Loi de composition interne

Exercice 1 On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\star b=\ln(e^a+e^b)$.
Quelles en sont les propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments réguliers ?

Exercice 2 Soit $E=[0,1]$. On définit une loi $\star$ sur E par : $\forall x,y\in E, x\star y=x+y-xy$.
a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative et associative.
b) Montrer que $\star$ possède un neutre.
c) Quels sont les éléments symétrisables ? réguliers ?

Exercice 3 Soit $\star$ une loi de composition interne sur E.
Pour $A,B\in\mathcal{P}(E)$ on pose $A\star B=\{a\star b \,/\, a\in A, b\in B\}$.
Etudier les propriétés de $\star$ sur E (commutativité, associativité, existence d'un neutre) conservées par $\star$ sur $\mathcal{P}(E)$. La loi $\star$ est-elle distributive sur l'union, sur l'intersection ?

Exercice 4 Soit E un ensemble et $f:E\to E$.
Montrer que f est un élément régulier de $(E^E,\circ)$ ssi f est bijective.

Exercice 5 Soit a un élément d'un monoïde $(E,\star)$.
Montrer que a est symétrisable ssi l'application $f:E\to E$ définie par $f(x)=a\star x$ est bijective.

Exercice 6 Soit $(E,\star)$ un monoïde. Un élément x de E est dit idempotent si et seulement si $x\star x=x$.
a) Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x\star y$ est idempotent.
b) Montrer que si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 7 Soit E et F deux ensembles et $\varphi:E\to F$ une application bijective.
On suppose E muni d'une loi de composition interne $\star$ et on définit une loi $\top$ sur F par :
$\forall x,y\in F, x\top y=\varphi(\varphi^{-1}(x)\star\varphi^{-1}(y))$.
a) Montrer que si $\star$ est commutative (resp. associative) alors $\top$ l'est aussi.
b) Montrer que si $\star$ possède un neutre e alors $\top$ possède aussi un neutre à préciser.

Exercice 8 Soit $\star$ une loi de composition interne associative sur E.
On suppose qu'il existe $a\in E$ tel que l'application $f:E\to E$ définie par $f(x)=a\star x\star a$ soit surjective et on note b un antécédent de a par f.
a) Montrer que $e=a\star b$ et $e'=b\star a$ sont neutres resp. à gauche et à droite puis que $e=e'$.
b) Montrer que a est symétrisable et f bijective.

Exercice 9 Soit $\star$ une loi de composition interne associative sur un ensemble fini E et x un élément régulier de E. Montrer que E possède un neutre.

Exercice 10 Soit $(E,\star)$ un monoïde avec E ensemble fini.
Montrer que tout élément régulier de E est inversible.

Exercice 11 Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de la partie A dans E, l'application $\chi_A:E\to\mathbb{R}$ définie par : $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions caractéristiques ?
a) $\min(\chi_A,\chi_B)$ b) $\max(\chi_A,\chi_B)$ c) $\chi_A.\chi_B$
d) $1-\chi_A$ e) $\chi_A+\chi_B-\chi_A.\chi_B$ f) $\chi_A+\chi_B-2\chi_A.\chi_B$.

Groupes

Exercice 12 Soit $(G,\star)$ un groupe tel que : $\forall x\in G, x^2=e$.
Montrer que G est commutatif.

Exercice 13 Soit $(E,\star)$ un monoïde de neutre e. On suppose que $\forall x\in E, x^{\star 2}=e$.
Montrer que $(E,\star)$ est un groupe abélien.

Exercice 14 Soit $(E,\star)$ un monoïde avec E ensemble fini.
On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Montrer que E est un groupe.

Exercice 15 Soit $(G,\star)$ un groupe à n éléments.
Justifier que sa table de composition est un carré latin c'est à dire que tout élément de G figure une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Exercice 16 Soit $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ et $\star$ la loi de composition interne définie sur G par :
$(x,y)\star(x',y')=(xx',xy'+y)$.
a) Montrer que $(G,\star)$ est un groupe non commutatif.
b) Montrer que $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G,\star)$.

Exercice 17 Sur $G=\left]-1,1\right[$ on définit une loi $\star$ par $\forall x,y\in G, x\star y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.
Montrer que $(G,\star)$ est un groupe abélien.

Exercice 18 Addition des vitesses en théorie de la relativité :
Soit $c>0$ (c correspond à la vitesse–ou célérité–de la lumière) et $I=\left]-c,c\right[$.
a) Montrer que $\forall (x,y)\in I^2,\ x\star y=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{c^2}}\in I$
b) Montrer que la loi $\star$ munit I d'une structure de groupe abélien.
Cette loi $\star$ correspond à l'addition des vitesses portées par un même axe en théorie de la relativité.

Sous-groupe

Exercice 19 Soit $\omega\in\mathbb{C}$ et $H=\left\{a+\omega b \,/\, a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{C},+)$.

