Modélisation des systèmes asservis en SLCI et réponses temporelles

Les fiches de synthèses suivantes sont un résumé des cours de SII de la 1ère année MPSI sur la modélisation des systèmes asservis en Systèmes Linéaires Continus Invariants (SLCI) qui concernent les centres d'intérêts de MPSI en gras ci-dessous :

CI 1 Réaliser l'analyse fonctionnelle et structurelle des systèmes.
CI 2 Modéliser les systèmes linéaires continus invariants.
CI 3 Prévoir et vérifier les performances des systèmes linéaires continus invariants.
CI 4 Prévoir et vérifier les performances cinématiques des systèmes.
CI 5 Modéliser, prévoir et vérifier les performances des systèmes de solides.
CI 6 Modéliser les actions mécaniques.
CI 7 Modéliser, prévoir et vérifier les performances statiques des systèmes.
CI 8 Modéliser, prévoir et vérifier les performances des systèmes à événements discrets
CI 9 Réaliser l'étude des chaînes fonctionnelles.

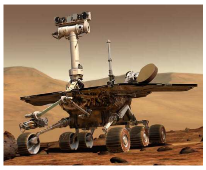
Ces fiches de synthèse **ne sauraient en aucun cas remplacer votre cours** de 1ère année qui reste l'outil de référence. Ces fiches sont donc à utiliser en complément des cours, travaux dirigés et travaux pratiques de l'année de MPSI et sont à bien connaitre pour aborder la MP dans les meilleures conditions.

Fiche 1 – Systèmes automatiques

Un système automatique est un système dont les éléments le constituant coordonnent entre eux pour réaliser des opérations et pour lequel l'intervention humaine est limitée à la programmation du système et à son réglage préalable. Un système automatique permet de :

- Réaliser des tâches trop complexes ou dangereuses pour l'homme

  Exemple : Module d'exploration Martien



- Substituer la machine à l'homme pour faire des tâches répétitives et pénibles

  Exemple : Bras de soudage de chaîne d'assemblage automobile

- Accroître la précision

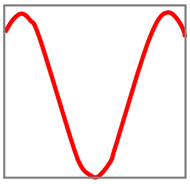
  Exemple : Robot chirurgical

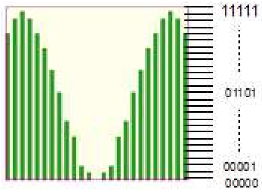
Les systèmes de commande automatiques s'inspirent le plus souvent du comportement de l'homme. Les systèmes automatiques sont classés en fonction de la nature de leurs informations de commande et de mesure. On distingue deux types d'informations : **analogiques** et **discrètes**.

Information (signal) analogique : Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. *Exemple : les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...).*

Information (signal) discrète : Une information discrète est constituée d'un nombre fini de valeurs. On distingue :

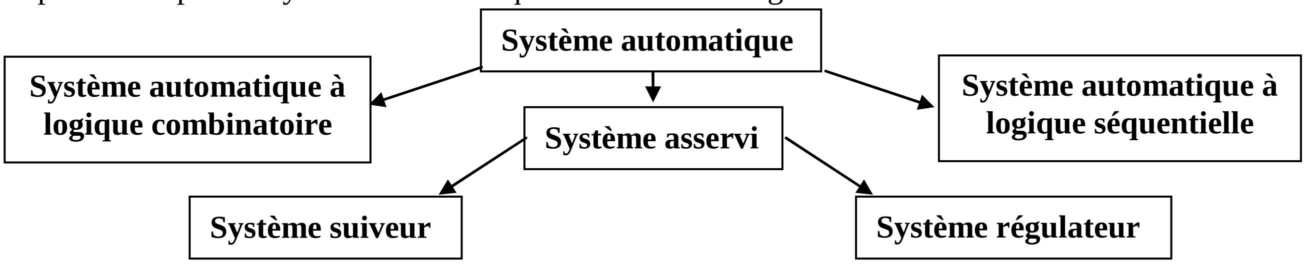
- une information logique du type « vrai/faux » ou « 0/1 ». Elle est associée à l'état d'une variable qui ne peut prendre que deux valeurs possibles. Ces informations peuvent aussi être appelées des informations binaires (bit) ou « Tout Ou Rien » (TOR).
- une information numérique sous la forme d'un mot binaire, constitué de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique (on parle de Conversion Analogique Numérique CAN).





Signal analogique (à gauche) et signal numérique (échantillonné puis codé) (à droite)

On peut découper les systèmes automatiques suivant les catégories ci-dessous :



Les **systèmes asservis suiveurs** ou en poursuite d'une loi de référence dans lesquels **la consigne d'entrée varie en permanence**. L'objectif de ce système est d'ajuster en permanence le signal de sortie au signal d'entrée.

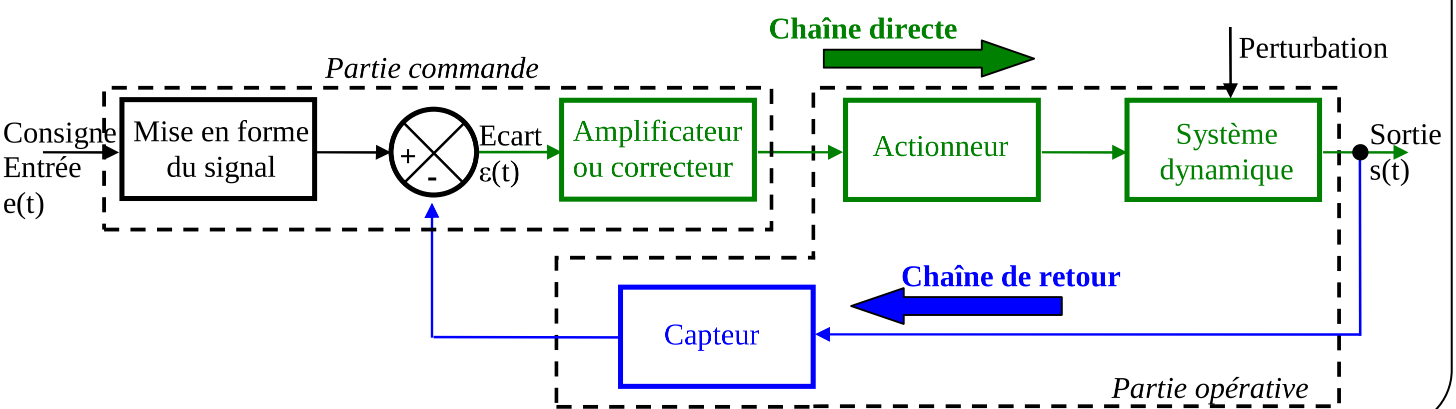
Exemple : Radar de poursuite

Les **systèmes régulateurs** pour lesquels **la consigne d'entrée est fixe**. Ils sont destinés à maintenir une sortie constante pour une consigne d'entrée constante.

Exemple : Régulateur de débit

Schéma-bloc fonctionnel

Pour représenter un système asservi, on utilise toujours un **schéma-bloc fonctionnel** qui permet de comprendre la structure du système selon un point de vue commande.

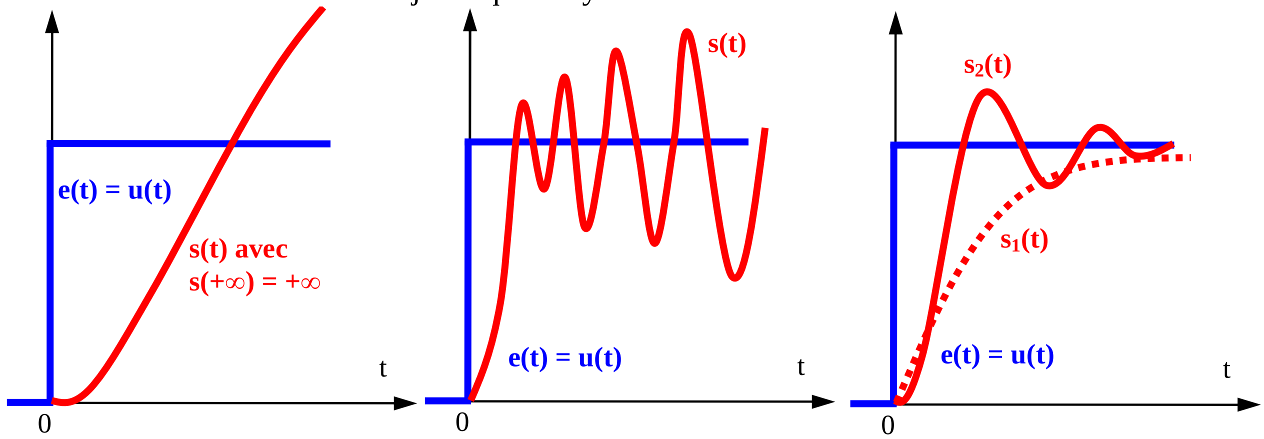


Fiche 2 – Critères de performances des systèmes asservis

Quatre critères principaux permettent d'analyser la réponse d'un système automatique (ils seront développés en MP).

Stabilité

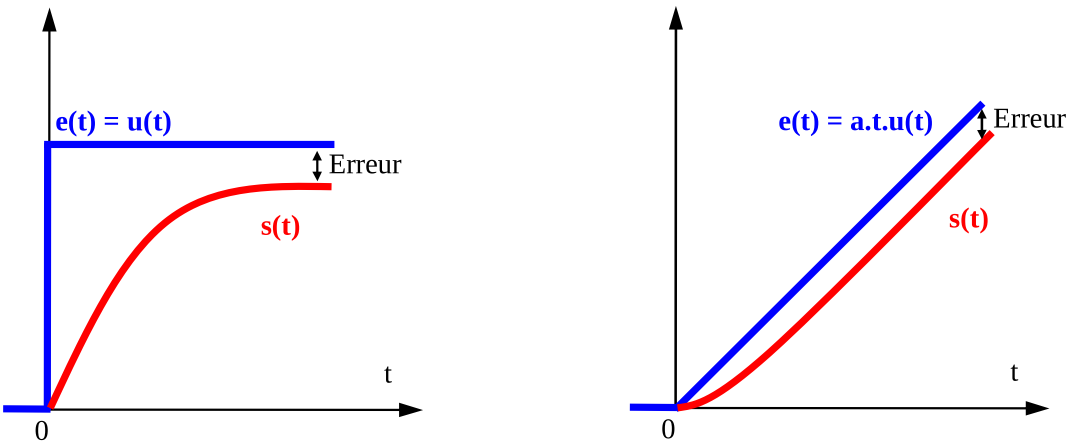
Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. Le bouclage peut déstabiliser un système. C'est le critère que l'on regarde en premier, car sinon on ne peut pas analyser les autres critères. On souhaite toujours que le système asservi soit stable.



Réponse s(t) à un échelon e(t) d'un système instable — Réponse s(t) à un échelon e(t) d'un système instable — Réponses à un échelon e(t) de systèmes stables

Précision

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Elle est caractérisée par l'erreur $e_r(t)$ entre la consigne en entrée et la valeur asymptotique effectivement atteinte par la grandeur de sortie. Si l'erreur est nulle, on dit que le système est précis.

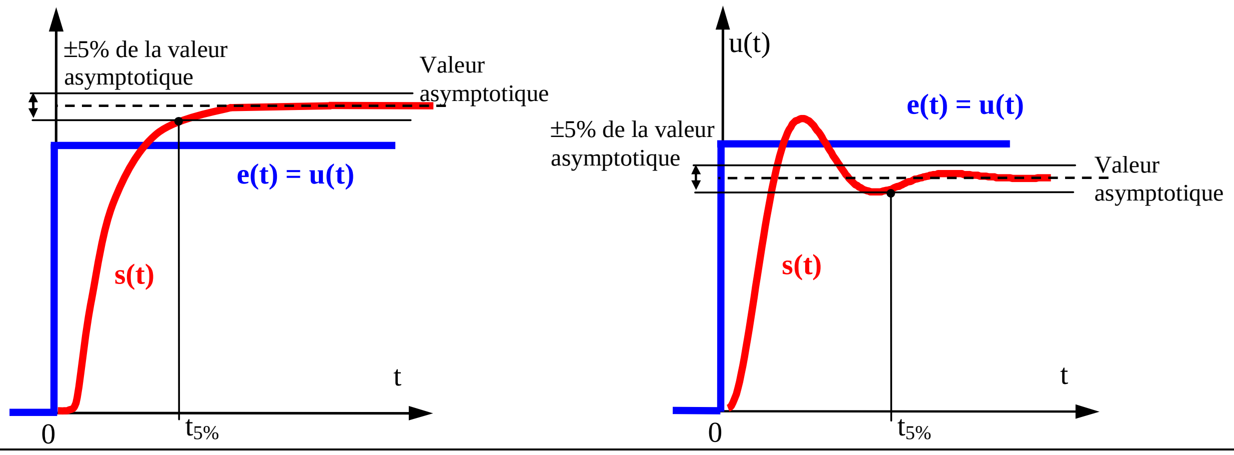


Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à n%.

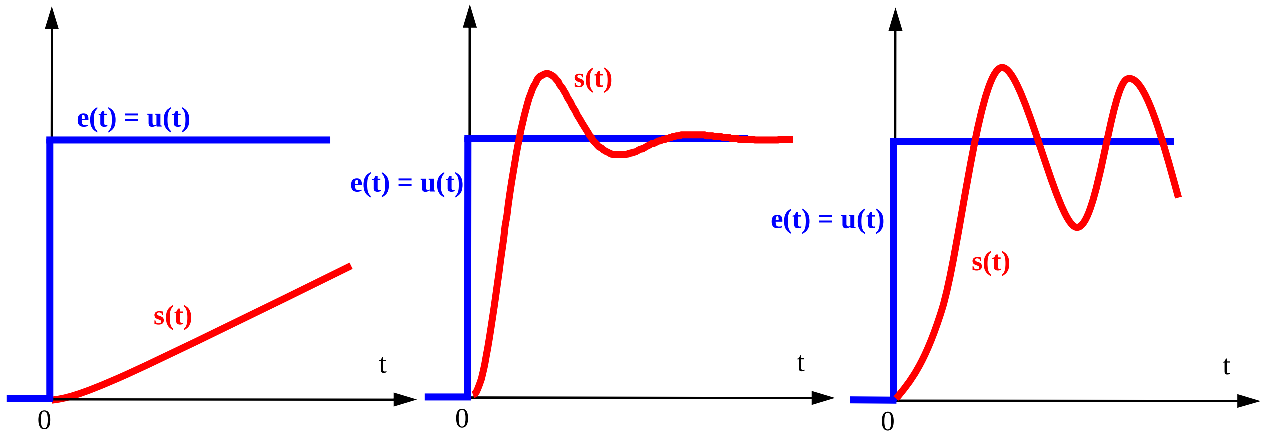
Dans la pratique, on utilise le **temps de réponse à 5%** ($t_{5\%}$), c'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à ±5% près et y rester.

Attention le temps de réponse à 5% n'est pas le temps mis pour atteindre 5% de la valeur souhaitée !!!



Amortissement (ordre >2)

L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.



Système sur-amorti | Système « bien » amorti | Système sous-amorti

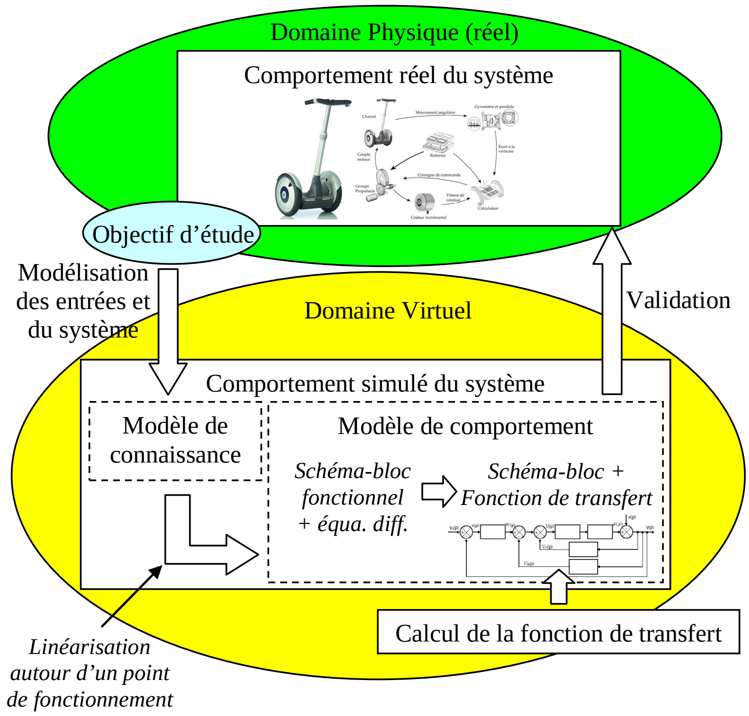
L'asservissement « idéal » est un **système ayant une bonne stabilité, une bonne précision ainsi qu'un régime transitoire rapide et bien amorti**. Cependant ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles. Par exemple, un processus rapide est généralement léger, il a ainsi une faible inertie et risque d'être peu amorti voire instable. D'autre part si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères.

Fiche 3 – Modélisation des systèmes asservis en SLCI, démarches et hypothèses

En automatique, l'objectif principal est d’établir un **modèle comportemental** du système à commander pour pouvoir ensuite élaborer sa partie commande. Ce modèle comportemental est obtenu après plusieurs étapes. La première étape correspond à une phase de modélisation des entrées du système ainsi que du système lui-même, elle permet d’élaborer **un modèle de connaissance** grâce aux lois fondamentales de la physique ou la chimie.

Ce modèle de connaissance se traduit souvent par une relation mathématique qui peut être assez complexe et comporter de nombreux paramètres à identifier.

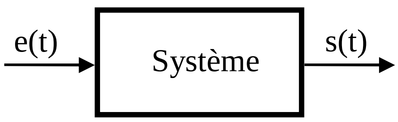
On simplifie le modèle de connaissance en le **linéarisant autour d’un point de fonctionnement**. On obtient à l’issue de cette étape, un **modèle de comportement** dont la **validité** reste **limitée à de petites variations autour du point de fonctionnement choisi.** Le modèle de comportement est caractérisé par une fonction mathématique que l’on appelle **fonction de transfert**. La réponse du comportement du système est ensuite simulée grâce à des outils de simulation adaptés. Enfin, une fois analysée, la réponse obtenue doit être validée par rapport aux résultats expérimentaux du système réel ou aux critères de FS attendues.



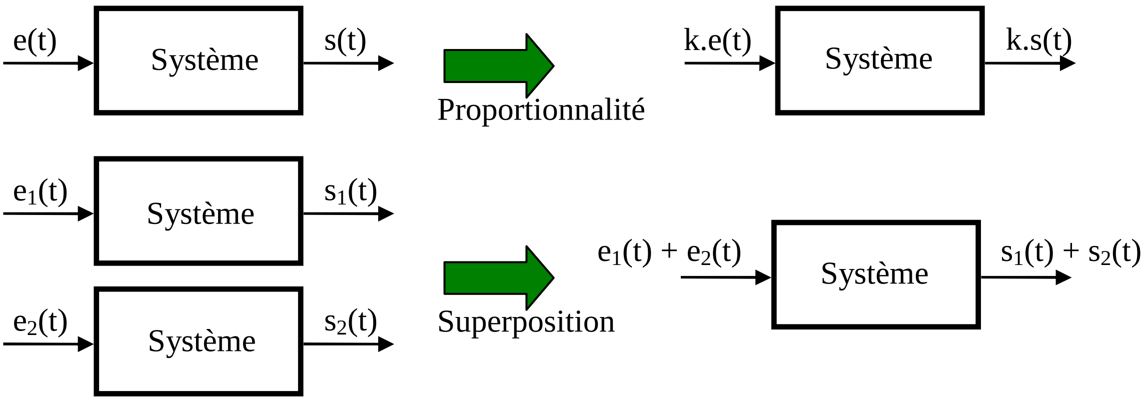
- Le domaine de validité des différents outils utilisés dans le domaine virtuel implique **la mise en place d’hypothèses simplificatrices** lors de la phase de modélisation. Plus le modèle est proche du système réel, plus les résultats obtenus seront satisfaisants.
- Les outils informatiques peuvent être très utiles lors des différentes étapes de simulation du système.
- Si le modèle de connaissance est déjà linéaire, le modèle de connaissance et le modèle de comportement sont alors identiques.

Hypothèses de modélisation des SLCI

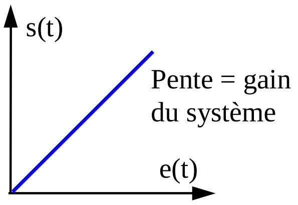
Système : Le système est représenté par un schéma-bloc fonctionnel contenant le nom du système. Les entrées (causes) sont situées à gauche et les sorties (effets) à droite. Il est caractérisé par une fonction mathématique en e(t) et s(t).



Système linéaire : Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.

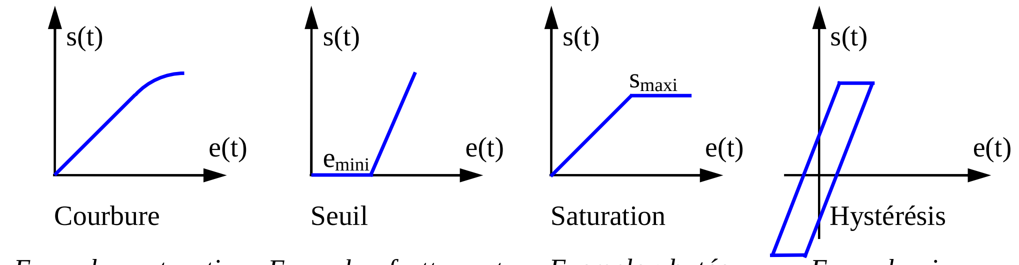


Si le système est linéaire on obtient, en traçant la réponse s(t) en fonction de e(t) (pour un instant donné ou en régime permanent), la caractéristique du système égale à une droite de pente K (gain du système).



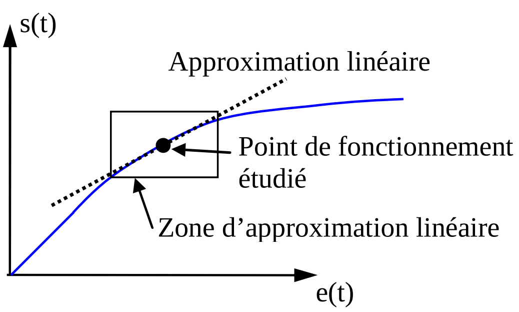
Attention à ne pas confondre la caractéristique sortie fonction de l'entrée avec la courbe sortie fonction du temps qui, elle, est très souvent non-linéaire.

En réalité aucun système n'est parfaitement linéaire. La caractéristique entrée sortie comporte toujours plus ou moins des non linéarités, notamment aux faibles amplitudes (seuils) ou aux fortes amplitudes (saturation, courbure). Le système est dit **non linéaire**.



Exemple : saturation amplificateur *Exemple : frottement* *Exemple : butée mécanique* *Exemple : jeux mécaniques*

Dans la pratique pour étudier les systèmes, on **linéarise** la caractéristique entrée-sortie **au voisinage du point de fonctionnement étudié** en remplaçant la portion de courbe par une droite. Le système est dit alors linéarisé.



Système continu : Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues). On parle aussi dans ce cas de système analogique.

Système invariant : Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système (masse, dimensions, résistance, impédance, ...) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").

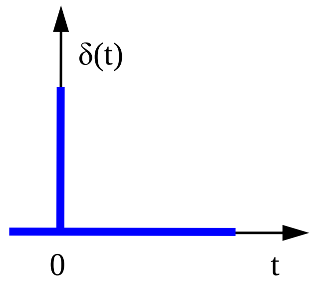
Fiche 4 – Principaux signaux tests

Pour étudier un système d'un point de vue expérimental ou pour réaliser une validation d'un modèle, il est nécessaire d'utiliser des consignes simples ou signaux d'entrée test. On utilise majoritairement les modèles de signaux suivants :

- **Impulsion de Dirac** (ou impulsion unité) δ(t), avec $\delta(t)=0\ \nabla\ t\neq 0$

Cette fonction modélise une action s'exerçant pendant un temps très court. *Exemple : chocs tels que l'action d'un marteau …*

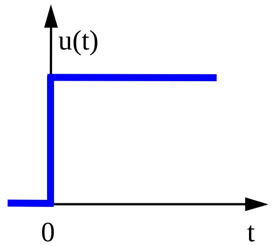
La réponse à une impulsion de Dirac s'appelle une **réponse impulsionnelle**.



- **Échelon unité** u(t), avec u(t)=0 si t<0 et u(t)=1 si t≥0

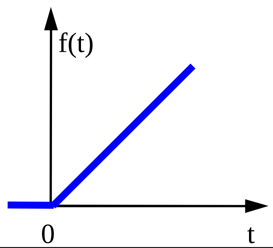
Cette fonction modélise un signal qui passe très rapidement de 0 à 1 et qui reste ensuite à 1. *Exemple : appui sur un interrupteur (mise sous tension)*

La réponse à un échelon unitaire s'appelle une **réponse indicielle**.



Toute fonction mathématique simple, nulle pour les temps négatifs, peut s'écrire à l'aide d'un échelon unitaire u(t)
Exemples : Rampe de pente unitaire ou signal sinusoïdal

- **Rampe de pente unitaire** f(t), avec f(t)=0 si t<0 et f(t)=t.u(t) ou f(t)=a.t.u(t) si t≥0



- **Signal sinusoïdal** f(t), avec f(t)=sin(ωt).u(t)

T=2π/ω période du signal

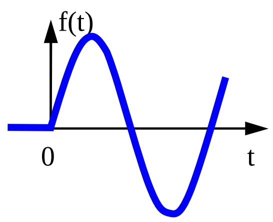


Tableau des principales transformées de Laplace (à connaitre par cœur !)

f(t) avec f(t)=0 pour t<0	Transformée de Laplace F(p)	f(t) avec f(t)=0 pour t<0	Transformée de Laplace F(p)
$\delta(t)$ impulsion de Dirac	1	t.u(t) fonction rampe	$\frac{1}{p^2}$
u(t) échelon unitaire	$\frac{1}{p}$	$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$t^n e^{-at}.u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

Fiche 5 – Modèle de comportement général des SLCI

Un SLCI est modélisé par un modèle de comportement représenté par une équation différentielle d'ordre n reliant la sortie s(t) à l'entrée e(t). Elle est obtenue par la combinaison des différentes équations différentielles issues des modèles de comportement des sous-systèmes élémentaires constituant le schéma-bloc fonctionnel du système global. Elle s'écrit sous la forme générale :

$$a_n.\frac{d^n s(t)}{dt^n}+...+a_0.s(t)=b_m.\frac{d^m e(t)}{dt^m}+...+b_0.e(t)$$

La transformation de l'équation différentielle du SLCI (obtenue dans le domaine temporel) en équation polynomiale (obtenue dans le domaine de Laplace) permet de déterminer une fonction appelée fonction de transfert qui caractérise le comportement du SLCI.

On appelle **fonction de transfert** H(p) du système (ou **transmittance**) la relation dans le domaine symbolique telle que :

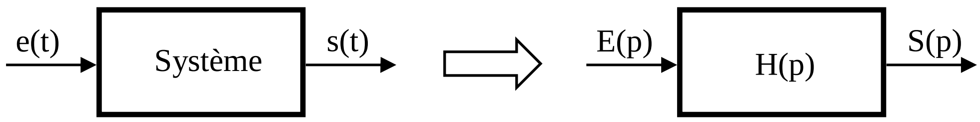
$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K.(1+b_1.p+...+b_m.p^m)}{p^{\alpha}.(1+a_1.p+...+a_n.p^{n-\alpha})}}$$

avec α : **classe du système** (représente le nombre d'intégration dans le système avec α = 0 ,1 ou 2)
n : ordre du système, identique à l'ordre de l'équation différentielle
K : **gain statique** (permet de connaître le comportement du système en régime permanent). K possède une unité (unité de la variable de sortie / unité de la variable d'entrée).

- **La fonction de transfert caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie**.
- L'écriture de la fonction de transfert sous cette forme s'appelle forme canonique.

Pour représenter le système décrit par la fonction de transfert H(p), on utilise des blocs.

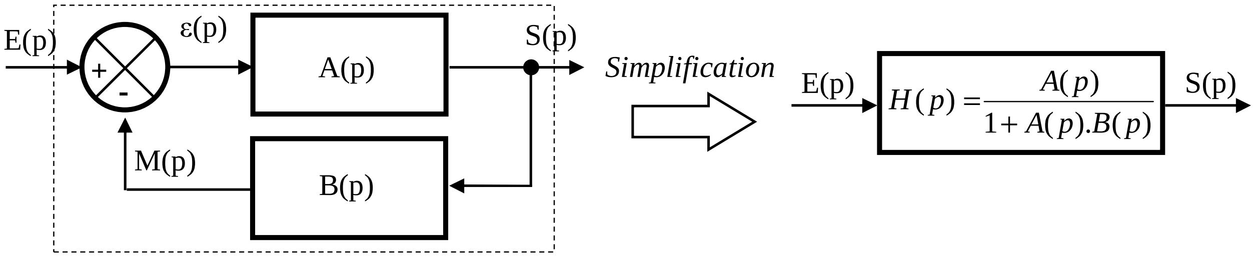
- Un bloc peut représenter un composant ou bien un sous-système ou également un système complexe.
- Le **schéma-bloc fonctionnel** doit être modifié en **schéma-bloc** pour lequel les noms des composants sont remplacés par la fonction de transfert correspondante et les variables temporelles sont remplacées par les variables symboliques (E(p), S(p)...).



Fiche 6 – Calcul de la fonction de transfert des systèmes complexes

Fonction de Transfert Boucle Fermée (FTBF)

On définit la fonction de transfert en boucle fermée H(p) d'un système pour caractériser le comportement global du système. Elle est déterminée sur la base du schéma boucle fermée ci dessous.

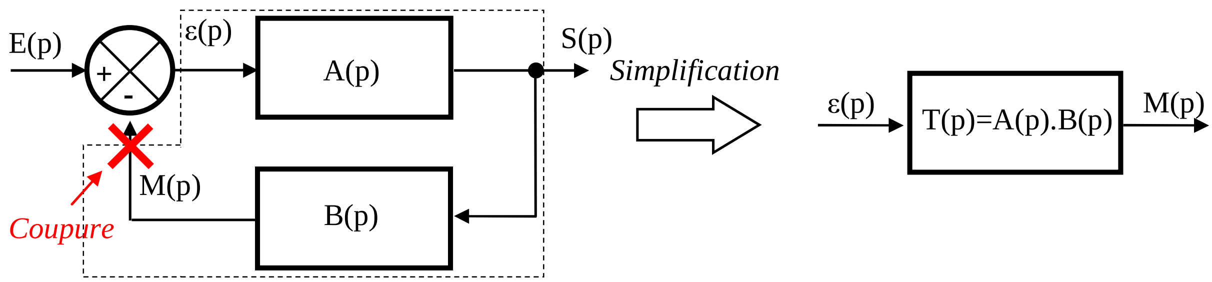


On utilise la FTBF pour étudier les réponses s(t) du système à des entrées e(t) quelconques. Ces études permettent ensuite d'analyser les performances du système bouclé.

Attention aux signes dans le comparateur !!!! Si le – de M(p) dans le comparateur est remplacé par un + la formule devient $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{A(p)}{1-A(p).B(p)}$

Fonction de Transfert Boucle Ouverte (FTBO)

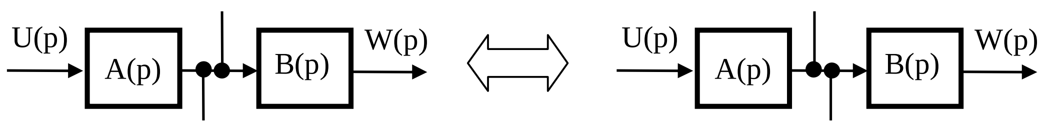
La fonction de transfert en boucle ouverte T(p) est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne directe et la chaîne de retour. Dans le cas de la FTBO, on ne s'intéresse pas à la sortie S(p) mais à la mesure M(p) en fonction ε(p).

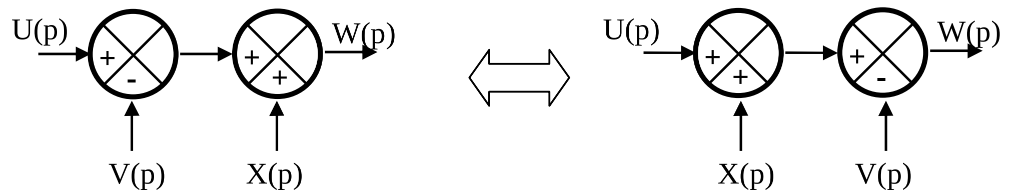


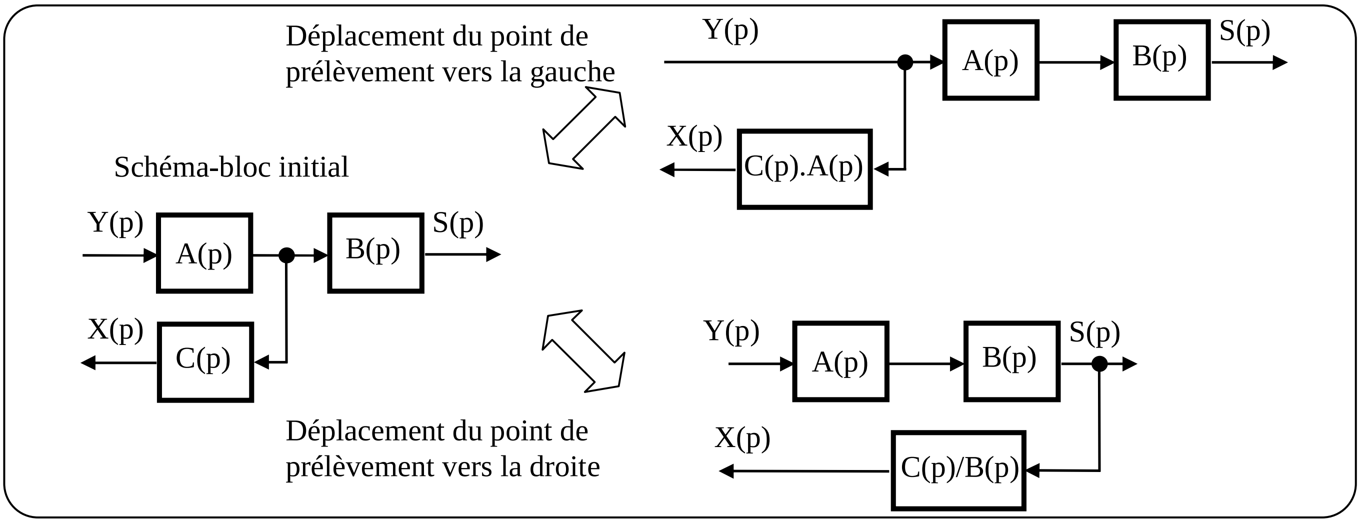
- Si la structure du schéma-bloc est complexe, on peut définir des FTBO et FTBF intermédiaires pour tous les sous-systèmes à boucle fermée, mais seules la FTBF et la FTBO de la boucle principale sont intéressantes.
- Dans la pratique on peut calculer simplement la FTBF à partir de la FTBO grâces aux relations suivantes :

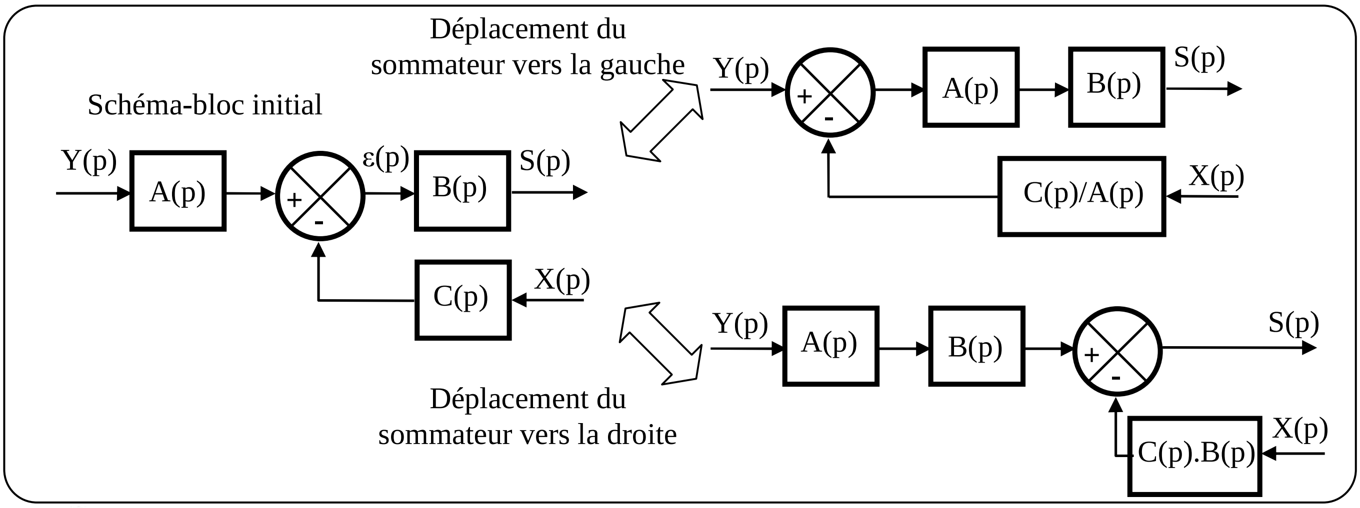
$$FTBF=\frac{FT\ \text{de la chaine directe}}{1+FTBO}=\frac{1}{FT\ \text{de la chaine de retour}}\cdot\frac{FTBO}{1+FTBO}$$

Manipulations élémentaires sur les schémas-blocs



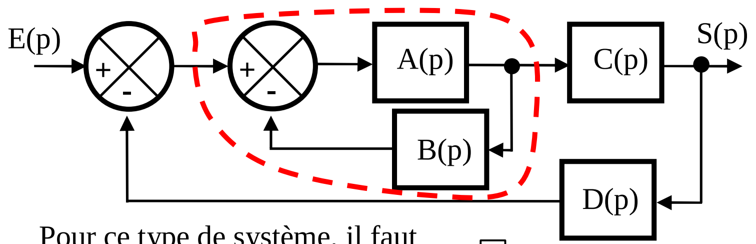




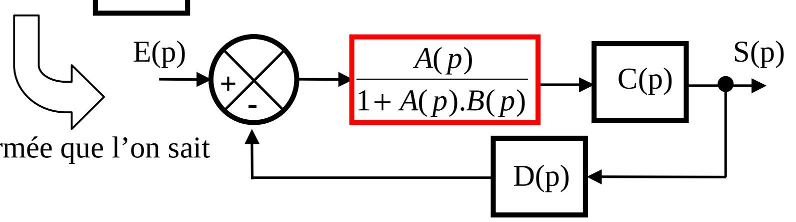


- Il est inutile de déplacer un sommateur en direction d'une jonction ou l'inverse car aucune simplification n'est possible.
- Il faut toujours faire attention au(x) bloc(s) rajouté(s) dans la branche déplacée.

Système à boucles concentriques

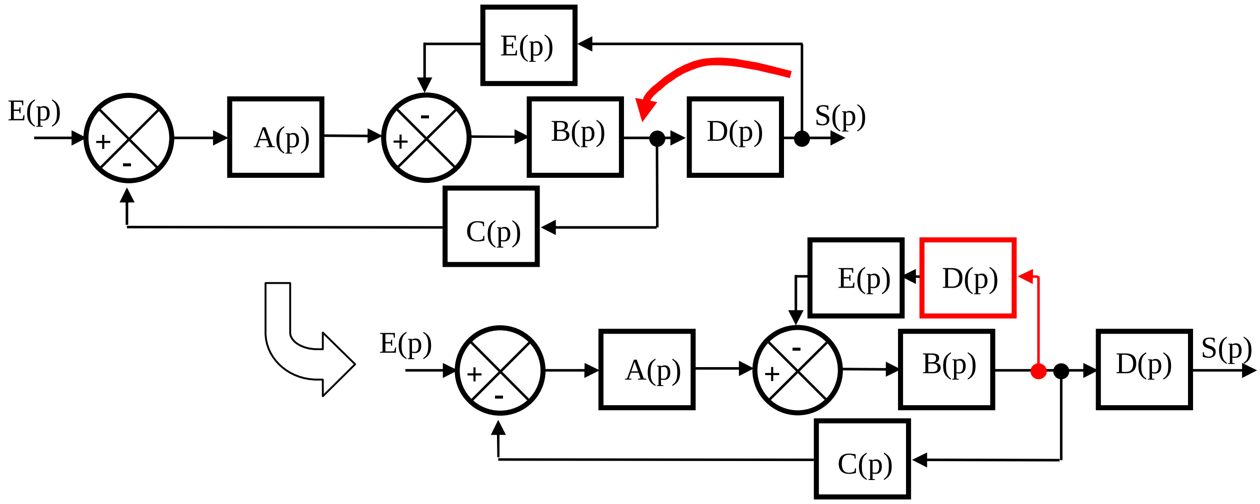


Pour ce type de système, il faut toujours commencer par calculer la FTBF de la boucle interne.



On reconnait ensuite une boucle fermée que l'on sait bien traiter…

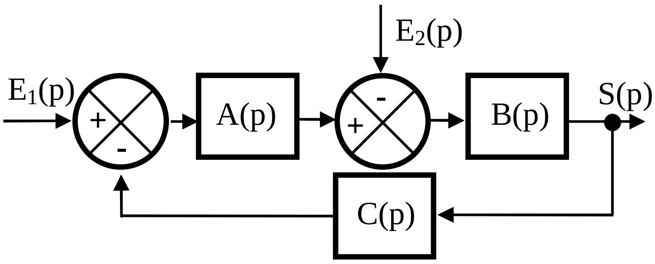
Système à boucles imbriquées



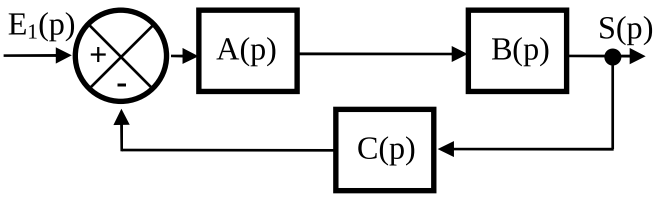
Pour ce type de système, il faut toujours commencer par déplacer les points de prélèvement pour se ramener à un système de boucles concentriques. On se retrouve ensuite devant un système à boucles concentriques que l'on sait aussi bien gérer.

Fonction de transfert boucle fermée des systèmes multi-variables

Pour déterminer la fonction de transfert sur ce type de système, on utilise le principe de superposition des SLCI. On superpose deux modes : un 1er mode pour lequel l'entrée $E_2(p)$ est considérée comme nulle et un 2nd mode lequel l'entrée $E_1(p)$ est considérée comme nulle.



- Mode à entrée $E_2(p)=0$

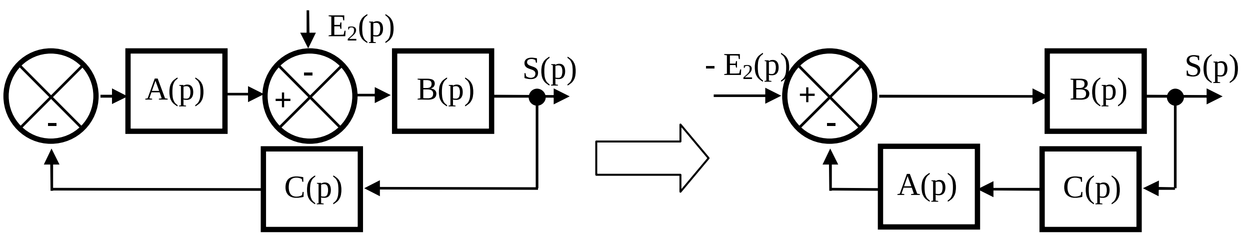


$$H_1(p)\big|_{E_2(p)=0} = \left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0}$$

$$H_1(p)\big|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p).B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}$$

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée $E_1(p)=0$



$$H_2(p)\big|_{E_1(p)=0} = \left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0} = \frac{B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}$$

$H_2(p)$ est la fonction de transfert en régulation.

La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}.E_1(p) - \frac{B(p)}{1+A(p).B(p).C(p)}.E_2(p)$$

Fiche 7 - Réponses temporelles des systèmes du 1er ordre

$$\boxed{G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau.p}}$$

où : K est le gain statique du système ([unité de sortie]/[unité d'entrée])

τ est la constante de temps (secondes).

Réponse impulsionnelle

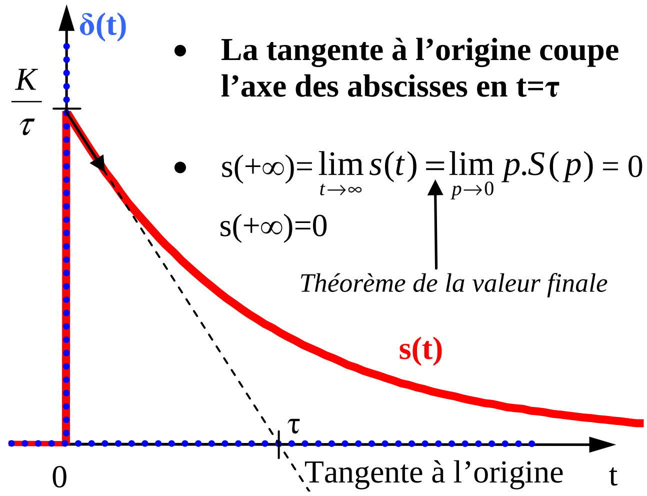
L'entrée est définie par une impulsion de Dirac, $e(t)=\delta(t) \rightarrow E(p)=1$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :

$$S(p)=\frac{K}{1+\tau.p}=\frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p} \quad \text{soit : } S(p)=\frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p}$$

La réponse temporelle a donc pour expression :

$$\boxed{s(t)=\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)}$$



- **La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses en t=τ**
- $s(+\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=\lim\limits_{p\to 0} p.S(p)=0$

  $s(+\infty)=0$

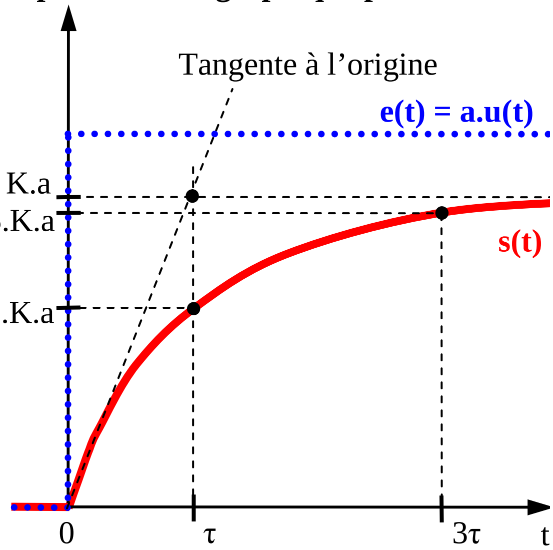
  Théorème de la valeur finale

Réponse à un échelon a (si a=1 : réponse indicielle)

L'entrée est définie par un échelon, $e(t) = a.u(t) \rightarrow E(p)=\frac{a}{p}$. La réponse temporelle a pour expression :

$$\boxed{s(t)=K.a.\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)}$$

Représentation graphique pour K<1



- **Ordonnée en +∞ :**

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p.S(p)=K.a \quad \rightarrow \quad \boxed{s(+\infty)=K.a}$$

Théorème de la valeur finale

- **Pente à l'origine :**

$$s'(0^+)=\lim_{t\to 0^+} s'(t)=\lim_{p\to\infty} p.[p.S(p)]=\lim_{p\to\infty} p^2.\frac{K.a}{p.(1+\tau.p)}=\frac{K.a}{\tau} \rightarrow \boxed{\text{Pente à l'origine}=\frac{K.a}{\tau}}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

- **Temps de réponse à 5%, $t_{5\%}$:** On cherche $t_{5\%}$ tel que $s(t_{5\%})=0{,}95.s(+\infty)=0{,}95.K.a$

Soit $K.a.\left(1-e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}}\right)=0{,}95.K.a \rightarrow -e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}}=-0{,}05 \rightarrow t_{5\%}=-\ln(0{,}05).\tau=3\tau \quad \rightarrow \quad \boxed{t_{5\%}=3\tau}$

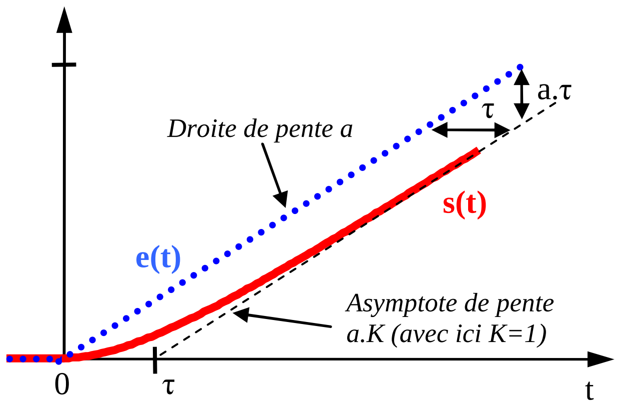
- **Réponse à t = τ :** $s(\tau)=K.a.(1-e^{-1})=0{,}63.K.a \quad \rightarrow \quad \boxed{s(\tau)=0{,}63.K.a}$

Réponse à une rampe

L'entrée est définie par une rampe, e(t)=a.t.u(t). La réponse temporelle a pour expression :

$$\boxed{s(t)=a.K.\left(t-\tau+\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)}$$

Représentation graphique pour K=1



- **Ordonnée en +∞ :**

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}p.S(p)=+\infty$$

Théorème de la valeur finale

$$\rightarrow \boxed{s(+\infty)=+\infty}$$

- **Pente à l'origine :**

$$s'(0^+)=\lim_{t\to 0^+}s'(t)=\lim_{p\to\infty}p.[p.S(p)]=\lim_{p\to\infty}p^2.\frac{a.K}{p^2.(1+\tau.p)}=0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\text{Pente à l'origine}=0}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

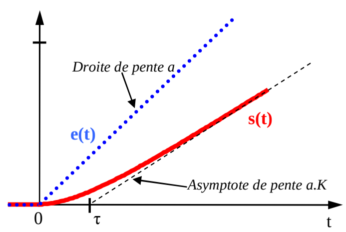
La tangente à l'origine est une droite horizontale

- **Etude asymptotique en +∞:**

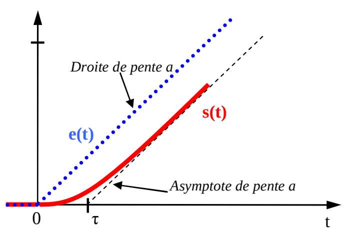
Lorsque t → ∞, le terme $\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}\rightarrow 0$, par conséquent s(t) → a.K.(t – τ).

L'asymptote est donc y(t) = a.K.(t – τ). Cette asymptote a donc une pente a.K et coupe l'axe des abscisses en t = τ.

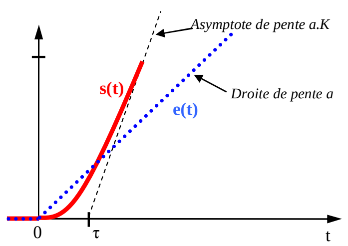
Pour K<1, l'écart entre l'entrée et la sortie augmente toujours.



Pour K=1, le système ne rejoint jamais la consigne mais sa variation est parallèle à l'entrée retardée d'une fois la valeur de la constante de temps.



Pour K>1, l'écart entre l'entré et la sortie diminue, s'annule puis augmente.



Fiche 8 – Réponses temporelles des systèmes du 2nd ordre

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2.z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}p^2}=\frac{K\omega_0^{\ 2}}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}}$$

K est le gain statique du système (unité [sortie]/[entrée]). z est le coefficient d'amortissement (z>0 et sans unité). ω_0 est la pulsation propre non amortie du système (ω_0 >0 en radians/secondes).

Pôles de la fonction de transfert

Racines du polynôme : $p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2} \rightarrow \Delta=4.z^2.\omega_0^{\ 2}-4.\omega_0^{\ 2}=4.\omega_0^{\ 2}.(z^2-1)$

$\Delta=b^2-4.a.c$

Les pôles de la fonction de transfert dépendent donc de la valeur de z, il y a 3 cas de figure possibles :

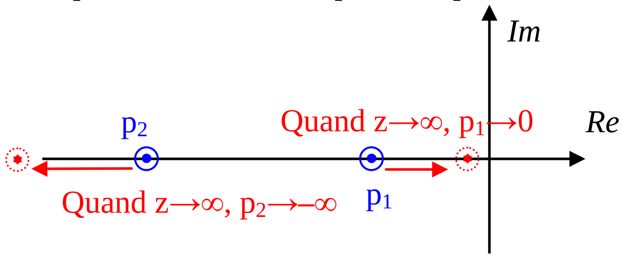
- **Cas z > 1 $\rightarrow$ Δ > 0**

$$\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=-z.\omega_0\pm\omega_0.\sqrt{(z^2-1)} \text{ d'où :}$$

$$p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}=(p-p_1).(p-p_2) \text{ avec :}$$

$$\left.\begin{matrix}p_1=-z.\omega_0+\omega_0.\sqrt{(z^2-1)}\\p_2=-z.\omega_0-\omega_0.\sqrt{(z^2-1)}\end{matrix}\right\}\text{ 2 pôles réels négatifs}$$

Représentation dans le plan complexe :



Cas particulier : Représentation des pôles correspondant à z infini.

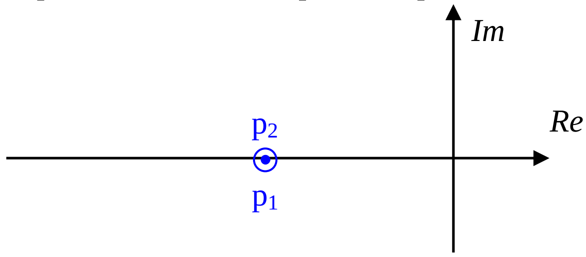
- **Cas z = 1 $\rightarrow$ Δ = 0**

$$\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=-\omega_0 \text{ d'où :}$$

$$p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}=(p-p_1)^2=(p-p_2)^2 \text{ avec :}$$

$$\left.\begin{matrix}p_1=-\omega_0\\p_2=-\omega_0\end{matrix}\right\}\text{ 2 pôles réels confondus}$$

Représentation dans le plan complexe :



- **Cas z < 1 $\rightarrow$ Δ < 0**

$$\Delta=4.\omega_0^{\ 2}.j^2.(1-z^2)$$

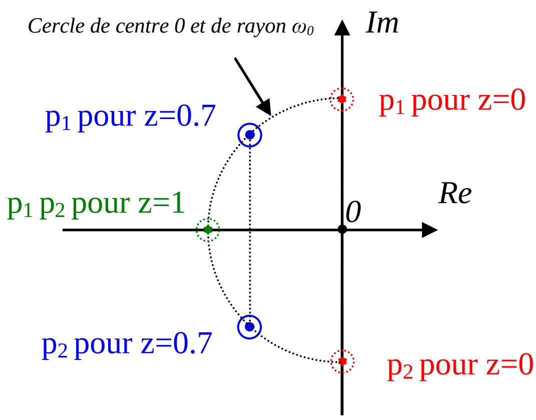
$$\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=-z.\omega_0\pm j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)} \text{ d'où :}$$

$$p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}=(p-p_1).(p-p_2) \text{ avec :}$$

$$\left.\begin{matrix}p_1=-z.\omega_0+j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}\\p_2=-z.\omega_0-j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}\end{matrix}\right\}\text{ 2 pôles complexes conjugués}$$

$$|p_1|=|p_2|=\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}=\omega_0$$

Représentation dans le plan complexe :



Cas particuliers : pôles correspondant à z=0 ; 0,7 et 1

Réponse à un échelon a (si a=1 : réponse indicielle)

L'entrée est définie par un échelon e(t) = a.u(t), soit dans le domaine de Laplace, E(p) = $\dfrac{a}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p)=\dfrac{a}{p}.\dfrac{K.\omega_0^{\ 2}}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}}$

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie s(t) :**

$$s'(0^+)=\lim_{t\to 0^+} s'(t)=\lim_{p\to\infty} p.\left[p.S(p)\right]=\lim_{p\to\infty} p^2.\frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^{\ 2}}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}}=0 \rightarrow \boxed{\text{Pente à l'origine =0}}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

La tangente à l'origine est une droite horizontale (ce qui est différent du système du 1er ordre)

- **Ordonnée en +∞ de la courbe de sortie s(t) :**

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p.S(p)=\lim_{p\to 0}\frac{K.a.\omega_0^{\ 2}}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}}=K.a \rightarrow \boxed{s(+\infty)=K.a}$$

Théorème de la valeur finale

Le régime établi ne dépend que du gain statique Z alors que z et ω_0 n'interviennent que sur le régime transitoire

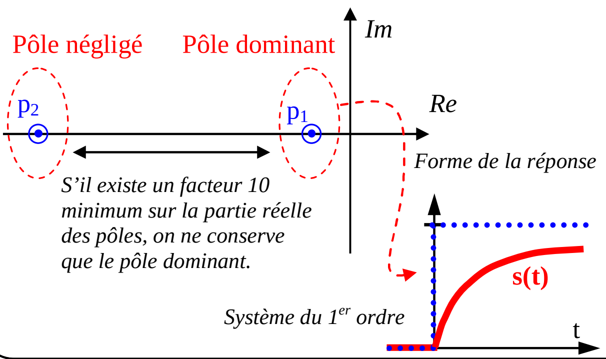
Réponse à l'échelon pour z > 1 (Système amorti - réponse apériodique)

La réponse temporelle a pour expression :

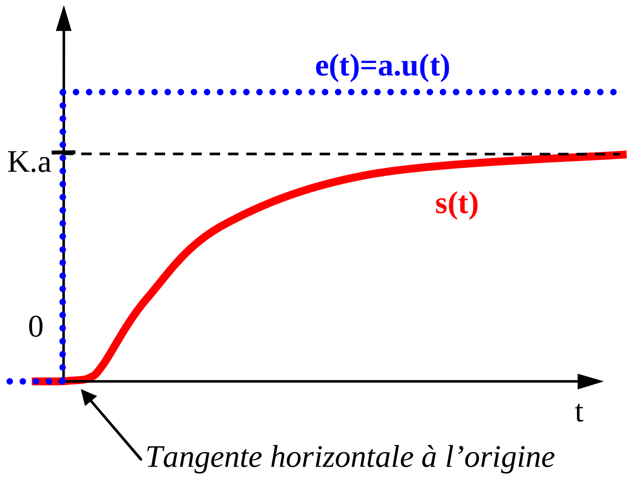
$$\boxed{s(t)=\left(K.a+\beta.e^{p_1 t}+\delta.e^{p_2 t}\right).u(t)}$$

Régime permanent *Régime transitoire*

Avec $\beta=\dfrac{K.a.\omega_0^{\ 2}}{p_1.(p_1-p_2)}$; $\delta=\dfrac{K.a.\omega_0^{\ 2}}{p_2.(p_2-p_1)}$



Représentation graphique pour z > 1 et K < 1



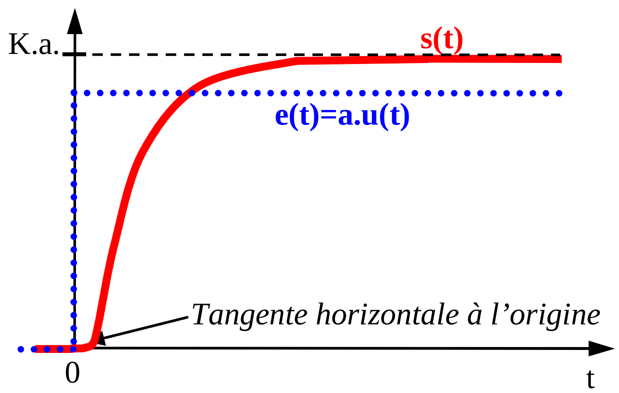
Réponse à l'échelon pour z = 1 (Amortissement critique - réponse apériodique)

La réponse temporelle a pour expression :

$$\boxed{s(t)=K.a.\left(1-e^{-\omega_0.t}-\omega_0.t.e^{-\omega_0.t}\right).u(t)}$$

Régime permanent *Régime transitoire*

Représentation graphique pour z = 1 et K > 1



Réponse l'échelon pour z < 1 (système sous amorti - régime pseudo-périodique)

La réponse temporelle a pour expression $\boxed{s(t) = K.a\left(1 - e^{-z.\omega_0.t}.\cos(\omega_p.t) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-z.\omega_0.t}.\sin(\omega_p.t)\right).u(t)}$

Régime permanent *Régime transitoire*

- **Pseudo-période :**

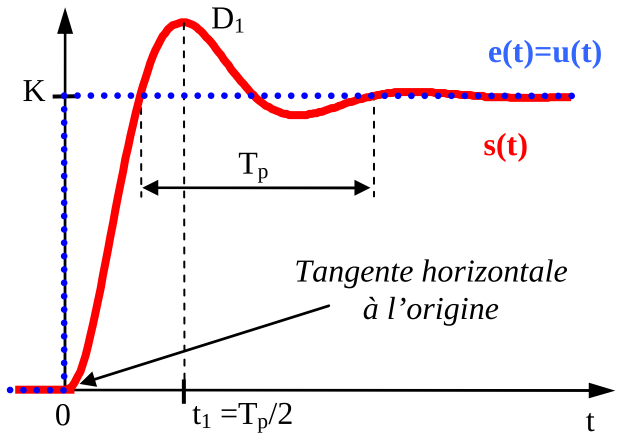
La réponse présente des oscillations amorties de période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

- **1er dépassement :**

Le premier maximum (ou dépassement) apparait à $t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$.

La valeur relative du 1er dépassement D_1 correspond à $\boxed{D_1 = e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}}$

Représentation graphique pour z < 1 et a=K=1



- La valeur relative du 1er dépassement (et des autres dépassements) s'exprime en %.
- La **valeur du dépassement ne dépend que de la valeur de z**. On utilise cette particularité pour identifier z à partir d'un tracé expérimental, modélisable par la réponse indicielle avec dépassement d'un système d'ordre 2.
- Un abaque est souvent utilisé.

Temps de réponse à 5% et temps de réponse réduit

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie du système ω_0.

Le temps de réponse à 5% correspond à la durée au delà de laquelle la réponse s(t) reste comprise entre 0.95 et 1.05 fois la valeur de la réponse en régime permanent ($s(\infty)$).

On utilise un abaque qui donne $t_{5\%}.\omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement z. L'abaque permet aussi l'identification de ω_0 sur un tracé expérimental modélisable par la réponse indicielle avec dépassement d'un système d'ordre 2.

Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5% ce qui correspond à un coefficient d'amortissement de z=0,69≈0,7. On a alors $\boxed{t_{5\%}.\omega_0 = 3 \text{ pour z=0,7}}$.

Pour une même pulsation propre non amortie ω_0 et :

- pour z<<1 (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.
- pour **z≈0.7**, le système présente un **dépassement D faible (D_1= 5%) avec le temps de réponse le plus faible**.
- pour **z=1**, le système présente le **temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement**.
- pour z>>1, il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.

Pour un même coefficient d'amortissement z, plus ω_0 augmente plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.