Calcul de primitives

Exercice 1 Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int t e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\mathrm{d}t$ c) $\int \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$

d) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$ e) $\int \cos t \sin t\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$

g) $\int \frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t$ h) $\int \tan t\,\mathrm{d}t$ i) $\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $a=\mathrm{Re}(\lambda)$ et $b=\mathrm{Im}(\lambda)$. Etablir $\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + i.\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + C^{te}$.

Exercice 3 Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$ b) $\int e^t \cos t\,\mathrm{d}t$ c) $\int t \sin t e^t\,\mathrm{d}t$.

Calcul d'intégrales

Exercice 4 Calculer $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\,\mathrm{d}t$ pour $m,n\in\mathbb{N}$.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ b) $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ c) $\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t$

d) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ e) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$ f) $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 6 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $c\in\,]a,b[$.

Montrer que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \le \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 7 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $T>0$. On suppose que $\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = C^{te}$. Montrer que f est périodique.

Exercice 8 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue.

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ si et seulement si $f\ge 0$ ou $f\le 0$.

Exercice 9 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer : $\exists c\in\,]a,b[, \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)$.

Exercice 11 Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec $g \geq 0$.

Montrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 12 Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer que si $\int_0^\pi f(t)\sin t\mathrm{d}t = 0$ alors $\exists a \in]0,\pi[$ tel que f s'annule en a.

b) Montrer que si $\int_0^\pi f(t)\sin t\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos t\mathrm{d}t = 0$ alors f s'annule 2 fois sur $]0,\pi[$.

(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\mathrm{d}t$).

Exercice 13 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$\forall k \in \{0,1,...,n\} \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

Exercice 14 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 15 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \int_a^b f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$ est lipschitzienne.

Exercice 16 Irrationalité du nombre π

a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \to 0$.

c) En supposant $\pi = \frac{a}{b}$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Limite d'intégrales

Exercice 17 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 19 Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

a) $\lim_{x\to 0^+} \int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t$ b) $\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ c) $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{t}$.

d) $\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\mathrm{d}t$ e) $\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ f) $\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\mathrm{d}t$

Intégration par parties

Exercice 20 Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int t\ln t\,\mathrm{d}t$ b) $\int t\arctan t\,\mathrm{d}t$ c) $\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

d) $\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t$ e) $\int (t+1)\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$ f) $\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21 Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t$ b) $\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ c) $\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t$ (avec $n\in\mathbb{N}$)

d) $\int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ e) $\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$. f) $\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\mathrm{d}t$.

g) $\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$.

Exercice 22 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose : $I_n=\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n\to 0$.

Changement de variables

Exercice 23 Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat :

a) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ b) $\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ c) $\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$

d) $\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

Exercice 24 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

a) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ c) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

d) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ e) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}$ f) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$

g) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\mathrm{d}t$ h) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$ i) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 25 Observer : $\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t$.

En déduire $\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$.

Exercice 26 a) Montrer que : $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

b) En déduire : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 27 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x\in[a,b]$, $f(a+b-x)=f(x)$.

Montrer que $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Fonction dont la variable est borne d'intégration

Exercice 28 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

a) $g(x)=\int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$ b) $g(x)=\int_0^x x f(t)\mathrm{d}t$ c) $g(x)=\int_0^x f(t+x)\mathrm{d}t$

Exercice 29 Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $\varphi(t)=\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ pour $t\neq 0$ et $\varphi(0)=1$.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\int_x^{2x}\varphi(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.

b) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 30 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. On définit $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $F''(x)$.

b) En déduire que $F(x)=\int_0^x\int_u^1 f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$.

Exercice 31 Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x)=\int_0^x \cos(t-x)g(t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y''+y=g(x)$.

c) Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 32 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\neq 0, F(x)=\dfrac{1}{2x}\int_{-x}^x f(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et y calculer $F'(x)$.

c) Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0)=0$.

Suite dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 33 On pose, pour $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\int_0^1\dfrac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $I_n\to 0$.

b) Montrer que $I_n=\dfrac{1}{(n+1)!}+I_{n+1}$.

c) En déduire que $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\infty}\sum_{k=0}^n\dfrac{1}{k!}$.

Exercice 34 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Etablir une relation liant I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$

d) Déterminer $\lim I_n$ puis un équivalent de I_n.

e) Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 35 Pour p et q entiers naturels, on pose : $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \,\mathrm{d}t$.

a) Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

b) Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 36 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0, \pi\right[$.

a) Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nt - \cos nx}{\cos t - \cos x} \mathrm{d}t$.

b) Exprimer I_n. On pourra commencer par calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$.

Exercice 37 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.

c) Montrer que $u_n \to 1$.

d) Etablir $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = 0$ et en déduire que $u_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 38 Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

c) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.

d) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.

e) Déterminer un équivalent de I_n.

Sommes de Riemann

Exercice 39 Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+nk^2}$ e) $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 40 En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Formules de Taylor

Exercice 41 Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que : $f(0)=f(1)=0$ et $f''=g$.

Exercice 42 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$. En déduire $\lim_{n\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

Exercice 43 En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 2$.

Exercice 44 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a\in\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr