Notions communes

Exercice 1 A quelle(s) condition(s) simple(s) l'intersection de trois plans de l'espace n'est elle pas réduit à un point ?

Exercice 2 L'ensemble des barycentres de trois points A,B,C non alignés est le plan (ABC).

Exercice 3 Soit A,B,C,D quatre points non coplanaires. On note $\mathcal{A}(.)$ l'aire d'un triangle.
Montrer $\mathcal{A}(BCD) \leq \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(ACD)$.

Droites de l'espace

Exercice 4 Une droite $\mathcal{D}$ coupe trois plans parallèles en des points A,B,C.
Montrer que le rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ne dépend de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 5 Soit $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) une droite passant par A (resp. B) et dirigée par $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Exercice 6 Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires.
Décrire l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{m[M,N] / M \in \mathcal{D}, N \in \mathcal{D}'\right\}$.

Exercice 7 Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes sécantes de l'espace.
Montrer que l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est la réunion de deux plans.

Exercice 8 Soit $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ des droites de l'espace telles que : $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}^2, i \neq j \Rightarrow \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \neq \varnothing$.
Montrer que les droites $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ sont concourantes ou coplanaires.

Produits scalaire, vectoriel et mixte

Exercice 9 Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul A un point et λ un réel.
Déterminer les points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \lambda$.

Exercice 10 Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Exprimer $\operatorname{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u})$ en fonction de $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 11 Soit $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que $\operatorname{Det}(\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{c},\vec{a}\wedge\vec{d}) = 0$.

Exercice 12 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et non nuls de l'espace. Simplifier $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}$.

Exercice 13 Soit A,B,C,D quatre points non coplanaires de l'espace
Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB})\wedge(\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}) = \vec{0}$.

Exercice 14 Montrer que pour tout points A,B,C,M, on a $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

Exercice 15 Soit $\vec{a},\vec{b}$ des vecteurs de l'espace avec $\vec{a} \neq \vec{o}$.
On désire déterminer les vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{b}$.

a) Montrer que, si $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$, il n'y a pas de solution à cette équation.

On suppose maintenant $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

b) Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que le vecteur $\vec{x}_0=\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}$ soit solution.

c) Déterminer alors toutes les solutions.

Exercice 16 Soit $\vec{a},\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace et l'équation vectorielle $\vec{x}+\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b}$ d'inconnue $\vec{x}$.

a) Soit $\vec{x}$ solution. Montrer que $\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ et en déduire une expression de $\vec{x}$.

b) Conclure.

Coordonnées cartésiennes dans l'espace

Exercice 17 Montrer que l'ensemble formé des points $M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ avec $\begin{cases}x=2+s+2t\\y=2+2s+t\\z=1-s-t\end{cases}$ pour $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ est un plan dont on formera une équation cartésienne.

Exercice 18 Déterminer une équation du plan parallèle à l'axe (Ox) passant par les points $A\left|\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}2\\-1\\0\end{matrix}\right.$.

Exercice 19 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $\mathcal{P}:x+y+z=1$.

Déterminer un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(\Omega,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ tel que $\Omega\in\mathcal{P}\cap(Oz)$ et $\vec{u},\vec{v}\in\operatorname{dir}\mathcal{P}$.

Exercice 20 On considère les cinq points de l'espace : $A\left|\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}\right.,B\left|\begin{matrix}3\\2\\0\end{matrix}\right.,C\left|\begin{matrix}2\\1\\-1\end{matrix}\right.,D\left|\begin{matrix}1\\0\\4\end{matrix}\right.$ et $E\left|\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right.$.

Déterminer un vecteur directeur de la droite intersection des plans (ABC) et (ADE) .

Exercice 21 Montrer que les droites $\mathcal{D}:\begin{cases}x=2z+1\\y=z-1\end{cases}$ et $\mathcal{D}':\begin{cases}x=z+2\\y=3z-3\end{cases}$ de l'espace affine $\mathcal{E}$ sont coplanaires et former un équation de leur plan.

Exercice 22 On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit la droite $\mathcal{D}:\begin{cases}x+y+z=1\\x-2y-z=0\end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}:x+3y+2z=6$ de l'espace.

Déterminer l'image de la projection orthogonale de $\mathcal{D}$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Distance d'un point à une droite, à un plan

Exercice 23 Calculer :

a) la distance du point $A\left|\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right.$ au plan $\mathcal{P}:x-y+z=2$

b) la distance du point $B\left|\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right.$ à la droite $\mathcal{D}$ paramétrée par : $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) la distance du point $C\left|\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right.$ à la droite Δ définie par le système $\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=3\end{cases}$.

Exercice 24 Soit $A\left|\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right.,B\left|\begin{matrix}2\\1\\-1\end{matrix}\right.,C\left|\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right.$ et $D\left|\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}\right.$. Déterminer le volume du tétraèdre $(ABCD)$.

Perpendiculaire commune

Exercice 25 Soit $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$ et $\mathcal{D}' = B + \text{Vect}(\vec{v})$ deux droites non coplanaires de l'espace.

On note H et H' les pieds de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{D}$ et tout $M' \in \mathcal{D}'$, on a $MM' \geq HH'$ et préciser le(s) cas d'égalité.

On appelle distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ le réel $d(\mathcal{D},\mathcal{D}') = HH'$.

b) Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n}$ reste constants quand M et M' décrivent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

c) En déduire que $d(\mathcal{D},\mathcal{D}') = \dfrac{\left|\text{Det}(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

b) Calculer la distance séparant les droites suivantes : $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

Exercice 26 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ deux droites de l'espace.

a) Justifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

b) Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Cylindres et sphères

Exercice 27 Etudier l'intersection d'un cylindre et d'une sphère centrée sur l'axe du cylindre.

Exercice 28 Montrer que deux cercles non coplanaires inscrits sur une sphère s'interceptent ssi la distance du centre de la sphère à la droite intersection des plans définissant les cercles est inférieure au rayon de la sphère.

Exercice 29 Déterminez la sphère contenant les cercles d'équation :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$.

Exercice 30 a) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de l'espace, de centre O, de rayon r, évoluant dans un plan $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de l'espace, de centre Ω et de rayon R.

Former une condition nécessaire et suffisante pour que la sphère $\mathcal{S}$ contienne le cercle $\mathcal{C}$.

b) On munit l'espace d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Montrer qu'il existe une unique sphère contenant les cercles suivants :

$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 26 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 8z = 16 \end{cases}$ et $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 15 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z = 8 \end{cases}$.

c) Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles non coplanaires de l'espace admettant deux points communs A et B.

Montrer qu'il existe une sphère unique $\mathcal{S}$ contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Coordonnées cylindriques et sphériques

Exercice 31 On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Exprimer les coordonnées sphériques (r,φ,θ) d'un point M en fonction de ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) et inversement.