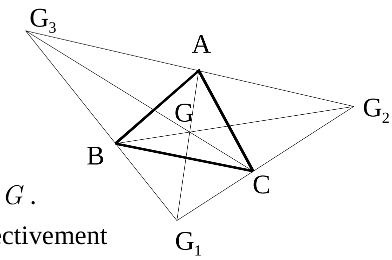
Notion d'espace affine

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension finie et de direction E.

Exercice 1 Soit $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$.
Montrer que $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine si et seulement si pour tout couple (A,B) de points distincts de $\mathcal{V}$, la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{V}$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Montrer que, si tout barycentre de points de $\mathcal{V}$ est encore dans $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine.

Exercice 3 Soit A,B et C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ tel que les barycentres G,G_1,G_2 et G_3 de $\big((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\big),\big((A,-\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\big)$, $\big((A,\alpha),(B,-\beta),(C,\gamma)\big)$, et $\big((A,\alpha),(B,\beta),(C,-\gamma)\big)$ existent.



a) Montrer que les droites $(AG_1),(BG_2),(CG_3)$ concourent en G.
b) Montrer que les droites $(G_2G_3),(G_3G_1),(G_1G_2)$ passent respectivement par A,B,C.

Application affine

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension finie et de direction E.

Exercice 4 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même et (A,B) un couple de points distincts de $\mathcal{E}$.
Montrer que si A et B sont des points fixes de f alors la droite (AB) est invariante par f.

Exercice 5 Soit A,B,C,D quatre points non coplanaires d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3.
Montrer qu'il existe une unique application affine envoyant A,B,C,D sur B,C,D,A et déterminer un point invariant de celle-ci.

Exercice 6 Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine telle qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.
Montrer que f admet un point invariant.

Applications affines usuelles

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension finie et de direction E.

Exercice 7 Soit $\vec{u}$ un vecteur de E et A un point de $\mathcal{E}$. Décrire la transformation $t_{\vec{u}}\circ s_A$.

Exercice 8 Soit H et H' deux homothéties de centres O et O' et de rapports λ et λ'.
Décrire la transformation $H'\circ H$

Exercice 9 Soit f une transformation affine et h une homothétie de centre O et de rapport λ.
Préciser l'application $f\circ h\circ f^{-1}$.

Exercice 10 Déterminer toutes les applications affines $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ commutant avec toutes les translations.

Exercice 11 Montrer que l'ensemble G formé par la réunion des translations et des symétries centrales de $\mathcal{E}$, muni du produit de composition des applications, forme un groupe.

Exercice 12 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui transforme toute droite vectorielle en une droite parallèle. Montrer que f est une translation ou une homothétie.

Exercice 13 On note $\mathcal{HT}$ le groupe des homothéties-translations de $\mathcal{E}$.
Montrer que si G est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{HT}$ alors G n'est que constitué que de translations ou d'homothéties de même centre.

Projection et symétrie affine

Exercice 14 On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
a) Donner l'expression analytique de la projection sur $\mathcal{P} : x+y+z=1$ parallèlement à $D = \text{Vect}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$.
b) Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathcal{P} : x+z=1$ selon $D = \text{Vect}(\vec{i}+\vec{j})$.
c) Donner l'expression de la projection affine sur �: $x+y+z=1$ selon la direction $\text{Vect}(\vec{u}(1,2,-2))$.

Exercice 15 On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ d'expression analytique :

a) $\begin{cases} x' = -y-z+1 \\ y' = -2x-y-2z+2 \\ z' = x+y+2z-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x' = x-z+1 \\ 2y' = x+2y+z-1 \\ 2z' = -x+z+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -y+z+3 \\ y' = -x+z+3 \\ z' = -x-y+2z+3 \end{cases}$

Exercice 16 A quelle condition une translation et une symétrie affine commutent-elle ?

Exercice 17 Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Etablir :
a) f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.
b) f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Exercice 18 Soit f une transformation affine telle que $\vec{f} \circ \vec{f} = \text{Id}_E$.
Montrer qu'il existe un unique couple (t,s) formé d'une translation et d'une symétrie tel que $f = t \circ s = s \circ t$.

Isométries du plan

Exercice 19 Montrer que toute isométrie du plan $\mathcal{P}$ qui échange deux points distincts est involutive.

Exercice 20 Soit r et r' deux rotations du plan $\mathcal{P}$ distinctes de Id.
Montrer qu'il existe 3 réflexions s,s',s'' telles que : $r = s'' \circ s$ et $r' = s' \circ s''$.
Décrire $r' \circ r$. Lorsqu'il s'agit d'une rotation donner une construction de son centre.

Exercice 21 Etudier à quelle condition une réflexion et une translation du plan $\mathcal{P}$ commutent.

Exercice 22 Soit $A_1,\dots,A_n$ des points du plan.
Montrer que l'existence de $B_1,\dots,B_n$ tels que $A_i = m[B_i,B_{i+1}]$ (avec $B_{n+1} = B_1$) est équivalente à l'existence d'un point fixe pour une certaine composée de symétries centrales.
Discuter l'existence et l'unicité des points B_i et en donner une construction géométrique.

Exercice 23 On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ d'expression analytique :

a) $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 4 \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

Exercice 24 Déterminer le groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$ laissant globalement invariant :

a) Un carré.
b) Un rectangle non carré.
c) Un cercle.

Exercice 25 Déterminer le groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$ laissant globalement invariant la réunion de deux droites parallèles distinctes du plan.

Similitudes du plan

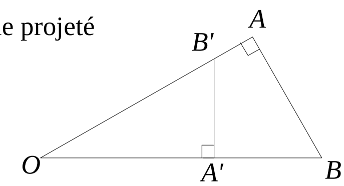
Exercice 26 Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$.

On désigne par S_1, S_2, S_3 les similitudes directes du plan $\mathcal{P}$ de centres respectifs A, B, C telles que $S_1(B) = C, S_2(C) = A$ et $S_3(A) = B$.

Décrire les composées $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ et $S_1 \circ S_2 \circ S_3$.

Exercice 27 Soit AOB un triangle non aplati rectangle en $A, B' \in]O, A]$ et A' le projeté orthogonal de B' sur (OB).

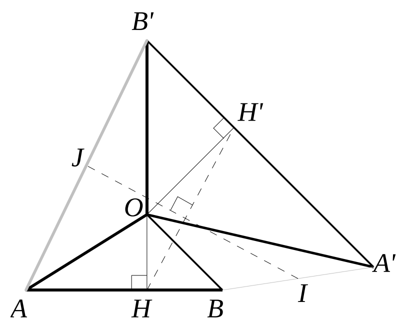
Montrer : $OB' + AB < OB + A'B'$.



Exercice 28 Soit OAB et $OA'B'$ deux triangles directement semblables.

Soit I, J les milieux respectifs de $A'B$, AB' et H, H' les projections orthogonales de O sur (AB), (A', B').

Montrer : $(IJ) \perp (HH')$.



Exercice 29 On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit A, B, C trois points du plan $\mathcal{P}$ d'affixes a, b, c telles que $|a| = |b| = |c|$.

Montrer que (ABC) est équilatéral si et seulement si $a + b + c = 0$.

Exercice 30 a) Soit f une similitude du plan $\mathcal{P}$ et Γ une conique de foyer f, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e. Justifier que $f(\Gamma)$ est une conique dont on précisera foyer, directrice et excentricité.

b) A quelle(s) condition(s) deux coniques sont-elles directement semblables ?

Isométries de l'espace

Exercice 31 On munit l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Décrire l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ d'expression analytique :

a) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z - 5) \\ y' = \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z - 2) \\ z' = \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1) \end{cases}$.

Exercice 32 Déterminer les déplacements et les réflexions de $\mathcal{E}$ laissant globalement invariante une sphère donnée.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr