M.AFEKIR

www.marocprepas.com

marocprepas@yahoo.fr

Quelques aspects de la Physique des plasmas

Un plasma est un gaz ionisé composé d'atomes ou molécules neutres, d'ions positifs et d'électrons. On rencontre de tels milieux dans plusieurs domaines tels que par exemple :

– au laboratoire, le projet de fusion thermonucléaire contrôlée utilise un plasma dont la température atteindrait, s'il est suffisamment confinée, les quelques millions de kelvin nécessaires pour déclencher la fusion nucléaire ;

– dans la vie quotidienne, les tubes fluorescents et certaines lampes d'éclairage utilisent des décharges électriques dans un gaz qui se trouve alors partiellement ionisé ;

– on estime enfin que 99% de la matière de l'Univers est sous forme de plasma (nuages interstellaires, ...)

La composition d'un plasma est caractérisée par les densités, ou nombres de particules par unité de volume, des différentes espèces : n_a pour les espèces neutres, n_i pour les ions et n_e pour les électrons. Le plasma est *globalement* neutre.

Tout au long du problème, on assimilera les propriétés électromagnétiques du plasma à celles du vide caractérisées par une permittivité électrique ε_0 et une perméabilité magnétique μ_0. Les électrons seront supposés non relativistes et on négligera leur poids devant les autres forces mises en jeu.

Cette épreuve comporte cinq parties largement indépendantes entre elles.

Données utiles et notations

- Masse de l'électron : $m_e \approx 9,1 \times\ 10^{-31}$ kg ;
- Masse du proton : $m_p \approx 1,67 \times\ 10^{-27}$ kg ;
- Charge élémentaire : $e \approx 1,6 \times\ 10^{-19}$ C ;
- Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 \approx 3,0 \times\ 10^{8}$ m.s^{-1} ;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 \approx 4\pi \times\ 10^{-7}$ H.m^{-1} ;
- Constante de BOLTZMANN : $k_B \approx 1,38 \times\ 10^{-23}$ J.K^{-1} ;
- Constante de PLANK réduite : $\hbar = h/2\pi \approx 1,05 \times\ 10^{-34}$ J.s ;
- Laplacien scalaire en coordonnées sphériques (r, θ, φ) pour un champ scalaire f ne dépendant que de la coordonnée r :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2(r\,f)}{\mathrm{d}r^2}$$

- Identité vectorielle :

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{C}) - \Delta\overrightarrow{C}$$

- On rappelle enfin les équations de MAXWELL dans un milieu ayant les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j} + \frac{1}{c_0^2}\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Dans tout le problème $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ désignera une base orthonormée directe attachée au système de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Pour les grandeurs évoluant sinusoïdalement avec le temps, on utilisera la notation complexe avec le facteur $\exp -\mathrm{i}\,\omega\, t$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Conformément à la pratique courante, les grandeurs complexes seront *soulignées*.

1ère partie

Réponse d'un plasma à un champ électromagnétique

Le plasma est soumis à l'action d'un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. On suppose que les ions positifs sont fixes par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen. Les électrons du plasma sont supposés en plus soumis à une force du type « frottement visqueux » donnée par $\vec{f} = -m_e/\tau\ \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron et τ une constante positive. On négligera la force d'origine magnétique.

1.1. Préliminaires

1.1.1. Quelle est la dimension de la constante τ ? Justifier.

1.1.2. Quelle est l'origine de la force $\vec{f}$?

1.1.3. Écrire l'équation du mouvement vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ d'un électron du plasma.

1.1.4. Exprimer le vecteur courant volumique $\vec{j}$ en fonction de n_e, e et $\vec{v}$.

1.1.5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{j}$.

1.2. Pulsation plasma

1.2.1. À partir des équations de MAXWELL, établir l'équation de conservation de la charge et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ.

1.2.2. Montrer que, si on néglige les causes d'amortissement, le plasma peut être le siège d'une oscillation d'ensemble du gaz électronique. Exprimer la pulsation ω_p de ce mode propre d'oscillation de charges, appelée pulsation plasma, en fonction de n_e, e, m_e et ε_0.

1.2.3. Calculer ω_p ainsi que la longueur d'onde λ_p correspondante en précisant le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient, dans les cas suivants :

– ionosphère terrestre où $n_e \approx\ 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$;

– décharge dans un gaz où $n_e \approx\ 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$;

– sodium métallique de concentration atomique, ou nombre d'atome par unité de volume, $C_{\mathrm{Na}} \approx 6{,}02 \times\ 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$; on supposera que chaque atome de sodium donne un électron de conduction ;

– aluminium métallique de concentration atomique $C_{\mathrm{Al}} \approx 2{,}65 \times\ 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$; on supposera que chaque atome d'aluminium donne trois électrons de conduction.

On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau.

1.3. Conductivité électrique

Le champ électrique est un champ harmonique qui s'écrit en notation complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp -\mathrm{i}\,\omega\, t$.

1.3.1. Exprimer le vecteur courant volumique $\underline{\vec{j}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$, ω, ω_p, ε_0 et τ.

1.3.2. Montrer que le plasma vérifie une loi d'OHM généralisée et en déduire la conductivité complexe $\underline{\sigma}(\omega)$ du plasma.

2$^{\text{ème}}$ partie

Autoconfinement d'une colonne de plasma

Certaines expériences de physique nécessitent de confiner de la matière dans une région limitée de l'espace. Le but de cette partie est de montrer qu'un plasma peut s'auto-contracter lorqu'il est parcouru par un courant d'intensité suffisante. Pour cela on considère une colonne de plasma de symétrie cylindrique d'axe Oz et de rayon R. Le plasma est traversé par un courant électrique d'intensité I constante dirigé suivant Oz et uniformément réparti dans la section droite de la colonne de plasma. Le plasma est supposé en équilibre thermodynamique local et on note $n(r)$ la densité totale des particules à la distance r de l'axe. La pression $p(r)$ est donnée par la loi des gaz parfaits sous sa forme locale $p(r) = n(r)\, k_B T$ où k_B est la constante de BOLTZMANN et T la température thermodynamique supposée constante.

2.1. Déterminer l'expression du champ magnétique créé par le courant I en tout point de l'espace.

2.2. Exprimer la force magnétique $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_m$ due au courant I qui s'exerce sur un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ de plasma. Quelle est l'effet d'une telle force ?

2.3. Montrer que les forces de pression qui s'exercent sur un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ peuvent être décrites par une densité volumique donnée, en un point M où la pression est $p(M)$, par $\overrightarrow{f}_P(M) = -\overrightarrow{\nabla}_M p(M)$.

2.4. En déduire l'expression de la pression $p(r)$ à l'équilibre thermodynamique local sachant que la colonne de plasma est placée dans le vide.

2.5. Établir la formule dite de BENNETT traduisant la condition d'équilibre thermodynamique local du plasma et reliant le nombre total N de particules par unité de *longueur* de la colonne de plasma et le courant I qui la traverse.

2.6. Calculer le courant I nécessaire pour confiner une colonne de plasma de $30\ \mathrm{cm}$ de diamètre. La densité des particules supposées monoatomiques est $n_0 \approx 10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$ et leur énergie cinétique moyenne est égale à $200\ \mathrm{keV}$.

3$^{\text{ème}}$ partie

Effet d'écran dans un plasma

On se propose d'examiner, dans cette partie du problème, comment le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est-il modifié dans un plasma. Pour ce faire, on commence par établir la loi de distribution des charges avant de caractériser l'effet d'écran à l'aide notamment de la longueur de DEBYE.

3.1. Loi de Boltzmann

Considérons un ensemble de charges q dont la densité n_0 à l'équilibre est uniforme. Au sein de cette distribution, on place une charge test Q_t en un point O pris comme origine des coordonnées sphériques. On note $n(M)$ la nouvelle distribution des charges et $V(M)$ le potentiel électrostatique résultant de cette perturbation. On suppose que $V(M)$ est à symétrie *sphérique* et que le système est à l'équilibre thermodynamique à la température T constante. La pression est donnée par $p(M) = n(M)\, k_B T$. On rappelle que les forces de pression peuvent être décrites par une densité volumique donnée, en un point M où la pression est $p(M)$, par $\overrightarrow{f}_P(M) = -\overrightarrow{\nabla}_M p(M)$.

3.1.1. Écrire la condition d'équilibre des charges sous l'action de la force électrique et des forces de pression et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $n(M)$.

3.1.2. En intégrant l'équation précédente et en tenant compte des conditions aux limites montrer, que la densité des particules $n(M)$ obéit à la loi de BOLTZMANN

$$n(M) = n_0 \exp -\frac{q\,V(M)}{k_B T}$$

3.2. Longueur de Debye

On se propose maintenant d'appliquer les résultats précédents au plasma considéré. On admettra que la loi de BOLTZMANN reste valable aussi bien pour les électrons que pour les ions. On supposera que les ions positifs portent une seule charge élémentaire positive $+e$ et on notera n_0 leur densité moyenne. On se propose de déterminer le potentiel électrostatique $V(M)$ qui règne autour d'un ion fixe pris comme origine.

3.2.1. Que vaut la densité moyenne des électrons ? Justifier.

3.2.2. On suppose que les densités $n_i(M)$ et $n_e(M)$ obéissent à la loi de BOLTZMANN.

3.2.2.1. Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(M)$ au point M du plasma.

3.2.2.2. Que devient l'expression de $\rho(M)$ dans le cadre de l'approximation de faible perturbation, $e\,V \ll k_B T$, que l'on adoptera dans toute la suite ?

3.2.3. On se propose de déterminer le potentiel qui règne autour d'un ion positif placé à l'origine.

3.2.3.1. Établir l'équation de POISSON reliant le potentiel électrostatique V et la densité volumique de charge ρ.

3.2.3.2. En déduire que le potentiel électrostatique est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2(r\,V)}{\mathrm{d}r^2} - \frac{r}{\lambda_D^2}\,V = 0$$

où λ_D est une constante, appelée longueur de DEBYE, que l'on exprimera en fonction de n_0, T, e, k_B et ε_0.

3.2.3.3. En déduire l'expression du potentiel électrostatique satisfaisant aux conditions aux limites très loin de l'ion ainsi qu'à son voisinage. Justifier. Au besoin, on assimilera les ions à des sphères de rayon négligeable devant la longueur de DEBYE λ_D.

3.2.3.4. Tracer sur un même graphique $V(r)$ et le potentiel créé par un ion de charge $+e$ dans le vide. Comparer et commenter.

3.2.4.

3.2.4.1. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point M du plasma.

3.2.4.2. En déduire la charge électrique $Q_{\text{totale}}(R)$ contenue dans une sphère de rayon R centrée sur l'origine. Que vaut $Q_{\text{totale}}(R)$ lorsque R est très grand devant la longueur de DEBYE λ_D ? Commenter.

4ème partie

Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Dans cette partie, on se propose d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma. Pour cela, on considère un plasma constitué d'ions de charges $+e$ de densité n_0 uniforme, fixes en première approximation et d'électrons de densité n_0 uniforme en l'absence de champ électromagnétique.

On étudie la possibilité de propagation dans la direction Oz au sein du plasma, d'une onde électromagnétique plane décrite par le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$.

Par la suite, tout champ vectoriel $\overrightarrow{C}$ sera décomposé en une composante longitudinale parallèle à Oz, notée $\overrightarrow{C}_{//}$, et une composante transversale orthogonale à Oz, notée $\overrightarrow{C}_{\perp}$.

4.1. Relations générales

4.1.1.

4.1.1.1. Donner une définition aussi précise que possible de chacun des termes suivants : onde plane, onde plane transversale, onde plane longitudinale.

4.1.1.2. À partir des équations de MAXWELL, montrer l'existence d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ et d'un potentiel scalaire ϕ.

4.1.1.3. $\overrightarrow{A}$ et ϕ sont-ils uniques ? Expliquer.

4.1.2. Par la suite on imposera la condition supplémentaire $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$.

4.1.2.1. Montrer qu'alors $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}_{\perp}$.

4.1.2.2. Que vaut alors $\overrightarrow{B}_{//}$? En déduire une relation simple entre $\overrightarrow{B}_{\perp}$ et $\overrightarrow{A}$.

4.1.2.3. Exprimer $\overrightarrow{E}_{//}$ en fonction de ϕ seulement.

4.1.2.4. Exprimer de même $\overrightarrow{E}_{\perp}$ en fonction de $\overrightarrow{A}$ seulement.

4.1.3.

4.1.3.1. Établir l'équation de POISSON pour le potentiel scalaire ϕ.

