A}_i\| = \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n}} < 1$. Il suffit de porter sur $\mathscr{D}$ dans chaque sens à partir de Ω la longueur $\sqrt{1 - \|\Omega A_1\|^2}$ et de choisir pour point A_{n+1} l'un des deux points ainsi construits, pour obtenir le simplexe régulier unité recherché. Le lecteur vérifiera que le rayon de l'hypersphère passant par les $n+1$ points $A_1, \ldots, A_{n+1}$ est $R_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}$ et que, par construction même, $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ est une base affine de $\mathscr{E}$ $\left(R_1 = \dfrac{1}{2}\right.$, $R_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ pour le *triangle équilatéral,* $R_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ pour le *tétraèdre régulier,* etc.).

Fixons un simplexe régulier unité $\Phi = \{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ de $\mathscr{E}$, d'isobarycentre O. alors le groupe $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Is}_O(\mathscr{E})$. Pour chaque $\varphi \in \mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$, notons σ_φ la permutation, élément de $\mathfrak{S}_{n+1}$, telle que $\varphi(A_i) = A_{\sigma_\varphi(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Il est immédiat que $\varphi \mapsto \sigma_\varphi$ est un homomorphisme de groupes, et le théorème VI.1.3 montre que *l'homomorphisme* $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle} \longrightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$, $\varphi \mapsto \sigma_\varphi$ *est un isomorphisme.*

Pour déterminer le sous-groupe $\mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$ de $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ il suffit de remarquer que si $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$, la transposition $\langle i, j\rangle$ dans $\mathfrak{S}_{n+1}$ correspond dans l'isomorphisme ci-dessus à la réflexion $s_{i,j}$ de $\mathscr{E}$ dont l'hyperplan est

l'hyperplan médiateur de $\{A_i, A_j\}$. Les $s_{i,j}$ engendrent $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$, puisque les transpositions $\langle i, j\rangle$ engendrent $\mathfrak{S}_{n+1}$. Or $\mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$ est l'ensemble des produits d'un nombre **pair** de $s_{i,j}$. Comme le groupe alterné $\mathfrak{A}_{n+1}$ est l'ensemble des produits d'un nombre pair de transpositions, il en résulte que $\mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$ correspond, dans l'isomorphisme ci-dessus, à $\mathfrak{A}_{n+1}$, et il est d'indice 2 dans $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$.

Exemple 4 : Groupe du cube en dimension 3

Soit $\mathscr{E} = E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne naturelle. Considérons le cube [1] $\Phi = \{-1, 1\}^3$ de E, de centre 0_E et proposons-nous d'étudier le groupe $G = \mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$. Comme 0_E est invariant pour tout $\varphi \in G$, on voit que G s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{O}(E)$, et que $G_+ = \mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{SO}(E)$. Comme $-\mathrm{Id}_E \in G \backslash G_+$, c'est que G_+ est d'indice 2 dans G.

Il est commode de s'intéresser à la façon dont G opère sur l'ensemble Δ des 4 *diagonales* de Φ (i.e. les 4 droites vectorielles de E qui joignent 0_E à l'un des sommets de Φ). Soit donc l'homomorphisme naturel de groupes $\delta : G \longrightarrow \mathfrak{S}_\Delta$, $\varphi \mapsto \sigma_\varphi$ dont nous recherchons le noyau et l'image. Posons $\Delta = \{D_i\}_{1 \leq i \leq 4}$, avec $D_1 = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$, $D_2 = \mathbb{R} \cdot (1, 1, -1)$, $D_3 = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1)$ et $D_4 = \mathbb{R} \cdot (1, -1, -1)$.

Montrons d'abord que $\delta|_{G_+}$ est surjectif, autrement dit que toute transposition dans $\mathfrak{S}_\Delta$ est atteinte. Or par exemple, soit ρ le retournement vectoriel autour de la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 0)$: il est manifeste que $\rho \in G_+$, et que σ_ρ est la transposition $\langle D_1, D_2\rangle$, et il en va de même pour les autres transpositions dans $\mathfrak{S}_\Delta$.

Montrons ensuite que $\mathrm{Ker}\,(\delta) = \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$. En effet, si $\varphi \in \mathrm{Ker}\,(\delta)$, chaque $v \in \Phi$ est vecteur propre de φ, donc φ est une involution orthogonale vectorielle de E. Comme Φ engendre le $\mathbb{R}$-ev E et qu'aucune des D_i n'est, évidemment, orthogonale aux trois autres, cette involution ne peut être que Id_E ou $-\mathrm{Id}_E$. Et il est clair que $\{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\} \subset \mathrm{Ker}\,(\delta)$. Comme $-\mathrm{Id}_E \notin \mathbf{SO}(E)$, on voit que $\mathrm{Ker}\,(\delta|_{G_+}) = \{\mathrm{Id}_E\}$, i.e. que $\delta|_{G_+} : G_+ \longrightarrow \mathfrak{S}_\Delta$ est un *isomorphisme de groupes* (ce qui prouve que G_+ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$, et en particulier que $\mathrm{card}\,(G_+) = 24$). Comme G_+ est un sous-groupe distingué de G d'indice 2, il en résulte que $\mathrm{card}\,(G) = 48$. Enfin $\Gamma = \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$ est le centre de G, et l'application $\Gamma \times G_+ \longrightarrow G$, $(s, \varphi) \mapsto s\varphi$ *est un isomorphisme du groupe produit* $\Gamma \times G_+$ *sur* G.

---

[1] Par commodité, nous appelons ici *cube* Φ l'ensemble des 8 sommets indiqués. Habituellement on appelle plutôt cube l'enveloppe convexe $\hat{\Phi}$, de Φ, mais il est immédiat que $\mathbf{Is}_{\langle\hat{\Phi}\rangle} = \mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$.

L'étude de G est ainsi ramenée à celle de G_+ isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et le lecteur pourra se reporter au tome 1, à la fin du § V.7, ou aux exercices ci-dessous pour une étude plus détaillée.

Exemple 5 : Dodécaèdre régulier

Reprenons $\mathscr{E} = E = \mathbb{R}^3$ affine euclidien canonique, orienté par commodité de sorte que la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit directe. Les coordonnées génériques dans $\mathscr{B}$ seront notées (x_1, x_2, x_3).

Bien que le dodécaèdre régulier figure parmi les cinq solides platoniciens, ni son existence, ni sa construction ne sont évidentes. En utilisant l'idée, déjà connue dans l'Antiquité, qu'avec des systèmes de 8 sommets bien choisis parmi les 20 sommets du dodécaèdre, on peut former 5 cubes, nous allons construire un dodécaèdre régulier en calculant les coordonnées de ses 20 sommets (cf. fig. 2) ; soit a un réel > 0. Commençons par placer le pentagone régulier $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ du plan $x_3 = a$, d'isobarycentre $(0, 0, a)$, dont le sommet A_1 a pour coordonnées $(1, 0, a)$, et soit $\{A_i'\}_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ le symétrique de ce pentagone par rapport à 0_E. Les coordonnées de A_2 sont $\left(\alpha = \cos\frac{2\pi}{5}, \beta = \sin\frac{2\pi}{5}, a\right)$, celles de $A_5 : (\alpha, -\beta, a)$, celle de $A_3 : \left(\alpha' = \cos\frac{4\pi}{5}, \beta' = \sin\frac{4\pi}{5}, a\right)$ et celles de $A_4 : (\alpha', -\beta', a)$. On sait (cf. l'exemple 1 du § X.6 du tome 1) que $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\beta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\alpha' = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\beta' = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Il est facile de choisir a pour que A_5 soit l'image de A_2 dans la rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $\overrightarrow{0_E A_1}$: en décomposant ρ en produit des deux réflexions autour des plans (e_1, e_3) et $(0_E A_1 A_5)$, il suffit que ces deux plans forment un angle de $\pi/3$, ce qui donne immédiatement $\boxed{a = 1 + \alpha} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Une fois trouvé a, déterminons $B_1 = \rho(A_5)$, i.e. symétrique de A_2 pour le plan $(0_E A_1 A_5)$ d'équation $-a x_1 + \beta x_2 + x_3 = 0$, ce qui donne comme coordonnées de $B_1 : (2\alpha + 1, 0, \alpha)$. On peut alors construire le pentagone $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ du plan $x_3 = \alpha$, d'isobarycentre $(0, 0, \alpha)$, dont B_1 est un sommet, ainsi que son symétrique $\{B_i'\}_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ par rapport à 0_E. Les coordonnées de tous ces points se calculent immédiatement. Les voici : $B_2 : (\alpha(2\alpha + 1) = \frac{1}{2}, \beta(2\alpha + 1) = \beta + \beta', \alpha)$; $B_3 : \left(\alpha' - \frac{1}{2}, \beta, \alpha\right)$; $B_4 : \left(\alpha' - \frac{1}{2}, -\beta, \alpha\right)$; $B_5 : \left(\frac{1}{2}, -\beta - \beta', \alpha\right)$; $B_1' : (-2\alpha - 1, 0, -\alpha)$; $B_2' : \left(\frac{-1}{2}, -\beta - \beta', -\alpha\right)$; $B_3' : \left(-\alpha' + \frac{1}{2}, -\beta, -\alpha\right)$; $B_4' : \left(-\alpha' + \frac{1}{2}, \beta, -\alpha\right)$; $B_5' : \left(-\frac{1}{2}, \beta + \beta', -\alpha\right)$. Il est maintenant facile de vérifier [1] que les points

[1] Cf. exercice 6.

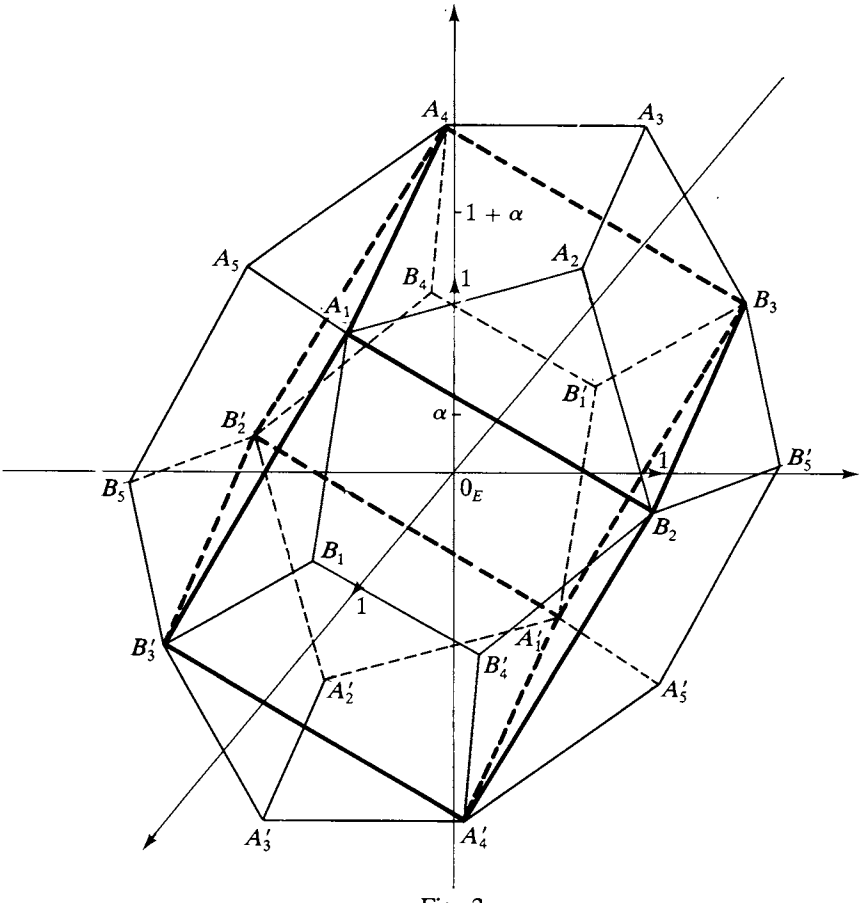


Fig. 2.

A_1, B_1, B'_4, B_2 et A_2 sont coplanaires et que ce sont les sommets d'un pentagone régulier.

Par rotation de $\frac{2\,k\pi}{5}$ autour de la droite $(0_E\,;e_3)$, on obtient 4 autres pentagones réguliers : $\{A_2, B_2, B'_5, B_3, A_3\}$, $\{A_3, B_3, B'_1, B_4, A_4\}$, $\{A_4, B_4, B'_2, B_5, A_5\}$ et $\{A_5, B_5, B'_3, B_1, A_1\}$, et 5 autres par symétrie par rapport à 0_E. Les dix facettes enveloppes convexes de ces pentagones forment avec celles de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ et $\{A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5\}$ la frontière de l'enveloppe convexe $\widehat{\Phi}$ de l'ensemble Φ des 20 sommets du dodécaèdre régulier de centre 0_E.

Une fois Φ construit, étudions les groupes $G = \mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ $(= \mathbf{Is}_{\langle\widehat{\Phi}\rangle})$ et $G_+ = \mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$, en remarquant que $[G : G_+] = 2$ car $-\mathrm{Id}_E \in G \backslash G_+$. On peut s'assurer que $\rho \in G_+$, que $-\mathrm{Id}_E \in G$ et que la rotation r d'angle $2\,\pi/5$ autour de e_3 appartient à G_+. Mais le plus remarquable, et c'est facile à vérifier puisqu'on connaît les coordonnées des 20 sommets, c'est l'existence de cinq cubes dont l'ensemble des sommets est inclus dans Φ : ce sont

$\mathscr{C}_1 = \{A_1, B_2, B_3, A_4, A'_1, B'_2, B'_3, A'_4\}$ et les $\mathscr{C}_k = r^{k-1}(\mathscr{C}_1)$, avec $1 \leqslant k \leqslant 5$. Chaque point de Φ est commun à exactement deux des $\mathscr{C}_i$. *L'intersection de deux des $\mathscr{C}_i$ est formée de deux points antipodes,* constituant l'unique *diagonale* (cf. exemple 4) commune à ces deux cubes. L'union de toutes les diagonales des $\mathscr{C}_i$ est l'ensemble des 10 droites vectorielles passant par un point de Φ.

Considérons alors l'action naturelle de G_+ sur l'ensemble $\mathscr{K} = (\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4, \mathscr{C}_5)$, définie par $(\varphi, \mathscr{C}) \mapsto \varphi(\mathscr{C})$: elle correspond à un homomorphisme de groupes $\xi : G_+ \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathscr{K}}$. Cette action est *fidèle* (i.e. ξ est *injective*) car si $\xi(\varphi) = \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}$, on a : $\varphi(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3) = \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3$, donc $\varphi(\{A_1, A'_1\}) = \{A_1, A'_1\}$, d'où $(\forall P \in \Phi)\ \varphi(P) \in \{P, -P\}$. En raisonnant comme à l'exemple 4, on en déduit que $\varphi \in \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$, et comme $\varphi \in \mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$, on a : $\varphi = \mathrm{Id}_E$, et ξ est bien injective.

L'image de ξ contient le 3-cycle $c = \langle \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_5, \mathscr{C}_4 \rangle$ (effet de la rotation ρ) et le 5-cycle $\gamma = \langle \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_5, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_4 \rangle$ (effet de la rotation r^2). Comme c et γ engendrent le groupe alterné $\mathfrak{A}_{\mathscr{K}}$, l'image de ξ contient $\mathfrak{A}_{\mathscr{K}}$. Mais cette image ne contient *aucune transposition,* car si par exemple $\varphi \in G_+$ laisse fixes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, il doit laisser invariantes les trois diagonales $\{A_1, A'_1\}$, $\{B_3, B'_3\}$ et $\{B_4, B'_4\}$, d'où l'on conclut que $\varphi = \mathrm{Id}_E$ comme ci-dessus. Finalement $\mathfrak{A}_{\mathscr{K}} \subset \xi(G_+) \subsetneq \mathfrak{S}_{\mathscr{K}}$, d'où l'on conclut : $\xi(G_+) = \mathfrak{S}_{\mathscr{K}}$. En particulier card $(G_+) = 60$.

En notant, comme à l'exemple 4, $\Gamma = \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$, on voit que l'application $\Gamma \times G_+ \longrightarrow G$, $(\sigma, \varphi) \mapsto \sigma\varphi$ est *un isomorphisme de groupes,* ce qui prouve que G, de cardinal 120, est isomorphe au groupe produit $\mathbb{Z}/_2\,\mathbb{Z} \times \mathfrak{A}_5$.

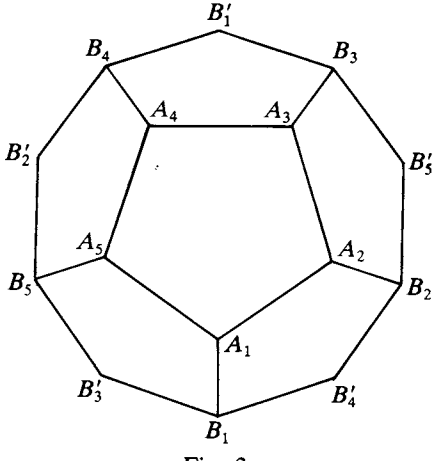


Fig. 3.

Exercice 1 : Montrer que le volume n-dimensionnel du simplexe régulier unité de l'exemple 3 est $V_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2}\, n!}$. Le comparer à celui de la boule circonscrite (cf. tome 3, § VIII.3, exemple 2).

Exercice 2 : Montrer que le volume du dodécaèdre régulier de l'exemple 5 est égal à

$20\,\alpha'^2\beta$, que l'on pourra écrire sous la forme $\dfrac{(5+\sqrt{5})^{5/2}}{8\sqrt{2}}$, ou encore $\frac{5}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 et $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{E}$ non coplanaires. On note $\Phi = \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$. La perpendiculaire commune $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ (cf. § VI.5) rencontre $\mathscr{D}_1$ en H_1 et $\mathscr{D}_2$ en H_2. Soit O le milieu de H_1H_2.

a) Prouver que tout $\varphi \in \mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ laisse O et $\{H_1, H_2\}$ invariants.

b) Montrer que $\mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, et que $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle} = \mathbf{Dep}_{\langle\Phi\rangle}$.

Exercice 4 : On reprend les notations de l'exemple 4 (groupe du cube).

a) Enumérer et décrire les rotations éléments de G_+ (préciser l'axe et l'angle). Enumérer de même les éléments de G.

b) On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et $\mathscr{V}_i$ la droite $\mathbb{R}\,e_i$ ($i \in [\![1,3]\!]$). On fait opérer de la façon naturelle le groupe G (resp. G_+) sur l'ensemble $\mathscr{V} = \{\mathscr{V}_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$, ce qui correspond à un homomorphisme de groupes $\Theta : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathscr{V}}$. Prouver que $\Theta|_{G_+}$ est surjectif ; que Ker (Θ) est abélien, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$; que Ker $(\Theta|_{G_+})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

c) Quels sont les sous-groupes distingués de G ? Quels sont, en particulier, les sous-groupes d'indice 2 ?

Exercice 5 : On reprend les notations de l'exemple 5.

a) Enumérer et décrire les éléments de G_+, puis ceux de G.

b) Déterminer les sous-groupes distingués de G (on rappelle que $\mathfrak{A}_5$ est un groupe simple (cf. tome 1, exercice 15 du § V.7).

c) Soit G_i le stabilisateur du cube $\mathscr{C}_i$ dans G ($i \in [\![1,5]\!]$). Montrer que card $(G_i) = 24$; que $G_i \cap G_+ \cong \mathfrak{A}_4$ (en fait, $G_i \cap G_+$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{C}_i\rangle}$) ; enfin que G_i n'est pas isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

d) Montrer que $G_i \cap G_+$ est isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/C$, où C désigne le sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ égal à $\{I_2, -I_2\}$, et que $G_i \not\cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Exercice 6 : On reprend les notations de l'exemple 5.

a) Vérifier avec un minimum de calculs que les 5 points A_1, B_1, B'_4, B_2 et A_2 sont coplanaires (penser aux droites parallèles) et que ce sont les sommets d'un *pentagone régulier*.

b) Expliciter un vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal au plan de ce pentagone et montrer que son isobarycentre est $\Omega = 0_E + (\alpha+1)\vec{v}$.

Réponse : $\vec{v} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\,e_1 + \sin\dfrac{\pi}{5}\,e_2 + \dfrac{1}{2}\,e_3\right)$.

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni de sa structure affine canonique, et $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ un repère affine de E tel que $(\overrightarrow{OA_i} \mid \overrightarrow{OA_j}) = h$ (où $O = 0_E$) soit indépendant de (i,j) pour $i \neq j$ et que $\|\overrightarrow{OA_i}\| = 1$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$.

a) Montrer que O est l'isobarycentre des A_i, et en déduire $h = \dfrac{-1}{n}$.

b) Montrer que pour $i \neq j$ l'hyperplan médiateur de (A_i, A_j) contient tous les A_k ($k \notin \{i,j\}$) et en déduire que, si $\Phi = \{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$, $\mathbf{Is}_{\langle\Phi\rangle}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_\Phi$ et ne laisse stable aucun sous-espace non trivial de E.

c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $(x_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ les coordonnées de A_i ($1 \leqslant i \leqslant n+1$). Montrer que $\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^2$ est une constante indépendante de j que l'on calculera, et que $\sum_{(i,k)\in[\![1,n]\!]^2} x_{i,j}\,x_{k,j} = 0$ quel que soit j.

Exercice 8 : *Groupes finis de rotations dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$. On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, muni de sa structure affine. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On donne un sous-groupe fini G de $\mathbf{SO}(\mathbb{R}^3)$, que l'on fait opérer sur S par l'action naturelle.

a) Montrer que si $g \in \mathbf{SO}(\mathbb{R}^3)\setminus\{\mathrm{Id}\}$, il y a exactement deux points de S laissés fixes par g.

b) Soit Ω l'ensemble des G-orbites de S. Vérifier que les cardinaux des stabilisateurs $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ sont, lorsque x parcourt une même G-orbite $\omega \in \Omega$, tous égaux à un même entier, noté ν_ω.

Déduire alors de *a*) la relation : $$2\,\mathrm{card}\,(G) - 2 = \sum_{\omega \in \Omega} (\nu_\omega - 1)\,\mathrm{card}\,(\omega).$$

Indication : Dénombrer de deux manières différentes l'ensemble Γ des couples $(g, x) \in G \times S$ tels que $g \neq \mathrm{Id}$ et $g(x) = x$ (cf. aussi tome 1, corollaire 3 du théorème V.6.2).

c) Classer toutes les possibilités.

§ VI.4 *ANGLES*

Angles orientés de vecteurs dans un plan euclidien

Soit E un plan vectoriel euclidien **orienté,** $\mathscr{C}$ le cercle unité. Pour $(x, y) \in \mathscr{C}^2$, il existe un élément et un seul $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$ tel que $\varphi(x) = y$ (cf. corollaire 2 du théorème VI.1.1). Si on note $\varphi_{x,y}$ cette rotation vectorielle, l'ensemble des déterminations de l'angle orienté de $\varphi_{x,y}$ forme une classe de $\mathbb{R}$ modulo le sous-groupe additif $2\pi\mathbb{Z}$ (cf. § II.4).

DÉFINITION VI.4.1

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté. Pour tous vecteurs $x \in E\setminus\{0\}$ et $y \in E\setminus\{0\}$, on appelle ***détermination de l'angle orienté de x et y*** *toute détermination de l'angle orienté de la rotation $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$ telle que $\varphi\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = \frac{1}{\|y\|}y$. La classe de $\mathbb{R}$ mod $(2\pi\mathbb{Z})$ égale à l'ensemble de ces déterminations est appelée* ***angle orienté de x et y mod (2π),*** *et sera notée $\widehat{x, y}$.*

Pour toutes demi-droites vectorielle D et D' de E, on appelle ***angle orienté de D et D', et on notera*** *$\widehat{D, D'}$, la classe c de $\mathbb{R}$ mod $(2\pi\mathbb{Z})$ égale à $\widehat{x, x'}$ pour tout $x \in D\setminus\{0_E\}$ et tout $x' \in D\setminus\{0_E\}$. Les déterminations de $\widehat{D, D'}$ sont appelées* ***déterminations de l'angle orienté des demi-droites D et D'.***

Avec ces notations, pour exprimer qu'un réel θ est une détermination de l'angle orienté de x et y (resp. de Det D'), on écrira : $\theta \in \widehat{x, y}$ (resp. $\theta \in \widehat{D, D'}$) ou $\widehat{x, y} = \theta \bmod (2\pi)$ (resp. $\widehat{D, D'} = \theta \bmod (2\pi)$).

On se souvient (cf. tome 1, § VI.9) que l'ensemble $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ se structure naturellement en groupe additif appelé **groupe quotient** de $\mathbb{R}$ par $2\pi\mathbb{Z}$ tel

que l'application canonique $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ soit un homomorphisme de groupes, d'où les règles de calcul ci-dessous :

PROPOSITION VI.4.1

Dans un plan vectoriel euclidien orienté E, soit des vecteurs non nuls $x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y$ $(n \geqslant 2)$. On a :

(1) $\widehat{\overrightarrow{x_1, x_n}} = \widehat{\overrightarrow{x_1, x_2}} + \cdots \widehat{\overrightarrow{x_{n-1}, x_n}}$ *(relation de Chasles)*

(2) $\widehat{\overrightarrow{x, x}} = 0$ *(élément nul de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$)*

(3) $\widehat{\overrightarrow{x, y}} + \widehat{\overrightarrow{y, x}} = 0$.

Démonstration :

Soit $u_i = \dfrac{1}{\|x_i\|} x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \quad u = \dfrac{1}{\|x\|} x, \quad v = \dfrac{1}{\|y\|} y.$

Pour tous vecteurs w et w' de norme 1 dans E, notons $\varphi_{w, w'}$ l'élément de $\mathbf{SO}(E)$ qui envoie w sur w'. On a : $\varphi_{x, x} = \mathrm{Id}_E$, et

$$\varphi_{x_1, x_n} = \varphi_{x_{n-1}, x_n} \circ \varphi_{x_{n-2}, x_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{x_1, x_2}. \tag{4}$$

D'autre part l'application $\mathbf{SO}(E) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui associe à toute $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$ son angle orienté est un isomorphisme de groupes (cf. § II.4). Donc (1) découle de (4). La relation (2) exprime que l'angle orienté de Id_E est 0. Enfin (3) découle de (1) et (2). ■

En revenant aux nombres réels, (1) signifie que, si $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $\widehat{\overrightarrow{x_i, x_{i+1}}} = \theta_i \bmod (2\pi)$, alors $\widehat{\overrightarrow{x_1, x_n}} = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \bmod (2\pi)$; (2) signifie que $\widehat{\overrightarrow{x, x}} = 0 \bmod (2\pi)$, et (3) que $\widehat{\overrightarrow{x, y}} + \widehat{\overrightarrow{y, x}} = 0 \bmod (2\pi)$. De même pour les angles orientés de demi-droites.

Remarque 1 : Si on change l'orientation de E en son opposée, toutes les déterminations d'angles orientés doivent être changées en leurs *opposées*.

Problème de la division d'un angle de demi-droites

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté. On donne deux demi-droites vectorielles D et D' et un entier $n \geqslant 2$. *Cherchons les demi-droites vectorielles Δ telles que $n \,.\, \widehat{\overrightarrow{D, \Delta}} = \widehat{\overrightarrow{D, D'}}$.*

Notant encore $\mathscr{C}$ le cercle unité de E, il est facile de voir que pour tout $x \in \mathscr{C}$, l'application $\mathbf{SO}(E) \longrightarrow \mathscr{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ est bijective. Donc, en notant $\mathscr{D}_+$ l'ensemble des demi-droites vectorielles de E, et en désignant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, par r_θ la rotation de E dont θ est un angle orienté, l'application

$\xi_D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{D}_+$, $\theta \mapsto r_\theta(D)$ est surjective, et vérifie $r_{\theta_2}(r_{\theta_1}(D)) = r_{\theta_1+\theta_2}(D)$ pour tous réels θ_1 et θ_2. De plus, $\forall \Delta \in \mathscr{D}_+$, l'ensemble $\xi_D^{-1}(\Delta)$ est une classe de $\mathbb{R}$ mod (2π) qui n'est autre que $\widehat{\overrightarrow{D, \Delta}}$.

Soit alors $\alpha \in \widehat{\overrightarrow{D, D'}}$ et soit $\Delta = r_\theta(D) \in \mathscr{D}_+$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. La relation $n \,.\, \widehat{\overrightarrow{D, \Delta}} = \widehat{\overrightarrow{D, D'}}$ est équivalente à $n\theta = \alpha$ mod (2π). Or l'homomorphisme de groupes $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, $c \mapsto n \,.\, c$ est surjectif, de noyau $\frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}/_{2\pi\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Donc l'ensemble des $c \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ tels que $n \,.\, c = \widehat{\overrightarrow{D, D'}}$ possède exactement n éléments, qui sont évidemment les classes mod (2π) des réels $\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On en déduit qu'*il y a exactement n demi-droites vectorielles Δ telles que $n \,.\, \widehat{\overrightarrow{D, \Delta}} = \widehat{\overrightarrow{D, D'}}$* : ce sont les demi-droites $(r_{\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}}(D))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

En particulier, si $n = 2$, les deux demi-droites vectorielles solutions sont $r_{\frac{\alpha}{2}}(D)$ et $r_{\frac{\alpha}{2}+\pi}(D)$, qui sont opposées, car, $r_\pi = -\mathrm{Id}_E$. Leur réunion est donc une droite vectorielle. En outre ces deux demi-droites vérifient également
$2 \,.\, \widehat{\overrightarrow{D', \Delta}} = \widehat{\overrightarrow{D', D}}$. La droite obtenue est appelée **bissectrice** du couple (D, D'). C'est aussi la bissectrice du couple (D', D) et elle ne dépend pas du choix de l'orientation de E. On peut encore la caractériser comme étant l'union des deux demi-droites vectorielles L telles que $\widehat{\overrightarrow{L, D}} + \widehat{\overrightarrow{L, D'}} = 0$.

Angles orientés de droites d'un plan euclidien

Notons maintenant $\mathscr{G}_1(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E. Introduisons l'homomorphisme canonique de groupes additifs $\delta : \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$, qui associe à tout élément $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ l'élément $\theta + \pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ (ce qui est bien cohérent). Pour toute rotation $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$, appelons **angle orienté mod (π)** de φ l'élément $\delta(c_\varphi)$ de $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$, où c_φ est l'angle orienté de φ. Le noyau de δ est le groupe quotient $\pi\mathbb{Z}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, isomorphe à $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$; le générateur de $\pi\mathbb{Z}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ est π mod (2π). Donc *pour tout élément d de $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$, il existe exactement deux rotations dont l'angle orienté* mod (π) *est d ; ces deux rotations sont « opposées ».*

On peut alors faire opérer le groupe $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ sur $\mathscr{G}_1(E)$: à tout $d \in \mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ et à toute droite $V \in \mathscr{G}_1(E)$, on associe la droite $d * V$ égale à $\varphi(V)$ pour toute rotation $\varphi \in \mathbf{SO}(E)$ d'angle mod (π) égal à d.

PROPOSITION VI.4.2

|| *L'action de $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ sur $\mathscr{G}_1(E)$ définie ci-dessus est* ***fidèle*** *et* ***transitive.***

Démonstration :

Soit $(V, V') \in (\mathscr{G}_1(E))^2$. Il s'agit de voir qu'il y a un et un seul élément $d \in \mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ tel que $d * V = V'$. Il existe déjà une rotation φ telle que $\varphi(V) = V'$. Ensuite l'étude des angles de demi-droites vectorielles montre que les seules rotations ψ telles que $\psi(V) = V'$ sont φ et $(-\mathrm{Id}_E) \circ \varphi = -\varphi$, d'où la conclusion. ■

DÉFINITION VI.4.2

Soit V et V', deux droites vectorielles de E. On appelle ***angle orienté de V et V'****, et nous le noterons $\widehat{\overrightarrow{V, V'}}$, l'élément $d \in \mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ tel que $d * V = V'$. Tout réel $\theta \in \widehat{\overrightarrow{V, V'}}$ est appelé une* ***détermination*** *de $\widehat{\overrightarrow{V, V'}}$: on écrit alors également $\widehat{\overrightarrow{V, V'}} = \theta \bmod (\pi)$.*

On déduit immédiatement de la proposition VI.4.1 :

PROPOSITION VI.4.3

Soit $V, W, V_1, \ldots, V_n$ $(n \geqslant 2)$ des droites vectorielles de E. On a :

(1′) $\widehat{\overrightarrow{V_1, V_n}} = \widehat{\overrightarrow{V_1, V_2}} + \cdots + \widehat{\overrightarrow{V_{n-1}, V_n}}$ *(relation de Chasles)*

(2′) $\widehat{\overrightarrow{V, V}} = 0$ *(élément nul de $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$)*

(3′) $\widehat{\overrightarrow{V, W}} + \widehat{\overrightarrow{W, V}} = 0$.

La relation (1′) signifie : si $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\widehat{\overrightarrow{V_i, V_{i+1}}} = \theta_i \bmod (\pi)$, alors $\widehat{\overrightarrow{V_1, V_n}} = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \bmod (\pi)$; et ainsi des autres.

Remarque 2 : Si on change l'orientation de E en l'orientation opposée, les déterminations d'angles orientés de droites vectorielles sont à changer en leurs *opposées*.

Problème de la division d'un angle de droites

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté. On donne deux droites vectorielles V et V' de E et un entier $n \geqslant 2$. *Cherchons les droites vectorielles W telles que $n \,.\, \widehat{\overrightarrow{V, W}} = \widehat{\overrightarrow{V, V'}}$.*

Posons $\alpha = \widehat{\overrightarrow{V, V'}}$, et pour $W \in \mathscr{G}_1(E)$, $\theta = \widehat{\overrightarrow{V, W}}$. Le problème se ramène à trouver θ tel que $n\theta = \alpha \bmod (\pi)$. Or l'homomorphisme de groupes $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$, $d \mapsto n \,.\, d$ est surjectif, de noyau $\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}/_{\pi\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Donc l'ensemble des $d \in \mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ tels que $n \,.\, d = \widehat{\overrightarrow{V, V'}}$ possède exactement n éléments, qui sont les classes mod (π) des nombres $\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. En conséquence, *il y a exactement n droites*

vectorielles qui répondent à la question : ce sont les droites $(r_{\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}}(V))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$. Elles ne dépendent pas du choix de l'orientation de E.

En particulier, pour $n = 2$, les deux droites obtenues $r_{\alpha/2}(V)$ et $r_{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}(V)$ sont *orthogonales*. Ce sont les droites W telles que $\widehat{\overrightarrow{V, W}} + \widehat{\overrightarrow{V', W}} = 0$. On les appelle **les bissectrices** du couple (V, V'). Ce sont aussi les bissectrices du couple (D', D), et elles ne dépendent pas du choix de l'orientation de E.

Angles dans un plan affine euclidien orienté

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté, d'espace directeur E. Par définition, l'angle orienté de deux demi-droites affines $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{E}$ (resp. de deux droites affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ de $\mathscr{E}$) est l'angle orienté mod (2π) des demi-droites vectorielles D et D' directrices de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ (resp. l'angle orienté mod (π) des droites vectorielles V et V' directrices de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$) et sera noté $\widehat{\mathscr{D}, \mathscr{D}'}$ (resp. $\widehat{\mathscr{V}, \mathscr{V}'}$). Les règles de calcul sur les angles orientés dans $\mathscr{E}$ se ramènent donc à celles dans E.

On définit en particulier la **bissectrice** du couple $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ quand $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux demi-droites affines de même origine Ω : c'est la droite affine passant par Ω dirigée par la bissectrice de $(\vec{\mathscr{D}}, \vec{\mathscr{D}}')$. Deux droites affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ sécantes en Ω admettent **deux bissectrices** orthogonales entre elles, dirigées par les bissectrices de $(\vec{\mathscr{V}}, \vec{\mathscr{V}}')$.

Coordonnées polaires

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, d'espace directeur E. Munissons-le d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j})$, et orientons $\mathscr{E}$ de façon que $\mathscr{R}$ soit direct. On associe à ce repère l'application $\mathscr{P}_{\mathscr{R}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(r, \theta) \mapsto O + r\mathbf{u}(\theta)$, où $\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$. Comme $\mathbf{u} : \mathbb{R} \longrightarrow E$, $\theta \mapsto \mathbf{u}(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, l'application $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus elle est surjective. Si $M \in \mathscr{E} \setminus \{O\}$, l'image réciproque $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}^{-1}(M)$ est l'ensemble des couples

$$\{(\|\overrightarrow{OM}\|, \theta)\}_{\theta \in \mathbf{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}}} \cup \{(-\|\overrightarrow{OM}\|, \theta + \pi)\}_{\theta \in \mathbf{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}}}.$$

Par définition, si $M \in \mathscr{E}$, tout élément de $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}^{-1}(M)$ est appelé un **système de coordonnées polaires** de M relativement à $\mathscr{R}$; si $M = O$, on a : $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}^{-1}(O) = \{0\} \times \mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $M \in \mathscr{E} \setminus \{O\}$, si $\theta_0 \in \mathbf{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}}$, les systèmes de coordonnées polaires de M dans $\mathscr{R}$ sont les couples $(\|\overrightarrow{OM}\|, \theta_0 + 2k\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(-\|\overrightarrow{OM}\|, \theta_0 + \pi + 2k\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, on appelle **ensemble d'équation polaire $f(r, \theta) = 0$ relativement à $\mathscr{R}$** l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ dont *au moins un* système (r_0, θ_0) de coordonnées polaires dans $\mathscr{R}$ vérifie : $(r_0, \theta_0) \in A$ et $f(r_0, \theta_0) = 0$.

Exemple 1 : *Equation polaire d'une droite.*

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$: l'ensemble d'équation polaire $\theta = \theta_0$ dans $\mathscr{R}$ est la droite passant par O dirigée par $\mathbf{u}(\theta_0)$.

Soit $\mathscr{D}$ une droite affine du plan $\mathscr{E}$ ne passant pas par O, d'équation $\varphi(M) = 0$, où $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction affine non constante. Soit $f = \vec{\varphi}$, et $\mathbf{V}$ le vecteur tel que $f = (\mathbf{V} \mid .)$. Posant $\mathbf{v} = \dfrac{1}{\|\mathbf{V}\|}\mathbf{V}$, et $p = -\dfrac{\varphi(O)}{\|\mathbf{V}\|}$, la droite $\mathscr{D}$ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation $(\mathbf{v} \mid \overrightarrow{OM}) - p = 0$. Si $\omega \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\omega)$, en appelant (x, y) les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$, l'équation de $\mathscr{D}$ prend la forme

$$\boxed{x \cos \omega + y \sin \omega = p}.$$

Une telle équation de $\mathscr{D}$ est dite *normale* (ou équation d'Euler). Donc *une équation polaire* de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{R}$ est $r(\cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega) = p$, ou :

$$\boxed{r \cos(\theta - \omega) = p}.$$

Inversement, si A, B, C sont des réels tels que $(A, B) \neq (0, 0)$ et $C \neq 0$, l'équation polaire $r = \dfrac{C}{A \cos \theta + B \sin \theta}$ représente la droite d'équation cartésienne $Ax + By - C = 0$, qui admet pour vecteur unitaire normal $\mathbf{u}(\omega)$, où ω vérifie $\cos \omega = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\sin \omega = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; cette équation polaire devenant alors $r \cos(\theta - \omega) = p$, avec $p = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Angles de vecteurs, écarts angulaires de droites

Considérons maintenant un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. Pour tous vecteurs unitaires $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E, on sait que $(\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) \in [-1, 1]$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). On peut donc définir l'**angle arithmétique** du couple $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ comme étant le réel $\theta = \operatorname{Arc}\cos((\mathbf{u} \mid \mathbf{v}))$, et on note $\theta = \widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$. Il est clair que $\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \in [0, \pi]$ et que $\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}}$. D'après le théorème II.1.1, on a : $\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}} = 0$ ssi $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ et $\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}} = \pi$ ssi $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

Pour deux vecteurs quelconques, éléments de $E\setminus\{0\}$, on définit **l'angle arithmétique** du couple (x, y) comme étant $\widehat{\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y}$. On le note $\widehat{x, y}$. Il vaut 0 ssi x et y sont $\mathbb{R}_+^*$-colinéaires ; il vaut π ssi x et y sont $\mathbb{R}_-^*$-colinéaires. Il vaut $\pi/2$ ssi $(x \mid y) = 0$.

Remarque 3 : Lorsque $n = 2$ et que E est orienté, on a : $\widehat{x, y} = \widehat{x, y} \bmod (2\pi)$ ou $\widehat{x, y} = -\widehat{x, y} \bmod (2\pi)$.

Revenons au cas général, où $n \geqslant 2$ est quelconque, et donnons-nous *deux droites vectorielles* D et D' de E. Il existe un unique réel s tel que l'on ait, pour tous vecteurs *unitaires* $\mathbf{u} \in D$ et $\mathbf{u}' \in D'$, $s = |(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}')|$. Le réel Arc cos s est appelé **écart angulaire** du couple (D, D'), et noté $\widehat{D, D'}$. On a donc : $\widehat{D, D'} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\widehat{D, D'} = \widehat{D', D}$. De plus $\widehat{D, D'} = 0$ ssi $D = D'$ et $\widehat{D, D'} = \frac{\pi}{2}$ ssi D et D' sont orthogonales.

PROPOSITION VI.4.4

Pour toutes droites vectorielles D, D', D'' de E, on a :

$$\widehat{D, D''} \leqslant \widehat{D, D'} + \widehat{D', D''}. \tag{5}$$

En conséquence, l'écart angulaire est une **distance** *sur l'ensemble $\mathcal{G}_1(E)$ des droites vectorielles de E.*

Démonstration :

Posons $a = \widehat{D', D''}$, $b = \widehat{D'', D}$, $c = \widehat{D, D'}$. Choisissons des vecteurs unitaires $\mathbf{u} \in D$, $\mathbf{u}' \in D'$, $\mathbf{u}'' \in D''$ tels que $(\mathbf{u}' \mid \mathbf{u}'') = \cos a$ et $(\mathbf{u}'' \mid \mathbf{u}) = \cos b$. Soit H l'hyperplan vectoriel $D''^{\perp}$, et x et x' les projections orthogonales de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sur H. Si $x = 0$ ou $x' = 0$, (5) est vérifiée. Sinon, posons $v = \frac{1}{\|x\|}x$, $v' = \frac{1}{\|x'\|}x'$, et $\alpha = \widehat{v, v'}$. On a : $\mathbf{u} = v \sin b + \mathbf{u}'' \cos b$, $\mathbf{u}' = v' \sin a + \mathbf{u}'' \cos a$, d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}') &= \cos a \cos b + (v \mid v') \sin a \sin b = \\ &= \cos a \cos b + \cos \alpha \sin a \sin b\end{aligned}}\,. \tag{6}$$

Or, $\sin a \sin b \in \mathbb{R}_+$, d'où $(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}') \geqslant \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$. De plus, $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $a + b \in [0, \pi]$. Si $(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}') \geqslant 0$, alors $(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}') = \cos c$, d'où $\cos c \geqslant \cos(a + b)$, d'où $c \leqslant a + b$. Si $(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}') < 0$, alors $\cos c > (\mathbf{u} \mid \mathbf{u}') \geqslant \cos(a + b)$, d'où *a fortiori* $c \leqslant a + b$. ■

Remarque 4 : Lorsque $n = 3$, la relation (6) est appelée *formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.*

Ecarts angulaires entre certains sous-espaces

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 3$.

DÉFINITION VI.4.3

a) *Soit D une droite vectorielle de E et soit F un sous-*$\mathbb{R}$*-ev de E distinct de $\{0_E\}$ et de E. Si $D \perp F$ on dit que* ***l'écart angulaire*** *entre D et F est $\frac{\pi}{2}$. Sinon, on appelle* ***écart angulaire*** *entre D et F l'écart angulaire de D et de sa projection orthogonale sur F, et on le note $\widehat{D, F}$.*

b) *Soit H un hyperplan vectoriel de E et soit F un sous-*$\mathbb{R}$*-ev de E distinct de $\{0_E\}$ et de E. Si $F \subset H$ on dit que* ***l'écart angulaire*** *entre F et H est 0. Sinon, on appelle* ***écart angulaire*** *entre F et H l'écart angulaire de la droite vectorielle $D = (F \cap H)^{\perp} \cap F$ avec H, et on le note $\widehat{F, H}$.*

Avec les notations de a), on a : $\widehat{D, F} = 0$ ssi $D \subset F$ et $\widehat{D, F} = \frac{\pi}{2}$ ssi $D \perp F$. De plus, si $D \not\perp F$, le théorème II.2.4 montre que $\widehat{D, F}$ est le *minimum* des écarts angulaires $\widehat{D, D'}$ lorsque D' parcourt l'ensemble des droites vectorielles de F, ce minimum n'étant obtenu que pour $D' =$ projection orthogonale de D sur F. Avec les notations de b), on a : $\widehat{F, H} = 0$ ssi $F \subset H$. Si $F \not\subset H$:

$$\widehat{F, H} + \widehat{F, H^{\perp}} = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Donc, pour que $\widehat{F, H} = \frac{\pi}{2}$, il faut et il suffit que $H^{\perp} \subset F$, i.e. que F et H soient perpendiculaires. Enfin, si F est aussi un hyperplan, (7) montre que $\widehat{F, H} = \widehat{H, F} = \widehat{F^{\perp}, H^{\perp}}$.

On étend ces notions d'écarts angulaires aux sous-espaces affines d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ en utilisant leurs espaces directeurs : $\widehat{\mathscr{V}, \mathscr{V}'} = \widehat{\vec{\mathscr{V}}, \vec{\mathscr{V}}'}$ chaque fois que ce dernier est défini.

Exercice 1 : Soit trois droites vectorielles D, D', D'' d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geqslant 3$. Montrer que si $\widehat{D, D''} = \widehat{D, D'} + \widehat{D', D''}$, alors D, D' et D'' sont coplanaires. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 : Soit A, B, C 3 points non alignés d'un plan affine euclidien. Montrer que les points d'intersection avec la droite $\mathscr{D}(B, C)$ des bissectrices des droites $\mathscr{D}(A, B)$ et $\mathscr{D}(A, C)$ « partagent le segment $[B, C]$ dans le rapport des longueurs des côtés $[A, B]$ et $[A, C]$ ». Discuter.

Indication : Si $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont unitaires, les directions des bissectrices de deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dirigées par $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont données par $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Exercice 3 : Soit D_1, D_2, D_3 trois droites vectorielles non coplanaires d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. On pose $a = \widehat{D_2, D_3}$, $b = \widehat{D_3, D_1}$, $c = \widehat{D_1, D_2}$; puis on note A l'écart angulaire entre les plans (D_1, D_2) et (D_1, D_3), B l'écart angulaire entre les plans (D_2, D_3) et (D_2, D_1) et C l'écart angulaire entre les plans (D_3, D_1) et (D_3, D_2). Prouver la relation $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin c}$.

Exercice 4 (Angles d'Euler) : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 orienté dans lequel on a choisi deux repères orthonormaux directs de même origine $\mathscr{R}_0 = (O\,;\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ et $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire d'une droite vectorielle commune aux deux plans $(O, \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0)$ et $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

a) Soit r_1 la rotation d'axe $\mathbf{k}_0$ qui applique $\mathbf{i}_0$ sur $\mathbf{u}$, et ψ son angle. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}_0}(r_1) = M_1$.

b) Soit r_2 la rotation d'axe $\mathbf{u}$ qui applique $\mathbf{k}_0$ sur $\mathbf{k}$, et θ son angle. On pose $\mathbf{v} = \mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{u}$, de sorte que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_0)$ est une base directe de E. Calculer la matrice M_2 de r_2 dans cette base.

c) Soit r_3 la rotation d'axe $\mathbf{k}$ qui applique $\mathbf{u}$ sur $\mathbf{i}$, et φ son angle.

On choisit $\mathbf{w}$ pour que $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k})$ soit une base orthonormale directe de E. Calculer la matrice M_3 de r_3 dans cette base.

d) Montrer que M_1 est la matrice de r_1 dans $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_0)$, que M_2 est la matrice de M_2 dans $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k})$ et que M_3 est la matrice de r_3 dans $\mathscr{R}$.

e) Soit r la rotation unique qui transforme $\mathscr{R}_0$ en $\mathscr{R}$. Prouver que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}_0}(r) = M_1 M_2 M_3$ et la calculer ainsi que son inverse.

N.B. Les angles ψ, θ, φ (ou angles d'Euler du repère $\mathscr{R}$ relativement à $\mathscr{R}_0$) sont appelés respectivement angle de *précession*, angle de *nutation*, et angle de *rotation propre*.

Exercice 5 : Expliquer pourquoi on ne peut pas *paver* l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ avec des tétraèdres réguliers.

§ VI.5 *DISTANCES, DROITES ET PLANS*

Dans ce §, nous considérons un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ d'espace directeur E et de dimension $n \geqslant 2$.

Distance d'un point à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $\mathscr{E}$, d'équation $\varphi(M) = 0$, où $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est affine non constante. Soit $f = \vec{\varphi}$ et $\mathbf{V}$ le vecteur élément de E tel que $f = (\mathbf{V} \mid .)$. Le vecteur $\mathbf{V}$ dirige $\vec{\mathscr{H}}^{\perp}$. On sait que les seules fonctions affines $\psi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\psi^{-1}(0) = \mathscr{H}$ sont les $(\lambda\varphi)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$: cette propriété équivaut au fait que $\mathscr{H}^{\perp}$ est de dimension 1. Il y a donc exactement deux fonctions affines $\psi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui définissent $\mathscr{H}$ et qui correspondent à un

vecteur *unitaire :* ce sont $\psi_1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{V}\|}\varphi$ et $\psi_2 = -\psi_1$. Les équations : $\psi_1(M) = 0$ et : $\psi_2(M) = 0$ de $\mathscr{H}$ sont appelées les **équations normales** de $\mathscr{H}$. Choisissons donc une équation normale $\psi(M) = 0$ de $\mathscr{H}$, correspondant au vecteur unitaire $\boldsymbol{v} \in E$, et soit M_0 un point de $\mathscr{E}$. On a :

$$(1) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad \psi(M) = \psi(M_0) + (\boldsymbol{v} \mid \overrightarrow{M_0M}) .$$

Notons H la projection orthogonale de M_0 sur $\mathscr{H}$ (cf. fig. 1).

On déduit de (1) :

$$(\boldsymbol{v} \mid \overrightarrow{HM_0}) = \psi(M_0) ,$$

ce qui signifie :

$$(2) \qquad \boxed{\overrightarrow{HM_0} = \psi(M_0)\,\boldsymbol{v}} .$$

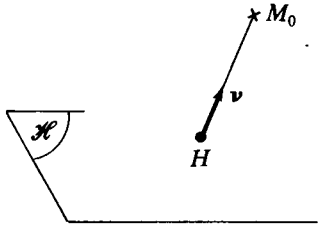


Fig. 1.

Autrement dit, pour tout $M_0 \in \mathscr{E}$, $\psi(M_0)$ est la *mesure algébrique* de $\overrightarrow{HM_0}$ sur $\boldsymbol{v}$. En particulier la distance $\|\overrightarrow{HM_0}\|$ de M_0 à $\mathscr{H}$ n'est autre que $|\psi(M_0)|$.

Si $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_n)$ est un repère *orthonormal* de $\mathscr{E}$, en notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du point générique $M \in \mathscr{E}$, on sait (cf. § V.3) qu'il existe $(u_1, \ldots, u_n, r) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ tel que

$$(3) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad \varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right) + r .$$

Puisque $\mathscr{R}$ est orthonormal, d'après (3), $\vec{\varphi} = (\mathbf{V} \mid .)$, où $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. Une équation normale $\psi(M) = 0$ de $\mathscr{H}$ sera donc donnée dans $\mathscr{R}$ par :

$$(4)\quad (\forall M \in \mathscr{E}) \qquad \boxed{\psi(M) = \frac{1}{\|\mathbf{V}\|}\varphi(M) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right) + r\right]}\ .$$

Exemple 1 : *Points équidistants de deux hyperplans.*

Soit $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ deux hyperplans de $\mathscr{E}$ *distincts* d'équations *normales* respectives $\psi_1(M) = 0$ et $\psi_2(M) = 0$ correspondant aux vecteurs *unitaires* $\boldsymbol{\nu}_1 \in \vec{\mathscr{H}}_1^{\perp}$, $\boldsymbol{\nu}_2 \in \vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}$. D'après (2), l'ensemble $\mathscr{L}$ des points $M \in \mathscr{E}$ qui sont à égale distance de $\mathscr{H}_1$ et de $\mathscr{H}_2$ est défini par :

$$(5)\qquad \mathscr{L} = \{M \in \mathscr{E} \mid \psi_1^2(M) = \psi_2^2(M)\}\text{, i.e.}$$

$$(5')\qquad \mathscr{L} = \{M \in \mathscr{E} \mid (\psi_1(M) - \psi_2(M))(\psi_1(M) + \psi_2(M)) = 0\}.$$

Si $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ ne sont pas parallèles, i.e. si $\boldsymbol{\nu}_1$ et $\boldsymbol{\nu}_2$ sont linéairement indépendants, $\mathscr{L}$ est donc la réunion de deux hyperplans d'équations respectives $(\psi_1 - \psi_2)(M) = 0$ et $(\psi_1 + \psi_2)(M) = 0$, contenant $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2$, appelés **hyperplans bissecteurs** de $\{\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\}$.

Si $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont parallèles, i.e. si $\boldsymbol{\nu}_1 = \varepsilon\boldsymbol{\nu}_2$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$), $\mathscr{L}$ est l'hyperplan d'équation $(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)(M) = 0$, lieu des milieux des couples $(A_1, A_2) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$.

Dans le cas $n = 2$, et où $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont deux droites de $\mathscr{E}$ orienté, sécantes en O, notons, pour tout $M \in \mathscr{E}\setminus\{O\}$, $d_i(M)$ la distance de M à $\mathscr{H}_i$ et $\theta_i(M)$ une détermination de $\widehat{\mathrm{Dr}\,(O, M), \mathscr{H}_i}$ mod (π). On a $|\sin\theta_i(M)| = \dfrac{d_i(M)}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ $(i \in \{1, 2\})$ et $\widehat{\mathrm{Dr}\,(O, M), \mathscr{H}_1} \neq \widehat{\mathrm{Dr}\,(O, M), \mathscr{H}_2}$, d'où il résulte que $\mathscr{L}\setminus\{O\}$ est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}\setminus\{O\}$ tels que $\widehat{\mathrm{Dr}\,(O, M), \mathscr{H}_1} + \widehat{\mathrm{Dr}\,(O, M), \mathscr{H}_2} = 0$, autrement dit que $\mathscr{L}$ *est ici l'union des bissectrices* de $(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$.

Distance d'un point à un sous-espace affine

Supposons $\dim(\mathscr{E}) \geqslant 3$ et soit $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$. Etant donné un point $M_0 \in \mathscr{E}$, proposons-nous de calculer la distance de M_0 à $\mathscr{V}$, que nous noterons $d(M_0, \mathscr{V})$. Supposons d'abord $\mathscr{V}$ défini par l'un de ses repères affines $(A\ ;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. En utilisant la structure vectorielle d'origine A dans $\mathscr{E}$ et les notations des déterminants de Gram (cf. fin du § II.3), on obtient immédiatement :

$$(6)\qquad d^2(M_0, \mathscr{V}) = \frac{G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \overrightarrow{AM_0})}{G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)}\ .$$

Exemple 2 : *Distance d'un point à une droite.*

Si $p = 1$, la formule (6) devient :

$$d^2(M_0, \mathscr{V}) = \frac{1}{\|\varepsilon_1\|^2}\left(\|\varepsilon_1\|^2\|\overrightarrow{AM_0}\|^2 - (\varepsilon_1 \mid \overrightarrow{AM_0})^2\right). \tag{7}$$

Un cas particulier remarquable est celui où $n = 3$: dans ce cas, si l'on oriente $\mathscr{E}$, (7) se simplifie par utilisation du produit vectoriel et de *l'identité de Lagrange* (formule (3) du § II.5), et donne alors :

$$d^2(M_0, \mathscr{V}) = \frac{1}{\|\varepsilon_1\|^2}\|\varepsilon_1 \wedge \overrightarrow{AM_0}\|^2 \tag{8}$$

formule qui devient évidente avec l'aide d'un dessin.

Supposons maintenant $\mathscr{V}$ défini par des équations affines $\varphi_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$, avec $q = n - p$, telles que les parties linéaires $f_i = \vec{\varphi}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ soient linéairement indépendantes. Notons $\mathbf{V}_i$ le vecteur tel que $f_i = (\mathbf{V}_i \mid .)$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ et cherchons à exprimer $d^2(M_0, \mathscr{V})$ en fonction des φ_i et des $\mathbf{V}_i$. Pour cela considérons un point $A \in \mathscr{V}$, et soit $\mathscr{W}$ le sous-espace affine passant par A supplémentaire orthogonal à $\mathscr{V}$. Par le théorème de Pythagore, $d^2(M_0, \mathscr{V}) + d^2(M_0, \mathscr{W}) = \|\overrightarrow{AM_0}\|^2$. Or, $(A\,;\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q)$ est un repère affine de $\mathscr{W}$, d'où (cf. (6))
$d^2(M_0, \mathscr{W}) = \dfrac{G(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q, \overrightarrow{AM_0})}{G(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q)}$. Notons Γ la matrice $[(\mathbf{V}_i \mid \mathbf{V}_j)]_{(i,j) \in [\![1,q]\!]^2}$, et $g = \det(\Gamma) = G(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q)$. De ce qui précède, on déduit :

$$d^2(M_0, \mathscr{V}) = \frac{1}{g}\left[g\|\overrightarrow{AM_0}\|^2 - G(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q, \overrightarrow{AM_0})\right].$$

Il reste à trouver une formule où ne figure pas le point $A \in \mathscr{V}$. Pour cela, on remarque que $G(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q, \overrightarrow{AM_0}) = \det(S_1)$, avec

$$S_1 = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma & \begin{matrix}(\mathbf{V}_1 \mid \overrightarrow{AM_0}) \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_q \mid \overrightarrow{AM_0})\end{matrix} \\ \hline (\overrightarrow{AM_0} \mid \mathbf{V}_1) \ldots (\overrightarrow{AM_0} \mid \mathbf{V}_q) & \|\overrightarrow{AM_0}\|^2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Gamma & \begin{matrix}\varphi_1(M_0) \\ \vdots \\ \varphi_q(M_0)\end{matrix} \\ \hline \varphi_1(M_0) \ldots \varphi_q(M_0) & \|\overrightarrow{AM_0}\|^2 \end{array}\right].$$

En développant det (S_1) suivant la dernière colonne, on obtient :

$$G(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_q, \overrightarrow{AM_0}) = g \left\|\overrightarrow{AM_0}\right\|^2 + \det(S),$$

où

$$S = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma & \begin{matrix}\varphi_1(M_0)\\ \vdots \\ \varphi_q(M_0)\end{matrix} \\ \hline \varphi_1(M_0) \ldots \varphi_q(M_0) & 0 \end{array}\right], \quad \text{d'où} \quad d^2(M_0, \mathscr{V}) = \frac{-\det(S)}{g}.$$

Il est enfin facile de vérifier que, si l'on note $\gamma = [\gamma_{ij}]$ la matrice complémentaire $\tilde{\Gamma}$ de Γ, on a : $\det(S) = -\sum_{(i,j) \in [\![1,q]\!]^2} \gamma_{ij}\, \varphi_i(M_0)\, \varphi_j(M_0)$, ce qui mène à l'expression :

$$(9) \qquad \boxed{d^2(M_0, \mathscr{V}) = \frac{1}{g} \sum_{(i,j) \in [\![1,q]\!]^2} \gamma_{ij}\, \varphi_i(M_0)\, \varphi_j(M_0)}.$$

Perpendiculaire commune à deux droites en dimension 3

Supposons $\dim(\mathscr{E}) = 3$ et donnons-nous deux droites affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ de $\mathscr{E}$ *non parallèles*. Il existe alors une et une seule droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ qui rencontre orthogonalement à la fois $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$: c'est la droite dirigée par $D = (\vec{\mathscr{V}} \cup \vec{\mathscr{V}}')^{\perp}$ commune au plan passant par $\mathscr{V}$ parallèle à D et au plan passant par $\mathscr{V}'$ parallèle à D. Cette *sécante orthogonale commune* à $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ est traditionnellement appelée *la « perpendiculaire commune »* à $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$. Soit H et H' les points où $\mathscr{D}$ rencontre $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$. Il est clair que $\|\overrightarrow{HH'}\| = \min_{(M,M') \in \mathscr{V} \times \mathscr{V}'} (\|\overrightarrow{MM'}\|)$, et que (H, H') est le seul couple qui réalise ce minimum. En conséquence, $\|\overrightarrow{HH'}\|$ est appelée *plus courte distance* de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ (en fait, c'est la distance des ensembles $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ dans $\mathscr{E}$).

Supposons $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ données respectivement par un de leurs repères affines $(A\,;\mathbf{V})$ et $(A'\,;\mathbf{V}')$. Proposons-nous de déterminer $d = \|\overrightarrow{HH'}\|$, ainsi que les points H et H'. Pour cela, orientons $\mathscr{E}$. On a :

$$[\mathbf{V}, \mathbf{V}', \overrightarrow{AA'}] = [\mathbf{V}, \mathbf{V}', \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}] = [\mathbf{V}, \mathbf{V}', \overrightarrow{HH'}].$$

Puisque $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{U} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$ sont colinéaires (car $\vec{U}$ dirige $D = \vec{\mathscr{D}}$), on a : $\|\overrightarrow{HH'}\| \times \|\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'\| = |[\mathbf{V}, \mathbf{V}', \overrightarrow{HH'}]|$, et par suite

$$(10) \qquad \boxed{d = \|\overrightarrow{HH'}\| = \frac{|[\mathbf{V}, \mathbf{V}', \overrightarrow{AA'}]|}{\|\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'\|}}.$$

On détermine H comme intersection de $\mathscr{V}$ avec le plan passant par $\mathscr{V}'$ et parallèle à D. De même pour H'.

Voici pour le même problème une deuxième méthode, aussi élégante : on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \mapsto \|\overrightarrow{M_\lambda M'_\mu}\|^2$, où $M_\lambda = A \dotplus \lambda \mathbf{V}$ et $M'_\mu = A' \dotplus \mu \mathbf{V}'$. Elle est polynomiale de degré 2 et admet un unique minimum global, atteint pour $M_\lambda = H$ et $M'_\mu = H'$. Donc, en le couple (λ_0, μ_0) qui réalise ce minimum, on doit avoir $\dfrac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) = \dfrac{\partial g}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) = 0$. Comme

$$g(\lambda, \mu) = \|\mathbf{V}\|^2 \lambda^2 - 2\lambda\mu(\mathbf{V} \mid \mathbf{V}') + \mu^2 \|\mathbf{V}'\|^2 - 2(\overrightarrow{AA'} \mid \mathbf{V})\lambda + \\ + 2(\overrightarrow{AA'} \mid \mathbf{V}')\mu + \|\overrightarrow{AA'}\|^2,$$

le système $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \lambda} = 0, \dfrac{\partial g}{\partial \mu} = 0\right)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \|\mathbf{V}\|^2 \lambda - (\vec{\mathbf{V}} \mid \vec{\mathbf{V}}')\mu = (\overrightarrow{AA'} \mid \mathbf{V}) \\ -(\mathbf{V} \mid \mathbf{V}')\lambda + \|\vec{\mathbf{V}}'\|^2 \mu = -(\overrightarrow{AA'} \mid \mathbf{V}') \end{cases}$$

Il est linéaire, et de déterminant $\|\mathbf{V}\|^2 \|\mathbf{V}'\|^2 - (\mathbf{V} \mid \mathbf{V}')^2 > 0$ (car $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ sont linéairement indépendants), donc possède une solution unique qui ne peut être que (λ_0, μ_0), d'où H et H' très rapidement.

Gerbes quadratiques en dimension 2

Soit E un plan vectoriel euclidien muni de sa structure affine naturelle. On donne une forme quadratique non nulle f sur E, et on s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{G} = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$, i.e. au *cône isotrope* de f, appelé ici *gerbe quadratique d'équation* $f = 0$. Notons u l'opérateur symétrique de E associé à f, et soit $\chi_u(\chi) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ son polynôme caractéristique (qui est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$). On sait que u admet une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de vecteurs propres. Choisissons une telle base $\mathscr{B}$ de façon que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Alors $\mathscr{G}$ est l'ensemble des $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ tels que

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0 . \tag{11}$$

Si f est *elliptique* (cf. § I.5, exemple 1), i.e. si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, alors $\mathscr{G} = \{0_E\}$.

Si f est *parabolique*, i.e. $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, alors $\mathscr{G}$ est une droite vectorielle.

Si f est *hyperbolique*, i.e. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, alors (11) montre que $\mathscr{G}$ est l'union des deux droites vectorielles D_ε d'équations $x_2 = \varepsilon \sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\, x_1$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) dans $\mathscr{B}$. Dans ce cas, on déduit de (11) que *les droites*

propres $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$ *de u sont les bissectrices* de D_1 et D_{-1}. Calculons l'écart angulaire $\theta = \widehat{D_{-1}, D_1}$. L'équation de D_ε dans $\mathscr{B}$ montre que $-\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, d'où (puisque $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) :

$$\sin^2 \theta = \frac{-4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = \frac{-4 \det(u)}{(\operatorname{Tr}(u))^2 - 4 \det(u)},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\theta = \operatorname{Arc}\sin\left(2\sqrt{\frac{\det(u)}{4\det(u) - (\operatorname{Tr}(u))^2}}\right)}. \tag{12}$$

En particulier, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ssi $\operatorname{Tr}(u) = 0$, i.e. $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Dans chacun des trois cas, on peut déterminer l'union U des droites propres de u, qui sont appelées *directions principales* de f : orientons E pour pouvoir utiliser le produit mixte associé. Soit $x \in E$; on a : $x \in U$ ssi $[x, u(x)] = 0$, d'où l'équation de U :

$$\boxed{[x, u(x)] = 0}. \tag{13}$$

Si f est *hyperbolique,* (13) fournit donc la gerbe quadratique formée par les bissectrices des droites D_1 et D_{-1}.

Si f est *parabolique,* on vérifie que (13) fournit l'union de la droite $\operatorname{Sing}(f)$ (égale alors à $\mathscr{G}$) et de son orthogonale.

Généralement f est donnée par son équation, ou sa matrice, dans une base orthonormale $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de E. Désignons par t_1, t_2 les coordonnées génériques. Alors, en posant $\delta = ac - b^2 = \operatorname{Discr}_{\mathscr{C}}(f)$, (12) et (13) donnent :

$$\theta = \operatorname{Arc}\sin\left(2\sqrt{\frac{\delta}{4\delta - (a+c)^2}}\right), \quad \text{avec } \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{vmatrix} t_1 & at_1 + bt_2 \\ t_2 & bt_1 + ct_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{bt_1^2 + (c-a)t_1t_2 - bt_2^2 = 0}. \tag{15}$$

Remarquons que la forme quadratique trouvée en (15) est nulle ssi $b = 0$ et $a = c$, i.e. ssi $\lambda_1 = \lambda_2$, ou encore ssi u est proportionnelle à la forme quadratique $x \mapsto \|x\|^2$ sur E. C'est le cas où $U = E$.

Si f est *elliptique* et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, U est encore l'union de deux droites orthogonales.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 3$. On donne deux entiers > 0 p et q tels que $p + q \leqslant n - 1$, et deux sous-espaces affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$, de dimensions p et q, tels que $\vec{\mathscr{V}} \cap \vec{\mathscr{W}} = \{0\}$. Soit $(A\,;\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ un repère affine de $\mathscr{V}$ et $(B\,; e_1, \ldots, e_q)$ un repère affine de $\mathscr{W}$.

a) Prouver qu'il existe une unique droite affine $\mathscr{D}$ qui rencontre à la fois $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ et telle que $\vec{\mathscr{D}} \subset (\vec{\mathscr{V}} \oplus \vec{\mathscr{W}})^{\perp}$. On notera H le point commun à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{V}$, et K le point commun à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{W}$.

b) Montrer que $\|\overrightarrow{HK}\| = \underset{(M,N) \in \mathscr{V} \in \mathscr{W}}{\mathrm{Min}} \|\overrightarrow{MN}\|$, et que (H, K) est le seul élément de $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ réalisant ce minimum.

c) Démontrer : $\|\overrightarrow{HK}\|^2 = \dfrac{G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, e_1, \ldots, e_q, \overrightarrow{AB})}{G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, e_1, \ldots, e_q)}$ (cf. exercice 2 du § II.5) et indiquer deux méthodes permettant de déterminer H et K en fonction de $(A\,;\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ et de $(B\,; e_1, \ldots, e_q)$.

d) Que deviennent les résultats ci-dessus si on suppose $\vec{\mathscr{V}} \cap \vec{\mathscr{W}} \neq \{0\}$?

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale $\mathscr{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ dans laquelle (x, y) désignent les coordonnées génériques. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x + \mathrm{i}y)^n = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$, avec $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ réels. Montrer que, si a et b sont donnés dans $\mathbb{R}$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$), la gerbe d'équation $aP(x, y) + bQ(x, y) = 0$ est « *équiangulaire* ».

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On donne une droite affine $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}$ comme intersection de deux plans non parallèles d'équations respectives $ux + vy + wz + h = 0$ et $u'x + v'y + w'z + h' = 0$. Calculer la distance de l'origine O à la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 4 : Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$, et M un point quelconque de $\mathscr{E}$ distinct de A, B, C. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite symétrique de Dr (A, M) par rapport aux bissectrices de (Dr (A, B), Dr (A, C)). On définit de même $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$. Montrer que les trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ sont concourantes ou parallèles.

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On donne la droite $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{V}'$) définie par les équations

$$\begin{cases} x - y = z + 2 \\ 3x + 4 = 2z - y \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \begin{cases} 2x - 4y + z - 1 = 0 \\ 3x - 6y + 4z + 3 = 0 \end{cases}\right).$$

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ ainsi que leur plus courte distance.

§ VI.6 *SIMILITUDES*

Dans ce §, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et d'espace directeur E. Nous renvoyons au § III.4 pour la définition et les propriétés élémentaires des groupes $\vec{\mathscr{S}}(E)$ (groupe des similitudes de E) et $\vec{\mathscr{S}}_+(E)$ (groupe des similitudes directes de E). Ces similitudes seront souvent qualifiées de *vectorielles* pour les distinguer de celles que nous allons maintenant définir.

Notons L l'homomorphisme de groupes : $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$. Les ensembles $L^{-1}(\vec{\mathscr{S}}(E))$ et $L^{-1}(\vec{\mathscr{S}}_+(E))$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, que nous noterons $\mathscr{S}\mathrm{A}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{S}\mathrm{A}_+(\mathscr{E})$.

DÉFINITION VI.6.1

Avec les notations ci-dessus, les sous-groupes $\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}\mathrm{A}_+(\mathcal{E})$ de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ sont respectivement appelés **groupe des similitudes** *(affines) de $\mathcal{E}$ et* **groupe des similitudes directes** *(affines) de $\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{S}\mathrm{A}_+(\mathcal{E})$) sont appelés* **similitudes** *(affines) (resp.* **similitudes directes** *(affines)) de $\mathcal{E}$; si $\varphi \in \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$, on appelle* **rapport** *de φ le rapport de $\vec{\varphi}$.*

Compte tenu de la surjectivité de L, les propriétés vues au § III.4 entraînent immédiatement les suivantes :

- $\mathbf{Is}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$, à savoir l'ensemble des similitudes affines de $\mathcal{E}$ *de rapport* 1.
- $\mathcal{S}\mathrm{A}_+(\mathcal{E}) \lhd \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$ et $[\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E}) : \mathcal{S}\mathrm{A}_+(\mathcal{E})] = 2$.
- $\mathcal{H}_T(\mathcal{E}) \lhd \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$ et le groupe quotient $\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})/_{\mathcal{H}_T(\mathcal{E})}$ est isomorphe à $\vec{\mathcal{S}}(E)/_{\mathcal{H}(E)}$ (notations du § III.4).
- Notons $\mathcal{H}_{T_+}(\mathcal{E})$ le sous-groupe de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ formé des translations et des homothéties de rapport > 0. On a : $\mathcal{H}_{T_+}(\mathcal{E}) \lhd \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$, et le groupe quotient $\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})/_{\mathcal{H}_{T_+}(\mathcal{E})}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{O}(E)$.
- $\mathbf{Is}(\mathcal{E}) \lhd \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})/_{\mathbf{Is}(\mathcal{E})} \cong \vec{\mathcal{S}}(E)/_{\mathbf{O}(E)} \cong \mathbb{R}_+^*$.
- $\mathbf{Dep}(\mathcal{E}) \lhd \mathcal{S}\mathrm{A}_+(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}\mathrm{A}_+(\mathcal{E})/_{\mathbf{Dep}(\mathcal{E})} \cong \mathbb{R}_+^*$.

Nous nous bornons à deux résultats simples :

THÉORÈME VI.6.1

Avec les notations de la définition VI.6.1, *soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application. Pour que φ soit une* **similitude de rapport λ,** *il faut et il suffit que :*

$$(1) \qquad \forall (M, N) \in \mathcal{E}^2 \quad \|\overrightarrow{\varphi(M)\,\varphi(N)}\| = \lambda \, \|\overrightarrow{MN}\| \, .$$

Démonstration :

La condition (1) est nécessaire d'après le théorème III.4.1. Réciproquement, supposons (1) satisfaite. Soit $\psi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$. L'application $\xi = \psi \circ \varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est alors *isométrique*, donc appartient à $\mathbf{Is}(\mathcal{E})$ (cf. théorème VI.1.2). D'où $\varphi = \psi^{-1} \circ \xi \in \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$, et le rapport de φ est bien λ. ■

THÉORÈME VI.6.2

Avec les notations de la définition VI.6.1, *soit $\varphi \in \mathcal{S}\mathrm{A}(\mathcal{E})$, de rapport $\lambda \neq 1$. Alors φ admet un unique point fixe.*

Démonstration :

1re méthode : Quitte à remplacer φ par $\varphi^{\langle -1 \rangle}$, on peut supposer que $0 < \lambda < 1$. Comme φ vérifie (1), le résultat découle alors du théorème du point fixe (cf. tome 2, théorème XI.2.5).

2e méthode : Soit $f = \vec{\varphi}$. Pour établir le résultat, il suffit de prouver que 1 n'est pas valeur propre de f. Or $\vec{\varphi}$ est une similitude vectorielle de rapport λ, d'où $(\forall x \in E)\ \|\vec{\varphi}(x)\| = \lambda \|x\|$, d'où l'on déduit que toute valeur propre ρ de $\vec{\varphi}$ doit vérifier $|\rho| = \lambda$, ce qui entraîne en particulier $\rho \neq 1$. ■

Désignons par O l'unique point fixe de φ, appelé *centre de la similitude* φ, et soit H l'homothétie (ne dépendant que de φ) de centre O et de rapport λ. Alors $H^{\langle -1 \rangle} \circ \varphi$ et $\varphi \circ H^{\langle -1 \rangle}$ sont des isométries (ne dépendant que de φ) admettant O pour point fixe. Elles sont égales car $H \circ \varphi \circ H^{\langle -1 \rangle} = \varphi$ est une conséquence de : $\forall M \in \mathscr{E},\ \lambda \vec{\varphi}\left(\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OM}\right) = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM})$; notant $\psi = H^{\langle -1 \rangle} \circ \varphi$, on a donc : $\varphi = H \circ \psi = \psi \circ H$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathscr{S}\mathrm{A}(\mathscr{E})$ une similitude de rapport $\lambda \neq 1$.

a) On suppose $\dim(\mathscr{E}) = 2$. Montrer que φ est soit le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre, soit le produit d'une réflexion pour une droite $\mathscr{D}$ et d'une homothétie centrée sur cette droite (préciser dans ce dernier cas le degré d'arbitraire dont on dispose).

b) On suppose $\dim(\mathscr{E}) = 3$. Montrer que φ est le produit d'une rotation et d'une homothétie centrée sur l'axe de rotation ; a-t-on unicité ?

c) Que peut-on dire si $\dim(\mathscr{E}) = 4$?

Exercice 2 : On donne dans un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ quatre points distincts deux à deux A, B ; A', B' et on suppose que $\overrightarrow{AB}$ n'est pas équipollent à $\overrightarrow{A'B'}$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe affine transformant (A, B) en (A', B'). Donner une construction simple du centre de cette similitude.

§ VI.7 *CERCLES, SPHÈRES*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, *de dimension* $n \geqslant 2$, fixé tout au long de ce § VI.7. Pour tout couple $(I, R) \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}_+$, l'ensemble $\Gamma_{I,R} = \{M \in \mathscr{E} \mid \|\overrightarrow{IM}\| = R\}$ est appelé **sphère euclidienne de centre *I* et de rayon *R*** dans $\mathscr{E}$. Pour $n = 2$, $\Gamma_{I,R}$ est appelé le **cercle** de centre I, de rayon R ; pour $n = 3$, $\Gamma_{I,R}$ est appelée la **sphère** (ordinaire) de centre I et de rayon R. Dans tous les cas, l'ensemble $\{M \in \mathscr{E} \mid \|\overrightarrow{IM}\| < R\}$ (resp. $\|\overrightarrow{IM}\| > R$) est appelé **intérieur** (resp. **extérieur**) de $\Gamma_{I,R}$. Fixons $(I, R) \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}_+$. On lui associe la fonction polynomiale

$$(1) \qquad \gamma_{I,R} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \mapsto \|\overrightarrow{IM}\|^2 - R^2.$$

DÉFINITION VI.7.1

Avec les notations ci-dessus, la fonction polynomiale $\gamma_{I,R}$ définie par (1) *est appelée* **fonction puissance** *par rapport à $\Gamma_{I,R}$.*

Dans ces conditions, une équation de $\Gamma_{I,R}$ est donc

$$\gamma_{I,R}(M) = 0 \quad (M \in \mathscr{E}) . \tag{2}$$

L'équation (2) (écrite sous cette forme précise) est appelée **équation normale** de $\Gamma_{I,R}$.

La fonction $\gamma_{I,R}$ définie par (1) est régulière sur $\mathscr{E} \setminus \{I\}$ (I en est le seul point critique). Par suite (cf. tome 3, théorème VI.3.3) :

PROPOSITION VI.7.1

Si $R > 0$, l'ensemble $\Gamma_{I,R}$ est une hypersurface de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$.

Pour $R = 0$, on a : $\Gamma_{I,R} = \{I\}$. On dit souvent que $\Gamma_{I,0}$ est la « sphère-point I » (le « cercle-point I » pour $n = 2$). Pour $R > 0$, $\Gamma_{I,R}$ est toujours non vide, car toute droite affine $\mathscr{D}$ passant par I rencontre $\Gamma_{I,R}$ en les deux points $I \dotplus \mathbb{R}\mathbf{i}$ et $I \dotplus \mathbb{R}(-\mathbf{i})$, où $\mathbf{i}$ unitaire dirige $\vec{\mathscr{D}}$. Désignons ces deux points par A et B. Alors $(\forall M \in \mathscr{E})$

$$(\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \mid \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \|\overrightarrow{IM}\|^2 - R^2 ,$$

d'où $$(\forall \mathscr{D} \mid I \in \mathscr{D}) \ (\forall M \in \mathscr{E}) \quad \gamma_{I,R} = (\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB}) .$$

On remarque que, pour $M \in \mathscr{E}$, $\gamma_{I,R}(M) > 0$ ssi M est extérieur à $\Gamma_{I,R}$, et que $\gamma_{I,R}(M) < 0$ ssi M est intérieur à $\Gamma_{I,R}$. Pour toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ passant par M et rencontrant $\Gamma_{I,R}$, l'ensemble $\mathscr{D} \cap \Gamma_{I,R}$ est de cardinal 1 ou 2, et c'est 1 ssi $\mathscr{D}$ est *tangente* à $\Gamma_{I,R}$ (cf. ci-dessous). Soit alors $\mathscr{D} \cap \Gamma_{I,R} = \{A, A'\}$ (avec éventuellement $A' = A$). On vérifie aisément que $\gamma_{I,R}(M) = \overline{MA} \times \overline{MA'}$. En particulier si $\mathscr{D}$ passe par M et est tangente à $\Gamma_{I,R}$ en T, on a : $\gamma_{I,R}(M) = \|\overrightarrow{MT}\|^2$.

Développons (1) à l'aide d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$, dont nous notons $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées génériques (i.e. les coordonnées d'un point indéterminé $M \in \mathscr{E}$). En désignant par $(a_1, \ldots, a_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{R}$ de I, on obtient :

$$\gamma_{I,R}(M) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) - R^2 . \tag{3}$$

PROPOSITION VI.7.2

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des sphères euclidiennes de $\mathscr{E}$. L'application $\mathscr{E} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathscr{S}$, $(I, R) \mapsto \Gamma_{I,R}$ est bijective.

Démonstration :

L'application est évidemment surjective. Il s'agit de prouver son injectivité. Supposons donc $\Gamma_{I,R} = \Gamma_{I',R'}$, avec $(I, R) \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}_+$ et $(I', R') \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}_+$. Si $I = I'$ (sphères euclidiennes **concentriques**), il est clair que $R \neq R'$ entraîne $\Gamma_{I,R} \cap \Gamma_{I',R'} = \varnothing$, d'où $\Gamma_{I,R} \neq \Gamma_{I',R'}$. Si $I \neq I'$, soit $\mathbf{i} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{II'}\|}\overrightarrow{II'}$; pour $R = R' = 0$, il est trivial que $\Gamma_{I,R} \neq \Gamma_{I',R'}$. Sinon, soit par exemple $R > 0$: alors les deux points $I \dotplus R\mathbf{i}$ et $I \dotplus (-R\mathbf{i})$ n'appartiennent pas tous deux à $\Gamma_{I',R'}$, d'où $\Gamma_{I,R} \neq \Gamma_{I',R'}$. ■

Soit à nouveau un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$; à tout $(n+1)$-uple $(a_1, \ldots, a_n, c) \in \mathbb{R}^{n+1}$, associons la fonction polynomiale $g = g_{(a_1, \ldots, a_n, c)} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + c$; ((x_i) = coordonnées de M dans $\mathscr{R}$). En désignant par I le point de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{R}$, on a :

$$g(M) = \|\overrightarrow{IM}\|^2 + c - \sum_{j=1}^{n} a_j^2 .$$

Il est clair que si $c - \sum_{j=1}^{n} a_j^2 > 0$, l'ensemble $g^{-1}(0)$ est vide ; si $c - \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \leqslant 0$, on a : $g^{-1}(0) = \Gamma_{I,R}$, avec $R = \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) - c\right]^{1/2}$. En tenant compte de la proposition VI.7.2, on voit donc que *l'application* $(a_1, \ldots, a_n, c) \mapsto g^{-1}_{(a_1, \ldots, a_n, c)}(0)$ *établit une bijection du fermé de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *défini par* $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) - c \geqslant 0$ *sur* $\mathscr{S}$. Cette bijection fait correspondre l'ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par l'inégalité $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) - c > 0$ à l'ensemble des sphères de rayon > 0.

Hyperplans tangents à une sphère euclidienne

Reprenons $\gamma_{I,R}$ défini par (1) ; son gradient est

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \gamma_{I,R}(M) = 2\,\overrightarrow{IM} . \tag{4}$$

D'où (cf. tome 3, § VI.3, relation (4)) :

PROPOSITION VI.7.3

Si $R > 0$, en un point $M \in \Gamma_{I,R}$, l'hyperplan tangent à $\Gamma_{I,R}$ est l'hyperplan affine passant par M et orthogonal à $\overrightarrow{IM}$; en particulier (cas où $n = 2$), la tangente en un point d'un cercle est orthogonale au rayon aboutissant à ce point.

Intersection d'une sphère euclidienne avec un sous-espace affine

Soit $S = \Gamma_{I,R}$ avec $R > 0$, et $\mathscr{V}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Notons J la projection orthogonale de I sur $\mathscr{V}$. Pour $M \in \mathscr{V}$, on a : $\|\overrightarrow{IM}\|^2 = \|\overrightarrow{IJ}\|^2 + \|\overrightarrow{JM}\|^2$. Donc $\Gamma_{I,R} \cap \mathscr{V} = \{M \in \mathscr{V} \mid \|\overrightarrow{JM}\|^2 = R^2 - \|\overrightarrow{IJ}\|^2\}$. Par suite, $\Gamma_{I,R} \cap \mathscr{V}$ est vide si $\|\overrightarrow{IJ}\| > R$, réduit à $\{J\}$ si $\|\overrightarrow{IJ}\| = R$, et égal à la sphère euclidienne de $\mathscr{V}$ de centre J, de rayon $[R^2 - \|\overrightarrow{IJ}\|^2]^{1/2}$ si $\|\overrightarrow{IJ}\| < R$. Donc, lorsque $\mathscr{V}$ est un hyperplan, si $\|\overrightarrow{IJ}\| = R$, c'est l'hyperplan tangent en J à S. D'après la proposition VI.7.3, on trouve ainsi *tous* les hyperplans tangents à S.

En particulier, pour $n = 2$, on voit qu'une *droite affine* $\mathscr{D}$ rencontre le cercle $\Gamma_{I,R}$ en deux points ssi la distance d de I à $\mathscr{D}$ est $< R$ (et alors $\mathscr{D}$ n'est pas une tangente à $\Gamma_{I,R}$) ; que $\mathscr{D} \cap \Gamma_{I,R}$ est un singleton $\{J\}$ ssi $d = R$ (et alors $\mathscr{D}$ est la tangente en J au cercle) ; et que $\mathscr{D} \cap \Gamma_{I,R} = \varnothing$ ssi $d > R$. Pour $n = 3$, on voit de même qu'une droite affine $\mathscr{D}$ rencontre S en deux points (et elle n'est alors pas une tangente à S), ou bien en un seul point (ssi c'est une tangente à S, le point de contact étant le point commun à $\mathscr{D}$ et S), ou bien ne rencontre pas S, selon que la distance d de I à $\mathscr{D}$ est $< R$, $= R$, ou $> R$; et qu'un plan affine $\mathscr{V}$ rencontre S suivant un cercle de rayon > 0 (et $\mathscr{V}$ n'est alors pas un plan tangent), suivant un singleton $\{J\}$ (et $\mathscr{V}$ est alors le plan tangent en J à S), ou bien ne rencontre pas S selon que la distance d de I à $\mathscr{V}$ est $< R$, $= R$, ou $> R$.

Reprenons un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,; e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$. Soit $\varphi : M \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\right) + w$ une fonction affine non constante sur $\mathscr{E}$ ($(u_1, \ldots, u_n, w) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$) définissant un hyperplan affine $\mathscr{V}$. En écrivant que la distance de I à $\mathscr{V}$ vaut R, on obtient une CNS pour que $\mathscr{V}$ soit tangent à S (cf. § V.5, formule (4))

$$(5) \qquad \boxed{\left[\left(\sum_{j=1}^{n} u_j a_j\right) + w\right]^2 - R^2 \sum_{j=1}^{n} u_j^2 = 0} \,,$$

où $(a_1, \ldots, a_n)$ = coordonnées de I dans $\mathscr{R}$.

L'équation (5) est appelée une **équation tangentielle** de S dans $\mathscr{R}$.

Intersection entre deux sphères euclidiennes

Soit deux sphères euclidiennes de $\mathscr{E} : S = \Gamma_{I,R}$ et $S' = \Gamma_{I',R'}$, avec $S \neq S'$. Pour $I = I'$, on a $S \cap S' = \varnothing$. Supposons donc $I \neq I'$. Pour tout $M \in \mathscr{E}$, on a, en posant $d = \|\overrightarrow{II'}\|$:

$$\gamma_{I',R'}(M) - \gamma_{I,R}(M) = \|\overrightarrow{I'I} + \overrightarrow{IM}\|^2 - \|\overrightarrow{IM}\|^2 + R^2 - R'^2 = \\ = d^2 + R^2 - R'^2 - 2(\overrightarrow{II'} \mid \overrightarrow{IM}) .$$

Donc l'ensemble $\{M \in \mathscr{E} \mid \gamma_{I',R'}(M) = \gamma_{I,R}(M)\}$ est un hyperplan $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}$, appelé **hyperplan radical** de S et S', défini par la fonction affine non constante $\varphi : M \mapsto 2(\overrightarrow{II'} \mid \overrightarrow{IM}) - R^2 + R'^2 - d^2$. Il apparaît que cet hyperplan radical est orthogonal à $\overrightarrow{II'}$, et que : $S \cap S' = S \cap \mathscr{H} = S' \cap \mathscr{H}$. La nature de $S \cap \mathscr{H}$ dépend de la distance δ de I à $\mathscr{H}$. Or $\delta = \dfrac{1}{2d} |R^2 - R'^2 + d^2|$. En comparant δ à R, on en déduit que :

- $S \cap S'$ est un *singleton* ssi $d = |R' - R|$ ou $d = R + R'$ (si c'est le cas, S et S' sont *tangentes* en leur point commun, i.e. y ont même hyperplan tangent) ;
- $S \cap S' = \varnothing$ si $d \notin [|R' - R|, R + R']$;
- et si $d \in]|R' - R|, R + R'[$, $S \cap S'$ est une sphère euclidienne de l'hyperplan $\mathscr{H}$, centrée en J tel que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2d}(R^2 - R'^2 + d^2)\,\mathbf{i}$, avec $\mathbf{i} = \dfrac{1}{d}\overrightarrow{II'}$, et de rayon $r = \dfrac{1}{2d}\{[(R + R')^2 - d^2]\,[d^2 - (R - R')^2]\}^{1/2}$.

Si $n = 2$, l'hyperplan radical s'appelle **axe radical** des deux cercles.

Faisceaux linéaires de sphères euclidiennes

Soit $\gamma = \gamma_{I,R}$ et $\gamma' = \gamma_{I',R'}$ deux fonctions polynomiales de la forme (1), avec $\gamma \neq \gamma'$. Si $I = I'$, on appelle **faisceau** (linéaire) **de sphères euclidiennes engendré par** $\Gamma_{I,R}$ et $\Gamma_{I',R'}$ l'ensemble des sphères dont les équations normales sont de la forme $\dfrac{\lambda\gamma + \lambda'\gamma'}{\lambda + \lambda'} = 0$ $((\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \lambda + \lambda' \neq 0)$: on vérifie que ce faisceau Φ est *l'ensemble des sphères de* $\mathscr{E}$ *de centre* I. Si $R' > R$, l'application $J \longrightarrow \Phi$ qui associe à $t \in \mathbb{R}$ la sphère d'équation $t\gamma + (1 - t)\gamma' = 0$ est alors bijective $\left(J = \left]-\infty, \dfrac{R'^2}{R'^2 - R^2}\right]\right)$.

Si $I \neq I'$, on appelle **faisceau** (linéaire) **de sphères engendré par** $\Gamma_{I,R}$ et $\Gamma_{I',R'}$ l'ensemble Φ égal à l'ensemble des sphères d'équation normale de la forme $\dfrac{\lambda\gamma + \lambda'\gamma'}{\lambda + \lambda'} = 0$ $((\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \lambda + \lambda' \neq 0)$, augmenté

de l'hyperplan radical $\mathscr{H}$ de $\Gamma_{I,R}$ et $\Gamma_{I',R'}$ (hyperplan radical dont une équation est $\gamma - \gamma' = 0$, considéré comme sphère de rayon infini).

De même, soit $\gamma = \gamma_{I,R}$ et soit φ une fonction affine non constante sur $\mathscr{E}$, définissant un hyperplan $\mathscr{H}$. On appelle **faisceau** (linéaire) **engendré par** $\Gamma_{I,R}$ et $\mathscr{H}$ l'ensemble Φ union de toutes les sphères d'équation normale $\gamma + \rho\varphi = 0$ ($\rho \in \mathbb{R}$), et de l'hyperplan radical commun à toutes ces sphères prises deux à deux, c'est-à-dire de $\mathscr{H}$.

Soit Φ le faisceau engendré par $\Gamma_{I,R}$ et $\Gamma_{I',R'}$ avec $I \neq I'$. Les centres des sphères de Φ sont alignés sur $\mathscr{D} = \mathrm{Dr}\,(I, I')$. Soit $\mathscr{I} = \Gamma_{I,R} \cap \Gamma_{I',R'}$: si $\mathscr{I} \neq \varnothing$, $\Phi \setminus \{\mathscr{H}\}$ est l'ensemble des sphères de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{I}$ et centrées sur $\mathscr{D}$, et l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \Phi\,\{\mathscr{H}\}$ qui associe à t la sphère d'équation $t\gamma + (1-t)\,\gamma' = 0$ est bijective.

Lorsque $\mathscr{I}$ est un singleton $\{T\}$, $\Phi \setminus \{\mathscr{H}\}$ est l'ensemble des sphères tangentes en T à $\mathscr{H}$. Sinon (toujours avec $\mathscr{I} \neq \varnothing$), $\Phi \setminus \{\mathscr{H}\}$ est simplement l'ensemble des sphères de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{I}$.

Si $\mathscr{I} = \varnothing$, notons O le point commun à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$. Le réel $\gamma(O) = \gamma'(O)$ est > 0 : soit $a = \sqrt{\gamma(O)}$, et soit P et P' les points de $\mathscr{D}$ à la distance a de O, et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ les demi-droites de $\mathscr{D}$ ne contenant pas O et d'origines P et P'. L'ensemble $\Phi \setminus \{\mathscr{H}\}$ est alors l'ensemble des sphères de $\mathscr{E}$ centrées sur $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ dont l'équation normale $g(M) = 0$ vérifie $g(O) = \gamma(O)$. L'application de $\mathbb{R} \setminus \left]\dfrac{d^2 + R'^2 - R^2 - \sqrt{\Delta}}{2\,d^2}, \dfrac{d^2 + R'^2 - R^2 + \sqrt{\Delta}}{2\,d^2}\right[$, avec

$$\begin{aligned}\Delta &= d^4 + R^4 + R'^4 - 2(R^2 R'^2 + R'^2 d^2 + d^2 R^2)\\ &= (d + R + R')(d + R - R')(d - R + R')(d - R - R')\,,\end{aligned}$$

dans Φ, qui associe à t la sphère d'équation $t\gamma + (1-t)\,\gamma' = 0$, est bijective. Les points P et P' sont ici appelés **points limites** (ou **points de Poncelet**) de Φ : ce sont les deux sphères-points de Φ. Le lecteur établira des propriétés analogues avec un faisceau Φ engendré par $\Gamma_{I,R}$ et φ.

Tout faisceau Φ est engendré par deux quelconques de ses éléments (distincts). Soit Φ quelconque et $\mathscr{I}$ l'intersection des éléments de Φ dans $\mathscr{E}$. *Par tout point $M_0 \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{I}$, il passe un et un seul élément de Φ.* En effet, supposons Φ engendré par Γ et Γ' d'équations $g = 0$ et $g' = 0$ (g et g' sont soit de la forme (1), soit l'un de la forme (1) et l'autre une fonction affine non constante). Alors $\mathscr{I} = \Gamma \cap \Gamma'$. Si $M_0 \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{I}$ on a donc par exemple $g'(M_0) \neq 0$. Posant $\lambda_0 = -\dfrac{g(M_0)}{g'(M_0)}$, l'équation $g + \lambda_0 g' = 0$ détermine l'unique élément de Φ passant par M_0.

Faisceaux linéaires de cercles

Supposons $n = 2$. Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$. Pour $(I, R) \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma_{I,R}$ est l'image de la courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$ et régulière définie par $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $\theta \mapsto I \dotplus (R\cos\theta e_1 + R\sin\theta e_2)$. Donc $\Gamma_{I,R}$ est connexe par arcs (d'où l'on déduit immédiatement qu'en dimension quelconque toute sphère euclidienne est connexe par arcs). Toutefois $\Gamma_{I,R}$ n'est pas une sous-variété plongement de $\mathscr{E}$; mais $\Gamma_{I,R}$ privé d'un point est une sous-variété plongement : par exemple si B est le point $I \dotplus (-Re_2)$, $\Gamma_{I,R}\backslash\{B\}$ est l'image du plongement $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto I \dotplus \left(R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}e_1 + R\dfrac{2t}{1+t^2}e_2\right)$.

Par trois points de $\mathscr{E}$ non alignés il passe un et un seul cercle. Si A et B sont deux points distincts, les cercles passant par A et B, plus la droite Dr (A, B), forment le faisceau Φ tel que $\mathscr{I} = \{A, B\}$ (dit *à points de base* A et B), et il y a un et un seul faisceau Ψ dont A et B sont les points limites. On dit que Φ et Ψ sont *conjugués* : Φ (resp. Ψ) est alors l'ensemble des cercles orthogonaux à tout élément de Ψ (resp. de Φ) augmenté de l'axe radical de Φ (resp. de Ψ) qui est la seule droite orthogonale à tout élément de Ψ (resp. de Φ). (Deux cercles, ou un cercle et une droite, sont dits *orthogonaux* ssi ils se rencontrent de façon que les tangentes en chacun de leurs points communs soient orthogonales. Un cercle et une droite sont donc orthogonaux ssi la droite est *diamétrale* pour le cercle, i.e. passe par son centre. Et $\Gamma_{I,R}$ et $\Gamma_{I',R'}$ sont orthogonaux ssi $\|\overrightarrow{II'}\|^2 = R^2 + R'^2$, i.e. ssi $\gamma_{I,R}(I') = R'^2$, ou encore ssi $\gamma_{I',R'}(I) = R^2$).

De même, si Φ est le faisceau des cercles tangents en T à une droite $\mathscr{D}'$ augmenté de cette droite $\mathscr{D}'$, il existe un et un seul *faisceau conjugué* Φ' formé des cercles tangents en T à la droite $\mathscr{D}$ orthogonale en T à $\mathscr{D}'$ augmenté de $\mathscr{D}$, et tout cercle ou droite de Φ est orthogonal à tout élément de Φ'.

Coordonnées sphériques

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Orientons $\mathscr{E}$ de façon que $\mathscr{R}$ soit direct. On associe à ce repère l'application

$$\mathscr{P}_{\mathscr{R}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathscr{E}\,, \quad (\rho, \theta, \varphi) \mapsto O \dotplus \rho\mathbf{u}(\theta, \varphi)\,,$$

où $\mathbf{u}(\theta, \varphi) = \mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{k}\sin\varphi$. L'application $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus elle est surjective. Par définition, si $M \in \mathscr{E}$, tout élément de $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}^{-1}(M)$ est appelé **un système de coordonnées sphériques** de M relativement à $\mathscr{R}$. Si $M = O$, on a $\mathscr{P}_{\mathscr{R}}^{-1}(O) = \{0\} \times \mathbb{R}^2$; si $M \neq O$ est situé

sur la droite $O \dotplus \mathbb{R}\mathbf{k}$, tous les triplets $(z, \theta, 2k\pi)$, où k décrit $\mathbb{Z}$ et θ décrit $\mathbb{R}$, ainsi que les triplets $(-z, \theta, (2k+1)\pi)$, sont des systèmes de coordonnées sphériques de M. Si $M \in \mathscr{E} \setminus \{O \dotplus \mathbb{R}\mathbf{k}\}$, soit m sa projection sur le plan $(O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$ et (r, θ) un système de coordonnées polaires de m ; alors tout triplet (ρ, θ, φ) vérifiant $\rho \cos \varphi = r$ et $\rho \sin \varphi = z$ est un système de coordonnées sphériques de M. On peut profiter de cette indétermination pour imposer des conditions particulières, par exemple prendre $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \geqslant 0$, choisir une détermination de θ sur $[-\pi, \pi[$ (longitude de M) et une détermination de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (latitude de M, à laquelle on préfère souvent la colatitude $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [0, \pi]$).

Remarque 1 : Les coordonnées sphériques s'étendent facilement à un espace affine euclidien de dimension $n > 3$ (cf. tome 3, exercice 6 du § VIII.4).

Exercice 1 : Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ orienté.

a) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\mathrm{Dr}\,(M, A), \mathrm{Dr}(M, B)} = \widehat{\mathrm{Dr}\,(C, A), \mathrm{Dr}\,(C, B)} \bmod (\pi)$?

b) Même question avec $\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}} = \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}} \bmod (2\pi)$.

c) Même question avec $\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}} = \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien. On dit que deux cercles Γ et Γ', de centres respectifs Ω et Ω', de rayons R et R' sont **orthogonaux** s'ils sont sécants et si, en chacun de leurs points communs A et B, les rayons ΩA et $\Omega' A$ (resp. ΩB et $\Omega' B$) sont orthogonaux.

a) Montrer qu'une CNS d'orthogonalité est $\|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\|^2 = R^2 + R'^2$ et la traduire analytiquement.

b) Montrer que, sauf dans le cas d'un faisceau de cercles concentriques, il existe des cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau donné. Que forment-ils ?

Exercice 3 : On donne deux cercles Γ et Γ' d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$. Quel est l'ensemble des points M du plan dont le rapport (resp. la somme, la différence) des puissances par rapport aux deux cercles Γ et Γ' est une constante donnée ?

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$. On considère 4 points M_i de coordonnées (x_i, y_i), où $i \in [\![1, 4]\!]$.

a) Montrer que les M_i sont cocycliques ssi $D = 0$, avec

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

b) On pose $d_{ij} = \|\overrightarrow{M_iM_j}\|$ pour $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$. Montrer que la CNS de cocyclicité peut s'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou plus simplement $d_{12}\, d_{34} \pm d_{13}\, d_{24} \pm d_{23}\, d_{14} = 0$ (théorème de *Ptolémée*).

Exercice 5 : On donne dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ des points $A_1, \ldots, A_n$ et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, k. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2 = k$? Discuter.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Pour toute sphère S de $\mathscr{E}$, on note $\hat{S}$ la fonction puissance associée.

a) Soit deux sphères S_1, S_2 et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $S_1(M) - kS_2(M) = 0$ appartient au faisceau linéaire engendré par S_1 et S_2. Discuter.

b) Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ des points de $\mathscr{E}$ non coplanaires, G leur isobarycentre, O le centre de la sphère S qui passe par les A_i, et Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = 2\,\overrightarrow{OG}$ (Ω est appelé *point de Monge* du tétraèdre $(A_i\,|_{1 \leqslant i \leqslant 4})$). Soit $M_{1,2}$ le milieu de $\{A_1, A_2\}$. Prouver que $(\overrightarrow{\Omega M_{1,2}} \,|\, \overrightarrow{A_3A_4}) = 0$. En déduire que Ω est commun à 6 plans remarquables.

c) Soit $\mathscr{V}$ la sphère de diamètre $\{G, \Omega\}$ ($\mathscr{V}$ est appelée la *sphère orthocentroïdale* du tétraèdre $(A_i\,|_{1 \leqslant i \leqslant 4})$), et $\mathscr{W}$ la sphère déduite de S dans l'homothétie de centre G, de rapport $-\dfrac{1}{3}$ ($\mathscr{W}$ est appelée *sphère des douze points* de $(A_i\,|_{1 \leqslant i \leqslant 4})$).

Montrer que Ω est un centre d'homothétie de S et $\mathscr{V}$.

Prouver : il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{\mathscr{W}(A_i)}{\mathscr{V}(A_i)} = k$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$. Calculer k.

En déduire que S, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ appartiennent à un même faisceau.

Exercice 7 *(Problème du cerceau rangé dans un coin) :* Soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3. Lieu des centres des cercles de rayon donné $R > 0$, tangents aux trois plans de coordonnées de $\mathscr{R}_0$.

Chapitre VII

COURBES EN GÉOMÉTRIE AFFINE

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev *de dimension finie* $n \geqslant 1$ *muni de sa structure affine. Moyennant quelques modifications mineures, les définitions introduites et les résultats obtenus s'étendent facilement à des espaces affines* $\mathscr{E}$ *d'espace directeur E. Les concepts et résultats du § VI.3 du tome 3 seront largement utilisés.*

§ VII.1 *COURBES PARAMÉTRÉES*

DÉFINITION VII.1.1

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. *On appelle* **courbe paramétrée de classe** $\mathscr{C}^k$ *de E toute application* $f : I \longrightarrow E$ *de classe* $\mathscr{C}^k$, *où I est un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$; *une telle courbe paramétrée est dite* **simple** *ssi f est* **injective** ; *elle est dite* **fermée simple** *ssi : I est compact et (posant* $I = [a, b]$*)* $f(a) = f(b)$ *et* $f|_{[a,b[}$ *est injective.*

Il est clair qu'une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ est aussi de classe $\mathscr{C}^l$ pour tout $l \in [\![1, k]\!]$; que pour tout sous-intervalle non trivial J de I, $f|_J$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ (qu'on appellera **sous-courbe paramétrée** de f).

L'image de f est appelée **trajectoire** de la courbe paramétrée de f. Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E, de dimension $\geqslant 1$, pour toute courbe paramétrée $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ dont la trajectoire est contenue dans $\mathscr{F}$, $f|^{\mathscr{F}}$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{F}$; et s'il en est ainsi, lorsque $\mathscr{F}$ est une droite affine, on dit que la courbe paramétrée est *rectiligne*, lorsque $\mathscr{F}$ est un plan on dit qu'elle est *plane*.

Régularité

DÉFINITION VII.1.2

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Un réel $t_0 \in I$ est dit **paramètre régulier** *de f ssi $f'(t_0) \neq 0$; sinon t_0 est dit paramètre* **stationnaire.** *La courbe paramétrée f est dite* **régulière** *ssi $(\forall t \in I)\ f'(t) \neq 0$.*
Plus généralement, soit $p \in [\![1, \operatorname{Min}(k, \dim(E))]\!]$. Un réel $t_0 \in I$ est dit **paramètre p fois régulier** *de f ssi les vecteurs $f'(t_0), \ldots, f^{(p)}(t_0)$ sont* **linéairement indépendants** *(pour $p = 2$, on dit : paramètre* **birégulier ;** *pour $p = 3$, paramètre* **trirégulier,** *etc...).*
La courbe f est dite **p fois régulière** *ssi tous les paramètres $t \in I$ sont p fois réguliers (courbe* **birégulière, trirégulière,** *etc...).*

Une courbe paramétrée *simple et régulière* de classe $\mathscr{C}^k$ définie sur un intervalle I *ouvert* est une immersion de classe $\mathscr{C}^k$ (cf. tome 3, définition VI.2.3).

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 2$; un paramètre $t_0 \in I$ est dit **d'inflexion** ssi il est **régulier mais non birégulier,** i.e.

$$f'(t_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f''(t_0) \in \mathbb{R} f'(t_0)\,. \tag{1}$$

Avec cette terminologie, on voit que la courbe f est **birégulière** ssi elle est à la fois **régulière et sans paramètre d'inflexion.**

A la courbe paramétrée $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ et au paramètre $t_0 \in I$ on peut attacher une suite $(T_{p,f,t_0})_{1 \leqslant p \leqslant k, p \in \mathbb{N}^*}$ de sous-$\mathbb{R}$-ev définis par

$$T_{p,f,t_0} = \operatorname{Vect}(f'(t_0), \ldots, f^{(p)}(t_0)) \tag{2}$$

et appelée **suite des sous-espaces fondamentaux** de la courbe f en le paramètre t_0. Pour chaque entier $p \in [\![1, k]\!]$, le sous-$\mathbb{R}$-ev T_{p,f,t_0} est le p-ième sous-$\mathbb{R}$-ev fondamental, et le sous-espace affine $\mathscr{T}_{p,f,t_0} = f(t_0) + T_{p,f,t_0}$ est **le p-ième sous-espace affine fondamental** de f. La suite $(T_{p,f,t_0})_{1 \leqslant p \leqslant k}$ est croissante, et on voit que $\dim(T_{p,f,t_0}) = p$ ssi le paramètre t_0 est p fois régulier.

En un paramètre **régulier** $t_0 \in I$, la droite affine $\mathscr{T}_{1,f,t_0}$ s'appelle **la tangente à la courbe f en le paramètre t_0.** En un paramètre **birégulier** $t_0 \in I$, le plan affine $\mathscr{T}_{2,f,t_0}$ s'appelle **le plan osculateur en le paramètre t_0** (pour $n = 2$, c'est E).

Un paramètre **d'inflexion** $t_0 \in I$ est *caractérisé* par

(3) $$\boxed{\dim (T_{1,f,t_0}) = 1 \quad \text{et} \quad T_{1,f,t_0} = T_{2,f,t_0}\,.}$$

Si t_0 est *paramètre stationnaire*, et si les $(f^{(i)}(t_0))_{1 \leqslant i \leqslant k,\, i \in \mathbb{N}^*}$ ne sont *pas tous nuls*, soit p le plus petit entier de $[\![1, k]\!]$ tel que $f^{(i)}(t_0) \neq 0$; alors $p \geqslant 2$, $T_{p-1,f,t_0} = \{0\}$ et $\dim (T_{p,f,t_0}) = 1$. Dans ce cas, la droite affine $\mathscr{T}_{p,f,t_0}$ prend le nom de **tangente géométrique à la courbe f en le paramètre t_0**, appellation qui sera justifiée plus loin.

Si t_0 est paramètre *non birégulier* (ne pas confondre avec paramètre d'inflexion), supposons qu'il existe $i \in [\![1, k]\!] \cap \mathbb{N}^*$ tel que $\dim (T_{i,f,t_0}) \geqslant 2$; alors soit $p = \operatorname{Min} \{i \in [\![1, k]\!] \mid f^{(i)}(t_0) \neq 0\}$ et $q = \operatorname{Min} \{j \in [\![p+1, k]\!] \mid f^{(j)}(t_0) \notin \mathbb{R} f^{(p)}(t_0)\}$: dans ce cas, $T_{p,f,t_0} = \cdots = T_{q-1,f,t_0}$ est une droite vectorielle, et T_{q,f,t_0} est un plan vectoriel ; le plan affine $\mathscr{T}_{q,f,t_0}$ prend le nom de **plan osculateur géométrique** à la courbe f en le paramètre t_0.

Calcul de la tangente

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et soit $t_0 \in I$ un paramètre *régulier*. La tangente $\mathscr{T}_{1,f,t_0}$ en le paramètre t_0 admet alors la représentation suivante « par point et vecteur directeur »

(4) $$\mathbb{R} \longrightarrow E\,, \quad \lambda \mapsto f(t_0) \dot{+} \lambda f'(t_0)\,.$$

Lorsque $n = 2$, soit $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, e_2)$ un repère affine de E, dans lequel nous notons $(\varphi(t), \psi(t))$ les coordonnées de $f(t)$ $(t \in I)$ et (x, y) les coordonnées du point générique $M \in E$. Une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de $\mathscr{T}_{1,f,t_0}$ est :

(5) $$\begin{vmatrix} x - \varphi(t_0) & \varphi'(t_0) \\ y - \psi(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

qu'on écrit en abrégé (en posant $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\varphi'(t_0) = \varphi'_0$, etc...)

(6) $$\begin{vmatrix} x - \varphi_0 & \varphi'_0 \\ y - \psi_0 & \psi'_0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Il arrive fréquemment que φ et ψ se présentent sous la forme $\varphi(t) = \dfrac{\Phi(t)}{\Delta(t)}$, $\psi(t) = \dfrac{\Psi(t)}{\Delta(t)}$, où Φ, Ψ et Δ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans

$\mathbb{R}$, la fonction Δ ne s'annulant jamais. Un calcul élémentaire permet alors d'écrire (6) sous la forme $\begin{vmatrix} x & \Phi_0 & \Phi_0' \\ y & \Psi_0 & \Psi_0' \\ 1 & \Delta_0 & \Delta_0' \end{vmatrix} = 0$, ce qui devient encore plus symétrique si l'on pose $x = \dfrac{X}{T}$, $y = \dfrac{Y}{T}$ où $(X, Y, T) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$.

L'équation (6) de la tangente $\mathscr{T}_{1, f, t_0}$ prend alors la forme

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} X & \Phi_0 & \Phi_0' \\ Y & \Psi_0 & \Psi_0' \\ T & \Delta_0 & \Delta_0' \end{vmatrix} = 0 .$$

Les triplets $(X, Y, T) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{X}{T} = x$, $\dfrac{Y}{T} = y$ s'appellent *les systèmes de coordonnées homogènes de M dans* $\mathscr{R}$. Donc (7) représente une équation de $\mathscr{T}_{1, f, t_0}$ en coordonnées homogènes dans $\mathscr{R}$. Notons que la *régularité* du paramètre t_0 *équivaut* à la condition que $\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} \Phi_0 & \Psi_0 & \Delta_0 \\ \Phi_0' & \Psi_0' & \Delta_0' \end{bmatrix}\right) = 2$.

Calcul du plan osculateur

Supposons maintenant $n \geqslant 3$. Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et $t_0 \in I$ un paramètre *birégulier*. Le plan osculateur $\mathscr{T}_{2, f, t_0}$ admet alors la représentation « par point et vecteurs directeurs »

$$(8) \qquad \mathbb{R}^2 \longrightarrow E , \quad (\lambda , \mu) \mapsto f(t_0) \dot{+} (\lambda f'(t_0) + \mu f''(t_0)) .$$

Lorsque $n = 3$, soit $\mathscr{R} = (O ; e_1, e_2, e_3)$ un repère affine de E. Notons (x, y, z) les coordonnées du point générique $M \in E$ et $(\varphi(t), \psi(t), \xi(t))$ les coordonnées de $f(t)$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{T}_{2, f, t_0}$ dans $\mathscr{R}$ est alors

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x - \varphi_0 & \varphi_0' & \varphi_0'' \\ y - \psi_0 & \psi_0' & \psi_0'' \\ z - \xi_0 & \xi_0' & \xi_0'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Si de plus φ, ψ, ξ sont données par $\varphi(t) = \dfrac{\Phi(t)}{\Delta(t)}$, $\psi(t) = \dfrac{\Psi(t)}{\Delta(t)}$, $\xi(t) = \dfrac{\Xi(t)}{\Delta(t)}$, où Φ, Ψ, Ξ et Δ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$, avec Δ jamais nulle ; et si on note (X, Y, Z, T) les systèmes de

coordonnées homogènes de M dans $\mathscr{R}$, une équation du plan osculateur $\mathscr{T}_{2,f,t_0}$ dans $\mathscr{R}$ en coordonnées homogènes est :

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} X & \Phi_0 & \Phi_0' & \Phi_0'' \\ Y & \Psi_0 & \Psi_0' & \Psi_0'' \\ Z & \Xi_0 & \Xi_0' & \Xi_0'' \\ T & \Delta_0 & \Delta_0' & \Delta_0'' \end{vmatrix} = 0 .$$

La birégularité du paramètre t_0 équivaut à

$$\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} \Phi_0 & \Psi_0 & \Xi_0 & \Delta_0 \\ \Phi_0' & \Psi_0' & \Xi_0' & \Delta_0' \\ \Phi_0'' & \Psi_0'' & \Xi_0'' & \Delta_0'' \end{bmatrix}\right) = 3 .$$

Exemple 1 : Soit un plan affine E muni du repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$, et la courbe paramétrée, de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ donnée par $t \mapsto O \dotplus (\varphi(t)\,e_1 + \psi(t)\,e_2)$ avec $\varphi(t) = \dfrac{3\,at}{1+t^2}$, $\psi(t) = \dfrac{3\,at^2}{1+t^2}$ (a réel > 0 donné). Posons $\Phi(t) = 3\,at$, $\Psi(t) = 3\,at^2$, $\Delta(t) = 1 + t^2$. La matrice $\begin{bmatrix} \Phi(t) & \Psi(t) & \Delta(t) \\ \Phi'(t) & \Psi'(t) & \Delta'(t) \end{bmatrix}$ est ici $\begin{bmatrix} 3\,at & 3\,at^2 & 1+t^2 \\ 3\,a & 6\,at & 2\,t \end{bmatrix}$, donc toujours de rang 2, ce qui prouve que la courbe f est *régulière*.

D'après (7), une équation homogène dans $\mathscr{R}$ de la tangente $\mathscr{T}_{1,f,t}$ en le paramètre t est : $\begin{vmatrix} X & 3\,at & 3\,a \\ Y & 3\,at^2 & 6\,at \\ T & 1+t^2 & 2\,t \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire :

$$-2\,tX + (1-t^2)\,Y + 3\,at^2\,T = 0 .$$

Exemple 2 : Supposons $n = 3$. Dans un repère affine $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ de E, définissons une courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ par les coordonnées homogènes $\Phi(t) = \cos t$, $\Psi(t) = \sin t$, $\Xi(t) = \operatorname{sh} t$, $\Delta(t) = \operatorname{ch} t$.

On a :

$$\begin{bmatrix} \Phi(t) & \Psi(t) & \Xi(t) & \Delta(t) \\ \Phi'(t) & \Psi'(t) & \Xi'(t) & \Delta'(t) \\ \Phi''(t) & \Psi''(t) & \Xi''(t) & \Delta''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \\ -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{bmatrix} .$$

Or cette matrice est toujours de rang 3, donc la courbe f est *birégulière*. En utilisant la formule (10), on trouve une équation homogène dans $\mathscr{R}$ de son plan osculateur en le paramètre t :

$$X \sin t - Y \cos t + Z \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t = 0 .$$

Courbes dont la trajectoire est contenue dans un sous-espace affine

THÉORÈME VII.1.1

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p + 1 \leqslant k$. On suppose que la courbe f est ***p fois régulière.*** *Pour que la trajectoire Γ de f soit contenue dans un sous-espace affine de dimension p, il faut et il suffit que $(\forall t \in I)\ T_{p,f,t} = T_{p+1,f,t}$. S'il en est ainsi il y a un seul sous-espace affine de dimension p contenant Γ (donc Γ n'est contenue dans aucun sous-espace affine de dimension $< p$).*

Démonstration : (suffisance de la condition seulement)

Par hypothèse, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f'(t), \ldots, f^{(p)}(t)$ sont linéairement indépendants alors que $f'(t), \ldots, f^{(p+1)}(t)$ sont liés. D'où l'existence de $(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ unique telle que

$$f^{(p+1)}(t) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t)\, f^{(j)}(t)\,.$$

a) Montrons d'abord que les fonctions λ_j sont *continues sur I,* i.e. continues en tout point $a \in I$. Prenons pour repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$ de E un repère tel que $e_j = f^{(j)}(a)$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$. Notons $M(t) = [\varphi_{ij}(t)]_{1 \leqslant j \leqslant p}^{1 \leqslant i \leqslant n}$ la matrice de $(f'(t), \ldots, f^{(p)}(t))$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ et $N(t)$ la sous-matrice $[\varphi_{ij}(t)]_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}$ de $N(t)$. Alors $N(a)$ est la matrice unité I_p d'ordre p. Désignons par $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ les composantes de $f^{(p+1)}(t)$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur I, toutes les fonctions $(\varphi_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont continues. On a la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{bmatrix} = N(t) \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_p(t) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Comme $\det(N(a)) = 1$, par continuité on a un intervalle $J \subset I$, voisinage de a dans I, sur lequel $D(t) = \det(N(t))$ reste $\neq 0$. D'après (11), pour $t \in J$, on a donc :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_p(t) \end{bmatrix} = [N(t)]^{-1} \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Comme le membre de droite de (12) est une fonction continue de t sur J, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont continues en a ; et comme $a \in I$ est quelconque, la continuité de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sur I en résulte.

b) Fixons $t_0 \in I$. Si un sous-espace affine $\mathscr{V}$ de dimension p de E contient Γ, ce ne peut être que $\mathscr{V} = \mathscr{T}_{p,f,t_0}$, d'où déjà l'unicité de $\mathscr{V}$.

Soit alors $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$ un repère de E tel que $e_i = f^{(i)}(t_0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Notons $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les fonctions coordonnées dans $\mathscr{R}$.

Pour chaque $i \in [\![p+1, n]\!]$, la fonction $g_i = \xi_i \circ f'$ vérifie sur I l'équation différentielle linéaire scalaire à coefficients continus suivante :

$$(13) \qquad y^{(p)}(t) = \lambda_p(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + \lambda_1(t)\, y(t)$$

et de plus $g_i(t_0) = \cdots = g_i^{(p-1)}(t_0) = 0$ (car $f^{(i)}(t_0) \in T_{p,f,t_0}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$). Donc $g_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle (cf. tome 3, théorème IX.5.4). D'où $f'(t) \in T_{p,f,t_0}$ pour $t \in I$. En particulier, $f(t) = f(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathscr{T}_{p,f,t_0}$ pour $t \in I$. ■

THÉORÈME VII.1.2

> *Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et soit $\mathscr{L}$ une fonction affine non constante sur E, définissant l'hyperplan $\mathscr{H} = \mathscr{L}^{-1}(0)$. Soit $p \in [\![1, k]\!] \cap \mathbb{N}^*$ donné, et t_0 un paramètre quelconque $(t_0 \in I)$. Pour que $\mathscr{H}$ contienne $\mathscr{T}_{p,f,t_0}$, il faut et il suffit que $\mathscr{L} \circ f(t) \underset{t \to t_0}{\in} o((t-t_0)^p)$.*

Démonstration :

Soit $M_0 = f(t_0)$ et $L = \vec{\mathscr{L}}$. La formule de Taylor-Young donne, pour $t \in I$:

$\overrightarrow{M_0 f(t)} = (t-t_0)\, f'(t_0) + \cdots + \dfrac{1}{p!}\,(t-t_0)^p\, f^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p)$, d'où :

$$(14) \qquad \mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(M_0) + \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{(t-t_0)^j}{j!}\, L(f^{(j)}(t_0))\right) + \rho(t)\,,$$

avec $\rho(t) \underset{t \to t_0}{\in} o((t-t_0)^p)$.

D'après (14), $\mathscr{L} \circ f(t) \underset{t \to t_0}{\in} o((t-t_0)^p)$ ssi $\mathscr{L}(M_0) = 0$ et $L(f^{(j)}(t_0)) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$, ce qui signifie exactement : $\mathscr{T}_{p,f,t_0} \subset \mathscr{H}$ ssi $\mathscr{L} \circ f(t) \underset{t \to t_0}{\in} o((t-t_0)^p)$. ■

Dans les conditions du théorème VII.1.2, la fonction $\Lambda = \mathscr{L} \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^p$; donc la condition $\Lambda(t) \underset{t \longrightarrow t_0}{\in} o((t-t_0)^p)$ signifie :

$$\Lambda(t_0) = \Lambda'(t_0) = \cdots = \Lambda^{(p)}(t_0) = 0 .$$

Exemple 3 : Supposons $n = 3$ et soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère de E.

Considérons la courbe paramétrée f de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie en coordonnées homogènes dans $\mathscr{R}$ par $\overrightarrow{Of(t)} = \varphi(t)\, e_1 + \psi(t)\, e_2 + \xi(t)\, e_3$, avec $\varphi = \dfrac{\Phi}{\Delta}$, $\psi = \dfrac{\Psi}{\Delta}$, $\xi = \dfrac{\Xi}{\Delta}$, où $\Phi(t) = t$, $\Psi(t) = t^2$, $\Xi(t) = t^3$ et $\Delta(t) = 1 + t^2$ $(t \in \mathbb{R})$.

On vérifie facilement que cette courbe f est simple et birégulière. Proposons-nous de chercher le *plan osculateur* en le paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit (x, y, z) les coordonnées du point générique M de E dans $\mathscr{R}$. Soit $\mathscr{L}(M) = ux + vy + wz + h$ une fonction affine non constante sur E $((u, v, w, h) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R})$. On a :

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{1+t^2} P(t)\,, \quad \text{avec} \quad P(t) = h + ut + (v+h)\,t^2 + wt^3 .$$

D'après le théorème VII.1.2, le plan $\mathscr{H} = \mathscr{L}^{-1}(0)$ sera le plan osculateur à la courbe en le paramètre t_0 ssi le développement en série formelle de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{P(t_0 + X)}{1 + (t_0 + X)^2}$ est de valuation $\geqslant 3$ $\left(\text{car val}\left(\dfrac{1}{1 + (t_0 + X)^2}\right) = 0\right)$, c'est-à-dire ssi $P(t) = w(t - t_0)^3$, ce qui donne les CNS sur (u, v, w, h) : $w \neq 0$, $v + h = -3\,t_0\,w$, $u = 3\,wt_0^2$, $h = -\,wt_0^3$. On en déduit pour $\mathscr{T}_{2, f, t_0}$ l'équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ suivante :

$$3\,t_0^2 x + (t_0^3 - 3\,t_0)\,y + z - t_0^3 = 0 .$$

Transformée d'une courbe paramétrée

Soit F un deuxième $\mathbb{R}$-ev, de dimension finie $m \geqslant 1$. Donnons-nous une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, de trajectoire contenue dans un ouvert U de E, et une application $\Phi : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^k$. Alors $g = \Phi \circ f$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ de F, dite *transformée de f par Φ*. Soit $t_0 \in I$, $M_0 = f(t_0)$ et $N_0 = g(t_0)$ $(= \Phi(M_0))$. On a : $g'(t_0) = \mathrm{d}_{M_0}\Phi \,.\, f'(t_0)$. Par suite : si t_0 est paramètre

régulier de f, alors t_0 est aussi paramètre régulier de g ssi $\operatorname{Ker}(\mathrm{d}_{M_0}\Phi) \cap T_{1,f,t_0} = \{0\}$; et s'il en est ainsi, on a :

$$(15) \qquad \boxed{T_{1,g,t_0} = \mathrm{d}_{M_0}\Phi\,(T_{1,f,t_0})}\,.$$

Lorsque $m = n$ et que Φ définit un $\mathscr{C}^k$-**difféomorphisme** de U sur un ouvert V de F, ce qui précède montre que *f est régulière ssi g est régulière* (mais attention ! il n'y a pas conservation par Φ de la q-régularité pour $2 \leqslant q \leqslant k$: par exemple, un paramètre birégulier de f peut devenir paramètre d'inflexion pour g, comme on le verra plus loin avec la théorie du contact).

Exercice 1 : Soit une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$, de trajectoire Γ. Montrer que l'intérieur de Γ est vide.

Exercice 2 : Montrer qu'une immersion de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ d'un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ dans E, à valeurs dans une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$, est un plongement. Peut-on généraliser à des sous-variétés de dimension quelconque ?

Exercice 3 : Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ de E $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Montrer que toute composante connexe de $\mathscr{V}$ est à la fois ouverte et fermée dans $\mathscr{V}$ et que c'est une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ de E.

Généraliser à des sous-variétés de dimension $p \geqslant 1$.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On donne trois réels a, b, c distincts, et on considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} = \omega \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)$ définie par les coordonnées de $f(t)$ dans $\mathscr{R}$: $f_1(t) = \dfrac{1}{t-a}$, $f_2(t) = \dfrac{1}{t-b}$, $f_3(t) = \dfrac{1}{t-c}$.

a) Montrer que $\Gamma = \operatorname{Im}(f)$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$. Combien a-t-elle de composantes connexes ?

b) Soit $M_0 \in \mathscr{E}$. Etudier les plans osculateurs à f qui passent par M_0. S'ils sont osculateurs en les paramètres t_i, montrer que M_0 et les $f(t_i)$ sont coplanaires.

c) Soit $\mathscr{V}$ l'un des plans osculateurs à f. Déterminer l'ensemble des points où les tangentes à f rencontrent $\mathscr{V}$.

d) On suppose désormais $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal.

*d*1) Soit $(t_i)_{1 \leqslant 1 \leqslant 4} \in \omega^4$ et $M_i = f(t_i)$. Prouver que si $(\overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{M_3M_4}) = 0$, alors $(\overrightarrow{M_1M_3} \mid \overrightarrow{M_2M_4}) = (\overrightarrow{M_1M_4} \mid \overrightarrow{M_2M_3}) = 0$. Et s'il en est ainsi, *l'orthocentre* du tétraèdre orthocentrique $T = (M_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ appartient à Γ (*N.B.* On appelle hauteur de T issue de M_i la droite passant par M_i et orthogonale au plan des $(M_j)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 4 \\ j \neq 1}}$; T est dit *orthocentrique* ssi ces 4 hauteurs ont un point commun : l'orthocentre de T).

*d*2) Soit $(M_i)_{i \in [\![1,4]\!]} \in \Gamma$ tels que $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_4}$ soient deux à deux orthogonaux. Montrer : la tangente en t_1 à f est orthogonale au plan (M_2, M_3, M_4).

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ affine *euclidien* de dimension 3, muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On donne la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses coordonnées $(f_i(t))$ dans $\mathscr{R}$: $f_i(t) = t^i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

a) Montrer que f est un plongement trirégulier.

b) Trouver l'ensemble réunion des droites $\mathrm{Dr}(M_1, M_2)$ où $(M_i = f(t_i))_{i \in \{1,2\}}$ décrit l'ensemble des couples tels que les plans osculateurs en t_1 et t_2 soient perpendiculaires.

Exercice 6 (*sécantes triples*) : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On donne l'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses coordonnées : $f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = \dfrac{t^3+1}{t}$, $f_3(t) = \dfrac{t^2-1}{t}$.

a) Prouver que $\Gamma = \mathrm{Im}\,(f)$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$. Combien a-t-elle de composantes connexes ?

b) Trouver l'ensemble réunion des droites $\mathrm{Dr}\,(M_1, M_2, M_3)$ où $(M_i = f(t_i))_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ parcourt l'ensemble des triplets tels que M_1, M_2 et M_3 soient *alignés*.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ une immersion de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. On munit $\vec{\mathscr{E}}$ d'une norme $\|\,.\,\|$ et on suppose $\|f(t)\| \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\|f(t)\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Démontrer que $\Gamma = \mathrm{Im}\,(f)$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$. (Cf. aussi l'exercice 7 du § VI.3 du tome 3.)

Exercice 8 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien et $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j})$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$. On donne la *cardioïde* $\mathscr{C}$ d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$ dans $\mathscr{R}$ (a donné > 0).

a) Vérifier que $\mathscr{C}$ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation cartésienne

$$(x^2+y^2)^2 - 2\,ax\,(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0\,.$$

b) Soit $\mathscr{D}$ une droite admettant dans $\mathscr{R}$ l'équation $ux + vy + w = 0$. Prouver que $\mathscr{D}$ est une tangente à $\mathscr{C}$ ssi $27\,a^2w\,(u^2+v^2) - 16\left(\dfrac{a}{2}u + w\right)^3 = 0$ (équation tangentielle de $\mathscr{C}$).

Exercice 9 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On considère la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses coordonnées (f_i) dans $\mathscr{R}$: $f_1(t) = t^4$, $f_2(t) = t^3 + 3\,t^2$, $f_3(t) = t^2 + 4\,t$.

a) Vérifier que f est un plongement.

b) Soit $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$. Trouver une CNS pour que les points $M_i = f(t_i)$ soient alignés $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

c) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Prouver que par $M_0 = f(t_0)$ il passe au plus 3 plans osculateurs à f. Si t_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont les paramètres de ces plans osculateurs, prouver que les points $M_i = f(t_i)$ sont alignés.

Exercice 10 : Soit E un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On considère la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses coordonnées (f_i) dans $\mathscr{R}$: $f_1(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$, $f_2(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$, $f_3(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$.

a) Prouver que f est un plongement.

b) Déterminer les *plans bitangents* à f (i.e. les plans contenant deux tangentes à f *coplanaires*).

Exercice 11 : Soit $\mathscr{E}$ un plan *euclidien* muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$, et $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ régulière. On appelle *orthoptique* de f l'ensemble des points communs à deux tangentes à f orthogonales.

Trouver l'orthoptique de f dans les cas suivants :

a) f est définie dans $\mathscr{R}$ par $f_1(t) = \dfrac{a}{t}$, $f_2(t) = at^2$ ($a > 0$ donné, $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$).

b) f est définie par $f_1(t) = at^2$, $f_2(t) = at^3$ ($a > 0$, $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$).

c) f est définie dans $\mathscr{R}$ par $f_1(t) = a\cos^3 t$, $f_2(t) = a\sin^3 t$ ($a > 0$ donné, I à préciser).

d) f est définie par l'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$ ($a > 0$ donné, $I =]-\pi, \pi[$).

N.B. On définit aussi *l'orthoptique d'une sous-variété courbe* $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{E}$: c'est l'ensemble des points communs à deux tangentes à $\mathscr{V}$ orthogonales.

Exercice 12 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$. On donne l'application $f : \omega \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)$ définie dans $\mathscr{R}$ par ses coordonnées : $f_1(t) = \dfrac{at^2}{1 + t - t^2}$, $f_2(t) = \dfrac{at^3}{1 + t - t^2}$ ($a > 0$ donné, $\omega = \mathbb{R}^* \setminus \{\text{racines de } t^2 - t - 1\}$).

a) Prouver que l'image Γ de f est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$.

b) Trouver l'ensemble des points $M_0 \in \mathscr{E}$ par où il passe 3 tangentes à f en des paramètres t_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que les $M_i = f(t_i)$ soient alignés.

§ VII.2 *$\mathscr{C}^k$-ÉQUIVALENCE DES COURBES PARAMÉTRÉES*

Soit I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. On sait que les homéomorphismes de I sur J sont les bijections strictement monotones de I sur J (cf. tome 2, théorème IV.2.3 et exercice 4 du § IV.2). Un homéomorphisme $\theta : I \longrightarrow J$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ ainsi que $\theta^{\langle -1 \rangle}$ sera appelé un **changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible.** (Lorsque I et J sont *ouverts*, un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible est donc tout simplement un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de I sur J.) L'application $\mathrm{Id}_I : I \longrightarrow I$ est un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible. La composée de deux changements de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissibles en est encore un. Si $\theta : I \longrightarrow J$ est un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible, $\theta^{\langle -1 \rangle} : J \longrightarrow I$ en est encore un.

DÉFINITION VII.2.1

> *Deux courbes paramétrées $f : I \longrightarrow E$, $g : J \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ de E sont dites* ***$\mathscr{C}^k$-équivalentes*** *ssi il existe un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible $\theta : I \longrightarrow J$ tel que $f = g \circ \theta$. Les courbes f et g sont dites* ***positivement*** *$\mathscr{C}^k$-équivalentes ssi elles sont $\mathscr{C}^k$-équivalentes et si de surcroît on peut choisir, dans ce qui précède, θ* ***croissant.***

Pour k fixé $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ on s'assure sans peine que les courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^k$ de E constituent un ensemble. Sur cet ensemble *la*

$\mathscr{C}^k$-équivalence (resp. *la $\mathscr{C}^k$-équivalence positive*) *est une relation d'équivalence*, dont la seconde entraîne la première ([1]).

Une propriété $\mathscr{P}(f)$ d'une courbe paramétrée f de classe $\mathscr{C}^k$ sera dite **$\mathscr{C}^k$-invariante** (resp. **positivement $\mathscr{C}^k$-invariante**) ssi, dès qu'elle est vraie avec f, elle est aussi vraie avec toute courbe g qui est $\mathscr{C}^k$-équivalente (resp. positivement $\mathscr{C}^k$-équivalente) à f. De même, soit $\mathscr{P}(f, t)$ une propriété du couple (f, t) où $f : I \longrightarrow E$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ et $t \in I$ une valeur arbitraire du paramètre. Nous dirons que cette propriété est (positivement) $\mathscr{C}^k$-invariante ssi, dès que $\mathscr{P}(f, t)$ est vraie, alors pour tout changement de paramètre (positivement) $\mathscr{C}^k$-admissible $\theta : I \longrightarrow J$, la propriété $\mathscr{P}(f \circ \theta^{\langle -1 \rangle}, \theta(t))$ est vraie.

Par exemple *la régularité d'une courbe paramétrée est une propriété $\mathscr{C}^k$-invariante.* De même la propriété « t est un paramètre régulier (resp. stationnaire) de la courbe paramétrée f » est $\mathscr{C}^k$-invariante. *La tangente* $\mathscr{C}_{1, f, t}$ en un paramètre régulier est une droite affine *$\mathscr{C}^k$-invariante.*

THÉORÈME VII.2.1

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. La suite $(T_{p, f, t_0})_{p \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant p \leqslant k}$ des sous-espaces fondamentaux de f en un paramètre $t_0 \in I$ est $\mathscr{C}^k$-invariante.

Démonstration :

Soit $\theta : I \longrightarrow J$ un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible. Posons $g = f \circ \theta^{\langle -1 \rangle}$ et $u_0 = \theta(t_0)$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant q \leqslant k$, on a par dérivation de fonctions composées :

$$f^{(q)}(t_0) = (\theta'(t_0))^q \, g^{(q)}(u_0) + \left(\sum_{j=2}^{q-1} C_j \, g^{(j)}(u_0) \right) + \theta^{(q)}(t_0) \, g'(u_0) \, ,$$

où les C_j sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ en $\theta'(t_0), \ldots, \theta^{(p-1)}(t_0)$. Ces expressions montrent : pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant p \leqslant k$, $T_{p, f, t_0} \subset T_{p, g, u_0}$. On voit de même que $T_{p, g, u_0} \subset T_{p, f, t_0}$. D'où finalement $T_{p, f, t_0} = T_{p, g, u_0}$. ■

([1]) Soit k et l deux éléments quelconques de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et *distincts*. On définit de manière évidente la notion de *$\mathscr{C}^k$-équivalence positive* (resp. de *$\mathscr{C}^k$-équivalence*) pour deux courbes paramétrées f et $g : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^l$. On obtient encore des relations d'équivalence.

Nous utiliserons parfois cette généralisation sans autre explication (par exemple, au § IX.6).

On peut de même considérer la $\mathscr{C}^k$-équivalence $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ entre applications *continues* (sans autre hypothèse) : $I \longrightarrow E$.

COROLLAIRE

La notion de ***paramètre d'inflexion*** *et la notion de* ***paramètre p fois régulier*** *sont des propriétés* ***$\mathscr{C}^k$-invariantes.***

Sens de parcours, sur une courbe paramétrée régulière

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée **régulière** de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Intuitivement, les courbes paramétrées positivement $\mathscr{C}^k$-équivalentes à f permettent de parcourir la trajectoire Γ de f « le même nombre de fois » et *dans le même sens*. Soit alors J l'intervalle $\{-t\}_{t \in I}$ et $\theta : I \longrightarrow J$ le changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible $t \mapsto -t$, qui est décroissant. L'intuition précédente est confortée par la proposition ci-après :

PROPOSITION VII.2.1

Avec les notations et hypothèses ci-dessus (en particulier : f régulière) les courbes paramétrées $\mathscr{C}^k$-équivalentes f et $g = f \circ \theta^{\langle -1 \rangle}$ ne sont pas positivement $\mathscr{C}^k$-équivalentes.

Démonstration :

Supposons qu'il existe un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible *croissant* $\theta_1 : I \longrightarrow J$ tel que $f = g \circ \theta_1$. Alors $\theta_2 = -\theta_1 : I \longrightarrow I$ serait un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible décroissant tel que $f = f \circ \theta_2$, d'où $(\forall t \in I)\ f'(t) = \theta_2'(t)\, f'(\theta_2(t))$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'on aurait alors un $t_0 \in I$ tel que $t_0 = \theta_2(t_0)$, d'où $f'(t_0) = \theta_2'(t_0)\, f'(t_0)$, et, comme $\theta_2'(t_0) < 0$, on aurait $f'(t_0) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. En conclusion f et g ne peuvent être positivement $\mathscr{C}^k$-équivalentes. ■

Branches régulières

DÉFINITION VII.2.2

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Nous appellerons ***branche régulière*** *de f toute classe de $\mathscr{C}^k$-équivalence d'une restriction $f|_J$ de f à un sous-intervalle* ***ouvert non vide*** *J de I tel que $f|_J$ soit un* ***plongement :*** *$J \longrightarrow E$* (cf. *tome* 3, *définition* VI.3.3). *Les courbes paramétrées d'une même branche régulière γ de f sont appelées* ***représentations (paramétriques)*** *de γ, ou* ***paramétrisations*** *de γ.*

Soit γ une branche régulière de f, définie par $f|_J$: tout paramètre $t \in J$ est régulier pour f. De plus l'ensemble $\Gamma = f(J)$ est une sous-variété

de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ connexe de E, et les immersions de classe $\mathscr{C}^k$ d'image Γ sont exactement les paramétrisations de γ (cf. théorème VI.3.2 du tome 3) ; la sous-variété Γ est appelée **support** de la branche γ. Pour tout point $M \in \Gamma$ et toute représentation $g : \Lambda \longrightarrow E$ de γ, la tangente à g en le paramètre $\tau = g^{-1}(M)$ n'est autre que *la tangente en M à Γ* au sens de la définition VI.3.4 du tome 3.

Remarque 1 : Une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ de E, connexe et contenue dans la trajectoire de f, n'est pas nécessairement le support d'une branche régulière de f (cf. exercice 1 du § VI.3 du tome 3) ; mais si elle l'est, elle est le support d'une *unique* branche régulière de f.

PROPOSITION VII.2.2

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété de dimension $p \geqslant 1$ et de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ de E et $\mathscr{W}$ une partie non vide de $\mathscr{V}$. Pour que $\mathscr{W}$ soit une ***sous-variété de E de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$****, il faut et il suffit que $\mathscr{W}$ soit une* ***partie ouverte relativement à $\mathscr{V}$*** *; si c'est le cas, pour tout point $M \in \mathscr{W}$, l'espace affine tangent $\mathscr{T}_M(\mathscr{W})$ à $\mathscr{W}$ en M est égal à l'espace affine tangent $\mathscr{T}_M(\mathscr{V})$ à $\mathscr{V}$ en M.*

Démonstration :

Si $\mathscr{W}$ est ouverte relativement à $\mathscr{V}$, le caractère *local* de la définition d'une sous-variété montre que $\mathscr{W}$ est une sous-variété de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$ de E, et la proposition VI.3.4 du tome 3 implique l'assertion sur les espaces tangents.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{W}$ soit une sous-variété de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$ de E. Soit $a \in \mathscr{W}$. Donnons-nous un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme φ d'un voisinage ouvert V de a dans E sur un cube $]-r, r[^n$ de $\mathbb{R}^n$ $(r > 0)$ tel que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(V \cap \mathscr{V}) =]-r, r[^p$; et de même un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme ψ d'un voisinage ouvert W de a dans E sur un cube $]-s, s[^n$ de $\mathbb{R}^n$ $(s > 0)$ tel que $\psi(a) = 0$ et $\psi(W \cap \mathscr{W}) =]-s, s[^p$. Quitte à réduire s, on peut supposer $W \subset V$. Alors $\xi = \varphi \circ \psi^{\langle -1 \rangle}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $]-s, s[^n$ sur un ouvert ω de $]-r, r[^n$, et $\xi(]-s, s[^p) \subset]-r, r[^p$. Posons $\theta = \xi|_{]-s,s[^p}$: c'est une application injective, de classe $\mathscr{C}^k$ et partout régulière, donc (corollaire 1 du théorème VI.3.2 du tome 3) $\theta(]-s, s[^p)$ est un ouvert de $]-r, r[^p$. On a donc un ouvert $\omega' \subset \omega$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega' \cap]-r, r[^p = \xi(]-s, s[^p)$. Par suite, $W \cap \mathscr{W} = \varphi^{-1}(\omega') \cap V \cap \mathscr{V}$ est un voisinage ouvert de a relativement à $\mathscr{V}$, et donc $\mathscr{W}$ est voisinage de a dans $\mathscr{V}$. C'est vrai pour tout $a \in \mathscr{W}$. Donc $\mathscr{W}$ est ouvert dans $\mathscr{V}$. ■

Proposition VII.2.3

Soit I un intervalle **ouvert** *non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow E$ un* **$\mathscr{C}^k$-plongement** *$(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, d'image notée Γ. Toute sous-variété courbe $\mathscr{V}$* **connexe** *de classe $\mathscr{C}^k$ contenue dans Γ est le support d'une branche régulière de f.*

Démonstration :

On sait que f définit un homéomorphisme $\bar{f} = f|^{\Gamma}$ de I sur Γ. Donc $\bar{f}^{-1}(\mathscr{V}) = J$ est une partie connexe de I, donc un intervalle ; de plus $\mathscr{V}$ est un ouvert de Γ (proposition VII.2.2), donc J est ouvert dans I ; finalement, J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et comme $f|_J$ définit un homéomorphisme de J sur $\mathscr{V}$, c'est bien un $\mathscr{C}^k$-plongement, d'où le résultat. ■

Remarque 2 : Si f n'est pas un plongement mais n'est qu'une immersion, la proposition VII.2.3 tombe en défaut. (Réfléchir à l'exercice 1 du § VI.3 du tome 3.)

Proposition VII.2.4

Deux courbes paramétrées de E de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ qui sont $\mathscr{C}^k$-équivalentes admettent le même ensemble de branches régulières.

(C'est quasi-évident.)

Soit γ une branche régulière de la courbe paramétrée $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, et soit g une représentation de γ. Il est clair que toute branche régulière de g est une branche régulière de f.

Le théorème qui suit est conséquence du théorème VI.2.2 du tome 3. Il montre comment on trouve suffisamment de branches régulières d'une courbe paramétrée. Vu son importance, nous en donnerons une preuve directe.

Théorème VII.2.2

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de E de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, avec I **ouvert.** *Soit $t_0 \in I$ un* **paramètre régulier** *de f. Il existe un intervalle ouvert J tel que $t_0 \in J \subset I$ et que $f|_J$ soit* **$\mathscr{C}^k$-équivalente à une représentation cartésienne** *dans un repère convenable de E. Pour un tel J, $f|_J$ est donc un* **plongement** *de classe $\mathscr{C}^k$, et $f(J)$ est le support d'une branche régulière de f passant par $M_0 = f(t_0)$.*

Démonstration :

On peut, quitte à translater le paramètre t, supposer que $t_0 = 0$. Soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, \ldots, e_n)$ un repère de E tel que $f'(0) \notin \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_n)$. Notons $(f_i(t))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de $f(t)$ dans $\mathscr{R}$, d'où $f_1'(0) \neq 0$, et $f_i(0) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Puisque $f_1'(0) \neq 0$, on peut trouver deux intervalles ouverts J et Λ voisinages de 0, avec $J \subset I$, tels que f_1 définisse un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme θ de J sur Λ. Soit $\xi = \theta^{\langle -1 \rangle}$. Pour tout $\tau \in \Lambda$, on a : $(f \circ \xi)(\tau) = M_0 \dotplus \left(\tau e_1 + \sum_{i=2}^{n} (f_i \circ \xi)(\tau)\, e_i \right)$. La courbe paramétrée $f \circ \xi$ est $\mathscr{C}^k$-équivalente à $f|_J$, et elle est cartésienne dans le repère $\mathscr{R}$. ■

Définition VII.2.3

Avec les notations et hypothèses du théorème VII.2.2, *on appelle* **représentations locales de f autour de t_0** *les représentations des branches régulières de f définies par les plongements de la forme $f|_J$, avec J intervalle ouvert convenable et $t_0 \in J \subset I$.*

Conservons les notations et hypothèses du théorème VII.2.2 : soit J un sous-intervalle ouvert de I tel que $t_0 \in J \subset I$ et que $f|_J$ soit un plongement. En vertu du théorème VI.3.2 du tome 3, *toutes les $\mathscr{C}^k$-immersions $g : \Lambda \longrightarrow E$ d'image $f(J)$ sont donc des représentations locales particulières de f autour de t_0.*

Exercice 1 : Soit $f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$.

a) Vérifier que f est régulière et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

b) L'image de f est $\mathbb{U}$, qui est une sous-variété courbe connexe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{U}$ n'est le support d'aucune branche régulière de f.

Indication : Il suffit de prouver que le support d'une branche régulière n'est jamais compact.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On considère le sous-ensemble $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ défini dans $\mathscr{R}$ par le système d'équations cartésiennes : $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^3 + y^3 + z^3 = 8$.

a) Prouver que $\mathscr{V}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$ (cf. théorème VI.3.4 du tome 3).

b) Combien $\mathscr{V}$ a-t-elle de composantes connexes ?

c) Soit A le point de $\mathscr{V}$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ dans $\mathscr{R}$. On pose $\tau = x + y + z - 2$. Calculer $yz + zx + xy$ et xyz en fonction de τ ; montrer que τ est *paramètre local* au voisinage de A sur $\mathscr{V}$, et calculer un $DL_3(0)$ de x, y, z par rapport à τ.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3 et $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe *connexe* de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$, partout birégulière. On donne $O \in \mathscr{E}$ et on suppose que tous les plans osculateurs à $\mathscr{V}$ passent par O, mais qu'aucune tangente à $\mathscr{V}$ ne passe par O. Prouver que $\mathscr{V}$ est plane.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ le plan affine $\mathbb{R}^2$. On donne une fonction $\Phi : U =]-1, 1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et un entier $r \geqslant 2$. On suppose les $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(0)$ nuls pour $\alpha + \beta < r$. Soit $\Phi_r = \dfrac{1}{r!} P_{r,\Phi,0}$ (où $P_{j,\Phi,0}$ désigne le j-ième polynôme polaire de Φ ; cf. définition V.6.3 du tome 3). On suppose que $\Phi(X, Y) = Y\Psi(X, Y)$ avec $\Psi(X, Y)$ polynomiale telle que $\Psi(1, 0) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une fonction $\Theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall (x, u) \in U)$, $\Phi(x, ux) = x^r u\, \Psi(1, u) + x^{r+1}\, \Theta(x, u)$.

Indication : Utiliser la formule de Taylor-reste intégrale pour $\Phi - \Phi_r$. En déduire, en appliquant le théorème des fonctions implicites à la fonction $(x, u) \mapsto u\Psi(1, u) - x\Theta(x, u)$, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble

$$L_\alpha = \{(x, y) \in U \mid |x| < \alpha \text{ et } y^2 \leqslant \alpha^2 x^2\}$$

vérifie : $\Phi^{-1}(0) \cap L_\alpha$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$, admettant en 0 la tangente $\mathbb{R} \times \{0\}$.

b) On suppose que $\Phi_r(X, Y) = (Y - \lambda_1 X)\ldots(Y - \lambda_s X)\, \Psi(X, Y)$ avec $\Psi(X, Y)$ polynomiale et jamais nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_s$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\Phi^{-1}(0) \cap]-\alpha, \alpha[^2$ soit la réunion de s sous-variétés courbes de classe $\mathscr{C}^\infty$ passant par 0 et y ayant pour tangentes les droites d'équation $y = \lambda_i x$ $(i \in [\![1, s]\!])$.

Exercice 5 : Quelles sont les branches régulières *maximales pour l'inclusion* des courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^\infty$ suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3} \right)$.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos 3t, \cos 5t)$.

Exercice 6 : Montrer à l'aide d'un exemple que si $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ est une immersion de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, il peut exister des branches régulières de f qui ne sont incluses dans aucune branche régulière maximale pour l'inclusion.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine $\mathbb{R}^2$.

a) On donne $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale de valuation $\geqslant 2$. Soit Γ l'ensemble $P^{-1}(0)$, où $P(x, y) = y - Q(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{V}$ la sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ égale à $\Gamma \setminus \{\text{points critiques de } P\}$. Vérifier que $\mathscr{V}$ contient 0.

a1) Montrer qu'il existe une et une seule série formelle $S = \sum_{n \geqslant 1} a_n X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ qui vérifie formellement l'équation $S - Q(X, S) = 0$.

a2) Posons $Q = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2,\ \alpha+\beta \geqslant 2} A_{\alpha,\beta} X^\alpha Y^\beta$. Vérifier que S est donnée par $a_1 = 0$, et $(\forall n \geqslant 2)\ a_n = \psi_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, (A_{\alpha,\beta})_{2 \leqslant \alpha+\beta \leqslant n})$, où ψ_n est polynomiale à coefficients dans $\mathbb{N}$.

a3) Soit $C = \operatorname*{Max}_{\alpha+\beta \geqslant 2} |A_{\alpha,\beta}|$. Notons $(C_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2,\ \alpha+\beta \geqslant 2}$ la famille telle que $C_{\alpha,\beta} = C$ pour tout (α, β). Soit $T = \sum_{n \geqslant 1} b_n X^n$ la série formelle définie par $b_1 = 0$ et $(\forall n \geqslant 2)$ $b_n = \psi_n(b_1, \ldots, b_{n-1}, (C_{\alpha,\beta})_{2 \leqslant \alpha+\beta \leqslant n})$. Montrer que T vérifie $(1 + C)(1 - X)T^2 - (1 - X)(1 - CX)T + CX^2 = 0$, et en déduire que le rayon de convergence $R = R_{\text{cv}}(T)$ est > 0.

a4) Montrer : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |a_n| \leqslant b_n$ et en déduire que $R_{\text{cv}}(S)$ est > 0. Conclure : on a une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de 0 de la forme $x \mapsto (x, \tilde{S}(x))$.

b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un polynôme et $\mathscr{V}$ la sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ égale à $g^{-1}(0) \setminus \{\text{points critiques de } g\}$. Montrer que, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathscr{V}$, on a une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de ce point qui est : soit du type $x \mapsto (x_0, y_0) + (x, \tilde{U}(x))$ avec U série entière convergente, soit du type $x \mapsto (x_0, y_0) + (\tilde{V}(x), x)$ avec V série entière convergente.

§ VII.3 *CONTACT*

Sous-espaces fondamentaux d'une sous-variété

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ de E. Raffinant la définition du § VI.3 du tome 3, nous appellerons ici **représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de $M_0 \in \mathscr{V}$** tout **plongement** $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$, où I désigne un **intervalle ouvert** de $\mathbb{R}$ tel que $M_0 \in f(I) \subset \mathscr{V}$. D'après ce qu'on a vu au tome 3, *il existe au moins une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0*, et *deux telles représentations sont $\mathscr{C}^k$-équivalentes au voisinage de M_0*.

Soit $f : I \longrightarrow E$ une telle représentation locale, avec $f(t_0) = M_0$. Avec les résultats du § VII.2, on vérifie que la suite $(T_{p,f,t_0})_{p \in \mathbb{N}^*,\ p \leqslant k}$ des sous-

espaces fondamentaux de f en t_0 ne dépend que de M_0 et non du choix de f. On l'appellera **suite des sous-espaces fondamentaux de $\mathscr{V}$ en M_0** ; on la notera $(T_{p,\mathscr{V},M_0})_{p\in\mathbb{N}^*,p\leqslant k}$.

Les sous-espaces affines $M_0 \dotplus T_{p,\mathscr{V},M_0}$ seront appelés **sous-espaces affines fondamentaux** de $\mathscr{V}$ en M_0 et notés $\mathscr{T}_{p,\mathscr{V},M_0}$. En particulier $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$ n'est autre que **la tangente à $\mathscr{V}$ en M_0.**

Si $\mathscr{W}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $M_0 \in \mathscr{W} \subset \mathscr{V}$, il est clair que $(\forall p \in \mathbb{N}^*, p \leqslant k)\ T_{p,\mathscr{V},M_0} = T_{p,\mathscr{W},M_0}$.

Si t_0 est paramètre p fois régulier d'une représentation locale f de $\mathscr{V}$ telle que $f(t_0) = M_0$, alors pour toute représentation locale g de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0, si $g(\tau_0) = M_0$, τ_0 est paramètre p fois régulier. On dit alors que **M_0 est p fois régulier sur $\mathscr{V}$.**

Si $p = 2$, M_0 est dit *birégulier* ; si $p = 3$: trirégulier, etc...

Un point $M_0 \in \mathscr{V}$ est dit d'**inflexion** sur $\mathscr{V}$ ssi il est **non birégulier.** On dit que la sous-variété $\mathscr{V}$ est **p fois régulière** ssi tous ses points sont p fois réguliers.

Une représentation locale $f : I \longrightarrow E$ de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 sera dite **centrée en M_0** ssi : $0 \in I$ et $f(0) = M_0$.

Du théorème VII.1.1, on peut déduire ([1]) :

Proposition VII.3.1

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$ de E $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$, ***connexe,*** *et soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p + 1 \leqslant k$. On suppose que $\mathscr{V}$ est p fois régulière. Pour que $\mathscr{V}$ soit contenue dans un sous-espace affine de dimension p, il faut et il suffit que $(\forall M \in \mathscr{V})\ T_{p,\mathscr{V},M} = T_{p+1,\mathscr{V},M}$.*
S'il en est ainsi, ce sous-espace affine $\mathscr{T}_p$ est unique.

Démonstration :

La condition écrite est évidemment nécessaire et alors $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_{p,\mathscr{V},M_0}$ est certainement unique. Prouvons que la condition est suffisante.

Fixons $M_0 \in \mathscr{V}$ et soit $\mathscr{A} = \mathscr{T}_{p,\mathscr{V},M_0}$. A l'aide d'une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0, en appliquant le théorème VII.1.1, on voit que $\mathscr{A}$ contient un voisinage de M_0 dans $\mathscr{V}$. Soit $A = \{M \in \mathscr{V} \mid$ il existe un voisinage S de M dans $\mathscr{V}$ tel que $S \subset \mathscr{A}\}$. Par définition même, A est un ouvert de $\mathscr{V}$, et il est non vide $(M_0 \in A)$.

Soit $M_1 \in \mathscr{V}$ adhérent à A. Grâce à une représentation locale de $\mathscr{V}$ et au théorème VII.1.1, on voit qu'il existe un voisinage ouvert (relativement à $\mathscr{V}$) ω de M_1 dans $\mathscr{V}$ inclus dans un sous-espace affine $\mathscr{A}'$ de E de dimension p. Or, si $M \in \omega \cap A$, il y a un voisinage S ouvert dans $\mathscr{V}$ de M inclus dans

([1]) La déduction serait immédiate si on avait le droit d'utiliser le théorème de classification des sous-variétés connexes de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$, qui dit qu'une telle sous-variété est soit l'image d'un plongement de $\mathbb{R}$ dans E, soit homéomorphe à $\mathbb{U}$ et image d'une application $\mathscr{C}^k$ et régulière de $\mathbb{R}$ dans E.

$\mathscr{A} \cap \omega$, et $\mathscr{A}$ est le seul sous-espace affine de dimension p contenant S. D'où $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$, donc $M_1 \in A$. Finalement $A \neq \varnothing$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathscr{V}$ qui est connexe. Donc $A = \mathscr{V}$. ■

Courbes paramétrées voisines d'ordre $\geqslant p$ en un point

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1 : J_1 \longrightarrow E$, $f_2 : J_2 \longrightarrow E$ deux courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^k$ ($p \leqslant k \leqslant +\infty$) telles que $0 \in J_1 \cap J_2$, que f_1 et f_2 soient régulières en 0, et que $f_1(0) = f_2(0)$. Nous dirons que f_1 et f_2 sont **voisines d'ordre $\geqslant p$ en 0** ssi $\overrightarrow{f_1(t)\, f_2(t)} \underset{t \longrightarrow 0}{\in} o(t^p)$. D'après le théorème de Taylor-Young, cela revient à dire que $(\forall i \in [\![1, p]\!])\ f_1^{(i)}(0) = f_2^{(i)}(0)$. La définition de deux courbes paramétrées voisines d'ordre $\geqslant p$ en t_0 s'y ramène par le changement de paramètre $t \mapsto \tau = t - t_0$.

Lemme 1

Soit $f_1 : J \longrightarrow E$ et $f_2 : J \longrightarrow E$ deux courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^k$ ($1 \leqslant k \leqslant +\infty$) simples et régulières telles que $0 \in J$ et $f_1(0) = f_2(0) = M_0$. Supposons f_1 et f_2 voisines d'ordre $\geqslant p$ en 0 ($1 \leqslant p \leqslant k$). Pour toute courbe paramétrée $g_1 : \Lambda \longrightarrow E$ qui est $\mathscr{C}^k$-équivalente à f_1 avec $0 \in \Lambda$ et $g_1(0) = M_0$, il existe une courbe paramétrée $g_2 : \Lambda \longrightarrow E$ $\mathscr{C}^k$-équivalente à f_2 et vérifiant :

$$g_2(0) = M_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{g_1(t)\, g_2(t)} \underset{t \longrightarrow 0}{\in} o(t^p)\,.$$

Démonstration :

Par hypothèse, on a un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible $\theta : \Lambda \longrightarrow I$ tel que $g_1 = f_1 \circ \theta$.

Puisque $g_1(0) = M_0 = f_1[\theta(0)]$ et puisque f_1 est simple, on a $\theta(0) = 0$.

Soit $g_2 = f_2 \circ \theta$. Comme $\overrightarrow{f_1(t)\, f_2(t)} \underset{t \longrightarrow 0}{\in} o(t^p)$, la règle de composition des développements limités montre immédiatement que $\overrightarrow{g_1(u)\, g_2(u)} \underset{u \longrightarrow 0,\, u \in \Lambda}{\in} o(u^p)$. ■

Contact entre sous-variétés courbes

Définition VII.3.1

Soit $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ deux sous-variétés de E de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ ($1 \leqslant k \leqslant +\infty$) et soit $p \in \mathbb{N}^*$ ($p \leqslant k$) et $M_0 \in E$. Nous dirons que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ ***ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant 0$*** *ssi $M_0 \in \mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$; et qu'elles* ***ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$*** *ssi : $M_0 \in \mathscr{V}_1 \cap \mathscr{V}_2$ et il*

existe des représentations locales f_1 et f_2 de $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ au voisinage de M_0, centrées en M_0, voisines d'ordre $\geqslant p$ en 0. On dit que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ sont **tangentes** *(resp.* **osculatrices, surosculatrices***) en M_0 ssi elles ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant 1$ (resp. $\geqslant 2$, $\geqslant 3$).*

Soit deux courbes paramétrées $f_i : J_i \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ avec $0 \in \mathring{J}_1 \cap \mathring{J}_2$, $f_1(0) = f_2(0) = M_0$, f_1 et f_2 *régulières en* 0, telles que $\overrightarrow{f_1(t)\, f_2(t)} \underset{t \longrightarrow 0,\, t \in J_1 \cap J_2}{\in} o(t^p)$.

On a un intervalle ouvert J tel que $0 \in J \subset J_1 \cap J_2$ et que $f_i|_J$ définisse une branche régulière γ_i de f_i pour $i \in \{1, 2\}$ (cf. théorème VII.2.2). Il est clair qu'alors *les supports $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ de γ_1 et γ_2 ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$.*

Proposition VII.3.2

Avec les notations de la définition VII.3.1, *pour que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ aient en $M_0 \in E$ un contact d'ordre $\geqslant 1$, il faut et il suffit qu'elles aient* **la même tangente** *en M_0.*

Démonstration :

On vérifie facilement que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ aient même tangente en M_0.

Soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, \ldots, e_n)$ un repère de E tel que e_1 dirige la droite affine $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{1, \mathscr{V}_1, M_0} = \mathscr{T}_{1, \mathscr{V}_2, M_0}$. Les sous-variétés $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ admettent des représentations locales cartésiennes dans $\mathscr{R}$, de la forme

$$g_1 : J \longrightarrow E\,, \quad x \mapsto M_0 \dotplus \left(x e_1 + \sum_{i=2}^{n} \varphi_i(x)\, e_i \right),$$

$$g_2 : J \longrightarrow E\,, \quad x \mapsto M_0 \dotplus \left(x e_1 + \sum_{i=2}^{n} \psi_i(x)\, e_i \right)$$

centrées en M_0.

Puisque $\mathscr{T}$ est la tangente en M_0 à $\mathscr{V}_1$ (resp. à $\mathscr{V}_2$), c'est que $\varphi_i'(0) = 0$ (resp. $\psi_i'(0) = 0$) pour $i \in [\![2, n]\!]$. Donc

$$\overrightarrow{g_1(x)\, g_2(x)} = \sum_{i=2}^{n} (\psi_i(x) - \varphi_i(x))\, e_i \underset{x \longrightarrow 0}{\in} o(x)\,.$$

Donc g_1 et g_2 sont voisines d'ordre $\geqslant 1$ en 0, i.e. $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant 1$. ■

THÉORÈME VII.3.1

Soit $M_0 \in E$. Sur l'ensemble $\mathscr{S}_{M_0,k}$ des sous-variétés de dimension 1 et de classe donnée $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ passant par M_0, pour tout entier $p \in [\![0, k]\!]$, la relation « $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$ » est une relation d'équivalence.

Démonstration :

C'est évident pour $p = 0$. Pour $p \geqslant 1$ seule la *transitivité* de la relation nécessite une preuve. Soit donc des éléments $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$, $\mathscr{V}_3$ de $\mathscr{S}_{M_0,k}$ tels que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ (resp. $\mathscr{V}_2$ et $\mathscr{V}_3$) aient en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$. Considérons des représentations locales f_1 et f_2 (resp. g_2 et g_3) de $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ (resp. $\mathscr{V}_2$ et $\mathscr{V}_3$) centrées en M_0, voisines d'ordre $\geqslant p$ en 0. Quitte à réduire s'il le faut les intervalles de définition, on peut supposer f_1 et f_2 (resp. g_2 et g_3) définies sur le même intervalle ouvert I (resp. J) contenant 0, et que de plus g_2 est $\mathscr{C}^k$-équivalente à f_2. Appliquant le lemme 1, on obtient une représentation locale $g_1 : J \longrightarrow E$ de $\mathscr{V}_1$, centrée en M_0, voisine d'ordre $\geqslant p$ de g_2 en 0. De $\overrightarrow{g_1(t)\,g_2(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$ et $\overrightarrow{g_2(t)\,g_3(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$, on déduit par addition : $\overrightarrow{g_1(t)\,g_3(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$, ce qui prouve que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_3$ admettent en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$. ■

Soit M_0 un point d'une sous-variété $\mathscr{V}$ de E de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Il existe des repères affines $\mathscr{R}$ de E dans lesquels $\mathscr{V}$ admet une représentation locale au voisinage de M_0 *cartésienne dans* $\mathscr{R}$. On a vu (cf. preuve du théorème VII.2.2) que $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, \ldots, e_n)$ possède cette propriété lorsque *la tangente vectorielle* $T_{1,\mathscr{V},M_0}$ *en* M_0 *à* $\mathscr{V}$ *n'est pas contenue dans* Vect $(e_1, \ldots, e_n)$. On vérifie que les repères ainsi définis sont les seuls possédant la propriété.

THÉORÈME VII.3.2

Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-variétés courbes de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ passant par $M_0 \in E$ et admettant dans un repère $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, \ldots, e_n)$ des représentations locales respectives f et g au voisinage de M_0 cartésiennes dans $\mathscr{R}$ et centrées en M_0. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$. Pour que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ aient en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$, il faut et il suffit que f et g soient voisines d'ordre $\geqslant p$.

Démonstration :

D'après la définition VII.3.1, la condition est suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire. On peut supposer $M_0 = O$, et f et g définies sur le même intervalle ouvert I. Ecrivons :

$$\overrightarrow{M_0 f(t)} = te_1 + \sum_{i=2}^{n} f_i(t)\, e_i \; ; \quad \overrightarrow{M_0 g(t)} = te_1 + \sum_{i=2}^{n} g_i(t)\, e_i \;\; (t \in I)\,.$$

D'après l'hypothèse, le lemme 1 permet de construire un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible $\theta : J \longrightarrow I$ tel que $0 \in J \subset I$, $\theta(0) = 0$ et $\overrightarrow{f(t)\, g(\theta(t))} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$. Dans cette relation, prenons la coordonnée sur e_1 dans $\mathscr{R}$; on obtient : $t - \theta(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$. D'où : $\overrightarrow{g(t)\, g(\theta(t))} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$, et par suite :

$$\overrightarrow{f(t)\, g(t)} = \overrightarrow{f(t)\, g(\theta(t))} + \overrightarrow{g(\theta(t))\, g(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)\,. \quad \blacksquare$$

Exemple 1 : On suppose E de dimension 2 muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$. On donne la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2p} x^2$ $(p > 0)$ dans $\mathscr{R}$. Soit Φ une fonction à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un voisinage ouvert U de O dans $\mathbb{R}^2$. *Trouver une* CNS *pour que la courbe* Γ *d'équation* $\Phi(x, y) = 0$ *dans* $\mathscr{R}$ *soit osculatrice en* O *à* $\mathscr{P}$.

Solution : Ecrivons le développement de Taylor à l'ordre 2 de Φ à l'origine :

$$\Phi(x, y) = C + ax + by + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) + \rho_1(x, y)\,,$$

avec $\rho_1(x, y) \underset{(x,y) \to (0,0)}{\in} o(x^2 + y^2)$.

Posons $\varphi(O \dotplus (xe_1 + ye_2)) = \Phi(x, y)$ pour $(x, y) \in U$.

$\mathscr{P}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de E, dont tous les points sont birréguliers. La tangente $\mathscr{T}$ en O à $\mathscr{P}$ est $O \dotplus \mathbb{R}e_1$.

Par ailleurs, on sait que $\mathscr{V} = \Gamma \setminus \{\text{points critiques de } \varphi\}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^2$ de E (cf. tome 3, théorème VI.3.3). Or, Γ passe par O ssi $C = 0$; et O n'est pas critique pour φ ssi $(a, b) \neq (0, 0)$. Nous supposons donc $C = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$; alors $O \in \mathscr{V}$, et la tangente en O à $\mathscr{V}$ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation $ax + by = 0$ (cf. *ibidem*) ; cette tangente est $\mathscr{T}$ ssi $a = 0$. Nous supposons donc $C = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites donne immédiatement, par la méthode d'identification, la représentation cartésienne locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de O :

$$y = \frac{-\alpha}{2b} x^2 + \rho_2(x)\,, \quad \text{avec} \quad \rho_2(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^2)\,.$$

D'après le théorème VII.2.3, $\mathscr{V}$ est osculatrice en O à $\mathscr{P}$ ssi $\frac{1}{2p}x^2 - \left(\frac{-\alpha}{2b}x^2\right) \underset{x \to 0}{\in} o(x^2)$, i.e. ssi $b = -p\alpha$. Donc les fonctions Φ qui conviennent sont celles qui vérifient $\alpha \neq 0$ et $b = -p\alpha$, autrement dit : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0,0) = -p\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,0) = \Phi(0,0) = 0$.

Contact d'une sous-variété courbe et de sa tangente en un point

THÉORÈME VII.3.3

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, $p \in \mathbb{N}^*$ $(p \leqslant k)$ et $M_0 \in \mathscr{V}$. Pour que la tangente $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$ et $\mathscr{V}$ aient en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$, il faut et il suffit que $T_{1,\mathscr{V},M_0} = \cdots = T_{p,\mathscr{V},M_0}$.
En particulier, $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$ et $\mathscr{V}$ sont toujours ***tangentes*** *en M_0 (cf. proposition* VII.3.2) *; et pour que $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$ et $\mathscr{V}$ soient* ***osculatrices*** *en M_0, il faut et il suffit que M_0 soit un* ***point d'inflexion*** *de $\mathscr{V}$.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, \ldots, e_n)$ un repère de E tel que e_1 dirige $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$. On construit une représentation locale $f : I \longrightarrow E$ de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0, centrée en M_0, du type $t \mapsto f(t) = M_0 \dotplus (te_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_n(t)e_n)$, avec $f'(0) = e_1$. Sur $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$, on considère la représentation $g : \mathbb{R} \longrightarrow E$, $t \mapsto M_0 \dotplus te_1$. Alors f et g sont cartésiennes dans $\mathscr{R}$, et puisque $f'(0) = e_1$, on a : $f_i'(0) = 0$ (donc $f_i(t) \in o(t)$) pour $2 \leqslant i \leqslant n$.

Comme $\overrightarrow{g(t)f(t)} = \sum_{i=2}^{n} f_i(t)e_i \underset{t \to 0}{\in} o(t)$, on voit déjà que $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$ et $\mathscr{V}$ sont tangentes en M_0. Si de plus $2 \leqslant p \leqslant k$, la condition $\overrightarrow{g(t)f(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$ équivaut à $f_i^{(j)}(0) = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$ et $2 \leqslant j \leqslant p$, i.e. à $f^{(j)}(0) \in \mathbb{R}e_1$ pour $2 \leqslant j \leqslant p$, ou encore à $T_{j,\mathscr{V},M_0} = T_{1,\mathscr{V},M_0}$ pour $2 \leqslant j \leqslant p$, d'où le résultat, compte tenu du théorème VII.3.2. ■

Remarque 1 : Par un calcul analogue, on montre que $\mathscr{T}_{1,\mathscr{V},M_0}$ est *la seule droite tangente en M_0 à $\mathscr{V}$*. Nous y reviendrons au § VII.4.

Contact et difféomorphismes

Considérons un ouvert non vide U de E, un $\mathbb{R}$-ev F de dimension finie $m \geqslant 1$, et une application $\Phi : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Soit deux

courbes paramétrées f et $g : I \longrightarrow E$, à valeurs dans U, de classe $\mathscr{C}^k$, avec $0 \in \mathring{I}$ et $f(0) = g(0) = M_0$, régulières en 0, voisines d'ordre $\geqslant p$ en 0 ($p \in \mathbb{N}^*, p \leqslant k$). Notons φ et ψ les courbes transformées de f et g par $\Phi : \varphi = \Phi \circ f$, $\psi = \Phi \circ g$, et soit $N_0 = \Phi(M_0)$. On a : $\varphi'(0) = (\mathrm{d}_{M_0}\Phi) \cdot f'(0)$, donc 0 est un paramètre régulier sur φ et ψ ssi $f'(0) \notin \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}_{M_0}\Phi)$. Dans tous les cas, la règle de composition des développements limités polynomiaux généraux (cf. tome 3, page 207) montre que $\overrightarrow{\varphi(t)\,\psi(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$. Donc, si $f'(0) \notin \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}_{M_0}\Phi)$, *les courbes paramétrées φ et ψ sont voisines d'ordre $\geqslant p$ en* 0.

Supposons maintenant que $F = E$ et que Φ définisse un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur un ouvert V de E. Pour toute sous-variété courbe (et même de dimension quelconque) $\mathscr{V} \subset V$ de classe $\mathscr{C}^k$, l'image $\Phi(\mathscr{V})$ est encore une sous-variété courbe (resp. de même dimension) de classe $\mathscr{C}^k$; si $M \in \mathscr{V}$, la tangente en $\Phi(M)$ à $\Phi(\mathscr{V})$ est dirigée par $\mathrm{d}_M\Phi(T_{1,\mathscr{V},M})$.

Théorème VII.3.4

Soit Φ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme ($1 \leqslant k \leqslant +\infty$) d'un ouvert non vide U de E sur un ouvert V de E. Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-variétés courbes de classe $\mathscr{C}^k$ de E incluses dans U, et $M_0 \in U$. Soit enfin $p \in \mathbb{N}^*$ ($p \leqslant k$). Pour que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ aient en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$, il faut et il suffit que $\mathscr{S} = \Phi(\mathscr{V})$ et $\mathscr{T} = \Phi(\mathscr{W})$ aient en $N_0 = \Phi(M_0)$ un contact d'ordre $\geqslant p$.

Démonstration :

Soit f et $g : I \longrightarrow E$ des représentations locales de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ centrées en M_0 telles que $\overrightarrow{f(t)\,g(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$. Les représentations locales $\varphi = \Phi \circ f$ et $\psi = \Phi \circ g$ de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont centrées en N_0, et d'après ce qu'on vient de voir, vérifient $\overrightarrow{\varphi(t)\,\psi(t)} \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$. Donc si $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$, il en est de même de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ en N_0 ; pour la réciproque, on utilise le difféomorphisme $\Phi^{\langle -1 \rangle}$. ■

Exemple 2 : Prenons pour E un espace euclidien de dimension $n = 2$. *Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe connexe de classe $\mathscr{C}^2$ birégulière de E telle que $0_E \notin \mathscr{V}$.* Pour $M \in \mathscr{V}$, notons Γ_M *le cercle osculateur* en M à $\mathscr{V}$ (l'existence et l'unicité de Γ_M seront prouvées au Chapitre IX). *Montrer que si les Γ_M passent tous par 0_E, alors $\mathscr{V}$ est contenue dans un cercle Γ passant par 0_E.*

Solution par inversion : Soit Φ une inversion de pôle 0_E, i.e. une bijection de $U = E \setminus \{0_E\}$ sur U de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{\|x\|^2}x$, avec $C \in \mathbb{R}^* : \Phi$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme involutif de U sur U. Il est immédiat que pour tout $M \in \mathscr{V}$, la sous-variété courbe $\Gamma_M \setminus \{0_E\}$ est transformée par Φ en une droite γ_M ne passant pas par 0_E. D'après le théorème VII.3.4, la sous-variété courbe connexe $\mathscr{W} = \Phi(\mathscr{V})$ et γ_M sont osculatrices en $\Phi(M)$. Donc (cf. théorème VII.3.3 et remarque 1), $\Phi(M)$ est point d'inflexion de $\mathscr{W}$. Ainsi tous les points de $\mathscr{W}$ sont points d'inflexion de $\mathscr{W}$. D'après la proposition VII.3.1, cela signifie que

$\mathscr{W}$ est incluse dans une droite $\mathscr{D}$. Cette droite, étant égale à toutes les γ_M, ne passe pas par 0_E. Donc $\mathscr{V}$ est contenue dans $\Phi(\mathscr{D})$ qui est un certain cercle passant par 0_E privé de 0_E.

Contact entre courbes paramétrées régulières

Soit $f : I \longrightarrow E$ et $g : J \longrightarrow E$ deux courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et régulières. Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in J$ tels que $f(t_0) = g(u_0) = M_0$, et $p \in \mathbb{N}^*$ $(p \leqslant k)$. S'il existe deux représentations locales, une de f autour de t_0 et une de g autour de u_0 dont les supports respectifs $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$, alors la propriété est vraie avec *toutes* les représentations locales de f autour de t_0 et de g autour de u_0.

Définition VII.3.2

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on dit que f et g ont en le couple (t_0, u_0) un contact d'ordre $\geqslant p$ ssi pour toutes représentations locales de f autour de t_0 et de g autour de u_0, les supports $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de ces représentations ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$.

On vérifie que la notion introduite dans cette définition est $\mathscr{C}^k$-invariante.

Contact entre courbe régulière et sous-variété

Donnons-nous maintenant une courbe paramétrée régulière $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, une sous-variété courbe $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$, et $t_0 \in I$ tel que $M_0 = f(t_0) \in \mathscr{V}$. S'il existe des représentations locales de f autour de t_0 et de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 dont les supports ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$ $(p \leqslant k)$, alors cette propriété reste vraie avec *toutes* les représentations locales de f autour de t_0 et de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0.

Définition VII.3.3

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on dit que f et $\mathscr{V}$ ont en le couple (t_0, M_0) un contact d'ordre $\geqslant p$ ssi, pour toutes représentations locales de f autour de t_0 et de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0, les supports de ces représentations ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$.

Là encore, la notion introduite est $\mathscr{C}^k$-invariante.

Il est facile de vérifier que le contact est d'ordre $\geqslant 1$ ssi les tangentes en t_0 et u_0 à f et g (resp. en t_0 à f et en M_0 à $\mathscr{V}$) sont les mêmes.

Théorème VII.3.5

Dans les conditions de la définition VII.3.3, *supposons que $n = 2$, que $t_0 = 0$, et que $\mathscr{V} = \Phi^{-1}(0)$, où $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ définie sur un ouvert U contenant $\mathscr{V}$, et sans point critique dans U. Pour que f et $\mathscr{V}$ aient en le couple (t_0, M_0) un contact d'ordre $\geqslant p$, il faut et il suffit que $\Phi(f(t)) \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$.*

Démonstration :

D'après la règle de composition des développements limités généraux (cf. tome 3, page 207), il est clair que la condition est nécessaire. Montrons

qu'elle est suffisante : on part donc de l'hypothèse $\Phi(f(t)) \underset{t \to 0}{\in} o(t^p)$, avec $1 \leqslant p \leqslant k$.

a) D'abord : $\Phi(f(t)) = \Phi(M_0) + t(\mathrm{d}_{M_0}\Phi) \cdot f'(0) + \rho_1(t)$, avec $\Phi(M_0) = 0$ et $\rho_1(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t)$. En effet $\overrightarrow{M_0 f(t)} - tf'(0) \underset{t \to 0}{\in} o(t)$; donc $t\,\mathrm{d}_{M_0}\Phi \cdot f'(0) \underset{t \to 0}{\in} o(t)$. Il en résulte que $\mathrm{d}_{M_0}\Phi \cdot f'(0) = 0$. Autrement dit, les tangentes en $t_0 = 0$ à f et en M_0 à $\mathscr{V}$ sont les mêmes. On peut maintenant supposer $p \geqslant 2$.

b) Ensuite, considérons un repère $\mathscr{R} = (M_0\,; e_1, e_2)$ de E tel que e_1 dirige la tangente en M_0 à $\mathscr{V}$. Notons (x, y) les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du point générique de E. A l'aide de $\mathscr{R}$ nous identifions E à $\mathbb{R}^2$. Puisque e_1 dirige la tangente en M_0 à $\mathscr{V}$, on a : $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(0, 0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites s'applique donc à Φ en M_0 et fournit une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 de la forme $y = \varphi(x)$, φ de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle ouvert J voisinage de 0, avec $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi(0) = 0$.

D'autre part on a une représentation locale de f autour de $t_0 = 0$, de la forme $y = \psi(x)$, avec ψ de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle ouvert J' voisinage de 0, et $\psi'(0) = 0$ (car e_1 dirige la tangente en t_0 à f). On peut, quitte à remplacer J et J' par $J \cap J'$, supposer $J = J'$. On a : $(\forall x \in J)\ \Phi(x, \varphi(x)) = 0$, et par composition de développements limités polynomiaux, $\Phi(x, \psi(x)) \underset{x \to 0,\, x \in J}{\in} o(x^p)$.

La partie régulière du $\mathrm{DL}_p(0)$ de Φ est $H(x, y) = by + \Psi(x, y)$ avec $b = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(0, 0) \neq 0$ et Ψ polynomiale, val $(\Psi) \geqslant 2$ et deg $(\Psi) \leqslant p$. Soit P et Q les parties régulières des $\mathrm{DL}_p(0)$ de φ et ψ. Par composition des $\mathrm{DL}_p(0)$, on a :

$$(1) \quad bP(x) + \Psi(x, P(x)) \underset{x \to 0}{\in} o(x^p) \quad \text{et} \quad bQ(x) + \Psi(x, Q(x)) \underset{x \to 0}{\in} o(x^p).$$

c) Montrons qu'il existe un polynôme unique $S(x)$ de valuation $\geqslant 1$ et de degré $\leqslant p$ tel que $bS(x) + \Psi(s, S(x)) \underset{x \to 0}{\in} o(x^p)$. Pour cela il suffit de chercher S par identification : posant $S(x) = a_1 x + \cdots + a_p x^p$, on voit d'abord que $a_1 = 0$; supposant trouvés $a_1, \ldots, a_{r-1}$ $(r \leqslant p)$, on voit que dans $\Psi(x, S(x))$ les termes dépendant de $a_r, \ldots, a_p$ sont de degré $\geqslant r + 1$ en x. Donc l'identification du terme en x^r donne : $ba_r + R(a_1, \ldots, a_{r-1}) = 0$ avec R polynomiale, ce qui détermine a_r de façon unique. On vérifie facilement que le polynôme obtenu convient.

d) Maintenant, on déduit de (1) que $P = Q$; d'où $\varphi(x) - \psi(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^p)$, donc f et $\mathscr{V}$ ont bien en le couple (t_0, M_0) un contact d'ordre $\geqslant p$. ■

N.B. Pour traiter certains des exercices qui suivent, on suppose connues quelques propriétés élémentaires des coniques, par anticipation sur le Chapitre X.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien, Γ un cercle de $\mathscr{E}$ (de rayon $R > 0$) et $O \in \Gamma$. On considère l'ensemble des paraboles de $\mathscr{E}$ osculatrices à Γ en O. Trouver l'ensemble des foyers de ces paraboles.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien, Γ un cercle de $\mathscr{E}$, de rayon $R > 0$ et $O \in \Gamma$. On considère l'ensemble des hyperboles équilatères de $\mathscr{E}$ osculatrices à Γ en O. Trouver l'ensemble des centres et l'ensemble des foyers de ces hyperboles.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$. On donne l'hyperbole $\mathscr{C}$ dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $x^2 - 2y^2 = 1$, et le point $A \in \mathscr{C}$ de coordonnées $(3, 2)$ dans $\mathscr{R}$. Trouver les ellipses osculatrices en A à $\mathscr{C}$ et d'axes dirigés par $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ le plan affine $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ la parabole d'équation $x^2 - 2py = 0$ ($p > 0$ donné).

a) Trouver les polynômes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré 2 tels que la sous-variété $\mathscr{V}_f = f^{-1}(0) \setminus \{$ points critiques de $f\}$ soit surosculatrice à $\mathscr{C}$ en O.

b) Trouver les polynômes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré 2 tels que $\mathscr{V}_f$ soit osculatrice en O à $\mathscr{C}$ et que $f^{-1}(0)$ contienne le point $A = (1, 0)$.

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ le plan affine $\mathbb{R}^2$.

a) Trouver les polynômes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré 2 tels que la sous-variété $\mathscr{V}_f = f^{-1}(0)\{$points critiques de $f\}$ soit tangente en $A = (1, 0)$ à $\mathbb{R} \times \{0\}$ et tangente en $B = (0, 1)$ à $\{0\} \times \mathbb{R}$.

b) Trouver les plynômes $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré 2 tels que $f^{-1}(0)$ contienne $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$, que $O \in \mathscr{V}_f$ et que la tangente en O à $\mathscr{V}_f$ soit dirigée par (α, β) où α et β sont donnés non nuls.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine et A, B, C trois points de $\mathscr{E}$ non alignés. On note A', B', C' les milieux respectifs de $\{B, C\}$, $\{C, A\}$ et $\{A, B\}$. Prouver qu'il existe un et un seul polynôme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré 2 tel que $\mathscr{V}_f = f^{-1}(0) \setminus \{$points critiques de $f\}$ soit tangente en A' à Dr (B, C), en B' à Dr (C, A) et en C' à Dr (A, B). Si f est ce polynôme, vérifier que $\mathscr{V}_f = f^{-1}(0)$ est une *ellipse propre* à points réels (cf. Chap. X).

Exercice 7 : Soit $\mathscr{E}$ le plan affine $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C} = f^{-1}(0)$ avec $f(x, y) = x^3 - y^2 - 1$.

a) Vérifier que $\mathscr{C}$ est une sous-variété courbe connexe de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donner son allure. Préciser les points d'inflexion.

b) On donne un point $A \in \mathscr{C}$. Trouver les paraboles ayant avec $\mathscr{C}$ en A un contact d'ordre le plus élevé possible.

Indication : penser au théorème VII.3.5.

Exercice 8 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 3$ et deux sous-variétés courbes $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$, de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ ayant en commun un point M_0 où elles sont *tangentes*. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des projections affines $\varpi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ de rang 2 telles que $\operatorname{Ker}(\vec{\varpi})$ et $T = T_{M_0, \mathscr{V}} = T_{M_0, \mathscr{W}}$ soient indépendants.

a) Soit $\varpi \in \mathscr{P}$: vérifier qu'il existe des ouverts $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ relativement à $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$, contenant M_0 et tels que $\varpi(\mathscr{V}')$ et $\varpi(\mathscr{W}')$ soient des sous-variétés courbes de classe $\mathscr{C}^k$ de Im (ϖ). Prouver que le contact de $\varpi(\mathscr{V}')$ et $\varpi(\mathscr{W}')$ en $N_0 = \varpi(M_0)$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ (i.e. si $\varpi(\mathscr{V}')$ et $\varpi(\mathscr{W}')$ ont en N_0 un contact d'ordre $\geqslant p$ $(2 \leqslant p \leqslant k)$ avec un choix particulier de $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$, ils ont en N_0 un contact d'ordre $\geqslant p$ avec tout choix de $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$).

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $(2 \leqslant p \leqslant k)$. Prouver que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant p$ ssi pour toute $\varpi \in \mathscr{P}$, et pour tout choix de $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ comme en *a*), $\varpi(\mathscr{V}')$ et $\varpi(\mathscr{W}')$ ont en N_0 un contact d'ordre $\geqslant p$.

§ VII.4 *ÉTUDE LOCALE AFFINE DES COURBES PARAMÉTRÉES*

Topologie naturelle sur les droites vectorielles de E

Soit $\mathscr{G}_1(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E. Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble des parties U de $\mathscr{G}_1(E)$ telles que $\bigcup_{D \in U} (D \setminus \{0_E\})$ soit un ouvert de E. Il est facile de vérifier que $\mathcal{O}$ est l'ensemble des parties ouvertes d'une topologie sur $\mathscr{G}_1(E)$ (cf. définition X.2.1 du tome 2). Cette topologie sera appelée **topologie naturelle** de $\mathscr{G}_1(E)$.

A chaque norme ν de E associons la sphère unité $S_\nu = \{x \in E \mid \nu(x) = 1\}$ de (E, ν) et la distance Δ_ν sur $\mathscr{G}_1(E)$ définie par

$$\forall (D, D') \in (\mathscr{G}_1(E))^2 \qquad \Delta_\nu(D, D') = \operatorname*{Min}_{x \in D \cap S_\nu,\, x' \in D' \cap S_\nu} (\|x - x'\|).$$

C'est un exercice facile laissé au lecteur de vérifier que Δ_ν est bien une distance sur $\mathscr{G}_1(E)$, et qu'elle définit sur $\mathscr{G}_1(E)$ la topologie naturelle. En conséquence, les distances Δ_ν sont toutes topologiquement équivalentes entre elles.

Si on fixe la norme ν, et si on munit S_ν de la distance d_ν définie par ν (c'est-à-dire $d_\nu(x, x') = \nu(x - x')$), il est clair que l'application naturelle $S_\nu \longrightarrow \mathscr{G}_1(E)$, $x \mapsto \mathbb{R}x$ est surjective et 1-lipschitzienne de (S_ν, d_ν) dans $(\mathscr{G}_1(E), \Delta_\nu)$. Donc, puisque S_ν est compacte et connexe par arcs dans E, **l'espace $\mathscr{G}_1(E)$ est lui-même compact et connexe par arcs.**

Vérifions qu'en fait les distances Δ_ν sont *équivalentes entre elles*. Soit ν et ν' deux normes sur E. Il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a\nu' \leqslant \nu \leqslant b\nu'$. Pour $D_1 \in \mathscr{G}_1(E)$ et $D_2 \in \mathscr{G}_1(E)$ donnés, choisissons $x_1' \in S_{\nu'} \cap D_1$ et $x_2' \in S_{\nu'} \cap D_2$ tels que $\Delta_\nu(D_1, D_2) = \nu'(x_1' - x_2')$. Posons $x_i = \dfrac{1}{\nu(x_i')} x_i'$ $(i \in \{1, 2\})$, d'où $x_i \in S_\nu \cap D_i$. On a :

$$\Delta_\nu(D_1, D_2) \leqslant \nu(x_1 - x_2) = \nu\left(\frac{1}{\nu(x_1')}(x_1' - x_2') + \left(\frac{1}{\nu(x_1')} - \frac{1}{\nu(x_2')}\right) x_2'\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu(x_1')}\left[\nu(x_1' - x_2') + |\nu(x_1') - \nu(x_2')|\right] \leqslant \frac{2}{\nu(x_1')}\nu(x_1' - x_2') \leqslant \frac{2b}{a}\nu'(x_1' - x_2')$$

$$\leqslant \frac{2b}{a}\Delta_{\nu'}(D_1, D_2), \quad \text{car} \quad \nu(x_1') \geqslant a\nu'(x_1') = a.$$

Donc $\Delta_\nu \leqslant \dfrac{2b}{a}\Delta_{\nu'}$. De même, $\Delta_{\nu'} \leqslant \dfrac{2a}{b}\Delta_\nu$ et l'équivalence en résulte.

Si ν est une *norme euclidienne* sur E, et si θ est *l'écart angulaire* $\widehat{D_1, D_2}$ de $D_1 \in \mathscr{G}_1(E)$ et $D_2 \in \mathscr{G}_2(E)$ relatif à cette structure euclidienne, on voit clairement que $\Delta_\nu(D_1, D_2) = 2 \sin \frac{\theta}{2}$, d'où :

$$\frac{2}{\pi} \widehat{D_1, D_2} \leqslant \Delta_\nu(D_1, D_2) \leqslant \widehat{D_1, D_2}.$$

Donc la distance Δ_ν est équivalente à la distance écart angulaire définie par ν : cette dernière peut donc servir à définir la topologie naturelle de $\mathscr{G}_1(E)$.

La définition même de la topologie naturelle de $\mathscr{G}_1(E)$ prouve que l'application naturelle $\delta : E \setminus \{0_E\} \longrightarrow \mathscr{G}_1(E)$, $x \mapsto \mathbb{R}x$ est *continue*. Par composition de limites, on en déduit : *soit A une partie d'un espace topologique T ; soit $a \in T$ adhérent à A, et $\varphi : A \longrightarrow E \setminus \{0_E\}$ une application ayant en a une limite $l \in E \setminus \{0_E\}$. Alors* $\delta(\varphi(\lambda)) \underset{\lambda \to a}{\longrightarrow} \delta(l)$.

Tangentes géométriques

DÉFINITION VII.4.1

Soit M_0 un point d'accumulation d'une partie Γ de E. On appelle **tangente géométrique** *à Γ en M_0 toute droite affine passant par M_0 ayant pour direction une* **valeur d'adhérence** *en M_0 de la fonction* $\mathrm{dr}_{M_0} : \Gamma \setminus \{M_0\} \longrightarrow \mathscr{G}_1(E)$, $M \mapsto \mathbb{R}\overrightarrow{M_0M}$. *L'union des tangentes géométriques à Γ en M_0 s'appelle* **cône des tangentes géométriques** *à Γ en M_0. On dit que Γ admet en M_0 une* **tangente géométrique stricte** *ssi la fonction* dr *admet en M_0 une* **limite** *(la droite passant par M_0 et dirigée par cette limite étant alors par définition la tangente géométrique stricte).*

Puisque $\mathscr{G}_1(E)$ est compact, l'ensemble des tangentes géométriques à Γ est toujours *non vide*.

Le théorème XI.1.3 du tome 2 entraîne aussitôt :

PROPOSITION VII.4.1

Soit M_0 un point d'accumulation d'une partie Γ de E. Pour que Γ admette en M_0 une **tangente géométrique stricte,** *il faut et il suffit que Γ admette en M_0* **une seule** *tangente géométrique (qui est alors la tangente géométrique stricte).*

THÉORÈME VII.4.1

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ de E. En chaque point $M_0 \in \mathscr{V}$, l'ensemble $\mathscr{V}$ admet $\mathscr{T}_{1, \mathscr{V}, M_0}$ pour tangente géométrique stricte.

Démonstration :

Choisissons un voisinage ouvert U de M_0, un repère affine $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, \ldots, e_n)$ et une représentation locale $f : I \longrightarrow E$ de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0, centrée en M_0, de façon que $f(I) = U \cap \mathscr{V}$ (c'est parce que $\mathscr{V}$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ de E qu'un tel choix est possible). Pour $t \in I \setminus \{0\}$, le vecteur $\vec{V}(t) = \frac{1}{t}\overrightarrow{M_0 f(t)}$ dirige la droite vectorielle $D(t) = \mathbb{R}\,\overrightarrow{M_0 f(t)}$. On a : $\vec{V}(t) \underset{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t \in I \setminus \{0\}}}{\longrightarrow} f'(0)$, et $f'(0)$ dirige $\mathscr{T}_{1, \mathscr{V}, M_0}$. Donc $D(t) \underset{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t \in I \setminus \{0\}}}{\longrightarrow} T_{1, \mathscr{V}, M_0}$ dans $\mathscr{G}_1(E)$. Mais f définit un *homéomorphisme* $\bar{f} : I \longrightarrow f(I)$, $t \mapsto f(t)$ car (par définition des représentations locales) f est un plongement. Soit $\bar{g} : f(I) \longrightarrow I$ l'homéomorphisme réciproque ; par composition de limites, on a alors : $D(\bar{g}(M)) \underset{\substack{M \longrightarrow M_0 \\ M \in f(I) \setminus \{M_0\}}}{\longrightarrow} T_{1, \mathscr{V}, M_0}$; donc, avec les notations de la définition VII.4.1 (et du fait que $f(I)$ est voisinage de M_0 dans $\mathscr{V}$) $\mathrm{dr}_{M_0}(M) \underset{M \in \mathscr{V} \setminus \{M_0\}}{\longrightarrow} T_{1, \mathscr{V}, M_0}$, ce qui achève d'établir le théorème. ■

Remarque 1 : La conclusion du théorème VII.4.1 serait (grossièrement !) fausse si $\mathscr{V}$ était seulement l'image d'une *immersion* de classe $\mathscr{C}^k$ (cf. exercice n° 4 ci-dessous).

Pour la suite de ce §, nous considérons une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow E$, où I est un intervalle voisinage de 0, avec f de classe $\mathscr{C}^\infty$. *Nous nous proposons d'étudier $f(t)$ pour les paramètres t voisins de* 0. Nous poserons $f(0) = M_0$ et nous noterons S la *série formelle de Taylor de* $\overrightarrow{M_0 f}$: $S = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m f^{(m)}(0)$ (S est à coefficients dans E).

THÉORÈME VII.4.2

> *Avec les notations ci-dessus, supposons $S \neq 0$ et soit $p = \mathrm{val}\,(S)$. Alors il existe un intervalle J voisinage de 0 dans I tel que : $f(J)$ admet en M_0 la droite $\mathscr{T}_0$ dirigée par $f^{(p)}(0)$ pour tangente géométrique stricte, et les restrictions $f|_{J \cap \mathbb{R}_+}$ et $f|_{J \cap \mathbb{R}_-}$ sont injectives.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine tel que

$e_1 = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)$. Notons $(f_i(t))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de $f(t)$ dans $\mathscr{R}$. D'après le théorème de division (cf. tome 2, théorème VI.3.4), on a une fonction $g : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall t \in I)\ \overrightarrow{M_0 f(t)} = t^p g(t)$, et $g(0) = e_1$. Notons $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de g dans $\mathscr{R}$: on a déjà $g_1(0) = 1$. Soit J_1 un intervalle compact voisinage de 0 dans I tel que $g_1(t) > 0$ pour $t \in J_1$, et $h(t) = t(g_1(t))^{1/p}$: h est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J_1 et $h'(0) = 1$. On a donc un sous-intervalle compact J de J_1, voisinage de 0, tel que $h|_J$ soit un changement de paramètre $\mathscr{C}^\infty$-admissible de J sur un intervalle compact Λ voisinage de 0. Pour $t \in J$, on a : $f_1(t) = (h(t))^p$. Donc $f_1|_{J \cap \mathbb{R}_+}$ et $f_1|_{J \cap \mathbb{R}_-}$ sont injectives, et *a fortiori* $f|_{J \cap \mathbb{R}_+}$ et $f|_{J \cap \mathbb{R}_-}$ sont injectives. D'autre part, $t^{-p}\overrightarrow{M_0 f(t)} \underset{\substack{t \to 0 \\ t \in J \setminus \{0\}}}{\longrightarrow} e_1$, et comme $J \cap \mathbb{R}_+$ et $J \cap \mathbb{R}_-$ sont compacts, f définit un homéomorphisme de $J \cap \mathbb{R}_+$ sur $\Gamma_+ = f(J \cap \mathbb{R}_+)$ (resp. de $J \cap \mathbb{R}_-$ sur $\Gamma_- = f(J \cap \mathbb{R}_-)$. En raisonnant comme au théorème VII.4.1, on en déduit que Γ_+ et Γ_- admettent $\mathscr{T}_0$ pour tangente géométrique stricte en M_0. Puisque $f(J) = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, il en résulte finalement que $f(J)$ admet $\mathscr{T}_0$ pour tangente géométrique stricte en M_0. ■

Remarque 2 : Le théorème VII.4.2 constitue le résultat de base pour l'étude locale de la courbe paramétrée f. Il améliore le théorème VII.4.1 dès que $p \geqslant 2$, i.e. lorsque $t = 0$ est *paramètre stationnaire* de f.

Etudions plus particulièrement le cas d'une courbe paramétrée plane en faisant l'hypothèse supplémentaire suivante : *les vecteurs* $(f^{(i)}(0))_{i > p}$ *ne sont pas tous colinéaires à* $f^{(p)}(0)$. Notons q le plus petit des entiers $i > p$ tels que $f^{(i)}(0) \notin \mathbb{R} f^{(p)}(0)$; soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, e_2)$ le repère tel que $e_1 = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)$ et $e_2 = \frac{1}{q!} f^{(q)}(0)$, et soit $(f_1(t), f_2(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans $\mathscr{R}$. La fonction h, les intervalles J et Λ et les ensembles Γ_+ et Γ_- sont ceux définis dans la démonstration du théorème VII.4.2. On a :

$$(1) \qquad f_1(t) = t^p + \rho_1(t), \quad \rho_1(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^p) ;$$

$$f_2(t) = t^q + \rho_2(t), \quad \rho_2(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^q)$$

$$f_1(t) = (h(t))^p = t^p g_1(t) = (\operatorname{sgn}(t))^p |t|^p g_1(t) ,$$

avec $\operatorname{sgn}(x) = +1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x > 0$ et $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Soit $\eta = h^{\langle -1 \rangle} : \Lambda \longrightarrow J$. Notant (x, y) les coordonnées génériques dans $\mathscr{R}$, et $\Lambda_{p,+}$ (resp. $\Lambda_{p,-}$) l'intervalle $\{t^p\}_{t \in \Lambda \cap \mathbf{R}_+}$ (resp. $\{t^p\}_{t \in \Lambda \cap \mathbf{R}_-}$), on voit qu'une équation cartésienne de Γ_+ dans $\mathscr{R}$ est

$$(2) \qquad y = f_2 \circ \eta\,(x^{1/p}), \quad x \in \Lambda_{p,+}$$

et qu'une équation cartésienne de Γ_- dans $\mathscr{R}$ est

$$(3) \qquad y = f_2 \circ \eta\,(-\,|x|^{1/p}), \quad x \in \Lambda_{p,-}\,.$$

Comme $\eta\,(u) \underset{u \longrightarrow 0}{\sim} u$, on déduit notamment de (1), (2) et (3) :

(4) sur Γ_+, $y \underset{x \geq 0}{\sim} x^{q/p}$, et

(5) sur Γ_-, $y \underset{x \leq 0}{\sim} (-1)^q |x|^{q/p}$ si p est impair (ici, $\Lambda_{p,-} \subset \mathbf{R}_-$) et

$y \underset{x \geq 0}{\sim} (-1)^q x^{q/p}$ si p est pair (ici, $\Lambda_{p,-} \subset \mathbf{R}_+$).

Ce qui précède justifie rigoureusement l'étude qui suit :

- 1er *cas : p est impair et q est pair*

Dans ce cas $y \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} |x|^{q/p}$; $\Lambda_p = \Lambda_{p,+} \cup \Lambda_{p,-}$ est un intervalle compact voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. Les ensembles $\Gamma_+ \setminus \{M_0\}$ et $\Gamma_- \setminus \{M_0\}$ sont respectivement contenus dans les demi-plans ouverts $\{M \in E \mid x > 0\}$ et $\{M \in E \mid x < 0\}$, et en particulier $f|_J$ est injective ; $f(J) \setminus \{M_0\}$ est contenu dans le demi-plan ouvert $\{M \in E \mid y > 0\}$; tout cela étant résumé dans la figure 1 (où la flèche indique le sens de parcours quand t décrit J en croissant).

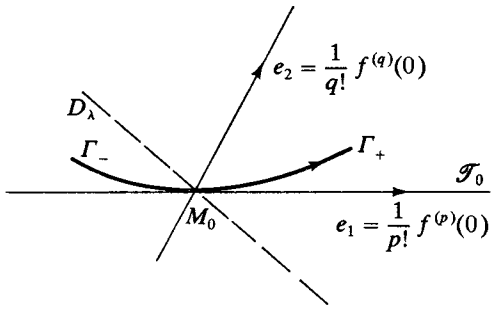


Fig. 1.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ donné, la position de Γ_+ et de Γ_- par rapport à la droite $\mathscr{D}_\lambda$ d'équation $y = \lambda x$ dans $\mathscr{R}$ est facile à étudier. En particulier on peut choisir J_λ assez petit pour que $\Gamma_+ \setminus \{M_0\}$ et $\Gamma_- \setminus \{M_0\}$ soient strictement de part et d'autre de D_λ (en effet : $f_2(t) - \lambda f_1(t) \underset{t \to 0}{\sim} -\lambda t^p$).

Ce cas se présente par exemple pour $\boxed{p = 1 \text{ et } q = 2}$, c'est-à-dire quand $t = 0$ est *paramètre birégulier* de f. Alors les équations (2) et (3) prises ensemble fournissent une équation cartésienne $y = \varphi(x)$ $(x \in \mathring{\Lambda})$ d'une branche régulière γ de f passant par M_0. Puisque $t = 0$ est birégulier, nécessairement $\varphi''(0) \neq 0$, et puisque $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^2$, on voit que $\varphi''(0) > 0$.

Quitte à réduire J, on peut supposer que $\varphi''(x) > 0$ pour tout $x \in \Lambda$. Alors $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ est le graphe dans $\mathscr{R}$ d'une fonction *strictement convexe* $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}_+$: on dit que Γ **tourne sa concavité dans le sens de $\mathbf{e}_2$.**

Un autre exemple est celui où $p = 1$ et q pair $\geqslant 4$, où $t = 0$ est paramètre d'inflexion de f. Alors (2) et (3) fournissent une équation cartésienne $y = \varphi(x)$ $(x \in \mathring{\Lambda})$ d'une branche régulière γ de f, mais ici $\varphi''(0) = 0$ et $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^q$ (on dit parfois que M_0 est un *point-méplat* de la sous-variété $\mathscr{V}$ support de γ).

• 2e *cas : p est impair et q est impair*

Dans ce cas $y \underset{x \to 0}{\sim} \operatorname{sgn}(x)|x|^{q/p}$; $\Lambda_p = \Lambda_{p,+} \cup \Lambda_{p,-}$ est un intervalle compact voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $\Gamma_+ \setminus \{M_0\}$ et $\Gamma_- \setminus \{M_0\}$ sont respectivement contenus dans les quadrants $\{M \in E \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ et $\{M \in E \mid x < 0 \text{ et } y < 0\}$; donc $f|_J$ est encore injective.

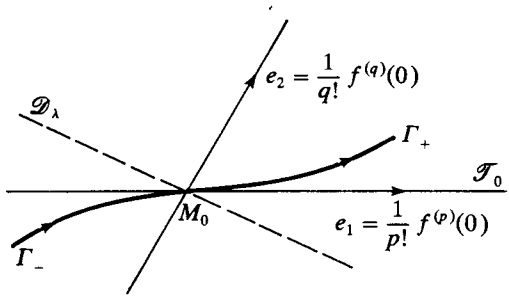


Fig. 2.

Le placement de Γ_+ et de Γ_- par rapport à la droite $\mathscr{D}_\lambda$ d'équation $y = \lambda x$ dans $\mathscr{R}$ est encore facile à étudier. A noter que Γ « traverse » en M_0 la tangente $\mathscr{T}_0$.

En particulier, $\boxed{\text{si } p = 1}$, $t = 0$ est paramètre d'inflexion de f, et les équations (2) et (3) ensemble fournissent une équation cartésienne $y = \varphi(x)$ $(x \in \mathring{\Lambda})$ d'une branche régulière γ de f, avec $\varphi''(0) = 0$ et $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^q$.

Si $\boxed{p = 1 \text{ et } q = 3}$, la sous-variété $\mathscr{V} = f(\mathring{J})$ est osculatrice en M_0, mais non surosculatrice en M_0, à la tangente $\mathscr{T}_0$ en M_0 (cf. théorème VII.3.3) : on dit ici que M_0 est *point d'inflexion ordinaire* de $\mathscr{V}$.

• 3e *cas : p est pair et q est impair*

Dans ce cas $t = 0$ est paramètre stationnaire. Posons $\varphi_+(x) = f_2 \circ \eta(x^{1/p})$ $(x \in \Lambda_{p,+})$ et $\varphi_-(x) = f_2 \circ \eta(-x^{1/p})$ $(x \in \Lambda_{p,-})$, ce qui donne des équations dans $\mathscr{R}$ de $\Gamma_+ : y = \varphi_+(x)$ et de $\Gamma_- : y = \varphi_-(x)$ (on notera que $\Lambda_{p,+}$ et $\Lambda_{p,-}$ sont ici tous deux inclus dans $\mathbb{R}_+$). On a :

$$\varphi_+(x) \underset{x \geq 0}{\sim} x^{q/p} \text{ et } \varphi_-(x) \underset{x \geq 0}{\sim} -x^{q/p}; \quad \Gamma_+ \setminus \{M_0\} \text{ et } \Gamma_- \setminus \{M_0\}$$

sont respectivement contenus dans les quadrants $\{M \in E \mid x > 0$ et $y > 0\}$ et $\{M \in E \mid x > 0$ et $y < 0\}$. En particulier $f|_J$ est encore injective.

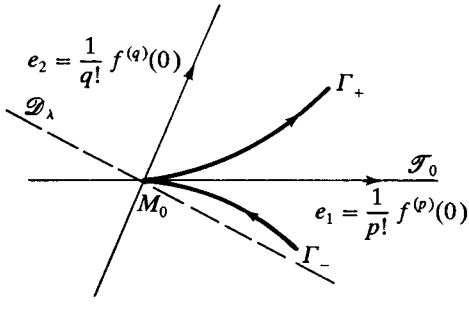


Fig. 3.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ donné, on voit qu'on peut choisir un intervalle J_λ assez petit pour que $f(J) \setminus \{M_0\}$ soit strictement *d'un même côté* de la droite $\mathscr{D}_\lambda$ d'équation $y = \lambda x$ dans $\mathscr{R}$.

En raison de la forme locale de $f(J)$ (cf. fig. 3), on dit que M_0 est un *point de rebroussement de première espèce* sur $f(J)$. On remarque que dans le cas particulier $\boxed{p = 2 \text{ et } q = 3}$ (le plus courant avec un paramètre stationnaire) on a : $|\varphi_+(x)| \underset{x \geq 0}{\sim} x^{3/2}$ et $|\varphi_-(x)| \underset{x \geq 0}{\sim} x^{3/2}$, alors qu'en un point

birégulier $\varphi(x) \underset{x \geq 0}{\sim} x^2$, ce qu'on peut traduire en disant que la courbe Γ « s'écarte infiniment plus » de sa tangente géométrique stricte que si le point M_0 était birégulier.

• 4e *cas : p est pair et q est pair*

Ici encore, $t = 0$ est paramètre stationnaire. Définissons $\varphi_+(x)$ et $\varphi_-(x)$ comme dans le 3e cas. On a $\varphi_+(x) \underset{x \geq 0}{\sim} x^{q/p}$ et $\varphi_-(x) \underset{x \geq 0}{\sim} x^{q/p}$. Les ensembles $\Gamma_+ \setminus \{M_0\}$ et $\Gamma_- \setminus \{M_0\}$ sont tous deux contenus dans le même quadrant $\{M \in E \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$. On ne peut plus garantir absolument que $f|_J$ soit injective (bien que ce soit généralement le cas si S n'est pas paire, si f_1 et f_2 sont DSE_0 et si J est assez petit).

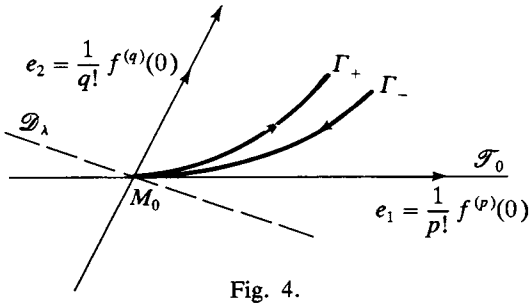


Fig. 4.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on peut réduire J de façon que $f(J) \setminus \{M_0\}$ soit strictement *d'un même côté* de la droite $\mathscr{D}_\lambda$ d'équation $y = \lambda x$ dans $\mathscr{R}$, comme c'est déjà le cas pour $\mathscr{T}_0$.

En raison de la forme locale de $f(J)$ (cf. fig. 4), on dit que M_0 est un *point de rebroussement de deuxième espèce* sur $f(J)$. C'est le cas en particulier pour $\boxed{p = 2 \text{ et } q = 4}$, mais alors $\varphi_+(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^2$, et l'écart de Γ_+ avec la tangente $\mathscr{T}_0$ est analogue à ce qu'il serait si M_0 était birégulier (de même pour Γ_-).

Paramètre trirégulier en dimension 3

Supposons maintenant $n = 3$, et supposons que $t = 0$ soit un paramètre *trirégulier* de la courbe $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^3$.

Soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, e_2, e_3)$ le repère affine tel que $e_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)$ ($i \in [\![1, 3]\!]$). Donnons-nous $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et proposons-nous d'étudier la position de $f(t)$ par rapport au plan $\mathscr{P}$ dont une équation dans

$\mathscr{R}$ est $\varphi(M) = 0$, avec $\varphi(M) = ux + vy + wz$, (x, y, z) désignant les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$. On a :

$$\overrightarrow{M_0 f(t)} = te_1 + t^2 e_2 + t^3 e_3 + R(t), \quad R(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^3).$$

D'où : $\varphi(f(t)) = ut + vt^2 + wt^3 + \rho(t)$, avec $\rho(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^3)$. On voit que *si* $u \neq 0$ (autrement dit si $\mathscr{P}$ ne contient pas la tangente $\mathscr{T}_0$ en $t = 0$ à f), pourvu que t soit assez petit, $f(t)$ est strictement d'un côté ou de l'autre de $\mathscr{P}$ selon que $t > 0$ ou $t < 0$ (on dit que $f(t)$ *traverse* $\mathscr{P}$ en M_0).

Si $u = 0$ (autrement dit si $\mathscr{P}$ contient $\mathscr{T}_0$: on dit alors que c'est un *plan tangent* en le paramètre $t = 0$), *et si* $v \neq 0$, alors pour t assez petit et $\neq 0$, $f(t)$ reste strictement d'un même côté de $\mathscr{P}$ (en effet $\varphi\Big(f(t)\Big) \underset{t \to 0}{\sim} vt^2$).

Enfin *si* $u = v = 0$ (d'où $w \neq 0$) (autrement dit si $\mathscr{P}$ est le *plan osculateur* en $t = 0$ à f), à partir de $\varphi(f(t)) \underset{t \to 0}{\sim} wt^3$, on voit que $f(t)$ *traverse* $\mathscr{P}$ en M_0, ce qui distingue le plan osculateur parmi les plans tangents en $t = 0$ (cf. fig. 5).

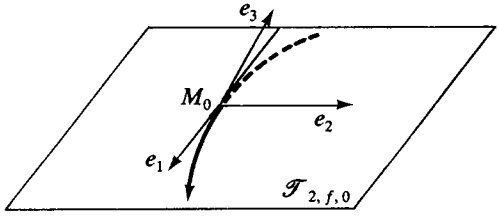


Fig. 5.

Etude des branches infinies

Soit $f : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, avec I *ouvert*, et soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ une extrémité de I qui n'appartienne pas à I. Si ν est une norme de E, la condition $\nu(f(t)) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} +\infty$ ne dépend pas du choix de ν : lorsque cette condition est remplie, nous dirons que f **présente une branche infinie pour** $t \longrightarrow t_0$ (c'est une propriété $\mathscr{C}^k$-invariante). Par le changement $t = t_0 \pm \tau$ (si $t_0 \in \mathbb{R}$), $t = \dfrac{1}{\tau}$ (si $t_0 = +\infty$),

$t = \dfrac{-1}{\tau}$ (si $t_0 = -\infty$), on peut toujours se ramener au cas où $t_0 = 0$, ce que nous supposons dans ce qui suit.

Soit donc $I \subset \mathbb{R}_+^*$ et $f : I \longrightarrow E$ présentant une branche infinie pour $t \longrightarrow 0$. *Un cas simple* est celui où f peut se mettre sous la forme : $(\forall t \in I)\ f(t) = \dfrac{g(t)}{t^p}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $g : I \cup \{0\} \longrightarrow E$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $g(0) \neq 0$. Dans ce cas, pour tout point A de E, la droite vectorielle Δ_t dirigée par $\overrightarrow{Af(t)}$ admet une limite quand $t \longrightarrow 0$, $t \in I$. En effet la fonction $I \longrightarrow E$, $t \mapsto t^p \overrightarrow{Af(t)} = g(t) - t^p A$ est $g_A|_I$, où $g_A(t) = g(t) - t^p A$ pour $t \in I \cup \{0\}$: g_A est de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $g_A(0) = g(0) \neq 0$; et donc Δ_t admet pour limite $\mathbb{R}g(0)$: on dit que la droite $\mathbb{R}g(0)$ est **direction asymptotique** de la branche infinie étudiée. Pour poursuivre l'étude de ce cas, prenons un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$ de E tel que $e_1 = g(0)$; notons $(f_i(t))_{i \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de $f(t)$ $(t \in I)$ et $(g_i(t))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ celles de $g(t)$ $(t \in I \cup \{0\})$. On a : $g_1(0) = 1$, $f_1(t) = \dfrac{g_1(t)}{t^p}$ $(t \in I)$, d'où $f_1'(t) = \dfrac{tg_1'(t) - pg_1(t)}{t^{p+1}} \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{-p}{t^{p+1}}$.

Quitte à réduire I, on peut supposer que $f_1'(t)$ reste < 0 pour $t \in I$. Alors f_1 définit un changement de paramètre $\mathscr{C}^\infty$-admissible : $I \longrightarrow J$, où J est de la forme $]a, +\infty]$ $(a \in \overline{\mathbb{R}})$. La courbe f est $\mathscr{C}^\infty$-équivalente à $\varphi : J \longrightarrow E$, $x \mapsto O \dotplus \left(xe_1 + \sum_{i=2}^{n} (f_i \circ f_1^{\langle -1 \rangle}(x))\, e_i\right)$, et comme φ est *cartésienne* relativement à $\mathscr{R}$, on voit déjà que f est un *plongement* : notons $\mathscr{V}$ sa sous-variété image, et posons $V_r = \dfrac{1}{r!} g^{(r)}(0)$ pour $r \in \mathbb{N}$.

Une première possibilité est que $V_1, \ldots, V_{p-1}$ soient colinéaires à V_0 ou que $p = 1$. Alors, en prenant $O = V_p$, de $g(t) - (V_0 + tV_1 + \cdots + t^p V_p) \underset{t \longrightarrow 0}{\in} o(t^p)$, on déduit en divisant par t^p que $\sum_{i=2}^{n} f_i(t)\, e_i \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. On dit alors que la droite affine $\mathscr{A} = V_p \dotplus \mathbb{R}e_1$ est **asymptote** à la branche infinie considérée.

Mais l'autre possibilité est que $V_1, \ldots, V_{p-1}$ ne soient pas tous colinéaires à V_0 (d'où $p \geqslant 2$). Soit alors $r = \operatorname{Min}\{i \in [\![1, p-1]\!] \mid V_i \notin \mathbb{R}V_0\}$ et $e_2 = V_r$. On a : $\sum_{i=2}^{n} f_i(t)\, e_i \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{p-r}} V_r \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x^{1-r/p}\ V_r$ (où $x = f_1(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{t^p}$). Autrement dit, quel que soit $O \in E$, la projection $W(t)$ de $\overrightarrow{Of(t)}$ sur un hyperplan de direction contenant V_r et supplémen-

taire de $\mathbb{R}e_1$ s'éloigne à l'infini quand $t \longrightarrow 0$, et $\overrightarrow{Of(t)} - W(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^p} e_1 \underset{t \to 0}{\sim} \overrightarrow{Of(t)}$. On dit que $\mathscr{V}$ présente pour $t \longrightarrow 0$ une **branche parabolique** de direction $\mathbb{R}e_1$.

Branches infinies des courbes planes

Pour $n = 2$, en dehors du cas simple évoqué précédemment, une étude directe est souvent possible adaptée à la situation considérée. En général $f(t)$ est donné par ses coordonnées $(f_1(t), f_2(t))$ dans un repère $(O\,; e_1, e_2)$. Supposons par exemple que $f_1(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Si $\lim\limits_{t \to 0} f_2(t) = a \in \mathbb{R}$, on constate la présence d'une asymptote parallèle à e_1. Si $|f_2(t)| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} +\infty$, on pourra rechercher $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)}$. Si cette limite est nulle et si f_2 garde un signe fixe, cela signifie qu'il y a une branche parabolique de direction e_1. Si $\frac{f_2(t)}{f_1(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} m \in \mathbb{R}^*$, c'est qu'il y a une direction asymptotique dans la direction $x_2 = mx_1$. On est alors naturellement conduit à étudier $\varphi(t) = f_2(t) - mf_1(t)$. Si $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, il y a une asymptote d'équation $x_2 = mx_1 + l$ dans $\mathscr{R}$, et l'étude du signe de $\varphi(t) - l$ permet le placement de la courbe par rapport à cette asymptote. Si $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} -\infty$, c'est qu'il y a une branche parabolique dans la direction $x_2 = mx_1$. Mais en dehors de ces cas très simples, une multitude d'autres possibilités peuvent se présenter qu'il faudra étudier cas par cas, par exemple des branches infinies spirales comme avec $f(t) = e^{(1+i)t}$, ou des branches oscillantes comme avec $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t \sin t$, etc...

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$. On donne une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$; soit $t_0 \in I$ un paramètre régulier pour f. Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine supplémentaire de la tangente $\mathscr{T}_0$ en $t = t_0$ à f. Montrer que pour $(t, u) \in I^2$, $t \neq u$, avec t, u assez voisins de t_0, la droite $\mathscr{D}_{t,u} = \mathrm{Dr}\,(f(t), f(u))$ est bien définie et qu'elle perce $\mathscr{H}$ en un point $A(t, u)$. Prouver alors que $\lim\limits_{\substack{(t,u) \to (t_0, t_0) \\ t \neq u}} A(t, u)$ existe, et que cette limite est le point commun à $\mathscr{H}$ et à $\mathscr{T}_0$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 3$. On donne une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(3 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et un paramètre $t_0 \in I$ trirégulier. Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine supplémentaire de la tangente $\mathscr{C}_0$ en t_0 à f. Montrer que pour $(t, u) \in I^2$,

$t \neq u$, avec t, u assez voisins de t_0, le plan $\mathscr{P}_{t,u}$ passant par $f(t_0)$, $f(t)$, $f(u)$ est bien défini. Prouver qu'il existe une base $(e_1(t, u), e_2(t, u))$ de ce plan qui tend, lorsque $(t, u) \underset{t \neq u}{\longrightarrow} (t_0, t_0)$, vers une base du plan osculateur en t_0 à f.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$ et $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une application continue. On suppose : $O \in I$; f est de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ sur $I \setminus \{0\}$; les $t \in I \setminus \{0\}$ sont paramètres réguliers pour f ; et enfin il existe une fonction $\lambda : I \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $\lim\limits_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t \neq}} \lambda(t) f'(t)$ existe (on note $\mathbf{L}$ cette limite). Prouver que la droite $f(0) + \mathbb{R}\mathbf{L}$ est tangente géométrique stricte à $\operatorname{Im}(f) \cap \omega$, où ω est un voisinage convenablement choisi de $f(0)$.

Exercice 4 : Soit $f : I =]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3} \right)$.

a) Vérifier que f est une $\mathscr{C}^\infty$-immersion ; trouver sa trajectoire Γ.

b) Montrer avec soin qu'en le point $O \in \Gamma$, l'ensemble Γ n'a pas de tangente géométrique stricte, mais que cet ensemble a exactement deux tangentes géométriques que l'on précisera.

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine muni d'un repère $\mathscr{R} = (O ; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. On donne un voisinage ouvert convexe U de O et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(4 \leqslant k \leqslant +\infty)$. On note (x, y) les coordonnées génériques dans $\mathscr{R}$ et on suppose $f(O) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(O) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(O) = 0$. On pose $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(O)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O)$.

a) En utilisant la formule de Taylor-reste intégrale (cf. tome 3, page 211) montrer qu'il existe des fonctions $A, B, C, D : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{k-3}$ telles que $(\forall M = O + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \in \mathscr{E})$

$$(1) \qquad f(M) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + x^3 A(M) + x^2 y B(M) + xy^2 C(M) + y^3 D(M)$$

$$(2) \qquad A(O) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(O),\ B(O) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}(O),\ C(O) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}(O),\ D(O) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(O)$$

b) On suppose : $rt - s^2 = 0$, $r \neq 0$ et $D(O) \neq 0$.

*b*1) Montrer que, quitte à changer de repère, on peut supposer $s = t = 0$ et $r \neq 0$. Pour la suite, on adopte cette hypothèse.

*b*2) Montrer qu'il existe un $\mathscr{C}^{k-3}$-difféomorphisme Θ d'un voisinage V de O sur un voisinage W de O $(V \subset U,\ W \subset U)$ tel que $(\forall M = O + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \in V)$, $f(\Theta(M)) = x^2 - y^3$. En déduire la forme locale, au voisinage de O, de l'ensemble $f^{-1}(0)$.

Exercice 6 (un rebroussement de seconde espèce « en tresse ») : Soit $\mathscr{E}$ le plan affine $\mathbb{R}^2$. On considère la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses coordonnées naturelles f_1 et f_2 : $f_1(t) = t^2$; $f_2(t) = 0$ si $t = 0$, $t^4 = e^{-1/t^2} \sin \dfrac{1}{t}$ si $t > 0$, $t^4 + e^{-1/t^2} \sin \dfrac{2}{t}$ si $t < 0$.

a) Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que $t = 0$ est le seul paramètre stationnaire de f.

b) Montrer que $\Gamma_+ = (\mathbb{R}_+^*)$ et $\Gamma_- = f(\mathbb{R}_-^*)$ sont des branches régulières de f et déterminer $\Gamma_+ \cap \Gamma_-$.

c) Calculer les $f^{(i)}(0)$ $(i \in \mathbb{N})$ et donner l'allure de la trajectoire de f.

Exercice 7 (suite de l'exercice 4 du § VII.2) : On se place dans les conditions du *b*) de cet exercice ; $\alpha > 0$ étant choisi pour que les conditions indiquées soient satisfaites, quel est l'ensemble des tangentes géométriques en O à $\Phi^{-1}(0) \cap]-\alpha, \alpha[^2$?

Exercice 8 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine et (A, B, C) un triangle de $\mathscr{E}$. Une droite $\mathscr{D}$ pivote autour d'un point donné $O \in \mathscr{E}$ qui n'appartient à aucun côté du triangle et de façon que $\mathscr{D}$ rencontre chaque côté du triangle : Dr (B, C) en M, Dr (C, A) en N, Dr (A, B) en P. Soit Ω l'isobarycentre de (M, N, P). Déterminer l'ensemble Γ des points Ω ; préciser les asymptotes de Γ, les points de rencontre de Γ avec ses asymptotes. Tracer Γ ; Γ est-il une sous-variété courbe ?

Exercice 9 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $\vec{U}(\theta) = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$, $\vec{U}_1(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\theta} = -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta$. Pour $t \in I = \,]-1, 1[$, soit $f(t) = M$ défini par $M = O$ si $t = 0$, et sinon $\overrightarrow{OM} = t^2 \vec{U}\left(\dfrac{1}{t^2}\right) + te_3$.

a) Vérifier que f est dérivable sur I, et prouver que $f'(I)$ n'est pas connexe (la propriété établie à l'exercice 12 du § V.1 du tome 2 pour les fonctions à valeurs réelles ne s'étend donc pas aux fonctions à valeurs dans $\mathscr{E}$). Décrire les composantes connexes de $f'(I)$.

b) Montrer que l'ensemble défini dans $\mathscr{R}$ par l'équation cartésienne $z^4 - x^2 + y^2 = 0$ admet $\mathscr{T} = O + \mathbb{R}e_3$ pour tangente géométrique stricte en O.

c) Montrer que f définit un homéomorphisme de I sur $f(I)$, mais que $f(I)$ n'est pas une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathscr{E}$.

§ VII.5 *EXEMPLES ET APPLICATIONS*

Dans la pratique, les applications à valeurs dans E que l'on a à étudier ont un ensemble de définition qui peut être décomposé en union finie (parfois infinie) d'intervalles disjoints de façon plus ou moins évidente. Nous continuerons à appeler de telles applications « courbes paramétrées » par abus de langage : en fait, sur chaque intervalle composante connexe de leur ensemble de définition, il s'agit de véritables courbes paramétrées, le problème étant ensuite de « recoller » les courbes obtenues. Dans les exemples de ce § nous supposerons que E est de dimension 2, et pour la commodité des calculs nous choisirons des courbes unicursales, i.e. définies par des applications rationnelles.

Exemple 1 : *Etudier la courbe paramétrée plane définie dans un repère* $(O\,; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ *par la paramétrisation* $x = t + \dfrac{1}{2t^2}$, $y = t^2 + \dfrac{2}{t}$.

Ici l'ensemble de définition est $]-\infty, 0[\,\cup\,]0\,; +\infty[$. On a : $x' = 1 - \dfrac{1}{t^3}$, $y' = 2t - \dfrac{2}{t^2}$, d'où le coefficient angulaire de la tangente au point courant : $m = \dfrac{y'}{x'} = 2t$ (pour $t \neq 1$), ce qui est particulièrement commode pour l'étude de la concavité. Les courbes composantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ respectivement sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Construisons un tableau de variations :

t	$-\infty$			0			1		$+\infty$
x'		$+$		‖		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$		‖		$-$	0	$+$	
m	$-\infty$	$\nearrow$	0	‖	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
Cc		$\uparrow$	(vers les $y > 0$)	‖		$\downarrow$		$\uparrow$	

Pour $t = 1$ on est en présence d'un point stationnaire, mais il est inutile ici de calculer les dérivées successives : l'équation de la tangente en ce point est $y - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$, i.e. $y = 2x$, et le sens de la concavité montre clairement qu'il s'agit d'un *point de rebroussement de première espèce.*

Etudions les branches infinies : quand $|t| \longrightarrow +\infty$, $x \sim t$, $y \sim t^2$, d'où $y \underset{|t| \longrightarrow +\infty}{\sim} x^2$, ce qui conduit à former $y - x^2 = \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^4}$, d'où la *parabole asymptote* d'équation $y = x^2$, et même le placement de Γ par rapport à cette parabole asymptote d'après le signe de $\frac{1}{t}$. Quand $t \longrightarrow 0$, $x \sim \frac{1}{2t^2}$ et

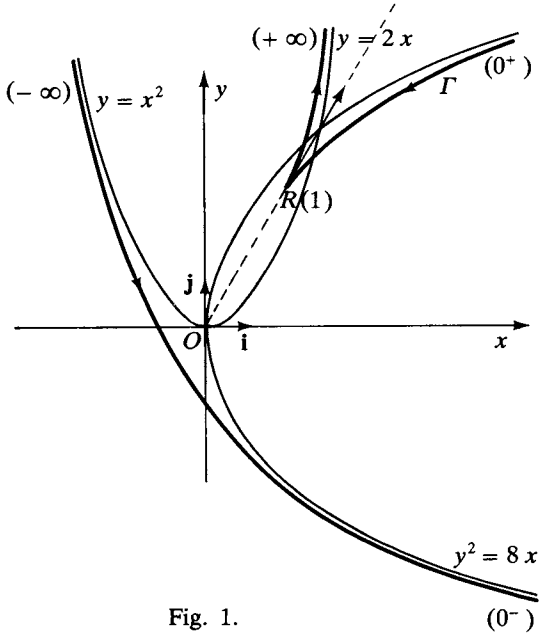


Fig. 1.

$y \sim \frac{2}{t}$, d'où $x \sim \frac{y^2}{8}$ et $x - \frac{y^2}{8} = \frac{t}{2} - \frac{t^4}{8} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où la *parabole asymptote* d'équation $y^2 = 8x$ et le placement de Γ. Il est commode de tracer ces deux paraboles asymptotes pour aider à une construction précise de la trajectoire Γ, facilitée par ailleurs par la connaissance de quelques points supplémentaires (par exemple les points où Γ coupe les axes de coordonnées).

Exemple 2 : *Construire la courbe définie dans un repère affine* $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$ *par la paramétrisation* $x = \frac{t+1}{t(t-1)(t+2)}$, $y = \frac{1}{t^2-1}$.

Ici, ce sont cinq courbes paramétrées définies respectivement sur les intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ que nous aurons à rassembler. Chacune est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et un calcul rapide donne $x' = \frac{-2(t^3+2t^2+t-1)}{t^2(t-1)^2(t+2)^2}$, $y' = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$, d'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		-2		-1		0		α		1		$+\infty$
x'		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
y	0	↗	$1/3$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1		↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	
y'		$+$		$+$	‖	$+$	0		$-$		‖	$-$	0

Le simple examen de ce tableau fait apparaître les asymptotes $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$, $y = -1$. Une quatrième branche infinie se présente quand $t \longrightarrow 1$. Or $x \underset{t \to 1}{\sim} \frac{2/3}{t-1}$ et $y \underset{t \to 1}{\sim} \frac{1/2}{t-1}$, d'où $\frac{y}{x} \underset{t \to 1}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$, $y - \frac{3}{4}x = \frac{\frac{1}{4}(t-1)(t+3)}{t(t-1)(t+1)(t+2)} \underset{t \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$, ce qui donne l'asymptote d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$, et $y - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6} = \frac{\frac{-1}{12}(t-1)(2t^2+8t+9)}{t(t+1)(t+2)}$. Le numérateur a le signe de $1-t$, d'où le placement de Γ par rapport à l'asymptote.

Il reste à étudier la courbe au voisinage du point O obtenu ici quand $t \longrightarrow \infty$, ce qui incite à poser $t = \frac{1}{\tau}$. Alors $x = \frac{\tau^2(1+\tau)}{(1-\tau)(1+2\tau)} = \tau^2(1+2\tau^2+\tau^2\varepsilon_1(\tau))$ et $y = \frac{\tau^2}{1-\tau^2} = \tau^2(1+\tau^2+\tau^2\varepsilon_2(\tau))$ $\left(\varepsilon_i(r) \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0\right)$. Posons $f(\tau) = O \dotplus (x(\tau)\,\mathbf{i} + y(\tau)\,\mathbf{j})$.

On reconnaît un point de rebroussement de seconde espèce, avec $\frac{f''(0)}{2!} = (1, 1)$, vecteur dirigeant la tangente, et $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = (2, 1)$, vecteur qui indique le sens de la concavité au voisinage de $\tau = 0$.

Il est clair par ailleurs que pour $t_1 \neq t_2$, on ne peut avoir simultanément $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$, ce qui ne laisse aucun doute sur le tracé de Γ.

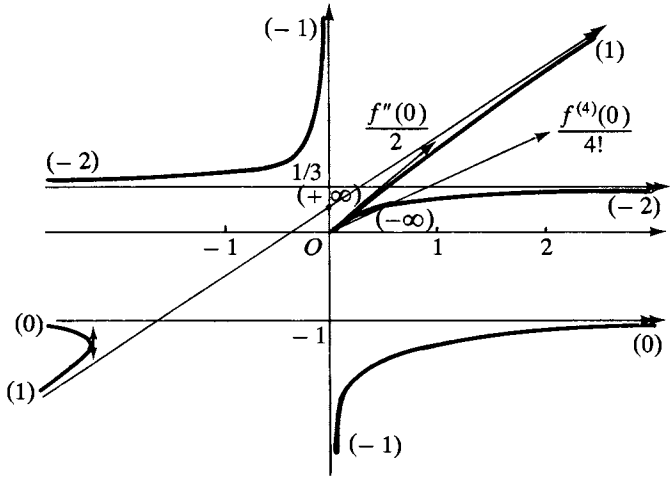


Fig. 2.

Alignement sur une courbe paramétrée plane

Soit ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \omega \longrightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ *régulière* sur chaque composante connexe de ω. Nous appellerons **diviseurs positifs de** $\boldsymbol{f}$ les éléments de $\mathbb{N}^{(\omega)}$, i.e. les familles $(\nu_t)_{t \in \omega}$ *à support fini* d'entiers naturels. Soit $D = (\nu_t)_{t \in \omega}$ un tel diviseur positif : nous dirons qu'il est **aligné** (relativement à f) ssi il existe une droite affine $\mathscr{D}$ de E telle que $(\forall t \in \omega)\ \ (\nu_t \geqslant 1) \Rightarrow$ ($\mathscr{D}$ admet en le paramètre t de f un contact d'ordre $\geqslant \nu_t - 1$ avec f).

Pour une telle $\mathscr{D}$, on dira que D *est aligné sur* $\mathscr{D}$. Cette condition a bien un sens : pour chaque $t \in \omega$, on l'interprète avec la courbe paramétrée restriction de f à la composante connexe de t dans ω.

Soit φ une fonction affine non constante sur E définissant $\mathscr{D}$.

En appliquant les théorèmes VII.1.2 et VII.3.3, on voit que le diviseur positif $D = (\nu_t)_{t \in \omega}$ est aligné sur $\mathscr{D}$ ssi :

$$(1) \qquad (\forall a \in \omega)\ \ \mathrm{val}_a\,(\varphi\,(f(t))) \geqslant \nu_a\,,$$

où pour toute fonction réelle h de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de a, on désigne par $\mathrm{val}_a\,(h)$ la valuation de la série formelle $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{h^{(r)}(a)}{r!} X^r$ (i.e. $\mathrm{val}_a\,(h) = +\infty$ ssi les $(h^{(r)}(a))_{r \in \mathbb{N}}$ sont tous nuls, et sinon

$$\mathrm{val}_a\,(h) = \mathrm{Min}\,(\{r \in \mathbb{N} \mid h^{(r)}(a) \neq 0\})\,.$$

Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 3$ et $s = (t_1, \ldots, t_p) \in \omega^p$; il est associé à cette suite s un unique diviseur positif $D_s = (\nu_t)_{t \in \omega}$, défini par :

$$(2) \qquad (\forall t \in \omega) \quad \nu_t = \mathrm{card}\,(\{i \in [\![1, p]\!] \mid t_i = t\})\,.$$

Nous dirons que la suite s est *alignée* (relativement à f) ssi le diviseur positif associé D_s est aligné.

Alignement sur une courbe rationnelle

Supposons en particulier la fonction f obtenue ainsi : on prend une fonction polynomiale P du réel t à coefficients dans E et un polynôme $\Delta(t) \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$, choisis de telle sorte que $\frac{P}{\Delta}$ soit non constant et que P et Δ soient sans diviseur commun non constant de $\mathbb{R}[t]$. Soit $S = \Delta^{-1}(0) \cup g'^{-1}(0)$, où $g : \mathbb{R} \setminus \Delta^{-1}(0) \longrightarrow E$ est l'application $t \mapsto \frac{1}{\Delta(t)} P(t)$ (avec nos hypothèses, l'ensemble S est fini). On pose alors $\omega = \mathbb{R} \setminus S$ et on définit la courbe paramétrée $f : \omega \longrightarrow E$, $t \mapsto \frac{1}{\Delta(t)} P(t)$ (i.e. $f = g\,|_\omega$).

Pour tout $a \in \omega$, $\mathrm{val}_a \left(\frac{1}{\Delta}\right) = 0$. Donc pour toute fonction affine φ sur E, $\mathrm{val}_a\,(\varphi(f(t))) = \mathrm{val}_a\,(\Delta(t)\,\varphi(f(t)))$, et par suite si on donne un diviseur positif $D = (\nu_a)_{a \in \omega}$, la condition (1) équivaut à

$$(3) \qquad \boxed{(\forall a \in \omega) \quad \mathrm{val}_a\,(\Delta(t)\,\varphi(f(t))) \geqslant \nu_a}\,.$$

Mais puisque $\varphi(P(t))$ est un polynôme, la condition (3) signifie exactement que *le polynôme* $\prod_{a \in \omega} (t - a)^{\nu_a}$ *divise* $\Delta(t)\,\varphi(f(t))$ *dans* $\mathbb{R}[t]$.

En conséquence, une suite $s = (t_1, \ldots, t_p) \in \omega^p$ est *alignée* sur $\mathscr{D} = \varphi^{-1}(0)$ ssi le polynôme $\prod_{i=1}^{p} (t - t_i)$ *divise* $\Delta(t)\,\varphi(f(t))$ dans $\mathbb{R}[t]$, d'où : **Pour qu'une suite $s = (t_1, \ldots, t_p) \in \omega^p$ soit alignée, il faut et il suffit**

qu'il existe $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ affine non constante telle que le polynôme $\prod_{i=1}^{p} (t - t_i)$ divise $\Delta(t)\, \varphi(f(t))$ dans $\mathbb{R}[t]$.

Exemple 3 : Soit la courbe paramétrée définie dans un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ de E par $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$, $t \mapsto 0 + (f_1(t)\, e_1 + f_2(t)\, e_2)$, avec $f_1(t) = \dfrac{1 + t + t^2}{1 + t^2}$, $f_2(t) = \dfrac{t(1 + t + t^2)}{1 + t^2}$ (l'image Γ de f est la cubique d'équation $x(x^2 + y^2) - (x^2 + xy + y^2) = 0$ dans $\mathscr{R}$, privée de son point double O qui n'est obtenu pour aucune valeur réelle de t). Une étude élémentaire montre que f est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement ; Γ admet l'asymptote d'équation $x = 1$, qu'elle traverse au point $A : (1, 0)$. Soit $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ définissant la fonction affine non constante $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $M : (x, y) \mapsto ux + vy + w$. On a :

$$P_\varphi(t) = (1 + t^2)\, \varphi(f(t)) = vt^3 + (u + v + w)\, t^2 + (u + v)\, t + u + w\,.$$

Pour qu'une suite $s = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ soit alignée sur Γ, il faut et il suffit qu'il existe $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ tel que $\prod_{i=1}^{3} (t - t_i)$ divise $P_\varphi(t)$ dans $\mathbb{R}[t]$. En posant $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $\sigma_2 = t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2$, $\sigma_3 = t_1 t_2 t_3$, cela équivaut à :

$$\exists \varphi \mid P_\varphi(t) = v(t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3), \text{ i.e.} \tag{4}$$

$$\exists (u, v, w) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid (\mathscr{S}) \quad \begin{cases} u + v + w &= -\sigma_1 v \\ u + v &= \sigma_2 v \\ u + w &= -\sigma_3 v\,. \end{cases} \tag{5}$$

Le système $(\mathscr{S})$ est linéaire et homogène en les inconnues (u, v, w), et s'écrit :

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} u + (1 + \sigma_1)\, v + w = 0 \\ u + (1 - \sigma_2)\, v = 0 \\ u + \sigma_3 v + w = 0 \end{cases}$$

$(\mathscr{S})$ admet une solution dans $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ssi il en admet une dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Donc (5) équivaut à : $\begin{vmatrix} 1 & 1 + \sigma_1 & 1 \\ 1 & 1 - \sigma_2 & 0 \\ 1 & \sigma_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire à :

$$\boxed{\sigma_3 - \sigma_1 - 1 = 0}\,. \tag{6}$$

Compte tenu du sens précis donné à l'expression « la suite s est alignée », on peut utiliser la relation (6) pour maintes applications. Par exemple, soit $t \in \mathbb{R}$. On obtient les $t^* \in \mathbb{R}$ tels que la tangente en $f(t)$ à Γ passe par $f(t^*)$ en écrivant que (t, t, t^*) est alignée, ce qui donne la CNS : $t^2 t^* - 2t - t^* - 1 = 0$. On voit que si $t^2 - 1 \neq 0$, t^* existe et est unique : c'est $t^* = \dfrac{2t+1}{t^2-1}$ (on l'appelle le *tangentiel* de t) ; si $t \in \{-1, 1\}$, t^* n'existe pas : -1 et 1 sont les paramètres de points de Γ à tangente « verticale » (i.e. dirigée par e_2).

En cherchant les couples (t_1, t_2) tels que t_3 ne puisse se déduire de (6), on obtient la CNS : $t_1 t_2 = 1$. Cela signifie que la droite Dr $(f(t_1), f(t_2))$ est alors verticale (cette droite étant la tangente en $f(t)$ à Γ pour $t_1 = t_2 = -1$ ou pour $t_1 = t_2 = 1$).

Soit maintenant t_1, t_2, t_1', t_2' des réels vérifiant $t_1 t_2 \neq 1$, $t_1' t_2' \neq 1$, $t_1 t_1' \neq 1$, $t_2 t_2' \neq 1$. L'unique point θ tel que (t_1, t_2, θ) (resp. (t_1', t_2', θ), (t_1, t_1', θ), (t_2, t_2', θ)) soit aligné sera noté t_3 (resp. t_3', t_1'', t_2''). D'après (6), $t_3 = \dfrac{1 + t_1 + t_2}{t_1 t_2 - 1}$, etc... On vérifie que $t_3 t_3' \neq 1 \Leftrightarrow t_1'' t_2'' \neq 1$. Supposons cette condition satisfaite. Notant $(S_i)_{1 \leq i \leq 4}$ les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_1', t_2', on constate alors que

$$\frac{1 + t_3 + t_3'}{t_3 t_3' - 1} = \frac{1 + t_1'' + t_2''}{t_1'' t_2'' - 1} = \frac{S_4 + S_3 - S_1 - 1}{-S_4 + S_2 + S_1}.$$

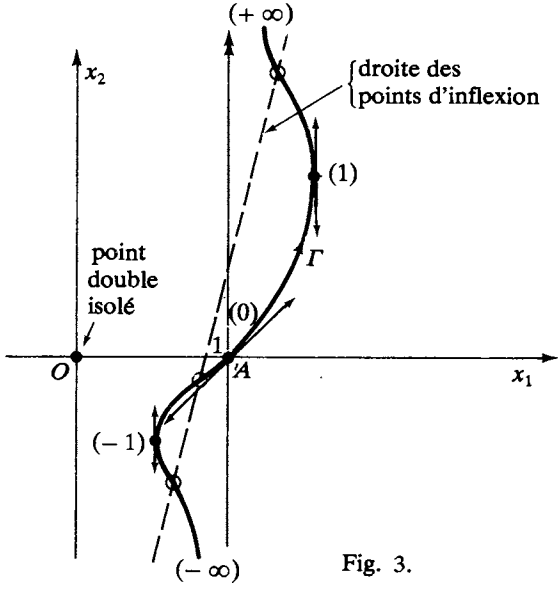


Fig. 3.

Cela signifie que *l'unique* $\tau \in \mathbb{R}$ *tel que* (t_3, t_3', τ) *soit aligné est aussi le réel* τ *tel que* (t_1'', t_2'', τ) *soit aligné.* En particulier si $t_1 = t_1'$ et $t_2 = t_2'$ (d'où $t_3 = t_3'$), alors $t_1'' = t_1^*$, $t_2'' = t_2^*$, $\tau = t_3^*$, autrement dit : *les tangentiels de trois* t_i *alignés sont alignés.*

Les points d'inflexion de Γ s'obtiennent en écrivant que la suite (t, t, t) est alignée, ce qui donne la CNS : $t^3 - 3t - 1 = 0$. On constate que le polynôme $t^3 - 3t - 1$ admet trois racines réelles simples $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$, donc Γ possède exactement trois points d'inflexion. Les fonctions symétriques élémentaires des θ_i sont $s_1 = 0$, $s_2 = -3$, $s_3 = 1$, donc la suite $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ vérifie (6), ce qui signifie que *les trois points d'inflexion sont alignés.*

Remarquons que $P_\varphi(t) = vt^3 + (u + v + w)t^2 + (u + v)t + u + w$ n'est le polynôme nul pour aucun $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

Donc aucun polynôme de degré $\geqslant 4$ ne peut diviser $P_\varphi(t)$, et par suite aucune suite $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ avec $p \geqslant 4$ n'est alignée sur Γ, ce qui est rassurant pour une cubique.

Exemple 4 : Définissons $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ par $f_1(t) = \dfrac{(1 - t^2)(\lambda^2 - t^2)}{(1 + t^2)^2}$, $f_2(t) = \dfrac{2t(\lambda^2 - t^2)}{(1 + t^2)^2}$ (λ donné, $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).

Il est clair que f est régulière de classe $\mathscr{C}^\infty$, et un calcul élémentaire montre que f a pour image Γ la courbe d'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2)^2 - (1 + \lambda^2)x(x^2 + y^2) + \lambda^2 x^2 - \frac{1}{4}(1 - \lambda^2)^2 y^2 = 0 .$$

En raisonnant comme à la fin de l'exemple 3, on voit qu'une suite $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ ne peut être alignée que si $p \leqslant 4$. Pour $p = 4$, en notant $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les fonctions symétriques élémentaires des (t_i), on obtient les conditions d'alignement de $s = (t_1, t_2, t_3, t_4)$:

$$(7) \quad \boxed{\sigma_3 + \lambda^2 \sigma_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda^2 + 3)\sigma_4 + (\lambda^2 - 1)\sigma_2 - 3\lambda^2 - 1 = 0} .$$

Soit alors une suite $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$. Le polynôme $P_\varphi(t)$ est ici :

$$(u + w)t^4 - 2vt^3 - [2w - (1 + \lambda^2)u]t^2 + 2\lambda^2 vt + \lambda^2 u + w .$$

Pour que (t_1, t_2, t_3) soit alignée, il faut et il suffit que $\prod_{i=1}^{3} (t - t_i)$ divise $P_\varphi(t)$ dans $\mathbb{R}[t]$, ce qui équivaut à : *il existe* $t_4 \in \mathbb{R}$ *tel que* (t_1, t_2, t_3, t_4) *soit*

alignée. Notant $\theta_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $\theta_2 = t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2$, $\theta_3 = t_1 t_2 t_3$, la CNS d'alignement de (t_1, t_2, t_3) est donc,

(8) $\exists\, t_4 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} t_4(\lambda^2 + \theta_2) + \theta_3 + \lambda^2 \theta_1 = 0 \\ t_4[(\lambda^2 + 3)\,\theta_3 + (\lambda^2 - 1)\,\theta_1] + (\lambda^2 - 1)\,\theta_2 - 3\,\lambda^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

L'élimination de t_4 dans (8) est immédiate, et elle donne la CNS d'alignement cherchée de (t_1, t_2, t_3) qui est après simplification :

$$(9)\quad \boxed{\begin{aligned} &\lambda^2(1 - \lambda^2)\,\theta_1^2 + (\lambda^2 - 1)\,\theta_2^2 - (\lambda^2 + 3)\,\theta_3^2 + \\ &+ (1 - 4\,\lambda^2 - \lambda^4)\,\theta_1\,\theta_3 + (\lambda^4 - 4\,\lambda^2 - 1)\,\theta_2 - \lambda^2(3\,\lambda^2 + 1) = 0 \end{aligned}}\,.$$

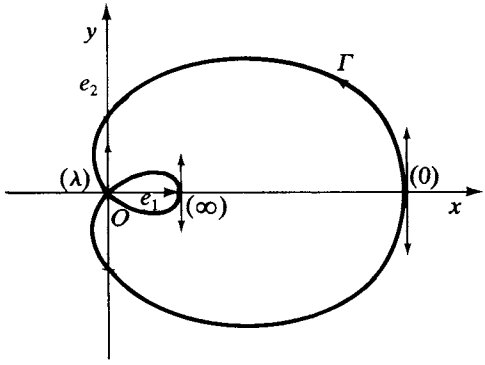


Fig. 4 (Γ pour $\lambda > 1$).

Le changement $t \mapsto -t$ montre l'existence de l'axe de symétrie (oblique) Ox. Les points de Γ sur cet axe sont obtenus pour $t = \pm\,\lambda$ (point double O avec les tangentes $y = \dfrac{2\,t}{1 - t^2}\,x$), pour $t = 0$ et pour $t \longrightarrow \infty$. La valeur $\lambda = 1$ a été écartée pour ne pas avoir affaire à une ellipse décrite deux fois.

Points d'une courbe paramétrée appartenant à une courbe d'une famille

Plus généralement, soit U un ouvert non vide de E, et $f : \omega \longrightarrow E$ (où ω est un ouvert de $\mathbb{R}$) une application *régulière* de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ à valeurs dans U. Considérons d'autre part un ouvert Λ de $\mathbb{R}^q (q \geqslant 1)$ et une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $P :\ U \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$, $(M, \lambda) \mapsto P(M, \lambda)$ telle que $\forall \lambda \in \Lambda$, l'ensemble $\mathscr{V}_\lambda = \{M \in U \mid P(M, \lambda) = 0\}$ soit non vide et ne contienne aucun point critique de la fonction $P_{[\lambda]} : U \longrightarrow \mathbb{R}$,

$M \mapsto P(M, \lambda)$. Alors chaque $\mathscr{V}_\lambda$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ de E. Un diviseur positif $(\nu_t)_{t \in \omega}$ sera dit *sur l'une des* $\mathscr{V}_\lambda$ ssi

$$(10) \qquad \exists \lambda \in \Lambda \mid (\forall a \in \omega) \quad \mathrm{val}_a\,(P_{[\lambda]}(f(t))) \geqslant \nu_a\,.$$

Le théorème VII.3.5 montre que, pour $\lambda \in \Lambda$ donné, la condition exprimée dans (10) signifie que f et $\mathscr{V}_\lambda$ ont, pour tout $a \in \omega$ tel que $\nu_a \geqslant 1$, un contact d'ordre $\geqslant \nu_a - 1$ en le couple $(a, f(a))$.

Si f est rationnelle et P polynomiale, en écrivant $f = \dfrac{1}{\Delta} g$ avec g polynomiale à coefficients dans E et Δ polynôme en t jamais nul sur ω, et en raisonnant comme pour l'alignement, on voit que

$$(10) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda \mid \prod_{a \in \omega} (t-a)^{\nu_a} \text{ divise } \Delta(t)\, P_{[\lambda]}(f(t)) \text{ dans } \mathbb{R}[t]\,.$$

Une suite $(t_1, \ldots, t_p) \in \omega^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ sera dite *sur l'une des* $\mathscr{V}_\lambda$ ssi le diviseur positif associé est sur l'une des $\mathscr{V}_\lambda$. En particulier, avec f rationnelle et P polynomiale, on voit que $(t_1, \ldots, t_p)$ est sur l'une des $\mathscr{V}_\lambda$ ssi $\exists \lambda \in \Lambda \mid \prod_{i=1}^{p} (t - t_i)$ divise $\Delta(t)\, P_{[\lambda]} f(t)$ dans $\mathbb{R}[t]$.

Exemple 5 : Reprenons la courbe f de l'exemple 3, avec E euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormé. Prenons pour famille $(\mathscr{V}_\lambda)$ la famille des *cercles* de E, définie par $P(M, \lambda) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma$, où $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma)$ décrit l'ouvert Λ de $\mathbb{R}^3$ défini par $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$. Des paramètres $(t_1, \ldots, t_p)$ $(p \geqslant 2, t_i \in \mathbb{R})$ seront dits *cocycliques* ssi ils sont sur l'un de ces cercles. On a ici :

$$(11) \quad P_{[\lambda]}(f(t)) \times (1 + t^2) = t^4 + \\ + 2(1-\beta)\,t^3 + (3 - 2\alpha - 2\beta + \gamma)\,t^2 + 2(1 - \alpha - \beta)\,t + 1 - 2\alpha + \gamma\,.$$

La question de cocyclicité de $(t_1, \ldots, t_p)$ ne se pose vraiment que pour $p = 4$. Notant $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les fonctions symétriques élémentaires de (t_1, t_2, t_3, t_4), en raisonnant comme à l'exemple 3, on voit que $\prod_{i=1}^{4} (t - t_i)$ divise le polynôme (11) ssi

$$(12) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_4 = 0$$

et, lorsqu'il en est ainsi, le polynôme (11) est donné par :

$$(13) \qquad \alpha = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\,;\ \beta = 1 + \frac{1}{2}\sigma_1\,;\ \gamma = \sigma_3 + \sigma_2 - 1\,.$$

Comme application, cherchons les points t_0 où il existe un *cercle suroscula-teur* à Γ : ils sont donnés par $t_0(t_0^3 - 6t_0 - 4) = 0$; il y en a donc 4. De

même un cercle osculateur à Γ existe pour $t = t_0$ ssi $\exists \tau_0$ tel que (t_0, t_0, t_0, τ_0) vérifie (12), i.e.

$$\tau_0(t_0^3 - 3\,t_0 - 1) = 3\,t_0(t_0 + 1)\,. \tag{14}$$

On reconnaît qu'un tel cercle existe ssi t_0 n'est pas paramètre d'inflexion de Γ (cf. exemple 3) : il est alors unique et recoupe Γ au point de paramètre $\tau_0 = \dfrac{3\,t_0(t_0+1)}{t_0^3 - 3\,t_0 - 1}$. A l'aide de (13), on voit que ce cercle est $\mathscr{V}_{\lambda_0}$, avec $\lambda_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ donné par $\alpha_0 = \dfrac{t_0^2}{2(t_0^3 - 3\,t_0 - 1)}\,(t_0^4 + 3\,t_0^2 + 8\,t_0 + 6)$,

$$\beta_0 = \frac{3\,t_0^4 + 2\,t_0^3 - 6\,t_0^2 - 6\,t_0 - 2}{2(t_0^3 - 3\,t_0 - 1)}\,,$$

$$\gamma_0 = \frac{t_0^6 + 3\,t_0^5 + 6\,t_0^4 + 7\,t_0^3 + 6\,t_0^2 + 3\,t_0 + 1}{t_0^3 - 3\,t_0 - 1}\,.$$

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine, muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$. Etudier les courbes paramétrées f suivantes (tracé, branches infinies, paramètres stationnaires, points « multiples » de la trajectoire, i.e. points M tels que card $(f^{-1}(M)) > 1$) données par leurs coordonnées f_1, f_2 dans $\mathscr{R}$:

a) $\begin{cases} f_1(t) = t - t^3 \\ f_2(t) = t^2 - t^4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{t + t^2}{1 + t^4} \\ f_2(t) = \dfrac{t^2 + t^3}{1 + t^4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{t(3\,t^2 - 2)}{4(1 - t^2)} \\ f_2(t) = \dfrac{t^4}{2(1 - t^2)} \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{t + 2}{t(t^2 - 1)} \\ f_2(t) = \dfrac{t}{1 - t^2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{2\,t^3}{(t-1)(t-3)^3} \\ f_2(t) = \dfrac{t^2}{t - 1} \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} f_1(t) = \sin t \\ f_2(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$

g) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{2\,t}{1 - t^2} \\ f_2(t) = \operatorname{tg} t \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{1}{t}\,(\operatorname{Log} t - t^2 - 1) \\ f_2(t) = 2\,t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$

i) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{2\cos t}{2 - \sin 2\,t} \\ f_2(t) = \dfrac{2\sin^2 t}{2 - \sin 2\,t} \end{cases}$ *j)* $\begin{cases} f_1(t) = \operatorname{tg} t + \operatorname{cotg} t \\ f_2(t) = \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t \end{cases}$

k) $\begin{cases} f_1(t) = 2\cos t - \dfrac{1}{8}\operatorname{tg}^2 t \\ f_2(t) = 2\sin t + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} t \end{cases}$ *l)* $\begin{cases} f_1(t) = \cos 3\,t \\ f_2(t) = \cos t + \sin t\,. \end{cases}$

Pour *i*), on mettra en évidence un point « double » A. On prouvera que si P et Q sont deux points de la trajectoire alignés avec O, le cercle passant par A, P, Q existe et est tangent en A à $O + \mathbb{R}\mathbf{j}$ ($\mathscr{R}$ orthonormal). Dans chaque cas on précisera les intervalles maximaux où f est définie et on l'étudiera sur ces intervalles ; si f est périodique, préciser la plus courte période.

Exercice 2 : Mêmes questions qu'à l'exercice 1 avec :

a) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{e^t}{\cos t} \\ f_2(t) = e^t \sin t \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{1}{e^t - 1 - t} \\ f_2(t) = \dfrac{1}{t \operatorname{Log}(1+t)} \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{1-2t}{t^2} \\ f_2(t) = e^{t+1/t} \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} f_1(t) = t\, e^{2/t} \\ f_2(t) = (t-1)\, e^{-1/t} \end{cases}$

e) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{t^2-1}{t^3} \\ f_2(t) = \dfrac{(t^2-1)^2}{t^4} \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{1}{\cos 3t} \\ f_2(t) = \dfrac{1}{\sin 2t \sin^2 3t} \end{cases}$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i},\mathbf{j})$. On donne la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses coordonnées f_1, f_2 dans $\mathscr{R}$: $f_1(t) = \dfrac{t(t^2+1)}{t^4+1}$, $f_2(t) = \dfrac{t(t^2-1)}{t^4+1}$.

a) Tracer la trajectoire $\mathscr{L}$ de f (c'est une *lemniscate de Bernoulli*). Montrer que $\mathscr{L}$ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation cartésienne $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$.

b) Former la CNS sur $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$ pour que les t_i soient 4 paramètres cocycliques. En déduire que si $t \in \mathbb{R}^*$, il y a un unique réel $\theta(t) \in \mathbb{R}^*$ tel que $(t, t, t, \theta(t))$ soient cocycliques. Ce réel $\theta(t)$ sera appelé *résiduel* de t : le calculer et montrer que t_1, t_2, t_3, t_4 sont cocycliques ssi $\theta(t_1)$, $\theta(t_2)$, $\theta(t_3)$, $\theta(t_4)$ le sont.

Exercice 4 : On reprend la cubique étudiée dans l'exemple 3. On rajoute à $\mathbb{R}$ un élément noté ∞ ($\infty \notin \mathbb{R}$) et on pose $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On convient que des éléments t_1, t_2, t_3 de $\tilde{\mathbb{R}}$ sont *alignés* ssi : ou bien $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ et est aligné au sens donné dans l'exemple 3 ; ou bien l'un des t_i est ∞, et les deux autres sont dans $\mathbb{R}$ et de produit 1 ; ou enfin deux des t_i sont ∞ et le troisième est 0.

a) Avec ces conventions, montrer que pour tout couple $(t_1, t_2) \in (\tilde{\mathbb{R}})^2$, il existe $\theta(t_1, t_2) \in \tilde{\mathbb{R}}$ unique tel que $(t_1, t_2, \theta(t_1, t_2))$ soit aligné.

b) On fixe $t_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. A chaque couple $(t_1, t_2) \in (\tilde{\mathbb{R}})^2$ on fait correspondre $t_1 \oplus t_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ ainsi défini : $t_1 \oplus t_2 = \theta(t_0, \theta(t_1, t_2))$. Démontrer que la loi interne $\oplus$ ainsi définie sur $\tilde{\mathbb{R}}$ est une loi de *groupe abélien*, et déterminer les éléments d'ordre 2 et 3 de ce groupe.

Exercice 5 : On reprend la courbe paramétrée étudiée dans l'exemple 4, avec $(O\,; e_1, e_2)$ orthonormal.

a) Former la CNS portant sur $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$ pour que ces paramètres soient cocycliques. En déduire que, pour $t \in \mathbb{R}$, il existe $\theta(t) \in \mathbb{R}$ unique tel que $(t, t, t, \theta(t))$ soient cocycliques ; $\theta(t)$ sera appelé le *résiduel* de t. Prouver que les résiduels de 4 paramètres cocycliques sont cocycliques.

b) Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. On pose $s = t_1 + t_2$ et $p = t_1 t_2$. Trouver une CNS portant sur (s, p) pour que la courbe admette un cercle qui lui est tangent en t_1 et en t_2 : un tel cercle sera

dit *bitangent* à la courbe. Prouver l'existence d'une famille de cercles bitangents non triviaux et montrer que le lieu des centres des cercles de cette famille est une conique.

Exercice 6 : On reprend la courbe $f_1(t) = \dfrac{2t^3}{(t-1)(t-3)^3}$, $f_2(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ (cf. exercice 1 *e*)). Former la CNS pour que 5 paramètres soient alignés ; en déduire la CNS pour que 4 paramètres soient alignés, puis la CNS pour que 3 paramètres soient alignés.

Exercice 7 : On reprend la courbe $f_1(t) = \dfrac{t+t^2}{1+t^4}$, $f_2(t) = \dfrac{t^2+t^3}{1+t^4}$ (cf. exercice 1 *b*)).

a) Former la CNS pour que 4 paramètres soient alignés.

b) En déduire les bitangentes à la courbe Γ, i.e. les couples (t_1, t_2) de paramètres réguliers tels que les tangentes en t_1 et t_2 coïncident.

c) Pour t paramètre régulier, soit $\mu(t)$ le milieu des points $(f(t_1), f(t_2))$ où t_1, t_2 sont les paramètres tels que (t, t, t_1, t_2) soient alignés. Etudier la courbe paramétrée $t \mapsto \mu(t)$.

d) Former la CNS pour que 3 paramètres soient alignés.

Exercice 8 : On reprend une courbe rationnelle $f : \omega \longrightarrow E$, $t \mapsto \dfrac{1}{\Delta(t)} P(t)$ (avec les notations et hypothèses du texte, et $\omega = \mathbb{R} \setminus S$).

Soit $(t_1, t_2) \in \omega^2$. Interpréter la condition : « pour tout $t_3 \in \omega$, le triplet (t_1, t_2, t_3) est aligné ».

Chapitre VIII

ENVELOPPES DE DROITES D'UN PLAN AFFINE

Dans tout le chapitre on se place dans un plan affine réel $\mathscr{E}$, de plan directeur E.

§ VIII.1 *FAMILLES DE DROITES A UN PARAMÈTRE*

Soit $\mathscr{E}^{\#}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions affines : $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$; dans ce $\mathbb{R}$-ev, les fonctions affines non constantes forment un *cône ouvert* que nous noterons $\mathfrak{C}$. Notons $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites affines de $\mathscr{E}$. On a une surjection naturelle $\mathfrak{d} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $\varphi \mapsto \varphi^{-1}(0)$, et on sait que pour toute droite $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}$, l'image réciproque $\delta^{-1}(\mathscr{D})$ est le complémentaire de $\{0_{\mathscr{E}^*}\}$ dans une certaine droite vectorielle de $\mathscr{E}^{\#}$.

DÉFINITION VIII.1.1

Nous appellerons ***famille de droites de classe $\mathscr{C}^k$ à un paramètre*** *dans $\mathscr{E}$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ toute application définie sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R} : I \longrightarrow \mathfrak{D}$, $t \mapsto \mathscr{D}_t$ de la forme $\mathscr{D}_t = \mathfrak{d}(\varphi_t)$, où $t \mapsto \varphi_t$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{E}^{\#}$ à valeurs dans $\mathfrak{C}$. Toute telle application $t \mapsto \varphi_t$ sera alors appelée une* ***représentation*** *de la famille.*

Si $t \mapsto \varphi_t$ $(t \in I)$ est une représentation d'une famille de droites $\mathscr{D}_t$ de classe $\mathscr{C}^k$, il est clair que l'ensemble des représentations de cette famille est l'ensemble des fonctions $I \longrightarrow \mathfrak{D}$, $t \mapsto \lambda(t)\,\varphi_t$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est une fonction arbitraire de classe $\mathscr{C}^k$. Nous dirons d'une propriété (resp. d'un objet mathématique) qu'elle est **associée** (resp. qu'il est **associé**) **à la famille de droites** $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ pour exprimer qu'elle est indépendante (resp.

qu'il est indépendant) de la représentation choisie pour définir cette famille de droites. De même si une propriété (resp. un objet) mathématique est $\mathscr{C}^k$-invariant(e) relativement à chacune des représentations $t \mapsto \varphi_t$ de la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, nous dirons que cette propriété de la famille $(\mathscr{D}_t)$ est $\mathscr{C}^k$-invariante (resp. que cet objet est $\mathscr{C}^k$-invariant).

Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que *toutes les propriétés étudiées dans ce chapitre, tous les concepts introduits, même si c'est à partir d'une représentation particulière $t \mapsto \varphi_t$ de la famille $(\mathscr{D}_t)$, sont en réalité associés à la famille $(\mathscr{D}_t)$ et sont $\mathscr{C}^k$-invariants.*

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ dans lequel les coordonnées du point générique M sont notées (x, y). La donnée d'une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k : I \longrightarrow \mathbb{C}$ équivaut à celle d'une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k : I \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$. Pour chaque $t \in I$, la fonction affine φ_t associée est définie par

$$(1) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad \varphi_t(M) = u(t)\,x + v(t)\,y + w(t)$$

et la droite $\mathscr{D}_t$ correspondante est $\varphi_t^{-1}(0)$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$, où l'on note (x, y) les coordonnées génériques. Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites affines de $\mathscr{E}$. On désigne par U (resp. V) l'ensemble des droites affines de $\mathscr{E}$ non parallèles à e_2 (resp. à e_1). Pour $\mathscr{D} \in U$ (resp. $\mathscr{D} \in V$), on note $\Phi_U(\mathscr{D})$ (resp. $\Phi_V(\mathscr{D})$) le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathscr{D}$ admette dans $\mathscr{R}$ l'équation $y = ax + b$ (resp. $x = ay + b$). De la sorte $\Phi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\Phi_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont des bijections grâce auxquelles on peut *transporter* à U et V la topologie de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\mathfrak{D} = U \cup V$ et que sur $\mathfrak{D}$ il existe une et une seule topologie séparée qui induit sur U et V les topologies définies ci-dessus. On munit $\mathfrak{D}$ de cette topologie. Vérifier que U et V sont alors des ouverts de $\mathfrak{D}$. Prouver que $\mathfrak{D}$ est connexe par arcs.

b) Montrer que la topologie ainsi définie sur $\mathfrak{D}$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{R}$.

c) On munit $\mathscr{E}$ d'une structure euclidienne. Soit $\Omega \in \mathscr{E}$. Pour toute droite $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}$, notons $H(\mathscr{D})$ la projection orthogonale de Ω sur $\mathscr{D}$. A tout couple $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) \in \mathfrak{D}^2$, on associe le réel

$$d(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = \left\| \overrightarrow{H(\mathscr{D}_1)\,H(\mathscr{D}_2)} \right\| + \widehat{\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2}\,.$$

Montrer que d est une distance sur $\mathfrak{D}$, qui induit sur $\mathfrak{D}$ la topologie définie ci-dessus.

Exercice 2 : On reprend les notations de l'exercice 1, dont on suppose acquis les résultats. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $\mathscr{D} : I \longrightarrow \mathfrak{D}$, $t \mapsto \mathscr{D}_t$ une application. On donne $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que $\mathscr{D}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ si elle vérifie les conditions suivantes :

(I) $\mathscr{D}$ est continue

(II) $\Phi_U \circ (\mathscr{D}\,|_{\mathscr{D}^{-1}(U)})$ et $\Phi_V \circ (\mathscr{D}\,|_{\mathscr{D}^{-1}(V)})$ sont de classe $\mathscr{C}^k$.

(La condition (II) a un sens car $\mathscr{D}^{-1}(U)$ et $\mathscr{D}^{-1}(V)$ sont ouverts relativement à I).

a) Montrer que la condition « $\mathscr{D}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ » ne dépend pas du choix de $\mathscr{R}$.

b) Montrer que $\mathscr{D} : I \longrightarrow \mathfrak{D}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ ssi c'est une famille de droites à un paramètre de classe $\mathscr{C}^k$ au sens de la définition VIII.1.1. (On pourra utiliser le théorème IX.1.1.)

Exercice 3 : On reprend les notations de l'exercice 1, et on munit $\mathscr{E}$ d'une structure euclidienne.

a) Soit $\mathscr{P}$ une partie finie, de cardinal $N \geqslant 1$, d'un cercle de rayon 1. Notons $\mathfrak{D}_{\mathscr{P}}$ l'ensemble des droites affines de $\mathscr{E}$ ne rencontrant pas $\mathscr{P}$. Vérifier que c'est un ouvert dense de $\mathfrak{D}$. Caractériser les composantes connexes de $\mathfrak{D}_{\mathscr{P}}$; combien y en a-t-il ?

b) Soit L un compact connexe de $\mathscr{E}$. Montrer que l'ensemble des $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}$ qui rencontre L est une partie de $\mathfrak{D}$ compacte et connexe. Même propriété en remplaçant « connexe » par « connexe par arcs ».

§ VIII.2 *POINT CARACTÉRISTIQUE, ENVELOPPE*

Soit une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ de classe $\mathscr{C}^k$ avec $2 \leqslant k \leqslant +\infty$, définie dans un repère donné $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$ par

$$(1) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad \varphi_t(M) = u(t)\,x + v(t)\,y + w(t)\,.$$

On associe à cette famille deux fonctions fondamentales :

$$\delta_{\mathscr{R},\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\mathscr{R},\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{vmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \\ u''(t) & v''(t) & w''(t) \end{vmatrix}.$$

Pour illustrer les considérations d'invariance du § VIII.1, vérifions que les zéros de ces fonctions δ et Δ sont associés à la seule famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, et sont $\mathscr{C}^k$-invariants.

• Tout d'abord, si on remplace $\mathscr{R}$ par un autre repère $(O'\,;e'_1, e'_2)$, en notant P la matrice de passage de (e_1, e_2) à (e'_1, e'_2), on constate que $\delta_{\mathscr{R}',\varphi} = \det(P)\,\delta_{\mathscr{R},\varphi}$ et $\Delta_{\mathscr{R}',\varphi} = \det(P)\,\Delta_{\mathscr{R},\varphi}$.

• Ensuite, si la représentation (φ_t) de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est remplacée par $(\lambda(t)\,\varphi_t)$, où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est de classe $\mathscr{C}^k$, on vérifie que $\delta_{\mathscr{R},\lambda\varphi} = \lambda^2\,\delta_{\mathscr{R},\varphi}$ et $\Delta_{\mathscr{R},\lambda\varphi} = \lambda^3\,\Delta_{\mathscr{R},\varphi}$.

• Enfin, soit $\theta : J \longrightarrow I$ un changement de paramètre $\mathscr{C}^k$-admissible. Posons $\psi_\tau = \varphi_{\theta(\tau)}$ $(\tau \in J)$, ce qui revient à poser $\psi = \varphi \circ \theta$. On a : $\delta_{\mathscr{R},\psi} = \theta' \,.\, (\delta_{\mathscr{R},\varphi} \circ \theta)$ et $\Delta_{\mathscr{R},\psi} = \theta'^3 \,.\, (\Delta_{\mathscr{R},\varphi} \circ \theta)$. Au total, les propriétés d'invariance des zéros de δ et Δ sont bien prouvées.

DÉFINITION VIII.2.1

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, $t_0 \in I$ sera dit ***paramètre projectivement birégulier*** *de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ ssi $\Delta_{\mathscr{R},\varphi}(t_0) \neq 0$; $t_0 \in I$ sera dit* ***paramètre affinement régulier*** *de $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ ssi*

$\delta_{\mathscr{R},\varphi}(t_0) \neq 0$; $t_0 \in I$ *sera dit* **paramètre projectivement régulier** *de la famille* $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ *ssi* $\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} u(t_0) & v(t_0) & w(t_0) \\ u'(t_0) & v'(t_0) & w'(t_0) \end{bmatrix}\right) = 2$.

La famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ *sera dite projectivement birégulière (resp. affinement régulière, projectivement régulière) ssi tous les* $t \in I$ *sont projectivement biréguliers (resp. affinement réguliers, projectivement réguliers).*

Cette définition est bien cohérente en raison des invariances vérifiées ci-dessus.

Remarque 1 : Il est clair qu'un paramètre projectivement birégulier (resp. affinement régulier) est *a fortiori* projectivement régulier. Les notions de paramètre projectivement ou affinement régulier sont définies pour une famille de droites de classe $\mathscr{C}^k$, avec $1 \leqslant k \leqslant +\infty$; pour un paramètre projectivement birégulier, on suppose $k \geqslant 2$.

THÉORÈME VIII.2.1

Soit $t_0 \in I$ *un paramètre* **affinement régulier** *pour la famille de droites* $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ *supposée de classe* $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. *Alors il existe un sous-intervalle* J *de* I, *voisinage de* t_0 *dans* I, *tel que* $\forall t \in J \setminus \{t_0\}$, $\mathscr{D}_{t_0} \cap \mathscr{D}_t$ *soit un singleton* $\{C_{t_0,t}\}$. *De plus,* $\lim\limits_{t \to t_0,\, t \in J \setminus \{t_0\}} C_{t_0,t}$ *existe, et c'est l'unique point commun à* $\mathscr{D}_{t_0}$ *et à la droite* $\mathscr{D}^{(1)}_{t_0,\varphi}$, *définie par la fonction affine non constante* φ'_{t_0}, *dont une équation dans* $\mathscr{R}$ *est* $u'(t_0)\,x + v'(t_0)\,y + w'(t_0) = 0$.

Démonstration :

Allégeons les notations en écrivant δ pour $\delta_{\mathscr{R},\varphi}$, Δ pour $\Delta_{\mathscr{R},\varphi}$, $u_0 = u(t_0)$, $u'_0 = u'(t_0)$, etc...

Soit $t = t_0 + h$ $(t \in I)$. On a : $u(t_0 + h) = u_0 + hu'_0 + \rho_1(h)$; $v(t_0 + h) = v_0 + hv'_0 + \rho_2(h)$; $w(t_0 + h) = w_0 + hw'_0 + \rho_3(h)$, d'où

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u(t_0+h) & v(t_0+h) \end{vmatrix} = h\delta(t_0) + \rho_4(h), \quad \text{avec} \quad \rho_i(h) \underset{h \to 0}{\in} o(h).$$

Comme $\delta(t_0) \neq 0$ par hypothèse, il existe un intervalle $J \subset I$, voisinage de t_0 dans I, tel que $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u(t_0+h) & v(t_0+h) \end{vmatrix} \neq 0$ pour $t = t_0 + h \in J \setminus \{t_0\}$.

Pour ces valeurs de t, les droites $\mathscr{D}_{t_0}$ et $\mathscr{D}_t$ ont donc un unique point commun, que nous notons $C_{t_0,t}$. Les coordonnées dans $\mathscr{R}$ de $C_{t_0,t}$ sont données par les formules de Cramer :

$$(3)\quad x = -\frac{\begin{vmatrix} w_0 & v_0 \\ w(t_0+h) & v(t_0+h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u(t_0+h) & v(t_0+h) \end{vmatrix}}\ ; \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} u_0 & w_0 \\ u(t_0+h) & w(t_0+h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u(t_0+h) & v(t_0+h) \end{vmatrix}}\ ,$$

c'est-à-dire, comme $\rho_1(h)$, $\rho_2(h)$, $\rho_3(h)$, $\rho_4(h)$ sont des éléments de $o(h)$:

$$(4)\qquad x = -\frac{\begin{vmatrix} w_0 & v_0 \\ w_0' & v_0' \end{vmatrix}}{\delta(t_0)} + \rho_5(h)\ ; \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} u_0 & w_0 \\ u_0' & w_0' \end{vmatrix}}{\delta(t_0)} + \rho_6(h)\ ,$$

avec $\rho_5(h) \underset{h \to 0}{\in} o(h)$ et $\rho_6(h) \underset{h \to 0}{\in} o(h)$. On en déduit que le point $C_{t_0,t}$ admet pour $t \longrightarrow t_0$, $t \in J \setminus \{t_0\}$ une limite, que nous notons C_{t_0}, et qui est l'unique point commun à $\mathscr{D}_{t_0}$ et à $\mathscr{D}^{(1)}_{t_0,\varphi}$. ■

DÉFINITION VIII.2.2

Avec les notations et hypothèses du théorème VIII.2.1, *le point* $C_{t_0} = \lim\limits_{t \to t_0,\, t \in J \setminus \{t_0\}} C_{t_0,t}$ *s'appelle* ***le point caractéristique*** *en* $t = t_0$ *de la famille de droites* $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$. *Si tous les* $t \in I$ *sont paramètres* ***affinement réguliers*** *de la famille* $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, *la courbe paramétrée* $I \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto C_t$ *s'appelle* ***enveloppe*** *de la famille* $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$.

Dans les conditions ci-dessus, la définition même du point caractéristique C_{t_0} montre qu'il ne dépend que de t_0 et de la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$. On notera que cependant la droite $\mathscr{D}^{(1)}_{t_0,\varphi}$ *dépend* aussi du choix de φ. En fait, si $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, il est immédiat que $\mathscr{D}^{(1)}_{t_0,\lambda\varphi}$ est définie par la fonction affine non constante $\lambda'(t_0)\,\varphi(t_0) + \lambda(t_0)\,\varphi'(t_0)$, et l'on voit bien que $\mathscr{D}^{(1)}_{t_0,\lambda\varphi}$ appartient au faisceau linéaire de droites défini par $\mathscr{D}_{t_0}$ et $\mathscr{D}^{(1)}_{t_0,\varphi}$, ce qui confirme bien l'indépendance de C_{t_0} vis-à-vis de φ.

Lorsque la famille $(\mathscr{D}_t)$ est affinement régulière, on vérifie aisément que *l'enveloppe est* $\mathscr{C}^k$*-invariante :* cela signifie que $(\mathscr{D}_t)$ étant définie par une représentation particulière $\varphi : I \longrightarrow \mathfrak{D}$, pour tout changement $\mathscr{C}^k$-admissible de paramètre $\theta : J \longrightarrow I$, les enveloppes $t \mapsto C_t$ de la famille $(\mathscr{D}_t)$ et $\tau \longrightarrow \Gamma_\tau$ de la famille de droites associée à $\varphi \circ \theta$ sont reliées par $(\forall \tau \in J)\ \Gamma_\tau = C_{\theta(\tau)}$. Remarquons que, dans les conditions de la défini-

tion VII.2.2, si la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est affinement régulière de classe $\mathscr{C}^k$, l'enveloppe $t \mapsto C_t$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$, et $\mathscr{C}^\infty$ si $k = +\infty$, puisque elle est définie dans le repère $\mathscr{R}$ par les formules :

$$(5) \qquad x_C(t) = -\frac{\begin{vmatrix} w(t) & v(t) \\ w'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}{\delta(t)} \; ; \qquad y_C(t) = -\frac{\begin{vmatrix} u(t) & w(t) \\ u'(t) & w'(t) \end{vmatrix}}{\delta(t)} .$$

Remarque 2 : Par abus de langage, on appelle aussi *enveloppe* de la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ n'importe quelle courbe paramétrée $\mathscr{C}^{k-1}$-équivalente si $k \in \mathbb{N}^*$, et $\mathscr{C}^\infty$-équivalente si $k = +\infty$, à la véritable enveloppe au sens strict de la définition VIII.2.2. Cela se justifie par la $\mathscr{C}^k$-invariance de l'enveloppe signalée plus haut.

Recherche directe d'enveloppes

Considérons une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ affinement régulière, définie par une application de classe $\mathscr{C}^k : I \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$, de sorte que $\mathscr{D}_t$ admette dans $\mathscr{R}$ l'équation $u(t)\,x + v(t)\,y + w(t) = 0$. *Cherchons une fonction* $\gamma : I \longrightarrow \mathscr{E}$, *dérivable, telle que* $(\forall t \in I)$ $\gamma(t) \in \mathscr{D}_t$ *et* $\gamma'(t) \in \vec{\mathscr{D}}_t$.

Notant $(\alpha(t), \beta(t))$ les coordonnées dans $\mathscr{R}$ de $\gamma(t)$, la CNS sur (α, β) pour qu'il en soit ainsi est :

$$(6) \qquad (\forall t \in I) \quad \begin{cases} u(t)\,\alpha(t) + v(t)\,\beta(t) + w(t) = 0 \; ; \\ u(t)\,\alpha'(t) + v(t)\,\beta'(t) = 0 . \end{cases}$$

Or, en dérivant la première condition, on obtient :

$$u'(t)\,\alpha(t) + v'(t)\,\beta(t) + w'(t) + u(t)\,\alpha'(t) + v(t)\,\beta'(t) = 0 .$$

Par suite, la CNS sur (α, β) se ramène à :

$$(\forall t \in I) \quad \begin{cases} u(t)\,\alpha(t) + v(t)\,\beta(t) + w(t) = 0 \\ u'(t)\,\alpha(t) + v'(t)\,\beta(t) + w'(t) = 0 . \end{cases}$$

On reconnaît le système donnant le point caractéristique C_t de $(\mathscr{D}_t)$. *Il y a donc une et une seule solution au problème considéré, et c'est justement l'enveloppe de la famille* $(\mathscr{D}_t)$.

Dans certains cas, il peut être préférable de chercher directement l'enveloppe en écrivant le système (6) au lieu d'utiliser les formules (5).

THÉORÈME VIII.2.2

Soit $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ *une famille de droites de classe* $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ *affinement régulière, définie par une représentation* $t \mapsto \varphi_t$. *Soit*

$t \mapsto C_t$ son enveloppe. Supposons que pour un paramètre $t_0 \in I$, les dérivées $C_{t_0}^{(i)}$ $(2 \leq i+1 \leq k)$ soient non toutes nulles, et notons $p = \operatorname{Min}\left\{i \mid 2 \leq i+1 \leq k \text{ et } C_{t_0}^{(i)} \neq 0\right\}$. Alors $C_{t_0}^{(p)}$ dirige $\mathscr{D}_{t_0}$. De plus $C'_{t_0} \neq 0$ ssi t_0 est projectivement birégulier.

Démonstration :

D'après le théorème VIII.2.1, on a : $(\forall t \in I)\ \varphi_t(C_t) = 0$ et $\varphi'_t(C_t) = 0$, d'où relativement au repère fixe $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$:

$$(7) \qquad (\forall t \in I) \quad u(t)\,x_C(t) + v(t)\,y_C(t) + w(t) = 0$$

$$(8) \qquad (\forall t \in I) \quad u'(t)\,x_C(t) + v'(t)\,y_C(t) + w'(t) = 0\,.$$

En dérivant p fois (7) et $p-1$ fois (8), on obtient :

$$(9) \qquad (\forall t \in I) \quad u^{(p)}(t)\,x_C(t) + v^{(p)}(t)\,y_C(t) + w^{(p)}(t) + \cdots + \\ + u(t)\,x_C^{(p)}(t) + v(t)\,y_C^{(p)}(t) = 0\,, \quad \text{et}$$

$$(10) \qquad (\forall t \in I) \quad u^{(p)}(t)\,x_C(t) + v^{(p)}(t)\,y_C(t) + w^{(p)}(t) + \cdots + \\ + u'(t)\,x_C^{(p-1)}(t) + v'(t)\,y_C^{(p-1)}(t) = 0\,.$$

En faisant $t = t_0$, (10) donne $u^{(p)}(t_0)\,x_C(t_0) + v^{(p)}(t_0)\,y_C(t_0) + w^{(p)}(t_0) = 0$, d'où en reportant dans (9) : $u(t_0)\,x_C^{(p)}(t_0) + v(t_0)\,y_C^{(p)}(t_0) = 0$. Cette dernière relation prouve bien que le vecteur $C_{t_0}^{(p)}$ de coordonnées $(x_C^{(p)}(t_0), y_C^{(p)}(t_0))$ dirige la droite $\mathscr{D}_{t_0}$ d'équation $u(t_0)\,x + v(t_0)\,y + w(t_0) = 0$. Par ailleurs la dérivation des formules (5) donne :

$$(11) \quad (\forall t \in I) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_C(t)) = \frac{v(t)\,\Delta(t)}{\delta^2(t)}\,; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_C(t)) = -\frac{u(t)\,\Delta(t)}{\delta^2(t)}\,,$$

en posant $\Delta(t) = \Delta_{\mathscr{R},\varphi}(t)$ défini au début de ce §.

Comme $(\forall t \in I)$ $(u(t), v(t)) \neq (0,0)$, la relation (11) montre que $(x'_C(t_0), y'_C(t_0)) \neq (0,0) \Leftrightarrow \Delta(t_0) \neq 0$, ce qui prouve la dernière assertion du théorème. ■

Remarque 3 : Il peut arriver que la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ soit affinement régulière mais que $\Delta(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \\ u''(t) & v''(t) & w''(t) \end{vmatrix}$ soit nul pour tout $t \in I$. Dans ce cas, le calcul précédent montre que $(\forall t \in I)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_C(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_C(t)) = 0$, autrement dit que le point caractéristique C_t de $\mathscr{D}_t$ reste fixe. On dit alors que l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est réduite à un point. Cela arrive si et seulement si la famille

$(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est contenue dans un faisceau linéaire de droites ; dans ce cas, localement, un choix convenable du paramètre et de φ fait de u, v, w des polynômes de degré $\leqslant 1$, ce qui confirme $\Delta \equiv 0$.

THÉORÈME VIII.2.3

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ ***birégulière,*** *et soit $\mathscr{D}_t$ la tangente à f en $t \in I$. Alors la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{C}^\infty$ si $k = +\infty$; elle est affinement régulière et son enveloppe est f.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$ un repère de $\mathscr{E}$. Notons-y (α, β) les coordonnées de f. Une équation dans $\mathscr{R}$ de $\mathscr{D}_t$ est :

$$\beta'(t)\,x - \alpha'(t)\,y + \alpha'(t)\,\beta(t) - \alpha(t)\,\beta'(t) = 0\,. \tag{12}$$

On voit déjà que $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{C}^\infty$ si $k = +\infty$. D'après le théorème VIII.2.1, notant φ_t la fonction affine sur $\mathscr{E}$ définie au premier membre de (12) (par $u(t) = \beta'(t)$, $v(t) = -\alpha'(t)$, $w(t) = \alpha'(t)\,\beta(t) - \alpha(t)\,\beta'(t)$ pour $t \in I$), une équation dans $\mathscr{R}$ de $\mathscr{D}^{(1)}_{t,\varphi}$ s'obtient en dérivant le premier membre de (12) par rapport à t :

$$\beta''(t)\,x - \alpha''(t)\,y - \alpha(t)\,\beta''(t) + \alpha''(t)\,\beta(t) = 0\,. \tag{13}$$

La fonction $\delta = \delta_{\mathscr{R},\varphi}$ est donnée par : $(\forall t \in I)\ \delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha'(t) & \beta'(t) \\ \alpha''(t) & \beta''(t) \end{vmatrix}$.
Comme f est birégulière, δ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, donc la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est bien affinement régulière. Son enveloppe $t \mapsto C_t$ s'obtient en résolvant par rapport à (x, y) le système de Cramer formé par (12) et (13) quand on y bloque t, d'où les coordonnées de C_t dans $\mathscr{R}$:

$$x_C(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} \alpha(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t), & -\alpha'(t) \\ \alpha(t)\,\beta''(t) - \alpha''(t)\,\beta(t), & -\alpha''(t) \end{vmatrix} = \alpha(t)\,\frac{\delta(t)}{\delta(t)} = \alpha(t)$$

$$y_C(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} \beta'(t), & \alpha(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t) \\ \beta''(t), & \alpha(t)\,\beta''(t) - \alpha''(t)\,\beta(t) \end{vmatrix} = \beta(t)\,\frac{\delta(t)}{\delta(t)} = \beta(t)\,.$$

Autrement dit : $(\forall t \in I)\ C_t = f(t)$. ■

Famille de droites au voisinage d'un paramètre non affinement régulier

THÉORÈME VIII.2.4

Soit $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ une famille de droites de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ définie par une représentation $t \mapsto \varphi_t$. Notons δ et Δ les fonctions $\delta_{\mathscr{R},\varphi}$ et $\Delta_{\mathscr{R},\varphi}$ associées à un repère donné $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$.

Soit $t_0 \in I$ un paramètre ***projectivement birégulier*** *mais* ***non affine-régulier*** *(i.e. $\delta(t_0) = 0$ et $\Delta(t_0) \neq 0$). Alors il existe un voisinage J de t_0 dans I qui soit un sous-intervalle de I tel que $\delta(t) \neq 0$ pour $t \in J \setminus \{t_0\}$. Pour chaque composante connexe Λ de $J \setminus \{t_0\}$, l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \Lambda}$ présente pour $t \longrightarrow t_0$ une* ***branche infinie*** *dont $\mathscr{D}_{t_0}$ est* ***asymptote.***

Démonstration :

Soit (u, v, w) les fonctions associées à φ_t dans le repère $\mathscr{R}$, i.e. $(\forall M \in \mathscr{E})\, \varphi_t(M) = u(t)\, x + v(t)\, y + w(t)$, avec (x, y) coordonnées de M dans $\mathscr{R}$. Employons les abréviations habituelles $u_0^{(i)}$ pour $u^{(i)}(t_0)$, $\delta_0^{(i)}$ pour $\delta^{(i)}(t_0)$, etc... Enfin ramenons-nous au cas où $t_0 = 0$ par translation du paramètre. Soit $M(t)$ la matrice $\begin{bmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \\ u''(t) & v''(t) & w''(t) \end{bmatrix}$. Par hypothèse, $M(t_0)$ est inversible. Puisque $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, on a $\left(\begin{vmatrix} u_0 & w_0 \\ u_0' & w_0' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_0' & w_0' \end{vmatrix} \right) \neq (0, 0)$, sinon, compte tenu de $\delta_0 = 0$, Δ_0 serait nul.

Posons $D_0 = \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_0'' & v_0'' \end{vmatrix}$. La nullité simultanée de δ_0 et de D_0 entraînerait clairement que $\Delta_0 = 0$ ou $u_0 = v_0 = 0$; mais comme $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ on aboutirait finalement à $\Delta_0 = 0$. Cela prouve que $D_0 \neq 0$. Par dérivation de $\delta(t)$, on voit que $D_0 = \delta'(t_0)$, d'où l'on déduit que $\delta(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} t D_0$, ce qui montre l'existence de l'intervalle souhaité J. Soit Λ l'une des composantes connexes de $J \setminus \{0\}$. La famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \Lambda}$ est affinement régulière, et son enveloppe $t \mapsto C_t$ est donnée par les formules (5). Du fait que $\left(\begin{vmatrix} u_0 & w_0 \\ u_0' & w_0' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_0' & w_0' \end{vmatrix} \right) \neq (0, 0)$, ces formules (5) montrent que l'une au moins des coordonnées $(x_C(t), y_C(t))$ dans $\mathscr{R}$ de C_t tend en valeur absolue vers $+\infty$ quand $t \longrightarrow 0$, $t \in \Lambda$. Il y a donc bien une branche infinie pour $t \longrightarrow 0$, $t \in \Lambda$. Posons $\psi(t) = u_0\, x_C(t) + v_0\, y_C(t) + w_0$ $(t \in \Lambda)$. Les formules (5) permettent de vérifier que $\delta(t)\, \psi(t) = \begin{vmatrix} u_0 & u(t) & u'(t) \\ v_0 & v(t) & v'(t) \\ w_0 & w(t) & w'(t) \end{vmatrix}$, et un simple calcul de développements limités montre que $\delta(t)\, \psi(t) \underset{t \longrightarrow 0,\, t \in \Lambda}{\sim} t^2 \Delta_0$, et par suite :

$$\psi(t) \underset{t \longrightarrow 0,\, t \in \Lambda}{\sim} t \frac{\Delta_0}{D_0}. \tag{14}$$

Or il existe un repère affine $(\Omega\ ;\mathbf{i},\mathbf{j})$ dans lequel $\psi(t)$ est la première coordonnée de C_t et tel que $\Omega + \mathbb{R}\mathbf{j} = \mathscr{D}_{t_0}$. Donc $\mathscr{D}_{t_0}$ est bien asymptote de l'enveloppe pour $t \longrightarrow 0$; la position de C_t par rapport à cette asymptote pour $t \longrightarrow 0$ est fournie par (14). ■

THÉORÈME VIII.2.5

Avec les notations précédentes, supposons $k \geqslant 4$, $\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_0' & v_0' & w_0' \end{bmatrix}\right) = 1$ *(d'où* $\delta_0 = 0$ *et* $\Delta_0 = 0$*),* $\delta_0' \neq 0$ *et* $\Delta_0'' \neq 0$. *Alors il existe un intervalle* $J \subset I$ *voisinage de* t_0 *dans* I *tel que :* $\delta(t) \neq 0$ *pour* $t \in J \setminus \{t_0\}$ *; la fonction* $J \setminus \{t_0\} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto C_t$ *se prolonge en* t_0 *en une fonction* $\widehat{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^{k-2}$ *sur* J *si* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* J *si* $k = +\infty$, *et la courbe paramétrée* $\widehat{C} : J \longrightarrow \mathscr{E}$ *est régulière et admet* t_0 *pour paramètre d'inflexion.*

(On dit en abrégé que *l'enveloppe* $C : J \setminus \{t_0\} \longrightarrow \mathscr{E}$ *se prolonge en* t_0 *et que l'enveloppe prolongée admet* t_0 *pour paramètre d'inflexion*).

Démonstration :

On se ramène, par translation sur t, au cas où $t_0 = 0$. Les hypothèses entraînent $\Delta_0 = 0$, $\Delta_0' = 0$, et $\Delta_0'' = \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_0'' & v_0'' & w_0'' \\ u_0''' & v_0''' & w_0''' \end{vmatrix}$. Puisque $\delta_0' \neq 0$, d'où $\delta(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} t\delta_0'$, c'est qu'il existe un intervalle $J \subset I$ voisinage de 0 dans I tel que $\delta(t) \neq 0$ pour $t \in J \setminus \{0\}$, ce qui prouve l'existence, pour $t \in J \setminus \{0\}$, de $C_t =$ point caractéristique de $\mathscr{D}_t$. On a : $\Delta(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\Delta_0''$, d'où en utilisant les formules (11) :

$$(15)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_C(t)) \underset{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t \in J \setminus \{0\}}}{\longrightarrow} \frac{v_0}{2\,\delta_0'^2}\Delta_0''\ ;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_C(t)) \underset{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t \in J \setminus \{0\}}}{\longrightarrow} -\frac{u_0}{2\,\delta_0'^2}\Delta_0''\,.$$

Les formules (5) et le théorème de division (cf. théorème VI.3.4 du tome 2) prouvent que $x_C(t)$ et $y_C(t)$ se prolongent continûment à J en t_0, le prolongement $\widehat{C}$ étant de classe $\mathscr{C}^{k-2}$ sur J si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur J si $k = +\infty$. D'après (15), $(x_C)'(0) = \dfrac{v_0}{2\,\delta_0'^2}\Delta_0''$, $(y_C)'(0) = -\dfrac{u_0}{2\,\delta_0'^2}\Delta_0''$; donc, comme $\Delta_0'' \neq 0$ par hypothèse et $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, on voit que $t_0 = 0$ est paramètre régulier de $\widehat{C}$. Quitte à réduire J, par continuité, on peut donc supposer que $\widehat{C}$ est régulière.

Pour prouver que t_0 est paramètre d'inflexion de $\widehat{C}$, il reste à voir que $((x_{\hat{C}})''(0), (y_{\hat{C}})''(0))$ est proportionnel à $((x_{\hat{C}})'(0), (y_{\hat{C}})'(0))$. Pour cela, reprenons les formules (11) ; la fonction $J\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\Delta(t)}{\delta^2(t)}$ se prolonge en $t_0 = 0$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-3}$ sur J (théorème de division), dont nous écrivons un $\mathrm{DL}_1(0) : t \mapsto H_0 + tH_1 + \rho(t)$, avec $\rho(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t)$. Utilisant $u(t) = u_0 + tu_0' + \rho_1(t)$, $v(t) = v_0 + tv_0' + \rho_2(t)$, avec $\rho_1(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t)$, $\rho_2(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t)$, à l'aide de (11) on déduit : $(x_{\hat{C}})'(t) = (v_0 + tv_0' + \rho_2(t))(H_0 + tH_1 + \rho(t))$, $(y_{\hat{C}})'(t) = -(u_0 + tu_0' + \rho_1(t))(H_0 + tH_1 + \rho(t))$, d'où en prenant les coefficients de t : $(x_{\hat{C}})''(0) = v_0' H_0 + v_0 H_1$, $(y_{\hat{C}})''(0) = -(u_0 H_1 + u_0' H_0)$. Et puisque $(x_{\hat{C}})'(0) = v_0 H_0$ et $(y_{\hat{C}})'(0) = -u_0 H_0$, il vient : $\begin{vmatrix} (x_{\hat{C}})'(0) & (y_{\hat{C}})'(0) \\ (x_{\hat{C}})''(0) & (y_{\hat{C}})''(0) \end{vmatrix} = 0$. ■

Les cas envisagés dans les théorèmes VIII.2.4 et VIII.2.5 sont les cas les plus simples de paramètres non affinement réguliers. La condition $\mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_0' & v_0' & w_0' \end{bmatrix}\right) = 1$ se traduit en disant que t_0 est *paramètre stationnaire* de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$. Cela se justifie par le fait qu'avec un langage approprié t_0 est paramètre stationnaire de la fonction $t \mapsto \mathscr{D}_t$ considérée comme courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ étant muni d'une structure convenable de *variété de classe* $\mathscr{C}^\infty$.

De même, la condition « t_0 est projectivement birégulier et non affinement régulier » peut se résumer en « t_0 est *birégulier à l'infini* ». En effet, dans le cadre (non abordé dans cet ouvrage) de la géométrie projective réelle, cette condition signifie que t_0 est paramètre birégulier de la courbe paramétrée $t \mapsto \mathscr{D}_t$ considérée comme à valeurs dans *l'ensemble des droites projectives du complété projectif de* $\mathscr{E}$, muni d'une structure convenable de variété de classe $\mathscr{C}^\infty$, le point caractéristique de $\mathscr{D}_{t_0}$ étant un point à l'infini de ce complété projectif.

Enfin, la condition « t_0 est paramètre projectivement régulier mais non projectivement birégulier de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ » peut s'exprimer par « t_0 est *paramètre d'inflexion projective* de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ » ; et si t_0 est affinement régulier sans être projectivement birégulier, on pourra dire que c'est un *paramètre d'inflexion affine* de $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$: alors, t_0 est paramètre stationnaire de l'enveloppe (cf. th. VIII.2.2).

Le langage introduit ci-dessus permet d'observer l'importante propriété suivante, dite *de dualité :* lorsque $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est affinement régulière, elle a une enveloppe ; *si t_0 est paramètre d'inflexion de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, alors c'est un paramètre stationnaire de l'enveloppe de cette famille.* De plus si t_0 est paramètre stationnaire de $(\mathscr{D}_t)$, alors c'est (en général) un paramètre d'inflexion de l'enveloppe convenablement prolongée en t_0. Ainsi les concepts de *paramètre d'inflexion* et de *paramètre stationnaire* sont *duaux l'un de l'autre* (penser au théorème VIII.2.3 où une courbe est considérée comme l'enveloppe de ses tangentes). Toutefois une dualité simple et

cohérente ne peut être obtenue que si on se place dans le cadre de la géométrie projective.

Exemple 1 : Dans $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$, soit la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ représentée par $(\varphi_t)\ (x, y) = 3\,tx - 2\,y - t^3$.

Elle est affinement régulière, et son enveloppe $t \mapsto C_t$ est donnée par les formules (5) : $x_C(t) = t^2$, $y_C(t) = t^3$. On a : $\Delta(t) = 36\,t$, donc les $t \in \mathbb{R}^*$ sont des paramètres projectivement biréguliers, et $t = 0$ est paramètre d'inflexion de la famille. Or, que constate-t-on ? Que $t = 0$ donne un point de rebroussement de première espèce de l'enveloppe (cf. fig. 1).

Exemple 2 : Dans $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$, soit $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ représentée par $\varphi_t(x, y) = 3\,t^2 x - y - 2\,t^3$.

Ici on a : $\delta(t) = 6\,t$, $\Delta(t) = -36\,t^2$. On constate que les $t \in \mathbb{R}^*$ sont affinement réguliers et projectivement biréguliers et que $t = 0$ est paramètre stationnaire pour la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Pour $t \neq 0$ le point caractéristique C_t est donné par les formules (5), d'où $x = t$, $y = t^3$. On voit bien que, conformément au théorème VIII.2.5, la fonction C se prolonge en $\widehat{C} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que $t = 0$ est paramètre d'inflexion pour $\widehat{C}$ (cf. fig. 2).

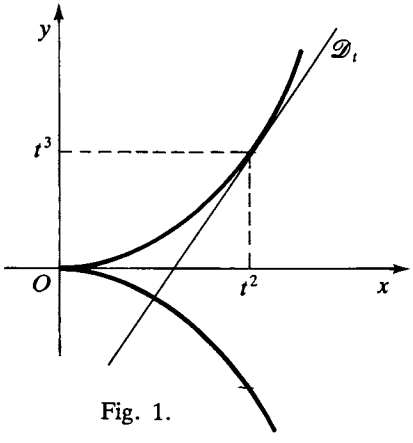


Fig. 1.

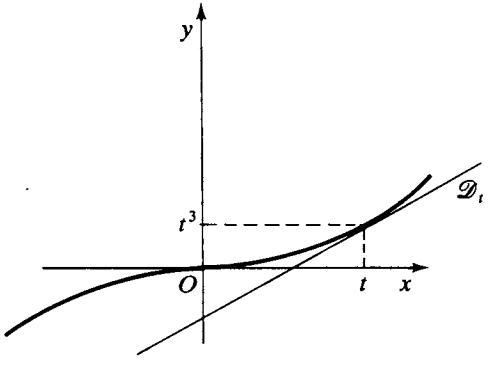


Fig. 2.

Pour bien comprendre la dualité paramètre stationnaire-paramètre d'inflexion, dans les exemples 1 et 2, repérons les droites $\mathscr{D}_t$ par deux coordonnées planes $a(t)$ et $b(t)$ telles que l'équation de $\mathscr{D}_t$ s'écrive $y = a(t)\,x + b(t)$.

Pour l'exemple 1, on trouve $a(t) = \dfrac{3}{2}\,t$, $b(t) = \dfrac{-1}{2}\,t^3$: la courbe paramétrée $t \mapsto (a(t), b(t))$ admet un point d'inflexion en $t = 0$ (cf. fig. 3).

Pour l'exemple 2, on trouve $a(t) = 3\,t^2$, $b(t) = -2\,t^3$: la courbe paramétrée $t \mapsto (a(t), b(t))$ admet pour $t = 0$ un point de rebroussement de première espèce (cf. fig. 4).

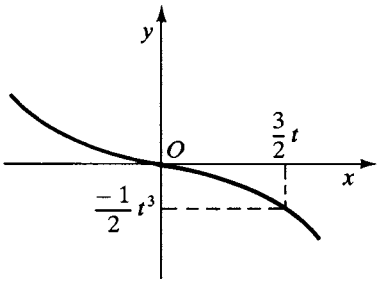


Fig. 3.

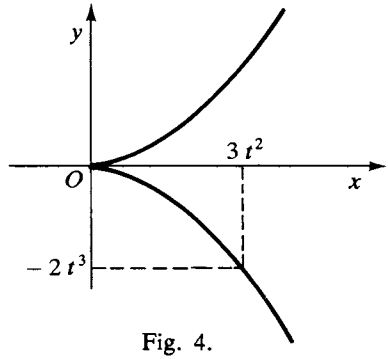


Fig. 4.

Exercice 1 : On reprend les notations des exercices 1 et 2 du § VIII.1. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{D} : I \longrightarrow \mathfrak{D}$, $t \mapsto \mathscr{D}_t$ une application de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Soit S et T les ouverts $\mathscr{D}^{-1}(U)$ et $\mathscr{D}^{-1}(V)$ de I, et soit $f = \mathscr{D}\,|_S$, $g = \mathscr{D}\,|_T$. Un paramètre $t \in I$ sera dit *régulier* (resp. stationnaire ; d'inflexion ; p-régulier $(2 \leqslant p \leqslant k)$, ...) pour $\mathscr{D}$ ssi :

(I) Lorsque $t \in S \backslash T$, $f'(t) \neq 0$ (resp. $f'(t) = 0$; $f'(t) \neq 0$ et $f''(t) \in \mathbb{R} f'(t)$; $(f'(t), \ldots, f^{(p)}(t))$ libre, ...).

(II) Lorsque $t \in T \backslash S$, $g'(t) \neq 0$ (resp. $g'(t) = 0$; $g'(t) \neq 0$ et $g''(t) \in \mathbb{R} g'(t)$; $(g'(t), \ldots, g^{(p)}(t))$ libre, ...).

(III) Lorsque $t \in S \cap T$, $f'(t) \neq 0$ et $g'(t) \neq 0$ (resp. $f'(t) = g'(t) = 0$; $f'(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ et $f''(t) \in \mathbb{R} f'(t)$, $g''(t) \in \mathbb{R} g'(t)$; $(f'(t), \ldots, f^{(p)}(t))$ et $(g'(t), \ldots, g^{(p)}(t))$ libres, ...).

Vérifier que si $t \in S \cap T$, pour que (III) soit satisfait, il faut et il suffit que (I) ou (II) le soit.

a) Montrer que les notions ci-dessus ne dépendent pas du choix du repère $\mathscr{R}$.

b) Montrer que $t \in I$ est paramètre régulier (resp. stationnaire) de $\mathscr{D}$ ssi c'est un paramètre projectivement régulier au sens de la définition VIII.2.1 (resp. stationnaire au sens de $\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \end{bmatrix}\right) = 1$). De même, prouver que $t \in I$ est paramètre birégulier de $\mathscr{D}$ ssi c'est un paramètre projectivement birégulier de $\mathscr{D}$ au sens de la définition VIII.2.1.

c) Soit $t_0 \in I$ un paramètre d'inflexion projective de $\mathscr{D}$ (i.e. projectivement régulier et non projectivement birégulier au sens de la définition VIII.2.1). Si t_0 est affinement régulier pour la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, étudier l'enveloppe au voisinage de t_0. Sinon étudier les enveloppes pour $t \neq t_0$ dans l'hypothèse où les $t \in I \backslash \{t_0\}$ sont affinement réguliers.

Exercice 2 : Soit la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie dans le repère $\mathscr{R}$ du plan affine $\mathscr{E}$ par les équations $x - t = 0$ $(t \in \mathbb{R})$. Vérifier que tous les paramètres sont projectivement réguliers, et non projectivement birégulier (i.e. $\Delta_{\mathscr{R}, \varphi} \equiv 0$) : pourtant les droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ n'ont aucun point commun dans $\mathscr{E}$.

Exercice 3 : Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ si $t \leqslant 0$ et $t \mapsto e^{-1/t}$ si $t > 0$: vérifier que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On donne alors la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie dans $\mathscr{R}$ par les équations $tx - y - \psi(t) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Vérifier que la famille est affinement régulière, et donner son enveloppe.

b) Quels sont les paramètres projectivement birréguliers de la famille ? Que se passe-t-il au voisinage de $t = \frac{1}{2}$?

Exercice 4 : On définit la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dans $\mathscr{R}$ par les équations $u(t)\,x + v(t)\,y + w(t) = 0$, avec : si $t = 0$ $u(t) = 0$, $v(t) = -1$, $w(t) = 0$, et si $t \neq 0$ $u(t) = \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} \sin \frac{1}{t} \left(\sin \frac{1}{t} - t \cos \frac{1}{t} \right) = \psi'(t)$ (où $\psi(t) = e^{-1/t^2} \sin^2 \frac{1}{t}$), $v(t) = -1$, $w(t) = \psi(t) - t\psi'(t)$.

a) Quels sont les paramètres affinement réguliers (resp. projectivement réguliers) de la famille ?

b) Montrer que les enveloppes obtenues se prolongent en une courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Que se passe-t-il en le paramètre $t = 0$?

Exercice 5 : *a*) Soit $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ une famille de droites de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(3 \leqslant k \leqslant +\infty)$ supposée affinement régulière. Montrer que si t est paramètre *projectivement birégulier de la famille,* c'est un paramètre *birégulier de l'enveloppe.*

b) De façon duale, soit une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(3 \leqslant k \leqslant +\infty)$ *birégulière.* Montrer que la famille $(\mathscr{T}_t)_{t \in I}$ de ses tangentes est affinement régulière et projectivement birégulière. Si f est régulière sans être birégulière, chaque paramètre $t \in I$ d'inflexion pour f est stationnaire pour la famille $(\mathscr{T}_t)_{t \in I}$.

Exercice 6 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que tout $t \in \mathbb{R}^*$ soit paramètre birégulier et que 0 soit paramètre stationnaire. On définit f par ses coordonnées (a, b) dans $\mathscr{R}$, et on suppose que $f(0) = O$. On fait l'hypothèse que la suite de vecteurs $(f^{(i)}(0))_{i \in \mathbb{N}, i \geqslant 2}$ est de rang 2 : soit $p = \operatorname{Min}\{i \in \mathbb{N} \mid i \geqslant 2 \text{ et } f^{(i)}(0) \neq 0 - 1\}$. On note α et β les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolongent les fonctions $I \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{a'(t)}{t^p}$ et $t \mapsto \frac{b'(t)}{t^p}$ (cf. théorème VI.3.4 du tome 2). On considère la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ définie dans $\mathscr{R}$ par les équations :

$$\beta(t)\,x - \alpha(t)\,y + \alpha(t)\,b(t) - a(t)\,\beta(t) = 0\,.$$

a) Vérifier que, pour tout $t \in I$, $(\mathscr{D}_t)$ est la tangente géométrique en t à f.

b) D'après l'exercice 5 ci-dessus, l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)$ existe pour $t \in I \cap \mathbb{R}_+^*$ et pour $t \in I \cap \mathbb{R}_-^*$. Etudier le prolongement éventuel en $t = 0$ de cette enveloppe.

§ VIII.3 *EXEMPLES D'ENVELOPPES DE DROITES*

Dans tout ce §, on fixe un repère affine $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$.

Utilisation du discriminant

Soit une application *polynomiale* : $I \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$. Pour $t \in I$, notons $\mathscr{D}_t$ la droite dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $u(t)\ x + v(t)\ y + w(t) = 0$. Supposons la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ affinement régulière, de sorte qu'elle admet une enveloppe.

Ecrivons $u(t)\,x + v(t)\,y + w(t)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{N} A_k(x, y)\,t^k$, avec $N \geqslant 1$,

$(\forall k \in [\![0, N]\!])\quad A_k(x, y) = u_k\,x + v_k\,y + w_k$

et $\quad (u_N, v_N, w_N) \neq (0, 0, 0)\,.$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons

$$P_{x,y}(t) = u(t)\,x + v(t)\,y + w(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k(x, y)\,t^k.$$

Soit U l'ouvert de $\mathscr{E}$ formé des points $M \in \mathscr{E}$ dont les coordonnées (x, y) vérifient $u_N\,x + v_N\,y + w_N \neq 0$. Pour que $M \in U$ soit sur l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$, il faut et il suffit qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P_{x,y}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(P_{x,y}(t)) = 0$.

Puisque $u_N\,x + v_N\,y + w_N \neq 0$, si la condition ci-dessus est réalisée, nécessairement le *discriminant* $D(x, y)$ du polynôme $P_{x,y}(t)$ est nul (cf. tome 1, § X.5 pour la définition du discriminant). Par suite la trajectoire de l'enveloppe de $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ rencontre U suivant un ensemble inclus dans la courbe algébrique $\Gamma = \{M \in \mathscr{E} \mid D(x, y) = 0\}$. L'étude de l'enveloppe peut donc commencer par la recherche de Γ.

Exemple 1 : Prenons $u(t) = 2\,t$, $v(t) = 2(t + 1)$, $w(t) = t^2$, ce qui donne une famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ affinement régulière.

Ici $P_{x,y}(t) = t^2 + 2(x + y)\,t + 2\,y$, d'où $U = \mathscr{E}$ et $D(x, y) = 4[(x + y)^2 - 2\,y]$. La courbe Γ est la *parabole* d'équation $(x + y)^2 - 2\,y = 0$ (cf. fig. 1). En fait, Γ est égale à la trajectoire de l'enveloppe car si $D(x, y) = 0$, il y a bien une racine commune *réelle* à $P_{x,y}(t)$ et à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,P_{x,y}(t)$ vu que P est de degré 2 en t.

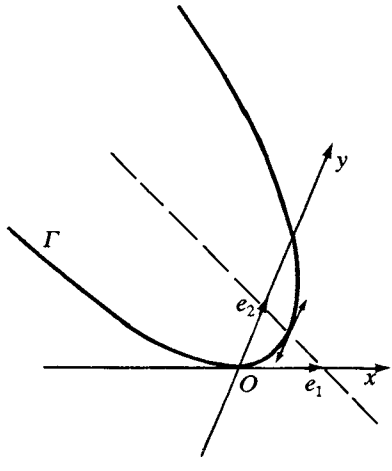


Fig. 1.

Enveloppe de droites sous forme normale

Supposons jusqu'à la fin de ce § $\mathscr{E}$ euclidien orienté et $\mathscr{R}$ orthonormal direct. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Associons-leur la famille de droites $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta \in I}$ d'équation dans $\mathscr{R}$

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \lambda(\theta) = 0 . \tag{1}$$

Posant, comme précédemment, $\delta = \delta_{\mathscr{R}, \varphi}$ et $\Delta = \Delta_{\mathscr{R}, \varphi}$ (où $\varphi_\theta(M) = x \cos \theta + y \sin \theta - \lambda(\theta)$), on a :

$$\delta = 1 \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\lambda(\theta) \\ -\sin \theta & \cos \theta & -\lambda'(\theta) \\ -\cos \theta & -\sin \theta & -\lambda''(\theta) \end{vmatrix} = -\lambda(\theta) - \lambda''(\theta) .$$

La famille $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta \in I}$ est donc affinement régulière. Son enveloppe $\theta \mapsto C_\theta$ est donnée par les coordonnées $x_C(\theta)$, $y_C(\theta)$ de C_θ dans $\mathscr{R}$, obtenues en résolvant le système de Cramer aux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta - \lambda(\theta) = 0 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta - \lambda'(\theta) = 0 . \end{cases} \tag{2}$$

On obtient immédiatement :

$$\begin{cases} x_C(\theta) = \lambda(\theta) \cos \theta - \lambda'(\theta) \sin \theta ; \\ y_C(\theta) = \lambda(\theta) \sin \theta + \lambda'(\theta) \cos \theta . \end{cases} \tag{3}$$

Soit un sous-intervalle non trivial J de I sur lequel $\lambda + \lambda''$ ne s'annule pas. Alors la portion d'enveloppe $J \longrightarrow \mathscr{E}$, $\theta \mapsto C_\theta$ est régulière. Nous verrons au chapitre IX que $|\lambda + \lambda''|$ s'interprète remarquablement comme rayon de courbure géométrique en C_θ à la trajectoire de $\theta \mapsto C_\theta$. Considérons ici la projection orthogonale H_θ de O sur $\mathscr{D}_\theta$, et soit ε_1 le vecteur unitaire $e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$. D'après (1), on voit que $\overrightarrow{OH} = \lambda \varepsilon_1$. Donc $r = \lambda(\theta)$ est une *équation polaire* dans $\mathscr{R}$ de la courbe paramétrée $\theta \mapsto H_\theta$: cette courbe s'appelle **podaire de l'enveloppe $C|_J$ par rapport à O** (c'est le lieu des projections orthogonales de O sur les tangentes $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta \in J}$ à cette enveloppe).

On définit plus généralement la podaire par rapport à O d'une courbe paramétrée régulière $f : \Lambda \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)$ comme étant la courbe paramétrée $\Lambda \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto H(t)$, où $H(t)$ est la projection orthogonale de O sur la tangente en t à f. D'après le théorème VIII.2.3, toute courbe paramétrée birégulière de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$ peut être définie comme **antipodaire** de sa podaire par rapport à O (si H est le point courant de la podaire, on prend l'enveloppe de la famille des droites orthogonales en H à $\mathrm{Or}(O, H)$) : cela pourvu qu'aucune tangente à f ne passe par O.

Exemple 2 : Prenons $\lambda(\theta) = a + b\cos\theta$ $(a > 0, b > 0)$ et $I = \mathbb{R}$. L'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ des droites d'équation $x\cos\theta + y\sin\theta - \lambda(\theta) = 0$ a pour paramétrisation $\theta \mapsto C_\theta$, avec $x_C(\theta) = a\cos\theta + b$, $y_C(\theta) = a\sin\theta$. C'est une représentation du cercle centré en $\Omega(b, 0)$ et de rayon a. La podaire de ce cercle est donc la courbe paramétrée d'équation polaire $r = a + b\cos\theta$ dans $\mathscr{R}$: c'est un limaçon de Pascal ([1]).

Exemple 3 : Soit $k \in \mathbb{R}^*\setminus\{-1, 1\}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Prenons $I = \mathbb{R}$ et $\lambda(\theta) = a\cos(k\theta + \alpha)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ (la programmation sur micro-ordinateur des rosaces d'équation polaire $r = \lambda(\theta)$ dans $\mathscr{R}$ est aisée, par exemple avec le logiciel GRAPHIX).

Quitte à effectuer sur $\mathscr{R}$ une rotation appropriée de centre O, on peut supposer $\alpha = 0$. D'après (3), l'enveloppe des $(\mathscr{D}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ est donnée par :

$$(4) \qquad \begin{cases} x_C(\theta) = \dfrac{a}{2}(1-k)\cos(1+k)\theta + \dfrac{a}{2}(1+k)\cos(1-k)\theta \\ y_C(\theta) = \dfrac{a}{2}(1-k)\sin(1+k)\theta + \dfrac{a}{2}(1+k)\sin(1-k)\theta . \end{cases}$$

Posant $\rho = \dfrac{1+k}{1-k}$, $t = (1-k)\theta$ et $b = \dfrac{a}{2}(1-k)$, puis identifiant $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathscr{R}$, cette enveloppe se ramène à la courbe paramétrée

$$(5) \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto b(e^{\rho it} + \rho\, e^{it}) .$$

Lorsque ρ décrit $\mathbb{R}^*\setminus\{-1, 1\}$, la famille des courbes (5) est, à similitude près, la même que celle que nous retrouverons plus loin (cf. § IX.4, exercice 6) sous le nom de courbes *épicycloïdales* $(\rho > 0)$ et *hypocycloïdales* $(\rho < 0)$. Indiquons dès maintenant les plus célèbres d'entre elles :

pour $\rho = -2$ (i.e. $k = 3$), la courbe (5) est une *hypocycloïde à 3 rebroussements*,

pour $\rho = 2$ (i.e. $k = \frac{1}{3}$) la courbe (5) est une *cardioïde*,

pour $\rho = 3$ (i.e. $k = \frac{1}{2}$), la courbe (5) est une *néphroïde*,

pour $\rho = -3$ (i.e. $k = 2$), la courbe (5) est une *astroïde*.

Caustiques

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(2 \leqslant k \leqslant +\infty)$, régulière, et un point $S \in \mathscr{E}$ (resp. une direction de droite D de

---

([1]) Il s'agit d'Etienne *Pascal* (1588-1651) (le père de Blaise). Il utilisait son limaçon comme trisectrice.

$\mathscr{E}$). Pour $t \in I$, soit Δ_t la droite passant par $f(t)$ et S (étant entendu que si $S = f(t)$, Δ_t est la tangente à f en le paramètre t) (resp. la droite passant par $f(t)$ et de direction D), et soit $\mathscr{D}_t$ la droite passant par $f(t)$, symétrique de Δ_t par rapport à la tangente en t à f (en Optique, Δ_t est le *rayon incident*, et $\mathscr{D}_t$ le *rayon réfléchi*, S étant la source de lumière). L'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ s'appelle la **caustique par réflexion** de la courbe f.

Exemple 4 : *Trouver la caustique par réflexion d'un cercle, la source de lumière étant un point S du cercle.*

Prenons $S = O$ et le repère $\mathscr{R}$ tel que le cercle donné ait pour équation polaire $r = 2\,a \cos\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ avec $a > 0$. Si le rayon incident admet dans $\mathscr{R}$ l'équation $x \sin t - y \cos t = 0$, le rayon réfléchi $\mathscr{D}_t$ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation : $(x - a) \sin 3\,t - y \cos 3\,t - a \sin t = 0$.

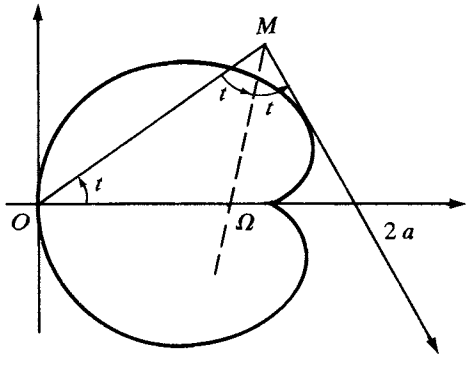


Fig. 2.

Posant $\theta = 3\,t - \dfrac{3\,\pi}{2}$, $x - a = X$ et $y = Y$, cette équation se simplifie en :

$$X \cos\theta + Y \sin\theta + a \cos\frac{\theta}{3} = 0\,.$$

D'après l'exemple 3 (avec $k = \dfrac{1}{3}$), l'enveloppe des $(\mathscr{D}_\theta)$ est donc une *cardioïde* paramétrée par :

$$X_C(\theta) = \frac{-a}{3}\cos\frac{4\,\theta}{3} - \frac{2\,a}{3}\cos\frac{2\,\theta}{3}\,; \quad Y_C(\theta) = \frac{-a}{3}\sin\frac{4\,\theta}{3} - \frac{2\,a}{3}\sin\frac{2\,\theta}{3}\,.$$

Elle a pour sommet O et pour point de rebroussement $R\left(\dfrac{4\,a}{3}, 0\right)$.

Une propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements

Considérons la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie par les équations

$$x + ty + \frac{P(t)}{1+t^2} = 0 , \tag{6}$$

où P est un polynôme de degré $\leqslant 3$ en t non divisible par $1 + t^2$.

Cherchons l'enveloppe de la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$, famille affinement régulière et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour cela posons $\theta = \operatorname{Arc\,tg} t$ (donc $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$), $P(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$, $X = x - a$, $Y = y - b$, où a et b seront choisis ultérieurement. L'équation (6) devient :

$$X \cos\theta + Y \sin\theta - \lambda(\theta) = 0 , \tag{7}$$

avec

$$\lambda(\theta) = (\beta - \delta)\cos^3\theta - (a + \beta)\cos\theta - \sin\theta\,(b + \alpha + (\gamma - \alpha)\cos^2\theta)$$

Choisissons $a = \frac{-1}{4}\beta - \frac{3}{4}\delta$ et $b = \frac{-3}{4}\alpha - \frac{1}{4}\gamma$, en sorte que

$$\lambda(\theta) = \frac{\beta - \delta}{4}\cos 3\theta + \frac{\alpha - \gamma}{4}\sin 3\theta .$$

Or $(\beta - \delta, \alpha - \gamma) \neq (0, 0)$, puisque $1 + t^2$ ne divise pas $P(t)$. En écrivant $\lambda(\theta)$ sous la forme $A \cos(3\theta + \varphi)$, avec $A = \frac{1}{4}\sqrt{(\beta - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2}$ et φ convenable, on voit que l'on est ramené à l'exemple 3. Compte tenu du fait que θ décrit $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ au lieu de $\mathbb{R}$, l'enveloppe des droites (6) a pour trajectoire une *hypocycloïde à trois rebroussements* Γ privée d'un point (celui où la tangente à Γ est parallèle à e_1).

Dans tous les exercices, $\mathscr{E}$ désigne un plan affine muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$, les coordonnées génériques dans ce repère étant notées (x, y). Si $\mathscr{E}$ est euclidien, $\mathscr{R}$ sera supposé orthonormal.

Exercice 1 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien, soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $2px - y^2 = 0$ ($p > 0$ donné). On considère les cercles de $\mathscr{E}$ passant par le foyer F de $\mathscr{P}$ et tangents à $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{F}$ la famille de ceux de ces cercles Γ qui recoupent $\mathscr{P}$ en deux points M et N (autres que le point de contact de Γ avec $\mathscr{P}$). Quelle est l'enveloppe de la droite $\mathrm{Dr}\,(M, N)$?

Exercice 2 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien, on donne la lemniscate de Bernoulli $\mathscr{L}$, paramétrée dans $\mathscr{R}$ par $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)$ de coordonnées $f_1(t) = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}$, $f_2(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}$.

a) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, il passe en général deux tangentes à $\mathscr{L}$, autres que la tangente en t, par $f(t)$.

b) Trouver l'enveloppe de la droite qui passe par les points de contact de ces deux autres tangentes.

Exercice 3 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien on donne l'arc $\mathscr{C}$ de cardioïde défini par l'équation polaire $r = 1 + \cos\theta$, $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Vérifier que $\mathscr{C}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$.

b) Montrer que la caustique par réflexion de $\mathscr{C}$ depuis O est une néphroïde.

Exercice 4 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien on considère la strophoïde droite $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, paramétrée dans $\mathscr{R}$ par ses coordonnées f_1, f_2 : $f_1(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $f_2(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

a) Donner une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de la trajectoire $\mathscr{S}$ de f.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il y a deux tangentes à f, autres que celle en t, passant par $f(t)$. Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, trouver l'enveloppe de la droite qui joint les points de contact de ces deux autres tangentes.

Exercice 5 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien, on donne une parabole $\mathscr{P}$ et un réel $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Trouver l'ensemble $\mathscr{H}$ des points $M \in \mathscr{E}$ par lesquels il passe deux tangentes à $\mathscr{P}$ dont l'écart angulaire soit α.

b) Quand M décrit $\mathscr{H}$, trouver l'enveloppe de la droite des contacts des deux tangentes à $\mathscr{P}$ issues de M.

Exercice 6 : On considère la famille non triviale de cercles bitangents définie au *b*) de l'exercice 5 du § VII.5. Trouver l'enveloppe de la droite des contacts de ces cercles.

Exercice 7 : On considère la famille des cercles osculateurs à la sous-variété courbe de l'exemple 3 du § VII.5. Chacun de ces cercles recoupe la courbe en un point N, en général distinct du point d'osculation M du cercle et de la courbe. Quelle est l'enveloppe de la droite $\mathrm{Dr}(M, N)$?

Exercice 8 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien orienté. Soit Γ un cercle de centre O, de rayon $R > 0$, $\vec{i} \in \vec{\mathscr{E}}$ un vecteur unitaire fixé, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) A tout réel θ, on associe la droite $\mathrm{Dr}\,(M, N)$, où M et N sont les points de Γ définis par $\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}} = \theta$; $\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{ON}} = \alpha - 2\theta$ (étant entendu que si $M = N$ on prend pour $\mathrm{Dr}\,(M, N)$ la tangente en M à Γ). Prouver que l'enveloppe de $\mathrm{Dr}\,(M, N)$ est une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3).

b) *Application :* Soit A, B, C trois points de $\mathscr{E}$ non alignés. Montrer que l'enveloppe des axes des paraboles passant par A, B, C est une H_3.

Indication : Si 4 points A, B, C, D d'une parabole sont cocycliques, l'isobarycentre G de ces 4 points est sur l'axe de la parabole ; la direction de cet axe est bissectrice de ($\mathrm{Dr}\,(A, B)$, $\mathrm{Dr}\,(C, D)$). Utiliser ensuite une homothétie $(G, 4)$, puis *a*).

c) Plus généralement on suppose que les angles polaires θ_1 de M et θ_2 de N sont liés par une relation $\theta_2 = \alpha + q\theta_1$ ($q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1, -1\}$). Montrer que l'enveloppe de $\mathrm{Dr}\,(M, N)$ est une épi- ou hypocycloïde.

Application : Caustique par réflexion du cercle Γ pour une source à l'infini.

Exercice 9 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien on donne un cercle Γ de rayon $R > 0$ passant par O, puis une droite vectorielle D de $\vec{\mathscr{E}}$. Une droite Δ pivote autour de O et recoupe Γ en M. Soit $\mathscr{D}$ la droite qui passe par M telle que D soit une direction de bissectrice de $\mathrm{Dr}(O, M)$ et de $\mathscr{D}$. Montrer que l'enveloppe de $\mathscr{D}$ est une H_3.

Exercice 10 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien, soit $A(t)$ et $B(t)$ les points de coordonnées respectives $(\cos t, 0)$ et $(0, \sin t)$ dans $\mathscr{R}$.

a) L'enveloppe de la droite $\mathscr{D}_t = \mathrm{Dr}\,(A(t), B(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ est une astroïde (i.e. une H_4 ou hypocycloïde à 4 rebroussements).

b) Montrer que l'enveloppe de la médiatrice de $\{A(t), B(t)\}$ est encore une astroïde. Une solution « géométrique » est souhaitable.

Exercice 11 : Dans $\mathscr{E}$ euclidien, on donne deux droites Δ_1 et Δ_2 non orthogonales, sécantes en un point O. Deux points $A_1 \in \Delta_1$ et $A_2 \in \Delta_2$ se déplacent de façon que $\|\overrightarrow{A_1A_2}\|$ reste constant, égal à $l > 0$.

a) Soit I le point commun aux normales à Δ_1 et Δ_2 en A_1 et A_2. Montrer que la projection orthogonale C de I sur $\mathrm{Dr}\,(A_1, A_2)$ est le point caractéristique de la droite $\mathrm{Dr}\,(A_1, A_2)$.

b) Soit Γ le cercle de diamètre OI : vérifier que son rayon est constant. Notons $\mathscr{L}$ la droite diamétrale de Γ parallèle à $\overrightarrow{A_1A_2}$. Prouver que l'enveloppe de $\mathscr{L}$ est une astroïde et que le point caractéristique J de $\mathscr{L}$ est la projection orthogonale de I sur $\mathscr{L}$. En déduire, en anticipant sur le chapitre IX, que l'enveloppe de $\mathrm{Dr}\,(A_1, A_2)$ est une courbe *parallèle d'astroïde.*

Exercice 12 (Le grand théorème de Poncelet) [1] *:* Le lecteur est prié de résoudre d'abord l'exercice 10 du § X.3 du tome 3 (au moins la partie I où sont introduites les *fonctions de Jacobi* dans le champ réel) car on suppose ici acquis les résultats de cet exercice.

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j})$ on donne le cercle Γ de centre O, de rayon $l > 0$. Un point mobile P est défini par une fonction $t \mapsto \theta(t)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, de sorte que $\overrightarrow{OP} = \mathbf{i}\cos\theta(t) + \mathbf{j}\sin\theta(t)$, la fonction θ étant assujettie aux conditions suivantes (où $t_0 \in \mathbb{R}$ est fixé) :

$$(\mathscr{E}) \quad \theta''(t) = -C\sin\theta(t)\,; \qquad (\mathscr{I}) \quad \theta(t_0) = 0\,, \quad \theta'(t_0) = \theta_0' > 0\,.$$

(On reconnaît avec $C = \dfrac{g}{l}$ le problème du pendule simple étudié en Physique).

a) On pose $Y(t) = \sin\dfrac{\theta(t)}{2}$ et $Z(t) = \cos\dfrac{\theta(t)}{2}$. Montrer qu'il existe des polynômes P et Q de degré 4, à expliciter, tels que les fonctions $Y(t)$ et $Z(t)$ vérifient respectivement les équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad y'^2 = P(y) \qquad (2) \quad z'^2 = Q(z)\,.$$

b) Dorénavant on suppose $\dfrac{1}{2}\theta_0'^2 > 2C$ (interprétation physique ?) ; on pose $\nu = \dfrac{1}{2}\theta_0'^2$ et $k^2 = \dfrac{4C}{\theta_0'^2} < 1$. Les fonctions elliptiques sn, cn, dn qui interviennent ici sont celles relatives à $\rho = k^2$. Montrer que les fonctions $t \mapsto \mathrm{sn}\,(\nu(t - t_0))$ et $t \mapsto \mathrm{cn}\,(\nu(t - t_0))$ vérifient respectivement les équations différentielles (1) et (2) sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que la solution maximale de l'équation $y''(t) = -C\sin y(t)$ telle que $y(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = \theta_0'$ est $y(t) = 2\,\mathrm{Am}\,(\nu(t - t_0))$, et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$. On notera $\theta_{t_0}(t)$ cette solution maximale. En déduire que $Y(t) = \mathrm{sn}\,(\nu(t - t_0))$, $Z(t) = \mathrm{cn}\,(\nu(t - t_0))$.

d) Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et Q_k les points de Γ tels que $\overrightarrow{OQ_k} = \mathbf{i}\cos\alpha_k + \mathbf{j}\sin\alpha_k$ $(k \in \{1, 2\})$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de rayon r, centré au point $(\lambda, 0)$. Démontrer : pour que la droite Q_1Q_2 soit tangente à $\mathscr{C}$, il faut et il suffit qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\lambda\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - l\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1} - \varepsilon r = 0.$$

e) Soit $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma = \lambda\tau$ tel que $0 < \gamma \leqslant 2K$. On note $P_0(t)$ (resp. $P_1(t)$) le point mobile obtenu comme ci-dessus avec l'instant initial t_0 (resp. $t_0 + \tau$). Le temps t parcourt $\mathbb{R}$.

---

[1] Jean-Victor *Poncelet* (1788-1867), officier, mathématicien et homme politique français, a introduit les nombres complexes et la transformation par polaires réciproques en géométrie projective.

*e*1) Que se passe-t-il si $\gamma = 2K$? Désormais on suppose $0 < \gamma < 2K$.

*e*2) Démontrer que, quel que soit t, la droite Dr $(P_0(t), P_1(t))$ reste tangente au cercle $\mathscr{C}_\gamma$ de centre $\Omega_\gamma = \left(l\,\dfrac{\mathrm{dn}\,\gamma - 1}{\mathrm{dn}\,\gamma + 1}, 0\right)$ et de rayon $r = \dfrac{2\,l\,|\mathrm{cn}\,\gamma|}{1 + \mathrm{dn}\,\gamma}$ (on utilisera *d*) et la relation : $\mathrm{cn}\,(u - v) = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,(u - v)$, à vérifier). Que se passe-t-il si $\gamma = K$? Dans toute la suite on suppose $0 < \gamma < 2K$ et $\gamma \neq K$.

*e*3) On pose $c = |\mathrm{cn}\,\gamma|$, $d = \mathrm{dn}\,\gamma$, $\delta = \|\overrightarrow{O\Omega}_\gamma\|$. Etablir : $r < l$, $c = \dfrac{r}{l + \delta}$, $d = \dfrac{l - \delta}{l + \delta}$, $k^2 = \dfrac{4\,l\,\delta}{(l + \delta)^2 - r^2}$. Vérifier que $\mathscr{C}_\gamma$ est intérieur à Γ.

f) Soit q un entier $\geqslant 3$. Pour $0 \leqslant m \leqslant q$ on note $P_m(t)$ le point mobile de Γ obtenu comme ci-dessus avec l'instant initial $t_0 + m\tau$ ($P_m(t)$ est donc défini par la fonction $\theta_{t_0 + m\tau}(t)$). Montrer l'équivalence entre :

(I) Il existe t tel que $P_q(t) = P_0(t)$.

(II) Quel que soit t, on a : $P_q(t) = P_0(t)$.

(III) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\gamma = 2Kn$ (i.e. $\mathrm{sn}\,(q\gamma) = 0$ et $\mathrm{dn}\,(q\gamma) = 1$).

Supposant cela réalisé, à quelle condition a-t-on : card $(P_0(t), \ldots, P_q(t)) = q$? Montrer que si q est premier, cette dernière relation est conséquence de (I), (II) ou (III).

g) On suppose $q = 3$. Montrer qu'on a (III) ssi $\delta^2 = l^2 - 2\,rl$.

h) A l'aide des formules du I) *c*) de l'exercice cité en référence, montrer qu'on a $\gamma \in \left\{\dfrac{K}{2}, \dfrac{3K}{2}\right\}$ ssi $\dfrac{r^2}{(l + \delta)^2} + \dfrac{r^2}{(l - \delta)^2} = 1$. Supposant cette condition réalisée (d'où $P_4(t) = P_0(t)$), que peut-on dire des droites Dr $(P_0(t), P_2(t))$ et Dr $(P_1(t), P_3(t))$? Faire une figure.

i) On suppose $\gamma = 2K\dfrac{n}{q}$, $1 \leqslant n < q$, n et q premiers entre eux. Montrer que le polygone $\{P_0(t), P_1(t), \ldots, P_q(t)\}$ est constamment convexe ssi $n = 1$ ou $n = q - 1$.

j) On fait varier θ_0' de façon que k^2 décrive $]0, 1[$. Pour chaque valeur de k^2 obtenue, on fait varier γ dans $]0, 2K(k)[$, $K(k)$ étant la valeur de K correspondant à k^2. Montrer que $\mathscr{C}_\gamma$ décrit tout l'ensemble des cercles strictement intérieurs à Γ centrés en $(\lambda, 0)$ avec $\lambda \in\,]-1, 0[$. Quel beau théorème de géométrie résulte-t-il de cette étude ?

Exercice 13 (Enveloppe des droites de Simson [1] d'un triangle) : Soit $\{A, B, C\}$ un triangle du plan euclidien $\mathscr{E}$, Γ le cercle circonscrit au triangle, et H son orthocentre (point de concours des hauteurs).

a) Montrer que les symétriques H_A, H_B et H_C de H par rapport à Dr(B, C), Dr(C, A) et Dr (A, B) appartiennent à Γ.

b) Soit Γ_A (resp. Γ_C) le symétrique de Γ par rapport à Dr (B, C) (resp. Dr (A, B)). Désignons par φ l'unique rotation de centre B qui transforme Γ_A en Γ_C. Montrer que $\forall N \in \Gamma_A \setminus \{B\}$, la droite Dr $(N, \varphi(N))$ passe par H.

En décomposant φ en le produit (dans cet ordre) de la réflexion autour de Dr(A, B) et de celle autour de Dr (B, C), en déduire : pour tout $M \in \Gamma$, les symétriques de M par rapport aux trois côtés du triangle $\{A, B, C\}$ sont alignés sur une droite qui passe par H (cette droite est appelée *droite de Steiner* [2] de M). Réciproque ?

c) En déduire que pour $M \in \Gamma$, les projections orthogonales M_A, M_B, M_C de M sur les côtés du triangle $\{A, B, C\}$ sont alignés : la droite qui les joint est appelée *droite de Simson* de M.

---

[1] Robert *Simson,* mathématicien écossais (1687-1768), traducteur d'Euclide.

[2] Jacob *Steiner,* géomètre suisse (1796-1863), auteur d'un théorème analogue au grand théorème de Poncelet (cf. exercice 12), où une chaîne de cercles tangents remplace la ligne polygonale, et de maints autres travaux (ellipse de Steiner, surface de Steiner, etc.).

On la notera $S(M)$. Déduire de ce qui précède que le milieu μ de $\{H, M\}$ appartient à $S(M)$ et au *cercle d'Euler* $\mathscr{C}$ de $\{A, B, C\}$.

d) On se propose d'obtenir l'enveloppe de $S(M)$ lorsque M décrit Γ. Pour $M \in \Gamma \setminus \{A\}$, vérifier que $S(M)$ rencontre la hauteur Dr (H, A) en un unique point noté γ.

*d*1) A l'aide du *c*) ci-dessus, prouver : μ est le milieu de $\{\gamma, M_A\}$.

*d*2) Soit A' le pied de la hauteur issue de A. Utiliser le triangle rectangle $AA'M_A$ pour prouver que $\|\overrightarrow{A'\mu}\| = \|\overrightarrow{\mu M_A}\|$.

*d*3) Appliquer alors le résultat de l'exercice 9) pour conclure : l'enveloppe cherchée est une H_3.

*d*4) Que peut-on dire des droites $S(M)$ et $S(M')$ relatives à deux points M et M' diamétralement opposés sur Γ ?

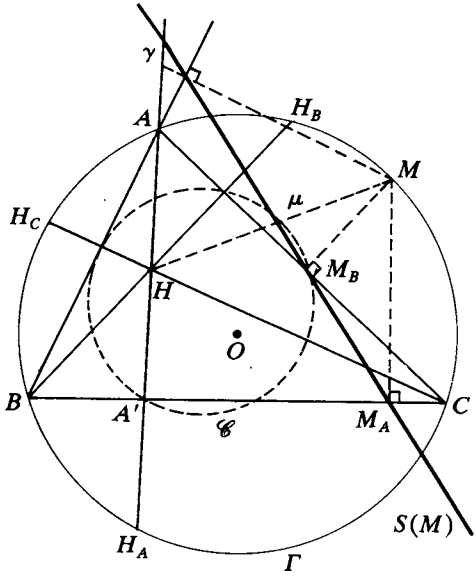


Fig. 3.

N.B. La droite dite *de Simson* a en fait été introduite plus tard par William Wallace (1768-1843) qui a su en trouver l'enveloppe.

Chapitre IX

COURBES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans ce chapitre, tous les espaces affines considérés seront supposés de dimension finie.

§ IX.1 *FONCTIONS ANGULAIRES*

Nous allons ici compléter les résultats du § III.3 du tome 3, où nous avons introduit le logarithme complexe.

THÉORÈME IX.1.1 (dit de relèvement)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ***continue.***
a) *Il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$* ***continue*** *telle que*

$$(\forall t \in I) \quad f(t) = \exp(\varphi(t)).$$

b) *Si φ_0 est l'une des fonctions définies en* a), *l'ensemble de ces fonctions est $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ où, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k : I \longrightarrow \mathbb{C}$ envoie $t \in I$ sur $\varphi_0(t) + 2\,\mathrm{i}k\pi$.*
c) *Soit $t_0 \in I$ et $z_0 \in \log(f(t_0))$: il existe une et une seule fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$* ***continue*** *telle que $\varphi(t_0) = z_0$ et*

$$(\forall t \in I) \quad f(t) = \exp(\varphi(t)).$$

d) *Enfin, les fonctions φ trouvées ci-dessus ont même régularité que f : si f est dérivable, φ l'est aussi ; si f est de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, φ l'est aussi.*

Démonstration :

Soit J un sous-intervalle de I. Nous dirons qu'une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *relève f sur J* ssi φ est continue et vérifie : $(\forall t \in J)$ $\exp(\varphi(t)) = f(t)$. Si c'est le cas, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $J \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto 2\,\mathrm{i}k\pi + \varphi(t)$ relève encore f sur J. D'autre part, si φ et ψ relèvent f sur J, pour tout $t \in J$, on a $\exp(\varphi(t) - \psi(t)) = 1$, donc $\varphi(t) - \psi(t) \in 2\,\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$, et comme $\varphi - \psi$ est continue, et que J est connexe, on en déduit : $\exists k \in \mathbb{Z} \mid \forall t \in J \quad \psi(t) = \varphi(t) + 2\,\mathrm{i}k\pi$. L'assertion *b*) et l'assertion d'unicité dans *c*) sont donc déjà prouvées. Achevons la démonstration *dans le cas simple où f est supposée de classe $\mathscr{C}^k$* $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Fixons $t_0 \in I$, et soit $z_0 \in \log(f(t_0))$ (un tel z_0 existe car $f(t_0) \neq 0$). Posons $\varphi(t) = z_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u$: φ est de classe $\mathscr{C}^1$, et $\varphi'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$. La fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)\exp(-\varphi(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et $(\forall t \in I)$ $g'(t) = [\exp(-\varphi(t))] \times [f'(t) - \varphi'(t) f(t)] = 0$, donc g est constante, de valeur $g(t_0) = 1$. D'où : $f(t) = \exp[\varphi(t)]$ pour tout $t \in I$, $\varphi(t_0) = z_0$, et toutes les assertions du théorème deviennent immédiates.

Examinons maintenant *le cas où f est supposée seulement continue.* Les seules difficultés sont d'une part l'existence de φ dans *a*), d'autre part le fait que si f est dérivable, φ l'est aussi.

Notons $\Lambda_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) \in \,](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[\}$ $(k \in \mathbb{Z})$, et $\Lambda'_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) \in \,]2k\pi, (2k+2)\pi[\}$; $\mathbb{L} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{L}' = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a vu au tome 3, §§ III.3 et III.4, que les applications $\sigma_k : \mathbb{L} \longrightarrow \Lambda_k$, $z \mapsto \mathrm{Log}\,(z) + 2\,\mathrm{i}k\pi$ et $\tau_k : \mathbb{L}' \longrightarrow \Lambda'_k$, $z \mapsto \mathrm{Log}\,(-z) + (2k+1)\,\mathrm{i}\pi$ sont des bijections analytiques ainsi que leurs réciproques. De plus, $\mathbb{L} \cup \mathbb{L}' = \mathbb{C}^*$.

• *Cas où I est compact, égal à $[a, b]$* (a et b réels, $a < b$)

Les ensembles $f^{-1}(\mathbb{L})$ et $f^{-1}(\mathbb{L}')$ sont ouverts. On a donc, par compacité, une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ $(a = a_0 < \ldots < a_n = b)$ telle que $f([a_i, a_{i+1}]) \subset \mathbb{L}$ ou $f([a_i, a_{i+1}]) \subset \mathbb{L}'$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons par exemple que $f([a_0, a_1]) \subset \mathbb{L}$, et posons $\varphi_0(t) = \sigma_0(f(t))$ pour $a_0 \leqslant t \leqslant a_1$. Supposant construite $\varphi_{k-1} : [a_0, a_k] \longrightarrow \mathbb{C}$ qui relève f avec $\varphi_{k-1}(a_0) = \sigma_0(f(a))$, soit $z_k = \varphi_{k-1}(a_k)$ $(1 \leqslant k < n)$; si $f([a_k, a_{k+1}]) \subset \mathbb{L}$, il y a un unique $p = p(k) \in \mathbb{Z}$ tel que $z_k \in \Lambda_p$; alors on pose $\varphi_k(t) = \sigma_p(f(t))$ pour $t \in [a_k, a_{k+1}]$ et $\varphi_k|_{[a_0, a_k]} = \varphi_{k-1}$ (cette définition est cohérente car $\sigma_p(f(a_k)) = z_k$) ; si $f([a_k, a_{k+1}]) \subset \mathbb{L}'$, il y a un unique $q = q(k)$ tel que $z_k \in \Lambda'_q$; alors on pose $\varphi_k(t) = \tau_q(f(t))$ pour $t \in [a_k, a_{k+1}]$ et $\varphi_k|_{[a_0, a_k]} = \varphi_{k-1}$ (définition qui est à nouveau cohérente). Ainsi φ_k est continue, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction $\varphi = \varphi_{n-1}$ est alors continue sur I et relève f. Si de plus f est dérivable, par fonctions composées, sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$, $\varphi'(t)$ existe et vaut $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$, d'où le raccordement de $\varphi'(t)$ en les a_k, et donc au total φ est dérivable sur I.

• *Cas où I est non compact*

Soit alors $t_0 \in I$ et $z_0 \in \log(f(t_0))$. Pour chaque intervalle compact $J \subset I$ et contenant t_0, soit φ_J le relèvement de f sur J tel que $\varphi_J(t_0) = z_0$. Si $t \in I$, pour J intervalle compact de I contenant $[t_0, t]$, le nombre $\varphi_J(t)$ ne dépend que de t et non de J : notons le $\varphi(t)$. Il est immédiat que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi construite est continue, relève f et vérifie $\varphi(t_0) = z_0$. De plus, pour tout intervalle compact $J \subset I$ et contenant t_0, $\varphi|_J = \varphi_J$, donc $\varphi|_J$ est dérivable si f l'est. D'où, lorsque f est dérivable, la dérivabilité de φ sur I. ■

Remarque 1 : Si f est à valeurs dans $\mathbb{U}$, tout relèvement de f est à valeurs imaginaires pures (cf. proposition X.5.1 du tome 3). En fait, pour que $\varphi : I \mapsto \mathbb{C}$, $t \mapsto u(t) + \mathrm{i}v(t)$ (avec u et v à valeurs réelles) relève f, il faut et il suffit que : $(\forall t \in I)\ u(t) = \operatorname{Log}|f(t)|$ et $\mathrm{i}v$ relève $\dfrac{f}{|f|}$.

En appliquant le théorème IX.1.1 à la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto A(t) + \mathrm{i}B(t)$, on obtient donc :

COROLLAIRE

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $A, B : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ telles que $A^2(t) + B^2(t) = 1$ pour tout $t \in I$. Il existe au moins une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $(\forall t \in I)\ A(t) = \cos\varphi(t)$ et $B(t) = \sin\varphi(t)$. Si φ_0 est l'une d'elles, l'ensemble de toutes ces fonctions est celui des $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ où $(\forall k \in \mathbb{Z})\ \varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2k\pi$ pour $t \in I$, et toutes ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^k$.
En conséquence, fixant $t_0 \in I$, si
$\theta_0 \in \arg(A(t_0) + \mathrm{i}B(t_0))$, il existe une et une seule de ces fonctions φ qui vérifie de plus $\varphi(t_0) = \theta_0$.

Application aux angles orientés

DÉFINITION IX.1.1

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux fonctions ***continues*** *à valeurs dans $E \setminus \{0\}$ définies sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On appelle* ***détermination continue de l'angle orienté*** *$\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (pris dans cet ordre) toute fonction* ***continue*** *$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\forall t \in I)\ \varphi(t) \in \widehat{\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}}$.*

Soit alors $\vec{U} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, $\vec{V} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ et $\vec{U}_1 = \wedge\vec{U}$ (où $\wedge$ désigne le *produit vectoriel* de E). Notons $A(t)$ et $B(t)$ les composantes de $\vec{V}(t)$ dans la base

orthonormale directe $(\vec{U}(t), \vec{U}_1(t))$; si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$, A et B le sont aussi. Le corollaire du théorème IX.1.1 s'applique avec A et B, d'où on déduit : *il existe au moins une détermination continue de* $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$; *si* φ *est l'une d'elles, les autres s'en déduisent par addition d'une constante* $C \in 2\pi\mathbb{Z}$, *et toutes sont de classe* $\mathscr{C}^k$. *Soit* $t_0 \in I$: *si* $\theta_0 \in \widehat{\vec{u}(t_0), \vec{v}(t_0)}$, *il existe une et une seule de ces déterminations* φ *qui vérifie* $\varphi(t_0) = \theta_0$.

Donnons-nous maintenant une troisième fonction continue $\vec{w} : I \longrightarrow E \setminus \{0\}$. Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des déterminations continues de $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ et de $\widehat{\vec{v}, \vec{w}}$ *alors* $\varphi + \psi$ *est une détermination continue de* $\widehat{\vec{u}, \vec{w}}$. C'est une conséquence immédiate du fait que $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} e^{i\psi}$. Enfin, notons que si $\vec{U}$ est fixe, et si $\vec{v}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors pour toute détermination continue φ de $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ (donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$), on a : $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \varphi'(t)\, \vec{V}_1(t)$, avec $\vec{V}_1(t) = \wedge\vec{V}(t)$ (c'est une conséquence immédiate de $\dfrac{d}{dt}\left(e^{i\varphi(t)}\right) = \varphi'(t)\, i\, e^{i\varphi(t)}$).

Définition d'une courbe paramétrée en coordonnées polaires

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct. Considérons une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, posons $\vec{u}(\theta) = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$ et $\vec{u}_1(\theta) = \wedge\vec{u}(\theta) = -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta \quad \left(= \dfrac{d\vec{u}}{d\theta}(\theta)\right)$. Nous dirons que f a été *donnée en coordonnées polaires* dans $\mathscr{R}$ ssi on a donné deux fonctions : r et $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que

$$(1) \qquad (\forall t \in I) \qquad \overrightarrow{Of(t)} = r(t)\, \vec{u}(\theta(t)).$$

Il est à noter que si (1) est satisfaite, elle l'est aussi avec les couples $(r, \theta + 2k\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(-r, \theta + (2k+1)\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Une question se pose : f étant donnée d'une autre manière, est-il possible de définir f en coordonnées polaires dans $\mathscr{R}$? *Lorsque* f *est à valeurs dans* $\mathscr{E} \setminus \{O\}$, la réponse est fournie par le théorème IX.1.1 : il suffit de poser $r(t) = \|\overrightarrow{Of(t)}\|$ et de prendre pour $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une détermination continue de $\widehat{e_1, \overrightarrow{Of(t)}}$; les fonctions $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $r : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^k$ et vérifient (1).

Etude d'une courbe en coordonnées polaires

Proposons-nous de tracer une courbe Γ donnée dans $\mathscr{R}$ par une équation polaire du type le plus simple :

$$r = g(\theta) \tag{2}$$

où $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ sur $\mathring{I}$ et continue sur I, intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ donné.

On commence par réduire autant que possible l'intervalle de définition pour tenir compte des transformations simples (symétries, rotations permettant de déduire toute la courbe Γ de $g|_J$, où J est un sous-intervalle convenable de I). Puis on s'attache essentiellement à étudier *le signe* de $g(\theta)$, plutôt que ses variations.

Si I est voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, Γ s'enroule en spirale, soit en s'éloignant à l'infini (si $|g(\theta)| \underset{\theta \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$), soit en se rapprochant d'un *cercle asymptote* (si $g(\theta)$ admet une limite finie non nulle quand $\theta \longrightarrow +\infty$ ou $\theta \longrightarrow -\infty$), soit en se rapprochant du *point asymptote* O (si $g(\theta) \underset{\theta \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ou si $g(\theta) \underset{\theta \to -\infty}{\longrightarrow} 0$), soit d'une façon particulière.

Il peut aussi se présenter des branches infinies quand θ tend vers une valeur finie θ_0. Supposons par exemple I majoré, ouvert à droite, de borne supérieure θ_0, et que $|g(\theta)| \underset{\theta \to \theta_0,\, \theta \in I}{\longrightarrow} +\infty$. Avec les notations de (1), la projection orthogonale $H(\theta) = H$ de $M = O \dotplus g(\theta)\,\vec{u}(\theta)$ sur $\Delta = O \dotplus \mathbb{R}\vec{u}_1(\theta_0)$ est définie par $\overrightarrow{OH} = g(\theta)\sin(\theta - \theta_0)\,\vec{u}_1(\theta_0)$. On étudie donc $\psi(\theta) = r\sin(\theta - \theta_0)$. Si $\psi(\theta)$ n'a pas de limite quand $\theta \longrightarrow \theta_0$, il n'y a certainement pas d'asymptote de la branche infinie étudiée, tout au plus peut-on parler de *branche parabolique* si $\psi(\theta) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\psi(\theta) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} -\infty$; en revanche si $\psi(\theta)$ a une limite finie λ quand $\theta \longrightarrow \theta_0$, la droite $\mathscr{D}_0$ d'équation $\{P \in \mathscr{E} \mid (\overrightarrow{OP} \mid \vec{u}_1(\theta_0)) = \lambda\}$ est *asymptote* et on est alors conduit à étudier le signe de $\psi(\theta) - \lambda$ pour avoir la position de la branche infinie par rapport à $\mathscr{D}_0$.

Nous donnerons au § IX.4 quelques précisions sur la concavité vue au travers des coordonnées polaires.

Il se peut plus généralement que Γ soit donnée par une équation polaire dans $\mathscr{R}$ du type

$$\Phi(r, \theta) = 0\,. \tag{3}$$

On cherchera alors à définir Γ comme réunion des graphes de fonctions du type (2) définies implicitement par (3), et cette indication est suffisante dans la pratique.

Exemple 1 : *Courbe d'équation polaire :* $r = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 - 1}$ *dans* $\mathscr{R}$.

Le signe de r saute aux yeux. Pour $\theta \longrightarrow +\infty$ ou pour $\theta \longrightarrow -\infty$, le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $r = 1$ est asymptote. Pour $\theta \longrightarrow -1$ et pour $\theta \longrightarrow +1$, on se trouve en présence de quatre branches infinies. Posons $\theta = 1 + h$. Alors $r \sin(\theta - 1) = \dfrac{1 + 2h + h^2}{2h + h^2} \sin h = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3h}{4} + o(h)$, d'où l'asymptote $\mathscr{D}_1$ commune aux branches infinies $\theta \longrightarrow 1 - 0$ et $\theta \longrightarrow 1 + 0$. Comme r est *paire,* la courbe admet $O \dotplus \mathbb{R}e_1$ comme axe de symétrie. Le tracé de Γ a la forme ci-dessous (cf. fig. 1).

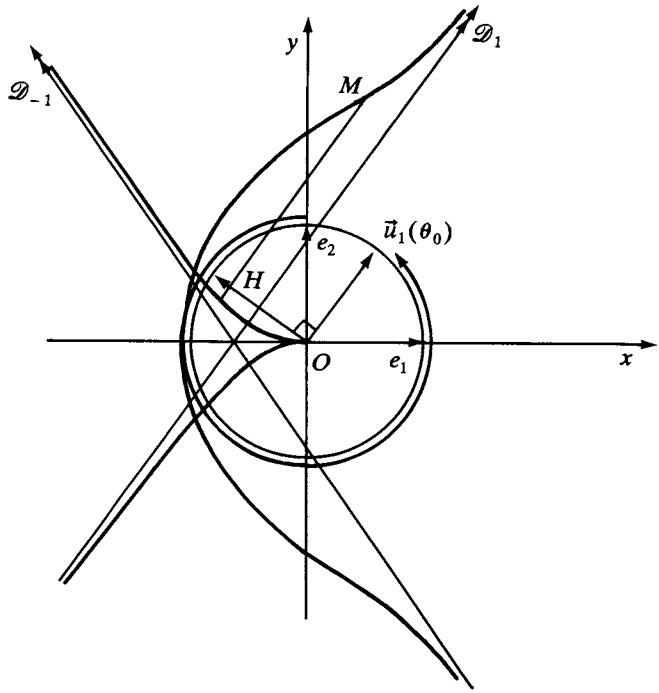


Fig. 1.

Exercice 1 : Etendre le théorème IX.1.1, parties a), b), c) en y remplaçant I par un pavé $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$, $(\forall j \in [\![1, p]\!])\ I_j$ intervalle non trivial de $\mathbb{R}$) ; étendre le d) en y remplaçant I par un *pavé ouvert* non vide. Enfin étendre le théorème IX.1.1 en y remplaçant I par un ouvert convexe non vide Ω de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 2 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $s : I \longrightarrow [-1, 1]$ une fonction continue.

a) Montrer qu'il existe au moins une fonction continue $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(*) \qquad (\forall t \in I) \quad s(t) = \sin \varphi(t).$$

Si φ est une de ces fonctions, les fonctions $\varphi + 2k\pi$ et $-\varphi + (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, conviennent aussi. Montrer par un exemple qu'en général on n'obtient pas ainsi toutes les fonctions qui conviennent.

b) Si s est de classe $\mathscr{C}^1$, peut-on trouver φ de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifie $(*)$?

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^2$ affine euclidien canonique, on donne la courbe paramétrée, de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (e^{-1/t^2}, 0)$ si $t < 0$, $0 \mapsto (0, 0)$ et $t \mapsto (0, e^{-1/t^2})$ si $t > 0$. Expliquer pourquoi f ne peut pas être définie en coordonnées polaires dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathscr{G}_1(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E, muni de la topologie définie au § VII.4. On note Γ le cercle unité de E ($\Gamma = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$) et on fixe une base orthonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ de E.

a) A tout vecteur $\mathbf{u} \in \Gamma$, on associe la droite vectorielle $D(\mathbf{u})$ bissectrice du couple $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$. Montrer que l'application $D : \mathbf{u} \mapsto D(\mathbf{u})$ est un ***homéomorphisme*** de Γ sur $\mathscr{G}_1(E)$. En déduire que pour toute application continue $f : I \longrightarrow \mathscr{G}_1(E)$ (où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$), il existe des fonctions continues u et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $(\forall t \in I)$ $f(t)$ soit la droite d'équation $xu(t) + yv(t) = 0$ dans $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. En outre, si $D^{\langle -1 \rangle} \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, u et v le sont aussi.

b) Vérifier que la topologie de $\mathscr{G}_1(E)$ n'est autre que celle induite par la topologie de l'ensemble des droites affines de E, définie à l'exercice 1 du § VIII.1, et que $D^{\langle -1 \rangle} \circ f : I \longrightarrow \Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ ssi f est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens donné dans ledit exercice.

Exercice 5 : Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ canonique, et S sa sphère unité. On considère :

1) la surjection continue $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi)$.

2) l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à valeurs dans S, telle que pour $t < 0$, $f(t) = (\sin(e^{-1/t^2}), 0, \cos(e^{-1/t^2}))$; pour $t = 0$, $f(t) = (0, 0, 1)$; pour $t > 0$, $f(t) = \sin(e^{-1/t^2}), \cos(e^{-1/t^2}), 0)$. Démontrer qu'il n'existe aucune application continue $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f = s \circ \varphi$ (cela prouve que généraliser le théorème IX.1.1 en dimension > 2 n'est pas évident).

Exercice 6 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathscr{R} = (O ; e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. Construire les courbes définies en coordonnées polaires par les équations suivantes dans $\mathscr{R}$:

a) $r = \dfrac{2\cos^2\theta}{2\cos\theta - \sin\theta}$ *b*) $r = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$

c) $r = 1 + \operatorname{tg} 2\theta$ *d*) $r = \dfrac{\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

e) $r = \cos\theta + \dfrac{1}{\sin\theta/2}$ *f*) $r = \dfrac{1 - 2\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

g) $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \cos n\theta}$ $(n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2)$ *h*) $r = \left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)^{2/3} - 1$

i) $r^2 - 4r + 6(1 - \operatorname{tg}^2\theta) = 0$ *j*) $r^3 - 3r\cos\theta + \cos 3\theta = 0$.

Exercice 7 : Même question pour les courbes suivantes :

a) $r = a\,\dfrac{\theta}{\theta - 1}\ (a > 0)$ *b)* $r = a \sin \dfrac{\theta}{3}$ *c)* $r = \dfrac{\sin \theta}{2\,\theta - 3 \cos \theta}$

d) $r = \dfrac{\cos \theta / 2}{\sin \theta / 3}$ *e)* $r = \sin 2\,\theta \cos 3\,\theta$ *f)* $r = \dfrac{1}{\theta \cos \theta - \sin \theta}$.

Exercice 8 : Avec les notations de l'exercice 6, on donne la cardioïde $\mathscr{C}$ d'équation polaire $r = a\ (1 + \cos \theta)\ (a > 0)$ dans $\mathscr{R}$. Un cercle Γ_R de rayon variable $R > 0$ et de centre fixe Ω coupe $\mathscr{C}$ en quatre points de paramètres θ_j $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ distincts ou non (cf. § VII.4). Montrer que $\sum_{j=1}^{4} r(\theta_j)$ est constant.

Exercice 9 (*Quartique de Loriga*) : Avec les notations de l'exercice 6, soit $\mathscr{L}$ la courbe d'équation polaire dans $\mathscr{R}$: (1) $r^4 - 2\,r^3 \cos 3\,\theta + r^2 - 1 = 0$.

a) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{R}$.

b) Trouver un triangle équilatéral $\{A_1, A_2, A_3\}$ de centre O tel que $\mathscr{L}$ soit définie par l'équation (2) : $\dfrac{1}{r^2} = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{1}{r_i^2}$ avec $r(M) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $r_i(M) = \|\overrightarrow{MA_i}\|$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$.

c) On pose $\Phi = \dfrac{1}{r}$ et $X = \Phi^2$. Montrer que les points d'inflexion de $\mathscr{L}$ sont déduits des paramètres θ tels que $F(X) = 0$, où $F \in \mathbb{Z}[T]$ est un polynôme « normalisé » de degré 4 à préciser.

Indication : Si θ est paramètre d'inflexion, $\Phi(\theta) + \Phi''(\theta) = 0$. On trouve $F(T) = 9\,T^4 + 8\,T^3 - 15\,T^2 - 3\,T + 1$.

d) En déduire que $\mathscr{L}$ a six points d'inflexion, sommets de deux triangles équilatéraux de centre O. Tracer $\mathscr{L}$.

Exercice 10 : Avec les notations de l'exercice 6, soit $\mathscr{C}$ la courbe définie en coordonnées polaires dans $\mathscr{R}$ par l'équation $r = a\,\dfrac{\sin \theta}{\theta}$ $(a > 0)$ (prolongée en $\theta = 0$ par $r(0) = a$).

a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (*cochléoïde*).

b) Une droite passant par O rencontre $\mathscr{C}$ en une infinité de points : montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points concourent. Lieu du point de concours lorsque la droite pivote autour de O.

§ IX.2 *LONGUEUR D'UNE COURBE*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée. Si I est **compact,** i.e. $I = [a, b]$, la courbe est dite à extrémités, les points $f(a)$ et $f(b)$ étant appelés **les extrémités** de f. On dit que f est un **lacet** ssi : il est à extrémités, et ses extrémités coïncident.

Si E est l'espace directeur de $\mathscr{E}$, on le munit d'une norme $\|.\|$, de sorte que $\mathscr{E}$ se trouve muni de la distance associée à cette norme. Pour tout intervalle compact I de $\mathbb{R}$, notons Sub (I) l'ensemble des **subdivisions** de I (cf. tome 2, § VII.2). Chaque subdivision σ de $I = [a, b]$ pourra être écrite sous la forme $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, avec la convention tacite que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

A chaque application $f : [a, b] \longrightarrow \mathscr{E}$ $((a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b)$ nous attachons l'élément $L(f) = \sup_{\sigma \in \mathrm{Sub}([a,b])} (L_\sigma(f))$ de $\bar{\mathbb{R}}$, où pour $\sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ $L_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\overrightarrow{f(a_i)\, f(a_{i+1})}\|$, qui s'interprète comme la *longueur de la ligne polygonale* $(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n))$. On a donc $L(f) \in \mathbb{R}_+$ ou $L(f) = +\infty$. L'application f sera dite **rectifiable** ssi $L(f) < +\infty$ (i.e. $L(f) \in \mathbb{R}_+$). Dans ce cas, $L(f)$ sera appelée sa **longueur.** *Le nombre $L(f)$ est étroitement dépendant du choix de la norme de E.* En revanche si f est rectifiable pour un choix particulier de norme sur E, elle le reste pour tout autre choix de norme sur E.

Donnons-nous maintenant un homéomorphisme $\theta : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \beta)$. On sait (cf. théorème IV.2.3 du tome 2) que θ est strictement monotone. Par suite, si σ est une subdivision de $[a, b]$, et si τ est la subdivision de $[\alpha, \beta]$ transformée en σ par θ, on a : $L_\sigma(f) = L_\tau(f \circ \theta)$, et par suite $L(f) = L(f \circ \theta)$. **La propriété pour f d'être rectifiable et** (lorsque f est rectifiable) **la longueur $L(f)$ sont donc invariantes par $\mathscr{C}^k$-équivalence** $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$.

THÉORÈME IX.2.1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de $\mathscr{E}$ à extrémités et de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est rectifiable, et on a :

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t \,. \tag{1}$$

Démonstration :

a) Montrons d'abord que f est rectifiable. Soit $\sigma = \{a_0, \ldots, a_m\}$ une subdivision de $[a, b]$. On a, du fait que f' est continue :

$$L_\sigma(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\overrightarrow{f(a_j)\, f(a_{j+1})}\| = \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t) \, \mathrm{d}t \right\|$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t \,.$$

Donc $L(f) \in \mathbb{R}_+$, et de plus : $L(f) \leqslant \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t$.

b) Pour voir maintenant que $L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t$, il suffit de prouver que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma \in \mathrm{Sub}([a, b])$ telle que

$\left(\int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t\right) - L_\sigma(f) \leqslant 2(b-a)\,\varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Pour $\sigma = \{a_0, \ldots, a_m\} \in \mathrm{Sub}\,([a,b])$, posons $\Delta_\sigma = \left(\int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t\right) - L_\sigma(f)$.

On a :

$$\Delta_\sigma = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t\right) - \sum_{i=0}^{m-1} \left\|\overrightarrow{f(a_i)\,f(a_{i+1})}\right\| = U_\sigma - V_\sigma\,,$$

avec $U_\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} (\|f'(t)\| - \|f'(a_i)\|)\,\mathrm{d}t\right)$, et

$$V_\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t\right\| - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(a_i)\|\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t\right\| - \left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(a_i)\,\mathrm{d}t\right\|\right).$$

Il est d'ailleurs clair que :

$$|U_\sigma| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \Big|\|f'(t)\| - \|f'(a_i)\|\Big|\,\mathrm{d}t\right), \quad \text{et que}$$

$$|V_\sigma| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(a_i)\,\mathrm{d}t\right\| =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} [f'(t) - f'(a_i)]\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t) - f'(a_i)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $\eta > 0$ un module de continuité uniforme de f' sur $[a,b]$ pour ε. Choisissons σ de pas $\leqslant \eta$. Alors $(\forall i \in [\![0, m-1]\!])$ $(\forall t \in [a_i, a_{i+1}])$, $\|f'(t) - f'(a_i)\| \leqslant \varepsilon$, d'où *a fortiori* $\Big|\|f'(t)\| - \|f'(a_i)\|\Big| \leqslant \varepsilon$. Par addition, on en déduit :

$$|U_\sigma| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i+1} - a_i)\,\varepsilon = \varepsilon(b-a)\,, \text{ et}$$

$$|V_\sigma| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i+1} - a_i)\,\varepsilon = \varepsilon(b-a)\,.$$

D'où $|\Delta_\sigma| = |U_\sigma - V_\sigma| \leqslant |U_\sigma| + |V_\sigma| \leqslant 2(b-a)\,\varepsilon$. ■

Remarque 1 : Il résulte de cette démonstration que, si l'on choisit une suite $(\sigma_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0, la suite $L_{\sigma_q}(f)$ converge vers $L(f)$.

Remarque 2 : Pour $f : [a, b] \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on retrouve l'invariance de $L(f)$ par $\mathscr{C}^k$-équivalence comme conséquence du théorème de changement de variables dans les intégrales (cf. tome 3, corollaire 1 du théorème I.1.2).

Equivalence de l'arc et de la corde

THÉORÈME IX.2.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$, et soit $t_0 \in I$ un paramètre ***régulier*** *de f. Pour tout $(u, v) \in I^2$, avec $u < v$, notons $\lambda(u, v) = \int_u^v \|f'(t)\| \, dt$ (i.e. la longueur de $f|_{[u, v]}$).*

On a : $$\lambda(u, v) \underset{\substack{(u, v) \longrightarrow (t_0, t_0) \\ u < v}}{\sim} \|\overrightarrow{f(u) f(v)}\| .$$

Démonstration :

Pour $(u, v) \in I^2$ avec $u < v$, on a :

$$\lambda(u, v) - \|\overrightarrow{f(u) f(v)}\| = \int_u^v \|f'(t)\| \, dt - \left\| \int_u^v f'(t) \, dt \right\|$$
$$= A(u, v) + B(u, v)$$

avec

$$A(u, v) = \int_u^v \|f'(t)\| \, dt - \int_u^v \|f'(t_0)\| \, dt = \int_u^v [\|f'(t)\| - \|f'(t_0)\|] \, dt ,$$

et

$$B(u, v) = \int_u^v \|f'(t_0)\| \, dt - \left\| \int_u^v f'(t) \, dt \right\| =$$
$$= \left\| \int_u^v f'(t_0) \, dt \right\| - \left\| \int_u^v f'(t) \, dt \right\| .$$

L'inégalité du triangle et l'inégalité de la norme dans les intégrales donnent :

$$|A(u, v)| \leqslant \int_u^v \big| \|f'(t)\| - \|f'(t_0)\| \big| \, dt \leqslant \int_u^v \|f'(t) - f'(t_0)\| \, dt ,$$

et :

$$|B(u,v)| \leqslant \left\| \int_u^v [f'(t_0) - f'(t)]\, \mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_u^v \|f'(t) - f'(t_0)\|\, \mathrm{d}t\,,$$

d'où :

$$(2) \qquad |\lambda(u,v) - \|\overrightarrow{f(u)\,f(v)}\|\,| \leqslant 2 \int_u^v \|f'(t) - f'(t_0)\|\, \mathrm{d}t\,.$$

En raison de la continuité de f' en t_0, on déduit de (2) :

$$(3) \qquad \lambda(u,v) - \|\overrightarrow{f(u)\,f(v)}\| \underset{\substack{(u,v)\to(t_0,t_0)\\ u<v}}{\in} o(v-u)\,.$$

D'autre part le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction auxiliaire $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \overrightarrow{Of(t)} - tf'(t_0)$ (où $O \in \mathscr{E}$ est fixé quelconque) montre, compte tenu de la continuité de f' en t_0 et *du fait que* $f'(t_0) \neq 0$, que

$$\|\overrightarrow{f(u)\,f(v)}\| \underset{\substack{(u,v)\to(t_0,t_0)\\ u<v}}{\sim} (v-u)\|f'(t_0)\|\,.$$

Avec (3), cela entraîne :

$$\lambda(u,v) \underset{\substack{(u,v)\to(t_0,t_0)\\ u<v}}{\sim} \|\overrightarrow{f(u)\,f(v)}\| \underset{\substack{(u,v)\to(t_0,t_0)\\ u<v}}{\sim} (v-u)\|f'(t_0)\|. \quad \blacksquare$$

Longueur d'une courbe paramétrée générale

Soit f une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{E}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ *non compact.* On dira qu'elle a une *longueur finie* ssi l'intégrale $\int_I \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t$ converge ; si c'est le cas, le nombre $\int_I \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t$ sera appelé sa **longueur** et encore noté $L(f)$. Par exemple, si f est à extrémités, définie sur $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$, alors $f|_{[a,b[}$, $f|_{]a,b]}$ et $f|_{]a,b[}$ ont même longueur, égale à $L(f)$. Lorsque l'intégrale $\int_I \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t$ diverge, on dit que f est *de longueur infinie.*

Longueur d'une sous-variété courbe

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe **plongée** de $\mathscr{E}$, de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Par définition, elle est la trajectoire d'une courbe paramétrée plongement f de classe $\mathscr{C}^k$, et on sait que tous les $\mathscr{C}^k$-plongements

d'image $\mathscr{V}$ sont $\mathscr{C}^k$-équivalents entre eux. Ils sont donc, ou bien tous de longueur finie, ou bien tous de longueur infinie ; dans le premier cas, leur longueur est toujours la même, on l'appellera *longueur de* $\mathscr{V}$, notée de préférence Long ($\mathscr{V}$).

Cas où $\mathscr{E}$ est affine euclidien

Soit $\mathscr{E}$ affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$, **muni de sa norme euclidienne,** et d'un repère **orthonormal** $\mathscr{R} = (O\,;e_1, \ldots, e_n)$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $(f_1, \ldots, f_n)$ désignant les fonctions coordonnées de f dans $\mathscr{R}$. Alors (1) s'explicite ainsi :

$$(4) \qquad \boxed{L(f) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} [f_i'(t)]^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}t}\,.$$

Lorsque $n = 2$, supposons $\mathscr{E}$ orienté pour que $\mathscr{R}$ soit direct et f définie en coordonnées polaires relativement à $\mathscr{R}$ sous la forme :
$\overrightarrow{Of(t)} = r(t)\,\vec{u}(\theta(t))$ (cf. notations de la relation (1) du § IX.1), où r et $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ ($I = [a, b]$).
Alors $f'(t) = r'(t)\,\vec{u}(\theta(t)) + r(t)\,\theta'(t)\,\vec{u}_1(\theta(t))$, d'où :

$$(5) \qquad \boxed{L(f) = \int_a^b (r'^2(t) + r^2(t)\,\theta'^2(t))^{1/2}\,\mathrm{d}t}\,.$$

Lorsque $n = 3$, si f est définie en coordonnées sphériques, relativement à $\mathscr{R}$, sous la forme

$$(6) \qquad \overrightarrow{Of(t)} = r(t)\,\vec{I}(\theta(t), \varphi(t))$$

où θ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, et où, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a posé $\vec{I}(\alpha, \beta) = \vec{u}(\alpha)\cos\beta + e_3 \sin\beta$, avec $\vec{u}(\alpha) = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$, et $\vec{u}_1(\alpha) = -e_1 \sin\alpha + e_2 \cos\alpha$. Il est clair que $\dfrac{\partial \vec{I}}{\partial \alpha} = \vec{u}_1(\alpha)\cos\beta$ et $\dfrac{\partial \vec{I}}{\partial \beta} = -\vec{u}(\alpha)\sin\beta + e_3 \cos\beta$, d'où, en dérivant (6), avec des notations allégées :

$$f'(t) = (r' \cos\varphi - r\varphi' \sin\varphi)\,\vec{u} + \\ + r\theta' \cos\varphi\,\vec{u}_1 + (r' \sin\varphi + r\varphi' \cos\varphi)\,e_3\,,$$

d'où, compte tenu du fait que la base $(\vec{u}, \vec{u}_1, e_3)$ est orthonormale :

$$(7) \qquad \boxed{L(f) = \int_a^b (r'^2 + r^2 \varphi'^2 + r^2 \theta'^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \, \mathrm{d}t}.$$

De même si $n = 3$, lorsque f est définie *en coordonnées cylindriques* dans $\mathscr{R}$, sous la forme

$$(8) \qquad \overrightarrow{Of(t)} = r(t)\, \vec{u}(\theta(t)) + \zeta(t)\, e_3$$

avec r, θ, $\zeta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\vec{u}$ ayant la même signification que ci-dessus, on obtient :

$$(9) \qquad \boxed{L(f) = \int_a^b (r'^2 + r^2 \theta'^2 + \zeta'^2)^{1/2} \, \mathrm{d}t}.$$

Exemple 1 : *longueur d'un arc de cercle*

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, considérons la courbe paramétrée $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$ $(R > 0)$ dont la trajectoire est un arc de cercle. On obtient immédiatement : $L(f) = R(\beta - \alpha)$.

Exemple 2 : *longueur d'un arc de parabole*

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, soit la courbe paramétrée $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(t, \dfrac{1}{2p} t^2\right)$ (où $p > 0$ est donné).

On a : $f'(t) = (1, t/p)$, d'où $L(f) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + t^2/p^2}\, \mathrm{d}t$. En intégrant par parties,

on obtient $2\, L(f) = \left[t \sqrt{1 + t^2/p^2}\right]_a^b + \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2/p^2}}$, soit

$$2\, L(f) = b \sqrt{1 + b^2/p^2} - a \sqrt{1 + a^2/p^2} + p \left(\operatorname{Arg\,sh} \frac{b}{p} - \operatorname{Arg\,sh} \frac{a}{p}\right).$$

Exemple 3 : *longueur d'un arc de lemniscate*

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, considérons la courbe définie en coordonnées polaires dans le repère canonique $(O\,; e_1, e_2)$ par $r = a \sqrt{\cos 2\,\theta}$ $\left(a > 0 \text{ donné}, \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\right)$ dont la trajectoire $\mathscr{L}$ est une demi-boucle de la

lemniscate de Bernoulli d'équation dans $\mathscr{R}$: $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$. Remarquons que $\mathscr{L}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. En prenant θ pour paramètre, la formule (5) donne immédiatement : $\text{Long}\,(\mathscr{L}) = a \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\,\theta}}$. Sur $\mathscr{L}$, $\theta \mapsto r(\theta)$ est un changement de paramètre $\mathscr{C}^\infty$-admissible. On obtient alors à l'aide du paramètre r (ou de $\rho = r/a$) :

$$\text{(10)} \qquad \text{Long}\,(\mathscr{L}) = a^2 \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = a \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

Un autre $\mathscr{C}^\infty$-plongement d'image $\mathscr{L}$ est le plongement rationnel : $t \mapsto \left(a\,\dfrac{t(1+t^2)}{1+t^4}\,,\ -a\,\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^4}\right)$, $t \in\ ]1, +\infty[$, grâce auquel on obtient une autre expression de Long $(\mathscr{L})$:

$$\text{(11)} \qquad \text{Long}\,(\mathscr{L}) = a\sqrt{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Si simples qu'elles paraissent, les deux expressions (10) et (11) de Long $(\mathscr{L})$ sont à l'origine de la théorie des fonctions elliptiques, par les remarquables conséquences qu'en avait tirées Fagnano [1].

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$: $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R\cos t,\ R\sin t)$ $(R > 0)$, mais on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $(x, y) \mapsto \text{Max}\,(|x|, |y|)$. Calculer la longueur $L(f)$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine *euclidien* de dimension $n \geqslant 2$, $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^3$, et $t_0 \in I$ un paramètre *régulier* de f. Montrer, avec les notations du théorème IX.2.2, que $\lambda(u, v) - \|\overrightarrow{f(u)\,f(v)}\| - A(v-u)^3 \underset{\substack{(u,v)\to(t_0,t_0)\\ u<v}}{\in} o(v-u)^3$, où A est un réel à préciser.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on considère l'arc de lemniscate d'équation $r = a\sqrt{\cos 2\,\theta}$ ($a > 0$ donné, $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$). Soit $\lambda(u, v)$ la longueur de l'arc de cette courbe obtenu pour $\theta \in [u, v]$ $\left(0 \leqslant u \leqslant v \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$. On donne θ_1, θ_2 réels tels que $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Démontrer : $\lambda(0, \theta_1) = \lambda\left(\theta_2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ssi $\cos\theta_1 \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 : Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ $(a < b)$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On note $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application $t \mapsto (t, f(t))$. Montrer que Φ est *rectifiable* ssi f est *à variation bornée* (cf. tome 3, § IV.5).

---

[1] Giulio Carlo, comte de *Fagnano Di Fagnani* (1682-1766), géomètre italien amateur, s'intéressait aux arcs de courbe dont la différence des longueurs peut s'exprimer par une quantité algébrique. Il a pu ramener la division par 2 de l'arc $\mathscr{L}$ à une équation bicarrée.

Exercice 5 (Courbe de Von Koch) : On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine euclidienne orientée canonique. Soit $\lambda \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$. Notons f la fonction continue $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ égale à 0 sur $[0, \lambda] \cup [1-\lambda, 1]$, à $\frac{1}{2}$ pour $t = \frac{1}{2}$, et affine sur $\left[\lambda, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1-\lambda\right]$. On pose $g_1(t) = (t, f(t))$ pour $t \in [0,1]$, ce qui définit $g_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ supposons définie $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, continue, affine sur chaque segment $[a_{n,i}, a_{n,i+1}]_{0 \leqslant i \leqslant 4^n - 1}$, où $(a_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant 4^n}$ est une subdivision de $[0,1]$ telle que g_n soit non dérivable en les points $(a_{n,i})_{1 \leqslant i \leqslant 4^n - 1}$ (on a donc : $a_{1,0} = 0$, $a_{1,1} = \lambda$, $a_{1,2} = \frac{1}{2}$, $a_{1,3} = 1 - \lambda$, $a_{1,4} = 1$). Notons alors, pour $i \in [\![0, 4^n - 1]\!]$, $s_{n,i}$ l'unique similitude directe affine de $\mathbb{R}^2$ telle que $s_{n,i}((0,0)) = g_n(a_{n,i})$ et $s_{n,i}((1,0)) = g_n(a_{n,i+1})$, et notons $h_{n,i}$ l'homothétie affine de $\mathbb{R}$ telle que $h_{n,i}(0) = a_{n,i}$ et $h_{n,i}(1) = a_{n,i+1}$.
On définit alors $g_{n+1} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ainsi : pour tout $i \in [\![0, 4^n - 1]\!]$, et tout $t \in [a_{n,i}, a_{n,i+1}]$, $g_{n+1}(t) = s_{n,i}(g_1(h_{n,i}^{<-1>}(t)))$.

a) Montrer que g_{n+1} ainsi construite a des propriétés analogues à g_n, avec la suite $(a_{n+1,i})_{0 \leqslant i \leqslant 4^{n+1} - 1}$ telle que, si $i = 4k + r$ (avec $0 \leqslant r \leqslant 3$) $a_{n+1,i} = a_{n,k}$ pour $r = 0$, $= h_{n,k}(\lambda)$ pour $r = 1$, $= h_{n,k}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $r = 2$, $= h_{n,k}(1 - \lambda)$ pour $r = 3$. On a ainsi défini par récurrence une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

b) Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

c) Soit α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$. La fonction $g|_{[\alpha,\beta]}$ est-elle rectifiable ?

d) Programmer sur ordinateur la construction des images $g_n([0,1])$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

N.B. On pourra se reporter à l'épreuve d'Analyse 1988 de l'E.N.S.E.T. (groupe A) pour une étude plus complète, ou au corrigé paru aux Editions Dunod. (Collection « J'intègre »).

Exercice 6 : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique on considère la rosace d'équation polaire $r = a \sin 2\theta$ ($a > 0$ donné, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) et l'ellipse d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 - 4a^2 = 0$. Montrer que les deux courbes ont même longueur.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on considère l'ellipse paramétrée par $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par ses coordonnées canoniques $f_1(t) = a \cos t$, $f_2(t) = b \sin t$ ($a > 0$, $b > 0$ donnés). Soit t et t' deux paramètres tels que $0 < t < t' < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{tg} t \,.\, \operatorname{tg} t' = \frac{b}{a}$.

a) Montrer que les normales aux points $f(t)$ et $f(t')$ sont à la même distance d de O.

b) Montrer que $L(f|_{[0,t]}) + L(f|_{[0,t']}) + d = L(f)$.

§ IX.3 *ABSCISSES CURVILIGNES, COURBURE*

Dans ce §, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et d'espace directeur E.

DÉFINITION IX.3.1

Une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ est dite **normale** *ssi* $(\forall s \in I)$ $\|f'(s)\| = 1$. *Lorsqu'il en est ainsi, la*

fonction $\vec{\tau} : I \longrightarrow E$, $s \mapsto f'(s) = \vec{\tau}(s)$ *est appelée la* ***fonction vecteur unitaire tangent*** *à* f.

Une courbe paramétrée normale est nécessairement *régulière*. En vue d'étudier la réciproque, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et tout réel τ, notons I_τ l'intervalle $I + \tau = \{x + \tau\}_{x \in I}$ translaté de I par τ et $\check{I}$ l'intervalle $\{-x\}_{x \in I}$ symétrique de I pour 0.

THÉORÈME IX.3.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ *une courbe paramétrée de classe* $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ ***régulière.*** *Fixons* $t_0 \in I$ *et notons* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| \, du$.

a) φ *est un changement de paramètre* $\mathscr{C}^k$*-admissible.*

b) *Notant* J *l'intervalle* $\varphi(I)$, *la courbe paramétrée* $g : J \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}(s)$ *(qui est* $\mathscr{C}^k$*-équivalente à* f*) est* ***normale.***

c) *Les courbes paramétrées de classe* $\mathscr{C}^1$ *qui sont normales et* $\mathscr{C}^1$*-équivalentes à* f *sont les suivantes :*

1) *pour* $s_0 \in \mathbb{R}$ *quelconque :* $J_{s_0} \mapsto \mathscr{E}$, $s \mapsto g(s - s_0)$
(elles sont positivement $\mathscr{C}^k$*-équivalentes à* f*)*

2) *pour* $s_0 \in \mathbb{R}$ *quelconque :* $\check{J}_{s_0} \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto g(s_0 - s)$
(celles-ci ne sont pas positivement $\mathscr{C}^k$*-équivalentes à* f*).*

En conséquence, toutes ces courbes sont de classe $\mathscr{C}^k$, *et* $\mathscr{C}^k$*-équivalentes à* f.

Démonstration :

a) Comme f' ne s'annule pas, et que l'application $E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, il en résulte que φ est de classe $\mathscr{C}^k$ et que $\varphi'(t) = \|f'(t)\|$ reste > 0 sur I, donc φ admet une fonction réciproque qui est aussi de classe $\mathscr{C}^k$, d'où la première assertion.

b) On a :

$$g'(s) = \frac{d\varphi^{\langle -1 \rangle}(s)}{ds} \times f'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(s)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(s))} \times f'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(s))$$

$$= \frac{1}{\|f'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(s))\|} \times f'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(s)),$$

d'où $\|g'(s)\| = 1$ pour tout $s \in J$.

c) Les courbes citées en 1) et en 2) sont de toute évidence de classe $\mathscr{C}^k$, normales et $\mathscr{C}^k$-équivalentes à f. Il reste à voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Soit $h : \Lambda \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$, normale et $\mathscr{C}^1$-équivalente à f, donc $\mathscr{C}^1$-équivalente à g. Soit $\theta : \Lambda \longrightarrow J$ un changement de paramètre $\mathscr{C}^1$-admissible tel que $h = g \circ \theta$. Pour tout $\sigma \in \Lambda$, on a :

$$\|h'(\sigma)\| = 1 = \|\theta'(\sigma) \times g'(\theta(\sigma))\| = |\theta'(\sigma)| \times \|g'(\theta(\sigma))\| = \\ = |\theta'(\sigma)| \ ;$$

puisque θ' est continue et que Λ est connexe, il s'ensuit que θ' est une *constante,* de valeur 1 ou -1, d'où $\theta(\sigma) = \varepsilon(\sigma - \sigma_0)$ pour tout $\sigma \in \Lambda$, avec un certain $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Si $\varepsilon = +1$ (resp. -1) h est donc bien l'une des courbes définies au 1) (resp. au 2)). ■

COROLLAIRE

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe ***plongée*** *de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ de $\mathscr{E}$.*
a) *Il existe au moins un plongement* ***normal*** *de classe $\mathscr{C}^k$ d'image $\mathscr{V}$.*
b) *Soit $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ un tel plongement. Alors les plongements normaux de classe $\mathscr{C}^1$ et d'image $\mathscr{V}$ sont :*
1) *les $g_{s_0} : I_{s_0} \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto g(s - s_0)$*
2) *les $\check{g}_{s_0} : \check{I}_{s_0} \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto g(s_0 - s)$.*
Ces plongements sont donc tous de classe $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^k$-équivalents à g.

(Cf. tome 3, définitions VI.3.2 et VI.3.3 et théorème VI.3.2).

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée régulière de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Par définition, **choisir une abscisse curviligne de *f*,** c'est faire choix d'une courbe paramétrée normale $\mathscr{C}^k$-équivalente à f. Si $g : J \longrightarrow \mathscr{E}$ est un tel choix, on dit que *g est orientée comme f ssi g est positivement $\mathscr{C}^k$-équivalente à f* (i.e. g est l'une des fonctions du *c*) 1)), et si g est de la forme du 2), on dit qu'elle est orientée *en sens contraire* de f (ou que son orientation est opposée à celle de f).

C'est le paramètre $s \in J$ qui constitue en fait une *abscisse,* car pour $s_1 \in J$ et $s_2 \in J$ $(s_1 < s_2)$ $(s_1 = \varphi(t_1),\ s_2 = \varphi(t_2))$, le réel $s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(u)\| \, du$ n'est autre que la longueur de la courbe $f|_{[t_1, t_2]}$, i.e. de la courbe $g|_{[s_1, s_2]}$. Si $0 \in J$, on dira que c'est l'origine de l'abscisse curviligne s. Fixons $t_0 \in I$: le choix d'une abscisse curviligne de f équivaut à celui de $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (intuitivement cela revient à choisir le « sens de parcours »), d'où $\dfrac{ds}{dt} = \varepsilon \|f'(t)\|$, et enfin de $s_0 = s(t_0)$.

Vecteurs unitaires tangents à une sous-variété courbe plongée

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^1$ plongée. Cherchons les fonctions *continues* $\vec{\varphi} : \mathscr{V} \longrightarrow E$ telles que $(\forall M \in \mathscr{V})\ \vec{\varphi}(M)$ soit parallèle à la tangente en M à la sous-variété et $\|\vec{\varphi}(M)\| = 1$. Si $g : J \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto g(s)$ est un plongement normal de classe $\mathscr{C}^1$ et d'image $\mathscr{V}$, soit $\vec{\tau} : s \mapsto g'(s)$ la fonction vecteur unitaire tangent associée. Puisque g définit un homéomorphisme γ de J sur $\mathscr{V}$, la fonction $\vec{T} : \mathscr{V} \longrightarrow E$, $M \mapsto \vec{\tau}(\gamma^{-1}(M))$ est l'une des fonctions φ cherchées ; la fonction $-\vec{T}$ en est une autre. Réciproquement, soit $\varphi : \mathscr{V} \longrightarrow E$ l'une des fonctions cherchées. Alors $\psi = \varphi \circ g : J \longrightarrow E$ est continue, et $(\forall s \in J)\ \psi(s) \in \{\vec{\tau}(s), -\vec{\tau}(s)\}$. Soit $s_0 \in J$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\psi(s_0) = \varepsilon\vec{\tau}(s_0)$. La fonction $s \mapsto \|\psi(s) - \varepsilon\vec{\tau}(s)\|$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 2, est continue sur J et vaut 0 pour $s = s_0$, donc elle est nulle sur J, i.e. $\psi(s) = \varepsilon\vec{\tau}(s)$ pour $s \in J$. D'où $\varphi(M) = \varepsilon\vec{\tau}(\gamma^{-1}(M)) = \varepsilon\vec{T}(M)$ pour $M \in \mathscr{V}$. *Il n'y a donc pas d'autre solution au problème posé que les fonctions $\vec{T}$ et $-\vec{T}$.*

Courbure, normale principale

Soit $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^2$ et **normale.** La fonction $\mathscr{K} : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $s \mapsto \|g''(s)\|$ s'appelle **fonction courbure (géométrique)** associée à g.

PROPOSITION IX.3.1

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, pour $s_0 \in I$, on a $\mathscr{K}(s_0) = 0$ ssi s_0 est ***paramètre d'inflexion.***

Démonstration :

Comme $\|g'(s)\| = 1$, en dérivant $(g'(s) \mid g'(s)) = 1$ par rapport à s, on obtient $(\forall s \in I)\ (g'(s) \mid g''(s)) = 0$. Comme $g'(s) \neq 0$, on en déduit : $g''(s) = 0$ ssi $g''(s)$ et $g'(s)$ sont liés ; autrement dit : $\mathscr{K}(s) = 0$ ssi s est paramètre d'inflexion de g. ■

Observons que si $g''(s) = 0$ pour tout $s \in I$, i.e. si la courbure géométrique $\mathscr{K}$ est nulle sur tout I, alors g est fonction affine de s, et la courbe paramétrée g est rectiligne.

Considérons maintenant un paramètre $s \in I$ *birégulier* pour g. Le scalaire $\rho(s) = \dfrac{1}{\mathscr{K}(s)}$ s'appelle **rayon de courbure géométrique** en le paramètre s, et le vecteur unitaire $\vec{\nu}(s) = \dfrac{1}{\mathscr{K}(s)}\ g''(s) = \rho(s)\, g''(s)$ s'appelle **vecteur unitaire normal principal** en le paramètre s (c'est un vecteur orthogonal à

$\vec{\tau}(s)$ car $(g'(s) \mid g''(s)) = 0$). La droite affine $\mathcal{N}(s) = g(s) \dotplus \mathbb{R}\vec{\nu}(s)$ s'appelle **normale principale** en le paramètre s. Enfin le point $\Omega(s) = g(s) \dotplus \rho(s)\,\vec{\nu}(s)$ s'appelle **centre de courbure** en le paramètre s. Si la courbe g *est birégulière,* on peut ainsi lui attacher les fonctions ρ, $\vec{\nu}$, $\mathcal{N}$, Ω.

Remarquons que si $s \in I$ est birégulier, les vecteurs $\vec{\tau}(s)$ et $\vec{\nu}(s)$ dirigent le *plan osculateur* en le paramètre s. Le cercle de ce plan centré en $\Omega(s)$ et de rayon $\rho(s)$ est alors appelé **cercle de courbure** en le paramètre s : il passe par $g(s)$ et il est tangent à g en s.

Courbure d'une sous-variété courbe plongée

Soit $\mathcal{V}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^2$ plongée ; choisissons un plongement de classe $\mathscr{C}^2$ normal $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ d'image $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{K}$ la fonction courbure associée à g. Notons h la bijection réciproque de $g|^{\mathcal{V}}$. Il est facile de voir que la fonction $\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $M \mapsto \mathcal{K}(h(M))$ *ne dépend pas du choix de* g. En effet, soit $s_0 \in \mathbb{R}$; posons $h_{s_0} = (g_{s_0}|^{\mathcal{V}})^{\langle -1 \rangle}$ et $\check{h}_{s_0} = (\check{g}_{s_0}|^{\mathcal{V}})^{\langle -1 \rangle}$ (cf. corollaire du théorème IX.3.1). Pour $M \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(h_{s_0}(M)) &= \left\|(g_{s_0})''(h_{s_0}(M))\right\| = \left\|g''(h_{s_0}(M) - s_0)\right\| \\
&= \|g''(h(M))\| = \mathcal{K}(h(M))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\check{h}_{s_0}(M)) &= \left\|(\check{g}_{s_0})''(\check{h}_{s_0}(M))\right\| = \left\|g''(s_0 - \check{h}_{s_0}(M))\right\| \\
&= \|g''(h(M))\| = \mathcal{K}(h(M))
\end{aligned}$$

(l'égalité $(\check{g}_{s_0})''(s) = g''(s_0 - s)$ vient du fait qu'on dérive un nombre *pair* de fois). La fonction $k : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ égale, pour tout plongement normal g de classe $\mathscr{C}^2$ et d'image $\mathcal{V}$ à $M \mapsto \mathcal{K}(h(M))$ s'appelle **fonction courbure** de $\mathcal{V}$. D'après la proposition IX.3.1, *les points* $M \in \mathcal{V}$ *de courbure nulle sont les points d'inflexion de* $\mathcal{V}$.

Si $M \in \mathcal{V}$ est birégulier, le scalaire $R(M) = \dfrac{1}{k(M)}$ s'appelle **rayon de courbure** en M à $\mathcal{V}$; on vérifie que le vecteur

$$\vec{N}(M) = \frac{1}{k(M)}\; g''(h(M)) = R(M)\; g''(h(M))$$

ne dépend pas du choix de g : on l'appelle **vecteur unitaire normal principal** à $\mathcal{V}$ en M. Le point $C(M) = M \dotplus R(M)\;\vec{N}(M)$ s'appelle **centre de courbure** à $\mathcal{V}$ en M, et le cercle de centre $C(M)$, de rayon $R(M)$, du plan osculateur en M à $\mathcal{V}$ s'appelle **cercle de courbure** en M à $\mathcal{V}$.

Lorsque $\mathcal{V}$ est *birégulière,* on a ainsi des fonctions k, R, $\vec{N}$, C définies sur $\mathcal{V}$ de façon intrinsèque.

Exemple 1 : Si $\mathscr{V}$ est un cercle de $\mathscr{E}$, de rayon $a > 0$, sa fonction courbure est constante, égale à $\frac{1}{a}$; son centre de courbure est fixe : c'est le centre C du cercle ; son vecteur unitaire normal principal en $M \in \mathscr{V}$ est $\frac{1}{a}\overrightarrow{MC}$.

Courbure d'une courbe paramétrée régulière

Soit maintenant une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$ *régulière* $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$. Choisissons une courbe normale $g : J \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto g(s)$ $\mathscr{C}^q$-équivalente à f, et soit $s : t \mapsto s(t)$ l'abscisse curviligne correspondante et $\mathscr{K}$ la fonction courbure associée. A l'aide du théorème IX.3.1, on voit que la fonction $I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \mathscr{K}(s(t))$ *ne dépend pas du choix de* g. Sa valeur en $t \in I$ s'appelle **courbure de f en le paramètre t** ; elle s'annule pour t ssi t est *paramètre d'inflexion* de f. Lorsque t est birégulier, le réel $\rho(s(t)) = \dfrac{1}{\mathscr{K}(s(t))}$ s'appelle **rayon de courbure en le paramètre t de f.** Le vecteur $\vec{\nu}(s(t))$ ne dépend que de t : c'est le **vecteur unitaire normal principal en le paramètre t** ; le point $\Omega(s(t)) = f(t) + \rho(s(t))\,\vec{\nu}(s(t))$ est le **centre de courbure en t,** et le cercle du plan osculateur en t, de centre $\Omega(s(t))$ et de rayon $\rho(s(t))$ est le **cercle de courbure en t.** Lorsque f est birégulière, on obtient ainsi des fonctions définies sur I. Soit $t_0 \in I$ et J un sous-intervalle ouvert de I contenant t_0, tel que $f|_J$ soit un plongement, d'image notée $\mathscr{V}$. Pour $t \in J$, posant $M = f(t)$, *la courbure de f en t n'est autre que la courbure de $\mathscr{V}$ en M ;* si t est birégulier, il en va de même pour le rayon de courbure, le vecteur unitaire normal principal et le centre de courbure.

Calcul de la courbure en le paramètre t

Reprenons la courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$ régulière, et une courbe normale $g : J \mapsto \mathscr{E}$, $\mathscr{C}^q$-équivalente à f, avec l'abscisse curviligne correspondante $t \mapsto s(t)$, de sorte que $(\forall t \in I)$ $f(t) = g(s(t)) = g(s)$, d'où $f'(t) = s'(t)\,g'(s)$, puis $f''(t) = s''(t)\,g'(s) + s'^2(t)\,g''(s)$. Soit $\mathscr{K}$ la courbure associée à g. On a $\mathscr{K}^2(s) = \|g''(s)\|^2 = \|g'(s)\|^2\ \|g''(s)\|^2 = G(g'(s), g''(s))$ (où G désigne le déterminant de Gram) car $(g'(s) \mid g''(s)) = 0$. Or $G(f'(t), f''(t))$ est égal à $\mathscr{K}^2(s) \times \left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6 = \mathscr{K}^2(s)\|f'(t)\|^6$, d'où

$$(1) \qquad \boxed{\mathscr{K}(s(t)) = \frac{1}{\|f'(t)\|^3}\sqrt{G(f'(t), f''(t))}}\,.$$

Si $n = \dim(\mathscr{E}) = 2$, orientant $\mathscr{E}$ de façon quelconque pour pouvoir utiliser le produit mixte associé, (1) devient :

$$\boxed{\mathscr{K}(s(t)) = \frac{1}{\|f'(t)\|^3}\left|[f'(t), f''(t)]\right|}. \tag{2}$$

Si $n = 3$, orientant $\mathscr{E}$ de façon quelconque pour pouvoir utiliser le produit vectoriel associé, (1) devient :

$$\boxed{\mathscr{K}(s(t)) = \frac{1}{\|f'(t)\|^3}\|f'(t)\wedge f''(t)\|}. \tag{3}$$

Abscisses curvilignes et contact

D'après l'étude précédente, une sous-variété courbe $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^q$ $(1 \leqslant q \leqslant +\infty)$ admet, au voisinage de tout point $M_0 \in \mathscr{V}$ des représentations locales *normales centrées en* M_0 ; de plus si g_1 et g_2 sont deux telles représentations, on a : soit $g_1(s) = g_2(s)$ pour s assez voisin de 0, soit $g_1(s) = g_2(-s)$, selon que $g_1'(0) = g_2'(0)$ ou $g_1'(0) = -g_2'(0)$.

THÉORÈME IX.3.2 (Cauchy)

Soit deux sous-variétés courbes $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$, passant par un point $M_0 \in \mathscr{E}$, et soit g_1 et g_2 des représentations locales normales de $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$, centrées en M_0 et telles que $g_1'(0) = g_2'(0)$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ $(2 \leqslant r \leqslant q)$. Pour que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ aient en M_0 un contact d'ordre $\geqslant r$, il faut et il suffit que

$$g_1(s) - g_2(s) \underset{s \to 0}{\in} o(s^r). \tag{4}$$

Démonstration :

Tout revient à voir que si $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ ont en M_0 un contact d'ordre $\geqslant r$, alors (4) a lieu. Normons le $\mathbb{R}$-ev $E \times \mathbb{R}$ (par exemple avec la norme euclidienne $(X, t) \mapsto (\|X\|^2 + t^2)^{1/2}$). Soit deux représentations locales $t \mapsto \varphi_1(t)$ et $t \mapsto \varphi_2(t)$ de $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ centrées en M_0 et voisines d'ordre $\geqslant r$. Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les abscisses curvilignes telles que $\varphi_1(t) = g_1(s_1(t))$ et $\varphi_2(t) = g_2(s_2(t))$. L'hypothèse $g_1'(0) = g_2'(0)$ entraîne $s_1'(0) = s_2'(0)$. Comme $s_1(0) = s_2(0) = 0$, on a, pour $i \in \{1, 2\}$ et t voisin de 0 : $s_i(t) = \varepsilon_i \int_0^t \|\varphi_i'(u)\|\,du$ avec un $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. De $s_1'(0) = s_2'(0)$,

on déduit : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \in \{-1, 1\}$. D'où enfin :

$$s_i(t) = \varepsilon \int_0^t \|\varphi_i'(u)\| \, du . \tag{5}$$

Ces égalités restent vraies pour t parcourant un certain intervalle ouvert J voisinage de 0. Considérons alors les courbes paramétrées Φ_1 et Φ_2 de $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$ définies par $\Phi_i : J \longrightarrow \mathscr{E} \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (\varphi_i(t), s_i(t))$ ($i \in \{1, 2\}$). Ces courbes sont des plongements de classe $\mathscr{C}^q$ car elles sont $\mathscr{C}^q$-équivalentes à Ψ_1 et Ψ_2 définies par $\Psi_i : s_i(J) \longrightarrow \mathscr{E} \times \mathbb{R}$, $s \mapsto (g_i(s), s)$, et on voit bien que Ψ_1 et Ψ_2 sont *cartésiennes* dans un repère approprié de $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$. Puisque $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^r)$, on a : $\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^{r-1})$, d'où $\|\varphi_1'(t)\| - \|\varphi_2'(t)\| \underset{t \to 0}{\in} o(t^{r-1})$, d'où, d'après (5), $s_1(t) - s_2(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^r)$, d'où $\Phi_1(t) - \Phi_2(t) \underset{t \to 0}{\in} o(t^r)$. Donc Φ_1 et Φ_2 sont voisines d'ordre $\geqslant r$, et d'après le théorème VII.3.2, cela entraîne $\Psi_1(s) - \Psi_2(s) \underset{s \to 0}{\in} o(s^r)$, et *a fortiori* $g_1(s) - g_2(s) \underset{s \to 0}{\in} o(s^r)$. ■

COROLLAIRE 1

> *Dans les conditions du théorème* IX.3.2, *pour que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ soient* ***osculatrices*** *en M_0, il faut et il suffit :*
> *soit que M_0 soit* ***point d'inflexion*** *à la fois sur $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$,*
> *soit que M_0 soit birégulier sur $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$, et que $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ aient en M_0 le* ***même cercle de courbure.***

COROLLAIRE 2

> *Soit M_0 un point birégulier d'une sous-variété courbe $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^q$ ($2 \leqslant q \leqslant +\infty$) de $\mathscr{E}$. Il existe* ***un et un seul cercle de $\mathscr{E}$ qui soit osculateur*** *à $\mathscr{V}$ en M_0, et ce cercle est le* ***cercle de courbure*** *en M_0 à $\mathscr{V}$.*

On pourra désormais considérer les expressions « cercle de courbure » et « cercle osculateur » comme synonymes. Notons qu'en un point M_0 d'inflexion de $\mathscr{V}$, il n'existe aucun cercle osculateur à $\mathscr{V}$ en M_0.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. On donne des réels a, b ($0 < b < a$). Pour $\psi \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}(\psi) = e_1 \cos\psi + e_2 \sin\psi$ et $\vec{u}_1(\psi) = \dfrac{d\vec{u}}{d\psi}$. Soit la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $\theta \mapsto f(\theta)$ telle que $\overrightarrow{Of(\theta)} = r(\theta)\,\vec{u}(\theta) + a\theta e_3$, avec, pour tout $\theta \in J$, J à préciser :

$$\theta = b \int_0^{r(\theta)} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + a^2 - b^2)}} .$$

a) Construire les projections de f sur les plans de coordonnées.

b) Là où elle est définie, calculer la courbure $\mathscr{K}$ de f en le paramètre θ en l'exprimant à l'aide de r seul.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, $O \in \mathscr{E}$ donné, et $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ régulière. Soit $h(t)$ la projection orthogonale de O sur la tangente en $t \in I$ à f. Déterminer f pour que $(\forall t \in I)\ \|f'(t)\|^2 = \|h'(t)\|^2$. Interpréter.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$. On donne une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ régulière $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $\theta \mapsto f(\theta)$ définie en coordonnées polaires dans $\mathscr{R}$ par $\overrightarrow{Of(\theta)} = r\vec{u}(\theta)$, avec r fonction réelle de θ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\vec{u}(\theta) = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note $S(\theta)$ l'aire algébrique balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OF(\theta)}$ comptée à partir de $\theta_0 \in I$, et $s = s(\theta)$ l'abscisse curviligne de f telle que $s(\theta_0) = 0$ et $\dfrac{ds}{d\theta} > 0$. Déterminer f pour que $(\forall\theta)\ S = \lambda s$.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. On donne la courbe paramétrée $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathscr{E}$ définie par ses fonctions coordonnées dans $\mathscr{R}$: $f_1(t) = \operatorname{sh} t \cos t - \operatorname{ch} t \sin t$, $f_2(t) = \operatorname{sh} t \sin t + \operatorname{ch} t \cos t$, $f_3(t) = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$.

a) f est-elle régulière ? Est-ce une sous-variété courbe plongée ?

b) Choisir une abscisse curviligne s de f telle que $s(t)$ reste > 0 et que $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} 0} s(t) = 0$. Préciser le vecteur unitaire tangent $\vec{\tau}(t)$.

c) On définit le point $P \in \mathscr{E}$ par $P(t) = f(t) + (\lambda(t) - s(t))\,\vec{\tau}(t)$. Déterminer la fonction λ pour que le lieu Γ de P passe par O. Calculer la longueur d'un arc de Γ.

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$. Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ régulière dont aucune tangente ne soit dirigée par e_1. Soit $g(t)$ le point où la tangente en $t \in I$ à f rencontre $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}e_1$. Déterminer f pour que $\|f'(t)\|^2 = \|g'(t)\|^2$ (resp. $\|f'(t)\| = 2\|g'(t)\|$). Interpréter (« courbes de poursuite »).

Exercice 6 (théorème de Texeira, démonstration de Salmon) [1]

a) Soit l'équation différentielle d'Euler :

$$\frac{dx^2}{1+x^4} = \frac{dy^2}{1+y^4}. \tag{1}$$

On considère le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (u, v)$ tel que $x + y = \dfrac{1}{u+v}$ et $xy = \dfrac{u-v}{u+v}$ (justifier et préciser les domaines de définition). Calculer $du + dv$, $du - dv$, $du^2 - dv^2$, $4\,du\,dv$; éliminer dy^2 ; en déduire une équation différentielle (2) en (du, dv).

Réponse : (2) $2uv(du^2 - dv^2) + (1 - 2(u^2 - v^2))\,du\,dv = 0$.

b) Intégrer l'équation (2) en posant $U = u^2$, $V = v^2$, ce qui ramène à une équation de Clairaut en $\dfrac{dv}{du}$. En déduire les solutions de (2) sous la forme (3) : $2(v^2 - t^2u^2) + t(1 - 2u^2 + 2v^2) = 0$, t réel arbitraire, puis les solutions de (1) sous la forme $(1 + x^2y^2)\operatorname{sh}\lambda + 2xy\operatorname{ch}\lambda - \varepsilon(x^2 + y^2) = 0$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et où $\lambda \in \mathbb{R}$ est arbitraire.

c) Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on considère la lemniscate $\mathscr{L}$ paramétrée par $t \mapsto L(t) = (x, y)$, avec $x = a\dfrac{t(1+t^2)}{1+t^4}$, $y = a\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^4}$ $(a > 0)$. Un cercle d'équation

---

[1] Voir également « A propos d'un théorème de Texeira » par J. M. *Arnaudiès*, Revue de Mathématiques spéciales, décembre 1980, pour une solution à l'aide de fonctions elliptiques.

$x^2 + y^2 - 2\,aux + 2\,avy = 0$ rencontre $\mathscr{L}$ en le quadruplet $(0, 0, t_1, t_2)$ de paramètres (cf. § VII). Soit s une abscisse curviligne de $\mathscr{L}\,(s = s(t))$. Définir (t_1, t_2) en fonction de (u, v). On fait varier (u, v) sur une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ de façon que (t_1, t_2) puisse être défini comme fonction de classe $\mathscr{C}^1$ du paramètre. Soit s_i une abscisse curviligne de $\Phi(t_i)$. Prouver que $\mathrm{d}s_1^2 = \mathrm{d}s_2^2$ ssi (u, v) décrit une conique de foyers $(\pm\, a/\sqrt{2}, 0)$.

N.B. Cette élégante méthode de Salmon est cependant très délicate à rendre rigoureuse.

Exercice 7 *(les théorèmes de Chasles et de Mac Cullagh).*

PARTIE I

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\mathbf{i}, \mathbf{j})$. On donne l'ellipse $\mathscr{C}$ représentée paramétriquement dans $\mathscr{R}$ par $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{P}$, $\varphi \mapsto m(\varphi)$ de coordonnées dans $\mathscr{R} : x = a \sin \varphi$, $y = b \cos \varphi$ $(a > b > 0)$. On note s l'abscisse curviligne de cette représentation, orientée dans les φ croissants, qui vaut 0 pour $\varphi = 0$. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ formé des couples (φ, ψ) tels que $0 < \psi < \varphi < \pi$ et Ω l'ouvert de $\mathscr{P}$ égal à *l'extérieur* de $\mathscr{C}$.

*a*1) Soit $(\varphi, \psi) \in U$. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en $m(\varphi)$ et $m(\psi)$ se rencontrent en un point $M(\varphi, \psi)$ dont on calculera les coordonnées.

*a*2) Montrer que l'application $(\varphi, \psi) \mapsto M(\varphi, \psi)$ est une *surjection* de U sur Ω, de classe $\mathscr{C}^\infty$, et *partout régulière*. Si $P \in \Omega$, préciser les couples $(\varphi, \psi) \in U$ tels que $P = M(\varphi, \psi)$. En déduire que par $P \in \Omega$ donné, il passe exactement deux tangentes à $\mathscr{C}$.

b) On oriente $\mathscr{P}$ de sorte que $\mathscr{R}$ soit direct. Soit $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent à $\mathscr{C}$ en $m(\varphi)$ et $\vec{T}_1 = \wedge\vec{T}$. On définit deux fonctions $\mathscr{L}$ et $\mathscr{H} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi : $(\forall\,(\varphi, \psi) \in U$, avec $M = M(\varphi, \psi))$

$$\mathscr{L}(\varphi, \psi) = (\overrightarrow{Mm(\psi)} \mid \vec{T}(\psi)) + s(\varphi) - s(\psi) - (\overrightarrow{Mm(\varphi)} \mid \vec{T}(\varphi)) + l$$
$$\mathscr{H}(\varphi, \psi) = (\overrightarrow{Mm(\psi)} \mid \vec{T}(\psi)) - s(\psi) - s(\varphi) + (\overrightarrow{Mm(\varphi)} \mid \vec{T}(\varphi)) + l\,,$$

où l est la longueur de $\mathscr{C}$ (qu'on ne cherchera pas à calculer) obtenue lorsque φ décrit $[0, 2\pi]$.

Démontrer que les différentielles de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{H}$ sont données par :

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = (\overrightarrow{\mathrm{d}M} \mid \vec{T}(\varphi) - \vec{T}(\psi))\,; \quad \mathrm{d}\mathscr{H} = -\,(\overrightarrow{\mathrm{d}M} \mid \vec{T}(\varphi) + \vec{T}(\psi))\,.$$

PARTIE II

Nous utiliserons pour la suite les fonctions elliptiques de Jacobi, telles qu'elles ont été construites au tome 3 (cf. exercice 10 du § X.3). Rappelons que si ρ est un réel < 1, posant $\Delta(t) = \sqrt{1 - \rho \sin^2 t}$, la fonction réciproque de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\Delta(t)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et se note Am.

On pose alors : $\operatorname{sn} u = \sin\,(\operatorname{Am} u)$, $\operatorname{cn} u = \cos\,(\operatorname{Am} u)$ et $\operatorname{dn} u = \Delta\,(\operatorname{Am} u)$ $(u \in \mathbb{R})$. Le réel $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\Delta(t)}$ est noté K.

Si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, soit $D = D(u, v) = 1 - \rho \sin^2 u \sin^2 v$. En posant $c_1 = \operatorname{cn} u$, $c_2 = \operatorname{cn} v$, $d_1 = \operatorname{dn} u$, $d_2 = \operatorname{dn} v$, $s_1 = \operatorname{sn} u$, $s_2 = \operatorname{sn} v$ ont été démontrées dans l'exercice précité les formules (que nous admettrons ici)

(1) $\operatorname{sn}\,(u + v) = \dfrac{s_1\, c_2\, d_2 + s_2\, c_1\, d_1}{D}$ (2) $\operatorname{cn}\,(u + v) = \dfrac{c_1\, c_2 - s_1\, s_2\, d_1\, d_2}{D}$

(3) $\operatorname{dn}\,(u + v) = \dfrac{d_1\, d_2 - \rho s_1\, s_2\, c_1\, c_2}{D}$.

Démontrer ici l'égalité

$$\sin(\mathrm{Am}\,(u+v) - \mathrm{Am}\,(u-v)) = \frac{2\,s_2\,c_2\,d_1}{D}. \tag{4}$$

PARTIE III

Soit $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ l'excentricité de l'ellipse $\mathscr{C}$ du I. On considère les fonctions sn, cn et dn du II, avec $\rho = e^2$. On désigne par ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ formé des $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(\mathrm{Am}\,u, \mathrm{Am}\,v) \in U$. On note L et H les fonctions $\omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \mathscr{L}(\mathrm{Am}\,u, \mathrm{Am}\,v)$ et $(u, v) \mapsto \mathscr{H}(\mathrm{Am}\,u, \mathrm{Am}\,v)$.

a) Montrer que $\mathrm{d}L = A(u, v)(\mathrm{d}u - \mathrm{d}v)$ et $\mathrm{d}H = B(u, v)(\mathrm{d}u + \mathrm{d}v)$, avec A et B fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de ω dans $\mathbb{R}$.

b) Utiliser les formules (1), (2) et (4) du II pour montrer que les coordonnées dans $\mathscr{R}$ de $M(\mathrm{Am}\,u, \mathrm{Am}\,v)$ sont données par :

$$X_M = a\,\frac{\sin\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\mathrm{dn}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)}{\mathrm{cn}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)}\ ; \qquad Y_M = b\,\frac{\mathrm{cn}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)}{\mathrm{cn}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)}.$$

*c*1) Soit $\alpha \in\,]0, 2K[$. Déduire de ce qui précède que la fonction $\Lambda_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto L(u, u+\alpha)$ est constante, et que la courbe paramétrée $u \mapsto M(\mathrm{Am}\,u, \mathrm{Am}\,(u+\alpha))$ a pour trajectoire une ellipse $\mathscr{C}_\alpha$ qui a les mêmes foyers F et F' que $\mathscr{C}$.

*c*2) Montrer que $\{\mathscr{C}_\alpha\}_{\alpha \in\,]0, 2K[}$ est une *partition* de Ω, et que $\alpha \mapsto C_\alpha$ = valeur constante de Λ_α est une bijection de $]0, 2K[$ sur $]l, +\infty[$.

*d*1) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On note $I_\beta = \left]\dfrac{\beta}{2} - K, \dfrac{\beta}{2}\right[$. Montrer que la fonction $\Theta_\beta : I_\beta \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto H(u, \beta - u)$ est constante, et que la courbe paramétrée $u \mapsto M(\mathrm{Am}\,u, \mathrm{Am}\,(\beta - u))$, $I_\beta \longrightarrow \mathscr{P}$ a pour trajectoire un arc d'hyperbole Γ_β ayant F et F' pour foyers, sauf pour des valeurs particulières de β à préciser.

*d*2) Montrer : $\bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathrm{Im}\,(\Theta_\beta) = \Omega$. Trouver les couples $(\beta, \beta') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Gamma_\beta = \Gamma_{\beta'}$, et ceux tels que $\mathrm{Im}\,(\Theta_\beta) = \mathrm{Im}\,(\Theta_{\beta'})$.

*e*1) Soit $M \in \mathscr{C}_\alpha$ pour un $\alpha \in\,]0, 2K[$. Montrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_\alpha$ est la *bissectrice extérieure* des tangentes issues de M à $\mathscr{C}$.

*e*2) Soit $P \in \Gamma_\beta$ pour un $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que la tangente en P à Γ_β est la *bissectrice intérieure* des tangentes issues de P à $\mathscr{C}$.

*f*1) Soit $(\varphi_1, \psi_1) \in U$ et $(\varphi_2, \psi_2) \in U$ avec $\varphi_1 < \varphi_2 < \psi_1 < \psi_2$ et $\psi_2 - \varphi_1 < \pi$. On note $M(\varphi_1, \psi_1) = M_1$; $M(\varphi_2, \psi_2) = M_2$; $M(\varphi_1, \varphi_2) = N_1$; $M(\psi_1, \psi_2) = N_2$; $M(\varphi_1, \psi_2) = P_1$; $M(\varphi_2, \psi_1) = P_2$. Montrer l'équivalence des conditions (I) à (III) suivantes :

(I) M_1 et M_2 appartiennent à une même $\mathscr{C}_\alpha$.

(II) N_1 et N_2 appartiennent à une même $\mathscr{C}_\alpha$.

(III) P_1 et P_2 appartiennent à une même Γ_β.

*f*2) On suppose ces conditions satisfaites. Soit α_1, α_2, β réels tels que $\mathscr{C}_{\alpha_1}$ contienne M_1 et M_2, que $\mathscr{C}_{\alpha_2}$ contienne N_1 et N_2 et que Γ_β contienne P_1 et P_2. Démontrer que les tangentes en M_1 et M_2 à $\mathscr{C}_{\alpha_1}$, en N_1 et N_2 à $\mathscr{C}_{\alpha_2}$ et en P_1 et P_2 à Γ_β sont 6 droites concourantes en un point G, et que G est le centre d'un cercle tangent aux 4 droites M_1N_2, M_2N_1, M_1N_1 et M_2N_2 (les coordonnées de G sont très simples).

g) Soit trois réels φ, θ, ψ avec $\varphi < \theta < \psi$ et $\psi - \varphi < \pi$. On note : $P = M(\varphi, \psi)$; $Q = M(\theta, \psi)$; $R = M(\varphi, \theta)$; $I = m(\theta)$. On suppose que Q et R appartiennent à une même

$\mathscr{C}_\alpha$. Montrer que cela a lieu ssi P et I appartiennent à une même Γ_β, et que si c'est vérifié, le cercle inscrit au triangle IQR touche la droite IQ au point I.

N.B. Les questions *f*2) et *g*) méritent de belles figures.

§ IX.4 *COURBURE DES COURBES PLANES*

Dans ce §, $\mathscr{E}$ désigne un plan affine euclidien orienté, de plan directeur E.

Le fait qu'une courbe plane possède, en un paramètre régulier, une seule normale, et l'utilisation des fonctions angulaires, conduisent à des techniques particulièrement efficaces pour toutes les questions liées à la courbure.

Repère de Frenet (1)

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^q$ $(1 \leqslant q \leqslant +\infty)$ régulière, et soit $t \mapsto s(t)$ une abscisse curviligne de f; posons $J = s(I)$ et $g = f \circ s^{\langle -1 \rangle}$. Notons $\vec{\tau}$ la fonction vecteur unitaire tangent définie par g : $\vec{\tau}(s) = g'(s)$ $(s \in J)$. Pour $s \in J$, posons $\vec{\tau}_1(s) = \Lambda\vec{\tau}(s)$. Par définition, le repère orthonormal direct $\mathscr{R}(s) = (g(s)\,;\ \vec{\tau}(s), \vec{\tau}_1(s))$ est le **repère de Frenet** en le paramètre s (et associé à g) ; les fonctions $s \mapsto \mathscr{R}(s)$ et $s \mapsto (\vec{\tau}(s), \vec{\tau}_1(s))$ sont les **fonctions repère de Frenet** et **fonction base de Frenet** associées à g (elles dépendent du choix de s et du choix de l'orientation de $\mathscr{E}$, mais cela est de peu d'importance dans la mesure où ce ne sont que des *outils intermédiaires* qui disparaissent dans le résultat final).

Pour $s \in J$, la droite $\mathscr{N}(s) = g(s) \dotplus \mathbb{R}\vec{\tau}_1(s)$ est l'unique normale en $g(s)$ à g. Si $q \geqslant 2$ et si s est paramètre birégulier, $\mathscr{N}(s)$ est donc la normale principale en s. Mais $\mathscr{N}(s)$ présente l'avantage d'être également définie si $q = 1$ ou si s est paramètre d'inflexion. La fonction $\vec{\tau} : J \longrightarrow E$ est de classe $\mathscr{C}^{q-1}$ si $q \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $q = +\infty$. Il en est donc de même de $\vec{\tau}_1 = \Lambda\vec{\tau}$.

Si $q \geqslant 2$, en dérivant $\|\vec{\tau}(s)\|^2 = 1$, on voit que $(\vec{\tau}(s) \mid \vec{\tau}'(s)) = 0$, et par suite il existe une unique fonction $\mathscr{K}_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(1) \qquad (\forall s \in J) \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} = \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)}\,.$$

Par définition, la fonction $\mathscr{K}_1$ qui vérifie (1) s'appelle **courbure algébrique associée à g.**

(1) Frédéric Jean *Frenet,* mathématicien français (1816-1868).

Par linéarité du produit vectoriel de E, $\wedge \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{d}{ds}(\wedge\vec{\tau}) = \dfrac{d\vec{\tau}_1}{ds}$, et comme $\wedge\vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}$, la relation (1) est *équivalente* à

$$(2) \qquad (\forall s \in J) \quad \boxed{\frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}(s)}.$$

Les **formules de Frenet** (1) et (2) expriment les composantes des dérivées des vecteurs de base du repère de Frenet en s sur ces vecteurs de base eux-mêmes. Si l'on se souvient que la courbure géométrique $\mathscr{K}$ associée à g a été définie au § IX.3 par $\mathscr{K}(s) = \|g''(s)\| = \left\|\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\right\|$, on en déduit :

$$(3) \qquad (\forall s \in J) \quad \boxed{|\mathscr{K}_1(s)| = \mathscr{K}(s)}.$$

Rappelons que $\mathscr{K}(s) = 0$ (i.e. $\mathscr{K}_1(s) = 0$) ssi s est paramètre d'inflexion de g.

Remarque 1 : Il ne faut pas déduire de (3) l'existence d'un $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\mathscr{K}_1 = \varepsilon\mathscr{K}$ (prendre pour contre-exemple la cubique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \dfrac{t^3}{3}$). Cependant *si f est birégulière,* un argument facile de continuité montre qu'un tel $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ existe.

En un paramètre birégulier $s \in J$, le scalaire $\dfrac{1}{\mathscr{K}_1(s)} = \rho_1(s)$ est appelé **rayon de courbure algébrique.** D'après (3) : $|\rho_1(s)| = \rho(s)$. Soit alors $\vec{\nu}(s) = \dfrac{1}{\mathscr{K}(s)}\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ le vecteur unitaire normal principal en s et $C(s) = g(s) \dotplus \rho(s)\,\vec{\nu}(s)$ le centre de courbure en s. Notons $\varepsilon(s)$ l'élément de $\{-1, 1\}$ tel que $\vec{\tau}_1(s) = \varepsilon(s)\,\vec{\nu}(s)$.

Puisque $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s) = \mathscr{K}(s)\,\vec{\nu}(s) = \varepsilon(s)\,\mathscr{K}(s)\,\vec{\tau}_1(s)$,

on voit que $\mathscr{K}_1(s) = \varepsilon(s)\,\mathscr{K}(s)$, d'où $\rho(s)\,\vec{\nu}(s) = (\varepsilon(s)\,\rho_1(s))$ $(\varepsilon(s)\,\vec{\tau}_1(s)) = \rho_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)$, d'où

$$(4) \qquad \boxed{C(s) = g(s) \dotplus \rho_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)}.$$

Le centre de courbure, ainsi obtenu de façon quasi automatique, ne dépend que de s et de g, mais pas de l'orientation de $\mathscr{E}$, contrairement au repère de Frenet.

Calcul de la courbure algébrique

Conservons les notations et hypothèses ci-dessus. Pour $t \in I$, posons $s = s(t)$. On a, par dérivation de $g(s) = f(t)$: $f'(t) = s'(t)\, g'(s)$; $f''(t) = s''(t)\, g'(s) + (s'(t))^2\, g''(s)$. Utilisons le produit mixte de $\mathscr{E}$:

$$[f'(t), f''(t)] = (s'(t))^3\, [g'(s), g''(s)] = (s'(t))^3 \left[\vec{\tau}(s), \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\right] =$$

$$= (s'(t))^3\, [\vec{\tau}(s), \mathscr{K}_1(s)\, \vec{\tau}_1(s)] = \mathscr{K}_1(s) \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3$$

car $[\vec{\tau}(s), \vec{\tau}_1(s)] = 1$. D'où :

$$(5) \qquad \boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{\varepsilon}{\|f'(t)\|^3}\, [f'(t), f''(t)]}$$

avec $\varepsilon = +1$ si $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} < 0$, ce qui précise la formule (2) du § IX.3.

Soit $\mathscr{R} = \{O\,; e_1, e_2\}$ un repère orthonormal *direct* de $\mathscr{E}$. Si $f(t)$ est donné dans ce repère par ses coordonnées $(f_1(t), f_2(t))$, (5) s'écrit :

$$(6) \qquad \boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{\varepsilon}{(f_1'^2(t) + f_2'^2(t))^{3/2}}\, (f_1'(t)\, f_2''(t) - f_1''(t)\, f_2'(t))}\,.$$

En particulier, si f est *cartésienne* dans ce repère, avec $f_1(t) = t$:

$$(7) \qquad \boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{\varepsilon}{(1 + f_2'^2(t))^{3/2}}\, f_2''(t) \quad , \text{ en abrégé } \quad \frac{\varepsilon y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\,.}$$

Si maintenant $f(t)$ est donnée, dans le repère ci-dessus, par des coordonnées polaires $\theta(t)$ et $r(t)$, i.e. $\overrightarrow{Of(t)} = r(t)\, \vec{u}(\theta(t))$, on a, avec des notations abrégées (r' pour $r'(t)$, etc.) :
$f'(t) = r'\, \vec{u} + r\theta'\, \vec{u}_1$, $f''(t) = (r'' - r\theta'^2)\, \vec{u} + (r\theta'' + 2\, r'\, \theta')\, \vec{u}_1$, d'où :

$$(8) \qquad \mathscr{K}_1(s) = \frac{\varepsilon}{(r'^2 + r^2\, \theta'^2)^{3/2}}\, (r^2\, \theta'^3 + 2\, r'^2\, \theta' - rr''\, \theta' + rr'\, \theta'')$$

qui se réduit, dans le cas particulier où $\theta = \theta(t) = t$ pour tout t, à :

$$(9) \qquad \boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{\varepsilon}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}\, (r^2 + 2\, r'^2 - rr'')}\,.$$

(Si $\theta(t) \equiv t = \theta$, les paramètres θ d'*inflexion* sont ceux qui annulent $r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)$).

Il est commode, si $r(\theta)$ ne s'annule jamais, et lorsque $\theta = t$ pour tout t, de poser $\Phi = \dfrac{1}{r}$, ce qui simplifie la formule (9) en :

$$\boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{\varepsilon \Phi^3}{(\Phi^2 + \Phi'^2)^{3/2}} (\Phi + \Phi'')} \tag{10}$$

(en particulier, θ est paramètre d'inflexion ssi $\Phi(\theta) + \Phi''(\theta) = 0$).

Examinons enfin le cas où $t \mapsto f(t)$ est définie comme enveloppe de la droite D_θ d'équation dans $\mathscr{R} : x \cos\theta + y \sin\theta - \lambda(\theta) = 0$. On se souvient que le point caractéristique $M = M_\theta$ de D_θ a pour coordonnées (§ VIII.3)

$$x_M(\theta) = \lambda(\theta) \cos\theta - \lambda'(\theta) \sin\theta, \quad y_M(\theta) = \lambda(\theta) \sin\theta + \lambda'(\theta) \cos\theta,$$

d'où, par dérivation :
$x'_M(\theta) = -(\lambda(\theta) + \lambda''(\theta)) \sin\theta$; $y'_M(\theta) = (\lambda(\theta) + \lambda''(\theta)) \cos\theta$.

Plaçons-nous sur un intervalle J où la fonction $\theta \mapsto \operatorname{sgn}(\lambda(\theta) + \lambda''(\theta))$ reste constante, de valeur $\eta \neq 0$. Choisissons une abscisse curviligne s sur la portion d'enveloppe $f|_J$, telle que $\mathrm{d}s = \eta(\lambda(\theta) + \lambda''(\theta))\,\mathrm{d}\theta$. Alors le repère de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ associée à s est donné par
$\vec{\tau} = \eta \vec{u}_1$, $\vec{\tau}_1 = -\eta \vec{u}$ (avec $\vec{u} = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$ comme d'habitude et $\vec{u}_1 = \Lambda \vec{u}$), d'où :

$$\mathscr{K}_1(s)\, \vec{\tau}_1(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}\theta} = -\eta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \vec{u} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \vec{\tau}_1,$$

qui donne :

$$\boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\eta}{\lambda(\theta) + \lambda''(\theta)}}\,. \tag{11}$$

Cercle de courbure et concavité

Reprenons la courbe paramétrée régulière $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leq q \leq +\infty)$ où $t \mapsto s(t)$ est une abscisse curviligne de f, et $g = f \circ s^{\langle -1 \rangle}$. Soit $s \in \mathring{J}$ un paramètre *birégulier*, et soit $\Omega(s)$ le centre de courbure en s.

Le vecteur $\overrightarrow{g(s)\Omega(s)} = \rho_1^2(s)\, g''(s)$ est $\mathbb{R}_+^*$-colinéaire à $g''(s)$. Or on a vu au chapitre VII que $g''(s)$ pointe, par rapport à la tangente en s, du côté où la courbe tourne sa concavité (au moins localement, pour les paramètres

voisins de s). Donc, *par rapport à la tangente en le paramètre s, le centre de courbure $\Omega(s)$ est du côté où g tourne sa concavité.*

Plaçons-nous en particulier dans les conditions de validité de (9). Posant $M = g(s)$ et $\Omega = \Omega(s)$, on calcule facilement (les dérivées étant celles par rapport à θ) que

$$\vec{\tau}_1 = \varepsilon (r^2 + r'^2)^{-1/2} (-r\vec{u} + r' \vec{u}_1),$$

d'où $(\overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{M\Omega}) = (-r\vec{u} \mid \rho_1 \vec{\tau}_1) = -r\rho_1(\vec{u} \mid \vec{\tau}_1) = \varepsilon r^2 \rho_1 (r^2 + r'^2)^{-1/2}$, et compte tenu de (9) :

$$(\overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{M\Omega}) = \frac{r^2(r^2 + r'^2)}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Par suite O est du même côté que Ω par rapport à la tangente en s (angle $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{M\Omega})$ aigu) ssi $r^2 + 2r'^2 - rr'' > 0$, ce qui équivaut à

$$\Phi(\theta)\ (\Phi(\theta) + \Phi''(\theta)) > 0.$$

On dit alors que la courbe (pour les valeurs de l'angle polaire voisines de θ) **tourne sa concavité vers O.** Dans le cas contraire, on dit qu'elle **tourne sa concavité du côté opposé à celui de O.**

Position relative d'une courbe et de son cercle osculateur

Soit $s_0 \in \mathring{J}$ un paramètre birégulier de la courbe g de classe $\mathscr{C}^q$, avec $q \geqslant 3$. Proposons-nous d'étudier la position relative, pour les paramètres s voisins de s_0, de $g(s)$ et du cercle osculateur en s_0. La question étant *locale* (dans l'espace des paramètres), nous sommes ramenés au problème suivant : soit $M_0 = g(s_0)$, $e_1 = g'(s_0)$, $e_2 = \Lambda e_1$. Donnons-nous une représentation locale de g autour de s_0, centrée en M_0, qui soit *cartésienne dans le repère* $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, e_2)$, i.e. de la forme
$x \mapsto \Phi(x) = M_0 \dotplus (xe_1 + \varphi(x) e_2)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^q$ sur un intervalle ouvert Λ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Il s'agit de placer, pour x voisin de 0, $\Phi(x)$ par rapport au cercle osculateur en M_0. Il est clair que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) \neq 0$ (s_0 est birégulier). Le cercle osculateur Γ_0 pour $x = 0$ à Φ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\varphi''(0)} y = 0$$

(utiliser par exemple (7) avec l'abscisse curviligne $\sigma(x) = \int_0^x (1 + y'^2(t))^{1/2}\, dt$), d'où la représentation locale de Γ_0 en M_0 :

$$\Psi : x \mapsto M_0 \dotplus \left(xe_1 + \left(\frac{\varphi''(0)}{2} x^2 + \xi_1(x)\right) e_2\right), \text{ avec } \xi_1(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^3),$$

tandis que $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{6}\varphi'''(0) + \xi_2(x)$, avec $\xi_2(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^3)$,

d'où :

(11) $\overrightarrow{\Psi(x)\Phi(x)} = \left(\frac{x^3}{6}\varphi'''(0) + \xi(x)\right) e_2$, avec $\xi(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^3)$.

Si $\varphi'''(0) \neq 0$, la relation (11) s'écrit $\overrightarrow{\Psi(x)\Phi(x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}\varphi'''(0)\, e_2$, ce qui montre que $\Phi(x)$ *traverse le cercle osculateur* Γ_0 en M_0 quand x traverse 0 (cf. fig. 1). Cela arrive sûrement si Γ_0 n'est pas surosculateur en s_0 à g (cf. § VII.4).

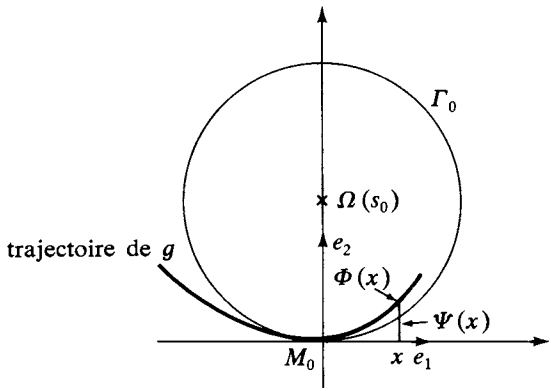


Fig. 1.

Interprétons la condition $\varphi'''(0) \neq 0$ en utilisant le théorème IX.3.2. On peut supposer $s_0 = 0$. Une représentation locale *normale* de Γ_0 au voisinage de M_0 s'obtient à partir de $\vec{\tau} = g'(s)$, $\vec{\tau}_1 = \wedge\, \vec{\tau}$, et de :

$s \mapsto P(s) = M_0 \dotplus \frac{1}{\mathscr{K}_1(0)}(e_1 \sin(s\mathscr{K}_1(0)) + e_2(1 - \cos(s\mathscr{K}_1(0)))$, d'où :

$$\overrightarrow{M_0 P(s)} = s e_1 + \frac{\mathscr{K}_1(0)}{2} s^2 e_2 - \frac{\mathscr{K}_1(0)^2}{6} s^3 e_1 + \sigma_1(s), \text{ avec } \sigma_1(s) \underset{s \to 0}{\in} o(s^3),$$

tandis que, à partir de $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = g''(s) = \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)$

(d'où $\frac{d^2\vec{\tau}}{ds^2} = g'''(s) = -\mathscr{K}_1^2(s)\,\vec{\tau} + \mathscr{K}_1'(s)\,\vec{\tau}_1(s)$), on obtient :

$$\overrightarrow{M_0 g(s)} = s e_1 + \frac{\mathscr{K}_1(0)}{2} s^2 e_2 + \left[\frac{-\mathscr{K}_1^2(0)}{6} s^3 e_1 + \frac{\mathscr{K}_1'(0)}{6} s^3 e_2\right] + \sigma_2(s),$$

avec $\sigma_2(s) \underset{s \to 0}{\in} o(s^3)$.

On constate donc que Γ_0 *est surosculateur en* M_0 *à* g *ssi* $\mathscr{K}_1'(0) = 0$, i.e. ssi la courbure est « stationnaire » pour $s = s_0$.

Utilisation de fonctions angulaires

Reprenons la courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ régulière de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$ du début de ce §, une courbe paramétrée normale $g : J \longrightarrow \mathscr{E}$, $\mathscr{C}^q$-équivalente à f, et l'abscisse curviligne correspondante $t \mapsto s = s(t)$. Notons $(g(s)\ ;\ \vec{\tau}(s),\ \vec{\tau}_1(s))$ le repère de Frenet associé à g (ce qui suppose $\mathscr{E}$ orienté), $\mathscr{K}_1$ la fonction courbure associée à g, et (e_1, e_2) une base orthonormale *directe* de E.

D'après les résultats du § IX.1, on a une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$, *continue,* unique à l'addition près d'une constante $C \in 2\pi\mathbb{Z}$, telle que

$$(12) \qquad \boxed{(\forall s \in J) \qquad \vec{\tau}(s) = e_1 \cos \varphi(s) + e_2 \sin \varphi(s)}.$$

De plus cette fonction φ est de classe $\mathscr{C}^{q-1}$ si $q < +\infty$, et de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $q = +\infty$ (*c'est l'une des déterminations continues de l'angle orienté* $\widehat{e_1, \vec{\tau}}$).

THÉORÈME IX.4.1

Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a :

$$(13) \qquad (\forall s \in J) \qquad \boxed{\mathscr{K}_1(s) = \frac{d\varphi}{ds}}.$$

Démonstration :

La dérivation de (12) donne

$\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \varphi'(s)[-e_1 \sin \varphi(s) + e_2 \cos \varphi(s)]$. En comparant à (1), compte tenu de $\tau_1(s) = -e_1 \sin \varphi(s) + e_2 \cos \varphi(s)$, on trouve (13). ■

Cette formule très simple et très intuitive était parfois utilisée pour définir la courbure, en se référant au cas où $g(s)$ décrit un cercle.

Remarque 1 : La formule (12) reste valable si $q = 1$.

Remarque 2 : La formule (13) montre que, *si* g *est birégulière,* φ est un changement de paramètre $\mathscr{C}^{q-1}$-admissible si $q < +\infty$, $\mathscr{C}^\infty$-admissible si $q = +\infty$. En pratique, f est généralement de classe $\mathscr{C}^\infty$, et φ constitue un excellent paramètre, ne serait-ce qu'à cause de sa signification géométrique.

Soit maintenant $O \in \mathscr{E}$ quelconque, et $\mathscr{R}$ le repère $(O\,;e_1, e_2)$. Notons g_1, g_2 les coordonnées de g dans $\mathscr{R}$; la relation (12) se traduit par :

$$\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}s} = \cos\varphi(s)\,; \quad \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}s} = \sin\varphi(s) \tag{14}$$

formules que l'on préfère écrire

$$\boxed{\mathrm{d}g_1 = \mathrm{d}s\cos\varphi(s)\,; \quad \mathrm{d}g_2 = \mathrm{d}s\sin\varphi(s)} \tag{15}$$

forme plus commode car plus simple (on peut substituer $s(t)$ à la place de s, en convenant que $\mathrm{d}s$ signifie alors $s'(t)\,\mathrm{d}t$, et que de même $\mathrm{d}g_k$ signifie $(g_k \circ s)'(t)\,\mathrm{d}t$).

Notons qu'en posant $Z = g_1 + \mathrm{i}g_2$, on peut remplacer (15) par

$$\boxed{\mathrm{d}Z = \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(s)}}. \tag{16}$$

Supposons maintenant que g soit définie en coordonnées polaires relatives à $\mathscr{R}$, par des fonctions $r(s)$, $\theta(s)$ de classe $\mathscr{C}^q$, de sorte que $\overrightarrow{Og(s)} = r\vec{u}$. On note habituellement $V(s) = V$ l'une des déterminations continues de l'angle orienté $\widehat{\vec{u}, \vec{\tau}}$. Comme θ est une détermination continue de $\widehat{e_1, \vec{u}}$, on en déduit (cf. § IX.1) que $\theta + V$ est une détermination continue de $\widehat{e_1, \vec{\tau}}$. Alors :

$$(\forall s \in J) \quad \boxed{\varphi = \theta + V} \tag{17}$$

à condition que l'égalité ait lieu en le paramètre s_0, ce qu'on peut supposer.

En comparant $\vec{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\vec{u} + r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\vec{u}_1$ et $\vec{\tau} = \vec{u}\cos V + \vec{u}_1 \sin V$, on a :

$$\boxed{\mathrm{d}r = \mathrm{d}s\cos V\,; \quad r\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}s\sin V} \tag{18}$$

et si $\cos V$ ne s'annule pas, on en déduit :

$$\boxed{r\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{tg}\,V}. \tag{19}$$

Les relations (13) à (19) permettent souvent de résoudre les problèmes où intervient la courbure de façon plus élégante que les relations (5) à (10).

Exemple 1. *Courbure et centre de courbure d'une cardioïde*

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. Considérons l'arc de cardioïde paramétré en polaires dans $\mathscr{R}$ par $r = a(1+\cos\theta)$ ($a > 0$ donné, $\theta \in I =]-\pi, \pi[$), le paramètre étant θ. Autrement dit, $\overrightarrow{Of(\theta)} = r\vec{u}$, f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. On a :

$$f'(\theta) = r'\,\vec{u} + r\vec{u}_1 = a(-\sin\theta\,\vec{u} + (1+\cos\theta)\,\vec{u}_1)$$
$$= 2\,a\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_1\right).$$

Donc $f'(\theta)$ ne s'annule pas sur I, et comme f est trivialement injective, c'est une immersion. En fait, f est un *plongement* car son image est la sous-variété définie dans $\mathscr{R}$ par $(x^2+y^2)^2 - 2\,ax(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$, que nous noterons $\mathscr{C}$ (c'est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$). Pour $\theta \in I$, $\cos\frac{\theta}{2}$ reste > 0 et $\left\|-\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_1\right\| = 1$, donc $\|f'(\theta)\| = 2\,a\cos\frac{\theta}{2}$. On a donc une abscisse curviligne s unique de f telle que $\frac{ds}{d\theta} = 2\,a\cos\frac{\theta}{2}$ et $s(0) = 0$; c'est $\boxed{s = 4\,a\sin\frac{\theta}{2}}$.

Soit $g(s) = f(\theta)$, $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ la base de Frenet associée à g et $\mathscr{K}_1$ la fonction courbure algébrique correspondante.

Puisque $f'(\theta) = \frac{ds}{d\theta}\,g'(s)$ et $f'(\theta) = \frac{ds}{d\theta}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_1\right)$, on en déduit sans nouveau calcul :

$$(20)\qquad \vec{\tau} = -\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\vec{u} + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_1$$

d'où : $\quad \vec{\tau}_1 = -\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u} - \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_1 = -\cos\frac{3\,\theta}{2}\,e_1 - \sin\frac{3\,\theta}{2}\,e_2$.

D'après (20), une détermination continue de l'angle orienté $\widehat{\vec{u}, \vec{\tau}}$ est $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} = V$, et d'après (17) $\boxed{\varphi = \theta + V = \frac{3\,\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}$.

La courbure algébrique est donnée par (13) :

$$\mathscr{K}_1(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{3}{4\,a\cos\theta/2}.$$

Donc $\mathscr{C}$ est birégulière, son rayon de courbure algébrique associée à g étant

$$\rho_1(s) = \frac{4\,a}{3}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Il reste à préciser le centre de courbure $\Omega(s)$, donné par

$$\overrightarrow{O\Omega}(s) = \overrightarrow{Og(s)} + \rho_1(s)\,\vec{\tau}_1(s) = \overrightarrow{Of(\theta)} + \frac{4\,a}{3}\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{\tau}_1,$$

d'où ses coordonnées dans $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases} x_\Omega = a(1+\cos\theta)\cos\theta - \dfrac{4a}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ y_\Omega = a(1+\cos\theta)\sin\theta - \dfrac{4a}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}, \end{cases}$$

ou, après simplification :

$$\begin{cases} x_\Omega = a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cos\theta - \dfrac{1}{6}\cos 2\theta\right) \\ y_\Omega = a\left(\dfrac{1}{3}\sin\theta - \dfrac{1}{6}\sin 2\theta\right). \end{cases}$$

Exemple 2. *Courbure de l'ellipse*

Considérons l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ dans le repère orthonormé direct $(O\,;e_1,e_2)$, avec $a>b>0$ comme trajectoire de la courbe paramétrée $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathscr{E}$, $t\mapsto O+(a\,e_1\cos t+b\,e_2\sin t)$.
Posons $H(t)=H=\|f'(t)\|^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t$. Choisissons pour f l'abscisse curviligne $s=s(t)=\displaystyle\int_0^t\sqrt{H(u)}\,\mathrm{d}u$, et notons $(\vec{\tau},\vec{\tau}_1)$ la base de Frenet et $\mathscr{K}_1$ la courbure algébrique associées à s. On a immédiatement les vecteurs $\vec{\tau}(s(t))$ et $\vec{\tau}_1(s(t))$ par leurs composantes dans $\mathscr{R}$:

$$\vec{\tau}(s(t)):\begin{cases} \dfrac{-a\sin t}{\sqrt{H}} = X \\ \dfrac{b\cos t}{\sqrt{H}} = Y \end{cases};\quad \vec{\tau}_1(s(t)):\begin{cases} \dfrac{-b\cos t}{\sqrt{H}} = -Y \\ -\dfrac{a\sin t}{\sqrt{H}} = X \end{cases}.$$

La formule (1) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}=\mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)$ projetée sur e_1 permet le calcul de $\mathscr{K}_1$ pour $\cos t\neq 0$ (si $\cos t=0$, on projette sur e_2) :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}X'(t)=\frac{1}{\sqrt{H}}X'(t)=\frac{-ab^2\cos t}{H^2}=$$
$$=-\mathscr{K}_1(s)\,Y=\mathscr{K}_1(s)\frac{-b\cos t}{\sqrt{H}},$$

d'où $$(\forall t)\quad \boxed{\mathscr{K}_1(s(t))=\frac{ab}{(H(t))^{3/2}}}.$$

On aurait pu introduire une détermination continue $t\mapsto\varphi(t)$ de l'angle orienté $\widehat{e_1,\vec{\tau}(s(t))}$. Une telle détermination existe et est de classe

$\mathscr{C}^\infty$. Au voisinage de tout réel t, tg $\varphi(t)$ ou cotg $\varphi(t)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$. En raisonnant avec $\operatorname{tg}\varphi(t) = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{-b}{a}\operatorname{cotg} t$, on aurait $(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{b}{a\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{ab}{H}\,\mathrm{d}t$, et on retrouve $\mathscr{K}_1(s(t)) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{ab}{H^{3/2}(t)}$ (si tg $\varphi(t)$ n'est pas défini, on raisonne avec cotg $\varphi(t)$).

Exemple 3 : Soit, avec le même repère $\mathscr{R}$, l'arc de *lemniscate de Bernoulli* paramétré en polaires dans $\mathscr{R}$ par $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, avec $a > 0$ donné, et $\theta \in I = \left]\dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, i.e. $\overrightarrow{Of(\theta)} = r\vec{u}$, avec f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. On a $f'(\theta) = -\dfrac{a^2\sin 2\theta}{r}\vec{u} + r\vec{u}_1$, donc f est régulière. En fait on vérifie comme à l'exemple 1 que f est un plongement ; la sous-variété image de f, notée $\mathscr{L}$, est définie dans $\mathscr{R}$ par $\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0,\ x > 0\}$. On obtient $\|f'(\theta)\| = \dfrac{a^2}{r}$. On a donc une unique abscisse curviligne s telle que $s(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{a^2}{r}$, mais rien n'oblige à expliciter s (ici cela nécessiterait l'usage de fonctions elliptiques). Soit g la courbe paramétrée normale telle que $g(s) = f(\theta)$ pour $\theta \in I$ et $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_1$, $\mathscr{K}_1$ définis comme à l'accoutumée. On remarque :

$$f'(\theta) = \frac{-a^2}{r}\sin 2\theta\,\vec{u} + \frac{a^2}{r}\cos 2\theta\,\vec{u}_1 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\left[-\sin 2\theta\,\vec{u} + \cos 2\theta\,\vec{u}_1\right],$$

d'où sans calculs :

$$\vec{\tau} = -\sin 2\theta\,\vec{u} + \cos 2\theta\,\vec{u}_1 = \vec{u}\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \vec{u}_1\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

On peut donc prendre $V = 2\theta + \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi = \theta + V = 3\theta + \dfrac{\pi}{2}$.
On tire de (13) la courbure algébrique :

$$\mathscr{K}_1(s) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{3\,\mathrm{d}\theta}{\dfrac{a^2}{r}\,\mathrm{d}\theta} = \frac{3r}{a^2} = \frac{3}{a}\sqrt{\cos 2\theta}.$$

La courbe $\mathscr{L}$ est donc birégulière. On a : $\rho_1(s) = \dfrac{a^2}{3r}$, et le centre de courbure $\Omega(s)$ est défini par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\Omega(s)} &= \overrightarrow{Of(\theta)} + \rho_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)\\ &= r\vec{u} + \frac{a^2}{3r}(e_1\cos(3\theta+\pi) + e_2\sin(3\theta+\pi)),\end{aligned}$$

d'où les coordonnées de $\Omega(s)$ dans $\mathscr{R}$ en fonction de θ :

$$x_\Omega = \frac{2a^2}{3r}\cos^3\theta\ ;\quad y_\Omega = \frac{-2a^2}{3r}\sin^3\theta,\quad \text{avec}\quad r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Tenant compte de l'exemple 3 du § IX.2, un $\mathscr{C}^\infty$-plongement d'image $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$ privée du point de coordonnées $(a, 0)$ est $t \mapsto \left(\frac{at(t^2+1)}{t^4+1}, \frac{at(t^2-1)}{t^4+1}\right)$, $]0, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[\longrightarrow \mathscr{E}$: l'abscisse curviligne s correspondante est alors donnée pour la demi-boucle située dans le premier quadrant, par $s(t) = a\sqrt{2}\int_1^t \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^4}}$.

Un autre $\mathscr{C}^\infty$-plongement dont l'image est la partie de $\mathscr{L}$ définie par $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ est obtenu en prenant pour paramètre $v = \frac{r}{a}$: l'abscisse curviligne ci-dessus est alors donnée par $s(v) = a\int_v^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}$.

N.B. Dans tous les exercices ci-dessous, $\mathscr{E}$ est un plan affine euclidien orienté, de plan directeur E, et muni si nécessaire d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O\ ; e_1, e_2)$.

Exercice 1 : Soit deux courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^2$, birégulières et normales g_1 et $g_2 : I \longrightarrow \mathscr{E}$, avec $0 \in I$ et $g_1(0) = g_2(0) = M_0$ et enfin $g_1'(0) = g_2'(0)$. On note $\mathscr{K}_1$ et $\mathscr{K}_2$ les courbures algébriques associées à g_1 et g_2. Montrer que $\frac{\mathscr{K}_1(0)}{\mathscr{K}_2(0)}$ est un invariant du groupe affine de $\mathscr{E}$ (Goursat).

Exercice 2 : Soit une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$ normale et birégulière $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$, avec $0 \in I$ et $g(0) = M_0$. Notons $\mathscr{T}_s$ la tangente en s à g.

a) Soit Γ_s le cercle passant par $g(0)$ et tangent en $g(s)$ à $\mathscr{T}_s$ pour $s \in I \setminus \{0\}$ et assez voisin de 0. Montrer que le centre et le rayon de Γ_s ont une limite (à préciser) lorsque $s \xrightarrow{\neq} 0$.

b) Même question avec le cercle tangent en $g(0)$ à $\mathscr{T}_0$ qui passe par $g(s)$.

c) Pour s assez voisin de 0, $\mathscr{T}_s$ rencontre $\mathscr{T}_0$ en P_s. Soit $\mathscr{C}_s$ le cercle circonscrit à $(g(0), g(s), P_s)$. Montrer que le centre et le rayon de $\mathscr{C}_s$ ont une limite (à préciser), quand $s \xrightarrow{\neq} 0$.

d) Dans les mêmes conditions, soit G_s le cercle exinscrit au triangle $(g(0), g(s), P_s)$ centré sur la bissectrice intérieure issue de P_s. Montrer que le centre et le rayon de G_s ont une limite (à préciser) quand $s \xrightarrow{\neq} 0$.

Exercice 3 : Soit les courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$ d'équation dans $\mathscr{R} : x^4 + y^4 + \lambda x^3 + \lambda^2 x^2 - y^2 = 0$. Trouver, lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$, le lieu des deux centres de courbure à $\mathscr{C}_\lambda$ en O (justifier avec soin la question).

Exercice 4 : Soit $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée normale de classe $\mathscr{C}^1$, et soit $\varphi = \varphi(s)$ une détermination de l'angle orienté $\widehat{\overrightarrow{e_1, \vec{\tau}(s)}}$.

a) On suppose trouvé $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall s \in I)\ \varphi(s) \in]\alpha, \alpha + \pi[$. Montrer que g est injective.

b) Etudier la réciproque de cette propriété.

Exercice 5 (roulement sans glissement) :
On dit qu'une courbe régulière variable $\mathscr{C}$ *roule sans glisser* sur une courbe régulière fixe $\mathscr{B}$ ssi $\mathscr{C}$ reste congrue à elle-même modulo le groupe Dep ($\mathscr{E}$), reste tangente à $\mathscr{B}$, et si de plus le point de contact T décrit sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ des abscisses curvilignes s et σ telles que $ds = d\sigma$ lorsque s et σ sont choisies pour que les vecteurs unitaires tangents à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ en T soient *les mêmes*.

a) Une chaînette variable de $\mathscr{E}$, qui reste congrue à elle-même mod (Dep ($\mathscr{E}$)) roule sans glisser sur une droite fixe $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$. Trouver le lieu du sommet de la chaînette. Etudier la courbure du lieu trouvé.

b) Une parabole variable de $\mathscr{E}$, qui reste congrue à elle-même mod (Dep ($\mathscr{E}$)) roule sans glisser sur une droite fixe $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$. Montrer que le lieu du foyer de la parabole est une chaînette de base $\mathscr{D}$.

Exercice 6 (*Epicycloïdes et hypocycloïdes*) : Soit $\mathscr{B}$ un cercle base fixe, de centre O, de rayon $a > 0$. Si un cercle $\mathscr{C}$ roule sans glisser (cf. exercice 5) sur $\mathscr{B}$ en restant à l'extérieur de $\mathscr{B}$, chacun de ses points décrit une courbe appelée *épicycloïde*. Si $\mathscr{C}$ roule sans glisser sur $\mathscr{B}$ à l'intérieur de $\mathscr{B}$, chacun de ses points décrit une courbe appelée *hypocycloïde*.

a) Montrer qu'avec un choix convenable du repère et du paramètre, toutes ces courbes peuvent être représentées par $x = \dfrac{a}{m-1}\ (m \cos t - \cos mt)$, $y = \dfrac{a}{m-1}\ (m \sin t - \sin mt)$.

b) Montrer que toutes ces courbes admettent des points stationnaires. Pour quelles valeurs de m « se referment-elles » ?

c) Le changement de m en $\dfrac{1}{m}$ et de t en mt redonne la même courbe : en déduire que chacune de ces courbes admet une double génération.

d) Etudier les cas particuliers $m = 2$ (cardioïde), $m = 3$ (néphroïde), $m = -1$ (théorème de la Hire), $m = -2$ (H_3), $m = -3$ (H_4 ou astroïde).

Exercice 7 : On sait (cf. exercice 6) qu'une courbe paramétrée ayant pour trajectoire une astroïde est $t \mapsto (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$. On fait rouler sans glisser (cf. exercice 5) une « arche » d'astroïde sur une droite donnée. Trouver le lieu du centre de courbure à l'astroïde au point de contact. Trouver aussi le lieu des points de rebroussement de l'astroïde. Reprendre les mêmes questions avec une cardioïde qui roule sur une droite.

Exercice 8 : Soit une courbe paramétrée $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^4$, normale, birégulière, de rayon de courbure associé $s \mapsto \rho_1(s)$. On suppose $(\forall s \in I)\ \dfrac{d\rho_1}{ds} > 0$.

a) Montrer que les cercles osculateurs à g en deux paramètres distincts et assez voisins ne se rencontrent pas.

b) Soit $(s_1, s_2) \in I^2$ avec $s_1 < s_2$. Montrer que le cercle osculateur Γ_{s_1} à g en s_1 est strictement intérieur au cercle osculateur Γ_{s_2} à g en s_2.

Exercice 9 : Trouver les courbes de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ birégulières telles que leur rayon de courbure géométrique ρ vérifie $\rho = \lambda r$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ est donné, et où r est la longueur du rayon vecteur depuis O en le même paramètre.

Exercice 10 : Trouver les courbes de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ birégulières telles que, pour tout paramètre t, le symétrique du cercle osculateur en t par rapport à la tangente en t soit tangent à $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}e_1$.

Exercice 11 : Trouver les courbes de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ définies en coordonnées polaires dans $\mathscr{R}$ par $\theta \mapsto r = r(\theta)$ et telles que $\mathrm{d}V + 2\,\mathrm{d}\theta = 0$ (où V est une détermination de $\widehat{\vec{u}, \vec{\tau}}$ $\vec{\tau}$ désignant le vecteur unitaire tangent pour une abscisse curviligne s telles que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} > 0$).

Exercice 12 : Soit $\mathscr{F}$ la famille des courbes de $\mathscr{E}$ paramétrées par $x \mapsto O \dotplus (xe_1 + \varphi(x)\,e_2)$, où φ est une solution maximale de l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' - (x^2 + x + 1)\,y = 0$. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit $M_0 = O \dotplus (x_0\,e_1 + y_0\,e_2)$. Lieu des centres de courbure en x_0 des courbes de la famille $\mathscr{F}$ qui passent par M_0 et sont birégulières.

Exercice 13 : Soit une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ birégulière dont aucune tangente ne passe par O ni n'est dirigée par e_2. Pour $t \in I$, soit $M = f(t)$, N le point où la normale $\mathscr{N}_t$ en t rencontre $\mathscr{D} = O \dotplus \mathbb{R}e_1$ et $P = P(t)$ le point où la normale en N à $\mathscr{N}_t$ rencontre Dr (O, M). Trouver f pour que $(\forall t \in I)$ le centre de courbure en t ait même abscisse que $P(t)$.

Exercice 14 (courbes de Ribaucour) : Soit une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ birégulière dont aucune normale ne passe par O. Pour $t \in I$, soit $N = N(t)$ le point où la normale en t rencontre la normale en O à Dr (O, M). Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Trouver f pour que $(\forall t \in I)$ le centre de courbure en t soit $M \dotplus \dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{MN}$.

Etudier les cas particuliers : $\lambda = 1$; $\lambda = 2$; $\lambda = \dfrac{3}{2}$; $\lambda = 3$; $\lambda = \dfrac{1}{2}$; $\lambda = -1$.

Exercice 15 : On identifie $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathscr{R}$. Par définition, un *chemin de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux* de $\mathbb{C}$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ est une application *continue* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (a et b réels, $a < b$) dont les parties réelle et imaginaire sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux.

PARTIE I

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, d'image S_γ. Si $t \in \mathbb{C}\backslash S_\gamma$, on pose $I(\gamma, t) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - t} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(\theta)\,\mathrm{d}\theta}{\gamma(\theta) - t}$.

a) Pour γ fixée, prouver que $t \mapsto I(\gamma, t)$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash S_\gamma$.

b) Montrer que si $\gamma(a) = \gamma(b)$, alors $I(\gamma, t) \in \mathbb{Z}$ pour $t \in \mathbb{C}\backslash S_\gamma$ (cf. tome 3, § III.3).

c) Soit $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On appelle *déformation de γ_1 à γ_2* toute application continue $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$(H)\begin{cases} \forall u \in [0, 1],\ \varphi_u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \mapsto \varphi(t, u) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux et} \\ \quad \begin{cases} \varphi_u(a) = \gamma_1(a) \\ \varphi_u(b) = \gamma_1(b) \end{cases} \\ \forall t \in [a, b] \quad \varphi_0(t) = \gamma_1(t) \quad \text{et} \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t). \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une telle déformation φ, et que si $z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{Im}\,(\varphi)$, alors $I(\gamma_1, z) = I(\gamma_2, z)$.

d) Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux tel que $\forall \theta \in [a, b]$, $\gamma(\theta) \neq 0$ et $\mathrm{Im}\,(\gamma(\theta)) \geqslant 0$. Montrer : $I(\gamma, 0)$ ne dépend que de $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ et exprimer $I(\gamma, 0)$ à l'aide de ces nombres.

PARTIE II

Soit une courbe paramétrée normale de classe $\mathscr{C}^2$ $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exists L \in \mathbb{R}_+^* \mid \gamma$ est L-périodique et $(\forall a \in \mathbb{R})$ $\gamma\,|_{[a, a+L[}$ est injective (un tel L est unique). Soit $\vec{\tau}(s)$ le vecteur unitaire tangent à γ. Vérifier que $\dfrac{1}{2\,\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_a^{a+L} \frac{\vec{\tau}'(s)}{\vec{\tau}(s)}\,\mathrm{d}s$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$. On le notera $I(\vec{\tau}, 0)$.

a) Par une isométrie appropriée, montrer qu'on peut se ramener au cas où $\gamma(0) = 0$ et $\vec{\tau}(0) = 1$, et $\operatorname{Im}(\gamma(s)) \geqslant 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On le suppose ainsi pour la suite. On notera Γ le lacet $\vec{\tau}\,|_{[0,L]}$.

b) Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant L\}$. On définit $g : T \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$g(x, y) = -\frac{\gamma(x) - \gamma(y)}{\|\gamma(x) - \gamma(y)\|} \quad \text{si } 0 \leqslant x < y < L \text{ ou } 0 < x < y \leqslant L\,;$$
$$g(x, x) = \vec{\tau}(x) \text{ si } x \in [0, L]\,;\, g(0, L) = -\vec{\tau}(0)\,.$$

*b*1) Prouver que g est continue.

*b*2) Soit Δ le chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux $[0, L] \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\Delta(s) = g(0, 2s)$ si $s \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ et $\Delta(s) = g(2s - L, L)$ si $s \in \left[\frac{L}{2}, L\right]$. Montrer que g permet de déformer Γ en Δ.

*b*3) Montrer, à l'aide de I) *d*) que $I(\Delta, 0) = \frac{1}{i\pi}\int_0^{L/2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)}\,ds = 1$. En déduire : $I(\vec{\tau}, 0) = 1$ (théorème de Whitney) (¹).

PARTIE III

On reprend les notations et hypothèses du début de II. Soit $\mathscr{K}_1$ la fonction courbure algébrique et $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ la base de Frenet associée à g. On suppose $(\forall s \in \mathbb{R})\ \mathscr{K}_1(s) \geqslant 0$. Soit $\varphi(s) = \varphi$ une détermination continue de $\widehat{\overrightarrow{e_1, \vec{\tau}}}$.

a) A l'aide de II.*b*3), prouver : $\varphi([0, 1]) = [0, 2\pi]$.

b) Soit $S = \gamma(\mathbb{R})$. Déduire de a) : si $0 \leqslant s_1 < s_2 < L$ et $\vec{\tau}(s_1) = \vec{\tau}(s_2)$, alors $\gamma([s_1, s_2])$ est un segment de droite ; pour toute tangente $\mathscr{D}$ à γ, l'ensemble S est d'un même côté de $\mathscr{D}$.

c) Soit C l'enveloppe convexe de S. Prouver : $C = \bigcup_{(z_1, z_2) \in S^2} [z_1, z_2]$; C est compact ; si $\mathscr{F}$ est la famille des demi-plans fermés de $\mathscr{E}$ contenant S et limités par une tangente à γ, alors $C = \bigcap_{P \in \mathscr{F}} P$; l'intérieur de C est non vide et c'est l'ensemble des $t \in \mathbb{C}\backslash S$ tels que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^L \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - t}\,ds = 1$, et $\mathbb{C}\backslash C = \{t \in \mathbb{C}\backslash S \mid \frac{1}{2i\pi}\int_0^L \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - t}\,ds = 0\}$; la frontière de C est S ; $\mathbb{C}\backslash C$ est connexe ; si $\mathscr{K}_1^{-1}(0)$ est d'intérieur vide, alors $\mathring{C} = \bigcup_{(z_1, z_2) \in S^2}]z_1, z_2[$.

d) On suppose γ de classe $\mathscr{C}^3$. Montrer, pour tout $A \in S$ et tout vecteur $\vec{V} \in E$: $\int_0^L (\overrightarrow{Ag(s)} \mid \vec{V})\,\mathscr{K}_1'(s)\,ds = 0$. En déduire que la fonction $\mathscr{K}_1\,|_{[0,L[}$ possède au moins quatre extrema locaux (théorème des 4 sommets). *N.B.* Cette question, plus subtile qu'on ne le pense généralement, demande beaucoup de soin.

Exercice 16 : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On donne une courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$, birégulière, ne passant pas par O. Pour $M = f(t)$ $(t \in I)$, soit $J = J(t)$ défini par $\overrightarrow{MJ} = \frac{p}{\|\overrightarrow{OM}\|}\overrightarrow{MO}$, et soit $H = H(t)$ le point commun à la normale $\mathscr{N}_t$ à f en t et à la normale à Dr (O, M) en J ; soit $J' = J'(t)$ le point commun à Dr (O, M) et à la normale en H à $\mathscr{N}_t$. Enfin soit $\Omega = \Omega(t)$ le point commun à $\mathscr{N}_t$ et à la normale en J' à Dr (O, M).

Trouver f pour que $(\forall t)\ \Omega$ soit défini et soit le centre de courbure en t à f.

(¹) Hassler *Whitney*, mathématicien américain contemporain, né en 1907, a apporté des contributions importantes à la théorie des graphes, à la topologie algébrique et différentielle, etc...

Exercice 17 : On donne f comme à l'exercice 16. Soit $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}e_1$. La normale $\mathscr{N}_t$ en $t \in I$ à f rencontre $\mathscr{D}$ en $N = N(t)$. La normale en N à $\mathscr{N}_t$ rencontre Dr $(O, f(t))$ en $J = J(t)$. La normale en J à Dr (O, M) rencontre $\mathscr{N}_t$ en $\Omega = \Omega(t)$. Trouver f pour que, $(\forall t)$ le point Ω soit le centre de courbure en t à f. Comparer avec l'exercice 16.

Exercice 18 *(Inégalité isopérimétrique, démonstration de Hurwitz) :*

a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, 2π-périodique, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Démontrer : $\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt \geqslant \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$, l'égalité ayant lieu ssi $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (\forall t \in \mathbb{R})$ $f(t) = a\cos t + b\sin t$. (*Méthode suggérée :* Montrer que si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont les coefficients trigonométriques de f, ceux de f' sont $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-na_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (où $b_0 = 0$) et appliquer la relation de Parseval à f et f'. Voir aussi tome 2, exercice 9 du § VII.6).

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ normale, 2π-périodique, telle que $g \mid_{[0, 2\pi[}$ soit injective, de coordonnées g_1 et g_2 dans $\mathscr{R}$. Montrer qu'on peut, sans modifier les hypothèses, supposer O choisi tel que $\int_0^{2\pi} g_1(s)\,ds = 0$, ce qu'on suppose pour la suite. On note A l'aire renfermée par g : $A = \int_0^{2\pi} g_1(s)\,g_2'(s)\,ds$. A partir de : $2(\pi - A) = \int_0^{2\pi} (g_1'^2(s) - g_1^2(s))\,ds + \int_0^{2\pi} (g_1(s) - g_2'(s))^2\,ds$, et à l'aide de *a*), montrer : $\pi \geqslant A$, l'égalité ayant lieu ssi la trajectoire de g est un cercle.

c) Les hypothèses sur g sont inchangées, sauf que la période 2π est remplacée par $L > 0$. Déduire de *b*) que : $L^2 \geqslant 4\pi A$, l'égalité ayant lieu ssi la trajectoire de g est un cercle (inégalité *isopérimétrique*).

d) On conserve toutes les hypothèses de *c*), et on suppose en outre g, de classe $\mathscr{C}^2$ et de fonction courbure $\mathscr{K}_1$ associée partout $\geqslant 0$. Avec les notations de l'exercice 15 ci-dessus, partie III, on note D le diamètre de C. Prouver que $A \leqslant \frac{1}{4}\pi D^2$, l'égalité ayant lieu ssi la trajectoire de g est un cercle.

Prouver en outre ici le théorème d'Emch (1926) : il existe un carré formé avc 4 tangentes à g. Essayer enfin d'étendre le théorème d'Emch au cas où $\mathscr{K}_1$ n'est pas de signe constant.

§ IX.5 *COURBES PLANES DÉFINIES PAR LEUR COURBURE ALGÉBRIQUE*

Plaçons-nous dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$, de plan directeur E, et proposons-nous de déterminer toutes les courbes paramétrées normales de $\mathscr{E}$ ayant une fonction courbure algébrique associée donnée.

THÉORÈME IX.5.1

*Soit $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$ normale, de fonction courbure algébrique associée $\mathscr{K}_1$. L'ensemble des courbes paramétrées de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ normales $\tilde{g} : I \longrightarrow \mathscr{E}$ ayant $\mathscr{K}_1$ pour fonction courbure algébrique associée est l'ensemble des courbes de la forme $s \mapsto \Phi(g(s))$, où $\Phi \in$ **Dep** $(\mathscr{E})$ est fixé arbitrairement.*

Démonstration :

a) Soit d'abord $\Phi \in \mathbf{Dep}\ (\mathscr{E})$. Posons $\tilde{g}(s) = \Phi(g(s))$ $(s \in I)$. Il est clair que $\tilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^q$, et que $\tilde{g}'(s) = \vec{\Phi}(g'(s))$, donc $\|\tilde{g}'(s)\| = 1$ pour $s \in I$, i.e. $\tilde{g}$ est normale. Soit $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ la base de Frenet relative à g et $(\tilde{\vec{\tau}}, \tilde{\vec{\tau}}_1)$ celle relative à $\tilde{g}$. Comme $\Phi \in \mathrm{Dep}\ (\mathscr{E})$, on a : $\vec{\Phi}(\vec{\tau}_1) = \vec{\Phi}(\Lambda\vec{\tau}) = \Lambda\vec{\Phi}(\vec{\tau}) = \Lambda\tilde{\vec{\tau}} = \tilde{\vec{\tau}}_1$. Donc l'image de $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ par $\vec{\Phi}$ est $(\tilde{\vec{\tau}}, \tilde{\vec{\tau}}_1)$. De plus $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} = \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\vec{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \vec{\Phi}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\right) = \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\Phi}(\vec{\tau}_1(s)) = \mathscr{K}_1(s)\,\tilde{\vec{\tau}}_1(s)\,,$$

donc $\mathscr{K}_1$ est bien la fonction courbure algébrique associée à $\tilde{g}$.

b) Réciproquement, soit $\widehat{g}$ une courbe paramétrée $I \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ normale dont la fonction courbure associée soit $\mathscr{K}_1$. Notons $(\widehat{\vec{\tau}}, \widehat{\vec{\tau}}_1)$ sa base de Frenet. Fixons $s_0 \in I$; il y a un unique déplacement, que nous noterons Φ, tel que $\Phi(\widehat{g}(s_0)) = g(s_0)$ et $\vec{\Phi}(\widehat{\vec{\tau}}(s_0)) = \vec{\tau}(s_0)$. Alors $\vec{\Phi}(\widehat{\vec{\tau}}_1(s_0)) = \vec{\tau}_1(s_0)$.

Posons $\tilde{g}(s) = \Phi(\widehat{g}(s))$ pour $s \in I$. Alors, d'après *a*), $\tilde{g}$ est une courbe paramétrée normale de classe $\mathscr{C}^2$, de courbure algébrique associée $\mathscr{K}_1$. De plus, si $(\tilde{\vec{\tau}}, \tilde{\vec{\tau}}_1)$ est sa base de Frenet, on a :

$$(\tilde{g}(s_0)\,;\,\tilde{\vec{\tau}}(s_0), \tilde{\vec{\tau}}_1(s_0)) = (g(s_0)\,;\,\vec{\tau}(s_0), \vec{\tau}_1(s_0))\,.$$

Fixons une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E. Désignons par (a, b) (resp. $(\tilde{a}, \tilde{b})$) les composantes de $\vec{\tau}$ (resp. de $\tilde{\vec{\tau}}$) dans $\mathscr{B}$. Les formules de Frenet $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} = \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\vec{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \mathscr{K}_1(s)\,\tilde{\vec{\tau}}_1(s)$ se traduisent par :

$$(1)\qquad \begin{cases} a'(s) = -\mathscr{K}_1(s)\,b(s)\,, & b'(s) = \mathscr{K}_1(s)\,a(s) \\ \tilde{a}'(s) = -\mathscr{K}_1(s)\,\tilde{b}(s)\,, & \tilde{b}'(s) = \mathscr{K}_1(s)\,\tilde{a}(s)\,. \end{cases}$$

De plus, $(\forall s)\ a^2(s) + b^2(s) = \tilde{a}^2(s) + \tilde{b}^2(s) = 1$. Soit $\zeta : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto (a(s) - \tilde{a}(s))^2 + (b(s) - \tilde{b}(s))^2 = 2 - 2\,\psi(s)$, en posant $\psi(s) = a(s)\,\tilde{a}(s) + b(s)\,\tilde{b}(s)$. En tenant compte de (1), on voit que $\psi'(s) = 0$ pour tout s, donc ζ est constante. Or $\zeta(s_0) = 0$.

Donc $\zeta(s) = 0$ pour tout s, i.e. $\vec{\tau}(s) = \tilde{\vec{\tau}}(s)$. Donc $g(s)\,\tilde{g}(s)$ est constant, égal à $g(s_0)\,\tilde{g}(s_0) = 0$, d'où $(\forall s \in I)\ \ g(s) = \tilde{g}(s)$. Finalement, $\widehat{g}(s) = \Phi^{\langle -1 \rangle}(g(s))$ pour tout $s \in I$. ■

Remarque 1 : Cette démonstration n'utilise pas la continuité des dérivées secondes des courbes considérées.

THÉORÈME IX.5.2

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ***continue.*** *Il existe au moins une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathscr{E}$ normale g dont la fonction courbure algébrique associée soit α.*
Si α est de classe $\mathscr{C}^\infty$, toute telle courbe est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Si α est de classe $\mathscr{C}^q$ ($q \in \mathbb{N}$), toute telle courbe est de classe $\mathscr{C}^{q+2}$.

Démonstration :

Fixons $s_0 \in I$. Posons $\varphi(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \alpha(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ ($s \in I$). Puis donnons-nous un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$. Définissons les fonctions $g_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \displaystyle\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, $g_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \displaystyle\int_{s_0}^{s} \sin\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ et $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto O \dot{+} (g_1(s)\,e_1 + g_2(s)\,e_2)$. Il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^2$, et même, que si φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (resp. de classe $\mathscr{C}^q$, $q \in \mathbb{N}$), alors g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (resp. de classe $\mathscr{C}^{q+2}$).

D'autre part $g'(s) = e_1 \cos\varphi(s) + e_2 \sin\varphi(s)$ reste de norme 1, donc g est normale, et son vecteur unitaire tangent associé est $\vec{\tau}(s) = e_1 \cos\varphi(s) + e_2 \sin\varphi(s)$. En particulier, $\varphi(s)$ est une détermination continue de $\widehat{e_1, \vec{\tau}(s)}$, donc la courbure algébrique de g est $s \mapsto \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ (cf. formule (13) du § IX.4). Or $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \alpha(s)$. ■

Remarque 2 : Dans la démonstration du théorème IX.5.2, remplaçons φ par $\varphi - \varphi_0$, où φ_0 est une constante, $g_1(s)$ par $g_1(s) + x_0$ et $g_2(s)$ par $g_2(s) + y_0$, où x_0 et y_0 sont des constantes. On fait alors subir à g un déplacement arbitraire de $\mathscr{E}$ Donc en faisant varier φ_0, x_0, y_0, compte tenu du théorème IX.5.1, on obtient *toutes* les courbes normales solutions du problème posé.

Remarque 3 : Il peut être avantageux de poser $Z(s) = g_1(s) + \mathrm{i}g_2(s)$. Alors $Z(s)$ est déterminé par les formules :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}s} = \exp(\mathrm{i}\varphi(s)), \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \alpha(s)} \tag{2}$$

En remarquant qu'un antidéplacement de $\mathscr{E}$ transforme une courbe normale en une courbe normale de courbure algébrique *opposée*, on obtient facilement :

PROPOSITION IX.5.1

Donnons-nous g comme au théorème IX.5.1. *L'ensemble des courbes paramétrées de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^2$ normales : $I \longrightarrow \mathscr{E}$ ayant $-\mathscr{K}_1$ pour fonction courbure algébrique associée est l'ensemble des courbes de la forme $s \mapsto \Psi(g(s))$, où $\Psi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E}) \backslash \mathbf{Dep}(\mathscr{E})$ est fixé arbitrairement.*

Problèmes d'équations intrinsèques planes

On se propose souvent de rechercher des courbes de $\mathscr{E}$ normales de classe $\mathscr{C}^2$ dont la courbure algébrique associée satisfasse à des conditions particulières données, auxquelles on donnera le nom « d'équations intrinsèques » des courbes cherchées. Pour citer un exemple, la recherche des courbes normales de *courbure géométrique* donnée : $\mathscr{K} : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue équivaut à la recherche des courbes normales de courbure algébrique $\mathscr{K}_1$ vérifiant $(\forall s \in I)\ |\mathscr{K}_1(s)| = \mathscr{K}(s)$, problème qui vient d'être en partie traité, mais en partie seulement, car il ne faudrait pas croire que toutes les solutions se déduisent de l'une d'entre elles par une isométrie arbitraire (cf. exercice 1 pour un contre-exemple). En revanche si $\mathscr{K}$ est donnée continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\mathscr{K}_1$ doit être continue, il faut et il suffit qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\mathscr{K}_1 = \varepsilon\mathscr{K}$, et dans ce cas, l'ensemble des solutions de $|\mathscr{K}_1| = \mathscr{K}$ est réunion de l'ensemble des solutions de $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}$ et de l'ensemble des solutions de $\mathscr{K}_1 = -\mathscr{K}$, qui sont donnés par les théorèmes IX.5.1 et 2 et la proposition IX.5.1. On obtient donc toutes les solutions à partir de l'une d'elles en utilisant toutes les *isométries* de $\mathscr{E}$. Voici d'autres exemples :

Exemple 1 : *Courbes à courbure algébrique constante*

- L'équation $\mathscr{K}_1(s) = 0$ équivaut à $g''(s) = 0$, donc a pour solutions les courbes $I \longrightarrow \mathscr{E}$, $s \mapsto O \dotplus s\mathbf{e}$, où $\mathbf{e}$ est un vecteur unitaire de E, et $O \in \mathscr{E}$, i.e. les *courbes normales rectilignes.*
- L'équation $\mathscr{K}_1(s) = a$, où $a \in \mathbb{R}^*$ est donné, se résout facilement grâce à (2). On obtient $\varphi(s) = as + \varphi_0$, puis $\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\exp(\mathrm{i}as)$, d'où $Z = Z_0 + \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}}{\mathrm{i}a}\exp(\mathrm{i}as)$, où $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ et $Z_0 \in \mathbb{C}$. On en conclut que les solutions sont les *courbes normales de trajectoire circulaire,* le cercle étant de rayon $\dfrac{1}{|a|}$, comme on pouvait s'y attendre.

Exemple 2 : *Résoudre l'équation intrinsèque* $\mathscr{K}_1(s) = \dfrac{C}{s}$, où C est donné > 0, et $s \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut encore utiliser (2) : $\varphi(s) = C \operatorname{Log} s + \varphi_0$. Comme $\dfrac{C}{s}$ reste > 0, les courbes cherchées sont birégulières, et on a intérêt à prendre ici φ pour paramètre, d'où $s = \exp \dfrac{\varphi - \varphi_0}{C}$, ce qui donne $\mathrm{d}s = \dfrac{1}{C} \exp \dfrac{\varphi - \varphi_0}{C} \mathrm{d}\varphi$, puis

$$\mathrm{d}Z = \exp(\mathrm{i}\varphi)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{C} \exp \frac{-\varphi_0}{C} \left[\exp\left(\frac{1}{C} + \mathrm{i}\right) \varphi\right] \mathrm{d}\varphi,$$

d'où les courbes cherchées :

$$Z = Z_0 + \frac{\exp(-\varphi_0/C)}{1 + \mathrm{i}C} \exp\left(\left(\frac{1}{C} + \mathrm{i}\right) \varphi\right), \quad \text{avec} \quad \varphi_0 \in \mathbb{R} \text{ et } Z_0 \in \mathbb{C}$$

arbitraires. Elles se déduisent par un déplacement arbitraire de celle dont l'équation polaire relative à un repère orthonormal direct fixé arbitrairement est $r = \mathrm{e}^{\theta/C}$. Ce sont donc *les spirales logarithmiques* de $\mathscr{E}$ *caractérisées par* $\operatorname{tg} V = C$.

Exemple 3 : *Courbes d'équation intrinsèque* $\mathscr{K}_1(s) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}$, $a > 0$ *donné,* $s \in \,]-a, a[\, = I$.

Ici encore φ se révèle un paramètre adéquat. On a : $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}$, d'où $\varphi = \varphi_0 + \operatorname{Arc} \sin \dfrac{s}{a}$ avec $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Comme on ne cherche les solutions qu'à un déplacement près, il est commode de fixer $\varphi_0 = 0$, d'où $s = a \sin \varphi$, $\mathrm{d}s = a \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi$, $\varphi \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[= J$. Ensuite $\mathrm{d}Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\, \mathrm{d}s = a\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi$, et par une intégration immédiate : $Z = Z_0 + \dfrac{1}{4} (2\varphi + \sin 2\varphi - \mathrm{i} \cos 2\varphi)$. En coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormal direct donné, une courbe solution $\mathscr{C}^\infty$-équivalente à celle cherchée est donc donnée par :
$x = \dfrac{1}{4} (2\varphi + \sin 2\varphi)$, $y = \dfrac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi)$, $\varphi \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, en laquelle on reconnaît une *arche* (ouverte à ses extrémités) *de cycloïde droite* (cf. exercice 11 du § IX.6).

N.B. Les exercices ci-après concernent un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ orienté, muni si besoin est d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$.

Exercice 1 : Soit les deux courbes paramétrées f_1 et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que $f_1(0) = f_2(0) = O$, et définies par :
pour $t > 0$, $f_1(t) = f_2(t) = O \dotplus (te_1 + e^{-1/t^2} e_2)$,
pour $t < 0$, $f_1(t) = O \dotplus (te_1 + e^{-1/t^2} e_2)$, et $f_2(t) = O \dotplus (te_1 - e^{-1/t^2} e_2)$.

Soit $s = s(t)$ l'abscisse curviligne $t \mapsto \int_0^t \|f_j'(u)\|^2 \, du$ pour f_j ($j \in \{1, 2\}$), et soit $g_j(s)$ la courbe normale correspondante, $\mathscr{C}^\infty$-équivalente à f_j. Prouver que g_1 et g_2 ont même fonction courbure géométrique, mais que g_2 n'est pas déduite de g_1 par une isométrie de $\mathscr{E}$.

Exercice 2 : Soit la courbe $\mathscr{S}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ régulière paramétrée dans $\mathscr{R}$ par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $x \mapsto O \dotplus (xe_1 + (\sin x) e_2)$. On considère l'abscisse curviligne $s = s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt$ de f. Soit $\alpha_1(s)$ la courbure algébrique correspondante et $\alpha(s) = \alpha_1^2(s)$. On considère l'équation intrinsèque (1) $\mathscr{K}_1^2(s) = \alpha(s)$, avec $s \in \mathbb{R}$, où $\mathscr{K}_1$ est la courbure algébrique d'une courbe de classe $\mathscr{C}^2$ recherchée. Montrer que (1) possède des solutions périodiques (et en particulier dont la trajectoire est bornée). Ainsi (1) possède des solutions à trajectoire bornée, et d'autres (par exemple $\mathscr{S}$ paramétrée par s) à trajectoire non bornée.

Exercice 3 : Traiter les équations intrinsèques suivantes :

a) $\mathscr{K}_1^2 = \dfrac{1}{k^2 s^2 + a^2}$ ($k > 0$ et $a > 0$ donnés)

b) $\mathscr{K}_1^2 = \dfrac{1}{a^2 - k^2 s^2}$ ($k > 0$ et $a > 0$ donnés)

c) $\mathscr{K}_1^2 = \dfrac{1}{2as}$ ($a > 0$ donné)

d) $\mathscr{K}_1 = \dfrac{2}{a \operatorname{ch} \frac{s}{a}}$ ($a > 0$ donné)

e) $\mathscr{K}_1 = \dfrac{a}{a^2 + s^2}$ ($a > 0$ donné).

Exercice 4 : Soit une courbe paramétrée $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathscr{E}$ normale de classe $\mathscr{C}^2$, de courbure algébrique $\mathscr{K}_1$ telle que :

$$\mathscr{K}_1(s) = \gamma + \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \rho(s), \quad \text{avec } \gamma > 0 \text{ et } \rho(s) \underset{s \to +\infty}{\in} o\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Montrer que g possède un cercle asymptote.

Exercice 5 (*clothoïde,* ou *spirale de Cornu* [1]) : On identifie $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathscr{R}$. Soit λ un réel > 0. On considère la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto f(s) = -\int_s^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{\lambda^2} \sigma^2\right) d\sigma$.

a) Montrer que f est solution d'une équation intrinsèque de la forme $\mathscr{K}_1(s) = Cs$ avec un $C \in \mathbb{R}^*$.

---

[1] Marie-Alfred *Cornu,* mathématicien français (1841-1902). Sa spirale se rencontre notamment en Optique, dans la théorie de la diffraction.

b) Soit $\theta(s)$ une détermination continue de l'angle orienté $(\widehat{e_1, \overrightarrow{Of(s)}})$. Montrer que $\theta(s) \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Posant $r = r(s) = \|\overrightarrow{Of(s)}\|$, calculer $r\dfrac{dr}{ds}$ sous forme d'intégrale. En déduire que la fonction $s \mapsto r(s)$ décroît strictement, puis, que f est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement. Construire avec soin la trajectoire $\mathscr{C}$ de f. (*N.B.* Le calcul explicite de l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \exp(it^2)\,dt$ est proposé dans l'exercice 37 du § VIII.3 du tome 2 ou l'exercice 5 du § VIII.5 du tome 3).

Exercice 6 : Chercher les courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^4$ birégulières dont le rayon de courbure algébrique $\rho_1(s)$ vérifie :

a) $\rho_1\rho_1'' - \rho_1'^2 - a^2 = 0$ ($a > 0$ donné).

b) $\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_1'^2 - a^2 = 0$ ($a > 0$ donné).

§ IX.6 *DÉVELOPPÉES, PARALLÈLES, DÉVELOPPANTES*

On se place encore dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$, de plan directeur E.

Développées

PROPOSITION IX.6.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^q$ ($3 \leqslant q \leqslant +\infty$), ***birégulière.*** *Pour tout $t \in I$, soit $\mathscr{D}_t$ la* ***normale*** *à f en le paramètre t (i.e. la droite passant par $f(t)$ et orthogonale à $f'(t)$). La famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $q = +\infty$, de classe $\mathscr{C}^{q-1}$ si $q < +\infty$) est* ***affinement régulière,*** *et son enveloppe est la courbe paramétrée $\omega : I \longrightarrow \mathscr{E}$ qui associe, à tout $t \in I$, le centre de courbure de f en le paramètre t.*

Démonstration :

Soit $g : J \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe de classe $\mathscr{C}^q$ normale et $\mathscr{C}^q$-équivalente à f, et soit $s = s(t)$ l'abscisse curviligne correspondante. Notons $\mathscr{N}(s)$ la normale à g en le paramètre s, $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ la base de Frenet associée à g, et $\mathscr{K}_1$ (resp. ρ_1) la courbure algébrique (resp. le rayon de courbure algébrique) correspondants. Soit enfin $\Omega(s)$ le centre de courbure à g en s. En se reportant au § VIII.2, on voit qu'il s'agit de prouver que la famille $(\mathscr{N}(s))_{s \in J}$ est affinement régulière et que son enveloppe est $s \mapsto \Omega(s)$. Soit $P \in \mathscr{E}$, quelconque. On a $P \in \mathscr{N}(s)$ ssi :

$$(1) \qquad (\overrightarrow{g(s)P} \mid \vec{\tau}(s)) = 0 .$$

Dérivons par rapport à s : $-(\vec{\tau}(s) \mid \vec{\tau}(s)) + (\overrightarrow{g(s)P} \mid \mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)) = 0$, i.e.

$$(2) \qquad \mathscr{K}_1(s)(\overrightarrow{g(s)P} \mid \vec{\tau}_1(s)) - 1 = 0\,.$$

Dans n'importe quel repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$, le déterminant $\delta(s)$ des §§ VIII.2 et 3 associé à (1) et (2) vaut $\mathscr{K}_1(s)$. Donc la famille $(\mathscr{N}(s))_{s \in J}$ est bien affinement régulière. Le point caractéristique de $\mathscr{N}(s)$ est l'unique $P \in \mathscr{E}$ qui vérifie à la fois (1) et (2) : on constate que c'est $P = g(s) \dotplus \rho_1(s)\,\vec{\tau}_1(s) = \Omega(s)$. ■

DÉFINITION IX.6.1

Dans les conditions de la proposition IX.6.1, *on appelle* ***développée de f l'enveloppe des normales*** *à f, i.e. la courbe paramétrée $I \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \omega(t)$, où $\omega(t)$ est le centre de courbure en le paramètre t.*

Si on remplace f par une courbe $\mathscr{C}^q$-équivalente, on remplace sa développée par une courbe $\mathscr{C}^q$-équivalente (par abus de langage, n'importe laquelle des courbes ainsi obtenues est appelée *développée de f*).

En conséquence, si $\mathscr{V}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^q$ plongée birégulière, les trajectoires des développées de tous les $\mathscr{C}^q$-plongements d'image $\mathscr{V}$ sont toutes égales à *l'ensemble des centres de courbure en les points de $\mathscr{V}$*, qu'on appellera donc **ensemble développé de $\mathscr{V}$.**

Dérivons (2) par rapport à s. On obtient :

$$(3) \qquad (\overrightarrow{g(s)P} \mid -\mathscr{K}_1^2(s)\,\vec{\tau}(s) + \mathscr{K}_1'(s)\,\vec{\tau}_1(s)) = 0\,.$$

Dans tout repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$, le déterminant $\Delta(s)$ du chapitre VIII associé à (1), (2) et (3) vaut $-\mathscr{K}_1'(s)$. Donc *s est paramètre stationnaire de la développée ssi* $\mathscr{K}_1'(s) = 0$. Ce fait est d'ailleurs corroboré par le calcul de $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}s}$:

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\rho_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)) = \rho_1'(s)\,\vec{\tau}_1(s)\,.$$

Si $\mathscr{K}_1'(s)$ reste $\neq 0$ pour $s \in J$, alors par continuité $\rho_1'(s)$ reste de signe constant sur J. On peut donc choisir une abscisse curviligne σ sur la développée telle que $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = \rho_1'(s)$: le vecteur unitaire tangent associé sera $\vec{\tau}_1(s)$. Le plus simple est de choisir $\boxed{\sigma(s) = \rho_1(s)}$. Donc *si la courbure algébrique de g n'est jamais stationnaire* (i.e. $\mathscr{K}_1'(s) \neq 0$ pour $s \in J$), *$\rho_1(s)$ est une abscisse curviligne de la développée.*

D'après la théorie générale des enveloppes de droites, en un paramètre $s_0 \in J$ où $\mathscr{K}_1'(s_0) = 0$, pourvu que les dérivées d'ordre $\leqslant q-2$ de $\mathscr{K}_1$ ne soient pas toutes nulles pour $s = s_0$, il y a pour $s = s_0$ une tangente géométrique à la développée, qui n'est autre que $\mathscr{N}(s_0)$.

Enfin, si $\mathscr{K}_1(s_0) = 0$ et $\mathscr{K}_1'(s_0) \neq 0$ (i.e. si s_0 est *paramètre d'inflexion ordinaire* de g), et si $\mathscr{K}_1(s) \neq 0$ pour $s \neq s_0$, *les développées de* g obtenues en faisant varier g dans les composantes connexes de $J \setminus \{s_0\}$ *admettent pour* $s \longrightarrow s_0$ *une branche infinie, avec* $\mathscr{N}(s_0)$ *pour asymptote.* Ce qui précède résume les cas les plus courants « d'accidents » sur une développée.

Exemple 1 : *Développée d'une ellipse*

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$, a et b des réels $(a > b > 0)$ et la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto O \dotplus (a \cos te_1 + b \sin te_2)$, dont la trajectoire est l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans $\mathscr{R}$ ($\mathscr{C}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$).

La normale $\mathscr{N}_t$ en le paramètre t admet dans $\mathscr{R}$ l'équation :

$$a \sin t\,(x - a \cos t) - b \cos t\,(y - b \sin t) = 0\,,$$

soit

$$ax \sin t - by \cos t - (a^2 - b^2) \sin t \cos t = 0\,. \tag{5}$$

En dérivant (5) par rapport à t, on trouve :

$$ax \cos t + by \sin t - (a^2 - b^2)(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0\,. \tag{6}$$

Le déterminant $\delta(t)$ associé à (5) et (6) est constant, égal à ab.

Donc $(\mathscr{N}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille affinement régulière. En résolvant le système (5) et (6) en (x, y), on obtient le point caractéristique de $\mathscr{N}_t$, i.e. le centre de courbure $\omega(t)$ en t à f, par ses coordonnées dans $\mathscr{R}$:

$$\boxed{x_\omega(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t\,; \quad y_\omega(t) = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t} \,. \tag{7}$$

La trajectoire de la développée de f définie par (7) est une *affine d'astroïde* (affinité orthogonale d'axe $O \dotplus \mathbb{R}e_1$, et de rapport $\dfrac{-a}{b}$ par exemple). Elle possède, lorsque t décrit $[0, 2\pi]$, quatre paramètres stationnaires qui correspondent aux quatre sommets de l'ellipse (points où la courbure de l'ellipse est stationnaire). Ces paramètres stationnaires donnent 4 rebroussements de première espèce, dont la construction se lit sur la figure 1.

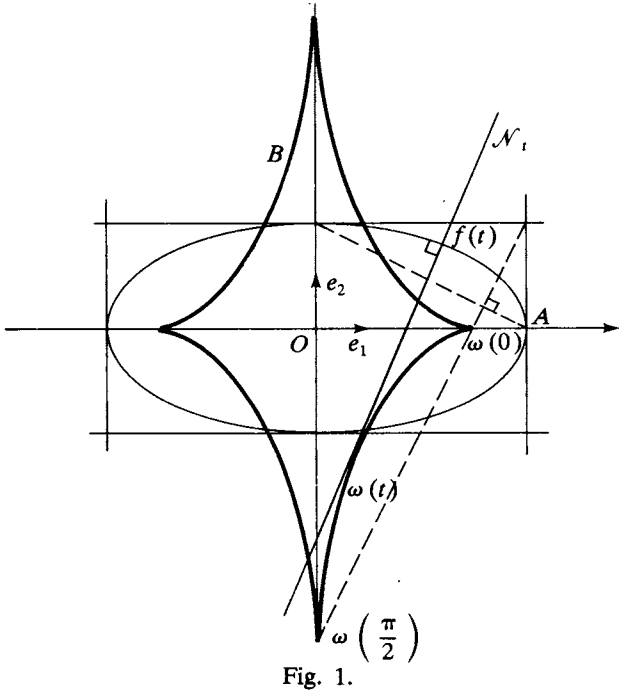


Fig. 1.

La trajectoire de (7) est l'ensemble développé de $\mathscr{C}$, dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est, en posant $X = \dfrac{ax}{a^2 - b^2}$, $Y = \dfrac{-by}{a^2 - b^2}$:

$$X^{2/3} + Y^{2/3} - 1 = 0\,,$$

soit $$(X^2 + Y^2)^3 - 3(X^4 + Y^4 - 7X^2Y^2) + 3(X^2 + Y^2) - 1 = 0\,.$$

Exemple 2 : *Développée d'une spirale logarithmique*

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. Donnons-nous $C \in \mathbb{R}_+^*$, et la courbe f paramétrée en polaires dans $\mathscr{R}$ par $r(\theta) = \mathrm{e}^{C\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, i.e. $\overrightarrow{Of(\theta)} = r(\theta)\,\vec{u}(\theta)$ avec les notations habituelles, et ici $r(\theta) = \mathrm{e}^{C\theta}$ (f est appelée une *spirale logarithmique* de pôle O). Il est clair que f est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement birégulier. Le point O est point asymptote (pour $\theta \longrightarrow -\infty$), et pour $\theta \longrightarrow +\infty$ on a une branche infinie qui s'enroule en spirale autour de O dans le sens direct.

Identifions $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathscr{R}$ (par $x + \mathrm{i}y \mapsto O \dotplus (xe_1 + ye_2)$). Alors f s'identifie à $\theta \mapsto \exp(a\theta)$, avec $a = C + \mathrm{i}$. Une représentation de la normale $\mathscr{N}_\theta$ à f en le paramètre θ est :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto \mathrm{e}^{a\theta} + \lambda a\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \xi(\theta, \lambda)\,.$$

Cherchons une fonction dérivable $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\xi(\theta, \varphi(\theta)))$ soit $\mathbb{R}$-colinéaire à $a\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, c'est-à-dire dirige $\mathcal{N}_\theta$. On obtient la CNS portant sur φ : $a\,\mathrm{e}^{a\theta} + \varphi'(\theta)\,a\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \varphi(\theta)\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ colinéaire à $a\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, d'où $a(\mathrm{e}^{C\theta} - \varphi(\theta)) = 0$, i.e. $\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{C\theta}$.

Donc l'enveloppe des $(\mathcal{N}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ est $\theta \mapsto \xi(\theta, \mathrm{e}^{C\theta})$. Autrement dit, la développée de f est la courbe paramétrée $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto (1 + a\,\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{a\theta} = (1 + a\,\mathrm{i})\,f(\theta) = C\,\mathrm{i}f(\theta)$. Cette développée se déduit donc de f par la similitude fixe : $z \mapsto C\,\mathrm{i}z$ de $\mathbb{C}$. En particulier, le centre de courbure $\omega(\theta)$ vérifie $\widehat{\overrightarrow{Of(\theta)}, \overrightarrow{O\omega(\theta)}} = \pi/2$. Quant au rapport de similitude, c'est $C = \operatorname{cotg} V$.

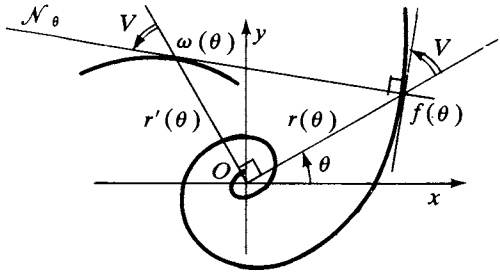


Fig. 2.

Exemple 3 : *Courbes épi- et hypocycloïdales*

On a vu au § VIII.3 que toute courbe épi- ou hypocycloïdale peut être définie dans un repère orthonormal convenable $\mathcal{R} = (O\,;e_1, e_2)$ comme l'enveloppe d'une famille de droites $(\mathcal{D}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ définie par les équations

(8) $\quad x\cos\theta + y\sin\theta - a\cos(m\theta - \alpha) = 0\,, \quad$ avec $\quad m \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$.

Le réel m caractérise la courbe épi- ou hypocycloïdale enveloppe à similitude près de $\mathcal{E}$.

En dérivant par rapport à θ, on obtient les normales à la courbe :

(9) $$-x\sin\theta + y\cos\theta + am\sin(m\theta - \alpha) = 0$$

c'est-à-dire (en notant X, Y les coordonnées dans $(O\,;e_2, -e_1)$)

(9′) $$X\cos\theta + Y\sin\theta + ma\cos\left(m\theta - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

La comparaison de (8) et de (9′) suffit pour prouver que *la développée d'une courbe cycloïdale est une courbe cycloïdale semblable.*

Parallèles, développantes

DÉFINITION IX.6.2

Soit $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$ normale, de repère de Frenet associé $(g(s) ; \vec{\tau}(s), \vec{\tau}_1(s))$ $(s \in I)$, de courbure algébrique associée $\mathscr{K}_1(s)$. On appelle **parallèles** *de g les courbes $\mathscr{C}^q$-équivalentes aux courbes paramétrées*

$$(10) \qquad g_a : I \longrightarrow \mathscr{E}, \quad s \mapsto g(s) + a\vec{\tau}_1(s), \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

est une constante arbitraire.
On appelle **développantes** *de g les courbes $\mathscr{C}^q$-équivalentes à*

$$(11) \qquad h_a : I \longrightarrow \mathscr{E}, \quad s \mapsto g(s) + (a - s)\,\vec{\tau}(s), \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

est une constante arbitraire.

Si on remplace g par une courbe $\mathscr{C}^q$-équivalente, définie par le changement de paramètre admissible $s = s(t)$, g_a et h_a sont remplacées par $g_a \circ s$ et $h_a \circ s$ qui sont respectivement $\mathscr{C}^q$-équivalentes à g_a et h_a. Pour a fixé, l'ensemble des courbes $\mathscr{C}^q$-équivalentes à g_a (resp. h_a) peut être considéré comme une même entité, définissant essentiellement la même courbe parallèle à g (resp. développante de g).

Avec les hypothèses et notations de la définition IX.6.2, soit $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Posons $P(s) = g(s) + \lambda(s)\,\vec{\tau}_1(s)$ et $Q(s) = g(s) + \lambda(s)\,\vec{\tau}(s)$.
Les fonctions P et $Q : I \longrightarrow \mathscr{E}$ sont dérivables, et on a :
$(\forall s \in I)\ P'(s) = (1 - \mathscr{K}_1(s)\,\lambda(s))\,\vec{\tau}(s) + \lambda'(s)\,\vec{\tau}_1(s)$,
$Q'(s) = (1 + \lambda'(s))\,\vec{\tau}(s) + \lambda(s)\,\mathscr{K}_1(s)\,\vec{\tau}_1(s)$. Donc :

$$(P'(s) \mid \vec{\tau}_1(s)) = \lambda'(s) \quad \text{et} \quad (Q'(s) \mid \vec{\tau}(s)) = 1 + \lambda'(s) ;$$

donc $\lambda(s)$ est constante ssi $(\forall s \in I)\ (P'(s) \mid \vec{\tau}_1(s)) = 0$, et

$$(\lambda(s) + s) \text{ est constante ssi } \quad (\forall s \in I) \quad (Q'(s) \mid \vec{\tau}(s)) = 0 .$$

Autrement dit : **la courbe paramétrée $s \mapsto P(s)$ est une parallèle de g ssi** $(\forall s \in I)\ (P'(s) \mid \vec{\tau}_1(s)) = 0$. De même **la courbe paramétrée $s \mapsto Q(s)$ est une développante de g ssi** $(\forall s \in I)\ (Q'(s) \mid \vec{\tau}(s)) = 0$.

On exprime ces propriétés en disant que *les parallèles de g sont les trajectoires orthogonales des normales de g* ; et que *les développantes de g sont les trajectoires orthogonales des tangentes à g.*

• Soit g_a une parallèle de g, donnée par (10), avec $a \neq 0$. On a : $g_a'(s) = (1 - a\mathscr{K}_1(s))\,\vec{\tau}(s)$. Supposons $\mathscr{K}_1(s) \neq \dfrac{1}{a}$ pour tout $s \in I$; alors

g_a est régulière, et *sa normale en s* est la droite $g(s) \dotplus \mathbb{R}\vec{\tau}_1(s)$, i.e. *la normale* $\mathcal{N}(s)$ *en s à g*. On peut voir facilement que si les $(g_a^{(r)}(s_0))_{r \geqslant 1}$ ne sont pas toutes nulles, la normale géométrique en s_0 continue à être $\mathcal{N}(s_0)$ même si $\mathcal{K}_1(s_0) = 1/a$.

Si en particulier $q \geqslant 3$, g birégulière, et $\mathcal{K}_1(s) \neq \dfrac{1}{a}$ pour tout $s \in I$, alors *les développées de g et de* g_a *sont les mêmes* (notons que si $3 \leqslant q < +\infty$, g_a ne peut être affirmée que de classe $\mathscr{C}^{q-1}$, ce qui laisse prévoir pour sa développée la classe $\mathscr{C}^{q-3}$, alors que la développée de g_a étant celle de g est certainement de classe $\mathscr{C}^{q-2}$).

• Soit h_a une développante de g, donnée par (11). On a :
$h_a'(s) = (a - s)\ \mathcal{K}_1(s)\ \vec{\tau}_1(s)$. Lorsque $a \in I$, le paramètre $s = a$ est *stationnaire* pour h_a, et lorsque les $(h_a^{(r)}(a))_{r \geqslant 1}$ ne sont pas toutes nulles, la tangente géométrique en $s = a$ est dirigée par $\vec{\tau}_1(a)$ (par exemple, si $q \geqslant 3$, alors $h_a''(a) = -\mathcal{K}_1(a)\ \vec{\tau}_1(a)$ et si $\mathcal{K}_1(a) \neq 0$, l'assertion en découle). En général le paramètre stationnaire $s = a$ donne lieu à *un rebroussement de première espèce.*

Supposons maintenant $q \geqslant 4$ et $(a - s)\ \mathcal{K}_1(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$: alors h_a est régulière, et *sa normale en s* est $h_a(s) \dotplus \mathbb{R}\vec{\tau}(s) = g(s) \dotplus \mathbb{R}\vec{\tau}(s)$, autrement dit *c'est la tangente en s à g*. D'après le théorème VIII.2.3, dans ce cas, **la développée de h_a est g.** Observons enfin que si h_{a_0} est une développante particulière de g qui soit *régulière,* alors *les développantes de g sont les parallèles de* h_{a_0}. En effet, on peut choisir sur h_{a_0} une abscisse curviligne σ telle que $\dfrac{d\sigma}{ds} = (a_0 - s)\ \mathcal{K}_1(s)$; le repère de Frenet associé à σ est $(h_{a_0}(s(\sigma))\ ;\ \vec{\tau}_1(s(\sigma)),\ -\vec{\tau}(s(\sigma)))$; les parallèles de h_a sont donc données par $\sigma \mapsto h_{a_0}(s(\sigma)) \dotplus b\vec{\tau}(s(\sigma)) = g(s(\sigma)) \dotplus (a_0 + b - s(\sigma))\ \vec{\tau}(s(\sigma))$; et ce sont bien les développantes de g.

De même, toute courbe de classe $\mathscr{C}^q$ $(4 \leqslant q \leqslant +\infty)$ birégulière dont la développée est régulière est une développante de sa développée, et admet pour parallèles les développantes de sa développée.

Exemple 4 : *Développantes de cercle*

Identifions $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ au moyen d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O\ ;\ e_1, e_2)$. Soit Γ le cercle de centre O, de rayon $R > 0$, considéré comme trajectoire de la courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$ normale $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ s \mapsto R\,e^{i(s/R)}$. Alors $g'(s) = i\,e^{i(s/R)}$. Les développantes de g sont donc données par :

$$h_a(s) = R\,e^{i(s/R)} + (a - s)\,i\,e^{i(s/R)} = e^{i(s/R)}[R + i(a - s)] \quad (a \in \mathbb{R}),$$

ou encore, avec le paramètre $\psi = \dfrac{s}{R}$:

$$k_a(\psi) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}[1 + \mathrm{i}(\lambda - \psi)]\,, \quad \text{avec} \quad \lambda = a/R\,,$$

soit dans $\mathscr{R}$:

$$x = R[\cos\psi - (\lambda - \psi)\sin\psi]\,, \quad y = R[\sin\psi + (\lambda - \psi)\cos\psi]\,.$$

La développante k_a se déduit de k_0 par la rotation $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} z$, et par $\psi \mapsto \psi - \lambda$.

Le tracé de k_0 est immédiat (cf. fig. 3).

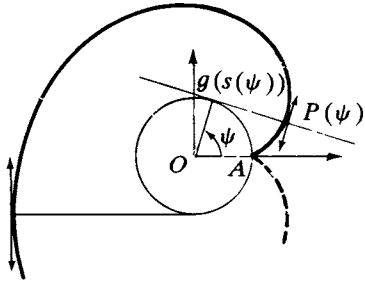


Fig. 3.

Exemple 5 : *Parallèles d'ellipse*

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{C}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans $\mathscr{R}$ $(a > b > 0)$, considérée comme trajectoire de la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto O \dotplus (a\,e_1 \cos t + b\,e_2 \sin t)$. Soit $s = s(t)$ l'abscisse curviligne telle que $s(0) = 0$ et que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{H(t)}$. Le repère de Frenet en t est $(f(t)\,;\,\vec{T}(t), \vec{T}_1(t))$ avec $\vec{T}(t) = \vec{\tau}(s(t))$ et $\vec{T}_1(t) = \vec{\tau}_1(s(t))$. Ici :

$$\vec{T}(t) = \frac{-a\sin t}{\sqrt{H(t)}}\,e_1 + \frac{b\cos t}{\sqrt{H(t)}}\,e_2\,; \quad \vec{T}_1(t) = -\left(\frac{b\cos t}{\sqrt{H(t)}}\,e_1 + \frac{a\sin t}{\sqrt{H(t)}}\,e_2\right).$$

Les parallèles de f sont donc données par :

$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}, \quad t \mapsto O \dotplus (\alpha_\lambda(t)\,e_1 + \beta_\lambda(t)\,e_2)\,,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et

$$\alpha_\lambda(t) = a\cos t - \frac{\lambda b\cos t}{\sqrt{H(t)}}\,, \quad \beta_\lambda(t) = b\sin t - \frac{\lambda a\sin t}{\sqrt{H(t)}}\,.$$

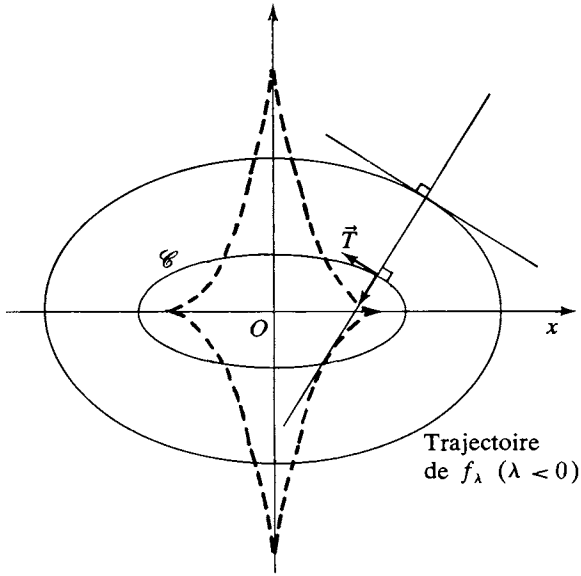


Fig. 4.

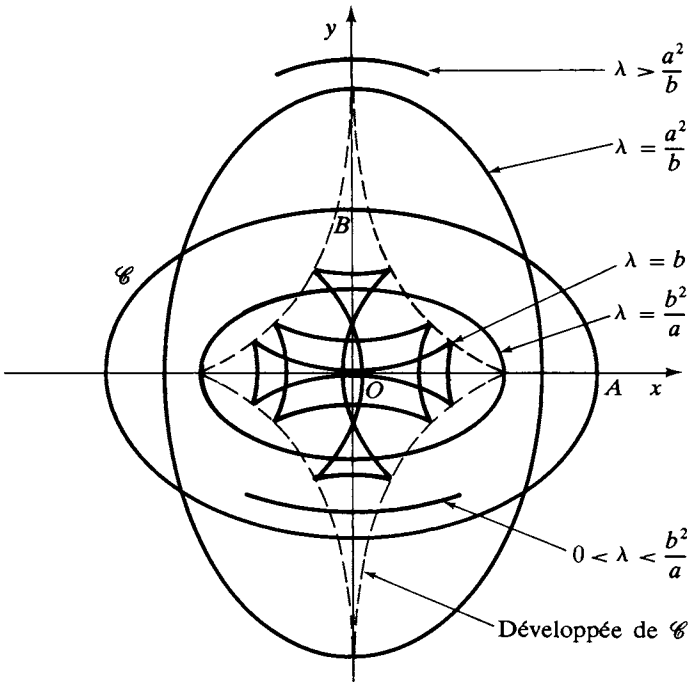


Fig. 5.
(Trajectoires des f_λ pour $\lambda > 0$).

La courbure algébrique $\mathscr{K}_1(s(t))$ de $\mathscr{C}$ est $\mathscr{K}_1(s(t)) = \dfrac{ab}{(H(t))^{3/2}}$, ce qui donne facilement

$$f'_\lambda(t) = \frac{H^{3/2}(t) - \lambda ab}{H(t)}\,\vec{T}(t)\,. \tag{12}$$

La relation (12) permet une étude élémentaire des f_λ, dont le tracé est représenté par la figure 4 pour $\lambda < 0$ et la figure 5 pour $\lambda > 0$. Le lecteur pourra s'amuser à faire varier l'excentricité de $\mathscr{C}$, $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$.

Le lecteur pourra vérifier que pour $\lambda = b^2/a$ (resp. a^2/b), la trajectoire de f_λ a deux points stationnaires sur Ox (resp. Oy) qui sont des méplats.

Exemple 6 : *Tractrices*

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. La sous-variété courbe $\mathscr{C}_a$ admettant dans $\mathscr{R}$ une équation de la forme $y = a \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$) s'appelle une **chaînette** de base $O \dotplus \mathbb{R}e_1$, d'axe $O \dotplus \mathbb{R}e_2$; une telle $\mathscr{C}_a$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et c'est l'image du $\mathscr{C}^\infty$-plongement $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $x \mapsto O \dotplus \left(xe_1 + a \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\,e_2\right)$. On a $\|f'_a(x)\| = \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$. On peut donc prendre sur $\mathscr{C}_a$ l'abscisse curviligne $s = a \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$, dont l'origine est le point S de coordonnées $(0, a)$ dans $\mathscr{R}$, appelé *sommet* de $\mathscr{C}_a$.

Soit $(\vec{\tau}(s), \vec{\tau}_1(s))$ la base de Frenet et $\mathscr{K}_1(s)$ la courbure algébrique associées à s, et soit $\vec{T}(x) = \vec{\tau}(s(x))$, $\vec{T}_1(x) = \vec{\tau}_1(s(x))$, $k_1(x) = \mathscr{K}_1(s(x))$. On obtient : $\vec{T}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x/a}\,e_1 + \operatorname{th}\dfrac{x}{a}\,e_2$. Une détermination continue φ de $\widehat{e_1, \vec{T}(x)}$ est définie par $\cos\varphi = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x/a)}$, $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{sh}(x/a)}{\operatorname{ch}(x/a)}$, ce qui entraîne $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{1}{a \operatorname{ch}(x/a)}$, d'où on déduit : $k_1(x) = \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{1}{a \operatorname{ch}^2(x/a)}$. Les développantes de $\mathscr{C}_a$ peuvent être définies par les courbes paramétrées

$$\begin{aligned} x \mapsto h_\lambda(x) &= f_a(x) + (\lambda - s(x))\,\vec{T}(x) \\ &= \left[x + \frac{1}{\operatorname{ch}(x/a)}\left(\lambda - a \operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\right] e_1 \\ &\quad + \left[a \operatorname{ch}\frac{x}{a} + \frac{\operatorname{sh}(x/a)}{\operatorname{ch}(x/a)}\left(\lambda - a \operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\right] e_2\,. \end{aligned}$$

La développante particulière h_0 admet un rebroussement de première espèce en S (avec une tangente géométrique verticale) et admet $O \dotplus \mathbb{R}e_2$

comme axe de symétrie. On l'appelle la **tractrice** associée à $\mathscr{C}_a$ (cf. fig. 6). Elle admet $O + \mathbb{R}e_1$ pour asymptote et se caractérise par la propriété facile à vérifier que le segment de tangente à h_0 en x compris entre $h_0(x)$ et l'asymptote est de longueur constante, égale à $|a|$.

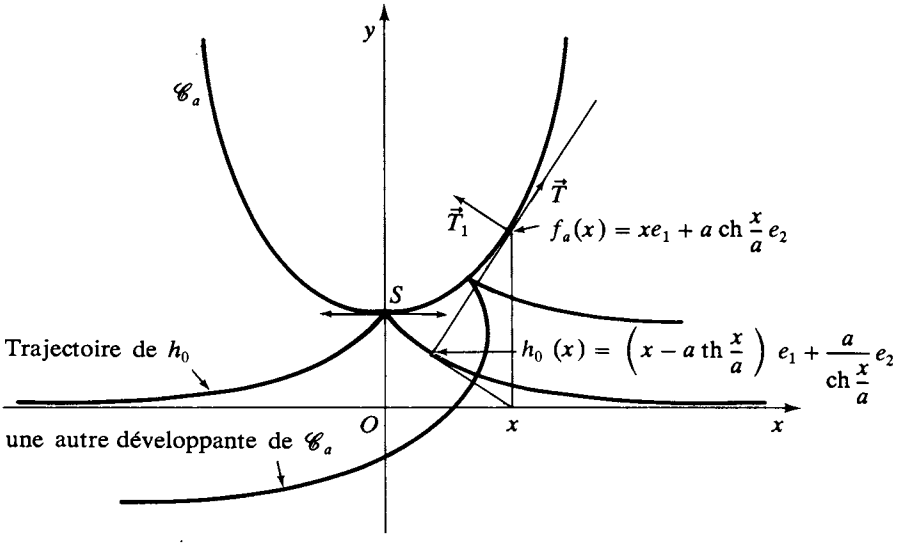


Fig. 6.

Interprétation physique des développantes

Soit une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^q$ $(2 \leqslant q \leqslant +\infty)$ *birégulière* $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$. Fixons $O \in \mathscr{V}$ et imaginons un fil flexible et inextensible épousant $\mathscr{V}$ *du côté de sa convexité* (cf. fig. 7). Attachons une pointe traçante en un point M du fil, et déplaçons M dans $\mathscr{E}$ en faisant en sorte que le fil reste toujours tendu entre O et M.

Alors M décrit un arc de développante de $\mathscr{V}$.

Une autre interprétation possible de (11) consiste à dire qu'*une développante de $\mathscr{V}$ est le lieu d'un point lié à une tangente mobile à $\mathscr{V}$ qui roule sans glisser sur $\mathscr{V}$.*

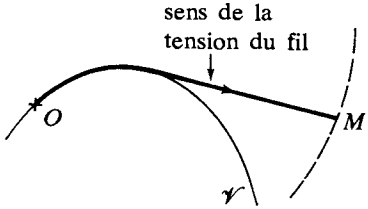


Fig. 7.

Les exercices ci-après concernent un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ orienté éventuellement muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$.

Exercice 1 : Soit la courbe paramétrée : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)$ donnée par ses coordonnées dans

$$\mathscr{R} : f_1(t) = 3\cos t + 3\cos 2t + \cos 3t\,, \quad f_2(t) = 3\sin t + 3\sin 2t + \sin 3t\,.$$

Tracer la courbe ; déterminer sa développée et trouver (de préférence sans intégrale) la longueur de cette développée quand t décrit $[0, 2\pi]$.

Exercice 2 : On identifie $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathscr{R}$. On donne la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie par

$$t \mapsto 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \frac{8}{3}\left(1 - \cos\frac{3t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}\,.$$

Préciser les tangentes géométriques aux paramètres stationnaires. Soit $\mathscr{N}_t$ la normale en t (si t est stationnaire, $\mathscr{N}_t$ sera la normale géométrique). Prouver que la famille $(\mathscr{N}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ enveloppe une hypocycloïde à 3 rebroussements. Que remarque-t-on sur la distance des tangentes à f en t et $t + 2\pi$? Interprétation géométrique (on dit que f est « de largeur constante »).

Exercice 3 : Soit la courbe paramétrée définie en coordonnées polaires dans $\mathscr{R}$ par $r = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $\theta = 2t - \operatorname{tg} t$ $\left(t \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$. Prouver que la développée de la développée de cette courbe est un cercle.

Exercice 4 : On identifie $\mathscr{E}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathscr{R}$. On donne $R > 0$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la courbe paramétrée $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\mathrm{i})^k}{k!} t^k\right]$ admet $R\mathbb{U} = \Gamma$ pour n-ième développée itérée. Préciser comment f_n s'obtient de proche en proche à partir de Γ.

b) Montrer qu'une équation intrinsèque de f_n (où ρ_1 désigne $\dfrac{1}{\mathscr{K}_1}$) est :

$$\rho_1 = R^{1/(n+1)} . \frac{[(n+1)!]^{n/(n+1)}}{n!} s^{n/(n+1)}\,.$$

c) Trouver une équation polaire dans $\mathscr{R}$ de f_1 et de f_2 ; pour f_2 on pourra comparer avec l'exercice 3.

Exercice 5 : Etudier les développantes de l'astroïde, définie dans $\mathscr{R}$ par $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0, t \in \mathbb{R})$. Calculer une abscisse curviligne sur ces développantes et prouver que l'une d'elles est une astroïde.

Exercice 6 : Chercher la développée des courbes paramétrées suivantes (définies relativement à $\mathscr{R}$):

a) $]0, \pi[\longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)$ de coordonnées $x = \cos^2 t + \operatorname{Log}|\sin t|$, $y = \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

b) Courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{3}\sin^3\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

c) Courbe $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$ qui à t associe le point de coordonnées $x = a(1 + \cos^2 t)\cos t$, $y = a\sin^2 t\cos t$ $(a > 0)$. Préciser la courbure de la développée.

d) $]-1, 1[\longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto$ point de coordonnées $x = 2\operatorname{Arc\,tg} t$, $y = \operatorname{Log}\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$.

Exercice 7 (Développoïdes) : Soit $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe de classe $\mathscr{C}^2$ birégulière normale et $\alpha \in]0, \pi[$. Notons $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ la base de Frenet et $\mathscr{K}_1$ la courbure algébrique de g. Soit $\mathscr{D}_s$ la droite $g(s) + \mathbb{R}(\vec{\tau}(s)\cos\alpha + \vec{\tau}_1(s)\sin\alpha)$.

a) Donner une condition suffisante pour que l'enveloppe de $(\mathscr{D}_s)_{s \in I}$ soit définie. Si c'est le cas, cette enveloppe est appelée une *développoïde* de g.

b) Prouver que toute développoïde d'une ellipse se déduit par une affinité convenable d'une courbe *parallèle d'astroïde* (Texeira).

Exercice 8 : Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto M = f(t)$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$ birégulière. Pour $t \in I$, soit $\Omega = \Omega(t)$ le centre de courbure en t et $\omega = \omega(t)$ le centre de courbure en t à la développée de f, supposée elle aussi birégulière. Soit $J = J(t)$ le milieu de $M\omega$.

a) Prouver que $\left(\overrightarrow{M\omega} \,\middle|\, \dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\right) = 0$.

b) Chercher f pour que $\|\overrightarrow{MJ}\|$ reste constant, égal à $a > 0$.

Exercice 9 : On reprend les notations de l'exemple 6 (tractrice).

a) Prouver que la tractrice h_0 est $\mathscr{C}^\infty$-équivalente à la courbe paramétrée $\varphi \mapsto$ point de coordonnées dans $\mathscr{R}$:

$$x = a\left(\sin\varphi - \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right), \quad y = a\cos\varphi \quad \left(\varphi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

b) Déterminer les courbes régulières $\mathscr{C}$ telles que, étant donnée une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$, pour tout point M de la courbe, la tangente en M rencontre Δ en un et un seul point T vérifiant $\|\overrightarrow{MT}\| = a$, où a est une constante donnée > 0.

c) Soit une courbe de classe $\mathscr{C}^2$ birégulière $t \mapsto \Phi(t)$ dont pour tout t la tangente en $M = f(t)$ rencontre $O + \mathbb{R}e_1$ en un unique point $T = T(t)$. La parallèle à e_2 menée par T rencontre en $\Omega = \Omega(t)$ la normale en M à f. Déterminer f pour que $(\forall t)$ Ω soit le centre de courbure en t à f.

d) Quelles sont les solutions de l'équation intrinsèque $a^2 \mathscr{K}_1^2[\mathrm{e}^{2s/a} - 1] = 1$ ($a > 0$ donné) ?

Exercice 10 : On donne une sous-variété courbe $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathscr{E}$ définie dans $\mathscr{R}$ par une équation $\Phi(x, y) = 0$, où Φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ réelle définie sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$. Soit M_0 de coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathscr{R}$ un point birégulier de $\mathscr{V}$. Calculer à l'aide des dérivées partielles de Φ en (x_0, y_0) les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du centre de courbure à $\mathscr{V}$ en M_0.

Exercice 11 *(Cycloïdes) :* Sur une courbe *birégulière,* on appelle *sommet* tout point où la dérivée de la courbure s'annule. Etudions quelques propriétés des courbes $\mathscr{C}_b$ représentées paramétriquement dans $\mathscr{R}$ par :

$$x = at - b\sin t, \quad y = a - b\cos t \quad (t \in \mathbb{R})$$

où $a > 0$ est fixé une fois pour toutes, et où $b > 0$ est un paramètre réel.

Pour $0 < b < a$, $\mathscr{C}_b$ est appelée une *cycloïde raccourcie ;* pour $b > a$ une *cycloïde allongée ;* pour $b = a$ une *cycloïde droite.*

PARTIE I

a) Etudier la famille des courbes $(\mathscr{C}_b)_{b>0}$. Pour chaque cas, préciser points d'inflexion éventuels, points de rebroussement, points doubles.

b) Montrer que pour un même $t \in \mathbb{R}$, les normales en t à $\mathscr{C}_b$ passent toutes par un même point $N(t)$, indépendant de b, qu'on précisera.

c) Identifier la développée de $\mathscr{C} = \mathscr{C}_a$.

d) Etudier les développées des courbes $\mathscr{C}_b$. Les construire en précisant avec soin leurs branches infinies éventuelles et leurs points de rebroussement. S'il y a des points doubles on ne cherchera pas à les calculer (une représentation sommaire suffira).

PARTIE II

a) Soit Ω_1 le centre de courbure en t à la cycloïde droite $\mathscr{C}$ ($t \notin 2\pi\mathbb{Z}$). La normale $\mathscr{N}_t$ en t à $\mathscr{C}$ rencontre l'axe Ox en $N = N(t)$. Montrer que $\overrightarrow{M\Omega_1} = 2\,\overrightarrow{MN}$, M étant le point de $\mathscr{C}$ de paramètre t.

b) Soit Γ une courbe birégulière de $\mathscr{E}$ dont la normale n'est jamais parallèle à Ox. La normale en un point P de Γ rencontre Ox en un point Q ; le centre de courbure en P à Γ est Ω. Trouver toutes les courbes Γ telles qu'on ait constamment $\overrightarrow{P\Omega} = 2\,\overrightarrow{PQ}$.

c) On revient à $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{S}_t$ la droite passant par $M(t)$ et symétrique, en direction, de Oy par rapport à $\mathscr{N}_t$. Trouver l'enveloppe de $\mathscr{S}_t$ quand t varie. Montrer que le point caractéristique de $\mathscr{S}_t$ est la projection orthogonale de $N(t)$ sur $\mathscr{S}_t$.

d) Soit Ω_2 le centre de courbure en Ω_1 à la développée de $\mathscr{C}$ ($t \notin 2\pi\mathbb{Z}$). Démontrer que $\overrightarrow{M\Omega_2}$ est indépendant de t. Préciser ce vecteur.

e) Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $l \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver les courbes birégulières de $\mathscr{E}$ dont une équation intrinsèque est $\rho_1(s) = \varepsilon\sqrt{l^2 - s^2}$.

f) Soit Γ une courbe birégulière *sans sommet*. En un point P de Γ, le centre de courbure est noté J_1 ; le centre de courbure en J_1 à la développée de Γ (justifier son existence) est noté J_2. On donne $l > 0$. Trouver les courbes Γ telles que $\|\overrightarrow{PJ_2}\| = l$ pour tout P.

g) Soit $\mathscr{F}$ la famille de courbes obtenues à partir de $\mathscr{C}$ en effectuant des *translations* arbitraires parallèles à Ox.

*g*1) Trouver les trajectoires orthogonales de la famille $\mathscr{F}$.

*g*2) Trouver le lieu du centre de courbure au point sur Oy des membres de $\mathscr{F}$.

h) Soit $\mathscr{G}$ la famille des courbes obtenues en transformant $\mathscr{C}$ par des *homothéties* arbitraires de centre O et de rapport > 0. Chercher les trajectoires orthogonales de la famille $\mathscr{G}$. Dessiner sommairement l'une d'elles.

PARTIE III

On considère l'arche Γ de $\mathscr{C}$ obtenue pour $t \in \,]0, 2\pi[$. On oriente Γ selon les t croissants. On note S son sommet et s désigne l'abscisse curviligne qui prend la valeur 0 en S.

a) Préciser s, $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_1$, ρ_1 en fonction de t. Déterminer $L > 0$ tel que s varie dans $]-L, L[$.

b) Soit $U = \{(s, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [-L, L] \text{ et } \lambda > \rho_1(s)\}$. On note $\Phi : U \longrightarrow \mathscr{E}$ l'application $(s, \lambda) \mapsto M(s) + \lambda\vec{\tau}_1(s)$, et $V = \operatorname{Im}(\Phi)$. Montrer que V est un ouvert de $\mathscr{E}$; préciser cet ouvert ; montrer que Φ définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V.

*c*1) Quelles sont les images par Φ des courbes $\lambda = \text{Cte}$ de U ?

*c*2) Soit $\Psi : V \longrightarrow U$ le $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme réciproque de Φ. Etudier et dessiner les images par Ψ : du segment $]0, 2\pi a[\times \{0\}$; des droites ou portions de droites de V parallèles à Ox ; des demi-droites ouvertes parallèles à Oy, d'origine les points de rebroussement de Γ.

d) Soit R le point $(-2a, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il n'existe aucun $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U' sur V', où $U \subset U'$ et $R \in V'$, *qui prolonge* Φ.

Exercice 12 : On donne une courbe paramétrée $\mathscr{C}_1$ birégulière de classe $\mathscr{C}^2$, de repère de Frenet $(M_1 ; \vec{T}_1, \vec{N}_1)$ (attention au changement de notations par rapport au cours !). On choisit pour paramètre $\varphi = \widehat{\vec{e}_1, \vec{T}_1}$; on suppose que φ varie dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $M_1(0) = O$. L'abscisse curviligne s_1 vaut 0 pour $\varphi = 0$ et $\mathscr{C}_1$ est orientée suivant les φ croissants.

*a*1) Démontrer qu'on définit par récurrence une suite $(\mathscr{C}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de courbes paramétrées $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathscr{E}$ par les conditions suivantes : si $M_n = M_n(\varphi)$ est le point de paramètre φ de $\mathscr{C}_n$, alors,

- pour $n \geqslant 0$, $\mathscr{C}_{2n+2}$ est la développante de $\mathscr{C}_{2n+1}$ qui passe par $M_{2n+1}(0)$, $M_{2n+2}(\varphi)$ est le point de $\mathscr{C}_{2n+2}$ situé sur la tangente en $M_{2n+1}(\varphi)$ à $\mathscr{C}_{2n+1}$

• et, pour $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}_{2n+1}$ est la développante de $\mathscr{C}_{2n}$ qui passe par $M_{2n}(\pi/2)$, $M_{2n+1}(\varphi)$ est le point de $\mathscr{C}_{2n+1}$ situé sur la tangente en $M_{2n}(\varphi)$ à $\mathscr{C}_{2n}$.

Les courbes $(\mathscr{C}_n)$ seront toutes orientées suivant les φ croissants ; elles sont birégulières pour $\varphi \in]0, \pi/2[$; leurs abscisses curvilignes s_n sont choisies pour que $s_n(0+0) = 0$; la longueur de $\mathscr{C}_n$ est notée L_n ; le rayon de courbure algébrique sur $\mathscr{C}_n$ est noté R_n.

Préciser le repère de Frenet $(M_k\,;\,\vec{T}_k, \vec{N}_k)$ en fonction de φ, ainsi qu'une détermination ψ_k de $\widehat{\overrightarrow{e_1, T_k}}$. Toutes les fonctions seront prolongées par continuité en 0 et $\pi/2$.

Démontrer, pour $\varphi \in [0, \pi/2]$: $(\forall n \geqslant 1)\ R_{2n}(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} R_{2n-1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$;

$$(\forall n \geqslant 1) \quad R_{2n+1}(\varphi) = \int_{\varphi}^{\pi/2} R_{2n}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

*a*2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} R_k(\varphi)\cos\psi_k\,\mathrm{d}\varphi$ est une constante $A > 0$. En déduire une minoration de L_k.

b) Soit v_k, $w_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions ainsi définies : elles sont 2π-périodiques ; v_k est impaire et w_k est paire ; $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$, $v_k(\varphi) = v_k(\pi - \varphi) = R_{2k}(\varphi)$ et $w_k(\varphi) = -w_k(\pi - \varphi) = R_{2k+1}(\varphi)$.

*b*1) Montrer : $\forall k \geqslant 0\ v_{k+1}(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} w_k(u)\,\mathrm{d}u$; $\forall k \geqslant 1\ w_k(\varphi) = \displaystyle\int_{\varphi}^{\pi/2} v_k(u)\,\mathrm{d}u$.

*b*2) En développant w_0 en série de Fourier, en déduire le développement de Fourier des v_k et w_k.

*b*3) En déduire : il existe $B > 0$ tel que la suite de fonctions $\varphi \mapsto w_k(\varphi)$ converge uniformément sur $[0, \pi/2]$ vers $\varphi \mapsto B\cos\varphi$, et la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, \pi/2]$ vers $\varphi \mapsto B\sin\varphi$. En quel sens peut-on dire que l'arc $\mathscr{C}_n$ tend, pour $n \longrightarrow \infty$, vers un arc de cycloïde droite ?

Chapitre X

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES CONIQUES

Dans tout le chapitre, $\mathscr{E}$ désigne un plan affine réel, de plan directeur E.

§ X.1 *POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 SUR $\mathscr{E}$*

Désignons par $\mathscr{P}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 2$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$, et par $\mathscr{P}_2$ le sous-ensemble de $\mathscr{P}$ formé des fonctions polynomiales de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ dont le degré est exactement 2. Il est clair que $\mathscr{P}_2$ est un *cône épointé* de $\mathscr{P}$, i.e. une union de droites vectorielles privées de l'origine.

L'objectif recherché est l'étude des ensembles $f^{-1}(0)$ pour $f \in \mathscr{P}_2$. Il sera atteint au § X.2. Mais comme deux éléments $\mathbb{R}^*$-proportionnels f et g de $\mathscr{P}_2$ définissent évidemment le même ensemble $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, il faut commencer par étudier les classes de $\mathbb{R}^*$-proportionnalité d'éléments de $\mathscr{P}_2$. La classification la plus importante pour nous sera la *classification affine :* si $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, considérons le groupe $\mathbb{R}^* \times \mathrm{GA}(\mathscr{E})$. On peut le faire *opérer à gauche* sur $\mathscr{P}$ (resp. sur $\mathscr{P}_2$ par conservation du degré) en définissant la loi : $((\lambda, \varphi, f)) \mapsto \lambda f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}$, et le problème de la classification affine des éléments de $\mathscr{P}_2$ consiste à caractériser les diverses orbites pour cette opération.

DÉFINITION X.1.1

> *Deux polynômes $f \in \mathscr{P}$ et $g \in \mathscr{P}$ (resp. $f \in \mathscr{P}_2$ et $g \in \mathscr{P}_2$) seront dits* ***affinement équivalents*** *ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ tels que $g = \lambda\,(f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$, i.e. s'ils appartiennent à une même orbite.*

L'équivalence affine ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}$ (resp. sur $\mathscr{P}_2$) ; $\{0\}$ est une classe ; il est facile de vérifier que les fonctions polynomiales de degré 0 (resp. 1) forment une classe d'équivalence affine. Proposons-nous de caractériser les classes d'équivalence affine d'éléments

de $\mathscr{P}_2$: cette caractérisation constitue la *classification affine* des éléments de $\mathscr{P}_2$. Pour cela nous avons besoin d'outils.

Forme quadratique homogénéisée d'un élément de $\mathscr{P}_2$

Nous avons vu au § V.4 qu'on peut identifier $\mathscr{E}$ à un hyperplan affine ne contenant pas l'origine du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}^{\#*}$, dual du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}^{\#}$ des fonctions affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.

L'espace directeur E de $\mathscr{E}$ est alors identifié au sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{E}^{\#*}$ qui dirige $\mathscr{E}$. Dans ce qui suit, nous utilisons ces identifications, et la loi externe de $\mathscr{E}^{\#*}$ sera notée $\#$, comme au § V.4. La nature particulière des éléments de $\mathscr{E}^{\#*}$ n'intervient pas : seules importent les propriétés rappelées ci-dessus.

Un repère affine de $\mathscr{E}$ n'est autre qu'une base $(A\,;e_1,e_2)$ du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}^{\#*}$ telle que $A\in\mathscr{E}$ et $e_1\in E$, $e_2\in E$. Si (ξ_0,ξ_1,ξ_2) désignent les coordonnées génériques de $\mathscr{E}^{\#*}$ dans un tel repère, une équation de $\mathscr{E}$ dans ce repère est : $\xi_0=1$. Si $\mathscr{B}=(A\,;e_1,e_2)$ et $\mathscr{B}'=(A'\,;e'_1,e'_2)$ sont deux telles bases, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est de la forme

$$(1)\qquad P=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \lambda_1 & & \\ \lambda_2 & \multicolumn{2}{c}{Q} \end{array}\right],$$

où Q est la matrice de (e'_1,e'_2) dans (e_1,e_2), et où $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$. On remarque que $\det(P)=\det(Q)$. Inversement, si $\mathscr{B}$ est un repère affine de $\mathscr{E}$, si $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{E}^{\#*}$ et si P est de la forme (1), alors $\mathscr{B}'$ est un repère affine de $\mathscr{E}$.

Si une bijection linéaire u de $\mathscr{E}^{\#*}$ laisse E globalement invariant, elle induit sur $\mathscr{E}$ une bijection affine φ_u définie de la façon suivante : $\varphi_u(x)=\dfrac{1}{\alpha(u(x))}u(x)$, où α désigne la forme linéaire sur $\mathscr{E}^{\#*}$ telle que $\mathscr{E}=\alpha^{-1}(1)$. On vérifie que $u\mapsto\varphi_u$ définit un isomorphisme du groupe $\{u\in\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}^{\#*})\mid u(\mathscr{E})=\mathscr{E}\}$ sur le groupe $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

PROPOSITION X.1.1

Pour $f\in\mathscr{P}$, il existe une et une seule forme quadratique Ψ sur $\mathscr{E}^{\#*}$ qui prolonge f. (Notons-la $\tilde{f}$).

L'application $\mathscr{P}\longrightarrow\mathrm{Quadr}\,(\mathscr{E}^{\#*})$, $f\mapsto\tilde{f}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev, et on a : $f\in\mathscr{P}_2$ ssi $\tilde{f}|_E\neq 0$.

Démonstration :

L'unicité de Ψ est conséquence du théorème X.1.4 du

tome 1, puisque E est l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul sur $\mathscr{E}^{\#*}$, et puisque Ψ est nécessairement donnée sur $\mathscr{E}^{\#*}\backslash E$ par $x \mapsto \lambda^2 f(y)$, où $(\lambda, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathscr{E}$ est l'unique couple tel que $x = \lambda y$. Soit $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ un repère affine de $\mathscr{E}$, et (x, y) les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $M \in \mathscr{E}$. Alors f s'écrit

$$(2) \qquad M \mapsto f(M) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,\alpha x + 2\,\beta y + \gamma\,.$$

Pour tout point $\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2 \in \mathscr{E}^{\#*}$, posons :

$$(3) \quad \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = \\ = a\xi_1^2 + 2\,b\xi_1\,\xi_2 + c\xi_2^2 + 2\,\alpha\xi_1\,\xi_0 + 2\,\beta\xi_2\,\xi_0 + \gamma\xi_0^2\,.$$

On définit ainsi une forme quadratique $\tilde{f}$ sur $\mathscr{E}^{\#*}$ qui prolonge f. La matrice dans $\mathscr{B}$ de cette forme quadratique est

$$(4) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & a & b \\ \beta & b & c \end{bmatrix}$$

et la matrice de $\tilde{f}|_E$ dans (e_1, e_2) est

$$(5) \qquad \mathrm{Mat}_{(e_1, e_2)}\,(\tilde{f}|_E) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Toutes les assertions de la proposition sont maintenant immédiates. ■

DÉFINITION X.1.2

Avec les notations et hypothèses de la proposition X.1.1, *la forme quadratique* $\tilde{f}$ *s'appelle* **l'homogénéisée de f.** *La forme quadratique* $\tilde{f}|_E$ *s'appelle la forme quadratique* **à l'infini** *de f, et sera notée* f_∞.

Il est clair que l'application $\mathscr{P} \longrightarrow \mathrm{Quadr}\,(E)$, $f \mapsto f_\infty$ est linéaire, surjective et admet pour noyau $\mathscr{E}^{\#}$. De plus la formule (2) rend évidente la propriété suivante :

$$(6) \quad \begin{cases} \textit{Pour tout } A \in \mathscr{E}, \textit{ l'application } \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}, M \mapsto f\,(M) - f_\infty(\overrightarrow{AM}) \\ \textit{est affine, et } f_\infty \textit{ est la seule forme quadratique } \Phi \in \mathrm{Quadr}\,(E) \\ \textit{telle que l'application } \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}, M \mapsto f\,(M) - \Phi\,(\overrightarrow{AM}) \textit{ soit affine.} \end{cases}$$

En particulier $f_\infty \neq 0$ pour $f \in \mathscr{P}_2$.

Avec les notations de (2), on a :

$$(\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2) \qquad f_\infty(xe_1 + ye_2) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2\,.$$

Un calcul élémentaire montre que, pour tous $A \in \mathscr{E}$ et $M \in \mathscr{E}$, le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en A s'écrit :

$$f(M) = f(A) + \mathrm{d}_A f \,.\, \overrightarrow{AM} + f_\infty(\overrightarrow{AM}) \,.$$

En d'autres termes, pour tout $A \in \mathscr{E}$, le *polynôme de Taylor* $P_{2,f,A}$ (cf. définition V.6.3 du tome 3) n'est autre que $2\, f_\infty$.

A tout repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$ et à toute $f \in \mathscr{P}_2$, on peut maintenant associer les deux scalaires fondamentaux :

(7) $\qquad \Delta_{f,\mathscr{B}} = \det\,(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(\tilde{f}))$ (= discriminant de $\tilde{f}$ dans $\mathscr{B}$)

(8) $\delta_{f,\mathscr{B}} = \det\,(\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f_\infty))$ (= discriminant de f_∞ dans (e_1, e_2)) .

Si $\mathscr{B}'$ est un autre repère affine de $\mathscr{E}$, défini par la matrice de passage (1), on a : (cf. § I.2, relation (8))

(9) $\qquad \Delta_{f,\mathscr{B}'} = (\det\,(Q))^2\, \Delta_{f,\mathscr{B}}\,; \quad \delta_{f,\mathscr{B}'} = (\det\,(Q))^2\, \delta_{f,\mathscr{B}}\,.$

Donc *la nullité* de $\Delta_{f,\mathscr{B}}$ (resp. de $\delta_{f,\mathscr{B}}$), et en cas de non-nullité, *le signe* de ces scalaires, sont des propriétés attachées à f seulement. De même, si les $\Delta_{f,\mathscr{B}}$ sont $\neq 0$, le quotient $H_f = \dfrac{\delta_{f,\mathscr{B}}}{\Delta_{f,\mathscr{B}}}$ ne dépend que de f.

Formes quadratiques de même type

En vue de résoudre le problème de la classification affine des $f \in \mathscr{P}_2$ objet de ce §, posons la définition suivante : deux formes quadratiques Φ_1 et Φ_2 sur un $\mathbb{R}$-ev V de dimension finie $\geqslant 1$ seront dites **de même type** ssi Φ_2 ou $-\,\Phi_2$ a même signature que Φ_1. On définit ainsi une relation d'équivalence sur Quadr (V), et il est clair que pour toute $\Phi \in$ Quadr (V) et tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les formes Φ et $\lambda\Phi$ ont même type.

Les classes d'équivalence de la relation « Φ_1 et Φ_2 ont même type » seront appelées les **types** de formes quadratiques sur V. Il y a une bijection évidente entre les types de formes quadratiques sur V et les couples (p, q) de naturels tels que $p \geqslant q$ et $p + q \leqslant \dim\,(V)$, une forme quadratique Φ étant de type (p, q) ssi sa signature est (p, q) ou (q, p).

Classification affine des éléments de $\mathscr{P}_2$

Rappelons que deux polynômes $f \in \mathscr{P}_2$ et $g \in \mathscr{P}_2$ sont affinement équivalents ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ tels que $g = \lambda\,(f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$. Pour cela il faut et il suffit qu'il existe deux repères affines $\mathscr{R}$ et

$\mathscr{R}'$ tels que f s'exprime dans $\mathscr{R}$ par $h(x, y)$ et g dans $\mathscr{R}'$ par $\rho h(x, y)$, avec $\rho \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}[x, y]$, deg $(h) = 2$.

Il est clair que pour tous les f appartenant à une même classe d'équivalence, les homogénéisés $\tilde{f}$ sont tous de même type ; il en va de même pour toutes les formes quadratiques à l'infini f_∞. On est donc conduit à considérer le tableau à double entrée suivant : (où $f \in \mathscr{P}_2$)

Tableau 1

type de f_∞ \ type de $\tilde{f}$	(3, 0)	(2, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(2, 0)	I	II	III		
(1, 1)		IV		V	
(1, 0)		VI	VII	VIII	IX

Dans ce tableau, les cases marquées d'une croix signalent des impossibilités : si $\tilde{f}$ est définie positive ou définie négative, sa restriction à E, i.e. f_∞ l'est aussi nécessairement, ce qui exclut les types (1, 1) et (1, 0) ; si $\tilde{f}$ est de type (2, 0), elle ne peut pas changer de signe, ce qui exclut pour f_∞ le type (1, 1) ; si f_∞ est de type (2, 0), $\tilde{f}$ ne peut avoir que les types (2, 0), (2, 1) ou (3, 0), ce qui exclut deux autres cases. Enfin $\tilde{f}$ de type (1, 0) est incompatible avec f_∞ de rang 2. Si on considère maintenant non seulement le type mais la signature de $\tilde{f}$, compte tenu du fait que f et $-f$ sont dans la même classe d'équivalence affine, on obtient le tableau suivant :

Tableau 2

type de f_∞ \ signature de $\tilde{f}$	(3, 0)	(2, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(2, 0)	I	II	III		
(1, 1)		IV		V	
(1, 0)		VI	VII	VIII	IX

On ne s'étonnera pas de trouver les mêmes six cases vides qu'au tableau 1. Pour les 9 cases restantes, il est facile [1] de trouver dans $\mathbb{R}[X, Y]$ des polynômes $h_{\mathrm{I}}, h_{\mathrm{II}}, \ldots, h_{\mathrm{IX}}$ qui satisfassent aux conditions correspondantes pour la signature de $\tilde{h}_i$ et le type de h_∞. Alors les polynômes $f \in \mathscr{P}_2$ tels que, dans un certain repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$, f s'exprime par ρh_i (avec $\rho \in \mathbb{R}^*$, et $i \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{IX}\}$) constituent une classe, notée $\mathscr{C}_i$. Il est déjà certain (grâce aux h_i) que chaque classe $\mathscr{C}_i$ est non vide, et que (grâce au tableau 1) les $\mathscr{C}_i$ sont toutes distinctes. Il reste à vérifier que $\bigcup \mathscr{C}_i = \mathscr{P}_2$, ce qui va résulter de l'étude des cas du tableau 2 :

• *Cas I :* Soit A le point commun à $\mathscr{E}$ et à la droite vectorielle (de $\mathscr{E}^{\#*}$) $\tilde{f}$-orthogonale de E. Posant $C = \tilde{f}(A)$ (d'où $C > 0$), il existe une base (e_1, e_2) de E qui soit f_∞-orthogonale et telle que :

$$(\forall (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3) \quad \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = C(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2).$$

La fonction $g = \dfrac{1}{C} f \in \mathscr{P}_2$ est affinement équivalente à f, et dans le repère affine $\mathscr{B} = (A\,;\, e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(10) \qquad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad g(A \dot{+} (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 + y^2 + 1}\,.$$

• *Cas II :* Ici aussi E est non $\tilde{f}$-isotrope, et f_∞ est de signature $(2, 0)$. Soit A le point commun à $\mathscr{E}$ et à la droite vectorielle (de $\mathscr{E}^{\#*}$) $\tilde{f}$-orthogonale à E. On a : $\tilde{f}(A) < 0$ car $\tilde{f}$ est de signature $(2, 1)$. Posant $C = -f(A)$, on a une base f_∞-orthogonale (e_1, e_2) de E telle que

$$(\forall (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3) \ \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = C(-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2).$$

La fonction $g = \dfrac{1}{C} f \in \mathscr{P}_2$ est affinement équivalente à f, et dans le repère affine $\mathscr{B} = (A\,;\, e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(11) \qquad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad g(A \dot{+} (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 + y^2 - 1}\,.$$

• On peut raisonner de la même façon dans les cas III, IV, V où le sous-$\mathbb{R}$-ev E de $\mathscr{E}^{\#*}$ n'est pas $\tilde{f}$-isotrope. Donc la droite vectorielle (de $\mathscr{E}^{\#*}$) $\tilde{f}$-orthogonale à E rencontre $\mathscr{E}$ en un unique point A. Dans les cas III, et V, $\tilde{f}(A)$ est nécessairement nul ; dans le cas IV, $f(A) > 0$. Dans le cas IX, $\mathscr{T} = \mathscr{E} \cap \mathrm{Sing}\,(\tilde{f}) \neq \varnothing$. On choisit alors $A \in \mathscr{T}$, d'où $f(A) = 0$.

---

[1] Par exemple, les h_i définis dans le Théorème X.1.1 conviennent.

• *Cas III :* Soit (e_1, e_2) une base f_∞-orthonormale de E. Dans le repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(\forall(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3) \quad \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \text{d'où}$$

$$(12) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(A \dot{+} (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 + y^2}\,.$$

• *Cas IV :* On pose $C = -f(A)$ (donc $C < 0$) et $g = \dfrac{1}{C} f$ (qui est affinement équivalente à f). Soit (e_1, e_2) une base g_∞-orthogonale réduite de E. Alors, dans le repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$\forall(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \tilde{g}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_0^2, \quad \text{d'où}$$

$$(13) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad g(A \dot{+} (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 - y^2 - 1}\,.$$

• *Cas V :* Soit (e_1, e_2) une base f_∞-orthogonale réduite de E. Dans le repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(\forall(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3) \quad \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2, \quad \text{d'où}$$

$$(14) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(A \dot{+} (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 - y^2}\,.$$

• *Cas IX :* Soit (e_1, e_2) une base f_∞-orthogonale réduite de E. Dans le repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(\forall(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3) \quad \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = \xi_1^2, \quad \text{d'où}$$

$$(15) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(A \dot{+} (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2}\,.$$

• *Cas VI :* La forme f_∞ de type $(1, 0)$ peut être de signature $(1, 0)$ ou $(0, 1)$. Supposons-la de signature $(1, 0)$. Soit $B \in \mathscr{E}$ et soit (e_1, e_2) une base f_∞-orthogonale réduite de E. Dans le repère affine $(B\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(\forall(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3)$$
$$\tilde{f}(\xi_0 \# B + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2) = \xi_1^2 + \xi_0(a_0\,\xi_0 + a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2)$$

avec $a_2 \neq 0$ puisque $\tilde{f}$ est de signature $(2, 1)$; en remplaçant e_2 par $e_2' = -\dfrac{1}{a_2} e_2$, on est ramené à $a_2 = -1$. Choisissons alors

$A = B \dot{+} \left(-\dfrac{a_1}{2} e_1 + \left(a_0 - \dfrac{a_1^2}{4}\right) e_2'\right)$ pour nouvelle origine dans $\mathscr{E}$. Dans le

repère $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2')$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$(\forall(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3) \quad \tilde{f}(\xi_0 \# A + \xi_1 \# e_1 + \xi_2 \# e_2') = \xi_1^2 - \xi_0\,\xi_2\,, \quad \text{d'où}$$

$$(16) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(A \dotplus xe_1 + ye_2') = \boxed{x^2 - y}\,.$$

Si maintenant on suppose f_∞ de signature (0, 1), on voit de la même façon qu'il existe un repère $(A\,;e_1, e_2')$ de $\mathscr{E}$ tel que f soit donnée dans ce repère par :

$$(17) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(A \dotplus (xe_1 + ye_2')) = \boxed{-x^2 + y}\,.$$

• *Cas VII :* En opérant de la même façon qu'au cas VI, on voit qu'il existe un repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$ et $C \in \mathbb{R}^*$ tel que $g = \dfrac{1}{C} f$ soit donnée dans $\mathscr{B}$ par :

$$(18) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad g(A \dotplus (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 + 1}\,.$$

• *Cas VIII :* De même, il existe un repère affine $\mathscr{B} = (A\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$ tel que $g = \dfrac{1}{C} f$ soit donnée dans $\mathscr{B}$ par :

$$(19) \qquad (\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad g(A \dotplus (xe_1 + ye_2)) = \boxed{x^2 - 1}\,.$$

La synthèse de cette étude prouve bien que tout polynôme f de $\mathscr{P}_2$ appartient bien à l'une des classes $\mathscr{C}_i$ ($i \in \{\mathrm{I}, \ldots, \mathrm{IX}\}$) envisagées au début, d'où :

THÉORÈME X.1.1

Soit $f \in \mathscr{P}_2$ et $g \in \mathscr{P}_2$. Pour que f et g soient ***affinement équivalents,*** *il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ ont même type, et f_∞ et g_∞ ont même type. Il y a exactement* ***neuf*** *classes d'équivalence affine d'éléments de $\mathscr{P}_2$, représentées respectivement dans un repère convenable de $\mathscr{E}$ par les polynômes*
$h_{\mathrm{I}}(x, y) = x^2 + y^2 + 1$; $h_{\mathrm{II}}(x, y) = x^2 + y^2 - 1$;
$h_{\mathrm{III}}(x, y) = x^2 + y^2$; $h_{\mathrm{IV}}(x, y) = x^2 - y^2 - 1$; $h_{\mathrm{V}}(x, y) = x^2 - y^2$;
$h_{\mathrm{VI}}(x, y) = x^2 - y$; $h_{\mathrm{VII}}(x, y) = x^2 + 1$; $h_{\mathrm{VIII}}(x, y) = x^2 - 1$;
$h_{\mathrm{IX}}(x, y) = x^2$.

Si $f \in \mathscr{P}_2$, on a donc au moins un repère affine $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ et un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que $g = \lambda f$ soit l'une des fonctions polynomiales représentée

par les h_i dans $\mathscr{B}$. Par définition, choisir un tel repère et un tel λ, c'est *calculer un représentant réduit* de f.

Discriminants et discriminants à l'infini

Les formules (7) et (8) définissent $\Delta_{f,\mathscr{B}}$ *(discriminant de f dans $\mathscr{B}$)* et $\delta_{f,\mathscr{B}}$ (appelé aussi *discriminant à l'infini de f dans $\mathscr{B}$*). On vérifie facilement que si g est affinement équivalente à f, il existe des scalaires $D \in \mathbb{R}^*$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\Delta_{g,\mathscr{B}} = \rho^3 D^2 \Delta_{f,\mathscr{B}}\,, \quad \delta_{g,\mathscr{B}} = \rho^2 D^2 \delta_{f,\mathscr{B}}\,. \tag{20}$$

Lorsque $\Delta_{f,\mathscr{B}} \neq 0$ (resp. $\delta_{f,\mathscr{B}} \neq 0$), le scalaire $H_f = \dfrac{\delta_{f,\mathscr{B}}}{\Delta_{f,\mathscr{B}}}$ (resp. $\eta_f = \dfrac{\Delta_{f,\mathscr{B}}}{\delta_{f,\mathscr{B}}}$) ne dépend que de f.

Le polynôme $f \in \mathscr{P}_2$ sera dit **propre** si $\tilde{f}$ est **non dégénérée** (i.e. ssi les $\Delta_{f,\mathscr{B}}$ sont $\neq 0$), et **dégénéré** sinon. Il sera dit **parabolique** ssi f_∞ est **dégénérée** (i.e. ssi les $\delta_{f,\mathscr{B}}$ sont nuls), **elliptique** ssi f_∞ est **de type (2, 0)** (i.e. ssi les $\delta_{f,\mathscr{B}}$ sont > 0), **hyperbolique** ssi f_∞ est **de type (1, 1)** (i.e. ssi les $\delta_{f,\mathscr{B}}$ sont < 0).

Par simple inspection des cas, on voit que les $f \in \mathscr{P}_2$ *propres et elliptiques* sont les $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{I}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{II}}$, les $f \in \mathscr{P}_2$ *propres et hyperboliques* sont les $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{IV}}$, les f *propres et paraboliques* sont les $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VI}}$; les $f \in \mathscr{P}_2$ dégénérés et elliptiques sont les $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{III}}$, les f dégénérés et hyperboliques sont les $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{V}}$, enfin les f dégénérés et paraboliques sont les $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VII}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VIII}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$.

Points critiques d'un élément de $\mathscr{P}_2$

Soit $f \in \mathscr{P}_2$. L'application $\mathscr{E} \longrightarrow E^*$, $M \mapsto \mathrm{d}_M f$ est *affine ;* donc l'ensemble $\mathscr{C}_f = \{M \in \mathscr{E} \mid \mathrm{d}_M f = 0\}$ des *points critiques* de f est une s.v.l.a. de $\mathscr{E}$

$$\text{(21)} \quad \text{si } g = \lambda\,(f \circ \varphi^{-1}) \in \mathscr{P}_2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^*,\ \varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}))\,,$$
$$\text{alors} \quad \mathscr{C}_g = \mathscr{C}_{f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}} = \varphi(\mathscr{C}_f)\,.$$

Pour qu'un point $\Omega \in \mathscr{E}$ soit critique pour f, il faut et il suffit que la fonction $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto f(M) - f_\infty(\overrightarrow{\Omega M})$ soit constante (en effet la partie linéaire de cette application affine est $\mathrm{d}_\Omega f$).

Les points critiques des polynômes h_i du théorème X.1.1 se calculent immédiatement. Compte tenu de (21), on en déduit :

- L'origine de tout repère de $\mathscr{E}$ dans lequel f est sous forme *réduite* est point critique de f, sauf si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VI}}$.

• Si f est elliptique ou hyperbolique, il possède un et un seul point critique, et si Ω est ce point critique, on a : $f(\Omega) \neq 0$ ssi f est propre.

• Pour que f n'ait **aucun point critique,** il faut et il suffit que f soit **propre et parabolique** i.e., que $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VI}}$.

• Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VII}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VIII}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$, l'ensemble des points critiques est une droite affine.

Points critiques de polynômes non paraboliques

Soit $f \in \mathscr{P}_2$ supposé non parabolique, et soit Ω l'unique point critique de f. La fonction polynomiale $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto f(M) - f_\infty(\overrightarrow{\Omega M})$ est constante ; notons C sa valeur. Soit $\mathscr{B} = (A\ ;\ e_1, e_2)$ un repère affine arbitraire de $\mathscr{E}$, et soit $g \in \mathscr{P}_2$ la fonction $M \mapsto f(M) - C = f_\infty(\overrightarrow{\Omega M})$. On a $g_\infty = f_\infty$, donc $\delta_{g,\mathscr{B}} = \delta_{f,\mathscr{B}} \neq 0$. De plus Ω est point critique de g, et c'est le seul car $\delta_{g,\mathscr{B}} \neq 0$.

Comme $g(\Omega) = 0$, on a donc $\Delta_{g,\mathscr{B}} = 0$. Or un calcul immédiat montre que $\Delta_{g,\mathscr{B}} = \Delta_{f,\mathscr{B}} - C\delta_{f,\mathscr{B}}$, d'où la formule :

$$\boxed{C = \frac{\Delta_{f,\mathscr{B}}}{\delta_{f,\mathscr{B}}}}\ . \tag{22}$$

Exercice 1 : *a)* Vérifier que $\mathscr{P}_2$ est un ouvert connexe et partout dense du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{P}$.

b) Soit $\mathscr{C}$ l'un des ensembles $\mathscr{C}_{\mathrm{I}}$ à $\mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$. Selon les cas, étudier si $\mathscr{C}$ est ouvert, s'il est connexe, s'il est fermé. Donner chaque fois la *frontière* de $\mathscr{C}$.

c) Soit $A \in \mathscr{E}$ et soit $\mathscr{C}$ l'un des ensembles $\mathscr{C}_{\mathrm{I}}$ à $\mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$. On pose $U = \{f \in \mathscr{C} \mid f(A) \neq 0\}$. Selon le cas, discuter les composantes connexes de U. l'ensemble $\{f \in \mathscr{P}_2 \mid f(A) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathscr{P}_2$ (donc de $\mathscr{P}$) : est-il connexe ?

Exercice 2 : Caractériser les orbites de $\mathscr{P}_2$ pour l'action à gauche de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sur $\mathscr{P}_2$ définie par : $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \times \mathscr{P}_2 \longrightarrow \mathscr{P}_2$, $(\varphi, f) \mapsto f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}$. (La classification des éléments de $\mathscr{P}_2$ ainsi obtenue est bien plus fine que *l'équivalence affine* du texte. En particulier, les $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$-orbites ne sont pas en nombre fini. On voit l'importance de considérer f et λf ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) comme équivalents si l'on veut arriver à une classification simple).

§ X.2 *ZÉROS D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2 SUR $\mathscr{E}$*

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'ensemble $\Gamma_f = f^{-1}(0)$ lorsque $f \in \mathscr{P}_2$ est donné (les notations sont celles du § X.1).

Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\lambda f)^{-1}(0) = f^{-1}(0)$. On peut donc supposer qu'après avoir choisi un repère affine convenable $\mathscr{B} = (\Omega\ ;\ e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, f est l'une des fonctions représentées dans $\mathscr{B}$ par les h_i ($i \in \{\mathrm{I}, \ldots, \mathrm{IX}\}$) du théorème X.1.1, de sorte que l'on obtient immédiatement :

Si $f = h_{\mathrm{I}}$ ou si $f = h_{\mathrm{VII}}$, $\Gamma_f = \varnothing$.

Si $f = h_{\mathrm{III}}$, Γ_f se réduit à l'unique point critique de f.

Si $f = h_{\mathrm{V}}$, Γ_f est l'union de deux droites affines sécantes en l'unique point critique de f.

Si $f = h_{\mathrm{VIII}}$, Γ_f est l'union de deux droites parallèles et distinctes, symétriques par rapport à la droite des points critiques de f.

Si $f = h_{\mathrm{IX}}$, Γ_f est une droite affine, égale à l'ensemble des points critiques de f.

Réciproquement, tout singleton $\{A\}$, $A \in \mathscr{E}$, s'écrit Γ_f pour au moins un $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{III}}$, toute union de deux droites affines sécantes s'écrit Γ_f pour au moins un $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{V}}$, etc.

Les seuls cas qui présentent un intérêt véritable sont ceux où $\tilde{f}$ est de type $(2, 1)$, i.e. $f = h_{\mathrm{II}}$, $f = h_{\mathrm{IV}}$ et $f = h_{\mathrm{VI}}$. Observons tout de suite que pour $i \in \{\mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{VI}\}$, Γ_{h_i} ne contient pas l'unique point critique (quand il existe) de h_i, donc *c'est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$*. Etudions ces trois cas l'un après l'autre.

Etude de Γ_f si $f = h_{\mathrm{II}}$

Rappelons que dans ce cas $h_{\mathrm{II}}(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Il est clair qu'alors Γ_f est *compacte* (car fermée et bornée), et *connexe* car c'est la trajectoire de la courbe paramétrée $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \Omega \dotplus (e_1 \cos t + e_2 \sin t)$. En posant $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, on voit que $\Gamma_f \setminus \{\Omega \dotplus (-e_1)\}$ est la trajectoire du plongement rationnel $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto \Omega \dotplus \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} e_1 + \frac{2u}{1+u^2} e_2 \right)$. Les axes $\mathscr{D}_i = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_i$ ($i \in \{1, 2\}$) sont des axes de symétrie oblique (chacun d'eux parallèlement à l'autre) de Γ_f. Un calcul immédiat montre que tout point de Γ_f est *birégulier* (en conséquence Γ_f ne contient aucun intervalle non trivial de droite affine). Enfin Ω est centre de symétrie de Γ_f, qui est appelée une **ellipse.**

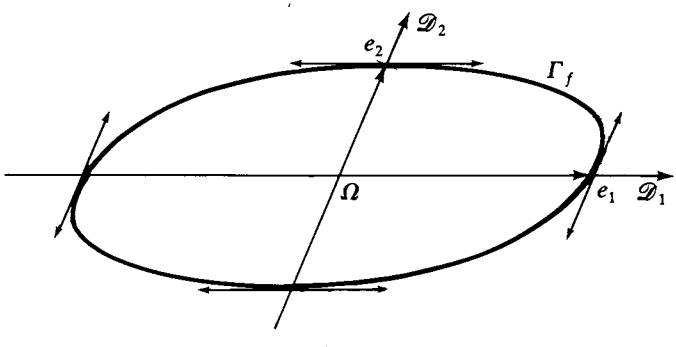


Fig. 1.

Etude de Γ_f si $f = h_{\mathrm{IV}}$

Rappelons qu'alors $h_{\mathrm{IV}}(x, y) = x^2 - y^2 - 1$. La sous-variété Γ_f est *fermée* (zéros d'un polynôme), mais visiblement *non compacte* (car non bornée). C'est l'union des trajectoires (qui sont disjointes) des deux courbes paramétrées $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \Omega \dotplus (\varepsilon e_1 \operatorname{ch} t + e_2 \operatorname{sh} t)$ $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$. Chaque Φ_ε est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement, donc Γ_f possède *deux composantes connexes*. On constate sans peine que les droites d'équations dans $\mathscr{B} : y = x$ et $y = -x$ sont *asymptotes* à Γ_f, chaque Φ_ε comportant deux branches infinies. On vérifie (cf. Φ_ε) que Γ_f n'a aucun point d'inflexion, donc ne contient aucun intervalle non trivial de droite ; le point critique Ω est encore centre de symétrie de Γ_f ; les axes $\mathscr{D}_i = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_i$ $(i \in \{1, 2\})$ sont axes de symétrie oblique de Γ_f (chacun parallèlement à l'autre). Remarquons que la gerbe des asymptotes admet l'équation $\boxed{(h_{\mathrm{IV}})_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) = 0}$. En particulier le cône isotrope de $(h_{\mathrm{IV}})_\infty$ est la réunion des deux directions des asymptotes de Γ_f. Ces directions sont appelées **directions à l'infini** de Γ_f ; et Γ_f est appelée une **hyperbole.**

Dans le repère $\left(\Omega\ ; \frac{1}{2}(e_1 - e_2), \frac{1}{2}(e_1 + e_2)\right) = (\Omega\ ; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on a :

$$(\forall M = \Omega \dotplus (X\varepsilon_1 + Y\varepsilon_2)) \boxed{f(M) = XY - 1}.$$

Les droites $\mathscr{A}_i = \Omega \dotplus \mathbb{R}\varepsilon_i$ $(i \in \{1, 2\})$ sont les *asymptotes* de l'hyperbole Γ_f. Les branches de Γ_f sont donc les trajectoires des plongements rationnels $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto \Omega \dotplus \left(u\varepsilon_1 + \frac{1}{u}\varepsilon_2\right)$ et $\mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto \Omega \dotplus \left(u\varepsilon_1 + \frac{1}{u}\varepsilon_2\right)$.

Réciproquement toute courbe d'équation $xy = \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$) dans un repère donné de $\mathscr{E}$ est une hyperbole ayant les axes du repère pour asymptotes.

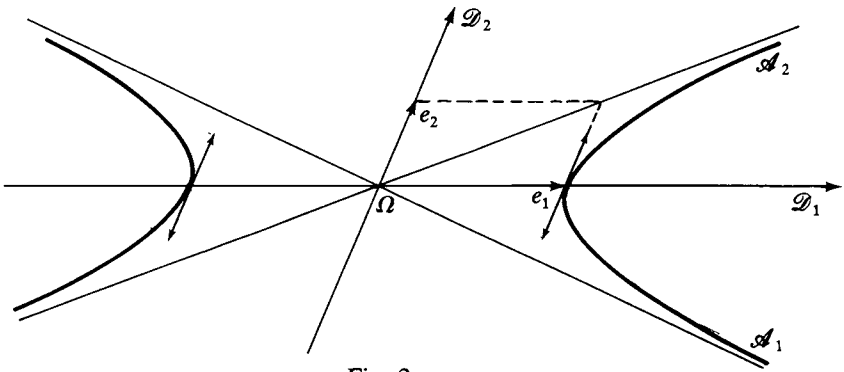


Fig. 2.

Etude de Γ_f pour $f = h_{\mathrm{VI}}$

Rappelons que $h_{\mathrm{VI}}(x, y) = x^2 - y$. La sous-variété Γ_f est alors l'image du plongement rationnel $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \Omega \dotplus (te_1 + t^2 e_2)$. Elle est donc *connexe,* fermée et non bornée. L'axe $\mathscr{D}_2 = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_2$ est axe de symétrie oblique de Γ_f parallèlement à $\mathscr{D}_1 = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_1$. Les branches infinies (obtenues pour $t \longrightarrow +\infty$ et pour $t \longrightarrow -\infty$) sont évidemment paraboliques dans la direction de $\mathscr{D}_2$. On vérifie que Γ_f n'a aucun point d'inflexion, donc elle ne contient aucun intervalle non trivial de droite ; Γ_f est appelée une **parabole.**

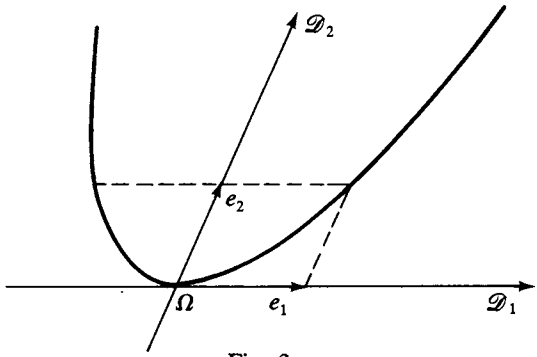


Fig. 3.

Notons qu'ici le cône isotrope de f_∞ se réduit à la droite vectorielle $\vec{\mathscr{D}}_2$. On dit que c'est la **direction à l'infini** de Γ_f.

DÉFINITION X.2.1

Une sous-variété courbe $\mathscr{V}$ de $\mathscr{E}$ est appelée une **ellipse** *(resp. une* **hyperbole,** *une* **parabole)** *ssi, relativement à un repère affine convenablement choisi, elle est définie par l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (resp. $x^2 - y^2 - 1 = 0$, $x^2 - y = 0$). Les ellipses, hyperboles et paraboles sont appelées* ***coniques propres (à points réels).***

On notera que si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{I}}$, c'est un polynôme propre, mais $f^{-1}(0)$ n'a aucun point réel.

- On reconnaît que Γ_f est une *ellipse* ssi $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{II}}$, i.e. ssi f est propre, elliptique et si $\Gamma_f \neq \varnothing$, ou encore ssi f est elliptique et $\tilde{f}$ de type (2, 1).
- On reconnaît que Γ_f est une *hyperbole* ssi $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{IV}}$, i.e. ssi f est propre et hyperbolique.
- On reconnaît que Γ_f est une *parabole* ssi $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VI}}$, i.e. ssi f est propre et parabolique, ou encore au fait que *f n'a aucun point critique.*

Congruence affine

Deux parties Γ et Γ' de $\mathscr{E}$ sont dites **affinement congruentes** ssi il existe $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$. On définit ainsi une relation d'équivalence entre parties de $\mathscr{E}$.

Soit $f \in \mathscr{P}_2$ et $g \in \mathscr{P}_2$ *affinement équivalentes,* i.e. $g = \lambda(f \circ \varphi^{-1})$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Il est clair que $\Gamma_g = \varphi(\Gamma_f)$, donc Γ_f et Γ_g sont affinement congruentes. D'après la caractérisation d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole, il est clair que :

- Toute bijection affine de $\mathscr{E}$ transforme une ellipse (resp. une hyperbole, une parabole) en une ellipse (resp. une hyperbole, une parabole).
- Toutes les ellipses de $\mathscr{E}$ sont affinement congruentes entre elles.
- Toutes les hyperboles de $\mathscr{E}$ sont affinement congruentes entre elles.
- Toutes les paraboles de $\mathscr{E}$ sont affinement congruentes entre elles.

En revanche une ellipse (compacte) ne peut pas être affinement congruente à une hyperbole ou à une parabole. De même une parabole (connexe) ne peut pas être affinement congruente à une hyperbole.

Equations d'une conique propre à points réels

THÉORÈME X.2.1

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{II}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{IV}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{V}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VI}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VIII}}$. Les polynômes $g \in \mathscr{P}_2$ tels que $\Gamma_f \subset \Gamma_g$ sont les $\{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$; donc ils vérifient : $\Gamma_f = \Gamma_g$. En particulier, si Γ_f est une conique propre à points réels, les seuls $g \in \mathscr{P}_2$ tels que $\Gamma_f = \Gamma_g$ sont les $\{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$.

Démonstration :

Développons la démonstration pour $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{II}}$, la preuve étant similaire dans les 4 autres cas.

Quitte à remplacer f par $\dfrac{1}{C} f$, avec $C \in \mathbb{R}^*$, on peut supposer que, relativement à un repère $(\Omega\ ; e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$ bien choisi, f s'écrit :

$$(\forall M \in \Omega + (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E}) \quad f(M) = x^2 + y^2 - 1\,.$$

Il est évident que si $g = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\Gamma_f = \Gamma_g$.

Inversement, soit $g \in \mathscr{P}_2$ tel que $\Gamma_f \subset \Gamma_g$. Ecrivons :
$g(M) = Ax^2 + B(y)x + C(y)$, avec $A \in \mathbb{R}$, $B(y)$ fonction affine de y et $C(y) =$ fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$ en y. D'où :

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \quad g(M) = Af(M) + B(y)x + D(y)\,,$$
$$\text{avec} \quad D(y) = C(y) - A(y^2 - 1)\,.$$

Soit $y \in]-1, 1[$. On a deux réels *distincts* $x_1(y)$ et $x_2(y)$ tels que $f(M_1) = f(M_2) = 0$ avec $M_i = \Omega + x_i(y)\, e_1 + y e_2$, $i \in \{1, 2\}$. D'où, à cause de l'hypothèse sur $g : g(M_1) = g(M_2) = 0$. D'où :

$B(y)\, x_i(y) + D(y) = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Puisque $x_1(y) \neq x_2(y)$, cela entraîne :

$B(y) = D(y) = 0$. C'est vrai $\forall y \in]-1, 1[$; donc, puisque $]-1, 1[$ est infini, les fonctions polynomiales B et D sont nulles sur $\mathbb{R}$. Donc $(\forall M)\ g(M) = A f(M)$. Puisque $g \in \mathscr{P}_2$, nécessairement $A \neq 0$, d'où le résultat. ■

Remarque 1 : La réunion des 5 classes concernées par le théorème X.2.1 est exactement l'ensemble des $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $\Gamma_f \setminus \{\text{points critiques de } f\} \neq \varnothing$.

Remarque 2 : Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$, et si $g \in \mathscr{P}_2$ vérifie $\Gamma_f = \Gamma_g$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid g = \lambda f$; mais si on a seulement $\Gamma_f \subset \Gamma_g$ le résultat ne tient plus.

Centres des coniques

Soit Γ une conique propre à points réels. D'après le théorème X.2.1, les $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $\Gamma = \Gamma_f$ sont tous $\mathbb{R}^*$-proportionnels, donc ont tous le même ensemble de points critiques. Si l'on convient d'appeler **centre** de Γ_f tout point critique de f, on voit que :

Une ellipse (resp. une hyperbole) possède *un unique centre ;* pour cette raison, ellipses et hyperboles sont aussi appelées *coniques propres (à points réels) à centre.*

En revanche *une parabole n'a pas de centre.*

A partir des formes réduites $x^2 + y^2 - 1$ et $x^2 - y^2 - 1$, on voit que le centre Ω d'une conique propre à points réels et à centre Γ est en fait un **centre de symétrie.** C'est même le seul centre de symétrie de Γ car si $\Omega' \in \mathscr{E}$, de coordonnées (α, β) est centre de symétrie de Γ, le polynôme $(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 - 1$ (resp. $(x - 2\alpha)^2 - (y - 2\beta)^2 - 1$) qui définit le symétrique de Γ par rapport à Ω', doit être proportionnel à $x^2 + y^2 - 1$ (resp. $x^2 - y^2 - 1$) (cf. théorème X.2.1), ce qui implique $\alpha = \beta = 0$, i.e. $\Omega' = \Omega$. On voit de même qu'*une parabole n'a pas de centre de symétrie.*

Soit φ une bijection affine de $\mathscr{E}$ et $g = f \circ \varphi$. Pour tout point $M \in \mathscr{E}$, on a : $\mathrm{d}_M g = (\mathrm{d}_{\varphi(M)} f) \circ (\mathrm{d}_M \varphi) = \mathrm{d}_{\varphi(M)} f \circ \vec{\varphi}$. Puisque $\vec{\varphi} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, on voit que M est critique pour g ssi $\varphi(M)$ l'est pour f. D'autre part, $\Gamma_f = \varphi(\Gamma_g)$, d'où :

THÉORÈME X.2.2

Soit Γ une conique propre à points réels et à centre, de centre Ω, et soit $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Alors $\Gamma' = \varphi(\Gamma)$ admet pour centre le point $\Omega' = \varphi(\Omega)$.

Ce résultat ne saurait étonner puisqu'on vient de voir que le centre (d'une conique propre à centre) est caractérisé comme unique centre de symétrie.

Examinons rapidement les autres coniques, en laissant de côté le cas où $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{I}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VII}}$ pour lequel Γ_f est vide.

Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{III}}$, Γ_f se réduit à un seul point, qui est son centre, et aussi évidemment son unique centre de symétrie.

Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{V}}$, il a un seul point critique (i.e. un centre unique) : c'est le point commun aux deux droites de réunion Γ_f, donc aussi l'unique centre de symétrie de Γ_f.

Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{VIII}}$, il y a une droite de points critiques (i.e. de centres) : c'est la droite « des milieux » des deux droites parallèles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dont la réunion est Γ_f (i.e. l'ensemble des milieux des $\{M_1, M_2\}$ pour $M_1 \in \mathscr{D}_1$ et $M_2 \in \mathscr{D}_2$). C'est aussi l'ensemble des centres de symétrie de Γ_f. Enfin si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$, l'ensemble des centres est Γ_f et c'est aussi l'ensemble des centres de symétrie de Γ_f.

Etant donné $f \in \mathscr{P}_2$ supposé non parabolique, il admet un point critique unique Ω qu'il est naturel de prendre pour nouvelle origine d'un repère de $\mathscr{E}$ translaté du repère initial $\mathscr{B} = (O\,;e_1, e_2)$, puisque (sauf dans le cas où $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{I}}$ pour lequel Γ_f est vide) Ω est l'unique centre de symétrie de Γ_f. Si $f(M) = 0$ est une équation de Γ_f dans le repère initial, son équation dans le repère translaté est $f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) + C = 0$, où C est donné par la formule (22) du § X.1.

Exemple 1 : *On donne la famille de polynômes de degré 2 définis dans un repère affine $\mathscr{B} = (O\,;e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$ par*

$$(\forall M = O \dotplus (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E})$$
$$f_{a,b}(M) = x^2 + 2\,axy + y^2 + 2\,bx - a^2 \quad ((a, b) \in \mathbb{R}^2)\,.$$

Discuter suivant la position de (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ la nature de l'ensemble $\Gamma_{a,b} = f_{a,b}^{-1}(0)$.

Solution : La matrice $A(a, b)$ de l'homogénéisée $\tilde{f}_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans $(O\,;e_1, e_2)$ est $A(a, b) = \begin{bmatrix} -a^2 & b & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, et la matrice $B(a, b)$ de $(f_{a,b})_\infty$ dans (e_1, e_2) est $B(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$, d'où $\delta_{f,\mathscr{B}} = 1 - a^2$ et $\Delta_{f,\mathscr{B}} = a^4 - a^2 - b^2$.

1er cas : $a = 1$: Alors $\delta_{f,\mathscr{B}} = 0$ et $\Delta_{f,\mathscr{B}} = -b^2$, donc pour $b \neq 0$, $\Gamma_{1,b}$ est une parabole, tandis que pour $b = 0$ on a $f_{1,0}(M) = (x+y)^2 - 1$, donc $\Gamma_{1,0}$ est l'union de deux droites parallèles : $x + y \pm 1 = 0$.

2e cas : $a = -1$: Alors $\delta_{f,\mathscr{B}} = 0$ et $\Delta_{f,\mathscr{B}} = -b^2$, donc $\Gamma_{-1,b}$ est une parabole pour $b \neq 0$; et pour $b = 0$, on a : $f_{-1,0}(M) = (x-y)^2 - 1$, donc $\Gamma_{-1,0}$ est l'union de deux droites parallèles.

3e cas : $a^2 > 1$: Alors $\delta_{f,\mathscr{B}} < 0$, donc si $a^4 - a^2 - b^2 \neq 0$, $f_{a,b}$ est propre et hyperbolique, donc $\Gamma_{a,b}$ est une hyperbole, tandis que pour $a^4 - a^2 - b^2 = 0$, $f_{a,b}$ est hyperbolique et dégénérée, donc $\Gamma_{a,b}$ est l'union de deux droites sécantes.

4e cas : $a^2 < 1$: Alors $\delta_{f,\mathscr{B}} > 0$, donc si $a^4 - a^2 - b^2 \neq 0$ $f_{a,b}$ est elliptique et propre. Comme $a \in]-1, 1[$, $a^2(a^2-1) - b^2 < 0$, $\tilde{f}_{a,b}$ est donc de signature $(2, 1)$, donc $\Gamma_{a,b}$ est une ellipse.

Enfin, si $a^2 < 1$ et $a^4 - a^2 - b^2 = 0$, ce qui ne peut avoir lieu que pour $a = b = 0$, $f_{0,0}$ est elliptique et dégénérée, donc $\Gamma_{0,0}$ se réduit à un singleton, à savoir le point O.

On peut résumer ces résultats par une figure dans le plan des (a, b). L'ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation $a^4 - a^2 - b^2 = 0$ est une quartique $\mathscr{C}$, (cf. figure 4).

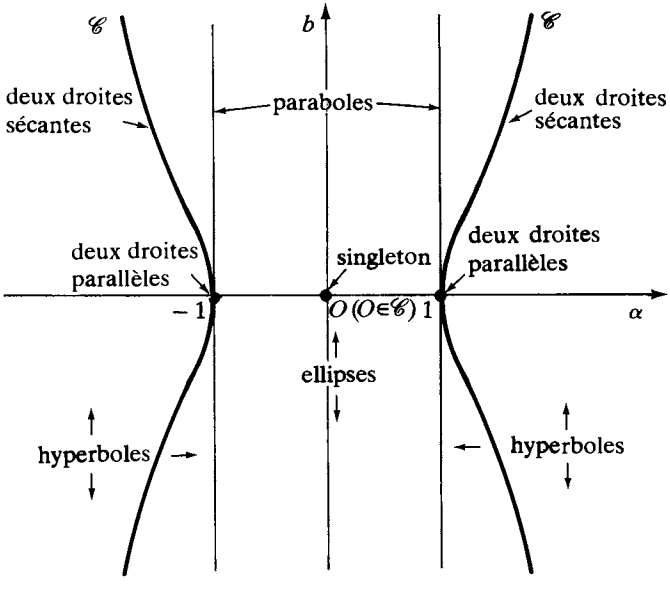


Fig. 4.

Notons enfin que pour $a^2 \neq 1$, on obtient des coniques dont le centre unique Ω a pour coordonnées $\left(\dfrac{-b}{1-a^2}, \dfrac{+ab}{1-a^2}\right)$.

Tous les exercices ci-après concernent un plan affine $\mathscr{E}$, éventuellement muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$.

Exercice 1 : On donne $a > 0$. Soit $A = O \dotplus ae_1$ et $B = O \dotplus (-ae_1)$. Notons Δ la droite $A \dotplus \mathbb{R}e_2$.

a) Former une équation dans $\mathscr{R}$ des coniques passant par A et B, tangentes à Δ et rencontrant $\mathscr{D}_2 = O \dotplus \mathbb{R}e_2$ en deux points P et Q d'ordonnées λ_P et λ_Q dans $\mathscr{R}$ vérifiant : $\lambda_P \cdot \lambda_Q = -a^2$.

b) Par $M \in \mathscr{E}$ il passe au plus deux de ces coniques. Discuter la nature de ces coniques suivant la position de M.

Exercice 2 : Trouver la nature des ensembles définis dans $\mathscr{R}$ par les équations suivantes :

a) $(\alpha-1)x^2 + 2\beta xy - (\alpha+1)y^2 - 2\alpha x + 2\beta y - \alpha - 1 = 0$
(discuter suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).

b) $\beta x^2 - 2\alpha xy + \beta^2 y^2 - 2\alpha x + 1 = 0 \qquad ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$.

c) $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$.

d) $x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 2\beta x + 1 = 0 \qquad ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$.

e) $(\alpha-1)x^2 - 2\beta xy - (\alpha-2)y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \qquad ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$.

Exercice 3 : Soit Γ une conique propre à points réels. On note $\mathscr{G}$ le groupe des $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$.

a) Montrer que si Γ est une ellipse, $\mathscr{G}$ est isomorphe à $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$.

b) Montrer que si Γ est une hyperbole, $\mathscr{G}$ est isomorphe au groupe orthogonal de la forme quadratique $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Etudier $\mathscr{G}$ lorsque Γ est une parabole.

d) Dans chacun des trois cas, donner les involutions affines éléments de $\mathscr{G}$.

Exercice 4 : Soit Γ une parabole, A et B deux points distincts sur Γ, un point $P \in \mathscr{E} \setminus \Gamma$. Une droite variable passant par P rencontre Γ en deux points C et D. Soit M le point commun (s'il existe) aux droites $\mathrm{Dr}\,(A, C)$ et $\mathrm{Dr}\,(B, D)$. Montrer que le lieu de M est une portion de conique, à préciser.

Exercice 5 : Soit Γ une conique propre à points réels. Donner les composantes connexes de $\mathscr{E} \setminus \Gamma$, préciser celles qui sont convexes. Montrer que Γ (ou une branche de Γ) est la frontière de chaque composante connexe de $\mathscr{E} \setminus \Gamma$.

Exercice 6 : Soit f et f' deux éléments de $\mathscr{P}_2$ tels que $\Gamma = \Gamma_f$ et $\Gamma' = \Gamma_{f'}$ soient deux coniques propres à points réels. Montrer que si Γ est une ellipse ou une parabole, pour qu'il existe un élément φ du groupe des *homothéties et translations* de $\mathscr{E}$ tel que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$, il faut et il suffit qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}^*$ tel que $f'_\infty = \rho f_\infty$.

Lorsque c'est le cas, trouver toutes les $\varphi \in \mathscr{H}_T(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{C}$ l'un des deux ensembles $\mathscr{C}_{\mathrm{II}}$ ou $\mathscr{C}_{\mathrm{IV}}$. On donne une partie compacte $\mathscr{K}$ de $\mathscr{C}$. Montrer que l'ensemble des centres des coniques $(\Gamma_f)_{f \in \mathscr{K}}$ est une partie compacte de $\mathscr{E}$.

Exercice 8 : Soit H le groupe produit $\mathbb{R}^* \times \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, et soit $f \in \mathscr{P}_2$. Trouver le stabilisateur de f pour l'opération définie par l'application $H \times \mathscr{P}_2 \longrightarrow \mathscr{P}_2$, $((\lambda, \varphi), f) \mapsto \lambda(f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$.

Comparer ce stabilisateur avec le stabilisateur de f pour l'action à gauche de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sur $\mathscr{P}_2$ définie par $(\varphi, f) \mapsto f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}$. (Attention ! les résultats varient selon celle des classes $\mathscr{C}_{\mathrm{I}}$ à $\mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$ à laquelle f appartient.)

§ X.3 *INTERSECTION AVEC UNE DROITE*

THÉORÈME X.3.1

Soit $\Gamma = f^{-1}(0)$ une conique propre à points réels de $\mathscr{E}$. Soit $\vec{V} \in E \setminus \{0\}$ et $\mathscr{D}$ une droite dirigée par $\vec{V}$.
a) *Si* $f_\infty(\vec{V}) \neq 0$, *alors* card $(\mathscr{D} \cap \Gamma) \in \{0, 1, 2\}$ *et* card $(\mathscr{D} \cap \Gamma) = 1$ *ssi $\mathscr{D}$ est une tangente à Γ.*
b) *Si* $f_\infty(\vec{V}) = 0$, card $(\mathscr{D} \cap \Gamma) \in \{0, 1\}$; *si* $\mathscr{D} \cap \Gamma = \{A\}$, *l'intersection de $\mathscr{D}$ et Γ est* **transversale** *en A (c'est-à-dire $\mathscr{D}$ n'est pas la tangente en A à Γ).*
c) *En particulier, on a toujours* card $(\mathscr{D} \cap \Gamma) = 1$ *lorsque Γ est une parabole et* $f_\infty(\vec{V}) = 0$.

Démonstration :

Soit $A \in \mathscr{D}$. Le développement de Taylor de f en A donne (cf. § X.1)

$$(1) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(A \dotplus t\vec{V}) = f(A) + t(\mathrm{d}_A f \cdot \vec{V}) + t^2 f_\infty(\vec{V}) .$$

a) Si $f_\infty(\vec{V}) \neq 0$, (1) montre que card $(\mathscr{D} \cap \Gamma) \in \{0, 1, 2\}$, puisque $\mathscr{D} \cap \Gamma$ est l'ensemble des $A \dotplus t\vec{V}$ pour t racine du polynôme $\Phi_{A,\vec{V}}(X) = f(A) + X(\mathrm{d}_A f \cdot \vec{V}) + f_\infty(\vec{V})\, X^2$ qui est de degré 2. Supposons $\mathscr{D} \cap \Gamma \neq \varnothing$, et choisissons $A \in \mathscr{D} \cap \Gamma$. Alors $\Phi_{A,\vec{V}}(X) = X[\mathrm{d}_A f \cdot \vec{V} + f_\infty(\vec{V})\, X]$. Par suite 0 est la seule racine de $\Phi_{A,\vec{V}}$ ssi $\mathrm{d}_A f \cdot \vec{V} = 0$. Autrement dit $\mathscr{D} \cap \Gamma = \{A\}$ ssi $\vec{V}$ est vecteur tangent en A à Γ.

b) Si $f_\infty(\vec{V}) = 0$, nécessairement Γ est une parabole ou une hyperbole. Les assertions *b*) et *c*), deviennent évidentes en prenant un repère dans lequel f soit représentée par $x^2 - y$ (lorsque Γ est une parabole) ou par $xy - 1$ (lorsque Γ est une hyperbole). On notera que, dans l'hypothèse où $f_\infty(\vec{V}) = 0$, la condition card $(\mathscr{D} \cap \Gamma) = \varnothing$ implique que Γ est une hyperbole et que $\mathscr{D}$ est une asymptote de Γ. ■

Polaires

Soit $\Gamma = \Gamma_f$ une conique propre à points réels ($f \in \mathscr{C}_{\mathrm{II}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{IV}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VI}}$). Notons $\tilde{\beta}$ la forme polaire de l'homogénéisé $\tilde{f}$ de f. Si $M_0 \in \mathscr{E}$, la forme linéaire $\tilde{\beta}(M_0, .)$ sur $\mathscr{E}^{\#*}$ est non nulle, et d'après le théorème X.2.1, son noyau ne dépend que de Γ et de M_0. Ce noyau est E ssi $\tilde{\beta}(M_0, .)$ est constante sur $\mathscr{E}$, i.e. si M_0 est centre de Γ (cas où $M \mapsto f(M) - f_\infty(\overrightarrow{M_0M})$ est constante sur $\mathscr{E}$: si $V \in E$, $\tilde{\beta}(M_0, V) = \frac{1}{2} d_{M_0} f \cdot V$).

Si M_0 n'est pas centre de Γ, le noyau de $\tilde{\beta}(M_0, .)$ rencontre $\mathscr{E}$ suivant une droite affine, ne dépendant que de M_0 et Γ, et appelée la **polaire de M_0 par rapport à Γ.** Nous noterons $\varpi(M_0)$ cette polaire. Soit A la matrice de $\tilde{f}$ dans un repère affine $\mathscr{B} = (O\,; e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, et soit (x_0, y_0) les coordonnées de M_0 dans $\mathscr{B}$. Par définition, une équation de $\varpi(M_0)$ dans $\mathscr{B}$ est :

$$[1, x_0, y_0] \times A \times \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

ce qui équivaut à :

$$\boxed{(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + 2\,f(M_0) = 0} \tag{3}$$

ou aussi, avec $M = O \dotplus (xe_1 + ye_2)$, à :

$$\boxed{(x_0 - x)\frac{\partial f}{\partial x}(M) + (y_0 - y)\frac{\partial f}{\partial y}(M) + 2\,f(M) = 0}\,. \tag{4}$$

Désignant par (ξ_0, ξ_1, ξ_2) les coordonnées génériques dans $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}^{\#*}$, (3) et (4) s'écrivent :

$$x\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_1}(M_0) + y\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_2}(M_0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_0}(M_0) = 0 \tag{5}$$

$$x_0\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_1}(M) + y_0\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_2}(M) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_0}(M) = 0\,. \tag{6}$$

PROPOSITION X.3.1

Avec les notations ci-dessus, supposons que $M_0 \in \mathscr{E}$ ne soit pas centre de Γ.
a) *Si $M_0 \in \Gamma$, la polaire $\varpi(M_0)$ est la tangente en M_0 à Γ ; et $M_0 \in \Gamma$ ssi $M_0 \in \varpi(M_0)$.*

b) *Si $M_0 \notin \Gamma$, par M_0 il passe au plus 2 tangentes à Γ; leurs points de contact sont les points communs à $\varpi(M_0)$ et Γ.*

Démonstration :

a) Comme $\tilde{f}(M_0) = f(M_0) = \tilde{\beta}(M_0, M_0)$, il est clair que $M_0 \in \varpi(M_0)$ ssi $M_0 \in \Gamma$. Supposons : $M_0 \in \Gamma$. Alors l'équation (3) ci-dessus montre que $\varpi(M_0)$ n'est autre que la tangente en M_0 à Γ (cf. tome 3, relation (3) du § VI.3).

b) Supposons : $M_0 \notin \Gamma$. Soit $M \in \mathscr{E} \setminus \{M_0\}$. On paramètre la droite $\mathscr{D} = \mathrm{Dr}\,(M_0, M)$ par la bijection

$$\mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathscr{D},\ t \mapsto \frac{t}{1+t} \# M_0 + \frac{1}{1+t} \# M = N_t.$$

Or pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\tilde{f}(N_t) = \frac{t^2}{(1+t)^2} \tilde{f}(M_0) + \frac{2t}{(1+t)^2} \tilde{\beta}(M_0, M) + \frac{1}{(1+t)^2} \tilde{f}(M).$$

Soit Φ_M le polynôme $X^2 \tilde{f}(M_0) + 2X\tilde{\beta}(M_0, M) + \tilde{f}(M)$. Pour que $\mathscr{D}$ soit une tangente à Γ, il faut et il suffit que Φ_M admette une racine double $\neq -1$. Or le discriminant de Φ_M est :

$$T_{M_0}(M) = (\tilde{\beta}(M_0, M))^2 - \tilde{f}(M_0)\,\tilde{f}(M) = (\tilde{\beta}(M_0, M))^2 - f(M_0)\,f(M).$$

La fonction $M \mapsto T_{M_0}(M)$ est polynomiale de degré 2 (ce qu'on vérifie sur les formes réduites), et de façon évidente, pour $\vec{V} \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}$, $T_{M_0}(M_0 + \rho\vec{V}) = \rho^2 T_{M_0}(M_0 + \vec{V})$, donc $T_{M_0} \in \mathscr{C}_{\mathrm{III}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{V}}$ ($T_{M_0} \notin \mathscr{C}_{\mathrm{IX}}$ car $M_0 \notin \Gamma$). Si $\mathscr{D}$ est une tangente à Γ, c'est donc que $T_{M_0} \in \mathscr{C}_{\mathrm{V}}$ et que $\mathscr{D}$ est l'une des droites définies par T_{M_0}. Donc il y a au plus deux tangentes issues de M_0 à Γ. Pour que M soit sur Γ et sur l'une de ces tangentes, il faut que $\tilde{\beta}(M_0, M) = 0$ et $f(M) = 0$, i.e. que $M \in \varpi(M_0) \cap \Gamma$. Réciproquement, si $f(M) = 0$ et $\tilde{\beta}(M_0, M) = 0$, on a $T_{M_0}(M) = 0$ et la racine double de Φ_M est $t = 0$ (donc $\neq -1$), et $\mathrm{Dr}\,(M_0, M)$ est la tangente en M à Γ. ■

Remarque 1 : Si M_0 est le centre de Γ, on vérifie sur une forme réduite de f qu'il ne passe par M_0 aucune tangente à Γ.

Equations tangentielles

Reprenons la conique propre à points réels $\Gamma = \Gamma_f$, avec $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{II}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{IV}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{VI}}$. La forme quadratique $\tilde{f}$ sur $\mathscr{E}^{\#*}$ étant non dégénérée, elle définit un isomorphisme

$J : \xi \mapsto \tilde{\beta}(\xi, .)$ de $\mathbb{R}$-ev entre $\mathscr{E}^{\#*}$ et son dual (cf. § I.2). Soit $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine non constante. Elle se prolonge de façon unique en une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ sur $\mathscr{E}^{\#*}$, et Ker $(\tilde{\varphi}) \neq E$ puisque φ est non constante. La droite $\mathscr{D} = \varphi^{-1}(0)$ est une tangente à Γ ssi il existe $M_0 \in \Gamma$ tel que $\mathscr{D} = \varpi(M_0)$, c'est-à-dire ssi

$$\exists M_0 \in \mathscr{E} \mid \tilde{\beta}(M_0, M_0) = 0 \quad \text{et} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \tilde{\varphi} = \lambda \tilde{\beta}(M_0, .).$$

Cette condition s'écrit :

$$\exists M_0 \in \mathscr{E}, \quad \exists \rho \in \mathbb{R}^* \mid \qquad M_0 = \rho J^{\langle -1 \rangle}(\tilde{\varphi}) \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}(M_0, M_0) = 0.$$

Elle est équivalente à :

$$(7) \qquad \boxed{\tilde{\beta}(J^{\langle -1 \rangle}(\tilde{\varphi}), J^{\langle -1 \rangle}(\tilde{\varphi})) = 0}.$$

L'équation (7) constitue ce qu'on appelle **l'équation tangentielle** de Γ. Son premier membre est une forme quadratique non dégénérée de $\tilde{\varphi}$. Exprimons-la à l'aide d'un repère affine $\mathscr{B} = (O\,; e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$. Notons A la matrice de $\tilde{f}$ dans $\mathscr{B}$ et $uX + vY + w$ le polynôme affine qui représente φ dans $\mathscr{B}$. On sait que la matrice de J dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}^{\#*}$ et sa base duale $\mathscr{B}^*$ est A. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*, \mathscr{B}}(J^{\langle -1 \rangle}) = A^{-1}$. De plus les coordonnées de $\tilde{\varphi}$ dans $\mathscr{B}^*$ sont (w, u, v). Notons $\mathscr{U}$ la matrice colonne $\begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix}$. L'équation (7) s'écrit : ${}^t(A^{-1}\mathscr{U})A(A^{-1}\mathscr{U}) = 0$, soit

$$(8) \qquad {}^t\mathscr{U} A^{-1} \mathscr{U} = 0.$$

Si on note $\tilde{A}$ la matrice complémentaire de A, égale à det $(A)\,A^{-1}$, on voit que (8) équivaut à :

$$(9) \qquad \boxed{{}^t\mathscr{U}\, \tilde{A} \mathscr{U} = 0}.$$

Les exercices ci-après concernent un plan affine $\mathscr{E}$, éventuellement muni d'un repère affine $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2)$.

Exercice 1 : Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$ dans $\mathscr{R}$ ($a > 0$ donné).

a) Former l'équation des hyperboles dont $\mathscr{D}_2 = O + \mathbb{R}e_2$ est une asymptote, et tangentes en A à $\mathscr{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$.

b) Montrer que l'autre asymptote de ces hyperboles passe par un point fixe.

Exercice 2 : Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Une conique propre Γ est tangente en P à Dr (B, C), en Q à Dr (C, A) et en R à Dr (A, B). Montrer que les droites Dr (A, P), Dr (B, Q) et Dr (C, R) sont concourantes ou parallèles.

Exercice 3 : Montrer qu'il existe une (et une seule) conique tangente aux trois côtés d'un triangle donné en leurs milieux, et que cette conique est une ellipse. Quel est son centre ?

Exercice 4 (Représentation rationnelle des coniques propres) :

a) Soit P, Q, R des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ *linéairement indépendants*. Posons $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash R^{-1}(0)$. Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto M(t)$, où $M(t)$ admet dans $\mathscr{R}$ les coordonnées $\left(\dfrac{P(t)}{R(t)}, \dfrac{Q(t)}{R(t)}\right)$ définit une bijection de $\mathscr{D}$ sur une conique propre privée d'un point, et que Φ est un plongement.

Indications : 1) Prouver qu'il existe une matrice inversible $A = [a_{ij}] \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $(\forall t \in \mathbb{R})\ A \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$. En déduire l'injectivité de Φ.

2) Déduire du 1) que l'image $\mathscr{I}$ de Φ est contenue dans l'ensemble Γ d'équation dans $\mathscr{R} : S(x, y) = 0$, où

$$S(x, y) = (a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z)^2 - (a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13})\ (a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33})\,.$$

Puis prouver que $\deg(S) = 2$ et que $\mathscr{I}$ est égal à Γ privé d'un point (si $M \in \Gamma$ et si $\lambda = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33} \neq 0$, prouver qu'avec $t = \dfrac{a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}}{\lambda}$, on a $t \in \mathscr{D}$ et $M = M(t)$).

b) Inversement soit Γ une conique propre. Montrer qu'on peut la paramétrer sous la forme vue en *a*) d'une infinité de façons : il suffit de choisir $A \in \Gamma$, de prendre un faisceau linéaire de droites de sommet A et d'associer à chaque droite $\mathscr{D}_t$ du faisceau le point où elle recoupe Γ (pour la parabole ou l'hyperbole, on peut prendre un faisceau de droites parallèles).

Exercice 5 : On donne une conique propre Γ à points réels. Suivant la position d'un point $M \in \mathscr{E}$, discuter le nombre de tangentes issues de M à Γ (attention au cas de l'hyperbole). Discuter de même le nombre de tangentes à Γ parallèles à une direction donnée.

Exercice 6 : Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des droites affines de $\mathscr{E}$ définies dans $\mathscr{R}$ par $ux + vy + w = 0$, telles que (avec $\mathscr{U} = \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix}$) la relation ${}^t\mathscr{U} A \mathscr{U} = 0$ soit vérifiée. Préciser A pour que $\mathscr{F}$ soit non vide. Si c'est le cas, étudier l'enveloppe de ces droites en discutant suivant la matrice A.

Exercice 7 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien orienté et $\mathscr{R}$ orthonormé direct. Soit $\mathscr{C}$ la courbe admettant dans $\mathscr{R}$ l'équation polaire $r = 2\,a/\operatorname{ch}\theta$ ($a > 0$ donné). Une droite variable $\mathscr{D}_t$ pivote autour de O. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points de $\mathscr{D}_t \cap \mathscr{C}$ sont tangentes à une même hyperbole pour t fixé. Quand t varie, trouver le lieu des centres de ces hyperboles et l'enveloppe de leurs asymptotes.

§ X.4 *CONIQUES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE*

Dans ce §, $\mathscr{E}$ désigne un plan affine euclidien, de plan directeur E.

Polynôme normalisé définissant une conique à centre

Soit Γ une conique propre réelle à centre. Notons $\mathscr{I}_2(\Gamma)$ l'ensemble des $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $\Gamma = \Gamma_f$. On sait (cf. théorème X.2.1) que $\mathscr{I}_2(\Gamma)$ est une droite vectorielle de $\mathscr{P}$ privée de l'origine. Notons Ω le centre de Γ ; pour toute $f \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$, on a un réel C_f tel que

$$(1) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad f(M) = f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) - C_f\,.$$

Ce réel C_f est $\neq 0$, car $\Omega \notin \Gamma$ (puisque Γ est propre).

Fixons $f \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$. On a : $\mathscr{I}_2(\Gamma) = \{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $g = \lambda f$, on sait que $g_\infty = \lambda f_\infty$, donc $C_g = \lambda C_f$. Par suite, $\lambda = \dfrac{1}{C_f}$ est l'unique réel tel que $C_g = 1$.

DÉFINITION X.4.1

Soit Γ une conique propre de $\mathscr{E}$, à points réels, à centre, de centre Ω. L'unique élément $g \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$ tel que $C_g = 1$, i.e. tel que

$$(2) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad g(M) = g_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) - 1$$

sera appelé ***polynôme normalisé de degré 2 définissant Γ.***

Avec les notations précédentes, soit $g \in \mathscr{P}_2$ le polynôme normalisé définissant Γ. A la forme quadratique g_∞ sur E est associé un opérateur symétrique u de E, dont nous avons analysé les propriétés au § VI.5. D'après (2), l'opérateur u est caractérisé par la propriété :

$$(3) \qquad \boxed{(\forall M \in \mathscr{E}) \qquad g(M) = (u(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M}) - 1}\,.$$

DÉFINITION X.4.2

Soit Γ une conique propre à centre à points réels, et $g \in \mathscr{P}_2$ le polynôme normalisé qui la définit. L'opérateur v associé à la forme quadratique g_∞ est appelé ***opérateur symétrique associé à Γ.*** *Les vecteurs propres de v sont appelés* ***vecteurs principaux*** *de Γ. Les droites vectorielles propres de v sont appelées* ***directions principales*** *de Γ. Les droites affines passant par le centre de Γ et dirigées par une direction principale de Γ sont appelées* ***axes principaux*** *de Γ.*

Remarque 1 : Avec ces notations, pour toute $f \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$, on a $\rho \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = \rho g$, d'où $f_\infty = \rho g_\infty$. L'opérateur u associé à f_∞ est donc ρv : les valeurs propres de u ne sont pas celles de v, mais les directions propres sont les mêmes.

Nous allons maintenant étudier séparément le cas où Γ est une ellipse (i.e. g_∞ est de signature $(2, 0)$) et celui où Γ est une hyperbole (i.e. g_∞ est de signature $(1, 1)$). Nous noterons (λ, μ) la liste des valeurs propres de v telle que $\lambda \leqslant \mu$. On reconnaît une ellipse à la CNS $\lambda > 0$, une hyperbole à la CNS $\lambda < 0 < \mu$ (dans ce cas, on a toujours $\lambda \neq \mu$).

Etude de l'ellipse

1er cas : $\lambda = \mu$.

C'est la CNS pour que toute direction soit principale, i.e. que v soit une *homothétie*, le rapport ρ de cette homothétie étant alors $\rho = \lambda = \mu$. D'après (3), on a alors :

$$(4) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad g(M) = \rho \, \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - 1 \, .$$

Posant $R = 1/\sqrt{\rho}$ (d'où $R > 0$), on voit d'après (4) que Γ est l'ensemble des $M \in \mathscr{E}$ tels que $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R$, i.e. *le cercle de centre Ω et de rayon R*. Il est clair qu'on obtient de cette manière tous les cercles de $\mathscr{E}$. Par suite *les cercles de rayon > 0 de $\mathscr{E}$ sont les ellipses de $\mathscr{E}$ dont l'opérateur associé est une homothétie.*

Avec les notations de (4), on voit que *l'équation normale* du cercle Γ (cf. § VI.7) est $\dfrac{1}{\rho} g(M) = 0$, i.e. $R^2 g(M) = 0$.

2e cas : $0 < \lambda < \mu$.

Il y a alors exactement deux directions principales,
qui sont orthogonales (cf. fin du § VI.5), donc *deux axes principaux, qui sont orthogonaux entre eux.* Des siècles d'utilisation ont rodé le vocabulaire suivant ainsi que des notations traditionnelles :

L'axe principal $\mathscr{D}_1$ dirigé par la droite principale Ker $(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E)$ s'appelle le **grand axe** de Γ. Le réel $a = \lambda^{-1/2}$ s'appelle (longueur du) **demi-grand axe** de Γ.

L'axe principal $\mathscr{D}_2$ dirigé par la droite principale Ker $(u - \mu \, \mathrm{Id}_E)$ s'appelle le **petit axe** de Γ. Le réel $b = \mu^{-1/2}$ s'appelle (longueur du) **demi-petit axe** de Γ. On a donc $a > b > 0$.

Le réel $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ s'appelle **demi-distance focale** de Γ.

Le réel $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ s'appelle l'**excentricité** de Γ (donc $0 < e < 1$).

Le réel $p = b^2/a$ s'appelle le **paramètre** de Γ.

Soit $\mathscr{B} = (\Omega \, ; e_1, e_2)$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$ tel que e_1 dirige le grand axe $\mathscr{D}_2$ (alors e_2 dirige le petit axe $\mathscr{D}_2$; un tel repère sera dit *principal* pour Γ). Dans $\mathscr{B}$ une équation de Γ est donc :

$$(5) \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0} \, .$$

L'équation (5) (qui a d'ailleurs le même premier membre dans chacun des 4 repères principaux de Γ) s'appelle **équation réduite de Γ en repère**

orthonormal. Elle montre immédiatement que les axes principaux sont des axes de symétrie orthogonale pour Γ. Les points $\Omega \dotplus \varepsilon a e_1$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) et $\Omega \dotplus \varepsilon b e_2$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) sont appelés les **sommets** de Γ (le lecteur vérifiera que la courbure y passe par un extremum relatif). Les points $\Omega \dotplus \varepsilon c e_1$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) sont appelés les **foyers** (réels) de Γ. Le cercle de centre Ω et de rayon a (resp. b) est appelé **grand** (resp. **petit**) **cercle principal** de Γ. L'ellipse Γ est affine du dit cercle dans l'affinité orthogonale d'axe $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) et de rapport $\dfrac{b}{a}$ (resp. $\dfrac{a}{b}$). Les droites $\Delta_\varepsilon = \left(\Omega \dotplus \varepsilon \dfrac{a^2}{c} e_1\right) \dotplus \mathbb{R} e_2$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) sont appelées les **directrices** de Γ (on vérifie que Δ_ε est la polaire du foyer $\Omega \dotplus \varepsilon c e_1$ par rapport à Γ, ou même par rapport au grand cercle principal).

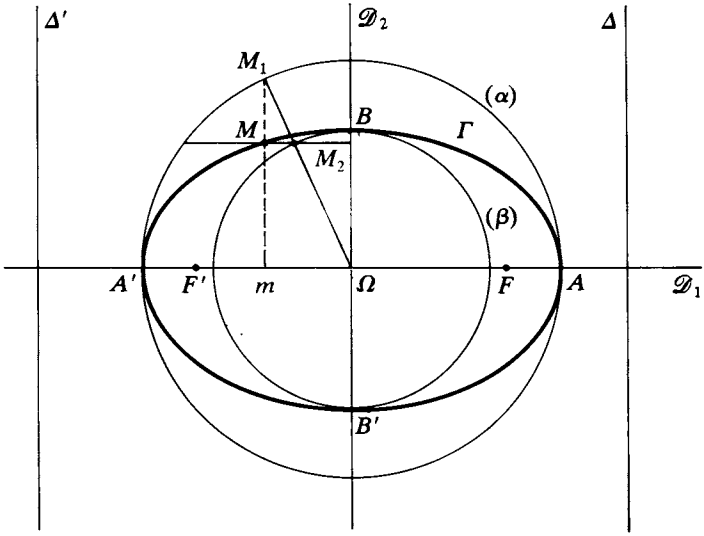


Fig. 1.

Etude de l'hyperbole

Ici $\lambda < 0 < \mu$. Il y a encore *deux axes principaux, qui sont orthogonaux entre eux.*

L'axe principal $\mathscr{D}_1$ dirigé par la droite principale $\operatorname{Ker}(u - \mu \operatorname{Id}_E)$ s'appelle le **grand axe** de Γ ou de préférence **axe transverse** de Γ. Le réel $a = \mu^{-1/2}$ s'appelle (longueur du) **demi-axe** (transverse) de Γ.

L'axe principal $\mathscr{D}_2$ dirigé par la droite principale $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ s'appelle **l'axe non transverse** de Γ. On pose habituellement $b = |\lambda|^{-1/2}$, sans donner de nom à cette longueur.

Le réel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ s'appelle **demi-distance focale** de Γ.

Le réel $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$ s'appelle **l'excentricité** de Γ (on a $e > 1$).

Le réel $p = \dfrac{b^2}{a}$ s'appelle le **paramètre** de Γ.

Soit $\mathscr{B} = (\Omega\,; e_1, e_2)$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$ tel que e_i dirige $\mathscr{D}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ (un tel repère est dit *principal*). Dans un tel repère une équation de Γ est donc :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}\,. \tag{6}$$

On remarque immédiatement que les axes principaux sont des **axes de symétrie orthogonale** pour Γ. L'équation (6), qui a le même premier membre dans chacun des 4 repères principaux de Γ, est appelée **équation réduite de Γ en repère orthonormal.**

Les points $\Omega \dotplus \varepsilon a e_1$ sont appelés les **sommets** de Γ. Les points $\Omega \dotplus \varepsilon c e_1$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) sont appelés les **foyers** (réels) de Γ. Le cercle de centre Ω et de rayon a est appelé **cercle principal** de Γ.

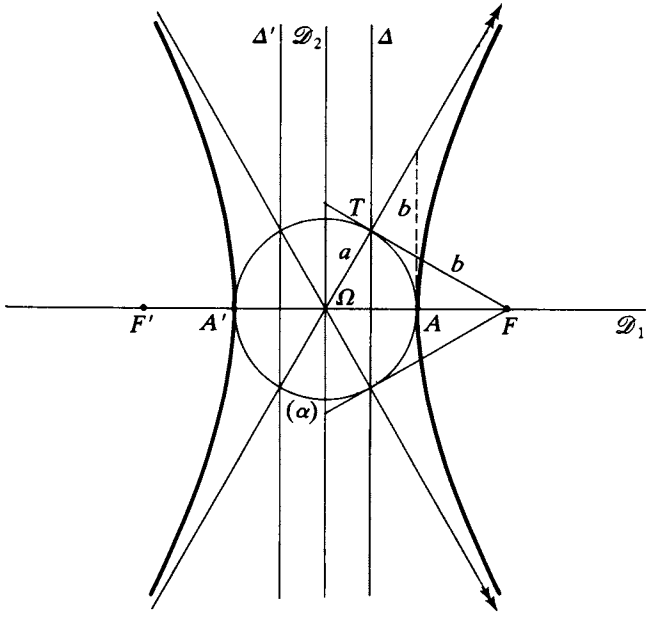


Fig. 2.

Les droites $\Delta_\varepsilon = \left(\Omega \dotplus \varepsilon \frac{a^2}{c} e_1\right) \dotplus \mathbb{R}e_2$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$) sont appelées les **directrices** de Γ. On vérifie que Δ_ε est la polaire, aussi bien par rapport à Γ que par rapport au cercle principal, du foyer $\Omega \dotplus \varepsilon c e_1$. On sait que la gerbe des **asymptotes** de Γ admet, dans le repère principal $\mathscr{B}$, l'équation $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. On vérifie alors que les asymptotes rencontrent le cercle principal aux mêmes points que les directrices, à savoir aux points de contact des tangentes à ce cercle issues du foyer. L'écart angulaire de chaque asymptote avec l'axe transverse $\mathscr{D}_1$ est :

$$\theta = \operatorname{Arc\,tg} \frac{b}{a} = \operatorname{Arc\,cos}\,(a/c).$$

L'hyperbole Γ est dite **équilatère** ssi $\theta = \pi/4$, i.e. ssi ses **asymptotes sont orthogonales entre elles.** Pour cela il faut et il suffit que $a = b$ (ou $e = \sqrt{2}$). Si c'est le cas, l'opérateur v associé à Γ est évidemment de trace nulle (puisque $\lambda + \mu = 0$). Réciproquement :

Proposition X.4.1

> *Soit $f \in \mathscr{P}_2$ un polynôme* ***propre*** *tel que l'opérateur u associé à la forme quadratique f_∞ vérifie* $\operatorname{Tr}(u) = 0$. *Alors $\Gamma = \Gamma_f$ est une* ***hyperbole équilatère.***

Démonstration :

Comme $f_\infty \neq 0$ (puisque $f \in \mathscr{P}_2$), on a nécessairement $\chi_u(X) = X^2 - \lambda^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc f_∞ est de signature $(1, 1)$, ce qui suffit pour prouver que Γ est une hyperbole. Comme les deux valeurs propres de u sont opposées, on a $a = b = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, donc Γ est équilatère. ■

Classification métrique des coniques

Toute isométrie de $\mathscr{E}$ est une bijection affine de $\mathscr{E}$. Elle transforme donc une ellipse (resp. une hyperbole, une parabole) en une ellipse (resp. une hyperbole, une parabole) (cf. § X.2). La relation « il existe $\Phi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ telle que $\Phi(\Gamma) = \Gamma'$ » est une *relation d'équivalence*, appelée **congruence mod Is** ($\mathscr{E}$), entre coniques propres à points réels ; l'ensemble des ellipses (resp. hyperboles, paraboles) est *stable* pour cette relation. La **classification métrique des coniques propres** consiste en la recherche de CNS pour que deux coniques propres soient congruentes mod **Is** ($\mathscr{E}$).

Remarquons que toute conique propre engendre $\mathscr{E}$ affinement. Donc (cf. fin du § VI.1) pour que deux telles coniques Γ et Γ' soient congruentes mod **Is** ($\mathscr{E}$), il faut et il suffit qu'elles soient *isométriques*, i.e. qu'il existe une bijection $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ isométrique. Si c'est le cas, on a alors un *unique* élément $\Phi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ tel que $\Phi(M) = \varphi(M)$ pour tout $M \in \Gamma$.

Coniques à centre isométriques

THÉORÈME X.4.1

Soit Γ et Γ' deux coniques propres à points réels et à centre, d'opérateurs associés respectifs u et u'. Pour que Γ et Γ' soient ***isométriques,*** *il faut et il suffit que : $\chi_u(X) = \chi_{u'}(X)$.*

Démonstration :

Si $\chi_u(X) = \chi_{u'}(X)$, soit $\mathscr{B} = (\Omega\,; e_1, e_2)$ (resp. $\mathscr{B}' = (\Omega'\,; e'_1, e'_2)$) un repère principal de Γ (resp. de Γ'). Soit Φ l'unique bijection affine telle que $\Phi(\Omega) = \Omega'$, $\Phi(e_1) = e'_1$ et $\Phi(e_2) = e'_2$. Puisque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont orthonormaux, $\Phi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$, et l'étude précédente de l'ellipse et de l'hyperbole permet de vérifier que $\Phi(\Gamma) = \Gamma'$.

Supposons maintenant qu'il existe $\Phi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ telle que $\Phi(\Gamma) = \Gamma'$.

Soit Ω et Ω' les centres de Γ et Γ'. D'après le théorème X.2.2, on a $\Phi(\Omega) = \Omega'$. Les polynômes normalisés définissant Γ et Γ' sont :

$$g : M \mapsto (u(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M}) - 1 \quad \text{et} \quad g' : M \mapsto (u'(\overrightarrow{\Omega' M}) \mid \overrightarrow{\Omega' M}) - 1\,.$$

Or, pour $M \in \mathscr{E}$, $g' \circ \Phi(M) = (u' \circ \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M})) - 1$ car $\Phi(\Omega) = \Omega'$. D'après le théorème X.2.1, comme $\Phi(\Gamma) = \Gamma'$, on a : $g' \circ \Phi = \lambda g$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donc

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \quad (u' \circ \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M})) - 1 = \lambda\,[(u(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M}) - 1]$$

ce qui entraîne $\lambda = 1$, d'où $g' \circ \Phi = g$, d'où, $(\forall M \in \mathscr{E})$:

$$(u' \circ \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M})) = (u(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M})\,, \quad \text{soit, puisque} \quad \vec{\Phi} \in \mathbf{O}(E)$$

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \quad (\vec{\Phi}^{\langle -1 \rangle} \circ u' \circ \vec{\Phi}(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M}) = (u(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M})$$

ce qui équivaut à :

$$u = \vec{\Phi}^{\langle -1 \rangle} \circ u' \circ \vec{\Phi}\,. \tag{7}$$

En vertu de (7), u et u' sont *semblables,* donc $\chi_u(X) = \chi_{u'}(X)$. ■

Une preuve plus géométrique de ce théorème est proposée en exercice 12.

Propriétés bifocales des coniques à centre

Fixons un repère orthonormal $\mathscr{B} = (\Omega\,; e_1, e_2)$ de $\mathscr{E}$, un réel $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, des réels $a > 0$, $b > 0$, avec la condition que si $\varepsilon = +1$, alors $b < a$. Soit Γ la conique à centre d'équation $f(M) = 0$, avec

$$(\forall M = \Omega + (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E}) \quad f(M) = \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\,\frac{y^2}{b^2} - 1\,. \tag{8}$$

Si $\varepsilon = +1$, Γ est une ellipse, de centre Ω, de foyers $F = \Omega \dotplus ce_1$ et $F' = \Omega \dotplus (-ce_1)$, avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Si $\varepsilon = -1$, Γ est une hyperbole, de centre Ω, de foyers $F = \Omega \dotplus ce_1$ et $F' = \Omega \dotplus (-ce_1)$, avec ici $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dans les deux cas, on a : $a^2 = \varepsilon b^2 + c^2$.

Pour $M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E}$, considérons les distances de M aux foyers en posant $d(M) = d = \|\overrightarrow{FM}\|$ et $d'(M) = d' = \|\overrightarrow{F'M}\|$, et occupons-nous de la fonction $\Phi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $(\forall M \in \mathscr{E})$

$$(9) \quad \Phi(M) = (d + d' + 2a)(d + d' - 2a)(d - d' + 2a)(d - d' - 2a)$$

dont le calcul est aisé :

$$d^2 = x^2 + y^2 + c^2 - 2cx\,, \quad d'^2 = x^2 + y^2 + c^2 + 2cx\,, \quad d^2 - d'^2 = 4cx\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi(M) = [(d - 2a)^2 - d'^2][(d + 2a)^2 - d'^2] &= \\ &= [d^2 - d'^2 - 4ad + 4a^2][d^2 - d'^2 + 4ad + 4a^2] \\ &= (d^2 - d'^2 + 4a^2)^2 - 16a^2d^2 \\ &= (4cx + 4a^2)^2 - 16a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2)\end{aligned}$$

$$(10) \qquad \boxed{\Phi(M) = -16\,\varepsilon a^2 b^2 f(M)}\,.$$

Donc $\Gamma = \{M \in \mathscr{E} \mid \Phi(M) = 0\}$.

• *Si* $\varepsilon = +1$, *i.e. si* Γ *est une ellipse,* on a $c < a$, donc $(\forall M \in \mathscr{E})$ $|d - d'| \leqslant 2c < 2a$, donc $\Phi(M) = 0$ ssi $d + d' = 2a$, donc

$$(11) \qquad \boxed{M \in \Gamma \Leftrightarrow d + d' = 2a} \quad \text{(« théorème du jardinier »)}\,.$$

De plus, si $M \notin \Gamma$, $f(M)$ et $d + d' - 2a$ ont le même signe.

L'*intérieur* de Γ, défini comme étant $\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) < 0\}$ (ce qui est justifié car cela définit l'intérieur de l'enveloppe convexe de Γ) est aussi $\{M \in \mathscr{E} \mid d + d' < 2a\}$.

• *Si* $\varepsilon = -1$, *i.e. si* Γ *est une hyperbole,* on a $a < c$, donc $(\forall M \in \mathscr{E})$ $d + d' \geqslant 2c > 2a$, donc $\Phi(M) = 0$ ssi $|d - d'| = 2a$, donc

$$(12) \qquad \boxed{M \in \Gamma \Leftrightarrow |d - d'| = 2a}\,.$$

De plus, si $M \notin \Gamma$, $f(M)$ et $|d - d'| - 2a$ ont même signe. En définissant l'*intérieur* de Γ comme étant $\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) > 0\}$ (ensemble à deux composantes connexes), c'est aussi $\{M \in \mathscr{E} \mid |d - d'| > 2a\}$.

A partir de (11) et (12) on retrouve facilement la tangente au point courant M de Γ. En effet, pour $M \in \mathscr{E} \setminus \{F, F'\}$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, d(M) = \frac{1}{d}\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, d'(M) = \frac{1}{d'}\overrightarrow{F'M}$. Si Γ est une *ellipse,* la tangente en M à Γ est orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}}\,(d + d')(M) = \frac{1}{d}\overrightarrow{FM} + \frac{1}{d'}\overrightarrow{F'M}$, donc est *bissectrice des vecteurs* $\overrightarrow{FM}$ *et* $\overrightarrow{MF'}$. Si Γ est une *hyperbole,* la tangente en M à Γ est orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}}\,(d - d')(M)$, donc est *bissectrice des vecteurs* $\overrightarrow{MF}$ *et* $\overrightarrow{MF'}$.

Définition par foyer-directrice des coniques à centre

Reprenons l'équation (8) $f(M) = \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} - 1$ et la conique $\Gamma = f^{-1}(0)$. Désignons par e l'excentricité de Γ, égale à $\frac{c}{a}$ dans les deux cas. Soit $H_0 = \Omega \dotplus \frac{a^2}{c}e_1$ le pied, sur le grand axe $\mathscr{D} = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_1$ de Γ, de la directrice Δ associée au foyer F. On a $\overrightarrow{FH_0} = \varepsilon\frac{b^2}{c}e_1$.

Pour $M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E}$ désignons par $H = H(M)$ la projection orthogonale de M sur Δ, et soit $X = x - c$, $Y = y$ les coordonnées de M dans $(F\,;e_1, e_2)$. Alors $f(M) = \frac{(X+c)^2}{a^2} + \varepsilon\frac{Y^2}{b^2} - 1$ peut s'écrire

$$f(M) = \frac{\varepsilon}{b^2}\left[Y^2 + X^2(1 - e^2) + 2\,\varepsilon b^2 e^2\frac{X}{c} - \frac{e^2 b^4}{c^2}\right],$$

soit :

$$f(M) = \frac{\varepsilon}{b^2}\left(\|\overrightarrow{FM}\|^2 - e^2\|\overrightarrow{MH}\|^2\right). \tag{13}$$

On en déduit en particulier :

$$\boxed{M \in \Gamma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\| = e\|\overrightarrow{MH}\|}. \tag{14}$$

De plus l'intérieur de Γ est, dans les deux cas, $\{M \in \mathscr{E} \mid \|\overrightarrow{MF}\| < e\|\overrightarrow{MH}\|\}$. Supposons maintenant $\mathscr{E}$ orienté et (e_1, e_2) directe. En utilisant des *coordonnées polaires* dans le repère $(F\,;e_1, e_2)$, on

voit que (13) équivaut à l'équation polaire de Γ : $r^2 = e^2\left(r\cos\theta - \varepsilon\dfrac{b^2}{c}\right)^2$, c'est-à-dire, en posant $p = b^2/a$, à :

$$[r(1 + e\cos\theta) + \varepsilon p][r(1 - e\cos\theta) - \varepsilon p] = 0\,. \tag{15}$$

Mais on remarque que le changement $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$ qui laisse invariant le point M, échange les deux facteurs de (15), de sorte qu'en définitive, *chacune des deux équations polaires*

$$r = \frac{-\varepsilon p}{1 + e\cos\theta} \tag{16}$$

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - e\cos\theta} \tag{17}$$

peut, à elle seule, définir la courbe entière Γ dans le repère $(F\,;\, e_1, e_2)$. On voit que dans les deux cas, le paramètre $p = \dfrac{b^2}{a}$ représente la longueur de la demi-corde focale orthogonale au grand axe de Γ.

Etude métrique des paraboles

Soit maintenant une parabole Γ, et $\mathscr{I}_2(\Gamma) = \{f \in \mathscr{P}_2 \mid \Gamma = \Gamma_f\}$. Si on fixe $f \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$, le théorème X.2.1 montre que $\mathscr{I}_2(\Gamma) = \{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, posant $g = \lambda f$, on a : $g_\infty = \lambda f_\infty$. Donc les opérateurs symétriques de E : u associé à f_∞ et v associé à g_∞, sont liés par $v = \lambda u$. D'autre part, comme f est parabolique, on a : $\chi_u(X) = X(X - \rho)$ avec $\rho \in \mathbb{R}^*$, d'où $\chi_v(X) = X(X - \lambda\rho)$. Donc $\lambda = 1/\rho$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^*$ tel que $\chi_v(X) = X(X - 1)$. Finalement, il existe un unique élément $g \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$ tel que l'opérateur v associé à g_∞ vérifie :

$$\chi_v(X) = X(X - 1)\,. \tag{18}$$

Par analogie avec la définition X.4.1, nous dirons que cet unique élément g est le **polynôme de degré 2 normalisé définissant Γ.**

Dans ces conditions, les droites vectorielles propres de v sont appelées les **directions principales** de Γ, et les vecteurs propres de v, les **vecteurs principaux** de Γ. D'après (18) il y a exactement *deux directions principales,* qui sont *orthogonales* entre elles puisque v est symétrique. (Notons que, pour toute $f \in \mathscr{I}_2(\Gamma)$, les directions principales de Γ sont aussi les directions propres de l'opérateur u associé à f_∞.)

La direction principale $D = \operatorname{Ker}(v)$ est la droite isotrope de g_∞, c'est-à-dire la *direction à l'infini* de la parabole Γ ; l'autre direction principale est donc la direction orthogonale à la direction à l'infini.

En utilisant une forme réduite affine (cf. § X.2), on voit qu'en associant, à chaque point $M \in \Gamma$, sa droite vectorielle tangente T_M, on obtient une bijection de Γ sur l'ensemble $\mathscr{G}_1(E)\setminus\{D\}$ des droites vectorielles de E autres que D. Par suite, *il y a un, et un seul, point $S \in \Gamma$ tel que T_M soit orthogonale à D.*

DÉFINITION X.4.3

L'unique point d'une parabole Γ en lequel la tangente est orthogonale à la direction à l'infini de la parabole est appelé le ***sommet*** *de Γ. La tangente en ce point est appelée la* ***tangente au sommet*** *de Γ.*

Soit donc S le sommet de Γ. Comme Γ est birégulière, il y a un unique vecteur unitaire $e_2 \in D$ tel que e_2 soit tourné dans le sens de la concavité de Γ en S. Tout repère orthonormal de la forme $(S\,;e_1, e_2)$ est appelé un **repère principal** de Γ.

En fait, il y en a deux : si $(S\,;e_1, e_2)$ est l'un d'eux, l'autre est $(S\,;-e_1, e_2)$. Fixons-en un, noté $\mathscr{B} = (S\,;e_1, e_2)$.

Pour $M = S \dotplus (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E}$, on a : $g_\infty(\overrightarrow{SM}) = (v(\overrightarrow{SM}) \mid \overrightarrow{SM}) = x^2$. La tangente en S étant $\mathscr{T} = S \dotplus \mathbb{R}e_1$, nécessairement il existe $p \in \mathbb{R}^*$ tel que $(\forall M \in \mathscr{E})\ g(M) = x^2 - 2py$. Enfin, puisque e_2 est dirigé dans la concavité de Γ en S, nécessairement $p > 0$. De plus le changement de e_1 en $-e_1$ n'affecte pas p. On a donc prouvé l'existence d'un unique réel $p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que dans tout repère principal de Γ, le polynôme *normalisé* g qui définit Γ soit donné par

$$(19) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad \boxed{g(M) = x^2 - 2py}\,.$$

Le réel $p > 0$ qui vient d'être défini est appelé le **paramètre** de la parabole Γ. Le point $S \dotplus \frac{p}{2}e_2$ est noté F et appelé le **foyer** de Γ. On vérifie immédiatement que la longueur d'une demi-corde focale orthogonale à la direction à l'infini de Γ est égale au paramètre. La droite $\Delta = \left(S \dotplus \left(-\frac{p}{2}e_2\right)\right) \dotplus \mathbb{R}e_1 = (F \dotplus (-pe_2)) \dotplus \mathbb{R}e_1$ est appelée la **directrice** de Γ.

L'équation $x^2 - 2py = 0$ de Γ tirée de (19) est appelée une **équation réduite de Γ en axes orthonormaux.**

Quant à la droite $\mathscr{D} = S \dotplus D = F \dotplus D$, on dit que c'est **l'axe** de Γ, et on vérifie que $\mathscr{D}$ est **axe de symétrie orthogonale** de Γ.

L'équation réduite (19) rend pratiquement évidentes les propriétés suivantes, que le lecteur pourra vérifier :

• La parabole Γ est l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ *équidistants du foyer F et de la directrice* Δ.

• Pour tout point $M \in \Gamma$ projeté orthogonalement en H sur Δ, la tangente en M à Γ est la médiatrice de $\{F, H\}$.

• Pour tout point $M \in \Gamma$, la normale en M à Γ rencontre l'axe $\mathscr{D}$ en un point unique N. En notant J la projection orthogonale de M sur l'axe $\mathscr{D}$, on a : $\overrightarrow{JN} = pe_2$ (en particulier, *la « sous-normale »* $\|\overrightarrow{JN}\|$ *est constante, égale au paramètre* p).

• Deux paraboles sont isométriques ssi elles ont le même paramètre.

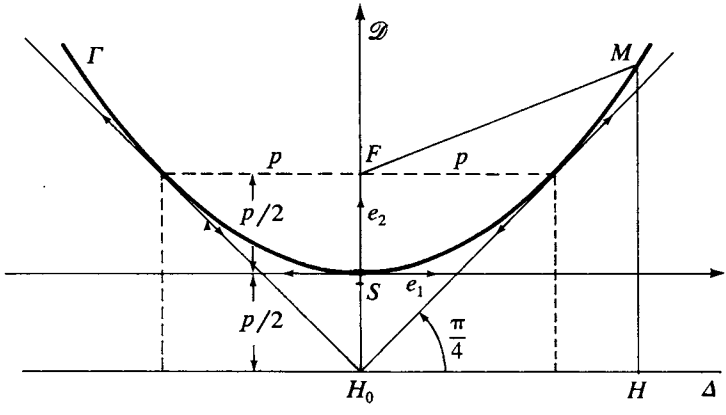


Fig. 3.

Si maintenant on oriente $\mathscr{E}$, dans le repère $(F\,;e_2, e_1)$ supposé direct, la parabole Γ est définie par l'une ou l'autre des équations polaires :

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta} \quad \text{ou} \quad r = \frac{-p}{1 + \cos\theta}. \tag{20}$$

Tous les exercices ci-après concernent un plan affine euclidien $\mathscr{E}$, de plan directeur E. Eventuellement $\mathscr{E}$ sera muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2)$.

Exercice 1 : Soit Γ une conique propre à points réels. Trouver les groupes $\mathbf{Is}_{\langle\Gamma\rangle}$ et $\mathbf{Dep}_{\langle\Gamma\rangle}$ (cf. § VI.1).

Exercice 2 : Parmi les normales à une ellipse, quelles sont celles qui s'éloignent le plus du centre de l'ellipse ?

Exercice 3 : Trouver le lieu des foyers des hyperboles équilatères admettant $\mathscr{D}_2 = O + \mathbb{R}e_2$ pour asymptote et qui sont tangentes au cercle de centre O et de rayon donné $R > 0$.

Exercice 4 : Soit un réel $e > 1$ et deux points A et F de $\mathscr{E}$, distincts. Une hyperbole variable d'excentricité e passe par A et admet F pour foyer. Trouver le lieu de son autre foyer.

Exercice 5 : Trouver le lieu des centres des triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à une parabole donnée.

Exercice 6 : Lieu des foyers des paraboles de paramètre donné $p > 0$ et tangentes en un point donné A à une droite donnée. Lieu du centre de courbure en A à ces paraboles.

Exercice 7 : Lieu des foyers des paraboles de paramètre donné $p > 0$ et tangentes aux axes de coordonnées $\mathscr{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$ et $\mathscr{D}_2 = O + \mathbb{R}e_2$.

Exercice 8 : *a*) Soit Γ une conique propre à points réels et F un foyer. Montrer que la *podaire* de Γ par rapport à F est le cercle principal si Γ est à centre, la tangente au sommet si Γ est une parabole.

b) Réciproquement, trouver l'antipodaire d'un cercle ou d'une droite par rapport à un point F donné.

Exercice 9 : On donne deux points distincts F et F' dans $\mathscr{E}$ et un réel $C \neq 0$. Trouver l'enveloppe des droites $\mathscr{D}$ telles que le produit des distances *algébriques* de F et F' à $\mathscr{D}$ soit constant et égal à C (donner d'abord un sens précis à l'énoncé).

Exercice 10 : Montrer que les coniques d'équation dans $\mathscr{R} : x^2 - 2y^2 - 3x + 1 = 0$ et $x^2 + 6xy + y^2 - 11x + 7y + 18 = 0$ sont semblables. Trouver une CNS pour que 2 coniques propres données Γ et Γ' de $\mathscr{E}$ soient semblables.

Exercice 11 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon $R > 0$, et O un point de $\mathscr{C}$.

a) Pour chaque point $F \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, trouver les coniques à centre Γ osculatrices à $\mathscr{C}$ en O et admettant F pour foyer.

b) Lieu du second foyer de Γ.

Exercice 12 : Démontrer le théorème X.4.1 en utilisant le fait que les sommets d'une hyperbole ou d'une ellipse sont les points qui réalisent les extrema de la distance au centre, et pour une hyperbole, en utilisant la formule $\theta = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{b}{a}$.

Exercice 13 : On donne l'ellipse Γ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans $\mathscr{R}$, avec $a > b > 0$. On la considère comme trajectoire de la courbe paramétrée $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $\theta \mapsto O + (a \cos\theta\, e_1 + b \sin\theta\, e_2) = M(\theta)$. Le paramètre θ s'appelle *l'anomalie excentrique* du point $M \in \Gamma$.

a) Prouver que, pour $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \in \mathbb{R}^4$ donné, les points $(M(\theta_j))_{1 \leq j \leq 4}$ sont *cocycliques* (au sens donné au § VII.5) ssi $\sum_{j=1}^{4} \theta_j \in 2\pi\mathbb{Z}$. Vérifier que cette condition signifie que les droites $\mathrm{Dr}\,(M(\theta_1), M(\theta_2))$ et $\mathrm{Dr}\,(M(\theta_3), M(\theta_4))$ ont pour directions de bissectrices les *directions principales* de Γ.

b) En déduire que le cercle osculateur en $M(\theta)$ à Γ recoupe Γ en un point $P(\theta)$ (au sens donné au § VII.5) tel que les directions de bissectrices des droites $\mathrm{Dr}\,(M(\theta), P(\theta))$ et $\mathscr{T}(\theta) =$ tangente en $M(\theta)$ à Γ soient les directions principales de Γ (il est entendu que si $P(\theta) = M(\theta)$ on prend pour $\mathrm{Dr}\,(M(\theta), P(\theta))$ la tangente $\mathscr{T}(\theta)$). Trouver l'enveloppe de la droite $\mathrm{Dr}\,(M(\theta), P(\theta))$.

c) Trouver des propriétés analogues pour une hyperbole ou une parabole.

Exercice 14 : Soit Γ une ellipse de foyers F et F'. Un point M décrit Γ. Trouver le lieu du centre du cercle d'Euler, des centres des cercles inscrits et exinscrits du triangle $\{M, F, F'\}$.

Exercice 15 : Lieu des sommets des hyperboles équilatères passant par 2 points donnés et de directions principales données.

Exercice 16 : Soit Γ une parabole de sommet S. Montrer que le lieu des points équidistants de S et de Γ contient une développée de parabole et une demi-droite.

Exercice 17 : Soit A le point $O \dotplus ae_1$, où $a > 0$ est donné. Trouver l'enveloppe des axes des hyperboles dont $\mathscr{D}_2 = O \dotplus \mathbb{R}e_2$ est une asymptote et tangentes en A à $\mathscr{D}_1 = O \dotplus \mathbb{R}e_1$; lieu des sommets de ces hyperboles ; lieu de leurs foyers. Enveloppe de leurs directrices (la construire).

Exercice 18 : Des hyperboles équilatères de centre O passent par un point fixe $A \neq O$. Lieu des foyers ? Enveloppe des directrices ? Lieu des sommets ?

Exercice 19 : Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données (parallèles ou sécantes) en des points donnés.

Exercice 20 : *a*) Une ellipse Γ de demi-axes a et b reste tangente aux axes $\mathscr{D}_i = O \dotplus \mathbb{R}e_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Lieu des foyers de Γ.

b) Une ellipse Γ de demi-axes donnés a et b reste tangente en O à $\mathscr{D}_1$. Lieu du centre de Γ ? Le construire.

Exercice 21 : On donne un triangle $\{A, B, C\}$ de $\mathscr{E}$. Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par A, B, C. Prouver que ces hyperboles passent toutes par l'orthocentre du triangle. En quel point le cercle circonscrit à $\{A, B, C\}$ recoupe-t-il l'hyperbole ?

Exercice 22 : Lieu du centre des hyperboles équilatères tangentes à trois droites données.

Exercice 23 : Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données.

Exercice 24 : Soit une conique à centre Γ. Lieu des points d'où l'on peut mener à Γ deux tangentes (resp. deux normales) orthogonales entre elles.

Exercice 25 : Soit Γ une ellipse de demi-axes a et b, avec $a^2 > 2b^2$.

a) Trouver les points communs à Γ et à sa développée $\mathscr{C}$.

b) Soit $M \in \Gamma$ et soit N le point où la normale en M à Γ recoupe Γ. Montrer que $\|\overrightarrow{MN}\|$ est minimum ssi Dr (M, N) est tangente à $\mathscr{C}$ en l'un des points définis en *a*) ; calculer alors les coordonnées de M.

Exercice 26 : Par quels points M du plan peut-on mener à une parabole Γ trois normales ? Montrer que le cercle qui passe pour les pieds sur Γ des normales issues de M passe par le sommet de Γ.

Exercice 27 : Soit un triangle $\{A, B, C\}$. Notons $\mathscr{F}$ la famille des coniques passant par A, B, C, et dont les normales en A, B, C concourent. Lieu du point commun à ces normales (Darboux).

Exercice 28 : Soit une ellipse Γ de demi-axes a et b ($a > b > 0$), et F un foyer de Γ. Une ellipse variable $\mathscr{C}$ a pour demi-axes a et b et admet F pour foyer.

a) Enveloppe des sécantes communes à Γ et à $\mathscr{C}$?

b) Lieu des points communs aux tangentes communes à Γ et à $\mathscr{C}$?

Exercice 29 : Si deux paraboles ont un foyer commun, montrer qu'elles ont au plus deux points communs réels.

Exercice 30 : Soit quatre droites $\mathscr{D}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 4$) données dans $\mathscr{R}$ par leur équation normale $L_i(M) = 0$, avec $(\forall M = O \dotplus (xe_1 + ye_2) \in \mathscr{E})$ $L_i(M) = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \lambda_i$.

a) Montrer que $M \in \mathscr{E}$ est foyer d'une conique Γ tangente à chaque $\mathscr{D}_i$ ssi il existe $N \in \mathscr{E}$ tel que les 4 nombres $L_i(M) \times L_i(N)$ ($1 \leqslant i \leqslant 4$) soient égaux (cf. exercice 9).

b) En déduire que le lieu des foyers des coniques tangentes aux 4 droites $\mathscr{D}_i$ est une cubique, qui passe par les 6 points communs aux $\mathscr{D}_i$ prises 2 à 2.

c) Cas où les $\mathscr{D}_i$ forment un parallélogramme ? Dans ce cas, donner une solution directe.

Exercice 31 : Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ et $F \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{D}$. La tangente en M à une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ régulière rencontre $\mathscr{D}$ en T. Trouver $\mathscr{C}$ pour que $(\forall M)$ $(\overrightarrow{FM} \mid \overrightarrow{FT}) = 0$.

Exercice 32 : Soit p un réel > 0 donné, $\mathscr{D}_i$ les axes $O + \mathbb{R}e_i$ ($i \in \{1, 2\}$). On considère la famille $\mathscr{F}$ des paraboles de $\mathscr{E}$ de paramètre p qui sont tangentes à $\mathscr{D}_1$ et à $\mathscr{D}_2$.

a) Lieu des foyers de ces paraboles.

b) Lieu du sommet des paraboles de $\mathscr{F}$. Enveloppe de leurs axes.

c) Prouver qu'une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans $\mathscr{R}$ est un axe d'une des paraboles de $\mathscr{F}$ ssi $4u^2v^2w^2 - p^2(u^2 + v^2)(u^2 - v^2)^2 = 0$.

Exercice 33 : Soit un triangle $\{A, B, C\}$ de $\mathscr{E}$.

a) Montrer qu'il y a une et une seule ellipse Γ de $\mathscr{E}$ circonscrite au triangle $\{A, B, C\}$ dont l'aire de l'enveloppe connexe $\widehat{\Gamma}$ soit minimum (ellipse de Steiner).

b) Montrer qu'il y a une et une seule ellipse γ de $\mathscr{E}$ inscrite dans le triangle $\{A, B, C\}$ dont l'aire de l'enveloppe convexe $\widehat{\gamma}$ soit maximum. Comparer Γ et γ.

Chapitre XI

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES SURFACES

Dans tout ce chapitre (y compris dans les exercices), $\mathscr{E}$ désigne un espace affine de dimension 3, d'espace directeur E.

Nous supposons acquise toute la matière du Chapitre VI du tome 3.

§ XI.1 *SURFACES PARAMÉTRÉES*

DÉFINITION XI.1.1

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On appelle ***surface paramétrée de classe*** *$\mathscr{C}^k$ toute application $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ définie sur un* ***domaine*** *D de $\mathbb{R}^2$, et qui est de classe $\mathscr{C}^k$.*

L'image de Φ est souvent appelée son **support.** La surface Φ est dite **simple** ssi Φ est **injective.** Un paramètre $\mu \in D$ est dit **régulier** ssi la différentielle $d_\mu \Phi$ est de rang 2 ; un paramètre $\mu \in D$ est dit **stationnaire** ssi il est non régulier, i.e. ssi rg $(d_\mu \Phi) \leqslant 1$. La surface est dite **régulière** ssi tous les paramètres $\mu \in D$ sont réguliers. En conséquence, dire que Φ est à la fois **simple et régulière** équivaut à dire que Φ est une **$\mathscr{C}^k$-immersion** (cf. définition VI.2.3 du tome 3).

Désignons par (u, v) les coordonnées du point générique $\mu \in D$. L'image de $d_\mu \Phi$ est Vect $\left(\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(\mu), \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(\mu) \right)$. Par suite :

(1) $\begin{cases} \mu \in D \text{ est } \textbf{paramètre régulier} \text{ ssi les vecteurs } \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(\mu) \text{ et } \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(\mu) \\ \text{sont } \textbf{linéairement indépendants.} \end{cases}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$, de trajectoire contenue dans D. La courbe paramétrée $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \Phi(f(t))$ est de classe $\mathscr{C}^p$. On dit que c'est une courbe de classe $\mathscr{C}^p$ *tracée sur la surface* Φ.

Exemple 1 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et supposons trouvé un intervalle non trivial J de $\mathbb{R}$ tel que $\{u_0\} \times J \subset D$. La courbe $h : J \longrightarrow \mathscr{E}$, $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ est une courbe de classe $\mathscr{C}^k$ tracée sur la surface. De même, soit $v_0 \in \mathbb{R}$, et supposons trouvé un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ tel que $I \times \{v_0\} \subset D$; la courbe $g : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ est une courbe de classe $\mathscr{C}^k$ tracée sur la surface. Les courbes ainsi obtenues sont appelées **courbes coordonnées** de Φ.

$\mathscr{C}^k$-équivalence entre surfaces paramétrées

DÉFINITION XI.1.2

Deux surfaces paramétrées $\Phi_i : D_i \longrightarrow \mathscr{E}$ $(i \in \{1, 2\})$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ sont dites ***$\mathscr{C}^k$-équivalentes*** *ssi il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\theta : D_2 \longrightarrow D_1$ tel que $\Phi_2 = \Phi_1 \circ \theta$; un tel $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme θ est alors appelé un* ***changement $\mathscr{C}^k$-admissible de paramètre.***

Sur l'ensemble des surfaces paramétrées de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{E}$, *la $\mathscr{C}^k$-équivalence est une relation d'équivalence* : c'est une conséquence des propriétés élémentaires des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (cf. tome 3, après la définition VI.2.1).

La notion de *propriété $\mathscr{C}^k$-invariante* se définit pour les surfaces paramétrées comme pour les courbes paramétrées (cf. § VII.2). Par exemple les notions de surface de classe $\mathscr{C}^k$ paramétrée *simple* (resp. *régulière*), celles de paramètre *régulier* (resp. *stationnaire*), sont $\mathscr{C}^k$-invariantes. De même, la notion de *courbe paramétrée tracée sur une surface* est $\mathscr{C}^k$-invariante (avec les notations de la définition XI.1.2, si $f : I \longrightarrow D_1$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$, la courbe $g = \Phi_1 \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^p$ tracée sur Φ_1, mais aussi tracée sur Φ_2 (car $g = \Phi_2 \circ (\theta^{\langle -1 \rangle} \circ f)$, et $\theta^{\langle -1 \rangle} \circ f : I \longrightarrow D_2$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^p$).

$\mathscr{C}^k$-équivalence positive entre surfaces paramétrées

Soit $\theta : D_2 \longrightarrow D_1$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme entre deux *domaines* D_2 et D_1 de $\mathbb{R}^2$. La fonction $D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu \mapsto \det(\mathrm{d}_\mu \theta)$ est continue et ne s'annule pas. Donc elle est soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, soit à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, car D_2 est connexe ; θ est dit **direct** ssi $\det(\mathrm{d}_\mu \theta) > 0$, **indirect** ssi $\det(\mathrm{d}_\mu \theta)$ reste < 0. Puisque le déterminant d'un endomorphisme composé (resp.

inverse) est le produit des déterminants (resp. l'inverse du déterminant), puisque la différentielle de la composée d'applications de classe $\mathscr{C}^k$ est la composée des différentielles, et puisque la différentielle de la réciproque d'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme est la réciproque de la différentielle, on voit que : *le composé de deux $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes directs est direct, et le réciproque d'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme direct est direct.*

Il suffit, dans la définition XI.1.2, d'imposer à θ d'être direct pour obtenir la notion de **$\mathscr{C}^k$-équivalence positive,** plus restrictive que la $\mathscr{C}^k$-équivalence. On parlera aussi de propriétés **positivement $\mathscr{C}^k$-invariantes** des surfaces paramétrées.

Plans tangents à une surface paramétrée

DÉFINITION XI.1.3

Soit $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Pour $\mu \in D$, le $\mathbb{R}$-ev $T_\mu = \operatorname{Im}(\mathrm{d}_\mu \Phi)$ s'appelle ***espace vectoriel tangent à Φ en le paramètre μ.*** *L'espace affine $\mathscr{T}_\mu = \Phi(\mu) \dotplus T_\mu$ s'appelle* ***espace affine tangent à Φ en le paramètre μ.*** *Les éléments de $T_\mu \setminus \{0\}$ sont appelés les* ***vecteurs tangents*** *à Φ en le paramètre μ.*

L'espace tangent est un **plan** ssi le paramètre μ est **régulier** (on dit alors que T_μ (resp. $\mathscr{T}_\mu$) est le **plan vectoriel tangent** (resp. le **plan affine tangent**) en le paramètre μ.

En un paramètre μ stationnaire, T_μ est de dimension $\leqslant 1$.

Il est clair que la notion d'espace tangent en un paramètre est $\mathscr{C}^k$-invariante ; en fait, soit $\theta : D' \longrightarrow D$ un changement $\mathscr{C}^k$-admissible de paramètre, et soit $\Phi' = \Phi \circ \theta$. Pour tout $\mu' \in D'$, posant $\mu = \theta(\mu')$, on a : $\mathrm{d}_{\mu'}\Phi' = \mathrm{d}_\mu \Phi \circ \mathrm{d}_{\mu'}\theta$. Or $\mathrm{d}_{\mu'}\theta$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, car θ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Donc les images de $\mathrm{d}_\mu \Phi$ et de $\mathrm{d}_{\mu'}\Phi'$ coïncident, i.e. les espaces tangents en μ à Φ et en μ' à Φ' coïncident bien.

Il est clair aussi que si on remplace Φ par une surface paramétrée restriction de Φ à un sous-domaine de D voisinage de $\mu_0 \in D$, on ne modifie pas T_{μ_0}, ni $\mathscr{T}_{\mu_0}$.

Propriétés du plan tangent

• *a*) Soit $\mu_0 \in D$ un paramètre régulier pour la surface paramétrée $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Notons (u, v) les coordonnées génériques de $\mathbb{R}^2$. Fixons un repère $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$ et soit f, g, h les coordonnées de Φ dans $\mathscr{R}$.

Par définition, $T_{\mu_0} = \text{Vect}\left(\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(\mu_0), \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(\mu_0)\right)$, donc $\mathscr{T}_{\mu_0}$ admet la paramétrisation, définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$(X, Y) \mapsto \Phi(\mu_0) + \left(X \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(\mu_0) + Y \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(\mu_0)\right).$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{T}_{\mu_0}$ dans $\mathscr{R}$ est donc :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x - f(\mu_0) & y - g(\mu_0) & z - h(\mu_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial u}(\mu_0) & \dfrac{\partial g}{\partial u}(\mu_0) & \dfrac{\partial h}{\partial u}(\mu_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(\mu_0) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(\mu_0) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(\mu_0) \end{vmatrix} = 0.$$

• *b*) Avec les mêmes hypothèses et notations qu'en *a*), soit $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine non constante. On a :

$$(3) \quad \varphi(\Phi(\mu)) - \varphi(\Phi(\mu_0)) - [\mathrm{d}_{\mu_0}(\varphi \circ \Phi)] \cdot \overrightarrow{\mu_0\mu} \underset{\mu \longrightarrow \mu_0,\, \mu \in D}{\in} o(\overrightarrow{\mu_0\mu}).$$

Or $\mathrm{d}_{\mu_0}(\varphi \circ \Phi) = \vec{\varphi} \circ \mathrm{d}_{\mu_0}\Phi$. Si $L \in E^* \setminus \{0\}$, on vérifie immédiatement que $L \cdot \overrightarrow{\mu_0\mu} \underset{\mu \longrightarrow \mu_0,\, \mu \in D}{\notin} o(\overrightarrow{\mu_0\mu})$. Donc, compte tenu de (3),

$$\varphi(\Phi(\mu)) \underset{\mu \longrightarrow \mu_0,\, \mu \in D}{\in} o(\overrightarrow{\mu_0\mu}) \text{ ssi } \varphi(\Phi(\mu_0)) = 0 \text{ et } \vec{\varphi} \circ \mathrm{d}_{\mu_0}\Phi = 0,$$

autrement dit ssi $\varphi(\Phi(\mu_0)) = 0$ et $T_{\mu_0} = \text{Ker}(\vec{\varphi})$. Donc, *pour que le plan d'équation* $\varphi = 0$ *soit tangent à* Φ *en le paramètre* μ_0, *il faut et il suffit que :*

$$(4) \qquad \varphi(\Phi(\mu)) \underset{\mu \longrightarrow \mu_0,\, \mu \in D}{\in} o(\overrightarrow{\mu_0\mu}).$$

• *c*) Toujours dans les mêmes conditions qu'en *a*) et *b*) ci-dessus, soit $\alpha : I \longrightarrow D$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$ et régulière ; supposons $\mu_0 = \alpha(t_0)$, avec $t_0 \in I$. La courbe paramétrée $\gamma = \Phi \circ \alpha$ est tracée sur la surface Φ et de classe $\mathscr{C}^p$. Puisque $\gamma'(t_0) = \mathrm{d}_{\mu_0}\Phi \cdot \alpha'(t_0)$, on voit que *la tangente en* t_0 *à* γ *est contenue dans le plan tangent en* μ_0 *à* Φ.

Montrons qu'on obtient ainsi toutes les droites passant par $\Phi(\mu_0)$ et contenues dans le plan tangent $\mathscr{T}_{\mu_0}$ à Φ en μ_0. Soit $\vec{V} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et soit

J un intervalle voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $(\forall t \in J)\ \mu_0 + t\vec{V} \in D$. La fonction $J \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \Phi(\mu_0 + t\vec{V})$ est de classe $\mathscr{C}^p$, et sa dérivée en $t_0 = 0$ est $\mathrm{d}_{\mu_0}\Phi \,.\, \vec{V}$, qui est $\neq 0$. On a donc un sous-intervalle I de J, voisinage de $t_0 = 0$ dans $\mathbb{R}$, tel que la courbe $\gamma : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $t \mapsto \Phi(\mu_0 + t\vec{V})$, qui est de classe $\mathscr{C}^p$ et tracée sur Φ, soit régulière, et on a vu que $\gamma'(0) = \mathrm{d}_{\mu_0}\Phi \,.\, \vec{V}$. Mais $\mathrm{d}_{\mu_0}\Phi, \big|^{T_{\mu_0}}$ est bijectif, donc si $\vec{W} \in T_{\mu_0} \setminus \{0\}$, en choisissant $\vec{V}$ convenable, la courbe γ qu'on vient de définir vérifie (parmi d'autres) $\gamma'(0) = \vec{W}$. Cela prouve que $\mathscr{T}_{\mu_0}$ *est l'union des tangentes* (aux paramètres donnant $\Phi(\mu_0)$) *aux courbes régulières tracées sur Φ passant par $\Phi(\mu_0)$.*

• *d*) Reprenons la surface paramétrée $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, en supposant $\mathscr{E}$ *euclidien orienté*. En un paramètre $\mu_0 \in D$ *régulier* de Φ, le vecteur $\mathscr{N}(\mu_0) = \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(\mu_0) \wedge \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(\mu_0)$ est non nul et *normal* à la surface, i.e. dirige la droite vectorielle $T_{\mu_0}^{\perp}$. La droite affine $\Phi(\mu_0) \dotplus \mathbb{R}\mathscr{N}(\mu_0)$ est appelée **la normale** en μ_0 à la surface. Le vecteur unitaire $\mathbf{n}(\mu_0) = \dfrac{1}{\|\mathscr{N}(\mu_0)\|}\mathscr{N}(\mu_0)$ est appelé le **vecteur unitaire normal** en μ_0 à Φ. Lorsque Φ est régulière, la fonction $\mathbf{n} : D \longrightarrow E$, $\mu \mapsto \mathbf{n}(\mu)$ est continue, et en fait, de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si $k < +\infty$, de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ si $k = +\infty$. Le lecteur vérifiera sans peine qu'à cause de la connexité de D, il n'y a que deux fonctions continues $\vec{N} : D \longrightarrow E$ telles que $(\forall \mu \in D)$ $\|\vec{N}(\mu)\| = 1$ et $\vec{N}(\mu) \in T_{\mu}^{\perp}$. Ces fonctions sont $\mathbf{n}$ et $-\mathbf{n}$.

Supposons dans ce qui suit Φ régulière, et notons toujours $\mu = (u, v)$ le point générique de $\mathbb{R}^2$. Soit alors $\theta : D' \longrightarrow D$ un changement $\mathscr{C}^k$-admissible de paramètre, et $\Phi' = \Phi \circ \theta$. Pour $\mu' \in D'$, posons

$$\mathscr{N}'(\mu') = \frac{\partial \vec{\Phi}'}{\partial u'}(\mu') \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}'}{\partial v'}(\mu') \ (\text{où } \mu' = (u', v')) ,$$

$$\mathbf{n}'(\mu') = \frac{1}{\|\mathscr{N}'(\mu')\|}\mathscr{N}'(\mu'), \quad \text{et} \quad \mu = \theta(\mu') = (\theta_1(\mu'), \theta_2(\mu')) .$$

A partir de

$$\frac{\partial \vec{\Phi}'}{\partial u'}(\mu') = \frac{\partial \theta_1}{\partial u'}\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \circ \theta\right) + \frac{\partial \theta_2}{\partial u'}\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \circ \theta\right)$$

et

$$\frac{\partial \vec{\Phi}'}{\partial v'}(\mu') = \frac{\partial \theta_1}{\partial v'}\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \circ \theta\right) + \frac{\partial \theta_2}{\partial v'}\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \circ \theta\right) ,$$

on obtient $\mathcal{N}'(\mu') = \det(\mathrm{d}_{\mu'}\theta) \,.\, \mathcal{N}(\mu)$. Donc :

$$\boxed{\mathbf{n}'(\mu') = \varepsilon \mathbf{n}(\mu)}\,, \tag{5}$$

où $\varepsilon = +1$ si θ est direct, $\varepsilon = -1$ si θ est indirect.

En particulier, la fonction $\mathbf{n}$ est positivement $\mathscr{C}^k$-invariante.

Représentations locales

Rappelons qu'une application de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ est dite **cartésienne relativement à un repère** $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ ssi on a :

$$(\forall \mu = (x, y) \in D) \quad \Phi(\mu) = O \dotplus (xe_1 + ye_2 + f(x, y)\, e_3)\,,$$

avec $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe $\mathscr{C}^k$. S'il en est ainsi, Φ est un *plongement de classe* $\mathscr{C}^k$.

Le théorème VI.2.2 du tome 3 entraîne le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME XI.1.1

Soit $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ et $\mu_0 \in D$ un paramètre régulier de Φ. Il existe un sous-domaine Δ de D contenant μ_0 tel que $\Phi|_\Delta$ soit $\mathscr{C}^k$-équivalente à une surface paramétrée ***cartésienne dans un repère convenable,*** *et en particulier tel que $\Phi|_\Delta$ soit un* ***$\mathscr{C}^k$-plongement.***

Dans les conditions du théorème XI.1.1, les $\mathscr{C}^k$-plongements $\mathscr{C}^k$-équivalents aux $\mathscr{C}^k$-plongements de la forme $\Phi|_\Delta$, où Δ est un sous-domaine de D contenant μ_0, seront appelés les **représentations locales de Φ autour du paramètre μ_0.** Soit Δ un sous-domaine de D contenant μ_0 tel que $\Phi|_\Delta$ soit une telle représentation locale. L'ensemble $\mathscr{V} = \Phi(\Delta)$ est une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{E}$, et on sait que *tout $\mathscr{C}^k$-plongement* (et même toute $\mathscr{C}^k$-immersion) *d'image $\mathscr{V}$ est nécessairement une représentation locale de Φ autour de μ_0* (cf. le théorème VI.3.2 du tome 3).

Au tome 3, nous avons aussi défini les *représentations locales d'une $\mathscr{C}^k$-sous-variété surface $\mathscr{V}$ au voisinage d'un point $b \in \mathscr{V}$* : ce sont les $\mathscr{C}^k$-plongements $\psi : U \longrightarrow \mathscr{E}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont l'image $\mathscr{W}$ vérifie : $b \in \mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ (cf. tome 3, page 246). On a vu notamment que deux telles représentations locales sont *$\mathscr{C}^k$-équivalentes au voisinage de b*. Si $\Psi : U \longrightarrow \mathscr{E}$ est une telle représentation, on a un domaine $\Delta \subset U$ tel que $\Psi|_\Delta$ soit encore une telle représentation (par exemple, avec $\Delta =$ la composante connexe de U qui contient $\Psi^{-1}(b)$).

Dans tout ce chapitre, nous conviendrons d'appeler *représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de $b \in \mathscr{V}$* uniquement les représentations locales de $\mathscr{V}$ au voisinage de b **définies sur des domaines** de $\mathbb{R}^2$, de sorte que ces représentations locales sont des *surfaces paramétrées de classe $\mathscr{C}^k$*. Si $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ est un $\mathscr{C}^k$-plongement d'image $\mathscr{V}$, il est clair que, pour $\mu_0 \in D$, les représentations locales de Φ autour de μ_0 et les représentations locales de $\mathscr{V}$ au voisinage de $M_0 = \Phi(\mu_0)$ sont les mêmes.

Revenons aux hypothèses et notations du théorème XI.1.1. Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ un repère de $\mathscr{E}$; notons f, g, h les coordonnées de Φ dans $\mathscr{R}$. D'après la démonstration même du théorème VI.2.2 du tome 3, une *condition suffisante* pour qu'il existe une représentation locale de Φ au voisinage de μ_0 qui soit *cartésienne* relativement à $\mathscr{R}$ est :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}(\mu_0) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(\mu_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(\mu_0) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(\mu_0) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

En se reportant à (2), on constate que cette condition équivaut à :

$$\text{(6)} \qquad \boxed{e_3 \notin T_{\mu_0}} .$$

D'ailleurs, si on calcule le plan tangent à une surface paramétrée cartésienne dans $\mathscr{R}$, on se rend compte que la condition (6) est *nécessaire* pour que $\mathscr{R}$ possède la propriété ci-dessus.

En résumé, (6) **est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une représentation locale de Φ au voisinage de μ_0 qui soit cartésienne dans $\mathscr{R}$.**

Dans certains des exercices ci-après, on utilise un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 1 : On définit une surface $\mathscr{S}$ et une droite $\mathscr{D}$ par les équations suivantes dans $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{S} : z^3 - xy = 0\,; \quad \mathscr{D} : x = z \text{ et } 3y - z = 3 .$$

Trouver les plans tangents à $\mathscr{S}$ passant par $\mathscr{D}$.

Exercice 2 : Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$, de coordonnées dans $\mathscr{R}$:

$$x = a \sin^2 \frac{u}{2}, \quad y = v \cos u , \quad z = v \sin u \quad (a > 0 \text{ donné}) .$$

a) Quels sont les paramètres réguliers (resp. stationnaires) pour Φ ?

b) Soit $\mathscr{S}$ le support de Φ. Trouver une équation cartésienne de Adh $(\mathscr{S})$ dans $\mathscr{R}$.

c) Etudier l'intersection de $\mathscr{S}$ avec des plans parallèles aux plans de coordonnées de $\mathscr{R}$; avec des plans passant par $\mathscr{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$.

Exercice 3 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ *immergée*, et $\mathscr{S}$ le support de Φ. Soit $A \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{S}$. On définit $\delta : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) = \mu \mapsto \|\overrightarrow{A\Phi(u, v)}\|^2$.

Montrer : μ est point critique de δ ssi Dr $(A, \Phi(u, v))$ est la normale en (u, v) à Φ.

Exercice 4 : Soit la surface paramétrée, de classe $\mathscr{C}^\infty$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$ définie dans $\mathscr{R}$ par $x = u^2$, $y = uv$, $z = v^2 + 2u$.

Montrer qu'un plan tangent à Φ rencontre le support $\mathscr{S}$ de Φ suivant deux paraboles.

Exercice 5 : Dans $\mathscr{R}$, on définit $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$ par $x = u$, $y = uv$, $z = v^2$. Montrer qu'un plan tangent quelconque à Φ rencontre $\mathscr{S}$ suivant une droite et une parabole.

Exercice 6 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que toutes les normales à Φ passent par un même point $O \in \mathscr{E}$. Prouver que le support $\mathscr{S}$ de Φ est contenu dans une sphère de centre O.

Exercice 7 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. Soit $\mathscr{S}$ la surface définie dans $\mathscr{R}$ par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ $(a > b > c > 0)$.

a) $\mathscr{S}$ est une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^\infty$ (cf. § XII.2).

b) Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des projections orthogonales de O sur les plans tangents à $\mathscr{S}$. Calculer une équation cartésienne de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{R}$.

Exercice 8 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. On donne des réels a, b, c tels que $0 < c < b < a$. Soit $J = \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$. Pour $\lambda \in J$, on désigne par $\mathscr{S}_\lambda$ la surface d'équation $\dfrac{x^2}{a - \lambda} + \dfrac{y^2}{b - \lambda} + \dfrac{z^2}{c - \lambda} - 1 = 0$ dans $\mathscr{R}$. Soit $A \in \mathscr{E}$ de coordonnées (α, β, γ) dans $\mathscr{R}$ avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

a) Montrer que les $\mathscr{S}_\lambda$ sont des $\mathscr{C}^\infty$-sous-variétés surfaces.

b) Par A il passe exactement trois surfaces $\mathscr{S}_\lambda$. Montrer que leurs plans tangents en A sont deux à deux perpendiculaires.

Exercice 9 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. On donne a, λ et c réels $(a > \lambda > c > 0)$. Soit $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ les surfaces d'équations respectives dans $\mathscr{R}$:

$$y^2(z^2 + x^2) - c^2x^2 - a^2z^2 = 0 \text{ et } \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Montrer que $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ se coupent suivant 4 droites, et qu'en chacun de leurs points communs, leurs plans tangents sont perpendiculaires.

§ XI.2 *ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PLANS TANGENTS*

Dans tout ce § on suppose donnée une *sous-variété surface* $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leq k \leq +\infty)$ de $\mathscr{E}$. On considère comme acquis le § VII.4 (en particulier la définition VII.4.1) pour tout ce qui concerne les tangentes géométriques à un ensemble.

THÉORÈME XI.2.1

Soit $M_0 \in \mathscr{V}$. Le plan tangent $\mathscr{T}_{M_0}$ à $\mathscr{V}$ en M_0 est le cône des tangentes géométriques à $\mathscr{V}$ en M_0.

Démonstration :

Soit $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, e_2, e_3)$ un repère tel que le plan vectoriel tangent T_{M_0} soit Vect (e_1, e_2) (d'où $e_3 \notin T_{M_0}$). On sait alors qu'il existe une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 cartésienne dans $\mathscr{R}$. Soit

$$\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E} \ , \quad \mu = (x, y) \mapsto M_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + f(x, y)\, e_3)$$

une telle représentation, avec $\mu_0 = (0, 0) \in D$ et $M_0 = \Phi(\mu_0)$. Notons $\mathscr{W} = \Phi(D)$. Munissons $\mathscr{E}$ de la structure euclidienne pour laquelle $\mathscr{R}$ est orthonormal. Soit S la sphère unité de E. Notons $\mathscr{U}$ l'application : $\mathscr{W} \setminus \{M_0\} \longrightarrow E$, $M \mapsto \dfrac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \overrightarrow{M_0M}$. Il suffit de prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\mathscr{U}$ en M_0 est $S \cap T_{M_0}$.

Pour $(x, y) \in D$, soit $\xi(x, y) = \mathscr{U}(\Phi(x, y))$. Puisque Φ définit un homéomorphisme de D sur $\mathscr{W}$, il revient au même de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de ξ en μ_0 est $S \cap T_{M_0}$. Mais, puisque $T_{M_0} = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$, on a : $f(x, y) \underset{\substack{\neq \\ \mu \longrightarrow \mu_0}}{\in} o(\mu)$, d'où par un calcul élémentaire, si $\mu \in D$ et $\mu \neq \mu_0$:

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + f^2(x, y))^{1/2}} (xe_1 + ye_2 + f(x, y)\, e_3) \\ &= \frac{1}{\|xe_1 + ye_2\|} (xe_1 + ye_2) + \rho(\mu)\ , \text{ avec } \rho(\mu) \underset{\substack{\neq \\ \mu \longrightarrow \mu_0}}{\longrightarrow} 0\ ,\end{aligned}$$

ce qui entraîne immédiatement le résultat voulu. ■

COROLLAIRE

Dans les conditions du théorème XI.2.1, *$\mathscr{T}_{M_0}$ est l'union des tangentes en M_0 aux sous-variétés courbes de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ passant par M_0 et contenues dans $\mathscr{V}$.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{C}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{E}$ contenue dans $\mathscr{V}$ et passant par M_0. On sait que la tangente $\mathscr{T}_{1, \mathscr{C}, M_0}$ en

M_0 à $\mathscr{C}$ est tangente géométrique stricte à $\mathscr{C}$ en M_0 (cf. théorème VII.4.1) ; donc c'est une tangente géométrique à $\mathscr{V}$ en M_0 ; d'où par application du théorème XI.2.1 : $\mathscr{T}_{1,\mathscr{C},M_0} \subset \mathscr{T}_{M_0}$.

Réciproquement, soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{T}_{M_0}$ passant par M_0. D'après la propriété *c*) des plans tangents vue au § XI.1, en tenant compte du théorème VII.2.2, on voit que $\mathscr{D}$ est tangente en M_0 à une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{E}$ passant par M_0 et incluse dans $\mathscr{V}$. ■

Position de $\mathscr{V}$ par rapport à son plan tangent en un point

A partir d'ici, nous supposons $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 2$. Soit $M_0 \in \mathscr{V}$. Fixons un repère affine $\mathscr{R} = (M_0 ; e_1, e_2, e_3)$ tel que $e_3 \notin T_{M_0}$. Pour des raisons techniques, il est commode de munir E d'une norme ν, étant entendu que les résultats que nous allons obtenir sont indépendants du choix de ν. Donnons-nous une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 qui soit cartésienne dans $\mathscr{R}$, soit :

$$\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}\ , \quad (x, y) \mapsto M_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + f(x, y)\, e_3)\ ,$$

avec $\mu_0 = (0, 0) \in D$ et $\Phi(\mu_0) = M_0$, d'où $f(0, 0) = 0$. Nous poserons :

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0)\ , \quad q_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mu_0)\ ,$$

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_0)\ , \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\mu_0)\ , \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mu_0)\ .$$

Enfin nous désignerons par φ la fonction affine :

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad M = M_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \mapsto z - p_0\, x - q_0\, y\ .$$

D'après la formule (2) du § XI.1, on a : $\varphi^{-1}(0) = \mathscr{T}_{M_0}$. On se souvient que les fonctions affines $\psi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\psi^{-1}(0) = \mathscr{T}_{M_0}$ sont les $\lambda\varphi$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

PROPOSITION XI.2.1

Supposons $r_0\, t_0 - s_0^2 > 0$. Alors il existe des réels $\eta \in \{-1, 1\}$, $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $M \in \mathscr{V}$,

$$\nu(\overrightarrow{M_0M}) \leqslant \lambda \Rightarrow \eta\, \varphi(M) \geqslant \alpha\, (\nu(\overrightarrow{M_0M}))^2\ .$$

Démonstration :

Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E pour laquelle

$\mathscr{R}$ est orthonormal. On sait qu'elle est équivalente à ν ; il suffit donc de prouver l'existence de $\eta \in \{-1, 1\}$, de $\lambda_1 > 0$ et de $\alpha_1 > 0$ tels que :

(1) $$\eta\varphi(M) \geqslant \alpha_1 \|\overrightarrow{M_0M}\|^2 \text{ pour } M \in \mathscr{V} \text{ et } \|\overrightarrow{M_0M}\| \leqslant \lambda_1.$$

a) Soit Q la forme quadratique $(x, y) \mapsto r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de type $(2, 0)$. On a donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\beta_1 > 0$ tels que :

(2) $$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \varepsilon Q(x, y) \geqslant \beta_1 (x^2 + y^2).$$

b) La formule de Taylor-Young appliquée à f en μ_0 à l'ordre 2 donne :

(3) $$f(x, y) - p_0 x - q_0 y = \frac{1}{2} Q(x, y) + \rho_1(x, y),$$
$$\rho_1(x, y) \underset{(x,y) \in D,\ (x,y) \longrightarrow \mu_0}{\in} o(x^2 + y^2).$$

On en déduit en particulier (avec $\mu = (x, y) \in D$) :

(4) $$\|\overrightarrow{M_0\Phi(\mu)}\|^2 = x^2 + y^2 + (p_0 x + q_0 y)^2 + \rho_2(x, y),$$
$$\rho_2(x, y) \underset{\mu \longrightarrow \mu_0,\ \mu \in D}{\in} o(x^2 + y^2).$$

De (4) découle l'existence de $\beta_2 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ tels que, pour tout $\mu = (x, y) \in D$ vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant \lambda_2^2$, on ait :

(5) $$x^2 + y^2 \geqslant \beta_2 \|\overrightarrow{M_0\Phi(\mu)}\|^2.$$

En tenant compte de (2), (3) et (5), on obtient donc des réels $\lambda_3 > 0$ et $\beta_3 > 0$ tels que, pour tout $\mu = (x, y) \in D$ vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant \lambda_3^2$, on ait :

(6) $$\varepsilon(f(x, y) - p_0 x - q_0 y) \geqslant \beta_3 \|\overrightarrow{M_0\Phi(\mu)}\|^2.$$

c) Soit $\xi : \Phi(D) \longrightarrow D$ l'homéomorphisme réciproque de $\Phi|^{\Phi(D)}$. Si $M \in \Phi(D)$, posant $(x, y) = \xi(M)$, on a : $\varphi(M) = f(x, y) - p_0 x - q_0 y$; à l'aide de (6), par continuité de ξ en M_0, prenant $\eta = \varepsilon$ et $\alpha_1 = \beta_3$, on a bien l'existence de $\lambda_1 > 0$ tel que (1) soit vérifié. ■

Une conséquence évidente de la proposition XI.2.1 est qu'il existe un voisinage $\mathscr{W}$ de M_0 relativement à $\mathscr{V}$ contenu dans l'un des demi-espaces limités par $\mathscr{T}_{M_0}$, et tel que $\mathscr{W} \cap \mathscr{T}_{M_0} = \{M_0\}$.

On dit que $\mathscr{V}$ présente au voisinage de M_0 une disposition *en ballon.*

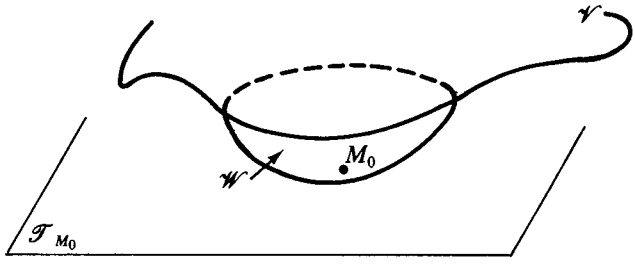


Fig. 1. $(r_0 t_0 - s_0^2 > 0)$.

Il reste maintenant à étudier le cas où $r_0 t_0 - s_0^2 \leqslant 0$. Continuons à noter Q la forme quadratique $(x, y) \mapsto r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit ϖ l'isomorphisme affine

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{T}_{M_0}, \quad (x, y) \mapsto M_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + (p_0 x + q_0 y) e_3),$$

et soit Γ l'image par ϖ du cône isotrope $Q^{-1}(0)$ de Q.

Si $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, Γ est l'union de deux droites distinctes sécantes en M_0 (car Q est de type $(1, 1)$) que nous noterons $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

Si $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ et $Q \neq 0$, Γ est une droite passant par M_0 (car Q est de type $(1, 0)$) que nous noterons $\mathscr{A}$.

Enfin si $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ et $Q = 0$, $\Gamma = \mathscr{T}_{M_0}$.

Soit ω_ε $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$ l'ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ égal à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon Q(x, y) > 0\}$, et soit $\Omega_\varepsilon = \varpi(\omega_\varepsilon)$. Si Ω_ε est non vide, c'est l'union de deux secteurs angulaires convexes ouverts symétriques par rapport à M_0. Si $Q \neq 0$, l'un au moins des ensembles Ω_1 et Ω_{-1} est non vide.

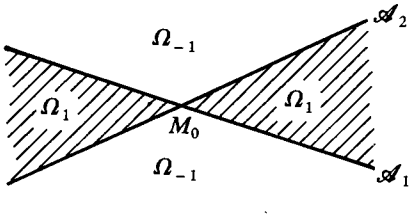
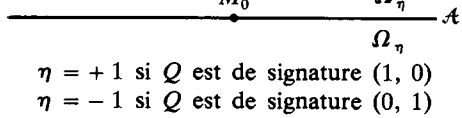


Fig. 2. $(r_0 t_0 - s_0^2 < 0)$.



$\eta = +1$ si Q est de signature $(1, 0)$
$\eta = -1$ si Q est de signature $(0, 1)$

Fig. 3. $(r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ et $Q \neq 0)$.

Réglons d'abord le cas où $Q = 0$:

PROPOSITION XI.2.2

Si $Q = 0$, on a : $\varphi(M) \underset{M \longrightarrow M_0,\, M \in \mathscr{V}}{\in} o(\nu(\overrightarrow{M_0M}))^2$.

(Il suffit pour le voir d'apporter quelques modifications mineures à la démonstration de la proposition XI.2.1).

Passons au cas où $r_0 t_0 - s_0^2 \leqslant 0$, $Q \neq 0$:

PROPOSITION XI.2.3

Avec les notations qui précèdent, supposons $r_0 t_0 - s_0^2 \leqslant 0$ et $Q \neq 0$. Soit $\mathscr{C}$ une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 1 contenue dans $\mathscr{V}$ et passant par M_0 ; notons $\mathscr{D}$ sa tangente en M_0.

a) • *Si $\mathscr{D} \subset \Omega_1 \cup \{M_0\}$, il existe $\alpha > 0$ (dépendant de $\mathscr{C}$) tel que, pour tout $M \in \mathscr{C}$ assez voisin de M_0, on ait :*

$$\varphi(M) \geqslant \alpha\,(\nu(\overrightarrow{M_0M}))^2 .$$

• *Si $\mathscr{D} \subset \Omega_{-1} \cup \{M_0\}$, il existe $\alpha > 0$ (dépendant de $\mathscr{C}$) tel que, pour tout $M \in \mathscr{C}$ assez voisin de M_0, on ait :*

$$\varphi(M) \leqslant -\,\alpha\,(\nu(\overrightarrow{M_0M}))^2 .$$

b) *Si $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$,* on a : $\varphi(M) \underset{M \longrightarrow M_0,\, M \in \mathscr{C}}{\in} o(\nu(\overrightarrow{M_0M}))^2$.

Démonstration :

Il suffit de prouver les mêmes assertions en remplaçant ν par la norme euclidienne de E pour laquelle $\mathscr{R}$ est orthonormal. On peut supposer que $\mathscr{C}$ est l'image d'un $\mathscr{C}^1$-*plongement* $\gamma : I \longrightarrow \mathscr{E}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ voisinage de 0, avec $\gamma(0) = M_0$. On a alors, pour $\tau \in I$:

$$\gamma(\tau) = M_0 \dotplus (\xi_1(\tau)\, e_1 + \xi_2(\tau)\, e_2 + f(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\, e_3) ,$$

où ξ_1 et $\xi_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$ et $(a_1, a_2) = (\xi_1'(0), \xi_2'(0) \neq (0, 0))$.

Reprenons la formule de Taylor-Young (3). Pour $\tau \in I$, on a :

$$\varphi(\gamma(\tau)) = f(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) - p_0\, \xi_1(\tau) - q_0\, \xi_2(\tau) = \\ = \frac{1}{2}\, Q(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) + R_1(\tau) ,$$

avec $$R_1(\tau) = \rho_1(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \underset{\tau \to 0}{\in} o(\tau^2).$$

Mais du fait que $\xi_i(\tau) - a_i\,\tau \underset{\tau \to 0}{\in} o(\tau)$ $(i \in \{1, 2\})$, on a :

$Q(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) - Q(a_1\,\tau, a_2\,\tau) \underset{\tau \to 0}{\in} o(\tau^2)$, c'est-à-dire :

$Q(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) - \tau^2 Q(a_1, a_2) \underset{\tau \to 0}{\in} o(\tau^2)$, et par suite :

$$(7) \qquad \varphi(\gamma(\tau)) = \frac{1}{2}\tau^2 Q(a_1, a_2) + R_2(\tau), \quad \text{où} \quad R_2(\tau) \underset{\tau \to 0}{\in} o(\tau^2).$$

D'autre part, $\|\overrightarrow{M_0\gamma(\tau)}\|^2 = \|\tau\gamma'(0) + o(\tau)\|^2 = \tau^2\|\gamma'(0)\|^2 + o(\tau^2)$.

On a donc $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > \beta_1$ tels que

$$(8) \qquad \beta_1\|\overrightarrow{M_0\gamma(\tau)}\|^2 \leqslant \tau^2 \leqslant \beta_2\|\overrightarrow{M_0\gamma(\tau)}\|^2$$

pour $\tau \in I$ assez voisin de 0.

Soit alors $\zeta : \mathscr{C} \longrightarrow I$ l'homéomorphisme réciproque de $\gamma|^{\mathscr{C}}$. Pour $M \in \mathscr{C}$, posons $\tau = \zeta(M)$. Par continuité de ζ en M_0, on déduit de (7) et (8) que, pour $M \in \mathscr{C}$:

$$\varphi(M) = \frac{1}{2}\tau^2 Q(a_1, a_2) + \rho(M), \quad \text{avec} \quad \rho(M) \underset{M \to M_0,\, M \in \mathscr{C}}{\in} o(\|\overrightarrow{M_0M}\|^2),$$

d'où, *grâce à la continuité* de ζ en M_0, pour $M \in \mathscr{C}$ et assez voisin de M_0, l'assertion *b*) si $Q(a_1, a_2) = 0$, puis :

$$\frac{\beta_1}{2} Q(a_1, a_2)\|\overrightarrow{M_0M}\|^2 \leqslant \varphi(M) - \rho(M) \leqslant \frac{\beta_2}{2} Q(a_1, a_2)\|\overrightarrow{M_0M}\|^2$$

si $Q(a_1, a_2) > 0$, et

$$\frac{\beta_2}{2} Q(a_1, a_2)\|\overrightarrow{M_0M}\|^2 \leqslant \varphi(M) - \rho(M) \leqslant \frac{\beta_1}{2} Q(a_1, a_2)\|\overrightarrow{M_0M}\|^2$$

si $Q(a_1, a_2) < 0$.

A partir de là toutes les assertions du théorème sont évidentes. ■

Lorsque $r_0\,t_0 - s_0^2 < 0$, la proposition XI.2.3 montre que :

• si $\mathscr{D} \subset \Omega_1 \cup \{M_0\}$, pour $M \in \mathscr{C}$ assez voisin de M_0 et distinct de M_0, le point M est dans l'un des demi-espaces ouverts limités par $\mathscr{T}_{M_0}$, tandis que

• si $\mathscr{D} \subset \Omega_{-1} \cup \{M_0\}$, le point M est dans l'autre de ces demi-espaces.

La disposition locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 (illustrée par la fig. 4) est celle d'un *col* ou d'une *selle*.

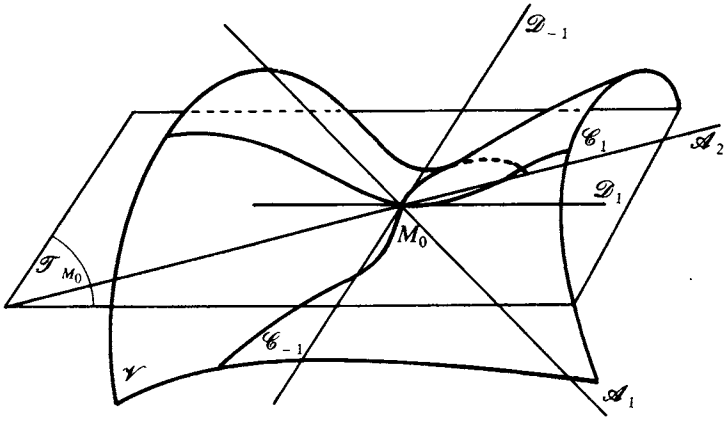


Fig. 4.

Lorsque $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ et $Q \neq 0$, la disposition locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 est dans le cas général celle illustrée par la figure 5 et appelée disposition en « bec de canard ».

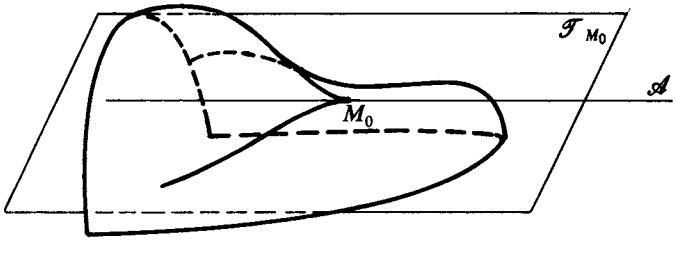


Fig. 5.

Nous observons que les conclusions des propositions XI.2.1, XI.2.2 et XI.2.3 *couvrent tous les types* (1) *possibles pour la forme quadratique* Q, et qu'elles sont *de nature purement géométrique* (leurs énoncés ne font plus intervenir le repère $\mathscr{R}$ choisi au départ) ; de plus les conclusions relatives à deux types de Q distincts sont toujours différentes.

(1) Voir définition du *type* d'une forme quadratique au § X.1.

Par suite, chacune des 4 conditions : $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ (i.e. Q est de type $(2, 0)$), $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ (i.e. Q est de type $(1, 1)$), $Q \neq 0$ et $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ (i.e. Q est de type $(1, 0)$) et enfin $Q = 0$, exprime une propriété locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0 *indépendante du choix de* $\mathscr{R}$.

Lorsque $r_0 t_0 - s_0^2 \leqslant 0$, l'ensemble Γ de $\mathscr{T}_{M_0}$ défini plus haut est lui aussi indépendant du choix de $\mathscr{R}$: on l'appelle *ensemble asymptotique* de $\mathscr{V}$ en M_0 (il se compose soit de $\mathscr{A}$, soit de $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$; ou bien $\Gamma = \mathscr{T}_{M_0}$).

On peut donc poser des définitions géométriques pour caractériser chacun des quatre cas étudiés ci-dessus. Pour les énoncer plus brièvement, appelons ici représentation locale *cartésienne de* $\mathscr{V}$ *centrée en* M_0 toute représentation locale qui satisfait les conditions énoncées avant la proposition XI.2.1.

DÉFINITION XI.2.1

Le point $M_0 \in \mathscr{V}$ *est dit :*
elliptique *ssi on a* $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ *pour toute représentation locale cartésienne de* $\mathscr{V}$ *centrée en* M_0, *et il suffit pour cela qu'on ait* $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ *avec* **une** *telle représentation ;*
hyperbolique *ssi on a* $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ *pour toute représentation locale cartésienne de* $\mathscr{V}$ *centrée en* M_0, *et il suffit pour cela qu'on ait* $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ *avec* **une** *telle représentation ;*
parabolique (strict) *ssi on a*

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (r_0, s_0, t_0) \neq (0, 0, 0)$$

pour toute représentation locale cartésienne centrée en M_0, *et il suffit pour cela que* $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ *et* $(r_0, s_0, t_0) \neq (0, 0, 0)$ *avec* **une** *telle représentation ;*
parabolique (méplat) *ssi on a :* $r_0 = s_0 = t_0 = 0$ *pour toute représentation locale cartésienne centrée en* M_0, *et il suffit pour cela que* $r_0 = s_0 = t_0 = 0$ *avec* **une** *telle représentation.*
Lorsque M_0 *est hyperbolique ou parabolique, les tangentes en* M_0 *dont la réunion est l'ensemble asymptotique de* $\mathscr{V}$ *en* M_0 *sont appelées les* ***tangentes asymptotiques*** *de* $\mathscr{V}$ *en* M_0.

D'après cette définition, il y a donc exactement deux tangentes asymptotiques en M_0 si M_0 est hyperbolique, une seule si M_0 est parabolique strict, et toute tangente en M_0 à $\mathscr{V}$ est asymptotique lorsque M_0 est parabolique méplat.

Exemple 1 : Supposons que $\mathscr{V}$ contienne un segment non trivial, centré en M_0, d'une droite $\mathscr{D}$. D'abord il est clair que $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}_{M_0}$ (cf. théorème

XI.2.1). Puis, en analysant tous les cas à partir des propositions XI.2.1, 2 et 3, on voit que $\mathscr{D}$ est nécessairement une tangente asymptotique en M_0 à $\mathscr{V}$. En particulier le point M_0 est soit hyperbolique, soit parabolique.

Exemple 2 : Supposons $\mathscr{E}$ euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$. Soit deux réels $R > 0$, $a > 0$, avec $a < R$. Considérons la surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^\infty$: $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ de coordonnées f, g, h suivantes dans $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases} f(u, v) = (R + a\cos v)\cos u\,, \\ g(u, v) = (R + a\cos v)\sin u\,, \\ h(u, v) = a\sin v\,. \end{cases}$$

Pour abréger, posons $M = \Phi(u, v)$, $\vec{I} = e_1\cos u + e_2\sin u$ et

$$\vec{I}_1 = -e_1\sin u + e_2\cos u, \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OM} = (R + a\cos v)\,\vec{I} + ae_3\sin v\,.$$

On a : $\dfrac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v} = a(R + a\cos v)(\vec{I}\cos v + e_3\sin v)$.

Du fait que $R > a$, on voit que Φ est régulière, son vecteur unitaire normal étant $\mathbf{n} = \vec{I}\cos v + e_3\sin v$.

L'image $\mathscr{S}$ de Φ est l'ensemble d'équation dans $\mathscr{R}$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - a^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0\,.$$

On en déduit que $\mathscr{S}$ est une *sous-variété surface* de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$ (nous verrons au § XI.4 qu'il s'agit d'une surface de révolution d'axe $\mathscr{D}_3 = O \dotplus \mathbb{R}e_3$, dont la méridienne dans le plan d'équation $y = 0$ est l'union de deux cercles disjoints et symétriques par rapport à $\mathscr{D}_3$ d'équations dans $\mathscr{R} : x^2 + z^2 + R^2 - a^2 - 2\,\varepsilon Rx = 0, y = 0$ $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$; cette surface $\mathscr{S}$ est appelée un *tore à collier* (cf. fig. 6)).

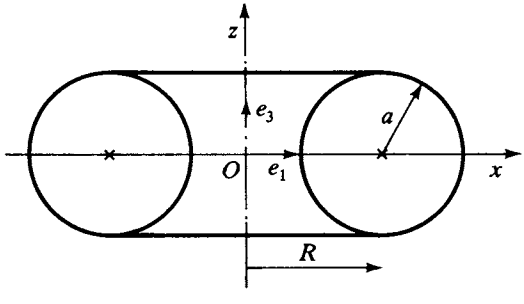


Fig. 6.

L'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{S}$ formé des points de $\mathscr{S}$ où $z > 0$ admet la représentation, cartésienne dans $\mathscr{R}$:

$$z = a\left[1 - \frac{(r-R)^2}{a^2}\right]^{1/2} = f(x, y)$$

où l'on a posé $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ $(R - a < r < R + a)$.

On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-1}{rf(x, y)} x(r - R)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1}{rf(x, y)} y(r - R)$, puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3 f^3(x, y)} [-a^2(rx^2 + (r - R) y^2) + (r - R)^3 y^2], \quad \text{puis} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{-xy}{r^3 f^3} [a^2 R + (r - R)^3]$, ce qui après simplification, donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{a^2(r - R)}{rf^4(x, y)}.$$

Donc un point $M = O \dotplus (xe_1 + ye_2 + f(x, y) e_3) \in \mathscr{U}$ est hyperbolique si $r < R$, parabolique si $r = R$ et elliptique si $r > R$. Par symétrie par rapport au plan des (x, y), on a la nature des points de la partie inférieure du tore et quant aux points situés dans le plan $z = 0$, le lecteur pourra vérifier qu'ils sont elliptiques sur le parallèle « extérieur » $r = R + a$ et hyperboliques sur le plan parallèle « intérieur » $r = R - a$. On remarque que les points paraboliques sont ceux situés sur les deux cercles parallèles le plus haut et le plus bas de $\mathscr{S}$, où $r = R$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 2$, supposée *connexe*. Montrer que si $\mathscr{V}$ possède des points elliptiques et des points hyperboliques, elle a au moins un point parabolique.

Exercice 2 : Soit $z = f(x, y)$ une représentation locale, dans un repère $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ d'une sous-variété surface $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(3 \leqslant k \leqslant +\infty)$ au voisinage d'un point $M_0 \in \mathscr{V}$. On suppose $M_0 = O$, f étant définie sur un domaine D voisinage de $\mu_0 = (0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $f(0, 0) = 0$; on suppose aussi que $O \dotplus \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ est le plan tangent $\mathscr{T}_{M_0}$ en M_0 à $\mathscr{V}$.

a) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale pour prouver qu'on a des fonctions numériques A, B, C définies au voisinage de μ_0 dans D, de classe $\mathscr{C}^{k-2}$ si $k < +\infty$ (et $\mathscr{C}^\infty$ si $k = +\infty$) telles que

$$f(x, y) = x^2 A(x, y) + 2\,xyB(x, y) + y^2 C(x, y)$$

pour (x, y) voisin de μ_0, avec

$$A(0, 0) = \frac{1}{2} r_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\mu_0), \quad B(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} (\mu_0) = \frac{1}{2} s_0$$

et $$C(0,0) = \frac{1}{2} t_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\mu_0) .$$

On suppose pour la suite $r_0 t_0 - s_0^2 \neq 0$.

b) En déduire qu'il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme Θ d'un voisinage de μ_0 dans $\mathbb{R}^2$ sur un voisinage de μ_0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que, pour (X, Y) assez voisin de μ_0 dans $\mathbb{R}^2$, on ait $f \circ \Theta(X, Y) = X^2 + \varepsilon Y^2$, avec $\varepsilon = +1$ si M_0 est elliptique sur $\mathscr{V}$ et $\varepsilon = -1$ si M_0 est hyperbolique sur $\mathscr{V}$.

c) Si M_0 est hyperbolique sur $\mathscr{V}$, en déduire la forme exacte de $\mathscr{V}$ au voisinage de M_0, et la nature de son intersection avec $\mathscr{T}_{M_0}$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ de $\mathscr{E}$, *connexe.*

a) Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) Il existe une structure euclidienne sur $\mathscr{E}$ et une application *continue* $\vec{\nu} : \mathscr{V} \longrightarrow E$ telle que $(\forall M \in \mathscr{V}) \| \vec{\nu}(M) \| = 1$ et $\vec{\nu}(M)$ est normale à $\mathscr{V}$.

(II) Pour toute structure euclidienne de $\mathscr{E}$, la conclusion de (I) a lieu.

Dans ces conditions, $\mathscr{V}$ est dite *orientable*. Sinon elle est dite *non orientable*.

b) Si $\mathscr{E}$ est euclidien et $\mathscr{V}$ orientable, combien y a-t-il de fonctions $\vec{\nu}$ vérifiant (I) avec la structure euclidienne de $\mathscr{E}$ (ces fonctions s'appellent les *vecteurs unitaires normaux continus* de $\mathscr{V}$). Prouver aussi que si $\mathscr{V}$ est plongée, elle est orientable.

c) On suppose que $\mathscr{V} = f^{-1}(0)$, où $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$, sans point critique, sur un domaine U de $\mathscr{E}$. Montrer que $\mathscr{V}$ est orientable (penser au gradient !)

d) On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{M}$ le support de la surface paramétrée $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$, avec $D = \mathbb{R} \times]-1, 1[$ définie par les coordonnées suivantes dans un repère orthonormal $\mathscr{R}$:

$$x = \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u , \quad y = \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u , \quad z = v \cos \frac{u}{2} .$$

Montrer que $\mathscr{M}$ est aussi l'image de $\Psi : D \longrightarrow \mathscr{E}$ défini dans $\mathscr{R}$ par :

$$x = \left(2 - v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right) \cos u, \quad y = -\left(2 - v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right) \sin u, \quad z = v \cos \frac{u}{2} .$$

Enfin prouver que $\mathscr{V}$ est une $\mathscr{C}^k$-sous-variété surface de $\mathscr{E}$, connexe et *non orientable* (« ruban de Moëbius »).

Exercice 4 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété surface *connexe* de classe $\mathscr{C}^k$ $(3 \leqslant k \leqslant +\infty)$.

a) Prouver : pour tout $M_0 \in \mathscr{V}$, il existe un voisinage $\mathscr{W}_{M_0}$ de M_0 et ε réel > 0 tels que, pour tous points M_1 et M_2 de $\mathscr{W}_{M_0} \cap \mathscr{V}$, si $\vec{N}_i$ est un vecteur normal à $\mathscr{V}$ en M_i $(i \in \{1, 2\})$ et unitaire, les ensembles $\left\{M_i + \lambda \vec{N}_i\right\}_{\lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ soient *disjoints.*

b) On suppose désormais $\mathscr{V}$ *compacte* et *orientable* (cf. exercice 3). Soit $\vec{\nu} : \mathscr{V} \longrightarrow E$ une fonction vecteur unitaire normal continue sur $\mathscr{V}$.

*b*1) Recouvrir $\mathscr{V}$ par un nombre fini de voisinages possédant la propriété du *a*) ; considérer un *nombre de Lebesgue* du recouvrement ainsi obtenu (cf. tome 2, page 576) ; en déduire : il existe ε réel > 0 tel que l'application $\Phi : \mathscr{V} \times]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathscr{E}$, $(M, \lambda) \mapsto M + \lambda \vec{\nu}(M)$ soit injective.

*b*2) Ayant choisi ε comme en *b*1), montrer que $\Omega = \Phi(\mathscr{V} \times]-\varepsilon, \varepsilon[)$ est un ouvert connexe (« voisinage tubulaire de $\mathscr{V}$»). A chaque $P \in \Omega$, on associe le réel $f(P)$ tel que $P = M + f(P) \vec{\nu}(M)$ (P détermine M et $f(P)$ de façon unique). Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$ (et $\mathscr{C}^\infty$ si $k = +\infty$), sans point critique sur Ω, et que $f^{-1}(0) = \mathscr{V}$. On a ainsi prouvé une réciproque à la propriété de l'exercice 3 *c*) ci-dessus.

§ XI.3 *CYLINDRES, CÔNES, SURFACES RÉGLÉES*

Surfaces cylindriques

On appelle **surface paramétrée cylindrique** de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ toute surface paramétrée équivalente à une surface paramétrée de la forme

$$(1) \qquad \Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E},\ (u, v) \mapsto f(u) + v\vec{K}$$

où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\vec{K}$ est un vecteur donné de $E \setminus \{0\}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (donc Φ est de classe $\mathscr{C}^k$).

Pour la surface (1), les courbes coordonnées $\mathscr{G}_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $v \mapsto \Phi(u, v)$ sont des *droites affines,* toutes dirigées par $\vec{K}$. On les appelle **génératrices** de la surface Φ. La courbe paramétrée f est appelée une **directrice** de la surface. Le support de Φ, appelé *cylindre*, n'est autre que *l'union des droites dirigées par $\vec{K}$ et rencontrant $f(I)$.*

On a : $\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = f'(u)$ et $\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \vec{K}$, d'où l'on déduit immédiatement : *un paramètre $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ est régulier ssi $f'(u) \notin \mathbb{R}\vec{K}$.* Et si $f'(u) \notin \mathbb{R}\vec{K}$, alors pour tout v, *le plan tangent à Φ en (u, v) est le plan contenant la génératrice $\mathscr{G}_u$ et parallèle à $f'(u)$* : ce plan ne dépend que de u.

Soit $\Phi_1 : I_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto f_1(u) + v\vec{K}$ une surface paramétrée de la forme (1) (avec f_1 de classe $\mathscr{C}^k$) et qui soit $\mathscr{C}^k$-équivalente à Φ définie par (1). Si la directrice définie par f_1 est *plane*, on dit que c'est une **section plane** de la surface Φ. Lorsque $\mathscr{E}$ est euclidien, toute section plane de Φ par un plan orthogonal à $\vec{K}$ est appelée **section droite :** les sections droites se déduisent les unes des autres par translation parallèle à $\vec{K}$.

Soit $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, e_2, e_3)$ un repère de $\mathscr{E}$, et $\psi : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert non vide ω de $\mathbb{R}^2$. L'équation

$$(2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

représente évidemment dans $\mathscr{R}$ l'union $\mathscr{S}$ des droites dirigées par e_3, s'appuyant sur la courbe Γ du plan $\mathscr{H} = O \dotplus \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ d'équation $\psi(x, y) = 0$ dans $(O\,;\, e_1, e_2)$. L'ensemble $\mathscr{S}$ est appelé un *cylindre* de génératrices parallèles à e_3 (les génératrices étant ces droites).

Pour que $\mathscr{S}$ soit sans point singulier (i.e. sans point critique de la fonction $\Psi : M = O \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \mapsto \psi(x, y)$), il faut et il suffit que Γ soit sans point singulier. Lorsque c'est le cas, la sous-variété surface $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ est dite *cylindrique* ; alors pour toute représentation locale $I \longrightarrow \mathscr{H}$, $u \mapsto f(u)$ de Γ, la surface paramétrée $I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto f(u) + ve_3$ est cylindrique, et c'est une représentation locale de $\mathscr{S}$.

Inversement, reprenons (1) et soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère tel que $e_3 = \vec{K}$. Notons a, b, c les coordonnées de f dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{H} = O \dotplus \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$. Il est bien clair que la courbe Γ paramétrée par $u \mapsto O \dotplus (a(u)\, e_1 + b(u)\, e_2)$ $(u \in I)$ est une section plane de Φ (par le plan $\mathscr{H}$).

Remarque 1 : Soit P et Q deux fonctions affines sur $\mathscr{E}$ dont les parties linéaires sont linéairement indépendantes, et $\psi : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ définie sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble de $\mathscr{E}$ défini par

$$\boxed{\psi(P(M), Q(M)) = 0 \qquad (M \in \mathscr{E})} \tag{3}$$

est un cylindre de génératrices parallèles à la droite $\mathrm{Ker}\,(\vec{P}) \cap \mathrm{Ker}\,(\vec{Q})$. En effet, il suffit de choisir un repère de $\mathscr{E}$ dans lequel $P(M)$ et $Q(M)$ soient les deux premières coordonnées de M pour ramener (3) à (2).

Exemple 1 : Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation

$$x^2 + 4\,y^2 + z^2 - 2\,yz - zx - 2\,xy - 1 = 0 \tag{4}$$

dans un repère donné $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$.

En posant $P = x - 2\,y$ et $Q = z - x$, l'équation (4) se ramène à l'équation équivalente $P^2 + Q^2 + PQ - 1 = 0$. En vertu de la remarque 1, c'est donc un cylindre, de génératrices dirigées par $\vec{K}$ de composantes $(2, 1, 2)$ dans $\mathscr{R}$, et dont une certaine section plane Γ admet dans un certain repère l'équation $X^2 + Y^2 + XY - 1 = 0$, ce qui prouve que Γ est une ellipse. Nous verrons au chapitre XII qu'en conséquence $\mathscr{S}$ est un *cylindre elliptique*.

Surfaces coniques

On appelle **surface paramétrée conique** de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ toute surface paramétrée $\mathscr{C}^k$-équivalente à une surface paramétrée de la forme

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E},\ (u, v) \mapsto S \dotplus v\vec{K}(u) \tag{5}$$

où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où $S \in \mathscr{E}$ est donné, et où $\vec{K} : I \longrightarrow E \setminus \{0\}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (d'où : Φ est de classe $\mathscr{C}^k$).

Pour la surface (5), les courbes coordonnées $\mathscr{G}_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $v \mapsto \Phi(u, v)$ sont des *droites affines* passant toutes par S. Le point S est appelé le **sommet** de Φ, les droites $\mathscr{G}_u$ sont appelées les **génératrices** de Φ, la courbe paramétrée $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto S \dotplus \vec{K}(u) = \Phi(u, 1)$ est appelée une **directrice** de Φ. Le support de Φ appelé *cône* est l'union des droites passant par S et rencontrant $f(I)$.

On a : $\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = v\vec{K}'(u)$, $\dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \vec{K}(u)$, d'où immédiatement : *un paramètre* $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ *est régulier ssi* $v \neq 0$ *et* $\vec{K}'(u)$ *non colinéaire à* $\vec{K}(u)$. Si $\vec{K}'(u)$ est non colinéaire à $\vec{K}(u)$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^*$, *le plan tangent à* Φ *en* (u, v) *est le plan contenant la génératrice* $\mathscr{G}_u$ *et la tangente en* u *à la directrice* f: il ne dépend que de u.

Soit $\Phi_1 : I_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto S \dotplus v\vec{K}_1(u)$ une surface paramétrée de la forme (5) (avec Φ_1 de classe $\mathscr{C}^k$) qui soit $\mathscr{C}^k$-équivalente à Φ définie par (5). Si la directrice $u \mapsto \Phi_1(u, 1)$ est *plane*, on dit que c'est une **section plane** de Φ. Les sections planes d'une direction de plan donnée se déduisent de l'une d'entre elles par les homothéties de centre S et de rapport $\neq 0$ arbitraire. Une surface conique du type (5) n'admet pas toujours une section plane. (Le lecteur construira aisément un exemple, à titre d'exercice.)

Soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère de $\mathscr{E}$, et $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale *homogène* de degré $p \geqslant 1$. L'équation $\Psi(M) = 0$, où $\Psi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ associe $\psi(x, y, z)$ à $M = O \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3)$ représente une surface $\mathscr{S}$ évidemment réunion de droites affines passant par O. On dit que $\mathscr{S}$ est un **cône algébrique de sommet** O dans $\mathscr{E}$.

Soit S la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans $\mathscr{R}$, et notons $\mathscr{I} = \mathscr{S} \cap S$. Soit $M_0 \in \mathscr{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $M = O \dotplus \lambda\,\overrightarrow{OM_0}$. Désignons par (x_0, y_0, z_0) (resp. (x, y, z)) les coordonnées de M_0 (resp. M) dans $\mathscr{R}$. On a :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(M), \frac{\partial \psi}{\partial y}(M), \frac{\partial \psi}{\partial z}(M)\right) = \lambda^{p-1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial \psi}{\partial y}(M_0), \frac{\partial \psi}{\partial z}(M_0)\right),$$

et

$$x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(M_0) + y_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(M_0) + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}(M_0) = p\psi(x_0, y_0, z_0) = 0$$

(cf. la formule d'Euler vue au tome 1, page 415). Donc

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(M), \frac{\partial\psi}{\partial y}(M), \frac{\partial\psi}{\partial z}(M)\right) \neq (0, 0, 0)$$

ssi $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial\psi}{\partial y}(M_0), \frac{\partial\psi}{\partial z}(M_0)\right)$ n'est pas colinéaire à (x_0, y_0, z_0).

Autrement dit : *M est non singulier pour $\mathscr{S}$ ssi $\mathscr{S}$ et S se coupent transversalement en M_0* (cf. tome 3, page 250). Lorsque $\mathscr{S}$ et S se coupent transversalement en tout point de $\mathscr{I}$, l'ensemble $\mathscr{I}$ est une sous-variété courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$, et d'après ce qui précède $\mathscr{S} \setminus \{O\}$ est une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$. Dans ce cas, pour toute représentation locale $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto f(u)$ de $\mathscr{I}$, la surface paramétrée conique $I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto O \dotplus v\overrightarrow{Of(u)}$ définit, par restriction à $I \times \mathbb{R}_+^*$ et à $I \times \mathbb{R}_-^*$ deux surfaces paramétrées représentations locales de $\mathscr{S} \setminus \{O\}$.

Remarque 2 : Soit P, Q, R trois fonctions affines sur $\mathscr{E}$ de parties linéaires linéairement indépendantes, et $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale *homogène* de degré $p \geqslant 1$. Alors l'équation

$$\psi(P(M), Q(M), R(M)) = 0 \tag{6}$$

représente un *cône algébrique* $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$, dont le sommet O est l'unique point commun aux trois plans d'équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Il suffit pour le voir de choisir un repère de $\mathscr{E}$ dans lequel les coordonnées de tout point $M \in \mathscr{E}$ soient $(P(M), Q(M), R(M))$.

Cône des droites joignant un point à l'intersection de deux surfaces

Par extension du langage précédent, on appelle souvent *cône de sommet* $O \in \mathscr{E}$ toute union de droites passant par O. Fixons $O \in \mathscr{E}$; soit deux fonctions P et $Q : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons $\mathscr{S}_P$ et $\mathscr{S}_Q$ les ensembles $P^{-1}(0)$ et $Q^{-1}(0)$ et proposons-nous de définir le cône des droites $(\mathrm{Dr}\,(O, M))_{M \in \mathscr{S}_P \cap \mathscr{S}_Q}$ *en supposant que $O \notin \mathscr{S}_P \cap \mathscr{S}_Q$.*

Soit $M \in \mathscr{E} \setminus \{O\}$. Pour que $\mathrm{Dr}\,(O, M)$ rencontre $\mathscr{S}_P \cap \mathscr{S}_Q$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $O \dotplus \lambda\overrightarrow{OM} \in \mathscr{S}_P \cap \mathscr{S}_Q$, i.e. qu'il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $P\left(O \dotplus \frac{1}{t}\overrightarrow{OM}\right) = Q\left(O \dotplus \frac{1}{t}\overrightarrow{OM}\right) = 0$.

On obtient donc le cône cherché en éliminant $t \in \mathbb{R}^*$ entre les relations

$$P\left(O \dotplus \frac{1}{t}\overrightarrow{OM}\right) = 0 \quad \text{et} \quad Q\left(O \dotplus \frac{1}{t}\overrightarrow{OM}\right) = 0. \tag{7}$$

Dans le cas particulier où P et Q sont *polynomiales*, de degrés respectifs $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, choisissant un repère $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ où nous notons

(x, y, z) les coordonnées génériques, P et Q s'identifient à des fonctions polynomiales en (x, y, z) de degrés p et q. La relation $\exists t \in \mathbb{R}^* \mid P\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0$ et $Q\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0$ équivaut à :

$$(8) \qquad \boxed{\exists t \in \mathbb{R}^* \mid \tilde{P}(x, y, z, t) = \tilde{Q}(x, y, z, t) = 0} \ ,$$

où $\tilde{P}(x, y, z, t) = t^p P\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$ et $\tilde{Q}(x, y, z, t) = t^q Q\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$ sont des fonctions polynomiales homogènes de degrés respectifs p et q définies sur $\mathbb{R}^4$: on les appelle les **homogénéisées** de P et Q.

Exemple 2 : Avec les notations précédentes, soit $P = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $Q = x^2 + y^2 - 2\lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est donné (d'où $O \notin \mathscr{S}_P \cap \mathscr{S}_Q$). On a $\tilde{Q}(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - 2\lambda xt$ et $\tilde{P}(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. L'élimination de $t \in \mathbb{R}^*$ est ici immédiate et le cône cherché est le cône algébrique du quatrième degré, d'équation dans $\mathscr{R}$:

$$4\lambda^2 x^2(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$$

(pour $\lambda = \frac{1}{2}$, le cylindre $\mathscr{S}_Q$ est tangent à la sphère $\mathscr{S}_P$ de $\mathscr{E}$ supposé euclidien, et l'intersection $\mathscr{I}$ de $\mathscr{S}_P$ et de $\mathscr{S}_Q$ est une fenêtre de Viviani).

Remarque 3 : Un raisonnement tout à fait analogue permet, dans le cas où $\mathscr{E}$ est de dimension 2, de trouver la gerbe des droites joignant un point $O \in \mathscr{E}$ à l'intersection de deux courbes $\Gamma_P = P^{-1}(0)$ et $\Gamma_Q = Q^{-1}(0)$ du plan.

Remarque 4 : Si on élimine $t \in \mathbb{R}$ dans (8) sans prendre garde à la condition $t \neq 0$, ou risque d'obtenir un ensemble *qui contient strictement le cône cherché* :

Exemple 3 : Prenons ici $P = x(x - z) + 2x - 1$ et $Q = x(x + z) + 2y - 1$ (d'où $O \notin \mathscr{S}_P \cap \mathscr{S}_Q$). On a :

$$\tilde{P} = x(x - z) + 2xt - t^2 \quad \text{et} \quad \tilde{Q} = x(x + z) + 2yt - t^2 .$$

L'élimination de t peut se faire en annulant le *résultant* (cf. tome 1, page 585) de $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ considérés comme polynômes en t. On obtient ici la CNS pour que $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ admettent une racine commune *réelle*. Ce résultant est :

$$R = -4x[x^3 - 2x^2y + x^2z + xy^2 - xz^2 - y^2z] .$$

Or il est clair que le plan $x = 0$ ne fait pas partie du cône cherché. En fait le cône cherché est algébrique *de degré* 3, d'équation dans $\mathscr{R}$:

$$x^3 - 2x^2y + x^2z + xy^2 - xz^2 - y^2z = 0 .$$

Cône des tangentes issues d'un point à une surface

Soit $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ définie sur un ouvert non vide ω de $\mathscr{E}$, supposée sans point critique dans ω, et soit $\mathscr{V}$ la sous-variété surface $f^{-1}(0)$. Etant donné $S \in \mathscr{E}$, cherchons le cône des droites passant par S et tangentes à $\mathscr{V}$. Ce cône est appelé cône de sommet S **circonscrit** à $\mathscr{V}$. Donnons-nous pour cela $M \in \mathscr{E} \setminus \{S\}$. Pour que la droite Dr (S, M) soit une tangente à $\mathscr{V}$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = S \dotplus \lambda \overrightarrow{SM}$ appartienne à $\mathscr{V}$ et que le vecteur $\overrightarrow{SM}$ soit tangent en P à $\mathscr{V}$, i.e. $\mathrm{d}_P f \,.\, \overrightarrow{SM} = 0$. On obtient donc une équation du cône cherché *en éliminant* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entre les relations* :

$$(9) \qquad \boxed{f(S \dotplus \lambda \overrightarrow{SM}) = 0 \quad \text{et} \quad (\mathrm{d}_{S \dotplus \lambda \overrightarrow{SM}} f) \,.\, \overrightarrow{SM} = 0}$$

où M désigne le point générique de $\mathscr{E}$. (Si $S \in \mathscr{V}$, ce cône contient $\mathscr{T}_S$).

De plus, l'ensemble des points de contact des tangentes à $\mathscr{V}$ issues de S est évidemment défini par les équations suivantes :

$$(10) \qquad \boxed{f(M) = 0 \quad \text{et} \quad (\mathrm{d}_M f) \,.\, \overrightarrow{SM} = 0} .$$

L'ensemble défini par (10) est une partie de $\mathscr{V}$ appelée **contour apparent** de $\mathscr{V}$ du point de vue S (c'est en effet cet ensemble qui délimite la lumière et l'ombre sur $\mathscr{V}$ si on éclaire $\mathscr{V}$ avec une source lumineuse placée en S (cf. fig. 1).

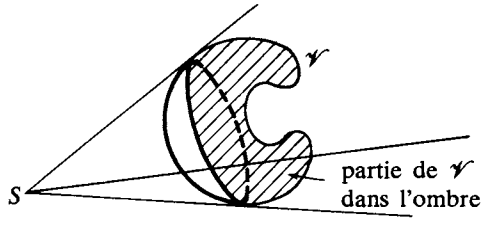


Fig. 1.

Exemple 4 : Dans ce qui précède, supposons f *polynomiale de degré* 2. Ecrivons $f(M) = Q(\overrightarrow{SM}) + A(M)$, où Q est la forme quadratique à l'infini de f et A une fonction affine sur $\mathscr{E}$ (cf. § XII.1). Puisque $q(M) = Q(\overrightarrow{SM})$

est homogène de degré 2 par rapport à $\overrightarrow{SM}$, la formule d'Euler donne $(\mathrm{d}_M q) \cdot \overrightarrow{SM} = 2\,q(M)$. Donc le système (10) équivaut à : $f(M) = 0$ et $\vec{A}(\overrightarrow{SM}) + 2\,A(S) = 0$. La dernière de ces relations définit l'ensemble des zéros d'une fonction affine. Donc si la fonction affine $M \mapsto A(SM) + 2\,A(S)$ n'est pas une constante $\neq 0$, cette relation définit un plan, appelé *plan polaire* de S pour la quadrique. (Si $S \in \mathscr{V}$, c'est $\mathscr{T}_S$). Alors, (10) définit l'intersection de $\mathscr{V}$ et d'un plan.

Cylindre des tangentes à une surface parallèles à une direction donnée

Dans la pratique la source lumineuse S est très souvent le soleil qu'on peut considérer comme nous envoyant des rayons lumineux quasi parallèles. Reprenons donc la fonction $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ sans point critique définie plus haut, et la sous-variété surface $\mathscr{V} = f^{-1}(0)$. Soit $\vec{V} \in E \setminus \{0\}$. En raisonnant comme précédemment, on voit que le cylindre des tangentes à $\mathscr{V}$ parallèles à $\vec{V}$ s'obtient en *éliminant* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entre les équations suivantes :*

$$(11) \qquad \boxed{f(M + \lambda \vec{V}) = 0 \quad \text{et} \quad (\mathrm{d}_{M+\lambda\vec{V}} f) \cdot \vec{V} = 0},$$

où M désigne toujours le point générique de $\mathscr{E}$.

Ce cylindre est appelé cylindre **circonscrit** à $\mathscr{V}$ parallèlement à $\vec{V}$. De plus, l'ensemble des points de contact des tangentes à $\mathscr{V}$ parallèles à $\vec{V}$ est défini par les équations

$$(12) \qquad \boxed{f(M) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_M f \cdot \vec{V} = 0}.$$

L'ensemble défini par (12) est appelé le **contour apparent** de $\mathscr{V}$ dans la direction de $\vec{V}$ (il délimite sur $\mathscr{V}$ l'ombre et la lumière quand on éclaire $\mathscr{V}$ depuis une source placée à l'infini dans la direction de $\vec{V}$). Par exemple, soit (x, y, z) les coordonnées de M dans un repère $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, e_2, e_3)$. Le contour apparent de $\mathscr{V}$ dans la direction de e_3 est donné par :

$$(13) \qquad f(M) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(M) = 0\,.$$

Surfaces réglées

Une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ est dite **réglée** ssi elle est $\mathscr{C}^k$-équivalente à une surface paramétrée de la forme

$$(14) \qquad \Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E},\ (u, v) \mapsto f(u) + v\vec{K}(u)$$

où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$; $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$, et $\vec{K} : I \longrightarrow E \setminus \{0\}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (donc Φ est de classe $\mathscr{C}^k$).

Exemple 5 : Les surfaces paramétrées cylindriques et coniques sont les plus simples des surfaces réglées.

Exemple 6 : Dans un repère affine $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ définissons une surface $\mathscr{S}$ par l'équation $z = xy$. C'est une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^\infty$; elle est le support de chacune des deux surfaces paramétrées de classe $\mathscr{C}^\infty$ $\Phi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto f_i(u) + vK_i(u)$ $(i \in \{1, 2\})$, les coordonnées dans $\mathscr{R}$ des f_i et $\vec{K}_i$ étant données par

$$(u, 0, 0) \quad \text{et} \quad (0, 1, u) \quad \text{pour} \quad f_1(u) \quad \text{et} \quad \vec{K}_1(u)\,,$$
$$(0, u, 0) \quad \text{et} \quad (1, 0, u) \quad \text{pour} \quad f_2(u) \quad \text{et} \quad \vec{K}_2(u)\,.$$

Les Φ_i sont d'ailleurs des $\mathscr{C}^\infty$-plongements. On remarque que Φ_1 et Φ_2 ne donnent pas le même ensemble de génératrices : on dit que $\mathscr{S}$ est *doublement réglée*. On remarque aussi que les génératrices $\mathscr{G}_u$ de Φ_1 sont parallèles au plan Π d'équation $x = 0$, rencontrent la droite $O + \mathbb{R}e_1 = \mathscr{D}$ et s'appuient sur une génératrice γ_{u_0} de Φ_2, ce qui fait dire que Φ_1 est une surface paramétrée *conoïde* (nous verrons au chapitre XII que $\mathscr{S}$ est un *paraboloïde hyperbolique*).

Exemple 7 : Définissons $\mathscr{S}$ par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. C'est une sous-variété surface de classe $\mathscr{C}^\infty$; elle est le support de chacune des deux surfaces paramétrées de classe $\mathscr{C}^\infty$ réglées :

$$\Phi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}, \quad (u, v) \mapsto f_i(u) + v\vec{K}_i(u) \quad (i \in \{1, 2\})$$

les coordonnées dans $\mathscr{R}$ des f_i et $\vec{K}_i$ étant données par

$$(\cos u, \sin u, 0) \quad \text{et} \quad (-\sin u, \cos u, \ \ 1) \quad \text{pour} \quad f_1 \quad \text{et} \quad \vec{K}_1$$
$$(\cos u, \sin u, 0) \quad \text{et} \quad (-\sin u, \cos u, -1) \quad \text{pour} \quad f_2 \quad \text{et} \quad \vec{K}_2\,.$$

Là encore, Φ_1 et Φ_2 ne donnent pas la même famille de génératrices : on dit que $\mathscr{S}$ est *doublement réglée* (nous verrons au chapitre XII que $\mathscr{S}$ est un *hyperboloïde à une nappe*).

Exemple 8 : Soit $f : I \longrightarrow \mathscr{E}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^2$ birégulière définie sur un intervalle ouvert non vide I. Considérons la surface réglée de classe $\mathscr{C}^2$ suivante :

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}\,, \quad (u, v) \mapsto f(u) + vf'(u)\,.$$

Pour $u \in I$, La génératrice $\mathscr{G}_u$ n'est autre que la tangente en u à f. Pour cette raison, Φ est appelée la *surface réglée des tangentes* à f. On a :

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = f'(u) + v f''(u)\,, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = f'(u)\,.$$

Donc $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ est *stationnaire* pour Φ ssi $v = 0$; et si $(u, v) \in I \times \mathbb{R}^*$, le plan vectoriel tangent en (u, v) à Φ est Vect $(f'(u), f''(u))$, autrement dit *le plan tangent à Φ en (u, v) n'est autre que le plan osculateur à f en u* : il ne dépend que de u, comme dans le cas des surfaces paramétriques cylindriques et coniques.

Reprenons maintenant l'étude de la surface paramétrée réglée générale (14). On a

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = f'(u) + v\vec{K}'(u)\,, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \vec{K}(u)\,. \tag{15}$$

• Si $(f'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u))$ est un système libre, pour tout $v \in \mathbb{R}$, le paramètre (u, v) est régulier, et une équation du plan tangent $\mathscr{T}_{(u,v)}$ en (u, v) à Φ dans le repère $\mathscr{R} = (f(u)\,;\, f'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u))$ est $vx - z = 0$. Par suite l'application $v \mapsto \mathscr{T}_{(u,v)}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur le faisceau $\mathscr{F}_u$ de plans ayant pour hampe la génératrice $\mathscr{G}_u$, privé du plan parallèle à $\vec{K}'(u)$. Le plan non obtenu est donc $f(u) \dot{+}$ Vect $(\vec{K}(u), \vec{K}'(u))$: on l'appelle le *plan asymptote* à la surface *le long de la génératrice $\mathscr{G}_u$*.

On exprime la condition d'indépendance linéaire de $(f'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u))$ en disant que la génératrice $\mathscr{G}_u$ est *ordinaire* (en le paramètre u).

• Si $(f'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u))$ est lié mais de rang 2, alors pour tout $v \in \mathbb{R}$ tel que (u, v) soit régulier pour Φ, le plan tangent $\mathscr{T}_{(u,v)}$ est le même : c'est le plan contenant $\mathscr{G}_u$ et de direction Vect $(f'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u))$. On dit alors que la génératrice $\mathscr{G}_u$ est *stationnaire*.

La surface paramétrée Φ est dite **développable** ssi toutes ses génératrices sont stationnaires, i.e.

$$(\forall u \in I) \quad (f'(u), \vec{K}(u), \vec{K}'(u)) \text{ est lié}\,. \tag{16}$$

Par exemple, si Φ est cylindrique, ou conique, ou si c'est la réglée des tangentes à une courbe birégulière (cf. exemple 8), elle est développable.

Supposons Φ développable, avec $k \geqslant 2$, et qu'en outre $\vec{K}(u)$ et $\vec{K}'(u)$ soient linéairement indépendants pour tout $u \in I$. On a donc des fonctions A et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $(\forall u \in I)$ $f'(u) = A(u)\,\vec{K}(u) + B(u)\,\vec{K}'(u)$; A et B sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{C}^\infty$ si $k = +\infty$. A l'aide de (15), on voit alors que, pour tout $u \in I$, il y a un unique $v \in \mathbb{R}$ tel que (u, v) soit stationnaire pour Φ : c'est $v = -B(u)$. La courbe paramétrée $S : I \longrightarrow \mathscr{E}$, $u \mapsto \Phi(u, -B(u))$ est alors appelée **arête de rebroussement** de la développable Φ. On dit aussi que $\Phi(u, -B(u))$ est le **point caractéristique de la génératrice** $\mathscr{G}_u$: cette terminologie est justifiée car alors $(\forall u \in I)\, S'(u) \in \mathbb{R}\vec{K}(u)$, comme le prouve un calcul évident, autrement dit, par analogie avec le cas des familles à un paramètre des droites d'un plan affine, S joue le rôle d'une *enveloppe de la famille de droites* $(\mathscr{G}_u)_{u \in I}$. D'ailleurs si on cherche une fonction $u \mapsto \lambda(u)$ dérivable sur I telle que $(\forall u \in I)$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\Phi(u, \lambda(u))) \in \mathbb{R}\vec{K}(u)$, on vérifie que seule $\lambda = -B$ convient (si Φ n'était pas développable, on ne pourrait trouver une telle fonction λ, comme le montre (15), autrement dit la famille $(\mathscr{G}_u)_{u \in I}$ des génératrices de Φ n'admet pas d'enveloppe hors du cas où Φ est développable). On trouvera dans l'exercice 14 quelques détails supplémentaires.

Dans certains de ces exercices l'espace affine $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 1 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. On donne deux droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ sécantes en O. Trouver le cône engendré par les droites Δ passant par O telles que la somme des écarts angulaires de Δ avec $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soit une constante donnée $C \in\,]0, \pi[$.

Exercice 2 : Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des réels avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Former une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de l'adhérence du support du cône dont le sommet S a pour coordonnées (α, β, γ) dans $\mathscr{R}$ et dont la directrice est la réunion des courbes paramétrées de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies dans $\mathscr{R}$ par les coordonnées

$$x = \frac{\alpha a}{t+a}, \quad y = \frac{\beta b}{t+b}, \quad z = \frac{\gamma c}{t+c} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}).$$

Exercice 3 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit deux droites fixes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ orthogonales et non coplanaires. On donne deux points A et B sur $\mathscr{D}_2$, par lesquels on mène respectivement les droites variables Δ_1 et Δ_2 orthogonales entre elles et rencontrant $\mathscr{D}_1$. Trouver la surface engendrée par la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2.

Exercice 4 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites non coplanaires. Trouver la surface engendrée par les droites Dr (M_1, M_2) où M_i décrit $\mathscr{D}_i$ $(i \in \{1, 2\})$ de façon que $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ reste égal à une constante donnée a (supérieure à la distance de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$).

Exercice 5 : On donne $a > 0$ et $p > 0$. On considère les deux paraboles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ définies dans $\mathscr{R}$ par : $(z-a)^2 - 2px = 0$, $y = 0$ pour $\mathscr{C}_1$, et $(z+a)^2 - 2py = 0$, $x = 0$ pour $\mathscr{C}_2$. Un point

S décrit $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}e_3$. On prend pour paramètre sa cote u. De S on mène les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ autres que $\mathscr{D}$: leurs points de contact sont notés T_1 et T_2.

a) Montrer que la droite Dr (T_1, T_2) engendre une surface réglée $\mathscr{S}$ développable.

b) Montrer que $\mathscr{S}$ admet une arête de rebroussement ; la déterminer.

c) Sections de $\mathscr{S}$ par des plans parallèles à un plan de coordonnées dans $\mathscr{R}$?

d) Tout plan tangent à $\mathscr{S}$ rencontre $\mathscr{S}$ suivant une droite et une parabole tangentes entre elles en un point qu'on précisera.

Exercice 6 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. Soit $\mathscr{S}$ la surface paramétrée définie dans $\mathscr{R}$ par $x = (a + bu)\cos v$, $y = (b + au)\sin v$, $z = cu$, où (u, v) décrit $\mathbb{R}^2$ tandis que a, b, c sont donnés $\neq 0$. Quel est le contour apparent de $\mathscr{S}$ dans la direction de e_3 ? Montrer que la projection orthogonale de ce contour sur le plan $\mathscr{H} = O + \text{Vect}\,(e_1, e_2)$ est une développée d'ellipse. Etait-ce prévisible ?

Exercice 7 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. Trouver la section droite du cylindre de génératrices parallèles à $\vec{V} = e_1 + e_2 + e_3$ et de directrice Γ définie dans $\mathscr{R}$ paramétriquement par $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(t \in \mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit la surface $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$ définie dans $\mathscr{R}$ par les coordonnées de $\Phi(u, v) : x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$.

a) Prouver que Φ est réglée. Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices, i.e. les courbes tracées sur Φ orthogonales en chacun de leurs points à la génératrice du point.

b) Chercher l'intersection du support $\mathscr{S}$ de Φ avec un plan tangent à Φ. Quelle est une équation cartésienne de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$?

c) Quel est le contour apparent de $\mathscr{S}$ dans la direction e_1 ? la projection orthogonale de ce contour sur le plan $O + \text{Vect}\,(e_2, e_3)$?

Exercice 9 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{S}$ un *tore à collier* de $\mathscr{E}$ (cf. l'exemple 2 du § XI.2). On projette orthogonalement $\mathscr{S}$ sur un plan $\mathscr{H}$ non parallèle à l'axe de révolution de $\mathscr{S}$. Montrer que la projection du contour apparent dans la direction $D = \vec{\mathscr{H}}^{\perp}$ est l'union de deux parallèles d'ellipse.

Indication : Penser à la famille des sphères de rayon a inscrites dans le tore.

Exercice 10 : Soit la surface paramétrée définie dans $\mathscr{R}$ par $\Phi : D \longrightarrow \mathscr{E}$, où $D = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \,]-\pi, \pi[$ et où les coordonnées de $\Phi(u, v)$ sont $x = a(1 + \cos v)$, $y = a \operatorname{tg} u (1 + \cos v)$, $z = a \dfrac{\sin v}{\cos u}$ $(a > 0$ donné). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver le cône circonscrit à Φ issu du point S de coordonnées $(2a, \lambda a, 0)$ dans $\mathscr{R}$.

Exercice 11 : La surface $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$ représentée dans $\mathscr{R}$ par $x = 2u + v$, $y = u^2 + 2uv$, $z = u^2 v$ est réglée. Montrer qu'elle est développable et qu'elle admet une arête de rebroussement qu'on précisera.

Exercice 12 : Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x_2 < x_3\}$. On donne $\Theta : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) \mapsto (u + v + w,\ vw + wu + uv,\ uvw)$.

a) Montrer que Θ définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^3$, à préciser.

b) Soit $\mathscr{S}$ la frontière de V. Prouver que $\mathscr{S}$ est le support d'une surface développable, qui admet une arête de rebroussement. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 13 : On donne trois sphères de l'espace euclidien $\mathscr{E}$, de centres non alignés, extérieures les unes aux autres. Combien y a-t-il de plans tangents communs aux 3 sphères ? Comment les trouver ?

Exercice 14 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. On considère une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 3$, réglée $\Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto f(u) + v\vec{K}(u)$. Soit $(\mathscr{G}_u)_{u \in I}$ la famille des génératrices.

a) Soit $u_0 \in I$ un paramètre ordinaire pour $\mathscr{G}_u$. Montrer que pour u voisin de u_0, $\mathscr{G}_{u_0}$ et $\mathscr{G}_u$ ne sont pas coplanaires ; calculer un équivalent, quand $u \xrightarrow{\neq} u_0$ de la distance $d(\mathscr{G}_u, \mathscr{G}_{u_0})$.

b) Soit $u_0 \in I$ un paramètre stationnaire pour $\mathscr{G}_u$. Montrer que dans ce cas $d(\mathscr{G}_u, \mathscr{G}_{u_0}) \underset{u \xrightarrow{\neq} u_0}{\in} O(u - u_0)^3$.

§ XI.4 *SURFACES DE RÉVOLUTION*

Dans tout ce §, l'espace affine $\mathscr{E}$ est supposé euclidien orienté.

Axes de révolution

Soit A une partie non vide de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{D}$ est **axe de révolution** de A (ou que A **est de révolution** autour de $\mathscr{D}$) ssi $\varphi(A) = A$ pour toute rotation φ d'axe $\mathscr{D}$. Il revient au même de dire que A est une *union de cercles d'axe* $\mathscr{D}$ (l'axe d'un cercle de $\mathscr{E}$ étant par définition la droite passant par son centre et orthogonale à son plan). Notons qu'un cercle étant symétrique par rapport à tout plan passant par son axe, $\mathscr{D}$ est axe de révolution de A ssi $s(A) = A$ pour toute réflexion autour d'un plan passant par $\mathscr{D}$ (car ces réflexions engendrent le groupe des rotations d'axe $\mathscr{D}$).

Lorsque $\mathscr{D}$ est axe de révolution de A, on dit que les cercles d'axe $\mathscr{D}$ contenus dans A sont les **parallèles** de A relatifs à $\mathscr{D}$; les plans contenant $\mathscr{D}$ sont appelés les **plans méridiens** (relatifs à $\mathscr{D}$), et les demi-plans de hampe $\mathscr{D}$ sont appelés les **demi-plans méridiens** (relatifs à $\mathscr{D}$).

L'intersection d'un plan méridien (resp. d'un demi-plan méridien) et de A est appelée une **méridienne** (resp. une **demi-méridienne**) de A (toujours relative à $\mathscr{D}$). Chaque méridienne admet $\mathscr{D}$ pour axe de symétrie orthogonale. Les méridiennes (resp. les demi-méridiennes) se déduisent de l'une d'entre elles par les rotations arbitraires d'axe $\mathscr{D}$. L'ensemble A est union de ses méridiennes (resp. de ses demi-méridiennes). On dit que A est *engendré par la rotation d'une méridienne* (resp. *demi-méridienne*) *autour de* $\mathscr{D}$.

On peut prouver que si $A \neq \varnothing$, $A \neq \mathscr{E}$, et si A possède *deux* axes de révolution distincts $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, alors ils sont nécessairement sécants ou parallèles, et que : s'ils sont sécants en $O \in \mathscr{E}$, A est union de sphères de centre O, et si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles, A est union de plans orthogonaux à $D = \vec{\mathscr{D}}_1 = \vec{\mathscr{D}}_2$ (cf. exercice 6 du § VI.2). On remarque qu'une sphère de centre O admet pour ensemble d'axes de

révolution toutes les droites passant par O (dites diamétrales) et qu'un plan admet pour ensembles d'axes de révolution toutes les droites qui lui sont orthogonales.

Equations remarquables de surfaces de révolution

Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$. Notons $\mathscr{D}$ la droite $O \dotplus \mathbb{R}e_3$, et (x, y, z) les coordonnées génériques dans $\mathscr{R}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit ρ_θ la rotation d'angle θ autour de e_3. On rappelle que

$$(1) \qquad \mathrm{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(\vec{\rho}_\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathscr{E}$ de révolution autour de $\mathscr{D}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$, définissant $\mathscr{S}_f = f^{-1}(0)$. Pour que la surface $\mathscr{S}_f$ soit de révolution autour de $\mathscr{D}$, il faut et il suffit que

$$(2) \qquad (\forall \theta \in \mathbb{R})\ (\forall M \in \Omega) \quad f(M) = 0 \Rightarrow f(\rho_\theta(M)) = 0\,.$$

Soit maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\Omega = \{M/(x^2 + y^2, z) \in U\}$, et supposons que :

$$(3) \quad (\forall M = O \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \Omega) \quad \boxed{f(M) = g(x^2 + y^2, z)}\,.$$

D'après (1) et (2), Ω et $\mathscr{S}_f$ sont de révolution autour de $\mathscr{D}$. Pour établir une réciproque, supposons que $\mathscr{S}_f \cap \mathscr{D} = \varnothing$ et que $\mathscr{S}_f$ soit de révolution autour de $\mathscr{D}$. Soit Γ sa demi-méridienne du plan $y = 0$ sur laquelle x reste > 0. Posons $g_1(x, z) = f(O \dotplus (xe_1 + ze_3))$ pour $(x, z) \in U_1$, où U_1 est l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ formé des (x, z) tels que $O \dotplus (xe_1 + ze_3) \in \Omega$. Une équation de Γ dans $(O\,;e_1, e_3)$ est $g_1(x, z) = 0$. Un point $M = O \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \Omega$ appartient à $\mathscr{S}_f$ ssi $\exists\, \theta \in \mathbb{R} \mid \rho_\theta(M) \in \Gamma$, ce qui équivaut à :

$$(4) \qquad g(x^2 + y^2, z) = 0\,, \quad \text{avec} \quad g(u, v) = g_1(\sqrt{u}, v)$$

pour $(u, v) \in U$, où U désigne l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ transformé de U_1 par l'application $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha^2, \beta)$.

La fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto g(x^2 + y^2, z)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (car $x > 0$ sur Γ) et $\mathscr{S}_f = \mathscr{S}_h$ par ce qui précède ; on a donc réussi à définir $\mathscr{S}_f$ par une fonction de la forme (3).

Equations $\psi(S, P)$

Pour alléger, laissons au lecteur le soin de préciser les ouverts de définition des fonctions introduites. La fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3) s'écrit encore $f(M) = \psi(S, P)$, avec $S = S(M) = x^2 + y^2 + z^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2$

et $P = P(M) = z$, la fonction ψ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur un certain ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Réciproquement, soit ψ une fonction à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$. Donnons-nous un point $O \in \mathscr{E}$ et une fonction affine non constante $P : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit Ω l'ouvert de $\mathscr{E}$ formé des $M \in \mathscr{E}$ tels que $(S(M), P(M)) \in \omega\,(S(M) = \|\overrightarrow{OM}\|^2)$. Pour $M \in \Omega$, posons :

$$(6) \qquad \boxed{f(M) = \psi(S, P)} \quad \text{où } S = S(M) \text{ et } P = P(M).$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Soit $e_3 = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad} P}\|}\,\overrightarrow{\operatorname{grad} P}$, de sorte que $P(M) - P(O) = A(e_3 \mid \overrightarrow{OM})$ avec $A = \|\overrightarrow{\operatorname{grad} P}\|$. Considérons un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ dont e_3 soit le troisième vecteur, et notons-y (X, Y, Z) les coordonnées de $M \in \mathscr{E}$, d'où $S(M) = X^2 + Y^2 + Z^2$, $P(M) = AZ + P(O)$, d'où, pour $M \in \Omega$:

$$f(M) = \psi(X^2 + Y^2 + Z^2, AZ + P(O)).$$

Posant $\xi(u, v) = \psi/(u + v^2, Av + P(O))$, la fonction ξ est de classe $\mathscr{C}^1$ dans un certain ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$(\forall M \in \Omega) \quad f(M) = \xi(X^2 + Y^2, Z).$$

Donc, comme on l'a vu avec (3), *la surface $\mathscr{S}_f$ est de révolution autour de $\mathscr{D} = O + \mathbb{R}e_3$.* (Et Ω est de révolution autour de $\mathscr{D}$).

Remarquons que sa méridienne du plan $Y = 0$ admet dans $(O\,; e_1, e_3)$ l'équation $\xi(X^2, Z) = 0$; or *pour calculer ξ à partir de ψ, la détermination effective de $\mathscr{R}$ n'est pas nécessaire*, donc la méridienne de $\mathscr{S}_f$ est connue à isométrie près par le seul calcul de ξ (seul $\overrightarrow{\operatorname{grad} P}$ est à préciser, mais c'est immédiat).

Exemple 1 : Soit $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal direct et $\mathscr{S}$ la surface dont une équation dans $\mathscr{R}$ est :

$$(7) \qquad x^4 + y^4 + z^4 - 4\,xyz\,(x + y + z) - 1 = 0.$$

Posant $S = x^2 + y^2 + z^2$ et $P = x + y + z$, un calcul facile de fonctions symétriques en (x, y, z) montre que

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 - 4\,xyz\,(x + y + z) - 1 &= \\ &= S^2 - 2(xy + yz + zx)^2 - 1 = S^2 - \frac{1}{2}(P^2 - S)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2}S^2 - \frac{1}{2}P^4 + SP^2 - 1 = \psi(S, P). \end{aligned}$$

La méthode ci-dessus montre donc que $\mathscr{S}$ est de révolution autour de $\mathscr{D} = \mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3)$, et que sa méridienne, à isométrie près, est donnée par $\psi(X^2 + Z^2, \sqrt{3}\,Z) = 0$, i.e. $\frac{1}{2}X^4 + 4X^2Z^2 - Z^4 - 1 = 0$ (cf. fig. 1)

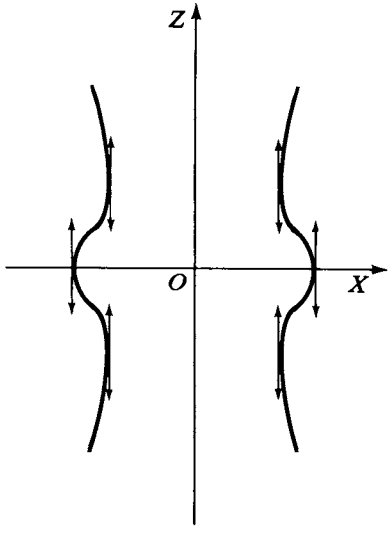


Fig. 1.

Exemple 2 : Soit $\mathscr{R}$ orthonormal direct. Donnons-nous une droite Δ d'équations $x = az + p$, $y = bz + q$ dans $\mathscr{R}$ et une droite $\mathscr{D}$ passant par O, dirigée par $\vec{V} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, supposée non orthogonale à Δ (i.e. $\alpha a + \beta b + \gamma \neq 0$). On pose $A = \alpha a + \beta b + \gamma$.

Proposons-nous de trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ obtenu par rotation de Δ autour de $\mathscr{D}$ ($\mathscr{S}$ est donc de révolution autour de $\mathscr{D}$). Pour cela, soit $M_0 \in \mathscr{E}$, de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans $\mathscr{R}$.

Pour $M = O + (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \mathscr{E}$, soit $S(M) = S = x^2 + y^2 + z^2$ et $P(M) = P = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Le cercle Γ_{M_0} d'axe $\mathscr{D}$ passant par M_0 est défini par les équations $S = S(M_0)$, $P = P(M_0)$. Une CNS pour que $M_0 \in \mathscr{S}$ est : $\Gamma_{M_0} \cap \Delta \neq \varnothing$, ce qui se traduit par :

$$\exists z \in \mathbb{R} \mid S = S(M_0)\,, \quad P = P(M_0)\,, \quad x = az + p\,, \quad y = bz + q\,,$$

ou encore :

$$\exists z \in \mathbb{R} \mid \quad \begin{cases} (az + p)^2 + (bz + q)^2 + z^2 = S(M_0)\,, \\ (\alpha a + \beta b + \gamma)\,z + \alpha p + \beta q = P(M_0)\,. \end{cases}$$

L'élimination de z est immédiate, ce qui donne la CNS cherchée (où l'on pose $B = \alpha p + \beta q$)

$$\left(\frac{a}{A}(P(M_0) - B) + p\right)^2 + \left(\frac{b}{A}(P(M_0) - B) + q\right)^2 + \\ + \left(\frac{P(M_0) - B}{A}\right)^2 = S(M_0)\,.$$

Une équation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$ est donc :

$$A^2 S - (a^2 + b^2 + 1)(P - B)^2 - 2A(ap + bq)(P - B) - A^2(p^2 + q^2) = 0\,,$$

équation qui permet en particulier de discuter la nature de la méridienne en laquelle on reconnaît une hyperbole d'axe non transverse $\mathscr{D}$ (ou éventuellement l'union de deux droites si Δ est coplanaire à $\mathscr{D}$). Nous verrons au chapitre XII que $\mathscr{S}$ est un *hyperboloïde à une nappe* si $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires ([1]). Si $\mathscr{D}$ et Δ sont parallèles, on reconnaît que $\mathscr{S}$ est un cylindre de révolution d'axe $\mathscr{D}$; si $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes, $\mathscr{S}$ est un cône de révolution d'axe $\mathscr{D}$.

Exemple 3 : Soit $\mathscr{R}$ orthonormal direct, $\vec{V} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in E \setminus \{0\}$ et $\mathscr{D}$ la droite $O \dotplus \mathbb{R}\vec{V}$. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Par définition, le cône de révolution de sommet O, d'axe $\mathscr{D}$ et de **demi-angle au sommet** θ est la surface engendrée par une droite passant par O, dont l'écart angulaire avec $\mathscr{D}$ est θ. La méridienne est donc l'union de deux droites sécantes en O, dont $\mathscr{D}$ est une bissectrice.

Pour former une équation dans $\mathscr{R}$ de ce cône, il suffit d'écrire que $(\overrightarrow{OM} \mid \vec{V})^2 = \cos^2\theta \, \|\overrightarrow{OM}\|^2 \|\vec{V}\|^2$, ce qui donne l'équation :

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\cos^2\theta\,(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0\,.$$

Dans le cas particulier où $\vec{V} = e_3$, on obtient $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\theta$.

De même le cylindre de révolution d'axe $\mathscr{D}$ et de **rayon** $R > 0$ est la surface de révolution autour de $\mathscr{D}$ dont la méridienne est formée des deux droites parallèles à $\mathscr{D}$ à la distance R de $\mathscr{D}$. On trouve une équation dans $\mathscr{R}$ de ce cylindre en écrivant que

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 - \frac{1}{\|\vec{V}\|^2}(\overrightarrow{OM} \mid \vec{V})^2 = R^2\,,$$

([1]) Cf. exercice 1 du § XII.4.

ce qui donne

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2- \\ -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)R^2=0\,.$$

Dans le cas particulier où $\vec{V}=e_3$, on obtient $x^2+y^2-R^2=0$.

Surfaces paramétrées de révolution

Soit $\mathscr{R}=(O\,;e_1,e_2,e_3)$ un repère orthonormal direct de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{D}=O\dotplus\mathbb{R}e_3$. Donnons-nous une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$ $(1\leqslant k\leqslant+\infty)$ $f:I\longrightarrow\mathscr{E}$, où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Par rotation autour de $\mathscr{D}$, elle engendre la surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$, dite *de révolution autour de* $\mathscr{D}$:

$$\Phi:I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathscr{E}\,,\quad (u,v)\mapsto\rho_v(f(u))\,, \tag{8}$$

où ρ_v est la rotation d'angle v autour de e_3.

Le support $\mathscr{S}$ de Φ est évidemment de révolution autour de $\mathscr{D}$. Si $(a(u),b(u),c(u))$ sont les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathscr{R}$, celles de $\Phi(u,v)$ sont :

$$A(u,v)=a(u)\cos v-b(u)\sin v\,, \tag{9}$$

$$B(u,v)=a(u)\sin v+b(u)\cos v\,,\quad C(u,v)=c(u)\,.$$

Supposons que $(\forall u\in I)\ f(u)\notin\mathscr{D}$, i.e. $a^2(u)+b^2(u)>0$.

Posons $r(u)=(a^2(u)+b^2(u))^{1/2}$, de sorte que $r:I\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Le *théorème de relèvement* nous donne une fonction $\theta:I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $(\forall u\in I)\ a(u)=r(u)\cos\theta(u)$, $b(u)=r(u)\sin\theta(u)$, d'où

$$\begin{cases}A(u,v)=r(u)\cos(\theta(u)+v),\\ B(u,v)=r(u)\sin(\theta(u)+v),\\ C(u,v)=c(u).\end{cases}$$

L'application $(u,v)\mapsto(u,\theta(u)+v)$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $I\times\mathbb{R}$ sur $I\times\mathbb{R}$. Donc Φ est $\mathscr{C}^k$-équivalente à $\Psi:I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathscr{E}$ définie par :

$$(u,v)\mapsto O\dotplus(r(u)\cos v\,e_1+r(u)\sin v\,e_2+c(u)\,e_3) \tag{10}$$

ce qui est une représentation de la forme (9) *avec* $b(u)=0$ *pour tout* u. Notons $\vec{I}=\vec{I}(v)=e_1\cos v+e_2\sin v$, $\vec{I}_1(u)=-e_1\sin v+e_2\cos v$.

Alors (10) s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{O\Psi(u,v)}=r(u)\,\vec{I}+c(u)\,e_3}\quad (u,v)\in I\times\mathbb{R}\,. \tag{11}$$

Les courbes coordonnées de (11) ont pour trajectoires les méridiennes (v = constante) et les parallèles (u = constante) du support $\mathscr{S}$ de Ψ. A partir de (11) on peut vérifier qu'au moins localement et sous certaines conditions, on passe des surfaces de révolution définies par des équations du type $g(x^2+y^2, z) = 0$ à des surfaces paramétrées de révolution, et *vice versa*. De plus,

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u} = r'(u)\,\vec{I} + c'(u)\,e_3\,, \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial v} = r(u)\,\vec{I}_1$$

(rappelons qu'avec nos hypothèses, $r(u) > 0$ pour tout $u \in I$). On en déduit que $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ est régulier pour Ψ ssi u est régulier pour la méridienne $u \mapsto O \dotplus (r(u)\,e_1 + c(u)\,e_3)$. S'il en est ainsi, la normale en (u, v) à Ψ est la normale à la méridienne du point $\Psi(u, v)$ contenue dans le plan méridien qui passe par $\Psi(u, v)$.

Si u est régulier pour la méridienne, et si la tangente $\mathscr{T}_u$ en u à la méridienne n'est pas orthogonale à $\mathscr{D}$, les plans tangents à Ψ en les points du parallèle $v \mapsto \Psi(u, v)$ restent tangents à un cône de révolution ou à un cylindre de révolution d'axe $\mathscr{D}$ suivant que $\mathscr{T}_u$ rencontre $\mathscr{D}$ ou lui est parallèle.

Dans ces exercices, $\mathscr{E}$ est euclidien orienté. On utilise dans certains d'entre eux un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;\, e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de révolution engendrée par la *cissoïde droite* Γ d'équations dans $\mathscr{R}$; $z = 0$, $x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$ ($a > 0$ donné) par rotation autour de la droite Δ d'équations dans $\mathscr{R}$: $x = 0$, $y = z$. Trouver la méridienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{D}$ la droite définie dans $\mathscr{R}$ par $x = y = z$, et Γ le cercle défini dans $\mathscr{R}$ par $z = 0$, $x^2+y^2-2\,ax = 0$ ($a > 0$ donné). Trouver la méridienne de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de $\mathscr{D}$.

Exercice 3 : On donne a et c réels avec $0 < a < c$ et on considère l'*ovale de Cassini* $\mathscr{C}$ défini dans $\mathscr{R}$ par $\{y = 0,\ \|\overrightarrow{MF}\| \cdot \|\overrightarrow{MF'}\| = a^2\}$, les foyers F et F' étant les points de coordonnées $(c, 0, 0)$ et $(-c, 0, 0)$ dans $\mathscr{R}$. Tracer $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{S}$ la surface de révolution autour de $\mathscr{D} = O \dotplus \mathbb{R}e_3$ dont $\mathscr{C}$ est une méridienne. Expliquer pourquoi $\mathscr{S}$ admet des plans bitangents non orthogonaux à e_3. Puis prouver qu'un tel plan coupe $\mathscr{S}$ suivant deux cercles.

Exercice 4 : Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes définies dans $\mathscr{R}$ par : $x = a$, $y^2 - 3\,z^2 + a^2 = 0$ pour $\mathscr{C}_1$, $x = a$, $y^2 - 3\,z^2 - a^2 = 0$ pour $\mathscr{C}_2$, avec $a > 0$ donné. Trouver les surfaces $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ engendrées par la rotation de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$ autour de $\mathscr{D} = O \dotplus \mathbb{R}e_3$. Comparer $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$.

Exercice 5 : On donne a et b réels > 0. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équations $z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ dans $\mathscr{R}$. Par rotation autour de $\mathscr{D}_i = O \dotplus \mathbb{R}e_i$ ($i \in \{1, 2\}$), $\mathscr{D}$ engendre un cône de révolution $\mathscr{S}_i$. Trouver $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{C}$ un cône de révolution, $\mathscr{D}$ une droite parallèle à l'axe de $\mathscr{C}$ et distincte de cet axe, et $\mathscr{G}$ une génératrice variable de $\mathscr{C}$. Enfin soit Δ la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{G}$. Quel est le lieu du pied de Δ sur $\mathscr{G}$?

Exercice 7 : Former une équation dans $\mathscr{R}$ de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la parabole Γ représentée paramétriquement dans $\mathscr{R}$ par $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 12t - 1$, $z = 2t^2 + 1$ $(t \in \mathbb{R})$ par rotation autour de son axe.

Exercice 8 (Tore, et cercles de Villarceau ([1])) : On rappelle qu'un *tore à collier* est la surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle de rayon $a > 0$ autour d'une droite $\mathscr{D}$ de son plan située à une distance $R > a$ de son centre (cf. exemple 2 du § XI.2). La méridienne d'un tel tore est donc l'union de deux cercles disjoints symétriques par rapport à $\mathscr{D}$. Montrer que si on le coupe par des plans variables parallèles à l'axe de révolution, on obtient une famille d'*ovales de Cassini* (cf. exercice 3) à préciser.

a) Soit $\mathscr{S}$ un tore à collier d'axe $\mathscr{D}$. Soit Δ une tangente commune aux deux cercles d'une méridienne μ non orthogonale à $\mathscr{D}$. Prouver que le plan contenant Δ et perpendiculaire au plan de μ est tangent à $\mathscr{S}$ en les deux points de contact de Δ et μ (on dit pour cette raison que ce plan est un *plan bitangent* à $\mathscr{S}$).

b) Prouver que l'écart angulaire des droites joignant un point de $\mathscr{S}$ aux points de contact d'un plan bitangent est constant.

c) Prouver qu'un plan bitangent à $\mathscr{S}$ rencontre $\mathscr{S}$ suivant deux cercles (les cercles ainsi obtenus s'appellent *cercles de Villarceau* de $\mathscr{S}$) et que les projections orthogonales de ces cercles sur un plan orthogonal à $\mathscr{D}$ admettent le pied de $\mathscr{D}$ pour foyer.

d) Montrer que tout plan méridien de $\mathscr{S}$ rencontre un cercle de Villarceau donné suivant le même angle. De même toute sphère contenant un cercle de Villarceau rencontre $\mathscr{D}$ suivant un angle invariable.

e) Chercher les courbes tracées sur $\mathscr{S}$ faisant un angle constant avec les parallèles du tore $\mathscr{S}$ (ces lignes sont appelées les *loxodromies* de $\mathscr{S}$). Chercher celles de ces courbes qui se referment, et prouver que les cercles de Villarceau sont des loxodromies de $\mathscr{S}$.

f) Soit Γ un cercle de rayon $a > 0$, de centre I de coordonnées $(b, 0, 0)$ dans $\mathscr{R}$ avec $0 < b < a$, contenu dans le plan d'équation dans $\mathscr{R}$: $x = z \operatorname{tg} \theta$, avec $\cos \theta = b/a$. Montrer que, par rotation autour de $\mathscr{D}_3 = O + \mathbb{R}e_3$, le cercle Γ engendre un tore $\mathscr{S}$ à collier d'axe $\mathscr{D}_3$, et que les cercles Γ' transformés de Γ par les rotations d'axe $\mathscr{D}$ sont des cercles de Villarceau de $\mathscr{S}$. Vérifier que les cercles de Villarceau de $\mathscr{S}$ sont les cercles Γ' et leurs symétriques par rapport aux plans méridiens de $\mathscr{S}$.

([1]) Antoine *Yvon Villarceau* (1813-1883). Astronome et mathématicien français ; a fait connaître en 1848 les cercles portant son nom (ceux-ci figurent dans une sculpture bien antérieure du musée de l'Œuvre Notre-Dame à Strasbourg).

Chapitre XII

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES QUADRIQUES

Dans tout ce chapitre (y compris les exercices), $\mathscr{E}$ désigne un espace affine réel de dimension 3, d'espace directeur E.

§ XII.1 *FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 2 SUR $\mathscr{E}$*

Nous noterons $\mathscr{P}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré $\leqslant 2$, et $\mathscr{P}_2$ le sous-ensemble de $\mathscr{P}$ formé par celles de ces fonctions de degré 2 exactement. Le groupe produit $\mathscr{G} = \mathbb{R}^* \times \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ opère à gauche sur $\mathscr{P}_2$, par la loi :

$$(1) \qquad ((\lambda, \varphi), f) \mapsto \lambda (f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}).$$

La caractérisation des orbites de $\mathscr{P}_2$ pour cette action est, par définition, *la classification affine des éléments de $\mathscr{P}_2$*. Deux éléments f et g de $\mathscr{P}_2$ seront dits **affinement équivalents** ssi ils sont dans la même $\mathscr{G}$-orbite, i.e. ssi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists \varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid g = \lambda (f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}),$$

ou ce qui revient au même, ssi $\exists \mu \in \mathbb{R}^*$, $\exists \psi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid g = \mu (f \circ \psi)$.

Pour mener à bien cette classification, nous utiliserons les mêmes outils qu'au § X.1 : le *type d'une forme quadratique,* et *l'homogénéisé* d'un élément $f \in \mathscr{P}_2$, qui se définit exactement comme au § X.1, à la seule nuance près qu'ici le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}^{\#*}$ est de dimension 4. A partir de l'homogénéisé $\tilde{f}$ de $f \in \mathscr{P}_2$, on définit la *forme quadratique à l'infini* f_∞ de f, qui est l'unique $Q \in \mathrm{Quadr}\,(E)$ telle que, pour tout point $\Omega \in \mathscr{E}$, la fonction $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto f(M) - Q(\overrightarrow{\Omega M})$ soit affine.

Comme au § X.1, il est clair que si deux fonctions $f \in \mathscr{P}_2$ et $f' \in \mathscr{P}_2$ sont affinement équivalentes, les types des formes quadratiques $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ (resp. f_∞ et f'_∞) sont les mêmes. De plus pour que f et f' soient affinement équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe des repères $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{R}' = (O'\,;e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathscr{E}$, un polynôme h de degré 2 ($h \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$) et $\rho \in \mathbb{R}^*$ tels que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(O \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3)) = h(x, y, z)$ et $f'(O' \dotplus (xe'_1 + ye'_3 + ze'_3)) = \rho h(x, y, z)$.

A chaque $f \in \mathscr{P}_2$ nous associerons le couple $(\tau(\tilde{f}), \tau(f_\infty))$, où $\tau(\tilde{f})$ est le type de la forme quadratique $\tilde{f}$, et $\tau(f_\infty)$ celui de f_∞. L'image $\mathscr{T}$ de $T : f \mapsto (\tau(\tilde{f}), \tau(f_\infty))$ est représentée bijectivement par certaines des cases du tableau suivant :

$\tau(f_\infty)$ \ $\tau(\tilde{f})$	(4, 0)	(3, 1)	(2, 2)	(3, 0)	(2, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(3, 0)	$\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_2$		$\mathscr{C}_3$				
(2, 1)		$\mathscr{C}_4$	$\mathscr{C}_5$		$\mathscr{C}_6$			
(2, 0)		$\mathscr{C}_7$		$\mathscr{C}_8$	$\mathscr{C}_9$	$\mathscr{C}_{10}$		
(1, 1)			$\mathscr{C}_{11}$		$\mathscr{C}_{12}$		$\mathscr{C}_{13}$	
(1, 0)					$\mathscr{C}_{14}$	$\mathscr{C}_{15}$	$\mathscr{C}_{16}$	$\mathscr{C}_{17}$

Les cases marquées d'une croix n'appartiennent pas à l'image $\mathscr{T}$. Vérifions-le brièvement :

- Si $\tau(\tilde{f}) = (4, 0)$, $\tilde{f}$ est définie positive ou définie négative, donc f_∞ aussi, d'où $\tau(f_\infty) = (3, 0)$, ce qui élimine 4 cases de la première colonne.

- Le rang de f_∞ est majoré par celui de $\tilde{f}$, ce qui élimine les couples $((2, 0), (3, 0))$, $((2, 0), (2, 1))$, $((1, 1), (3, 0))$, $((1, 1), (2, 1))$, $((1, 0), (3, 0))$, $((1, 0), (2, 1))$, $((1, 0), (2, 0))$ et $((1, 0), (1, 1))$.

- Si $\tilde{f}$ est positive (resp. négative), f_∞ l'est aussi, donc $\mathscr{T}$ ne contient pas les cases $((3, 0), (2, 1))$, $((3, 0), (1, 1))$, $((2, 0), (1, 1))$.

- Si f_∞ est de type $(3, 0)$, le sous-$\mathbb{R}$-ev E de $\mathscr{E}^{\#*}$ est non $\tilde{f}$-isotrope. En considérant son $\tilde{f}$-orthogonal dans $\mathscr{E}^{\#*}$, on voit que $\tilde{f}$ ne peut être que de type $(3, 0)$, $(3, 1)$ ou $(4, 0)$, ce qui élimine les cases $((2, 2), (3, 0))$ et $((2, 1), (3, 0))$.

• Si $\tau(f_\infty) = (1, 0)$, soit N l'espace singulier de f_∞ et D une droite supplémentaire de N dans E ; D est non $\tilde{f}$-isotrope ; le $\tilde{f}$-orthogonal P de D dans $\mathscr{E}^{\#*}$ contient N ; on a : $D \oplus P = \mathscr{E}^{\#*}$, et comme $\dim(N) = 2$, $\dim(P) = 3$ et $\tilde{f}|_N = 0$, on voit que $\tilde{f}|_P$ est dégénérée (l'orthogonal de N dans P contient N, donc est de dimension > 1), donc $\tilde{f}$ est dégénérée, ce qui élimine les cases $((3, 1), (1, 0))$ et $((2, 2), (1, 0))$. La case $((3, 0), (1, 0))$ est aussi éliminée car alors les cônes isotropes de f_∞ et de $\tilde{f}$ seraient égaux à leurs espaces singuliers ; or celui de f_∞ est de dimension 2 et devrait être inclus dans celui de $\tilde{f}$ qui est de dimension 1, ce qui est absurde.

• Supposons que $T(f) = ((3, 1), (1, 1))$. Soit N l'espace singulier de f_∞ et P un plan supplémentaire de N dans E ; P est non $\tilde{f}$-isotrope ; soit Q le $\tilde{f}$-orthogonal de P dans $\mathscr{E}^{\#*}$: il contient N et $P \oplus Q = \mathscr{E}^{\#*}$; comme $\tilde{f}|_N = 0$ et que $\tilde{f}|_Q$ est non dégénérée (car P et Q sont $\tilde{f}$-orthogonaux et que $\tilde{f}$ est non dégénérée), nécessairement $\tilde{f}|_Q$ est de signature $(1, 1)$; mais $\tilde{f}|_P$ est aussi de signature $(1, 1)$ comme f_∞. Donc $\tilde{f}$ devrait être de signature $(1, 1) + (1, 1) = (2, 2)$ contrairement à l'hypothèse, ce qui élimine la case $((3, 1), (1, 1))$.

• Par un raisonnement analogue, la case $((2, 2), (2, 0))$ est éliminée. *On a ainsi prouvé que $\mathscr{T}$ est contenu dans l'ensemble des* 17 *cases restantes du tableau, cases que nous avons numérotées de $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_{17}$.*

Eléments $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $T(f) \in \{\mathscr{C}_i\}_{1 \leq i \leq 17}$

Il reste à prouver que chacune des cases restantes est bien l'image par T d'au moins un polynôme $f \in \mathscr{P}_2$, ce qui est facile, et de façon plus précise nous allons rechercher tous les $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $T(f) \in \mathscr{C}_i$ pour chaque $i \in [\![1, 17]\!]$. Quitte, s'il le faut, à remplacer f par $-f$, on peut supposer que le type $\tau(\tilde{f})$ est égal à la signature de $\tilde{f}$.

• Si $T(f) \in \{\mathscr{C}_i\}_{1 \leq i \leq 6}$, E est non $\tilde{f}$-isotrope ; on choisit une base $\tilde{f}$-orthogonale réduite $\mathscr{B}' = (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathscr{E}^{\#*}$ telle que e'_0 dirige le $\tilde{f}$-orthogonal de E et que $e'_i \in E$ si $1 \leq i \leq 3$. On aboutit ainsi, comme au § X.1, à l'existence de $\rho \in \mathbb{R}^*$ et d'une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}^{\#*}$ tels que : $e_0 \in \mathscr{E}$; (e_1, e_2, e_3) est une base de E ; et $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\rho \cdot f(e_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3)) = x^2 + y^2 + \varepsilon_1 z^2 + \varepsilon_2 ,$$

avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ si $T(f) = \mathscr{C}_1$; $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ si $T(f) = \mathscr{C}_2$; $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = 0$ si $T(f) = \mathscr{C}_3$; $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$ si $T(f) = \mathscr{C}_4$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ si $T(f) = \mathscr{C}_5$; $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = 0$ si $T(f) = \mathscr{C}_6$.

• Si $T(f) = \mathscr{C}_7$, l'espace singulier N de f_∞ est une droite ; notons P un plan supplémentaire de N dans E ; P est non $\tilde{f}$-isotrope, donc $\mathscr{E}^{\#*} = P \oplus Q$, où Q est le $\tilde{f}$-orthogonal de P. Nécessairement, $\tilde{f}|_Q$ est de signature $(1, 1)$ (car non dégénérée, et admettant N pour droite isotrope), donc admet exactement deux droites isotropes N et N', et $N' \oplus E = \mathscr{E}^{\#*}$. On arrive ainsi à une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}^{\#*}$ avec $e_0 \in \mathscr{E}$ et e_0 dirigeant N', e_3 dirigeant N, et à un réel $\rho \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \rho f(e_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3)) = x^2 + y^2 - 2z.$$

• Si $T(f) \in \{\mathscr{C}_j\}_{8 \leqslant j \leqslant 17}$, des raisonnements de même nature prouvent l'existence d'un réel $\rho \in \mathbb{R}^*$ et d'une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}^{\#*}$, avec $e_0 \in \mathscr{E}$, tels que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \rho f(e_0 \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$\begin{array}{lll}
= x^2 + y^2 + 1 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_8 ; \\
= x^2 + y^2 - 1 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_9 ; \\
= x^2 + y^2 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{10} ; \\
= x^2 - y^2 - 2z & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{11} ; \\
= x^2 - y^2 - 1 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{12} ; \\
= x^2 - y^2 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{13} ; \\
= x^2 - 2y & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{14} ; \\
= x^2 + 1 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{15} ; \\
= x^2 - 1 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{16} ; \\
= x^2 & \text{si} & T(f) = \mathscr{C}_{17} .
\end{array}$$

Classification affine des $f \in \mathscr{P}_2$

Désignons par $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant 17}$ les 17 éléments suivants de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$:

$$\begin{array}{lll}
h_1 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 ; & h_2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 ; & h_3 = X^2 + Y^2 + Z^2 ; \\
h_4 = X^2 + Y^2 - Z^2 + 1 ; & h_5 = X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 ; & h_6 = X^2 + Y^2 - Z^2 ; \\
h_7 = X^2 + Y^2 - 2Z ; & h_8 = X^2 + Y^2 + 1 ; & h_9 = X^2 + Y^2 - 1 ; \\
h_{10} = X^2 + Y^2 ; & h_{11} = X^2 - Y^2 - 2Z ; & h_{12} = X^2 - Y^2 - 1 ; \\
h_{13} = X^2 - Y^2 ; & h_{14} = X^2 - 2Y ; & h_{15} = X^2 + 1 ; \\
h_{16} = X^2 - 1 ; & h_{17} = X^2 . &
\end{array}$$

Pour $i \in [\![1, 17]\!]$, soit $\mathscr{C}_i^*$ l'ensemble des $f \in \mathscr{P}_2$ pour lesquels il existe

$\rho \in \mathbb{R}^*$ tel que ρf soit représenté dans au moins un repère affine de $\mathscr{E}$ (dépendant de f) par h_i ; les $\mathscr{C}_i^*$ sont évidemment non vides et ce sont des *classes d'équivalence affine* d'éléments de $\mathscr{P}_2$. Elles sont toutes distinctes car, pour chaque i, si $f \in \mathscr{C}_i^*$, on voit que $T(f) = \mathscr{C}_i$. Enfin l'étude qui précède montre que $\bigcup_{i=1}^{17} \mathscr{C}_i^* = \mathscr{P}_2$. On a donc prouvé que les $\mathscr{G}$-orbites de $\mathscr{P}_2$ ne sont autres que les $\mathscr{C}_i^*$, d'où :

THÉORÈME XII.1.1

> *Il y a 17 classes d'équivalence affine de $\mathscr{P}_2$, qui sont les $\mathscr{C}_i^*$ $(1 \leqslant i \leqslant 17)$ ci-dessus définies, représentées par les h_i. De plus, pour que $f \in \mathscr{P}_2$ et $g \in \mathscr{P}_2$ soient affinement équivalentes, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ ont même type, et f_∞ et g_∞ ont même type.*

Dans tout ce qui suit, nous dirons que f est **propre** ssi $\tilde{f}$ est **non dégénérée.**

Points critiques d'un $f \in \mathscr{P}_2$

Soit $f \in \mathscr{P}_2$. Un point $\Omega \in \mathscr{E}$ est critique pour f ssi la fonction affine $\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto f(M) - f_\infty(\overrightarrow{\Omega M})$ est constante (cf. § X.1).

Soit $\mathscr{R} = (A\,;e_1, e_2, e_3)$ un repère de $\mathscr{E}$ et soit $h \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ qui représente $f \in \mathscr{P}_2$ dans $\mathscr{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}_f$ des *points critiques* de f est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) dans $\mathscr{R}$ vérifient le système linéaire de 3 équations en les 3 inconnues x, y, z :

$$(1) \qquad \boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial h}{\partial z} = 0}\,.$$

Donc $\mathscr{C}_f$ est une s.v.l.a. de $\mathscr{E}$.

Notons $\delta_{\mathscr{R},f}$ et $\Delta_{\mathscr{R},f}$ les discriminants respectifs de f_∞ dans (e_1, e_2, e_3) et de $\tilde{f}$ dans la base $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}^{\#*}$. Si $\mathscr{R}' = (A'\,;e'_1, e'_2, e'_3)$ est un autre repère de $\mathscr{E}$, si P est la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3), on a :

$$(2) \qquad \delta_{\mathscr{R}',f} = (\det(P))^2\, \delta_{\mathscr{R},f}\,; \quad \Delta_{\mathscr{R}',f} = (\det(P))^2\, \Delta_{\mathscr{R},f}\,.$$

Soit $(\lambda, \varphi) \in \mathscr{G}$; avec $g = \lambda\,(f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$, on a :

$$(3) \qquad \delta_{\mathscr{R},g} = \lambda^3(\det(\varphi))^{-2}\, \delta_{\mathscr{R},f}\,; \quad \Delta_{\mathscr{R},g} = \lambda^4(\det(\varphi))^{-2}\, \Delta_{\mathscr{R},f}\,.$$

Le déterminant principal du système (1) n'est autre que $\delta_{\mathscr{R},f}$. Donc, **pour que $\mathscr{C}_f$ soit un singleton, il faut et il suffit que f_∞ soit non dégénérée.**

Pour $(\lambda, \varphi) \in \mathscr{G}$, avec $g = \lambda\,(f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$, il est clair que

(4) $\qquad \mathscr{C}_g = \varphi(\mathscr{C}_f)$ (en particulier $\mathscr{C}_{\lambda f} = \mathscr{C}_f$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

Par suite, *la dimension de $\mathscr{C}_f$ ne dépend que de la classe $\mathscr{C}_i^*$ à laquelle appartient f.* On peut donc, pour calculer dim $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $f \in \mathscr{C}_i^*$ (i fixé, $1 \leqslant i \leqslant 17$), supposer que f est représenté dans un repère convenable de $\mathscr{E}$ par le polynôme h_i, pour lequel le calcul de cette dimension est immédiat. C'est ainsi que

$$\begin{array}{ll}
\dim(\mathscr{C}_f) = 0 & \text{ssi } f_\infty \text{ est non dégénérée, i.e. } i \in [\![1, 6]\!] \\
\dim(\mathscr{C}_f) = -1 & (\text{i.e. } \mathscr{C}_f = \varnothing) \text{ pour } i \in \{7, 11, 14\} \\
\dim(\mathscr{C}_f) = 1 & \text{pour } i \in \{8, 9, 10, 12, 13\} \\
\dim(\mathscr{C}_f) = 2 & \text{pour } i \in \{15, 16, 17\}\,.
\end{array}$$

Lorsque f_∞ est non dégénérée, on constate aussi que *l'unique point critique Ω de f vérifie $f(\Omega) \neq 0$ ssi f est propre.* De plus, on voit comme au § X.1 que la constante C telle que $(\forall M \in \mathscr{E})\ f(M) - f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) = C$ est donnée, à partir de n'importe quel repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$, par :

(5) $$\boxed{C = \frac{\Delta_{\mathscr{R}, f}}{\delta_{\mathscr{R}, f}}}\,.$$

Exercice 1 : *a*) Vérifier que $\mathscr{P}_2$ est un ouvert dense de $\mathscr{P}$.

b) Parmi les 17 classes d'équivalence affine des $f \in \mathscr{P}_2$, donner celles qui sont ouvertes dans $\mathscr{P}$. Y en a-t-il de fermées dans $\mathscr{P}$? dans $\mathscr{P}_2$?

c) Donner pour chaque classe d'équivalence affine ouverte dans $\mathscr{P}$ ses composantes connexes et sa frontière dans $\mathscr{P}$.

Exercice 2 : On suppose ici $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 4$. On définit $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_2$ et l'équivalence affine dans $\mathscr{P}_2$ comme dans le texte. Les classes d'équivalence affine des $f \in \mathscr{P}_2$ sont-elles en nombre fini ?

§ XII.2 *ZÉROS D'UNE FONCTION $f \in \mathscr{P}_2$*

On conserve dans ce § toutes les notations introduites au § XII.1. Etant donné $f \in \mathscr{P}_2$, on se propose d'étudier l'ensemble $\mathscr{S}_f = f^{-1}(0)$. Notons déjà que l'ensemble $\mathscr{V}_f = \mathscr{S}_f \backslash \mathscr{C}_f$ est une **sous-variété surface de classe** $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathscr{E}$ (cf. tome 3, théorème VI.3.3). Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

(1) $\qquad \mathscr{S}_{\lambda f} = \mathscr{S}_f\,;\quad \mathscr{C}_{\lambda f} = \mathscr{C}_f\,;\quad$ d'où $\quad \mathscr{V}_{\lambda f} = \mathscr{V}_f\,.$

Nous allons discuter la nature de $\mathscr{S}_f$ et de $\mathscr{V}_f$ suivant la classe $\mathscr{C}_i^*$ d'équivalence affine à laquelle appartient f. En vertu de (1), on peut supposer que relativement à un repère $\mathscr{R} = (\Omega\ ; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$ (dépendant de f), f est représentée par le polynôme h_i (la liste des 17 polynômes h_j est donnée au § XII.1). Nous désignons par (x, y, z) le triplet des coordonnées d'un point générique $M \in \mathscr{E}$, par $\mathscr{H}_i$ le plan $\Omega \dotplus \mathrm{Vect}\ ((e_j)_{j \neq i})$, et par $\mathscr{D}_i$ la droite $\Omega \dotplus \mathbb{R}e_i$.

Commençons par les cas les plus évidents :

- *Si* $i = 1$ (*resp.* $i = 8$, $i = 15$), i.e. si $f(M) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ (resp. $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + 1$), alors $\mathscr{S}_f = \varnothing$ et $\mathscr{C}_f$ est le singleton $\{\Omega\}$ (resp. la droite affine $x = y = 0$, le plan affine $x = 0$).

- *Si* $i = 17$, i.e. $f(M) = x^2$, $\mathscr{S}_f = \mathscr{C}_f$ est un plan affine, $\mathscr{V}_f = \varnothing$.

- *Si* $i = 16$, i.e. $f(M) = x^2 - 1$, $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ est l'union de deux plans affines parallèles et distincts d'équations $x = 1$ et $x = -1$ dans $\mathscr{R}$ (ici, $\mathscr{C}_f$ est le plan affine médian des deux plans ci-dessus).

- *Si* $i = 10$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2$, $\mathscr{S}_f = \mathscr{C}_f$ est la droite affine d'équations $x = y = 0$ dans $\mathscr{R}$, et $\mathscr{V}_f = \varnothing$.

- *Si* $i = 13$, i.e. $f(M) = x^2 - y^2$, $\mathscr{S}_f$ est l'union des deux plans affines d'équations $x - y = 0$ et $x + y = 0$ dans $\mathscr{R}$. Ces deux plans ont pour intersection la droite affine $\mathscr{C}_f$, d'équations $x = y = 0$ dans $\mathscr{R}$.

- *Si* $i = 3$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 + z^2$, $\mathscr{S}_f = \mathscr{C}_f = \{\Omega\}$.

- *Si* $i = 14$, i.e. $f(M) = x^2 - 2y$, $\mathscr{C}_f = \varnothing$, et $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ est la surface cylindrique de génératrices dirigées par e_3 admettant pour directrice la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 - 2y = 0$ dans le repère $(\Omega\ ; e_1, e_2)$ du plan $\mathscr{H}_3 = \Omega \dotplus \mathrm{Vect}\ (e_1, e_2)$. Il est facile de voir que tout plan non parallèle à e_3 rencontre cette surface $\mathscr{S}_f$ suivant une parabole, ce qui fait attribuer à $\mathscr{S}_f$ le nom de **cylindre parabolique** (cf. fig. 1). Les plans parallèles au cône isotrope de f_∞ (qui est ici un plan vectoriel) rencontrent $\mathscr{S}$ suivant une unique droite, l'intersection étant transversale en chaque point. Le plan $f_\infty^{-1}(0)$ s'appelle *direction de plan à l'infini de* $\mathscr{S}$.

$\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_3$ sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$.

- *Si* $i = 9$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 - 1$, $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ est la surface cylindrique de génératrices dirigées par e_3 et admettant pour directrice l'ellipse $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ dans le repère $(\Omega\ ; e_1, e_2)$ de $\mathscr{H}_3$. Tout plan non parallèle à e_3 rencontre $\mathscr{S}_f$ suivant une ellipse, et en prenant un repère d'un

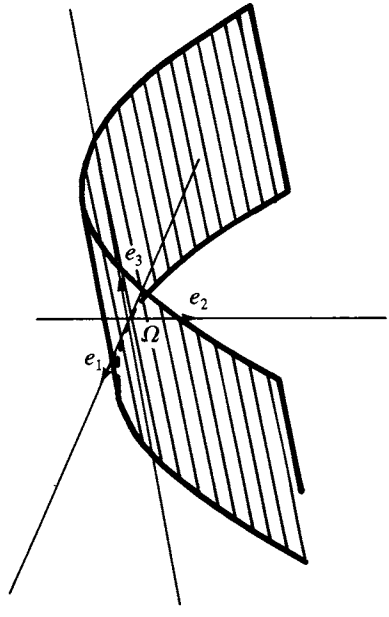


Fig. 1.

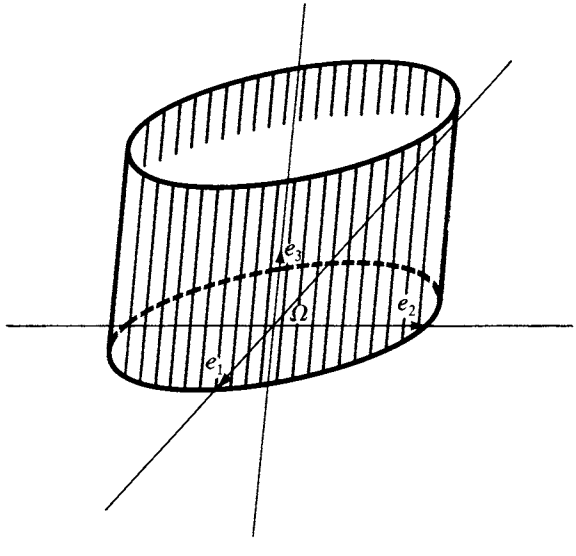


Fig. 2.

tel plan dont l'origine est sur $\mathscr{D}_3 = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_3$, on voit immédiatement que le lieu des centres de ces ellipses est la droite affine $\mathscr{D}_3 = \mathscr{C}_f$. On dit alors que $\mathscr{S}_f$ est un **cylindre elliptique** (cf. fig. 2). Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$.

• *Si* $i = 12$, i.e. $f(M) = x^2 - y^2 - 1$, $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ est la surface cylindrique de génératrices dirigées par e_3 et admettant pour directrice l'hyperbole $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 - y^2 - 1 = 0$ dans le repère $(\Omega\ ; e_1, e_2)$ de $\mathscr{H}_3$. Tout plan non parallèle à e_3 rencontre $\mathscr{S}_f$ suivant une hyperbole et on voit facilement comme au cas précédent que le lieu des centres de ces hyperboles est la droite affine $\mathscr{D}_3 = \mathscr{C}_f$.

On dit alors que $\mathscr{S}_f$ est un **cylindre hyperbolique** (cf. fig. 3) ; $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_3$ sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$. Remarquons que dans

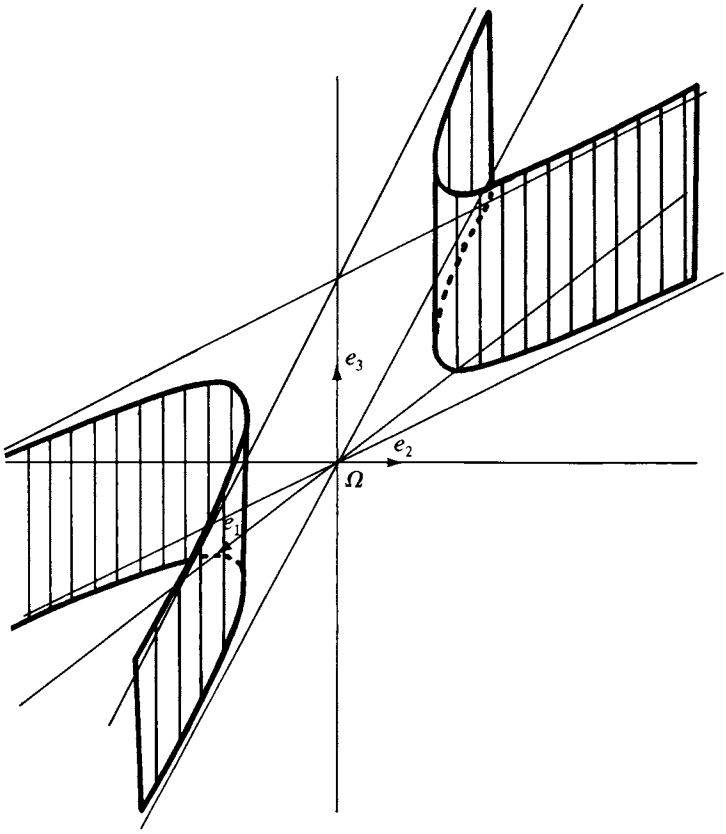


Fig. 3.

ce cas l'équation $f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) = 0$, i.e. dans $\mathscr{R}$, $x^2 - y^2 = 0$, représente l'union de deux plans qui se coupent suivant $\mathscr{C}_f = \mathscr{D}_3$, et dont on vérifie aisément que l'intersection avec un plan $\mathscr{H}$ non parallèle à $\mathscr{D}_3$ donne les asymptotes de $\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_f$. On verra plus loin que le cône isotrope de f_∞ est défini de façon unique par $\mathscr{S}_f$. Les plans d'équation $f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) = 0$ s'appellent ici **plans asymptotes** à $\mathscr{S}_f$.

• *Si* $i = 6$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 - z^2$, $\mathscr{C}_f = \{\Omega\}$, et $\mathscr{S}_f$ est une surface conique de sommet Ω. L'intersection de $\mathscr{S}_f$ avec un plan $\mathscr{H}$ d'équation $z = \lambda$ dans $\mathscr{R}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) est une ellipse dont le centre appartient à $\mathscr{D}_3$. L'intersection de $\mathscr{S}_f$ avec un plan $\mathscr{H}$ d'équation $x = \lambda$ (resp. $y = \lambda$) ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) est une hyperbole dont le centre appartient à $\mathscr{D}_1 = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_1$ (resp. à $\mathscr{D}_2 = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_2$). Le cône $\mathscr{S}_f$ admet ici pour directrice n'importe quelle ellipse définie dans $\mathscr{R}$ par $x^2 + y^2 = \lambda^2$, $z = \lambda$ (où $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

On dit dans ce cas que $\mathscr{S}_f$ est un **cône du second degré** (cf. fig. 4). Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$.

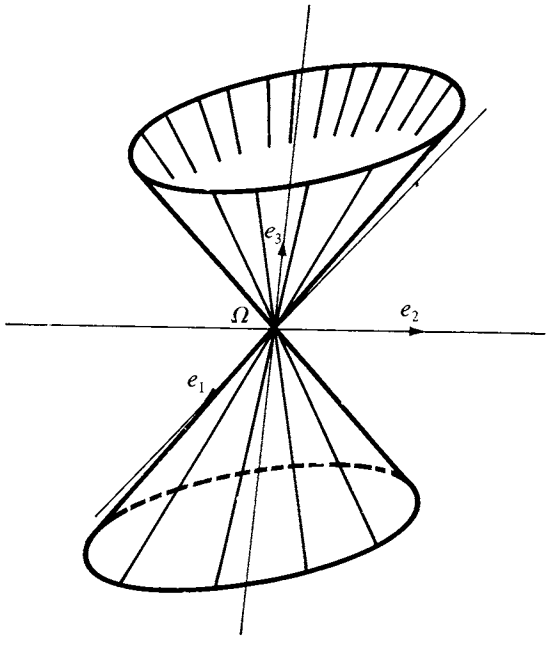


Fig. 4.

Il reste à étudier les cinq cas les plus intéressants, sensiblement moins triviaux que les précédents.

• *Si* $i = 2$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, alors $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$, et $\mathscr{C}_f = \{\Omega\}$. Dans ce cas $\mathscr{S}_f$ est *compacte* et *connexe* (pour la structure euclidienne de $\mathscr{E}$ qui rend $\mathscr{R}$ orthonormal, il s'agit d'une sphère euclidienne de centre Ω), et admet Ω comme centre de symétrie. L'intersection de $\mathscr{S}_f$ avec un plan d'équation $x = \lambda$ (resp. $y = \lambda$, $z = \lambda$) est une ellipse si $|\lambda| < 1$, un singleton si $|\lambda| = 1$ et $\varnothing$ si $|\lambda| > 1$; $\mathscr{S}_f$ est l'image de $\mathbb{R}^2$ pour la représentation paramétrique des coordonnées sphériques : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto \Omega \dotplus (e_1 \cos u \cos v + e_2 \sin u \cos v + e_3 \sin v)$.

On dit alors que $\mathscr{S}_f$ est un **ellipsoïde** (cf. fig. 5).

Les 3 plans de coordonnées sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$.

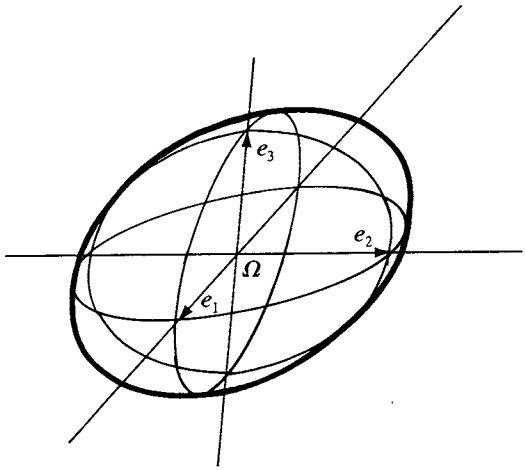


Fig. 5.

• *Si* $i = 4$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$, alors $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ et $\mathscr{C}_f = \{\Omega\}$. Le point Ω est centre de symétrie de $\mathscr{S}_f$. La surface $\mathscr{S}_f$ est *fermée* mais *non bornée*. Sa partie où $z > 0$ (resp. $z < 0$) est l'image de $\mathbb{R}^2$ par la $\mathscr{C}^\infty$-paramétrisation $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$, $(u, v) \mapsto P(u, v)$ de coordonnées dans $\mathscr{R}$: $x = \cos u \operatorname{sh} v$, $y = \sin u \operatorname{sh} v$, $z = \operatorname{ch} v$ (resp. $x = \cos u \operatorname{sh} v$, $y = \sin u \operatorname{sh} v$, $z = -\operatorname{ch} v$). On en déduit que $\mathscr{S}_f$ a deux composantes connexes : les images de ces paramétrisations ; elles sont plongées. L'intersection avec un plan $x = \lambda$ (resp. $y = \lambda$) est une hyperbole centrée sur $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) tandis que l'intersection avec le plan $z = \lambda$ est $\varnothing$ si $|\lambda| < 1$, un singleton si $|\lambda| = 1$, une ellipse centrée sur $\mathscr{D}_3$ si $|\lambda| > 1$.

Les plans d'équation $\alpha x + \beta y = 0$ dans $\mathscr{R}((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ rencontrent $\mathscr{S}_f$ suivant des hyperboles de centre Ω : l'union des asymptotes de ces hyperboles est le cône du second degré d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ dans $\mathscr{R}$, i.e. $f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) = 0$. On verra plus loin que $f_\infty^{-1}(0)$ est défini de façon unique par $\mathscr{S}_f$, donc ce cône ne dépend que de $\mathscr{S}_f$. On l'appelle le **cône asymptote** de $\mathscr{S}_f$.

La surface $\mathscr{S}_f$ est appelée **hyperboloïde à deux nappes,** ou $H2$ (cf. fig. 6).

Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$.

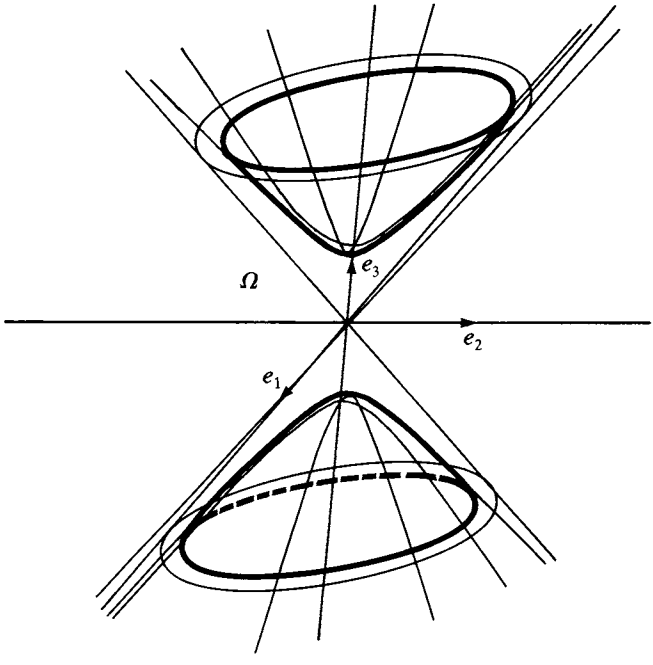


Fig. 6.

• *Si* $i = 5$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, alors $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ et $\mathscr{C}_f = \{\Omega\}$. Le point Ω est centre de symétrie de $\mathscr{S}_f$. La surface $\mathscr{S}_f$ est *fermée* et *non bornée*. Chacune des représentations paramétriques de classe $\mathscr{C}^\infty$ $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$ et $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{E}$ définies ci-dessous admet $\mathscr{S}_f$ pour image :

(2) $\Phi(u, v)$: $x = \cos u - v \sin u$, $y = \sin u + v \cos u$, $z = v$

(3) $\Psi(u, v)$: $x = \cos u - v \sin u$, $y = \sin u + v \cos u$, $z = -v$.

Par suite $\mathscr{S}_f$ est *connexe*. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les plans d'équation $z = \lambda$ dans $\mathscr{R}$ rencontrent $\mathscr{S}_f$ suivant des ellipses centrées sur $\mathscr{D}_3$. Les plans $x = \lambda$ (resp. $y = \lambda$) rencontrent $\mathscr{S}_f$ suivant des hyperboles centrées sur $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) si $|\lambda| \neq 1$ et suivant deux droites sécantes sur $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) si $|\lambda| = 1$.

Les plans d'équation $\alpha x + \beta y = 0$ dans $\mathscr{R}$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ rencontrent $\mathscr{S}_f$ suivant des hyperboles de centre Ω : l'union des asymptotes de ces hyperboles est le cône du second degré d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ dans $\mathscr{R}$, i.e. $f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) = 0$. Là encore ce cône ne dépend que de $\mathscr{S}_f$. On l'appelle le **cône asymptote** de $\mathscr{S}_f$ (cf. fig. 7).

La surface $\mathscr{S}_f$ est appelée un **hyperboloïde à une nappe**, ou $H1$.

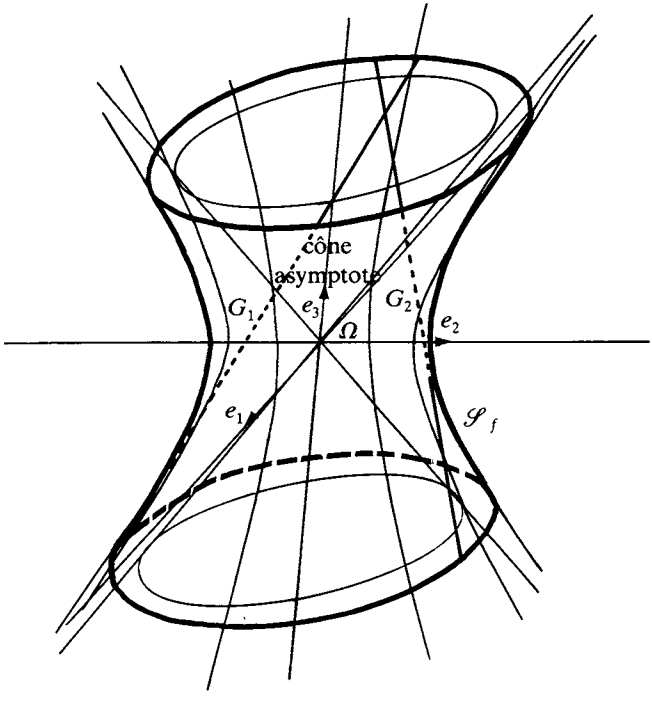


Fig. 7.

Les plans de coordonnées sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$. Les représentations (2) et (3) montrent que, de deux façons différentes, $\mathscr{S}_f$ est une **surface réglée** (cf. § XI.3). Sur la figure 7 on a représenté une génératrice de chaque système (cf. fin du § XII.3).

• *Si* $i = 7$, i.e. $f(M) = x^2 + y^2 - 2z$, alors $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ et $\mathscr{C}_f = \varnothing$. La surface $\mathscr{S}_f$ admet dans $\mathscr{R}$ la représentation cartésienne $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, donc $\mathscr{S}_f$ est une surface *plongée*. Il est clair que $\mathscr{S}_f$ est fermée, connexe et non bornée. Son intersection avec un plan $z = \lambda$ est $\varnothing$ si $\lambda < 0$, réduite à $\{\Omega\}$ si $\lambda = 0$ et c'est une ellipse si $\lambda > 0$. Son intersection avec tout plan parallèle à e_3 est une parabole dont la direction à l'infini est $\mathbb{R}e_3$.

On dit ici que $\mathscr{S}_f$ est un **paraboloïde elliptique.** Les plans de coordonnées $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$ (cf. fig. 8).

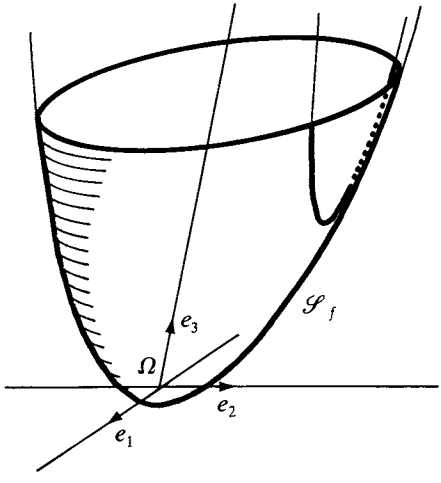


Fig. 8.

• *Si* $i = 11$, i.e. $f(M) = x^2 - y^2 - 2z$, à nouveau $\mathscr{S}_f = \mathscr{V}_f$ et $\mathscr{C}_f = \varnothing$. La surface $\mathscr{S}_f$ admet dans $\mathscr{R}$ la représentation cartésienne $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, donc elle est *plongée* et connexe. Elle est évidemment fermée et non bornée. Son intersection avec un plan $z = \lambda$ est une hyperbole centrée sur $\mathscr{D}_3$ si $\lambda \neq 0$, et c'est l'union des droites $z = 0$, $x = \pm y$ si $\lambda = 0$. L'intersection de $\mathscr{S}_\lambda$ avec un plan d'équation dans $\mathscr{R} : \alpha x + \beta y = 0$ $((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$ est une parabole de direction à l'infini $\mathbb{R}e_3$ si $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, et si $\alpha^2 = \beta^2$, cette intersection est la droite $z = 0$, $\alpha x + \beta y = 0$. On dit que $\mathscr{S}_f$ est un **paraboloïde hyperbolique** (en abrégé P.H., cf. fig. 9).

Dans le repère $(\Omega\ ;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3)$, où $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$, $\mathscr{S}_f$ admet pour équation $2Z = XY$, ce qui met en évidence deux familles de

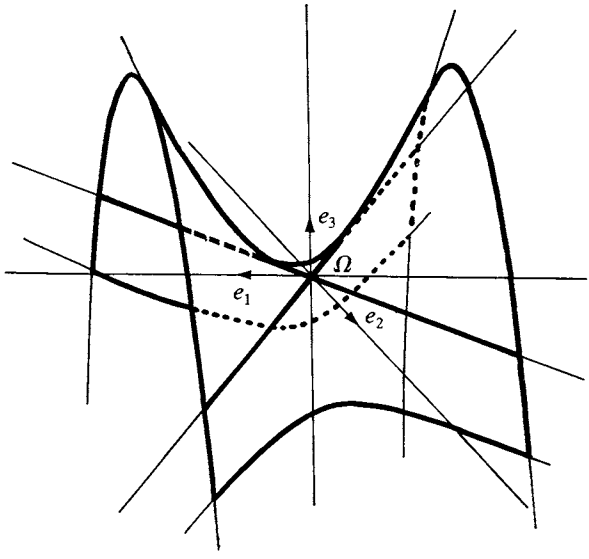


Fig. 9.

droites tracées sur $\mathscr{S}_f$, obtenues en coupant $\mathscr{S}_f$ par les plans $X = \lambda$ et $Y = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Ici encore, $\mathscr{S}_f$ peut être considérée de deux façons comme une **surface réglée.** Les plans $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont des plans de symétrie oblique de $\mathscr{S}_f$.

Terminologie concernant les quadriques

Parmi les 17 figures étudiées, dont 14 non vides, seules les 9 dernières sont des surfaces de $\mathscr{E}$ appelées **quadriques :** ce sont les cylindres paraboliques, les cylindres elliptiques, les cylindres hyperboliques, les cônes du second degré, les ellipsoïdes, les hyperboloïdes (à une ou deux nappes), les paraboloïdes elliptiques et les paraboloïdes hyperboliques. Chacun des noms cités définit la *nature* de la quadrique. Le fait que cette *nature* est bien définie, de façon univoque, sera justifié par le théorème XII.2.1 ci-dessous (à moins que le lecteur préfère donner une justification géométrique).

Parmi les quadriques, les ellipsoïdes, les hyperboloïdes (à une ou deux nappes) et les paraboloïdes (elliptiques ou hyperboliques) sont appelés les **quadriques propres** (cela parce qu'elles sont définies par un polynôme $f \in \mathscr{P}_2$ qui est lui-même **propre).**

Les ellipsoïdes, les hyperboloïdes (à une ou deux nappes) et les cônes du second degré sont appelés **quadriques à centre** (parce qu'elles sont définies par un $f \in \mathscr{P}_2$ tel que f_∞ est non dégénérée, ce qui entraîne, on l'a vu, que

$\mathscr{C}_f$ est un *singleton* appelé **centre** de $\mathscr{S}_f$, et qui est en fait l'unique centre de symétrie de $\mathscr{S}_f$).

Cette terminologie est cohérente grâce au théorème XII.2.1 qui va suivre.

Unicité à facteur près de l'équation

THÉORÈME XII.2.1

Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$, avec $f \in \mathscr{P}_2$. Supposons que $f \in \mathscr{C}_i^*$, avec $i \in \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16\}$. Alors l'ensemble des $g \in \mathscr{P}_2$ tels que $\mathscr{S}_f \subset \mathscr{S}_g$ est $\{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$.

Démonstration :

Il est d'abord évident que si $g = \lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$, alors $\mathscr{S}_g = \mathscr{S}_f$. Pour traiter la réciproque, nous pouvons donc supposer que f est représentée, dans un certain repère $\mathscr{R} = (\Omega\,; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$, par le polynôme h_i correspondant dans la liste du § XII.1. Nous examinerons seulement le cas $i = 2$, mais le lecteur pourra s'assurer que dans les autres cas le raisonnement est analogue. On a donc par hypothèse :

$$(\forall M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \mathscr{E}) \quad f(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 1\,.$$

Ecrivons $g(M) = Ax^2 + B(y, z)\,x + C(y, z)$, où : $A \in \mathbb{R}$; B est une fonction affine de (y, z) ; et C une fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$ de (y, z) ; d'où, en posant $H(y, z) = C(y, z) - A(y^2 + z^2 - 1)$:

$$g(M) = Af(M) + B(y, z)\,x + H(y, z)\,.$$

Soit U l'ouvert non vide $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + z^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$. Pour $(y, z) \in U$, on a des réels *distincts* $x_j(y, z)$ tels que $(x_j(y, z))^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Notant $M_j(y, z)$ le point de coordonnées $(x_j(y, z), y, z)$ dans $\mathscr{R}$, à cause de l'hypothèse, on a : $g(M_j(y, z)) = 0 = B(y, z)\,x_j(y, z) + H(y, z)$, d'où puisque $x_1(y, z) \neq x_2(y, z)$: $B(y, z) = H(y, z) = 0$. C'est vrai $\forall (y, z) \in U$. Donc (cf. théorème X.1.2 du tome 1) les fonctions B et H sont nulles. D'où $(\forall M \in \mathscr{E})\ g(M) = Af(M)$, ce qui entraîne $A \in \mathbb{R}^*$. ■

Remarque 1 : L'ensemble des 11 valeurs de i considérées dans le théorème XII.2.1 est exactement l'ensemble des $i \in [\![1, 17]\!]$ tels que $\mathscr{V}_f \neq \varnothing$.

Remarque 2 : Si $i = 17$ (cas où $h_{17} = X^2$), l'ensemble des $g \in \mathscr{P}_2$ tels que $\mathscr{S}_g = \mathscr{S}_f$ (au lieu de $\mathscr{S}_g \subset \mathscr{S}_f$) est $\{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$.

Voici une importante conséquence du théorème XII.2.1, que nous avons évoquée par anticipation : soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ avec $f \in \mathscr{P}_2$ tel que $\mathscr{V}_f \neq \varnothing$. Du

fait que $(\lambda f)_\infty = \lambda f_\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, le *cône isotrope* de f_∞ ne dépend, grâce au théorème XII.2.1, que de $\mathscr{S}$. Ce cône est $\{0_E\}$ ssi $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde. Dans les autres cas, on l'appelle **cône des directions à l'infini** de $\mathscr{S}$. C'est un cône du second degré si $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde (à une ou deux nappes) ou si $\mathscr{S}$ est un cône du second degré (dans ce cas $\mathscr{S}$ et $f_\infty^{-1}(0)$ sont identiques) ; c'est une droite vectorielle si $\mathscr{S}$ est un cylindre elliptique ou un paraboloïde elliptique ; c'est l'union de deux plans sécants si $\mathscr{S}$ est un cylindre hyperbolique, un paraboloïde hyperbolique ou l'union de deux plans sécants ; c'est un plan si $\mathscr{S}$ est un cylindre parabolique ou l'union de deux plans parallèles distincts.

Une autre conséquence fondamentale du théorème XII.2.1 est, comme on l'a déjà annoncé, qu'*une quadrique ne peut pas être de deux natures distinctes à la fois.*

Centres

Soit $\mathscr{S}$ l'une des neuf quadriques. Par définition, les **centres** de $\mathscr{S}$ sont les points critiques des $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ (en vertu du théorème XII.2.1, ces points sont indépendants du choix de f). On voit comme au § X.2 que *tout centre de $\mathscr{S}$ est centre de symétrie de $\mathscr{S}$*. D'après l'étude des points critiques (cf. § XII.1), l'ensemble des centres est une s.v.l.a. de $\mathscr{E}$. Cet ensemble est un singleton $\{\Omega\}$ pour chacune des quatre quadriques à centre (l'unique centre est alors appelé **le centre** de $\mathscr{S}$) ; c'est $\varnothing$ pour un cylindre parabolique ou pour un paraboloïde (elliptique ou hyperbolique) ; c'est une droite affine pour un cylindre (elliptique ou hyperbolique).

Soit $\mathscr{S}$ l'union de deux plans de $\mathscr{E}$ (distincts et sécants, distincts et parallèles, ou confondus). Les $f \in \mathscr{P}_2$ tels que $\mathscr{S}_f = \mathscr{S}$ forment encore une droite vectorielle (privée de 0) (cf. théorème XII.2.1 et remarque 2) ; on peut donc encore parler de centres de $\mathscr{S}$; l'ensemble des centres est la droite intersection des deux plans s'ils sont sécants ; c'est leur plan « médian » s'ils sont parallèles (distincts ou non). Dans ces cas, l'ensemble des centres coïncide avec l'ensemble des centres de symétrie. Et cela reste vrai pour les deux cas restants où $\mathscr{S} = f^{-1}(0)$ est non vide : $i = 3$, et $i = 10$.

On notera en particulier que *seuls les paraboloïdes et les cylindres paraboliques n'ont pas de centre de symétrie (et donc pas de centre).*

Congruence affine

La congruence affine de deux parties de $\mathscr{E}$ se définit comme au § X.1. Soit $\varphi \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ une quadrique de $\mathscr{E}$; alors

$$\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}_g \quad \text{avec} \quad g = f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}. \tag{4}$$

Donc $\varphi(\mathscr{S})$ est une *quadrique de même nature* que $\mathscr{S}$, puisque f et $f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}$ sont affinement équivalentes. De plus, notant $\Gamma_{\mathscr{S}}$ l'ensemble des centres de $\mathscr{S}$, la relation (6) du § X.1 montre que $\varphi(\Gamma_{\mathscr{S}}) = \Gamma_{\varphi(\mathscr{S})}$. En particulier si $\mathscr{S}$ est à centre, de centre Ω, $\varphi(\Omega)$ est le centre de $\varphi(\mathscr{S})$.

Inversement, soit $f \in \mathscr{P}_2$ et $g \in \mathscr{P}_2$ affinement équivalentes. Soit $(\lambda, \varphi) \in \mathscr{G}$ tel que $g = \lambda(f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$. Alors $\varphi(\mathscr{S}_f) = \mathscr{S}_g$. D'où :

THÉORÈME XII.2.2

Les quadriques se partagent en neuf classes de congruence affine, les classes étant constituées par les quadriques d'une nature donnée.

Equations d'une quadrique à centre

Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ une quadrique à centre. Notons Ω son centre. Pour tout repère affine $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$, d'après la formule (5) du § XII.1, on a : $(\forall M \in \mathscr{E})\ \ f(M) = f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) + C$, avec $C = \dfrac{\Delta_{\mathscr{R},f}}{\delta_{\mathscr{R},f}}$. Si donc f est représentée dans $\mathscr{R}$ par un polynôme $P(x, y, z)$, une équation de $\mathscr{S}$ dans le repère $(\Omega\,;e_1, e_2, e_3)$ est, en notant $P_2(x, y, z)$ la partie homogène de degré 2 de P :

$$(5) \qquad \boxed{P_2(x, y, z) + \frac{\Delta_{\mathscr{R},f}}{\delta_{\mathscr{R},f}} = 0}\ .$$

L'intérêt de (5) est de pouvoir être écrite sans avoir besoin de calculer Ω.

Exercice 1 : Quelle est la nature des ensembles de $\mathscr{E}$ définis dans un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ par les équations suivantes :

a) $x^2 + (\lambda + 1)y^2 + \lambda z^2 - 2yz + 2xy + 2x + 2z + 4 = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

b) $x^2 + (2\lambda^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

c) $x^2 + y^2 + dz^2 + 2axz + 2byz + 2cz = 0 \quad ((a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4)$.

d) $(x + y)^2 + z(\lambda x + \mu y + \nu z) + ax + by + cz + d = 0 \quad ((\lambda, \mu, \nu, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^7)$.

e) $x^2 + 2\lambda yz - 2ax = 0 \quad ((\lambda, a) \in \mathbb{R}^2)$.

f) $(x + y + z)^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0 \quad ((a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$.

g) $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2zx - 2xy - \lambda = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Exercice 2 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. On donne deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de $\mathscr{E}$ non coplanaires. Montrer que le lieu des droites rencontrant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ suivant des angles égaux est l'union de deux paraboloïdes hyperboliques.

Exercice 3 : On donne deux points distincts A et B de $\mathscr{E}$ et deux droites non coplanaires $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne passant ni par A ni par B. Quel est le lieu des centres des quadriques à centre contenant A, B, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$?

Exercice 4 : Soit une conique Γ de $\mathscr{E}$ et $S \in \mathscr{E}$ non situé dans le plan de Γ. On note $\mathscr{C}$ le cône de sommet S et de directrice Γ. Montrer que $\mathscr{C}$ est contenu dans un et un seul cône $\mathscr{S}$ du second degré. Préciser $\mathscr{S} \backslash \mathscr{C}$. Dans quel cas a-t-on $\mathscr{S} = \mathscr{C}$?

Exercice 5 : Soit deux quadriques propres à centre $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$, $\mathscr{S}' = \mathscr{S}_{f'}$ ($f \in \mathscr{P}_2$, $f' \in \mathscr{P}_2$). On suppose que f_∞ et f'_∞ sont proportionnelles ; $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont-elles homothétiques ?
Reprendre le même problème avec deux paraboloïdes.

Exercice 6 : Caractériser les orbites de $\mathscr{P}_2$ pour l'action à gauche de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ sur $\mathscr{P}_2$ définie par $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \times \mathscr{P}_2 \longrightarrow \mathscr{P}_2$, $(\varphi, f) \mapsto f \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}$.

Exercice 7 : On donne la courbe paramétrée définie dans un repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$ par : $x = \dfrac{2\,at}{1+t^2}$, $y = 2\,at\,\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, $z = a\,\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ ($a > 0$ donné).
Déterminer l'unique quadrique contenant cette courbe (appelée une *quartique de Steiner*).
Réponse : $y^2 + 4\,z^2 + 2\,xy - 4\,az = 0$.

Exercice 8 : On donne la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ définie dans le repère $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$ par : $x = \dfrac{2\,t}{t^3-1}$, $y = \dfrac{1}{t-1}$, $z = \dfrac{t^2+1}{t^2+t+1}$ ($t \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$).
Déterminer les quadriques qui contiennent $\mathscr{C}$ et qui sont des cylindres.

§ XII.3 *QUADRIQUES, DROITES ET PLANS*

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique. Appelons **point singulier** de $\mathscr{S}$ tout centre de $\mathscr{S}$ qui appartient à $\mathscr{S}$; autrement dit, si $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ ($f \in \mathscr{P}_2$), les points singuliers de $\mathscr{S}$ sont les points critiques de f qui appartiennent à $\mathscr{S}_f$, i.e. les points de $\mathscr{S}_f \backslash \mathscr{V}_f$. Dans ces conditions la seule des neuf quadriques qui possède des points singuliers est le *cône du second degré :* en fait un tel cône possède un point singulier et un seul, à savoir son sommet. Une droite $\mathscr{D}$ qui passe par le sommet S d'un cône du second degré est soit incluse dans $\mathscr{S}$ (si c'est une *génératrice* de $\mathscr{S}$), soit telle que $\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \{S\}$.

On peut se demander si un cône du second degré peut contenir d'autres droites que ses génératrices. Il est facile de voir que tel n'est pas le cas, en partant de l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ du cône dans un repère convenable $\mathscr{R} = (S\,;e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$: en effet si $\mathscr{S}$ contenait une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par S, par homothéties il contiendrait le plan passant par S et $\mathscr{D}$ (privé de la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par S). Soit $ux + vy + wz = 0$ une équation de ce plan ($(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$) ; si par exemple $w \neq 0$, elle s'écrit $z = \alpha x + \beta y$, d'où $(1-\alpha^2)\,x^2 - 2\,\alpha\beta xy + (1-\beta^2)\,y^2 = 0$ sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, ce qui implique $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ et $\alpha\beta = 0$, ce qui est contradictoire (le raisonnement est le même si $w = 0$).

On prouve de même qu'une quadrique cylindre ne contient pas d'autres droites que ses génératrices.

Intersection d'une quadrique et d'une droite

THÉORÈME XII.3.1

Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ ($f \in \mathscr{P}_2$) une quadrique de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{D}$ une droite ne contenant pas de point singulier de $\mathscr{S}$, et dirigée par un vecteur $\vec{V}$ tel que $f_\infty(\vec{V}) \neq 0$. Alors card $(\mathscr{D} \cap \mathscr{S}) \in \{0, 1, 2\}$. *Le seul cas où $\mathscr{D} \cap \mathscr{S}$ est un singleton $\{A\}$ est celui où $\mathscr{D}$ est une tangente en A à $\mathscr{S}$.*

Démonstration :

Appliquons à f la formule de Taylor à l'ordre 2 en un point $A \in \mathscr{S}$:

$$(1) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(A + t\vec{V}) = f(A) + t(\mathrm{d}_A f \,.\, \vec{V}) + t^2 f_\infty(\vec{V})$$

car, pour tout point $M_0 \in \mathscr{E}$, $2\, f_\infty$ est le polynôme polaire $P_{2,\, f,\, M_0}$. Comme A n'est pas point singulier de $\mathscr{S}$, l'équation $\mathrm{d}_A f \,.\, \vec{W} = 0$ définit le plan vectoriel des vecteurs tangents en A à $\mathscr{S}$. Pour terminer, il suffit de reprendre la preuve du théorème X.3.1. ■

Lorsque $f_\infty(\vec{V}) = 0$, i.e. lorsque $\vec{\mathscr{D}}$ est une *direction à l'infini de la quadrique,* la relation (1) montre que soit $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, soit $\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \varnothing$, soit enfin card $(\mathscr{D} \cap \mathscr{S}) = 1$. Dans le cas où card $(\mathscr{D} \cap \mathscr{S}) = 1$, si $\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \{A\}$, la droite $\mathscr{D}$ *n'est pas* une tangente en A à $\mathscr{S}$ car ce cas se produit ssi $\mathrm{d}_A f \,.\, \vec{V} \neq 0$.

Nature des points d'une quadrique

THÉORÈME XII.3.2

Sur un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde elliptique, tous les points sont elliptiques. Sur un hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique, tous les points sont hyperboliques. Sur une quadrique cylindre, tous les points sont paraboliques. Sur un cône du second degré, tous les points autres que le sommet sont paraboliques.

Démonstration :

Il suffit d'utiliser des représentations locales cartésiennes dans un repère bien choisi. Raisonnons par exemple avec un hyperboloïde à une nappe, les autres cas étant analogues ou plus simples.

Soit donc $\mathscr{S}$ un hyperboloïde à une nappe, défini dans un repère affine adéquat $\mathscr{R} = (\Omega\ ;\, e_1, e_2, e_3)$ par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Donnons-

nous $M_0 \in \mathscr{S}$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0), avec $z_0 > 0$. Une représentation locale de $\mathscr{S}$ au voisinage de M_0, cartésienne dans $\mathscr{R}$ est $z = \Phi(x, y)$, avec $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$. Le calcul de

$$r_0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,, \quad s_0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad t_0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

conduit à $r_0 t_0 - s_0^2 = -(x_0^2 + y_0^2 - 1)^{-2}$, qui est < 0, donc M_0 est un point hyperbolique de $\mathscr{S}$. Même chose si $z_0 < 0$; et si $z_0 = 0$ il suffit d'exprimer localement y en fonction de (x, z) ou x en fonction de (y, z). ■

COROLLAIRE

> *Si $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique, il n'existe aucune droite contenue dans $\mathscr{S}$.*

(En effet, tout point d'une droite contenue dans une surface est soit parabolique, soit hyperbolique sur cette surface.)

Intersection d'une quadrique et d'un plan

Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ $(f \in \mathscr{P}_2)$ une quadrique et $\mathscr{F}$ un plan de $\mathscr{E}$.

Proposons-nous de décrire l'ensemble $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$, en laissant de côté le cas facile où $\mathscr{S}$ est un cylindre, qui est proposé au lecteur à titre d'exercice (cf. § XII.2).

Notons g la fonction $f|_{\mathscr{F}}$: elle est polynomiale de degré $\leqslant 2$ sur $\mathscr{F}$; son degré est $\leqslant 1$ ssi $f_\infty|_{\vec{\mathscr{F}}} = 0$. Si $f_\infty|_{\vec{\mathscr{F}}} \neq 0$, i.e. si g est de degré 2, il est clair que $g_\infty = f_\infty|_{\vec{\mathscr{F}}}$. Donc $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction affine ou d'une fonction polynomiale de degré 2 sur $\mathscr{F}$, ce qui implique ou bien que $\mathscr{F} \subset \mathscr{S}$ (nous verrons qu'en fait cela n'arrive pas), ou bien que $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est une droite affine, ou enfin que $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est l'un des ensembles décrits au § X.2. Examinons une à une les six quadriques *non cylindriques*.

• *Cas I : $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde*

Puisque f_∞ est de type $(3, 0)$, g_∞ est nécessairement de type $(2, 0)$. Donc g est de degré 2, et d'après l'étude du § X.2, $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ est *soit vide, soit un singleton, soit une ellipse.*

Remarquons que si $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ est un *singleton* $\{A\}$, toute droite de $\mathscr{F}$ passant par A est tangente à $\mathscr{S}$ (cf. théorème XII.3.1), ce qui signifie que $\mathscr{F}$ est le *plan tangent* en A à $\mathscr{S}$. Inversement, si $\mathscr{F}$ est tangent en un point $A \in \mathscr{S}$ à $\mathscr{S}$, le point A est isolé dans $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ car A est elliptique (cf. § XI.2, fig. 1), donc $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ n'est pas une ellipse, c'est donc que $\mathscr{D} \cap \mathscr{F} = \{A\}$. On notera d'après cette analyse que $\mathscr{F}$ est un plan tangent à $\mathscr{S}$ ssi g est impropre.

• *Cas II : $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à une nappe*

Choisissons un repère $\mathscr{R} = (\Omega\ ; e_1, e_2, e_3)$ tel que $\mathscr{S}$ soit défini dans $\mathscr{R}$ par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\,. \tag{2}$$

Quitte à remplacer (e_1, e_2) par $(e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta,\ -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ bien choisi, on peut supposer que $\mathscr{F}$ admet dans $\mathscr{R}$ soit l'équation $x = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, soit l'équation $z = \alpha x + \beta$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$. Dans le premier cas, il est immédiat que $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ est *une hyperbole* pour $|\lambda| \neq 1$ et l'union de *deux droites* distinctes sécantes si $|\lambda| = 1$ (et g est de degré 2).

Dans le cas où $\mathscr{F}$ admet dans $\mathscr{R}$ l'équation $z = \alpha x + \beta$, la projection Ψ de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{H} = \Omega \dotplus \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ définit une bijection affine ψ de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{H}$ qui transforme $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ en l'ensemble Γ dont l'équation dans le repère $(\Omega\ ; e_1, e_2)$ de $\mathscr{H}$, obtenue par élimination de z, est :

$$(1 - \alpha^2)\, x^2 + y^2 - 2\,\alpha\beta x - \beta^2 - 1 = 0\,. \tag{3}$$

Ici encore, g est toujours de degré 2. L'étude faite aux §§ X.1 et 2 permet de déterminer exactement l'ensemble Γ. On obtient :

Si $\alpha^2 = 1$ et $\beta = 0$, Γ est l'union de deux droites parallèles et distinctes symétriques par rapport à Ω, donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ aussi.

Si $\alpha^2 = 1$ et $\beta \neq 0$, Γ est une parabole, donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est une parabole.

Si $\alpha^2 > 1$ et $\alpha^2 - \beta^2 - 1 \neq 0$, Γ est une hyperbole, donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est une hyperbole.

Si $\alpha^2 > 1$ et $\alpha^2 - \beta^2 - 1 = 0$, Γ est l'union de deux droites distinctes sécantes, donc il en est de même de $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$.

Si $\alpha^2 < 1$, Γ est une ellipse, donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est une ellipse.

De plus, si $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est l'union de deux droites distinctes et sécantes en $A \in \mathscr{S}$, ces droites sont des tangentes en A à $\mathscr{S}$, donc $\mathscr{F}$ est le plan tangent en A à $\mathscr{S}$. Inversement, si $\mathscr{F}$ est tangent à $\mathscr{S}$ en un point $A \in \mathscr{S}$, $\mathrm{d}_A f$ est nulle sur $\vec{\mathscr{F}}$, donc $\mathrm{d}_A g = \mathrm{d}_A f\,|\vec{\mathscr{F}}$ est nulle, et puisque g est de degré 2, c'est que A est un centre de $g^{-1}(0) = \mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ qui appartient à $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$, ce qui ne peut ici arriver que si $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est l'union de deux droites distinctes sécantes en A.

Abrégeons pour la suite en énonçant seulement les résultats :

• *Cas III : $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à deux nappes*

Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est : soit vide ; soit un singleton ; soit une parabole ; soit une ellipse ; soit une hyperbole.

De plus, $\mathscr{F}$ est l'un des plans tangents à $\mathscr{S}$ ssi $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est un singleton $\{A\}$, et si c'est le cas, $\mathscr{F}$ est le plan tangent en A à $\mathscr{S}$.

• *Cas IV : $\mathscr{S}$ est un paraboloïde elliptique*

Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est : soit vide ; soit un singleton ; soit une parabole ; soit une ellipse. En outre, $\mathscr{F}$ est un plan tangent à $\mathscr{S}$ ssi $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est un singleton $\{A\}$: si c'est le cas, $\mathscr{F}$ est le plan tangent en A à $\mathscr{S}$.

• *Cas V : $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique*

Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est : soit une droite affine ; soit une parabole ; soit une hyperbole ; soit l'union de deux droites distinctes sécantes en un point $A \in \mathscr{S}$. Le dernier cas se produit ssi $\mathscr{F}$ est l'un des plans tangents à $\mathscr{S}$: si c'est le cas, $\mathscr{F}$ est le plan tangent en A à $\mathscr{S}$.

• *Cas VI : $\mathscr{S}$ est un cône du second degré*

Alors

a) si $\mathscr{F}$ passe par le sommet S de $\mathscr{S}$, $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est : soit $\{S\}$; soit une génératrice de $\mathscr{S}$; soit l'union de deux génératrices distinctes de $\mathscr{S}$.

b) Si $\mathscr{F}$ ne passe pas par le sommet S de $\mathscr{S}$, $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est : soit une ellipse ; soit une parabole ; soit une hyperbole.

De plus, pour que $\mathscr{F}$ soit l'un des plans tangents à $\mathscr{S} \setminus \{S\}$, il faut et il suffit que $\mathscr{F}$ passe par S et que $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ soit une génératrice $\mathscr{G}$ de $\mathscr{S}$. Si c'est le cas, $\mathscr{F}$ est le plan tangent à $\mathscr{S}$ en tout point $A \in \mathscr{G} \setminus \{S\}$.

Remarque 1 : Il ressort de l'étude précédente que pour aucune quadrique non cylindrique $\mathscr{S}$, lorsqu'on fait varier $\mathscr{F}$, g ne décrit l'*ensemble* des 9 classes d'équivalence affine des fonctions polynomiales de degré 2 sur un plan affine. On remarque aussi que g n'est pas toujours de degré 2 : le seul cas où g est de degré $\leqslant 1$ est celui où $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique et où $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ se réduit à une droite. Alors $\deg(g) = 1$.

Remarque 2 : Soit $\mathscr{S}$ un quadrique cylindrique. On voit aisément que : g est de degré 1 ssi $\mathscr{S}$ est un cylindre parabolique ou hyperbolique et $\vec{\mathscr{F}}$ est un plan totalement isotrope de f_∞ ; et g est constant ssi $\mathscr{S}$ est un cylindre hyperbolique et $\mathscr{F}$ est l'un de ses plans asymptotes.

Génératrices de l'hyperboloïde à une nappe ou du paraboloïde hyperbolique

Soit $\mathscr{S}$ un hyperboloïde à une nappe ($H1$) ou un paraboloïde hyperbolique (P.H.). Les droites contenues dans $\mathscr{S}$ s'appellent les **génératrices** de $\mathscr{S}$.

THÉORÈME XII.3.3

Si $\mathscr{S}$ est un $H1$ ou un P.H., *par chaque point $M_0 \in \mathscr{S}$ il passe exactement deux génératrices de $\mathscr{S}$. Leur réunion est l'intersection avec $\mathscr{S}$ du plan tangent $\mathscr{T}_{M_0}$ en M_0 à $\mathscr{S}$.*

Démonstration :

On sait déjà que $\mathscr{T}_{M_0} \cap \mathscr{S}$ est la réunion de deux génératrices de $\mathscr{S}$, distinctes et passant par M_0. Notons-les γ_1 et γ_2.

Soit $\mathscr{D}$ une génératrice de $\mathscr{S}$ passant par M_0. Si $\mathscr{D} \neq \gamma_1$ et $\mathscr{D} \neq \gamma_2$, alors $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}_{M_0}$. Dans ce cas, d'après l'étude de l'intersection d'un plan et d'une quadrique, les plans $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$) passant par $\mathscr{D}$ et γ_1 (resp. $\mathscr{D}$ et γ_2) devraient être tangents en M_0 à $\mathscr{S}$, ce qui est absurde car $\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{T}_{M_0}$ et $\mathscr{F}_2 \neq \mathscr{T}_{M_0}$. Donc $\mathscr{D} = \gamma_1$ ou $\mathscr{D} = \gamma_2$. ■

LEMME 1

a) *Soit $\mathscr{S}$ un hyperboloïde à une nappe, de centre Ω. Pour chaque génératrice γ de $\mathscr{S}$, il y a une et une seule génératrice γ' de $\mathscr{S}$ parallèle à γ et distincte de γ : c'est la symétrique de γ par rapport à Ω.*

b) *Soit $\mathscr{S}$ un paraboloïde hyperbolique : il n'y a pas sur $\mathscr{S}$ deux génératrices distinctes et parallèles.*

Démonstration :

a) Dans un repère adéquat $\mathscr{R} = (\Omega\ ; e_1, e_2, e_3)$, définissons $\mathscr{S}$ par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Quitte à remplacer (e_1, e_2) par $(e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta, -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est bien choisi, on peut supposer que γ est la génératrice d'équations $x = 1$, $y = z$ dans $\mathscr{R}$. Une droite γ' parallèle à γ est alors paramétrée dans $\mathscr{R}$ par les équations $x = a$, $y = b + \lambda$, $z = \lambda$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, λ étant le paramètre. La CNS pour que $\gamma' \subset \mathscr{S}$ s'écrit : $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \ 2\lambda b + a^2 + b^2 - 1 = 0$, ce qui équivaut à $b = 0$ et $a^2 = 1$, ce qui est le résultat annoncé.

b) Dans un repère idoine $\mathscr{R} = (\Omega\ ; e_1, e_2, e_3)$, le paraboloïde hyperbolique $\mathscr{S}$ peut être défini par l'équation $xy - z = 0$. *Les génératrices de $\mathscr{S}$ sont alors parallèles à l'une ou l'autre des directions de plan* $P = \text{Vect}\ (e_2, e_3)$ et $Q = \text{Vect}\ (e_1, e_3)$. Cela résulte du théorème XII.3.1 puisque l'ensemble des directions à l'infini de $\mathscr{S}$ est $P \cup Q$. Soit par exemple γ la génératrice d'équations $x = \alpha$, $z = \alpha y$ dans $\mathscr{R}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Une droite γ' parallèle à γ est paramétrée dans $\mathscr{R}$ par $x = a$, $y = \lambda$, $z = c + \alpha\lambda$ $((a, c) \in \mathbb{R}^2$, λ étant le paramètre). La CNS pour que $\gamma' \subset \mathscr{S}$ est alors : $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ $(a - \alpha)\lambda - c = 0$, ce qui équivaut à $a = \alpha$ et $c = 0$, i.e. à $\gamma' = \gamma$. ■

Les deux systèmes de génératrices pour $\mathscr{S}$ = un paraboloïde hyperbolique

Conservons les notations ci-dessus. Notons Γ_1 et Γ_2 les ensembles des génératrices de $\mathscr{S}$ respectivement parallèles à P et Q ; $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de l'ensemble Γ de toutes les génératrices de $\mathscr{S}$, car aucune génératrice n'est dirigée par $P \cap Q$. L'équation $xy - z = 0$ montre qu'on obtient une bijection Ψ_1 de $\mathbb{R}$ sur

Γ_1 en associant à $\alpha \in \mathbb{R}$ la génératrice $\gamma_{1,\alpha}$ d'équations $x = \alpha$, $z = \alpha y$ dans $\mathscr{R}$; et une bijection Ψ_2 de $\mathbb{R}$ sur Γ_2 en associant à $\beta \in \mathbb{R}$ la génératrice $\gamma_{2,\beta}$ d'équations $y = \beta$, $z = \beta x$ dans $\mathscr{R}$. Ces équations rendent évidentes les propriétés suivantes : si $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma' \in \Gamma_1$ et $\gamma \neq \gamma'$ (resp. $\gamma \in \Gamma_2$, $\gamma' \in \Gamma_2$ et $\gamma \neq \gamma'$), alors γ *et* γ' *sont non coplanaires*. En revanche, si $\gamma_1 \in \Gamma_1$ et $\gamma_2 \in \Gamma_2$, alors γ_1 et γ_2 *sont distinctes, coplanaires et sécantes*.

Par suite, la relation binaire définie sur $\mathscr{G}$ par

(4) $\qquad \gamma = \gamma'$ ou γ et γ' sont non coplanaires

est une *relation d'équivalence,* et il y a exactement deux classes d'équivalence qui sont Γ_1 et Γ_2. Ces propriétés d'incidence des génératrices montrent que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ ne dépend pas du repère $\mathscr{R}$ (c'était d'ailleurs évident *a priori* puisque $P \cup Q$ est l'ensemble des directions à l'infini de $\mathscr{S}$) ; Γ_1 et Γ_2 ainsi définis s'appellent **les deux systèmes de génératrices** de $\mathscr{S}$.

Pour les obtenir concrètement dans le cas où $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$, il suffit de chercher trois fonctions affines p, q, $r : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ à parties linéaires linéairement indépendantes telles que $f = pq - r$. Cela fait, les deux systèmes de génératrices sont alors définis par :

(5) $\qquad p = \alpha\ , \quad r = \alpha q \quad$ (α constante réelle arbitraire), et

(6) $\qquad q = \beta\ , \quad r = \beta q \quad$ (β constante réelle arbitraire) .

Les deux systèmes de génératrices pour $\mathscr{S}$ = un hyperboloïde à une nappe

Reprenons les notations du lemme 1 a). Soit A un point fixé arbitrairement sur $\mathscr{S}$, Δ_1 et Δ_2 les deux génératrices passant par A et Δ_2', Δ_1' les génératrices symétriques par rapport à Ω respectivement de Δ_1 et de Δ_2. Notons A' le symétrique de A par rapport à Ω. Pour chaque point $M \in \Delta_2$, soit $\gamma_1(M)$ la génératrice passant par M autre que Δ_2. Désignons par Γ_1 l'ensemble de génératrices de $\mathscr{S}$ égal à $\{\Delta_1'\} \cup \{\gamma_1(M)\}_{M \in \Delta_2}$. De même pour chaque $N \in \Delta_1$, soit $\gamma_2(N)$ la génératrice passant par N autre que Δ_1. Désignons par Γ_2 l'ensemble de génératrices de $\mathscr{S}$ égal à $\{\Delta_2'\} \cup \{\gamma_2(N)\}_{N \in \Delta_1}$. Si Γ est l'ensemble de toutes les génératrices de $\mathscr{S}$, nous allons montrer que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ caractérisée comme pour le P.H. par des propriétés d'incidence. Soit d'abord $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma' \in \Gamma_1$ et $\gamma \neq \gamma'$; si γ et γ' étaient coplanaires, nécessairement le plan (unique) qui les contient contiendrait Δ_2. Il y aurait dans ce plan trois génératrices de $\mathscr{S}$ distinctes, ce qui est impossible. Donc γ et γ' sont *non coplanaires ;* il en est de même si $\gamma \in \Gamma_2$, $\gamma' \in \Gamma_2$ et $\gamma \neq \gamma'$.

Soit ensuite $d_1 \in \Gamma_1$ et $d_2 \in \Gamma_2$. Il s'agit de montrer que d_1 et d_2 sont coplanaires et distinctes. C'est évident si $d_1 = \Delta_1$ ou si $d_2 = \Delta_2$, et facile si $d_1 = \Delta_1'$ ou $d_2 = \Delta_2'$, en raisonnant comme ci-après ; considérons le cas où $d_1 = \gamma_1(M)$ et $d_2 = \gamma_2(N)$ avec $M \in \Delta_2 \setminus \{A\}$ et $N \in \Delta_1 \setminus \{A\}$. Dans ce cas, Δ_1 et d_1 n'étant pas coplanaires, $N \notin d_1$. Soit $\mathscr{F}$ le plan passant par N et contenant d_1. Vu l'étude de l'intersection d'une quadrique et d'un plan, $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est union de d_1 et d'une seconde droite d_1' qui passe nécessairement par N. De plus $d_1' \neq \Delta_1$ car d_1 et Δ_1 sont non coplanaires. Donc $d_1' = \gamma_2(N) = d_2$, et on voit que d_1 et d_2 sont coplanaires et distinctes.

Montrons enfin que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \Delta_1$, $\gamma \neq \Delta_2$. Soit $B \in \gamma \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Le plan $\mathscr{T}$ tangent en B à $\mathscr{S}$ rencontre $\mathscr{S}$ suivant $\gamma \cup \gamma'$, où γ' est la génératrice de B autre que γ (la droite γ' ne contient pas A, car par A il ne passe que deux génératrices). Soit $\mathscr{T}_i$ le plan contenant Δ_i et passant par $B (i \in \{1, 2\})$. Notons δ_i la génératrice de $\mathscr{S}$, passant nécessairement par B, telle que $\mathscr{T}_i \cap \mathscr{S} = \Delta_i \cup \delta_i$. Si on avait $\delta_1 = \delta_2 = \gamma'$, les trois génératrices distinctes Δ_1, Δ_2 et γ' seraient contenues dans un même plan $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$, ce qui est impossible. Donc $\delta_1 = \gamma$ ou $\delta_2 = \gamma$; si $\delta_1 = \gamma$, alors γ et Δ_1 sont coplanaires, donc $\gamma \in \Gamma_2$ car grâce au lemme 1 a) et au théorème XII.3.3, Γ_2 est l'ensemble des génératrices de $\mathscr{S}$ coplanaires avec Δ_1. De même, si $\delta_2 = \gamma$, alors $\gamma \in \Gamma_1$.

En résumé :

- Si $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma' \in \Gamma_1$ et $\gamma \neq \gamma'$ (resp. si $\gamma \in \Gamma_2$, $\gamma' \in \Gamma_2$ et $\gamma \neq \gamma'$), alors γ et γ' sont *non coplanaires.*

- Si $\gamma \in \Gamma_1$ et $\gamma' \in \Gamma_2$, alors γ_1 et γ_2 sont *distinctes et coplanaires.*

Enfin $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ.

Donc la relation binaire définie sur Γ par

$$\gamma = \gamma' \quad \text{ou} \quad \gamma \text{ et } \gamma' \text{ sont non coplanaires} \tag{7}$$

est une *relation d'équivalence,* et il y a exactement deux classes d'équivalence Γ_1 et Γ_2. En conséquence la paire $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ ne dépend pas du choix de $A \in \mathscr{S}$. On dit que Γ_1 et Γ_2 sont **les deux systèmes de génératrices** de $\mathscr{S}$.

Pour les obtenir concrètement dans le cas où $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ $(f \in \mathscr{P}_2)$, il suffit de chercher $\rho \in \mathbb{R}^*$ et des fonctions affines p, q, $r : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ de parties linéaires linéairement indépendantes, telles que $f = \rho (p^2 + q^2 - r^2 - 1)$. Les systèmes d'équations

$$p = \cos u - \lambda \sin u\,, \quad q = \sin u + \lambda \cos u\,, \quad r = \varepsilon\lambda \quad (\varepsilon \in \{-1, 1\})\,, \tag{8}$$

où λ est un paramètre et u un réel arbitrairement fixé, ont pour solution, lorsque ε est fixé, la représentation paramétrique en λ d'une génératrice $\gamma_{\varepsilon, u}$. Les deux systèmes sont alors $\{\gamma_{1,u}\}_{u \in \mathbb{R}}$ et $\{\gamma_{-1,u}\}_{u \in \mathbb{R}}$.

On peut aussi remarquer que l'équation $p^2 - r^2 = 1 - q^2$ est satisfaite s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$p - r = \mu (1 - q) \quad \text{et} \quad 1 + q = \mu (p + r)\,, \quad \text{ou tel que} \tag{9}$$

$$p - r = \mu (1 + q) \quad \text{et} \quad 1 - q = \mu (p + r)\,. \tag{10}$$

Lorsque μ décrit $\mathbb{R}$, la génératrice définie par (9) (resp. (10)) décrit bijectivement l'un des systèmes (à l'exception de la génératrice $1 - q = 0$, $p + r = 0$ (resp. $1 + q = 0$, $p + r = 0$)). On obtient ainsi les deux systèmes.

Dans certains des exercices ci-après, $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ désigne un repère de $\mathscr{E}$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ trois droites de $\mathscr{E}$ deux à deux non coplanaires. Montrer que les droites rencontrant $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ engendrent un hyperboloïde à une nappe $\mathscr{S}$ ou un P.H. De façon précise, elles forment l'un des systèmes de génératrices de $\mathscr{S}$ si $\mathscr{S}$ est un P.H., et l'un des systèmes sauf 3 génératrices à déterminer, si $\mathscr{S}$ est un H1.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{E}$ non coplanaires et P un plan vectoriel de E qui n'est parallèle ni à $\mathscr{D}_1$ ni à $\mathscr{D}_2$. Montrer que les droites rencontrant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et parallèles à P engendrent un paraboloïde hyperbolique dont elles constituent l'un des deux systèmes de génératrices.

Exercice 3 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{E}$ non coplanaires. Une droite variable $\mathscr{G}$ rencontre $\mathscr{D}_1$ en M_1, $\mathscr{D}_2$ en M_2 et reste orthogonale à $\mathscr{D}_1$ (on suppose $\mathscr{D}_2$ non orthogonale à $\mathscr{D}_1$). Soit Γ le cercle de diamètre M_1M_2 dont le plan est orthogonal à $\mathscr{D}_1$.

a) Montrer que l'union des cercles Γ est un hyperboloïde à une nappe $\mathscr{S}_1$, et que $\mathscr{S}_1$ est aussi l'union des droites $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$, où $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont deux plans perpendiculaires passant respectivement par $\mathscr{D}_1$ et par $\mathscr{D}_2$.

b) Les droites Dr (M_1, M_2) engendrent un paraboloïde hyperbolique $\mathscr{S}_2$ (cf. exercice 2). Déterminer $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$.

c) Vérifier que le cône asymptote à $\mathscr{S}_1$ est un *cône de Hachette* (cf. exercice 3 du § XII.5 pour la définition d'un tel cône).

Exercice 4 : on donne a, b, c réels > 0. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $\mathscr{S}_{\lambda,\mu}$ l'ensemble défini dans $\mathscr{R}$ par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda zx + 2\mu yz - 2ax - 2by + 2cz .$$

a) Discuter la nature de $\mathscr{S}_{\lambda,\mu}$ suivant (λ, μ).

b) Lieu des centres des $\mathscr{S}_{\lambda,\mu}$ qui sont des quadriques à centre ?

On distinguera les hyperboloïdes à une nappe et ceux à deux nappes.

Exercice 5 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{S}$ un cône du second degré. Trouver la surface engendrée par les droites communes à deux plans tangents à $\mathscr{S}$ et perpendiculaires entre eux.

Exercice 6 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. Soit $\mathscr{S}$ l'hyperboloïde à une nappe d'équation dans $\mathscr{R}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (a, b et $c > 0$, $a \neq b$) et $\mathscr{C}$ l'ellipse de $\mathscr{S}$ du plan $z = 0$. Soit Δ la perpendiculaire commune à deux génératrices de $\mathscr{S}$ d'un même système passant par deux points de $\mathscr{C}$ symétriques par rapport au centre Ω de $\mathscr{S}$ (donc de $\mathscr{C}$). Trouver la surface engendrée par Δ.

Exercice 7 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien. Soit $\mathscr{S}$ un hyperboloïde à une nappe et $M_0 \in \mathscr{S}$. Lieu des points $M \in \mathscr{S}$ tels que les génératrices de M soient vues de M_0 sous un angle droit.

Exercice 8 : Soit $\mathscr{S}$ une quadrique propre et $S \in \mathscr{E}$.

a) Etudier le cône de sommet S circonscrit à $\mathscr{S}$. Dans le cas où c'est un cône du second degré, vérifier que le contour apparent correspondant est une conique (cf. § XI.3, exemple 4) (on pourra aussi, par analogie avec la notion de polaire d'un point par rapport à une conique vue au chapitre X développer la notion de plan polaire d'un point par rapport à une quadrique propre $\mathscr{S}$).

b) Etudier de même le cylindre circonscrit à $\mathscr{S}$ parallèlement à une direction donnée. Quand c'est un cylindre du second degré, montrer que le contour apparent correspondant est une conique.

Exercice 9 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien.

a) Le lieu des points équidistants de deux droites données non coplanaires est un paraboloïde hyperbolique.

b) Soit $\mathscr{S}$ un paraboloïde hyperbolique. Montrer qu'il y a une infinité de couples de droites non coplanaires tels que $\mathscr{S}$ soit le lieu des points équidistants de ces deux droites. Etudier la surface réglée engendrée par ces couples de droites.

Exercice 10 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. Trouver l'enveloppe des projections orthogonales des génératrices de l'hyperboloïde d'équation dans $\mathscr{R}$: $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ ($a > 0$ donné) sur le plan d'équation dans $\mathscr{R}$: $3x + 2y + z = 0$.

Exercice 11 : On suppose $\mathscr{E}$ euclidien et $\mathscr{R}$ orthonormal. On donne $\mathscr{S}$ d'équation dans $\mathscr{R}$: $x^2 - 2y^2 - 2pz = 0$ ($p > 0$ donné). Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ où passent deux génératrices orthogonales.

§ XII.4 *QUADRIQUES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE*

Dans tout ce §, $\mathscr{E}$ sera supposé euclidien.

Quadriques isométriques

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique et $\varphi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$. Puisque φ est une bijection affine, $\varphi(\mathscr{S})$ est une quadrique de même nature que $\mathscr{S}$. Deux quadriques $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont dites **isométriques** ssi il existe $\varphi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}'$. On définit ainsi une *relation d'équivalence* sur l'ensemble des quadriques de $\mathscr{E}$, que nous appellerons aussi **congruence modulo Is** $(\mathscr{E})$. En vertu des résultats vus au § VI.1, pour que deux quadriques $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ soient isométriques, il faut et il suffit qu'il existe une bijection isométrique $\alpha : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}'$ (et s'il en est ainsi, α est induite par un et un seul élément $\varphi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$).

Le problème central de ce § est la *classification métrique* des 9 quadriques : on entend par là la caractérisation des classes de congruence mod **Is** $(\mathscr{E})$ des quadriques. Nous nous bornerons à la classification métrique des cônes du second degré et des 5 quadriques propres, laissant celle des quadriques cylindres, plus facile, au lecteur à titre d'exercice.

Directions principales

Pour toute quadrique $\mathscr{S}$, nous noterons $\mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ l'ensemble $\{f \in \mathscr{P}_2 \mid \mathscr{S} = \mathscr{S}_f\}$. On sait que $\mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ est une droite vectorielle privée de son origine.

Fixons une quadrique $\mathscr{S}$, et $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a : $(\lambda f)_\infty = \lambda f_\infty$; donc si u désigne l'opérateur symétrique associé à f_∞, celui associé à $(\lambda f)_\infty$ est λu. Soit $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - X)^{\alpha_j}$ le polynôme caractéristique de u (les λ_j réels distincts, les $\alpha_j \geqslant 1$). Posons $F_j = \operatorname{Ker}(u - \lambda_j \operatorname{Id}_E)$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$; d'où $u = \bigoplus_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{Id}_{F_j}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, posant $g = \lambda f$ et $v = \lambda u$, on a : $v = \bigoplus_{j=1}^{k} \lambda\lambda_j \operatorname{Id}_{F_j}$ et

$\chi_v(X) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda\lambda_j - X)^{\alpha_j}$: les sous-espaces propres de v sont les mêmes que ceux de u, et si l'on note μ_j la valeur propre de v associée à F_j, les listes $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ sont toutes proportionnelles à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

DÉFINITION XII.4.1

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique. On appelle ***ensemble des espaces vectoriels principaux*** *de $\mathscr{S}$ l'ensemble Λ de sous-espaces vectoriels de E tel que, pour tout $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$, Λ soit l'ensemble des sous-espaces propres de l'opérateur symétrique de E associé à f_∞. Tout élément non nul d'un sous-espace vectoriel principal est appelé un* ***vecteur principal*** *de $\mathscr{S}$. Toute base* ***orthonormale*** *de E formée de vecteurs principaux est appelée une* ***base principale*** *de $\mathscr{S}$.*
Si $\mathscr{S}$ est à centre, de centre Ω, on appelle ***espaces affines principaux*** *de $\mathscr{S}$ les sous-espaces affines passant par Ω et dirigés par un espace vectoriel principal. On appelle* ***repère affine principal*** *de $\mathscr{S}$ tout repère orthonormal d'origine Ω, dont les vecteurs de base sont principaux.*

Les propriétés fondamentales des opérateurs symétriques d'un espace euclidien vues au chapitre III entraînent immédiatement, pour toute quadrique $\mathscr{S}$, en notant Λ l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels principaux :

(1) $E = \bigoplus_{F \in \Lambda} F$

(2) Donc, *il existe au moins une base principale* de $\mathscr{S}$

(3) Donc, si $\mathscr{S}$ est à centre, il y a au moins un repère affine principal de $\mathscr{S}$

Isométries d'une quadrique à centre

Utilisons les notations du § VI.1. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-$\mathbb{R}$-espaces affines de $\mathscr{E}$ ayant un point commun Ω et telle que $E = \bigoplus_{i \in I} \vec{\mathscr{F}}_i$. Une isométrie $\varphi \in \mathbf{Is}\,(\mathscr{E})$ vérifie $\varphi(\mathscr{F}_i) = \mathscr{F}_i$ pour tout i ssi $\varphi(\Omega) = \Omega$, et $\varphi(\mathscr{F}_i) \subset \mathscr{F}_i$ pour tout i, et $\varphi\|_{\mathscr{F}_i} \in \mathbf{Is}_\Omega\,(\mathscr{F}_i)$ pour tout i. Ces isométries forment un sous-groupe de $\mathbf{Is}_\Omega\,(\mathscr{E})$ que nous noterons $\mathbf{Is}_\Omega\,((\mathscr{F}_i)_{i \in I})$. Il est immédiat que l'application $\mathbf{Is}_\Omega\,((\mathscr{F}_i)_{i \in I}) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{Is}_\Omega\,(\mathscr{F}_i)$, $\varphi \mapsto (\varphi\|_{\mathscr{F}_i})_{i \in I}$ est un *isomorphisme de groupes ;* en particulier $\mathbf{Is}_\Omega\,((\mathscr{F}_i)_{i \in I})$ est isomorphe au groupe produit

$\prod_{i \in I} \mathbf{O}(\vec{\mathscr{F}}_i)$, car pour chaque i, le groupe $\mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{F}_i)$ est isomorphe à $\mathbf{O}(\vec{\mathscr{F}}_i)$.

THÉORÈME XII.4.1

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique à centre, de centre Ω, et soit Λ (resp. $\mathscr{L}$) l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels (resp. affines) principaux. Le groupe $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ des isométries $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ telles que $\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$ est le groupe $\mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{L})$: il est donc isomorphe au groupe produit $\prod_{F \in \Lambda} \mathbf{O}(F)$.

Démonstration :

Fixons $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ et soit u l'opérateur associé à f_∞. On a $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$(4) \qquad (\forall M \in \mathscr{E}) \quad f(M) = f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) + C\,.$$

Puisque $\mathscr{S}$ est à centre, f_∞ est non dégénérée, i.e. u est inversible. Un élément $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ tel que $\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$ appartient nécessairement à $\mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{E})$ (cf. § XII.2). Soit $\varphi \in \mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{E})$. Pour que $\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$, il faut et il suffit, en vertu du théorème XII.2.1, qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}^*$ tel que $f \circ \varphi = \rho f$, ce qui, compte tenu de (4) et du fait que $\varphi(\Omega) = \Omega$, équivaut à :

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \quad f_\infty(\vec{\varphi}(\overrightarrow{\Omega M})) = \rho f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) + (\rho - 1)\,C\,, \quad \text{autrement dit, à}$$

$$(5) \qquad f_\infty \circ \vec{\varphi} = \rho f_\infty\,, \quad \text{et} \quad (\rho - 1)\,C = 0\,.$$

Compte tenu que $\vec{\varphi} \in \mathbf{O}(E)$, (5) est encore équivalente à :

$$(\forall x \in E) \quad (u \circ \vec{\varphi}(x) \mid \vec{\varphi}(x)) = \rho\,(u(x) \mid x)\,, \quad \text{soit :}$$
$$(\vec{\varphi}^{\langle -1\rangle} \circ u \circ \vec{\varphi}(x) \mid x) = (\rho u(x) \mid x)\,,$$

c'est-à-dire (du fait que $\vec{\varphi}^{\langle -1\rangle} \circ u \circ \vec{\varphi} = \vec{\varphi}^* \circ u \circ \vec{\varphi}$ est autoadjoint) à : $\vec{\varphi}^{\langle -1\rangle} \circ u \circ \vec{\varphi} = \rho u$, ou :

$$(6) \qquad u \circ \vec{\varphi} = \rho\,(\vec{\varphi} \circ u)\,.$$

a) Montrons que, si (5) est vraie, alors $\rho = 1$. D'abord, $f_\infty \circ \vec{\varphi}$ a même signature que f_∞, donc f_∞ et ρf_∞ ont même signature, et comme $\dim(E) = 3$ est impair, cela entraîne $\rho > 0$, car f_∞ est non dégénérée. Ensuite, si λ est une valeur propre de u, à cause de (6), on voit que $\vec{\varphi}(\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)) \subset \mathrm{Ker}\,(u - \rho\lambda\,\mathrm{Id}_E)$, d'où l'on déduit facilement (u

étant diagonalisable) que $\lambda \mapsto \rho\lambda$ définit une bijection du spectre de u sur lui-même, ce qui (puisque $\rho > 0$) implique $\rho = 1$.

b) En fin de compte, on vient de voir que $\varphi \in \mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{E})$ vérifie $\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$ ssi :

$$f_\infty \circ \vec{\varphi} = f_\infty \,. \tag{7}$$

Il suffit alors pour conclure d'appliquer le théorème III.3.4. ■

Analysons maintenant dans le détail les divers cas possibles :

• Dans le cas général, où u possède *trois valeurs propres distinctes*, $\mathscr{S}$ admet exactement trois sous-espaces affines principaux, qui sont des droites : on les appelle les **axes principaux** de $\mathscr{S}$, que nous notons $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$. Le groupe $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ possède alors 8 éléments : ce sont les $\varphi \in \mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{E})$ telles que φ soit de la forme $\bigoplus_{i=1}^{3} \varepsilon_i \,\mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{D}}_i}$ ($\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$). C'est aussi le groupe engendré par les réflexions autour des plans $\Omega \dotplus (\vec{\mathscr{D}}_2 \oplus \mathscr{D}_3)$, $\Omega \dotplus (\vec{\mathscr{D}}_3 \oplus \vec{\mathscr{D}}_1)$, $\Omega \dotplus (\vec{\mathscr{D}}_1 \oplus \vec{\mathscr{D}}_2)$. Le groupe $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est de cardinal 4 : il est formé des 3 retournements autour des $\mathscr{D}_i$, et de $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ (c'est le célèbre groupe de Klein).

• Si u possède *une valeur propre double et une simple*, alors $\mathscr{S}$ admet exactement deux sous-espaces affines principaux, un plan appelé **le plan principal** de $\mathscr{S}$ et une droite appelée l'**axe principal** de $\mathscr{S}$. Notons-les respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{D}$ (ils sont orthogonaux). Le groupe $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est l'ensemble des $\varphi \in \mathbf{IS}_\Omega(\mathscr{E})$ telles que $\vec{\varphi}$ soit de la forme $v \oplus (\varepsilon\,\mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{D}}})$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $v \in \mathbf{O}(\vec{\mathscr{F}})$. C'est aussi le groupe engendré par la réflexion autour de $\mathscr{F}$ et les réflexions autour des plans passant par $\mathscr{D}$. Le sous-groupe $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est d'indice 2 dans $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$. Un sous-groupe remarquable de $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est le groupe des *rotations d'axe* $\mathscr{D}$. Plus précisément, $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est l'union de ces rotations et des retournements autour des droites de $\mathscr{F}$ passant par Ω. L'ensemble $\mathscr{S}$ est alors une surface de révolution au sens du § XI.4, l'axe de révolution étant $\mathscr{D}$, et étant unique. On dit dans ces conditions que $\mathscr{S}$ est une **quadrique de révolution ;** l'axe principal $\mathscr{D}$ est aussi appelé son **axe de révolution.**

• Enfin si u possède *une seule valeur propre* (nécessairement triple), i.e. si u est une *homothétie*, alors $\mathscr{S}$ admet un seul sous-espace affine principal, qui est $\mathscr{E}$ tout entier. Ce cas se produit ssi $\exists \rho \in \mathbb{R}^* \mid (\forall x \in E)\ f_\infty(x) = \rho\|x\|^2$, c'est-à-dire ssi $\mathscr{S}$ est une **sphère de centre** Ω (cf. § VI.7). Constatons que, d'après l'étude précédente, $\mathscr{S}$ est une sphère ssi $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle} = \mathbf{Is}_\Omega(\mathscr{E})$.

Classification métrique des cônes du second degré

Soit $\mathscr{S}$ un cône du second degré et $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$. L'opérateur u associé à f_∞ a exactement deux valeurs propres de même signe. On peut donc trouver $\rho \in \mathbb{R}^*$ unique tel que ρu possède deux valeurs propres strictement positives dont la plus petite soit égale à 1 et une valeur propre < 0. Le polynôme $g = \rho f$ sera alors appelé l'élément **normalisé** de $\mathscr{P}_2$ définissant $\mathscr{S}$. Soit g cet élément, et v l'opérateur associé à g_∞. Une liste des valeurs propres de v est alors $(-\beta, 1, \alpha)$, avec $\beta > 0$ et $\alpha \geqslant 1$. Dans un repère affine *principal* $\mathscr{R} = (\Omega\ ; e_1, e_2, e_3)$ tel que (e_1, e_2, e_3) soit associée à la liste $(-\beta, 1, \alpha)$ en qualité de base principale (donc orthonormale), on a :

(8) $\quad (\forall M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3)) \in \mathscr{E} \quad g(M) = -\beta x^2 + y^2 + \alpha z^2.$

L'équation écrite sous la forme :

(9) $$\boxed{-\beta x^2 + y^2 + \alpha z^2 = 0}$$

pourra être appelée une **équation réduite** (en repère orthonormal) de $\mathscr{S}$: elle est la même dans tous les repères principaux envisagés ci-dessus ; $\mathscr{S}$ est de révolution ssi $\alpha = 1$: il en est ainsi ssi $\mathscr{S}$ est un cône de révolution (au sens de § XI.4) autour de $\mathscr{D} = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_1$.

THÉORÈME **XII.4.2**

Soit $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ deux cônes du second degré, définis par les éléments $g \in \mathscr{P}_2$ et $g' \in \mathscr{P}_2$ ***normalisés,*** *et soit v et v' les opérateurs associés à g_∞ et g'_∞. Pour que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ soient* ***isométriques,*** *il faut et il suffit que $\chi_v(X) = \chi_{v'}(X)$. (Autrement dit, il faut et il suffit que les équations* ***réduites*** *de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ soient identiques).*

Démonstration :

Il est clair que la condition est suffisante. Réciproquement, supposons $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ isométriques, de sommets respectifs Ω et Ω'. Soit $\varphi \in \mathbf{Is}(\mathscr{E})$ tel que $\varphi(\mathscr{S}) = \mathscr{S}'$. On a $\varphi(\Omega) = \Omega'$. Le théorème XII.2.1 montre l'existence d'un réel $\rho \neq 0$ tel que $g' = \rho(g \circ \varphi^{\langle -1 \rangle})$, et par suite $g'_\infty = \rho(g_\infty \circ \vec{\varphi}^{\langle -1 \rangle})$.

Vu les hypothèses sur g et g', et du fait que l'opérateur associé à $g_\infty \circ \vec{\varphi}^{\langle -1 \rangle}$ est $\vec{\varphi} \circ v \circ \vec{\varphi}^{\langle -1 \rangle}$, on vérifie encore que $\rho = 1$, d'où $v' = \vec{\varphi} \circ v \circ \vec{\varphi}^{\langle -1 \rangle}$, ce qui entraîne bien $\chi_v(X) = \chi_{v'}(X)$. ■

Classification métrique des quadriques propres à centre

Soit $\mathscr{S}$ une quadrique propre à centre et $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$. Alors il existe $C_f \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$(\forall M \in \mathscr{E}) \quad f(M) = f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}) + C_f .$$

Nous noterons $\varepsilon = +1$ si $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe, $\varepsilon = -1$ si $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à deux nappes, ce qui permet d'étudier simultanément les trois cas.

Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $g = \lambda f$, on sait que $g_\infty = \lambda f_\infty$; donc $C_g = \lambda C_f$. $\lambda = -\varepsilon / C_f$ est donc la seule valeur telle que $C_g = -\varepsilon$. En définitive, on trouve un unique $g \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ tel que $C_g = -\varepsilon$: cet unique g sera appelé l'élément **normalisé** de $\mathscr{P}_2$ définissant $\mathscr{S}$. Il n'y a rien à changer à la démonstration du théorème X.4.1 pour prouver :

THÉORÈME XII.4.3

Soit $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ deux quadriques propres à centre, g et g' les éléments ***normalisés*** *de $\mathscr{P}_2$ qui les définissent, et v et v' les opérateurs associés à g_∞ et g'_∞. Pour que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ soient* ***isométriques,*** *il faut et il suffit que $\chi_v(X) = \chi_{v'}(X)$.*

Analysons maintenant les divers cas, $\mathscr{S}$ désignant ci-après une quadrique propre à centre, de centre Ω, g l'élément normalisé de $\mathscr{P}_2$ qui la définit et v l'opérateur associé à g_∞.

• *1er cas : $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde* ssi g_∞ est de signature $(3, 0)$. S'il en est ainsi, soit (λ, μ, ν) une liste des valeurs propres de v avec $0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$, et soit $\mathscr{R} = (\Omega ; e_1 e_2, e_3)$ un repère principal de $\mathscr{S}$ tel que la base orthonormale (e_1, e_2, e_3) soit associée à la liste (λ, μ, ν). On a :

$$(\forall M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \mathscr{E}) \quad g(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 - 1 .$$

L'équation écrite sous la forme :

$$\boxed{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 - 1 = 0} \tag{10}$$

représente $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$. On l'appelle une **équation réduite** (en repère orthonormal) de $\mathscr{S}$. Les équations réduites de $\mathscr{S}$ sont toutes les mêmes dans les divers repères principaux ci-dessus définis. On pose habituellement : $a = \lambda^{-1/2}$, $b = \mu^{-1/2}$, $c = \nu^{-1/2}$, de sorte que (10) s'écrit :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0} \quad , \quad \text{avec} \quad a \geqslant b \geqslant c > 0 . \tag{11}$$

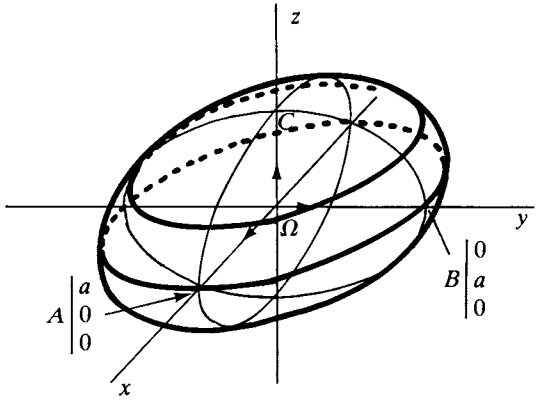


Fig. 1. (Ellipsoïde de révolution aplati).

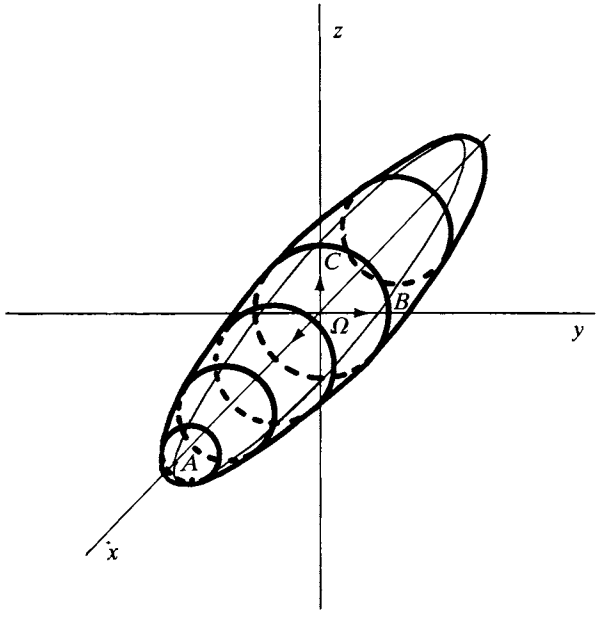


Fig. 2. (Ellipsoïde de révolution allongé).

Les nombres a, b, c sont appelés les (longueurs des) **demi-axes** de $\mathscr{S}$. Les six points $\Omega \dotplus (\pm ae_1)$, $\Omega \dotplus (\pm be_2)$, $\Omega \dotplus (\pm ce_3)$ sont appelés des **sommets** de $\mathscr{S}$. On voit que $\mathscr{S}$ est une **sphère** ssi $a = b = c$. Si $\mathscr{S}$ n'est pas une sphère, $\mathscr{S}$ est **de révolution** ssi deux des nombres a, b, c sont égaux : l'ellipsoïde $\mathscr{S}$ est dit **de révolution et aplati** ssi $a = b > c$, **de révolution et allongé** ssi

$a > b = c$. Dans le premier cas l'axe de révolution est $\Omega \dotplus \mathbb{R}e_3$, dans le second cas, c'est $\Omega \dotplus \mathbb{R}e_1$.

• *2e cas : $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à une nappe* ssi g_∞ est de signature (2, 1) et $\varepsilon = +1$. Dans ce cas, soit (λ, μ, ν) une liste des valeurs propres de v avec $0 < \lambda \leqslant \mu$ et $\nu < 0$, et soit $\mathscr{R} = (\Omega\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère principal de $\mathscr{S}$ tel que la base orthonormale (e_1, e_2, e_3) soit associée à cette liste. On a alors :

$$(\forall M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \mathscr{E}) \quad g(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 - 1\,.$$

On pose habituellement $a = \lambda^{-1/2}$, $b = \mu^{-1/2}$, $c = (-\nu)^{-1/2}$, de sorte qu'une équation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$ est

$$(12) \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0}\,, \quad \text{avec} \quad a \geqslant b > 0\,, \quad c > 0\,.$$

Ecrite sous cette forme, (11) est appelée **une équation réduite** (en repère orthonormal) de $\mathscr{S}$. Toutes les équations réduites ainsi définies de $\mathscr{S}$ sont identiques. Les nombres a et b sont appelés les (longueurs des) **demi-axes** (transverses) de $\mathscr{S}$. Les quatre points $\Omega \dotplus (\pm ae_1)$, $\Omega \dotplus (\pm be_2)$ sont appelés les **sommets** de $\mathscr{S}$. L'hyperboloïde $\mathscr{S}$ est **de révolution** ssi $a = b$. Dans ce cas l'axe de révolution est $\mathscr{D} = \Omega \dotplus \mathbb{R}e_3$, et il est clair que $\mathscr{S}$ est *l'union des droites transformées par rotation arbitraire autour de $\mathscr{D}$ d'une génératrice quelconque de $\mathscr{S}$*. Réciproquement, si $\mathscr{D}$ et Δ sont deux droites ni orthogonales ni coplanaires, l'union des transformées de Δ par rotation arbitraire autour de $\mathscr{D}$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe d'axe de révolution $\mathscr{D}$ (cf. exercice 1). Le cercle section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = 0$ dans $\mathscr{R}$ est alors appelé le *cercle de gorge* de l'hyperboloïde de révolution $\mathscr{S}$.

• *3e cas : $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à deux nappes* ssi g_∞ est de signature (2, 1) et $\varepsilon = -1$. Dans ce cas, soit (λ, μ, ν) une liste des valeurs propres de v avec $0 < \lambda \leqslant \mu$ et $\nu < 0$, et soit $\mathscr{R} = (\Omega\,; e_1, e_2, e_3)$ un repère principal de $\mathscr{S}$ tel que la base orthonormale (e_1, e_2, e_3) corresponde à cette liste. On a :

$$(\forall M = \Omega \dotplus (xe_1 + ye_2 + ze_3) \in \mathscr{E}) \quad g(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 1\,.$$

On pose habituellement $a = \lambda^{-1/2}$, $b = \mu^{-1/2}$, $c = (-\nu)^{-1/2}$, de sorte qu'une équation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$ est

$$(13) \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0} \quad \text{avec} \quad a \geqslant b > 0\,, \quad c > 0\,.$$

Ecrite ainsi, (13) est appelée une **équation réduite** (en repère orthonormal) de $\mathscr{S}$. Toutes ces équations réduites ainsi définies sont identiques. Le nombre c est appelé (la longueur du) **demi-axe** (transverse) de $\mathscr{S}$. Les deux points $\Omega \dotplus (\pm ce_3)$ sont appelés **les sommets** de $\mathscr{S}$; $\mathscr{S}$ est **de révolution** ssi $a = b$; dans ce cas l'axe de révolution est $\Omega \dotplus \mathbb{R}e_3$.

Classification métrique des paraboloïdes

Contentons-nous d'exposer brièvement les résultats, laissant au lecteur le soin de reconstituer les détails des démonstrations.

Soit $\mathscr{S}$ un paraboloïde ; pour chaque $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$, notons u_f l'oprérateur associé à f_∞ ; zéro est valeur propre simple de u_f. Le paraboloïde est elliptique ssi f_∞ est de type (2, 0) (i.e. ssi les valeurs propres non nulles de u_f sont de même signe) ; il est hyperbolique ssi f_∞ est de type (1, 1) (i.e. ssi u_f possède en plus de 0 une valeur propre > 0 et l'autre < 0). L'espace principal correspondant à la valeur propre 0 de u_f est une droite vectorielle, évidemment direction à l'infini de $\mathscr{S}$. Nous l'appellerons **direction à l'infini singulière** de $\mathscr{S}$. Lorsque $\mathscr{S}$ est elliptique, c'est d'ailleurs la seule direction à l'infini.

On dit que $\mathscr{S}$ est **de révolution** ssi ses sous-$\mathbb{R}$-ev principaux sont : sa direction à l'infini singulière et un plan (l'orthogonal dans E de la direction à l'infini singulière).

Fixant $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$, pour que $\mathscr{S}_f$ soit de révolution, il faut et il suffit que $\chi_{u_f}(X) = -X(X-\lambda)^2$ avec un $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Un autre cas particulier est celui où $\chi_{u_f}(X)$ est de la forme :

$$\chi_{u_f}(X) = X(\lambda^2 - X^2) \tag{14}$$

avec un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ pour un $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$. Dans ce cas, χ_{u_f} est de cette forme pour toute $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$. On dit alors que $\mathscr{S}$ est un **paraboloïde hyperbolique équilatère.**

Pour normaliser f, choisissons $g \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ tel que la valeur propre de plus grande valeur absolue de u_f soit égale à $+1$. Si $\mathscr{S}$ est un paraboloïde hyperbolique équilatère il existe deux tels g, opposés l'un de l'autre, un et un seul dans tous les autres cas. Les $g \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ ainsi définis seront appelés éléments **normalisés** de $\mathscr{P}_2$ définissant $\mathscr{S}$ (quand il y en a deux, disons g et $-g$, on a : $\chi_{u_g}(X) = \chi_{u_{-g}}(X)$).

Soit $f \in \mathscr{I}_2(\mathscr{S})$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E principale pour $\mathscr{S}$ (donc orthonormale) telle que $\mathscr{D} = \mathbb{R}e_3$ soit la direction singulière à l'infini de $\mathscr{S}$. Dans un repère $(O\,; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$, une équation de $\mathscr{S}$ est

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\,, \quad \text{avec} \quad \gamma\lambda\mu \neq 0\,. \tag{15}$$

Par un calcul immédiat, on en déduit qu'*il existe un et un seul point*

$S \in \mathscr{S}$ tel que le plan tangent $\mathscr{T}_S$ en S à $\mathscr{S}$ soit orthogonal à $\mathscr{D}$. Ce point est appelé **le sommet** de $\mathscr{S}$.

Soit g un élément **normalisé** de $\mathscr{P}_2$ définissant $\mathscr{S}$, et soit v l'opérateur associé à g_∞. On a donc $\chi_v(X) = -X(X-1)(X-k)$ avec $k \neq 0$ et $-1 \leqslant k \leqslant 1$. Notons (e_1, e_2, e_3) une base principale de $\mathscr{S}$ telle que e_1 soit associée à la valeur propre 1 de v, e_3 à la valeur propre 0 ($\mathscr{D} = \mathbb{R}e_3$ est donc la direction à l'infini singulière de $\mathscr{S}$). Dans le repère $\mathscr{R} = (S\,;e_1, e_2, e_3)$ une équation de $\mathscr{S}$ est :

$$(16) \qquad \boxed{x^2 + ky^2 - 2pz = 0}\,, \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{R}^*.$$

En changeant, si besoin est, e_3 en $-e_3$, on peut supposer $p > 0$. Avec cette condition, (16) est appelée une **équation réduite** (en repère orthonormal) de $\mathscr{S}$. Dans tous les repères définis ci-dessus, les équations réduites de $\mathscr{S}$ sont identiques (y compris le cas du paraboloïde hyperbolique équilatère).

On définit une application ϖ sur l'ensemble $\mathfrak{p}$ des paraboloïdes de $\mathscr{E}$ en associant, à chaque $\mathscr{S} \in \mathfrak{p}$, l'élément (k, p) de $([-1, 1]\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}_+^*$ défini par (16) avec la condition $p > 0$. Il est évident que ϖ est surjective. La classification métrique des paraboloïdes est alors résolue par le théorème suivant, que le lecteur vérifiera :

THÉORÈME XII.4.4

> *Avec les notations ci-dessus, les fibres de ϖ sont les classes de paraboloïdes isométriques. En d'autres termes, deux paraboloïdes $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont* ***isométriques*** *ssi $\varpi(\mathscr{S}) = \varpi(\mathscr{S}')$.*

Dans les conditions de (16) (avec $p > 0$), $\mathscr{S}$ est *de révolution* (au sens : avoir une valeur propre double) ssi $k = 1$. S'il en est ainsi, $\mathscr{S}$ est de révolution au sens du § XI.4, avec $S + \mathbb{R}e_3$ comme axe de révolution. Nous proposons en exercice (cf. exercice 2) la détermination des groupes $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ lorsque $\mathscr{S}$ est un paraboloïde ; de cet exercice il résulte que $\mathscr{S}$ n'est une surface de révolution (au sens du § XI.4) *que* si $k = 1$.

Sur l'équation (16), on reconnaît que $\mathscr{S}$ est un *paraboloïde hyperbolique équilatère* ssi $k = -1$.

Exercice 1 : Soit $\mathscr{D}$ et Δ deux droites non orthogonales et non coplanaires de $\mathscr{E}$. Montrer que par rotation de Δ autour de $\mathscr{D}$, on obtient un hyperboloïde de révolution à une nappe $\mathscr{S}$. Etudier les groupes $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ et $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{S}$ un paraboloïde de $\mathscr{E}$.

a) Si $\mathscr{S}$ est elliptique et de révolution, d'axe de révolution $\mathscr{D}$, $\mathbf{Dep}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est le groupe des rotations d'axe $\mathscr{D}$ et $\mathbf{Is}_{\langle\mathscr{S}\rangle}$ est le groupe engendré par les réflexions autour des plans méridiens.

b) Si $\mathscr{S}$ est hyperbolique équilatère, $\mathbf{Is}_{\langle \mathscr{S} \rangle}$ est isomorphe au groupe du carré, et $\mathbf{Dep}_{\langle \mathscr{S} \rangle}$ à $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^2$.

c) Si $\mathscr{S}$ est elliptique et non de révolution, ou hyperbolique et non équilatère, $\mathbf{Is}_{\langle \mathscr{S} \rangle}$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^2$. On précisera $\mathbf{Dep}_{\langle \mathscr{S} \rangle}$.

Exercice 3 : Trouver les normales à un ellipsoïde $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$ qui s'éloignent le plus du centre Ω de $\mathscr{S}$ (Mannheim).

Exercice 4 : Lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques équilatères passant par une hyperbole donnée ; des paraboloïdes de révolution passant par une ellipse donnée.

Exercice 5 : On donne un hyperboloïde $\mathscr{S}$ à une nappe. On prend trois génératrices distinctes *dans un même système*. Montrer que le volume du parallélépipède construit avec ces trois génératrices ne dépend pas du choix de ces génératrices.

Exercice 6 : Ensemble des plans et lieu des centres des ellipses tracées sur un ellipsoïde donné, soumises à la seule condition qu'elles renferment une aire constante.

Exercice 7 : Lieu des foyers des intersections d'un ellipsoïde $\mathscr{S}$ avec les plans passant par le centre Ω de $\mathscr{S}$.

Exercice 8 : Soit $\mathscr{S}$ un hyperboloïde à une nappe. Montrer que le lieu des points de $\mathscr{S}$ où passent deux génératrices de $\mathscr{S}$ orthogonales est l'intersection de $\mathscr{S}$ avec une sphère.

Exercice 9 : Soit a, b, c, α, β, γ réels > 0 tels que $\dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{\beta}{b} + \dfrac{\gamma}{c} = 1$. On donne un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ et les surfaces $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ d'équations respectives dans $\mathscr{R}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et $\dfrac{\alpha^2}{x^2} + \dfrac{\beta^2}{y^2} + \dfrac{\gamma^2}{z^2} - 1 = 0$. Montrer que $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont tangentes en 8 points, et que les plans tangents en ces 8 points forment un polyèdre convexe de volume $\dfrac{4}{3}\dfrac{(abc)^{3/2}}{(\alpha\beta\gamma)^{1/2}}$.

Exercice 10 : Soit $\mathscr{S}$ l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ dans un repère orthonormal donné $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{E}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$. Soit Γ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan $x = h\,(0 < h < a)$. Prouver que les normales à $\mathscr{S}$ en les points de Γ rencontrent deux droites fixes, situées dans les plans $y = 0$ et $z = 0$.

Exercice 11 : Lieu des sommets des cônes du second degré passant par un cercle donné de $\mathscr{E}$ et dont un axe principal passe par un point donné de $\mathscr{E}$.

Exercice 12 : Soit $\mathscr{S}$ un ellipsoïde et trois cylindres circonscrits à $\mathscr{S}$ (cf. exercice 8 du § XII.3) dont les directions de génératrices sont deux à deux orthogonales. Montrer que la somme des carrés des aires des sections droites de ces cylindres est constante.

Exercice 13 : Soit $\mathscr{S}$ un paraboloïde de $\mathscr{E}$. Lieu des foyers des paraboles tracées sur $\mathscr{S}$.

Exercice 14 : Soit $\mathscr{S}$ un paraboloïde hyperbolique, de sommet $\mathscr{S}$. Trouver la surface engendrée par les droites passant par S et orthogonales aux génératrices de $\mathscr{S}$.

Exercice 15 : $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R}$. Soit Γ la trajectoire de la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}$, où les coordonnées (λ, μ, ν) de f dans $\mathscr{R}$ sont définies par :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \lambda(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \mu(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad \nu(t) = t\,.$$

Lieu des sommets des paraboloïdes contenant Γ.

Exercice 16 : $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R}$. Soit $\mathscr{C}$ la parabole de $\mathscr{E}$ d'équations dans $\mathscr{R}$: $z = 0$, $y^2 - 2px = 0$ $(p > 0)$, et A et B les deux points de coordonnées dans $\mathscr{R}$: (a, b, c) et $(a, b, -c)$. On suppose $b^2 - 2ap \neq 0$.

a) Lieu des sommets des paraboloïdes contenant $\mathscr{C}$ et passant par A et B.

b) Séparer, sur le lieu trouvé, les sommets des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques. Y a-t-il des paraboloïdes hyperboliques équilatères ?

Exercice 17 : Combien existe-t-il d'hyperboloïdes de révolution passant par trois des arêtes d'un cube ?

Exercice 18 : Montrer qu'il existe un ellipsoïde tangent à chacune des faces d'un tétraèdre donné au centre de gravité de cette face. Quel est le centre de cet ellipsoïde ?

§ XII.5 *QUELQUES PROBLÈMES CLASSIQUES SUR LES QUADRIQUES*

Problème 1 : Reconnaître si une quadrique est de révolution

Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f$ une quadrique $(f \in \mathscr{P}_2)$, supposée *non sphérique* et *non cylindrique* (si E est muni d'une *base orthonormale* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on reconnaît instantanément que $\mathscr{S}$ est sphérique à son équation). Notons u l'opérateur associé à la forme quadratique f_∞. L'étude du § XII.3 montre que *$\mathscr{S}$ est de révolution ssi u admet une valeur propre double* (ce résultat étant également valable lorsque $\mathscr{S}$ est un cylindre, comme on peut s'en assurer aisément, sauf si la valeur propre double est nulle, cas du cylindre parabolique que l'on reconnaît facilement). Or, du fait que u est diagonalisable, pour qu'il admette une valeur propre double, il faut et il suffit qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que *le rang de $u - \rho\,\mathrm{Id}_E$ soit* 1. Cette dernière condition permet de reconnaître aisément si $\mathscr{S}$ est de révolution. En effet, soit f_∞ définie dans une base orthonormale $\mathscr{B}$ par sa matrice M :

$$(1) \qquad M = \begin{bmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{bmatrix}.$$

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = M$. Pour fixer les idées, traitons le cas où $BB'B'' \neq 0$ (le cas où $BB'B'' = 0$ est encore plus facile). Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Pour que $\mathrm{rg}\,(u - \rho\,\mathrm{Id}_E) = 1$, i.e. pour que $\mathrm{rg}\,(M - \rho I_3) = 1$, il faut et il suffit que soient satisfaits les deux systèmes suivants de relations :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (A' - \rho)(A'' - \rho) = B^2 \\ (A'' - \rho)(A - \rho) = B'^2 \\ (A - \rho)(A' - \rho) = B''^2 \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} (A - \rho)\,B = B'B'' \\ (A' - \rho)\,B' = B''B \\ (A'' - \rho)\,B'' = BB' \end{cases}$$

Or il est clair que (II) $\Rightarrow$ (I) (il suffit de multiplier membre à membre deux par deux les relations (II) et de simplifier). Donc $\mathrm{rg}\,(u - \rho\,\mathrm{Id}_E) = 1$ ssi (II) est satisfait, ce qui équivaut au système suivant, obtenu en éliminant ρ dans (II) :

$$(2) \qquad \boxed{A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}}.$$

Si on suppose ces relations (2) vérifiées, et si, en désignant par ρ_0 la valeur commune des 3 membres de (2), on a $\rho_0 \neq 0$, alors $\mathscr{S}$ est de révolution, et la direction D de l'axe de révolution $\mathscr{D}$ de $\mathscr{S}$ est $(\mathrm{Ker}\ (u - \rho_0\, \mathrm{Id}_E))^{\perp}$. Or, $\mathrm{Ker}\ (u - \rho_0\, \mathrm{Id}_E)$ est évidemment défini dans $\mathscr{B}$ par l'équation $(A - \rho_0)\, X + B''\, Y + B'\, Z = 0$, soit :

$$B'\, B''\, X + B''\, BY + BB'\, Z = 0\,, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{B} X + \frac{1}{B'} Y + \frac{1}{B''} Z = 0\,.$$

Donc un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\frac{1}{B} e_1 + \frac{1}{B'} e_2 + \frac{1}{B''} e_3$. (Si $\rho_0 = 0$, $f \in \{\mathscr{C}_i^*\}_{14 \leqslant i \leqslant 17}$).

Problème 2 : Trouver les cercles tracés sur une quadrique

Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}_f (f \in \mathscr{P}_2)$ une quadrique, et u l'opérateur associé à f_∞. On cherche les plans qui rencontrent $\mathscr{S}$ suivant un cercle (ces plans sont appelés plans de sections circulaires ou *plans cycliques* de $\mathscr{S}$). On sait déjà, d'après le § XII.3, qu'il n'y a pas d'ellipse, et *a fortiori*, pas de cercle, sur un paraboloïde hyperbolique, sur un cylindre hyperbolique ni sur un cylindre parabolique. Nous supposons donc que $\mathscr{S}$ n'est ni un P.H., ni un cylindre hyperbolique ou parabolique, ce qui revient à dire que f_∞ *n'admet aucun plan totalement isotrope.*

Désignons par $\mathscr{N}$ la forme quadratique $x \mapsto \|x\|^2$ sur E.

Soit $\mathscr{F}$ un plan affine, de plan directeur F ; l'intersection $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ est l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale $g = f|_{\mathscr{F}}$ sur $\mathscr{F}$; vu les hypothèses sur $\mathscr{S}$, elle est de degré 2 exactement, et $g_\infty = f_\infty|_F$. D'après le § X.4, pour que $\mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ soit un cercle (éventuellement réduit à son centre), il faut et il suffit que $\mathscr{F} \cap \mathscr{S} \neq \varnothing$ et que g_∞ *soit proportionnelle* à $\mathscr{N}|_F$. Les plans cycliques sont donc à chercher parmi ceux qui vérifient :

(3) $\quad g_\infty$ est proportionnelle à $\mathscr{N}|_F$.

Or la condition (3) signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que F soit un plan vectoriel totalement isotrope de $f_\infty - \lambda \mathscr{N}$. Un tel λ ne peut exister que si $f_\infty - \lambda \mathscr{N}$ est dégénérée, i.e. que si λ *est valeur propre de* u (car si F est totalement isotrope pour $Q_\lambda = f_\infty - \lambda \mathscr{N}$, F est inclus dans son Q_λ-orthogonal G, et alors $\dim (F) + \dim (G) \geqslant 4 > 3 = \dim (E)$). En fin de compte, (3) équivaut à :

(4) $\quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda$ est valeur propre de u,
et F est un plan totalement isotrope de $f_\infty - \lambda \mathscr{N}$.

Considérons alors une base principale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathscr{S}$, et notons λ_i la valeur propre de u associée à e_i ($i \in \{1, 2, 3\}$), en supposant la numérotation choisie pour que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Les plans totalement isotropes de $f_\infty - \lambda_i \mathscr{N}$ sont définis dans $\mathscr{B}$ par les équations suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \text{si} \quad i = 1 : & (\lambda_2 - \lambda_1)\, Y^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\, Z^2 = 0 \\ \text{si} \quad i = 2 : & (\lambda_1 - \lambda_2)\, X^2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\, Z^2 = 0 \\ \text{si} \quad i = 3 : & (\lambda_1 - \lambda_3)\, X^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)\, Y^2 = 0\,. \end{cases}$$

- *Si* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (cas où $\mathscr{S}$ est une sphère), $f_\infty - \lambda_i \mathscr{N} = 0$. Tous les plans de

E sont totalement isotropes pour $f_\infty - \lambda_i \mathcal{N}$: on retrouve le fait bien connu que tout plan qui rencontre une sphère la rencontre suivant un cercle.

• *Si* $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ *ou* $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$ (cas où $\mathcal{S}$ est de révolution), on voit d'après (5) que les seuls plans vectoriels F vérifiant (4) sont les plans orthogonaux à l'axe de révolution de $\mathcal{S}$: les seuls cercles sur $\mathcal{S}$ sont donc les cercles parallèles relatifs à cet axe de révolution.

• *Si* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, on voit d'après (5) qu'il ne peut y avoir de plans totalement isotropes pour $f_\infty - \lambda_i \mathcal{N}$ que pour $i = 2$, i.e. lorsque λ_i est *la valeur propre médiane* de u. Les plans vectoriels F vérifiant (4) sont alors les deux plans d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\, X - \varepsilon \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}\, Z = 0 \quad (\varepsilon \in \{-1, 1\}). \tag{6}$$

Les plans cycliques sont donc ceux dont la direction est donnée par (6) et qui rencontrent effectivement $\mathcal{S}$.

Remarque 1 : Si l'on connaît *a priori* un cercle de $\mathcal{S}$, il suffit pour avoir la seconde direction de plans cycliques de faire passer une sphère par le cercle connu et de déterminer le second cercle suivant lequel cette sphère coupe (éventuellement) $\mathcal{S}$.

Problème 3 : Trouver la classe de congruence isométrique de l'intersection d'un plan et d'une quadrique

Bornons-nous au cas d'une quadrique $\mathcal{S}$ à centre, de centre Ω. Nous supposerons même que $\mathcal{F}$ est un plan passant par Ω (en fait, si $\mathcal{F}$ ne passe pas par Ω, on peut se ramener en général à ce cas en changeant $\mathcal{S}$ (cf. exercice 7)). Soit donc $\mathcal{F}$ défini par $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{\Omega M} \mid \vec{v}) = 0\}$, où $\vec{v} \in E$ est unitaire, et $\mathcal{S}$ défini par l'équation $Q(\overrightarrow{\Omega M}) - \varepsilon = 0$ ($\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$), où Q est la forme quadratique sur E telle que $M \mapsto Q(\overrightarrow{\Omega M}) - \varepsilon$ soit le polynôme *normalisé* qui définit $\mathcal{S}$. L'intersection $\Gamma = \mathcal{F} \cap \mathcal{S}$ est l'ensemble des zéros du polynôme sur $\mathcal{F}$ défini par $M \mapsto q(\overrightarrow{\Omega M}) - \varepsilon$, où $q = Q \mid \vec{\mathcal{F}}$. La connaissance de Γ *à isométrie près* sera totale ssi on connaît $\mathrm{Tr}\,(v)$ et $\det\,(v)$, v étant l'opérateur associé à q. Désignons par u l'opérateur associé à Q.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E telle que $e_3 = \vec{v}$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(Q) = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(q) = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(v)} & \times \\ & & \times \\ \hline \times & \times & Q(\vec{v}) \end{array}\right].$$

D'où immédiatement : $\mathrm{Tr}\,(u) = Q(\vec{v}) + \mathrm{Tr}\,(v)$.

Puisque $\mathcal{S}$ est à centre, u est inversible. Soit $[b_{ij}] = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u^{-1})$; d'où $b_{33} = (u^{-1}(\vec{v}) \mid \vec{v})$.

En calculant $[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u)]^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u^{-1})$, on obtient aussi : $b_{33} = \dfrac{\det\,(v)}{\det\,(u)}$, d'où $\det\,(v) = \det\,(u) \times (u^{-1}(\vec{v}) \mid \vec{v})$. Notons $\tilde{u} = \det\,(u) \times u^{-1}$ ($\tilde{u}$ s'appelle le *contragrédient* de u, et sa matrice dans toute base de E est la complémentaire de celle de u). On vient de voir : $\det\,(v) = (\tilde{u}(\vec{v}) \mid \vec{v})$. En définitive, les invariants cherchés

sont :

(7)
$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(v) &= \mathrm{Tr}\,(u) - Q(\vec{v}) = \mathrm{Tr}\,(u) - (u(\vec{v}) \mid \vec{v}) \\ \det\,(v) &= (\tilde{u}(\vec{v}) \mid \vec{v}) \end{aligned}}$$

Dans le cas où Γ est une conique, il est intéressant de chercher ses directions principales et ses sommets. Nécessairement, Γ est à centre, de centre Ω. Il s'agit de trouver les directions propres de v. On peut le faire sans aucune hypothèse sur Γ : soit ϖ la projection orthogonale de E sur $\vec{\mathscr{F}}$. On a : $v = \varpi \circ (u \mid \vec{\mathscr{F}})$. Supposons E et F orientés, pour pouvoir utiliser le produit mixte. Les vecteurs principaux de v sont les $\vec{V} \in \vec{\mathscr{F}} \setminus \{0\}$ tels que $[v(\vec{V}), \vec{V}] = 0$ (cf. § V.5, formule (13)). Or, on a $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$ tel que

$$(\forall V \in \vec{\mathscr{F}}) \quad [v(\vec{V}), \vec{V}] = \varepsilon' [v(\vec{V}), \vec{V}, \vec{v}] .$$

De plus, si $\vec{V} \in \mathscr{F}$: $[v(\vec{V}), \vec{V}, \vec{v}] = [u(\vec{V}), \vec{V}, \vec{v}]$ car $v = \varpi \circ (u \mid \vec{\mathscr{F}})$. Les directions principales de v sont donc dirigées par les vecteurs $\vec{V} \in E \setminus \{0\}$ qui vérifient les deux équations :

(8) $$(\vec{V} \mid \vec{v}) = 0 , \quad \text{et}$$

(9) $$[u(\vec{V}), \vec{V}, \vec{v}] = 0 .$$

L'équation (8) définit $\vec{\mathscr{F}}$ et (9) définit *en général* un cône du second degré de sommet 0_E dans E.

Remarque 2 : Lorsque $\mathscr{S}$ est un *cône du second degré* (i.e. $\varepsilon = 0$), $\mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ est soit $\{\Omega\}$, soit une droite unique, soit une gerbe de deux droites distinctes sécantes en Ω. D'après (7), il s'agit d'une droite unique ssi $(\tilde{u}(\vec{v}) \mid \vec{v}) = 0$. Or le cas de la droite unique est celui où $\mathscr{F}$ est *tangent* à $\mathscr{S}$ (cf. § XII.3). Donc l'équation $(\tilde{u}(\overrightarrow{\Omega M}) \mid \overrightarrow{\Omega M}) = 0$ définit la surface $\tilde{\mathscr{S}}$ engendrée par les normales en Ω aux plans tangents à $\mathscr{S}$. On obtient ainsi un cône du second degré de sommet Ω appelé le **cône supplémentaire** de $\mathscr{S}$. Notons aussi que : $\mathscr{F}$ est tangent à $\mathscr{S} \Leftrightarrow \det\,(v) = 0 \Leftrightarrow Q \mid \vec{\mathscr{F}}$ est dégénérée $\Leftrightarrow \vec{\mathscr{F}}$ est un plan Q-isotrope (on justifie ainsi l'exemple 2 du § I.5).

Remarque 3 : Toujours lorsque $\mathscr{S}$ est un *cône du second degré* (i.e. $\varepsilon = 0$), soit $\mathscr{F}$ un plan ne passant pas par Ω. On a déjà vu au § XII.3 que $\Gamma = \mathscr{S} \cap \mathscr{F}$ est une *conique* $\Gamma = g^{-1}(0)$, avec $g(M) = Q(\overrightarrow{\Omega M})$ pour tout $M \in \mathscr{F}$; g est polynomiale de degré 2 sur $\mathscr{F}$ et $g_\infty = Q \mid \vec{\mathscr{F}}$. La connaissance de Γ *à similitude près* sera totale ssi on connaît $\mathrm{Tr}\,(v)$ et $\det\,(v)$, où v est l'opérateur associé à g_∞. Nous sommes alors ramenés au problème résolu par (7). En particulier, tenant compte de la remarque 2, on voit que *Γ est une parabole ssi le plan $\mathscr{F}_\Omega = \Omega \dotplus \vec{\mathscr{F}}$ est tangent à $\mathscr{S}$*. Les directions principales de $\Gamma = \mathscr{F} \cap \mathscr{S}$ sont encore données par (8) et (9). Lorsque Γ

est à centre, son centre est le point d'intersection ω avec $\mathscr{F}$ de la droite passant par Ω, dirigée par la droite vectorielle Q-orthogonale de $\vec{\mathscr{F}}$, car il est immédiat que la fonction $\mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto g(M) - g_\infty(\overrightarrow{\omega M})$ est constante, égale à $Q(\overrightarrow{\omega\Omega})$.

Exercice 1 : Lieu des centres des hyperboles *équilatères* tracées sur un hyperboloïde donné de $\mathscr{E}$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{S}$ un hyperboloïde, de centre Ω. Trouver les plans passant par Ω qui rencontrent $\mathscr{S}$ suivant une hyperbole équilatère.

Exercice 3 : *a*) Une *section plane* d'une quadrique $\mathscr{S}$ à centre, de centre Ω, est dite *principale* ssi c'est l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan passant par Ω et orthogonal à une direction principale. Etudier les sections principales en discutant suivant $\mathscr{S}$.

b) On suppose que $\mathscr{S}$ est un cône du second degré *non de révolution*. Vérifier qu'il y a exactement *deux* sections principales formées de deux génératrices de $\mathscr{S}$ sécantes.

c) Un cône du second degré non de révolution $\mathscr{S}$ est appelé *cône de Hachette* (1) ssi ses directions de plans cycliques sont les orthogonales des deux génératrices d'une section principale de $\mathscr{S}$ (laquelle ?).

Soit g un élément de $\mathscr{P}_2$ définissant un cône du second degré $\mathscr{S}$, et soit v l'opérateur associé à g_∞. On note $\chi_v(X) = -X^3 + TX^2 - \Theta X + \Delta$. Prouver que $\mathscr{S}$ est de Hachette ssi $T^3 - 4\,\Theta T + 8\,\Delta = 0$.

Exercice 4 : *a*) On donne une quadrique propre $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}$. Trouver le lieu des points $S \in \mathscr{E}$ tels que le *cône circonscrit* à $\mathscr{S}$ depuis S (cf. exercice 8 du § XII.3) soit de révolution. On trouvera en général deux coniques, dont les sommets de l'une sont les foyers de l'autre, et dont les plans sont perpendiculaires. Elles sont appelées *coniques focales* de $\mathscr{S}$).

b) On donne une conique Γ de $\mathscr{E}$. Trouver le lieu des sommets des cônes du second degré de révolution contenant Γ (c'est le problème de Dandelin (1), avec un résultat analogue à celui de *a*)).

Exercice 5 : *a*) Un cône du second degré est dit *équilatère* ssi il contient trois génératrices deux à deux orthogonales. Avec les notations de l'exercice 3 *c*), prouver que $\mathscr{S}$ est équilatère ssi $T = 0$. En déduire que $\mathscr{S}$ contient une infinité de trièdres trirectangles (cf. exercice 5 du § III.3).

b) Soit $\mathscr{S}$ une quadrique propre de $\mathscr{E}$. Lieu des points $S \in \mathscr{E}$ tels que le cône circonscrit à $\mathscr{S}$ depuis S (cf. exercice 8 du § XII.3) soit équilatère.

c) Soit Γ une conique de $\mathscr{E}$. Trouver le lieu des sommets des cônes équilatères de $\mathscr{E}$ contenant Γ.

Exercice 6 : On donne trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ de $\mathscr{E}$ passant par un point O et non coplanaires. Montrer qu'il y a en général quatre cônes de révolution contenant ces trois droites, et former leurs équations dans un repère $(O\,;e_1, e_2, e_3)$ où e_i dirige $\mathscr{D}_i$, et où $\|e_i\| = 1$ pour $a \leqslant i \leqslant 3$.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{R} = (O\,;e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal de $\mathscr{E}$. On donne l'ellipsoïde

---

(1) Jean Nicolas Pierre *Hachette* (1769-1834), mathématicien français, auteur d'un traité de géométrie descriptive (1822).

(1) Germinal Pierre *Dandelin* (1794-1847), mathématicien belge dont les théorèmes sur les sections planes d'un cône de révolution ont fait les délices des bacheliers de la première moitié du XXe siècle.

défini dans $\mathscr{R}$ par $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ et le plan $\mathscr{V}$ d'équation dans $\mathscr{R}$: $\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0$ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, p \neq 0)$. On suppose que $\Gamma=\mathscr{S} \cap \mathscr{V}$ est une ellipse.

a) Montrer que le centre ω de Γ est le point de coordonnées (λ, μ, ν) dans $\mathscr{R}$:
$\lambda=\frac{p\alpha a^2}{\sigma}$, $\mu=\frac{p\beta b^2}{\sigma}$, $\nu=\frac{p\gamma c^2}{\sigma}$, avec $\sigma=\alpha^2 a^2+\beta^2 b^2+\gamma^2 c^2$.

b) Montrer que dans le repère $\mathscr{R}'=(\omega\,; e_1, e_2, e_3)$, Γ est définie par
$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$ et $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}+f(\omega)=0$, où $f(M)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$
pour $M=O+(xe_1+ye_2+ze_3)$.

c) En déduire qu'une équation réduite en repère orthonormal de Γ est $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0$,
avec $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=\frac{\sigma}{p^2-\sigma}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{a^2}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{b^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}\right)$ et $\frac{1}{A^2B^2}=\frac{\sigma^3}{a^2b^2c^2(p^2-\sigma)^2}$.

d) Traiter le problème analogue si $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde.

Exercice 8 : Soit $\mathscr{S}$ un ellipsoïde de centre Ω. Trouver les plans rencontrant $\mathscr{S}$ suivant une ellipse Γ telle que le cône de sommet Ω et de directrice Γ soit de révolution.
Réponse : Ce sont les plans tangents à l'un ou l'autre de trois cylindres du second degré.

Exercice 9 : Dans $\mathscr{E}$ on donne un hyperboloïde $\mathscr{S}$ à une nappe. Décrire une méthode pour calculer l'angle des deux génératrices passant par un point donné $M_0 \in \mathscr{S}$, et pour déterminer leurs bissectrices. Trouver la surface engendrée par ces bissectrices pour un angle donné.

Exercice 10 : *a*) Les 4 hauteurs d'un tétraèdre $\mathscr{T}$ donné de $\mathscr{E}$ sont tracées sur un même hyperboloïde à une nappe $\mathscr{S}$.
b) Montrer que le centre de $\mathscr{S}$, le centre de la sphère circonscrite à $\mathscr{T}$ et l'isobarycentre des sommets de $\mathscr{T}$ sont alignés.

Exercice 11 : Soit $\mathscr{T}$ un tétraèdre. Montrer que les 4 droites joignant chacune un sommet au centre du cercle inscrit dans la face opposée sont tracées sur un même hyperboloïde à une nappe.

Exercice 12 : Soit $\mathscr{S}$ un hyperboloïde à une nappe et $\mathscr{G}_0$ l'une de ses génératrices. Soit $\mathscr{G}$ $(\mathscr{G} \neq \mathscr{G}_0)$ une génératrice de $\mathscr{S}$ variable, du même système que $\mathscr{G}_0$. Le lieu du pied sur $\mathscr{G}$ de la perpendiculaire commune à $\mathscr{G}_0$ et à $\mathscr{G}$ est une conique privée d'un point.

Exercice 13 (Théorème de Chasles) : Soit $\mathscr{S}$ un cône du second degré non de révolution. Un plan tangent à $\mathscr{S}$, variable, fait avec les deux directions de plans cycliques de $\mathscr{S}$ des angles $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\theta' \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que $\theta+\theta'$ est constant.

Exercice 14 : Soit $\mathscr{S}$ un ellipsoïde et $S \in \mathscr{E}$ ($\mathscr{S}$ non de révolution).
a) Montrer qu'il y a au plus six normales à $\mathscr{S}$ passant par S (le nombre 6 étant atteint pour certaines positions de S) et qu'elles sont les génératrices d'un unique cône du second degré, qu'on notera $\mathscr{C}_S$.
b) Lieu de S pour que $\mathscr{C}_S$ soit de révolution. (*Réponse :* on trouve l'union de 4 segments de droites.)

Exercice 15 : Trouver les sections planes cycliques de la quadrique d'équation dans le repère orthonormal $\mathscr{R}$: $x^2+y^2+3z^2-2xy+x-y=0$.

Exercice 16 : Le lecteur est prié de se reporter à la photo de Saturne illustrant le début de ce livre. Il reproduira avec soin les lignes essentielles de cette photo et se munira d'instruments de

dessin (compas, équerre, rapporteur, règle graduée, etc.). Il conduira les calculs numériques en conservant seulement 3 chiffres à partir du premier non nul à gauche. La photo étudiée sera notée $\mathfrak{S}$.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Etant donné un arc d'ellipse tracé sur une feuille de dessin, on se propose de déterminer le centre, les axes principaux et les sommets de cette ellipse. Il est entendu que l'intersection avec une droite arbitraire de cet arc d'ellipse s'obtient directement, par le tracé.

On se place ici dans un plan affine euclidien orienté P.

a) Soit Γ une ellipse de P, de centre Ω. On appelle *diamètre* de Γ toute droite de P passant par Ω. Prouver que le lieu des milieux des cordes de Γ parallèles à une direction donnée est un segment d'un diamètre de Γ.

Application : De nombreuses courbes de $\mathfrak{S}$ sont des arcs d'ellipse : images des anneaux, contour apparent de Saturne, image du terminateur entre autres (*N.B.* On appelle *terminateur* la ligne de séparation ombre-lumière sur Saturne). Rechercher les centres de ces diverses ellipses (il suffit de déterminer, pour chacune d'elles, deux diamètres). Que constate-t-on ?

b) Soit δ une direction de P et Δ le diamètre de Γ parallèle à δ. Notons Δ' le diamètre de Γ contenant les milieux des cordes parallèles à δ. Montrer que Δ est le diamètre contenant les milieux des cordes parallèles à Δ'. On dit que Δ et Δ' sont des *diamètres conjugués*.

c) Soit Δ et Δ' deux diamètres conjugués de Γ non orthogonaux (sinon ce sont des axes principaux de Γ, dites pourquoi). On prend $S \in \Delta \cap \Gamma$ et $S' \in \Delta' \cap \Gamma$ et on appelle T un point tel que $\overrightarrow{\Omega S'} \perp \overrightarrow{\Omega T}$ et $\|\overrightarrow{\Omega S'}\| = \|\overrightarrow{\Omega T}\|$. Notons M le milieu de $\{S, T\}$ et H, K les points communs à Dr (S, T) et au cercle $\mathscr{C}$ de centre M passant par Ω. Prouver que Dr (Ω, H) et Dr (Ω, K) sont les axes principaux de Γ et que les longueurs des demi-axes principaux sont $\|\overrightarrow{SH}\|$ et $\|\overrightarrow{SK}\|$.

Application : Déterminer les axes principaux et les sommets de quelques ellipses apparaissant sur la photo $\mathfrak{S}$.

PARTIE I

L'espace interplanétaire sera supposé euclidien de dimension 3 et noté $\mathscr{E}$. A l'instant de la photo $\mathfrak{S}$, on notera O l'observateur (i.e. Voyager 1), Ω le centre de Saturne, $\mathscr{S}$ la surface de Saturne et $\mathscr{P}$ son plan équatorial (i.e. le plan passant par Ω et orthogonal à l'axe Δ de rotation de Saturne) : le plan $\mathscr{P}$ est aussi le plan des anneaux. Le système Saturne-anneaux-observateur admet pour plan de symétrie orthogonale le plan Π contenant Δ et O, donc aussi la droite $\mathscr{D}$ = Dr (Ω, O), et Π est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

On choisit pour unité de longueur le rayon équatorial de Saturne (environ 60 000 km). On considère le repère orthonormal $\mathscr{R} = (O\,; e_1, e_2, e_3)$ tel que : e_1 dirige $\vec{\Pi}^{\perp}$ et pointe vers la droite sur $\mathfrak{S}$; $e_3 = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{\Omega O}\|}\overrightarrow{\Omega O}$; et e_2 pointe vers le haut sur $\mathfrak{S}$. On oriente $\mathscr{E}$ pour que $\mathscr{R}$ soit direct. Soit $d = \|\overrightarrow{\Omega O}\|$ et α l'écart angulaire entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ (d'après les indications de la N.A.S.A., on a $d = 88$ à 10^{-2} près). Le plan de la photo est donc dirigé par (e_1, e_2) : à homothétie près on peut supposer que ce plan est $\Lambda = \Omega + \text{Vect}\,(e_1, e_2)$. Donc $\mathfrak{S}$ s'obtient par *projection conique* sur Λ du point de vue O.

a) Soit M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathscr{R}$ ($M \in \mathscr{E} \setminus \{O + (\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2)\}$). Donner les coordonnées dans le repère $(\Omega\,; e_1, e_2)$ du plan Λ de l'image m de M sur $\mathfrak{S}$ (donc $m \in$ Dr (O, M)).

b) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω, de rayon $R > 0$ situé dans le plan $\mathscr{P}$. Donner une équation dans $(\Omega\,; e_1, e_2)$ de l'image (c) de $\mathscr{C}$ sur Λ. On trouve une ellipse dont on précisera le centre Ω_R, les axes principaux et les longueurs des demi-axes. Etudier la famille des ellipses (c) quand R varie si l'on néglige les termes en $\dfrac{1}{d^2}$ (ce qui est raisonnable à la précision du dessin).

Décelez-vous sur la photo un détail montrant que les ellipses trouvées ne sont pas concentriques ?

c) *Application :* On prend pour $\mathscr{C}$ le bord externe de l'anneau A de Saturne et pour $\mathscr{C}_1$ l'équateur de Saturne. Le rapport des rayons $\frac{R}{1} = 2{,}34$ est une donnée fournie par les astronomes grâce aux observations terrestres. En prenant $d = 88$ et en mesurant sur la photo le rapport des demi-axes de (*c*) donner une valeur numérique de α aussi précise que possible. Placer ensuite sur votre dessin les points Ω et Ω_1. Est-il légitime à la précision de 1 ‰ de négliger les termes en $\frac{R^2}{d^2}$? Indiquer également l'unité graphique.

PARTIE II

$\mathscr{S}$ est un ellipsoïde de révolution aplati d'axe Δ. On note N le pôle Nord de Saturne (i.e. le point de $\mathscr{S} \cap \Delta$ vers le haut sur $\mathfrak{S}$), et $\lambda = \|\overrightarrow{\Omega N}\|$ (donc $0 < \lambda < 1$). Soit (e'_1, e'_2, e'_3) la base orthonormale directe de $\vec{\mathscr{E}}$ déduite de (e_1, e_2, e_3) par la rotation d'angle α autour de e_1, et soit $\mathscr{R}'$ le repère $(\Omega\ ; e'_1, e'_2, e'_3)$. Les coordonnées génériques dans $\mathscr{R}'$ seront notées (x', y', z').

a) Donner une équation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}'$, puis dans $\mathscr{R}$. En déduire une équation dans $\mathscr{R}$ du cône de sommet O circonscrit à $\mathscr{S}$, puis une équation dans $(\Omega\ ; e_1, e_2)$ de la projection (*a*) du contour apparent (A) de Saturne dont un arc est visible sur $\mathfrak{S}$.

b) De la mesure sur $\mathfrak{S}$ du petit axe de (*a*) en unités graphiques, et de la valeur de α trouvée en I, déduire une valeur approchée de λ (est-il raisonnable de négliger les termes en $\frac{1}{d^2}$?), d'où l'aplatissement $1 - \lambda$ de Saturne. Placer le centre ω de (*a*) sur un dessin agrandi où figurent Ω, Ω_1 et Ω_R.

c) Le pôle Nord N de Saturne a pour coordonnées dans $\mathscr{R}$ $(0, \lambda \cos \alpha, \lambda \sin \alpha - d)$. Placer son image n sur le dessin général. Représenter également l'image de l'équateur de Saturne.

d) Retrouver rapidement une valeur approchée de λ en considérant que O est à l'infini dans la direction de e_3 : l'erreur commise sur le centre de (*a*) est-elle décelable ?

PARTIE III

Soit S le centre du Soleil (il est situé à $1{,}4.10^9$ km de Saturne, donc pratiquement à l'infini), et soit $\vec{V}$ un vecteur directeur de Dr (Ω, S) de composantes $(1, q, r)$ dans $\mathscr{R}'$. L'écart angulaire ε de $\vec{V}$ avec $\mathscr{P}$ est donc $\varepsilon = \text{Arc tg} \frac{q}{\sqrt{1+r^2}}$. On note $\mathscr{T}$ le terminateur et $\mathscr{F}$ son plan.

a) Montrer qu'une équation dans $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{F}$ est : $x' + \frac{q}{\lambda} y' + rz' = 0$. Donner alors une équation de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{R}$.

b) Soit (t) l'image du terminateur $\mathscr{T}$. On choisit sur (t) un point u dont on peut mesurer sur $\mathfrak{S}$ les coordonnées (x_1, y_1) dans $(\Omega\ ; e_1, e_2)$. Déterminer alors les coordonnées dans $\mathscr{R}$, et ensuite dans $\mathscr{R}'$, du point U de $\mathscr{S}$ situé du côté de O qui a pour image u. En écrivant : $U \in \mathscr{F}$, on obtient une équation du premier degré vérifiée par (q, r). En opérant de même avec un second point u' de (t) raisonnablement écarté de u, on obtient une autre équation du premier degré, d'où q et r, et ensuite ε. Donner les composantes de $\vec{V}$ dans $\mathscr{R}$, et celles de son image $\vec{v}$ et tracer sur votre dessin la direction du Soleil. Calculer une valeur approchée de l'écart angulaire $\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega S}}$.

c) Imaginer d'autres méthodes pour calculer q et r (on pourra par exemple chercher l'équation de (t) dans $(\Omega\ ; e_1, e_2)$).

d) Donner une équation dans $\mathscr{R}'$, puis dans $\mathscr{R}$, du cylindre circonscrit à $\mathscr{S}$ de génératrices parallèles à $\vec{V}$. Quelle est l'intersection de ce cylindre avec $\mathscr{P}$? Contrôler sur le dessin que

l'image de cette ellipse sur $\mathfrak{S}$ est une ellipse très allongée, dont on précisera les éléments (ombre portée par Saturne sur les anneaux).

PARTIE IV

Les anneaux B (le plus proche de Saturne) et A portent ombre sur Saturne. On choisit pour son étude le repère $\mathscr{R}'' = (\Omega\ ; e_1'', e_2'', e_3'')$ déduit de $\mathscr{R}'$ par la rotation d'angle $\varphi = -\operatorname{Arg tg} r$ autour de la droite $\Omega + \mathbb{R}e_2'$ (orientée par e_2'), de sorte qu'un vecteur directeur de $\mathrm{Dr}\,(\Omega, S)$ est $\vec{W}$ de composantes $(1, \operatorname{tg} \varepsilon, 0)$ dans $\mathscr{R}''$.

a) Ecrire dans $\mathscr{R}''$ une équation du cylindre de génératrices parallèles à $\vec{W}$, ayant pour directrice le cercle de centre Ω et de rayon R donné du plan $\mathscr{P}$ (N.B. pour les anneaux visibles sur $\mathfrak{S}$, R va de 1,53 à 2,34).

b) Soit Γ l'intersection du cylindre défini en *a*) avec $\mathscr{S}$, et soit γ la projection orthogonale de Γ sur le plan $\Omega + \mathrm{Vect}\,(e_1'', e_2'')$. Etudier la famille des courbes γ quand R varie. Que se passerait-il pour $R = 1$?

c) Montrer que l'évasement de l'ombre des anneaux au voisinage de $\mathscr{T}$, constatée sur $\mathfrak{S}$, s'explique bien dans sa partie inférieure grâce à *b*). Il n'en va pas de même pour la partie supérieure de cet évasement. Ne peut-on pressentir l'existence d'un anneau, invisible sur $\mathfrak{S}$, plus proche de $\mathscr{S}$ que les anneaux visibles, et qui porterait lui aussi ombre sur $\mathscr{S}$? Peut-on expliquer physiquement pourquoi l'ombre de cet anneau fantôme ne se manifeste qu'au voisinage de $\mathscr{T}$?

d) Peut-on, d'après la position au voisinage de $\mathscr{T}$ de l'ombre de l'anneau A, retrouver rapidement une valeur approchée de ε ?

Question subsidiaire. Montrer qu'à partir de la photo $\mathfrak{S}$, grâce à des mesures faites avec un double décimètre sur (*a*) et (*c*) [cf. II.*a*) et I.*c*)], et sans connaître à l'avance d et R, on peut, *au moins théoriquement,* déterminer les quatre nombres d, α, λ et R.

BIBLIOGRAPHIE

Les ouvrages cités dans le texte sont signalés par un astérisque.

[1] ARTIN E., *Algèbre géométrique,* (trad. M. Lazard), Gauthier-Villars, 1962.

[2] ARNAUDIES J. M., *Les cinq polyèdres réguliers de R^3 et leurs groupes,* CDU, 1969.

[3] BERGER M., *Géométrie,* (vol. 1 à 5), Cedic-Fernand Nathan, 1977.

[4] CHOQUET G., *L'enseignement de la géométrie,* Hermann, 1964.

[5] COLLET M., GRISO C., *Le cercle d'Euler,* Vuibert, 1988.

[6] COXETER H. S. M., GREITZER S. L., *Redécouvrons la géométrie,* Dunod, 1971.

[7] DARBOUX G., *Principes de Géométrie analytique,* Gauthier-Villars, 1927.

[8]* DEHEUVELS R., *Formes quadratiques et groupes classiques,* P.U.F., 1981.

[9] DELTHEIL R., CAIRE D., *Géométrie et compléments de Géométrie,* Baillère, 1951.

[10] DIEUDONNE J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, 1964.

[11]* DIEUDONNE J., *Sur les groupes classiques,* Hermann, 1948.

[12] DUBUC S., *Géométrie plane,* P.U.F., 1971.

[13] FRENKEL J., *Géométrie pour l'élève-professeur,* Hermann, 1973.

[14] GODEAUX L., *Les géométries,* Armand Colin, 1941.

[15] GRAMAIN A., *Topologie des surfaces,* P.U.F., 1971.

[16] HADAMARD J., *Leçons de géométrie élémentaire,* Armand Colin, 1947 (t. 1), 1949 (t. 2).

[17]* HENRICI P., *Applied and computational complex analysis,* vol. 1, Wiley, 1974.

[18] HILBERT D., *Les principes fondamentaux de la géométrie,* Dunod, 1971.

[19] HILBERT D., COHN-VOSSEN S., *Geometry and the imagination,* Chelsea, 1952.

[20] HIRIART-URRUTY J. B., PLUSQUELLEC Y., *Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire,* Cepadues, 1988.

[21] ILIOVICI G., ROBERT P., *Géométrie,* Eyrolles.

[22] LALESCO T., *La géométrie du triangle,* Vuibert, 1937, rééd. Gabay, 1987.

[23] LEBESGUE H., *Leçons sur les constructions géométriques,* Gauthier-Villars, 1950.
[24] LEBESGUE H., *Les coniques,* Gauthier-Villars, 1942.
[25] LEMAIRE J., *Hypocycloïdes et épicycloïdes,* rééd. Blanchard, 1967.
[26] MNEIME R., TESTARD F., *Introduction à la géométrie des groupes classiques,* Hermann, 1986.
[27]* POLYA G., SZEGÖ G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Band I & II, rééd. Springer, 1970.
[28] ROSSIER P., *Géométrie synthétique moderne,* Vuibert, 1961.
[29] WALKER R. J., *Algebraic curves,* Dover, 1949.
[30] WEYL H., *Symmetry,* Princeton University Press, 1952, trad. française, Flammarion, 1964.

INDEX ALPHABÉTIQUE

Abscisse curviligne (366).
Adjoint d'un endomorphisme (102, 159).
Affine (droite —, 176 ; espace —, 175 ; géométrie —, 175 ; groupe —, 182).
Affinement équivalent (polynômes —, 411).
Affinement libre (famille —, 199).
Affinement régulier (paramètre —, 327).
Affinité (206).
Algorithme de Gauss (36).
Alignement sur une courbe (315).
Alternée (forme bilinéaire —, 1).
Angle arithmétique dans $\mathbb{R}^n$ euclidien (251).
Angle orienté (de vecteurs ou de droites d'un plan euclidien, 246).
Angle orienté (d'une rotation plane, 230 ; d'une rotation de l'espace $\mathbb{R}^3$, 231).
Antidéplacement (222).
Antipodaire (340).
Antisymétrique (endomorphisme —, 104, 124).
Application affine (180).
Arête de rebroussement (477).
Associativité du barycentre (196).
Associés (endomorphismes et formes bilinéaires —, 107).
Asymptotes, 308 ; — d'une hyperbole, 437.
Autoadjoint (endomorphisme —, 104).
Automorphismes d'une forme quadratique (39).
Axes d'une conique (434).

Ballon (disposition en —, 459).
Banach-Tarski (paradoxe de —, 236).
Barycentre (194).
Base affine de $\mathscr{V}$ (199).
Base orthogonale incomplète (théorème de la —, 21, 58, 149).
Bessel (inégalité de —, 57, 149).
Birégulier (paramètre —, 274).
Bissecteur (hyperplan —, 256).
Bissectrices (250).
Branche infinie (308), — *parabolique* (310).
Branche régulière (285).

Canard (disposition en bec de —, 463).
Caractéristique (point —, 329, 477).
Caratheodory (théorème de —, 215).
Cardioïde (282, 342).
Cartésienne (surface paramétrée —, 454).
Cauchy-Schwarz (inégalité de —, 43, 143).
Caustique (342).
Centre de courbure (368).
Centre d'une conique (425).
Centre d'une quadrique (503).
Cercle principal d'une ellipse (436).
Cercles tracés sur une quadrique (526).
Céva (théorème de —, 220).
Changement de base pour les formes bilinéaires (10), pour les discriminants (11).
Chasles (théorème de —, 373, 530 ; formule de —, 176).
Cholesky (méthode de —, 119).
$\mathscr{C}^k$*-équivalence* (de courbes, 283 ; de surfaces, 450).
$\mathscr{C}^k$*-invariance* (284).
Classification affine des éléments de $\mathscr{P}_2$ (414, 490).
Cocycliques (paramètres —, 321).
Col (463).
Commutativité du barycentre (195).
Cône, 469 ; — du second degré, 496 ; — supplémentaire, 528.
Congruence affine (424).
Conique, 423 ; — propre, 423.
Contact (théorie du —, 289).

Contour apparent (473, 474).
Convexité (211).
Coordonnées d'un point, 177 ; changement de —, 177.
Coordonnées barycentriques, 199 ; *polaires,* 250 ; *sphériques,* 269 ; *homogènes,* 276.
Courbes coordonnées (450).
Courbes en coordonnées polaires (252).
Courbes paramétrées (273).
Courbure, 367 ; centre de —, 368.
Courbure algébrique des courbes planes (376).
Critique (point — d'un élément de $\mathscr{P}_2$: 419, 491).
Cube (groupe du —, 241).
Cyclique (plan —, 526).
Cycloïde (463).
Cylindre, 468 ; — elliptique, 495 ; — parabolique, 493 ; — hyperbolique, 495.

Décomposition polaire (118, 168).
Définie positive (forme quadratique —, 43 ; forme hermitienne —, 142).
Dégénérée (forme bilinéaire —, 3).
Demi-espace (213).
Desargues (théorème de —, 219).
Déterminant d'une application affine (183).
Détermination continue d'un angle orienté (351).
Développable (surface —, 476).
Développante, 401 ; — de cercle, 402.
Développée (397).
Diagonalisation (— des endomorphismes symétriques, 110 ; — simultanée, 112).
Diédral (groupe —, 238).
Dilatation d'hyperplan H (204).
Directe (base —, 77 ; somme — orthogonale, 22, 90).
Directeur (espace —, 176).
Direction asymptotique (309).
Directions principales (— des coniques, 434 ; — des quadriques, 515).
Directrice d'une conique (441).
Discriminant d'une forme bilinéaire (10).
Distances (254).
Dodécaèdre régulier (242).
Double produit vectoriel (85).

Ecart angulaire (252).
Ellipse (421, 435).
Ellipsoïde (497) ; — de révolution, 520.
Elliptique (forme quadratique —, 32 ; point —, 464).
Endomorphismes des espaces euclidiens (89).
Enveloppe convexe (214).
Enveloppe d'une famille de droites (329).
Epicycloïdes (344, 387).
Equation intrinsèque d'une courbe plane (393).
Equation polaire d'une conique ; d'une droite (251).
Equation tangentielle d'une sphère, 266 ; d'une conique (432).
Equilatère (hyperbole —, 437).
Equipollence de bipoints (179).
Equivalence de formes bilinéaires, 26 ; — de formes hermitiennes, 138.
Equivalence de l'arc et de la corde (359).
Espace singulier (19, 132).
Euclidien (espace —, 43 ; espace affine —, 221 ; groupe —, 73).
Euclidienne (structure — canonique, 47).
Euler (angles d'—, 254).
Excentricité d'une conique (435).

Facteur direct préhilbertien (55).
Faisceau de droites, 217 ; de plans, 219 ; de sphères, 267.
Famille de droites à un paramètre (325).
Fischer-Cochran (théorème de —, 109).
Fonctions affines (189).
Fonctions angulaires (349).
Fonctions polynomiales (— homogènes, 14 ; — sur $\mathscr{E}$, 191, 487).
Formes bilinéaires (1), symétriques, 1 ; alternées, 1.
Forme canonique (4).
Formes hermitiennes (127).
Forme polaire d'une forme quadratique (13) ; d'une forme hermitienne (129).
f-orthogonal d'une partie A de E, 3, d'une partie B de F, 3.
f-orthogonale (famille —, 20).
f-orthogonalité par rapport à une forme quadratique, 20, pour les formes bilinéaires symétriques ou alternées, 17.

Formes quadratiques (12).
Forme quadratique à l'infini (413, 487).
Forme quadratique non dégénérée (forme duale d'une —, 23).
Frenêt (repère de —, 375).

Gauss (algorithme de —, 36).
Gegenbauer (polynômes de —, 66).
Génératrices d'une surface réglée (475) ; — d'un $H1$ ou d'un P.H., 509.
Gerbes quadratiques (259).
Gram (déterminant de —, 62).
Gram-Schmidt (orthonormalisation de —, 60).
Groupe affine (182).
Groupe des homothéties et translations (183, 206).
Groupes d'isométries (238).

Hachette (cône de —, 529).
Hadamard (inégalité de —, 86).
Hahn-Banach (théorème de —, 215).
Hermite (polynômes de —, 68).
Hermitien (espace —, 142 ; forme — *ne*, 127 ; matrice — *ne*, 133).
Hilbert (polynômes de —, 66).
Hilbertien (espace —, 45, 144).
Homogénéisé d'un élément $f \in \mathscr{P}_2$ (412).
Hyperbole (422, 436).
Hyperbolique (point —, 464).
Hyperboloïde (à une ou deux nappes, 498).
Hyperplan (— bissecteur, 256 ; — d'appui, 215 ; — médiateur, 225 ; — radical de deux sphères, 267 ; — tangent à une sphère, 265).
Hypocycloïde (341, 343, 344, 387).

Indirecte (base —, 77).
Inégalité (— de Bessel, 57, 149 ; — isopérimétrique, 390 ; — de Cauchy-Schwarz, 43, 143).
Inertie (loi d'— de Sylvester, 29, 139).
Inflexion (paramètre d'—, 274).
Involution, 54 ; — affine, 206 ; orthogonale, 91.
Isobarycentre (195).
Isométries affines (222).
Isométrique (application —, 51).
Isomorphisme d'espaces affines (180).
Isotomique (droite —, 202).
Isotrope (vecteur —, 17, 131 ; sous-espace —, 17, 131 ; cône —, 17, 131).
Isotrope (sous-espace totalement —, 17).

Jacobi (identité de —, 85 ; polynômes de —, 62).

Lacet (357).
Lagrange (identité de —, 86).
Laguerre (polynômes de —, 68).
Legendre (polynômes de —, 62, 66).
Localement vectorielle (229).
Longueur d'une courbe (357).
Lorentz (groupe de —, 41).

Mac Cullagh (théorème de —, 373).
Matrice d'une forme bilinéaire (8).
Matrice d'une forme hermitienne (134).
Médiateur (hyperplan —, 225).
Ménélaüs (théorème de —, 211, 220).
Méridienne (479).
Milieu de deux points (195).
Mixte (produit —, 83).
Moëbius (ruban de —, 467).
Monge (point de — d'un tétraèdre, 271).
Müntz (théorème de —, 69).

Nappes d'un hyperboloïde (497).
Newton (droite de — de 4 droites, 202).
Normal (endomorphisme —, 104 ; vecteur —, 453).
Normale (matrice —, 124 ; équation — d'un hyperplan, 255 ; courbe paramétrée —, 364).
Normale principale (367).
Normalisé (polynôme —, 434, 518).

Orientable (surface —, 467).
Orientation d'un $\mathbb{R}^n$, 77 ; d'un espace affine, 177.
Orthogonal (groupe —, 39, 74 ; automorphisme —, 46).
Orthogonale (famille —, 20, 132 ; matrice —, 70 ; symétrie —, 54).
Orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire, 3 ; par rapport à une forme hermitienne, 131 ; dans un espace préhilbertien, 50, 147.
Orthogonaux (supplémentaires —, 52, 148, 222 ; polynômes —, 62 ; projecteurs —, 52, 148 ; cercles —, 270).

Orthonormale (base —, 58 ; famille —, 20, 132).
Orthonormalisée d'une suite libre (60, 150).
Orthoptique (283).
Osculateur (plan —, 275 ; cercle —, 371).
Osculatrices (courbes —, 292).
Ovale de Cassoni (485).

Pappus (théorème de —, 220).
Parabole (423, 442).
Parabolique (point —, 464).
Paraboloïde (— elliptique, 500 ; — hyperbolique, 500 ; hyperbolique équilatère, 522).
Paradoxe de Banach (236).
Parallèles (courbes —, 401 ; d'une S_R, 479).
Parallélisme (189).
Paramètre régulier (274).
Paramétrisation affine d'un sous-espace affine (188).
Parseval (inégalité de Bessel- —, 57).
Pascal (limaçon de —, 341).
Partie linéaire d'une application affine (180).
Partie orthogonale d'une similitude vectorielle (120).
Perpendiculaire commune à 2 droites de $\mathscr{E}_3$ (258).
Perpendiculaires (sous-espaces vectoriels —, 96).
Plan bitangent (282).
Plan cyclique (526).
Plan osculateur (275).
Plan tangent à une surface paramétrée (451).
Podaire (340).
Point caractéristique (329).
Polaire (forme hermitienne —, 129).
Polaire d'un point pour une conique (430).
Poncelet (points de — d'un faisceau de sphères, 268 ; grand théorème de —, 345).
Positive (forme quadratique —, 43 ; matrice symétrique —, 108 ; forme hermitienne —, 142 ; matrice hermitienne —, 163).
Préhilbertien (espace — réel, 43 ; espace — complexe, 142).
Principales (directions —, 434, 514).
Produit scalaire (43, 143).
Produit vectoriel et *produit mixte* (83).
Produit d'espaces affines (178).
Projecteurs orthogonaux (52, 148).
Projections (205).
Projectivement birégulier (paramètre —, 327).
Prolongement d'isométries (226).
Propre (polynôme —, 419, 491 ; conique —, 423 ; quadrique —, 501).
Ptolémée (théorème de —, 270).
Puissance (fonction — par rapport à une sphère, 264).
Pythagore (théorème de —, 51, 147).

Quadriques, 501 ; — propres, 501 ; — à centre, 501 ; — de révolution, 517, 525.
Quaternions (100).

Radical (axe — de 2 cercles, 267).
Rang d'une forme bilinéaire (6).
Rebroussement (306).
Réduite (base orthogonale —, 30).
Réflexions, 95, réflexions-translations, 231.
Réglées (surfaces —, 474).
Régulier (paramètre —, 274).
Régulière (branche —, 285).
Relèvement (théorème de —, 349).
Repère affine (177, 221).
Représentation barycentrique d'une droite affine (201).
Représentation locale autour de t_0 (288, 454).
Représentation d'une famille de droites (325).
Réseau canonique de $\mathbb{R}^2$ (238).
Résiduel (323).
Restitution (formule de —, 129).
Retournement (95).
Révolution (surface de —, 479).
Ribaucour (courbes de —, 388).
Rotations vectorielles (90, 93).
Rotations d'un plan affine euclidien (230).
Rotations dans l'espace (231).
Rotation-réflexion (231).

Schwarz (inégalité de —, 43, 143).
Sécantes triples (282).
Selle (463).
Semblables (matrices orthogonalement —, 91 ; matrices unitairement —, 165).
Semi-linéaire (application —, 129).
Séparable (espace —, 49).
Sesquilinéaire (forme — hermitienne, 127).
Signature d'une forme quadratique réelle, 30 ; — d'une forme hermitienne, 139.
Similitude d'un espace euclidien (106, 120) ; d'un espace affine euclidien (262).
Simple (courbe paramétrée —, 273).
Simplexe régulier en dimension n (240).
Simson (droite de —, 346).
Singulier (espace —, 19, 132 ; vecteur —, 19, 132).
Sommets d'une conique (436).
Sous-espace affine (184).
Sous-espace totalement isotrope (17, 131).
Sous-normale (443).
Sous-variété linéaire affine (185).
Spécial orthogonal (groupe —, 40, 75).
Spécial unitaire (groupe —, 154).
Sphères (263).
Spirale logarithmique (399).
Spirale de Cornu (395).
Stationnaire (paramètre —, 274).
Steiner (droite de —, 346 ; ellipse de —, 447).
Supplémentaires orthogonaux (52, 148, 222).
Support fini (famille massique à —, 194).
Surfaces paramétrées (449).
Surosculatrices (courbes —, 274).
Symétrie autour de F parallèlement à G (204).
Symétrie affine, 206 ; — *centrale*, 206.
Symétrique (forme bilinéaire —, 1 ; endomorphisme —, 104).
Symplectique (groupe —, 39).
Systèmes de génératrices d'un P.H. (510), — d'un H1 (511).

Tangente en le paramètre t_0 (274).
Tangente géométrique (301).
Tangentiel (318).
Tchebytchev (polynômes de —, 62, 66).
Tétraèdre orthocentrique (281).
Topologie d'un espace affine (178).
Tore à collier (465).
Totale (famille —, 59).
Tractrice (405).
Trajectoire (273).
Transconjuguée (matrice —, 133).
Transformée d'une courbe paramétrée (280).
Translations dans un espace affine (176).
Transvection (204, 207).
Type d'une forme quadratique (414).

Unitaire (groupe —, 146 ; matrice —, 152).
Unitairement semblables (matrices —, 165).

Vectoriel (produit —, 83).
Villarceau (cercles de —, 486).
Vissage (231).
Voisines (courbes paramétrées — d'ordre $\geqslant p$, 291).
Von Koch (courbe de —, 364).

Whitney (théorème de —, 389).