Généralités sur les fonctions numériques

Exercice 1 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f\circ f$ est croissante tandis que $f\circ f\circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2 Etudier la parité de la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Exercice 3 On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|\sin x|\leq|x|$.
Montrer que la fonction $x\mapsto\sin x$ est 1 lipschitzienne.

Exercice 4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction k lipschitzienne (avec $k\in[0,1[$) telle que $f(0)=0$.
Soit $a\in\mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.
Montrer que $u_n\to 0$.

Exercice 5 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Limites d'une fonction numérique

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}x^x$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\ln x.\ln(\ln x)$. e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\arccos x}$.

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos e^x}{x^2+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{x-\sin x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\arctan x}{x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}xE\left(\frac{1}{x}\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 0+}E(1/x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}xE(1/x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2E(1/x)$.

Exercice 9 Soit $a<b\in\overline{\mathbb{R}}$ et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que l'application $x\mapsto\lim_{x^+}f$ est croissante.

Exercice 10 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T périodique (avec $T>0$) telle que $\lim_{+\infty}f$ existe dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est constante.

Exercice 11 a) Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique convergeant en $+\infty$. Montrer que g est constante.
b) Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que f converge en $+\infty$, g périodique et $f+g$ croissante.
Montrer que g est constante.

Continuité des fonctions numériques

Exercice 12 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $f(2x)=f(x)$.
Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 13 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x^2)$.
Montrer que f est constante.

Exercice 14 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et prenant la valeur 1 en 0.
On suppose que $\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=f(x)\cos x$, déterminer f.

Exercice 15 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application $f:x\mapsto E(x)+\sqrt{x-E(x)}$.

Exercice 16 Etudier la continuité de $x\mapsto E(x)+(x-E(x))^2$.

Exercice 17 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.
Montrer que f est totalement discontinue.

Exercice 18 Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $x\mapsto f(x)$ est croissante et $x\mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue.

Exercice 19 Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues.
Montrer que $\sup(f,g)$ est une fonction continue sur I.

Exercice 20 Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$.
a) Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=-f(x)$.
b) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$.
c) Etablir que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $f(r)=ar$ avec $a=f(1)$.
d) Conclure que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

Exercice 21 On cherche les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)$.
a) On suppose f solution et $f(0)=f(1)=0$.
Montrer que f est périodique et que $\forall x\in\mathbb{R}$, $2f(x)=f(2x)$. En déduire que f est nulle.
b) Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 22 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 23 Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 24 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $p,q\in\mathbb{R}^+$.
Montrer que $\exists c\in[a,b]$ tel que $p.f(a)+q.f(b)=(p+q).f(c)$.

Exercice 25 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f=-1$ et $\lim\limits_{+\infty} f=1$. Montrer que f s'annule.

Exercice 26 Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que : $\forall x\in I, |f(x)|=|g(x)|\neq 0$.
Montrer que $f=g$ ou $f=-g$.

Exercice 27 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)=f(1)$.
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists\alpha\in[0,1-1/n]$ tel que $f(\alpha+1/n)=f(\alpha)$.

Exercice 28 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 29 Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue, positive et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell<1$.
Montrer qu'il existe $\alpha\in[0,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

Exercice 30 Notre objectif dans cet exercice est d'établir la proposition :
« Toute fonction $f:I\to\mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone. »
Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose :
$\exists(x_1,y_1)\in I^2, x_1<y_1$ et $f(x_1)\ge f(y_1)$ et $\exists(x_2,y_2)\in I^2, x_2<y_2$ et $f(x_2)\le f(y_2)$
Montrer que la fonction $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f((1-t)x_1+tx_2)-f((1-t)y_1+ty_2)$ s'annule. Conclure.

Exercice 31 Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que $|f|\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$. Montrer que $f\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$ ou $f\xrightarrow[+\infty]{}-\infty$.

Continuité sur segment

Exercice 32 Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues telles que $\forall x\in[a,b], f(x)<g(x)$.
Montrer : $\exists\alpha>0$ tel que $\forall x\in[a,b], f(x)\le g(x)-\alpha$.

Exercice 33 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que : $\lim\limits_{+\infty}f=\lim\limits_{-\infty}f=+\infty$.
Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 34 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.
Montrer que $g\circ f$ et $f\circ g$ sont bornées.

Exercice 35 Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 36 Soit $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.
On pose $\varphi(t)=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left(f(x)+tg(x)\right)$.
Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est lipschitzienne.

Exercice 37 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y\in\mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f.
Montrer qu'il existe un $y\in\mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

Bijection continue

Exercice 38 Montrer que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.
a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
b) Déterminer, pour $y\in]-1,1[$ une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice 39 Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:\left]a,b\right[\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.

Montrer que f est continue ssi $f(\left]a,b\right[)=\left]\lim_a f,\lim_b f\right[$.

Uniforme continuité

Exercice 40 Montrer que $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 41 Montrer que $x\mapsto\ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 42 Montrer que $x\mapsto x\ln x$ est uniformément continue sur $\left]0,1\right]$.

Comparaison de fonctions numériques

Exercice 43 Déterminer un équivalent simple aux fonctions suivantes aux points considérés :

a) $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ en $+\infty$ b) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$ c) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ en 0

d) $\ln(1+\sin x)$ en 0^+ e) $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$ en $+\infty$ f) $\ln\cos x$ en $\pi/2^-$

g) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{\sin x}}$ en 0^+ h) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ en $+\infty$.

Exercice 44 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}+x^2}{x-\ln x}$ b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\sin x}{x\ln x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x-x}{x+\cos x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x+x^2}{\ln(x+x^2)}$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x\mathrm{e}^x-x^2}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{argsh} x}{\ln x}$.

Exercice 45 Déterminer un équivalent simple au fonctions proposées :

a) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1$ quand $x\to+\infty$,

b) $\ln(1+x)^2-\ln(1-x)^2$ quand $x\to0$,

c) $\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)}$ quand $x\to+\infty$,

d) $\tan x-\sin x$ quand $x\to0$.

e) $\ln(1+\ln(1+x))$ quand $x\to0$.

Exercice 46 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $f(x)+f(x+1)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$.

a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Etude de branches infinies de fonctions

Exercice 47 Etudier les branches infinies de $f(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln x}$.

Exercice 48 Etudier les branches infinies de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr