**Exercice 1 :**

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Allez à : Correction exercice 1 :

**Exercice 2 :**

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Allez à : Correction exercice 2 :

**Exercice 3 :**

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$A_1 = ]-\infty, 0]$; $A_2 = ]-\infty, 0[$; $A_3 = ]0, +\infty[$; $A_4 = [0, +\infty[$; $A_5 = ]1,2[$; $A_6 = [1,2[$.
2. Soient $A = ]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B = ]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \quad et \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : Correction exercice 3 :

**Exercice 4 :**

Soient $A = ]-\infty, 3]$, $B = ]-2,7]$ et $C = ]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Allez à : Correction exercice 4 :

**Exercice 5 :**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Allez à : Correction exercice 5 :

**Exercice 6 :**

Soient $E$ un ensemble et $A$ et $B$ deux parties de $E$. On suppose que :
$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$
On pose
$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E(A \cup B)$$

1. Montrer que $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ sont non vides.
2. Montrer que $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Allez à : Correction exercice 6 :

**Exercice 7 :**

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$A_1 = ]-\infty, 0]$; $A_2 = ]-\infty, 0[$; $A_3 = ]0, +\infty[$; $A_4 = [0, +\infty[$; $A_5 = ]1,2[$; $A_6 = [1,2[$.
2. Soient $A = ]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B = ]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : Correction exercice 7 :

**Exercice 8 :**

Justifier les énoncés suivants.

a) Soient $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$. Si $A$ est inclus dans $B$, alors le complémentaire de $B$ dans $E$ est inclus dans le complémentaire de $A$ dans $E$.

b) Soient $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$. Si $A$ et $B$ sont disjoints, alors tout élément de $E$ est soit dans $C_E^A$ soit dans $C_E^B$.

c) Soient $E$ un ensemble, $A$ un sous-ensemble de $E$. Déterminer les ensembles suivants : $C_E(C_E A)$ ; $A \cap C_E A$ ; $A \cup C_E A$ ; $C_E \emptyset$ ; $C_E E$

Allez à : Correction exercice 8 :

**Exercice 9 :**

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : Correction exercice 9 :

**Exercice 10 :**

On rappelle que l'on note

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

**Exercice 11 :**

On rappelle que pour toutes parties $U$ et $V$ d'un ensemble $E$, on note

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

1. Montrer que pour toutes parties $A$, $B$ et $C$ d'un ensemble $E$.

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cup C) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \overline{A} \cap (B \Delta C)$$

Allez à : Correction exercice 11 :

**Exercice 12 :**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$.

1. Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) \ ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
3. 

Allez à : Correction exercice 12 :

**Exercice 13 :**

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$ . Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
   Si $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$

Allez à : Correction exercice 13 :

**Exercice 14 :**

Soit $E$ un ensemble et $F$ et $G$ deux parties de $E$. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Allez à : Correction exercice 14 :

**Exercice 15 :**

Soit $E$ un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Pour $A$ et $B$ dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de $A$ par $B$ l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous $A$, $B$ et $C$ dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$
   b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Allez à : Correction exercice 15 :

**Exercice 16 :**

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles $I$ et $J$ tels que $f$ soit injective et surjective.

Allez à : Correction exercice 16 :

**Exercice 17 :**

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \qquad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2 \qquad f: [0,1] \to [0,2], \quad x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + x^3 \qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + x^3 \qquad k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + x^4$$

Allez à : Correction exercice 17 :

**Exercice 18 :**

Soit $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. $f$ est-elle injective ?
2. $f$ est-elle surjective ?
3. $g$ est-elle injective ?
4. $g$ est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 18 :

**Exercice 19 :**

Soients

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \qquad\qquad g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$n\mapsto 2n \qquad\qquad n\mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de $x$

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f\circ g$ et $g\circ f$.

Allez à : Correction exercice 19 :

**Exercice 20 :**

Soit $f$ une application de $E$ vers $E$ telle que :

$$f\big(f(E)\big)=E$$

Montrer que $f$ est surjective.

Allez à : Correction exercice 20 :

**Exercice 21 :**

On considère l'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $f(n)=n^2$

1. Existe-t-il $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$f\circ g=Id_{\mathbb{N}}$ ?
2. Existe-t-il $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$h\circ f=Id_{\mathbb{N}}$ ?

Allez à : Correction exercice 21 :

**Exercice 22 :**

Soit $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définie par $f(n)=2n$

1. Existe-t-il une fonction $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $f\circ g=Id_{\mathbb{Z}}$ ?
2. Existe-t-il une fonction $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $h\circ f=Id_{\mathbb{Z}}$ ?

Allez à : Correction exercice 22 :

**Exercice 23 :**

Soit $f:E\to F$ une application, où $Card(E)=Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $f$ est injective

(ii) $f$ est surjective

(iii) $f$ est bijective

Allez à : Correction exercice 23 :

**Exercice 24 :**

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ et $v:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u\circ v\circ u:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N}:(a,b,c)\mapsto 2^a3^b5^c$ est une application
   (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. L'application $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ qui à l'entier $l\in\mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de $l$ par $n$ est une application.
4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Allez à : Correction exercice 24 :

**Exercice 25 :**

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \to \mathcal{P}(E)$.

Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Allez à : Correction exercice 25 :

**Exercice 26 :**

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $I_n$ l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$ ?
2. A quelle condition portant sur les entiers $m$ et $n$ peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Allez à : Correction exercice 26 :

**Exercice 27 :**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si $f$ et $g$ sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$
   c. $f \circ f = Id_E$

Allez à : Correction exercice 27 :

**Exercice 28 :**

Soient $X$ et $Y$ deux ensembles non vides et $f$ une application de $X$ dans $Y$. Une application $s$, de $Y$ dans $X$, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de $f$.

1. Montrer que si $f$ admet au moins une section alors $f$ est surjective.
2. Montrer que toute section de $f$ est injective.

Une application $r$, de $Y$ dans $X$, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de $f$.

3. Montrer que si $f$ possède une rétraction alors $f$ est injective.
4. Montrer que si $f$ est injective alors $f$ possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de $f$ est surjective.
6. En déduire que si $f$ possède à la fois une section $s$ et une rétraction $r$, alors $f$ est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

Allez à : Correction exercice 28 :

**Exercice 29 :**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$, montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que $f$ est injective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$ et pour toute partie $B$ de $E$, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Allez à : Correction exercice 29 :

**Exercice 30 :**

1. Soit $f$ l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
$$f(1) = 4,\quad f(2) = 1\quad, f(3) = 2,\quad f(4) = 2.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Allez à : Correction exercice 30 :

**Exercice 31 :**

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.
2. Soit $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Allez à : Correction exercice 31 :

**Exercice 32 :**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Soient $A'$ et $B'$ deux parties quelconques de $F$, non vides. Montrer que :

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Allez à : Correction exercice 32 :

**Exercice 33 :**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et soit $f$ une application de $E$ dans $F$ .

1. Montrer que pour toute partie $A$ de $E$, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. Montrer que pour toute partie $B$ de $F$, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Montrer que $f$ est injective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$ on a $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si pour toute partie $B$ de $F$ on a $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Allez à : Correction exercice 33 :

**Exercice 34 :**

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter $D$ dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ vérifient
$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$
Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

   b. Montrer que $f$ est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..
3. Est-ce que $f$ est surjective ?

Allez à : Correction exercice 34 :

**CORRECTIONS**

**Correction exercice 1 :**

$$A \cap B = \{1,2,3\}\ ; \qquad A \cup B = \{0,1,2,3\}$$

Remarque :

Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)$$

Remarque :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = 3 \times 4 = 12$$

Allez à : Exercice 1 :

**Correction exercice 2 :**

$$A \cap B = [2,3]\ ; \quad A \cup B = [1,4]$$

Allez à : Exercice 2 :

**Correction exercice 3 :**

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 = ]0,+\infty[\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_2 = [0,+\infty[\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_3 = ]-\infty,0]\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_4 = ]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 = ]-\infty,1] \cup [2,+\infty[;\ C_{\mathbb{R}}A_6 = ]-\infty,1[\cup [2,+\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2];\quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1,+\infty[\cap]2,+\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Allez à : Exercice 3 :

**Correction exercice 4 :**

$$A \cap B = ]-2,3]$$
$$A \cup B = ]-\infty,7]$$
$$B \cap C = ]-2,7]$$
$$B \cup C = ]-5,+\infty[$$
$$\mathbb{R} \setminus A = ]3,+\infty[$$
$$A \setminus B = ]-\infty,-2]$$

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = ]3,+\infty[\cap\, (]-\infty,-2] \cup ]7,+\infty[) = (]3,+\infty[\cap]-\infty,-2]) \cup (]3,+\infty[\cap]7,+\infty[)$$
$$= \emptyset \cup ]7,+\infty[=]7,+\infty[$$

Ou mieux

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = ]7,+\infty[$$
$$(\mathbb{R} \setminus (A \cup B) = ]7,+\infty[$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = ]-2,3] \cup ]-5,3] = ]-5,3]$$

Ou

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) = ]-\infty,3] \cap ]-5,+\infty[=]-5,3]$$
$$A \cap (B \cup C) = ]-\infty,3] \cap ]-5,+\infty[=]-5,3]$$

Allez à : Exercice 4 :

**Correction exercice 5 :**

Il s’agit de résultats du cours que l’on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les redémontrer.

1. Si $x \in A \cup (B \cap C)$

   Alors $\big(x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C)\big)$

   Alors $\big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\big)$

Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, par conséquent $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Si $(x \in B \text{ et } x \in C)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$
Donc si $\big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\big)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$
On a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$.

$$(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$$

Si $\big(x \in A \quad \text{et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$ alors $x \in A \cap A \quad \text{ou } x \in A \cap C$
Si $\big(x \in B \quad \text{et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$ alors $x \in B \cap A \quad \text{ou } x \in B \cap C$
Alors $x \in A \quad \text{ou } x \in A \cap C \quad \text{ou } x \in B \cap A \quad \text{ou } x \in B \cap C$
Alors $x \in A \quad \text{ou } x \in A \cap C \subset A \quad \text{ou } x \in B \cap A \subset A \quad \text{ou } x \in B \cap C$
Alors $x \in A \quad \text{ou } x \in B \cap C$
Alors $x \in A \cup (B \cap C)$
On a montré que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$
Finalement $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Si $x \in A \cap (B \cup C)$
Alors $(x \in A \quad \text{et } x \in B \cup C)$
Alors $\big(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)\big)$
Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \in C)$
Alors $x \in A \cap B \quad \text{ou} \quad x \in A \cap C$
Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On a montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Alors $x \in A \cap B \quad \text{ou} \quad x \in A \cap C$
Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \in C)$
Alors $(x \in A \text{ ou } x \in A)$ et $(x \in A \text{ ou } x \in C)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in A)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in C)$
Alors $x \in A \quad \text{et } x \in A \cup C \quad \text{et } \quad x \in B \cup A \quad \text{et } \quad x \in B \cup C$
Comme $x \in A \quad \text{et } x \in A \cup C \quad \text{et } \quad x \in B \cup A$ entraine que $x \in A$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \quad \text{et } \quad x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

On a montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$
Et finalement $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Allez à : Exercice 5 :

**Correction exercice 6 :**

1.

$$A_1 = A \cap B \neq \emptyset$$

D'après l'énoncé

$$A_2 = A \cap C_E B = A \setminus B \neq \emptyset$$

Car $A \not\subset B$.

$$A_3 = B \cap C_E A = B \setminus A \neq \emptyset$$

Car $B \not\subset A$

$$A_4 = C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$$

Car $A \cup B \neq E$, en fait $A \cup B \not\subset E$ car $A \subset E$ et $B \subset E$.

2.

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap C_E B) = A \cap B \cap A \cap C_E B = (A \cap A) \cap (B \cap C_E B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = (A \cap B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap B \cap B \cap C_E A = (B \cap B) \cap (A \cap C_E A) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_4 = (A \cap B) \cap \big(C_E(A \cup B)\big) = (A \cap B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

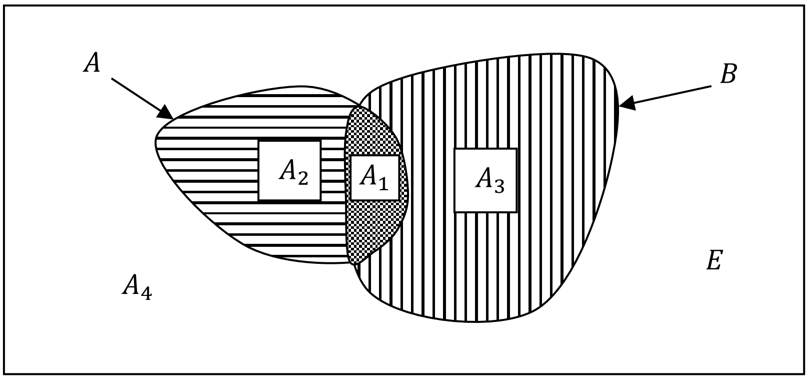
$$A_2 \cap A_3 = (A \cap C_E B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap C_E B \cap B \cap C_E A = (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A_2 \cap A_4 = (A \cap C_E B) \cap C_E(A \cup B) = (A \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap C_E B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (C_E B \cap C_E B) = \emptyset \cap C_E B = \emptyset$$
$$A_3 \cap A_4 = (B \cap C_E A) \cap C_E(A \cup B) = (B \cap C_E A) \cap (C_E A \cap C_E B) = B \cap C_E A \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (B \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E A) = \emptyset \cap C_E A = \emptyset$$

3. $A_1, A_2, A_3$ et $A_4$ sont deux à deux disjoints.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cap A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup C_E(A \cup B)$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)$$
$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C_E B)] \cup [(B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)]$$
$$= [(A \cup A) \cap (A \cup C_E B) \cap (B \cup A) \cap (B \cup C_E B)]$$
$$\cup [(B \cup C_E A) \cap (B \cup C_E B) \cap (C_E A \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)]$$
$$= [A \cap (A \cup C_E B) \cap (A \cup B) \cap E] \cup [(B \cup C_E A) \cap E \cap C_E A \cap (C_E A \cup C_E B)]$$
$$= [A \cap \{(A \cup C_E B) \cap (A \cup B)\}] \cup [C_E A \cap \{(B \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)\}]$$
$$= [A \cap \{A \cup (C_E B \cap B)\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup (B \cap C_E B\}]$$
$$= [A \cap \{A \cup \emptyset\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup \emptyset\}] = [A \cap A] \cup [C_E A \cap C_E A] = A \cup C_E A = E$$

Remarque :

$(A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une partition de $E$.




Sur un schéma c'est une évidence ($E$ est le carré sur le schéma).

Allez à : Exercice 6 :

**Correction exercice 7 :**

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 = ]0,+\infty[\ ;\ C_{\mathbb{R}}A_2 = [0,+\infty[\ ;\ C_{\mathbb{R}}A_3 = ]-\infty,0]\ ;\ \ C_{\mathbb{R}}A_4 = ]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 = ]-\infty,1] \cup [2,+\infty[;\ C_{\mathbb{R}}A_6 = ]-\infty,1[\cup [2,+\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2];\quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1,+\infty[\cap]2,+\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Allez à : Exercice 7 :

**Correction exercice 8 :**

a) Soit $x \in \overline{B} = \complement_E^B$, $x \notin B$, comme $A \subset B$, $x \notin A$, autrement dit $x \in \overline{A} = \complement_E^A$ ce qui montre que si $x \in \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$.

b) Si $x \in A$ alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \emptyset$) donc $x \in \overline{B} = \complement_E^B$.

Si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A} = \complement_E^A$

c) $C_E(C_E A) = A$, $A \cap C_E A = \emptyset$, $A \cup C_E A = E$, $C_E \emptyset = E$ et $C_E E = \emptyset$

Allez à : Exercice 8 :

**Correction exercice 9 :**

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B \cup D}) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : Exercice 9 :

**Correction exercice 10 :**

1.
$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$
Pour la seconde il suffit d'intervertir $B$ et $C$.

2.
$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= \big((A \cap B) \setminus (A \cap C)\big) \cup \big((A \cap C) \setminus (A \cap B)\big)\\ &= \big((A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})\big) \cup \big((A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})\big) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})\\ &= A \cap \big((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\big) = A \cap \big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big) = A \cap (B\Delta C)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 10 :

**Correction exercice 11 :**

1.
$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = \big(A \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big(B \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big)\\ &= (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}\end{aligned}$$
Pour la seconde égalité il suffit d'intervertir les rôles de $B$ et $C$.

2.
$$\begin{aligned}(A \cup B)\Delta(A \cup C) &= (A \cup B) \setminus (A \cup C) \cup (A \cup C) \setminus (A \cup B) = (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{B})\\ &= \overline{A} \cap \big((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\big) = \overline{A} \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) = \overline{A} \cap (B\Delta C)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 11 :

**Correction exercice 12 :**

1. La contraposée de cette implication est :
$$(A \subset C \quad \text{et} \quad B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$
Cette implication est vraie.
2. Prenons $x \in B$.
Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse.
Si $x \in C$ c'est fini. Si $x \in A \setminus C$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$.
On a bien montré que $B \subset C$.

Allez à : Exercice 12 :

**Correction exercice 13 :**

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Soit $x \in C_E(A \cap B)$, $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cup C_E B$
Cela montre que $C_E(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B$.
Soit $x \in C_E A \cup C_E B$, $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cap B)$.
Cela montre que $C_E A \cup C_E B \subset C_E(A \cap B)$.
Et finalement

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Remarque :

On aurait raisonner par équivalence.

2. Soit $x \in C_E(A \cup B)$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cap C_E B$
   Cela montre que $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.
   Soit $x \in C_E A \cap C_E B$, $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cup B)$.
   Cela montre que $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$.
   Et finalement
$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Remarque :

On aurait pu raisonner par équivalence.

Allez à : Exercice 13 :

**Correction exercice 14 :**

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Supposons que $F \subset G$.
   Si $x \in F \cup G$ alors $x \in F \subset G$ ou $x \in G$ alors $x \in G$. Donc $F \cup G \subset G$.
   Si $x \in G$ alors $x \in F \cup G$, par conséquent $F \cup G = G$.
   On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$
   Supposons que $F \cup G = G$.
   Soit $x \in F$, $x \in F \cup G = G$ donc $x \in G$.
   On a montré que $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$.
   Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$.
2. Supposons que $F \subset G$.
   Si $x \in F \cap C_E G$, $x \in F$ et $x \notin G \supset F$ donc $x \in F$ et $x \notin F$ ce qui est impossible par conséquent $F \cap C_E G = \emptyset$.
   On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cap C_E G = \emptyset$
   Supposons que $F \cap C_E G = \emptyset$.
   Soit $x \in F$, supposons que $x \notin G \Leftrightarrow x \in C_E G$ ce qui signifie que $x \in F \cap C_E G = \emptyset$, c'est impossible donc l'hypothèse $x \notin G$ est fausse, par conséquent $x \in G$ et $F \subset G$.
   On a montré que $F \cap C_E G = \emptyset \Rightarrow F \subset G$.
   Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$.

Allez à : Exercice 14 :

**Correction exercice 15 :**

1.
$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\\ &= \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \emptyset\\ &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\end{aligned}$$

2.
$$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$$
$$A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$$
$$A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$$

3.

a)

$$\overline{(A\cap \overline{B})\cup (B\cap \overline{A})}=\overline{A\cap \overline{B}}\cap \overline{(B\cap \overline{A})}=(\overline{A}\cup B)\cap (\overline{B}\cup A)$$
$$=(\overline{A}\cap \overline{B})\cup (\overline{A}\cap A)\cup (B\cap \overline{B})\cup (B\cap A)=(\overline{A}\cap \overline{B})\cup \emptyset\cup \emptyset\cup (B\cap A)$$
$$=(\overline{A}\cap \overline{B})\cup (B\cap A)$$

b)

$$(A\Delta B)\Delta C=\left((A\cap \overline{B})\cup (B\cap \overline{A})\right)\Delta C=\left(\left((A\cap \overline{B})\cup (B\cap \overline{A})\right)\cap \overline{C}\right)\cup\left(C\cap \overline{(A\cap \overline{B})\cup (B\cap \overline{A})}\right)$$
$$=(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})\cup (B\cap \overline{A}\cap \overline{C})\cup\left(C\cap\left((\overline{A}\cap \overline{B})\cup (B\cap A)\right)\right)$$
$$=(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})\cup (B\cap \overline{A}\cap \overline{C})\cup (C\cap \overline{A}\cap \overline{B})\cup (C\cap B\cap A)$$

c)

$$(A\Delta B)\Delta C=(C\cap \overline{A\Delta B})\cup\left((A\Delta B)\cap \overline{C}\right)=\left((A\Delta B)\cap \overline{C}\right)\cup (C\cap \overline{A\Delta B})=C\Delta(A\Delta B)$$

or $A\Delta B=(A\cap \overline{B})\cup (B\cap \overline{A})=(B\cap \overline{A})\cup (A\cap \overline{B})=B\Delta A$ donc $(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(A\Delta B)=C\Delta(B\Delta A)$

d)

$(C\Delta B)\Delta A=(C\cap \overline{B}\cap \overline{A})\cup (B\cap \overline{C}\cap \overline{A})\cup (A\cap \overline{C}\cap \overline{B})\cup (A\cap B\cap C)=A\Delta(B\Delta C)$, en changeant $A$ et $C$.

e)

$(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) or $C\Delta(B\Delta A)=A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).

Donc $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

Allez à : Exercice 15 :

**Correction exercice 16 :**

1. $I=[0,1]$ et $J=[-1,1]$.
2. $I=[-1,1]$ et $J=[0,1]$.
3. $I=[-1,1]$ et $J=[-1,1]$.
4. $I=[0,1]$ et $J=[0,1]$.

Allez à : Exercice 16 :

**Correction exercice 17 :**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2$$

$f(-1)=f(1)$ donc $f$ n'est pas injective.

$-4$ n'a pas d'antécédent, car $f(x)=-4\Leftrightarrow x^2=-4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. $f$ n'est pas surjective.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$$
$$x\mapsto x^2$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow |x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$$

Car $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. $f$ est injective.

Pour tout $y\in\mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y=f(x)$, en effet $f(x)=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$ donc $f$ est surjective.

$f$ est bijective.

$$f:[0,1]\to[0,2]$$
$$x\mapsto x^2$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow |x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$$

Car $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. $f$ est injective.

2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. $f$ n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

$g$ est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car $g$ est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, $g$ est injective.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

$g$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, $g$ est surjective. Mais l'unicité du « $x$ » fait que $g$ est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de $g$.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.

$h$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « $x^3$ » l'emporte sur le « $x^2$ ».

$$h(0) = 0 \ \text{ et } \ h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{27}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de $E$ est $F$.

$h$ n'est pas une bijection.

Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, $h$ n'est pas injective.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon $h$ serait bijective.

Pour tout $y \in \left[0, \frac{4}{27}\right[$ il existe trois valeurs $x$ tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres $y$ n'a qu'un antécédent.

$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^4$$

On va étudier cette fonction, $k$ est dérivable et $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « $x^4$ » l'emporte sur le « $x$ ».

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Pour tout $y > -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, $y$ admet deux antécédents, $k$ est ni surjective ni injective.

Allez à : Exercice 17 :

**Correction exercice 18 :**

1.
$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$
Donc $f$ n'est pas injective.

2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
$f$ est surjective.

3.
$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1,(n_1+1)^2) = (n_2,(n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
Donc $g$ est injective.

4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1) = (n,(n+1)^2)$$
Alors
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, $g$ n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 18 :

**Correction exercice 19 :**
$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$
$f$ est injective.
1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel $n$ tel que $1 = 2n$, $f$ n'est pas surjective.
$g(0) = E\left(\frac{0}{2}\right) = E(0) = 0$ et $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc $g(0) = g(1)$ ce qui entraine que $g$ n'est pas injective.
Pour tout $y = n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe $x = 2n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ) tel que :
$$g(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n = y$$
$g$ est surjective.
Si $n$ est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p)\big) = f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right) = f\big(E(p)\big) = f(p) = 2p = n$$
Si $n$ est impaire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p+1)\big) = f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p + \frac{1}{2}\right)\right) = f(p) = 2p = n - 1$$
$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
Que $n$ soit paire ou impaire
$$g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$$
$$g \circ f = id$$
Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g \circ f = id$ pour que $g$ soit la bijection réciproque de $f$. La définition de la bijection réciproque d'une fonction $f_1: E \to E$ est :
« S'il existe une fonction $f_2: E \to E$ telle que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = id_E$ alors $f_2 = f_1^{-1}$ » on a alors : $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions bijectives.

Allez à : Exercice 19 :

**Correction exercice 20 :**

$f(E) \subset E$ donc $f\big(f(E)\big) \subset f(E) \subset E$, or $f\big(f(E)\big) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$, par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que $f$ est surjective.

Allez à : Exercice 20 :

**Correction exercice 21 :**

1. Supposons que $g$ existe, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \big(g(n)\big)^2 = n$
   Si $n$ n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n = 2$, $\big(g(2)\big)^2 = 2$ donc $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
   Il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que $h$ existe, $h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(n^2) = n$
   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque $p$ est un carré auquel cas $h(p) = \sqrt{p}$, donnons une fonction $h$ qui répond à la question :
   Si $p \neq n^2$ alors $h(p) = 0$ et si $p = n^2$ alors $h(p) = \sqrt{p} = n$.

Allez à : Exercice 21 :

**Correction exercice 22 :**

1. Si $g$ existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$, si $n$ est impair $g(n) \notin \mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.

2. Si $h$ existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$
   Soit $h$ la fonction définie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par $h(2p) = p$ et $h(2p+1) = 0$ convient.

Allez à : Exercice 22 :

**Correction exercice 23 :**

On pose $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, et bien sur tous les $e_j$ sont distincts ainsi que tous les $f_i$.
On rappelle que le fait que $f$ soit une application entraine que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$
On suppose que $f$ est injective, on va montrer que $f$ est surjective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si $f$ n'est pas surjective alors $f$ n'est pas injective.
Soit $f_i \in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j \in E$ tel que $f_i = f(e_j)$ ($f$ n'est pas surjective)
Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$, il y a $n$ éléments dans le premier ensemble et $n-1$ dans le second, donc il existe $j_1$ et $j_2$, avec $j_1 \neq j_2$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ tels que $f\big(e_{j_1}\big) = f(e_{j_2})$, or $e_{j_1} \neq e_{j_2}$ donc $f$ n'est pas injective.
On suppose que $f$ est surjective et on va montrer que $f$ est injective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si $f$ n'est pas injective alors $f$ n'est pas surjective.
Si $f(e_i) = f\big(e_j\big) = u$ avec $e_i \neq e_j$ alors

$\{f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), u, f(e_{i+1}), \dots, f(e_{j-1}), u, f(e_{j+1}) \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, le premier ensemble a $n-1$ éléments et le second $n$ donc il existe un $f_j$ qui n'a pas d'antécédent, cela montre que $f$ n'est pas surjective.
On a montré que $(i) \Leftrightarrow (ii)$, par définition $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$. Si on a $(i)$ alors on a $(ii)$ et $(i)\ et\ (ii)$ entraine $(iii)$ de même si on a $(ii)$ alors on a $(i)$ et $(i)\ et\ (ii)$ entraine $(iii)$. Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Allez à : Exercice 23 :

**Correction exercice 24 :**

1. $u$ et $v$ sont surjectives donc $u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ par conséquent
$$u \circ v \circ u(\mathbb{N}) = u\Big(v\big(u(\mathbb{N})\big)\Big) = u\big(v(\mathbb{Z})\big) = u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$$
Cela montre que $u \circ v \circ u$ est surjective.
$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u\Big(v\big(u(x_1)\big)\Big) = u\Big(v\big(u(x_2)\big)\Big) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big)$$
Car $u$ est injective
$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big) = v\big(u(x_2)\big) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$
Car $v$ est injective
$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
Car $u$ est injective
Finalement $u \circ v \circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).
2. 7 n'admet pas d'antécédent donc $f$ n'est pas surjective.
$$f(a,b,c) = f(a',b',c') \Leftrightarrow 2^a 3^b 5^c = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'}$$
L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, autrement dit $f$ est injective.
Donc $f$ est injective et pas surjective.
3. $\varphi(n) = 0\ \ et\ \varphi(2n) = 0$
Donc $\varphi$ n'est pas injective.
$$\varphi(\mathbb{Z}) = \{0,1, \dots, n-1\} \subsetneq \mathbb{N}$$
Donc $\varphi$ n'est pas surjective.
4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{Z}$ tel que

Premier cas $a \neq 0$
$$(x,y) = f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) = (au + bv + 1, cu + dv - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = au + bv + 1 \\ y = cu + dv - 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ y + 1 = cu + dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ cL_1 - aL_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x-1) - a(y+1) = cbv - adv \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x-1) - a(y+1) = (cb - ad)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x-1) - a(y+1) = -v \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + b\big(-c(x-1) + a(y+1)\big) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = -b\big(-c(x-1) + a(y+1)\big) + (x-1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = bc(x-1) - ab(y+1) + (x-1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} au = (bc+1)(x-1) - ab(y+1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} au = ad(x-1) - ab(y+1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = d(x-1) - b(y+1) \\ v = -c(x-1) + a(y+1) \end{cases}$$
Si $a = 0$, alors $bc = -1$, en particulier $b \neq 0$ et $\frac{1}{b} = -c$

$$(x,y)=f(0,b)\Leftrightarrow (x,y)=(bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow \begin{cases} x=bv+1 \\ y=cu+dv-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{x-1}{b} \\ y=cu+dv-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ y=cu-dc(x-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ y=cu-dc(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ cu=dc(x-1)+1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ u=d(x-1)+\dfrac{1+y}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ u=d(x-1)-b(1+y) \end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où $a\neq 0$

Donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ il existe un unique couple

$$(u,v)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)\in\mathbb{Z}^2$$

tel que $(x,y)=f(u,v)$, $f$ est bijective et

$$f^{-1}(x,y)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)$$

Allez à : Exercice 24 :

**Correction exercice 25 :**

Supposons qu'il existe $f: E\to\mathcal{P}(E)$ surjective et on cherche s'il existe un antécédent à $A$. On appelle $x_0\in E$, un antécédent de $A$, donc par définition $f(x_0)=A$,

si $x_0\in f(x_0)$ alors $x_0\in A$ et donc $x_0\notin f(x_0)$ ce qui est contradictoire

Si $x_0\notin f(x_0)$ alors par définition de $A$, $x_0\in A=f(x_0)$ ce qui est aussi contradictoire.

L'hypothèse est donc fausse, il n'y a pas d'application surjective de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$.

Allez à : Exercice 25 :

**Correction exercice 26 :**

1. Première méthode : raisonnons par récurrence

On pose $(H_n)$ il y a $n(n-1)$ applications injectives de $I_2$ dans $I_n$.

Regardons si $(H_2)$ est vraie.

Il y a 4 applications de $I_2$ dans $I_n$.

$$f_1(1)=1 \text{ et } f_1(2)=1$$
$$f_2(1)=1 \text{ et } f_2(2)=2$$
$$f_3(1)=2 \text{ et } f_3(2)=1$$
$$f_4(1)=2 \text{ et } f_4(2)=2$$

Seules $f_2$ et $f_3$ sont injectives. Il y a $2=2(2-1)$ applications injectives de $I_2$ dans $I_2$.

Montrons que $(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})$

Il y a $n(n-1)$ applications injectives de $\{0,1\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$.

Supposons que $f(1)=n+1$ alors $f(2)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait $n$ applications injectives de plus.

Supposons que $f(2)=n+1$ alors $f(1)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait $n$ applications injectives de plus.

Au total, il y a $n(n-1)+n+n=n^2-n+n+n=n^2+n=n(n+1)$

L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion pour tout $n\geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de $I_2$ dans $I_n$.

Deuxième méthode :

Si $f(1)=k\in\{0,1,\dots,n\}$ alors $f(2)\in\{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}$.

Cela fait $n$ choix possibles pour $f(1)$ et $n-1$ pour $f(2)$, soit $n(n-1)$ choix possibles pour $\big(f(1),f(2)\big)$ de façon à ce que $f(1)\neq f(2)$ (autrement dit pour que $f$ soit injective).

2. $f: I_m \to I_n$
$f$ injective équivaut à $f(1) = k_1; f(2) = k_2; \dots ; f(m) = k_m$, avec $k_1, k_2, \dots , k_m \in \{1,2, \dots , n\}$ tous distincts par conséquent $m \le n$.
Remarque :
Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots , m\}$ dans $\{1,2, \dots , n\}$ sont injectives !
Supposons que $f$ est surjective.
Pour tout $k_1, k_2, \dots , k_n \in \{1,2, \dots , n\}$ (les $k_i$ tous distincts) il existe $l_1, l_2, \dots , l_n \in \{1,2, \dots , m\}$ tels que $k_i = f(l_i)$ par définition d'une application tous les $l_i$ sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n \le m$.
Pour que $f$ soit bijective il faut (et il suffit) que $f$ soit injective et sujective, par conséquent il faut que $m \le n$ et que $n \le m$, autrement dit il faut que $m = n$.
Remarque :
Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots , n\}$ dans $\{1,2, \dots , n\}$ sont bijectives.

Allez à : Exercice 26 :

**Correction exercice 27 :**

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
Car $g$ est injective
$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
Car $f$ est injective.
Donc $g \circ f$ est injective.
2. Première méthode :
Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car $g$ est surjective.
Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :
(a) D'habitude on appelle $y$ un élément de l'image $G$ mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler $x$ l'élément de $F$ et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de $E$, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler $z$.
(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car $g$ est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

Deuxième méthode :
On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.
3. Si $g$ et $f$ sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si $g$ et $f$ sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Car $g \circ f$ est injective, par conséquent $f$ est injective.
5. Première méthode :
Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que $g$ est surjective.
Deuxième méthode :
Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g\big(f(E)\big) = G$ or $f(E) \subset F$ donc
$$g\big(f(E)\big) \subset g(F)$$

Comme $g(F) \subset G$, cela donne

$$G = g\big(f(E)\big) \subset g(F) \subset G$$

D'où

$$g\big(f(E)\big) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

Ce qui montre que $g$ est surjective.

6.

a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)
$g \circ f$ est injective, d'après 4°), $f$ est injective.
$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), $g$ est surjective.

Remarque :
$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc $f$ et $g$ sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)
$f \circ g$ est injective, d'après 4°), $g$ est injective.
$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), $f$ est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective
$f \circ f$ est injective, d'après 4°), $f$ est injective.
$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), $f$ est surjective.
Par conséquent $f$ est bijective et $f^{-1} = f$.

Allez à : Exercice 27 :

**Correction exercice 28 :**

1. Pour tout $y \in Y$ il existe $x = s(y) \in X$ tel que $y = Id_Y(y) = f\big(s(y)\big) = f(x)$, $f$ est surjective.
2. $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f\big(s(y_1)\big) = f\big(s(y_2)\big) \Rightarrow y_1 = y_2$
   $s$ est injective.
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r\big(f(x_1)\big) = r\big(f(x_2)\big) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   $f$ est injective.
4. Pour tout $x \in X$, pose $y = f(x)$.
   Comme $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ à chaque $y \in Y$ telle que $y = f(x)$ on associe bien une unique valeur $x$, on définit alors $r: f(X) \to X$ par $r(y) = x$. Pour les $y \in Y$ qui ne sont pas dans l'image de $X$ par $f$, autrement dit qui ne sont pas de la forme $y = f(x)$, on leur attribue n'importe quelle valeur dans $X$, mettons $x_0$ pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).
   Pour tout $x \in X$.
   $$x = r(y) = r\big(f(x)\big) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$
   $r$ est bien une rétraction de $f$.

Remarque :
Si $y \notin f(X)$, $r(y) = x_0$ ne sert à rien pour montrer que $r$ est une rétraction.

5. Pour tout $x \in X$, il existe $y = f(x)$ tel que :
   $$x = Id_X(x) = r\big(f(x)\big) = r(y)$$
   Cela montre que $r$ est surjective.

Remarque :
Les rôles habituels de $x$ et $y$ ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.
Si $f$ admet une section alors $f$ est surjective d'après 1°).
Si $f$ admet une rétraction alors $f$ est injective d'après 3°).
Par conséquent $f$ est bijective, on note $f^{-1}: Y \to X$ sa bijection réciproque.
Comme $Id_X = r \circ f$, en composant par $f^{-1}$ à droite :

$$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$

Comme $Id_Y = f \circ s$, en composant par $f^{-1}$ à gauche :

$$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$

D'où $r = s = f^{-1}$.

Allez à : Exercice 28 :

**Correction exercice 29 :**

1. Pour tout $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
   $$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$
   Cela montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
   Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
   Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
   Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
   Cela montre que s tous les cas $y \in f(A \cup B)$ et que donc
   $$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$
   Finalement $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. Pour tout $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in A \cap B \subset A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in A \cap B \subset B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
   $$y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$
   Cela montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte, d'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, ensuite il faut prendre $A$ et $B$ où $f$ n'est pas injective, par exemple :
   $$A = [-4,2] \quad \text{et } B = [-2,3]$$
   $$f(A) = f([-4,2]) = [0,16]\,; \quad f(B) = f([-2,3]) = [0,9] \Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0,9]$$
   $$A \cap B = [-2,2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0,4]$$
   On a bien $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

Allez à : Exercice 29 :

**Correction exercice 30 :**

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\,; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2. 
   $$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
   $$f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$$

Allez à : Exercice 30 :

**Correction exercice 31 :**

1. $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\}$
   Donc
   $$f([0,1] \times [0,1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$
   $$f^{-1}([-1,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \in [-1,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,1]\} = [-1,1] \times \mathbb{R}$$
2. 
   $$f(\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$$

$$f(2\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(2\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$

$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, \cos(\pi x) = \pm 1\}$$

Or $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ et $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi, x = (2k+1)\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Allez à : Exercice 31 :

**Correction exercice 32 :**

1. Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cup B')$, $f(x) \in A' \cup B'$ donc $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$, par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$, autrement dit $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$, $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$, autrement dit $f(x) \in A' \cup B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cup B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$
   Finalement $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cap B')$, $f(x) \in A' \cap B'$ donc $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$, par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$, autrement dit $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
   Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$, $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$, autrement dit $f(x) \in A' \cap B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cap B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$
   Finalement $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Allez à : Exercice 32 :

**Correction exercice 33 :**

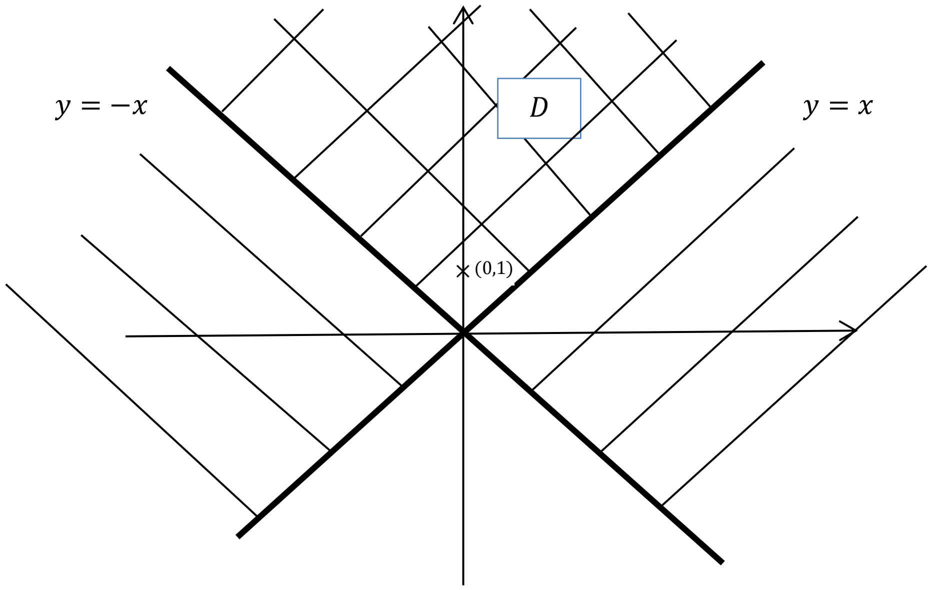
1. Pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui montre que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
2. Pour tout $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, comme $x \in f^{-1}(B)$ $f(x) \in B$ ce qui entraine que $y \in B$, ce qui montre que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Comme « pour toute partie $A$ de $E$, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ » la question revient à montrer que : « $f$ est injective si et seulement si pour toute partie $A$ de $E$ on a $A \supset f^{-1}\big(f(A)\big)$ »
   Si $f$ est injective.
   Pour tout $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x) \in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x' \in A$ (attention, à priori ce n'est pas le même $x$ que celui du début de la phrase) tel que $f(x) = f(x')$ comme $f$ est injective $x = x'$, par conséquent $x \in A$.
   On a montré que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$.
   Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$
   $$f(x_1) = f(x_2) = y$$
   On prend $A = \{x_1\}$
   $$f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\} \Rightarrow f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$$
   D'après l'hypothèse $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$ donc $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$
   Or $x_2 \in f^{-1}(y)$ car $f(x_2) = y$ donc $x_2 \in \{x_1\}$ par conséquent $x_1 = x_2$ ce qui signifie que $f$ est injective.
   Finalement on a montré l'équivalence demandée.
4. Comme « pour toute partie $B$ de $F$, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ » la question revient à montrer que : « $f$ est surjective si et seulement si pour toute partie $B$ de $F$ on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \supset B$ »
   Si $f$ est surjective.

Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car $f$ est surjective.
$x \in f^{-1}(B)$ entraine que $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, cela montre que $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Si pour tout $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$
On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$ ce qui s'écrit aussi $y \in f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$, il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$, cela montre bien que $f$ est surjective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée.

Allez à : Exercice 33 :

**Correction exercice 34 :**

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, $D$ est l'intersection de ces deux demi-plan, $D$ est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.




2. a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

En additionnant $L_1$ et $L_2$ on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans $L_1$, on trouve que $y_1 = y_2$.

b.

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur $D$, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.
$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur $D$, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que $f$ est injective.

3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans $D$ car $x^2 + y^2 > 0$.

Allez à : Exercice 34 :