Exercice 20 Soit $a\in\mathbb{C}^*$ et $H=\left\{a^n \,/\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Exercice 21 Soit a un élément d'un ensemble E. On forme $H=\left\{f\in\mathfrak{S}(E) \mid f(a)=a\right\}$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E),\circ)$

Exercice 22 Soit $(G,\times)$ un groupe, H un sous groupe de $(G,\times)$ et $a\in G$.
a) Montrer que $aHa^{-1}=\left\{axa^{-1} \,/\, x\in H\right\}$ est un sous groupe de $(G,\times)$.
b) A quelle condition simple $aH=\left\{ax \,/\, x\in H\right\}$ est un sous groupe de $(G,\times)$?

Exercice 23 Soit $(G,\star)$ un groupe.

On appelle centre de G la partie C de G définie par : $C=\{x\in G \mid \forall y\in G, x\star y=y\star x\}$.

Montrer que C est un sous-groupe de $(G,\star)$.

Exercice 24 Soit $f_{a,b}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(z)=az+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{C}$.

Montrer que $\left(\left\{f_{a,b} / a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{C}\right\},\circ\right)$ est un groupe.

Exercice 25 On considère les applications de $E=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ dans lui-même définies par :

$$i(x)=x, f(x)=1-x, g(x)=\frac{1}{x}, h(x)=\frac{x}{x-1}, k(x)=\frac{x-1}{x}, \ell(x)=\frac{1}{1-x}$$

a) Démontrer que ce sont des permutations de E.

b) Construire la table donnant la composée de deux éléments quelconques de l'ensemble $G=\{i,f,g,h,k,l\}$.

c) Montrer que G muni de la composition des applications est un groupe non commutatif.

Exercice 26 Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,\star)$ tels que $H\cup K$ en soit aussi un sous-groupe.

Montrer que $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Exercice 27 Soit $(G,\star)$ un groupe et A une partie finie non vide de G stable pour $\star$.

a) Soit $x\in A$ et $\varphi:\mathbb{N}\to G$ l'application définie par $\varphi(n)=x^n$.

Montrer que φ n'est pas injective.

b) En déduire que $x^{-1}\in A$ puis que A est un sous-groupe de $(G,\star)$.

Exercice 28 Pour $a\in\mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z}=\{ak / k\in\mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

On se propose de montrer que, réciproquement, tout sous groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.

b) Vérifier que le groupe $\{0\}$ est de la forme voulue.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ non réduit à $\{0\}$.

c) Montrer que $H^+=\{h\in H \mid h>0\}$ possède un plus petit élément. On note $a=\min H^+$.

d) Etablir que $a\mathbb{Z}\subset H$.

e) En étudiant le reste de la division euclidienne d'un élément de H par a montrer que $H\subset a\mathbb{Z}$.

f) Conclure que pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$, il existe un unique $a\in\mathbb{N}$ tel que $H=a\mathbb{Z}$.

Morphisme de groupes

Exercice 29 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ définie par $f(x)=x^n$.

Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$. En déterminer image et noyau.

Exercice 30 Justifier que $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C},+)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$.

En déterminer image et noyau.

Exercice 31 Soit G un groupe noté multiplicativement.

Pour $a\in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a(x)=axa^{-1}$.

a) Montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G,\times)$.

b) Vérifier que $\forall a,b\in G$, $\tau_a\circ\tau_b=\tau_{ab}$

c) Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.

d) En déduire que $\mathcal{T}=\{\tau_a \mid a\in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Exercice 32 Soit $(G,\star)$, $(G',\top)$ deux groupes et $f:G\to G'$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de $(G',\top)$.

b) Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G,\star)$.

Exercice 33 On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes d'un groupe $(G,\star)$.

Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G),\circ)$.

Exercice 34 Soit $(G,\star)$ un groupe et $a\in G$.

On définit une loi de composition interne $\top$ sur G par $x\top y=x\star a\star y$.

a) Montrer que $(G,\top)$ est un groupe.

b) Soit H un sous groupe de $(G,\star)$ et $K=\text{sym}(a)\star H=\left\{\text{sym}(a)\star x\,/\,x\in H\right\}$.

Montrer que K est un sous groupe de $(G,\top)$.

c) Montrer que $f:x\mapsto x\star\text{sym}(a)$ est un isomorphisme de $(G,\star)$ vers $(G,\top)$.

Etude du groupe symétrique

Exercice 35 Soit n un entier supérieur à 2, $(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2$ tel que $i\neq j$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

Montrer que σ et $\tau=\begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}$ commutent si et seulement si $\{i,j\}$ est stable par σ.

Exercice 36 Dans $\mathfrak{S}_n$ avec $n\geq 2$, on considère une permutation σ et un p-cycle : $c=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_p\end{pmatrix}$.

Observer que la permutation $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}$ est un p-cycle qu'on précisera.

Exercice 37 Déterminer la signature de :

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&4&8&7&6&2&1\end{pmatrix}$ b) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&3&2&7&4&8&5&6\end{pmatrix}$.

Exercice 38 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\n&n-1&\cdots&2&1\end{pmatrix}$.

b) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n&n+1&n+2&\dots&2n-1&2n\\1&3&5&\dots&2n-1&2&4&\dots&2n-2&2n\end{pmatrix}$.

Exercice 39 Soit $n\geq 2$ et τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$.

a) Montrer que l'application $\sigma\mapsto\tau\circ\sigma$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathfrak{S}_n$.

b) En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{A}_n$ formé des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 40 Dans $(\mathfrak{S}_n,\circ)$ on considère $\tau=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$ et $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\end{pmatrix}$.

a. Calculer $\sigma^k\circ\tau\circ\sigma^{-k}$ pour $0\leq k\leq n-1$.

b. En déduire que toute élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de σ et de τ.

Exercice 41 Soit $n\geq 5$.

Montrer que si $\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a'&b'&c'\end{pmatrix}$ sont deux cycles d'ordre 3 de $\mathfrak{S}_n$, alors il existe une permutation σ, paire, telle que $\sigma\circ\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}\circ\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}a'&b'&c'\end{pmatrix}$.

Exercice 42 Soit $n\geq 2$ et c la permutation circulaire $c=(1\quad 2\quad\dots\quad n-1\quad n)$.

Déterminer toutes les permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec c.

Anneaux

Exercice 43 On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de compositions internes notées + et $\star$ par :
$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ et $(a,b)\star(c,d)=(ac,ad+bc)$.
a) Montrer que $(\mathbb{Z}^2,+,\star)$ est un anneau commutatif.
b) Montrer que $A=\{(a,0)/a\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2,+,\star)$.

Exercice 44 Montrer qu'un anneau $(A,+,\times)$ n'a pas de diviseurs de zéro ssi tous ses éléments non nuls sont réguliers

Exercice 45 Soit x et y deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$.
a) Montrer que si x est nilpotent et que x et y commutent, alors xy est nilpotent.
b) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x+y$ est nilpotent.
c) Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
d) Montrer que si x est nilpotent alors $1-x$ est inversible. Préciser $(1-x)^{-1}$.

Exercice 46 Anneau de Boole (1815-1864)
On considère $(A,+,\times)$ un anneau de Boole c'est à dire un anneau non nul tel que tout élément est idempotent pour la 2ème loi ce qui signifie : $\forall x\in A,\ x^2=x$.
a) Montrer que $\forall(x,y)\in A^2,\ xy+yx=0_A$ et en déduire que $\forall x\in A$, $x+x=0_A$.
En déduire que l'anneau A est commutatif.
b) Montrer que la relation binaire définie sur A par $x\preccurlyeq y\Leftrightarrow yx=x$ est une relation d'ordre.
c) Montrer que $\forall(x,y)\in A^2,\ xy(x+y)=0_A$.
En déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.

Exercice 47 Soit a,b deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0.
Montrer que a et b sont inversibles.

Sous-anneau

Exercice 48 Soit $d\in\mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]=\left\{a+b\sqrt{d}\mid(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

Exercice 49 On note $\mathcal{D}=\left\{\dfrac{n}{10^k}\mid n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\right\}$ l'ensemble des nombres décimaux.
Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

Exercice 50 Anneau des entiers de Gauss (1777-1855)
On note $\mathbb{Z}[i]=\left\{a+ib\mid(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.
a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication des complexes.
b) Déterminer les éléments inversibles à l'intérieur de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 51 Soit $A=\left\{\dfrac{m}{n}/m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*,\ \text{impair}\right\}$.
a) Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.
b) Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 52 Soit $A=\left\{\frac{m}{2^n} / m\in\mathbb{Z} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

b) Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 53 Soit $d\in\mathbb{N}$. On note $A_d=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 / x=y \quad [d]\right\}$ (avec $A_0=\mathbb{Z}^2$).

a) Montrer que A_d est un sous anneau $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$.

b) Inversement, soit A un sous anneau de $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$.

Montrer que $H=\left\{x\in\mathbb{Z}/(x,0)\in A\right\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

c) En déduire qu'il existe $d\in\mathbb{N}$ tel que $H=d\mathbb{Z}$ et $A=A_d$.

Corps

Exercice 54 Pour $a,b\in\mathbb{R}$, on pose $a\top b=a+b-1$ et $a\star b=ab-a-b+2$.
Montrer que $(\mathbb{R},\top,\star)$ est un corps.

Exercice 55 Soit $d\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, on note $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]=\left\{a+b\sqrt{d} \mid (a,b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$.

Montrer que $(\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right],+,\times)$ est un corps.

Exercice 56 Soit A un anneau commutatif fini non nul.
Montrer que A ne possède pas de diviseurs de zéro ssi A est un corps.

Exercice 57 Soit F un sous corps de $(\mathbb{Q},+,\times)$. Montrer que $F=\mathbb{Q}$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr