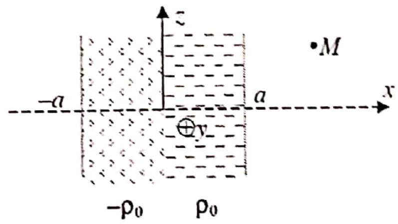
POTENTIEL ET CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

I-1) Le champ électrostatique crée en O par la charge ponctuelle placée en A est $\vec{E}_A(O)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e}_X$ et par la charge ponctuelle placée en B $\vec{E}_B(O)=-\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\vec{e}_X$.

Le champ résultant est donc $\vec{E}(O)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{b^2}\right)\vec{e}_X$. Il est nul si $b^2=4a^2$ soit $\boxed{b=2a}$.

Le potentiel crée en O par la charge placée en A est $V_A(O)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ et celui crée par la charge placée en B $V_B(O)=\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 b}$. Le potentiel total est donc $V(O)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$ soit, avec la condition $b=2a$, $\boxed{V(O)=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}}$.



II-La distribution de charges est invariante par :

- symétrie par rapport au plan contenant un point M quelconque et parallèle à xOy ;
- symétrie par rapport au plan contenant le point M et parallèle à xOz ;

Le champ en M est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans donc il est porté par $\vec{u}_X$. On a donc $\vec{E}(M)=E(x,y,z)\vec{u}_X$.

- antisymétrie par rapport au plan yOz donc $E(-x,y,z)=E(x,y,z)$.
- translation le long de $\vec{u}_Y$ et $\vec{u}_Z$ donc $E(x,y,z)$ ne dépend pas de y et z.

Il reste donc $\vec{E}(M)=E(x)\vec{u}_X$.

L'équation de Maxwell-Gauss $\mathrm{div}(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ devient alors $\frac{dE(x)}{dx}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. On a donc différent cas :

- pour $x<-a$: $\frac{dE(x)}{dx}=0$ ce qui s'intègre en $E(x)=C_1$;
- pour $-a\le x\le 0$: $\frac{dE(x)}{dx}=\frac{-\rho_0}{\varepsilon_0}$ ce qui s'intègre en $E(x)=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x+C_2$;
- pour $0<x<a$: $\frac{dE(x)}{dx}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$ ce qui s'intègre en $E(x)=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x+C_3$;
- pour $a<x$: $\frac{dE(x)}{dx}=0$ ce qui s'intègre en $E(x)=C_4$ mais la propriété $E(x)=E(-x)$

entraîne $C_4=C_1$. De plus, si l'on s'éloigne infiniment de la distribution localisée dans le domaine $[-a, a]$, le champ devient nul soit $\lim\limits_{|x|\to+\infty}E(x)=0$ ce qui entraîne $C_1=0$.

De plus, la distribution de charges est décrite par un modèle 3D donc le champ est continu en tout point donc $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}E(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}E(x)$ soit ici $\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}a+C_3=0$ et de même $\lim\limits_{\substack{x\to -a\\ x<-a}}E(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -a\\ x>-a}}E(x)$ soit $0=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(-a)+C_2$. En identifiant les deux relation, on constate que $C_3=C_2.=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}a$.

On peut donc écrire finalement $\boxed{\begin{cases} |x| > a \; ; \; \vec{E}(M) = \vec{0} \\ |x| < a \; ; \; \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}(|x| - a)\vec{u}_x \end{cases}}$

D'après la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, on a $\dfrac{dV(x)}{dx} = -E(x)$

donc • pour $x < -a$: $\dfrac{dV(x)}{dx} = 0$ ce qui s'intègre en $V(x) = C_1$;

• pour $-a \leq x \leq 0$: $\dfrac{dV(x)}{dx} = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}(-x - a)$ ce qui s'intègre en $V(x) = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(-\dfrac{x^2}{2} - ax\right) + C_2$;

• pour $-a \leq x \leq 0$: $\dfrac{dV(x)}{dx} = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}(x - a)$ ce qui s'intègre en $V(x) = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{x^2}{2} - ax\right) + C_3$;

• pour $a < x$: $\dfrac{dV(x)}{dx} = 0$ ce qui s'intègre en $V(x) = C_4$.

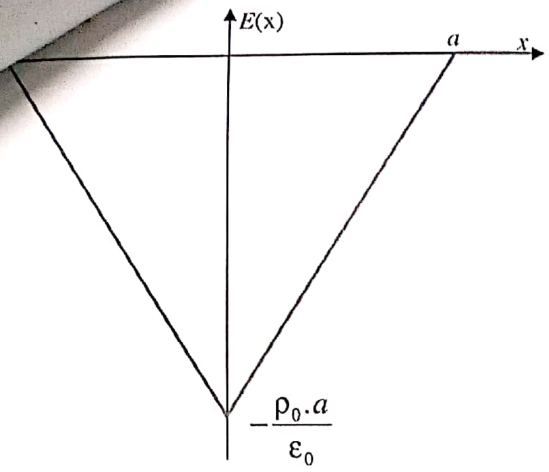
De plus, la distribution de charges est décrite par un modèle 3D donc le potentiel est continu en tout point donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} V(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} V(x)$ soit ici $-\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{a^2}{2} - a^2\right) + C_3 = C_4$ d'où $C_4 = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2}{2} + C_3$.

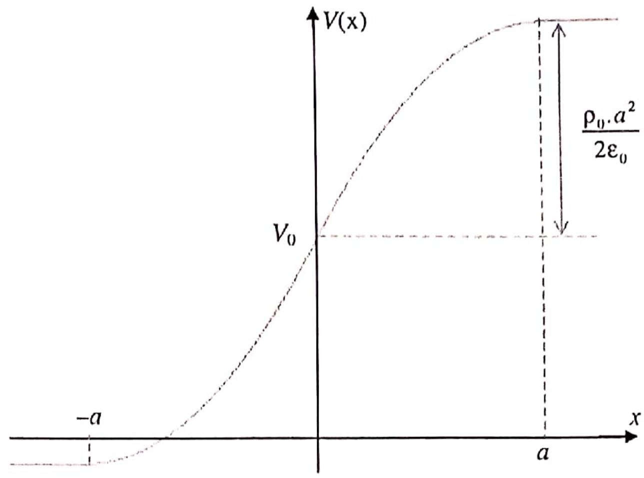
De même $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} V(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} V(x)$ soit ici $C_2 = C_3$.

Enfin, on a $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ x < -a}} V(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -a \\ x > -a}} V(x)$ soit ici $C_1 = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(-\dfrac{a^2}{2} + a^2\right) + C_2 = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2}{2} + C_2$.

Le potentiel est défini à une constante près mais on ne peut pas choisir de la prendre nul à l'infini car la distribution est infinie dans les directions y et z : « il y a des charges à l'infini ». On pose donc $V(x = 0) = V_0$. Alors $C_2 = C_3 = V_0$, $C_4 = V_0 + \dfrac{\rho_0 . a^2}{2\varepsilon_0}$ et $C_1 = V_0 + \dfrac{3\rho_0 . a^2}{2\varepsilon_0}$.

On a donc $\boxed{\begin{cases} x < -a \; ; \; V(M) = V_0 - \dfrac{\rho_0 . a^2}{2\varepsilon_0} \\ -a < x < 0 \; ; \; V(M) = V_0 + \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{2} + a\right)x \\ 0 < x < a \; ; \; V(M) = V_0 - \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{2} - a\right)x \\ a < x \; ; \; V(M) = V_0 + \dfrac{\rho_0 . a^2}{2\varepsilon_0} \end{cases}}$ d'où les courbes ci-dessous :





III- La distribution de masse (source du champ) est invariante par :

• symétrie par rapport à tous les plans contenant le centre O et le point M d'étude ; il en est de même du champ en M qui est donc contenu dans tous ces plans, c'est-à-dire dans leur intersection. Dans la base sphérique de centre O, on peut donc écrire $\vec{H}(M) = H(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r(M)$.

• rotation d'une angle θ quelconque et d'un angle φ quelconque donc $H(r, \theta, \varphi)$ ne dépend pas de θ et φ.

Il reste donc $\vec{H}(M) = H(r)\vec{e}_r(M)$.

Le théorème de Gauss gravitationnel conduit à l'équation locale $\mathrm{div}(\vec{H}) = -4\pi\mathcal{G}\rho(r)$.

Comme $\vec{H}(M)$ n'a qu'une composante sur $\vec{e}_r(M)$, il reste $\mathrm{div}\left(\vec{H}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 H(r)\right)$ d'où $\frac{1}{r^2}2rH(r) + \frac{1}{r^2}r^2\frac{dH(r)}{dr} = -4\pi\mathcal{G}\rho(r)$ soit $\frac{dH(r)}{dr} = -4\pi\mathcal{G}\rho(r) - \frac{2}{r}H(r)$.

Comme on a ici $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(H) = \frac{dH(r)}{dr}\vec{e}_r$, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(H) = \left(-4\pi\mathcal{G}\rho(r) - \frac{2}{r}H(r)\right)\vec{e}_r$ d'où enfin $\boxed{\rho(r)\vec{e}_r = -\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(H) + \frac{2}{r}\vec{H}(r)\right)}$

La détermination précise du champ de gravitation local $\vec{H}$(M) et de son gradient permet de déterminer la valeur locale de $\rho(r)$ et d'en déduire des informations sur la nature du sous-sol.

IV- On note Δ l'axe de symétrie du cylindre chargé.

• La distribution de charges est invariante par symétrie par rapport au plan **passant par *M*** et contenant l'axe Δ et par rapport au plan **passant par *M*** et perpendiculaire à l'axe Δ. Il en est de même du champ $\vec{E}(M)$ qui est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans : il est donc radial.

On repère donc le point M dans la base cylindrique d'axe Δ indiquée sur la figure. On peut alors écrire $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{e}_r(M)$.

• La distribution de charges est invariante par translation le long de Δ car le cylindre est modélisé comme infini donc $E(r, \theta, z)$ ne dépend pas de z.

• La distribution de charges est invariante par rotation d'un angle quelconque autour de Δ donc $E(r, \theta, z)$ ne dépend pas de θ.

Il reste donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r(M)$.

D'après la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$, on en déduit que $V(M)$ ne dépend pas de θ et z puisque les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ sont nulles. On a donc $V(M) = V(r)$.