Fonctions rationnelles

Exercice 1 Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{x^5}{1+x^{12}}$ b) $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ c) $\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$ f) $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

g) $\dfrac{1}{x^3+1}$ h) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$ i) $\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

j) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ k) $\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$ l) $\dfrac{1}{x^4+1}$

---

a) $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^{12}}\mathrm{d}x \underset{u=x^6}{=} \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{6}\arctan x^6 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)} = \int -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = -\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C^{te}$ sur $]-\infty,-1[,]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$.

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)+C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)-2}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-\arctan(x+1)+C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C^{te}$ sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C^{te}$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

h) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C^{te}$ sur $]-\infty,1[$ ou $]1,+\infty[$.

i) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int 1+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arctan x+C^{te}$ sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$.

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$ puis

$\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

k) $\displaystyle\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-1/3}{(x-j)^2}+\frac{-1/3}{(x-j^2)^2}+\frac{2/3}{x^2+x+1}$ donc

$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

l) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2x}+1}\mathrm{d}x$ donc

$\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\arctan x}{x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

$\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{-x+1}{x^2+1}$ donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C^{te}$

puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8} = \frac{\ln 2}{4}$.

Exercice 3 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On désire déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction $\displaystyle f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée. Celle-ci est désormais notée F_n .

b) Calculer $F_1(x)$.

c) En procédant au changement de variable $x=\cos\theta$, déterminer $F_2(x)$.

d) En s'aidant d'un intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.

e) Calculer $F_3(x)$.

a) f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une unique primitive s'annulant : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

b) $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan x$.

c) $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\arctan x}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\tan^2\theta} = \int_0^{\arctan x}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\sin 2\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x$

et donc $F_2(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x$.

d) $F_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = F_n(x)-\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$ puis par ipp :

$\displaystyle F_{n+1}(x) = F_n(x)+\left[\frac{1}{2n}\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}F_n(x)$.

e) $F_3(x) = \displaystyle\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\arctan x$.

Fonctions rationnelles en exp

Exercice 4 Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{1}{e^x+1}$ b) $\dfrac{1}{e^{2x}+e^x}$

c) $\sqrt{e^x-1}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

a) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}=\int 1-\frac{e^x}{e^x+1}dx=x-\ln(e^x+1)+C^{te}$.

b) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}\underset{u=e^x}{=}\int\frac{du}{u^2(u+1)}=-\ln|u|+\ln|u+1|-\frac{1}{u}+C^{te}=-x+\ln(e^x+1)-e^{-x}+C^{te}$.

c) Sur $[0,+\infty[$, $\displaystyle\int\sqrt{e^x-1}dx\underset{t=\sqrt{e^x-1}}{=}\int\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C^{te}$.

d) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}\underset{u=\sqrt{1+e^{2x}}}{=}\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}+C^{te}=\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x+C^{te}$.

Exercice 5 Calculer $\displaystyle\int_0^1\sqrt{e^x+1}dx$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\underset{u=\sqrt{e^x+1}}{=}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}}\frac{2du}{u^2-1}=\left[\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{e+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{e+1}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Fonctions rationnelles en sin et cos

Exercice 6 Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$ b) $\dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}$ c) $\dfrac{1}{\cos^4 x}$.

d) $\dfrac{1}{\cos^3 x}$

a) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}dx\underset{u=\sin x}{=}\int\frac{du}{2-u^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{u+\sqrt{2}}-\frac{1}{u-\sqrt{2}}du=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sin x+\sqrt{2}}{\sin x-\sqrt{2}}+C^{te}$.

b) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx\underset{u=\cos x}{=}\int-\frac{du}{2-u^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}+C^{te}$.

c) Sur $I_k=\left]\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[,k\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}\underset{u=\tan x}{=}\int 1+u^2\,du=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C^{te}$.

d) Sur $I_k=\left]\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[,k\in\mathbb{Z}$

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))^2}\underset{t=\sin x}{=}\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}dt$$

donc $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+C^{te}$

Exercice 7 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{3+\cos x}$.

Sur $I_k =]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} \underset{t=\tan x/2}{=} \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C^{te}$.

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{3+\cos x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, cherchons F primitive de celle-ci sur $\mathbb{R}$.

$\forall k\in\mathbb{Z}$, F est primitive sur I_k, donc $\exists C_k\in\mathbb{R}$ tel que sur I_k, $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C_k$.

Par limite à droite et à gauche en $\pi+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k+1}$

Par suite $\forall k\in\mathbb{Z}$, $C_k = \dfrac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0$.

On peut résumer : $\exists C_0\in\mathbb{R}$ tel que sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + \dfrac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0 & \text{si } x\in I_k \\ \dfrac{2k+1}{2\sqrt{2}}\pi + C_0 & \text{si } x = \pi+2k\pi \end{cases}$.

Ceci détermine la fonction F à une constante près.
Inversement, étant assuré de l'existence de F, on peut affirmer que de telles fonctions sont bien primitives de $x\mapsto\dfrac{1}{3+\cos x}$.

Exercice 8 Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^1\frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x} \underset{t=\tan x}{=} \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

c) $\displaystyle I = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi}^{3\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

Via des changements de variable affines adéquates : $\displaystyle I = 4\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

Sur $]-\pi/2,\pi/2[$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \underset{t=\tan x}{=} \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$.

Soit F une primitive de $\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ sur $[0,\pi/2]$.

$\exists C\in\mathbb{R}$ tel que $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$ sur $[0,\pi/2[$ et par continuité : $F(\pi/2) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = [F(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ puis $I = \sqrt{2}\pi$.

Exercice 9 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\mathrm{d}x$ pour $\alpha\in]0,\pi[$.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^1\frac{2\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)t^2}\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\left[\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}t\right]_0^1=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

et finalement $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha\cos x}\mathrm{d}x=2\arctan\sqrt{\frac{\sin^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}}=\alpha$.

Fonction rationnelle en sh et ch

Exercice 10 Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{\operatorname{th}x}{1+\operatorname{ch}x}$ b) $\dfrac{\operatorname{ch}x}{1+\operatorname{ch}^2x}$ c) $\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}$.

d) $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3x}$.

a) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\operatorname{th}x}{1+\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x\underset{u=\operatorname{ch}x}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}=\ln\operatorname{ch}x-\ln(\operatorname{ch}x+1)+C^{te}$.

b) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}x}{1+\operatorname{ch}^2x}\mathrm{d}x\underset{u=\operatorname{sh}x}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt2}+C^{te}$.

c) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}\underset{u=\operatorname{th}x}{=}\int-\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)(u+1)^2}=\frac14\ln\left|\frac{\operatorname{th}x+1}{\operatorname{th}x-1}\right|-\frac12\frac{1}{1+\operatorname{th}x}+C^{te}$

ou encore $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}=\int\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^x}dx=\int\frac12+\frac{1}{2\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4\mathrm{e}^{2x}}+C^{te}$.

d) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^3x}=\int\frac{\operatorname{ch}x}{(1+\operatorname{sh}^2x)^2}\mathrm{d}t\underset{t=\operatorname{sh}x}{=}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\frac12\arctan\operatorname{sh}x+\frac12\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}+C^{te}$

Exercice 11 Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}x}$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}x}\underset{t=\mathrm{e}^x}{=}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{2}$$

Fonction rationnelle en un radical

Exercice 12 Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ b) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ c) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

a) Sur $[-1,+\infty[$, $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}\underset{u=\sqrt{x+1}}{=}\int\frac{2u(u^2-1)}{1+u}\mathrm{d}u=\int2u(u-1)\mathrm{d}u=\frac23\sqrt{x+1}^3-x+C^{te}$.

b) Sur $[0,+\infty[$, $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x\underset{u=\sqrt{x}}{=}\int2u\frac{1-u}{1+u}\mathrm{d}u=2\int-u+2-\frac{2}{1+u}\mathrm{d}u=-x+4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x})+C^{te}$.

c) Sur $]-\infty,1]$ ou $]2,+\infty[$, $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\mathrm{d}x=\int\frac{-2y^2\,\mathrm{d}y}{(y-1)^2(y+1)^2}=\frac12\frac{1}{y-1}+\frac12\frac{1}{y+1}-\frac12\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+C^{te}$

donc $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\mathrm{d}x=\sqrt{(x-1)(x-2)}-\frac12\ln\frac{\sqrt{|x-1|}-\sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-2|}}+C^{te}$.

Exercice 13 Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}$ b) $\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ c) $\sqrt{x-x^2+6}$

d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ e) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

a) Sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$, $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{2}\sin t}{=} \int\sqrt{2}\sin t+1\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cos t+t+C^{te}=\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C^{te}$.

b) Sur $\left]1,3\right[$, $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \underset{x=2+\sin t}{=} \int 2+\sin t\mathrm{d}t=2\arcsin(x-2)-\sqrt{(x-1)(3-x)}+C^{te}$.

c) $x-x^2+6=-(x-3)(x+2)$, $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\sin t$. Sur $\left[-2,3\right]$,

$$\int\sqrt{x-x^2+6}\mathrm{d}x=\int\frac{25}{4}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{25}{8}\int\cos 2t+1\mathrm{d}t=\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2+6}+\frac{25}{8}\arcsin\frac{2x-1}{5}+C^{te}$$

d) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \underset{x=\operatorname{sh}t}{=} \int\operatorname{sh}t+1\mathrm{d}t=\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C^{te}$.

e) Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^2}} \underset{x=\operatorname{sh}t}{=} \int\frac{\operatorname{ch}t\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}=\int\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}==\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}+C^{te}$.

f) Sur $\left[1,+\infty\right[$ (et de même sur $\left]-\infty,-1\right]$)

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x \underset{x=\operatorname{ch}t}{=} \int\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t \underset{u=\operatorname{sh}t}{=} \int\frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{x^2-1}-\arctan\sqrt{x^2-1}+C^{te}.$$

Exercice 14 Déterminer $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3}\operatorname{sh}t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\operatorname{sh}t\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t-1} \underset{u=\operatorname{ch}t}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} \text{ donc}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}}+C^{te}.$$

Exercice 15 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)}$ b) $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)}$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

a) $\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+3)} \underset{t=\sqrt{x}}{=} \int_1^{\sqrt{3}}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

b) $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x+4)} \underset{t=\sqrt{x+1}}{=} \int_1^{\sqrt{3}}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \underset{u=\sqrt{1+x}}{=} \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2u\ \mathrm{d}u}{u+\sqrt{2-u^2}} \underset{u=\sqrt{2}\sin\theta}{=} 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2\sqrt{2}\int_0^1\frac{4t(1-t^2)\ \mathrm{d}t}{(-t^2+2t+1)(1+t^2)^2}=2\sqrt{2}\int_0^1-\frac{1}{1+t^2}+2\frac{1+t}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{t^2-2t-1}\mathrm{d}t$$

Au final $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2\sqrt{2}-2\ln(\sqrt{2}+1)$.