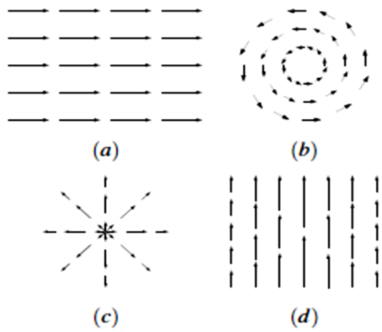
TD Champ magnétostatique

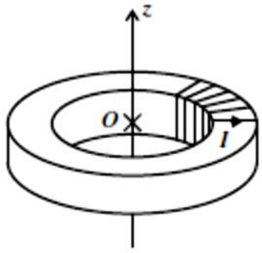
Exercice 1

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan z = cste, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme : $\vec{a}(x,y) = a_x(x,y)\vec{u}_x + a_y(x,y)\vec{u}_y$.
Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ magnétostatique, quand c'est possible, dire si des courants sont présents dans la région représentée.



Exercice 2 : Bobine torique

On considère un tore d'axe (Oz) dont la section par un plan méridien est un carré. On réalise une bobine en enroulant un fil sur le tore en N spires très serrées et régulièrement réparties. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace lorsqu'on fait passer un courant d'intensité I dans cette bobine.



Exercice 3

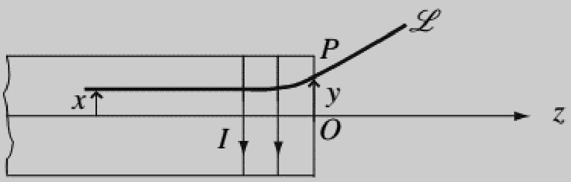
On considère une spire circulaire de rayon a, d'axe (Oz), parcourue par un courant I.
1. Justifier qu'en un point de l'axe (Oz), le champ $\vec{B}$ est de la forme :$\vec{B} = B_0(z)\vec{u}_z$. L'expression de la fonction $B_0(z)$ est inutile pour la suite de l'exercice.
2. On se place près de l'axe. Montrer que, au deuxième ordre en $\frac{r}{a}$:

$$\vec{B}(M) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}(z)\vec{u}_r + (B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2B_0}{dz^2}(z))\vec{u}_z$$

Exercice : 4

On considère un solénoïde infiniment fin, de rayon a, d'axe (Oz), comportant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant d'intensité I. Il est semi-infini, il s'étend le long du demi-axe $z < 0$. On appelle O le centre de la face terminale.

1. Déterminer l'expression de la composante suivant (Oz) du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le solénoïde en un point M de sa face terminale.
2. Soit $\mathscr{L}$ une ligne de champ magnétique. Elle coupe la face terminale en un point P situé à la distance y de O. À l'intérieur du solénoïde, elle tend à se confondre avec une parallèle à l'axe Oz. Pourquoi ? Soit x la distance à l'axe de cette parallèle. Déterminer la relation entre x et y.



Exercice 5 : Production de champs magnétiques intenses et homogènes

On utilise un solénoïde d'axe (Oz), parcouru par un courant continu, pour produire un champ magnétique. On choisit un système de coordonnées cylindro-polaires d'axe (Oz), dont on note (r,θ,z) les coordonnées et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ le repère orthonormé direct.
1. On suppose que tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Quelles conditions le vecteur densité de courant $\vec{j} = (j_r,\ j_\theta,\ j_z)$ doit-il vérifier pour cela ?
2. Quelles conséquences en résulte-t-il pour le champ magnétique $\vec{B} = (B_r,\ B_\theta,\ B_z)$?
3. On suppose que j_θ est uniforme à l'intérieur d'un cylindre de révolution creux de rayon extérieur R_2, de rayon intérieur $R_1 < R_2$, et de longueur L très grande devant R_2. Donner l'expression de la valeur B_0 du champ magnétique au centre.

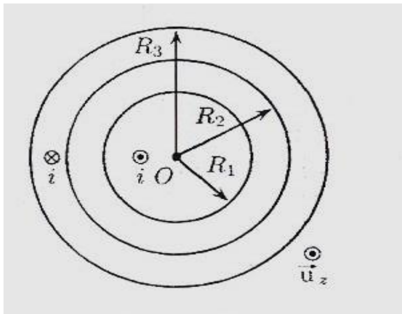
4. La conductivité ohmique du matériau, notée γ , est supposée uniforme. Donner l'expression de la puissance dissipée dans le solénoïde par effet Joule. On admet que la puissance volumique dissipée dans le solénoïde par effet Joule est égale : $\mathcal{P}_V = \frac{J_\theta^2}{\gamma}$

5. B_0, L et R_2 étant fixés, comment faut-il choisir R_1 pour minimiser la puissance dissipée ?
6. On considère un solénoïde de cuivre de longueur L = 1,0 m produisant un champ B_0 = 1,3 T.
Calculer une borne inférieure de la puissance dissipée. Comparer à la puissance d'un radiateur électrique ordinaire. On donne : $\gamma = 6\times10^7$ S.m^{-1}.
7. B_0 étant fixé, comment choisir R_2 pour minimiser l'élévation de température du solénoïde due à l'effet Joule ? On demande un raisonnement qualitatif.

Exercice 6 : Champ magnétique dans un câble coaxial

On considère un câble coaxial (câble de sortie d'un générateur base fréquence) constitué d'un cylindre métallique central plein, de rayon R_1, et d'une couche cylindrique périphérique, de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3.

Entre R_1 et R_2 se trouve une matière isolante assimilable à du vide du point de vue électromagnétique. Ce câble est rectiligne d'axe $(O,\overrightarrow{u_z})$ et considéré comme infiniment long. Sa partie conductrice centrale transporte une intensité i constante, dirigé selon $+\overrightarrow{u_z}$ et sa partie périphérique transporte une intensité i dans le sens - $\overrightarrow{u_z}$. Dans chacune des deux parties conductrices, la densité de courant est supposée uniforme.



Soit M un point où on calcule le champ magnétique crée : on note r la distance entre M et l'axe de l'ensemble.

1. Montrer que le champ magnétique crée par ce câble en un point M quelconque se met sous la forme $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur à préciser.

2. Déterminer l'expression de B(r) pour $r \in [0, +\infty]$. Tracer B(r).

Dans la suite, on considère le cas où les deux intensités sont surfaciques, cantonnées dans de très faibles épaisseurs au voisinage de de R_1 et R_2.

3. Que devient le graphe de B(r) ? Commenter les discontinuités qui apparaissent.

4. Exprimer l'énergie magnétique U_m contenu dans une portion ℓ du câble.

On donne la densité volumique d'énergie magnétique du champ :$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

5. En déduire le coefficient d'auto-inductance (inductance propre) L de cette portion, puis l'inductance linéique propre du câble.

6. Calculer numériquement L pour R_1 = 1,0 cm, R_2 = 2,0 cm et h = 1,0 m. Conclure.

Exercice 7 : Interaction entre deux moments magnétiques

On donne le champ magnétique créé en un point P par un dipôle de moment $\mathscr{M}$ placé en A :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\overrightarrow{\mathscr{M}}\cdot\vec{u}_{AP})\vec{u}_{AP} - \overrightarrow{\mathscr{M}}}{AP^3} \quad \text{où} \quad \vec{u}_{AP} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}.$$

Deux dipôles magnétiques de moments $\overrightarrow{\mathscr{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_2$ sont respectivement en O et M.

1. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de $\overrightarrow{\mathscr{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_2$, $\overrightarrow{OM}$ et OM.

2. On suppose que $\overrightarrow{\mathscr{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_2$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OM}$. Exprimer la force entre les dipôles. À quelle condition est-elle attractive ?

3. Même question si $\overrightarrow{\mathscr{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_2$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires $\overrightarrow{OM}$.

4. Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique.

À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique $k_B T$? Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

Exercice 8 : Moment d'un spin nucléaire dans un champ magnétique

1. Un proton de vitesse nulle possède un moment magnétique intrinsèque $\vec{\mu}$, dont la norme μ est constante, mais la direction peut varier. L'imagerie par résonance magnétique utilise l'interaction des protons des atomes d'hydrogène de l'eau avec un champ magnétique.

Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, notée U, d'un proton (assimilé à un dipôle magnétique) avec un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

Application numérique : on donne $B_0 = 1{,}5$ T et le moment magnétique du proton $\mu = 1{,}4 \times 10^{-26}$ A.m^2. Calculer les valeurs maximale et minimale de U.

2. Rappeler l'expression du couple exercé par le champ magnétique $\vec{B}_0$ sur le dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mu}$.

3. Un proton de vitesse nulle est animé d'un mouvement de rotation propre. Ce mouvement lui confère un moment cinétique intrinsèque, nommé spin et noté $\vec{S}$, de norme constante $S = \hbar/2$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. On note γ le rapport gyromagnétique correspondant.

Montrer que le moment magnétique $\vec{\mu}$ est animé d'un mouvement de précession de vitesse angulaire $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$, et donner l'expression de ω_0 dite pulsation de Larmor, en fonction de B_0 et γ. Calculer ω_0 pour $B_0 = 1{,}5$ T.

4. L'imagerie par résonance magnétique utilise d'une part un champ uniforme et constant $\vec{B}_0$, qu'on supposera dirigé suivant l'axe Oz, et d'autre part un champ dépendant du temps $\vec{B}_1(t)$, avec $\|\vec{B}_1\| \ll \|\vec{B}_0\|$.

a. On place dans le champ un échantillon comportant N protons. On assimile chacun de ces protons à un dipôle magnétique soumis au couple exercé par le champ magnétique total $\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$. Écrire l'équation du mouvement d'un proton et définir le nouveau vecteur rotation $\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)$ en fonction de $\vec{B}_0$ et $\vec{B}_1(t)$.

b. Le champ auxiliaire $\vec{B}_1(t)$ est un champ tournant autour de $\vec{B}_0$ et perpendiculaire à celui-ci. Dans un référentiel galiléen de repère cartésien $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ses coordonnées sont $(B_1 \cos(\omega t), B_1 \sin(\omega t), 0)$. On définit le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \vec{u}_X(t), \vec{u}_Y(t), \vec{u}_Z(t))$ tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz et coïncidant avec $\mathscr{R}$ à $t = 0$, de telle sorte que $\vec{B}_1(t) = B_1\ \vec{u}_X(t)$.

Écrire l'équation du mouvement de M dans $\mathscr{R}_0$.

c. Le champ $\vec{B}_1$ est appliqué au temps $t = 0$, $\vec{\mu}$ étant alors parallèle à Oz. À quelle condition pourra-t-on observer un retournement de $\vec{\mu}$?