

Evaluation des performances des systèmes asservis modélisés en SLCI – Partie 1 : Stabilité

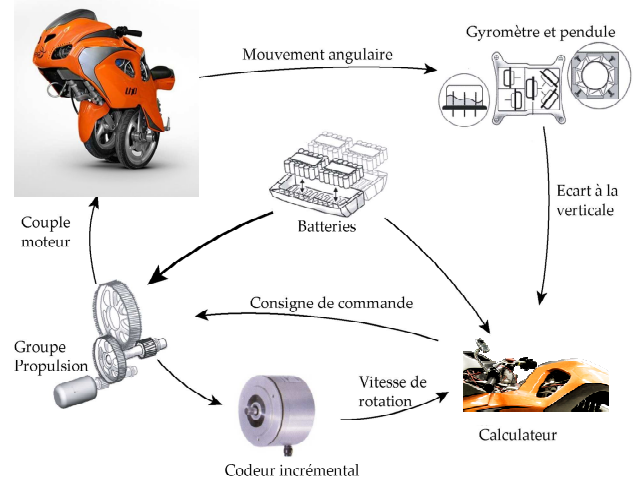


Uno I (Concept initial)



Uno III

Le scooter BPG Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour un bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroscopique couplé à un calculateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux groupes propulsion (<http://bpg-motors.com/>).



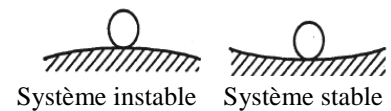
Exemple de système asservi BPG Uno Scooter Concept

On évalue les performances d'un système asservi, modélisé en SLCI, suivant 4 critères principaux qui sont la stabilité, la précision, la rapidité et l'amortissement. La stabilité est une notion générale non spécifique des systèmes asservis mais elle prend cependant une grande importance dans le cas de ces systèmes car on souhaite toujours qu'un système asservi soit stable. La stabilité est donc le critère que l'on regarde en premier et il est inutile d'analyser les autres critères si le système n'est pas stable.

1. Définitions

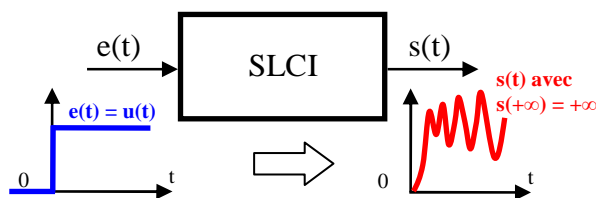
1.1. Stabilité – Définition générale

On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.

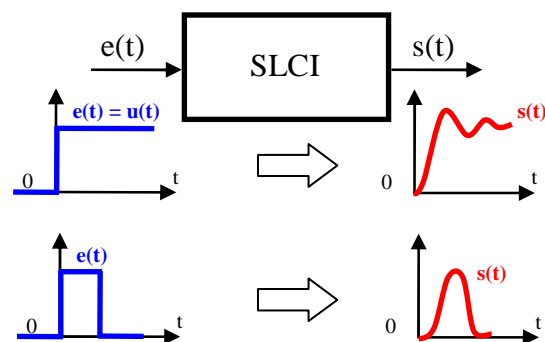


1.2. Stabilité – Définition adaptée aux SLCI

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Réponse s(t) d'un système instable



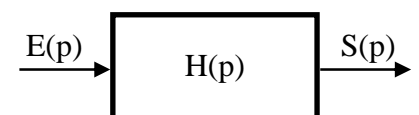
Réponses s(t) d'un système stable

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI

La stabilité d'un SLCI peut être déterminée uniquement à partir des pôles de sa fonction de transfert $H(p)$. Dans ce cas la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_i) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

Avec $N(p)$: numérateur de $H(p)$, p_i : **pôles** de $H(p)$ et n : **ordre** de $H(p)$.



Si l'on sollicite ce système avec une impulsion de Dirac en entrée ($E(p) = 1$), la sortie $S(p)$ a pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_i) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$.

Ce qui donne $S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p - p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$ après décomposition en éléments simples.

La transformation inverse permet ensuite d'obtenir la réponse temporelle qui a donc expression :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_i \cdot e^{p_i \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$

Pour que la sortie soit bornée, les exponentielles doivent toutes être décroissantes, ce qui donne 2 cas :

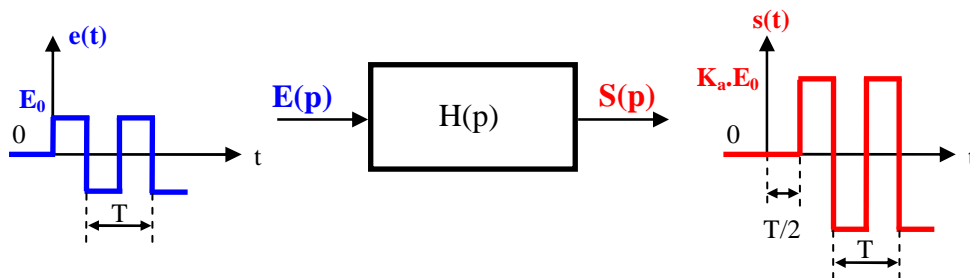
- Si les pôles sont tous réels : $s(t)$ ne tends vers 0 que si les p_i sont tous négatifs.
- S'il y a des pôles complexes conjugués deux à deux ($\rightarrow p_1 = \alpha + j \cdot \omega$ et $p_2 = \alpha - j \cdot \omega \rightarrow s(t) = A_1 \cdot e^{(\alpha + j \cdot \omega) \cdot t} + A_2 \cdot e^{(\alpha - j \cdot \omega) \cdot t} = \mu \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$) : $s(t)$ tends vers 0 si $\alpha < 0$.

Un Système Linéaire Continu Invariant est stable si sa fonction de transfert possède :

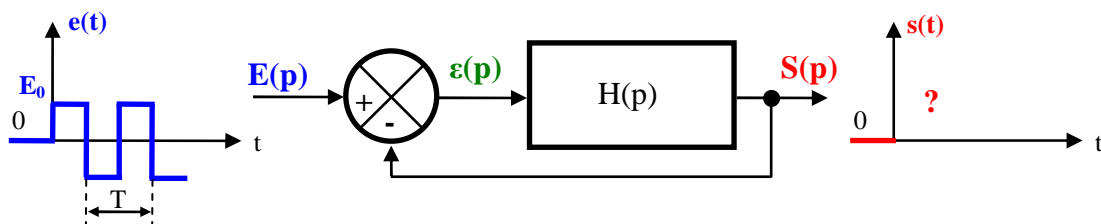
- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

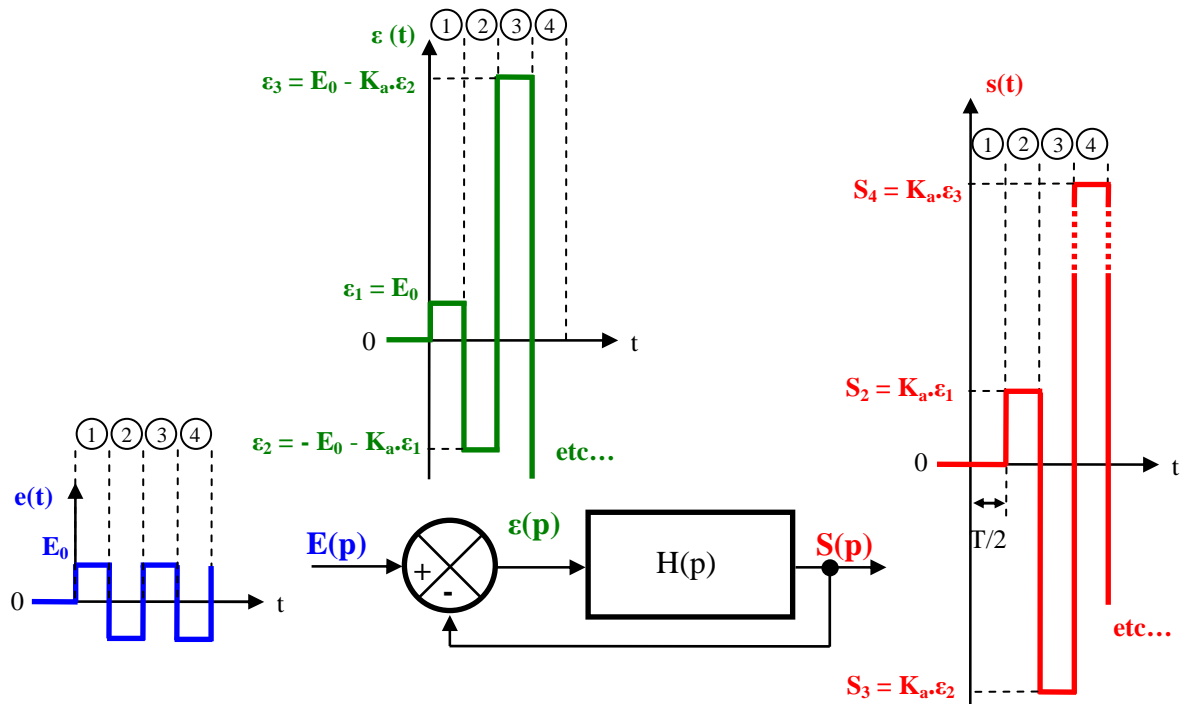
Lorsque l'on boucle un SLCI pour l'asservir, l'utilisation de cette boucle peut déstabiliser le système. Pour illustrer le phénomène on peut comparer la réponse d'un même système, de fonction de transfert $H(p)$, dans le cas où il est non bouclé puis dans le cas où il est bouclé. Pour cela on le sollicite avec un même signal d'entrée $e(t)$ rectangulaire de période T et d'amplitude E_0 . On considère que le système étudié (bloc $H(p)$) entraîne un déphasage de $T/2$ du signal et l'amplifie d'une valeur K_a :



En boucle ouverte on constate que le système est stable, le signal de sortie est juste amplifié et déphasé par rapport au signal d'entrée. Si on boucle ce même système avec un retour unitaire et qu'il est soumis à la même entrée en créneau, $H(p)$ est maintenant soumis à une entrée $\varepsilon(p) = S(p) - E(p)$ qui correspond à la différence entre les deux signaux d'entrée et de sortie.



Pour déterminer le signal de sortie $s(t)$, il faut cette fois-ci déterminer l'écart $\varepsilon(t)$ qui entre dans le bloc, $\frac{1}{2}$ période par $\frac{1}{2}$ période. Le tracé obtenu montre le phénomène de « pompage » ou instabilité dans laquelle la grandeur amplifiée $s(t)$ s'ajoute au signal d'entrée qui est lui-même de nouveau amplifié. Le processus se reproduit de période en période et le signal de sortie diverge donc très rapidement...



Pour la phase 1 : l'écart $\varepsilon_1 = E_0$.

Pour la phase 2 : l'écart $\varepsilon_2 = E_2 - S_2 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_1 = -E_0 \cdot (1 + K_a)$.

Pour la phase 3 : l'écart $\varepsilon_3 = E_3 - S_3 = E_0 - K_a \cdot \varepsilon_2 = E_0 - K_a \cdot (-E_0 \cdot (1 + K_a)) = E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)$.

Pour la phase 4 : l'écart $\varepsilon_4 = E_4 - S_4 = E_0 - K_a \cdot \varepsilon_3 = -E_0 - K_a \cdot (E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)) = -E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3)$, etc...

Soit un écart qui tend en valeur absolue vers $E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3 + \dots + K_a^n)$. C'est une suite qui converge ou diverge suivant les valeurs de K_a . Par conséquent si $K_a \geq 1$, la suite tend vers $+\infty$ et le signal de sortie également. Il y a donc instabilité après bouclage si $K_a \geq 1$.

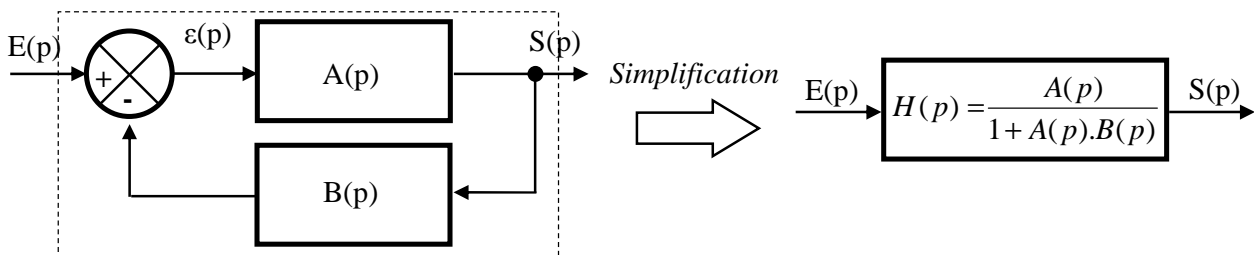
L'existence de la boucle de retour impose donc d'étudier la stabilité des systèmes asservis :

- Soit à partir de **critères analytiques sur le polynôme caractéristique de la fonction de transfert boucle fermée (FTBF)** du système, ce qui nécessite d'avoir le modèle numérique de cette FTBF.
- Soit à partir de **critères graphiques sur les lieux de transfert de la fonction de transfert boucle ouverte (FTBO)** du système. Dans la pratique, les critères graphiques sont plutôt privilégiés par les ingénieurs car ils permettent de déterminer des marges de stabilité.

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF

2.1. Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

Le calcul de la fonction de transfert boucle fermée d'un système asservi permet de passer d'un modèle bouclé à un modèle équivalent non bouclé de fonction de transfert $H(p)$.

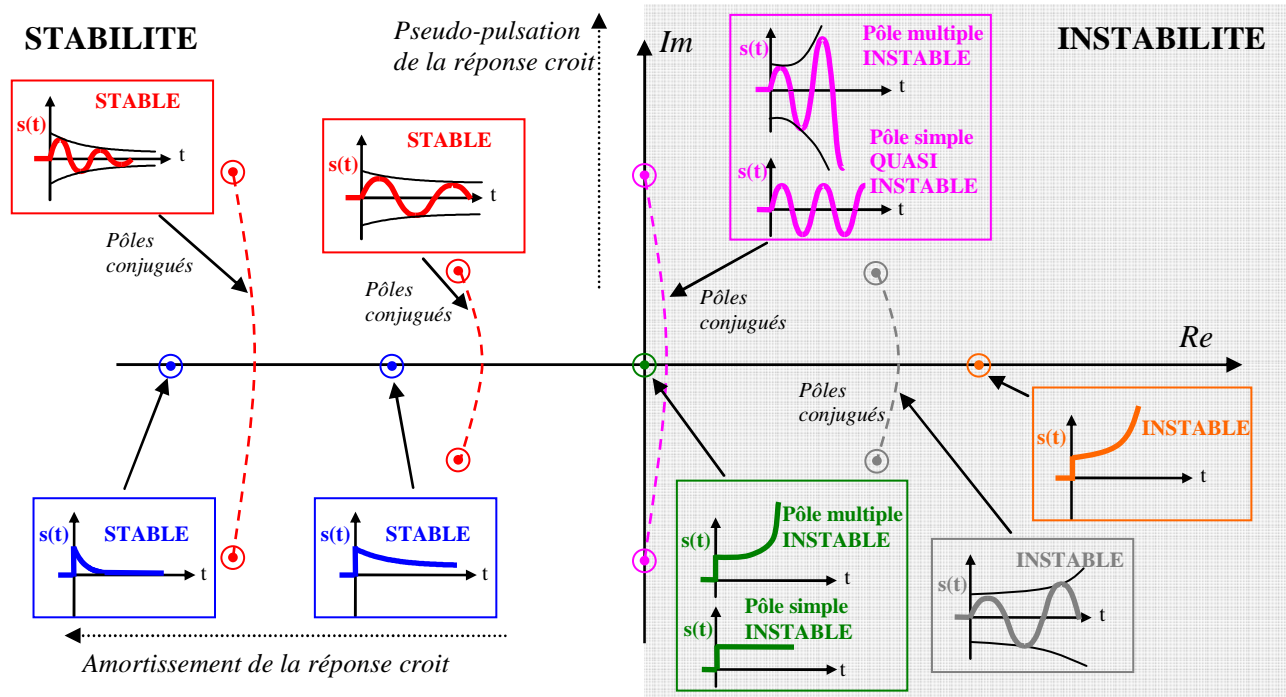


La FTBF pouvant aussi se mettre sous la forme privilégiant l'écriture en pôles, il est par conséquent possible de déterminer la stabilité d'un système asservi à l'aide de la condition fondamentale.

Un système asservi est stable si sa FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

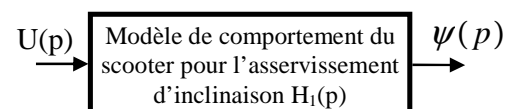
Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système



Bien que sa réponse à l'impulsion soit stable, un **intégrateur pur** est tout de même considéré comme un système **instable** puisqu'une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

La chaîne d'action permettant de réguler l'inclinaison du scooter est réalisée par un ensemble amplificateur et motoréducteur. Cet ensemble délivre un couple moteur qui permet d'incliner le châssis par rapport à la verticale.



Le modèle de comportement de ce système (amplificateur + motoréducteur + modèle dynamique du châssis \approx pendule inverse) donne une fonction de transfert qui peut s'écrire sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1}$$

Avec : $U(p)$ transformée de Laplace de la tension de commande du motoréducteur, $\psi(p)$ transformée de Laplace de l'angle d'inclinaison du scooter par rapport à la verticale, K_1 gain du système mécanique ($K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$) et ω_1 pulsation propre du système mécanique ($\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$).

$$\text{L'écriture en pôles donne : } H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - \omega_1) \cdot (p + \omega_1)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - 4,1) \cdot (p + 4,1)}$$

$H_1(p)$ possède 2 pôles réels dont un est positif \rightarrow le modèle dynamique du scooter sans asservissement est donc instable, ce qui est logique puisque le centre de gravité du scooter est au dessus de l'axe de rotation des roues (pendule inverse !).

2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF

Lorsque le dénominateur $D(p)$ de la FTBF $H(p)$ n'est pas sous une forme factorisée permettant d'identifier les pôles, il est possible d'utiliser des critères algébriques. La FTBF s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ où } D(p) = 1 + \text{FTBO}, \text{ appelé polynôme caractéristique de la FTBF, se présente sous la}$$

$$\text{forme } D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n.$$



Au concours, seul le critère algébrique de Routh est au programme et l'étude de la stabilité à l'aide de ce critère est limitée aux équations caractéristiques du 3^{ème} ordre.



Le critère de Routh permet de déterminer le gain d'un système pour qu'il soit stable mais ne renseigne pas sur la marge de stabilité d'un système.

Critère de Routh

L'application du critère algébrique de Routh se fait en 2 étapes :

- Premier examen : **Si certains a_i sont négatifs ou nuls, $D(p)$ a des racines à partie réelle positive et le système est donc instable.**



Pour les polynômes caractéristiques de degré 1 et 2, ce premier examen est suffisant pour déterminer si le système est stable ou non.

- Deuxième examen : **Si tous les a_i sont strictement positifs**, on ne peut pas affirmer que les p_i sont à partie réelle négative. Il faut construire le tableau de Routh pour savoir si le système est stable. Une fois le tableau construit, Routh a établi que la **condition nécessaire et suffisante de stabilité** est que **tous les coefficients de la première colonne du tableau soient tous non nuls et de même signe**.

Construction du tableau de Routh

Les deux premières lignes du tableau sont écrites directement à l'aide des coefficients de $D(p)$. Les autres lignes sont formées de termes qui sont calculés.

Les deux premières lignes du tableau sont écrites à l'aide des coefficients de $D(p)$. p^n correspondant au plus haut degré du polynôme.

Ce terme est calculé « suivant le γ » en trait plein rouge

Les autres lignes sont formées de termes qui sont calculés

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
p^{n-2}	$L_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$L_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$L_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$...
p^{n-3}	$\frac{a_{n-3} \cdot L_1 - a_{n-1} \cdot L_2}{L_1}$	$\frac{a_{n-5} \cdot L_1 - a_{n-1} \cdot L_3}{L_1}$
...
p^2	C_1	C_2	C_3	...
p^1	B_1	B_2	B_3	...
p^0	$\frac{C_2 \cdot B_1 - C_1 \cdot B_2}{B_1}$	$\frac{C_3 \cdot B_1 - C_1 \cdot B_3}{B_1}$



Si tous les coefficients de la première colonne du tableau sont tous non nuls et de même signe, le système est alors stable.

Comme l'étude de la stabilité à l'aide du critère de Routh est limitée au concours aux équations caractéristiques du 3^{ème} ordre, le tableau de Routh est limité à celui ci-dessous.

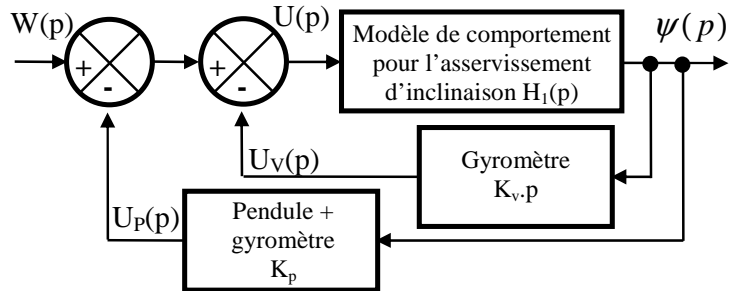


p^3		a_3	a_1
p^2		a_2	a_0
p^1		$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3$	0
p^0		a_0	0

La condition 2 du critère revient donc simplement à vérifier que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

Afin de stabiliser l'inclinaison du scooter, la grandeur de commande, $u(t)$ est en fait élaborée à partir des mesures de $\dot{\psi}(t)$ (réalisée par le gyromètre) et de $\psi(t)$ (réalisée par combinaison de la mesure du gyromètre et du pendule).



Pour étudier le comportement du système il faut d'abord déterminer la FTBF du système :

$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{\frac{1}{K_p} \cdot \frac{K_p \cdot H_1(p)}{1 + p \cdot K_v \cdot H_1(p)}}{1 + \frac{K_p \cdot H_1(p)}{1 + p \cdot K_v \cdot H_1(p)}} = \frac{H_1(p)}{1 + K_p \cdot H_1(p) + p \cdot K_v \cdot H_1(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

On applique le critère de Routh sur le polynôme caractéristique de la FTBF :

$$D(p) = \frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 + K_v \cdot K_1 \cdot p + K_p \cdot K_1 - 1.$$

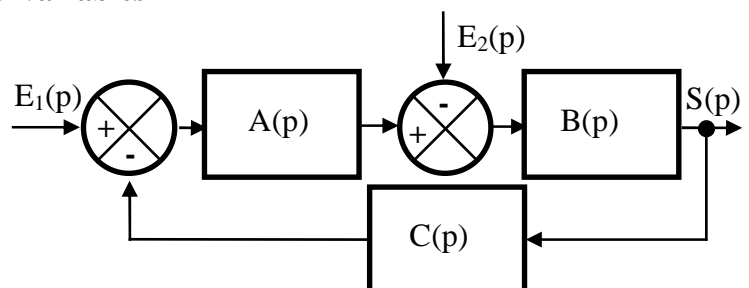
Tous les coefficients du polynôme doivent être de même signe et non nuls $\rightarrow \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{4,1^2} > 0$ par conséquent $K_v \cdot K_1 > 0$ et $K_p \cdot K_1 - 1 > 0$. Ici le 1^{er} examen suffit puisque le polynôme caractéristique est du 2nd degré donc au final pour que le système soit stable il faut $K_v > 0$ et $K_p > \frac{1}{K_1}$.

Les valeurs finalement retenues sont $K_v = 2,15 \text{ rad/V}$ et $K_p = 13,5 \text{ V/rad}$ (voir cours 05 MP) qui permettent d'avoir le temps de réponse à 5% le plus rapide pour une pulsation propre $\omega_2 = 6,15 \text{ rad}$ (la pulsation ω_2 est choisie telle qu'elle soit proche de celle du système mécanique $\omega_2 = 1,5 \cdot \omega_1 = 6,15 \text{ rad}$).

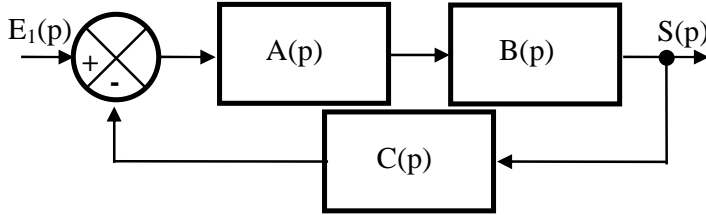
2.3. Etude de la stabilité des systèmes multi variables

Dans le cas de systèmes multi-variables, on superpose deux modes :

- un 1^{er} mode pour lequel l'entrée $E_2(p)$ est considérée comme nulle et
- un 2nd mode pour lequel l'entrée $E_1(p)$ est considérée comme nulle.



- Mode à entrée $E_2(p)=0$

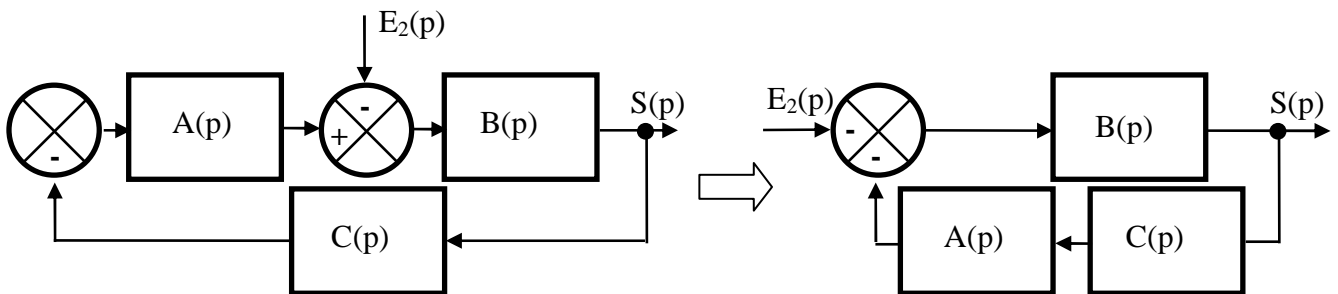


$$H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} = \frac{S(p)}{E_1(p)} \Big|_{E_2(p)=0}$$

$$H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée $E_1(p)=0$



$$H_2(p) \Big|_{E_1(p)=0} = \frac{S(p)}{E_2(p)} \Big|_{E_1(p)=0} = \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

$H_2(p)$ est la fonction de transfert en régulation.

La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_2(p)$$

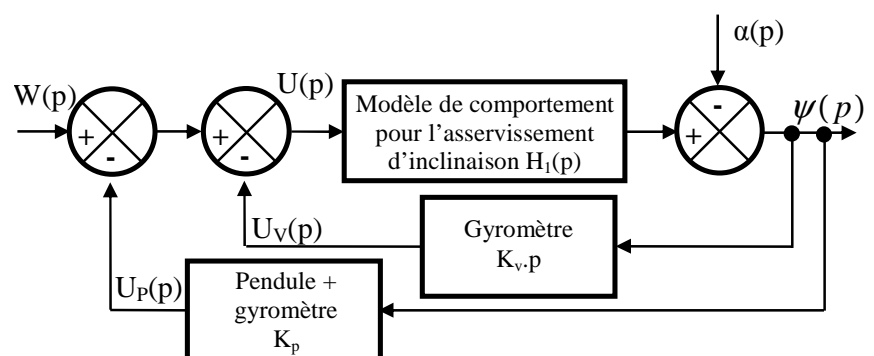
On constate alors que le polynôme caractéristique de la FTBF $D(p)$ est le même pour la fonction de transfert en poursuite $S(p) / E_1(p)$ et la fonction de transfert en régulation $S(p) / E_2(p)$. Les pôles des deux fonctions de transfert sont aussi par conséquent les mêmes. L'étude de stabilité du système comprenant les perturbations est donc la même que celle du système sans perturbation.



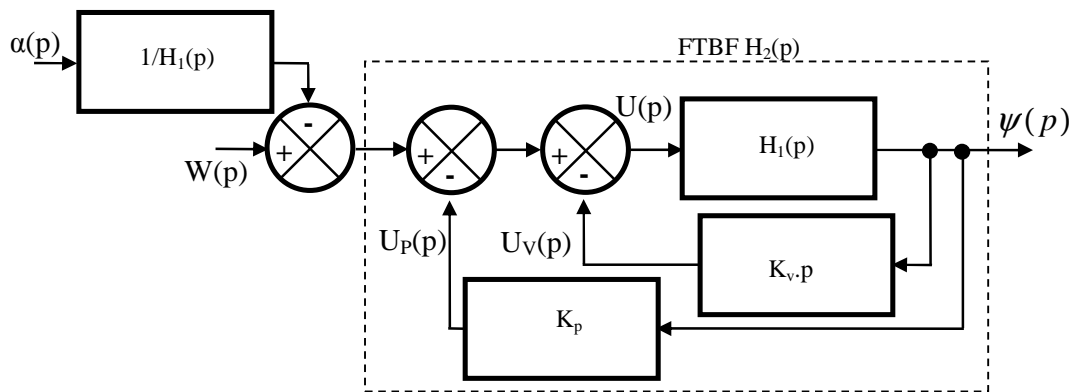
Pour étudier la stabilité d'un système multi variables, il suffit de ne regarder que la stabilité de la fonction de transfert en poursuite $S(p) / E_1(p)$.

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

Si le passager du scooter s'incline en avant ou en arrière il crée une perturbation modélisée par un angle $\alpha(p)$. Cette perturbation sera compensée par le système.



Après manipulation du schéma bloc on obtient le système équivalent suivant :



La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$\psi(p) = H_2(p).W(p) - \frac{1}{H_1(p)}.H_2(p).\alpha(p)$$

$$\psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.W(p) - \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.\alpha(p)$$

$$\text{Soit } \psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.W(p) - \frac{1}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.\alpha(p)$$

Le polynôme caractéristique de la FTBF $D(p)$ est le même pour la fonction de transfert en poursuite $\psi(p) / W(p)$ et la fonction de transfert en régulation $\psi(p) / \alpha(p)$. L'étude précédente de la stabilité sans la perturbation reste donc toujours valable et suffisante.

3. Etude de la stabilité à partir de critères graphiques sur la FTBO

Dans la pratique, l'étude de la stabilité des systèmes bouclés se fait plutôt graphiquement dans le domaine fréquentiel à partir de la FTBO.

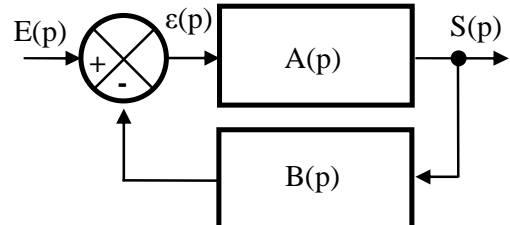


Le fait que les critères soient fréquentiels ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée est sinusoïdale. En effet, tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en série de Fourier et donc être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

3.1. Equation caractéristique et point critique – Définitions

On appelle équation caractéristique d'un système bouclé ci-contre l'expression $1 + \text{FTBO}(p) = 0$. Le système est en limite de stabilité si $\text{FTBO}(p) = -1$.

On appelle point critique le point du plan complexe d'affixe $z = -1$ (module 1 et argument -180°) et on constate que l'étude du dénominateur des FTBF revient en fait à analyser la FTBO par rapport au point critique.



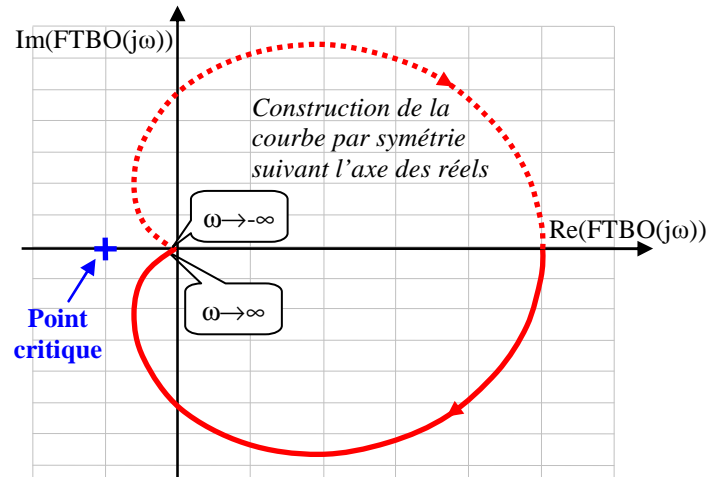
3.2. Critère de Nyquist (à titre informatif)

Un système est asymptotiquement stable en boucle fermée si et seulement si son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru dans le sens des pulsations croissantes, entoure le point critique $(-1,0)$ un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la FTBO.



Le lieu de Nyquist d'une FTBO est habituellement obtenu pour des pulsations allant de 0 à $+\infty$.

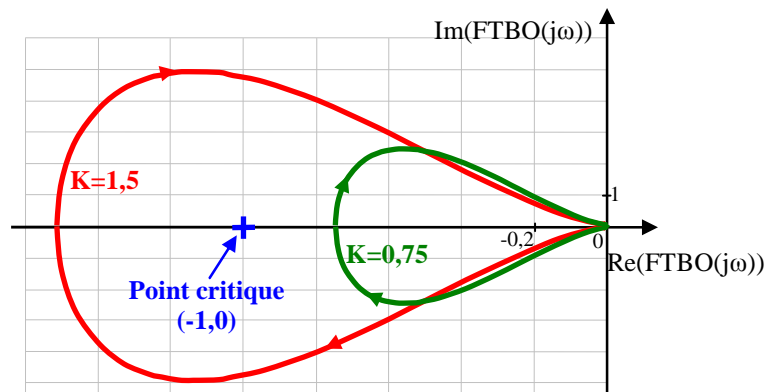
Pour obtenir le lieu complet (de $-\infty$ à $+\infty$), il suffit de faire la symétrie du lieu de Nyquist par rapport à l'axe des abscisses.



Si N est le nombre de tours dans le sens direct du diagramme de Nyquist autour du point critique, P le nombre de pôles instables de la FTBO (i.e. pôles à partie réelle positive) et Z le nombre de pôles instables de la FTBF, la stabilité est assurée pour : $Z = P - N = 0$.

Pour $K=0,75$, le système n'entoure pas le point $-1 \rightarrow N=0$, la FTBO possède un pôle à partie réelle positive $\rightarrow P=1$, d'où $Z=1 \rightarrow$ le système est instable en boucle fermée alors que pour $K=1,5$, le système est stable en boucle fermée.

$$\text{Exemple : } FTBO(p) = \frac{K}{(p - 0,995).(p + 1,005)}$$



3.3. Critère du revers

La plupart des systèmes rencontrés dans l'industrie ont en fait très souvent une FTBO dont les pôles sont à parties réelles strictement négative. Le critère de Nyquist peut donc être simplifié et est appelé critère du Revers. Celui-ci correspond à des énoncés différents en fonction du lieu de la FTBO considéré.

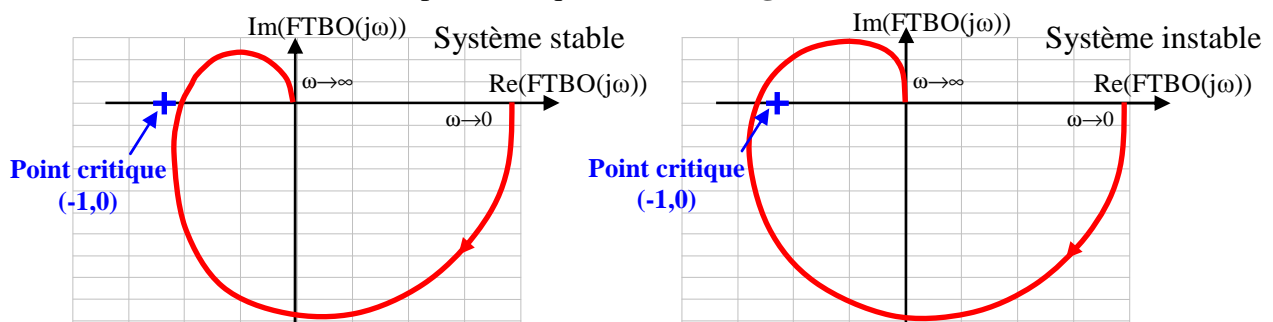


Au concours, seul le critère graphique du revers est au programme.

Il n'est valable que si la FTBO ne possède que des pôles à partie réelle strictement négative.

Critère du revers dans le plan de Nyquist

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est asymptotiquement stable en boucle fermée si lorsque l'on parcourt le lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p) dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique $C(-1,0)$ à sa gauche.

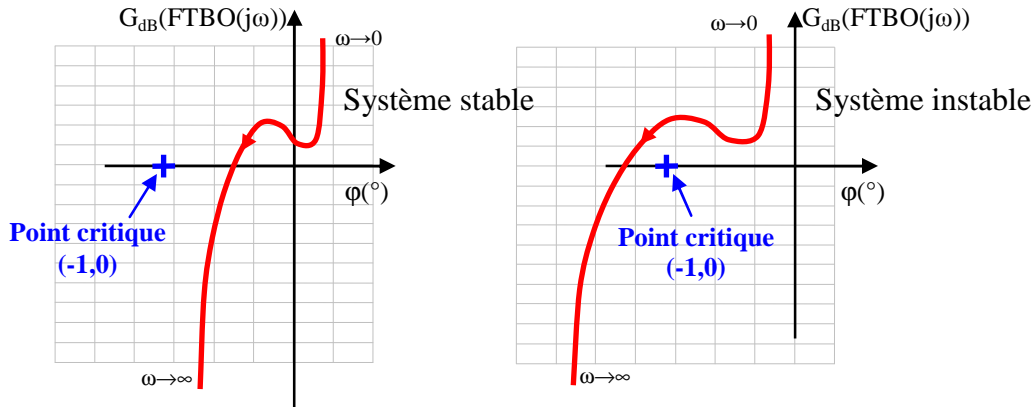




Si le lieu de transfert dans le plan de Nyquist de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.

Critère du revers dans le plan de Black

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est asymptotiquement stable en boucle fermée si lorsque l'on parcourt le lieu de Black de sa fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p) dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique C(-1,0) à sa droite.



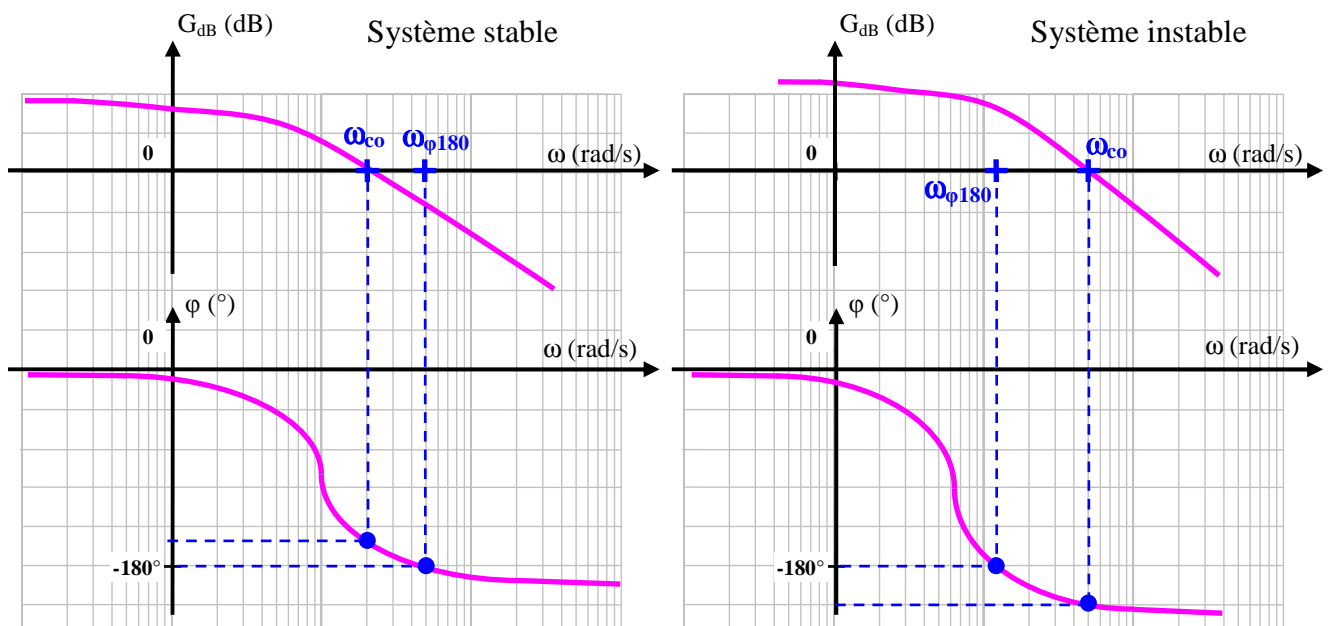
Si le lieu de transfert dans le plan de Black de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.

Critère du revers dans le plan de Bode

Du fait de l'utilisation de deux diagrammes, il n'est plus possible de localiser le point critique, par conséquent l'analyse de la stabilité dans le plan de Bode est plus complexe que dans le plan de Black ou le plan de Nyquist.

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est asymptotiquement stable en boucle fermée si :

- à la pulsation $\omega = \omega_{\phi 180}$ pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\phi 180})) = -180^\circ$, on a $|\text{FTBO}(j\omega_{\phi 180})| < 0\text{dB}$ ou bien,
- à la pulsation $\omega = \omega_{co}$ pour laquelle $|\text{FTBO}(j\omega_{co})| = 0\text{dB}$, on a $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{co})) > -180^\circ$.



3.4. Marges de stabilité

En pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité, ceci pour plusieurs raisons :

- lors de la conception d'un système, de nombreuses hypothèses sont prises et les modèles de fonctions de transfert sont imprécis (non prise en compte des phénomènes non-linéaires, retards, ...);
- lors de l'utilisation du système, les composants électroniques (résistances, amplificateurs, ...) ont des caractéristiques qui évoluent avec le temps (température, vieillissement...)

Il est donc nécessaire de prévoir des « marges » vis à vis du problème d'instabilité qui « garantissent » que le point critique ne sera jamais atteint.

Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\phi = 180^\circ + \arg(FTBO(j\omega_{co}))$ où ω_{co} est la pulsation de coupure pour laquelle $|FTBO(j\omega_{co})| = 0\text{dB}$.



On cherche généralement à obtenir une marge de phase de 45° (valeur empirique) qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

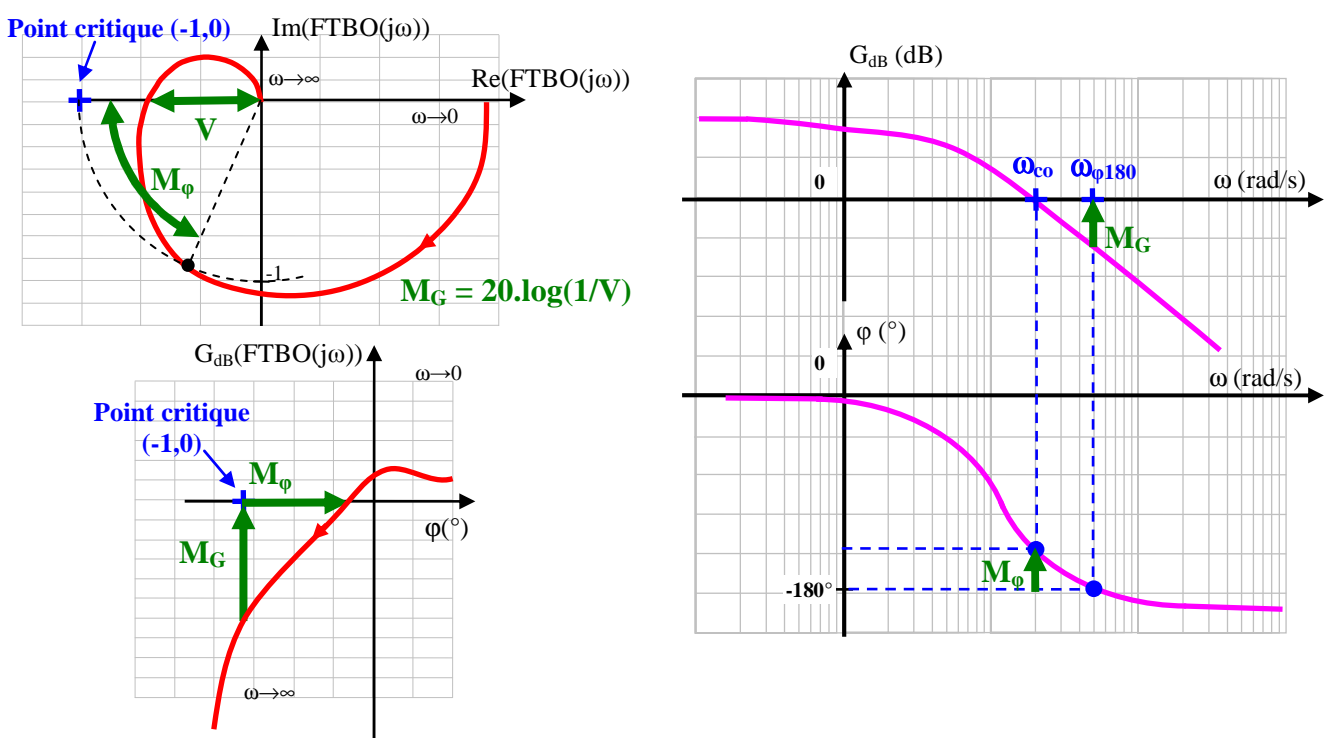
Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20\log|FTBO(j\omega_{\phi 180})|$ où $\omega_{\phi 180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(FTBO(j\omega_{\phi 180})) = -180^\circ$.



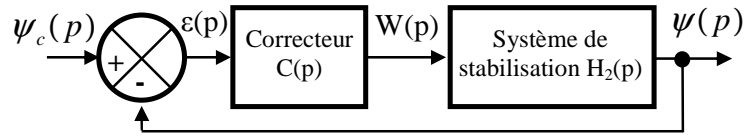
La marge de gain est une garantie que le système restera stable malgré une variation imprévue du gain ou une imprécision sur sa valeur. Une marge de gain de 6dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La valeur retenue est généralement comprise entre 6 et 10 dB.

Illustrations des marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist, de Black et de Bode



Application sur la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :
La consigne de la régulation de l'inclinaison du châssis $\psi(t)$ par rapport à la verticale est notée $\psi_c(t)$.

Sur le système il existe un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert $C(p)$ qui élabore le signal $w(t)$ (de transformée de Laplace $W(p)$) à partir de l'écart $\varepsilon(t) = \psi_c(t) - \psi(t)$.



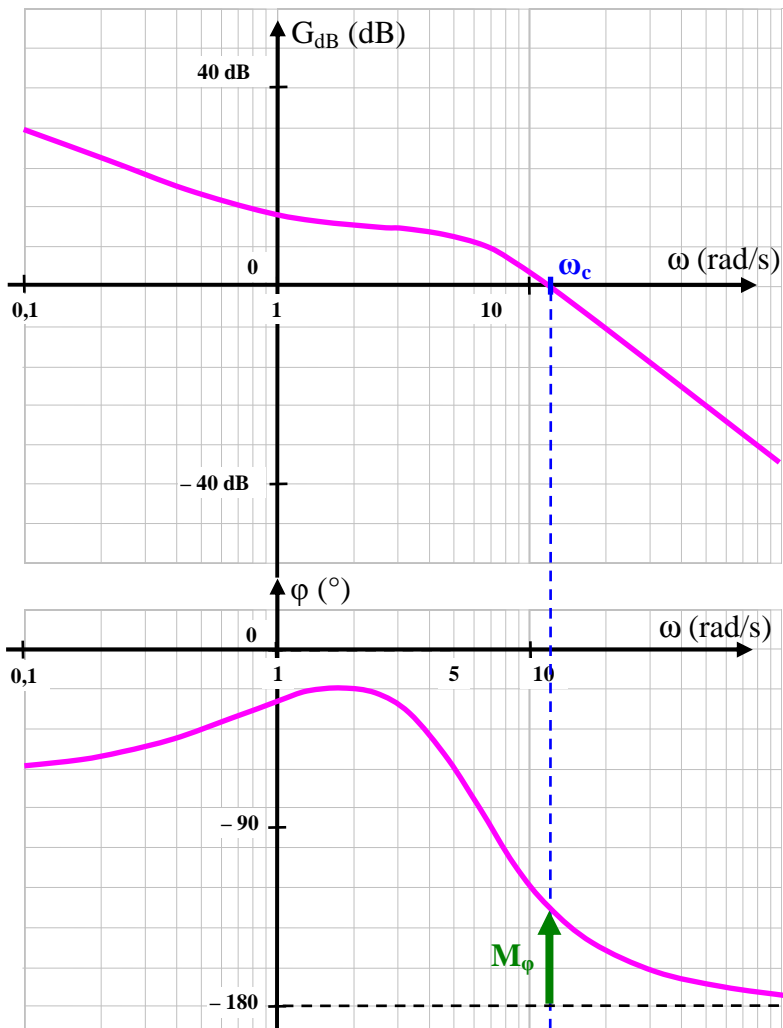
$$C(p) = K_i \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \text{ et } H_2(p) = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

Où $K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$, $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$, $K_v = 2,15 \text{ rad/V}$, $K_p = 13,5 \text{ V/rad}$, $K_i = 31,7 \text{ V/rad}$ et $T_i = 0,93 \text{ s}$.

Pour étudier graphiquement la stabilité du système il faut déterminer la FTBO $T(p) = \frac{\psi(p)}{\varepsilon(p)}$.

$$T(p) = \frac{\psi(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) \cdot H_2(p) = K_i \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \cdot \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

$$\text{Soit } T(p) = K_i \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \cdot \frac{\frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1}}{\frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2} \cdot p^2 + \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \cdot p + 1} = 31,7 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,93 \cdot p}\right) \cdot \frac{0,107}{0,0265 \cdot p^2 + 0,23 \cdot p + 1}$$



Graphiquement on constate à l'aide du critère du revers que le système est stable.

Sa marge de phase pour ω_c étant égale à $M_\phi = 45^\circ$.

4. Causes d'instabilité

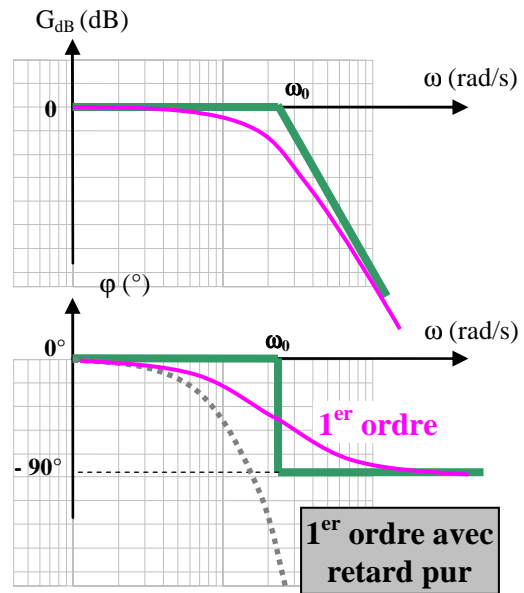
4.1 Les retards purs

La fonction de transfert s'écrit : $H(p) = e^{-Tp}$ soit $H(j\omega) = e^{-Tj\omega}$ pour la réponse harmonique. Le module est constant et égal à 1 ($G = 0$ dB). L'argument est une fonction linéaire de ω : $\varphi = \arg H(j\omega) = -T\omega$.

Exemple :
$$H(j\omega) = \frac{e^{-T \cdot j\omega}}{1 + T \cdot j\omega}$$

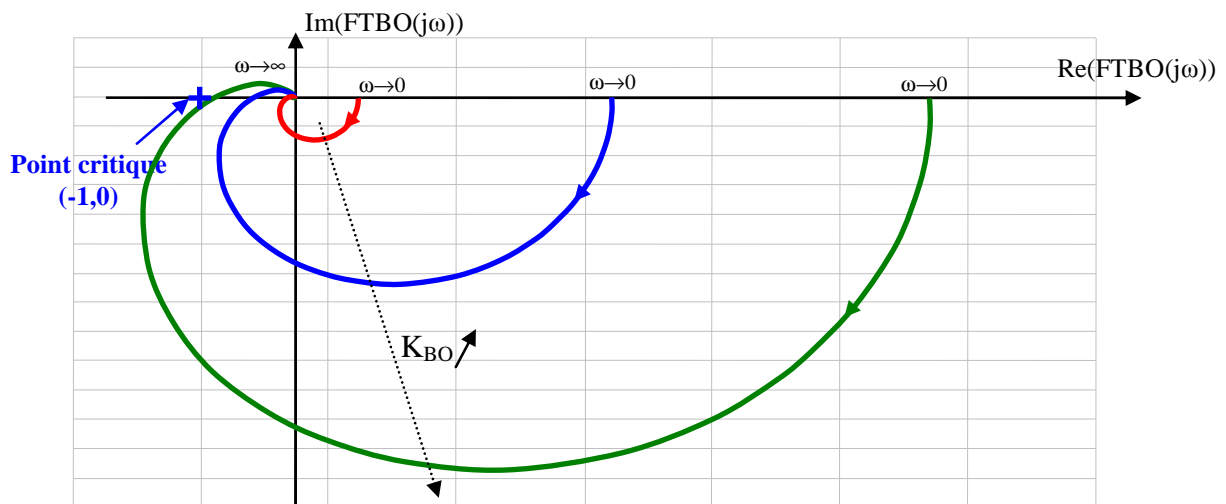
Il s'agit d'un retard pur associé à un système du 1^{er} ordre. Seule la courbe de phase du système est affectée par le retard pur.

La présence d'un retard pur (il y a en dans tous les systèmes) dans la FTBO pourra entraîner l'instabilité du système en BF.



4.2. Le gain en boucle ouverte

Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2 l'augmentation du gain en boucle ouverte K_{BO} peut conduire à un risque d'instabilité.



Tracés pour une même FTBO dans le plan de Nyquist pour différentes des valeurs K_{BO} .

4.3 Les intégrateurs

La présence d'intégrateur(s) dans la FTBO apporte un déphasage de -90° , ce qui rapproche le lieu de transfert du point critique, donc tend à déstabiliser le système.