

Optique Géométrique

CHAPITRE 6

Lentilles minces

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Présentation des lentilles

Les différentes sortes de lentilles (1)

Une lentille est un composant optique constitué par un milieu transparent, homogène et isotrope, délimité par **deux dioptries sphériques** ou un **dioptre sphérique et un dioptre plan**.

Les lentilles sont des systèmes centrés. On distingue deux types de lentilles :

- **les lentilles convergentes** qui sont les lentilles à bords minces,
- **les lentilles divergentes** qui sont les lentilles à bords épais.

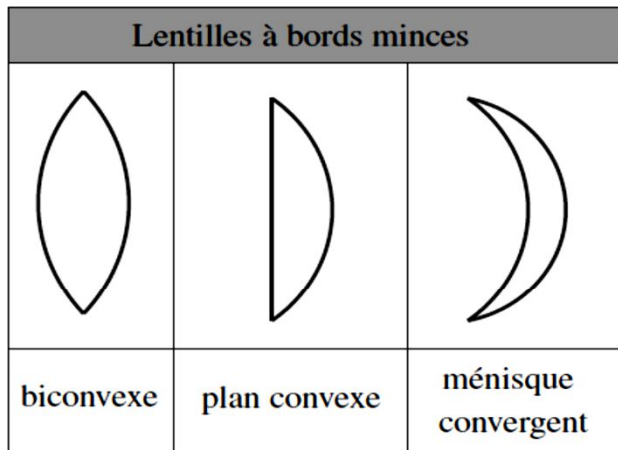


Figure 5.18 – Différentes lentilles à bords minces, convergentes.

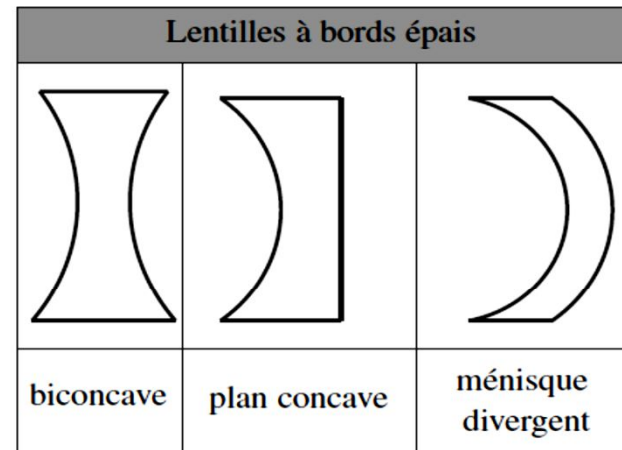


Figure 5.19 – Différentes lentilles à bords épais, divergentes.

Les différentes sortes de lentilles (2)

Dans les conditions normales d'utilisation de la lentille, il existe un point O situé sur l'axe optique, tel que pour tout rayon passant par O à l'intérieur de la lentille, le rayon sortant de la lentille est parallèle au rayon entrant. **Ce point est appelé centre optique de la lentille.**

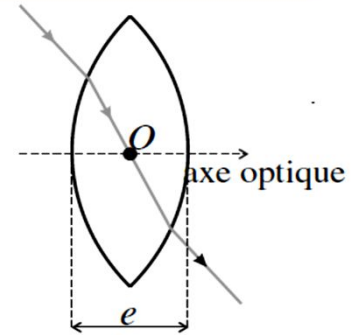


Figure 5.20 – Centre optique d'une lentille.

Une lentille mince est une lentille dont l'épaisseur e sur l'axe est petite comparée aux rayons de courbures de ses faces. **Dans ce cas, on néglige complètement cette épaisseur et on présente les lentilles par un trait sur lequel on fait seulement figurer le centre optique O .** Les symboles des lentilles convergente et divergente sont donnés sur la figure ci-contre:

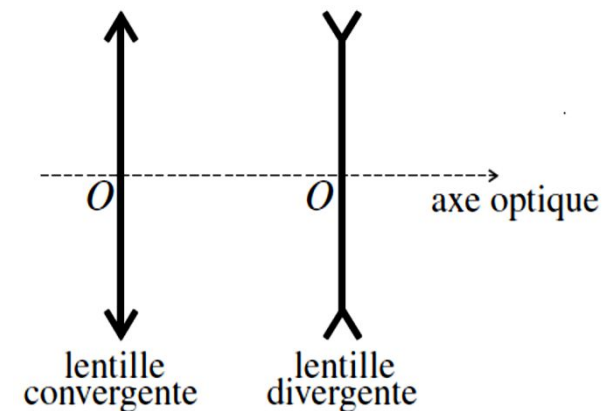


Figure 5.21 – Symbole des lentilles minces.

Lentilles convergentes (1)

Pour une lentille convergente, les foyers principaux objet et image sont symétriques par rapport au centre optique. Le foyer objet est situé avant le centre optique et le foyer image après O dans le sens de propagation de la lumière.

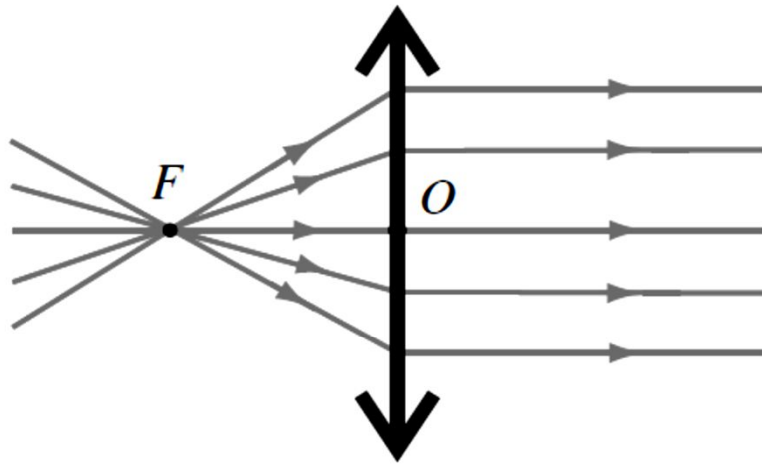


Figure 5.22 – Foyer principal objet d'une lentille convergente.

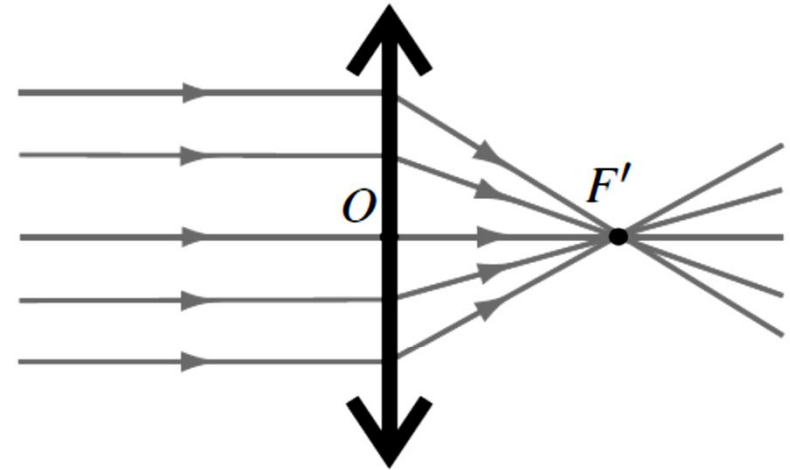


Figure 5.23 – Foyer principal image d'une lentille convergente.

Lentilles convergentes (2)

On définit les distances focales :

- la distance focale objet $f = \overline{OF}$ qui est **négative** pour une lentille convergente,
- la distance focale image $f' = \overline{OF'}$ qui est **positive** pour une lentille convergente.

Les distances focales f et f' sont l'opposée l'une de l'autre :

$$f = -f'$$

On définit la vergence V d'une lentille par :

$$V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

La vergence d'une lentille convergente est positive. Elle s'exprime en dioptrie (δ) qui correspond à des m^{-1} .

Lentilles divergentes (1)

Pour une lentille divergente les foyers principaux objet et image sont symétriques par rapport au centre optique. Ce sont des points virtuels : le foyer objet est situé après le centre optique et le foyer image avant O dans le sens de propagation de la lumière.

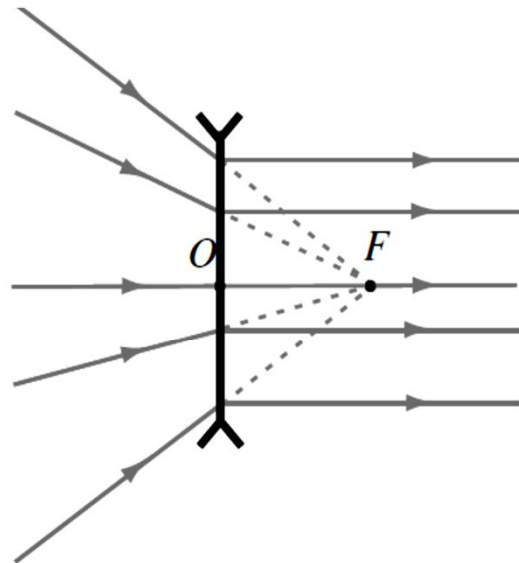


Figure 5.24 – Foyer objet d'une lentille divergente.

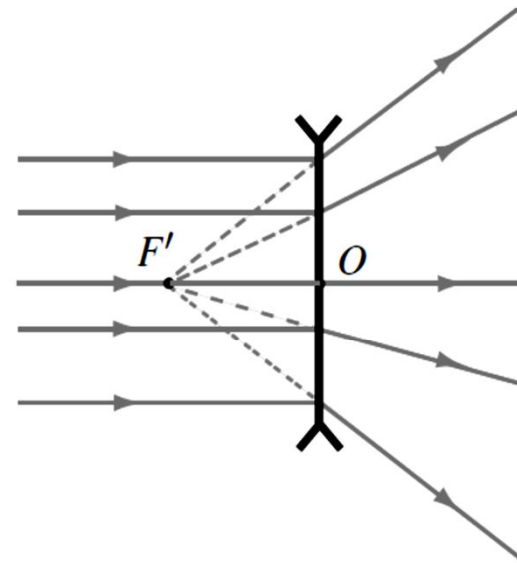


Figure 5.25 – Foyer image d'une lentille divergente.

Lentilles divergentes (2)

On définit les distances focales :

- la distance focale objet $f = \overline{OF}$ qui est **positive** pour une lentille divergente,
- la distance focale image $f' = \overline{OF'}$ qui est **négative** pour une lentille divergente.

Les distances focales f et f' sont l'opposée l'une de l'autre :

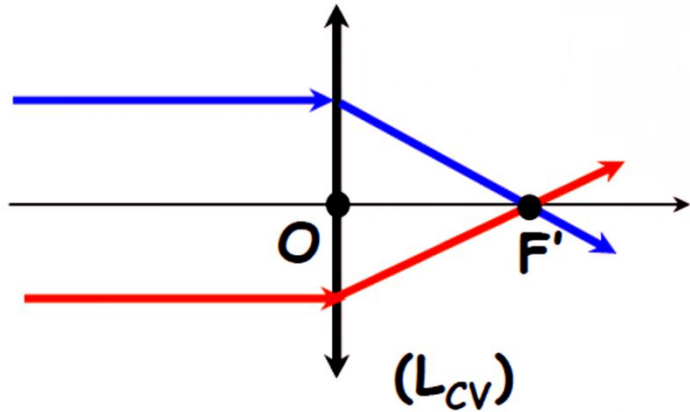
$$f = -f'$$

On définit la vergence V d'une lentille par :

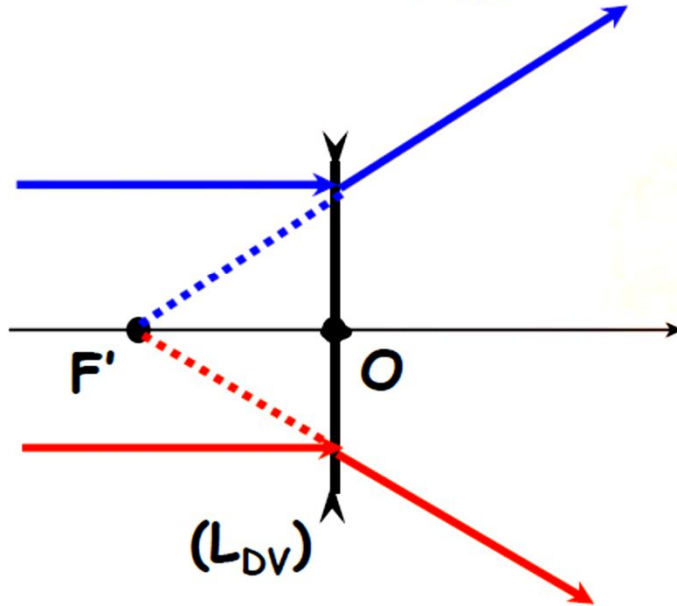
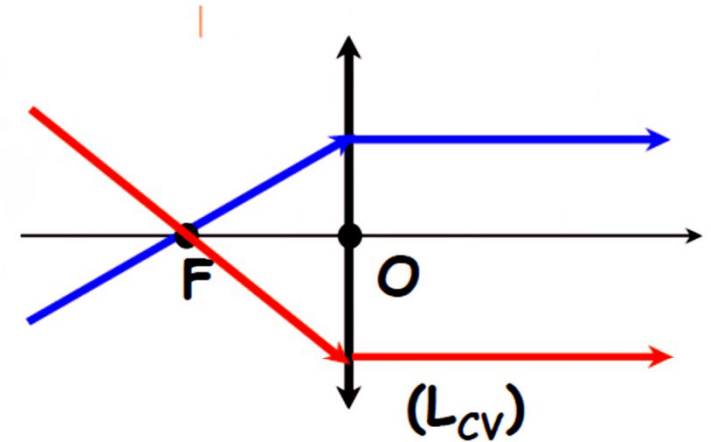
$$V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

La vergence d'une lentille divergente est négative. Elle s'exprime en dioptrie (δ) qui correspond à des m^{-1} .

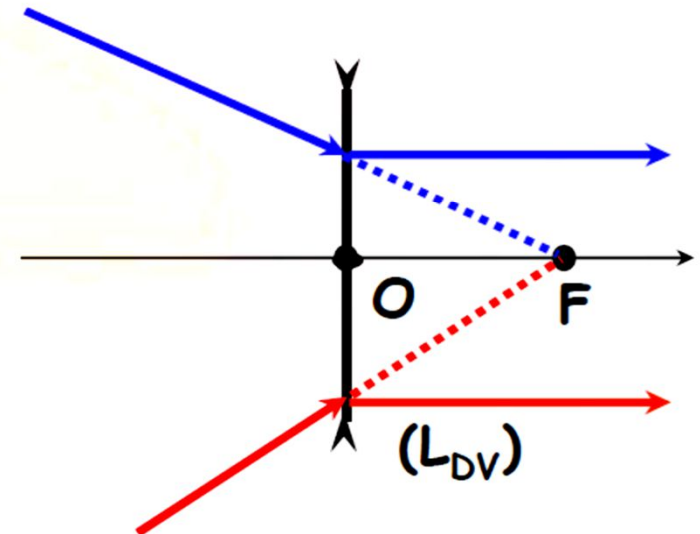
Récapitulatif sur les foyers



F et F' sont réels
 $f' > 0$



F et F' sont virtuels
 $f' < 0$



Plans focaux objet et image des lentilles minces

Les plans perpendiculaires à l'axe optique de la lentille et passant par les foyers sont appelés plans focaux. Une lentille a donc un plan focal objet et un plan focal image.

Propriétés (1)

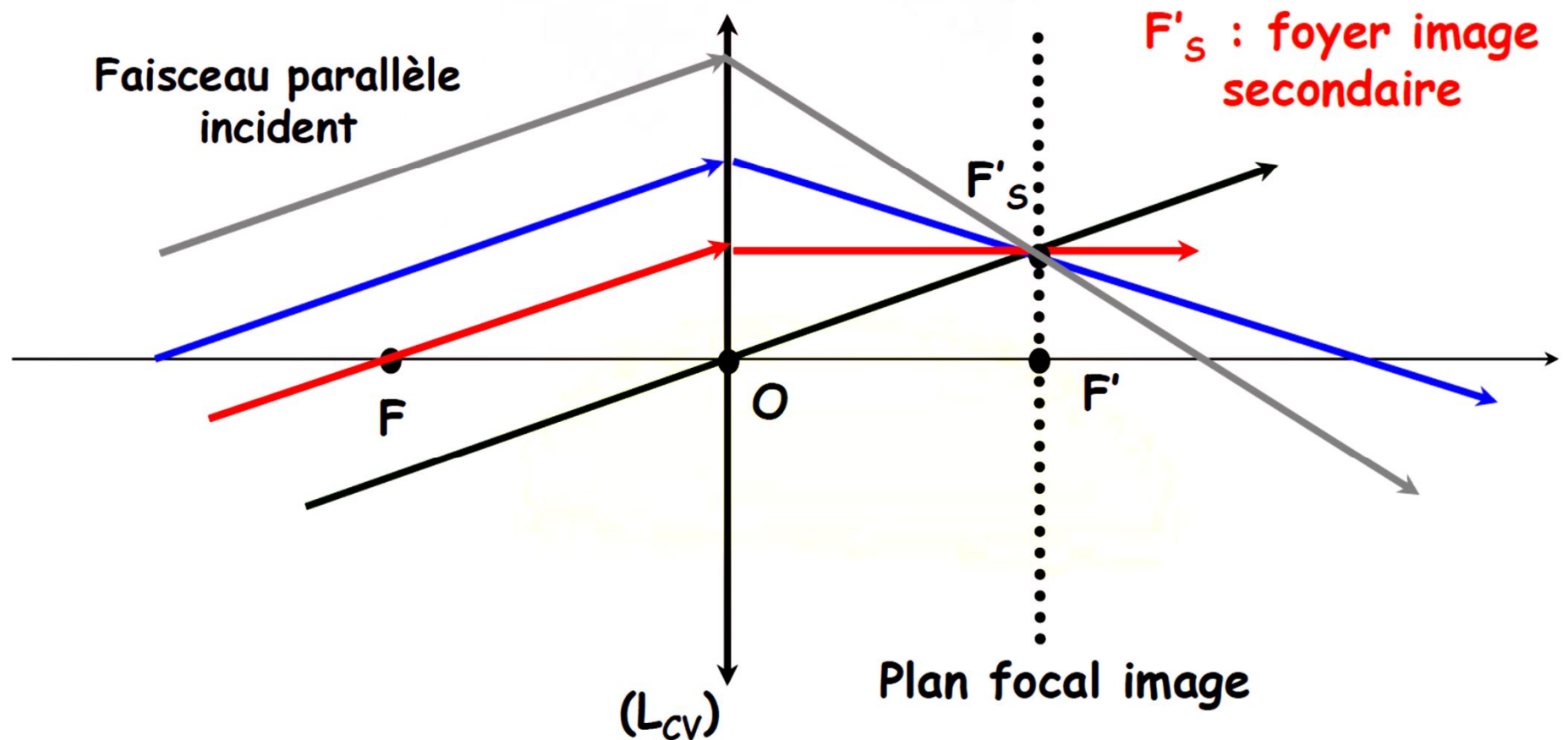
Un point situé dans un plan focal (objet ou image) est appelé **foyer secondaire (objet ou image)**.

Les propriétés sont les suivantes :

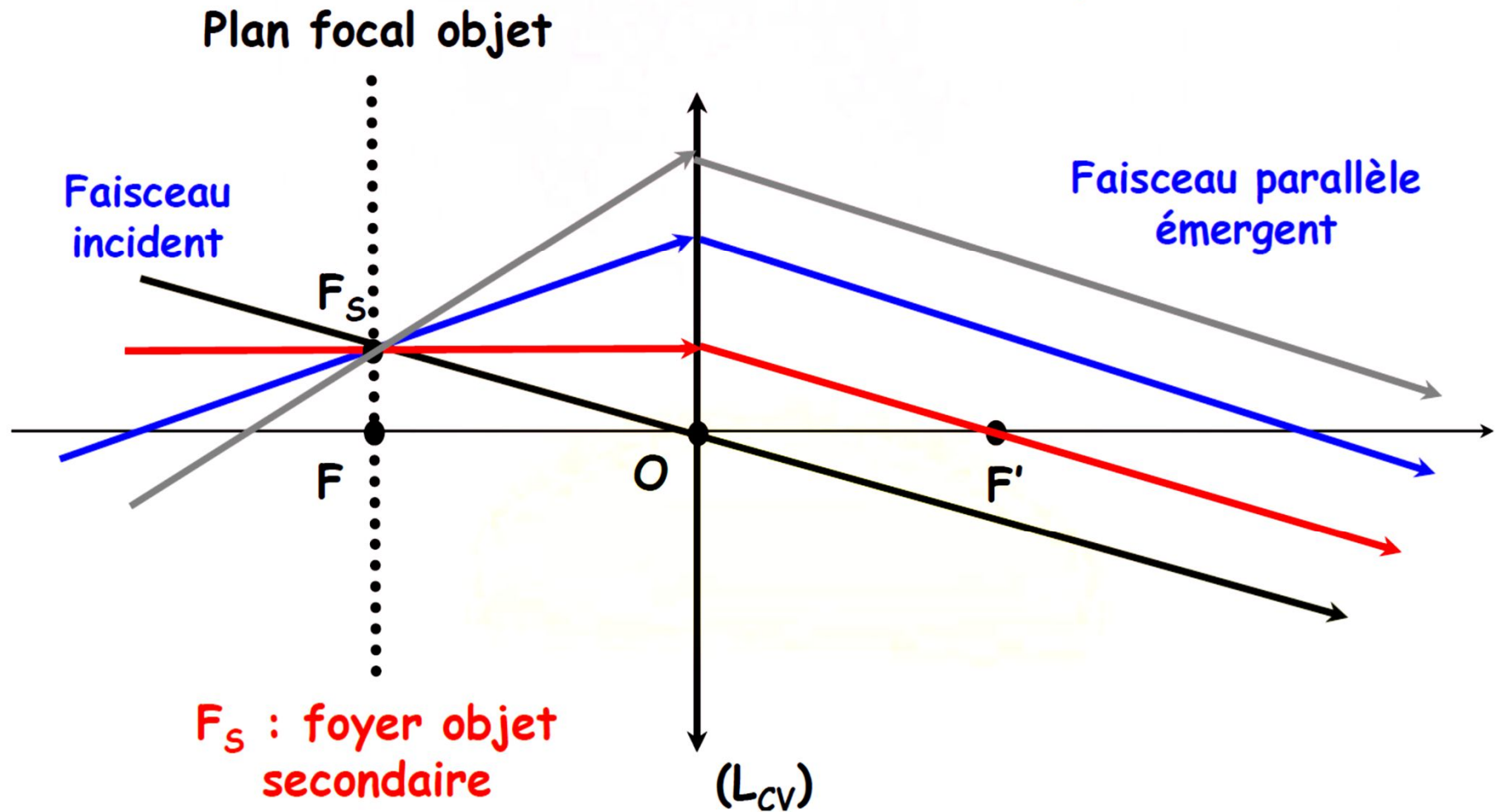
- un faisceau issu d'un foyer secondaire objet F_S émerge parallèlement à l'axe secondaire $F_S O$. Soit encore : **tout point F_S du plan focal objet a son image rejetée à l'infini dans la direction $F_S O$.**
- un faisceau parallèle, incliné par rapport à l'axe optique, émerge en passant par le foyer secondaire image F'_S , intersection du plan focal image et de l'axe secondaire $F'_S O$ parallèle au faisceau incident. Soit encore : **tout point F'_S du plan focal image est l'image d'un point situé à l'infini dans la direction $F'_S O$.**

Propriétés (2)

Propriétés des plans focaux (objet et image, lentille convergente) :

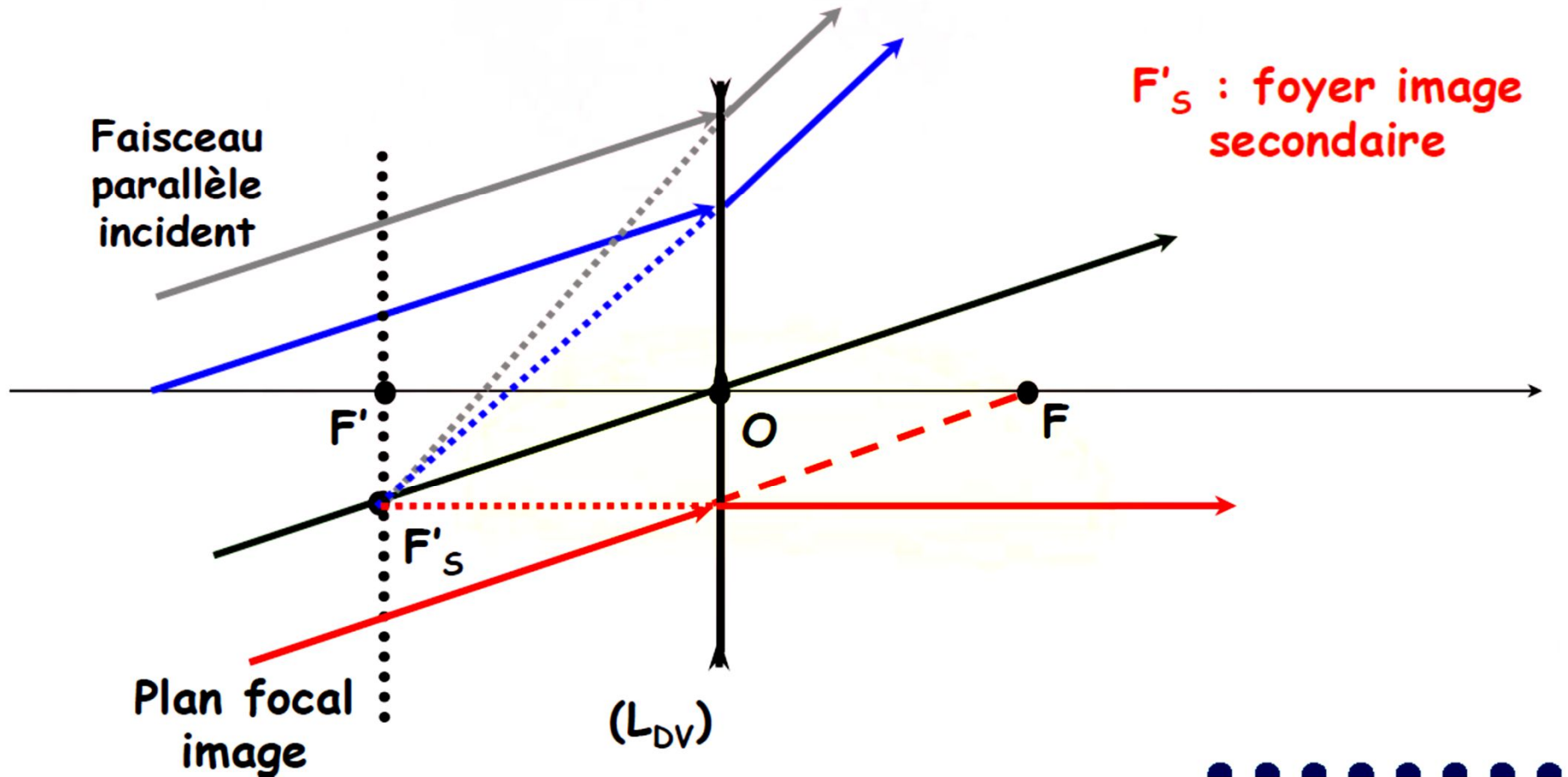


Propriétés (3)

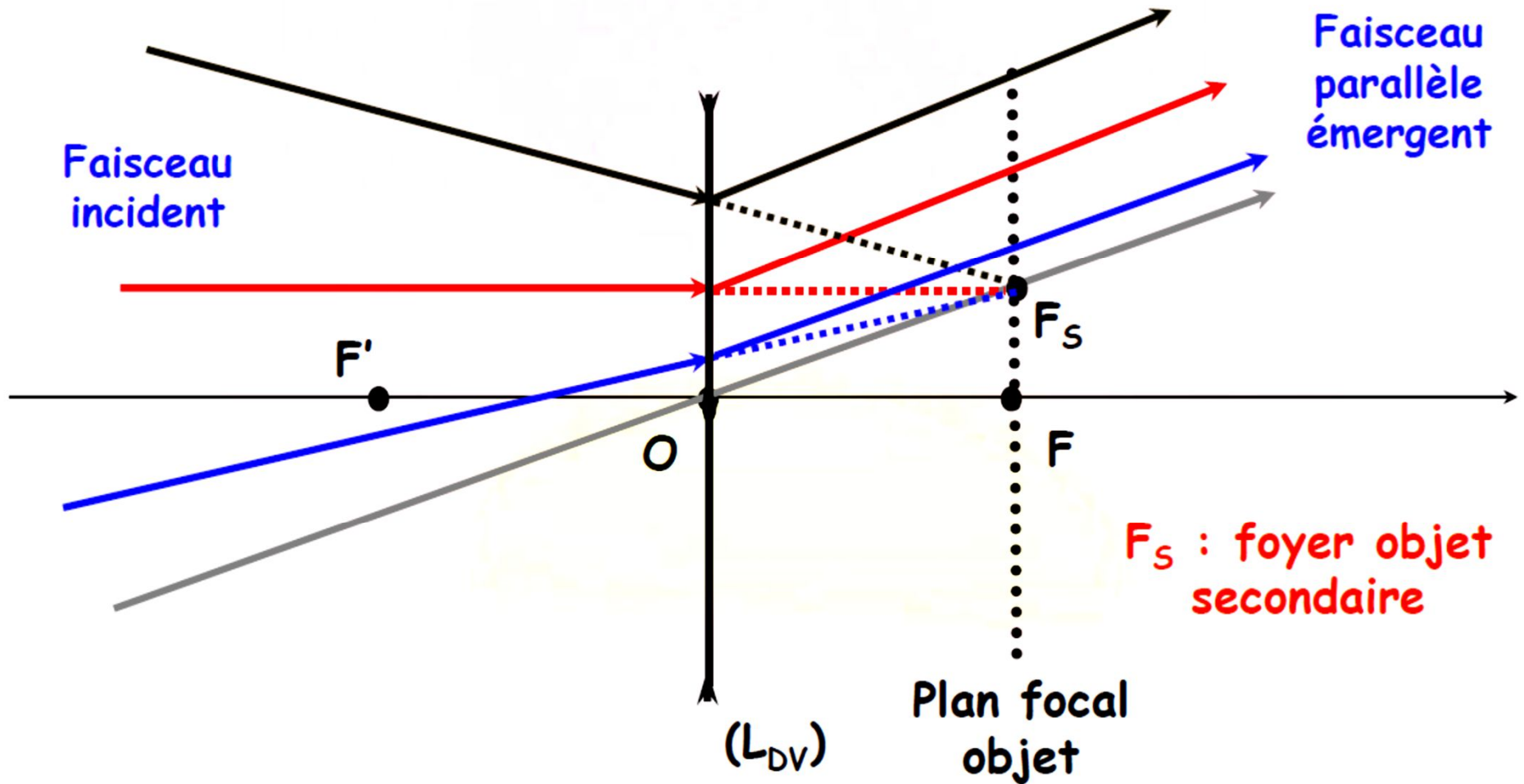


Propriétés (4)

Propriétés des plans focaux (objet et image, lentille divergente) :



Propriétés (5)



Constructions géométriques

Pour trouver l'image d'un objet par une lentille on peut procéder graphiquement, en réalisant une construction géométrique. Il est important de maîtriser cette méthode qui suit.

Les règles de construction

On connaît le rayon émergent d'une lentille mince pour trois types de rayons incidents remarquables :

1. un rayon incident passant par le centre optique O n'est pas dévié ;
2. un rayon incident parallèle à l'axe donne un rayon émergent qui passe (réellement ou virtuellement) par le foyer image F' ;
3. un rayon incident passant (réellement ou virtuellement) par le foyer objet F donne un rayon émergent parallèle à l'axe optique.

De plus d'après la définition des foyers secondaires :

4. deux rayons incidents parallèles donnent des rayons émergents qui se croisent (réellement ou virtuellement) dans le plan focal image ;
5. deux rayons incidents qui se croisent (réellement ou virtuellement) dans le plan focal objet donnent des rayons émergents parallèles entre eux.

Méthode de construction

Les trois premières règles permettent de déterminer graphiquement l'image de n'importe quel point objet B hors de l'axe optique. Il suffit de tracer les trois rayons remarquables passant par (réellement ou virtuellement) par B . Les trois rayons émergents passent tous (réellement ou virtuellement) par l'image (réelle ou virtuelle) B' de B .

Dans le cas d'un point objet A situé sur l'axe optique, les trois rayons remarquables sont confondus avec l'axe optique. Pour déterminer l'image A' de A on prend un point B dans le plan de front passant par A et on construit son image B' . A' est l'intersection du plan de front passant par B' avec l'axe optique.

Dans ces constructions les parties virtuelles des rayons sont représentées en pointillés.

A. Application à une lentille convergente

L'objet est réel et situé avant F

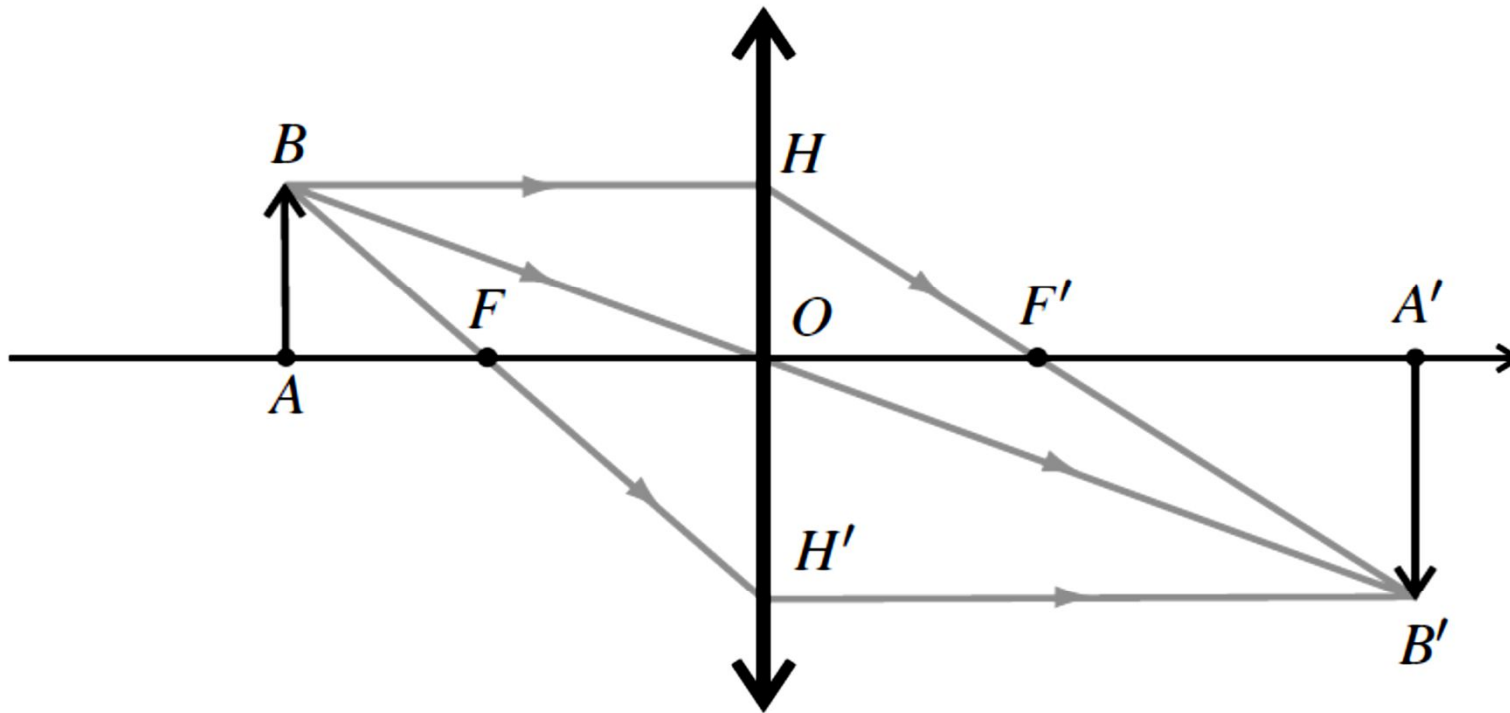


Figure 5.26 – Construction de l'image d'un objet réel situé avant le foyer objet par une lentille convergente. Les trois rayons émergents se croisent en B' , l'image est réelle.

Résultat : un objet réel avant F donne une image réelle, renversée, située après F'

L'objet est réel et situé entre F et O

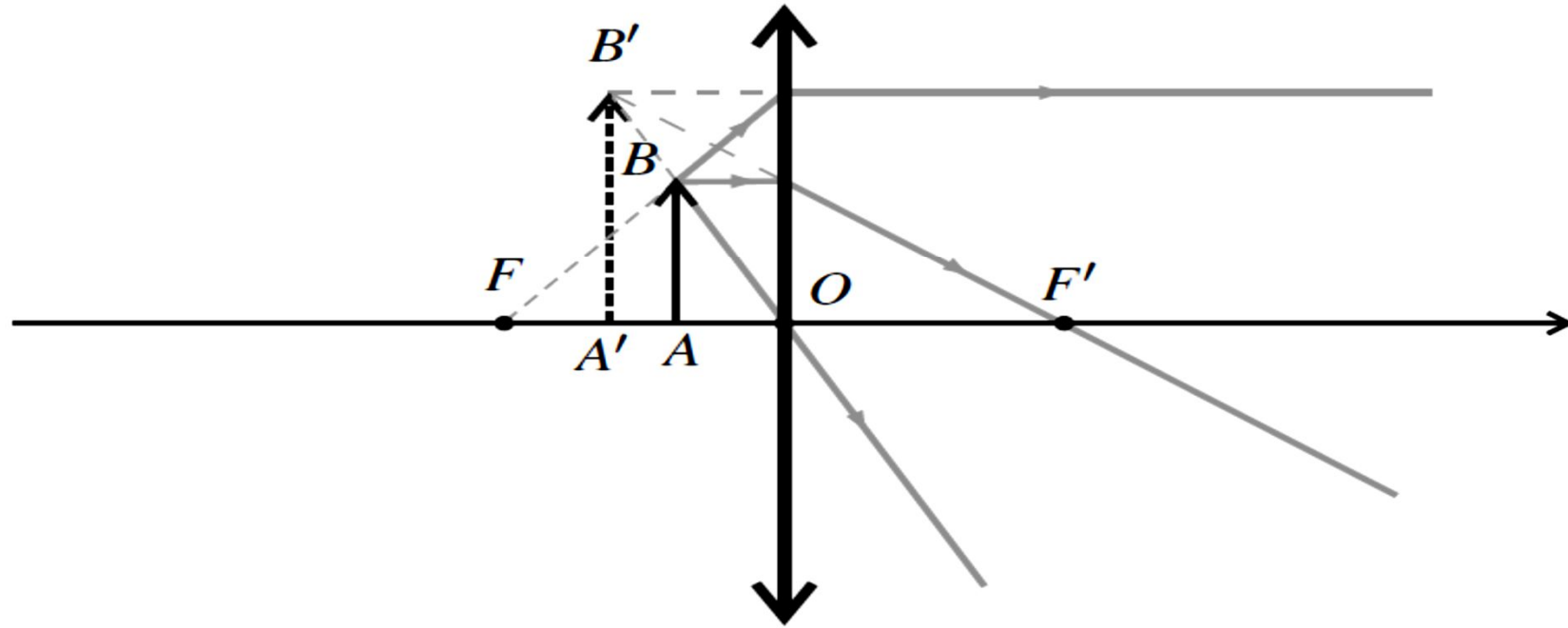


Figure 5.27 – Construction de l'image d'un objet réel situé entre le foyer objet et le centre par une lentille convergente. Les prolongements des trois rayons émergents se croisent en B' , l'image est virtuelle.

Résultat : un objet réel entre F et O donne une image virtuelle, droite, plus grande, c'est le cas de la loupe.

L'objet est virtuel donc situé après O

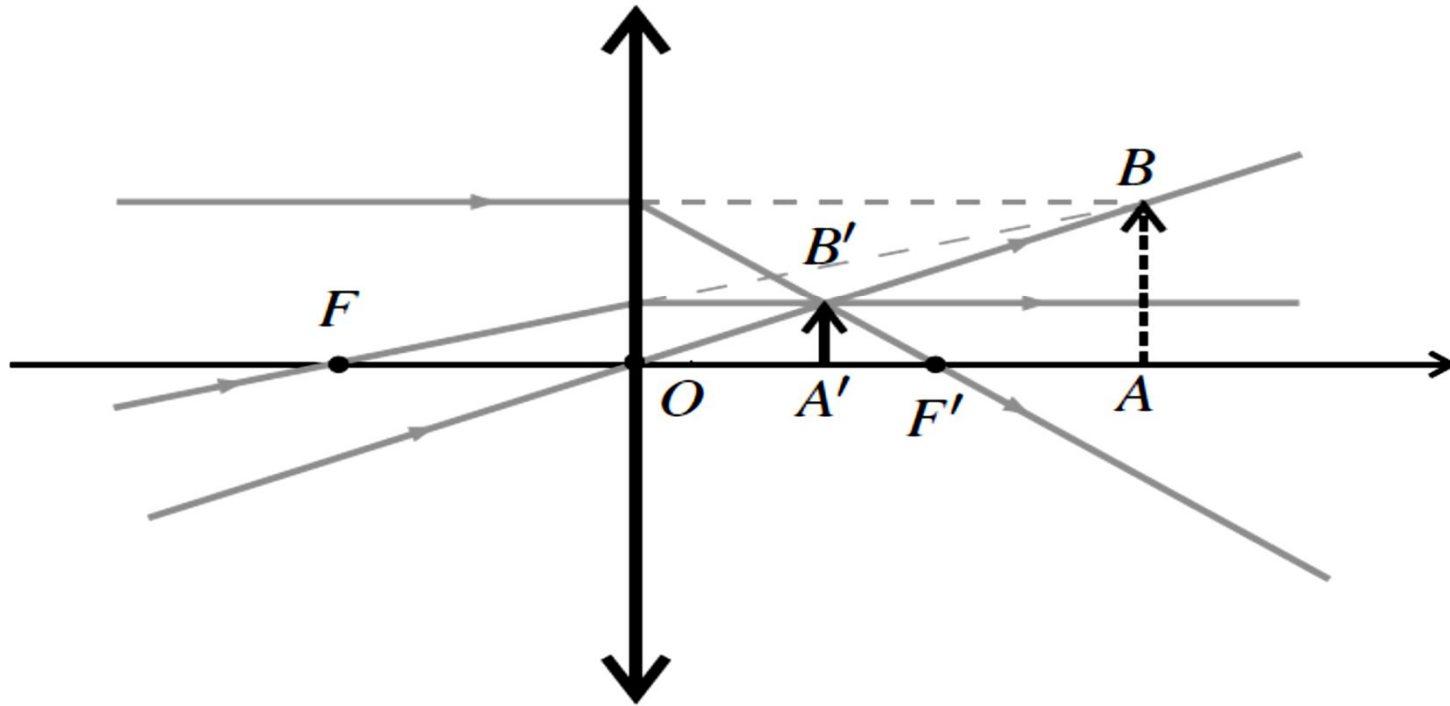


Figure 5.28 – Construction de l'image d'un objet virtuel situé après le centre par une lentille convergente. Les trois rayons émergents se croisent en B' , l'image est réelle.

Résultat : un objet virtuel après O donne une image réelle, plus petite, droite.

L'objet est situé à l'infini (1)

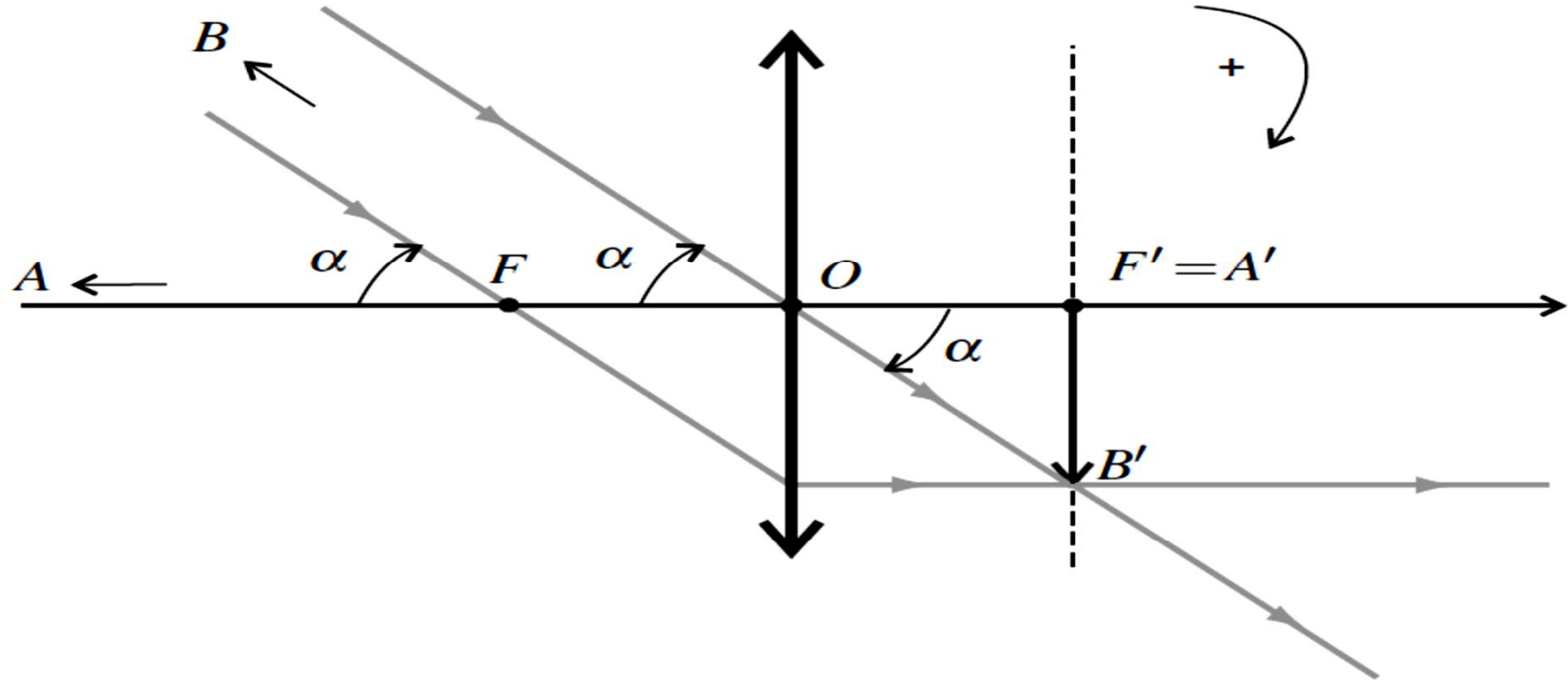


Figure 5.29 – Construction de l'image d'un objet à l'infini. Les deux rayons émergents se croisent en B' , l'image est réelle.

Résultat : un objet à l'infini a une image réelle, dans le plan focal image.

L'objet est situé à l'infini (2)

Dans le cas où l'objet est à l'infini **on ne peut tracer que deux rayons remarquables venant de B** . Ils sont parallèles entre eux et inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique. **B' appartient au plan focal image ce qui est normal puisque B est à l'infini.** Dans le triangle $OF'B'$ on peut écrire :

$$\tan \alpha = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \overline{A'B'} = -f' \tan \alpha \approx -f' \alpha$$

puisque dans les conditions de Gauss, l'angle α est très petit.

B. Application à une lentille divergente

L'objet est réel et situé avant O

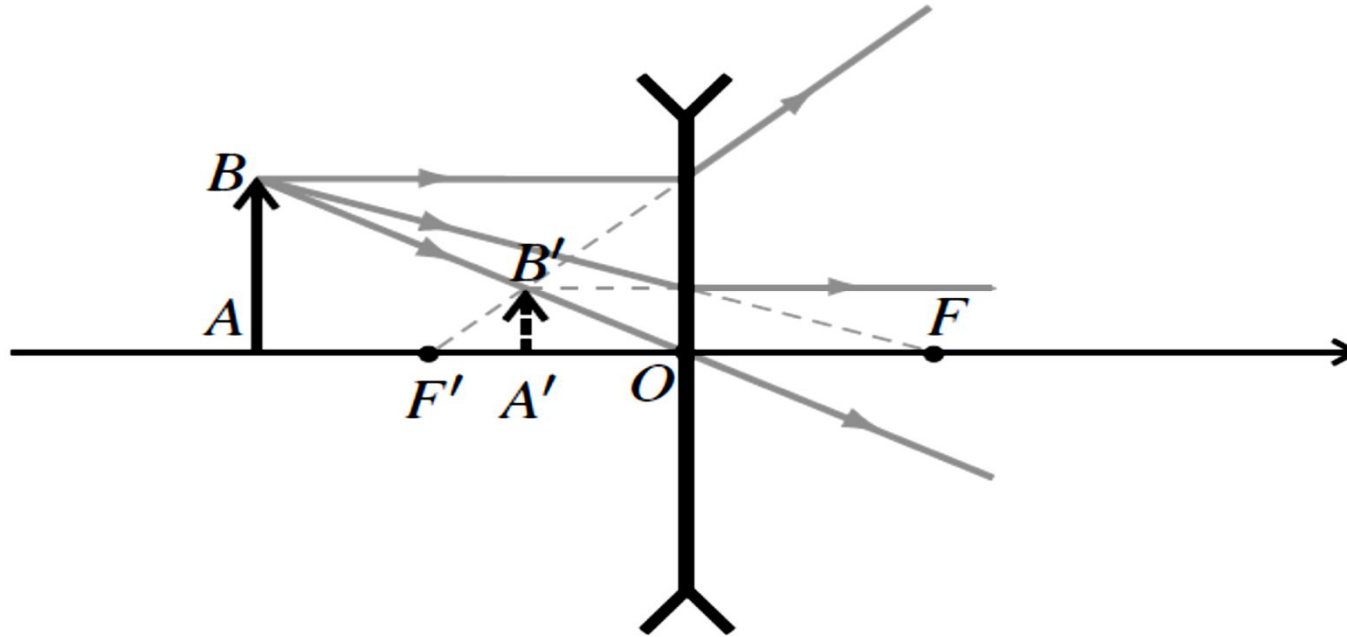


Figure 5.30 – Construction de l'image d'un objet réel situé avant le centre par une lentille divergente. Les prolongements des trois rayons émergents se croisent en B' , l'image est virtuelle.

Résultat : un objet réel avant O donne une image virtuelle, droite, plus petite.

L'objet est virtuel et situé entre O et F

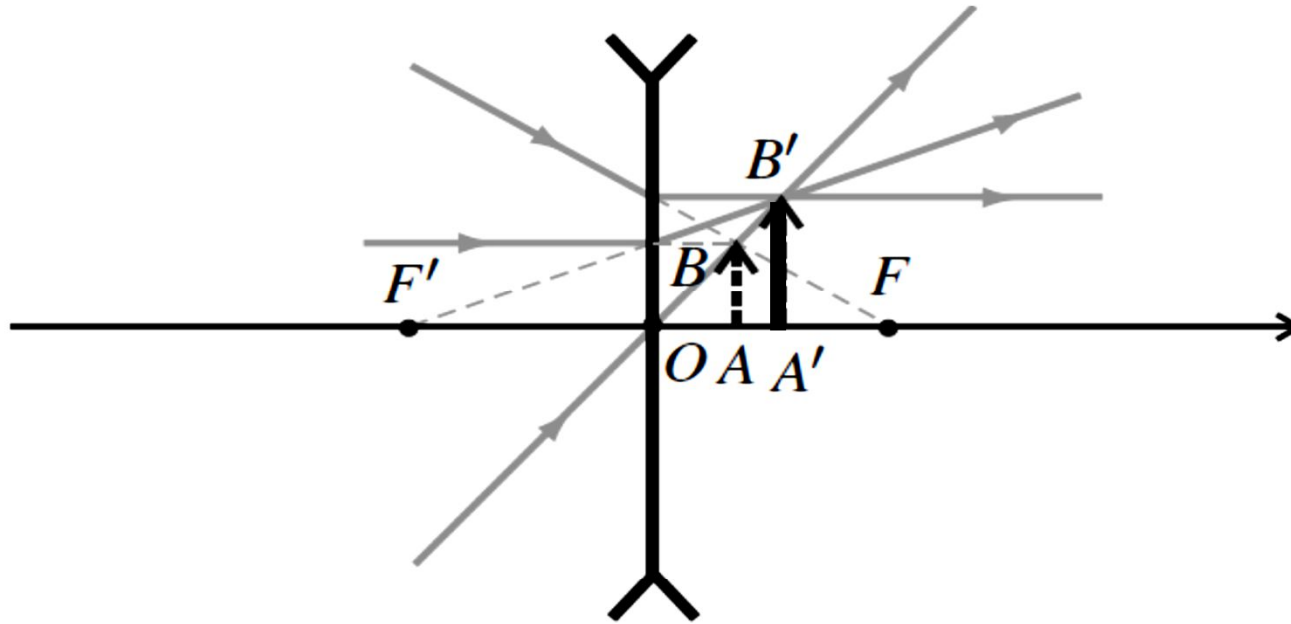


Figure 5.31 – Construction de l'image d'un objet virtuel situé entre le centre et le foyer objet par une lentille divergente. Les trois rayons émergents se croisent en B' , l'image est réelle.

Résultat : un objet virtuel entre O et F donne une image réelle, droite, plus grande.

L'objet est virtuel donc situé après O

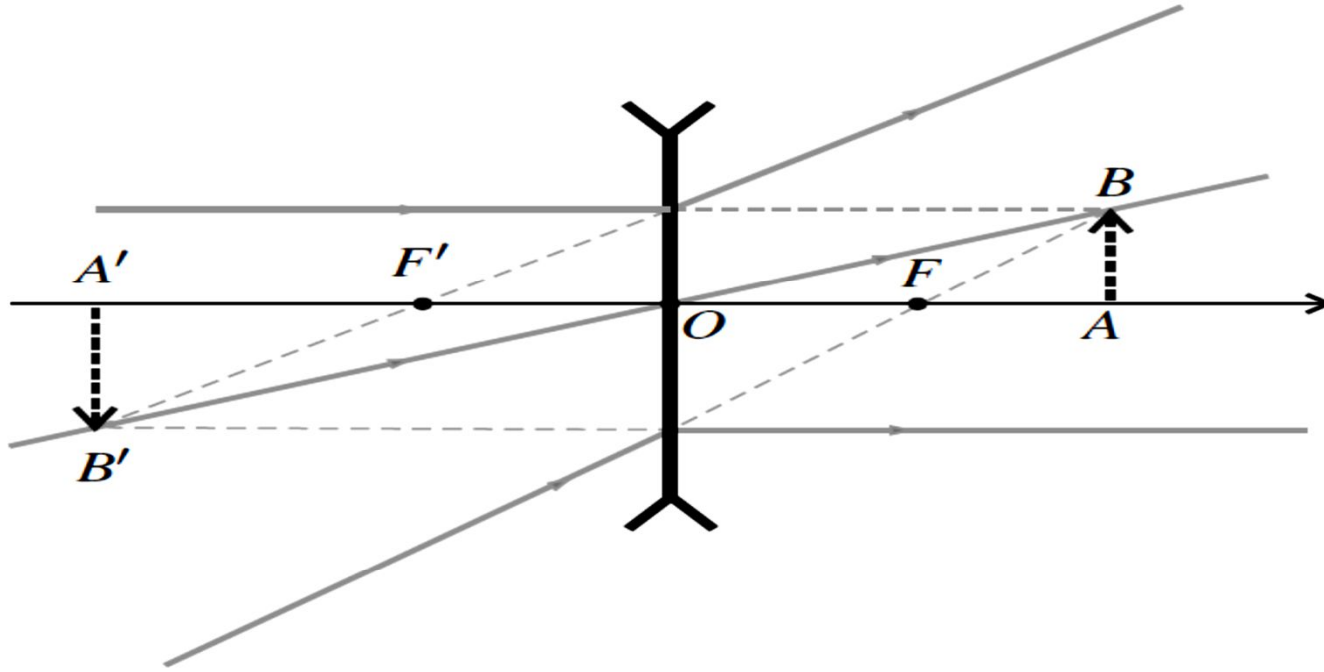


Figure 5.32 – Construction de l'image d'un objet virtuel situé après le foyer objet par une lentille divergente. Les prolongements des trois rayons émergents se croisent en B' , l'image est virtuelle.

Résultat : un objet virtuel après F donne une image virtuelle, renversée.

L'objet est situé à l'infini (1)

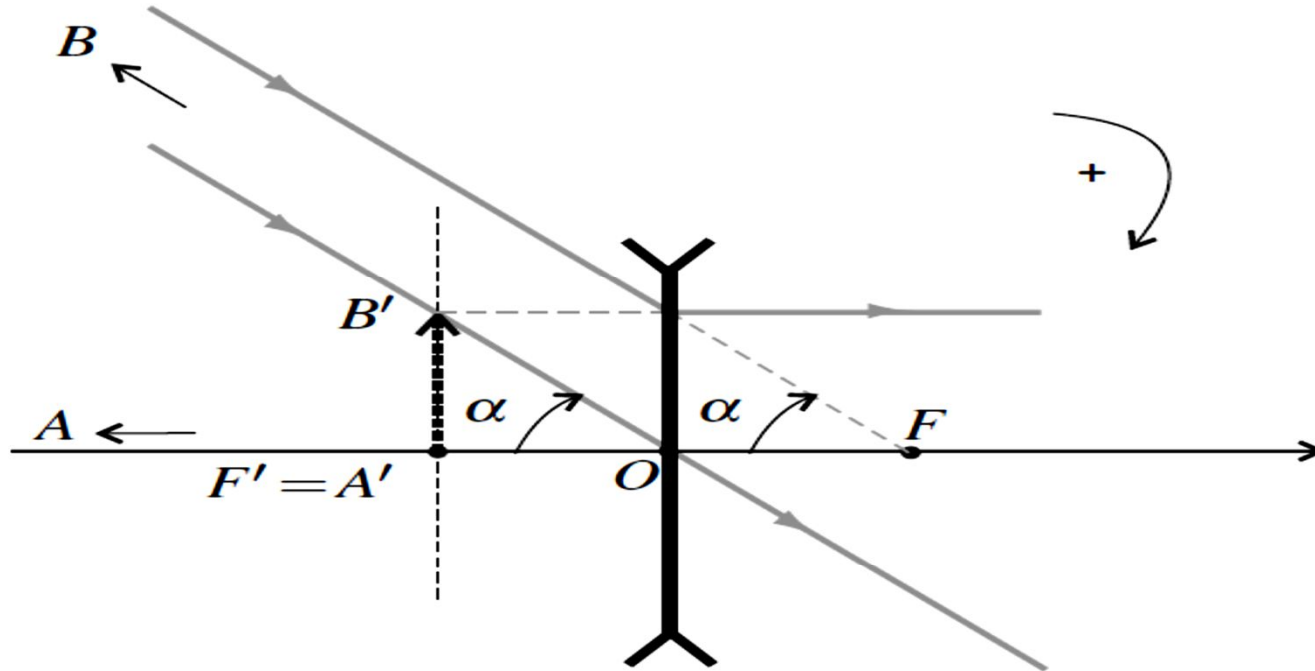


Figure 5.33 – Construction de l'image d'un objet à l'infini. Les prolongements des deux rayons émergents se croisent en B' , l'image est virtuelle.

Résultat : un objet à l'infini a une image virtuelle située dans le plan focal image.

L'objet est situé à l'infini (2)

À la différence d'une lentille convergente, une lentille divergente ne peut pas donner une image réelle d'un objet réel. Dans le cas où l'objet est à l'infini on ne peut tracer que deux rayons remarquables venant de B . Ils sont parallèles entre eux et inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique. B' appartient au plan focal image ce qui est normal puisque B est à l'infini. Dans le triangle $OF'B'$ on peut écrire :

$$\tan \alpha = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \overline{A'B'} = -f' \tan \alpha \approx -f' \alpha$$

puisque dans les conditions de Gauss, l'angle α est très petit.

Relations de conjugaison et grandissements

Principe

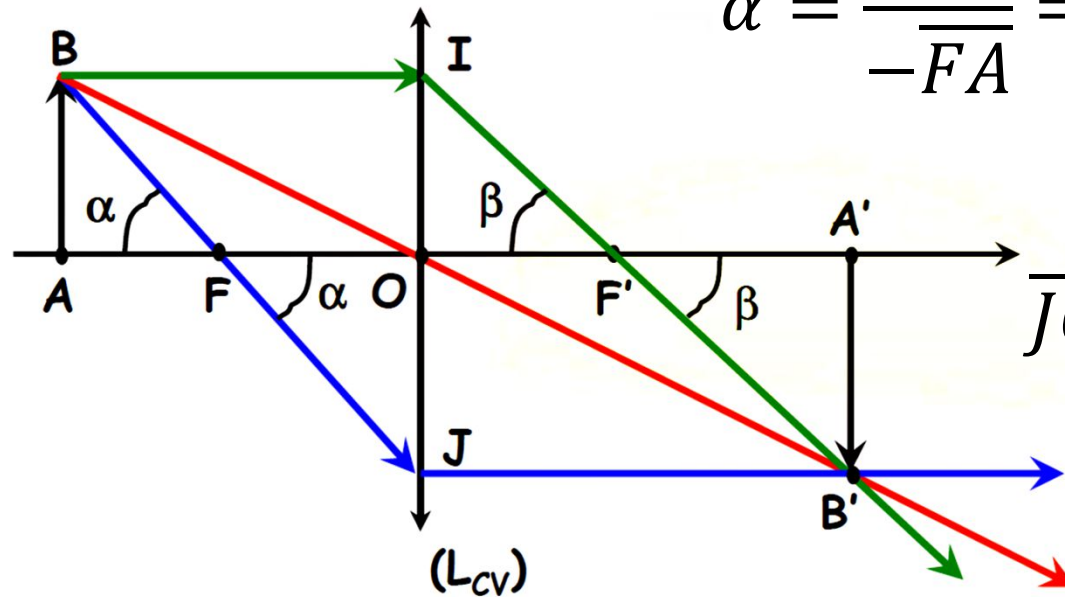
Les images trouvées par les constructions géométriques peuvent se calculer en utilisant les formules de conjugaison.

Ces formules vont par deux :

- une formule de position liant les positions de deux points A et A' conjugués appartenant à l'axe optique ;
- une formule de grandissement exprimant le grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ entre les plans de front conjugués passant par A et A' qui permet de positionner l'image B' d'un point B quelconque du plan de front passant par A .

Origine aux foyers (formules de Newton)(1)

On raisonne sur la figure suivante et on généralise ensuite (lentille CV ou DV).



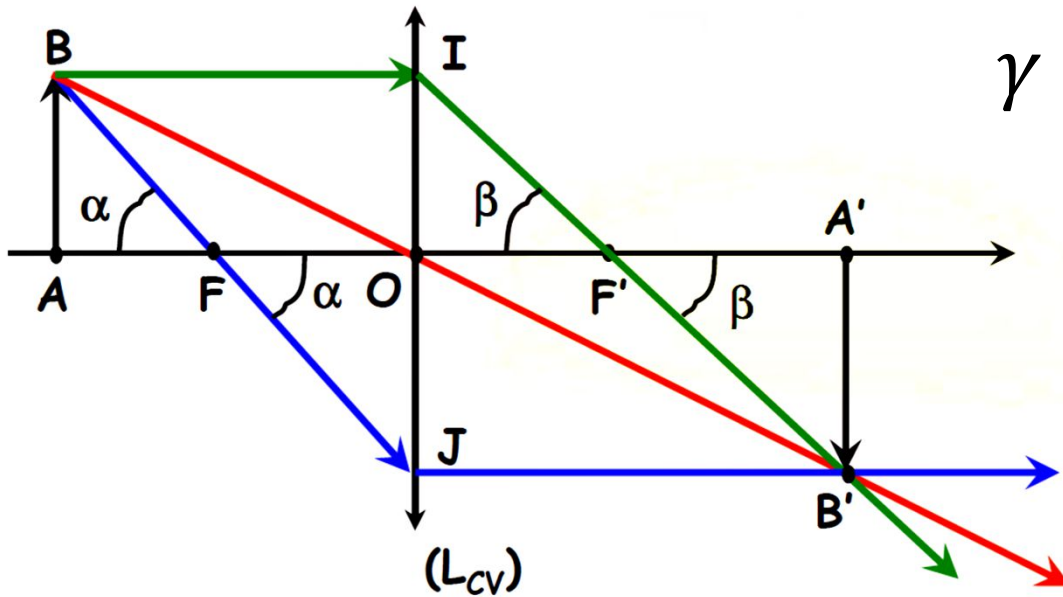
$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{-\overline{FA}} = \frac{\overline{JO}}{-\overline{OF}} \quad ; \quad \beta = \frac{\overline{A'B'}}{-\overline{F'A'}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OI} = \overline{AB} \\ \overline{JO} = -\overline{A'B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{OF}}{-\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} \\ \Rightarrow \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{OF} \times \overline{OF'}$$

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2 = -f^2 = ff'}$$

C'est la formule de conjugaison avec origine au foyer

Origine aux foyers (formules de Newton)(2)



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

Il vient donc :

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

Remarque : ces formules font intervenir des mesures algébriques. Lorsqu'on les applique il faut contrôler les signes en observant une figure.

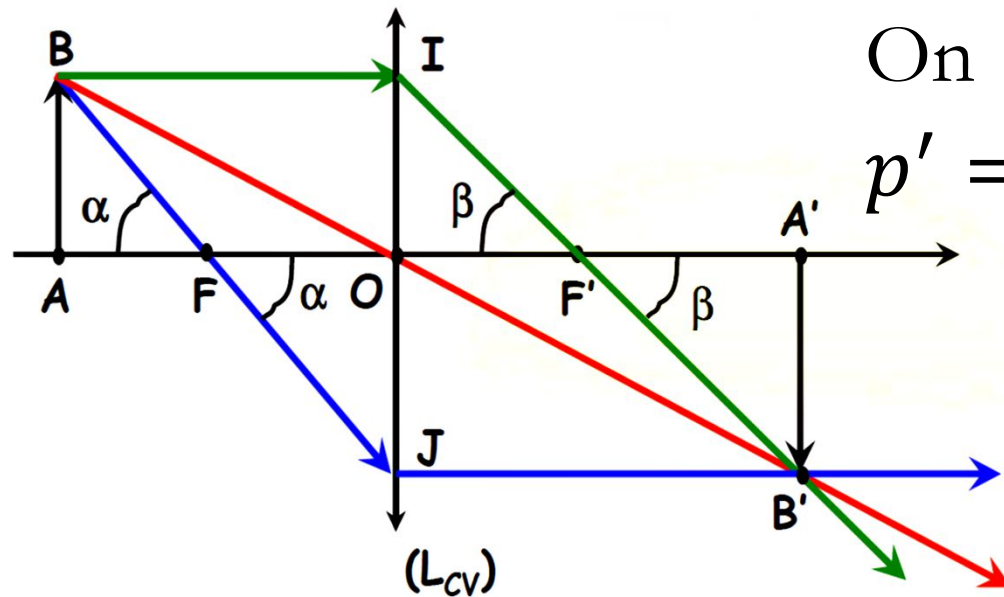
Origine au centre (formules de Descartes)(1)

On part de la relation

$$\begin{aligned}\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} &= \overline{OF} \times \overline{OF'} = -f'^2 = -f^2 = ff' \\ \left. \begin{aligned}\overline{FA} &= \overline{OA} - \overline{OF} = \overline{OA} + f' \\ \overline{F'A'} &= \overline{OA'} - \overline{OF'} = \overline{OA'} - f'\end{aligned}\right\} &\Rightarrow (\overline{OA} + f') \cdot (\overline{OA'} - f') = -f'^2 \\ &\Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OA'} - f' \cdot \overline{OA} + f' \cdot \overline{OA'} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} - \frac{f' \cdot \overline{OA}}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} + \frac{f' \cdot \overline{OA'}}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{f'} - \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V}\end{aligned}$$

C'est la relation de conjugaison des lentilles minces avec origine au centre (formule de Descartes)

Origine au centre (formules de Descartes)(2)



On pose souvent $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$ on a donc

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

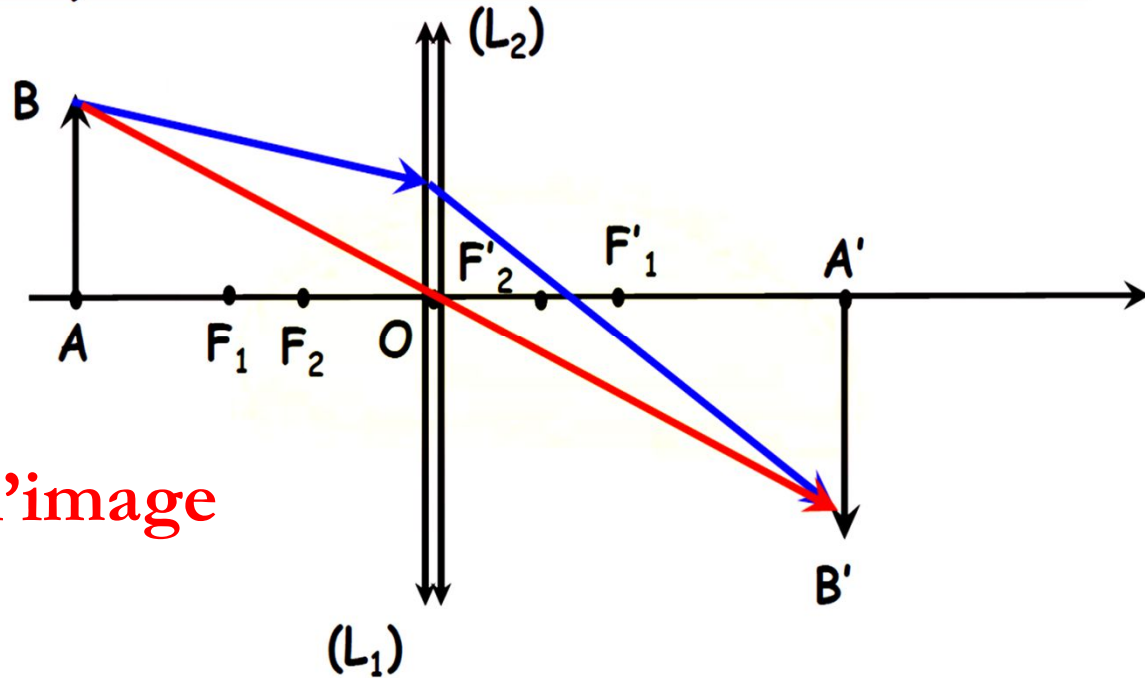
- La formule de grandissement est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p}$$

Associations de deux lentilles minces

Doublet accolé (1)

Les deux lentilles sont accolées (leurs centres optiques O_1 et O_2 sont confondus en O).



Quelle est la position de l'image $A'B'$ et sa taille ?

Pour cela utilisons la méthode de l'image intermédiaire :



Doublet accolé (2)

Pour la lentille (L_1) :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_i}} = \frac{1}{f'_1}$$

Pour la lentille (L_2) :

$$-\frac{1}{\overline{OA_i}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_2}$$

Ajoutons membres à membres les deux relations on a :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_i}} - \frac{1}{\overline{OA_i}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \Rightarrow -\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

On définit une distance focale image équivalente f'_{eq} telle que

$$\frac{1}{f'_{eq}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \Rightarrow V'_{eq} = V'_1 + V'_2$$

Doublet accolé (3)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_{eq}}$$

Formule des opticiens

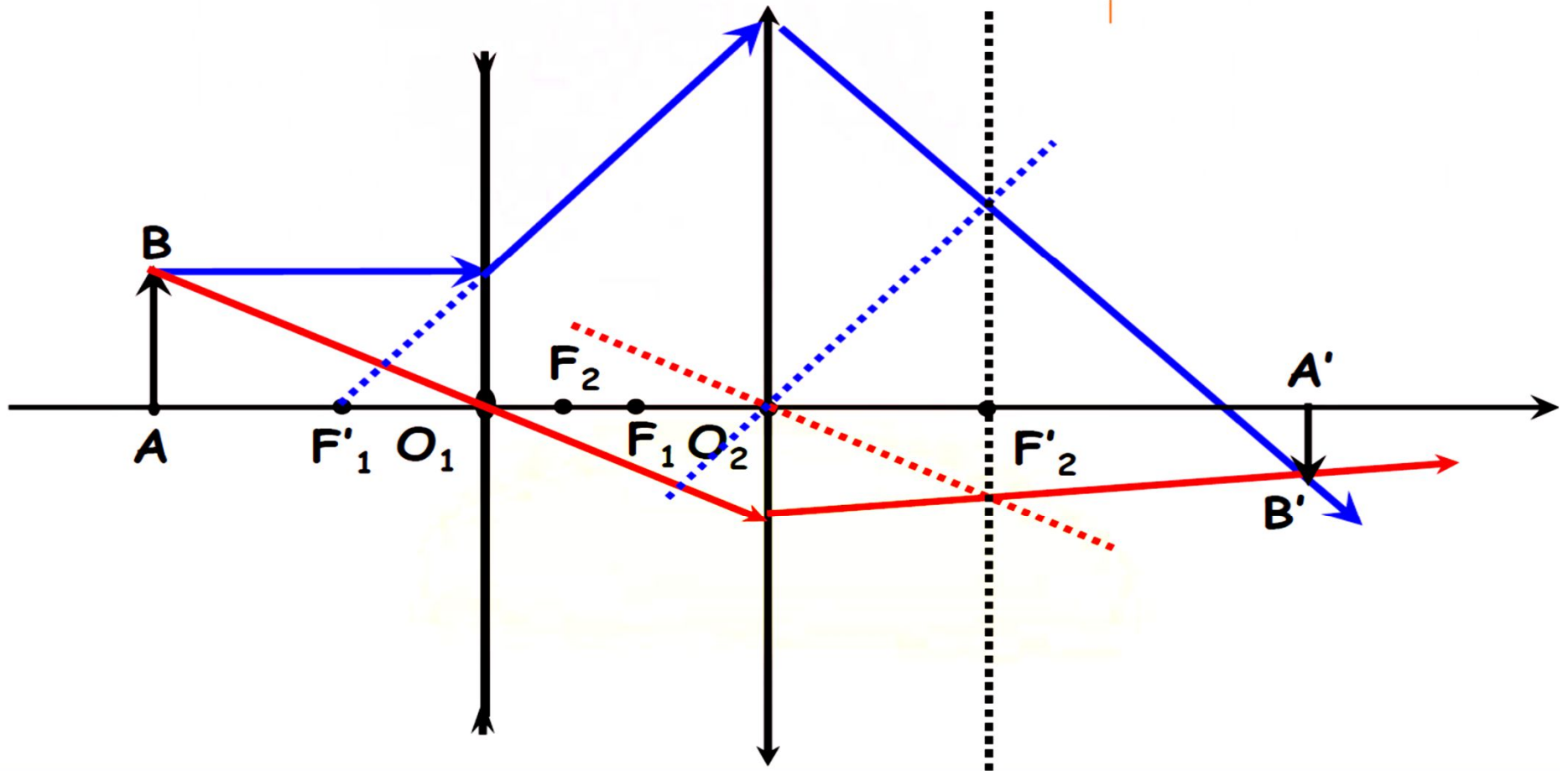
Un doublet de lentilles accolées est donc équivalent à une lentille mince dont on peut calculer la distance focale équivalente.

Le grandissement vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_i B_i}} \cdot \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_i}} \cdot \frac{\overline{OA_i}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

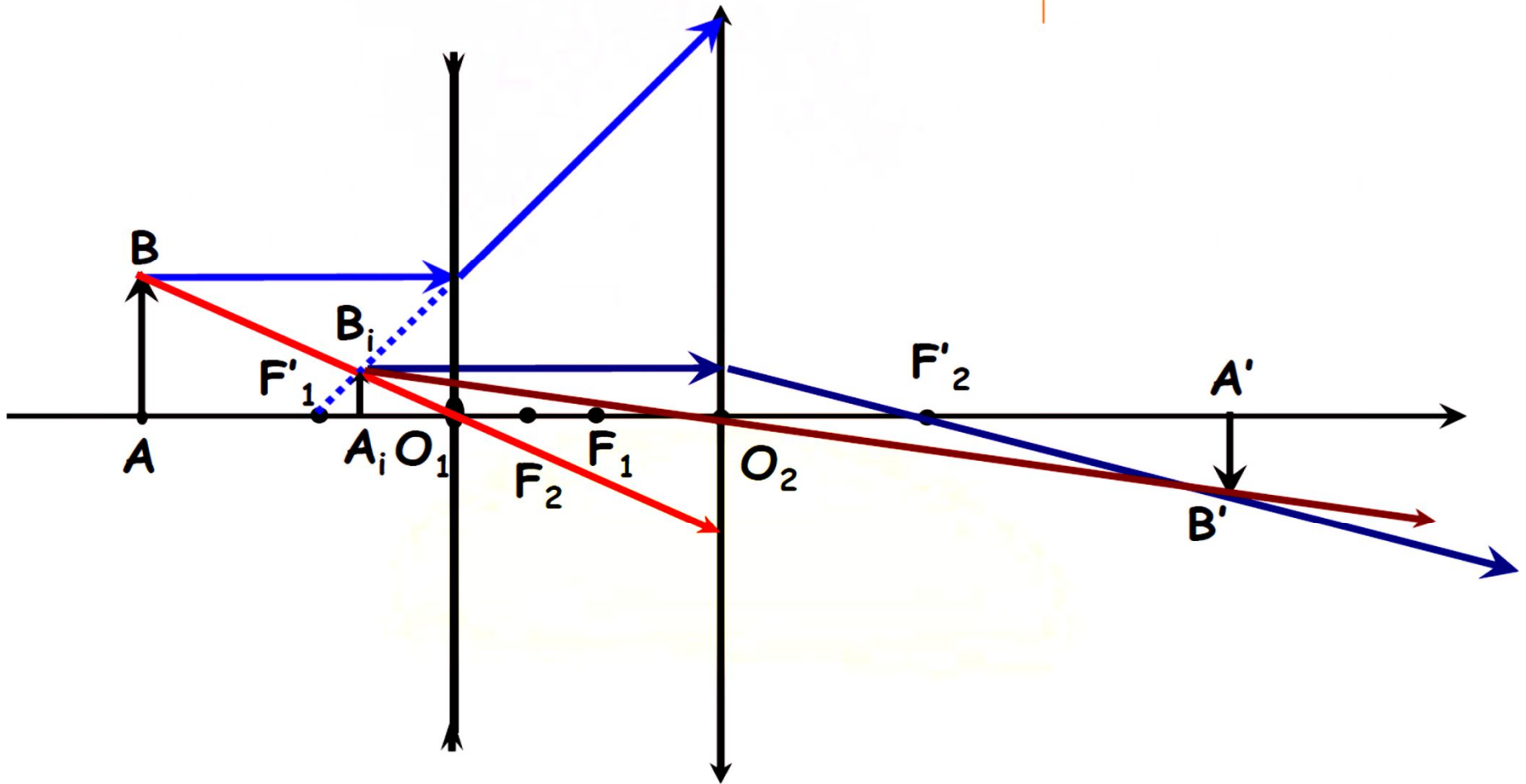
Doublet non accolé (1)

1^{ère} méthode graphique: par cheminement rayons



Doublet non accolé (2)

2^{ème} méthode graphique: détermination de l'image intermédiaire



Doublet non accolé (3)

Pour la lentille (L_1) :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A_i}} = \frac{1}{f'_1}$$

Pour la lentille (L_2) :

$$-\frac{1}{\overline{O_2A_i}} + \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2}$$

Le grandissement vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_iB_i}} \cdot \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_i}} \cdot \frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A}}$$

Doublet non accolé (4)

Exercice: On donne les données suivantes pour un doublet non accolé de lentilles:

Hauteur de la diapositive : de l'ordre de 3 cm

Distance objet – (L1) (divergente) : 6 cm

Distance (L1) (divergente) et (L2) (convergente) : 4 cm

Distances focales images : $f_1' = -2 \text{ cm}$ et $f_2' = 3 \text{ cm}$.

CV : 8 dioptries

DV : -3 dioptries

Déterminer graphiquement (deux méthodes possibles) puis par le calcul (méthode de l'image intermédiaire) la position et la taille de l'image finale $A'B'$ à travers ce doublet de lentilles.

Doublet non accolé (5)

Solution



$$-\frac{1}{\overline{O_1 A}} + \frac{1}{\overline{O_1 A_i}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1 A_i}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{O_1 A_i} = -1,5 \text{ cm}$$

$$\overline{O_2 A_i} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_i} = -4 - 1,5 = -5,5 \text{ cm}$$

$$-\frac{1}{\overline{O_2 A_i}} + \frac{1}{\overline{O_2 A'}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2 A'}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2 A_i}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{-5,5} = 0,15 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_2 A'} = 6,6 \text{ cm}}$$

Doublet non accolé (6)

Grandissement et taille de l'image $A'B'$

$$\overline{A_i B_i} = \frac{\overline{O_1 A_i}}{\overline{O_1 A}} \overline{AB} = \frac{-1,5}{-6} 3 = 0,75 \text{ cm}$$

$$\overline{A' B'} = \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_i}} \cdot \overline{A_i B_i} = \frac{6,6}{-5,5} \cdot 0,75 = -0,90 \text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{AB}} = \frac{-0,9}{3} = -0,3$$

Applications des lentilles

A. Projection d'une image

Position du problème

On veut projeter l'image d'un objet rétroéclairé sur un écran (diapositive par exemple). On souhaite avoir une image agrandie le plus possible, aussi lumineuse et nette que possible, avec une distance D entre l'objet et l'écran qui est imposée dans les conditions extérieures. Pour cela on doit utiliser une lentille nécessairement convergente car il faut obtenir une image réelle d'un objet réel. **Comment choisir la distance focale de cette lentille ? Comment obtenir une image lumineuse et uniformément éclairée ?**

Choix de la lentille (1)

- Condition pour avoir une image nette

On voit une image nette si la lentille forme l'image de l'objet exactement sur l'écran. Pour cela il faut placer la lentille convergente au bon endroit entre l'objet et l'écran. La figure ci-contre illustre cette situation : A est un point de l'objet conjugué avec le point A' sur l'écran.

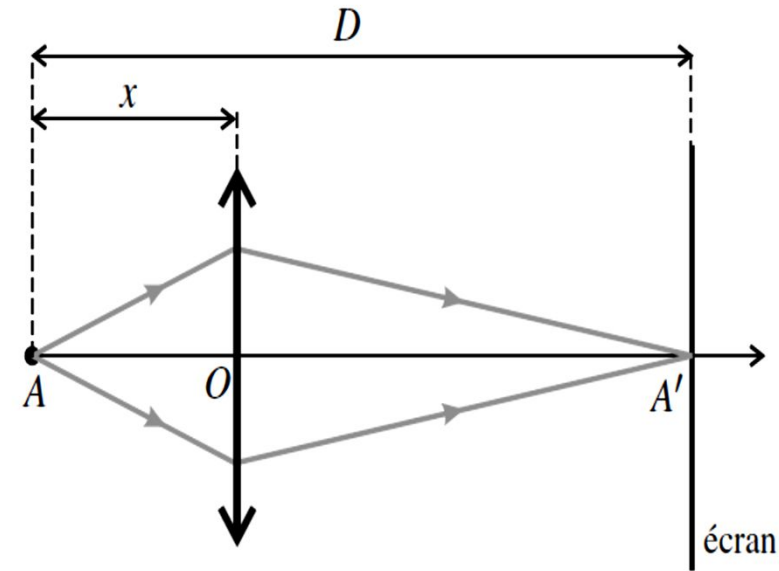


Figure 5.34 – Principe de la projection sur un écran.

Pour projeter un objet sur un écran avec une lentille convergente, il faut que la distance D entre l'objet et l'écran et la distance focale image f' de la lentille vérifient :

$$D > 4f'$$

Choix de la lentille (2)

- **Condition pour avoir un grandissement suffisant**

Pour avoir une image agrandie **il faut placer la lentille plus près de l'objet que de l'écran**. Pour une distance objet-écran fixée, l'image est d'autant plus grande que la distance focale de la lentille convergente utilisée est petite. La lentille doit avoir une distance focale suffisamment petite pour avoir un grandissement suffisant mais pas trop petite pour respecter les conditions de Gauss.

B. Le Microscope

Modélisation

Le microscope est constitué de deux parties optiques :

- l'objectif qui est du côté de l'objet ;
- l'oculaire qui est du côté de l'œil.

L'image finale donnée par un instrument d'optique oculaire doit être à l'infini. On modélise très simplement un microscope par **deux lentilles minces** :

- **l'objectif est équivalent à une lentille convergente L_1**
de distance focale f_1'
- **l'oculaire est équivalent à une lentille convergente L_2**
de distance focale f_2'

Construction géométrique

Pour effectuer la construction, il faut chercher l'antécédent de F_2 par L_1 , ce qui a été réalisé sur la figure suivante en utilisant les trois rayons remarquables pour L_1 passant par B_1 .

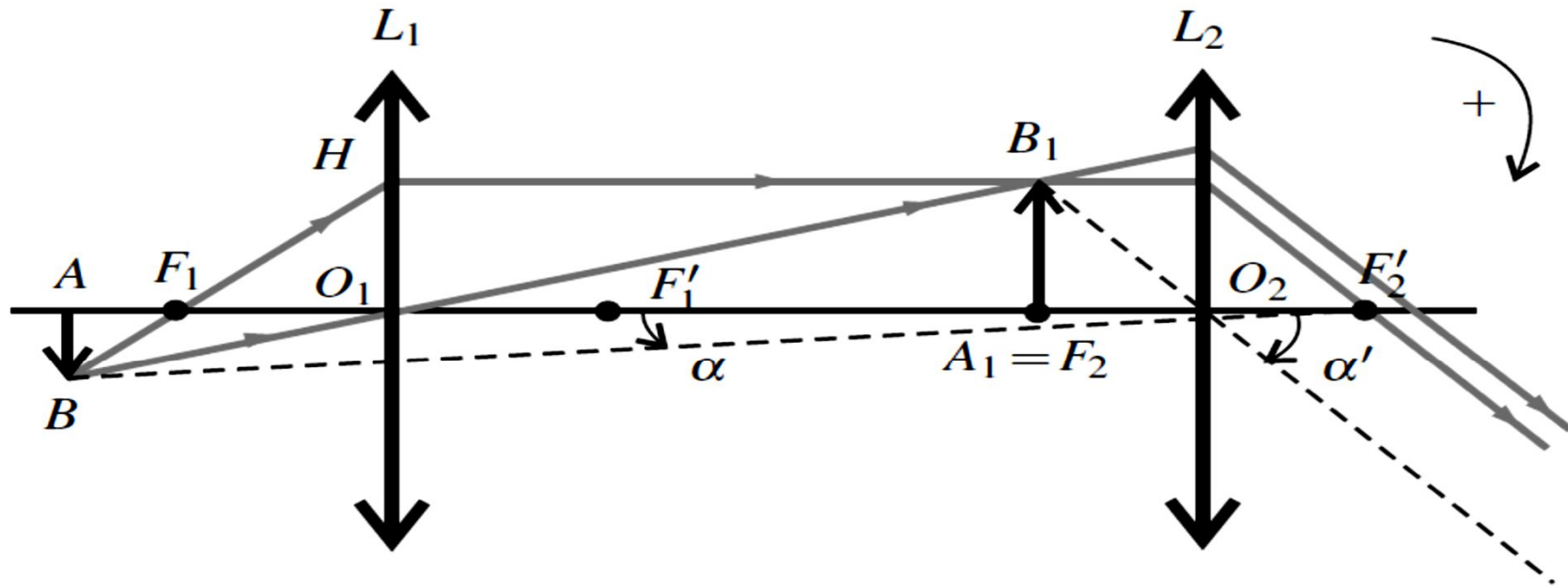


Figure 5.36 – Microscope.

C. L'appareil photographique

Modélisation

Un appareil photographique simplifié comprend :

- un **objectif** assimilé à une lentille convergente mince (distance focale f');
- un **diaphragme** de diamètre d'ouverture d ;
- un **obturateur** qui reste ouvert pendant la durée appelée temps de pose;
- la **pellicule**

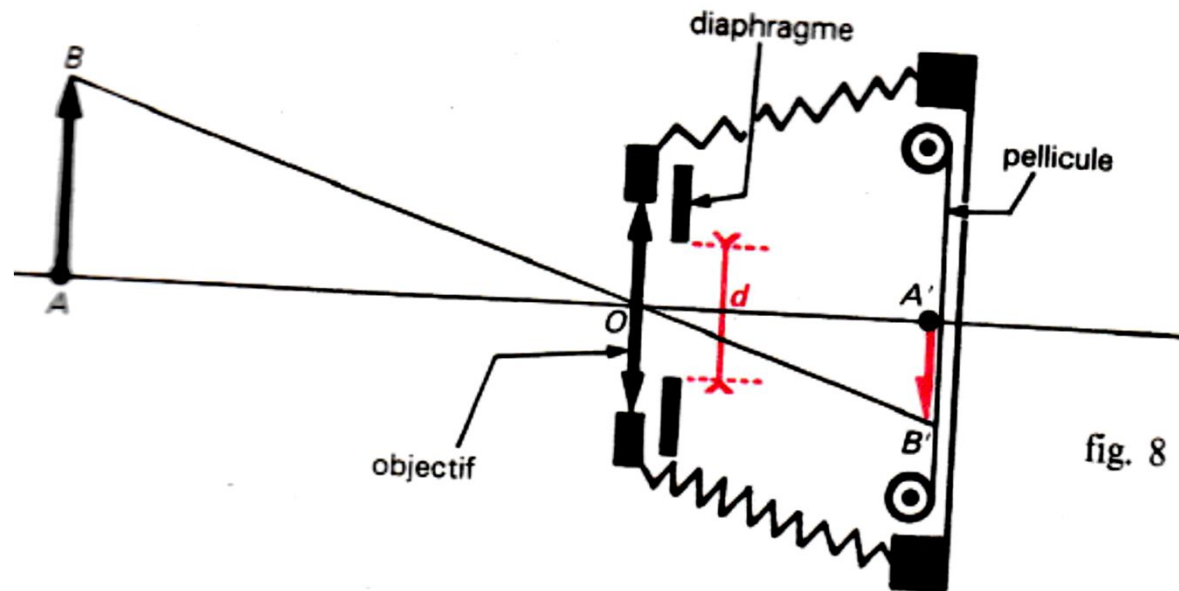


Image obtenue

L'image de l'objet à photographier se forme sur la pellicule:

$A'B'$ est l'image de l'objet AB dans l'objectif. On obtient ce résultat en effectuant la mise au point.

Entre $p = \overline{OA}$ ($p < 0$) et $p' = \overline{OA'}$ ($p' > 0$) distance de l'objectif à la pellicule, on a:

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$$

En particulier, si l'objet à photographier se situe à l'infini ($p \rightarrow -\infty$), on obtient $p' = f'$. La pellicule coïncide alors avec le plan focal image de l'objectif.

Nombre d'ouverture N

Le nombre d'ouverture **N** du diaphragme est :

$$N = \frac{f'}{d}$$

- Si **N** est grand, le diaphragme est quasi fermé. Dans ce cas la profondeur du champ augmente.
- Si **N** est petit, le diaphragme est grand ouvert.
- Les valeurs de **N** forment une suite géométrique :

2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22

Quand on passe d'une valeur à la suivante, la quantité de lumière pénétrant dans l'appareil est divisée par 2 (pour un même temps de pose).

Temps de pose

Les temps de pose correspondent aux nombres :

.... 250; 125; 60; 30; 15; 8

La valeur 250 indique un temps de pose égal à $\frac{1}{250}$ s. Quand on passe d'un nombre au suivant, la «quantité de lumière» admise dans le boîtier est multipliée par 2 (pour un même diaphragme).