

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques

1^{ère} partie

Modèle de conducteur métallique-Conducteur parfait

1.1. Effet de peau

1.1.1. Dans le cas des champs harmoniques de pulsation ω , le terme $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ s'écrit :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c_0^2} \vec{E}$$

alors que le terme $\mu_0 \vec{j}(M, t)$ s'écrit, d'après la loi d'OHM, sous la forme :

$$\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

Pour comparer ces deux termes, calculons le rapport suivant :

$$\frac{\left\| \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \mu_0 \vec{j} \right\|} = \frac{\omega}{\mu_0 \sigma c_0^2} = \frac{2\pi\nu}{\mu_0 \sigma c_0^2}$$

Application numérique :

$$\frac{2\pi\nu}{\mu_0 \sigma c_0^2} = \frac{9,67 \times 10^9}{9 \times 10^{16} \times 2 \times 10^{-7} \times 5,9 \times 10^7} \simeq 9 \times 10^{-9} \ll 1$$

c/c : le terme $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est donc négligeable devant $\mu_0 \vec{j}$.

1.1.2. On en déduit une forme simplifiée de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE :

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$$

1.1.3. Le champ incident fait vibrer les électrons du conducteur à la pulsation ω . Ces mouvement de charge sont à l'origine des champs réfléchis et transmis qui ont donc aussi la même pulsation $\omega' = \omega$.

Concours National Commun - Filière MP - Session 2000

1.1.4. Le problème est invariant par translation suivant Ox et Oy , donc on peut écrire :

$$\vec{E}_t(M) = E_{tx}(z) \vec{u}_x + E_{ty}(z) \vec{u}_y + E_{tz}(z) \vec{u}_z$$

Puisque l'onde incidente est polarisée rectilignement suivant Oy , tout plan parallèle au plan xOz est plan d'antisymétrie, donc \vec{E}_t est perpendiculaire à un tel plan, soit :

$$\vec{E}_t(M) = E_t(z) \vec{u}_y$$

1.1.5. $\vec{E}_t(M, t)$ vérifie les équations de MAXWELL :

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_t(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}_t(M, t)}{\partial t} = i\omega \vec{B}_t(M, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_t(M, t) = i\omega \vec{B}_t(M, t)}$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{B}_t(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) = \mu_0 \sigma \vec{E}_t(M, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_M \times \vec{B}_t(M, t) = \mu_0 \sigma \vec{E}_t(M, t)}$$

soit donc :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_M \times [\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_t(M, t)] = i\omega \mu_0 \sigma \vec{E}_t(M, t) \\ \vec{\nabla}_M \times [\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_t(M, t)] = \vec{\nabla}_M (\vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}_t(M, t)) - \Delta \vec{E}_t(M, t) \end{cases}$$

Or $\vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}_t(M, t) = 0$ car $\rho = 0$ par l'hypothèse 3.

d'où :

$$\boxed{\Delta \vec{E}_t(M, t) + i\omega \mu_0 \sigma \vec{E}_t(M, t) = \vec{0}}$$

avec $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ opérateur laplacien.

1.1.6. Comme $E_t(M) = E_t(z)$, on obtient :

$$\frac{d^2}{dz^2} E_t(z) + i\omega \mu_0 \sigma E_t(z) = 0 \quad (5)$$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2}{dz^2} E_t(z) + k_t^2 E_t(z) = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{k_t^2 = i\omega \mu_0 \sigma}$$

1.1.7. Expression du paramètre δ

$$\begin{aligned}
 (1+i)^2 = 2i &\implies \underline{k}_t^2 = i\omega\mu_0\sigma = \underline{k}_t^2 = \omega\mu_0\sigma \frac{(1+i)^2}{2} \\
 &\implies \underline{k}_t^2 = \frac{(1+i)^2}{\delta^2} \text{ avec } \delta^2 = \frac{2}{\omega\mu_0\sigma} \\
 &\implies \boxed{\underline{k}_t = \pm \frac{(1+i)}{\delta}} \text{ avec } \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}}
 \end{aligned}$$

1.1.8. La solution de l'équation (5) s'écrit :

$$\underline{E}_t(z) = a \exp(i\underline{k}_t z) + b \exp(-i\underline{k}_t z)$$

a et b sont deux constantes.

Pour $\underline{k}_t = \frac{1+i}{\delta}$, on doit forcément avoir $b = 0$, sinon on aurait divergence du champ pour $z \rightarrow +\infty$.

Donc :

$$\begin{cases} \underline{E}_t(z) = a \exp(i\underline{k}_t z) = a \exp\left(-\frac{z}{\delta} + i\frac{z}{\delta}\right) \\ \text{avec } \underline{E}_t(0) = \underline{E}_t^0 \exp -i\varphi \end{cases}$$

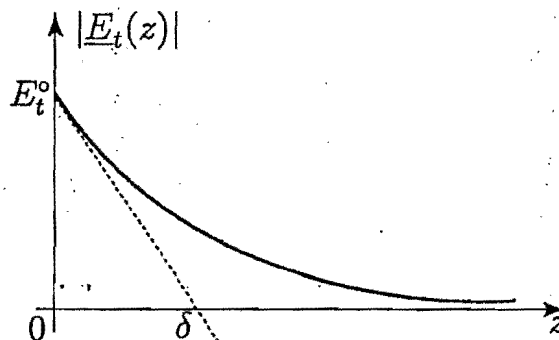
$$\implies a = \underline{E}_t^0 \exp -i\varphi$$

soit :

$$\boxed{\underline{E}_t(z) = \underline{E}_t^0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} - \varphi\right)\right]}$$

1.1.9.

δ représente l'épaisseur de peau, c'est l'épaisseur du conducteur au bout de laquelle l'amplitude du champ est divisée par $e \approx 2,71$. δ est exprimée en m.



Concours National Commun - Filière MP - Session 2000

1.1.10. Application numérique :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 9,67 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5,9 \times 10^7}}$$

$$\delta \approx 6,7 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Pour le cuivre à la fréquence de travail, δ est extrêmement faible : on peut considérer que l'onde ne pénètre pas dans le métal, elle est absorbée dès la surface.

1.1.11.

$$\vec{B}_t(M, t) = \vec{B}_t(M) \exp(-i\omega t)$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_t(M) = +i\omega \vec{B}_t(M) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_t(M) = E_t(z) \vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_t(M) = -\frac{dE_t(z)}{dz} \vec{u}_x = \frac{1+i}{\delta} E_t(z) \vec{u}_x$$

Soit donc :

$$\vec{B}_t(M) = -\frac{1+i}{\delta\omega} E_t(z) \vec{u}_x$$

En fin :

$$\vec{B}_t(M, t) = -\frac{1+i}{\delta\omega} E_t^0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \varphi\right)\right] \vec{u}_x$$

1.2. Modèle de conducteur parfait

1.2.1. Pour pouvoir considérer le conducteur comme parfait, il faut pouvoir négliger $\left\| \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$ devant $\left\| \mu_0 \sigma \vec{E} \right\|$. Il faut donc avoir :

$$\frac{\omega}{c_0^2} \ll \mu_0 \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi\nu}{c_0^2} \ll \mu_0 \sigma$$

soit :

$$\nu \ll \frac{\mu_0 \sigma c_0^2}{2\pi} = \nu_{\max}$$

$$\nu_{\max} = \frac{\mu_0 \sigma c_0^2}{2\pi} \approx 1,8 \times 10^{10} \sigma$$

Dans le cas du cuivre, on a $\nu_{\max} \simeq 10^{18} \text{ Hz}$

c/c : On peut considérer un conducteur métallique comme parfait pour des fréquences très inférieures à 10^{18} Hz , en particulier c'est vrai pour les fréquences électriques et les fréquences hertziennes. Cependant, il faut aussi être prudent pour que ν ne soit pas trop grande pour que la loi d'OHM soit vérifiée.

Épreuve de Physique II

1.2.2. À l'intérieur d'un conducteur parfait, les champs électrique et magnétique sont nuls :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{0}}$$

En effet, la puissance volumique cédée à la matière par le champ électromagnétique s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) = \sigma E^2$$

Cette grandeur doit rester finie même si la conductivité σ devient très grande, donc $E = 0$ pour $\sigma \rightarrow +\infty$.

1.2.3. Dans un conducteur parfait, on a :

$$\vec{E} = \vec{0} \implies \operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla}_M \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \implies \boxed{\rho = 0}$$

$$\vec{B} = \vec{0} \implies \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla}_M \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \implies \boxed{\vec{j} = 0}$$

1.2.4. Les charges et les courants éventuels seront alors forcément distribués en surface du conducteur.

1.2.5. En posant $\vec{n} = \vec{n}_{12}$, les relations de passage s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{12} \end{cases}$$

| | |
|--|--|
| $\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = \vec{0}$ | pour la composante tangentielle de \vec{E} |
| $\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ | pour la composante normale de \vec{E} |
| $\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{12}$ | pour la composante tangentielle de \vec{B} |
| $\vec{B}_{2n} - \vec{B}_{1n} = \vec{0}$ | pour la composante normale de \vec{B} |

1.2.6. Dans le conducteur parfait, on aura donc :

$$\vec{B}_{1t} = \vec{B}_{1n} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{1n} = \vec{0}$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{2t} = \vec{0} \\ \vec{E}_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{2t} = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_{2n} = \vec{0} \end{array} \right.$$

1.2.7. Comme ρ_s et \vec{j}_s sont inconnues, les deux conditions aux limites exploitables pour les deux champs sont :

$$\vec{B}_{2n} = \vec{0} \text{ et } \vec{E}_{2t} = \vec{0}$$

2^{ème} partie

Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire

2.1. Onde transverse électrique TE

2.1.1. L'onde est transverse électrique si le champ électrique associé \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation Oz .

$$\text{Équation de MF} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{Équation de MA} \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} (\text{rot} \vec{B}) = \text{rot} \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \text{rot} (\text{rot} \vec{B}) = \text{grad} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} \end{array} \right.$$

$$\text{Equation de M}\Phi \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B}(M, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Étant donné que :

$$\vec{B}_0(x, y) = B_{0x}(x, y) \vec{u}_x + B_{0y}(x, y) \vec{u}_y + B_{0z}(x, y) \vec{u}_z$$

la projection de l'équation de propagation selon \vec{u}_z donne l'équation aux dérivées partielles vérifiée par B_{0z} :

Épreuve de Physique II

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} - k_g^2 B_{0z} + \frac{\omega^2}{c_0^2} B_{0z} = 0$$

2.1.2. L'expression suivante :

$$B_{0z}(x, y) = (A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x) (B_1 \cos \beta y + B_2 \sin \beta y)$$

vérifie l'équation aux dérivées partielles ci-dessus, donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} - k_g^2 B_{0z} + \frac{\omega^2}{c_0^2} B_{0z} &= 0 \\ -\alpha^2 B_{0z} - \beta^2 B_{0z} - k_g^2 B_{0z} + \frac{\omega^2}{c_0^2} B_{0z} &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\alpha^2 + \beta^2 + k_g^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0$$

2.1.3. Exprimons E_{0x} en fonction de $\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}$, k_g , ω et c_0 .

$$\text{MF} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} = i\omega \vec{B}(M, t)$$

$$\text{avec } \vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(x, y) \exp i(k_g z - \omega t)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = \vec{\nabla}_M \times \vec{E}(M, t) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_{0x}(x, y) \exp i(k_g z - \omega t) & E_{0y}(x, y) \exp i(k_g z - \omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = \begin{vmatrix} -ik_g E_{0y}(x, y) f(z, t) = i\omega B_{0x}(x, y) f(z, t) \\ ik_g E_{0x}(x, y) f(z, t) = i\omega B_{0y}(x, y) f(z, t) \\ \left(\frac{\partial E_{0y}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}(x, y)}{\partial y} \right) f(z, t) = i\omega B_{0z}(x, y) f(z, t) \end{vmatrix}$$

en posant :

$$f(z, t) = \exp i(k_g z - \omega t).$$

on trouve donc :

Concours National Commun - Filière MP - Session 2000

$$\begin{cases} \underline{B}_{0x}(x, y) = -\frac{k_g}{\omega} \underline{E}_{0y}(x, y) \\ \underline{B}_{0y}(x, y) = \frac{k_g}{\omega} \underline{E}_{0x}(x, y) \end{cases} \quad (S_1)$$

D'autre part :

$$\text{MA} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c_0^2} \vec{E}(M, t)$$

$$\text{avec } \vec{B}(M, t) = \vec{B}_0(x, y) \exp i(k_g z - \omega t)$$

soit :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) &= \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \underline{B}_{0x}(x, y) \exp i(k_g z - \omega t) \\ \underline{B}_{0y}(x, y) \exp i(k_g z - \omega t) \\ \underline{B}_{0z}(x, y) \exp i(k_g z - \omega t) \end{vmatrix} \\ &\Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \begin{cases} \left(\frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} - i k_g \underline{B}_{0y} \right) f(z, t) = -i \frac{\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0x} f(z, t) \\ \left(i k_g \underline{B}_{0x} - \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x} \right) f(z, t) = -i \frac{\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0y} f(z, t) \\ \left(\frac{\partial \underline{B}_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{B}_{0x}}{\partial y} \right) f(z, t) = -i \frac{\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0z} f(z, t) \end{cases} \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions de \underline{B}_{0x} et \underline{B}_{0y} trouvées dans le système (S_1) , on obtient le système (S_2) :

$$\begin{cases} -i \frac{\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0x} = \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} - i \frac{k_g^2}{\omega} \underline{E}_{0x} \\ -i \frac{\omega}{c_0^2} \underline{E}_{0y} = -i \frac{k_g^2}{\omega} \underline{E}_{0y} - \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x} \end{cases} \quad (S_2)$$

Finalement, on a, à partir de la première équation du système (S_2) :

$$\underline{E}_{0x} = i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$$

Épreuve de Physique II

2.1.4. À partir de la deuxième équation du système (S_2), on a de même :

$$\underline{E}_{0y} = -i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

2.1.5. Tenant compte de l'expression de \underline{B}_{0z} donnée dans la question 2.1.2. :

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$$

on peut écrire :

$$\underline{E}_{0x} = i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (-\underline{B}_1 \sin \beta y + \underline{B}_2 \cos \beta y)$$

$$\underline{E}_{0y} = -i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha x + \underline{A}_2 \cos \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$$

on peut aussi obtenir :

$$\underline{E}_{0x} = i \frac{\omega}{(\alpha^2 + \beta^2)} \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (-\underline{B}_1 \sin \beta y + \underline{B}_2 \cos \beta y)$$

$$\underline{E}_{0y} = -i \frac{\omega}{(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha x + \underline{A}_2 \cos \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$$

en s'inspirant du résultat de la question 2.1.2., à savoir :

$$\omega^2 - k_g^2 = (\alpha^2 + \beta^2) c_0^2$$

2.1.6. D'après les relations de passage relatives au champ électrique, les composantes tangentielles de \vec{E} sur les faces $[x = 0, x = a]$ et $[y = 0, y = b]$ du guide d'ondes sont nulles ; soit donc :

$$\begin{cases} \text{en } x = 0 \text{ et } x = a, & \underline{E}_{0y} = 0 \text{ pour tout couple } (y, z) \\ \text{en } y = 0 \text{ et } y = b, & \underline{E}_{0x} = 0 \text{ pour tout couple } (x, z) \end{cases}$$

soit en $x = 0$ et $y = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\alpha \underline{A}_2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0 & \text{Eq1} \\ \frac{\beta \underline{B}_2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0 & \text{Eq2} \end{cases}$$

Dans le guide d'ondes, un champ électromagnétique non nul se propage. Si α et β étaient tous les deux nuls en même temps, le champ serait nul, ce qui est absurde ! Par conséquent, on ne peut pas avoir α et β nuls en même temps. On aura donc :

- si $\beta = 0$, alors $\alpha \neq 0$ et d'après Eq1, on a $\underline{A}_2 = 0$, dans ce cas l'autre condition au limite en $x = a$ donne :

$$\underline{E}_{0y}(x = a, y) = -i \frac{\omega}{(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha a) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y) = 0 \quad \forall y$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha a) = 0 \Rightarrow \alpha a = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad m \in \mathbb{Z}^*}$$

- si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et d'après Eq2, on a $\underline{B}_2 = 0$, dans ce cas l'autre condition au limite en $y = b$ donne :

$$\underline{E}_{0x}(x, y = b) = i \frac{\omega}{(\alpha^2 + \beta^2)} \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (-\underline{B}_1 \sin \beta b) = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \sin(\beta b) = 0 \Rightarrow \beta b = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{n\pi}{b}, \quad n \in \mathbb{Z}^*}$$

- Si $\underline{A}_2 = \underline{B}_2 = 0$, la composante \underline{B}_{0z} du champ magnétique dans le guide s'écrit d'après 2.1.2. :

$$\underline{B}_{0z} = \underline{A}_1 \cos(\alpha x) \underline{B}_1 \cos(\beta y) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

avec m et n deux entiers relatifs qui ne peuvent pas être nuls de façon simultanée ; soit donc :

$$\boxed{\underline{B}_{0z} = \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}$$

2.1.7. Structure du champ électrique pour le mode TE_{mn} :

Les expressions des composantes $\underline{E}_{0x,mn}$ et $\underline{E}_{0y,mn}$ sont déjà obtenues dans la question 2.1.8., soit :

$$TE_{mn} \begin{cases} \underline{E}_{0x,mn} = -i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \underline{E}_{0y,mn} = i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \underline{A}_1 \underline{B}_1 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases}$$

Épreuve de Physique II

Par comparaison avec les expressions proposées, on trouve que :

$$\boxed{A_{mn} = -i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) A_1 B_1} \quad \text{et} \quad \boxed{B_{mn} = i \frac{\omega c_0^2}{\omega^2 - k_g^2 c_0^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) A_1 B_1}$$

2.1.8. Le résultat déjà trouvé en répondant à la question 2.1.2., à savoir :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_g^2$$

permet de remonter au module $k_{g,mn}$ du vecteur d'onde $\vec{k}_g = k_g \vec{u}_z$ du mode TE_{mn} dans le guide, soit donc :

$$k_{g,mn}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - (\alpha^2 + \beta^2) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

d'où :

$$\boxed{k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}}$$

2.1.9. Les ondes pouvant se propager dans le guide d'ondes sans atténuation doivent avoir $k_{g,mn}$ réel positif, il faut donc avoir :

$$\begin{aligned} k_{g,mn} > 0 &\implies k_{g,mn}^2 > 0 \\ \implies \frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] &> 0 \\ \implies \omega > \pi c_0 \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} &\Leftrightarrow 2\pi\nu > 2\pi\nu_{c,mn} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\nu_{c,mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}}$$

c/c : le guide d'ondes se comporte donc comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure $\nu_{c,mn}$ pour les ondes électromagnétiques. Toutes les ondes dont les fréquences sont inférieures à $\nu_{c,mn}$ seront atténuées par le guide. Dans ce cas, le module $k_{g,mn}$ serait imaginaire pur et le champ électromagnétique serait décrit par une onde évanescence en " $\exp(-\text{Im}(\underline{k}_{g,mn})z)$ " qui décroît très rapidement.

2.1.10.

$$\begin{cases} \lambda_{g,mn} = \frac{2\pi}{k_{g,mn}} & \text{est la longueur d'onde dans le guide} \\ \lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega} & \text{est la longueur d'onde dans le vide} \end{cases}$$

$$\lambda_{g,mn} = \frac{2\pi}{k_{g,mn}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}}$$

$$\lambda_{g,mn} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}}$$

$$\lambda_{g,mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}}$$

2.2. Onde transverse magnétique TM

2.2.1. L'onde est transverse magnétique si le champ magnétique associé \vec{B} est perpendiculaire à la direction de propagation Oz .

Si on prend $m = 0$ dans les composantes du champ électrique pour le mode TM_{mn} proposé, on obtient :

$$E_{0x,mn} = E_{0y,mn} = E_{0z,mn} = 0$$

On aura la même situation pour $n = 0$. En conclusion, aucun des deux entiers m et n ne peut être nul sinon le champ serait nul.

2.3. Sélection des modes de propagation par le guide d'ondes

2.3.1. L'expression de la fréquence de coupure $\nu_{c,mn}$ pour le mode TE_{mn} et/ou TM_{mn} a été déterminée dans la question 2.1.9. :

$$\nu_{c,mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Épreuve de Physique II

| |
|---|
| pour TE_{10} , $\nu_{c,10} = \frac{c_0}{2a} = 6,56 \text{ GHz}$ |
| pour TE_{01} , $\nu_{c,01} = \frac{c_0}{2b} = 14,76 \text{ GHz}$ |
| pour TE_{11} et TM_{11} , $\nu_{c,11} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 16,16 \text{ GHz}$ |
| pour TE_{20} , $\nu_{c,20} = \frac{c_0}{a} = 13,12 \text{ GHz}$ |

2.3.2. Pour que l'onde qui se propage dans le guide soit une combinaison linéaire des modes TE_{10} et TE_{20} à l'exclusion de tous les autres, il faut avoir établi uniquement les modes TE_{10} et TE_{20} dans le guide et éviter les autres.

Pour que le mode TE_{10} soit établi dans le guide, il faut que la fréquence de l'excitateur ν soit telle que :

$$\nu > \nu_{c,10} = 6,56 \text{ GHz}$$

De même pour le mode TE_{20} , il faut avoir :

$$\nu > \nu_{c,20} = 13,12 \text{ GHz}$$

Pour éviter les autres modes TE_{01} et TE_{11} , il faut que la même fréquence vérifie :

$$\nu < \nu_{c,01} = 14,76 \text{ GHz}$$

En regroupant toutes ces conditions, la fréquence adéquate doit être telle que :

| |
|---|
| $\nu_{c,20} = 13,12 \text{ GHz} < \nu < \nu_{c,01} = 14,76 \text{ GHz}$ |
|---|

2.3.3. La vitesse de phase est :

$$v_\varphi(TE_{mn}) = \omega/k_{g,mn} \text{ avec } k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]} \quad \text{voir 2.1.8.}$$

soit :

| |
|--|
| $v_\varphi(TE_{mn}) = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{4\nu'^2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}}$ |
|--|

Pour $\nu' \approx 14 \text{ GHz}$, on a :

$$\begin{cases} v_{\varphi}(TE_{10}) = \frac{c_0}{\sqrt{1 - c_0^2/(4\nu'^2 a^2)}} = 3,40 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1} \\ v_{\varphi}(TE_{20}) = \frac{c_0}{\sqrt{1 - c_0^2/(\nu'^2 a^2)}} = 8,61 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

Il est clair que :

$$v_{\varphi}(TE_{20}) > v_{\varphi}(TE_{10})$$

2.3.4. Le fait qu'on a $v_{\varphi}(TE_{20}) > v_{\varphi}(TE_{10})$ implique que le temps de parcours du mode TE_{10} est supérieur au temps de parcours du mode TE_{20} . Le mode TE_{10} arrive à la sortie avec du retard et la superposition des deux modes à la sortie génère un signal déformé à la sortie du guide.

3^{ème} partie

Guide d'ondes monomode de TE_{10}

3.1. Sélection du mode de travail

3.1.1. La condition de propagation d'un mode (m, n) de fréquence ν_{mn} dans le guide est :

$$\nu_{mn} > \nu_{c,mn}$$

Pour une fréquence ν de l'excitateur, les modes (m', n') qui peuvent se propager à l'intérieur du guide d'ondes sont ceux ayant une fréquence de coupure $\nu_{c,m'n'}$ telle que :

$$\nu > \nu_{c,m'n'}$$

Or, d'après les résultats de la question 2.3.1., les fréquences de coupures $\nu_{c,10} = 6,56 \text{ GHz}$ et $\nu_{c,20} = 13,12 \text{ GHz}$ sont les deux plus petites fréquences de coupures possibles pour le guide d'ondes étudié. Donc, pour qu'il y ait un seul mode (m, n) qui se propage sans atténuation, il faut que sa fréquence ν_{mn} soit comprise entre les fréquences $\nu_{\min} = \nu_{c,10}$ et $\nu_{\max} = \nu_{c,20}$.

Le guide d'ondes donné est monomode pour les fréquences ν_{mn} telles que :

$$\nu_{mn} \in]\nu_{\min}, \nu_{\max}[\quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu_{\min} = \nu_{c,10} = 6,56 \text{ GHz} \\ \nu_{\max} = \nu_{c,20} = 13,12 \text{ GHz} \end{cases}$$

Épreuve de Physique II

3.1.2. La fréquence d'excitation imposée a pour valeur $\nu = 9,67 \text{ GHz}$. On a $\nu = 9,67 > \nu_{c,10}$ et $\nu = 9,67 < \nu_{c,20}$ et elle est aussi inférieure à toutes les autres fréquences de coupures du guide. Le mode sélectionné est donc le mode TE_{10} .

3.1.3. En prenant $m = 1$ et $n = 0$ dans les expressions des composantes du champ électrique relatif à ce mode (d'après 3.3.3.), on trouve que :

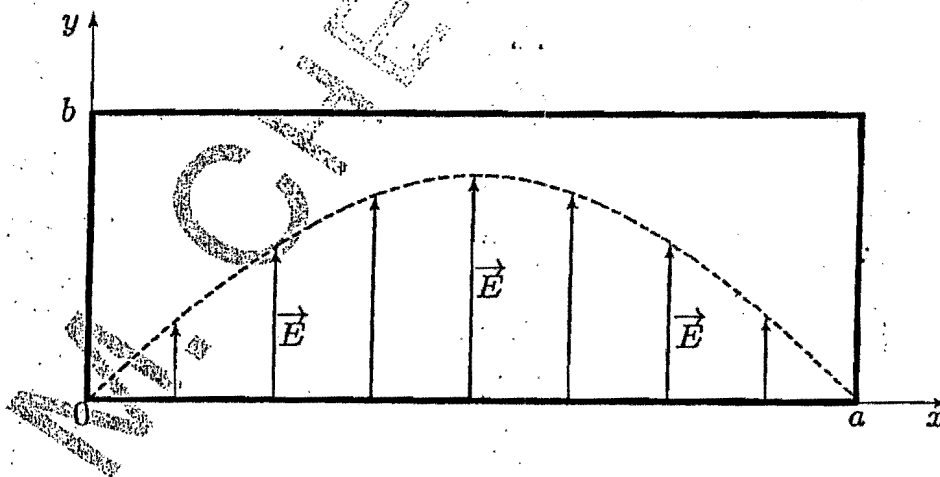
$$\begin{cases} E_{0x,10} = 0 \\ E_{0y,10} = B_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases} \text{ avec } E_{0z,10} = 0$$

c/c : l'onde est polarisée rectilignement suivant Oy .

3.1.4. On a :

$$\vec{E} = |E_{0y,10}| \vec{u}_y = |B_{10}| \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \vec{u}_y$$

Dans le guide d'ondes, le champ varie de façon sinusoïdale avec x :



- \vec{u} est parallèle à \vec{u}_y (petit côté du guide), les fils métalliques de la grille sont parallèles au champ électrique \vec{E} sortant du guide. Ce champ électrique \vec{E} , polarisé suivant Oy , n'arrive pas à faire osciller les électrons de la grille métallique, car ces électrons ne peuvent se déplacer que dans la direction des fils, ils ne peuvent être mis en mouvement que par un champ électrique ayant une composante parallèle à cette direction. Le rayonnement émis par ces courants constitue l'onde réfléchie. En fait, si les courants dans les fils étaient uniformément répartis, le rayonnement émis correspondrait pour moitié à une onde transmise et à une onde réfléchie. Mais suite à l'effet de peau, les courants produits sont localisés sur l'avant des fils (du côté de l'onde incidente)

et pratiquement, on constate que l'onde est totalement réfléchi et le détecteur indique une intensité nulle :

$$\langle E^2 \rangle_t = 0$$

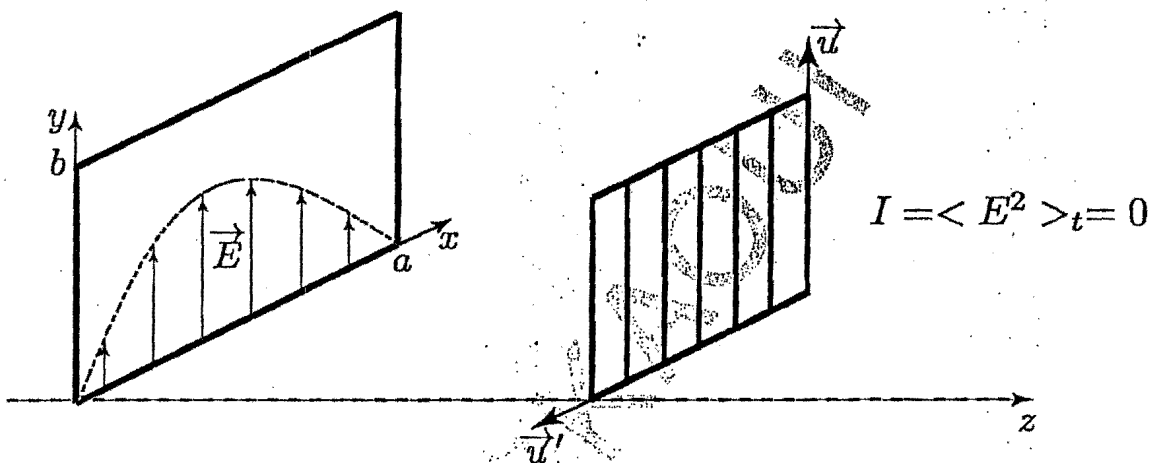


FIG. 1 \vec{u} est parallèle à \vec{u}_y

- \vec{u} est parallèle à \vec{u}_x (grand côté du guide), les fils métalliques de la grille sont perpendiculaires au champ électrique \vec{E} sortant du guide. Dans ce cas, le champ électrique \vec{E} , perpendiculaire à la direction des fils ne peut donner naissance à aucun courant dans la grille (absence d'onde réfléchi) ; il est donc intégralement transmis à travers la grille, à la sortie de laquelle le détecteur indique une intensité maximale :

$$\langle E^2 \rangle_t = I_{\max}$$

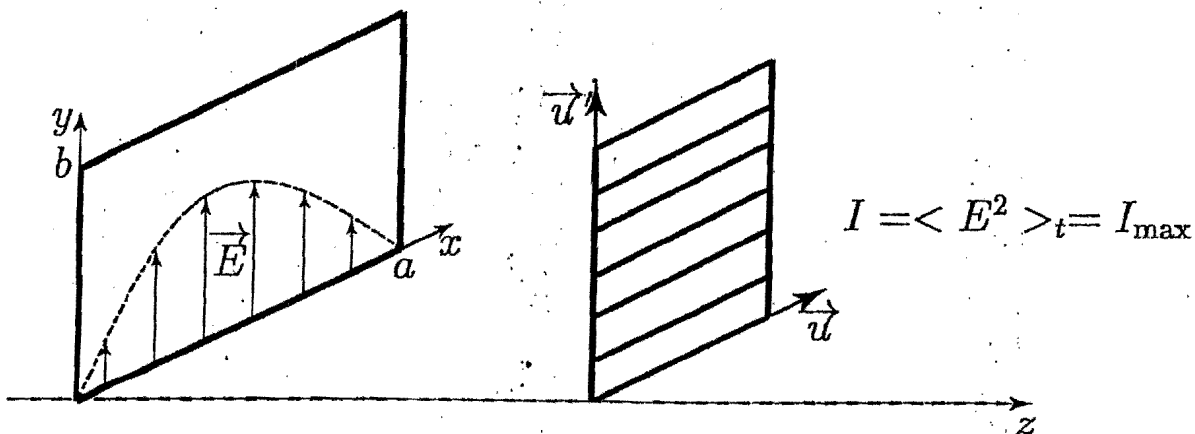


FIG. 2 \vec{u} est parallèle à \vec{u}_x

Épreuve de Physique II

3.1.5. Soit α l'angle entre les deux \vec{u}' et \vec{u}_y : $\alpha = (\vec{u}', \vec{u}_y)$.

- Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, l'intensité détectée à la sortie de la grille est maximale ;
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ l'intensité détectée à la sortie de la grille prend sa valeur minimale voir nulle.

$$\left. \begin{array}{l} I = I_{\max} \text{ pour } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pi \\ I = 0 \text{ pour } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ce dispositif illustre la loi expérimentale de MALUS :}$$

$$I = I_{\max} \cos^2 \alpha$$

et la grille métallique agit donc comme un polariseur rectiligne.

3.1.6. Pour d trop élevé, c'est-à-dire $d \gg \lambda$, on peut remarquer que l'onde traverse la grille quelle que soit sa polarisation, par suite l'intensité $I = \langle E^2 \rangle$ est indépendante de l'orientation de la grille. Cette dernière ne peut servir de polariseur pour l'onde étudiée que si :

$$d < \lambda$$

3.2. Mesure de la fréquence

3.2.1. Au laboratoire, pour mesurer la fréquence des signaux électroniques usuels, on peut utiliser le fréquencemètre numérique ou l'oscilloscope.

3.2.2. De tels appareils se comportent comme des filtres caractérisés chacun par :

- une bande passante très étroite limitée à 10^6 Hz ;
- une fréquence de coupure très petite, soit donc un temps de réponse très élevé.

Les guides d'ondes habituels utilisent des fréquences de l'ordre de 10^9 Hz ; ces fréquences sortent de la bande passante de ces appareils d'une part, aussi, ces derniers ne peuvent pas suivre les variations de telles ondes.

3.2.3. L'équation de propagation du champ dans le vide intérieur à la cavité peut s'écrire :

$$\Delta E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{soit : } -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0$$

d'où :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

3.2.4. Le champ doit s'annuler à la surface d'un conducteur parfait :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } x=0 \text{ et } x=l_x, \text{ on a : } E=0 \implies k_x l_x = n_x \pi \\ \text{pour } y=0 \text{ et } y=l_y, \text{ on a : } E=0 \implies k_y l_y = n_y \pi \\ \text{pour } z=0 \text{ et } z=l_z, \text{ on a : } E=0 \implies k_z l_z = n_z \pi \end{array} \right\}$$

avec $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3$

3.2.5. Aucun des trois nombres n_x, n_y, n_z ne peut être nul, sinon le champ électrique E serait nul dans le guide d'ondes. La pulsation du mode fondamental est obtenue pour :

$$n_x = n_y = n_z = 1$$

soit :

$$\omega = c_0 \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c_0 \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2}}$$

et donc :

$$\omega_f = c_0 \pi \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} + \frac{1}{l_z^2}}$$

La fréquence correspondante ν_f est :

$$\nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} + \frac{1}{l_z^2}}$$

Application numérique : pour $l_x = l_z = 3 \text{ cm}$ et $l_y = 2 \text{ cm}$, on a :

$$\nu_f = 10,3 \text{ GHz}$$

Épreuve de Physique II

3.2.6. Si $l_y = l$ alors on a :

$$\nu_f = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l_z^2}}$$

ν_f et l varient donc de façons inverses.

La plus petite fréquence pouvant se propager dans le guide est ν_f . Pour une fréquence ν donnée à mesure, si on donne à l une valeur assez petite, on tombe dans le cas où $\nu_f > \nu$ et rien n'est détecté dans la cavité.

À partir de cette valeur, on fait augmenter légèrement l jusqu'à une valeur l_0 , par exemple, pour laquelle une onde sera détectée dans la cavité ; dans ce cas, on aura :

$$\nu_{\text{mesurée}} = \nu_f(l_0)$$

Ainsi, connaissant l_0 , on peut remonter à la valeur de ν .

3.2.7. Pour mesurer la fréquence de travail $\nu = 9,67 \text{ GHz}$, on fait varier l jusqu'à avoir :

$$\nu_f(l) = \nu \text{ avec } \nu_f(l) = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l_z^2}}$$

$$\Rightarrow l = l_y = \left(\frac{4\nu^2}{c_0^2} - \frac{1}{l_x^2} - \frac{1}{l_z^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Application numérique :

$$l_x = l_z = 3 \text{ cm et } \nu \approx 9,67 \text{ GHz} \Rightarrow l_y = l = 2,27 \text{ cm}$$

3.3. Couplage du guide d'ondes à une charge

3.3.1. À la fréquence de travail choisie, la portée de l'onde transmise est $\delta(\nu)$ qui est l'épaisseur de peau. La plaque choisie a une épaisseur $e \gg \delta(\nu)$; dans ce cas l'onde transmise n'arrivera pas à sortir du guide d'onde puisqu'il sera totalement absorbée par la plaque utilisée.

3.3.2.

$$\text{MF} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} = i\omega \vec{B}(M, t)$$

Concours National Commun - Filière MP - Session 2000

► Champ magnétique incident :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E}_i = \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = \begin{pmatrix} i\omega B_{ix} \\ i\omega B_{iy} \\ i\omega B_{iz} \end{pmatrix} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E}_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E_{iy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial E_{iy}/\partial z \\ 0 \\ \partial E_{iy}/\partial x \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{ix} = -\frac{\partial E_{iy}}{\partial z} = -E_i^o \frac{k_g}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp i(k_g z - \omega t) \\ B_{iy} = 0 \\ B_{iz} = -E_i^o \frac{i\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp i(k_g z - \omega t) \end{cases}$$

d'où :

$$\vec{B}_i(M, t) = -E_i^o \left[\frac{k_g}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_x + \frac{i\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_z \right] \exp i(k_g z - \omega t)$$

Les mêmes calculs que précédemment donnent les deux autres champs :

► Champ magnétique réfléchi :

$$\vec{B}_r(M, t) = E_r^o \left[\frac{k_g}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_x - \frac{i\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_z \right] \exp -i(k_g z + \omega t)$$

► Champ magnétique transmis :

$$\vec{B}_t(M, t) = E_t^o \left[-\frac{1+i}{\omega\delta} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_x - \frac{i\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_z \right] \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$$

3.3.3. La composante tangentielle du champ électrique total est continue à la traversée d'une interface entre deux milieux. Ici, cette composante est $\underline{E}_{\text{Totaly}}$.

Soit à l'interface $z = L$:

$$\underline{E}_{\text{Total}}(z = L_-) = \underline{E}_{\text{Total}}(z = L_+)$$

$$\underline{E}_i(z = L) + \underline{E}_r(z = L) = \underline{E}_t(z = L) \quad \forall (x, y) \text{ et } \forall t$$

$$\text{soit : } E_i^o \exp i(k_g L) + E_r^o \exp -i(k_g L) = E_t^o \exp \frac{L}{\delta} (i - 1)$$

Épreuve de Physique II

3.3.4. La relation de passage pour un champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n}_{12}$$

Dans la plaque d'épaisseur e très grande devant l'épaisseur de peau δ à la fréquence de travail, les courants mis en jeu ne peuvent être que volumiques et donc :

$$\vec{j}_S = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{continuité des deux composantes tangentielle et normale du champ magnétique} \end{array} \right\} \text{ en } z = L$$

soit donc :

$$\begin{aligned} (B_{\text{Total}})_x(z = L_-) &= (B_{\text{Total}})_x(z = L_+) \\ B_{ix}(z = L) + B_{rx}(z = L) &= B_{tx}(z = L) \quad \forall (x, y) \text{ et } \forall t \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } -k_g E_i^0 \exp i(k_g L) + k_g \underline{E}_r^0 \exp -i(k_g L) = -\frac{1+i}{\delta} \underline{E}_t^0 \exp \frac{L}{\delta} (i-1)$$

3.3.5. Les coefficients de réflexion \underline{r} et de transmission \underline{t} sont respectivement :

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_r^0}{E_i^0} \text{ et } \underline{t} = \frac{\underline{E}_t^0}{E_i^0}$$

Considérons le système des relations trouvées en 3.3.3. et 3.3.4. :

$$\begin{cases} E_i^0 \exp i(k_g L) + \underline{E}_r^0 \exp -i(k_g L) = \underline{E}_t^0 \exp \frac{L}{\delta} (i-1) \\ -k_g E_i^0 \exp i(k_g L) + k_g \underline{E}_r^0 \exp -i(k_g L) = -\frac{1+i}{\delta} \underline{E}_t^0 \exp \frac{L}{\delta} (i-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exp i(k_g L) + \underline{r} \exp -i(k_g L) = \underline{t} \exp \frac{L}{\delta} (i-1) & (1) \\ k_g \exp i(k_g L) - k_g \underline{r} \exp -i(k_g L) = \frac{1+i}{\delta} \underline{t} \exp \frac{L}{\delta} (i-1) & (2) \end{cases}$$

$$k_g \times (1) + (2) \Rightarrow 2k_g \exp i(k_g L) = \left(k_g + \frac{1+i}{\delta} \right) \underline{t} \exp \frac{L}{\delta} (i-1)$$

d'où :

$$\underline{t} = \frac{2\delta k_g}{\delta k_g + (1+i)} \exp \left[\frac{L}{\delta} + i \frac{L}{\delta} (\delta k_g - 1) \right]$$

En remplaçant le coefficient \underline{r} dans l'une des relations (1) et (2), on obtient :

$$\underline{r} = \frac{\delta k_g - (1+i)}{\delta k_g + (1+i)} \exp i(2k_g L)$$

3.3.6. L'onde résultant de la superposition dans le guide ($z \leq L$) des ondes incidente et réfléchie est :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ \vec{E} &= E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp i(k_g z - \omega t) \vec{u}_y + E_r^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp -i(k_g z + \omega t) \vec{u}_y \\ \vec{E} &= E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \{ \exp i(k_g z) + \underline{r} \exp -i(k_g z) \} \exp -i(\omega t) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Puisque \vec{E} est complexe, on écrit :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) + i \text{Im}(\vec{E}) = \vec{E} + i \text{Im}(\vec{E})$$

De même, il est possible de trouver $r = |\underline{r}|$ et $\psi = \arg(\underline{r})$ tels que :

$$\underline{r} = r \exp i\psi$$

soit donc :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} \{ \exp i(k_g z) + r \exp -i(k_g z - \psi) \} \exp -i(\omega t) \vec{u}_y \\ \vec{E} &= E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} [\exp i(k_g z - \omega t) + r \exp i(-k_g z + \psi - \omega t)] \vec{u}_y \\ \vec{E} &= E_i^0 \sin \frac{\pi x}{a} [\{ \cos(k_g z - \omega t) + r \cos(-k_g z + \psi - \omega t) \} + \\ &\quad + i \{ \sin(k_g z - \omega t) + r \sin(-k_g z + \psi - \omega t) \}] \vec{u}_y \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = E_i^0 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \{ \cos(k_g z - \omega t) + r \cos(\psi - k_g z - \omega t) \} \vec{u}_y$$

3.3.7. Expression de r en fonction de k_g et δ :

$$\underline{r} = \frac{\delta k_g - (1+i)}{\delta k_g + (1+i)} \exp i(2k_g L) \implies r = \left| \frac{\delta k_g - (1+i)}{\delta k_g + (1+i)} \right| \text{ car } |\exp i(2k_g L)| = 1$$

$$\implies r = |\underline{r}| = \sqrt{\frac{(\delta k_g - 1)^2 + 1}{(\delta k_g + 1)^2 + 1}}$$

Épreuve de Physique II

3.3.8. Les variations du champ électrique résultant dans le guide sont données dans un plan $x = \text{constante}$ et à un instant t donné.

Si l'étude est faite à x fixé, l'expression du champ électrique devient :

$$\vec{E}(z, t) = \mathcal{K} [\cos(k_g z - \omega t) + r \cos(\psi - k_g z - \omega t)] \vec{u}_y$$

$$\text{avec } \mathcal{K} = E_i^0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \text{Constante}$$

Soit E l'amplitude du champ électrique étudié.

► Les ventres sont les maxima d'amplitude : $E = E_{\max}$.

► Les nœuds sont les minima d'amplitude : $E = E_{\min}$.

En effet, les détecteurs usuels sont des détecteurs quadratiques c'est-à-dire ils sont sensibles à l'intensité $I(z)$ qui vaut :

$$I(z) = \langle [E(z, t)]^2 \rangle_t$$

$$I(z) = \mathcal{K}^2 \left\{ \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \cos^2(k_g z - \omega t) dt + \frac{1}{nT} \int_0^{nT} r^2 \cos^2(\psi - k_g z - \omega t) dt + \frac{1}{nT} \int_0^{nT} 2r \cos(k_g z - \omega t) \cos(\psi - k_g z - \omega t) dt \right\}$$

$$I(z) = \mathcal{K}^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} + 2r \cos(2k_g z - \psi) \right\}$$

Deux cas sont à distinguer :

• Si $\cos(2k_g z - \psi) = 1$, on a alors :

$$\left. \begin{aligned} I(z_{\text{ventres}}) &= I_{\max} = \frac{\mathcal{K}^2}{2} (1 + r)^2 \\ I_{\max} &= E_{\max}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{\max} = \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}}{2} (1 + r)$$

• Si $\cos(2k_g z - \psi) = -1$, on a alors :

$$\left. \begin{aligned} I(z_{\text{nœuds}}) &= I_{\min} = \frac{\mathcal{K}^2}{2} (1 - r)^2 \\ I_{\min} &= E_{\min}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{\min} = \frac{\sqrt{2}\mathcal{K}}{2} (1 - r)$$

En résumé on a :

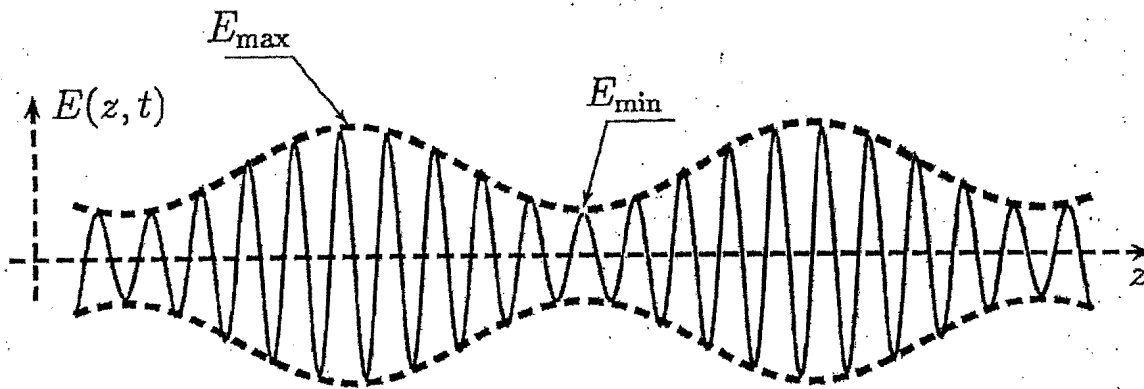


FIG. 3

3.3.9. Positions des ventres et des nœuds :

► Les lieux des ventres z_V sont telles que :

$$\cos(2k_g z_V - \psi) = 1 \text{ soit } 2k_g z_V - \psi = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow z_V = \frac{\psi}{2k_g} + \frac{2n\pi}{2k_g}$$

Sachant que :

$$z_V = \frac{\psi}{2k_g} \text{ si } n=0 \text{ on pose alors } z_0 = \frac{\psi}{2k_g}$$

$$z_V = z_0 + \frac{n\pi}{k_g} \text{ avec } k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \Rightarrow \boxed{z_V = z_0 + n \frac{\lambda_g}{2}}$$

► Les lieux des nœuds z_N sont telles que :

$$\cos(2k_g z_N - \psi) = -1 \text{ soit } 2k_g z_N - \psi = (2n+1)\pi, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow z_N = \frac{\psi}{2k_g} + \frac{(2n+1)\pi}{2k_g}$$

$$z_N = z_0 + \frac{(2n+1)\pi}{2k_g} \text{ avec } k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \Rightarrow \boxed{z_N = z_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_g}{2}}$$

La distance Δ entre deux nœuds consécutifs est :

$$\Delta = z_N(n+1) - z_N(n)$$

$$\Delta = \left[z_0 + \left\{ \left(n+1\right) + \frac{1}{2} \right\} \frac{\lambda_g}{2} \right] - \left[z_0 + \left\{ n + \frac{1}{2} \right\} \frac{\lambda_g}{2} \right] \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{\lambda_g}{2}}$$

Épreuve de Physique II

3.3.10. Taux d'Ondes Stationnaires (T.O.S.) :

$$\mathcal{T} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \text{ avec } \begin{cases} E_{\max} = \frac{\sqrt{2}K}{2} (1+r) \\ E_{\min} = \frac{\sqrt{2}K}{2} (1-r) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{T} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1+r}{1-r}}$$

On peut en déduire que la mesure de \mathcal{T} permet de déterminer le module r du coefficient de réflexion. En effet, si on mesure \mathcal{T} , on tire r par la relation :

$$\boxed{r = \frac{\mathcal{T} - 1}{\mathcal{T} + 1}}$$

3.3.11.

$$\boxed{\lambda_g = 2\Delta} \Rightarrow \lambda_g = 4,22 \text{ cm}$$

Sachant que $\nu \approx 9,67 \text{ GHz}$ et $a = 22,86 \text{ mm}$, l'expression de $k_g = 2\pi/\lambda_g$:

$$k_g = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

donne $\lambda_g = 4,22 \text{ mm}$ qui est en très bon accord avec la valeur déterminée expérimentalement.

3.3.12. Expression simple de δ .

$$r = \sqrt{\frac{(\delta k_g - 1)^2 + 1}{(\delta k_g + 1)^2 + 1}} = \left(\frac{2 - 2\delta k_g}{2 + 2\delta k_g}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \delta k_g}{1 + \delta k_g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

À l'ordre le plus bas non nul en $\delta k_g \ll 1$, on a :

$$\left. \begin{aligned} r &= (1 - \delta k_g)^{\frac{1}{2}} (1 + \delta k_g)^{-\frac{1}{2}} \\ r &\approx \left(1 - \frac{1}{2}\delta k_g\right) \left(1 - \frac{1}{2}\delta k_g\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \approx 1 - \delta k_g$$

d'où :

$$\boxed{\delta = \frac{1-r}{k_g}}$$

Concours National Commun - Filière MP - Session 2000

3.3.13. Étant donné que la tension statique A est proportionnelle à l'amplitude au carré E^2 du champ électrique, on :

$$T = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{\sqrt{A_{\max}}}{\sqrt{A_{\min}}} = 44,4 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{T-1}{T+1} = 0,956$$

et on a aussi :

$$\delta = \frac{1-r}{k_g} = (1-r) \frac{\lambda_g}{2\pi} = \frac{(1-r)\Delta}{\pi} = 0,3 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{2}{\mu_0 \omega \delta^2} = \frac{1}{\mu_0 \pi \nu \delta^2} = 3 \times 10^2 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Calculons $k_g \delta$:

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \simeq 149 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad k_g \delta = 0,045 \ll 1$$

L'hypothèse de la question 3.3.12. est bien vérifiée.

FIN DE LA CORRECTION