L'anneau des polynômes

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes :

a) $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P,Q \in \mathbb{K}[X]$

b) $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 On définit une suite de polynôme (P_n) par $P_0 = 2, P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

a) Calculer P_2 et P_3.

Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.

c) En déduire une expression simple de $P_n(2\cos\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

d) Déterminer les racines de P_n.

Dérivation

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes :

a) $P'^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$

b) $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 4 Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$. Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 5 Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Exercice 6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$.

Arithmétique des polynômes

Exercice 7 Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondant :

a) $X - 1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$ b) $X - 2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ c) $X + 1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$.

Exercice 8 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

a) Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.

b) En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 9 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 10 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux.

Montrer qu'il existe un unique couple $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$ et $\begin{cases} \deg U < \deg B \\ \deg V < \deg A \end{cases}$.

Exercice 11 Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A et B ne sont pas premiers entre eux.

(ii) $\exists (U,V) \in (\mathbb{K}[X] - \{0\})^2$ tel que $AU + BV = 0$, $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.

Exercice 12 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls.
Montrer : A et B sont premiers entre eux ssi $A+B$ et AB le sont.

Exercice 13 Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que A et B soient premiers entre eux.
Montrer : $\text{pgcd}(A, BC) = \text{pgcd}(A, C)$.

Division euclidienne

Exercice 14 En réalisant une division euclidienne, former une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 15 Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 16 Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 17 Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 18 Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$ et r le reste de la division euclidienne de k par n .
Montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$ est X^r .

Exercice 19 Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$.
a) De la division euclidienne de n par m, déduire celle de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
b) Etablir que $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\text{pgcd}(n,m)} - 1$

L’espace vectoriel des polynômes

Exercice 20 Soit $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$.
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 21 Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 22 Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 23 On pose $P_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.
a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $P_k(x) \in \mathbb{Z}$.
c) Trouver tous les polynômes P tels que $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 24 Soit E l’espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère F la partie de E constituée des applications de la forme :
$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x$ avec $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
b) Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Exercice 25 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] / A \mid P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer la dimension et un supplémentaire.

Endomorphisme opérant sur les polynômes

Exercice 26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est bien définie et que Δ est une application linéaire.
b) Déterminer le noyau de Δ.
c) En déduire que cette application est surjective.

Exercice 27 Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

a) Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$.

b) Déterminer $\ker \Delta$ et $\operatorname{Im} \Delta$.

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$.

d) En déduire que si $\deg P < n$ alors on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0$.

Exercice 28 Soit $\varphi : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = (n+1)P - XP'$.

a) Justifier que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.
b) Déterminer le noyau de φ.
c) En déduire que φ est surjective.

Exercice 29 a) Montrer que $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X) + P(X+1)$ est bijective.

On en déduit qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que : $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.

b) Justifier qu'on peut exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, \ldots, P_n$.

c) En calculant de deux façons $P_n(X+2) + P_n(X+1)$ déterminer une relation donnant P_n en fonction de $P_0, \ldots, P_{n-1}$.

Exercice 30 Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ et $r : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par :

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $r(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A.

Montrer que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $r^2 = r \circ r = r$.

Déterminer le noyau et l'image de cet endomorphisme.

Racines d'un polynôme

Exercice 31 a) Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

On suppose que P admet une racine rationnelle $r = p/q$ exprimée sous forme irréductible.

Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

b) Factoriser $P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$.
c) Le polynôme $P = X^3 + 3X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 32 Soit a, b, c trois éléments, non nuls et distincts, du corps $\mathbb{K}$.
Démontrer que le polynôme $P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$ peut s'écrire sous la forme $P = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 33 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$.
a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi
b) En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Exercice 34 Soit P un polynôme de degré $n+1 \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels, possédant $n+1$ racines réelles distinctes.
a) Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
b) En déduire que les racines du polynôme $P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 35 Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 36 Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par $\varphi(P) = \left(P(a_0), P'(a_0), \ldots, P(a_n), P'(a_n)\right)$. Montrer que φ est bijective.

Exercice 37 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré supérieur à 2.
Montrer que P' est scindé.

Racines et arithmétique

Exercice 38 Soit p et q deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux.
Montrer que : $(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X-1)(X^{pq} - 1)$.

Exercice 39 Justifier les divisibilités suivantes :
a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1$
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2).X^{n+1} + (n+2)X - n$

Exercice 40 Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur à 3 tel que :
$(X-1)^2 \mid P - 1$ et $(X+1)^2 \mid P + 1$. Déterminer celui-ci.

Exercice 41 Justifier : $\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3$, $1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.

Exercice 42 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1$.

Factorisation de polynômes

Exercice 43 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
a) $X^4 - 1$ b) $X^5 - 1$ c) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 44 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

a) X^4+X^2+1 b) X^4+X^2-6 c) X^8+X^4+1.

Exercice 45 Factoriser le polynôme $(X+i)^n-(X-i)^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 46 Former la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $P=X^{2n+1}-1$ (avec $n\in\mathbb{N}$).

Exercice 47 Soit $a\in\left]0,\pi\right[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n}-2\cos aX^n+1$.

Relations entre racines et coefficients

Exercice 48 Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4+12X-5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 49 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda\in\mathbb{C}$ pour que $X^3-7X+\lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Exercice 50 Résoudre $x^3-8x^2+23x-28=0$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 51 On considère l'équation : $x^3-(2+\sqrt{2})x^2+2(\sqrt{2}+1)x-2\sqrt{2}=0$ de racines x_1,x_2 et x_3.

a) Former une équation dont x_1^2,x_2^2 et x_3^2 seraient racines.

b) En déduire les valeurs de x_1,x_2,x_3.

Exercice 52 Déterminer les triplets : $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ tel que

a) $\begin{cases}x+y+z=1\\ 1/x+1/y+1/z=1\\ xyz=-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}x(y+z)=1\\ y(z+x)=1\\ z(x+y)=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+y+z=2\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^3+y^3+z^3=20\end{cases}$.

Exercice 53 Soit $x,y,z\in\mathbb{C}^*$ tel que $x+y+z=0$. Montrer que $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2$.

Exercice 54 Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $P_n=\sum_{k=0}^{n}X^k$.

a) Former la décomposition primaire de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

b) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 55 Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+z)^n=\cos(2na)+i\sin(2na)$.

En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 56 Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non nul et $n=\deg P$.

Montrer que les sommes des zéros de $P,P',\dots,P^{(n-1)}$ sont en progression arithmétique.

Familles de polynômes classiques

Exercice 57 Polynômes de Tchebychev (1821-1894) :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
a) Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3 .
b) Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
c) Etablir qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1,1]$.
d) Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
e) Observer que T_n possède exactement n racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 58 Polynômes d'interpolation de Lagrange (1736-1813) :
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ on pose $L_i = \dfrac{\prod\limits_{0 \le j \le n, j \ne i} (X - a_j)}{\prod\limits_{0 \le j \le n, j \ne i} (a_i - a_j)}$.
a) Observer que, pour tout $j \in \{0,1,...,n\}$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
(où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon).
b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(X)$.

Exercice 59 Polynômes de Legendre (1752-1833) :
Pour tout entier naturel n on pose $L_n = \dfrac{n!}{(2n)!}\left((X^2 - 1)^n\right)^{(n)}$.
a) Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n .
b) Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $\int_{-1}^{1} L_n(t) Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
c) En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 60 Polynômes de Fibonacci (~1180~1250) :
Soit $(P_n)_{n \ge 0}$ la suite de $\mathbb{K}[X]$ définie par : $P_0 = 0, P_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux.
c) Etablir pour que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$.
d) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\operatorname{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_m)$.
En déduire que $\operatorname{pgcd}(P_m, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n .
e) Conclure que $\operatorname{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\operatorname{pgcd}(m,n)}$.

Exercice 61 Polynômes de Laguerre (1834-1886) :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $L_n(x) = \mathrm{e}^x \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x} x^n)$. Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr