Notions communes

Exercice 1 Montrer que deux droites parallèles sont disjointes ou confondues.
Montrer que deux droites non parallèles se coupent en un point unique.

Exercice 2 Soit $A_1,\dots,A_n$ des points du plan.
Montrer que l'existence de $B_1,\dots,B_n$ tels que $A_i = m[B_i,B_{i+1}]$ (avec $B_{n+1}=B_1$) est équivalente à l'existence d'un point fixe pour une certaine composée de symétries centrales.
Discuter l'existence et l'unicité des points B_i et en donner une construction géométrique.

Mesures algébriques

Exercice 3 On appelle rapport harmonique de quatre points alignés distincts A,B,C,D le réel :
$[A,B,C,D]=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Montrer que $[A,B,C,D]+[D,B,C,A]=1$.

Exercice 4 Trois droites parallèles sont coupées par une droite $\mathcal{D}$ en A,B,C.
Montrer que le rapport $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ne dépend pas de $\mathcal{D}$.

Exercice 5 Théorème de Ménélaüs
Une droite Δ coupe les côtés (BC), (CA) et (AB) d'un triangle (ABC) en trois points A',B',C' distincts des sommets.
Etablir $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1$ en introduisant B'' projeté de B sur (AC) parallèlement à Δ.

Barycentre

Exercice 6 Soit n entier naturel non nul, considérons $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ et $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ deux familles de $\mathcal{C}$ points du plan dont on note respectivement O et $\mathcal{C}$ les isobarycentres. Montrer que $\mathcal{C}$.

Exercice 7 Soit A,B,C,A',B',C' six points du plan.
On note $\mathcal{C}$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\alpha\quad[2\pi]$ les isobarycentres respectifs des familles $\mathcal{C}$ et $I\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$.
a) Montrer que $\mathcal{C}$.
b) Montrer que $\mathcal{C}$ et M sont confondus si et seulement s'il existe un point $\mathcal{C}$ tel que les figures $(\vec{i},\overrightarrow{IM})=\alpha\quad[2\pi]$ et $(B'AC'M)$ soient des parallélogrammes.

Exercice 8 Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).
Montrer que si les points A,B,C ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

Produit scalaire et produit mixte

Exercice 9 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Développer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.
Comment le résultat obtenu permet-il de calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ à l'aide d'un compas et d'une règle graduée ?

Exercice 10 Soit A,B des points et $\vec{u},\vec{v}$ des vecteurs distincts.
Déterminer les points M tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{BM}\cdot\vec{v}$.

Exercice 11 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Développer $\text{Det}(\vec{u}-\vec{v},\vec{u}+\vec{v})$.
Donner une justification géométrique de ce résultat.

Exercice 12 Soit A,B,C trois points du plan. Etablir $\text{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\text{Det}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\text{Det}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

Exercice 13 Soit A,B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer les points M tels que :
a) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}+\vec{u}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ b) $\text{Det}(\vec{u},\overrightarrow{AM})+\text{Det}(\vec{u},\overrightarrow{BM})=0$.

Exercice 14 On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct.
Déterminer l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$.

Coordonnées cartésiennes dans le plan

Exercice 15 Former une équation cartésienne de la droite définie par le paramétrage : $\begin{cases}x=1-2t\\y=2+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 16 On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
Former l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M\begin{vmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{vmatrix}$.

Exercice 17 Soit $A\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ et $M\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$.
a) Calculer la distance du point M à la droite (AB).
b) Former l'équation de la perpendiculaire à (AB) passant par M.

Exercice 18 Exprimer les coordonnées du projeté orthogonal de $M\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ sur $\mathcal{D}:x-2y=1$.

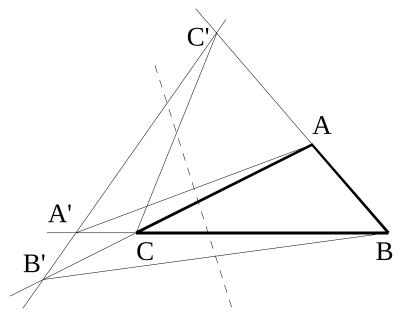
Exercice 19 On suppose le plan muni d'un repère orthonormé. Former les équations cartésiennes des bissectrices des droites : $\mathcal{D}_1:3x+4y-7=0$ et $\mathcal{D}_2:5x-12y+7=0$.

Exercice 20 $\mathcal{D}_m:8mx+(1+4m^2)y+4m=0$. Montrer que les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes.

Exercice 21 $(AB):x-2y+3=0$, $(AC):2x-y-3=0$ et $(BC):x+2y+1=0$.
Quelles sont les coordonnées des points A, B et C ?
Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre du triangle (ABC) ?

Exercice 22 On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct.
On se donne $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$. Déterminer les coordonnées du point C tel que (ABC) soit un triangle équilatéral direct.

Exercice 23 Soit A,B,C,A',B',C' six points deux à deux distincts du plan tels que les triplets $A'BC,AB'C,ABC',A'B'C'$ soient alignés tandis que A,B et C ne le sont pas.



En introduisant le repère cartésien $\mathcal{R}=(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, montrer que les milieux de $[A,A'],[B,B'],[C,C']$ sont alignés.

Le triangle

Exercice 24 Soit (ABC) un triangle non aplati du plan. On note $a=BC,b=CA,c=AB$, $\hat{A}=\widehat{CAB}\in]0,\pi[$

Etablir la formule d'Al-Kachi : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$.

Exercice 25 Soit (ABC) un triangle non aplati. On note $a=BC,b=CA,c=AB$, $\hat{A}=\widehat{CAB}\in]0,\pi[$, $\hat{B}=\widehat{ABC}$, $\hat{C}=\widehat{BCA}$. Montrer $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$ (loi des sinus) avec R rayon du cercle circonscrit.

Exercice 26 Soit (ABC) un triangle non aplati.

Montrer qu'il existe une homothétie transformant les sommets du triangle en les milieux des côtés opposés. En déduire que médianes, les médiatrices et les hauteurs sont concourantes et que les points de concours sont alignés.

Exercice 27 Etude géométrique élémentaire du triangle :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien.

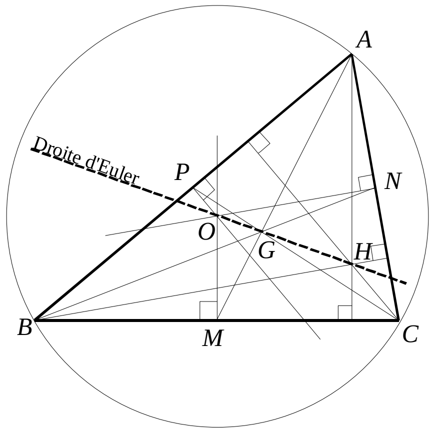
a) On note M,N,P les milieux respectifs de $[B,C]$, $[C,A]$, $[A,B]$ et G l'isobarycentre de ABC.

Déterminer une homothétie h qui transforme M,N,P en respectivement A,B,C.

En déduire que les médianes du triangle s'interceptent en G.

b) On note $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ les médiatrices des segments $[A,B],[B,C],[C,A]$. Montrer que ces trois droites s'interceptent en un point O et qu'il existe un cercle de centre O passant par A,B,C.

Le point O est appelé centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



c) On note $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3$ les hauteurs du triangles ABC issues de A,B,C. Montrer que $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3$ sont respectivement les images par l'homothétie h de O des droites $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$.

En déduire que $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3$ s'interceptent en un point H appelé orthocentre du triangle ABC.

Justifier que O,G et H sont alignés dans cet ordre.

d) On note D_1,D_2,D_3 les bissectrices intérieures du triangle ABC issues de A,B,C. Montrer que ces trois droites s'interceptent en un point I se situant à égale distance des droites $(AB),(BC),(CA)$. Montrer qu'il existe un cercle de centre I et tangent aux droites $(AB),(BC),(CA)$.

Le point I est appelé centre du cercle inscrit dans ABC.

Exercice 28 On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct.

Soit A,B,C trois points du plan d'affixes respectives a,b,c. Etablir :

a) (ABC) est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a+bj+cj^2=0$.

b) (ABC) est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

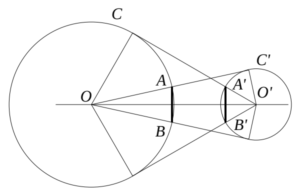
Exercice 29 Soit (ABC) un triangle équilatéral du plan et M un point à l'intérieur de celui-ci.
Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de (ABC) ne dépend pas de M .
(indice : introduire un repère adapté)

Exercice 30 Soit (ABC) un triangle non aplati. Sur chacun de ses côtés, on construit un triangle équilatéral extérieur au triangle (ABC) .
Montrer que les centres de ses triangles équilatéraux sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Cercles

Exercice 31 Montrer que l'intersection de 3 cercles de centres non alignés contient au plus un point.

Exercice 32 Soit $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ deux cercles du plan extérieur l'un à l'autre, O,O' leurs centres respectifs, et R,R' leurs rayons respectifs. Les tangentes menées de O à $\mathcal{C}'$ coupent $\mathcal{C}$ en deux points A,B et les tangentes menées de O' à $\mathcal{C}$ coupent $\mathcal{C}'$ en deux points A',B' . Démontrer $AB=A'B'$.



Exercice 33 Soit $\mathcal{C}$ un cercle et M un point en dehors de $\mathcal{C}$.
Une droite $\mathcal{D}$ passant par M coupe $\mathcal{C}$ en deux points A et B .
Montrer que le produit $\overline{MA}\,\overline{MB}$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{D}$.

Exercice 34 Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centre et de rayon distincts.
a) Montrer qu'il existe deux homothéties transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.
b) En déduire une méthode permettant de construire les quatre tangentes commune à deux cercles extérieurs l'un, l'autre.

Exercice 35 On se donne deux droites sécantes et un point hors de celle-ci.
Construire le cercle tangent aux droites passant par le point.

Exercice 36 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{P}$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$.

Etudier la ligne de niveau $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k MA_k^2=\lambda$ en fonction du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 37 a) Soit (ABC) un triangle. La bissectrice intérieure issue de A coupe (BC) en un point I .
Montrer que $\dfrac{BI}{CI}=\dfrac{BA}{CA}$.
b) Soit A,I,B trois points alignés dans cet ordre. Montrer que les points voyant le segment $[A,I]$ sous le même angle que le segment $[I,B]$ sont inclus dans un cercle ou une droite.

Exercice 38 Soit A , B deux points distincts et $\lambda\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

On note U et V les points d'intersection de (AB) avec le cercle défini par $\dfrac{MA}{MB}=\lambda$.

Montrer que $\dfrac{\overline{UA}}{\overline{UB}}=-\dfrac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$ (on dit que les points A,B,U,V forment une division harmonique).

Exercice 39 Soit A,B deux points distincts et $\lambda\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

Montrer que le cercle défini par $\dfrac{MA}{MB}=\lambda$ est orthogonal à tout cercle passant par A et B .

Théorème de l'angle au centre

Exercice 40 On munit le plan d'un repère orthonormé direct.
Soit A,B,C,D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives : a,b,c,d.

a) Montrer que : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=0\quad[\pi]$ si et seulement si A,B,C,D sont alignés.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\neq 0\quad[\pi]$ si et seulement si A,B,C,D sont cocycliques.

c) En déduire que A,B,C,D sont alignés ou cocycliques si et seulement si : $\dfrac{c-a}{c-b}\dfrac{d-b}{d-a}\in\mathbb{R}$.

Exercice 41 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A,B deux points distincts de ce cercle.
Soit T un point de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.
Montrer que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})\quad[2\pi]$.

Exercice 42 Soit (ABC) un triangle non aplati.
Montrer que les symétriques de son orthocentre H par rapport à ses côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle.

Les coordonnées polaires

Exercice 43 On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
a) Former l'équation polaire du cercle $\mathcal{C}$.
b) Former l'équation polaire de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M de $\mathcal{C}$ déterminé par $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\alpha\quad[2\pi]$.

Exercice 44 On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ et de rayon 1.
a) Former l'équation polaire du cercle $\mathcal{C}$.
b) Former l'équation polaire de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M de $\mathcal{C}$ déterminé par $(\vec{i},\overrightarrow{IM})=\alpha\quad[2\pi]$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr