Fiche 8 – Loi entrée/sortie

Chaines cinématiques ouvertes

Type bras de manipulation

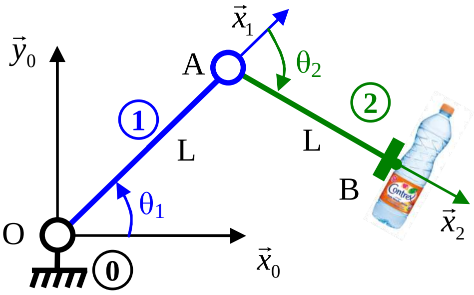
Exemple d'un bras de robot

Loi d'entrée/sortie = **modèle géométrique** : relation entre les coordonnées articulaires (i.e. paramètres pilotant les actionneurs) et les coordonnées opérationnelles (i.e. coordonnées d'un point de l'effecteur en bout de chaine).

Les **paramètres cinématiques sont tous indépendants**.

On utilise la **relation de Chasles** pour établir cette loi E/S.

Modèle (simplifié) du bras de robot



Chasles : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OB} = L.\vec{x}_1 + L.\vec{x}_2 = x_B.\vec{x}_0 + y_B.\vec{y}_0$$

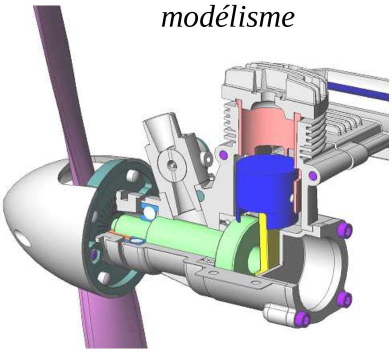
Projection dans la base des coordonnées opérationnelles

$$\begin{cases} x_B = L.\cos\theta_1 + L.\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L.\sin\theta_1 + L.\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

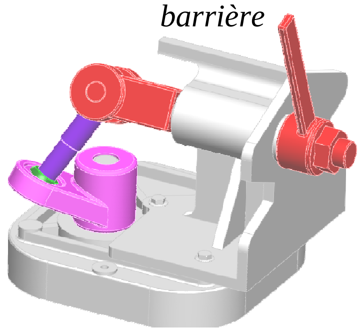
Chaines cinématiques fermées

Type mécanismes de transformation de mouvements

Exemple d'un micromoteur de modélisme



Exemple d'un système automatique d'ouverture de barrière

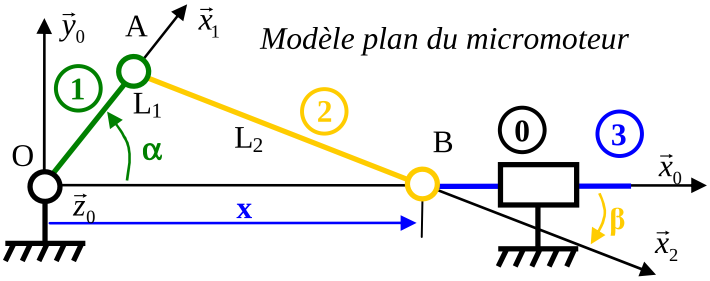


Loi entrée/sortie = loi exprimant le(s) **paramètre(s) de sortie** du système uniquement **en fonction du(des) paramètre(s) d'entrée** et des caractéristiques géométriques invariantes du système.

On utilise principalement soit :

- la fermeture géométrique ou la fermeture angulaire
- le produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante.
- la condition de non glissement.

Modèle plan du micromoteur



Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

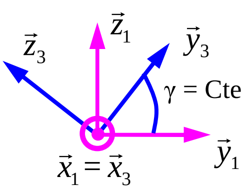
$$L_1.\vec{x}_1 + L_2.\vec{x}_2 - x.\vec{x}_0 = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} L_1.\cos\alpha + L_2.\cos\beta - x = 0 \\ L_1.\sin\alpha + L_2.\sin\beta = 0 \end{cases}$$

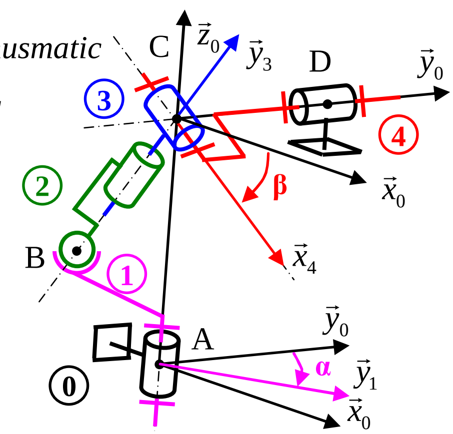
$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \rightarrow x = L_1.\cos\alpha + \sqrt{L_2^{\,2} - (L_1.\sin\alpha)^2}$$

Modèle barrière Sinusmatic

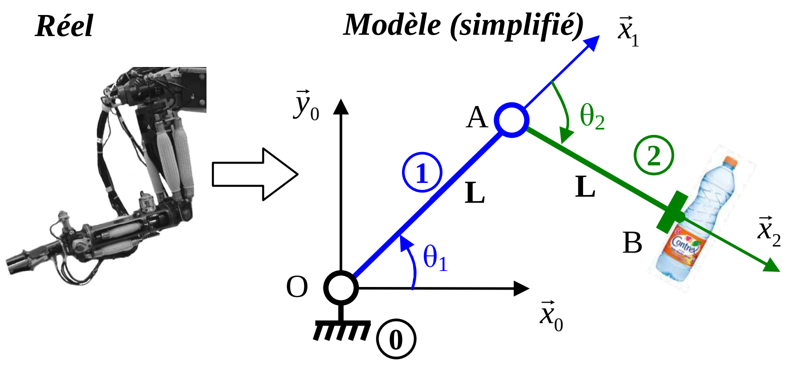
$\overrightarrow{BC}$ est toujours orthogonal avec l'axe $\vec{x}_4$ $\rightarrow$ $\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$

$$\rightarrow -\sin\alpha = \tan\gamma.\tan\beta$$





Modèle géométrique direct



On considère un modèle plan simple dans lequel la pince du robot est animée par seulement deux mouvements de rotation de paramètres θ_1 et θ_2.

Le point B de la pince en bout de chaine a pour coordonnées x_B et y_B dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Chasles : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{OB} = L.\vec{x}_1 + L.\vec{x}_2$ $\rightarrow$ Projection dans la base dans laquelle on exprime les coordonnées x_B et y_B :

$\rightarrow$ $\overrightarrow{OB} = L.\vec{x}_1 + L.\vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 = \cos\theta_1.\vec{x}_0 + \sin\theta_1.\vec{y}_0$ et $\vec{x}_2 = \cos(\theta_1+\theta_2).\vec{x}_0 + \sin(\theta_1+\theta_2).\vec{y}_0$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{OB} = (L.\cos\theta_1 + L.\cos(\theta_1+\theta_2)).\vec{x}_0 + (L.\sin\theta_1 + .\vec{x}_0 + L.\sin(\theta_1+\theta_2)).\vec{y}_0$

Ce qui permet d'écrire le modèle géométrique direct : $\boxed{\begin{cases} x_B = L.\cos\theta_1 + L.\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B = L.\sin\theta_1 + L.\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}}$

Modèle géométrique indirect

Il faut inverser le modèle géométrique direct : $\begin{cases} x_B = L.\cos\theta_1 + L.\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B = L.\sin\theta_1 + L.\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$

$$\begin{cases} x_B = L.\cos\theta_1 + L.\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B = L.\sin\theta_1 + L.\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 2.L.\cos\dfrac{2.\theta_1+\theta_2}{2}.\cos\dfrac{\theta_2}{2} \\ y_B = 2.L.\sin\dfrac{2.\theta_1+\theta_2}{2}.\cos\dfrac{\theta_2}{2} \end{cases}$$

(formules de Simpson : $\cos a + \cos b = 2.\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$ et $\sin a + \sin b = 2.\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$)

En faisant ${x_B}^2 + {y_B}^2$ pour faire apparaitre un terme en $\cos^2 A + \sin^2 B$, on obtient :

$${x_B}^2 + {y_B}^2 = 4.L^2.\cos^2\frac{\theta_2}{2}\left(\cos^2\frac{2.\theta_1+\theta_2}{2} + \sin^2\frac{2.\theta_1+\theta_2}{2}\right) = 4.L^2.\cos^2\frac{\theta_2}{2} \text{ et avec } \cos^2\frac{\theta_2}{2} = \frac{1+\cos\theta_2}{2}$$

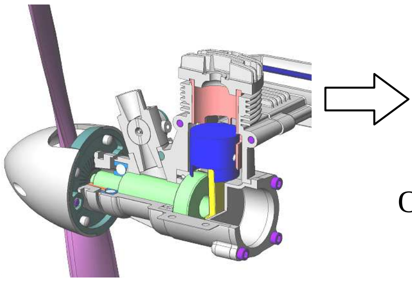
$$\rightarrow {x_B}^2 + {y_B}^2 = 2.L^2.(\cos\theta_2 + 1) \rightarrow \text{ce qui permet d'obtenir : } \cos\theta_2 = \frac{1}{2}.\left(\left(\frac{x_B}{L}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{L}\right)^2\right) - 1$$

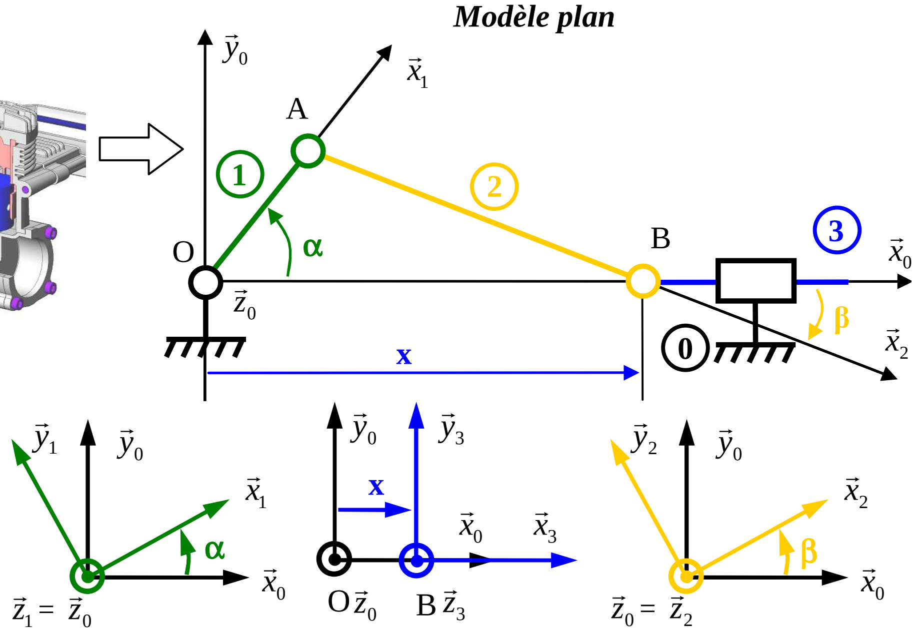
En faisant $\dfrac{y_B}{x_B}$, on a : $\dfrac{y_B}{x_B} = \tan\dfrac{2.\theta_1+\theta_2}{2}$ $\rightarrow$ ce qui permet d'obtenir : $\theta_1 = \arctan\dfrac{y_B}{x_B} - \dfrac{\theta_2}{2}$

Ce qui permet d'écrire le modèle géométrique indirect : $\boxed{\begin{cases} \theta_2 = \arccos\left[\dfrac{1}{2}.\left(\left(\dfrac{x_B}{L}\right)^2 + \left(\dfrac{y_B}{L}\right)^2\right) - 1\right] \\ \theta_1 = \arctan\dfrac{y_B}{x_B} - \dfrac{\theta_2}{2} \end{cases}}$

