

Chapitre 3

Espace ; symétries ; calcul vectoriel

La géométrie, autrefois présentée comme “art de raisonner juste sur des figures fausses”, s’est très souvent développée au cours de l’histoire en relation directe avec l’étude et la représentation de l’“espace physique” : **géométrie euclidienne** (Euclide 400 A.C.) vérifiée “expérimentalement” avec une très grande précision ; géométrie projective introduite à la Renaissance en relation avec les problèmes de représentation de la perspective (Desargues, Pascal \simeq 1640) ; géométries non euclidiennes (\simeq 1830) dont les auteurs, notamment Gauss et Lobatchevski, ont cherché à tester les conséquences observationnelles ; géométrie des espaces métriques dont Riemann (\simeq 1880) a pensé pouvoir associer la courbure à la gravitation *etc.* Le concept important à la base de toutes ces géométries, et d’autres telles que la géométrie symplectique (pour l’espace de phase en mécanique) ou la géométrie des espaces fibrés (pour décrire les interactions fondamentales), est celui de **groupe de symétrie**. Le mathématicien Klein a été le premier dans son programme d’Erlangen (1872) à insister sur l’idée qu’un espace géométrique est défini par une dimension et l’action d’un groupe de symétrie, et à avoir défini les **propriétés géométriques** par leur invariance vis-à-vis de ce groupe. Par exemple le plan “plat” et la sphère “courbe” sont deux espaces de dimension 2 **homogènes** (pas de point privilégié) et **isotropes** (pas de direction privilégiée en chaque point), mais dont les groupes de symétrie, respectivement le groupe euclidien et le groupe des rotations, diffèrent.

En physique l’espace n’est défini que par rapport à un référentiel. Depuis Galilée (1632) on sait que les référentiels d’inertie se caractérisent par l’**invariance des lois physiques** vis-à-vis des translations et rotations des coordonnées spatiales dans le référentiel (homogénéité et isotropie de l’espace), des translations de temps (oubliées par Galilée), et des mises en mouvement à vitesse uniforme de ces référentiels. Einstein (1905) a simplement étendu ce “principe de relativité” aux lois de l’électromagnétisme. La comparaison avec les géométries montre qu’il existe donc une correspondance entre groupe de symétrie d’un espace et **groupe de relativité** de l’espace temps d’une part, et entre propriétés géométriques et lois physiques d’autre part. Physique galiléenne et physique einsteinienne diffèrent par leur groupe de symétrie.

Après une présentation générale des notions de symétrie et d'invariance en physique, nous nous intéressons principalement dans ce chapitre aux symétries spatiales (translations, rotations et symétries ponctuelles). Il est en effet indispensable de connaître leur action non seulement sur l'espace (objet de la géométrie euclidienne), mais aussi sur les grandeurs physiques qu'elles permettent de classer en scalaires, vecteurs... La description mathématique de cette action repose pour une part importante sur les outils du **calcul vectoriel** (produits scalaire, vectoriel, mixte) mis au point vers 1880 par les mathématiciens et les physiciens (Grassman, Hamilton, Gibbs, Maxwell...). Elle permet, lorsqu'un système physique possède des symétries spatiales particulières, de prédire certaines de ses propriétés grâce à des "**arguments de symétrie**". Des compléments sur les symétries spatiales (quadrupoles, spineurs...) ou autres (Lorentz en particulier) sont donnés au chapitre 4.

3.1 SYMÉTRIE, INVARIANCE ET RELATIVITÉ

3.1.1 Groupes de symétrie et invariance

▷ Groupes et représentations

Un groupe G (Galois 1832) est un ensemble d'éléments g muni d'un produit associatif ($g_3(g_2g_1) = (g_3g_2)g_1$) avec un élément neutre e ($eg = ge = g$), chaque élément g ayant un inverse g^{-1} ($gg^{-1} = g^{-1}g = e$). Il est commutatif si $g_1g_2 = g_2g_1$ quels que soient $g_1, g_2 \in G$; c'est en particulier le cas de tous les groupes continus à un seul paramètre, par exemple les rotations autour d'un axe fixe.

Un groupe est donc un ensemble abstrait défini par sa loi de multiplication; mais en pratique il "agit" sur des objets géométriques (points, vecteurs...) ou sur des systèmes et des grandeurs physiques (dipole, champ électrique...) caractérisés par des paramètres \underline{x} (coordonnées de points, composantes de vecteurs...). Cette action notée un peu abusivement $\underline{x} \rightarrow g\underline{x}$, qui vérifie $e\underline{x} = \underline{x}$ et $g_2(g_1\underline{x}) = (g_2g_1)\underline{x}$, décrit une représentation du groupe G dans l'espace X des paramètres. En général les espaces X correspondant aux différentes grandeurs physiques ont une structure d'espace vectoriel; les **représentations linéaires**, qui vérifient par définition $g(\lambda_1\underline{x}_1 + \lambda_2\underline{x}_2) = \lambda_1(g\underline{x}_1) + \lambda_2(g\underline{x}_2)$, jouent alors un rôle important pour la classification de ces grandeurs.

▷ Symétries et invariance

Un objet (ou système physique) \underline{x} est invariant par rapport à une transformation g si $g\underline{x} = \underline{x}$ (paramètres inchangés). L'ensemble des transformations qui laissent \underline{x} invariant constitue son **groupe de symétrie**. Mais en géométrie comme en physique le concept de symétrie est plus profond, car il ne concerne pas simplement les objets pris individuellement mais plus généralement leurs relations. Une relation est dite invariante si, étant vraie pour des objets, elle l'est aussi pour leurs transformés; symboliquement :

$$f(\underline{x}_1, \underline{x}_2 \dots) = 0 \iff f(g\underline{x}_1, g\underline{x}_2 \dots) = 0$$

pour tout $g \in G$. G est alors un groupe de symétrie pour cette relation. Le groupe de symétrie des propriétés géométriques ou des lois physiques est toujours plus grand que celui de tel ou tel objet particulier. Par exemple la propriété pour l'ensemble de deux droites du plan d'être orthogonales est laissée invariante par toutes les translations et

toutes les rotations, mais seules les rotations de $\frac{n\pi}{2}$ autour de leur point d'intersection laissent cet ensemble invariant. De même la loi selon laquelle un point M massif sur une planète sphérique est soumis à une force dirigée vers le centre O est laissée invariante par toutes les translations et rotations de l'ensemble "masse-planète", alors que ce système n'est laissé invariant que par les rotations autour de l'axe OM .

▷ Points de vue actif et passif

Les transformations $\underline{x} \rightarrow g\underline{x}$ qui font passer d'un objet paramétré par \underline{x} dans un système de coordonnées \mathcal{R} à l'objet paramétré par $g\underline{x}$ (toujours dans \mathcal{R}) sont dites actives. On peut inversement, point de vue passif, effectuer l'opération g sur le système de coordonnées; \mathcal{R} devient alors \mathcal{R}' et le même objet paramétré par \underline{x} dans \mathcal{R} l'est par $\underline{x}' = g^{-1}\underline{x}$ dans \mathcal{R}' .

DÉMONSTRATION : si on applique g à la fois au système de coordonnées \mathcal{R} et aux objets les coordonnées ne changent pas (figure 1 : \mathcal{R} est arbitraire et g est une rotation). Donc $(g\underline{x})' = \underline{x}$ pour tout \underline{x} et $\underline{x}' = (gg^{-1}\underline{x})' = g^{-1}\underline{x}$. Les deux points de vue sont équivalents.

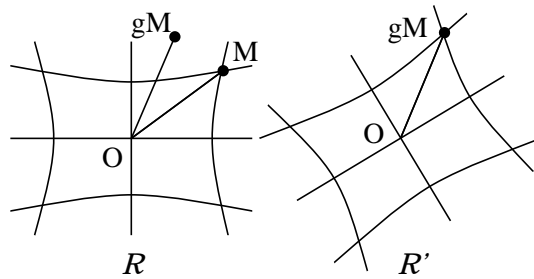


FIGURE 1

Une propriété (ou loi) qui s'exprime par la relation $f(\underline{x}_1, \underline{x}_2 \dots) = 0$ dans \mathcal{R} sera dite invariante si elle s'exprime sous forme identique à la précédente $f(\underline{x}'_1, \underline{x}'_2 \dots) = 0$ dans tous les systèmes \mathcal{R}' déduits de \mathcal{R} par les transformations $g \in G$. (Remarquons l'analogie avec les changements d'unités étudiés à la section 1.3.1.)

3.1.2 Le groupe de symétrie de la physique

Dans ce paragraphe nous adoptons exceptionnellement le point de vue passif et nous désignons par \mathcal{R} un système de coordonnées (ou référentiel) muni d'une origine spatio-temporelle, ce qui permet d'affecter à tout événement une coordonnée temporelle t et trois coordonnées spatiales x, y, z (relatives à un trièdre orthonormé). Considérons deux événements repérés dans \mathcal{R} par (t_i, x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2$), et soient $T = t_2 - t_1$, $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$ et $Z = z_2 - z_1$ ($\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$) les composantes de l'**intervalle d'espace-temps** entre ces événements. Les changements de référentiels inertiels sont caractérisés par les deux propriétés :

- (1) préservation de l'addition des intervalles (2) invariance de $c^2T^2 - \vec{R}^2$.

(1) traduit l'homogénéité d'un espace temps "plat" et implique que les transformations sur T, X, Y et Z sont linéaires. (2) qui s'écrit $c^2T^2 - \vec{R}^2 = c^2T'^2 - \vec{R}'^2$ a été intro-

duite historiquement pour rendre compte de l'invariance de la vitesse c de la lumière : $\frac{|\vec{R}|}{T} = c \iff \frac{|\vec{R}'|}{T'} = c$. On peut montrer que le groupe des transformations continues compatibles avec ces deux propriétés s'obtient par composition des trois types suivants de transformations :

- **Les translations d'espace-temps** qui ne changent pas les composantes d'un intervalle ($T' = T$, $\vec{R}' = \vec{R}$) mais translatent les coordonnées d'un évènement :

$$t' = t - t_0 \quad , \quad x' = x - x_0 \quad , \quad y' = y - y_0 \quad , \quad z' = z - z_0 \quad .$$

Elles dépendent de quatre paramètres, les coordonnées t_0 , x_0 , y_0 et z_0 dans \mathcal{R} de l'évènement choisi comme origine dans \mathcal{R}' .

- **Les rotations** qui vérifient $T' = T$ et $|\vec{R}'| = |\vec{R}|$; une rotation dépend de trois paramètres (l'angle et l'axe de rotation, ce dernier étant spécifié par deux angles). Par exemple pour une rotation d'axe Oz (figure 2) :

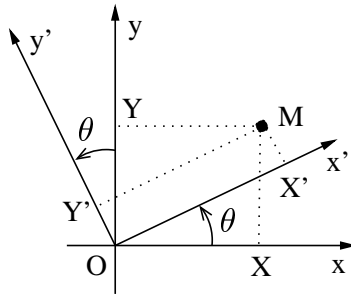


FIGURE 2

$$T' = T \quad ; \quad X' = X \cos \theta + Y \sin \theta \quad ; \quad Y' = -X \sin \theta + Y \cos \theta \quad ; \quad Z' = Z \quad .$$

- **Les transformations de Lorentz pures** (sans rotation) caractérisées par la vitesse de translation uniforme \vec{V} du référentiel \mathcal{R}' par rapport au référentiel \mathcal{R} ; elles dépendent donc de trois paramètres. Elles concernent à la fois T et la composante de \vec{R} parallèle à la vitesse de translation, par exemple :

$$cT' = cT \cosh \varphi - X \sinh \varphi \quad , \quad X' = X \cosh \varphi - cT \sinh \varphi \quad ; \quad Y' = Y \quad , \quad Z' = Z;$$

l'invariance de $c^2 T^2 - X^2$ résulte de $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$. Interprétation physique : le référentiel \mathcal{R}' se déplace à la vitesse $V = c \tanh \varphi$ (φ **rapidité**) dans la direction x par rapport à \mathcal{R} ; en effet en posant $X' = Y' = Z' = 0$, c'est-à-dire en considérant tous les évènements attachés à un point fixe de \mathcal{R}' , les relations $X = c \tanh \varphi T$ et $Y = Z = 0$ montrent que leurs positions dans \mathcal{R} se déplacent dans la direction x à la vitesse V . Comme $1 - \tanh^2 \varphi = \cosh^{-2} \varphi$ la transformation s'écrit aussi :

$$T' = \gamma \left(T - \frac{VX}{c^2} \right) \quad ; \quad X' = \gamma (X - VT) \quad \text{avec} \quad \gamma = \cosh \varphi = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

REMARQUE (figure 3). A un instant donné dans \mathcal{R} ($T = 0$), des points fixes dans \mathcal{R}' espacés dans \mathcal{R}' de X', Y', Z' sont représentés dans \mathcal{R} avec un espacement $X = \gamma^{-1}X'$, $Y = Y', Z = Z'$: contraction “apparente” dans la direction x , négligeable si $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$.

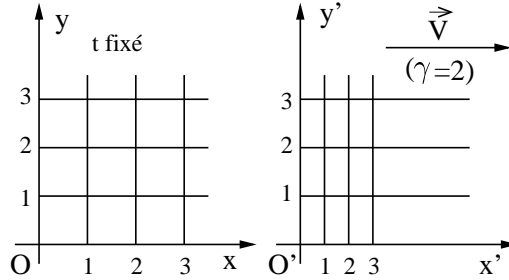


FIGURE 3

▷ Approximation galiléenne

Dans la double limite $\frac{X}{cT}$ et $\frac{V}{c} \ll 1$, la transformation devient $T' = T$ et $X' = X - VT$. Plus généralement on appelle physique galiléenne l'ensemble des lois laissées invariantes par les translations, les rotations, et les **transformations de Galilée** pures

$$T' = T \quad , \quad \vec{R}' = \vec{R} - \vec{V}T \quad .$$

REMARQUE 1. Aux symétries “continues” ci-dessus peuvent s'ajouter des **symétries discrètes** qui correspondent à des transformations qui ne peuvent pas être atteintes continûment à partir de l'identité. Il en est ainsi de l'opération de **renversement du temps** ($T' = -T$, $\vec{R}' = \vec{R}$) qui est une symétrie pour les phénomènes réversibles, ou de la **parité** ($T' = T$, $\vec{R}' = -\vec{R}$) qui est une symétrie pour toutes les interactions sauf l'interaction faible (cf. section 3.2.1).

REMARQUE 2. Vocabulaire : on dit de façon incorrecte que les lois physiques sont “**relativistes**”. Elles sont en fait “**invariantes**” (même formulation dans tous les référentiels inertiels). Ce qui est relatif, c'est la valeur des grandeurs, à commencer par la grandeur “espace” \vec{R} qui, même en physique galiléenne (si $T \neq 0$), dépend du référentiel. De ce point de vue il n'y a pas de différence avec la géométrie : une égalité entre vecteurs $\vec{V} = \vec{W}$ se formule de la même manière dans deux bases différentes : $V_i = W_i \iff V'_i = W'_i$, mais $V'_i \neq V_i$ et $W'_i \neq W_i$.

3.1.3 Symétries spatiales (présentation « expérimentale »)

Les symétries spatiales continues correspondent aux déplacements des objets dans l'espace. Comme on le sait, un déplacement conserve les distances entre points et, en général, “tourne” les directions (en conservant les angles). Un **déplacement** général s'obtient en composant des translations et des rotations.

▷ Translations

Les translations conservent les directions; elles forment un groupe commutatif dont la loi de composition correspond à l'addition vectorielle (figure 4a). La translation $T_{\vec{a}}$ de vecteur \vec{a} amène tout point M en M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$.

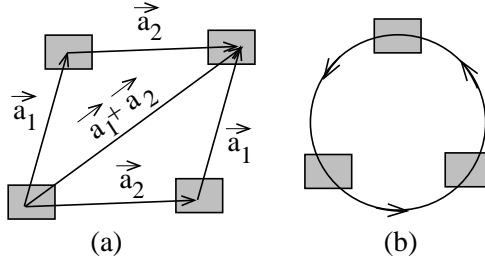


FIGURE 4

REMARQUE. Lorsque le vecteur $\vec{a}(t)$ dépend du temps, on parle de **mouvement de translation** (figure 4b). Par exemple le référentiel géocentrique ayant pour origine le centre T de la Terre et ses axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic centré sur le Soleil S effectue un mouvement de translation autour du Soleil, et non de rotation bien que le vecteur \overrightarrow{ST} tourne.

▷ Rotations de centre O

Ces rotations, définies par un axe passant par O et un angle, “tournent” les directions. Elles forment un groupe mais ne commutent pas à l’exception du cas de rotations de même axe ou du cas de rotations d’angle π et d’axes orthogonaux. La loi de composition générale est donnée à la section 4.2.3.

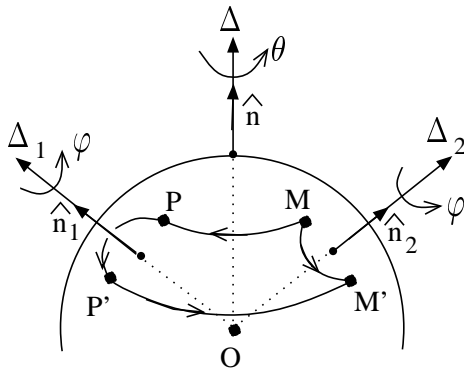


FIGURE 5

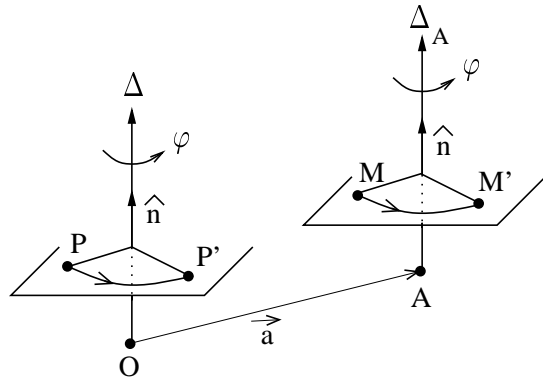


FIGURE 6

JUSTIFICATION (figure 5). Considérons l’expression $R_O(\hat{n}_2, \varphi) = R_O(\hat{n}, \theta) R_O(\hat{n}_1, \varphi) R_O^{-1}(\hat{n}, \theta)$ qui relie deux rotations de même angle φ dont les axes, de vecteurs directeurs \hat{n}_1 et \hat{n}_2 , se déduisent l’un de l’autre par la rotation $R_O(\hat{n}, \theta)$ amenant \hat{n}_1 sur \hat{n}_2 . Les rotations a priori quelconques $R_O(\hat{n}, \theta)$ et $R_O(\hat{n}_1, \varphi)$ commutent si $R_O(\hat{n}, \theta) R_O(\hat{n}_1, \varphi) (= R_O(\hat{n}_2, \varphi) R_O(\hat{n}, \theta)) = R_O(\hat{n}_1, \varphi) R_O(\hat{n}, \theta)$, donc si $R_O(\hat{n}_1, \varphi) = R_O(\hat{n}_2, \varphi)$. Cette relation entraîne soit $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$ si φ est quelconque, soit $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$ et $\varphi = \pi$, ce qui conduit aux deux cas cités (soit $\hat{n} = \hat{n}_1$, soit $\hat{n} \perp \hat{n}_1$ et $\theta = \varphi = \pi$).

REMARQUE (figure 6). Des rotations d'axes parallèles et de même angle, mais de centres A et O différents, se déduisent par la relation :

$$R_A(\hat{n}, \varphi) = T_{\vec{a}} R_O(\hat{n}, \varphi) T_{-\vec{a}} \quad (\vec{a} = \overrightarrow{OA}).$$

▷ Vissages

La relation ci-dessus montre qu'une translation $T_{\vec{a}}$ ne commute avec une rotation $R_O(\hat{n}, \varphi)$ que si \vec{a} est parallèle à l'axe de rotation \hat{n} (ce qui assure $R_O(\hat{n}, \varphi) = R_A(\hat{n}, \varphi)$ puisque O et A sont alors sur le même axe). La composition des deux transformations, lorsqu'elles commutent, est un vissage; sur la figure 7, l'**hélice** γ est le lieu des points qui se déduisent de M par les vissages $\lambda \vec{a}$, $\lambda \varphi$ ($0 < \lambda < 1$).

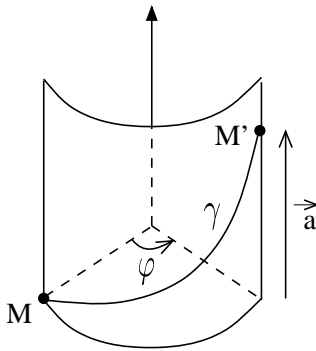


FIGURE 7

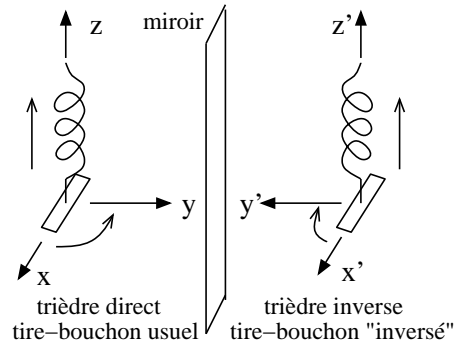


FIGURE 8

Un exemple est donné par le tire-bouchon (usuel) dont le sens de déplacement, lié au sens de rotation, sert à définir les trièdres directs par la fameuse "**règle du tire-bouchon**" (figure 8). Tout **déplacement** se ramène à un vissage.

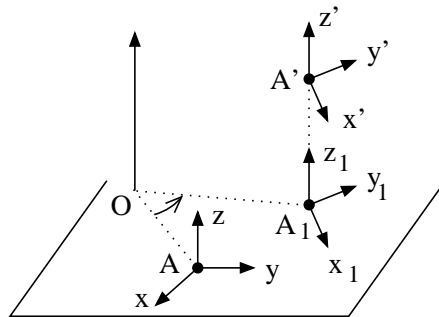


FIGURE 9

JUSTIFICATION (figure 9) : restreinte aux vecteurs unitaires \hat{n} qui caractérisent les directions (vecteurs "libres"), l'effet d'un déplacement se résume à une rotation. Soit z la direction de son axe. Un trièdre $Axyz$ est alors déplacé en $A'x'y'z'$ tel que les axes Az et $A'z'$ sont parallèles. La figure montre que ce déplacement s'obtient en composant un **déplacement plan** amenant $Axyz$ en $A_1x_1y_1z_1$ (A_1 , x_1 , y_1 projection de A' , x' , y' sur le plan Axy), et une translation $\overrightarrow{A_1A'}$ parallèle à z . Le déplacement plan est

une rotation dont l'axe parallèle à z (axe du vissage) coupe le plan en O , **centre de rotation** situé sur la médiatrice de AA_1 et tel que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1})$ est celui dont ont tourné les axes Ax et Ay . Si ces axes n'ont pas tourné le déplacement est simplement une translation.

Mouvement d'un solide. C'est une succession de vissages élémentaires reliant ses positions aux instants t et $t + dt$. Chaque **vissage élémentaire** est caractérisé par un axe (dont la position et la direction $\hat{n}(t)$ dépendent du temps), une rotation infinitésimale d'angle $\omega(t) dt$ autour de cet axe et une translation infinitésimale de vecteur $\vec{v}(t) dt$ parallèle à $\hat{n}(t)$ (cf. section 3.3.3).

▷ **Symétries discrètes** (figure 10)

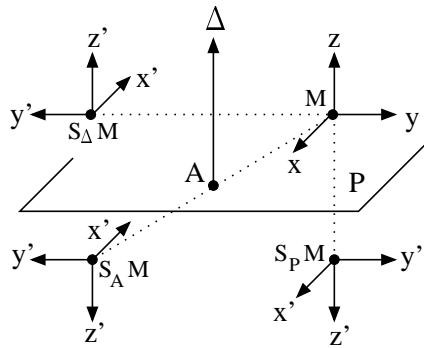


FIGURE 10

Elles conservent aussi les distances et les angles (en valeurs absolues). On distingue les symétries S_A par rapport à un centre A ($\overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$), S_Δ par rapport à une droite Δ (équivalente à une rotation de π autour de Δ), et S_P par rapport à un plan P . Dans tous les cas S^2 est la transformation identité. Si $\Delta \perp P$ coupe P en A , S_P diffère de S_A par S_Δ . Noter que S_A et S_P , mais pas S_Δ , changent le caractère (direct ou indirect) d'un trièdre.

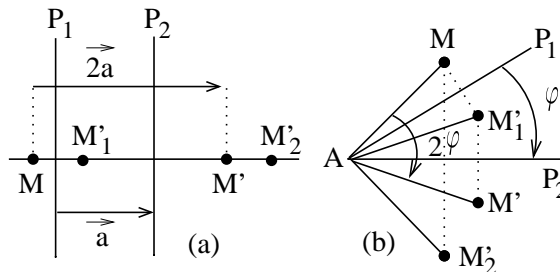


FIGURE 11

Les **lois de composition** de deux symétries par rapport à des plans P_1 et P_2 qui, soit sont parallèles (ils se déduisent alors l'un de l'autre par la translation de vecteur $\vec{a} \perp P_1$ et P_2), soit se coupent selon l'axe (A, \hat{n}) (la rotation $R_A(\hat{n}, \varphi)$ transformant P_1 en P_2),

vérifient respectivement (figures 11a,b, où $M'_1 = S_{P_1}M$ et $M' = S_{P_2}S_{P_1}M$) :

$$S_{P_2}S_{P_1} = T_{2\vec{a}} \quad \text{et} \quad S_{P_2}S_{P_1} = R_A(\hat{n}, 2\varphi) .$$

Ecrives $S_{P_2} = T_{2\vec{a}}S_{P_1}$ et $S_{P_2} = R_A(\hat{n}, 2\varphi)S_{P_1}$, ces relations montrent que les symétriques M'_1 et M'_2 d'un point M par rapport aux plans P_1 et P_2 se déduisent l'un de l'autre, soit par la translation $T_{2\vec{a}}$, soit par la rotation $R_A(\hat{n}, 2\varphi)$.

EXEMPLES. Soient S_1 et S_2 les images d'une source S données par des **miroirs parallèles** ou “**en coin**”, et γ_1 et γ_2 les deux rayons issus d'un même rayon incident γ (figures 12a,b). Les intersections L de γ_1 et γ_2 donnent le lieu de localisation des franges d'interférences (cf. section 3.2.3). Pour la figure 12a L est à l'infini. Pour la figure 12b (dans le plan de figure), L est sur le cercle circonscrit au triangle S_1OS_2 car γ_1 et γ_2 font entre eux un angle 2φ comme OS_1 et OS_2 ; ce cercle devient la droite OP lorsque S est à l'infini dans la direction i . La figure 12c illustre le principe du **cataphote** : $S_{P_1}S_{P_2}S_{P_3} = S_O$ quel que soit l'ordre des réflexions sur les trois plans perpendiculaires deux à deux.

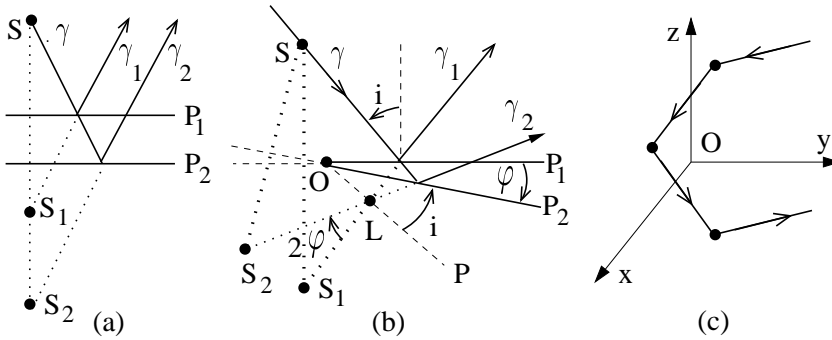


FIGURE 12

3.1.4 Transformation des grandeurs et des champs physiques

Les opérations de symétrie ne portent pas uniquement sur des objets géométriques “ensembles de points”, mais aussi sur des objets physiques auxquels sont associées des grandeurs. Lorsque l'objet est déplacé (ou subit par la pensée une symétrie ponctuelle), ces grandeurs peuvent changer. Toutes les grandeurs classiques sont laissées inchangées par les translations. (Voir remarque section 3.4.2. pour un état quantique.) Par contre vis-à-vis des rotations et des symétries ponctuelles, on distingue les **grandeurs scalaires** laissées inchangées (la masse, la charge, la température, *etc.*), les **grandeurs vectorielles** qui se transforment comme les vecteurs de la géométrie (vitesse, moment dipolaire, *etc.*), et d'autres (spineurs, quadrupoles...) étudiées au chapitre 4. On verra aussi à la section 3.2.1 que, vis-à-vis des symétries discrètes, il faut distinguer les grandeurs scalaires et **pseudoscalaires** de même que les grandeurs vectorielles et **pseudovectorielles**. Dans tous les cas, l'invariance des lois physiques entraîne que les égalités ne peuvent avoir lieu qu'entre grandeurs ayant les mêmes lois de transformation.

Ces opérations de symétrie portent aussi sur les champs relatifs aux objets physiques (densité volumique de charges par exemple), ou créés par eux (champ électrique), qui sont des grandeurs dont la valeur dépend du point d'espace où elle est mesurée.

La figure 13 illustre, sur l'exemple du potentiel $V(\vec{r})$ (**champ scalaire**) et du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ (**champ vectoriel**) d'un dipôle, le fait très important que dans une symétrie la valeur du champ transformé au point transformé s'obtient en appliquant la transformation à la valeur du champ initial au point initial, ce qu'on peut écrire symboliquement :

$$f'(g\vec{r}) = g f(\vec{r}) .$$

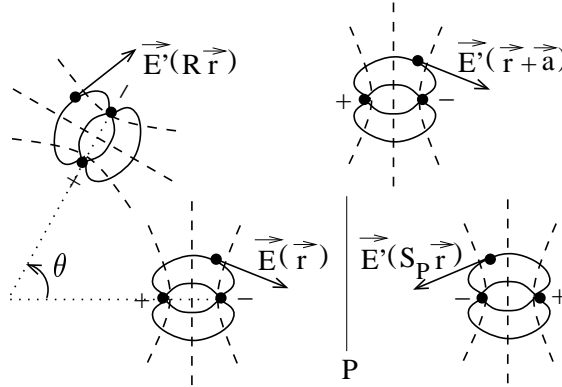


FIGURE 13

ATTENTION : g dans le membre de gauche désigne l'action de la symétrie sur le vecteur position, tandis que dans le membre de droite il désigne son action sur la valeur $f(\vec{r})$ de la grandeur f au point \vec{r} , action qui dépend de la nature (scalaire, vectorielle ou autre) de f . Ainsi pour une **translation**, $f'(\vec{r} + \vec{a}) = f(\vec{r})$ quelle que soit la nature de la grandeur f ; pour une **rotation**, $f'(R\vec{r}) = f(\vec{r})$ pour un champ scalaire et $\vec{f}'(R\vec{r}) = R\vec{f}(\vec{r})$ pour un champ vectoriel. La connaissance de ces lois de transformation est essentielle pour comprendre l'application des arguments de symétrie aux champs. La poursuite de cette discussion sur les symétries est faite à la section 3.4.1.

3.2 CALCUL VECTORIEL ; APPLICATIONS

3.2.1 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte ; pseudovecteurs

▷ Définitions et propriétés

Ces produits, qui généralisent $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\sigma(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ vus à la section 2.2.1, sont les quantités multilinéaires (*i.e.* linéaires par rapport à chacun des facteurs) définies dans une base orthonormée directe de vecteurs unitaires \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 ,$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \hat{x} + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \hat{y} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \hat{z} = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 ,$$

$$\begin{aligned}
(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) &= (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 \\
&= (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) X_3 + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) Y_3 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) Z_3 \\
&= (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2) \quad (\text{permutations circulaires}) ;
\end{aligned}$$

X_i , Y_i et Z_i sont les composantes des vecteurs $\vec{V}_i = X_i \hat{x} + Y_i \hat{y} + Z_i \hat{z}$. Ils vérifient les relations :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad ; \quad |\vec{V}_1|^2 |\vec{V}_2|^2 = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + |\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|^2 ;$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_3 \neq (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 .$$

La première montre que $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est orthogonal à \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ; sa direction est donnée par la règle du tire-bouchon (cf. par exemple $\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z} = -\hat{y} \wedge \hat{x}$). La seconde permet d'introduire l'angle θ de deux vecteurs (cf. section 2.2.1) par

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta \quad , \quad |\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin \theta ,$$

et donc de traduire leur **orthogonalité** et leur **parallélisme** respectivement par $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0$; on en déduit aussi que lorsque les \vec{V}_i sont des vecteurs de l'espace ordinaire, $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$ est égal à l'**aire du parallélogramme** construit sur \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , et que $|(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)| = |(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3|$ est égal au **volume du parallélépipède** construit sur \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 , produit de la "surface de base" $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$ par le module de la composante de \vec{V}_3 perpendiculaire à cette base (hauteur du parallélépipède) (figure 14). La dernière montre que le produit vectoriel n'est pas associatif, d'où l'importance des parenthèses et de leurs places ; $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$, orthogonal à $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, appartient au "plan" (\vec{V}_2, \vec{V}_3) (figure 15).

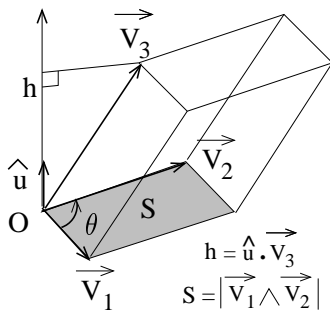


FIGURE 14

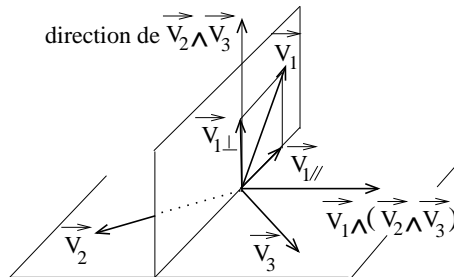
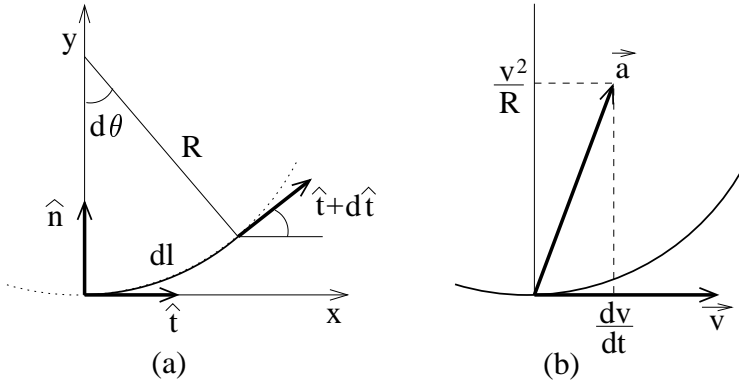


FIGURE 15

Il résulte de la multilinéarité de ces produits que leurs règles de dérivation (lorsque les vecteurs dépendent d'un paramètre) ou de différentiation sont analogues à celles des

produits de fonctions ; par exemple :

$$\begin{aligned}
 d(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) &= d((\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3) \\
 &= (d\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge d\vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot d\vec{V}_3 \\
 &= (d\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) + (\vec{V}_1, d\vec{V}_2, \vec{V}_3) + (\vec{V}_1, \vec{V}_2, d\vec{V}_3).
 \end{aligned}$$



FIGURES 16

Une conséquence importante est que la différentielle d'un **vecteur unitaire** (ou de norme constante) est orthogonale à ce vecteur : $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$ entraîne $d(\hat{u} \cdot \hat{u}) = d\hat{u} \cdot \hat{u} + \hat{u} \cdot d\hat{u} = 2\hat{u} \cdot d\hat{u} = 0$. Si \hat{t} est le vecteur unitaire tangent à une courbe (figure 16a), la relation $\frac{d\hat{t}}{dl} = \frac{1}{R} \hat{n}$ définit le vecteur normal et le **rayon de courbure**. L'élément dl est alors assimilable à un arc de cercle (**cercle osculateur**) et $\frac{dl}{R}$ est l'angle $d\theta$ dont a tourné \hat{t} . On en déduit, en mécanique (classique ou relativiste), la décomposition en composantes tangentielle et normale de l'accélération et de la force (figure 16b) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{R} \hat{n} ; \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} \hat{t} + \frac{vp}{R} \hat{n} .$$

Si au point considéré, pris comme origine 0, les vecteurs \hat{t} et \hat{n} sont selon Ox et Oy , l'équation de la courbe est $y = \frac{x^2}{2R}$ (approximation près de O de $(y - R)^2 + x^2 = R^2$).

REMARQUE. Vis-à-vis des rotations, qui conservent les longueurs et les angles, le produit scalaire de deux vecteurs est un invariant ($R\vec{V}_1 \cdot R\vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$), tandis que le produit vectoriel se comporte comme un vecteur ($R\vec{V}_1 \wedge R\vec{V}_2 = R(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$). On démontre que tout invariant (aussi appelé "scalaire"), construit à partir de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est une fonction de \vec{V}_1^2 , \vec{V}_2^2 et $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$.

▷ Pseudovecteurs et symétries discrètes

Dans une symétrie S_O , des vecteurs translation \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont changés en $-\vec{V}_1$ et $-\vec{V}_2$; cette loi de transformation caractérise les "vrais" vecteurs, appelés aussi **vecteurs polaires**. Par contre $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ reste inchangé ; on l'appelle pseudovecteur ou **vecteur**

axial, et on l'écrit parfois avec une flèche incurvée pour le distinguer des "vrais" vecteurs. Le produit vectoriel d'un vecteur avec un pseudovecteur est un vecteur, tandis que le produit vectoriel de deux pseudovecteurs est un pseudovecteur. On fera attention à l'action "surprenante" d'une symétrie plane $S_P = S_{\Delta}S_O$ sur un pseudovecteur : sa composante perpendiculaire au plan reste inchangée tandis que sa composante parallèle au plan change de signe; les figures 17a et 17b représentent l'action de S_O et de S_P respectivement sur un vrai vecteur et sur un pseudovecteur.

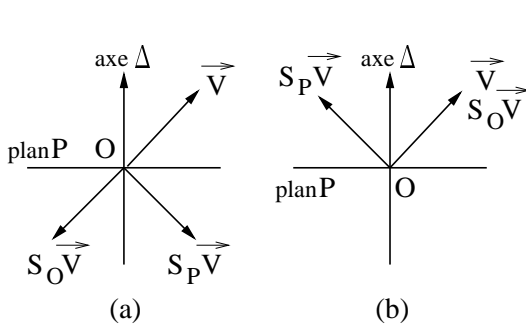


FIGURE 17

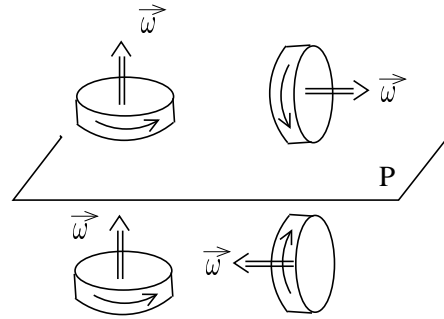


FIGURE 18

Des exemples de pseudovecteurs sont : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ (moment cinétique), $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ (moment d'une force), $\vec{\omega}$ (vitesse de rotation, figure 18), $\vec{\mu}$ (moment magnétique), \vec{B} (champ magnétique), *etc.*

La figure 19 illustre l'**invariance de l'électromagnétisme** dans une symétrie S_P : $\vec{B}'(S_P \vec{r}) = S_P \vec{B}(\vec{r})$. La figure 20a illustre la **non invariance des interactions faibles** (désintégration β) : une source de cobalt polarisée perpendiculairement au plan P, donc caractérisée par $\vec{\mu} \perp P$ laissé invariant par S_P , émet des nombres différents d'électrons de part et d'autre de P; la désintégration symétrique qui correspond à la figure 20b n'a jamais été observée.

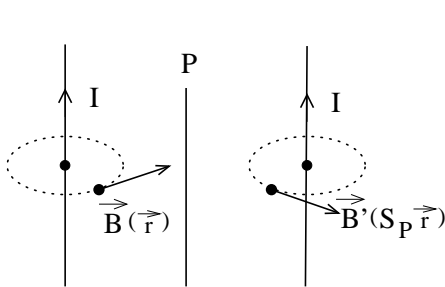


FIGURE 19

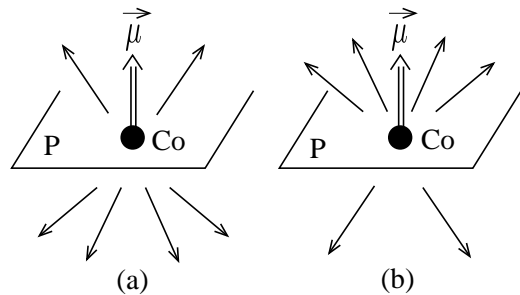


FIGURE 20

REMARQUE. Le produit scalaire d'un vecteur et d'un pseudovecteur, qui change de signe dans une symétrie S_O , est appelé **pseudoscalaire**.

3.2.2 Equations de plans ; fréquences spatiales ; réseaux

▷ Equations de plans ; ondes planes

Un plan orthogonal au vecteur unitaire $\hat{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ et distant de d de l'origine O a pour équation (figure 21) :

$$d = \overline{OH} = \hat{n} \cdot \vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

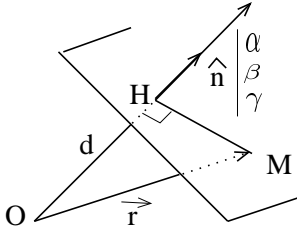


FIGURE 21

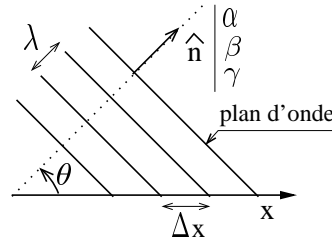


FIGURE 22

Par exemple (figure 22) une onde $a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$ est dite onde plane parcequ'elle prend une même valeur lorsque $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi = \Phi$ (fixé modulo 2π), c'est-à-dire sur les plans d'onde orthogonaux à $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ et d'équations $\hat{n} \cdot \vec{r} = \frac{\omega t + \varphi - \Phi}{|\vec{k}|}$ (modulo $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$). A un instant donné ces plans sont équidistants de la longueur d'onde λ ; ils se

déplacent à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$. Le vecteur $\vec{\sigma} = \frac{\hat{n}}{\lambda} = \frac{\vec{k}}{2\pi}$ est appelé **fréquence spatiale**. Sa composante $\sigma_x = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{k_x}{2\pi}$ est bien l'inverse de la période $\Delta x = \frac{2\pi}{k_x}$ mesurée sur l'axe Ox ; par contre $\hat{n}\lambda$ ne peut pas représenter un "vecteur période spatiale" car $\alpha\lambda \neq \Delta x$ (sauf à une dimension).

De même l'**interférence de deux ondes planes** $a_i \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_i)$ conduit à des surfaces d'égale intensité $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = \text{constant}$ (modulo 2π). Ce sont des plans fixes orthogonaux à $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$ et distants de $\frac{2\pi}{|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|} \sim \frac{\lambda}{\theta}$ (si l'angle θ entre \vec{k}_2 et \vec{k}_1 est petit) (figure 23).

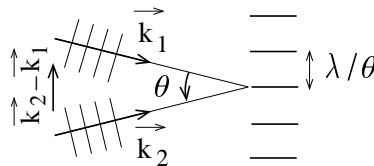


FIGURE 23

▷ Réseaux

Un autre exemple est celui des **plans réticulaires** d'un réseau. On appelle réseau un ensemble de points déduits de O par les translations de vecteurs

$$\vec{t}_{(m,n,p)} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \quad (m, n, p \in \mathbb{Z})$$

($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vecteurs de base du réseau). Une famille de plans réticulaires permet par définition de regrouper les points du réseau par plans ; la figure 24a représente une coupe de familles de plans réticulaires, en supposant \vec{c} perpendiculaire à \vec{a} et \vec{b} .

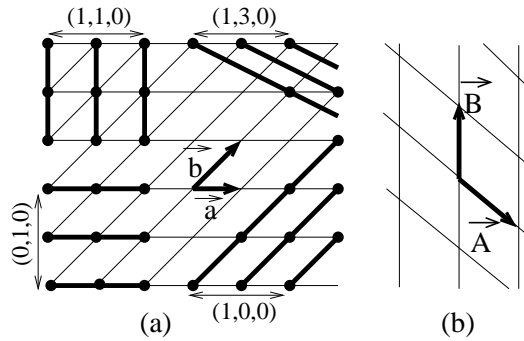


FIGURE 24

Pour décrire ces familles de plans, on introduit le **réseau réciproque** des fréquences spatiales

$$\vec{\sigma}_{(h,k,l)} = h\vec{A} + k\vec{B} + l\vec{C} \quad (h, k, l \in \mathbb{Z}) ,$$

dont les vecteurs de base \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} sont définis par $\vec{A} \cdot \vec{a} = \vec{B} \cdot \vec{b} = \vec{C} \cdot \vec{c} = 1$ et $\vec{A} \cdot \vec{b} = \vec{A} \cdot \vec{c} = 0, \vec{B} \cdot \vec{c} = \vec{B} \cdot \vec{a} = 0$ et $\vec{C} \cdot \vec{a} = \vec{C} \cdot \vec{b} = 0$ (figure 24b). L'équation d'une famille de plans réticulaires s'écrit alors :

$$\vec{\sigma}_{(h,k,l)} \cdot \vec{r} = \mu \quad \mu \in \mathbb{Z} ;$$

elle est caractérisée par les trois nombres h, k et l premiers entre eux appelés indices de Miller (chaque valeur de μ correspondant à un plan de la famille).

DÉMONSTRATION : tout point du réseau appartient bien à la famille car $\vec{\sigma}_{(h,k,l)} \cdot \vec{t}_{(m,n,p)} = hm + kn + lp \in \mathbb{Z}$. La condition h, k, l premiers entre eux est nécessaire pour que tous les plans contiennent des points du réseau, notamment le plan $\mu = 1$; en effet le théorème de Bezout assure alors l'existence de nombres entiers m, n et p tels $hm + kn + lp = 1$ (contre exemple $2m + 2n + 4p = 1$ n'a pas de solution). On vérifie aisément sur leurs équations que le plan $\mu = 1$ coupe les trois axes issus de O et parallèles à \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} en $\frac{\vec{a}}{h}, \frac{\vec{b}}{k}$ et $\frac{\vec{c}}{l}$ et que deux plans voisins sont distants de $d_{(h,k,l)} = |\vec{\sigma}_{(h,k,l)}|^{-1}$.

3.2.3 Différentielles de chemins ; effet Doppler ; lois de Descartes

▷ Différentielle de la longueur AB d'un segment

Si A et B se déplacent de $d\vec{r}_A$ et $d\vec{r}_B$, la variation de AB est

$$d(AB) = d(\hat{u} \cdot \vec{AB}) = \hat{u} \cdot d\vec{AB} = \hat{u} \cdot (d\vec{r}_B - d\vec{r}_A) \quad \left(\hat{u} = \frac{\vec{AB}}{AB} \right)$$

(car $\hat{u} \cdot d\hat{u} = 0$). On retrouve ce résultat en calculant $d\sqrt{AB^2} = \frac{1}{2AB} 2\vec{AB} \cdot d\vec{AB}$ ou encore en regardant simplement la figure 25 ($A'B' - AB = \overline{HK} - \overline{AB} = \overline{BK} - \overline{AH}$).

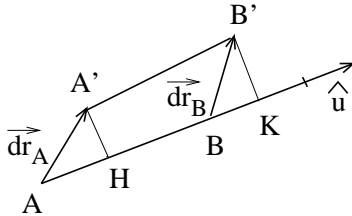


FIGURE 25

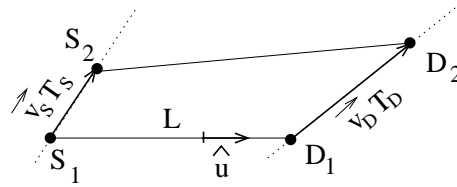


FIGURE 26

EXEMPLE 1. Effet Doppler (figure 26). Dans un référentiel \mathcal{R} une source se déplaçant à la vitesse \vec{v}_s émet des signaux (sonores, optiques...) à intervalles de temps réguliers T_s ; ces signaux sont reçus à intervalles de temps réguliers T_D par un détecteur qui se déplace dans \mathcal{R} à la vitesse \vec{v}_D . Si on suppose $|\vec{v}_s|T_s$ et $|\vec{v}_D|T_D \ll L$ (distance de propagation du signal), les vecteurs unitaires \hat{u} des directions de propagation de deux signaux successifs peuvent être confondus. Si V est la vitesse du signal on a $T_D = T_s + \frac{\Delta L}{V}$ où $\Delta L = \hat{u} \cdot (\vec{v}_D T_D - \vec{v}_s T_s)$ est la différence des trajets parcourus par ces signaux. D'où :

$$T_D = T_s \frac{1 - \frac{\vec{v}_s \cdot \hat{u}}{V}}{1 - \frac{\vec{v}_D \cdot \hat{u}}{V}}.$$

On remarquera que ce calcul n'implique aucun changement de référentiel. Cependant T_D et T_s ne sont les périodes mesurées dans les référentiels de la source et du détecteur que dans l'approximation galiléenne. En réalité ces périodes (temps propres) sont

$$\tau_{s,D} = T_{s,D} \left(1 - \frac{v_{s,D}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(cf. section 4.3.3) et les fréquences correspondantes sont $\nu_{s,D} = \tau_{s,D}^{-1}$.

EXEMPLE 2. Interférence de deux ondes sphériques $a_i \cos(\omega t - kr_i + \varphi_i)$ ($r_i = S_i M$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, figure 27). A grande distance dans une direction proche de celle de $S_1 S_2$, la relation $S_1 M - S_2 M = S_1 S_2 \cos \alpha \sim S_1 S_2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ entraîne que les lignes d'égale intensité $k(r_2 - r_1) = \text{constante (modulo } 2\pi)$ sont sur des cônes de sommet $S_1 \sim S_2$ (cf. aussi section 2.3.2).

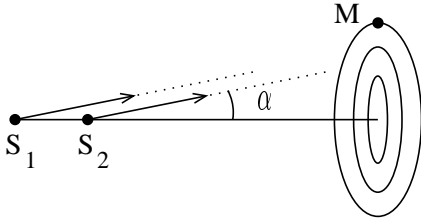


FIGURE 27

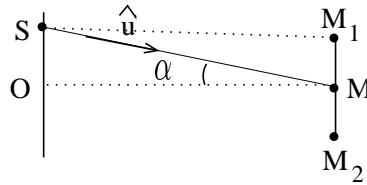


FIGURE 28

EXEMPLE 3. Largeur de cohérence. On considère une source de lumière monochromatique étendue centrée en O , dont les points S émettent de façon incohérente, et un point M éloigné (figure 28). On admet que les amplitudes complexes en deux points M_1 et M_2 voisins de M ($\overline{M_1 M_2} \perp \overline{OM}$) présentent un certain degré de cohérence tant que la distance $SM_1 - SM_2$ varie de moins d'une fraction de longueur d'onde lorsque S décrit la source. Comme $SM_1 - SM_2 = \hat{u} \cdot \overline{M_1 M_2} = \alpha \overline{M_1 M_2}$ avec $-\frac{\theta}{2} \leq \alpha \leq \frac{\theta}{2}$ (où θ est l'angle supposé petit sous lequel on voit la source de M), la condition de cohérence correspond approximativement à $M_1 M_2 < \frac{\lambda}{\theta}$ (largeur de cohérence).

▷ Différentielles de chemins optiques

Le principe de Fermat pour un dioptré " $n_A AM + n_B MB$ extremum" (A et B fixes, M point courant sur le dioptré) se traduit par $d(n_A AM + n_B MB) = (n_A \hat{u}_A - n_B \hat{u}_B) \cdot d\vec{r}_M = 0$ (\hat{u} vecteur unitaire porté par le rayon); $d\vec{r}_M$ étant un vecteur tangent au dioptré (figure 29), on obtient la **loi de Descartes** :

$$n_A \hat{u}_{A\parallel} = n_B \hat{u}_{B\parallel} \quad (\hat{u}_{\parallel} \text{ projection de } \hat{u} \text{ sur le plan tangent au dioptré}).$$

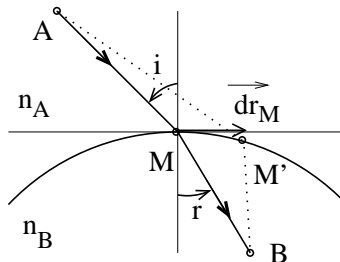


FIGURE 29

Cette loi avec $n_A = n_B$ s'applique aussi à la réflexion sur un miroir. Si maintenant on considère un trajet AMB réellement suivi par la lumière (un rayon) et le chemin

optique $L(A, B) = n_A AM + n_B MB$ correspondant, sa différentielle s'écrit $dL(A, B) = n_A \hat{u}_A \cdot (d\vec{r}_M - d\vec{r}_A) + n_B \hat{u}_B \cdot (d\vec{r}_B - d\vec{r}_M)$ ou, compte tenu de la loi de Descartes :

$$dL(A, B) = n_B \hat{u}_B \cdot d\vec{r}_B - n_A \hat{u}_A \cdot d\vec{r}_A .$$

L'observation de la figure 30 et l'application répétée de cette relation montrent qu'elle s'étend à la traversée d'un nombre quelconque de dioptries ($dL(A, C) = n_C \hat{u}_C \cdot d\vec{r}_C - n_A \hat{u}_A \cdot d\vec{r}_A$), ou même dans la limite continue à un milieu d'indice variable.

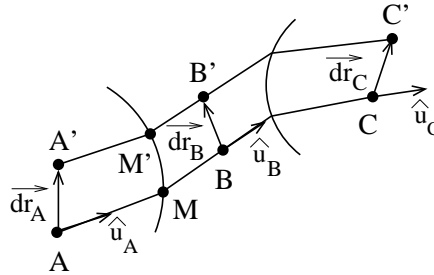


FIGURE 30

On en déduit que tous les points C qui sont situés à une même distance optique d'un point source A sont sur une surface perpendiculaire aux rayons (**Théorème de Malus**). En effet $dL = 0$ et $d\vec{r}_A = 0$ implique $\hat{u}_C \cdot d\vec{r}_C = 0$. (cf. aussi section 7.3.2.)

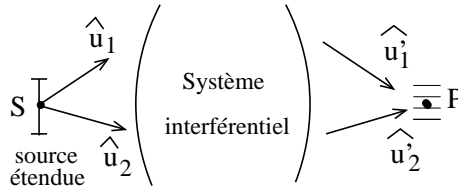


FIGURE 31

Application aux interférences (figure 31). Soient P un point où interfèrent deux ondes issues d'une source ponctuelle S , \hat{u}_1, \hat{u}_2 les directions d'émission, \hat{u}'_1, \hat{u}'_2 les directions d'arrivée en P , et L_1 et L_2 les chemins optiques correspondant aux deux rayons allant de S à P . On a :

$$d(L_2 - L_1) = (\hat{u}'_2 - \hat{u}'_1) \cdot d\vec{r}_P - (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \cdot d\vec{r}_S .$$

Si S est fixé la condition $(\hat{u}'_2 - \hat{u}'_1) \cdot d\vec{r}_P = \text{constante (modulo } \lambda)$ donne les surfaces d'égale intensité (déjà obtenues à la section 3.2.2) pour deux ondes planes. On en déduit aussi le lieu de **localisation des interférences** lorsque la source est étendue. En effet pour que l'interférence en P (fixe) ne soit pas détruite lorsqu'on étend la source, il faut que $(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \cdot d\vec{r}_S = 0$. Donc soit $d\vec{r}_S \perp \hat{u}_2 - \hat{u}_1$ ce qui implique que la source est une fente, soit $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$. Dans ce dernier cas, qui suppose un système interférentiel à séparation d'amplitudes, les franges se localisent sur la surface lieu des intersections des rayons issus d'un même rayon incident (exemple figure 12).

3.2.4 Vecteurs surface ; flux de grandeurs

▷ Vecteurs surface

Considérons un parallélogramme orienté construit sur deux vecteurs ordonnés \vec{V}_1 et \vec{V}_2 (figure 32). On appelle “vecteur surface” le vecteur $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. La justification de cette appellation est que sa norme est égale à la surface du parallélogramme, et que sa projection $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \hat{u}$ sur une direction \hat{u} correspond à l’**aire algébrique** de la projection du parallélogramme sur un plan perpendiculaire à \hat{u} et orienté par \hat{u} via la règle du tire-bouchon. En effet on vérifie que $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \hat{u} = (\vec{V}_{1\parallel} \wedge \vec{V}_{2\parallel}) \cdot \hat{u}$ où les vecteurs $\vec{V}_{i\parallel} = \vec{V}_i - (\vec{V}_i \cdot \hat{u})\hat{u}$ sont les projections des vecteurs \vec{V}_i sur le plan.

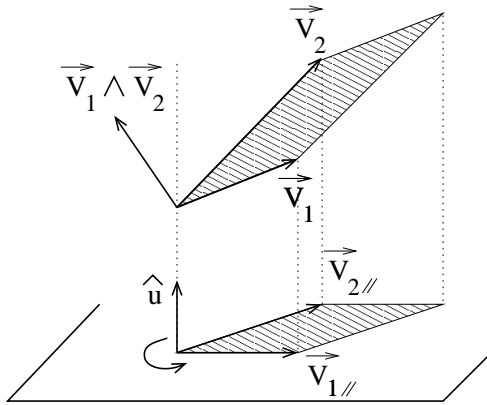


FIGURE 32

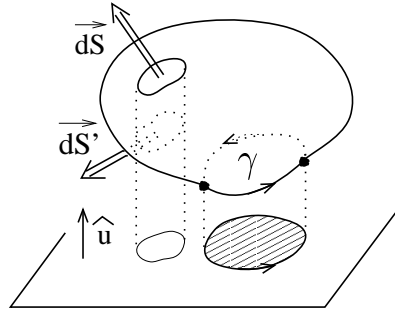


FIGURE 33

Plus généralement pour une surface infinitésimale dS s'appuyant sur une courbe orientée γ , on introduit le vecteur $\vec{dS} = dS \hat{n}$ où \hat{n} est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface et dont le sens est déterminé par l'orientation de γ ; $\vec{dS} \cdot \hat{u}$ est alors l'aire apparente dans la direction \hat{u} (“l'ombre” de dS sur un plan perpendiculaire à \hat{u}). Pour une surface finie orientable (cf. section 7.2.2), le vecteur surface \vec{S} est la somme des vecteurs \vec{dS} ; on fera attention à ce que son module $|\vec{S}|$ ne représente pas l'aire totale, qui est la somme des $|\vec{dS}|$. Lorsque la surface s'appuie sur une courbe fermée γ , la somme algébrique des $\vec{dS} \cdot \hat{u}$ (aire hachurée sur la figure 33), et donc aussi \vec{S} , ne dépend que de γ . Dans le cas d'une surface fermée, γ est réduit à un point et $\vec{S} = 0$.

EXEMPLES. $\vec{dS} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r}$ est l'**aire balayée** par un rayon vecteur \vec{r} (cf. section 2.2.1). Le **moment cinétique orbital** $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ s'écrit $2m \frac{d\vec{S}}{dt}$. Le **moment magnétique** d'un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité I est $\vec{\mu} = I \oint \frac{\vec{r} \wedge d\vec{r}}{2} = I\vec{S}$; cette formule est la version continue de l'expression $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$ valable pour une distribution discrète de charges; $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$ pour une seule charge en mouvement orbital.

▷ Flux de particules et flux associés

Considérons des particules d'un type "i" donné, en nombre n_i par unité de volume et ayant une même vitesse \vec{v}_i . Le flux de ces particules à travers $d\vec{S}$ est le nombre de particules qui traversent $d\vec{S}$ par unité de temps ; c'est le quotient par dt du nombre de particules présentes dans le cylindre de base $d\vec{S}$ et de génératrice $\vec{v}_i dt$, donc de volume $(\vec{v}_i dt) \cdot d\vec{S}$ (figure 34). Si g_i est une grandeur (masse, charge...) attachée aux particules,

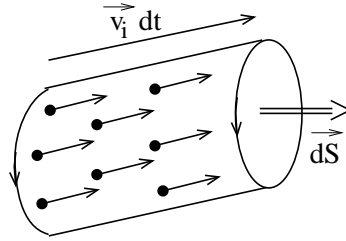


FIGURE 34

le flux de particules s'accompagne d'un flux de cette grandeur égal à $n_i g_i (\vec{v}_i \cdot d\vec{S})$. Pour un système macroscopique contenant plusieurs types de particules, ce flux s'obtient en sommant sur "i" et en introduisant des quantités macroscopiques moyennes.

EXEMPLE 1 : le **flux de masse** $\Sigma_i n_i m_i (\vec{v}_i \cdot d\vec{S})$ s'écrit

$$d\varphi_m = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j}_m \cdot d\vec{S},$$

où $\rho = \Sigma_i n_i m_i$ est la masse volumique, $\vec{v} = \frac{\Sigma n_i m_i \vec{v}_i}{\Sigma n_i m_i}$ est la vitesse du centre de masse (vitesse d'ensemble), et \vec{j}_m est la densité volumique de courant de masse.

EXEMPLE 2 : le **flux de charges électriques** $\Sigma_i n_i q (\vec{v}_i \cdot d\vec{S})$ (pour une seule espèce de porteurs : $q_i = q$) s'écrit $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ où $\rho = \Sigma_i n_i q$ est la densité volumique des porteurs et $\vec{v} = \frac{\Sigma n_i \vec{v}_i}{\Sigma n_i}$ leur vitesse moyenne. Pour plusieurs espèces α de porteurs allant à des vitesses moyennes différentes, il faut ajouter les contributions de chacune :

$$d\varphi_q = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot d\vec{S} = \vec{j}_q \cdot d\vec{S} \quad (\vec{j}_q \text{ densité volumique de courant électrique}).$$

EXEMPLE 3 : le **flux de quantité de mouvement** $\Sigma_i n_i (m_i \vec{v}_i) (\vec{v}_i \cdot d\vec{S})$ s'écrit

$$d\vec{\varphi}_p = \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) + P d\vec{S}$$

si la distribution des vitesses relatives $\vec{V}_i = \vec{v}_i - \vec{v}$ est isotrope (\vec{v} étant la vitesse d'ensemble). Ce flux apparaît comme la somme d'un flux macroscopique $\rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$ associé au mouvement d'ensemble des particules et d'un flux "microscopique"

$\sum_i n_i m_i \vec{V}_i (\vec{V}_i \cdot d\vec{S}) = P d\vec{S}$ associé à leur mouvement relatif. (Démonstration : on développe $\sum_i n_i m_i (\vec{v} + \vec{V}_i) ((\vec{v} + \vec{V}_i) \cdot d\vec{S})$ en utilisant les égalités $\sum_i n_i m_i \vec{V}_i = 0$, $\sum_i n_i m_i (V_{ix} V_{iy}$ ou $V_{ix} V_{iz}$ ou $V_{iy} V_{iz}) = 0$ et $\sum_i n_i m_i (V_{ix}^2$ ou V_{iy}^2 ou $V_{iz}^2) = \frac{1}{3} \sum_i n_i m_i \vec{V}_i^2$ conséquences de l'isotropie.) Pour des particules identiques on obtient l'expression bien connue $P = \frac{1}{3} nm < \vec{V}_i^2 >$ de la **pression cinétique** d'un gaz parfait. Dans le cas d'un gaz de photons isotrope, le flux s'écrit $\sum_i n_i \left(\frac{e_i}{c} \hat{u}_i \right) (c \hat{u}_i \cdot d\vec{S})$, d'où la relation $P = \frac{1}{3} u$ entre la **pression de radiation** et la densité volumique d'énergie $u = \sum_i n_i e_i$.

EXEMPLE 4 : flux d'énergie. Si $e_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + m_i g z_i + \epsilon_i$ est l'énergie totale d'une particule, un petit calcul montre que le flux d'énergie $\sum_i n_i e_i (\vec{v}_i \cdot d\vec{S})$ associé, dans le cas où la distribution des vitesses relatives $\vec{V}_i = \vec{v}_i - \vec{v}$ est isotrope, s'écrit

$$d\varphi_E = \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e + g z \right) \vec{v} \cdot d\vec{S} + \vec{v} \cdot P d\vec{S} ,$$

où $e = \rho^{-1} \sum_i n_i \left(\frac{1}{2} m_i V_i^2 + \epsilon_i \right)$ est l'énergie interne massique. Pour un écoulement stationnaire, le flux de masse $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ étant le même le long d'un tube de fluide, on obtient (si le fluide est isolé) le **théorème de Bernouilli** : la quantité $\frac{1}{2} v^2 + e + g z + \frac{P}{\rho}$ est constante le long d'une ligne de courant.

Remarque : dans les exemples 3 et 4 on n'a pas pris en compte les forces à distance entre particules situées de part et d'autre de $d\vec{S}$; elles ont pour effet d'ajouter à P une **pression moléculaire**.

▷ Flux d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{A}(\vec{r})$ la valeur d'un champ au point \vec{r} où se trouve l'élément de surface $d\vec{S}$. On appelle flux de \vec{A} à travers $d\vec{S}$ la quantité $\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$. On notera que les flux de masse, charge, énergie et quantité de mouvement (à condition de procéder composante par composante), se mettent bien sous cette forme. On peut aussi citer le flux thermique d'énergie $\vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ (cf. section 7.2.3) et le flux d'énergie électromagnétique $d\varphi_{em} = (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S}$ avec $\vec{E} \wedge \vec{H}$ vecteur de Poynting.

3.2.5 Sphère, angle solide et applications

▷ Coordonnées sphériques (figures 35 et 36)

Ce sont les coordonnées r , θ et φ définies par

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = r \cos \theta \quad .$$

$\theta \in [0, \pi]$ est la **colatitude** (la **latitude** est $\frac{\pi}{2} - \theta$) et $\varphi \in [0, 2\pi[$ la **longitude** (ou angle azimuthal). Pour la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, le point $\theta = 0$ est le **pôle nord**, $\theta = \pi$ le **pôle sud**, et $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'**équateur**. Quand r , θ et φ varient de façon infinitésimale, le point M se déplace respectivement de dr , $r d\theta$ et $r \sin \theta d\varphi$ dans les directions définies par les vecteurs unitaires \hat{r} ("verticale"), $\hat{\theta}$ ("sud") et $\hat{\varphi}$ ("est") formant un trièdre direct. On en déduit que des éléments de longueur dl , de surface dS sur la sphère, et de volume dV s'écrivent :

$$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)} \quad , \quad dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad , \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad .$$

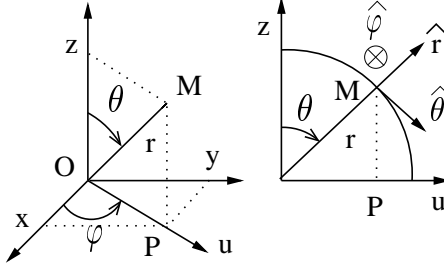


FIGURE 35

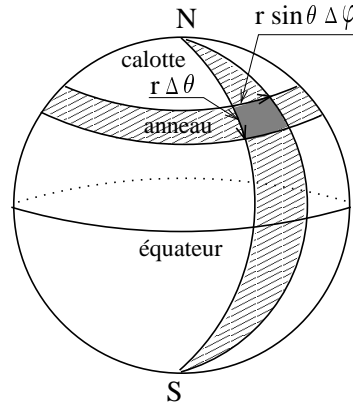


FIGURE 36

EXEMPLES DE LONGUEURS : $r \Delta \theta$ pour un arc de **méridien** (φ fixé) et $r \sin \theta \Delta \varphi$ pour un arc de **parallèle** (θ fixé). La forme quadratique $r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ est appelée **métrique** de la sphère de rayon r .

EXEMPLES DE SURFACES : $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ pour un **anneau** infinitésimal et donc $2\pi r^2 |\cos \theta_2 - \cos \theta_1|$ pour un anneau ($\theta \in [\theta_1, \theta_2]$) ; $2\pi r^2 (1 - \cos \theta_0)$ pour un **calotte** ($\theta \in [0, \theta_0]$, surface découpée sur la sphère par le cône d'angle au sommet θ_0) ; $2r^2 \Delta \varphi$ pour un **secteur** ("quartier d'orange" $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$) ; $2\pi r^2$ pour une demi sphère (secteur avec $\Delta \varphi = \pi$ ou calotte avec $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) et $4\pi r^2$ pour la sphère.

EXEMPLES DE VOLUMES : les volumes des cônes de sommet O et limités par une surface sphérique quelconque d'aire S s'obtiennent en remplaçant r^2 par $\frac{r^3}{3}$ dans S (intégration de $r^2 dr$) ; par exemple $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ pour la sphère.

▷ Angle solide

Toutes les surfaces précédentes divisées par r^2 définissent l'angle solide $\Omega = \frac{S}{r^2}$ du cône de sommet O qui "découpe" la surface S sur la sphère. Plus généralement, pour un cône s'appuyant sur une surface orientée \vec{dS} (figure 37), on définit un angle solide élémentaire algébrique :

$$d\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \hat{r}}{r^2} .$$

$|\vec{dS} \cdot \hat{r}|$ est la surface découpée sur la sphère de rayon r . Le volume de ce cône est $\frac{1}{3} r^3 d\Omega = \frac{1}{3} r dS \cos \alpha = \frac{1}{3} h dS$.

Applications. Le volume d'un cône quelconque de hauteur h et de base plane d'aire S vaut $\frac{1}{3} Sh$. Le flux à travers une surface \vec{dS} du champ électrique dû à une charge placée à l'origine est $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$. Donc pour une surface fermée orientée

vers l'extérieur et entourant une charge totale Q , le flux total vaut $\frac{Q}{\epsilon_0}$: **théorème de**

Gauss. Les charges extérieures ne contribuent pas car pour elles l'addition algébrique des angles solides donne zéro (figure 38).

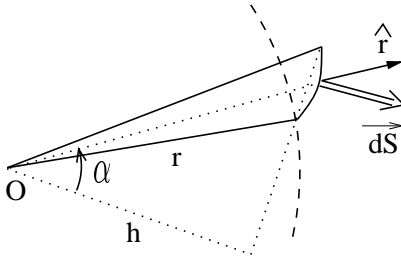


FIGURE 37

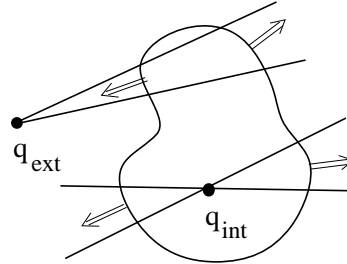


FIGURE 38

▷ **Etendue d'un pinceau lumineux** (figure 39)

Considérons un pinceau, ensemble de rayons rectilignes, traversant une surface \vec{dS} et présentant en tout point O de \vec{dS} une dispersion angulaire $d\Omega$ autour de la direction moyenne \hat{u} ; son étendue est :

$$de = (\vec{dS} \cdot \hat{u}) d\Omega .$$

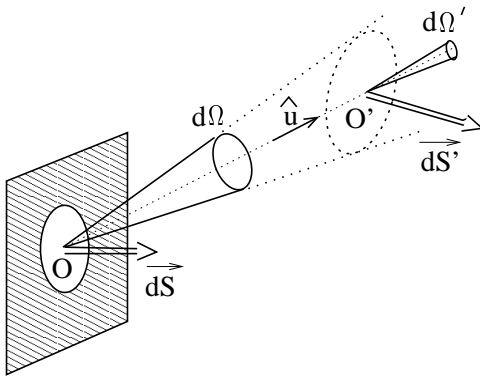


FIGURE 39

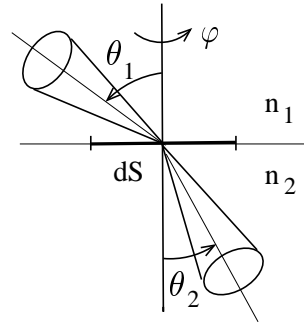


FIGURE 40

La propriété importante de l'étendue est d'être indépendante de la section considérée. En effet à la distance r de \vec{dS} la section apparente $\vec{dS'} \cdot \hat{u} = r^2 d\Omega$ est différente, mais cette différence est compensée par le fait que en tout point O' de $\vec{dS'}$ la dispersion des rayons issus de \vec{dS} est devenue $d\Omega' = \frac{\vec{dS} \cdot \hat{u}}{r^2}$. Quand un pinceau traverse un dioptré (figure 40), la quantité $n^2 (\sin \theta d\theta d\varphi) (dS \cos \theta)$ reste constante à cause des lois de Descartes ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ et $\varphi_1 = \varphi_2$) et de leurs différentielles ($n_1 \cos \theta_1 d\theta_1 = n_2 \cos \theta_2 d\theta_2$ et $d\varphi_1 = d\varphi_2$). Donc l'**étendue optique** $n^2 de$ du pinceau se conserve. Il en est de même de sa **luminance** définie par $L = \frac{dF}{n^2 de}$ où dF est le flux d'énergie, supposé constant en négligeant les pertes en cours de propagation. Une conséquence non triviale est que l'énergie et donc le **nombre de photons** par cellule élémentaire de l'espace de phase, émis par une source (thermique, laser, etc.), se conserve lui aussi dans la propagation : c'est une caractéristique de la source.

DÉMONSTRATION : considérons un pinceau quasi-monochromatique de luminance $dL = l(\omega) d\omega$ ($l(\omega)$ luminance spectrale) et de section droite $dx dy$ qui se propage dans le vide selon Oz ($\omega = ck_z$). Soient $d\omega = c dk_z$ et dk_x, dk_y, dk_z les dispersions en pulsation et vecteur d'onde des photons associés ; alors

$dF = l(\omega) d\omega dx dy d\Omega$ avec $d\Omega = \frac{dk_x dk_y}{k_z^2}$. Le nombre de photons contenus dans un volume $dx dy dz$ (avec $dz = c dt$) est : $dN = (\hbar\omega)^{-1} dF dt = \frac{c^2}{\hbar\omega^3} l(\omega) dk_x dk_y dk_z dx dy dz$. Comme une cellule correspond à $dk_x dk_y dk_z dx dy dz = (2\pi)^3$ (équivalent à $d^3r d^3p = h^3$), ce nombre par cellule est $(2\pi)^3 \frac{c^2}{\hbar\omega^3} l(\omega)$; il se conserve (comme ω et $l(\omega)$).

REMARQUE : pour une source thermique, ce nombre n'est autre que le facteur de Planck $(\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1)^{-1}$ multiplié par deux (pour tenir compte des deux états d'hélicité des photons ; cf. section 4.4.1).

3.2.6 Géométrie sphérique ; notion de transport parallèle

▷ Géodésiques

Sur la sphère les géodésiques (plus court chemin d'un point à un autre) sont les grands cercles intersections avec les plans passant par O , les méridiens par exemple mais pas les parallèles à l'exception de l'équateur. Les **triangles sphériques**, triangles dont les côtés (de longueurs a, b, c) sont des arcs de grands cercles, ont des propriétés trigonométriques qui ressemblent à celles des triangles plans (dont les côtés rectilignes sont des géodésiques du plan) ; par exemple :

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin(a/R)} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin(b/R)} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin(c/R)} \quad ; \quad \cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \hat{A}.$$

Pour $R \gg a, b, c$ ces formules donnent celles bien connues du plan $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{A}$. Une propriété facile à vérifier est que la somme des angles d'un triangle sphérique vaut :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \sigma = \pi + \frac{S}{R^2} \quad (S \text{ aire du triangle } ABC).$$

On remarque en effet en coupant un triangle en deux que $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - \pi$ (figure 41a) ce qui suggère, puisque $\sigma - \pi = (\sigma_1 - \pi) + (\sigma_2 - \pi)$, que $\sigma - \pi$ est proportionnel à l'aire du triangle et même plus précisément à $\frac{S}{R^2}$ puisque σ est sans dimension ; reste à vérifier que le coefficient de proportionnalité vaut 1 ce qui est évident pour un triangle trirectangle : sa surface vaut le huitième de celle de la sphère (figure 41b) et on a bien $\sigma = 3 \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{1}{R^2} \frac{\pi R^2}{2}$.

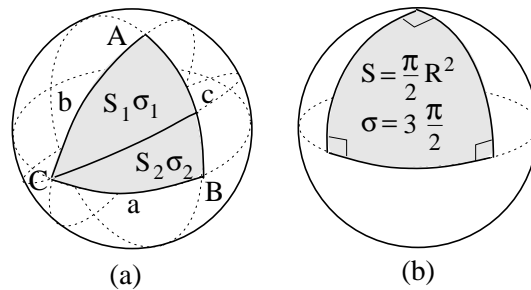


FIGURE 41

▷ Courbure et transport parallèle

De façon générale on définit la **courbure de Gauss** (ou intrinsèque) d'une surface en un point M de la manière suivante. On considère un circuit élémentaire fermé entourant M dont les côtés sont des géodésiques et on transporte le long de ce circuit un vecteur tangent à la surface en maintenant constant la longueur du vecteur et l'angle qu'il fait avec les géodésiques ; on dit alors que le vecteur subit un **transport parallèle** (généralisation naturelle, au cas d'une surface quelconque, du transport d'un vecteur dans le plan euclidien, parallèlement à lui-même). Soient dS la surface délimitée par le circuit et $d\alpha$ l'angle dont a tourné le vecteur après un tour ; la courbure de Gauss est le rapport $\frac{d\alpha}{dS}$ ($d\alpha$ et dS sont algébriques). Pour un triangle sphérique $\alpha = \sigma - \pi = \frac{S}{R^2}$ (cf. exemple figure 42a) ;

la courbure de la sphère est donc la même en tout point, positive et égale à $\frac{1}{R^2}$. Pour un triangle plan $\alpha = 0$ et la courbure du plan euclidien est évidemment nulle, comme celle du cylindre, ce qui est moins intuitif (figure 42b). La figure 42c montre un exemple de surface à courbure négative.

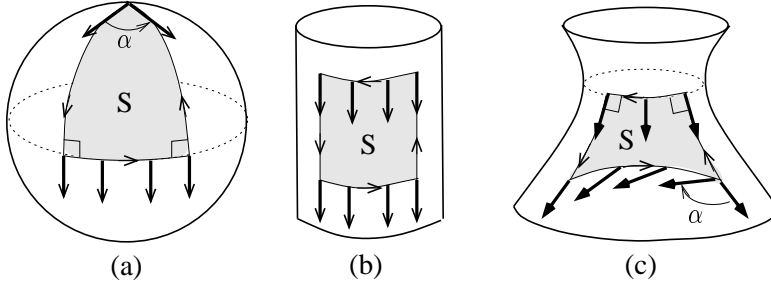


FIGURE 42

REMARQUE. Transport parallèle et pendule de Foucault. Le transport parallèle d'un vecteur tangent d'un point $A (\theta, \varphi)$ à un point B voisin $(\theta, \varphi + d\varphi)$ sur le même parallèle ne conserve pas l'angle qu'il fait avec le parallèle car ce dernier n'est pas une géodésique. La variation de cet angle est $-\cos \theta d\varphi$. On obtient ce résultat en considérant le transport le long du chemin géodésique fermé $ACDBA$ qui correspond à une rotation $\delta\alpha = \frac{\text{aire}(ACDBA)}{R^2} = \cos \theta d\varphi$ et en remarquant que le transport de A à B le long de $ACDB$ ne modifie pas l'angle du vecteur avec le parallèle (figure 43a) ; $-\cos \theta d\varphi$ correspond donc bien au seul transport de A à B . Plus intuitivement, en remarquant que l'arc "infinitésimal" de grand cercle de A à B (géodésique) est assimilable au segment AB et en maintenant l'angle du vecteur avec ce segment constant lors de son transport de A à B , on voit que la variation d'angle avec le parallèle (comme avec le méridien) est (figure 43b) : $-\widehat{APB} = -\frac{AB}{PA} = -\frac{R \sin \theta d\varphi}{R \tan \theta} = -\cos \theta d\varphi$. Pour un transport fini le long du parallèle, cette variation vaut $-\cos \theta \Delta\varphi$.

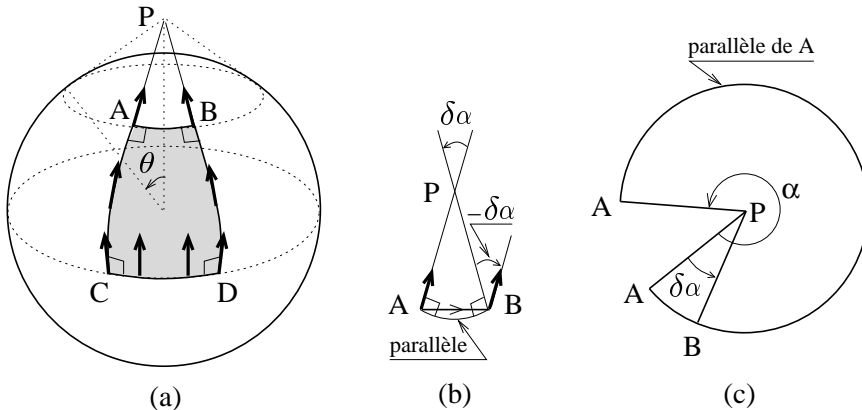


FIGURE 43

Si on admet que la direction d'oscillation d'un pendule de Foucault (tangente au globe terrestre) est transportée parallèlement à elle-même lors de la rotation de la terre, $-\cos \theta d\varphi$ est aussi l'angle de rotation du plan d'oscillation du pendule par rapport à la direction nord locale. En une journée, cet angle est $-\alpha = -2\pi \cos \theta$ (α angle du cône de sommet P "déployé" ; figure 43c).

3.3 VECTEURS TOURNANTS; MÉCANIQUE DU SOLIDE

Les rotations et mouvements de rotation jouent un rôle très important en physique (cf. aussi section 6.3).

3.3.1 Vecteurs tournants; changements de référentiels

▷ Représentation vectorielle des rotations

Soit \hat{n} le vecteur unitaire de l'axe de rotation, et soit

$$\vec{V} = (\vec{V} \cdot \hat{n}) \hat{n} + \vec{V} - (\vec{V} \cdot \hat{n}) \hat{n} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp}$$

la décomposition d'un vecteur \vec{V} en vecteurs parallèle et orthogonal à \hat{n} ($\vec{V}_{\parallel} \wedge \hat{n} = 0$; $\vec{V}_{\perp} \cdot \hat{n} = 0$) (figure 44). La rotation laisse $\vec{V}_{\parallel} = \overrightarrow{OH}$ inchangé et tourne $\vec{V}_{\perp} = \overrightarrow{HM}$ d'un angle θ dans un plan orthogonal à \hat{n} , donc :

$$\vec{V}' = R_O(\hat{n}, \theta) \vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \cos \theta \vec{V}_{\perp} + \sin \theta \hat{n} \wedge \vec{V}.$$

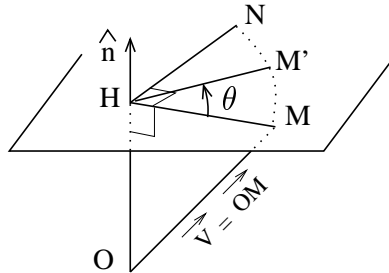


FIGURE 44

($\hat{n} \wedge \vec{V} = \hat{n} \wedge \vec{V}_{\perp} = \overrightarrow{HN}$ se déduit de \vec{V}_{\perp} par une rotation de $\pi/2$). Pour les composantes de \vec{V} , cette égalité correspond à $Z' = Z$, $X' = X \cos \theta - Y \sin \theta$ et $Y' = X \sin \theta + Y \cos \theta$, l'axe Z étant choisi selon \hat{n} . Pour une **rotation infinitésimale** on a :

$$d\vec{V} = \vec{V}' - \vec{V} = d\theta \hat{n} \wedge \vec{V}.$$

On en déduit que l'équation caractéristique d'un vecteur tournant $\vec{V}(t)$ est

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{V},$$

où $\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta}{dt} \hat{n}(t)$ est la vitesse angulaire, et que :

$$\frac{d^2\vec{V}}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{V} - \omega^2 \vec{V}_{\perp}.$$

Cas particulier : si $\vec{\omega}$ est constant ($\theta = \omega t$), l'expression de $\vec{V}(t)$ en fonction de $\vec{V}_0 = \vec{V}(t=0)$ est

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_{0\parallel} + \vec{V}_{0\perp} \cos \omega t + \hat{n} \wedge \vec{V}_{0\perp} \sin \omega t ,$$

et $\frac{d^2 \vec{V}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{V}_{\perp}(t)$ correspond à une **accélération centripète**.

▷ **Formules générales des changements de référentiels** (figure 45)

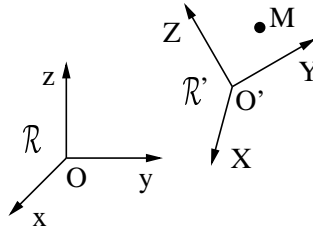


FIGURE 45

Soit $O'XYZ$ un référentiel \mathcal{R}' mobile par rapport au référentiel $\mathcal{R} \equiv Oxyz$, et soit un point M mobile repéré par ses coordonnées $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ dans \mathcal{R}' :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + X\hat{X} + Y\hat{Y} + Z\hat{Z} .$$

A l'aide des relations $\frac{d}{dt}X\hat{X} = X\frac{d\hat{X}}{dt} + \dot{X}\hat{X}$, $\frac{d^2}{dt^2}X\hat{X} = X\frac{d^2\hat{X}}{dt^2} + 2\dot{X}\frac{d\hat{X}}{dt} + \ddot{X}\hat{X}$ et des relations $\frac{d\hat{X}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{X}$ et $\frac{d^2\hat{X}}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \hat{X} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{X})$ faisant intervenir le vecteur unitaire tournant \hat{X} (et leurs analogues pour Y et Z), on obtient immédiatement :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right] + [\dot{X}\hat{X} + \dot{Y}\hat{Y} + \dot{Z}\hat{Z}] = \vec{v}_e + \vec{v}_r ,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= \left[\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OO'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \right] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \\ &\quad + [\ddot{X}\hat{X} + \ddot{Y}\hat{Y} + \ddot{Z}\hat{Z}] = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r . \end{aligned}$$

\vec{v}_e et \vec{a}_e sont les **vitesse et accélération d'entraînement**, vitesse et accélération du point M' fixe dans \mathcal{R}' avec lequel M coïncide à l'instant t ; \vec{v}_r et \vec{a}_r sont les **vitesse et accélération relatives** ("mesurées" dans \mathcal{R}'); $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ est l'**accélération de Coriolis**.

▷ **Référentiel local** (figure 46)

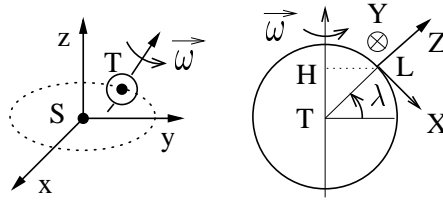


FIGURE 46

Soit \mathcal{R} le référentiel de Copernic (inertiel) centré au centre de masse (c.d.m.) S du système solaire, et \mathcal{R}' le référentiel $LXYZ$ centré en un lieu L de latitude λ à la surface de la Terre et dont les axes sont dirigés vers le sud, l'est et le zénith. \mathcal{R}' tourne à la vitesse $\vec{\omega}$ constante par rapport à \mathcal{R} . L'équation du mouvement d'un point matériel M de masse m dans \mathcal{R} s'écrit

$$m(\vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r) = m(\vec{g}_A(M) + \vec{g}_T(M)) + (\text{autres forces}) ,$$

où \vec{g}_A est le champ de gravité dû aux astres du système solaire (Soleil, Lune *etc.*) et \vec{g}_T celui dû à la Terre. Comme le c.d.m. T de la Terre est “en chute libre” autour de S avec l'accélération $\vec{g}_A(T)$ et que $\overrightarrow{TM'}$, fixe dans \mathcal{R}' , est un vecteur tournant à la vitesse $\vec{\omega}$ dans \mathcal{R} , on a

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{SM'}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{ST}}{dt^2} + \frac{d^2 \overrightarrow{TM'}}{dt^2} = \vec{g}_A(T) - \omega^2 \overrightarrow{HM'} ,$$

où H est la projection de M' (ou L) sur l'axe de rotation. Le mouvement de M dans \mathcal{R}' (mouvement relatif) est alors régi par l'équation :

$$\vec{a}_r = (\vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(T)) + (\vec{g}_T(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM}) - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \frac{1}{m} (\text{autres forces}) .$$

Dans le second membre le premier terme est en général négligeable (sauf pour décrire le phénomène de marée), et le second est le **champ de pesanteur** \vec{g} (local). Les effets du terme de Coriolis (**déviations vers l'est et pendule de Foucault**) sont étudiés à la section 6.3.

3.3.2 Référentiel du centre de masse

Les formules cinématiques de changements de référentiels se simplifient grandement lorsque \mathcal{R}' effectue un mouvement de translation ($\vec{\omega} = 0$) par rapport au référentiel \mathcal{R} , car alors $\vec{a}_c = 0$, $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'}$ et $\vec{a}_e = \vec{a}_{O'}$ ne dépendent pas du point considéré.

▷ **Théorèmes de Koenig**

En mécanique, pour décrire la dynamique globale d'un système de points matériels M_i de masses m_i , on utilise le référentiel \mathcal{R}^{cm} d'axes parallèles à ceux de \mathcal{R} et d'origine G (c.d.m.) défini par :

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (m = \sum_i m_i \text{ masse totale}) \quad \text{ou} \quad \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = 0 .$$

\mathcal{R}^{cm} se translate par rapport à \mathcal{R} à la vitesse \vec{v}_G donnée par $m\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$ (quantité de mouvement totale dans \mathcal{R}) ; l'accélération \vec{a}_G est telle que $m\vec{a}_G = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{f}_i = \vec{F}$ (force totale dans \mathcal{R}). On notera que la quantité de mouvement totale dans \mathcal{R}^{cm} est nulle : $\vec{P}^{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i^{cm} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = 0$.

Un calcul élémentaire utilisant $\vec{v}_i^{cm} = \vec{v}_i - \vec{v}_G$ montre que le choix de \mathcal{R}^{cm} permet de relier simplement les **énergies cinétiques** $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$ et $E_c^{cm} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{cm2}$, ainsi que les **moments cinétiques** $\vec{J}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}_i$ et $\vec{J}_G^{cm} = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i^{cm}$ (aussi égal à $\sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i$) dans \mathcal{R} et \mathcal{R}^{cm} :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^2 + E_c^{cm} \quad ; \quad \vec{J}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}_G + \vec{J}_G^{cm} .$$

On obtient de même des expressions simples dans \mathcal{R}^{cm} pour les **théorèmes de l'énergie cinétique et du moment cinétique** :

$$\frac{dE_c^{cm}}{dt} = \sum_i \vec{v}_i^{cm} \cdot \vec{f}_i \quad ; \quad \frac{d\vec{J}_G^{cm}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{f}_i .$$

Elles ne font intervenir que les forces \vec{f}_i dans \mathcal{R} , et pas l'accélération d'entraînement, alors que pour chaque masse m_i $\vec{a}_i^{cm} = \vec{f}_i - m_i \vec{a}_G$.

▷ Réduction du problème à deux corps

(système isolé de deux points matériels (M_1, m_1) et (M_2, m_2))

Comme la force totale $\vec{F} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} + \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ est nulle, \mathcal{R}^{cm} se déplace à vitesse uniforme. Pour décrire le mouvement dans \mathcal{R}^{cm} on introduit les quantités $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (**masse réduite**) et $\vec{f} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$. Alors à l'aide des relations $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m} \vec{r}$, $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m} \vec{r}$, et de leurs dérivées $\vec{v}_2^{cm} = \frac{m_1}{m} \dot{\vec{r}}$ et $\vec{v}_1^{cm} = -\frac{m_2}{m} \dot{\vec{r}}$, on obtient facilement :

$$E_c^{cm} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \quad ; \quad \vec{J}_G^{cm} = \vec{r} \wedge \mu \dot{\vec{r}} \quad ; \quad \frac{dE_c^{cm}}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} \quad ; \quad \frac{d\vec{J}_G^{cm}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{f} .$$

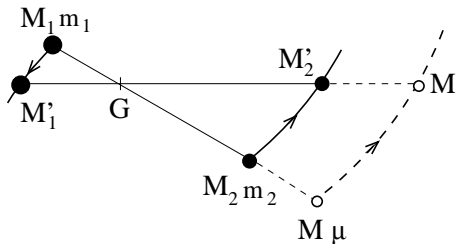


FIGURE 47

La dynamique du vecteur \vec{r} est donc celle d'un point matériel fictif M , tel que $\vec{r} = \overrightarrow{GM}$, de masse μ et soumis à la force \vec{f} . On peut aussi obtenir ce résultat en remarquant que

$m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ et $m_2 \vec{a}_2 = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ entraînent $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f}$ (par exemple $\ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^2}$ dans le cas du problème de Kepler ; cf. section 2.3.3). Une fois la trajectoire de M connue, celles de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}^{cm} s'en déduisent par homothétie (figure 47). En particulier si \vec{f} est parallèle à \vec{r} , \vec{J}_G^{cm} est constant (L.C. du moment cinétique). Donc, \vec{GM}_1 et \vec{GM}_2 colinéaires à \vec{r} étant orthogonaux à \vec{J}_G^{cm} , les trajectoires de M_1 et M_2 sont, dans le cas d'une **force centrale**, situées dans le plan passant par G et perpendiculaire à \vec{J}_G^{cm} .

3.3.3 Cinématique et dynamique d'un corps solide

On se limite à l'introduction des principaux outils nécessaires à la description de la dynamique des solides et à la présentation de deux exemples.

▷ Champ des vitesses d'un solide

Comme les distances entre points d'un corps solide sont par définition invariantes, un vecteur \vec{AB} joignant deux points du solide ne peut que tourner :

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}.$$

Comme $\vec{\omega} \wedge \vec{AB}$ est orthogonal à $\vec{\omega}$ il en résulte que, à un instant donné, tous les points du solide ont même composante de vitesse \vec{v}_{\parallel} parallèle à $\vec{\omega}$ et que sur un axe parallèle à $\vec{\omega}$ tous les points ont de plus même composante \vec{v}_{\perp} orthogonale à $\vec{\omega}$. En faisant varier B dans la relation $\vec{v}_{B\perp} = \vec{v}_{A\perp} + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$, on vérifie qu'il existe un point $B \equiv I$ tel que $\vec{v}_{I\perp} = 0$ (figure 48) ; il y a donc un axe parallèle à $\vec{\omega}$ et passant par I tel que $\vec{v}_{\perp} = 0$ pour tous ses points. La relation

$$\vec{v}_A = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IA}$$

montre, comme déjà établi à la section 3.1.3, que le mouvement d'un solide est une suite de vissages élémentaires.

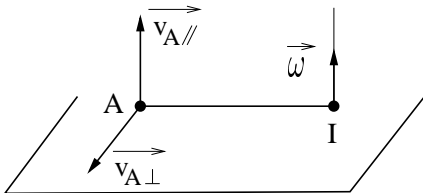


FIGURE 48

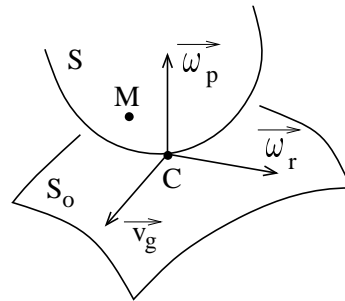


FIGURE 49

REMARQUE. Pour un solide mobile S en contact ponctuel avec un solide fixe S_0 , la vitesse du point de contact C (appartenant à S) s'appelle **vitesse de glissement** \vec{v}_g , et les composantes $\vec{\omega}_r$ et $\vec{\omega}_p$ de $\vec{\omega}$ respectivement parallèle et orthogonale au plan de contact sont les **vitesse angulaire de roulement et de pivotement** (figure 49). Pour tout point M de S : $\vec{v}_M = \vec{v}_g + \vec{\omega} \wedge \vec{CM}$.

▷ Grandeurs mécaniques relatives à un solide

On a vu que, pour un système quelconque, la quantité de mouvement totale est reliée de façon simple à la vitesse du centre de masse : $\vec{P} = m \vec{v}_G$. De même pour un solide il est possible d'exprimer le moment cinétique et l'énergie cinétique en fonction de \vec{v}_G et de $\vec{\omega}$. Les différentes formules s'obtiennent en particulierisant un point A du solide et en écrivant pour tous les autres points M_i : $\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}$. En général on choisit pour A , soit un point fixe ($\vec{v}_A = 0$) lorsque le solide est attaché par ce point, soit le c.d.m. $G \equiv A$ (alors $\sum_i m_i \overrightarrow{AM_i} = 0$).

Dans ces deux cas le **moment cinétique** $\vec{J}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})$ dépend linéairement de $\vec{\omega}$ (utilisation du double produit vectoriel) :

$$\vec{J}_A = \sum_i m_i \overrightarrow{AM_i}^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AM_i}.$$

Il est naturel de l'écrire dans un référentiel (XYZ) lié au solide car alors les composantes X_i , Y_i et Z_i de $\overrightarrow{AM_i}$ sont indépendantes du temps. On a par exemple $J_{A,X} = \sum_i m_i ((X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) \omega_X - X_i (X_i \omega_X + Y_i \omega_Y + Z_i \omega_Z))$ et plus généralement $\vec{J}_A = \mathbf{I}_A \vec{\omega}$ ou :

$$\begin{pmatrix} J_{A,X} \\ J_{A,Y} \\ J_{A,Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (Y_i^2 + Z_i^2) & -\sum_i m_i X_i Y_i & -\sum_i m_i X_i Z_i \\ -\sum_i m_i X_i Y_i & \sum_i m_i (X_i^2 + Z_i^2) & -\sum_i m_i Y_i Z_i \\ -\sum_i m_i X_i Z_i & -\sum_i m_i Y_i Z_i & \sum_i m_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix}.$$

La matrice d'inertie \mathbf{I}_A étant symétrique, il existe des axes orthogonaux dits **axes principaux d'inertie** en A , tels qu'elle soit diagonale (cf. section 4.2.3).

L'**énergie cinétique** $E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2$ prend elle aussi une forme simple dans ces deux cas à cause de la disparition des termes linéaires en $\vec{\omega}$. Comme $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i})^2 = \omega^2 \overrightarrow{AM_i}^2 - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AM_i})^2$ on vérifie que :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{J}_A \cdot \vec{\omega} \quad (\text{pour } A \text{ fixe}) \quad \text{ou} \quad E_C = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{J}_G \cdot \vec{\omega} \quad (\text{pour } A \equiv G).$$

Une autre grandeur utile est la **puissance des forces** appliquées $\sum_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}) \cdot \vec{f}_i$ qui, quel que soit le point A du solide, s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{v}_A \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Gamma}_A \quad (\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i ; \quad \vec{\Gamma}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_i).$$

Dans \mathcal{P} seules les forces extérieures appliquées sont à considérer, car les forces intérieures $\vec{f}_{i \rightarrow j} = -\vec{f}_{j \rightarrow i}$, supposées parallèles à $\overrightarrow{M_i M_j}$, ne contribuent, ni à la force résultante \vec{F} , ni au moment résultant des forces $\vec{\Gamma}_A$ ($\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i} + \overrightarrow{AM_j} \wedge \vec{f}_{i \rightarrow j} = \overrightarrow{M_i M_j} \wedge \vec{f}_{i \rightarrow j} = 0$).

EXEMPLE 1 : équations d'Euler. Le mouvement libre d'un solide dans \mathcal{R}^{cm} obéit à l'équation $\frac{d}{dt}(\vec{J}_G^{cm} = I_x \omega_x \hat{X} + I_y \omega_y \hat{Y} + I_z \omega_z \hat{Z}) = 0$, où GX , GY et GZ sont les axes principaux d'inertie en G . En écrivant $\frac{d\hat{X}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{X}$, etc. avec $\vec{\omega} = \omega_x \hat{X} + \omega_y \hat{Y} + \omega_z \hat{Z}$, on obtient les E.D. d'Euler :

$$I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \quad , \quad I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \quad , \quad I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y .$$

Les rotations à vitesse angulaire constante autour des axes GX , GY et GZ sont des solutions particulières. Si on perturbe une telle solution, par exemple $\omega_x = \omega$, $\omega_y = \omega_z = 0$, on obtient facilement $\ddot{\omega}_{y,z} = \frac{(I_z - I_x)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \omega^2 \omega_{y,z}$, en se limitant à l'ordre le plus bas dans les perturbations ω_y et ω_z . Il y a instabilité de la rotation autour de l'axe GX si $I_y < I_x < I_z$ (les rotations autour de GY et GZ étant alors stables).

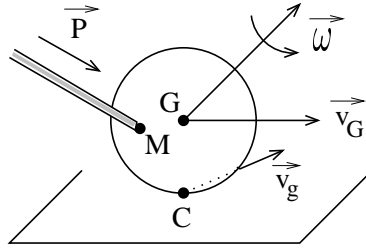


FIGURE 50

EXEMPLE 2 : mouvement d'une boule de billard (figure 50). Le but est d'expliquer la trajectoire, en général parabolique, du c.d.m. de la boule et le rôle des conditions initiales (façon dont la boule est frappée avec la queue). Rappelons que pour une boule de rayon r on a $\vec{J}_G = I \vec{\omega}$, avec $I = \frac{2}{5} m r^2$. La cinématique de ce problème se résume à la relation

$$\vec{v}_G = \vec{v}_g + \vec{\omega} \wedge \vec{CG} \quad (\vec{v}_g \text{ vitesse de glissement}) ,$$

et la dynamique aux équations

$$m \vec{a}_G = m \left(\frac{d\vec{v}_g}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{CG} \right) = \vec{F} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{J}_G}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{GC} \wedge \vec{F} ,$$

qui conduisent à : $m \frac{d\vec{v}_g}{dt} = \vec{F} \left(1 + \frac{m r^2}{I} \right)$; la force totale \vec{F} colinéaire à \vec{a}_G est parallèle à la table et donc orthogonale à \vec{CG} .

Au cours du mouvement et tant que la boule glisse \vec{F} se réduit à une force de frottement et $\frac{d\vec{v}_g}{dt}$ parallèle à \vec{F} l'est donc aussi à \vec{v}_g ; \vec{v}_g et \vec{F} gardent donc une direction commune fixe. De plus comme pour un frottement solide $|\vec{F}|$ est constant, le vecteur \vec{F} lui-même est constant : le mouvement de G est alors uniformément accéléré et sa trajectoire parabolique. Bien sûr au bout d'un certain temps, \vec{v}_g finit par s'annuler et la boule roule alors sans glissement tout en continuant à pivoter.

À l'origine du mouvement il faut une percussion \vec{P} : force \vec{f} très grande et très brève (telle que $\int \vec{f} dt = \vec{P}$) exercée en un point M à la hauteur h . Des équations $m \vec{a}_G = \vec{f} + \vec{N}$ et $I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{GM} \wedge \vec{f}$ (la réaction normale \vec{N} du billard assurant que $\vec{f} + \vec{N}$ est parallèle à la table), on déduit les conditions initiales $m \vec{v}_G = \vec{P}_{\parallel}$, $I \vec{\omega} = \vec{GM} \wedge \vec{P}$ et $\vec{v}_g = \vec{v}_G - \vec{\omega} \wedge \vec{CG}$ (la boule étant au repos avant la percussion). Si \vec{P} n'est pas parallèle à la table ($\vec{P} \neq \vec{P}_{\parallel}$), on vérifie que \vec{v}_g et \vec{v}_G diffèrent en direction. Si \vec{P} est parallèle à la table, $\vec{v}_g = \frac{\vec{P}}{m} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{r(h-r)}{r^2} \right)$ est du sens de \vec{v}_G si $h < \frac{7}{5} r$ ("rétro") et de sens contraire si $h > \frac{7}{5} r$ ("coulé").

3.4 SYSTÈMES PHYSIQUES POSSÉDANT DES SYMÉTRIES

L'“argument de symétrie”, analogue à l'“argument dimensionnel” discuté en 1.3.2, est très utilisé en physique pour simplifier la description mathématique d'un système présentant des symétries ; mais il est souvent mal justifié à cause de la confusion fréquente entre symétrie du système et symétrie (invariance) des lois le régissant (*cf.* section 3.1.1).

3.4.1 Schéma général ; principe de Curie

▷ Principe de Curie

Soient \underline{x} les paramètres caractérisant un système ; par exemple pour une distribution de charges, il s'agit des positions \vec{r}_i et des valeurs q_i des charges (ou de la fonction densité $\rho(\vec{r})$). Soit \underline{y} une grandeur relative à ce système, par exemple le moment dipolaire $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$, le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ créé au point \vec{r} , *etc.* On a vu que l'invariance des lois par rapport à une symétrie g signifie que, au système transformé dont les paramètres s'écrivent symboliquement $\underline{x}' = g\underline{x}$, est associée la grandeur $\underline{y}' = g\underline{y}$. Pour la distribution de charges et une rotation R , on a : $\vec{r}'_i = R\vec{r}_i$, $q'_i = q_i$ et $\vec{p}' = R\vec{p}$, $\vec{E}'(R\vec{r}) = R\vec{E}(\vec{r})$, *etc.* Si g est de plus une symétrie du système, alors par définition $\underline{x}' = g\underline{x} = \underline{x}$ et donc $\underline{y}' = g\underline{y} = \underline{y}$. On en déduit que les grandeurs relatives à un système ou créées (“causées”) par lui possèdent au moins les symétries du système (Principe de Curie).

EXEMPLES. Si une distribution de charges ou de courants admet une symétrie de révolution d'axe Oz , son moment dipolaire électrique \vec{p} ou magnétique $\vec{\mu}$ est porté par Oz ; si elle admet un plan P de symétrie, \vec{p} doit être contenu dans P , tandis que $\vec{\mu}$ (pseudovecteur) doit être perpendiculaire à P , seule possibilité pour qu'ils soient inchangés par l'opération S_P (figure 51).

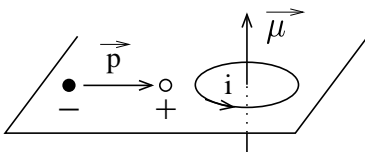


FIGURE 51

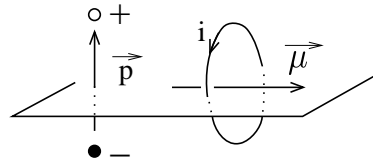


FIGURE 52

▷ Généralisation

Si la grandeur \underline{y} dépend linéairement des paramètres \underline{x} du système, et si l'opération g a pour effet de multiplier \underline{x} par un facteur constant C (par exemple -1 pour une **antisymétrie**), alors la grandeur \underline{y} est elle aussi multipliée par C par l'opération g :

$$\underline{x}' = g\underline{x} = C\underline{x} \implies \underline{y}' = g\underline{y} = C\underline{y}.$$

EXEMPLES (figure 52). Si une distribution de charges ou de courants admet un plan P d'antisymétrie, \vec{p} doit être perpendiculaire à P , tandis que $\vec{\mu}$ doit être contenu dans P , seule possibilité pour qu'ils soient multipliés par $C = -1$ dans l'opération S_P .

REMARQUE. Le groupe de symétrie de \underline{y} peut être plus grand que celui de \underline{x} . Ainsi de nombreuses propriétés macroscopiques d'un cristal à symétrie cubique (axes x, y, z) sont celles d'un milieu isotrope. De même les moments d'inertie d'un cube homogène par rapport à des axes passant par son centre sont tous égaux comme pour une sphère. En effet considérons par exemple les quantités $I_x = \Sigma m_i (y_i^2 + z_i^2)$, $I_y = \Sigma m_i (x_i^2 + z_i^2)$ et $I_{xy} = \Sigma m_i x_i y_i$. Pour le cube tourné de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz , on a $x'_i = -y_i$ et $y'_i = x_i$, et donc $I'_x = I_y$, $I'_y = I_x$ et $I'_{xy} = -I_{xy}$. Comme cette rotation est une symétrie, on en déduit $I_x = I_y$ et $I_{xy} = 0$ et donc, pour tout vecteur unitaire \hat{n} du plan xOy , $I_{\hat{n}} = \Sigma m_i ((x_i \cos \theta + y_i \sin \theta)^2 + z_i^2) = I_x$.

3.4.2 Symétries de translation ; lois de Descartes et généralisations

L'obtention de ces lois donne un exemple non trivial d'application de l'invariance par des translations d'espace et de temps. Considérons **deux milieux linéaires, homogènes et stationnaires séparés par un plan infini** $P(xOy)$, et une source qui émet une onde plane incidente $e^{-i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$. Soit $A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i\varphi}$ une onde plane réfléchie ou transmise, issue de l'onde incidente. Si l'onde incidente est retardée de τ et translatée de \vec{a} parallèlement au plan P (pour laisser P inchangé), elle devient $e^{-i(\omega_0(t-\tau) - \vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{a}))}$ et est donc multipliée par $C = e^{i(\omega_0 \tau - \vec{k}_0 \cdot \vec{a})}$. La même opération effectuée sur l'onde réfléchie ou transmise la multiplie par le facteur $e^{i(\omega \tau - \vec{k} \cdot \vec{a})}$, qui doit être aussi égal à C quels que soient τ et \vec{a} . On en déduit les relations de continuité :

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \vec{k}_{\parallel} = \vec{k}_{0\parallel} \quad (\text{loi de Descartes pour les ondes}) .$$

Donc les plans d'incidence, de réfraction et de réflexion, définis par $\vec{k}_{0\parallel}$ et la normale \hat{n} au plan P , sont confondus. Les ondes ont mêmes périodicités temporelle $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega}$ et spatiale $\frac{2\pi}{k_{0x}} = \frac{2\pi}{k_x}$ en x (ou en y), et “balayent” l'axe des x à une même vitesse $\frac{\omega}{k_{0x}} = \frac{\omega}{k_x}$ (idem pour l'axe des y). Ces résultats restent valables si il y a plusieurs ondes réfléchies ou transmises, si les milieux sont anisotropes, si l'onde transmise est évanescence (k_z imaginaire pur).

Pour un **réseau plan infini à une dimension**, par exemple des traits parallèles à Oy distants de a , le plan n'est invariant que par les translations de vecteur $\vec{a} = a_y \hat{y} + na \hat{x}$ (a_y quelconque, $n \in \mathbb{Z}$). La condition précédente sur les vecteurs d'onde devient $(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot (a_y \hat{y} + na \hat{x}) = 0$ modulo 2π . On en déduit la formule des réseaux valable aussi bien en transmission (figure 53) qu'en réflexion :

$$\vec{k}_{\parallel} = \vec{k}_{0\parallel} + p \frac{2\pi}{a} \hat{x} \quad (p \in \mathbb{Z}) .$$

Pour un **cristal** (à l'échelle de l'Angström tout cristal macroscopique est quasi infini), l'invariance n'a lieu que pour les translations $\vec{t}_{(m,n,p)} = m \vec{a} + n \vec{b} + p \vec{c}$. Il faut donc $(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{a} = (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{b} = (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{c} = 0$ modulo 2π soit (cf. section 3.2.2) :

$$\begin{aligned} \vec{k} - \vec{k}_0 &= 2\pi \vec{\sigma}_{(h,k,l)} \quad (h, k, l \text{ quelconques}) \\ &= 2\pi \eta \vec{\sigma}_{(h,k,l)} \quad (h, k, l \text{ premiers entre eux, } \eta \in \mathbb{Z}) . \end{aligned}$$

Les ondes incidente et diffractée (en dehors du cristal) ayant même longueur d'onde, on a la condition supplémentaire $|\vec{k}| = |\vec{k}_0|$ (une contrainte qui n'apparaissait pas dans les exemples précédents, k_z n'étant pas fixé). La figure 54 montre que \vec{k} et \vec{k}_0 doivent être symétriques par rapport aux plans réticulaires, comme si il y avait réflexion sur ces plans avec un angle d'incidence θ tel que :

$$\sin \theta = \frac{2\pi\eta|\vec{\sigma}_{(h,k,l)}|}{2|\vec{k}|} = \eta \frac{\lambda}{2d_{(h,k,l)}} \quad (\text{condition de Bragg}) .$$

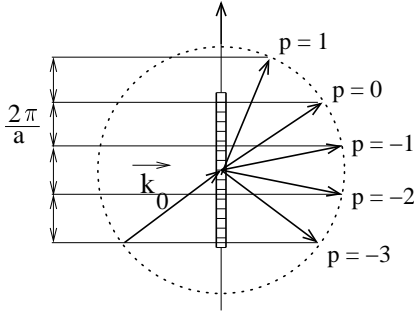


FIGURE 53

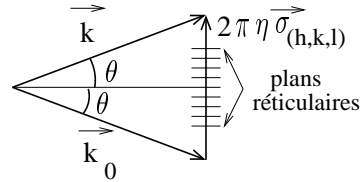


FIGURE 54

REMARQUE. Les lois de conservation en physique quantique de la quantité de mouvement, de l'énergie, et du moment cinétique (pour un système isolé), ont une origine semblable. En effet, d'une part la correspondance entre états quantiques à des instants différents est linéaire, et d'autre part un état ayant une valeur bien définie de $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, ou $E = \hbar\omega$, ou $J_z = m\hbar$, est par définition multiplié respectivement par

$$C = \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{a}) \quad \text{ou} \quad C = \exp(i\omega\tau) \quad \text{ou} \quad C = \exp(-im\varphi) ,$$

dans une translation \vec{a} , ou un retard τ , ou une rotation d'axe z et d'angle φ (cf. sections 4.4).

3.4.3 Symétries de rotation et symétries discrètes ; applications en électromagnétisme et en acoustique

Les formules reliant les symétries de la source à celles de ses effets sont applicables aux champs en tenant compte de la loi de transformation de ces derniers : $f'(g\vec{r}) = gf(\vec{r})$. Si l'opération g multiplie par C les paramètres de la source dont dépend le champ, on a $f' = Cf$ et donc :

$$Cf(g\vec{r}) = gf(\vec{r}) \quad (C = 1 \text{ pour une symétrie et } C = -1 \text{ pour une antisymétrie}) .$$

EXEMPLE 1. La figure 55 montre, dans les cas où g est une symétrie de rotation d'axe Oz , comment sont reliés les champs électrique \vec{E} au point $M(\vec{r})$ et son transformé $M'(g\vec{r})$: les composantes z , radiale et orthoradiale ne dépendent pas de θ .

EXEMPLE 2. La figure 56a montre le cas d'une symétrie plane S_P . En particulier en un point du plan P le champ \vec{E} ("vrai" vecteur) est dans le plan et \vec{B} (pseudovecteur) est perpendiculaire à P . Ces résultats s'échangent si le plan est un plan d'antisymétrie (figure 56b).

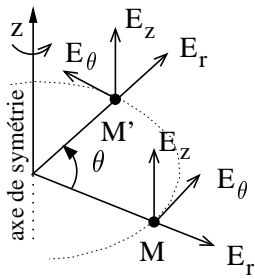


FIGURE 55

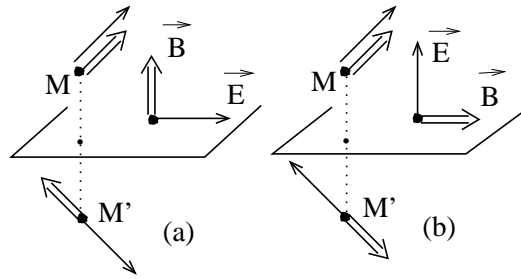


FIGURE 56

EXEMPLE 3. Si Oz est un axe de symétrie de rotation pour le système qui crée les champs et si de plus tout plan P contenant Oz est un plan de symétrie (resp. d'antisymétrie) seuls E_z , E_r et B_θ (resp. E_θ , B_z et B_r) sont non nuls. Si le plan $z = 0$ est un plan de symétrie (resp. d'antisymétrie) du système alors en deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan les composantes E_r , E_θ et B_z (resp. E_z , B_r et B_θ) sont égales et les composantes E_z , B_r et B_θ (resp. E_r , E_θ et B_z) sont opposées. Le lecteur est encouragé à trouver des exemples physiques pour chacun de ces cas et à dessiner les figures correspondantes. C'est sur la base de ces arguments de symétrie qu'on montre "sans calcul" (en se rappelant que \vec{B} est un pseudovecteur) qu'une **antenne dipolaire** électromagnétique (figure 57) ne rayonne pas dans la direction de son axe ($\vec{E} \wedge \vec{B} = 0$, car $\vec{B} = 0$, sur l'axe), ou qu'il n'y a pas de rayonnement monopolaire en électromagnétisme car pour un système à symétrie sphérique $\vec{B} = 0$ en tout point.

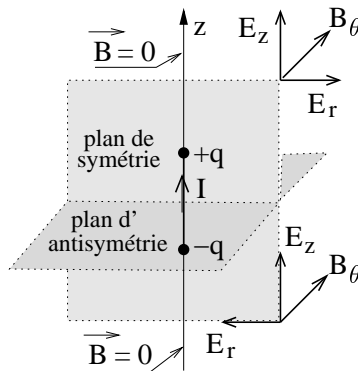


FIGURE 57

EXEMPLE 4. En **acoustique** où l'analogue du vecteur de Poynting est $P' \vec{v}$ (produit de la surpression par la vitesse du fluide), on montre pareillement qu'un dipole ne rayonne pas d'onde sonore dans une direction perpendiculaire au dipole (pas de composante du "vrai" vecteur \vec{v} dans le plan d'antisymétrie du dipole), et qu'un système à symétrie sphérique (pour lequel \vec{v} est radial) rayonne également dans toutes les directions (rayonnement monopolaire).