LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

EXERCICES

MP

Énoncés

Solutions

Commentaires

J. BERGUA • J.-L. BAUDY
I. PIERRON

Tout le nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Copyrighted material

Hidden page

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

PHYSIQUE

MP

J. BERGUA • P. GOULLEY • I. PIERRON

Professeurs en classes préparatoires scientifiques

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Bréal éditions

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière MP

Mathématiques 2e année

- Algèbre et géométrie MP
- Analyse MP

Physique 2e année

- Mécanique MP - PC
- Électromagnétisme MP
- Électronique MP
- Optique MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique MP

Chimie 2e année

- Chimie MP

Exercices 2e année

- Mathématiques MP - PT
- Physique MP

Maquette : Joëlle Parreau.
Couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : Alpha-Edit.

© Bréal 2004
Toute reproduction même partielle interdite.
Dépôt légal : août 2004.
ISBN 2 7495 0406 6

Copyrighted material

Hidden page

Sommaire

PARTIE 1 : Mécanique du solide et des systèmes 7

• **Exercices avec solution détaillée**

101. Engins mécaniques 9
102. Bille sur plan incliné 15
103. Équilibre relatif d'un cylindre 20
104. Point matériel sur un cerceau 29
105. Girouette sur un chariot 34
106. Chaînes et poulies 38
107. Mesure d'un coefficient de frottement 47

• **Exercices corrigés**

108. Boulon sur tige filetée 54
109. Disque lié à une tige 58

PARTIE 2 : Électrocinétique 63

• **Exercices avec solution détaillée**

101. Diagramme asymptotique 65
102. Filtre passe-bande à deux A.O. 70
103. Filtre du type Butterworth 75
104. Une application du multiplieur 84
105. Oscillateur quasi sinusoïdal 88
106. Oscillateur à relaxation 96

• **Exercices corrigés**

107. Passe-bande à paramètres ajustables 103
108. Coupe-bande 109
109. Intégrateur numérique – Numérisation d'un signal 115

PARTIE 3 : Électromagnétisme 125

Chapitre 1 Électrostatique – Magnétostatique 127

• **Exercices avec solution détaillée**

101. Condensateur cylindrique à trois armatures 128
102. Cylindre conducteur dans un champ uniforme 131
103. Charges volumiques et conducteur 135

• **Exercices corrigés**

104. Conducteur sphérique influencé par une charge ponctuelle 138
105. Problème de laplace 145

• **Exercices avec solution détaillée**

106. Distributions de courants 147
107. Disque chargé en rotation et dipôle magnétique 149

• **Exercice corrigé**

108. Supraconducteur dans un champ magnétique extérieur uniforme 153

Copyrighted material

Chapitre 2 Équations de Maxwell – Induction 159

• Exercices avec solution détaillée
201. Câble coaxial en régime stationnaire 160
202. Câble coaxial en régime sinusoïdal 167

• Exercices corrigés
203. Condensateur en régime variable 174
204. Champ électromagnétique dans un milieu conducteur 179

• Exercices avec solution détaillée
205. Mouvement d'une bobine en présence d'un champ magnétique 182
206. Quantité d'électricité induite 187
207. Mise en rotation d'une sphère chargée 190

• Exercices corrigés
208. Barres sur rails 194
209. Lévitation d'une spire conductrice 198
210. Moteur synchrone 202
211. Moteur asynchrone 207
212. Déplacement de deux spires 211
213. Moteur linéaire 215
214. Chute d'un aimant dans un tuyau cylindrique 222

Chapitre 3 Ondes Électromagnétiques 227

• Exercices avec solution détaillée
301. Interférences 228
302. Réflexion sur un plan métallique 230
303. Onde guidée 234
304. Ligne sans pertes 239
305. Dipôle tournant 243

• Exercices corrigés
306. Onde dans un plasma idéal 246
307. Champ électromagnétique dans une cavité parallélépipédique 250

PARTIE 4 : Optique ondulatoire 257

Chapitre 1 Interférences 259

• Exercices avec solution détaillée
101. Interféromètre de Michelson 260
102. Influence de la largeur de la fente source 267
103. Interféromètre de Michelson en coin d'air 271

• Exercices corrigés
104. Miroir de Fresnel 277
105. Étoile double 281
106. Spectrométrie à transformée de Fourier 286
107. Couleurs interférentielles 294

Copyrighted material

Chapitre 2 Diffraction 299

• **Exercices avec solution détaillée**
201. Apodisation 300
202. Diffraction à l'infini 306

• **Exercices corrigés**
203. Filtrage spatial 312
204. Monochromateur 316

PARTIE 5 : Thermodynamique 321

Chapitre 1 Énergie et entropie 323

• **Exercices avec solution détaillée**
101. Compressions d'un gaz 324
102. Transformation quasi statique irréversible 328
103. Création d'entropie 331
104. Cycle à trois transformations 336
105. « Turbopropulseur » 340

Chapitre 2 Diffusion thermique 345

• **Exercices avec solution détaillée**
201. « Isolation » d'une conduite 346
202. Régulation thermique par ailette 351
203. Phénomènes instationnaires 356
204. Impression de chaud ou de froid au « contact » 362
205. Bouffée de chaleur 366

• **Exercices corrigés**
206. Transfert d'énergie thermique entre deux corps 370
207. Barre parcourue par un courant 375
208. Échangeur d'énergie thermique 379
209. Formation d'une couche de glace 385

Chapitre 3 Rayonnement thermique 391

• **Exercices avec solution détaillée**
301. Échanges de chaleur d'une paroi solide en contact avec un gaz 392
302. Rayonnement solaire 396
303. Température de surface d'une planète 400
304. Capteur solaire 407

• **Exercices corrigés**
305. Pression de radiation d'un gaz de photons et densité volumique d'énergie 412
306. Énergie interne et entropie associées au rayonnement 413

Copyrighted material

Partie 1

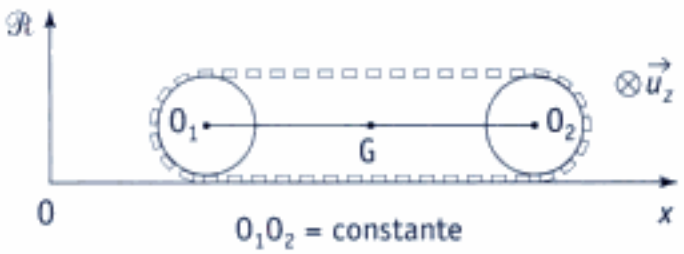
Mécanique du solide et des systèmes

Hidden page

101 Engins mécaniques

Partie A

Un bulldozer est modélisé par un ensemble de deux « roues » identiques (de rayon a et de moment d'inertie I par rapport à leurs axes respectifs O_1z et O_2z) d'une chenille de masse m', et d'un chassis.



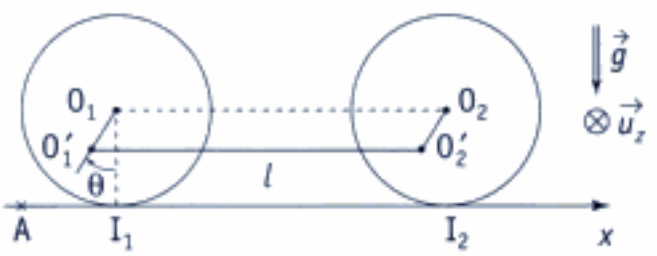
La masse totale du système est M. On note G son centre de masse.

1. L'engin se déplace, dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol, à la vitesse $V_0\vec{u}_x$ selon l'axe horizontal Ox. Donner l'expression de son énergie cinétique.

2. Il est propulsé par un moteur qui exerce un couple constant Γ_m sur la roue de centre O_2 ($\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m\vec{u}_z$). Déterminer l'accélération γ ($\vec{\gamma} = \gamma\vec{u}_x$) prise par l'engin dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen (les liaisons d'axes O_1z et O_2z sont parfaites).

Partie B

On considère deux disques homogènes identiques (masse M, rayon R) reliés par une bielle schématisée par une tige homogène $O_1'O_2'$ de longueur l et de masse m.



$$\|\overrightarrow{O_1O_1'}\| = \|\overrightarrow{O_2O_2'}\| = \frac{R}{2}$$

Les deux disques roulent sans glisser sur le plan horizontal et les liaisons en O_1' et O_2' sont parfaites. Les contacts en I_1 et I_2 sont ponctuels.

On note $J = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe.

1. Déterminer une équation différentielle du mouvement en $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}(A, x, y, z)$ lié au plan horizontal est galiléen.

2. En déduire la période T des petites oscillations du système.

1. Ce qu'il faut savoir

- Composition des vitesses.
- Champ des vitesses d'un solide.
- Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique (système matériel fermé quelconque).
- Théorème de la puissance cinétique (ou théorème de l'énergie cinétique).
- Roulement sans glissement ; notion de liaison parfaite.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

A. 1. Pour le calcul de l'énergie cinétique de la chenille, montrer que, dans le référentiel lié à l'engin et se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{V_0}$, tous les points de la chenille ont une vitesse de même module.

2. Les liaisons d'axe (O_1z et O_2z) sont supposées parfaites, la chenille ne glisse pas par rapport aux « roues » et elle adhère complètement au sol. Il sera donc judicieux d'appliquer au système le théorème de la puissance cinétique : seul le couple moteur produit un travail.

B. 1. Les liaisons ($O_1'z$ et $O_2'z$) sont également parfaites et les deux disques roulent sans glisser sur le plan horizontal. Les efforts associés ne créent donc aucun travail, et le système pourra être étudié, là encore, par le biais du théorème de la puissance cinétique.

2. L'étude des petites oscillations suppose que θ et $\dot{\theta}$ peuvent être assimilés à des infiniment petits du premier ordre. On ne conservera donc que les termes du deuxième ordre dans l'équation énergétique établie en **B.1.**

3. Solution

Partie A

1. Le bulldozer constitue un système déformable dont l'énergie cinétique totale dans $\mathcal{R}$ est la somme des énergies cinétiques de la chenille, des roues et du chassis :

$$E_c = E_c)_{\text{chenille}} + E_c)_{\text{roues}} + E_c)_{\text{chassis}}.$$

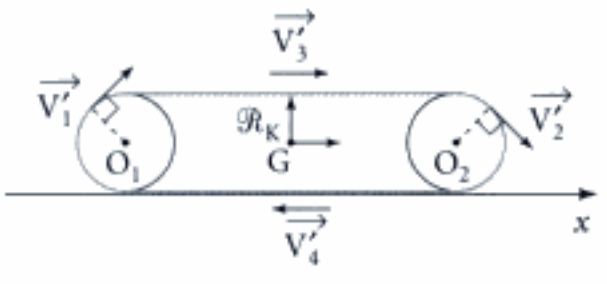
Appliquons le théorème de Koenig en passant par le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_K$ de l'engin.

On a :

$$E_{c_{\mathcal{R}}} = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}MV_G^2 = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}MV_0^2$$

et $E_{c_{\mathcal{R}_K}} = E_{c_{\mathcal{R}_K}}^{\text{chassis}} + E_{c_{\mathcal{R}_K}}^{\text{chenille}} + E_{c_{\mathcal{R}_K}}^{\text{roues}}$.

- Le chassis est fixe dans $\mathcal{R}_K$ d'où $E_c)_{\mathcal{R}_K}^{\text{chassis}} = 0$.
- Considérons alors la chenille dans $\mathcal{R}_K$:



$\overrightarrow{V'} \equiv$ vitesse dans $\mathcal{R}_K$ des différents éléments de la chenille.

D'autre part, la chenille étant inextensible, il vient :

$$\|\overrightarrow{V_1'}\| = \|\overrightarrow{V_2'}\| = \|\overrightarrow{V_3'}\| = \|\overrightarrow{V_4'}\| = V'.$$

Copyrighted material

Pour calculer V′, il suffit de remarquer que la partie de la chenille en contact avec le sol adhère à ce dernier (absence de glissement de la chenille par rapport au sol), de sorte que $\overrightarrow{V_4} = \vec{0}$ vitesse correspondante dans $\mathcal{R}$).

Or $\overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{V'_4} + \vec{V_e} = \overrightarrow{V'_4} + V_0\vec{u_x}$ (composition des vitesses)

d'où $\vec{0} = \overrightarrow{V'_4} + V_0\vec{u_x}$ et $\overrightarrow{V'_4} = -V_0\vec{u_x}$.

Et finalement $V' = V_0$.

Tous les éléments de la chenille ayant, dans $\mathcal{R}_K$, une vitesse de même norme V_0, on a :

$$\boxed{E_c)_{\mathcal{R}_K}^{\text{chenille}} = \frac{1}{2}m'V_0^2}$$

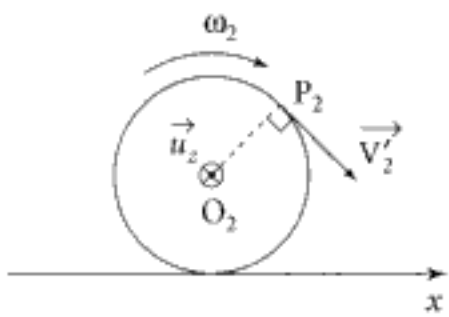
■ Enfin, intéressons nous aux deux roues. Dans $\mathcal{R}_K$, leurs centres de masses O_1 et O_2 sont fixes :

$$\vec{V}(O_1) = \vec{V}(O_2) = V_0\vec{u_x} \Rightarrow \vec{V}_{\mathcal{R}_K}(O_1) = \vec{V}_{\mathcal{R}_K}(O_2) = \vec{0}.$$

Chaque roue est, dans $\mathcal{R}_K$, en rotation autour de son axe.

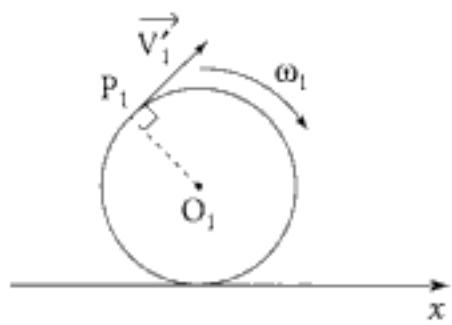
On a donc (absence de glissement de la chenille par rapport aux roues) :

$$\overrightarrow{V'_2} = \omega_2\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{O_2P_2} = \omega_2 a\vec{u_{\theta_2}}.$$



De même :

$$\overrightarrow{V'_1} = \omega_1\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{O_1P_1} = \omega_1 a\vec{u_{\theta_1}}.$$



Or $\left\|\overrightarrow{V'_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{V'_2}\right\| = V_0$, soit : $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{V_0}{a}$.

Dès lors :

$$E_c)_{\mathcal{R}_K}^{\text{roues}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deux roues}}}{2} \times \left\{\frac{1}{2}I_{O_2z}\omega^2\right\} = I\omega^2 = \frac{I}{a^2}V_0^2.$$

POINT COURS

• Un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel d'étude possède, dans ce référentiel, une énergie cinétique E_c telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

où J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe et $\vec{\omega} = \omega\vec{u_\Delta}$ est le vecteur rotation du solide par rapport à Δ.

Copyrighted material

■ L'énergie cinétique de l'engin dans $\mathcal{R}_K$ vaut donc :

$$E_{c_{\mathcal{R}_K}} = \frac{1}{2}m' V_0^2 + I\frac{V_0^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{E_{c_{\mathcal{R}_K}} = \frac{1}{2}\left(m' + 2\frac{I}{a^2}\right)V_0^2}$$

Et dans $\mathcal{R}$ puisque $E_{c_{\mathcal{R}}} = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}M\vec{V}^2_{\mathcal{R}}(G)$:

$$\boxed{E_{c_{\mathcal{R}}} = \frac{1}{2}\left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)V_0^2} \quad (1)$$

A. 2. Appliquons, dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le théorème de l'énergie cinétique au système global :

$$\left.\frac{dE_c}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}^{int}_{\mathcal{R}} \quad (2)$$

On a $\mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}}(\text{poids}) + \mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}}(\text{sol} \rightarrow \text{chenille})$

or $\mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}}(\text{poids}) = 0$ (G garde une altitude constante).

$\mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}}(\text{sol} \rightarrow \text{chenille}) = 0$ (les maillons en contact avec le sol ayant une vitesse nulle).

D'où : $\mathcal{P}^{ext}_{\mathcal{R}} = 0$.

D'autre part, les liaisons étant supposées parfaites (liaisons d'axes O_1z et O_2z) et la chenille ne glissant pas par rapport aux roues, il reste :

$$\mathcal{P}^{int}_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\text{moteur}} = \Gamma_m\omega.$$

Et d'après (1) : $\left.\frac{dE_c}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)V\gamma$

soit : $\left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)\gamma V = \Gamma_m\omega.$

Et avec $\omega = \frac{V}{a}$ (condition de non glissement de la chenille par rapport aux roues) :

$$\boxed{\gamma = \frac{\Gamma_m}{a\left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)}}$$

Cette accélération est d'autant plus grande que le couple moteur Γ_m est important.

Partie B

1.

POINT MÉTHODE

Il y a roulement sans glissement : le mouvement des disques peut être repéré par la seule variable $\theta(t)$. La position de la bielle est définie à chaque instant par la position de O_1 et celle de O_1' donc par l'angle θ.

Le mouvement du système se réduit ainsi à un problème à une dimension (ici θ).

Copyrighted material

Il est alors judicieux d'appliquer le théorème de la puissance cinétique (équation scalaire) car d'une part, les liaisons sont parfaites (et donc ne travaillent pas) et d'autre part, les efforts de contact plan horizontal-disques produisent un travail nul (roulement sans glissement et absence de frottement de roulement).

Le théorème de la puissance cinétique, appliqué dans $\mathcal{R}$ galiléen, au système des deux disques et de la bielle s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int}.$$

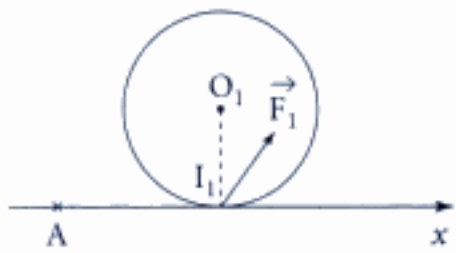
■ $\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}(\text{poids}) + \mathcal{P}(\text{plan} \rightarrow \text{disques})$

$$\mathcal{P}(\text{poids}) = \underbrace{\mathcal{P}(\text{poids des disques})}_{\substack{0 \\ (O_1 \text{ et } O_2 \text{ d'altitudes constantes})}} + \mathcal{P}(\text{poids bielle}) = -\frac{dE_p}{dt}(\text{bielle})$$

où E_p représente l'énergie potentielle de pesanteur associée à la bielle, soit en prenant une origine en O_1 :

$$\boxed{E_p = -mg\frac{R}{2}\cos\theta} \quad (1)$$

D'autre part, si $\vec{F}_1$ représente la résultante des efforts de contact exercés par le plan sur le disque $\mathcal{D}_1$, on a (contact ponctuel) :



$$\mathcal{P}^{ext}(\text{plan} \rightarrow \mathcal{D}_1) = \vec{F}_1 \cdot \vec{V}(I_1) + 0$$

où $\vec{V}(I_1)$ est la vitesse du point I du disque qui coïncide, à l'instant t, avec le plan.

Le disque roule sans glisser sur le plan Axz : $\vec{V}_{\mathcal{R}}(I_1) = \vec{0}$

Soit $\mathcal{P}^{ext}(\text{plan} \rightarrow \mathcal{D}_1) = 0$; de même $\mathcal{P}^{ext}(\text{plan} \rightarrow \mathcal{D}_2) = 0$.

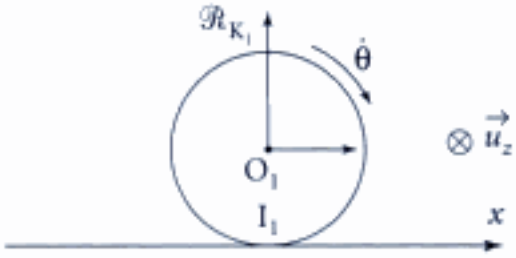
Finalement $\boxed{\mathcal{P}^{ext} = -\frac{dE_{p(\text{bielle})}}{dt}}$

■ Les liaisons d'axes $O_1'z$ et $O_2'z$ sont parfaites : les efforts de contact disques-bielle ne travaillent donc pas et $\mathcal{P}^{int} = 0$.

Au total, il vient : $\frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_{p(\text{bielle})}}{dt}$, soit $E_{c(\text{système})} + E_{p(\text{bielle})} = \text{cste}$ (2)

■ Il reste à calculer l'énergie cinétique E_c du système :

$$E_c = E_c(\text{disques}) + E_c(\text{bielle}).$$



Copyrighted material

Chaque disque possède une vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u_z}$, et leurs centres de masse se déplacent à la vitesse $\vec{V}$ telle que :

$$\vec{0} = \vec{V} + \overrightarrow{I_1O_1} \wedge \dot{\theta}\vec{u_z}$$

(condition de non glissement en I_1)

soit $\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u_x}$.

Et $E_c(\mathcal{D}_1) = E_{c_{\mathcal{R}_{K1}}} + \frac{1}{2}M\vec{V}^2(O_1) = E_{c_{\mathcal{R}_{K1}}} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$.

Or dans $\mathcal{R}_{K1}$ (repère du centre de masse associé au disque $\mathcal{D}_1$), $\mathcal{D}_1$ possède un mouvement de rotation par rapport à l'axe O_1z. On a donc :

$$E_{c_{\mathcal{R}_{K1}}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

d'où :

$$E_c(\mathcal{D}_2) = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = 2E_c(\mathcal{D}_1) = \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

Quant à la barre, elle possède un mouvement de translation dans $\mathcal{R}$ ($O_1'O_2'$ reste parallèle à la direction fixe $\vec{u_x}$). Dès lors :

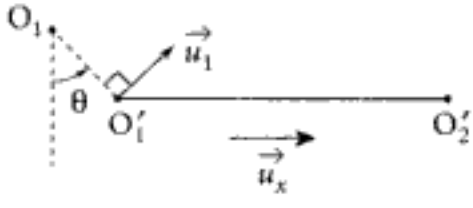
$$E_{c(\text{barre})} = E_{c_{\mathcal{R}_{K(\text{barre})}}} + \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G_b) = 0 + \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G_b)$$

avec $\vec{V}(G_b) = \vec{V}(O_1')$.

Or O_1' est un point du solide $\mathcal{D}_1$, soit :

$$\vec{V}(O_1') = \vec{V}(O_1) + \overrightarrow{O_1'O_1} \wedge \dot{\theta}\vec{u_z} \quad \text{(champ des vitesses du solide } \mathcal{D}_1\text{)}.$$

Et $\vec{V}(G_b) = R\dot{\theta}\vec{u_x} + \frac{1}{2}R\dot{\theta}\vec{u_1}$.



d'où $E_{c(\text{barre})} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\left[\vec{u_x} + \frac{1}{2}\vec{u_1}\right]^2$

$$= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\left[1 + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}\vec{u_x} \cdot \vec{u_1}\right].$$

Soit avec $\vec{u_x} \cdot \vec{u_1} = \cos\theta$: $E_{c(\text{barre})} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\left[\frac{5}{4} + \cos\theta\right] \quad (4)$

■ L'équation (2) s'écrit alors avec (1), (3) et (4) :

$$\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\left[\frac{5}{4} + \cos\theta\right] - mg\frac{R}{2}\cos\theta = \text{cste} = E_0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[3M + \left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)m\right]R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\cos\theta = E_0} \quad (5)$$

Copyrighted material

B. 2. Pour les petits mouvements, développons le premier membre de l'égalité (5) au second ordre en θ, $\dot{\theta}$.

$$\frac{1}{2}mgR\cos\theta \to \frac{1}{2}mgR\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right);$$

$$\frac{1}{2}\left[3M+\left(\frac{5}{4}+\cos\theta\right)m\right] \to \frac{1}{2}\left[3M+\left(\frac{5}{4}+1\right)m\right]R^2\dot{\theta}^2.$$

D'où : $\frac{1}{2}\left(3M+\frac{9}{4}m\right)R^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{4}mgR\theta^2 = \text{cste}$

de la forme : $\dot{\theta}^2+\omega^2\theta^2 = \text{cste}$ avec $\omega^2 = \frac{g}{R}\frac{2m}{3(4M+3m)}$.

Cette équation est caractéristique du mouvement d'un oscillateur harmonique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, soit :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{3(4M+3m)}{2m}}}$$

102 Bille sur plan incliné

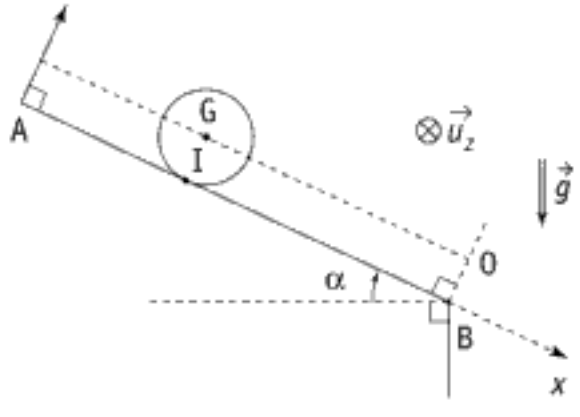
Une bille homogène (masse m, rayon a) *roule sans glisser* sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (α).

Elle est abandonnée en A sans vitesse initiale. Le plan incliné se termine en B après un parcours L de la bille.

On donne :

$J = \frac{2}{5}ma^2$ (moment d'inertie de la bille par rapport à l'axe Gz) ;

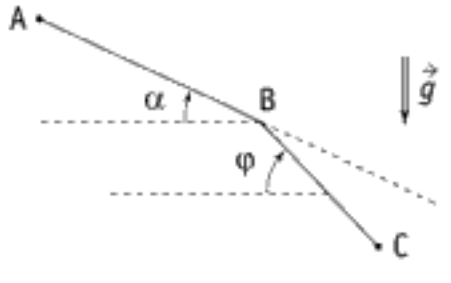
$J' = \frac{7}{5}ma^2$ (moment d'inertie de la bille par rapport à l'axe Iz).



1. Déterminer les caractéristiques cinématiques du mouvement de la bille lorsque cesse le contact au point B.

2. Le plan incliné « AB » se prolonge maintenant par un autre plan incliné « BC » (angle φ par rapport à l'horizontale, avec $\varphi > \alpha$).

À quelles conditions portant sur α et φ la bille pourra-t-elle poursuivre son mouvement de roulement sans glissement sur le plan « BC » ?



Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

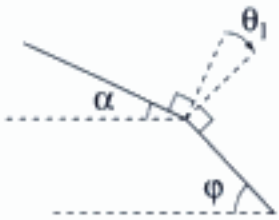
- Roulement sans glissement.
- Théorème de la puissance cinétique.
- Théorème de la résultante dynamique ; théorème du moment cinétique barycentrique.
- Efforts de contact : rupture de contact.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La bille arrivant en B peut soit décoller immédiatement, soit commencer un mouvement de rotation autour de l'axe B*z* (pas de glissement) puis décoller.

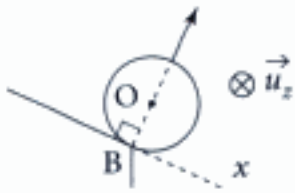
On supposera donc que la bille amorce un « pivotement » autour de B et on cherchera à déterminer l'angle θ_c pour lequel le contact cesse (la composante normale de la réaction du support sur la bille doit alors s'annuler).

2. Il faut déjà que la bille arrivant en B ne décolle pas immédiatement et qu'alors, l'angle θ_c reste supérieur à θ_1 (*cf.* figure ci-contre).

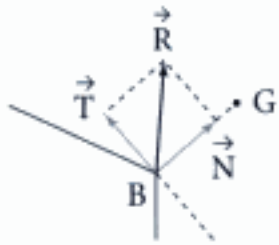


3. Solution

1. Lorsque le point de contact I de la bille sur le plan incliné atteint le point B, la bille peut pivoter autour de l'axe B*z* ou décoller.



Le décollement se produit au moment où la composante normale $\vec{N}$ de la réaction $\vec{R}$ du support sur la bille s'annule (le contact subsiste tant que $N = \vec{R} \cdot \vec{n} > 0$, où $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{BG}}{BG}$; $N > 0$ signifie que la bille appuie sur son support).



POINT MÉTHODE

Dans un premier temps, nous allons donc déterminer les conditions cinématiques de la bille lorsque son centre de masse G arrive en O (OB étant perpendiculaire à AB). On envisagera ensuite un mouvement de pivotement autour de B, puis on étudiera les conditions de non décollement associées à ce type de mouvement.

■ **1re phase :**

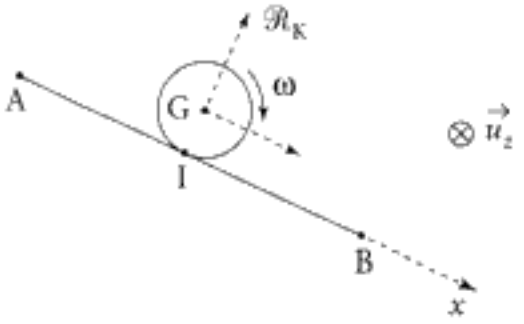
Pour déterminer la vitesse V_0 du centre de masse G lorsqu'il arrive en O, appliquons le théorème de l'énergie cinétique sous la forme : $\Delta E_c = W(\text{poids})$.

Copyrighted material

En effet, les forces de contact plan incliné-bille ne produisent aucun travail (roulement sans glissement). Or d'après le théorème de Kœnig :

$$E_c = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}m\overrightarrow{V_G}^2 \quad \text{où } E_{c_{\mathcal{R}_K}} = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

(Dans $\mathcal{R}_K$ la bille est en rotation par rapport à l'axe Gz).



La condition de roulement sans glissement s'écrit :

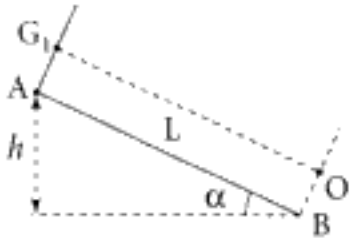
$$\vec{V}(I) = \vec{0} = \vec{V}(G) + \overrightarrow{IG} \wedge \omega\vec{u}_z \Rightarrow \overrightarrow{V_G} = a\omega\vec{u}_x.$$

D'où : $E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}J\frac{V_G^2}{a^2} = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}ma^2\frac{V_G^2}{a^2}\right)$

$$E_c = \frac{1}{2}mV_G^2\left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{10}mV_G^2.$$

Soit $E_c(G = O) - E_c(G = G_1) = W(\text{poids} : G_1 \to O)$

et $W(\text{poids} : G_1 \to O) = mg(z_{G_1} - z_0) = mgh$
$= mgL\sin\alpha$



or pour $G = G_1$, $E_c = 0$ (bille lancée sans vitesse initiale)

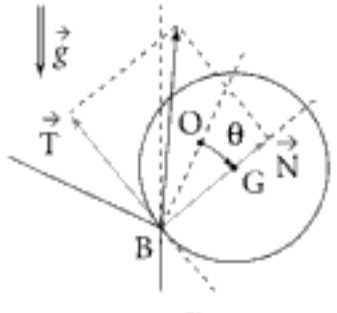
et pour $G = O$, $E_c = \frac{1}{2}mV_0^2$ (V_0 vitesse de G).

D'où : $\frac{7}{10}mV_0^2 - 0 = mgL\sin\alpha \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{10}{7}gL\sin\alpha}}$ (1)

■ **2e phase :**

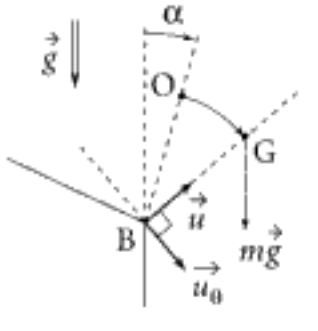
On suppose que le contact en B ne cesse pas immédiatement. La trajectoire du point G est alors circulaire (la condition de roulement sans glissement impose que le point I du solide en contact avec le point du support – ici B – reste le même ; la bille est alors animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Bz).

La bille est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$ du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ où $\vec{N} = N\vec{u}$.



Ce mouvement persistera tant que $N > 0$. Il faut donc calculer $N(\theta)$. À cet effet, appliquons le théorème de la résultante dynamique (encore appelé théorème de la quantité de mouvement…) :

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{V_G}) = m\vec{g} + \vec{R} = m\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt}$$



Copyrighted material

or $\dfrac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \dfrac{dV_G}{dt}\vec{u_\theta} - \dfrac{V_G^2}{a}\vec{u}$ (G décrit un arc de cercle de centre B).

D'où en projection sur $\vec{u}$: $-\dfrac{V_G^2}{a}m = m\vec{g}\cdot\vec{u} + \vec{R}\cdot\vec{u}$

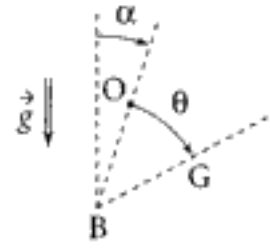
et $N = \vec{R}\cdot\vec{u} = -m\dfrac{V_G^2}{a} - m\vec{g}\cdot\vec{u}$ avec $\vec{g}\cdot\vec{u} = -g\cos(\alpha+\theta)$

$$N = mg\cos(\alpha+\theta) - \frac{mV_G^2}{a} \quad (2)$$

Calculons la quantité V_G^2 par application du théorème de l'énergie cinétique entre les positions $\theta = 0$ (G est en O et $V_G = V_0$) et $\theta(t)$ ($V_G = a\dot{\theta}(t)$). On a :

$\Delta E_c = W(\text{poids})$, $\vec{R}$ ne travaille pas (I reste fixe confondu avec B), avec $E_c = \dfrac{1}{2}J_B\dot{\theta}^2$.

Soit $\dfrac{1}{2}J_B\dot{\theta}^2(t) - \dfrac{1}{2}J_B\dot{\theta}_0^2 = W(\text{poids})$ $\quad \dot{\theta}_0 = \dfrac{V_0}{a}$



or $W(\text{poids}) = m\vec{g}\cdot\overrightarrow{OG} = m\vec{g}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG})$

$W(\text{poids}) = mga[\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)]$.

Finalement : $\dfrac{1}{2}J_B\dfrac{V_G^2}{a^2} - \dfrac{1}{2}J_B\dfrac{V_0^2}{a^2} = mga[\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)]$

et avec $J_B = \dfrac{7}{5}ma^2$: $\dfrac{1}{2}\dfrac{7}{5}ma^2\left(\dfrac{V_G^2}{a^2} - \dfrac{V_0^2}{a^2}\right) = mga[\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)]$

$$\frac{mV_G^2}{a} = \frac{mV_0^2}{a} + \frac{10}{7}mg[\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)] \quad (3)$$

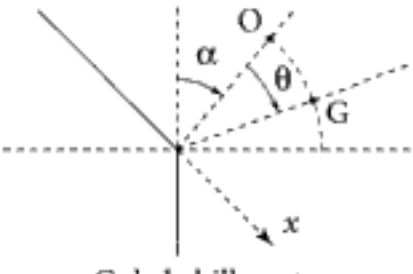
Ces relations (1), (2) et (3) donnent alors :

$$N = mg\cos(\alpha+\theta) - \frac{10}{7}mg\frac{L}{a}\sin\alpha - \frac{10}{7}mg[\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)]$$

$$\frac{N}{mg} = \cos(\alpha+\theta)\cdot\left(1 + \frac{10}{7}\right) - \frac{10}{7}\left(\cos\alpha + \frac{L}{a}\sin\alpha\right)$$

$$\boxed{\frac{N}{mg} = \frac{17}{7}\cos(\alpha+\theta) - \frac{10}{7}\left(\cos\alpha + \frac{L}{a}\sin\alpha\right)} \quad (4)$$

■ **Discussion :**



• On a $\dfrac{N}{mg} = f(\theta)$, et on peut se limiter, pour θ, à l'intervalle $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, soit encore $\alpha + \theta \in \left(\alpha\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

• $f(\theta)$ est donc une fonction décroissante de θ.

– Pour $f(0) < 0$, le contact cesse dès que le centre de masse G de la bille se trouve en O, ce qui se produit pour : $\dfrac{10}{7}\left(\cos\alpha + \dfrac{L}{a}\sin\alpha\right) \geqslant \dfrac{17}{7}\cos\alpha$ (5)

Copyrighted material

$$\frac{L}{a}\sin\alpha \geqslant \left(\frac{17}{7}-1\right)\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\tan\alpha \geqslant \frac{7}{10}\frac{a}{L} = \tan\alpha_1} \text{ soit pour } \alpha \geqslant \alpha_1.$$

– Pour $\alpha < \alpha_1$, le contact cesse pour une valeur θ_c de θ telle que :

$$f(\theta_c) = 0 \text{ soit } \cos(\alpha+\theta_c) = \frac{10}{17}\left(\frac{L}{a}\sin\alpha + \cos\alpha\right) < \cos\alpha$$

(car on a alors $\frac{10}{7}\left(\frac{L}{a}\sin\alpha + \cos\alpha\right) < \frac{17}{7}\cos\alpha$).

• Pour $\alpha \leqslant \alpha_1 = \arctan\left(\frac{7}{10}\frac{a}{L}\right)$, la bille décolle lorsqu'elle arrive en B avec un état cinématique caractérisé par : $\overrightarrow{V_G} = V_0\vec{u_x}$ et $\vec{\omega} = \frac{V_0}{a}\vec{u_z}$.

• Pour $\alpha > \alpha_1$, la bille décolle quand θ atteint la valeur θ_c avec un mouvement ultérieur défini par les conditions initiales :

$$\frac{mV_G^2}{a} = mg\cos(\alpha+\theta_c) \text{ d'après (2)}$$

soit $\overrightarrow{V_G} = \sqrt{ga\cos(\alpha+\theta_c)}\,\vec{u_{\theta_c}}$ et $\omega = \frac{V_G}{a} = \sqrt{\frac{g}{a}\cos(\alpha+\theta_c)}$.

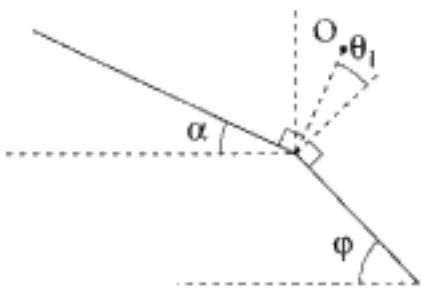
• Dans les deux cas, le mouvement ultérieur est un mouvement de chute libre de la bille :
– son centre de masse G décrit une parabole ;
– le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est invariable. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer le théorème du moment cinétique barycentrique :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_K} = \overrightarrow{\mathcal{M}^{ext}}(G) = \vec{0} \text{ (le poids est appliqué en G).}$$

D'où $\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_K}(G) = \text{cste}$, or $\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_K}(G) = \frac{2}{5}ma^2\vec{\omega}$, soit $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{cste}}$.

2. Au delà de B, il existe maintenant un deuxième plan incliné d'angle $\varphi > \alpha$ (rupture de pente au point B). Le mouvement de roulement sans glissement pourra se poursuivre sur ce deuxième plan à condition que l'on ait : $\theta_c \geqslant \theta_1$ où (*cf.* schéma) $\theta_1 = \varphi - \alpha$

soit pour $\theta_c \geqslant \varphi - \alpha \Rightarrow \varphi \leqslant \theta_c + \alpha$.



En résumé, il faut donc :

• $\alpha < \alpha_1$ (la bille ne décolle pas dès qu'elle arrive en B) ;

• $\alpha < \varphi \leqslant (\theta_c + \alpha)$ soit $\alpha < \varphi \leqslant \arctan\left[\frac{10}{17}\left(\frac{L}{a}\sin\alpha + \cos\alpha\right)\right]$.

Commentaire

Cette étude suppose le roulement sans glissement. Si l'on note $\vec{T}$ la composante tangentielle de la résultante des efforts de contact et f le coefficient de frottement, on doit avoir :

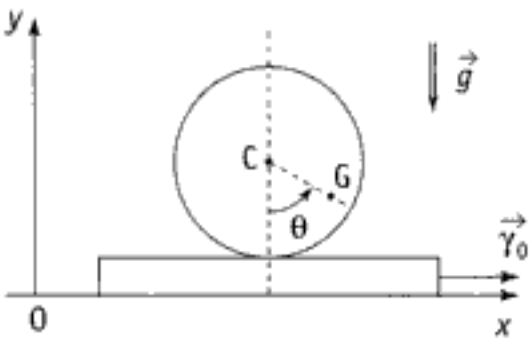
$$\|\vec{T}\| < fN \text{ (pour } N > 0\text{, c'est-à-dire tant qu'il y a contact).}$$

Copyrighted material

103 Équilibre relatif d'un cylindre

Partie A

Un cylindre de masse M et de rayon R repose sur une planche horizontale uniformément accélérée (accélération **constante** $\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{u_x}$, $\gamma_0 > 0$ pa rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O\,;\,x,\,y,\,z)$).



Le centre de masse G du cylindre est distant de a de son axe Cz. On pose :

$$\frac{R}{a} = n > 1 \quad \text{et} \quad \frac{g}{\gamma_0} = p.$$

n étant fixé, il est possible de donner différentes valeurs au paramètre p.

On supposera que le cylindre **ne glisse jamais** par rapport à la planche.

On désire étudier les différentes positions d'équilibre relatif du cylindre.

1. Faire une étude qualitative.

2. Établir une équation en θ, paramétrée par n et p, définissant ces positions d'équilibre. Discuter de leur existence ainsi que de leur stabilité. *A.N.* : $n = 3$ et $p = 6$.

3. Approche énergétique : on se place dans le référentiel lié à la planche. Montrer alors que l'on peut associer une énergie potentielle aux forces autres que les forces de contact : on envisagera pour cela un déplacement relatif du cylindre sans glissement.

4. Dans le cas $n = 3$ et $p = 6$, quelle valeur minimale faut-il donner au coefficient de frottement de glissement cylindre/planche pour que le cylindre reste effectivement en équilibre par rapport à la planche (cas de l'équilibre stable) ?

Partie B

Le cylindre est maintenant homogène de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}MR^2$ par rapport à son axe Cz. La planche a une masse m. Les coefficients de frottement de glissement sont respectivement f (planche/cylindre) et f' (planche/sol). On désigne par $\vec{V_P} = V_P(t)\vec{u_x}$ la vitesse de la planche dans $\mathcal{R}_g$ ($V_P(t)$ fonction continue). Le système étant initialement au repos dans $\mathcal{R}_g$, on tire la planche selon Ox sur une distance L ($V_P(t) > 0$), la planche restant immobile après cette opération ($V_P(t_f) = 0$).

De quelle distance l le centre de masse C du cylindre s'est-il déplacé ? On supposera qu'à aucun moment, le cylindre ne glisse sur la planche.

1. Ce qu'il faut savoir

- Force d'inertie d'entraînement : cas de la translation rectiligne.
- Conditions d'équilibre pour un solide.
- Champ des vitesses d'un solide.

Copyrighted material

- Puissance d'efforts s'exerçant sur un solide.
- Lois du frottement de glissement.
- Théorèmes du moment cinétique barycentrique et de la résultante dynamique.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. 1. 2. On fera le bilan des actions auxquelles est soumis le cylindre.

L'étude pourra se faire dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la planche : les forces d'inertie d'entraînement se réduisent alors à une force unique $\vec{F}_e$ appliquée au centre de masse G du cylindre.

3. On montrera qu'il est possible, dans le cadre du non glissement, d'associer aux forces d'inertie d'entraînement une énergie potentielle et que la puissance développée pour ces efforts est donnée par la formule $\mathcal{P}_e = \vec{F}_e \cdot \vec{V}(G)$.

B. 1. Il suffit de relier le mouvement du cylindre (et notamment la vitesse $\vec{V}(C)$ de son centre de masse) à celui de la planche (caractérisé par $V_P(t)$). La loi exacte du mouvement de la planche n'a pas à être connue, l'action de chaque instant de l'opérateur ($F(t)$) n'étant pas précisée.

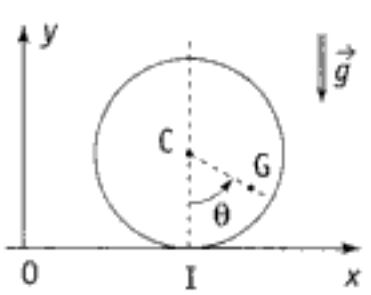
2. On a $V_P(0) = V_P(t_f) = 0$, et l'opérateur impose $V_P(t) > 0$ pour $0 < t < t_f$. Le mouvement se décompose donc en phases où la planche accélère $\left(\frac{dV_P}{dt} > 0\right)$ et en phases où elle décélère $\left(\frac{dV_P}{dt} < 0\right)$: le cas la plus simple est celui où une seule phase de décélération suit une seule phase d'accélération.

3. Solution

Partie A

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la planche, le cylindre est soumis à son poids $\vec{P} = M\vec{g}$ appliqué en G, aux efforts de contact en I représentés par la force $\vec{F} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_y$ et aux forces d'inertie ($\mathcal{R}'$ est non galiléen).

Or $\mathcal{R}'$ étant en translation rectiligne par rapport à $\mathcal{R}_g$, ces dernières se réduisent à la force d'inertie d'entraînement appliquée en G : $\vec{F}_e = -M\gamma_0\vec{u}_x$.

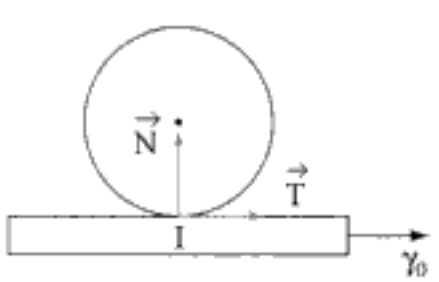


■ Pour que le cylindre soit en équilibre, il faut (le cylindre est ici un solide indéformable) :

– que la résultante des forces extérieures soit nulle, ce qui fixe les valeurs de T et de N :

$$T = M\gamma_0 \quad \text{et} \quad N = Mg \quad (\vec{F} + M\vec{g} + \vec{F}_e = \vec{0})$$

– et que le moment de ces forces soit également nul.



Copyrighted material

POINT COURS

Pour des efforts donnés s'appliquant à un système $\mathcal{S}$, on a :

$$\vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{\mathcal{M}}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

avec : $\vec{F}$ = résultante de ces efforts ; $\vec{\mathcal{M}}(A)$ = moment en A.

Si $\vec{F} = \vec{0}$ il vient donc $\vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{\mathcal{M}}(B)$, et le moment ne dépend plus du point où on le calcule.

Choisissons donc le point I :

$$\vec{\mathcal{M}}(I) = \vec{\mathcal{M}}_{poids}(I) + \vec{\mathcal{M}}_{ent}(I) + \vec{\mathcal{M}}_{réaction}(I).$$

Or $\vec{\mathcal{M}}_{réaction}(I) = \vec{0}$: les efforts de contact se réduisent ici à une force unique.

$\vec{F} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_y$ appliquée en I (absence de couple de frottement de roulement…).

On doit donc avoir :

$$\vec{\mathcal{M}}_{poids}(I) + \vec{\mathcal{M}}_{ent}(I) = \vec{0}.$$

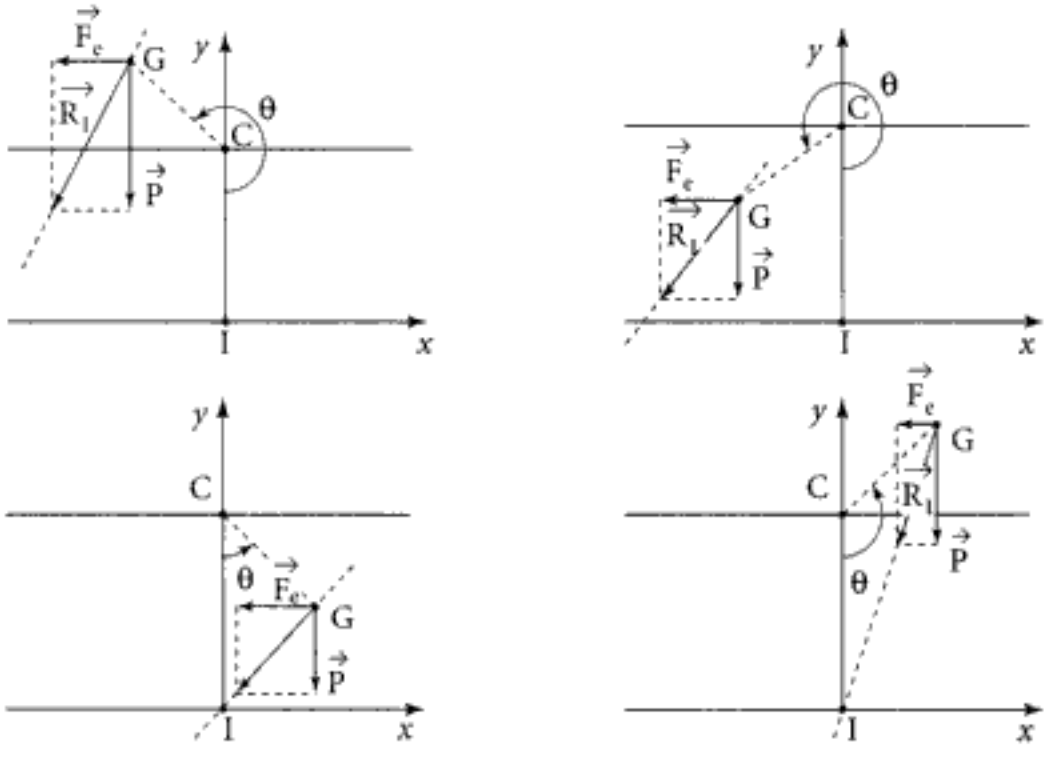
Or ces deux forces s'appliquent au point G, d'où :

$$\overrightarrow{GI} \wedge (M\vec{g} + \vec{F}_e) = \vec{0},$$

ce qui signifie que la résultante $\vec{R}_1 = M\vec{g} + \vec{F}_e$ des forces de pesanteur et d'inertie est colinéaire à $\overrightarrow{GI}$.

Or on peut restreindre les valeurs de $\theta = (-\vec{u}_y, \overrightarrow{CG})$ à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

La condition cherchée n'est donc possible que pour $\theta \in [0 ; \pi]$ comme le montre les schémas ci-dessous :



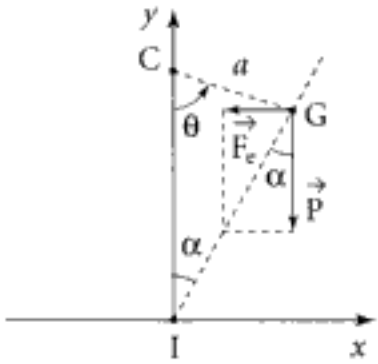
Copyrighted material

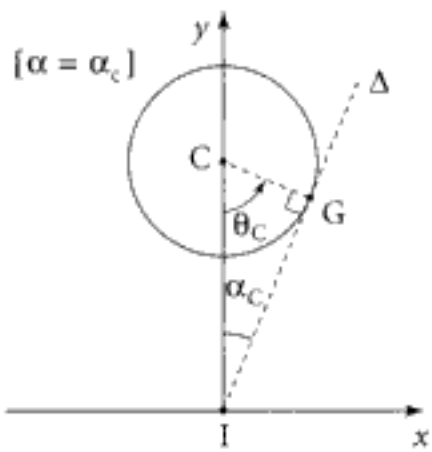
■ Montrons maintenant l'existence d'une valeur critique γ_{0_c} de l'accélération γ_0. Il est intuitif que pour γ_0 trop grand, l'équilibre deviendra impossible.

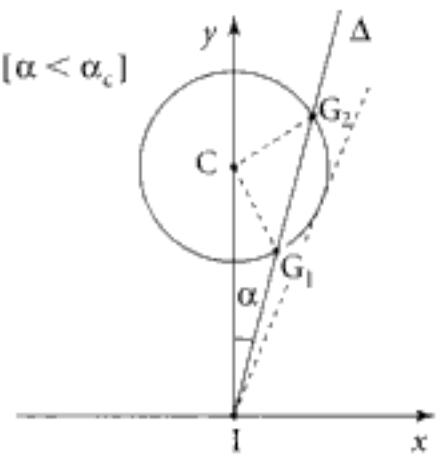
Pour γ_0 fixé, l'angle α est donné par :

$$\tan\alpha = \frac{\|\vec{F}_e\|}{Mg} = \frac{\gamma_0}{g}$$

ce qui fixe la direction IG. Un tel équilibre relatif n'est alors possible que si l'on peut trouver un point G tel que $CG = a$ et $(\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IC}) = \alpha$. G se situe ainsi à l'intersection de la droite Δ faisant l'angle α avec la droite CI et le cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon a. Traçons ce cercle :







Il y a donc une solution au problème envisagé pour $0 < \alpha \leqslant \alpha_c$, soit pour $\gamma_0 \leqslant \gamma_{0_c}$ avec : $\tan\alpha_c = \dfrac{\gamma_{0_c}}{g}$.

Conclusion

- $\gamma_0 = \gamma_{0_c}$, une seule position d'équilibre associée à $\theta = \theta_c$.
- $\gamma_0 > \gamma_{0_c}$, aucune position d'équilibre.
- $\gamma_0 < \gamma_{0_c}$, deux positions d'équilibre : $\theta_1 \in (0, \theta_c)$ et $\theta_2 \in (\theta_c, \pi)$.

Il faut assurer de plus la condition de non glissement, ce qui se traduit par $T < f\,N$ où f représente le coefficient de frottement cylindre / planche.

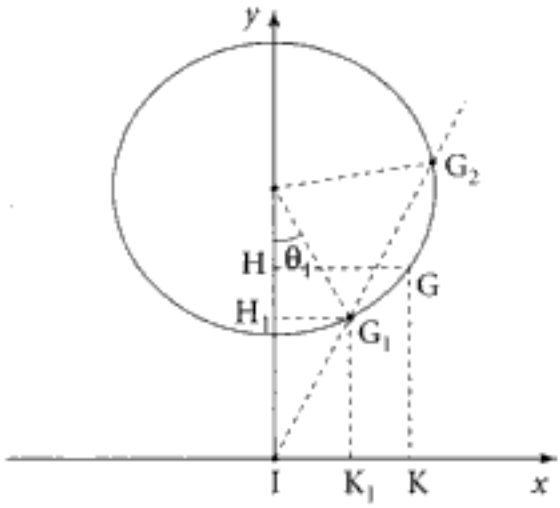
On doit donc avoir $f > \dfrac{\gamma_0}{g}$. Ainsi à R, a, f imposés, l'existence de positions d'équilibre exige :

$$\boxed{\gamma_0 \leqslant \gamma_{0_c} \quad \text{et} \quad \gamma_0 < fg}$$

■ Il est également possible de discuter de la stabilité des positions d'équilibre θ_1 et θ_2.

- $\boldsymbol{\theta_{éq} = \theta_1}$:

Copyrighted material



Si on augmente légèrement θ, à partir de θ_1, le point G se déplace comme il est indiqué sur la figure précédente, ce qui a pour effet d'augmenter les bras de levier ($IK > IK_1$ et $IH > IH_1$) ; IK augmentant plus vite que IH (G se situe à droite de l'axe IG_1). Ainsi l'effet du poids l'emporte sur celui de la force d'inertie et il s'exerce en I un *couple de rappel*.

On obtiendrait la même conclusion en diminuant θ. Il en résulte que la position θ_1 est *stable*. Une étude similaire montre que θ_2 est instable (quand θ croît à partir de θ_2, G passe à gauche de l'axe IG_2...).

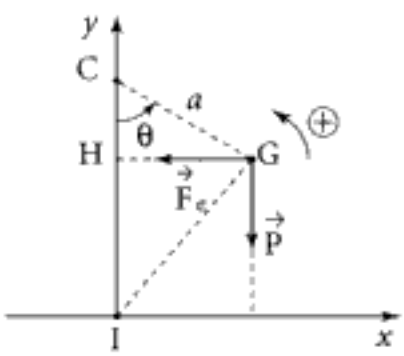
Conclusion :

Pour $\gamma_0 < \gamma_{0_c}$, on a $\left|\begin{array}{l}\theta_{éq} = \theta_1 \text{ stable} \\ \theta_{éq} = \theta_2 \text{ instable.}\end{array}\right.$

A. 2. Écrivons que le moment Γ en I des forces est nul.

Or $\Gamma = M\gamma_0 IH - MgIK$. Avec $IH = IC - CH = R - a\cos\theta$ et $IK = a\sin\theta$.

D'où : $\Gamma = M\gamma_0(R - a\cos\theta) - Mga\sin\theta$



$\Gamma = 0$ donne : $\gamma_0(R - a\cos\theta) - ga\sin\theta$

soit encore $\dfrac{R}{a} - \cos\theta = \dfrac{g}{\gamma_0}\sin\theta.$

D'où avec $\dfrac{R}{a} = n > 1$ et $p = \dfrac{g}{\gamma_0}$:

$$\boxed{n = \cos\theta + p\sin\theta} \quad (1)$$

Posons alors $\tan\beta = p$ où $\beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; l'équation précédente devient :

$$n\cos\beta = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta = \cos(\theta - \beta).$$

Cette équation admet des solutions en θ à la condition : $n\cos\beta \leqslant 1 \Rightarrow n^2\cos^2\beta \leqslant 1$.

Or $\tan^2\beta = \dfrac{1 - \cos^2\beta}{\cos^2\beta} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = 1 + p^2.$

Copyrighted material

D'où $\dfrac{n^2}{1+p^2} \leqslant 1 \Rightarrow n^2 \leqslant 1 + p^2 \Rightarrow p \geqslant \sqrt{n^2-1}$.

Or $p = \dfrac{g}{\gamma_0}$, on obtient donc :

$$\gamma_0 \leqslant \frac{g}{\sqrt{n^2-1}}$$

ce qui détermine la valeur critique γ_{0_c} de γ_0 :

$$\boxed{\gamma_{0_c} = \frac{g}{\sqrt{\left(\dfrac{R}{a}\right)^2 - 1}}}$$

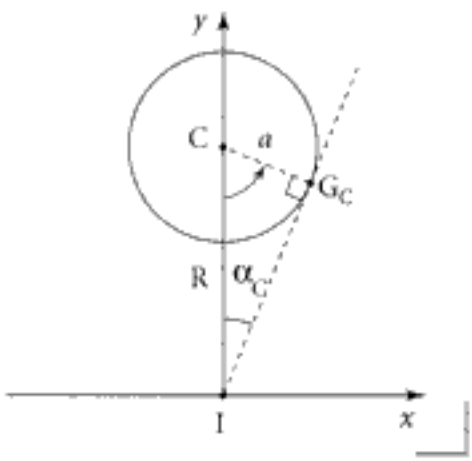
Commentaire

Le résultat est conforme à celui établi au **1.** à partir d'une argumentation géométrique.

On avait obtenu $\gamma_{0_c} = g\tan\alpha_c$.

Or $\sin\alpha_c = \dfrac{a}{R}$ et donc $\tan\alpha_c = \dfrac{\dfrac{a}{R}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{R^2}}}$

d'où $\gamma_{0_c} = \dfrac{g}{\sqrt{\dfrac{R^2}{a^2}-1}}$.



A.N. : $n = 3$ et $p = 6$. Pour $n = 3$, la valeur critique de p est $p_c = \sqrt{n^2-1} = \sqrt{9-1} = 2{,}83$ donc $p > p_c$ et il existe deux valeurs d'équilibre en θ données par l'équation :

$$n\cos\beta = \cos(\theta - \beta) \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \tan\beta = 6 \\ \text{et } n = 3. \end{array} \right.$$

On obtient finalement : $\boxed{\theta_1 \# 20° \text{ et } \theta_2 \# 141°}$

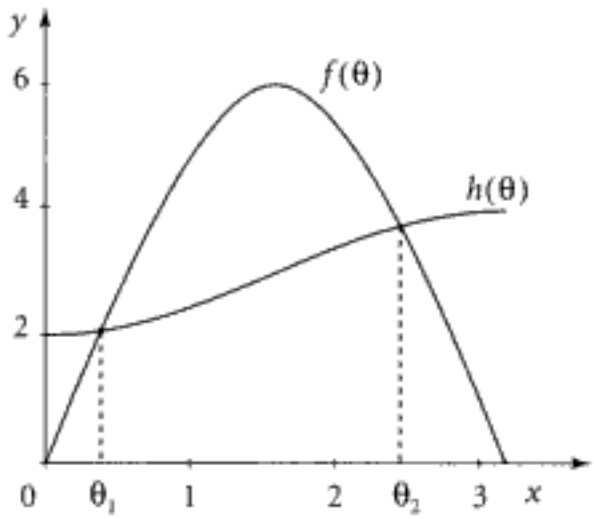
Pour étudier la stabilité de ces positions, il suffit d'examiner les variations du couple Γ.

Or $$\frac{\Gamma}{M\gamma_0 a} = \left(\frac{R}{a} - \cos\theta\right) - \frac{g}{\gamma_0}\sin\theta = n - \cos\theta - p\sin\theta$$

Posons $$G(\theta) = \frac{\Gamma}{M\gamma_0 a} = h(\theta) - f(\theta) \left| \begin{array}{l} h(\theta) = n - \cos\theta = 3 - \cos\theta \\ f(\theta) = p\sin\theta = 6\sin\theta. \end{array} \right.$$

Traçons ces deux courbes pour les cas qui nous intéressent ici ($\gamma < \gamma_{0_c}$) et sur l'intervalle $(0, \pi)$.

Copyrighted material



• $\boldsymbol{\theta_{éq} = \theta_1}$: On a $G(\theta_1) = 0$ et en considérant de petites variations autour de θ_1 :

$$\left.\begin{array}{l} G(\theta) < 0 \text{ pour } \theta > \theta_1 \\ G(\theta) > 0 \text{ pour } \theta < \theta_1 \end{array}\right| \Rightarrow \Gamma \text{ est un couple de rappel.}$$

θ_1 est donc une position d'équilibre stable

• $\boldsymbol{\theta_{éq} = \theta_2}$: On a $G(\theta_2) = 0$ mais :

$$\left.\begin{array}{l} G(\theta) > 0 \text{ pour } \theta > \theta_2 \\ G(\theta) < 0 \text{ pour } \theta < \theta_2 \end{array}\right| \Rightarrow \Gamma \text{ n'est plus un couple de rappel.}$$

θ_2 est donc une position d'équilibre instable

A. 3. Approche énergétique :

Plaçons-nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Les deux forces à prendre en compte sont le poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e = -M\gamma_0\vec{u}_x$.

• À la première, on peut associer l'énergie potentielle :

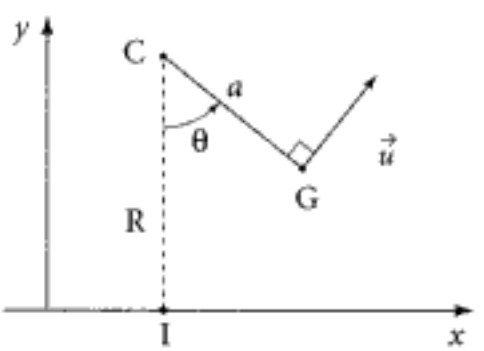
$$E_{p_1} = Mgy(G).$$

avec $\quad y(G) = R - a\cos\theta$

soit : $\quad E_{p_1} = \text{cste} - Mga\cos\theta.$

Et en choisissant l'origine de l'énergie potentielle en $\theta = 0$:

$$E_{p_1} = -Mga(\cos\theta - 1).$$



Copyrighted material

• Pour la seconde, calculons la puissance développée par la force $\vec{F}_e$ lors d'un déplacement relatif du cylindre *sans glissement*.

On a $\mathcal{P}^e_{\mathcal{R}'} = \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(G)$.

Or $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(G) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(C) + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CG}$ (*cf.* cinématique du solide)

soit : $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(G) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(C) + a\dot{\theta}\vec{u}$. De plus, l'absence de glissement en I se traduit par la relation :

$$\overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(I \in \text{cylindre}) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(I \in \text{planche}) = \vec{0}.$$

avec $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(I \in \text{cylindre}) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(C) + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CI}$.

D'où $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(C) = -\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CI} = -R\dot{\theta}\vec{u}_x$.

On a donc $\vec{V}_{\mathcal{R}'}(G) = a\dot{\theta}\vec{u} - R\dot{\theta}\vec{u}_x$

soit $\mathcal{P}^e_{\mathcal{R}'} = -M\gamma_0\vec{u}_x(a\dot{\theta}\vec{u} - R\dot{\theta}\vec{u}_x) = M\gamma_0(-a\dot{\theta}\cos\theta + R\dot{\theta})$

et $\mathcal{P}^e_{\mathcal{R}'} = -\dfrac{d}{dt}[(-R\theta + a\sin\theta)M\gamma_0] = -\dfrac{dE_{p_2}}{dt}$.

Ainsi on peut définir une énergie potentielle E_{p_2} telle que : $E_{p_2} = M\gamma_0(a\sin\theta - R\theta)$.

Au total, il vient $E_p = E_{p_1} + E_{p_2}$,

d'où : $$\boxed{E_p = Mga(1 - \cos\theta) - M\gamma_0(R\theta - a\sin\theta)}$$

Les positions d'équilibre, si elles existent, correspondent à :

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{éq}) = 0 \quad (2)$$

Leur stabilité est acquise pour $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{éq}) > 0$.

L'équation (2) s'écrit :

$$Mga\sin\theta - M\gamma_0(R - a\cos\theta) = 0 \Rightarrow \frac{g}{\gamma_0}\sin\theta = \left(\frac{R}{a} - \cos\theta\right),$$

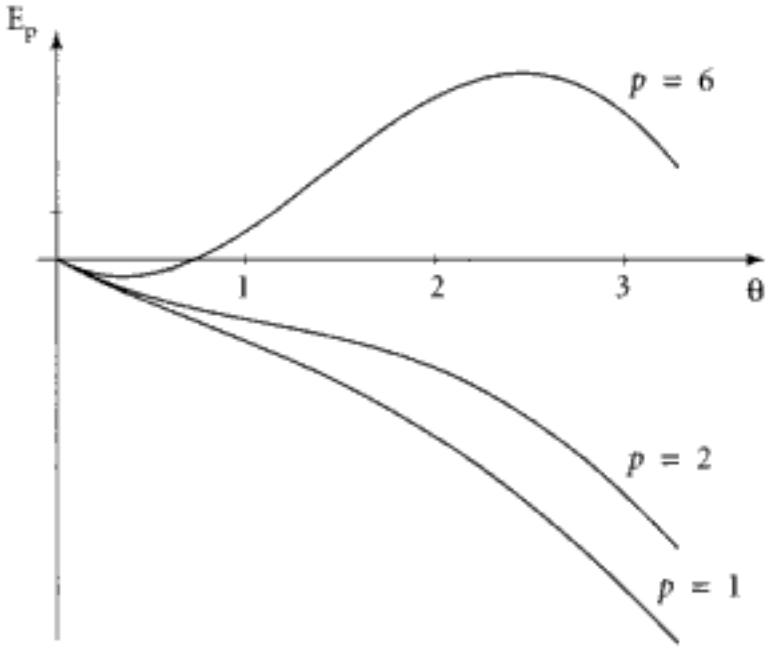
ce qui redonne bien l'équation (1) (*cf.* **2.**)…

On a tracé les courbes définissant :

$$\theta \to \frac{E_p}{M\gamma_0 a} = f(\theta) = p(1 - \cos\theta) - (n\theta - \sin\theta).$$

Pour $n = 3$ et $p = \{1, 2, 6\}$:

Copyrighted material



On y retrouve tous les résultats précédents. En effet, pour $n = 3$, on a $p_c = 2{,}83$.

Ainsi pour $p = 2 < p_c$, il n'existe pas de position d'équilibre ;

pour $p > p_c$, on a bien deux positions d'équilibre θ_1 et $\theta_2 \in (0, \pi)$; la plus petite θ_1 est stable (cuvette de potentiel) alors que la seconde est instable (barrière de potentiel)…

A. 4. On a vu au **1.** qu'il fallait que l'on ait $f > \frac{\gamma_0}{g}$, soit $f > \frac{1}{p}$; or $p = 6$.

La condition cherchée s'écrit donc $f > \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{f > 0{,}17}$

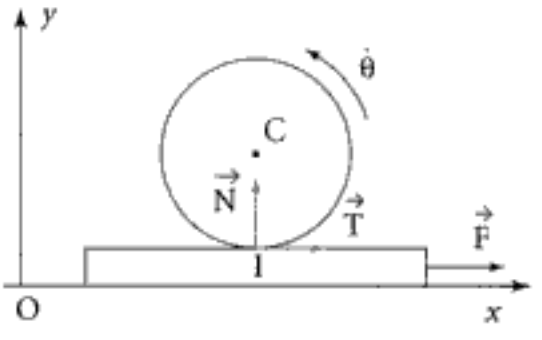
Partie B

Dans $\mathcal{R}_g$, le cylindre est soumis à l'action de :

– son poids $\vec{P} = M\vec{g}$;

– la force de contact $\vec{R}_c = T\vec{u}_x + N\vec{u}_y$

(T : grandeur algébrique).



Le mouvement du cylindre est lié à celui de la planche via la condition de roulement sans glissement en I. On a dans $\mathcal{R}_g$:

$$\vec{V}(I \in \text{cylindre}) = \vec{V}(I \in \text{planche}) = \vec{V}_P(t) = V_P(t)\vec{u}_x$$

or $\vec{V}(I \in \text{cylindre}) = \vec{V}(C) + \vec{IC} \wedge \dot{\theta}\vec{u}_z = V(C)\vec{u}_x + R\dot{\theta}\vec{u}_x$.

D'où $V_P(t) = V(C) + R\dot{\theta}$ (3)

Copyrighted material

Il reste à éliminer $\dot{\theta}$. À cet effet, appliquons au cylindre, dans $\mathcal{R}_g$, les théorèmes du moment cinétique barycentrique scalaire (par rapport à l'axe Cz) et de la résultante dynamique :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = RT \quad \text{et} \quad M\frac{d\vec{V}(C)}{dt} = M\vec{g} + N\vec{u}_z + T\vec{u}_x \left| \begin{array}{l} M\dfrac{dV(C)}{dt} = T \quad (4) \\ N = Mg \end{array} \right.$$

Soit encore avec $\Omega = \dot{\theta}(t)$: $J\ddot{\theta} = RM\dfrac{dV(C)}{dt}$.

Et en intégrant avec, à l'instant initial, $\dot{\theta}(0) = 0$ et $V(C))_{t=0} = 0$ (le cylindre est soumis à des forces bornées : il ne s'agit pas ici d'un choc) :

$$J\dot{\theta}(t) = MRV(C) \quad (5)$$

Reportons (5) dans (3) :

$$V_P(t) = V(C) + \frac{MR^2}{J}V(C) \Rightarrow \boxed{V(t) = \left(1 + \frac{MR^2}{J}\right)V(C)} \quad (6)$$

D'où en intégrant entre $t = 0$ et t_f :

$$\int_0^{t_f} V_P(t)dt = \left(1 + \frac{MR^2}{J}\right)\int_0^{t_f} V(C)dt$$

or $L = \int_0^{t_f} V_P(t)dt$ et $l = \int_0^{t_f} V(C)dt$, l'équation (6) montrant par ailleurs que le cylindre s'immobilise en même temps que la planche, d'où :

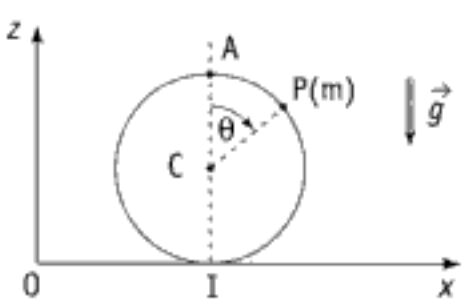
$$\boxed{l = \frac{L}{1 + \dfrac{MR^2}{J}}}$$

Ici $J = \frac{1}{2}MR^2$, d'où : $l = \frac{L}{3}$.

104 Point matériel sur un cerceau

Un point matériel P de masse m glisse sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de masse M. Le contact cerceau – axe horizontal Ox est également sans frottement.

À l'instant initial $t = 0$, le système est immobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et le point P est en A. Un léger déséquilibre entraîne le glissement de P sur le cerceau.



1. Décrire qualitativement le mouvement ultérieur du système : on rappelle que la liaison point P-cerceau étant unilatérale le point P peut donc quitter le cerceau.

Copyrighted material

2. Établir une équation implicite permettant de déterminer l'angle θ_0 pour lequel le point P se désolidarise du cerceau. Commenter le résultat obtenu.

1. Ce qu'il faut savoir

- Théorèmes de la résultante dynamique, du moment cinétique barycentrique.
- Théorème de la puissance cinétique (et de l'énergie cinétique).
- Glissement sans frottements.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le cerceau glisse sans frottements sur l'axe O*x*, et le point P glisse sans frottements sur le cerceau. Le point P repose simplement sur le cerceau, et il pourra donc le quitter du fait du mouvement. Tant que la réaction, ici normale, du cerceau sur le point P ne s'annule pas, le contact persiste. Il faudra donc chercher la valeur θ_0 de l'angle θ correspondant à la rupture de contact.

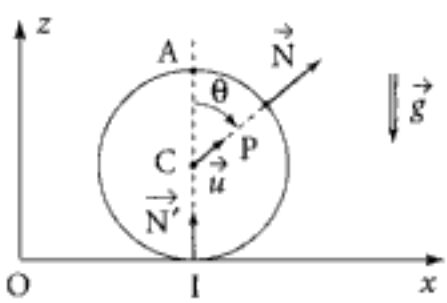
Il est à noter que le contact cerceau-axe O*x* s'effectuant sans frottements, il y aura conservation de la composante P_x de la quantité de mouvement du système.

2. On vérifiera que le système est conservatif, les efforts de liaison point P-cerceau et cerceau-axe O*x* ne travaillant pas (absence de frottements).

3. Solution

1. ■ Dans une première phase, le point P conserve le contact avec le cerceau, ce qui se traduit par une réaction cerceau-point P : $\vec{N} = N\vec{u}$ avec $N > 0$.

Le cerceau soumis à son poids $-Mg\vec{u_z}$, à la réaction du sol $\vec{N'} = N'\vec{u_z}$ (pas de frottement en I) avec $N' > 0$, et à la force $-\vec{N}$ (principe de l'action et de la réaction) a son centre de masse C qui va se déplacer dans le sens négatif de l'axe des *x*.



En effet, on a (en appliquant au cerceau le théorème de la résultante dynamique) :

$$M\vec{a} = -\vec{N} + \vec{N'} - Mg\vec{u_z}.$$

Soit en projection sur O*x* : $Ma_x = -N\sin\theta < 0$ $\left(N > 0 \text{ et } \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

■ De plus, le cerceau ne prend pas de vitesse de rotation, les trois forces précédentes passant par C. On a en effet, en appliquant le théorème du moment cinétique au cerceau, dans son référentiel barycentrique :

$$\frac{d\vec{\sigma}(C)}{dt} = \vec{0} + \underbrace{\overrightarrow{CP} \wedge (-\vec{N})}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{CI} \wedge (N'\vec{u_y})}_{\vec{0}} = \vec{0}.$$

D'où $\vec{\sigma}(C) = \overrightarrow{cste} = \vec{0}$ (*cf.* conditions initiales).

Copyrighted material

Or $\vec{\sigma}(C) = I_{Cy}\omega\vec{u_y}$ ($\vec{\omega} = \omega\vec{u_y}$ désignant le vecteur rotation du cerceau dans $\mathcal{R}_g$, et I_{Cy} son moment d'inertie par rapport à l'axe Cy). On obtient donc : $\boldsymbol{\omega(t) = 0}$.

Commentaire

Dans cette phase, $y_C = \text{cste}$, soit $a_y = 0$ et donc :

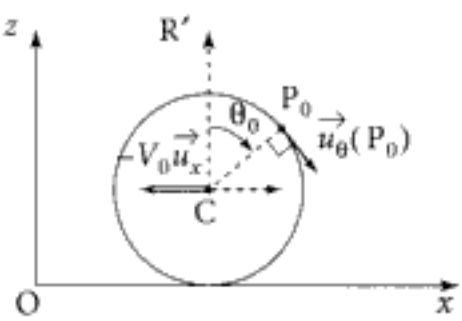
$$-Mg + N' - N\cos\theta = 0 \Rightarrow N' = Mg + N\cos\theta,$$

ce qui donne $N' > 0$ ($N > 0$ tant que le contact point matériel-cerceau subsiste, et $\theta < \frac{\pi}{2}$) : le contact cerceau-axe Ox se maintient.

Cette première phase cesse dès que le point P quitte le cerceau, ce qui se produit inévitablement pour un angle θ_0 compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. À cet instant t_0, N s'annule et la vitesse du point C est $\vec{V} = -V_0\vec{u_x}$ ($V_0 > 0$).

Le cerceau poursuit alors son mouvement de translation à la vitesse constante $-V_0\vec{u_x}$, et le point matériel P décrit une trajectoire parabolique, à partir du point P_0 tel que $(\vec{u_z}, \overrightarrow{CP_0}) = \theta_0$, avec une vitesse initiale $\vec{V_i}$ telle que :

$$\vec{V_i} = -V_0\vec{u_x} + R\dot{\theta}_0\vec{u_\theta}(P_0).$$



On a appliqué la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V_C} = \vec{V_{\mathcal{R}'}}(P) + \vec{V_e} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{V_e} = \vec{V_C} = -V_0\vec{u_x} \\ \vec{V_{\mathcal{R}'}}(P) = R\dot{\theta}_0\vec{u_\theta}(P_0). \end{cases}$$

2. ■ Cherchons donc à déterminer les grandeurs θ_0, V_0 et $\dot{\theta}_0$. À cet effet, étudions le mouvement lors de la première phase.

Remarquons alors que la composante selon Ox de la quantité de mouvement du système global se conserve puisque les forces **extérieures** ($\vec{N'}$, $M\vec{g}$ et $m\vec{g}$) sont toutes verticales.

On a donc : $P_x = \text{cste} = 0$ (conditions initiales) (1)

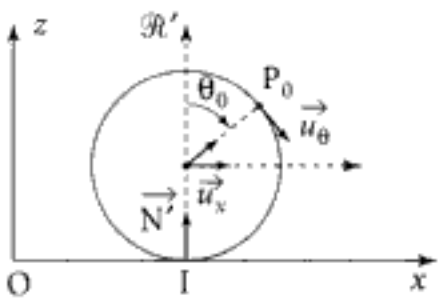
Or $P_x = P_x(\text{cerceau}) + P_x(\text{point P})$, avec :

$P_x(\text{cerceau}) = MV$ où $\vec{V}(C) = V\vec{u_x}$ (ici $V < 0$) ;

$P_x(\text{point P}) = m\vec{V}(P) \cdot \vec{u_x}$.

Or (composition des vitesses) :

$\vec{V}(P) = \vec{V_{\mathcal{R}'}}(P) + \vec{V_e} = R\dot{\theta}_0\vec{u_\theta} + V\vec{u_x}$



d'où : $P_x(\text{point P}) = m(V\vec{u_x} + R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}) \cdot \vec{u_x} = m(V + R\dot{\theta}\cos\theta)$.

Copyrighted material

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\boxed{(M+m)V + mR\dot{\theta}\cos\theta = 0} \quad (2)$$

Point méthode

Tant qu'il y a contact point P-cerceau, le système est complètement décrit par la seule variable $\theta(t)$ (la vitesse $V(t)$ s'en déduit à partir de la relation (2)).

On peut alors penser à établir une intégrale première du mouvement par application du théorème de la puissance cinétique. La situation est ici favorable car :

– la réaction $\vec{N'}$ du sol ne travaille pas (absence de frottements) ;

– les actions de contact point-cerceau ne développent aucune puissance (glissement sans frottements).

On a donc : $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$ avec $\mathcal{P}_{int}$ (efforts de contact P-cerceau) = 0

$$\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}(\vec{N'}) + \mathcal{P}(M\vec{g}) + \mathcal{P}(m\vec{g}) = 0 + \mathcal{P}(mg).$$

Il reste : $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(m\vec{g}) = -\dfrac{dE_p}{dt} \Rightarrow E_c + E_p = \text{cste} = E_m$.

E_p désignant l'énergie potentielle de pesanteur du système et E_m son énergie mécanique.

D'où : $E_m = E_c(\text{cerceau}) + E_c(P) + E_p(\text{cerceau}) + E_p(P) = \text{cste}$ (3)

Or $E_c(\text{cerceau}) = \dfrac{1}{2}MV^2$ (mouvement de translation)

$$E_c(P) = \frac{1}{2}m(\vec{V}(P))^2 = \frac{1}{2}m\left[V\vec{u_x} + R\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right]^2.$$

D'où $E_c(P) = \dfrac{1}{2}m[V^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2VR\dot{\theta}\cos\theta]$.

Enfin en prenant l'origine de l'énergie potentielle en C, il vient :

$$E_p(\text{cerceau}) = 0 \text{ et } E_p(P) = mgR\cos\theta.$$

L'équation (3) s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2VR\dot{\theta}\cos\theta) + mgR\cos\theta = mgR} \quad (4)$$

(À $t = 0$ on a $V = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$).

■ Les équations (2) et (4) permettent de déterminer les lois $V(\theta)$ et $\dot{\theta}(\theta)$. Pour avoir accès à θ_0, il faut, par exemple, s'intéresser au point matériel P. Appliquons-lui la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen d'étude :

$$m\vec{a}(P) = N\vec{u} + m\vec{g}$$

or $\vec{V}(P) = V\vec{u_x} + R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ (*cf.* ci-dessus) et $\vec{a}(P) = \dot{V}\vec{u_x} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{u}$.

Copyrighted material

Soit en projection sur $\vec{u}$:

$$m\vec{a}(\mathrm{P})\cdot\vec{u} = \mathrm{N} + m\vec{g}\cdot\vec{u} = \mathrm{N} - mg\cos\theta = m(\dot{\mathrm{V}}\vec{u_x} - \mathrm{R}\dot{\theta}^2\vec{u} + \mathrm{R}\ddot{\theta}\vec{u_\theta})\cdot\vec{u}$$

et $m(\dot{\mathrm{V}}\sin\theta - \mathrm{R}\dot{\theta}^2) = \mathrm{N} - mg\cos\theta$

$$\mathrm{N} = m(g\cos\theta + \dot{\mathrm{V}}\sin\theta - \mathrm{R}\dot{\theta}^2) \quad (5)$$

À l'instant $t = t_0$, où le point P quitte le cerceau, la réaction N s'annule et $\theta(t_0) = \theta_0$. L'accélération $a_x(\mathrm{C})$ du cerceau devient également nulle puisque :

$$\mathrm{M}a_x(\mathrm{C}) = -\mathrm{N}\sin\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{M}a_x(\mathrm{C}, t_0) = -\mathrm{N}(t_0)\sin\theta_0 = 0.$$

On a donc à t_0 : $\dot{\mathrm{V}}(t_0) = a_x(\mathrm{C}, t_0) = 0$ et $\mathrm{N}(t_0) = 0$, d'où d'après (5) :

$$\boxed{\mathrm{R}\dot{\theta}_0^2 = g\cos\theta_0} \quad (6)$$

Dès lors, il vient avec (2) :

$$\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}(t_0) = -\frac{m}{\mathrm{M}+m}\dot{\theta}_0\cos\theta_0.$$

D'où avec (4) :

$$\frac{1}{2}(\mathrm{M}+m)\frac{m^2}{(\mathrm{M}+m)^2}\mathrm{R}^2\dot{\theta}_0^2\cos^2\theta_0 + \frac{1}{2}m\mathrm{R}^2\dot{\theta}_0^2 - \frac{m^2}{(\mathrm{M}+m)^2}\mathrm{R}^2\dot{\theta}_0^2\cos^2\theta_0 + mg\mathrm{R}\cos\theta_0 = mg\mathrm{R}.$$

Et en regroupant les termes :

$$\left[\frac{1}{2}m - \frac{m^2}{2(\mathrm{M}+m)}\cos^2\theta_0\right]\mathrm{R}^2\dot{\theta}_0^2 + mg\mathrm{R}\cos\theta_0 = mg\mathrm{R}.$$

Enfin en remplaçant $\mathrm{R}\dot{\theta}_0^2$ par $g\cos\theta_0$ (relation (5)) :

$$\left(1 - \frac{m}{\mathrm{M}+m}\cos^2\theta_0\right)g\cos\theta_0 + 2g\cos\theta_0 = 2g.$$

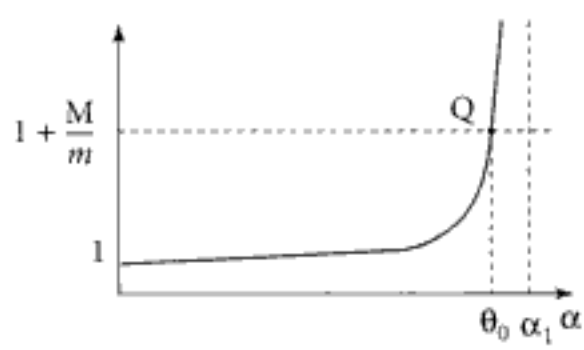
D'où : $\dfrac{m}{\mathrm{M}+m}\cos^3\theta_0 = 3\cos\theta_0 - 2 \Rightarrow \boxed{1 + \dfrac{\mathrm{M}}{m} = \dfrac{\cos^3\theta_0}{3\cos\theta_0 - 2}}$

On a tracé ci-contre la fonction

$$\alpha \to \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2}.$$

la valeur de θ_0 est fixée par le point Q.

On a $\theta_0 < \alpha_1 = \mathrm{Arcos}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.



Commentaires

• Cette valeur α_1 correspond à la limite où $\mathrm{M} \to \infty$ (en fait $\mathrm{M} \gg m$). À cette approximation, on peut considérer que le cerceau reste fixe. La relation (6) reste valable puisque l'on a alors : $\mathrm{N} = m(g\cos\theta - \mathrm{R}\dot{\theta}^2)$ ($\dot{\mathrm{V}} = 0$ pour tout t cette fois-ci).

Copyrighted material

La loi de conservation de l'énergie s'écrit maintenant :

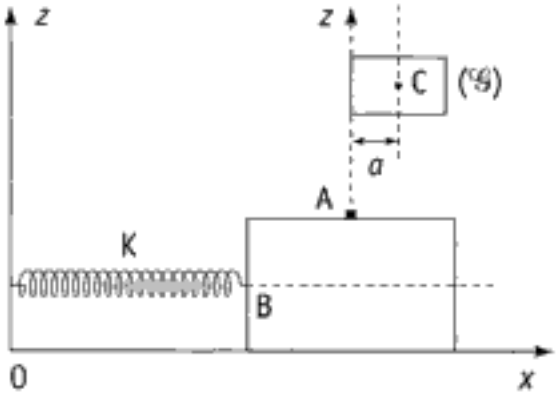
$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = mgR.$$

D'où : $\frac{1}{2}mg\cos\theta_0 + mg\cos\theta_0 = mgR \Rightarrow 3\cos\theta_0 = 2.$

Et $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ ce qui implique bien $\theta_0 = \alpha_1$.

• Au contraire, pour $m \gg M$, le point P quitte le cerceau pour $\theta_0 \sim 0$…

105 Girouette sur un chariot



Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(Oxyz)$, un chariot, de masse M, peut coulisser sans frottements sur l'axe horizontal Ox.

Un moteur parfait (situé en A) solidaire du chariot permet la rotation d'une girouette $(\mathcal{G})$ d'axe Az. La girouette est assimilée à une plaque de masse m et de centre de masse C distant de a de l'axe Az.

On note $\vec{\omega} = \omega\vec{u_z} = \dot{\theta}\vec{u_z}$ la vitesse de rotation, maintenue constante, de la girouette par rapport à Az, axe fixe dans le repère $\mathcal{R}'(Axyz)$ lié au chariot. Soit I (resp. J) le moment d'inertie de la girouette par rapport à Az (resp. par rapport à Cz) : $I = J + ma^2$.

On repère le mouvement du chariot par le déplacement X du point B. On prendra :

• $X = 0$ lorsque le ressort, de raideur K, n'est ni tendu ni comprimé ;

• $\theta = 0$ pour $t = 0$.

1. Déterminer, pour le chariot, l'équation du mouvement en $X(t)$.

2. Calculer la puissance $\mathcal{P}_m(t)$ fournie par le moteur, en appliquant :

a. le théorème de la puissance cinétique – dans $\mathcal{R}$ – au système chariot plus girouette ;

b. le théorème de la puissance cinétique – dans $\mathcal{R}'$ – à la girouette ;

c. le théorème de la puissance cinétique – dans $\mathcal{R}$ – à la girouette.

On exprimera le résultat en fonction de $\ddot{X}(t) = \frac{d^2X}{dt^2}$.

1. Ce qu'il faut savoir

• Théorème de la résultante dynamique.

Copyrighted material

- Théorème de la puissance cinétique (ou de l'énergie cinétique).
- Solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Puissance des efforts de contact entre deux solides.
- Puissance d'efforts s'exerçant sur un solide.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On considérera le système chariot-girouette auquel on appliquera le théorème de la résultante dynamique (on supprime ainsi les actions intérieures de contact).

2. La puissance délivrée par le moteur est intérieure pour le système chariot-girouette alors qu'elle est extérieure pour la seule girouette.

On n'oubliera pas que le théorème de la puissance cinétique fait intervenir la puissance des efforts extérieurs *et* des efforts intérieurs. De plus, si le référentiel n'est pas galiléen, il faudra ajouter la puissance des efforts d'entrainement.

3. Solution

1. Considérons le système chariot plus girouette et appliquons-lui le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe Ox :

$$\frac{d}{dt}P_x = F_x^{ext}.$$

Le mouvement du chariot sur l'axe Ox s'effectuant sans frottements, la réaction de l'axe est perpendiculaire à Ox. La seule force extérieure portée par Ox se réduit donc à celle exercée par le ressort, d'où :

$$\frac{d}{dt}P_x = -KX \quad (1)$$

Or $P_x = P_x(\text{chariot}) + P_x(\text{girouette})$.

$P_x(\text{chariot}) = M\dot{X}$ et $\vec{P}(\text{girouette}) = m\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(C)$.

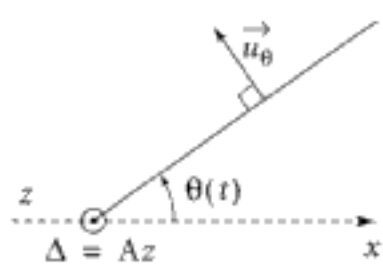
Or d'après la loi de composition des vitesses :

$\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(C) = \overrightarrow{V_{\mathcal{R}'}}(C) + \vec{V}_e = a\omega\vec{u}_\theta + \dot{X}\vec{u}_x$.

D'où

$P_x(\text{girouette}) = m\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(C)\cdot\vec{u}_x = m[a\omega\,\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_x + \dot{X}]$

$P_x(\text{girouette}) = m(-a\omega\sin\theta(t) + \dot{X})$.



Prenons $\theta = 0$ pour $t = 0$, et donc $\theta(t) = \omega t$, soit au total :

$$\boxed{P_x = (M+m)\dot{X} - ma\omega\sin\omega t}$$

L'équation (1) s'écrit alors : $(M+m)\ddot{X} - ma\omega^2\cos\omega t = -KX$

soit encore :

$$\boxed{(M+m)\ddot{X} + KX = ma\omega^2\cos\omega t} \quad (2)$$

2. a.

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit, $\left.\frac{dE_c}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext} + \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{int}$ (3)

Copyrighted material

■ Calculons l'énergie cinétique, dans $\mathcal{R}$, du système chariot-girouette :

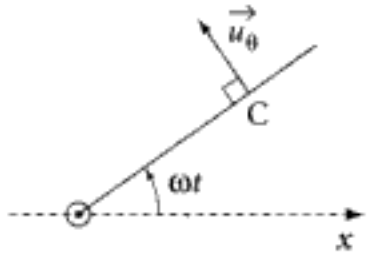
$$E_c = E_c(\text{chariot}) + E_c(\text{girouette}).$$

$E_c(\text{chariot}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2$ (mouvement de translation).

Et d'après le théorème de Kœnig : $E_c(\text{girouette}) = E_c)_{\mathcal{R}_K} + \frac{1}{2}m\vec{V}^2(C)$.

$\mathcal{R}_K$ représente le référentiel barycentrique associé à la girouette. Dans $\mathcal{R}_K$, la girouette est en rotation autour de son axe Cz.

On a donc : $E_c)_{\mathcal{R}_K} = \frac{1}{2}J\omega^2$.



D'où : $E_c(\text{girouette}) = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m[\dot{X}\vec{u}_x + a\omega\vec{u}_\theta]^2$

$E_c(\text{girouette}) = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m[\dot{X}^2 - 2a\omega\dot{X}\sin\omega t + a^2\omega^2]$

$E_c(\text{girouette}) = \frac{1}{2}(J + ma^2)\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}^2 - ma\omega\dot{X}\sin\omega t.$

Et au total :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}(M + m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - ma\omega\dot{X}\sin\omega t} \quad (4)$$

■ Évaluons $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{ext}}$:

• Les efforts de contact axe Ox-chariot ne travaillent pas (absence de frottements).

• Les poids ne développent aucune puissance (les centres de masse gardent une altitude constante).

• Seul le ressort contribue à $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{ext}}$. Or la force qu'il exerce est conservative, d'où :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{ext}} = -\frac{dE_p}{dt} \quad \text{avec} \quad E_p = \frac{1}{2}KX^2} \quad (5)$$

■ Déterminons $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{int}}$:

• Les efforts intérieurs relatifs à chaque solide ne travaillent pas (solides indéformables).

• Seuls les efforts moteur-girouette participent à $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{int}}$ et la liaison étant supposée parfaite, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{\text{int}} = \mathcal{P}_m(t)} \quad (6)$$

Reportons les résultats (4), (5) et (6) dans (3) :

$(M + m)\ddot{X}\dot{X} - ma\omega^2\dot{X}\cos\omega t - ma\omega\ddot{X}\sin\omega t = -KX\dot{X} + \mathcal{P}_m(t).$

D'où $\mathcal{P}_m(t) = -ma\omega\ddot{X}\sin\omega t + \dot{X}\{(M + m)\ddot{X} + KX - ma\omega^2\cos\omega t\}.$

Or d'après (2), l'accolade est identiquement nulle, soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_m(t) = -ma\omega\ddot{X}\sin\omega t} \quad (7)$$

Copyrighted material

2. b. Appliquons le théorème de la puissance cinétique, dans $\mathcal{R}'$, à la girouette. $\mathcal{R}'$ n'étant pas galiléen, il est nécessaire de tenir compte des efforts d'entraînement (puissance développée $\mathcal{P}^{\text{ent}}$) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}E'_c}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathcal{P}^{\text{ext}}_{\mathcal{R}'} + \mathcal{P}^{\text{int}}_{\mathcal{R}'} + \mathcal{P}^{\text{ent}}_{\mathcal{R}'} \quad (8)$$

Ici $E'_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \text{cste}$ (dans $\mathcal{R}'$, la girouette est en rotation autour de l'axe fixe Az de $\mathcal{R}'$).

De plus $\mathcal{P}^{\text{int}}_{\mathcal{R}'} = 0$ (girouette ≡ solide indéformable) et $\mathcal{P}^{\text{ext}}_{\mathcal{R}'} = \mathcal{P}_m(t)$.

Il reste à calculer $\mathcal{P}^{\text{ent}}_{\mathcal{R}'}$. Un élément de masse δm de la girouette est alors soumis à la force d'entraînement : $\vec{\delta f}^{\text{ent}} = -\delta m\vec{a}_e(\mathrm{M}) = -\delta_m\vec{a}_{\mathcal{R}}(\mathrm{A})$
(puisque $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen).
D'où :

$$\vec{\delta f}^{\text{ent}} = -\delta m\ddot{\mathrm{X}}\vec{u}_x.$$

Cette force développe dans $\mathcal{R}'$ la puissance élémentaire $\delta\mathcal{P}_{\text{ent}}$ telle que :

$$\delta\mathcal{P}_{\text{ent}} = \vec{\delta f}_{\text{ent}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}'}}(\mathrm{M}).$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}'}}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}'}}(\mathrm{C}) + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \wedge \omega\vec{u}_z$ (champ des vitesses du solide)

d'où : $\delta\mathcal{P}^{\text{ent}} = -\delta m\ddot{\mathrm{X}}\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}'}}(\mathrm{C})\vec{u}_x - (\delta m\overrightarrow{\mathrm{MC}} \wedge \omega\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_x\ddot{\mathrm{X}}$.

Et au total :

$$\mathcal{P}_{\text{ent}} = -m\ddot{\mathrm{X}}\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}'}}(\mathrm{C})\vec{u}_x - \left[\left(\int \delta m\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) \wedge \omega\vec{u}_z\right] \cdot \vec{u}_x\ddot{\mathrm{X}}.$$

L'intégrale est nulle, C étant le centre de masse de la plaque girouette, soit :

$$\mathcal{P}^{\text{ent}} = -m\ddot{\mathrm{X}}\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}'}}(\mathrm{C})\vec{u}_x \Rightarrow \mathcal{P}^{\text{ent}} = m\ddot{\mathrm{X}}a\omega\sin\omega t.$$

L'équation (8) devient : $0 = \mathcal{P}_m(t) + 0 + m\ddot{\mathrm{X}}a\omega\sin\omega t$
d'où comme il se doit :

$$\boxed{\mathcal{P}_m(t) = -ma\omega\ddot{\mathrm{X}}\sin\omega t}$$

2. c. Dans $\mathcal{R}$ galiléen, on a maintenant pour la girouette :

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}^{\text{ext}}_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}^{\text{int}}_{\mathcal{R}} \quad (9)$$

avec $\mathcal{P}^{\text{int}}_{\mathcal{R}} = 0$ (girouette = solide indéformable).

Et en notant $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}}$ la résultante des actions du moteur sur la girouette :

$$\mathcal{P}^{\text{ext}}_{\mathcal{R}} = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}}}(\mathrm{A}) + \Gamma_m\omega = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathcal{R}}}(\mathrm{A}) + \mathcal{P}_m(t).$$

De plus, d'après le **1. a.** : $E_{c_{\mathcal{R}}}(\text{girouette}) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathrm{X}}^2 - ma\omega\dot{\mathrm{X}}\sin\omega t.$

Copyrighted material

On a donc d'après (9) :

$$m\dot{X}\ddot{X} - ma\omega\ddot{X}\sin\omega t - ma\omega^2\dot{X}\cos\omega t = \overrightarrow{F_A}\cdot\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(A) + \mathcal{P}_m(t) + 0 \quad (10)$$

Il reste donc à exprimer $\overrightarrow{F_A}$. À cet effet, appliquons, à la girouette dans $\mathcal{R}$, le théorème de la résultante dynamique :

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(C)) = m\vec{g} + \overrightarrow{F_A}.$$

Et en projection sur Ox :

$$\frac{d}{dt}m(\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(C)\cdot\vec{u_x}) = \overrightarrow{F_A}\cdot\vec{u_x}.$$

Or, (*cf.* **1.**) $\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(C)\cdot\vec{u_x} = \dot{X} - a\omega\sin\omega t$, d'où :

$$\overrightarrow{F_A}\cdot\vec{u_x} = m(\ddot{X} - a\omega^2\cos\omega t)$$

et $\quad \overrightarrow{F_A}\cdot\overrightarrow{V_{\mathcal{R}}}(A) = \overrightarrow{F_A}\cdot(\dot{X}\vec{u_x}) = \dot{X}m(\ddot{X} - a\omega^2\cos\omega t).$

L'équation (10) devient alors :

$$m\dot{X}\ddot{X} - ma\omega\ddot{X}\sin\omega t - ma\omega^2\dot{X}\cos\omega t = m\dot{X}(\ddot{X} - a\omega^2\cos\omega t) + \mathcal{P}_m(t).$$

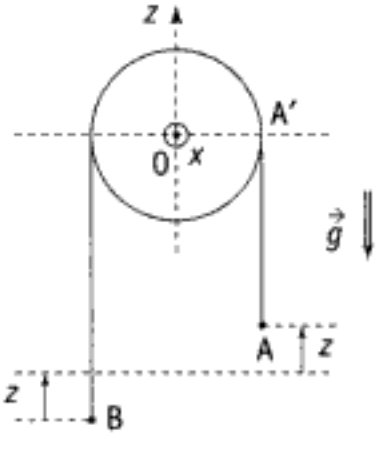
Et après simplifications :

$$\boxed{\mathcal{P}_m(t) = -ma\omega\ddot{X}\sin\omega t}$$

106 Chaînes et poulies

Partie A

Une chaîne de masse m et de longueur L est placée sur une poulie de masse M, de rayon R et de moment d'inertie $J_{Ox} = \frac{1}{2}MR^2$ par rapport à son axe horizontal Ox.



La poulie peut tourner sans frottements autour de Ox, et la chaîne ne glisse pas sur la poulie. Le référentiel d'étude $\mathcal{R}(Oxyz)$ est galiléen.

À l'instant initial, toutes les vitesses sont nulles et $z = a$ ($z = 0$ correspond à la position d'équilibre, les extrémités A et B étant alors à la même altitude). On étudie le mouvement du système avant que A n'atteigne la poulie (point A').

Déterminer l'équation du mouvement, puis $z(t)$:

1. Par application, au système global, du théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Ox.

2. Par application, du théorème de l'énergie cinétique au même système.

Copyrighted material

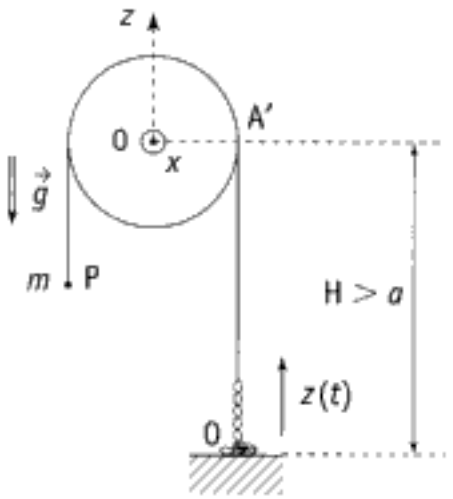
Partie B

Un fil inextensible et sans masse passe sur une poulie de masse négligeable et de rayon R. Il n'y a pas de glissement du fil sur la poulie. La poulie peut tourner sans frottements autour de son axe horizontal Ox.

À l'une des extrémités du fil, on a placé une masse ponctuelle m. L'autre extrémité est reliée à une chaîne de masse totale m (longueur a et masse linéique $\lambda = \frac{m}{a}$).

À l'instant initial, la chaîne est en tas sur le sol et les vitesses sont nulles.

On notera $z(t)$ la cote de l'extrémité supérieure de la chaîne.



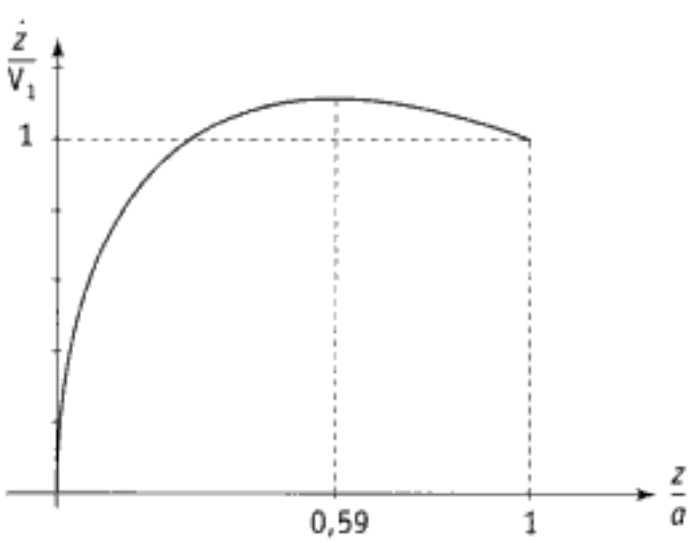
1. On étudie le mouvement du système tant qu'une partie de la chaîne reste en contact avec le sol. On fera les hypothèses suivantes :

– La réaction $\vec{N}$ du sol est verticale et compense exactement le poids de la partie de la chaîne qui n'est pas encore soulevée ;
– cette force s'applique en O point situé sur la verticale de A'.

a. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $z(t)$.

b. On pose $u(z) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$. Déterminer l'équation différentielle du premier ordre dont $u(z)$ est la solution. En déduire $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(z)$, puis l'expression de la norme V_1 de la vitesse du point P à l'instant où toute la chaîne vient juste d'être soulevée.

On donne ci-dessous le graphe $\frac{z}{a} \rightarrow \frac{\dot{z}}{V_1}$.



Copyrighted material

Commenter.

c. Décrire rapidement le mouvement ultérieur pour : $a < z < H$.

2. Bilan énergétique. Calculer le taux de variation $\frac{dE_m}{dt}$ de l'énergie mécanique du système.
Proposer une interprétation physique.

1. Ce qu'il faut savoir

Points de cours

- Théorème du moment cinétique scalaire.
- Théorème de l'énergie cinétique.

Point mathématique

- Équation différentielle linéaire du premier ordre.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. 1. L'application du théorème du moment cinétique scalaire à l'ensemble du système permet d'éliminer les actions de contact (qui deviennent alors des actions intérieures) poulie-chaîne.

2. Là encore, les actions poulie-chaîne ne jouent pas dans l'utilisation du théorème de la puissance cinétique, non pas parce que ces actions sont intérieures mais parce qu'il n'y a pas de glissement de la chaîne sur la poulie. La liaison d'axe Ox étant parfaite, seule la pesanteur, force conservative, a un effet. On en déduit la conservation de l'énergie mécanique du système.

B. 1. Dans un premier temps, la masse ponctuelle m va entraîner le système en tirant la chaîne vers le haut. Quand toute la chaîne est soulevée, il y a compensation des effets associés à la masse ponctuelle $P(m)$ et à la chaîne (même masse totale m), les vitesses demeurant constantes (tant que le fil reste enroulé sur la poulie…).

On ne peut pas appliquer le théorème de la puissance cinétique, la mise en mouvement des maillons de la chaîne pouvant être assimilée à une succession de chocs. On lui préférera le théorème du moment cinétique scalaire appliqué à l'ensemble du système…

2. D'après qui précède (chocs), on doit trouver $\frac{dE_m}{dt} < 0$.

Imaginer une masse M de vitesse V entraînant une masse $\delta m \ll M$ de vitesse initiale nulle, et calculer la variation d'énergie correspondante.

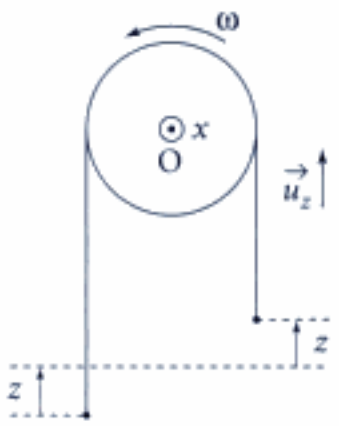
Copyrighted material

3. Solution

Partie A

1. Appliquons le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Ox au système global (poulie + chaîne) :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{ext} \quad (1)$$



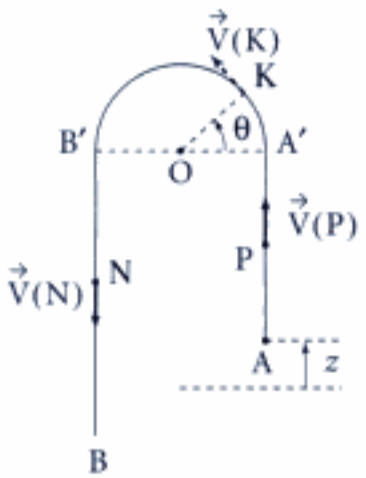
■ Or $\sigma_\Delta(\text{système}) = \sigma_\Delta(\text{poulie}) + \sigma_\Delta(\text{chaîne})$

avec $\sigma_\Delta(\text{poulie}) = J_{Ox}\omega$ ($\omega \equiv$ vitesse de rotation de la poulie) ;

$$\sigma_\Delta(\text{poulie}) = \frac{1}{2}MR^2\omega.$$

Pour la chaîne, à un élément de masse δm, est associé un moment cinétique $\delta\vec{\sigma}(O)$ tel que :

$$\delta\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \delta m\vec{V}(M).$$



Pour un point P du segment AA′, $\vec{V}(P) = \dot{z}\vec{u}_z$ et $\delta\vec{\sigma}(O) = \delta m R\dot{z}\vec{u}_x$.

De même, pour un point N du segment BB′ (chaîne inextensible), $\vec{V}(N) = -\dot{z}\vec{u}_z$ et $\delta\vec{\sigma}(O) = \delta m R\dot{z}\vec{u}_x$.

Enfin pour le point K de la chaîne :

$\vec{V}(K) = R\omega\vec{u}_\theta = \dot{z}\vec{u}_\theta$ (il n'y a pas de glissement de la chaîne sur la poulie), et $\delta\vec{\sigma}(O) = \delta m R\dot{z}\vec{u}_x$.

Soit au total (brins AA′, A′B′ et B′B) : $\vec{\sigma}(O) = m(\text{chaîne})R\dot{z}\vec{u}_x$

d'où $\sigma_\Delta(\text{chaîne}) = \mu LR\dot{z}\vec{u}_x$ et $\sigma_\Delta(\text{système}) = \frac{1}{2}MR^2\omega + \mu LR\dot{z}$.

Soit encore avec $R\omega = \dot{z}$:

$$\boxed{\sigma_\Delta(\text{système}) = \left(\frac{1}{2}M + \mu L\right)R\dot{z}} \quad (2)$$

■ Calculons maintenant le moment $\mathcal{M}_\Delta^{ext}$:

Le moment scalaire (selon Ox) des efforts extérieurs se réduit ici à ceux des efforts de pesanteur (la liaison d'axe, liaison pivot étant parfaite, on a $\mathcal{M}_\Delta^{liaison} = 0$).

D'où : $\mathcal{M}_\Delta^{ext} = \mathcal{M}_\Delta(\text{poids, AA}') + \mathcal{M}_\Delta(\text{poids, A}'\text{B}') + \mathcal{M}_\Delta(\text{poids, B}'\text{B})$.

Or $\mathcal{M}_\Delta(\text{poids, B}'\text{B}) = 0$, le centre de masse G_2 de la partie A′B′ de la chaîne étant situé sur la même verticale que celle du point O.

Copyrighted material

$\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}, AA') = -\mu AA' gR$ et

$\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}, B'B) = \mu B'BgR$.

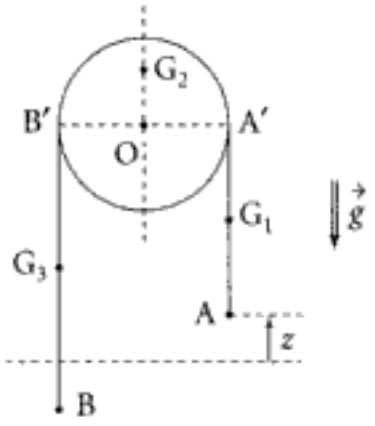
Soit : $\mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}} = \mu(B'B - AA')gR$.

Avec $AA' = \frac{1}{2}(L - \pi R) - z$ et $BB' = \frac{1}{2}(L - \pi R) + z$

et $\mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}} = \mathbf{2\mu zgR}$ (3)

Reportons les résultats (2) et (3) dans (1) :

$$\left(\frac{1}{2}M + \mu L\right)R\ddot{z} = 2\mu gRz.$$



Et avec $m = \mu L$ masse totale de la chaîne :

$$\boxed{\ddot{z} - \frac{2m}{M + 2m} \cdot \frac{2g}{L} z = 0} \quad (4)$$

La solution à cette équation est donnée par :

$$z(t) = \alpha \cosh \Omega t + \beta \sinh \Omega t \quad \text{où} \quad \Omega = \sqrt{\frac{2m}{M + 2m} \cdot \frac{2g}{L}}.$$

Les constantes α et β se déterminent à l'aide des conditions initiales : $z(0) = a$ et $\dot{z}(0) = 0$, soit : $\alpha = a$ et $\beta = 0$

d'où : $$\boxed{z(t) = a \cosh\left(\sqrt{\frac{2m}{M + 2m} \cdot \frac{2g}{L}}\, t\right)}$$

A. 2. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble poulie-chaîne. Les efforts de contact chaîne-poulie ne travaillent pas du fait de l'absence de glissement. On donc : $E_c + E_p = \text{cste}$ (5)

Or $E_c = E_c(\text{poulie}) + E_c(\text{chaîne})$ avec : $\begin{cases} E_c(\text{poulie}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 \\ E_c(\text{chaîne}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \\ \text{(tous les points ont la même vitesse en norme).} \end{cases}$

Soit avec $\dot{z} = R\omega$: $\mathbf{E_c = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{z}^2}$.

Pour calculer l'énergie potentielle, prenons une origine en O. La partie de la chaîne qui est sur la poulie est associée à une énergie potentielle invariable. De plus :

$E_p(AA') = \mu AA' gz(G_1)$ avec $z(G_1) = -\frac{1}{2}(h - z)$

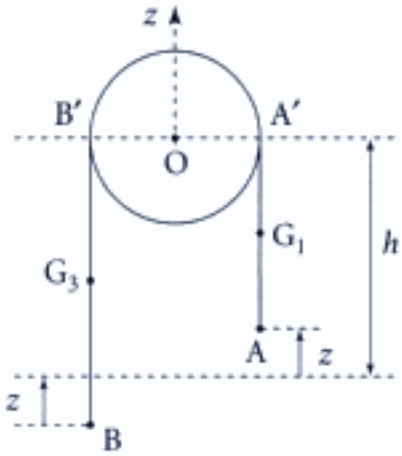
et : $$\boxed{E_p(AA') = -\frac{1}{2}\mu(h - z)^2 g}$$

De même $E_p(B'B) = \mu BB' gz(G_3)$

Copyrighted material

avec $z(G_3) = -\frac{1}{2}(h+z)$

d'où : $\boxed{E_p(B'B) = -\frac{1}{2}\mu(h+z)^2 g}$



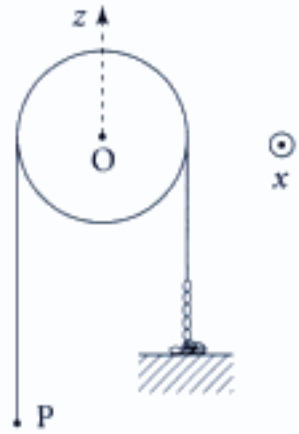
Au total, $E_p = \text{cste} - \frac{1}{2}\mu(h-z)^2 g - \frac{1}{2}\mu(h+z)^2 g$

et $E_p = \text{cste} - \mu g z^2$. L'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{z}^2 - \mu g z^2 = \text{cste}}$$

Soit même avec $m = \mu L$: $\dot{z}^2 - \frac{2m}{M+2m}\frac{2g}{L}z^2 = \text{cste} \Rightarrow \dot{z}^2 - \Omega^2 z^2 = \text{cste}$,

ce qui redonne bien l'équation (4) par simple dérivation.



Partie B

1. a. Dans une première phase, la masse ponctuelle P tire la chaîne vers le haut.

Appliquons le théorème du moment cinétique scalaire au système global (masse m, poulie et chaîne) par rapport à l'axe horizontal Ox :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{ext} \quad (5)$$

POINT MÉTHODE

Il aurait été inefficace d'appliquer le théorème de la puissance cinétique, le système étant ici non conservatif. En effet, le dernier maillon entraîné par la corde va, à son tour, soulever brusquement (choc) le maillon suivant ; il en résulte une dissipation d'énergie.

La liaison d'axe est supposée parfaite. Les seules forces extérieures intervenant dans le calcul de $\mathcal{M}_\Delta^{ext}$ sont donc les poids et la réaction du sol sur la chaîne. D'où :

$$\mathcal{M}_\Delta^{ext} = \underbrace{mgR}_{\text{masse ponctuelle } m} - \underbrace{mgR}_{\text{chaîne}} + \underbrace{NR}_{\text{réaction du sol}}$$

Or la réaction du sol doit compenser le poids de la partie de chaîne encore non soulevée (le dernier maillon entraîné par le système n'exerce aucune force sur le morceau de chaîne restant en tas tant qu'il n'entraîne pas le maillon suivant…), soit $N = (m - \lambda z)g$.

$$\mathcal{M}_\Delta^{ext} = m\left(1 - \frac{z}{a}\right)gR \quad (6)$$

De plus, pour le moment cinétique : $\sigma_\Delta = \sigma_\Delta(m) + \sigma_\Delta(\text{chaîne})$.

Copyrighted material

Or $\sigma_\Delta(m) = (\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{V}(P)) \cdot \vec{u_x} = mR\dot{z}$.

De même $\sigma_\Delta(\text{chaîne}) = (\lambda z)R\dot{z}$ ($\lambda z \equiv$ masse de chaîne soulevée).

D'où $\sigma_\Delta = (m + \lambda z)R\dot{z}$.

Et avec $m = \lambda a$: $\boldsymbol{\sigma_\Delta = m\left(1 + \frac{z}{a}\right)R\dot{z}}$ (7)

(5) s'écrit alors avec (6) et (7) : $mR\left\{\left(1 + \frac{z}{a}\right)\ddot{z} + \frac{1}{a}\dot{z}^2\right\} = m\left(1 - \frac{z}{a}\right)gR$.

Et après simplifications :

$$\boxed{(z + a)\ddot{z} + \dot{z}^2 = (a - z)g} \quad (8)$$

B. 1. b. ■ Pour résoudre cette équation, posons $u(z) = \dot{z}^2$, soit :

$$2\dot{z}\ddot{z} = \frac{du}{dz}\dot{z} \Rightarrow \frac{du}{dz} = 2\ddot{z}$$

et

$$\frac{du}{dz} \cdot (z + a) + 2u = 2(a - z)g \quad (9)$$

L'intégration de cette équation différentielle du premier ordre avec second membre est de la forme $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$ avec :

• $u_1(z)$ solution particulière de la forme $u_1(z) = \alpha z + \beta$, reportée dans (9), elle donne $u_1(z) = \frac{2}{3}g \cdot (2a - z)$;

• $u_2(z)$ solution de l'équation différentielle sans second membre $\frac{du}{dz} \cdot (z + a) + 2u = 0$.

D'où

$$\frac{du_2}{u_2} = -\frac{2dz}{z + a} \Rightarrow u_2(z) = \frac{\mu}{(z + a)^2}.$$

Soit $u(z) = \frac{2}{3}g \cdot (2a - z) + \frac{\mu}{(z + a)^2}$

or $u(0) = 0$, $(\dot{z}(0) = 0)$ et $z(0) = 0$ d'où : $\frac{2}{3}g2a + \frac{\mu}{a^2} = 0$ et $\mu = -\frac{4}{3}ga^3$.

Finalement :

$$\boxed{u(z) = \frac{2}{3}g \cdot \left[(2a - z) - \frac{2a^3}{(z + a)^2}\right] = \dot{z}^2} \quad (10)$$

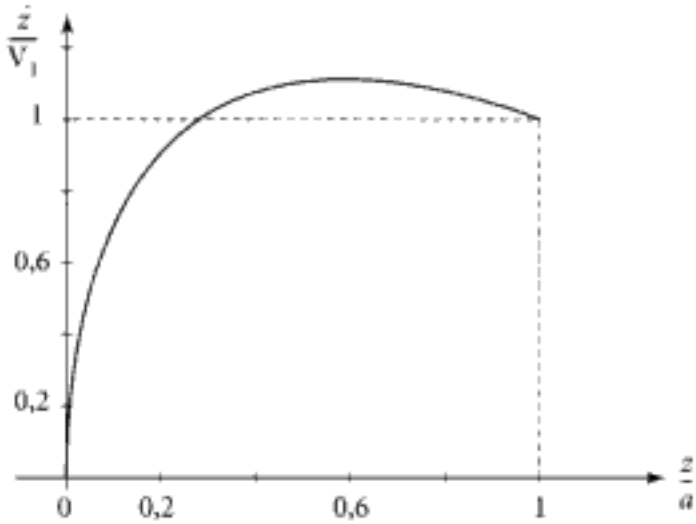
■ Pour $z = a$ (chaîne entièrement soulevée), la vitesse atteinte est :

$$\dot{z}_1^2 = \frac{2g}{3} \cdot \left[(2a - a) - \frac{2a^3}{(2a)^2}\right] \Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{1}{3}ga}} \quad (11)$$

Commentaire

On donne ci-dessous la courbe $\frac{z}{a} \to \frac{\dot{z}}{V_1}$.

