

PREMIÈRE PÉRIODE

Électrocinétique 1

2

Lois générales de l'électrocinétique dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires

1. Associations de résistances en série ou en parallèle

1. On branche en série deux résistances R_1 et R_2 telles que $R_1 < R_2$.
 - a) Comparer la résistance équivalente à R_1 et à R_2 .
 - b) Quelle est la résistance qui est traversée par le courant d'intensité la plus élevée ?
 - c) Aux bornes de quelle résistance la tension est-elle la plus grande ?
 - d) Dans quelle résistance y-a-t-il le plus de dissipation d'énergie ?
2. Mêmes questions si on branche les deux résistances en parallèle.

2. Choix d'une ampoule

On dispose de trois types d'ampoules :

1. 110 V - 75 W,
 2. 220 V - 75 W,
 3. 220 V - 150 W.
1. Les classer par ordre de résistance croissante.
 2. On les branche sur une tension adéquate. Les classer par ordre d'intensité les parcourant croissante.
 3. On branche deux ampoules 110 V - 75 W en série sur 220 V. Obtient-on un aussi bon éclairage qu'avec une seule ampoule 220 V - 150 W ?

3. Alimentation d'un tramway

Un tramway est alimenté entre les rails et la ligne d'alimentation par un générateur de tension à vide $E_1 = 600 \text{ V}$ et de résistance interne $r_1 = 0,06 \Omega$. Les résistances totales des rails et de l'alimentation sont respectivement $R_4 = 3 \Omega$ et $R_3 = 0,5 \Omega$. Suivant la position T du tramway par rapport à l'origine O , les résistances effectives des rails et de l'alimentation varient linéairement en fonction de T . On note $x = \frac{OT}{OF}$ où F désigne la fin de la ligne de tramway.

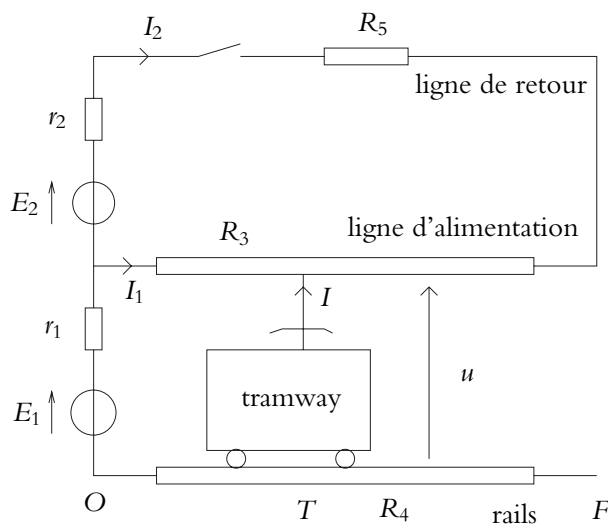


Figure 2.1

Par ailleurs, la ligne d'alimentation appartient également à une maille comprenant une ligne retour de résistance $R_5 = 0,8 \Omega$, un interrupteur et un générateur de tension à vide E_2 et de résistance interne $r_2 = 0,01 \Omega$.

On suppose en outre que le tramway est parcouru par un courant d'intensité constante $I = 50 \text{ A}$. On notera I_1 et I_2 les intensités des courants parcourant respectivement la ligne d'alimentation et la ligne de retour.

1. On suppose l'interrupteur ouvert.

- Déterminer l'expression littérale de la tension u aux bornes du tramway en fonction de x et des différents paramètres électriques.
- Donner son expression numérique en fonction de x .
- Tracer $u(x)$.

2. L'interrupteur est maintenant fermé.

- a) Déterminer la nouvelle expression littérale de la tension u aux bornes du tramway en fonction de x et des différents paramètres électriques.
- b) Donner son expression numérique en fonction de x et de E_2 .
- c) Quelle doit être la valeur de E_2 pour avoir un extremum de la tension en un point x_0 de la ligne ? On donnera le résultat en fonction de x_0 , I et des valeurs des résistances.
- d) Si l'extremum est obtenu au milieu de la ligne, quelle valeur numérique doit prendre E_2 ?
- e) S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ? Justifier.
- f) Donner l'expression littérale puis la valeur numérique de cet extremum.
- g) Si cette condition est vérifiée, tracer la tension u aux bornes du tramway en fonction de x . On donnera les valeurs particulières du tracé.

Circuits linéaires soumis à un échelon de tension

3

1. Influence de la résistance dans un circuit RC

On place deux condensateurs de même capacité et de même charge initiale, l'un aux bornes d'une résistance R_1 et l'autre aux bornes d'une résistance $R_2 > R_1$.

1. Comparer les durées nécessaires pour que les condensateurs se soient déchargés à 90 %.
2. La conclusion serait-elle modifiée si on considérait une décharge à 60 % ?
3. Comparer à un instant donné la tension aux bornes des condensateurs.
4. Comparer à un instant donné l'intensité du courant traversant les résistances.
5. Comparer l'énergie totale dissipée au cours de la décharge.
6. Comparer la puissance dissipée par effet Joule à un instant donné.

2. Temps de montée au cours de la charge d'un condensateur

On étudie la charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R à partir d'une source idéale de tension de force électromotrice E constante. On ferme le circuit à l'instant $t = 0$, le condensateur étant déchargé. On appelle temps de montée l'intervalle de temps entre les instants t_1 et t_2 où la tension aux bornes du condensateur vaut respectivement 10 % et 90 % de sa valeur maximale. Exprimer ce temps de montée en fonction des paramètres du problème.

3. Lampe au néon

Une lampe au néon est un dipôle de résistance infinie quand la lampe est éteinte et de résistance r quand elle est allumée. La lampe s'allume quand la tension à ses bornes

devient supérieure à la valeur E_a dite tension d'allumage. Elle s'éteint quand la tension à ses bornes devient inférieure à la valeur E_e dite tension d'extinction.

On place cette lampe au néon dans le circuit suivant :

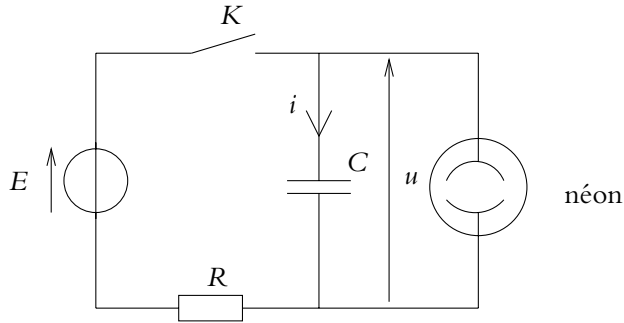


Figure 3.1

À l'instant $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur K et on suppose que le condensateur est déchargé.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes de la lampe au néon.
2. Donner l'expression de u en fonction du temps.
3. La lampe au néon peut-elle s'allumer? On exprimera la condition nécessaire de l'allumage.
4. Si la lampe au néon ne s'allume pas, tracer l'allure de u en fonction du temps.
5. Si la lampe s'allume, donner l'expression de l'instant t_0 où a lieu cet allumage.
6. Écrire alors l'équation différentielle vérifiée par u après l'allumage.
7. Déterminer l'expression de u pour $t > t_0$.
8. Le néon peut-il s'éteindre? On discutera les différentes situations envisageables selon les valeurs relatives de E_a , E_e et d'une tension dont on donnera l'expression.
9. Dans le (ou les) cas où la lampe reste allumée, tracer l'allure de u .
10. Si elle s'éteint, déterminer l'instant t_1 où se produit ce phénomène.
11. Montrer qu'alors la tension u devient périodique.
12. Donner l'expression de la période en fonction de E , E_a , E_e , r , R et C .
13. Application numérique : $E = 110$ V ; $E_a = 80$ V ; $E_e = 60$ V ; $R = 1,5$ M Ω ; $r = 0,5$ M Ω et $C = 1$ μ F. Calculer la valeur de la période.

Mécanique 1

4

Cinématique du point matériel

1. Propriétés de l'accélération

1. Un mobile dont l'accélération conserve une même direction peut-il avoir un mouvement curviligne plan ?
2. Un mobile peut-il avoir une accélération non nulle en un instant où sa vitesse est nulle ?
3. Un mobile peut-il avoir une accélération de direction variable si sa vitesse conserve toujours la même direction ?
4. Un mobile peut-il avoir une vitesse dont la direction change si son accélération est constante ?

2. Trajectoire d'un point définie en coordonnées polaires

L'équation horaire du mouvement d'un point en polaires est la suivante :
 $r = b \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ et $\theta = \omega t$.

1. Calculer la vitesse et l'accélération de ce point.
2. En déduire leur norme.
3. Déterminer l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse.

Principes de la dynamique newtonienne

5

1. Chute libre

On lance trois balles identiques avec la même vitesse initiale dans trois directions différentes : l'une vers le haut, l'autre vers le bas et la troisième à l'horizontale. Comparer le temps mis par chacune d'elles pour atteindre le sol supposé horizontal dans la zone où les balles arrivent sur le sol. On négligera l'influence des frottements de l'air.

2. Lâché d'un colis par un avion

Un avion humanitaire vole à une altitude $h = 6000$ m à la vitesse de $v_0 = 750 \text{ km.h}^{-1}$. Il laisse tomber un colis de masse m de nourriture et de médicaments en passant à la verticale d'un point A .

1. Déterminer le temps nécessaire pour que le colis atteigne le sol.
2. Quelle est la distance parcourue par l'avion pendant ce temps ?
3. A quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il arrive sur le sol ?
4. Que se passe-t-il si l'avion a initialement une trajectoire inclinée vers le bas d'un angle $\beta = 10^\circ$ par rapport à la verticale ?
5. L'avion est initialement dans les mêmes conditions qu'à la question précédente. De quelle hauteur aurait-on dû lâcher le colis pour qu'il tombe à une distance de moins de 100 m du point A ?

6

Aspects énergétiques de la dynamique du point

1. Comparaison de la vitesse de chute de deux billes

Deux billes supposées ponctuelles sont lâchées sans vitesse initiale au même instant d'un même point A , chacune partant sur une glissière différente. Les deux glissières se rejoignent en B . On néglige les frottements.

1. Comparer leurs vitesses à la sortie des glissières en supposant que les deux billes ont même masse.
2. Mêmes questions si les deux billes ont des masses différentes.

2. Freinage d'une voiture

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de 130 km.h^{-1} . On suppose qu'il y a des frottements solides entre la voiture et la route. On rappelle qu'alors la réaction de la route se décompose en une composante normale \vec{R}_N et une composante tangentielle \vec{R}_T de sens opposé à la vitesse et dont la norme vérifie : $R_T = fR_N$ en notant f le coefficient de frottement. Il faut 500 m pour que le véhicule s'immobilise lorsqu'on n'exerce aucune force de freinage.

1. Calculer la distance de freinage si la vitesse initiale est de 110 km.h^{-1} .
2. Le résultat est-il modifié si la route fait un angle α avec l'horizontale ?

Oscillateurs harmoniques et amortis par frottement fluide

7

1. Oscillations d'un point lié à un ressort

Soit un ressort de raideur k auquel on suspend une masse m . On l'écarte d'une distance d par rapport à sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

1. La période des oscillations dépend-elle de la masse m ?
2. Peut-on espérer augmenter la vitesse de la masse lorsqu'elle passe par sa position d'équilibre en modifiant la valeur de m ?
3. Même question si on modifie la distance d .
4. Doit-on fournir plus d'énergie pour écarter la masse d'une distance d si on modifie la valeur de m ?

2. Régime apériodique

Un point M de masse m est accrochée à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le point M est astreint à un déplacement horizontal sur l'axe Ox . Un dispositif de freinage exerce une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de M .

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Quelle est la condition pour avoir une solution apériodique ?
3. On lance M depuis sa position d'équilibre avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. Déterminer alors la solution $x(t)$

3. Oscillations au voisinage d'une bifurcation mécanique d'après CCP TSI 2000

L'objet de ce problème est l'analyse des oscillations d'un système mécanique au voisinage d'une bifurcation à savoir d'une modification du nombre de positions d'équilibre, d'un changement de stabilité des positions d'équilibre...

Le système considéré est constitué d'un point matériel M de masse m fixé à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k . L'autre extrémité R du ressort est fixée à une altitude l par rapport à la masse M . M peut se déplacer sans frottement le long d'une tige suivant l'axe horizontal noté Ox dont l'origine O est située à la verticale de R . On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

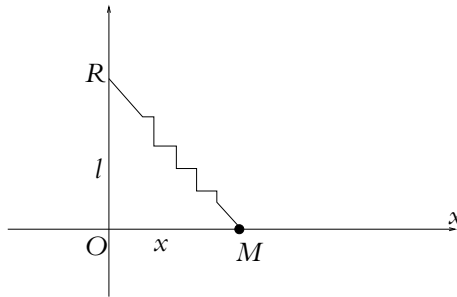


Figure 7.1

1. Étude qualitative des positions d'équilibre :

Cette question doit être résolue sans aucun calcul.

a) Initialement le point M se trouve en O avec $l = l_0$. On rapproche la tige OM de R , le plan OMR étant fixe. Discuter qualitativement le nombre de positions d'équilibre et leur stabilité.

b) Même question si on éloigne la tige OM de R .

2. Étude de l'énergie potentielle :

a) On se place maintenant à une distance l quelconque donnée. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle du système à partir du calcul du travail élémentaire des forces.

b) Retrouver ce résultat en explicitant l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.

c) Dans le cas général où l'énergie potentielle Ep d'un point matériel ne dépend que d'un paramètre x , quelles sont les conditions portant sur Ep pour avoir une position d'équilibre stable ? Même question pour une position d'équilibre instable. On donnera l'allure de $Ep(x)$ dans les deux situations.

d) Déterminer, pour le système considéré, les positions d'équilibre en distinguant les cas $l > l_0$ et $l < l_0$.

e) Pour chacune des positions d'équilibre trouvée, étudier sa stabilité.

f) Tracer sur un même graphe les positions d'équilibre en fonction de l en précisant leur stabilité. Justifier le nom de bifurcation fourche donné à cette situation.

g) On dit également qu'il s'agit d'une bifurcation à brisure de symétrie. Justifier cette expression.

3. Pulsation au voisinage d'une position d'équilibre stable :

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point M , montrer qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable, le mouvement est assimilable à celui d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω en fonction de m et de l'énergie potentielle ou de ses dérivées.

b) Expliciter l'expression de ω^2 en fonction de k , m , l et l_0 en distinguant les cas $l > l_0$ et $l < l_0$.

c) Tracer ω^2 en fonction de l .

d) Etablir qu'au voisinage de $l = l_0$, la pulsation peut s'écrire sous la forme :

$$\omega = \begin{cases} a(l - l_0)^\alpha & \text{si } l > l_0 \\ b(l - l_0)^\beta & \text{si } l < l_0 \end{cases}$$

On donnera les expressions de a , b , α et β .

e) On s'intéresse maintenant au cas limite $l = l_0$ en supposant qu'on lâche M sans vitesse initiale d'une position x_0 .

Montrer que le mouvement est périodique.

f) Toujours dans le cas où $l = l_0$, exprimer la vitesse de la masse en fonction de x , x_0 , k , m et l_0 . On utilisera une approche énergétique pour ce faire.

g) On suppose que $x_0 \ll l_0$. Exprimer la période des oscillations en fonction de ω_0 , x_0 , l_0 et de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

h) Peut-on dire que l'oscillateur est alors harmonique ?

4. Discussion :

a) Le point matériel M est maintenant relié à un autre ressort identique au premier fixé sur l'axe OR à une distance l de O mais symétriquement à R par rapport à Ox . Décrire les modifications à apporter par rapport à l'analyse précédente.

b) On suppose maintenant que M n'est attaché qu'à un seul ressort mais que la tige Ox n'est plus tout à fait horizontale mais inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

Comment est modifiée l'expression de l'énergie potentielle ?

- c) Dessiner l'allure (sans forcément expliciter toutes les valeurs particulières) de la nouvelle énergie potentielle Ep^* si $l > l_0$. On justifiera l'allure.
- d) Même question si $l < l_0$.
- e) Qu'en résulte-t-il pour les positions d'équilibre ?

Optique

9

Réfraction, réflexion

1. Vision double dans un aquarium

Une personne qui se place au coin d'un aquarium peut voir deux fois le même poisson si ce dernier se trouve à une certaine position, que cet exercice propose de déterminer. Pour simplifier les calculs, on suppose que l'angle formé entre les deux faces de l'aquarium est un angle droit et que l'observateur H et le poisson P se trouvent sur la bissectrice de l'angle.

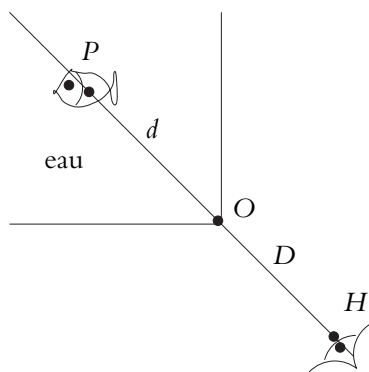


Figure 9.1

H est à une distance $D = 50$ cm du coin de l'aquarium et P à une distance d . L'air est d'indice $n_a = 1$ et l'eau d'indice $n = 1,33$. L'observateur voit les deux images du poisson symétriquement par rapport à la bissectrice sous un angle $\alpha = 6^\circ$.

1. Déterminer l'angle que font les rayons vus par H avec les normales aux faces de l'aquarium.

2. Déterminer l'angle que font les rayons issus de P par rapport à la bissectrice.
3. Calculer la distance d .

2. Fibre optique à saut d'indice d'après E4A PSI 2000

Le guidage de la lumière peut être assuré par des fibres optiques. Une fibre optique est constituée d'un cylindre de verre (ou de plastique) appelé cœur, entouré d'une gaine transparente d'indice de réfraction plus faible. La gaine contribue non seulement aux propriétés mécaniques de la fibre mais évite aussi les fuites de lumière vers d'autres fibres en cas de contact. Actuellement le diamètre du cœur d'une fibre varie de 3 à 200 μm selon ses propriétés et le diamètre extérieur de la gaine peut atteindre 400 μm .

1. Lois de Snell-Descartes :

On considère un dioptre de surface S séparant deux milieux homogènes d'indice de réfraction différents n_1 et n_2 . Un rayon lumineux rectiligne incident arrivant sur le dioptre en un point I donne naissance à un rayon réfléchi dans le milieu 1 et à un rayon réfracté dans le milieu 2. On note \vec{n} le vecteur normal à S en I dont le sens est défini de 2 vers 1.

- a) Définir le plan d'incidence.
- b) Énoncer les lois définissant le rayon réfléchi.
- c) Même question pour le rayon réfracté.
- d) Préciser la condition à vérifier pour que le rayon réfracté existe. Que se passe-t-il si cette condition n'est pas respectée ?

2. Fibre à saut d'indice :

On considère une fibre optique constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice n_2 inférieur à n_1 et de rayon b . Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires à l'axe du cylindre Oz formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 qui sera pris égal à l'indice de l'air pour les applications numériques.

- a) Un rayon lumineux arrive en un point I sur la face d'entrée de la fibre. À quelle(s) condition(s) ce rayon a-t-il un trajet plan dans la fibre ?
- b) On suppose que cette(ces) condition(s) est (sont) respectée(s). Le rayon arrive sur le cœur dans le plan Oxz . On appelle i l'angle d'incidence et θ l'angle de réfraction sur la surface d'entrée de la fibre. Déterminer en fonction de n_0 , n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur. On appelle angle d'acceptance i_a de la fibre la valeur maximale de i . Donner l'expression de i_a .

- c) On appelle ouverture numérique ON de la fibre la quantité $ON = n_0 \sin i_a$. Exprimer ON en fonction de n_1 et n_2 .
- d) Calculer la valeur de ON pour $n_1 = 1,456$ (silice) et $n_2 = 1,410$ (silicone).
- e) Déterminer la valeur maximale de i_a pour une fibre à base d'arséniure de gallium pour laquelle $n_1 = 3,900$ et $n_2 = 3,000$. En déduire la valeur de ON .
- f) L'intensité lumineuse diminue le long de la fibre à cause de l'absorption et de la diffusion du matériau constitutif du cœur et des impuretés (essentiellement Fe^{2+} , Cu^{2+} , OH^-) qu'il contient. On mesure l'atténuation par km de fibres en décibels par :

$$\mathcal{A} = \frac{10}{l} \log_{10} \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

en notant l la longueur de la fibre en km, ϕ_1 et ϕ_2 les flux lumineux dans les plans perpendiculaires à Oz indicés par 1 et 2. On arrive à réaliser des fibres dans lesquelles le flux lumineux après un parcours de 50 km dans la fibre représente 10 % du flux incident. Calculer l'atténuation de telles fibres.

3. Applications :

- a) Le but d'un fibroscope est de permettre à un observateur de "voir" dans des endroits inaccessibles du corps humain. Un fibroscope à fibres est constitué de deux faisceaux de fibres : l'un dont les fibres éclairent le site à observer, l'autre dont les fibres assure le retour vers l'extérieur de la lumière émise par la cible éclairée. Chaque faisceau de fibres contient entre 10^4 et 10^6 fibres. Quelles peuvent être les difficultés technologiques posées par un tel système ?
- b) Au cours de la transmission, les signaux lumineux subissent un élargissement temporel. On considère une fibre du type de celle étudiée précédemment et on suppose que la lumière incidente porteuse d'informations définit un cône de sommet O et de demi-angle au sommet i_a . Calculer $\delta\tau$, différence des durées maximale et minimale de propagation dans le cœur, en fonction de la longueur L de la fibre, des indices n_1 et n_2 et de la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- c) Application numérique : $L = 1,00 \text{ km}$, donner la valeur de $\delta\tau$.
- d) On envoie des impulsions lumineuses d'une durée T_1 à intervalle régulier T . Quelle valeur minimale de T faut-il choisir pour que les impulsions soient distinctes à la sortie de la fibre ? Proposer une définition de la bande passante en bits (ou nombre d'impulsions) par seconde. Comparer la valeur de la bande passante obtenue ici avec celle d'un téléphone portable (64 bits par seconde) et celle de la télévision (100 Mbits par seconde).

Stigmatisme et aplanétisme. Dioptries et miroirs

10

1. PÉRISCOPE

Un périscopes est un système optique très simple formé de deux miroirs plans qui permet par exemple d'observer un défilé par dessus une foule. Les périscopes de sous-marins sont des systèmes optiques plus compliqués. On suppose dans un premier temps que les plans des miroirs font un angle de 45° avec la verticale. L'objet AB observé est lui-aussi vertical et est distant de D du centre O du miroir supérieur. Le distance OO' entre les deux centres des miroirs est d .

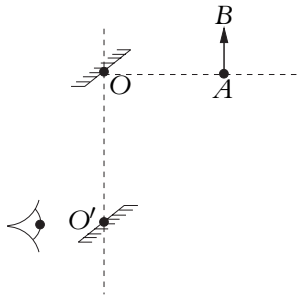


Figure 10.1

1. **a)** Déterminer à quelle distance du centre O' du miroir du bas se trouve l'image de A par le système.
1. **b)** Déterminer l'orientation de l'image de AB par le périscopes.
2. Est-ce que les deux grandeurs calculées précédemment dépendent de l'angle que font les miroirs avec la verticale ?

11

Lentilles minces sphériques

1. Loupe

Un petit objet de $0,1\text{ mm}$ est observé à travers une loupe assimilée à une lentille mince de 10δ . L'œil de l'observateur est placé au foyer image de la lentille et voit une image de 1 mm .

1. Y-a-t'il un avantage à placer l'œil au foyer image ?
2. Déterminer la distance objet-lentille.

2. Doublet lentille - miroir

Soit le système formé par l'association d'une lentille mince \mathcal{L}_1 de foyers image F'_1 et objet F_1 et de distance focale $f'_1 = 3a$ et d'un miroir concave \mathcal{M} de foyers image F'_2 et objet F_2 et de distance focale $f'_2 = -a$.

1. Déterminer graphiquement la position du foyer image F' du système.
2. Retrouver ce résultat par un calcul en déterminant l'expression de $\overline{F'_2 F'}$.
3. Déterminer graphiquement la position du foyer objet F du système optique formé par \mathcal{L}_1 puis \mathcal{L}_2 .
4. Retrouver ce résultat par un calcul en déterminant l'expression de $\overline{F_1 F}$.

DEUXIÈME PÉRIODE

Électrocinétique 2

15

Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

1. Comparaisons d'impédances

Comparer le module de l'impédance totale $|\underline{Z}|$ et R lorsqu'on branche un résistor de résistance R :

1. en série avec un condensateur de capacité C ,
2. en parallèle avec le même condensateur,
3. en série avec une bobine d'inductance L ,
4. en parallèle avec la même bobine.

Circuit R, L, C série en régime sinusoïdal forcé et résonances

16

1. Étude qualitative de l'impédance d'un dipôle

Donner qualitativement l'allure des variations avec la fréquence de l'impédance (en module) du dipôle suivant :

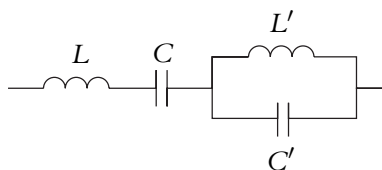


Figure 16.1

Que se passe-t-il si on tient compte des résistances internes des composants ?

2. Étude d'une résonance (2)

On considère le circuit suivant :

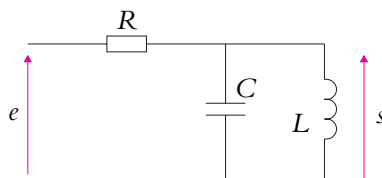


Figure 16.2

où e est une tension sinusoïdale de pulsation ω .

1. Donner l'expression complexe de la tension s .
2. Établir qu'il y a un phénomène de résonance pour la tension s . On précisera la pulsation à laquelle ce phénomène se produit.
3. Déterminer la bande passante correspondante.
4. En déduire l'expression du facteur de qualité.
5. Que peut-on dire du déphasage à la résonance de la tension s ?
6. Comparer cette résonance avec la résonance en intensité d'un circuit R, L, C série.

1. Modélisation d'une installation

On peut modéliser une installation par un dipôle D constitué d'une résistance r en série avec d'une bobine d'inductance L , consommant une puissance $\mathcal{P} = 1 \text{ kW}$ et ayant un facteur de puissance $\cos \phi = 0,7$, en parallèle avec une résistance $R = 100 \, \Omega$. La tension d'alimentation a pour valeur efficace $U = 240 \text{ V}$ et pour fréquence 50 Hz .

1. Déterminer (littéralement et numériquement) le dipôle à brancher en parallèle sur l'ensemble pour obtenir un facteur de puissance égal à 1.
2. Montrer que l'ensemble est équivalent à une résistance R' à déterminer.

2. Rendement maximal

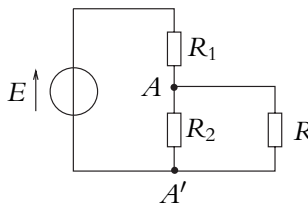


Figure 17.1

1. Déterminer le modèle de Thévenin équivalent entre A et A' aux bornes de R .
2. Calculer la puissance dissipée dans R .
3. Déterminer en fonction de E , R_1 et R_2 la valeur de R pour que cette puissance soit maximale.

4. Exprimer la puissance fournie par la source de tension.
5. En déduire le rendement de puissance η de ce circuit défini comme le rapport entre la puissance dissipée dans R et la puissance fournie par la source de tension.
6. Déterminer la valeur de R pour que ce rendement soit maximal.
7. Conclure.

3. Détermination des éléments d'une installation

Le circuit représenté ci-dessous est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 240$ V et de fréquence 50 Hz. La valeur de l'inductance est $L = 1$ H. On sait que :

- pour $R = R_0 = 12 \Omega$, la puissance P est maximale et vaut P_M ;
- pour une autre valeur de la résistance $R_1 < R_0$, $\cos \phi = 1$ et $P_1 = 1000$ W.

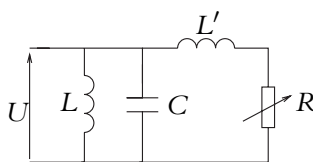


Figure 17.2

Calculer L' , P_M , R_1 et C .

Réponse fréquentielle d'un circuit linéaire

- Filtres linéaires du premier et du second ordre

18

1. Filtres RC

On considère les deux filtres ci-dessous.

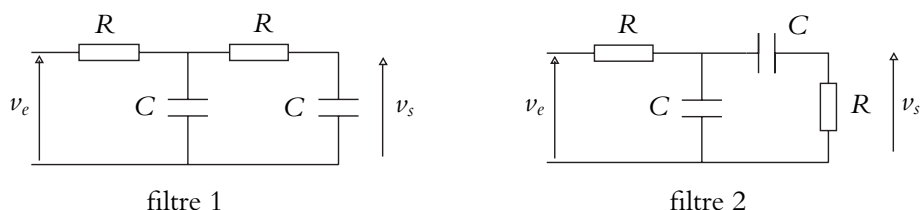


Figure 18.1

1. a) Déterminer les comportements à très hautes fréquences (THF) et très basses fréquences (TBF) du filtre 1.
- b) Calculer sa fonction de transfert.
- c) Tracer les diagrammes de Bode en gain et en phase.
2. Mêmes questions pour le filtre 2.

2. Étude expérimentale d'un filtre passe-bas, influence de l'oscilloscope

On souhaite effectuer l'étude expérimentale d'un filtre passe-bas du premier ordre R , C .

1. Calculer la fréquence de coupure du filtre si on utilise une résistance $R = 680 \text{ k}\Omega$ et une capacité $C = 47 \text{ pF}$.

2. Lors de l'étude expérimentale, on mesure la tension d'entrée et la tension de sortie du filtre à l'oscilloscope, la liaison entre le circuit et l'entrée de l'oscilloscope est assurée par un câble coaxial. On s'aperçoit que les valeurs mesurées ne correspondent pas aux résultats théoriques.

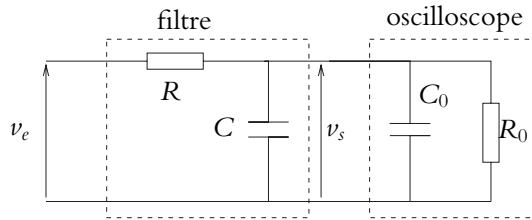


Figure 18.2

Pour expliquer cet écart, on modélise l'entrée de l'oscilloscope par l'association en parallèle d'une capacité $C_0 = 30 \text{ pF}$ et d'une résistance $R_0 = 1 \text{ M}\Omega$ (Cf. chapitre sur l'instrumentation électrique).

Calculer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$. La nature du filtre est-elle changée ?

3. Dédire du calcul précédent la nouvelle fréquence de coupure à -3 dB , le gain G_c en dB pour cette fréquence et le gain G_0 en continu. Préciser leurs valeurs numériques.

4. L'expérience donne pour la fréquence précédente $G_c = -10,2 \text{ dB}$ et en continu $G_0 = -4,5 \text{ dB}$. Conclure.

5. On modélise le câble coaxial par une capacité en parallèle sur l'entrée de l'oscilloscope. Calculer la valeur de cette capacité.

Étude expérimentale de quelques filtres

19

1. Sonde d'oscilloscope

Une sonde est un dispositif permettant de réduire l'amplitude d'un signal pour pouvoir l'envoyer sur un oscilloscope et l'analyser. Il faut donc que l'allure du signal ne soit pas modifiée par le dispositif. Il est nécessaire de régler le dispositif pour qu'il en soit ainsi. Certains oscilloscopes disposent de sondes intégrées ; sinon on peut insérer une sonde entre le signal à observer et l'entrée de l'oscilloscope.

1. Comment peut-on expérimentalement effectuer un réglage de la sonde avant de l'utiliser ?
2. Une sonde peut être modélisée par le circuit suivant : la tension à analyser est la tension e et la tension envoyée à l'entrée de l'oscilloscope la tension s .

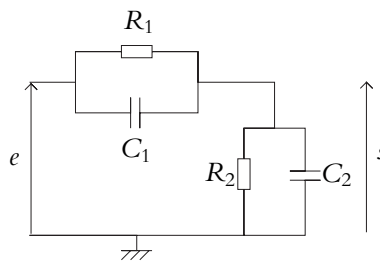


Figure 19.1

Établir la fonction de transfert d'une telle sonde.

3. Quelle(s) condition(s) doivent vérifier les valeurs des résistances et des capacités lorsque la sonde est réglée ?
4. Que peut-on alors dire de la fonction de transfert du dispositif ?

2. Filtre passe-bas, d'après CCP M 92

Ce problème utilise des connaissances sur les amplificateurs opérationnels qui sont développées dans un chapitre ultérieur auquel le lecteur se reportera pour résoudre le problème.

Soit le montage :

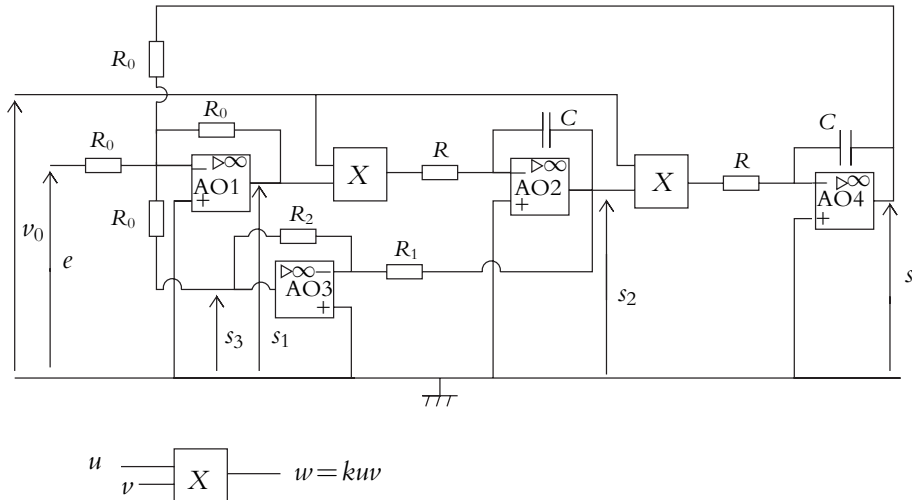


Figure 19.2

Les différents amplificateurs opérationnels seront considérés comme parfaits et fonctionnant en régime linéaire. k est une constante qui vaut 1 en unités SI, e est l'entrée du montage qui possède trois sorties s , s_1 et s_2 . La tension v_0 est une tension constante.

1. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{s}{e}$ en fonction de R , R_1 , R_2 , k , v_0 , C et ω .
2. La mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{-1}{1 + 2j\delta\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On précisera les expressions de ω_0 et δ en fonction de R , R_1 , R_2 , k , v_0 et C ainsi que la nature du filtre obtenu.

3. Donner les expressions du gain et du déphasage en fonction de la fréquence.
4. On suppose dans cette question que $\delta = 1$. Déterminer la bande passante du filtre et en déduire qu'elle est réglable à l'aide d'une grandeur électrique qu'on précisera. On admettra que ce résultat est valable pour toutes les valeurs de δ .

5. Soit un créneau de période T défini par :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{si } \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \\ E & \text{si } \frac{3T}{4} < t < T \end{cases}$$

Représenter $e(t)$.

6. La décomposition en séries de Fourier de $e(t)$ est :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos \left((2p+1) \frac{2\pi t}{T} \right)$$

Déduire des études précédentes l'expression générale de $s(t)$.

7. On donne $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$, $v_0 = 1 \text{ V}$. Que peut-on dire de la pulsation $\omega_e = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ de $e(t)$ par rapport à ω_0 ?
8. Dans ces conditions, comment peut-on simplifier l'expression du déphasage ?
9. On suppose pour cette question que $\delta = 1$. On fait l'hypothèse que le créneau est correctement décrit par la somme partielle d'ordre 20 de son développement en séries de Fourier. Calculer les valeurs du gain et du déphasage pour les différents termes de la somme.
10. En déduire que $s(t)$ correspond à une inversion de $e(t)$ et à un retard négligeable.
11. Tracer sur un même graphique $e(t)$ et $s(t)$.

20

T.P. Cours : Instrumentation électrique

1. Mesure des tensions extrêmes d'un signal créneau

On dispose d'un signal créneau prenant la valeur A sur une demi-période et la valeur B sur l'autre. Comment peut-on déterminer A et B si on ne dispose que d'un multimètre TRMS ?

T.P. Cours : Amplificateur opérationnel

21

1. Générateur de courant

1. On considère le montage ci-dessous où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal. Montrer que l'expression du courant traversant la résistance R_C en régime linéaire est :

$$I = \frac{R_1 R_3 U}{R_1 R_2 R_3 + R_C (R_1 R_3 - R_2 R_4)}$$

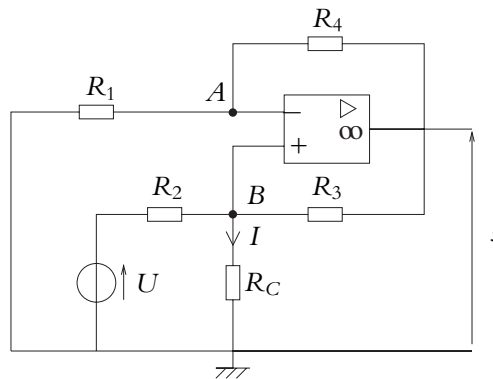


Figure 21.1

2. À quelle condition le courant I est-il indépendant de R_C ?
3. Montrer alors que lorsque toutes les résistances sont égales à R , la condition de fonctionnement en régime linéaire est :

$$-\frac{V_{\text{sat}}}{2} < \frac{R_C}{R} U < \frac{V_{\text{sat}}}{2}$$

2. Générateur de signaux triangulaires

1. On considère le circuit représenté sur la figure ci-dessous. On suppose que l'amplificateur opérationnel est idéal et que ses tensions de saturation sont symétriques : $\pm V_{\text{sat}}$. Fonctionne-t-il en régime linéaire ou non linéaire ?

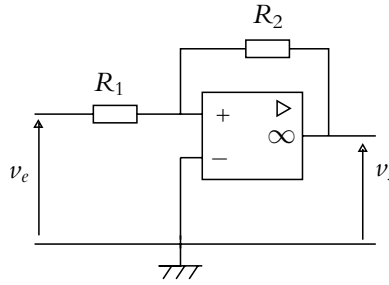


Figure 21.2

2. Déterminer la caractéristique de transfert V_s en fonction de V_e . On posera :

$$V_B = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}.$$

3. On ajoute au montage précédent un montage intégrateur (on suppose que l'amplificateur opérationnel utilisé dans ce montage est idéal) pour réaliser le circuit ci-dessous.

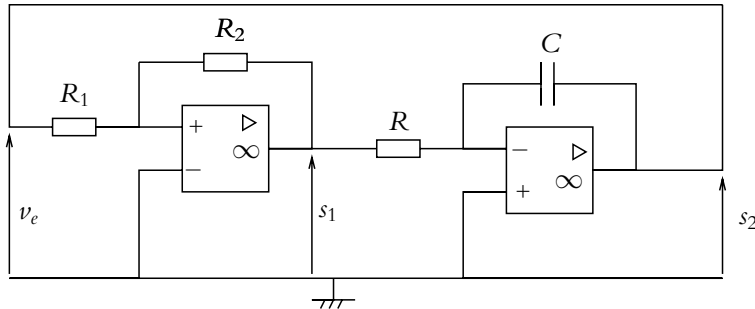


Figure 21.3

Montrer que ce circuit génère en s_2 des signaux triangulaires et en s_1 des signaux carrés.

4. Calculer la période de ces signaux. On posera $\tau = RC$.

3. Circuit d'alimentation d'un télémètre d'après Centrale PSI 2001

Les amplificateurs opérationnels utilisés sont considérés comme idéaux. Ils fonctionnent en régime saturé. Les tensions de saturation en sortie sont notées $+E$ et $-E$ avec $E > 0$.

1. Oscillateur commandé :

On considère le montage ci-dessous appelé M .

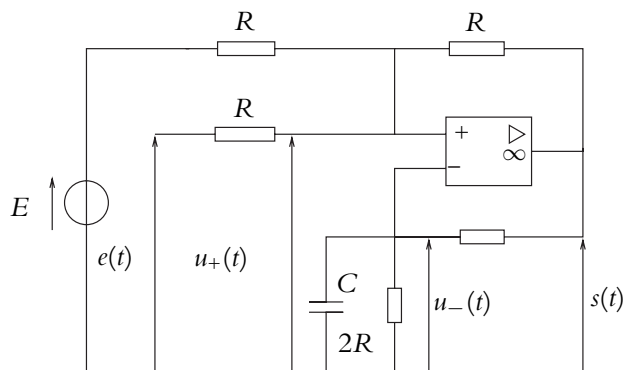


Figure 21.4

- Déterminer l'expression de la tension $u_+(t)$ en fonction de $e(t)$, $s(t)$ et E .
- Fonctionnement en mode bloqué : on suppose que $e(t) = -E$. Montrer que la tension de sortie $s(t)$ en régime établi (indépendant du temps) conserve toujours la même valeur que l'on déterminera.
- Fonctionnement en mode multivibrateur : on suppose que $e(t) = +E$.
 - Montrer que la tension de sortie $s(t)$ ne peut garder une valeur constante (E ou $-E$) lorsque le régime est établi.
 - Déterminer l'équation différentielle liant $u_-(t)$ à $s(t)$. On posera $\tau_a = \frac{2}{3}RC$.
 - On choisit l'origine des temps telle que $u_-(0) = -\frac{E}{3}$ et $s(0) = +E$. Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression de $u_-(t)$ pour $u_-(t) < \frac{E}{3}$. Que se passe-t-il à l'instant t_0 où $u_-(t_0) = \frac{E}{3}$? Que se passe-t-il après?
 - Tracer soigneusement, pour une période du signal de sortie, les graphes de $u_-(t)$ et $s(t)$.
 - En déduire la période T de $s(t)$ en fonction de τ_a .

2. Générateur d'impulsions :

On considère le montage ci-dessous appelé M' .

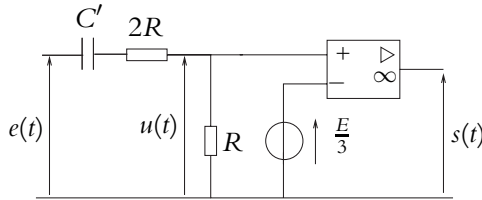


Figure 21.5

- a) On suppose que la tension $e(t)$ est constante. Montrer que le montage possède, en régime établi (indépendant du temps), un seul état stable et donner la valeur de $s(t)$ correspondante.
 - b) En régime variable, déterminer l'équation différentielle liant $u(t)$ à $e(t)$. On posera $\tau_m = 3RC'$.
 - c) On suppose qu'à l'instant $t = 0^-$, $e(0^-) = -E$ et que le régime établi est atteint. À l'instant $t = 0$, l'entrée bascule et $e(t)$ prend la valeur $e(0^+) = +E$. Déterminer la valeur de la discontinuité $u(0^+) - u(0^-)$ de la tension $u(t)$ à l'instant $t = 0$.
 - d) Déterminer l'évolution de $u(t)$ à partir de cet instant.
 - e) La tension d'entrée $e(t)$ est un signal rectangulaire symétrique prenant les valeurs $+E$ et $-E$ et de période T' . Tracer soigneusement sur le même graphique, pour $T' = 10\tau_m$ et pendant une période de $e(t)$, les tensions $e(t)$, $u(t)$ et $s(t)$.
 - f) Donner la largeur T'_2 des impulsions de sortie correspondantes en fonction de τ_m .
3. Association des circuits précédents.

- a) Montrer comment, en combinant en série un premier circuit M_1 de type M , un circuit M' et un second circuit M_2 de type M , on peut réaliser des salves comme sur la figure ci-dessous.

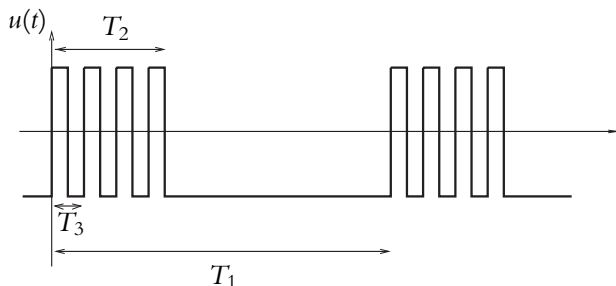


Figure 21.6

b) Application numérique : on prend $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ pour tous les circuits. Avec les notations de la figure précédente, $T_1 = 60 \text{ ms}$, $T_2 = 4 \text{ ms}$ et $T_3 = 0,25 \text{ ms}$. Déterminer les valeurs numériques qu'il faut donner aux différentes capacités (C_1 pour M_1 , C pour M' et C_2 pour M_2).

22

Étude expérimentale de quelques circuits à diode (PCSI)

1. Diode Zéner

Une diode Zéner (dont la figure 22.1 donne les symboles) admet la caractéristique linéarisée de la figure 22.2.

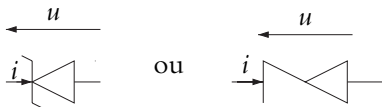


Figure 22.1 Symbole d'une diode Zéner.

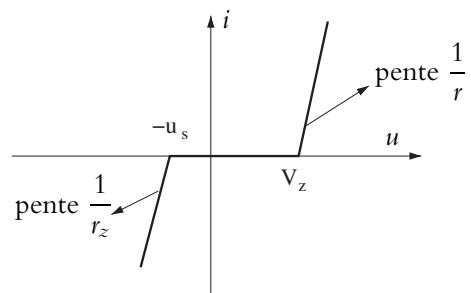


Figure 22.2 Caractéristique d'une diode Zéner.

1. Déterminer les modèles de Thévenin équivalents au dipôle dans chacune des trois zones de la caractéristique.
2. Dans la suite, on suppose que $r = 0$ et $r_z = 0$. On s'intéresse au circuit de la figure 22.3 où R_u représente une résistance de charge.

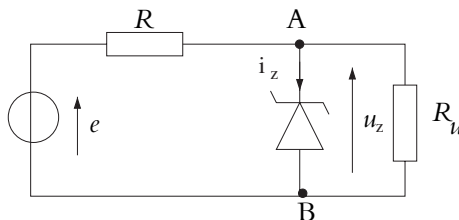


Figure 22.3

- a) Par transformations successives entre modèles de Thévenin et de Norton, déterminer le modèle de Thévenin équivalent à e , R et R_u .
- b) Déterminer la condition sur e pour que la tension u_z soit égale à V_z .

2. Circuit LC et diode en série

On étudie le circuit ci-contre. Avant la fermeture de l'interrupteur, la tension u est égale à U_0 . La diode est supposée parfaite. Le générateur délivre une tension continue $E > U_0$. Un résistor de faible résistance est branché en série avec la bobine d'inductance L et le condensateur de capacité C pour permettre de visualiser l'intensité parcourant le circuit à l'oscilloscope. On n'a pas représenté ce résistor sur le schéma car la valeur de sa résistance est faible et le résistor ne modifie pas le comportement du circuit. On considère dans un premier temps que le condensateur de capacité C est déchargé ($U_0 = 0$).

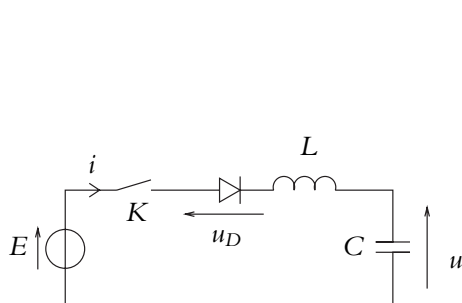


Figure 22.4

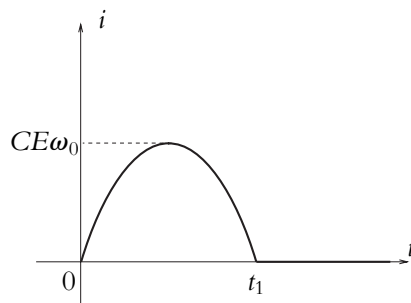


Figure 22.5

Après fermeture de l'interrupteur K , on observe à l'oscilloscope numérique le signal i de la figure ci-dessus.

1. a) Quel est l'état de la diode entre $t = 0$ et t_1 ?
 - b) Établir l'équation différentielle vérifiée par u sur l'intervalle de temps $[0, t_1]$.
 - c) En déduire les expressions de u et i sur cet intervalle.
 - d) Déterminer l'expression de t_1 .
 - e) Quel est l'état de la diode pour $t > t_1$? Justifier.
 - f) Quelle est alors l'évolution de u ? Représenter u en fonction du temps.
2. Sachant qu'on observe la même allure de l'intensité i lorsque $U_0 < 0$ et $E = 0$, appliquer l'étude précédente au cas où $U_0 = 0$. Représenter u en fonction du temps.

3. Diviseur de tension disymétrique

On considère le montage ci-contre où $Q = 1\text{ k}\Omega$, P est un potentiomètre de $1\text{ k}\Omega$ et x est réglable de 0 à 1.

Les diodes D_1 et D_2 sont idéales.

3. a) Dans un premier temps, on suppose s positive. Montrer que D_1 ne peut pas être passante et que D_2 l'est forcément.

b) En déduire la relation entre s et e .

4. On suppose s négative. Déterminer la relation entre s et e .

5. Donner l'allure de la caractéristique e en fonction de s . Quel est l'intérêt d'utiliser un tel dispositif?

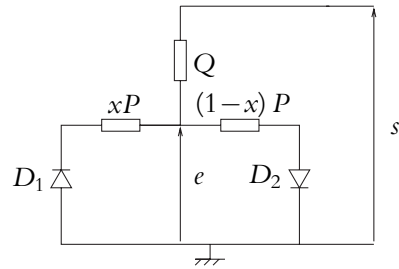


Figure 22.6

Mécanique 2

23

Compléments de cinématique du point matériel

1. Sortie de fourmilière

Pour sortir de la fourmilière, une fourmi doit emprunter un “couloir” dont l’équation en coordonnées cartésiennes est :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = h \frac{\theta}{2\pi} \end{cases}$$

où R et h sont des constantes. On suppose que la fourmi se déplace à vitesse constante.

1. Préciser la nature de la courbe.
2. Exprimer les composantes de la vitesse de la fourmi en fonction de R , θ , h et $\dot{\theta}$. En déduire l’expression du module de la vitesse.
3. Que peut-on en déduire concernant $\dot{\theta}$?
4. Montrer que l’angle entre le vecteur vitesse et $\overrightarrow{u_z}$ est constant. En déduire la nature de l’hodographe.

Oscillations mécaniques forcées

24

1. Oscillateur soumis à une excitation linéaire

Une masse m est attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée en un point immobile. La masse glisse sans frottement sur un axe horizontal et est soumise à une excitation $\vec{F}(t)$ le long de cet axe.

1. Écrire l'équation du mouvement.
2. On suppose que l'excitation a un module nul pour $t < 0$ et croît linéairement jusqu'à une valeur F_1 qu'elle atteint à $t = \tau$. Sachant qu'initialement la masse a pour abscisse 0 et une vitesse nulle, écrire l'équation horaire du mouvement de la masse.
3. Analyser le mouvement de masse m .
4. Que peut modéliser une telle forme d'excitation ?

25

Théorème du moment cinétique

1. Oscillateur spatial

Soit un point matériel M de masse m soumis à une force $\vec{f} = -k\overrightarrow{OM}$ où O est un point fixe.

1. Montrer que le moment cinétique de M par rapport à O est constant.
2. En déduire que le mouvement est plan.
3. Établir que le mouvement est périodique. On notera ω la pulsation associée.
4. Donner l'expression de \overrightarrow{OM} en fonction de ω , de la position initiale \overrightarrow{OM}_0 et de la vitesse initiale \vec{v}_0 .
5. En supposant que \vec{v}_0 et \overrightarrow{OM}_0 sont perpendiculaires, donner la nature de la trajectoire.
6. À quelle(s) condition(s) a-t-on une trajectoire circulaire ?

2. Un esquimau sur son igloo

Un esquimau est assis au sommet de son igloo qu'on supposera assimilable à une demi-sphère de centre O et de rayon a . À l'instant $t = 0$, une rafale de vent le décale légèrement du sommet. Étudier son mouvement en appliquant :

1. le principe fondamental de la dynamique,
2. le théorème du moment cinétique,
3. le théorème de l'énergie cinétique.

On justifiera l'utilisation des méthodes et leur(s) éventuel(s) inconvénient(s) dans la résolution du problème.

3. Mouvement d'une particule en contact avec une cuvette parabolique, d'après C.C.P. MP 1999

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M , de masse m , sous l'action du champ de pesanteur \vec{g} , à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire du référentiel terrestre \mathcal{R} (O , \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z) supposé galiléen. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution \mathcal{P} , d'axe vertical ascendant Oz , dont l'équation en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) est $\rho^2 - az = 0$ avec $a > 0$.

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M se déplace sans frottement sur \mathcal{P} . Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M , la base de projection étant $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées ρ et z de M vérifient $z \geq \frac{\rho^2}{a}$.

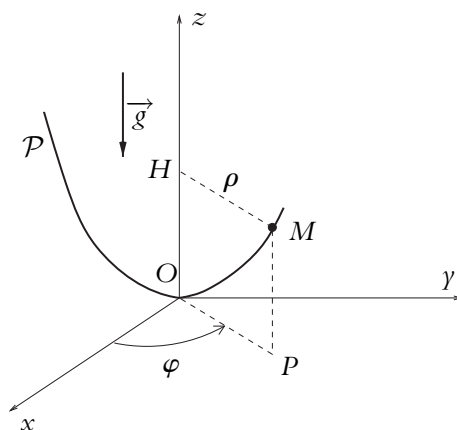


Figure 25.1

1. Moment cinétique

- Exprimer, dans la base \mathcal{B}_c , la vitesse de M par rapport à \mathcal{R} .
- Quelle est l'expression, dans la base \mathcal{B}_c , du moment cinétique de M en O , \vec{L}_O , par rapport à \mathcal{R} ? En déduire sa projection selon l'axe Oz .
- Montrer que la réaction \vec{R} qu'exerce \mathcal{P} sur M est contenue dans le plan OHP . En appliquant le théorème du moment cinétique en O , sous forme vectorielle, montrer que la projection de \vec{L}_O sur Oz se conserve au cours du temps. Expliciter cette relation de conservation en fonction de ρ et de φ . Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par L cette constante.

2. Énergie

- Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique de la particule M par rapport à \mathcal{R} ?

b) Justifier l'existence d'une énergie potentielle Ep dont dérivent les forces extérieures agissant sur M . Exprimer Ep en fonction de ρ en supposant que $Ep(0) = 0$.

c) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

3. Discussion générale du mouvement

a) Dédire de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 G(\rho) + Ep_{\text{eff}}(\rho) = E_m$$

où $G(\rho)$ est positif et sans dimension et où Ep_{eff} est une énergie potentielle effective. Expliciter les expressions de $G(\rho)$ et Ep_{eff} en fonction de ρ , a , L , m et g .

b) Représenter avec soin le graphe de Ep_{eff} . Montrer que Ep_{eff} passe par un minimum pour une valeur ρ_m de ρ qu'on exprimera en fonction de L , m , a et g , intensité du champ de pesanteur.

c) Discuter, à l'aide du graphe Ep_{eff} , la nature du mouvement de M . En déduire que la trajectoire de M sur \mathcal{P} est nécessairement tracée sur une région de \mathcal{P} limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

4. Étude de quelques mouvements particuliers

a) À quelle condition sur L la trajectoire de M sur \mathcal{P} est-elle une parabole méridienne ?

b) Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur \mathcal{P} soit un cercle horizontal.

c) Une petite perturbation écarte légèrement le point M de la position $\rho = \rho_m$ pour laquelle $Ep_{\text{eff}}(\rho)$ est minimale. Montrer que le mouvement, décrit par $\varepsilon = \rho - \rho_m$, est un mouvement oscillatoire dont on calculera la période dans le cas où $\rho_m = 1$ m et $a = 2$ m. On rappelle que $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

5. L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales. Commenter à l'aide du graphe $Ep_{\text{eff}}(\rho)$.

Changement de référentiel : aspects cinématiques

26

1. Rameur et marcheur

Un rameur part d'un point A d'un fleuve, va jusqu'à un point B et revient en A . Le fleuve coule de A vers B à la vitesse \vec{v} constante. Le rameur rame de manière à avoir une vitesse constante \vec{u} par rapport au fleuve parallèlement au courant.

Un de ses amis marche à la vitesse \vec{u} au bord du rivage et effectue le même parcours.

1. Arrivent-ils ensemble en B ? Justifier.
2. Sont-ils de retour en A au même instant? Justifier.

2. Jet de ballon dans un escalier

Un enfant jette son ballon du haut de la cage d'escalier pendant que son camarade le rejoint en utilisant l'ascenseur.

1. Les enfants mesurent-ils la même durée de chute du ballon?
2. La vitesse du ballon est-elle la même pour les deux enfants à un instant donné?
3. Même question pour l'accélération en supposant que la vitesse de l'ascenseur est constante.
4. La distance parcourue par le ballon est-elle la même pour les deux enfants?

3. Mouvement sur un axe vu d'un marcheur

On considère un point M initialement immobile en O se déplaçant sur l'axe Oy à accélération constante. Quelle est sa trajectoire pour un observateur qui parcourt l'axe Ox à vitesse constante v_0 ?

27

Changement de référentiel : aspects dynamiques

1. Mouvement d'un anneau lié à un ressort sur une tige en rotation

Un anneau assimilé à un point matériel M glisse sans frottement sur une tige horizontale Ox tournant à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe vertical Oz . L'anneau est lié au point O par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . On note $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et $a = \frac{\omega}{\Omega}$.

1. Représenter le schéma du dispositif en y faisant figurer les forces qui s'exercent sur la masse m .
2. Établir l'équation du mouvement sur Ox .
3. Quelle est l'allure du mouvement ? On discutera éventuellement plusieurs cas suivant les valeurs de a .
4. Dans chacun des cas, donner qualitativement l'allure de la trajectoire.
5. À l'instant initial, le ressort n'est ni comprimé ni tendu et M a une vitesse nulle par rapport à la tige. Déterminer la (les) condition(s) portant sur a pour que la trajectoire de M soit fermée.
6. Montrer que le ressort est toujours tendu.
7. Retrouver les équations du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
8. Déterminer la force que la tige exerce sur l'anneau.
9. On suppose l'existence d'une force de frottement. Décrire qualitativement son influence sur le mouvement de M .

2. Bille dans un tube, d'après ESTP 1990

Ce problème envisage le mouvement d'une bille de masse m dans un tube rigide de longueur l dans lequel la bille peut se déplacer sans frottements le long de l'axe

du tube à l'exclusion de tout autre mouvement. Le tube tourne autour d'un axe passant par son centre O à une vitesse angulaire Ω constante. On s'intéresse à l'étude de plusieurs positions possibles pour l'axe de rotation. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur terrestre dont le module sera pris égal à $9,81 \text{ m.s}^{-1}$.

1. On suppose dans cette partie que le tube tourne dans le plan horizontal autour de l'axe Oz vertical.

a) Faire le bilan des forces s'exerçant sur la bille en précisant le référentiel dans lequel on se place. Établir l'équation du mouvement de la bille par rapport au tube.

b) Décrire qualitativement le mouvement de la bille en analysant sans aucun calcul l'équation du mouvement.

c) On suppose qu'initialement la bille est à une distance x_0 de O et que sa vitesse est v_0 . Expliciter l'équation horaire du mouvement.

d) Dans le cas où $v_0 = 0$, donner l'expression du temps nécessaire pour que la bille quitte le tube.

e) Application numérique : $\Omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $l = 10 \text{ m}$ et $x_0 = 4 \text{ m}$. Calculer la durée pendant laquelle la bille reste dans le tube.

f) Déterminer l'expression du module de la réaction du tube. Que peut-on dire de sa direction ?

2. On suppose dans cette partie que le tube tourne dans le plan vertical autour de l'axe Ox horizontal.

a) Établir l'équation du mouvement de la bille par rapport au tube.

b) On suppose qu'initialement la bille est à une distance x_0 de O et que sa vitesse est v_0 . Expliciter l'équation horaire du mouvement.

c) Existe-t-il des positions d'équilibre ? Si oui, les préciser.

d) Quelle(s) est(sont) la(es) condition(s) pour que le mouvement de la bille dans le tube soit sinusoïdal ?

e) Lorsque la vitesse initiale vérifie : $v_0 = \frac{g}{2\Omega} - x_0\Omega$, donner l'expression de l'équation horaire du mouvement.

f) On représente à l'aide d'un logiciel de calcul formel l'évolution temporelle de ce mouvement dans le tube pour $v_0 = \frac{g}{2\Omega} - x_0\Omega$, $x_0 = l$ et $\Omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, pour $l = 10 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$ et $l = 0,1 \text{ m}$. Les figures suivantes fournissent les résultats. Analyser physiquement les observations.

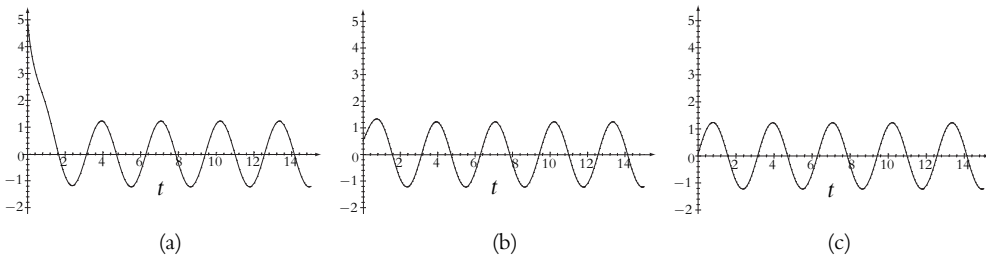


Figure 27.1 Allure du mouvement avec (a) $l = 10$ m, (b) $l = 1$ m et (c) $l = 0,1$ m.

- g) Dans quel plan se trouve la réaction du tube ? Exprimer le module de celle-ci.
3. On suppose dans cette partie que le tube tourne dans un plan vertical autour de l'axe Oz vertical. Le tube fait un angle φ constant avec le plan horizontal.
- a) Établir l'équation du mouvement de la bille par rapport au tube.
- b) On suppose qu'initialement la bille est à une distance x_0 de O et que sa vitesse est v_0 . Expliciter l'équation horaire du mouvement.
- c) Existe-t-il des positions d'équilibre ?
- d) Que se passe-t-il si on écarte la bille de sa position d'équilibre ?
- e) Donner l'expression du temps nécessaire pour que la bille quitte le tube en supposant qu'on abandonne la bille sans vitesse en x_0 .
- f) Calculer sa valeur numérique avec les mêmes données que dans la première partie et $\varphi = 45^\circ$. Comparer le résultat à celui trouvé dans la première partie.
- g) Déterminer la réaction du tube.

3. Mouvement d'un anneau sur un cerceau en rotation, d'après CCP TSI 2001

Un cerceau est assimilable à un cercle de centre O' et de rayon a . Situé dans un plan vertical, il tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz à vitesse angulaire Ω constante. Un anneau qui sera assimilé à un point M de masse m est mobile sans frottement sur ce cerceau. On note θ l'angle que fait $O'M$ avec la verticale descendante passant par O' et compté positivement dans le sens trigonométrique. On note \mathcal{R} le référentiel galiléen $Oxyz$ et \mathcal{R}' le référentiel $Ox'y'z$ lié au cerceau.

1. Utilisation du principe fondamental de la dynamique :

- a) Écrire la relation du principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}' . On notera \vec{f}_{ie} , \vec{f}_{ic} et \vec{R} respectivement les forces d'inertie d'entraînement, de Coriolis et la réaction du cerceau sur M .

- b) Établir l'expression de \vec{f}_{ie} et montrer que cette force est colinéaire à \vec{u}'_x .
- c) Établir l'expression de \vec{f}_{ic} et montrer que cette force est colinéaire à \vec{u}'_y .
- d) En déduire que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme : $a\ddot{\theta} = f(\theta)$.
- e) Donner l'expression des composantes de la réaction du cerceau dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_y)$.

2. Utilisation du théorème du moment cinétique :

- a) Définir le moment cinétique du point M en O' dans le référentiel \mathcal{R}' et donner son expression.
- b) Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel \mathcal{R}' .
- c) En déduire l'équation du mouvement.
- d) Peut-on obtenir par ce théorème les expressions des composantes de la réaction du cerceau ? Si oui, donner les expressions correspondantes.

3. Utilisation de l'énergie mécanique :

- a) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'un potentiel U_1 dont on donnera l'expression.
- b) Exprimer l'énergie potentielle U_2 dont dérive le poids.
- c) Les autres forces dérivent-elles d'un potentiel ? Justifier la réponse. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $U(r)$ du point M en prenant $U(0) = 0$.
- d) Justifier le fait qu'on puisse appliquer la conservation de l'énergie mécanique.
- e) Retrouver l'équation du mouvement par la conservation de l'énergie mécanique.

4. Étude de l'équilibre relatif :

- a) Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre est :

$$a\Omega^2 (1 + \sin \theta) = g \tan \theta$$

- b) Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
- c) On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. Calculer la valeur de la vitesse de rotation correspondante.
- d) Cette position d'équilibre est-elle stable ?

29

Dynamique d'un système de deux points matériels

1. Deux masses, une poulie et un plan incliné

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil inextensible de masse négligeable. La masse m_1 glisse sans frottements sur un plan incliné d'angle α et la masse m_2 a un déplacement vertical, le fil glissant sans frottements sur une poulie idéale.

1. Déterminer l'accélération du système.
2. Exprimer la tension du fil.
3. Déterminer la réaction du plan incliné sur la masse m_1 .

Systèmes de deux points matériels isolés

30

1. Fronde

Un enfant bagarreur a attaché deux cailloux presque identiques (qu'on assimilera à deux points matériels de même masse m), l'un à une extrémité d'une ficelle et l'autre au milieu de celle-ci. On négligera la masse de la ficelle. Il fait alors tourner l'ensemble dans un plan horizontal au-dessus de sa tête en le tenant par l'extrémité de la ficelle où il n'y a pas de cailloux.

1. Au bout d'un certain temps, il lâche la ficelle. Décrire ce qui se passe en négligeant l'action de la pesanteur.
2. Même question en tenant compte de la pesanteur.
3. La tension de la ficelle est-elle plus importante avant ou après le lâcher ?

2. Vibration d'une molécule diatomique, d'après ENSG 1988

Dans ce problème, on négligera l'effet de la pesanteur. Soit un système constitué de deux masses m_1 et m_2 situées en M_1 et M_2 . On note G le centre d'inertie du système. On note $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

1. Généralités :

- a) Que peut-on dire du référentiel barycentrique ?
- b) La vitesse du mobile fictif dépend-elle du référentiel ? Justifier.
- c) Montrer que le mouvement du mobile fictif dans le référentiel barycentrique est celui d'une particule soumise à l'interaction de M_1 sur M_2 .
- d) Exprimer l'énergie cinétique du système en fonction de l'énergie cinétique du mobile fictif dans le référentiel barycentrique, de $M = m_1 + m_2$ et de la vitesse de G .

2. Vibration d'une molécule diatomique :

Le système est maintenant une molécule de monoxyde de carbone. La liaison entre les deux atomes est modélisée par un ressort de raideur $k = 1900 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide $r_0 = 113 \text{ pm}$ qui est la valeur moyenne de la distance entre les deux atomes. On suppose que les mouvements ont lieu le long de l'axe Gx .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par r , distance entre les deux atomes.
- Sachant que les masses molaires du carbone et de l'oxygène sont respectivement de 12 et 16 g.mol^{-1} et que le nombre d'Avogadro vaut $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, calculer la fréquence des oscillations.
- Quelle est la valeur de l'énergie mécanique dans le référentiel barycentrique de la molécule sachant que l'amplitude a des oscillations du mobile fictif vérifie $a = 0,05 r_0$? On donnera sa valeur numérique en électron-volts. On rappelle que $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
- On admet que l'énergie cinétique moyenne d'une molécule correspondant aux mouvements autres que ceux de vibration s'écrit $E_c = \frac{5}{2} k_B T$. Interpréter physiquement cette hypothèse.
- En déduire la valeur de E_c à 300 K et la comparer à celle de l'énergie mécanique précédemment obtenue.

3. Excitation par un champ électrique :

Soit une molécule de monoxyde de carbone placée dans un champ électrique sinusoïdal $\vec{E} = E_0 \sin \omega t \vec{u}_x$. La molécule vibre selon l'axe Ox , on suppose que l'atome d'oxygène porte une charge $-\delta e$ et que l'interaction électrostatique entre les atomes est prise en compte dans la force de rappel du ressort.

- Que peut-on dire de la charge de l'atome de carbone?
- Établir l'équation différentielle du mouvement du mobile fictif dans le référentiel barycentrique.
- Donner l'expression de l'amplitude A du mouvement en régime permanent en fonction de δe , E_0 , μ , ω et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.
- Tracer $A \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$? Est-ce physiquement possible?
- Exprimer le rapport $\frac{\omega_0}{\Delta \omega}$ où $\Delta \omega$ est l'écart entre les deux pulsations pour lesquelles l'amplitude est de $0,05 r_0$. On fera et on justifiera les approximations nécessaires. Donner la valeur de ce rapport pour $E_0 = 10 \text{ V.m}^{-1}$.

- f)** On suppose maintenant qu'il y également une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On note β le coefficient de proportionnalité. Établir la nouvelle équation différentielle. En déduire l'expression de l'amplitude A en fonction de $a(0) = \frac{\delta e E_0}{\mu \omega_0^2}$ et $Q = \frac{\mu \omega_0}{\beta}$.
- g)** Étudier les variations de l'amplitude avec la pulsation et tracer $A \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$.
- h)** En supposant que la résonance est aiguë, donner l'expression du maximum d'amplitude.
- i)** Calculer β si l'amplitude maximale vaut $0,05 r_0$ et $E_0 = 10 \text{ V.m}^{-1}$.
- j)** En déduire que l'approximation de résonance aiguë est justifiée.

31

Mouvement à force centrale et potentiel newtonien

1. ► Quelle caractéristiques peut-on obtenir à partir de la trajectoire circulaire d'un satellite ?

Au cours d'une mission dans l'espace, une sonde passe à proximité d'une planète de rayon a . On observe alors que la planète possède un satellite qui décrit une orbite circulaire de rayon R autour de la planète avec une période T .

Peut-on à l'aide de ces informations calculer :

1. la masse M_p de la planète,
2. la masse m_s du satellite,
3. le terme gravitationnel g du champ de pesanteur créé par la planète à sa surface ?

2. ► Force en $1/r^5$

Une particule de masse m subit une force $\vec{f} = -k \frac{m}{r^5} \vec{u}$ où k est une constante et \vec{u} un vecteur constamment dirigé vers un point fixe O . Initialement la masse m est au point A distant de O de R et sa vitesse est perpendiculaire à \overrightarrow{OA} .

1. Établir que si la trajectoire est circulaire, le mouvement est uniforme.
2. Montrer que la trajectoire ne peut être circulaire que pour $k > 0$.
3. Donner la valeur qu'il faut donner à la vitesse initiale pour que la trajectoire soit circulaire en fonction du rayon R de la trajectoire et de la constante k .

Quelques aspects de la mécanique terrestre (PCSI)

32

1. Tir lunaire et tir terrestre

On effectue un tir sur la Lune, l'ensemble des caractéristiques du tir autres que le lieu reste analogue à ce qui se passe sur Terre.

1. La vitesse initiale du ballon lors d'un tir est-elle modifiée par rapport à celle qu'elle aurait sur Terre ?
2. La hauteur maximale et la portée d'un tir sont-elles modifiées par rapport à ce qui se passerait sur Terre ?

2. Phénomène de marées, d'après Mines TA 1989

Les forces s'exerçant entre deux corps célestes sont à l'origine d'effets analogues aux effets de marée observables sur Terre. Un objet subit des forces d'inertie et de gravitation variables d'un point à l'autre : le bilan des écarts entre ces forces en deux points s'appelle force de marée. On observe ainsi des conséquences de cette force sur les étoiles doubles ou les planètes et leurs satellites.

On s'intéresse ici à quelques aspects de cette force en ne tenant pas compte des effets de marée associés aux rotations éventuelles des corps.

Un satellite sphérique de masse $2m$, de centre S et de rayon r est modélisé par deux points matériels G_1 et G_2 distants de $2b$ et affectés chacun de la même masse m . On considère que ce satellite est solide c'est-à-dire que b est constante au cours du temps. La cohésion du satellite est assurée par l'attraction gravitationnelle des points G_1 et G_2 .

Ce satellite est soumis à l'action gravitationnelle d'une planète de masse M , de rayon R et de centre O . On assimilera cette planète à un point matériel O qui sera l'origine d'un référentiel galiléen. On note $L = OS$ et on suppose $b \ll L$.

1. On suppose que O , S , G_1 et G_2 restent alignés. Comment peut-on interpréter physiquement cette hypothèse ?

2. Déterminer, sous la forme d'un développement limité au premier ordre en $\frac{b}{L}$, la force gravitationnelle subie par G_1 de la part de la planète. On note \vec{u} le vecteur unitaire dirigé de O vers S et G la constante de gravitation universelle.
3. Dans les unités du système international, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$. Quelle est la dimension de G ? En déduire son unité.
4. Déterminer l'expression de l'accélération de S dans le référentiel galiléen d'origine O en fonction de G , M et L .
5. Déterminer, en la justifiant avec précision, l'expression de la force de marée s'exerçant sur G_1 en fonction de G , M , m , b et L .
6. En déduire une interprétation physique des deux termes de la force gravitationnelle exprimée à la question 2.
7. Montrer qu'il existe une limite L_m , appelée limite de Roche, de la distance L en-deçà de laquelle le satellite se brise par effet de marée. Donner l'expression de L_m en fonction de b , M et m .
8. On suppose ici que la planète est la Terre et le satellite la Lune. On donne $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $2m = \frac{M}{81,5}$, $L = 380000$ km, $R = 6400$ km et $r = 1750$ km. On peut établir que pour un satellite sphérique de rayon r , la distance b vaut : $b = \frac{3}{8}r$. Calculer L_m pour ce système. Pensez-vous que la Lune se soit détachée de la Terre?
9. Proposer un phénomène astrophysique qui pourrait être expliqué par des ruptures liées aux phénomènes de marée.
10. On suppose que le satellite est constitué d'un noyau rigide entouré d'un manteau visqueux pouvant glisser avec frottement sur le noyau. Déterminer qualitativement la forme d'un tel satellite à l'équilibre. On représentera cette allure à deux instants différents de la révolution orbitale du satellite. En déduire que le satellite acquiert une rotation propre dont on précisera le sens par rapport au mouvement de révolution orbitale. Cette rotation propre provoque le frottement du manteau sur le noyau.
11. Établir que le moment cinétique du satellite par rapport à O dans le référentiel galiléen est constant. En déduire une loi de conservation liant la distance L du satellite à la planète et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du satellite.
12. Le frottement du manteau sur le noyau provoque une déperdition d'énergie. En quels points de la trajectoire supposée elliptique, cette perte d'énergie est-elle la plus importante?
13. En déduire les conséquences sur la trajectoire du satellite.
14. Sachant que la Lune a une période de rotation sur elle-même égale à sa période orbitale, pensez-vous que la Lune a été visqueuse au cours de son histoire?

Thermodynamique

33

Généralités sur les systèmes thermodynamiques

1. Écart à la loi de Mariotte

On considère une masse M d'un gaz réel qui, dans le domaine où on l'étudie, satisfait à la loi :

$$P(V - b) = aT$$

où a et b sont deux constantes. On prendra : $a = 8,28 \text{ J.K}^{-1}$, $b = 5.10^{-6} \text{ m}^3$.

Pour les applications numériques, on considère deux états de cette masse de gaz à la température T_0 :

- $P_0 = 5.10^6 \text{ Pa}$ et $V_0 = 4,57.10^{-4} \text{ m}^3$;
- $P_1 = 5.10^7 \text{ Pa}$ et V_1 à déterminer.

1. Calculer les coefficients thermoélastiques α et χ_T . Écrire α en fonction de T , b et V .
2. Calculer T_0 et V_1 .
3. Comparer numériquement le coefficient α à celui du gaz parfait puis calculer l'écart relatif à la loi de Mariotte :

$$\Delta = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{P_0 V_0}$$

2. Échelle centésimale

La figure ci-dessous présente un dispositif expérimental utilisant un thermocouple (Platine-Plomb ou Nickel-Platine). L'une des soudures S_1 plonge dans un mélange eau-glace à 0°C tandis que l'autre (S_2) plonge dans la solution dont on désire mesurer la température t en $^\circ\text{C}$. Pour cela on branche un microvoltmètre entre les deux

thermocouples qui délivre une tension V qu'on peut décrire dans un large intervalle de température par une loi trinomiale :

$$V = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

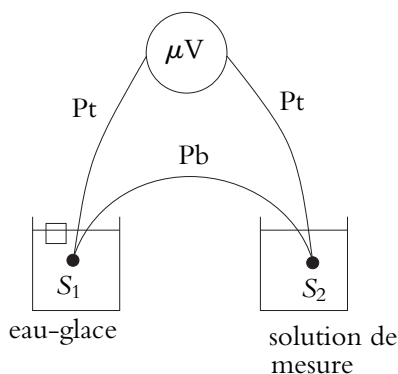


Figure 33.1

Pour utiliser ce thermomètre entre $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, on veut définir une échelle centésimale θ .

1. Exprimer θ en fonction de t .
2. Calculer l'écart maximal $\theta - t$, ainsi que la température correspondante. Conclure quant à la validité de l'échelle centésimale entre $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ pour les deux types de thermocouples suivant :
 - Platine-Plomb : $A_0 = 0$, $A_1 = -1,79\text{ }\mu\text{V.K}^{-1}$ et $A_2 = -0,0175\text{ }\mu\text{V.K}^{-2}$;
 - Nickel-Platine : $A_0 = 0$, $A_1 = 20,89\text{ }\mu\text{V.K}^{-1}$ et $A_2 = 0,0025\text{ }\mu\text{V.K}^{-2}$.

34

Statique des fluides dans le champ de pesanteur

1. Pression au sommet de la tour Eiffel

En hiver, quelle est la pression au sommet de la tour Eiffel ?

2. Fuite dans une digue

Une légende raconte qu'un petit garçon sauva sa ville en mettant son doigt dans le trou d'une digue qui protégeait le polder de la Mer du Nord. Est-ce possible ?

3. Manomètre hydrostatique à colonne fractionnée

L'étendue de la mesure de pression est limitée par la hauteur admissible de la colonne de liquide. On peut alors utiliser le dispositif de la figure 34.1. L'ouverture à gauche est en contact avec le gaz dont on veut mesurer la pression P .

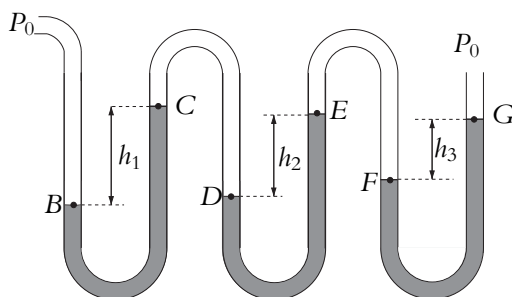


Figure 34.1 Manomètre à colonne fractionnée

Un premier liquide incompressible de masse volumique ρ_1 emplit les trois tubes en «U» dans les parties grisées (BC, DE et FG). Un second liquide de masse volumique

ρ_2 , incompressible et non miscible au premier, emplit les parties non grisées (CD, EF). Le dernier tube est ouvert sur l'atmosphère à la pression P_0 . On remplit les tubes de manière à ce que les points B, C, D, E, F et G soient au même niveau quand la pression est la même des deux côtés $P = P_0$.

1. Lorsque $P \neq P_0$, montrer que les hauteurs h_1 , h_2 et h_3 sont égales. Est-ce le cas si, au lieu d'utiliser un liquide pour le second fluide, on utilise un gaz ?
2. a) Exprimer la relation entre la pression P et la pression P_0 .
b) Exprimer la relation entre P et P_0 si le deuxième fluide est un gaz.
3. La pression P augmente d'une valeur ΔP . On observe un déplacement du point C de Δh . Calculer ΔP en fonction de Δh et des données.

4. Remplissage d'une citerne, d'après École de la météorologie 1996

L'objet de ce problème est l'étude des conséquences éventuelles d'un incident survenant lors du remplissage d'une citerne destinée au transport d'un liquide. En vue de limiter le mouvement du liquide, la citerne est divisée en n compartiments de surface horizontale s communiquant entre eux par la partie inférieure. Le remplissage et la vidange s'effectuent par le bas.

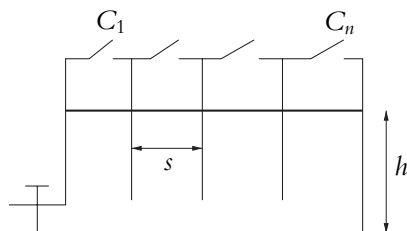


Figure 34.2

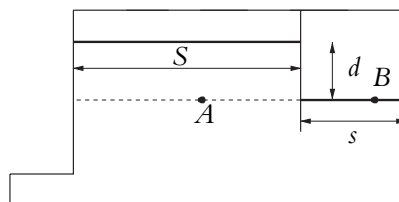


Figure 34.3

À la partie supérieure de chaque compartiment, un clapet C_1, C_2, \dots est maintenu ouvert pendant le remplissage ou la vidange (Cf. figure 34.2). Ces clapets sont fermés pendant le transport. Dans les calculs, on négligera le volume des parois, la dilatation de la citerne ainsi que celle du liquide. L'air sera considéré comme un gaz parfait. On suppose que le liquide n'est pas volatil.

1. Le remplissage est effectué sous la pression atmosphérique normale $P_0 = 10^5$ Pa à une température de 20°C . Les clapets sont ensuite normalement fermés. Au cours du transport, la température s'élève à 70°C . Quelle est la pression atteinte par l'air qui surmonte le liquide contenu dans la citerne ?
2. Au cours du remplissage, l'un des clapets a été fermé prématurément et il existe une dénivellation d entre le niveau du liquide dans le compartiment correspondant et

le niveau général de la cuve. On modélise tous les compartiments de gauche comme un seul compartiment de surface S (Cf. figure 34.3).

a) Établir l'expression générale de la pression dans un liquide en fonction de la profondeur.

b) Le liquide a pour masse volumique $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et on prendra pour l'accélération de la pesanteur la valeur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Quelle est, à 20°C , la pression dans le compartiment où s'est produit l'incident si $d = 2 \text{ m}$?

3. Au cours de l'échauffement qui se produit dans le transport, la dénivellation d ne demeure pas constante, le niveau du liquide s'élevant de x dans le grand compartiment et s'abaissant de y dans le dernier. Avant l'échauffement, la hauteur de gaz dans le grand compartiment est ℓ . On note k le rapport $\frac{S}{s}$ et K le rapport $\frac{T'}{T}$ (T est la température initiale et T' la température finale). Écrire l'équation permettant d'obtenir x en fonction de P (pression initiale dans le grand compartiment), ℓ , ρ , g , d , K et k .

4. On considère que k est assez grand pour pouvoir négliger la variation x . Sachant que $\ell = 0,1 \text{ m}$ et $K = \frac{6}{5}$, calculer y et la pression dans le petit compartiment.

1. Calorimétrie

On notera τ le temps pour ne pas le confondre avec la température.

1. On désire mesurer tout d'abord la capacité thermique totale C_T d'un calorimètre et de son contenu (eau + accessoires). On plonge pour cela une résistance chauffante dans l'eau du calorimètre dont la valeur est $250\ \Omega$ indépendante de la température. On fait circuler un courant de 0,5 ampère pendant 13 minutes et on constate que la température de l'ensemble passe de $14\ ^\circ\text{C}$ à $16\ ^\circ\text{C}$.

a) Calculer C_T en négligeant la capacité thermique de la résistance.

b) Calculer C_T en tenant compte de la capacité thermique de la résistance : $C_R = 250\ \text{J.K}^{-1}$.

2. On désire maintenant mesurer la capacité thermique d'un gaz. Pour cela on plonge un serpentin dans le calorimètre contenant le même volume d'eau qu'à la question précédente. Le serpentin est parcouru par le gaz avec un débit massique $D = 2,6\ 10^{-4}\ \text{kg.s}^{-1}$. Le gaz entre dans le calorimètre à la température de $t_1 = 200\ ^\circ\text{C}$ et en sort à la même température que le calorimètre. Cette dernière passe ainsi de $t_0 = 14\ ^\circ\text{C}$ à $t_f = 16\ ^\circ\text{C}$ en 14 minutes. En déduire l'expression de la température du calorimètre en fonction du temps puis la valeur de la capacité thermique massique C du gaz.

2. Bain thermostaté

On considère une cuve remplie d'eau, l'ensemble constituant un système (S) de capacité thermique C constante. Un dispositif de chauffage fournit à l'eau une puissance réglable \mathcal{P} . La température de l'atmosphère est constante et égale à T_0 . La température

de l'eau est supposée homogène. Dans ces conditions, l'eau perd pendant un intervalle de temps dt le transfert thermique $\lambda(T - T_0) dt$, où λ est une constante positive.

1. A l'instant $t = 0$, (S) est à la température T_0 . On déclenche le chauffage de manière à ce qu'il délivre une puissance \mathcal{P}_0 constante.

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T . Faire apparaître la constante de temps τ_0 et la température au bout d'un temps très long T_∞ .

b) Application numérique : calculer λ et \mathcal{P}_0 pour $C = 4 \text{ kJ.K}^{-1}$, $T_0 = 290 \text{ K}$, $T_\infty = 340 \text{ K}$ et $\tau_0 = 10^3 \text{ s}$.

2. Pour améliorer le dispositif, on place dans l'eau un capteur de température qui commande un dispositif de chauffage, de telle sorte que la puissance reçue par l'eau vaut désormais :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}'_0 + k(T - T_0)$$

où k et \mathcal{P}'_0 sont des constantes.

a) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par T et déterminer la nouvelle constante de temps τ'_0 et la nouvelle expression T'_∞ .

b) Avec les valeurs précédentes de C , τ_0 , T_0 , et $T'_\infty = T_\infty = 340 \text{ K}$, calculer k et \mathcal{P}'_0 pour avoir $\tau'_0 = 100 \text{ s}$. Que peut-on en conclure ?

3. Turbine à gaz

On considère une turbine à gaz schématisée sur le dessin ci-contre. Le gaz qui décrit le cycle est de l'air considéré comme un gaz parfait. On ne tient pas compte de l'écoulement du gaz.

Partant de l'état 1 ($P_1 = 1 \text{ bar}$, $T_1 = 300 \text{ K}$), le gaz passe dans un turbo-compresseur dans lequel il subit une compression adiabatique réversible jusqu'à l'état 2 ($P_2 = 6.5 \text{ bar}$, T_2). Ensuite il passe dans une chambre de combustion (E_1), où il est mélangé avec une petite quantité de carburant dont on néglige la masse. Le gaz subit une transformation isobare réversible et passe à l'état 3 (P_3 , $T_3 = 1300 \text{ K}$). Il subit ensuite une détente adiabatique réversible dans une turbine (T) pour arriver à l'état 4 (P_4 , T_4). Enfin, il se refroidit de manière isobare réversible en retournant à l'état 1.

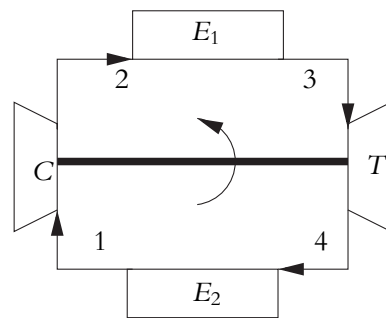


Figure 36.1

On donne pour l'air : $\gamma = 1,4$, masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. La constante des gaz parfaits est égale à $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$. On raisonne sur une masse de 1 kg de gaz.

3. Établir l'expression de T_2 (la démonstration est demandée) et de T_4 en fonction de T_1 , P_1 , P_2 et T_3 . Calculer leur valeur numérique.
4. Représenter le cycle dans un diagramme de Watt (P , V) sans respecter l'échelle. S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ?
5. Établir les expressions des capacités thermiques à volume constant, c_v , et à pression constante, c_p , de 1 kg de gaz.
6. Établir les expressions des transferts thermiques reçus par le gaz entre les états 2 et 3 (Q_{23}) et entre les états 4 et 1 (Q_{41}). Calculer leur valeur numérique.
7. Déterminer l'expression du travail total W reçu par le gaz sur le cycle. Calculer sa valeur numérique.
8. La turbine entraîne le turbocompresseur par l'intermédiaire d'un arbre. Déterminer le travail nécessaire à l'entraînement du compresseur et la part que cela représente dans le travail total fourni par la turbine.
9. Établir l'expression du rendement $\eta = \frac{|W|}{|Q_{23}|}$ en fonction des températures. Calculer sa valeur numérique.

38

Deuxième principe de la thermodynamique

1. Mélange de deux liquides à températures différentes

On mélange, sans transfert thermique extérieur et à pression constante une masse m de liquide à la température T avec une même masse du même liquide à la température T' . On note c_p la capacité thermique massique des deux liquides. Montrer que la variation d'entropie de l'ensemble est :

$$\Delta S = 2mc_p \ln \frac{T + T'}{2\sqrt{TT'}}$$

2. Transformations adiabatiques possibles ou impossibles

On considère un gaz parfait dans l'état A (P_A, V_A).

Sur le schéma ci-contre, on a représenté en traits pleins des isothermes et en traits pointillés l'isentropique qui passe par le point A .

Peut-on passer de manière adiabatique à l'état B, C, D ou E ?

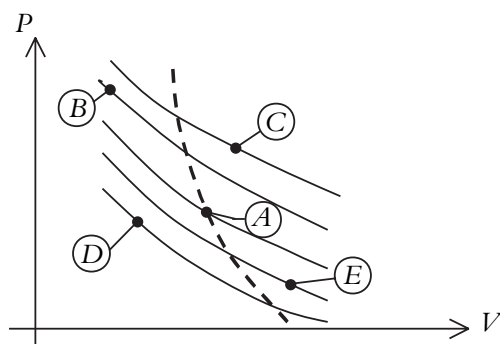


Figure 38.1

3. Cycle d'un gaz parfait, d'après ENAC 2000

Une masse m de gaz parfait, de rapport $\gamma = 1,4$, parcourt le cycle représenté sur la figure ci-contre. Le gaz est initialement dans l'état A caractérisé par une pression $P_A = 10^5$ Pa, une température $T_A = 144,4$ K et un volume $V_A = 4,14 \cdot 10^{-4}$ m³.

Il subit une évolution isentropique qui l'amène à la température $T_B = 278,8$ K.

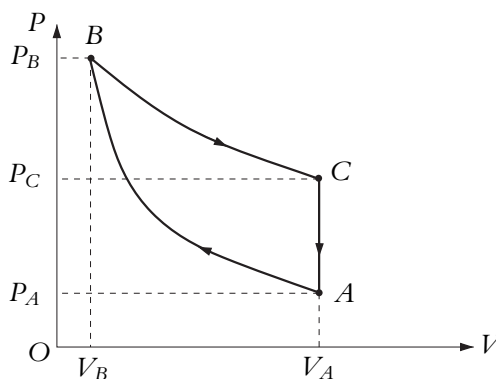


Figure 38.2

1. Calculer la pression P_B et le volume V_B dans l'état B .
2. Le gaz est mis en contact avec une source à la température T_B et subit une détente isotherme réversible qui ramène son volume à sa valeur initiale V_A .
 - a) Calculer la pression P_C dans l'état C .
 - b) Calculer la variation d'entropie du gaz ΔS_{BC} au cours de son évolution isotherme BC .
3. Le gaz dans l'équilibre C est mis alors en contact avec une source à la température T_A tandis que son volume est maintenu constant à la valeur V_A .
 - a) Calculer la variation d'entropie ΔS_{CA} du gaz au cours de cette évolution isochore.
 - b) Calculer le transfert thermique Q_{CA} échangée avec la source.
 - c) En déduire la valeur de l'entropie créée $S_{\text{créée}, CA}$ au cours de l'évolution isochore. Quelle est la cause de création d'entropie ?

40

Équilibre d'un corps pur sous plusieurs phases

1. Transpiration

Quel volume d'eau devez-vous éliminer par transpiration pour débarrasser votre corps des 75 watts de puissance thermique correspondant à votre métabolisme lorsque vous êtes au repos ? On prendra la température de la peau égale à 33°C et l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à cette température égale à 2420 kJ.kg^{-1} . Commenter, sachant que, normalement, nous évacuons par transpiration environ 0.5 litre par jour. Le fait de s'essuyer avec une serviette aide-t-il au refroidissement du corps ?

2. Étude de l'équilibre liquide-vapeur du Mercure

On s'intéresse à l'équilibre liquide-vapeur du Mercure. Le tableau suivant donne la pression de vapeur saturante P_s à différentes températures :

$T(\text{K})$	373	473	573	673
$P_s(\text{bar})$	$8,00.10^{-4}$	$2,80.10^{-2}$	0,330	2,10

La masse molaire du mercure est $M = 200.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$. Le mercure liquide a un volume massique $u_l = 7,7.10^{-5} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$ et une capacité thermique constante $c_l = 0,135 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Le mercure gazeux est considéré comme un gaz parfait de rapport de capacités thermiques $\gamma = 1,67$ et la constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Le tableau suivant donne l'enthalpie massique de vaporisation et le volume massique de la vapeur.

$T(\text{K})$	573	673
$L_v(\text{kJ.kg}^{-1})$	297	293,7
$u_v(\text{m}^3.\text{kg}^{-1})$	0,700	0,128

Les mesures précédentes ont permis d'établir la loi expérimentale de Dupré (avec P_s en bars, T en kelvins et A une constante :

$$\log P_s = A - \frac{2010}{T} + 3,88 \log T$$

1. Déterminer la valeur moyenne de la constante A .
2. Un récipient, de volume $V_0 = 1 \text{ m}^3$ constant, contient initialement une masse $m_0 = 8 \text{ kg}$ de mercure. Les parois sont parfaitement calorifugées sauf en un endroit où un résistor parcouru par un courant électrique permet un apport de transfert thermique. La capacité thermique du résistor ainsi que celle du récipient sont négligées. Le résistor chauffant sera considéré comme un thermostat à la température $T_3 = 800 \text{ K}$. Cette source est capable d'apporter une puissance thermique constante $\mathcal{P}_0 = 10 \text{ kW}$ pendant la durée Δt de chauffage nécessaire au passage du corps de la température $T_1 = 573 \text{ K}$ à la température $T_2 = 673 \text{ K}$. On appelle x la fraction massique de vapeur dans le récipient.
 - a) Calculer la masse initiale de vapeur m_{v1} ainsi que la fraction massique initiale x_1 .
 - b) Calculer la masse finale de vapeur m_{v2} ainsi que la fraction massique finale x_2 .
 - c) Représenter la transformation du corps pur, de l'état initial à l'état final dans les diagrammes (P, ν) et (P, T) , ν étant le volume massique.
 - d) Calculer le transfert thermique Q_s reçu par le corps au cours de la transformation.
 - e) Calculer la durée de fonctionnement du thermostat.
 - f) Calculer la variation d'entropie du mercure.
 - g) Calculer l'entropie créée.

41

Machines thermiques

1. Moteur de Carnot : comment améliorer son rendement

Pour améliorer le plus possible le rendement d'un moteur de Carnot, vaut-il mieux augmenter de 10°C la température de la source chaude ou diminuer de 10°C celle de la source froide ?

2. Réfrigérateur réel

Un réfrigérateur reçoit, par heure, un transfert thermique Q_1 de la source froide (température T_1) et un transfert thermique Q_2 de la source chaude (température T_2). L'appareil n'est pas parfait et on constate que :

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réel}} = k \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réversible}}$$

1. Calculer l'efficacité e de l'appareil en fonction de k , T_1 et T_2 .
2. Calculer l'entropie créée par heure en fonction de Q_1 et T_1 .
3. Application numérique : $T_1 = 273\text{ K}$, $T_2 = 300\text{ K}$ et $k = 1, 2$.

3. Couplage d'un moteur et d'une machine frigorifique

On s'intéresse à un ensemble constitué de trois sources S_1 , S_2 et S_3 , de capacités thermiques constantes identiques C , mais dont les températures initiales sont différentes ($T_1 > T_2 > T_3$).

Ces sources sont reliées à deux machines thermiques M_1 et M_2 selon le schéma ci-contre.

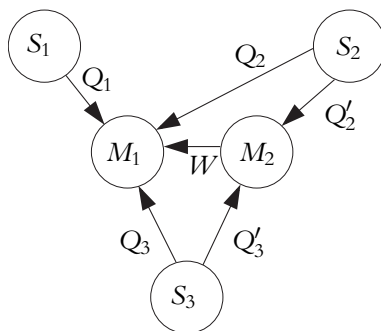


Figure 41.1

1. On souhaite élever la température de S_1 . Déterminer entre M_1 et M_2 laquelle est une pompe à chaleur et laquelle est un moteur.
2. Quel type de fonctionnement permet d'obtenir la température finale T_M de S_1 la plus élevée possible ? Expliquer pourquoi le système fonctionnera jusqu'à ce que les températures de S_2 et S_3 soient égales à une même valeur T .
3. Avec le premier principe, établir une relation entre T_M , T , T_1 , T_2 et T_3 .
4. Avec le second principe, établir une relation entre T_M , T , T_1 , T_2 et T_3 .
5. Sachant que $T_1 = T_2 = 300$ K et $T_3 = 100$ K trouver numériquement avec la calculatrice les solutions T_M et proposer celles qui sont valables physiquement.

Électromagnétisme

Charge électrique et distributions de charges

42

1. Invariances d'une distribution linéique

On considère une droite (Ox) .

1. On suppose qu'elle est uniformément chargée avec une densité linéique de charges λ . Déterminer les invariances du système.
2. On suppose que la densité linéique de charges vaut $-\lambda$ pour $x > 0$ et $+\lambda$ pour $x < 0$. Le système possède-t-il des invariances dans ce cas ? Si oui, lesquelles ?

2. Invariances d'une distribution sphérique

On considère une sphère de centre O et de rayon R .

1. On suppose qu'elle est uniformément chargée avec une densité surfacique de charges σ . Déterminer les invariances du système.
2. On munit l'espace d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On suppose que la densité surfacique de charges vaut $-\sigma$ pour $x > 0$ et $+\sigma$ pour $x < 0$. Le système possède-t-il des invariances dans ce cas ? Si oui, lesquelles ?

43

Champ électrostatique

1. Conséquences des symétries et des invariances d'une distribution linéique

On considère une droite (Ox) .

1. On suppose qu'elle est uniformément chargée avec une densité linéique de charge λ . Déterminer les éléments de symétrie du système.
2. On suppose que la densité linéique de charges vaut $-\lambda$ pour $x > 0$ et $+\lambda$ pour $x < 0$. Étudier les symétries du système.
3. En utilisant également les résultats de l'exercice 1. du chapitre précédent, quelles conclusions peut-on en déduire sur les variables dont dépend le champ électrostatique créé par cette distribution et sur sa direction ?

Propriétés du champ électrostatique

44

1. Flux du champ électrostatique et position de la charge

Soit une charge q située à l'intérieur d'une sphère de rayon R .

Le flux du champ électrostatique à travers cette sphère est-il modifié par le déplacement de la charge q ?

2. Flux nul, champ nul

1. Le champ électrostatique est nul sur une surface fermée \mathcal{S} . Que peut-on dire de son flux à travers \mathcal{S} ?
2. Le flux à travers une surface fermée \mathcal{S} est nul. Le champ électrostatique est-il forcément nul sur la surface ?

3. Énergie électrostatique d'un ensemble de N charges

1. Montrer, par un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas de deux charges, que l'énergie électrostatique d'un système de N charges ponctuelles q_i s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N q_i V_i \text{ en notant } V_i \text{ le potentiel créé par l'ensemble des charges autres que } q_i \text{ à l'endroit où se trouve } q_i.$$

2. En déduire l'énergie électrostatique d'un système de quatre électrons régulièrement répartis sur un cercle de centre O et de rayon R au centre duquel se trouve un proton.

45

Exemples de champs et potentiels électrostatiques

1. **Cylindre creux**

On considère un cylindre infini de rayon R et d'axe Oz . Pour des rayons r tels que $0 \leq r < a$ le cylindre comporte une cavité vide de charges, et pour $a \leq r \leq R$, le cylindre est uniformément chargé avec une densité volumique ρ .

1. Déterminer le champ \vec{E} en tout point de l'espace.
2. Déterminer le potentiel en tout point de l'espace.

2. **Condensateur diédrique**

Soit deux armatures rectangulaires de côtés a et b placées symétriquement de part et d'autre d'un plan \mathcal{P} . Les plans de ces armatures se coupent selon la droite OO' notée Oz et l'angle entre ces deux plans est noté 2α . On établit entre ces deux armatures une différence de potentiel U positive. On suppose que les deux armatures portent une charge opposée et que le champ électrostatique est nul à l'extérieur des armatures.

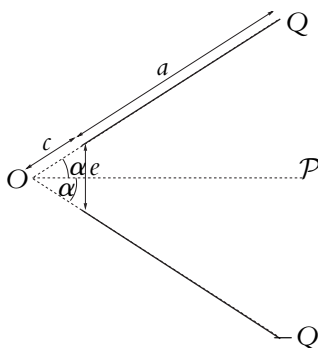


Figure 45.1

- ### 3. Cavité cylindrique

8. On considère maintenant un cylindre d'axe O_1z et de rayon R_1 uniformément chargé avec une densité volumique de charges ρ dans lequel on a creusé une cavité

cylindrique d'axe O_2z et de rayon R_2 dépourvue de charges. On suppose que les longueurs des cylindres sont très grande devant R_1 et R_2 . On note $O_1O_2 = a$ et on désigne par O_1x l'axe O_1O_2 .

Étudier les invariances du problème en négligeant les effets de bord. En déduire les conséquences sur le champ électrique créé par cette distribution.

9. Déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie du système et en déduire les conséquences sur le champ électrique créé par cette distribution.

10. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé par cette distribution à l'intérieur de la cavité.

11. Que remarque-t-on ?

12. Que peut-on dire du champ électrostatique dans la cavité si les axes O_1z et O_2z sont confondus ?

13. Déterminer l'expression du potentiel électrostatique dans la cavité.

14. Même question à l'intérieur du cylindre d'axe O_1z et de rayon R_1 en dehors de la cavité cylindrique.

15. En quel(s) point(s) le champ électrostatique à l'intérieur du cylindre d'axe O_1z et de rayon R_1 en dehors de la cavité cylindrique est-il nul ? On précisera leur position en fonction de a et R_2 .

16. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé par cette distribution à l'extérieur du cylindre d'axe O_1z et de rayon R_1 .

17. En quel(s) point(s) le champ électrostatique à l'extérieur du cylindre d'axe O_1z et de rayon R_1 est-il nul ? On précisera leur position en fonction de a , R_1 et R_2 .

Dipôle électrostatique (MPSI, PCSI)

46

1. Interaction d'une charge ponctuelle et d'un dipôle électrostatique

On place un dipôle électrostatique rigide \vec{p} en M situé à proximité d'une charge ponctuelle q située en O .

1. Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à la charge q .
2. Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle. On supposera que le dipôle s'est préalablement orienté selon la direction de la question précédente.
3. Même question pour la charge q .
4. Que peut-on en conclure ?

47

Courant électrique et distributions de courants

1. Invariances de différentes distributions de courant

Déterminer les invariances des distributions suivantes :

1. un fil infini parcouru par un courant I ,
2. un fil de longueur L parcouru par un courant I ,
3. deux fils parallèles parcourus par des courants I_1 et I_2 ,
4. une sphère bobinée c'est-à-dire sur laquelle on a enroulé un fil parcouru par un courant I ,
5. une nappe infinie plane de courants, parcourue par une densité surfacique de courants $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_y$ uniforme,
6. une nappe plane de courants de largeur l suivant Oz et infinie dans la direction Oy , parcourue par une densité surfacique de courants $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_y$ uniforme.

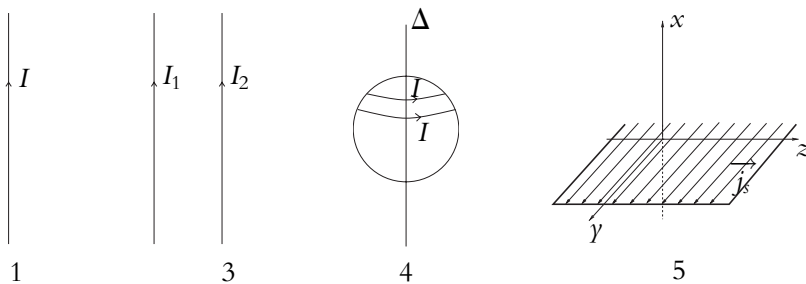


Figure 47.1

Exemples de champs magnétiques

50

1. Champ magnétique créé par une densité surfacique orthoradiale

Soit un fil cylindrique infini d'axe (Oz) parcouru à sa surface par une densité de courants surfaciques $\vec{j}_{\text{surf}} = j_s \vec{u}_z$ parallèlement à l'axe du cylindre. On note R le rayon du cylindre.

Déterminer le champ magnétique créé par une telle distribution.

2. Champ créé en son centre par une sphère chargée en rotation

Soit une sphère uniformément chargée en surface de densité surfacique σ . Elle tourne à la vitesse angulaire constante ω autour d'un de ses axes.

Montrer qu'elle crée un champ magnétique en son centre et établir son expression.

51

Dipôle magnétique (PCSI)

1. Moment magnétique d'une sphère en rotation chargée en surface

Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge q uniformément répartie sur sa surface. Elle est animée d'un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante autour d'un de ses diamètres qui sera noté (Oz) .

1. Déterminer le champ magnétique créé au centre de la sphère.
2. Calculer le moment magnétique de cette distribution de courants.
3. En déduire la relation entre le champ magnétique créé en O (voir exercice 2 du chapitre 50) et le moment magnétique.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique

53

1. Stabilité radiale d'un faisceau d'électrons

Soit un faisceau cylindrique d'électrons de vitesse v constante suivant l'axe du cylindre. On suppose que la répartition de la charge reste uniforme dans le cylindre de rayon R au cours du temps. On note N le nombre d'électrons par unité de longueur du cylindre.

1. Déterminer l'expression de la force électrique qui s'exerce sur un électron du faisceau.
2. Même question pour la force magnétique.
3. En déduire l'expression de la résultante des forces. Conclure sur la possibilité d'avoir un faisceau d'électrons de section constante.

2. Séparation isotopique de particules chargées

Une particule de charge q et de masse m est lancée dans un champ magnétique uniforme de norme B_0 et dirigé selon Oz depuis un point de coordonnées $(a, 0, 0)$ en coordonnées cartésiennes avec une vitesse initiale $(0, -a\omega_0, \gamma a\omega_0)$ où $\omega_0 = \frac{qB_0}{m}$.

1. Établir les équations horaires du mouvement et en déduire la nature de la trajectoire.
2. Que se passe-t-il si $\gamma = 0$? Justifier.
3. On superpose à ce champ magnétique un champ électrique permanent $E_0 \cos \omega t$ dirigé selon Ox . Dans le cas général où $\omega \neq \omega_0$, donner en la justifiant l'allure de la nouvelle trajectoire.

4. Mettre en évidence dans le cas où $\omega = \omega_0$ un phénomène de résonance et analyser la nature de la trajectoire dans ce cas.
5. En déduire que ce dispositif peut permettre d'effectuer une séparation isotopique.

3. **Particule chargée dans un champ électrique sinusoïdal - Dérive**

Une particule chargée, de charge q et de masse m , est soumise à l'action d'un champ électrique uniforme alternatif $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_x$. Initialement elle se trouve sans vitesse initiale à l'origine O .

1. Déterminer son mouvement ultérieur.
2. Montrer qu'on peut définir une vitesse de dérive dont on précisera l'expression.
3. Exprimer l'énergie cinétique de la particule.
4. Calculer sa valeur moyenne et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme de deux termes dont on donnera une interprétation. On note E_d celui qui dépend de φ .
5. Quelle est la relation entre la vitesse de dérive et E_d ?

Solutions des exercices

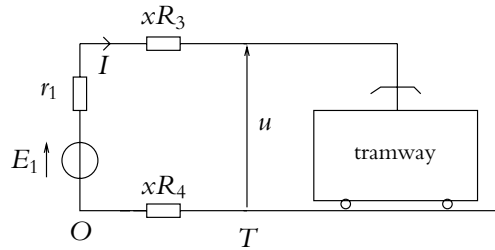
Première période

Partie I – Électrocinétique I

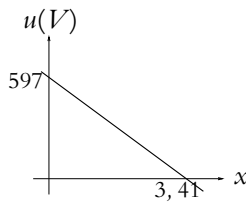
Chapitre 2

1. a) La résistance équivalente est : $R_e = R_1 + R_2$ donc $R_1 < R_2 < R_e$.
- b) En série, un même courant i traverse les deux résistances : les deux intensités sont identiques.
- c) La tension aux bornes de R_1 vaut $u_1 = R_1 i$ et celle aux bornes de R_2 : $u_2 = R_2 i$. Compte tenu des conditions sur les résistances, on a : $u_1 < u_2$.
- d) La puissance dissipée dans R_1 vaut $\mathcal{P}_1 = R_1 i^2$ et celle dissipée dans R_2 , $\mathcal{P}_2 = R_2 i^2$. On en déduit que $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$.
2. a) Maintenant $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ donc $\frac{R_e}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ et $R_e < R_1$. De même, on établit que $R_e < R_2$. Donc $R_e < R_1 < R_2$.
- b) Dans le cas d'un montage en parallèle, la tension aux bornes des deux dipôles est la même donc $R_1 i_1 = R_2 i_2$ soit $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1} > 1$ et $i_2 < i_1$.
- c) Les deux tensions sont identiques (Cf. question précédente).
- d) La puissance dissipée dans R_1 vaut $\mathcal{P}_1 = \frac{u^2}{R_1}$ et celle dissipée dans R_2 : $\mathcal{P}_2 = \frac{u^2}{R_2}$. On en déduit que $\mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_1$.
2. 1. On a $u = Ri$ et $\mathcal{P} = \frac{u^2}{R}$. On en déduit que $R_1 < R_2$ puisque $u_1 < u_2$ pour une même puissance et $R_2 > R_3$ puisque $\mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_3$ pour une même tension. Il reste à comparer R_1 et R_3 . Or $u_3 = 2u_1$ et $\mathcal{P}_3 = 2\mathcal{P}_1$ soit $\frac{u_3^2}{\mathcal{P}_3} = \frac{4u_1^2}{2\mathcal{P}_1} = 2\frac{u_1^2}{\mathcal{P}_1}$ et $R_3 = 2R_1$. Finalement $R_1 < R_3 < R_2$.
2. Sous la tension adéquate, on a : $u_2 = u_3 = R_2 i_2 = R_3 i_3$ donc $\frac{i_3}{i_2} = \frac{R_2}{R_3} > 1$ et $i_3 > i_2$. D'autre part, on a : $u_3 = 2u_1$ et on a établi que $R_3 = 2R_1$ donc $i_3 = \frac{u_3}{R_3} = \frac{2u_1}{2R_1} = i_1$.
3. Chaque ampoule est soumise à une tension de 110 V : chacune délivre une puissance de 75 W. En série, on a : $\mathcal{P} = (R_1 + R_2) i^2 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$. On a donc le même éclairage qu'avec une ampoule 220 V - 150 W.

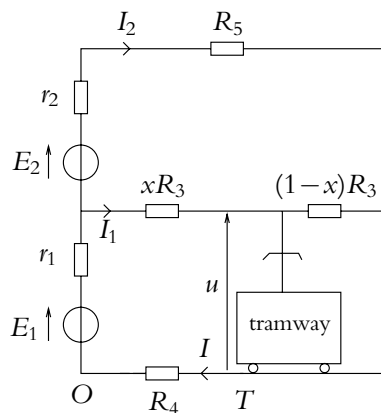
3. 1. Interrupteur ouvert :



- a) La loi des mailles donne : $u = E_1 - (r_1 + x(R_3 + R_4))I$.
- b) L'application numérique donne : $u = 597 - 175x$ dans les unités du système international.
- c)



2. Interrupteur fermé :



- a) On écrit la loi des nœuds : $I = I_1 + I_2$, la loi des mailles sur la ligne d'alimentation et sur la ligne de retour : $E_2 - r_2 I_2 - R_5 I_2 - (1-x)R_3 I_2 + xR_3 I_1 = 0$ et la loi des mailles sur l'alimentation du tramway : $u = -xR_4 I + E_1 - r_1 I - xR_3 I_1$. En

combinant les deux premières relations, on élimine I_2 et on obtient :

$$I_1 = \frac{(r_2 + R_5 + (1 - x) R_3) I - E_2}{r_2 + R_5 + R_3}$$

On reporte ensuite dans l'expression de u :

$$u = E_1 - R_1 I - \left((R_3 + R_4) I - \frac{R_3}{r_2 + R_3 + R_5} E_2 \right) x + \frac{R_3^2 I}{r_2 + R_3 + R_5} x^2$$

b) L'application numérique fournit dans les unités du système international :

$$u = 597 - (175 - 0,382E_2)x - 9,54x^2$$

c) On a un extremum de u en $x = x_0$ si $\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_0} = 0$ soit

$$- \left((R_3 + R_4) I - \frac{R_4}{r_2 + R_4 + R_5} E_2 \right) + 2 \frac{R_3^2 I}{r_2 + R_3 + R_5} x_0 = 0$$

On en déduit :

$$E_2 = \frac{(R_3 + R_4)(r_2 + R_3 + R_5) I}{R_3} - 2R_3 I x_0$$

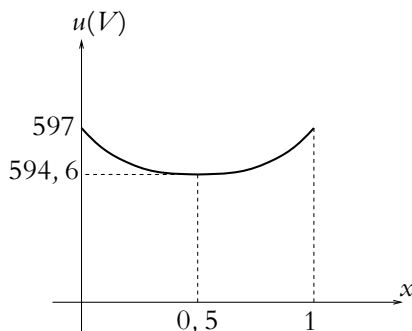
d) Si l'extremum est obtenu au milieu de la ligne, la valeur numérique de E_2 est 433,5 V.

e) On aura un minimum si $\left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_0} > 0$, ce qui est le cas puisque

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_0} = \frac{2R_3^2 I}{r_2 + R_3 + R_5} > 0$$

f) La valeur minimale de la tension est alors : $u_{min} = E_1 - r_1 I - \frac{R_3^2 I}{r_2 + R_3 + R_5} x_0^2 = 594,6$ V.

g)



Chapitre 3

1. La durée caractéristique de la décharge d'un condensateur est $\tau = RC$ soit ici $\tau_1 = R_1 C < \tau_2 = R_2 C$. Cela signifie que le condensateur se décharge moins vite dans R_2 que dans R_1 . Il faudra donc plus de temps pour la décharge dans R_2 .
2. La conclusion reste la même : tout dépend du produit RC et non du pourcentage de décharge.
3. D'après la première question, le condensateur qui se décharge dans R_1 a une charge inférieure à celui qui se décharge dans R_2 donc : $u_1 < u_2$ (car $u = \frac{q}{C}$).
4. $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ puisque $q = Q \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. On se place à un instant t donné donc t est fixe et on compare les valeurs prises par i en fonction de τ . Cela revient à étudier les variations de i en fonction de τ :

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{Q}{\tau^2} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

i est donc une fonction croissante de τ si $t < \tau$ et décroissante sinon ; i passe par un minimum en fonction de τ . On en déduit que :

- si $R_1 < R_2 < \frac{t}{C}$ alors $i_1 > i_2$,
 - si $\frac{t}{C} < R_1 < R_2$ alors $i_1 < i_2$,
 - si $R_1 < \frac{t}{C} < R_2$, on ne peut rien dire.
5. L'énergie totale dissipée vaut $\frac{Q^2}{2C}$: elle ne dépend pas de la résistance, elle sera donc la même dans les deux cas.
 6. La puissance dissipée par effet Joule vaut : $Ri^2 = \frac{Q^2}{C\tau} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$. On doit faire le même type d'analyse que pour i et on a le même comportement sauf que le minimum est obtenu pour $2t$ au lieu de t .

2. A $t = 0$ s, on a $q = 0$ soit $u_C = 0$. L'équation différentielle s'obtient en écrivant une loi des mailles :

$$E = Ri + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

dont la solution est :

$$u_C = E + U \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

soit compte tenu des conditions initiales : $u_C(0) = 0 = E + U$:

$$u_C = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

La valeur maximale est E : u_C aura atteint 10 % de cette valeur à l'instant t_1 tel que

$$\frac{E}{10} = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t_1}{RC} \right) \right) \quad \text{soit} \quad t_1 = RC \ln \frac{10}{9}$$

De même, u_C aura atteint 90 % de la valeur maximale à l'instant :

$$t_2 = RC \ln 10$$

Le temps de montée vaut donc :

$$\Delta T = RC \left(\ln 10 - \ln \frac{10}{9} \right) = RC \ln 9 \simeq 2,2RC$$

Cette relation fournit un moyen d'évaluer rapidement un temps de montée à l'oscilloscope où des lignes correspondant à 10 % et 90 % sont tracées. Il suffit de décaler verticalement le signal de manière à placer le minimum du signal sur la ligne 0 et son maximum sur la ligne 100 puis de repérer à l'aide de curseurs les instants où le signal traverse les lignes 10 et 90. Il ne reste plus alors qu'à soustraire ces deux instants et à diviser par 2 pour avoir une estimation de τ .

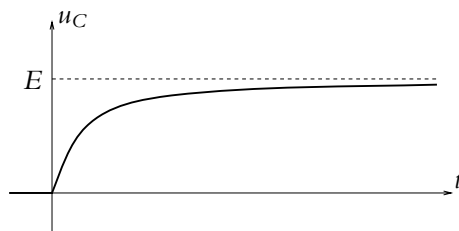
- 3.** 1. Initialement la tension aux bornes de la lampe au néon est nulle : cette dernière peut donc être modélisée par un interrupteur ouvert. Dans ce cas, la loi des mailles et la relation entre l'intensité i traversant le condensateur et la tension u à ses bornes permettent d'obtenir l'équation différentielle suivante :

$$RC \frac{du}{dt} + u = E$$

2. On pose $\tau_0 = RC$. La solution de cette équation différentielle est :
 $u = E + U \exp \left(-\frac{t}{\tau_0} \right)$ Or à $t = 0$, $u = 0$ donc

$$u = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_0} \right) \right)$$

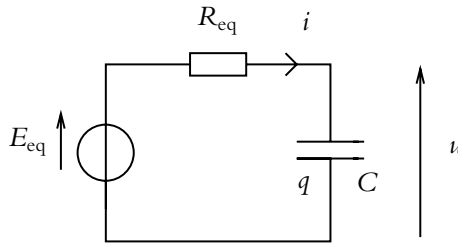
3. La tension u est une fonction croissante du temps : elle varie entre 0 et E . Si $E < E_a$, la tension d'allumage n'est donc jamais atteinte et la lampe reste éteinte. Si $E > E_a$, elle s'allume.
4. On obtient l'allure suivante pour $u(t)$:



5. Dans le cas où l'allumage de la lampe au néon est possible, cela se produit à l'instant t_0 tel que : $E \left(1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_0}\right)\right) = E_a$. On obtient

$$t_0 = \tau_0 \ln \frac{E}{E - E_a}$$

6. Après l'allumage, la lampe au néon est modélisée par une résistance r . La nouvelle équation différentielle peut s'obtenir comme à l'exercice B.1. en remplaçant la source idéale de tension E , les résistances R et r par le modèle de Thévenin équivalent :



avec

$$R_{eq} = \frac{rR}{r+R} \quad \text{et} \quad E_{eq} = \frac{rE}{r+R}$$

La loi des mailles permet d'obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{(R+r)}{rRC}u = \frac{E}{RC}$$

7. La solution s'écrit :

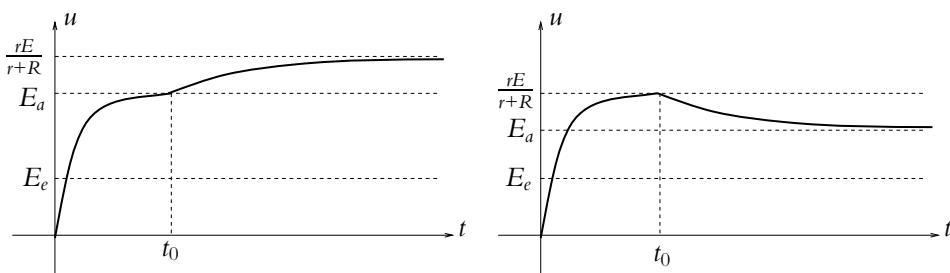
$$u = U' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{r}{R+r}E \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{rRC}{r+R}$$

La nouvelle condition initiale est, à $t = t_0$, $u = E_a$. On en déduit :

$$u = \frac{rE}{r+R} + \left(E_a - \frac{rE}{r+R}\right) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

8. Si $E_a < \frac{rE}{r+R}$, la tension u continue de croître et la lampe au néon ne s'éteint jamais.
Si $E_a > \frac{rE}{r+R}$, la tension u décroît jusqu'à une valeur limite $\frac{rE}{r+R}$. Si $E_e < \frac{rE}{r+R}$ alors la tension u reste toujours supérieure à la tension d'extinction et la lampe au néon ne s'éteint jamais. Si $E_e > \frac{rE}{r+R}$, elle s'éteint.

9. Dans le cas où la lampe au néon reste allumée, la tension peut prendre l'une des deux allures suivantes :



10. Lorsque les conditions le permettent, la lampe au néon s'éteint à l'instant t_1 tel que $E_e = \frac{rE}{r+R} + (E_a - \frac{rE}{r+R}) \exp\left(-\frac{t_1-t_0}{\tau}\right)$ soit :

$$t_1 = t_0 + \tau \ln \frac{(r+R)E_a - rE}{(r+R)E_e - rE}$$

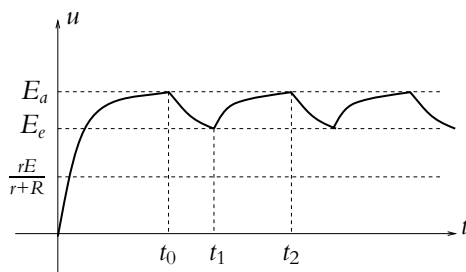
11. Lorsque la lampe au néon s'est éteinte, on retrouve l'équation du départ avec comme nouvelle condition initiale : $u = E_e$ à $t = t_1$. On en déduit l'expression de $u(t)$:

$$u = E + (E_e - E) \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_0}\right)$$

La lampe se rallume alors pour $u = E_a$ soit à un instant

$$t_2 = t_1 + \tau_0 \ln \frac{E_e - E}{E_a - E}$$

On retrouve alors rigoureusement la même situation qu'en t_0 : la tension va décroître jusqu'à ce que la lampe s'éteigne. On en déduit l'allure suivante pour la tension $u(t)$:



12. La période est donc

$$T = t_2 - t_0 = \frac{rRC}{r+R} \ln \frac{(r+R)E_a - rE}{(r+R)E_e - rE} + RC \ln \frac{E_e - E}{E_a - E}$$

13. L'application numérique donne $T = 0,95$ s.

Partie II – Mécanique I

Chapitre 4

1. Un mobile dont l'accélération garde une direction constante peut avoir un mouvement curviligne plan : par exemple si sa vitesse n'est pas colinéaire, à un instant donné, à son accélération (comme dans le cas d'un tir avec une vitesse initiale non verticale).
2. Le fait d'avoir une vitesse nulle à un instant donné n'implique pas que l'accélération soit nulle au même instant. Il suffit pour s'en convaincre de penser à un objet qu'on lance vers le haut : lorsqu'il atteint sa hauteur maximale, sa vitesse est nulle tandis que son accélération ne l'est pas (elle est égale au champ de pesanteur en ce point).
3. Si la direction de la vitesse reste constante, cela signifie que la seule composante non nulle du vecteur-vitesse est suivant cette direction. La seule composante non nulle de l'accélération est suivant cette même direction ($\vec{v} = v\vec{u}$ avec \vec{u} fixe implique $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}$). Par conséquent, l'accélération a même direction que la vitesse et conserve donc une direction constante.
4. Un mobile d'accélération constante peut avoir une vitesse dont la direction change au cours du temps : il suffit que la vitesse à un instant donné (par exemple la vitesse initiale) ne soit pas colinéaire à l'accélération. La composante de la vitesse dans la direction de l'accélération change alors que celle selon la vitesse initiale reste constante : le module et la direction de la vitesse changent. C'est par exemple le cas lors d'un tir en l'absence de frottement avec une vitesse initiale non verticale : on montrera que l'accélération est constamment égale au champ de pesanteur donc constante tandis que la vitesse sera variable.

1. En coordonnées polaires, la vitesse s'exprime par : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc

$$\vec{v} = -\frac{b}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{u}_r + \omega b \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{u}_\theta$$

L'accélération est : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$ donc :

$$\vec{a} = b \left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2 \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{u}_r - 2\frac{\omega b}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{u}_\theta$$

On peut également obtenir le résultat en exprimant $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ en fonction du temps et en dérivant ce vecteur par rapport au temps.

2. On en déduit les modules de la vitesse : $v = b\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ et de l'accélération : $a = b\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.
3. L'angle α entre les vecteurs position et vitesse vérifie : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = OM \times v \cos \alpha$ soit $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$. Cet angle est indépendant du point, il s'agit de l'une des caractéristiques des spirales logarithmiques.

Chapitre 5

1. Seul importe ce qui se produit selon la verticale. L'accélération est la même dans les trois cas, égale au champ de pesanteur au lieu considéré. Les seules différences concernent la direction et le sens de la vitesse initiale par rapport à ceux de l'accélération. Quand on la lance vers le haut, la vitesse initiale est opposée à l'accélération ; vers le bas, le sens est le même et à l'horizontale, les directions sont perpendiculaires. Par conséquent, la balle lancée vers le haut arrive la dernière et celle vers le bas la première.

2. 1. On adopte, comme toujours, la méthode en quatre étapes :

- Système : colis de masse m .
- Référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces : poids $m\vec{g}$.
- Résolution par le principe fondamental de la dynamique.

$m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$ qu'on intègre par rapport au temps : $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$ en notant \vec{v}_0 la vitesse initiale du colis au moment où il est largué à savoir la vitesse de l'avion qui le transportait. On choisit comme origine des temps l'instant où l'avion laisse tomber le colis. La position est obtenue à nouveau par intégration : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \overrightarrow{OM}_0$ soit en projection sur l'axe vertical orienté vers le haut : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. Le colis atteint le sol quand $z = 0$ soit à l'instant $T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 35$ s.

2. L'avion parcourt pendant ce temps une distance $d = v_0T = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = 7,28$ km. Attention : il faut exprimer la vitesse dans les unités du système international c'est-à-dire en m.s^{-1} soit $v_0 = 750 \text{ km.h}^{-1} = \frac{750}{3,6} = 208 \text{ m.s}^{-1}$.
3. La projection de la position du colis sur l'horizontale donne : $x = v_0t$ donc le colis se trouve à la même distance de A que la distance parcourue par l'avion donc à 7,28 km du point A.
4. La vitesse initiale a changé de direction ; les projections sont donc modifiées : $x = v_0t \sin \beta$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t \cos \beta + h$. Le colis atteint le sol lorsque

$z = 0$ c'est-à-dire à l'instant T' solution de $-\frac{1}{2}gT'^2 - v_0 T' \cos \beta + h = 0$ soit $T'_{\pm} = \frac{-v_0 \cos \beta \pm \sqrt{v_0^2 \cos^2 \beta + 2gh}}{g}$. La seule solution physiquement acceptable

est la solution positive donc $T' = \frac{-v_0 \cos \beta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \beta + 2gh}}{g} = 19,9 \text{ s}$.

Le point où le colis atterrit est situé à une distance $d' = v_0 T' \sin \beta = 717 \text{ m}$.

5. On souhaite que $v_0 t \sin \beta \leq d_0$ soit $t \leq \frac{d_0}{v_0 \sin \beta} = 2,77 \text{ s}$. La hauteur h de l'avion au moment du largage doit vérifier : $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \cos \beta \leq 605 \text{ m}$.

Chapitre 6

1. 1. On étudie le système constitué par une bille. Il est soumis, dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, à son poids qui dérive d'un potentiel et à la réaction de la glissière qui ne travaille pas (puisque'elle est normale au support du fait de l'absence de frottements). L'application du théorème de l'énergie cinétique conduit donc à : $\Delta E_c = mgh$ en notant h la dénivellation entre A et B . Comme la masse et la dénivellation sont identiques pour les deux billes, la variation d'énergie cinétique est la même donc la vitesse des billes en sortie des glissières est la même.

2. Comme $\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = mgh$, la variation du carré de la vitesse est indépendante de la masse. Le résultat est donc le même que les billes aient ou non la même masse.

2. • Système : voiture considérée comme ponctuelle.

- Référentiel terrestre supposé galiléen.
 - Bilan des forces : poids $m\vec{g}$ et réaction de la route \vec{R} qu'on décompose en un terme de réaction normale R_N perpendiculaire à la route et un terme de réaction tangentielle (force de frottement) \vec{R}_T . La force de frottement vérifie $R_T = fR_N$ en notant f le coefficient de frottement.
1. Lorsque la route est horizontale, le poids et la réaction normale sont perpendiculaires à la trajectoire et ne travaillent donc pas. D'autre part, la projection du principe fondamental de la dynamique sur la direction perpendiculaire à la route fournit : $R_N = mg$. On en déduit que $R_T = fmg$ est constante. Son travail s'exprime donc simplement en fonction de la distance d parcourue : $W(\vec{R}_T) = R_T d$. L'application du théorème de l'énergie cinétique entre l'instant $t = 0$ et l'instant t où la voiture s'immobilise donne : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 = W(\vec{R}_T) = -R_T l$. On en déduit la relation : $2fgl = v_0^2$. On utilise ensuite le même raisonnement pour une vitesse initiale v'_0 , ce qui conduit à une distance parcourue l' telle que :

$l' = \frac{v_0'^2}{2fg} = \left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 l$. L'application numérique donne : $l' = 102,4$ m. On remarque l'importance de la vitesse initiale sur la distance nécessaire pour immobiliser un véhicule.

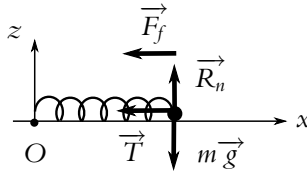
2. Lorsque la route fait un angle α avec l'horizontale, la projection du principe fondamental de la dynamique sur la direction perpendiculaire à la route fournit : $R_N = mg \cos \alpha$ en notant α l'angle que fait la route avec l'horizontale. On en déduit : $R_T = fmg \cos \alpha$.

D'autre part, le poids n'est plus perpendiculaire à la trajectoire et il faut tenir compte de son travail. En revanche, rien n'est modifié pour les travaux des composantes de la réaction (si ce n'est l'expression de R_T). On doit donc ajouter le travail : $\pm mgl \sin \alpha$, le signe étant positif si la voiture descend et négatif si elle monte la pente.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $-\frac{1}{2}mv_0'^2 = -(fmg \cos \alpha \pm mg \sin \alpha) l$ et $-\frac{1}{2}mv_0'^2 = -(fmg \cos \alpha \pm mg \sin \alpha) l'$ soit $l' = \left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 l$. Le résultat est identique que la route soit horizontale ou non.

Chapitre 7

1. 1. Le mouvement est harmonique, de pulsation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On en déduit que la période T vérifie : $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Par conséquent, une augmentation de la masse augmente la période.
2. La position du point, par rapport à l'équilibre, vérifie : $x = d \cos(\omega_0 t)$ compte tenu des conditions initiales. La vitesse s'écrit donc : $v = \frac{dx}{dt} = -d\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. La masse passe par la position d'équilibre quand $x = 0$ c'est-à-dire pour $t = \frac{\pi}{2\omega_0} + k\frac{\pi}{\omega_0}$. La vitesse vaut alors $v = \pm d\omega_0 = \pm d\sqrt{\frac{k}{m}}$. Pour augmenter la vitesse au passage par la position d'équilibre, il suffit de diminuer la masse m .
3. D'après l'étude précédente, il suffit d'augmenter d .
4. La force à exercer, $-kx\vec{u}_x$, est indépendante de la valeur de m . Si le déplacement est le même, le travail sera le même. Par conséquent, on fournit une énergie identique quelle que soit la valeur de la masse.
2. 1. Dans le référentiel galiléen du laboratoire, le système M est soumis à son poids, la réaction du support horizontal \vec{R}_n , la tension du ressort \vec{T} et la force de freinage. On note \vec{u}_x le vecteur unitaire de l'axe Ox .



La relation fondamentale de la dynamique donne : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{T} + \vec{F}_f$. En projection sur l'axe Ox avec $\vec{T} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - \lambda\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2\ell_0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = m\omega_0/\lambda$.

2. On écrit l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. Pour avoir une solution apériodique, il faut que le discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$ soit positif donc $Q < 1/2$ ou $\lambda > 2\sqrt{km}$.

3. Les solutions de l'équation caractéristique sont alors :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

On peut écrire la solution pour x somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière $x = \ell_0$: $x(t) = A\exp(r_1t) + B\exp(r_2t) + \ell_0$.

À $t = 0$, le point M est en $x = \ell_0$ (position d'équilibre) et la vitesse vaut $\dot{x} = v_0$, d'où :

$$\begin{cases} x(0) = A + B + \ell_0 = \ell_0 \\ x'(0) = r_1A + r_2B = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{v_0}{r_1 - r_2} = \frac{v_0}{\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}} \\ B = -A = \frac{v_0}{r_2 - r_1} = -\frac{v_0}{\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}} \end{cases}$$

Finalement :

$$x(t) = \frac{2v_0}{\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sinh \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

3. 1. Étude qualitative des positions d'équilibre :

- a) O est une position d'équilibre car il n'y a pas de forces le long de Ox quand M est en O . Si $l < l_0$, quand on écarte légèrement M de O , le ressort est comprimé et tend à éloigner M de O : cette position d'équilibre est instable. Il existe, de part et d'autre de O , deux positions d'équilibre stables symétriques par rapport à O pour lesquelles la longueur du ressort est la longueur à vide l_0 du ressort.

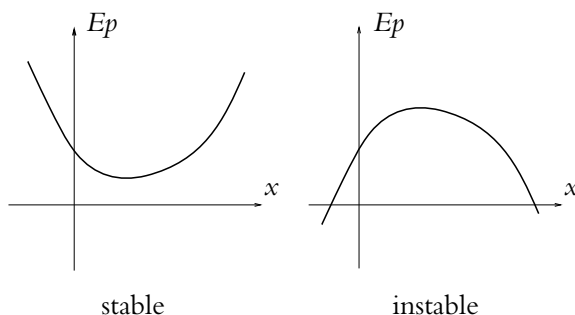
- b) O est toujours une position d'équilibre. Si $l > l_0$, quand on écarte légèrement M de O , le ressort est tendu, il a donc tendance à ramener M vers R : cette position d'équilibre est stable.

2. Étude de l'énergie potentielle :

- a) $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dEp$ avec $\vec{F} = -k \left(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0 \right) \frac{\vec{RM}}{RM}$ et $d\vec{OM} = dx \vec{u}_x$.
Comme on effectue un produit scalaire et que le déplacement élémentaire n'a de composante que sur Ox , seule importe la composante suivant Ox de \vec{F} . On projette \vec{RM} sur \vec{u}_x et $F_x = -k \left(x - \frac{l_0 x}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right)$. Par intégration, on en déduit : $Ep = \frac{1}{2} k x^2 - k l_0 \sqrt{x^2 + l^2} + C$ où C est une constante. On détermine C à partir de $Ep(0) = 0$ soit $C = k l_0 l$ et finalement

$$Ep = \frac{1}{2} k x^2 + k l_0 \left(l - \sqrt{x^2 + l^2} \right)$$

- b) On a établi dans le cours que l'énergie potentielle élastique du ressort peut s'écrire : $Ep = \frac{1}{2} k (d - l_0)^2 + C'$ en notant d la longueur du ressort. En explicitant cette dernière $d = \sqrt{x^2 + l^2}$ et en déterminant la constante à partir de $Ep(0) = 0$, on retrouve la même expression qu'à la question précédente.
- c) Une position d'équilibre correspond à un extremum de l'énergie potentielle c'est-à-dire à la valeur de x vérifiant $\frac{dEp}{dx} = 0$. Elle est stable s'il s'agit d'un minimum c'est-à-dire si $\frac{d^2 Ep}{dx^2} > 0$; elle est instable s'il s'agit d'un maximum c'est-à-dire si $\frac{d^2 Ep}{dx^2} < 0$. Les allures respectives de l'énergie potentielle sont les suivantes :



- d) Pour déterminer les positions d'équilibre, on dérive l'expression de l'énergie potentielle trouvée précédemment :

$$\frac{dEp}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right)$$

On en déduit trois positions d'équilibre ($x_e = 0$, $x_e = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$) si $l < l_0$ et une seule ($x_e = 0$) pour $l > l_0$.

- e) Pour déterminer leur stabilité, on calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{d^2 Ep}{dx^2} = k \left(1 - \frac{l_0 l^2}{(x^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

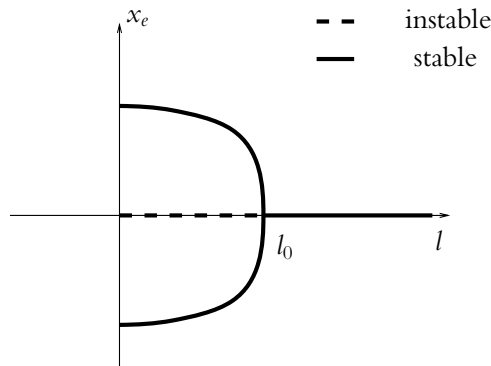
et on évalue sa valeur pour les positions d'équilibre trouvées à la question précédente.

Pour $x_e = 0$, on obtient : $\frac{d^2 Ep}{dx^2}(x = 0) = k \left(1 - \frac{l_0}{l} \right)$ qui est positif pour $l > l_0$ et négatif sinon. La position d'équilibre est donc stable si $l > l_0$ et instable sinon.

Pour $x_e = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$, on obtient : $\frac{d^2 Ep}{dx^2}(\pm \sqrt{l_0^2 - l^2}) = k \left(1 - \frac{l^2}{l_0} \right) > 0$ pour $l < l_0$ c'est-à-dire quand la position d'équilibre existe. Ces positions d'équilibre sont toujours stables.

On retrouve bien les résultats qualitatifs des deux premières questions.

- f) A partir des expressions obtenues pour x_e et de l'étude de stabilité faite à la question précédente, on obtient le tracé suivant :



On a une allure de fourche en $l = l_0$, ce qui justifie le nom donné à cette bifurcation.

- g) En l_0 , on passe de trois positions d'équilibre à une avec un changement de stabilité de la position d'équilibre $x_e = 0$ qui existe quelle que soit la valeur de l : on modifie la symétrie du problème d'où le terme de bifurcation à brisure de symétrie.
3. Pulsation au voisinage d'une position d'équilibre stable :

- a) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m \vec{a} = \vec{F}$ soit en projection sur Ox : $m \ddot{x} = F_x = -\frac{dEp}{dx}$ avec au voisinage d'une position d'équilibre stable :

$$Ep(x) = Ep(x_e) + \frac{dEp}{dx}(x = x_e) (x - x_e) + \frac{d^2 Ep}{dx^2}(x = x_e) \frac{(x - x_e)^2}{2}$$

$$Ep(x) = Ep(x_e) + \frac{d^2 Ep}{dx^2}(x = x_e) \frac{(x - x_e)^2}{2}$$

car $\frac{dEp}{dx}(x = x_e) = 0$ par définition de la position d'équilibre x_e . On en déduit donc $\ddot{x} + \frac{1}{m} \frac{d^2Ep}{dx^2}(x = x_e)x = \frac{1}{m} \frac{d^2Ep}{dx^2}(x = x_e)x_e$ qui est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2Ep}{dx^2}(x = x_e)}$ car $\frac{d^2Ep}{dx^2}(x = x_e) > 0$ du fait que x_e est une position d'équilibre stable.

- b) Si $l < l_0$, les positions d'équilibre stables sont $x_e = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$ et

$$\frac{d^2Ep}{dx^2}(x = x_e) = k \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2} \right)$$

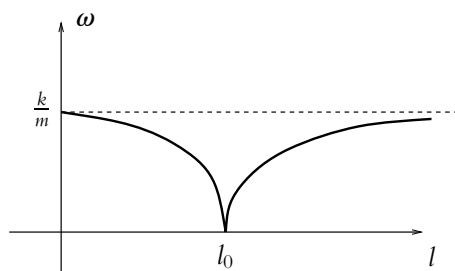
On en déduit : $\omega^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2} \right)$.

Si $l > l_0$, la position d'équilibre stable est $x_e = 0$ et

$$\frac{d^2Ep}{dx^2}(x = x_e) = k \left(1 - \frac{l_0}{l} \right)$$

On en déduit : $\omega^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l} \right)$.

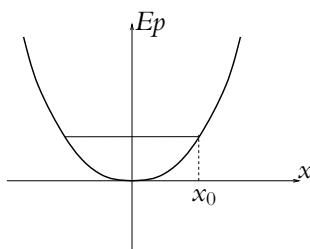
- c) La courbe demandée est la suivante :



- d) Par développement limité au voisinage de $l = l_0$, on obtient :

- pour $l > l_0$: $\omega = \sqrt{\frac{2k}{ml_0}} \sqrt{l - l_0}$ soit $a = \sqrt{\frac{2k}{ml_0}}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$,
- pour $l < l_0$: $\omega = \sqrt{\frac{k}{ml_0}} \sqrt{l_0 - l}$ soit $b = \sqrt{\frac{k}{ml_0}}$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

- e) Si $l = l_0$, l'énergie potentielle s'écrit : $Ep = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0 \right)^2$ dont l'allure est la suivante :



L'énergie mécanique se conserve donc $Ep(x_0) = Ep(x) + Ec$. Comme $Ec > 0$, on doit avoir $Ep(x_0) > Ep(x)$, ce qui sera le cas si $-x_0 < x < x_0$. On a donc un mouvement périodique entre ces deux valeurs extrêmes.

- f) L'énergie cinétique s'écrit : $Ec = \frac{1}{2}mv^2$. En reportant dans la relation $Ep(x_0) = Ep(x) + Ec$ et en explicitant les énergies potentielles, on en déduit : $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\left(\sqrt{x_0^2 + l_0^2} - l_0\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right)^2}$ (on choisit le signe + quand l'abscisse x croît et le signe - quand elle décroît).

- g) Par un développement limité pour $x_0 \ll l_0$, on obtient

$$\frac{dx}{dt} \simeq \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{x_0^4 - x^4}}{2l_0} = \pm \omega_0 \frac{\sqrt{x_0^4 - x^4}}{2l_0}$$

Or, x croît de $-x_0$ à x_0 pendant une demi-période et décroît de x_0 à $-x_0$ pendant la demi-période suivante. On en déduit

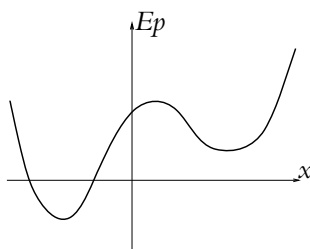
$$T = 2 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{2l_0}{\omega_0 \sqrt{x_0^4 - x^4}} = 4 \int_0^{x_0} \frac{2l_0}{\omega_0 \sqrt{x_0^4 - x^4}} = \frac{8l_0}{\omega_0 x_0} I$$

en posant $u = \frac{x}{x_0}$.

- h) La période T dépend de l'amplitude x_0 des oscillations, il n'y a donc pas d'isochronisme des oscillations et l'oscillateur n'est pas harmonique.

4. Discussion :

- a) On ajoute une force symétrique par rapport au plan horizontal donc sur l'axe Ox la force double : tout se passe comme si la constante de raideur du ressort k devenait $2k$ et la nouvelle énergie potentielle est égale à deux fois celle étudiée auparavant. Il n'y a donc pas de modification dans l'analyse qualitative et quantitative des résultats.
- b) On doit ajouter l'énergie potentielle de pesanteur qui n'est plus constante du fait de l'inclinaison de la barre. La nouvelle expression de l'énergie potentielle est : $Ep^*(x) = Ep(x) + mgx \sin \theta$.
- c) Ep^* a même dérivée seconde que Ep . Elle est donc toujours positive si $l > l_0$. La dérivée première de Ep^* est donc croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et ne s'annule plus en O . Le minimum de l'énergie potentielle correspondant à la position d'équilibre stable n'est donc plus en O .
- d) De même, si $l < l_0$, la dérivée seconde de Ep^* est la même que celle de Ep . Son signe est donc positif, négatif puis à nouveau positif. La dérivée première de Ep^* est donc croissante de $-\infty$ à une valeur positive puis décroissante jusqu'à une valeur négative et croissante jusqu'à $+\infty$. On obtient l'allure suivante pour l'énergie potentielle Ep^* :



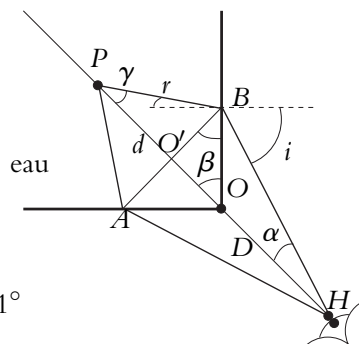
On aura donc toujours les mêmes propriétés mais les positions ne seront plus symétriques par rapport à O .

Partie III – Optique I

Chapitre 9

1. On raisonne sur des angles positifs (sans orientation). On cherche l'angle i . Puisque PH est la bissectrice de l'angle droit, l'angle $\beta = O'OB$ est égal à $\frac{\pi}{4}$ et, puisque AB est perpendiculaire à PH , l'angle $O'BO$ vaut aussi β . Dans le triangle $BO'H$, comme dans $AO'H$:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta + \left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \pi \Rightarrow i = \alpha + \frac{\pi}{4} = 51^\circ$$



2. Dans le triangle $PO'B$:

$$\gamma + \left(r + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \gamma = -r + \frac{\pi}{4}$$

Or la loi de Descartes en B donne :

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow r = 35,76^\circ$$

soit $\gamma = 9,25^\circ$.

3. Le triangle $O'BO$ est isocèle donc $OO' = OB$. De plus, $\tan \gamma = \frac{O'B}{d - OO'}$. On en déduit :

$$d = O'B \left(\frac{1}{\tan \gamma} + 1 \right)$$

Par un raisonnement semblable dans $O'BH$, on établit :

$$D = O'B \left(\frac{1}{\tan \alpha} - 1 \right)$$

En faisant le rapport des deux expressions, on obtient :

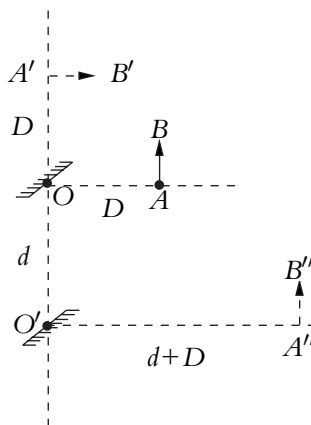
$$d = D \frac{1 + \frac{1}{\tan \gamma}}{\frac{1}{\tan \alpha} - 1} = 42 \text{ cm}$$

- 2. a)** Le plan d'incidence est le plan défini par le rayon incident et la normale à la surface de réflexion et/ou de réfraction au point où le rayon arrive.
- b)** Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence, traverse la normale et l'angle de réflexion r vérifie $r = -i$ en notant i l'angle d'incidence.
- c)** Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence, traverse la normale et l'angle de réfraction i' vérifie $n' \sin i' = n \sin i$ en notant i l'angle d'incidence, n et n' les indices des milieux d'incidence et de réfraction.
- d)** On aura réfraction si $|\sin i'| \leq 1$ soit $i \leq \text{Arcsin} \frac{n'}{n}$. Sinon on a réflexion totale.
- 2. a)** Du fait de la symétrie, le plan d'incidence doit contenir l'axe de la fibre.
- b)** L'absence de réfraction dans la gaine impose $\frac{n_1}{n_2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) > 1$ et la loi de Descartes donne $n_1 \sin \theta = n_0 \sin i$. On en déduit $i < i_a = \text{Arcsin} \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}$.
- c)** Par la définition proposée, on a $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.
- d)** L'application numérique donne $ON = 0,363$.
- e)** Comme $n_1 > n_2$, on a $i_a = \frac{\pi}{2}$ et $ON = 1$.
- f)** Avec la relation donnée, l'application numérique donne $\mathcal{A} = -0,2 \text{ dB.km}^{-1}$.
- 3. a)** Il est nécessaire de bien positionner les fibres les unes par rapport aux autres pour obtenir une bonne reconstitution de l'image.
- b)** Le temps le plus court est celui obtenu en se déplaçant sur l'axe. On obtient comme valeur $\frac{Ln_1}{c}$. Le temps le plus long correspond à l'angle d'acceptance soit $\frac{Ln_1}{c \cos \theta}$. On en déduit $\delta\tau = \frac{Ln_1}{c} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)$.
- c)** L'application numérique donne $\delta\tau = 0,158 \mu\text{s}$.
- d)** On souhaite avoir $T > \delta\tau$ soit $f < \frac{1}{\delta\tau} = \Delta f = 6,3 \cdot 10^6$ bits par seconde. On obtient un meilleur résultat que pour le téléphone mais moins bon que pour la télévision.

Chapitre 10

1. a) L'image A' de A par le miroir du haut, que l'on appelle M_h , est le symétrique de A par M_h . A' est à une distance D au-dessus de M_h sur la droite OO' . De même, l'image A'' de A' par le miroir du bas (M_b) est symétrique de A' par M_b et se trouve donc à l'horizontale de O' à une distance $D + d$.

- b) L'image $A'B'$ de AB par M_h est symétrique de AB et horizontale. L'image de $A'B'$ par M_b est symétrique de $A'B'$ par M_b et de nouveau verticale dans le même sens que AB .



2. Quel que soit leur angle avec la verticale, les deux miroirs sont parallèles. D'autre part, A' est symétrique de A par M_h et A'' symétrique de A' par M_b . On en déduit que les trois points sont sur la droite passant par A et perpendiculaire aux deux miroirs. Cette droite n'est pas la même que lorsque les miroirs sont à 45° et donc A'' n'est pas à l'horizontale de O' . Par contre, l'image $A''B''$ sera elle-aussi verticale (propriété de la symétrie par deux droites parallèles).

Chapitre 11

1. On s'aperçoit (fig 11.1) que quelque soit la position de l'objet, l'image sera vue par l'œil sous le même angle.
2. On utilise les notations $AB \xrightarrow{L} A'B'$ et on note O le centre optique. Connaissant le grandissement, on peut écrire :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{0,1} = 10 \Rightarrow \overline{OA'} = 10 \overline{OA}$$

puis on reporte dans la loi de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = V \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA}} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) = V \Rightarrow \overline{OA'} = -\frac{9}{10} \frac{1}{V} = -9 \text{ cm}$$

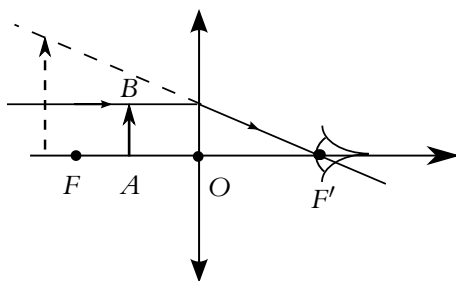
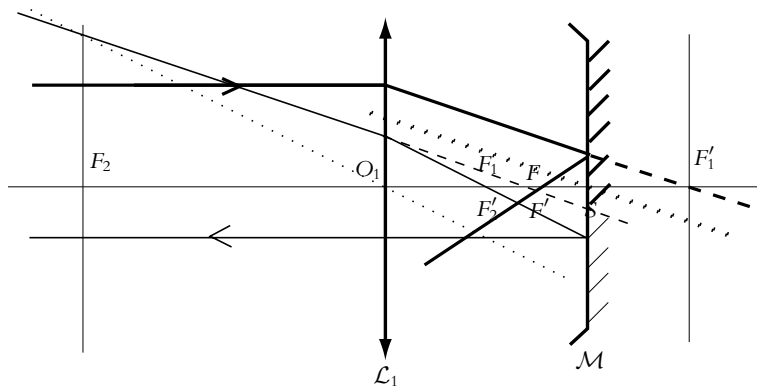


Figure 11.1

2. 1. On applique le même principe qu'à la question 1 de l'exercice précédent.



2. L'infini a pour image F_1' par \mathcal{L}_1 qui a pour image F' par \mathcal{M} . On utilise la relation de conjugaison de Newton pour \mathcal{M} et la relation de Chasles pour obtenir

$$\overline{F_2'F'} = \frac{f_2'^2}{-f_2' - e + f_1'} = \frac{a}{2}$$

3. Cf. première question.
4. L'infini a pour antécédent F_2 par \mathcal{M} qui a pour antécédent F par \mathcal{L}_1 . On applique la relation de conjugaison de Newton pour \mathcal{L}_1 et la relation de Chasles pour obtenir

$$\overline{F_1F} = \frac{-f_1'^2}{-f_1' + e + f_2'} = \frac{9a}{2}.$$

Deuxième période

Partie IV – Électrocinétique II

Chapitre 15

1. $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}$ donc $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} > R$
2. $\underline{Z} = \frac{R \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$ donc $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} < R$
3. $\underline{Z} = R + jL\omega$ donc $Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} > R$
4. $\underline{Z} = \frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$ donc $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2 \omega^2}}} < R$

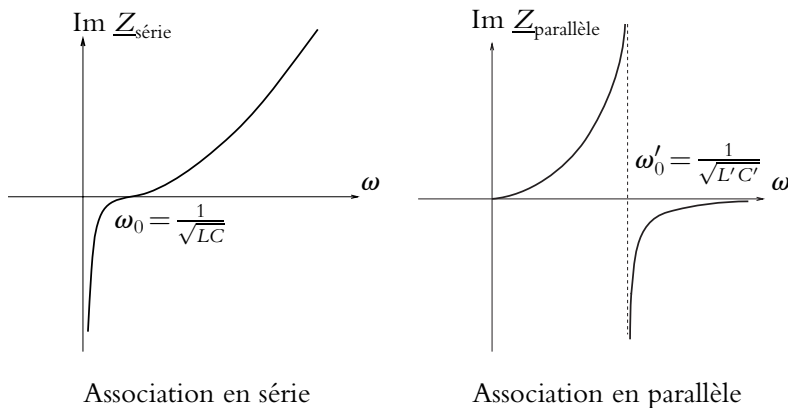
Chapitre 16

1. Les impédances à considérer sont imaginaires pures ($jL\omega$ et $\frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}$).

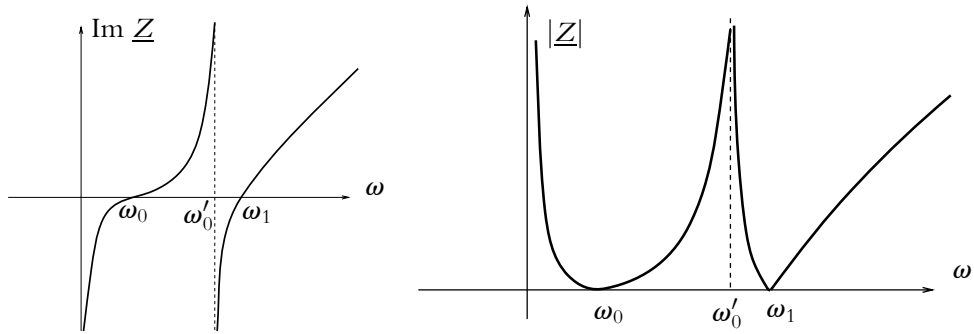
Pour l'association en série, l'impédance équivalente à hautes fréquences est donnée par celle de l'inductance, celle de la capacité tendant vers 0. À basses fréquences, elle est donnée par l'impédance de la capacité puisque celle de l'inductance tend vers 0.

On a le résultat inverse pour l'association en parallèle.

On peut donc représenter les variations des parties imaginaires en fonction de ω pour ces deux associations :

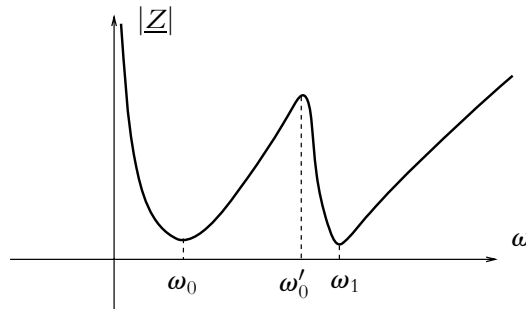


Alors ces deux associations étant en série, il suffit de sommer les deux contributions pour une pulsation ω donnée et de prendre le module pour avoir l'allure des variations du modules de l'impédance en fonction de la pulsation (ou de la fréquence) :



On obtient donc un phénomène de résonance quand l'impédance devient infinie et un phénomène d'antirésonance quand elle devient nulle. On note l'existence d'un point anguleux en ω_1 à cause de la valeur absolue.

Si on tient compte des résistances, l'impédance à la résonance passe par un maximum sans devenir infinie et à l'antirésonance passe par un minimum sans s'annuler.



On note que le point anguleux disparaît.

2. 1. On détermine ε en appliquant la relation des ponts diviseurs de tension :

$$\varepsilon = \frac{Z_{\parallel}}{Z_{\parallel} + R} \varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{\parallel}}} \varepsilon = \frac{1}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} \varepsilon$$

où Z_{\parallel} est l'impédance équivalente à L et C en parallèle.

2. On en déduit le module de \underline{s} :

$$s = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

dont les variations sont opposées à celles de $f(\omega) = 1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$. On note que $\forall \omega, f(\omega) \leq 1$ et que $f\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 1$. Par conséquent, f passe par un minimum en $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et s par un maximum à la même pulsation : il y a résonance.

3. Le maximum de s vaut E , la bande passante est donc définie comme la bande de pulsation pour laquelle $s \leq \frac{E}{\sqrt{2}}$. Du fait des variations de s , il suffit de déterminer les deux pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles on a $s = \frac{E}{\sqrt{2}}$ et la bande passante vaut : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. On doit donc résoudre :

$$\frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

soit

$$R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow RLC\omega^2 \pm L\omega - R = 0$$

dont seules les solutions positives sont physiquement acceptables. Finalement on trouve :

$$\omega_1 = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC}$$

et

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

4. Le facteur de qualité est le nombre sans dimension Q tel que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

5. A la résonance, $\underline{s} = \underline{e}$ donc le déphasage est nul, ce qui permettra une détermination précise de la résonance à partir de la méthode de Lissajous.
6. La résonance de ce circuit est obtenue pour la même pulsation que la résonance en intensité du circuit R, L, C série et on a un déphasage nul dans les deux cas. La seule différence concerne les facteurs de qualité qui sont inverses l'un de l'autre. L'avantage du circuit considéré ici est qu'il est facile d'augmenter le facteur de qualité en augmentant la valeur de la résistance. Une telle opération sur le circuit R, L, C série diminuerait le facteur de qualité.

Chapitre 17

1. On appelle D_i le dipôle inconnu d'admittance $G + jS$. Puisque les trois dipôles $((L, r), R, D_i)$ sont en parallèle, leurs admittances s'ajoutent. L'admittance du dipôle D est :

$$\underline{Y}_D = G_D + jS_D = \frac{r - jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2}$$

L'admittance totale est :

$$\underline{Y} = \left(G + G_D + \frac{1}{R} \right) + j(S_D + S)$$

Puisqu'on souhaite obtenir un facteur de puissance égal à 1, il faut que le dipôle global soit purement résistif donc que $S = -S_D > 0$. Le dipôle à ajouter doit être capacitif. On prend $G = 0$ pour éviter une consommation supplémentaire d'énergie d'où $C = \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$. Il faut donc déterminer r et L . La puissance consommée

dans D est $\mathcal{P} = rI_D^2$ avec $I_D = \frac{\mathcal{P}}{U \cos \phi}$ d'où $r = \frac{U^2 \cos^2 \phi}{\mathcal{P}} = 28,0 \, \Omega$. On en déduit L à partir de :

$$L^2\omega^2 = Z_D^2 - r^2 = \left(\frac{U}{I} \right)^2 - r^2 \Rightarrow L = \frac{U^2 \cos \phi \sin \phi}{\omega \mathcal{P}} = 91,6 \, \text{mH}$$

$$\text{d'où : } C = \frac{L}{L^2\omega^2 + r^2} = \frac{\mathcal{P} \sin \phi}{\omega U^2 \cos \phi} = 56,4 \, \mu\text{F}.$$

2. Le facteur de puissance de l'ensemble est égal à 1 donc le comportement est purement résistif et la conductance de l'ensemble est $G + G_D$ soit une résistance R' :

$$R' = \left(\frac{1}{R} + \frac{r}{r^2 + L^2\omega^2} \right)^{-1} = 36,5 \, \Omega$$

1. On transforme le modèle de Thévenin (E, R_1) en modèle de Norton équivalent $(\frac{E}{R_1}, R_1)$ puis on associe les deux résistances en parallèle, de résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, avant de revenir au modèle de Thévenin de f.e.m. équivalente $E_{\text{eq}} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$ et de résistance équivalente R_{eq} .

2. La puissance dissipée dans R est $\mathcal{P} = ui = Ri^2$ avec

$$i = \frac{E_{\text{eq}}}{R + R_{\text{eq}}} = \frac{R_2 E}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

et finalement :

$$\mathcal{P} = \frac{RR_2^2 E^2}{(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2)^2}$$

3. Pour obtenir un maximum, on annule la dérivée de \mathcal{P} par rapport à R qui s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{R_2^2 E^2 (R_1 R_2 - (R_1 + R_2) R)}{(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2)^3}$$

La valeur de R cherchée est donc :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_{\text{eq}}$$

Pour s'assurer qu'il s'agit d'un maximum, on pourrait regarder le signe de la dérivée seconde de \mathcal{P} par rapport à R pour la valeur de R qui vient d'être trouvée. On préfère remarquer que \mathcal{P} est une quantité positive et que les valeurs limites pour $R \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ sont nulles : l'extremum est donc un maximum.

4. La puissance fournie par le générateur est $\mathcal{P}_g = E i'$ où i' est l'intensité du courant parcourant la résistance R_1 c'est-à-dire $i' = \frac{E}{R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}}$ et finalement :

$$\mathcal{P}_g = \frac{(R + R_2) E^2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$

5. On en déduit le rendement :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_g} = \frac{RR_2^2}{(R_1 + R_2) R^2 + R_2 (R_2 + 2R_1) R + R_1 R_2^2}$$

6. On cherche la valeur pour laquelle on a un maximum en déterminant la valeur pour laquelle la dérivée de η par rapport à R s'annule. Cette dérivée est :

$$\frac{d\eta}{dR} = \frac{R_2^2 (R_1 R_2^2 - (R_1 + R_2) R^2)}{((R_1 + R_2) R^2 + R_2 (2R_1 + R_2) R + R_1 R_2^2)^2}$$

Elle s'annule pour :

$$R = R_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Pour s'assurer qu'il s'agit d'un maximum, on procède comme pour la puissance \mathcal{P} en regardant les limites qui sont nulles quand $R \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ et en utilisant le fait que η est positif.

7. On constate la différence entre une valeur maximale de \mathcal{P} qui correspond à un transfert maximal de puissance à la résistance R et une valeur maximale de η qui correspond à un rendement maximal. Ce sont deux notions différentes.

3. On cherche pour quelle valeur de R \mathcal{P} est maximale et pour cela, il faut tout d'abord calculer l'expression de \mathcal{P} . Si on nomme \underline{Y} l'admittance de l'ensemble, on a :

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}_e(\underline{Y})U^2$$

Or :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL'\omega} = \frac{R}{R^2 + L'^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega} - \frac{L'\omega}{R^2 + L'^2\omega^2}\right)$$

Ainsi la puissance est :

$$\mathcal{P} = \frac{R}{R^2 + L'^2\omega^2}U^2$$

Pour calculer la valeur maximale, on dérive par rapport à R :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{U^2}{(R^2 + L'^2\omega^2)^2} (R^2 + (L'\omega)^2 - 2R^2)$$

\mathcal{P} est maximale pour $L'\omega = R$ et $R = R_0 = 12 \, \Omega$ d'où $L' = 3,8 \cdot 10^{-2} \, \text{H}$ et $\mathcal{P}_M = \frac{U^2}{2R_0} = 2400 \, \text{W}$.

La valeur R_1 de la résistance pour laquelle $\cos \phi = 1$ est celle pour laquelle l'admittance est réelle :

$$C\omega = \frac{1}{L\omega} + \frac{L'\omega}{R_1^2 + (L'\omega)^2}$$

et

$$\mathcal{P}_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + L'^2\omega^2}U^2 \Rightarrow \mathcal{P}_1 R_1^2 - R_1 U^2 + (L'\omega)^2 \mathcal{P}_1 = 0$$

La résolution de l'équation du second degré donne deux solutions :

- $R_1 = 2,6 \, \Omega$;
- $R_1 = 55 \, \Omega$.

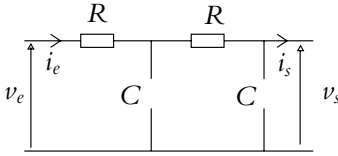
L'énoncé dit de garder celle qui est inférieure à $12 \, \Omega$ soit $R_1 = 2,6 \, \Omega$.

On en déduit $C = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{L\omega} + \frac{R_0 \mathcal{P}_1}{R_1 U^2} \right) = 265 \, \mu\text{F}$.

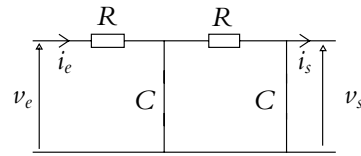
Chapitre 18

1. Premier filtre :

a) Comportements en TBF et en THF :



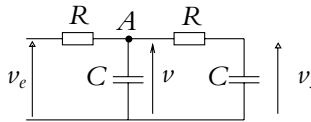
circuit équivalent en TBF



circuit équivalent en THF

En TBF, $v_s = v_e$ et $H = 1$; en THF, $v_s = 0$ et $H = 0$. Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

b) On détermine la fonction de transfert avec les notations de la figure ci-dessous.



On applique la loi des nœuds exprimée en termes de potentiel en A :

$$\frac{v_e - \underline{v}}{R} = jC\omega \underline{v} + \frac{\underline{v} - v_s}{R}$$

soit :

$$\underline{v}(2 + jRC\omega) = v_e + v_s$$

Pour calculer $\underline{v_s}$ en fonction de \underline{v} , on applique la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{v_s} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{v}$$

On tire \underline{v} de la deuxième expression et on remplace dans la première :

$$(1 + jRC\omega)(2 + jRC\omega) \underline{v_s} = \underline{v_s} + v_e$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre dont on peut écrire la fonction de transfert sous forme canonique :

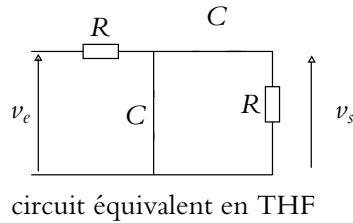
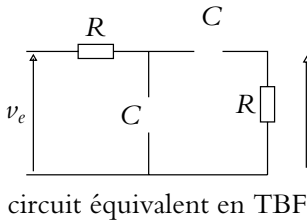
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

avec $H_0 = 1$, $Q = \frac{1}{3}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

- c) Pour le tracé des diagrammes de Bode, le lecteur est invité à se reporter au cours sur le filtre passe-bas du deuxième ordre avec ici $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, cas pour lequel il n'y a pas de résonance.

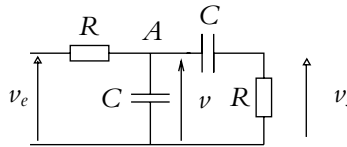
2. Second filtre :

- a) Comportements en TBF et en THF :



En TBF, le courant dans la résistance de droite est nul donc $v_s = 0$ et $H = 0$. En THF, la résistance de droite est court-circuitée donc $v_s = 0$ et $H = 0$. Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

- b) On détermine la fonction de transfert avec les notations de la figure ci-dessous.



On applique la loi des nœuds exprimée en termes de potentiel en A :

$$\frac{v_e - \underline{v}}{R} = jC\omega \underline{v} + jC\omega (\underline{v} - v_s)$$

soit :

$$\underline{v} (1 + 2jRC\omega) = v_e + jRC\omega v_s$$

Pour calculer \underline{v}_s en fonction de \underline{v} , on applique la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{v}_s = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{v}$$

On tire \underline{v} de la deuxième expression et on remplace dans la première :

$$\frac{(1 + jRC\omega)(1 + 2jRC\omega)}{jRC\omega} \underline{v}_s = jRC\omega \underline{v}_s + v_e$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre dont on peut mettre la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

avec $H_0 = \frac{1}{3}$, $Q = \frac{1}{3}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

- c) Pour le tracé des diagrammes de Bode, le lecteur est invité à se reporter au cours sur le filtre passe-bande du deuxième ordre avec ici $Q < 1$ et $H_0 < 1$.

2. 1. La fréquence de coupure d'un filtre passe-bas R, C est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 5,0 \text{ kHz}$$

2. On appelle \underline{Z} l'impédance formée de C , C_0 et R_0 en parallèle et \underline{Y} son admittance. Il vaut mieux utiliser l'admittance ici car les dipôles formant \underline{Z} sont en parallèle.

L'admittance \underline{Y} est : $\underline{Y} = \frac{1}{R_0} + jC\omega + jC_0\omega$.

Pour calculer H_1 , on utilise un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1 = \frac{v_s}{v_e} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}}$$

soit :

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + jR(C + C_0)\omega + \frac{R}{R_0}} = \frac{\frac{R_0}{R + R_0}}{1 + j(C + C_0)\omega \frac{RR_0}{R + R_0}}$$

que l'on met sous forme canonique :

$$\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_c}}$$

avec :

$$H_0 = \frac{R_0}{R + R_0} \quad \text{et} \quad \omega'_c = \frac{R + R_0}{RR_0} \frac{1}{C + C_0}$$

Il s'agit toujours d'un filtre passe-bas du premier ordre.

3. La nouvelle fréquence de coupure à -3 dB est :

$$f'_c = \frac{\omega'_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{R + R_0}{RR_0} \frac{1}{C + C_0} = 5,1 \text{ kHz}$$

En continu, le gain vaut :

$$G_0 = 20 \log \left(\frac{R_0}{R + R_0} \right) = -4,5 \text{ dB}$$

et à la fréquence de coupure :

$$G_c = G_0 - 3 \text{ dB} = -7,5 \text{ dB}$$

Conclusion : tout d'abord on s'aperçoit que l'oscilloscope perturbe effectivement la mesure puisque pour le filtre seul, on devrait trouver $G_0 = 0 \text{ dB}$ et $f_c = 5 \text{ kHz}$. Le gain G_c mesuré est différent de celui attendu : il faut tenir compte de la capacité du câble coaxial.

4. Si on ajoute un condensateur de capacité C_c en parallèle sur les deux autres, la fonction de transfert aura la même forme mais avec une pulsation de coupure :

$$\omega_c'' = \frac{R + R_0}{RR_0} \frac{1}{C + C_0 + C_c}$$

et pour $\omega = \omega_c'$, le module de la fonction de transfert vaut :

$$H_2(\omega_c') = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{C_0 + C + C_c}{C_0 + C} \right)^2}}$$

Or d'après l'énoncé :

$$G_c - G_0 = -10 \log \left(1 + \left(\frac{C + C_0 + C_c}{C_0 + C} \right)^2 \right)$$

d'où :

$$C_c = (C + C_0)(\sqrt{10^{0,57}} - 1) = 50 \text{ pF}$$

Cette valeur semble raisonnable puisqu'un câble coaxial du type de ceux utilisés en travaux pratiques a une capacité linéique de l'ordre de 100 pF.m^{-1} .

Chapitre 19

- 1.** 1. On regarde l'allure d'un créneau envoyé *via* la sonde à l'entrée de l'oscilloscope. La sonde est bien réglée si elle atténue toutes les composantes fréquentielles de la même manière. Par conséquent, tout signal, quel que soit son contenu spectral, ne sera pas déformé. Si le créneau est déformé, la sonde est mal réglée.

2. On applique la relation du pont diviseur de tension en notant \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 les impédances équivalentes respectivement de l'association en parallèle de R_1 et C_1 et de l'association en parallèle de R_2 et de C_2 :

$$\underline{H} = \frac{\underline{\varepsilon}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Or $\underline{Z}_i = \frac{R_i}{1 + jR_i C_i \omega}$ donc

$$\underline{H} = \frac{R_2 + jR_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega}$$

3. La sonde sera réglée si la fonction de transfert est indépendante de la fréquence ou de la pulsation ω . Elle est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{a + jb\omega}{c + jd\omega}$$

La fonction de transfert ne dépendra pas de la pulsation si son numérateur et son dénominateur sont proportionnels donc si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ce qui donne :

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \quad \text{soit} \quad R_1 C_1 = R_2 C_2$$

4. Dans ce cas, on a :

$$\underline{H} = \frac{R_2 (1 + jR_2 C_2 \omega)}{R_1 + R_2 + jR_2 C_2 (R_2 + R_1) \omega} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Le choix des valeurs des résistances permet donc de déterminer le facteur d'atténuation.

2. 1. Les entrées non inverseuses des amplificateurs opérationnels sont reliées à la masse et les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On a donc : $\underline{\varepsilon} = \underline{v}_+ - \underline{v}_- = -\underline{v}_- = 0$.

On applique la loi des nœuds en tension (ou le théorème de Millman) à l'entrée non inverseuse des amplificateurs opérationnels pour calculer \underline{v}_- d'une autre manière et obtenir trois relations entre les tensions $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon}_1$, $\underline{\varepsilon}_2$, $\underline{\varepsilon}_3$ et \underline{e} :

$$\begin{cases} \frac{\underline{\varepsilon}}{R_0} + \frac{\underline{\varepsilon}_1}{R_0} + \frac{\underline{\varepsilon}_3}{R_0} + \frac{\underline{e}}{R_0} = 0 & \text{AO1} \\ \frac{k\underline{v}_0 \underline{\varepsilon}_1}{R} + jC\omega \underline{\varepsilon}_2 = 0 & \text{AO2} \\ \frac{\underline{\varepsilon}_3}{R_2} + \frac{\underline{\varepsilon}_2}{R_1} = 0 & \text{AO3} \\ \frac{k\underline{v}_0 \underline{\varepsilon}_2}{R} + jC\omega \underline{\varepsilon} = 0 & \text{AO4} \end{cases}$$

soit en reportant :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-1}{1 - \left(\frac{RC\omega}{k\nu_0} \right)^2 + j \frac{RR_2C\omega}{kR_1\nu_0}}$$

2. En identifiant les deux expressions (celle de la question précédente et celle de l'énoncé), on a :

$$\omega_0 = \frac{k\nu_0}{RC} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{R_2}{2R_1}$$

C'est un filtre passe-bas du second ordre.

3. Le gain G est le module de \underline{H} :

$$G = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

et le déphasage φ vérifie :

$$\begin{cases} \varphi = \text{Arctan} \left(\frac{-2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \\ \sin \varphi < 0 \quad \text{donc} \quad \varphi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

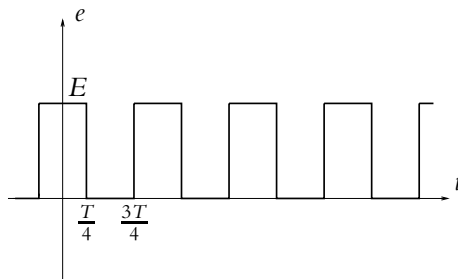
4. Si $\delta = 1$ alors $\underline{H} = \frac{-1}{\left(1 + j\delta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ soit $G = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. La bande passante est

l'intervalle de pulsation telle que : $G > \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit

$$\omega < \omega_0 (\sqrt{2} - 1)$$

Or $\omega_0 = \frac{k\nu_0}{RC}$ donc en modifiant la valeur de la tension ν_0 , on modifie celle de ω_0 et donc de la bande passante. Celle-ci est donc réglable par la tension ν_0 .

- 5.



6. Chaque composante de pulsation $\omega = n\frac{2\pi}{T}$ subit une modification de son amplitude d'un facteur multiplicateur égal à $G(\omega)$ et de sa phase d'un terme additif égal à $\varphi(\omega)$. La composante continue n'est pas modifiée puisque $G(\omega = 0) = 1$. Au total :

$$s(t) = -\frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2E}{(2p+1)\pi} G\left(\frac{(2p+1)2\pi}{T}\right) \cos\left((2p+1)\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\left(\frac{(2p+1)2\pi}{T}\right)\right)\right)$$

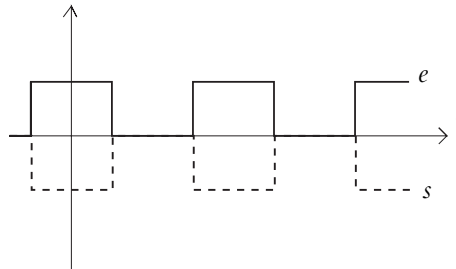
avec les expressions de G et de φ définies plus haut.

7. Avec les valeurs numériques proposées, on a : $\omega_0 = \frac{kv_0}{RC} = 10000 \text{ rad.s}^{-1}$ donc $\omega_e \ll \omega_0$.
8. Au niveau de la phase, cela signifie que $\varphi = \text{Arctan}0[\pi] = -\pi$ car $\cos \varphi < 0$ pour $\omega \ll \omega_0$.
9. On ne considère que les harmoniques d'ordre inférieur à 20, ce qui revient à prendre des valeurs de p comprises entre 0 et 9. Les applications numériques demandées donnent :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,97
ϕ	3,12	3,08	3,04	3,00	2,96	2,92	2,88	2,84	2,80	2,77

10. Le gain est proche de 1 et on a un déphasage proche de π , cela signifie que les harmoniques sont inversées et que le retard est négligeable.

11.



Chapitre 20

1. La valeur moyenne du signal crête vaut $X_{\text{moy}} = \frac{A+B}{2}$; elle est donnée par le multimètre en position V . Sa valeur efficace vraie $X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}}$ est donnée

par le multimètre en position $\simeq V$. Il suffit de résoudre le système de deux équations à deux inconnues A et B défini par les deux relations précédentes pour avoir A et B . En substituant $B = 2X_{\text{moy}} - A$ dans l'expression de X_{eff} , on obtient :

$$A^2 - 2X_{\text{moy}}A + 2X_{\text{moy}}^2 - X_{\text{eff}}^2 = 0$$

dont les solutions sont : $A = X_{\text{moy}} - \sqrt{X_{\text{eff}}^2 - X_{\text{moy}}^2}$ et $B = X_{\text{moy}} + \sqrt{X_{\text{eff}}^2 - X_{\text{moy}}^2}$.

Chapitre 21

1. On note respectivement v_- , v_+ et s les tensions des entrées inverseuse, non inverseuse et de la sortie de l'amplificateur opérationnel. On fait l'hypothèse que ce dernier est idéal donc les courants i_+ et i_- sont nuls. D'autre part, du fait du bouclage entre l'entrée inverseuse et la sortie, on peut faire l'hypothèse d'un fonctionnement en régime linéaire. Ces deux hypothèses impliquent la relation $v_+ = v_-$. On écrit une loi des nœuds en termes de potentiel en A :

$$\frac{-v_-}{R_1} + \frac{s - v_-}{R_4} = 0$$

et en B :

$$\frac{U - v_+}{R_2} + \frac{0 - v_+}{R_C} + \frac{s - v_+}{R_3} = 0$$

De la première équation, on tire $s = \frac{R_1 + R_4}{R_1} v_-$ qu'on reporte dans la seconde. En remplaçant alors v_+ et v_- par $R_C I$, on en déduit l'expression demandée.

2. Pour que le courant I soit indépendant de R_C , il suffit de choisir $R_1 R_3 = R_2 R_4$ alors $I = \frac{U}{R_2}$.
3. Pour que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, il faut que la tension de sortie soit inférieure à V_{sat} en valeur absolue. Or si les résistances sont égales, $s = 2v_-$ et $v_- = v_+ = R_C I = \frac{R_C}{R} U$. Finalement :

$$-V_{\text{sat}} \leq s \leq V_{\text{sat}} \Rightarrow -\frac{V_{\text{sat}}}{2} \leq \frac{R_C}{R} U \leq \frac{V_{\text{sat}}}{2}$$

2. 1. Il n'y a pas de bouclage entre l'entrée inverseuse et la sortie donc le seul fonctionnement possible est non linéaire.

2. On applique la loi des nœuds exprimée en termes de potentiel à l'entrée non inverseuse :

$$\frac{V_e - v_+}{R_1} = \frac{v_+ - V_s}{R_2}$$

soit :

$$v_+ = \frac{R_1 V_s + R_2 V_e}{R_1 + R_2} \quad (21.1)$$

Étant donné que l'entrée inverseuse est reliée à la masse ($v_- = 0$) :

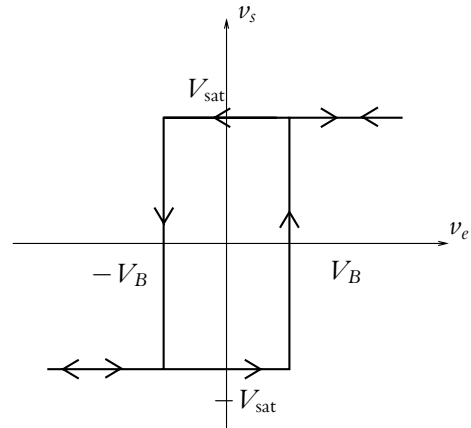
- si $v_+ > 0$, $V_s = V_{\text{sat}}$ et $V_e > -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = -V_B$;
- si $v_+ < 0$, $V_s = -V_{\text{sat}}$ et $V_e < \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_B$.

Pour tracer la caractéristique de transfert, on suppose que V_e est sinusoïdale : $V_e = E \cos \omega t$ avec $E > V_B$.

- À $t = 0$, $V_e = E > -V_B$, le seul état possible est $V_s = V_{\text{sat}}$.
- V_e diminue. Lorsque V_e atteint la valeur V_B , $v_+ = \frac{2R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} > 0$ d'après l'équation (21.1) et la sortie ne bascule pas.
- Lorsque V_e devient égale à $-V_B$, la sortie bascule et $V_s = -V_{\text{sat}}$.
- V_e diminue jusqu'à $-E$ et V_s reste égale à $-V_{\text{sat}}$.
- V_e augmente et le basculement n'a lieu que lorsque v_+ change de signe c'est-à-dire pour $v_+ = V_B$.

On obtient comme caractéristique de transfert le cycle d'hystérésis ci-contre.

On remarque qu'il est inversé par rapport à celui du trigger de Schmidt étudié dans le cours : il s'agit du trigger de Schmidt non inverseur.



3. On suppose qu'à $t = 0$, la sortie s_1 vient de basculer de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$ et que $V_e = -V_B$.

Puisque le deuxième circuit est intégrateur, on peut écrire :

$$s_2(t) = \frac{-1}{RC} \int_0^t -V_{\text{sat}} dt + s_2(0) = V_{\text{sat}} \frac{t}{RC} + s_2(0)$$

Or à $t = 0$, $s_2 = V_e = -V_B$ d'où :

$$s_2(t) = V_{\text{sat}} \frac{t}{\tau} - V_B$$

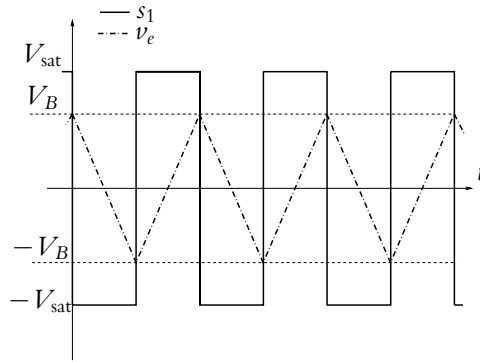
Cette solution est valable tant que $s_2 = V_e < V_B$ soit jusqu'à t_1 tel que :

$$t_1 = 2\tau \frac{V_B}{V_{\text{sat}}}$$

À cet instant, s_1 bascule à $+V_{\text{sat}}$ et, pour $t > t_1$:

$$s_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^t V_{\text{sat}} dt + s_2(t_1) \quad \text{soit} \quad V_e = s_2 = -V_{\text{sat}} \frac{t - t_1}{\tau} + V_B$$

Cette solution est valable jusqu'à t_2 tel que $V_e = s_2$ devienne égal à $-V_B$. Alors s_1 bascule de nouveau à $-V_{\text{sat}}$. Le calcul donne $t_2 = 2t_1$.



4. La période T de l'oscillation est égale à t_2 soit :

$$T = 4\tau \frac{V_B}{V_{\text{sat}}} = 4RC \frac{R_1}{R_2}$$

Les signaux obtenus sont représentés ci-dessus.

3. 1. Puisque les amplificateurs opérationnels sont idéaux, les courants de polarisation i_+ et i_- sont nuls.

a) Une loi des nœuds exprimée en termes de potentiels appliquée à l'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel donne :

$$\frac{e(t) - u_+(t)}{R} + \frac{-E - u_+(t)}{R} + \frac{s(t) - u_+(t)}{R} = 0 \quad (21.2)$$

soit après simplification :

$$u_+(t) = \frac{e(t) - E + s(t)}{3}$$

- b) En régime établi indépendant du temps, le condensateur C est chargé, il se comporte comme un circuit ouvert. Dans ce cas, par la relation des ponts diviseurs de tension, on obtient :

$$u_- = \frac{2}{3}s$$

On suppose que $s = E$ donc d'après (21.2) : $u_+ = \frac{-2E + E}{3} = -\frac{E}{3} < 0$ et $u_+ = \frac{2E}{3} > 0$. On en déduit que $u_+ < u_-$ et donc que s ne peut pas être positif.

On suppose maintenant que $s = -E$. Dans ce cas, $u_+ = -3E$ et $u_- = -\frac{2E}{3}$ donc $u_- > u_+$ et $s = -E$ qui est le seul état possible.

- c) 1. Si $e = E$, on a d'après (21.2) : $u_+(t) = \frac{s(t)}{3}$. En régime établi, $u_- = \frac{2s}{3}$ comme précédemment.

- Si $s = E$, $u_+ = \frac{E}{3}$ et $u_- = \frac{2}{3}E$: $u_+ < u_-$ donc s ne peut rester à E .
- Si $s = -E$, $u_+ = -\frac{E}{3}$ et $u_- = -\frac{2}{3}E$: $u_- < u_+$ donc s ne peut rester à $-E$.

2. Puisque le courant de polarisation i_- est nul, une loi des nœuds exprimée en termes de potentiel à l'entrée inverseuse donne :

$$\frac{s - u_-}{R} = C \frac{du_-}{dt} + \frac{u_-}{2R}$$

soit l'équation différentielle :

$$\tau_a \frac{du_-}{dt} + u_- = \frac{2}{3}s$$

3. Tant que $s = E$, la solution générale de l'équation précédente est :

$$u_- = A \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right) + \frac{2}{3}E$$

À $t = 0$, on a $u_- = -\frac{E}{3}$, ce qui permet d'en déduire $A = -E$ et finalement :

$$u_-(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right) + \frac{2}{3}E$$

Puisque $s = E$, $u_+ = \frac{s}{3} = \frac{E}{3}$. La sortie ne reste égale à $+E$ que tant que $u_- < u_+$. Or à l'instant t_0 , u_- devient supérieure à u_+ et la sortie s bascule à $-E$.

Ensuite l'équation différentielle reliant u_- à s est la même que précédemment mais avec, cette fois-ci, $s = -E$ et $u_-(t_0) = \frac{E}{3}$ comme condition initiale. La

solution s'écrit :

$$u_-(t) = E \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_a}\right) - \frac{2E}{3}$$

Ainsi u_- diminue jusqu'à atteindre la valeur $u_+ = -\frac{E}{3}$ à l'instant t_1 et de nouveau s bascule à $+E$. On a donc affaire à un multivibrateur.

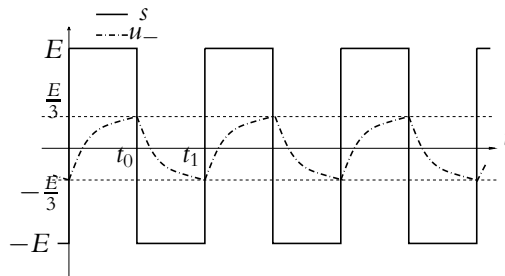
4. On récapitule l'évolution des signaux :

- pour $0 < t < t_0$, $s = +E$ et

$$u_-(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right) + \frac{2E}{3}$$

- pour $t_0 < t < t_1$, $s = -E$ et

$$u_-(t) = E \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_a}\right) - \frac{2E}{3}$$

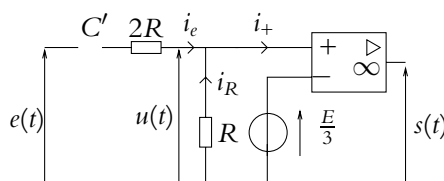


5. La période T est égale à $t_1 = 2t_0$. On calcule donc t_0 en résolvant :

$$u_-(t_0) = \frac{E}{3} = -E \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_a}\right) + \frac{2E}{3} \Leftrightarrow t_0 = \tau_a \ln 3$$

La période est donc $T = 2\tau_a \ln 3$.

2. a) En régime continu, le condensateur se comporte comme un coupe-circuit : le circuit est équivalent au schéma ci-contre. Les courants i_+ , i_e et i_R sont nuls donc la tension $u(t)$ l'est aussi (tension à l'entrée non inverseuse). Puisque la tension à l'entrée inverseuse est $\frac{E}{3}$, elle est supérieure à celle de l'entrée non inverseuse : le seul état stable en sortie est $s = -E$.



b) Puisque le courant i_+ est nul, $i_e = i_R$ et on obtient par une loi des mailles :

$$e(t) = u_{C'} + 3Ri_e$$

Or $i_e = C' \frac{du_{C'}}{dt}$ et $u(t) = Ri_e$ d'où :

$$\frac{de}{dt} = \frac{u}{RC'} + 3 \frac{du}{dt} \Leftrightarrow \frac{\tau_m}{3} \frac{de}{dt} = \tau_m \frac{du}{dt} + u$$

c) Juste avant l'instant $t = 0$, le régime permanent est établi donc $u_{C'} = e(0^-) = -E$. La tension est continue aux bornes d'un condensateur donc $u_{C'}(0^+) = u_{C'}(0^-) = -E$. La loi des mailles précédente donne : $i_e = \frac{e(t) - u_{C'}}{3R}$. Or $u(0^+) = Ri_e(0^+)$ donc

$$u(0^+) = \frac{e(0^+) - u_{C'}(0^+)}{R} = \frac{2E}{3}.$$

Avant le basculement, $u(0^-) = 0$ d'où la discontinuité de la tension u s'écrit :

$$u(0^+) - u(0^-) = \frac{2E}{3}$$

d) Tant que e est constante, sa dérivée est nulle. L'équation différentielle de la question 2 admet pour solution générale $u(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)$ et puisque $u(0^+) = \frac{2E}{3}$, on a :

$$u(t) = \frac{2E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \quad (21.3)$$

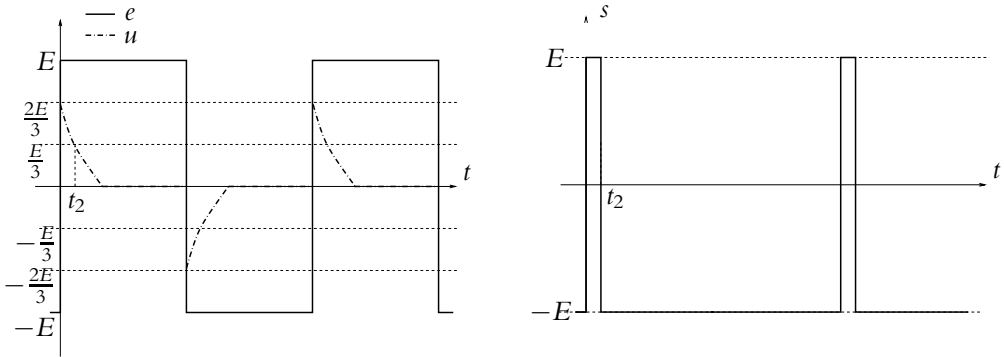
e) Description du fonctionnement :

1. à $t = 0^-$, $e = -E$, $u = 0$ et $s = -E$;
2. à $t = 0^+$, $e = E$, $u = \frac{2E}{3} > u_-$ et s bascule à E ;
3. l'expression de $u(t)$ est donnée par la solution (21.3), u décroît jusqu'à la valeur de u_- soit $\frac{E}{3}$; à cet instant noté t_2 , s bascule de nouveau à $-E$;
4. étant donné que $e = +E$ pendant $\frac{T'}{2} = 5\tau_m$, on peut considérer que lorsque e bascule de E à $-E$, $u\left(\frac{T'}{2}\right) \simeq 0$;
5. à $t = \frac{T'}{2}$, e devient égale à $-E$ et par le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que $u\left(\frac{T'}{2}\right) = -\frac{2E}{3}$; dans ce cas, u reste inférieure à u_- et s reste égale à $-E$.

6. pour $\frac{T'}{2} < t < T'$, $u(t) = -\frac{2E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)$ et comme précédemment, on peut supposer qu'à T' , $u(t) \simeq 0$;

7. le cycle recommence.

On obtient les graphes ci-dessous pour les tensions $e(t)$, $u(t)$ et $s(t)$.

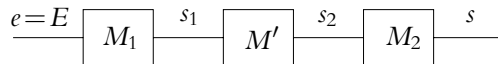


f) La largeur de l'impulsion est égale au temps t_2 défini précédemment et correspondant à $u(t_2) = \frac{E}{3}$ soit :

$$T'_2 = t_2 = \tau_m \ln 2$$

3. a) On modélise l'ensemble du montage par le schéma ci-contre.

Pour que le montage M_1 délivre un signal créneau en s_1 , il faut que $e = E$. On appelle T_1 la période du signal créneau obtenu en s_1 .



Lorsque s_1 est égale à $+E$, cela provoque en s_2 une impulsion de largeur T_2 et de valeur $+E$. Le reste du temps $s_2 = -E$.

Dans l'intervalle de temps où $s_2 = E$, le multivibrateur M_2 peut délivrer un signal créneau de période T_3 . En revanche, dès que $s_2 = -E$, il se bloque en position $s = -E$.

b) Détermination des capacités :

- $T_1 = 2\tau_{a1} \ln 3 = \frac{4}{3}RC_1 \ln 3 \Rightarrow C_1 = \frac{3T_1}{4R \ln 3} = 41 \mu\text{F}$;
- $T_2 = \tau_m \ln 2 = 3RC' \ln 2 \Rightarrow C' = \frac{T_2}{3R \ln 2} = 2 \mu\text{F}$;
- $T_3 = 2\tau_{a2} \ln 3 = \frac{4}{3}RC_2 \ln 3 \Rightarrow C_2 = \frac{3T_3}{4R \ln 3} = 171 \text{ nF}$.

Chapitre 22

1. • Pour $u < -u_s$, $i = g(u + u_s) \Leftrightarrow u = ri - u_s$. La diode est passante et équivalente à un générateur de f.e.m. u_s en série avec un résistor de résistance r (Cf. figure 22.1). Ce n'est pas une zone intéressante d'utilisation de la diode Zéner puisqu'elle se comporte comme une diode à jonction.
- Pour $-u_s < u < V_z$, $i = 0$ A. La diode est bloquée (ou blocante) et est équivalente à un interrupteur ouvert (Cf. figure 22.2).
- Pour $u > V_z$, $i = g_z(u + V_z) \Leftrightarrow u = r_z i - V_z$. La diode est en fonctionnement Zéner et elle est équivalente à un générateur de f.c.e.m. V_z en série avec un résistor de résistance r_z (Cf. figure 22.3).

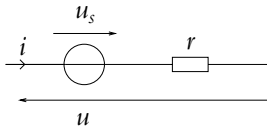


Figure 22.1 Diode Zéner polarisée en direct.

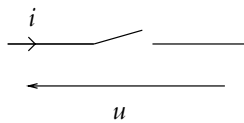


Figure 22.2 Diode Zéner bloquée.

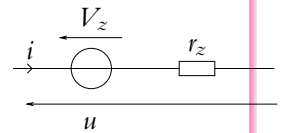
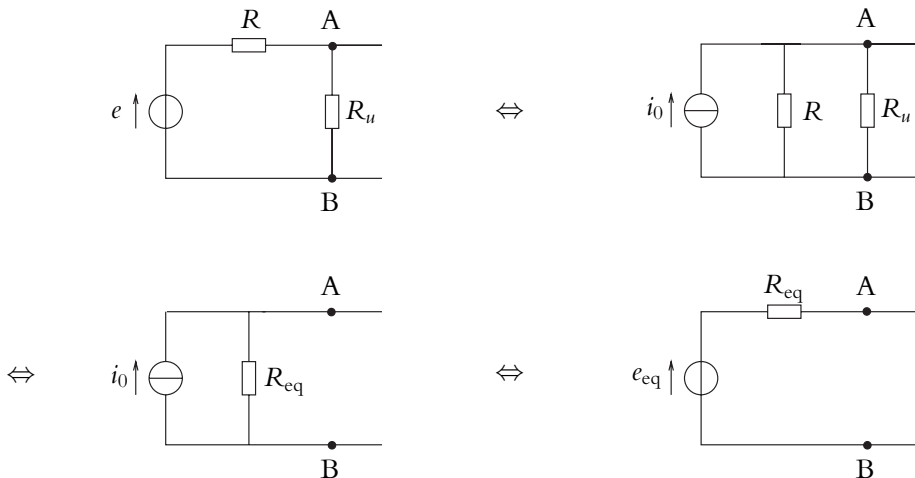


Figure 22.3 Diode Zéner polarisée en inverse.

2. a) La suite de transformations entre modèle de Thévenin et modèle de Norton est représentée ci-dessous :



en notant $i_0 = \frac{e}{R}$, $R_{eq} = \frac{RR_u}{R + R_u}$ et $e_{eq} = R_{eq}i_0 = \frac{R_u}{R + R_u}e$.

- b) Le circuit simplifié représenté sur la figure 22.4 permet d'utiliser une résolution graphique avec la droite de charge $u_z = e_{eq} - R_{eq}i_z$. Pour avoir un point de fonctionnement tel que $u_z = V_z$, il est nécessaire que $e_{eq} > V_z$ (Cf. figure 22.4). Dans ce cas, la tension aux bornes de R_u est indépendante de e et égale à V_z .

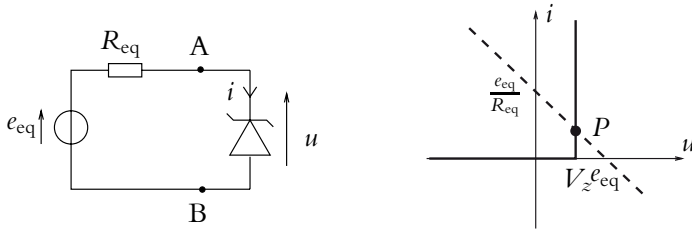


Figure 22.4

2. 1. a) On observe que l'intensité i est positive sur l'intervalle $[0, t_1]$. Cela prouve que la diode est passante. On peut alors remplacer la diode idéale par un court-circuit.

- b) La diode se comportant comme un fil, on obtient l'équation différentielle :

$$E = u + L \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du}{dt}$$

soit :

$$E = u + LC \frac{du}{dt} \quad (22.1)$$

- c) La solution s'écrit :

$$u = E + A \cos \omega_0 t \quad (22.2)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La tension u aux bornes du condensateur est continue donc à $t = 0$ quand on ferme l'interrupteur, $u = U_0$. On en déduit :

$$u(t) = E + (U_0 - E) \cos \omega_0 t$$

et :

$$i = C \frac{du}{dt} = C (E - U_0) \omega_0 \sin \omega_0 t$$

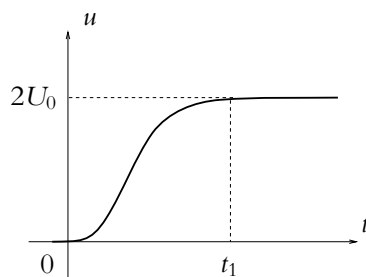
Ces solutions sont valables tant que la diode est passante c'est-à-dire tant que $i > 0$.

- d) Ceci est vérifié jusqu'à l'instant $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$. Ensuite $i = 0$ et

$$u = u(t_1) = 2E - U_0$$

e) On observe pour $t \geq t_1$ que $i = 0$.

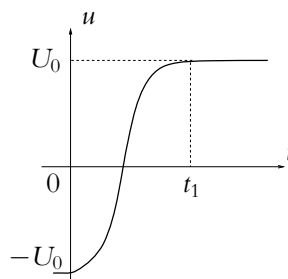
Puisque $i = 0 = C \frac{du}{dt}$, u est constante et $u = u(t_1) = 2E$. Quant à la tension aux bornes de L , elle est égale à $L \frac{di}{dt}$ et est donc nulle. Ainsi la tension aux bornes de la diode est $u_d = E - U = -E$. Cette tension est négative donc la diode est bloquée. D'après la figure, il s'agit d'un doubleur de tension.



2. Dans le cas où $U_0 < 0$ et $E = 0$, les équations (22.1) et (22.2) sont valables avec $E = 0$ et $u(t = 0) = U_0$. On obtient :

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \cos \omega_0 t \\ i(t) = -CU_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \end{cases}$$

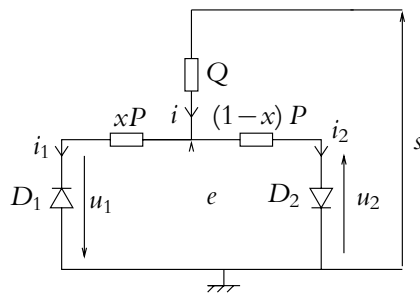
jusqu'à l'instant t_1 . Ensuite $i = 0$ et $u = -U_0$. Il s'agit d'un inverseur de tension.



3. 1. Si s est positive, i doit être positif donc D_1 est bloquée et D_2 passante (cette hypothèse sera vérifiée *a posteriori*). Dans ce cas, $i_2 = i$ et $i_1 = 0$: on a un diviseur de tension et

$$e = \frac{(1-x)P}{Q + P(1-x)}s \Rightarrow e = \frac{1-x}{2-x}s$$

puisque $P = Q$.



On vérifie l'hypothèse :

$$i_2 = \frac{e}{(1-x)P} > 0 \quad \text{et} \quad u_1 = -e < 0$$

donc D_1 est bloquée. Si on avait fait l'hypothèse inverse, on aurait trouvé $i_1 > 0$, ce qui est incompatible avec le sens de la diode D_1 .

2. Si s est négative, i doit être négatif et on s'attend à ce que D_2 soit bloquée et D_1 passante. Dans ce cas, $i_1 = i$ et $i_2 = 0$: on a un diviseur de tension et

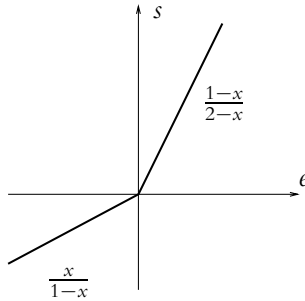
$$e = \frac{xP}{Q + Px}s \Rightarrow e = \frac{x}{1+x}s$$

On vérifie l'hypothèse :

$$i_1 = \frac{e}{xP} < 0 \quad \text{et} \quad u_2 = e < 0$$

donc D_2 est bloquée. Si on avait fait l'hypothèse inverse, on aurait trouvé $i_2 < 0$, ce qui est incompatible avec le sens de la diode D_2 .

3. Si $x < \frac{1}{2}$, $\frac{x}{1-x} < \frac{1-x}{2-x}$. C'est dans ce cas qu'est tracée la caractéristique ci-contre. Si $x > \frac{1}{2}$, les pentes des deux demi-droites sont à "inverser".



L'intérêt est d'avoir réalisé un diviseur de tension dont la valeur dépend du signe de s .

Partie V – Mécanique II

Chapitre 23

1. Il s'agit d'une hélice circulaire d'axe Oz , de rayon R et de pas h . Le pas correspond à l'altitude z acquise lorsqu'on a effectué un tour complet autour de l'axe Oz (θ a varié alors de 2π).
2. On utilise l'expression générale de la vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z = -R\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + R\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y + \frac{h}{2\pi} \dot{\theta} \vec{u}_z$$

On en déduit :

$$v = |\dot{\theta}| \sqrt{h^2 + R^2}$$

3. Comme la vitesse v est supposée constante, on déduit de l'expression précédente que $\dot{\theta}$ l'est également.
4. En calculant le produit scalaire de \vec{v} et de \vec{u}_z , on obtient : $\vec{v} \cdot \vec{u}_z = h\dot{\theta}$. Comme $\dot{\theta}$ est une constante d'après la question précédente, $\vec{v} \cdot \vec{u}_z$ est constant. Comme $\vec{v} \cdot \vec{u}_z = v \cos \alpha$ en notant α l'angle entre \vec{v} et \vec{u}_z , on en déduit que $\cos \alpha$ et donc α sont constants.

L'hodographe est donc l'intersection d'une sphère de centre O et de rayon ν avec un cône de sommet O , d'axe Oz et de demi-angle au sommet α . Il s'agit d'un cercle centré sur l'axe Oz et de rayon $\nu \sin \alpha = \frac{\nu R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$.

Chapitre 24

1. 1. La masse est soumise à son poids, à la réaction du support horizontal, à la force de rappel du ressort et à la force excitatrice. La projection du principe fondamental sur l'axe horizontal (qu'on notera Ox) s'écrit : $m\ddot{x} + kx = F(t)$ en prenant $x = 0$ quand le ressort est au repos.

2. $F(t) = 0$ si $t < 0$, $F(t) = \frac{F_1}{\tau}t$ si $0 < t < \tau$ et $F(t) = F_1$ si $t > \tau$.

La solution s'écrit comme la somme de la solution de l'équation différentielle homogène associée $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et d'une solution particulière.

Cette solution particulière dépend de l'intervalle de temps considéré. Pour $0 < t < \tau$, on la cherche sous la forme d'une fonction affine du temps $at + b$ et on trouve $x_P = \frac{mF_1}{k\tau}t$. Pour $t > \tau$, on la cherche sous la forme d'une constante et on trouve $x_P = \frac{mF_1}{k}$.

La détermination des constantes d'intégration A et B s'obtient à partir des conditions initiales sur l'expression de la solution globale. Attention, la solution $x(t)$ est définie sur deux intervalles ($0 < t < \tau$ et $t > \tau$). Les constantes d'intégration A et B sont à déterminer sur chacun de ces deux intervalles (on les notera A et B sur $]0, \tau[$ et A' et B' sur $]\tau, +\infty[$).

Pour $0 < t < \tau$, on utilise $x(0) = 0 = A$ et $\dot{x}(0) = 0 = \omega B + \frac{mF_1}{k\tau}$ soit finalement

$$x = -\frac{F_1}{\tau} \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \sin \omega t + \frac{mF_1}{k\tau} t \text{ pour } 0 < t < \tau.$$

Pour $t > \tau$, on utilise

$$x(\tau) = -\frac{F_1}{\tau} \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \sin \omega \tau + \frac{mF_1}{k} = A' \cos(\omega \tau) + B' \sin(\omega \tau) + \frac{mF_1}{k}$$

$$\text{et } \dot{x}(\tau) = \frac{mF_1}{k\tau} (1 - \cos \omega \tau) = -\omega A' \sin(\omega \tau) + \omega B' \cos(\omega \tau) \text{ soit finalement}$$

$$x = -2\frac{F_1}{\tau} \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\omega \tau}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\omega \tau}{2}\right) + \frac{mF_1}{k} \text{ pour } t > \tau$$

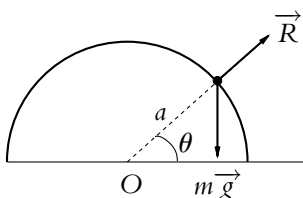
3. On a donc un phénomène d'oscillations de la masse m .
4. On peut modéliser par une telle excitation le passage d'un état stationnaire à un autre sans que celui-ci soit brusque mais linéaire en fonction du temps.

Chapitre 25

1. Le système considéré est le point matériel M , étudié dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La seule force est \vec{f} . Le théorème du moment cinétique en O s'écrit : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge (-k\vec{OM}) = \vec{0}$ donc \vec{L}_O est une constante du mouvement.
2. Si $\vec{L}_O = \vec{0}$, \vec{OM} et \vec{v} sont colinéaires et le mouvement est rectiligne et *a fortiori* plan.
Si $\vec{L}_O \neq \vec{0}$, \vec{OM} appartient au plan défini par O , la position initiale M_0 et la vitesse initiale \vec{v}_0 quel que soit l'instant considéré donc le mouvement est plan.
3. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -k \vec{OM}$: on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique spatial isotrope $\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{OM} = \vec{0}$.
La solution s'écrit $\vec{OM} = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t$ où \vec{A} et \vec{B} sont des constantes vectorielles et en notant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le mouvement est périodique de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.
4. On détermine \vec{A} et \vec{B} en fonction des conditions initiales soit

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t$$
5. On choisit comme base plane orthonormée $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ avec \vec{u}_x et \vec{u}_y des vecteurs directeurs unitaires colinéaires respectivement à \vec{OM}_0 et à \vec{v}_0 . En projetant l'expression de \vec{OM} obtenue à la question précédente, on a $x = x_0 \cos \omega t$ et $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$.
En éliminant le temps, on obtient l'équation de la trajectoire $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega y}{v_0}\right)^2 = 1$ qui est celle d'une ellipse.
6. On aura un cercle si $x_0 = \frac{v_0}{\omega}$.

2. Le système étudié est l'esquimau dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction \vec{R} de l'igloo, normale à celui-ci du fait de l'absence de frottements.



1. L'application du principe fondamental de la dynamique donne : $m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g}$. Toutes les forces sont dans le plan vertical et il n'y a pas de vitesse initiale : le mouvement est donc plan. On utilise les coordonnées polaires dans ce plan en prenant l'origine des angles θ sur le plan horizontal et en choisissant comme sens positif le sens trigonométrique. La projection du principe fondamental de la dynamique sur cette base donne :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = R - mg \sin \theta \\ ma\ddot{\theta} = -mg \cos \theta \end{cases}$$

On multiplie la seconde relation par $\dot{\theta}$ puis on intègre l'équation obtenue en tenant compte des conditions initiales $\dot{\theta}_0 = 0$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. On obtient : $a\dot{\theta}^2 = -2g(\sin \theta - 1)$. On en déduit l'expression de la réaction $R = mg(3 \sin \theta - 2)$. L'esquimau décolle de son igloo lorsque $R = 0$ soit pour un angle $\theta_d = \text{Arcsin} \frac{2}{3} \simeq 42^\circ$. Ensuite l'esquimau est en chute libre avec une vitesse initiale non nulle et sa trajectoire est une parabole.

2. L'application du théorème du moment cinétique conduit à

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) = -mga \cos \theta \vec{u}_z$$

Comme $\vec{L}_O = -ma^2\dot{\theta}\vec{u}_z$, on retrouve $a\dot{\theta}^2 = -2g(\sin \theta - 1)$ et on termine la résolution comme à la question précédente avec le principe fondamental de la dynamique. On note que le théorème du moment cinétique fournit une autre manière d'obtenir la relation $a\dot{\theta}^2 = -2g(\sin \theta - 1)$ mais qu'il faut recourir au principe fondamental de la dynamique pour achever la résolution du problème. Ce théorème élimine la réaction dont le moment par rapport à O est nul.

3. Comme la réaction de l'igloo est normale, seul le poids travaille et le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh$ soit en explicitant v et h en

fonction de θ : $ma\dot{\theta}^2 = mga(1 - \sin \theta)$. On retrouve la même relation que précédemment et on termine la résolution avec le principe fondamental de la dynamique. Ce théorème élimine la réaction dont le travail est nul.

3. a) En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$.

b) $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = -m\rho z \dot{\varphi} \vec{e}_\rho + m(\dot{\rho} z - z \dot{\rho}) \vec{e}_\varphi + m\rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$ donc $L_{Oz} = m\rho^2 \dot{\varphi}$.

c) La réaction \vec{R} est orthogonale au plan tangent en M au parabolioïde \mathcal{P} du fait de l'absence de frottement, ce parabolioïde est de révolution autour de l'axe Oz donc \vec{R} est orthogonale à \vec{e}_φ : \vec{R} est dans le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ donc dans le plan OHP .

Dans le référentiel \mathcal{R} , la particule est soumise uniquement à son poids et à la réaction de \mathcal{P} . Le théorème du moment cinétique en O s'écrit : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{g} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$. Les vecteurs \overrightarrow{OM} et \vec{R} sont dans le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$, le moment de \vec{R} est donc porté par \vec{e}_φ , le moment du poids est orthogonal à celui-ci donc à \vec{e}_z . Finalement la projection sur Oz des moments des forces appliquées à M est nul donc $\frac{dL_{Oz}}{dt} \cdot \vec{e}_z = 0$ et $L_{Oz} = m\rho^2 \dot{\varphi} = c^{\text{te}} = L$.

2. a) $Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$.

b) Le poids dérive de l'énergie potentielle $Ep = mgz + \text{constante}$, la réaction \vec{R} est normale au support donc ne travaille pas : l'ensemble des forces extérieures appliquées à M dans \mathcal{R} dérive donc de l'énergie potentielle $Ep = mgz$ si on choisit $Ep(0) = 0$.

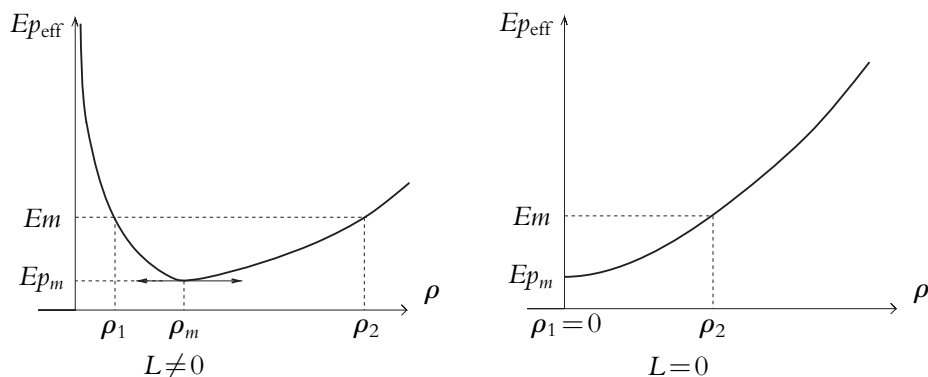
c) D'après la question précédente, l'énergie mécanique de M , $Em = Ec + Ep$, est une constante de mouvement.

3. a) $Em = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mgz$ avec $z = \frac{\rho^2}{a}$ donc $\dot{z} = \frac{\rho \dot{\rho}}{a}$ et $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}$. En remplaçant \dot{z} et $\dot{\varphi}$ par ces deux expressions dans celle de l'énergie mécanique, on obtient l'expression voulue avec :

$$G(\rho) = 1 + \frac{4\rho^2}{a^2} \quad \text{et} \quad Ep_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2m\rho^2} + \frac{mg}{a}\rho^2$$

b) Dans le cas où L est non nul, quand ρ tend vers 0 ou l'infini, Ep_{eff} tend vers l'infini. L'énergie potentielle effective passe donc par un minimum pour $\rho = \rho_m$ annulant sa dérivée. $\frac{dEp_{\text{eff}}}{d\rho} = -\frac{L^2}{m\rho^3} + 2\frac{mg}{a}\rho$ donc Ep_{eff} est minimale pour

$\rho_m = \left(\frac{aL^2}{2m^2g}\right)^{\frac{1}{4}}$. La valeur minimale de Ep_{eff} est $Ep_m = \sqrt{\frac{2gL^2}{a}}$. Quand L est nul, $Ep_{\text{eff}} = \frac{mg}{a}\rho^2$.



- c) La quantité $G(\rho)$ étant positive, $Em \geq Ep_m$: d'après le graphique ci-dessus, $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$. La trajectoire de M est tracée sur une région de \mathcal{P} limitée par les cercles de rayon ρ_1 et ρ_2 , vérifiant $Ep_{\text{eff}}(\rho) = Em$, situés aux cotes $z_1 = \frac{\rho_1^2}{2a}$ et $z_2 = \frac{\rho_2^2}{2a}$.
Si $Em = Ep_m$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_m$: la trajectoire de M est circulaire.
Dans le cas où $L = 0$, ρ_1 est nul.

4. a) La trajectoire de M est une parabole méridienne si et seulement si φ reste constant donc si $L = 0$.
- b) Pour que la trajectoire de M soit un cercle horizontal, il faut que $\rho = \rho_m$ et $\vec{v} = \rho_m \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ à chaque instant. Les conditions initiales sont donc $\rho(0) = \rho_m$, $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_\varphi$ (donc $\dot{\rho}(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$).
- c) On pose $\rho = \rho_m + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \rho_m$. Le développement limité de Ep_{eff} au voisinage de ρ_m au deuxième ordre en $\frac{\varepsilon}{\rho_m}$ donne :

$$Ep_{\text{eff}}(\rho_m + \varepsilon) = \sqrt{\frac{2L^2 g}{a}} + \frac{4mg}{a} \varepsilon^2$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit alors :

$$\frac{1}{2} m G(\rho_m) \varepsilon^2 + \sqrt{\frac{2L^2 g}{a}} + \frac{4mg}{a} \varepsilon^2 = Ep_m = \sqrt{\frac{2gL^2}{a}}$$

On dérive cette équation par rapport au temps et on simplifie par $\dot{\varepsilon}$. On obtient l'équation des petits mouvements autour de ρ_m :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{8g}{aG(\rho_m)} \varepsilon = 0$$

C'est l'équation d'un mouvement oscillatoire de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{aG(\rho_m)}{8g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{8g}} \sqrt{1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2}}$$

L'application numérique donne $T = 1,42$ s.

5. Il y a toujours de légers frottements donc $d(E_m) = \delta W_{\text{frott}} < 0$: l'énergie mécanique diminue, L_{Oz} ne se conserve plus et la bille se stabilise au fond de la cuvette.

Chapitre 26

- 1.** 1. La vitesse du rameur par rapport au référentiel fixe (lié au sol) est : $\vec{v}_{/\text{sol}}(R) = \vec{u} + \vec{v}$. Comme \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens, on en déduit que le rameur atteint B au bout d'un temps $t_R = \frac{AB}{v+u}$.

Quant au piéton, sa vitesse par rapport au référentiel fixe est : $\vec{v}_{/\text{sol}}(P) = \vec{u}$. Il met donc $t_P = \frac{AB}{u}$ pour aller de A à B .

Comme $u < u+v$, on en déduit que le piéton met plus de temps que le rameur : $t_P > t_R$, ce qui est logique.

2. Au retour, la vitesse du rameur est : $\vec{v}_{/\text{sol}}(R) = \vec{v} - \vec{u}$ et, pour revenir en A , il met un temps $t'_R = \frac{AB}{|v-u|}$ soit une durée totale du parcours :

$$t_R + t'_R = AB \left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{|v-u|} \right).$$

Quant au piéton, sa vitesse par rapport au référentiel fixe est : $\vec{v}_{/\text{sol}}(P) = -\vec{u}$. Il met donc $t'_P = \frac{AB}{u}$ et une durée totale du parcours $t_P + t'_P = \frac{2AB}{u}$.

Il faut comparer : $\frac{2AB}{u}$ et $\frac{AB}{u+v} + \frac{AB}{|v-u|}$. On note que $u > v$ pour que le rameur puisse revenir en A . Dans ces conditions, $\Delta t = 2AB \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 - v^2} \right) = -\frac{2ABv^2}{(v^2 - u^2)u}$ toujours négatif. Le piéton arrive toujours le premier. On remarque que si $u - v$ est très faible, la durée du retour pour le rameur est très longue.

- 2.** 1. On se place dans le cadre de la mécanique classique : le temps est donc le même dans tout référentiel et les deux enfants mesurent la même durée de chute.

2. Les deux enfants constituent l'origine de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre : l'un monte rejoindre l'autre par l'ascenseur. Du fait de la loi de composition des vitesses, les deux enfants ne voient pas le ballon à la même vitesse.
3. *A priori*, les accélérations du ballon ne sont pas les mêmes dans les deux référentiels du fait de la loi de composition des accélérations. Cependant les deux référentiels ne sont qu'en translation l'un par rapport à l'autre : l'accélération de Coriolis est nulle et l'accélération d'entraînement se limite au terme d'accélération du deuxième enfant c'est-à-dire celle de l'ascenseur. Celle-ci est nulle puisque l'ascenseur a une vitesse constante. Par conséquent, les deux enfants mesurent la même accélération pour le ballon.
4. L'enfant qui est en haut de l'escalier mesure la distance de chute du ballon dans le référentiel fixe lié à la Terre tandis que l'enfant qui monte mesure la somme de cette distance et de celle de son propre parcours soit deux fois plus.

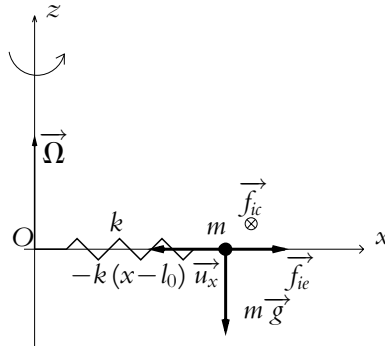
3. On note N la position de l'observateur, \mathcal{R} le référentiel fixe et \mathcal{R}' le référentiel lié à l'observateur et donc en translation par rapport à \mathcal{R} . D'après la loi de composition des vitesses $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_e = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(N)$. On cherche l'expression de $\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$. Par hypothèse : $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = At\vec{u}_y$ et $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(N) = v_0\vec{u}_x$ donc : $\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = At\vec{u}_y - v_0\vec{u}_x$ et par intégration : $\vec{OM} = \frac{At^2}{2}\vec{u}_y - v_0t\vec{u}_x$ en tenant compte de la position initiale de M en O . On obtient : $y' = \frac{At^2}{2}$ et $x' = -v_0t$ soit par élimination du temps : $y' = \frac{Ax'^2}{2v_0^2}$. L'observateur voit donc une trajectoire parabolique.

Chapitre 27

1. 1. On étudie le point matériel M dans le référentiel non galiléen lié à la tige.

Il est soumis à :

- son poids $m\vec{g}$,
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$,
- la réaction de la tige $\vec{R} = R_y\vec{u}_y + R_z\vec{u}_z$ perpendiculaire à la tige du fait de l'absence de frottement,
- à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 x\vec{u}_x$,
- à la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \dot{x}\vec{u}_x$. On obtient le schéma suivant en supposant que le ressort est étiré et la vitesse de la masse par rapport à la barre selon \vec{u}_x . On ne représente pas la réaction de la barre dont la direction n'est pas connue *a priori* dans le plan perpendiculaire à la barre Oyz .



2. $m\vec{a} = m\vec{g} - k(x - l_0)\vec{u}_x + m\Omega^2 x\vec{u}_x - 2m\vec{\Omega} \wedge \dot{x}\vec{u}_x + \vec{R}$ d'après le principe fondamental de la dynamique. En projetant sur l'axe Ox , on obtient : $m\ddot{x} = -k(x - l_0) + m\Omega^2 x$ ou $\ddot{x} + (a^2 - 1)\Omega^2 x = a^2\Omega^2 l_0$.

3. i. Si $a > 1$, le mouvement relatif est sinusoïdal autour de la position d'équilibre :

$$x = \frac{a^2 l_0}{a^2 - 1} + A \cos(\Omega \sqrt{a^2 - 1} t) + B \sin(\Omega \sqrt{a^2 - 1} t)$$

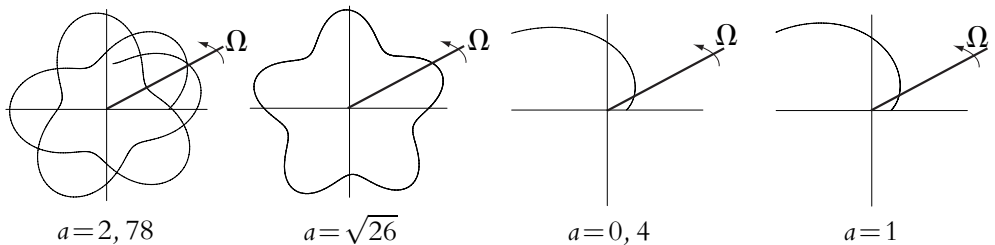
ii. Si $a = 1$, le mouvement relatif vérifie l'équation horaire :

$$x = \frac{\Omega^2}{2} l_0 t^2 + At + B$$

iii. Si $a < 1$, le mouvement relatif vérifie l'équation horaire :

$$x = \frac{a^2 l_0}{a^2 - 1} + A \operatorname{ch}(\Omega \sqrt{1 - a^2} t) + B \operatorname{sh}(\Omega \sqrt{1 - a^2} t)$$

4.



5. Une première condition pour que la trajectoire du point M soit fermée est que le mouvement du point sur la tige soit borné. Pour cela, il faut que a soit supérieur à 1 d'après l'étude faite aux questions précédentes et le mouvement du point M est alors composé d'un mouvement sinusoïdal le long de la droite Ox de période

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega \sqrt{a^2 - 1}} \text{ et d'un mouvement circulaire de période } T_2 = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

La trajectoire de M est fermée si ces deux périodes sont multiples l'une de l'autre donc s'il existe deux entiers m et n tels que $nT_1 = mT_2$. On a donc la deuxième condition : $a^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1$.

Finalement la trajectoire du point M est fermée si a peut s'écrire $a = \sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1}$ en notant m et n deux entiers quelconques (c'est le cas de la deuxième figure de la question précédente).

6. Compte tenu des conditions initiales, la solution de l'équation du mouvement est :

$$x(t) = \frac{l_0}{a^2 - 1} \left(a^2 - \cos \Omega \sqrt{a^2 - 1} t \right). \text{ On vérifie que :}$$

$$x(t) - l_0 = \frac{l_0}{a^2 - 1} \left(1 - \cos \Omega \sqrt{a^2 - 1} t \right) \geq 0$$

Le ressort est toujours tendu.

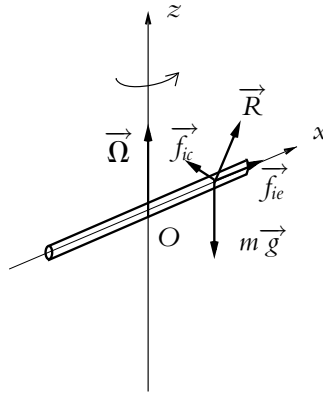
7. La réaction de la tige, la force d'inertie de Coriolis et le poids ne travaillent pas dans le référentiel tournant car elles sont en permanence perpendiculaires à la vitesse du point M dans ce référentiel. La tension du ressort dérive de l'énergie potentielle $Ep_1 = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + C_1$ et la force d'inertie d'entraînement de l'énergie potentielle $Ep_2 = -\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 + C_2$ où C_1 et C_2 désignent des constantes. Dans le référentiel tournant, le point M n'est soumis qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas donc son énergie mécanique se conserve, ce qui s'écrit $Ec + Ep_1 + Ep_2 = \text{constante}$ ou encore $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 = \text{constante}$. En dérivant cette équation par rapport au temps et en simplifiant par \dot{x} (qui est non nul puisqu'il y a mouvement), on obtient la même équation qu'à la deuxième question.

8. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur les axes Oz et Oy donne :

$$\vec{R} = mg\vec{u}_z + 2m\Omega\dot{x}\vec{u}_y$$

9. La force de frottement va amortir le mouvement sinusoïdal. Au bout d'un certain temps, le point M se stabilise à la distance $\frac{a^2 l_0}{a^2 - 1}$ qui correspond à sa position d'équilibre dans le référentiel tournant.

2. 1. a) On étudie le système constitué de la bille supposée ponctuelle dans le référentiel non galiléen lié au tube rigide.



La bille est soumise à l'action de son poids $m\vec{g}$, de la réaction du tube perpendiculaire à l'axe du tube (mais cette réaction a *a priori* deux composantes perpendiculaires à l'axe du tube) et aux forces d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} et de Coriolis \vec{f}_{ic} . On repère la position de la masse par sa distance x à O . Les expressions des forces d'inertie sont : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2 x \vec{u}_r$ et $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\Omega \dot{x} \vec{u}_\theta$.

On applique le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$ qu'on projette selon l'axe du tube : $\ddot{x} - \Omega^2 x = 0$.

- b) L'équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre dont deux coefficients sont de signe opposé : le système est instable et la bille quittera le tube.
- c) La solution de l'équation du mouvement est : $x = A \exp(\Omega t) + B \exp(-\Omega t)$.
Compte tenu des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$, on trouve :

$$x = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\Omega} \right) \exp(\Omega t) + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\Omega} \right) \exp(-\Omega t) = x_0 \operatorname{ch}(\Omega t) + \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{sh}(\Omega t)$$

- d) La bille quitte le tube quand $x = x_0 \operatorname{ch}(\Omega t) = \frac{l}{2}$ soit à l'instant $t = \frac{1}{\Omega} \operatorname{Argch} \left(\frac{l}{2x_0} \right)$.

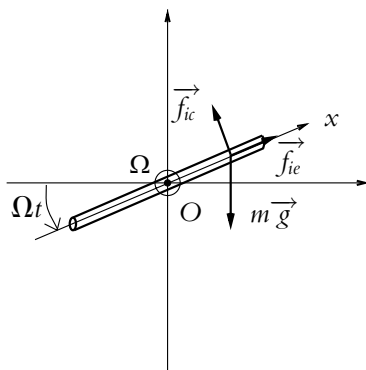
- e) Application numérique : $t = \frac{1}{2} \operatorname{Argch} \frac{10}{2.4} = 0,35 \text{ s}$

- f) La réaction du tube s'obtient en projetant le principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_z et \vec{u}_θ : $0 = -mg + R_z$ et $0 = R_\theta - 2m\Omega \dot{x}$ d'où : $R_z = mg$, $R_\theta = 2m\Omega^2 \left(\frac{x_0}{2} \operatorname{sh}(\Omega t) - \frac{v_0}{2\Omega} \operatorname{ch}(\Omega t) \right)$.
On en déduit le module :

$$R = \sqrt{R_z^2 + R_\theta^2} = m \sqrt{g^2 + 4\Omega^4 \left(\frac{x_0}{2} \operatorname{sh}(\Omega t) - \frac{v_0}{2\Omega} \operatorname{ch}(\Omega t) \right)^2}.$$

La direction de la réaction du tube varie au cours du temps du fait des variations de sa composante R_θ mais elle reste perpendiculaire à l'axe du tube.

2. L'axe de rotation est perpendiculaire au plan de la figure.



- a) Le bilan des forces n'a pas changé et la réaction a toujours *a priori* deux composantes, l'une dans la direction perpendiculaire au plan de la figure et l'autre dans le plan de la figure et perpendiculaire au tube. On projette à nouveau le principe fondamental de la dynamique sur l'axe du tube : $m\ddot{x} = -mg \sin(\Omega t) + m\Omega^2 x$ soit $\ddot{x} - \Omega^2 x = -g \sin(\Omega t)$.
- b) L'expression de x est la somme d'un terme analogue à celui de la première partie solution de l'équation homogène associée étudiée alors et d'un terme correspondant à une solution particulière de l'équation avec second membre. On la cherche sous la forme : $x_p(t) = C \sin \Omega t$ soit $-\Omega^2 C \sin \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t = -g \sin \Omega t$ donc une solution particulière est $x_p(t) = \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t$ et la solution générale s'écrit : $x = \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t + A \exp(\Omega t) + B \exp(-\Omega t)$ dont on détermine les constantes A et B à partir des conditions initiales. On obtient $x = x_0 \text{ch} \Omega t + \left(\frac{v_0}{\Omega} - \frac{g}{2\Omega^2}\right) \text{sh} \Omega t + \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t$.
- c) Les positions d'équilibre correspondent à $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$ soit en reportant dans l'équation du mouvement $x = \frac{g}{\Omega^2} \sin \Omega t$ qui est variable. Il n'y a donc pas de position d'équilibre possible.
- d) Le mouvement sera sinusoïdal si les constantes devant les termes en $\text{ch} \Omega t$ et en $\text{sh} \Omega t$ sont nulles c'est-à-dire si $x_0 = 0$ et $v_0 = \frac{g}{2\Omega}$.
- e) Si $v_0 = \frac{g}{2\Omega} - x_0 \Omega$, on a :

$$x = x_0 (\text{ch} \Omega t - \text{sh} \Omega t) + \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t = x_0 \exp(-\Omega t) + \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t$$

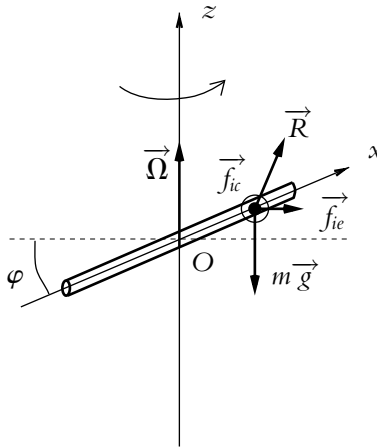
Le mouvement tend à devenir sinusoïdal.

- f) Lorsque $l = 10$ m, le terme $x_0 \exp(-\Omega t)$ a une forte amplitude au départ par rapport au second terme : le régime transitoire de type exponentiel est parfaitement visible. Lorsque $l = 1$ m, les deux termes ont des amplitudes sensiblement égales et on ne distingue plus vraiment le régime transitoire. Quand $l = 0,1$ m, le régime transitoire est négligeable : son amplitude est très faible devant celle du régime permanent.
- g) On projette le principe fondamental de la dynamique sur les deux directions perpendiculaires au tube : suivant l'axe de rotation, on a : $R_1 = 0$ et sur l'axe perpendiculaire au tube dans le plan vertical : $R_2 - mg \cos \Omega t - 2m\Omega \dot{x} = 0$. On en déduit que la réaction est dans le plan vertical et perpendiculaire au tube. En utilisant la projection effectuée à la question précédente, on en déduit :

$$R = 2mg \cos \Omega t + 2m\Omega^2 x_0 \operatorname{sh} \Omega t + (2v_0 \Omega - g) m \operatorname{ch} \Omega t$$

3. L'angle φ est constant.

- a) Le bilan des forces n'a pas changé et la réaction a toujours *a priori* deux composantes. La projection sur l'axe du tube du principe fondamental de la dynamique donne : $m\ddot{x} = -mg \sin \varphi + m\Omega^2 \cos^2 \varphi x$.



$$\text{soit } \ddot{x} - (\Omega^2 \cos^2 \varphi) x = -g \sin \varphi$$

- b) La solution est : $x = A \operatorname{ch}(\Omega \cos \varphi t) + B \operatorname{sh}(\Omega \cos \varphi t) + \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2 \cos^2 \varphi}$. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales. On trouve :

$$x = \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2 \cos^2 \varphi} + \left(x_0 - \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2 \cos^2 \varphi} \right) \operatorname{ch}(\Omega \cos \varphi t) + \frac{v_0}{\Omega \cos \varphi} \operatorname{sh}(\Omega \cos \varphi t)$$

- c) On aura une position d'équilibre si $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$. C'est possible lorsque $x = \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2 \cos^2 \varphi}$, condition qu'on obtient à partir de l'équation du mouvement.

d) Si on écarte la bille de sa position d'équilibre, alors débute un régime transitoire. Quand le temps tend vers l'infini, x également. On dit que l'équilibre est instable.

e) On cherche t tel que $x(t) = \frac{l}{2}$ dont la résolution donne :

$$t = \frac{1}{\Omega \cos \varphi} \operatorname{Argch} \frac{\frac{l}{2} - \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2 \cos^2 \varphi}}{x_0 - \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2 \cos^2 \varphi}}$$

f) On trouve $t = 1,22$ s, ce temps d'éjection est plus grand lorsque le tube est incliné que lorsqu'il est horizontal. Deux paramètres interviennent : la force d'inertie d'entraînement centrifuge est plus faible quand le tube est incliné et le poids intervient dans ce cas alors que ce n'est pas le cas si le tube est horizontal.

g) On projette le principe fondamental de la dynamique sur l'axe perpendiculaire au plan de la figure : $R_1 = 2m\Omega\dot{x} \cos \varphi$ et sur l'axe perpendiculaire au tube dans le plan de la figure : $R_2 = mg \cos \varphi + m\Omega^2 x \cos \varphi$. La norme de la réaction vaut : $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$.

3. 1. Utilisation du principe fondamental de la dynamique :

a) On étudie le système constitué de la masse m dans le référentiel non galiléen en rotation lié au cerceau. La masse est soumise dans ce référentiel à son poids, à la réaction du cerceau \vec{R} , à la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} et à la force d'inertie de Coriolis \vec{f}_{ic} . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans ce référentiel : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$.

b) En notant H la projection de M sur l'axe Oz , la force d'inertie d'entraînement s'écrit : $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} = m\Omega^2 a (1 + \sin \theta) \vec{u}_x$

c) $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\Omega a \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y$.

d) La projection du principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_θ donne : $a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + \Omega^2 a (1 + \sin \theta) \cos \theta$.

e) Les projections du principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_r et sur \vec{u}_y donnent : $R_r = mg \cos \theta + m\Omega^2 a (1 + \sin \theta) \sin \theta + ma\dot{\theta}^2$ et $R'_y = 2m\Omega a \dot{\theta} \cos \theta$.

2. Utilisation du théorème du moment cinétique :

a) $\overrightarrow{L_{O'}} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v} = ma^2 \dot{\theta} \vec{u}_y'$

b) $\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{O'M} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{O'M} \wedge \left(\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \right)$ soit

$$\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{f}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{f}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{f}_{ic})$$

- c) Ici le moment du poids par rapport à O' s'écrit $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(m\vec{g}) = -mga \sin \theta \vec{u}'_y$, celui de la réaction $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{R}) = -aR_y \vec{u}_\theta$, celui de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ic}) = ma^2\Omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta \vec{u}'_y$ et celui de la force de Coriolis $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}_{ic}) = 2ma^2\Omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_\theta$. Comme $\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = ma^2\ddot{\theta} \vec{u}'_y$, la projection du théorème du moment cinétique sur \vec{u}'_y donne : $a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + \Omega^2 a(1 + \sin \theta) \cos \theta$.
- d) On ne peut obtenir que la composante $R'_y = 2m\Omega a \cos \theta \dot{\theta}$.

3. Utilisation de l'énergie mécanique :

- a) Le calcul du travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement donne $\delta W = m\Omega^2 a^2(1 + \sin \theta) \cos \theta d\theta = -dU_1$ soit

$$U_1 = -m\Omega^2 a^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\sin \theta}{2}\right) + C_1$$

- b) De même, on a pour le poids $\delta W = -mga \sin \theta d\theta = -dU_2$ avec

$$U_2 = mga(1 - \cos \theta) + C_2$$

- c) \vec{R} et \vec{f}_{ic} sont perpendiculaires au déplacement et ne travaillent donc pas, leur énergie potentielle est une constante choisie nulle. On en déduit que $U = U_1 + U_2$ avec $C_1 + C_2 = 0$ en choisissant $U(0) = 0$.
- d) Toutes les forces dérivent d'un potentiel : on a conservation de l'énergie mécanique.
- e) L'énergie mécanique s'écrit :

$$Em = -m\Omega^2 a^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\sin \theta}{2}\right) + mga(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

soit en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{\theta}(-ma^2\Omega^2 \cos \theta - ma^2\Omega^2 \cos \theta \sin \theta + mga \sin \theta + ma^2\ddot{\theta}) = 0$$

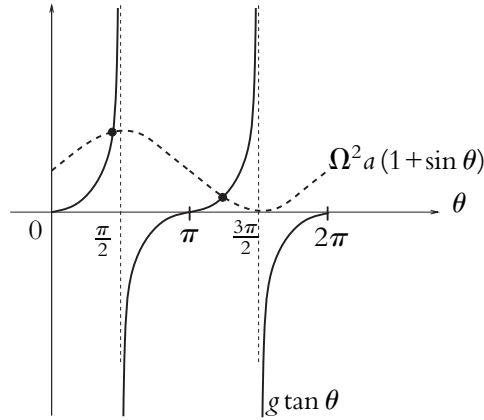
Les solutions sont $\dot{\theta} = 0$, ce qui correspond à l'absence de mouvement ou bien

$$a\ddot{\theta} = a\Omega^2 \cos \theta(1 + \sin \theta) - g \sin \theta$$

ce qui redonne l'équation du mouvement.

4. Étude de l'équilibre relatif :

- a) À l'équilibre, $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$ donc les positions d'équilibre sont solutions de $-g \sin \theta + a\Omega^2 \cos \theta(1 + \sin \theta)$ qu'on peut écrire $g \tan \theta = a\Omega^2(1 + \sin \theta)$.
- b) On étudie les intersections des courbes $\theta \rightarrow g \tan \theta$ et $\theta \rightarrow \Omega^2 a(1 + \sin \theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.



Les courbes ont deux intersections donc on a deux solutions : l'une dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'autre dans $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

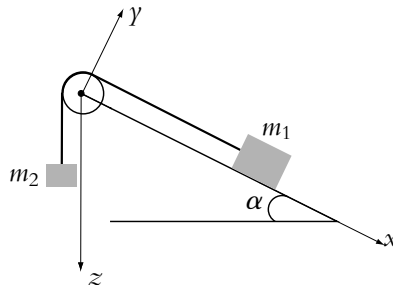
- c) Si $\theta = \frac{\pi}{6}$ est une position d'équilibre, la vitesse de rotation est

$$\Omega = \sqrt{\frac{g \tan \frac{\pi}{6}}{a(1 + \sin \frac{\pi}{6})}} \text{ soit } \Omega = \sqrt{\frac{100}{3\sqrt{3}}} = 4,39 \text{ rad.s}^{-1}.$$

- d) On calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle $Ep = U_1 + U_2$ par rapport à θ : $\frac{d^2 Ep}{d\theta^2} = ma(a\Omega^2 \sin \theta (1 + \sin \theta) - a\Omega^2 \cos^2 \theta + g \cos \theta)$ qui vaut ici $10\frac{\sqrt{3}}{2} = 8,66 > 0$ donc la position d'équilibre est stable.

Chapitre 29

1.



1. Le système complet constitué des deux masses, du fil et de la poulie est soumis aux forces extérieures suivantes (dans le référentiel terrestre supposé galiléen) : le poids de chaque masse, la réaction du plan incliné sur la masse m_1 et la réaction de

l'axe de la poulie. Cette dernière force étant inconnue, l'application du principe fondamental de la dynamique à ce système ne permet pas d'aboutir. On va donc étudier chaque masse séparément.

Le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m_1 est le suivant : poids, tension du fil et réaction du support perpendiculaire au plan incliné du fait de l'absence de frottement. La projection du principe fondamental de la dynamique sur le plan incliné orienté vers le bas donne : $m_1 \ddot{x} = m_1 g \sin \alpha - T$. On choisit l'origine de l'axe Ox au niveau de la poulie.

Pour la masse m_2 , les forces appliquées sont le poids et la tension du fil. La projection du principe fondamental de la dynamique sur la verticale dirigée vers le bas donne : $m_2 \ddot{z} = m_2 g - T$. On choisit l'origine de l'axe Oz au niveau de la poulie.

L'inextensibilité du fil s'écrit : $x + z = L$ avec L constante donc $\ddot{x} = -\ddot{z}$. Finalement $T = m_1 (g \sin \alpha - \ddot{x}) = m_2 (g + \ddot{x})$ soit $\ddot{x} = \frac{m_1 g \sin \alpha - m_2 g}{m_1 + m_2}$. L'accélération

du système est : $\vec{a} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{a}_2$. Elle a donc une composante horizontale : $\frac{m_1 g \cos \alpha (m_2 - m_1 \sin \alpha)}{(m_1 + m_2)^2}$ et une composante verticale : $\frac{(m_2 - m_1 \sin \alpha)^2}{(m_1 + m_2)^2}$ vers le haut.

2. En reportant dans l'expression de la tension T :

$$T = m_1 \left(g \sin \alpha - \frac{m_1 g \sin \alpha - m_2 g}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha - 1)}{m_1 + m_2}$$

3. La réaction du plan incliné s'exerce sur la masse m_1 . Elle est perpendiculaire à ce dernier du fait de l'absence de frottement. On obtient son expression en projetant le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m_1 sur la normale au plan incliné : $R = m_1 g \cos \alpha$.

Chapitre 30

1. 1. Si on néglige la pesanteur, le système constitué de la ficelle et des deux cailloux n'est soumis à aucune force extérieure : il est isolé et le centre d'inertie du système est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est celle qu'il possède au moment où l'enfant lâche la ficelle.

D'autre part, le moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique est également conservé puisque le système est isolé. Les deux cailloux sont donc animés d'un mouvement circulaire uniforme autour du centre de gravité du système.

2. Si on tient compte de la pesanteur, seul le mouvement du centre d'inertie du système est modifié : il décrit un arc de parabole.

On peut noter que dans le référentiel barycentrique les moments des poids en G (centre d'inertie du système) de chacune des masses se compensent et le moment cinétique est donc toujours conservé.

3. Les cailloux sont immobiles dans le référentiel lié à la ficelle qui n'est pas galiléen. Ils sont soumis dans ce référentiel à la tension de la ficelle et à la force centrifuge de norme $m\Omega^2 l$ en notant Ω la vitesse de rotation et l la distance du caillou à l'axe de rotation. La tension de la ficelle compense donc la force centrifuge pour assurer l'immobilité du caillou par rapport à la ficelle. Avant le lâcher, la rotation s'effectue autour d'une extrémité de la ficelle tandis qu'après elle a lieu autour du centre d'inertie situé entre les deux cailloux. Par conséquent, la distance l diminue au moment du lâcher ainsi que la tension de la ficelle.

2. 1. a) Le système étant isolé, l'application du principe fondamental de la dynamique conduit à la conservation de la quantité de mouvement du système. Par conséquent, le centre d'inertie est animé d'un mouvement rectiligne uniforme et le référentiel barycentrique est galiléen.

b) $\vec{v}^* = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = (\vec{v}_2 - \vec{v}_G) - (\vec{v}_1 - \vec{v}_G) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ en appliquant la composition des vitesses. La vitesse du mobile fictif (qui est égale à la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1) ne dépend pas du référentiel.

c) D'après le cours, on a : $\mu \frac{d\vec{v}^*}{dt} = \frac{d\vec{p}_2^*}{dt} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$.

d) On obtient (Cf. cours) : $Ec^* = \frac{1}{2}\mu v^{*2}$ et avec le théorème de Koenig :

$$Ec = Ec^* + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2.$$

2. a) D'après le modèle adopté, la force d'interaction entre les deux atomes s'écrit : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -k(r - r_0)\vec{u}_r$. En projetant la relation de la question B.3.1.c) sur \vec{u}_r , on obtient : $\mu\ddot{r} + kr = kr_0$.

b) En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, on obtient : $\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_0$. La pulsation des oscillations du mobile fictif est donc ω_0 . Comme $\mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} = \frac{M_C M_O}{N_A (M_C + M_O)} = 1,4 \cdot 10^{-26}$ kg, on en déduit : $\omega_0 = 4,1 \cdot 10^{14}$ rad.s⁻¹ soit une fréquence d'oscillations de $f = 6,5 \cdot 10^{13}$ Hz.

c) $Em^* = Ec^* + Ep = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$ avec $r - r_0 = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$. On en déduit : $Em^* = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}ka^2$ et $Em^* = 0,19$ eV.

d) Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique où il n'y a ni rotation ni vibration de la particule, $Ec = \frac{3}{2}k_B T$ correspond aux trois degrés de translation. Les deux

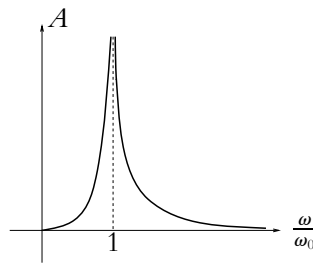
derniers degrés de liberté pour obtenir $\frac{5}{2}k_B T$ correspondent ici aux rotations de la molécule puisqu'on ne tient pas compte des vibrations.

- e) L'application numérique donne : $E_c = 0,06 \text{ eV}$ donc l'énergie mécanique envisagée ici correspond à environ 3 fois l'énergie cinétique hors vibration.
3. a) La molécule est électriquement neutre donc l'atome de carbone porte une charge δe puisque celui d'oxygène possède une charge $-\delta e$.
- b) La résultante des forces s'exerçant sur la particule 2 (atome de carbone) est :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -k(r - r_0) \vec{u}_r + \delta e E_0 \sin \omega t \vec{u}_r$$

En projetant le principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_r et en notant $X = r - r_0$, cette équation s'écrit : $\mu \ddot{X} + kX = \delta e E_0 \sin \omega t$.

- c) On pose $X = A \sin(\omega t + \varphi)$. En reportant dans l'équation différentielle du mouvement, on en déduit : $A = \frac{\delta e E_0}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2)}$.



- d) Pour $\omega = \omega_0$, l'amplitude tend vers l'infini. Ce n'est pas réaliste physiquement : la molécule se décompose dans ce cas. En fait, on n'a pas tenu compte des phénomènes dissipatifs qui ramènent cette valeur à une valeur finie.
- e) En ne tenant pas compte de la force de frottement, on cherche à obtenir les valeurs de ω telles que $A(\omega) = \frac{\delta e E_0}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2)} = \pm 0,05 r_0$. La résolution de cette équation donne : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{\delta e E_0}{0,05 \mu r_0 \omega_0^2}} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \frac{\delta e E_0}{0,1 \mu r_0 \omega_0^2} \right)$ en effectuant un développement limité puisque $\frac{\delta e E_0}{0,05 \mu r_0 \omega_0^2} = 3 \cdot 10^{-12} \ll 1$. On en déduit que : $\frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{0,05 \mu r_0 \omega_0^2}{\delta e E_0} = 3,35 \cdot 10^{11}$. La résonance est donc très aigüe.
- f) La nouvelle équation du mouvement est, compte tenu des frottements :

$$\mu \ddot{X} + \beta \dot{X} + kX = \delta e E_0 \sin \omega t$$

En passant en notation complexe, on en déduit l'amplitude complexe :

$$\underline{A} = \frac{\delta e E_0}{\mu (\omega_0^2 - \omega^2) + j\beta\omega}$$

et en module :

$$A = \frac{\delta e E_0}{\mu \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{\mu}\right)^2}} = \frac{a(0)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

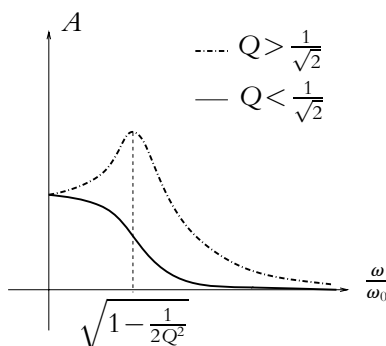
avec les notations proposées.

- g)** On étudie les variations de $f(\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ dont la dérivée est : $f'(\omega) = 2\frac{\omega}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{Q^2} - 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\right)$, du signe de $\frac{1}{Q^2} - 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$.

Ce terme est positif si $\omega^2 > \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$.

Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors f' est toujours positive et on en déduit que A est décroissante.

Sinon on a un maximum pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ qui correspond à un phénomène de résonance. L'amplitude à la résonance vaut : $A_{\max} = \frac{Qa(0)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.



- h)** Si la résonance est aiguë alors $Q \gg 1$ et elle est obtenue pour une pulsation $\omega \simeq \omega_0$ et l'amplitude maximale vaut : $A_{\max} = \frac{\delta e E_0}{\beta\omega_0}$.

i) On a $\beta = \frac{\delta e E_0}{A_{\max} \omega_0} = \frac{\delta e E_0}{0,05 r_0 \omega_0} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ kg.s}^{-1}$.

j) On calcule alors le facteur de qualité qui vaut : $Q = \frac{\mu \omega_0}{\beta} = 3,35 \cdot 10^{11} \gg 1$, ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse selon laquelle la résonance est aiguë.

Chapitre 31

1. En supposant que le satellite n'est soumis qu'à la gravitation de la planète, l'application du théorème de la quantité de mouvement donne, en projection sur

\vec{u}_r en coordonnées polaires : $-G \frac{m_S M_P}{R^2} = -m_S R \dot{\theta}^2 = -m_S R \frac{4\pi^2}{T^2}$ dont on déduit :

$$M_P = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}.$$

2. La masse du satellite ne peut pas être déterminée à partir des informations disponibles : elle "disparaît" des équations.

3. Par définition et d'après la première question, on a : $g = \frac{G M_P}{a^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 a^2}.$

2. 1. Le mouvement est à force centrale : il est donc plan (Cf. cours) : on peut donc utiliser les coordonnées polaires centrées sur O dans ce plan.

L'accélération s'écrit pour un mouvement circulaire : $\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$. La seule force étant la force centrale dirigée selon \vec{u}_r , l'application du théorème de la quantité de mouvement donne en projection sur \vec{u}_θ : $\ddot{\theta} = 0$ soit $\dot{\theta}$ constante. La vitesse angulaire étant constante, le mouvement circulaire est uniforme.

2. La projection du principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_r donne :
 $-m R \dot{\theta}^2 = -m \frac{k}{r^5}$ soit $\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r^6}$, ce qui n'est possible que si $k > 0$.

3. Le mouvement étant à force centrale, on a également conservation du moment cinétique, ce qui se traduit par : $m R^2 \dot{\theta} = m R v_0$ soit d'après la question précédente :
 $R \frac{\sqrt{k}}{R^3} = R v_0$ et finalement il faut que la vitesse initiale prenne la valeur : $v_0 = \frac{\sqrt{k}}{R^2}.$

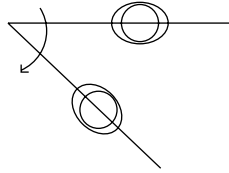
Chapitre 32

1. La vitesse initiale ne dépend que du tireur : elle ne dépend donc pas du fait qu'on soit sur la Terre ou sur la Lune.

2. La pesanteur est plus faible sur la Lune que sur la Terre donc la hauteur maximale atteinte et la portée du tir seront plus grandes.

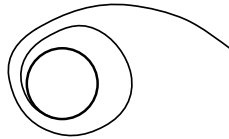
2. 1. Les points O, S, G_1 et G_2 restent alignés donc l'axe G_1G_2 ne tourne pas par rapport à OS, ce qui revient à négliger la rotation du satellite sur lui-même.
2. La force de gravitation exercée par S sur G_1 s'écrit : $\vec{F}_{S \rightarrow G_1} = -G \frac{Mm}{d^2} \vec{u}$ avec $d = L + b$ (on notera que le cas $d' = L - b$ correspond au point G_2 qui aurait pu être choisi en lieu et place de G_1). Par un développement limité, on en déduit : $\vec{F}_{S \rightarrow G_1} = -G \frac{Mm}{L^2} \left(1 - \frac{2b}{L}\right) \vec{u}$.
3. $[G] = \frac{[F][L]^2}{[M]^2} = \frac{[M][L][L]^2[T]^{-2}}{[M]^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}$ donc G s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.
4. On applique le théorème de la résultante cinétique au système formé par G_1 et G_2 dans le référentiel galiléen : $\vec{a}_{/\mathcal{R}}(S) = -\frac{GM}{L^2} \vec{u}$.
5. L'application du principe fondamental de la dynamique au point G_1 dans le référentiel non galiléen lié à OS en translation circulaire autour de O donne : $m\vec{a}_{/\mathcal{R}'}(G_1) = \vec{F}_{O \rightarrow G_1} + \vec{F}_{G_2 \rightarrow G_1} + \vec{f}_{ic} + \vec{f}_{ie}$. Le référentiel d'étude est en translation par rapport au référentiel galiléen donc $\vec{f}_{ic} = 0$ et $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_{/\mathcal{R}}(S) = G \frac{Mm}{L^2} \vec{u}$. D'autre part, le terme $\vec{F}_{G_2 \rightarrow G_1}$ est indépendant du point. On en déduit finalement que le terme de marée vaut : $\vec{f}_{\text{marée}} = 2G \frac{Mmb}{L^3} \vec{u}$.
6. La force qui s'exerce sur G_1 est donc la somme d'un terme lié à la révolution du satellite autour de la planète et du terme de marée.
7. Le satellite se brise si la force de marée est plus forte que la force d'interaction entre G_1 et G_2 , ce qui se traduit par : $\frac{2GMmb}{L^3} \geq \frac{Gm^2}{4b^2}$ soit $L^3 \leq \frac{8b^3M}{m}$ et la distance limite en-deçà de laquelle le satellite se brise est : $L_m = 2b\sqrt[3]{\frac{M}{m}}$.
8. Pour l'application numérique, il faut bien faire attention à prendre m et non $2m$. On obtient : $L_m = 7170 \text{ km}$. La Lune ne s'est donc pas détachée de la Terre. En effet, si la Lune provenait de la Terre, elle aurait initialement été à une distance $L = 6400 \text{ km}$ de la Terre. Comme $L < L_m$, elle se serait alors brisée d'après l'étude précédente.
9. On peut penser que les anneaux des planètes comme Saturne sont formés de météorites qui auraient été brisés en s'approchant trop près de la planète.
10. Les forces de marée qui s'exercent sur chacun des deux hémisphères sont orientées vers la planète dans des sens opposés qui ont tendance à allonger le manteau visqueux selon OS.

11.



Le manteau tourne à la même vitesse et dans le même sens que le noyau du fait des frottements. Cela se traduit par une rotation du satellite sur lui-même dans le même sens que sa rotation orbitale.

12. La seule force qui s'exerce sur la totalité du satellite est la force gravitationnelle exercée par la planète qui est dirigée dans la direction de OS. Le moment de cette force par rapport à O est nul et le théorème du moment cinétique prouve que le moment cinétique est constant, soit en fonction des paramètres du problème : $L^2 \dot{\theta}$ constant.
13. La perte d'énergie est maximale lorsque $\dot{\theta}$ est maximale puisque le satellite est uniquement en rotation autour de la Terre soit encore, compte tenu de ce qui précède, quand L est minimale (il s'agit du périégée de la trajectoire elliptique).
14. On en déduit que le rayon diminue, ce qui tend à rendre la trajectoire circulaire d'après le schéma suivant :



15. La rotation propre de la Lune ayant la même période que sa rotation orbitale, on peut en déduire qu'il y a eu un phénomène de synchronisation lié à la "circularisation" de la trajectoire. On peut donc supposer que la Lune a été visqueuse.

Partie VI – Thermodynamique

Chapitre 33

1. Le calcul de α et χ_T donne :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{aT}{P} + b \right) \right)_P \Rightarrow \alpha = \frac{a}{PV}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{aT}{P} + b \right) \right)_T \Rightarrow \chi_T = \frac{a}{P^2 V}$$

D'après l'équation d'état, $\frac{a}{P} = \frac{V-b}{T}$ d'où $\alpha = \frac{V-b}{TV}$.

2. On calcule V_1 et T_0 sachant que $aT_0 = P_0(V_0 - b) = P_1(V_1 - b)$:

$$T_0 = \frac{P_0(V_0 - b)}{a} = 273 \text{ K} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{aT_0}{P_1} + b = 5,02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

3. Pour le gaz parfait, $\alpha_{GP} = \frac{1}{T} = 0,0037 \text{ K}^{-1}$ à T_0 et pour le gaz réel étudié : $\alpha = 0,0036 \text{ K}^{-1}$ à T_0 et V_0 .

L'écart relatif à la loi de Mariotte est : $\Delta = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{P_0 V_0} = 0,098$.

Les écarts sont très faibles, donc l'approximation du gaz parfait est bonne pour des pressions de cet ordre de grandeurs.

2. 1. Par définition, l'échelle centésimale θ est :

$$\theta = 100 \frac{V - V(0)}{V(100) - V(0)} = \frac{t(A_1 + A_2 t)}{A_1 + 100A_2}$$

2. L'écart $\theta - t$ vaut :

$$\theta - t = \frac{A_2 t(t - 100)}{A_1 + 100A_2}$$

Cet écart est nul pour $t = 0^\circ\text{C}$ et pour $t = 100^\circ\text{C}$. Il est positif entre 0°C et 100°C . La valeur t_1 de t qui annule sa dérivée est donc un maximum, elle vérifie l'équation :

$$\frac{d(\theta - t)}{dt}(t_1) = \frac{A_2}{A_1 + 100A_2}(2t_1 - 100) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 50^\circ\text{C}$$

L'écart maximal vaut :

- pour le thermocouple Platine-Plomb : $-12,4^\circ\text{C}$,
- pour le thermocouple Nickel-Platine : $-0,3^\circ\text{C}$.

Pour le thermocouple Platine-Plomb l'écart est beaucoup trop important, l'échelle centésimale a peu de sens. Par contre pour le thermocouple Nickel-Platine, il y a très peu d'écart entre l'échelle Celsius et l'échelle centésimale, on peut donc utiliser cette échelle.

Chapitre 34

1. On peut adopter le modèle de l'atmosphère isotherme. À l'altitude z , la pression est donc $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ (Cf. cours). On choisit $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$, la

masse volumique de l'air est $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, la hauteur de la tour Eiffel est environ $H = 300 \text{ m}$. On en déduit : $P(H) \simeq 0,96P_0$.

2. La première réponse qui vient à l'esprit est non : comment un enfant pourrait s'opposer à toute l'eau de la Mer du Nord ? C'est oublier que quelle que soit la quantité d'eau, la pression ne dépend que de la distance du trou à la surface. En appliquant la loi barométrique, on a vu dans le cours qu'à une profondeur de 10 m, la pression est seulement doublée : un enfant a une force suffisante pour boucher le trou avec son doigt, l'intensité de cette force étant égale au produit de la pression par la surface du trou (si la pression est égale à 2 bar et la surface du trou de 1 cm^2 , la force que doit exercer l'enfant n'est que de 20 N).

3. 1. Les liquides sont incompressibles, donc si la pression P augmente par rapport à P_0 , le point B descend d'une hauteur h , le point C monte de la même hauteur h , et aussi D et F descendent de h et E et G montent de h . Les trois hauteurs h_1 , h_2 et h_3 sont donc égales à h . Dans le cas d'un gaz, qui est un liquide compressible, si le point B descend de h , le point C ne descendra pas de la même hauteur.

2. a) La pression P_B est égale à la pression à mesurer P et $P_G = P_0$. On peut écrire :

$$P = P_B = P_B - P_C + P_C - P_D + P_D - P_E + P_E - P_F + P_F - P_G + P_0$$

Si on applique la loi barométrique avec $h_1 = h_2 = h_3 = h$:

$$P = \rho_1 hg - \rho_2 hg + \rho_1 hg - \rho_2 hg + \rho_1 hg + P_0 = (3\rho_1 - 2\rho_2)hg + P_0$$

b) Si le deuxième fluide est un gaz, on peut supposer que la pression de ce fluide est constante donc que $P_C = P_D$, $P_E = P_F$. Alors :

$$P = P_0 + 3\rho_1 g(h_1 + h_2 + h_3)$$

3. Si le point C se déplace de Δh , h_1 , h_2 et h_3 varient de $2\Delta h$, soit :

$$P + \Delta P = (3\rho_1 - 2\rho_2)(h + 2\Delta h)g + P_0$$

soit, en utilisant l'expression de la question précédente :

$$\Delta P = 2g(3\rho_1 - 2\rho_2)\Delta h$$

4. 1. On considère comme système le gaz qui surmonte le liquide dans un compartiment. Il est initialement à (P_0, V_0, T_0) et finalement à (P_1, V_1, T_1) . Or la citerne et le liquide ne changent pas de volume donc $V_0 = V_1$. On applique la loi des gaz parfaits :

$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad P_1 V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_0 \frac{T_1}{T_0} = 1,17 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2. a) Voir cours : $P(z) = P(0) + \rho g z$.

b) Les clapets de gauche étant restés ouverts au cours du remplissage, la pression de l'air y est P_0 .

Les compartiments étant en communication, la pression en A est la même qu'en B , soit avec l'équation barométrique :

$$P_A = P_B = P_0 + \rho g d = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3. Le gaz du compartiment gauche contient n_g moles. Il a pour état initial (P, V_0, T) et pour état final (P', V'_0, T') .

Le gaz du compartiment droit contient n_d moles. Il a pour état initial (P_1, V_1, T) et pour état final (P'_1, V'_1, T') .

La figure 34.1 représente les niveaux initiaux (en pointillés) et finaux (en traits pleins).

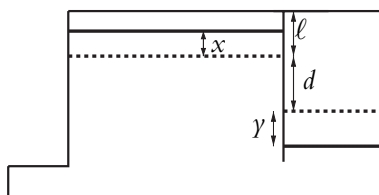


Figure 34.1

On applique la loi barométrique :

- à l'état initial : $P_1 = P + \rho g d$;
- à l'état final : $P'_1 = P' + \rho g(d + x + y)$.

L'équation d'état du gaz parfait appliquée aux deux gaz dans l'état initial et l'état final, donne :

- $PV_0 = n_g RT \Rightarrow P\ell S = n_g RT$;
- $P'(\ell - x)S = n_g RT'$;
- $P_1(d + \ell)S = n_d RT$
- $P'_1(d + \ell + y)S = n_d RT'$

On en tire : $P' = \frac{T'}{T} \frac{\ell}{\ell - x} P = K \frac{\ell}{\ell - x} P$ et $P'_1 = P_1 \frac{T'}{T} \frac{d + \ell}{d + \ell + y} = P_1 K \frac{d + \ell}{d + \ell + y}$.

Or il y a conservation du volume du liquide d'où : $Sx = sy \Leftrightarrow y = kx$. On en déduit finalement :

$$P'_1 = P_1 K \frac{d + \ell}{d + \ell + kx} = (P + g d \rho) K \frac{d + \ell}{d + \ell + kx}$$

Avec l'équation des gaz parfait, $P'_1 = K \frac{\ell}{\ell - x} P + \rho g(d + x + kx)$, on obtient la relation :

$$(P + g d \rho) K \frac{d + \ell}{d + \ell + kx} = K \frac{\ell}{\ell - x} P + \rho g(d + x + kx)$$

4. On néglige x dans l'équation précédente et on pose $Z = d + \gamma$. On en déduit l'équation vérifiée par Z :

$$\rho g Z^2 + Z(KP + \rho g \ell) + K \ell P - (P + \rho g d)K(d + \ell) = 0$$

La résolution donne $Z = 2,095 \text{ m}$, soit $\gamma = 9,5 \text{ cm}$.

On calcule alors $P'_1 = KP_1 \frac{d + \ell}{d + \ell + \gamma} = 1,14P_1 = 1,34 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Chapitre 37

1. 1. Le système (S) considéré est constitué du calorimètre, de son contenu et de la résistance.

- a) On néglige la capacité calorifique C_R de la résistance. Initialement le système (S) est à la température t_i . Sa température finale est t_f . On applique le premier principe à (S) sachant que la transformation est monobare : $\Delta H = Q + W_{\text{élec}}$. Le calorimètre étant isolé, $Q = 0$. Le travail électrique vaut : $W_{\text{élec}} = RI^2\tau$. Ainsi :

$$C_T(t_f - t_i) = RI^2\tau \Rightarrow C_T = \frac{RI^2\tau}{t_f - t_i} = 24\,375 \text{ J}$$

- b) Si on ne néglige plus la capacité de la résistance, la capacité totale est $C_T + C_R$ et alors :

$$C_T = \frac{RI^2\tau}{t_f - t_i} - C_R = 24\,125 \text{ J}$$

Si on ne tient pas compte de la capacité de la résistance, on commet une erreur de 1%.

2. Le système considéré est constitué du calorimètre, de son contenu et de la masse dm qui circule pendant $d\tau$. À l'état initial, le calorimètre et son contenu sont à $t(\tau)$ et la masse dm à t_1 . À l'état final, le calorimètre, son contenu et la masse dm sont à $t(\tau + d\tau)$.

On applique le premier principe à l'ensemble entre t et $t + dt$:

$$dH = \delta Q + \delta W_{\text{autre}} = 0$$

En effet, le système est calorifugé et il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression. On en déduit, en notant Δh_{dm} la variation d'enthalpie massique de la masse dm entre t_1 et $t(\tau + d\tau)$:

$$dH_{\text{calo+contenu}} + D d\tau \Delta h_{dm} = 0 \Leftrightarrow C_T(t(\tau + d\tau) - t(\tau)) + DC d\tau(t(\tau + d\tau) - t_1) = 0$$

En développant l'expression au premier ordre en $d\tau$, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dt}{d\tau} + \frac{DC}{C_T}t = \frac{DC}{C_T}t_1$$

Sachant qu'à $\tau = 0$, $t = t_0$:

$$t = (t_0 - t_1) \exp\left(-\frac{DC\tau}{C_T}\right) + t_1$$

On peut alors calculer $C = \frac{C_T}{D\tau} \ln\left(\frac{t_1 - t_0}{t_1 - t_f}\right) = 1194 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

- 2. 1. a)** Le système considéré est (S). Il évolue de manière monobare, donc on exprime le premier principe à partir de l'enthalpie. Il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression. Le transfert thermique est égal à celui reçu de la part du système de chauffage moins celui perdu dans l'atmosphère. Le premier principe appliqué à (S) entre t et $t + dt$ donne :

$$dH = C(T(t + dt) - T(t)) = \mathcal{P}_0 dt - \lambda(T(t) - T_0) dt$$

En développant au premier ordre en dt , on obtient :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\lambda}{C}T = \frac{\mathcal{P}_0}{C} + \frac{\lambda}{C}T_0$$

Il apparaît une constante de temps $\tau_0 = \frac{C}{\lambda}$ et le second membre de l'équation correspond à la solution en régime permanent obtenue pour un temps infini, soit $T_\infty = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{\lambda}$. L'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau_0} = \frac{T_\infty}{\tau_0}$$

b) Application numérique : $\lambda = 4 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\mathcal{P}_0 = 200 \text{ W}$.

- 2. a)** Il suffit dans l'équation précédente de remplacer \mathcal{P}_0 par \mathcal{P} :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\lambda - k}{C}T = \frac{\mathcal{P}_0}{C} + \frac{\lambda - k}{C}T_0$$

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau'_0} = \frac{T'_\infty}{\tau'_0}$$

avec $\tau'_0 = \frac{C}{\lambda - k}$ et $T'_\infty = T_0 + \frac{\mathcal{P}'_0}{(\lambda - k)}$.

b) Application numérique : $k = -36 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\mathcal{P}'_0 = 2 \text{ kJ}$. La puissance fournie est donc : $\mathcal{P} = \mathcal{P}'_0 - k(T - T_0) = 200 \text{ J}$. C'est la même puissance que précédemment mais la température désirée est atteinte dix fois plus vite.

3. Le système considéré est le gaz décrivant le cycle.

1. La transformation de l'état (1) à l'état (2) est adiabatique réversible, on peut donc appliquer la loi de Laplace :

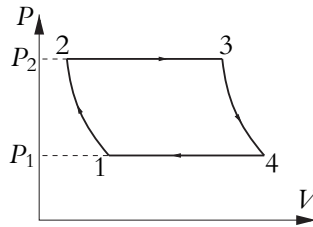
$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 512 \text{ K}$$

De même :

$$T_4 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

or les transformations de l'état (2) à l'état (3) et de l'état (4) à l'état (1) sont isobares, donc $P_4 = P_1$ et $P_2 = P_3$. On en déduit : $T_4 = 761,5 \text{ K}$.

2. Le cycle est constitué de deux isobares et de deux isothermes. Il est décrit dans le sens horaire, il s'agit d'un donc cycle moteur.



3. Les capacités thermiques pour une mole de gaz vérifient les relations :

$$\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} \quad \text{et} \quad C_{pm} - C_{vm} = R$$

Elles s'expriment donc en fonction de R et de γ par :

$$C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Il suffit de diviser par la masse molaire pour obtenir les capacités massiques :

$$c_v = \frac{R}{M(\gamma - 1)} \quad \text{et} \quad c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

4. Les deux transformations considérées sont isobares donc les transferts thermiques reçus sont égaux à la variation d'enthalpie, soit pour 1 kg :

$$\Delta H_{23} = c_p(T_3 - T_2) = Q_{23} \quad \text{et} \quad \Delta H_{41} = c_p(T_1 - T_4) = Q_{41}$$

Application numérique : $Q_{23} = 791 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $Q_{41} = -463 \text{ kJ.kg}^{-1}$

5. Pour déterminer le travail total, on utilise le fait que, sur le cycle, $\Delta U = 0$. Or $\Delta U = W + Q_{23} + Q_{41}$, d'où :

$$W = -(Q_{23} + Q_{41}) = -328 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le travail est négatif, on retrouve bien qu'il s'agit d'un cycle moteur.

6. On détermine le travail reçu par le gaz dans le compresseur. Cette transformation est adiabatique, donc le premier principe donne :

$$\Delta U_{12} = W_{12} = c_v(T_2 - T_1) = 152 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

De même le travail reçu par le gaz dans la turbine est :

$$\Delta U_{34} = W_{34} = c_v(T_4 - T_3) = -386 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le rapport $\left| \frac{W_{12}}{W_{34}} \right|$ est égal à 0,39, donc 39% du travail produit par la turbine sert à faire fonctionner le compresseur.

7. Le rendement est :

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_{23}} \right| = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 41\%$$

Chapitre 38

1. Le système considéré est l'ensemble des deux liquides et l'enceinte qui les contient. Il s'agit tout d'abord de déterminer la température finale T_f du système. Pour cela on applique le premier principe :

$$\Delta H_{\text{total}} = m_{c_p}(T_f - T) + m_{c_p}(T_f - T') = Q + W_{\text{autre}}$$

L'évolution est ici adiabatique (donc $Q = 0$) et il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression, d'où :

$$T_f = \frac{T + T'}{2}$$

L'entropie étant une grandeur additive, la variation d'entropie totale est la somme des variations d'entropie des deux liquides :

$$\Delta S = m_{c_p} \int_T^{T_f} \frac{dT}{T} + m_{c_p} \int_{T'}^{T_f} \frac{dT}{T} = m_{c_p} \ln \frac{T_f}{T} + m_{c_p} \ln \frac{T_f}{T'}$$

En remplaçant T_f par son expression, on trouve le résultat demandé.

2. On élimine tout d'abord les états C et D car la pression et le volume ne peuvent pas augmenter ou diminuer tous les deux à la fois.

La transformation envisagée est adiabatique, elle ne peut pas être réversible car aucun des états possibles n'est sur l'isentrope passant par A, donc $\Delta S > 0$. Il faut alors déterminer le signe de $\Delta S_{A \rightarrow E}$ et de $\Delta S_{A \rightarrow B}$. Pour cela, on utilise l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en variables (P, V) , en prenant l'état A comme état de référence : $S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{PV^\gamma}{P_A V_A^\gamma} \right) + S_A$. Si $PV^\gamma > P_A V_A^\gamma$, $S > S_A$, sinon $S < S_A$. L'isentrope passant par A sépare le plan en deux domaines : les états situés à droite de cette courbe ont une entropie plus élevée que l'état A, les états situés à gauche ont une entropie plus faible que celle de A. En conclusion, seul l'état E est accessible à partir de A par une transformation adiabatique.

3. 1. La transformation est adiabatique réversible et le gaz parfait, on applique la loi de Laplace : $P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma$ soit $P_B = P_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ et, avec la loi de Laplace

$$\text{reliant } V \text{ et } T, V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

L'application numérique donne : $P_B = 10^6 \text{ Pa}$ et $V_B = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.

2. a) On applique la loi des gaz parfaits : $P_B V_B = nRT_B = P_C V_A$, d'où $P_C = P_B \frac{V_B}{V_A} = 1,93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

b) L'évolution du gaz parfait est isotherme d'où : $\Delta S_{BC} = nR \ln \frac{V_A}{V_B}$ or $nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$, d'où :

$$\Delta S_{BC} = \frac{P_A V_A}{T_A} \ln \frac{V_A}{V_B} = 0,471 \text{ J.K}^{-1}$$

3. a) La transformation est isochore donc :

$$\Delta S_{CA} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_A}{T_C}$$

or $T_C = T_B$ et $nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$ donc :

$$\Delta S_{CA} = \frac{P_A V_A}{T_A(\gamma - 1)} \ln \frac{T_A}{T_C} = -0,471 \text{ J.K}^{-1}$$

b) Puisque la transformation est isochore, le travail des forces de pression est nul. L'application du premier principe au gaz donne donc :

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} \Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_A - T_C) = Q_{CA}$$

Or $T_C = T_B$ et $nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$, donc :

$$Q_{CA} = \frac{P_A V_A}{T_A(\gamma - 1)}(T_A - T_B) = -96,3 \text{ J}$$

- c) D'après la question précédente, l'entropie échangée au cours de la transformation CA est : $S_{\text{éch}} = \frac{Q_{CA}}{T_A}$ puisque la source est à la température T_A . On en déduit l'entropie créée dans la transformation CA :

$$S_{\text{créée}} = \Delta S_{CA} - S_{\text{éch}} = \Delta S_{CA} - \frac{Q_{CA}}{T_A} = 0,196 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

L'entropie créée est positive donc l'évolution est irréversible. La transformation CA est isochore irréversible. L'origine de la création d'entropie est la différence de température entre le gaz et le thermostat.

Chapitre 40

1. La masse d'eau évaporée par transpiration par seconde est : $\dot{m} = \frac{P}{L_V} = 3.10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}$ soit 2,7 litres par jour, ce qui beaucoup trop grand : le corps humain ne se refroidit pas que par la transpiration ! S'essuyer avec une serviette n'aide pas au refroidissement car il faut que la sueur s'évapore.

2. 1. On calcule A pour les quatre températures :

$T(\text{K})$	373	473	573	673
A	-7,686	-7,682	-7,675	-7,664

La moyenne des valeurs précédentes qui sera utilisée dans la suite est $A = -7,677$.

2. a) Le système considéré est le mercure contenu dans le récipient. Initialement la température est $T_1 = 573 \text{ K}$, la pression de vapeur saturante à cette température est $P_s = 0,33 \text{ bar}$.

On fait l'hypothèse qu'il y a équilibre liquide-vapeur et on néglige le volume occupé par le liquide puisque 8 kg de mercure liquide occupent un volume :

$$8u_l = 6,16.10^{-4} \text{ m}^3 \ll V_0$$

Le gaz étant supposé parfait à P_s on en déduit le nombre de moles n_{v1} et la fraction massique x_1 :

$$n_{v1} = \frac{P_s V_0}{RT_1}$$

d'où :

$$m_{v1} = n_{v1}M = \frac{P_s V_0 M}{RT_1} = 1,38 \text{ kg} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{n_{v1}M}{m_0} = \frac{P_s V_0 M}{m_0 RT_1} = 0,17$$

Attention pour l'application numérique à bien prendre la pression en pascals.

b) Le raisonnement est le même en prenant T_2 et $P_s = 2,1 \text{ bar}$:

$$m_{v2} = n_{v2}M = \frac{P_s V_0 M}{RT_2} = 7,5 \text{ kg} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{n_{v2}M}{m_0} = \frac{P_s V_0 M}{m_0 RT_2} = 0,94$$

c) L'enceinte contenant le mercure est supposée indéformable donc l'évolution est isochore. D'autre part, la masse de mercure étant elle-aussi constante, le volume massique est constant : l'évolution a lieu suivant une verticale dans le diagramme de Clapeyron. Dans le diagramme (P, T) l'évolution se fait le long de la courbe de changement d'état.

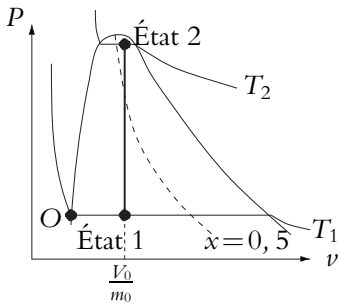


Figure 40.1 Evolution dans le diagramme (P, ν) . On a représenté approximativement l'isotitre $x = 0,5$

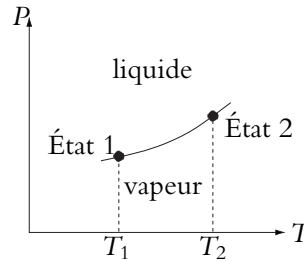


Figure 40.2 Evolution dans le diagramme (P, T)

d) L'évolution est isochore donc le premier principe donne : $\Delta U = Q_s$. Il suffit d'exprimer U dans les deux états :

- état 1 : $U_1 = U_O + m_0 x_1 L_v(T_1) - m_0 P_s(T_1)(u_v(T_1) - u_l)$;
- état 2 : $U_2 = U_O + m_0 c_l(T_2 - T_1) + m_0 x_2 L_v(T_2) - m_0 P_s(T_2)(u_v(T_2) - u_l)$.

où le point de référence O est indiqué sur le diagramme précédent. D'après les valeurs de l'énoncé, on peut négliger le volume massique du liquide, soit :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= m_0(c_l(T_2 - T_1) + x_2 L_v(T_2) - x_1 L_v(T_1) - P_s(T_2)u_v(T_2) + P_s(T_1)u_v(T_1)) \end{aligned}$$

On trouve : $Q_s = 1,88.10^6 \text{ J}$.

e) La durée de fonctionnement du thermostat est :

$$\Delta t = \frac{Q_s}{P_0} = 188 \text{ s} \simeq 3 \text{ min}$$

f) Pour calculer la variation d'entropie du mercure, il suffit d'exprimer l'entropie dans les deux états :

• état 1 : $S_1 = S_0 + m_0 x_1 \frac{L_v(T_1)}{T_1}$;

• état 2 : $S_2 = S_0 + m_0 c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + m_0 x_2 \frac{L_v(T_2)}{T_2}$.

d'où :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = m_0 \left(c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + x_2 \frac{L_v(T_2)}{T_2} - x_1 \frac{L_v(T_1)}{T_1} \right) = 2,75 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1}$$

g) L'entropie créée est :

$$S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}}$$

or on considère le résistor comme un thermostat à la température $T_3 = 800 \text{ K}$,

donc $S_{\text{éch}} = \frac{Q_s}{T_3}$, soit :

$$S_{\text{créée}} = 400 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

L'évolution est irréversible.

Chapitre 41

1. Le rendement d'un moteur de Carnot est $\rho_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ en notant T_f la température de la source froide et T_c celle de la source chaude. On dérive cette expression successivement par rapport à T_f puis par rapport à T_c : $\frac{d\rho_c}{dT_f} = -\frac{1}{T_c}$ et $\frac{d\rho_c}{dT_c} = \frac{T_f}{T_c^2} = \frac{T_f}{T_c} \left(\frac{d\rho_c}{dT_f} \right)$. Or $T_f < T_c$ donc $\left| \frac{d\rho_c}{dT_c} \right| < \left| \frac{d\rho_c}{dT_f} \right|$: il vaut mieux diminuer la température de la source froide.

2. 1. Le système est le fluide caloporteur qui reçoit le travail W et les transferts thermiques Q_1 et Q_2 pendant une heure, sur un nombre entier de cycles. L'efficacité d'un réfrigérateur est : $e = \frac{Q_1}{W}$. Or, sur un cycle, $\Delta U = 0 = W + Q_1 + Q_2$. On en déduit l'expression de e :

$$e = -\frac{Q_1}{Q_2 + Q_1} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_2}{Q_1}}$$

Pour un appareil fonctionnant de façon réversible, l'égalité de Clausius donne :

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réversible}} = -\frac{T_2}{T_1}. \text{ Ainsi } \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)_{\text{réel}} = -k\frac{T_2}{T_1}, \text{ d'où :}$$

$$e = \frac{1}{k\frac{T_2}{T_1} - 1}$$

2. Etant donné que le réfrigérateur fonctionne suivant des cycles, la variation d'entropie ΔS du fluide est nulle sur un nombre entier de cycles. Ainsi, l'entropie créée est :

$$S_{\text{créée}} = -S_{\text{éch}} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1} \left(1 + \frac{Q_2 T_1}{Q_1 T_2}\right)$$

or $\frac{Q_2}{Q_1} = -k\frac{T_2}{T_1}$, d'où :

$$S_{\text{créée}} = -\frac{Q_1}{T_1}(1 - k)$$

3. Dans le cas réversible, l'efficacité serait $e_r = 10,1$, elle n'est plus que de 3,1 dans le cas réel. Puisque $k > 1$, on trouve bien que l'entropie créée est positive.

3. 1. La machine M_1 est reliée à deux sources S_1 et S_2 avec $T_1 > T_2$. On en déduit que S_1 est la source chaude. Comme on souhaite augmenter le température de S_1 , qui est la source chaude, il faut que $Q_1 < 0$: M_1 fournit de la chaleur à la source chaude, ce ne peut être un moteur qui reçoit effectivement de la chaleur de la source chaude, donc M_1 est la pompe à chaleur et M_2 le moteur.

2. Pour avoir la température la plus élevée possible, il faut que le fonctionnement des machines soit réversible. La machine M_2 est un moteur dont les sources de chaleur sont S_3 et S_2 . D'après le théorème de Carnot, pour qu'un système puisse fonctionner en moteur, il faut que les sources de chaleur soient à des températures différentes. Étant donné que le moteur reçoit de la chaleur de la source chaude (ici S_2) et en fournit à la source froide (ici S_3), la source chaude va se refroidir et la source froide se réchauffer puisqu'elles ont une capacité thermique finie. Le moteur s'arrêtera lorsque S_2 et S_3 seront à même température.

3. On applique le premier principe à M_1 sur un nombre entier de cycles. Avec les orientations du schéma de l'énoncé cela donne :

$$\Delta U_1 = W + Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

On applique le premier principe à M_2 sur un nombre entier de cycles. Avec les orientations du schéma de l'énoncé cela donne :

$$\Delta U_2 = -W + Q'_2 + Q'_3 = 0$$

On applique maintenant le premier principe à chaque source entre leur état initial (T_1, T_2, T_3) et leur état final (T_M, T, T) :

- Pour S_1 , $\Delta H_{S_1} = -Q_1 = C(T_M - T_1)$.
- Pour S_2 , $\Delta H_{S_2} = -Q_2 - Q'_2 = C(T - T_2)$.
- Pour S_3 , $\Delta H_{S_3} = -Q_3 - Q'_3 = C(T - T_3)$.

En sommant les différentes équations, on obtient :

$$T_M + 2T - (T_1 + T_2 + T_3) = 0 \quad (41.1)$$

4. On suppose l'évolution réversible comme on l'a dit précédemment. Donc pour chaque machine, l'entropie créée est nulle et la variation d'entropie est égale à l'entropie échangée. Sachant que les sources ne sont pas idéales, on obtient pour M_1 sur un nombre entier de cycles :

$$\Delta S_1 = 0 = S_{1,\text{éch}} = \int \frac{\delta Q_1}{T_{S_1}} + \int \frac{\delta Q_2}{T_{S_2}} + \int \frac{\delta Q_3}{T_{S_3}}$$

et pour M_2 :

$$\Delta S_2 = 0 = S_{2,\text{éch}} = \int \frac{\delta Q'_2}{T_{S_2}} + \int \frac{\delta Q'_3}{T_{S_3}}$$

En combinant les deux équations, on obtient :

$$\int \frac{dH_{S_1}}{T_{S_1}} + \int \frac{dH_{S_2}}{T_{S_2}} + \int \frac{dH_{S_3}}{T_{S_3}} = 0$$

soit :

$$C \left(\int_{T_1}^{T_M} \frac{dT_{S_1}}{T_{S_1}} + \int_{T_2}^T \frac{dT_{S_2}}{T_{S_2}} + \int_{T_3}^T \frac{dT_{S_3}}{T_{S_3}} \right) = 0$$

Après intégration, on trouve :

$$C \ln \frac{T_M T^2}{T_1 T_2 T_3} = 0 \Rightarrow T_M T^2 = T_1 T_2 T_3 \quad (41.2)$$

En éliminant T entre les deux équations (41.1) et (41.2), on obtient :

$$T_M^3 - 2(T_1 + T_2 + T_3)T_M^2 + (T_1 + T_2 + T_3)^2 T_M - 4T_1 T_2 T_3 = 0$$

5. A l'aide la la calculatrice, on trouve comme solutions pour T_M : 100K, 400K et 900K.

La première est à rejeter puisqu'elle est inférieure à la température de départ. Si on choisit $T_M = 400$ K, alors l'équation 41.2 donne $T = 150$ K, ce qui signifie que T_{S_3} a augmenté et T_{S_2} a diminué, ce qui est compatible avec le fonctionnement de M_2 en moteur. En revanche $T_M = 900$ K conduit à $T = -100$ K ce qui est impossible. En conclusion, $T_M = 400$ K.

Partie VII – Électromagnétisme

Chapitre 42

1. On considère les rotations autour de l'axe (Ox) . L'image de la droite est la droite elle-même. De plus, la densité linéique de charges est la même en tout point avant et après rotation. On a donc invariance par toute rotation d'axe (Ox) .
D'autre part, l'image par translation le long de l'axe (Ox) de l'axe est l'axe lui-même. La densité linéique de charges est la même en tout point avant et après translation. On a donc invariance par toute translation le long de l'axe (Ox) .
2. Pour les mêmes rotations qu'à la question précédente, l'image de l'axe est l'axe lui-même et la densité linéique de charges après rotation est toujours égale à celle avant rotation. On conserve donc l'invariance par rotation.
D'autre part, l'image par translation le long de l'axe (Ox) de l'axe est l'axe lui-même. Cependant la densité linéique de charges n'est plus la même avant et après translation. On n'a donc plus invariance par translation le long de l'axe (Ox) .
2. On considère les rotations de centre O . L'image de la sphère est la sphère elle-même. De plus, la densité surfacique de charges est la même en tout point avant et après rotation. On a donc invariance par toute rotation de centre O .
De même, l'image de la sphère par une rotation autour d'un axe passant par O est la sphère elle-même et la densité surfacique de charges avant et après rotation est la même en tout point. On a donc invariance par toute rotation autour d'un axe passant par O .
Aucune translation ne laisse la sphère invariante : on n'a donc pas d'invariance par translation.
2. Par les rotations de centre O , l'image de la sphère est toujours elle-même mais la densité surfacique de charges n'est pas la même avant et après rotation.
Pour les rotations autour d'un axe, seules celles autour de l'axe (Ox) laisse invariante la sphère ainsi que la densité surfacique de charges. On a donc invariance par rotation autour de (Ox) .
Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, il n'y aucune invariance par translation.

Chapitre 43

1. Soit \mathcal{P} un plan contenant l'axe (Ox) . L'image de l'axe (Ox) par la symétrie par rapport à \mathcal{P} est l'axe (Ox) lui-même et la densité linéique de charges est la même avant et après symétrie. Le plan \mathcal{P} est donc un plan de symétrie.

- Soit \mathcal{P}' un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) . L'image de l'axe (Ox) par la symétrie par rapport à \mathcal{P}' est l'axe (Ox) lui-même et la densité linéique de charges est la même avant et après symétrie. Le plan \mathcal{P}' est donc un plan de symétrie.
2. Soit \mathcal{P} un plan contenant l'axe (Ox) . L'image de l'axe (Ox) par la symétrie par rapport à \mathcal{P} est l'axe (Ox) lui-même et la densité linéique de charges est la même avant et après symétrie. Le plan \mathcal{P} est donc un plan de symétrie.
L'image de l'axe (Ox) par la symétrie par rapport au plan (yOz) est l'axe (Ox) lui-même et la densité linéique de charges après symétrie est égale à l'opposé de la densité de charges avant symétrie. Le plan (yOz) est donc un plan d'antisymétrie.
3. Pour le cas de la question 1, en coordonnées cylindriques, \vec{E} ne dépend que de r du fait des invariances. Compte tenu des symétries, \vec{E} est nul en un point de l'axe et \vec{E} en un point quelconque est dirigé selon \vec{u}_r .
Pour le cas de la question 2, \vec{E} ne dépend, en coordonnées cylindriques, que de r et de x . Compte tenu des symétries, \vec{E} en un point de l'axe est dirigé selon l'axe et \vec{E} en un point du plan (yOz) est dirigé selon la perpendiculaire à ce plan.

Chapitre 44

1. D'après le théorème de Gauss, le flux du champ électrostatique est égal à $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$. Par conséquent, tant que la charge q reste à l'intérieur de la sphère, le flux du champ électrostatique n'est pas modifié. En revanche, dès que la charge q quitte la sphère, le flux est diminué de $\frac{q}{\epsilon_0}$.
2. 1. $\Phi = \iint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M$ donc $\Phi = 0$ si $\vec{E} = \vec{0}$.
2. Plusieurs situations peuvent correspondre à un flux nul : il y a le cas de la question précédente où le champ électrostatique est nul mais ce n'est pas le seul. On peut citer par exemple le cas où le champ électrostatique a une orientation parallèle à la surface en tout point de cette dernière.
3. 1. L'énergie potentielle d'une distribution de charges est définie comme l'énergie que doit fournir un opérateur pour construire la distribution à partir de charges initialement à l'infini c'est-à-dire sans interaction entre elles. On va donc amener les charges une par une depuis l'infini et calculer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération.
La première charge q_1 est amenée à sa position M_1 sans qu'il y ait besoin de fournir un travail : il n'y a ni champ ni potentiel électrostatiques.

L'opérateur doit fournir une force \vec{F}_{op} opposée à la force électrostatique qui s'exerce sur la charge q_2 pour la déplacer. On a donc $\vec{F}_{\text{op}} = -\vec{F}_{el} = -q_2 \vec{E}_2^*(M) = q_2 \vec{\text{grad}} V_2^*$ en notant respectivement $\vec{E}_2^*(M)$ et V_2^* le champ électrostatique et le potentiel créés par q_1 en M . On en déduit que, pour amener la charge q_2 de l'infini à sa position M_2 , l'opérateur doit fournir un travail : $W_{\text{op}} = \int_{\infty}^{M_2} \vec{F}_{\text{op}} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{M_2} d(q_2 V_2^*) = q_2 V_2^*(M_2)$.

Pour la troisième charge, il faut contrebalancer à la fois le potentiel dû à q_1 et celui créé par q_2 en M_3 : l'opérateur fournit un travail $W_{\text{op}} = q_3 V_3^*$ en V_3^* le potentiel créé par q_1 et q_2 en M_3 .

On continue ainsi pour la totalité des charges : l'opérateur fournit un travail $W_{\text{op}} = q_i V_i^*$ en V_i^* le potentiel créé par q_1, q_2, \dots, q_{i-1} en M_i .

L'opérateur fournit pour constituer la distribution un travail total $W_{\text{op}} = \sum_i q_i V_i^*$.

Or le potentiel V_i^* créé par les charges déjà en place quand on amène la charge q_i s'écrit : $V_i^* = \sum_{j < i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{M_i M_j}$.

On en déduit :

$$W_{\text{op}} = \sum_i \sum_{j < i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{M_i M_j}$$

qu'on peut écrire, puisque l'expression est symétrique en i et j :

$$W_{\text{op}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{M_i M_j} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

en notant V_i le potentiel créé en M_i par TOUTES les autres charges.

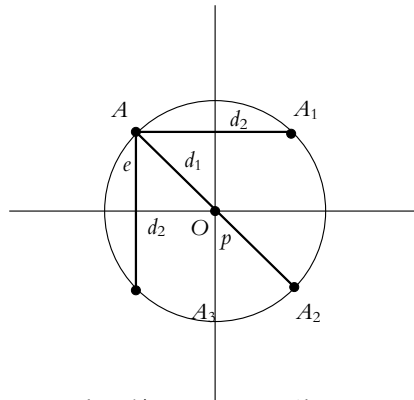
Il faut bien noter que le coefficient $\frac{1}{2}$ ne tient qu'aux indices sur lesquels s'effectue la sommation : $\sum_{j < i} \bullet = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \bullet$. Dans le cas où la somme porte sur $j \neq i$, l'interaction est artificiellement comptée deux fois. Cela présente l'avantage de symétriser la formulation.

Au final, l'énergie électrostatique vaut : $E_p = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{M_i M_j} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$.

2. On applique la relation générale établie à la question précédente : $E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

où V_i est le potentiel créé par les autres charges à l'endroit où se trouve la charge q_i .

Ici on obtient donc : $E_p = \frac{1}{2} (-4eV(A) + eV(O))$ car le potentiel où se trouvent les électrons est le même quel que soit l'électron considéré par symétrie de la distribution.



Or le potentiel en O est celui dû aux quatre électrons :

$$V(O) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e}{R} = \frac{-e}{\pi\epsilon_0 R}$$

et celui en A est : $V(A) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 d_1} + 2\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 d_2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} \right)$
car il est dû aux trois autres électrons et au proton.

L'énergie électrostatique vaut donc : $E_p = \frac{1}{2} \left(-4e \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} \right) + e \frac{-e}{\pi\epsilon_0 R} \right)$
soit

$$E_p = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right).$$

Chapitre 45

1. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La distribution est invariante par translation d'axe Oz et par rotation autour de l'axe Oz donc le champ ne dépend que r .

Soit un point P quelconque de l'espace, le plan contenant P et l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution. Le plan contenant P et perpendiculaire à Oz est aussi plan de symétrie. Le champ \vec{E} appartient à l'intersection de ces deux plans donc il est suivant \vec{u}_r .

On utilise le théorème de Gauss, et les symétries et invariances nous font choisir un cylindre d'axe Oz , de rayon r et de hauteur h comme surface de Gauss.

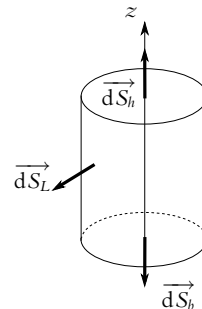


Figure 45.1

Le calcul du flux est le même que dans le cas du fil infini. Le flux se décompose en trois termes (figure 44.1) celui à travers la surface latérale de vecteur surface élémentaire $\vec{dS}_L = dS_L \vec{u}_r$, celui à travers la base supérieure de vecteur surface élémentaire $\vec{dS}_h = dS_h \vec{u}_z$ et celui à travers la base inférieure de vecteur surface élémentaire $\vec{dS}_b = -dS_b \vec{u}_z$. Le flux est donc :

$$\Phi = \int \int_{S_L} E(r) \vec{u}_r \cdot dS_L \vec{u}_r + \int \int_{S_h} E(r) \vec{u}_r \cdot dS_h \vec{u}_z + \int \int_{S_b} E(r) \vec{u}_r \cdot (-dS_b \vec{u}_z)$$

Seule la première intégrale est non nulle et $\Phi = 2\pi rhE(r)$.

On calcule maintenant la charge intérieure à la surface de Gauss. Il y a trois cas :

- i. $r \leq a$, la charge intérieure Q_{int} est nulle ; le théorème de Gauss entraîne $\Phi = Q_{\text{int}}/\epsilon_0 = 0$ donc $E = 0$.
- ii. $a \leq r \leq R$, la charge intérieure est celle comprise entre le cylindre de rayon r et le cylindre de rayon a soit $Q_{\text{int}} = \rho\pi h(r^2 - a^2)$, soit $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$.
- iii. $r \geq R$, la charge intérieure est celle comprise entre le cylindre de rayon R et le cylindre de rayon a soit $Q_{\text{int}} = \rho\pi h(R^2 - a^2)$, soit $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (R^2 - a^2)$.

2. Pour calculer le potentiel, on utilise $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, qui s'écrit ici $\frac{dV}{dr} = -E$.

On commence par $r \geq R$, l'intégration donne $V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (R^2 - a^2) \ln r + \text{cte}$.

Pour déterminer la constante, il faut choisir une valeur de potentiel, on choisit par exemple $V(R) = 0$, alors :

$$V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (R^2 - a^2) \ln \frac{r}{R}$$

Pour la zone $a \leq r \leq R$, il vient :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \Rightarrow V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - a^2 \ln r \right) + \text{cte}$$

On détermine la constante par continuité du potentiel en $r = R$ ce qui donne finalement :

$$V(r) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{r^2 - R^2}{2} - a^2 \ln \frac{r}{R} \right)$$

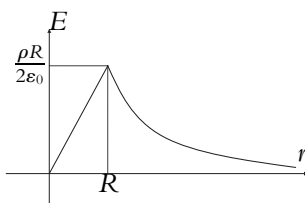
Enfin pour $r \leq a$, le champ est nul donc le potentiel est constant et égal à $V(a)$ obtenu avec l'expression précédente.

2. 1. Le plan \mathcal{P} est un plan d'antisymétrie donc le champ est perpendiculaire à ce plan. Comme les équipotentielles et les lignes de champ sont perpendiculaires, le plan \mathcal{P} est une équipotentielle.

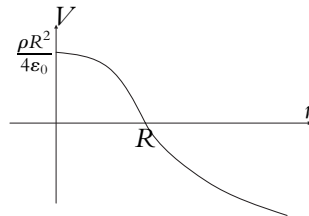
2. On remplace le plan \mathcal{P} par la superposition de deux armatures identiques aux autres l'une chargée Q et l'autre $-Q$ sans rien changer au système. Par le principe de superposition, on a le même problème qu'avant donc les plans bissecteurs sont des équipotentiels et en itérant le raisonnement, tout plan passant par Oz et perpendiculaire aux armatures est une équipotentielle.
3. Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentiels donc les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe Oz dans le plan perpendiculaire aux armatures.
4. On choisit comme surface de Gauss le cylindre de base dS et de génératrice suivant les lignes de champ. Il n'y a pas de charges intérieures ni de flux latéral donc $E_1 dS = E_2 dS$ et on en déduit que $E_1 = E_2$ le long d'une ligne de champ. La démonstration reste valable si dS est faible.
5. Le calcul de la circulation le long d'une ligne de champ à la distance x de l'axe Oz donne $U = 2\alpha xE$.
6. Avec le même type de cylindre qu'en 4. mais englobant une armature, le théorème de Gauss conduit à $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. On en déduit $\sigma = \frac{\epsilon_0 U}{2\alpha x}$.
7. La charge de l'armature s'obtient par $Q = \iint \sigma dx dy = \frac{\epsilon_0 U}{2\alpha} b \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right)$.
8. On en déduit la capacité $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 b}{2\alpha} \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right)$.

3. 1. On a invariance par translation le long de l'axe du cylindre et invariance par rotation autour de l'axe du cylindre. On utilise donc les coordonnées cylindriques et on a indépendance par rapport à z et θ .
2. Il n'y a pas de plan d'antisymétrie. Tout plan contenant l'axe du cylindre ou perpendiculaire à l'axe du cylindre sont plans de symétrie donc le champ \vec{E} est dirigé suivant \vec{u}_r .
3. L'application du théorème de Gauss à un cylindre de hauteur h et de rayon r donne $2\pi rhE(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ avec $Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \rho$ si M est à l'intérieur et $Q_{\text{int}} = \pi R^2 h \rho$ si M est à l'extérieur. On en déduit donc $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$ si M est à l'intérieur et $\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ si M est à l'extérieur.

4.



5. Il est impossible d'utiliser l'expression intégrale de V car il y a des charges à l'infini.
6. La relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ s'écrit ici $E = -\frac{dV}{dr}$. Par intégration en prenant l'origine proposée dans l'énoncé, on a $V(M) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2)$ si M est à l'intérieur et $V(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$ si M est à l'extérieur.
- 7.



8. On a invariance par translation le long des axes des cylindres mais pas d'invariance par rotation. On utilise les coordonnées cylindriques pour appliquer les résultats précédents. On a par ailleurs indépendance par rapport à z .
9. Il n'y a pas de plan d'antisymétrie. Tout plan perpendiculaire aux axes des cylindres ainsi que le plan contenant les deux axes des cylindres sont plans de symétrie. On en déduit que le champ \vec{E} est dirigé suivant \vec{u}_r et \vec{u}_θ sauf dans le plan $O_1 O_2 z$ où il est dirigé suivant \vec{u}_r .
10. On applique le théorème de superposition en considérant deux cylindres l'un chargé avec une densité ρ et l'autre avec une densité $-\rho$. En utilisant les résultats précédents, on en déduit $\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}$.
11. Par conséquent, le champ est uniforme dans la cavité.
12. Le champ est nul dans la cavité si les axes sont confondus car alors $O_1 = O_2$.
13. En appliquant le théorème de superposition, on obtient :

$$V = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (O_2 M^2 - O_1 M^2) + C_1 + C_2$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration des potentiels de chaque cylindre.

14. On a la même chose et $V = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R_1^2 - r^2) - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \ln \frac{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}{R_2} + C$ en notant C une constante et θ l'angle entre $\overrightarrow{O_1 O_2}$ et $\overrightarrow{O_1 M}$.
15. On détermine le champ par le théorème de superposition soit

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} - \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0 O_2 M^2} \overrightarrow{O_2 M}$$

En l'explicitant dans la base polaire, on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_2^2 (r - a \cos \theta)}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \right) \vec{u}_r - \frac{\rho R_2^2 a \sin \theta}{2\epsilon_0 (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)} \vec{u}_\theta$$

Le champ est nul si les deux composantes sont nulles. Or $E_\theta = 0$ implique $\theta = 0$ ou π .

Alors pour $\theta = 0$, la condition $E_r = 0$ se traduit par $r^2 - ar - R_2^2 = 0$ soit $r = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4R_2^2}}{2}$ qui est la seule solution possible.

Pour $\theta = \pi$, la condition $E_r = 0$ se traduit par $r^2 + ar - R_2^2 = 0$ soit $r = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4R_2^2}}{2}$ qui est la seule solution possible.

Finalement il existe deux points sur l'axe Ox où le champ s'annule.

16. On effectue le même travail à l'extérieur des cylindres. On obtient :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\left(\frac{R_1^2}{r} - \frac{R_2^2 (r - a \cos \theta)}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \right) \vec{u}_r - \frac{a \sin \theta}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \vec{u}_\theta \right)$$

17. Le champ est nul si les deux composantes sont nulles. Or $E_\theta = 0$ implique $\theta = 0$ ou π .

Alors pour $\theta = 0$, la condition $E_r = 0$ se traduit par $R_1^2 (r - a) = R_2^2 r$ soit $r = \frac{R_1^2 a}{R_1^2 - R_2^2}$.

Pour $\theta = \pi$, la condition $E_r = 0$ se traduit par $R_1^2 (r + a) = R_2^2 r$ soit $r = -\frac{R_1^2 a}{R_1^2 - R_2^2}$. On retrouve la même position que précédemment.

On a donc un seul point sur l'axe Ox où le champ s'annule.

Chapitre 47

1. 1. La charge q crée un champ électrostatique $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$. Le dipôle subit

donc un moment : $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$. Il sera en équilibre par rapport aux mouvements de rotation si ce moment est nul à savoir si \vec{p} et \vec{E} sont colinéaires. Le dipôle s'oriente donc selon les lignes de champ c'est-à-dire radialement par rapport à la charge. On pourrait préciser que l'équilibre est stable si les deux vecteurs sont de même sens donc ici si $\vec{p} = p\vec{u}_r$.

2. On utilise la modélisation d'un dipôle par deux charges $-q$ en N et $+q$ en P respectivement situées en $(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2})$ et $(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2})$.

On note $O(x, y, z)$ le milieu de PN . La force subie par le dipôle est :

$$\vec{f} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P).$$

Or

$$\vec{E}(N) = \vec{E}(O) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E}{\partial z}$$

et

$$\vec{E}(P) = \vec{E}(O) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E}{\partial z}$$

On en déduit : $\vec{f} = q \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}$. Comme \vec{p} est colinéaire à \vec{u}_r par hypothèse et que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, on peut écrire : $\vec{f} = \left(p \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \right) = -\frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$.

3. Le dipôle électrostatique situé en M crée en O un champ électrostatique

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \left(\vec{p} \cdot \vec{MO} \right) \vec{MO} - OM^2 \vec{p}}{OM^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(-pr) (-r\vec{u}_r) - r^2 p \vec{u}_r}{r^5} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \vec{u}_r \end{aligned}$$

La charge q subit donc une force : $\vec{F}^j = q\vec{E}^j = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$.

4. On a donc $\vec{F}^j = -\vec{F}$: le principe des actions réciproques est donc vérifié ici dans le cas où le dipôle est orienté selon les lignes de champ de la charge q .

Chapitre 48

1. 1. Si on considère les translations le long de l'axe du fil, l'image du fil par n'importe laquelle de ces translations est le fil lui-même et il est parcouru par le même courant. On a donc invariance par toute translation le long de l'axe.

Si on considère les rotations autour de l'axe du fil, quel que soit l'angle de rotation, l'image du fil par ces rotations est le fil et il est parcouru par le même courant. On a donc invariance par toute rotation autour de l'axe.

2. La seule différence avec le cas précédent est la longueur finie du fil. On perd donc l'invariance par translation le long du fil mais on conserve celle par rotation.

3. Si les fils sont infinis, on conserve les invariances par translation parallèlement à la direction des fils comme à la première question. En revanche, la présence d'une deuxième fil fait disparaître l'invariance par rotation.
4. La distribution de courants n'est pas infinie : on n'a pas d'invariance par translation. Si on considère les rotations autour de l'axe Δ , quel que soit l'angle de rotation, l'image de la sphère par ces rotations est la sphère et les courants restent inchangés. On a donc invariance par toute rotation autour de Δ .
5. Si on considère les translations parallèlement au plan (yOz) , l'image de la nappe par n'importe laquelle de ces translations est la nappe elle-même et la densité de courants reste identique. On a donc invariance par toute translation parallèlement au plan (yOz) .
6. La largeur finie de la nappe supprime l'invariance par translation dans la direction (Oz) ; il ne reste par rapport au cas précédent que l'invariance par translation parallèlement à (Oy) .

Chapitre 50

1. Le système est invariant par translation selon l'axe (Oz) du cylindre et également invariant par rotation autour de l'axe (Oz) : le champ magnétique ne dépend que de r , distance à l'axe (Oz) en coordonnées cylindriques donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Le plan contenant l'axe et passant par M est un plan de symétrie des sources : le champ magnétique lui est perpendiculaire, il est orthoradial soit $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) à un cercle centré sur cet axe et passant par M :

$$\int_{\text{contour}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$$

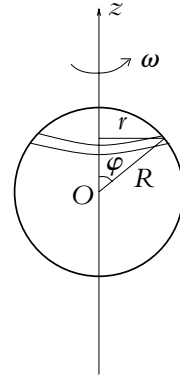
et d'après le théorème d'Ampère :

$$\int_{\text{contour}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ 2\pi R j_{\text{surf}} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

On en déduit :

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \mu_0 \frac{R}{r} j_{\text{surf}} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

2. Un point de la sphère décrit lors de son mouvement un cercle de rayon r à la vitesse $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques. On notera qu'en paramétrant la sphère par l'angle φ , on a $r = R \sin \varphi$. Comme la surface élémentaire dS autour de ce point porte une densité surfacique de charges, on en déduit l'existence d'une densité de courants surfaciques $\vec{j}_s = \sigma \vec{v} = \sigma R \sin \varphi \omega \vec{u}_\theta$. La couronne de largeur $Rd\varphi$ crée le champ magnétique d'une spire : $d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 dI}{2R \sin \varphi} \sin^3 \varphi \vec{u}_z$ avec $dI = j_s r d\varphi = \sigma R^2 \omega \sin \varphi d\varphi$.



On en déduit : $d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \sigma R \omega d\varphi}{2} \sin^3 \varphi \vec{u}_z$ et en intégrant sur φ :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \sigma R \omega}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) d(-\cos \varphi) \vec{u}_z$$

soit $\vec{B}(O) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \vec{u}_z$.

Chapitre 51

1. Il s'agit de la même étude qu'à l'exercice B.6 du chapitre précédent avec $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$. On en déduit : $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 q \omega}{6\pi R} \vec{u}_z$.

2. Le moment magnétique de la distribution s'obtient en opérant le même découpage de la sphère qu'à l'exercice B.2 du chapitre précédent : une couronne de largeur $Rd\varphi$ a un moment magnétique : $d\vec{M} = dI \vec{S} = \sigma R^2 \omega \sin \varphi d\varphi \pi R^2 \sin^2 \varphi = \frac{q}{4} R^2 \omega \sin^3 \varphi d\varphi \vec{u}_z$. Le moment magnétique total s'obtient par intégration sur φ :

$$\vec{M} = \frac{q}{4} R^2 \omega \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) d(-\cos \varphi) \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \vec{M} = \frac{q}{3} R^2 \omega \vec{u}_z$$

3. On en déduit : $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{2\pi R^3} \vec{M}$.

Chapitre 52

1. 1. Il faut tout d'abord déterminer le champ électrique créé par les électrons qu'on suppose uniformément répartis en volume.

Le problème est à symétrie cylindrique donc : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

On applique le théorème de Gauss à un cylindre centré sur l'axe, de rayon r et de hauteur h : $\phi_{\text{lat}} + \phi_1 + \phi_2 = \phi_{\text{lat}} = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = -\frac{Ner^2 h}{R^2 \epsilon_0}$ si $r < R$. On en déduit : $E(r) = -\frac{Ner}{2\pi R^2 \epsilon_0}$ si $r < R$.

La force électrique s'exerçant sur un électron du faisceau est donc :

$$\vec{F}_{\text{elec}} = -e \left(-\frac{Ner}{2\pi R^2 \epsilon_0} \vec{u}_r \right) = \frac{Ne^2 r}{2\pi R^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$$

2. Il faut tout d'abord déterminer le champ magnétique créé par les électrons qu'on suppose uniformément répartis en volume et animés d'une vitesse \vec{v} constante dans la direction du cylindre.

Les symétries sont les mêmes que pour le champ créé par un fil donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère à un cercle centré sur l'axe et de rayon r : $\mathcal{C} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = -\mu_0 Nev \frac{r^2}{R^2}$ si $r < R$. On en déduit : $B(r) = -\frac{\mu_0 Nev r}{2\pi R^2}$ si $r < R$.

La force magnétique s'exerçant sur un électron du faisceau est donc :

$$\vec{F}_{\text{mag}} = -e \vec{v} \wedge \left(-\frac{\mu_0 Nev r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta \right) = -\frac{\mu_0 Ne^2 v^2 r}{2\pi R^2} \vec{u}_r$$

3. La résultante des forces électromagnétiques vaut :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{elec}} + \vec{F}_{\text{mag}} = \frac{Ne^2 r}{2\pi \epsilon_0 R^2} (1 - \mu_0 \epsilon_0 v^2) \vec{u}_r = \frac{Ne^2 r}{2\pi \epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{u}_r$$

Pour une particule non relativiste, on a $v \ll c$ donc $\vec{F} = \frac{Ne^2 r}{2\pi \epsilon_0 R^2} \vec{u}_r \neq \vec{0}$.

La force magnétique est négligeable devant la force électrique. Dans le cas non relativiste, il n'est donc pas possible d'obtenir un faisceau cylindrique d'électrons de section constante.

2. 1. On étudie le mouvement de la particule chargée dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. On néglige le poids de la particule et on n'a donc que la force magnétique : $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$. On applique le principe fondamental à la particule chargée : $m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$. On se place en coordonnées cartésiennes avec

$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. La traduction en coordonnées cartésiennes du principe fondamental de la dynamique donne : $m\ddot{x} = qB_0\dot{y}$, $m\ddot{y} = -qB_0\dot{x}$ et $m\ddot{z} = 0$. Pour la dernière composante, l'intégration est simple et on a : $z = -\gamma a \omega_0 t$ en tenant compte des conditions initiales $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -\gamma a \omega_0$. On procède comme dans l'exercice B.2 ou comme dans le cours pour obtenir les équations horaires en x et en y . La résolution compte tenu des conditions initiales fournit : $x = a \cos \omega_0 t$ et $y = -a \sin \omega_0 t$.

On a donc une trajectoire qui a la forme d'une hélice circulaire dans le cylindre d'axe (Oz) , de rayon a et de pas : $h = 2\pi\gamma a$.

2. Si $\gamma = 0$, on a une trajectoire dans le plan (xOy) et le mouvement est circulaire : on parle de mouvement cyclotron.

3. Les équations du mouvement sont les mêmes sauf dans la direction \vec{u}_x :

$\ddot{x} = \omega_0 \dot{y} + \frac{qE_0 \cos \omega t}{m}$. Par intégration de \ddot{y} , on obtient : $\dot{y} = -\omega_0 x$ soit en

reportant dans l'équation en \ddot{x} : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{qE_0}{m} \cos \omega t$. La solution est la somme :

- de la solution générale de l'équation sans second membre : $x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$,

- d'une solution particulière qu'on cherche sous la forme : $x = C \cos \omega t$; en reportant cette forme dans l'équation différentielle, on obtient : $C = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

soit finalement une solution sous la forme :

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

A et B sont déterminées à partir des conditions initiales : $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ soit

$$A = a - \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{ et } B = 0 \text{ donc}$$

$$x = \left(a - \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

et en utilisant les relations trigonométriques :

$$x = a \cos \omega_0 t + \frac{2qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right)$$

En intégrant la relation $\dot{y} = -\omega_0 x$ et en tenant compte des conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = -a\omega_0$, on déduit :

$$y = \left(\frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - a \right) \sin \omega_0 t - \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

soit :

$$y = -a \sin \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right).$$

On en déduit l'existence d'un phénomène de battements pour les composantes x et y .

4. Quand ω tend vers ω_0 , l'amplitude devient très grande : on a un phénomène de résonance :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega_0 t + \frac{2qE_0}{m(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \\ &\simeq a \cos \omega_0 t + \frac{qE_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

car $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ avec ici $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{2} t$. De même, on a :

$$y \simeq -a \sin \omega_0 t + \frac{qE_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

La projection du mouvement dans le plan (xOy) a donc un rayon qui augmente linéairement avec le temps, l'hélice n'est donc plus circulaire.

5. Comme $\omega_0 = \frac{q}{m} B_0$ dépend de la masse de la particule, il suffit pour isoler les particules d'une certaine masse de placer un champ électrique de pulsation proche de ω_0 . Les particules de masse $m = \frac{\omega_0}{qB_0}$ seront celles dont la trajectoire s'écarte de l'hélice initiale.

3. 1. La force électrique est dirigée selon (Ox) . Comme la particule est initialement au repos, le mouvement aura lieu le long de cet axe. On projette le principe fondamental de la dynamique sur (Ox) : $m\ddot{x} = qE_0 \cos(\omega t + \varphi)$ qu'on intègre en $\dot{x} = \frac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{qE_0}{m\omega} \sin \varphi$ en tenant compte du fait que $\dot{x}(0) = 0$ puis en $x = -\frac{qE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{qE_0 \sin \varphi}{m\omega} t + \frac{qE_0}{m\omega^2} \cos \varphi$ compte tenu du fait que $x(0) = 0$.
2. On a donc la superposition d'un mouvement d'oscillation et d'une dérive à vitesse constante $u = -\frac{qE_0 \sin \varphi}{m\omega}$. On note que si $\varphi = 0$, le mouvement de dérive disparaît.

3. On pose $x_0 = \frac{qE_0}{m\omega^2}$. On a alors $\dot{x} = x_0 \omega (\sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi)$ soit

$$Ec = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t + \varphi) - 2 \sin \varphi \sin(\omega t + \varphi) + \sin^2 \varphi)$$

4. Comme la valeur moyenne du carré d'un sinus vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'un sinus 0, on en déduit :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \varphi \right) = E_1 + E_d$$

en notant $E_1 = \frac{1}{4} m x_0^2 \omega^2$ et $E_d = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$. E_1 correspond à l'énergie cinétique du mouvement oscillatoire et E_d à celle de la dérive.

5. $E_d = \frac{1}{2} m \frac{q^2 E_0^2 \omega^2}{m^2 \omega^4} \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} m \left(\frac{q E_0 \sin \varphi}{m \omega} \right)^2 = \frac{1}{2} m u^2$.