CHAP II : ELECTRONIQUE NUMERIQUE

Introduction

Les traitements modernes des signaux sont le plus souvent numériques. Il faut donc transformer les grandeurs analogiques en grandeurs numériques et inversement.

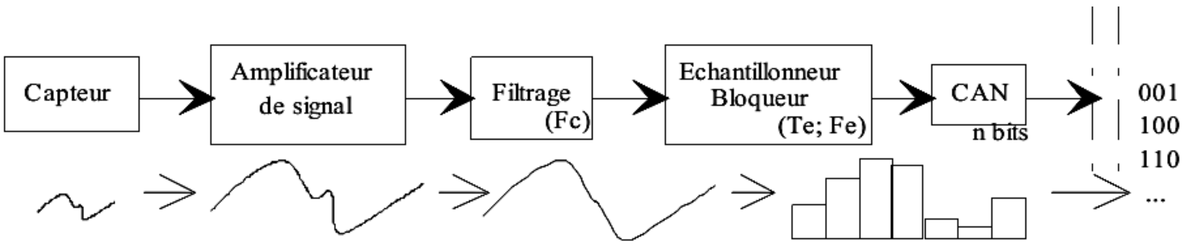


Figure 1: Structure de l'acquisition numérique

Avec l'utilisation des techniques numériques dans le traitement du signal (filtrage numérique, transformée de Fourier discrète, disque compact, etc …), une nouvelle catégorie de signaux est apparue : les signaux analogiques échantillonnés. La quantification (opération consistant à discrétiser l'amplitude du signal) de ce type de signal permet d'obtenir des signaux numériques.

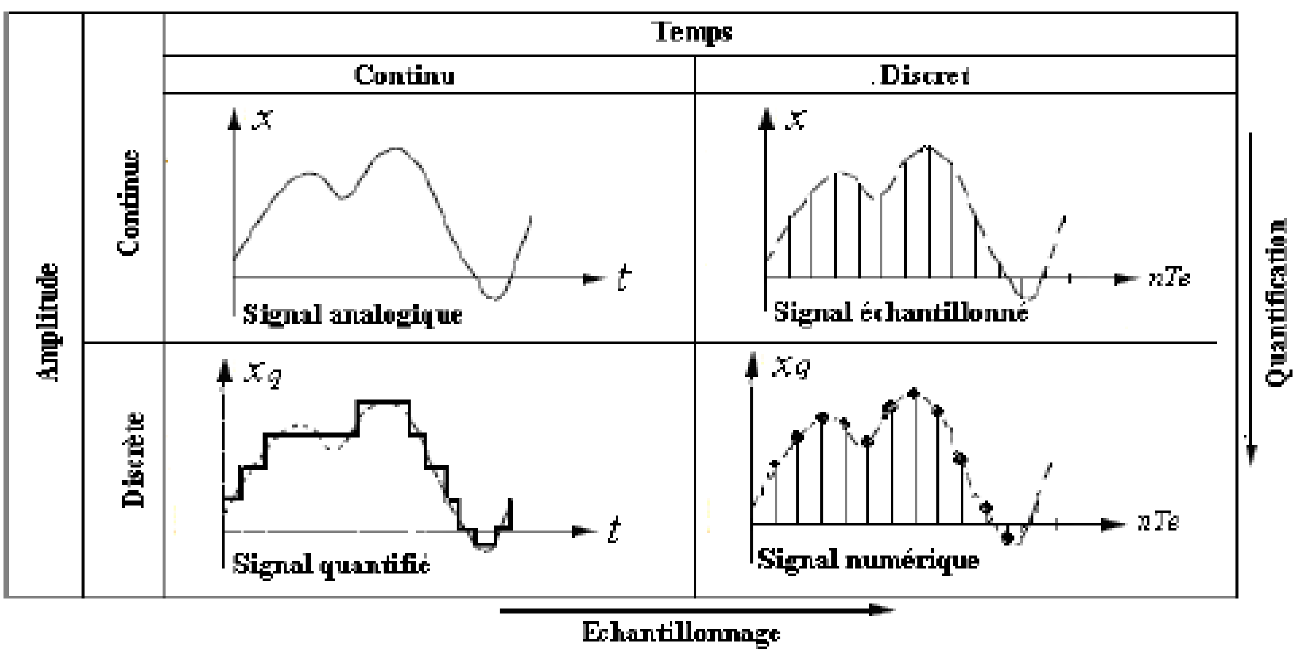


Figure 2 : Les différents types de signaux selon l'amplitude et la variable : **signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus ; **signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu ; **signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret et **signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets

1. ECHANTILLONAGE

1.1. Définition

Echantillonner un signal $x(t)$ consiste à prélever, à la fréquence d'échantillonnage

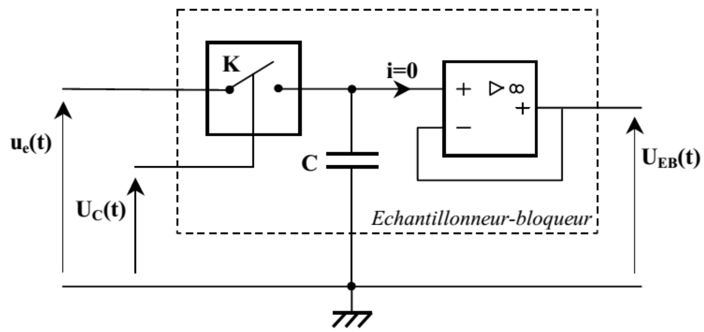
$f_e = \frac{1}{T_e}$, les valeurs de $x(0)$, $x(T_e)$, …, $x(nT_e)$, etc. du signal aux dates *0, Te, 2Te,….., nTe,* etc.

La forme du signal échantillonné (SE) dépend de la forme du signal $x(t)$ à échantillonner et de celle du signal échantillonneur $x_e(t)$.

1.2. L'échantillonneur bloqueur

1.2.1- Schéma

1.2.2- Principe de fonctionnement



✓ ***Phase d'échantillonnage*** :

L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal d'entrée $u_e(t)$ à des intervalles de temps égaux (la période d'échantillonnage Te), de la forme $t_K = kT_e$ où k ∈ [0, N − 1], N étant le nombre de points d'acquisition.

Cette opération est réalisée en utilisant un interrupteur électronique K commandé au rythme d'un signal d'horloge $u_C(t)$ dont la période T_E est la période d'échantillonnage.

✓ ***Phase de maintien*** :

A l'instant kT_E, le condensateur C se charge avec la tension $ue(kT_E)$.
Entre les instants kT_E et $(1+k)T_E$, le condensateur ne se décharge pas (i = 0) et maintient constante la tension ($u_{EB}(t) = ue(kT_E)$).
La présence de l'amplificateur suiveur permet d'avoir i = 0.
A l'instant $(1+k)T_E$, le condensateur C se charge avec la tension $ue[(k+1)T_E]$.
Le signal $u_{EB}(t)$ est appelé signal échantillonné bloqué.

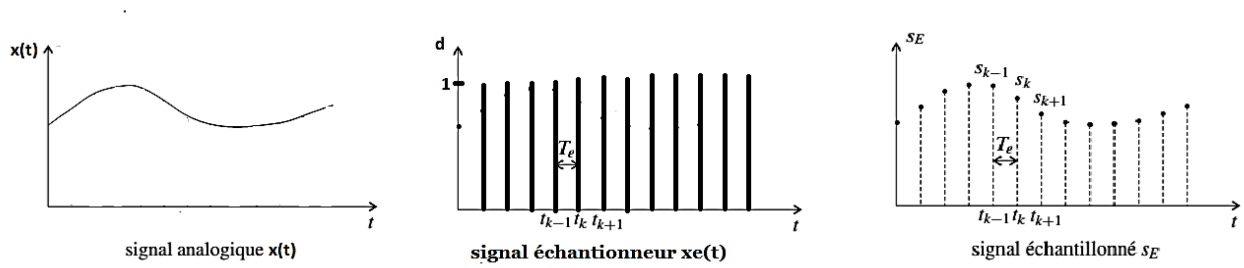
✓ ***Conversion***

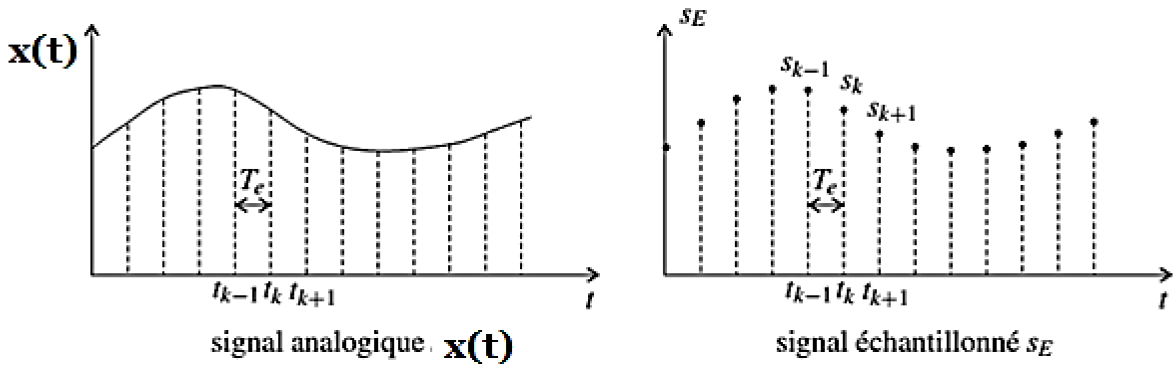
A l'entrée du convertisseur analogique-numérique, la tension échantillonnée bloquée est maintenue constante pendant la période d'échantillonnage T_E. La conversion est possible dans la mesure où le temps de conversion T_C est inférieur à T_E.

