Induction Electromagnétique CHAPITRE 2

Actions du Champ magnétique

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

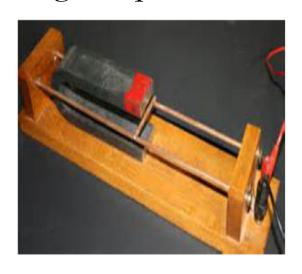
Introduction

Un champ magnétique, créé par un circuit parcouru par un courant ou un aimant, exerce une force sur un autre circuit ou aimant. Dans ce chapitre on apprendra à calculer la force et ou le couple exercé(e) par un champ magnétique sur un circuit parcouru par un courant.

Force de Laplace

Observations expérimentales (1)

On utilise le dispositif tiré du nom de Pierre-Simon de Laplace, mathématicien, astronome et physicien français (1749 - 1827). On place une tige cylindrique et conductrice sur deux rails conducteurs et horizontaux dans l'entrefer d'un aimant en U qui crée un champ magnétique stationnaire et (quasi) uniforme.



R1. On fait circuler un courant permanent dans les barres et la tige. Qu'observez-vous?

Solution: Le barreau se met en mouvement : une force s'exerce sur la tige, perpendiculairement à la tige et dans le plan des rails.

Observations expérimentales (2)



R2. On change le sens du courant. Qu'observezvous ?

Solution: Si on change le sens du courant, le sens du mouvement change.

R2. On tourne l'aimant en U de 180°C. Quelle grandeur modifie-ton et comment ? Qu'observez-vous ?

Solution: Si on tourne l'aimant, on modifie le sens du champ magnétique \vec{B} . Le sens du mouvement change également.

On peut supposer que la force dépend de l'intensité du courant, et notamment de son signe et du vecteur champ magnétique.

Relation entre le courant et la vitesse de dérive des électrons dans un conducteur

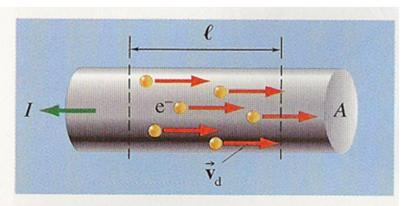


Figure 6.8 ▲

Pour calculer le courant en fonction du mouvement des électrons, on néglige leur mouvement aléatoire et on ne tient compte que de la faible vitesse de dérive acquise par le « gaz d'électrons libres » dans son ensemble. $\rightarrow n$ = nombre d'électrons par unité de volume

 $\rightarrow v_d$ = vitesse de dérive moyenne des électrons

 $\rightarrow \Delta Q = n(A\ell)e$ = charge totale (en valeur absolue q = -e) dans le cylindre de longueur ℓ et de section A

 $\rightarrow I = \Delta Q/\Delta t$ avec $\Delta t = \ell/v_d$ le temps que met une charge pour franchir la distance ℓ

$$I = nAev_d$$

Force magnétique sur un conducteur (1) parcouru par un courant

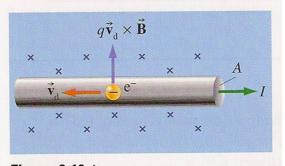


Figure 8.10 ▲

Lorsqu'un courant circule dans un fil,
la force magnétique sur les électrons en
mouvement est transmise au fil.

$$\rightarrow \vec{F}_{\ell} = -e \overrightarrow{v_d} \wedge \vec{B} \implies F_{\ell} = e v_d B = \text{Force de}$$

module

Lorentz sur un seul électron

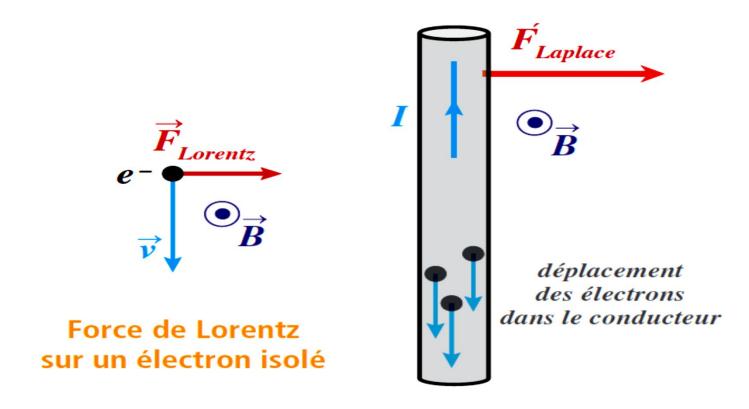
- $\rightarrow F_L = n(A\ell)ev_dB$ = Force de Lorentz sur tous les électrons de la longueur du fil ℓ
- \rightarrow Avec l'expression précédente du courant et si θ est l'angle entre le sens du courant et le champ:

 $F_L = I\ell B \sin\theta$

Force magnétique agissant sur élément par un courant (force de Laplace):

$$\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{I\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

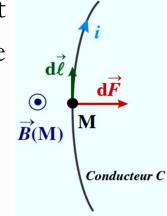
Force magnétique sur un conducteur (2) parcouru par un courant



Force de Laplace sur un élément de conducteur parcouru par un courant

Enoncé

Chaque petit élément d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité i, placé dans un champ magnétique \vec{B} subit une force de Laplace qui vaut $\vec{dF} = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$



La résultante de la force de Laplace sur le conducteur C est donc:

$$\vec{F} = \int_{M \in C} I \vec{d\ell} \wedge \vec{B} (M)$$

Où l'élément de courant est orienté dans le sens algébrique choisi pour l'intensité. Cette expression est valable si le courant et le champ ne sont pas stationnaires, dans le cadre de l'ARQS:

$$\overrightarrow{F}(t) = \int_{M \in C} I \overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}(M, t)$$

Contrairement à la force Lorentz dont elle découle, la force de Laplace est susceptible de travailler du fait du déplacement du conducteur, déplacement dont elle peut être responsable et dont le rôle est essentiel dans un moteur électrique.

Action d'un champ magnétique (1) uniforme sur une tige rigide

Soit une portion de conducteur rectiligne et rigide CD parcourue par un courant d'intensité i, placé dans un champ magnétique extérieur uniforme. Ces grandeurs sont susceptibles de dépendre du temps, on exprime donc la résultante des forces de Laplace sur la tige à un instant t quelconque:

$$\vec{F}(t) = \int_{tige} i(t) \vec{d\ell} \wedge \vec{B} (M, t) = \int_{C}^{D} i(t) \vec{d\ell} \wedge \vec{B} (M, t)$$

Or le champ magnétique est uniforme, donc ne dépend pas de la position du point sur la tige et l'intensité est la même tout au long de la tige (ARQS). De ce fait et même si elles dépendent du temps, ces deux grandeurs sont constantes du point de vue de l'intégrale (d'espace), d'où:

$$\vec{F}(t) = i(t) \int_{C}^{D} \vec{d\ell} \wedge \vec{B}(t) = i(t) \vec{CD} \wedge \vec{B}(t)$$

Action d'un champ magnétique (2) uniforme sur une tige rigide

Enoncé

La résultante des forces de Laplace sur une tige homogène rigide CD parcourue par un courant d'intensité i(t), placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t)$ vaut :

$$\vec{F}(t) = i(t)\vec{C}\vec{D} \wedge \vec{B}(t)$$

où le vecteur \vec{CD} est orienté dans le sens algébrique du courant. On admet qu'elle s'applique au centre de la tige.

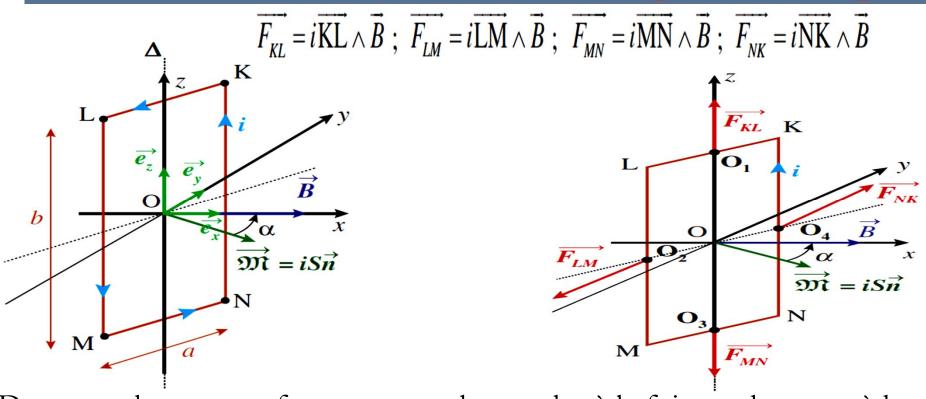
Propriété

La puissance de la force de Laplace sur une tige homogène rigide en translation à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique uniforme \vec{B} vaut :

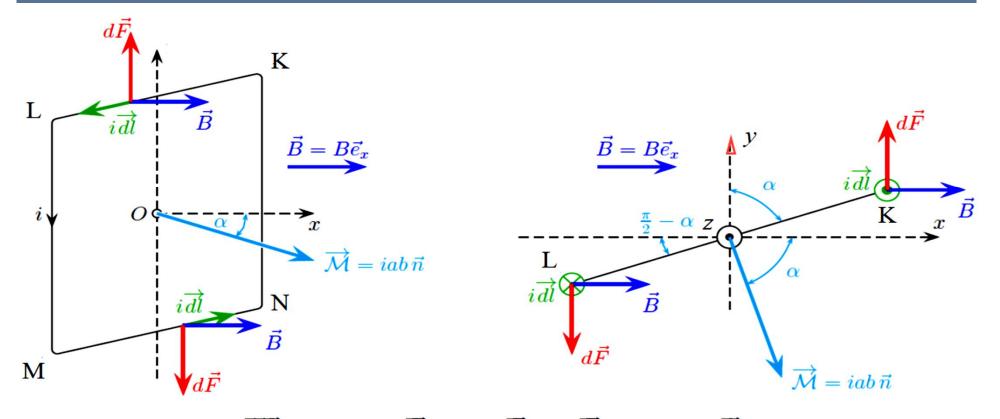
$$\wp = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} = i(\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{v}$$

Couple magnétique

On considère un cadre rectangulaire rigide KLMN de centre O, parcouru par un courant d'intensité i(t), que l'on note simplement i pour ne pas alourdir le calcul. Ce cadre définit un plan, dans lequel on note (Oz) un de ses deux axes de symétrie D. Le cadre est plongé dans un champ magnétique uniforme extérieur orthogonal a (Oz) qui définit la direction (Ox). En toute généralité, le plan du cadre et le champ forment un angle quelconque, on note α l'angle entre la normale au cadre (ou son moment magnétique) et le champ. Les forces de Laplace qui s'appliquent sur chaque portion du cadre sont les suivantes:

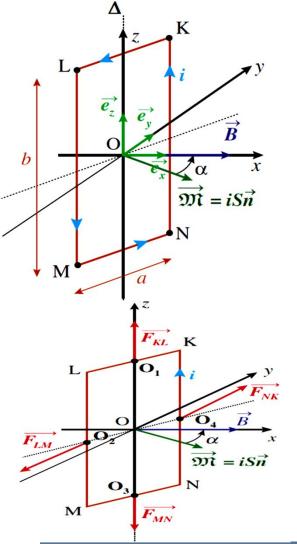


Dans tous les cas, ces forces sont orthogonales à la fois au champ et à la portion de conducteur. Sur les portions KL et MN, on peut facilement prévoir que les forces de Laplace sont colinéaires à D et que ces deux forces sont opposées, ce que confirme le calcul :



$$\overrightarrow{F_{KL}} = ia(-\sin\alpha \overrightarrow{e_x} - \cos\alpha \overrightarrow{e_y}) \wedge \overrightarrow{Be_x} = iaB\cos\alpha \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{F_{MN}} = ia(\cos\alpha \overrightarrow{e_y} + \sin\alpha \overrightarrow{e_x}) \wedge \overrightarrow{Be_x} = -iaB\cos\alpha \overrightarrow{e_z}$$



Sur les portions LM et NK, les tiges sont colinéaires à l'axe (Oz), donc les forces sont orthogonales à l'axe (et au champ) et opposées, ce que confirme le calcul :

$$\overrightarrow{F_{LM}} = -ib\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{Be_x} = -ib\overrightarrow{Be_y}$$
; $\overrightarrow{F_{NK}} = ib\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{Be_x} = ib\overrightarrow{Be_y}$

La résultante de ces forces est nulle :

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{KL}} + \overrightarrow{F_{LM}} + \overrightarrow{F_{MN}} + \overrightarrow{F_{NK}} = iaB\cos\alpha \overrightarrow{e_z} - ibB\overrightarrow{e_x} - iaB\cos\alpha \overrightarrow{e_z} + ibB\overrightarrow{e_x} = \vec{0}$$

Le moment de chaque force en O, point de l'axe, vaut (où les points O_i sont les milieux des portions) :

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F}_{KL}) = \overrightarrow{OO}_{1} \wedge \overrightarrow{F}_{KL} = \frac{b}{2} \overrightarrow{e}_{z} \wedge iaB \cos \alpha \overrightarrow{e}_{z} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F}_{LM}) = \overrightarrow{OO}_{2} \wedge \overrightarrow{F}_{LM} = -\frac{a}{2} (\sin \alpha \overrightarrow{e}_{x} + \cos \alpha \overrightarrow{e}_{y}) \wedge (-ibB\overrightarrow{e}_{y}) = \frac{ab}{2} i \sin \alpha B \overrightarrow{e}_{z}$$

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F}_{MN}) = \overrightarrow{OO}_{3} \wedge \overrightarrow{F}_{MN} = -\frac{b}{2} \overrightarrow{e}_{z} \wedge (-iaB \cos \alpha \overrightarrow{e}_{z}) = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F}_{NK}) = \overrightarrow{OO}_{4} \wedge \overrightarrow{F}_{NK} = \frac{a}{2} (\sin \alpha \overrightarrow{e}_{x} + \cos \alpha \overrightarrow{e}_{y}) \wedge (ibB\overrightarrow{e}_{x}) = \frac{ab}{2} i \sin \alpha B \overrightarrow{e}_{z}$$

La somme des moments est donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F_{KL}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F_{LM}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F_{MN}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\overrightarrow{F_{NK}}) = abi \sin \alpha B \overrightarrow{e_z}$$

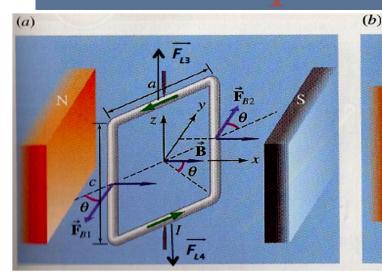
L'action mécanique du champ magnétique sur le cadre est donc telle que sa résultante est nulle et que son moment ne l'est pas, il s'agit donc d'un couple. Ce couple étant oriente suivant l'axe D, il est susceptible de faire tourner le cadre autour de cet axe. On reconnait dans le moment le produit de la surface du cadre et de l' intensité, qui incite a utiliser le moment magnétique du cadre :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}} = iS \sin \alpha B \overrightarrow{e_z} = \mathfrak{M} \sin \alpha B \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \overrightarrow{B}$$

Toutes les grandeurs dans cette formule peuvent dépendre du temps. Notons que ce moment est indépendant de O. Si le cadre effectue une rotation autour de l'axe fixe D a la vitesse angulaire Ω et avec les conditions d'orientation et d'uniformité du champ supposées cidessus, alors la puissance du couple de Laplace vaut : $\P = \Gamma \Omega$

Couple et moment de force sur une spire (boucle) de courant





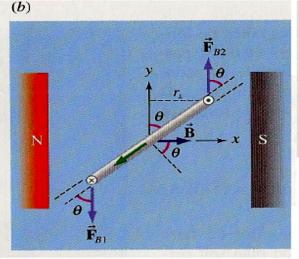


Figure 8.17 ◀

Un cadre parcouru par un courant, libre de pivoter dans un champ magnétique. Les forces magnétiques agissant sur les côtés verticaux produisent un moment de force par rapport à l'axe central. (a) Le cadre vu de côté; (b) le cadre vu d'en haut.

considère une spire rectangulaire plongée dans un champ magnétique uniforme.

$$\overrightarrow{F_{L1}} = I\left(-c\overrightarrow{k}\right) \wedge (B\overrightarrow{i}) = -IcB\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{F_{L2}} = I\left(c\overrightarrow{k}\right) \wedge (B\overrightarrow{i}) = IcB\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{F_{L1}} + \overrightarrow{F_{L2}} = \overrightarrow{0} \text{ mais peut faire tourner la spire}$$

autour de l'aze
$$z$$
 et forme un **couple** $\Rightarrow \Gamma_z(\overrightarrow{F_{L1}} + \overrightarrow{F_{L2}}) \neq 0$

$$\overrightarrow{F_{L3}} = IaB\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F_{L4}} = -IaB\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F_{L3}} + \overrightarrow{F_{L4}} = \overrightarrow{0}$$
 et n'a pas tendance à faire tourner la spire autour de l'axe $z \Rightarrow \Gamma_z(\overrightarrow{F_{L3}} + \overrightarrow{F_{L4}}) = 0$

Couple et moment de force sur une spire (boucle) de courant

(2)

Moment du couple (on dit souvent par abus de langage) exercé sur la spire par rapport à l'axe de rotation:

$$\Gamma_{z}(\overrightarrow{F_{L1}} + \overrightarrow{F_{L2}}) = \Gamma_{z}(\overrightarrow{F_{L1}}) + M_{z}(\overrightarrow{F_{L2}})$$

$$= (IcB) \times \underbrace{\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)}_{\text{bras de levier}} + (IcB) \times \underbrace{\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)}_{\text{bras de levier}} = 2(IcB) \times \left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)$$

$$= IS B \sin\theta$$

S = ac =surface de la spire Pour un cadre comportant N spires, le module du moment de force est N fois plus grand donc:

Moment des forces de Laplace (ou simplement couple) s'exerçant sur une spire de courant (par rapport à l'axe de rotation)

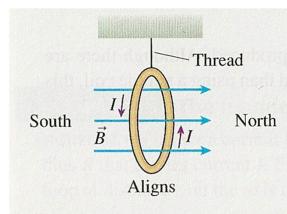
$$\Gamma = NISB \sin \theta$$

Couple et moment de force sur une spire (boucle) de courant

(3)

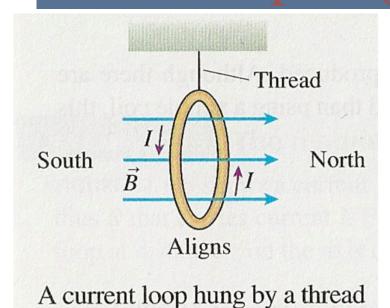
Remarques:

- \rightarrow Quelle que soit la forme de la spire, on peut montrer que l'on a toujours $\sum \vec{F} = \vec{0}$ et $\Gamma_z = NISB \sin \theta$.
- → Si le champ magnétique n'est pas uniforme, l'expression du moment précédent n'est plus valable mais si la boucle a une surface faible, on peut considérer que le champ dans lequel sont plongés ses fils varie peu et donc l'expression du moment sera valable. Par contre une boucle de courant dans une telle situation subira aussi une force résultante non nulle. Elle aura donc deux comportements:
- Pivoter pour aligner son plan perpendiculairement au champ,
- Accélérer dans la direction de la force magnétique résultante.



A current loop hung by a thread aligns itself with the magnetic field pointing north.

Couple et moment de force sur une spire (boucle) de courant



aligns itself with the magnetic

field pointing north.

Puissance des forces de Laplace

$$P = \Gamma \omega = NISB\omega \sin \theta$$

avec $\omega \equiv \dot{\theta}$ = vitesse angulaire

Les expressions du moment et de la puissance vont être très importantes pour l'étude des moteurs électriques.

Moment magnétique

Moment exercé sur un magnétique (1) plongé dans un champ magnétique

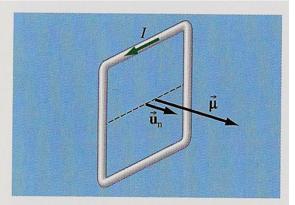


Figure 8.19 ▲

Le sens du moment magnétique $\vec{\mu}$ est donné par la règle de la main droite : si vous refermez vos doigts dans le sens du courant, votre pouce tendu donne l'orientation de \vec{u}_n .

Grâce à l'expression du moment magnétique, on peut exprimer le moment exercé sur la spire (par rapport à son centre) plongé dans un champ magnétique uniforme de façon plus concise:

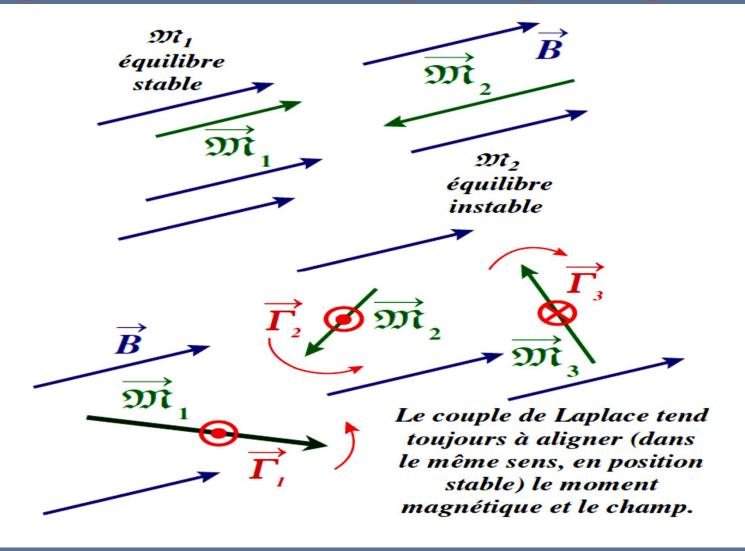
Moment magnétique associé à une boucle de courant $\vec{\mu} = NIS \vec{u}_n$

Moment de force qui agit sur un moment magnétique

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Le moment de force a tendance à aligner le moment magnétique sur le champ magnétique tout comme l'aiguille d'une boussole. Le moment est indépendant du point où on l'exprime.

Moment exercé sur un magnétique (2) plongé dans un champ magnétique



Energie potentielle d'interaction

Il existe une énergie potentielle d'interaction, d'origine magnétique, entre le moment magnétique de la boucle et le champ magnétique (créé par d'autres courants que ceux de la boucle) :

Energie potentielle d'interaction magnétique

$$E_{pB} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Pour justifier cette équation, il suffit d'évaluer le travail du champ magnétique nécessaire pour faire tourner le dipôle à vitesse constante:

Le signe moins est nécessaire car le moment des forces de Laplace tend à diminuer l'angle
$$\theta$$
!

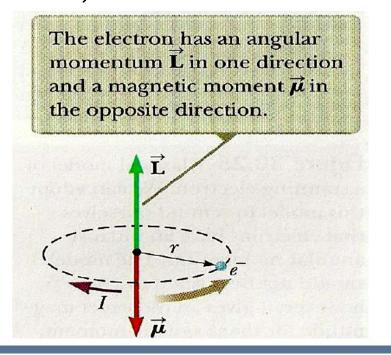
$$W_{ext} = \int_{\theta_0}^{\theta} -\Gamma d\theta = -\mu B \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta = -\left(\frac{-\mu B \cos\theta}{E_{pB}(\theta)}\right) - \left(\frac{-\mu B \cos\theta}{E_{pB}(\theta_0)}\right) = -\Delta E_{pB}$$

On obtient donc $E_{pB} = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ avec comme origine $E_{pB} = 0$ quand $\theta = \pi/2$

Moment magnétique d'un atome, (1) modèle classique

On considère un modèle classique de l'atome (vision très simplifiée) dans lequel l'électron a un mouvement circulaire uniforme autour du noyau. Ce dernier constitue donc une boucle de courant (charge en mouvement).

Figure 30.24 An electron moving in the direction of the gray arrow in a circular orbit of radius r. Because the electron carries a negative charge, the direction of the current due to its motion about the nucleus is opposite the direction of that motion.



Moment magnétique d'un atome, modèle classique

- $\rightarrow I = e/T = ev/2\pi r$: intensité de la "boucle de courant " d'électron
- $\rightarrow \mu = IS = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)\pi r^2 = \frac{1}{2}evr$: moment magnétique associé
- \rightarrow Le moment cinétique de l'électron est donné par $L=m_e vr$ ce qui implique que: $\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right)L$

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right)L$$

- \rightarrow Comme la charge de l'électron est négative μ et L sont dans des directions opposées. Les deux vecteurs sont perpendiculaires au plan de l'orbite.
- \rightarrow La physique quantique montre que la plus petite valeur de L possible vaut $h/2\pi$. Ainsi $\mu = \left(\frac{e}{2m}\right)\frac{h}{2\pi} = \frac{eh}{4\pi m}$.

Cette valeur est appelée magnéton de Bohr et est notée μ_R et vaut $\mu_R = 9,274 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$ (ou J.T⁻¹)

→ L'électron possède aussi en propre un moment magnétique appelé spin, cf. cours de chimie.

On peut voir cela comme la rotation de l'électron sur lui-même, mais l'électron étant sans dimension, cela n'a pas de sens, le spin est une grandeur purement quantique! Ce moment magnétique a pour valeur exactement celle du magnéton de Bohr!

Moment magnétique d'un atome, (3) modèle classique

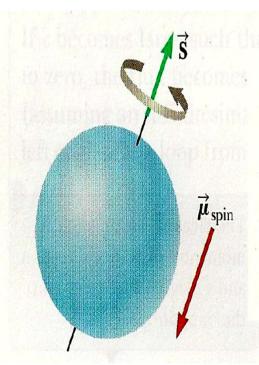


Figure 30.25 Classical model of a spinning electron. We can adopt this model to remind ourselves that electrons have an intrinsic angular momentum. The model should not be pushed too far, however; it gives an incorrect magnitude for the magnetic moment, incorrect quantum numbers, and too many degrees of freedom.

Pitfall Prevention 30.3

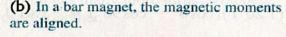
The Electron Does Not Spin The electron is not physically spinning. It has an intrinsic angular momentum as if it were spinning, but the notion of rotation for a point particle is meaningless. Rotation applies only to a rigid object, with an extent in space, as in Chapter 10. Spin angular momentum is actually a relativistic effect.

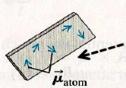
Table 30.1	Magnetic
Moments of	Some Atoms
and Ions	

Atom or Ion		Magnetic Moment (10 ⁻²⁴ J/T)
H		9.27
He		0
Ne		0
Ce ³⁺		19.8
Yb ³⁺		37.1

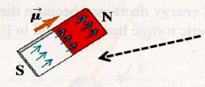
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant

(a) Unmagnetized iron: magnetic moments are oriented randomly.





Dans un matériau ordinaire non magnétique, les moments magnétiques des atomes sont arrangés au hasard $\Rightarrow \sum \overline{\mu_{atome}} = \vec{0}$

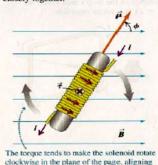


Dans un matériau magnétique, les moments magnétiques sont organisés, alignés. Le matériau (l'aimant) possède un moment magnétique total non nul $!\Rightarrow \vec{\mu} = \sum_{\text{tome}} \overrightarrow{\mu_{atome}} \neq \vec{0}$

(c) A magnetic field creates a torque on the bar magnet that tends to align its dipole moment with the \vec{B} field.



27.34 The torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ on this solenoid in a uniform magnetic field is directed straight into the page. An actual solenoid has many more turns, wrapped closely together.



magnetic moment $\vec{\mu}$ with field \vec{B}



Même comportement: alignement dans le champ magnétique dû au moment des forces de Laplace. On dit par abus de langage que le moment magnétique est soumis à un couple.



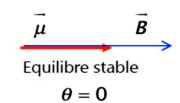
Positions d'équilibres:

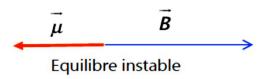
$$\left(\frac{dE_{pB}}{d\theta}\right)_{0.0} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(-\mu B\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow \theta_{eq} = 0 \text{ ou } \pi$$



Position d'équilibre stable:

$$\left(\frac{d^2 E_{pB}}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_{eq}} > 0 \Rightarrow \theta_{eq} = 0$$





Effet moteur d'un champ magnétique tournant

Création d'un champ magnétique tournant (1)

On peut obtenir un champ magnétique tournant avec le dispositif représenté sur la figure suivante.

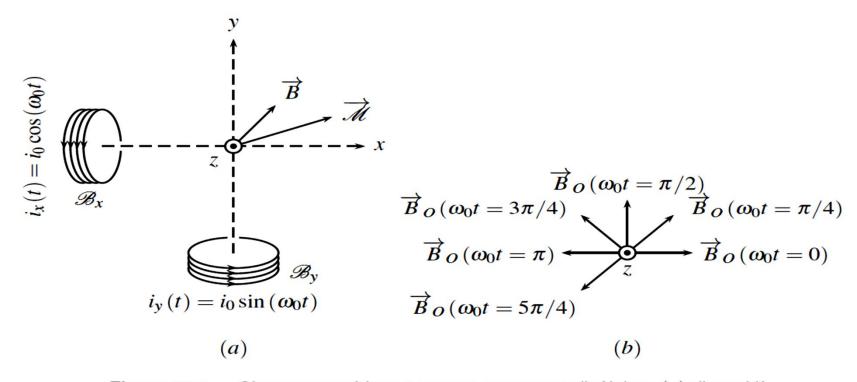


Figure 27.6 – Champ magnétique tournant et moment dipôlaire : (a) dispositif expérimental, (b) champ tournant.

Création d'un champ magnétique tournant (2)

Deux bobines d'axes orthogonaux entre eux, \mathfrak{B}_x et \mathfrak{B}_y créent chacune un champ magnétique en O. \mathfrak{B}_x crée le champ $\vec{B}_{Ox} = K i_x \vec{u}_x$ et \mathfrak{B}_y crée le champ $\vec{B}_{Oy} = K i_y \vec{u}_y$. K est une constante commune aux bobines supposées identiques et à la même distance de O, et dépendant de leurs géométries. Les champs des deux bobines s'ajoutent. On fait en sorte que les intensités dans les deux bobines varient sinusoïdalement dans le temps, avec la même amplitude i_0 et la même pulsation ω_0 , et soient en quadrature de phase : $i_x(t) = i_0 \cos(\omega_0 t)$ et $i_y(t) = i_0 \sin(\omega_0 t)$

Le champ total créé par les deux bobines en 0 est :

$$\vec{B}(O) = \vec{B}_{Ox} + \vec{B}_{Oy} = Ki_0 \cos(\omega_0 t) \vec{u}_x + Ki_0 \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y$$

 $\vec{B}(0)$ tourne autour de l'axe (0z) à la vitesse angulaire ω_0 .

On crée un champ magnétique tournant avec deux bobines d'axes perpendiculaires, alimentés par des courants sinusoïdaux en quadrature de phase.

Action sur un aimant

Qualitativement, lorsqu'on place un aimant en 0, mobile en rotation autour de l'axe (0z), le champ magnétique exerce un couple sur l'aimant de moment magnétique \vec{M} . Ainsi l'aimant tourne pour s'orienter parallèlement au champ magnétique. Quand le champ magnétique tourne, l'aimant tourne également à la vitesse angulaire ω_0 autour de (0z). C'est le principe des moteurs synchrones, dans lesquels le champ magnétique et l'aimant tournent à la même vitesse angulaire.