CHAPITRE 2 : ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Le champ électromagnétique est une entité physique à laquelle on peut associer une quantité de mouvement, un moment cinétique et une énergie. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'énergie du champ électromagnétique en exploitant les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, l'utilisation du flux du vecteur de Poynting afin d'évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et les bilans d'énergie et de puissance.

1. Interaction entre le champ électromagnétique et la matière

La matière représente ici les charges électriques présentes dans une région.

rho et E sont caracteristiques du milieu et les champs sont cree labas

1.1. Densité volumique de force électromagnétique

Une particule de charge q en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ avec une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}$ subit en un point M à l'instant t de la part du champ électromagnétique la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Dans un milieu comportant n porteurs de charges mobiles q par unité de volume, le volume élémentaire (mésoscopique) $d\mathcal{V}$ qui comporte $nd\mathcal{V}$ charges subit, de la part du champ électromagnétique, la force élémentaire :

$$d\vec{F} = nd\mathcal{V}q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

or $\rho = nq$ est la densité volumique de charges des n porteurs, d'où :

$$d\vec{F} = \rho d\mathcal{V}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = (\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \wedge \vec{B})d\mathcal{V}$$

$\vec{j} = \rho\vec{v}$ est le vecteur densité volumique de courant des n porteurs, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{F} = (\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B})d\mathcal{V}}}$$

$d\vec{F}$ est la force électromagnétique s'exerçant sur les charges contenues dans le volume élémentaire $d\mathcal{V}$ (autour du point M).

La densité volumique de la force électromagnétique $\vec{f}_v$ est définie par :

$$\boldsymbol{d\vec{F} = \vec{f}_v d\mathcal{V}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\boldsymbol{\vec{f}_v(M,t) = \rho(M,t)\vec{E}(M,t) + \vec{j}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}}$$

<u>Remarque</u> : Dans cas de plusieurs types de porteurs de charges mobiles, on a :

$\rho = \sum_i \rho_i \qquad et \qquad \vec{j} = \sum_i \rho_i\vec{v}_i$

1.2. Puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges

1.2.1.Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique

L'action du champ électromagnétique sur les particules chargées constituant la matière contribue à lui céder de l'énergie. Des porteurs de charges mobiles contenues dans un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ sont soumis à la force électromagnétique $d\vec{F} = \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}\right)d\mathcal{V}$ dont la puissance est :

$$d\mathcal{P} = d\vec{F}.\vec{v} = \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}d\mathcal{V} = \rho\vec{E}.\vec{v}$$

car $\vec{j} = \rho\vec{v}$ et on déduit :

$$\boxed{d\mathcal{P} = \vec{j}.\vec{E}d\mathcal{V}}$$

C'est la puissance cédée par le champ électromagnétique au volume élémentaire $d\mathcal{V}$.

La puissance volumique $\mathcal{P}_v$ cédée par le champ électromagnétique à la matière est telle que :

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}_v d\mathcal{V} \qquad d'où \quad \boxed{\mathcal{P}_v(M,t) = \vec{j}(M,t).\vec{E}(M,t) = \left(\vec{j}.\vec{E}\right)(M,t)}$$

$\mathcal{P}_v$ est la densité volumique de la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges.

1.2.2.Puissance totale cédée par le champ électromagnétique

Dans un volume $\mathcal{V}$, la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs charges est :

$$\boxed{\mathcal{P} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j}.\vec{E}d\mathcal{V}}$$

<u>Remarque</u> : Cette puissance est seulement lié au champ électrique car la force magnétique perpendiculaire au mouvement des porteurs de charges ne travaille pas.

1.3. Cas d'un milieu conducteur ohmique – Loi d'Ohm locale

1.3.1.Loi d'Ohm locale

Dans un conducteur ohmique, le vecteur densité volumique de courant de conduction $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$ qui l'entretient sont liés par la relation locale linéaire :

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \gamma\vec{E}(M,t)} \quad \textit{Loi d'Ohm locale}$$

où γ est la conductivité ou conductibilité du matériau conducteur. γ s'exprime en $S.m^{-1}$ (S : siemens) ou en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ (Ω^{-1} : Mho) en unité S.I.

- **Ordre de grandeur de γ**

Conducteur métallique : $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$

Eau de mer : $\gamma \sim 1\, \Omega^{-1}.m^{-1}$

Electrolyte : $\gamma \sim 10^{-2}\, \Omega^{-1}.m^{-1}$

Silicium (semi-conducteur) : $\gamma \sim 3{,}77.10^{-4}\, \Omega^{-1}.m^{-1}$ à 298 K

Paraffine : $\gamma \sim 10^{-8}\, \Omega^{-1}.m^{-1}$

- **Loi d'Ohm macroscopique et loi d'Ohm intégrale**

En régime stationnaire, l'intensité du courant électrique traversant la section S d'un conducteur ohmique caractérisé par une densité volumique de courant $\vec{j}$ est :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j}.\overrightarrow{dS}$$

De la relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ est déduite la différence de potentiel entre deux points A et B du conducteur :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

De la proportionnalité entre $\vec{j}$ (lié à l'intensité du courant I) et $\vec{E}$ (lié à la différence de potentiel), on déduit une proportionnalité entre la différence de potentiel et l'intensité du courant électrique :

$$V(A) - V(B) = RI \text{ (loi d'Ohm macroscopique)}$$

R est la résistance électrique du matériau conducteur (s'exprime en Ω). D'où la valeur de R :

$$R = \frac{V(A) - V(B)}{I} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}}{\iint_{(S)} \vec{j}.\overrightarrow{dS}} = \frac{\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}}{\gamma \iint_{(S)} \vec{E}.\overrightarrow{dS}}} \text{ (loi d'Ohm intégrale)}$$

- <u>Exemple</u> : Résistance d'un conducteur ohmique cylindrique de longueur l de section S et de conductivité γ dont la densité de courant est uniforme dans le volume du conducteur.

$\vec{j}$ étant uniforme, $\vec{E}$ est aussi uniforme puisse que $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, d'où :

$$R = \frac{\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}}{\iint_{(S)} \vec{j}.\overrightarrow{dS}} = \frac{El}{jS} = \frac{El}{\gamma ES} \Longrightarrow R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{rl}{S} \quad avec\, r \frac{1}{\gamma}$$

r est la résistivité du matériau conducteur (s'exprime en Ω.m)

1.3.2.Densité volumique de puissance Joule

Dans le cas d'un milieu conducteur ohmique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ et la densité volumique de puissance fournie par le champ électromagnétique aux porteurs de charges mobiles $\mathcal{P}_v = \vec{j}.\vec{E}$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_v(M,t) = \gamma E(M,t)^2 = \frac{j(M,t)^2}{\gamma}}$$ ***Densité volumique de puissance joule***

Cette puissance toujours positive (le champ fournit de l'énergie au conducteur) est dissipée sous forme calorifique : c'est l'effet Joule. C'est un apport d'énergie qui fait augmenter la température du conducteur qui l'évacue ensuite vers l'extérieur sous forme de transfert thermique.

2. Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie

2.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

Le champ électromagnétique pouvant céder de l'énergie à la matière possède une énergie qualifiée d'énergie électromagnétique dont la répartition dans une région de l'espace est donnée par la densité volumique d'énergie électromagnétique notée $\mathcal{u}_{em}(M,t)$ telle que l'énergie électromagnétique contenue dans un volume d$\mathcal{V}$ autour d'un point M à l'instant t est :

$$\boxed{d\mathcal{W}_{em} = \mathcal{u}_{em}(M,t)d\mathcal{V}}$$

L'énergie électromagnétique dans un volume $\mathcal{V}$ est alors :

$$\mathcal{W}_{em} = \iiint_{(\mathcal{V})} \mathcal{u}_{em}(M,t)d\mathcal{V}$$

2.2. Flux d'énergie – Vecteur de Poynting

2.2.1. Flux énergétique

Lorsqu'un porteur de charge q est en mouvement dans un champ électromagnétique, l'énergie électromagnétique de la charge varie si elle se déplace d'un point M_1 à l'instant t_1 à un point M_2 à l'instant t_2 car le champ varie. Tout se passe comme s'il y a un déplacement de cette énergie. Le déplacement de la charge entraine donc un courant d'énergie caractérisé par un vecteur densité de courant d'énergie noté $\vec{\Pi}(M,t)$ et appelé **vecteur de Poynting**. Ce déplacement d'énergie entraine un débit d'énergie (courant d'énergie) à travers une surface dS délimitant un volume d$\mathcal{V}$ dont la puissance est le flux du vecteur de Poynting à travers la surface dS :

$$\boxed{d\mathcal{P} = \vec{\Pi}(M,t).\vec{dS}}\ \textit{puissance électromagnétique traversant } dS \text{ à } l'intant\ t$$

A travers une surface S, cette puissance est donc le flux énergétique :

$$\mathcal{P} = \iint_{(S)} \vec{\Pi}(M,t).\vec{dS}$$

Le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface orientée S est la puissance rayonnée :

$$\mathcal{P}_{rayonnée} = \iint_{(S)} \langle\vec{\Pi}(M,t)\rangle.\vec{dS}$$

Ainsi $\langle|\vec{\Pi}(M,t)|\rangle$ représente le flux énergétique surfacique moyen.

2.2.2. Ordres de grandeur de flux énergétique moyen

- Puissance d'un laser hélium-néon : ~ 1 mW. Diamètre du faisceau : ~ 1 mm ⇒ flux surfacique moyen du laser : $\langle\Pi\rangle \simeq 10^3$ W.m^{-2}.

- Flux thermique solaire au niveau de la Terre : ~ 1400 W.m^{-2}.

-Signal reçu ou émis par un téléphone est très faible (on utilise le niveau global d'exposition qui est le résultat de la mesure des champs électromagnétiques émis globalement par l'ensemble des émetteurs environnant le point de mesure) : Niveau global d'exposition : 2,39 V.m^{-1} : champ électrique correspondant à un flux surfacique $\langle\Pi\rangle \simeq 8$ mW.m^{-2}. Mais quand le téléphone émet un appel, le champ électrique émis est de l'ordre de 20 V.m^{-1} correspondant à $\langle\Pi\rangle \simeq 0{,}5$ W.m^{-2}.

2.3. Bilan d'énergie électromagnétique

2.3.1. Bilan local d'énergie

Dans un champ électromagnétique, un élément de volume d$\mathcal{V}$ contient à un instant t, au point M, l'énergie électromagnétique $d\mathcal{W}_{em} = \mathcal{u}_{em}d\mathcal{V}$ qui varie au cours du temps par deux processus :

- un transfert d'énergie du champ électromagnétique vers les charges (perte d'énergie électromagnétique) dont la puissance est $d\mathcal{P}_{perdue} = \vec{j}.\vec{E}d\mathcal{V}$ et d'énergie associée :
$$\delta\mathcal{W}_1 = d\mathcal{P}_{perdue}dt = \vec{j}.\vec{E}d\mathcal{V}dt$$
- un débit d'énergie à travers la surface dS délimitant le volume d$\mathcal{V}$ dont la puissance (flux sortant du vecteur de Poynting à travers dS) est $d\mathcal{P}_{sortant} = \vec{\Pi}(M,t).\overrightarrow{dS}$ d'énergie associée :
$$\delta\mathcal{W}_2 = d\mathcal{P}_{sortant}dt = \vec{\Pi}(M,t).\overrightarrow{dS}dt$$

Par application du théorème de Green-Ostrogradsky :
$$\delta\mathcal{W}_2 = \vec{\Pi}(M,t).\overrightarrow{dS}dt = div\vec{\Pi}(M,t)d\mathcal{V}dt$$
Le principe de la conservation locale de l'énergie dans le volume $d\mathcal{V}$ donne :
$$d\mathcal{W}_{em} + \delta\mathcal{W}_1 + \delta\mathcal{W}_2 = 0 \Longrightarrow \frac{d\mathcal{W}_{em}}{dt} = -\frac{\delta\mathcal{W}_1}{dt} - \frac{\delta\mathcal{W}_2}{dt}$$
$$d\mathcal{W}_{em} = \mathcal{u}_{em}(M,t)d\mathcal{V} \Longrightarrow \frac{d\mathcal{W}_{em}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{u}_{em}(M,t)}{\partial t}d\mathcal{V}$$
$$\frac{\delta\mathcal{W}_1}{dt} = d\mathcal{P}_{perdue} = (\vec{j}.\vec{E})(M,t)d\mathcal{V}$$
$$\frac{\delta\mathcal{W}_2}{dt} = d\mathcal{P}_{sortant} = div\vec{\Pi}(M,t)d\mathcal{V}$$
La conservation locale de l'énergie dans le volume $d\mathcal{V}$ abouti alors à :
$$\frac{\partial\mathcal{u}_{em}(M,t)}{\partial t}d\mathcal{V} = -(\vec{j}.\vec{E})(M,t)d\mathcal{V} - div\vec{\Pi}(M,t)d\mathcal{V} \quad \text{d'où:}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} = -div\vec{\Pi}(M,t) - (\vec{j}.\vec{E})(M,t)}$$ ***Bilan local d'énergie***

2.3.2.Bilan sous forme intégrale – Théorème de Poynting

Dans un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface de contrôle S, le bilan local d'énergie s'écrit :

$$\iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} d\mathcal{V} = -\iiint_{(\mathcal{V})} \mathrm{div}\vec{\Pi}\, d\mathcal{V} - \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j}.\vec{E}\, d\mathcal{V}$$

L'énergie électromagnétique dans le volume $\mathcal{V}$ est :

$$\mathcal{W}_{em} = \iiint_{(\mathcal{V})} u_{em} d\mathcal{V} \Rightarrow \frac{d\mathcal{W}_{em}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{(\mathcal{V})} u_{em} d\mathcal{V}\right) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} d\mathcal{V}$$

$\frac{d\mathcal{W}_{em}}{dt} = \mathcal{P}_{em}$: puissance électromagnétique stockée dans le volume $\mathcal{V}$ (à l'intérieur de S).

$\iiint_{(\mathcal{V})} \mathrm{div}\vec{\Pi}\, d\mathcal{V} = \oint\!\!\oint_{(S)} \vec{\Pi}.\overrightarrow{dS} = \Phi_{\vec{\Pi}}$: flux du vecteur de Poynting à travers S (puissance électromagnétique traversant S vers l'extérieur)

$\iiint_{(\mathcal{V})} \vec{j}.\vec{E}\, d\mathcal{V} = \mathcal{P}_{perdue}$: Puissance perdue par le champ électromagnétique et cédée aux charges (dissipée par effet Joule dans le volume $\mathcal{V}$)

Le bilan global d'énergie électromagnétique pour une surface de contrôle fermée S est donc :

$$\boxed{\iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} d\mathcal{V} = -\oint\!\!\oint_{(S)} \vec{\Pi}(M,t).\overrightarrow{dS} - \iiint (\vec{j}.\vec{E})(M,t) d\mathcal{V}}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{W}_{em}(t)}{dt} = -\Phi_{\vec{\Pi}} - \mathcal{P}_{erdue}} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}_{em} = -\Phi_{\vec{\Pi}} - \mathcal{P}_{erdue}}$$

D'où le théorème de Poynting : $\boxed{\Phi_{\vec{\Pi}} = -(\mathcal{P}_{em} + \mathcal{P}_{erdue}) = -\mathcal{P}_t}$

où $\mathcal{P}_t$: puissance totale à l'intérieur de la surface fermée S c'est-à-dire dans le volume $\mathcal{V}$.

2.4. Equation locale de Poynting

2.4.1.Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting

On admet les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting en un point M à l'instant t dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

- **La densité volumique d'énergie électromagnétique est :**

$$\boxed{u_{em}(M,t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M,t)}{2} + \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}}$$

C'est la somme d'un terme d'origine électrique :

$$u_{el}(M,t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M,t)}{2}$$

et d'un terme d'origine magnétique :

$$u_m(M,t) = \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}$$

Dans le cas des champs statiques (en régime stationnaire) ces deux termes correspondent respectivement à la densité volumique d'énergie électrostatique et à la densité volumique d'énergie magnétostatique.

- **Le vecteur de Poynting ou vecteur densité de courant d'énergie est :**

$$\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0}}$$

2.4.2.Equation locale de Poynting

On montre que le bilan local d'énergie aboutit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\vec{j}.\vec{E} - div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) \quad d'où:$$

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} + div\left(\frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0}\right) = -(\vec{j}.\vec{E})(M,t)} \quad \textit{Equation locale de Poynting}$$

$\frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t}$: terme de stockage (variation de la quantité d'énergie électromagnétique stockée)

$div\vec{\Pi}(M,t) = div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right)$: terme de transport (courant d'énergie)

$-(\vec{j}.\vec{E})(M,t)$: terme de production (puissance volumique absorbée ou produite par la matière)