Notion d'espace affine

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension finie et de direction E.

Exercice 1 Soit $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$.
Montrer que $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine si et seulement si pour tout couple (A,B) de points distincts de $\mathcal{V}$, la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{V}$.

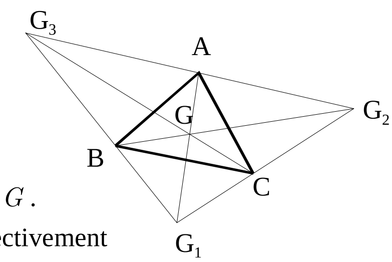
$(\Leftarrow)$ ok

$(\Rightarrow)$ Soit $A\in\mathcal{V}$ et $F=\left\{\overrightarrow{AM}\,/\,M\in\mathcal{V}\right\}$. On a $\mathcal{V}=A+F$.
Montrons que F est un sous-espace vectoriel.
$F\subset E$, $\vec{o}=\overrightarrow{AA}\in F$.
Soit $\vec{u}\in F$. On peut écrire $\vec{u}=\overrightarrow{AM}$ avec $M\in\mathcal{V}$.
Si $\vec{u}=\vec{o}$ alors $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}=\vec{o}\in F$.
Si $\vec{u}\neq\vec{o}$ alors, la droite (AM) est incluse dans $\mathcal{V}$ et donc $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}\in F$.
Soit $\vec{u},\vec{v}\in F$. On peut écrire $\vec{u}=\overrightarrow{AM},\vec{v}=\overrightarrow{AN}$ avec $M,N\in\mathcal{V}$.
Si $\vec{u}=\vec{o}$ ou $\vec{v}=\vec{o}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\in F$.
Sinon, considérons I le milieu du segment $[MN]$.
Le point I appartient à la droite (MN) dont $I\in\mathcal{V}$.
Comme $\vec{u}+\vec{v}=2\overrightarrow{AI}$, on a $\vec{u}+\vec{v}\in F$.
Finalement F est un sous-espace vectoriel et $\mathcal{V}$ un sous-espace affine.

Exercice 2 Soit $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Montrer que, si tout barycentre de points de $\mathcal{V}$ est encore dans $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine.

Soit $A\in\mathcal{V}$ et $F=\left\{\overrightarrow{AM}\,/\,A,M\in\mathcal{V}\right\}$. Il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
$\vec{o}\in F$.
Soit $\vec{u}\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. $\exists M\in\mathcal{V}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.
Pour $N=\text{bar}((A,1-\lambda),(M,\lambda))\in\mathcal{V}$ on a $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ donc $\lambda.\vec{u}\in F$
Pour $P=\text{bar}((A,-1),(M,1),(N,1))\in\mathcal{V}$ on a $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\vec{u}+\vec{v}$ donc $\vec{u}+\vec{v}\in F$ .Soit $\vec{u},\vec{v}\in F$.

Exercice 3 Soit A,B et C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ tel que les barycentres G,G_1,G_2 et G_3 de
$\big((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\big),\big((A,-\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\big)$,
$\big((A,\alpha),(B,-\beta),(C,\gamma)\big)$, et $\big((A,\alpha),(B,\beta),(C,-\gamma)\big)$ existent.
a) Montrer que les droites $(AG_1),(BG_2),(CG_3)$ concourent en G.
b) Montrer que les droites $(G_2G_3),(G_3G_1),(G_1G_2)$ passent respectivement par A,B,C.



a) On $-\alpha\overrightarrow{G_1A}+\beta\overrightarrow{G_1B}+\gamma\overrightarrow{G_1C}=\vec{o}$ donc $(-\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{G_1G}+2\alpha\overrightarrow{AG}=\vec{o}$ donc $G\in(AG_1)$.
De même $G\in(BG_2)$ et $G\in(CG_3)$.
b) $2\alpha\overrightarrow{G_2A}=\left(\alpha\overrightarrow{G_2A}-\beta\overrightarrow{G_2B}+\gamma\overrightarrow{G_2C}\right)+\left(\alpha\overrightarrow{G_2A}+\beta\overrightarrow{G_2B}-\gamma\overrightarrow{G_2C}\right)=\vec{o}+(\alpha+\beta-\gamma)\overrightarrow{G_2G_3}$ donc $A\in(G_2G_3)$. De même $B\in(G_3G_1)$ et $C\in(G_1G_2)$.

Application affine

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension finie et de direction E.

Exercice 4 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même et (A,B) un couple de points distincts de $\mathcal{E}$.
Montrer que si A et B sont des points fixes de f alors la droite (AB) est invariante par f.

$f(A)=A$ et $f(B)=B \Rightarrow \vec{f}(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}=\overrightarrow{AB}$.
Pour tout point $M=A+\lambda.\overrightarrow{AB}$ de la droite (AB) on a alors $f(M)=M$.

Exercice 5 Soit A,B,C,D quatre points non coplanaires d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3.
Montrer qu'il existe une unique application affine envoyant A,B,C,D sur B,C,D,A et déterminer un point invariant de celle-ci.

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base de E.
Il existe une unique application linéaire φ l'envoyant sur $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ et puisqu'une application affine est caractérisée par l'image d'un point et sa partie linéaire, l'application affine cherchée existe et est unique.
L'isobarycentre des points A,B,C,D est invariant.

Exercice 6 Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine telle qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.
Montrer que f admet un point invariant.

Soit $\Omega\in\mathcal{E}$. Considérons l'isobarycentre G des points $\Omega,f(\Omega),\dots,f^{n-1}(\Omega)$.
$f(G)$ est l'isobarycentre des points $f(\Omega),f^2(\Omega),\dots,f^n(\Omega)=\Omega$ donc $f(G)=G$.
Ainsi f possède un point fixe.

Applications affines usuelles

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension finie et de direction E.

Exercice 7 Soit $\vec{u}$ un vecteur de E et A un point de $\mathcal{E}$. Décrire la transformation $t_{\vec{u}}\circ s_A$.

Posons $B=A+\dfrac{1}{2}\vec{u}$. On a $t_{\vec{u}}=s_B\circ s_A$ donc $t_{\vec{u}}\circ s_A=s_B$.

Exercice 8 Soit H et H' deux homothéties de centres O et O' et de rapports λ et λ'.
Décrire la transformation $H'\circ H$

$\overrightarrow{H'\circ H}=\lambda\lambda'\,\mathrm{Id}_E$.
Si $\lambda\lambda'\neq 1$ alors $H'\circ H$ est une homothétie de rapport $\lambda\lambda'$ et de centre Ω caractérisé par : $(H'\circ H)(\Omega)=\Omega$
soit $\overrightarrow{O'\Omega}=\lambda'\overrightarrow{O'O}+\lambda\lambda'\overrightarrow{O\Omega}$ qui donne $\overrightarrow{O'\Omega}=\dfrac{\lambda'(1-\lambda)}{1-\lambda\lambda'}\overrightarrow{O'O}$.
Si $\lambda\lambda'=1$ alors $H'\circ H$ est une translation de vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{OO''}$ avec $O''=H'(H(O))=H'(O)=O'+\lambda'\overrightarrow{O'O}$
et donc $\vec{u}=(1-\lambda')\overrightarrow{OO'}$.

Exercice 9 Soit f une transformation affine et h une homothétie de centre O et de rapport λ.
Préciser l'application $f\circ h\circ f^{-1}$.

$f\circ h\circ f^{-1}$ est une application affine de partie linéaire $\lambda\,\mathrm{Id}$ qui fixe le point $f(O)$.
Que $\lambda=1$ ou non, $f\circ h\circ f^{-1}$ est l'homothétie de centre $f(O)$ et de rapport λ.

Exercice 10 Déterminer toutes les applications affines $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ commutant avec toutes les translations.

Les translations sont solutions. Montrons que ce sont les seules.
Si f commutent avec les translations alors pour tout $\vec{u} \in E$, $(t_{\vec{u}} \circ f)(A) = (f \circ t_{\vec{u}})(A)$ donne $f(A+\vec{u}) = f(A) + \vec{u}$. Par suite $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ puis $\vec{f} = \mathrm{Id}_E$. Ainsi f est une translation.

Exercice 11 Montrer que l'ensemble G formé par la réunion des translations et des symétries centrales de $\mathcal{E}$, muni du produit de composition des applications, forme un groupe.

Considérons $L : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$ définie par $L(f) = \vec{f}$.
L est un morphisme de groupes et $\{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$ donc $G = L^{-1}(\{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\})$ est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

Exercice 12 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui transforme toute droite vectorielle en une droite parallèle. Montrer que f est une translation ou une homothétie.

Soit f une solution du problème posé. Montrons : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{f} = \lambda\,\mathrm{Id}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ la droite $\mathcal{D} = A + Vect(\vec{u})$.
On a $f(\mathcal{D}) = f(A) + \mathrm{Vect}(\vec{u})$.
Or $f(A+\vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}) \in f(\mathcal{D})$ donc $\vec{f}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{f}(\vec{u}) = \lambda.\vec{u}$.
Montrons que ce λ ne dépend pas de $\vec{u}$.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
$\forall 1 \le i \le n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{f}(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.
$\forall 1 \le i \ne j \le n, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{e}_i + \vec{e}_j) = \lambda(\vec{e}_i + \vec{e}_j)$.
Or la famille $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ est libre donc $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$.
Ainsi $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ et $\vec{f} = \lambda\,\mathrm{Id}$.

Exercice 13 On note $\mathcal{HT}$ le groupe des homothéties-translations de $\mathcal{E}$.
Montrer que si G est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{HT}$ alors G n'est que constitué que de translations ou d'homothéties de même centre.

Si G n'est constitué que de translation : ok
Sinon soit H une homothétie h de centre O et de rapport $\lambda \ne 1$ appartenant à G.
Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ appartenant à G.
$H \circ t = t \circ H$ donne en O : $\lambda\vec{u} = \vec{u}$ d'où $\vec{u} = \vec{0}$ et $t = \mathrm{Id}_E$ qui est une homothétie de centre O.
Soit H' une homothétie appartenant à G.
$H \circ H' = H' \circ H$ donne en O : $H(H'(O)) = H'(O)$. Or O est le seul point fixe de H donc $H'(O) = O$ et par suite H' est une homothétie de centre O.
Finalement les éléments de G sont tous des homothéties de centre O.

Projection et symétrie affine

Exercice 14 On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
a) Donner l'expression analytique de la projection sur $\mathcal{P} : x + y + z = 1$ parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.
b) Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathcal{P} : x + z = 1$ selon $D = \mathrm{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.
c) Donner l'expression de la projection affine sur �: $x + y + z = 1$ selon la direction $\mathrm{Vect}(\vec{u}(1, 2, -2))$.

a) Notons f la transformation étudiée. Soit $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ et $M'\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix} = f(M)$.

$M' \in \mathcal{P}$ donc $x'+y'+z'=1$.

$\overrightarrow{MM'} \in \text{Vect}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ ce qui donne $\begin{cases} x' = x+\lambda \\ y' = y+\lambda \\ z' = z-\lambda \end{cases}$.

Sachant $x'+y'+z'=1$, on obtient : $\lambda = 1-(x+y+z)$ et finalement : $\begin{cases} x' = -y-z+1 \\ y' = -x-z+1 \\ z' = x+y+2z-1 \end{cases}$.

b) Notons f la transformation étudiée. Soit $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ et $M'\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix} = f(M)$.

$m[M,M'] \in \mathcal{P}$ donc $\dfrac{x+x'}{2} + \dfrac{z+z'}{2} = 1$.

$\overrightarrow{MM'} \in \text{Vect}(\vec{i}+\vec{j})$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{i}$ ce qui donne $\begin{cases} x' = x+\lambda \\ y' = y+\lambda \\ z' = z \end{cases}$.

Sachant $x+x'+z+z'=2$, on obtient : $\lambda = 2-2x-2z$ et finalement : $\begin{cases} x' = -x-2z+2 \\ y' = -2x+y-2z+2 \\ z' = z \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x' = 2x+y+z-1 \\ y' = 2x+3y+2z-2 \\ z' = -2x-2y-z+2 \end{cases}$

Exercice 15 On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f:\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ d'expression analytique :

a) $\begin{cases} x' = -y-z+1 \\ y' = -2x-y-2z+2 \\ z' = x+y+2z-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x' = x-z+1 \\ 2y' = x+2y+z-1 \\ 2z' = -x+z+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -y+z+3 \\ y' = -x+z+3 \\ z' = -x-y+2z+3 \end{cases}$

a) f est une application affine car l'expression analytique est du type $X' = AX+B$.
Les points invariants par f sont les points du plan $x+y+z=1$.
On a $A^2 = \text{Id}$ donc $\vec{f}$ est une symétrie vectorielle selon la direction $\ker(\vec{f}+\text{Id}) = \text{Vect}(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$.
Par suite f est la symétrie par rapport au plan d'équation $x+y+z=1$ et selon $\text{Vect}(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$.
b) f est une application affine car l'expression analytique est du type $X' = AX+B$.
Les points invariants par f sont les points du plan $x+z=1$.
On a $A^2 = A$ donc $\vec{f}$ est une projection vectorielle selon la direction $\ker(\vec{f}) = \text{Vect}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$.
Par suite f est la projection sur le plan d'équation $x+z=1$ et selon la direction $\text{Vect}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$.
$3x+3y-2z=0$.
c) Projection sur �$: x+y-z=3$ selon $\vec{u}(1,1,1)$

Exercice 16 A quelle condition une translation et une symétrie affine commutent-elle ?

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ et s une symétrie par rapport à $\mathcal{V} = A+F$ et parallèlement à G.
$\vec{t}\circ\vec{s} = \vec{s} = \vec{s}\circ\vec{t}$ et $(t\circ s)(A) = (s\circ t)(A) \Leftrightarrow A+\vec{u} = A+s(\vec{u})$.
Donc t et s commutent ssi $\vec{u} \in F$.

Exercice 17 Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine. Etablir :

a) f est une projection si et seulement si $f\circ f=f$.

b) f est une symétrie si et seulement si $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

---

a) Si f est une projection affine alors $f\circ f=f$.

Inversement si $f\circ f=f$ alors $\vec{f}\circ\vec{f}=\vec{f}$. Par suite $F=\operatorname{Im}\vec{f}$ et $G=\ker\vec{f}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $\vec{f}$ est la projection vectorielle sur F selon la direction G.

Soit A un point de $\mathcal{E}$, on a $f(f(A))=f(A)$ donc $f(A)$ est un point fixe de f.

Posons $\mathcal{V}=f(A)+F$. f apparaît comme la projection sur $\mathcal{V}$ selon la direction G car prend même valeur en $f(A)$ et a même partie linéaire que cette transformation.

b) Si f est une symétrie affine alors $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Inversement, si $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ alors $\vec{f}\circ\vec{f}=\mathrm{Id}_E$. Par suite $F=\ker(\vec{f}-\mathrm{Id}_E)$ et $G=\ker(\vec{f}+\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $\vec{f}$ est la symétrie vectorielle par rapport à F selon la direction G.

Soit A un point de $\mathcal{E}$, on a $f(f(A))=A$.

Posons I le milieu du segment d'extrémités A et $f(A)$. I est un point fixe de f.

Posons $\mathcal{V}=I+F$. f apparaît comme la symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ selon la direction G car prend même valeur en I et a même partie linéaire que cette transformation.

Exercice 18 Soit f une transformation affine telle que $\vec{f}\circ\vec{f}=\mathrm{Id}_E$.

Montrer qu'il existe un unique couple (t,s) formé d'une translation et d'une symétrie tel que $f=t\circ s=s\circ t$.

Unicité : Si $f=t\circ s=s\circ t$ alors $f\circ f=t\circ t$ ce qui détermine t puis s de manière unique.

Existence : Puisque $\vec{f}\circ\vec{f}=\mathrm{Id}_E$, $F=\ker(\vec{f}-\mathrm{Id})$ et $G=\ker(\vec{f}+\mathrm{Id})$ sont supplémentaires et $\vec{f}$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit $O\in\mathcal{E}$, $O'=f(O)$, $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in F$ et $\vec{v}\in G$.

Posons $A=O+\dfrac{1}{2}\vec{v}$, $\mathcal{V}=A+F$, s la symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ et t la translation de vecteur $\vec{u}$.

On a $t\circ s=s\circ t$, $\vec{f}=\vec{t}\circ\vec{s}$ et $(t\circ s)(O)=A+\dfrac{1}{2}\vec{v}+\vec{u}=O+\overrightarrow{OO'}=O'=f(O)$ donc $f=t\circ s=s\circ t$.

et s l'application $f\circ t^{-1}$ de sorte que $f=s\circ t$.

Isométries du plan

Exercice 19 Montrer que toute isométrie du plan $\mathcal{P}$ qui échange deux points distincts est involutive.

Soit f une isométrie échangeant deux points distincts A et B.

f^2 est un déplacement car composée de deux déplacement ou de deux antidéplacement.

A et B sont points fixes de f^2 car($f(f(A))=f(B)=A$ et $f(f(B))=B$.

Par suite $f^2=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

Exercice 20 Soit r et r' deux rotations du plan $\mathcal{P}$ distinctes de Id.

Montrer qu'il existe 3 réflexions s,s',s'' telles que : $r=s''\circ s$ et $r'=s'\circ s''$.

Décrire $r'\circ r$. Lorsqu'il s'agit d'une rotation donner une construction de son centre.

Notons O et O' les centres de r et r'.

Soit s'' la réflexion par rapport à une droite passant par O et O'. Considérons $f=s''\circ r$.

f est un antidéplacement du plan qui garde fixe le point O, c'est donc un réflexion s par rapport à une droite $\mathcal{D}$ passant O. Ainsi $r=s''\circ s$.

De même, $r'\circ s''$ est une réflexion s' par rapport à une droite $\mathcal{D}'$ passant par O'.
$r'\circ r = s'\circ s''\circ s''\circ s = s'\circ s$.
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles alors $r'\circ r$ est une translation.
Sinon, $r'\circ r$ est une rotation dont le centre est l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Connaissant les rotations r et r', on peut construire $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ puis le centre de $r'\circ r$.

Exercice 21 Etudier à quelle condition une réflexion et une translation du plan $\mathcal{P}$ commutent.

Soit σ la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D} = A + D$ et t la translation de vecteur $\vec{u}$.
On a $\sigma\circ t = t\circ\sigma$ si et seulement si pour tout point $M\in\mathcal{P}, \sigma(M+\vec{u}) = \sigma(M)+\vec{u}$ soit $\vec{\sigma}(\vec{u}) = \vec{u}$.
Or les vecteurs fixes de la réflexion vectorielle $\vec{\sigma}$ sont les vecteurs de D.
Par suite σ et t commutent si et seulement si $\vec{u}\in D$.

Exercice 22 Soit $A_1,\dots,A_n$ des points du plan.
Montrer que l'existence de $B_1,\dots,B_n$ tels que $A_i = m[B_i,B_{i+1}]$ (avec $B_{n+1} = B_1$) est équivalente à l'existence d'un point fixe pour une certaine composée de symétries centrales.
Discuter l'existence et l'unicité des points B_i et en donner une construction géométrique.

Soit s_i la symétrie de centre A_i.
Si $B_1,\dots,B_n$ est solution du problème posé alors $B_2 = s_1(B_1),\dots,B_n = s_{n-1}(B_{n-1})$ et $B_1 = (s_n\circ\dots\circ s_1)(B_1)$.
Inversement ok.
Si n est impair, la composée $s_n\circ\dots\circ s_1$ est une symétrie centrale et par suite B_1 existe et est unique.
En déterminer le milieu d'un point et de son image par cette composée, on construit B_1.
Si n est pair, la composée est une translation de vecteur $2\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right)$.
Si ce dernier n'est pas nul, il n'y a pas de solution au problème posé.
Si ce vecteur est nul, n'importe quel point convient.

Exercice 23 On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ d'expression analytique :

a) $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 4 \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = -x+2 \end{cases}$

a) Rotation de centre $\Omega\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$ et d'angle $\arccos 3/5 \quad [2\pi]$.

b) Symétrie glissée par rapport à la droite $\mathcal{D}: 2x+2y-3=0$ et de vecteur $\vec{u}\left|\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}\right.$.

Exercice 24 Déterminer le groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$ laissant globalement invariant :
a) Un carré.
b) Un rectangle non carré.
c) Un cercle.

a) Soit $(ABCD)$ un carré.
Soit f une isométrie du plan $\mathcal{P}$ conservant les sommets du carré $ABCD$.
Nécessairement f garde fixe le centre O du rectangle (isobarycentre des points A,B,C,D).
Si f est un déplacement, alors selon que $f(A) = A,B,C$ ou D, on a $f = \mathrm{Id}, r_{O,\pi/2}, r_{O,\pi} = s_O$ ou $r_{O,3\pi/2}$.
Si f est un antidéplacement alors selon que $f(A) = A,B,C$ ou D, on a $f = s_{(AC)}, s_{\mathcal{D}_1}, s_{(BD)}$ ou $s_{\mathcal{D}_2}$ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[AD]$.
Inversement les isométries proposées laissent invariant le carré $(ABCD)$

b) Soit $(ABCD)$ un rectangle non carré.
Soit f une isométrie du plan $\mathcal{P}$ conservant les sommets du rectangle $(ABCD)$.
Nécessairement f garde fixe le centre O du rectangle (isobarycentre des points A,B,C,D).
Si f est un déplacement, alors selon que $f(A)=A$ ou C, on a $f=\mathrm{Id}$ ou $r_{O,\pi}=s_O$.
Comme $(ABCD)$ n'est pas carré, les cas $f(A)=B$ et $f(A)=D$ sont impossibles..
Si f est un antidéplacement alors selon que $f(A)=B$ ou D, on a $f=s_{\mathcal{D}_1}$ ou $s_{\mathcal{D}_2}$ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[AD]$.
Comme $ABCD$ n'est pas carré, $f(A)=A$ ou $f(A)=C$ sont impossibles.
Inversement les isométries proposées laissent invariant le rectangle $(ABCD)$
c) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R>0$.
Soit f une isométrie du plan laissant globalement invariant $\mathcal{C}$.
Soit A et B deux points diamétralement opposés de ce cercle, on a $AB=2R$.
Leurs images A' et B' par l'isométrie f sont des points de C tels que $A'B'=AB=2R$, ce sont donc deux points diamétralement opposés du cercle $\mathcal{C}$. Par suite le milieu du segment $[A'B']$ est O et on en déduit que O est point fixe de f.
Par suite f est soit une rotation de centre O, soit une réflexion par rapport à un axe passant par O.
Inversement de telles transformations conservent le cercle c.

Exercice 25 Déterminer le groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$ laissant globalement invariant la réunion de deux droites parallèles distinctes du plan.

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles distinctes.
Soit f une isométrie laissant globalement invariant $\mathcal{D}\cup\mathcal{D}'$.
Soit A un point de $\mathcal{D}$ et Δ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant pas A.
Δ coupe $\mathcal{D}'$ en un point A'.
Soit Δ' l'image de Δ par f. Comme une isométrie préserve l'orthogonalité, Δ' est une droite parallèle à Δ coupant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en des points B et B'.
Deux cas sont alors possibles : f envoie A sur B ou f envoie A sur B'.
Si $f(A)=B$ alors $f(A')=B'$. Introduisons D la médiatrice du segment $[AB]$.
Si f est déplacement alors $s_D\circ f$ est un antidéplacement qui laisse fixe A et A' à savoir $s_{(AA')}$.
Par suite $f=s_D\circ s_{(AA')}$ puis f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Si f est un antidéplacement alors $s_D\circ f$ est un déplacement qui laisse fixe A et A' à savoir Id.
Par suite $f=s_D$.
Si $f(A)=B'$ alors $f(A')=B$.
Introduisons D' la droite parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ qui se situe à égale distance de celles-ci.
$s_{D'}\circ f$ est une isométrie laissant invariante $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et qui envoie A sur B.
On est alors ramené au cas précédent.
Résumons : f est
-soit une translation de vecteur $\vec{u}$ nul ou directeur de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$,
-soit une réflexion par rapport à une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$,
-soit une symétrie glissée par rapport à la droite D' intermédiaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
-soit une symétrie de centre situé sur la droite D'.
Inversement les transformations décrites ci-dessus sont solutions.

Similitudes du plan

Exercice 26 Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$.
On désigne par S_1,S_2,S_3 les similitudes directes du plan $\mathcal{P}$ de centres respectifs A,B,C telles

que $S_1(B)=C, S_2(C)=A$ et $S_3(A)=B$.

Décrire les composées $S_3\circ S_2\circ S_1$ et $S_1\circ S_2\circ S_3$.

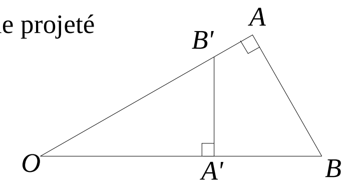
$S_3\circ S_2\circ S_1$ et $S_1\circ S_2\circ S_3$ sont des similitudes de rapport 1 et d'angle π par composition.

$S_3\circ S_2\circ S_1$ laisse fixe le point B, c'est la symétrie de centre B.

$S_1\circ S_2\circ S_3$ envoie le point C sur A, c'est la symétrie de centre $I=m[AC]$.

Exercice 27 Soit AOB un triangle non aplati rectangle en $A, B'\in]O,A]$ et A' le projeté orthogonal de B' sur (OB).

Montrer : $OB'+AB<OB+A'B'$.



Nous allons exploiter le fait que les triangles AOB et $A'OB'$ sont semblables.

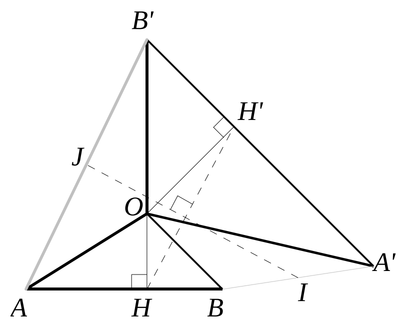
Notons α l'angle en O de ces triangles : $\dfrac{A'B'}{OB'}=\sin\alpha=\dfrac{AB}{OB}$.

$OB+A'B'-OB'-AB=(OB-OB')(1-AB/OB)>0$.

Exercice 28 Soit OAB et $OA'B'$ deux triangles directement semblables.

Soit I,J les milieux respectifs de $A'B$, AB' et H,H' les projections orthogonales de O sur (AB), (A',B').

Montrer : $(IJ)\perp(HH')$.



$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'B'}$ donc $2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HH'}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{OH'}+\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{HO}$

Notons $s=\lambda.r_\theta$ la partie linéaire associée à la similitude transformant OAB en $OA'B'$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{OH'}+\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{BA}.s(\overrightarrow{OH})+s(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{HO}=-\lambda\overrightarrow{AB}.r_\theta(\overrightarrow{OH})-\lambda r_\theta(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{OH}$

donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{OH'}+\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{HO}=-\lambda\overrightarrow{AB}.\left(r_\theta(\overrightarrow{OH})+r_{-\theta}(\overrightarrow{OH})\right)=-2\lambda\cos\theta.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OH}=0$

puis la conclusion.

Exercice 29 On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit A,B,C trois points du plan $\mathcal{P}$ d'affixes a,b,c telles que $|a|=|b|=|c|$.

Montrer que (ABC) est équilatéral si et seulement si $a+b+c=0$.

Posons $R=|a|=|b|=|c|$, $a=Re^{i\alpha}, b=Re^{i\beta}, c=Re^{i\gamma}$.

Si $a+b+c=0$ alors $1+e^{i(\beta-\alpha)}+e^{i(\gamma-\alpha)}=0$.

Par égalité des parties imaginaires : $\beta-\alpha=\alpha-\gamma\quad[2\pi]$ ou $\beta-\alpha=\pi-(\alpha-\gamma)\quad[2\pi]$.

Dans le premier cas, l'égalité des parties réelles donne $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\gamma)=-\dfrac{1}{2}$.

Dans le second cas, l'égalité des parties réelles donne $1=0$. Ce cas est donc impossible.

Finalement on obtient $\beta-\alpha=\alpha-\gamma=\pm\dfrac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$.

On obtient alors $(b=ja$ et $c=j^2a)$ ou $(b=j^2a$ et $c=ja)$.

Par suite (ABC) est un triangle équilatéral.

Inversement si (ABC) est un triangle équilatéral.

Les points A,B,C se situent à égale distance de O et O est donc le centre du cercle circonscrit.
Comme (ABC) est équilatéral, O est aussi le centre de gravité de (ABC) et par suite $a+b+c=0$.

Exercice 30 a) Soit f une similitude du plan $\mathcal{P}$ et Γ une conique de foyer f, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e. Justifier que $f(\Gamma)$ est une conique dont on précisera foyer, directrice et excentricité.
b) A quelle(s) condition(s) deux coniques sont-elles directement semblables ?

a) $\Gamma=\left\{M\in\mathcal{P}/MF=ed(M,\mathcal{D})\right\}$.
$f(\Gamma)=\left\{f(M)/MF=ed(M,\mathcal{D})\right\}=\left\{M'/f^{-1}(M')F=ed(f^{-1}(M'),\mathcal{D})\right\}$.
Posons $F'=f(F)$ et $\mathcal{D}'=f(\mathcal{D})$.
En notant λ le rapport de la similitude f, on a $M'F'=\lambda f^{-1}(M')F$ et $d(M',\mathcal{D}')=\lambda d(f^{-1}(M'),\mathcal{D})$
donc $f(\Gamma)=\left\{M'\in\mathcal{P}/M'F'=ed(M',\mathcal{D})\right\}$.
Ainsi $f(\Gamma)$ est la conique de foyer F', de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e.
b) Par la question précédente, l'égalité de l'excentricité est nécessaire. Voyons que cette condition suffit.
Considérons Γ,Γ' deux coniques de foyers F,F', de directrices $\mathcal{D},\mathcal{D}'$ et de même excentricité e.
Posons H,H' les projetés de F,F' sur $\mathcal{D},\mathcal{D}'$.
Nous savons qu'il existe une similitude directe f qui envoie F sur F' d'une part, et H sur H' d'autre part.
Puisque $\mathcal{D}$ est la perpendiculaire en H à la droite (FH), l'image de $\mathcal{D}$ par f est la perpendiculaire en H' à la droite $(F'H')$ à savoir $\mathcal{D}'$.
Par suite f transforme Γ en Γ'.

Isométries de l'espace

Exercice 31 On munit l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Décrire l'application $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ d'expression analytique :

a) $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(-2x-y+2z)+1\\ y'=\frac{1}{3}(2x-2y+z)+1\\ z'=\frac{1}{3}(x+2y+2z)+3\end{cases}$ b) $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(-2x-2y+z-5)\\ y'=\frac{1}{3}(-2x+y-2z-2)\\ z'=\frac{1}{3}(x-2y-2z+1)\end{cases}$.

a) f est le vissage d'axe dirigé et orienté par $\vec{v}(1,1,3)$, d'angle $\arccos(-5/6)$ et de vecteur $\vec{v}$.
b) f est le retournement autour de la droite d'équations : $\begin{cases}x-z+1=0\\ y+2z=0\end{cases}$.

Exercice 32 Déterminer les déplacements et les réflexions de $\mathcal{E}$ laissant globalement invariante une sphère donnée.

Soit S une sphère de centre O et de rayon R.
L'image de la sphère S par une isométrie f est une sphère de centre $f(O)$ et de rayon R.
L'isométrie f laisse invariante la sphère S si et seulement si $f(O)=O$.
Les déplacements laissant fixe le point O sont les rotations dont l'axe passe par O.
Les réflexions laissant fixe le point O sont celles dont le plan passe par O.