TRAVAUX DIRIGÉS N°1 DE MECANIQUE

I Cinématique et choix d'un repère

Exercice 1 : Accélération d'une voiture et freinage d'urgence

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

1. Avec une accélération constante, elle parcourt une distance $D = 180$ m en $\tau = 26,6$ s . Déterminer la valeur de l'accélération et la vitesse atteinte à la distance *D*.

On considère désormais que la voiture est animée d'une vitesse $v_0 = 90\ \text{km.h}^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne et qu'elle freine avec une accélération constante de norme $a_0 = 4,2\ \text{m.s}^{-2}$.

2. Calculer la durée et la distance de freinage.
3. Combien de "*g*" ressentirait un conducteur si l'on effectuait le même freinage sur une distance de 1 m ?

Exercice 2 : Création d'un repère adapté

On considère un mobile dont le mouvement est à accélération constante $\vec{a} = 3\,\overrightarrow{u_x} + 4\,\overrightarrow{u_y}$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = -\,\overrightarrow{u_x} + 3\,\overrightarrow{u_y}$.

Donner les coordonnées, dans la base (Oxy), du dièdre (ensemble de deux vecteurs) direct de vecteurs orthonormés $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tels que $\vec{a} \parallel \overrightarrow{u_1}$. Donner les composantes de $\vec{a}$ et $\overrightarrow{v_0}$ dans cette base.

Exercice 3 : Mouvement elliptique

Un point *M* décrit une ellipse d'équations paramétriques $x = \alpha\cos(\omega t)$ et $y = \beta\sin(\omega t)$.

1. Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la période de rotation ?
2. Exprimer la vitesse $\vec{a}$ et l'accélération $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes.

Exercice 4 : Mouvement rectiligne défini par une équation cartésienne

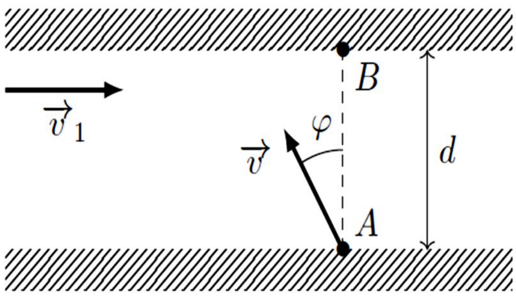
Un mobile se déplace rectilignement le long d'un axe fixe (Ox). Sa position est repérée par l'abscisse x et il est initialement au repos en x_0. On suppose que son accélération est de la forme cartésienne $\vec{a} = -kx^{-2}\,\overrightarrow{u_x}$ où $k > 0$. Exprimer sa vitesse v en fonction de x.

Exercice 5 : Recherche d'une loi paramétrique à partir d'une équation cartésienne

On considère un mouvement caractérisé par une relation cartésienne $\vec{v}(x) = k\sqrt{a^2 - x^2}\,\overrightarrow{u_x}$. Retrouver la loi $x(t)$.

Exercice 6 : Optimisation d'un trajet

Un sportif, initialement positionné en *A* sur la rive gauche, au niveau des quais de Jussieu, doit se rendre en face de lui en *B*, sur la rive droite. La distance séparant A de B est notée d. Le sportif peut nager dans l'eau avec une vitesse de norme constante v_0 et peut courir sur la rive avec une vitesse de norme constante $V_0 > v_0$. La vitesse du courant de la Seine est constante et vaut $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x$ avec $v_0 > v_1 > 0$. Quel valeur l'angle $\varphi = (\overrightarrow{AB}, \vec{v})$ doit-il prendre pour que le sportif, ayant plongé en *A*, parvienne le plus vite possible en *B* ?



II Forces de frottements fluides

Exercice 7 : Chute d'une bille dans de la glycérine

L'expérience consiste à faire tomber une bille d'acier de densité $d_a = 7{,}8$ et de rayon $R = 0,5$ cm dans de la glycérine, fluide visqueux de densité $d_g = 1{,}3$ et de viscosité de dynamique η. L'expression de la force

de trainée est donnée par la loi de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$. On observe expérimentalement que la bille atteint rapidement une vitesse limite $v_{lim} = 2{,}3\ \mathrm{mm.s^{-1}}$.
1. Effectuer un bilan des forces puis appliquer le PFD à la bille, assimilée à un point matériel de masse m à définir.
2. Établir l'équation différentielle dont est solution la vitesse $v(t)$ de la bille.
3. Donner l'expression littérale de la vitesse limite en régime permanent puis établir l'expression de $v(t)$. On fera apparaître un temps caractéristique τ. Combien de temps est nécessaire à l'apparition du régime permanent ?
4. À partir des données, calculer la viscosité dynamique η de la glycérine.

Exercice 8 : Projectile soumis à des frottements fluides

On s'intéresse à nouveau à la trajectoire d'un projectile ponctuel *M*, de masse *m*, lancé dans l'air avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha\, \overrightarrow{u_y}$, soumis à une accélération de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_y}$, et à des frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$.
1. Établir les équations différentielles vérifiées par les composantes v_x et v_y puis les résoudre à l'aide de la condition initiale. Que valent les vitesses limites selon (Ox) et (Oy) ?
2. En déduire les coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$. L'équation cartésienne de la trajectoire est-elle une fonction "simple" ?
3. Exprimer le temps t_m au bout duquel l'altitude maximale y_m est atteinte. Représenter l'allure de la trajectoire à l'aide des asymptotes.

Exercice 9 : Chute libre rectiligne avec frottements en v^2

On considère la chute libre d'une masse ponctuelle m dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = g\,\overrightarrow{u_z}$ où l'axe (Oz) est vertical descendant. On libère la masse à une altitude h au dessus du sol. On considère une force de frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\alpha v\vec{v}$ avec $v = \|\vec{v}\|$.
1. Effectuer un bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
2. Donner l'expression de la vitesse limite. A.N. avec $\alpha = \frac{1}{2}\mu_{air} C_x S$ et $C_x \simeq 1$.
3. Intégrer l'équation différentielle obtenue par séparation des variables pour trouver l'expression $v_z(t)$. On donne

$$\int_0^t \frac{\dot{u}(t)}{\left(1-u(t)\right)^2} dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u(t)}{1-u(t)}\right)$$

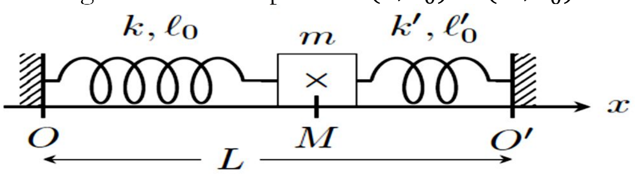
III Autour de l'oscillateur harmonique

Exercice 10 : Oscillations d'une masse suspendue à un ressort

On s'intéresse au mouvement d'un objet de masse m attaché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un bâti immobile. Le ressort n'étant initialement pas allongé $(\ell = \ell_0)$, on lâche l'objet dans le champ de pesanteur sans lui donner de vitesse initiale. On souhaite étudier le mouvement vertical qui en découle. On repère la position de l'objet par son abscisse *x* sur un axe (Ox) vertical descendant. L'origine *O* du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.
1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$ où ω_0 et x_{eq} sont à déterminer en fonction de ℓ_0, g, m et k puis la résoudre.
2. Que représente la position M_{eq}, d'abscisse $x = x_{eq}$? Pourquoi est-elle différente du cas horizontal vu en cours ? Tracer l'allure de $x(t)$.

Exercice 11 : Masse reliée à deux ressorts

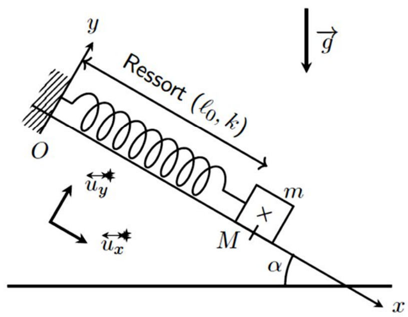
Une masse m, assimilée à un point matériel, positionnée en *M* est reliée à deux ressorts fixés en O et O' et glisse sans frotter sur le sol. On repère la position de la masse par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x}$. Les ressorts ont pour raideurs et longueurs à vide respectives (k, ℓ_0) et (k', ℓ'_0). La longueur OO' vaut L.



1. Effectuer un bilan des forces sur la masse.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse.
3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} ?
4. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$ en fonction de x_{eq} et d'une pulsation ω à définir.
5. Résoudre exactement le mouvement sachant que $x(t = 0) = x_0$ et que la projection de la vitesse vaut $v(t = 0) = v_0$.

Exercice 12 : Oscillateur sur un support en pente

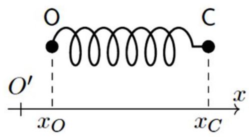
Une masse m, assimilée à un point matériel, est attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Elle glisse sans frottements sur le sol mais ce dernier est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On repère la position de la masse M sur le sol par l'abscisse $x = \overline{OM}$.
À $t = 0$, la masse m est à la position $x(t = 0) = x_0 > \ell_0$.



1. Exprimer la force de rappel $\overrightarrow{f_{él}}$ qu'exerce le ressort sur la masse m en fonction de ℓ_0, k et x et d'un vecteur unitaire adéquat.
2. Exprimer le poids $\overrightarrow{P}$ du point matériel en fonction de g, m, α et des vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. Qu'en est-il de la réaction du sol $\overrightarrow{R}$?
3. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\overrightarrow{u_x}$, donner l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée x.
4. Déterminer l'expression de la position d'équilibre x_{eq} en fonction de ℓ_0, m, g et α.
5. Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression littérale de la fonction $x(t)$ en fonction de x_{eq}, x_0, k,m et t.

Exercice 13 : Vibrations d'une molécule

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses m_C et m_O mobiles sur l'axe $O'x$ et liées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Les positions des atomes de carbone et d'oxygène sont respectivement notées x_C et x_O. Initialement, les atomes sont immobiles aux positions x_C^0 et x_O^0. On considère que le poids ne joue aucun rôle dans l'étude des vibrations des molécules.



1. Établir les équations différentielles du mouvement l'atome d'oxygène puis de l'atome de carbone.
2. Ces deux équations sont couplées : le mouvement de chaque atome dépend de celui de l'autre. Pour les résoudre, on pose les nouvelles variables $s = m_C x_C + m_O x_O$ et $d = x_C - x_O$. Déduire des équations différentielles couplées des questions précédentes les équations différentielles régissant l'évolution de s et d.
3. Trouver les solutions correspondantes pour s et d.
4. En déduire $x_C(t)$ et $x_O(t)$. Commentez la forme du résultat.
5. Quelle est la période des oscillations ? Discutez la cohérence du résultat dans la limite où une masse serait bien plus grande que l'autre.

Exercice 13 : Décollage d'un système masse-ressort

On considère un point matériel M, de masse m, attaché à l'extrémité supérieure d'un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable. L'ensemble est posé verticalement sur le sol, la masse m étant placée au-dessus du ressort selon la verticale du lieu. On note P le point, sans masse, de contact entre le ressort et le sol. Initialement, on comprime le ressort d'une longueur ℓ et on libère la masse m sans vitesse initiale. Déterminer la condition pour que le système masse-ressort décolle. Quelle est dans ce cas la vitesse de décollage et l'altitude maximale atteinte par le point M ?

IV Forces de contact

Exercice 14 : Charge soulevée par une grue

Une grue de chantier de hauteur h doit déplacer d'un endroit à un autre du chantier une charge de masse m assimilée à son centre de gravité M. Le point d'attache du câble sur le chariot de la grue est noté A.
1. Le point A est à la verticale de M posé sur le sol. Déterminer la tension à appliquer au câble pour qu'il arrache très doucement le point M du sol.
2. L'enrouleur de câble de la grue le remonte avec une accélération verticale *av* constante. Déterminer la tension du câble.

3. La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite, avec une accélération horizontale a_h constante.
(a) Quelle est l'accélération de M sachant que M est alors immobile par rapport à A ?
(b) Déterminer l'angle que fait le câble avec la verticale en fonction de m, g, a_h ainsi que la tension du câble.

Exercice 14 : Légolas et le gouffre de Helm

Durant la bataille du gouffre de Helm et malgré tous les efforts fournis pour repousser l'armée d'Huruk-Hai, une brèche est ouverte et les orcs pénètrent dans la forteresse de Fort-le-Cor.
Légolas, auparavant posté sur la muraille, décide de descendre dans la cour pour poursuivre la bataille. Le moyen le plus rapide qu'il choisit pour descendre implique une glissade dans les escaliers sur un bouclier.
On étudiera le mouvement de Légolas et du bouclier, assimilés à un point matériel L, sur les escaliers, représentés par un axe (Ox) faisant une angle α avec l'horizontale.

— L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ où $\lambda > 0$ et $\vec{v}$ est la vitesse de Légolas.
— On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielles et normale de la force frottement exercée par les marches sur le bouclier. μ est le coefficient de frottement solide tel que $||\vec{T}|| = \mu||\vec{N}||$ puisque le bouclier glisse.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) la position initiale de Légolas, en haut des escaliers. On note (Oy) la normale à l'escalier dirigée vers le haut.

1. À l'aide du PFD, calculer $\vec{N}$ puis $\vec{T}$.
2. Calculer la vitesse $\vec{v}$ et la position x de Légolas à chaque instant.
3. Montrer que Légolas atteint une vitesse limite v_l et ré-exprimer $\vec{v}$ en fonction de v_l.
4. A.N. : $\lambda = 1$ kg.s^{-1}, $\mu = 0,9$, $g = 9,81$ m.s^{-2}, $m = 80$ kg (principalement le poids du bouclier, Légolas étant un elfe) et $\alpha = 45^\circ$.
5. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où Légolas atteint une vitesse égale à $v_l/2$.
6. À la date t_1, Légolas atteint un point sur l'escalier recouvert par des cadavres d'orcs, vaincus par Gimli. On considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10 et on néglige alors la résistance de l'air. Calculer la distance parcourue par Légolas avant de s'arrêter.