Copyrighted material



La vitesse passe par un maximum pour une valeur de z égale à :

$$z_m = (4^{1/3} - 1)a \quad \text{(valeur qui annule (10))}.$$

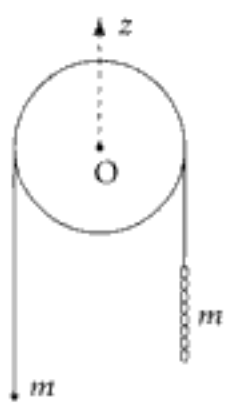
L'existence de cette valeur maximale s'explique aisément à partir de l'équation (8) que l'on peut réécrire : $\ddot{z} \cdot (z + a) = (a - z)g - \dot{z}^2$.

Au départ, la vitesse reste faible et z n'est pas trop important de sorte que l'effet du moment (terme $(a - z)g$) l'emporte sur l'effet de masse ajoutée (terme $\dot{z}^2$), et l'accélération est positive ($\ddot{z} > 0$).

Au moment où toute la chaîne a été soulevée, nous avons $z = a$ et $\dot{z}^2 = \dot{z}_1^2$ et le système est en phase de décélération ($\ddot{z} < 0$).

L'accélération $\ddot{z}$ passe bien par une valeur nulle pour une cote z comprise entre 0 et a.

B. 1. c. Dans cette seconde phase ($z > a$), la chaîne ne repose plus sur le sol et le moment par rapport à l'axe Ox des forces extérieures devient nul.



Le moment cinétique σ_Δ reste donc constant :

$$\sigma_\Delta = 2mR\dot{z} = 2mRV_1.$$

La masse m descend à la vitesse constante $\vec{V} = -V_1\vec{u_z}$ (tant que la chaîne n'atteint pas la poulie…).

B. 2. Bilan énergétique :

Le bilan qui suit concerne la première phase.

Dans la seconde, il y a conservation de l'énergie mécanique du système, ce qui se réduit ici à celle de l'énergie cinétique puisque le point matériel et la chaîne possèdent la même masse (l'énergie potentielle de pesanteur de l'ensemble est donc une constante : invariance de la position du centre de masse).

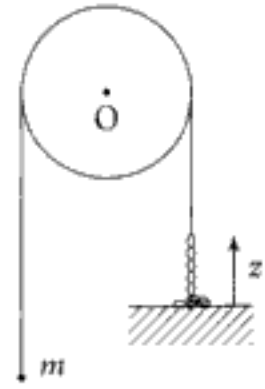
Revenons à la première phase. L'énergie cinétique du système à l'instant t s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}(\lambda z)\dot{z}^2$$

soit avec $\lambda = \frac{m}{a}$:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{z}{a}\right)\dot{z}^2.$$

Copyrighted material



Pour l'énergie potentielle, prenons l'origine au niveau du sol, soit en appelant h l'altitude initiale du point matériel :

$$E_p = mg(h - z) + \left(\frac{m}{a}z\right) \cdot \frac{z}{2} \cdot g.$$

Pour la chaîne, on a écrit que la masse soulevée est $\frac{m}{a}z$ et que son centre de masse se trouve en $\frac{z}{2}$.

D'où $\quad E_p = mg\left(h - z + \frac{z^2}{2a}\right) = \text{cste} + \frac{mg}{2a}z(z - 2a).$

Soit une énergie mécanique totale :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{z}{a}\right)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{a}z(z - 2a) + \text{cste}.$$

Examinons comment évolue cette énergie mécanique.

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z}\left(1 + \frac{z}{a}\right) + \frac{m}{2a}\dot{z}^3 + \frac{mg}{a}(z - a)\dot{z}$$

et en utilisant l'équation du mouvement (8) :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{m}{a}\dot{z} \cdot [(z + a)\ddot{z} + g(z - a)] + \frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{z}^3 = -\frac{m}{a}\dot{z}^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{z}^3$$

D'où :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{z}^3} \quad (12)$$

Il reste à interpréter physiquement ce résultat. Il est associé à une déperdition d'énergie correspondant à l'entraînement par la chaîne déjà soulevée des anneaux suivants (la vitesse d'un anneau passant, de façon quasi-instantanée, d'une vitesse nulle à la vitesse $\dot{z}$). Ainsi si l'on considère une masse δm s'accrochant sur une masse M de vitesse v, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$(\delta m + M)(v + dv) = Mv$$

et la variation d'énergie cinétique est donnée par :

$$\delta E_c' = \frac{1}{2}(\delta m + M) \cdot (v + dv)^2 - \frac{1}{2}Mv^2.$$

D'où $\quad \delta E_c' = \frac{1}{2}Mv^2\left[\frac{M}{M + \delta m} - 1\right] = -\frac{1}{2}Mv^2\frac{\delta m}{M + \delta m}.$

Soit pour $\delta m \ll M \Rightarrow \delta E_c = -\frac{1}{2}v^2\delta m.$

Cette énergie est transformée en énergie thermique. Appliqué à la chaîne, nous obtenons :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{1}{2}\dot{z}^2\frac{\delta m}{dt} \quad \text{avec ici} \quad \frac{\delta m}{dt} = \frac{m}{a}\dot{z}.$$

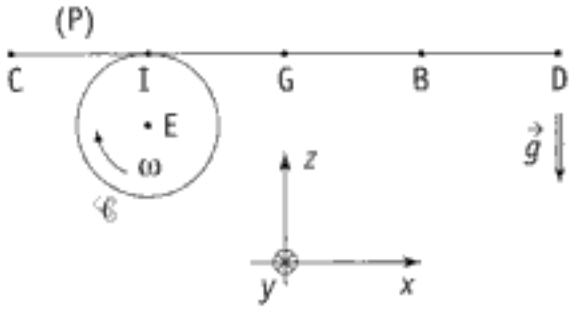
On retrouve bien le résultat (12).

Copyrighted material

107 Mesure d'un coefficient de frottement

Une plaque (P) homogène de masse m et longueur CD = $2a$ est d'épaisseur négligeable.

On désigne par G son centre de masse.



1. Elle est posée sans vitesse initiale sur une barre (B) et sur un cylindre $\mathscr{C}$ (de rayon R) d'axes horizontaux parallèles à Oy. La plaque reste horizontale, et le point G est susceptible de se déplacer selon la direction horizontale IB (I point de $\mathscr{C}$ en contact avec la plaque).

Le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe Ey ($\vec{\omega} = \omega_0 \vec{u_y}$ avec $\omega_0 > 0$). Le contact entre (P) et la barre est sans frottement. Celui entre (P) et ($\mathscr{C}$) est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f.

On pose $\overline{IG} = x$ et on a $\overline{IB} = a$. À $t = 0^+$, G est en I ($x = 0^+$).

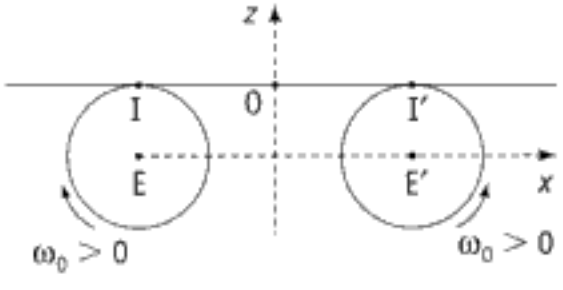
Le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ est galiléen.

a. Étudier le mouvement de la plaque, et en déduire l'instant t' où la plaque quitte le cylindre. On mettra en évidence l'existence d'une valeur critique ω_c de ω_0 et on décrira le mouvement de la plaque dans les deux cas : $\omega_0 < \omega_c$ et $\omega_0 > \omega_c$.

Donner, dans chaque cas, les graphes $t \to x(t)$ et $t \to \dot{x}(t)$.

b. On prend : $a = 0{,}50$ cm ; $R = 0{,}10$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $f = 0{,}20$.
Calculer ω_c, puis t' pour $\omega_0 = 12\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_0 = 2{,}0\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. La barre (B) est remplacée par un cylindre $\mathscr{C}'$ identique à ($\mathscr{C}$) mais tournant en sens opposé ($\vec{\omega'} = -\omega_0 \vec{u_y}$). I′ est confondu avec B de sorte que II′ = a O désigne le milieu du segment II′ et on pose $\overline{OG} = x$.



Les conditions initiales sont maintenant : $x(0^+) = b < \frac{a}{2}$ $(b > 0)$ et $\dot{x}(0^+) = 0$.

a. Reprendre l'étude du mouvement de la plaque avec les hypothèses suivantes :
– le coefficient de frottement de glissement plaque-$\mathscr{C}'$ est également f ;
– il y a toujours glissement en I et I′ et la vitesse de glissement ne s'y annule jamais.

A.N. : on prend $b = 0{,}20$ m, $\omega_0 = 10\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et on mesure une période T′ = 2,2 s.

Montrer que l'on peut en déduire la valeur du coefficient de frottement f.

b. On abandonne la première hypothèse et on note f' le coefficient de frottement de glissement plaque-$\mathscr{C}'$. On pourra considérer que $f > f'$.

Quelles sont les modifications à apporter aux résultats précédents ?

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

- Lois du frottement de glissement (lois de Coulomb)
- Théorèmes de la résultante dynamique et du moment cinétique scalaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La vitesse de la plaque étant initialement nulle, il y aura glissement au niveau du contact plaque-cylindre. Il en résulte une composante tangentielle de la force de contact qui va mettre la plaque en mouvement (ici dans le sens des x positifs).

Si le point G atteint la barre avec une vitesse non nulle, cela provoque un pivotement de la plaque autour de B et une rupture du contact de la plaque sur le cylindre.

À $t = 0^+$, la vitesse de glissement plaque-cylindre est donc non nulle. Deux cas peuvent se produire selon que le glissement se poursuit dans le même sens ou que cette vitesse de glissement s'annule avant que G n'atteigne la barre. D'où l'existence d'une valeur critique ω_c de la vitesse de rotation ω_0 du cylindre.

2. a. La vitesse de glissement de la plaque par rapport au cylindre $\mathscr{C}$ garde un signe constant ; la composante tangentielle de la force de contact en I conserve donc le même sens (il en est de même en I′).

Les effets des deux cylindres (tournant en sens inverse) vont s'opposer, conduisant ici à un mouvement d'oscillations autour de la position d'équilibre symétrique $x = 0$.

b. La dissymétrie introduite par un coefficient de frottement f' différent de f va certainement conduire à une autre expression de la période d'oscillations ainsi qu'à une position d'équilibre décalée par rapport à $x = 0$…

3. Solution

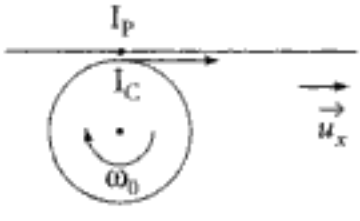
1. a. La plaque est simplement posée sur le cylindre et sur la barre. Elle ne subit donc pas de choc et sa vitesse ne présente pas de discontinuité. On a ainsi :

$$V(0^+) = 0 \quad (\overrightarrow{V_G} = V\overrightarrow{u_x}).$$

Le cylindre ayant une vitesse de rotation maintenue constante $\vec{\omega} = \omega_0\overrightarrow{u_y}$, le point I_C en contact avec la planche possède une vitesse :

$$\overrightarrow{V_{I_C}} = \omega_0 R\overrightarrow{u_x}.$$

La vitesse de glissement de la plaque par rapport au cylindre vaut alors :



$$\overrightarrow{v_{gl}} = \overrightarrow{V_{I_P}}(t) - \overrightarrow{V_{I_C}}(t).$$

Soit en exprimant les vitesses dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{v_{gl}} = (V - \omega_0 R)\overrightarrow{u_x}.$$

Copyrighted material

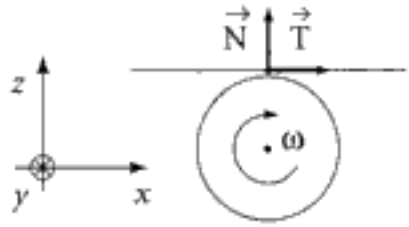
À l'instant initial $t = 0^+$, on a donc $\vec{v}_{gl}(0^+) = (0 - \omega_0 R)\vec{u}_x = -\omega_0 R\vec{u}_x$.

La planche amorce donc une phase de translation avec glissement.

Dans cette phase de glissement, le cylindre exerce sur la plaque une force de contact :

$$\vec{F} = N\vec{u}_z + T\vec{u}_x$$

avec $T > 0$ ($\vec{T} \,//\, \vec{v}_{gl}$ et $\vec{T} \cdot \vec{v}_{gl} < 0$).

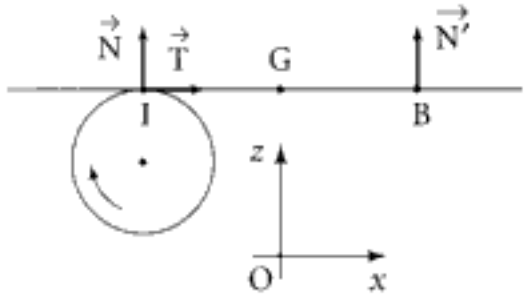


Le cylindre tournant dans le sens indiqué ($\vec{\omega} = \omega_0\vec{u}_y$) entraîne la planche dans le sens positif de l'axe des x.

Appliquons à la planche, dans $\mathcal{R}$ galiléen, le théorème de la résultante dynamique.

Elle est soumise aux forces :

- $\vec{F}$ (contact en I) ;
- $\vec{N'} = N'\vec{u}_z$ (contact sans frottement en B : $N' > 0$) ;
- $\vec{P} = m\vec{g}$ (poids).



Il vient : $\dfrac{d}{dt}(m\vec{V}_G) = \vec{F} + \vec{N'} + m\vec{g}$.

Soit en projection sur les axes Ox et Oz (et tant qu'il y a contact) :

$$m\frac{dV}{dt} = T \quad (1) \quad \text{et} \quad 0 = N + N' - mg \quad (2).$$

Dans cette phase de glissement, les lois du frottement de glissement donnent :

$$T = fN \quad (3) \quad (N > 0 \text{ et } T > 0).$$

Il manque une équation (inconnues $V(t)$, T, N et N') que l'on obtient par application du théorème du moment cinétique barycentrique scalaire (axe Gy) :

$$\left.\frac{d\sigma_\Delta}{dt}\right)_{\mathcal{R}_G} = \mathcal{M}_\Delta^{ext} \quad (\Delta \equiv Gy).$$

Or $\sigma_\Delta = 0$ (la planche est fixe dans $\mathcal{R}_G$ tant que le contact subsiste en I et B), d'où

$$\mathcal{M}_\Delta^{ext} = 0 = N \cdot IG - N' \cdot GB.$$

Soit avec $IG = x$ et $IB = a$: $N \cdot x = N' \cdot (a - x)$ (4)

(2) et (4) conduisent alors à :

$$N'a = (N + N')x = mgx \Rightarrow \boxed{N' = mg\frac{x}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{N = mg\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \quad (5)$$

On a bien : $N > 0$ et $N' > 0$ pour $0 < x < a$.

(1), (3) et (5) donnent enfin : $m\dfrac{dV}{dt} = fmg\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$.

Or $V = \dot{x}(t)$, d'où : $\ddot{x} = fg\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{fg}{a}x = fg$.

Copyrighted material

L'intégration de cette équation différentielle conduit à :

$$x(t) = a + \lambda\cos\Omega t + \mu\sin\Omega t \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{fg}{a}}.$$

Les conditions initiales sont $x(0^+) = 0$ et $\dot{x}(0^+) = 0$, d'où :

$$a + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mu = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = a(1 - \cos\Omega t)} \qquad (6)$$

Cette phase persiste si deux conditions sont remplies :

• il y a contact en I et B, ce qui est bien vérifié pour $0 < x < a$;

• la vitesse de glissement ne s'annule pas. Or :

$$\vec{v}_{gl} = (\dot{x}(t) - R\omega_0)\vec{u}_x = (a\Omega\sin\Omega t - R\omega_0)\vec{u}_x = v_{gl}(t)\vec{u}_x.$$

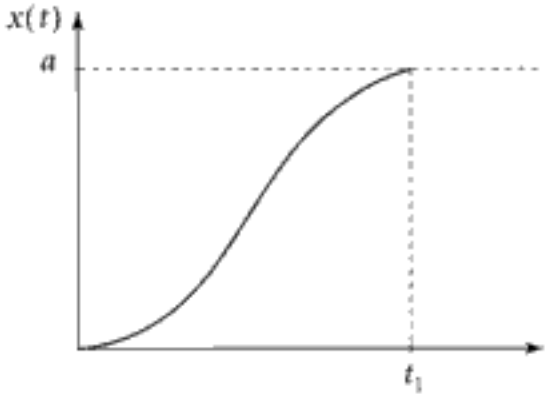
On aura $v_{gl} < 0$ pour $0 < x < a$, et donc $0 < \Omega t < \frac{\pi}{2}$, lorsque :

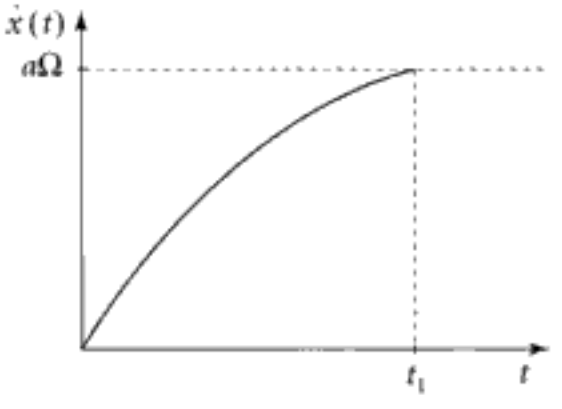
$$a\Omega - R\omega_0 < 0 \Rightarrow a\sqrt{\frac{fg}{a}} < R\omega_0$$

c'est-à-dire : $\boxed{\omega_0 > \frac{a}{R}\sqrt{\frac{fg}{a}} = \omega_c}$

Conclusions

• Pour $\omega_0 \geqslant \omega_c$, la planche glisse sur le cylindre, son centre de masse G décrivant le segment IB pendant le temps $t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$. À $t = t_1$, G est en B avec une vitesse $\dot{x}(t_1) = a\Omega\sin\Omega t_1 = a\Omega$: x devient supérieur à a et le contact cesse en I.





• Pour $\omega_0 < \omega_c$, le mouvement de translation avec glissement de la planche par rapport au cylindre se poursuit pendant un temps $t_2 < t_1$ tel que :

$$v_{gl}(t_2) = 0 \Rightarrow a\Omega\sin\Omega t_2 = R\omega_0$$

soit $\quad \sin\Omega t_2 = \frac{R\omega_0}{a\Omega} = \frac{\omega_0}{\omega_c} < 1 \quad \left(t_2 = \frac{1}{\Omega}\text{Arc}\sin\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)\right).$

Afin de caractériser le mouvement pour $t > t_2$, il est nécessaire de préciser comment évolue la vitesse de glissement. Or :

$$\vec{v}_{gl} = v_{gl}\vec{u}_x = (\dot{x}(t) - R\omega_0)\vec{u}_x$$

d'où $\quad \frac{d\vec{v}_{gl}}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x = \frac{\vec{T}}{m}$ d'après (1).

Copyrighted material

Soit encore $\vec{v}_{gl} \cdot \dfrac{d\vec{v}_{gl}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_{gl}^2}{2}\right) = \dfrac{1}{m}\vec{T} \cdot \vec{v}_{gl} \leqslant 0.$

Or en $t = t_2$, $v_{gl} = 0$. L'inégalité précédente, avec $v_{gl}^2 \geqslant 0$, ne peut être vérifiée que pour $v_{gl} = 0$. On a donc : $v_{gl}(t > t_2) = 0$ et $T(t > t_2) = 0$.
La planche est alors animée d'un mouvement de translation à vitesse constante $v(t > t_2) = v(t_2) = a\Omega \sin\Omega t_2 = R\omega_0$

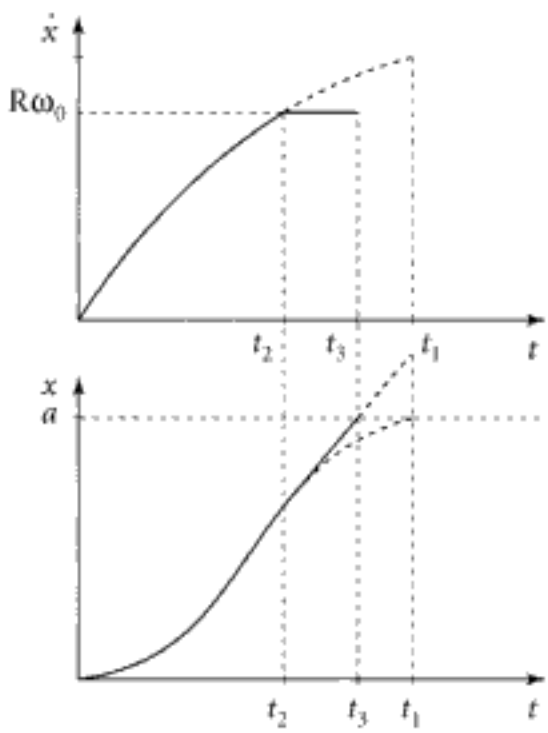
et $x(t > t_2) = x(t_2) + R\omega_0 \cdot (t - t_2) = a[1 - \cos\Omega t_2] + R\omega_0 \cdot (t - t_2)$

Le contact en I cesse à l'instant t_3 défini par $x(t_3) = a$, soit :

$$a = a(1 - \cos\Omega t_2) + R\omega_0 \cdot (t_3 - t_2) \quad \text{et} \quad t_3 = t_2 + \frac{a}{R\omega_0}\cos\Omega t_2$$

$$\boxed{t_3 = \frac{1}{\Omega}\left\{\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right) + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right\}}$$

D'où les graphes de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$:



1. b. On prend $a = 0{,}50$ cm ; $R = 0{,}10$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $f = 0{,}20$.
Soit une valeur critique ω_c de la vitesse angulaire telle que :

$$\omega_c = \frac{a}{R}\sqrt{\frac{fg}{a}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_c = 9{,}9\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

• **Premier cas $\omega_0 = 12\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$** : on a donc $\omega_0 > \omega_c$, et la phase de glissement se prolonge jusqu'à l'instant t_2 où la plaque quitte le cylindre.

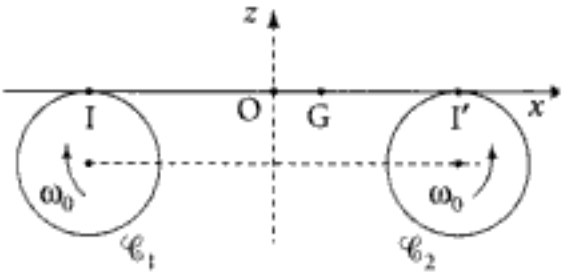
Soit $t' = t_2 = \dfrac{\pi}{2\Omega} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{a}{fg}}$; $\boldsymbol{t' = 0{,}79\ \text{s}}$.

• **Deuxième cas $\omega_0 = 2\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$** : cette fois-ci, $\omega_0 < \omega_c$ et le mouvement se compose d'une phase de glissement suivie d'une phase de non glissement.

Copyrighted material

Dès lors : $t' = t_3 = \sqrt{\frac{a}{fg}}\left\{\text{Arcsin}\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right) + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right\}$; $\quad t' = \mathbf{2{,}55\ s}$.

2. a. À l'instant initial $t = 0^+$, la plaque est simplement posée sur les deux cylindres tournant en sens inverse.



Il y a alors glissement en I et I′ :

$\vec{v}_{gl}(\text{plaque}/\mathscr{C}_1) = \vec{0} - R\omega_0\vec{u}_x$

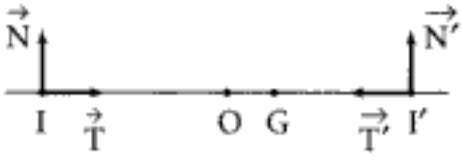
$\vec{v}_{gl}(\text{plaque}/\mathscr{C}_2) = \vec{0} + R\omega_0\vec{u}_x$.

Il en résulte des actions de contact en I et I′ telles que :

$\vec{F} = N\vec{u}_z + T\vec{u}_x$ où $T > 0$ $(\vec{T}\cdot\vec{v}_{gl} < 0)$ et $T = fN$;

$\vec{F}' = N'\vec{u}_z - T'\vec{u}_x$ où $T' > 0$ $(\vec{T}'\cdot\vec{v}_{gl} < 0$ et $\vec{T}' = -T'\vec{u}_x)$ et $T' = fN'$.

Tant que G n'atteint pas les points I et I′, les relations $N + N' = mg$ et $N\cdot IG = N'\cdot GI'$ restent valables.



L'origine étant prise ici au milieu du segment II′, on a : $IG = \frac{a}{2} + x$ et $GI' = \frac{a}{2} - x$, d'où :

$$\begin{cases} N + N' = mg \\ N\cdot\left(\frac{a}{2} + x\right) = N'\cdot\left(\frac{a}{2} - x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N + N' = mg \\ (N' - N)\frac{a}{2} = (N + N')x = mgx \end{cases} \qquad (7)$$

À $t = 0^+$, $x = b$ $\left(0 < b < \frac{a}{2}\right)$ de sorte que $IG > GI'$ et donc $N < N'$. Il en résulte que $T < T'$ et la plaque se déplace dans le sens des $x < 0$.

Pour $t > 0$, et à condition qu'il y ait toujours glissement en I (respectivement en I′) et toujours dans le même sens ($\vec{v}_{gl} = v_{gl}\vec{u}_x$ avec $v_{gl}(I, t) < 0$ et $v_{gl}(I', t) > 0$), on a :

$m\ddot{x} = T - T' = f\cdot(N - N')$ et d'après (7) : $N - N' = -mg\frac{2x}{a}$.

D'où $$m\ddot{x} = -f\frac{2mg}{a}x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2fg}{a}x = 0}$$

La plaque subit un mouvement d'oscillations sinusoïdales de pulsation $\Omega' = \sqrt{\frac{2fg}{a}}$ tel que ($x(0) = b$ et $\dot{x}(0) = 0$) : $\boxed{x(t) = b\cos\Omega' t}$

On a donc $-\frac{a}{2} < -b \leqslant x(t) \leqslant b < \frac{a}{2}$, ce qui implique que N et N′ restent positifs (*cf.* équations (7)) ; le contact n'est jamais rompu en I et I′ comme il se doit.

2. b. Les conditions de glissement en I et I′ s'écrivent ici avec $\vec{v}_{gl} = v_{gl}\vec{u}_x$

Copyrighted material

$v_{gl}(\mathrm{I}, t) = \dot{x}(t) - \mathrm{R}\omega_0 < 0$ (puisque $\dot{x}(0) = 0$)

$v_{gl}(\mathrm{I}', t) = \dot{x}(t) + \mathrm{R}\omega_0 > 0$ ($\dot{x}(0) = 0$)

or $\dot{x}(t) = -b\Omega' \sin\Omega' t$. On doit donc avoir :

$-b\Omega' \sin\Omega' t - \mathrm{R}\omega_0 < 0$ pour $\forall t$ et $-b\Omega' \sin\Omega' t + \mathrm{R}\omega_0 > 0$ pour $\forall t$.

Ce qui est réalisé lorsque $\mathrm{R}\omega_0 > b\Omega'$. La condition cherchée s'écrit donc :

$$\boxed{\omega_0 > \frac{b}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{2fg}{a}} = \omega'_c}$$

A.N. : on a $\mathrm{R} = 0{,}10$ m ; $a = 0{,}50$ cm ; $b = 0{,}20$ m $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $\mathrm{T}' = \dfrac{2\pi}{\Omega'} = 2{,}2$ s.

On en déduit $\dfrac{2\pi}{\Omega'} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2fg}{a}}} = \mathrm{T}' \Rightarrow f = \dfrac{2\pi^2 a}{\mathrm{T}'^2 g}$ et $f = \mathbf{0{,}21}$.

Il reste à vérifier que l'on a bien $\omega_0 > \omega'_c$.

Or $\omega'_c = \dfrac{b}{\mathrm{R}}\Omega' = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}'}\dfrac{b}{\mathrm{R}} = 5{,}7\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} < \omega_0 = 10\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

2. b. On reprend l'étude précédente en supposent un coefficient de frottement de glissement différent en I(f) et en I'(f'). Les mêmes hypothèses sont retenues. On a donc maintenant : $m\ddot{x} = \mathrm{T} - \mathrm{T}'$

avec $\mathrm{T} = f\mathrm{N}$ et $\mathrm{T}' = f'\mathrm{N}'$

d'où $m\ddot{x} = f\mathrm{N} - f'\mathrm{N}'$

$\vec{\mathrm{T}} = \mathrm{T}\vec{u}_x$ et $\mathrm{T} > 0$

$\vec{\mathrm{T}}' = -\mathrm{T}'\vec{u}_x$ et $\mathrm{T}' > 0$.

Or d'après les équations (7) :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{N} + \mathrm{N}' &= mg \\ \mathrm{N} - \mathrm{N}' &= -mg\frac{2x}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \mathrm{N} &= \frac{mg}{2} - mg\frac{x}{a} \\ \mathrm{N}' &= \frac{mg}{2} + mg\frac{x}{a}. \end{aligned}\right.$$

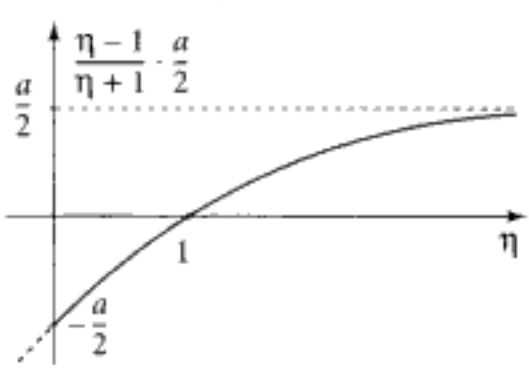
Soit $m\ddot{x} = f \cdot \left(\dfrac{mg}{2} - mg\dfrac{x}{a}\right) - f'\left(\dfrac{mg}{2} + mg\dfrac{x}{a}\right)$ $\boxed{\ddot{x} + (f + f')\dfrac{g}{a}x = (f - f')\dfrac{g}{2}}$ (8)

• Il apparaît une nouvelle position d'équilibre liée à la dissymétrie introduite par $f \neq f'$:

$$x_{eq} = \frac{f - f'}{f + f'}\frac{a}{2} = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}\frac{a}{2} \text{ en posant } \eta = \frac{f}{f'}.$$

On a bien $|x_{eq}| < \dfrac{a}{2}$ et $x_{eq} > 0$ pour $f > f'$.

De plus, on retrouve $x_{eq} = 0$ pour $f = f'$.



• La solution à l'équation différentielle (8) est donnée par :

$x(t) = x_{eq} + \lambda\cos\Omega'' t + \mu\sin\Omega'' t$ où

$\Omega'' = \sqrt{\dfrac{(f + f')g}{a}}$.

Copyrighted material

À $t = 0$, $x(0) = b$ et $\dot{x}(0) = 0$, d'où $b = x_{eq} + \lambda$ et $\mu = 0$.

Soit $x(t) = x_{eq} + (b - x_{eq})\cos\Omega'' t$

et $\dot{x}(t) = -(b - x_{eq})\Omega'' \sin\Omega'' t$

Il s'agit encore d'oscillations sinusoïdales de période $T'' = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{(f+f')g}}$.

Pour $f > f'$ et $f - f'$ et $b = 0{,}2$ m, on a certainement $b > x_{eq}$ et donc :

$-\dfrac{a}{2} < -b + 2x_{eq} \leqslant x(t) \leqslant b < \dfrac{a}{2}$ (le contact subsiste en I et I').

La condition de glissement en I et I' s'écrit :

$(b - x_{eq})\Omega'' < R\omega_0$ d'où : $\omega_0 > \dfrac{(b - x_{eq})\Omega''}{R} \cdots$

108 Boulon sur tige filetée

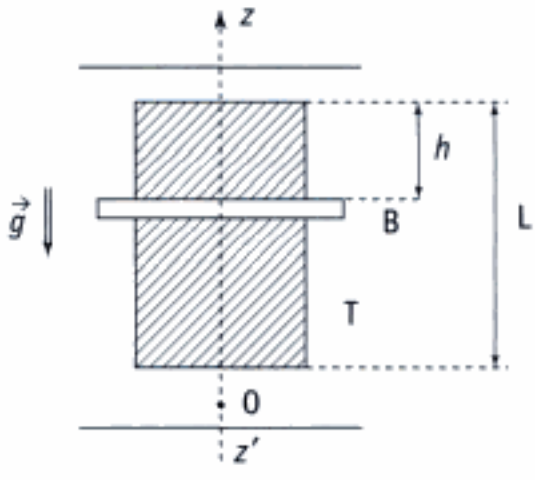
Une tige filetée T peut tourner sans frottements autour de l'axe vertical $z'z$.

On note J son moment d'inertie par rapport à cet axe, L sa longueur et a son pas de vis.

Un boulon B de masse m et de moment d'inertie j par rapport à Oz descend sans frottements le long de la tige.

Dans l'état initial, le boulon est en haut de la tige et les vitesses sont nulles.

On pourra poser $I = \dfrac{jJ}{j+J}$.



1. Décrire le mouvement du système tige + boulon, et en déduire l'état cinématique du boulon lorsqu'il atteint le bas de la tige.

2. Déterminer les actions de contact s'exerçant sur le boulon.

Solution

1. Notons $\omega(t)$ et $\Omega(t)$ les vitesses angulaires de rotation, par rapport à l'axe Oz du boulon et de la tige filetée. Ces vitesses sont mesurées par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen.

Copyrighted material

Pendant dt, le boulon aura subi une rotation $\omega(t)dt$ et la tige $\Omega(t)dt$. Il en résulte une rotation relative :

$$d\theta_r = (\omega - \Omega)dt.$$

Elle doit s'accompagner d'une descente du boulon d'une hauteur dh (positive) reliée au pas de vis selon :

$$\frac{d\theta_r}{2\pi} = \frac{dh}{a}.$$

On s'est placé dans le cas où ω est positif (et donc Ω négative comme on peut s'en douter) :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{2\pi}[\omega(t) - \Omega(t)],$$

et en notant $\vec{V} = -V\vec{u}_z$ la vitesse du centre de masse du boulon $(V > 0)$:

$$\boxed{\omega(t) - \Omega(t) = \frac{2\pi}{a}V(t)} \quad (1)$$

■ Afin d'éliminer les actions intérieures s'exerçant entre la tige et le boulon, appliquons le théorème du moment cinétique scalaire à l'ensemble du système. La tige pouvant tourner librement autour de l'axe $\Delta = Oz$, nous avons :

$$\sigma_\Delta \text{ (tige + boulon)} = \text{cste} = 0.$$

conditions initiales (système fixe à $t = 0^+$)

Or $\quad \sigma_\Delta = \sigma_\Delta \text{ (tige)} + \sigma_\Delta \text{ (boulon)} = J\Omega + j\omega$

D'où $\quad \boxed{J\Omega + j\omega = 0} \quad (2)$

Le boulon et la tige tournent bien en sens inverses.

■ De la même façon, le théorème de l'énergie mécanique se traduit par :

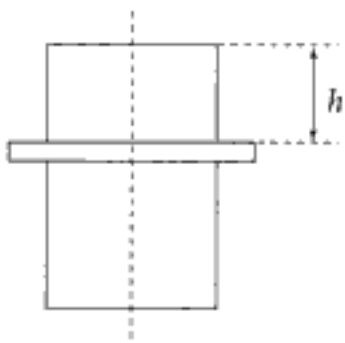
$$E_c + E_p = \text{cste (absence de frottements)} \quad (3)$$

avec $E_p = -mgh$, si h désigne la hauteur dont est descendu le boulon à l'instant t.

D'autre part $E_c = E_c\text{(tige)} + E_c\text{(boulon)}$

avec :

$$E_c \text{ (tige)} = \frac{1}{2}J\Omega^2 \text{ (tige en rotation autour de } Oz),$$



et d'après le théorème de Kœnig :

$$E_c \text{ (boulon)} = E_c \text{ (boulon)}_{\mathcal{R}_K} + \frac{1}{2}mV^2$$

($\mathcal{R}_K$ = référentiel du centre de masse du boulon).

D'où $\quad E_c \text{ (boulon)} = \frac{1}{2}j\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2 \quad$ et $\quad E_c = \frac{1}{2}J\Omega^2 + \frac{1}{2}j\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2.$

(3) devient alors : $\quad \frac{1}{2}(J\Omega^2 + j\omega^2) + \frac{1}{2}mV^2 - mgh = 0 \quad (4)$

Copyrighted material

soit avec (2) :

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{J}+\frac{\mathrm{J}^2}{j}\right)\Omega^2+\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2 = mgh \quad (5)$$

et avec (2) et (1) : $$\Omega(t)\cdot\left[\frac{\mathrm{J}}{j}+1\right] = -\frac{2\pi}{a}\mathrm{V}(t) \quad (6)$$

Finalement, en éliminant Ω entre les équations (5) et (6) :

$$\frac{1}{2}\mathrm{J}\left(1+\frac{\mathrm{J}}{j}\right)\frac{\frac{4\pi^2}{a^2}}{\left(1+\frac{\mathrm{J}}{j}\right)^2}\mathrm{V}^2+\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}\left[m+\frac{4\pi^2}{a^2}\frac{j\mathrm{J}}{j+\mathrm{J}}\right]\mathrm{V}^2 = mgh.$$

D'où $$\boxed{\mathrm{V}^2 = 2g'h \quad \text{où} \quad g' = \frac{g}{1+4\pi^2\dfrac{\mathrm{I}}{ma^2}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{I} = \frac{j\mathrm{J}}{j+\mathrm{J}}}$$

Il s'agit alors du mouvement de « chute libre » d'un point matériel dans *le champ de pesanteur apparent* $g' < g$.

On a ainsi : $2\mathrm{V}\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{V}}{\mathrm{d}t} = 2g'\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2g'\mathrm{V} \Rightarrow \boxed{\mathrm{V} = g't}$ (7)

Et $$\Omega(t) = -\frac{2\pi}{a}\frac{j}{j+\mathrm{J}}\mathrm{V}(t) \Rightarrow \boxed{\Omega(t) = -\frac{2\pi}{a}\frac{\mathrm{I}}{j}g't}$$

$$\omega(t) = -\frac{\mathrm{J}}{j}\Omega(t) \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{2\pi}{a}\frac{\mathrm{I}}{j}g't}$$

En fin de course, on aura $h = \mathrm{L}$, d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{V}(\mathrm{L}) = \sqrt{2g'\mathrm{L}} \Rightarrow \mathrm{V}(\mathrm{L}) = \sqrt{\dfrac{2g\mathrm{L}}{1+4\pi^2\dfrac{\mathrm{I}}{ma^2}}} \\ \text{avec} \quad \omega(\mathrm{L}) = \dfrac{2\pi}{a}\dfrac{\mathrm{I}}{j}\mathrm{V}(\mathrm{L}).\end{array}}$$

Commentaires

• Pour $\mathrm{J} \gg j$, on a $|\Omega| \ll \omega$ (*cf.* (2)), et $\mathrm{I} = \dfrac{j\mathrm{J}}{j+\mathrm{J}} \approx j$. À la limite, la tige filetée ne tourne pas ($\Omega - 0$), $\omega \approx \dfrac{2\pi}{a}\mathrm{V}$ et :

$$g' = \frac{g}{1+4\pi^2\dfrac{j}{ma^2}}.$$

Copyrighted material

• D'autre part, g' est évidemment d'autant plus grand que le pas a est important. Ainsi, pour a suffisamment grand (en fait $4\pi^2\frac{I}{ma^2} \ll 1$), on obtient :

$$g' \approx g \quad \text{et} \quad V(h) \approx \sqrt{2gh} \quad (\omega \sim 0 \text{ et } \Omega \sim 0).$$

2. Les actions de contact exercées par la tige filetée sur le boulon vont se réduire à une force $\vec{F}$ et à un couple $\vec{\Gamma}$ ($\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_z}$).

• Appliquons au boulon le théorème de la quantité de mouvement :

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -m\vec{g} + m\vec{g'} \quad (cf.\ (7)).$$

D'où $$\vec{F} = -m\vec{g}\left(1 - \frac{g'}{g}\right)$$

or $$1 - \frac{g'}{g} = 1 - \frac{1}{1 + 4\pi^2\frac{I}{ma^2}} = \frac{1}{1 + \frac{ma^2}{4\pi^2 I}}.$$

Soit $$\boxed{\vec{F} = \frac{-m\vec{g}}{1 + \frac{ma^2}{4\pi^2 I}}}$$

• De même, en utilisant le théorème du moment cinétique barycentrique (pour le boulon) :

$$\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{\Gamma}.$$

Or $\vec{\sigma}(G) = j\omega(t)\vec{u_z}$ ($\vec{\sigma}(G)\cdot\vec{u_z} = j\omega(t)$, et l'axe $z'z$ est axe de symétrie),

d'où $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_z}$ avec :

$$j\frac{d\omega}{dt} = \Gamma \Rightarrow \Gamma = j\frac{2\pi}{a}\frac{I}{j}\frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad \boxed{\Gamma = \frac{2\pi}{a}Ig'}$$

Commentaires

Vérifions que la puissance totale développée par les efforts de contact tige-boulon est bien globalement nulle. Cette puissance s'écrit en effet :

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{V} + \vec{\Gamma}\cdot(\omega - \Omega)\vec{u_z}.$$

Soit $$\mathcal{P} = -m(g - g')\cdot V + \frac{2\pi}{a}Ig'\cdot\frac{2\pi}{a}V \quad \text{car} \quad \omega - \Omega = \frac{2\pi}{a}V$$

et $$\mathcal{P} = mV\left[-g + g'\cdot\left(1 + \frac{4\pi^2}{ma^2}I\right)\right]$$

or $g' = \dfrac{g}{1 + \frac{4\pi^2 I}{ma^2}}$, d'où : $\boxed{\mathcal{P} = 0}$

Cette puissance est nulle sans pour autant que $\vec{F}$ et $\vec{\Gamma}$ le soient.

Copyrighted material

109 Disque lié à une tige

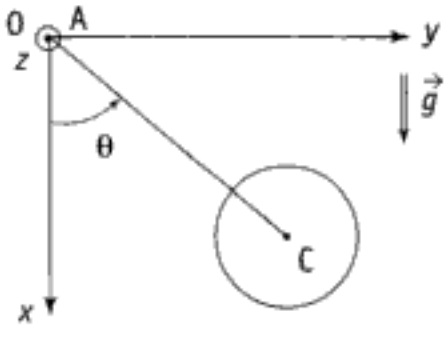
On étudie le mouvement d'un système constitué d'une tige AC (masse m, longueur l, centre de masse G_1 tel que $AG_1 = G_1C = \frac{l}{2}$) et d'un disque homogène de centre de masse C, de masse M et de rayon a. Le système évolue dans un plan vertical Oxy d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, xyz)$. On donne :

- le moment d'inertie du disque par rapport à son axe Cz : $\frac{1}{2}Ma^2$;
- le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Az : $\frac{1}{2}Ma^2 + Ml^2$;
- le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par G_1 : $\frac{1}{12}ml^2$; par A : $\frac{1}{3}ml^2$.

Pour les applications numériques, on prendra : $m = 2{,}0$ g ; $l = 10$ cm ; $M = 10$ g ; $a = 4{,}0$ cm ; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Par un dispositif non précisé, situé en « C » mais de masse négligeable, on peut : soit lier rigidement le disque à la tige, soit permettre une libre rotation relative sans frottements autour de l'axe Cz.

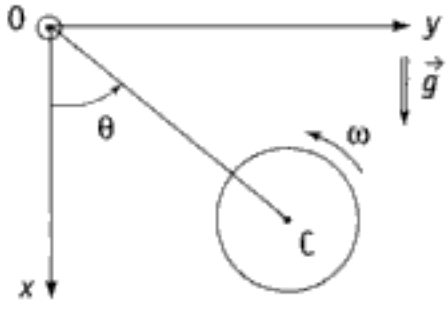
1. Le disque et la tige sont liés rigidement ; l'extrémité A de la tige est fixée en O et permet un mouvement de rotation sans frottements autour de l'axe horizontal Oz.

Déterminer l'équation différentielle du mouvement en $\theta(t)$. En déduire la période T des petites oscillations. *A.N.* : calculer T.



2. La configuration est la même qu'à la question précédente mais le disque et la tige peuvent tourner librement l'un par rapport à l'autre.

Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par la variable $\theta(t)$. En déduire la période T' des petites oscillations. *A.N.* : calculer T'.

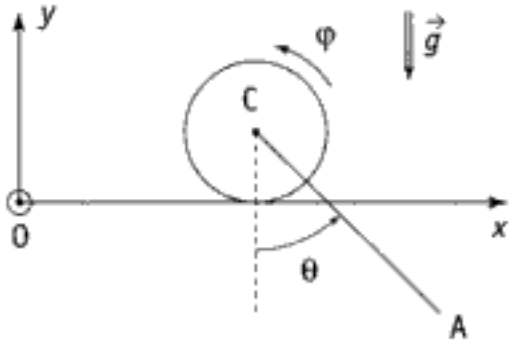


3. La liaison entre le disque et la tige est à nouveau rigide. Le disque roule sans glisser sur l'axe Ox tout en restant dans le plan vertical Oxy.

Établir une intégrale première du mouvement.

Étudier plus particulièrement les petits mouvements. En donner la période T''.

A.N. : calculer T''.



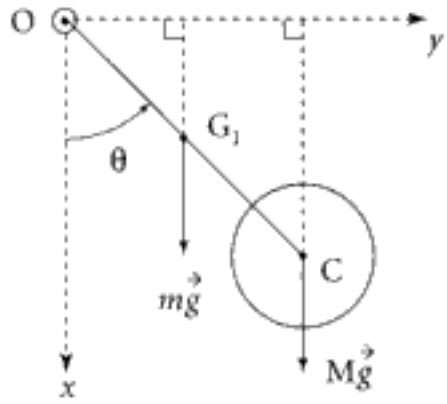
Copyrighted material

Solution

1. La liaison d'axe Oz est parfaite. On a donc $\mathcal{M}_\Delta^{\text{liaison}} = 0 \quad (\Delta \equiv Oz)$.

Le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à Oz donne (système tige plus disque) :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}} = \mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}}(\text{poids}) \quad (1)$$



Or $\sigma_\Delta = I_\Delta(\text{tige})\dot{\theta} + I_\Delta(\text{disque})\dot{\theta}$ (le disque est lié rigidement à la tige de sorte que l'ensemble des deux solides n'en forme plus qu'un)

avec $I_\Delta(\text{tige}) = \frac{1}{3}ml^2$

et $I_\Delta(\text{disque}) = \frac{1}{2}Ma^2 + Ml^2$.

D'où $$\sigma_\Delta = \left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}Ma^2 + Ml^2\right)\dot{\theta}.$$

De plus $$\mathcal{M}_\Delta^{\text{ext}}(\text{poids}) = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - Mgl\sin\theta.$$

(1) devient :

$$\left(\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2 + \frac{1}{2}Ma^2\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + M\right)gl\sin\theta = 0.$$

Pour les petits mouvements, faisons $\sin\theta \approx \theta$, soit :

$$\left(\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2 + \frac{1}{2}Ma^2\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + M\right)gl\theta = 0,$$

équation que l'on peut écrire sous la forme : $\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0$.

On obtient, à cette approximation, des oscillations en $\theta(t)$ sinusoïdales de pulsation Ω et de période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2 + \frac{1}{2}Ma^2}{\left(M + \frac{m}{2}\right)gl}}}$$

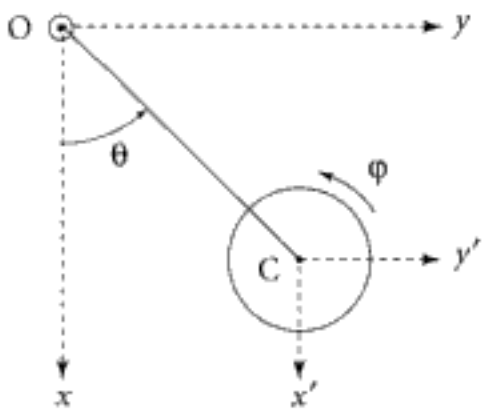
A.N. : **T = 0,65 s** (T = 0,648).

2. ■ Cette fois-ci, le disque peut tourner librement autour de son axe Cz.

Le système présente alors deux degrés de liberté :

– l'angle θ qui repère, dans $\mathcal{R}$, le mouvement de la tige et donc celui du centre de masse C du disque,

– l'angle φ ($\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{u}_z$) associé à la rotation dans $\mathcal{R}'(Cx'y'z')$ du disque autour de l'axe Cz.



Copyrighted material

■ La liaison (du type pivot) entre la tige et le disque étant parfaite, on a :

$\mathcal{M}_{Cz}^{\text{liaison}}(\text{tige} \to \text{disque}) = 0$

ceci nous invite à appliquer, au disque, le théorème du moment cinétique barycentrique scalaire (par rapport à l'axe $Cz = \Delta'$) :

$$\frac{d\sigma_{\Delta'}(\text{disque})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta'}^{\text{ext}} = \underbrace{\mathcal{M}_{\Delta'}^{\text{liaison}}}_{=0} + \underbrace{\mathcal{M}_{\Delta'}(\text{poids})}_{=0 \text{ (centre de masse confondu avec C)}}$$

d'où $\sigma_{\Delta'}(\text{disque}) = \text{cste}$.

Or $\sigma_{\Delta'}(\text{disque}) = I_{\Delta'}(\text{disque})\omega \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0}$ (2) avec $\omega(0) = \omega_0$.

Le mouvement de la tige n'affecte pas la rotation du disque.

■ Reprenons alors le calcul fait au **1.** On a toujours : $\mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}} = -\left(M + \frac{m}{2}\right)gl\sin\theta$.

Mais maintenant $\sigma_{\Delta} = I_{\Delta}(\text{tige})\dot{\theta} + \sigma_{\Delta}(\text{disque}) = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} + \sigma_{\Delta}(\text{disque})$.

La détermination de $\sigma_{\Delta}(\text{disque})$ s'effectue à partir du théorème de Kœnig :

$$\vec{\sigma}(\text{disque}, O) = \vec{\sigma}_{\mathcal{R}'}(\text{disque}) + \overrightarrow{OC} \wedge M\vec{V}(C)$$

($\mathcal{R}'$ se confond avec le référentiel du centre de masse associé au disque).

Or $\vec{\sigma}_{\mathcal{R}'}(\text{disque}) = I_{\Delta'}(\text{disque})\omega\,\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OC} \wedge M\vec{V}(C) = Ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

d'où : $\vec{\sigma}(\text{disque}, O) = (I_{\Delta'}(\text{disque})\omega + Ml^2\dot{\theta})\vec{u}_z$

soit $\sigma_{\Delta}(\text{disque}) = \frac{1}{2}Ma^2\omega_0 + Ml^2\dot{\theta}$ $(\omega(t) = \omega_0)$.

(1) s'écrit alors : $\frac{d}{dt}\left(Ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}Ma^2\omega_0 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\right) = -\left(\frac{m}{2} + M\right)gl\sin\theta$

$$\left(M + \frac{1}{3}m\right)l^2\ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + M\right)gl\sin\theta = 0.$$

Pour les petites oscillations, il vient : $\ddot{\theta} + \dfrac{\left(\frac{m}{2} + M\right)}{M + \frac{m}{3}} \cdot \dfrac{g}{l}\theta = 0$

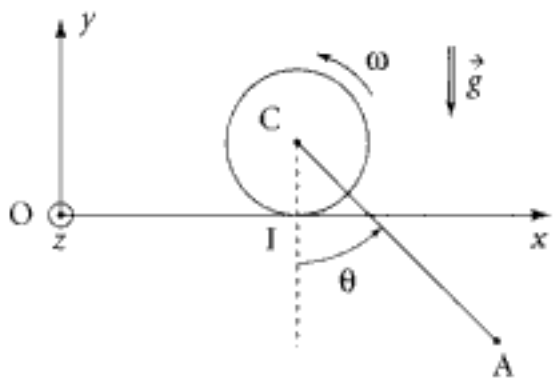
avec une période T' telle que $\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}m + M}{\left(\frac{m}{2} + M\right)} \cdot \dfrac{l}{g}}}$

On a $T' < T$, la libre rotation du disque diminuant l'effet d'inertie (« moment d'inertie équivalent » plus faible) : $\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}Ma^2 + Ml^2 \to \frac{1}{3}ml^2 + Ml^2$.

A.N. : $\mathbf{T' = 0{,}63\ s}$ $(T' = 0{,}625)$.

Copyrighted material

3. Le disque et la tige constituent un seul solide. De plus, le disque roulant sans glisser sur l'axe horizontal Ox, le théorème de l'énergie cinétique semble adapté à la situation. Il prend la forme (système disque + tige) :



$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}.$$

Ici $\mathcal{P}_{int} = 0$ (solides, et absence de mouvement relatif de la tige par rapport au disque) et $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_{contact}(\text{sol} \to \text{disque}) + \mathcal{P}(\text{poids})$

or $\mathcal{P}_{contact}(\text{sol} \to \text{disque}) = 0$ (roulement sans glissement et frottement de glissement)

$$\mathcal{P}(\text{poids}) = -\frac{dE_p}{dt} \quad (\text{poids = forces conservatives}).$$

Finalement, on a : $\boxed{E_c + E_p = \text{cste}}$ (3)

Calculons l'énergie potentielle (origine en C) :

$$E_p = E_p(\text{disque}) + E_c(\text{tige}) = 0 - mg\frac{l}{2}\cos\theta \quad (4)$$

Déterminons l'énergie cinétique du système : $E_c = E_c(\text{disque}) + E_c(\text{tige})$

$E_c(\text{disque}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}M\vec{V}_c^{\,2}$ (théorème de Kœnig et $\omega = \dot{\varphi}$)

or $\left\|\vec{V}_c\right\| = |\omega a|$ (roulement sans glissement)

d'où : $E_c(\text{disque}) = \frac{1}{4}Ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}Ma^2\omega^2 = \frac{3}{4}Ma^2\omega^2$ (5)

Commentaire

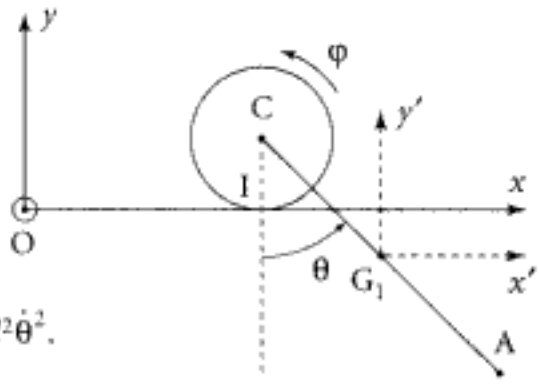
Le disque est en rotation instantanée autour de l'axe Iz, soit :

$$E_c = \frac{1}{2}I_{Iz}\omega^2 \quad \text{avec} \quad I_{Iz} = I_{Cz} + Ma^2 = \frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2$$

soit $E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Ma^2\right)\omega^2$.

$E_c(\text{tige}) = E'_c(\text{tige}) + \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G_1)$ (théorème de Kœnig).

$E'_c(\text{tige})$ = énergie cinétique de la tige dans son référentiel du centre de masse $\mathcal{R}'(G_1, x'y'z')$.



Or

$$E'_c(\text{tige}) = \frac{1}{2}I_{G_1}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta}^2.$$

Copyrighted material

D'autre part : $\vec{V}(G_1) = \vec{V}(C) + \dot{\theta}\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{CG_1}$ (champ des vitesses du solide)

et $\vec{V}(C) = \vec{V}(I) + \dot{\varphi}\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{IC} = \dot{\varphi}\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{IC}$ (roulement sans glissement du disque sur Ox, dans $\mathcal{R}(Oxyz)$). Mais la tige étant solidaire du disque : $\omega = \dot{\varphi} = \dot{\theta}$ et donc :

$$\vec{V}(G_1) = \dot{\theta}\vec{u_z} \wedge (\overrightarrow{CG_1} + \overrightarrow{IC}) = \dot{\theta}\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{IG_1}.$$

D'où $\quad E_c(\text{tige}) = \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\left\{\dot{\theta}\vec{u_z} \wedge \overrightarrow{IG_1}\right\}^2 = \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\overrightarrow{IG_1}^2\dot{\theta}^2$

avec $\quad (\overrightarrow{IG_1})^2 = (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CG_1})^2 = IC^2 + \overrightarrow{CG_1}^2 + 2\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{CG_1} = a^2 + \frac{l^2}{4} - 2a\frac{l}{2}\cos\theta$

soit : $E_c(\text{tige}) = \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(a^2 + \frac{l^2}{4} - al\cos\theta\right)\dot{\theta}^2$

$$E_c(\text{tige}) = \left(\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2 - \frac{1}{2}mal\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 \quad (6)$$

Reportons (4), (5) et (6) dans l'équation (3), avec $\omega = \dot{\theta}$:

$$\left(\frac{3}{4}Ma^2 + \frac{1}{6}ml^2 + \frac{1}{2}ma^2 - \frac{1}{2}mal\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 - mg\frac{l}{2}\cos\theta = \text{cste} \quad (7)$$

Soit encore pour les *petits mouvements* (on ne garde que les termes d'ordre au plus égal à deux par rapport à θ et $\dot{\theta}$ dans l'intégrale première du mouvement (7)) :

– on remplace $mg\frac{l}{2}\cos\theta$ par $\frac{mgl}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$;

– et la parenthèse se réduit à $\left(\frac{3}{4}M + \frac{1}{2}m\right)a^2 + \frac{1}{6}ml^2 - \frac{1}{2}mla$.

D'où : $$\left[\left(\frac{3}{4}M + \frac{1}{2}m\right)a^2 + \frac{1}{6}ml^2 - \frac{1}{2}mla\right]\dot{\theta}^2 + mg\frac{l}{4}\theta^2 = \text{cste}.$$

Il s'agit de l'équation énergétique d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω'' telle que :

$$\Omega''^2 = \frac{\frac{1}{2}mgl}{\left(\frac{3}{2}M + m\right)a^2 + \frac{1}{3}ml^2 - mla}$$

et donc de période $T'' = \frac{2\pi}{\Omega''}$:

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}M + m\right)a^2 + \frac{1}{3}ml^2 - mla}{\frac{1}{2}mgl}}.$$

A.N. : $\mathbf{T'' = 1{,}02\ s}$.

Copyrighted material

Partie 2

Électrocinétique

Hidden page

101 Diagramme asymptotique

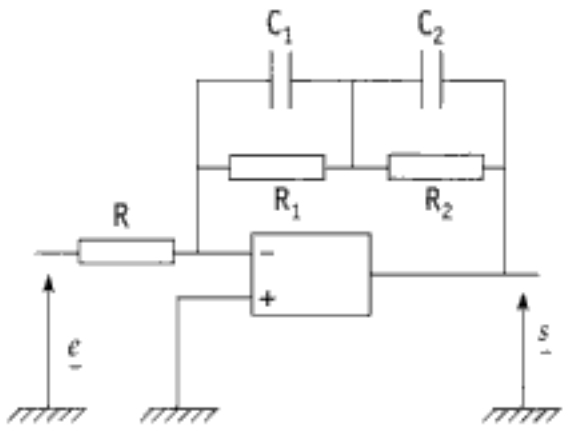
On suppose que le système fonctionne en régime linéaire sinusoïdal. On enregistre le diagramme de Bode donnant :

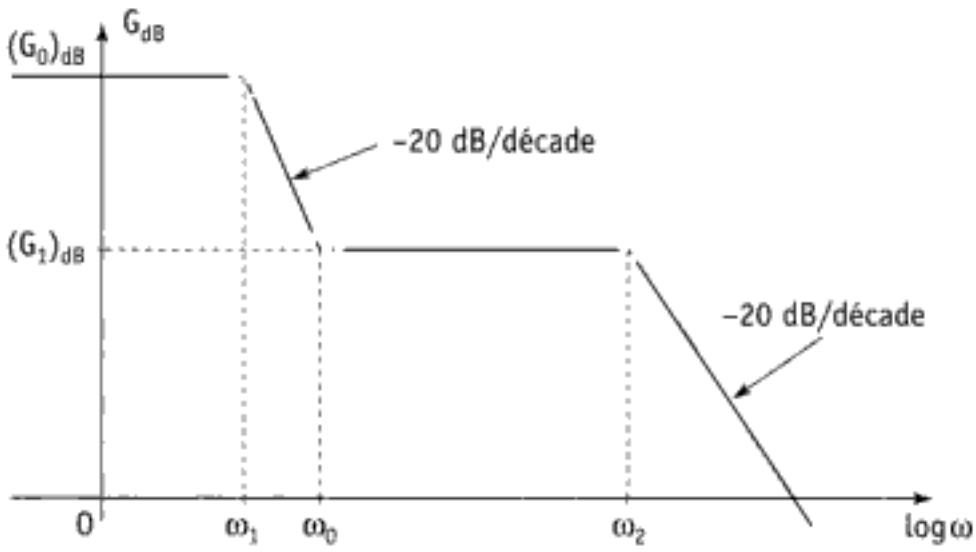
$$G_{dB} = 20\log\left|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right|$$

en fonction de $\log\omega$.

Les grandes lignes de ce diagramme sont données sur la figure ci-dessous (toutes les pulsations ω_i sont exprimées en s^{-1}).

Commenter. L'A.O. est idéal.





A.N. : $R_1 = 100\ k\Omega$; $R_2 = 10\ k\Omega$; $R = 1\ k\Omega$; $C_1 = 100\ nF$ et $C_2 = 10\ nF$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Fonction de transfert ($\underline{H}(j\omega)$ et $H(p)$).
- Représentation de Bode (notamment diagramme $\log\omega \rightarrow G_{dB}$).
- Comportement basses et hautes fréquences.

2. Ce qu'il faut comprendre

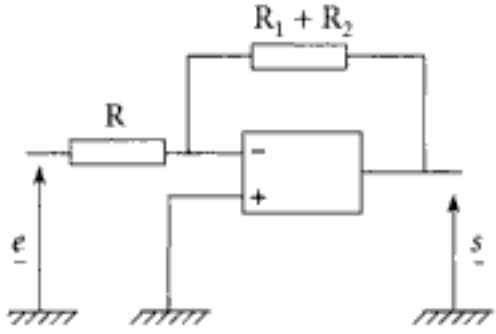
Le diagramme fourni dans l'énoncé correspond en fait aux tracés asymptotiques liés à la représentation de Bode ($G_{dB} = f(\log\omega)$). On étudiera, dans un premier temps, le comportement du montage en basses fréquences (BF) puis en hautes fréquences (HF).

Copyrighted material

3. Solution

■ Étudions les comportements basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) d'un tel circuit :

– BF : à la limite, les condensateurs sont équivalents à des coupe-circuit, et le montage se réduit alors à un simple **montage inverseur** de gain :

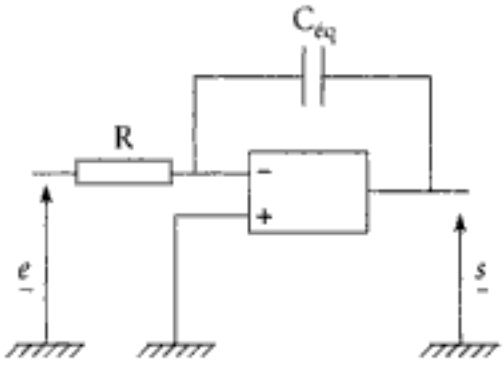


$$H = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{R_1 + R_2}{R}.$$

Nous devons donc avoir :

$$\boxed{(G_0)_{dB} = 20\log\frac{R_1 + R_2}{R}}$$

– HF : les condensateurs deviennent équivalents, à la limite, à des fils et donc $\underline{s} = 0$ en régime linéaire.



Nous en déduisons que $\lim\limits_{\omega \to +\infty} |\underline{H}| = 0$.

D'une façon plus précise, et pour ω suffisamment grand, le rôle des capacités C_1 et C_2 devient prépondérant devant celui des résistances R_1 et R_2. Le montage joue alors le rôle d'un intégrateur lié à la capacité $\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = C$ (C_1 série C_2). D'où :

$$C_{éq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\underline{H} \sim -\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

soit $\underline{H} \sim -\dfrac{1}{jR\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\omega}$

et $G_{dB} \sim -20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0'}\right)$

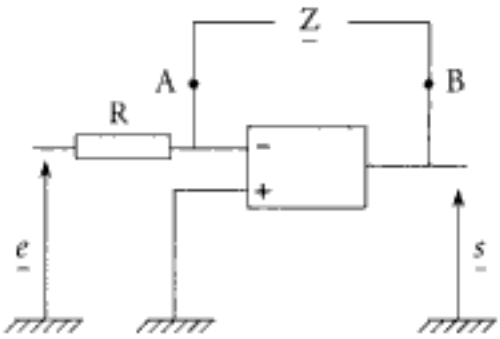
avec $\omega_0' = \dfrac{1}{R\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\right)}$.

Le diagramme asymptotique donnant G_{dB} en fonction de $\log\omega$ est alors associé à une droite de pente –20 dB par décade.

■ Déterminons maintenant la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

Copyrighted material

Notons $\underline{Z}$ l'impédance équivalente au dipôle A – B constitué de l'association série (R_1 // C_1) avec (R_2 // C_2). D'où : $\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$
avec



$$\begin{cases} \underline{Y_1} = \dfrac{1}{\underline{Z_1}} = \dfrac{1}{R_1} + jC_1\omega = \dfrac{1}{R_1}(1 + jR_1C_1\omega) \\ \underline{Y_2} = \dfrac{1}{\underline{Z_2}} = \dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega = \dfrac{1}{R_2}(1 + jR_2C_2\omega) \end{cases}$$

et $\underline{Z} = \dfrac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} + \dfrac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$. Or $\underline{H} = -\dfrac{\underline{Z}}{R}$ **(montage type inverseur)**,

il vient donc $\underline{H} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{R_1(1 + jR_2C_2\omega) + R_2(1 + jR_1C_1\omega)}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}$

soit encore $\underline{H} = -\dfrac{R_1 + R_2}{R}\dfrac{1 + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)\omega}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}$.

Posons $H_0 = -\dfrac{R_1 + R_2}{R}$ ($|H_0| = \lim\limits_{\omega \to 0}|\underline{H}|$: gain en continu) et :

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \cdot (C_1 + C_2)}.$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\boxed{\underline{H} = H_0 \frac{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{H(p) = H_0 \frac{\left(1 + \dfrac{p}{\omega_0}\right)}{\left(1 + \dfrac{p}{\omega_1}\right)\left(1 + \dfrac{p}{\omega_2}\right)}}$$

■ Traçons le diagramme asymptotique de $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ en fonction de $\log\omega$ dans le cadre des hypothèses suivantes :

• $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, qui se traduit par :

$$R_2C_2 < \left\{ R_2C_2\left(\frac{1 + \dfrac{C_1}{C_2}}{1 + \dfrac{R_2}{R_1}}\right) = R_1C_1\left(\frac{1 + \dfrac{C_2}{C_1}}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}\right) \right\} < R_1C_1,$$

ce qui est tout à fait compatible puisque la première et la deuxième inégalités sont vérifiées dès que $\dfrac{C_1}{C_2} > \dfrac{R_2}{R_1}$ (resp. $\dfrac{C_2}{C_1} < \dfrac{R_1}{R_2}$), c'est-à-dire pour $R_1C_1 > R_2C_2$.

• Supposons même que $\omega_1 \ll \omega_0 \ll \omega_2$.

Copyrighted material

Ainsi pour $R_1 = 100\,k\Omega$, $C_1 = 100\,nF$, $R_2 = 10\,k\Omega$ et $C_2 = 10\,nF$ (valeurs numériques données en fin d'énoncé), on aurait :

$$\omega_1 = 100\,s^{-1},\ \omega_0 = 10^3\,s^{-1},\ \omega_2 = 10^4\,s^{-1}.$$

Réécrivons la fonction de transfert sous la forme : $\underline{H} = H_0\underline{H}_{(1)}\underline{H}_{(2)}\underline{H}_{(3)}$

avec $\underline{H}_{(1)} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$, $\underline{H}_{(2)} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}}$ et $\underline{H}_{(3)} = 1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

■ **Analyse qualitative :**

• $\omega \ll \omega_1$: $\underline{H}_{(1)} \sim 1$; $\underline{H}_{(2)} \sim 1$; $\underline{H}_{(3)} \sim 1$ et $\underline{H} \sim H_0$

et $G_{dB})_{asymptotique} = 20\log|H_0| = 20\log\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right)$.

• $\omega \ll \omega_0$ (et pas nécessairement petit devant ω_1) :

$$\underline{H}_{(3)} \sim 1\ ;\quad \underline{H}_{(2)} \sim 1 \quad \text{et} \quad \underline{H} \sim \frac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$$

soit pour $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_0$, $\underline{H}_{(2)} \sim 1$; $\underline{H}_{(1)} \sim -j\dfrac{\omega_1}{\omega}$ et $\underline{H}_{(3)} \sim 1$.

D'où $\underline{H} \sim -jH_0\dfrac{\omega_1}{\omega}$ et $(G_{dB})_{asymptotique} \sim 20\log|H_0| - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)$. Il s'agit d'une droite de pente –20 dB par décade.

• $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_2$: $\underline{H}_{(1)} \sim -j\dfrac{\omega_1}{\omega}$, $\underline{H}_{(3)} \sim j\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_{(2)} \sim 1$

d'où $\underline{H} \sim H_0\dfrac{\omega_1}{\omega_0}$ soit $(G_{dB})_{asymptotique} \sim 20\log\left(|H_0|\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right)$.

On reconnaît $(G_1)_{dB} = 20\log\left(\left|H_0\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right|\right)$

$$\text{soit } (G_1)_{dB} = 20\log\left(\frac{R_1+R_2}{R}\right) + \underbrace{20\log\left(\frac{1+\dfrac{C_2}{C_1}}{1+\dfrac{R_1}{R_2}}\right)}_{<0 \text{ car } \frac{C_2}{C_1} < \frac{R_1}{R_2}} = \boxed{20\log\left[\frac{R_2}{R}\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)\right] = (G_1)_{dB}}$$

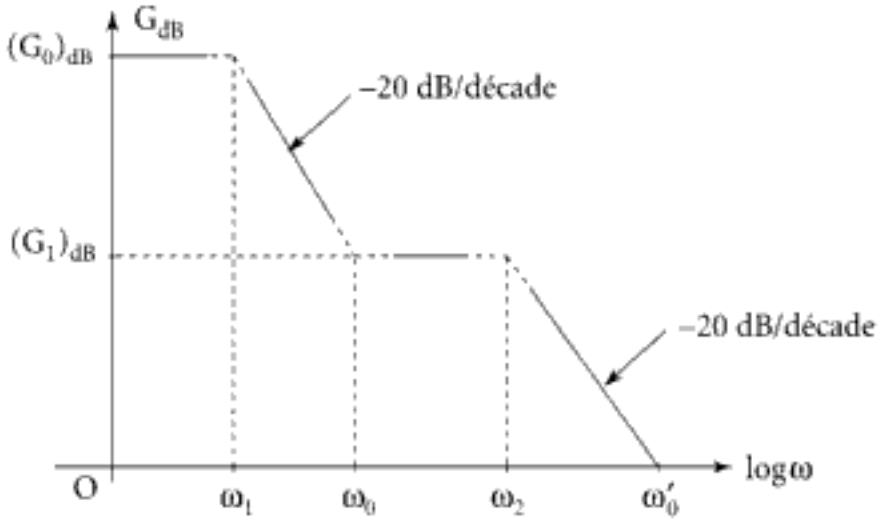
• Et pour $\omega \gg \omega_0$ (sans pour autant que $\omega \ll \omega_2$) : $\underline{H} \sim H_0\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\dfrac{1}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$.

De sorte que, pour $\omega \gg \omega_2$, on obtient :

$$\underline{H} \sim -jH_0\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0\omega} \quad \text{soit} \quad (G_{dB})_{asymptotique} \sim 20\log\left(|H_0|\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0}\right) - 20\log\omega.$$

Copyrighted material

Tous ces résultats se retrouvent dans le **diagramme asymptotique** représenté ci-dessous :



La pulsation ω'_0 est définie pour $\omega'_0 \gg \omega_2$ par :

$$0 \# 20\log\left(|H_0|\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{\omega_2}{\omega'_0}\right) \quad \left(\underline{H}_{(2)} \sim -j\frac{\omega_2}{\omega}\right) \quad \text{soit} \quad |H_0|\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{\omega_2}{\omega'_0} \# 1.$$

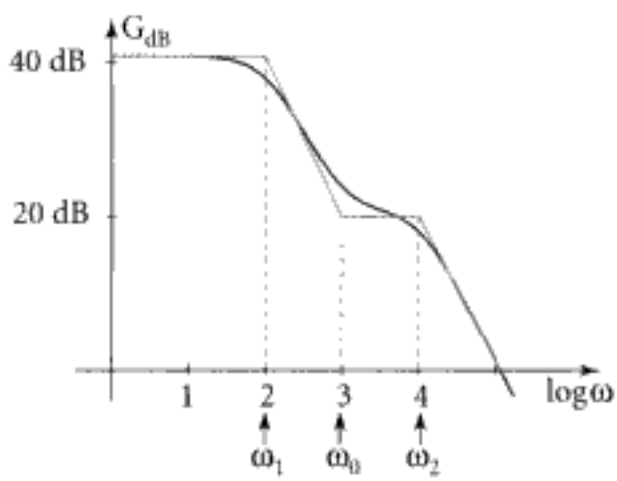
Pour les valeurs de l'énoncé, nous obtenons :

$$\omega_1 = 100\ s^{-1}\ ; \quad \omega_2 = 10^4\ s^{-1}\ ; \quad \omega_0 = 10^3\ s^{-1} \quad \text{et} \quad |H_0| = 110.$$

D'où $\quad (G_0)_{dB} = 20\log|H_0| = 40{,}8\ dB\ ;\ (G_1)_{dB} = 20\log\left(|H_0|\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = 20{,}8\ dB$

$$\omega'_0 \# |H_0|\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_0} \# 11 \cdot 10^4\ s^{-1}.$$

Nous donnons à titre de comparaison, et pour les mêmes valeurs des résistances et des capacités, la courbe $G_{dB} = f(\log\omega)$ tracée à l'ordinateur.



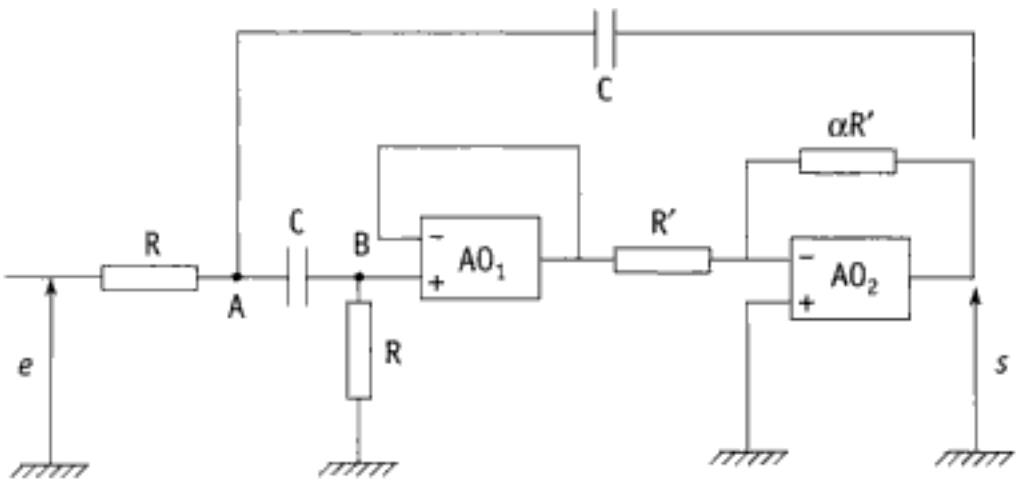
Commentaire

On a : $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ avec $d°(N(p)) = 1$ et $d°(D(p)) = 2$. De plus, tous les coefficients de $D(p)$ sont de même signe, ce qui assure ici la stabilité d'un tel montage.

Copyrighted material

102 Filtre passe-bande à deux A.O.

On considère le montage représenté ci-dessous :



Les A.O. sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. α est un coefficient réel strictement positif.

1. Déterminer, en régime sinusoïdal établi, la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

Vérifier sa compatibilité avec le comportement basse fréquence (BF) puis haute fréquence (HF) du circuit.

2. Tracer les diagrammes de Bode.

1. Ce qu'il faut savoir

- Fonction de transfert complexe.
- Filtres, et en particulier filtre passe-bande d'ordre deux.
- Représentation de Bode (diagrammes de gain et de phase).

2. Ce qu'il faut comprendre

Le système est supposé stable et fonctionne en régime linéaire. À une excitation sinusoïdale $e(t) = E_0\cos\omega t$, correspond une réponse sinusoïdale de régime forcé $s(t) = H(\omega)E_0\cos(\omega t + \varphi(\omega))$. La fonction de transfert complexe est représentée par : $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)\exp(j\varphi(\omega))$.

On mettra en évidence le rôle de chaque amplificateur opérationnel (suiveur pour l'AO_1 et montage inverseur pour l'AO_2), et on traduira la loi des nœuds en A et en B.

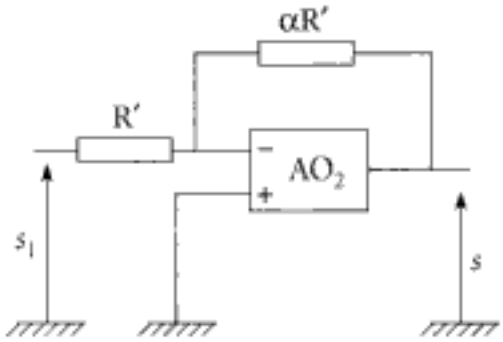
3. Solution

1. On se place dans le cadre d'un fonctionnement linéaire du système et donc des A.O.

Copyrighted material

■ Le montage représenté sur la figure ci-contre est un inverseur pour lequel :

$$\frac{s}{s_1} = -\frac{\alpha R'}{R'} = -\alpha \quad (1)$$



De plus, le premier amplificateur opérationnel est monté en suiveur. On a donc :

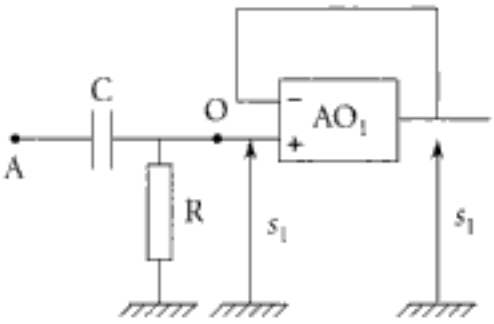
$$(v_+)_1 = s_1 .$$

Écrivons que le même courant traverse la capacité C et la résistance R (puisque $i_+ = 0$) :

$$jC\omega(\underline{v_A} - \underline{s_1}) = \frac{1}{R}(\underline{s_1} - 0).$$

Soit :

$$jRC\omega\underline{v_A} = s_1(1 + jRC\omega) \quad (2)$$

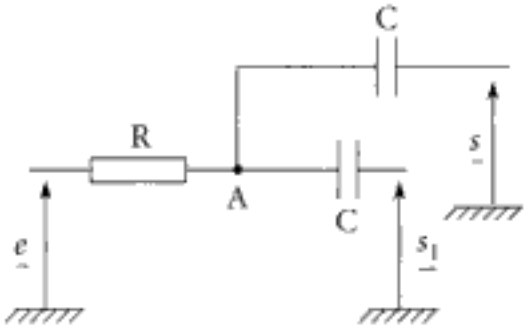


Il reste à appliquer le théorème de Millman (loi des nœuds) en A :

$$\underline{v_A} = \frac{\frac{1}{R}\underline{e} + jC\omega(s_1 + \underline{s})}{\frac{1}{R} + 2jC\omega}.$$

D'où :

$$\underline{v_A}(1 + 2jRC\omega) = \underline{e} + jRC\omega(\underline{s_1} + \underline{s}) \quad (3)$$



Éliminons $\underline{s_1}$ et $\underline{v_A}$ à l'aide des relations (1), (2) et (3) :

$$\underline{e} + jRC\omega\,\underline{s}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = (1 + 2jRC\omega)\frac{1}{jRC\omega}(1 + jRC\omega)\left(-\frac{\underline{s}}{\alpha}\right).$$

Multiplions par $\alpha RC\omega$, nous obtenons :

$$j\alpha RC\omega\,\underline{e} + (\alpha - 1)(-R^2C^2\omega^2)\underline{s} = -(1 + jRC\omega)(1 + 2jRC\omega)\underline{s}.$$

Regroupons les termes :

$$\underline{s}[(1 + jRC\omega)(1 + 2jRC\omega) + (\alpha - 1)(-R^2C^2\omega^2)] = -j\alpha RC\omega\,\underline{e}$$

$$\underline{s}[1 + 3jRC\omega - (\alpha + 1)R^2C^2\omega^2] = -j\alpha RC\omega\,\underline{e}.$$

D'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-j\alpha RC\omega}{1 + 3jRC\omega - (1 + \alpha)R^2C^2\omega^2}.$$

Expression que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{-\alpha}{3 + \frac{1}{jRC\omega} + j(1 + \alpha)RC\omega} = \frac{-\frac{\alpha}{3}}{1 + \frac{1}{3}j\left[(1 + \alpha)RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right]}.$$

Copyrighted material

Le crochet s'annule pour une pulsation ω_0 telle que :

$$(1+\alpha)R^2C^2\omega^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}\frac{1}{RC}}$$

$$(1+\alpha)RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = \sqrt{1+\alpha}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Finalement, nous avons :

$$(1) \quad \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = -\dfrac{\alpha}{3} \\ Q = \dfrac{1}{3}\sqrt{1+\alpha}. \end{cases}$$

Soit encore $\quad H(p) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$, ou avec $\dfrac{1}{Q} = 2\beta$:

$$H(p) = H_0 \frac{2\beta\left(\frac{p}{\omega_0}\right)}{1 + 2\beta\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad (2)$$

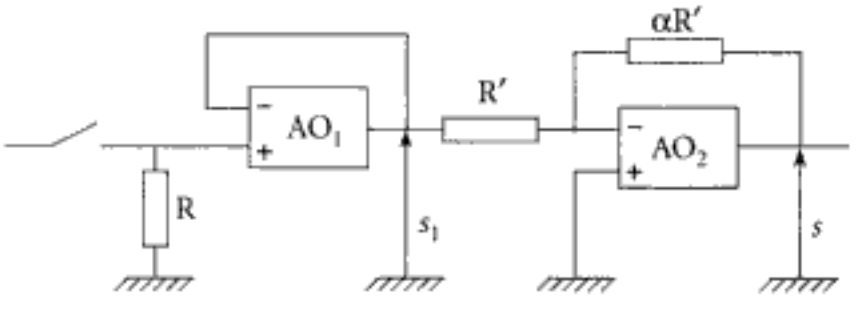
Commentaire

- Il s'agit d'un **filtre passe-bande inverseur** (puisque $H_0 < 0$), centré sur la pulsation ω_0 et de facteur de qualité Q (la bande passante est donnée par $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$).
- H_0, Q et ω_0 dépendent de α, ce qui limite l'intérêt d'un tel filtre…

■ Étudions le comportement BF et HF :

• En BF et à la limite, les condensateurs sont équivalents à des coupe-circuit. D'où :

$$s_1 = 0 \quad \text{et} \quad s = -\alpha s_1 = 0 ; \quad \underline{H} \to 0 \text{ quand } \omega \to 0.$$



• En HF et à la limite, les condensateurs deviennent des court-circuits.

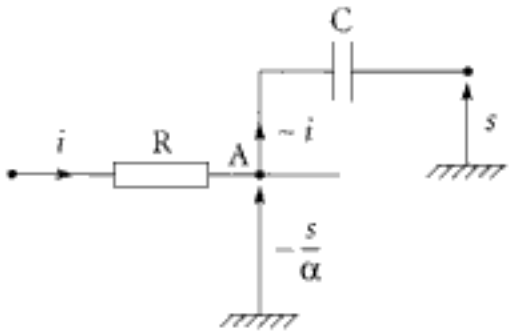
On a toujours $s_1 = -\dfrac{s}{\alpha}$ et maintenant :

$$\underline{v_A} \sim \underline{v_{+1}} = \underline{s_1} = -\frac{\underline{s}}{\alpha} \quad \left(\text{en effet, on a } jC\omega(\underline{v_A} - \underline{v_{+1}}) = \frac{\underline{v_{+1}}}{R} = -\frac{\underline{s}}{\alpha R}\right.,$$

et à la limite où $\omega \to \infty$, il vient $\underline{v_A} - \underline{v_{+1}} \to 0$ la tension s restant finie).

Copyrighted material

Considérons que le courant i passe quasi intégralement dans la branche supérieure $\left(\frac{1}{C\omega} \ll R\right)$: $\frac{1}{R}\left(\underline{e} + \frac{\underline{s}}{\alpha}\right) = jC\omega\left(-\frac{\underline{s}}{\alpha} - \underline{s}\right)$.



Or $RC\omega \gg 1$, d'où :

$$\underline{e} \sim -jRC\omega\,\frac{1+\alpha}{\alpha}\,\underline{s}$$

et $\underline{H} \sim \dfrac{-\alpha}{jRC\omega(1+\alpha)}$, comme il se doit.

2. Traçons les diagrammes de Bode :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = f\left[\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right] \\ \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = g\left[\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right]. \end{cases}$$

■ Étude de G_{dB} :

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\left[\frac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right]$$

dont le **comportement asymptotique** est donné par :

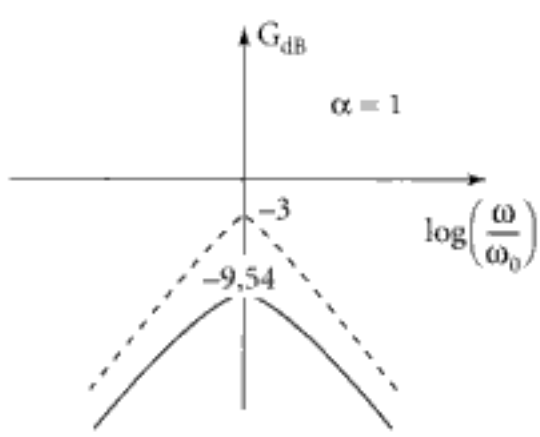
$$\omega \ll \omega_0 : \quad G_{dB} \sim 20\log\frac{|H_0|}{Q} + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad (3)$$

$$\omega \gg \omega_0 : \quad G_{dB} \sim 20\log\frac{|H_0|}{Q} - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad (4)$$

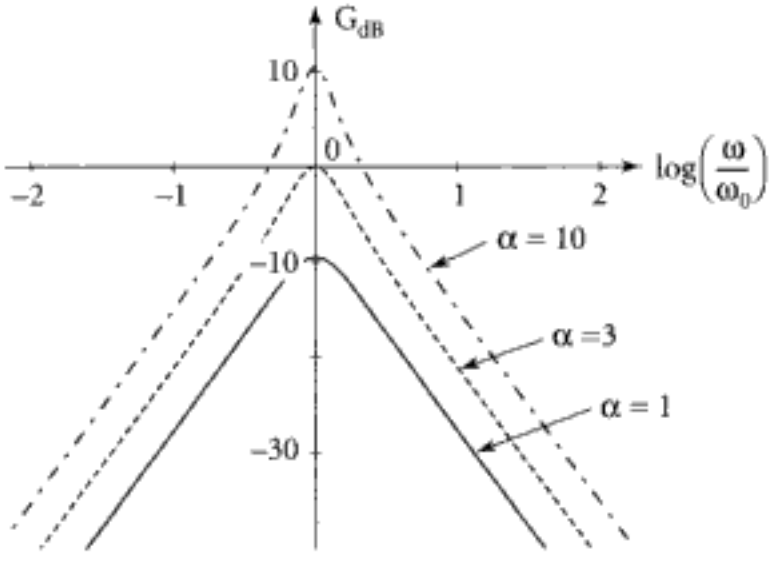
$$(\omega = \omega_0 : \quad G_{dB} \sim 20\log|H_0|\,).$$

(3) (respectivement (4)) correspond à une droite de pente 20 dB par décade (resp. –20 dB par décade). D'où les différentes courbes selon les valeurs du paramètre α :

α	1	3	10
H_0	$-\frac{1}{3}$	–1	$-\frac{10}{3}$
$(\lvert H_0\rvert)_{dB}$	–9,54	0	10,5
Q	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$
$\left(\frac{\lvert H_0\rvert}{Q}\right)_{dB}$	–3	3,5	9,6



Copyrighted material

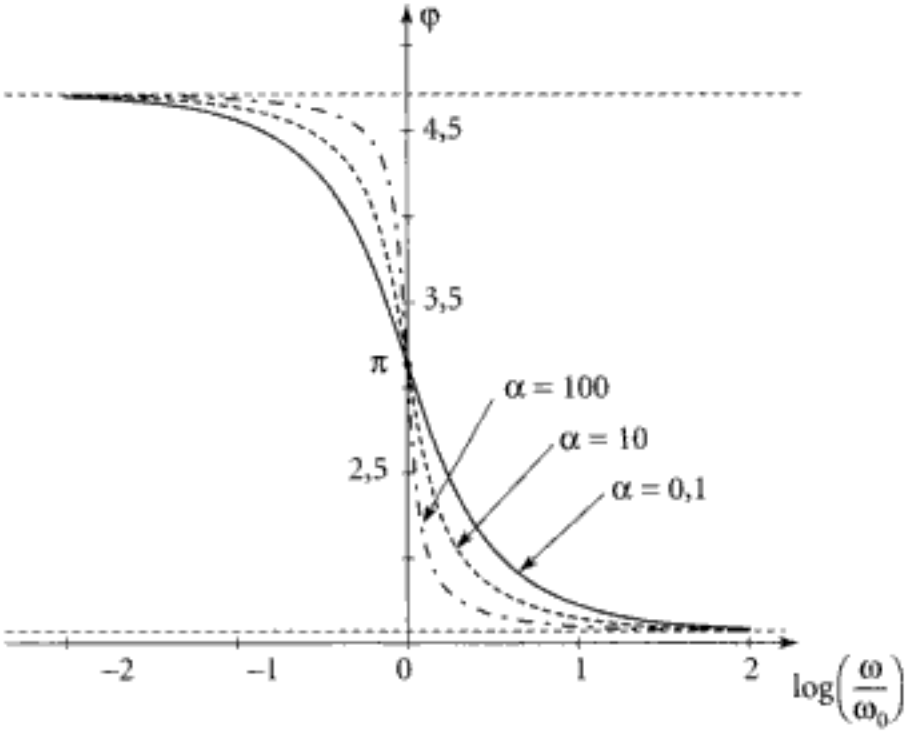


■ Étude de $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = \arg\left[\frac{H_0}{1 + jQ\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right] \quad \text{où} \quad H_0 = -\frac{1}{k} < 0$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left[-1 + jQ\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \text{ d'où } \tan\varphi = Q\cdot\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{ avec } \cos\varphi < 0.$$

Ainsi quand ω varie de 0 à « ∞ », on peut prendre φ décroissant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, d'où les graphes :



Copyrighted material

Commentaire

• Dans un passe-bande d'ordre deux ($H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = H_0 \cdot \frac{2\beta\frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\beta\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$,

soit $d^\circ(D(p)) = 2$, les pentes des asymptotes sont de ±20 dB par décade et non pas de + (resp. –) 40 dB par décade comme c'est le cas pour un passe-haut (resp. passe-bas) du second ordre.

• On a également : $\varphi(\omega \to \infty) - \varphi(\omega = 0) = -\pi$.

• On peut vérifier aisément que la bande passante $\Delta\omega$ à –3 dB est donnée par :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Plus Q est grand, plus le filtre est sélectif. Cependant si on note τ le temps caractéristique nécessaire à l'établissement du régime sinusoïdal forcé, on a :

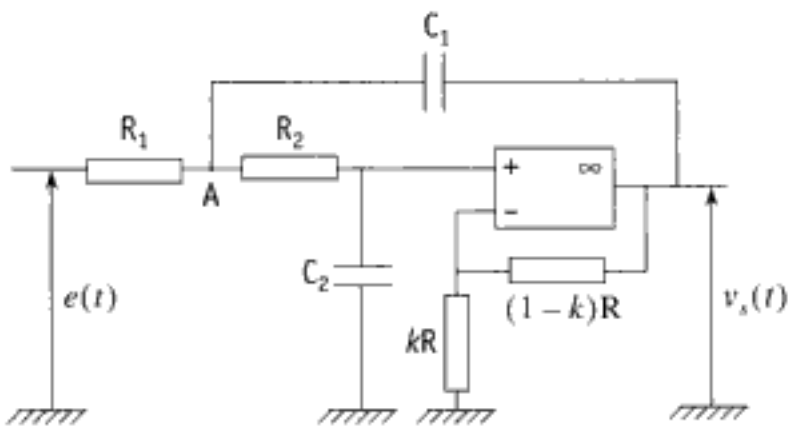
$$\Delta\omega \cdot \tau \sim 1.$$

lié à l'analyse fréquentielle — lié à l'analyse temporelle

Plus le filtre est sélectif, plus le temps nécessaire à l'amortissement du régime libre est important…

103 Filtre du type Butterworth

Soit le montage représenté ci-dessous.



L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. On a : $0 < k < 1$.

On posera : $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$; $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$; $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Copyrighted material

1. Dans l'hypothèse de la stabilité d'un tel montage et d'un fonctionnement linéaire, déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{v_s}}{\underline{e}}$.

2. Montrer qu'il existe une valeur critique k_c de k telle que le système est instable pour $0 < k < k_c$ et stable pour $k_c < k < 1$.

3. On choisit $R_2 = R_1$ et $C_2 = 2C_1$:

a. Tracer en fonction de k $(k_c < k < 1)$ les diagrammes de Bode donnant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ en fonction de $\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.

b. Quelle est, dans ces conditions, la réponse du système à un échelon de tension d'amplitude E ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Fonction de transfert ($\underline{H}(j\omega)$ ou $H(p)$).
- Problèmes de stabilité.
- Filtres.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Le système étant supposé stable, on cherche la réponse $v_s(t) = V_s\cos(\omega t + \varphi)$ de régime forcé à une excitation sinusoïdale $(e(t) = E\cos\omega t)$, de pulsation ω.

2. Le régime sinusoïdal forcé décrit au **1.** n'est atteint que si le régime libre tend vers zéro (ce sera justement le cas pour $k > k_c$).

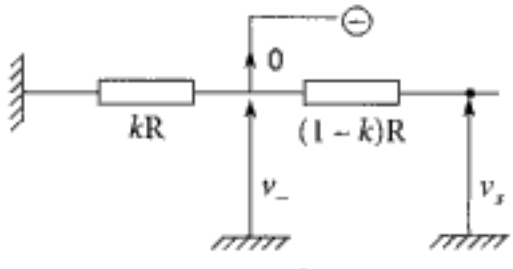
3. La condition $k > k_c$ est réalisée, le système est stable. Il constitue alors un filtre passe-bas du second ordre. Les questions **3. a.** et **3. b.** mettent en relation les réponses fréquentielle et temporelle d'un tel circuit.

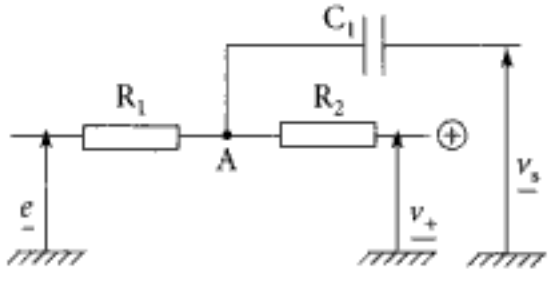
3. Solution

1. Le courant i_- étant nul, nous avons $v_- = \dfrac{kR}{kR + (1-k)R}v_s = kv_s$ (pont diviseur de tension).

Notons $\underline{V_A}$ le potentiel complexe, au nœud A, en régime sinusoïdal. Appliquons le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V_A} = \frac{\dfrac{E}{R_1} + jC_1\omega\underline{V_s} + \dfrac{\underline{V_+}}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + jC_1\omega} \quad (1)$$





Copyrighted material

De plus, le même courant traverse R_2 et C_2 ($i_+ = 0$), d'où :

$$\frac{1}{R_2}(\underline{V}_A - \underline{V}_+) = jC_2\omega\underline{V}_+ \quad \text{soit} \quad \underline{V}_A = \underline{V}_+(1 + jR_2C_2\omega) \quad (2)$$

Enfin, l'amplificateur opérationnel fonctionnant dans cette étude en régime linéaire, il impose :

$$\underline{V}_+ = \underline{V}_- = k\underline{V}_s \quad (3)$$

Éliminons $\underline{V}_A$ entre les équations (1) et (2) et utilisons (3) :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC_1\omega\right)(1 + jR_2C_2\omega)k\underline{V}_s = \frac{\underline{E}}{R_1} + jC_1\omega\underline{V}_s + \frac{1}{R_2}k\underline{V}_s$$

soit encore :

$$\left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1C_1\omega\right)(1 + jR_2C_2\omega) - j\frac{R_1C_1\omega}{k} - \frac{R_1}{R_2}\right]\underline{V}_s = \frac{\underline{E}}{k}$$

$$\left[1 + j\omega\left[R_1C_1\left(1 - \frac{1}{k}\right) + R_2C_2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\right] + (j\omega)^2R_1C_1R_2C_2\right]\underline{V}_s = \frac{\underline{E}}{k}.$$

D'où $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + 2j\alpha\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ou $\boxed{H(p) = \dfrac{H_0}{1 + 2\alpha p\dfrac{p}{\omega_0} - \dfrac{p^2}{\omega_0^2}} = \dfrac{N(p)}{D(p)}}$

avec $H_0 = \dfrac{1}{k}$; $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}$ et $\dfrac{2\alpha}{\omega_0} = R_1C_1\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) + R_2C_2\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)$.

2. En régime quelconque, l'équation différentielle en $v_s(t)$ est alors donnée par :

$$v_s + \frac{2\alpha}{\omega_0}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2v_s}{dt^2} = H_0e(t)$$

et la stabilité est liée à l'étude des solutions de l'équation sans second membre dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\alpha\frac{p}{\omega_0} + 1 = 0 \quad \text{(recherche de solutions en } e^{pt}\text{)}.$$

La stabilité est assurée dès que $R_e(p_i) < 0$, c'est-à-dire dès que les zéros du polynôme $D(p)$ sont à partir réelle négative, ce qui correspond à un amortissement des signaux transitoires.

Or $\begin{cases} p_1p_2 = \omega_0^2 > 0 \\ p_1 + p_2 = -2\alpha\omega_0. \end{cases}$

Dans tous les cas (racines réelles ou complexes conjuguées), cela impose :

$$p_1 + p_2 < 0 \text{ c'est-à-dire } \alpha > 0.$$

Il faut donc que $R_1C_1\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) + R_2C_2\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right) > 0$

Copyrighted material

soit encore $\boxed{\frac{1}{k} < \left\{1 + \frac{R_2C_2}{R_1C_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{1}{k_c}\right\}}$

Le système est stable pour $k_c < k < 1$ et instable pour $0 < k < k_c$.

Commentaire

Dans le cas de la stabilité ($k > k_c$), le système proposé est du type filtre passe-bas du second ordre (*cf.* degré de $D(p)$) de la forme générale :

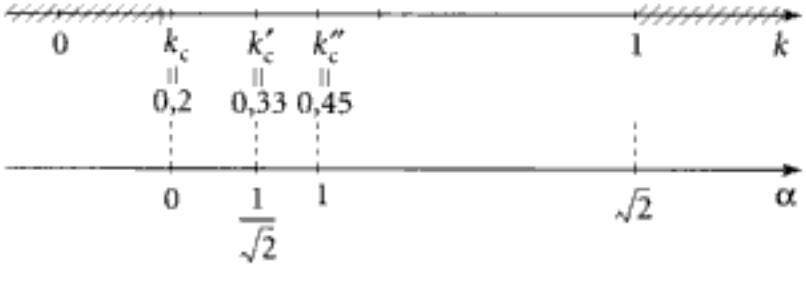
$$H(p) = \frac{H_0}{1 + 2\alpha\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}.$$

ω_0 est la « pulsation propre » du système dont le facteur de qualité est donné par $Q = \frac{1}{2\alpha}$.

3. a. Pour $R_2 = R_1$ et $C_2 = 2C_1$, il vient $\frac{1}{k_c} = 1 + 2 \times 2 = 5$ soit $\boxed{k_c = 0{,}2}$ de sorte que le système est stable dès que $0{,}2 < k < 1$.

$\frac{2\alpha}{\omega_0}$ devient $\frac{2\alpha}{\omega_0} = R_1C_1\left(\frac{1}{k_c} - \frac{1}{k}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}}\left(\frac{1}{k_c} - \frac{1}{k}\right)$

soit encore : $\boxed{\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(5 - \frac{1}{k}\right)}$



■ **Valeurs particulières :**

• Notons que nous avons :

$$|\underline{H}|^2 = \frac{H_0^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\alpha^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{d'où} \quad |\underline{H}|^2 = \frac{H_0^2}{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}(4\alpha^2 - 2)}$$

de sorte que $|\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$ pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\alpha > 0$ sinon le système est instable).

Copyrighted material

À cette valeur de α, correspond la valeur k'_c de k définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(5 - \frac{1}{k'_c}\right) \Rightarrow k'_c = \frac{1}{3}.$$

Dans ce cas, le filtre présente une pulsation de coupure à -3 dB égale à ω_0 (filtre de Butterworth…)

• Notons également que les racines du trinôme du second degré $\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\alpha\frac{p}{\omega_0} + 1$ sont réelles (et négatives) pour $\Delta' \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $\alpha^2 - 1 \geqslant 0$, et donc pour $\alpha \geqslant 1$.

Soit $p_1 = -\omega'_1$ et $p_2 = -\omega'_2$ ces racines, on peut alors écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_2}\right)} \quad \text{avec} \quad \omega'_1\,\omega'_2 = \omega_0^2.$$

La valeur de k correspondant à $\alpha = 1$ est k''_c telle que :

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(5 - \frac{1}{k''_c}\right) \Rightarrow \boxed{k''_c = \frac{1}{5 - 2\sqrt{2}} \# 0{,}46}$$

• Examinons enfin les comportements asymptotiques :

– pour $\omega \to 0$, $G_{dB} \to 20\log H_0 = -20\log k$;

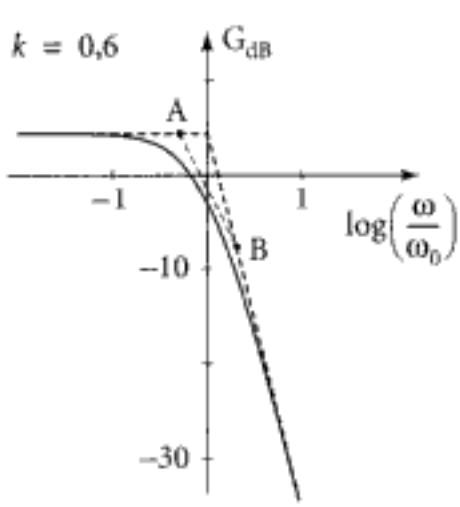
– pour $\omega \to +\infty$ (pratiquement $\omega \gg \omega_0$), $G_{dB} \to 20\log\left(H_0\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

$$= -20\log k - 40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

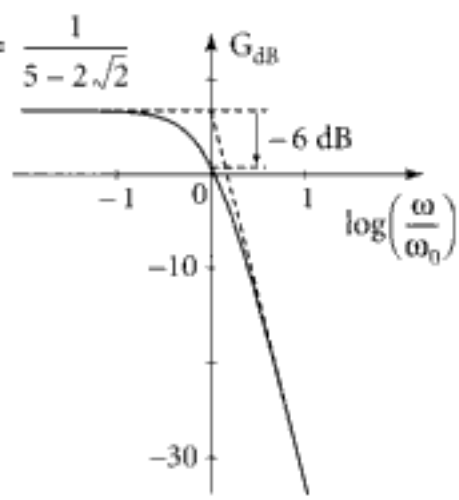
Il s'agit d'une droite de pente -40 dB/décade.

■ **D'où les différents diagrammes de Bode** (ici $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$) :

1) $k''_c \leqslant k < 1$ (soit $1 \leqslant \alpha < \sqrt{2}$) :



$(-20\log k = 4{,}44)$



$(-20\log k''_c = 6{,}74)$

Copyrighted material

Commentaires

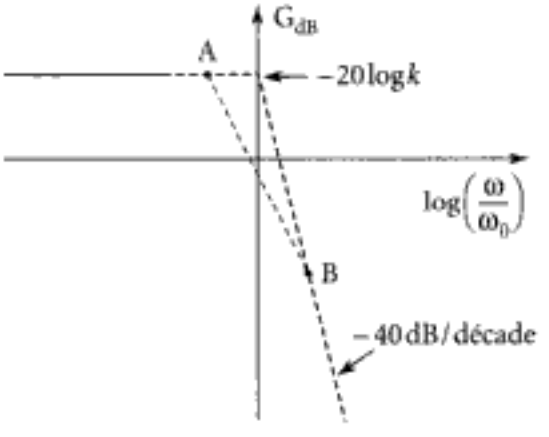
On a représenté avec des pointillés les diagrammes asymptotiques :

- $\omega \to 0$ $\quad G_{dB} \sim -20\log k$;
- $\omega \to$ « ∞ » $\quad G_{dB} \sim -20\log k - 40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$;
- $\omega'_1 \ll \omega \ll \omega'_2$ (dans la mesure où cette double inégalité a un sens…) :

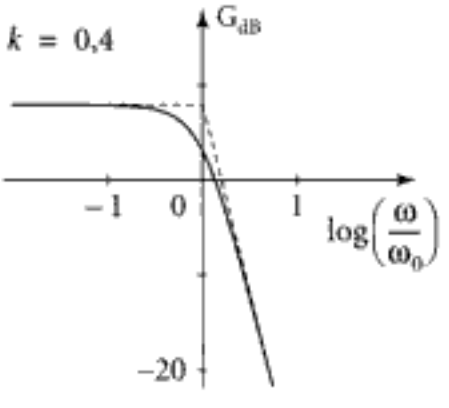
$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega'_1}\right)} \Rightarrow (G_{dB})_{asympt} = -20\log k - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega'_1}\right).$$

- Point A : $G_{dB}(A) = -20\log k$, soit pour l'asymptote $\omega_A = \omega'_1$.
- Point B tel que

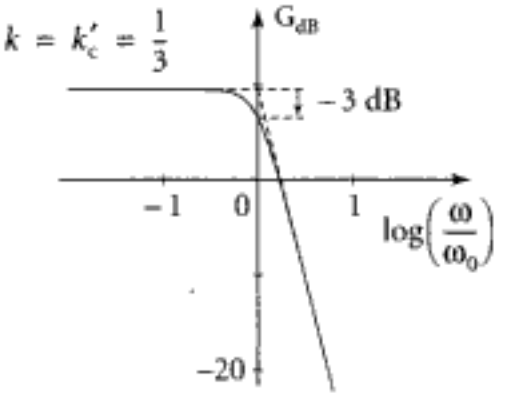
$$-40\log\left(\frac{\omega_B}{\omega_0}\right) = -20\log\left(\frac{\omega_B}{\omega'_1}\right), \text{ soit } \left(\frac{\omega_B}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{\omega_B}{\omega'_1}\right) \Rightarrow \omega_B = \frac{\omega_0^2}{\omega'_1} = \omega_2.$$



2) $k'_c \leqslant k < k''_c$ (soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 1$) :



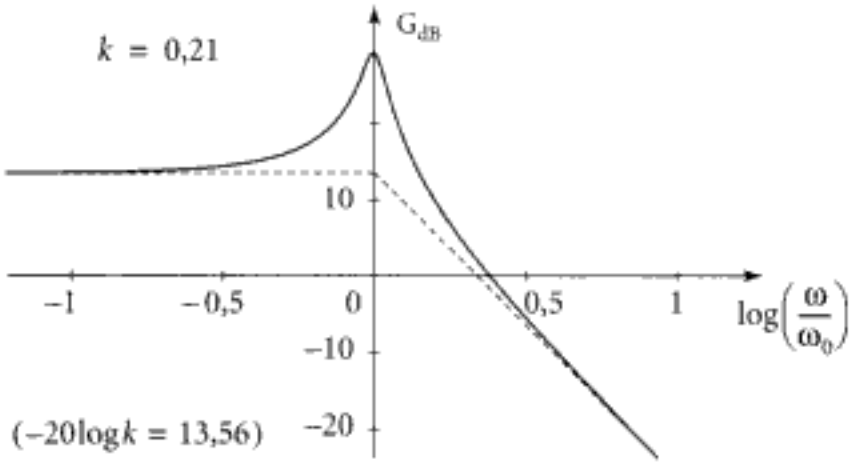
$(-20\log k = 7{,}96)$



$(-20\log k'_c = 9{,}54)$

Copyrighted material

3) $k_c < k < k'_c$ (soit $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$) :



Commentaire

Il apparait un phénomène de résonance pour $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (et $\alpha > 0$) soit encore, avec $Q = \frac{1}{2\alpha}$, pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, résultat que l'on peut retrouver en étudiant rapidement la fonction $|\underline{H}|^2$.

On a : $|\underline{H}|^2 = \dfrac{H_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + (4\alpha^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \dfrac{H_0^2}{T(X)}$ où $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

$T(X) = 1 + (4\alpha^2 - 2)X + X^2$. Or $\frac{dT}{dX} = 2X + (4\alpha^2 - 2) = 0$ pour $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2\alpha^2$.

Cette valeur existe pour $1 - 2\alpha^2 > 0$, c'est-à-dire $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ comme il se doit.

Ce maximum se produit pour une pulsation ω_M telle que :

$$\omega_M = \omega_0\sqrt{1 - 2\alpha^2} \Rightarrow \omega_M = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Le point est d'autant plus marqué que Q est grand (alors $\omega_M \sim \omega_0$ ...).

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + 2\alpha\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ d'où } \left(1 + 2\alpha\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)S(p) = H_0E(p)$$

et l'équation différentielle : $\dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{d^2v_s}{dt^2} + \dfrac{2\alpha}{\omega_0}\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = H_0e(t)$

soit pour $t > 0$: $\boxed{\dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{d^2v_s}{dt^2} + \dfrac{2\alpha}{\omega_0}\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = H_0E_0}$ (4)

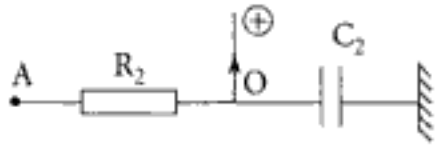
Et en supposant les condensateurs initialement non chargés :

• $v_+(0^+) = 0 \Rightarrow v_-(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{v_s(0^+) = 0}$ (5)

Copyrighted material

• $v_A(0^+) - v_s(0^+) = 0 \Rightarrow v_A(0^+) = 0.$

Or $\dfrac{v_A(0^+) - v_+(0^+)}{R_2} = C_2 \dfrac{dv_+}{dt}\Big)_{0^+}$



$C_2 \dfrac{dv_-}{dt}\Big)_{0^+} = C_2 k \dfrac{dv_s}{dt}\Big)_{0^+}$ d'où $\boxed{\dfrac{dv_s}{dt}\Big)_{0^+} = 0}$ (6)

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle (4) avec les conditions initiales (5) et (6).

On a alors : $v_s(t) = \dfrac{1}{k}E_0 + u(t)$, où $\dfrac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0.$

Cherchons des solutions en $\exp(pt)$. Dès lors, p est solution de l'équation :

$$\begin{cases} p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad (7) \quad (\text{soit } D(p) = 0\ldots) \\ \Delta' = (\alpha^2 - 1)\omega_0^2. \end{cases}$$

1) $k_c'' < k < 1$ (soit $1 < \alpha < \sqrt{2}$) :

(7) admet deux racines réelles ($\alpha > 1$) négatives ($p_1 p_2 = \omega_0^2$ et $p_1 + p_2 = -2\alpha\omega_0$).

D'où avec $p_{\frac{1}{2}} = \omega_0[-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}] = -\alpha\omega_0 \pm \Omega$ où $\Omega = \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$

$$v_s(t) = \frac{1}{k}E_0 + e^{-\alpha\omega_0 t}(A\cosh\Omega t + B\sinh\Omega t)$$

$$v_s(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{1}{k}E_0 + A = 0 \quad \text{et} \quad A = -E_0\frac{1}{k}$$

$$\frac{dv_s}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow -\alpha\omega_0 A + B\Omega = 0 \quad \text{et} \quad B = -\alpha\frac{\omega_0}{\Omega}E_0\frac{1}{k}.$$

Finalement :

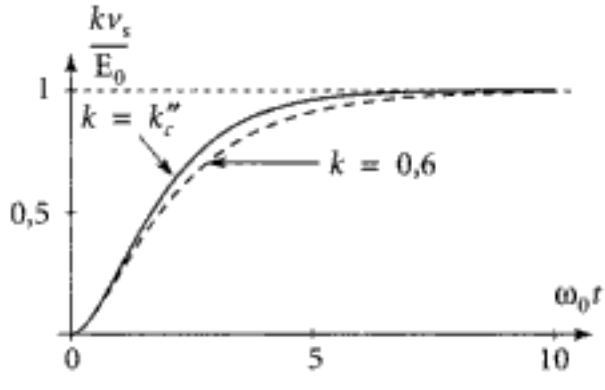
$$\boxed{v_s(t) = \frac{1}{k}E_0\left[1 - \exp(-\alpha\omega_0 t)\left\{\cosh\Omega t + \alpha\frac{\omega_0}{\Omega}\sinh\Omega t\right\}\right]} \quad (8)$$

Pour $\alpha = 1$ (soit $Q = \dfrac{1}{2}$), c'est le régime apériodique critique :

$$v_s(t) = \frac{1}{k}E_0[1 - \exp(-\omega_0 t)\{1 + \omega_0 t\}].$$

D'où les courbes :

régime apériodique (critique pour $\alpha = 1$: montée plus rapide)



Copyrighted material

2) $k'_c < k < k''_c$ (soit $\frac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 1$) :

Cette fois-ci, $\Delta' < 0$, et les deux racines p_1 et p_2 sont complexes conjuguées :

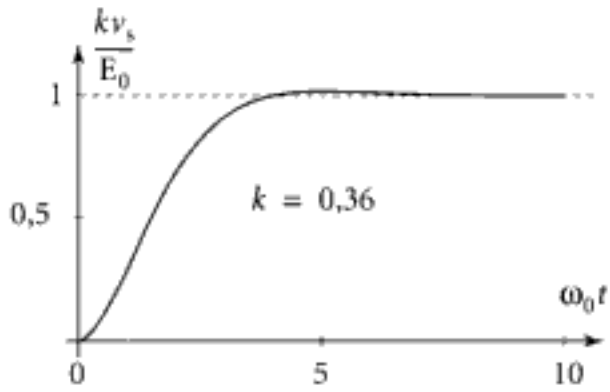
$p_{\frac{1}{2}} = -\alpha\omega_0 \pm i\Omega'$ avec ici $\Omega' = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$.

On a alors (même raisonnement qu'au 1)) :

$$\boxed{v_s(t) = \frac{1}{k}E_0\left[1 - \exp(-\alpha\omega_0 t)\left\{\cos\Omega' t + \alpha\frac{\omega_0}{\Omega'}\sin\Omega' t\right\}\right]} \quad (9)$$

C'est le régime pseudo-périodique, de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega'}$.

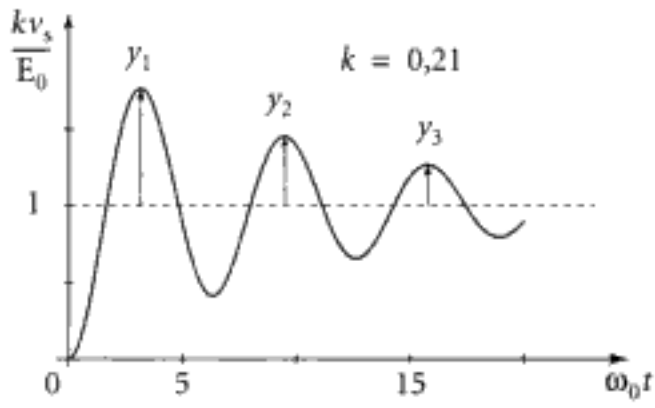
oscillations peu marquées et pseudo-période élevée



3) $k_c < k < k'_c$ (soit $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$) :

La solution est de forme identique à celle du 2).

oscillations nettes, périodiques, amorties



Commentaires

• Posons $y(t) = \frac{kv_s(t)}{E_0} - 1$. On peut montrer que l'on a :

$y_1 = \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$ (dépassement maximal par rapport à la valeur asymptotique unitaire).

• De plus $y_1 = y(t_1)$ et $y_n = y(t_1 + (n-1)T)$, soit d'après (9) :

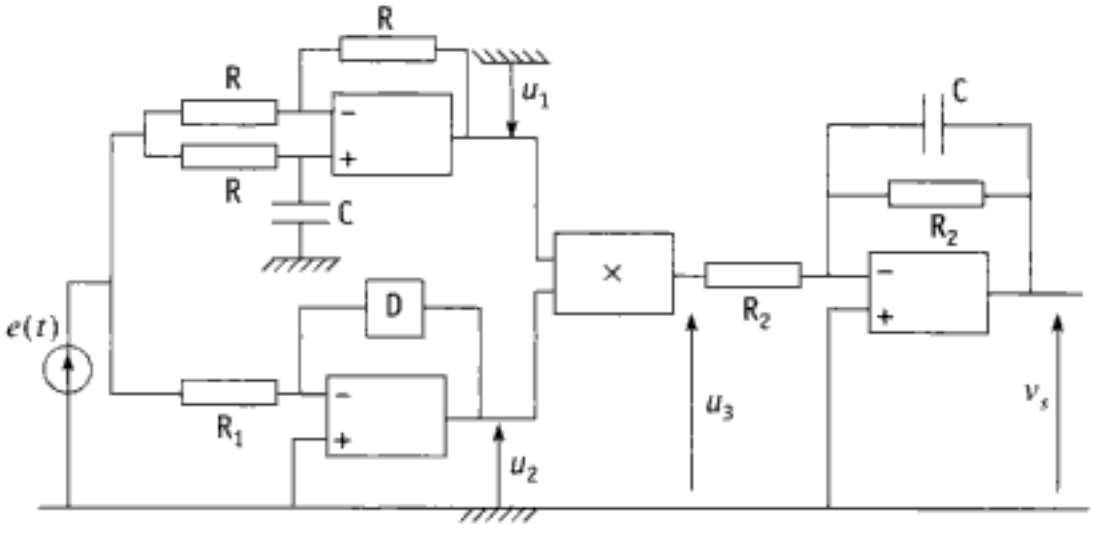
$$\frac{y_n}{y_1} = \exp[-\alpha\omega_0 T \cdot (n-1)] = \exp\left[-(n-1)\frac{\omega_0 T}{2Q}\right]$$

Copyrighted material

et pour $Q \gg 1$ (soit $\alpha \ll 1$), on a $T - T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, d'où : $\frac{y_n}{y_1} \# \exp\left[-(n-1)\frac{\pi}{Q}\right]$, résultat à partir duquel on peut atteindre expérimentalement le facteur Q… L'expérience a été faite avec $R_2 = R_1 = 4{,}7\ k\Omega$; $C_1 = 100$ nF ; $C_2 = 200$ nF ; kR et $(1-k)R$: potentiomètre de l'ordre 10 kΩ ; tension e : générateur de signaux carrés calés sur 40 Hz).

104 Une application du multiplieur

On réalise avec un multiplieur (de coefficient multiplicateur k : on a $u_3(t) = ku_1(t)u_2(t)$) et trois amplificateurs opérationnels (supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire) le montage suivant :



Ce montage fonctionne avec un dipôle linéaire passif D d'impédance complexe $\underline{Z}$. Il est alimenté par un G.B.F. qui délivre dans un premier temps une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$.

1. Déterminer, en notations complexes puis réelles, la tension u_1 d'entrée dans le multiplieur, sachant que $RC\omega = 1$.

2. Faire de même pour la seconde tension u_2 d'entrée dans le multiplieur.

3. On désire que la tension de sortie v_s du montage soit une image linéaire de la partie imaginaire $\mathrm{Im}(\underline{Z})$ de l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle D. Préciser la condition relative au produit $R_2C\omega$ pour qu'il en soit ainsi et donner alors la relation entre v_s et $\mathrm{Im}(\underline{Z})$.

4. Le dipôle D est constitué de l'association en série d'une bobine (résistance r, coefficient L d'auto-induction) et d'un condensateur de capacité C. On met en action la modulation interne du G.B.F. (« wobbulation ») : la pulsation ω délivrée par le G.B.F. varie alors en dents de scie au cours du temps avec une période τ (très grande par rapport à $\frac{2\pi}{\omega}$). Les valeurs extrêmes ω_{min} et ω_{max} de ω sont telles que $\omega_{min} < \frac{1}{\sqrt{LC}} < \omega_{max}$; la

Copyrighted material

condition relative au produit $R_2C\omega$ est supposée satisfaite ; on supposera que la condition $RC\omega = 1$ reste encore approximativement valable pour toutes les pulsations émises.

On connecte alors la tension de sortie du montage sur la voie 1 d'un oscilloscope : préciser l'allure de la courbe observée sur l'écran. On connecte ensuite sur la voie 2 la tension SWEEP OUT du G.B.F., qui est une image linéaire de la différence $(\omega - \omega_{min})$, et on passe l'oscilloscope en fonctionnement X-Y, la voie 2 passant en X : quelle est alors l'allure de la courbe observée sur l'écran ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Propriétés d'un A.O. idéal.
- Modulation interne sur un G.B.F. (« wobbulation »).

2. Ce qu'il faut comprendre

- L'obligation d'utiliser les notations complexes (et non les notations réelles) lorsqu'on cherche la tension de sortie du multiplieur alimenté par des tensions d'entrée sinusoïdales.
- L'intérêt d'utiliser un filtre passe-bas en sortie d'un multiplieur pour extraire la composante continue (valeur moyenne) de cette tension de sortie.

3. Solution

1. On s'intéresse ici à l'opérateur qui fonctionne avec $e(t)$ comme tension d'entrée et $u_1(t)$ comme tension de sortie. On peut éventuellement reconnaître en cet opérateur un passe-tout déphaseur d'ordre 1. En effet, d'après le théorème de Millman (ou la loi des nœuds en E^-), le potentiel en E^- est $v_{E^-} = \frac{1}{2}(e + u_1)$ donc v_{E^+} a la même expression. La loi des nœuds en E^+ (ou le théorème de Millman) conduit alors à l'égalité écrite avec les notations complexes :

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\underline{e} + \underline{u}_1}{2} - \underline{e}\right) + jC\omega\frac{\underline{e} + \underline{u}_1}{2} = 0. \quad \text{D'où} \quad \underline{u}_1 = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}.$$

Ici $RC\omega = 1$, donc $\underline{u}_1 = \frac{1-j}{1+j}\underline{e} = -j\underline{e}$ d'où $\boxed{\underline{u}_1 = -jE\exp(j\omega t)}$

En revenant aux notations réelles :

$$\boxed{u_1 = E\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E\sin(\omega t)}$$

2. On s'intéresse maintenant à l'opérateur qui fonctionne avec $e(t)$ comme tension d'entrée et $u_2(t)$ comme tension de sortie. La loi des nœuds en E^- (ou le théorème de Millman) donne en notations complexes :

Copyrighted material

$\frac{\underline{e}}{R_1} + \frac{\underline{u_2}}{\underline{Z}} = 0$. On en déduit : $\boxed{\underline{u_2} = -\frac{\underline{Z}}{R_1}\underline{e} = -\frac{\underline{Z}}{R_1}E\exp(j\omega t)}$

Pour repasser aux notations réelles, on peut remplacer $\underline{Z}$ par $|\underline{Z}|\exp(j(\arg\underline{Z}))$ donc :

$$\boxed{u_2 = \mathrm{Re}\left\{-\frac{|\underline{Z}|}{R_1}E\exp(j(\omega t + \arg\underline{Z}))\right\} = -\frac{|\underline{Z}|}{R_1}E\cos(\omega t + \arg\underline{Z})}$$

3. La tension de sortie du multiplieur est alors :

$$ku_1u_2 = -\frac{k|\underline{Z}|}{2R_1}E^2[\sin(2\omega t + \arg\underline{Z}) - \sin(\arg\underline{Z})].$$

En aval du multiplieur, est placé un filtre passe-bas d'ordre 1 : en effet, la loi des nœuds en E^- (ou le théorème de Millman) donne en notations complexes :

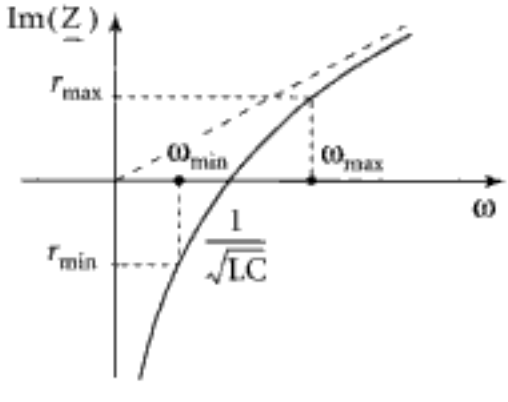
$\frac{\underline{v_e}}{R_2} + \frac{\underline{v_s}}{R_2} + jC\omega\underline{v_s} = 0 \Rightarrow \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = -\frac{1}{1 + jR_2C\omega}$ (en notant v_e la tension d'entrée de cet opérateur). Il s'agit donc bien d'un passe-bas dont la pulsation de coupure à –3 dB est égale à $\frac{1}{R_2C}$. Si l'on désire que le terme de pulsation 2ω ne soit pas transmis par le filtre, il faut que : $2\omega \gg \frac{1}{R_2C}$ et donc que $\boxed{R_2C\omega \gg \frac{1}{2}}$

Si cette condition est remplie, la tension de sortie du montage sera, en prenant en compte le changement de signe dû à la valeur –1 de la fonction de transfert du filtre en très basse fréquence :

$$\boxed{v_s = -\frac{k|\underline{Z}|}{2R_1}E^2\sin(\arg\underline{Z}) = -\frac{k}{2R_1}E^2\mathrm{Im}(\underline{Z})}$$

Dans la suite, on pose $v_s = -\alpha\mathrm{Im}(\underline{Z})$ avec $\alpha > 0$.

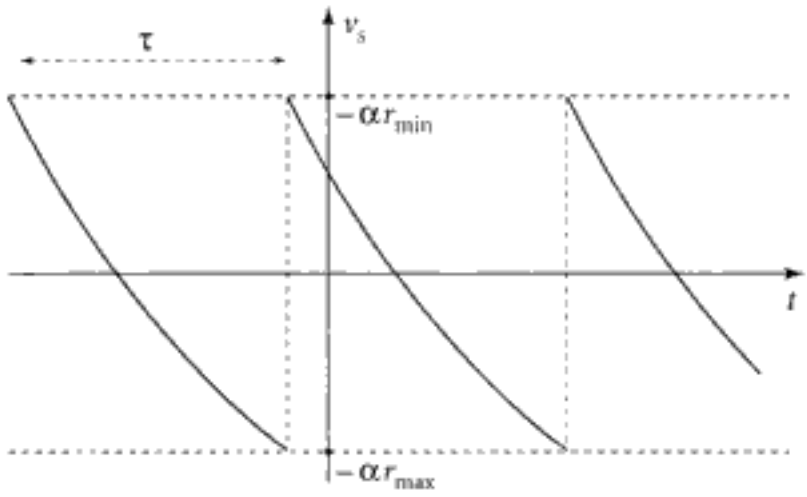
4. L'impédance du dipôle D est ici $\underline{Z} = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. La partie imaginaire est alors $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$; elle varie avec la pulsation ω de la façon suivante :



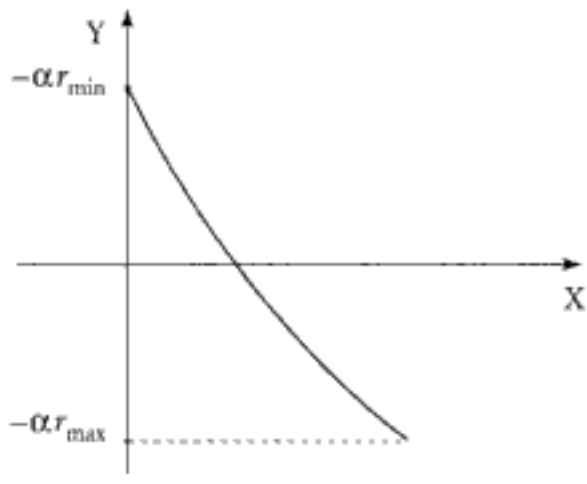
En conséquence, quand la pulsation passe de ω_{min} à ω_{max}, la partie imaginaire de $\underline{Z}$ est croissante donc la tension de sortie décroît.

Copyrighted material

En balayage normal, on observera sur l'oscilloscope une courbe ayant l'allure suivante :



En X-Y, on n'observera plus que :

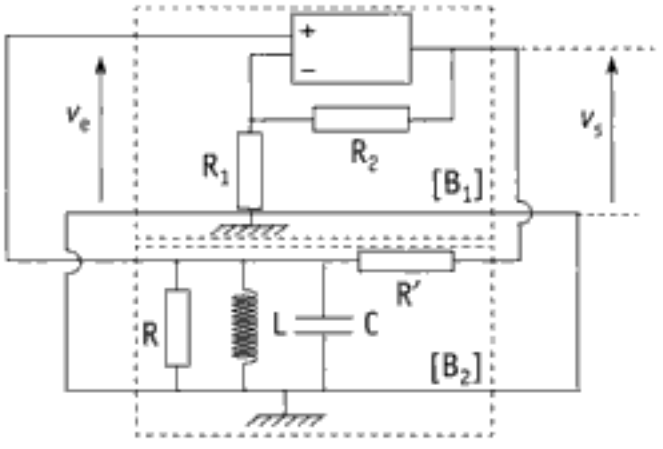


Ce montage permet donc de visualiser les variations avec la pulsation de la partie imaginaire de l'impédance d'un dipôle. Il faut cependant noter qu'en toute rigueur, le passe-tout déphaseur utilisé ne peut pas déphaser de $-\frac{\pi}{2}$ à toute fréquence.

Copyrighted material

105 Oscillateur quasi sinusoïdal

1. L'amplificateur opérationnel est idéal.



Étudier le système proposé en précisant le rôle des blocs $[B_1]$ et $[B_2]$.

On posera : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \dfrac{RR'}{R+R'}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$; $A_0 = \dfrac{R}{R+R'}$ et $G_0 = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$.

Valeurs numériques : L = 50 mH ; C = 100 nF ; R = R′ = 10 kΩ.

2. On désire que le système fonctionne en oscillateur quasi sinusoïdal.

a. Condition théorique d'oscillations : on suppose dans cette question que le circuit est le siège d'oscillations sinusoïdales de pulsation ω, et qu'il est possible d'appliquer les résultats du **1.** Donner une condition sur G_0 et A_0, et préciser la valeur de la pulsation ω pour qu'il en soit ainsi. Que peut-on conclure ?

b. Déterminer l'équation différentielle vérifiée – en régime linéaire – par la tension $v_s(t)$. En déduire la condition pour que des oscillations soient susceptibles de prendre naissance. Commenter.

c. La condition précédente étant réalisée, montrer que l'état où l'A.O. est à saturation n'est pas stable. Conclure.

3. a. On fait l'approximation que la tension aux bornes du condensateur est quasi sinusoïdale $(v_c = u = v_+ \approx a_c \cos\omega_0 t)$. Justifier succintement. Que dire du signal $v_s(t)$ sachant que $G_0 a_c > V_{sat}$?

Expliquer comment il est possible de déterminer graphiquement la valeur de $\dfrac{a_c}{V_{sat}}$, sachant que la décomposition de Fourier de $v_s(t)$ donne pour fondamental $a_1 \cos\omega_0 t$

avec :
$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{V_{sat}} = \dfrac{2}{\pi}\left[\sin\omega_0 t_1 + \dfrac{\frac{\pi}{2} - \omega_0 t_1}{\cos\omega_0 t_1}\right] \\ \text{où} \quad \cos\omega_0 t_1 = \dfrac{V_{sat}}{G_0 a_c} \quad 0 < \omega_0 t_1 < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Copyrighted material

b. Confrontation avec l'expérience :

L'expérience donne les résultats suivants : $V_{sat}^{+} = -V_{sat}^{-} = 12{,}9$ volts.

R_1(kΩ)	R_2(kΩ)	a_c(volt)	T_c
4,88	6,12	6,4	0,45 ms
4,23	6,77	7,0	0,45 ms
2,55	8,45	7,5	0,45 ms

Conclure et donner l'allure des courbes $v_c(t)$ et $v_s(t)$. On tiendra compte du fait que l'inductance, à la pulsation ω_0, présente une résistance série r évaluée à 7,5 ohm.

1. Ce qu'il faut savoir

- Oscillateurs quasi sinusoïdaux à réaction.
- Filtre passe-bande du second ordre.

2. Ce qu'il faut comprendre

2. b. Des oscillations seront susceptibles de prendre naissance si la solution à l'équation différentielle en $v_s(t)$ est divergente…

c. On supposera, par exemple, que $v_s = V_{sat}$, et on cherchera à définir comment évolue $v_e(t)$. S'il tend à repasser par zéro, à partir de valeurs positives, c'est que l'état à saturation de l'A.O. est instable. Les résultats du **2. b.** et **2. c.** expliquent alors l'existence d'oscillations auto-entretenues.

3. a. On considérera que le filtre passe-bande est suffisamment sélectif. D'autre part, le système va à saturation (alternativement $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$) : on a donc $G_0 a_c > V_{sat}$. Alors que le signal $v_+(t)$ est pratiquement sinusoïdal, on peut simplement affirmer que $v_s(t)$ est périodique (même période que $v_+(t)$). Le filtre en prélève le fondamental…

3. Solution

1. ■ $[B_1]$ correspond à un opérateur amplificateur non inverseur de gain $G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ (dans le domaine de fonctionnement linéaire) : figure 1.

$$G(p) = G_0 \quad (1)$$

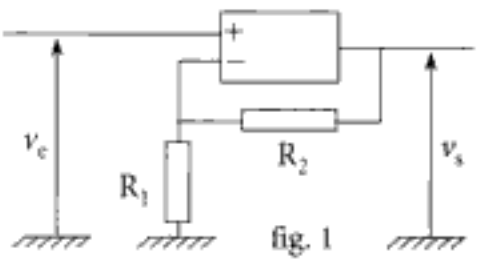


fig. 1

■ Précisons le rôle joué par $[B_2]$ (figure 2).

À cet effet, plaçons-nous en régime sinusoïdal.

Dans le cas qui nous intéresse ici, l'A.O. idéal impose un courant $i = i_+ = 0$.

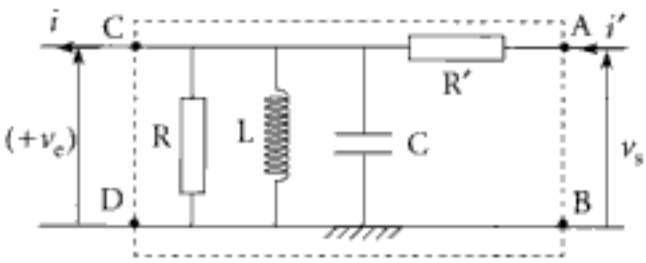


fig. 2

Copyrighted material

Nous avons donc (diviseur de tension) : $\dfrac{+\underline{v_e}}{\underline{v_s}} = \dfrac{\underline{Z'}}{\underline{Z'} + R'} = \dfrac{1}{1 + R'\underline{Y'}}$

où l'admittance $\underline{Y'}$ est donnée par :

$$\underline{Y'} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

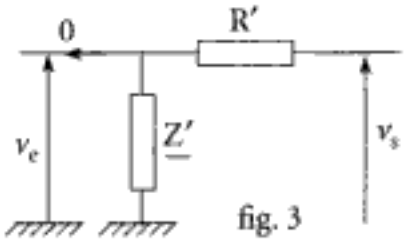


fig. 3

soit $\left(\dfrac{+\underline{v_e}}{\underline{v_s}}\right) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R'}{R} + j\left(R'C\omega - \dfrac{R'}{L\omega}\right)}$.

Posons $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \dfrac{R'R}{R + R'}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $A_0 = \dfrac{R}{R + R'}$; dès lors :

$$\frac{\underline{v_e}}{\underline{v_s}} = \frac{-A_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

L'opérateur de $[B_2]$ présente donc une transmittance $R(p)$ telle que (on a fait $j\omega \leftrightarrow p$) :

$$R(p) = \frac{V_e(p)}{V_s(p)} = -\frac{A_0}{1 + Q\left(\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{\omega_0}{p}\right)} = -A_0 \cdot \frac{2\alpha\dfrac{p}{\omega_0}}{1 + 2\alpha\dfrac{p}{\omega_0} + \left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad (2)$$

où on a posé $Q = \dfrac{1}{2\alpha}$. Il s'agit d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_0, et de facteur de qualité Q (bande passante $\Delta\omega$ telle que $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$).

A.N. : $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{50 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-7}}} \Rightarrow f'_0 = \mathbf{2{,}25\ kHz}$;

$$Q = \frac{10^4 \cdot 10^4}{10^4 + 10^4}\sqrt{\frac{10^{-7}}{50 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \mathbf{Q = 7{,}1} ; \quad \mathbf{A_0 = 0{,}5}.$$

2. a. D'après les résultats précédents (théorie en régime linéaire), une oscillation sinusoïdale ne pourra s'auto-entretenir (v_s de la forme $v_s = A\cos\omega t$) que si la condition $1 - \underline{G}(j\omega)\underline{R}(j\omega) = 0$ est réalisée ; on a en effet :

$$\left.\begin{aligned} \underline{V_s} &= G(j\omega)\underline{V_e} \\ \underline{V_e} &= R(j\omega)\underline{V_s} \end{aligned}\right\} \underline{V_s} \cdot [1 - G(j\omega)R(j\omega)] = 0$$

soit $1 - G_0 \cdot \left[\dfrac{-A_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\right] = 0 \rightarrow 1 - G_0A_0 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right) = 0$

ce qui implique : $\mathbf{G_0 = \dfrac{1}{A_0}}$ et $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$.

Copyrighted material

On s'attend donc à ce que des oscillations sinusoïdales apparaissent dès que $G_0 = \frac{1}{A_0}$.

Elles auront une pulsation ω_0.

• $[B_1]$ joue le rôle d'opérateur « multiplication par une constante $G_0 > 1$ »

$\left(G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$;

• $[B_2]$ présente un gain $(-A_0)$ pour $\omega = \omega_0$. L'existence d'oscillations (pas nécessairement sinusoïdales) ne devrait être associée qu'à une amplification globale des signaux (les amplitudes étant alors limitées par les phénomènes non linéaires : notamment par la saturation en sortie de l'A.O.). Il semble donc naturel d'imposer : $G_0 > \frac{1}{A_0}$.

En conclusion, il est prévisible que :

(α) aucune oscillation ne pourra apparaître pour $G_0 < \frac{1}{A_0}$;

(β) des oscillations se maintiendront pour $G_0 > \frac{1}{A_0}$. Elles seront, **pour v_s**, d'autant plus sinusoïdales que $\frac{1}{A_0}$ est proche de G_0 (leur pulsation s'identifiant alors à ω_0). v_s' perdra ce caractère sinusoïdal pour G_0 « s'éloignant de $\frac{1}{A_0}$ » contrairement à la ddp aux bornes du condensateur C (l'opérateur de $[B_2]$ jouant son rôle de filtre centré sur ω_0...).

2. b. Équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$ dans le cadre du régime linéaire. Reprenons le résultat (3) sous la forme $(1 - G(p)R(p))V_s(p) = 0$ $(v_e = 0)$ et avec (2) :

$$\left(1 + 2\alpha\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2\right)V_s(p) - G_0A_0 2\alpha\frac{p}{\omega_0}V_s(p) = 0$$

soit : $V_s(p) + 2\alpha(1 - G_0A_0)\frac{p}{\omega_0}V_s(p) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 V_s(p) = 0.$

D'où l'équation différentielle : $\boxed{\frac{d^2v_s}{dt} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}(1 - G_0A_0)}_{2\beta}\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0}$ (4)

• Si à l'instant initial, il apparaît une tension de sortie v_{s0} (bruit...), celle-ci ne pourra pas conduire à un signal auto-entretenu pour $G_0A_0 < 1$, la solution de l'équation différentielle précédente étant alors du type sinusoïdal amorti.

• Il en va tout autrement pour $G_0A_0 > 1$. Dès que $G_0 > \frac{1}{A_0}$, la solution à (4) est :

$v_s(t) = \exp(-\beta t)(a\cos\omega^* t + b\sin\omega^* t)$ avec $\omega^{*2} = \omega_0^2 - \beta^2$ et $\left|\begin{array}{l}\omega_0 > |\beta| \\ \beta < 0\end{array}\right.$

soit $\omega^{*2} = \omega_0^2\left[1 - \frac{1}{4Q^2}(1 - G_0A_0)^2\right]$. Pour Q suffisamment grand et pour G_0A_0 pas trop élevé, on a $\omega^* \approx \omega_0$. Des oscillations apparaîtront à la fermeture du circuit. Elles

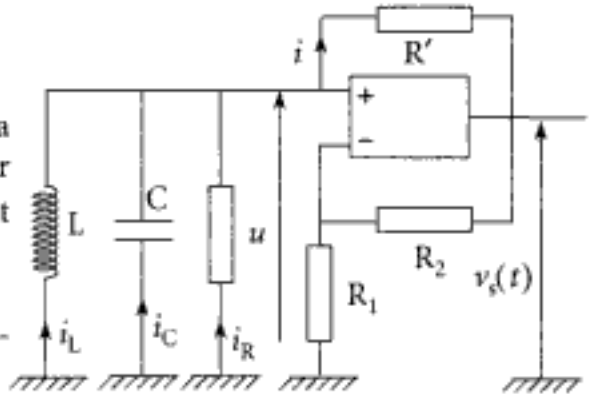
Copyrighted material

seront d'autant plus sinusoïdales que G_0A_0 est proche de 1^+ et que Q est grand (*cf.* (4)), leur pulsation étant alors très proche de $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

2. c. Mettons en évidence l'instabilité de l'état de saturation. À cet effet, supposons qu'à $t = t_0$, $v_s = +V_{sat}$, et donc $v_\varepsilon > 0$ pour $t > t_0^+$.

On aura $v_s = +V_{sat}$, tant que $v_\varepsilon = v_+ - v_- > 0$.

Or $v_-(t > t_0) = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = \dfrac{1}{G_0} V_{sat}$.



Posons $v^+(t) = u(t)$ et montrons que la tension $v_\varepsilon(t)$ tend à repasser par la valeur 0, autrement dit qu'il existe un instant $t_1 > t_0$ tel que $v_\varepsilon(t_1) = 0$, soit encore $u = \dfrac{V_{sat}}{G_0} = u_0$. Examinons alors l'évolution de $u(t)$:

$$\begin{cases} u - V_{sat} = R'i \\ -i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{L}\displaystyle\int u\,dt \end{cases} \Rightarrow C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{L} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{R'}\frac{du}{dt}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0} \qquad (5)$$

Il s'agit de l'équation du type oscillateur harmonique amorti pour lequel mathématiquement, $\lim\limits_{t \to +\infty} u = 0$, ce qui démontre l'existence de l'instant t_1. Le système repasse alors en régime linéaire, $v_s(t)$ commutant de la valeur $+V_{sat}$ à la valeur $-V_{sat}$ selon l'équation différentielle (4), l'état $-V_{sat}$ étant à son tour instable… d'où les oscillations.

Commentaire

Examinons l'évolution de $u(t)$ et $i(t)$ pour $t > t_0$. Nous avons :

$$u(t_0^+) = u(t_0^-) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = \frac{V_{sat}}{G_0} = u_0$$

$$i(t_0^-) = \frac{1}{R'}(u(t_0^-) - V_{sat}) = -\frac{R_2}{R'(R_1 + R_2)} V_{sat} = -i_0.$$

D'autre part, u est continue (présence de C) $\Rightarrow u(t_0^+) = u(t_0^-) = u_0$ donc i est continu $\left(i = \dfrac{1}{R'}(u - v_s)\right)$ ainsi que $i_R = \dfrac{u}{R}$. De plus i_L est continu (inductance L).

Il en résulte que $i_C = i - i_L - i_R$ est continu, ce qui assure la continuité de $\dfrac{du}{dt}$ $\left(i_C = C\dfrac{du}{dt}\right)$.

Copyrighted material

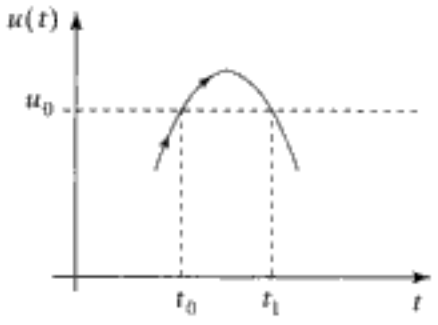
Par contre, $\frac{di}{dt}$ est discontinue :

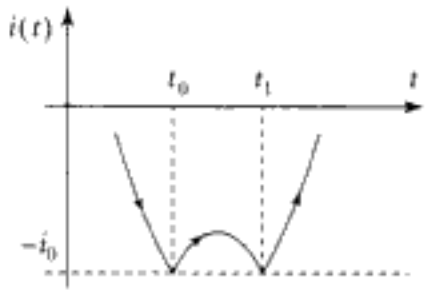
$$\bullet\ t < t_0 \quad \left.\begin{array}{l} i = \frac{1}{R'}(u - v_s) \\ v_s = G_0 u \end{array}\right\} \quad i = \frac{1}{R'}u\left(1 - 1 - \frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{R_2}{R'R_1}u \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^-} = -\frac{R_2}{R'R_1}\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^-};$$

$$\bullet\ t > t_0 \quad i = \frac{1}{R'}(u - V_{sat}) \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^+} = \frac{1}{R'}\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^+}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^-} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0^+} \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^+} \neq \left(\frac{di}{dt}\right)_{t_0^-}.$$

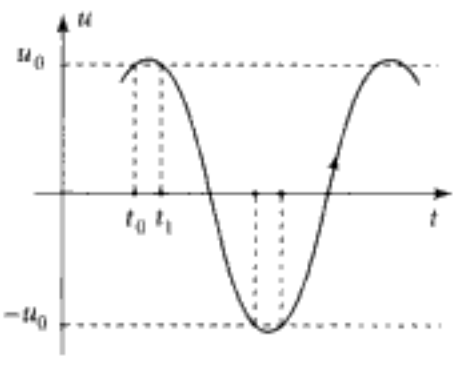
Les évolutions de $u(t)$ et $i(t)$ pour $t > t_0$ ont donc l'allure des diagrammes ci-dessous :

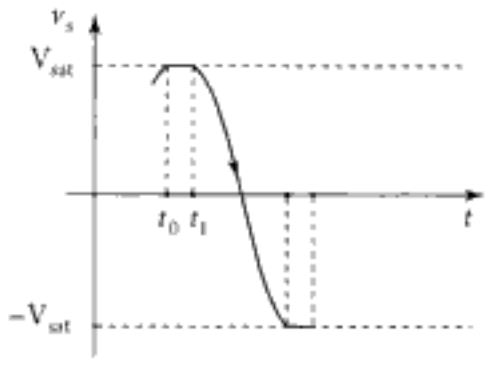




$u(t)$ finira par passer par la valeur u_0 (instant t_1), valeur pour laquelle l'amplificateur opérationnel retourne en régime linéaire. L'évolution de $u(t)$ et de $v_s(t)$ pour $t > t_1$ est alors redonnée par l'équation différentielle (4) (en régime linéaire, on a en effet : $u = v_+ = v_- = \frac{v_s}{G}$).

Il en résulte que $v_s(t)$ va diminuer continûment jusqu'à $-V_{sat}$ (et $u(t)$ jusqu'à $-u_0$)…





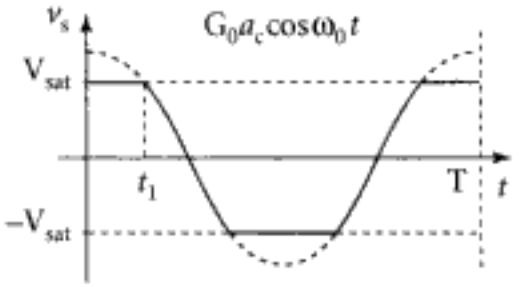
3. a. Pour $G_0 A_0 > 1$, le système est le siège d'oscillations. L'opérateur $[B_2]$ joue alors le rôle de filtre « sélectif » pour lequel :

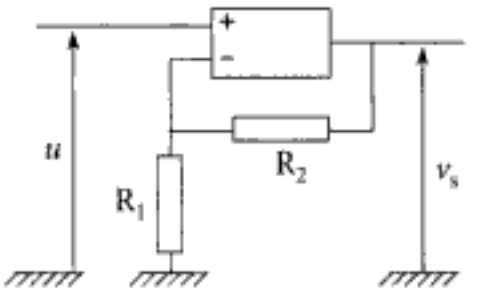
$$\left.\begin{array}{l} |\underline{R}|_{\omega = \omega_0} = A_0 \\ |\underline{R}|_{\omega = 2\omega_0} = A_0 \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}} \end{array}\right\} \frac{|\underline{R}|_{2\omega_0}}{|\underline{R}|_{\omega_0}} \# 9 \cdot 10^{-2}.$$

De plus : $\frac{1}{4Q^2}(1 - G_0A_0)^2 \# 5 \cdot 10^{-3}(1 - G_0A_0)^2 \ll 1$ … de sorte que $\omega^* \approx \omega_0$.

Copyrighted material

Tout se passe comme si l'opérateur $[B_1]$ était attaqué par un signal sinusoïdal $+v_e = u = a_c \cos\omega_0 t$; le signal de sortie v_s est alors en général non sinusoïdal mais périodique (période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$).





On peut décomposer $v_s(t)$ en série de Fourier : $v_s(t) = a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots$

L'opérateur de chaine de retour (filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_0 et de facteur de qualité Q « important ») en isole – en première approximation – le fondamental, ce qui redonne la tension u, soit :

$$u = a_c \cos\omega_0 t = A_0 \cdot (a_1 \cos\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{a_c = A_0 a_1} \quad (6)$$

D'autre part, l'amplitude a_1 du fondamental associé au signal $v_s(t)$ est donnée par :

$$a_1 = \frac{2V_{sat}}{\pi}\left[\sin\omega_0 t_1 + \frac{\left[\frac{\pi}{2} - \omega_0 t_1\right]}{\cos\omega_0 t_1}\right] \text{ avec } \left.\begin{array}{l} \omega_0 t_1 = \arccos\left(\dfrac{V_{sat}}{G_0 a_c}\right) \\ 0 < \omega_0 t_1 < \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}. \quad (7)$$

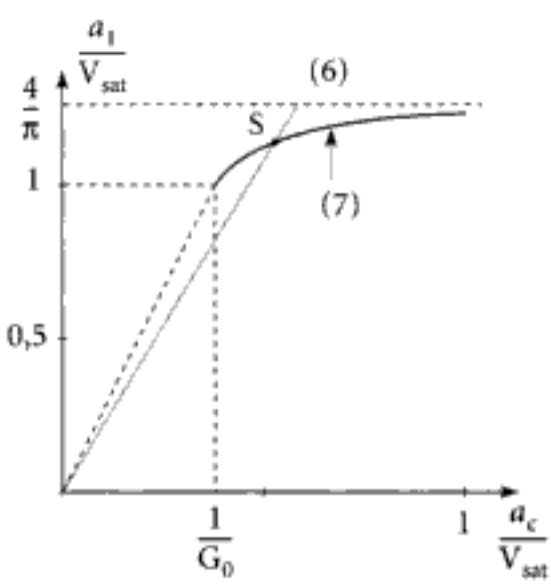
D'où les courbes :

avec $G_0 A_0 > 1$ soit $\dfrac{1}{A_0} < G_0$

La solution graphique est donnée par le point S, intersection des deux courbes

$$\frac{a_1}{V_{sat}} = \frac{1}{A_0} \cdot \left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right)$$

et $\dfrac{a_1}{V_{sat}} = f\left(\dfrac{a_c}{V_{sat}}\right)$ via (7).

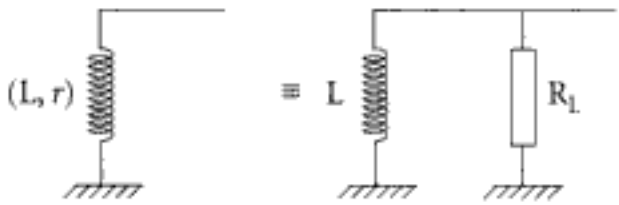


3. b. En fait, l'énoncé nous invite à prendre en compte la résistance r de la bobine (résistance donnée pour la pulsation ω_0) :

$$\underline{Y_L} = \frac{1}{jL\omega_0 + r} = \frac{1}{jL\omega_0\left(1 + \dfrac{r}{jL\omega_0}\right)} \approx \frac{1}{jL\omega_0} \cdot \left(1 - \frac{r}{jL\omega_0}\right) \quad (r \ll L\omega_0)$$

Copyrighted material

$\underline{Y_L} \approx \dfrac{1}{jL\omega_0} + \dfrac{r}{L^2\omega_0^2}$. D'où :



où $\boxed{R_L \approx \dfrac{L^2\omega_0^2}{r}}$

A.N. : pour L = 50 mH, r = 7,5 Ω, C = 100 nF $\Rightarrow \dfrac{L^2\omega_0^2}{r} = \dfrac{L}{Cr} \approx 66{,}7$ kΩ.

Il suffit maintenant de remplacer – dans l'expression de A_0 – la résistance R par R // R_L, d'où :

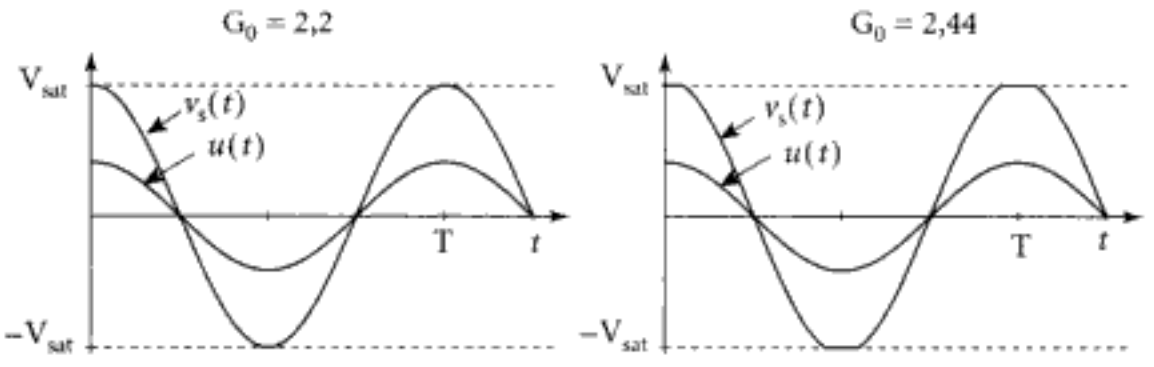
$$\frac{1}{A_0} = 1 + \frac{R'}{R} \rightarrow \frac{1}{A'_0} = 1 + R'\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L}\right).$$

A.N. : $\dfrac{1}{A'_0} = 2{,}15$. Il faut donc résoudre :

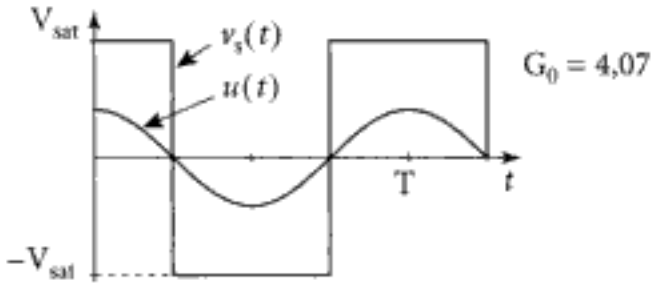
$$\frac{a_1}{V_{sat}} = \boxed{\frac{1}{A'_0} \cdot \left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right) = f\left(\frac{a_c}{V_{sat}}\right)}$$

R_1(kΩ)	R_2(kΩ)	$G_0 = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$	a_c (volt) (théorique)	a_c (volt) (expérience)
4,88	6,12	$G_{01} = 2{,}25$	6,45	6,4
4,23	6,77	$G_{02} = 2{,}60$	6,95	7,0
2,55	8,45	$G_{03} = 4{,}31$	7,48	7,5

De plus T (théorique) = $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ = 0,44 ms. L'accord entre valeurs expérimentales et valeurs théoriques est satisfaisant. On peut également remarquer que pour un gain G_0 suffisamment élevé de l'opérateur [B_1], la tension $v_c = u(t)$ possède une amplitude qui plafonne à une valeur proche de $\dfrac{4V_{sat}}{\pi} \cdot A'_0 = 7{,}64$ volt.

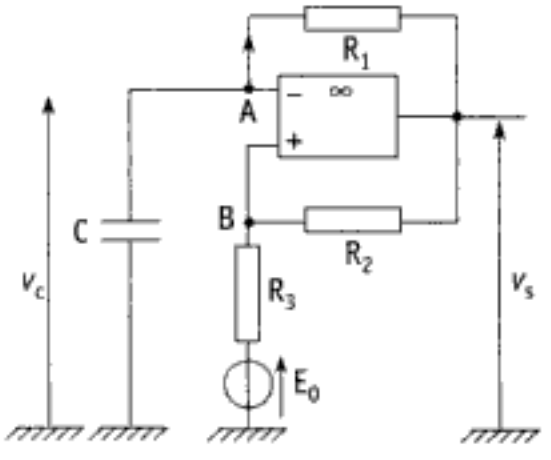


Copyrighted material



106 Oscillateur à relaxation

L'amplificateur opérationnel est idéal.



1. a. Montrer que l'A.O. fonctionne nécessairement à saturation. On note :

$$V_{sat}^{+} = +V_{sat} \quad \text{et} \quad V_{sat}^{-} = -V_{sat}.$$

b. Déterminer, en régime établi, les tensions $v_s(t)$ et $v_c(t)$.

On pose : $V_0 = \dfrac{1}{R_2 + R_3}(R_2E_0 + R_3V_{sat})$

et $V_0' = \dfrac{1}{R_2 + R_3}(R_2E_0 - R_3V_{sat})$

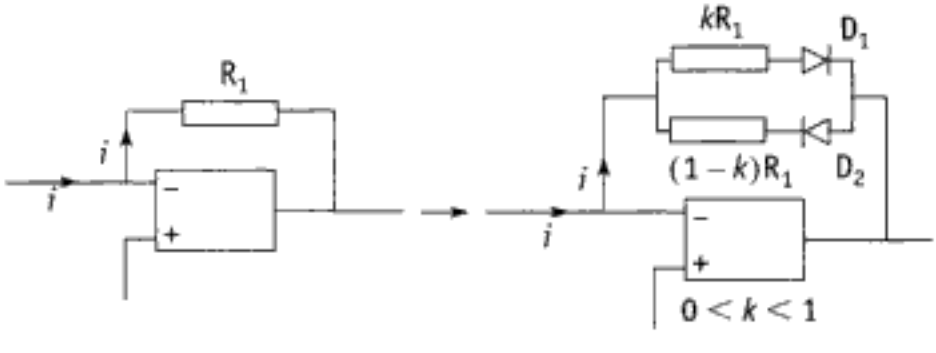
(On supposera que $-V_{sat} < V_0' < V_0 < V_{sat}$.) et $\tau = R_1C$. On a $0 \leqslant E_0 < V_{sat}$.

Donner les graphes $\dfrac{t}{\tau} \to v_c(t)$ et $\dfrac{t}{\tau} \to v_s(t)$ pour les valeurs numériques suivantes :

$V_{sat} = 14$ V ; $E_0 = 12$ V ; $R_2 = 3$ kΩ et $R_3 = 7$ kΩ.

c. On désigne par Δ_1 (resp. Δ_2) la durée pendant laquelle – sur une période – l'A.O. est bloqué en saturation négative (resp. positive). Donner les expressions de Δ_1 et Δ_2 en fonction de $\tau = R_1C$; $\dfrac{R_3}{R_2}$; V_{sat} et E_0. Préciser le rôle de E_0.

2. On substitue au résistor R_1 un potentiomètre selon :



Copyrighted material

Les diodes D_1 et D_2 sont idéales.

On fait de plus $E_0 = 0$. Comment sont modifiés les résultats précédents ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Amplificateur opérationnel fonctionnant à saturation.
- Génération d'un signal rectangulaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. a. Donner l'égalité définissant v_+ à partir v_s, ainsi que l'équation différentielle reliant v_- à v_s. On remarquera que ces résultats ne sont pas liés au type de fonctionnement de l'A.O. Puis on montera qu'un fonctionnement linéaire ne peut pas se maintenir…

b. Il suffit de vérifier que les états à saturation $v_s = +V_{sat}$ et $v_s = -V_{sat}$ sont instables (*cf.* évolution de $v_c(t) = v_-(t)$), et que le système oscille donc entre ces états.

2. On vérifie facilement que D_1 (resp. D_2) est passante lorsque D_2 (resp. D_1) est bloquée. Pour un courant i positif, le circuit présentera une constante de temps $\tau_1 = kR_1C$ (D_1 passante), et pour i négatif une constante de temps $\tau_2 = (1-k)R_1C$ (D_2 passante…)

3. Solution

1. a. ■ Déterminons, pour commencer, les équations qui ne dépendent pas du type de régime de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel (régime linéaire ou régime saturé).

Nous avons $v_+ = \dfrac{\dfrac{E_0}{R_3} + \dfrac{v_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_2}}$ (théorème de Millman en B avec $i_+ = 0$)

soit
$$\boxed{v_+ = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2E_0 + R_3v_s)} \quad (1)$$

De plus, le même courant traverse C et R_1 (car $i_- = 0$), ce qui s'écrit :

$$\frac{v_s - v_-}{R_1} = C\frac{dv_-}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_- + R_1C\frac{dv_-}{dt} = v_s} \quad (2) \text{ avec de plus } v_- = v_c.$$

■ Montrons qu'un fonctionnement en régime linéaire conduirait de toute façon à une saturation de l'amplificateur opérationnel. En effet, dans ce cas $v_+ = v_-$ et :

$$v_s = \frac{1}{R_2 + R_3}(R_2E_0 + R_3v_s) + R_1C\frac{R_3}{R_2 + R_3}\frac{dv_s}{dt}$$

d'où
$$R_1C + \frac{dv_s}{dt} - \frac{R_2}{R_3}v_s = -\frac{R_2}{R_3}E_0.$$

La solution de l'équation sans second membre est divergente. Elle implique donc la saturation de l'amplificateur opérationnel.

Copyrighted material

1. b. Considérons alors un état où l'amplificateur opérationnel est à saturation positive (une étude équivalente peut être faite avec un amplificateur opérationnel à saturation négative), c'est-à-dire un état pour lequel on aurait :

$$[\,v_s = V_{sat} > 0 \text{ avec } \varepsilon = v_+ - v_- > 0\,].$$

D'après l'équation (2), l'évolution de $v_-(t)$ est alors donnée par :

$$v_- + \tau\frac{dv_-}{dt} = V_{sat} \quad (\text{où } \tau = R_1C),$$

ce qui montre que la tension $v_-(t)$ tend mathématiquement vers $+V_{sat}$ et $\varepsilon(t)$ vers ε_1 tel que :

$$\varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_2+R_3}E_0 + \frac{R_2}{R_2+R_3}V_{sat} - V_{sat}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_2+R_3}(E_0 - V_{sat}) \text{ grandeur négative (puisque } E_0 < V_{sat}).$$

Il existe donc une date t_0 pour laquelle $\varepsilon(t)$ passe par la valeur zéro. À cet instant, nous avons ($\varepsilon = 0 \Rightarrow v_-(t_0) = v_+(t_0)$) :

$$\boxed{v_-(t_0) = \frac{1}{R_2+R_3}(R_2E_0 + R_3V_{sat}) = V_0}$$

et v_s passe à $-V_{sat}$ (commutation de l'amplificateur opérationnel).

Faisons alors $t = 0$ (**nouvelle origine des temps**). Dès lors :

$v_-(0^+) = V_0$ (il y a continuité de la charge du condensateur), $v_s(0^+) = -V_{sat}$

$v_+(0^+) = \dfrac{1}{R_2+R_3}(R_2E_0 - R_3V_{sat})$ d'après (1)

d'où : $\varepsilon(0^+) = v_+(0^+) - v_-(0^+) = \dfrac{1}{R_2+R_3}(R_2E_0 - R_3V_{sat}) - \dfrac{1}{R_2+R_3}(R_2E_0 + R_3V_{sat})$

et $\varepsilon(0^+) = -\dfrac{2R_3}{R_2+R_3}V_{sat} < 0$. À partir de cet instant, v_- évolue selon l'équation :

$$v_- + \tau\frac{dv_-}{dt} = -V_{sat} \quad \text{d'après (2)}$$

dont la solution est donnée par :

$$v_-(t) = -V_{sat} + \lambda\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } v_-(0) = V_0$$

d'où
$$v_-(t) = -V_{sat} + (V_{sat} + V_0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et : $\varepsilon(t) = \underbrace{\left[\dfrac{1}{R_2+R_3}(R_2E_0 - R_3V_{sat})\right]}_{V_0'} - \left[-V_{sat} + (V_{sat} + V_0)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right].$

Copyrighted material

Cette phase cesse dès que $\varepsilon(t)$ repasse par la valeur nulle, donc pour $t = t_1$ tel que :

$$V_0' = -V_{sat} + (V_{sat} + V_0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Soit encore :
$$\boxed{t_1 = \tau \ln\left(\frac{V_{sat} + V_0}{V_{sat} + V_0'}\right)}$$

À t_1^+, l'amplificateur opérationnel commute de nouveau, et nous avons :

$v_-(t_1^+) = V_0' < V_0$ (continuité de la charge du condensateur) $v_s(t_1^+) = +V_{sat}$, $v_+(t_1^+) = V_0$ (d'après (1)).

$$\varepsilon(t_1^+) = V_0 - V_0' = \frac{2R_3}{R_2 + R_3} V_{sat} > 0.$$

Et $v_-(t)$ obéit à l'équation différentielle $v_- + \tau \dfrac{dv_-}{dt} = +V_{sat}$, d'où :

$$v_-(t > t_1) = V_{sat} + (-V_{sat} + V_0')\exp\left(-\frac{(t - t_1)}{\tau}\right).$$

Cette deuxième phase dure jusqu'à l'instant t_2 tel que : $v_-(t_2) = V_0$ ($\varepsilon(t)$ s'annule)

d'où : $V_0 = V_{sat} + (V_0' - V_{sat})\exp\left(-\dfrac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right)$

et $t_2 - t_1 = \tau \ln\left(\dfrac{V_{sat} - V_0'}{V_{sat} - V_0}\right)$.

L'évolution de $v_-(t)$ et $v_s(t)$ se répète alors périodiquement avec la période $T = t_2$, et :

$$\boxed{T = \tau\left\{\ln\left(\frac{V_{sat} + V_0}{V_{sat} + V_0'}\right) + \ln\left(\frac{V_{sat} - V_0'}{V_{sat} - V_0}\right)\right\}}$$

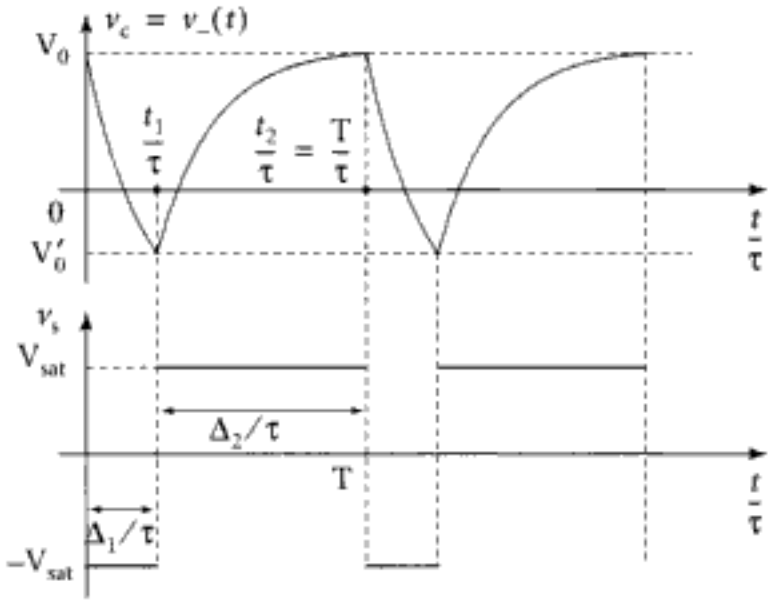
D'où les graphes donnant $v_c(t) = v_-(t)$ et $v_s(t)$ avec :

- $V_0 = \dfrac{1}{R_2 + R_3}(R_2E_0 + R_3V_{sat}) = \dfrac{1}{10}(3 \times 12 + 7 \times 14) \Rightarrow \mathbf{V_0 = 13{,}4\ volt}$

- $V_0' = \dfrac{1}{R_2 + R_3}(R_2E_0 - R_3V_{sat}) = \dfrac{1}{10}(3 \times 12 - 7 \times 14) \Rightarrow \mathbf{V_0' = -6{,}2\ volt}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{t_1}{\tau} = \ln\left(\dfrac{V_{sat} + V_0}{V_{sat} + V_0'}\right) \Rightarrow \dfrac{t_1}{\tau} = \mathbf{1{,}26} \\ \bullet\ \dfrac{t_2 - t_1}{\tau} = \ln\left(\dfrac{V_{sat} - V_0'}{V_{sat} - V_0}\right) \Rightarrow \dfrac{t_2 - t_1}{\tau} = \mathbf{3{,}52} \end{array}\right\} \frac{T}{\tau} = \frac{t_2}{\tau} = \mathbf{4{,}77.}$$

Copyrighted material



1. c. On a donc : $\Delta_1 = \tau \ln\left(\frac{V_{sat}+V_0}{V_{sat}+V'_0}\right) = \tau \ln\left[1+\frac{V_0-V'_0}{V_{sat}+V'_0}\right]$

or $V_0 - V'_0 = \frac{2R_3}{R_2+R_3}V_{sat}$ et $V_{sat}+V'_0 = \frac{R_2}{R_2+R_3}(E_0+V_{sat})$

soit
$$\boxed{\Delta_1 = R_1C \cdot \ln\left\{1+\frac{2R_3}{R_2}\frac{V_{sat}}{E_0+V_{sat}}\right\}}$$

De même : $\Delta_2 = t_2 - t_1 = \tau \ln\left[1+\frac{V_0-V'_0}{V_{sat}-V_0}\right]$ où $V_{sat}-V_0 = \frac{R_2}{R_2+R_3}(V_{sat}-E_0)$

soit
$$\Delta_2 = R_1C \cdot \ln\left\{1+\frac{2R_3}{R_2}\frac{V_{sat}}{V_{sat}-E_0}\right\}.$$

Nous avons $\Delta_2 > \Delta_1$ (ici $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 2{,}8$), et l'écart entre Δ_1 et Δ_2 est d'autant plus grand que E_0 est proche de V_{sat}… E_0 modifie le rapport cyclique $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, mais également la période T… Pour $E_0 = 0$, les deux phases deviennent « symétriques » et :

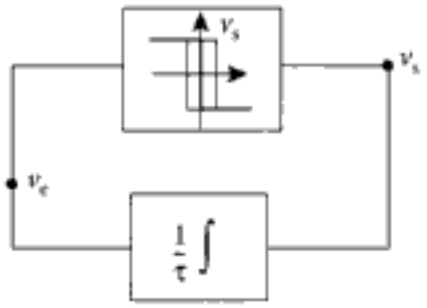
$$\Delta_1 = \Delta_2 = R_1C \cdot \ln\left\{1+\frac{2R_3}{R_2}\right\}.$$

Commentaire

Le montage étudié dans cet exercice représente un **multivibrateur astable** à un seul amplificateur opérationnel. Il possède deux états de fonctionnement, ici $v_s = +V_{sat}$ et $v_s = -V_{sat}$, instables, de sorte que le système oscille continuellement entre ces deux états. On obtient des oscillations dites de relaxation.

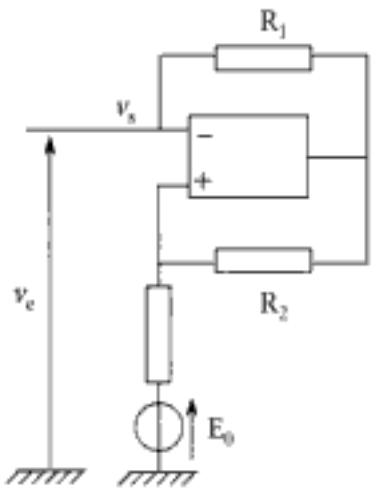
Copyrighted material

D'un point de vue fonctionnel, il est constitué d'un comparateur à hystérésis et d'un intégrateur, soit par exemple :

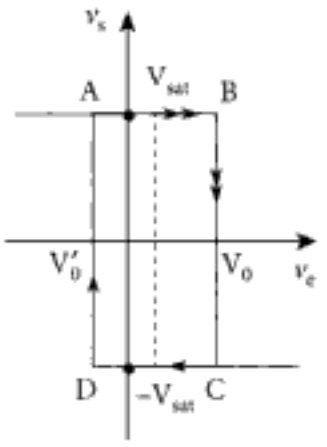


comparateur à hystérésis inverseur

intégrateur à constante τ_0 positive, $\tau_0 \frac{dv_e}{dt} = v_s$ (α)



caractéristique statique →



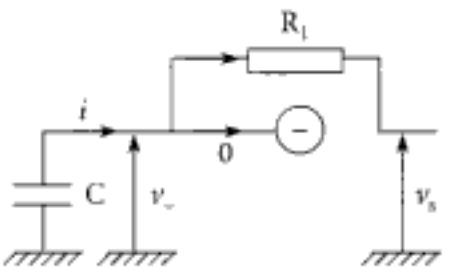
Pour $v_s = +V_{sat}$, l'équation (α) implique que le point figuratif passe de A à B, il y a alors commutation B → C et v_s prend la valeur $-V_{sat}$; l'équation (α) entraîne ensuite une évolution de C à D puis commutation D → A, etc. d'où les oscillations.

Dans le cas du montage proposé la relation entre v_- et v_s est bien celle du comparateur inverseur à hystérésis.

Le condensateur (associé à la résistance R) joue le rôle d'un intégrateur imparfait. On a en effet :

$$i(t) = -C\frac{dv_-}{dt} = \frac{v - v_s}{R}$$

soit $\quad R_1 C\frac{dv_-}{dt} + v_- = v_s \quad (\beta)$

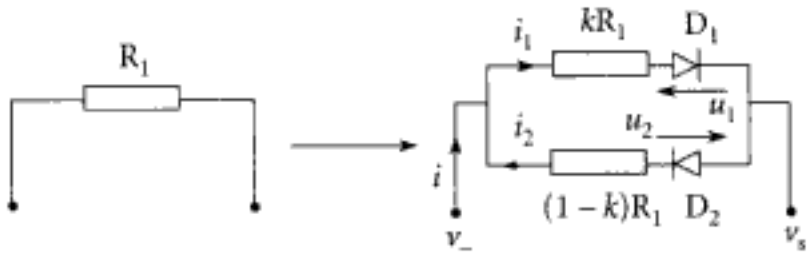


Si T est le temps caractéristique associé aux variations de $v_-(t)$, la fonction « intégrateur idéal » décrite dans le point cours sera d'autant mieux approchée que $T \ll \tau$ $\left(\left|R_1 C\frac{dv_-}{dt}\right| \gg |v_-| \ldots\right)$.

En fait, l'équation différentielle (β) est suffisante pour permettre au système de relaxer (A → B puis C → D)…

Copyrighted material

2. En fait, $E_0 = 0$ et on remplace la résistance R_1 par l'association :



On a : $\begin{cases} v_- - v_s = kR_1 i_1 + u_1 \\ v_s - v_- = (1-k)R_2 i_2 + u_2. \end{cases}$

Pour D_1 passante, $u_1 = 0$ et $i_1 > 0$ soit $v_- - v_s > 0$
Pour D_2 passante, $u_2 = 0$ et $i_2 > 0$ soit $v_s - v_- > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ (D_1 passante $\Rightarrow D_2$ bloquée) et (D_2 passante $\Rightarrow D_1$ bloquée). Reprenons le raisonnement du **1. b.**

■ **1re phase :** $v_-(0^+) = V_0 = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat} = \beta V_{sat}$ où $\beta = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$, et $v_s(0^+) = -V_{sat}$, soit $i > 0$, D_1 est passante et D_2 est bloquée. On a donc :

$$v_-(t) = -V_{sat} + (V_{sat} + V_0)\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad \text{où} \quad \tau_1 = kR_1C.$$

$$V_0' = \left(-\frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat}\right) = -\beta V_{sat} \text{ d'où : } t_1 = kR_1C\ln\left(\frac{V_{sat} + \beta V_{sat}}{V_{sat} - \beta V_{sat}}\right) \Rightarrow \boxed{t_1 = k\tau\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}$$

■ **De même :** $t_2 - t_1 = (1-k)\tau\ln\left(\dfrac{V_{sat} + \beta V_{sat}}{V_{sat} - \beta V_{sat}}\right) \Rightarrow t_2 - t_1 = (1-k)\tau\ln\left(\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\right)$.

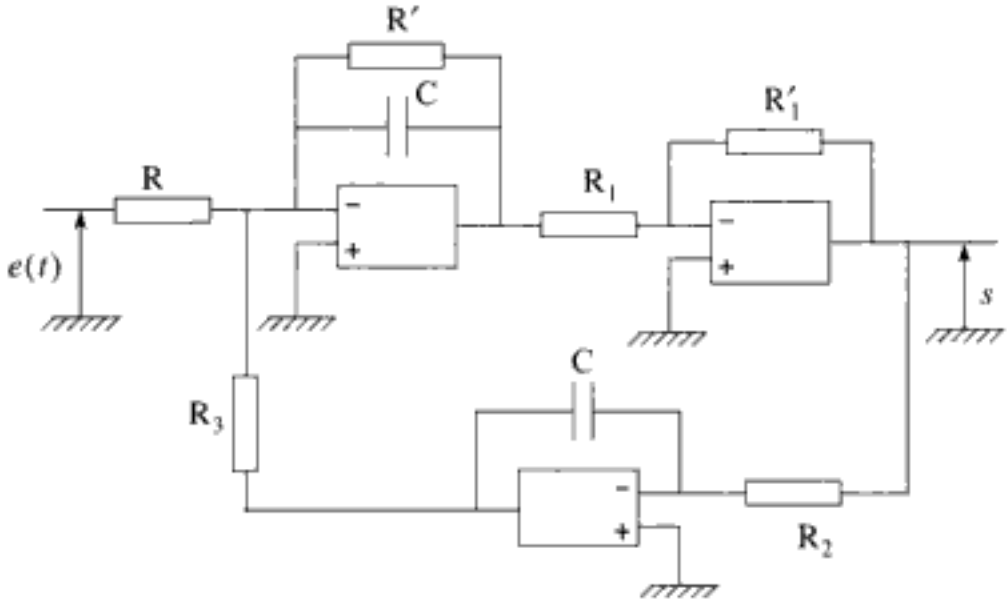
$$T = (t_2 - t_1) + t_1 \Rightarrow \boxed{T = \tau \cdot \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{k}{1-k}}$$

On peut ainsi modifier le rapport cylindrique $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$ en jouent sur la valeur de k (potentiomètre) sans pour autant modifier la période T (fixée pour $\tau = R_1C$, $\beta = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$ donnés).

Copyrighted material

107 Passe-bande à paramètres ajustables

Les amplificateurs opérationnels utilisés sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire ($V_- = V_+$).



1. Calculer, en régime sinusoïdal établi, la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

En déduire la nature du montage, et donner ses caractéristiques avec :

$C = 680$ nF ; $R_2 = R_3 = 47\ \Omega$; $R = R' = 6{,}8$ kΩ ; $R'_1 = R_1 = 10$ kΩ.

On tracera la courbe représentant G_{dB} en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ où ω_0 est une pulsation à préciser.

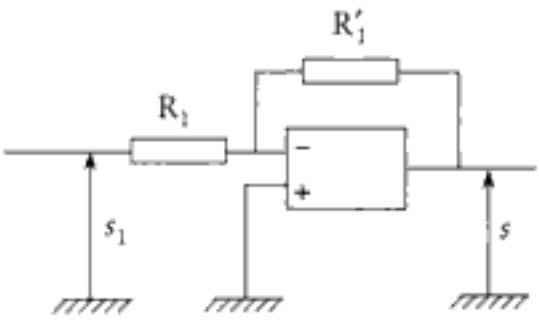
2. Quelle est la réponse, en régime établi, du circuit à un signal carré de valeur moyenne nulle, d'amplitude $E = 10$ V (variant entre $+E$ et $-E$) et de fréquence $f' = 1\,650$ Hz ? Commenter.

Solution

1. ■ On peut déjà mettre en évidence trois blocs :

• **Un montage inverseur** caractérisé par la relation :

$$s = -\frac{R'_1}{R_1} s_1 \quad (1)$$



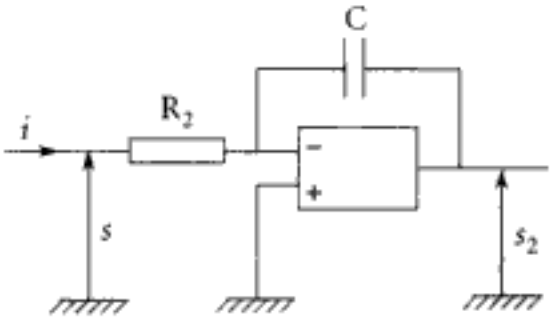
(en effet, en écrivant que le même courant traverse les résistances R_1 et R'_1, il vient :

$$\frac{s_1 - 0}{R_1} = \frac{0 - s}{R'_1} \text{ d'où le résultat).}$$

Copyrighted material

• **Un montage intégrateur :**

l'amplificateur opérationnel étant idéal, nous avons :



$$i = \frac{1}{R_2}(s-0) = C\frac{d}{dt}(0-s_2).$$

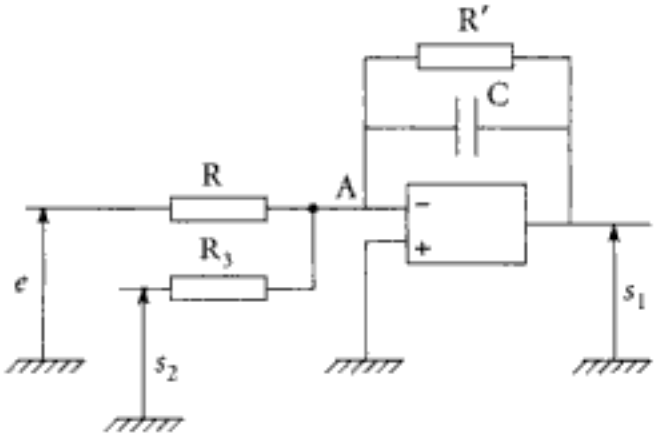
Soit encore : $R_2C\dfrac{ds_2}{dt} = -s.$

Et en régime sinusoïdal établi :

$$\frac{\underline{s_2}}{\underline{s}} = -\frac{1}{jR_2C\omega} \quad (2)$$

• **Un filtre passe-bas** à double entrée tel que (loi des nœuds en A avec $i_- = 0$) :

$$\frac{e-0}{R} + \frac{s_2-0}{R_3} = \frac{0-s_1}{R'} + C\frac{d}{dt}(0-s_1).$$



Soit $\dfrac{R'}{R}e + \dfrac{R'}{R_3}s_2 = -\left(s_1 + R'C\dfrac{ds_1}{dt}\right)$. Et, en régime sinusoïdal établi :

$$\frac{R'}{R}\underline{e} + \frac{R'}{R_3}\underline{s_2} = -(1+jR'C\omega)\underline{s_1} \Rightarrow \underline{s_1} = \frac{-\left(\underline{e}\dfrac{R'}{R} + \dfrac{R'}{R_3}\underline{s_2}\right)}{1+jR'C\omega} \quad (3)$$

En « basses » fréquences ($R'C\omega \ll 1$), on retrouve un fonctionnement du type inverseur et en « hautes » fréquences ($R'C\omega \gg 1$), un fonctionnement du type intégrateur.

■ Déterminons la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ à partir des relations (1), (2) et (3) :

$$-\underline{e}\frac{R'}{R} - \underline{s_2}\frac{R'}{R_3} = (1+jR'C\omega)\underline{s_1} = (1+jR'C\omega)\left(-\frac{R_1}{R'_1}\underline{s}\right)$$

$$-\underline{e}\frac{R'}{R} + \frac{1}{jR_2C\omega}\underline{s}\frac{R'}{R_3} = -\frac{R_1}{R'_1}(1+jR'C\omega)\underline{s}.$$

Copyrighted material

D'où :
$$\underline{H} = \frac{\dfrac{R'}{R}}{\dfrac{R_1}{R'_1}(1 + jR'C\omega) + \dfrac{R'}{jR_2R_3C\omega}}.$$

Posons alors $\boxed{H_0 = \dfrac{R'R'_1}{RR_1}}$, la fonction de transfert $\underline{H}$ se réécrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\left(R'C\omega - \dfrac{R'R'_1}{R_1R_2R_3C\omega}\right)}.$$

Soit, avec ω_0 défini par $R'C\omega_0 = \dfrac{R'R'_1}{R_1R_2R_3C\omega_0}$:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{R'_1}{R_1R_2R_3}}} \Rightarrow \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jR'C\omega_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_0, de gain H_0 pour $\omega = \omega_0$ et de facteur de qualité $Q = R'C\omega_0$.

D'où finalement :
$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

ou encore
$$\boxed{H(p) = \frac{H_0}{1 + Q\left(\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{\omega_0}{p}\right)}}$$

Commentaire

La bande passante à –3dB est définie par $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, les pulsations ω_1 et ω_2 vérifiant :

$|\underline{H}|(\omega_1) = |\underline{H}|(\omega_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\underline{H}|(\omega_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}H_0.$

Ainsi $G_{dB}(\omega_1) = G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_0) - 20\log\sqrt{2} \# G_{dB}(\omega_0) - 3,$

ce qui donne ici : $2 = 1 + Q^2\left(X - \dfrac{1}{X}\right)^2$ avec $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et :

$$X^2 \pm \frac{X}{Q} - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\dfrac{1}{2Q} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4} \\ X_2 = \dfrac{1}{2Q} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4}. \end{cases}$$

Nous obtenons : $\Delta X = \dfrac{1}{Q} = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$ soit $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{R'C}}$

Copyrighted material

On peut ainsi modifier, **séparément**, pour une capacité fixée :
– la bande passante $\Delta\omega$ en jouant sur la valeur de R',
– la pulsation centrale ω_0 du filtre en faisant varier la résistance R_2 (ou R_3),
– le gain H_0 maximal par l'intermédiaire de la résistance R.

$$A.N. : H_0 = \frac{R'R_1'}{RR_1} = 1 \; ; \; \omega_0 = \frac{1}{680 \cdot 10^{-9}}\sqrt{\frac{1}{47^2}} \Rightarrow \boxed{f_0 = 4{,}98 \text{ kHz}}$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{6{,}8 \cdot 10^3 \times 680 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow \boxed{\Delta f = 34 \text{ Hz}}$$

Soit un facteur de qualité $\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 145}$

■ **Courbe** $G_{dB} = f\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$

On a $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(X - \frac{1}{X}\right)^2}}$ où $X = \frac{\omega}{\omega_0}$.

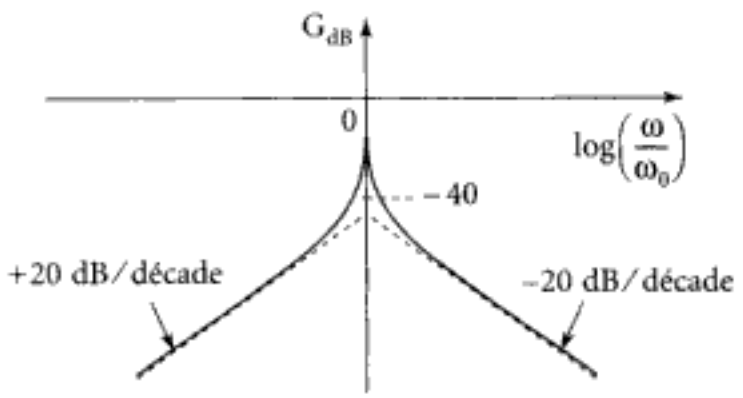
Le comportement asymptotique est donné :

– pour $\omega \gg \omega_0$ par $G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20\log X$;

– pour $\omega \ll \omega_0$ par $G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20\log X$.

De plus, $G_{dB}(\omega_0) = 20\log H_0 = 0$, et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque : $G_{dB}\left(\frac{1}{X}\right) = G_{dB}(X)$ et $\log\left(\frac{1}{X}\right) = -\log X$.

D'où la courbe :

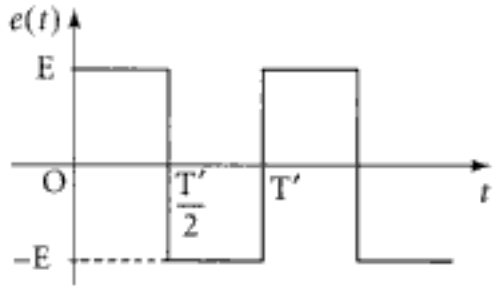


On est dans le cas où $Q > 1$, et donc $G_{dB}(\omega_0) > 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$.

2. On s'intéresse ici à la réponse, en régime établi, à un signal d'entrée carré de période T' et d'amplitude E.

Copyrighted material

D'après le théorème de Fourier, on peut décomposer ce signal en une somme de signaux sinusoïdaux dont les pulsations sont des multiples du fondamental $\omega' = \frac{2\pi}{T'}$.
Plus précisément, on peut écrire :



$$e(t) = A_0 + \sum A_n \sin n\omega' t + \sum B_n \cos n\omega' t.$$

A_0 représente la valeur moyenne de $e(t)$, et a donc ici une valeur nulle :

$\langle e(t) \rangle = \frac{1}{T'}\int_0^{T'} e(t)\mathrm{d}t = A_0$ (la valeur moyenne d'un sinus ou d'un cosinus sur une période est bien évidemment nulle). De plus, la représentation choisie du signal $e(t)$ est associée à une fonction impaire, ce qui donne $B_n = 0$.

Pour déterminer les coefficients A_n, il suffit de remarquer que l'on a :

$$\int_0^{T'} e(t)\sin(n\omega' t)\mathrm{d}t = A_n \int_0^{T'} \sin^2(n\omega' t)\mathrm{d}t = A_n \frac{T'}{2}.$$

Soit $A_n = \frac{2}{T'}\int_0^{T'} e(t)\sin(n\omega' t)\mathrm{d}t$ (résultat classique).

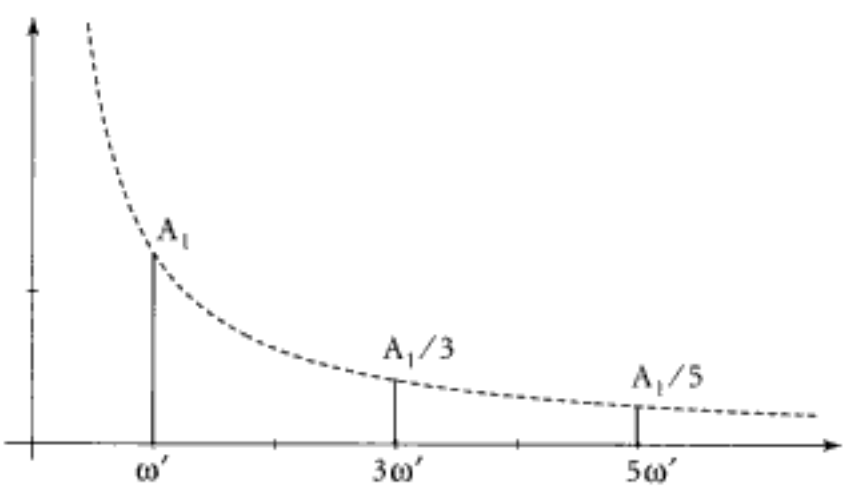
D'où $$A_n = \frac{2E}{T'}\left[\int_0^{\frac{T'}{2}} (\sin(n\omega' t))\mathrm{d}t - \int_{\frac{T'}{2}}^{T'} (\sin(n\omega' t))\mathrm{d}t\right]$$

$$A_n = \frac{2E}{n\omega' T'}\left[\left(-\cos(n\omega' t)\right)_0^{\frac{T'}{2}} - \left(-\cos(n\omega' t)\right)_{\frac{T'}{2}}^{T'}\right].$$

Finalement :

$$A_n = \frac{2E}{n\pi}[1-(-1)^n] \Rightarrow \begin{cases} A_{2p} = 0 \\ A_{2p+1} = \dfrac{4E}{(2p+1)\pi} \quad \text{et donc } A_1 = \dfrac{4E}{\pi}. \end{cases}$$

On peut alors représenter le signal par son spectre (A_n et B_n en fonction de $n\omega'$). Seules les harmoniques de rang impair sont présentes.



Copyrighted material

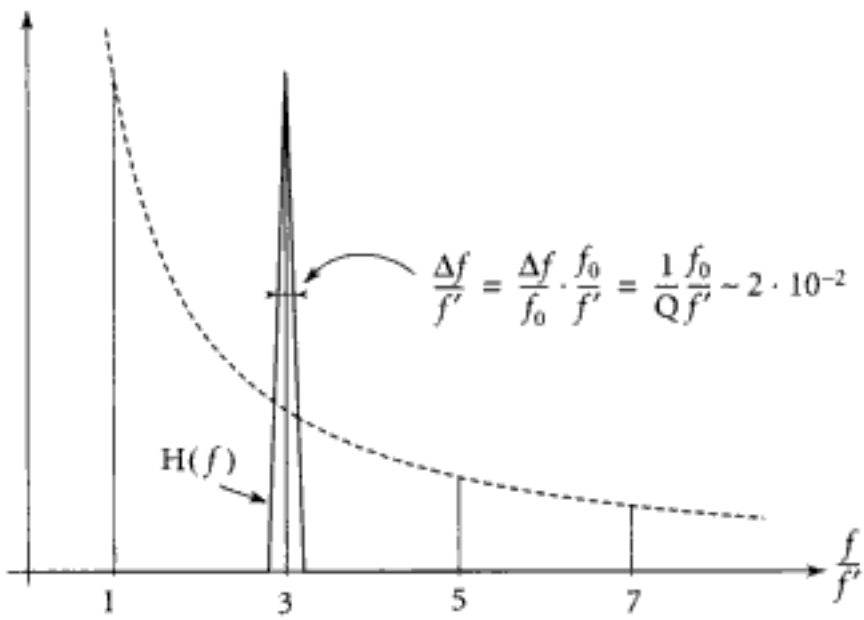
Et $e(t) = \dfrac{4E}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{2p+1}\sin[(2p+1)\omega' t] = \sum e_p(t)$.

La réponse en régime forcé s'obtient alors en sommant les réponses associées à chaque composante sinusoïdale (système linéaire).

Or pour $e_1(t) = E_0\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow s_1(t) = H(\omega)E_0\cos(\omega t + \varphi + \Psi(\omega))$ si l'on note $\underline{H} = H(\omega)e^{j\Psi(\omega)}$ (le filtre a pour effet de multiplier l'amplitude du signal sinusoïdal par $H(\omega)$ et de le déphaser de $\Psi(\omega)$).

Traçons alors, sur le même graphique, la courbe $H(\omega)$ et le spectre du signal. Nous obtenons ici, puisque :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 4{,}98\ \text{kHz} \quad \text{et} \quad f' = \frac{\omega'}{2\pi} = 1{,}65\ \text{kHz}\,; \ \text{soit}\ f_0 \# 3f'$$



En première approximation, on peut considérer que seule l'harmonique trois est transmise, ce qui donne dans ce cas : $H(3f') \# H(f_0) = 1$ et $\Psi(3f') \# \Psi(f_0) = 0$.

Finalement : $\boxed{s(t) \# \dfrac{4E}{\pi}\cdot\dfrac{1}{3}\sin(3\omega' t)}$

On obtient alors un signal sinusoïdal de fréquence triple $(3f')$ et d'amplitude $\dfrac{4E}{3\pi} \# 4{,}25$ V.

Commentaire

Évaluons les grandeurs $A_1H(\omega')$ et $A_5H(5\omega')$:

$$A_1H(\omega') = \frac{4E}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 + 145^2\left(\dfrac{f'}{f_0} - \dfrac{f_0}{f'}\right)^2}} \Rightarrow A_1H(\omega') \# 3{,}3\cdot 10^{-2}\,;$$

Copyrighted material

$$A_5H(5\omega') = \frac{4E}{5\pi}\frac{1}{\sqrt{1+145^2\left(\frac{5f'}{f_0}-\frac{f_0}{5f'}\right)^2}} \Rightarrow A_5H(5\omega') \# 1{,}7\cdot 10^{-2}.$$

Le fondamental donne une réponse de l'ordre de 100 fois plus faible, et l'harmonique cinq 250 fois plus faible : le signal $s(t)$ (observé à l'oscilloscope) n'est pas parfaitement sinusoïdal, mais la déformation sera faible et difficilement perceptible à l'observation directe…

108 Coupe-bande

Tous les A.O. sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

1. Déterminer l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle D pour que la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ soit nulle quelle que soit la pulsation ω.

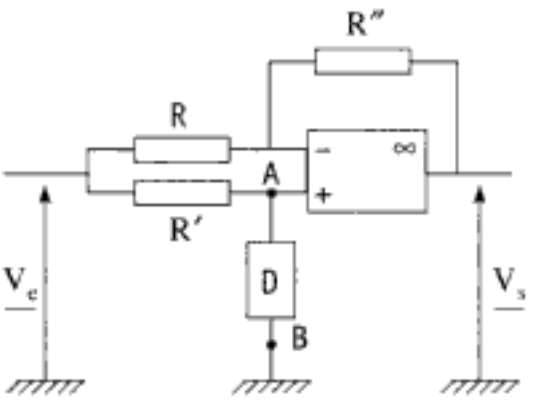


fig. 1

2. Le dipôle [AB] est réalisé selon le montage représenté ci-contre.

a. Déterminer, en régime sinusoïdal établi, son impédance d'entrée $\underline{Z'_e}$. Commenter.

b. Montrer que la fonction de transfert complexe $\underline{H}$ est effectivement nulle pour une valeur particulière ω_0 de ω à condition d'ajuster correctement la valeur de $R_1 + R_2$.

Dans ce cas, préciser l'expression de $\underline{H}$ et tracer les diagrammes de Bode correspondants (en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$). Quelle est la nature d'un tel système ?

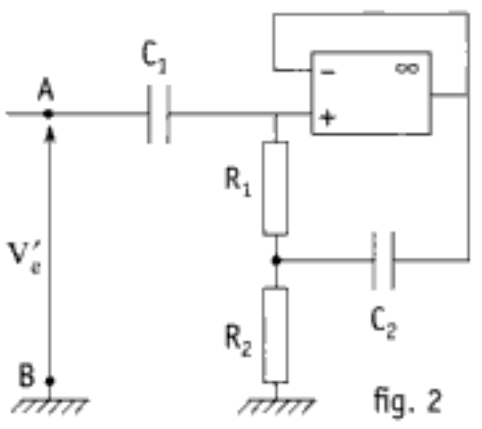


fig. 2

Copyrighted material

Solution

1. L'amplificateur opérationnel étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, nous avons $V_- = V_+ (= V_A)$. D'où (par application du théorème de Millman) :

$$\underline{V}_- = \underline{V}_A = \frac{\dfrac{\underline{V}_e}{R} + \dfrac{\underline{V}_s}{R''}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R''}} \quad (i_- = 0) \quad \text{et} \quad \underline{V}_+ = \underline{V}_A = \frac{\dfrac{\underline{V}_e}{R'} + 0}{\dfrac{1}{R'} + \dfrac{1}{\underline{Z}}} \quad (i_+ = 0).$$

Il vient alors :

$$\frac{\dfrac{\underline{V}_e}{R} + \dfrac{\underline{V}_s}{R''}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R''}} = \frac{\dfrac{\underline{V}_e}{R'}}{\dfrac{1}{R'} + \dfrac{1}{\underline{Z}}} \quad \text{soit encore} \quad \frac{1}{R'' + R}(R''\underline{V}_e + R\underline{V}_s) = \frac{1}{\underline{Z} + R'}(\underline{Z}\underline{V}_e);$$

$$\text{d'où} \quad R''\underline{V}_e + R\underline{V}_s = \frac{R'' + R}{R' + \underline{Z}}\underline{Z}\underline{V}_e \quad \text{et} \quad R\underline{V}_s = \underline{V}_e\left[\frac{\underline{Z}(R'' + R) - R''(\underline{Z} + R')}{(R' + \underline{Z})}\right];$$

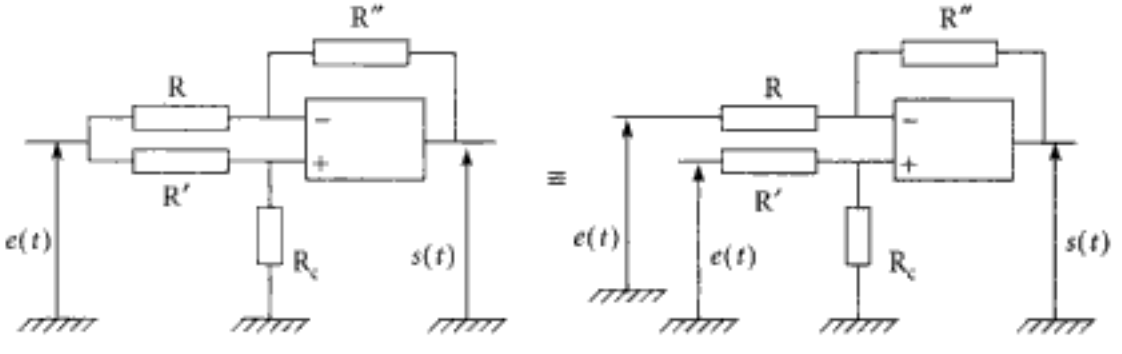
$$\text{soit} \quad \underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{RZ - R''R'}{R(R' + \underline{Z})} = \frac{\underline{Z} - \dfrac{R''R'}{R}}{R' + \underline{Z}}.$$

Nous obtenons $\underline{H} = 0$ pour $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{R''R'}{R}}$

Commentaire

On veut $\underline{H} = 0$ pour « tout » ω, ce qui implique également $s(t) = 0$ pour tout signal $e(t)$ pas nécessairement sinusoïdal (*cf.* transformée de Fourier). Dès lors, on peut imaginer que le dipôle D est réalisé à l'aide d'une simple résistance R_c, les autres dipôles étant eux-mêmes des résistances.

Le montage devient alors :



d'où :

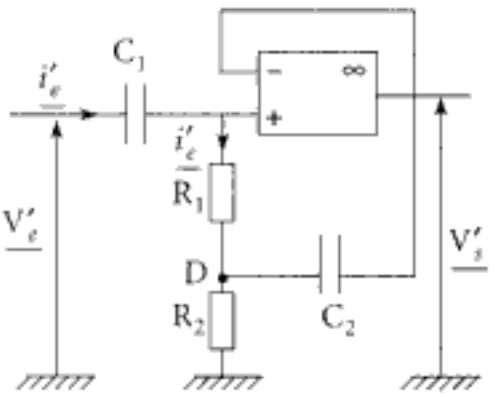
$$s(t) = \underbrace{-\frac{R''}{R}e(t)}_{\text{« inverseur »}} + \underbrace{\frac{R_c}{R_c + R'}}_{\text{« pont diviseur de tension »}}\underbrace{\left(1 + \frac{R''}{R}\right)}_{\text{« non inverseur »}}e(t)$$

Copyrighted material

et $s(t) = 0$ pour : $\dfrac{R''}{R} = \dfrac{1}{\dfrac{R'}{R_c}+1}\left(1+\dfrac{R''}{R}\right)$;

soit : $\left(1+\dfrac{R'}{R_c}\right)\dfrac{R''}{R} = 1+\dfrac{R''}{R} \Rightarrow \dfrac{R'R''}{R_cR} = 1 \Rightarrow \boxed{R_c = \dfrac{R'R''}{R}}$

2. a. Déterminons l'impédance d'entrée $\underline{Z'_e} = \dfrac{\underline{V'_e}}{\underline{i'_e}}$ du montage proposé.



Nous avons $\underline{V_-} = \underline{V_+} = \underline{V'_s}$ (1)

$\underline{i'_e} = jC_1\omega(\underline{V'_e} - \underline{V_+}) = \dfrac{1}{R_1}(\underline{V_+} - \underline{V_D})$ (2)

D'autre part $\underline{V_D} = \dfrac{jC_2\omega(\underline{V'_s} + \underline{i'_e})}{\dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega}$;

soit encore $\underline{V_D}(1 + jR_2C_2\omega) = jR_2C_2\omega\underline{V'_s} + R_2\underline{i'_e}$ (3)

(2) donne également $\underline{i'_e} = jC_1\omega(\underline{V'_e} - \underline{V'_s}) = \dfrac{1}{R_1}(\underline{V'_s} - \underline{V_D})$.

Éliminons $\underline{V_D}$ et $\underline{V'_s}$ entre les relations précédentes :

$$\underline{V_D} = \underline{V'_s} - R_1\underline{i'_e} \quad (4) \quad \text{et} \quad \underline{V'_s} = \underline{V'_e} - \frac{1}{jC_1\omega}\underline{i'_e} \quad (5)$$

Soit, avec (3) et (4) :
$(1 + jR_2C_2\omega)[\underline{V'_s} - R_1\underline{i'_e}] = jR_2C_2\omega\underline{V'_s} + R_2\underline{i'_e}$;

soit $\underline{V'_s} = (R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega)\underline{i'_e}$.

Et en utilisant (5) : $\underline{V'_e} - \dfrac{1}{jC_1\omega}\underline{i'_e} = (R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega)\underline{i'_e}$

d'où $\underline{V'_e} = \left[R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega + \dfrac{1}{jC_1\omega}\right]\underline{i'_e}$.

L'impédance d'entrée du montage a donc pour valeur :

$$\boxed{\underline{Z'_e} = R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}}$$

Commentaire

Elle correspond à la mise en série d'une résistance $R_{eq} = R_1 + R_2$, d'une inductance pure $L_{eq} = R_1R_2C_2$ et d'une capacité pure $C_{eq} = C_1$. Le montage à droite de C_1 simule donc une bobine (L_{eq}, R_{eq}) …

Copyrighted material

2. b. La condition imposée au **1.** est réalisée pour $\underline{Z'_e} = \dfrac{R''R'}{R}$ c'est-à-dire pour :

$$R_2 + R_1 + jR_2C_2R_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{R''R'}{R},$$

ce qui impose $\begin{cases} R_2 + R_1 = \dfrac{R''R'}{R} \\ \text{et } \omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_2C_2R_1C_1}} \end{cases}$ (6)

On a alors $\underline{H}(\omega = \omega_0) = 0$. La fonction de transfert s'annule bien pour une pulsation ω_0 déterminée par la relation (6).

Dès lors $\underline{Z} = \dfrac{R''R'}{R} + \dfrac{j}{C_1\omega_0}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$ (7) or $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z} - \dfrac{R''R'}{R}}{\underline{Z} + R'}$ (*cf.* **1.**), soit avec (7) :

$$\underline{H} = \frac{j\dfrac{1}{C_1\omega_0}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}{R' + \dfrac{R'R''}{R} + j\dfrac{1}{C_1\omega_0}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}{R'C_1\omega_0\left(1 + \dfrac{R''}{R}\right) + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

soit encore :

$$\boxed{H(p) = \frac{\left(1 + \left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2\right)}{\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2 + R'C_1\omega_0\left(1 + \dfrac{R''}{R}\right)\dfrac{p}{\omega_0} + 1}}$$

Commentaire

$H(p)$ s'écrit sous la forme : $H(p) = \dfrac{1 + \tau_0^2p^2}{\tau_0^2p^2 + 2\alpha\tau_0p + 1}$ avec $\tau_0 = \dfrac{1}{\omega_0}$ et $2\alpha = \dfrac{1}{Q}$

(Q = « facteur de qualité »). Il s'agit d'un **filtre réjecteur** (ou coupe-bande) centré sur la pulsation ω_0.

• À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), C_1 et C_2 sont réductibles, à la limite, à des coupe-circuit, $\underline{i'_e}$ devient nul et $\underline{Z'_e}$ infini, $\underline{H}$ tendant vers 1.

• À très haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), C_1 et C_2 sont réductibles, à la limite, à des fils et $\underline{V_+} = \underline{V_D}$ d'où $\underline{i'_e} = 0$ et $\underline{H}$ tend encore vers l'unité.

Enfin $|\underline{H}|^2 = \dfrac{\left[\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right]^2}{\left[R'\left(1 + \dfrac{R''}{R}\right)C_1\omega_0\right]^2 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$.

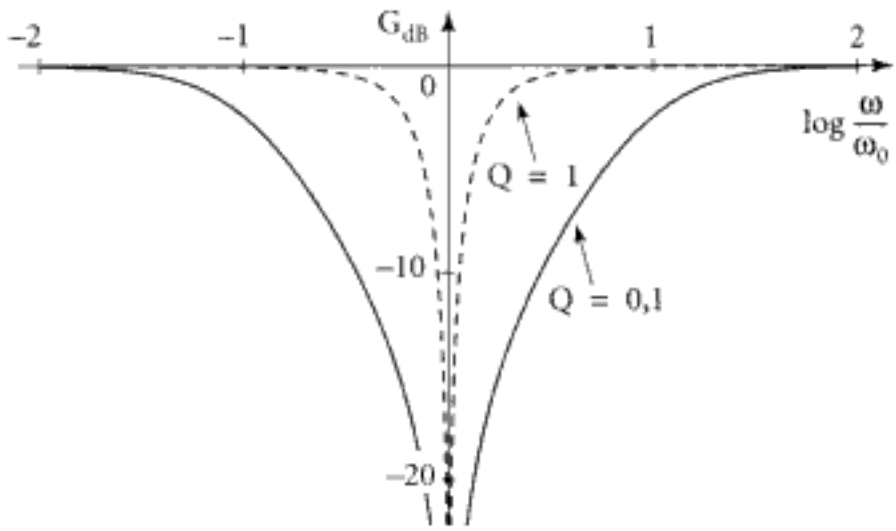
Copyrighted material

Posons $R'\left(1+\frac{R''}{R}\right)C_1\omega_0 = \frac{1}{Q}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, dès lors :

$$\underline{H} = \frac{jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} \quad \text{et} \quad |\underline{H}|^2 = \frac{Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2};$$

d'où les diagrammes de Bode :

• $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = f\left[\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$



• Pour $\varphi(\omega)$, on peut remarquer que l'on a également :

$$\underline{H} = \frac{x^2-1}{x^2-1-\frac{j}{Q}x} = \frac{1-x^2}{1+\frac{j}{Q}x-x^2};$$

et $\varphi(\omega) = \arg(1-x^2) - \arg\left(1+\frac{j}{Q}x-x^2\right)$

$= \theta - \psi;$

avec $\theta = \begin{cases} 0 \text{ pour } x<1 \\ \pi \text{ pour } x>1 \end{cases}$ $\quad \psi \begin{cases} \tan\psi = \frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2} \\ \sin\psi > 0. \end{cases}$

D'où $\left.\begin{array}{l} \psi = \arctan\left[\frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2}\right] \text{ pour } x \in [0, 1[\\ \psi = \pi + \arctan\left[\frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2}\right] \text{ pour } x > 1 \end{array}\right\}$ $\quad \boxed{\varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{1}{Q}\frac{x}{1-x^2}\right]}$

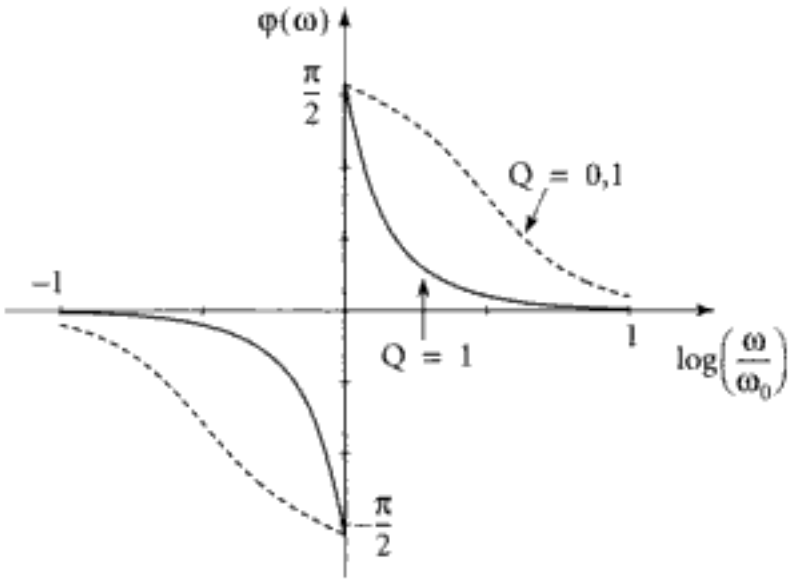
On remarque donc que :

$$\varphi(x \to 1^-) \to -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(1^-) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\varphi(x \to 1^+) \to +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(1^+) = +\frac{\pi}{2}.$$

Copyrighted material

D'où les courbes :



Commentaire

On a réalisé un filtre coupe-bande d'ordre deux présentant une discontinuité de phase en $x = 1$ $(\omega = \omega_0)$:

$$\varphi(\omega_0^+) - \varphi(\omega_0^-) = \pi.$$

Caractérisons la largeur de la « bande de fréquences éliminée ».

À cet effet, cherchons les ω_i tels que $|\underline{H}|(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

soit $Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$ et donc $x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$,

les solutions acceptables étant :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right] \\ x_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right] \end{cases} \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0} ;$$

soit

$$\boxed{\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$$

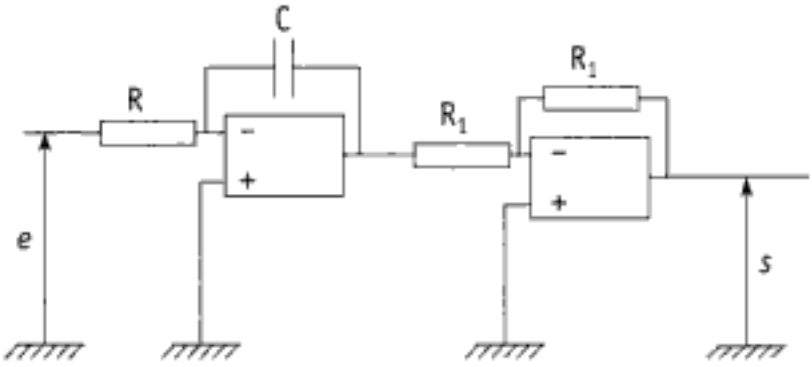
La « largeur » de la courbe est d'autant plus petite que Q est grand.

Copyrighted material

109 Intégrateur numérique – Numérisation d'un signal

Partie A

1.



Le montage représenté ci-dessus représente un intégrateur analogique (les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire).

Déterminer, en régime sinusoïdal établi, la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ (pulsation ω). On posera $\tau = RC$. Préciser les inconvénients d'un tel montage.

2. Pour réaliser une intégration numérique d'un signal $x(t)$, on commence par échantillonner $x(t)$ à une fréquence d'horloge f_H, ce qui fournit une suite de valeurs $x_n = x[t_0 + nT_H]$ (on prélève la valeur du signal $x(t)$ tous les $\Delta t = T_H$ à partir de l'instant t_0). L'intégrateur numérique fournit alors une suite de valeurs y_n définie par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{T_H}{2\tau}(x_n + x_{n+1}) \qquad n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_0 = 0.$$

a. Quels commentaires vous suggère cette expression ? Montrer que l'on peut ainsi « approcher » l'opération d'intégration.

b. On suppose maintenant que $x(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence f, soit en notation complexe : $\underline{x} = \underline{X_0} e^{j2\pi ft}$.

On considère alors que les y_n constituent une suite sinusoïdale telle que :

$$y_n = \mathrm{Re}(\underline{y_n}) \quad \text{avec} \quad \underline{y_n} = \underline{Y_0} e^{j2\pi ft_n}.$$

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H'}(j\omega) = \dfrac{\underline{Y_0}}{\underline{X_0}}$.

Montrer qu'elle s'identifie à celle calculée au **1.** pour $f \ll f_H$.

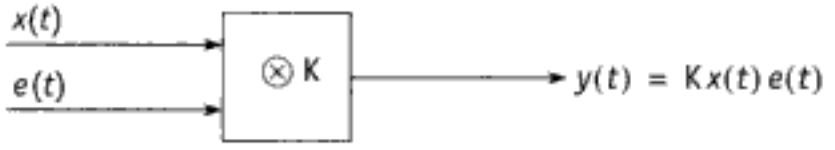
Quelle valeur maximale peut-on attribuer à f pour que l'intégrateur numérique puisse être « confondu » avec l'intégrateur analogique à moins de 1 % près ?

Copyrighted material

Partie B

1. Numérisation d'un signal analogique $x(t)$:

À cet effet, le signal $x(t)$ est traité selon le principe :



L'opérateur ⊗ K réalise l'opération multiplication des signaux $x(t)$ et $e(t)$ (K est une constante positive).

$e(t)$ est un signal périodique lié à une horloge lui imposant une période T_H. Ainsi :

$$\begin{cases} e = E_0 & \text{pour} \quad nT_H - \dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant nT_H + \dfrac{\tau}{2} \\ e = 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

L'étude qui suit prend pour exemple un signal source sinusoïdal :

$$x(t) = a \sin \omega' t \quad \text{avec} \quad \omega' = 2\pi f'.$$

A.N. : $E_0 = 1$ V ; $a = 5$ V ; $T_H = 0{,}1$ ms ; $\tau = 10$ µs ; $f' = 1$ kHz ; $K = 2$.

b. Expliquer qualitativement comment s'effectue la numérisation du signal $x(t)$

a. Montrer que le signal de sortie $y(t)$ peut être considéré comme la superposition de composantes sinusoïdales.

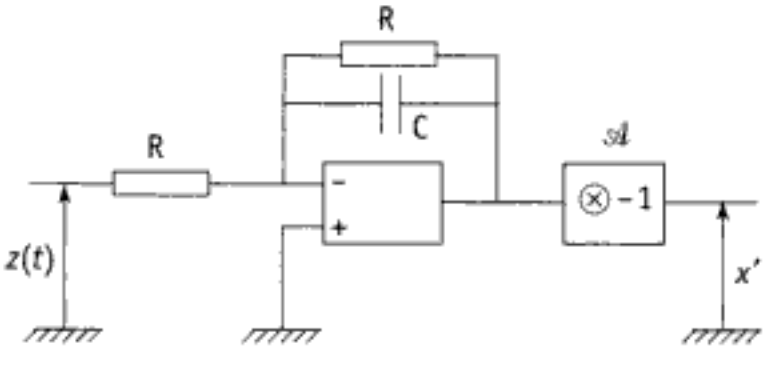
2. Restitution du signal source :

Le signal numérisé est transformé par un convertisseur numérique analogique (CNA) en un signal analogique $z(t)$ semblable au signal $y(t)$ étudié au **B. 1.** (On prendra $z(t) = y(t)$.) Pour récupérer le signal source $x(t)$, on réalise un filtrage du signal $z(t)$.

a. On considère, dans cette question, un filtre passe-bas idéal.

Montrer qu'un filtrage efficace nécessite une fréquence d'échantillonnage f_H supérieure à une valeur limite que l'on déterminera en fonction de f'.

b. On envisage d'utiliser le filtre passe-bas représenté ci-dessous ; $\mathscr{A}$ est l'opérateur multiplication par −1.



Déterminer sa fréquence de coupure f_c.

Est-il possible de choisir f_c pour que :

– la composante de fréquence la plus basse soit transmise quasi-intégralement avec un déphasage inférieur à 5° (en valeur absolue),

– et pour que la composante suivante soit atténuée de −20 dB ?

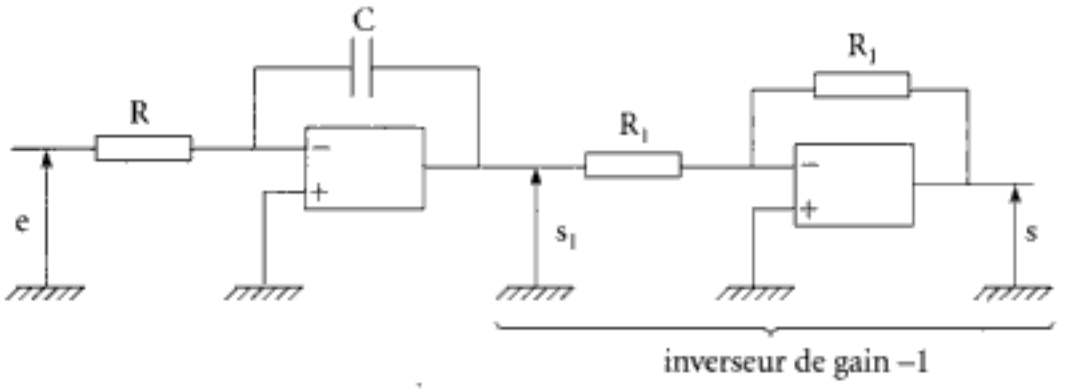
Commenter les résultats obtenus.

Copyrighted material

Solution

Partie A

A. 1.



L'amplificateur opérationnel étant supposé idéal, le même courant traverse la résistance R et la capacité C. Soit $i(t) = \dfrac{e(t) - 0}{R} = C\dfrac{d}{dt}(0 - s_1(t))$.

D'où : $\left.\begin{array}{l} \dfrac{ds_1}{dt} = -\dfrac{1}{RC}e(t) \\ \text{avec} \quad s(t) = -s_1(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s(t) = s(t_0) + \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e(t')dt'}$

Les défauts d'un tel montage sont :

– impédance d'entrée non idéale (elle se réduit à la résistance R) ;

– limitation en fréquence des amplificateurs opérationnels ;

– décalage continu du premier amplificateur opérationnel (offset), s'il existe, qui sera intégré par le système provoquant, en sortie, une dérive continue :

$$\frac{ds}{dt} = +\frac{e(t)}{\tau} + \text{cte.}$$

On pallie cet inconvénient en plaçant une résistance R′ en parallèle avec C, ce qui, en sortie, transforme la dérive en un décalage d'autant plus important que R′ est grand.

La présence de R′ a également pour effet de modifier la fonction du montage qui devient un filtre passe-bas de fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\dfrac{R'}{R}}{1 + j\omega R'C}$.

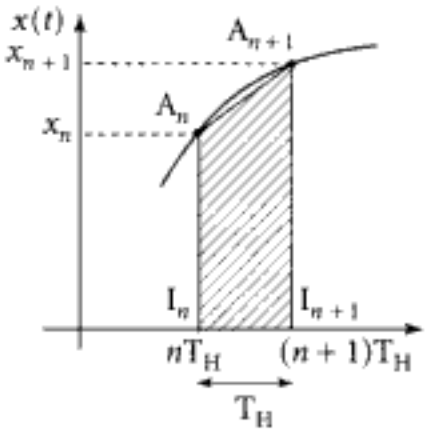
On aura $\underline{H} \# +\dfrac{1}{j\omega\tau}$ tant que $R'C\omega \gg 1$, soit $f \gg \dfrac{1}{2\pi R'C}$, ce qui limite les performances d'un tel « intégrateur ».

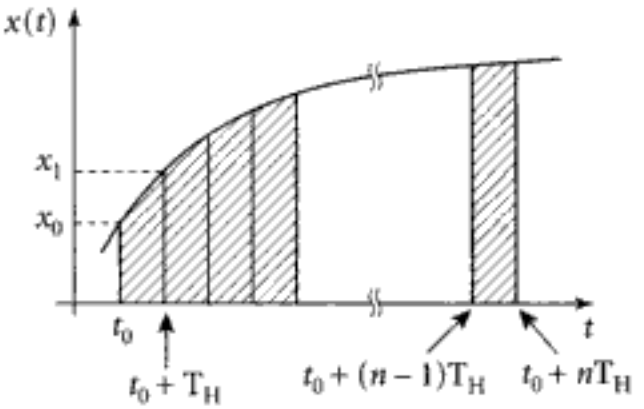
A. 2. a. Intégrateur numérique :

■ À partir des valeurs d'échantillonnage : $x_n = x(nT_H)$ et $x_{n+1} = x((n+1)T_H)$, on peut associer l'aire $\mathcal{A}(n, n+1)$ du trapèze $I_nA_nA_{n+1}I_{n+1}$ selon :

$$\mathcal{A}(n, n+1) = \frac{1}{2}T_H(x_{n+1} + x_n).$$

Copyrighted material





On a ainsi : $y_1 = y_0 + \frac{T_H}{2\tau}(x_1 + x_0) = \frac{1}{\tau}\mathcal{A}(0, 1)$ (avec $y_0 = 0$).

De même $y_2 = y_1 + \frac{1}{\tau}\mathcal{A}(1, 2)$ donc : $y_n = \frac{1}{\tau}[\mathcal{A}(0, 1) + \mathcal{A}(1, 2) + \cdots + \mathcal{A}(n-1, n)]$.

Ainsi y_n représente, au facteur multiplicatif près $\frac{1}{\tau}$, la somme des aires des trapèzes de « largeur $\Delta t = T_H$ » s'appuyant sur la courbe $x(t)$. Cette somme constitue une approximation de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des temps.

$$\sum_{0}^{n-1}\mathcal{A}(i, i+1) = \text{ approximation de } \left\{\int_{t_0}^{t} x(t')\mathrm{d}t'\right\} \text{ avec } t = t_0 + nT_H.$$

D'où : $y_n = \frac{1}{\tau}\sum_{0}^{n-1}\mathcal{A}(i, i+1) = \text{ approximation de } \left\{\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} x(t')\mathrm{d}t'\right\}$.

Commentaire

D'une autre manière, on peut écrire $y_n = y(t_0 + nT_H)$, soit :

$$\frac{y(t_0 + nT_H) - y(t_0 + (n-1)T_H)}{T_H} = \frac{1}{\tau}\left[\frac{x(t_0 + nT_H) + x(t_0 + (n-1)T_H)}{2}\right].$$

Et, en supposant que T_H reste très petit devant les temps caractéristiques associés aux variations des fonctions y et x, on peut confondre le premier membre avec la dérivée de y en t et le second avec $\frac{x(t)}{\tau}$, d'où : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx \frac{x(t)}{\tau} \Rightarrow y(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{x(t')\mathrm{d}t'}{\tau}$ pour $y(t_0) = 0$.

A. 2. c. $x(t)$ est désormais un signal sinusoïdal pour lequel : $\underline{x_n}(t) = \underline{X_0}e^{j2\pi f(t_0 + nT_H)}$.

De même, on pose $\underline{y_n} = \underline{Y_0}e^{j2\pi f(t_0 + nT_H)}$; on a donc d'après l'équation reliant les y_n aux x_n, relation caractéristique de l'intégrateur numérique (et après simplification par $e^{j2\pi f t_0}$) :

$$\underline{Y_0}[e^{j(2\pi f T_H)(n+1)} - e^{j2\pi f T_H n}] = \frac{T_H}{2\tau}\underline{X_0}[e^{j2\pi f T_H(n+1)} + e^{j2\pi f T_H n}].$$

Copyrighted material

Soit encore :

$$\underline{Y}_0(e^{j2\pi f T_H} - 1) = \frac{T_H}{2\tau}\underline{X}_0[e^{j2\pi f T_H} + 1].$$

Finalement :

$$\underline{Y}_0 2j\sin(\pi f T_H) = \frac{T_H}{2\tau}\underline{X}_0 2\cos(\pi f T_H).$$

Soit une fonction de transfert $\underline{H}' = \dfrac{\underline{Y}_0}{\underline{X}_0}$ définie par :

$$\boxed{\underline{H}' = \frac{T_H}{2\tau}\frac{1}{j\tan(\pi f T_H)}}$$

Pour $f \ll f_H$, nous avons :

$$\tan(\pi f T_H) = \tan\left(\pi\frac{f}{f_H}\right) \approx \pi\frac{f}{f_H}$$

et

$$\underline{H}' \# \frac{T_H}{2\tau}\frac{1}{j\pi f T_H} \Rightarrow \underline{H}' \# \frac{1}{j2\pi f\tau} = \frac{1}{j\omega\tau}.$$

Il s'agit bien de la fonction de transfert d'un intégrateur analogique idéal de constante de temps caractéristique τ.

■ Si l'inégalité n'est pas vérifiée, on peut tout de même remarquer que l'on retrouve le déphasage de l'intégrateur analogique pour $\tan(\pi f T_H) > 0$, c'est-à-dire notamment pour :

$$\pi f T_H < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{f_H > 2f}$$

On aura alors un bon intégrateur pour $|\underline{H}'|$ peu différent de $|\underline{H}|$. Il faut donc imposer :

$$\frac{|\underline{H}| - |\underline{H}'|}{|\underline{H}|} < 0{,}01.$$

D'où :

$$\frac{|\underline{H}'|}{|\underline{H}|} \ll 0{,}99 \Rightarrow \frac{\tan(\pi f T_H)}{\pi f T_H} \geqslant \frac{1}{0{,}99}.$$

Pour évaluer la valeur de la quantité $\pi f T_H$, faisons l'approximation suivante :

$$\tan(\alpha) \# \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

D'où à la limite :

$$1 + \frac{1}{3}(\pi f T_H)^2 = \frac{1}{0{,}99}$$

et $(\pi f T_H) = \sqrt{3 \cdot \left(\dfrac{1}{0{,}99} - 1\right)} = 0{,}173.$

Soit :

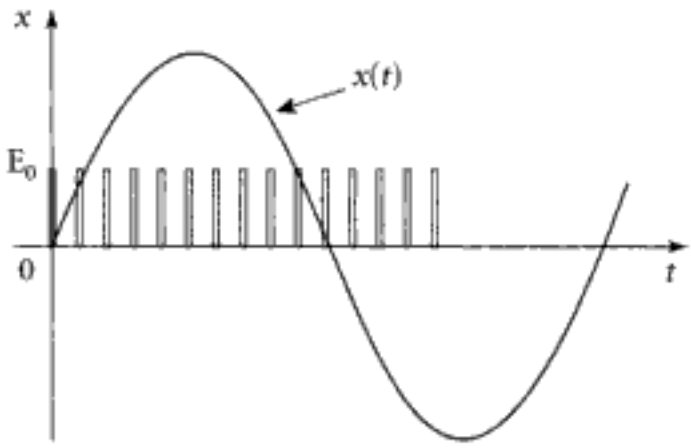
$$f \leqslant \frac{0{,}173}{\pi} f_H \Rightarrow \boxed{f \leqslant 5{,}5 \cdot 10^{-2} f_H}$$

Copyrighted material

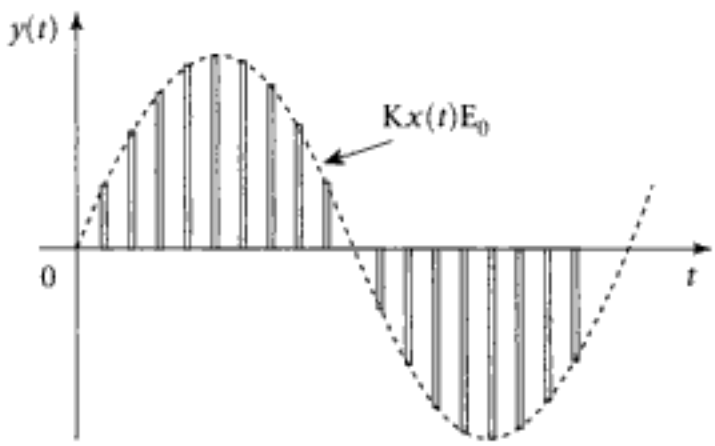
Partie B

B. 1. a. Représentons sur un même graphe les fonctions $x(t)$ et $e(t)$.

On a $f' = 1$ kHz soit $T' = 1$ ms ; $T_H = 0{,}1$ ms et $\tau = 10$ µs.



Le signal $y(t)$ prend alors la forme :



Le signal de sortie $y(t)$ est constitué d'une suite de valeurs $y_n = KE_0x(nT_H)$, en considérant que τ est suffisamment petit pour que $x(t)$ soit pratiquement constant sur **les intervalles d'échantillonnage** $\left[nT_H - \frac{\tau}{2}, nT_H + \frac{\tau}{2}\right]$.

Il suffit alors de traiter cette suite $\{y_n\}$ de valeurs analogiques par un convertisseur analogique numérique (CAN) qui associera le nombre binaire Y_n à la grandeur y_n.

B. 1. b. Le signal $e(t)$ périodique (période T_H) est décomposable en série de Fourier selon :

$$e(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_H t) + B_n \sin(n\omega_H t) \quad \text{où} \quad \omega_H = \frac{2\pi}{T_H}.$$

A_0 représente la valeur moyenne de $e(t)$. Or, sur une période T_H, $e(t)$ est non nul sur une durée τ où il prend la valeur constante E_0. Il vient alors :

$$\langle e(t) \rangle = A_0 = E_0 \frac{\tau}{T_H}.$$

De plus, la fonction $e(t)$ est paire, ce qui impose $B_n = 0$ pour tout n.

Quant aux coefficients A_n, ils se calculent classiquement de la façon suivante ($n \geqslant 1$)

Copyrighted material

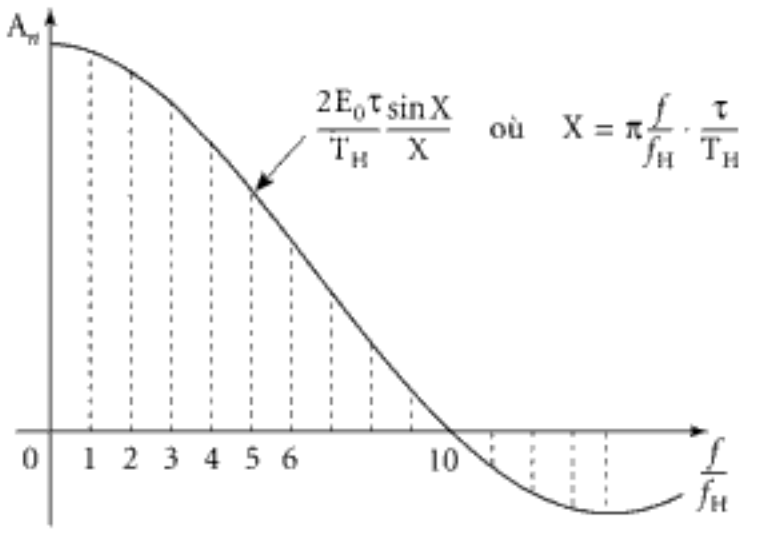
$$A_n = \frac{2}{T_H}\int_0^{T_H} e(t)\cos n\omega_H t\,dt.$$

Soit ici : $A_n = \frac{2}{T_H}2\int_0^{\frac{\tau}{2}} E_0\cos n\omega_H t\,dt = \frac{4E_0}{T_H n\omega_H}\sin\left(2\pi n\frac{\tau}{2T_H}\right).$

D'où : $A_n = \frac{2E_0}{n\pi}\sin\left(\pi n\frac{\tau}{T_H}\right).$

Représentons la suite des A_n sur un même graphe (spectre du signal $e(t)$). On a :

$$A_n = \frac{2E_0\tau}{T_H}\frac{\sin\left(\frac{n\omega_H\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_H\tau}{2}\right)} \quad \text{avec } f_H = \frac{1}{T_H} = 10^4 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau} = 10^5 \text{ Hz}.$$



On a bien $\sin X = 0$ pour $\pi\frac{f}{f_H}\cdot\frac{\tau}{T_H} = p\pi$, soit :

$$\frac{f}{f_H} = p\frac{T_H}{\tau} = p\frac{10^{-4}}{10^{-5}} = p\cdot 10.$$

Le signal $y(t)$ devient alors ($y(t) = Kx(t)e(t)$) :

$$y(t) = Ka\sin\omega' t\cdot\left\{A_0 + \sum_1^{\infty} A_n\cos n\omega_H t\right\}$$

$$y(t) = KaA_0\sin\omega' t + Ka\sum_1^{\infty} A_n\cos n\omega_H t\sin\omega' t.$$

Or $\cos n\omega_H t\sin\omega' t = \frac{1}{2}\{\sin[(n\omega_H + \omega')t] - \sin[(n\omega_H - \omega')t]\}.$

Fsinalement, nous obtenons :

$$y(t) = KaA_0\sin\omega' t + \frac{Ka}{2}\sum_1^{\infty} A_n\{\sin[(n\omega_H + \omega')t] - \sin[(n\omega_H - \omega')t]\}.$$

Copyrighted material

Ce signal comprend :

– une composante de fréquence $f' = 1$ kHz et d'amplitude :

$$\mathrm{K}a\mathrm{A}_0 = 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{10^{-5}}{10^{-4}} = 1 \text{ V};$$

– deux composantes ($n = 1$) de fréquences respectives $f_\mathrm{H} - f'$ et $f_\mathrm{H} + f'$ (9 et 11 kHz) et d'amplitudes $\frac{\mathrm{K}a}{2}\mathrm{A}_1$, soit :

$$\frac{\mathrm{K}a}{2}\mathrm{A}_1 = \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{\pi} \sin\left(\pi \frac{10^{-5}}{10^{-4}}\right)\right] = 0{,}98 \text{ V};$$

– puis les couples de fréquences $\{nf_\mathrm{H} - f', nf_\mathrm{H} + f'\}$ pour $n > 1$.

B. 2. Restitution du signal source :

B. 2. a. Un filtre passe-bas idéal, de fréquence de coupure f_c, sera caractérisé par une fonction de transfert :

$$\underline{\mathrm{H}} = 1 \text{ pour } f \leqslant f_c \text{ et } \underline{\mathrm{H}} = 0 \text{ pour } f > f_c.$$

Pour récupérer le signal $x(t)$, à un terme de proportionnalité près, il suffit de laisser passer la composante de la fréquence f' et d'arrêter les composantes de fréquences :

$$nf_\mathrm{H} - f' \quad \text{et} \quad nf_\mathrm{H} + f'.$$

On doit donc imposer :

$$f_c > f' \quad \text{et} \quad f_c < f_\mathrm{H} - f'.$$

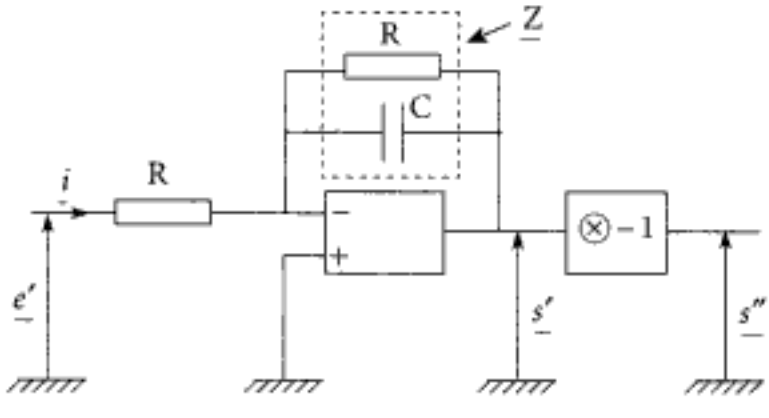
Soit encore $f' < f_c < f_\mathrm{H} - f'$.

Cette double inégalité n'est possible que pour :

$$\boxed{f_\mathrm{H} > 2f'} \quad (\text{ici } f_\mathrm{H} > 2 \text{ kHz}).$$

Il faut donc que la fréquence d'échantillonnage f_H soit au moins égale au double de la fréquence f' du signal source.

B. 2. b. Filtrage :



Copyrighted material

En associant l'admittance $\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega$ au dipôle {R parallèle C}, il vient :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}' - 0}{R} = \underline{Y} \cdot (0 - \underline{s}').$$

D'où : $\underline{s}' = -\frac{1}{R\underline{Y}}\underline{e}$ et $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ $(\underline{s}'' = -\underline{s}')$.

Il s'agit bien d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad \left(\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}\right).$$

La composante de pulsation ω voit son amplitude multipliée par $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$ et sa phase se décaler d'un angle $\psi = -\text{Arctan}\left(\frac{f}{f_c}\right)$.

Le système de filtrage envisagé ici réalise le cahier des charges pour :

- $\text{Arctan}\left(\frac{f'}{f_c}\right) \leqslant 5°$ et $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f'}{f_c}\right)^2}} \sim 1$;
- $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_H - f'}{f_c}\right)^2}} \leqslant \frac{1}{10}$ (car $20\log\frac{1}{10} = -20$ dB).

Les deux inégalités donnent :

$$f_c > \frac{1}{8{,}75 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow f_c > 11{,}5 \text{ kHz}$$

$$f_c < \frac{1}{\sqrt{99}}(f_H - f') \Rightarrow f_c < 0{,}90 \text{ kHz}.$$

Ces résultats sont bien évidemment incompatibles.

Pour envisager un filtrage satisfaisant, on pourra chercher à augmenter l'ordre du filtre et (ou) augmenter la fréquence d'échantillonnage f_H.

Copyrighted material

Hidden page

Partie 3

Électromagnétisme

Hidden page

chapitre

1

Électrostatique Magnétostatique

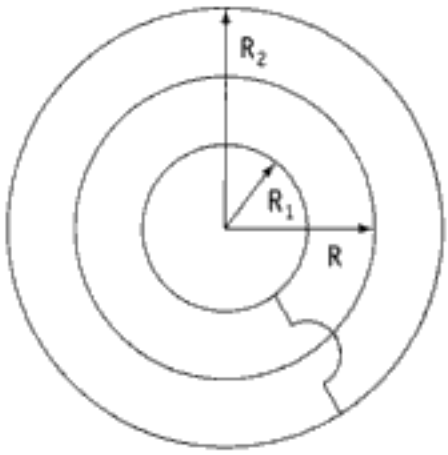
Copyrighted material

101 Condensateur cylindrique à trois armatures

Un condensateur est constitué de trois armatures cylindriques coaxiales de longueur h et de rayons R_1, R et R_2 :

$$R_1 < R < R_2 \quad \text{et} \quad h \gg R_2$$

Les armatures $\mathcal{A}_1(R_1)$ et $\mathcal{A}_2(R_2)$ sont reliées par un fil conducteur.



1. Proposer deux méthodes pour calculer la capacité C du système.

2. Montrer que C passe par un minimum pour une valeur R_0 de R que l'on déterminera, R_1, R_2 et h étant fixés.

1. Ce qu'il faut savoir

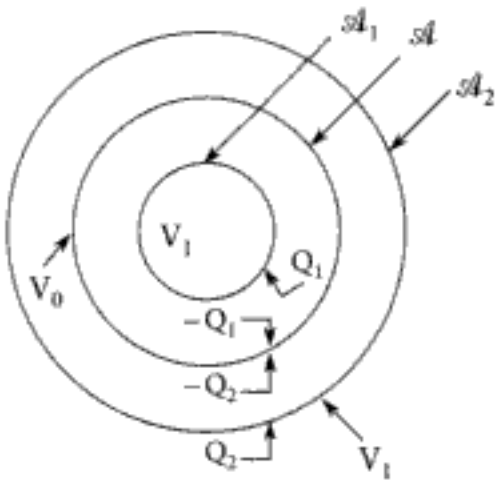
- Condensateur cylindrique.
- Association de condensateurs.
- Théorème de Gauss.

2. Ce qu'il faut comprendre

Se rappeler que la capacité est définie comme le rapport de la charge totale « condensée » par la différence de potentiel entre les armatures constituant le condensateur. On pourra donc chercher à déterminer les charges en fonction des potentiels.

3. Solution

1. La longueur du système étant très grande devant les rayons, on négligera les effets de bord.



■ Première méthode

Notons V_1 le potentiel commun aux armatures $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, et V_0 le potentiel de l'armature $\mathcal{A}(R)$: $\mathcal{A}_1$ porte une charge Q_1.

Soit Q_2 la charge portée par la surface intérieure de $\mathcal{A}_2$. Enfin notons Q_1' et Q_2' les charges des surfaces intérieure et extérieure de $\mathcal{A}$.

Copyrighted material

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre dont la surface latérale est entièrement contenue dans le condensateur $\mathscr{A}$ (auquel en attribue une faible épaisseur) :

$$\vec{E}\,(\text{métal}) = \vec{0} \rightarrow \Phi_{\Sigma_f}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}[Q_1 + Q_1'] \rightarrow \boxed{Q_1' = -Q_1} \quad (1)$$

De même avec un cylindre contenu dans $\mathscr{A}_2$:

$$\vec{E}\,(\text{métal}) = \vec{0} \rightarrow \Phi_{\Sigma_f}(\vec{E}) = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}[\underbrace{Q_1 + Q_1'}_{0} + Q_2' + Q_2] \rightarrow \boxed{Q_2' = -Q_2} \quad (2)$$

De plus, assimilant le système à des cylindres infinis ($h \gg R_2$), on peut considérer que le champ est radial (sauf sur les bords) et qu'il ne dépend que de r (distance à l'axe).

On a donc en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r et de surface $S = 2\pi r h$:

$$R_1 < r < R \qquad E(r)2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_1$$

$$R < r < R_2 \qquad E(r)2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + (-Q_1) + (-Q_2)) = -\frac{Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Soit pour le potentiel ($dV = -E(r)\,dr$) :

$$V_0 - V_1 = -\int_{R_1}^{R} E(r)\,dr \quad \text{et} \quad V_1 - V_0 = -\int_{R}^{R_2} E(r)\,dr$$

d'où $$V_0 - V_1 = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R}\frac{dr}{r} \rightarrow V_0 - V_1 = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R}{R_1}\right) \quad (1)$$

et $$V_1 - V_0 = -\frac{(-Q_2)}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_2}{R}\right) \quad (2)$$

La capacité du condensateur est alors définie par :

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_1 - V_0}$$

or $$Q_1 + Q_2 = (V_1 - V_0)\left\{\frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R}\right)}\right\}.$$

D'où : $$\boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 h\left[\frac{1}{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)} + \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R}\right)}\right]}$$

■ Deuxième méthode

Il suffit de remarquer que le système proposé consiste en la mise en *parallèle* des condensateurs cylindriques $\mathscr{C}_1[R_1, R]$ et $\mathscr{C}_2[R, R_2]$ de capacités respectives C_1 et C_2.

On a donc $C = C_1 + C_2$.

Copyrighted material

Or $C_1 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R}{R_1}\right)}$ et $C_2 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R}\right)}$

ce qui redonne bien le résultat obtenu par la première méthode.

2. Remarquons que $C = 2\pi\varepsilon_0 h \cdot \dfrac{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{R}{R_1}\right)\ln\left(\dfrac{R_2}{R}\right)}$, et la capacité est minimale lorsque

la fonction $f(R) = \ln\left(\dfrac{R}{R_1}\right) \cdot \ln\left(\dfrac{R_2}{R}\right)$ est maximale.

Cette dernière expression est de la forme $f(R) = u(R) \cdot v(R)$,

avec $u(R) + v(R) = \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) = \text{cte}$.

Elle est extrémale pour :

$$u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0$$

ce qui donne $u = v$, soit ici $\ln\left(\dfrac{R}{R_1}\right) = \ln\left(\dfrac{R_2}{R}\right)$,

c'est-à-dire pour $R = R_0$ tel que $\boxed{R_0 = \sqrt{R_1 R_2}}$

De plus, elle tend vers 0^+ quand $R \to R_1^+$ ou lorsque $R \to R_2^-$, et :

$$\ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)\ln\left(\frac{R_2}{R_0}\right) = \left[\ln\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)\right]^2 > 0.$$

Il s'agit donc bien d'un maximum pour $f(R)$, et d'un minimum pour $C(R)$.

Commentaires

Écrire que la capacité est minimale signifie aussi que l'énergie emmagasinée dans le condensateur est la plus petite possible pour V_1, V_0, R_1, R_2 et h fixés. Si l'on considère alors l'énergie comme fonction de R, on doit avoir :

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R}\right)_{R = R_0} = 0 \quad \text{avec } U = \frac{1}{2}C\,(V_1 - V_0)^2.$$

Or, si l'on envisage une petite déformation du condensateur central $\mathscr{A}$ qui fait passer son rayon de R à R + dR, il faudrait exercer un travail $\delta W_{op} = F\,\mathrm{d}R$ ($F = \iint \delta f$) tel que (bilan d'énergie à potentiels constants) :

$$\delta W_{op} + \delta W_{\text{générateur}} = \delta U.$$

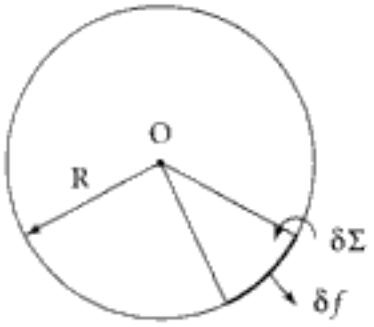
Or $\delta W_{\text{générateur}} = (V_1 - V_0)\delta Q_T$
$= \delta[(V_1 - V_0)Q_T] = 2\delta U.$

D'où $\delta W_{op} = -\delta U$ et $\mathrm{d}U = -F\,\mathrm{d}R$

Copyrighted material

$\left(\frac{dU}{dR}\right)_{R_0} = 0$ implique alors que $F(R_0) = 0$, ce qui veut dire que les forces élémentaires qui s'exercent sur les surfaces $\delta\Sigma$ intérieure et extérieure de l'armature $\mathcal{A}(R)$ doivent se composer exactement lorsque R a la valeur R_0. Cela impose que les densités surfaciques soient les mêmes sur les deux faces et donc :

$$-Q_1 = -Q_2 .$$

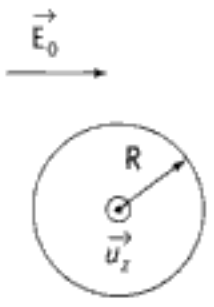


Soit encore, d'après (1) et (2) : $\ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_2}{R_0}\right)$

C'est a dire $\boxed{R_0 = \sqrt{R_1 R_2}}$ comme il se doit.

102 Cylindre conducteur dans un champ uniforme

Un cylindre conducteur « infini », de rayon R, est placé dans un champ électrostatique $\vec{E}_0$ « uniforme » perpendiculaire à son axe. On désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace extérieur au cylindre sachant que ce dernier n'est pas chargé.



1. a. Rappeler l'expression du potentiel associé à un fil infini uniformément chargé (densité linéique λ).

b. On considère deux fils infinis parallèles (densités λ et $-\lambda$) distants de a. Donner la limite de la fonction potentiel lorsque a tend vers zéro et λ vers l'infini avec $\lambda a = C = \text{cte}$.

2. Déterminer, à partir des résultats précédents, l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ à l'extérieur du cylindre.

1. Ce qu'il faut savoir

- Fil infini uniformément chargé.
- Équation de Laplace, conditions aux limites.
- Théorème de Gauss.

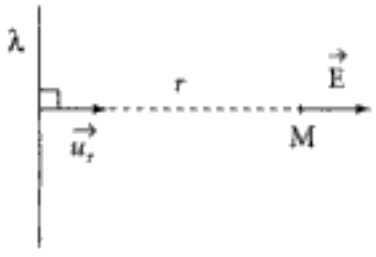
2. Ce qu'il faut comprendre

Pour la question **2)**, on cherchera une solution à l'équation de Laplace par superposition de solutions simples.

Copyrighted material

3. Solution

1. a. Potentiel associé à un fil infini uniformément chargé :



Le fil infini crée un champ radial (coordonnées cylindriques) :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}.$$

L'application du **théorème de Gauss** à un cylindre passant par M ayant le fil pour axe, donne :

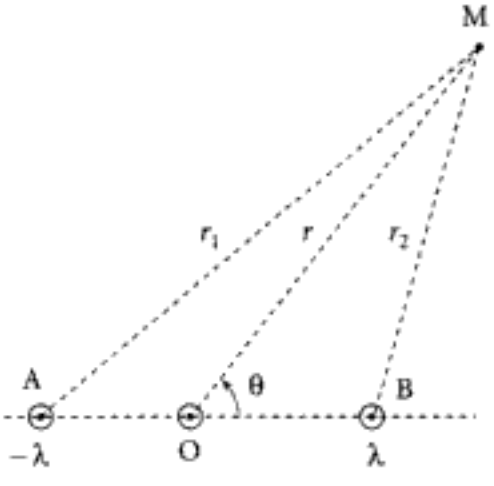
$$E(R) \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}.$$

Le potentiel est fourni par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ avec ici $V = V(r)$.

D'où $-\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ et $\boxed{V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{b}\right)}$

(b constante arbitraire).

b. En utilisant le résultat précédent, il vient :



$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_1}{b_1}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{b_2}\right).$$

Soit $V(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) + \text{cte}$,

or $r_1 = \left(r^2 + \dfrac{a^2}{4} + ar\cdot\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$,

car $r_1^2 = AM^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2$,

et $r_2 = \left(r^2 + \dfrac{a^2}{4} - (ar\cdot\cos\theta)\right)^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$$V(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{r^2 + \frac{a^2}{4} + \text{arcos}\theta}{r^2 + \frac{a^2}{4} - \text{arcos}\theta}\right] + \text{cte} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}\right] + \text{cte}.$$

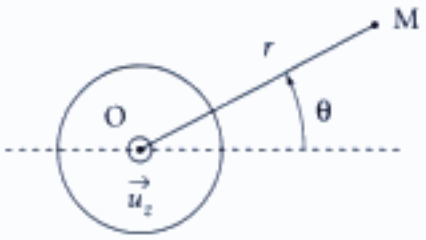
Soit $V(r) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{2a}{r}\cos\theta + \cdots\right] + \text{cte} = \dfrac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r} + \cdots + \text{cte}.$

Et donc à la limite proposée ($\lambda \to +\infty$, $a \to 0$, avec $\lambda a = \text{cte}$: quantité homogène à un moment dipolaire par unité de longueur) :

$$\boxed{V(r) \sim \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r} + \text{cte}}$$

Copyrighted material

2. ■ Le cylindre étant infini (idéalisation), le champ $\vec{E}_0$ uniforme, le problème est invariant par translation selon $\vec{u}_z$. Tout point M étant repéré par ses coordonnées cylindriques d'axe Oz (r, θ, z), le potentiel (ainsi que le champ) ne dépend que de r et θ :



$$\Phi = \Phi(r, \theta).$$

■ Dans l'espace extérieur au cylindre, le potentiel doit vérifier l'équation de Laplace (sources extérieures à l'infini) : $\Delta\Phi = 0$.

■ À cette équation il faut ajouter les conditions aux limites :

a) quand $r \to \infty$, $\vec{E} \to \vec{E}_0$ et $\Phi \to -E_0 r\cos\theta + \Phi_0$.

(En effet, $-\vec{\nabla}(-E_0 r\cos\theta) = E_0\cos\theta\,\vec{u}_r - E_0\sin\theta\,\vec{u}_\theta = \vec{E}_0$)

b) pour $r = R^+$, la surface du cylindre est une équipotentielle d'où $\Phi(R, \theta) = \Phi_1 = \text{cte}$ quel que soit θ.

■ Remarquons maintenant que parmi les « solutions simples » à l'équation de Laplace (dans le cadre de la géométrie cylindrique), nous avons :

$$\Phi_{11} = -K_1 \ln\left(\frac{r}{R}\right) \text{ (d'après la première question)}$$

$$\Phi_{12} = K'\frac{\cos\theta}{r} \text{ (d'après le deuxième question).}$$

Ajoutons enfin la solution associée à un champ uniforme :

$$\Phi_{13} = -K''r\cos\theta.$$

POINT MÉTHODE

$\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}$ vérifient $\Delta\Phi = 0$ en coordonnées cylindriques. Ce ne sont évidemment pas les seules. Nous pouvons déterminer une autre solution par combinaison linéaire de Φ_{1i} (linéarité de l'équation de Laplace), soit :

$$\Phi = -K_1 \ln\frac{r}{R} + K'\frac{\cos\theta}{r} - K''r\cos\theta + \Phi_0.$$

Si une telle solution vérifie toutes les équations aux limites, elle nous fournit effectivement le champ électrostatique existant à l'extérieur du cylindre.

■ La solution envisagée est telle que :

• Les effets étudiés étant linéaires les constantes K_1, K' et K'' sont nécessairement prépositionnelles à E_0.

• $\lim\limits_{r \to +\infty} \vec{E} = \vec{E}_0$ (champ uniforme) implique :

$$\lim_{r \to +\infty}\left[\frac{K_1}{r}\vec{u}_r + \frac{K'}{r^2}(\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta) + K''(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)\right] = \vec{E}_0$$

d'où, puisque $\vec{E_0} = E_0(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$, $\boxed{K'' = E_0}$

• la surface du cylindre doit être équipotentielle :

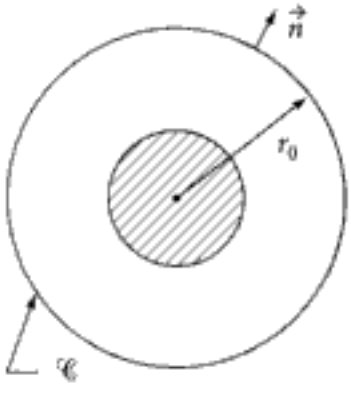
$$K'\frac{\cos\theta}{R} - E_0 R\cos\theta + \Phi_0 = \text{cte, pour tout } \theta$$

ce qui impose :

$$\frac{K'}{R} = E_0 R \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{K' = E_0 R^2}$$

• Traduisons enfin que le cylindre reste globalement neutre.

$$\int_{\Sigma_T} \vec{E}\cdot\delta\vec{\Sigma} = 0 \quad \text{avec} \quad \Sigma_T = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$



(Σ surface cylindrique de longueur L extérieure au conducteur, Σ_1 et Σ_2 surfaces de base « fermant » le cylindre $\mathscr{C}$).

Or $\vec{E} = \vec{E_{11}} + \vec{E_{12}} + \vec{E_0}$ $(\vec{E_{13}} = \vec{E_0})$.

Le champ uniforme $\vec{E_0}$ ne contribue pas à l'intégrale (Il correspond par ailleurs à des « sources à l'infini » donc extérieures au cylindre $\mathscr{C}$ considéré). Il en est de même de $\vec{E_{12}}$ (champ dipolaire).

Il reste donc :

$$\int_{\Sigma_T} \vec{E}\cdot\delta\vec{\Sigma} = \frac{K_1}{r_0}\iint \vec{u_r}\cdot\vec{n}\,\delta\Sigma = \frac{K_1}{r_0}\cdot 2\pi r_0 L = 0.$$

Soit $\boxed{K_1 = 0}$

Finalement la fonction $\boxed{\Phi(r,\theta) = E_0\cdot\left(\frac{R^2}{r} - r\right)\cos\theta + \Phi_0}$ convient. Le champ électrostatique régnant dans l'espace est donc :

$$\boxed{\vec{E} = E_0\cdot\left(\frac{R^2}{r^2} + 1\right)\cos\theta\,\vec{u_r} + E_0\cdot\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)\sin\theta\,\vec{u_\theta}}$$

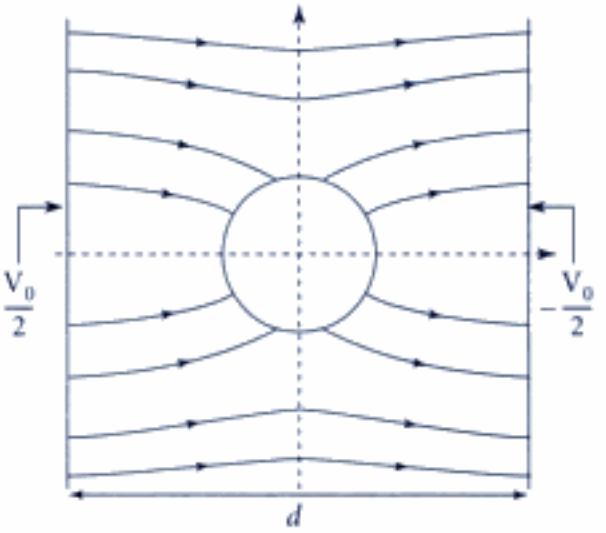
Commentaire

Un problème plus réaliste consisterait à placer un conducteur cylindrique (de rayon R et de longueur L) entre les plaques d'un conducteur de longueur L, de hauteur H et distantes de d (portées aux potentiels $\frac{V_0}{2}$ et $-\frac{V_0}{2}$).

Copyrighted material

Si l'on néglige les effets de bord et pour $d \gg R$, le champ est donné, avec une bonne approximation, par l'expression précédente.

De plus, nous pouvons prendre : $E_0 d = V_0$, de sorte que Φ_0 est infiniment petit d'ordre deux aux moins en $\frac{R}{d}\cdots$

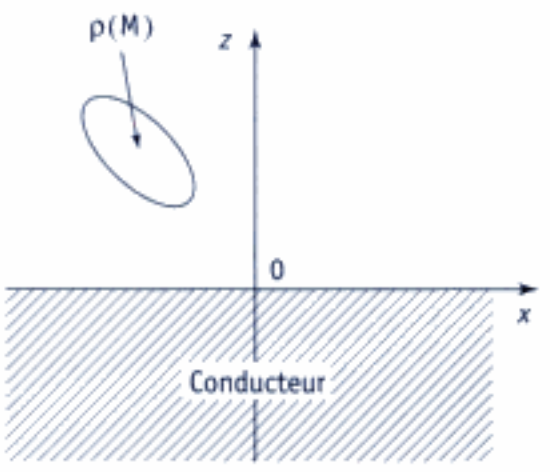


103 Charges volumiques et conducteur

Le demi-espace $z > 0$ comporte des charges de densité volumique $\rho(x, y, z)$.

Le demi-espace $z < 0$ est constitué d'un milieu conducteur porté à un potentiel nul.

On note $V_0(x, y, z)$ la fonction potentiel que l'on obtiendrait en tout point de l'espace s'il n'y avait pas le milieu conducteur (lequel serait remplacé par le vide).



1. On cherche à déterminer, pour le problème réel, la fonction potentiel :

$V(x, y, z)$ en tout point $z > 0$.

On pose, à cet effet :

$$V(x, y, z > 0) = V_0(x, y, z) - V_0(x, y, -z).$$

Justifier ce choix.

2. Calculer la densité surfacique de charges σ apparaissant sur le plan conducteur en $z = 0$. On exprimera le résultat en fonction de la dérivée $\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x, y, z = 0}$.

3. Étudier le cas particulier où la distribution de charges $\rho(x, y, z)$ se réduit à une charge ponctuelle q placée en un point A à une distance d du plan xOy.

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de Poisson de l'électrostatique.
- Loi de Coulomb à la surface d'un conducteur.

2. Ce qu'il faut comprendre

La solution proposée doit vérifier les équations locales de l'électrostatique et les conditions aux limites (ici, au voisinage immédiat du conducteur).

3. Solution

1. ■ La fonction $V_0(x, y, z)$ est solution du problème d'électrostatique correspondant aux équations :

$$\begin{cases} \Delta V_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(x, y, z) & \text{pour } z \text{ positif} \\ \Delta V_0 = 0 & \text{pour } z \text{ négatif.} \end{cases}$$

■ Considérons donc la fonction $V(x, y, z)$ définie par :

$$\begin{cases} V(x, y, z) = V_0(x, y, z) - V_0(x, y, -z) & \text{pour } z > 0 \\ V(x, y, z) = 0 & \text{pour } z < 0\,. \end{cases}$$

Un tel choix implique déjà que :

$$V(x, y, 0^+) = V_0(x, y, 0^+) - V_0(x, y, 0^-).$$

La nature des charges (distribution volumique), pour le problème associé à $V_0(x, y, z)$, impose la continuité du potentiel, soit :

$$V_0(x, y, 0^+) = V_0(x, y, 0^-)$$

et $V(x, y, 0^+) = 0$ (1) comme il se doit.

■ De plus, le champ électrostatique est donné par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, d'où :

$$E_x(x, y, 0^+) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)(x, y, 0^+) = -\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)_{x, y, 0^+} + \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)_{x, y, 0^-}.$$

Or $V_0(x, y, z)$ est dérivable en $z = 0$, on a donc :

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)_{x, y, 0^+} = \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)_{x, y, 0^-}$$

et $E_x(x, y, 0^+) = 0$ (2)

De la même manière et pour les mêmes raisons, on a :

$$E_y(x, y, 0^+) = -\left(\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)_{x, y, 0^+} + \left(\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)_{x, y, 0^-} = 0$$

et $E_y(x, y, 0^+) = 0$ (3)

En $z = 0^+$, le champ $\vec{E}$ est bien perpendiculaire à la surface du conducteur, surface équipotentielle.

Copyrighted material

Quant à la composante du champ selon z, elle s'obtient par :

$$E_z(x, y, 0^+) = -\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x, y, 0^+} - \left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x, y, 0^-}.$$

D'où
$$E_z(x, y, 0^+) = -2\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x, y, 0^+}.$$

■ Enfin, remarquons que la solution proposée vérifie bien l'équation de Poisson, à savoir :

$$\Delta V(x, y, z > 0) = \Delta V_0(x, y, z) - \Delta V_0(x, y, -z).$$

Or
$$\Delta V_0(x, y, z) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x, y, z) \quad (z \text{ est positif ici})$$

et
$$\Delta V_0(x, y, -z) = 0 \quad (\text{car } (-z) \text{ est négatif pour } z > 0)$$

D'où finalement $\Delta V(x, y, z > 0) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(x, y, z)$ (4)

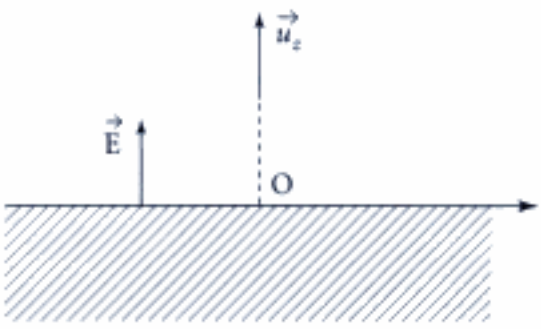
■ Les relations (1), (2), (3) et (4) définissent le problème d'électrostatique en présence du milieu conducteur.

On a donc
$$\boxed{V(x, y, z > 0) = V_0(x, y, z) - V_0(x, y, -z)}$$

2. La surface du conducteur portera une densité de charge σ telle que (Loi de Coulomb) :

$$\vec{E}(x, y, 0^+) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z.$$

Or $\vec{E}(x, y, 0^+) = -2\left(\dfrac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x, y, 0}$.



D'où :

$$\boxed{\sigma(x, y) = -2\,\varepsilon_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x, y, 0}}$$

3. Étudions le cas particulier où les charges, pour $z > 0$, se réduisent à une seule charge « ponctuelle » q placée à une distance d du plan conducteur.

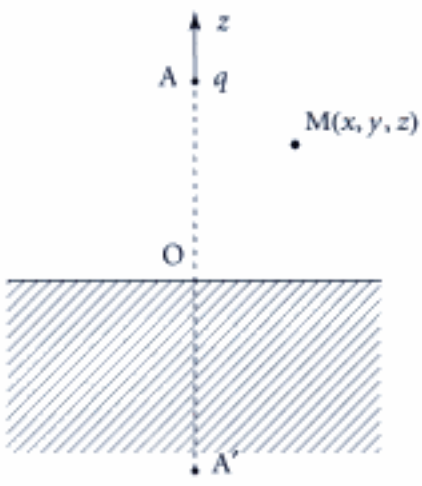
$$V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{AM}$$

$$V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}.$$

On a donc :

$$-V_0(x, y, -z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}}$$

$$-V_0(x, y, -z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{A'M}$$



Copyrighted material

où A′ **est le point symétrique de** A par rapport à la surface du conducteur.

Ainsi le potentiel, pour $z > 0$, s'obtient en se plaçant dans le vide et en considérant, en plus de la charge q placée en A, une charge image $q' = -q$ placée au point A′.

On a alors avec $\sigma_0 = -2\varepsilon_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x,y,0}$: $\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{\frac{3}{2}}}$

donc $\left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)_{x,y,0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{(\rho'^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ avec $\rho'^2 = x^2+y^2$.

D'où :

$$\boxed{\sigma = -\frac{q}{2\pi}\frac{d}{(\rho'^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

La densité surfacique de charges est bien de signe opposé à la charge q qui l'a induit. Elle est maximale en O projection du point A sur le conducteur.

Commentaire

On veut vérifier que :

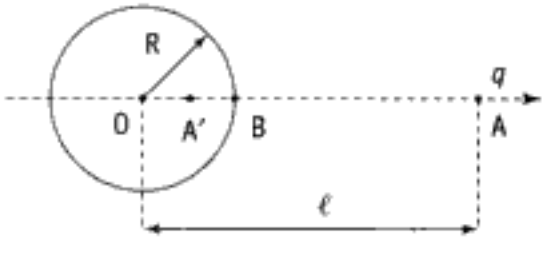
$$\int_0^\infty \sigma 2\pi\rho' d\rho' = -\frac{q}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q}{2}\left[-2(1+u)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^\infty$$

d'où $\int_0^\infty \sigma 2\pi\rho' d\rho' = -q$.

104 Conducteur sphérique influencé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q positive est placée, en A, à une distance ℓ d'une boule conductrice de centre O et de rayon R ($R < \ell$).

La distance OA n'est pas nécessairement grande devant R.



1. a. La boule est portée au potentiel nul. Montrer qu'à l'extérieur de la sphère ($OM > R$) le potentiel peut s'exprimer sous la forme :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{AM} - \frac{R}{\ell A'M}\right] \text{ avec } OA' < R.$$

Copyrighted material

On admettra que le lieu des points, dont le rapport des distances à deux points fixes est une constante (différente de l'unité), est une sphère.

b. Tracer la carte des lignes de champ, pour $\ell = 2R$.

c. Quelle est la charge Q portée par la boule conductrice ?

2. Quelles modifications doit-on apporter au résultat précédent quand :

a. la boule est portée au potentiel V_0 ?

b. la boule est isolée et de charge nulle ?

Dans les deux cas la charge q est maintenue en A.

3. On revient au cas $V_{sphère} = 0$.

Déterminer la force s'exerçant sur la charge q, et montrer que l'on peut définir une énergie d'interaction U_{int}.

4. Étudier– toujours avec $V_{sphère} = 0$ – le cas limite où $R \to +\infty$ avec $BA = \ell' = cste$.

Solution

1. a.

POINT MÉTHODE

Il suffit de s'assurer que la solution V(M) est conforme aux équations de l'électrostatique (équation de Laplace dans une région vide de charges, conditions aux limites).

■ Considérons le domaine $\mathcal{D}$ extérieur à la sphère de rayon R et de centre O. La fonction potentiel V(M) doit vérifier les propriétés suivantes :

- $\Delta V = 0$ en tout point de $\mathcal{D} - \{A\}$, (équation de Laplace). (1)
- $V \to 0$ à l'infini. (2)
- $V = 0$ sur la sphère $\mathcal{S}(O, R)$. (3)
- $V \sim \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{AM}$ pour $AM \ll \ell$ (singularité q en A). (4)

Remarquons alors que la solution proposée peut se réécrire sous la forme :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AM} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{A'M} \quad \text{où} \quad \boxed{q' = -q\frac{R}{\ell}}$$

Il s'agit de la fonction potentiel associée à deux charges ponctuelles q et q' respectivement placées en A et A'.

Or une charge ponctuelle q_1, placée en un point O_1, crée au point N le potentiel $\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 O_1N'}$, et d'après l'équation de Poisson, on a :

$$\Delta\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 O_1N'}\right) = 0 \text{ (tant que N est distinct de } O_1\text{)}.$$

Copyrighted material

Ainsi, en tout point $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \{A\}$, on aura pour la même raison :

$$\Delta\left(\frac{1}{AM}\right) = 0 \text{ et } \Delta\left(\frac{1}{A'M}\right) = 0 \text{ (A et A' sont extérieurs à } \mathcal{D}').$$

On en déduit que $\Delta V = 0$ dans $\mathcal{D}'$, et la condition (1) est bien réalisée.

Il en est de même des conditions (2) et (4) :

– on a $\lim\limits_{\infty}\left(\frac{q}{AM} + \frac{q'}{A'M}\right) = 0$,

– et $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AM}\left(1 - \frac{R}{\ell}\frac{AM}{A'M}\right) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AM}$ pour $\frac{AM}{A'M} \ll 1$.

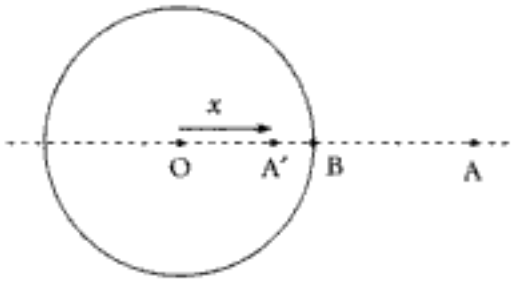
Pour que la condition (3) soit vérifiée, il faut que l'on ait :

$$\frac{q}{AM} + \frac{q'}{A'M} = 0 \text{ pour tout point M de la sphère } \mathcal{S}.$$

Cette égalité se traduit également par $\frac{A'M}{AM} = -\frac{q'}{q} = \frac{R}{\ell}$; et d'après l'énoncé on sait que le lieu des points tels que le rapport des distances à deux points fixe (ici A et A') est une constante est une sphère. Il reste à s'assurer qu'il s'agit bien de la sphère $\mathcal{S}(O, R)$ et plus exactement qu'il est ainsi possible de fixer l'emplacement du point A'.

À cet effet, écrivons que le point B de la sphère remplit la condition, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{R}{\ell}.$$



Or $BA = \ell - R$ et $BA' = R - x$ avec $OA' = x$, d'où :

$$\ell(R - x) = R(\ell - R) \Rightarrow \ell x = R^2 \text{ et } \boxed{x = \frac{R^2}{\ell}}$$

■ **En conclusion**

Le champ électrostatique, dans le domaine $\mathcal{D}$, extérieur à la boule de centre O et de rayon R, peut être défini à partir des charges ponctuelles q (en A) et q' (en A', avec $OA' = \frac{R^2}{\ell}$ et $q' = -\frac{R}{\ell}q$).

b. Lignes de champ dans $\mathcal{D}$: ce sont celles associées au doublet $q(A)$ et $q'(A') = -q \cdot \frac{R}{\ell} = -\frac{1}{2}q$.

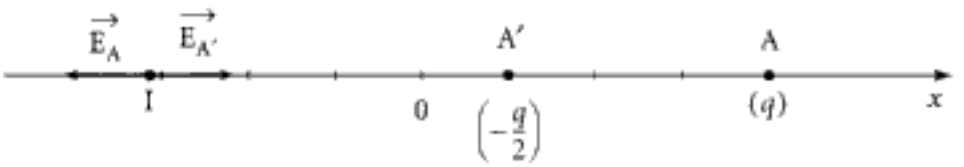
Il existe une ligne de champ limite passant par un point I où le champ est nul. Ce point est défini selon :

$$\frac{q}{IA^2} - \frac{\frac{1}{2}q}{(IA')^2} = 0 \rightarrow \frac{IA}{IA'} = \sqrt{2}$$

Copyrighted material

soit : $(\ell - x_I) = \sqrt{2}\left(\frac{R^2}{\ell} - x_I\right) \rightarrow (2R - x_I) = \sqrt{2}\,(0{,}5R - x_I)$

$$x_I(1-\sqrt{2}) = (2-0{,}5\sqrt{2})R \rightarrow x_I = \frac{2-0{,}5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}R = -(1+1{,}5\sqrt{2})R = -3{,}12R.$$



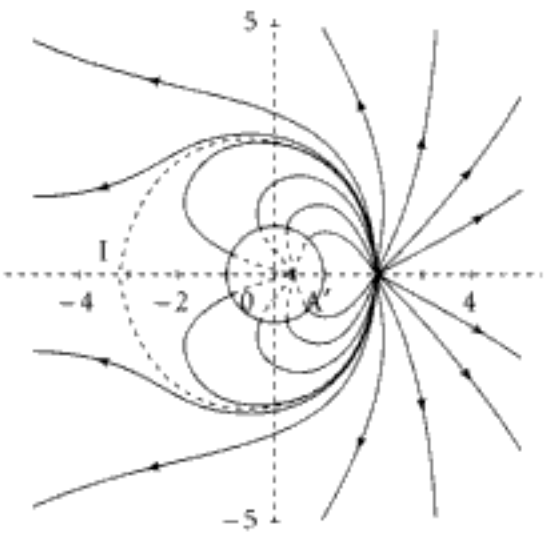
$$\begin{cases} \overline{OA} = R \\ \overline{OA'} + \ell = 2R \end{cases}$$

Les lignes de champs partent du point A $(q > 0)$ et se divisent en deux groupes :

– celles qui sont intérieures à la région délimitée par la ligne de champ limite passant par I. Elles tendent à converger vers A′ $(q' < 0)$.

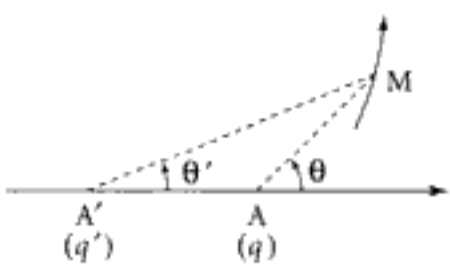
– celles qui sont extérieures à la région précédente et qui s'éloignent vers l'infini…

On donne ci-dessous l'allure du réseau de lignes de champ.



Commentaire

On peut montrer qu'une ligne de champ est caractérisée par l'équation : $q\cos\theta + q'\cos\theta' = \text{cste}$ soit $2\cos\theta - \cos\theta' = \text{cste}$.



c. Dans l'état d'équilibre électrostatique étudié ici, la boule conductrice porte, en surface, une charge totale Q que l'on peut déterminer de deux façons :

– en écrivant que le potentiel en O doit être nul, soit :

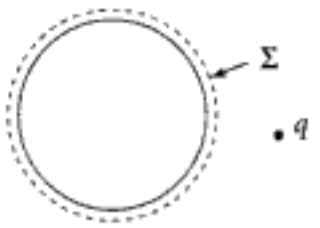
$$V(0) = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\ell}$$

Copyrighted material

(toutes les charges en surface de $\mathcal{S}$ sont à la distance R de O).

D'où : $$\boxed{Q = -\frac{R}{\ell}q = q'}$$

– En considérant une surface de Gauss Σ entourant la boule.
Dès lors :



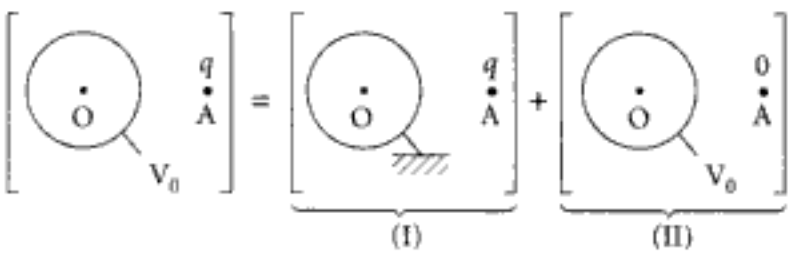
$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} \text{ (Théorème de Gauss).}$$

Ici $Q^{int} = Q$; d'autre part, d'après ce qui précède, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{q'} \text{ d'où } \Phi_\Sigma(\vec{E}) = \Phi_\Sigma(\vec{E}_q) + \Phi_\Sigma(\vec{E}_{q'}).$$

Or, la charge q est extérieure au volume délimité par Σ et $\Phi_\Sigma(\vec{E}_q) = 0$; de plus $\Phi_\Sigma(\vec{E}_{q'}) = \frac{q'}{\varepsilon_0}$ (Théorème de Gauss). Ce qui donne $Q = q' = -q\frac{R}{\ell}$.

2. a. Cette fois-ci la boule conductrice est portée au potentiel V_0. Il suffit alors de superposer – à la solution précédente – celle correspondant à la boule seule de potentiel V_0.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Or } V_I(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{AM} - \dfrac{R}{\ell A'M}\right) \text{ d'après le 1)} \\ \text{Et } V_{II}(M) = \dfrac{\alpha}{OM} \text{ avec } V_0 = \dfrac{\alpha}{R} \text{ où } V_{II}(M) = V_0\dfrac{R}{OM} \end{array}\right\} \quad \boxed{OM \geqslant R}$$

Commentaire

Pour le cas (II), la fonction $V_{II} = V_0\frac{R}{OM}$ vérifie bien $\Delta V_{II} = 0$ dans $\mathcal{D}$, $V_{II} = V_0$ sur la sphère $\mathcal{S}$, et $V \to 0$ à l'infini.

La solution cherchée s'exprime donc sous la forme :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{AM} - \frac{R}{\ell A'M}\right) + V_0\frac{R}{OM}}$$

La boule portera, en surface, une charge $Q_T = Q + Q_0$ où Q_0 représente la charge du conducteur sphérique (de rayon R) seul dans l'espace et de potentiel V_0, soit :

$$Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \text{ et } \boxed{Q_T = -\frac{R}{\ell}q + 4\pi\varepsilon_0 R V_0}$$

2. a. La solution établie en **2 a)** assure un potentiel V_0 de la boule, celle-ci présentant une charge totale Q_T. Il suffit d'écrire ici que cette charge totale est nulle et que le potentiel V_0 s'ajuste en conséquence (il n'est plus imposé par un générateur), ce qui donne :

$$Q_T = 0 = -\frac{R}{\ell}q + 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \to V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\ell}.$$

Copyrighted material

La solution est alors fournie par :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{AM} - \frac{R}{\ell A'M} + \frac{R}{\ell OM}\right)}$$

Commentaire

L'état électrostatique en tout point du domaine $\mathcal{D}$ est celui obtenu à partir de trois charges ponctuelles :

$$q \text{ (en A)},\ q' \text{ (en A')},\ q'' = -q' \text{ (en O)}.$$

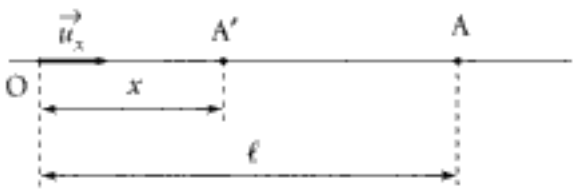
Avec $q' = -\frac{R}{\ell}q$ et $OA' = \frac{R^2}{\ell}$, on a bien :

$$Q_T = q' + q'' = 0.$$

3. ■ La force qui s'exerce sur la charge ponctuelle q est produite par les charges de surface de la sphère $\mathcal{S}$, c'est-à-dire – d'après le **1)** – par la charge q' qui serait située en A'. On a donc :

$$\vec{f} = q\overrightarrow{E_{q'}} \rightarrow \vec{f} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{A'A}}{A'A^3}.$$

Or $A'A = \ell - x = \left(\ell - \frac{R^2}{\ell}\right)$,



d'où $\vec{f} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_x}{\left(\ell - \frac{R^2}{\ell}\right)^2}$.

Et finalement $$\boxed{\vec{f} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\ell}{(\ell^2 - R^2)^2}\vec{u}_x}$$

Cette force attractive, peut être associée à une énergie d'interaction U_{int} selon :

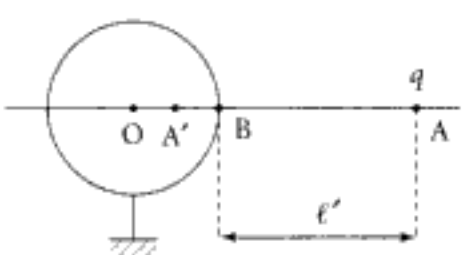
$$f d\ell = -dU_{int} = -\frac{q^2 R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ell\, d\ell}{(\ell^2 - R^2)^2}.$$

D'où $$\boxed{U_{int} = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{\ell^2 - R^2}}$$

On a pris $U_{int} = 0$ lorsque ℓ devient infini.

4. Envisageons le cas limite où le rayon de la boule tendrait vers l'infini en maintenant la distance, charge q– surface de la sphère $\mathcal{S}$, constante ($\ell' = cste$).

Posons $\ell = \ell' + R$, dès lors :



$A'B = R - x = R - \frac{R^2}{\ell}$

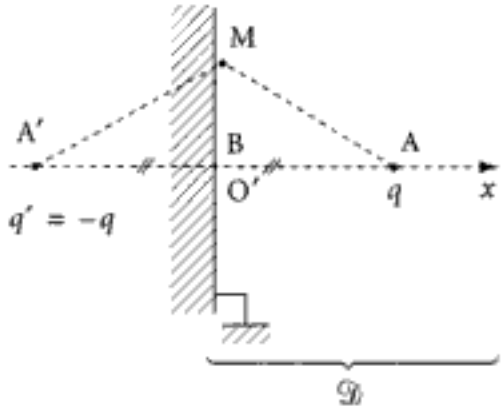
$A'B = R - \frac{R^2}{\ell' + R} = \frac{R\ell'}{\ell' + R}$.

De plus : $q' = -\frac{R}{\ell}q = -\frac{R}{\ell' + R}q$.

Faisons tendre R vers l'infini à ℓ' constant : $q' \rightarrow -q$ et $A'B \rightarrow \ell'$.

Copyrighted material

La situation ainsi décrite correspond à une charge ponctuelle q placée à la distance ℓ' d'un plan conducteur porté au potentiel nul. Dans le domaine $\mathcal{D}$ le champ électrostatique $\vec{E}$ est le même que celui produit par la charge q et sa charge « image » $-q$ symétrique de q par rapport au plan.

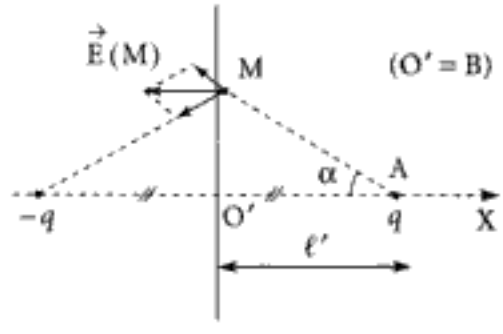


Pour un point M situé en $X = 0^+$ et tel que $O'M = \rho$ on a (*cf.* dessin) :

$$\vec{E}(M) = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{AM\cos\alpha}{AM^3}\vec{u}_x$$

soit avec $AM\cos\alpha = \ell'$
et $AM^2 = \rho^2 + \ell'^2$:

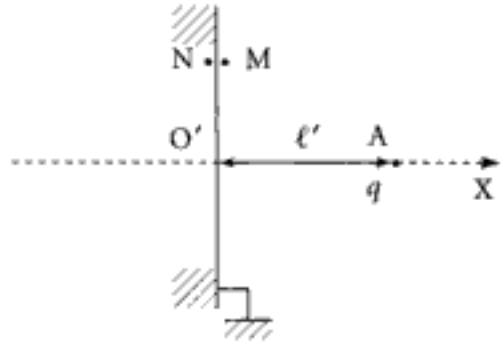
$$\vec{E}(M) = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ell'}{(\ell^2+\rho^2)^{3/2}}\vec{u}_x.$$



Or pour le problème réel $\vec{E}(N) = \vec{0}$ (l'espace $X < 0$ est occupé par un conducteur). La densité surfacique de charges est alors déterminée à partir de la relation de passage :

$$\vec{E}(M) - \vec{E}(N) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

$$\left(\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x : \text{loi de Coulomb}\right)$$



d'où:

$$\boxed{\sigma = -\frac{q}{2\pi}\frac{\ell'}{(\ell'^2+\rho^2)^{3/2}}}$$

Commentaire

On peut vérifier que l'on a bien $Q = \iint \sigma(\rho)\delta\Sigma = \int_0^\infty \sigma(\rho)2\pi\rho\,d\rho = -q$.

Copyrighted material

105 Problème de laplace

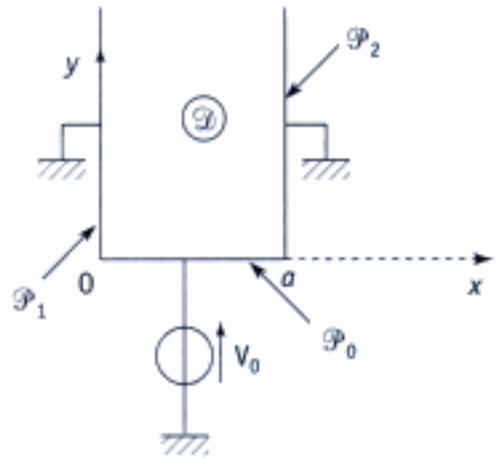
Considérons le système de principe constitué, dans le vide, par :

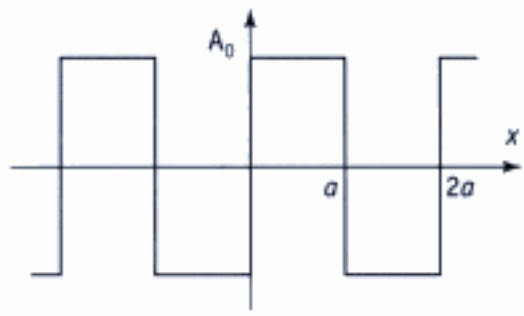
- deux plaques conductrices semi-infinies $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ situées en $x = 0$ et $x = a$ et portées au potentiel nul ($V = 0$).
- d'une plaque conductrice $\mathcal{P}_0$ infinie selon z et de largeur a selon x, placée en $y = 0$ et portée à un potentiel V_0.

Déterminer la fonction potentiel $V(x, y, z)$ dans le domaine $\mathcal{D}$ limité par ces trois plaques. Le domaine $\mathcal{D}$ est vide de charges, et on prendra $\lim\limits_{y \to +\infty} V = 0$.

Donnée : la fonction créneau impaire et $2a$-périodique peut être associée à la série de Fourier :

$$f(x) = \frac{4A_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left[(2p+1)\frac{\pi x}{a}\right]$$





Solution

Point méthode

On cherche tout d'abord une famille de solutions à l'équation de Laplace qui vérifient les conditions aux limites sur les plans $x = 0$ et $x = a$. Ces solutions seront de la forme $V(x, y) = f(x)g(y)$ afin de pouvoir assurer les conditions aux limites.

La solution au potentiel doit vérifier les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \text{ (équation de Laplace associée à une région vide de charges)} \\ V = 0 \text{ pour } \begin{cases} x = 0,\ y > 0,\ z \text{ quelconque} \\ x = a,\ y > 0,\ z \text{ quelconque} \end{cases} \\ V = V_0 \text{ pour } 0 < x < a,\ y = 0 \text{ et } z \text{ quelconque} \\ \lim V = 0 \text{ pour } y \to +\infty. \end{cases}$$

Cherchons alors une solution sous la forme $V = f(x)g(y)$, le potentiel ne dépendant pas de z puisqu'il y a invariance du système par translation selon zz'.

L'équation de Laplace $\Delta V = 0$ se traduit par :

$$f(x)\frac{d^2g}{dy^2} + g(y)\frac{d^2f}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{g''}{g} + \frac{f''}{f} = 0. \qquad (1)$$

Copyrighted material

Les deux quantités $\frac{g''}{g}$ et $\frac{f''}{f}$ sont respectivement des fonctions de y et x, ce sont donc des constantes pour que l'équation (1) puisse être vérifiée. On a alors :

$$\frac{f''}{f} = -k^2 \text{ et } \frac{g''}{g} = k^2$$

où k est une constante réelle.

Commentaire

- La solution $\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = 0$ est inacceptable car elle conduit à $f(x) = \alpha x + \beta$ incompatible avec $f(0) = f(a) = 0$ (il en résulterait que $\alpha = \beta = 0$ et donc $V = 0$ ce qui est impossible)…
- $\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = k^2$ doit être également rejetée pour la même raison :
$f(x) = \alpha \cosh(kx + \beta)$ ne permet pas $f(0) = f(a) = 0$; d'autre part, g serait à variations sinusoïdales…

D'où les expressions des fonctions f et g :

- $g(y) = \lambda \exp(-ky)$ en prenant $k > 0$, et en considérant que $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 0$.
- $f(x) = \alpha \sin(kx) + \beta \cos(kx)$.

Imposons à cette solution de l'équation de Laplace, les conditions aux limites $f(0) = f(a) = 0$ soit :

$$\beta = 0 \text{ et } \sin(ka) = 0 \text{ d'où } ka = n\pi \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

Ainsi, une solution, vérifiant $\Delta V = 0$ et les conditions aux limites à l'infini et sur les plaques $x = 0$ et $x = a$, est fournie par l'équation :

$$V_n(x, y) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\exp\left(-n\pi\frac{y}{a}\right)$$

Cette solution ne peut cependant pas satisfaire $V = V_0$ pour $y = 0$ et $0 < x < a$.

Envisageons alors une superposition (infinie) des $V_n(x, y)$ (linéarité de l'équation de Laplace) :

$$V(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\exp\left(-n\pi\frac{y}{a}\right)$$

Montrons que cette fonction peut remplir toutes les conditions imposées par le système.

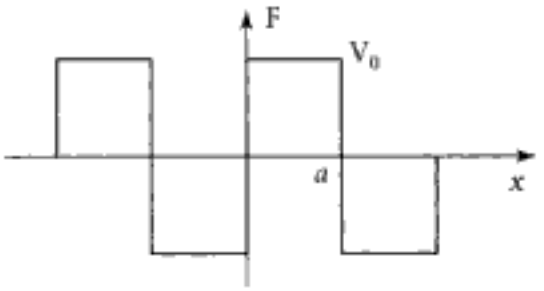
À cet effet, il suffit de vérifier qu'elle permet de réaliser :

$$V(x, 0) = V_0 \text{ pour } 0 < x < a$$

Or $V(x, 0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left[\frac{n\pi}{a}x\right]$.

Copyrighted material

Considérons la fonction $F(x)$, $2a$-périodique et impaire, qui coïncide avec $V(x, 0)$ pour $x \in [0, a]$.



On peut lui associer la série de Fourier :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(n\frac{2\pi}{2a}x\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)$$

avec $\quad A_n = \dfrac{2}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{+a} F(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx$

Soit ici $\quad A_n = \dfrac{2V_0}{a}\displaystyle\int_0^{+a} \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{2V_0}{a}\left(\frac{a}{n\pi}\right)\left[-\cos\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\right]_0^a$

D'où $\quad A_n = \dfrac{2V_0}{n\pi}[1-(-1)^n]\begin{cases} A_{2p} = 0 \\ A_{2p+1} = \dfrac{4V_0}{(2p+1)\pi}. \end{cases}$

Finalement, nous avons (en faisant $\alpha_n = A_n$) :

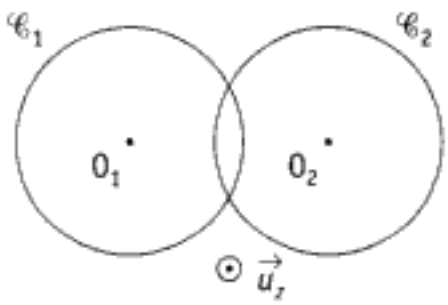
$$\boxed{V(x, y, z) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\left[(2p+1)\frac{\pi x}{a}\right]\exp\left[-(2p+1)\frac{\pi y}{a}\right]}$$

106 Distributions de courants

Un système peut être modélisé par deux cylindres infinis $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ parcourus par des densités de courant uniformes opposées :

$$\vec{j}_1 = \vec{j} = j\vec{u}_z, \quad \vec{j}_2 = -\vec{j}$$

(les cylindres sont identiques, de rayon R, et leurs axes parallèles à $\vec{u}_z$ sont distants de a, avec $a < 2R$).



1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ dans la zone commue.

2. On considère les deux cylindres précédents possédant maintenant les densités de charges volumiques uniformes $\rho_1 = \rho$ et $\rho_2 = -\rho$. Ils sont animés d'une vitesse constante $\vec{V} = v\vec{u}_z$ par rapport au laboratoire $\mathscr{L}$.

Copyrighted material

Calculer, en tout point de la zone commune, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ créés dans $\mathcal{L}$. Conclusion.

Rappel : on a $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$.

1. Ce qu'il faut savoir

- Règles de symétrie pour $\vec{E}$ et pour $\vec{B}$.
- Théorème d'Ampère-Théorème de gauss.

2. Ce qu'il faut comprendre

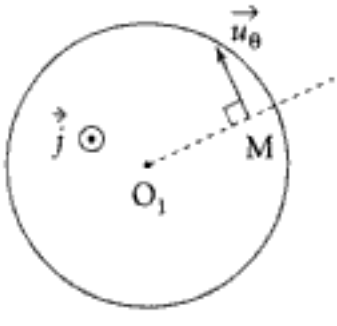
On superposera les champs créés par chaque cylindre.

3. Solution

1. Soit un point M situé dans la zone commune aux deux cylindres. Nous avons :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$$

$\vec{B}_1$ dû à $\mathscr{C}_1$ et $\vec{B}_2$ à $\mathscr{C}_2$.



Calculons $\vec{B}_1(M)$: le plan passant par M et contenant l'axe de $\mathscr{C}_1$ est un plan de symétrie pour la distribution de courants associée à $\vec{B}_1$.

$\vec{B}_1(M)$ est perpendiculaire à ce plan, donc orthoradial :

$$\vec{B}_1(M) = B_1(M)\vec{u}_\theta.$$

$\vec{B}_1(M)$ ne peut dépendre que de r (distance de M à l'axe de $\mathscr{C}_1$) : invariances par translation parallèlement à l'axe et par rotation autour de cet axe.

Appliquons **le théorème d'Ampère** :

$$2\pi r B_1(r) = \mu_0 j \pi r^2 \quad \text{soit} \quad B_1(r) = \frac{1}{2}\mu_0 j \cdot r \quad (r < R).$$

D'où $\vec{B}_1(M) = \frac{1}{2}\mu_0 j r \vec{u}_\theta$, relation qui peut s'écrire :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \wedge \overrightarrow{O_1M} \quad (\|\overrightarrow{O_1M}\| = r).$$

De même, pour $\mathscr{C}_2$, nous aurons :

$$\vec{B}_2(M) = \frac{1}{2}\mu_0(-\vec{j}) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

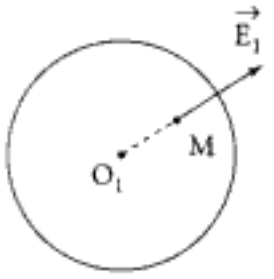
Soit au total $\vec{B}(M) = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \wedge [\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}]$, et :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \wedge \overrightarrow{O_1O_2}}$$

Copyrighted material

Nous sommes en présence d'un champ uniforme.

2. Pour le calcul du champ électrique, nous pouvons appliquer le théorème de Gauss en notant que le champ $\vec{E}_1(M)$ créé par $\mathscr{C}_1$ est radial (le plan contenant l'axe de $\mathscr{C}_1$ et passant par M est plan de symétrie pour la distribution de charges. il en est de même du plan de figure. $\vec{E}$ vecteur polaire appartient à ces deux plans, il est donc radial).
Soit :



$$E_1 \times 2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2 h$$

et $$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\,\vec{u}_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$$

D'où $$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M})$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}} \quad (1)$$

Pour le champ magnétique, nous sommes ramenés à la question **1)** en remplaçant $\vec{j}$ par $\rho v\,\vec{u}_z$. Nous obtenons :

$$\vec{B}(M) = \frac{1}{2}\mu_0\rho v\,\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1O_2} \quad (2)$$

Des expressions (1) et (2), nous tirons $\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 v\,\vec{u}_z \wedge \vec{E}$.

Or $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, d'où : $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}}$ avec $\vec{V} = v\,\vec{u}_z$.

Il s'agit de la relation « classique » existant entre les champs électrique et magnétique créés par une charge se déplaçant à **la vitesse uniforme** $\vec{V}$.

107 Disque chargé en rotation et dipôle magnétique

Un disque de rayon R uniformément chargé (densité surfacique σ), tourne autour de son axe Oz (de vecteur unitaire $\vec{u}_z$) avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z$.

1. a. Calculer le champ magnétique $\vec{B}_0$ créé en un point P de l'axe Oz.

b. Que devient ce résultat pour $|z| \gg R$?

Copyrighted material

2. On place en P un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$. Déterminer les actions subies par le dipôle (le moment magnétique n'est pas nécessairement porté par l'axe Oz). On exprimera les résultats en fonction des composantes de $\vec{\mathcal{M}}$, de $B_0(z)$ et de $\dfrac{dB_0(z)}{dz}$.

On rappelle qu'au voisinage immédiat de l'axe le champ magnétique $\vec{B_1}$ est donné, au premier ordre par rapport à r (distance à l'axe), par :

$$\vec{B_1}(r, z) = B_0(z)\vec{u_z} - \frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}\vec{u_r}$$

(r, θ, z) coordonnées cylindriques d'axe Oz.

1. Ce qu'il faut savoir

- Densité de courant de surface.
- Champ magnétique crée par une spire.
- Actions d'un champ magnétique permanent sur un dipôle magnétique rigide. Energie potentielle d'interaction.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Décomposer le disque en couronnes de largeur dr que l'on assimilera à des spires élémentaires.

2. Les actions subies comprennent un couple et une force (champ $\vec{B_1}$ non uniforme). On fera le lien entre le travail élémentaire de la force – dans une translation selon Ox, Oy ou Oz – et la variation de l'énergie potentielle d'interaction.

3. Solution

1. a. Le disque en rotation est équivalent à une distribution de courants de densité surfacique $\vec{j_s}$ définie par :

$$\vec{j_s} = \sigma\vec{v} \quad \text{où} \quad \vec{v} = \omega r\,\vec{u_\theta}$$

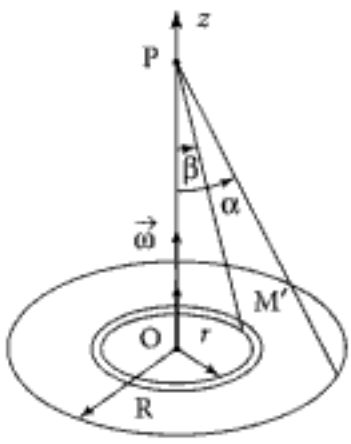
donc $\vec{j_s} = \sigma\omega r\,\vec{u_\theta}$.

Les courants compris entre les rayons r et $r + dr$ constituent une spire parcourue par l'intensité di telle que :

$$di = j_s dr = \sigma\omega r\,dr.$$

Cette spire crée, en P, un champ magnétique $d\vec{B_0}$ (*cf.* cours) :

$$d\vec{B_0} = \frac{\mu_0 di}{2r}\sin^3\beta\,\vec{u_z}.$$



Copyrighted material

Notons $\overrightarrow{OP} = z\,\vec{u}_z$. Alors les relations $\frac{r}{z} = \tan\beta$ et $dr = \frac{z}{\cos^2\beta}d\beta$ permettent d'expliciter $d\vec{B}_0$ en fonction de β :

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu\sigma\omega}{2}\sin^3\beta\,\frac{z}{\cos^2\beta}d\beta\,\vec{u}_z.$$

Intégrons sur β, qui varie de 0 à α :

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\int_0^\alpha \frac{\sin^3\beta}{\cos^2\beta}d\beta\,\vec{u}_z$$

Ou encore $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\int_0^\alpha\left(-\frac{1}{\cos^2\beta}+1\right)d(\cos\beta)\,\vec{u}_z$

qui donne $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\left[\frac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha-2\right]\vec{u}_z$

et avec $\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\left[\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z}+\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}-2\right]\vec{u}_z \text{ ou :}$$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\frac{(\sqrt{R^2+z^2}-z)^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\vec{u}_z} \quad (1)$$

b. Pour z positif très grand devant R, donnons un équivalent de $B_0(z)$:

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega\frac{z^2}{z}\left[\frac{R^2}{2z^2}\right]^2\vec{u}_z$$

car $(\sqrt{R^2+z^2}-z^2)^2 = z^2\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-1\right)^2 \sim z^2\left(\frac{R^2}{2z^2}\right)^2$

d'où $$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{8z^3}\vec{u}_z}$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme : $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^3}\vec{u}_z$

où $m = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi R^4$ représente le moment magnétique associé au disque.

En effet, pour la spire élémentaire de « largeur dr », il vient :

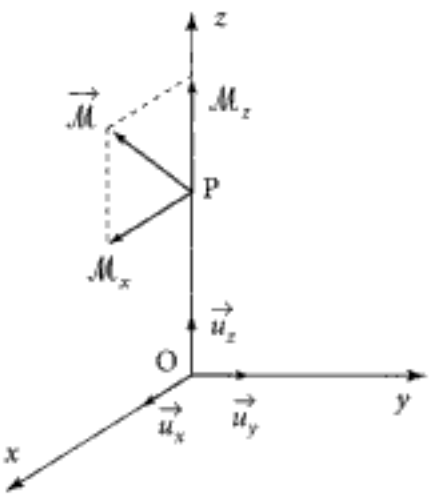
$$dm = \pi r^2 di = \pi r^2\sigma\omega r\,dr = \pi\sigma\omega r^3\,dr$$

D'où $m = \int_0^R \pi\sigma\omega r^3\,dr$, et $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4\vec{u}_z}$

Copyrighted material

2. Choisissons Ox tel que le plan xOz contienne le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_x\vec{u_x} + \mathcal{M}_z\vec{u_z}$.

Les actions subies par $\vec{\mathcal{M}}$ se réduisent à un couple $\vec{\Gamma}$ et à une force $\vec{F}$ (le champ magnétique créé par le disque tournant n'est pas uniforme…).



■ Le couple Γ est donné par la relation :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B_0}(P)$$

soit $\vec{\Gamma} = (\mathcal{M}_x\vec{u_x} + \mathcal{M}_z\vec{u_z}) \wedge B_0(z)\vec{u_z}$

$$= -\mathcal{M}_x B_0(z)\vec{u_y}$$

d'où $\boxed{\vec{\Gamma} = -\dfrac{\mu_0\sigma\omega}{2} \cdot \mathcal{M}_x \cdot \dfrac{(\sqrt{R^2+z^2}-z)^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\vec{u_y}}$

■ Pour calculer la force $\vec{F}$ on peut faire appel à l'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle magnétique rigide $\vec{\mathcal{M}}$ est un champ magnétique permanent (ici $\vec{B_1}$). On a $U = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B_1}$.

– Envisageons alors une **translation** ($\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\text{cste}}$) selon Oz du dipôle. Il vient :

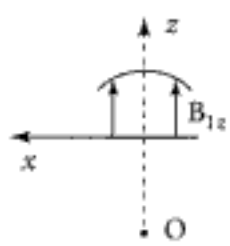
$$F_z dz = -dU = d(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B_1}) = d(\mathcal{M}_z B_0(z)),\ x \text{ et } y \text{ restent fixés à } (0, 0).$$

d'où $F_z = \mathcal{M}_z \dfrac{dB_0(z)}{dz}$

– Calculons maintenant les composantes F_x et F_y. On a avec $\vec{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_x, O, \mathcal{M}_z)$ fixé :

$$F_x dx = +d(\mathcal{M}_x B_{1x} + \mathcal{M}_z B_{1z}) \rightarrow F_x = \mathcal{M}_x \left.\frac{\partial B_{1x}}{\partial x}\right|_{0,0,z} + \mathcal{M}_z \left.\frac{\partial B_{1z}}{\partial x}\right|_{0,0,z}$$

La symétrie axiale impose $\left.\dfrac{\partial B_{1z}}{\partial x}\right|_{0,0,z} = 0$ il reste donc :

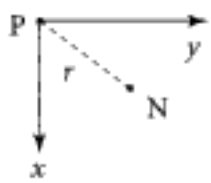


$$F_x = \mathcal{M}_x \left.\frac{\partial B_{1x}}{\partial x}\right|_{0,0,z}$$

de la même manière on a : $F_y = \mathcal{M}_x \left.\dfrac{\partial B_{1x}}{\partial y}\right|_{0,0,z}$

Il faut donc connaître la composante B_{1x} au voisinage du point P. L'énoncé rappelle que pour N voisin de P on a, au premier ordre en r :

$$\vec{B_1} \approx B_0(z)\vec{u_z} - \frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}\vec{u_r}$$



d'où $B_{1x} \approx -\dfrac{x}{2}\dfrac{dB_0}{dz}$ et $B_{1y} \approx -\dfrac{y}{2}\dfrac{dB_0}{dz}$

Copyrighted material

Finalement on obtient : $F_y = 0$ et $F_{1x} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}_x \frac{dB_0}{dz}$

soit $$\boxed{\vec{F} = \left[-\frac{1}{2}\mathcal{M}_x\vec{u_x} + \mathcal{M}_z\vec{u_z}\right]\frac{dB_0}{dz}}$$

Commentaire

Le plan contenant Oz et N est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants. Le champ $\vec{B_1}$ en N appartient donc à ce plan, d'où $\vec{B_1}(r, z) = B_{1r}\vec{u_r} + B_{1z}\vec{u_z}$.

D'autre part on a $\text{div}\vec{B} = 0$, ce qui s'écrit ici : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_{1r}) + \frac{\partial B_{1z}}{\partial z} = 0$

soit encore $r B_{1r} = -\int_0^r \frac{\partial B_{1z}}{\partial z}(r', z)r' dr'$

et à l'ordre le plus bas en r : $r B_{1r} = -\frac{r^2}{2}\frac{\partial B_{1z}}{\partial z}(0, z)$

d'où $$\boxed{B_{1r} = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}}$$

108 Supraconducteur dans un champ magnétique extérieur uniforme

Une lame supraconductrice est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B_0}$. On adopte la modélisation suivante :

- Le milieu supraconducteur occupe le volume compris entre les plans $x = -a$ et $x = +a$.
- Il règne un champ $\vec{B_0}$ (parallèle aux plans) à l'extérieur.
- Il est possible de choisir le potentiel vecteur $\vec{A}$ à l'intérieur du matériau de telle sorte que le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ obéisse à la relation $\vec{j} = -\Lambda\vec{A}$. ($\Lambda$ constante positive : $\Lambda = 1{,}7 \cdot 10^{21}\ C^2 \cdot m^{-3} \cdot kg^{-1}$)

1. Déterminer la répartition du champ magnétique $\vec{B}(x)$ dans la lame supraconductrice. Commenter.

On rappelle la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{U}) - \Delta\vec{U}.$$

2. a. En déduire l'expression de la densité de courant $\vec{j}(x)$. Commenter.

b. Calculer la force par unité de surface $\frac{\delta\vec{F}}{\delta\Sigma}$ s'exerçant sur « la face $x = a$ ».

Copyrighted material

Solution

1. Le métal supraconducteur est considéré comme un milieu neutre dans lequel le champ électrique $\vec{E}$ est nul ; il existe cependant une densité volumique de courant $\vec{j}$, telle que $\vec{j} = -\Lambda\vec{A}$, vérifiant l'équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

Commentaire

La relation $\vec{j} = -\Lambda\vec{A}$ implique $\text{div}\vec{j} = -\Lambda\text{div}\vec{A}$, et l'équation de conservation de la charge donne ici $\text{div}\vec{j} = 0$, soit $\text{div}\vec{A} = 0$...

Nous avons donc au sein du supraconducteur :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = -\mu_0\Lambda\vec{A} & (2) \\ \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} & (3) \end{cases}$$

Déterminons alors l'équation différentielle vérifiée par $\vec{B}$.
Prenons, à cet effet, le rotationnel de (2), il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = -\mu_0\Lambda\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = -\mu_0\Lambda\vec{B}.$$

Et d'après la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}$, avec (1) :

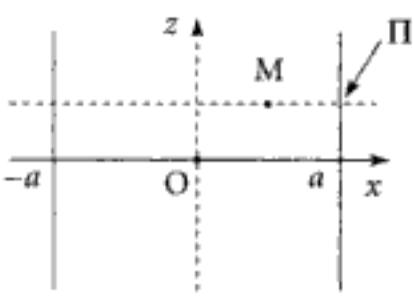
$$-\Delta\vec{B} = -\mu_0\Lambda\vec{B} \rightarrow \boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\Lambda\vec{B}}$$

Projetée sur les axes Ox, Oy et Oz, cette relation s'écrit :

$$\Delta B_x = \mu_0\Lambda B_x,\quad \Delta B_y = \mu_0\Lambda B_y,\quad \Delta B_z = \mu_0\Lambda B_z,\quad (4)$$

Définissons la direction d'axe Oz telle que $\overrightarrow{B_{ext}} = B_0\vec{u_z}$.

Le champ excitateur étant porté par $\vec{u_z}$ il en sera de même du champ magnétique à l'intérieur du milieu supraconducteur, soit $\vec{B} = B(x)\vec{u_z}$ (5) (le système proposé étant invariant par translation selon Oy et Oz). Et d'après $\mu_0\vec{j} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$ on a :



$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}[B(x)\vec{u_z}] = -\frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dx}\vec{u_y}$$

d'où

$$\boxed{\vec{B} = (B(x), 0, 0) \quad \text{et} \quad \vec{j} = \left(0, -\frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dx}, 0\right)} \quad (6)$$

Copyrighted material

Commentaire

On peut imaginer par exemple une lame, d'épaisseur très petite devant ses autres dimensions, que l'on a placée au centre d'un solénoïde suffisamment long d'axe Oz créant le champ $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$.

Pour un point M du milieu suffisamment éloigné des bords de la lame (dans les directions $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_y$) on peut considérer que le plan $\Pi = \{Mxy\}$ est un plan de symétrie pour l'ensemble {supraconducteur + sources de $\vec{B}_0$}. Le champ magnétique $\vec{B}$ – vecteur axial – est perpendiculaire à ce plan, d'où $\vec{B}(M) = B\vec{u}_z$...

D'autre part, dans les mêmes conditions, le plan Mxz est plan d'antisymétrie, et $\vec{j}$ – vecteur polaire – doit être perpendiculaire à ce plan, d'où $\vec{j} = j(M)\vec{u}_y$.

Enfin le plan yOz est un plan d'antisymétrie, ce qui impose – dans le cadre de la modélisation :

$$B(-x) = B(x) \quad (7) \quad \text{et} \quad j(-x) = -j(x) \quad (8)$$

(4) et (5) donnent alors $\dfrac{d^2B}{dx^2} - \mu_0\Lambda B = 0$

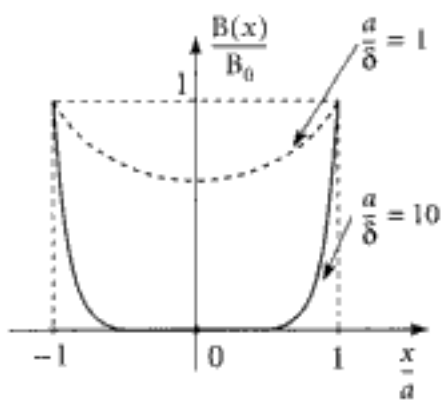
Posons alors $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\Lambda}} \rightarrow \dfrac{d^2B(x)}{dx^2} - \dfrac{B(x)}{\delta^2} = 0.$

Intégrons cette équation : $B(x) = C\cosh\left(\dfrac{x}{\delta}\right) + D\sinh\left(\dfrac{x}{\delta}\right).$

Les conditions aux limites en $x = \pm a$ s'écrivent $B(\pm a) = B_0$, d'où :

$$\begin{cases} C\cosh\left(\dfrac{a}{\delta}\right) + D\sinh\left(\dfrac{a}{\delta}\right) = B_0 \\ C\cosh\left(\dfrac{a}{\delta}\right) - D\sinh\left(\dfrac{a}{\delta}\right) = B_0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{B_0}{\cosh\left(\dfrac{a}{\delta}\right)} \quad \text{et} \quad D = 0$$

d'où finalement : $B(x) = B_0 \cdot \dfrac{\cosh\left(\dfrac{x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\dfrac{a}{\delta}\right)}$ (9)



Résultat conforme à (7).

Commentaire

On a $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}69 \cdot 10^{21}}}$ soit $\delta = 22$ nm.

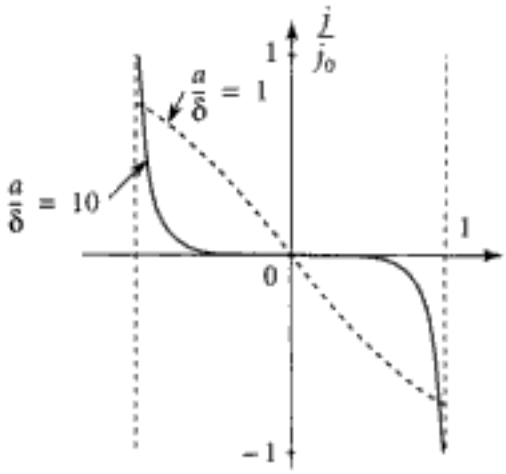
Le champ magnétique, à l'intérieur du supraconducteur, ne possède de valeurs significatives que sur une profondeur, de l'ordre de quelques δ, comptée à partir des faces délimitant le milieu du supraconducteur : le champ magnétique « fuit » la région centrale.

Copyrighted material

2. a. Le vecteur densité volumique de courant s'obtient alors par $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dx}\vec{u}_x$:

d'où $$\boxed{\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0\delta}\frac{\sinh\left(\frac{x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\delta}\right)}\vec{u}_y}$$

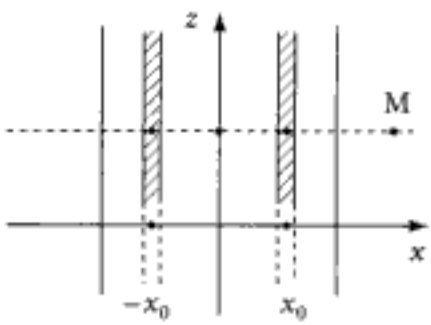
Résultat conforme à (**8**).



Commentaire

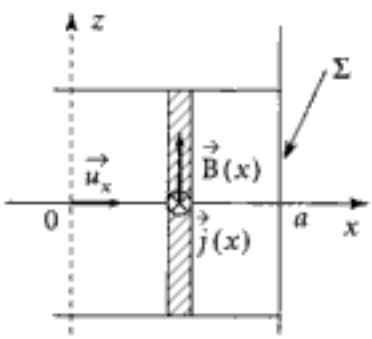
Remarquons que cette distribution de courants ne crée pas de champ magnétique à l'extérieur de la lame. On peut en effet associer par deux les « plaques » d'épaisseur dx centrées en x_0 et $-x_0$ ($x_0 \in]0,a[$) parcourues par les courants $\vec{j} = j(x_0)\vec{u}_y$ et $\vec{j'} = -j(x_0)\vec{u}_y$; ces « plaques » donnent en M des champs magnétiques opposés (*cf* théorème d'Ampère) : $\delta\vec{b}_{x_0} = \frac{-\mu_0 j(x_0)}{2}\vec{u}_z$ et $\delta\vec{b}_{-x_0} = \frac{\mu_0 j(x_0)}{2}\vec{u}_z$, d'où le résultat.

On a bien $\overrightarrow{B_{ext}} = \vec{B}_0$.



b. Le champ magnétique $\vec{B}$ interagit sur la distribution de courant par l'intermédiaire de la force volumique de Laplace $\vec{\varphi}_v$ définit par :

$$\vec{\varphi}_v = \vec{j} \wedge \vec{B} = j(x)B(x)(\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z)$$
$$= j(x)B(x)\vec{u}_x.$$



Or, pour $a \gg \delta$, le courant est pratiquement un courant de surface, de sorte que la force totale s'exerçant sur « l'une des faces » peut s'écrire :

$$\vec{F} \approx \Sigma\int_0^a j(x)B(x)\,dx\,\vec{u}_x$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{\vec{F}}{\Sigma} \approx \left\{\int_0^a j(x)B(x)\,dx\right\}\vec{u}_x$$

Copyrighted material

$$\frac{\vec{F}}{\Sigma} \# \frac{-B_0^2}{\mu_0\delta}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{a}{\delta}\right)}\int_0^a \sinh\left(\frac{x}{\delta}\right)\cosh\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\,\vec{u_x}$$

$$\frac{\vec{F}}{\Sigma} \# \frac{-B_0^2}{\mu_0\delta}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{a}{\delta}\right)}\int_0^{\frac{a}{\delta}} d\left[\frac{1}{2}\cosh^2 u\right]\vec{u_x}.$$

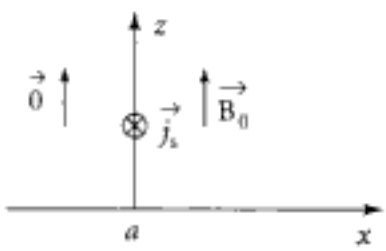
$$\boxed{\frac{\vec{F}}{\Sigma}(\text{« } a \text{ »}) \# -\frac{B_0^2}{2\mu_0}\vec{u_x}} \quad \left(\cosh\left(\frac{a}{\delta}\right) \gg 1\right)$$

Commentaire

■ Cette expresson fait intervenir la densité volumique d'énergie magnétique au voisinage de la surface : $u_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$.

■ Ce résultat correspond à un courant de surface $\vec{j_s}$ séparant deux régions où le champ magnétique $\vec{B}$ prend des valeurs :

$$\vec{B_1} = \vec{0} \text{ et } \vec{B_2} = \vec{B_0}$$



$$\frac{\delta\vec{F}}{\delta\Sigma} = \vec{j_s} \wedge \frac{1}{2}(\vec{B_0} - 0) = \frac{1}{2}j_s B_0 \vec{u_x}$$

Ici, dans le cas où $\delta \ll a$, la répartition de courant peut être associée à un **courant de surface** de densité $\vec{j_s}$ que l'on peut évaluer par l'intégrale :

$$\vec{j_s} = \int_0^a j(x)\,dx\,\vec{u_y}.$$

D'où :

$$\vec{j_s} = -\frac{B_0}{\mu_0\delta}\frac{1}{\cosh\left(\frac{a}{\delta}\right)}\int_0^a \sinh\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\,\vec{u_z}$$

$$= -\frac{B_0}{\mu_0}\frac{1}{\cosh\left(\frac{a}{\delta}\right)}\left[\cosh\left(\frac{a}{\delta}\right) - 1\right]\vec{u_y}.$$

Et $\vec{j_s} \# -\frac{B_0}{\mu_0}\vec{u_y}$ puisque $\frac{a}{\delta} \gg 1$, ce qui donne : $\frac{\delta\vec{F}}{\partial\Sigma} = -\frac{B_0^2}{2\mu_0}\vec{u_x}$.

Copyrighted material

Hidden page

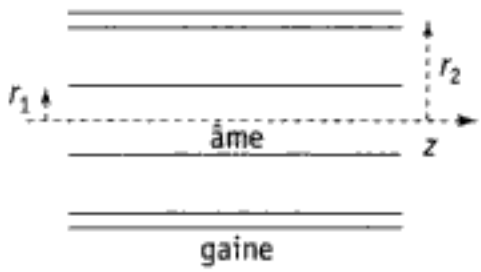
chapitre

2

Équations de Maxwell Induction

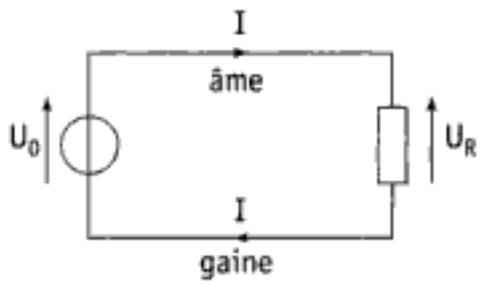
Copyrighted material

201 Câble coaxial en régime stationnaire



Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique central $\mathscr{C}_1$ appelé âme (rayon $r_1 = 0{,}43$ mm, conductivité électrique $\gamma = 5{,}9 \cdot 10^7\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) et d'un conducteur cylindrique creux concentrique au premier $\mathscr{C}_2$, appelé gaine, (rayon $r_2 = 1{,}47$ mm et $r_3 = 1{,}60$ mm, même conductivité électrique γ). L'espace interconducteurs ($r_1 < r < r_2$) est occupé par un milieu que l'on peut confondre ici avec le vide (ε_0, μ_0).

On admet, dans les conducteurs, la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Les conducteurs sont non chargés en volume.



Le câble de longueur $L_c = 1$ m ($L_c \gg r_3$) est alimenté par un générateur de tension constante U_0. Il est fermé sur une résistance $R = 50\ \Omega$: on note U_R la tension aux bornes de R.

1. En supposant que dans les conducteurs $\vec{j} = j(r, z)\vec{u_z}$ montrer qu'il est normal de considérer que les champs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ y sont uniformes. On posera par la suite $\vec{E} = E_1\vec{u_z}$ dans $\mathscr{C}_1$ et $\vec{E} = -E_2\vec{u_z}$ dans $\mathscr{C}_2$. Exprimer ces champs en fonction du courant I traversant le circuit. Déterminer les résistances R_a et R_{ga} de l'âme et de la gaine. Que représente la quantité $U_0 - U_R$?

2. a. Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ donner l'équation différentielle vérifiée par la fonction potentiel $V(r, z)$ dans l'espace $r_1 < r < r_2$. On prendra $V(r_2, 0) = 0$.

On donne : $\Delta V(r, z) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Montrer qu'une solution du type $V(r, z) = Az + B + (Cz + D) \cdot \ln\dfrac{r}{r_1}$ convient. Déterminer les constantes A, B, C et D en fonction de U_0, E_1, E_2, r_1, et r_2.

b. En déduire les composantes E_r et E_z du champ électrique pour $r_1 < r < r_2$.

Calculer le rapport $\eta = \left|\dfrac{E_z(r_1, 0)}{E_r(r_1, 0)}\right|$.

c. Montrer que les conducteurs portent des charges de surface $\sigma_1 = a_1 - b_1 z$ sur $\mathscr{C}_1$ et $\sigma_2 = a_2 - b_2 z$ sur la surface intérieure de $\mathscr{C}_2$. On déterminera les coefficients a_i et b_i en fonction de ε_0, U_0, E_1, E_2, r_1, et r_2. Que remarque-t-on ?

d. Montrer que l'on peut définir une capacité $\Gamma = \dfrac{\delta C}{dz}$ par unité de longueur du câble : l'exprimer en fonction de ε_0, r_1 et r_2. A.N.

Copyrighted material

3. a. Donner l'expression du champ magnétique pour $r_1 < r < r_2$. Montrer que l'on peut définir – pour l'espace $r_1 < r < r_2$ une inductance $\Lambda = \dfrac{\delta L}{dz}$ par unité de longueur du câble : l'exprimer en fonction de ε_0, r_1, et r_2. A.N.

b. Quelle relation simple relie Λ et Γ ?

4. Aspect énergétique

a. A-t-on un flux d'énergie électromagnétique selon Oz dans l'âme et dans la gaine ? Peut-on alors considérer que l'énergie électromagnétique est véhiculée par les conducteurs ?

b. A-t-on un flux d'énergie électromagnétique selon Oz dans l'espace interconducteurs ? Calculer ce flux $\Phi(z)$ à travers une section de cote z comprise entre r_1 et r_2 en fonction de I, U_0, E_1, E_2 et z, puis de I et de $U(z) = V(r_1, z) - V(r_2, z)$. Que représentent $\Phi(0)$ puis $\Phi(L_c)$?

c. Déterminer le flux $d\Phi_1$ entrant dans l'âme par sa surface comprise entre z et $z + dz$. Que devient cette puissance ?

d. En prenant également en compte le flux $d\Phi_2$ entrant dans la gaine par sa surface intérieure $r = r_2$ comprise entre z et $z + dz$ proposer un bilan d'énergie pour la tranche de câble située entre z et $z + dz$. Commenter le résultat obtenu.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équations de Maxwell en régime stationnaire.
- Loi d'Ohm locale. Loi d'Ohm en électrocinétique.
- Relations de passage.
- Capacité – Inductance.
- Vecteur de Poynting.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. En régime stationnaire $\vec{j}$ doit être à flux conservatif et à rotationnel nul (*cf.* loi d'Ohm et équation de Maxwell).

2. a. On utilisera la continuité du potentiel à la traversée des surfaces $r = r_1$ et $r = r_2$.

2. c. Les densités de charges de surface se déduisent des relations de passage.

4. Aux composantes B_θ de E_r du champ électromagnétique correspond – pour $r_1 < r < r_2$ – une composante Π_z du vecteur de Poynting et donc un flux d'énergie dans le sens de l'axe Oz du câble.

3. Solution

1. Les conducteurs : étant non chargés en volume en doit vérifier (*cf.* équation de conservation de la charge) $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

Copyrighted material

Or $\vec{j} = j(r, z)\vec{u_z}$, d'où $\dfrac{\partial j}{\partial z} = 0 \rightarrow \vec{j} = j(r)\vec{u_z}$.

D'autre part l'équation de Maxwell-Faraday donne en régime indépendant du temps : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$, soit avec $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm) : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = \vec{0}$.

Passons en coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec $\vec{j} = j(r)\vec{u_z} = j(\sqrt{x^2+y^2})\vec{u_z}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \wedge\, 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & j \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial j}{\partial y} = 0$$

j ne dépend donc pas de x, y, z ; c'est une constante.

I désignant le courant traversant une section du conducteur central $\mathscr{C}_1$:

$$\boxed{\vec{j_1} = \frac{I}{\pi r_1^2}\vec{u_z} = \gamma E_1 \vec{u_z}} \quad (1)$$

Ce même courant circule, en sens inverse dans $\mathscr{C}_2$:

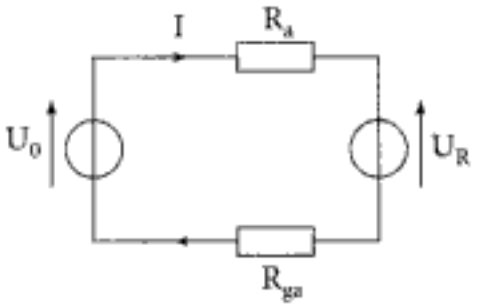
$$\boxed{\vec{j_2} = -\frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}\vec{u_z} = -\gamma E_2 \vec{u_z}} \quad (2)$$

■ Résistances R_a de l'âme et R_{ga} de la gaine :

$$\boxed{R_a = \frac{1}{\gamma}\frac{L_c}{\pi(r_1^2)}} \; ; \; \boxed{R_{ga} = \frac{1}{\gamma}\frac{L_c}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}} \quad (3)$$

■ On a $R_a I + U_R + R_{ga} I - U_0 = 0$

soit $\boxed{U_0 - U_R = (R_a + R_{ga})I}$ (4)



2. a. ■ L'espace $r_1 < r < r_2$ est non chargé et est assimilable au vide (ε_0, μ_0), on a donc d'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$(\text{div}\vec{E} = 0) \xrightarrow{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V} \boxed{\Delta V = 0} \quad (5)$$

$$r_1 < r < r_2.$$

■ Envisageons une solution de la forme :

$$V(r, z) = (Az + B) + (Cz + D)\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant L_c \\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2 \end{cases}$$

Copyrighted material

Elle doit vérifier (5), soit $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, ce qui est réalisé puisque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (V(r,z) \text{ fonction affine de } z \text{ à } r \text{ fixé}) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\left((Cz+D)\cdot\dfrac{1}{r}\right)\right] = \dfrac{\partial}{\partial r}(Cz+D) = 0 \end{cases}$$

D'autre part on a $V(r_1^-) = V(r_1^+)$ avec $dV(r_1^-) = -E_1 dz$, d'où :

$$V(r_1, z) = V(r_1, 0) - E_1 z.$$

De même $\quad V(r_2^-) = V(r_2^+)$ avec $dV(r_2^+) = E_2 dz$, d'où :

$$V(r_2, z) = V(r_2, 0) + E_2 z.$$

Enfin avec $\quad V(r_1, 0) - V(r_2, 0) = U_0$ et $V(r_2, 0) = 0$:

$$\begin{cases} V(r_2, z) = E_2 z \\ V(r_1, z) = U_0 - E_1 z \end{cases}$$

Ce qui donne $U_0 - E_1 z = Az + B \rightarrow A = -E_1$ et $B = U_0$

$$E_2 z = U_0 - E_1 z + (Cz+D)\ln\frac{r_2}{r_1} \rightarrow C = \frac{E_1+E_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \text{ et } D = -\frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Soit $\boxed{V(r,z) = U_0 - E_1 z + [(E_2+E_1)z - U_0]\dfrac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$

b. ■ Composantes du champ électrique pour $r_1 < r < r_2$.

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$: $\vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \dfrac{\partial V}{\partial O_z}\vec{u}_z$ (puisque $V = V(r,z)$) ;

$\vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_z\vec{u}_z$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= [-(E_1+E_2)z + U_0]\frac{1}{r\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \\ E_z &= E_1 - (E_1+E_2)\frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \end{aligned}}$$

■ Calculons $\eta = \left|\dfrac{E_z(r_1,0)}{E_r(r_1,0)}\right|$

Copyrighted material

$$\eta = \frac{E_1}{\left[\dfrac{U_0}{\left(r_1 \ln \dfrac{r_2}{r_1}\right)}\right]} = \frac{E_1}{U_0} r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Or $U_0 = (R_a + R_{ga} + R)I$ et $E_1 = \dfrac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \dfrac{R_a}{L_c} I$

d'où : $\eta = \dfrac{R_a}{R_a + R_{ga} + R} \cdot \dfrac{r_1}{L_c} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) = \dfrac{R_a}{R} \cdot \dfrac{r_1}{L_c} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ (R_a et $R_{ga} \ll R = 50\ \Omega$).

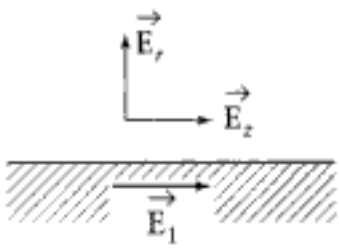
A.N. : $R_a = 2{,}9 \cdot 10^{-2}\ \Omega$; $R_{ga} = 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \Omega$ (les approximations sont justifiées)

$$\eta = 3 \cdot 10^{-7} \text{ (et donc } |E_z(r_1, 0)| \ll |E_r(r_1, 0)| \text{)}.$$

c. Les relations de passage donnent :

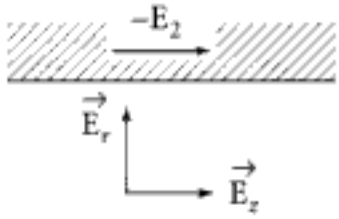
■ $E_z(r_1^+, z) = E_z(r_1^-, z) = E_1$ (déjà réalisé)

et $E_r(r_1^+, z) - 0 = \dfrac{\sigma_1(z)}{\varepsilon_0} \rightarrow \boldsymbol{\sigma_1(z) = \varepsilon_0 E_r(r_1^+, z)}$



soit $$\boxed{\sigma_1(z) = \frac{\varepsilon_0}{r_1 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} [U_0 - (E_1 + E_2)z]}$$

■ De même $(-E_r(r_2^-, z) - 0) = \dfrac{\sigma_2(z)}{\varepsilon_0}$



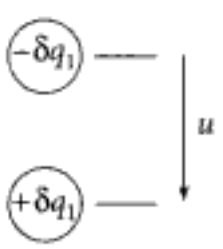
d'où : $$\boxed{\sigma_2(z) = -\frac{\varepsilon_0}{r_2 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} [U_0 - (E_1 + E_2)z]}$$

Commentaire

On a $\sigma_1(z) \cdot r_1 + \sigma_2(z) r_2 = 0$, résultat conforme au théorème de Gauss…

d. Considérons la portion de câble comprise entre z et $z + dz$. La surface de $\mathscr{C}_1$ porte la charge $\delta q_1 = 2\pi r_1 dz \sigma_1$, et la surface $r = r_2$ de $\mathscr{C}_2$ la charge $\delta q_2 = 2\pi r_2 dz \sigma_2 = -\delta q_1$.
On a donc : $\delta q_1 = 2\pi r_1 \sigma_1(z) dz$

avec $u = V(r_1, z) - V(r_2, z) = [(E_1 + E_2)z - U_0]\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}\right]$



Copyrighted material

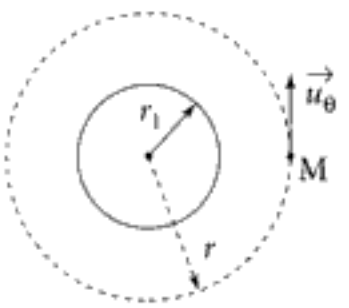
soit en notant δC tel que : $\delta q_1 = \delta C \cdot u$:

$$\delta C = \frac{\delta q_1}{u} = \frac{2\pi \cdot \dfrac{\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (U_0 - (E_1 + E_2)z)dz}{[U_0 - (E_1 + E_2)z]} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}dz$$

On peut ainsi définir une capacité par unité de longueur du câble $\Gamma = \dfrac{\delta C}{dz}$ telle que :

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}} \xrightarrow{A.N.} \Gamma = 45\ \text{pF} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3. a. ■ Le plan contenant l'axe Oz et passant par M est plan de symétrie ($L_c \gg r_2$), le champ magnétique $\vec{B}$ lui est perpendiculaire, soit $\vec{B} = B(r, z)\vec{u_\theta}$.



Le théorème d'Ampère donne alors ($r_1 < r < r_2$) :

$$B(r, z)2\pi r = \mu_0 I \rightarrow \vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$$

■ Revenons à la partie de câble de longueur dz. L'énergie magnétique contenus dans la région ($r_1 < r < r_2$) vaut :

$$\delta E_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}dz = \frac{1}{2\mu_0}\left(\int_{r_1}^{r_2} B^2 2\pi r dr\right)dz$$

soit encore $$\delta E_m = \frac{\pi}{\mu_0}dz\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)dz$$

Expression que l'on peut réécrire en introduisant le coefficient d'inductance δL associé, défini selon :

$$\delta E_m = \frac{1}{2}I^2\delta L$$

d'où une inductance par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{\delta L}{dz}$ telle que :

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \rightarrow \Lambda = 25\ \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$$

b. Il vient $\Lambda\Gamma = \mu_0\varepsilon_0 \rightarrow \boxed{\Lambda\Gamma = \dfrac{1}{c^2}}$

c représente la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

4. a. Dans l'âme $\vec{E} = E_1\vec{u_z}$ et $\vec{B} = B\vec{u_\theta}$, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E_1} \wedge \vec{B}$ n'y possède donc pas de composante parallèle à Oz : le flux d'énergie à travers l'âme est ainsi nul. Il en est de même pour la gaine.

Copyrighted material

b. ■ Dans l'espace interconducteurs $(r_1 < r < r_2)$ on a :

$$\Pi_z = \vec{\Pi}\cdot\vec{u_z} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\wedge\vec{B})\cdot\vec{u_z} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(B\vec{u_\theta}\wedge\vec{u_z}) = \frac{B}{\mu_0}\vec{E}\cdot\vec{u_r} = \frac{1}{\mu_0}B\cdot E_r$$

d'où $\Phi(z) = \dfrac{1}{\mu_0}\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} BE_r 2\pi r\mathrm{d}r = \dfrac{1}{\mu_0}\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\dfrac{[U_0-(E_1+E_2)z]}{r\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}2\pi r\mathrm{d}r$

$$\Phi(z) = I\cdot[U_0-(E_1+E_2)z]\cdot\frac{1}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Finalement :

$$\boxed{\Phi(z) = I\cdot[U_0-(E_1+E_2)z]}$$

■ et en introduisant $U(z) = V(r_1,z)-V(r_2,z) = U_0-(E_1+E_2)z$ en obtient :

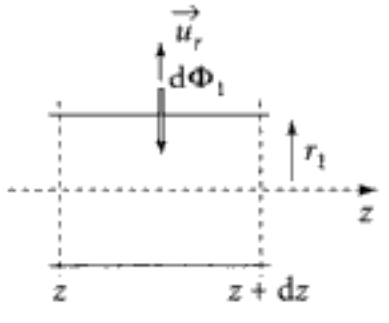
$$\boxed{\Phi(z) = IU(z)}$$

On a : $(\Phi(0) = IU_0)$ ■ puissance disponible aux bornes du générateur.

et $(\Phi(L_c) = IU_R)$ ■ puissance dissipée dans le résistor R.

c. ■ On a $\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{\Pi}(r_1^+,z)\cdot(-\vec{u_r})2\pi r_1\mathrm{d}z$

soit $\mathrm{d}\phi_1 = -2\pi r_1\mathrm{d}z\Pi_r(r_1^+,z)$



or $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\cdot[(E_r\vec{u_r}+E_z\vec{u_r})\wedge B\vec{u_\theta}]$

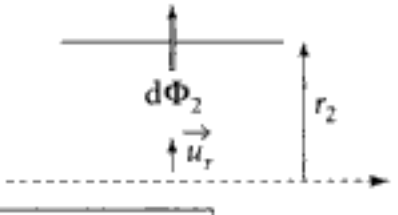
d'où $\Pi_r = -\dfrac{1}{\mu_0}BE_z$

Dès lors : $\mathrm{d}\Phi_1 = \dfrac{1}{\mu_0}2\pi r_1\mathrm{d}z\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\cdot E_1$ $(E_z(r_1^+) = E_1)$

et $\mathrm{d}\Phi_1 = IE_1\mathrm{d}z \overset{(1)}{\rightarrow} \mathrm{d}\Phi_1 = \dfrac{I^2}{\gamma\pi r_1^2}\mathrm{d}z \overset{(3)}{\rightarrow} \boxed{\mathrm{d}\Phi_1 = R_a\dfrac{\mathrm{d}z}{L_c}I^2}$

■ Cette puissance rayonnée à travers la surface $r = r_1$ sera dissipée par effet Joule dans la portion de longueur $\mathrm{d}z$ du conducteur $\mathscr{C}_1$ (et de résistance $\mathrm{d}R_a = R_a\dfrac{\mathrm{d}z}{L_c}$).

d. De même $\mathrm{d}\Phi_2 = 2\pi r_2\mathrm{d}z\Pi_r(r_2^-,z)$



et $\mathrm{d}\Phi_2 = (2\pi r_2\mathrm{d}z)\cdot\left(-\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_2}\cdot(-E_2)\right)$

car $E_z(r_2^+,z) = -E_2$

d'où : $\mathrm{d}\Phi_2 = IE_2\mathrm{d}z = \dfrac{I^2}{\pi(r_3^2-r_2^2)\gamma}\mathrm{d}z \rightarrow \boxed{\mathrm{d}\Phi_2 = R_{ga}\dfrac{\mathrm{d}z}{L_c}I^2}$

Copyrighted material

(même remarque…)

Le bilan de puissance se traduit par :

$\Phi(z) = \Phi(z + dz) + d\Phi_1 + d\Phi_2$

soit encore :

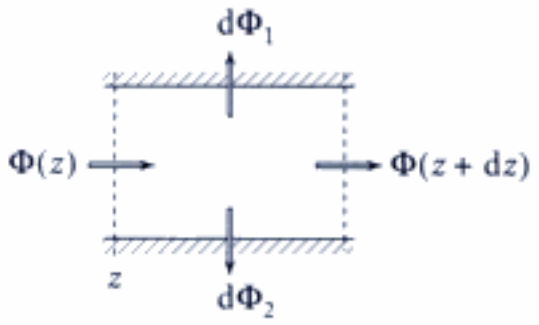
$\Phi(z) - \Phi(z + dz) = d\Phi_1 + d\Phi_2$

et $-\dfrac{d\Phi}{dz}dz = d\Phi_1 + d\Phi_2$

or $\Phi = IU(z)$, $\quad d\Phi_1 = R_a \dfrac{dz}{L_c} I^2$

et $d\Phi_2 = R_{ga} \dfrac{dz}{L_c} I^2$

d'où : $-I\dfrac{dU(z)}{dz} = I^2 \cdot \left(\dfrac{R_a}{L_c} + \dfrac{R_{ga}}{L_c}\right) \rightarrow \boxed{-\dfrac{dU}{dz} = \left(\dfrac{R_a}{L_c} + \dfrac{R_{ga}}{L_c}\right) I}$



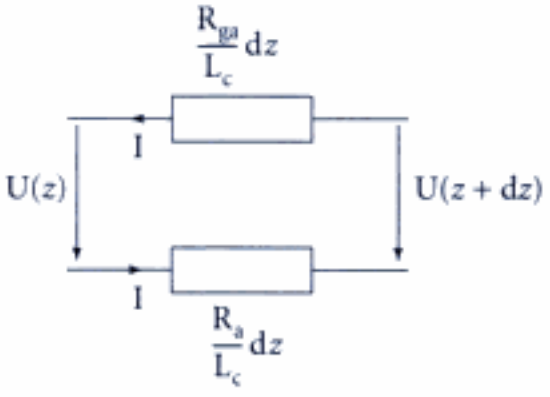
Ce qui correspond bien au schéma électrique suivant (*cf.* figure), pour lequel on a :

$\dfrac{R_a}{L_c} dz\, I + U(z + dz) + \dfrac{R_{ga}}{L_c} dz\, I - U(z) = 0$

ce qui donne :

$-(U(z + dz) - U(z)) = \left(\dfrac{R_a}{L_c} + \dfrac{R_{ga}}{L_c}\right) I\, dz$

$\rightarrow -\dfrac{dU}{dz} = \left(\dfrac{R_a}{L_c} + \dfrac{R_{ga}}{L_c}\right) I.$



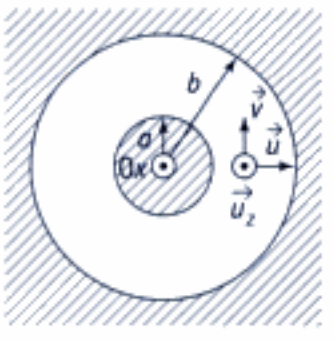
202 Câble coaxial en régime sinusoïdal

Un câble coaxial (rayon intérieur a, rayon extérieur b) est parcouru (dans l'espace compris entre ses deux armatures parfaitement conductrices) par une onde électromagnétique dont le champ électrique, en notation complexe, est de la forme :

$$\vec{E} = E_0(r) \exp j(kz - \omega t)\, \vec{u}$$

(en coordonnées cylindriques : r, θ, z) et le champ magnétique de la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_0(r) \exp j(kz - \omega t).$$



Copyrighted material

On supposera que l'espace $a < r < b$ est assimilable au vide (ε_0, μ_0), et on admettra que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans les conducteurs.

1. Calculer $E_0(r)$ en fonction de a, r et $E_1 = \lim\limits_{r \to a^+} E_0(r)$.

2. Déterminer le champ $\vec{B}_0(r)$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

a. Sous forme locale :

on donne la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(A\vec{u}) = A\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}A \wedge \vec{u}.$$

Commenter les résultats obtenus pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

b. sous forme intégrale.

3. Établir une autre relation entre $B_0(r)$ et $E_0(r)$. En déduire que l'on a $k = \dfrac{\omega}{c}$.

4. Des densités surfaciques de courant $\vec{j}_s$ et de charge σ apparaissent à la surface des armatures. Calculer à partir des relations de passage, et sur chaque conducteur :

a. les densités de charge σ_a et σ_b. Commenter.

b. les densités de courant $\vec{j}_{s_a}$ et $\vec{j}_{s_b}$. Commenter.

c. Vérifier le principe de conservation de la charge.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équations de Maxwell (forme locale, forme intégrale).
- Relations de passage : charges et courants de surface.
- Conservation de la charge.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On prendra un volume torique d'axe Oz et de section rectangulaire $(dz \times dr)$ et on appliquera le théorème de Gauss.

2. b. Prendre un contour rectangulaire $(dz \times dr)$ contenu dans un plan θ = cste.

3. Prendre un contour $(dz \times r\,d\theta)$ s'inscrivant sur un cylindre d'axe Oz et de rayon r.

4. On pourra définir la densité de charge $\lambda(z, t)$ par unité de longueur portée par le conducteur intérieur ainsi que le courant $I(z, t)$ y circulant, puis faire un bilan de charges sur un élément de longueur dz.

Copyrighted material

3. Solution

1.

POINT MÉTHODE

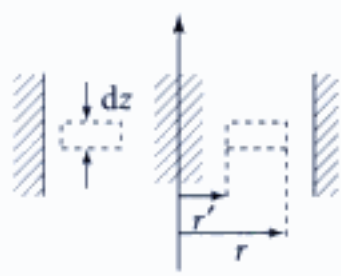
À l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (forme locale) correspond la forme intégrale :

$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}^{ext} \cdot \delta\Sigma = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$ (Q_{int} = charge contenue le volume $\mathcal{V}$ de frontière Σ)

soit encore $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$ (1).

On peut ainsi calculer $\vec{E}$ lorsque les symétries du problème sont suffisantes…

Ici $\vec{E} = E_0(r)\exp j(kz - \omega t)\vec{u}$. Nous allons donc appliquer la résultat précédent (1) au volume $\mathcal{V}$ correspondant à un « anneau » dessiné en pointillés sur la vue en coupe ci-contre (hauteur dz, rayons intérieur r' et extérieur r. Le volume n'étant pas chargé $Q^{int} = 0$ et $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 0$, d'où :



$$[2\pi r E_0(r) - 2\pi r' E_0(r')]\exp j(kz - \omega t)\,dz = 0$$

On a $rE_0(r) = r'E_0(r')$ et en faisant tendre r' vers a :

$$\boxed{E_0(r) = \frac{a}{r}E_1} \quad (2)$$

2. a. Considérons l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Elle s'écrit avec les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ données dans l'énoncé et le résultat (2) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\frac{a}{r}E_1 \exp j(kz - \omega t)\,\vec{u}\right] = j\omega\vec{B}_0(r)\exp j(kz - \omega t).$$

Appliquons alors la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\underbrace{\frac{a\,E_1}{r}\exp j(kz - \omega t)\,\vec{u}}_{A(r,z,t)}\right] = A\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}A \wedge \vec{u}.$$

On vérifiera sans difficultés que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{0}$ (à cet effet on peut repasser en coordonnés cartésiennes avec $\vec{u} = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right]$…)

De plus $\overrightarrow{\text{grad}}A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{u} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{u}_z$

et $\overrightarrow{\text{grad}}\text{A} \wedge \vec{u} = \dfrac{\partial \text{A}}{\partial z}(\vec{u}_z \wedge \vec{u}) = \dfrac{\partial \text{A}}{\partial z}\vec{v} = \dfrac{\text{j}a\,\text{E}_1 k}{r}\exp\text{j}(kz - \omega t)\vec{v}$.

D'où $$\boxed{\vec{\text{B}}_0(r) = \frac{a\text{E}_1}{r}\frac{k}{\omega}\vec{v}} \quad (3)$$

Commentaires

On a obtenu :

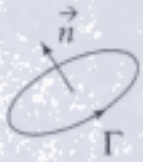
$$\underline{\vec{\text{E}}} = \frac{a}{r}\text{E}_1 \exp[\text{j}(kz - \omega t)]\vec{u} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{\text{B}}} = \frac{a\text{E}_1}{r}\frac{k}{\omega}\exp[\text{j}(kz - \omega t)]\vec{v}.$$

Nous pouvons remarquer que l'on a également $\underline{\vec{\text{B}}} = \dfrac{k}{\omega}\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{\text{E}}}$, relation identique à celle obtenue pour une OPPH dans le vide « illimité ». Il s'agit en fait d'une onde progressive (selon Oz, terme en $\exp[\text{j}(kz - \omega t)]$, harmonique (pulsation ω), non plane (*cf.* $\text{E}_0(r)$ et $\text{B}_0(r)$) et transverse ($\vec{\text{E}}$ et $\vec{\text{B}}$ perpendiculaires à la direction de propagation). De plus on ne peut pas encore affirmer à ce stade que $k = \dfrac{\omega}{c}$...

b.

POINT MÉTHODE

À l'équation de Maxwell-Faraday locale $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\text{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\text{B}}}{\partial t}$ correspond la forme intégrale :

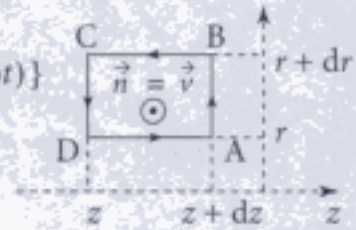


$$\mathscr{C}(\vec{\text{E}}) = \oint_\Gamma \vec{\text{E}} \cdot \delta\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{\text{B}}}{\partial t}\vec{n}\,\delta\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \vec{\text{B}} \cdot \vec{n} \cdot \delta\Sigma.$$

Σ : surface orientée s'appuyant sur le contour fermé fixe Γ.

Soit $\mathscr{C}_\Gamma(\vec{\text{E}}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\phi_\Sigma(\vec{\text{B}})$ (4)

Choisissons le contour élémentaire ABCD :



$\mathscr{C}(\vec{\text{E}}) = \text{E}_0(r)\,\text{d}r\,\{\exp\text{j}(k(z + \text{d}z) - \omega t) - \exp\text{j}(kz - \omega t)\}$

$\mathscr{C}(\vec{\text{E}}) = \text{j}k\text{E}_0(r)\exp\text{j}(kz - \omega t)\,\text{d}z\,\text{d}r.$

De plus $\vec{\text{B}} = \text{B}\vec{v}$, soit :

$$\phi_\Sigma(\vec{\text{B}}) = \text{B}_0(r)\exp\text{j}(kz - \omega t) \cdot \text{d}r\,\text{d}z.$$

Reportant ces résultats dans (4) et après simplifications par $\exp\text{j}(kz - \omega t)\,\text{d}r\,\text{d}z$. :

$$\text{j}k\text{E}_0(r) = +\text{j}\omega\text{B}_0(r) \rightarrow \text{B}_0(r) = \frac{k}{\omega}\text{E}_0(r) \quad (3') \text{ (identique à (3)).}$$

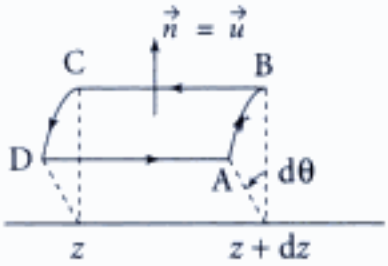
À l'équation de Maxwell-Ampère locale $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ correspond la forme intégrale :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \delta\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{n}\,\delta\Sigma}_{I} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\,\delta\Sigma.$$

Σ surface orienté s'appuyant sur le contour Γ.

Soit encore $\mathscr{C}_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \phi_\Sigma(\vec{E})}{\partial t}$.

■ Considérons alors le contour élémentaire $\Gamma = (ABCD)$, dessiné sur le cylindre d'axe Oz et de rayon r, de langueur dz et de largeur $r\,d\theta$.



• $\mathscr{C}_\Gamma(\vec{B}) = -B_0(r)\exp[j(k(z+dz)) - \omega t]r\,d\theta$
$\qquad + B_0(r)\exp[j(kz - \omega t)r\,d\theta]$
$\qquad = -jkB_0(r)\exp j(kz - \omega t)r\,d\theta\,dz.$

• $\mu_0 I = 0.$

• $\phi(\vec{E}) = E_0(r)\exp[j(kz - \omega t)]r\,d\theta\,dz$

d'où après simplifications $-jkB_0(r) = \dfrac{1}{c^2}(-j\omega)E_0(r) \rightarrow \boxed{B_0(r) = +\dfrac{\omega}{c^2 k}E_0(r)}$ (5)

■ Des relations (3) et (5) nous déduisons :

$$\frac{\omega}{c^2 k} = \frac{k}{\omega} \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

(pour une onde se propageant dans le sens positif de l'axe des z).

Commentaires

Pour le telles ondes le câble coaxial n'est pas dispersif ($v_\varphi = c = \text{cste}$).

3. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans les conducteurs parfaits. On a donc :

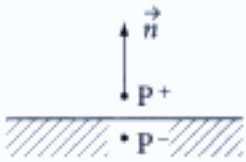
$\vec{E}(r = a^-, z, t) = \vec{0}$; $\quad \vec{B}(r = a^-, z, t) = \vec{0}$

et $\quad \vec{E}(r = b^+, z, t) = \vec{0}$; $\quad \vec{B}(r = b^+, z, t) = \vec{0}$.

Les relations de passage permettent de déterminer les éventuels courants et charges de surface.

4. a. Pour le champ électrique on a :

$$\vec{E}(P^+, t) - \vec{E}(P^-, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}.$$



P^- appartenant au milieu conducteur $\vec{E}(P^-, t) = \vec{0}$ et donc :

$$\vec{E}(P^+, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}.$$

■ En $r = a$, il vient $\vec{n} = \vec{u}$ et $\vec{E}(P^+, t) = E_1 \exp j(kz - \omega t)\,\vec{u}$, soit :

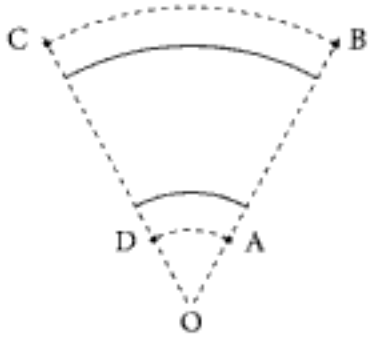
$$\boxed{\sigma_a(z, t) = \varepsilon_0 E_1 \exp j\,(kz - \omega t)}$$

■ En $r = b$, nous avons $\vec{n} = -\vec{u}$ et $\vec{E}(P^+, t) = \frac{a}{b} E_1 \exp j\,(kz - \omega t) \cdot \vec{u}$,

$$\boxed{\sigma_b(z, t) = -\frac{a}{b}\varepsilon_0 E_1 \exp j\,(kz - \omega t)}$$

Commentaires

Considérons le volume cylindrique $\delta\mathcal{V}$ de longueur dz et de section [ABCD], les arcs de cercles BC et DA étant contenus dans les milieux conducteurs.



On a d'après le théorème de Gauss : $\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$

(Σ : surface délimitant $\delta\mathcal{V}$).

Or $\phi_\Sigma(\vec{E}) = 0$ (sur la surface bordant $\delta\mathcal{V}$ on a $\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs ou $\vec{E}$ perpendiculaire à la surface).

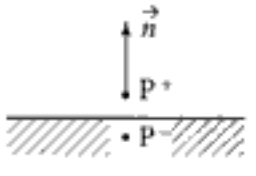
De plus $Q^{int} = \sigma_a(z, t) a\, d\theta\, dz + \sigma_b(z, t) b\, d\theta\, dz$

d'où :

$$a\sigma_a(z, t) + b\sigma_b(z, t) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_b(z, t) = -\frac{a}{b}\sigma_a(z, t)}$$

b. Pour le champ magnétique :

$$\vec{B}(P^+, t) - \vec{B}(P^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}.$$



Or P^- appartenant au milieu conducteur $\vec{B}(P^-, t) = \vec{0}$ et donc :

$$\vec{B}(P^+, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}.$$

■ En $r = a$, $n = \vec{u}$ et $\vec{B}(P^+, t) = \frac{k}{\omega} \cdot E_1 \exp j(kz - \omega t)\vec{v} = \frac{E_1}{c} \exp j\,(kz - \omega t)\vec{v}$

d'où : $\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} = \frac{E_1}{c} \exp j(kz - \omega t)\vec{v}$

et $\vec{j}_s$ n'ayant pas de composante selon $\vec{u}$: $\mu_0 \vec{j}_s = \frac{E_1}{c} \exp j(kz - \omega t)\vec{u}_z$

Soit :

$$\boxed{\vec{j}_{s_z} = \frac{E_1}{\mu_0 c} \exp j(kz - \omega t)\vec{u}_z}$$

Copyrighted material

■ En $r = b$, le même raisonnement conduit avec $\vec{n} = -\vec{u}$

et $\vec{B}(P^+, t) = \frac{1}{c}\frac{aE_1}{b}\exp j(kz - \omega t)\vec{v}$

$$\boxed{\vec{j}_{s_b} = -\frac{a}{b}\frac{E_1}{\mu_0 c}\exp j(kz - \omega t)\vec{u}_z}$$

Commentaires

Le contour Γ étant entièrement contenu dans l'armature conductrice extérieure on a :

$$\mathscr{C}_\Gamma(\vec{B}) = 0.$$

Or $\mathscr{C}_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I + \frac{\partial}{\partial t}\phi_\Sigma(\vec{E})$.

Mais $\vec{E} = E\vec{u}$, et le flux de $\vec{E}$ à travers le disque s'appuyant sur Γ est nul. Dès lors $I = 0$.

Avec $I = j_{s_a} 2\pi a + j_{s_b} 2\pi b$ ($\vec{j}_{s_a} = j_{s_a}\vec{u}_z$ et $\vec{j}_{s_b} = j_{s_b}\vec{u}_z$)

Finalement on a bien : $\boxed{j_{s_a} a = -j_{s_b} b}$

c. L'intensité totale qui parcourt le conducteur central, comptée algébriquement selon Oz vaut :

$$I_1 = \vec{j}_{s_a} \cdot (2\pi a\,\vec{u}_z) \rightarrow I_1 = \frac{E_1}{\mu_0 c} \cdot 2\pi a \cdot \exp j(kz - \omega t).$$

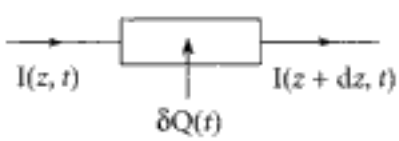
De même la charge λdz d'une partie de hauteur dz du conducteur central est définie selon :

$$\lambda\, dz = \sigma_a 2\pi a\, dz \rightarrow \lambda = 2\pi a \sigma_a$$

soit : $$\lambda = \varepsilon_0 E_1 \cdot 2\pi a \cdot \exp j(kz - \omega t).$$

La conservation de la charge se traduit pour le cylindre de hauteur dz

$$\frac{d}{dt}(\delta Q) = I(z, t) - I(z + dz, t).$$



Or $\delta Q = \lambda(z, t)\,dz$ et $\frac{d(\delta Q)}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}dz$

Soit encore : $\frac{\partial \lambda}{\partial t}dz = -\frac{\partial I}{\partial z}dz$, d'où $\boxed{\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0}$

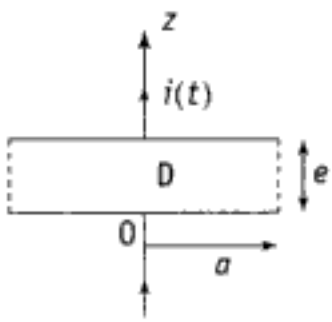
Commentaires

Les résultats obtenus aux questions 1-2-3 sont bien compatibles avec l'équation de conservation de la charge (ce qui n'est guère étonnant puisque les équations de Maxwell contiennent cette dernière : *cf.* équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère).

Copyrighted material

203 Condensateur en régime variable

Un condensateur plan est constitué de deux armateurs circulaires de rayon a distantes de e. On négligera les effets de bord ($e \ll a$). Il est alimenté par un courant $i(t)$. On considère que le champ électrique s'exprime – dans le domaine D– sous la forme :



$$\vec{E} = E(r, z, t)\vec{u_z}$$

(r, z, θ) coordonnées cylindriques d'axe Oz.

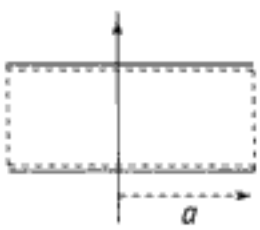
1. On fait l'approximation $E(r, z, t) = E_0(t)$ champ uniforme. Définir la capacité C du condensateur, et donner l'expression de l'énergie électrique emmagasinée en fonction de C et $q(t)$ (charge du condensateur) puis en fonction de C et $u(t)$ (tension aux bornes du condensateur).

2. a) Toujours en confondant $E(r, z, t)$ et $E_0(t)$ déterminer, en tout point de D, une première expression $\vec{B_1}(r, z, t)$ du champ magnétique : on exprimera le résultat en fonction de r (distance à l'axe), $\frac{dE_0}{dt}$ et c ($\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$).

b) En déduire l'énergie magnétique contenue dans D. Commenter.

c) Calculer le flux ϕ_e d'énergie électromagnétique entrant dans D à travers la surface cylindrique représentée en pointillés sur la figure ci-contre.

Commenter.



3. a) Montrer que le champ $\vec{B_1}$ est la source d'un champ électrique complémentaire $\vec{E_1}(r, t)$ que l'on prendra parallèle à $\vec{u_z}$ avec $\vec{E_1}(0, t) = \vec{0}$. Exprimer, à cet ordre, le champ électrique total $\vec{E_T}$ en fonction de $\vec{E_0}(t)$ (champ sur l'axe), de r, c et de $\frac{d^2E_0}{dt^2}$.

Commenter.

b) On se place désormais en régime sinusoïdal établi (de pulsation ω). On a toujours $\vec{E_T} = \vec{E}(r, t)\vec{u_z}$ et $\vec{E}(0, t) = E_0\cos\omega t$.

Montrer, en poursuivant le raisonnement précédent, que l'on a :

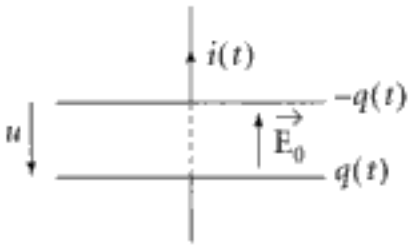
$$E(r, t) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n}\right\}\cdot E_0\cos\omega t.$$

Commenter.

Copyrighted material

Solution

1. Dans l'approximation des états quasistationnaires on peut faire l'hypothèse que le champ électrique est (aux effets de bord près) uniforme à l'intérieur du condensateur :



$$\vec{E}_0 = E_0(t)\vec{u}_z = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{u}_z.$$

La tension aux bornes du condensateur est $u(t) = e\,E_0(t)$, soit encore :

$$u(t) = \frac{e}{\varepsilon_0 S}q(t) \rightarrow q(t) = Cu(t) \quad \text{où} \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}} \quad (1)$$

Le courant $i(t)$ est donné par la relation $i(t) = \dfrac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = C\dfrac{du}{dt}$, relation classique de l'électrocinétique.

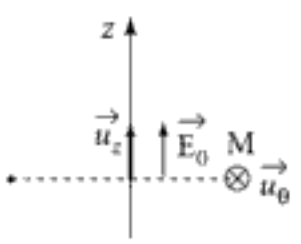
L'énergie emmagasinée sous forme électrique est $U_{el} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\mathcal{V} \rightarrow U_{el} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\dfrac{q^2}{\varepsilon_0^2 S^2}Se$

d'où : $U_{el} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{\varepsilon_0 S}q^2 \Rightarrow \boxed{U_{el} = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}Cu^2} \quad (2)$

2. a) La charge variant dans le temps il en est de même du champ électrique. On a donc $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ non nul dans l'espace D compris entre les plaques. L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ($\vec{j} = \vec{0}$ dans D) impose l'existence d'un champ magnétique $\vec{B}$.

Déterminons une première expression $\vec{B}_1$ de $\vec{B}$ en adoptant la valeur uniforme précédente du champ électrique.

Les symétries imposant $\vec{B}_1 = (r, z, t)\vec{u}_\theta$ on a en utilisant la forme intégrale :



$$\oint_\Gamma \vec{B}_1 \cdot \vec{\delta l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}(\vec{E})$$

$\Gamma \equiv$ cercle d'axe $z'z$ passant par le point M appartenant à D et orienté de façon à ce que la normale au disque de frontière Γ soit porter par $\vec{u}_z$.

$$\oint_\Gamma \vec{B}_1 \cdot \vec{\delta l} = B_1(r, z, t)2\pi r \quad \text{et} \quad \phi(\vec{E}_0) = \iint \vec{E}_0 \cdot \vec{u}_z \cdot \delta\Sigma = E_0(t)\pi r^2$$

d'où $\quad B_1(r, z, t) \cdot 2\pi r = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \pi r^2\dfrac{dE_0(t)}{dt}.$

Copyrighted material

soit : $\boxed{\vec{B}_1 = \frac{r}{2c^2}\frac{dE_0}{dt}\cdot\vec{u}_\theta}$ (3) $\left(\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\right)$.

b) Au champ $\vec{B}_1$ correspond une énergie magnétique $u_m = \frac{B_1^2}{2\mu_0}$ par unité de volume, soit au total :

$$U_m = \iiint_{V_\infty} \frac{B_1^2}{2\mu_0}\delta\mathcal{V} = \int_0^a \frac{B_1^2(r,t)}{2\mu_0}2\pi r\,dr e$$

soit : $U_m = \frac{\pi e}{\mu_0}\left(\frac{1}{2c^2}\right)^2\left(\frac{dE_0}{dt}\right)^2\cdot\int_0^a r^3\,dr \rightarrow U_m = \frac{\pi e a^2}{16\mu_0 c^2}\left(\frac{a}{c}\right)^2\left(\frac{dE_0}{dt}\right)^2$;

d'où $\boxed{U_m = \frac{1}{16}\varepsilon_0\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{dE_0}{dt}\right)^2\cdot\mathcal{V}}$ (4) (on a $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ et $\mathcal{V} = \pi a^2 e$).

L'énergie électrique s'exprime sous la forme : $U_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2(t)\mathcal{V}$ (5)

Le rapport de ces deux énergies est donné, en ordre grandeur par :

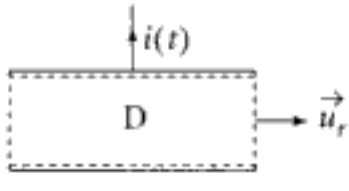
$\eta \sim \frac{1}{8}\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{1}{T^2}\quad\left(\frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{dt}\right)^2 \sim \frac{1}{T^2}$ où T est le temps caractéristique associé aux variations temporelles de $\vec{E}(t)$ et donc du courant $i(t)$.

$\eta \sim \frac{1}{8}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2$ où $\tau = \frac{a}{c}$ = temps que met la lumière pour parcourir la distance a dans le vide.

L'approximation du **1.** (« AEQS électrique ») restera valable tant que $\frac{1}{8}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \ll 1$, ce qui est réalisé dès que $\tau \ll T$.

c) On a alors $\vec{E} \approx E_0(t)\vec{u}_z$ et $\vec{B} \approx \frac{r}{2c^2}\frac{dE_0}{dt}\vec{u}_\theta$, soit – dans D – un vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1 = -\frac{r}{2\mu_0 c^2}E_0(t)\frac{dE_0}{dt}\vec{u}_r$.

Le flux d'énergie électromagnétique entrant dans D est donné par le flux de $\vec{\Pi}$ à travers le surface latérale du cylindre de rayon a et de hauteur e ($\phi = 0$ sur le fond et le couvercle puisque $\Pi_z = 0$)



d'où $\phi_e = \vec{\Pi}(r = a, t)\cdot(-\vec{u}_r)\cdot 2\pi a e$ ($(-\vec{u}_r)$ car flux entrant).

Or $\phi_e = \pi a^2 e\varepsilon_0 E_0(t)\frac{dE_0}{dt} = \mathcal{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)$ (6) ; ($\mathcal{V} = \pi a^2 e$).

Le bilan d'énergie électromagnétique appliqué au domaine D ($\vec{j} = \vec{0}$) s'écrit ici :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_m + U_{el}) - \phi_e = 0$$

Copyrighted material

soit, en fonction des approximations, $\phi_e = \dfrac{\partial U_{el}}{\partial t}$, ce qui est bien en accord avec (5) et (6).

Commentaire

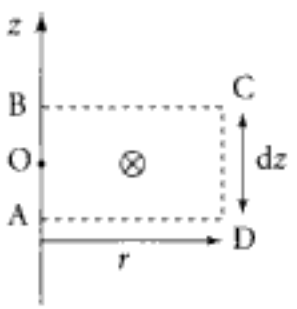
On a obtenu $\phi_e = \pi a^2 e \varepsilon_0 E_0(t) \dfrac{dE_0}{dt}$ relation que l'on peut réécrire selon :

$$\phi_e = \left(\varepsilon_0 S \frac{dE_0}{dt}\right) \cdot (e\varepsilon_0) = \frac{dq}{dt} \cdot u \Rightarrow \boxed{\phi_e = u(t)i(t)} \quad (7)$$

$u(t)i(t)$ représentant – du point de vue de l'électrocinétique – la puissance électrique disponible aux bornes du condensateur. Elle s'identifie en fait à la puissance électromagnétique à travers la surface latérale du condensateur…

3. a) Le champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps induit à son tour un champ électrique $\vec{E}_1$ porté par $\vec{u}_z$ du fait des symétries : $\vec{E}_1 = E_1(r, t)\vec{u}_z$.

Prenons $E_1(0, t) = 0$, le champ précédent $E_0(t)\vec{u}_z$ désignant le champ électrique réel sur l'axe Oz.



L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous forme intégrale :

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{\delta l} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{B}).$$

Prenons un contour Γ rectangulaire ABCD et appliquons la relation précédente aux champs $\vec{B}_1 \to \vec{E}_1$:

$$0 + 0 - E_1(r, z, t)\,dz + 0 = -\frac{1}{2c^2}\frac{d^2E_0}{dt^2}\int_{r=0}^{r} r'\,dr'\,dz$$

d'où : $\vec{E}_1(r, z, t) = \dfrac{r^2}{4c^2}\dfrac{d^2E_0}{dt^2}\vec{u}_z \quad (8)$

À cette nouvelle approximation il vient :

$$\boxed{\vec{E}_T = \left(E_0(t) + \frac{r^2}{4c^2}\frac{d^2E_0}{dt^2}\right)\vec{u}_z}$$

et en régime sinusoïdal établi de pulsation ω : $\vec{E}_T \sim E_0 \cdot \left(1 - \dfrac{\omega^2 r^2}{4c^2}\right)\cos\omega t\,\vec{u}_z$.

On retrouve l'AEQS pour $\dfrac{\omega^2 a^2}{4c^2} \ll 1$, c'est-à-dire pour $\dfrac{\frac{a^2}{c^2}}{T^2} \ll 1$ (avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$), soit $\left(\dfrac{\tau}{T}\right)^2 \ll 1$ comme il se doit.

b) On peut réitérer le processus précédent :

$$\vec{E}_0(t) \xrightarrow[\text{Ampère}]{\text{Maxwell}} \vec{B}_1(r, t) \xrightarrow[\text{Faraday}]{\text{Maxwell}} \vec{E}_1(r, t) \xrightarrow[\text{Ampère}]{\text{Maxwell}} \vec{B}_2(r, t) \ldots$$

Copyrighted material

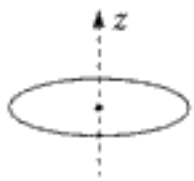
Les résultats (3) et (8) s'écrivent en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}_1} = \frac{r}{2c^2}j\omega\underline{E_0}\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}_1} = \frac{r^2}{4c^2}(j\omega)^2\underline{E_0}\vec{u_z}\,;\ (\underline{E_0} = E_0 \exp j\omega t).$$

Posons $\underline{B_n} = C_n r^{2n-1}\underline{E_0}$ et $\underline{E_n} = D_n r^{2n}\underline{E_0}$.

■ L'équation de Maxwell-Ampère donne pour $\underline{E_{n-1}} \to \underline{B_n}$ $\left(\mathscr{C}(\vec{B_n}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}(\vec{E}_{n-1})\right)$:

$$2\pi r\underline{B_n} = \frac{1}{c^2}(j\omega)\int_0^r D_{n-1}r'^{2n-2} \times 2\pi r'\,dr'\underline{E_0}$$

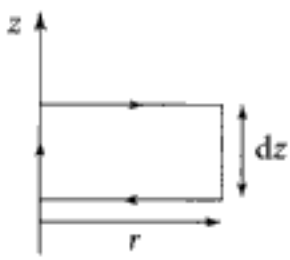


soit : $\underline{B_n} = \frac{j\omega}{c^2}\cdot\frac{\underline{E_0}}{r}D_{n-1}\frac{r^{2n}}{2n} \to C_n = \frac{j\omega}{2c^2}\cdot\frac{1}{n}D_{n-1}$.

■ L'équation de Maxwell-Ampère implique pour $\underline{B_n} \to \underline{E_n}$ $\left(\mathscr{C}(\vec{E_n}) = -\frac{\partial\phi}{\partial t}(\vec{B_n})\right)$:

$$(0 - \underline{E_n})\,dz = -j\omega C_n\underline{E_0}\int_0^r r'^{2n-1}\,dr'\,dz$$

$$\underline{E_n} = j\omega C_n\underline{E_0}\frac{r^{2n}}{2n} \to D_n = \frac{j\omega}{2n}C_n.$$



■ Finalement il vient : $D_n = \left(\frac{j\omega}{2n}\right)\left(\frac{j\omega}{2c^2}\cdot\frac{1}{n}\right)D_{n-1}$

soit encore $D_n = \left(\frac{j\omega}{2c}\right)^2\frac{1}{n^2}D_{n-1}$ avec $D_0 = 1$

d'où : $\boxed{D_n = \left(\frac{j\omega}{2c}\right)^{2n}\frac{1}{(n!)^2}}$

Le champ électrique s'obtient alors sous la forme d'une série entière :

$$\underline{E_T}(r, t) = E_0 e^{j\omega t}\cdot\sum\left(\frac{j\omega}{2c}\right)^{2n}\frac{1}{n!^2}r^{2n}$$

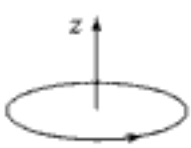
d'où : $\boxed{E_T(r, t) = E_0\cos\omega t\cdot\sum\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n}}$ (9)

Commentaire

■ Ce champ $\underline{E_T} = E(r, t)\vec{u_z}$ est solution de l'équation de propagation $\Delta\underline{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E} = 0$ avec $\underline{E} = F(r)\exp(j\omega t)$ et $F(0) = E_0$ et $F'(0) = 0$.

En effet avec $\underline{\vec{E}} = \underline{E}\vec{u_z}$ et $\underline{\vec{B}} = \underline{B}\vec{u_\theta}$ il vient :

→ via l'équation de Maxwell-Ampère :

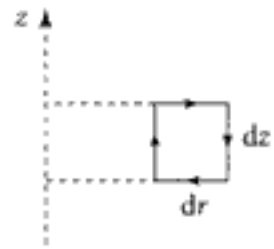


$$2\pi r\underline{B}(r, t) = \frac{1}{c^2}j\omega\int_0^r \underline{E}(r', t)2\pi r'\,dr'$$

d'où : $(r\underline{B}) = \frac{j\omega}{c^2}\int_0^r \underline{E}(r', t)r'\,dr' \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r\underline{B}) = \frac{j\omega}{c^2}r\underline{E}$ (10)

Copyrighted material

→ via l'équation de Maxwell-Faraday :



$$[\underline{E}(r,t) - \underline{E}(r+dr,t)]\,dz = -j\omega\underline{B}\,dr\,dz$$

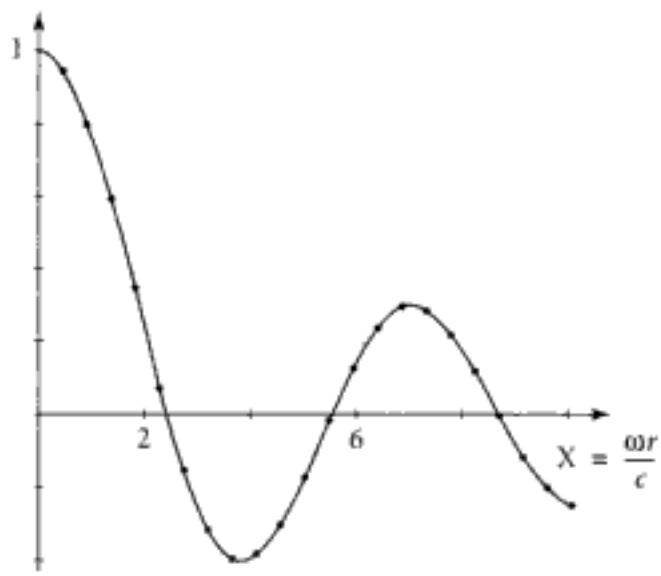
d'où $\quad j\omega\underline{B} = \dfrac{\partial \underline{E}}{\partial r} \quad (11)$

(10) et (11) donnent alors :

$$\frac{j\omega}{c^2} r\underline{E} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{j\omega}\frac{\partial \underline{E}}{\partial r}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \underline{E}}{\partial r}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E} = 0} \quad (12)$$

dont (9) est bien solution… (fonction de Bessel).

■ On a tracé ci-dessous la courbe $X = \dfrac{\omega r}{c} \to \dfrac{F(r)}{F(0)}$.



→ courbe en trait plein obtenue à partir de la somme discrète tronquée à $n = 100$.

→ courbe représentée par des « ronds » associée à la fonction de Bessel solution de :

$$X^2y'' + Xy' + X^2y = 0 \text{ (équation différentielle conforme à 12).}$$

■ L'hypothèse $E(r,t) = E_0(t)$ est acceptable pour $X \ll 2$ et donc pour $\dfrac{\omega a}{2c} \ll 1$ …

204 Champ électromagnétique dans un milieu conducteur

On cherche à déterminer l'ordre de grandeur de la distance de pénétration du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans un milieu conducteur tel qu'un métal.

Copyrighted material

1. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique $\vec{E}(z,t) = E(z,t)\vec{u_x}$ (et la densité volumique de courant $\vec{j}$) quand on néglige le courant de déplacement $\vec{j_D} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On admettra que le milieu est assimilable au vide avec des courants $\vec{j}$ obéissant à la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (σ(cuivre) = $6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$) ?

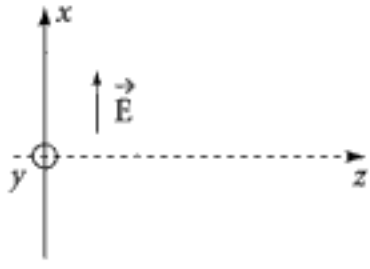
Commenter.

2. En utilisant la notation complexe on pose $\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$ où $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0(z)\exp(j\omega t)\vec{u_x}$.

Quelle est la forme de $\underline{E}_0(z)$ puis de $\vec{E}(z,t)$? Commenter.

Solution

1. Pour des fréquences suffisamment basses (*cf.* suite), on pourra négliger le courant de déplacement $\vec{j_0} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ par rapport au courant de conduction $\vec{j}$ (le premier est lié aux variations de $\vec{E}$ dans le temps alors que le second reste proportionnel à ce champ : la conductivité σ est une constante à condition là aussi que la fréquence ne soit pas trop élevée…).



$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \# \mu_0 \vec{j} \quad (2)$$

Commentaire

L'équation (2) entraine $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$, et le champ $\vec{E} = E(z,t)\vec{u_x}$ est à divergence nulle ; ces résultats sont compatibles avec une densité volumique de charges nulle dans le conducteur ($\rho = 0$) …

$$\text{Or } \vec{E} = E(z,t)\vec{u_x} \longrightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\begin{pmatrix} 0 & & E \\ 0 & \wedge & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial E}{\partial z}\vec{u_y}$$

$$(2) \text{ donne } \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\vec{u_z}\right) = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\vec{u_x}$$

et avec la loi d'Ohm sous la forme $\vec{j} = \sigma\vec{E}$: $\mu_0\sigma \dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{u_x} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}\vec{u_x}$.

Finalement : $\boxed{\dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma \dfrac{\partial E}{\partial t}}$ (1) et $\boxed{\dfrac{\partial^2 j}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma \dfrac{\partial j}{\partial t}}$

Copyrighted material

Commentaires

• Si le régime est sinusoïdal, l'amplitude de $\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ est $\varepsilon_0 \omega E_0$ (en appelant E_0 l'amplitude du champ électrique), l'amplitude de j est σE_0.

L'approximation faite correspond à $\varepsilon_0 \omega \ll \sigma$ soit $\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, et avec la fréquence ν :

$$\nu \ll \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\nu \ll 10^{18}\ \text{Hz}}$$

La valeur maximale trouvée est bien supérieure à la limite de validité de la loi d'Ohm qu'on situe habituellement au voisinage de 10^{16} Hz pour un conducteur tel que le Cuivre…

• L'équation (1) trouvée pour le champ $\vec{E}$ et donc pour $\vec{j}$ est du type « *équation de diffusion* » comme celle qui décrit la diffusion de l'énergie thermique…

2. Le champ $\underline{E}(z, t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2\underline{E}}{dz^2} = \mu_0\sigma(+i\omega)\underline{E} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\underline{E}_0}{dz^2} - i\mu_0\sigma\omega\varepsilon_0 = 0$$

dont les solutions sont de la forme e^{rz}, où r vérifie : $r^2 - i\mu_0\sigma\omega = 0$.

On trouve donc :

$$r_1 = \sqrt{\mu_0\sigma\omega}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt{\mu_0\sigma\omega}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{soit} \quad f = \underline{A}e^{r_1 z} + \underline{B}e^{r_2 z}$$

d'où $\underline{E} = \underline{A}\exp[r_1 z + i\omega t] + \underline{B}\exp[r_2 z + i\omega t]$.

Passons à la grandeur réelle en prenant la partie réelle de l'équation précédente ($\varphi = \text{Arg}\underline{A}$ et $\psi = \text{Arg}\underline{B}$), en posant : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ (***longueur de peau***)

$$E = |\underline{A}|e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right) + |\underline{B}|e^{\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta} + \psi\right).$$

Le premier terme s'interprète comme une onde qui se propage vers les $z > 0$, avec une vitesse $\omega\delta$, pendant que l'amplitude décroît exponentiellement.

Le second terme correspond à une onde qui se propage dans l'autre sens et dont l'amplitude décroît exponentiellement quand on suit l'onde dans son mouvement.

D'où en ne gardant que le premier, l'origine de « l'onde » se situant du coté des $z < 0$:

$$\boxed{E(z, t) = E_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)}$$

Commentaire

Ce résultat est tout à fait compatible avec notre intuition, l'onde qui se propage dans un métal s'atténue car elle engendre des courants, donc de l'effet Joule et perd ainsi peu à peu de sa puissance.

Copyrighted material

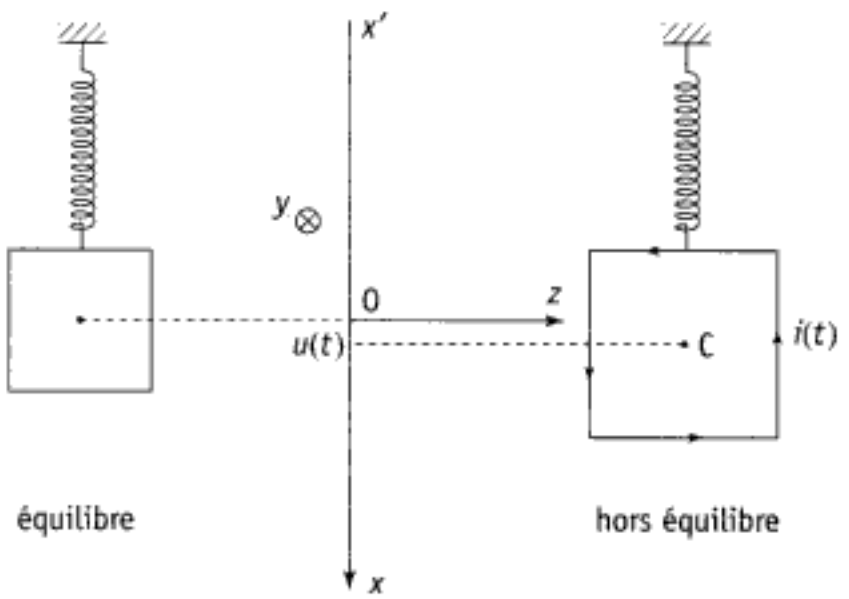
δ est l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle l'onde s'amortit ; δ porte le nom d'épaisseur de peau et chiffre la profondeur que peut « atteindre » une onde qui rentre dans un conducteur.

Donnons quelques valeurs de δ pour différentes fréquences :

$$\nu = 50 \text{ Hz} \rightarrow \delta \approx 9 \text{ mm}$$
$$\nu = 1 \text{ kHz} \rightarrow \delta \approx 2 \text{ mm}$$
$$\nu = 10 \text{ kHz} \rightarrow \delta \approx 0{,}6 \text{ mm}$$

205 Mouvement d'une bobine en présence d'un champ magnétique

Une bobine plate de masse m est composée de N spires carrées de côté a. Les deux extrémités de l'enroulement sont reliées et, ainsi, la bobine forme un circuit linéique de résistance r et de coefficient d'auto-induction que l'on négligera. On veillera à respecter le sens positif du courant indiqué sur le schéma.



Cette bobine est suspendue à l'extrémité d'un ressort isolant d'axe vertical de longueur à vide l_0 et de raideur k. À l'équilibre, la longueur du ressort est $l_1 > l_0$ et le centre d'inertie C de la bobine possède une abscisse nulle.

Un aimant permanent crée dans la région $x > 0$ un champ magnétique horizontal orthogonal au plan des spires. On considère que ce champ est nul pour $x < 0$ et est uniforme égal à $B\vec{u_y}$ pour $x > 0$.

Copyrighted material

À l'instant $t = 0$, on écarte la bobine de sa position d'équilibre d'une distance $d < \frac{a}{2}$ vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale. On s'intéresse, en l'absence de tout frottement, au mouvement ultérieur de la bobine en considérant que celle-ci possède un mouvement de translation rectiligne, le centre d'inertie C se déplaçant parallèlement à l'axe $x'x$. On note $u(t)$ l'abscisse du centre d'inertie C de la bobine à l'instant t.

1. Faire une étude qualitative des phénomènes.

2. Faire une étude électrique du circuit et déterminer une relation faisant intervenir l'intensité $i(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{du}{dt}$.

3. Faire une étude mécanique du circuit et déterminer une seconde relation faisant intervenir l'intensité et l'abscisse de la bobine.

4. En déduire l'équation différentielle en $u(t)$ caractérisant le mouvement étudié. On introduira la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Montrer que le régime du mouvement est différent selon que B est supérieur ou inférieur à une valeur frontière B_c que l'on déterminera à l'aide de N, m, ω_0, r et a.

5. Représenter dans le cas où B est supérieur à B_c l'allure des variations temporelles de $u(t)$ sans chercher à déterminer précisément l'expression de $u(t)$.

6. Déterminer en utilisant d et ω_0 l'expression de $u(t)$ pour $B = \frac{B_c}{\sqrt{2}}$. Donner la représentation graphique de l'évolution temporelle de $u(t)$.

7. Déterminer à l'aide des équations de base vues en **2.** et **3.** l'égalité qui traduit le bilan global en puissance à l'instant t : donner la signification physique des trois termes qui figurent dans ce bilan.

En déduire l'égalité traduisant le bilan énergétique entre $t = 0$ et t suffisamment long ($t \to \infty$) et donner ainsi l'expression de l'énergie totale dissipée par effet Joule.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de Faraday de l'induction.
- Cas de Lorentz : circuit se déplaçant dans un champ magnétique indépendant du temps.
- Force de Laplace.
- Équation différentielle linéaire du second ordre.

2. Ce qu'il faut comprendre

L'état initial correspondant à une vitesse nulle avec $d < \frac{a}{2}$, on aura toujours $|u| < \frac{a}{2}$ le mouvement s'amortissant du fait du couplage électromécanique dû au champ magnétique extérieur indépendant du temps $B\vec{u}_y$.

Copyrighted material

3. Solution

1. Lorsque la bobine est en mouvement, le flux du champ magnétique varie. La bobine est donc le siège de phénomènes d'induction et il y a ainsi création d'un courant induit. L'existence de ce courant s'accompagne de l'apparition de forces de Laplace qui vont, en accord avec la loi de Lenz, se comporter comme des forces de freinage.

2. Pour faire une étude électrique, il faut préalablement déterminer la f.é.m. d'induction qui prend naissance dans le circuit. On peut la calculer par l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :

• on utilise $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ avec $\phi = \mathrm{N}\varphi$, expression dans laquelle φ représente le flux à travers une spire :

$$\varphi_0 = \iint_{1\text{ spire}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{dS} = \iint_{1\text{ spire}} \vec{\mathrm{B}} \cdot (-\vec{u_y})\,\mathrm{dS} = \iint_{1\text{ spire}} -\mathrm{B}\,\mathrm{dS}$$

et donc $\varphi = -\mathrm{B}a \cdot \left(\dfrac{a}{2} + u\right)$ dans la mesure où $|u| < \dfrac{a}{2}$.

Finalement $e = \mathrm{NB}a\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

• On utilise la circulation du champ électromoteur $\vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\vec{u_x} \wedge \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}$ (pour $x > 0$).

Donc $e = \oint \vec{\mathrm{E}_\mathrm{m}}\vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{N}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0+a} \mathrm{B}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}(\mathrm{d}z\vec{u_z}) = \mathrm{N}a\mathrm{B}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

(en notant $z_0 + \dfrac{a}{2}$ la coordonnée de C selon $z'z$).

La loi des mailles conduit alors à l'égalité suivante :

$$\boxed{\mathrm{N}a\mathrm{B}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ri}$$ car on néglige l'auto-induction.

3. Il s'agit de faire un bilan des forces s'exerçant sur la bobine.

• La force exercée par le ressort s'écrit $\vec{\mathrm{T}} = -k(l_1 + u - l_0)\vec{u_x}$.

• Le poids s'écrit $\vec{\mathrm{P}} = mg\vec{u_x}$.

• La résultante des forces de Laplace s'écrit $\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{N}i \oint_{1\text{ spire}} \vec{\delta l} \wedge \vec{\mathrm{B}}$.

Les seules parties de la spire à considérer sont les parties situées dans le domaine $x > 0$ (sinon $\vec{\mathrm{B}} = \vec{0}$). Il est aisé de voir que les forces exercées sur les deux parties verticales s'annulent et il reste donc :

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{N}i\int_{z_0}^{z_0+a} \mathrm{d}z\vec{u_z} \wedge \mathrm{B}\vec{u_y} = -\mathrm{N}ia\mathrm{B}\vec{u_x}.$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la bobine conduit alors à l'égalité :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -k(l_1 + u - l_0) + mg - \mathrm{N}ia\mathrm{B}.$$

Copyrighted material

À l'équilibre $\left(\frac{d^2u}{dt^2} = 0\right)$, on a : $-k(l_1 - l_0) + mg = 0$. Donc :

$$\boxed{m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku - NiaB}$$

4. En éliminant $i(t)$ entre les deux équations trouvées précédemment, il vient :

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku - \frac{N^2a^2B^2}{r}\frac{du}{dt}.$$

On note ici que la résultante des forces de Laplace s'écrit $-\frac{N^2a^2B^2}{r}\frac{du}{dt}$: on peut donc bien dire que ces forces agissent comme des forces de freinage.
Finalement :

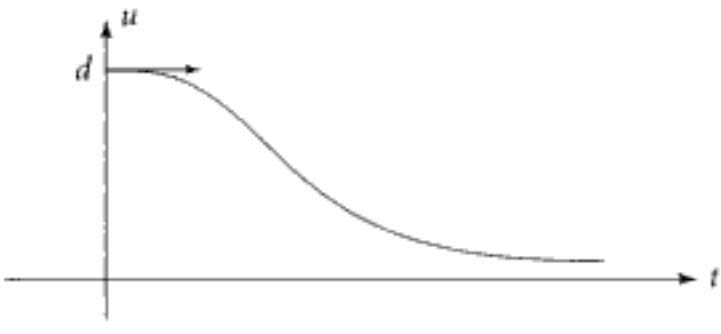
$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{N^2a^2B^2}{mr}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}$$

L'équation caractéristique associée admet pour discriminant $\Delta = \left(\frac{N^2B^2a^2}{mr}\right)^2 - 4\omega_0^2$.

Si ce discriminant est positif ou nul, le régime est apériodique. Si le discriminant est négatif, le régime est pseudo-périodique.
La valeur frontière du champ magnétique est donnée par :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{N^2B_c^2a^2}{mr} = 2\omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{B_c = \sqrt{\frac{2\omega_0 mr}{N^2a^2}}}$$

5. Si $B > B_c$, alors $\Delta > 0$: c'est le régime apériodique.



6. Pour $B = \frac{B_c}{\sqrt{2}}$, $\Delta = \omega_0^2 - 4\omega_0^2 = -3\omega_0^2$ car $\frac{N^2B^2a^2}{mr} = \omega_0$.

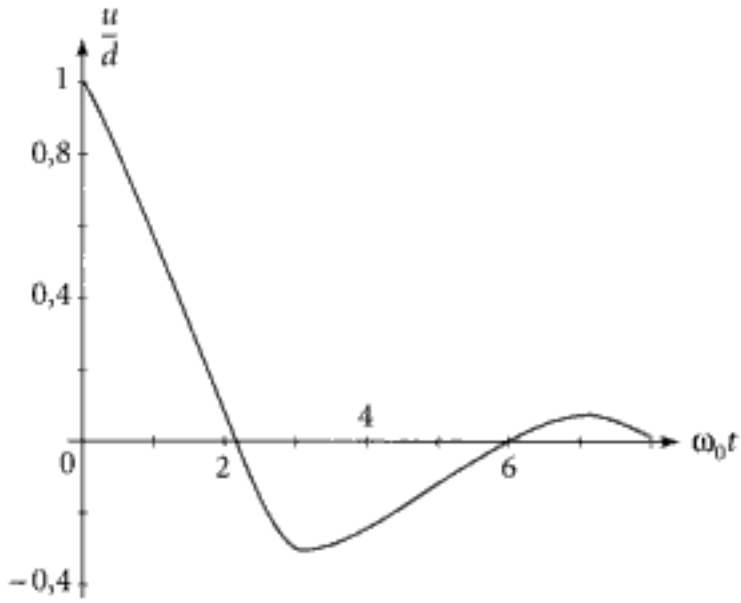
Donc $\quad u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[A_1\cos\left(\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + A_2\sin\left(\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = d = A_1 \\ \frac{du}{dt}(0) = 0 = -\frac{\omega_0}{2}A_1 + A_2\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_1 = d \\ A_2 = \frac{d}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

Copyrighted material

D'où finalement :

$$\boxed{u(t) = d\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[\cos\left(\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]}$$



7. Pour avoir le bilan en puissance, il suffit de partir d'un terme de puissance dont on connaît l'expression.

Par exemple, le terme ri^2.

D'après l'équation vue en **2.** : $ri^2 = NaBvi$. $\left(v = \frac{du}{dt}\right)$

En multipliant par v l'équation vue en **3.** il vient : $mv\frac{dv}{dt} = -kuv - NaBvi$.

D'où : $$ri^2 = -mv\frac{dv}{dt} - kuv = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right).$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right) = -ri^2}$$

Le terme entre parenthèses représente l'énergie du cadre à l'instant t (énergie cinétique et énergie potentielle). L'égalité traduit le fait que cette énergie diminue au cours du temps par dissipation d'énergie (effet Joule).

Pour faire le bilan global et faire apparaître l'énergie totale dissipée, il faut écrire :

$$\int_0^\infty ri^2\,dt = -\int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right) = -\left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\int_0^\infty ri^2\,dt = \frac{1}{2}kd^2}$$

C'est l'énergie potentielle initiale qui est dissipée par effet joule.

Copyrighted material

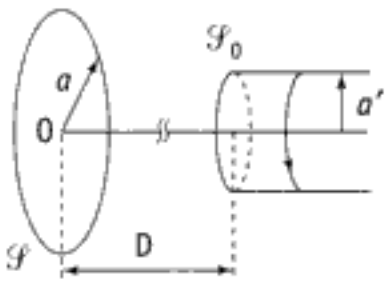
Commentaire

Le champ magnétique extérieur indépendant du temps assure la conversion électromécanique d'énergie.

206 Quantité d'électricité induite

$\mathcal{S}$ est une spire de centre O et de rayon a. Elle possède une résistance R et un coefficient d'auto-inductance L.

$\mathcal{S}_0$ est un solénoïde « semi-infini », de rayon a', comportant n spires par unité de longueur. Les axes de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ sont communs et le point O est situé à une distance D de la face d'entrée du solénoïde.



Dans toute la suite, on supposera que l'on a :

$$D \gg a' \quad \text{et} \quad D \gg a.$$

Le coefficient de mutuelle entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ est donné par :

$$M = \frac{1}{4}\mu_0 n \pi \frac{a^2 a'^2}{D^2}.$$

On crée un courant I constant dans le solénoïde.

1. Déterminer la quantité totale d'électricité q qui aura traversé toute section du fil constituant la spire. Commenter.

2. On suppose que le courant I est créé à partir de $t = 0$ de façon « suffisamment rapide ».

Préciser. Quelle est alors l'expression du courant $i(t > 0)$ circulant dans la spire ? Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Auto induction – Mutuelle induction.
- Loi de Faraday : force électromotrice d'induction.

2. Ce qu'il faut comprendre

Il n'y a plus de variation du flux extérieur à travers la spire $\mathcal{S}$ dès que I reste constant. Ce n'est pas pour autant que i s'annule à partir de ce moment. La charge q se calcule donc en prenant l'intégrale de $i(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t \to +\infty$.

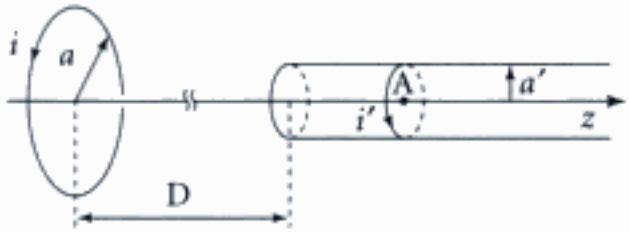
Copyrighted material

3. Solution

1. Quand on établit un courant dans le solénoïde il se crée un flux variable à travers la spire, et donc une force électromotrice donnée par la loi de Faraday :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi'}{dt} = -M\frac{di'}{dt}.$$

La mutuelle M définie positive correspond bien aux conventions associées au dessin ci-dessous :



Il y a donc naissance d'un courant induit $i(t)$ dont les variations sont déterminées par l'équation :

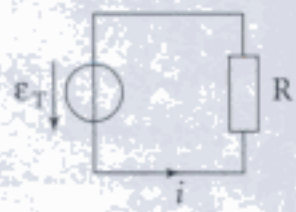
$$\varepsilon(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \quad \text{d'où} \quad L\frac{di}{dt} + Ri(t) = -M\frac{di'}{dt} \quad (1)$$

Point méthode

Il revient au même d'écrire : $\varepsilon_T = Ri$

avec $\varepsilon_T = -\dfrac{d\phi_T}{dt}$, et $\phi_T = \Phi_p + \Phi^{ext} = Li + Mi'$

soit finalement $Ri = -L\dfrac{di}{dt} - M\dfrac{di'}{dt}\cdots$



Intégrons cette équation entre les instants $t = 0$ et t « infini » :

$$L\int_0^{+\infty} di + R\int_0^{+\infty} i(t)\,dt = -M\int_0^{+\infty} di'.$$

Or $\int_0^{+\infty} i(t)$ représente la charge totale q qui aura traversé toute section du fil constituant la spire. De plus :

$$\int_0^{\infty} di = i(+\infty) - i(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\int_0^{\infty} di' = i'(+\infty) - i(0) = I - 0 = I.$$

D'où $q = -\dfrac{MI}{R}$ et $\boxed{q = -\dfrac{1}{4R}\mu_0 n\pi\dfrac{a^2a'^2}{D^2}I}$ (2)

Le signe ⊖ provenant des sens choisis pour les orientations des courants dans la spire et dans le solénoïde (d'où un coefficient M ici positif) traduit que le courant induit créé dans la spire tend à s'opposer aux variations de flux que le solénoïde lui impose…

Copyrighted material

2. Le courant est créé dans le solénoïde en un temps très court devant $\tau_c = \frac{L}{R}$ (temps caractéristique du circuit L-R constitué par la spire). Reprenons alors l'équation (1) et intégrons-la entre les instants $t = 0$ et $t = \tau = 0^+$ ($\tau \ll \tau_c$) :

$$L[i(0^+) - i(0)] + R\int_0^{\tau} i(t)\,dt = -MI.$$

Le courant $i(t)$ reste nécessairement borné et $R\int_0^{\tau} i(t)\,dt$ est négligeable devant les autres termes, d'où (avec $i(0) = 0$) :

$$i(0^+) \approx -\frac{M}{L}I$$

Pour $t > 0^+$, l'évolution de $i(t)$ est régie par l'équation $Ri + L\frac{di}{dt} = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{i(t > 0) = -\frac{MI}{L}\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)} \text{ où } \tau_c = \frac{L}{R}.$$

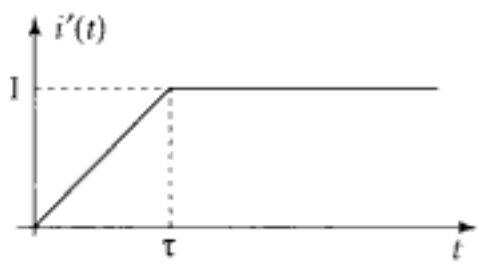
On a bien $q = \int_{0^+}^{\infty} i(t)\,dt = -\frac{MI}{L}\int_{0^+}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)dt$

soit $q = -\frac{MI}{L}\tau_c \rightarrow q = -\frac{MI}{R}$.

On retrouve le résultat (2).

Commentaires

- Pour apprécier l'hypothèse faite plus haut, $\left(i(0^+) \approx -\frac{MI}{L}\right)$, on peut envisager le cas où la loi d'établissement du courant dans le solénoïde est de la forme suivante :



– *Première phase* $0 \leqslant t \leqslant \tau$:

Le courant $i'(t)$ variant linéairement dans le temps, la force électromotrice extérieure ε induite dans la spire est constante et vaut $\varepsilon = -\frac{MI}{\tau}$, d'où :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = -\frac{MI}{\tau}$$

et après intégration $i(t) = \alpha\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) - \frac{MI}{R\tau}$.

Copyrighted material

Or $i(0) = 0 \rightarrow i(t) = -\frac{MI}{R\tau}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)\right)$ et $i(\tau) = -\frac{MI}{R\tau}\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right)\right)$.

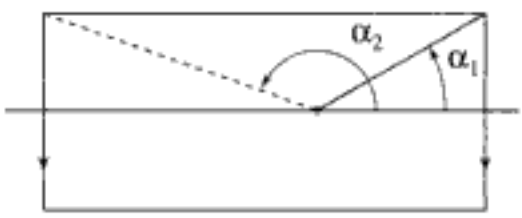
– *Deuxième phase* $t > \tau$:

Le courant $i'(t)$ est constant et la force électromotrice ε devient nulle. D'où :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad i(t > \tau) = i(\tau)\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_c}\right].$$

Or, pour $\tau \ll \tau_c$: $i(\tau) \# \left(-\frac{MI}{R\tau}\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)\right) \# -\frac{M}{L}I$ et $i(t > 0^+) \# -\frac{MI}{L}\exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$.

Ainsi pour $t = 0^+$ il vient bien $i(0^+) \# -\frac{MI}{L}$.



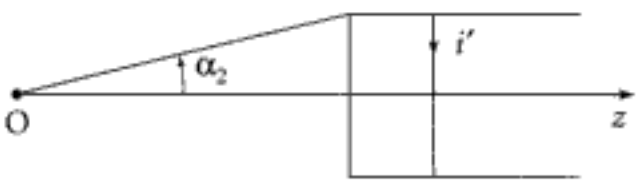
■ Pour évaluer le coefficient de mutuelle M, on aurait pu calculer le flux Φ' envoyé par le solénoïde (lorsqu'il est parcouru par un courant i') dans la spire.

Le champ qu'il crée en O s'écrit :

$$B'(O) = \frac{1}{2}\mu_0 n i'(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

avec ici $\alpha_1 = 0$ (et $\cos\alpha_1 = 1$)

et $\cos\alpha_2 = \frac{D}{\sqrt{a'^2 + D^2}}$.



D'où :

$$B'(O) = \frac{1}{2}\mu_0 n i'\left(1 - \frac{D}{\sqrt{a'^2 + D^2}}\right)$$

$$B'(O) \# \frac{1}{2}\mu_0 n i' \frac{a'^2}{2D^2} = \frac{1}{4}\mu_0 n i' \frac{a'^2}{2D^2} \quad (D \gg a').$$

Soit $\Phi' \# B'(0)\pi a^2$ (champ magnétique quasi-uniforme sur les dimensions de la spire, $D \gg a$). D'où :

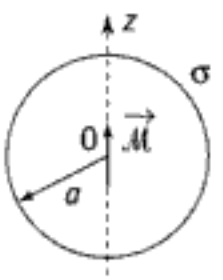
$$\Phi' \# \frac{1}{4}\mu_0 n i' \frac{a'^2}{D^2}\pi a^2 = Mi' \Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{4}\mu_0 n \pi \frac{a'^2 a^2}{D^2}}$$

207 Mise en rotation d'une sphère chargée

Une coquille sphérique isolante, de masse m et de rayon a, porte une charge répartie uniformément avec une densité σ (les charges sont liées à la sphère).

Elle peut tourner librement autour de l'axe vertical Oz.

Un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est placé en O (il modélise une petite spire d'axe Oz et d'intensité i que l'on peut faire varier).



Copyrighted material

On éteint progressivement l'intensité du dipôle à partir d'une valeur $\mathcal{M}_0$.

1. Faire une analyse qualitative du système proposé.

2. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ induit en un point M de la surface de la coquille. On introduira l'angle $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$, et on donnera $\vec{E}(M)$ en fonction de a, θ, μ_0 et $\frac{d\mathcal{M}}{dt}$.

3. Établir l'expression de la vitesse finale ω_F de rotation de la sphère.

Commenter le résultat obtenu.

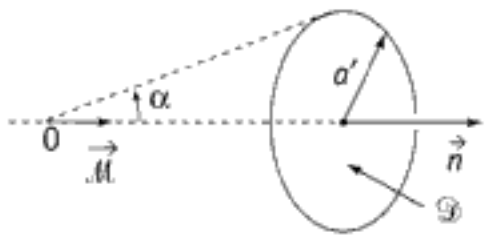
Données :

• Le flux Φ créé par $\vec{\mathcal{M}}$ à travers le disque $\mathcal{D}$ est donné par l'expression :

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a'} \sin^3 \alpha.$$

• Le moment d'inertie de la coquille par rapport à l'axe Oz est :

$$J = \frac{2}{3} m a^2.$$



1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de Maxwell-Faraday : forme locale – forme intégrale.
- Règles de symétrie.
- Théorème du moment cinétique scalaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

La coquille étant initialement fixe, seul un champ électrique $\vec{E}$, agissant sur les charges qui lui sont liées, pourra provoquer une rotation du système. L'existence de ce champ résulte des variations dans le temps du champ magnétique crée par le moment magnétique dont l'intensité est variable.

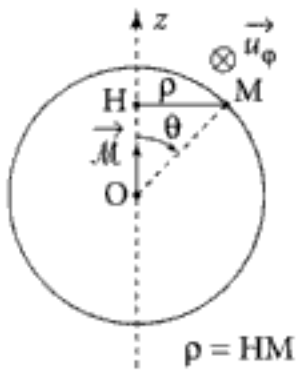
3. Solution

1. Analyse qualitative :

Le moment magnétique diminuant en intensité, le champ magnétique qu'il crée varie dans le temps. Il y a donc apparition d'un champ électrique d'induction $\vec{E}$ lié au champ $\vec{B}$ par l'équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Copyrighted material



Le champ $\vec{E}$ crée sur l'élément de surface $\delta\Sigma$ centré sur le point M de la coquille une force $\vec{\delta F}$ telle que :

$$\vec{\delta F} = \sigma\delta\Sigma\vec{E}(M)$$

et un couple élémentaire par rapport à l'axe Oz (d'après les symétries du système $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_\varphi}$) :

$$\delta F = (\sigma\delta\Sigma)\cdot\rho\cdot E(M) \quad (\rho = HM).$$

La coquille sphérique va donc se mettre à tourner autour de son axe Oz. La vitesse ω_F ne dépend pas de la façon dont on fait varier $\mathcal{M}$ mais simplement de la valeur initiale $\mathcal{M}_0$ ($\mathcal{M}_F = 0$ ici).

2. Détermination du champ $\vec{E}(M)$

La cause de $\vec{E}$ étant associée aux variations de $\vec{\mathcal{M}}$, on peut considérer que le plan contenant Oz et OM est plan d'antisymétrie ($\vec{\mathcal{M}}$ modélise une petite spire d'axe Oz parcourue par un courant $i(t)$) et que par là-même $\vec{E}$, perpendiculaire à ce plan, est orthoradial.

D'où :

$$\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_\varphi}$$

De plus le système est invariant par rotation autour de Oz. Il en résulte que :

$E(M) = E(\theta)$ pour tout point M situé sur la sphère et repéré par l'angle θ (*cf.* figure).

Considérons alors le cercle $\mathscr{C}$ d'axe Oz et passant par le point M (pour tous les points de $\mathscr{C}$ on a θ = cste).

L'équation locale (1) prend alors la forme intégrale suivante :

$$\oint_{\mathscr{C}}\vec{E}\cdot\vec{\delta l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (\mathscr{C} \text{ fixe})$$

Φ désigne le flux du champ $\vec{B}$ (créé par le moment magnétique) à travers le disque s'appuyant sur $\mathscr{C}$.

Or
$$\oint_{\mathscr{C}}\vec{E}\cdot\vec{\delta l} = E(\theta)2\pi\rho = E(\theta)2\pi a\sin\theta.$$

L'expression de Φ est celle donnée dans l'énoncé avec ($a' \to \rho$ et $\alpha \to \theta$) :

$$\Phi = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2\rho}\sin^3\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2a}\sin^2\theta \quad (\rho = a\sin\theta).$$

D'où

$$2\pi a\sin\theta E(\theta) = -\frac{\mu_0}{2a}\sin^2\theta\frac{d\mathcal{M}}{dt}.$$

Soit
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi a^2}\sin\theta\frac{d\mathcal{M}}{dt}\vec{u_\varphi}}$$

Copyrighted material

Commentaire

Pour calculer $\vec{E}$, on aurait pu écrire :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{avec } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$

Soit $\vec{A} = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi a^2}\sin\theta \vec{u_\varphi}$

d'où $\vec{E} = -\dfrac{\mu_0}{4\pi a^2}\sin\theta \dfrac{d\mathcal{M}}{dt}\vec{u_\varphi}$.

3. ■ Calculons le couple instantané s'exerçant sur la coquille sphérique.
Nous avons $\delta\Gamma = \sigma a \sin\theta E(M)\delta\Sigma$.

D'où
$$\delta\Gamma = \sigma\left(-\frac{\mu_0}{4\pi a^2}\sin\theta\frac{d\mathcal{M}}{dt}\right)(a\sin\theta)\delta\Sigma.$$

Soit, pour une « couronne » comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$:

$$\delta\Sigma = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$$

et
$$\delta\Gamma = -\frac{1}{2}\sigma a \mu_0 \frac{d\mathcal{M}}{dt}\sin^2\theta \sin\theta\, d\theta.$$

Intégrons sur toute la sphère, θ variant de 0 à π :

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\sigma a \mu_0 \frac{d\mathcal{M}}{dt}\int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\sigma a \mu_0 \frac{d\mathcal{M}}{dt}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)d(-\cos\theta)$$

Soit

$$\boxed{\Gamma = -\frac{2}{3}\sigma a \mu_0 \frac{d\mathcal{M}}{dt}}$$

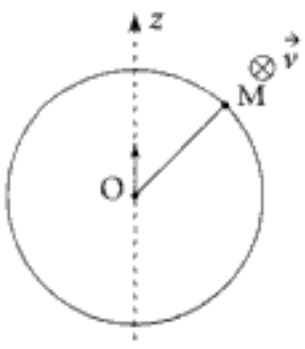
■ Appliquons maintenant, à la coquille, le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz.

$$\boxed{\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}^{ext}}$$

Remarquons alors que la force magnétique :

$$\delta\overrightarrow{F_m} = \sigma\delta\Sigma\vec{v} \wedge \vec{B}$$

est perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$.



Elle est contenue dans le plan (Oz, OM) et ne contribue donc pas à $\mathcal{M}_{Oz}^{ext}$.

D'où $\mathcal{M}_{Oz}^{ext} = \Gamma$

et
$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = -\frac{2}{3}\sigma a \mu_0 \frac{d\mathcal{M}}{dt}.$$

Copyrighted material

Intégrons cette équation entre l'instant initial, où $L_{Oz} = 0$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$, et et l'état final pour lequel $\mathcal{M}$ est nul :

$$L_{Oz} - 0 = -\frac{2}{3}\sigma\mu_0 a(0 - \mathcal{M}_0).$$

Si l'on désigne par J le moment d'inertie de la coquille par rapport à Oz, nous avons :

$$L_{Oz} = J\omega_F \quad \text{et} \quad \omega_F = \frac{2}{3}\frac{\sigma a \mu_0 \mathcal{M}_0}{J}.$$

Or $J = \frac{2}{3}ma^2$ d'où $\boxed{\omega_F = \frac{\mu_0 \sigma \mathcal{M}_0}{ma}}$

À l'instant initial la coquille ne possède pas de moment cinétique puisqu'elle est immobile. Dans l'état final son moment cinétique est $J\omega_F$. Il ne se conserve donc pas alors que le système $\vec{\mathcal{M}}(t)$ -coquille est mécaniquement « isolé » par rapport aux rotations d'axe Oz.

Le paradoxe peut être levé en attribuant au champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ un moment cinétique…

Commentaire

Une étude plus poussée montrerait qu'il est possible de définir pour le champ :

– une quantité de mouvement de densité volumique $\frac{\vec{\Pi}}{c^2}$ ($\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$: vecteur de Poynting).

– un moment cinétique de densité volumique $\overrightarrow{OP} \wedge \frac{\vec{\Pi}}{c^2}$.

Le lecteur pourra vérifier que, dans l'état initial, le moment cinétique L'_{Oz} associé au champ est donné par : $L'_{Oz} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\mathcal{M}_0 a$.

($\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < a$ et $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi a^2\sigma)\frac{\vec{u}}{r^2}$ pour $r > a$)…

208 Barres sur rails

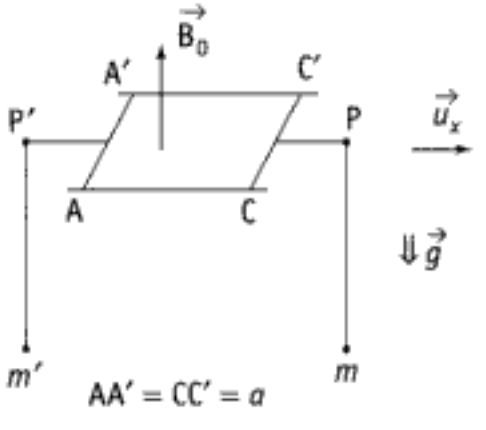
Les deux barres AA′ et CC′ se déplacent, sans frottement, sur deux rails horizontaux et parallèles dans un champ vertical uniforme $\vec{B}_0$.

On fait les hypothèses suivantes :

– les poulies P et P′ sont idéales ;

– les masses des barres AA′ et CC′ négligeables ;

– Chaque barre possède une résistance R ;



Copyrighted material

– les fils sont inextensibles ;

– on néglige la résistance des rails ainsi que les phénomènes d'auto-induction.

On pose : $\frac{1}{\tau} = \frac{B_0^2 a^2}{2R}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$.

1. a. On note $\vec{v} = v(t)\vec{u_x}$ et $\vec{v}' = v'(t)\vec{u_x}$ les vitesses des barres CC′ et AA′. Établir l'équation électrique donnant le courant $i(t)$ traversant ACC′A′A.

b. Donner les deux équations mécaniques traduisant le mouvement des deux barres.

c. Résoudre le système précédent. On déterminera $v(t)$ et $v'(t)$ sachant qu'à $t = 0$ $v = v' = 0$ (faire apparaître les grandeurs $mv + mv'$ et $v - v'$).

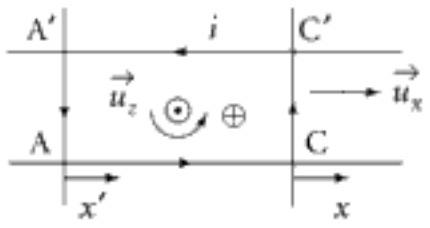
Tracer les grandeurs $\frac{t}{\tau} \to \frac{v(t)}{g\tau}$ et $\frac{t}{\tau} \to \frac{v'(t)}{g\tau}$.

Commenter.

2. Faire un bilan énergétique. Commenter.

Solution

1. a. Sous l'effet des masses m et m' les barres vont avoir tendance à s'éloigner. La surface du circuit AA′C′C va donc varier, entrainant la création d'une force électromotrice ε et d'un courant induit i.



Les forces de Laplace qui en résultent ont pour effet de s'opposer à la cause qui leur a donné naissance.

Notons $x(t)$ le déplacement de la barre CC′ à l'instant t, et $x'(t)$ celui de la barre AA′.

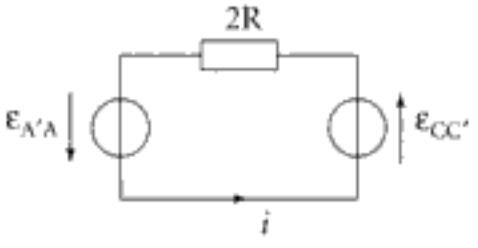
Nous sommes dans la configuration de Lorentz (champ magnétique indépendant du temps et « circuit mobile »).

La force électromotrice induite par le déplacement du brin AA′ est :

$$\varepsilon_{A'A} = \int_{A'}^{A} (\vec{v} \wedge B_0\vec{u_z}) \cdot \vec{\delta\ell} = +B_0 \frac{dx'}{dt} a = B_0 a v'.$$

De même $\varepsilon_{C'C} = \int_{C}^{C'} (\vec{v} \wedge B_0\vec{u_z}) \cdot \vec{\delta\ell} = -B_0 a \frac{dx}{dt} = -B_0 a v.$

Le courant induit s'obtient, si l'on néglige les phénomènes d'auto-induction, par la relation :



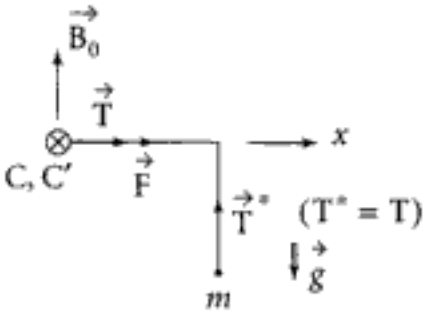
$$\varepsilon_T = 2Ri \to \boxed{i = -\frac{B_0 a}{2R}(v - v')} \quad (1)$$

Copyrighted material

b. Considérons la tige CC′ de masse négligeable (en fait il suffit que l'on ait masse (CC′) $\ll m$) :

$m_{CC'} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_L + T$ où T désigne la tension du fil,

soit : $F_L + T = 0$.

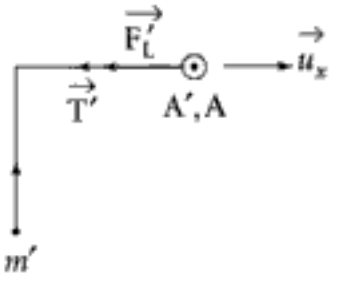


D'autre part, le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la masse m se traduit par (fil inextensible) :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T$$

soit $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg + B_0 a\, i \rightarrow \boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = g + \dfrac{B_0 a}{m} i}$ (2)

De même, pour la tige AA′, il vient :



$$-T' - iB_0 a = 0$$

et $m'\left(-\dfrac{d^2x'}{dt^2}\right) = m'g - T'$

D'où :

$-m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = m'g + B_0 a\, i \rightarrow \boxed{\dfrac{d^2x'}{dt^2} = -g - \dfrac{B_0 a}{m} i}$ (3)

c. Remplaçons i à l'aide de (1) dans les équations (2) et (3) :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{(B_0 a)^2}{2R}(v - v') \quad \text{et} \quad m'\frac{dv'}{dt} = -m'g + \frac{(B_0 a)^2}{2R}(v - v').$$

En combinant convenablement ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} d(mv + m'v') = (m - m')g & (4) \\ \dfrac{d}{dt}(v - v') = 2g - \dfrac{B_0^2 a^2}{2R}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right)(v - v') & (5) \end{cases}$$

Et, en tenant compte des conditions initiales $v = v' = 0$ à $t = 0$, nous avons :

$$mv + m'v' = (m - m')gt.$$

De plus, en posant $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{B_0^2 a^2}{2R}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right)$:

$$\frac{d}{dt}(v - v') + \frac{1}{\tau}(v - v') = 2g$$

Soit en intégrant $v - v' = 2g\tau + \lambda \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $0 - 0 = 2g\tau + \lambda$.

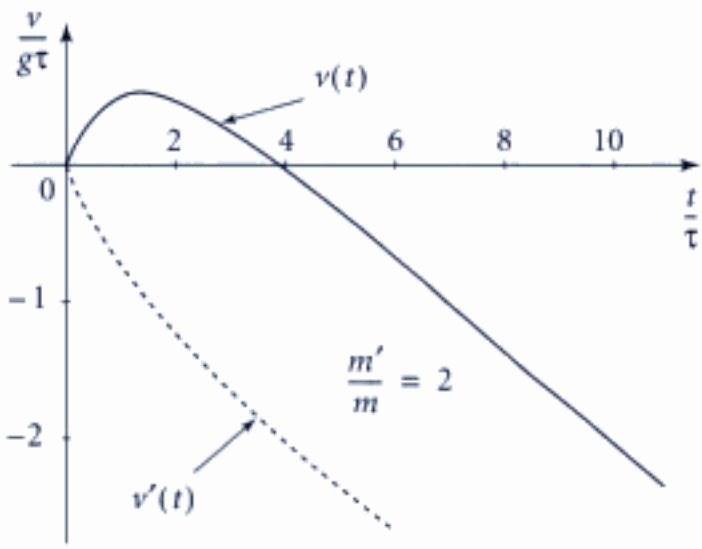
D'où $$v - v' = 2g\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

Copyrighted material

Finalement, les vitesses de deux barres sont fournies par les relations :

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{1}{m+m'}\left\{(m-m')gt + m'2g\tau\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right\} \\ v' &= \frac{1}{m+m'}\left\{(m-m')gt - m2g\tau\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right\} \end{aligned}}$$

On donne ci-dessous les graphes de $v(t)$ et $v'(t)$.



Commentaire

■ La prise en compte des masses $m_{AA'}$ et $m_{CC'}$ des barres revient à remplacer dans **1. b.**

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} \rightarrow (m+m_{CC'})\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} \rightarrow (m'+m_{AA'})\dfrac{d^2x'}{dt^2} \end{cases}$$

■ Le système approche, pour $t \gg \tau$ un état limite où les deux barres se déplaceraient à la même vitesse et dans le même sens. Dans cet état limite on a $i = 0$ (*cf.* (1)) et les phénomènes électromoteurs, dûs aux mouvements des deux barres, se compensent…

Point méthode

Pour établir un bilan énergétique le plus simple est de reprendre les équations électrique (1) et mécaniques (2) et (3) et de faire apparaître, après multiplication par i pour (1) et par v et v' pour (2) et (3), des grandeurs énergétiques usuelles.

■ (1) donne : $R\,i^2 = -B_0 a\,v\,i + B_0\,a\,vi' \rightarrow \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{e.m}$ **(6)**

où $\underbrace{(\mathcal{P}_J = 2Ri^2)}_{\text{Puissance Joule}}$ et $\mathcal{P}_{e.m} = \underbrace{\varepsilon_{CC'}\cdot i + \varepsilon_{AA'}\cdot i}_{\text{Puissance des phénomènes électromoteurs}}$.

Copyrighted Material

■ (1) s'écrit après multiplication par v :

$$mv\frac{dv}{dt} = mgv + (B_0 a i)v \rightarrow \frac{d}{dt}(E_c(m)) + \frac{d}{dt}E_p(m) = F_L \cdot v \quad (7)$$

où $E_c(m) = \frac{1}{2}mv^2$, $E_p(m) = mgz_m$ et $F_L \cdot v = \mathcal{P}_L(CC')$.

■ De même avec (3) $\frac{dE_c(m')}{dt} = -mgv' + (-B_0 a i)v'$

or $\frac{dE_p(m')}{dt} = mg\frac{dz_{m'}}{dt} = mgv'$ et $F_L(A'A) = -B_0 a i$, d'où :

$$\frac{d}{dt}E_c(m') + \frac{d}{dt}E_p(m') = F_L v' \quad (8)$$

■ Remarquons alors que :

$$\underbrace{\varepsilon_{A'A} i}_{(B_0 a v')\cdot i} + \underbrace{F_L(A'A)\cdot v'}_{(-B_0 a i)\cdot v'} = 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{\varepsilon_{C'C} i}_{(-B_0 a v)\cdot i} + \underbrace{v \cdot F_L(C'C)}_{(B_0 a i)\cdot v} = 0$$

d'où en sommant (6), (7) et (8) :

$$\frac{dE_{c_T}}{dt} + \frac{dE_{p_T}}{dt} + \mathcal{P}_J = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dE_m}{dt} + \mathcal{P}_J = 0}$$

où $E_m = E_{c_T} + E_{p_T} = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2\right) + (mgz_m + mgz_{m'})$

soit encore $$E_m(t) - E_m(0) = -\int_0^t \mathcal{P}_J\, dt \quad (9).$$

Le système transforme de l'énergie mécanique en effet joule (énergie dissipée)…

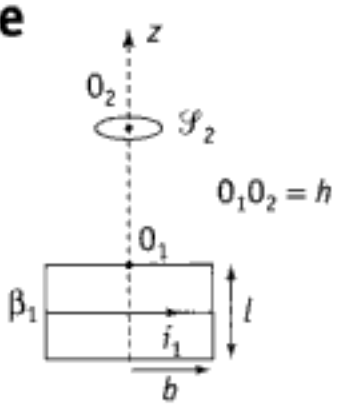
Dans l'état limite on a $v = v'$, et donc $E_c = \text{cste}$ et $E_p = \text{cste}$, ce qui est compatible avec (9) puisqu'alors $i = 0$.

Le champ magnétique $B_0 \vec{u}_z$ assure la conversion électromécanique d'énergie.

209 Lévitation d'une spire conductrice

Une bobine β_1 est constituée de N spires circulaires de rayon b réparties sur une longueur l et parcourues par un courant $i_1(t) = I_m \cos(\omega t)$.

À la cote $z = h$ ($z = O_1O_2$) est disposée une petite spire $\mathcal{S}_2$ conductrice de rayon a et de section $s = \pi e^2$. On note R et L la résistance et le coefficient d'auto-inductance de $\mathcal{S}_2$.

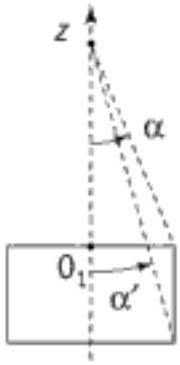


Copyrighted material

La bobine crée, sur son axe, un champ magnétique $\vec{B}_{1_0}(z,t) = B_m(z)\cos(\omega t)\vec{u_z}$ avec

$B_m(z) = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N}{l}(\cos\alpha' - \cos\alpha)\cdot I_m$.

On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe O_1z.



1. Déterminer, en régime sinusoïdal établi, l'intensité $i_2(t)$ circulant dans la spire $\mathcal{S}_2$: on confondra $B_{1_z}(r,z)$ avec $B_{1_0}(z,t)$ (« petite spire »).

2. a. Montrer que la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathcal{S}_2$ est portée par $\vec{u_z}$.

Exprimer cette résultante $\vec{F}_{L_2}$ en fonction de a, $i_2(t)$ et de la composante radiale $B_{1_r}(r = a, z)$ du champ $\vec{B_1}$ crée par la bobine au niveau du fil de la spire $\mathcal{S}_2$.

b. Montrer que l'on a :

$$B_{1_r}(a,z,t) = -\frac{a}{2}\frac{dB_m(z)}{dz}\cdot\cos(\omega t).$$

On se rappellera que $\vec{B_1}$ est à flux conservatif.

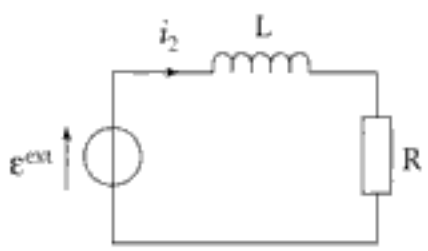
c. On pose $\vec{F}_{L_2} = F_{L_2}\vec{u_z}$. Déterminer la valeur moyenne temporelle $\langle F_{L_2}\rangle$ de F_{L_2}, et donner son expression pour $\omega \gg \frac{R}{L}$. Commenter.

3. *A.N.* : Calculer la valeur efficace $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ du courant $i_1(t)$ pour que la spire en cuivre de masse volumique ρ puisse léviter à une hauteur h au-dessus de la bobine.

On donne : $R = 1{,}7\cdot 10^{-4}\ \Omega$; $L = 1{,}2\cdot 10^{-8}$ H ; $e = 1$ mm ;
$a = 5$ mm ; $l = 10$ cm ; $b = 2{,}5$ cm ;
$h = 1$ cm ; $g = 9{,}8$ m . s^{-2} ; $\rho = 9\cdot 10^3$ kg · m^{-3} ;
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H · m^{-1}.

Solution

1. Équation électrique :



$$\varepsilon^{ext} = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon^{ext} = -\frac{d\phi^{ext}}{dt} \quad \text{où} \quad \phi^{ext} \approx \pi a^2 B_m \cos\omega t$$

où $B_m = B_m(z = h)$

soit : $Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} = \pi a^2 B_m \omega \sin(\omega t)$.

Copyrighted material

En régime sinusoïdal établi :

$$i_2(t) = \mathrm{Im}(\underline{i_2}(t)) = \mathrm{Im}[\underline{I_2}\exp(j\omega t)]$$

avec

$$(R + jL\omega)\underline{I_2} = \pi a^2 B_m \omega \rightarrow \underline{I_2} = \frac{\pi a^2 B_m \omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R - jL\omega)$$

d'où :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{\pi a^2 B_m \omega}{R^2 + L^2\omega^2}\{R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)\}} \quad (1)$$

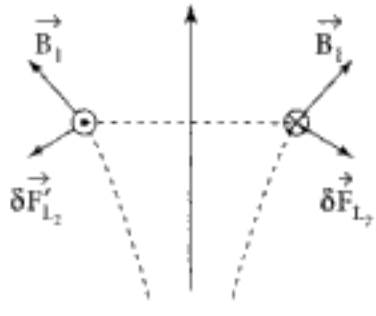
2. a. Le système est invariant par rotation autour de Oz il doit donc en être de même de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathcal{S}_2$, d'où :

$$\vec{F}_{L_2} = F_{L_2}\vec{u_z}.$$

Commentaire

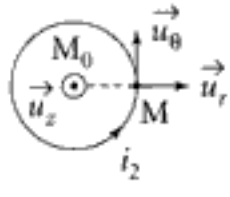
On peut également remarquer qu'en associant deux éléments δl_2 diamétralement opposés on a :

$$\delta\vec{F}_{L_2} + \delta\vec{F}'_{L_2} \,//\, \vec{u_z}.$$



Soit $F_{L_2} = \oint(i_2\overrightarrow{\delta l_2} \wedge \vec{B}_1)\cdot\vec{u_z}$

$$F_{L_2} = i_2\oint(a\,d\theta\vec{u_\theta} \wedge \vec{B}_1)\cdot\vec{u_z} = i_2 a\oint(\vec{u_z} \wedge \vec{u_\theta})\cdot\vec{B}_1\,d\theta$$



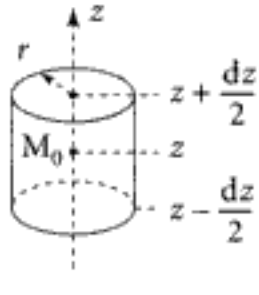
ou encore : $F_{L_2} = -i_2 a\oint(\vec{B}_1\cdot\vec{u_r})d\theta$.

La symétrie axiale implique que la quantité $\vec{B}_1\cdot\vec{u_r}$ est indépendante du point M de la spire, d'où :

$$\boxed{F_{L_2} = -2\pi a\cdot i_2(t)\cdot B_{1_r}(r = a, z)} \quad (2)$$

b. $\vec{B}_1$ est le champ créé par la bobine. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, on a :

$$\vec{B}_1 = B_{1_z}\vec{u_z} + B_{1_r}\vec{u_r}.$$



Le champ magnétique étant à flux conservatif, il vient :

$$\phi_{\Sigma_r}(\vec{B}) = 0 \rightarrow B_{1_r}2\pi r\,dz + \phi\left(z + \frac{dz}{2}\right) - \phi\left(z - \frac{dz}{2}\right) = 0$$

Copyrighted material

($\Sigma_f \equiv$ surface fermée entourant le point M_0 de cote z).

Or $\phi\left(z+\frac{dz}{2}\right)-\phi\left(z-\frac{dz}{2}\right)\approx\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$, où $\phi(z)\approx\pi r^2 B_{1_z}(r=0,z,t)$.

Finalement :

$$B_{1_r}(r,z,t)\approx-\frac{r}{2}\frac{\partial B_{1_z}(0,z,t)}{\partial z}.$$

Soit au niveau de la spire où $r=a$ et $B_{1_z}(0,z,t) = B_m(z)\cos(\omega t)$:

$$\boxed{B_{1_r}(a,z,t)=-\frac{a}{2}\frac{dB_m(z)}{dz}\cos(\omega t)}$$

c. Les résultats (2) et (3) donnent :

$$F_{L_2} = (-2\pi a\, i_2(t))\left(-\frac{a}{2}\frac{dB_m}{dz}\cos(\omega t)\right)$$

et avec (1) :

$$F_{L_2} = \pi a^2\frac{\pi a^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}\{R\sin(\omega t)-L\omega\cos(\omega t)\}\cos(\omega t)\cdot B_m(z)\frac{dB_m}{dz}$$

d'où

$$\langle F_{L_2}\rangle = \frac{\pi^2 a^4\omega}{R^2+L^2\omega^2}B_m\frac{dB_m}{dz}\{R\langle\sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle - L\omega\langle\cos^2(\omega t)\rangle\}$$

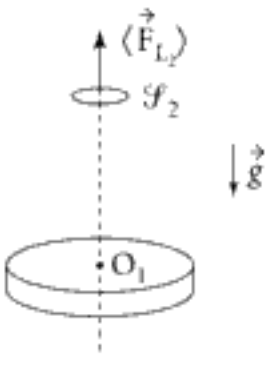
or $\langle\sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = 0$ et $\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{\langle F_{L_2}\rangle = \frac{\pi^2 a^4 L\omega^2}{4(R^2+L^2\omega^2)}\cdot\left(-\frac{dB_m^2}{dz}\right)}$$

C'est une fonction croissante de la pulsation ω, et pour $\omega \gg \frac{R}{L}$ on a :

$$\langle F_{L_2}\rangle = \frac{\pi^2 a^4}{4L}\cdot\left(-\frac{dB_m^2}{dz}\right).$$

De plus le module du champ créé par la bobine sur son axe décroît quand z augmente (origine des z positifs en O_1) ; dès lors $\left(-\frac{dB_m^2}{dz}>0\right)$, et la force moyenne de Laplace s'exerçant sur la spire est positive, ce qui peut lui permettre d'équilibrer le poids de $\mathcal{S}_2$...

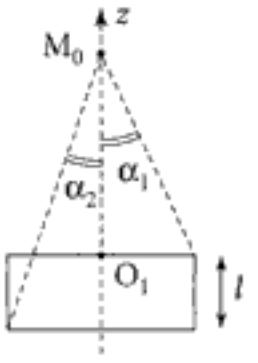


3. *Application numérique* :

■ $R = 1{,}7\cdot10^{-4}\ \Omega$; $L = 1{,}2\cdot10^{-8}$ H $\rightarrow f \gg 2{,}25$ kHz.

Copyrighted material

■ $B_1 = \frac{\mu_0 n I_m}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\cos(\omega t) = B_m(z)\cos(\omega t)$



soit $B_m(z) = \frac{\mu_0 n I_m}{2} \cdot \left[\frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2+b^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right]$;

$\left(n = \frac{N}{l}\right)$

et $B_m(h) = KI_m$ avec $K \approx 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ SI.

D'autre part :

$$\frac{dB_m}{dz} = \frac{\mu_0 n I_m}{2} b^2\left[\frac{1}{((l+z)^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2+b^2)^{3/2}}\right] = K'I_m$$

avec $K' = -9{,}9 \cdot 10^{-2}$.

La spire est en équilibre à une altitude h de la bobine pour I_m tel que :

$$\frac{\pi^2 a^4}{2L} KI_m \cdot (-K'I_m) = mg = \rho 2\pi a \cdot \pi e^2 \cdot g$$

soit $I_m^2 = \frac{4\rho e^2 L g}{(-KK')a^3} \rightarrow I_m = 13{,}4\ \text{A} \rightarrow I_{eff} = 9{,}5\ \text{A}$.

210 Moteur synchrone

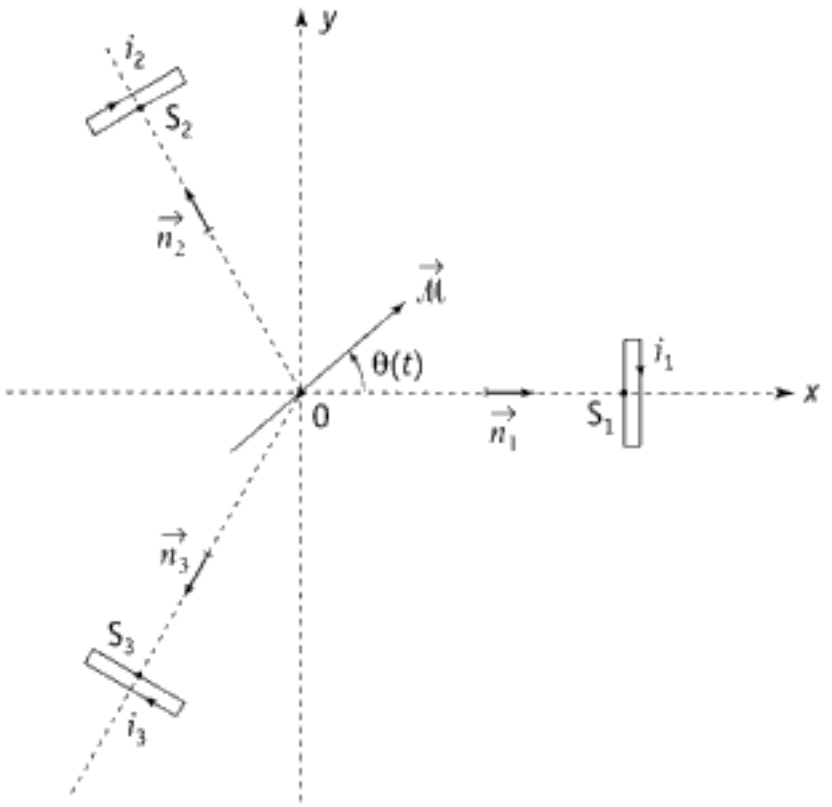
On modélise un moteur synchrone de la façon suivante :

• La partie fixe (stator) est constituée de trois bobines plates identiques de centres S_1, S_2, S_3, de résistance négligeable et possédant chacune N spires de rayon a. Ces bobines sont disposées comme l'indique la figure avec des axes coplanaires faisant entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$ concourants en O. On donne $OS_1 = OS_2 = OS_3 = d \gg a$.

Elles créent en O un champ magnétique $\vec{B}(t)$.

• Le rotor est modélisé par un dipôle magnétique placé en O de moment magnétique $\mathcal{M}$ de norme constante. Ce dipôle est mobile en rotation autour de l'axe $z'Oz$ orthogonal au plan de figure : la position du dipôle à l'instant t est caractérisée par l'angle $\theta(t) = (\vec{Ox}, \vec{\mathcal{M}})$.

Copyrighted material



Les bobines du stator sont alimentées en triphasé par des sources de courant sinusoïdal : les intensités des courants dans les trois bobines sont respectivement $i_1(t) = \mathrm{I}\cos(\omega t)$, $i_2(t) = \mathrm{I}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ et $i_3(t) = \mathrm{I}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$. Les vecteurs unitaires normaux aux spires sont respectivement $\vec{n_1} = \vec{u_x}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{n_3}$ (voir figure).

Le rotor tourne à vitesse angulaire $\omega_0 > 0$ constante en entraînant une charge mécanique dont le moment résultant (sur le rotor) par rapport à l'axe $z'z$ est $-\Gamma_r$ (avec $\Gamma_r > 0$). Ainsi, on pourra écrire $\theta(t) = \omega_0 - \varphi$ (avec $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). On néglige tout frottement et on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents.

1. Le champ magnétique créé au point O par la bobine n° 1 peut s'écrire $k i_1(t)\vec{u_x}$. Préciser l'expression de k à l'aide de N, a et d.

2. Montrer que le champ magnétique créé au point O par les trois bobines est un champ magnétique tournant : préciser la norme de ce champ et l'angle $(\vec{u_x}, \vec{\mathrm{B}})$ qu'il fait à l'instant t avec l'axe $x'x$.

3. Déterminer le moment résultant par rapport à l'axe $z'z$ des forces électromagnétiques s'exerçant sur le dipôle et indiquer la valeur moyenne de ce moment résultant : on rappelle qu'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé en O dans un champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$ est soumis à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{\mathrm{B}}(0)$.

Quelle est la condition pour que cette valeur moyenne ne soit pas nulle ? **On suppose dans la suite cette condition réalisée** : préciser alors la valeur de φ et indiquer la valeur maximum de la charge Γ_r compatible avec le fonctionnement étudié.

Copyrighted material

4. La charge restant inférieure à la limite vue précédemment, quelle est l'expression faisant intervenir $\mathcal{M}$, k, I, ω et φ de la puissance mécanique utile du moteur ?

5. On s'intéresse maintenant à la puissance fournie par l'alimentation des bobines du stator.

Pour simplifier, on ne considérera ni le phénomène d'auto-induction dans chaque bobine ni le phénomène d'induction mutuelle entre les différentes bobines.

a. Étudier alors le phénomène d'induction dans la bobine n° 1 : déterminer l'expression de la f.é.m. d'induction $e_1(t)$. En déduire l'expression faisant intervenir k, I, $\mathcal{M}$, ω, φ et t de la puissance $P_1(t)$ fournie par l'alimentation à la bobine n °1.
b. Déterminer de façon analogue les puissances $P_2(t)$ et $P_3(t)$ fournies par l'alimentation aux deux autres bobines.

c. En déduire la puissance totale fournie aux bobines du stator. Conclure.

Solution

1. On utilise l'expression du champ magnétique sur l'axe d'une bobine plate dans le cadre de l'ARQP :

$$\vec{B}_1(0) = \frac{N\mu_0 i_1 a^2}{2(a^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_x \approx \frac{N\mu_0 i_1 a^2}{2d^3}\vec{u}_x \text{ car } d \gg a.$$

On a donc $\boxed{k = \dfrac{N\mu_0 a^2}{2d^3}}$

2. Le champ magnétique au point O est la somme des trois champs. On peut utiliser la notation complexe :

$$\underline{\vec{B}}(0) = kI\exp(i\omega t)\left[\vec{u}_x + \vec{n}_2\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right) + \vec{n}_3\exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

avec $\vec{n}_2 = \vec{u}_x\cos\dfrac{2\pi}{3} + \vec{u}_y\sin\dfrac{2\pi}{3}$

et $\vec{n}_3 = \vec{u}_x\cos\dfrac{2\pi}{3} - \vec{u}_y\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

D'où :

$$\underline{\vec{B}}(0) = kI\exp(i\omega t)\left[\vec{u}_x\left(1+\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} + \exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left. + \vec{u}_y\left(\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3} - \exp\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

On utilise : $1+\cos\dfrac{2\pi}{3}\left[\exp\left(-i\dfrac{2\pi}{3}\right)+\exp\left(-i\dfrac{4\pi}{3}\right)\right] = 1-\cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$

et $\sin\dfrac{2\pi}{3}\left[\exp\left(-i\dfrac{2\pi}{3}\right)-\exp\left(-i\dfrac{4\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\left[-2i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = \left(-\dfrac{3}{2}\right)i$.

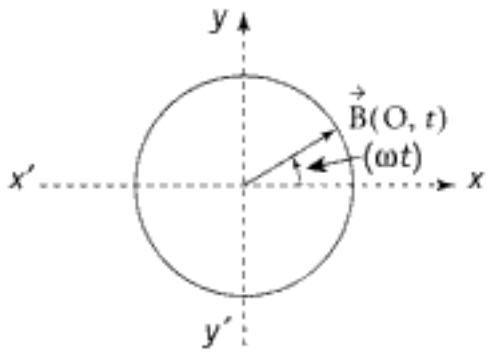
D'où $\underline{\vec{B}}(0) = \dfrac{3}{2}kI\exp(i\omega t)[\vec{u}_x - i\vec{u}_y]$.

Copyrighted material

En repassant en notations réelles :

$$\vec{B}(0) = \frac{3}{2}kI[\vec{u_x}\cos(\omega t) + \vec{u_y}\sin(\omega t)].$$

Il s'agit donc bien d'un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire ω.



avec $\boxed{\|\vec{B}(0)\| = \frac{3}{2}kI}$ et $\boxed{(\vec{u_x}, \vec{B}(0)) = \omega t}$

3. Le moment résultant des forces par rapport à O est :

$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(0) = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I \times \sin[(\omega - \omega_0)t + \varphi]$.

Le moment résultant par rapport à l'axe est donc :

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I\sin[(\omega - \omega_0)t + \varphi]}$$

Si $\omega \neq \omega_0$, $\langle\Gamma_z\rangle = 0$.

Si $\omega = \omega_0$, $\langle\Gamma_z\rangle = \Gamma_z = +\frac{3}{2}k\mathcal{M}I\sin\varphi$.

La condition cherchée est donc $\omega = \omega_0$.

Le théorème du moment cinétique appliqué au rotor conduit à l'égalité :

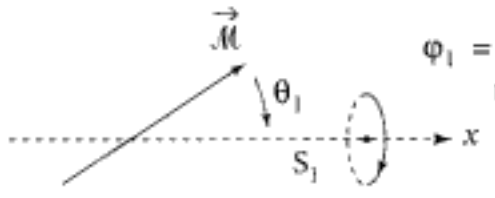
$\Gamma_z - \Gamma_r = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\sin\varphi = \frac{2\Gamma_r}{3k\mathcal{M}I}}$

Il faut $0 \leqslant \sin\varphi < 1 \Rightarrow$ $\boxed{\Gamma_r < \frac{3}{2}k\mathcal{M}I}$

4. La puissance mécanique utile du moteur correspond à l'opposé de la puissance de la charge :

$P_{méca} = \Gamma_r\omega \Rightarrow$ $\boxed{P_{méca} = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I\,\omega \cdot \sin\varphi}$

5. a. Le flux du champ magnétique crée par le dipôle à travers une spire de la bobine n °1 est :



$$\varphi_1 = \iint_{1\text{ spire}} \vec{B}_{dipôle} \cdot \vec{u_x}\,dS$$

Copyrighted material

Comme $d \gg a$, on peut considérer qu'en tout point de la surface du disque $\vec{B}_{\text{dipôle}} \approx \vec{B}_{\text{dipôle}}(S_1)$.

Or $\vec{B}_{\text{dipôle}}(S_1) \cdot \vec{u_x}$ représente la composante radiale du champ magnétique au point S_1. Donc :

$\vec{B}_{\text{dipôle}}(S_1) \cdot \vec{u_x} = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} \cos\theta_1}{2\pi d^3}$ d'après l'expression du champ créé par un dipôle.

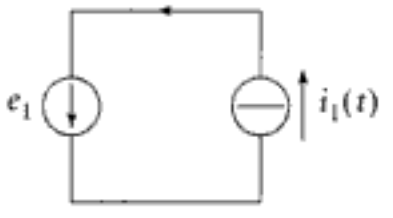
D'où $\phi_1 = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} \cos\theta_1}{2\pi d^3}\pi a^2 = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M} a^2}{2d^3}\cos(\omega t - \varphi)$ avec $\theta_1 = -(\omega t - \varphi)$

et $\phi_1 = k\mathcal{M}\cos(\omega t - \varphi)$ pour le flux à travers la bobine n° 1.

On obtient alors la f.é.m. d'induction :

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} \Rightarrow \boxed{e_1 = +k\mathcal{M}I\omega \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

Le circuit de la bobine n° 1 est alors équivalent à :



la puissance fournie par l'alimentation (la source de courant) est alors :

$$P_1 = -e_1 i_1 \Rightarrow \boxed{P_1 = -k\mathcal{M}I\omega \cdot \sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t)}$$

b. Pour la f.é.m. d'induction dans la bobine n° 2, il faut remplacer θ_1 par $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{2\pi}{3} = -(\omega t - \varphi) + \dfrac{2\pi}{3}$.

On a alors $\phi_2 = \dfrac{1}{2}k\mathcal{M}\cos\left(\omega t - \varphi - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$e_2 = +\frac{1}{2}k\mathcal{M}\omega\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

et
$$\boxed{P_2 = -k\mathcal{M}I\omega\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

De façon analogue,

$$\boxed{P_3 = -k\mathcal{M}I\omega\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

c. La puissance totale fournie aux bobines est alors

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = -k\mathcal{M}I\omega\left[\sin(\omega t - \varphi)\cos\omega t + \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Copyrighted material

On utilise :

$$\sin(\omega t-\varphi)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}[\sin(2\omega t-\varphi)-\sin\varphi]$$

$$\sin\left(\omega t-\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\omega t-\varphi-\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\varphi\right]$$

$$\sin\left(\omega t-\varphi-\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\omega t-\varphi-\frac{8\pi}{3}\right)-\sin\varphi\right]$$

comme $\sin(2\omega t-\varphi)+\sin\left(2\omega t-\varphi-\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(2\omega t-\varphi-\frac{8\pi}{3}\right) = 0,$

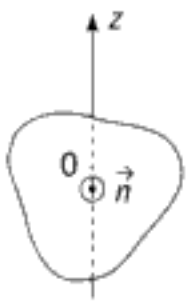
il reste

$$P = -k\mathcal{M}I\omega\left[-\frac{3}{2}\sin\varphi\right] \Rightarrow \boxed{P = \frac{3}{2}k\mathcal{M}I\omega\sin\varphi}$$

On retrouve bien le bilan énergétique : il y a transfert de puissance des alimentations du stator vers la charge mécanique.

211 Moteur asynchrone

Une spire plane, de surface S, de résistance R et de coefficient d'autoinductance L, peut tourner librement autour de l'axe Oz contenu dans son plan.



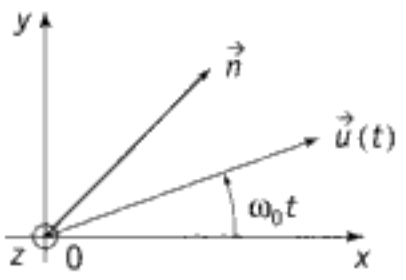
Elle est soumise à un champ magnétique uniforme :

$$\vec{B}_0 = B_0\vec{u}(t)$$

où $\vec{u}(t)$ est un vecteur perpendiculaire à Oz :

$$(\vec{u}_x, \vec{u}) = \omega_0 t. \quad \omega_0 = \text{constante positive})$$

On considère que l'on a $\omega_0 > \frac{L}{R}$.



1. On suppose que la spire est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire constante ω ($\omega > 0$).

On pose donc :

$$(\vec{u}_x, \vec{n}) = \omega t + \beta.$$

On note $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$.

Copyrighted Material

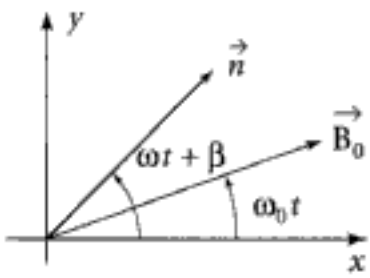
Déterminer la moyenne $\langle \vec{\Gamma}_L \rangle$ dans le temps du moment, selon Oz, des forces de Laplace s'exerçant sur la spire. Commenter.

2. Le moteur, en charge, est soumis à un couple extérieur résistant de moment $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_c \vec{u}_z$ avec $\Gamma_c = \Gamma_{oc} + \alpha\omega^2$ ($\Gamma_{oc} > 0$ et $\alpha > 0$). Étudier le fonctionnement du moteur et préciser son état stable (pour cet état on notera $\omega = \omega_e$).

3. L'état stable de fonctionnement étant atteint, définir le rendement ρ du moteur en fonction de ω_e et de ω_0. Commenter.

Solution

1. ■ La spire est traversée par un flux $\Phi(t)$ tel que :



$$\Phi(t) = S\vec{B}_0 \cdot \vec{n} = SB_0 \cos[(\omega - \omega_0)t + \beta].$$

Elle est donc le siège de la force électromotrice ε définie par (loi de Faraday) :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = SB_0(\omega - \omega_0)\sin[(\omega - \omega_0)t + \beta].$$

Posons $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$, d'où :

$$\varepsilon = SB_0\Delta\omega \sin((\Delta\omega)t - \beta).$$

Commentaire

Pour $\omega = \omega_0$ il n'y a plus de variations de flux à travers la spire, et donc $\varepsilon = 0$. Dans ce cas le courant induit est également nul et aucun couple ne s'exerce sur la spire. Il est donc possible de prévoir que le moteur fonctionnera pour une vitesse angulaire de rotation ω différente de ω_0...

Un courant induit $i(t)$ circule dans la spire, ses variations étant définies par l'équation :

$$\varepsilon = Ri(t) + L\frac{di}{dt}.$$

D'où
$$\boxed{Ri(t) + L\frac{di}{dt} = SB_0\Delta\omega \sin[(\Delta\omega)t - \beta]} \quad (1)$$

Plaçons-nous en **régime permanent**, et posons :

$$i(t) = i_0 \sin[(\Delta\omega)t - \beta + \varphi].$$

Soit, en notation complexe :

$$\underline{i}(t) = i_0 \exp j[(\Delta\omega)t - \beta + \varphi] \quad \text{avec} \quad i(t) = \mathrm{Im}\{\underline{i}(t)\}.$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$i_0 \exp(j\varphi)\{R + jL\Delta\omega\} = SB_0\Delta\omega.$$

Copyrighted material

D'où : $$i_0 \exp(j\varphi) = \frac{SB_0\Delta\omega}{R + jL\Delta\omega} = \frac{SB_0\Delta\omega}{R^2 + L^2(\Delta\omega)^2}\{R - jL(\Delta\omega)\}$$

$$\underline{i}(t) = \frac{SB_0(\Delta\omega)}{R^2 + L^2(\Delta\omega)^2}\{R - jL(\Delta\omega)\}\exp j[(\Delta\omega)t - \beta]$$

$$\boxed{i(t) = \frac{SB_0(\Delta\omega)}{R^2 + L^2(\Delta\omega)^2}\{R\sin[(\Delta\omega)t - \beta] - L\Delta\omega\cos[(\Delta\omega)t - \beta]\}} \quad \textbf{(2)}$$

■ La spire parcourue par le courant $i(t)$ est soumise au champ magnétique $\vec{B}_0(t)$ et donc aux forces de Laplace telles que :

$$\delta\vec{f} = i(t)\delta\vec{l} \wedge \vec{B}_0(t).$$

Ces forces produisent un couple selon Oz dont l'expression peut être calculée par la formule (*cf.* cours) :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$$

où $\vec{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique associé, à l'instant t, à la spire :

$$\vec{\mathcal{M}} = i(t)S\vec{n}$$

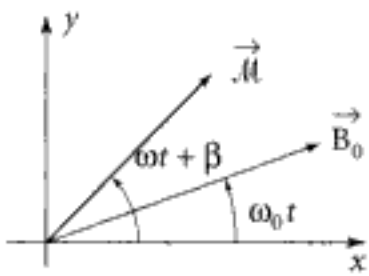
d'où :

$$\vec{\Gamma}_L = i(t)S\vec{n} \wedge \vec{B}_0$$

soit encore

$$\vec{\Gamma}_L = -i(t)SB_0\sin[(\omega - \omega_0)t + \beta]\vec{u}_z$$

$$\vec{\Gamma}_L = +SB_0 i(t)\sin[(\Delta\omega)t - \beta]\vec{u}_z \quad (\Delta\omega = \omega_0 - \omega)$$



Il s'exerce alors sur la spire un couple moyen $\langle\Gamma_L\rangle$ tel que :

$$\langle\Gamma_L\rangle = SB_0\langle i(t)\sin[(\Delta\omega)t - \beta]\rangle$$

soit d'après **(2)** :

$$\langle\Gamma_L\rangle = \frac{(SB_0)^2\Delta\omega}{R^2 + L^2(\Delta\omega)^2}[R\langle\sin^2[(\Delta\omega)t - \beta]\rangle - L(\Delta\omega)\langle\cos[(\Delta\omega)t - \beta]\cdot\sin[(\Delta\omega)t - \beta]\rangle]$$

Or $\langle\sin^2[(\Delta\omega)t - \beta]\rangle = \frac{1}{2}$

et $\langle\sin[(\Delta\omega)t - \beta]\cdot\cos[(\Delta\omega)t - \beta]\rangle = 0.$

D'où

$$\boxed{\langle\Gamma_L\rangle = \frac{S^2B_0^2(\Delta\omega)R}{2[R^2 + L^2(\Delta\omega)^2]}}$$

Copyrighted material

Hidden page

3. La puissance mécanique fournie par le moteur est : $\mathcal{P}_m = \Gamma_c\omega = \langle\Gamma_L\rangle\omega$.
La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la spire est : $\mathcal{P}_J = R\langle i^2\rangle$.

On peut donc définir le rendement du moteur selon : $\rho = \dfrac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_J}$.

Or $\mathcal{P}_m = \dfrac{S^2B_0^2R}{2}\dfrac{(\Delta\omega)\cdot\omega}{R^2+(L\Delta\omega)^2}$ et $\langle i^2\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{S^2B_0^2(\Delta\omega)^2}{R^2+(L\Delta\omega)^2}$ (*cf.* (2))

D'où : $\dfrac{\mathcal{P}_J}{\mathcal{P}_m} = \dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \dfrac{\omega_0-\omega}{\omega} = \dfrac{\omega_0}{\omega} - 1$

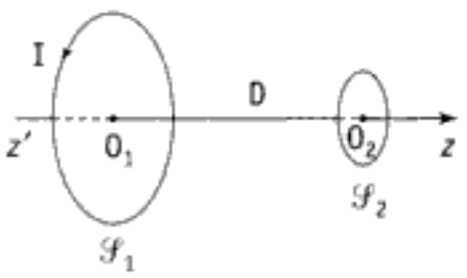
et $\rho = \dfrac{1}{1+\dfrac{\omega_0}{\omega}-1} \rightarrow \boxed{\rho = \dfrac{\omega_c}{\omega_0}}$

Commentaires

Le rendement sera d'autant meilleur que ω_c est proche de ω_0 (par valeurs inférieures).

212 Déplacement de deux spires

Deux spires $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont même axe $z'z$.
Leurs rayons respectifs sont a_1 et a_2.
La spire $\mathcal{S}_1$ est parcourue par un courant I maintenu constant.
La spire $\mathcal{S}_2$ possède une résistance R et on néglige son auto-inductance.



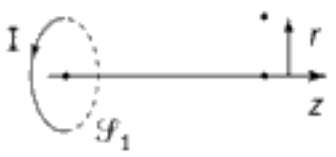
Elle peut coulisser sans frottements sur l'axe $z'z$. Les deux spires étant initialement immobiles on déplace $\mathcal{S}_1$ d'une distance d.

L'expérience envisagée montre que $\mathcal{S}_2$ se déplace de la même distance d, et dans le même sens, avant de s'immobiliser.

1. Proposer une analyse qualitative des phénomènes physiques mis en jeu.

2. a. On note M(D) le coefficient de mutuelle entre les deux spires. Établir l'équation donnant l'expression du courant $i(t)$ circulant dans $\mathcal{S}_2$, en fonction de I, R et $\dfrac{dM}{dt}$.

b. On cherche à déterminer la résultante $\vec{F}_L$ des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathcal{S}_2$. À cet effet, on se place dans le cadre simplificateur suivant :



- $D(t) \gg a_1$ et a_2.

Copyrighted material

• Au voisinage de l'axe Oz, et au premier ordre en r :

$$B_z(r,z) = B_0(z) \quad \text{et} \quad B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}.$$

$B_0(z)$ représentant le champ magnétique crée par $\mathcal{S}_1$ sur son axe.

Évaluer $\vec{F}_L$ en fonction de i, I, μ_0, a_1, a_2 et D, puis montrer que l'on a à l'approximation considérée :

$$\vec{F}_L = i\,I\frac{dM}{dD}\vec{u}_z$$

résultat dont on admettra la généralité (dans l'AEQS...).

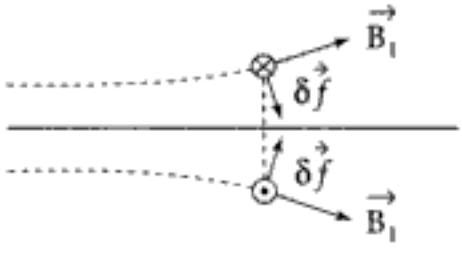
c. Justifier alors que $\mathcal{S}_2$ s'immobilise bien après avoir parcouru la même distance que $\mathcal{S}_1$ et dans le même sens.

Solution

1. *Analyse qualitative*

■ Le déplacement de $\mathcal{S}_1$ provoque une variation du champ magnétique au niveau de la spire $\mathcal{S}_2$. Il en résulte la création d'un courant induit i qui, au moins dans un premier temps, est de sens opposé à I. Ce courant i contribue à compenser l'augmentation initiale de flux dû au rapprochement de la spire $\mathcal{S}_1$.

L'examen des forces de Laplace montre l'existence d'une force résultante qui met en mouvement la spire $\mathcal{S}_2$ dans le même sens que $\mathcal{S}_1$ (effet de modération : loi de lenz).



■ L'état final doit correspondre à un système immobile et à un courant i nul, le mouvement de $\mathcal{S}_2$ s'amortissant du fait de la dissipation d'énergie par effet Joule.

■ À partir du moment où la spire $\mathcal{S}_1$ est de nouveau immobile le champ qu'elle crée redevient indépendant du temps. On sait alors que la puissance des efforts de Laplace agissant sur $\mathcal{S}_2$ et la puissance des phénomènes électromoteurs dûs au déplacement de $\mathcal{S}_2$ doivent se compenser :

$$\mathcal{P}_L^{ext} + \mathcal{P}_{em}^{ext} = 0.$$

Or d'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à $\mathcal{S}_2$:

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_L^{ext}.$$

Et d'après les lois de l'électrocinétique :

$$\mathcal{P}_{em}^{ext} = R\,i^2 \quad \text{(auto-induction négligée).}$$

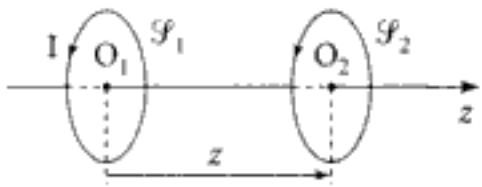
On a donc à partir de cet instant :

$$\frac{dE_c}{dt} = -R\,i^2.$$

Copyrighted material

Et la vitesse de $\mathcal{S}_2$ ne peut que diminuer. Elle finira par s'annuler (un état permanent où v_2 = cste et où $\mathcal{S}_2$ est à distance finie étant physiquement exclu : variation de flux → courant induit → v_2 diminue…).

2. a. Notons $M(z)$ la mutuelle entre les deux spires. Le flux traversant $\mathcal{S}_2$ est donné par :



$$\Phi_{1\to 2} = MI.$$

Soit une force électromotrice d'induction :

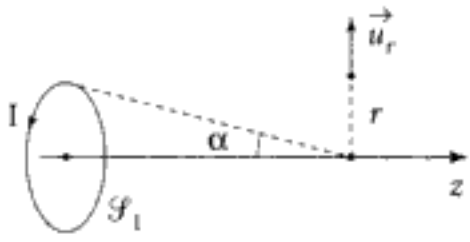
$$\varepsilon^{ext} = -\frac{d\Phi_{1\to 2}}{dt} = -I\frac{dM}{dt} \text{ (I maintenu constant).}$$

On a donc (phénomènes d'auto-induction négligés) :

$$\varepsilon^{ext} = Ri \Rightarrow \boxed{Ri = -I\frac{dM}{dt}} \quad (1)$$

b. Déterminons une expression de la force de Laplace en fonction du coefficient de mutuelle M. Cette force ne doit dépendre que des courants i et I et de la géométrie du système dans la configuration étudiée (que l'on fige à l'instant t).

Plaçons-nous dans le cas plus simple indiqué par l'énoncé ($O_1O_2 \gg a_1$ et a_2) :



le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par $\mathcal{S}_1$ sur son axe et d'après le cours :

$$\vec{B}_1 = B_0(z)\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2a_1}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$$

avec $\sin\alpha = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + D^2(t)}} \sim \dfrac{a_1}{D(t)}$

$(a_1 \ll D(t))$

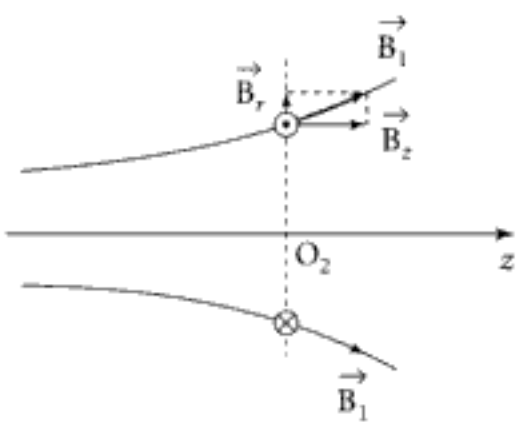
soit $B_0(z) \sim \dfrac{\mu_0 I}{2a_1}\cdot\left(\dfrac{a_1}{D}\right)^3$.

D'où $\vec{B}_{r_1} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_0}{dz}\vec{u}_r = +\dfrac{3}{4}r\left(\dfrac{\mu_0 I a_1^2}{D^4}\right)\vec{u}_r$.

Or

$$\delta\vec{F}_L = i\,\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_1 = i\,\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_{z_1} + i\,\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_{r_1}$$

$$\oint i\,\vec{\delta l}\wedge\vec{B}_{z_1}(r,z) = \underbrace{i\left(\oint\vec{\delta l}\right)}_{0}\wedge\vec{B}_{z_1}(r,z) = \vec{0}.$$



Il reste :

$$\delta\vec{F}_L = i\,\vec{\delta l}\wedge B_{r_1}\vec{u}_r = i\delta l B_{r_1}(-\vec{u}_z).$$

Copyrighted material

Finalement $\vec{F_L} = -i2\pi a_2 B_{r_1}(a_2, z)\vec{u_z}$.

D'où : $\vec{F_L} = -i2\pi a_2 \frac{3}{4} a_2 \left(\frac{\mu_0 I a_1^2}{D^4}\right)\vec{u_z} \rightarrow F_L = iI\left\{-\frac{3\mu_0 a_1^2 a_2^2 \pi}{4D^4}\right\}$ (3)

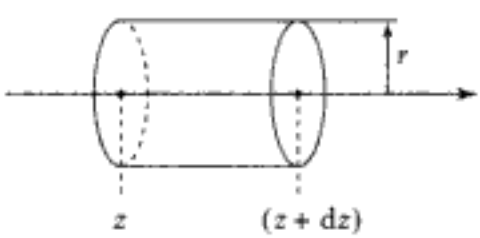
Or à la même approximation : $\phi_{1\rightarrow 2} = MI \approx \pi a_2^2 \cdot B_0(z = D)$.

$$MI \approx \pi a_2^2 \frac{\mu_0 I}{2a_1}\frac{a_1^3}{D^3} \rightarrow M \approx \frac{1}{2}\pi a_2^2 a_1^2 \mu_0 \frac{1}{D^3} \quad (4)$$

(3) et (4) se traduisent par : $F_L = iI\frac{dM}{dD}$ (5) $\frac{d}{dD}\left(\frac{1}{D^3}\right) = -\frac{3}{D^4}$.

Commentaires

- L'expression (5) ne dépend pas en fait de l'approximation faite ici pour la démontrer.
- L'expression donnant B_r au premier ordre par rapport à r (distance à l'axe) se déduit simplement de $\text{div}\vec{B} = 0$, soit encore $\phi_{\Sigma_f}(\vec{B}) = 0$: choisissons pour Σ_f le cylindre de hauteur dz, d'axe Oz et de base circulaire de rayon r. Notons $B_0(z)$ le champ sur l'axe (ici de $\mathcal{S}_1$).



$$\phi_{\Sigma_f}(\vec{B}) = \underbrace{\{B_0(z+dz)\pi r^2 - B_0(z)\pi r^2\}}_{\text{à l'ordre le plus bas par rapport à } r} + 2\pi r\, dz B_r(r, z)$$

d'où : $2\pi r\, dz B_r + \frac{dB_0}{dz} dz \pi r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_r(r, z) = -\frac{1}{2} r \frac{dB_0}{dz}}$

c. • Il reste à traduire que la spire se met en mouvement sous l'action des forces de Laplace.

Le théorème de la résultante dynamique s'écrit en notant m la masse de la spire $\mathcal{S}_2$:

$$\boxed{m\frac{dv_2}{dt} = F_L} \quad (6)$$

On a donc d'après (6) et (5) : $m\frac{dv_2}{dt} = iI \cdot \frac{dM}{dD}$ (7) (où $D = D(t)$).

Les équations (1) et (7) donnent alors :

$$m\frac{dv_2}{dt} = -\frac{I^2}{R}\frac{dM}{dt}\cdot\frac{dM}{dD}$$

soit encore avec $\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dD}\cdot\frac{dD}{dt}$: $m\frac{dv_2}{dt} = -\frac{I^2}{R}\left(\frac{dM}{dD}\right)^2\frac{dD}{dt}$

d'où : $m\int_{v_2=0}^{v_2=0} dv_2 = 0 = -\frac{I^2}{R}\int_{D_0}^{D_0}\left(\frac{dM}{dD}\right)^2 \cdot dD$.

Copyrighted material

À l'instant initial les deux spires sont distantes de D_0. À l'instant final $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont fixes et leur distance est devenue D_F. Ce qui impose :

$$\int_{D_0}^{D_F}\left(\frac{dM}{dD}\right)^2 dD = 0, \text{ soit } D_F = D_0 \left(\left(\frac{dM}{dD}\right)^2 \text{ fonction continue et positive}\right).$$

La spire $\mathcal{S}_2$ se sera donc également translatée, et dans le même sens que $\mathcal{S}_1$, d'une distance d (où d représente le déplacement imposé à $\mathcal{S}_1$).

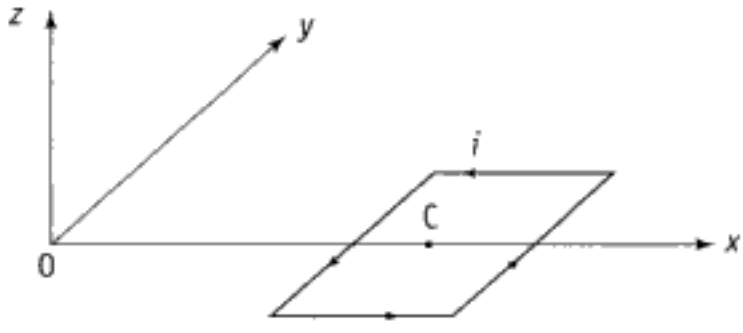
213 Moteur linéaire

Un ensemble de bobinages fixes (inducteur) crée dans le voisinage du plan horizontal xOy un champ magnétique non uniforme et non stationnaire :

$$\vec{B}(M, t) = B_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\vec{u}_z.$$

On donne $\lambda = 0{,}25$ m, $\omega_0 = 100\pi$ s^{-1} et $B_m = 0{,}50$ T.

Un bobinage plan (induit) d'épaisseur négligeable se compose de N spires carrées de côté $2a$ ($a \ll \lambda$), formant un circuit fermé de résistance R et de coefficient d'auto-induction L ; le plan de ce bobinage est confondu avec le plan xOy, son centre C (d'abscisse x) est susceptible de se déplacer sur Ox, les côtés restant parallèles à Ox et Oy. Le sens positif du circuit est choisi de telle sorte que la normale au circuit soit confondue avec le vecteur unitaire $\vec{u}_z$.



Dans la suite, on notera $S = 4Na^2$ et $\Phi_m = SB_m$. On donne $R = 1{,}5\ \Omega$, $L = 10$ mH et $S = 1$ m^2.

Le champ créé par l'inducteur

1. Représenter graphiquement les variations de B_z avec x à un instant donné t_1. Quelle est la signification physique de la constante λ ?

2. Représenter sur le graphe précédent les variations de B_z avec x à un instant t_2 légèrement supérieur à t_1. On qualifie ce type de champ magnétique de « champ glissant » : dans quel sens glisse-t-il et quelle quantité v_0 peut-on appeler « vitesse de glissement » du champ ?

Copyrighted material

3. À l'instant t, le centre C de la bobine est à l'abscisse x. Déterminer, en utilisant Φ_m, l'expression du flux Φ du champ magnétique créé par l'inducteur à travers la bobine : donner l'expression non simplifiée, puis l'expression simplifiée avec $a \ll \lambda$.

Les forces électromagnétiques s'exerçant sur l'induit

On note $i(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine (le sens positif a été préalablement défini).

4. Déterminer, en prenant en compte $a \ll \lambda$, l'expression simplifiée de la résultante $\vec{F}$ des forces électromagnétiques s'exerçant sur la bobine.

5. La bobine possède (en régime permanent de mouvement) un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = v\vec{u_x}$. Son centre C a alors une abscisse $x = vt$.

a. Déterminer (en utilisant $\omega = \omega_0 - \frac{2\pi v}{\lambda}$) l'expression de la f.é.m. d'induction dans l'induit, sans prendre en compte pour l'instant l'auto-induction.

b. Déterminer, en prenant en compte l'auto-induction, l'expression, en régime forcé, de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit : on mettra cette expression sous la forme $I\sin(\omega t - \varphi)$ en précisant I et φ.

6. On note $\langle\vec{F}\rangle$ la valeur moyenne au cours du temps de la résultante $\vec{F}$.

a. Déterminer, en fonction de Φ_m, ω, λ, R et L, l'expression de cette moyenne.

b. Représenter l'allure des variations de la composante $F = \langle\vec{F}\rangle \cdot \vec{u_x}$ avec ω (pour $\omega \in]-\infty\,;+\infty[$), puis les variations de F avec v. On indiquera sur ces graphiques les coordonnées des points remarquables.

c. Déterminer la valeur numérique F_0 de F pour $v = 0$ et la valeur maximale F_{max} de F.

Fonctionnement du moteur

Dans cette partie, on n'utilisera que la valeur moyenne F et on négligera tout frottement.

7. Pour quelles valeurs de v le dispositif peut-il fonctionner en moteur (c'est-à-dire se déplacer en entraînant une charge mécanique résistante qui exerce un effort dans le sens opposé à la vitesse) ?

8. Le moteur est supposé non chargé. Déterminer la vitesse v de l'induit en régime permanent de mouvement.

9. Le moteur est chargé avec une force résistante $-F_r\vec{u_x}$ ($0 < F_r < F_{max}$). En utilisant le graphique de la question **6.**, montrer que pour certaines valeurs de F_r, le régime permanent de mouvement peut théoriquement exister pour deux vitesses v' et v'' ($v'' > v'$). En fait, une des deux vitesses correspond à un régime instable de fonctionnement que l'on n'observera donc pas. Le montrer en supposant que la vitesse s'écarte très légèrement de v' (ou v'') et en étudiant les forces qui s'exercent alors sur la bobine.

10. On donne $F_r = 100$ N.

a. Déterminer la vitesse v_1 de la bobine en régime permanent de mouvement.

b. Déterminer la puissance mécanique utile du moteur, c'est-à-dire la valeur absolue de la puissance des forces exercées par la charge.

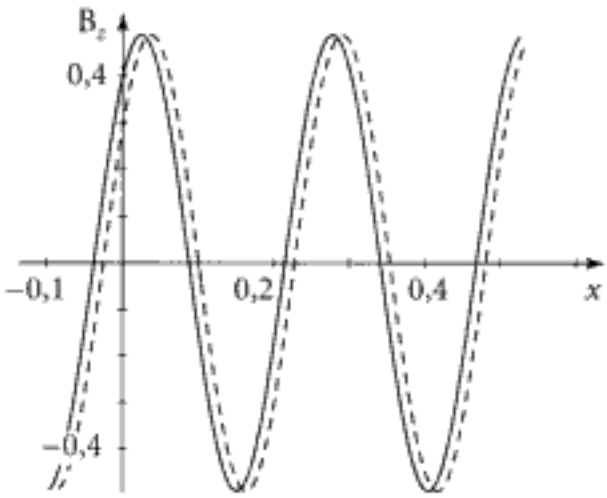
Copyrighted material

c. Déterminer la puissance moyenne perdue par effet Joule.

d. Définir le rendement du moteur. Montrer qu'il peut s'exprimer très simplement à l'aide de la vitesse v_1 et de la vitesse de glissement v_0. Faire l'application numérique.

Solution

1. À un instant donné, la composante B_z est une fonction sinusoïdale de la variable x. La distance λ est la période spatiale de la fonction $B_z(x)$.



2. Les variations du champ magnétique avec x à un instant légèrement supérieur sont représentées ci-dessus en pointillés. On voit apparaître que le champ « glisse » dans le sens positif. On peut écrire le champ magnétique sous la forme

$$B_z = B_m \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{x}{\frac{\lambda\omega_0}{2\pi}}\right)\right].$$

Cette expression est du type $B_m \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{x}{v_0}\right)\right]$: elle fait apparaître un décalage temporel égal à $\frac{x}{v_0}$ entre le champ en x et le champ en O. La vitesse v_0 peut alors être qualifiée de vitesse de glissement :

$$\boxed{v_0 = \frac{\lambda\omega_0}{2\pi}}$$

3. Le flux du champ magnétique est $\Phi = N\iint_{1\,\text{spire}} \vec{B}\,\vec{n}\,\delta S$. Ici le vecteur normal est confondu avec $\vec{u_z}$ donc :

$$\Phi = N\iint B_z \delta S = N(2a)\int_{x-a}^{x+a} B_z \mathrm{d}x' = N(2a)B_m\int_{x-a}^{x+a} \cos\left(2\pi\frac{x'}{\lambda} - \omega_0 t\right)\mathrm{d}x'.$$

On obtient donc

$$\Phi = N(2a)B_m \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+a) - \omega_0 t\right] - \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-a) - \omega_0 t\right]\right).$$

Copyrighted material

Hidden page

On en déduit :

$$\underline{I} = \frac{-j\omega\Phi_m}{R + jL\omega} = -jI\exp(-j\varphi).$$

En passant aux modules :

$$\boxed{I = \frac{|\omega|\Phi_m}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}}$$

En passant aux arguments :

$$-\frac{\pi}{2} - \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arg(R + jL\omega) + \arg(\omega)$$

Et donc

$$\boxed{\varphi = \arg(R + jL\omega) - \arg(\omega)}$$

Remarque : $\arg(\omega) = 0$ si $\omega > 0$ et $\arg(\omega) = \pi$ si $\omega < 0$.

6. On remplace i par son expression et on obtient :

$$\vec{F} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) I\Phi_m \vec{u_x} \sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi).$$

6. a. Pour déterminer la moyenne de $\vec{F}$, on peut remarquer que

$$\sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)).$$

Donc

$$\langle \sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)\rangle = \frac{1}{2}\cos(\varphi).$$

Si $\omega > 0$, $\cos(\varphi) = \dfrac{R}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$ et $I = \dfrac{\omega\Phi_m}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$

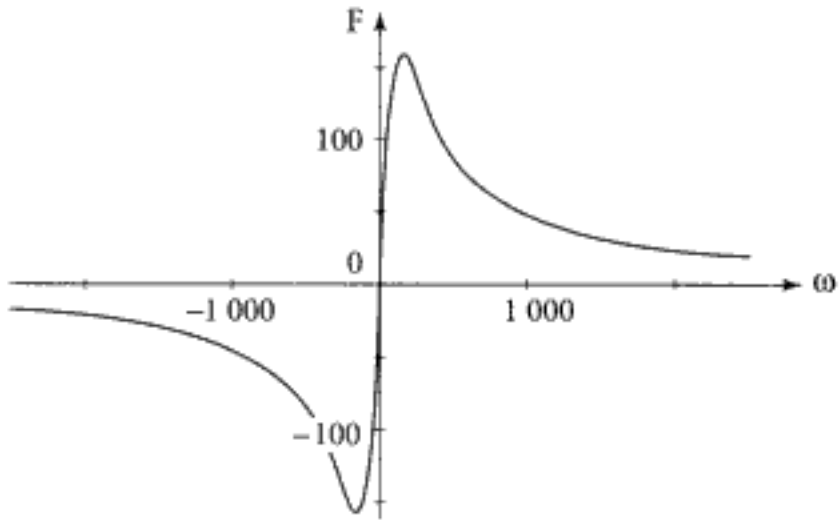
Si $\omega < 0$, $\cos(\varphi) = -\dfrac{R}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$ et $I = -\dfrac{\omega\Phi_m}{(R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}}$.

Dans les deux cas, on en déduit :

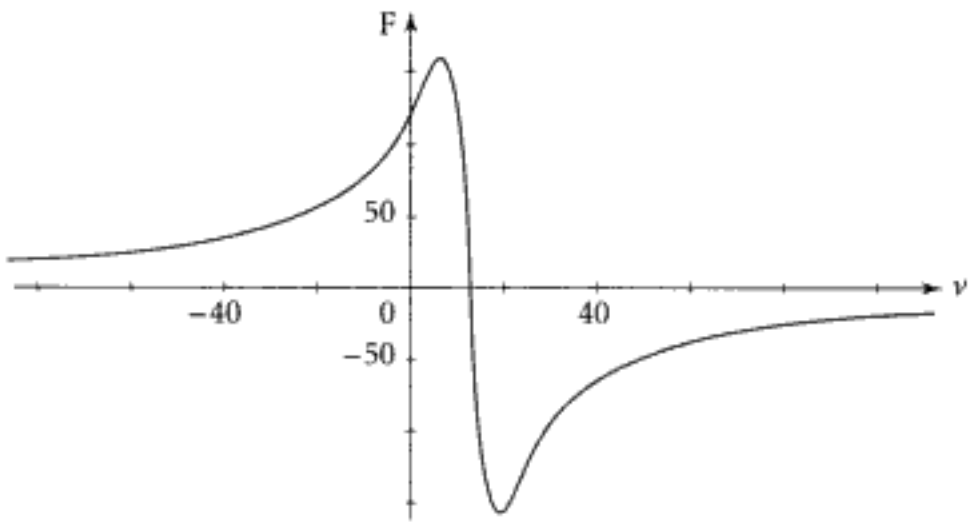
$$\boxed{\langle \vec{F} \rangle = \frac{\pi R\omega\Phi_m^2}{\lambda(R^2 + L^2\omega^2)}\vec{u_x}}$$

Copyrighted material

6. b. On peut alors faire la représentation graphique des variations de F avec ω :



On en déduit les variations de F avec v :



6. c. Pour $v = 0$, $\boxed{F_0 = 122\ \text{N}}$. Le maximum de F est obtenu pour $\omega = \frac{R}{L}$ et vaut $\boxed{F_{max} = 157\ \text{N}.}$

7. Le système ne peut entraîner une charge que si F est du même signe que v, c'est-à-dire si $Fv > 0$. Il faut donc que :

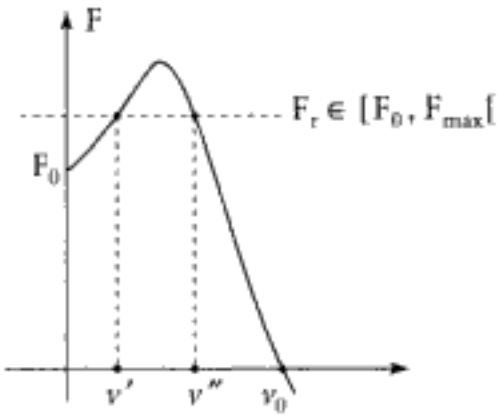
$$\boxed{v \in [0, v_0[}$$

8. En régime permanent de mouvement, le théorème de la résultante dynamique indique que la résultante des forces est nulle. En l'absence de charge et de frottement on a obligatoirement $F = 0$ donc :

$$\boxed{v = v_0 = 12{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Copyrighted material

9. Le théorème de la résultante dynamique conduit à $F = F_r$. Le graphique vu précédemment indique qu'il y a bien deux solutions si $F_r \in [F_0, F_{max}[$. La solution v' correspond à un régime instable, que l'on n'observera donc pas. En effet, si v devient légèrement supérieure à v', F devient légèrement supérieure à F_r. La vitesse va augmenter (d'après le théorème de la résultante dynamique) et s'écarter encore plus de v'. Par contre, la solution v'' correspond à un régime stable dans la mesure où si la vitesse augmente au-delà de v'', c'est la force F_r qui devient supérieure à F et la vitesse va revenir à la valeur v''.



10. On étudie un régime de fonctionnement avec le moteur chargé.

10. a. On résout $F(v_1) = F_r$ et on obtient numériquement :

$$\boxed{v_1 = 10{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

10. b. La puissance mécanique est :

$$\boxed{P_u = F_r v_1 = 1{,}03 \text{ kW}}$$

10. c. La puissance moyenne perdue par effet Joule est :

$$\boxed{P_J = \frac{1}{2} R I^2 = 0{,}214 \text{ kW}}$$

10. d. Le rendement ρ correspond au rapport entre la puissance utile et la puissance totale fournie donc : $\rho = \dfrac{P_u}{P_u + P_J}$.

On remplace alors P_u par Fv_1 et P_J par $\dfrac{1}{2}\dfrac{R\omega^2\Phi_m^2}{R^2 + L^2\omega^2} = \dfrac{\omega\lambda F}{2\pi} = F \cdot (v_0 - v_1)$.

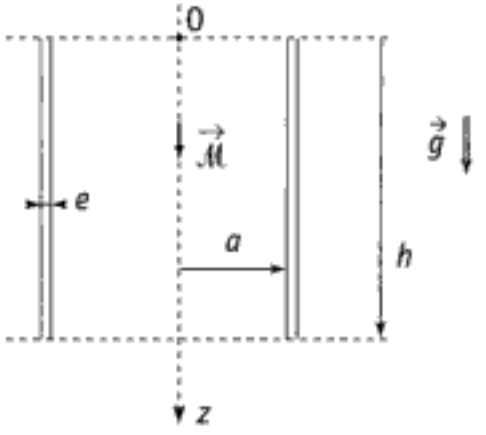
$$\boxed{\rho = \frac{Fv_1}{Fv_0} = \frac{v_1}{v_0} = 0{,}83}$$

Copyrighted material

214 Chute d'un aimant dans un tuyau cylindrique

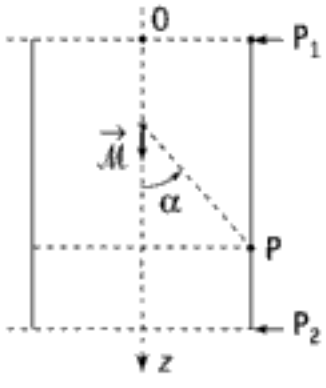
Un aimant de masse m est assimilé à un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u_z}$. Il est initialement placé en O puis abandonné sans vitesse initiale : il décrit dans sa chute l'axe vertical Oz d'un cylindre de rayon a, de hauteur h et d'épaisseur e (cf. figure). On suppose $e \ll a$.

On mesure le temps de chute correspondant à h (t_c pour un cylindre conducteur, t'_c pour un cylindre non conducteur).



1. L'expérience montre que $t_c > t'_c$. Justifier, et préciser la nature des phénomènes physiques à l'origine de cette différence.

2. a. Déterminer, dans le cas du cylindre conducteur (conductivité électrique γ), les expressions de la densité volumique $\vec{j}(P, t)$ des courants induits et du champ électrique $\vec{E}(P, t)$. On négligera les phénomènes d'autoinduction, et on exprimera ces champs en fonction de $\mu_0\mathcal{M}$, a, v (vitesse de l'aimant à l'instant t) et de l'angle α (*cf.* figure).



b. Soit $\vec{F}$ la force exercée par les courants induits sur l'aimant. Montrer qu'elle s'exprime sous la forme $\vec{F} = -K\vec{v}$ avec :

$$K = \frac{8}{9}\frac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi a^4}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin^6\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha$$

(α_1 et α_2 angles associés aux points P_1 et P_2).

Que devient ce résultat pour $\vec{\mathcal{M}}$ suffisamment éloigné des bords des cylindre (on a $h \gg a$).

On donne : $\int_0^{\pi}\sin^6\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha = \frac{5\pi}{128}$.

Commenter.

3. A.N. on a : $h = 1\text{m}$; $g = 9{,}81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a = 7{,}5\text{mm}$; $e = 1\text{mm}$

$\|\vec{\mathcal{M}}\| = 0{,}75\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$; $m = 8\cdot10^{-3}\text{kg}$

$\gamma_{Cu} = 5{,}98\cdot10^7\ \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$; $\gamma_{Al} = 3{,}77\cdot10^7\ \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$

$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

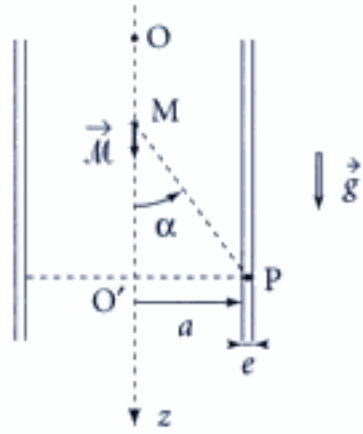
L'expérience donne $t'_c = 0{,}46\text{s}$; $t_c(\text{Cu}) = 10\text{s}$; $t_c(\text{Al}) = 7\text{s}$.

Commenter ces résultats.

Copyrighted material

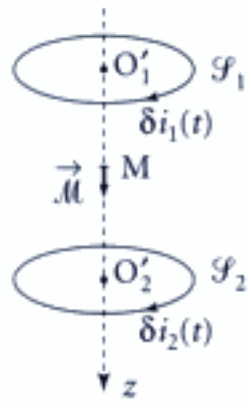
Solution

1. Analyse qualitative :



■ On assimile l'aimant à un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u_z}$ en chute verticale (effets de $\vec{g}$) selon l'axe Oz. L'aimant crée en P, point fixe du cylindre, un champ magnétique $\vec{B}(P, t)$ variable dans le temps (α et MP variables) qui induit un champ électrique $\vec{E}(P, t)$ (*cf.* loi de Faraday).

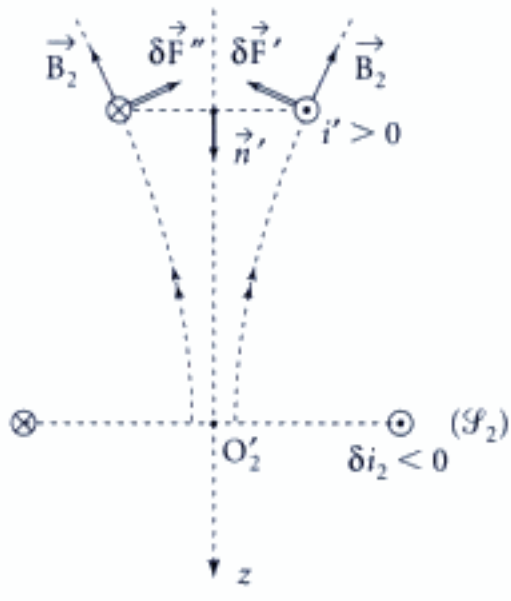
Dans le cas où le cylindre est conducteur, le champ $\vec{E}(P, t)$ va induire des courants de densité volumique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm ; γ = conductivité électrique du métal).



Un élément de cylindre de hauteur dz centré en O′ est alors « réductible » à une spire parcourue par un courant induit $\delta i(t)$, et :

• Le flux crée par ce courant induit à travers une spire $\mathcal{S}_2$ située en dessous de $\vec{\mathcal{M}}$ doit tendre à compenser l'augmentation de flux résultant du déplacement de l'aimant (normale à la spire selon $\vec{u_z}$). On doit donc avoir $\delta i_2 < 0$. Pour une spire $\mathcal{S}_1$ située au dessus de $\vec{\mathcal{M}}$ il vient $\delta i_1 > 0$, l'aimant s'éloignant de $\mathcal{S}_1$.

• Ces courants vont créer à leur tour un champ magnétique $\vec{b}$ qui va exercer sur $\vec{\mathcal{M}}$ une « force de Laplace » dirigée selon Oz d'après les symétries du problème : $\vec{F} = F\vec{u_z}$. D'après la loi de Lenz (loi de modération) on peut prévoir que $F < 0$ (la force subie en réaction s'oppose à la cause, à savoir la chute de l'aimant). Vérifions-le en considérant l'interaction {spire $\mathcal{S}_2/\vec{\mathcal{M}}$}. À cet effet, modélisons $\vec{\mathcal{M}}$ par une petite spire $\mathcal{S}'$ telle que $\vec{\mathcal{M}} = i's'\vec{u_z}$.



Sur le dessin ci-contre on a représenté, en coupe, la spire $\mathcal{S}_2$, le champ $\vec{B}_2$ qu'elle crée au niveau de $\mathcal{S}'$, et les forces de Laplace élémentaires associés à deux éléments de même longueur $\delta l'$ diamétralement opposés.

On a bien $\delta\vec{F}' + \delta\vec{F}''$ porté par $\vec{u_z}$ et dirigé vers le haut.

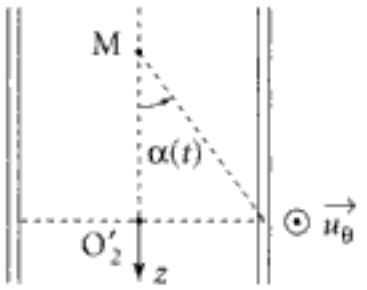
Cette force $\vec{F} = F\vec{u_z}$ va donc ralentir la descente de l'aimant, le temps de chute mesuré tc devenant plus grand en présence du cylindre conducteur.

Dans le cas où le cylindre est isolant (cylindre en plastique par exemple) il n'y a plus de

Copyrighted material

Hidden page

On peut alors en déduire la densité volumique de courant $\vec{j}$ ($\delta i_2 = je\,\mathrm{d}Z$) et le champ électrique $\vec{E}$ ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$) :



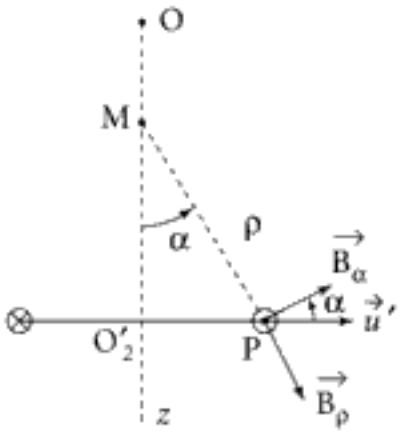
$$\boxed{\vec{j} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}\gamma}{4\pi a^3}\sin^4\alpha\cos\alpha\, v\vec{u_\theta}}$$

et $$\boxed{\vec{E} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}}{4\pi a^3}\sin^4\alpha\cos\alpha\, v\vec{u_\theta}}$$

b. Pour calculer la force de Laplace $\vec{F} = F\vec{u_z}$ s'exerçant sur l'aimant on va plutôt rechercher celle créée par l'aimant sur le cylindre conducteur puis appliquer le principe de l'action et de la réaction. Commençons donc par nous intéresser à l'interaction $\vec{\mathcal{M}}/\mathcal{S}_2$.

On a $\delta\vec{F}' = \delta i_2 \cdot \delta\vec{l_2} \wedge \vec{B_{\mathcal{M}}}(P)$.

Par symétrie (invariance par rotation autour de Oz) la force résultante $\vec{F_1'}$ est portée par $\vec{u_z}$, d'où :



$$\delta\vec{F}' = \delta i_2 \oint_{\mathcal{S}_2} a\,\mathrm{d}\theta\, u_\theta \wedge (B_\alpha\cos\alpha + B_\rho\sin\alpha)\vec{u}'$$

$$\delta\vec{F}' = \delta i_2 2\pi a(B_\alpha\cos\alpha + B_\rho\sin\alpha)(-\vec{u_z})$$

or $B_\rho = \dfrac{2\mu_0\mathcal{M}\cos\alpha}{4\pi\rho^3}$

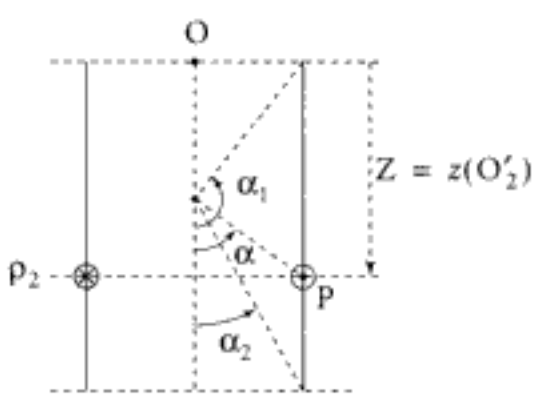
et $B_\alpha = \dfrac{\mu_0\mathcal{M}\sin\alpha}{4\pi\rho^3} \rightarrow \delta\vec{F}' = -\dfrac{\mu_0\mathcal{M}a^2}{2\rho^3}\delta i_2 3\cos\alpha\sin\alpha\vec{u_z}$

et avec $\rho = \dfrac{a}{\sin\alpha}$: $\delta\vec{F}' = -\delta i_2 \cdot \dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{2a}3\sin^4\alpha\cos\alpha\vec{u_z}$

et avec (4) : $\delta\vec{F}' = \dfrac{9}{8}\dfrac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi a^5}\sin^8\cos^2\alpha\, v\,\mathrm{d}Z\vec{u_z}$ avec $Z = z(O'_2)$.

D'où

$$\vec{F} = \ominus\frac{9}{8}\frac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi^2 a^5}v\int_{Z=0}^{Z=h}\sin^8\alpha\cos^2\alpha\,\mathrm{d}Z\vec{u_z}$$



or, à t fixe α varie avec P de α_1 à α_2 avec

$$\mathrm{cotan}\,\alpha = \frac{Z - z_M(t)}{a} \rightarrow \frac{\mathrm{d}Z}{a} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha}$$

soit $\vec{F} = -\dfrac{9}{8}\dfrac{\mu_0^2\mathcal{M}^2\gamma e}{\pi^2 a^5}\vec{v}\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin^6\alpha\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\vec{u_z}$.

Copyrighted material

Hidden page

chapitre

3

Ondes Électromagnétiques

Copyrighted material

301 Interférences

Deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement se propagent, dans le vide, dans le même sens (vecteur unitaire $\vec{u}$).

À l'endroit où on se trouve, le champ électrique de la première s'écrit $\vec{E}_1 \cos(\omega_1 t)$ et celui de la seconde $\vec{E}_1 \cos(\omega_2 t + \theta)$.

(ω_1 et ω_2 sont positifs).

1. Calculer les valeurs moyennes $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ des vecteurs de Poynting de chaque onde.

2. Calculer la valeur moyenne $\vec{\phi}$ du vecteur de Poynting de l'onde résultante.

Quand a-t-on : $\vec{\phi} \neq \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2$?

De quel phénomène s'agit-il ?

1. Ce qu'il faut savoir

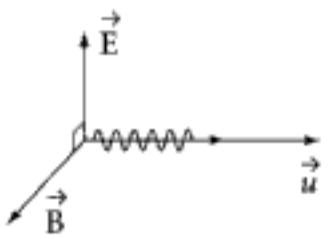
- Ondes planes progressives monochromatiques.
- Vecteur de Poynting - Interférences.

2. Ce qu'il faut comprendre

On remarquera que la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à la superposition des deux ondes ne se réduit pas nécessairement à la somme des valeurs moyennes des vecteurs de Poynting de chaque onde. Il faut tout d'abord calculer les champs résultants $\vec{E}_T$ et $\vec{B}_T$.

3. Solution

1. Le vecteur de Poynting $\vec{P}$ d'une onde progressive s'écrit :



$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c}\right) = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}\vec{E}^2$$

(car $\vec{u}$ et $\vec{E}$ sont perpendiculaires)

soit : $\vec{P}_1 = \dfrac{\vec{u}}{\mu_0 c} E_1^2 \cos^2(\omega_1 t)$ et $\vec{P}_2 = \dfrac{\vec{u}}{\mu_0 c} E_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta)$

et les valeurs moyennes (dans le temps) sont données par les relations :

$$\boxed{\vec{\phi}_1 = \frac{\vec{u}}{2\mu_0 c} E_1^2 \quad \text{et} \quad \vec{\phi}_2 = \frac{\vec{u}}{2\mu_0 c} E_2^2}$$

$\left(\vec{\phi}_k = \langle \vec{P}_k \rangle = \dfrac{1}{T_k}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_k} \vec{P}_k(t)\,dt\right.$, de plus $\left.\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t)\,dt = \dfrac{1}{2}\right)$.

Copyrighted material

2. Effectuons les mêmes calculs sur l'onde résultante :

$$\vec{P} = \vec{E}_T \wedge \frac{\vec{B}_T}{\mu_0} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_T = \vec{E}_1 \cos(\omega_1 t) + \vec{E}_2 \cos(\omega_2 t + \theta)$$

et $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}_1 + \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}_2 = \frac{\vec{u}}{c} \wedge (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$.

On a ici $\vec{B}_T = \frac{\vec{u}}{c} \wedge E_T$ les deux ondes planes progressives se propagent dans le même sens.

D'où $\vec{P} = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(\vec{E}_1 \cos(\omega_1 t) + \vec{E}_2 \cos(\omega_2 t + \theta))^2$

et $\vec{P} = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(E_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\,\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \theta) + E_2^2 \cos(\omega_2 t + \theta))$

dont la valeur moyenne est :

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}\left[\frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 + 2\,\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \cdot \langle[\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t + \theta)]\rangle\right]$$

soit $\boxed{\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 + \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \cdot \langle[\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t + \theta)]\rangle}$

Pour pouvoir moyenner, linéarisons le produit des cosinus :

$$\cos\omega_1 t \cos(\omega_2 t + \theta) = \frac{1}{2}\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \theta] + \frac{1}{2}\cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \theta]$$

ω_1 et ω_2 étant des grandeurs définies positives (pulsations) le premier cosinus est nécessairement à valeur moyenne nulle. Il en est de même du second pour $\omega_1 \neq \omega_2$. Soit :

$$\langle \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \theta)\rangle = 0 \quad \text{pour} \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

$$\langle \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t + \theta)\rangle = \frac{1}{2}\cos\theta \quad \text{pour} \quad \omega_1 = \omega_2.$$

Il est donc nécessaire que les deux ondes aient même pulsation (ou même fréquence), on a alors :

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 + \frac{\vec{u}}{\mu_0 c}(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2)\cos\theta.$$

Il faut aussi que les polarisations des deux ondes ne soient pas orthogonales pour que le produit scalaire $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ ne soit pas nul.

Nous venons de retrouver les conditions générales des interférences lumineuses. Notons cependant que l'égalité des pulsations des deux ondes ne suffit pas. Encore faut-il qu'il y ait cohérence, ce que l'on réalisera en utilisant une seule source et en procédant soit par division d'amplitude (exemple du Michelson) soit par division du front d'onde (cas des fentes d'Young)…

Copyrighted material

Commentaire

Dans le cas où les deux ondes ont même polarisation ($\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ parallèles et de même sens), en posant :

$$\vec{\phi}_1 = I_1\vec{u}\ ,\ \vec{\phi}_2 = I_2\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{\phi} = I\vec{u}$$

l'expression trouvée plus haut peut s'écrire :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\theta}$$

qui est la formule habituelle des interférences où θ représente le déphasage entre les deux ondes.

302 Réflexion sur un plan métallique

Une onde plane progressive monochromatique (de pulsation ω) se réfléchit en incidence normale sur un plan métallique parfaitement conducteur. (On pourra admettre que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls au sein du métal.

1. Quels sont les champs réfléchis et les champs totaux ?

2. Que se passe-t-il dans le plan métalliques ?

3. L'onde est polarisée circulairement, calculer le vecteur de Poynting associé aux champs totaux.

1. Ce qu'il faut savoir

• Réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait : cas de l'incidence normale.

• Polarisation de l'onde – Vecteur de Poynting.

2. Ce qu'il faut comprendre

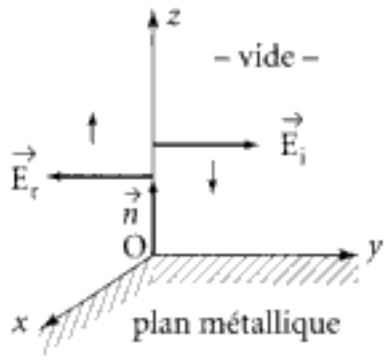
On écrira que l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie se propageant en sens inverse. Les relations de passage imposent un champ électrique total nul à la surface du métal (le champ est ici tangentiel). La superposition des deux ondes constitue une onde stationnaire.

3. Solution

1. Nous utiliserons ici la notation complexe en $e^{-i\omega t}$ En notant $\vec{k} = k\vec{n}$, ($k = \dfrac{\omega}{c} > 0$), le vecteur d'onde incident est $-k\vec{n}$ et les champs incidents peuvent s'écrire :

$$\underline{\vec{E}_1} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{i(-kz-\omega t)}$$

Copyrighted material



$\underline{\vec{E}_0}$ étant le vecteur amplitude complexe, orthogonal au vecteur unitaire $(-\vec{n})$ associé au sens de propagation, et :

$$\underline{\vec{B}_i} = \left(\frac{-\vec{n}}{c}\right) \wedge \underline{\vec{E}_0}\, e^{i(-kz-\omega t)}.$$

Les champs réels sont les parties réelles de $\underline{\vec{E}_i}$ et $\underline{\vec{B}_i}$.

Le champ électrique total doit être nul juste au-dessus du plan xOy, pour $z = 0$.

On doit avoir en effet la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

Or en $z = 0^+$, le champ $\underline{\vec{E}_T} = \underline{\vec{E}_i} + \underline{\vec{E}_r}$ est parallèle au plan, et dans le métal parfait $\vec{E} = \vec{0}$, ce qui impose $\underline{\vec{E}_T}(z = 0^+) = \vec{0}$, et donc :

$$\underline{\vec{E}_r} = -\underline{\vec{E}_0}\, e^{i(-\omega t)}$$

l'onde réfléchie se propageant dans le sens des $z > 0$, on doit avoir :

$$\underline{\vec{E}_r} = -\underline{\vec{E}_0} e^{i(kz-\omega t)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}_r} = \frac{\vec{n}}{c} \wedge \left(-\underline{\vec{E}_0}\, e^{i(kz-\omega t)}\right).$$

Les champs totaux $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{-i\omega t}(e^{-ikz} - e^{ikz}) \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{-i\omega t}(-2i\sin kz)} \quad (1)$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{n} \wedge \underline{\vec{E}_0}}{c}\, e^{-i\omega t}(-e^{-ikz} - e^{ikz}) \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{n} \wedge \underline{\vec{E}_0}}{c}\, e^{-i\omega t}(-2\cos kz)} \quad (2)$$

2. Quand l'onde incidente arrive sur le métal, elle provoque « en surface » la mise en vibration des électrons de conduction. De ces mouvements naissent une onde se propageant dans le sens des $z > 0$ (et qui constitue l'onde réfléchie) et une onde « symétrique » se propageant vers les $z < 0$ (onde qui compense exactement l'onde incidente).

Quand on fait tendre z vers zéro, $\underline{\vec{E}}$ devient nul et $\underline{\vec{B}}$ tend vers :

$$\underline{\vec{B}}_{z=0} = -\vec{n} \wedge \frac{2\underline{\vec{E}_0}}{c}\, e^{-i\omega t} \quad (cf.\ (2))$$

Le champ magnétique étant nul dès que z est négatif (on est dans le métal parfaitement conducteur), il y a nécessairement une nappe de courant dans le plan xOy, de vecteur densité surfacique $\underline{\vec{j}_s}$, pour assurer la continuité :

$$\underline{\vec{B}}_{z=0} - \vec{0} = \mu_0\left(\underline{\vec{j}_s} \wedge \vec{n}\right) \quad \text{(relation de passage).}$$

Copyrighted material

En comparant les deux écritures de $\underline{\vec{B}}_{z=0}$, et en remarquant que $\underline{\vec{E}_0}$ et $\underline{\vec{J}_s}$ sont des vecteurs du plan xOy, on conclut que :

$$\boxed{\underline{\vec{J}_s} = \frac{2\underline{\vec{E}_0}}{\mu_0 c} e^{-i\omega t}}$$

D'autre part, le champ $\vec{E}$ étant nul dans le conducteur et parallèle au plan pour $z > 0$, il n'y a pas de charges de surface :

$$(\underline{\vec{E}}(z = 0^-) - \underline{\vec{E}}(z = 0^+)) \cdot \vec{n} = 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \text{ d'où } \underline{\sigma} = 0.$$

3. L'amplitude complexe d'une onde, progressive, monochromatique, polarisée circulairement est de la forme (en coordonnées cartésiennes) :

$$\underline{\vec{E}_0} = \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \pm i\alpha \\ 0 \end{array} \right.$$

Le signe + ou – est à choisir suivant le sens de polarisation : droite ou gauche, nous prendrons le signe –, α peut être pris réel, ce que nous ferons.

Commentaire

Posons $\alpha = |\alpha| e^{-i\varphi}$, le champ électrique de l'onde incidente s'écrit alors en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}_i} = \left| \begin{array}{l} |\alpha| e^{-i(\omega t + kz + \varphi)} \\ \pm i|\alpha| e^{-i(\omega t + kz + \varphi)} \\ 0 \end{array} \right.$$

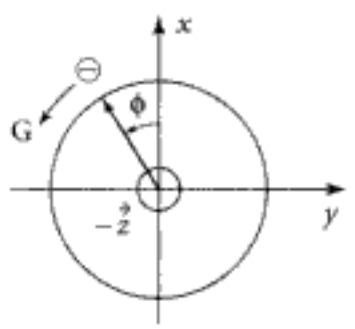
Soit un champ électrique réel $\vec{E}_i = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}_i}\right)$:

$$\vec{E}_i = \left| \begin{array}{l} |\alpha| \cos(\omega t + kz + \varphi) \\ \pm |\alpha| \sin(\omega t + kz + \varphi) \\ 0 \end{array} \right.$$

⊖ : OPPM polarisée circulaire gauche,

⊕ : OPPM polarisée circulaire droite.

Prendre $\varphi = 0$ revient à choisir convenablement l'origine des temps.



$\phi = \omega t + \psi(z)$
où $\psi(z) = kz + \varphi$

D'où un champ électrique réfléchi :

$$\underline{\vec{E}_r} = \left| \begin{array}{l} -\alpha e^{-i(\omega t - kz)} \\ +\alpha i e^{-i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \left| \begin{array}{l} -\alpha \cos(\omega t - kz) \\ \oplus\ \alpha \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{array} \right.$$

Copyrighted material

Hidden page

303 Onde guidée

On étudie une onde électromagnétique se propageant dans le vide, parallèlement à Ox, entre les plans $(z = 0)$ et $(z = a)$, et dont le champ électrique est de la forme

$\vec{E} = E\vec{u_y}$ avec $E = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(kx - \omega t)$.

On considérera que k est un réel positif.

1. Calculer k en fonction de ω. Calculer la vitesse de phase de l'onde.

2. On superpose deux ondes du type précédent, de même amplitude, de pulsations voisines $(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})$ et $(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})$, de vecteurs d'onde $(k - \frac{\Delta k}{2})$ et $(k + \frac{\Delta k}{2})$, $(\Delta\omega \ll \omega)$.

Calculer l'onde résultante et la vitesse à laquelle se propage, suivant Ox, l'enveloppe du signal. Commenter.

3. a. Calculer le champ magnétique, en ne conservant que la partie variable dans le temps.

b. Calculer l'énergie moyenne contenue dans le parallélépipède de base l'unité de surface dans le plan Oxy et de hauteur a selon Oz.

Calculer le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface perpendiculaire à Ox de largeur l'unité selon Oy et de hauteur a. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie. Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Équation de propagation de d'Alembert.
- Propagation avec dispersion.
- Vitesse de phase – Vitesse de groupe.
- Énergie électromagnétique – Vecteur de Poynting.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'onde proposée doit vérifier l'équation de propagation.

2. La relation de dispersion liant k à ω n'est pas linéaire, et deux ondes de fréquences différentes présenteront des vitesses de phase distinctes. Pour $\Delta\omega$ suffisamment petit le signal obtenu par superposition des deux ondes est quasi-sinusoïdal : son amplitude, et donc l'énergie associée, se propage à une vitesse appelée vitesse de groupe (c'est celle du « paquet d'onde »).

3. Si l'on peut associer une vitesse à la propagation de l'énergie elle sera définie comme le rapport d'un flux moyen du vecteur de Poynting à une énergie électromagnétique moyenne.

Copyrighted material

3. Solution

1. Le champ électrique doit vérifier l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

équation dont seule la projection sur Oy nous intéresse :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

laquelle s'écrit aussi : $E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(kx - \omega t)\left[-k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] = 0.$

Nous trouvons la relation cherchée en k et ω :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Pour que cette onde progressive existe, il faut que $\omega > \frac{\pi c}{a}$. On a alors (onde se propageant dans le sens des x positifs) :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}\, x - \omega t\right]\vec{u}_y.$$

Commentaire

- Un tel champ $\vec{E} = E(x, z, t)\,\vec{u}_y$ est bien à divergence nulle puisqu'il est porté par $\vec{u}_y$ et qu'il ne dépend pas de la variable d'espace y.
- D'autre part, il s'annule en $z = 0$ et $z = a$ ce qui assure la continuité de E_{tg} à la traversée des plans $z = 0$ et $z = a$ (« plans ») parfaitement conducteurs).

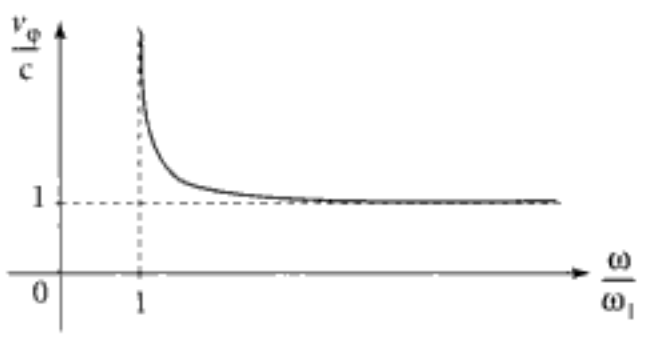
La phase de cette onde est définie par $\varphi = kx - \omega t$. En deux points distants de dx, la phase prend la même valeur pour un intervalle de temps dt tel que :

$$d\phi = k\,dx - \omega t = 0 \quad \text{d'où} \quad v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

La vitesse de phase de l'onde vaut donc :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$$

$\left(\omega_1 = \frac{\pi c}{a}\right)$.



Cette vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui n'est pas contradictoire puisqu'elle ne peut pas être ici associée à la vitesse de propagation de l'énergie.

Copyrighted material

2. Le champ total vaut :

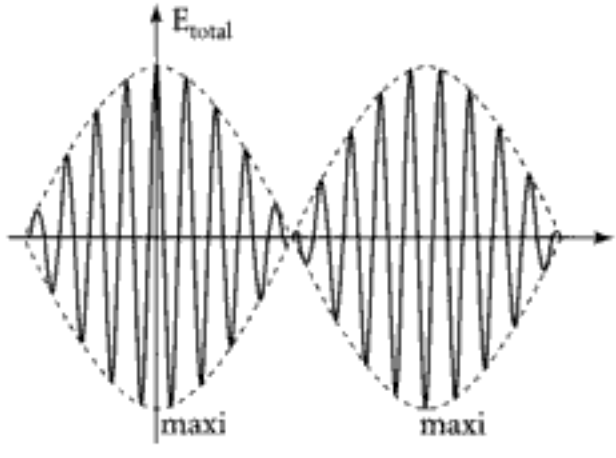
$$E_{total} = \left(E_0 \sin \pi \frac{z}{a}\right)\left[\cos\left([kx - \omega t] - \frac{[\Delta k\, x - \Delta\omega\, t]}{2}\right) + \cos\left([kx - \omega t] + \frac{[\Delta k\, x - \Delta\omega\, t]}{2}\right)\right].$$

Expression de la forme $\cos(a - b) + \cos(a + b)$, qui est égale à $2\cos a \cdot \cos b$.

d'où $$\boxed{\overrightarrow{E_{total}} = 2E_0 \cdot \sin\left(\pi \frac{z}{a}\right) \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \cos\frac{(\Delta k x - \Delta\omega t)}{2} \vec{u}_y}$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi c}{\omega a}\right)^2}$ et $\Delta k = \left(\dfrac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \dfrac{\Delta\omega}{c}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$.

Le dessin de E_{total} pour $t = 0$ a l'allure ci-contre, il s'agit d'un phénomène de battements.



L'enveloppe du signal étant proportionnelle à :

$$\cos\left[\frac{(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)}{2}\right]$$

la vitesse à laquelle elle se propage est :

$$\boxed{v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}} \; (\omega > \omega_1)$$

v_g est la vitesse à laquelle se propage un paquet de signal, on la nomme vitesse de groupe, elle n'est pas nécessairement égale à la vitesse de phase qui est la vitesse à laquelle se propagent, par exemple, les points où le signal est nul. La relation $v_\varphi v_g = c^2$ provient de la forme prise ici par la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} + \text{cte}$. En effet en différentiant cette équation nous obtenons :

$$k\,dk = \frac{1}{c^2}\omega\, d\omega.$$

D'où $c^2 = \dfrac{\omega}{k}\dfrac{d\omega}{dk} = v_\varphi \cdot v_g$. $\left(v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}\right)$.

3. a. Le champ $\vec{B}$ peut s'obtenir à partir de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

D'où : $$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & E \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial z} = E_0 \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \\ -\dfrac{\partial E}{\partial x} = -E_0 k \sin\left(\dfrac{\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

Copyrighted material

Intégrons les trois équations précédentes en ne conservant que la partie variable avec le temps :

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \dfrac{\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\dfrac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \\ 0 \\ \dfrac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\dfrac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

Remarquons que l'onde étudiée est progressive, monochromatique mais non plane (à x fixé les champs dépendent de z).

b. ■ la densité volumique d'énergie $u_v(x, y, z, t)$ vaut :

$$u_v = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2\right) \quad (\text{car } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1).$$

Soit avec les valeurs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

$$u_v = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\left\{ \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin^2(\omega t - kx) + \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \right\}.$$

La valeur moyenne dans le temps $\langle u_v \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_v(t)\,dt$ s'obtient aisément en remarquant que :

$$\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$$

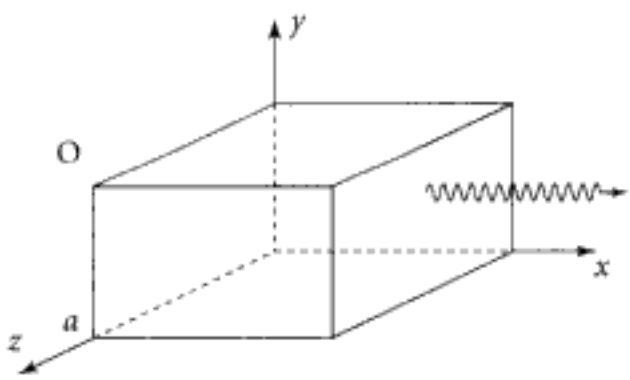
d'où :

$$\langle u_v \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2}\left[\left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right].$$

L'énergie moyenne contenue dans le parallélépipède (de hauteur a selon z et de base $\delta\Sigma = 1$) est donnée par :

$$\langle U \rangle = \int_0^a \langle u_v \rangle \, dz \, \delta\Sigma$$

$$\langle U \rangle = \int_0^a \langle u_v \rangle \, dz.$$



Or $\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) dz = \int_0^a \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{a}\right) dz = \frac{a}{2}$.

Copyrighted material

Hidden page

$\langle\varphi\rangle\,\mathrm{d}t = \langle U\rangle \cdot [V_e\,\mathrm{d}t\,\delta y]$ avec $\delta y = 1$.

(En effet, $\langle U\rangle$ est l'énergie moyenne associée au volume $\delta y = 1$, $\Delta z = a$ et $\delta x = 1$).
Soit :

$$V_e = \frac{\langle\varphi\rangle}{\langle U\rangle} \quad \text{et} \quad \boxed{V_e = \frac{kc^2}{\omega}}$$

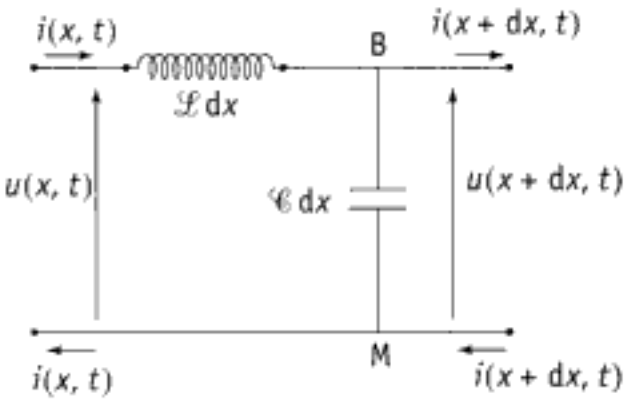
Or $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}$ et $\boxed{V_e = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$

La vitesse de propagation de l'énergie s'identifie ici à la vitesse de groupe.

304 Ligne sans pertes

Un câble coaxial sans pertes peut être assimilé à une succession de quadripôles élémentaires, chacun correspondant à la partie du câble comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$. $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$ sont les auto-inductance et capacité linéique du câble. On notera :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}} \quad \text{et} \quad R_0 = \sqrt{\frac{\mathscr{L}}{\mathscr{C}}}.$$



1. Expliciter le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions en $u(x, t)$ et $i(x, t)$.

Montrer que $u(x, t)$ peut se mettre sous la forme :

$$u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct)$$

pendant que l'intensité $i(x, t)$ peut s'exprimer en fonction de u_+, u_- et R_0.

2. le câble coaxial envisagé s'étend de $x = 0$ à $x = l$. L'extrémité $x = l$ est libre, tandis que l'extrémité $x = 0$ est reliée à un générateur de tension continue V_0. Une fois l'équilibre atteint, calculer u_+ et u_-.

3. On débranche le générateur de tension puis, à l'instant $t = 0$, on ferme l'extrémité $x = l$ sur une résistance de valeur R_0 (pour $t > 0$, on a : $u(l, t) = R_0 i(l, t)$). Calculer l'intensité $i(l, t)$ qui traverse la résistance.

1. Ce qu'il faut savoir

- Inductance, capacité.
- Équation de propagation : solution sous la forme de la superposition de deux ondes planes progressives.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Écrire les lois de l'électrocinétique classique aux bornes de l'inductance et de la capacité.

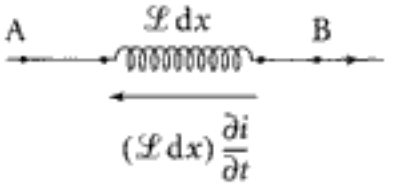
2. On exprime qu'en régime établi il n'y a pas de courant dans le câble ouvert en son extrémité. Il en résulte que $u(x, t)$ est une constante.

3. On écrit que le courant reste nul à l'entrée du câble (générateur débranché), et qu'en sortie $u(l, t) = R_0 i(l, t)$.

3. Solution

1. Aux bornes de l'auto-inductance, la loi d'Ohm s'écrit :

$$V_A - V_B = (\mathscr{L}\,dx)\frac{\partial i}{\partial t}$$

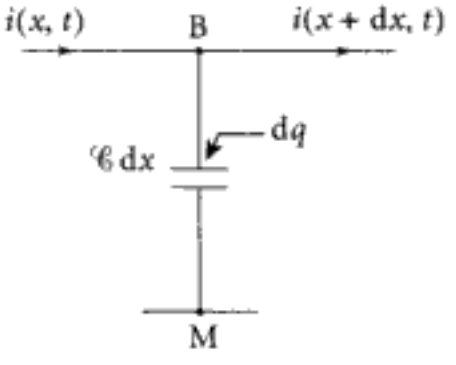


mais d'autre part :

$$V_A - V_B = u(x, t) - u(x + dx, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

on a donc $\boxed{\mathscr{L}\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}}$ **(1)**

Aux bornes du condensateur, par définition de la capacité, on a : $dq = (\mathscr{C}\,dx)u$ et l'intensité qui traverse la branche BM, de B vers M, vaut $\frac{dq}{dt}$, c'est-à-dire : $(\mathscr{C}\,dx)\frac{\partial u}{\partial t}$.



Cette intensité peut se calculer aussi an appliquant la loi des nœuds en B ; elle vaut :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = -\frac{\partial i}{\partial x}dx$$

on a donc $\boxed{\mathscr{C}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}}$ **(2)**

En éliminant i entre les équations **(1)** et **(2)** on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = -\mathscr{L}\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} = -\mathscr{L}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\mathscr{C}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \mathscr{L}\mathscr{C}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Il s'agit d'une équation de propagation du type :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}\mathscr{C}}}}$$

Donc la solution générale est de la forme :

$$u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct).$$

$u(x, t)$ est une solution du type onde plane qui se décompose en la somme d'une onde plane progressive $u_+(x - ct)$ et d'une onde plane régressive $u_-(x + ct)$. La grandeur c

Copyrighted material

apparaît comme la célérité associée aux deux ondes précédentes : c'est ici une constante, le système proposé est de ce fait non dispersif.

u_+ et u_- sont deux fonctions d'une variable dont la forme dépend à la fois des conditions initiales et des conditions aux limites.

Pour obtenir i, reportons u dans **(1)** et **(2)** :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{L}}[u'_+(x-ct) + u'_-(x+ct)]$$

(u'_+ et u'_- désignent les dérivées respectivement par rapport aux variables $x-ct$ et $x+ct$)

et en intégrant :

$$i(x,t) = \frac{1}{c\mathcal{L}}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)] + f(x)$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\mathcal{C}[-c\,u'_+(x-ct) + cu'_-(x+ct)]$$

et en intégrant :

$$i(x,t) = c\mathcal{C}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)] + g(t).$$

Si l'on remarque que $\frac{1}{c\mathcal{L}} = c\mathcal{C} = \frac{1}{R_0}$, on s'aperçoit que $f(x) = g(t)$, ces deux fonctions sont constantes, on peut les prendre nulle sans nuire à la généralité de l'exercice. on obtient alors :

$$\boxed{i(x,t) = \frac{1}{R_0}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)]}$$

2. Une fois l'équilibre atteint, plus aucun courant ne circule et la différence de potentiel entre les deux armatures est la même partout :

$$\left| \begin{array}{l} V_0 = u_+(x-ct) + u_-(x+ct) \\ 0 = \frac{1}{R_0}[u_+(x-ct) - u_-(x+ct)] \end{array} \right. \quad (3)$$

Ces deux équations sont valables pour $0 \leqslant x \leqslant l$ quel que soit t :

$$\boxed{u_+(\alpha) = \frac{V_0}{2}, \; u_-(\beta) = \frac{V_0}{2}} \quad \text{(en notant } \alpha = x-ct \text{ et } \beta = x+ct\text{)}$$

3. Lorsqu'on débranche le générateur, il ne se passe rien, le câble reste chargé, les équations (3) restent donc valables tant que l'on ne branche pas la résistance R_0, c'est-à-dire pour $0 \leqslant x \leqslant l$ et $t < 0$, soit encore $\alpha > 0$ et $\beta < l$:

$$\left| \begin{array}{l} u_+(\alpha) = \frac{V_0}{2} \text{ pour } \alpha > 0 \\ u_-(\beta) = \frac{V_0}{2} \text{ pour } \beta < l. \end{array} \right.$$

Copyrighted material

Hidden page

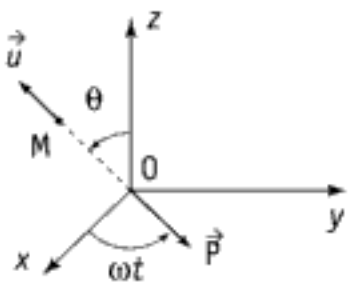
305 Dipôle tournant

Un dipôle « électrostatique » variable $\vec{p}(t)$ situé en O rayonne, à grande distance r, un champ électromagnétique :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}(\ddot{\vec{p}}^{\,*} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \qquad (\vec{r} = r\vec{u})$$

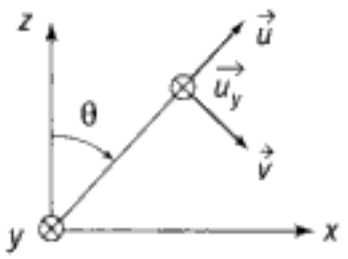
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi rc}(\ddot{\vec{p}}^{\,*} \wedge \vec{u})$$

où : $\ddot{\vec{p}}^{\,*} = \dfrac{d^2\vec{p}}{dt^2}(t^*) = \dfrac{d^2\vec{p}}{dt^2}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$.



On s'intéresse à un dipôle situé en O, tournant dans le plan Oxy :

$$p_x = p_0 \cos\omega t, \quad p_y = p_0 \sin\omega t, \quad p_z = 0.$$



1. Calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ rayonnés en un point M du plan Oxz, repéré par r et θ, en explicitant leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u_y})$.

Quelle remarque peut-on faire ?

2. Préciser la polarisation du champ rayonné pour θ variant de 0 à π.

3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par le dipôle ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Rayonnement émis par un dipôle oscillant.
- Polarisation – Puissance rayonnée.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. L'onde rayonnée doit avoir **localement** la structure vectorielle d'une onde plane progressive harmonique.

3. La puissance **moyenne** traversant une surface élémentaire $\delta\Sigma$ centrée en un point $M(r, \theta)$ du plan Oxz garde la même valeur si l'on fait tourner $\overrightarrow{OM}$ est donc $\delta\Sigma$ autour de Oz.

3. Solution

1. Les expressions données dans le texte des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ correspondent aux champs rayonnés dans l'approximation dipolaire électrique. Cette approximation doit vérifier la double inégalité $a \ll \lambda \ll r$ (a est une grandeur associée à l'extension du système de charges, et $\lambda \sim cT$ où T est temps caractéristique lié aux évolutions temporelles du système).

Copyrighted material

On a donc $\vec{p}^{\,*} = p_0[\vec{u_x}\cos\omega t^* + \vec{u_y}\sin\omega t^*]$ avec $\vec{u_x} = \vec{u}\sin\theta + \vec{v}\cos\theta$.

La dérivée seconde s'écrit :

$$\ddot{\vec{p}}^{\,*} = -p_0\omega^2[\vec{u_x}\cos\omega t^* + \vec{u_y}\sin\omega t^*]$$

soit encore $\ddot{\vec{p}}^{\,*} = -\omega^2 p_0[(\vec{u}\sin\theta + \vec{v}\cos\theta)\cos\omega t^* + \vec{u_y}\sin\omega t^*]$.

Il nous faut calculer les produits vectoriels :

$$\ddot{\vec{p}}^{\,*} \wedge \vec{u} = -\omega^2 p_0[-\vec{u_y}\cos\theta\cos\omega t^* + \vec{v}\sin\omega t^*]$$

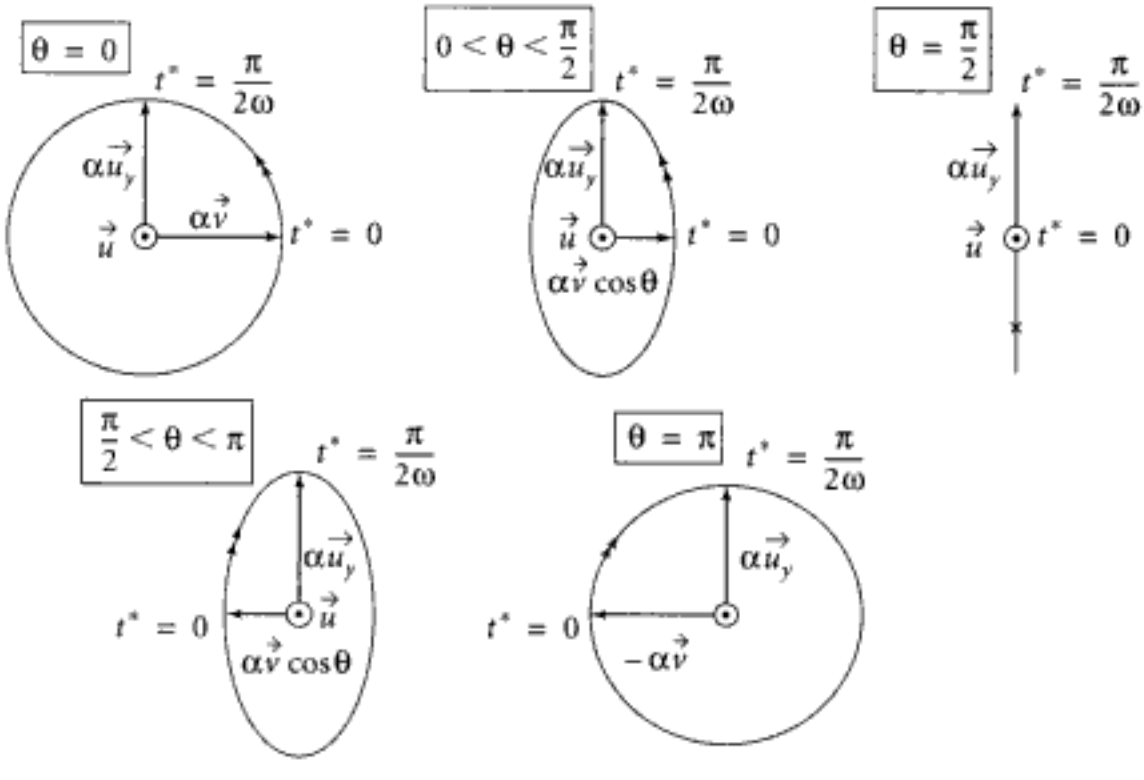
$$(\ddot{\vec{p}}^{\,*} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\omega^2 p_0[-\vec{v}\cos\theta\cos\omega t^* - \vec{u_y}\sin\omega t^*].$$

Ce qui, en définitive, donne :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi r}[\vec{v}\cos\theta\cos\omega t^* + \vec{u_y}\sin\omega t^*] \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi rc}[-\vec{v}\sin\omega t^* + \vec{u_y}\cos\theta\cos\omega t^*] \end{aligned}} \qquad (1)$$

Nous remarquons que les champs ont, en M, la structure vectorielle des champs d'une onde plane progressive monochromatique dont la pulsation est ω est le vecteur unitaire du sens de propagation est $\vec{u}$: $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$; la notion de polarisation évoquée à la question suivante prend donc tout sons sens.

2. Dessinons la courbe décrite par l'extrémité du vecteur champ électrique dans le plan $(\vec{v}, \vec{u_y})$ perpendiculaire à la direction de propagation (avec $\alpha = \dfrac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi r}$).



Copyrighted material

Les polarisations cherchées sont donc : $\begin{cases} \theta = 0 & \text{: circulaire gauche} \\ \theta < \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{: elliptique gauche} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \text{: rectiligne} \\ \theta = \pi & \text{: circulaire droite} \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi & \text{: elliptique droite} \end{cases}$

On peut remarquer que l'extrémité du vecteur champ électrique décrit la même courbe (à une homothétie près) et dans le même sens que le vecteur $\vec{p}$ vu en perspective depuis le point M.

3. Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en M, à l'instant t, vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c}\vec{u}.$$

Soit, en remplaçant $\vec{E}^2$ par sa valeur :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c}\frac{1}{r^2}(\cos^2\theta \cos^2\omega t^* + \sin^2\omega t^*)\vec{u}.$$

Sa valeur moyenne dans le temps est :

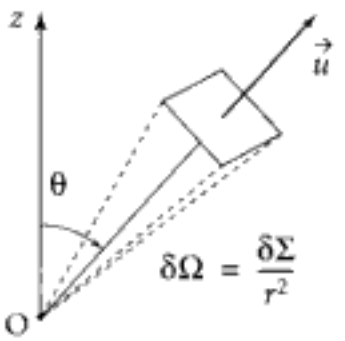
$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^2}\frac{p_0^2}{cr^2}[\cos^2\theta\langle\cos^2\omega t^*\rangle + \langle\sin^2\omega t^*\rangle]\vec{u}.$$

Soit : $$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c}\frac{1}{r^2}\frac{1}{2}[\cos^2\theta + 1]\vec{u}} \quad (2)$$

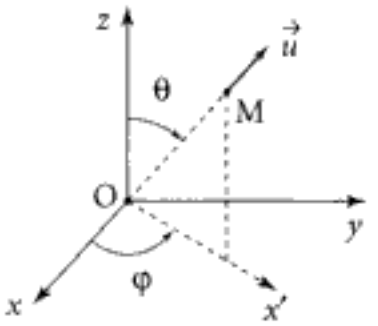
Calculons maintenant la puissance moyenne qui traverse un élément de surface $\delta\Sigma$ (orthogonal à $\vec{u}$) au voisinage de M :

$\delta(\mathcal{P}) = \langle\vec{\Pi}\rangle \cdot \langle\vec{u}\,\delta\Sigma\rangle$, soit :

$$\delta(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\frac{\delta\Sigma}{r^2}(\cos^2\theta + 1) \quad (3)$$



On aurait obtenu le même résultat pour un point M appartenant au plan $Ox'z$ (φ = cte) :
Il suffit alors de changer dans les calculs précédents ωt^* en $\omega t^* - \varphi$ ce qui ne modifie pas les résultats (2) et (3).



Copyrighted material

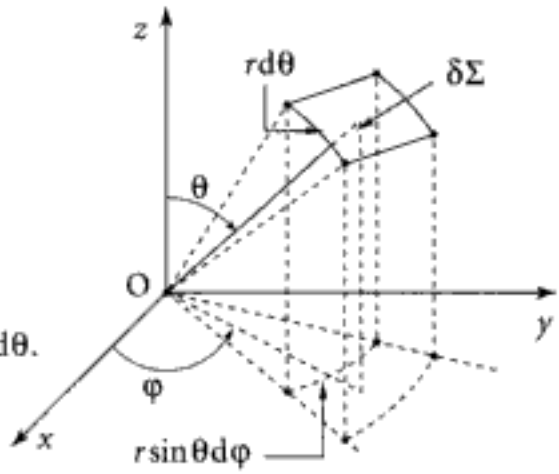
Or $\delta\Sigma = (r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)$

d'où

$$\delta\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}(1+\cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

La puissance moyenne qui traverse la sphère de rayon r centrée en O vaut :

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$



La double intégrale vaut :

$$2\pi\int(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}(-\cos\theta) = 2\pi\left[-\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{16\pi}{3}.$$

On trouve donc :

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\frac{16\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{6\pi c}}$$

On retrouve la proportionnalité à ω^4, bien connue… (*cf.* diffusion atomique, propriété valable tant que p_0 peut être considérée comme indépendante de ω, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_r$ où ω_r représente une pulsation caractéristique de résonance).

306 Onde dans un plasma idéal

Une onde plane progressive harmonique (champs en $\exp j(\omega t - kz)$ se propage selon Oz dans un plasma dilué idéal composé d'électrons et d'ions de charges $-e$ et $+e$ en densités volumiques égales à n_0. On fera l'approximation que seuls les électrons sont libres de se déplacer et on négligera les interactions entre les charges.

Le milieu est de plus soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B_0} = B_0\vec{u_x}$.

On étudie la propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation ω selon Oz.

On pose $\omega_p^2 = \dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$ et $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m}$

m désigne la masse d'un électron.

1. Établir des équations reliant les composantes complexes du vecteur densité volumique de courant $\vec{\underline{J}}(\underline{J_x}, \underline{J_y}, \underline{J_z})$ à celles $(\underline{E_x}, \underline{E_y}, \underline{E_z})$ du champ électrique $\vec{E}$:

a. en étudiant le mouvement des électrons ;

Copyrighted material

b. en exploitant les équations de Maxwell.

2. On envisage une OPPH polarisée rectilignement selon Ox. À quelle relation de dispersion correspond-t-elle ? Commenter le résultat obtenu.

3. Que dire d'une OPPH telle que $E_x = 0$? Étudier le cas particulier où $\omega = \omega_c$.

Solution

1. a. Un électron sera soumis à la force de Lorentz :

$\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge B_0\vec{u_x})$.

Point méthode

• On néglige la force magnétique (due au champ $\vec{B}$ de l'onde) devant la force électrique

$$\frac{\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|}{\left\|\vec{E}\right\|} \sim \frac{v}{v_\varphi} \ll 1 \quad (v_\varphi \equiv \text{vitesse de phase de l'onde}).$$

• On se place en régime sinusoïdal établi, toutes les grandeurs étant en $\exp j(\omega t - kz)$:

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} \exp j(\omega t - kz)$; $\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{J_0}} \exp j(\omega t - kz)$ (densité volumique de courant)...

• On fait une étude linéaire :

$$\vec{J} = \underbrace{n_0(e) \cdot \vec{0}}_{\text{ions}} + n(-e)\vec{v} \approx -n_0 e\,\vec{v} \rightarrow \underline{\vec{J}} = -n_0 e\,\underline{\vec{v}}.$$

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à l'électron donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge B_0\vec{u_x}) \rightarrow m\,j\omega\,\underline{\vec{v}} = -e\,\underline{\vec{E}} - e\vec{v} \wedge B_0\vec{u_x}$$

d'où $\underline{\vec{J}} = -j\dfrac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{\vec{E}} + j\dfrac{eB_0}{m}\underline{\vec{J}} \wedge \vec{u_x} \rightarrow \underline{J_x} = -j\dfrac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{E_x}$

soit encore avec $\omega_p^2 = \dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$

$$\boxed{\underline{J_x} = -j\frac{\omega_p^2}{\omega}\varepsilon_0\underline{E_x}} \quad (1)$$

$$\left|\begin{array}{l} \underline{J_y} = -j\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\underline{E_y} + j\dfrac{\omega_c}{\omega}\underline{J_z} \quad (2') \\[2ex] \underline{J_z} = -j\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}\underline{E_z} - j\dfrac{\omega_c}{\omega}\underline{J_y} \quad (3') \end{array}\right.$$

Soit encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{J}_y \cdot \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) &= -j\,\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}\left(\underline{E}_y + j\frac{\omega_c}{\omega}\underline{E}_z\right) \quad (2) \\ \underline{J}_z \cdot \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) &= -j\,\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}\left(\underline{E}_z - j\frac{\omega_c}{\omega}\underline{E}_y\right) \quad (3) \end{aligned}}$$

$\omega_p^2 = \dfrac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}$ représente la pulsation de plasma, et $\omega_e = \dfrac{eB_0}{m}$ est la pulsation cyclotronique.

b. Examinons maintenant les équations de Maxwell :

• L'équation de Maxwell-gauss s'écrit :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow -jk\,\underline{E}_z = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} \quad (\rho = \text{densité volumique de charges}).$$

Couplons cette équation à celle de conservation de la charge :

$$\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow j\omega\,\underline{\rho} + (-jk\,\underline{J}_z) = 0.$$

Soit en éliminant $\underline{\rho}$: $\boxed{\underline{J}_z = -j\omega\,\varepsilon_0\,\underline{E}_z}$ **(4)**

• L'équation de Maxwell-Faraday et celle de Maxwell-Ampère donnent :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{J}} + \frac{1}{c^2}\,j\,\omega\underline{\vec{E}}$$

Éliminons $\vec{B}$ entre ces deux dernières équations :

$$\mu_0\underline{\vec{J}} + \frac{1}{c^2}\,j\omega\underline{\vec{E}} = -j\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = -\frac{j}{\omega}\left\{\vec{k}(\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}) - k^2\underline{\vec{E}}\right\}$$

D'où $$\boxed{\underline{\vec{J}} = \frac{j}{\mu_0\omega}\left\{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} - k^2\underline{E}_z\,\vec{u}_z\right\}} \quad (5)$$

Commentaire

Nous pouvons remarquer que **(4)** et **(5)** sont compatibles. Ceci n'est guère étonnant puisque :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow \operatorname{div}\vec{J} + \operatorname{div}\frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t} = 0 \rightarrow \operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial(\operatorname{div}\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t} = 0$$

et avec $\operatorname{div}\varepsilon_0\vec{E} = \rho \rightarrow \operatorname{div}\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$

Copyrighted material

Hidden page

Une telle onde n'existe (c'est-à-dire peut se propager dans le milieu que si $\omega_c > \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$).

Le champ électrique de cette onde est « polarisé » circulairement dans le plan yOz perpendiculairement à $\vec{B_0} = B_0 \vec{u_x}$.

Commentaire

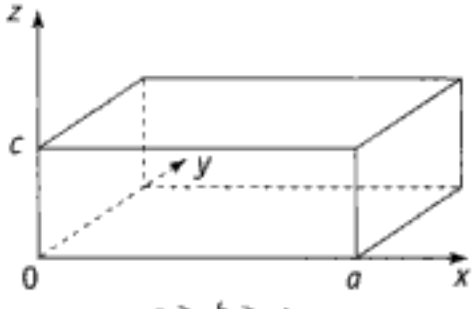
En résumé cette étude a permis de mettre en évidence la possibilité de propager selon z (direction perpendiculaire à $\vec{B_0}$) deux types d'OPPH :
– une OPPH transverse électrique polarisée selon Ox (si $\omega > \omega_p$) ;
– une OPPH non transverse électrique.
Ces deux ondes ne correspondent pas à la même relation de dispersion et ne se propagent donc pas à la même vitesse de phase…

307 Champ électromagnétique dans une cavité parallélépipédique

Une cavité a la forme d'un parallélépipède rectangle :

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant c.$$

Elle correspond à un domaine D assimilable au vide limité pour des parois parfaitement conductrices (on supposera que le champ électromagnétique est nul dans ces parois).



$a > b > c$

On recherche des solutions, au champ électromagnétique dans D, à variations sinusoïdales dans le temps (pulsation ω). On propose pour le champ électrique, et en utilisant la notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{E}_x = A\cos(\alpha x + \varphi_x)\sin(\beta y + \varphi_y)\sin(\gamma z + \varphi_z)\exp j\omega t \\ \underline{E}_y = B\sin(\alpha x + \varphi_x)\cos(\beta y + \varphi_y)\sin(\gamma z + \varphi_z)\exp j\omega t \\ \underline{E}_z = C\sin(\alpha x + \varphi_x)\sin(\beta y + \varphi_y)\cos(\gamma z + \varphi_z)\exp j\omega t. \end{cases}$$

1. Quelles conditions faut-il imposer aux paramètres (A, B, C), (α, β, γ) et $(\varphi_z, \varphi_y, \varphi_x)$ pour que la solution envisagée soit possible. On devra introduire trois entiers positifs (n, m, p), l'un d'entre eux pouvant être nul.

2. En déduire les valeurs des fréquences permises du champ électromagnétique dans la cavité. Déterminer la plus petite d'entre elles (on rappelle que l'on a $a > b > c$).

Copyrighted material

3. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$. Commenter

4. *Point de vue énergétique.*

On suppose ici que $n \cdot m \cdot p \neq 0$

a. Exprimer l'énergie électrique U_e contenue dans D en fonction notamment de ε_0, A, B, C et du volume $\mathcal{V}$ du domaine D.

On donne : $\frac{1}{a}\int_0^a \cos^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{a}\int_0^a \sin^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}$ (n entier $\neq 0$)

b. Donner de même l'expression de l'énergie magnétique U_m contenue dans D. On simplifiera le résultat en utilisant ceux obtenues au 1).

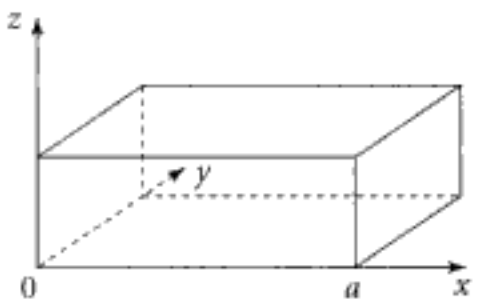
c. Que dire de l'énergie électromagnétique totale associée à la solution proposée ?

Solution

1. ■ Le champ électromagnétique doit vérifier – dans la cavité – l'équation de propagation (équation de d'alembert),

soit pour $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$



(c_0 = célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$).

Et pour chacune des composantes :

$$\Delta E_x = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}; \quad \Delta E_y = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \Delta E_z = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (1)$$

soit en notation complexe (champ en $\exp(j\omega t)$) :

$$\Delta \underline{E}_x + \frac{\omega^2}{c_0^2}\underline{E}_x = 0; \quad \Delta \underline{E}_y + \frac{\omega^2}{c_0^2}\underline{E}_y = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \underline{E}_z + \frac{\omega^2}{c_0^2}\underline{E}_z = 0 \quad (2)$$

L'énoncé propose pour le champ électrique :

$$\left\{\begin{aligned} \underline{E}_x &= A\cos(\alpha x + \varphi_x)\sin(\beta y + \varphi_y)\sin(\gamma z + \varphi_z)\exp j\omega t \\ \underline{E}_y &= B\sin(\alpha x + \varphi_x)\cos(\beta y + \varphi_y)\sin(\gamma z + \varphi_z)\exp j\omega t \\ \underline{E}_z &= C\sin(\alpha x + \varphi_x)\sin(\beta y + \varphi_y)\cos(\gamma z + \varphi_z)\exp j\omega t \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ce champ reporté dans (2) donne :

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}} \quad (4)$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Partie 4

Optique ondulatoire

Hidden page

chapitre

1

Interférences

Copyrighted material

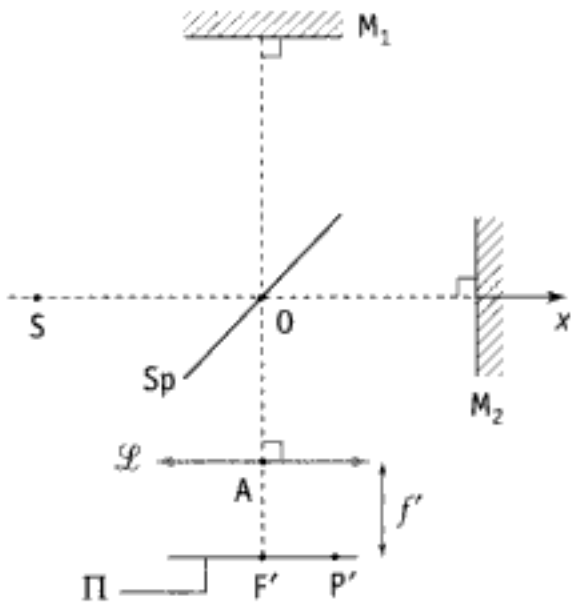
101 Interféromètre de Michelson

Un interféromètre de Michelson est réglé dans la configuration « lame à faces parallèles ».

On suppose qu'il est idéalement compensé, et qu'il peut donc être modélisé par deux miroirs parfaits M_1 et M_2 associés à une séparatrice Sp ((d'épaisseur négligeable et semi-réfléchissante), sans compensatrice).

Il est éclairé par une lampe au Sodium qui présente, dans le jaune, un doublet de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 assimilées à des raies monochromatiques.

On déplace le miroir M_2 selon Ox, M_2 restant perpendiculaire à M_1.



L'observation s'effectue dans le plan focal Π d'une lentille convergente $\mathscr{L}$ de foyer F′ et de distance focale f'.

1. Isolant la raie λ_1, décrire la figure d'interférences obtenue dans le plan Π. Dépend-elle de ce que la source est ponctuelle ou étendue ?

2. a. On prend en compte les deux raies λ_1 et λ_2 en les supposant de même intensité I_0. Montrer simplement que les interférences « disparaissent », au voisinage de F′, pour certaines valeurs x_n de x que l'on déterminera (x position du miroir M_1 comptée à partir du contact optique).

b. Comment est modifié le résultat précédent si les deux raies ont des intensités différentes ?

3. a. Revenant aux raies λ_1 et λ_2 de même intensité I_0, calculer l'intensité $I(\delta)$ en un point P′ associé à une différence de marche δ. Montrer que l'on peut définir un terme de contraste $C_1(\delta) = |\cos(\pi\,\Delta\sigma\,\delta)|$ où $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}$ $(\lambda_2 > \lambda_1)$. On posera $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Retrouver les résultats du **2. a.**

b. Reprendre la question précédente dans le cas où $I_{0_1} \neq I_{0_2}$.

4. Des mesures permettent de relever une suite de valeurs $x(1)\ldots\ x(7)$ pour lesquelles on observe effectivement la disparition des anneaux au voisinage de F′.

$x(1) = 32{,}96$; $x(2) = 33{,}25$; $x(3) = 33{,}54$; $x(4) = 33{,}84$

$x(5) = 34{,}13$; $x(6) = 34{,}42$; $x(7) = 34{,}71$. (x en mm)

En déduire l'écart $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ entre les deux raies, ainsi que la valeur de λ_2 sachant que $\lambda_1 = 589{,}0$ nm.

La précision sur les « pointés » des $x(i)$ est de l'ordre de $\pm\,0{,}5 \cdot 10^{-2}$ mm.

Copyrighted material

1. Ce qu'il faut savoir

- L'interféromètre de Michelson ; configuration lame à faces parallèles.
- Franges d'égale inclinaison.
- Sources incohérentes.

2. Ce qu'il faut comprendre

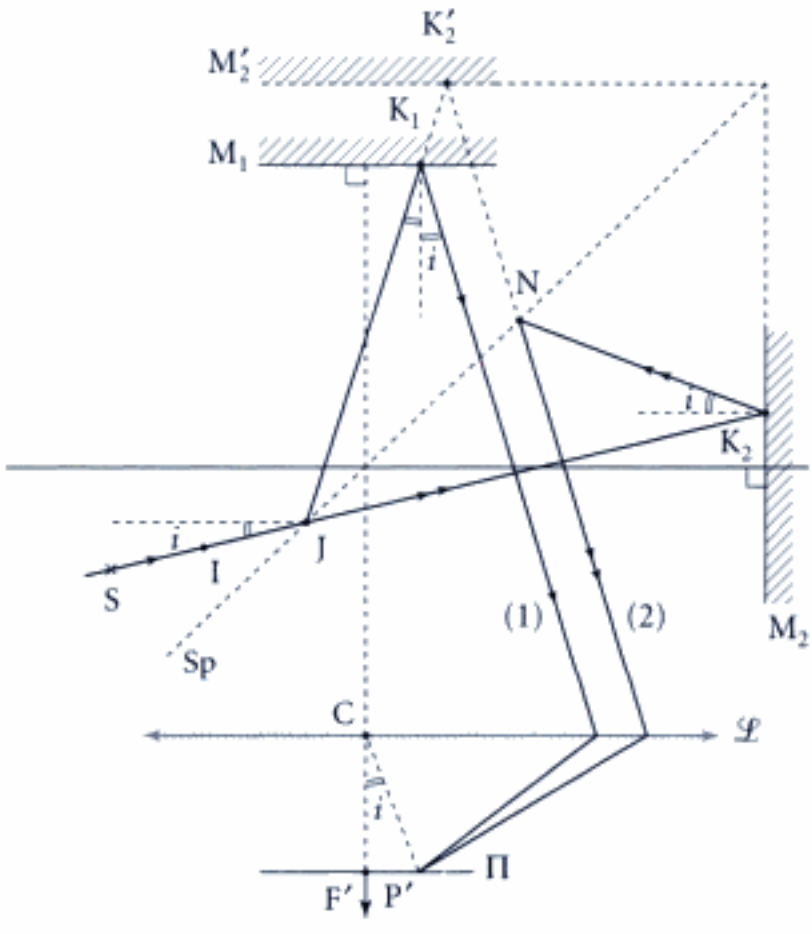
1. L'observation s'effectue à l'infini. Les rayons qui viennent interférer en P′ après traversée de la lentille $\mathscr{L}$ arrivent parallèlement sur $\mathscr{L}$ (avec une direction AP′).

2. Les deux raies λ_1 et λ_2 sont incohérentes entre elles. On aura donc $I(P') = I_1(P') + I_2(P')$.

On observe la superposition des systèmes d'anneaux correspondant à chaque longueur d'onde λ_1 et λ_2. Il y a brouillage lorsque les différences de phase $\Delta\phi_1$ et $\Delta\phi_2$ associées à λ_1 et λ_2 diffèrent d'un multiple entier impair de fois π (opposition de phase).

3. Solution

1. ■



Un rayon tel que IJ est décomposé en deux rayons JK_1 et JK_2 au niveau de la séparatrice (**division d'amplitude**).

Copyrighted material

Le rayon (**1**) est obtenu à partir du rayon JK_1 par réflexion sur le miroir M_1.

Le rayon (**2**) résulte des réflexions successives du rayon JK_2 sur le miroir M_2 et sur la séparatrice Sp.

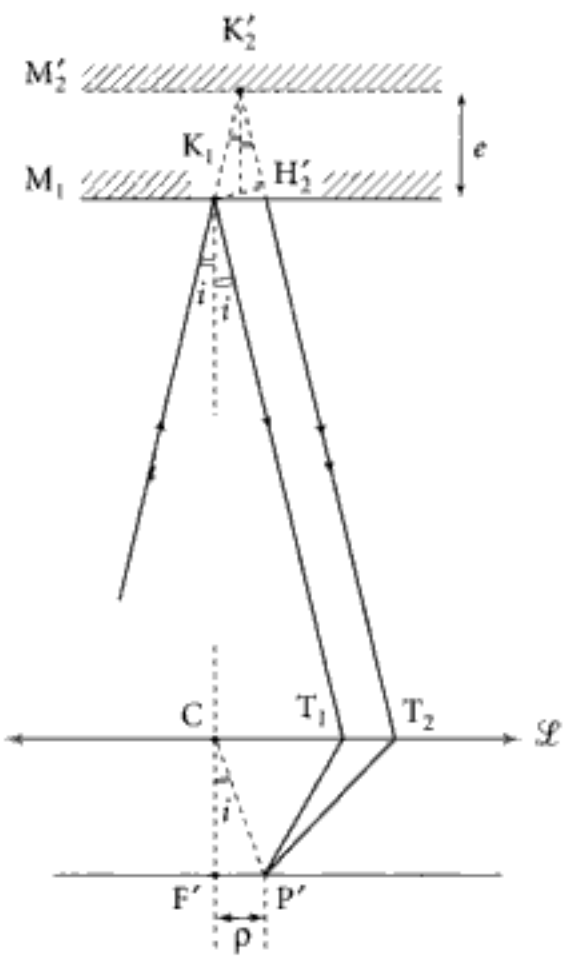
Ces deux rayons viennent interférer au point P′ du plan focal Π de la lentille convergente $\mathscr{L}$.

On peut remarquer que le chemin JK_2N est identique au chemin $JK_2'N$ obtenu par symétrie par rapport à la séparatrice Sp (inclinée à 45°). On peut donc raisonner sur les miroirs M_1 (réel) et M_2' (virtuel ; image de M_2 par rapport à Sp). Les deux miroirs M_1 et M_2' sont parallèles (réglages de l'appareil dans la configuration lame à faces parallèles).

■ Le rayon SJ provient du point source S lorsque celle-ci est réductible à une source « ponctuelle » : dans ce cas les interférences sont non localisées, et on a rejeté ici le plan d'observation à l'infini.

Pour une source spatialement étendue, ce rayon est issu d'un point S de la source ; l'observation à l'infini correspond au lieu de contraste maximal (interférences localisées dans ce cas). Un autre point S′ de la source pourra donner un rayon incident parallèle à SJ venant renforcer l'intensité lumineuse en P′ (S et S′ incohérents → $I(P') = I_S(P') + I_{S'}(P')$).

■ En un point P′ du plan d'observation caractérisé par l'angle i $[(\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{CP'}) = i]$ la différence de marche $\delta(P')$ est une fonction de i et de e : distance entre les miroirs M_1 et M_2'.



D'après les propriétés des lentilles on peut écrire l'égalité des chemins optiques $[K_1T_1P']$ et $[H_2'T_2P']$.

Copyrighted material

Hidden page

Le contact optique correspond à $e = 0$. Prenons l'origine des x pour cette configuration. Les positions x_n $(n > 0)$ associées à ces brouillages s'identifient alors aux e_n, d'où :

$$\boxed{x_n = \left(\frac{2n+1}{4}\right)\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}} \quad (1) \quad \{n = 0, 1 \ldots\}$$

en posant $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 > 0$ et $\lambda_0^2 = \lambda_1\lambda_2$ ($\lambda_0 \approx \lambda_1$ ou λ_2 car $\Delta\lambda \ll \lambda_1$).

b. Les deux raies voisines possèdent maintenant des intensités différentes I_{0_1} et I_{0_2}. D'où :

$$I_1 = \frac{1}{2}I_{0_1}(1 + \cos\Delta\phi_1) \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2}I_{0_2}(1 + \cos\Delta\phi_2).$$

Dans le cas où $I_{0_2} = I_{0_1}$, la condition de brouillage ($\cos\Delta\phi_1 = -\cos\Delta\phi_2$) implique la disparition des franges, ce qui correspond à un contraste nul. Pour $I_{0_2} \neq I_{0_1}$, la même condition fixe le contraste minimal à une valeur non nulle $C_m = \left|\frac{I_{0_2} - I_{0_1}}{I_{0_2} + I_{0_1}}\right|$ (les franges peuvent ne plus disparaître pour I_{0_2} trop différent de I_{0_1}, bien évidemment…).

3. a. L'intensité au point P′ caractérisé par une différence de marche δ est donnée par (*cf.* question précédente) :

$$I(\delta) = I_1(\delta) + I_2(\delta)$$

avec $$I_1(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right)\right] \quad \text{et} \quad I_2(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\right].$$

D'où : $$I(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[2 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\right].$$

Soit encore : $$I(\delta) = I_0\left[1 + \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\right]$$

Posons $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ (nombres d'onde)

Puis $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ et $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$.

Il vient :

$$I(\delta) = I_0[1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta)\cos(2\pi\sigma_0\delta)].$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{I(\delta) = I_0[1 + V(\delta)\cos(2\pi\sigma_0\delta)]} \quad \text{où} \quad \boxed{V(\delta) = \cos(\pi\Delta\sigma\delta).}$$

Commentaire

Pour λ_1 et λ_2 tendant vers λ_0 $(\Delta\sigma = 0)$ le terme de visibilité $V(\delta)$ tend vers 1 comme il se doit.

On retrouve d'autre part dans cette expression le terme habituel $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$ des interférences à deux ondes, terme centré sur la valeur σ_0 de σ.

Copyrighted material

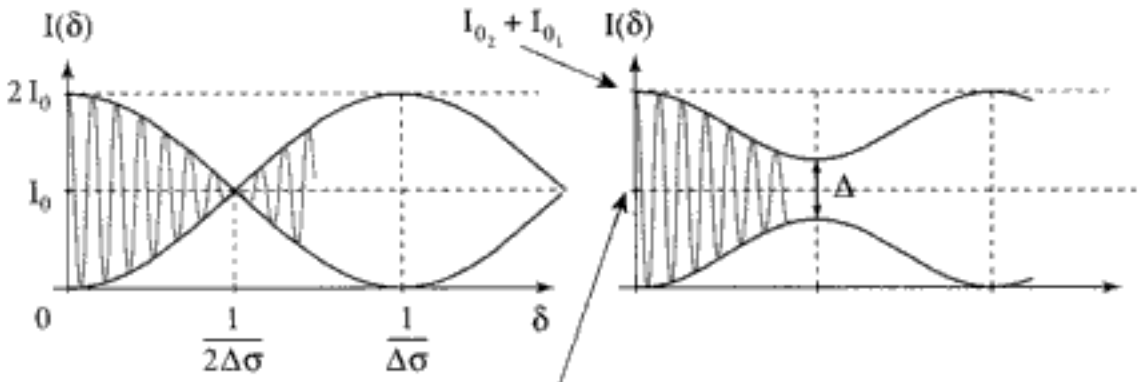
Hidden page

Les zones de contraste maximum sont associées à $\left|\underline{\mathcal{A}}(\delta)\right| \approx \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1}) \Rightarrow C_{max} = 1$.

Les zones de contraste minimum correspondent à :

$$\left|\underline{\mathcal{A}}(\delta)\right| \approx \frac{1}{2}\left|I_{0_2} - I_{0_1}\right| \rightarrow C_{min} = \left|\frac{I_{0_2} - I_{0_1}}{I_{0_2} + I_{0_1}}\right|.$$

Ces résultats sont conformes à ceux du **2. b.**



$$I_{0_2} = I_{0_1} = \frac{I_0}{2} \qquad \frac{1}{2}(I_{0_2} + I_{0_1}) \qquad I_{0_2} > I_{0_1} : \Delta = \left|I_{0_2} - I_{0_1}\right|$$

4. L'expérience fournit $\Delta x_n = \dfrac{x(7) - x(1)}{6} = \dfrac{L}{6} = 0{,}29$ mm.

D'où $\qquad \Delta\lambda \approx \dfrac{\lambda_0^2}{2\Delta x_n}$; et $\Delta\lambda = 5{,}98$ Å.

Pour évaluer l'incertitude correspondante différentions la formule donnant $\Delta\lambda$ en fonction de λ_0 et Δx_n :

$$\frac{d(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} = 2\frac{d\lambda_0}{\lambda_0} - \frac{d(\Delta x_n)}{\Delta x_n}.$$

Soit en passant aux valeurs absolues :

$$\frac{\Delta(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \approx 2\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\Delta(\Delta x_n)}{\Delta x_n}.$$

On peut évaluer :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta(\Delta x_n)}{\Delta x_n} \text{ à } \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{2 \times 0{,}5 \cdot 10^{-2}}{1{,}75} \approx 6 \cdot 10^{-3} \\ \text{et } \dfrac{2\Delta\lambda_0}{\lambda_0} - \dfrac{2\Delta\lambda}{\lambda_0} \sim 2\dfrac{5{,}98}{5\,890} = 2 \cdot 10^{-3} \end{array}\right. \quad \frac{\Delta(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \approx 8 \cdot 10^{-3}$$

et : $\qquad \Delta(\Delta\lambda) \approx 8 \cdot 10^{-3} \times 5{,}98 \approx 0{,}05$ Å

Soit : $\qquad \boxed{\Delta\lambda = 5{,}98 \pm 0{,}05 \text{ Å}} \qquad \boxed{5{,}93 \leqslant \Delta\lambda \leqslant 6{,}03 \text{ Å}}$

On a également : $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \rightarrow \boxed{\lambda_2 \neq 589{,}6 \text{ nm}}$

Copyrighted material

Commentaire

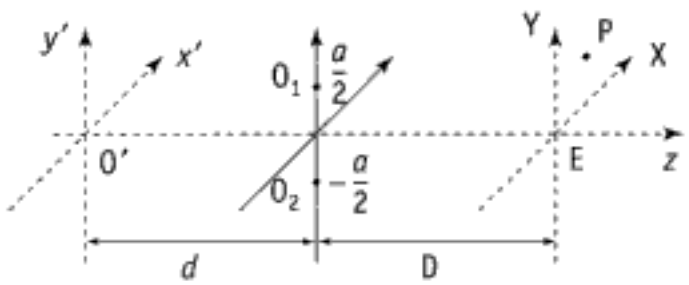
Les tables donnent en fait :

$$\lambda_1 = 5\,889{,}950 \text{ Å} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 5\,895{,}925 \text{ Å}.$$

D'où $\boxed{\Delta\lambda = 5{,}97 \text{ Å}}$

102 Influence de la largeur de la fente source

On réalise une expérience d'interférences utilisant le dispositif des trous d'Young situés en O_1 et O_2 et séparés de a ($O_1O_2 = a$).



1. a. La source est ponctuelle et se confond avec O'. On isole une longueur d'onde $\lambda = 0{,}589$ µm. Décrire la figure d'interférences obtenue au voisinage du point E du plan d'observation (EXY). On supposera que les trous sont suffisamment petits et que $D \gg (|X|, |Y|, a)$.

b. La source ponctuelle, de longueur d'onde λ, est placée en $S(x', y')$ avec $d \gg (|x'|, |y'|, a)$.
Comment est modifiée la figure d'interférences ?

2. a. La source (longueur d'onde λ) est maintenant assimilée à une fente parallèle à $O'x'$ centrée en O' et de largeur b selon $O'y'$. Les différents « points » de la fente source sont supposés incohérents entre eux. On admettra qu'un élément de largeur dy' émet une intensité lumineuse proportionnelle à dy'.

Exprimer l'éclairement en un point P(X, Y) de l'écran voisin de E. Définir un terme de contraste C. Quelle valeur maximale b_{max} faut-il donner à la largeur b de la fente source pour que le contraste C soit supérieur où égal à 0,1 ?
A.N. : calculer b_{max} avec $a = 1$ mm, $d = 10$ cm.

b. Le contraste C s'annule pour la première fois pour une valeur b_0 de b. Retrouver ce résultat par un raisonnement simple ne faisant pas directement appel au calcul de l'intensité I(X, Y).

1. Ce qu'il faut savoir

- Détermination d'une différence de marche.
- Des rayonnements incohérents n'interfèrent pas entre eux.
- Contraste d'un système de franges.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

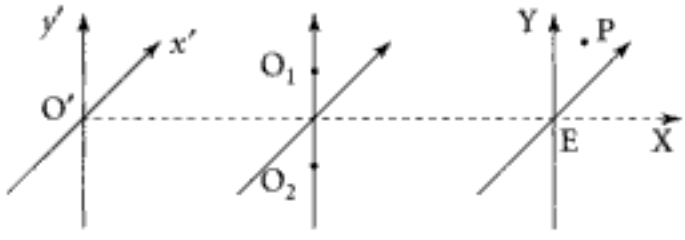
1. Il s'agit de l'expression classique des trous d'Young, les interférences étant rendues possibles dans le plan EXY du fait de la diffraction pour chaque trou. Pour D suffisamment grand, la figure d'interférences est modulée par celle de diffraction. Restant au voisinage de E et avec des trous « très fins », on va pouvoir ignorer cette modulation…

2. On décomposera la fente source en un ensemble de « fils sources » de largeur élémentaire dy' incohérents entre eux : les intensités dues à ces fils sources s'ajouteront donc.

3. Solution

1. a. La source « ponctuelle » est située en O'. On a donc :

$$O'O_2 - O'O_1 = 0.$$



Les rayons venant interférer en un point P du plan d'observation présentent une différence de marche $\delta(P) = (O'O_2 + O_2P) - (O'O_1 + O_1P) = O_2P - O_1P$.

Or $$O_2P = \sqrt{D^2 + X^2 + \left(Y + \frac{a}{2}\right)^2} \text{ et } O_1P = \sqrt{D^2 + X^2 + \left(Y - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\delta(P) = \frac{(O_2P)^2 - (O_1P)^2}{O_2P + O_1P} = \frac{2aY}{O_2P + O_1P}.$$

Or pour $D \gg |Y|$, $D \gg |X|$ et $D \gg |a|$, on fera l'approximation $O_2P + O_1P \sim 2D$ d'où :

$$\delta(P) \simeq \frac{aY}{D}.$$

Soit une intensité (ou un éclairement) en P : $I(P) = I_0 \cdot (1 + \cos\Delta\phi)$ avec $\Delta\phi = \dfrac{2\pi\delta(P)}{\lambda}$.

$$I(P) = I_0 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)\right).$$

Au voisinage du point E, on obtient des franges rectilignes parallèles à OX et donc perpendiculaires à O_1O_2. L'interfrange i est donné par :

$$\Delta Y = i \text{ avec } \frac{a\Delta Y}{\lambda D} = 1 \rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}.$$

1. b. La source, toujours ponctuelle, est maintenant placée en $S(x', y')$. On n'a plus $SO_2 = SO_1$ mais :

$$SO_2 - SO_1 = \sqrt{d^2 + \left(y' + \frac{a}{2}\right)^2 + x'^2} - \sqrt{d^2 + \left(y' - \frac{a}{2}\right)^2 + x'^2}$$

Copyrighted material

et avec $d \gg (|y'|, |x'|$ et $a)$, il vient (même démarche qu'au **1. a.**) :

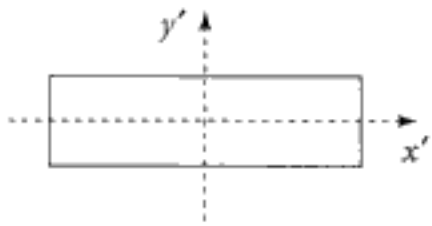
$$SO_2 - SO_1 \approx \frac{ay'}{d}.$$

D'où : $\delta(P) \approx \frac{aY}{D} + \frac{ay'}{d} = \frac{a}{D}\left(Y + y'\frac{D}{d}\right)$ et

$$I(P) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda D}\left(Y + \frac{D}{d}y'\right)\right)\right].$$

On observe la « même » figure d'interférences qu'au **1. a.** translatée de $-\frac{D}{d}y'$ selon $\vec{u}_y$.

2. a. On va décomposer la fente source en « fils sources » très fins parallèles à $\vec{u}_{x'}$, centrés en $(0, y')$ et de largeur élémentaire dy'.



■ Contribution du fil source $(0, y')$:

Tous les points sources, incohérents entre eux, le constituant conduisent à la « même » figure d'interférence (même y'). On peut donc leur associer une intensité en P telle que :

$$dI(P) = A_0 dy'\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda D}\left(Y + \frac{D}{d}y'\right)\right)\right].$$

■ Et pour la fente source on sommera les intensités données par l'ensemble des fils sources également incohérents entre eux, d'où :

$$I(P) = A_0\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda D}\left(Y + \frac{D}{d}y'\right)\right)\right]dy'$$

soit

$$I(P) = A_0 b + A_0\frac{\lambda d}{2\pi a}\left\{\sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda D}\left(Y + \frac{Db}{2d}\right)\right] - \sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda D}\left(Y - \frac{Db}{2d}\right)\right]\right\}$$

$$I(P) = A_0 b\left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}{\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}\cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)\right].$$

Posons $\sin c(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \Rightarrow Y = I(P) = A_0 b\left[1 + \sin c\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)\cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)\right].$

Il apparaît un terme de visibilité $V(b) = \sin c\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)$ qui module le terme d'interférence $\cos\left(\frac{2\pi aY}{\lambda D}\right)$. Les franges brillantes présentent une intensité maximale $I_{max} = A_0 b[1 + |V|]$, les franges « sombres » une intensité minimale $I_{min} = A_0 b[1 - |V|]$. On peut définir un contraste par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \Rightarrow C = |V| = \left|\sin c\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)\right|.$$

Copyrighted material

Commentaire

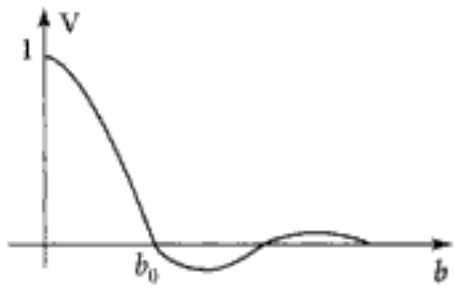
• Le contraste est indépendant de D et donc de la position du plan d'observation : les interférences sont non localisées.

• Quand on passe d'une configuration $V > 0$ à une configuration $V < 0$ (en modifiant d par exemple), il y a inversion du système de franges (les franges brillantes prennent la place des franges sombres).

• Le contraste s'annule pour la première fois pour une largeur critique b_0 de la fente source telle que :

$$\sin c\left(\frac{\pi a b_0}{\lambda d}\right) = 0 \rightarrow b_0 = \frac{\lambda d}{a}.$$

$$A.N. : b_0 = \frac{0{,}589 \cdot 10^{-6} \times 0{,}1}{10^{-3}} \rightarrow b = 59 \ \mu\text{m}.$$

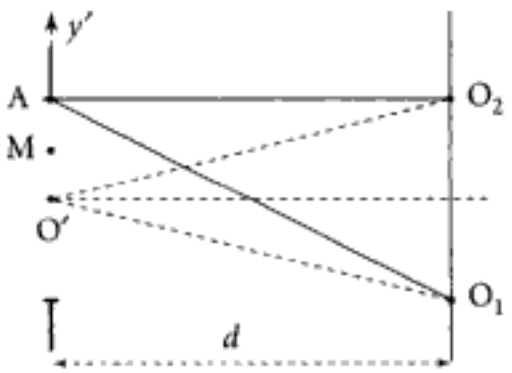


On veut $C > 0{,}1$ et donc $\sin c\left(\frac{\pi a b_0}{\lambda d}\right) > 0{,}1$, soit :

$$\frac{ab}{\lambda d} < 0{,}91 \Rightarrow b < 0{,}91 \cdot b_0 \text{ ; d'où } b < 53 \ \mu\text{m} = b_{max}.$$

b. On a $C = 0$ pour $b_0 = \frac{\lambda d}{a}$ (et $b = n b_0$). Retrouvons ce résultat. La différence de marche, en un point P du plan d'observation, des rayons provenant du fil source centré en M est :

$$\delta(M, P) = \underbrace{(MO_2 - MO_1)}_{\frac{ay'}{d}} + \underbrace{(O_2P - O_1P)}_{\text{indépendant de M}}$$



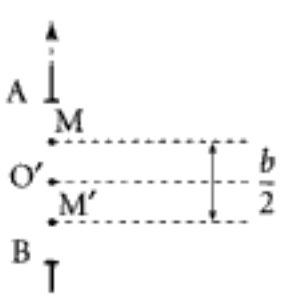
Considérons alors les fils sources centrés en A et en O'. Il leur correspond une différence de différence de marche $\Delta\delta = \delta(A, P) - \delta(O', P) = \frac{a}{d}\Delta y' = \frac{ab}{2d}\left(O'A = \frac{b}{2}\right)$.

Le système de franges donné par l'un sera exactement brouillé par celui donné par l'autre dès que : $\Delta\delta = \frac{\lambda}{2}$ (pour la valeur la plus petite…). Ce qui se produit pour une largeur b_0 de la fente source définie par :

$$\frac{ab_0}{2d} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow b_0 = \frac{\lambda d}{a}.$$

On peut alors associer les fils sources deux à deux (M – M' distant de $\frac{b_0}{2}$) et décrire ainsi toute la fente source, la demi-fente source supérieure brouillant la demi-fente source inférieure.

Il y a donc bien brouillage total pour $b_0 = \frac{\lambda d}{a}$.



Copyrighted material

Commentaire

• On aurait également pu diviser la fente source en quatre, huit… parties égales.
On aura donc de nouveaux brouillages pour :

$$\Delta\delta = \frac{\lambda}{2} \text{ avec } \Delta y' = \frac{b}{2n} \Rightarrow \frac{a}{d}\frac{b}{2n} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow b = nb_0.$$

Ce que confirme l'expression du contraste ($|V| = 0$ pour $b = nb_0$).

• Revenant au cas où $b = b_0$, les intensités dues aux fils sources incohérents centrés en M_1 et M_2 sont respectivement proportionnelles à :

$$M_1 \mapsto \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M_1, P)}{\lambda}\right)\right);\ M_2 \mapsto \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M_2, P)}{\lambda}\right)\right)$$

et avec $\delta(M_2, P) = \delta(M_1, P) + \Delta\delta = \delta(M_1, P) + \frac{\lambda}{2}$, d'où :

$$M_2 \mapsto \left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\delta(M_1, P) + \frac{\lambda}{2}\right)\right]\right\} = \left(1 - \cos\left(2\pi\frac{\delta(M_1, P)}{\lambda}\right)\right)$$

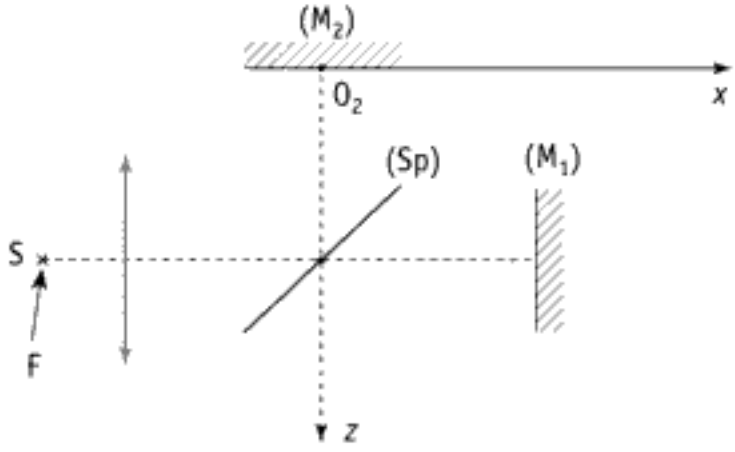
on vérifie ainsi que les systèmes d'interférences associés à chaque fil se compensent.

• On a $\delta(O', P) = \frac{aY}{D}$ et $\delta(A, P) = \frac{aY}{D} + \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{D}\left(Y + \frac{\lambda D}{2a}\right) = \frac{a}{D}\left(Y + \frac{i}{2}\right)$: le système de franges obtenu avec le fil source centré en A est décalé d'une demie interfrange par rapport à celui associé au fil source centré en O′, une frange brillante de l'un coïncidant avec une fente sombre de l'autre, ce qui explique le brouillage.

103 Interféromètre de Michelson en coin d'air

Dans cette étude, on néglige l'épaisseur des lames de l'interféromètre ainsi que les déphasages pouvant intervenir au cours des phénomènes de réflexion.

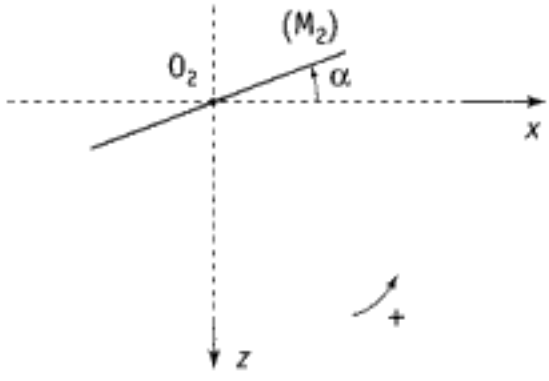
En position dite de « contact optique » (épaisseur nulle, angle nul), le schéma de l'interféromètre est le suivant, avec les deux miroirs et la séparatrice (Sp) :



À partir de cette position de référence, on fait tourner le miroir (M_2) d'un petit angle

Copyrighted material

$\alpha = 0{,}5$ minute $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ radian autour de l'axe $y'O_2y$. L'interféromètre est alors en configuration de lame d'air :



1. Dans cette première question, l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde dans l'air $\lambda = 546$ nm. Cette source ponctuelle est placée, comme l'indique le schéma figurant en début d'énoncé, au foyer objet F d'une lentille convergente de focale $f' = 20$ cm.

a. Montrer que l'interféromètre permet alors de réaliser en sortie l'interférence de deux ondes planes monochromatiques dont on donnera les deux vecteurs d'onde $\vec{k_1}$ (pour l'onde n° 1 réfléchie sur (M_2)) et $\vec{k_2}$ (pour l'onde n° 2 réfléchie sur (M_2)).

b. Ces deux ondes peuvent être considérées comme étant en phase au point O_2, bien que l'onde n° 1 présente un caractère virtuel en ce point. Déterminer alors l'expression faisant intervenir $\overrightarrow{O_2M}$ de l'amplitude complexe de la grandeur lumineuse résultante en M.

c. L'observation du phénomène se fait dans le plan $z = D$. Déterminer, en se limitant à l'ordre 1 en α, l'expression de l'éclairement au point $M(x, y, D)$ de ce plan (on notera E_0 l'éclairement que l'on aurait en M en l'absence d'interférence).

d. En déduire l'expression et la valeur numérique de l'interfrange.

2. L'interféromètre est maintenant éclairé par une source monochromatique ($\lambda = 549$ nm) étendue. Cette source est assimilée à un trait lumineux d'intensité uniforme, de longueur $b = 2$ cm, de milieu F, parallèle à l'axe $z'z$. On note Σ un point de cette source étendue, la position de ce point étant caractérisée par l'angle β.

2. a. La portion de trait lumineux de longueur dz et de point moyen Σ peut être assimilée à une source ponctuelle comparable à celle étudiée dans la première partie. Déterminer en utilisant α et β les nouveaux vecteurs d'onde $\vec{k_1'}$ et $\vec{k_2'}$ caractérisant les deux ondes en sortie.

b. On s'intéresse à l'éclairement au point $M(x, y, D)$ dû à cette source. Déterminer de façon analogue au calcul fait précédemment l'expression de cet éclairement, sachant

Copyrighted material

qu'en l'absence d'interférence l'éclairement serait proportionnel à dz et pourrait donc s'écrire $E_0 \frac{dz}{b}$. On se limitera à l'ordre 1 en α et β.

c. En déduire l'expression de l'éclairement total au point M dû à l'ensemble du trait lumineux et préciser alors l'expression du contraste de la figure d'interférences obtenue.

d. Quelle est la valeur maximum de D compatible avec un contraste supérieur à 0,8 ($\sin c(1,1) = 0,8$) ? Est-il possible, avec le montage envisagé, d'observer sur un écran une figure d'interférences bien contrastée ?

3. Avec une source étendue, les interférences sont localisées au voisinage immédiat du miroir (M_2). Préciser alors la focale de la lentille convergente qu'il faut mettre en sortie de l'interféromètre pour observer les interférences sur un écran disposé à 1,25 mètre de (M_2) avec un grandissement de l'interfrange égal à 4.

1. Ce qu'il faut savoir

- Notion d'onde plane progressive monochromatique.
- Interféromètre de Michelson.
- Notion de localisation des interférences.

2. Ce qu'il faut comprendre

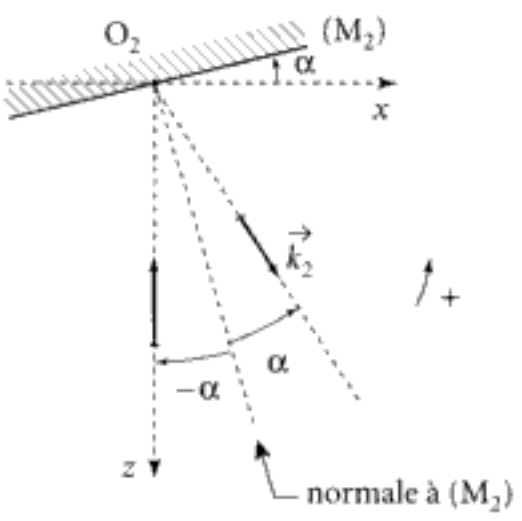
Lorsqu'il y a interférence entre deux ondes, il faut sommer les grandeurs lumineuses avant de calculer l'éclairement.

En l'absence d'interférence, ce sont les éclairements qui s'ajoutent.

3. Solution

1. a. Le faisceau correspondant à l'onde n° 1 émerge de la lentille parallèlement à $x'x$, se réfléchit sur (M_1) et ensuite sur (Sp). En sortie, ce faisceau est donc parallèle à l'axe $z'z$ et $\boxed{\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_z}$

Le faisceau correspondant à l'onde n° 2 émerge de la lentille parallèlement à $x'x$, se réfléchit sur (Sp) et arrive donc sur (M_2) avec un angle d'incidence égal à α. Le faisceau en sortie est donc caractérisé par un vecteur d'onde $\vec{k}_2$ faisant un angle 2α avec $z'z$ et $\boxed{\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_x \sin 2\alpha + \vec{u}_z \cos 2\alpha)}$



Copyrighted material

b. L'amplitude complexe de la grandeur lumineuse en M correspondant à l'onde n° 1 peut s'écrire :

$$\underline{S_1} = Ae^{-j\vec{k_1}\cdot\overrightarrow{O_2M}} \quad (j^2 = -1).$$

Celle correspondant à l'onde n° 2 s'écrira alors :

$$\underline{S_2} = Ae^{-j\vec{k_2}\cdot\overrightarrow{O_2M}}$$

car les deux amplitudes sont les mêmes et le déphasage au point O_2 est nul.

L'amplitude complexe de la grandeur résultante est alors :

$$\boxed{\underline{S} = A(e^{-j\vec{k_1}\cdot\overrightarrow{O_2M}} + e^{-j\vec{k_2}\cdot\overrightarrow{O_2M}})}$$

c. L'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude de la grandeur lumineuse en M, donc proportionnel à $\underline{S}\,\underline{S}^*$.

On a donc $\quad \mathscr{E} = K\underline{S}\,\underline{S}^* = 2KA^2[1 + \cos((\vec{k_2} - \vec{k_1})\cdot\overrightarrow{O_2M})]$

avec $\quad (\vec{k_2} - \vec{k_1})\cdot\overrightarrow{O_2M} = \dfrac{2\pi}{\lambda}[x\sin 2\alpha - D(1 - \cos 2\alpha)]$

soit, à l'ordre 1 en α :

$$(\vec{k_2} - \vec{k_1})\cdot\overrightarrow{O_2M} = \frac{4\pi\alpha}{\lambda}x.$$

En l'absence d'interférence, l'éclairement serait la somme des éclairements que l'on aurait avec, séparément, chacune des deux ondes. Donc :

$$E_0 = KA^2 + KA^2 = 2KA^2.$$

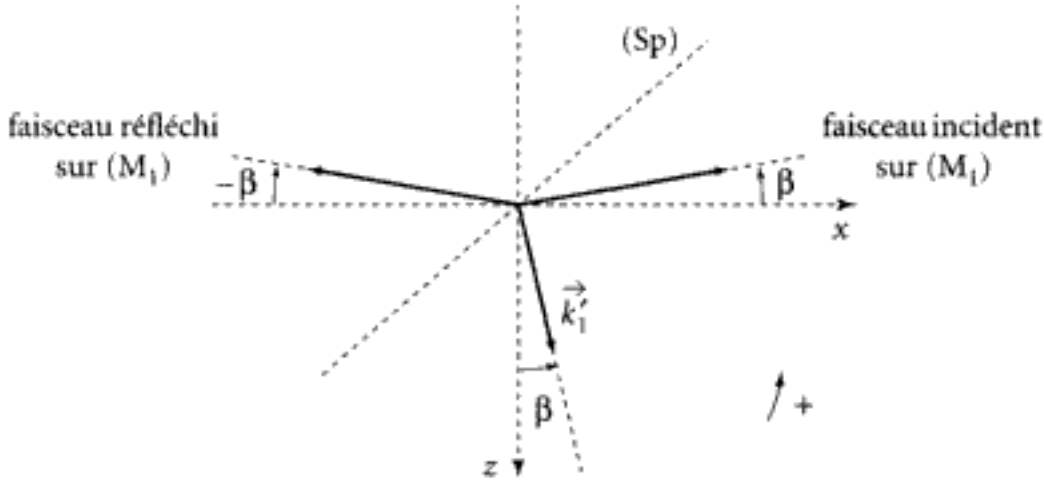
D'où :

$$\boxed{\mathscr{E}(M) = E_0\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi\alpha}{\lambda}x\right)\right)}$$

d. L'interfrange est la période spatiale de la fonction $\mathscr{E}(x)$:

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha} = 1{,}8 \text{ mm}}$$

2. a. On peut faire apparaître sur un schéma l'orientation des vecteurs d'onde successifs pour le faisceau n° 1 :



Copyrighted material

Hidden page

D'où :

$$\mathscr{E} = E_0\left[1 + \frac{f'}{b}\frac{\lambda}{4\pi\alpha D}\left(\sin\left(\frac{4\pi\alpha D\beta_1}{\lambda} - \frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{4\pi\alpha D\beta_1}{\lambda} + \frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right)\right)\right].$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{E} = E_0\left[1 + \sin c\left(\frac{2\pi\alpha D b}{\lambda f'}\right)\cos\left(\frac{4\pi\alpha x}{\lambda}\right)\right]}$$

Le contraste est :

$$C = \frac{\mathscr{E}_{max} - \mathscr{E}_{min}}{\mathscr{E}_{max} + \mathscr{E}_{min}} \quad \text{avec} \quad \mathscr{E}_{max} = E_0\left[1 + \left|\sin c\left(\frac{2\pi\alpha D b}{\lambda f'}\right)\right|\right]$$

$$\mathscr{E}_{min} = E_0\left[1 - \left|\sin c\left(\frac{2\pi\alpha D b}{\lambda f'}\right)\right|\right]$$

D'où :

$$\boxed{C = \left|\sin c\left(\frac{2\pi\alpha D b}{\lambda f'}\right)\right|}$$

Commentaire

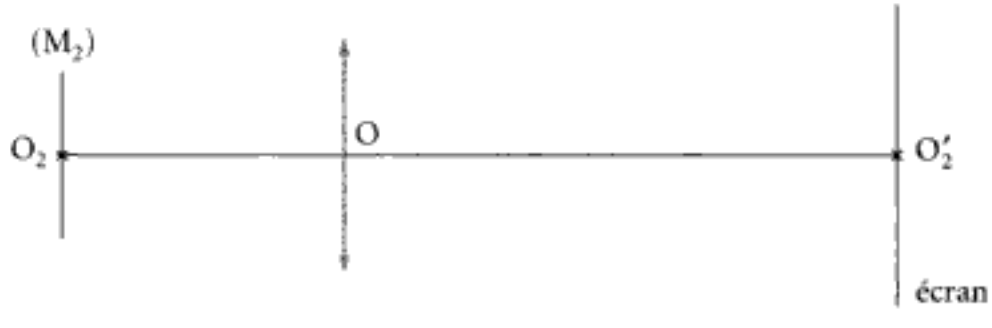
On retrouve bien que si $b \mapsto 0$ (source ponctuelle), alors $C \mapsto 1$: c'est le cas idéal étudié à la première question.

$$C > 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{2\pi\alpha D b}{\lambda f'} < 1{,}1 \Rightarrow \boxed{D < 6{,}4 \text{ mm}}$$

Il apparaît donc strictement impossible d'observer la figure d'interférences sur un écran car, concrètement, la distance D est supérieure au bras de l'interféromètre qui est au moins de 10 cm.

Les interférences avec une source étendue sont alors localisées au voisinage immédiat de (M_2) et présentent ainsi un caractère que l'on peut qualifier de « virtuel ».

3. On réalise l'image sur l'écran du miroir (M_2).



Le grandissement est $\left|\dfrac{\overline{OO_2'}}{\overline{OO_2}}\right| = 4$.

Donc, sachant que $\left|\overline{OO_2'}\right| + \left|\overline{OO_2}\right| = 1{,}25$ m, il faut :

$$\overline{OO_2'} = 1{,}0 \text{ m} \quad \text{et} \quad \overline{OO_2} = -0{,}25 \text{ m}.$$

Copyrighted material

La relation de conjugaison de la lentille donne :

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{\overline{OO'_2}} - \frac{1}{\overline{OO_2}} = 5\ \mathrm{m}^{-1}.$$

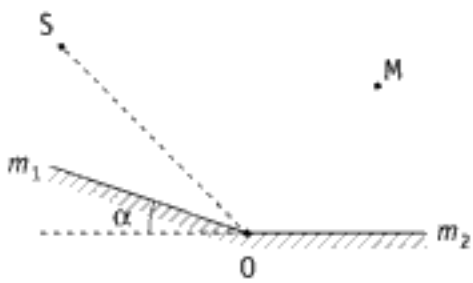
d'où la focale de la lentille à utiliser :

$$\boxed{f'_1 = 20\ \mathrm{cm}}$$

Cette lentille devra être placée à 25 cm de (M_2).

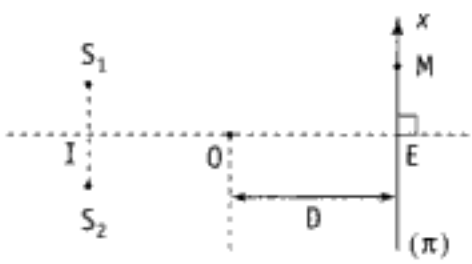
104 Miroir de Fresnel

On considère le dispositif des miroirs de Fresnel m_1 et m_2 faisant entre eux un petit angle $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ rad.



1. On l'éclaire par une source ponctuelle S de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}58\ \mu\mathrm{m}$.

a. Montrer que le système $\{S, m_1, m_2\}$ peut être remplacé par deux sources ponctuelles secondaires S_1 et S_2 dont on précisera les positions. Définir la différence de marche $\delta(M)$ en un point M où des interférences sont observables.



b. On place un écran d'observation π, perpendiculairement à IO (I milieu du segment S_1S_2) à une distance D de O. On note $d = OS$.

Qu'observe-t-on dans le plan π ? Déterminer l'interfrange i_x.

A.N. : calculer i_x avec $d = 40$ cm et $D = 3$ m.

c. On suppose que la largeur du champ d'interférence ne dépend – dans le cadre l'expérience décrite – que de D et α. Définir le nombre N de franges observables. Le sont-elles réellement sachant que la raie émise par la source possède en fait une largeur $\Delta\lambda \sim 0{,}7$ nm.

A.N. : calculer N.

L'observation est-elle modifiée si l'un utilise une source spatialement large (même $\lambda = 0{,}58\ \mu\mathrm{m}$.) diaphragmée par une fente fine dont la grande longueur est parallèle à l'arête commune des deux miroirs.

2. On dispose maintenant d'une source blanche $(0{,}4\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 0{,}8\ \mu\mathrm{m})$.

a. Décrire la nouvelle figure d'interférences.

Copyrighted material

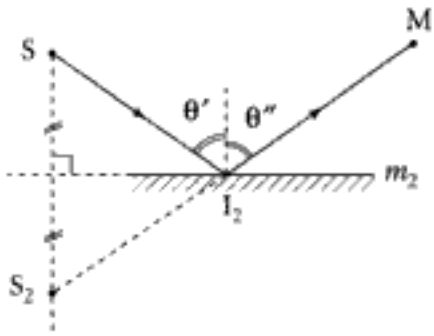
b. On place la fente fine d'un spectroscope parallèlement à l'arête et centrée au point M tel que $x_M = 3$ mm (l'écran est évidemment supprimé). Faire un schéma représentant le dispositif expérimental.

On observe un spectre cannelé. Justifier.

A.N. : donner les valeurs des longueurs d'onde associées aux cannelures sombres.

Solution

1. a. ■ Remarquons tout d'abord que le rayon issu de la source ponctuelle S qui passe par le point M après réflexion sur le miroir m_2 semble provenir du point S_2 symétrique de S par rapport à m_2 (*cf.* figure).



Notons de même S_1 l'image de S par rapport au miroir m_1. La différence de marche géométrique en M est alors donnée par (indice de l'air pris égal à l'unité) :

$$\delta_{geo}(S, M) = (SI_2 + I_2M) - (SI_1 + I_1M)$$

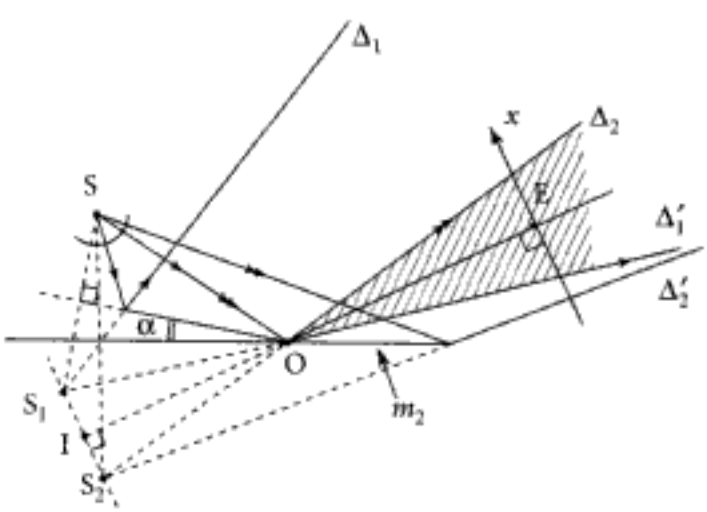
$$= (S_2I_2 + I_2M) - (S_1I_1 + I_1M) \begin{cases} SI_2 = S_2I_2 \\ SI_1 = S_1I_1 \end{cases}$$

Soit $$\boxed{\delta_{geo}(S, M) = S_2M - S_1M}$$

■ On considérera que la différence de marche ondulatoire s'identifie à la différence de marche géométrique, les deux rayons issus de S et venant interférer en M subissant des réflexions de même nature (les angles d'incidence sur les miroirs sont par ailleurs pratiquement les mêmes…), d'où :

$$\boxed{\delta = S_2M - S_1M}$$

b. Les miroirs de Fresnel font partie des dispositifs qui réalisent une division spatiale du font d'onde émis par la source S. Le champ d'interférences correspond, dans le plan de figure, à la zone hachurée, tant que les droites Δ_1' et Δ_2' d'une part, Δ_1 et Δ_2 d'autre part ne se coupent pas. La largeur du champ d'interférences s'identifie alors à $D2\alpha$ (où $D = OE$ et $2\alpha = (\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2})$)



Copyrighted material

Hidden page

Les franges restent visibles pour $|\Delta p| < 1$ (le contraste est d'autant meilleur que l'inégalité est stricte…). Il faut donc $|p| < \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Or $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \sim \frac{0{,}58 \cdot 10^{-6}}{0{,}7 \cdot 10^{-9}} \sim 8{,}3 \cdot 10^2$.

Les franges seront donc observables puisque $p_{max} \sim 10$.

■ Une fente source fine parallèle à l'arête commune des miroirs peut être décomposée en un ensemble de « points » sources incohérents entre eux. On passe d'un point source à un autre par une translation parallèle à la direction des franges. Les figures d'interférences données par les différents points se correspondent dans ces translations. On obtiendra donc le même système de franges avec une luminosité plus grande.

2. a. On remplace la source « monochromatique » par une source de lumière blanche (spectre continu s'étendant de $\lambda = 0{,}4\ \mu m$ à $\lambda = 0{,}8\ \mu m$.)

À la bande spectrale de largeur $d\sigma$ centrée sur $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ correspond une intensité lumineuse au point $M(\delta)$:

$$dI = kI_0(\sigma)d\sigma(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)$$

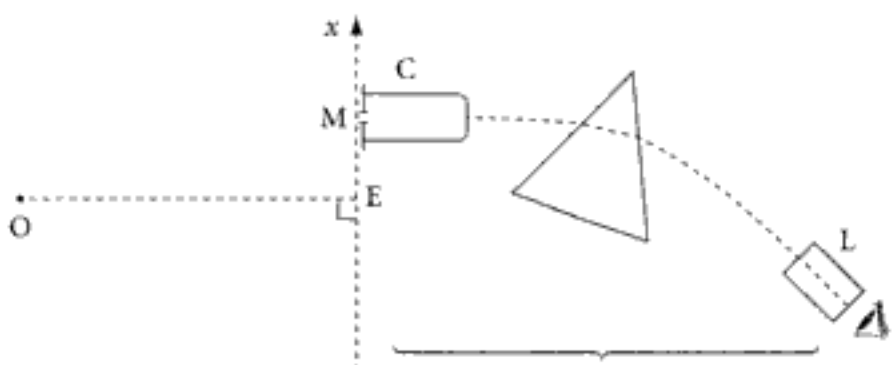
($I_0(\sigma)$ est associé au profil spectral de la source).

Au centre, c'est-à-dire en $x = 0$, on a $\delta = 0$, et le terme interférentiel $(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)$ vaut 2 pour tout λ.

L'oeil percevra donc une frange centrale brillante et blanche.

Quand on s'écarte du centre $(x \neq 0)$ le terme interférentiel dépend de λ. L'oeil percevra, au voisinage de $x = 0$, des franges irisées (teintes de Newton), pour $|\delta| \leqslant$ qqs µm, puis au-delà du blanc dit **blanc d'ordre supérieur**.

b. À l'aide du spectroscope (fente d'entrée parallèle aux franges) on analyse la lumière arrivant en M :



spectroscope à prisme | C : collimateur réglé à l'infini
L : lunette réglée à l'infini

M étant fixé il en est de même de δ, et à chaque bande spectrale $d\sigma$ centrée sur $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ on peut associer une intensité proportionnelle à $(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)$. On va donc observer, dans le plan focal de la lunette, un étalement des couleurs (du rouge au violet) avec des cannelures sombres correspondant aux longueurs d'ondes λ_n qui annulent le terme interférentiel $(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)$: obtention d'un **spectre cannelé**.

Copyrighted material

Hidden page

1. Décrire la figure d'interférences observée dans le plan F'XY au voisinage du foyer F'.

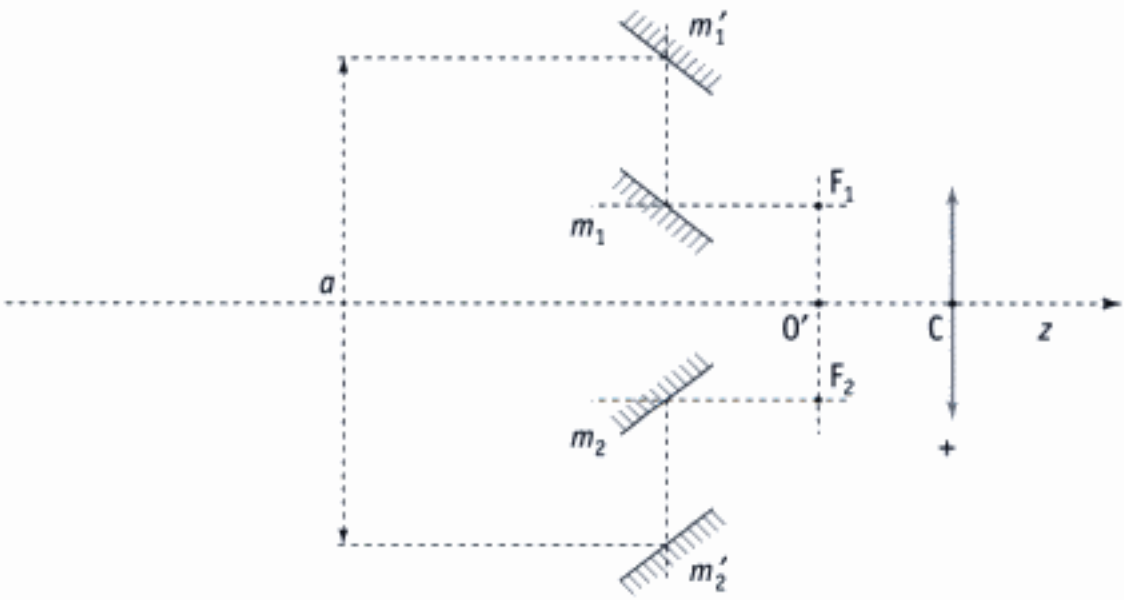
On déterminera l'intensité I(Y) en un point de l'axe F'Y. Définir un terme de contraste C dont on donnera l'expression en fonction de a, λ et α.

2. a. On fait varier a et on constate que les figures disparaissent pour des valeurs particulières de a. Pour α et λ fixés quelle est la plus petite a_m de ces valeurs ?

A.N. : $\lambda = 0{,}547\ \mu m$. On mesure $a_m = 4{,}5$ cm, quelle est la distance angulaire α entre les deux étoiles S_1 et S_2 ?

b. Retrouver le résultat précédent en comparant directement les différences de marche $\delta(S_1, P)$ et $\delta(S_2, P)$ des rayons arrivant en P et issus de S_1 puis de S_2.

3. On modifie le système en ajoutant quatre miroirs plans m_1, m_1', m_2, m_2' disposés à 45° par rapport à l'axe O'z (O' milieu du segment F_1F_2) :



Quelles sont les modifications apportées par ce système sur la mesure de l'écart angulaire α ?

Sachant que l'on a pu atteindre, par cette méthode, des distances a' de l'ordre de 5 m, quelle est la valeur minimale α_{min} de α que l'on peut détecter. ($\lambda = 0{,}547\ \mu m$) ?

Solution

1.

Point méthode

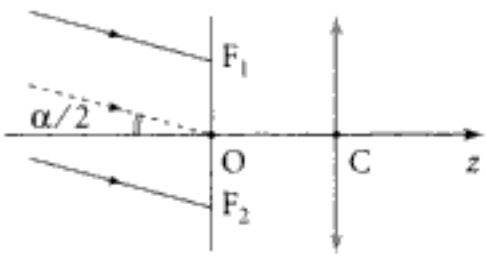
Les deux étoiles, assimilées ici à des points matériels, doivent être considérées comme des sources ponctuelles incohérentes (émissions non corrélées) émettant sur la même longueur d'onde λ que l'on sélectionne. On aura donc :

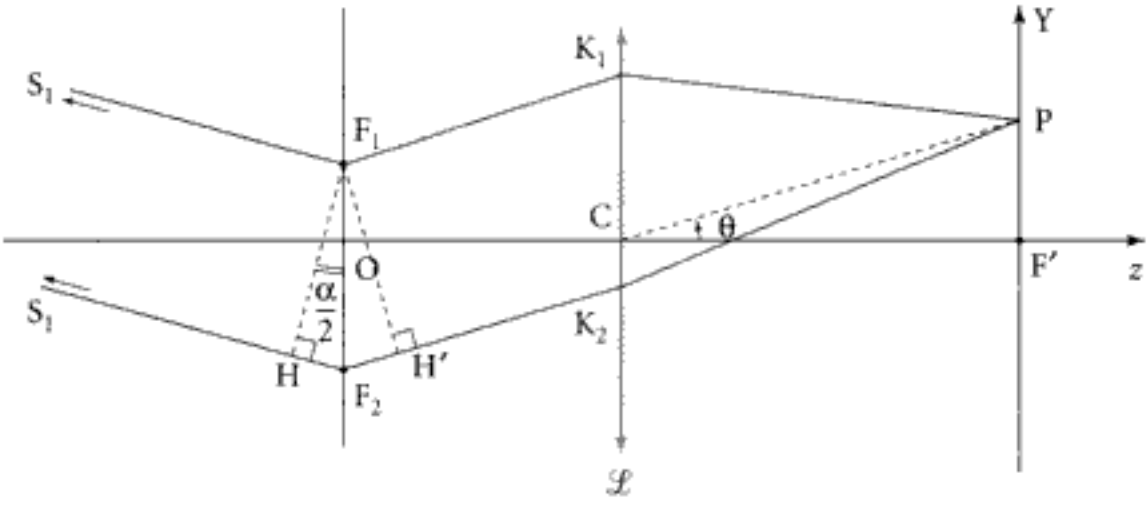
$$I(P) = I_1(P) + I_2(P).$$

Copyrighted material

Si la source S_1 était seule, on observerait dans le plan focal de la lentille un système de franges rectilignes (parallèles à $\vec{u}_x$) et d'interfrange $i = \dfrac{\lambda f}{a}$.

■ Les rayons émis par la source ponctuelle S_1 constituent, au niveau des trous F_1 et F_2, un faisceau de rayons parallèles faisant l'angle $\dfrac{\alpha}{2}$ avec l'axe Oz de la lentille (O n'est pas nécessairement le milieu du segment O_1O_2). Calculons la différence de marche des rayons arrivant en F_1 et F_2 et diffractés dans la direction θ du plan de figure :





La différence de marche en P s'exprime selon :

$$\delta(S_1, P) = \mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1 \quad (\mathscr{L} \equiv \text{ chemin optique})$$

avec : $\mathscr{L}_1 = [S_1F_1P] = S_1F_1 + [F_1P]$ et $\mathscr{L}_2 = [S_1F_2P] = S_1F_2 + [F_2P]$.

Or la lentille étant utilisée dans l'approximation de Gauss, on peut considérer que :

$[F_1P] = [H'P]$ (les chemins optiques $[S_1K_1P]$ et $[H'K_2P]$ étant égaux, un point source placé en P donnerait, après traversée de la lentille dans le sens $-\vec{u}_z$, un faisceau de rayons parallèles à la direction PC…).

D'où : $$\delta(S_1, P) = S_1F_2 - S_1F_1 + F_2H'.$$

Or $S_1F_2 - S_1F_1 = F_1F_2 \sin\dfrac{\alpha}{2} \approx a\dfrac{\alpha}{2}$ et $F_2H' = a\sin\theta \approx a\theta$ avec $\tan\theta = \dfrac{Y}{f'} \sim \theta$

soit : $$\delta(S_1, P) \# a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{Y}{f'}\right)$$

et $$I_1(P) = I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(S_1, P)}{\lambda}\right)\right) \Rightarrow I_1(P) = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda}\left(\frac{Y}{f'} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] \quad (1)$$

(on a $I_0 = \langle I_1(Y)\rangle$).

Copyrighted material

■ Pour la source S_2, de même intensité que S_1, il suffit de reprendre le résultat (1) en changeant α en $-\alpha$, soit :

$$I_2(P) = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda}\left(\frac{Y}{f'} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] \quad (2)$$

■ Au total l'éclairement en un point P de l'écran est donné par :

$$I(P) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda}\left(\frac{Y}{f'} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] + I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda}\left(\frac{Y}{f'} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

$$I(P) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\pi\frac{a\alpha}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{aY}{\lambda f'}\right)\right]$$

soit encore en introduisant l'interfrange i : $I(P) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\pi\frac{a\alpha}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{Y}{i}\right)\right]$.

On obtient un système de franges d'interfrange i avec :

– pour les franges « brillantes » : $I = I_{max} = 2I_0 \cdot \left[1 + \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|\right]$

– pour les franges « sombres » : $I = I_{min} = 2I_0 \cdot \left[1 - \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|\right]$

soit un contraste $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \Rightarrow C = \left|\cos\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right)\right|$.

2. a. Les franges disparaissent pour $C = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\pi\frac{a\alpha}{\lambda} = \frac{\pi}{2}(2p + 1) \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2\alpha}(1 + 2p) \quad (3)$$

La valeur la plus petite de a est : $\boxed{a_m = \frac{\lambda}{2\alpha}}$

Cette valeur est d'autant plus grande que l'écart angulaire entre les deux étoiles est faible.

A.N. : $\alpha = \frac{0{,}547 \cdot 10^{-6}}{2 \times 4{,}5 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 6 \cdot 10^{-6}}$ **rad.**

b. Il y aura brouillage lorsque le système de franges donné par S_2 est en anti-coïncidence avec celui fourni par S_1, ce qui se produit dès que la différence des différences de marche en un point P du lieu d'observation est égale à $(2p + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Ainsi : $\delta(S_1, P) - \delta(S_2, P) = (2p + 1)\frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow \Delta\phi(S_1, P) - \Delta\phi(S_2, P) = \frac{2\pi}{\lambda}(2p + 1)\frac{\lambda}{2} = (2p + 1)\pi$$

(alors les deux cosinus prennent – dans les expressions (1) et (2) – des valeurs opposées…).

Copyrighted material

Hidden page

$$\delta(S_2, P) = -\frac{1}{2}a'\alpha + \frac{aY}{f'}.$$

Le contraste s'annule alors pour $a' = \frac{\lambda}{2\alpha}(1 + 2p)$; soit, pour α donné, une valeur minimale de a' telle que :

$$a'_m = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

On a pu atteindre des valeurs de a' de l'ordre de 5 m ce qui permet de mesurer des écarts angulaires minimum de l'ordre de :

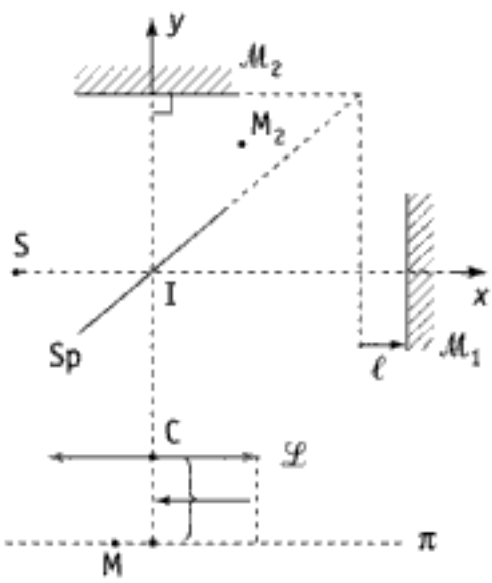
$$\alpha_{\min} \sim \frac{\lambda}{2a'_m} = \frac{0{,}547 \cdot 10^{-6}}{2 \times 5} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{\min} \sim 6 \cdot 10^{-8}\ \text{rad}}.$$

On a ainsi obtenu une meilleure résolution.

106 Spectrométrie à transformée de Fourier

Un interféromètre idéal de Michelson est constitué :

- d'une lame séparatrice Sp semi-réfléchissante d'épaisseur nulle ;
- de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ plans parfaitement réfléchissants inclinés à 45° par rapport à Sp ;
- d'une lentille $\mathcal{L}$ stigmatique : on observe dans le plan π.
- pour $\ell = 0$ les miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont exactement symétrique par rapport à Sp.
- les points M_2 et M sont conjugués par rapport à la lentille $\mathcal{L}$.



1. Une source ponctuelle S, monochromatique de longueur d'onde λ_0 , est placée sur l'axe Ix à distance finie. On note S_2 l'image de S par rapport aux réflexions successives sur Sp puis $\mathcal{M}_2$, et S'_1 celle de S par rapport aux réflexions sur Sp puis $\mathcal{M}'_1$ (miroir symétrique de $\mathcal{M}_1$ par rapport à Sp).

a. Montrer que l'on peut remplacer l'appareil (source S, séparatrice, miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$) par les deux sources secondaires S_2 et S'_1. Sont-elles en phase ? Déterminer leur distance $S_2S'_1$.

Copyrighted material

b. On suppose $S_2H = D \gg \ell$ et l'angle θ est petit.

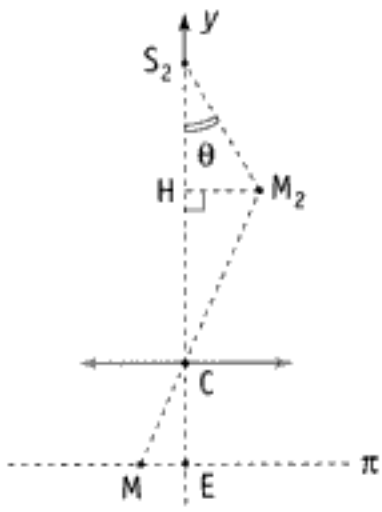
Calculer l'intensité lumineuse en M. On se limitera aux termes du second ordre en θ.

Qu'observe-t-on sur l'écran confondu avec le plan π ?

c. Le grandissement de la lentille est $|\gamma|$ en valeur absolue. On suppose que le centre de la figure d'interférences correspond à un maximum d'intensité.

Déterminer le rayon R_n du $n^{\text{ième}}$ anneau lumineux en fonction de $|\gamma|$, λ_0, ℓ, D et n.

d. Que se passe-t-il lorsqu'on augmente ℓ à partir de $\ell = 0$; lorsque à ℓ fixé on déplace la source ponctuelle S parallèlement à $\vec{u_y}$?



e. Les rayons incidents sont maintenant issus d'une source étendue incohérente (λ_0) assimilable à un disque de rayon R centré sur S et perpendiculaire à $\vec{u_y}$.
Comment est modifiée la figure d'interférence par rapport à S ponctuelle ? Évaluer l'ordre de grandeur N du nombre (supposé grand) d'anneaux visibles. Commenter le résultat obtenu : on envisagera le cas $D \to \infty$.

2. la source est spatialement étendue autour de S. On fait varier ℓ de 0 à $L > 0$ et on observe au foyer F′ de la lentille $\mathcal{L}$ où un détecteur « ponctuel » mesure l'intensité $I(\delta)$, δ représentant la différence de marche des rayons en F′. Un logiciel de calcul permet alors de déterminer la quantité :

$$G(\omega) = \int_0^{\delta_{max}} I(\delta)\cos\left(\frac{\omega\,\delta}{c}\right)d\delta.$$

a. La source est monochromatique de pulsation $\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}$. Donner $G(\omega)$.

b. La source comprend deux raies très fines de pulsations ω_1 et ω_2 de part et d'autre de ω_0. Représenter la courbe associée à $G(\omega)$. À quelle condition ce dispositif permet-t-il de résoudre les deux raies ? En déduire le pouvoir de résolution $\mathcal{R}$ défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|_{min}}.$$

Solution

1. a. ■ Soit une source ponctuelle S placée sur l'axe Lx. Deux rayons issus de S sont susceptibles de venir interférer en M.

Le premier résulte d'une réflexion sur Sp puis d'une autre sur $\mathcal{M}_2$. l'émergent correspondant doit passer par M_2 image de M par rapport à $\mathcal{L}$.

Pour ce rayon, on a un chemin optique $\mathcal{L}_2(S, M)$ tel que :

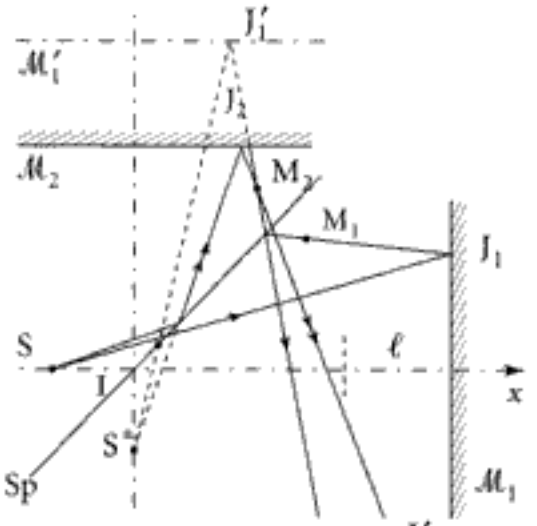
$$\mathcal{L}_2(S, M) = [SM_2] + [M_2M] = [SJ_2M_2] + [M_2M]$$

Copyrighted material

Le deuxième rayon correspond à la traversée de Sp, réflexion sur $\mathcal{M}_1$ puis sur Sp. Le rayon réfléchi par $\mathcal{M}_1$ doit passer par le point M_1 symétrique de M_2 par rapport à Sp (chemin $S \to Sp \to J_1 \to M_1$ symétrique du chemin $S \to Sp \to J_1' \to M_2$).

On a donc un chemin optique :

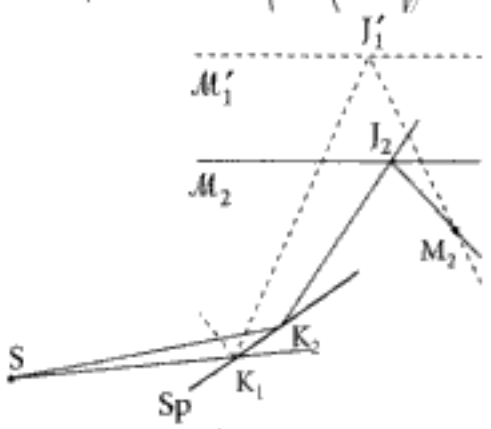
$$\mathcal{L}_1(S, M) = [SM_1] + [M_1M]$$
$$= [SJ_1M_1] + [M_1M]$$
$$\mathcal{L}_1(S, M) = [SJ_1'M_2] + [M_2M].$$



Finalement :

$$\mathcal{L}_2(S, M) - \mathcal{L}_1(S, M) = [SJ_2M_2] - [SJ_1'M_2]$$

et $\Delta\phi(S, M) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\{[SJ_2M_2] - [SJ_1'M_2]\}$ (1)



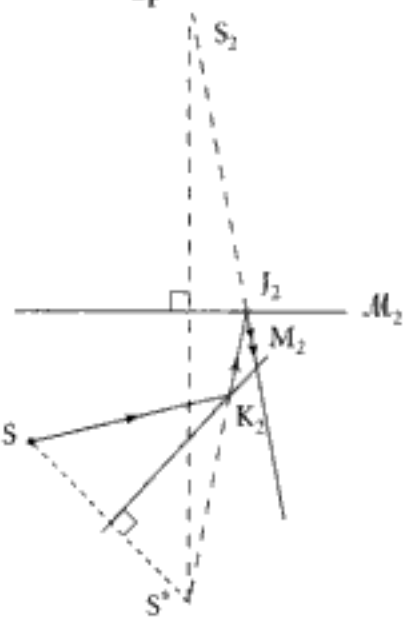
■ Dans le cadre de l'optique géométrique, le rayon issu de S et passant par le point M_2 après réflexion sur Sp et $\mathcal{M}_2$ semble provenir du point S_2 tel que :

$$S \xrightarrow{Sp} S^* \xrightarrow{\mathcal{M}_2} S_2$$

De la même façon on a :

$$S \xrightarrow{Sp} S^* \xrightarrow{\mathcal{M}_1'} S_1'$$

■ On peut alors substituer au montage $\{S, Sp, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ deux points secondaires S_2 et S_1'.



De plus

$$[SK_2J_2M_2] = SK_2 + K_2J_2 + J_2M_2 = \underbrace{S^*K_2 + K_2J_2}_{S^*J_2 = S_2J_2} + J_2M_2 = S_2J_2 + J_2M_2 = S_2M_2$$

de même $[SK_1J_1'M_2] = S_1'M_2$

on a donc $\Delta\phi(S, M) = \dfrac{2\pi}{\lambda}\{S_2M_2 - S_1'M_2\}$ (2)

Copyrighted material

Hidden page

Les rayons venant interférer au point M ayant la même intensité :

$$I(M) = 2I_0 \cdot (1 + \cos\Delta\phi).$$

Finalement :

$$I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\frac{4\pi\ell}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right] \quad (4)$$

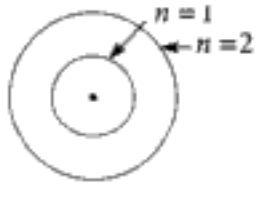
L'état d'interférence dans le plan π ne dépend donc que de θ (à λ_0 et ℓ fixés). L'ensemble des points M de même intensité correspond donc, dans le plan conjugué π'(de π par rapport à $\mathcal{L}$), à un cercle (θ = cste) d'axe S_2S_1'. Son image dans π est également un cercle de centre E. La figure d'interférences obtenue dans π est ainsi formée d'anneaux concentriques.

c. L'ordre d'interférence en M vaut :

$$p(M) = \frac{2\ell}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

(on a pris $p = \dfrac{\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2}{\lambda_0} > 0$ pour $\ell > 0$) soit un ordre au centre $p(M) = \dfrac{2\ell}{\lambda_0}$ entier d'après l'énoncé (maximum d'intensité au centre de la figure d'interférences) : $p(E) = \dfrac{2\ell}{\lambda_0} = m$ (m entier).

Les anneaux brillants correspondent alors à des valeurs θ_n de θ telles que $p(\theta_n) = m - n$ (p diminue quand θ augmente)



d'où $\dfrac{2\ell\,\theta_n^2}{2\lambda_0} = n \rightarrow \theta_n = \left(\dfrac{n\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\{n = 1, 2\ldots\}$.

Le lieu des points M_2 est un cercle de rayon :

$$R_n' = D \cdot \theta_n = D \cdot \left(\frac{n\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et les rayons R_n des anneaux brillants valent $R_n = |\gamma| R_n'$

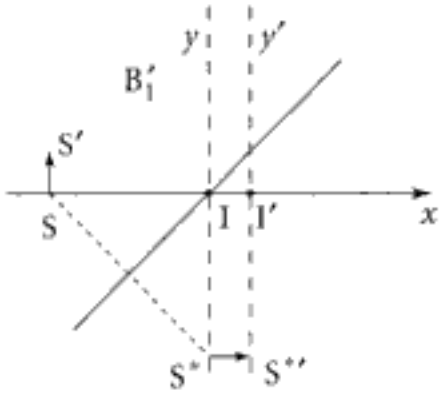
soit $\boxed{R_n \# |\gamma| D \cdot \left(\dfrac{n\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}}$ (5)

d. ■ Lorsque $\ell = 0$, il n'y a pas d'anneaux. On observe une *teinte plate* (intensité uniforme). Lorsque ℓ augmente des anneaux apparaissent. Leur nombre est d'autant plus grand que ℓ est important : les anneaux semblent naître au centre de la figure d'interférences et disparaître sur le bord (pour un anneau d'ordre j donné, on a en effet $p_j = \dfrac{2\ell}{\lambda_0}\left(1 - \dfrac{\theta_j^2}{2}\right) = j$: quand ℓ augmente, θ_j croît pour un anneau d'ordre d'interférence fixé).

D'autre part $\dfrac{\ell}{\lambda_0}(\theta_{j+1}^2 - \theta_j^2)$ = cte : les anneaux se resserrent quand ℓ augmente…

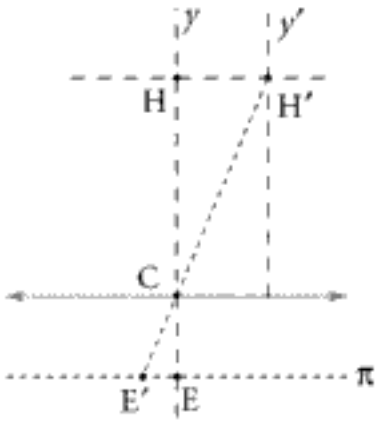
Copyrighted material

■ Si l'on translate S perpendiculairement à Ox, et donc par exemple parallèlement à Oy, la source image par rapport à Sp passe de S^* à $S^{*\prime}$ et donc se translate de la même quantité selon $\vec{u}_x$. Il en est de même de S_1' et de S_2. Dans le plan π', l'axe des cercles passe de Iy à I′y' :



$\theta = 0$ correspond maintenant au point E′ image de H′. La frange brillante associée à θ_n est l'image dans π du cercle de π' de centre H′ et de rayon R_n'. Si l'on reste dans l'approximation de Gauss, il s'agit d'un cercle de rayon $R_n = |\gamma| R_n'$ centré en E′ image de H′ à travers $\mathscr{L}$. Dans ces conditions on observera la même figure d'interférences translatée de :

$$\overrightarrow{EE'} = -|\gamma|\,\overrightarrow{HH'}.$$



e. Considérons maintenant un disque source centré sur S et perpendiculaire à $\vec{u}_x$. Il constitue une source plane incohérente et monochromatique (λ_0).

Chaque « point » du disque source se déduit du « point central S » par une translation $\overrightarrow{SS'}$.

Les différentes intensités associées aux points S, S′… s'ajoutent (incohérence). Or la figure d'interférences due à S′ se déduit de celle due à S par une translation dans le plan π telle que $-|\gamma|\,\overrightarrow{S^*S^{*\prime}}$. Il va donc y avoir apparition *d'un brouillage* qui va se manifester dans un premier temps sur le bord de la figure d'interférences (les anneaux y sont plus serrés), et qui sera d'autant plus important que ℓ est grand.

Pour évaluer le nombre N d'anneaux visibles, il suffit de traduire que l'observation pourra s'effectuer jusqu'au rang $n \sim N$ tant que $R_{n+1}' - R_n' \geqslant 2R$ (« distance » entre les anneaux n et $n+1$ supérieure à « l'élargissement » d'un anneau dû au rayon R de la source). D'où la condition :

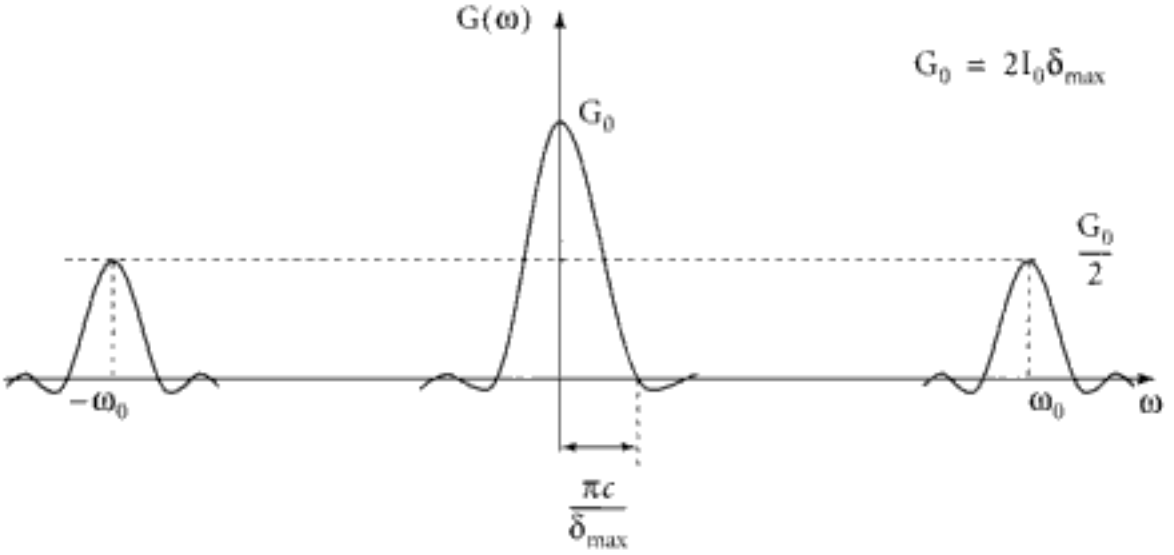
$$\left.\begin{array}{l} D\left(\dfrac{\lambda_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{N+1}-\sqrt{N}) \geqslant 2R \\ \text{Et pour N grand : } \sqrt{N+1}-\sqrt{N} = \dfrac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{N}} \end{array}\right\} N \leqslant \frac{D^2\lambda_0}{16\ell R^2} \quad (6)$$

N est d'autant plus grand que R est petit, ce qui est normal (étendue plus faible de la source).

L'expression précédente permet de conclure qu'il suffit de rendre D infini, et donc de confondre le plan π avec le plan focal image de $\mathscr{L}$: il s'agit d'une *observation à l'infini*. Il n'y a plus de brouillage.

Copyrighted material

Hidden page



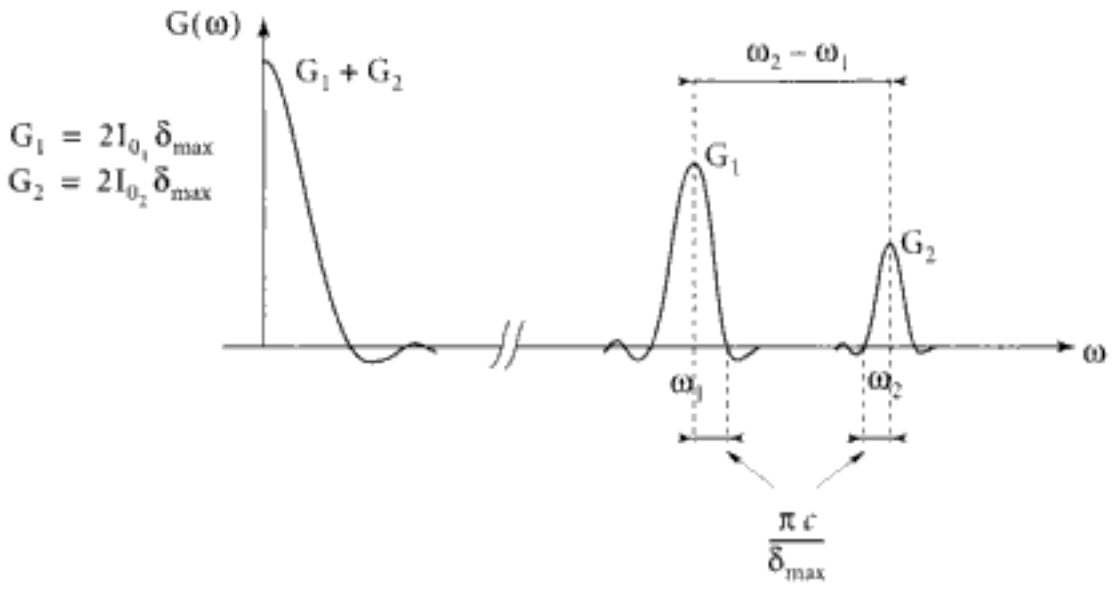
Pour $\omega > 0$, on observe un pic centré sur ω_0 et de demi-largeur aux pieds égale à $\frac{\pi c}{\delta_{max}}$. Il est bien séparé du pic central pour $\omega_0 \gg \frac{\pi c}{\delta_{max}}$.

b. Dans le cas de deux raies de pulsation ω_1 et ω_2 ($\omega_1 = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$), on a :

$$G(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega) \quad \text{avec :}$$

$$\begin{cases} G_1(\omega) = 2I_{0_1}\delta_{max}\left\{\sin c\left[\frac{\omega\,\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\sin c\left[\frac{(\omega-\omega_1)\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\sin c\left[\frac{(\omega+\omega_1)\delta_{max}}{c}\right]\right\} \\ G_2(\omega) = 2I_{0_2}\delta_{max}\left\{\sin c\left[\frac{\omega\,\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\sin c\left[\frac{(\omega-\omega_2)\delta_{max}}{c}\right] + \frac{1}{2}\sin c\left[\frac{(\omega+\omega_2)\delta_{max}}{c}\right]\right\} \end{cases}$$

Soit dans le cas où les pics sont suffisamment bien séparés :



Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

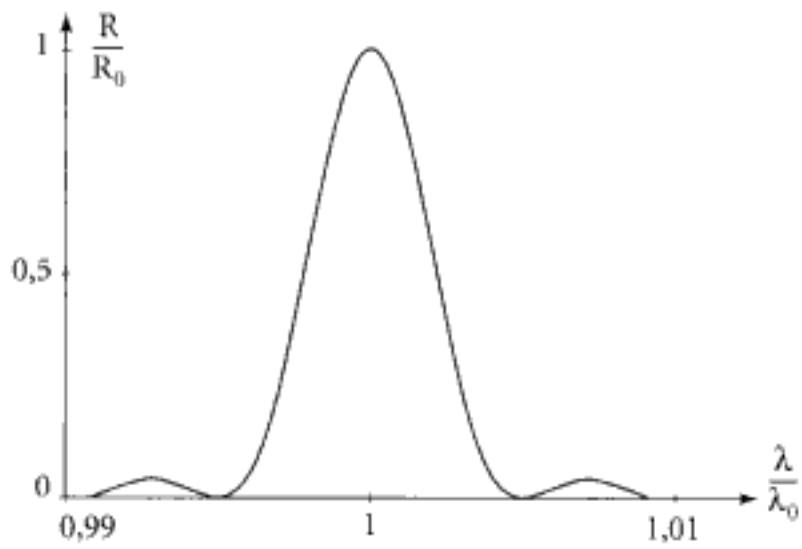
soit $\underline{A} = \sum_{m=1}^{N} \underline{a_m} = \underline{a_1} \sum_{m=1}^{N} \exp\left[-j\,2\pi(m-1)\frac{\delta}{\lambda}\right] = \underline{a_1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[-j\,2\pi n\frac{\delta}{\lambda}\right]$

d'où $\underline{A} = \underline{a_1}\dfrac{1-\exp\left(-j\,2\pi N\frac{\delta}{\lambda}\right)}{1-\exp\left(-j\,2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)} = \underline{a_1}\dfrac{\exp\left(-j\,\pi N\frac{\delta}{\lambda}\right)}{\exp\left(-j\,\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)}\left[\dfrac{\sin\left(\pi N\frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)}\right].$

Le pouvoir réflecteur $\mathcal{R}$ est alors proportionnel à $|A|^2$:

Posons : $R = R_0 \cdot \left[\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}N\delta\right)}{N\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)}\right]^2$ avec $\delta = \lambda_0$ et $R_0 = R(\lambda_0)$.

On a représenté ci-dessous le graphe de $\frac{R(x)}{R_0}$ où $x = \frac{\lambda}{\lambda_0}$.



Le crochet est maximal et vaut 1 pour $\lambda = \lambda_0$. Pour $\lambda = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ il prend une valeur nulle, avec :

$$N\pi\frac{\lambda_0}{\lambda} = N\pi - \pi.$$

Soit : $N\frac{\lambda_0}{\lambda} = N - 1 \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{N}{N-1} = 1 + \frac{1}{N-1}$.

On obtient :

$$\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{1}{N-1} \sim \frac{1}{N} \rightarrow \boxed{\Delta\lambda \sim \frac{2\lambda_0}{N}}$$

La longueur d'onde λ_0 est donc « sélectionnée » avec une incertitude de l'ordre de $\pm\frac{\lambda_0}{N}$, c'est-à-dire à mieux de 3 nm près.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

- Diffraction à l'infini par une pupille plane.
- Facteur de transparence.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On décompose la pupille en fentes de largeur dx et on cherche l'amplitude diffractée dans une direction $\vec{u}$ du plan xOz (les ondes interférant à l'infini étant associées à des rayons parallèles).

2. La traversée du prisme par l'onde incidente entraine un déphasage dépendant de l'épaisseur au point M et donc de l'abscisse x.

3. Solution

1. a.

POINT MÉTHODE

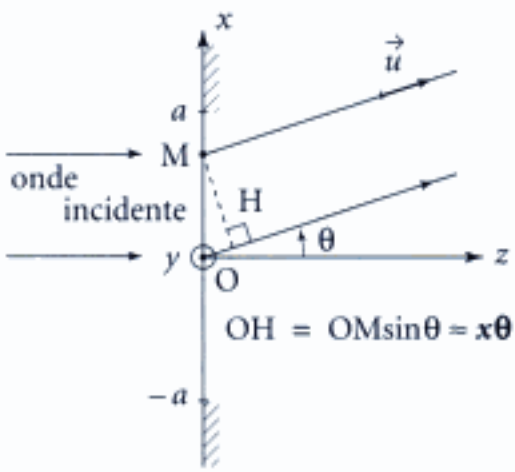
Le motif diffractant étant très grand (par rapport à la longueur d'onde λ) dans la direction Oy, il n'y aura pratiquement d'intensité diffractée (à l'infini, c'est-à-dire dans le plan focal de la lentille) que dans des directions $\vec{u}$ perpendiculaires à $\vec{u_y}$.

Plaçons-nous dans un plan perpendiculaire à Oy (figure ci-contre) pour calculer le déphasage entre les rayons issus de M (repéré par x) et le rayon issu de O. (Ces deux rayons sont parallèles, ils interfèrent bien à l'infini).

La différence de marche est OH, le déphasage vaut $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\text{OH} = k\text{OH} = k\theta x$.

Au niveau de l'écran, sur lequel se forme la figure de diffraction à l'infini, l'amplitude reçue, en provenance de la bande de largeur dx située à l'abscisse x, vaut $\mathrm{d}x\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)\mathrm{e}^{j\varphi}$,

(à une constante multiplicative près, la même pour tous les rayons de direction θ).



■ D'une autre manière, le *principe de Huygens-Fresnel* permet d'écrire (diffraction à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille), en notant Ψ l'amplitude diffractée dans la direction $\vec{u}$: $\Psi(\vec{u}) = \mathrm{A}\Psi_0\iint t(x, y)\mathrm{e}^{jk\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Ψ_0 amplitude complexe de l'onde incidente (indépendante de M ici : incidence normale).

Or $\vec{u} = \cos\theta\vec{u_z} + \sin\theta\vec{u_x}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y}$.

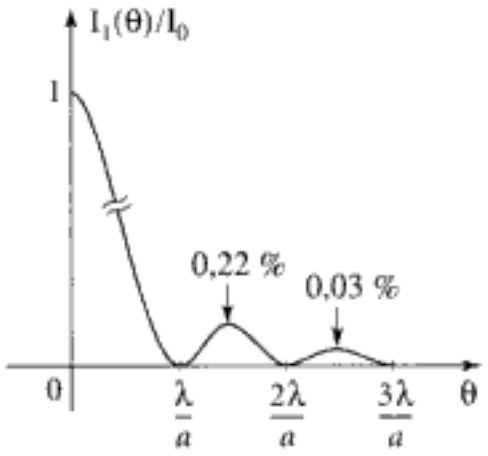
D'où (*cf.* point méthode) : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\sin\theta = x\theta$ (petits angles).

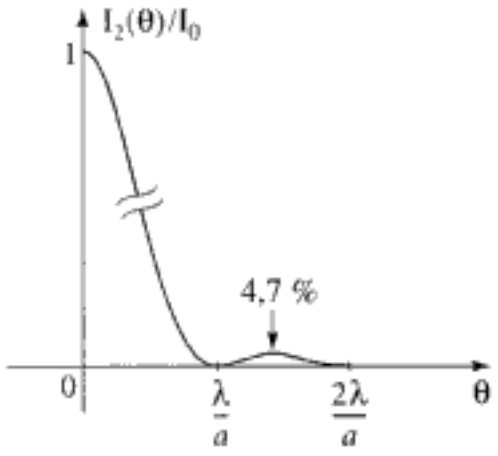
Copyrighted material

Hidden page

Ce qui justifie le résultat $I_1(0) = I_2(0) = I_0$.

■ Traçons les deux courbes $\theta \to \frac{I_1(\theta)}{I_0}$ et $\theta \to \frac{I_2(\theta)}{I_0}$:





L'intensité s'annule pour les mêmes valeurs de θ.

Dans les deux cas, la tache centrale a une largeur (aux pieds) double de celle des taches latérales. Mais pour la plaque photographique l'intensité décroît plus vite que pour une simple fente ;

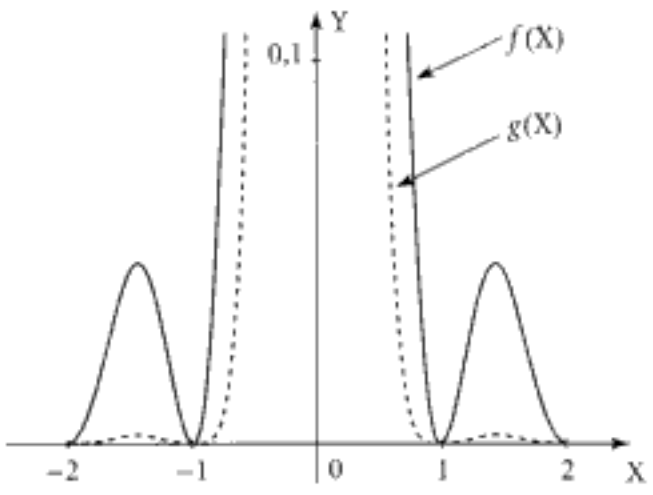
L'intensité du premier maxima secondaire vaut environ :

- $\frac{4,7}{100} I_0$ pour la simple fente de largeur a.
- $\frac{0,22}{100} I_0$ pour la plaque photographique de largeur $2a$.

Les pics latéraux sont donc fortement atténués (phénomène d'apodisation).

Commentaire

■ Donnons, sur un même graphe, les courbes $f(x) = \frac{I_1(x)}{I_0}$ et $g(x) = \frac{I_2(x)}{I_0}$ où $X = \frac{a\theta}{\lambda}$ (en mettant en évidence les pics secondaires) :



Avec $f(X) = \text{sinc}^2(\pi X)$ et $g(X) = \text{sinc}^4(\pi X)$

Copyrighted material

Hidden page

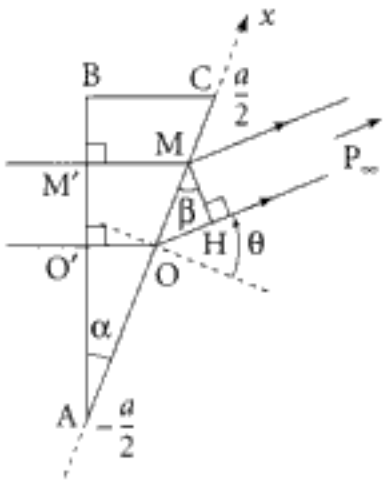
Et, en notant I_0 l'intensité maximale, on obtient, en passant au carré du module de l'amplitude :

$$\boxed{I_0(\theta) = I_0\left[\frac{\sin[\pi(\theta-\alpha')]\frac{a}{\lambda}}{\pi(\theta-\alpha')\frac{a}{\lambda}}\right]^2} \quad (3)$$

On obtient une intensité maximale pour $\theta = \alpha'$.

b. Le principe d'Huygens-Fresnel peut encore s'écrire :

$$\Psi(\vec{u}) = K_1\Psi_0 e^{-jk[SOP]}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-jk\{[SMP]-[SOP]\}}\,dx \quad (4)$$



[ ] représente le chemin optique selon le trajet considéré.

Or $[SMP]-[SOP] = nM'M - (nO'O + OH)$

avec

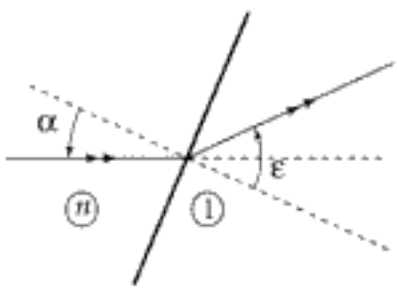
$$\left.\begin{aligned} M'M &\approx \alpha AM = \alpha\left(\frac{a}{2}+x\right) \\ O'O &\approx \alpha\frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \; n(M'M - O'O) \approx n\alpha x \;;$$

et $\quad OH = OM\sin\beta \sim x\beta$

$\quad OH = x\theta \quad (\beta = \theta)$

d'où $\Psi(\vec{u}) = K\Psi'_0\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\{-jk[n\alpha-\theta]x\}\,dx \quad (\Psi'_0 = \Psi_0 e^{-jk[SOP]})$.

Cette intégrale est identique à celle obtenue au **2. a)** en posant $\alpha' = n\alpha$. On obtient donc un maximum de diffraction dans la direction $\theta = n\alpha$. Remarquons alors que cette direction correspond bien sûr à celle donnée par l'optique géométrique dans le cadre des angles (α et θ) petits. En effet, la loi de Descartes s'écrit :



$$n\sin\alpha = \sin\varepsilon \rightarrow \varepsilon \sim n\alpha.$$

Commentaire

Désignons par $\Psi_i(M)$ l'amplitude complexe de l'onde incidente en M en l'absence du prisme :

$\Psi_i(M) = \Psi_0\exp[-jkMM'] \;;\quad \Psi_i(O) = \Psi_0\exp[-jkO'O]$

d'où $\Psi_i(M) = \Psi_i(O)e^{-jk(MM'-OO')}$.

On peut alors réécrire (4) selon :

$\Psi(\vec{u}) = K_1 e^{-jk[SOP]}\int \Psi_0 e^{-jk(nMM'-nOO'-OH)}\,dx$

$\Psi(\vec{u}) = K_1 e^{-jk[SOP]}\int e^{-jk(n-1)(MM'-OO')}\,\Psi_0 e^{-jk(MM'-OO')}\,e^{jkOH}\,dx.$

Or $OH = \vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}$ et $MM'-OO' = \vec{u}_0\cdot\overrightarrow{OM}$

Copyrighted material

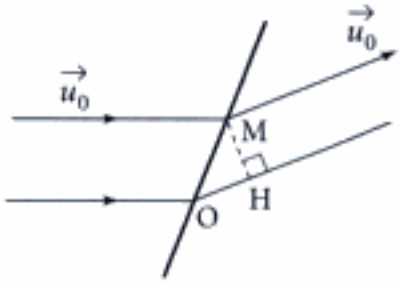
d'où : $\Psi(\vec{u}) = K_1 e^{-jk[SOP]} \int t(x) \Psi_0 e^{jk(\vec{u}-\vec{u_0})\cdot\overrightarrow{OM}} dx.$

Tout se passe donc comme si on pouvait considérer une pupille diffractante contenue dans le plan Oxy et présentant une transparence en amplitude complexe telle que :

$$t(x) = \exp[-jk(n-1)(MM' - OO')]$$

soit $$t(x) = \exp[-jk(n-1)\alpha x].$$

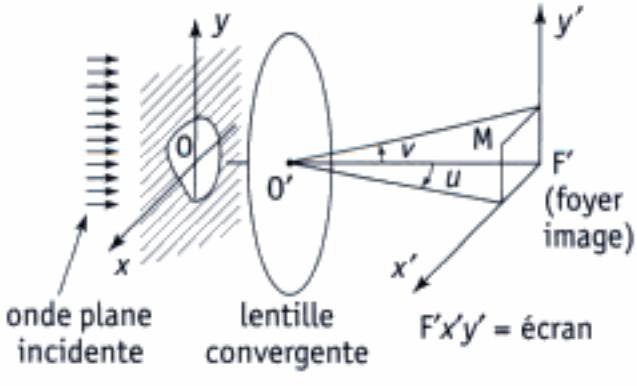
Une telle pupille constitue un objet de phase.



202 Diffraction à l'infini

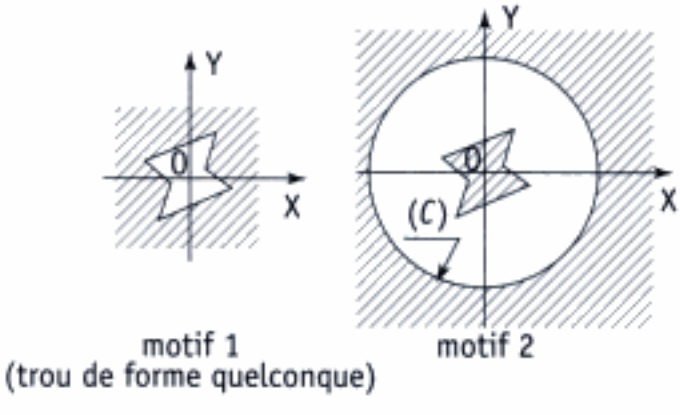
1. On considère la figure de diffraction à l'infini d'un motif placé dans le plan Oxy. Les points de l'écran sur lequel se projette la figure de diffraction ($F'x'y'$: plan focal image de la lentille) sont repérés par les angles u et v ($|u|$ et $|v| \ll 1$).

On note k le module du vecteur d'onde de l'onde plane qui éclaire, en incidence normale, le plan Oxy.



a. Le motif diffractant du plan Oxy subit une homothétie de centre O et de rapport η. Comment la figure de diffraction se transforme-t-elle ?

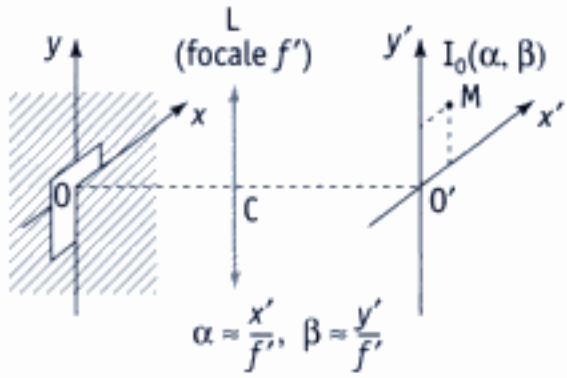
b. Comparer les figures de diffraction des motifs complémentaires 1 et 2. Le cercle (C) de rayon R très supérieur aux dimensions du motif central rend compte du fait que la lentille diaphragme le faisceau lumineux.



Copyrighted material

2. L'intensité de la figure de diffraction d'un petit trou T_0 de forme quelconque, placé au voisinage de l'origine O du plan Oxy est, dans le plan $O'x'y'$ plan focal image de la lentille L, $I_0(\alpha, \beta)$.

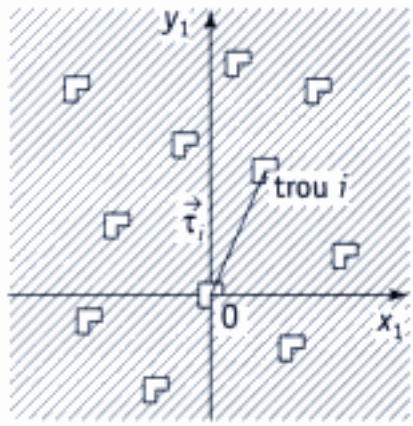
L'ouverture T_0 dans le plan Oxy, est éclairée par un faisceau monochromatique cohérent parallèle à l'axe OO' (montage habituel des expériences de diffraction).



On remplace le plan Oxy par le plan Ox_1y_1 percé d'un très grand nombre (N) de trous, identiques au premier, répartis au hasard.

On passe du trou initial T_0 au trou T_i par une translation :

$$\vec{\tau}_i = (a_i, b_i, 0).$$



a. Quelle est la figure de diffraction du trou i isolé (les autres étant occultés) ?

b. Quelle est la figure de diffraction de l'ensemble des trous du plan Ox_1y_1 ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Diffraction à l'infini.
- Principe d'Huygens-Fresnel.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. Définir l'amplitude complexe $a(x, y)$ dans le plan xOy. Les opérations géométriques effectuées modifient la fonction $a(x, y)$. Il suffit alors d'examiner les transformations induites sur l'amplitude complexe diffractée $\underline{\mathcal{A}}$, et donc sur l'intensité I (proportionnelle à $|\underline{A}|^2$).

2. Pour le **a.**, on établira un lien entre les amplitudes lumineuses, dans le plan xOy, associées aux trous T_0 et T_i. On montrera que la translation du trou T_0 ne modifie l'amplitude diffractée, dans une direction donnée $\vec{u}$, que par un terme de phase $(e^{jk\vec{u}\cdot\overrightarrow{OO_i}})$.

Pour le **b.**, il suffit de sommer les expressions précédentes des amplitudes diffractées par chaque trou, puis de tenir compte des déphasages à répartition aléatoire entre les différentes paires de trous (une somme telle que $\Sigma\Sigma\cos(k\vec{u}\cdot\overrightarrow{O_iO_j})$ pourra être alors considérée comme « nulle » pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).

Copyrighted material

Hidden page

que de la première dans un rapport $\frac{1}{\eta}$. (C'est bien ce qu'on observe : plus le motif diffractant est grand, plus la figure de diffraction est petite).

1. b. Soient $a_1(x, y)$ et $\underline{A}_1(u, v)$ les amplitudes dans les plans Oxy et $F'x'y'$ associées au motif 1.

Soient $c(x, y)$ et $\underline{C}_1(u, v)$ les amplitudes dans les plans Oxy et $F'x'y'$ du « cercle » (C) seul sans le cache central.

L'amplitude dans Oxy du motif 2 peut s'écrire :

$$a_2(x, y) = c(x, y) - a_1(x, y).$$

Ici les fonctions $c(x, y)$ et $a_1(x, y)$ peuvent être considérées comme prenant les valeurs 0 ou 1 (0 lorsque la lumière est arrêtée, 1 dans le cas contraire). Ainsi pour le motif 2, on aura :

$$a_2(x, y) = 1 - 1 = 0 \text{ sur le cache « central »}$$

$$a_2(x, y) = 0 - 0 = 0 \text{ à l'extérieur du cercle } (C)$$

$$a_2(x, y) = 1 - 0 = 1 \text{ ailleurs}$$

L'amplitude dans $F'x'y'$ du motif 2 est donc :

$$\underline{A}_2(u, v) = C(u, v) - \underline{A}_1(u, v).$$

Remarquons, en utilisant le résultat de la question précédente, que $\underline{C}_1(u, v)$ tend vers zéro beaucoup plus vite que $\underline{A}_1(u, v)$ quand on s'éloigne de F'. En effet, le cercle (C) étant beaucoup plus grand que le motif, la figure de diffraction qui lui correspond ($\underline{C}(u, v)$) est bien plus petite que celle ($\underline{A}_1(u, v)$) du motif.

En résumé, si on s'éloigne suffisamment de F' ($OF' = qqs\frac{\lambda f'}{R}$, R rayon du cercle C) :

$|\underline{C}(u, v)| \ll |\underline{A}_1(u, v)|$ et $\underline{A}_2(u, v) \approx -\underline{A}_1(u, v)$, et pour l'intensité $I \propto AA^*$, on a :

$\boxed{I_1(u, v) \approx I_2(u, v)}$ les intensités sont les mêmes.

Par contre tout près de F', $|\underline{C}(u, v)| \gg |\underline{A}_1(u, v)|$: le coefficient « η^2 » l'emporte et :

$\boxed{A_2(u, v) \approx C(u, v)}$ c'est la figure de diffraction de (C).

Dans la zone intermédiaire $|A_1(u, v)|$ est du même ordre de grandeur que $|C(u, v)|$ et l'on ne peut rien dire de précis tant qu'on ne connaît pas le détail du motif central.

Ces résultats sont connus sous le nom de **Théorème des écrans complémentaires**.

2. a. ■ Pour le trou T_0 placé au voisinage de l'origine O, le principe d'Huygens-Fresnel s'écrit :

$$\Psi_0(P) = K\exp(-jk[SOP])\iint_{S_{T_0}} e^{-jk([SMP]-[SOP])}\,dx\,dy$$

Copyrighted material

Hidden page

Faisons le changement de variable : $\xi = x - a_i$ et $\eta = y - b_i$ ($dx\,dy = d\xi\,d\eta$)
(3) devient :

$$\Psi_i(\vec{u}) = K\exp(-jk[SOP])\iint_{R^2} t_0(\xi, \eta)e^{jk(\alpha\xi + \beta\eta)}e^{jk(a_i\alpha + b_i\beta)}d\xi\,d\eta$$

soit avec (2) :

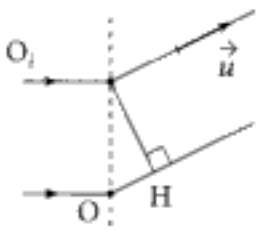
$$\boxed{\Psi_i(\vec{u}) = \Psi_0(\vec{u})\exp\{jk(\alpha a_i + \beta b_i)\}} \quad (4)$$

Commentaire

Cette dernière expression peut s'écrire également sous la forme :

$$\Psi_i(\vec{u}) = \Psi_0(\vec{u})\exp\left\{jk(\overrightarrow{OO_i} \cdot \vec{u})\right\}.$$

L'amplitude diffractée par le trou T_i translaté selon $\overrightarrow{OO_i}$ du trou T_0, s'obtient en prenant en compte une différence de marche supplémentaire δ_i égale à $-\vec{u} \cdot \overrightarrow{OO_i}$.



$\delta_i = -OH = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{OO_i}$

L'intensité de la figure de diffraction associée au trou T_i s'il était seul est :

$$I_i(\alpha, \beta) = \text{cste} \cdot \left|\Psi_i(\vec{u})\right|^2 = \text{cste} \cdot \left|\Psi_0(\vec{u})\right|^2.$$

On obtient donc :

$$\boxed{I_i(\alpha, \beta) = I_0(\alpha, \beta)}$$

La figure de diffraction pour un trou ne dépend pas de la position du trou dans son plan (on passe d'une position à l'autre par une translation dans le plan Oxy).

2. b. Tous les trous étant *cohérents* entre eux il faut additionner leurs amplitudes complexes. Ainsi au total :

$$\Psi(\alpha, \beta) = \sum \Psi_i(\alpha, \beta) = \Psi_0(\alpha, \beta)\sum_{i=0}^{N-1}\exp(jk\vec{u} \cdot \overrightarrow{OO_i}).$$

L'intensité de la figure de diffraction devient :

$$I(\alpha, \beta) = I_0(\alpha, \beta)\underbrace{\left|\sum_{i=0}^{N-1}\exp(jk\vec{u} \cdot \overrightarrow{OO_i})\right|^2}_{F(\alpha, \beta)\ (5)}.$$

Il s'agit du produit de l'intensité $I_0(\alpha, \beta)$ d'un trou isolé et d'une fonction $F(\alpha, \beta)$ qui traduit le phénomène d'interférence, dans une direction $\vec{u}$ donnée, entre les faisceaux émis par chaque trou.
Or :

$$F(\alpha, \beta) = \left(\sum_m \exp[jk(\alpha a_m + \beta b_m)]\right)\left(\sum_n \exp[-jk(\alpha a_n + \beta b_n)]\right)$$

$$F(\alpha, \beta) = \sum_n\sum_m \exp[jk\alpha(a_m - a_n) + jk\beta(b_m - b_n)].$$

■ Pour $\alpha = \beta = 0$, nous avons $F(\alpha, \beta) = N^2$ (si l'on reprend l'expression (5) de $F(\alpha, \beta)$, on s'aperçoit que dans ce cas chaque exponentielle vaut 1, et il y a N termes, d'où le résultat).

Copyrighted material

■ Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ il vient :

$$F(\alpha, \beta) = \underset{(\text{termes } n = m)}{N} + 2\sum\sum_{n < m} \cos[k(a_m - a_n)\alpha + k(b_m - b_n)\beta].$$

On voit que l'argument du cosinus prend des valeurs au hasard (de la même façon que les trous sont répartis au hasard). La somme des cosinus vaudra donc pour $|\alpha|$ et/ou $|\beta|$ pas trop petits environ 0 (aux fluctuations statistiques près) et $F(\alpha, \beta) = N$.

Commentaire

■ (Il est bien évident que $F(\alpha, \beta)$ est une fonction continue, le passage de N^2 à N s'effectue au voisinage de l'origine sur un domaine qui dépend du nombre de trous et de la loi de probabilité de la répartition des trous).

En définitive, à « côté » d'une tache centrale N^2 fois plus intense que la tache centrale d'un trou isolé, l'intensité de la figure de diffraction est N fois celle du motif initial.

■ Si les trous sont répartis périodiquement selon l'axe Oy, c'est-à-dire si l'on a ;

$$(a_p, b_p) = p(0, b)$$

le terme interférentiel $F(\alpha, \beta)$ s'écrit :

$$F(\alpha, \beta) = \left|\sum_p e^{jk\beta bp}\right|^2 = \left|\sum_0^{N-1} e^{jk\beta bm}\right|^2$$

D'où : $$F(\alpha, \beta) = \left|\frac{1 - e^{jk\beta bN}}{1 - e^{jk\beta b}}\right|^2 = N^2\left|\frac{\sin\left(\frac{Nb\beta}{\lambda}\pi\right)}{N\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)}\right|^2.$$

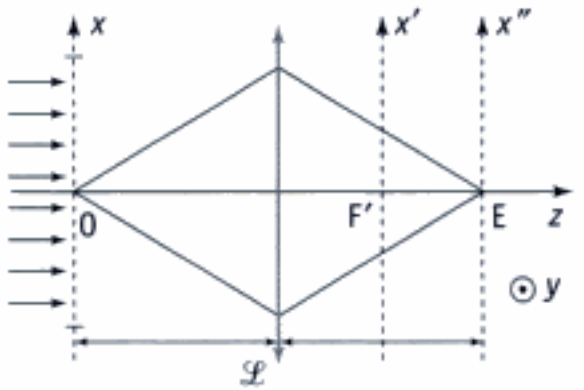
Il s'agit de la formule classique d'un réseau à une dimension.

■ On pourrait également constituer un réseau plan à deux dimensions avec des trous « centrés » en (qa, pb) où q et p appartiennent à $\mathbb{Z}$…

203 Filtrage spatial

Un support pour pupilles diffractantes est disposé dans le plan Oxy.

Il possède une largeur L selon Ox et une longueur suffisamment grande. Il est éclairé en incidence normale par une OPPH d'amplitude a_0 et de longueur d'onde λ_0.



Copyrighted material

Une lentille convergente, de distance focale f', est placée de telle manière que les plans E$x''y''$ et Oxy soient conjugués avec un grandissement égal à -1.

On place sur le support une pupille diffractante présentant une périodicité spatiale d selon Ox.

1. Quelle est l'amplitude diffractée dans le plan focal image de la lentille $\mathscr{L}$?

Rappel : On peut associer à une fonction $x \to f(x)$ d-périodique et paire sa série de Fourier :

$$F_0 + \sum_1^{\infty} F_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{d}\right).$$

2. On suppose L grand devant le pas d du motif périodique.

Qu'observe-t-on sur un écran confondu avec le plan E$x''y''$ quand on intercale dans le plan F$'x'y'$:

a. une fente, centrée en F$'$, et de largeur $\dfrac{2\lambda_0 f'}{L}$

b. deux fentes de même largeur $\dfrac{2\lambda_0 f'}{L}$ centrées en $\pm\dfrac{\lambda_0 f'}{d}$.

Solution

1. On peut considérer que la pupille diffractante est théoriquement infinie avec une transparence en amplitude :

$$t(x) = f_d(x) t_F(x)$$

où :

– f_d est la fonction de période d dont la restriction à l'intervalle de largeur L représente la transparence de la pupille réelle.

– $t_F(x)$ est la transparence associée à une fente de largeur L, c'est-à-dire :

$$t_F(x) = 1 \text{ pour } |x| < \frac{L}{2}, \text{ sinon } t_F(x) = 0.$$

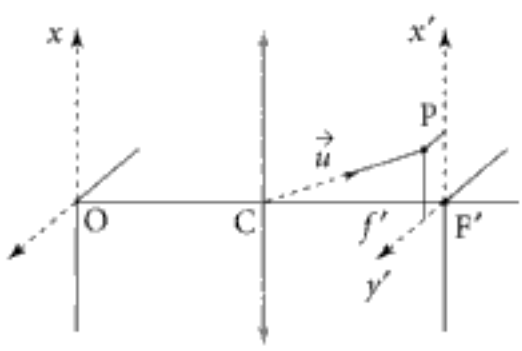
Le **principe de Huygens-Fresnel** donne ici (incidence normale) :

$$\mathscr{A}(\vec{u}) = K a_0 \iint t(x) e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}} \, dx\, dy.$$

Les rayons diffractés venant interférer au point P du plan focal F$'x'y'$ ont tous la direction $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{CP}}{CP} = (\alpha, \beta, \gamma)$ avec :

$\alpha \sim \dfrac{x'}{f'}$ et $\beta \sim \dfrac{y'}{f'}$ (au voisinage de F$'$).

Or la longueur de la pupille est suffisamment grande pour que les directions de diffraction soient contenues dans le plan de figure.



Copyrighted Material

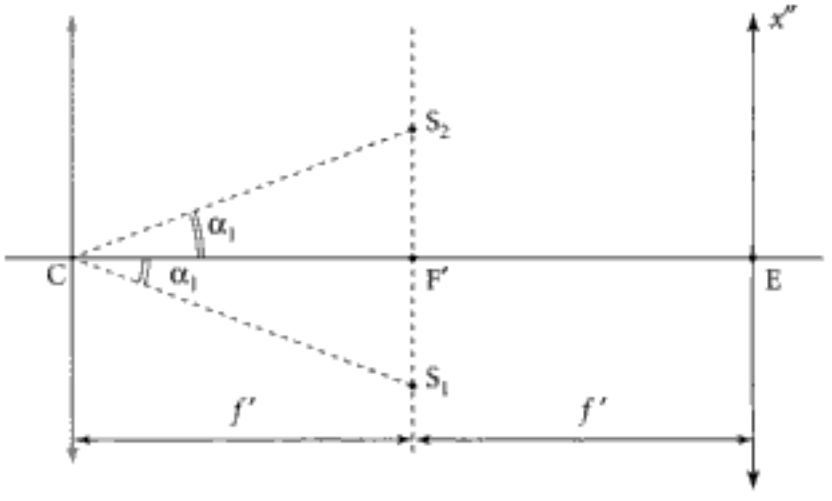
Hidden page

Hidden page

Commentaire

Le filtre revient à ne considérer que deux sources secondaires S_1 et S_2 cohérentes entre elles et telles que :

$$(CF', CS_2) = (CS_1, CF') = \frac{\lambda_0}{d}.$$



Ces deux sources donnent, à elles seules, une figure d'interférence sur l'axe $Ex''y''$ associée à la répartition d'intensité :

$$I(x'') = I_0(1 + \cos\Delta\phi) \text{ où } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{S_1S_2x''}{f'}.$$

Or :
$$S_1S_2 \# 2\alpha_1 f' = 2\frac{f'\lambda_0}{d} \rightarrow \Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{2}{d}x''$$

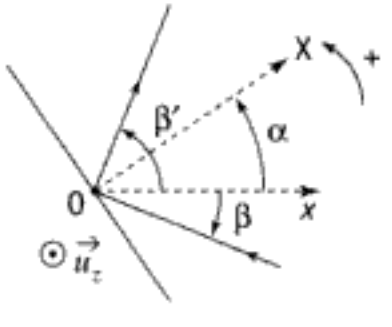
$$I(x'') = I_0\left(1 + \cos\left(2\pi \cdot \frac{2}{d}x''\right)\right)$$

(motif en intensité de période spatiale $\frac{d}{2}$).

204 Monochromateur

Un réseau plan comporte des « traits » parallèles à Oz, et le pas est $a = 2$ µm. Ce réseau est utilisé par réflexion, et il peut tourner autour de l'axe Oz (rotation repérée par l'angle α).

Il est éclairé par un faisceau de lumière parallèle blanche faisant l'angle β ($\beta < 0$) avec la direction Ox (direction normale au plan du réseau pour $\alpha = 0$). On règle l'angle β de telle manière que, pour $\alpha = 0$, on sélectionne la longueur d'onde $\lambda_0 = 600$ nm dans le spectre d'ordre « 2 » et dans la direction $\beta' = 0$.



1. a. Calculer la valeur de l'angle β.

Copyrighted material

Hidden page

la relation (1) impose alors :

$$0 + \sin\beta = -2\frac{\lambda_0}{a} \Rightarrow \boxed{\sin\beta = -2\frac{\lambda_0}{a}}$$

A.N. : $$\sin\beta = -\frac{2 \times 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = -0{,}6 \Rightarrow \boxed{\beta = -36{,}9°}$$

1. b. On sélectionne dans la direction $\beta' = 0$, β ayant la valeur obtenue précédemment. On a donc :

$$-\sin\alpha + \sin(\beta - \alpha) = -2\frac{\lambda}{a} \Rightarrow \alpha = \alpha(\lambda)$$

Soit encore : $$\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha = +\frac{\lambda}{\lambda_0}\sin\beta$$

Ou : $$\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha(1 + \cos\beta) = +\frac{\lambda}{\lambda_0}\sin\beta$$

Or : $$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad 1 + \cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2},$$

d'où :

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{\lambda}{\lambda_0}2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

et après simplification par $2\cos\frac{\beta}{2}$, il vient :

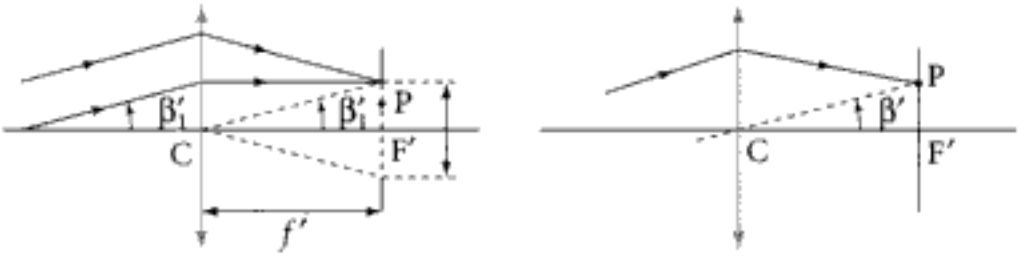
$$\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\lambda}{\lambda_0}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Soit : $$\boxed{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right) = \frac{\lambda}{\lambda_0}\sin\frac{\beta}{2}}$$

A.N. : • $\lambda_1 = \lambda_{min} = 400$ nm $\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 = -0{,}11$ rad ; $\alpha_1 = -6{,}26°$.

• $\lambda_2 = \lambda_{max} = 800$ nm $\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}11$ rad ; $\alpha_2 = +6{,}26°$.

2. Définissons les directions β' détectables.



En un point P de la fente, viennent converger les rayons diffractés dans la direction $\beta'(\beta' = \widehat{F'CP})$: propriété des points appartenant au plan focal de la lentille utilisée dans les conditions de Gauss.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

chapitre

1

Énergie et entropie

Copyrighted material

101 Compressions d'un gaz

Partie A

On fait subir à un kilogramme de gaz, contenu dans un cylindre muni d'un piston, une transformation isotherme réversible qui le fait passer de l'état $P_1 = 0{,}68$ atm, $T_1 = 422$ K à l'état $P_2 = 4{,}56$ atm. Préciser les échanges d'énergie nécessaires à la réalisation de cette transformation. Commenter les résultats obtenus.

	$P_1 = 0{,}68$ atm ; $T_1 = 422$ K	$P_2 = 4{,}56$ atm ; $T_1 = 422$ K
h	2 777	2 743
s	7,785	6,846
v	2,809	0,4035

h : enthalpie massique en $kJ \cdot kg^{-1}$; s : entropie massique $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; v : volume massique en $m^3 \cdot kg^{-1}$; 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

Partie B

Une masse de 1 kg de vapeur d'eau est contenue dans un cylindre muni d'un piston. L'état initial est fixé par : $P_0 = 2{,}04$ atm et $T_0 = 422$ K.

Après compression, on fait passer la vapeur d'eau à l'état :

$$P_f = 4{,}08 \text{ atm} \quad \text{et} \quad T_f = 533{,}6 \text{ K}.$$

1. On suppose le cylindre et le piston adiabatiques. Déterminer le travail qu'il a fallu fournir pour réaliser la transformation. Est-elle réversible ?

2. Envisager une suite de deux transformations réversibles, simples, subies par la vapeur qui conduiraient au même état final. Déterminer, dans chaque cas, les échanges d'énergie avec le milieu extérieur et comparer au cas précédent. On donne :

P(atm)	$v(m^3 \cdot kg^{-1})$	$h(kJ \cdot kg^{-1})$	$s(kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$	T(K)
2,04	1,0426	2 766	7,2853	422
4,08	0,5870	2 984	7,4013	533,2

1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

1. Ce qu'il faut savoir

- Premier et second principes de la thermodynamique.
- Utilisation des tables de valeurs.
- Réversibilité – irréversibilité.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. On reliera les travaux et énergies thermiques échangés aux variations des fonctions d'état. Dans le cadre de la réversibilité, le second principe se traduit par une égalité. On pourra vérifier que le gaz étudié ne peut pas être assimilé à un gaz parfait.

Copyrighted material

B. 1. La transformation envisagée est adiabatique. Elle s'accompagne cependant d'une variation d'entropie (*cf.* tables) ; elle est de ce fait irréversible.

2. On pourra envisager une évolution réversible à partir de transformations isentropiques et de transformations isothermes réversibles.

3. Solution

Partie A

Appliquons à la masse de gaz considérée (ici 1 kg) les premier et second principes.

■ **Premier principe** :

$u_2 - u_1 = W + Q$ (les énergies cinétiques macroscopiques sont nulles dans l'état initial et dans l'état final) où :

W ≡ travail mécanique fourni au gaz par l'intermédiaire du piston ; Q ≡ énergie thermique échangée avec le thermostat qui maintient la température constante (égale à T_1).

Or $H = U + PV$, soit pour l'**unité de masse** : $h = u + Pv$

et $u_2 - u_1 = (h_2 - h_1) - (P_2 v_2 - P_1 v_1)$.

Finalement, nous avons : $\boxed{(h_2 - h_1) - (P_2 v_2 - P_1 v_1) = W + Q}$

■ **Deuxième principe** :

Le système gaz échange l'énergie thermique Q avec le thermostat (température T_1). La transformation étant réversible, sa variation d'entropie est donnée par :

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{Q}{T_1} + 0 \text{ (absence de production : réversibilité).}$$

D'où $\boxed{Q = T_1(s_2 - s_1)}$

A.N. : il suffit de lire les valeurs de h, s et v dans les tables.

$Q = 422 \times (6{,}846 - 7{,}785) \Rightarrow \boxed{Q \# -369 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

$u_2 - u_1 = (2\,743 - 2\,777) - (4{,}56 \times 0{,}4035 - 0{,}68 \times 2{,}809) \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \times 10^{-3}$.

Le coefficient 10^{-3}, qui apparaît dans cette expression, est nécessaire si l'on veut exprimer le résultat en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Ce qui donne : $\boxed{u_2 - u_1 = -26{,}9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

D'où : $W = (u_2 - u_1) - Q \Rightarrow \boxed{W = 369 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

Commentaires

• Le gaz a subi une compression isotherme. Si le gaz était parfait, son énergie interne ne varierait pas (elle ne dépend alors que de la température : ainsi pour un gaz parfait monoatomique, on a $u = N\frac{3}{2}k_B T$, où N est le nombre d'atomes et k_B la constante de Boltzmann).

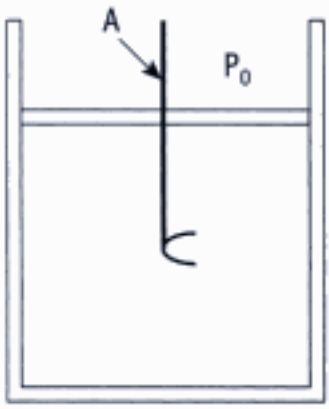
Pour un gaz parfait (GP) : $\boxed{W_{GP} = -Q_{GP}}$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

102 Transformation quasi statique irréversible



1. Un cylindre à parois adiabatiques est fermé par un piston idéal, également adiabatique. Il contient un gaz que l'on pourra assimiler à un gaz parfait (masse molaire M, coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = constante, $(C_p)_{molaire} - (C_v)_{molaire} = R$, $R = 8{,}31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$).
La pression extérieure est invariable et vaut $P_0 = 10^5$ Pa. La température initiale du gaz est $T_0 = 293$ K. On fait subir au gaz une transformation quasi statique, **isobare**, jusqu'à un état final de température $T_f = 353$ K.

Déterminer les échanges avec l'extérieur dans le cas où la transformation est réalisée à l'aide d'un agitateur A dont le mouvement est entretenu par un moteur. Commentaires. Pour les applications numériques, on prendra $\gamma = 1{,}4$ et $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg et on fera les calculs pour 1 kg de fluide.

2. Reprendre la question précédente dans le cas d'une transformation isobare réversible entre les mêmes états.

1. Ce qu'il faut savoir

- Réversibilité – irréversibilité.
- Premier et second principes de la thermodynamique.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La première transformation, bien qu'adiabatique quasi statique, n'est pas pour autant isentropique, elle est donc irréversible.

2. Le moteur n'agit plus sur l'agitateur A. Le volume occupé par le gaz évoluera à pression P_0 constante grâce à un apport (ici réversible) d'énergie thermique en provenance de sources thermiques extérieures au système. Ces sources (en nombre théoriquement infini) permettent de faire passer le gaz de la température initiale T_0 à la température finale T_f. Remarquons que dans les deux cas, les états initial et final sont les mêmes. Les variations d'énergie interne, d'enthalpie et d'entropie – caractéristiques de ces états – sont donc également les mêmes.

3. Solution

1.

Point méthode

Remarquons tout d'abord que les états initial et final sont connus si on se donne comme variables thermodynamiques la pression P, la température T et le volume massique v. En effet, P et T étant fixées, il vient :

Copyrighted material

$$PV = nRT \Rightarrow P\frac{V}{nM} = \frac{RT}{M} \quad \text{et} \quad Pv = \frac{RT}{M} \quad \text{où} \quad v = \frac{V}{nM}.$$

Il est alors possible de déterminer les variations d'énergie interne, d'enthalpie et d'entropie massiques du gaz (grandeurs notées u, h et s).

Le gaz supposé parfait passe de l'état (P_0, T_0) à l'état (P_0, T_f). On a donc dans cette transformation isobare : $\Delta u = C_{v_m}(T_f - T_0)$ et $\Delta h = C_{p_m}(T_f - T_0)$

$$\Delta s = C_{p_m} \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)$$

avec C_{v_m} et C_{p_m} capacités thermiques *massiques* à volume et pression constante.

Soit $C_{v_m} = \dfrac{(C_v)_{\text{molaire}}}{M}$ et $C_{p_m} = \dfrac{(C_p)_{\text{molaire}}}{M}$

$$\text{Or } \left.\begin{aligned} (C_p)_{\text{molaire}} - (C_v)_{\text{molaire}} &= R \\ \frac{C_p}{C_v} &= \gamma \end{aligned}\right\} \text{d'où } (C_p)_{\text{molaire}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}R \text{ et } (C_v)_{\text{molaire}} = \frac{1}{\gamma - 1}R.$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta u = \frac{R}{(\gamma - 1)M}(T_f - T_0) \; ; \; \Delta h = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\frac{R}{M}(T_f - T_0) \; ; \; \Delta s = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\frac{R}{M}\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)}$$

La transformation est isobare, adiabatique et quasi statique. Les états initial et final sont représentés par (P_0, T_0) et (P_0, T_f). Le travail, **par unité de masse**, fourni par les forces de pression est donné par :

$$W_p = -P_0(v_f - v_0), \text{ d'où } W_p = -\frac{R}{M}(T_f - T_0) \quad \left(P_0 v_f = \frac{R}{M}T_f \text{ et } P_0 v_0 = \frac{R}{M}T_0\right).$$

Considérons le système gaz + agitateur. Aucune énergie thermique n'est transférée au système $Q = 0$. D'autre part, le système reçoit un travail total $W_T = W_p + W_m$ où W_m représente le travail fourni par le moteur (par unité de masse de gaz).

Ce qui donne d'après le premier principe :

$$\Delta u = \underbrace{0}_{Q=0} + W_T = W_p + W_m$$

(on a réduit l'énergie interne du système à celle du gaz)

d'où : $\Delta u + P_0 v_f - P_0 v_0 = W_m \Rightarrow \Delta h = W_m$

et $$\boxed{W_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_f - T_0)}$$

A.N. : $\mathbf{Q = 0}$ et $\mathbf{W_m = 60{,}2\ kJ \cdot kg^{-1}}$.

L'application du second principe au système considéré fournit (l'entropie du système étant là aussi confondue avec celle du gaz) : $\Delta s = S_e + \sigma$

σ représente la création d'entropie. La transformation étant adiabatique, les échanges thermiques avec l'extérieur sont nuls et $S_e = 0$, d'où :

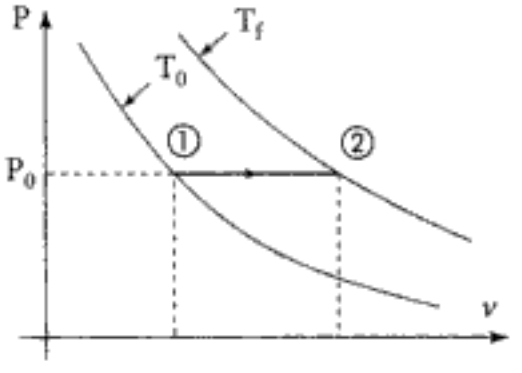
$$\boldsymbol{\sigma = \Delta s = 187\ J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}.$$

Copyrighted material

Commentaire

Il en résulte que la transformation isobare adiabatique quasi statique **n'est pas réversible** : l'ensemble (moteur plus agitateur) a « dégradé » de l'énergie électrique pour augmenter l'entropie du gaz.

2. Pour une transformation **isobare réversible**, le gaz reçoit l'énergie thermique Q_{rev} et le travail W_{rev}. À chaque instant, la pression du gaz est P_0 (piston de masse négligeable) et le travail fourni par les forces de pression est (pour l'unité de masse) :



$$W_p = -P_0\int_{v_0}^{v_f} dv;$$

soit $W_p = -P_0(v_f - v_0) = -\frac{R}{M}(T_f - T_0)$

(travail massique).

On peut imaginer que l'on met successivement le système en contact avec des sources thermiques, de températures infiniment voisines s'échelonnant entre T_0 et T_f, et que le seul travail « reçu » par le gaz est effectivement W_p.

Ainsi $\Delta u = W_p + Q_{rev} = -\frac{R}{M}(T_f - T_0) + Q_{rev}$

soit $Q_{rev} = C_{v_m}(T_f - T_0) + \frac{R}{M}(T_f - T_0) = C_{p_m}(T_f - T_0)$.

On a bien évidemment : $Q_{rev} = \Delta h$.

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{rev} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_f - T_0) \\ W_{rev} &= -\frac{R}{M}(T_f - T_0) \end{aligned}}$$

A.N. : $\mathbf{Q_{rev} = 60{,}2\ kJ \cdot kg^{-1}}$; $\mathbf{W_{rev} = -17{,}2\ kJ \cdot kg^{-1}}$.

La température finale T_f est supérieure à T_0, le gaz s'est donc dilaté et a fourni un travail positif à l'extérieur.

Commentaire

Dans cette transformation isobare réversible, une variation dT de la température du gaz s'accompagne d'une énergie thermique élémentaire reçue δQ, donnée par :

$$\delta Q = C_{p_m} dT = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M} dT.$$

On a donc d'après le second principe : $ds = \frac{\delta Q}{T} + \underbrace{0}_{\text{réversibilité}}$.

D'où : $ds = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\frac{dT}{T}$, puis par intégration :

$$\Delta s = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) \Rightarrow \Delta s = 187\ J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}.$$

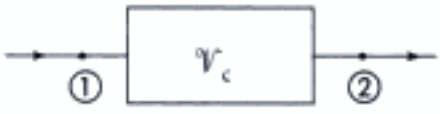
On retrouve bien le résultat établi plus haut.

Copyrighted material

Hidden page

3. Solution

1. Faisons des **bilans d'énergie et d'entropie** concernant le volume de contrôle $\mathcal{V}_c$, le gaz pénétrant dans $\mathcal{V}_c$ dans les conditions (T_1, P_1) et en ressortant dans les conditions (T_2, P_2).



POINT COURS

Soit une grandeur physique G (énergie interne U, enthalpie H ou entropie S) et g la grandeur massique associée à G ($G = mg$).

Considérons le système particulaire constitué du gaz contenu à l'instant t dans le volume $\mathcal{V}_c$ et de la masse δm_1 qui va entrer dans $\mathcal{V}_c$ entre les instants t et $t + dt$ (dans l'état P_1, T_1...). Ce système devient à $t + dt$ le volume $\mathcal{V}_c$ auquel on doit ajouter la masse δm_2 sortant de $\mathcal{V}_c$ (entre t et $t + dt$) dans les conditions P_2, T_2...

Le régime étant stationnaire, on a : $\delta m_1 = \delta m_2 = D_m dt$ (D_m = débit massique).

De plus $G(t) = G^*(t) + \delta m_1 g_1$ (G^* **associé à** $\mathcal{V}_c$)

$$G(t + dt) = G^*(t + dt) + \delta m_2 g_2$$

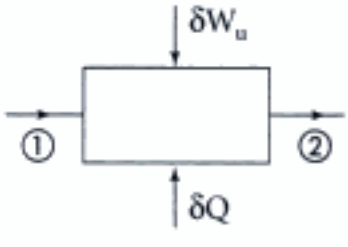
et $$\frac{DG}{Dt} = \lim_{dt \to 0}\left(\frac{G(t + dt) - G(t)}{dt}\right).$$

Or $G^*(t + dt) = G^*(t)$ **(régime stationnaire), d'où :**

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\delta m_2}{dt} g_2 - \frac{\delta m_1}{dt} g_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{DG}{Dt} = D_m(g_2 - g_1)} \quad (1)$$

■ **Bilan d'enthalpie (G = H) :** si on néglige toute variation d'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie, le premier principe s'exprime sous la forme :

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\delta W_u}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}.$$



Or ici $\delta Q = 0$ (adiabatique) et $\delta W_u = 0$ (aucun échange d'énergie avec l'extérieur – autre que celui des forces de pression en amont et en aval, travaux contenus dans H) d'où $\frac{DH}{Dt} = 0$ et d'après (1) : $D_m \cdot (h_2 - h_1) = 0$.

La détente de Joule-Thomson se caractérise donc par $h_1 = h_2$, soit :

$$h(T_1, P_1) = h(T_2, P_2) \quad (2)$$

Or, pour un gaz parfait, h ne dépend que de la température T, ce qui impose $T_1 = T_2$.

■ **Bilan entropique (G = S) :**

Le second principe s'écrit : $$\frac{DS}{Dt} = \underbrace{0}_{\text{système thermiquement isolé}} + \underbrace{\frac{\delta\sigma}{dt}}_{\text{création d'entropie par unité de temps}}$$

d'où d'après (1) : $\frac{\delta\sigma}{dt} = D_m \cdot (s_2 - s_1) \Rightarrow \frac{\delta\sigma}{dt} = D_m \cdot (s(T_2, P_2) - s(T_1, P_1))$.

Or la création d'entropie par unité de masse est égale au rapport : création d'entropie par unité de temps sur débit massique (D_m).

Copyrighted material

Hidden page

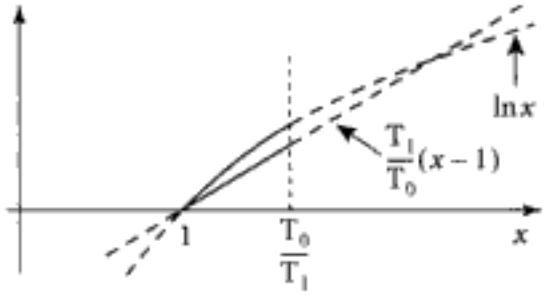
Cette étude recouvre le cas des **échangeurs de chaleur** pour lesquels la température « extérieure » est fixée (par exemple, système diphasé…). Pour des échangeurs isobares ($P_1 = P_2$), la création d'entropie massique se réduit à :

$$\sigma_m = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\left[\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{1}{T_0}(T_2 - T_1)\right].$$

Commentaires

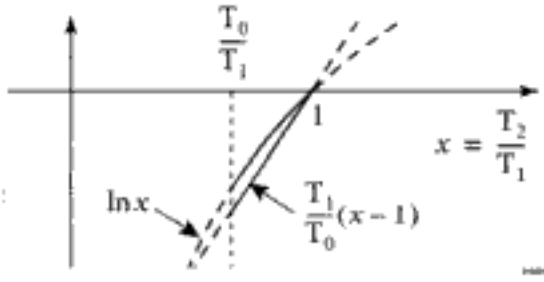
Pour un écoulement isobare, on a donc $\sigma_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\left[\ln x - \frac{T_1}{T_0}(x-1)\right]$ en posant $x = \frac{T_2}{T_1}$.

• Pour $T_0 > T_1$, on a représenté, sur la figure ci-contre, les courbes $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{T_1}{T_0}(x-1)$: on a bien $\sigma_m > 0$ pour $T_1 < T_2 \leqslant T_0$ ($\sigma_m(x = 1) = 0$ et $\frac{d\sigma_m}{dT_2} = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M} \cdot \frac{T_0 - T_2}{T_2 T_0}$)

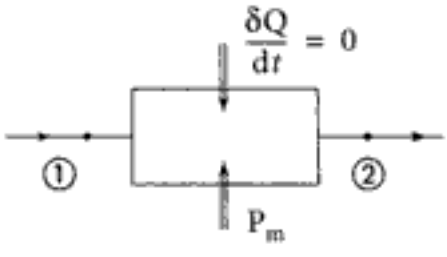


et σ_m est maximal pour une température limite susceptible d'être atteinte par le gaz égale à T_0.

• Pour $T_0 < T_1$, σ_m est effectivement positif pour $T_0 \leqslant T_2 < T_1$ avec σ_m maximal pour une température limite se confondant avec T_0.



3. Cette fois-ci, le fluide reçoit du travail de l'extérieur, et le système est thermiquement isolé.



■ **Bilan d'énergie :**

$$\frac{DH}{Dt} = P_u + 0 = D_m \cdot [h(T_2, P_2) - h(T_1, P_1)]$$

P_u est la puissance mécanique « reçue » (elle est effectivement reçue pour $P_u > 0$).

Remarquons que la puissance mécanique massique P_m s'identifie au rapport $\frac{P_u}{D_m}$, d'où :

$$P_m = h(T_2, P_2) - h(T_1, P_1).$$

Et pour un gaz parfait de masse molaire M et de coefficient $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$:

$$\boxed{P_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_2 - T_1)} \quad (1)$$

■ **Bilan d'entropie :**

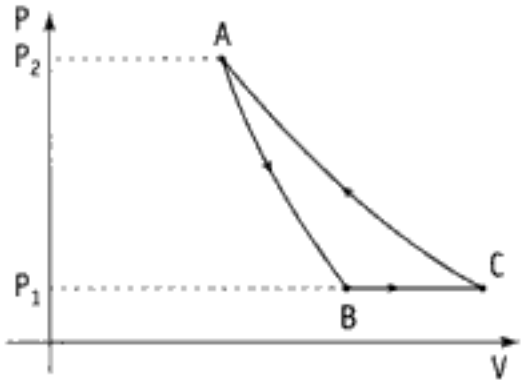
$$\frac{DS}{Dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{absence d'échanges thermiques} \\ \text{avec l'extérieur}}}{0} + \frac{\delta\sigma}{dt}.$$

Copyrighted material

Hidden page

104 Cycle à trois transformations

Le cycle représenté ci-contre est constitué de trois transformations réversibles :
– une adiabatique,
– une isotherme,
– une isobare.
Le fluide décrivant ce cycle est un gaz parfait dont on supposera le coefficient $\gamma \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$ constant.



1. Montrer que ce cycle peut être associé à une machine thermique du type « pompe à chaleur ».

2. a. Pour ce type de fonctionnement, déterminer, en fonction des températures T_A et T_B, l'efficacité η de la machine. *A.N.* : calculer η pour $T_A = 450$ K et $T_B = 300$ K.

b. Comparer à une machine de Carnot travaillant avec des sources thermiques de températures T_A et T_B et fonctionnant en pompe à chaleur ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Cycle thermique.
- Pompe à chaleur : efficacité.
- Pentes de l'isotherme et de l'isentropique dans le diagramme P(V).
- Premier principe.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. • On distinguera l'isentropique de l'isotherme en comparant les pentes des deux courbes au point A. On vérifiera également que le cycle est « résistant » (il faut fournir du travail mécanique au fluide), et que de l'énergie thermique est transférée à la « source chaude » lors de la transformation isotherme C → A.

• Pendant la phase B → C, la température du gaz évolue continûment (de T_B à $T_C = T_A$) à pression constante P_1. Une telle transformation ne peut être réversible que si le gaz est successivement mis en contact avec un nombre très grand (théoriquement infini) de sources thermiques dont les températures s'échelonnent de T_B à T_A.

2. L'efficacité est définie par le rapport de la grandeur énergétique utile (ici $-Q_{CA}$, si Q_{CA} désigne l'énergie thermique « reçue » par le gaz de la part de la source chaude) à la grandeur énergétique non « gratuite » (ici le travail W fourni à la machine).

3. Solution

1. ■ Le cycle comprend trois transformations, l'isobare B → C, une isotherme et une isentropique (adiabatique réversible).

Une isotherme associée au gaz parfait admet pour équation : $PV = \text{cste}$ (1)

Copyrighted material

Soit une pente $\left(\frac{dP}{dV}\right)_T$ au point A du diagramme de Clapeyron, donnée à partir de (1) par :

$$VdP + PdV = 0 \Rightarrow \left(\frac{dP}{dV}\right)_T(A) = -\frac{P_A}{V_A}.$$

De même, pour une isentropique avec $\gamma = \text{cste}$, on a :

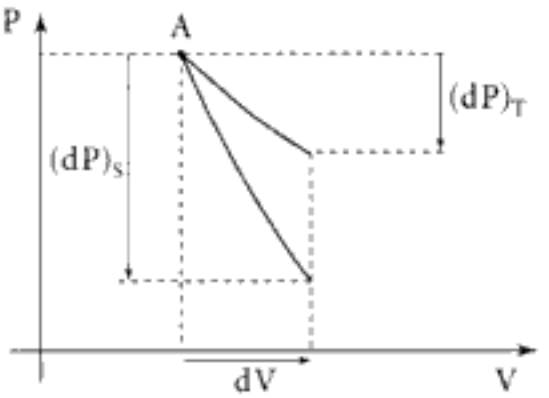
$$PV^\gamma = \text{cste} \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0 \text{ (différentielle logarithmique)}$$

et donc $\left(\frac{dP}{dV}\right)_S(A) = -\gamma\frac{P_A}{V_A}.$

Or $\gamma > 1$, on a donc :

$|(dP)_S| > |(dP)_T|$.

Il en résulte que la transformation $A \to B$ est l'isentropique, et la transformation $C \to A$ l'isotherme.



■ D'autre part, le cycle est décrit dans le sens trigonométrique. Il n'est donc pas moteur. Le travail W échangé avec l'extérieur est bien reçu par le fluide décrivant le cycle.

■ **Échanges thermiques :**

– Pendant la phase AB, aucune énergie thermique n'est échangée avec l'extérieur. Le gaz y subit une détente isentropique. Sa pression diminuant, il en est de même de sa température. On a donc $T_B < T_A$.

Commentaire

On a $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ le long de $A \to B$, soit encore :

$$P_A^{1-\gamma}T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma}T_B^\gamma \Rightarrow T_B = T_A\left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

$P_B < P_A$ entraine bien $T_B < T_A$.

– Pour la transformation $B \to C$ (détente isobare du gaz), on aura :

$$Q_{BC} = \Delta H = H_C - H_B = nC_p(T_C - T_B) = nC_p(T_A - T_B)$$

(n représente le nombre de moles). Or $T_A > T_B$ implique $Q_{BC} > 0$, et durant la phase $B \to C$, le gaz absorbe de l'énergie thermique.

Commentaire

La réversibilité de la transformation BC implique que le gaz soit mis en contact avec une « multitude » de sources thermiques dont les températures s'échelonnent entre les valeurs T_A et T_B. Il en résulte une variation d'entropie de ce gaz donnée par :

$$\Delta S(B \to C) = nC_p\ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = nC_p\ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) > 0$$

et une variation d'entropie opposée de l'ensemble des sources…

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

105 « Turbopropulseur »

Une machine thermique est constituée d'un compresseur, d'une turbine et de deux échangeurs d'énergie thermique.

• Le fluide subit une détente isentropique dans la turbine, et le travail ainsi récupéré est utilisé d'une part pour faire fonctionner le compresseur, d'autre part comme travail disponible à l'extérieur.

Les températures du fluide en entrée et sortie de la turbine sont T_3 et T_4.

• Le compresseur fonctionne de façon isentropique, l'état du fluide passant de (P_1, T_1) à (P_2, T_2). On note $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ le taux de compression.

• Les échangeurs d'énergie thermique sont isobares.

1. Représenter sur un schéma le fonctionnement de cette machine en y précisant les échanges énergétiques.

Tracer le cycle suivi par le fluide, en diagramme de Clapeyron (P, V), puis en diagramme (S, T), S désignant l'entropie d'une quantité donnée de fluide.

2. On suppose que le fluide reste à l'état gazeux durant tout le cycle et qu'il peut être assimilé à un gaz parfait.

Exprimer l'efficacité η de la machine en fonction de τ et de γ ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = constante).

3. On fixe les températures T_1 et T_3 à l'entrée du compresseur et de la turbine.

Pour quelle valeur τ_m du taux de compression τ le travail produit par la machine est-il maximal ? Quelle est alors la valeur du coefficient d'efficacité η ? Commenter.

A.N. : on donne $T_1 = 293$ K ; $P_1 = 1$ atm ; $T_3 = 773$ K. Déterminer la valeur de τ_m, de la température T_2 correspondante et du coefficient η. On prend $\gamma = 1{,}4$.

1. Ce qu'il faut savoir

• Transformation isentropique d'un gaz parfait.

• Transformation isobare.

• Machines thermiques – Efficacité.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On vérifiera que le fluide traverse successivement le compresseur (travail nécessaire prélevé sur la turbine), un échangeur thermique où il s'échauffe, la turbine (qui fournit du travail à l'extérieur et au compresseur) et un deuxième échangeur thermique où il se refroidit.

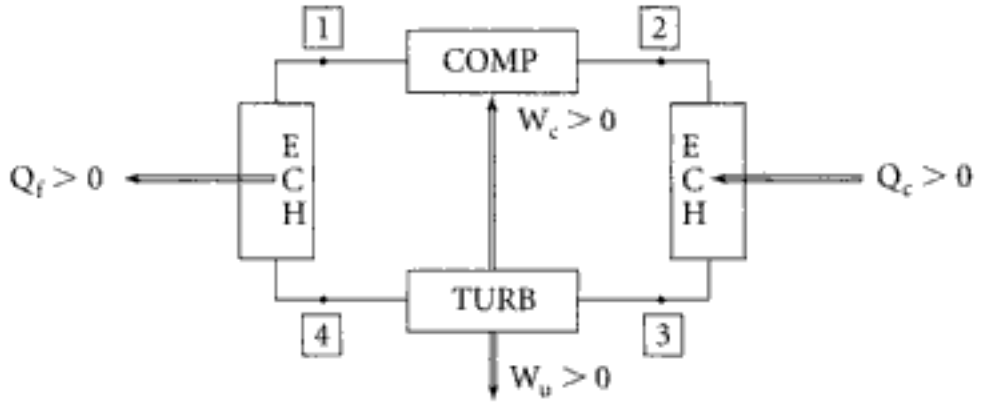
2. Le système proposé constitue un moteur thermique. La grandeur utile est le travail W_u disponible à l'extérieur.

3. À T_1 et T_3 fixées, le travail utile W_u devient une fonction de T_2. Le travail maximal récupéré ne correspond pas à une valeur maximale du coefficient d'efficacité η.

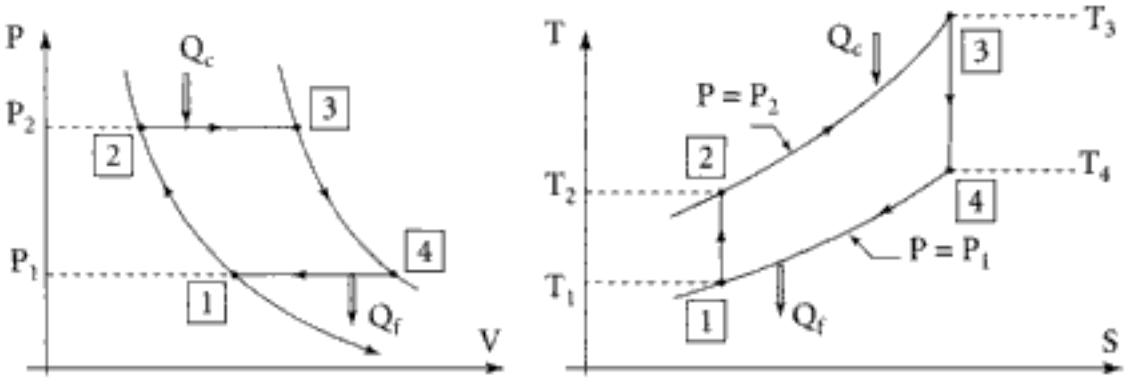
Copyrighted material

Hidden page

D'où le schéma de l'installation :



Donnons les représentations du cycle (dit cycle de Joule) suivi par le fluide :



Commentaire

Dans le cas d'un gaz parfait, les équations des isentropiques $\boxed{3} \rightarrow \boxed{4}$ et $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$ sont du type $PV^{\gamma} = \text{cste}$ dans le diagramme P(V), alors que les équations des isobares $\boxed{2} \rightarrow \boxed{3}$ et $\boxed{4} \rightarrow \boxed{1}$ sont données par $S = C_p \ln T + \text{cste}$ dans le diagramme T(S) (et pour $C_p = \text{cste}\ldots$).

D'après le premier principe, pour une quantité donnée de fluide « recevant » globalement, au cours d'un cycle, le travail $-W_u$ et l'énergie thermique $Q_c - Q_f$:

$$\Delta U = 0 = -W_u + Q_c - Q_f, \quad \text{d'où} \quad W_u = Q_c - Q_f$$

et : $\eta = \dfrac{W_u}{Q_c}$ $\qquad \eta = \dfrac{Q_c - Q_f}{Q_c} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \dfrac{Q_f}{Q_c}}$

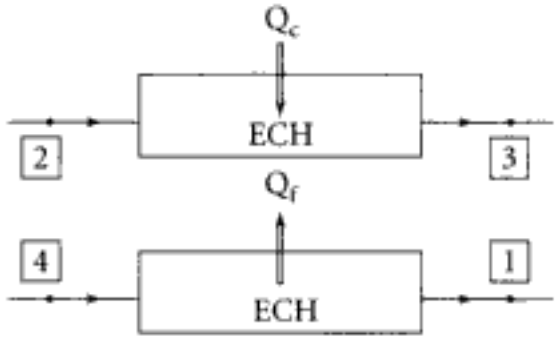
Raisonnons alors sur l'unité de masse du fluide.

Dans les échangeurs isobares, pour une masse unité débitée, nous avons :

$$Q_c = h_3 - h_2$$

et

$$-Q_f = h_1 - h_4$$



Copyrighted material

D'où : $$\eta = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2}.$$

Les h_i représentent les enthalpies massiques associées aux états $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$.

Or pour un gaz parfait : $\left| \begin{array}{l} h_4 - h_1 = C_{p_m}(T_4 - T_1) \\ h_3 - h_2 = C_{p_m}(T_3 - T_2). \end{array} \right.$

Soit : $\eta = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$

Il reste à traduire que les transformations $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$ et $\boxed{3} \rightarrow \boxed{4}$ sont isentropiques :

$$P_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$P_2^{1-\gamma} T_3^{\gamma} = P_1^{1-\gamma} T_4^{\gamma} \Rightarrow \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (P_3 = P_2 \text{ et } P_4 = P_1).$$

D'où $$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \tau^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}.$$

Soit un coefficient d'efficacité η défini par : $\boxed{\eta = 1 - \tau^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}}$

Cette efficacité est d'autant plus grande (c'est-à-dire proche de l'unité) que le taux de compression τ est élevé (mais T_2 augmente également…).

2. On a fixé les températures T_1 et T_3. Le travail utile récupérable est : $W_u = Q_c - Q_f$ (*cf.* **2.**) soit pour l'unité de masse de fluide :

$W_u = (h_3 - h_2) + (h_1 - h_4) = C_{p_m}[T_3 - T_2 + T_1 - T_4]$ avec de plus $T_1 T_3 = T_2 T_4$.

W_u apparaît alors comme une fonction de T_2 puisque T_1 et T_3 sont imposées :

$$W_u = C_{p_m}\left[(T_1 + T_3) - T_2 - \frac{T_1 T_3}{T_2}\right].$$

Dérivons cette expression par rapport à T_2 : $\dfrac{dW_u}{dT_2} = -C_{p_m}\left[1 - \dfrac{T_1 T_3}{T_2^2}\right].$

Elle s'annule pour $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$ et donc $T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$. Le travail W_u produit par la machine est alors maximal (dérivée positive pour $T_2 < \sqrt{T_1 T_3}$ et négative pour $T_2 > \sqrt{T_1 T_3}$). Il correspond un taux de compression τ_m tel que :

$$\tau_m = \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} \Rightarrow \boxed{\tau_m = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}$$

et un coefficient d'efficacité : $\eta = 1 - \tau_m^{-\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \sqrt{\dfrac{T_1}{T_3}}}$

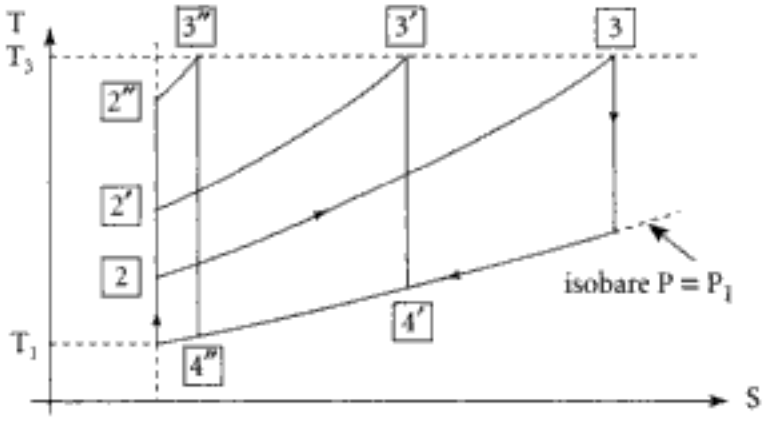
A.N. : $\tau_m = \left(\dfrac{773}{293}\right)^{\frac{1,4}{0,8}} \Rightarrow \boldsymbol{\tau_m = 5,46}$; $\eta = 1 - \sqrt{\dfrac{293}{773}} \Rightarrow \boldsymbol{\eta = 0,38}$;

$T_1 = \sqrt{773 \times 293} \Rightarrow \mathbf{T_2 = 476\ K}$.

Copyrighted material

Commentaire

Le rendement du cycle peut s'exprimer sous la forme $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ (*cf.* **2.**). Représentons différents cycles dans le diagramme (T, S) pour des températures T_1 et T_3 fixées, une pression P_1 donnée, et différentes valeurs de P_2 c'est-à-dire de T_2 :



L'efficacité est maximale pour T_2 la plus grande possible, soit $T_2 = T_3$ $\left(\eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_3}\right)$. Dans une telle situation limite, le travail récupéré, qui est représenté par l'aire du cycle devient nul. Réciproquement, le travail maximal ne correspond pas à l'efficacité optimale.

Copyrighted material

chapitre

2

Diffusion thermique

Copyrighted material

201 « Isolation » d'une conduite

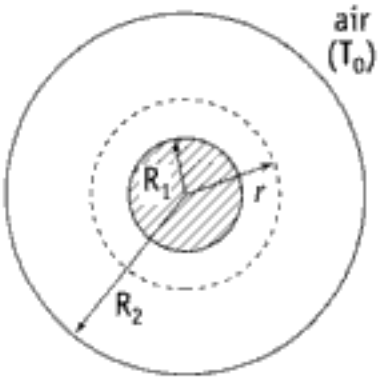
Partie A

On considère deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).

Elles sont maintenues à des températures constantes T_1 et T_2. Le milieu solide les séparant est homogène, isotrope et présente une conductivité thermique K indépendante de la température. On suppose qu'il y a continuité de la température aux interfaces sphères-milieu solide. Déterminer la puissance thermique P_{th} transférée, en régime permanent, de la sphère intérieure vers la sphère extérieure.

Partie B

Un tube cylindrique de rayon R_1 (conduite d'eau chaude, fil électrique) est entouré d'un manchon (rayon intérieur R_1, rayon extérieur R_2, conductivité thermique λ) qui « l'isole » du milieu extérieur (ici l'air à la température constante T_0).



Les échanges thermiques entre la surface du tube et l'isolant sont caractérisés par un coefficient de transfert h : la puissance thermique échangée par unité de surface est donnée par l'expression $h(T_1 - T_1')$ où T_1 représente la température du tube en $r = R_1^-$ et T_1' celle de l'isolant au « contact » en R_1^+.

De même, les échanges thermiques isolant/air sont associés à un coefficient h'.

1. Déterminer la puissance thermique ϕ_{th} échangée, en régime permanent, entre le tube et l'air. On supposera que la température ne dépend que de r, distance à l'axe, et on exprimera ϕ_{th} en fonction de $T_1 - T_0$. Interpréter le résultat obtenu.

2. Étudier les variations de ϕ_{th} avec R_2, à R_1, h', λ, T_1 et T_0 donnés et pour h « infini » (contact parfait). Quelles remarques vous suggèrent ces résultats ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Transport d'énergie thermique par conduction : loi de Fourier.
- Notion de résistance thermique.
- Échange d'énergie thermique en surface.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. On exploitera la symétrie sphérique (les grandeurs ne dépendent que de r) et la stationnarité (le régime étant indépendant du temps, il ne peut pas y avoir accumulation ou déperdition d'énergie thermique au sein du matériau).

B. On passe d'une géométrie sphérique (A) à une géométrie cylindrique. Les principes restent les mêmes, les contacts entre les différents milieux étant ici non parfaits (il y a, aux interfaces, continuité du flux thermique mais pas des températures).

Copyrighted material

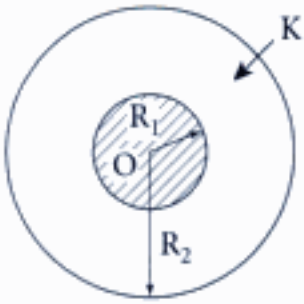
3. Solution

Partie A

Le régime stationnaire $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ et la symétrie sphérique impliquent :

$$T = T(r) \text{ avec } \begin{cases} T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2. \end{cases}$$

La stationnarité ne peut s'obtenir ici que si le flux thermique traversant une sphère de rayon r (avec $R_1 < r < R_2$) ne dépend pas de r.



Point méthode

Il est plus simple ici de passer par la propriété de conservation du flux thermique à travers un tube de courant (régime stationnaire) que de vouloir résoudre l'équation de la chaleur :

$$\Delta T = D_{th}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

avec une formulation hypothétique du Laplacien en coordonnées sphériques…

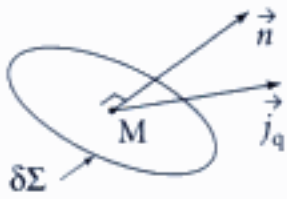
Si $\vec{j}_q$ désigne le vecteur densité volumique de courant d'énergie thermique, nous avons, dans un milieu isotrope homogène :

• $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T$ (loi de Fourier)

le coefficient de conductivité thermique K peut dépendre *a priori* de la température T, on le supposera constant sur les intervalles de température considérés.

• L'énergie thermique qui traverse, pendant l'intervalle de temps dt, l'élément de surface $\delta\Sigma$, centré en M vaut :

$$\delta^2 Q = \vec{j}_q \cdot \vec{n}\,\delta\Sigma dt.$$



Il lui correspond un flux thermique :

$$\delta\phi_{th} = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_q \cdot \vec{n}\,\delta\Sigma$$

Ici, étant donnée la symétrie sphérique, nous avons : $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T = -K\frac{dT}{dr}\vec{u}$.

Soit un flux thermique à travers la sphère de centre O, de rayon r et de surface $S(r) = 4\pi r^2$:

$$\phi_{th}^{\text{sphère}} = -K\frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 = \text{cste} = P_{th}.$$

Cette constante s'identifie à la puissance thermique P_{th} émise par la sphère de rayon R_1 (pour $T_1 > T_2$) et reçue par la sphère de rayon R_2.

D'où : $-K\frac{dT}{dt} \cdot 4\pi r^2 = P_{th}$ et $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{4\pi K r^2}$.

© Copyrighted material

Soit, en intégrant l'expression précédente entre $r = R_1$ et $r = R_2$:

$$\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{dT}{dr}\right)dr = -\frac{P_{th}}{4\pi K}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

d'où $\quad T(R_2) - T(R_1) = \dfrac{P_{th}}{4\pi K}\left[\dfrac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}; \quad T_2 - T_1 = \dfrac{P_{th}}{4\pi K}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

soit encore : $\quad T_1 - T_2 = P_{th}\dfrac{1}{4\pi K}\dfrac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \quad (1)$

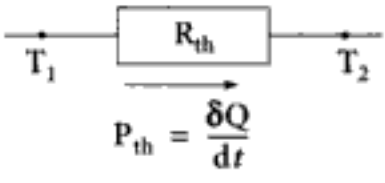
Soit un flux d'énergie thermique :

$$\boxed{P_{th} = 4\pi K\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)} \quad (2)$$

POINT COURS

La relation (1) permet de définir une résistance thermique R_{th} telle que :

$T_1 - T_2 = R_{th}\dfrac{\delta Q}{dt}$

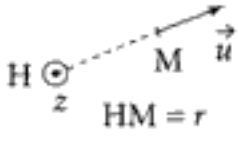


Ici, nous avons : $R_{th} = \dfrac{1}{4\pi K}\dfrac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$.

Cette expression est évidemment analogue à celle de la résistance électrique d'un milieu de conductivité électrique γ, placé entre deux électrodes sphériques concentriques de rayons R_1 et R_2 ($K \leftrightarrow \gamma$)...

Partie B

B. 1. Le système est à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, on a donc en coordonnées cylindriques de même axe :



$$T = T(r) \quad \text{et} \quad \vec{j}_q = -K\frac{dT}{dr}\vec{u}.$$

Le flux d'énergie thermique ϕ_{th} traversant le cylindre de longueur l et de rayon r ($R_1 < r < R_2$) est donné par l'expression :

$$\phi_{th} = \int \vec{j}_q \cdot \vec{n}_{ext}\delta\Sigma = -\lambda\frac{dT}{dr}2\pi r l \quad (3)$$

Cette quantité ne doit pas dépendre de r puisqu'il ne peut y avoir, en régime permanent, ni dissipation ni accumulation d'énergie thermique dans le matériau. Il est alors possible d'intégrer la relation (3) pour obtenir la répartition de température dans l'isolant. Ainsi :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\frac{1}{r} \quad \text{et} \quad T(r) = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + \text{cste}.$$

D'après l'énoncé, on note $T_1' = T(R_1^+)$, d'où cste $= T_1'$ et :

$$\boxed{T(R_1 < r < R_2) = T_1' - \frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda l}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)} \quad (4)$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

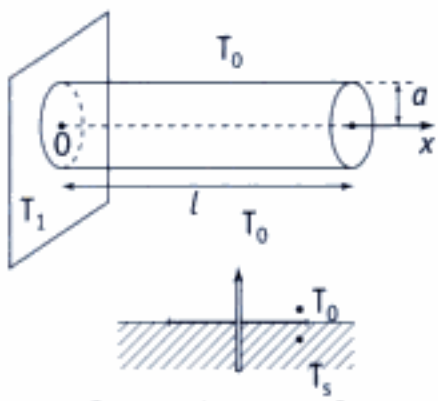
Commentaire

Ces résultats s'expliquent par des variations en sens contraire des résistances thermiques de conduction $(R_{th})_2$ et de convection $(R_{th})_3$. Ainsi $(R_{th})_2$ augmente en même temps que R_2 (l'épaisseur traversée étant plus importante), alors que $(R_{th})_3$ diminue quand R_2, c'est-à-dire la surface extérieure, croît.

202 Régulation thermique par ailette

Pour maintenir une plaque plane à température T_1 constante, on cherche à évacuer de l'énergie thermique par l'intermédiaire d'une barre cylindrique (longueur l, rayon a), constituée d'un matériau présentant une conductivité thermique K'.

Les échanges thermiques avec l'air ambiant (de température T_0) s'effectuent à travers l'interface solide-air et se caractérisent par une puissance thermique surfacique égale à $h(T_s - T_0)$ où T_s représente la température de surface au point considéré.



$\delta\phi_{th} = h(T_s - T_0)\delta\Sigma$

On fait les hypothèses suivantes :

hyp. 1 : la température est uniforme sur une section donnée du cylindre ;

hyp. 2 : on assimile la barre à un cylindre de longueur infinie ;

hyp. 3 : l'étude est faite en régime stationnaire ;

hyp. 4 : le contact thermique entre la plaque et la barre est supposé parfait.

On note $\lambda = \sqrt{\dfrac{K'a}{2h}}$.

1. Donner la dimension de la grandeur λ.

2. Justifier les hypothèses 1 et 2.

3. a. Déterminer la répartition de température $T(x)$ au sein de la barre.

b. Évaluer l'efficacité η du système. On supposera que les échanges thermiques pour l'interface plaque-air sont de même nature que ceux relatifs à l'interface barre-air (même coefficient h).

A.N. : calculer η pour $K' = 300\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$; $h = 15\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ et $a = 1$ mm.

1. Ce qu'il faut savoir

- Conduction thermique : loi de Fourier.
- Échanges thermiques en surface.
- Équations et estimation des ordres de grandeur.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On pourra utiliser les relations physiques (flux thermiques) faisant intervenir les grandeurs K′ et h.

2. On posera $T(x, r = a) - T(x, r = 0) = \delta T$ puis on comparera δT à $T - T_0$ dans l'hypothèse retenue ici où $|\delta T| \ll |T - T_0|$.

Pour l'hypothèse 2, il suffit normalement de comparer la longueur l de la barre à la longueur caractéristique du problème physique (qu'il faudra identifier à λ).

3. a. Un simple bilan énergétique (premier principe) – relatif à un élément de barre de longueur dx – permet d'établir l'équation en $T(x)$. On l'intégrera dans le cadre d'une barre théoriquement infinie.

b. L'efficacité sera définie comme le rapport des flux thermiques « prélevés » à la plaque, avec ou sans barre, et pour une surface S donnée de cette plaque.

3. Solution

1. On a $\lambda^2 = \dfrac{K'a}{2h}$ soit en notant [G] la dimension d'une grandeur G, avec [G] = L pour une longueur, [G] = M pour une masse, [G] = T′ pour un temps… : $[\lambda^2] = \dfrac{[K'][a]}{[h]}$.

Or $\phi_{th} = j_q \cdot S = -K'\dfrac{\partial T}{\partial x}S \Rightarrow [\phi_{th}] = [K']\dfrac{[T]}{L}L^2 = [K'][T]L$

de même : $\phi_{th} = h(T_1 - T_2) \cdot \Sigma \Rightarrow [\phi_{th}] = [h][T] \cdot L^2$. Nous obtenons donc :

$$\left.\begin{aligned} [K'] \cdot [T] &= \frac{[\phi_{th}]}{L} \\ [h][T] &= \frac{[\phi_{th}]}{L^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{[K']}{[h]} = L \Rightarrow \frac{[K'] \cdot [a]}{[h]} = L \cdot L = L^2.$$

On a donc $[\lambda^2] = L^2$, d'où : $[\boldsymbol{\lambda}] = \mathbf{L}$. La grandeur λ est homogène à une longueur. Elle s'identifiera à la longueur caractéristique régissant le problème physique étudié.

2. ■ Hyp. 1 : la température est « uniforme » sur une section donnée

Repérons un point M, au sein de la barre, par ses coordonnées cylindriques (x, r). On pourra négliger les variations de température avec r devant celles avec x si l'on a :

$$\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right| \ll \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \quad (1)$$

Or par symétrie, $\dfrac{\partial T}{\partial r}(r = 0) = 0$. D'autre part, la continuité du flux thermique à la surface de la barre s'écrit, pour une surface élémentaire $\delta\Sigma = 2\pi a dx$:

$$-K'\frac{\partial T}{\partial r}\bigg)_{r=a} \delta\Sigma = h[T(r = a) - T_0] \cdot \delta\Sigma \quad (2)$$

Copyrighted material

Écrivons $T(r = a) = T(r = 0) + \delta T$ où l'on suppose $|\delta T| \ll T(r = 0)$.

(2) s'écrit alors au niveau des ordres de grandeur :

$$K'\frac{|\delta T|}{a} \sim h(T - T_0) \quad \text{où} \quad T \sim T(r = 0) \sim T(r = a).$$

L'approximation est d'autant mieux justifiée que $|\delta T|$ est petit devant $T - T_0$. Soit

$$\frac{|\delta T|}{T - T_0} = \frac{ha}{K'} \ll 1.$$

La condition cherchée s'écrit donc : $\boxed{\dfrac{ha}{K'} \ll 1}$ (3)

$$K' = 300\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}\ ; \quad h = 15\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}.$$

D'où $$a \ll \frac{300}{15} \Rightarrow a \ll 20\ \mathrm{m}\ !$$

Ce qui justifie l'approximation faite (notons que cette étude n'a de sens que si la dimension transversale reste suffisamment petite devant la longueur l de la barre : *cf.* suite).

Commentaire

Notons λ la longueur caractéristique associée aux variations de la température en fonction de x, alors :

$$\left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \sim \frac{T - T_0}{\lambda}.$$

L'inégalité (1) devient avec (2) : $\dfrac{(T - T_0)}{\lambda} \gg \dfrac{h}{K'}(T - T_0) \Rightarrow \lambda \ll \dfrac{K'}{h}$ (4)

Le bilan énergétique se traduira par l'équation différentielle : $K'\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\pi a^2 = h(T - T_0)2\pi a$.

D'où l'on tire : $K'\dfrac{(T - T_0)}{\lambda^2}a^2 \sim h(T - T_0)a$. Soit $\dfrac{K'a}{\lambda^2} \sim h$, et l'inégalité (4) devient :

$$\sqrt{\frac{K'a}{h}} \ll \frac{K'}{h} \quad \text{d'où} \quad \boxed{a \ll \frac{K'}{h}} \ \text{(en accord avec (3))}$$

■ Hyp. 2 : on assimile la barre à un cylindre de longueur infinie

La barre peut être assimilée à une barre infinie lorsque sa longueur est grande devant la longueur caractéristique λ introduite plus haut (*cf.* commentaire) et dont l'ordre de grandeur est donné par $\lambda \sim \sqrt{\dfrac{K'a}{h}}$.

Soit $l \gg \sqrt{\dfrac{K'a}{h}}$ (5)

Commentaires

• Remarquons qu'alors $\dfrac{l}{a} \gg \sqrt{\dfrac{K'}{ha}}$, soit avec (3), $\dfrac{l}{a} \gg 1$ comme il se doit.

Copyrighted material

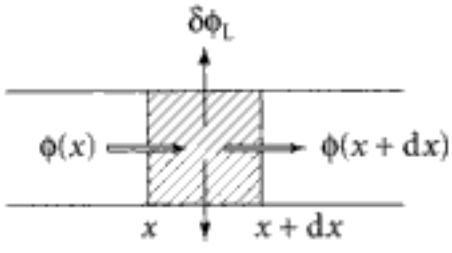
• Le résultat (5) est physiquement cohérent puisque l doit être d'autant plus grand que la conductivité thermique de la barre est importante et que les « fuites thermiques » sont faibles. La variation avec a est également prévisible puisque les flux thermiques sont proportionnels à a^2 (*cf.* section de la barre) pour la conduction thermique et à a (*cf.* périmètre du cylindre) pour le transport latéral.

• De plus, (5) peut s'écrire : $hl^2 \gg K'a \Rightarrow h(T_1 - T_0)la \gg \frac{K'a^2}{l}(T_1 - T_0)$ (pour $T_1 > T_0$)

ou encore $$h(T_1 - T_0)\Sigma_L \gg \frac{K'S}{l}(T_1 - T_0).$$

Le premier terme de cette inégalité représente la puissance thermique totale échangée entre la barre et l'extérieur à travers la surface latérale (du moins tant que l est suffisamment grand devant λ). Le deuxième terme est associé à la puissance thermique véhiculée le long de la barre si l'on néglige les fuites latérales ($h = 0$), et pour des températures aux extrémités T_1 et T_0.

3. a. Faisons le bilan énergétique pour l'élément de longueur dx. Son énergie interne δU reste invariable (régime stationnaire et système indéformable), d'où :



$$\frac{d\delta U}{dt} = 0 = \delta P_{th} = \phi(x) - \phi(x + dx) + \delta\phi_L$$

avec $\begin{cases} \phi(x) = j_q(x)S\ ;\ \phi(x + dx) = j_q(x + dx)S \\ \text{et } \delta\phi_L = h(T(x) - T_0)\delta\Sigma_L. \end{cases}$

Soit $\delta P_{th} = j_q(x)S - j_q(x + dx)S - h(T(x) - T_0)\delta\Sigma_L$

et $\delta P_{th} = -S\frac{dj_q}{dx}dx - h(T(x) - T_0)\delta\Sigma_L.$

Pour une barre cylindrique de section circulaire de rayon a, nous avons :

$$S = \pi a^2\ ;\quad \delta\Sigma_L = 2\pi a dx$$

d'où $$\delta P_{th} = \left\{-\pi a^2\frac{dj_q}{dx} - h(T(x) - T_0)2\pi a\right\}dx.$$

Et avec la loi de Fourier $j_q(x) = -K'\frac{dT}{dx}$:

$$\delta P_{th} = \left\{\pi a^2 K'\frac{d^2T}{dx^2} - h(T(x) - T_0)2\pi a\right\}dx = 0.$$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{K'a}(T(x) - T_0) = 0}$

Il apparaît une longueur caractéristique $\lambda = \sqrt{\frac{K'a}{2h}}$, l'équation précédente s'écrivant :

$$\frac{d^2(T - T_0)}{dx^2} - \frac{T - T_0}{\lambda^2} = 0$$

dont la solution générale est : $T(x) - T_0 = A\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + B\exp\left(+\frac{x}{\lambda}\right)$ (6)

Copyrighted material

et dans le cadre de l'approximation d'une barre infinie ($l \gg \lambda$), il vient :

$$T(x) - T_0 = A\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

soit avec $T(0) = T_1$: $\boxed{T(x) - T_0 = (T_1 - T_0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}$

Commentaire

La modélisation d'une barre « infinie » n'est envisageable que pour $\exp\left(\frac{l}{\lambda}\right) \gg 1$. En effet, pour la barre de longueur l, on a, en reprenant la solution générale (6) :

- $T = T_1$ en $x = 0 \Rightarrow A + B = T_1 - T_0$;
- continuité du flux thermique en $x = l$: $\phi_{th}(l^-) = \phi_{th}(l^+)$.

Or : $\phi_{th}(l^-) = -K'S\left.\frac{dT}{dx}\right)_l = \frac{K'S}{\lambda}\left[A\exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) - B\exp\left(+\frac{l}{\lambda}\right)\right]$

$$\phi_{th}(l^+) = h[T(l^-) - T_0]S = h\left[A\exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) + B\exp\left(+\frac{l}{\lambda}\right)\right]S.$$

Soit : $\left(A\exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) - B\exp\left(+\frac{l}{\lambda}\right)\right) = \frac{h\lambda}{K'}\left(A\exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) + B\exp\left(+\frac{l}{\lambda}\right)\right)$.

D'où : $\begin{cases} A + B = T_1 - T_0 \\ B = \left(\dfrac{1 - \frac{h\lambda}{K'}}{1 + h\frac{\lambda}{K'}}\right)\exp\left(-\frac{2l}{\lambda}\right)A = \left(\dfrac{1 - \frac{a}{2\lambda}}{1 + \frac{a}{2\lambda}}\right)\exp\left(-\frac{2l}{\lambda}\right)A. \end{cases}$

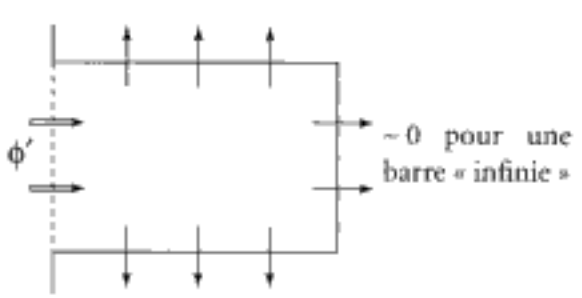
Or (*cf.* (4)) $\frac{h\lambda}{K'} \ll 1$ et $B \sim \exp\left(-\frac{2l}{\lambda}\right)A \ll A$ dès que $\frac{l}{\lambda} \gg 1$.

3. b. Pour mesurer l'efficacité due à la présence de cette barre, et dans le cadre des approximations précisées plus haut $\left(a \ll \frac{K'}{h}\ ;\ l \gg \sqrt{\frac{K'a}{h}}\right)$, comparons les flux thermiques « évacués », avec et sans barre, pour une même surface S de la plaque :

$$\phi_{th}(\text{sans barre}) = h(T_1 - T_0)S = \phi\ ;\ \phi_{th}(\text{avec barre}) = -K'S\left.\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \phi'.$$

En effet, dans le deuxième cas, le flux thermique total à l'interface barre/milieu extérieur s'identifie au flux thermique entrant dans la barre par sa section située en $x = 0$ (état de la barre invariable).

D'où : $\phi' \# + \frac{K'S}{\lambda}(T_1 - T_0)$.



Copyrighted material

On définira alors un coefficient d'efficacité η selon :

$$\eta = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{\frac{K'S}{\lambda}(T_1 - T_0)}{h(T_1 - T_0)S} = \frac{K'}{\lambda h} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{K'}{\lambda h}}$$

On peut remarquer que ce coefficient prend des valeurs importantes dès que les approximations sont réalisées (*cf.* (4)). Ainsi pour les valeurs de l'énoncé, avec $a = 1$ mm :

$$\eta = \frac{K'}{h}\sqrt{\frac{2h}{K'a}}\,; \quad \eta = \sqrt{\frac{2K'}{ha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{15 \cdot 10^{-3}}} = 200.$$

Commentaire

On peut vérifier que l'on a également (dans le cadre de la modélisation) :

$$\phi' = \int_0^\infty h(T(x) - T_0)\delta\Sigma \quad \text{où} \quad \delta\Sigma = 2\pi a dx.$$

Soit encore : $\phi' = h(T_1 - T_0)2\pi a\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx$ où $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda$.

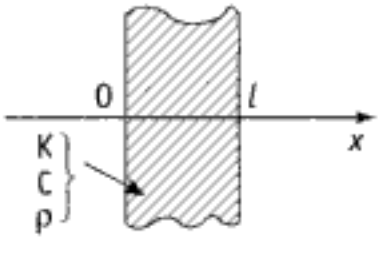
$$\left.\begin{array}{l}\text{Doù : } \phi' = h\lambda 2\pi a(T_1 - T_0) \\ \text{or : } \lambda = \sqrt{\frac{K'a}{2h}} \Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{K'a}{\lambda^2}\end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \phi' = \frac{K'\pi a^2}{\lambda}(T_1 - T_0).$$

On retrouve bien le résultat précédent ($S = \pi a^2$).

203 Phénomènes instationnaires

Partie A

Un matériau, compris entre les plans $x = 0$ et $x = l$, possède une conductivité thermique K, une capacité calorifique massique c et une masse volumique ρ (grandeurs considérées comme invariables).



À $t = 0$, la température du milieu est donnée par la relation : $T(x, t = 0) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

On le plonge à cet instant dans un thermostat de température T_0. La température $T(x, t)$ ne dépend que de x à t fixé. Déterminer la répartition de température $T(x, t)$.

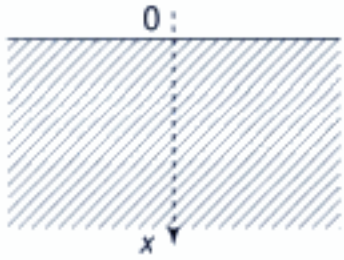
On posera $\tau = \frac{\rho c l^2}{K\pi^2}$.

Partie B

On assimile la Terre, localement, à un demi-espace infini situé du coté des x positifs.

Copyrighted material

(Masse volumique μ ; capacité thermique massique c ; conductibilité thermique K.)



On suppose qu'à la surface du sol (plan $x = 0$), la température varie selon la loi :

$$\theta(0, t) = \theta_0 - \theta_1 \cos\omega t;$$

(température Celsius) θ_0 et θ_1 constantes positives.

1. Déterminer la répartition de température $\theta(x, t)$ en régime permanent. Qu'observe-t-on ?

On note : $\delta = \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}}$ où $D = \dfrac{K}{\mu c}$.

2. Applications :

a. Influence des variations annuelles de température : on considère que la température minimale vaut $\theta_m = -10$ °C (~ 1er janvier) et la température maximale $\theta_M = 30$ °C (~ 1er juillet).

• À quelle date la température est-elle minimale à une profondeur de 2 m ?

Calculer cette valeur minimale.

• Tracer la courbe donnant $\theta(x, t_0)$ pour une date t_0 correspondant au 1er mars.

b. Influence des variations journalières (variations de $\theta_m = 2{,}5$ °C la nuit à $\theta_M = 17{,}5$ °C dans la journée). Évaluer la profondeur d_m à partir de laquelle la variation journalière de température est inférieure à 1 °C.

$\mu = 3 \cdot 10^3$ kg · m^{-3} ; $c = 515$ J · kg^{-1} · K^{-1} ; K = 1 J · m^{-1} · s^{-1} · K^{-1}.

1. Ce qu'il faut savoir

• Équation de diffusion de l'énergie thermique : solution instationnaire.

• Problèmes avec conditions aux limites : méthode de séparation des variables.

• Réponse en régime permanent sinusoïdal.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. On cherchera une solution à l'équation de la chaleur compatible avec les conditions aux limites et avec la condition initiale. On doit s'attendre à ce que $T(x, t) - T_0$ tende vers zéro pour t suffisamment grand, soit plus précisément pour $t \gg \tau$ où $\tau \sim \dfrac{\rho c l^2}{K}$ (grandeur homogène à un temps que l'on peut former à partir des grandeurs caractéristiques du problème ρ, c, K et l).

B. En l'absence de variations de la température au niveau du sol, on aurait $\theta(x, t) = \theta_0$ On posera donc $\theta(x, t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x, t)$, et on cherchera pour $\tilde{\theta}(x, t)$, une solution de régime établi sinusoïdale dans le temps (pulsation ω).

Il sera plus commode d'adopter la notation complexe.

Copyrighted material

3. Solution

Partie A

La répartition $T(x, 0)$ ne peut se maintenir dans le matériau, bien que l'on ait $T(0, 0) = T(l, 0) = T_0$. En effet, à l'instant $t = 0$, le vecteur densité de courant volumique d'énergie thermique est donné par : $\vec{j}_q(x, 0) = -K\frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x = -K\theta_0\frac{\pi}{l}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\vec{u}_x$.

Il en résulte un flux thermique, dépendant de x, qui ne peut pas être associé à un régime stationnaire (au sens indépendant du temps). La répartition des températures va donc évoluer dans le temps. Le seul état permanent pouvant se maintenir indéfiniment correspond, bien évidemment, à une température uniforme T_0. Posons donc $T(x, t) - T_0 = f(x, t)$ et donnons les équations vérifiées par la fonction $f(x, t)$. Nous devons avoir :

$$\begin{cases} f(x, 0) = \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) & (1) \\ f(0, t) = 0 \text{ pour tout } t \quad (T = T_0) & (2) \\ f(0, l) = 0 \text{ pour tout } t \quad (T = T_0) & (3) \end{cases}$$

(1) : conditions initiales ; (2) et (3) : conditions aux limites

et $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K}\frac{\partial f}{\partial t} \text{ (équation de diffusion de la chaleur)} \quad (4)$$

Cherchons alors une solution de la forme $f(x, t) = g(t)h(x)$.

Point méthode

Une telle solution (méthode dite de séparation des variables) présente l'avantage de pouvoir assurer certaines conditions aux limites quel que soit t.
Ainsi on doit réaliser ici, à tout instant, $T = T_0$ pour $x = 0$ et $x = l$, soit :

$$\left.\begin{array}{l} f(0, t) = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \quad \forall t \\ f(l, t) = 0 \Rightarrow h(l) = 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \quad (5)$$

Et avec la condition initiale $f(x, 0) = \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, on est amené à envisager la solution : $f(x, t) = g(t)\theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$. Cette solution a l'avantage d'être compatible avec (1), (2) et (3) si l'on pose $g(0) = 1$. Il reste à vérifier (4), ce qui se traduit par :

$$-\theta_0 g(t) \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{\rho c}{K}\theta_0 \frac{dg}{dt}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Équation qui doit être vérifiée pour tout x appartenant à l'intervalle $(0, l)$, d'où :

$$\frac{dg}{dt} + \frac{K}{\rho c} \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot g(t) = 0 \quad \text{et} \quad g(t) = \exp\left[-\frac{K\pi^2}{\rho c l^2}t\right], \quad (g(0) = 1).$$

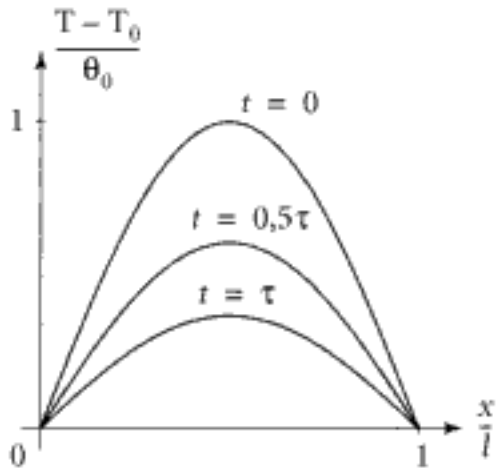
D'où la solution : $$\boxed{T(x, t) = T_0 + \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\rho c}{K\pi^2}l^2}$$

Copyrighted material

Commentaire

Le coefficient $D = \frac{K}{\rho c}$ est appelé **diffusivité thermique**. Pour un milieu de nature physique donnée (ρ, c, K et donc D fixés), $\tau \sim \frac{1}{D} l^2$, relation caractéristique des phénomènes de diffusion liant une échelle de temps, ici τ, à une échelle de longueur, ici l, sur laquelle s'effectue la diffusion.

On donne ci-dessous les courbes $\frac{x}{l} \to \frac{T - T_0}{\theta_0}$:



Partie B

B. 1. L'évolution de la température est obtenue à partir de l'équation de la chaleur (*cf.* **A**) avec $T(x, t) = \theta(x, t) + 273{,}15$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (6) \text{ avec } D = \frac{K}{\mu c} \text{ (coefficient de diffusivité).}$$

En régime permanent (pour lequel les variations de températures dans le temps sont sinusoïdales, leur période étant imposée par celle des variations régnant au niveau du sol), nous poserons : $\theta(x, t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x, t)$

avec : $\tilde{\theta}(x, t) = \mathcal{R}[\underline{\tilde{\theta}}(x, t)]$ où $\underline{\tilde{\theta}}(x, t) = \underline{\Theta}(x)\exp(j\omega t)$.

Reportant cette solution dans (6), il vient : $j\omega\underline{\Theta}(x) = D\frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2}$ soit : $\frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2} = j\frac{\omega}{D}\underline{\Theta}$.

Or $j\frac{\omega}{D} = \left[(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right]^2$ et $\frac{\partial^2 \underline{\Theta}}{\partial x^2} - \left[(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right]^2 \underline{\Theta} = 0$.

Soit une amplitude complexe : $\underline{\Theta}(x) = \underline{\alpha}\exp\left((1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right) + \underline{\beta}\exp\left(-(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right)$.

La quantité $\sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \delta$ est homogène à une longueur. De plus, $|\underline{\theta}(x)|$ doit rester borné (physiquement, les variations de température au niveau du sol ne doivent plus avoir d'effet pour x augmentant indéfiniment : $\lim\limits_{x \to +\infty} [\theta(x, t) - \theta_0] = 0$). D'où :

$$\underline{\Theta}(x) = \underline{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right).$$

Copyrighted material

La température à la profondeur x est alors :

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \Re\left\{\underline{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)\right\}$$

soit : $\theta(x, t) = \theta_0 + \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cdot\left[a\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + b\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]$

et $\theta(0, t) = \theta_0 + a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

Ce qui permet d'identifier les constantes a et b : $a = -\theta_1$ et $b = 0$. Finalement :

$$\boxed{\theta(x, t) = \theta_0 - \theta_1\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

Commentaire

Cette solution de régime permanent présente les propriétés suivantes :

• Un amortissement exponentiel (terme $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$) dont la longueur caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ est proportionnelle à la racine carrée de la période (les variations de température au niveau du sol se font d'autant moins ressentir – en un point de profondeur donnée – qu'elles sont rapides).

• Une « propagation » $\left(\text{terme } \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$ associée à un déphasage entre la variation sinusoïdale de la température en un point de profondeur x et le sol. Il lui correspond un effet de retard $\left(\Delta t = \frac{x}{\delta\omega} = \frac{x}{\sqrt{2D\omega}}\right)$ plus faible pour les phénomènes à variations plus rapides dans le temps. Ainsi, pour un « sol » gelé en profondeur, le dégel commencera en surface (nécessité de barrières de dégel…).

• La distance caractéristique δ peut s'obtenir directement à partir de l'équation de la diffusion à l'aide d'une analyse aux ordres de grandeur :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

En notant « ~ » pour de « l'ordre de grandeur de » et en posant $T' = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right| \sim \left|\frac{\theta}{T'}\right| \sim \omega|\theta| \\ \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right| \sim \left|\frac{\theta}{\delta^2}\right|\end{array}\right\} \omega|\theta| \sim \frac{|\theta|}{\delta^2}D \Rightarrow \boldsymbol{\delta} \sim \sqrt{\frac{D}{\omega}} \quad \text{comme il se doit.}$$

B. 2. a. Influence saisonnière des variations de température au niveau du sol :

$$\theta(0, t) = \theta_0 - \theta_1\cos\omega t.$$

Les températures minimales et maximales sont données par :

$$\theta_m = \theta_0 - \theta_1 \ (t = 0) \quad \text{et} \quad \theta_M = \theta_0 + \theta_1 \ \left(t = \frac{T'}{2}\right).$$

D'où : $$\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_M) \quad \text{et} \quad \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_M - \theta_m).$$

Copyrighted material

Soit une répartition de température :

$$\boxed{\theta(x,t) = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_M) - \frac{1}{2}(\theta_M - \theta_m)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cdot\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

• $\frac{1}{2}(\theta_m + \theta_M) = \theta_0$ est la température moyenne $\langle\theta\rangle$ du « sol ».

Nous avons : $\langle\theta\rangle = \frac{1}{2}(-10 + 30) = 10$ °C.

• Les variations de température par rapport à cette valeur moyenne sont fournies par :

$$\theta(x,t) - \langle\theta\rangle = -20\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

La température est minimale – pour une profondeur d – à l'instant t_1 tel que :

$$\omega t_1 - \frac{d}{\delta} = 0 \quad \text{soit} \quad t_1 = \frac{d}{\omega\delta};$$

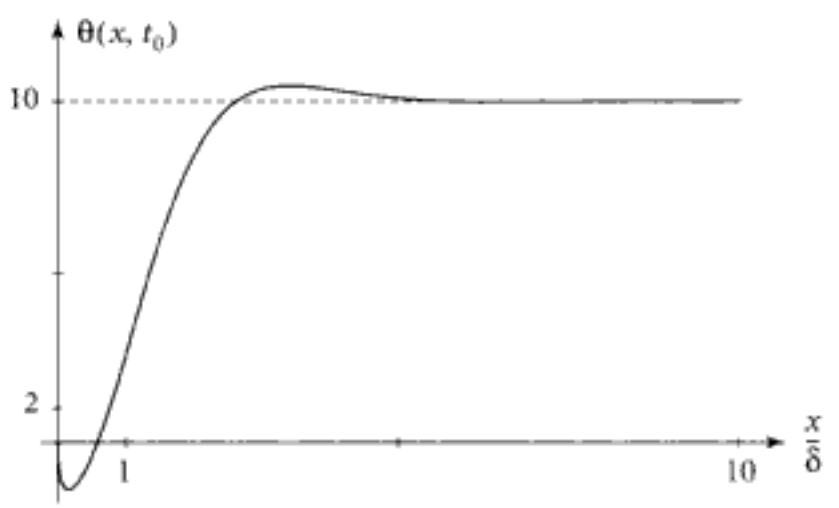
avec : $$\theta_m(d, t_1) = 10 - 20\exp\left(-\frac{d}{\delta}\right) = 10 - 20\exp(-\omega t_1).$$

A.N. : $$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2K}{\mu c\omega}} = \left(\frac{2\cdot 1\cdot 365\cdot 86\,400}{3\cdot 10^3\cdot 515\cdot 2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{2{,}55\ m}$$

$$t_1 = \frac{365\times 2}{2{,}55\times 2\pi} = \mathbf{45{,}6\ jours}$$

et $$\theta_m(d, t_1) = 10\left(1 - 2\cdot\exp\left(-\frac{2}{2{,}55}\right)\right) = \mathbf{0{,}88\ °C}.$$

• Pour le premier mars : $t_0 \approx \frac{1}{6}T'$; d'où : $\theta(x, t_0) = 10\left[1 - 2\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\delta}\right)\right]$.



$\frac{x}{\delta}$	$\theta(x, t_0)$
0	0
0,25	−0,88
0,50	−0,36
0,75	+0,97
1	+2,65
2	+8,4
5	+10,1
10	+10

B. 2. b. Influence des variations journalières :

On a : $\langle\theta\rangle = \frac{1}{2}(2{,}5 + 17{,}5) = 10$ °C et $\frac{\theta_M - \theta_m}{\theta_M + \theta_m} = \frac{15}{20} = 0{,}75$;

$$\omega = \frac{2\pi}{T'(1\text{ jour})} \quad \text{et} \quad \delta = \left(\frac{2\cdot 1\cdot 24\cdot 3\,600}{3\cdot 10^3\cdot 515\cdot 2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \boldsymbol{\delta = 0{,}133\ m}.$$

Copyrighted material

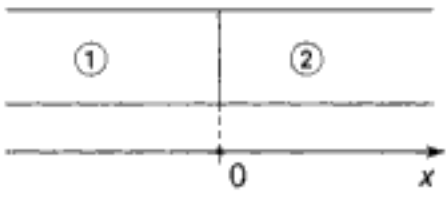
À la profondeur x, la variation journalière de température sera inférieure à 1 °C pour :

$$2 \cdot 10 \cdot 0{,}75 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) < 1 \quad \left(\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = \pm 1\right);$$

soit : $x > \delta \ln(15)$ et $x > d_m$ avec : $d_m = 0{,}36$ m.

204 Impression de chaud ou de froid au « contact »

Deux barres calorifugées, de même section S, ont des températures initiales T_1 et T_2 ($T_2 > T_1$), des capacités thermiques massiques C_1 et C_2 ; des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et des coefficients de conductibilité thermique K_1 et K_2. On se propose de déterminer la température T_0 à la jonction en $x = 0$. Les barres sont considérées comme infinies et le contact est supposé parfait.



1. Dans cette question, on **modélise** la répartition de température ainsi :

- $T = T_1$ pour $x < -l_1(t)$;
- T fonction affine de x pour $-l_1(t) \leqslant x \leqslant 0$;
- T fonction affine de x pour $0 \leqslant x \leqslant l_2(t)$;
- $T = T_2$ pour $x > l_2(t)$.

En déduire la température T_0 en fonction de T_1, T_2 et des quantités :

$$a_1 = \sqrt{\rho_1 C_1 K_1} \quad \text{et} \quad a_2 = \sqrt{\rho_2 C_2 K_2}.$$

2. Dans une étude plus précise, on cherche à déterminer la répartition des températures pour $x < 0$ et $x > 0$. On propose dans chaque milieu :

$$T(x, t) = \alpha_i + \beta_i \operatorname{erf}(u_i), \quad \text{où} \quad u_i = \frac{x}{\sqrt{4 D_i t}} \quad \text{et} \quad D_i = \frac{K_i}{\rho_i c_i}$$

avec $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-y^2) dy$. On rappelle que $\operatorname{erf}(0) = 0$ et $\lim_{u \to +\infty} \operatorname{erf}(u) = 1$.

Après avoir déterminé les coefficients α_i et β_i, retrouver l'expression de T_0 établie au **1.** Commenter.

1. Ce qu'il faut savoir

- Énergie interne et premier principe.
- Loi de Fourier de la conduction thermique – flux d'énergie thermique.
- Équation de la chaleur – solution instationnaire.

Copyrighted material

2. Ce qu'il faut comprendre

1. La température est continue en $x = 0$ (contact parfait) et vaut T_0. Il y a également continuité du flux thermique et conservation de l'énergie interne du système.

2. Les solutions proposées doivent vérifier l'équation de la chaleur ainsi que les conditions aux limites (en $x = 0$, et pour $x \to \pm\infty$: barres suffisamment longues).

3. Solution

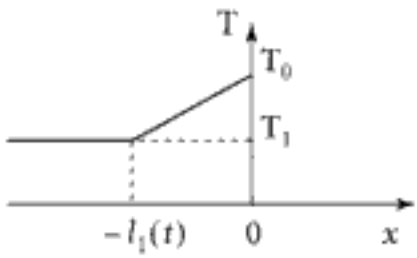
1. L'hypothèse de l'énoncé impose une température continue, notée T_0, à la jonction, ainsi que la continuité du flux thermique, ce qui s'écrit : $Sj_q(0^-, t) = Sj_q(0^+, t)$

or $\quad j_q(x < 0, t) = -K_1\dfrac{\partial T}{\partial x}(x, t) \quad$ et $\quad j_q(x > 0, t) = -K_2\dfrac{\partial T}{\partial x}(x, t)$

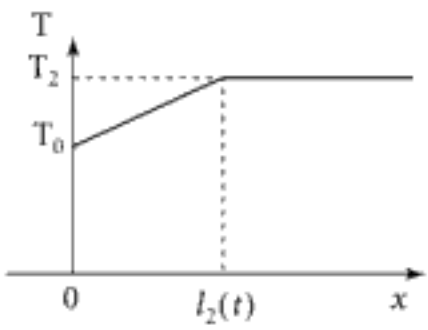
d'où : $K_1\dfrac{\partial T}{\partial x}(0^-, t) = K_2\dfrac{\partial T}{\partial x}(0^+, t) \quad (1)$

Dans le modèle proposé, la température croît de façon linéaire de T_1 à T_0 sur une longueur $l_1(t)$, d'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0^-, t) = \frac{T_0 - T_1}{l_1(t)}.$$



De la même manière : $\quad \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)(0^+, t) = \dfrac{T_2 - T_0}{l_2(t)}.$



L'égalité (1) devient alors :

$$\boxed{\frac{K_1}{l_1(t)}[T_0 - T_1] = \frac{K_2}{l_2(t)}[T_2 - T_0]} \quad (2)$$

On a donc $T_1 < T_0 < T_2$ $\left(T_0 = \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} \quad \text{où} \quad m_i = \dfrac{K_i}{l_i(t)} > 0\right)$.

■ D'autre part, le réchauffement de l'une des barres s'effectue au détriment de l'autre, ce qui doit se traduire par l'invariance de l'énergie interne du système (barres de volumes invariables…). Une tranche de longueur dx voit son énergie interne varier – entre les instants 0 et $t > 0$ – de la quantité :

$$\delta U(t) - \delta U(0) = (\rho_i S dx)C_i[T(x, t) - T_i].$$

La variation d'énergie interne de la barre ① s'obtient donc en intégrant l'expression précédente – à t fixé – de $x = -l_1(t)$ à $x = 0$, la température s'identifiant à T_1 pour $x < -l_1(t)$, d'où :

$$\Delta U_1 = \rho_1 C_1 S\int_{-l_1(t)}^{0}(T(x, t) - T_1)dx.$$

Copyrighted material

Hidden page

Les conditions aux limites imposent (barres suffisamment longues, c'est-à-dire qu'à t fixé, on doit avoir $L_i \gg \sqrt{D_i t}$ … ainsi pour $D \approx 4 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot s^{-1}$ (métal) :

$\sqrt{Dt} \sim 2$ cm pour $t = 1$ s $\sqrt{Dt} \sim 20$ cm pour $t = 100$ s… et la modélisation considérant des barres « infinies » ne reste valable qu'aux temps « courts »…) :

$$\lim_{x \to +\infty} T(x, t) = T_2 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 = T_2 \Rightarrow \boxed{\beta_2 = T_2 - T_0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} T(x, t) = T_1 \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = T_1 \Rightarrow \boxed{\beta_1 = T_0 - T_1}$$

(en effet $\mathrm{erf}(-u) = -\mathrm{erf}(u)$).

Il reste à traduire la continuité du flux thermique en $x = 0$:

$$-K_1 S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0^-, t) = -K_2 S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0^+, t).$$

Or $\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{erf}(u)]\right\}_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{4Dt}} \cdot 1 \quad \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = 1 \text{ en } x = 0 \text{ et } t \neq 0\right).$

On a donc en simplifiant :

$$\frac{K_1}{\sqrt{D_1}}\beta_1 = \frac{K_2}{\sqrt{D_2}}\beta_2.$$

En reportant dans la dernière relation les expressions de β_1 et β_2 établies plus haut :

$$\frac{K_1}{\sqrt{D_1}}(T_0 - T_1) = \frac{K_2}{\sqrt{D_2}}(T_2 - T_0).$$

Soit, avec $D_1 = \frac{K_1}{\rho_1 C_1}$ et $D_2 = \frac{K_2}{\rho_2 C_2}$: $\sqrt{C_1 \rho_1 K_1}[T_0 - T_1] = \sqrt{C_2 \rho_2 K_2}[T_2 - T_0]$.

La température de jonction T_0, déduite du modèle (question **1.**), est bien identique à celle déterminée à partir de la recherche de répartition de la température au sein de la barre (question **2.**)).

Commentaires

• L'expression (4) nous montre que la température « au contact » est comprise entre T_1 et T_2. Elle est d'autant plus proche de T_2 (respectivement de T_1) que a_2 et grand (resp. petit) devant a_1. Ainsi, si l'on suppose que l'impression « de chaud ou de froid » est directement liée à cette température T_0, on peut comprendre pourquoi le contact main-métal semble plus froid que le contact main-bois (le métal et le bois étant à la même température ambiante T_1 (~ 20 °C) inférieure à celle du corps (~ 37 °C). Quelques valeurs numériques :

$$a(\text{fer pur}) \sim 1{,}7 \cdot 10^4\ J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \ ; \quad a(\text{sapin}) \sim 3{,}5 \cdot 10^{+2}\ J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \ ;$$

$$a(\text{eau}) \sim 1{,}3 \cdot 10^3\ J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-\frac{1}{2}}.$$

• Vérifions que la fonction $u \to \mathrm{erf}(u)$ où $u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ est bien solution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (5)

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Finalement : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, t) = \frac{Q_0}{c\mu S} \quad (2)$$

La répartition de température $\theta(x, t)$ doit vérifier l'équation de la chaleur (1), ainsi que la loi de conservation (3). De plus, elle doit être compatible avec les conditions aux limites :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [\theta(x, t)] = 0 \quad (3) \quad \text{(barre de température } T_0 \text{ pour } t < 0).$$

On peut alors proposer la solution (pour $t > 0$) :

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = \frac{a}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, t)\mathrm{d}x = a.$$

Elle est en accord avec (1), avec (2) en posant $a = \frac{Q_0}{c\mu S}$, et elle vérifie bien (3) pour $t > 0$. C'est donc la solution physique au problème considéré, soit :

$$\boxed{\theta(x, t) = \frac{Q_0}{\mu c S} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)}$$

2. ■ Étude de la fonction $\theta(x, t_0)$ à t_0 fixé :

Il s'agit d'une gaussienne, dont on peut évaluer la largeur en considérant les abscisses x_i pour lesquelles $\theta(x_i, t_0) = \frac{1}{e}\theta(0, t_0)$. Soit :

$$e^{-\frac{x_i^2}{4Dt_0}} = \frac{1}{e}; \quad x_i = \pm 2\sqrt{Dt_0}$$

d'où une largeur $\boxed{\Delta x = 4\sqrt{Dt_0}}$ qui croît avec le temps.

Commentaires

• On retrouve un phénomène classique lié à la diffusion, les distances caractéristiques sur lesquelles s'effectue la diffusion sont proportionnelles à la racine carrée du temps écoulé, et plus précisément à $\sqrt{Dt}$: $d \sim \sqrt{Dt}$.

• Ainsi, à l'instant t, la barre de longueur 2L pourra être modélisée par une barre infinie si l'on a :

$$L \gg (d \sim \sqrt{Dt}) \quad \text{soit pour } L \gg \sqrt{Dt}.$$

A.N. : pour un métal tel que $D = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot s^{-1}$:

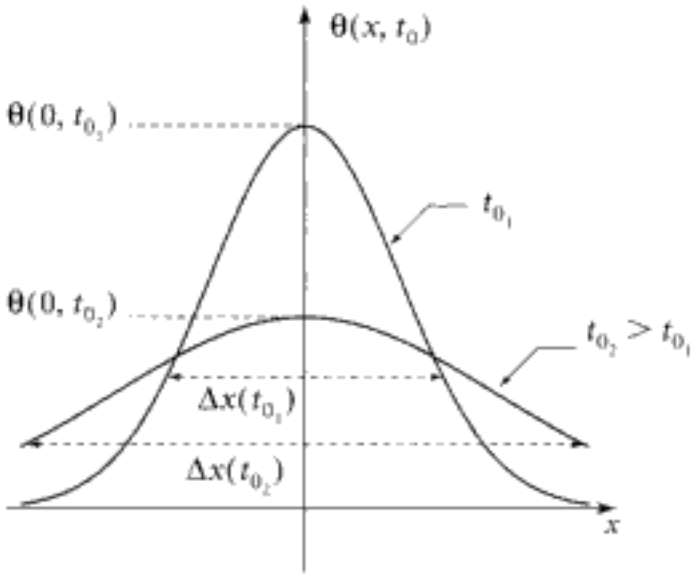
$$\begin{cases} \sqrt{Dt} \approx 2 \text{ cm} & \text{pour } t = 1 \text{ s} \\ \sqrt{Dt} \approx 1{,}3 \text{ m} & \text{pour } t = 1 \text{ heure} ; \end{cases}$$

pour le bois ($D = 5 \cdot 10^{-7}\ m^2 \cdot s^{-1}$) : $\begin{cases} \sqrt{Dt} \approx 0{,}7 \text{ mm} & \text{pour } t = 1 \text{ s} \\ \sqrt{Dt} = 4 \text{ cm} & \text{pour } t = 1 \text{ heure.} \end{cases}$

Copyrighted material

De plus : $\theta(0, t_0) = \dfrac{Q_0}{\mu c S\sqrt{4\pi D t_0}}$: la température au centre diminue au cours du temps.

D'où les graphes :



La distribution de température s'élargit selon l'axe $x'x$ en $\sqrt{t}$, alors que la température à l'origine diminue en $1/\sqrt{t}$. L'évolution est caractérisée par la relation :

$$\theta_{max}(t) \cdot \Delta x(t) = \frac{Q_0}{\mu c S\sqrt{4\pi D t}} \cdot 4\sqrt{Dt};$$

soit :

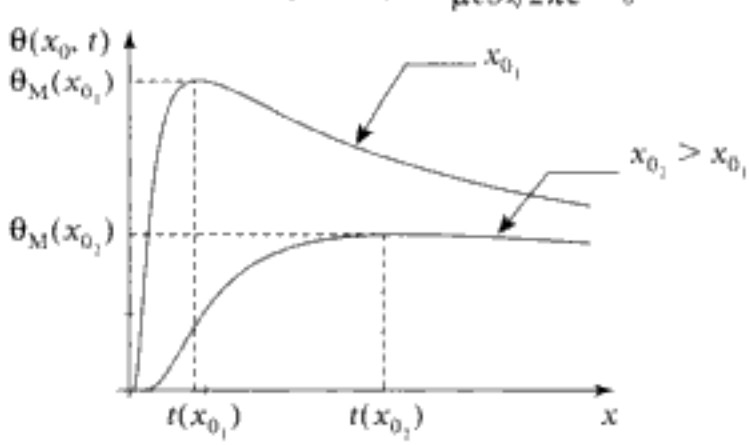
$$\boxed{\theta_{max}(t) \cdot \Delta x(t) = \text{cste} = \frac{2Q_0}{\mu c S\sqrt{\pi}}}$$

• **Étude de $\theta(x_0, t)$ à x_0 fixé** : calculons $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}(x_0, t)$. D'après la première question, nous avons :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x_0, t) = \theta(x_0, t) \cdot \left[-\frac{1}{2t} + \frac{x_0^2}{4Dt^2}\right].$$

Cette dérivée s'annule pour : $t(x_0) = \dfrac{x_0^2}{2D}$, valeur pour laquelle $\theta(x_0, t)$ passe par un maximum :

$$\theta_M(x_0) = \theta\left(x_0, \frac{x_0^2}{2D}\right) = \frac{Q_0}{\mu c S\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{1}{x_0}.$$



Copyrighted material

Hidden page

Solution

1. ■ La capacité thermique de la tige étant négligée (idéalement nulle), cela revient à considérer qu'à chaque instant t_0, la barre présente une répartition de température s'identifiant à celle que l'on obtiendrait – en régime permanent – avec des températures aux extrémités invariables $T_1(t_0)$ et $T_2(t_0)$.

Une autre façon de traduire cette hypothèse est d'écrire, qu'à un instant donné t, le flux ϕ d'énergie thermique traversant une section d'abscisse x de la tige est indépendant de x. Soit $\vec{j}_q = j_q(x, t)\,\vec{u}_x$ le vecteur densité volumique de courant d'énergie thermique :

$$j_q(x, t) \cdot S = j_q(x + dx, t)S = \phi(t)$$

(avec $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T = -K\dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x$: loi de Fourier).

D'où :

$$-K\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\phi(t)}{S} \quad \text{et} \quad T(x, t) = -\frac{1}{KS}\phi(t)x + T_1(t).$$

D'autre part : $T(L, t) = T_2(t)$, d'où :

$$T_2(t) = -\frac{1}{KS}\phi(t)L + T_1(t) \quad \text{soit} \quad \phi(t) = \frac{KS}{L}(T_1(t) - T_2(t)). \quad (1)$$

Dès lors :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{\phi(t)} = \frac{1}{K}\frac{L}{S}} \quad \textbf{(résistance thermique)} \quad (2)$$

Commentaire

• Notons les analogies avec l'électrocinétique. Considérons, à cet effet, une résistance R parcourue par un courant i.

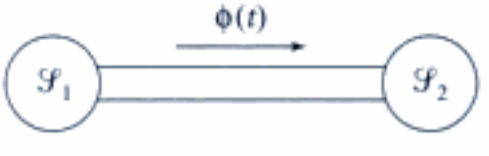
On a : $V_1 - V_2 = Ri$ avec $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{L}{S}$ (γ représente le coefficient de conductivité électrique du conducteur).

• Pour le système thermique proposé, on a également :

$$T_1 - T_2 = R_{th}\,\phi \quad \text{où} \quad R_{th} = \frac{1}{K}\frac{L}{S}.$$

• On peut également rapprocher la loi de Fourier $\vec{j}_q = -K\overrightarrow{\text{grad}}T$ de la loi d'Ohm de l'électrocinétique $\vec{j} = -\gamma\overrightarrow{\text{grad}}V$ (notion de résistance thermique).

■ Les températures des corps $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont uniformes (conductibilités thermiques infinies) et vont évoluer selon les équations de bilan (1er principe) :



Copyrighted material

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU_1}{dt} &= -\phi(t) \Rightarrow C_1\frac{dT_1}{dt} = -\phi(t)\\ \frac{dU_2}{dt} &= +\phi(t) \Rightarrow C_2\frac{dT_2}{dt} = +\phi(t)\end{aligned}\right\} C_1\frac{dT_1}{dt} + C_2\frac{dT_2}{dt} = 0$$

$$\boxed{C_1T_1 + C_2T_2 = C_1T_{1_0} + C_2T_{2_0}} \quad (3)$$

et d'après (1) :
$$\begin{cases} C_1\dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{1}{R_{th}}\cdot(T_1 - T_2)\\ C_2\dfrac{dT_2}{dt} = +\dfrac{1}{R_{th}}\cdot(T_1 - T_2).\end{cases}$$

Ces deux dernières équations donnent encore :

$$\frac{d}{dt}(T_1 - T_2) = -\frac{1}{R_{th}}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)(T_1 - T_2)$$

et après intégration : (4) $\boxed{T_1(t) - T_2(t) = (T_{1_0} - T_{2_0})\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ où $\tau = \dfrac{R_{th}C_1C_2}{C_1 + C_2}$.

Des équations (3) et (4), nous tirons :

$$\begin{cases} T_1 = T_f + \dfrac{C_2}{C_2 + C_1}(T_{1_0} - T_{2_0})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\\ T_2 = T_f - \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}(T_{1_0} - T_{2_0})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right).\end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= T_f + \frac{C_2}{C_2 + C_1}\Delta T\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\\ T_2 &= T_f - \frac{C_1}{C_2 + C_1}\Delta T\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\end{aligned}} \quad (5)$$

L'état final correspond bien évidemment à une température uniforme égale à :

$$(C_1 + C_2)T_f = C_1T_{1_0} + C_2T_{2_0}$$

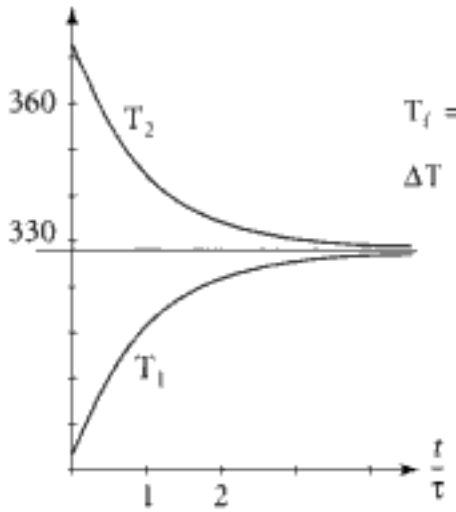
c'est-à-dire
$$T_f = \frac{C_1}{C_1 + C_2}T_{1_0} + \frac{C_2}{C_1 + C_2}T_{2_0}.$$

Commentaire

Ce résultat peut être déduit de l'application du 1er principe à l'ensemble du système. $\Delta U = 0$ (le système $\{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \text{tige}\}$ est isolé thermiquement de l'extérieur et ne reçoit aucun travail). Or $U = U(\mathcal{S}_1) + U(\mathcal{S}_2) + U(\text{tige})$; $\Delta U(\text{tige}) = 0$ (capacité calorifique nulle).
D'où : $\Delta U = \Delta U(\mathcal{S}_1) + \Delta U(\mathcal{S}_2) = C_1(T_{1_f} - T_{1_0}) + C_2(T_{2_f} - T_{2_0}) = 0$.

Copyrighted material

D'où les courbes ($T_{1_0} = 283$ K, $T_{2_0} = 373$ K, et pour $C_1 = C_2$) :



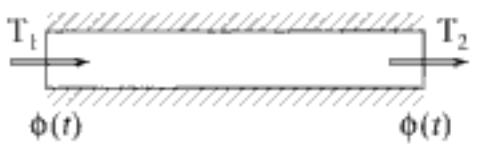
$$T_f = \frac{1}{2}(T_{1_0} + T_{2_0}) = 328 \text{ K}$$

$$\Delta T = T_{1_0} - T_{2_0} = -90 \text{ K}$$

2. ■ L'entropie de la tige est constante (capacité calorifique nulle, variations de volume négligées). Le second principe appliqué à la tige donne alors :

$$\frac{dS_b}{dt} = 0 = \{\text{terme d'échange}\} + \{\text{taux de création}\}$$

soit $\dfrac{dS_b}{dt} = \left(\dfrac{\delta S}{dt}\right)_{ech} + \dfrac{\delta\sigma_b}{dt}$.



Or la tige reçoit la puissance thermique $\phi(t)$ du corps $\mathcal{S}_1$ et fournit la même puissance au corps $\mathcal{S}_2$. Dès lors :

$$\left(\frac{\delta S}{dt}\right)_{ech} = \frac{\phi(t)}{T_1} - \frac{\phi(t)}{T_2}.$$

Soit un taux de création interne d'entropie : $\dfrac{\delta\sigma_b}{dt} = \phi(t)\cdot\left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)$ (6)

On a toujours $T_2(t) > T_1(t)$ (puisque $T_{2_0} > T_{1_0}$), et avec (1) $\dfrac{\delta\sigma_b}{dt} > 0$ (création d'entropie). $\phi(t)$ est négatif, et l'énergie thermique est véhiculée, à travers la tige, du corps chaud au corps froid.

■ De même, pour les deux sources de **températures uniformes**, à chaque instant, il vient :

$$\frac{dS_1}{dt} = \left(\frac{\delta S_1}{dt}\right)_{ech} + 0 \quad \text{et} \quad \frac{dS_2}{dt} = \left(\frac{\delta S_2}{dt}\right)_{ech} + 0.$$

Soit encore $\dfrac{dS_1}{dt} = -\dfrac{\phi}{T_1(t)}$ et $\dfrac{dS_2}{dt} = +\dfrac{\phi}{T_2(t)}$.

Et au total, en désignant par S_T l'entropie du système ($S_T = S_1 + S_2 + S_b$) :

$$\frac{dS_T}{dt} = \phi(t)\left(\frac{1}{T_2(t)} - \frac{1}{T_1(t)}\right) = \frac{1}{R_{th}}\frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} > 0 \quad (6)$$

Cette quantité s'identifie en fait à $\dfrac{\delta\sigma_b}{dt}$.

Copyrighted material

Commentaires

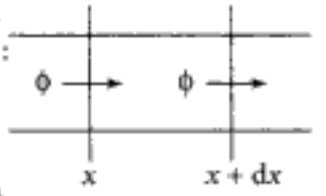
• On peut aussi écrire : $\dfrac{dS_T}{dt} = \dfrac{dS_1}{dt} + \dfrac{dS_2}{dt} + 0 = C_1 \dfrac{1}{T_1}\dfrac{dT_1}{dt} + C_2 \dfrac{1}{T_2}\dfrac{dT_2}{dt}$.

D'où $\Delta S_T = C_1 \ln\left(\dfrac{T_{1_f}}{T_{1_0}}\right) + C_2 \ln\left(\dfrac{T_{2_f}}{T_{2_0}}\right)$. Or $T_{1_f} = T_{2_f} = T_f$, d'où :

$$\Delta S_T = C_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_{1_0}}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_{2_0}}\right) = \ln\left[\frac{T_f^{C_1+C_2}}{T_{1_0}^{C_1} T_{2_0}^{C_2}}\right].$$

On a donc : $T_f \geqslant T_{1_0}^{\frac{C_1}{C_1+C_2}} \cdot T_{2_0}^{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$. (Pour $C_1 = C_2$, on aurait $T_f \geqslant \sqrt{T_{1_0} T_{2_0}}$.)

• Déterminons la création d'entropie par unité de volume de la tige.
D'après la formule (6), on peut écrire pour la tranche d'épaisseur dx :



$$\frac{\delta^2\sigma_b}{dt} = \phi \cdot \left(\frac{1}{T(x+dx)} - \frac{1}{T(x)}\right) = \phi \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) \cdot dx$$

d'où $\dfrac{\delta^2\sigma_b}{dt\, S\, dx} = \dfrac{\phi}{S} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)$ or $j_q = \dfrac{\phi}{S} \Rightarrow \dfrac{\delta^2\sigma_b}{dt\, \delta v} = j_q \cdot \dfrac{1}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)$

($v \equiv$ volume)

soit en revenant à l'écriture vectorielle : $\boxed{\dfrac{\delta^2\sigma_b}{dt\, \delta v} = \vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{T}\right)}$ (7)

On peut démontrer que ce résultat reste valable en régime instationnaire ($\vec{j}_q(x, t)\ldots$).

De plus, on a bien : $\vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{T}\right) = (-K\vec{\nabla}T) \cdot \left(-\dfrac{\vec{\nabla}T}{T^2}\right) = \dfrac{K}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2$ grandeur définie positive.

3. • D'après (4), la différence des températures des deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est divisée par deux au bout d'un temps Δt tel que :

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \rightarrow \Delta t = \tau \cdot \ln 2.$$

τ apparaît bien, dans le cadre de notre modélisation, comme un **temps caractéristique** associé à l'évolution des températures.

• Or en toute rigueur, la température $T(x, t)$ au sein de la tige doit vérifier « l'équation de la chaleur » :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8) \text{ avec } D = \frac{K}{\rho_b c_b}$$

($c_b \equiv$ capacité thermique par unité de masse de la tige).

On peut faire apparaître une durée caractéristique τ_D de diffusion pour la barre de longueur L. Soit, en remplaçant l'équation (4) par des ordres de grandeur :

$$\frac{D}{L^2} \approx \frac{1}{\tau_D} \rightarrow \tau_D \approx \frac{L^2}{D} \quad \text{et} \quad \tau_D \approx \frac{L^2 c_b \rho_b}{K}.$$

• L'approximation faite dans l'exercice est cohérente tant que le temps caractéristique τ (régissant les variations de $T_1(t)$ et $T_2(t)$) reste grand devant τ_D : cela revient à dire,

Copyrighted material

qu'à « chaque instant », la température $T(x, t)$ au sein de la barre est celle que l'on obtiendrait à « l'équilibre » avec des températures des corps $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ « gelées » aux valeurs $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

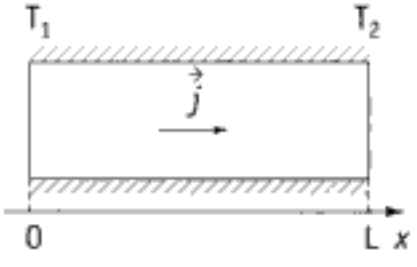
Nous avons obtenu : $\tau_D \approx \dfrac{L^2 c_b \rho_b}{K}$ et $\tau \approx \dfrac{C_2 C_1}{C_2 + C_1} \dfrac{L}{KS}$.

Il faut donc que $\tau_D \ll \tau$, ce qui s'écrit :

$$\frac{L^2 c_b \rho_b}{K} \ll \frac{C_2 C_1}{C_2 + C_1} \frac{L}{KS} \quad \text{soit} \quad L c_b \rho_b S \ll \frac{C_2 C_1}{C_2 + C_1}.$$

La quantité $c_b \rho_b L S$ représente la capacité thermique totale de la tige. L'inégalité est bien réalisée lorsque les capacités thermiques des deux corps $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont très grandes devant celle de la barre. La conductivité thermique K intervient à deux niveaux : elle assure les transports d'énergie thermique au sein de la tige et elle « contrôle » les échanges d'énergie thermique entre les corps $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et la barre. Ceci explique que les constantes de temps τ_D et τ dépendent de la même façon de K (τ_D et τ proportionnels à $\frac{1}{K}$) et que la conductivité thermique ne joue aucun rôle, dans l'approximation envisagée…

207 Barre parcourue par un courant



Une barre métallique de section S et de conductivité électrique σ est parcourue par un courant électrique i de densité volumique uniforme ($\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$ avec $i = j_0 S$).

Les extrémités de cette barre sont maintenues à des températures T_1 et T_2. On suppose nulles les pertes thermiques par la surface latérale (barre calorifugée) et on note K le coefficient de conductivité thermique.

On suppose que la température est uniforme dans toute section, et on se place en régime stationnaire, soit $T = T(x)$.

On rappelle de plus qu'un élément de barre de longueur l et de section S possède une résistance électrique :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}.$$

1. Déterminer la loi de distribution de la température $T(x)$ dans la barre. Commenter.

2. À quelle condition, portant sur T_1 et T_2, la répartition de température $T(x)$ présente-t-elle un maximum supérieur à $\max\{T_1, T_2\}$?

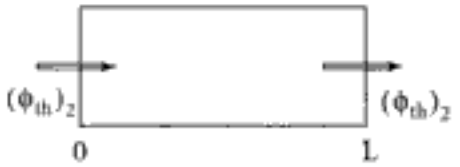
Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Le vecteur $\vec{j}_q$ vaut ici :

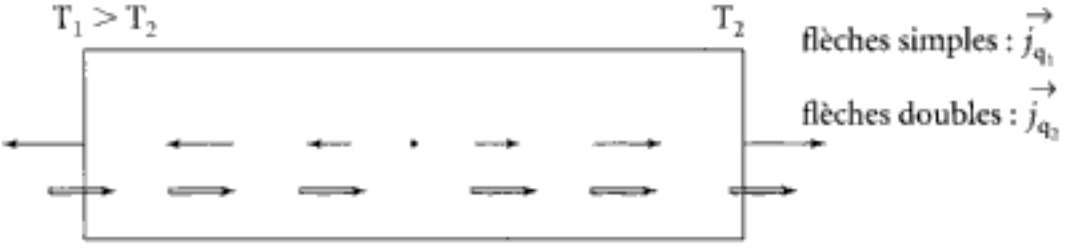
$$(\vec{j}_q)_2 = -K\frac{dT}{dx}\vec{u}_x = -K\frac{(T_2 - T_1)}{L}\vec{u}_x$$



et $(\phi_{th})_2 = -KS\dfrac{(T_2 - T_1)}{L}$.

• **Au total**, on a bien : $\begin{cases} T - T_1 = \dfrac{j_0^2}{2K\sigma}x(L - x) + (T_2 - T_1)\dfrac{x}{L} \\ \vec{j}_q = \vec{j}_{q_1} + \vec{j}_{q_2} \end{cases}$

2. Supposons $T_1 > T_2$. On cherche à discuter l'existence d'un extremum de température pour $0 \leqslant x < L$, défini par $\dfrac{dT}{dx} = 0$, soit encore par $\vec{j}_q = \vec{0}$.



Le schéma ci-dessus représente les vecteurs flux d'énergie thermique dus d'une part au courant i circulant dans la barre et d'autre part à la différence des températures imposées aux extrémités de la barre. On constate alors, dans le cas de figure où $T_1 > T_2$, qu'un tel extremum ne peut avoir lieu que pour $0 < x < \dfrac{L}{2}$ et à condition qu'il existe une valeur x_m de x pour laquelle $(j_{q_2}) = (-j_{q_1})$. Ce qui s'écrit ici :

$$\frac{K}{L}(T_1 - T_2) = \frac{j_0^2}{\sigma}\left(\frac{L}{2} - x_m\right) \text{ soit encore : } x_m = \frac{L}{2} - \frac{\sigma K}{j_0^2 L}(T_1 - T_2) \quad (2)$$

L'existence de x_m implique $T_1 - T_2 < \dfrac{L^2 j_0^2}{2\sigma K}$ (pour $T_1 > T_2$).

On peut reproduire le même raisonnement pour $T_2 > T_1$ (il suffit de prendre l'origine à l'autre extrémité de la barre et de changer le sens de l'axe des x). Il faut donc :

$$\boxed{|T_1 - T_2| < \frac{L^2 j_0^2}{2\sigma K}}$$

Remarquons qu'il s'agit bien d'un maximum. Reprenant le schéma précédent, on a dans ce cas $(T_1 > T_2)$:

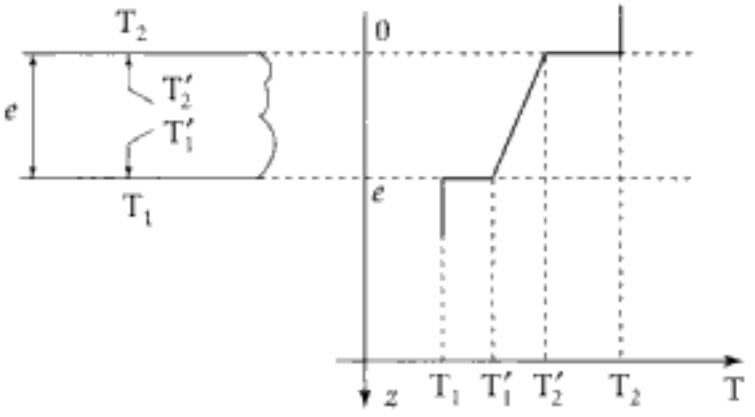
$$\begin{cases} j_q(x) = -K\dfrac{dT}{dx} = j_{q_1} + j_{q_2} > 0 \text{ pour } x > x_m \text{ et } \dfrac{dT}{dx} < 0 \\ j_q(x) = -K\dfrac{dT}{dx} = j_{q_1} + j_{q_2} < 0 \text{ pour } x < x_m \text{ et } \dfrac{dT}{dx} > 0. \end{cases}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

De plus, les échanges thermiques en surface impliquent des sauts de température, ce que l'on peut représenter sur le schéma ci-dessous :



Dans la plaque circule donc, selon z, un flux thermique (associé à la tranche de longueur dx) : $\delta\phi = -K\delta\Sigma\dfrac{\partial T}{\partial z}$ où $\delta\Sigma = l\,dx$.

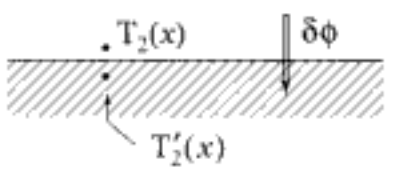
Or $\dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{T(x, e) - T(x, 0)}{e} = \dfrac{T_1'(x) - T_2'(x)}{e}$

$T_1'(x)$ et $T_2'(x)$ désignent les températures régnant sur les faces de la plaque, respectivement en contact avec le fluide froid et le fluide chaud.

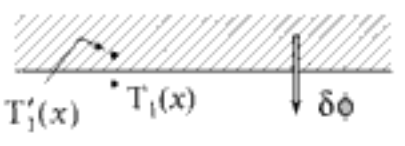
D'où $$\delta\phi = +\frac{Kl}{e}dx[T_2'(x) - T_1'(x)].$$

D'autre part, on doit écrire la continuité du flux thermique aux interfaces fluide chaud-plaque et plaque-fluide froid, soit :

$\delta\phi = h_2 l\,dx(T_2(x) - T_2'(x))$



et $\delta\phi = h_1 l\,dx(T_1'(x) - T_1(x))$



On a donc :

$$\left.\begin{aligned} T_2'(x) - T_1'(x) &= \frac{e}{Kl\,dx}\delta\phi \\ T_2(x) - T_2'(x) &= \frac{1}{h_2 l\,dx}\delta\phi \\ T_1'(x) - T_1(x) &= \frac{1}{h_1 l\,dx}\delta\phi \end{aligned}\right\} T_2(x) - T_1(x) = \left(\frac{e}{K} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right)\frac{\delta\phi}{l\,dx}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\delta\phi = \frac{l\,dx}{\dfrac{e}{K} + \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2}}[T_2(x) - T_1(x)]} \quad (1)$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

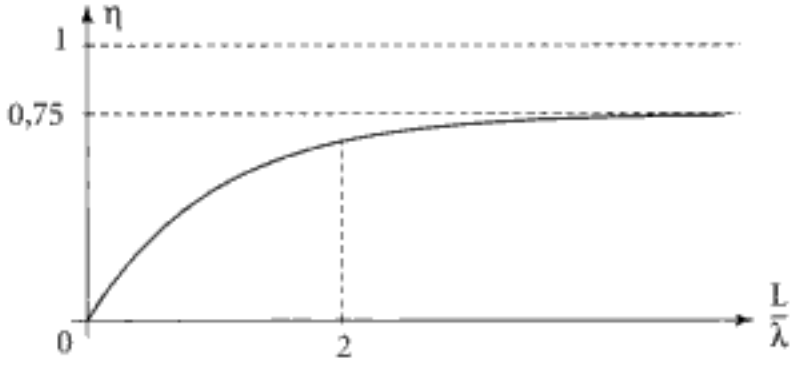
■ On peut comparer ce flux au flux théorique maximal qui correspond, pour $D_{m_1}c_{p_1} < D_{m_2}c_{p_2}$, à $(T_1)_f = T_{2_0}$:

$$\phi_{max} = D_{m_1}c_{p_1}(T_{2_0} - T_{1_0}).$$

On définit alors un coefficient d'efficacité par :

$$\eta = \frac{\phi_{th}}{\phi_{max}} = \frac{D_{m_2}c_{p_2}}{D_{m_1}c_{p_1} + D_{m_2}c_{p_2}}\left(1 - \exp\left(-\frac{L}{\lambda}\right)\right).$$

Nous donnons ci-dessous la courbe $\frac{L}{\lambda} \mapsto \eta\left(\frac{L}{\lambda}\right)$ pour $\frac{D_{m_2}c_{p_2}}{D_{m_1}c_{p_1}} = 3$.



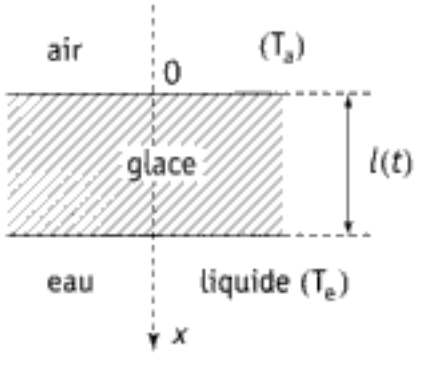
Remarquons que l'efficacité est d'autant meilleure que L est grande ce qui n'est guère surprenant.

209 Formation d'une couche de glace

L'eau liquide d'un lac est à la température de congélation $T_e = 273$ K.

L'air au-dessus du lac est à la température constante $T_a = 263$ K.

Libre de glace à l'instant initial $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est notée $l(t)$.

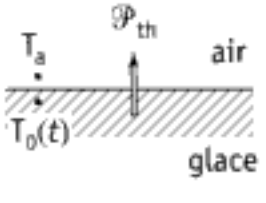


La glace possède une masse volumique μ, une conductibilité thermique K, une chaleur latente de fusion L (rapportée à l'unité de masse), et une capacité calorifique que l'on négligera.

D'autre part, la puissance thermique échangée à l'interface glace-air est donnée – pour une surface S de glace – par :

$$\mathcal{P}_{th} = \alpha(T_0(t) - T_a)S$$

où $T_0(t)$ représente la température de la glace en $x = 0$.



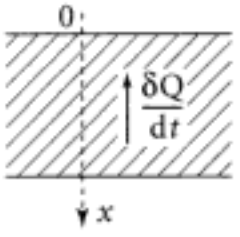
Copyrighted material

Hidden page

Ce « dégagement » d'énergie thermique est évacué à travers la glace vers l'interface glace/air (où elle se « dissipe » dans l'atmosphère).

À l'intérieur de la glace, le flux d'énergie thermique (par unité de surface traversée) s'identifie à j_q, d'où :

$$-\frac{\delta Q}{dt} = j_q = -K\frac{\partial T}{\partial x} = K\frac{T_0(t) - T_e}{l(t)} \quad (3) \text{ d'après } (1)$$



d'où avec (2) :

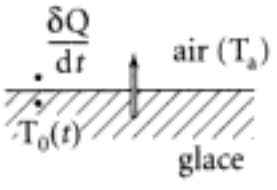
$$L\mu\frac{dl}{dt} = -\frac{K}{l(t)} \cdot (T_0(t) - T_e)$$

soit encore :

$$\boxed{l(t) \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{K}{L\mu} \cdot (T_e - T_0(t))} \quad (4)$$

Enfin la continuité du flux thermique à travers l'interface glace-air se traduit par la relation (pour l'unité de surface) :

$$\frac{\delta Q}{dt} = \alpha(T_0(t) - T_a)$$



et avec (3) :

$$\alpha(T_0(t) - T_a) = \frac{K}{l(t)} \cdot [T_e - T_0(t)].$$

Cette expression nous donne la température à la surface de la glace en fonction de l'épaisseur de la couche de glace $l(t)$:

$$T_0(t)\left[1 + \frac{\alpha l(t)}{K}\right] = T_e + \frac{\alpha l(t)}{K}T_a$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{T_0(t) = \frac{T_e + \frac{\alpha l(t)}{K}T_a}{1 + \frac{\alpha l(t)}{K}}} \quad (5)$$

Éliminons $T_0(t)$.

Or d'après (5) : $$T_e - T_0(t) = \frac{\frac{\alpha l(t)}{K}}{1 + \frac{\alpha l(t)}{K}}(T_e - T_a)$$

et avec (4) : $$\left(1 + \frac{\alpha l}{K}\right) \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{K}{L\mu} \cdot \frac{\alpha}{K}(T_e - T_a).$$

Intégrons cette dernière relation avec la condition initiale $l(0) = 0$. Il vient :

$$l + \frac{1}{2}\frac{\alpha l^2}{K} = \frac{\alpha}{L\mu}(T_e - T_a)t.$$

soit encore : $$l^2 + \frac{2K}{\alpha}l = \frac{2K}{L\mu}(T_e - T_a)t$$

Copyrighted material

et $$\left(l+\frac{K}{\alpha}\right)^2 = \frac{K^2}{\alpha^2}+\frac{2K}{L\mu}(T_e-T_a)t.$$

L'épaisseur de glace formée à l'instant t est donnée par :

$$\boxed{l(t) = \frac{K}{\alpha}\left\{\sqrt{1+\frac{2\alpha^2}{KL\mu}(T_e-T_a)t}-1\right\}}$$

Avec les notations de l'énoncé, nous obtenons : $l(t) = l_0\left\{\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}$

et avec (5) : $T_0(t) = T_a + \dfrac{T_e-T_a}{1-\dfrac{l(t)}{l_0}} \Rightarrow \boxed{T_0(t) = T_a + \dfrac{T_e-T_a}{1-\dfrac{l(t)}{l_0}}}$

2. L'application numérique donne :

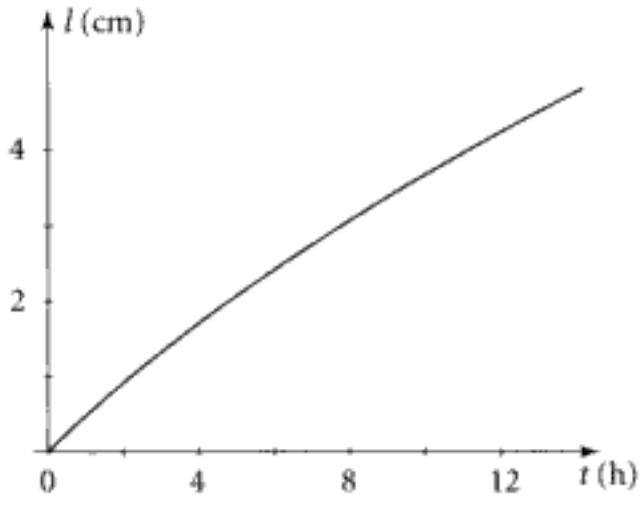
$$l_0 = \frac{K}{\alpha} = \frac{5\cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 5\cdot 10^{-2} = \mathbf{5\ cm.}$$

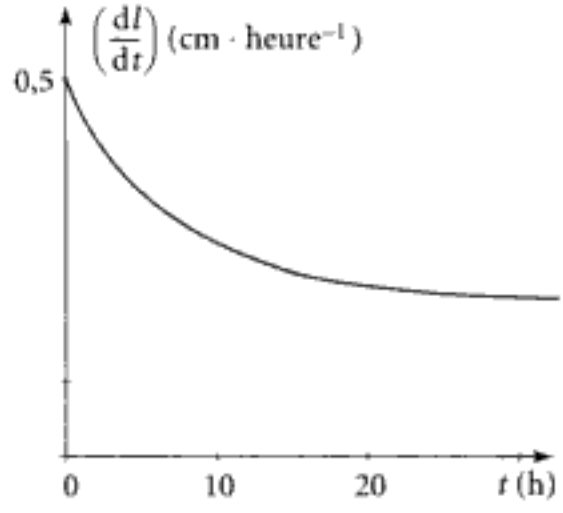
$$\tau = \frac{KL\mu}{2\alpha^2(T_e-T_a)} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 80\cdot 9\cdot 10^{+2}}{2\cdot 10^{-4}\cdot 10} = \mathbf{1{,}8\cdot 10^{+4}\ s}\ (5\text{ heures}).$$

Soit :

$$\left.\begin{aligned} l(t)_{cm} &= 5\left\{\left(1+\frac{t}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\} \\ T_0(K) &= 263+\frac{10}{\sqrt{1+\frac{t}{5}}} \end{aligned}\right\}\ t \text{ en heures.}$$

D'où les courbes :





Copyrighted material

Le taux d'accroissement de l'épaisseur de la glace par unité de temps est donné par :

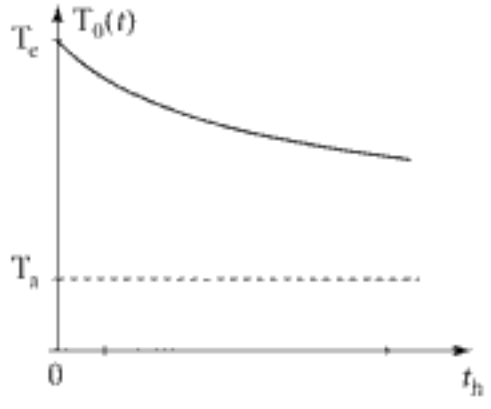
$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{l_0}{\tau}}{2\sqrt{1+\dfrac{t}{\tau}}}, \text{ soit } 0{,}5 \text{ cm/heure à } t = 0$$

et pour la température de la glace $T_0(t)$ à l'interface glace-air :

Nous avons :

$T_0(t = 0) = T_e$ et $T_0(t \to +\infty) = T_a$.

T_0 est une fonction monotone décroissante de T_i à T_a, pour t variant de zéro à « l'infini ».



Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

301 Échanges de chaleur d'une paroi solide en contact avec un gaz

1. a. En supposant qu'une paroi émet et absorbe le rayonnement comme un corps noir, déterminer la puissance calorifique $\mathcal{P}_r$ transmise par rayonnement par une paroi (surface S, température T_p) en contact avec l'air extérieur (température T_g).

b. Que vaut cette puissance $\mathcal{P}_r$ si l'écart de température est faible ? Mettre alors $\mathcal{P}_r$ sous la forme $h_r S(T_p - T_g)$.

2. Calcul global du rayonnement et de la convection sur les parois extérieures.

Déterminer le coefficient global h dû à l'ensemble des deux phénomènes.

A.N. : Pour la convection, $h_c \approx 6\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$.

Comparer h_r et h_c lorsque T_g vaut 0 °C.

3. Soit un mur plan de conductivité thermique λ, d'épaisseur e séparant une pièce à la température T_i de l'air extérieur à la température T_e. On notera T_{pi} et T_{pe} les températures des parois respectivement intérieure et extérieure.

Définir et calculer la résistance thermique globale R relative au mur.

4. Comment est modifiée la résistance thermique si le mur est un dôme hémisphérique de rayon intérieur r_i et de même surface intérieure que le mur précédent ?

5. Les « parois » séparant la pièce de l'extérieur sont maintenant de deux natures : mur plan de brique (surface S, épaisseur e et conductivité λ) et vitres (surface S_v, épaisseur e_v et conductivité λ_v). Trouver la nouvelle résistance thermique.

1. Ce qu'il faut savoir

- Loi de Stefan.
- Définitions du flux (ou puissance) surfacique, de la puissance, de la résistance thermique.
- Relation entre le coefficient de transfert thermique de surface h et le flux thermique à l'interface entre un fluide et une paroi solide (ou loi de Newton).

2. Ce qu'il faut comprendre

- Le coefficient h intervenant dans la loi phénoménologique de Newton correspond à un coefficient global dû aux phénomènes de convection et de rayonnement. Lorsque le flux radiatif à la paroi d'un corps noir peut être considéré comme une fonction linéaire de la différence des températures, on peut évaluer l'ordre de grandeur du coefficient h_r de transfert de rayonnement de surface.
- Les résistances thermiques ne peuvent être définies qu'en régime permanent :

$$R_{Th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{Th}}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Commentaire

• Les résistances sont en parallèle car il y a ici deux branches (mur et vitre) en parallèle qui conduisent le flux thermique de l'intérieur vers l'extérieur.

• C'est (comme en électricité) la résistance la plus faible qui va jouer le plus grand rôle au niveau des pertes thermiques.

302 Rayonnement solaire

La surface externe du Soleil est assimilée à un corps noir sphérique de rayon $R_S = 6{,}96 \cdot 10^8$ m à la température constante $T_S = 5\,800$ K et situé à la distance $a = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m de la Terre.

La puissance $\mathcal{P}$ rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir est répartie sur l'ensemble des longueurs d'onde λ possibles avec, pour répartition selon la fréquence ν : $\dfrac{d\mathcal{P}}{d\nu} = \text{cste} \cdot T^3 \cdot f(u)$ où $f(u) = \dfrac{u^3}{e^u - 1}$ et $u = \dfrac{h\nu}{k_B T}$.

On pose $\dfrac{d\mathcal{P}}{d\lambda} = g(u)$ et on prendra $\displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,du = \frac{\pi^4}{15}$.

1. La constante de la loi de Planck peut être considérée comme un produit des constantes h, c et k_B sous la forme :

$$\text{cste} = K c^{\alpha} h^{\beta} k_B^{\gamma} \text{ où } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ et } K \text{ sont sans dimension.}$$

Déterminer les valeurs de α, β, γ.

2. Déterminer, en utilisant la loi de Stefan, la valeur de la constante sans dimension K sachant que $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

3. Trouver la fonction $g(u)$.

On admet que cette fonction présente un maximum unique atteint pour la valeur $u_m = 4{,}97$. Établir la loi de déplacement de Wien.

4. Comparer les valeurs de la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission thermique du corps noir pour le rayonnement thermique solaire et le rayonnement thermique de l'ensemble atmosphère-Terre assimilé, en été, à un corps noir à une température de 20 °C.

5. Déterminer la valeur littérale de la puissance rayonnée Φ_S^0 par le Soleil par unité de surface au niveau du sommet de l'atmosphère terrestre, sans tenir compte de l'obliquité des rayons.

Calculer numériquement Φ_S^0 et la comparer à la puissance effectivement reçue au niveau du sol Φ_S qui vaut environ $700\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

5. D'après la loi de Stefan, la puissance surfacique rayonnée par le Soleil vaut σT_S^4 où T_S est la température de surface du Soleil. La puissance totale rayonnée par le Soleil vaut donc $\sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2$.

Si l'on considère qu'il n'y a pas de perte, cette puissance se conserve. À une distance d du centre du Soleil, le flux surfacique Φ_S^0 reçu orthogonalement aux rayons est tel que :

$$\Phi_S^0 \times 4\pi d^2 = \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2$$

$$\boxed{\Phi_S^0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d}\right)^2}$$

Au sommet de l'atmosphère terrestre, $d = D_{TS} - R_T$ où D_{TS} est la distance Terre-Soleil et R_T le rayon de la Terre.

A.N. : $\Phi_S^0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times (5\,800)^4 \left(\frac{6{,}96 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^{11}}\right)^2 = 1\,380\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

La puissance surfacique effectivement reçue au niveau du sol ($700\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$) est la moitié de la puissance Φ_S^0 théorique : il y a une forte perte dans l'atmosphère.

6. Supposons que le satellite reçoive toujours la même puissance surfacique Φ_S^0. Notons $S_{\text{éclairée}}$ sa surface éclairée et S_{totale} sa surface totale.

S'il se comporte comme un corps noir à l'équilibre, le flux incident reçu $\Phi_S^0 \times S_{\text{éclairée}}$ est égal au flux émis $\sigma T_{\text{satellite}}^4 \times S_{\text{totale}}$.

Ainsi $$\boxed{T_{\text{satellite}} = \left[\frac{\Phi_S^0}{\sigma}\left(\frac{S_{\text{éclairée}}}{S_{\text{totale}}}\right)\right]^{1/4}}$$

Pendant la « nuit », $S_{\text{éclairée}} = 0 \Rightarrow T_{\text{satellite}} = \text{OK !}$

Pendant le jour, $S_{\text{éclairée}} = \frac{S_{\text{totale}}}{2} \Rightarrow T_{\text{satellite}} = \left[\frac{\Phi_S^0}{\sigma}\frac{1}{2}\right]^{1/4} = 330\ \mathrm{K}$.

303 Température de surface d'une planète

1. Modèle simpliste

On modélise la planète par une coquille sphérique, de rayon R_p, de température uniforme T_p, en équilibre thermodynamique se comportant comme un corps noir. On note $\mathcal{P}_S$ la puissance totale émise par le Soleil (rayon R_S, température T_S) et D_{Sp} la distance Soleil-planète.

a. Trouver, en fonction de $\mathcal{P}_S$, la puissance $\mathcal{P}_0$ reçue par la planète.

b. Quelle est la température de surface de la planète Terre, de la Lune ?

A.N. : pour la Terre, $R_T \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ km, $D_{ST} \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ km

$R_S \approx 7 \cdot 10^5$ km, $T_S \approx 5\,800$ K.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

L'équilibre radiatif de la Terre s'écrit $\varphi_i(T) = \varphi_p(T)$ ou de façon équivalente $\varphi_e(T) = \varphi_{abs}(T)$ ce qui se traduit ici par :

$$\boxed{\mathcal{P}_{rT} = \mathcal{P}_0(1-\alpha)(1-A_T) + \mathcal{P}_{ra}}$$

Remarquons que, comme prévu, tous les flux sont égaux car la Terre est supposée se comporter comme un corps noir à l'équilibre.

b. Pour la couche atmosphérique :

$$\begin{cases} \varphi_i = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{rT} \\ \varphi_p = [A_T + (1-\alpha)(1-A_T)]\mathcal{P}_0 + 2\mathcal{P}_{ra} \\ \varphi_e = 2\mathcal{P}_{ra} \\ \varphi_{abs}(T) = \alpha(1-A_T)\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{rT} \end{cases}$$

L'équilibre radiatif de l'atmosphère ($\varphi_i = \varphi_p$ ou $\varphi_e = \varphi_{abs}$) se traduit ici par :

$$\boxed{2\mathcal{P}_{ra} = \alpha(1-A_T)\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{rT}}$$

Cette fois, $\varphi_i \neq \varphi_a$ car l'atmosphère n'est pas un corps noir (sauf si $\alpha = 1$ et $A_T = 0$!).

c. Les deux équilibres imposent :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{rT} - \mathcal{P}_{ra} = (1-\alpha)(1-A_T)\mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_{rT} - 2\mathcal{P}_{ra} = -\alpha(1-A_T)\mathcal{P}_0 \end{cases}$$

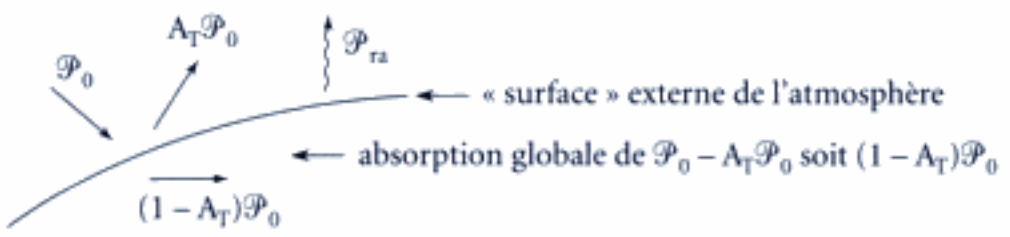
d'où $\boxed{\mathcal{P}_{ra} = (1-A_T)\mathcal{P}_0}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{rT} = (2-\alpha)(1-A_T)\mathcal{P}_0}$

• Sans absorption du rayonnement solaire ($\alpha = 0$), $\mathcal{P}_{rT} = 2\mathcal{P}_{ra} = 2(1-A_T)\mathcal{P}_0$.

Dans ce cas, on remarque que la Terre reçoit $\varphi_i(T)(= \varphi_p(T) = \mathcal{P}_{rT})$ qui est le double de $\mathcal{P}_0'$ calculée au 2 : c'est l'effet de serre.

• Sans absorption ($\alpha = 0$) ni albédo ($A_T = 0$), $\mathcal{P}_{rT} = 2\mathcal{P}_{ra} = 2\mathcal{P}_0$.

d. Faisons un bilan radiatif pour l'ensemble Terre-atmosphère.



Les flux valent, pour l'ensemble Terre-atmosphère :

$$\begin{cases} (\varphi_i)_{ensemble} = \mathcal{P}_0 \\ (\varphi_p)_{ensemble} = A_T\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{ra} \\ (\varphi_e)_{ensemble} = \mathcal{P}_{ra} \\ (\varphi_{abs})_{ensemble} = (1-A_T)\mathcal{P}_0 \end{cases}$$

Copyrighted material

L'équilibre radiatif de l'ensemble $((\varphi_i)_{ensemble} = (\varphi_p)_{ensemble}$ ou $(\varphi_e)_{ensemble} = (\varphi_{abs})_{ensemble})$ s'écrit $\mathcal{P}_{ra} = (1 - A_T)\mathcal{P}_0$.

e. • La Terre étant considérée comme un corps noir à l'équilibre à la température T_T'', $\varphi_e(T)$ (où $\varphi_{abs}(T)$) vaut $\sigma T_T''^4 \times 4\pi R_T^2$.

Ainsi $\sigma T_T''^4 \times 4\pi R_T^2 = \mathcal{P}_{rT} = (2 - \alpha)(1 - A_T)\mathcal{P}_0$

et on a trouvé au **1. a.** que $\mathcal{P}_0 = \frac{1}{4}\mathcal{P}_S\left(\frac{R_T}{D_{ST}}\right)^2 = \frac{1}{4} \times (\sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2)\left(\frac{R_T}{D_{ST}}\right)^2$.

Finalement :

$$T_T''^4 = \frac{1}{4}T_S^4\left(\frac{R_S^2}{D_{ST}^2}\right) \times (2 - \alpha)(1 - A_T)$$

d'où :

$$\boxed{T_T'' = T_S\sqrt[4]{\frac{R_S}{2D_{ST}}}(2 - \alpha)^{\frac{1}{4}}(1 - A_T)^{\frac{1}{4}}}$$

A.N. : $T_T'' = 5\,800\sqrt[4]{\frac{7 \cdot 10^5}{2 \times 1{,}5 \cdot 10^8}} \times (2 - 0{,}35)^{\frac{1}{4}}(1 - 0{,}35)^{\frac{1}{4}} \approx 282$ K

• Pour le rayonnement infrarouge, le flux émis par l'atmosphère $(2\mathcal{P}_{ra})$ est, d'après l'énoncé égal à $\sigma T_a^4 \times 2 \times 4\pi R_T^2$.

Il vient $\sigma T_a^4 \times 4\pi R_T^2 = (1 - A_T)\mathcal{P}_0$

$$= (1 - A_T)\frac{1}{4}(\sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2)\left(\frac{R_T}{D_{ST}}\right)^2.$$

Après simplification, on arrive à :

$$T_a^4 = \frac{1}{4}(1 - A_T)\left(\frac{R_S}{D_{ST}}\right)^2 T_S^4$$

$$T_a = T_S(1 - A_T)^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{\frac{R_S}{D_{ST}}} \approx 250 \text{ K}$$

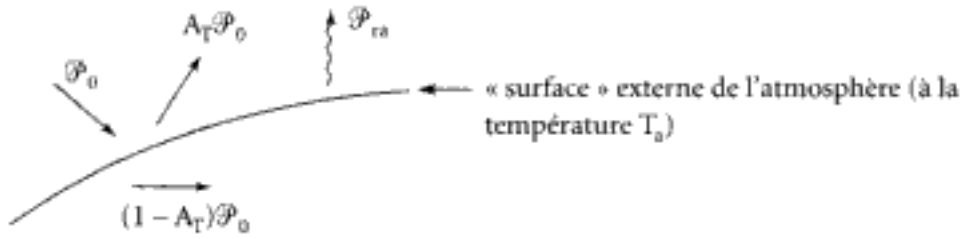
On remarque que T_a vaut la température T_T' du 2.b.

Commentaire

• Le fait de trouver que l'atmosphère (émettant comme un corps noir) a la température de la Terre (non entourée d'atmosphère) réfléchissant une fraction A_T du rayonnement solaire (modèle de la question 2) est normal.

• Au lieu de supposer que l'atmosphère émet comme un corps noir, on aurait pu s'intéresser à l'ensemble atmosphère-Terre et supposer que cet ensemble émet comme un corps noir, de température T_a.

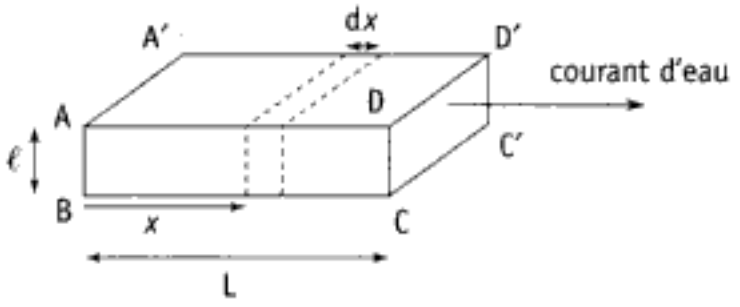
Copyrighted material



Le flux émis $\mathcal{P}_{ra}$ (et /ou le flux absorbé $(1 - A_T)\mathcal{P}_0$) est alors égal à $\sigma T_a^4 \times 4\pi R_T^2$ et on retrouve le même résultat.

304 Capteur solaire

On souhaite utiliser comme source chaude d'une machine thermique l'eau réchauffée par un capteur solaire parallélépipédique parcouru par un courant d'eau.



• Le flux solaire est supposé uniformément réparti, sans pertes, sur la face ABCD parfaitement noircie (émissivité $\varepsilon = 1$). Les trois autres faces sont calorifugées et ne subissent aucune perte (ni par rayonnement, ni par convection). En revanche, la face ABCD, qui reçoit le rayonnement, ne peut pas être traitée et il y a des pertes par convection et par rayonnement. Le flux solaire surfacique au sol est d'environ $\Phi_0 = 800\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ dans les meilleures conditions (soleil au zénith, ciel clair).

• L'eau qui entre dans le capteur est à la même température T_0 que l'air ambiant. On note D_m le débit massique de l'eau et c sa capacité calorifique massique.

• On suppose que chaque tranche d'épaisseur dx à l'abscisse moyenne x (depuis la face d'entrée de l'eau dans le capteur) a une température uniforme $T(x)$ (aussi bien pour l'eau que pour la paroi qui la recouvre). C'est cette température qui intervient pour les échanges par rayonnement et/ou par convection (coefficient d'échange h avec l'air ambiant).

• On suppose le régime stationnaire établi.

1. Quel est le nombre N de miroirs de 1 m² de surface dont il faut disposer pour concentrer sur la face ABCD une puissance solaire $\mathcal{P}_{sol} = 1$ MW dans les conditions optimales ?

Copyrighted material

Hidden page

incidence normale) est :

$$N = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{\Phi_0 S} = \frac{10^6}{800 \times 1} = 1\,250.$$

2. En régime stationnaire établi, le bilan thermique, pour la tranche d'épaisseur dx (située à l'abscisse moyenne x) s'écrit :

Puissance reçue = Puissance emmagasinée + Puissance rayonnée
+ Puissance perdue par convection

c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_{sol}\left(\frac{\ell\,\mathrm{d}x}{\ell L}\right) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot c[T(x+\mathrm{d}x) - T(x)] + \sigma T(x)^4(\ell\,\mathrm{d}x) + h(T(x) - T_0)(\ell\,\mathrm{d}x)$$

car seule la surface $\ell\,\mathrm{d}x$ peut recevoir et perdre de l'énergie.

L'équation différentielle est donc :

$$\boxed{\frac{D_m c}{\ell}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + h(T(x) - T_0) + \sigma T(x)^4 = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{\ell L}}$$

Cette équation différentielle n'est pas linéaire à cause du terme σT^4 et la solution n'est pas, *a priori*, analytique. Dans ce cas, comme le propose l'énoncé, on peut évaluer la contribution de chacun des termes.

a. Cas où il n'y a aucune perte : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c L}$.

Il vient : $\int_{T(x=0)}^{T(x)} \mathrm{d}T = \int_{x=0}^{x} \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c L}\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $T(x) - T_0 = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c L}x$

$T(x)$ est alors une fonction linéaire de x et $T_{id}(x = L) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c} = 538$ K.

b. Cas où il y a perte par convection : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \frac{h\ell}{D_m c}(T - T_0) = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c L}$.

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre constant a pour solution $T(x)$ avec :

- $T(x) - T_0 = \alpha e^{-\frac{h\ell}{D_m c}x} + \frac{\mathcal{P}_{sol}}{h\ell L}$
- $T(x = 0) - T_0 = \alpha + \frac{\mathcal{P}_{sol}}{h\ell L}$.

Comme $T(x = 0)$, température de l'eau à l'entrée du capteur, est égale à la température T_0 de l'air, il vient :

$$T(x) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_{sol}}{h\ell L}\left(1 - e^{-\frac{h\ell}{D_m c}x}\right)$$

En $x = L$, $T_{conv}(x = L) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_{sol}}{h\ell L}\left(1 - e^{-\frac{h\ell}{D_m c}L}\right)$.

Copyrighted material

Commentaires

• Si $L \ll \frac{D_m c}{h\ell}$, $T_{conv}(x = L) \approx T_0 + \frac{\mathcal{P}_{sol}}{h\ell L}\left(1 - \left(1 - \frac{h\ell}{D_m}L\right)\right)$

c'est-à-dire $T_{conv}(x = L) \approx T_{id}(x = L)$.

• On peut définir une longueur caractéristique au-delà de laquelle on ne peut pas négliger le phénomène de perte par convection pour le fluide circulant dans ce capteur :

$$L_{caractéristique} = \frac{D_m c}{h\ell}.$$

On peut également définir une surface caractéristique : $S_{caractéristique} = \ell L_c = \frac{D_m c}{h}$.

A.N. : $T_{conv}(x = L) = 300 + \frac{10^6}{20 \times 1 \times 10}\left(1 - e^{\frac{-20 \times 1 \times 10}{1 \times 4\,200}}\right) \approx 532{,}5$ K.

c. $\frac{\Delta T_{idéal}}{\Delta T_{conv}} = \frac{T_{id}(x = L) - T_0}{T_{conv}(x = L) - T_0} = \frac{\frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c}}{\frac{\mathcal{P}_{sol}}{h\ell L}\left(1 - e^{-\frac{h\ell L}{D_m c}}\right)} = \frac{h\ell L}{D_m c}\left(1 - e^{-\frac{h\ell L}{D_m c}}\right)^{-1}$.

Si $h\ell L \ll D_m c$, $\frac{\Delta T_{idéal}}{\Delta T_{conv}} \approx \frac{h\ell L}{D_m c}\left[1 - \left(1 - \frac{h\ell L}{D_m c} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\ell L}{D_m c}\right)^2\right)\right]^{-1}$.

Ainsi $\frac{\Delta T_{idéal}}{\Delta T_{conv}} \approx \left(1 - \frac{1}{2}\frac{h\ell L}{D_m c}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{h\ell L}{D_m c}$.

d. Cas où il y a perte par rayonnement : $\frac{dT}{dx} + \left(\frac{\sigma\ell}{D_m c}\right)T^4 = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c L}$.

Pour simplifier, on choisit $T_{réf}$ telle que $\left(\frac{\sigma\ell}{D_m c}\right)T_{réf}^4 = \frac{\mathcal{P}_{sol}}{D_m c L}$.

L'équation différentielle s'écrit alors $\frac{dT}{dx} = -\left(\frac{\sigma\ell}{D_m c}\right)(T^4 - T_{réf}^4)$.

Résolution mathématique : $\int_{T(x=0)}^{T(x)} \frac{dT}{T^4 - T_{réf}^4} = -\int_0^x \frac{\sigma\ell}{D_m c}dx$.

Or $\frac{1}{T^4 - T_{réf}^4} = \frac{1}{4T_{réf}^3}\left(\frac{1}{T - T_{réf}} - \frac{1}{T + T_{réf}}\right) - \frac{1}{2T_{réf}^2}\frac{1}{T^2 + T_{réf}^2}$

$T(x)$ doit donc vérifier :

$$\frac{1}{4T_{réf}^3}\left[\ln\left(\frac{T - T_{réf}}{T_0 + T_{réf}}\right) - \ln\left(\frac{T + T_{réf}}{T_0 + T_{réf}}\right)\right] - \frac{1}{2T_{réf}^2}\int_{T_0}^{T(x)} \frac{T_{réf}\, d\left(\frac{T}{T_{réf}}\right)}{T_{réf}^2\left(\left(\frac{T}{T_{réf}}\right)^2 + 1\right)} = -\frac{\sigma\ell}{D_m c}x.$$

Copyrighted material

Ainsi $\dfrac{1}{4T_{\text{réf}}^3}\left[\ln\left(\dfrac{T - T_{\text{réf}}}{T + T_{\text{réf}}} \times \dfrac{T_0 + T_{\text{réf}}}{T_0 - T_{\text{réf}}}\right) - 2\left(\text{Arctan}\left(\dfrac{T}{T_{\text{réf}}}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{T_0}{T_{\text{réf}}}\right)\right)\right] = -\dfrac{\sigma\ell}{D_m c}x$

ou encore $\ln\left(\dfrac{T - T_{\text{réf}}}{T + T_{\text{réf}}} \times \dfrac{T_0 + T_{\text{réf}}}{T_0 - T_{\text{réf}}}\right) - 2\text{Arctan}\left(\dfrac{T - T_0}{T\left(\dfrac{T_0}{T_{\text{réf}}}\right) + T_{\text{réf}}}\right) = -\dfrac{\sigma\ell}{D_m c} \times 4T_{\text{réf}}^3\, x.$

Grâce à la calculatrice, on trouve numériquement $T_{\text{ray}}(x = L) \approx 530$ K.

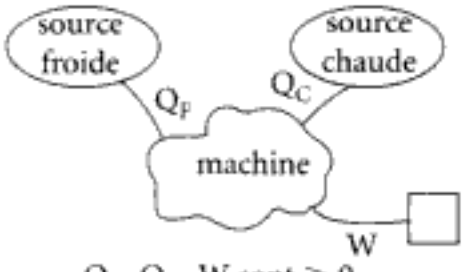
On peut remarquer que l'abaissement de température ($T_{\text{id}}(x = L) - T_{\text{ray}}(x = L) \approx 8$ K) dû à la perte par rayonnement est du même ordre de grandeur que celui dû à la perte par convection ($T_{\text{id}}(x = L) - T_{\text{conv}}(x = L) \approx 5{,}5$ K).

e. Comme souvent en physique, pour résoudre des équations différentielles non linéaires, on suppose que chaque terme apporte sa contribution, c'est-à-dire que :

$$T_{\text{réel}}(x = L) = T_{\text{id}}(x = L) + (T_{\text{conv}}(x = L) - T_{\text{id}}(x = L)) + (T_{\text{ray}}(x = L) - T_{\text{id}}(x = L)).$$

Ainsi $T_{\text{sortie}} \approx 538 - 5{,}5 - 8 \approx 524{,}5$ K.

3. On peut schématiser une machine ditherme de la façon ci-contre.



Q_F, Q_C, W sont > 0 si la machine les reçoit.

Comme la machine est un moteur (puisque c'est la puissance mécanique que l'on souhaite obtenir), le rendement, par définition, vaut :

$$\rho_{\text{moteur}} = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_C}.$$

Or $W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} = 0$ (car U est fonction d'état)

$(S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}})_{\text{machine}} = \Delta S_{\text{cycle}} = 0$ (car S est fonction d'état)

avec, de plus, $Q_{\text{cycle}} = Q_C + Q_F$, $S_{\text{éch}} = \dfrac{Q_C}{T_C} + \dfrac{Q_F}{T_F}$ et $S_{\text{créée}} = 0$ car la machine fonctionne de façon réversible.

Ainsi $\rho_{\text{moteur de Carnot}} = \dfrac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \dfrac{Q_F}{Q_C} = 1 - \dfrac{T_F}{T_C}.$

La puissance mécanique maximale que l'on peut obtenir est :

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = \rho\mathcal{P}_{\text{sol}}.$$

A.N. : $\rho = 1 - \dfrac{300}{525} \approx 0{,}43$; $\mathcal{P}_{\text{méca}} = 0{,}43 \cdot 10^6$ W.

Copyrighted material

Hidden page

$P_r = \frac{w}{3}$ où $w = \int_0^{+\infty} h\nu \, dn(\nu)$ correspond à la densité volumique d'énergie.

Commentaire

Pour un gaz parfait, on a le même type de calcul de la pression cinétique :

$$P_c = \frac{dF}{d\Sigma} = \iint\left(\frac{1}{2}\sin\theta \, d\theta \, dn(v) \times v\cos\theta\right) \times 2(mv)\cos\theta$$

$$P_c = \int_0^{+\infty} dn(v) mv^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} n_0 m u^{*2}$$ où n_0 est le nombre d'atomes par unité de volume.

306 Énergie interne et entropie associées au rayonnement

1. Montrer, en utilisant le fait que dU et dS sont des différentielles totales que : $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ où V est le volume, T la température et p la pression du système.

2. On suppose qu'au rayonnement émis par un corps noir (d'énergie électromagnétique volumique totale w) correspond un gaz de photons dont la pression est la pression de radiation $P_r = \frac{w}{3}$ et d'énergie interne $U_r = wV$ où w ne dépend que de T.

a. En appliquant la relation trouvée à la question 1 au rayonnement, montrer que l'énergie électromagnétique volumique totale w peut s'écrire $w = aT^4$ où a est un coefficient dont on donnera l'unité.

b. Montrer ensuite que l'entropie associée au rayonnement s'écrit :

$$S_r = \frac{4}{3} a T^3 V + \text{cste}.$$

En déduire qu'un rayonnement isentropique satisfait à une équation de type Laplace $T(V^{\gamma_r - 1}) = \text{cste}$ où $\gamma_r = \frac{4}{3}$.

c. En utilisant l'expression de l'énergie électromagnétique volumique spectrale $w_\nu(T)$ donnée par la loi de Planck :

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$, trouver l'expression de a.

3. On souhaite calculer la puissance reçue par un élément de surface d'aire $d\Sigma$ de la paroi limitant le gaz de photons.

Copyrighted material

a. Déterminer le nombre total dN_ν de photons de fréquence ν (à $d\nu$ près) frappant $d\Sigma$ pendant dt.

b. Trouver l'énergie correspondante dw_ν reçue par la surface pendant dt puis l'énergie totale dw reçue par la surface pendant dt.

c. En déduire que la puissance reçue par la surface s'écrit $\frac{ca}{4}T^4$. Montrer la compatibilité avec la loi de Stefan (où $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}$).

d. Montrer que la pression de radiation peut s'écrire :

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c}T^4.$$

Solution

1. • Comme $U(T, V)$, $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$.

De plus $dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$ ou encore $dS = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]dV$.

• L'égalité des dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\right)\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right)\right)_T$$

c'est-à-dire $-\frac{1}{T^2}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right) + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$

et finalement : $\boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$

2. a. Si $U = U_r = w(T) \cdot V$ et $P = P_r = \frac{w(T)}{3}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$w(T) + \frac{w(T)}{3} = \frac{T}{3}\frac{dw}{dT}.$$

Ainsi $\frac{dw}{w} = 4\frac{dT}{T}$ d'où $\boxed{w = aT^4}$

Dimension de a : $[a] = \frac{[w]}{[T^4]} = J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}$.

A.N. : $a \approx 7{,}53 \cdot 10^{-16}\ J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}$.

b. Pour trouver S_r, calculons d'abord dS_r :

$$dS_r = \frac{dU_r}{T} + \frac{P_r}{T}dV = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial T}\right)_V\right]dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial V}\right)_P + P_r\right]dV$$

Copyrighted material

soit $\quad dS_r = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)_V \cdot V\,dT + \frac{1}{T}\cdot\left(T\left(\frac{\partial P_r}{\partial T}\right)\right)_V dV$

$$= \frac{1}{T}\cdot 4aT^3\cdot V\,dT + \frac{1}{3}\frac{\partial w}{\partial T}dV = 4aT^2V\,dT + \frac{4}{3}aT^3\,dV$$

$$dS_r = \frac{4}{3}a(3VT^2\,dT + T^3\,dV) = \frac{4}{3}a\,d(T^3V)$$

Ainsi : $\boxed{S_r = \frac{4}{3}a(T^3V) + \text{cste}}$

c. L'énergie électromagnétique totale vaut :

$$w = \int_0^{+\infty} w_\nu\,d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3\,d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}.$$

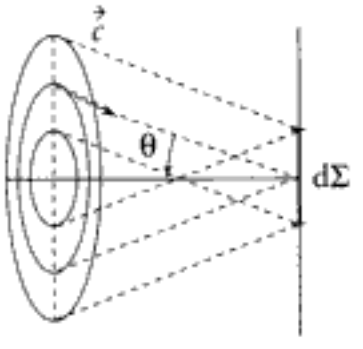
On fait le changement de variable $x = \frac{h\nu}{k_BT}$ (et donc $d\nu = \frac{k_BT}{h}dx$)

Il vient $w = \frac{8\pi h}{c^3}\times\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{8\pi}{h^3c^3}k_B^4T^4\frac{\pi^4}{15}$

w est de la forme : $w = aT^4$ où $\boxed{a = \frac{8}{15}\frac{\pi^5k_B^4}{h^3c^3}} = 7{,}53\cdot 10^{-16}\ \text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-4}$.

3. a. $dN_\nu(\theta) = \underbrace{dn(\nu)}_{\text{nombre de photons ayant une fréquence } \nu \text{ / unité de volume}}\times(c\cos\theta\cdot dt\cdot d\Sigma)\times\underbrace{\frac{d\Omega}{4\pi}}_{\text{probabilité d'avoir un photon arrivant sous une incidence } \theta \text{ à } d\theta \text{ près}}$

$\frac{2\pi\sin\theta\,d\theta}{4\pi}$



d'où : $\quad dN_\nu = dn(\nu)\frac{c}{2}dt\cdot d\Sigma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$= dn(\nu)\frac{c}{2}dt\cdot d\Sigma\times\frac{1}{2}.$$

b. Énergie reçue par la surface pendant dt :

$dW_\nu = h\nu\,dN_\nu$ car chaque photon a une énergie $h\nu$

$$dW = \int_{\nu=0}^{+\infty} h\nu\cdot\frac{c}{4}dt\cdot d\Sigma\cdot dn(\nu) = \frac{c}{4}dt\cdot d\Sigma\underbrace{\int_0^{+\infty}dn(\nu)h\nu}_{w}$$

c. Puissance reçue par unité de surface : $P_{\text{surfacique}} = \frac{dW}{dt\cdot d\Sigma} = \frac{c}{4}w.$

Comme $w = aT^4$, $P_{\text{surfacique}} = \frac{ca}{4}T^4$ et $\frac{ca}{4} = \frac{c}{4}\left(\frac{8}{15}\frac{\pi^5k_B^4}{h^3c^3}\right) = \frac{2\pi^5k_B^4}{15h^3c^2} = \sigma$ (constante de Stefan).

d. $P_r = \frac{w}{3} = \frac{aT^4}{3} = \frac{\left(\frac{4\sigma}{c}\right)T^4}{3}.$

Aubin Imprimeur - Ligugé, Poitiers D.L. septembre 2004 / Impr. : P 67311 / n° éditeur 209 03 68/01
Imprimé en France
Copyrighted material

Bréal, l'éditeur des prépas

En français

L'épreuve littéraire

En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.

20 dissertations analysées et corrigées

Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.

Connaissance d'une œuvre

Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.

La philothèque

Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).

En langues

Journal'ease Vocabulaire, Journal'ease Exercices

Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand (*Journ'allemand Vocabulaire et exercices*), en espagnol (*Journal'isimo Vocabulaire et exercices*) et en italien (*Journal'italien*).

Fort en thème - Fort en version

Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site : www.editions-breal.fr

Copyrighted material

Hidden page

Titres disponibles en deuxième année dans la filière MP...

En Mathématiques
- Analyse MP
- Algèbre et géométrie MP

En Physique
- Optique MP-PC-PSI-PT
- Mécanique MP-PC
- Électromagnétisme MP
- Électronique MP
- Thermodynamique MP

En Chimie
- Chimie MP-PT

Livres d'exercices
- Mathématiques MP
- Physique MP

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour s'entraîner efficacement et progresser tout au long de l'année.

- **Des exercices variés,** classés par thème et de difficulté progressive, couvrent la totalité du programme.
- **Des solutions entièrement rédigées** détaillent l'ensemble des méthodes et des raisonnements à connaître en deuxième année.
- **De nombreux commentaires** enrichissent les corrigés d'astuces, de conseils et d'explications supplémentaires.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0368
ISBN : 2 7495 0406 6
www.editions-breal.fr

Copyrighted material