Loi entrée sortie par fermeture géométrique

Réel ***Modèle plan***





La longueur de la manivelle 1 (L_1) et de la bielle 2 (L_2) sont des caractéristiques géométriques connues et invariables. Les paramètres α, β et x sont des paramètres de position représentatifs des mouvements du système. Le paramètre d'entrée est α, il traduit la rotation de la manivelle 1 par rapport à 0 autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$. Le paramètre de sortie est x, il traduit la translation du piston 3 par rapport à 0 suivant l'axe $(O,\vec{x}_0)$. Le paramètre β est un paramètre intermédiaire qui traduit la rotation de la bielle 2 par rapport à 0 autour de l'axe $(B,\vec{z}_0)$.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$ Soit $L_1.\vec{x}_1+L_2.\vec{x}_2-x.\vec{x}_0=\vec{0}$

En projection sur les axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$, on obtient : $\begin{cases} L_1.\cos\alpha+L_2.\cos\beta-x=0 \\ L_1.\sin\alpha+L_2.\sin\beta=0 \end{cases}$

On obtient donc deux relations scalaires. On retrouve donc un système avec 3 paramètres et 2 relations de dépendance, soit un système à un degré de liberté. Il y a donc une équation qui correspond à la loi entrée sortie du système.

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\beta=\dfrac{x-L_1.\cos\alpha}{L_2}=0 \\ \sin\beta=-\dfrac{L_1.\sin\alpha}{L_2} \end{cases} \quad \text{et } \cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

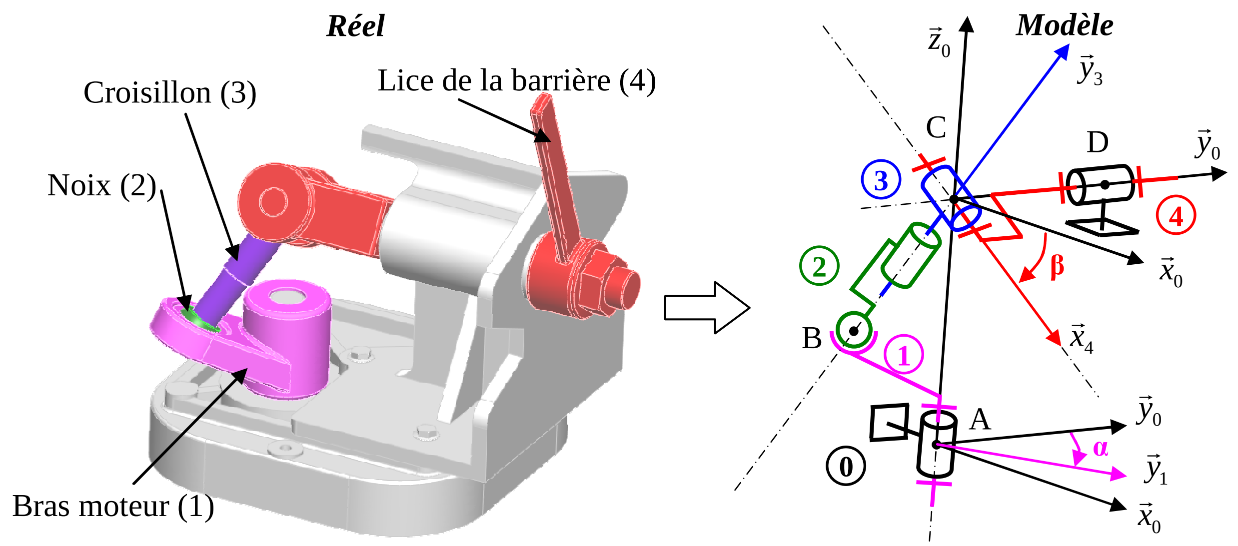
$$\rightarrow \left(\frac{x-L_1.\cos\alpha}{L_2}\right)^2+\left(-\frac{L_1.\sin\alpha}{L_2}\right)^2=1 \;\rightarrow\; (x-L_1.\cos\alpha)^2=L_2^{\,2}-(L_1.\sin\alpha)^2$$