Dans la phase d'échantillonnage qui nous intéresse, on peut considérer que ce signal échantillonné SE est obtenu à partir du signal analogique x(t) en le multipliant par un signal d'échantillonnage d(t) : SE = x(t).d(t).

Le signal d'échantillonnage d(t) est caractérisé par :

• une période de répétition T_e ;
• une largeur d'impulsion très réduite t_0 ;
• une amplitude unité.





Acquisition d'un signal numérique

Cette manière de voir permet de mettre en évidence simplement les effets de l'échantillonnage sur le spectre du signal x(t).

Le signal d'échantillonnage *d(t)* étant périodique sa décomposition en série de Fourier donne :

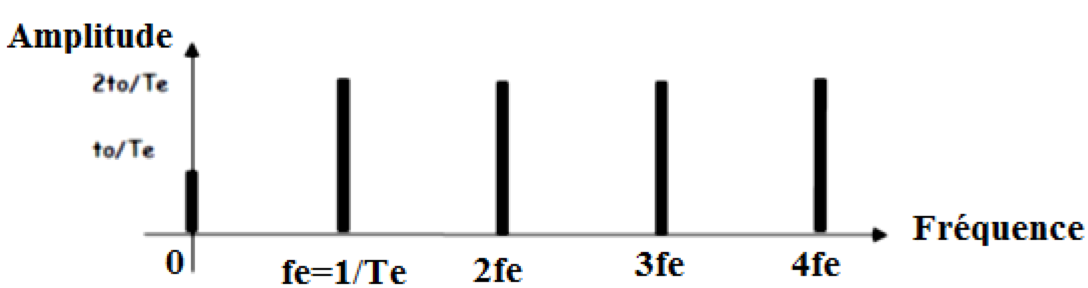
$d(t) = d_0 + d_1 cos(\omega_e t) + d_2 cos(2\omega_e t) + \cdots + d_n cos(n\omega_e t) + \cdots$

Avec $a_0 = d_0 = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} 1dt = \frac{t_0}{T_e}$, $a_n = d_n = \frac{2}{T_e}\int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} 1cos(n\omega_e t)dt = \frac{2\,sin\left(n\pi\frac{t_0}{T_e}\right)}{n\pi}$ et

$b_n = \frac{2}{T_e}\int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} 1sin(n\omega_e t)dt = 0.$

Comme la durée d'ouverture t_0 est très faible par rapport à la période d'échantillonnage T_e, l'angle $n\pi\frac{t_0}{T_e}$ est petit et on pourra confondre le sinus avec l'angle pour les premiers harmoniques, soit : $d_n = \frac{2n\pi t_0}{n\pi T_e} = \frac{2t_0}{T_e}$

Le début du spectre de *d(t)* a donc l'allure suivante :



Le signal échantillonné SE s'écrit alors :

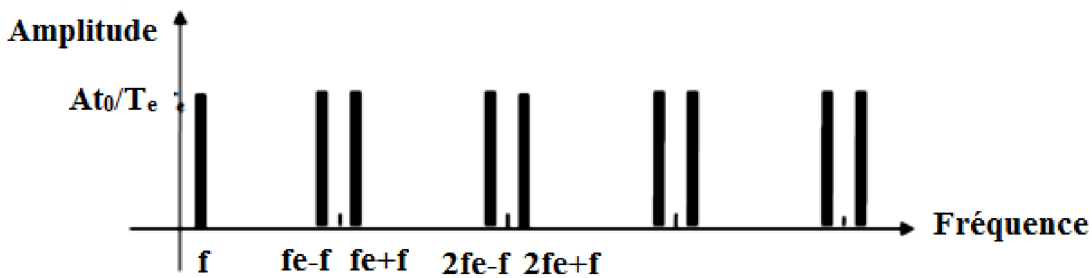
$$SE = \frac{t_0}{T_e}x(t) + 2\frac{t_0}{T_e}\,x(t)cos(\omega_e t) + 2\frac{t_0}{T_e}x(t)\,cos(2\omega_e t) + \cdots + 2\frac{t_0}{T_e}x(t)\,cos(n\omega_e t) + \cdots$$

1.3. Allure du spectre du signal échantillonné

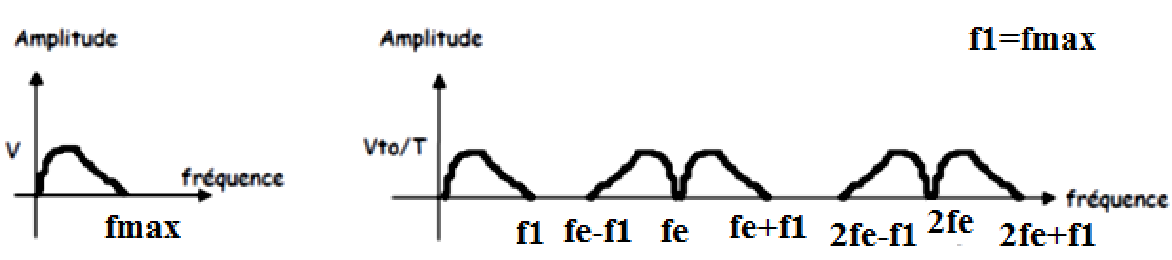
Plaçons nous dans le cas particulier simple où le signal à échantillonner x(t) est sinusoïdal : $x(t) = Acos(\Omega t)$. Son spectre est donc formé d'une raie à $\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{2\pi}}$. Le signal échantillonné s'écrit alors : $SE = \frac{At_0}{T_e}cos(\Omega t) + \frac{2At_0}{T_e}\cos(\Omega t)cos(\omega_e t) + \frac{2At_0}{T_e}\cos(\Omega t)cos(2\omega_e t) + \cdots + \frac{2At_0}{T_e}\cos(\Omega t)cos(n\omega_e t) + \cdots$

$SE = \frac{At_0}{T_e}cos(\Omega t) + \frac{At_0}{T_e}\,[\cos(\omega_e - \Omega)t + cos(\omega_e + \Omega)t] + \frac{At_0}{T_e}[\cos(2\omega_e - \Omega)t + cos(2\omega_e + \Omega)] + \cdots + \frac{At_0}{T_e}[\cos(n\omega_e - \Omega)t + cos(n\omega_e + \Omega)t] + \cdots$

Le spectre du signal sinusoïdal échantillonné SE a l'allure suivante :



Ce résultat se généralise à un signal **x(t)** de forme **quelconque** et permet de dessiner sans peine le spectre du signal échantillonné SE correspondant :



Spectre du signal continu x(t)   Spectre du signal échantillonné SE

1.4. Règle d'échantillonnage de Shannon ou critère de Nyquist-Shannon

L'opération d'échantillonnage ne doit pas amener une perte d'informations.

$$f_e - f_{max} \geq f_{max} \implies f_e \geq 2f_{max}$$

Dans ce cas, on pourra revenir en arrière par simple filtrage passe-bas.

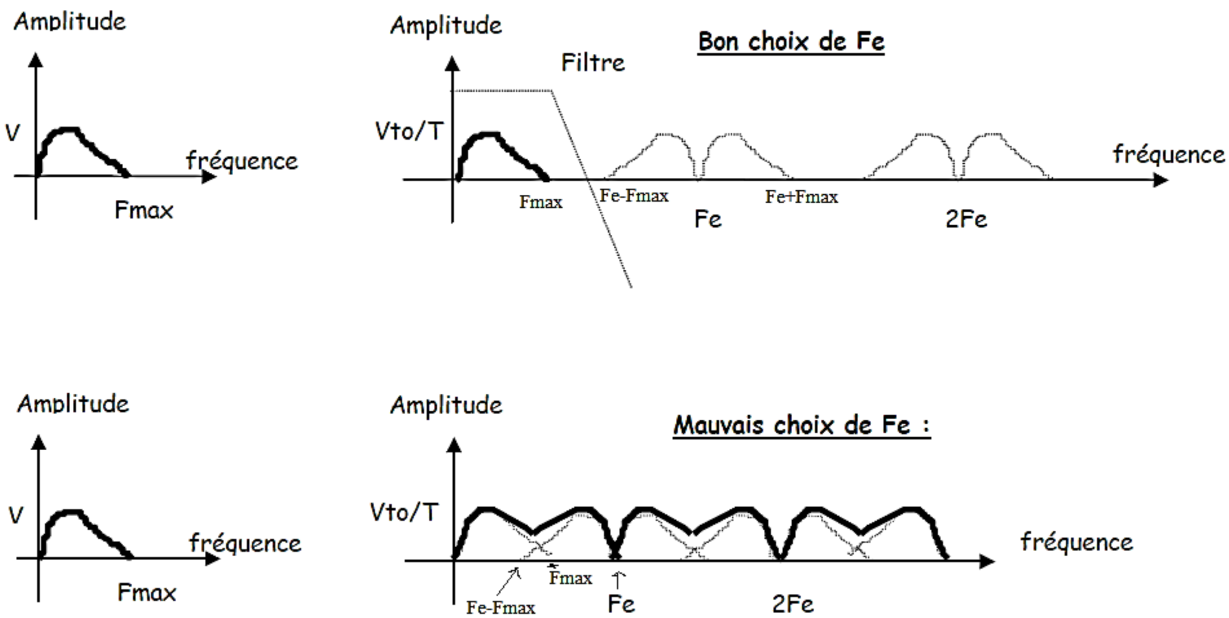


Figure 1 : Comment choisir Fe

Théorème de Shannon : La reconstitution d'un signal analogique u(t) à partir d'échantillons prélevés à la fréquence f_{max} n'est possible que si f_e est au moins deux fois supérieure à la plus grande fréquence f_{max} contenue dans le signal. $\boxed{f_e \geq 2f_{max}}$.

✓ **Applications**

Dans la pratique, la règle de Shannon a donné les choix suivants :

- Téléphonie : f_{max} = 3kHz et f_e = 8kHz

Chaque échantillon est codé sur 8 bits ce qui donne un débit de 8 ×8000 = 64 kbits/s.

- Son hi-fi : f_{max}= 20 kHz et f_e = 44,1kHz

Chaque échantillon pour une voie (stéréo) est codé sur 16 bits ce qui donne un débit de 16 ×2 ×44100 = 1,41 Mbits/s. $\boxed{Débit = n.N.f_e}$

f_e: fréquence d'échantillonnage ; N : nombre de bits ; n = 1 (mono), n = 2 (stéréo).

Le débit binaire est une mesure de la quantité de données numériques transmises par unité de temps (bit/s ou b/s ou bps).

1.5. Rôle du filtre anti-repliement

Le rôle du filtre anti-repliement est de limiter le contenu spectral du signal aux fréquences qui nous intéressent. Ainsi il élimine les parasites. C'est un filtre passe bas que l'on caractérise par sa fréquence de coupure et son ordre.

1.6. Sous échantillonnage

On parle de sous-échantillonnage quand le critère de Nyquist-Shannon n'est pas vérifié. Il en résulte une impossibilité de reconstruire correctement le signal de départ.

2. Analyse spectrale numérique

Une grande partie des systèmes permettant de déterminer le spectre d'un signal sont basés sur l'utilisation d'un calculateur numérique. A partir d'un nombre N d'échantillons du signal, un algorithme astucieux (dénommé FFT : Fast Fourier Transform) détermine les échantillons du spectre répartis sur l'échelle des fréquences.

- **Propriété**

Si on fournit un nombre N d'échantillons du signal à un programme FFT, l'algorithme est capable de déterminer un nombre identique, soit N, d'échantillons du spectre. Ces échantillons sont repartis uniformément sur l'échelle des fréquences.

Soit Δt, la durée d'observation du signal, pendant laquelle seront prélevés périodiquement N échantillons. Sachant que la période d'échantillonnage est T_e, alors

$$\boxed{T_e = \frac{\Delta t}{N} \quad \Longrightarrow \quad f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{\Delta t}}.$$

Ainsi, pour un nombre N d'échantillons donné, augmenter la durée d'observation aura pour effet de réduire la fréquence d'échantillonnage. Or, d'après Nyquist-Shannon il faut $f_e \geq 2f_{max}$. Selon cette condition, on ne peut observer que des signaux dont la fréquence f_{max} ne dépasse pas $\frac{f_e}{2}$.

- **Propriété**

Un signal échantillonné à une fréquence f_e permet de déterminer le spectre entre les fréquences $f_{min} = 0\ H_z$ et $f_{max} = \frac{f_e}{2}$

Le spectre lui aussi est constitué d'un nombre fini N d'échantillons répartis périodiquement entre la fréquence minimale 0 et la fréquence maximale $\frac{f_e}{2}$.

Définition

Le pas en fréquence $\Delta f'$ est l'écart entre les fréquences de deux échantillons successifs du spectre. $\Delta f' = \frac{f_{max} - f_{min}}{N} = \frac{\frac{f_e}{2} - 0}{N} = \frac{f_e}{2N}$. Par ailleurs, $f_e = \frac{N}{\Delta t}$, *il vient*: $\boxed{\Delta f' = \frac{1}{2\Delta t}}$

- **Propriété**

Pour un spectre calculé numériquement, le pas en fréquence $\Delta f'$ diminue lorsque la durée d'observation Δt augmente.

3. Résolution en fréquence

3.1. Cas d'un signal sinusoïdal de fréquence fs.

$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_a}$ $\quad$ $résolution$ et $T_a = pT_s = \frac{p}{f_s}$ $\quad \Longrightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{T_a} = \frac{f_s}{p}$

P : nombre de période échantillonné ; T_a : temps d'acquisition

3.2. Cas de la somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquences f_1 et f_2.

On calcul la différence de fréquence $b = f_2 - f_1 \ si \ \ f_2 > f_1$.

La précision : $\Delta f \leq \frac{b}{2} = \frac{f_2 - f_1}{2}$, avec $\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_a}$.

Exemple

$S_4(t) = B[\sin(2\pi\times1000t)\sin(2\pi\times10t)]$

Déterminer le temps d'acquisition minimum et le nombre d'échantillons minimal qui permettront de distinguer toutes les composantes du spectre.

4. Filtre numérique

4.1. Notation

Le traitement numérique de l'information présente des avantages par rapport à la technique analogique :

- facilité de conceptions des fonctions complexes,

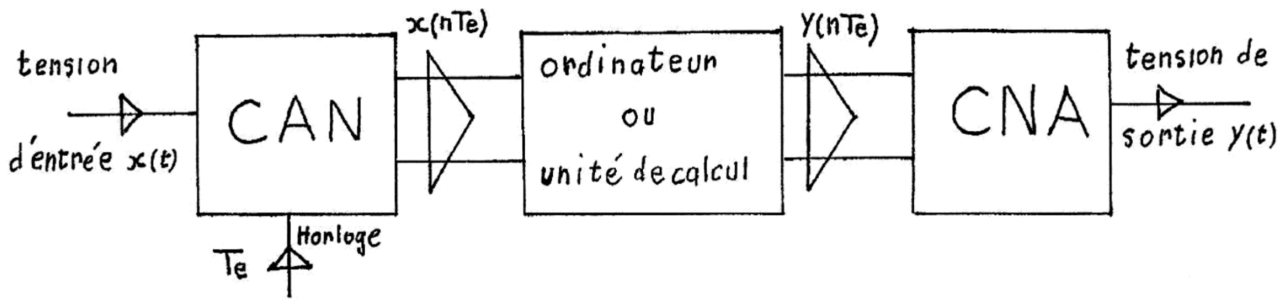
- mémorisation possible des informations

De façon générale, 1'information issue d'un capteur est une grandeur analogique ; de plus, les actionneurs sont généralement commandés par des signaux analogiques.

- il faudra une conversion analogique-numérique puis une conversion numérique-analogique.

L'acquisition est réalisée au moyen d'un échantillonnage de période Te. A chaque échantillon, on associe un mot binaire c'est le rôle du Le convertisseur analogique-numérique (CAN). Le CAN est cadencé par une horloge de période Te. A l'instant nTe, il fournit à l'ordinateur un nombre x(nTe) qui est une image de la valeur que prend la tension d'entrée x(t) à l'instant nTe.

Après traitement des informations par le calculateur, il faut revenir à un signal analogique : c'est le rôle du convertisseur numérique-analogique (CNA). A un même instant nTe, l'ordinateur présente en sortie le nombre y(nTe) que le CNA transforme en tension de sortie y(t).



4.2. Notation

Une fois l'opération d'échantillonnage et de numérisation effectuée, la mémoire d'un calculateur contient les valeurs numériques des échantillons.

Si le signal échantillonné est x(t), on connaît les valeurs des échantillons pris avec une période Te : x(kTe), on notera pour simplifier : $x(kTe) = x_k$.

4.3. Convertisseur analogique-numérique

Le convertisseur analogique-numérique permet de communiquer d'un système analogique vers un système numérique (figure 3).

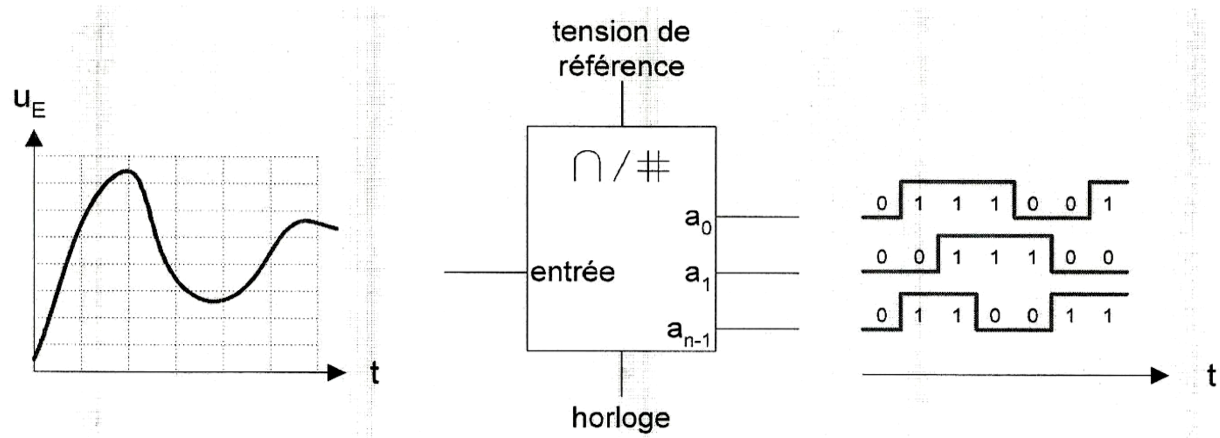


Figure 3 : Convertisseur Analogique Numerique (CAN)

4.3.1. Définition:

Un convertisseur analogique-numérique convertie un signal (tension ou courant) en un nombre binaire qui lui est proportionnel. L'entrée est une tension analogique comprise entre U_{Emin} et U_{Emax}. La sortie est numérique ; nombre binaire à n bits : $N = (a_{n-1}...a_1a_0)_2$.

4.3.2. Principe

Il s'agit de convertir une tension U_E en un mot binaire de n bits (par exemple 4 bits). Pour cela on compare la tension de sortie S d'un CNA à U_E à l'aide d'un comparateur. Si S est supérieur ou égal à U_E la sortie du comparateur est à 1'état haut c'est-à-dire 1 ; si S est plus petit que U_E, la sortie du comparateur est à 1'état bas c'est dire 0. Le comparateur est cadencé par une horloge.

4.4 Traitement numérique par filtrage passe bas

4.4.1. Equation de récurrence d'un filtre passe-bas du premier ordre

Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1+j\tau\omega}$ $avec\ \tau = \frac{1}{\omega_c}$. On obtient $j\tau\omega\,\underline{s}(t) + \underline{s}(t) = H_0\,\underline{e}(t)$ impliquant dans le réel $\boxed{\tau\frac{ds}{dt} + s(t) = H_0 e(t)}$. Pour l'utilisation des signaux numérique, il faut cette équation différentielle discrète car les valeurs des signaux numériques ne sont accessibles qu'aux instant t_k = kTe. Dans l'équation différentielle, un signal sera alors remplacé par sa valeur prise à l'instant t_k. Ainsi e(t) est remplacé par e_k = e(kTe) et s(t) par s_k = s(kTe).

On rappelle la définition mathématique de la dérivée pour t = t_0 :

$\frac{ds}{dt}(t_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$. Dans un calculateur numérique, on peut approximer la dérivée à l'instant $t_0 = kT_e$ en prenant $h = T_e$: $\boxed{\frac{ds}{dt} \approx \frac{s(t_k+T_e)-s(t_k)}{T_e} = \frac{s_{k+1}-s_k}{T_e}}$

Cette approximation de la dérivée constitue la base de la *méthode d'Euler* pour la résolution numérique des équations différentielles. Elle est d'autant meilleur que la période d'échantillonnage est petite par rapport à la constante de temps du filtre ($T_e \ll \tau$). Ainsi, on a : $\tau\frac{s_{k+1}-s_k}{T_e} + s_k = H_0 e_k \quad \Longrightarrow \quad s_{k+1} = \left(\frac{\tau-T_e}{\tau}\right)s_k + \frac{T_e}{\tau}H_0 e_k$. Finalement

$\boxed{s_{k+1} = a_0 s_k + b_0 e_k}$ $avec\ \ a_0 = \left(\frac{\tau-T_e}{\tau}\right)\ \ et\ \ b_0 = \frac{T_e}{\tau}H_0$

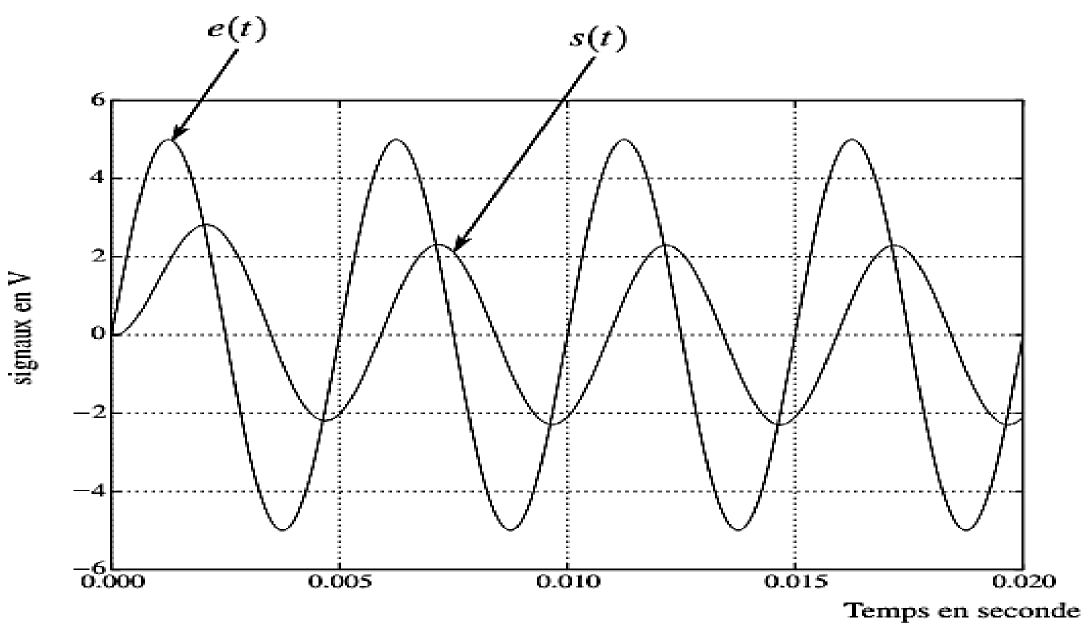


Figure 4 : Filtrage numérique s'un signal sinusoïdal par un filtre passe bas du 1er ordre de fréquence de coupure f_c = 100 Hz

4.4.2. Filtres d'ordre supérieur

On peut étendre la technique de discrétisation à des dérivées d'ordre supérieur. Par exemple pour l'ordre 2 on a : $\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} \approx \frac{s_{k+1}+s_{k-1}-2s_k}{T_e^2}}$. La récurrence est aussi d'ordre 2. On peut réaliser ainsi par le calcul des filtres numériques d'ordre élevé.

4.5 Restitution du signal : convertisseur numérique analogique

Pour restituer le signal, on procède à une génération de signal analogique à partir du signal numérique calculé. Pour cela on utilise un convertisseur numérique-analogique (CNA). Le convertisseur numérique analogique permet de communiquer d'un système numérique vers un système analogique (figure 5).

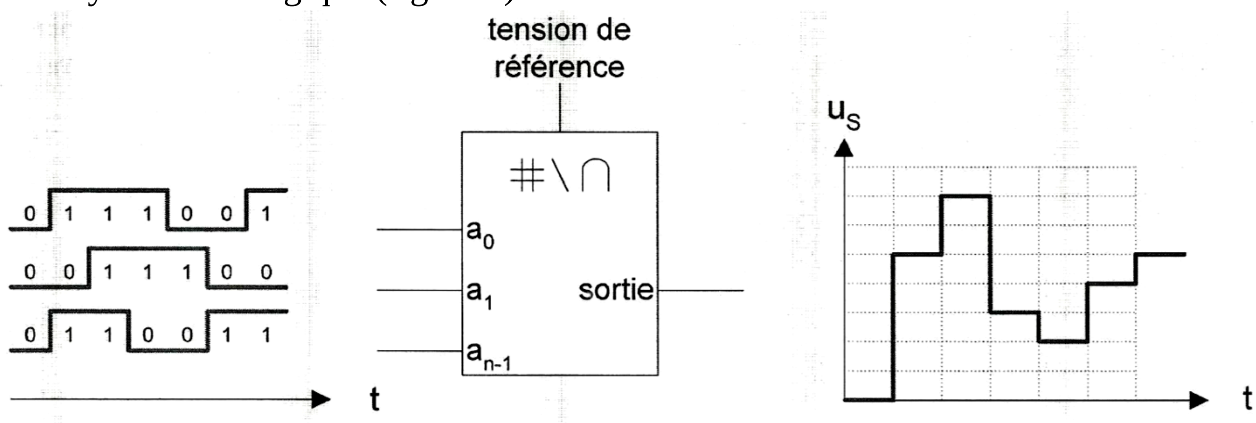


Figure 5 :Convertisseur Numerique Analogique (CNA)

4.5.1. Définition

Un Convertisseur Numérique-Analogique (CNA) convertit un nombre binaire en une tension (ou courant) qui lui est proportionnel. L'entrée est numérique à n bits : $N = (a_{n-1}. . .a_1a_0)_2$. La sortie est analogique : tension U_S.

4.5.2. Principe

Le convertisseur numérique analogique transforme une information numérique en un signal analogique. L'entrée du CNA est un mot codé généralement sous forme binaire. Exemple: 10010110. La sortie du CNA est en général une tension. A chaque valeur du mot d'entrée correspond une valeur de la tension de sortie.