C.N.C
CORRECTION PHYSIQUE II 2010

sabdhak25@hotmail.com

Les conducteurs électriques

premiére partie

conduction électrique dans un milieu matériel

1.1

1.1.1 systéme etudié :charge elémentaire q d'aprés la loi fondamental on a :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_a + \overrightarrow{F}_r$$

en remplacant par l'expression de chaque force on aura :

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v} - m\omega_0^2\overrightarrow{r}$$

1.1.2

1.1.2.1 Le choix du régime sinusoïdal permet d'eliminer le regime transistoire du soultion générale de l'equation différentielle.

1.1.2.2 en régime sinusoïdal forcé on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_m e^{i(\omega t+\varphi)}$ donc $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = i\omega\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{r} = \int \overrightarrow{v}dt = \dfrac{\overrightarrow{v}}{i\omega}$ce qui permet de déduire l'expréssion suivante :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\frac{q}{m}\overrightarrow{E}}{(i\omega + \frac{1}{\tau} + \frac{\omega_0^2}{i\omega})}$$

on déduit l'expression finale :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\frac{q\omega}{m}\overrightarrow{E}}{(\frac{\omega}{\tau} + i(\omega^2 - \omega_0^2))}$$

1.1.3 On définit la densite volumique des charges par la relation suivante :$\rho = \dfrac{\delta N}{\delta V} = nq$

1.1.4 $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$

1.1.5 on a $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$ donc $\sigma = \dfrac{\frac{nq\omega^2}{m}}{(\frac{\omega}{\tau} + i(\omega^2 - \omega_0^2))}$ d'où : $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$ donc

$$\sigma = \frac{\frac{nq^2\tau}{m}}{(1 + i\frac{\tau}{\omega}(\omega^2 - \omega_0^2))}$$

d'où : $\sigma_0 = \dfrac{nq^2\tau}{m}$

1.2

1.2.1 si $\omega_0 = 0$ on a

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1 + i\omega\tau)}$$

1.2.2 par multiplication de cojugué on aura :

$$\sigma = \frac{\sigma_0(1 - i\omega\tau)}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})}$$

Par décomposition on a :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})} - \frac{\sigma_0 i\omega\tau}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})}$$

d'où : $\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\sigma_0}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})}, & ; \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_0\omega\tau}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})}, & . \end{cases}$

1.2.2

1.2.3 **1.2.3.1** $n = \dfrac{N}{V} = \dfrac{mN_A}{MV} = \dfrac{\rho N_A}{M}$

1.2.3.2 $n = 8,43.10^{28}/m^3$

1.2.3.3 on a $\sigma_0 = \dfrac{nq^2\tau}{m}$ donc on déduit :

$$\tau = \frac{m\sigma_0}{nq^2} = 2,53.10^{-14}s$$

1.2.3.4 si $\omega \ll \dfrac{1}{\tau}$ on aura $f_1 \ll 9.26.10^{12}Hz$

1.2.4 si $\omega\tau \ll 1$ on a $\begin{cases} \sigma_1 \approx \sigma_0, & ; \\ \sigma_2 = i\omega\sigma_0\omega\tau, & . \end{cases}$

1.2.5 $\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E}$ donc

$$\overrightarrow{j} = (\sigma_1 - i\sigma_2)\overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{j} = (\sigma_0\overrightarrow{E} - i^2\sigma_0\tau\overrightarrow{E})$$

$$\overrightarrow{j} = (\sigma_0\overrightarrow{E} - i^2\sigma_0\omega\tau\overrightarrow{E})$$

$$\overrightarrow{j} = (\sigma_0\overrightarrow{E} + \sigma_0\omega\tau\overrightarrow{E})$$

et on a $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = i\omega \overrightarrow{E}$ donc $\varepsilon_0 \chi = \omega \sigma_0 \tau$ et on a :

$$\chi = \frac{\sigma_0 \tau}{i\varepsilon_0}$$

1.2.6 D'aprés MAXWELL-AMPERE on a : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t})$ en remplaçant :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0(\sigma_0 \overrightarrow{E} + \varepsilon_0(1+\chi)\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t})$$

1.2.7

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{j}_c + \overrightarrow{j}_d)$$

1.2.8 $\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0}{\omega \varepsilon_0 (1+\chi)}$

1.2.9 **1.2.9.1** $\eta = 1 \Longleftrightarrow \omega_c = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 |1+\chi|}$

1.2.9.2 on a $1+\chi = 1 - i\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\tau$ donc $|1+\chi| = \sqrt{1+(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\tau)^2}$ d'où $\omega_c = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\sqrt{1+(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\tau)^2}}$

deuxiéme partie

Propagation d'ondes électromagnetiques dans un plasma

2.1

2.1.1. Un modéle sera valable si le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\frac{j_d}{j_c} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} \gg 1$$

donc

$$\omega \ll \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = 10^{17}$$

on traville dans le domaine des hautes fréquences.

2.1.2.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right)$$

2.1.3. D'aprés MAXWEL-FARADAY on aura

$$\overrightarrow{rot} E = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot} E = -\frac{\partial \overrightarrow{rot} B}{\partial t}$$

par suite on trouve

$$-\Delta \overrightarrow{E} = -\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

d'ou l'expression finale

$$\Delta \overrightarrow{E} = i\omega\left(\mu_0\sigma_0\overrightarrow{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

2.1.4. Les équations de maxwell sont des équations lineaires qui vérifie la loi de superposition

2.1.5. d'aprés l'expression donnée du champ on conclut $\Delta\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial z^2}e^{i(\omega t)}$ donc en déduit l'equation différentielle :

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} = i\omega\mu_0\sigma_0 E(z) - \mu_0\varepsilon_0\omega^2 E(z)$$

2.1.6. on a $\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} = -k^2E(z)$ donc en déduit :

$$-k^2E(z) = i\omega\mu_0\sigma_0 E(z) - \mu_0\varepsilon_0\omega^2 E(z)$$

d'où

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - i\omega\mu_0\sigma_0$$

2.1.7. 2.1.7.1. d'aprés $\overrightarrow{rot}E = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ si l'on considére que la solution E_1e^{ikz} on aura $ik\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E} = -i\omega\overrightarrow{B}$ soit finalement :

$$\overrightarrow{B} = \frac{k}{\omega}u_z \wedge \overrightarrow{E}_1$$

2.1.7.2. k est un complexe donc le champ magnétique et électrique sont déphasés.

2.2

2.2.1. on a $k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 - i\omega\mu_0\sigma_0} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}$ en utilisant l'approximation on aura

$$k \simeq \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}) = (k_0 - i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}})$$

Il apparaît une longueur caracteristique :

$$l_p = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

On peut écrire : $k = k_0 - i\frac{1}{l_p}$ avec $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

2.2.4. Les solutions à l'équation de propagation sont donc dans ce cas :

$$\underline{E}(z;t) = E_1exp^{i((k0 - i\frac{1}{l_p})z - \omega t)} + E_2exp^{i(-(k0 - i\frac{1}{l_p})z - \omega t)}$$

2.2.2. Soit en revenant à l'amplitude réelle :

$$\underline{E}(z;t) = E_1 e^{-\frac{z}{l_p}} \cos(k_0 z - \omega t + \varphi_1) + E_2 e^{\frac{z}{l_p}} \cos(-k_0 z - \omega t + \varphi_2)$$

Le premier terme correspond à une onde qui se propage vers les z croissants tout en s'atténuant tandisque la seconde correspond à une onde qui se propage vers les z décroissants qui s'atténue elle aussi. L'amplitude de l'onde décroit de $\frac{1}{l_p}$ au bout de la distance l_p : On remarquera que cette distance d'absorption ne dépend pas de la fréquence.

2.2.5.

2.2.Propagation dans les bons conducteurs :l'effet de peau

2.3.1. pour les bons conducteurs ($\varepsilon_0\omega \ll \sigma$) c'est le second terme qui est dominant :

$$k^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$$

dont la solution de partie imaginaire négative est

$$k = \frac{1-i}{2}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_0} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}$$

k s'exprime en fonction d'une longueur caractéristique δ appelé épaisseur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$$

2.3.2. Cette longueur caractéristique est trés petite devant la longueur d'onde dans le vide :

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = k_0\delta = \sqrt{\omega\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll 1$$

puisque nous avons fait l'hypothése de bon conducteur ($\varepsilon_0\omega \ll \sigma$)

2.3.3. La solution de l'équation s'écrit alors :

$$\underline{E} = E_1 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} + E_2 e^{\frac{z}{\delta}} e^{i(-\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

Soit en notation réelle

$$E = E_1 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_1) + E_2 e^{\frac{z}{\delta}} \cos(-\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_2)$$

La décroissance exponentielle fait penser à ce qui se passe dans le cas du mauvais conducteur mais il n'en est rien comme nous allons le voir en étudiant la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

2.3.4.

2.4.

2.4.1. d'aprés MAXWELL-FARADAY $\overrightarrow{rot}E = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ si l'on considére que la solution $E_1 e^{ikz}$ on aura $ik\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E} = -i\omega \overrightarrow{B}$soit finalement :

$$\overrightarrow{B}_i = \frac{k_0}{\omega_0}\exp(\omega t - k_0 z)\overrightarrow{u}_y$$

$$\overrightarrow{B}_r = -\frac{k_0}{\omega_0}\exp(\omega t + k_0 z)\overrightarrow{u}_y$$

2.4.2. De la meme façon on trouve l'expression du champ magnétique transmit :

$$\overrightarrow{B}_r = \frac{k}{\omega_0}\exp(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_y$$

2.4.3. Les deux champs doivent verifier les relations de passage :pour une surface de séparation on a :

$$\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{12}$$

$$\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge n_{12}$$

avec 2 et 1 coreespendant aux milieux

2.4.4. La continuité du champ électrique et du champ magnétique en z = 0 permet de déduire :

$$E_i + E_r = E_t$$

$$\frac{k_0}{\omega_0}(E_i - E_r) = \frac{k}{\omega_0}E_t$$

2.4.5. Al'aide des deux équations précédentes on aura :

$$E_r = \frac{k_0 - k}{k + k_0}E_i$$

$$E_t = \frac{2k_0}{k + k_0}E_i$$

2.4.6. Cas mauvais conducteur

2.4.6.1. Reprenons le cas du mauvais conducteur $k = k_0 - i\frac{1}{l_p}$ On peut simplifier les deux expressions :

$$E_r \simeq -i\frac{1}{2k_0 l_p}E_i$$

$$E_t \simeq E_i$$

2.4.6.2. Il n'y a quasiment pas de réflexion. Le champ se propage dans le conducteur et il est progressivement absorbé.

2.4.7. Cas du bon conducteur

2.4.7.1. Dans le cas du bon conducteur on a :
$k = \dfrac{1-i}{\delta}$ pour le champr réflichit on a :

$$E_r = \frac{k_0\delta - (1+i)}{k_0\delta + (1+i)} E_i$$

$$E_r = -\frac{1 - \frac{k_0\delta}{(1+i)}}{1 + \frac{k_0\delta}{(1+i)}} E_i$$

$$E_r = -(1 - \frac{k_0\delta}{(1+i)})(1 - + \frac{k_0\delta}{(1+i)} + ...)E_i$$

$$E_r \simeq -(1 - (1-i)k_0\delta)E_i$$

pour le champ transmit :

$$E_t = \frac{2k_0}{k_0 + \frac{(1+i)}{\delta}} E_i = (1-i)k_0\delta E_i$$

Or $\delta k_0 = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}$ ce qui donne :

$$E_r \simeq -(1 - (1-i)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}})E_i$$

$$E_t = (1-i)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} E_i$$

2.4.7.2. La décroissance exponentielle fait penser à ce qui se passe dans le cas du mauvais conducteur mais il n'en est rien

2.4.8. L'épaisseur de peau est inversement proportionelle à la fréquence : plus les fréquence sont élevées et moins les ondes pénetrent dans les conducteurs. Dans les , à partir d'une certaine fréquence, la conduction se fait en surface.

troisiéme partie

Propagation d'ondes électromagnetiques dans un plasma

3.1

3.1.1. L'équation d'évolution de la vitesse ou, ce qui est équivalent celle de la densité volumique de courant est : : $m\overrightarrow{j} + i\omega\tau\overrightarrow{j} = ne^2\tau\overrightarrow{E}$

3.1.2. Prenons donc la divergence de l'équation d'évolution de la densité de courant

$$mdiv\overrightarrow{j} + i\omega\tau div\overrightarrow{j} = ne^2\tau div\overrightarrow{E}$$

en utilisant l'equation de conservation

$$\overrightarrow{div}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

on aura :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\omega_p^2\rho=0$$

avec $\omega_p^2=\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}$

3.1.3. si ω_p faible l'equation (6) devient :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

la solution de l'equation est : $\rho=Ae^{\frac{t}{\tau}}+C$ le milieu devient en régime permanent est initialement neutre .

3.1.4. faible amortissement traduit par $\|\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\|\ll\omega_p^2\rho$ donc

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\omega_p^2\rho=0$$

Cette équation une solution sinusoidale

3.2

3.2.1. on a $\omega_p^2=\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ d'ou on déduit que $\overrightarrow{j}=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{i\omega}$

3.2.2. **3.2.2.1.** D'aprés MAXWEL-GAUSS on aura

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}E=-\frac{\partial\overrightarrow{rot}B}{\partial t}$$

par suite on trouve

$$-\Delta\overrightarrow{E}=-\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

d'ou l'expression finale

$$\Delta\overrightarrow{E}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\omega_P}{i\omega}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}+\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}\right)$$

3.2.2.1. $\overrightarrow{E}$ ne depend que de z donc :

$$\Delta\overrightarrow{E}=\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial z^2}$$

et $\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}=i\omega\overrightarrow{E}$ et $\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}=-\omega^2\overrightarrow{E}$ et$\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial z^2}=-k^2\overrightarrow{E}$ donc en déduit :

$$k^2=\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$$

3.2.3. **3.2.3.1** si $\omega<\omega_p$ on aura $k=i\dfrac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}$

3.2.3.2 en remplacant l'expresion du k dans l'expression du champ on aura : $\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_0e^{i(\omega t-ikz)}$ce qui donne $\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_0e^{|k|z}e^{i}\omega t$

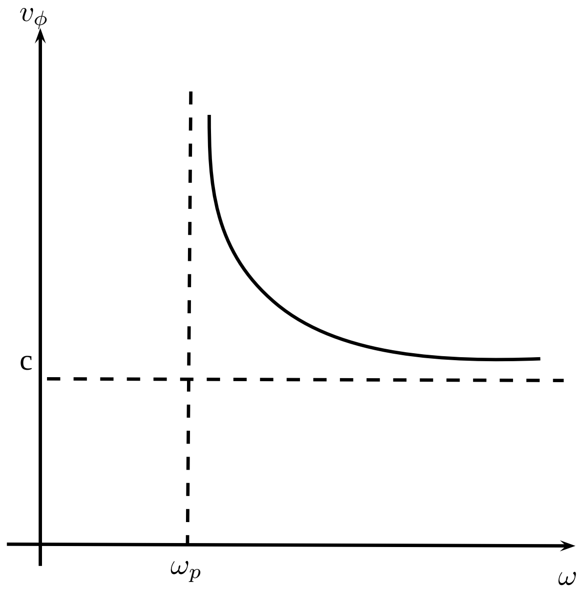
3.2.3.3

3.2.4. $\omega > \omega_p$ on aura $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

d'où : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 e^{i(\omega t - ikz)}$ avec $k > 0$

La vitesse de phase est défini par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$



3.3

3.3.1. Si les deux ondes ont des pulsations proches : ($\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega \ll \omega_1$) les deux nombres d'onde seront proches ($k_2 - k_1 = \delta k \ll k_1$). Les deux vitesses seront proches

On peut réexprimer le champ électrique de cette onde pour mettre en évidence les battements :

$$E(z;t) = 2E_0 cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right) cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}z\right)$$

Les oscillations rapides ont une pulsation qui est la moyenne des deux pulsations ω_m et un nombre d'onde qui est la moyenne des deux nombres d'onde Les oscillations lentes (basses fréquences) ont une pulsation qui est

$$\omega_b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

3.3.2. La vitesse de l'onde de haute frequence est :

$$v_r = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \simeq \frac{\omega_1}{k_2} \simeq \frac{\omega_2}{k_2}$$

L'enveloppe a une pulsation égale à la moitié de la difference des deux pulsations et un nombre d'onde égal à la moitié de difference des nombres d'ondes. Cette enveloppe se propage donc avec la célérité v_g que l'on nomme *vitesse de groupe* :

$$v_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \simeq \frac{\delta\omega}{\delta k}$$