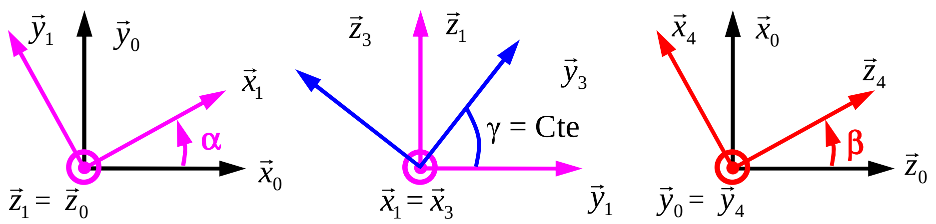
Soit la loi d'entrée sortie :

$$\boxed{x=L_1.\cos\alpha+\sqrt{L_2^{\,2}-(L_1.\sin\alpha)^2}}$$

Cette relation n'est valable que pour $L_2 > L_1$.

Loi entrée sortie à partir du produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante





La barrière Sinusmatic permet de transformer le mouvement d'entrée du moteur (rotation continue) en un mouvement de rotation alternative sur la lice. Il est constitué :

- D'un bras moteur 1 en liaison pivot avec le bâti 0 suivant l'axe $(A, \vec{z}_0)$.
- D'une noix en liaison rotule en B avec le bras moteur 1.
- D'un croisillon en liaison pivot glissant suivant de l'axe $(B, \vec{y}_3)$.
- D'un arbre de lice 4 en liaison pivot suivant de l'axe $(C, \vec{x}_4)$ avec le croisillon 3 et en liaison pivot suivant de l'axe $(D, \vec{y}_0)$ avec bâti 0.

Le paramètre d'entrée est le paramètre α tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et le paramètre de sortie est le paramètre β tel que $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$.

La particularité angulaire de ce système est que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est toujours orthogonal avec l'axe $\vec{x}_4$. Par conséquent le produit scalaire des 2 vecteurs d'orientation $\vec{y}_3.\vec{x}_4$ est nul : $\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$

$\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$ avec $\vec{y}_3 = \cos\gamma.\vec{y}_1 + \sin\gamma.\vec{z}_1$ et $\vec{x}_4 = -\sin\beta.\vec{z}_0 + \cos\beta.\vec{x}_0$

Soit : $(\cos\gamma.\vec{y}_1 + \sin\gamma.\vec{z}_1).(-\sin\beta.\vec{z}_0 + \cos\beta.\vec{x}_0) = 0$

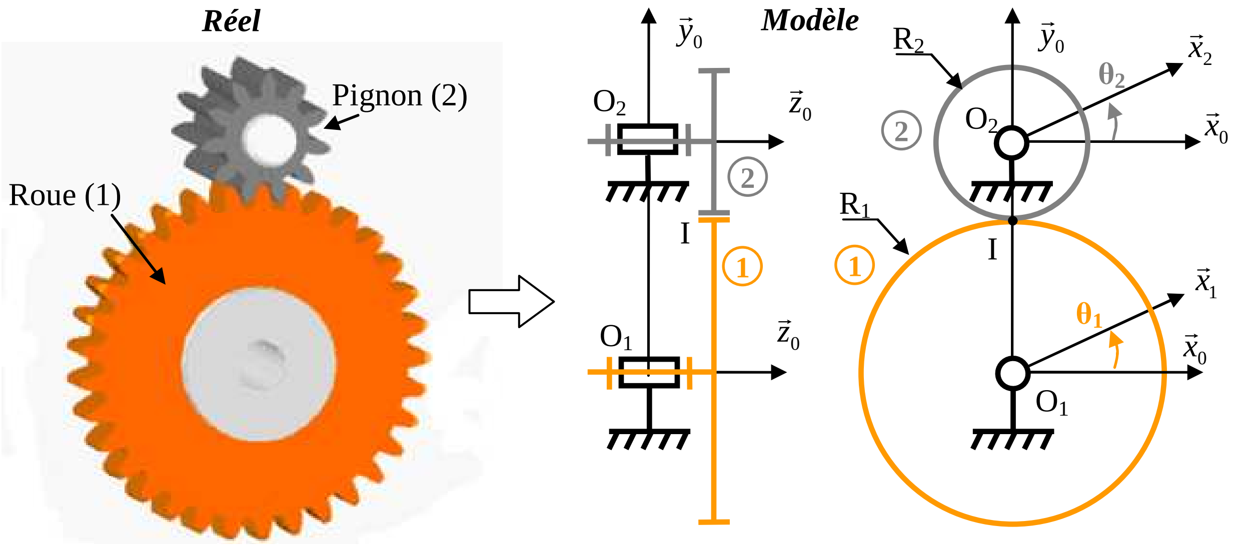
$$-\cos\gamma.\sin\beta.\vec{z}_0.\vec{y}_1 - \sin\gamma.\sin\beta.\vec{z}_0.\vec{z}_1 + \cos\gamma.\cos\beta.\vec{x}_0.\vec{y}_1 + \sin\gamma.\cos\beta.\vec{x}_0.\vec{z}_1 = 0$$

$$-\cos\gamma.\sin\beta - \sin\gamma.\cos\beta.\sin\alpha = 0$$

$$-\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$ Soit la loi d'entrée sortie : $\boxed{-\sin\alpha = \tan\gamma.\tan\beta}$

→ Pour γ = π/4 l'amplitude de la lice est de π/2

Loi entrée sortie à partir d'une condition de non glissement



Condition de roulement sans glissement : $\overrightarrow{V_{I,\,2/1}} = \vec{0}$

Nature du mouvement de 2/1 ? : Mouvement complexe.

→ On décompose en mouvements simples.

2/1 = 2/0 – 1/0

$$\overrightarrow{V_{I,\,2/1}} = \overrightarrow{V_{I,\,2/0}} - \overrightarrow{V_{I,\,1/0}} \quad \overrightarrow{V_{I,\,2/1}} = \vec{0}$$

Nature du mouvement de 2/0? :
Rotation autour de l'axe ($O_1, \vec{z}_0$)

Champ des vitesses

$$\overrightarrow{V_{I,\,2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2,\,2/0}} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

avec $\overrightarrow{V_{O_2,\,2/0}} = \vec{0}$ et

$$\overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = R_2.\vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_2.\vec{z}_0 = R_2.\dot{\theta}_2.\vec{x}_0$$

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{I,\,2/0}} = R_2.\dot{\theta}_2.\vec{x}_0$$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe ($O_1, \vec{z}_0$)

Champ des vitesses

$$\overrightarrow{V_{I,\,1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,\,1/0}} + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

avec $\overrightarrow{V_{O_1,\,1/0}} = \vec{0}$ et

$$\overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -R_1.\vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_1.\vec{z}_0 = -R_1.\dot{\theta}_1.\vec{x}_0$$

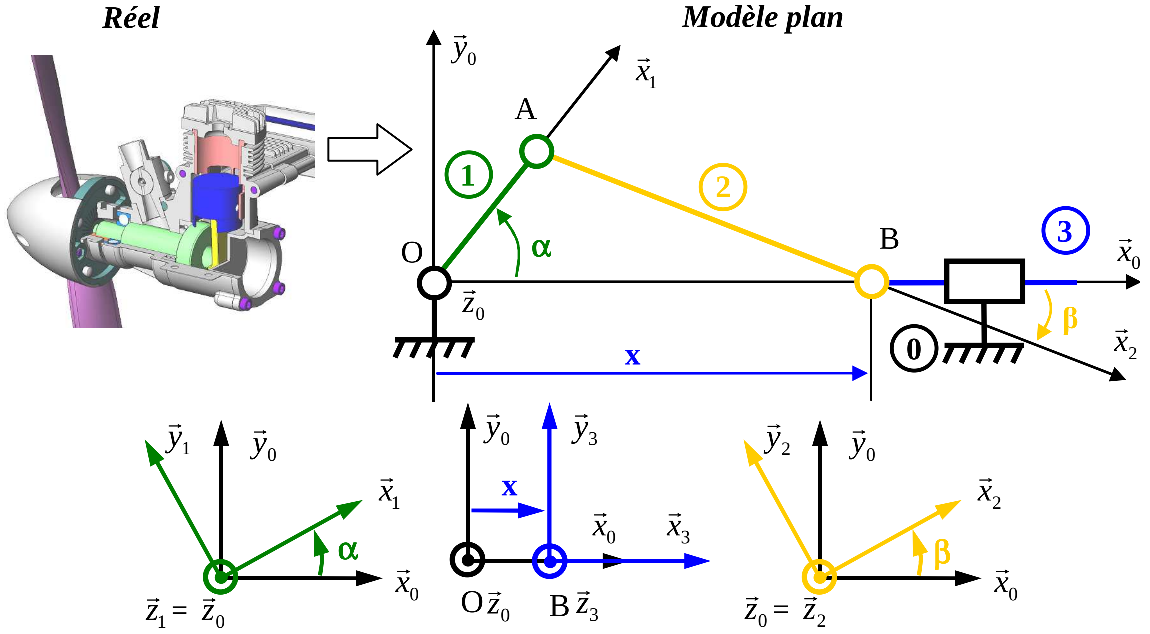
$$\rightarrow \overrightarrow{V_{I,\,1/0}} = -R_1.\dot{\theta}_1.\vec{x}_0$$

Soit $\overrightarrow{V_{I,\,2/1}} = \overrightarrow{V_{I,\,2/0}} - \overrightarrow{V_{I,\,1/0}} = R_2.\dot{\theta}_2.\vec{x}_0 + R_1.\dot{\theta}_1.\vec{x}_0 = \vec{0} \;\rightarrow\; R_2.\dot{\theta}_2 + R_1.\dot{\theta}_1 = 0$

Soit la loi d'entrée sortie : $\boxed{\dot{\theta}_2 = -\dfrac{R_1}{R_2}.\dot{\theta}_1}$

Loi entrée sortie à partir d'une fermeture cinématique

Réel ***Modèle plan***



La fermeture cinématique s'écrit : $\{C_{0/3}\}+\{C_{3/2}\}+\{C_{2/1}\}+\{C_{1/0}\}=\{0\}$

Soit : $${}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{0/3}}\\ \overrightarrow{V_{A\in 0/3}}\end{matrix}\right\}+{}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{3/2}}\\ \overrightarrow{V_{A\in 3/2}}\end{matrix}\right\}+{}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}\end{matrix}\right\}+{}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}\end{matrix}\right\}={}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{0/3}}+\overrightarrow{\Omega_{3/2}}+\overrightarrow{\Omega_{2/1}}+\overrightarrow{\Omega_{1/0}}=\vec{0}\\ \overrightarrow{V_{A\in 0/3}}+\overrightarrow{V_{A\in 3/2}}+\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}+\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}=\vec{0}\end{matrix}\right.$$

Avec :

$\overrightarrow{V_{A\in 0/3}}=-\overrightarrow{V_{B\in 3/0}}=-\dot{x}.\vec{x}_0$

$\overrightarrow{V_{A\in 3/2}}=\overrightarrow{V_{A\in 3/2}}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{3/2}}=L_2.\vec{x}_2\wedge-\dot{\beta}.\vec{z}_0=L_2.\dot{\beta}.\vec{y}_2$

$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}=L.\dot{\alpha}.\vec{y}_1$

Soit : $-\dot{x}.\vec{x}_0+L_2.\dot{\beta}.\vec{y}_2+L.\dot{\alpha}.\vec{y}_1=\vec{0}\rightarrow\left\{\begin{matrix}-L_1.\dot{\alpha}.\sin\alpha-L_2.\dot{\beta}.\sin\beta-\dot{x}=0\\ L_1.\cos\alpha+L_2.\dot{\beta}.\cos\beta=0\end{matrix}\right.$

On retrouve les 2 mêmes équations scalaires que l'on obtiendrait après dérivation des 2 équations scalaires de la fermeture géométrique.