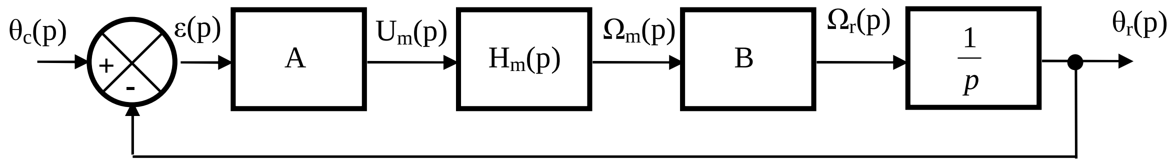
Radar d'avion - Corrigé

Q.1. Réaliser le schéma-bloc du système.

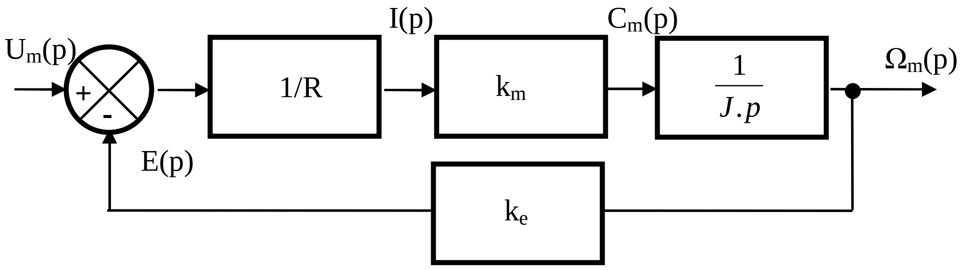


Q.2. et Q.3. $u_m(t) = e(t) + R.i(t)$ → $U_m(p) = E(p) + R.I(p)$

$e(t) = k_e.\omega_m(t)$ → $E(p) = k_e.\Omega_m(p)$

$J.\dfrac{d\,\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$ → $J.p\ \Omega_m(p) = C_m(p)$

$C_m(t) = k_m.i(t)$ → $C_m(p) = k_m.I(p)$



$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k_e}.\frac{\dfrac{k_m.k_e}{R.J.p}}{1+\dfrac{k_m.k_e}{R.J.p}} = \frac{1}{k_e}.\frac{k_m.k_e}{R.J.p + k_m.k_e} = \frac{1}{k_e}.\frac{1}{1+\dfrac{R.J}{k_m.k_e}.p} = \frac{K_m}{1+T_m.p}$$

avec $K_m = \dfrac{1}{k_e}$ et $T_m = \dfrac{R.J}{k_m.k_e}$

Q.4. L'entrée est définie par un échelon unitaire, $u_m(t)=u_0.u(t)$, soit dans le domaine de Laplace, $U_m(p)=\dfrac{u_0}{p}$. La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $\Omega_m(p) = \dfrac{K_m.u_0}{p.(1+T_m.p)}$

La décomposition en éléments simples donne : $\Omega_m(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{1+T_m.p} = \dfrac{K_m.u_0}{p} - \dfrac{K_m.u_0.T_m}{1+T_m.p}$

Soit $\Omega_m(p) = K_m.u_0.\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{T_m}+p}\right)$. Par transformation inverse on obtient ensuite la réponse temporelle

qui a donc pour expression : $\omega_m(t) = K_m.u_0\left(1-e^{-\frac{t}{T_m}}\right).u(t)$

<u>Ordonnée à l'origine :</u>

Pour t=0 on a : $\omega_m(0) = 0$

Pente à l'origine :

$$\omega_m'(0^+)=\lim_{t\to 0^+}\omega_m'(t)=\lim_{p\to\infty}p.\left[p.\Omega_m(p)\right]=\lim_{p\to\infty}p^2.\frac{K_m.u_0}{p.(1+T_m.p)}=\frac{K_m.u_0}{T_m}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

Ordonnée en +∞ :

$$\omega_m(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\omega_m(t)=\lim_{p\to 0}p.\Omega_m(p)=K_m.u_0$$

Théorème de la valeur finale

Remarque : si on connait par cœur la réponse indicielle d'un système du 1er ordre, on peut bien évidemment donner directement les réponses.

Q.5. $$H(p)=\frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}=\frac{A.B.H_m(p).\frac{1}{p}}{1+A.B.H_m(p).\frac{1}{p}}=\frac{A.B.\frac{K_m}{1+T_m.p}.\frac{1}{p}}{1+A.B.\frac{K_m}{1+T_m.p}.\frac{1}{p}}=\frac{A.B.K_m}{p.(1+T_m.p)+A.B.K_m}=\frac{1}{\frac{p.(1+T_m.p)}{A.B.K_m}+1}$$

$$H(p)=\frac{1}{\frac{p.(1+T_m.p)}{A.B.K_m}+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{A.B.K_m}.p+\frac{T_m}{A.B.K_m}p^2}=\frac{K}{(1+\frac{2.z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$$ avec :

K = 1 ; $\frac{1}{\omega_0^2}=\frac{T_m}{A.B.K_m}\to\omega_0=\sqrt{\frac{A.B.K_m}{T_m}}$; $\frac{2.z}{\omega_0}=\frac{1}{A.B.K_m}\to z=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{T_m.A.B.K_m}}$

Q.6. Par définition pour une réponse indicielle d'un système du 2nd ordre on a :

Ordonnée en +∞ de la courbe de sortie :

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}p.S(p)=\lim_{p\to 0}\frac{K.\omega_0^2}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^2}=K \quad\to\quad \boxed{s(+\infty)=K}$$

Théorème de la valeur finale

Le régime établi ne dépend que du gain statique Z alors que z et ω_0 n'interviennent que sur le régime transitoire

Valeur du 1er dépassement :

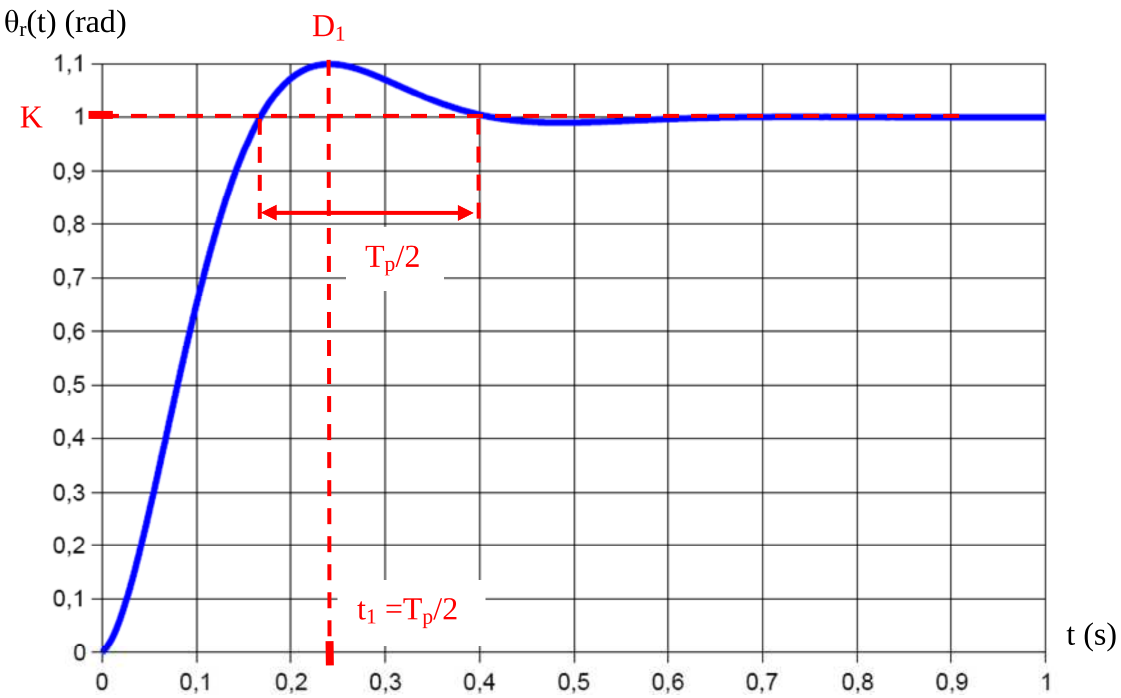
$$D_1=e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Valeur de la pseudo-période :

$$T_p=\frac{2\pi}{\omega_p}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Graphiquement on lit : K = 1 ; t_1 = 0,24 $=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$; $D_1=e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$ =0,1

Soit z ≈ 0,58 et ω_0 ≈ 15,8 rad/s.



Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :
K = 1, z = 0,5 et ω_0 = 15 rad/s.

Q.7. Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie du système ω_0.

On utilise l'abaque annexe 2 et on lit $t_{5\%}.\omega_0 \approx 5$ pour z=0,5 soit $t_{5\%} \approx 0.33s$ > 0,2s → le critère de rapidité de la fonction FS1 n'est pas respecté.

Q.8. Méthode : voir chapitre 4 cours 08. Il y a 3 fonctions de transfert du 1er ordre.

$$H(p)=\frac{1}{(1+0,05.p).(1+0,0005.p).(1+0,002.p)} \rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{(1+0,05.j\omega)}.\frac{1}{(1+0,002.j\omega)}.\frac{1}{(1+0,0005.j\omega)}$$

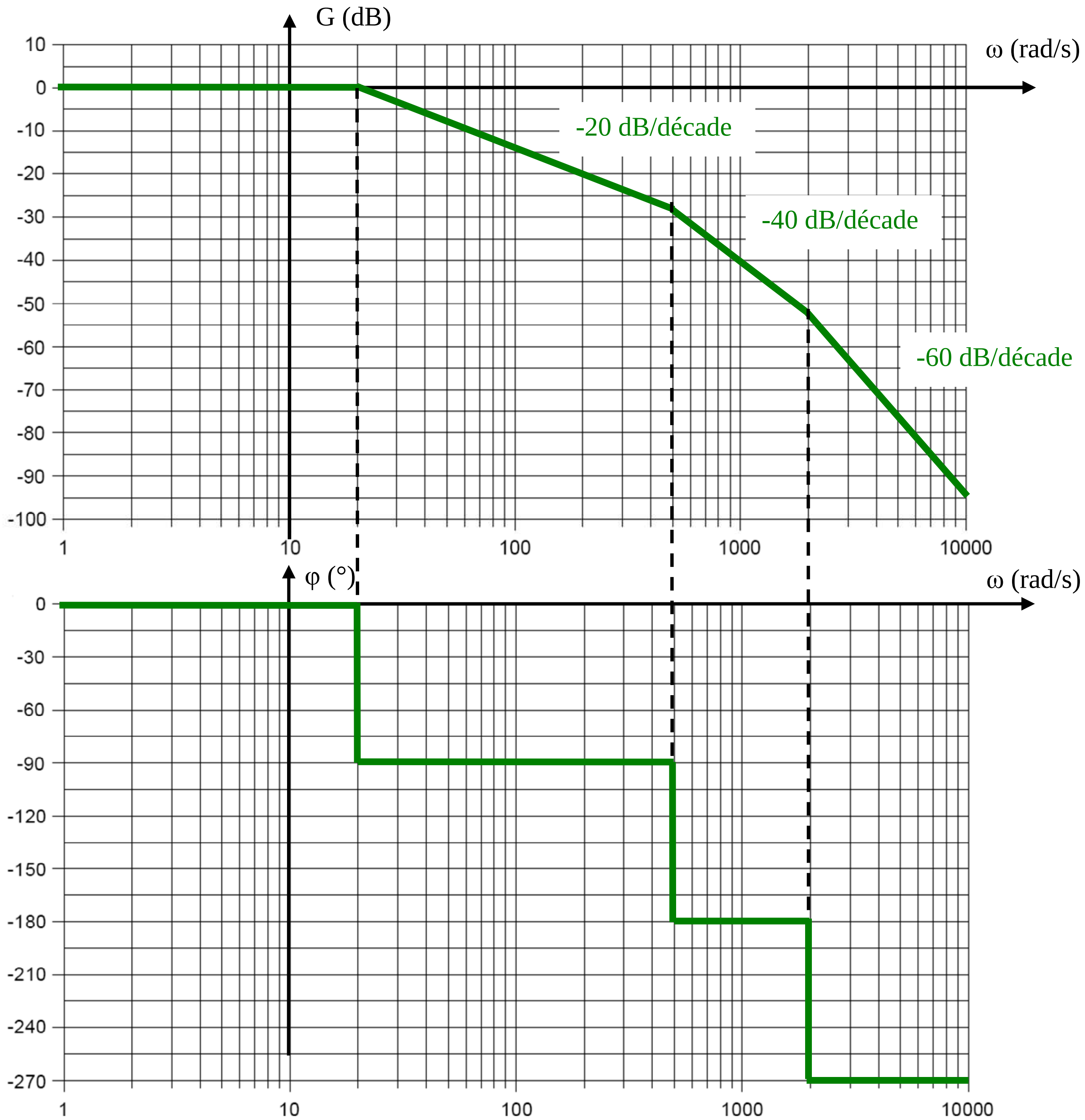
On classe les constantes de temps dans un ordre décroissant, c'est à dire les pulsations de cassure ($1/T_i$ pour le 1er ordre) correspondantes dans un ordre croissant. Les brisures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.

Les constantes de temps sont T_1 = 0,05 s (soit ω_1 = 20 rad/s), T_2 = 0,002 s (soit ω_2 = 500 rad/s) et T_3 = 0,0005 s (soit ω_2 = 2000 rad/s).

Q.9. Pour ω = 10 rad/s on a :

$$G_{dB} = |H(j10)|_{dB} \approx -20\log\left(\sqrt{\left(1+(0,05\times 10)^2\right)}\right) \approx -1 \text{ dB}$$

$$\text{et } \varphi = \arg(H(j10)) \approx -\arctan\left(\frac{0,05\times 10}{1}\right) \approx -26,5°$$



Q.10. Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0{,}2.\sin(10t)$.

$\theta_r(t) = 0{,}2.G.\sin(10t+\varphi)$.

Q.11. ω_c=20 rad/s soit un bande passante de 20rad/s > 18rad/s, le critère de bande passante de la fonction FS1 est respecté.

Q.12. Système du 1er ordre → $t_{5\%} = 3\times0{,}05 = 0{,}15$ s < 0,2 s → C.d.C.F. ok.

Etude d'une antenne parabolique - Corrigé

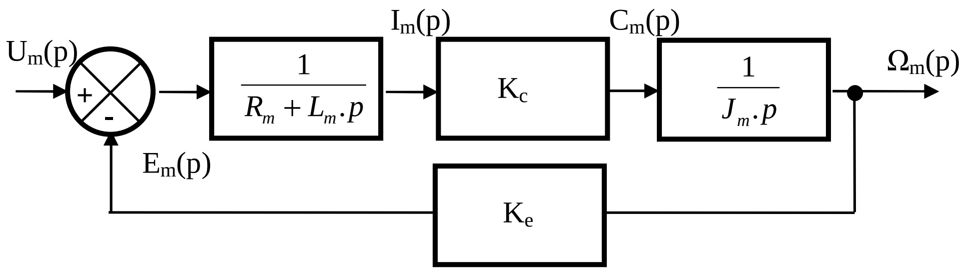
Q.1. $u_m(t) = e_m(t) + R_m.i_m(t) + L_m.\dfrac{d\,i_m(t)}{dt}$ $\quad\rightarrow\quad$ $U_m(p) = E_m(p) + R.I_m(p) + L.p.I_m(p)$

$e_m(t) = K_e.\omega_m(t)$ $\quad\rightarrow\quad$ $E_m(p) = K_e.\Omega_m(p)$

$J_m.\dfrac{d\,\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$ $\quad\rightarrow\quad$ $J_m.p\;\Omega_m(p) = C_m(p)$

$C_m(t) = K_c.i_m(t)$ $\quad\rightarrow\quad$ $C_m(p) = K_c.I_m(p)$

Q.2.



Q.3.

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{K_e}.\frac{\dfrac{K_c.K_e}{J_m.p.(R_m+L_m.p)}}{1+\dfrac{K_c.K_e}{J_m.p.(R_m+L_m.p)}} = \frac{1}{K_e}.\frac{K_c.K_e}{J_m.p.(R_m+L_m.p)+K_c.K_e} = \frac{\dfrac{1}{K_e}}{\dfrac{J_m.L_m}{K_c.K_e}.p^2 + \dfrac{J_m.R_m}{K_c.K_e}.p + 1}$$

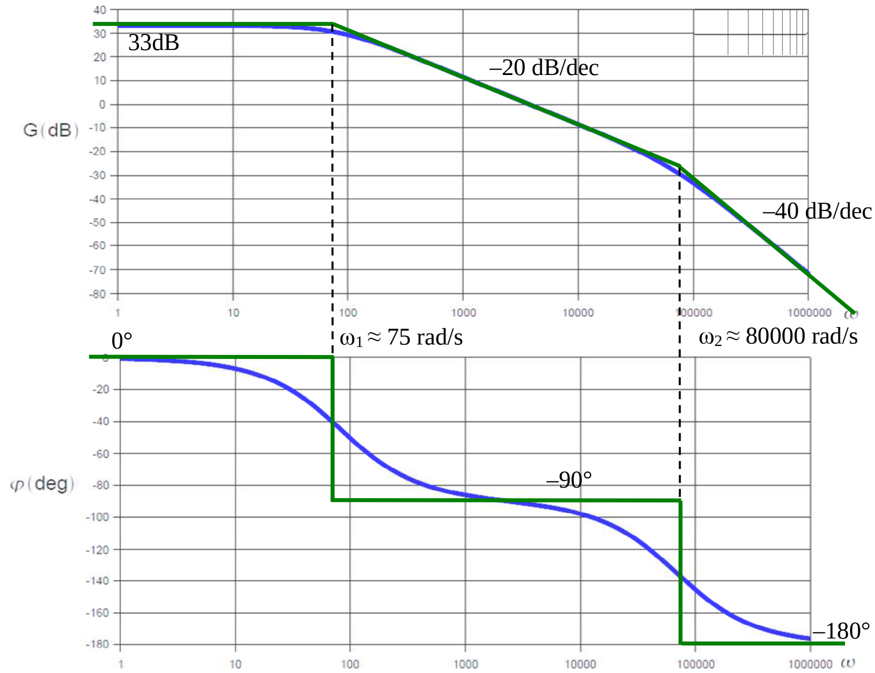
avec $K = \dfrac{1}{K_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_c.K_e}{J_m.L_m}}$ et $z = \dfrac{1}{2}.R_m.\sqrt{\dfrac{J_m}{K_c.K_e.L_m}}$.

Q.4. $\tau_e = \dfrac{L_m}{R_m}$, $\tau_m = \dfrac{R_m.J_m}{K_e.K_c}$ et $\tau_e \ll \tau_m$

$\rightarrow$ $(1+\tau_e.p).(1+\tau_m.p) = 1+(\tau_e+\tau_m).p+(\tau_e.\tau_m).p^2 \approx 1+(\tau_m).p+(\tau_e.\tau_m).p^2$ si $\tau_e \ll \tau_m$

$\rightarrow$ $1+\tau_m.p+(\tau_e.\tau_m).p^2 = 1+\dfrac{J_m.R_m}{K_c.K_e}.p+\dfrac{J_m.L_m}{K_c.K_e}.p^2 \rightarrow H(p) \approx \dfrac{K}{(1+\tau_e.p).(1+\tau_m.p)}$.

Q.5.



Asymptote horizontale de gain pour les faibles pulsations :

$20.\log K = 20.\log \dfrac{1}{K_e} = 20.\log \dfrac{1}{0{,}022} = 33{,}15$ dB

Pulsations de cassure :

$\omega_1 = \dfrac{1}{\tau_m} = \dfrac{K_e.K_c}{R_m.J_m} \approx 75$ rad/s

$\omega_2 = \dfrac{1}{\tau_e} = \dfrac{R_m}{L_m} \approx 80000$ rad/s

Q.6. $\omega_1 = \dfrac{1}{\tau_m} = \dfrac{K_e.K_c}{R_m.J_m} \approx 75$ rad/s $\rightarrow J_m = \dfrac{0{,}022^2}{9{,}1\times 75} = 0{,}7.10^{-6}\,Kg.m^2$

$\omega_2 = \dfrac{1}{\tau_e} = \dfrac{R_m}{L_m} \approx 80000$ rad/s $\rightarrow L_m = \dfrac{9{,}1}{80000} = 0{,}11.10^{-3}H = 0{,}11mH$

$\tau_e = \dfrac{L_m}{R_m} = \dfrac{0{,}11.10-3}{9.1} = 1{,}25.10^{-5}$ s

$\tau_m = \dfrac{R_m.J_m}{K_e.K_c} = \dfrac{9{,}1\times 0{,}7.10^{-6}}{0{,}022^2} = 1{,}3.10^{-2}$ s $\rightarrow \tau_e << \tau_m$.

Q.7. Réponse à un échelon d'un système du $2^{\text{ème}}$ ordre → tangente horizontale à l'origine.

$u_m(t) = U_0.u(t). \rightarrow U_m(p) = \dfrac{U_0}{p}$ et $H(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_e}}{\dfrac{J_m.L_m}{K_c.K_e}.p^2 + \dfrac{J_m.R_m}{K_c.K_e}.p + 1}$

$$\omega_m'(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \omega_m'(t) = \lim_{p\to\infty} p.\left[p.H(p).\frac{U_0}{p}\right] = 0$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

Q.8. $\tau_e << \tau_m \rightarrow H(p) \approx \dfrac{K}{(1+\tau_m.p)}$

Réponse à un échelon d'un système du 1^{er} ordre → $\omega_m(t) = K.U_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right).u(t)$

Q.9. $\tau_m = 0{,}012$ s, $K = 45 rad.s^{-1}.V^{-1}$ et $U_0 = 18V$.

$$\omega_m(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \omega_m(t) = \lim_{p\to 0} p.\frac{U_0}{p}.H(p). = K.U_0$$

Théorème de la valeur finale

$K.U_0 = 45.18 = 810$ rad/s = 7735 tr/min < 8000 tr/min

Q.10. $G(p) = \dfrac{\Omega_a(p)}{\Omega_m(p)} = \dfrac{1}{N}$

$M(p) = \dfrac{\theta_a(p)}{\Omega_a(p)} = \dfrac{1}{p}$

Q.11. $\dfrac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)} = \dfrac{K_a.H(p).G(p).M(p)}{1+K_a.H(p).G(p).M(p)}$

Avec : $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau_m.p)}$, G(p) $= \dfrac{\Omega_a(p)}{\Omega_m(p)} = \dfrac{1}{N}$ et M(p) $= \dfrac{\theta_a(p)}{\Omega_a(p)} = \dfrac{1}{p}$

$$\frac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)} = \frac{K_a.\frac{1}{N}.\frac{K}{p.(1+\tau_m.p)}}{1+K_a.\frac{1}{N}.\frac{K}{p.(1+\tau_m.p)}} = \frac{\frac{\frac{K_a.K}{N}}{p.(1+\tau_m.p)}}{1+\frac{\frac{K_a.K}{N}}{p.(1+\tau_m.p)}} = \frac{\frac{K_a.K}{N}}{p.(1+\tau_m.p)+\frac{K_a.K}{N}} = \frac{1}{1+\frac{N}{K_a.K}p+\frac{N.\tau_m}{K_a.K}p^2}$$

Avec : $K_T = 1$, $\omega_{0T} = \sqrt{\dfrac{K_a.K}{N.\tau_m}}$ et $z_T = \dfrac{1}{2}.\dfrac{N}{K_a.K}.\sqrt{\dfrac{K_a.K}{N.\tau_m}} \rightarrow z_T = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{N}{K_a.K.\tau_m}}$

Q.12. FTBO de classe 1 → l'erreur de position est nulle → C.d.C.F ok.

Q.13. Temps de réponse le plus faible possible pour un système de 2ème ordre → z = $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$

$0{,}7 = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{23328}{K_a \times 45 \times 0{,}012}} \rightarrow 1{,}4^2 = \dfrac{23328}{K_a \times 45 \times 0{,}012} \rightarrow K_a = \dfrac{23328}{1{,}4^2 \times 45 \times 0{,}012} \rightarrow K_a = 22040$ V/rad