

CHAPITRE 1 : CHAMP MAGNETOSTATIQUE

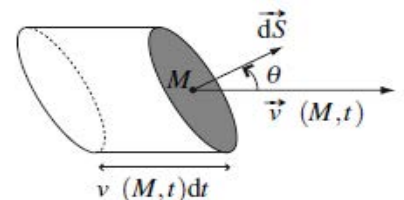
Si l'électrostatique décrit les effets des charges électriques statiques, la magnéto-statique permet, elle de comprendre leurs effets lorsqu'elles sont en mouvement. L'introduction dans une région de l'espace des particules chargées en mouvement ou des courants électriques indépendants du temps modifie les propriétés de l'espace. L'espace est alors caractérisé en chaque point M par un champ magnétique permanent ou champ magnéto-statique noté \vec{B} .

1. Courant électrique – Distribution de courant

1.1. Vecteur densité volumique de courant

Le courant électrique est dû au transport de charge électrique provenant d'un mouvement ordonné de particules caractérisé par un vecteur densité de courant électrique décrivant ce phénomène de transport.

Considère une surface élémentaire dS autour d'un point M , et le vecteur surface orientée associé $\vec{dS} = dS\vec{n}$. Soit un seul type de porteurs de charge mobiles de densité volumique de charge $\rho(M, t)$ et de vitesse moyenne $\vec{v}(M, t)$ au point M à l'instant t .



La charge électrique $d^2q(M, t)$ traversant dS entre les instants t et $t + dt$, dans le sens du vecteur \vec{dS} est la charge contenue, à l'instant t , dans le cylindre s'appuyant sur la surface dS et de génératrices parallèles à \vec{v} de longueur $v dt$ avec $v = \|\vec{v}\|$:

$$d^2q(M, t) = \rho(M, t) dV \quad \text{où } dV = dS \cos \theta v dt = \vec{dS} \cdot \vec{v} dt : \text{volume du cylindre}$$

$$\Rightarrow d^2q(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{dS} dt$$

La charge électrique qui traverse la surface dS dans le sens du vecteur \vec{dS} pendant la durée dt est le flux du vecteur densité de courant électrique $\vec{j}(M, t)$ à travers dS pendant le temps dt , d'où :

$$d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS} dt$$

On déduit que pour une distribution volumique de courant, dans le cas d'un seul porteur de charge mobile le vecteur densité de courant est : $\boxed{\vec{j}(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t)}$. On peut écrire : $\boxed{\vec{j}(M, t) = (\rho \vec{v})(M, t)}$

$\|\vec{j}\|$ s'exprime $A \cdot m^{-2}$ en unité S.I.

Dans le cas de plusieurs types de porteurs de charge mobiles, on ajoute les charges des différents porteurs traversant la surface : $\boxed{\vec{j}(M, t) = (\sum_i \rho_i \vec{v}_i)(M, t)}$

Quelques exemples

- Dans un conducteur métallique, les porteurs de charge mobile sont les électrons libres ou électrons de conduction. La densité volumique de courant est : $\vec{j} = \rho_{el} \vec{v}_{el}$ en un point M , à l'instant t
- Dans un électrolyte contenant des ions A^+ et B^- , la densité volumique de courants est :

$$\vec{j} = \rho_{A^+} \vec{v}_{A^+} + \rho_{B^-} \vec{v}_{B^-} \quad \text{en un point } M, \text{ à l'instant } t$$

1.2. Intensité du courant électrique

La charge traversant une surface orientée S pendant la durée dt (entre les instants t et $t + dt$) est :

$$dq = \iint_{(S)} d^2q = \iint_{(S)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS} dt.$$

L'intensité du courant électrique traversant la surface orientée S est le débit de charge à travers cette

surface, ainsi : $i_s(t) = \frac{dq}{dt} = \iint_{(S)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS}$ (exprimé en ampère (A) en S.I.). L'intensité du courant électrique est donc le flux du vecteur densité volumique du courant à travers la surface S .

Remarque :

- En régime stationnaire $\vec{j} = \vec{j}(M)$ et $i_s = cte = I = \iint_{(S)} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$ (courant continu).
- Si \vec{j} est uniforme et les charges se déplaçant dans la direction et le sens de \vec{dS} alors :

$$I = JS$$

1.3. Distribution filiforme de courant

L'intensité de courant traversant un fil conducteur est l'intensité qui traverse n'importe quelle section S de ce fil. Lorsque le fil conducteur est de très faible section, on définit un courant linéique. La distribution filiforme de courant est donc la limite d'une distribution volumique lorsque sa section tend vers zéro. La densité linéique de courant se confond dans ce cas à l'intensité du courant dans le fil : $I = \lambda_m v$ où

$v = \|\vec{v}\|$: vitesse moyenne des charges mobiles et λ_m : densité linéique des charges mobiles

2. Symétries et invariances du champ magnétostatique

Une distribution de courant stationnaire crée en un point M de l'espace un champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dont on peut étudier les propriétés de symétrie et d'invariance.

2.1. Symétries et invariances des distributions de courant

2.1.1. Symétrie plane

Soit un plan (π) , la symétrie S_π par rapport à ce plan et \vec{S}_π la symétrie Plan (π) vectorielle associée. Une distribution de courant D est symétrique par rapport au plan (π) si et seulement si : $\forall M \in D, M' = S_\pi(M) \in D$ et $\vec{j}(M') = \vec{S}_\pi(\vec{j}(M))$

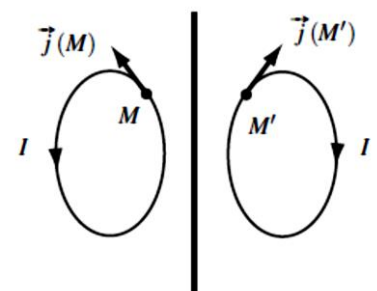
Exemple : La distribution de courant D est symétrique par rapport au plan (xOy)

$\Leftrightarrow j_x(x, y, -z) = j_x(x, y, z), j_y(x, y, -z) = j_y(x, y, z)$ et $j_z(x, y, -z) = -j_z(x, y, z)$ pour tout point $M(x, y, z)$ et son symétrique $M'(x, y, -z)$ de D .

En tout point d'un plan de symétrie, le vecteur densité de courant \vec{j} appartient à ce plan, les lignes de courant (lignes de champ de \vec{j}) sont tangentes à ce plan.

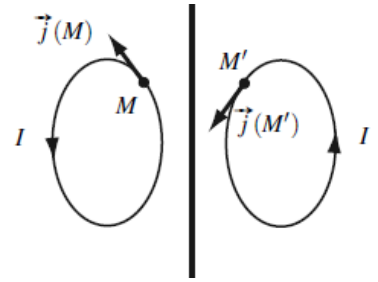
2.1.2. Antisymétrie plane

Soit un plan (π_a) , la symétrie S_{π_a} par rapport à ce plan et \vec{S}_{π_a} la symétrie Plan (π_a)



vectorielle associée. Une distribution de courant D est antisymétrique par rapport au plan (π_a) si et seulement si : $\forall M \in D, M' = S_{\pi_a}(M) \in D$ et $\vec{j}(M') = -\vec{S}_{\pi_a}(\vec{j}(M))$

Exemple : La distribution de courant D est antisymétrique par rapport au plan $(xOy) \Leftrightarrow j_x(x, y, -z) = -j_x(x, y, z), j_y(x, y, -z) = -j_y(x, y, z)$ et $j_z(x, y, -z) = j_z(x, y, z)$ pour tout point $M(x, y, z)$ et son symétrique $M'(x, y, -z)$ de D .



En tout point d'un plan d'antisymétrie, le vecteur densité de courant \vec{j} est orthogonal à ce plan, les lignes de courant sont donc perpendiculaire à ce plan.

2.1.3. Invariance par translation

Une distribution de courant D est invariante par la translation $T_{\vec{a}}$ de vecteur \vec{a} si et seulement si :

$$\forall M \in D, M' = T_{\vec{a}}(M) \in D \text{ et } \vec{j}(M') = \vec{j}(M)$$

Exemple, la distribution de courant D est invariante par la translation de vecteur

$$\vec{a} = a\vec{u}_x \quad (a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x + a, y, z) \quad \forall M(x, y, z) \text{ et } M'(x + a, y, z) \in D.$$

Si une distribution de charges est invariante par toute translation de vecteur parallèle à l'axe (Ox) alors le vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ ne dépend pas de x .

2.1.4. Invariance par rotation

Soit la rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$ d'angle θ_0 autour d'un axe Δ et $\vec{\mathcal{R}}_{\Delta, \theta_0}$ la rotation vectorielle associée.

Une distribution de courant D est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$, d'angle θ_0 et d'axe Δ si et seulement si :

$$\forall M \in D, M' = \mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M) \in D \text{ et } \vec{j}(M') = \vec{\mathcal{R}}_{\Delta, \theta_0}(\vec{j}(M))$$

La distribution de courant possède la symétrie de révolution d'axe Δ (axe de symétrie).

Exemple, la distribution de charges D est invariante par la rotation d'angle θ_0 autour de l'axe (Oz) si et seulement si $\forall M(r, \theta, z) \in D, M'(r, \theta + \theta_0, z) \in D$ et $\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, \theta + \theta_0, z)$.

Si une distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) (symétrie de révolution d'axe (Oz)), alors $\vec{j}(M)$ ne dépend pas de θ .

2.2. Symétries et invariances du champ magnétostatique

2.2.1. Transformation du champ magnétique par une symétrie plane

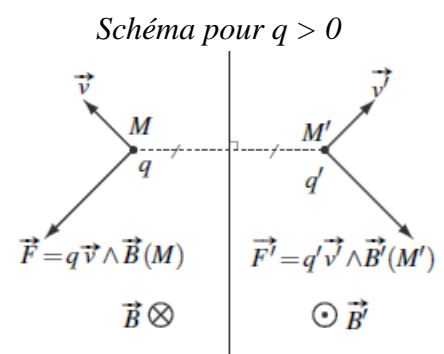
Comment le champ magnétique est transformé par une symétrie par rapport à un plan ?

Nous savons qu'une charge ponctuelle q en mouvement dans un champ magnétique \vec{B} et animée d'une vitesse \vec{v} , subit en un point M la force de Lorentz : $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$

Considérons un plan de symétrie (π) . Par la symétrie S_{π} par rapport à ce plan la charge q reste inchangée donc q' (image de q) = q au point $M' = S_{\pi}(M)$, animée d'une vitesse $\vec{v}' = \vec{S}_{\pi}(\vec{v})$, symétrique de \vec{v} par rapport à (π) subit la force $\vec{f}' = \vec{S}_{\pi}(\vec{f})$, symétrique de \vec{f} par rapport à (π) .

On a alors (invariance des lois de l'électromagnétisme) :

$$\vec{f}' = q\vec{v}' \wedge \vec{B}'(M') \quad \text{d'où :} \quad \vec{S}_{\pi}(\vec{f}) = q\vec{S}_{\pi}(\vec{v}) \wedge \vec{B}'(M')$$



Or un plan de symétrie est un plan miroir (change l'orientation de l'espace) donc :

$$\forall \vec{A} \text{ et } \vec{B}, \quad \vec{S}_\pi(\vec{A}) \wedge \vec{S}_\pi(\vec{B}) = -\vec{S}_\pi(\vec{A} \wedge \vec{B}). \text{ Donc : } \vec{S}_\pi(\vec{f}) = q\vec{S}_\pi(\vec{v} \wedge \vec{B}(M)) = q\vec{S}_\pi(\vec{v}) \wedge (-\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))).$$

On déduit nécessairement : $\boxed{\vec{B}'(M') = -\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))}$

L'image par la symétrie plane d'un champ magnétique \vec{B} est égale à l'opposé du symétrique de \vec{B} par rapport au plan de symétrie.

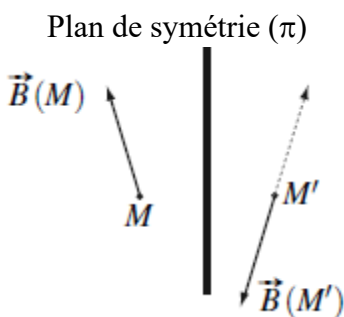
De telle propriété caractérise les **pseudo-vecteurs** ou **vecteurs axiaux** : le champ magnétique est donc un pseudo-vecteur.

2.2.2. Champ d'une distribution de courant de symétrie plane

Soit une distribution de courant D symétrique par rapport à un plan (π), de vecteur densité de courant \vec{j} . Au point M' symétrique d'un point M par rapport à (π) ($M' = S_\pi(M)$), on a : $\vec{j}(M') = \vec{S}_\pi(\vec{j}(M))$

Soit $\vec{B}'(M')$ le champ créé en M' par cette distribution, on a alors : $\vec{B}'(M') = \vec{B}(M')$

Par conséquent, d'après la relation $\vec{B}'(M') = -\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))$, on déduit : $\boxed{\vec{B}(M') = -\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))}$



Lorsqu'une distribution de courant admet un plan de symétrie, pour deux points symétriques M et M', le champ magnétique en M' est l'opposé du symétrique du champ magnétique en M.

Un plan de symétrie pour la distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique.

Donc

- Un plan de symétrie pour la distribution de courant :
 - ✓ laisse invariante la composante normale du champ magnétostatique au plan
 - ✓ transforme la composante parallèle au plan du champ magnétostatique en son opposé
- Si M appartient au plan de symétrie, il se confond avec son symétrique M' et la composante parallèle au plan est ainsi nulle. Le vecteur champ magnétostatique est donc orthogonal au plan de symétrie.

2.2.3. Champ d'une distribution de courant d'antisymétrie plane

Soit une distribution de courant D antisymétrique par rapport à un plan (π_a), de vecteur densité de courant \vec{j} .

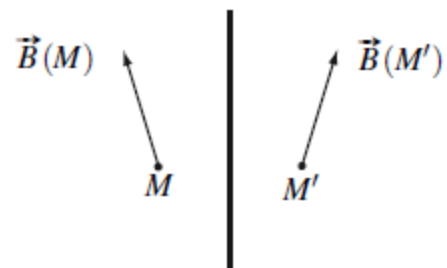
Au point M' symétrique d'un point M par rapport à (π_a) ($M' =$

$$S_{\pi_a}(M)), \text{ on a : } \vec{j}(M') = -\vec{S}_{\pi_a}(\vec{j}(M))$$

Soit $\vec{B}'(M')$ le champ créé en M' par cette distribution, on a alors :

$$\vec{B}'(M') = -\vec{B}(M'). \text{ Or la relation de transformation du champ}$$

magnétique reste valable, d'où : $\vec{B}'(M) = -\vec{S}_{\pi_a}(\vec{B}(M))$ donc :



$$\boxed{\vec{B}(M') = \vec{S}_{\pi_a}(\vec{B}(M))}$$

Plan d'antisymétrie (π_a)

Lorsqu'une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie, pour deux points symétriques M et M', le champ magnétique en M' est le symétrique du champ magnétique en M.



Un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique.

Donc

- Un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant :
 - ✓ laisse invariante la composante parallèle au plan du champ magnétostatique
 - ✓ transforme la composante normale du champ magnétostatique au plan en son opposé
- Si M appartient au plan d'antisymétrie, il se confond avec son symétrique. La composante normale au plan est alors nulle et le vecteur champ magnétostatique est donc dans le plan d'antisymétrie.

2.2.4. Invariances du champ magnétostatique

a) Invariance par translation

Si une distribution de courant est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur \vec{a} alors pour tout point M et $M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M)$, $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$ (le vecteur champ magnétique restent inchangé).

Si la distribution de courant est invariante par toute translation suivant un axe (Oz) alors $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de z . $\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$

b) Invariance par rotation

Si une distribution de courant est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$ d'axe Δ et d'angle θ_0 alors pour tout point M et $M' = \mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}(M)$, $\vec{B}(M') = \vec{R}_{\Delta, \theta_0}(\vec{B}(M))$, $\vec{R}_{\Delta, \theta_0}$ étant la rotation vectorielle associée à la rotation affine $\mathcal{R}_{\Delta, \theta_0}$.

Si la distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) alors, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) les composantes B_r , B_θ et B_z du vecteur champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ ne dépendent pas de l'angle de θ . $\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, z)$

2.3. Récapitulatif

Le champ magnétostatique possède les propriétés de symétrie d'un pseudo-vecteur ou vecteur axial. En particulier :

- le champ magnétostatique engendré par une distribution de courant invariante par translation ou de révolution autour d'un axe possède les mêmes invariances que celle-ci.
- lorsqu'une distribution de courant possède un plan de symétrie, le champ magnétostatique est orthogonal à ce plan en chacun de ses points.
- lorsqu'une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie, le champ magnétostatique appartient à ce plan en chacun de ses points.

Quelques règles simples et utiles :

- Si le vecteur densité de courant \vec{j} est polloïdal (porté par \vec{u}_r et/ou \vec{u}_z) alors $\vec{B}(M)$ est toroïdal (porté par \vec{u}_θ).
- Si le vecteur densité de courant \vec{j} est toroïdal alors $\vec{B}(M)$ est polloïdal.

3. Propriétés de flux et de circulation du champ magnétostatique – Théorème d'Ampère

3.1. Flux du champ magnétostatique

3.1.1. Flux magnétique

✓ Flux élémentaire $d\Phi$ d'un champ magnétostatique $\vec{B}(M)$: $d\Phi = \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$

✓ Flux magnétique total (à travers une surface orientée S) : $\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$

L'unité du flux magnétique est le Weber dans le système S.I.

3.1.2. Conservation du flux magnétique

Le flux du champ magnétostatique à travers une surface fermée quelconque est toujours nul :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0. \text{ On dit que le champ magnétostatique est à flux conservatif.}$$

3.2. Circulation du champ magnétostatique – Théorème d'Ampère

3.2.1. Circulation du champ magnétostatique sur un contour fermé

Soit (C) un contour quelconque fermé et orienté. La circulation du champ magnétostatique le long de (C) est

$$: \mathcal{C} = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}$$

Soit S une surface s'appuyant sur ce contour fermé (C). L'intensité du courant traversant S est :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}$$

I ne dépend que du contour (C) et non de la surface S choisie pour l'exprimer (le champ vectoriel $\vec{j}(M)$ est aussi un champ à flux conservatif). Le courant I est dit courant enlacé par le contour et noté I_{enl} .

3.2.2. Théorème d'Ampère

La circulation de \vec{B} le long d'un contour fermé (C) s'appuyant sur une surface S et l'intensité du courant traversant S sont liées par le théorème d'Ampère.

Enoncé

La circulation du vecteur champ magnétostatique le long d'un contour fermé et orienté (contour d'Ampère) est égale au produit de la perméabilité μ_0 du vide (cas du vide) par la somme des intensités des courants enlacés

par le contour : $\mathcal{C}_{\vec{B}} = \oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}$

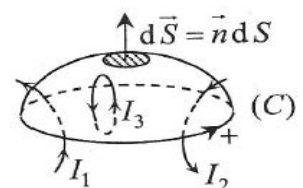
Les intensités des courant enlacés sont algébriques : les intensités sont comptés positivement si leur orientation correspond à l'orientation de la normale à la surface, elle-même orientée conformément au sens de parcourt du contour fermé par « la règle du tire-bouchon » ou de la main droite.

Exemple : Sur le schéma ci-contre : $I_{enl} = I_1 - I_2 + I_3 - I_3 = I_1 - I_2$

3.2.3. Condition d'application du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est l'équivalent pour la magnétostatique du théorème de Gauss

en électrostatique. Ce théorème permet de déterminer sans calcul complexe l'expression du champ



magnétostatique créé par une distribution de courant présentant un haut degré de symétrie. Ainsi pour l'appliquer il convient de :

- ✓ Faire l'étude préalable des symétries permet de connaître a priori la direction du champ magnétostatique et des variables dont il dépend.
- ✓ Faire un choix judicieux du contour d'Ampère de sorte à faciliter le calcul de la circulation du champ magnétostatique permettant ensuite de déterminer le champ. Le contour doit être donc choisi de sorte à passer par le point où on cherche à calculer le champ, être tangent au champ et telles que la norme du champ soit uniforme le long du contour.

4. Topographie du champ magnétostatique

4.1. Ligne et tube de champ magnétostatique

- La ligne de champ du champ magnétique est défini par :

$$\boxed{\vec{B} \wedge d\vec{l} = \vec{0}} \text{ en tout point } M \text{ de la ligne de champ}$$

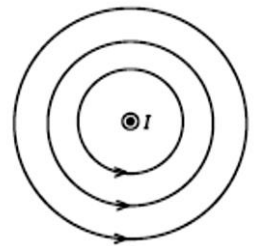
- Un tube de champ magnétique est un rassemblement de lignes de champ.
 \vec{B} étant à flux conservatif, le flux de \vec{B} à travers toute section d'un même tube de champ est constant.
Ainsi le flux de \vec{B} à travers toute surface s'appuyant sur un contour fermé et orienté est le même.

4.2. Propriétés des lignes de champ

4.2.1. Orientation des lignes de champ

La conservation du flux magnétique implique que les lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes et entourent les sources.

Elles sont orientées, autour les sources, dans le sens donné par la règle du tir bouchon ou de la main droite (théorème d'Ampère).



4.2.2. Variation de la norme du champ magnétostatique le long d'une ligne de champ

Le long d'une ligne de champ, la norme du champ magnétostatique décroît quand les lignes de champ voisines s'écartent et elle augmente quand les lignes de champ voisines se rapprochent.

Autrement dit, plus les lignes de champ sont rapprochées et plus le champ magnétostatique est localement élevé.

4.3. Différence entre une carte de champ électrostatique et une carte de champ magnétostatique

L'observation d'une carte de lignes de champ permet de distinguer un champ électrostatique d'un champ magnétostatique.

4.3.1. Flux et circulation

- ✓ Le champ électrostatique est à circulation conservative : la mise en évidence d'un contour fermé le long duquel la circulation n'est pas nulle, signifie qu'il ne peut pas s'agir d'un champ électrostatique.
- ✓ Le champ magnétostatique est à flux conservatif : la mise en évidence d'une surface fermée à travers laquelle le flux n'est pas nul, signifie qu'il ne peut pas s'agir d'un champ magnétostatique ;

4.3.2. Au voisinage des sources

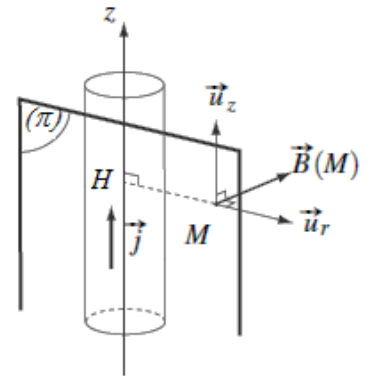
- ✓ Les lignes de champ électrostatique divergent depuis les charges ou convergent vers les charges selon leur signe.

- ✓ Les lignes de champ magnétostatique s'enroulent autour des courants, l'orientation des lignes permet de déterminer le sens des courants.

5. Applications : exemples de calcul du champ magnétostatique

5.1. Problème à symétries cylindrique : fil infini parcouru par un courant volumique reparté uniformément

Considérons un fil cylindrique d'axe Oz, de rayon a , supposé infini (de longueur très grande devant a) et parcouru par un courant d'intensité I uniformément répartie de vecteur densité volumique de courant \vec{j} .



Calcul du champ magnétique en tout point M par application du théorème d'Ampère.

Soit H le projeté de M sur l'axe Oz.

5.1.1. Etude des symétries

La distribution de courant présente la symétrie cylindrique, on fait l'étude en

coordonnées cylindrique d'axe Oz : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$

- Le plan contenant le fil et le point M (plan $(\pi) = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$), est un plan de symétrie pour la distribution de courant. Le champ magnétique est orthogonal à ce plan et donc orthoradial : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$

Remarque : Le plan orthogonale au fil et contenant M (plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique est donc dans ce plan.

- L'axe Oz est un axe de symétrie : il y a invariance par rotation d'angle θ autour de cet axe (le champ ne dépend donc pas de θ) et par toute translation le long de l'axe Oz (le champ ne dépend pas alors de z). Le champ magnétique ne dépend donc que de r .
- Conclusion : $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$

5.1.2. Application du théorème d'ampère : Calcul de \vec{B}

- **Choix du contour d'Ampère**

Les lignes de champ sont des cercles d'axe Oz, de rayon r et sur un cercle, le module du champ magnétique est constant. Le contour fermé à choisir est donc le cercle d'axe Oz, de centre H et de rayon $HM = r$, orienté dans le sens de \vec{u}_θ .

- **Circulation du champ magnétique**

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_{M \in C} B(r) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} \vec{u}_\theta = \oint_{M \in C} B(r) dl = B(r) \oint_{M \in C} dl = 2\pi r B(r)$$

- **Théorème d'ampère**

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enl}$$

➤ Calcul du vecteur densité de courant : $\vec{j} = j\vec{u}_z$ or $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi a^2$ d'où :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z \quad \text{si } r \leq a$$

$$\vec{j} = \vec{0} \quad \text{si } r > a \text{ (pas de courant)}$$

➤ Calcul du champ magnétostatique

$$\diamond \text{ Si } r > a \text{ (M à l'extérieur du fil) : } I_{enl} = I = j\pi a^2 \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 j a^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

❖ Si $r < a$ (M à l'intérieur du fil) : $I_{enl} = j\pi r^2 = \frac{I r^2}{a^2} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enl}$ d'où :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$$

• Expression intrinsèque de \vec{B} (indépendant du système de coordonnées) :

On peut remarquer que $\vec{j} \wedge \vec{OM} = \vec{j} \wedge \vec{HM} = jHM\vec{u}_\theta = jr\vec{u}_\theta$ d'où :

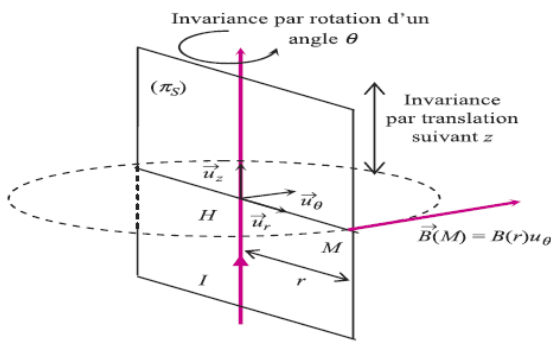
➤ Pour $r < a$ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OM}$

➤ Pour $r > a$ $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j a^2}{2r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 a^2}{2r^2} jr\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 a^2}{2} \frac{\vec{j} \wedge \vec{OM}}{HM^2}$

Remarques

- Tout problème à symétrie cylindrique se traite de la même manière. L'étude des symétries et des invariances et le choix du contour d'Ampère sont identiques. Ce qui change est le calcul de l'intensité des courants enlacés par le contour qui doit être adapté à chaque situation.

5.1.3. Cas du fil infini très fin



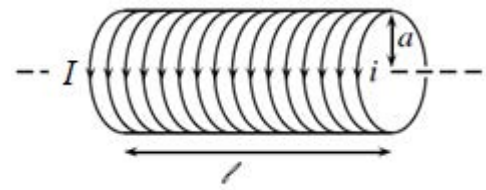
Le cas $r < a$ ne se présente pas car a tend vers 0. On a alors :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{HM}}{HM^2}$$

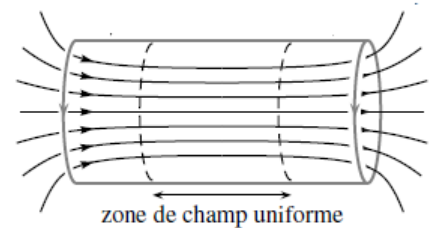
5.2. Solénoïde infiniment long

On considère un solénoïde infiniment long constitué par l'enroulement d'un fil conducteur à N spires jointives sur un cylindre d'axe $z'z$, de rayon a et de longueur ℓ . On note n le nombre de spires par unité de longueur.



5.2.1. Lignes de champ

La carte des lignes de champ magnétique créé par le solénoïde montre que loin des bords, les lignes de champ sont pratiquement des droites donc le champ magnétique est quasiment uniforme, parallèle à l'axe du solénoïde à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long.

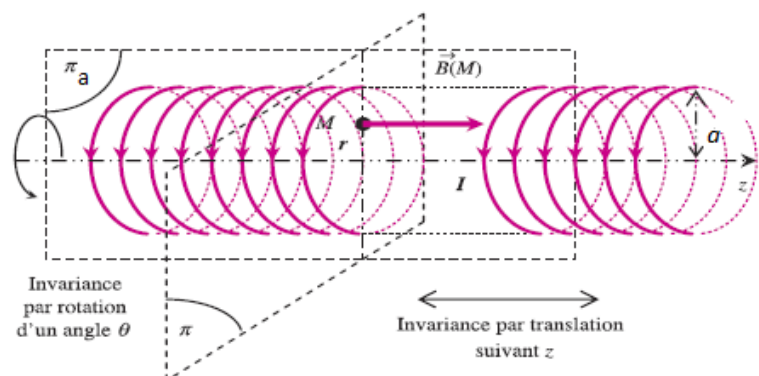


5.2.2. Champ créé par le solénoïde infini

• Etude des symétries et invariances

- Le plan (π) orthogonal à l'axe $z'z$ et passant par M est un plan de symétrie de la distribution de courant. \vec{B} est orthogonal à ce plan et donc parallèle à l'axe $z'z$:

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_z = B(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

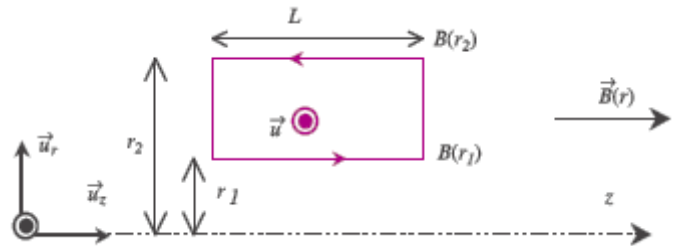


(Le plan (π_a) contenant l'axe $z'z$ et passant par M est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant, le champ magnétique est dans ce plan.)

- Le solénoïde étant infini est invariant par translation suivant l'axe $z'z$. Le champ magnétique ne dépend donc pas de z .
- L'axe $z'z$ étant un axe de symétrie pour la bobine, il y a invariance par rotation autour de cet axe : \vec{B} ne dépend pas de θ .
- Conclusion : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$

• Choix du contour d'Ampère

Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit un contour fermé rectangulaire contenu dans le plan (π_a) , de longueur L parallèle à l'axe. r_1 et r_2 étant les distances à l'axe des 2 longueurs.



• Calcul de la circulation de \vec{B}

$$\mathcal{C}_{\vec{B}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{r=r_1}^{r=r_2} B(r_1) dz + \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} B(r) \vec{u}_z \cdot dr \vec{u}_r}_{=0} + \int_{r=r_2}^{r=r_1} B(r_2) (-dz) + \underbrace{\int_{r_2}^{r_1} B(r) \vec{u}_z \cdot dr (-\vec{u}_r)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_{\vec{B}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{r=r_1}^{r=r_2} B(r_1) dz - \int_{r=r_2}^{r=r_1} B(r_2) dz \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_{\vec{B}} = L[B(r_1) - B(r_2)]}$$

• Application du théorème d'Ampère

❖ Aucun courant ne traverse le contour rectangulaire

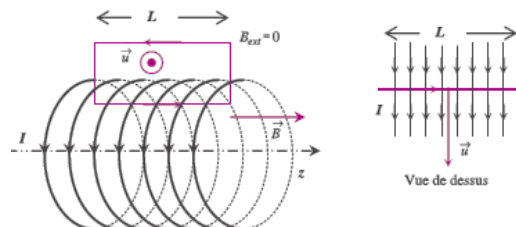
Dans ce cas $r_2 > r_1 > a$ (le contour est complètement à l'extérieur du solénoïde donc il n'enlace aucun courant) ou $a > r_2 > r_1$ (le contour est complètement à l'intérieur du solénoïde donc aucun courant n'est enlacé non plus).

$$I_{enl} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{\vec{B}} = L[B(r_1) - B(r_2)] = 0 \Rightarrow B(r_1) = B(r_2)$$

Donc à l'intérieur du solénoïde le champ magnétique est uniforme et sera noté $\vec{B}_{int} = B_{int}\vec{u}_z$. A l'extérieur du solénoïde, le champ magnétique est également uniforme et noté $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{u}_z$.

❖ Le contour rectangulaire est traversé par des courants

Dans ce cas $r_1 < a < r_2$ (le contour est « à cheval » sur le solénoïde et est traversé par nL spires conductrices parcourus par une intensité positive).



$$I_{enl} = nLI \Rightarrow \mathcal{C}_{\vec{B}} = L[B_{int} - B_{ext}] = \mu_0 nLI$$

On admet que le champ à l'extérieur du solénoïde infini est nul (les lignes de champ ne sortent pas de la bobine infinie) : $B_{ext} = 0$, d'où $B_{int} = \mu_0 nI$

• Conclusion : champ magnétique créé par un solénoïde infini :

$$\text{Pour } r < a \quad \vec{B}(r) = \vec{B}_{int} = \mu_0 nI \vec{u}_z$$

$$\text{Pour } r > a \quad \vec{B}(r) = \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$