4.1.3.2. Montre que le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ obéit à une équation de POISSON généralisée qui s'écrit

$$\Delta\overrightarrow{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} + \mu_0\overrightarrow{j} = \frac{1}{c_0^2}\overrightarrow{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Pourquoi cette équation fait-elle intervenir le potentiel scalaire ϕ ?

4.1.3.3. En déduire une équation différentielle reliant le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ à $\overrightarrow{j}_{\perp}$.

4.1.3.4. En déduire aussi une équation reliant $\overrightarrow{j}_{//}$ et ϕ.

4.1.4. Le passage de l'onde dans le plasma provoque un mouvement de ses électrons décrit par le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M,t)$. Il en résulte un courant électrique de vecteur volumique $\overrightarrow{j}$ ainsi qu'une modulation de la densité volumique d'électrons qui devient alors $n(z,t) = n_0 + \Delta n(z,t)$. On se placera dans l'hypothèse des faibles perturbations où $|\Delta n(z,t)| \ll n_0$. On considérera donc Δn, mais aussi ϕ, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{j}$ comme des infiniment petits de premier ordre et on *linéarisera* en conséquence toutes les équations du problème.

On s'intéresse au mouvement des électrons sous l'effet de la seule action du champ électrique. On néglige donc le poids des électrons ainsi que l'action de la force magnétique.

On donne l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a}$ d'un électron passant au point M à l'instant t, en fonction du champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M,t)$:

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}$$

On remarquera que le terme $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}$ est un terme de second ordre en $\overrightarrow{v}$.

4.1.4.1. Écrire l'équation du mouvement d'un électron du plasma siège de l'onde électromagnétique.

4.1.4.2. Exprimer $\overrightarrow{v}_{\perp}$ en fonction de e, m_e et $\overrightarrow{A}$ uniquement.

4.1.4.3. Exprimer de même $\overrightarrow{j}$ en fonction de n_0, e et $\overrightarrow{v}$.

4.1.5. Déduire de ce qui précède, l'équation différentielle que doit vérifier $\overrightarrow{A}$.

4.2. Conditions de propagation

On cherche à étudier la possibilité de propagation dans le plasma d'une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique décrite par le potentiel vecteur

$$\underline{\overrightarrow{A}} = \overrightarrow{A}_0 \exp \mathrm{i}(k\,z - \omega\,t)$$

où $\overrightarrow{A}_0$ est un vecteur réel constant.

4.2.1. Établir la relation de dispersion entre k et ω et faisant apparaître la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$.

4.2.2.

4.2.2.1. Tracer la courbe représentative de k en fonction de ω. On tracera sur le même graphique, la relation de dispersion pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le vide illimité.

4.2.2.2. Dans quel domaine de fréquence y'a-t-il propagation ? Que se passe-t-il dans l'autre domaine ; on donnera dans ce dernier cas, l'expression du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ et on la commentera.

4.2.3.

4.2.3.1. Définir et calculer la vitesse de phase v_φ. Commenter.

4.2.3.2. Définir de même et calculer la vitesse de groupe v_g. Commenter.

4.2.3.3. Quelle relation simple lie v_φ et v_g à la célérité c_0 de la lumière dans le vide ?

4.3. Onde longitudinale

On examine dans cette partie la possibilité de propagation d'une onde électromagnétique *longitudinale* progressive et monochromatique dont le potentiel scalaire est donné, en notation complexe, par $\underline{\phi}(z,t) = \phi_0 \exp \mathrm{i}(k\,z - \omega\,t)$.

4.3.1. Exprimer $\overrightarrow{j}_{//}$ en fonction de ε_0, k, ω et ϕ.

4.3.2. En déduire une expression de $\overrightarrow{v}_{//}$ en fonction de ε_0, n_0, e, k, ω et ϕ

4.3.3. Établir une autre expression de $\overrightarrow{v}_{//}$ en fonction de e, m_e, ω, k et ϕ.

4.3.4. En déduire que pour, k quelconque, il existe une seule pulsation permettant la propagation d'une onde longitudinale dans le plasma. Donner l'expression de cette pulsation et commenter.

5ème partie

Effets collectifs dans un plasma – Plasmons

Dans cette partie du problème, on se propose de donner une interprétation physique de la pulsation plasma ω_p introduite dans les parties précédentes. Cette pulsation apparaîtra comme étant celle d'oscillation collective du gaz de charges. On pourra alors introduire la notion de plasmon. On exposera enfin une méthode d'excitation des plasmons dans un matériau solide.

5.1. Préliminaire

5.1.1. On considère une distribution superficielle de charge σ uniforme confondue avec le plan $x0y$ placée dans le vide. Établir l'expression du champ électrique créé par cette distribution en un point situé à une distance h du plan xOy très faible devant les dimensions linéaires caractéristiques de la distribution.

5.1.2. On considère à présent deux distributions du même type que la précédente caractérisées par les densités superficielles $+\sigma$ et $-\sigma$; $\sigma > 0$. Les deux distributions sont séparées d'une distance d très faible devant leur dimensions linéaires caractéristiques. Établir l'expression du champ électrique qui règne dans l'espace compris entre les deux distributions.

5.2. Oscillations longitudinales d'une colonne de plasma

On considère un cylindre de plasma d'axe Oz, de hauteur h très faible devant ses dimensions linéaires transversales caractéristiques. Il contient des ions de charge $+e$ et de masse m_i et des électrons. On désigne par n_0 la densité à l'équilibre des électrons égale à celle des ions. On suppose que les ions sont fixes.

On déplace l'ensemble des électrons d'une distance z petite devant h de sorte que la distribution de charge résultante est équivalente, lorsque $z \neq 0$, à celle étudiée en 5.1.

5.2.1. Pourquoi peut-on considérer les ions comme étant fixes en première approximation ?

5.2.2. Déterminer la densité équivalente σ.

5.2.3. Quelle est la force qui agit sur un électron du plasma ?

5.2.4. Établir l'équation différentielle du mouvement des électrons.

5.2.5. Montrer que les électrons du plasma effectuent des oscillations collectives à une pulsation que l'on exprimera en fonction de n_0, e, m_e et ε_0. Commenter.

5.3. Plasmon

Un plasmon est une oscillation de plasma quantifiée d'énergie $\hbar\omega_p$ et d'impulsion $\hbar\overrightarrow{k}$. Pour observer l'excitation de plasmon, on soumet une fine couche métallique au bombardement par un faisceau homocinétique d'électrons d'énergie cinétique initiale donnée E_c. On compte le nombre des électrons N_s ayant traversé la couche tout en mesurant leur énergie cinétique. Le tracé de N_s en fonction de la perte d'énergie $\Delta E = E_{c_i} - E_{c_f}$ des électrons constitue un spectre de pertes d'énergie (figure 1).

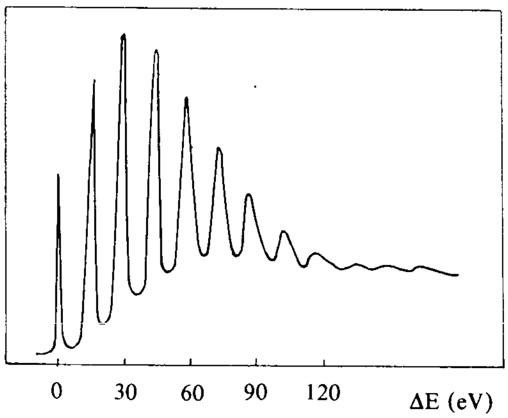

Figure 1: Spectre des pertes d'énergie ΔE subies par des électrons d'énergie cinétique initiale $E_{c_i} = 50\,\mathrm{keV}$ traversant une couche mince d'aluminium d'épaisseur $240\,\mathrm{nm}$. D'après P. TREBBIA et C. COLLIEX.

5.3.1. En exprimant une loi de conservation, donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c^{(1)}$ d'un électron ayant excité un seul plasmon.

5.3.2. Donner de même l'expression de l'énergie cinétique $E_c^{(n)}$ d'un électron ayant excité n plasmons.

5.3.3. La figure 1 représente le spectre des pertes d'énergie subies par des électrons d'énergie cinétique initiale $E_{c_i} = 50\,\mathrm{keV}$ traversant une couche mince d'aluminium d'épaisseur $240\,\mathrm{nm}$.

5.3.3.1. Déterminer à partir du graphe, l'énergie du plasmon de volume ainsi mis en évidence.

5.3.3.2. En déduire la densité électronique n_0 de la couche mince d'aluminium considérée.

FIN DE L'ÉPREUVE