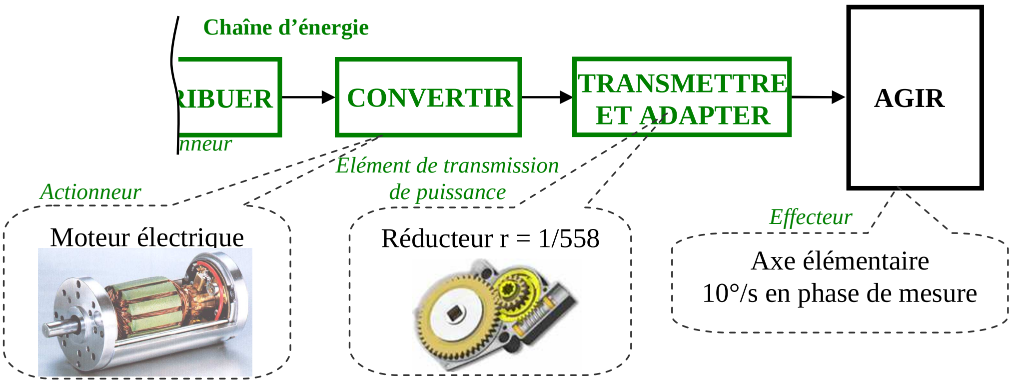
Etude du système de positionnement d'un appareil d'imagerie médicale – Corrigé

Q.1. 3 mouvements de rotation ayant pour paramètres α, β et γ.

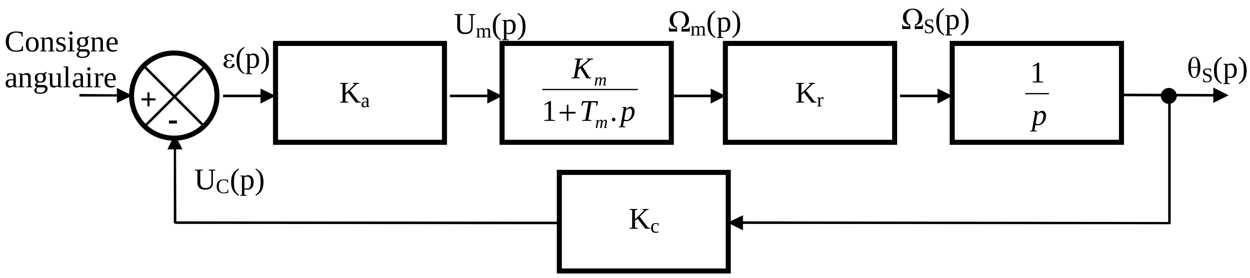
Q.2. Vitesse de rotation de l'effecteur : 10°/s → 600°/min.

Soit une vitesse de rotation en tour/min du moteur de $N = \dfrac{600 \times 558}{360} = 930$ tour/min.



Q.3. $\omega_S(t) = \dfrac{\omega_m(t)}{558} \rightarrow \mathrm{K_r} = \dfrac{\omega_S(t)}{\omega_m(t)} = \dfrac{1}{558}$

Q.4. Schéma bloc du système :



Fonction de transfert en chaîne directe : FTCD(p) = $\dfrac{K_a.K_m.K_r}{p.(1+T_m.p)}$

Fonction de transfert en boucle ouvert : FTBO(p) = $\dfrac{K_a.K_m.K_r.K_c}{p.(1+T_m.p)}$

Fonction de transfert en boucle fermée : FTBF(p) = $\dfrac{1}{K_c}.\dfrac{\dfrac{K_a.K_m.K_r.K_c}{p.(1+T_m.p)}}{1+\dfrac{K_a.K_m.K_r.K_c}{p.(1+T_m.p)}}$

Q.5. FTBF(p) $= \dfrac{1}{K_c}.\dfrac{\dfrac{K_a.K_m.K_r.K_c}{p.(1+T_m.p)}}{1+\dfrac{K_a.K_m.K_r.K_c}{p.(1+T_m.p)}} = \dfrac{1}{K_c}.\dfrac{K_a.K_m.K_r.K_c}{p.(1+T_m.p)+K_a.K_m.K_r.K_c}$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\dfrac{1}{K_c}}{1+\dfrac{1}{K_a.K_m.K_r.K_c}.p+\dfrac{T_m}{K_a.K_m.K_r.K_c}.p^2} = \frac{K}{(1+\dfrac{2.z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{{\omega_0}^2}p^2)}$$

Avec :

$$K = \frac{1}{K_c}$$

$$\frac{1}{{\omega_0}^2} = \frac{T_m}{K_a.K_m.K_r.K_c} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_a.K_m.K_r.K_c}{T_m}}$$

$$\frac{2.z}{\omega_0} = \frac{1}{K_a.K_m.K_r.K_c} \rightarrow z = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{K_a.K_m.K_r.K_c.T_m}}$$

Q.6. Réponse indicielle d'un système du 1^er^ ordre à une entrée en échelon de tension.

$u_m(t) = U_0.u(t) = 10.u(t)$ $\rightarrow$ $\omega_m(t) = K_m.U_0.\left(1-e^{-\frac{t}{T_m}}\right).u(t)$ $\rightarrow$ ***voir cours réponse indicielle 1^er^ ordre***

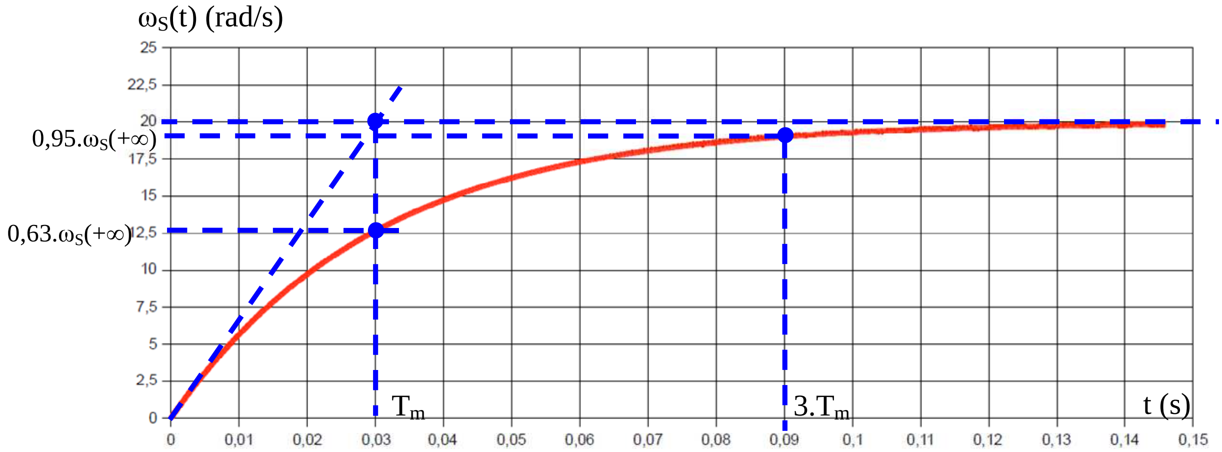
Q.7. Valeur asymptotique : $\omega_S(+\infty) = 20\,\text{rad/s}$ $\rightarrow$ $K_m.K_r = 2$ $\rightarrow$ $K_m = 2/K_r = 1116\ \text{rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$

Temps de réponse à 5% : $t_{5\%} = 3.T_m$

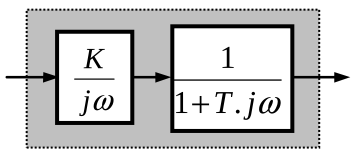
Temps de réponse à 0,63.s(+∞) : $t = T_m$

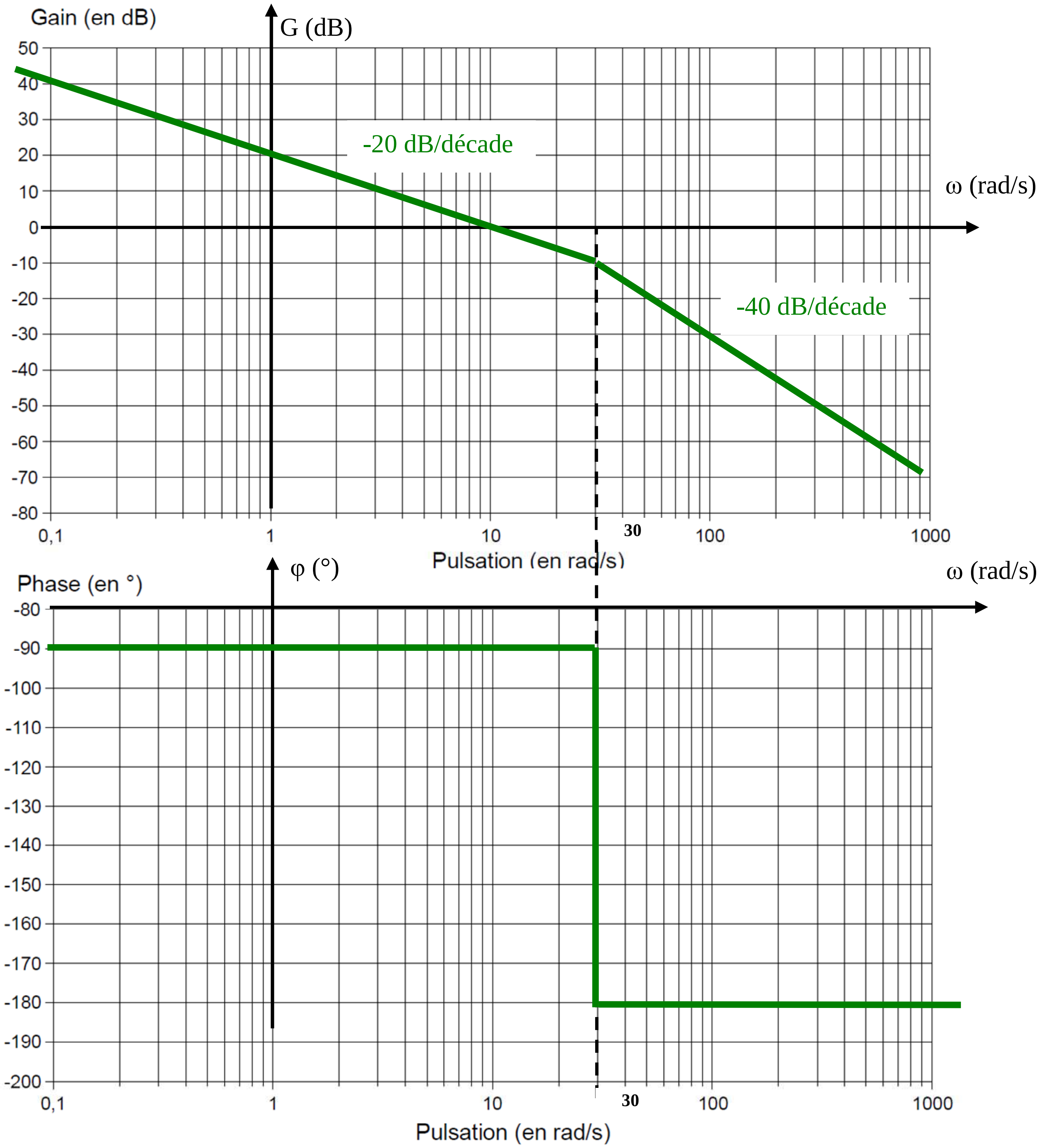
Pente à l'origine $= \dfrac{K}{\tau}$

$\rightarrow$ Graphiquement on lit : $T_m = 0{,}03\text{s}$



Q.8. $FTBO(p) = \dfrac{10}{p\left(1+\dfrac{1}{30}.p\right)} = \dfrac{10}{p}.\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{30}.p}$ $\rightarrow$ Soit 1 intégrateur de constante K = 10 + un 1^er^ ordre de constante de temps $T=\dfrac{1}{30}$ s (ω = 30 rad/s).





Q.9. Rappels de cours : Le module de FTBO(jω) est le produit des modules de chaque fonction de transfert élémentaire et l'argument, la somme des arguments de chaque fonction de transfert élémentaire :

Intégrateur :

H(p) = $\frac{K}{p}$ → soit : H(jω) = $\frac{K}{j\omega}$

<u>Gain en dB :</u>

G_{dB}= 20.log $\left|\frac{K}{j.\omega}\right|$ = 20.log (K) – 20.log(ω)

<u>Phase en degrés :</u> $\varphi(\omega) = -90°$

Soit :

1[er] ordre :

$H(p) = \frac{1}{1+T.p}$ → soit : $H(j\omega) = \frac{1}{1+T.j\omega}$

<u>Gain en dB :</u>

$G_{dB} = 20\log|H(j\omega)| = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1+T^2.\omega^2}$

<u>Phase :</u>

$\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1+T.j\omega) = -\arctan(T.\omega)$

G_{dB} = 20.log |FTBO(jω)| = 20.log $\left|\frac{K}{j\omega}\right|$ + 20.log |H(jω)|

$\varphi°$ = $\arg(FTBO(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{j\omega}\right) + \arg(\frac{1}{1+T.j\omega}) = -90° - \arg(1+T.j\omega)$

Pour ω = 30 rad/s on a alors :

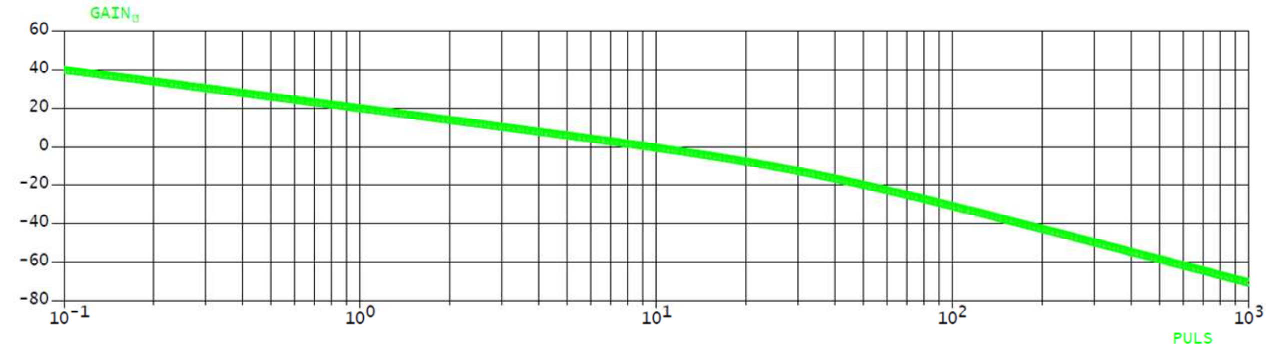
G_{dB} = 20.log|FTBO(30.j)| = 20.log (10)–20.log(30)+ $20\log 1 - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{1}{30}\right)^2.30^2}$ = 20 – 29,5 + 0 – 3

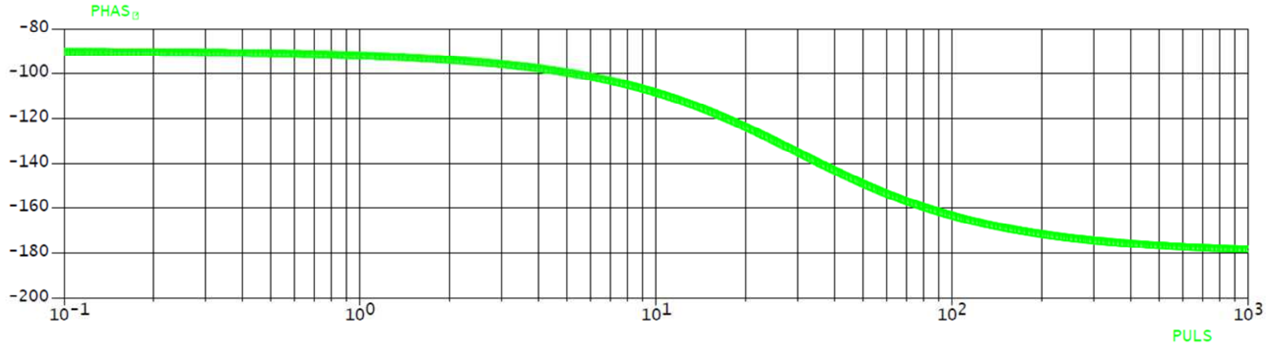
$\boxed{G_{dB} = -12{,}5\ \text{dB}}$

$\varphi°$ = $\arg(FTBO(30.j)) = -90° + \arg(\frac{1}{1+\frac{1}{30}.30j.}) = -90° - \arg(1+j)\ -90° - \arctan(1) = -90° - 45°$

$\boxed{\varphi° = -135°}$

Courbes réelles sous Did'Acsyde :





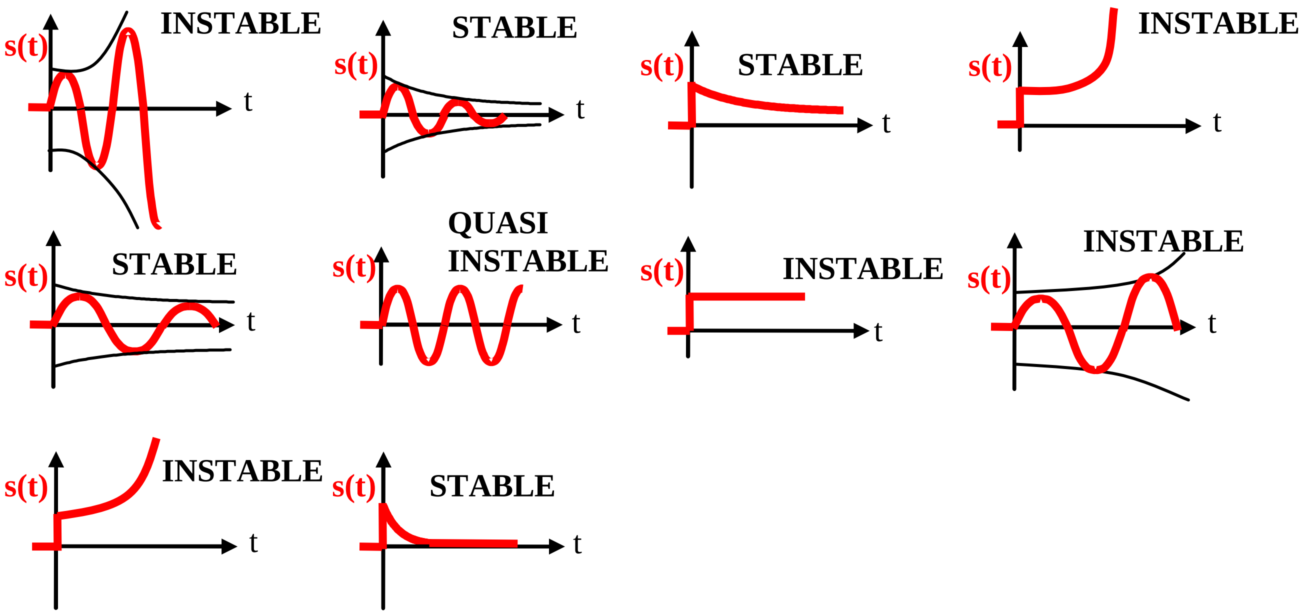
Q.10. $\omega_{coupure}$ = 9,5 rad/s on a alors :

$\varphi°$ = $\arg(FTBO(9{,}5.j)) = -90° + \arg(\frac{1}{1+\frac{1}{30}.9{,}5j.}) = -90° - \arg(1+0{,}31.j)\ = -90° - \arctan(0{,}31)$

$\varphi° = -90° - 17° = -107°$

→ Mφ $= 180° - 107° = 73°$ > 45° → C.d.C.F. ok.

Réponses de systèmes à l'impulsion de DIRAC – Corrigé



Stabilité à partir des pôles de la FTBF – Corrigé

Un système asservi est stable si sa FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

Système 1 : -1 ; -2 → STABLE
Système 2 : -3, -2, 0 → MARGINALEMENT STABLE
Système 3 : -2+j, -2-j, 2j,-2j → MARGINALEMENT STABLE
Système 4 : -2+3j, -2-3j,-2 → STABLE
Système 5 : -j, j, -1, 1 → INSTABLE
Système 6 : -1, +1 → INSTABLE
Système 7 : -1+j, -1-j → STABLE
Système 8 : 2, -1, -3 → INSTABLE
Système 9 :-6, -4, 7 → INSTABLE

Application du critère de Routh – Corrigé

Q.1. $H_1(p) = \dfrac{2}{p^4 + 3p^3 - 3p^2 + 6p + 1}$ → $D_1(p) = p^4 + 3p^3 - 3p^2 + 6p + 1$ → Il y a un $a_i < 0$ → Système instable.

$H_2(p) = \dfrac{7}{p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 6p + 1}$ → $D_2(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 6p + 1$ → 1^er^ examen ok.

Construction du tableau de Routh :

p^4		1	3	1
p^3		3	6	0
p^2		$\frac{3\times3-6\times1}{3}=1$	$\frac{1\times3-0\times1}{3}=1$	$\frac{0\times3-0\times1}{3}=0$
p^1		$\frac{6\times1-3\times1}{1}=3$	$\frac{0\times1-3\times0}{1}=0$	
p^0		$\frac{3\times1-0\times1}{3}=1$		

→ Tous les termes de la 1ère colonne > 0 → Système stable.

$$H_3(p)=\frac{2p+3}{p^4+5p^3+3p^2+6p+1} \rightarrow D_3(p)=p^4+5p^3+3p^2+6p+1 \rightarrow$$ 1er examen ok.

Construction du tableau de Routh :

p^4		1	3	1
p^3		5	6	0
p^2		$\frac{3\times5-6\times1}{5}=\frac{9}{5}$	$\frac{1\times5-0\times1}{5}=1$	$\frac{0\times5-0\times1}{5}=0$
p^1		$\frac{\frac{9}{5}\times6-5\times1}{\frac{9}{5}}=\frac{29}{9}$	$\frac{\frac{9}{5}\times0-5\times0}{\frac{9}{5}}=0$	
p^0		$\frac{\frac{29}{9}\times1-0\times\frac{9}{5}}{\frac{29}{9}}=1$		

→ Tous les termes de la 1ère colonne > 0 → Système stable.

$$H_4(p)=\frac{7p-1}{p^4+5p^3+3p^2+16p+1} \rightarrow D_4(p)=p^4+5p^3+3p^2+16p+1 \rightarrow$$ 1er examen ok.

Construction du tableau de Routh :

p^4		1	3	1
p^3		5	16	0
p^2		$\frac{3\times5-16\times1}{5}=-\frac{1}{5}$	…	
p^1		…	…	
p^0		…	…	

→ Le 1er terme calculé < 0 → Système instable.

$$H_5(p) = \frac{2}{p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 6p + 1} \rightarrow D_5(p) = p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 6p + 1 \rightarrow 1^{er} \text{ examen ok.}$$

Construction du tableau de Routh :

p^4		1	2	1
p^3		3	6	0
p^2		$\frac{3\times2-6\times1}{3}=0$	…	
p^1		…	…	
p^0		…	…	

→ Le 1er terme calculé = 0 → Système instable.

Application du critère de Routh – Corrigé

Q.1. Calcul de la FTBF :

$$F(p) = \frac{\frac{K_i}{T_i \cdot p} \cdot \frac{2}{1+2p+20p^2}}{1+\frac{K_i}{T_i \cdot p} \cdot \frac{2}{1+2p+20p^2}} = \frac{2.K_i}{T_i \cdot p.(1+2p+20p^2)+2.K_i} = \frac{2.K_i}{2.K_i + T_i \cdot p + 2.T_i \cdot p^2 + 20.T_i \cdot p^3}$$

$$D(p) = 2.K_i + T_i \cdot p + 2.T_i \cdot p^2 + 20.T_i \cdot p^3$$

Construction du tableau de Routh :

p^3		$20.T_i$	T_i
p^2		$2.T_i$	$2.K_i$
p^1		$\frac{2.T_i \times T_i - 20.T_i \times 2.K_i}{2.T_i} = T_i - 20.K_i$	0
p^0		$\frac{(T_i - 20.K_i)\times 2.K_i - 2.T_i \times 0}{T_i - 20.K_i} = 2.K_i$	…

Stable si $\boxed{T_i > 0}$, $\boxed{K_i > 0}$ et $T_i - 20.K_i > 0 \rightarrow \boxed{K_i < \frac{T_i}{20}}$

Application du critère de Routh – Corrigé

Q.1. Calcul de la FTBF :

$$F_1(p) = \frac{\frac{K}{p.(p+3).(p+4)}}{1+\frac{K}{p.(p+3).(p+4)}} = \frac{K}{p.(p+3).(p+4)+K} = \frac{K}{p^3+7.p^2+12p+K}$$

$\rightarrow D_1(p) = p^3 + 7.p^2 + 12p + K$

Construction du tableau de Routh :

p^3		1	12
p^2		7	K
p^1		$\dfrac{12\times7-1\times K}{7}=\dfrac{84-K}{7}$	0
p^0		K	…

Stable si K > 0 et $\dfrac{84-K}{7}>0 \rightarrow K<84 \rightarrow \boxed{0<K<84}$

Calcul de la FTBF :

$$F_2(p)=\frac{\dfrac{K.(1+T.p)}{p.(p+1).(1+0,5.p)}}{1+\dfrac{K.(1+T.p)}{p.(p+1).(1+0,5.p)}}=\frac{K.(1+T.p)}{p.(p+1).(1+0,5.p)+K.(1+T.p)}=\frac{K.(1+T.p)}{0,5.p^3+p+1,5.p^2+K.(1+T.p)}$$

$$F_2(p)=\frac{K.(1+T.p)}{0,5.p^3+1,5.p^2+(K.T+1).p+K} \rightarrow D_2(p)=0,5.p^3+1,5.p^2+(K.T+1).p+K$$

Construction du tableau de Routh :

p^3		0,5	K.T+1
p^2		1,5	K
p^1		$\dfrac{1,5\times(K.T+1)-0,5\times K}{1,5}$	0
p^0		K	…

Stable si $\boxed{K>0}$, $\boxed{K.T+1>0}$ et $\dfrac{1,5\times(K.T+1)-0,5\times K}{1,5}>0 \rightarrow (K.T+1)-\dfrac{1}{3}.K>0 \rightarrow \boxed{K.T>\dfrac{1}{3}.K-1}$

Calcul de la FTBF :

$$F_3(p)=\frac{\dfrac{K}{p^3+5p^2+8p+5}}{1+\dfrac{K}{p^3+5p^2+8p+5}}=\frac{K}{p^3+5p^2+8p+5+K} \rightarrow D_3(p)=p^3+5p^2+8p+5+K$$

Construction du tableau de Routh :

p^3		1	8
p^2		5	5+K
p^1		$\dfrac{5\times8-(5+K)\times1}{5}$	0
p^0		5+K	…

Stable si 5+K > 0 et $\dfrac{5\times8-(5+K)\times1}{5}>0 \rightarrow 40-(5+K)>0 \rightarrow K<35 \rightarrow \boxed{-5<K<35}$

Application du critère du revers – Corrigé

Q.1. et Q.2.