Les fractions rationnelles

Exercice 1 Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 2 Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 3 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg F' < \deg F - 1 \Rightarrow \deg F = 0$.

Exercice 4 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q.
Montrer que F est paire ssi P et Q sont tous deux pairs ou impairs.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $P(\omega X) = P(X)$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.
b) En déduire la réduction au même dénominateur de la fraction rationnelle $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}$.

Racines et pôles

Exercice 6 Soit p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Déterminer les racines et les pôles de $F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}$ en précisant les multiplicités respectives.

Exercice 7 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
a) Soit a un zéro d'ordre $\alpha \geq 1$ de F. Montrer que a est zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F'.
b) Comparer les pôles de F et de F', ainsi que leur ordre de multiplicité.

Exercice 8 Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$.

Décomposition en éléments simples

Exercice 9 Montrer que l'application $\mathrm{Ent} : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Exercice 10 Effectuer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

a) $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$ b) $\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ c) $\frac{1}{X(X-1)^2}$

d) $\frac{2X}{X^2 + 1}$ e) $\frac{1}{X^2 + X + 1}$ f) $\frac{4}{(X^2+1)^2}$

g) $\frac{3X - 1}{X^2(X+1)^2}$ h) $\frac{1}{X^4 + X^2 + 1}$ i) $\frac{3}{(X^3 - 1)^2}$.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Former la décomposition en éléments simples de $F = \frac{n!}{X(X-1)\ldots(X-n)}$.

Applications de la décomposition en éléments simples

Exercice 12 Soit la fraction $F = \dfrac{1}{X(X+1)}$.

a) Réaliser la décomposition en éléments simples de F.

b) En déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

c) Procéder de même pour calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 13 Exprimer la dérivée d'ordre n de $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

Exercice 14 Soit $F = \dfrac{1}{X^2+1} \in \mathbb{C}(X)$.

a) En réalisant la DES de F, exprimer $F^{(n)}$.

b) Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n\left[X\right]$ tel que $F^{(n)} = \dfrac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}$.

c) Déterminer les zéros de P_n.

Exercice 15 Soit $F = \dfrac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$.

a) Quelle relation existe entre la partie polaire de F en 1 et celle en -1.
b) Former la décomposition en éléments simples de la fraction F.
c) En déduire un couple $(U,V) \in \mathbb{R}\left[X\right]^2$ tel que : $(X+1)^3U + (X-1)^3V = 1$.

Exercice 16 On pose $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \left\{0,\ldots,n-1\right\}$.

Simplifier $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X-\omega_k}$.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in \left\{0,1,\ldots,n-1\right\}$. On pose pour $k \in \left\{0,1,\ldots,n-1\right\}$,

$\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$. Mettre sous forme irréductible : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X-\omega_k}$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On pose $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$.

a) Pour $p \in \left\{0,1,\ldots,n-1\right\}$, exprimer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^p}{Q}$ à l'aide des $Q'(z_k)$.

b) En déduire, pour $p \in \left\{0,1,\ldots,n-1\right\}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}$.

Exercice 19 Soit $P \in \mathbb{C}\left[X\right]$ un polynôme scindé à racines simples : $x_1, \ldots, x_n$.

a) Former la DES de $1/P$.

b) On suppose $P(0) \neq 0$. Observer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$.

Exercice 20 Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples : $x_1,\dots,x_n$.

a) Former la DES de P''/P.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=0$.

Exercice 21 Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ deux à deux distincts, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ tels que $\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\},a_i+\alpha_j\neq 0$.

Résoudre le système $\begin{cases}\frac{x_1}{a_1+\alpha_1}+\frac{x_2}{a_2+\alpha_1}\cdots+\frac{x_n}{a_n+\alpha_1}=1\\ \frac{x_1}{a_1+\alpha_2}+\frac{x_2}{a_2+\alpha_2}\cdots+\frac{x_n}{a_n+\alpha_2}=1\\ \vdots\\ \frac{x_1}{a_1+\alpha_n}+\frac{x_2}{a_2+\alpha_n}\cdots+\frac{x_n}{a_n+\alpha_n}=1\end{cases}$