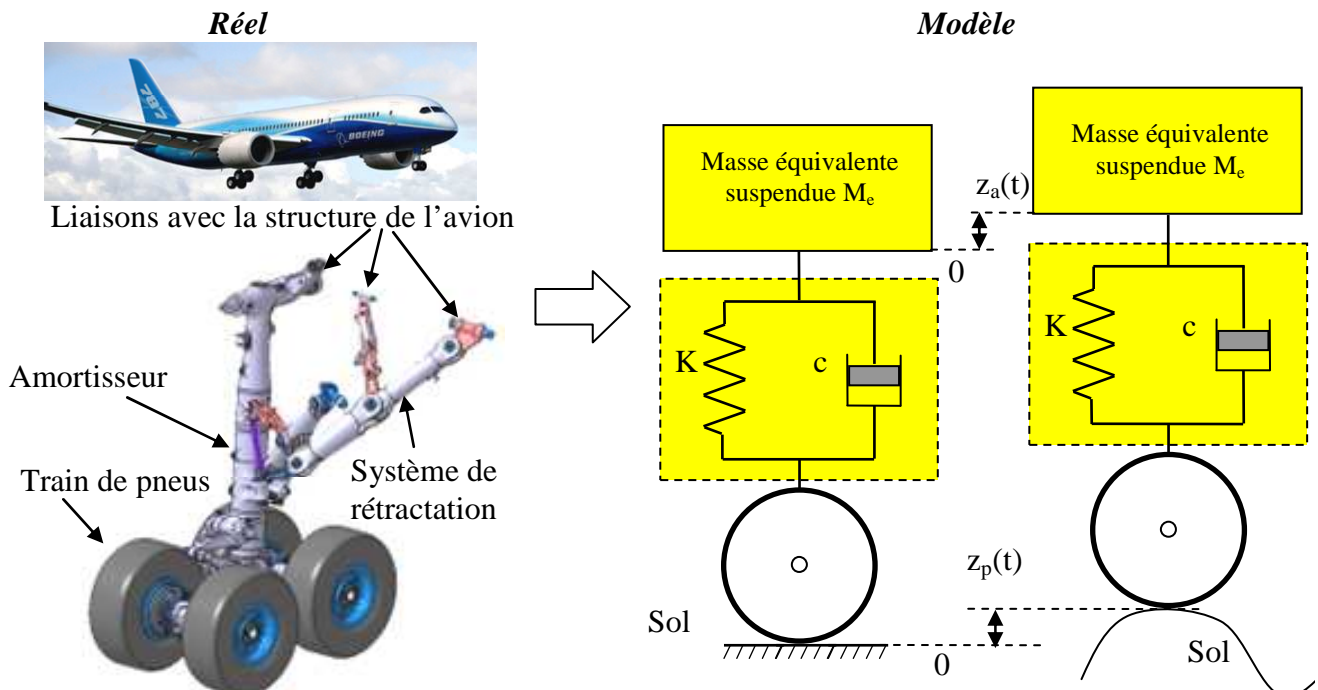


Réponse harmonique des SLCI et lieux de transfert



L'amortisseur de train d'atterrissage d'avion est un système dynamique qui doit principalement amortir l'impact de l'avion à l'atterrissage mais qui doit aussi filtrer les sollicitations (pour les passagers, les équipements, ...) imposées par les irrégularités du sol lorsque l'avion est en phase de roulage sur la piste. La modélisation simplifiée de l'avion avec son amortisseur dans la phase de vie de roulage sur la piste est donnée sur la figure de droite. $z_p(t) = z_{p0} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ correspond à la modélisation du signal d'entrée (z_{p0} étant l'amplitude des irrégularités de la piste et Ω la vitesse de rotation de la roue de l'avion). A partir de cette modélisation, on obtient la fonction de transfert qui lie la hauteur $z_a(t)$ de l'avion à la hauteur des aspérités du sol $z_p(t)$:

$$H_2(p) = \frac{Z_a(p)}{Z_p(p)} = \frac{K + c \cdot p}{K + c \cdot p + M_e \cdot p^2} = \frac{1 + 0,2 \cdot p}{(1 + 0,1 \cdot p)^2}$$

Avec : $Z_a(p)$: Transformée de Laplace de $z_a(t)$; $Z_p(p)$: Transformée de Laplace de $z_p(t)$; $M_e = 100t$: Masse équivalente suspendue ; $K = 5 \cdot 10^3$ N/mm : Raideur du ressort ; $c = 0,001$ N.s/mm : Coefficient d'amortissement visqueux.

Exemple d'étude fréquentielle sur un SLCI

Etude dynamique du train d'atterrissage arrière du Boeing 787 Dreamliner

1. Réponse harmonique des SLCI

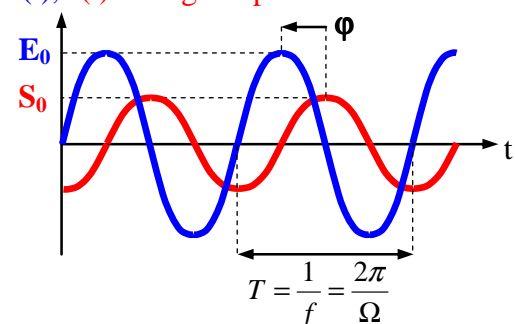
Soit un SLCI d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par une équation différentielle à coefficients constants.

$$\begin{array}{c} e(t) \rightarrow \boxed{\text{SLCI}} \rightarrow s(t) \end{array} \quad a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type $e(t) = E_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ (où Ω est la pulsation propre du signal), il faut chercher une sortie en régime permanent sous la forme $s(t) = S_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$.

On appelle **réponse harmonique**, la sortie $s(t)$ en régime permanent d'un système soumis à une entrée $e(t)$ périodique (sinusoïdale par exemple).

$e(t), s(t)$ en régime permanent





On peut caractériser l'effet du système uniquement avec deux grandeurs qui sont :

- le rapport des amplitudes $\frac{S_0}{E_0}$ appelé gain du système et qui représente l'amplification du système,
- le déphasage φ appelé phase et qui représente le décalage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.



Les courbes $e(t)$ et $s(t)$ dessinées ne sont valables que pour la pulsation Ω du signal d'entrée. L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du gain et de la phase, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation ω du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.



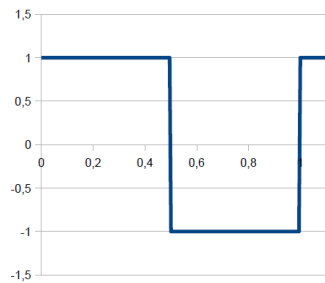
On montre par la méthode des complexes que :

- le gain du système $\frac{S_0}{E_0}$ est égal au module du nombre complexe $H(j\omega)$: $\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$
- la phase du système φ est égale à l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$: $\varphi = \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$

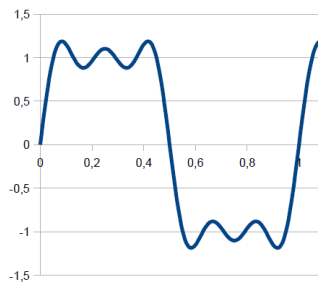
où $H(j\omega)$ correspond à la fonction de transfert du système dans laquelle la variable de Laplace p a été remplacée par $j\omega$. $H(j\omega)$ représente donc le comportement fréquentiel du système $H(p)$.



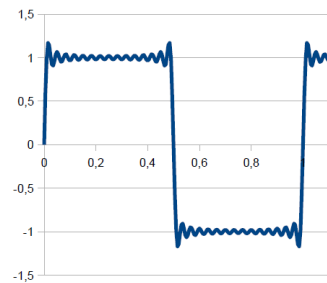
La théorie développée par Fourier permet de considérer que tout signal (périodique ou non) résulte de la sommation d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes.



Exemple d'un signal créneau



Utilisation de 3 sinus pour décrire le signal créneau



Utilisation de 15 sinus pour décrire le signal créneau

Par conséquent, pour déterminer la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque, il est nécessaire de réaliser une étude harmonique afin de déterminer l'ensemble des réponses de ce système à des signaux sinusoïdaux répartis dans une plage de fréquence adaptée au signal quelconque.

L'interprétation des variations de gain et de phase en fonction de la fréquence du signal (ou de la pulsation) est fondamentale tant en électronique qu'en automatique, c'est pourquoi le tracé graphique de ces variations est étudié à l'aide de différents diagrammes.

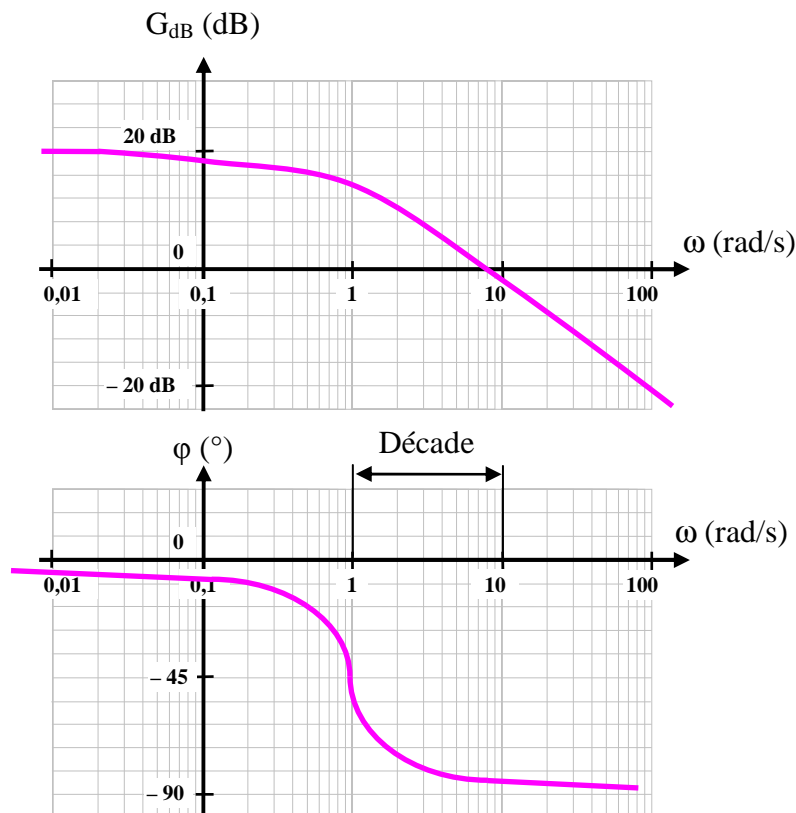
2. Le diagramme de Bode, lieu de transfert pour les études fréquentielles

On appelle lieu de transfert toute représentation graphique du comportement fréquentiel de $H(j\omega)$ à l'aide de diagrammes. Les diagrammes les plus connus portent le nom de leur inventeur : Bode, Nyquist, Black. L'un des plus utilisés est le diagramme de Bode.



- Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes car on trace séparément le module et la phase de $H(j\omega)$ en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) sur une échelle logarithmique en base 10.
- Le module $|H(j\omega)|_{dB}$, noté G_{dB} , est exprimé en décibel, c'est-à-dire $G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$.
- La phase est exprimée en général en degrés.
- Les deux courbes sont tracées sur la même feuille, l'une en dessous de l'autre, car l'interprétation des résultats nécessite toujours une étude simultanée des deux courbes.

Exemple de représentation de $G_{dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(|H(j\omega)|)$ en fonction de $\log \omega$.



On voit que les tracés sont effectués sur du papier à graduations spéciales. On retrouve une graduation logarithmique en base 10 sur 3 ou 4 décades en abscisse et une graduation millimétrée en ordonnée. Le papier étant généralement vierge, il faut construire l'échelle des ordonnées ainsi que son origine puis l'échelle des abscisses.



Sur l'échelle logarithmique en base 10 il n'y a pas d'origine des abscisses. Par conséquent il n'y a jamais de 0 sur l'axe des abscisses et le tracé ne concernera qu'une bande de pulsation qu'il faudra choisir judicieusement.

Le principe de tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de $H(j\omega)$ suivant la nature des pôles et des zéros. Cette technique permet de décomposer $H(j\omega)$ en un produit de fonctions de transfert élémentaires bien connues et faciles à tracer dans Bode.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left[1 + \frac{2 \cdot z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}{\prod_p \left[1 + \frac{2 \cdot z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}$$

Gain pur K
 Intégrateur $(j\omega)^\alpha$
 Produit d'inverses de 1^{er} ordre $\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)$
 Produit d'inverses de 2^{ème} ordre $\prod_k \left[1 + \frac{2 \cdot z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$
 Produit de système de 1^{er} ordre $\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)$
 Produit de système de 2^{ème} ordre $\prod_p \left[1 + \frac{2 \cdot z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$

Le module de $H(j\omega)$ est alors le produit des modules de chaque fonction de transfert élémentaire et l'argument, la somme des arguments de chaque fonction de transfert élémentaire :

$$\arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\right) + \sum_m \arg(1 + T_m \cdot j\omega) + \sum_k \arg\left(1 + 2 \cdot \frac{z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega\right)^2\right) - \sum_n \arg(1 + T_n \cdot j\omega) - \sum_p \arg\left(1 + 2 \cdot \frac{z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega\right)^2\right)$$



$$\arg\left(\frac{1}{1 + T_n \cdot j\omega}\right) = -\arg(1 + T_n \cdot j\omega) \text{ avec } \arg(1 + T_n \cdot j\omega) = \arctan \frac{T_n \cdot \omega}{1}$$

$$\text{Si } H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \quad \text{alors} \quad 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log |H_1(j\omega)| + 20 \cdot \log |H_2(j\omega)|$$



L'échelle en dB permet de transformer le produit des modules en une somme. **On peut donc tracer séparément les diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire qui compose $H(j\omega)$, puis faire la somme des modules et des arguments afin d'obtenir le diagramme de Bode final qui correspondra au comportement fréquentiel du système $H(j\omega)$.**



La multiplication d'un gain K se traduit simplement par la translation suivant l'axe vertical du diagramme des gains de $20 \cdot \log(K)$, le diagramme des phases restant inchangé.

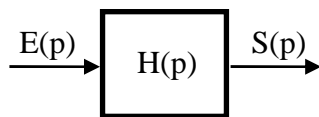
3. Diagrammes de Bode des systèmes élémentaires

Il faut connaître le diagramme de Bode de toutes les fonctions de transfert élémentaires, qui sont donc :

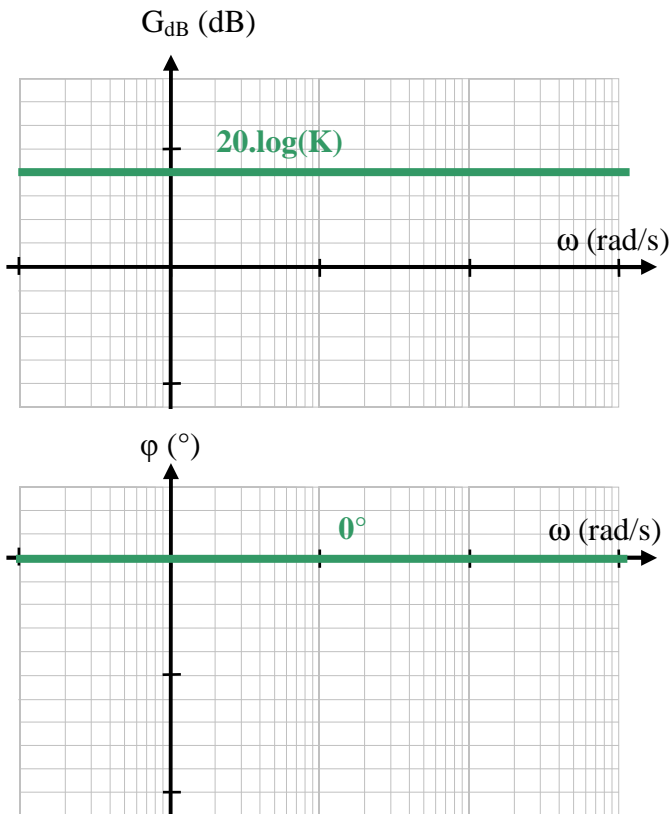
- le gain pur K ,
- l'intégrateur $\frac{K}{p}$,
- le second ordre $\frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$ et son inverse $(1 + 2 \cdot \frac{z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2)$,
- le premier ordre $\frac{1}{1 + T \cdot p}$ et son inverse $(1 + T \cdot p)$.

3.1. Diagrammes de Bode des systèmes simples

Gain pur :



$$H(p) = K$$



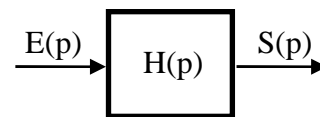
$$H(p) = K \rightarrow \text{soit : } H(j\omega) = K$$

Gain en dB :

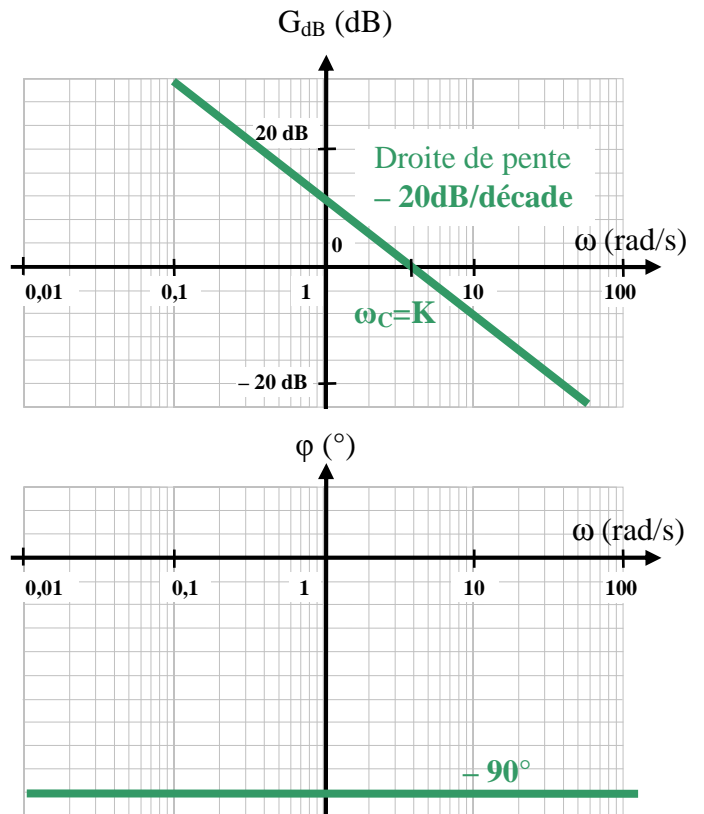
$$G_{dB} = 20 \cdot \log(K)$$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = 0^\circ$

Intégrateur :



$$H(p) = \frac{K}{p}$$



$$H(p) = \frac{K}{p} \rightarrow \text{soit : } H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Gain en dB :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log \frac{K}{j\omega} = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega)$$

Phase en degrés : $\varphi(\omega) = -90^\circ$

3.2. Diagramme de Bode du système du 1^{er} ordre

Le système d'ordre 1 a pour fonction de transfert $H(p) = \frac{K}{1+T \cdot p}$

$$\text{soit } H(j\omega) = \frac{K}{1+T \cdot j\omega}$$

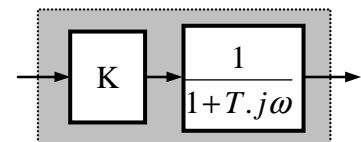
Gain en dB : $G_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1+T^2 \cdot \omega^2}$

Phase : $\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1+T \cdot j\omega) = -\arctan(T \cdot \omega)$

Asymptotes du diagramme de Bode :

- Pour $\omega \rightarrow 0$ $H(j\omega) \approx K$ (équivalent à un comportement de gain pur)

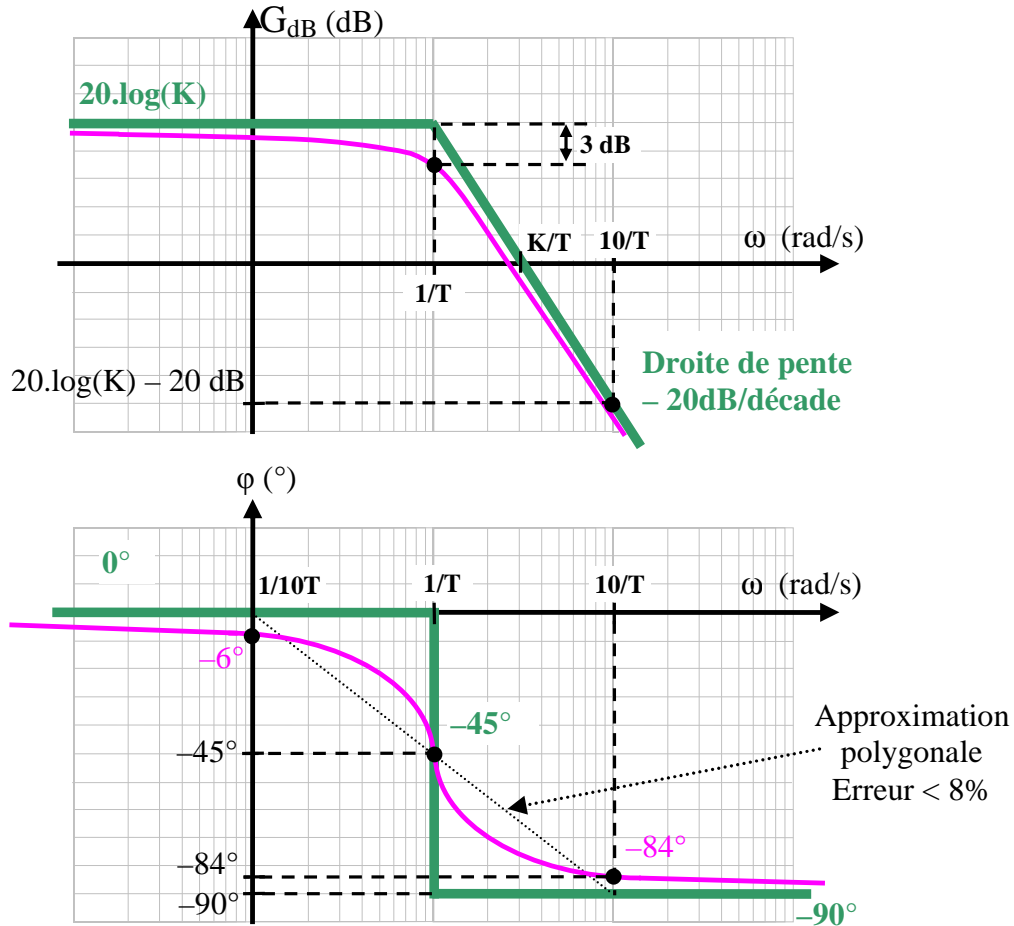
$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \approx 20 \log K \quad \varphi = \arg(H(j\omega)) \approx 0^\circ$$



- Pour $\omega \rightarrow \infty$ $H(j\omega) \approx \frac{K}{T \cdot j\omega}$ (équivalent à un comportement d'intégrateur)

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx 20 \log \frac{K}{T} - 20 \log \omega \text{ (droite de pente } -20 \text{ dB/décade)}$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) \approx -90^\circ$$



Valeur particulière :

- $\omega_c = \frac{1}{T}$ où ω_c correspond à la pulsation de cassure du diagramme de Bode.

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega_c)| = 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(1) = -45^\circ$$

3.3. Diagramme de Bode du système du 2^{ème} ordre

Le système d'ordre 2 a pour fonction de transfert $H(p) = \frac{K}{(1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2)}$.

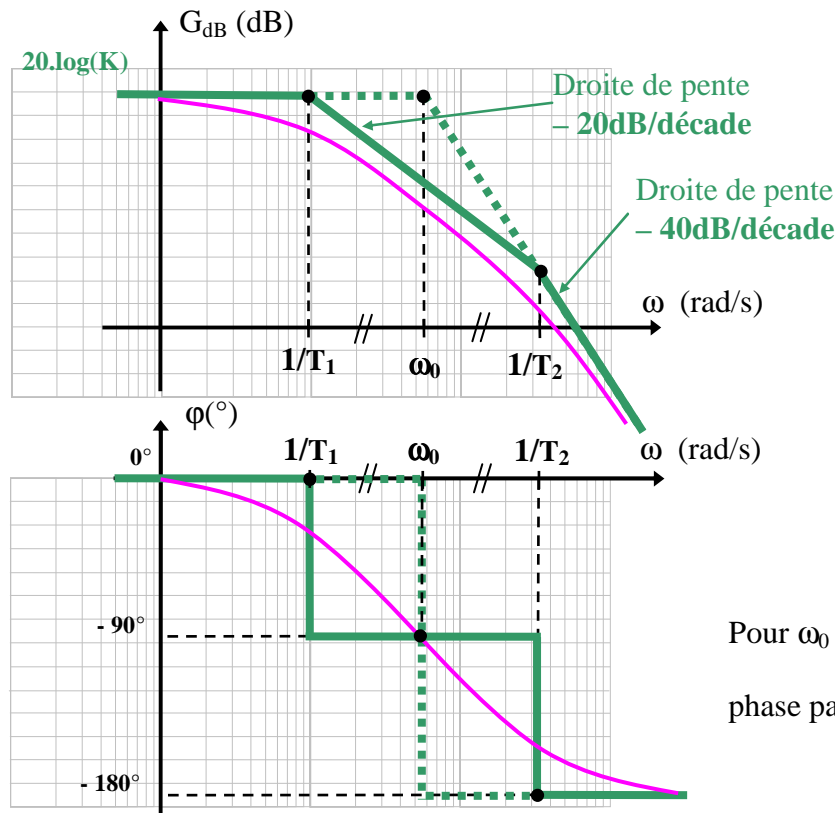
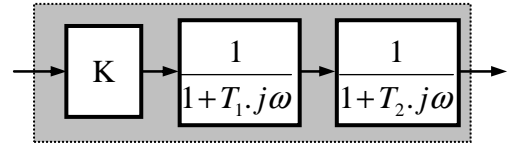
Avec : K gain statique, z coefficient d'amortissement et ω_0 pulsation propre du système.

$$H(p) \rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2)} \text{ pour une étude fréquentielle.}$$

- Cas $z > 1$ ou $z = 1$**

La fonction de transfert présente 2 pôles réels p_1 et p_2 , distincts ou confondus.

Pour $z > 1$, le système peut être considéré comme le produit de deux systèmes de 1^{er} ordre de constantes de temps $T_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $T_2 = -\frac{1}{p_2}$:



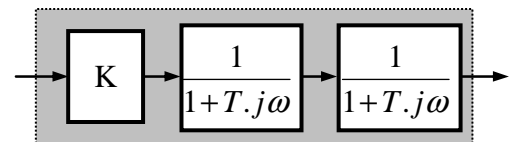
Pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$ la courbe de phase passe toujours par -90° .



Le tracé asymptotique se construit en ajoutant les tracés du gain et des deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.



Pour $z = 1$, la fonction de transfert devient un carré parfait : $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T \cdot j\omega)^2}$ avec $T = \frac{1}{\omega_0}$. (tracé asymptotique en pointillés)



• Cas $z < 1$

Dans ce cas les pôles sont complexes conjugués.

Le module de la réponse harmonique est donné par $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et

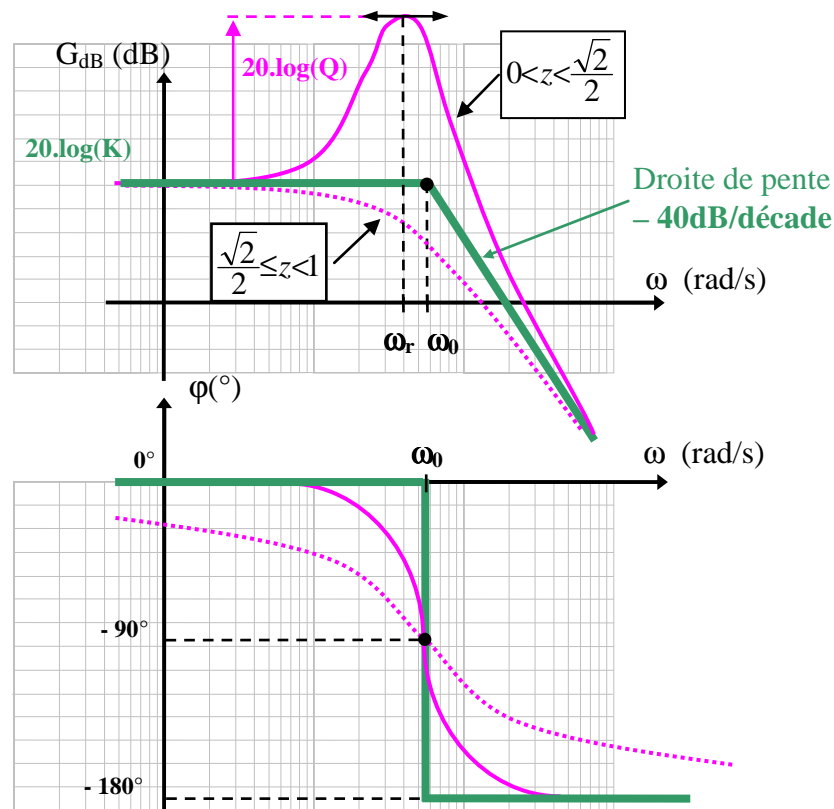
son argument par $\varphi = -\arctan\left(2z \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \middle/ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right)$. La courbe de gain peut présenter un maximum suivant les valeurs de z . Ce maximum, s'il existe, est obtenu pour la pulsation ω_R , telle que $\frac{dG}{d\omega}(\omega_R) = 0$, soit :

$$\left[\frac{d((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4z^2 \omega_0^2 \omega^2)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_R} = 0 \text{ ou encore } -4\omega_R(\omega_0^2 - \omega_R^2) + 8z^2 \omega_0^2 \omega_R = 0.$$

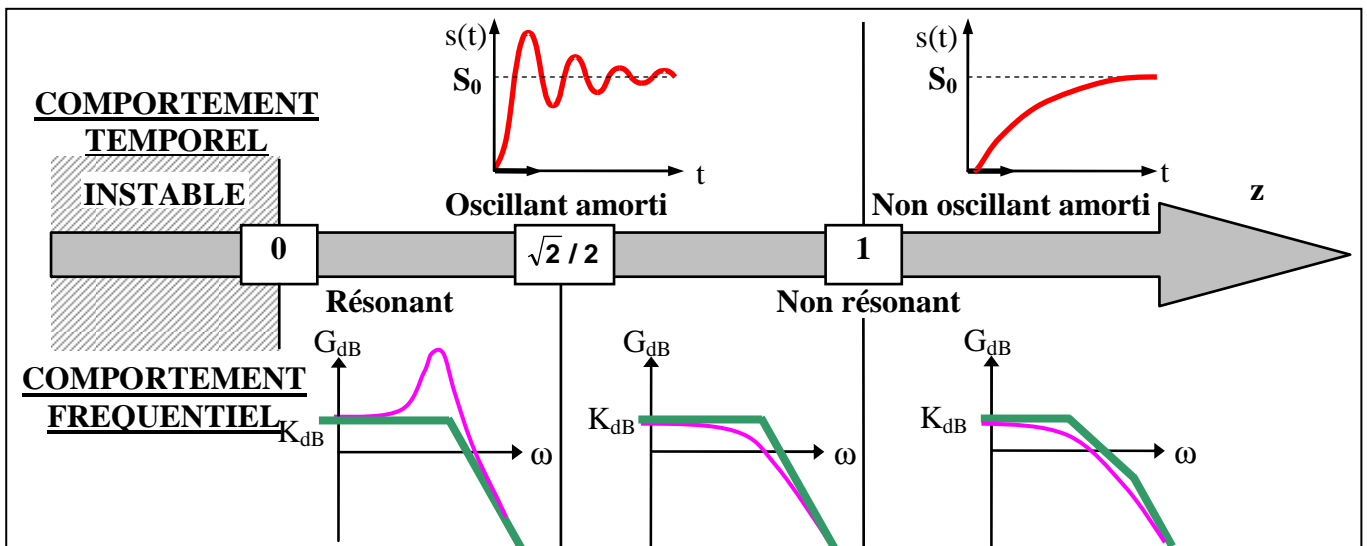
On obtient $\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2z^2}$ si $z < \sqrt{2}/2$. Cette pulsation est appelée pulsation de résonance.

Ce maximum est alors caractérisé par le **coefficient de surtension Q** :

$$Q = \frac{|H(j\omega_R)|}{|H(j0)|} = \frac{1}{2z \cdot \sqrt{1 - z^2}}$$



Différence entre comportements temporels et fréquentiels pour un système du 2^{ème} ordre



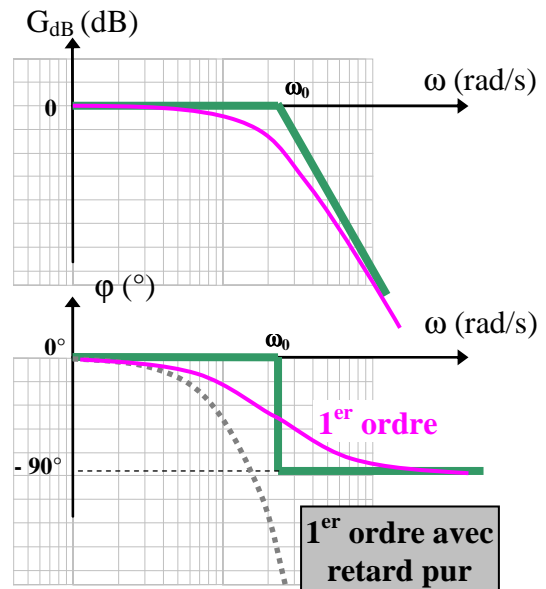
3.4. Diagramme de Bode d'un retard pur

La fonction de transfert s'écrit : $H(p) = e^{-Tp}$ soit $H(j\omega) = e^{-Tj\omega}$ pour la réponse harmonique. Le module est constant et égal à 1 ($G = 0$ dB). L'argument est une fonction linéaire de ω : $\varphi = \arg H(j\omega) = -T\omega$.

$$\text{Exemple : } H(j\omega) = \frac{e^{-T \cdot j\omega}}{1 + T \cdot j\omega}$$

Il s'agit d'un retard pur associé à un système du 1er ordre. Seule la courbe de phase du système est affectée par le retard pur.

La présence d'un retard pur dans la FTBO pourra entraîner l'instabilité du système en BF.



4. Méthode de construction du diagramme de Bode pour les systèmes d'ordre quelconque

Etape n°1 : La fonction de transfert peut se mettre en général sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left[1 + \frac{2 \cdot z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}{\prod_p \left[1 + \frac{2 \cdot z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}$$

Gain pur $\rightarrow K$
 Intégrateur $\rightarrow (j\omega)^\alpha$
 Produit d'inverses de 1^{er} ordre $\rightarrow \prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)$
 Produit de système de 1^{er} ordre $\rightarrow \prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)$
 Produit d'inverses de 2^{ème} ordre $\rightarrow \prod_k \left[1 + \frac{2 \cdot z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$
 Produit de système de 2^{ème} ordre $\rightarrow \prod_p \left[1 + \frac{2 \cdot z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$

Elle apparaît ainsi comme la mise en cascade d'éléments simples du 1^{er} et 2nd ordre, de leurs inverses d'un gain et d'intégrateurs multiples.

Etape n°2 : On classe les constantes de temps dans un ordre décroissant, c'est à dire les pulsations de cassure ($1/T_i$ pour un 1er ordre et ω_0 pour un 2nd ordre) correspondantes dans un ordre croissant. Les brisures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.

Etape n°3 : Construire le diagramme de Bode de $H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha}$, puis successivement en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les pôles et les zéros selon l'ordre précédent en utilisant les constructions asymptotiques.

Etape n°4 : Affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.



Il est souvent suffisant pour analyser la réponse d'un système de tracer seulement le diagramme de Bode asymptotique.

Exemple du train d'atterrissage :

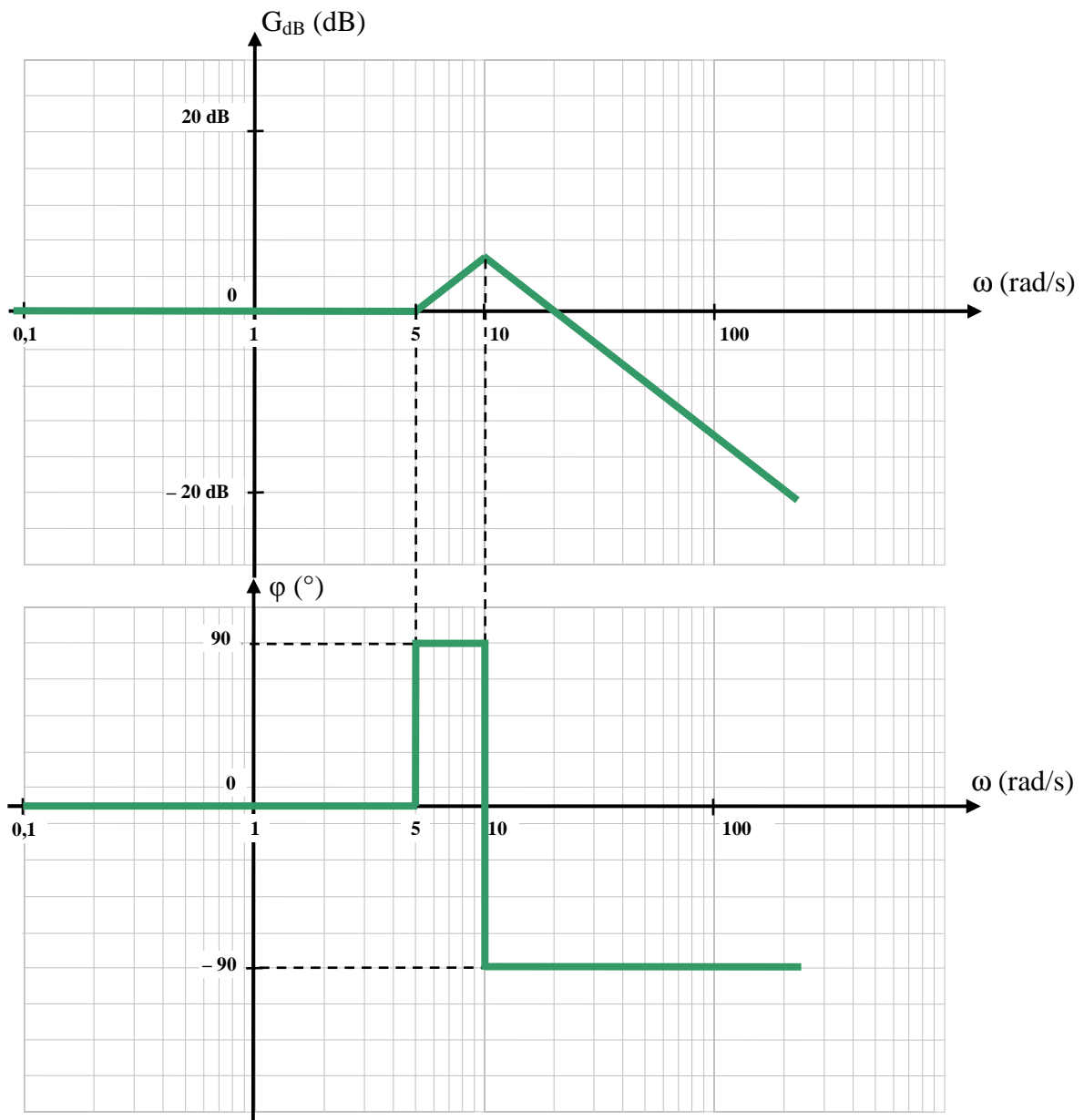
Soit la fonction de transfert : $H(p) = \frac{1+0,2p}{(1+0,1.p)^2}$

Celle-ci peut encore s'écrire : $H(p) = (1+0,2p) \cdot \frac{1}{(1+0,1.p)} \cdot \frac{1}{(1+0,1.p)}$

Les constantes de temps sont $T_1 = 0,2$ s (soit $\omega_1 = 5$ rad/s) et $T_2 = 0,1$ s (soit $\omega_2 = 10$ rad/s).



Ici on ne construira que le tracé asymptotique car tracer à la main la courbe réelle n'a plus vraiment de sens compte tenu des outils informatiques actuels.

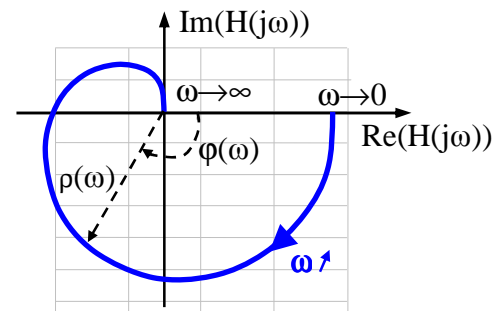


5. Autres lieux de transfert pour les études fréquentielles

5.1. Diagramme de Nyquist

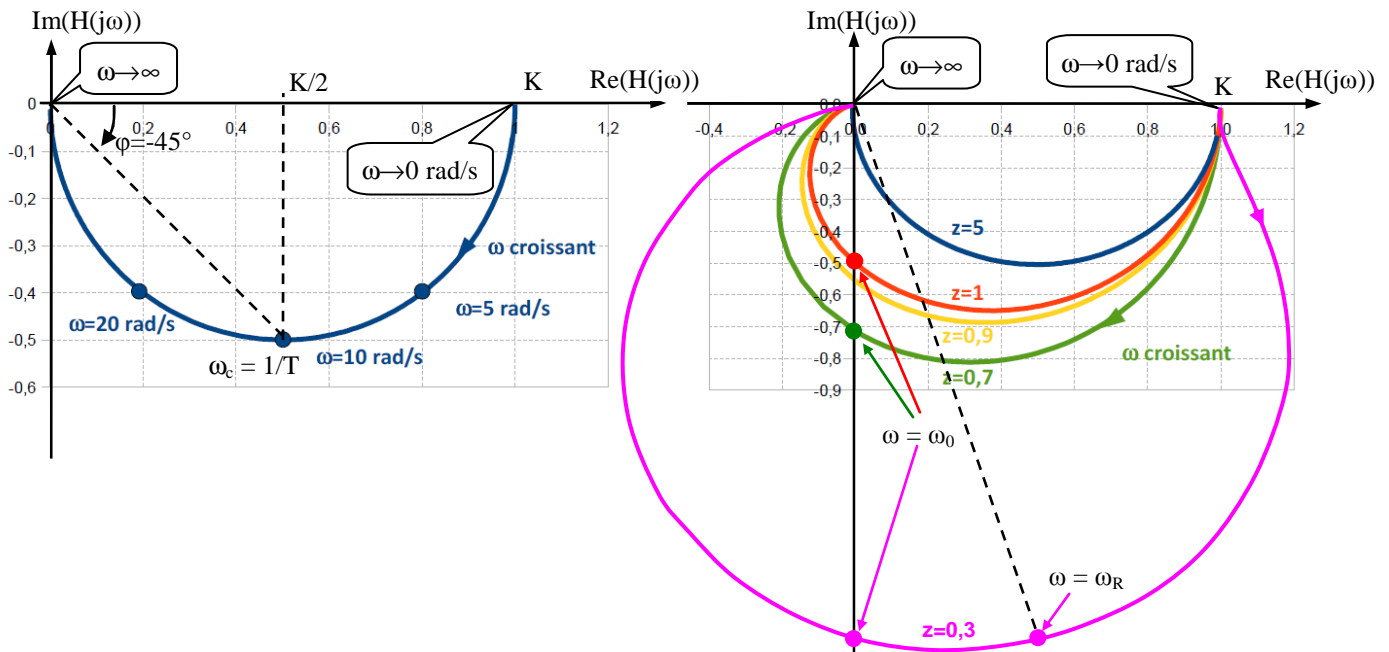
Le diagramme de Nyquist est la représentation dans le plan complexe de $H(j\omega)$. La courbe représente le lieu des points d'affixe $|H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$. Il s'agit donc, selon la formulation adoptée :

- soit d'une courbe en coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x = \text{Re}(H(j\omega)) \\ y = \text{Im}(H(j\omega)) \end{cases}$
- soit d'une courbe en coordonnées polaires : $\begin{cases} \rho(\omega) = |H(j\omega)| \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$



Le tracé s'effectue dans le plan complexe. On obtient une courbe graduée en ω pour laquelle il est indispensable d'indiquer au moins les valeurs limites de ω considérées et surtout par une flèche le sens de variation de ω .

Exemples de diagrammes de Nyquist pour un système du 1^{er} ordre et plusieurs systèmes du 2nd ordre.



Pour un système du 1^{er} ordre :

- la construction de la courbe donne toujours un demi-cercle de diamètre K de centre $(K/2, 0)$.
- Pour $\varphi = -45^\circ$ on retrouve toujours la pulsation correspondant à la pulsation de cassure ω_c du diagramme de Bode telle que $\omega_c = 1/T$.
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, la courbe de phase tend vers -90° .

Pour un système du 2^{ème} ordre :

- Il y a une tangente verticale à l'origine.
- Pour $\varphi = -90^\circ$ on retrouve toujours la pulsation correspondant à la pulsation propre du système ω_0 .
- La pulsation de résonance ω_R correspond au plus grand rayon polaire
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, la courbe de phase tend vers -180° .



Quelques petits rappels utiles sur les complexes :

$$z = a + jb = |z|e^{j\theta} = |z|(\cos \theta + j \sin \theta) \text{ avec } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

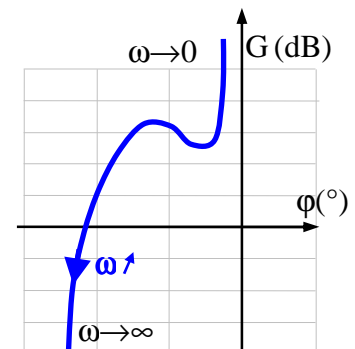
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{|z| \sin \theta}{|z| \cos \theta} = \frac{b}{a} \rightarrow \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

5.2. Diagramme de Black

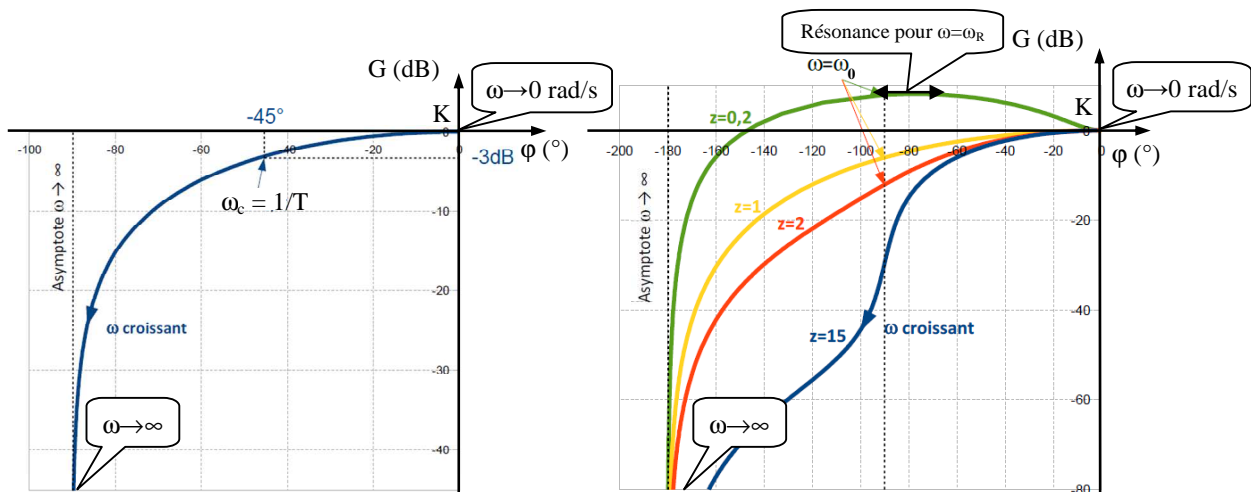
Le diagramme de Black concilie à la fois les avantages des courbes de Nyquist et de Bode :

- la fonction de transfert est représentée par une courbe unique ;
- les échelles sont logarithmiques. Ce dernier avantage permet de conserver une bonne précision même avec de faibles variations du module, contrairement au diagramme de Nyquist.

Le repère du diagramme de Black est tel que ϕ est porté par l'axe des abscisses et le module en décibels est porté par l'axe des ordonnées. On obtient donc une courbe graduée en ω pour laquelle il est indispensable d'indiquer au moins les valeurs limites de ω considérées, et surtout par une flèche le sens de variation de ω .



Exemples de diagrammes de Black pour un système du 1^{er} ordre et plusieurs systèmes du 2nd ordre.



Pour un système du 1^{er} ordre :

- On obtient la pulsation de cassure $\omega_c = 1/T$ pour un gain de $20 \cdot \log(K) - 3\text{dB}$.
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, la courbe de phase tend vers -90° , ce qui se traduit par une asymptote verticale sur le diagramme.



Pour un système du 2^{ème} ordre :

- Il y a une tangente horizontale à l'origine.
- Pour $\phi = -90^\circ$ on retrouve toujours la pulsation correspondant à la pulsation propre du système ω_0 .
- Si le système est résonnant, la pulsation de résonance ω_R correspond à la pulsation pour laquelle on obtient le gain maximum.
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, la courbe de phase tend vers -180° , ce qui se traduit par une asymptote verticale sur le diagramme.