Généralités sur les fonctions de deux variables

Exercice 1 Déterminer $\inf\limits_{x,y>0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+xy\right)$.

Exercice 2 Déterminer tous les couples $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ pour lesquels il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que :
$\forall x,y>0, x^\alpha y^\beta \leq M(x+y)$

Exercice 3 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $\mathbb{R}^2$. On note $d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$.
Montrer que $d:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Limite

Exercice 4 Etudier l'existence et la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

a) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $\dfrac{x^3}{y}$ c) $\dfrac{xy}{x-y}$

d) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ e) $\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$ f) $\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

g) $\dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$ h) $\dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$ i) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Exercice 5 Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^4+y^4}$ c) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$ e) $f(x,y)=x^y=\mathrm{e}^{y\ln x}$ f) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par
$F(x,y)=\dfrac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}$. Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}F(x,y)$.

Continuité

Exercice 7 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+y^2-1 \text{ si } x^2+y^2>1\\ -\dfrac{1}{2}x^2 \text{ sinon}\end{cases}$.

Montrer que f est continue.

Exercice 8 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si} \quad y\neq x\\ f'(x) & \text{si} \quad y=x\end{cases}.$$
Montrer que F est continue.

Exercice 9 Soit $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^y$ pour $x>0$ et $f(0,y)=0$.

a) Montrer que f est une fonction continue.

b) Est-il possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$?

Exercice 10 Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f:A\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit a et b deux points de A et y un réel tels que $f(a)\le y\le f(b)$.
Montrer qu'il existe $x\in A$ tel que $f(x)=y$.

Dérivées partielles

Exercice 11 Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

a) $f(x,y)=x^y$ (avec $y>0$) b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ c) $f(x,y)=x\sin(x+y)$.

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x}, \text{ si } x\neq 0\\ 0, \text{ si } x=0\end{cases}$.

a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.

b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 13 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

Exercice 14 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Justifier que f est continue en $(0,0)$.
Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Exercice 15 Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. On pose $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\varphi(y/x)$.

Montrer que f vérifie la relation : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

Fonctions de classe C^1

Exercice 16 Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

a) $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

b) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 17 Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\int_x^y\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Dérivées de fonctions composées

Exercice 18 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ partiellement dérivable en ses deux variables x et y.
On pose $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=f(2t,1+t^2)$.
Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 19 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.
a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
c) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 20 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=f(y,x)$.
Quelle relation existe-t-il entre les dérivées partielles de f ?

Exercice 21 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x+t,y+t)=f(x,y)$.
Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

Exercice 22 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(tx,ty)=f(x,y)$.
Montrer que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

Exercice 23 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ homogène de degré $n\in\mathbb{N}$ i.e. telle que :
$\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.
a) Montrer que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf$.
b) On suppose $n\geq 1$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi homogènes, préciser leur degré.

Exercice 24 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f(u^2+v^2,uv)$.
a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Fonctions de classe C^2

Exercice 25 Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
a) $f(x,y)=x^2(x+y)$ b) $f(x,y)=\cos(xy)$.

Exercice 26 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 27 On définit une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Est-elle $\mathcal{C}^2$?

Exercice 28 Soit f et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $F(x,y)=f(x+\varphi(y))$.

a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$.

b) Vérifier l'égalité : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$.

Exercice 29 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f(uv,u^2+v^2)$.

a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

b) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 30 Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

Justifier que g est $\mathcal{C}^2$ et exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

Extremum de fonctions de deux variables

Exercice 31 Déterminer les extrema locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$

b) $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+5$

c) $f(x,y)=x^3+y^3$

d) $f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$

e) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 32 En réalisant le changement de variables $\begin{cases}u=x+y\\ v=2y+3y\end{cases}$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $3\dfrac{\partial f}{\partial x}-2\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

Exercice 33 En réalisant le changement de variables $\begin{cases}u=x\\ v=y-x\end{cases}$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=f$.

Exercice 34 Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$ via $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$.

Exercice 35 Résoudre $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en passant en coordonnées polaires.

Exercice 36 En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}=f$.

Exercice 37 En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Equations aux dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 38 Soit $c>0$. En réalisant le changement de variables $\begin{cases}u=x+ct\\v=x-ct\end{cases}$, déterminer les fonctions $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

Exercice 39 En réalisant le changement de variables $\begin{cases}u=x\\v=x+y\end{cases}$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Exercice 40 En réalisant le changement de variables $\begin{cases}u=xy\\v=x/y\end{cases}$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Problème de primitivation

Exercice 41 Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

a) $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=xy^2\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2y\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$.

Analyse vectorielle

Exercice 42 On appelle laplacien d'un champ scalaire F de classe $\mathcal{C}^2$ le champ scalaire défini par $\Delta F=\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}F$.

a) Montrer que $\Delta F=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

b) Exprimer $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(M)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(M)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial x}(M)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M)$

c) Exprimer ΔF en fonction de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Exercice 43 Soit F un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ de l'espace. Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)$ en fonction $\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial z}(M)$ et des vecteurs du repère cylindrique associé au point M.

Exercice 44 Soit $\vec{F}$ le champ de vecteurs du plan défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

a) Calculer $\text{div}\,\vec{F}(M)$

b) Le champ de vecteurs $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 45 Soit $\vec{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$.

a) Ce champ de vecteur dérive-t-il d'un potentiel ?

b) Calculer $\text{div}\,\vec{F}(M)$ et $\text{Rot}\,\vec{F}(M)$.

Exercice 46 Soit $\vec{\omega}$ un vecteur de l'espace et $\vec{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par $\vec{F}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

a) Calculer $\text{div}\,\vec{F}(M)$ et $\text{Rot}\,\vec{F}(M)$.

b) Le champ de vecteur $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 47 Fonctions harmoniques

Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si et seulement si son laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est nul.

a) Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

b) Montrer que f est harmonique ssi φ' est solution d'une équation différentielle qu'on précisera.

c) En résolvant cette équation, déterminer f.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr