CHAPITRE 1 : Généralités sur la propagation des ondes

1 Propagation d'une onde

1.1 Définitions d'une onde

On appelle onde une grandeurs $\psi(M,t)$ dépendant de la position M dans l'espace et du temps t, caractérisant le phénomène de propagation de proche en proche d'une perturbation dans un milieu sans transport de la matière.

- Exemple :

Lorsqu'on imprime une secousse à l'extrémité libre d'une corde fixé à un mur, on observe une déformation de la corde qui se déplace le long de l'axe de la corde. C'est un signal physique qui se crée et qui se propage, appelé onde.

Une onde se propage avec une vitesse appelé **vitesse de propagation** ou **célérité** et notée **c**.

1.2 Equation de propagation

Considérons la propagation d'une onde $\psi(M,t)$ dans un cas unidimensionnel par exemple suivant l'axe (Ox) à la vitesse c. On a alors $\psi(M,t) = \psi(x,t)$. L'observation de la propagation montre que $\psi(x,t)$ est la même chaque fois que $\Delta x = c\Delta t$ d'où $\psi(x + c\Delta t, t + \Delta t) = \psi(x,t)$. Cette fonction reste donc constante si $t - \frac{x}{c}$ est fixé. Posons $u = t - \frac{x}{c}$; on a alors $\psi(x,t) = f(u)$ pour une propagation dans le sens des x croissants. Si la propagation se fait dans le sens inverse, c'est-à-dire dans le sens des x décroissants avec la même vitesse c alors en posant $v = t + \frac{x}{c}$; on a $\psi(x,t) = g(v)$.

- Dans le sens des x croissants : $\psi(x,t) = f(u) = f(t - \frac{x}{c})$ d'où :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \psi'(u) \ car \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1 \ \ donc \ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \psi''(u)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\psi'(u) \ \ car \ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \ \ donc \ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\psi''(u)$$

- Dans le sens des x décroissants : $\psi(x,t) = g(v) = f(t + \frac{x}{c})$ d'où :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = \psi'(v) \ car \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 1 \ \ donc \ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \psi''(v)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c}\psi'(u) \ \ car \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c} \ \ donc \ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\psi''(v)$$

Dans les deux cas, on aboutit à l'équation différentielle : $\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}}}$. Cette équation aux dérivées partielles est appelée équation de propagation ou équation de d'Alembert.

Dans le cas général de la propagation d'une onde $\psi(M,t)$ en trois dimensions d'espace, en remarquant qu'à une dimension $\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \Delta\psi$, l'équation de propagation de l'onde s'écrit : $\boxed{\boldsymbol{\Delta\psi(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(M,t)}{\partial t^2} = 0}}$.

L'équation de d'Alembert est aussi appelée équation d'onde et $\psi(M,t)$ est appelée fonction d'onde.

1.2.1 Résolution de l'équation d'onde

Dans le cas unidimensionnel, $\psi(x,t) = f(u)$ et $\psi(x,t) = g(v)$ avec $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$ sont solutions de l'équation d'onde $\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$ comme nous l'avons vu. Cherchons la solution générale de cette équation sous la forme $\psi(u\,,v) \;=\; \psi(x,t)$. On a :

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv \Longrightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\;\; et \;\; \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad d'où:$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} \quad (d\psi\text{ étant une différentielle totale exacte})$$

$$et\;\; \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial v} \Longrightarrow de\ même\;\; \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)$$

En remplaçant dans l'équation de propagation, il vient :

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right) = 0 \quad soit \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} = 0 \quad d'où:$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = 0 \Longrightarrow la\ fonction\ g' = \frac{\partial\psi}{\partial v}\ ne\ depend\ pas\ de\ u\ mais\ uniquement\ de\ v.$$

La fonction $\frac{\partial\psi}{\partial v} = g'(v)$ s'intègre en $\psi(u,v) = g(v) + C$ où g est une primitive de g'et C une constante de v donc fonction de u. D'où $C = f(u)$ où f est une primitive de la fonction $f'(u) = \frac{\partial\psi}{\partial u}$. Finalement la solution générale l'équation d'onde est : $\boxed{\boldsymbol{\psi(u,v) = f(u) + g(v)}}$ soit $\boxed{\boldsymbol{\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)}}$

En conclusion, toute solution de l'équation de d'Alembert (ou équation d'onde) dans le cas unidimensionnel est de la forme : $\boxed{\boldsymbol{\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)}}$ où f et g sont deux fonctions quelconques deux fois dérivables. La solution peut aussi se mettre sous la forme : $\boxed{\boldsymbol{\psi(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)}}$ où F et G sont également deux fonctions quelconques deux fois dérivables.

1.2.3 Onde en coordonnées sphérique

Considérons la propagation d'une onde $\psi(M,t)$ dans le cas où la variation spatiale ne dépend que de r dans un système de coordonnées sphérique. Alors $\psi(M,t) = \psi(r,t)$ vérifie l'équation d'onde :

$\Delta\psi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2} = 0$. Effectuons le changement de variable $\psi(r,t) = \frac{1}{r}\varphi(r,t)$.

Le laplacien de ψ s'écrit $\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\varphi \Rightarrow r^2\frac{\partial\psi}{\partial r} = r\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi$ $d'où:$

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{\partial r} = r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \Longrightarrow \Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}.$ $On\ a\ aussi$ $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. En remplaçant dans l'équation de propagation, il vient :

$\boxed{\frac{\partial^2\varphi(r,t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(r,t)}{\partial t^2}}$ $équation\ de\ propagation\ dont\ la\ solution\ générale\ est :$

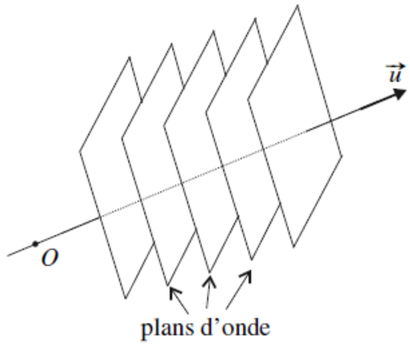
$\varphi(r,t) = \varphi_1(r - ct) + \varphi_2(r + ct)$

La propagation de l'onde est donc donnée par la fonction : $\boldsymbol{\psi(r,t) = \frac{1}{r}\varphi_1(r-ct) + \frac{1}{r}\varphi_2(r+ct)}$.

Les fonctions $\frac{1}{r}\varphi_1(r-ct)$ *et* $\frac{1}{r}\varphi_2(r+ct)$ définissent une propagation à la vitesse c dont l'amplitude décroit en $\frac{1}{r}$.

2 Ondes planes progressives (OPP)

2.1 Onde plane



Une onde $\psi(M,t)$ est une onde plane si, à un instant donné, son amplitude de propagation est la même en tout point d'un plan perpendiculaire à sa direction de propagation $\vec{u}$. Ce plan est appelé plan d'onde.

Un plan d'onde a pour équation, $\vec{u}.\overrightarrow{OM} = cste$ où O est un point origine. Une onde plane ne dépend donc que du temps et de $\vec{u}.\overrightarrow{OM}$ coordonnée de M sur l'axe $(O,\vec{u})$. Ainsi si $\vec{u} = \vec{u}_x$ dans un repère cartésien, l'onde plane ne dépend que de la coordonnée *x* et du temps *t*.

- Exemple :

L'onde $\psi(x,y,z,t) = \varphi(y,z)\cos(\omega t - kx)$ est une onde dont la direction de propagation est $\vec{u} = \vec{u}_x$.

A *t* fixé, $\varphi(y,z) = cste = \varphi_0$ si $x = \overrightarrow{OM}.\vec{u}_x = cste$. Donc $\psi(x,t) = \varphi_0\cos(\omega t - kx)$ est une onde plane dont les plans d'onde sont des plans parallèle au plan (*y*,*z*).

Remarque : **Toutes les ondes dans un cas unidimensionnel sont des ondes planes.**

2.2 Onde progressive

- Une onde progressive est une onde qui se propage dans un sens bien déterminé.

D'une manière générale, une onde progressive est une onde de la forme : $\psi(M,t) = A(M)f(t-\tau(M))$ où $A(M)$ et $\tau(M)$ sont des fonctions de l'espace.

- Une **onde plane et progressive** se propageant à la vitesse c dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ est de la forme : $\boldsymbol{\psi(M,t) = f\left(t - \frac{\vec{u}.\overrightarrow{OM}}{c}\right)}$. Elle peut également se mettre sous la forme équivalente :

$\boldsymbol{\psi(M,t) = F(\vec{u}.\overrightarrow{OM} - ct)}$.

Ainsi : $\psi_1(x,t) = f(u) = f(t - \frac{x}{c})$ est une onde plane progressive qui se propage dans le sens des *x* croissants et $\psi_2(x,t) = g(v) = g(t + \frac{x}{c})$ est une onde plane progressive se propageant dans le sens des *x* décroissants.

La solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnel est donc la superposition de deux ondes planes progressives.

3. Ondes planes progressives monochromatique(OPPM)

3.1 Définition d'une OPPM

Une onde monochromatique est une onde dont la solution de l'équation de propagation est une fonction sinusoïdale du temps et de l'espace. L'onde est qualifiée aussi d'onde sinusoïdale ou onde harmonique.

Une OPPM est une onde plane progressive et sinusoïdale.

- Exemple :

Une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens des x croissants est de la forme : $\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx)$. On peut utiliser la **notation complexe** :

$$\underline{\psi}(x,t) = \psi_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} = \underline{\phi}(x)\mathrm{e}^{i\omega t} \text{ avec } \underline{\phi}(x) = \psi_0 \mathrm{e}^{-ikx} \quad \text{de sorte que } \psi(x,t) = Re\left[\underline{\psi}(x,t)\right].$$

3.2 Solutions sinusoïdales de l'équation de d'Alembert

Cherchons la solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle à dépendance sinusoïdale vis-à-vis du temps c'est-à-dire, en notation complexe, des solutions de la forme : $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\phi}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$.

Pour tout t, l'équation de propagation impose alors : $\underline{\phi}''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\phi}(x) = 0$ dont la solution générale est de la forme : $\underline{\phi}(x) = \underline{\psi}_0^{(+)} e^{-ikx} + \underline{\psi}_0^{(-)} e^{ikx}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. La solution générale de l'équation de l'équation de d'Alembert est donc : $\boxed{\underline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \underline{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{0}}^{(+)} \boldsymbol{e}^{i(\omega t - kx)} + \underline{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{0}}^{(-)} \boldsymbol{e}^{i(\omega t + kx)} \quad \textbf{où } \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{c}}}$.

En notation réelle, la solution est : $\boxed{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{0}}^{(+)} \boldsymbol{\cos}\left(\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{0}}^{(+)}\right) + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{0}}^{(-)} \boldsymbol{\cos}\left(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{0}}^{(-)}\right)}$

où $\psi_0^{(+)} = \left|\underline{\psi}_0^{(+)}\right|$, $\psi_0^{(-)} = \left|\underline{\psi}_0^{(-)}\right|$, $\varphi_0^{(+)} = arg\left(\underline{\psi}_0^{(+)}\right)$ et $\varphi_0^{(-)} = arg\left(\underline{\psi}_0^{(-)}\right)$.

La solution générale est la superposition de deux ondes planes progressive monochromatiques (OPPM).

3.3 Caractéristiques des OPPM

3.3.1 Fréquence, vecteur d'onde, longueur d'onde

En général, une onde $\psi(M,t)$ se propageant à la vitesse c, a une double périodicité :

- ✓ périodicité temporelle définit par la période T (telle qu'en un point M, a tout instant t $\psi(M,t) = \psi(M,t+T)$) ou la fréquence $f = \frac{1}{T}$ (en Hz)
- ✓ périodicité spatiale définit par la longueur d'onde λ telle que $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ (distance parcourue par l'onde pendant une période).

Une OPPM se propageant dans le vide dans la direction et le sens du vecteur $\vec{u}_x$ est de la forme : $\psi(x,t) = \psi_o \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ ou en notation complexe $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi_o} e^{i(\omega t - kx)}$ avec $\underline{\psi_o} = \psi_o e^{i\varphi_0}$ et est caractérisé par sa **pulsation $\boldsymbol{\omega}$** et son **vecteur d'onde $\vec{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}}$** ($\vec{k}$ a pour direction et sens la direction et le sens de la propagation de l'onde et $k = \frac{\omega}{c}$) qui rendent compte de la double périodicité :

- temporelle de période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (ou fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$)
- spatiale de longueur d'onde : $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ (on retrouve $\lambda = cT$). $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est la fréquence spatiale ou nombre d'onde (en m^{-1}).

3.3.2 Expression générale d'une OPPM – Notation complexe

Pour une OPPM se propageant dans la direction et le sens de $\vec{u}_x$, $\psi(x,t) = \psi_o \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, or $x = \vec{u}_x.\overrightarrow{OM}$ et $\vec{k} = k\vec{u}_x$ d'où $kx = \vec{k}.\overrightarrow{OM} = \vec{k}.\vec{r}$ en posant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. $\psi(x,t) = \psi_o \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0)$.

Plus généralement, l'expression de la fonction d'onde d'une OPPM de pulsation ω se propageant à la vitesse c dans la direction et le sens d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque, donc de vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$, est :

$\psi(M,t) = \psi_0 cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0)$. En notation complexe, cette expression devient :

$\underline{\psi}(M,t) = \underline{\psi_o} exp(i(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM}))$ *avec* $\underline{\psi_o} = \psi_o e^{i\varphi_0}$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\psi(M,t) = Re\left[\underline{\psi}(M,t)\right]$.

3.3.3 Relation de dispersion

Pour une OPPM de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$, $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ se propageant à la vitesse c dans le vide, l'équation de propagation $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{i(\omega t - kx)}\right) = \frac{1}{c^2}\left(e^{i(\omega t - kx)}\right)$ impose :

$\boxed{\boldsymbol{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}}$ *Relation de dispersion.* Cette relation implique $\boxed{\omega = \pm ck}$. Attention, ici k est positif ou négatif (ω est toujours positif) ; $k > 0$ pour une propagation dans le sens de $\vec{u}_x$ (sens des *x* croissants) et $k < 0$ pour une propagation dans le sens de $-\vec{u}_x$ (sens des *x* décroissants).

4 Energie associée à une onde

A toute onde est associée une énergie qui se propage. On montre que pour une onde progressive, la vitesse de propagation de l'énergie est la célérité c de l'onde.

5 Paquet d'onde

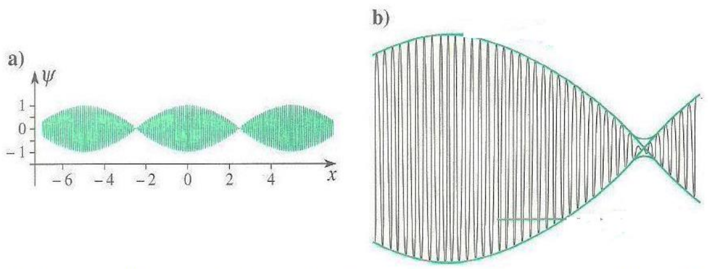
5.1 Notion de paquet d'onde

Un signal physique émis par une source et qui se propage possède des extensions temporelle et spatiale finies. Ainsi, une OPPM n'a pas de réalité physique car n'ayant par exemple ni début ni fin donc transportant une énergie infinie. Une onde réelle ne peut donc être représentée par une onde parfaitement monochromatique. On introduit alors la notion de paquet d'onde qui est une superposition finie ou infinie d'OPPM pour lequel l'énergie reste finie.

5.2 Superposition de deux OPPM de même amplitude.

Considérons deux OPPM $(\omega_1, \vec{k}_1)$ et $(\omega_2, \vec{k}_2)$ de même amplitude en phase en *x = 0* et à *t = 0* et se propageant suivant l'axe (*Ox*). La superposition des deux ondes donne l'onde :

$\psi(x,t) = \psi_0 cos(\omega_1 t - k_1 x) + \psi_0 cos(\omega_2 t - k_2 x)$.



(a) Instantané d'un paquet de deux ondes $f(x) = \psi(x, t = t_0)$. **(b)** Agrissement de la courbe.

La relation de dispersion impose $k_1 = k(\omega_1)$ et $k_2 = k(\omega_2)$. Supposons ω_1 et ω_2 proche et notons : $\begin{cases} \omega_m = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \quad et \quad \delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} \ll \omega_m \\ k_m = \frac{k_1+k_2}{2} = k(\omega_m) \quad et \ \delta k = \frac{k_1-k_2}{2} \approx \frac{dk(\omega)}{d\omega}\partial\omega \end{cases}$. L'onde s'écrit alors : $\psi(x,t) = 2\psi_0 cos(\omega_m t - k_m x)cos(\delta\omega t - \delta k x)$. C'est une onde d'amplitude $2\psi_0$ avec des oscillations rapides de pulsation temporelle ω_m et de pulsation spatiale k_m modulée lentement à la pulsation temporelle $\delta\omega$ et à la pulsation spatiale δk : battements.

5.3 Superposition d'ondes sinusoïdales.

Une OPPM seule ayant des extensions temporelle et spatiale infinies n'est absolument pas localisée.

Nous venons de voir que la somme de deux ondes sinusoïdales de fréquences voisines est une onde oscillant à fréquence moyenne dont l'amplitude évolue lentement. L'onde globale est donc essentiellement localisée au voisinage des ventres des fuseaux de modulation de son amplitude.

La superposition d'un nombre plus important d'OPPM permet de réduire encore l'extension de l'enveloppe de l'onde. On peut considérer un paquet de 2N+1 OPPM de pulsation moyenne ω_m. La pulsation d'une OPPM du paquet est $\omega_n = \omega_m + n\delta\omega$ avec $-N \leq n \leq N$ et la largeur spectrale $\Delta\omega = (2N+1)\delta\omega$ vérifie $\Delta\omega \ll \omega_m$. L'onde globale s'écrit alors : $\psi(x,t) = \sum_{n=-N}^{N} A_0 cos(\omega_n t - k_n x) \qquad avec\ k_n = k(\omega_n)$

L'onde est un signal oscillant rapidement dont l'amplitude est lentement modulée. La durée des battements est d'autant réduite que le nombre d'ondes superposées et la largeur spectrale $\Delta\omega$ sont grandes.

5.4 Paquets d'ondes localisés.

Une onde physique localisée dans le temps et dans l'espace est non périodique. Or la superposition discrète d'OPPM est une onde périodique dont la modulation d'amplitude a pour période $T = \frac{2\pi}{\delta\omega}$. L'onde physique est donc telle que T tend vers $+\infty$, soit $\delta\omega$ tend vers 0 or $\Delta\omega = (2N+1)\delta\omega$ doit être non nulle.

Il vient alors que N (nombre d'ondes superposées) tende vers l'infini, soit la superposition d'une infinité d'OPPM de fréquence infiniment proche. Cette superposition est alors à fréquence continue.

Un paquet d'ondes localisé dans le temps et dans l'espace est une superposition d'OPPM à répartition continue de fréquences.

En notation complexe, ce paquet d'ondes est de la forme :

$\underline{\psi}(x,t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega \qquad avec\ \ k = k(\omega)$. En supposant que $\underline{A} = A$ est réelle (phase nulle à $x = 0$ et a $t = 0$), en notation réelle l'onde est : $\psi(x,t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t - kx)\, d\omega$

5.5 Vitesse de phase, vitesse de groupe.

- **Vitesse de phase**

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de la phase $\varphi = \omega t - kx$ de l'onde. Elle est définie par :

$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$.

- ✓ Pour une propagation non dispersive : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$. la vitesse de phase est indépendante de ω. Par exemple le vide est un milieu non dispersif.
- ✓ Pour une propagation dispersive la vitesse de phase v_φ dépend de ω. Des ondes de pulsations différentes ne se propage pas à la même vitesse.

- **Vitesse de groupe**

Pour un paquet d'ondes de pulsation moyenne ω_m, on définit la vitesse de groupe : $\boxed{v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_m}}$. Cette vitesse est la vitesse de propagation de l'information.

Dans un milieu non dispersif (tel que le vide) toutes les composantes monochromatiques du paquet d'onde répondent à la même relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$ d'où la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c = v_\varphi$.