

CHAPITRE 2 : PROPAGATION DES ONDES PLANES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

1. Ondes planes progressives électromagnétiques dans le vide

1.1. Rappel des équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide

On a vu dans un chapitre précédant que dans une zone dépourvue de charge et de courant, c'est à dire $\rho(M, t) = 0$ et $\vec{j}(M, t) = \vec{0}$, les champs électrique et magnétique vérifient les équations de propagation :

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ célérité de la lumière dans le vide.

Ces équations sont des équations de d'Alembert où les fonctions de l'onde sont des champs vectoriels.

Notons qu'un champ vectoriel vérifie l'équation de d'Alembert si et seulement si ses trois composantes en coordonnées cartésiennes vérifient l'équation de d'Alembert. Le champ électromagnétique est ainsi une onde se propageant à la vitesse de la lumière qu'on appelle onde électromagnétique.

1.2. Structure de l'OPP électromagnétique dans le vide

1.2.1. Cas d'une propagation unidimensionnelle

Considérons la propagation d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens des x croissants. C'est donc une onde plane progressive et comme elle vérifie l'équation de d'Alembert, d'après la solution générale de cette équation pour une onde progressive :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t) = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t) = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Soit en coordonnées cartésiennes : $\vec{E}(M, t) \begin{pmatrix} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$ et $\vec{B}(M, t) \begin{pmatrix} B_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$

L'onde électromagnétique étant composée des deux champs \vec{E} et \vec{B} vérifie aussi les équations de Maxwell.

- ✓ Equation de Maxwell-Gauss dans le vide : $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ et équation de Maxwell-flux : $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$. D'où $E_x = \text{cste}$ et $B_x = \text{cste}$. Or une composante des champs \vec{E} et \vec{B} ne peut être constante car fonction de x et t donc nécessairement $E_x = 0$ et $B_x = 0$. Ainsi, les composantes du champ électrique et du champ magnétique suivant la direction de propagation sont nulles.

Les champs \vec{E} et \vec{B} d'une OPP électromagnétique dans le vide sont donc perpendiculaires à la direction de propagation. On dit qu'ils sont transverses et que l'onde est transversale.

✓ Equation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial u} = \frac{\partial B_y}{\partial u} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial u} = \frac{\partial B_z}{\partial u} \end{cases} \text{ en posant } u = t - \frac{x}{c}$

Par intégration, il vient : $E_z = -cB_y$ et $E_y = cB_z$

✓ Equation de Maxwell-Ampère dans la vide : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ n'apporte pas de condition supplémentaire et conduit aux relations $B_y = -\frac{E_z}{c}$ et $B_z = \frac{E_y}{c}$ c'est-à-dire aux mêmes relations.

Ces relations donnent : $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$, et $\vec{E} \wedge \vec{B} = \|\vec{E}\| \|\vec{B}\| \vec{u}_x = \frac{E^2}{c} \vec{u}_x$.

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux entre eux en tout point et à tout instant et $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ forme un trièdre direct. Le plan (\vec{E}, \vec{B}) est un plan d'onde.

Les trois relations vérifiées par les composantes du champ électrique $E_x = 0$, $E_y = cB_z$ et $E_z = -cB_y$ se résument dans l'équation vectorielle : $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_x$

De même les relations $B_x = 0$, $B_y = -\frac{E_z}{c}$ et $B_z = \frac{E_y}{c}$ pour les composantes du champ magnétique se résument dans l'équation vectorielle : $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}$

1.2.2. Cas d'une propagation de direction quelconque

Pour une onde plane progressive électromagnétique se propageant dans la direction et le sens d'un vecteur unitaire \vec{u} quelconque : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)$ et $\vec{B}(M, t) = \vec{B}\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Généralement pour une fonction scalaire $f(x, y, z, t) = f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)$, en posant $\alpha = t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$. Soit u_x, u_y et

u_z les composantes cartésiennes du vecteur \vec{u} d'où $\vec{u} \cdot \vec{r} = xu_x + yu_y + zu_z$ et par conséquent $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{u_x}{c}$ donc

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{u_x}{c} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$. D'autre part $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ car $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 1$. On a alors $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{u_x}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$. De même $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{u_y}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ et

$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{u_z}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$. Finalement on trouve : $\overrightarrow{\text{grad}} f = -\frac{\vec{u}}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$. De même pour un champ vectoriel

$\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)$, on a les relations suivantes : $\text{div} \vec{A} = -\frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = -\frac{\vec{u}}{c} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. En

appliquant ces relations aux champs \vec{E} et \vec{B} d'une onde plane progressive électromagnétique, les équations de Maxwell dans le vide donnent alors : $M.G. \text{ div} \vec{E} = 0 \Rightarrow -\frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ et $M.\phi \text{ div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -\frac{\vec{u}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

$M.F. \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\vec{u}}{c} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $M.A. \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\vec{u}}{c} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Par intégration de ces

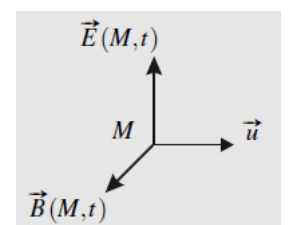
équations, on obtient : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{B} = 0}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \text{ et } \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}}$$

On retrouve les mêmes propriétés que dans le cas unidimensionnel.

Conclusion : structure de l'OPP électromagnétique dans le vide

- Les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses c'est-à-dire tous deux perpendiculaires à la direction de propagation \vec{u} ,
- Les champs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux entre eux,

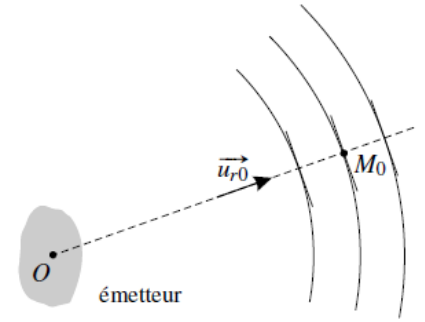


Le plan (\vec{E}, \vec{B}) est un plan d'onde

- Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ est un trièdre direct;
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

1.2.3. Lien du modèle de l'OPP électromagnétique avec la réalité

L'OPP électromagnétique est un modèle idéal simple mais l'onde émise par un émetteur est plus complexe. Cependant, loin de l'émetteur c'est-à-dire à grande distance devant la taille de l'émetteur, on peut assimiler celui-ci, à une source quasi-ponctuelle en O. Dans un tel cas, l'onde est décrite en coordonnées sphériques (r, θ, φ) et ne dépend pratiquement pas des angles θ et φ . Autour d'un point M_0 de coordonnées $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ dans un petit volume, on calcul l'onde en faisant les approximations : $\vec{r} = \vec{u}_r \cdot \overrightarrow{OM} \simeq \vec{u}_{r_0} \cdot \overrightarrow{OM}$, $\theta \simeq \theta_0$ et $\varphi \simeq \varphi_0$ \vec{u}_{r_0} étant le vecteur unitaire radial en M_0 . Les champs de l'onde en M ne dépendent alors que de $\vec{u}_{r_0} \cdot \overrightarrow{OM}$ et l'onde est quasiment une onde plane progressive se propageant dans la direction de \vec{u}_{r_0} .



L'OPP électromagnétique est donc un modèle idéal qui décrit convenablement la structure locale de l'onde électromagnétique produite par un émetteur à grande distance de celui-ci.

2. Ondes planes progressives monochromatiques électromagnétiques dans le vide

2.1. OPPM électromagnétiques

Pour une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un vecteur unitaire \vec{u} quelconque, les champs \vec{E} et \vec{B} sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{E0x}) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{E0y}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{E0z}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} B_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{B0x}) \\ B_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{B0y}) \\ B_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{B0z}) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

où E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} sont des constantes liées au champ électrique, B_{0x}, B_{0y}, B_{0z} des constantes liées au champ magnétique, $\varphi_{E0x}, \varphi_{E0y}, \varphi_{E0z}, \varphi_{B0x}, \varphi_{B0y}$ et φ_{B0z} des constantes sans dimension désignant les phases à l'origine des coordonnées spatiales et des temps de ces champs respectivement. ω est la pulsation temporelle de l'OPPM et $\vec{k} = k\vec{u}$ son vecteur d'onde avec $k = \frac{\omega}{c}$ pulsation spatiale ou module d'onde. Ainsi les valeurs de la double périodicité sont :

	Période	Fréquence	Pulsation
Temps	T	f	ω
Espace	λ	σ	k

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ où T période temporelle et f fréquence temporelle de l'OPPM.

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$: période spatiale ou longueur d'onde. $\sigma = \frac{1}{\lambda}$: fréquence spatiale ou nombre d'onde.

Ces grandeurs relatives à la double périodicité de l'OPPM sont regroupées dans le tableau ci-dessus.

2.2. Propriétés de l'OPPM électromagnétique

2.2.1. Propagation unidimensionnelle

Considérons le cas unidimensionnel de la propagation d'une OPPM électromagnétique dans le vide dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens des x croissants.

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{E0}) \text{ et } \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{B0}).$$

$$\text{Avec } \vec{E}_0 = E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}\vec{u}_y + E_{0z}\vec{u}_z \text{ et } \vec{B}_0 = B_{0x}\vec{u}_x + B_{0y}\vec{u}_y + B_{0z}\vec{u}_z.$$

On peut vérifier les propriétés de l'onde plane progressive.

(M.G.) dans le vide : $\text{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow E_{0x} = 0$ et (M.φ : $\text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow B_{0x} = 0$. L'onde est bien transversale.

$$\text{M. F. : } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} kE_{0z} = -\omega B_{0y} \\ kE_{0y} = \omega B_{0z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0z} = -cB_{0y} \\ E_{0y} = cB_{0z} \end{cases} \quad \text{d'où:}$$

$$\checkmark \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0, \text{ on a bien } \vec{E} \perp \vec{B} \text{ en tout point et à tout instant,}$$

$$\checkmark \quad \|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|, \text{ et } \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E^2}{c}\vec{u}_x, (\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x) \text{ est bien un trièdre direct.}$$

2.2.2. Généralisation à une direction de propagation quelconque

a) Expression générale d'une OPPM – Utilisation de la notation complexe

Pour une OPPM électromagnétique se propageant dans la direction et le sens d'un vecteur unitaire \vec{u} quelconque, $\vec{k} = k\vec{u}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. En utilisant la notation complexe, les champs \vec{E} et \vec{B} s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ et } \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ avec } \underline{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \exp(\varphi_{0x}) \\ E_{0y} \exp(\varphi_{0y}) \\ E_{0z} \exp(\varphi_{0z}) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \text{ de sorte}$$

que $\vec{E} = \text{Re}[\underline{\vec{E}}]$. Comme on a une OPP, l'expression de $\underline{\vec{E}}_0$ donne celle de $\underline{\vec{B}}_0$ et nous allons le retrouver pour l'OPPM.

▪ Dérivation et notation complexe

Généralement pour un champ vectoriel quelconque \vec{A} tel que $\vec{A}(M, t) = \underline{\vec{A}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ avec

$$\underline{\vec{A}}_0 = \begin{pmatrix} A_{0x} \exp(\varphi_{0x}) \\ A_{0y} \exp(\varphi_{0y}) \\ A_{0z} \exp(\varphi_{0z}) \end{pmatrix}, \text{ on montre les règles de dérivation suivantes :}$$

$$\text{Dérivation temporelle : } \frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{A}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{A}}$$

$$\text{Dérivation spatiale : } \text{div}\underline{\vec{A}} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{A}}; \overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{A}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}}; \Delta \underline{\vec{A}} = -k^2 \underline{\vec{A}}$$

De même pour un champ scalaire V tel que $V(M, t) = \underline{V}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ avec $\underline{V}_0 = V_0 \exp(\varphi_0)$:

$$\text{Dérivation temporelle : } \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} = i\omega \underline{V} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{V}$$

$$\text{Dérivation spatiale : } \overrightarrow{\text{grad}}\underline{V} = -i\vec{k} \underline{V}; \Delta \underline{V} = -k^2 \underline{V}$$

Remarque : Ces règles de calcul se retrouvent rapidement en considérant que le vecteur symbolique « nabra » est égal à $-i\vec{k}$.

b) Equations de Maxwell en représentation complexe

En appliquant les règles de calcul de dérivation, les équations de Maxwell pour des champs électrique et magnétique complexes s'écrivent alors :

- (M.G.) $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- (M.φ) $-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$
- (M.F.) $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$
- (M.A.) $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\vec{j} + i\omega\epsilon_0\mu_0\vec{E}$

c) Structure de l'OPPM électromagnétique dans le vide

Par application des règles de calcul de dérivation à une OPPM électromagnétique dans le vide :

M.G. : $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$ et M.φ : $-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$. \vec{E} et \vec{B} sont transverses.

$$\left. \begin{array}{l} \text{M.F. : } -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B} \Rightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \\ \text{M.A. : } -i\vec{k} \wedge \vec{B} = i\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{c^2}{\omega} \vec{B} \wedge \vec{k} \end{array} \right\} \text{ Relation de structure des OPPM}$$

Ces relations donnent bien : $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ et $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ trièdre direct. Ces relations montrent aussi que les phases des champs \vec{E} et \vec{B} à l'origine des coordonnées spatiales et des temps sont les mêmes.

Par exemple pour une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide dans la direction et le sens du vecteur \vec{u}_x , les champs \vec{E} et \vec{B} sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_{0z}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ \frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

2.2.3. Relation de dispersion pour une OPPM électromagnétique dans le vide

La notation complexe permet de retrouver rapidement cette relation concernant l'OPPM électromagnétique dans le vide. En effet l'équation de d'Alembert, vérifiée par le champ électrique dans le vide, s'écrit en notation complexe sous la forme très simple :

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (\text{car } \vec{E} \text{ n'est pas nul}): \text{ Relation de dispersion}$$

Pour une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide dans la direction et le sens du vecteur unitaire \vec{u} , on a alors $k = \frac{\omega}{c}$.

2.3. Lien du modèle de L'OPPM électromagnétique avec la réalité et spectre électromagnétique

2.3.1. Lien de l'OPPM avec la réalité

L'OPPM électromagnétique est un modèle idéal, car d'une part étant une OPP, elle permet de décrire la structure locale de l'onde électromagnétique produite par un émetteur à grande distance et d'autre part elle est

monochromatique. Comme nous l'avons vu, les ondes monochromatiques ne sont pas des ondes réelles n'ayant pas des extensions temporelle et spatiale finies. Leur intérêt réside dans l'analyse spectrale : tout signal réel est une superposition d'une infinité d'ondes sinusoïdales traitées indépendamment les unes des autres eu égard au caractère linéaire des équations de Maxwell et de l'équation de propagation.

L'OPPM est donc un modèle idéalisé qui n'existe pas dans la réalité mais toute onde réelle est superposition d'OPPM.

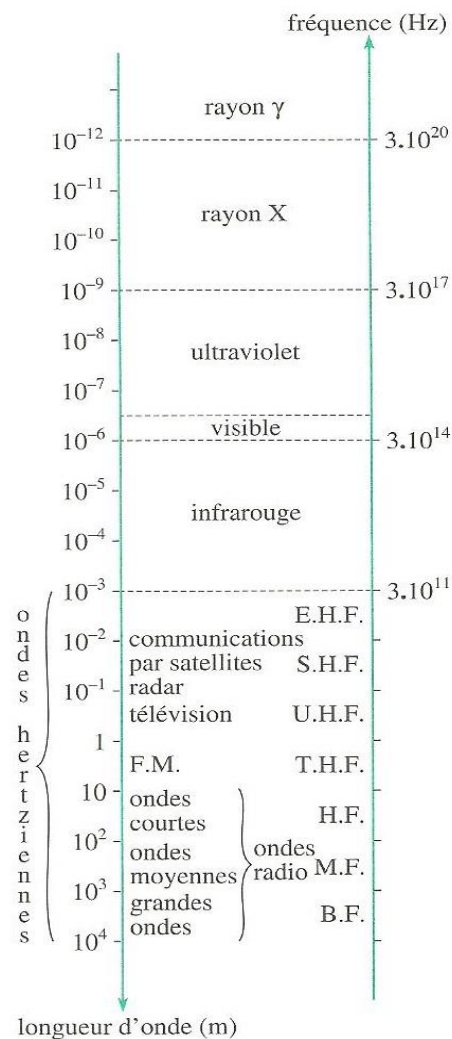
2.3.2. Spectre électromagnétique

Les ondes électromagnétiques couvrent une gamme de fréquences (ou de longueurs d'onde) très vaste dont la classification est donnée sur la figure ci-contre.

Les ondes électromagnétiques couvrent une gamme de fréquences (ou de longueurs d'onde) très vaste dont la classification est donnée sur la figure ci-contre.

Les différents domaines de fréquence et les applications sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Type d'onde	Domaine fréquentiel	Domaine d'application
Très basses fréquences (ELF)	de la limite électrostatique à 10^5 Hz en passant par le réseau domestique) 220 Hz	transport et distribution de l'électricité communication (sous-marins militaires)
Ondes radio (domaine herztien)	des grandes ondes à 10^5 Hz à la FM à 10^8 Hz	produit par des courants oscillants. Application au transport de l'information, communication satellite
Micro-ondes	des ondes centimétriques à 10^9 Hz aux ondes submillimétriques à 10^{12} Hz	radar, four micro-ondes, téléphonie mobile
Infrarouge (IR)	de l'IR lointain à 10^{12} Hz à l'IR proche à $3 \cdot 10^{14}$ Hz	chauffage
Visible	du rouge $3,8 \cdot 10^{14}$ Hz au bleu à $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz	vision humaine, processus de photosynthèse, photographie...
Ultraviolet (UV)	de l'UV proche à $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz à l'UV lointain à $3 \cdot 10^{16}$ Hz	activation de réaction chimique (photochimie), ionisation des hautes couches de l'atmosphère (ionosphère), stérilisation médicale...
Rayon X	des X mous à $3 \cdot 10^{16}$ Hz aux X durs à $5 \cdot 10^{19}$ Hz	émis par rayonnement de freinage, utilisés en imagerie médicale (radiographie), étude de la matière par diffraction des X
Rayon γ Rayons cosmiques	de $5 \cdot 10^{19}$ Hz à $5 \cdot 10^{20}$ Hz au-delà de $5 \cdot 10^{20}$ Hz pour les rayons cosmiques	rayonnement très énergétique, provoquant de graves lésions cellulaires (altération de l'ADN d'où cancers)



3. Aspect énergétique des OPP électromagnétique

3.1. Grandeurs énergétiques pour l'OPP

Pour une OPP électromagnétique non nécessairement monochromatique se propageant dans le vide, dans la

direction et le sens d'un vecteur unitaire \vec{u} : $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ et donc $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

3.1.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique est : $u_{em}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M, t)}{2} + \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0}$

Pour l'OPP électromagnétique dans le vide, il vient alors :

$$u_{em}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M, t)}{2} + \frac{E^2(M, t)}{2\mu_0 c^2} \text{ or } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \text{ d'où } \boxed{u_{em}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t) = \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}}$$

Il y a équiartition de l'énergie électromagnétique entre \vec{E} et \vec{B} : $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{u_{em}}{2}$.

3.1.2. Vecteur de Poynting et énergie transportée

✓ Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E}(M, t)\| \|\vec{B}(M, t)\|}{\mu_0} \vec{u} = \frac{E^2(M, t)}{\mu_0 c} \vec{u} \text{ avec } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \text{ d'où:}$$

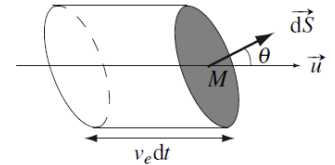
$$\boxed{\vec{\Pi}(M, t) = \varepsilon_0 c E^2(M, t) \vec{u} = \frac{c B^2(M, t)}{\mu_0} \vec{u}}$$

✓ Énergie transportée et vitesse de l'énergie :

$$\text{or } u_{em}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t) = \frac{B^2(M, t)}{\mu_0} \text{ donc } \boxed{\vec{\Pi}(M, t) = c u_{em}(M, t) \vec{u}}$$

L'énergie électromagnétique $d^2 W_{em}$ traversant une surface élémentaire dS en M entre les instants t et t + dt est, par définition du vecteur de Poynting : $d^2 W_{em} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{dS} dt$

Or $d^2 W_{em} = u_{em}(M, t) dV$ entre t et t + dt. Cette énergie est donc l'énergie contenue dans le cylindre oblique de surface de base \vec{dS} et de longueur $\vec{v}_e dt$ c'est-à-dire dans le volume $dV = \vec{v}_e dt \cdot \vec{dS}$ où \vec{v}_e est la vitesse de l'énergie.



Ainsi $d^2 W_{em} = u_{em}(M, t) (\vec{v}_e dt \cdot \vec{dS}) \Rightarrow \vec{\Pi}(M, t) = u_{em}(M, t) \vec{v}_e$. On déduit : $\boxed{\vec{v}_e = c \vec{u}}$

L'énergie électromagnétique se propage dans vide dans la même direction que l'onde à la même vitesse et dans le même sens.

Remarque : Dans un milieu non dispersif, la vitesse de propagation de l'onde est aussi sa vitesse de phase, sa vitesse de groupe et la vitesse de propagation de son énergie. On a donc $\boxed{v_g = v_\phi = v_e}$.

3.2. Cas de l'OPPM électromagnétique

3.2.1. Grandeur énergétique moyenne, utilisation de la notation complexe

Considérons f et g de la forme $f(M, t) = f_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$ et $g(M, t) = g_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \Psi)$ deux composantes de champs d'une OPPM. Le calcul de la valeur temporelle moyenne du produit fg donne (transformation du produit de cosinus en somme de cosinus) :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} f_0 g_0 (\cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi + \Psi) + \cos(\varphi - \Psi)) = \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos(\varphi - \Psi)$$

En notation complexe :

$$\underline{f} \underline{g}^* = f_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)) \times g_0 \exp(i(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} - \Psi)) = f_0 g_0 \exp(i(\varphi - \Psi))$$

On déduit alors : $\boxed{\langle f(M, t) g(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \underline{g}^*)}$.

De cette relation on déduit pour l'OPPM électromagnétique les expressions de :

- ✓ Vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$
- ✓ Densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} (\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^*) = \frac{1}{4} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2).$$

3.2.2. Application – Puissance électromagnétique traversant une surface

Pour une OPPM de pulsation ω et vecteur d'onde \vec{k} se propageant suivant le vecteur unitaire \vec{u} , $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ et les champs \vec{E} et \vec{B} en notation complexe s'écrivent :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ avec } \vec{B}_0 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_0}{c}.$$

- Densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad \text{où } E_0^2 = |\vec{E}_0|^2.$$

- Vecteur de Poynting moyen : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u} \quad (\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$

- Puissance électromagnétique moyenne traversant une surface prise dans un plan d'onde.

Soit S une surface prise dans un plan d'onde (surface perpendiculaire à la direction de propagation. La puissance électromagnétique moyenne traversant cette surface est :

$$\mathcal{P} = \langle \phi_{\vec{\Pi}} \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot (S \vec{u}) = \langle \Pi \rangle S = \frac{SE_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\epsilon_0 c S E_0^2}{2}.$$

Cette puissance est indépendante de la direction du champ électrique (direction de \vec{E}_0). On dit qu'elle est indépendante de l'état de polarisation de l'onde.

Pour une onde lumineuse l'éclairement \mathcal{E} est la puissance reçue par unité de surface sur un écran orthogonal à la direction de propagation. $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}}{S} = \langle \Pi \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$. Il est proportionnel au carré de l'amplitude de l'onde (amplitude du champ électrique E_0).

4. Polarisation d'une ondes planes progressives monochromatiques

4.1. Polarisation d'OPPM électromagnétique

4.1.1. Etat de polarisation d'une OPPM électromagnétique

Pour étudier l'évolution d'une OPPM électromagnétique il suffit de faire l'étude pour l'un des champs car l'onde est entièrement connue dès lors que l'un des champs est connu, l'autre se déduisant par la relation de structure. En général on considère le champ électrique \vec{E} et on déduit \vec{B} .

Etudier la polarisation d'une OPPM électromagnétique c'est étudier l'évolution de la direction de son champ électrique \vec{E} au cours de la propagation.

4.1.2. Description de la polarisation d'une OPPM électromagnétique

Considérons la propagation d'une OPPM électromagnétique dans la direction de l'axe (Ox). L'onde a alors des composantes suivant l'axe (Oy) et suivant l'axe (OZ) et l'étude est faite dans un plan d'onde.

En notation complexe : $\vec{E}(x, t) = E_{0y} \vec{u}_y \exp(i(\omega t - kx)) + E_{0z} \vec{u}_z \exp(i(\omega t - kx))$

$$\text{En notation réelle : } \vec{E}(x, t) \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

En un point M fixé, les composantes E_y et E_z sont deux fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation dont le déphasage est : $\phi = (\omega t - kx + \varphi_{0y}) - (\omega t - kx + \varphi_{0z}) = \varphi_{0y} - \varphi_{0z}$.

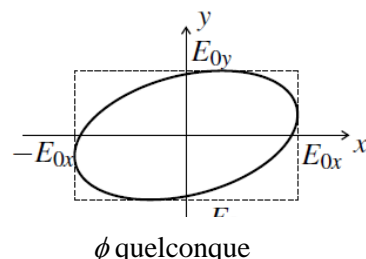
Les composantes du champ peuvent s'écrire en fonction du déphasage :
$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \phi) \end{cases}$$

En prenant le point M à l'origine des positions donc en fixant x en $x = 0$, on a alors :
$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Par élimination du temps entre ces deux composantes, on trouve l'équation d'une ellipse :

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2 \sin^2 \phi} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2 \sin^2 \phi} - 2 \frac{E_y E_z \cos \phi}{E_{0y} E_{0z} \sin^2 \phi} = 1.$$

Donc l'extrémité du vecteur champ électrique $\vec{E}(M, t)$ décrit dans le cas général une ellipse inscrite dans le rectangle de côtés $2E_{0y}$ et $2E_{0z}$.



Dans les deux cas particuliers où $\phi = 0$ et $\phi = \pi$, l'équation donne $\frac{E_y}{E_{0y}} = \pm \frac{E_z}{E_{0z}}$. L'extrémité $\vec{E}(M, t)$ décrit alors un segment de droite. Ainsi pour :

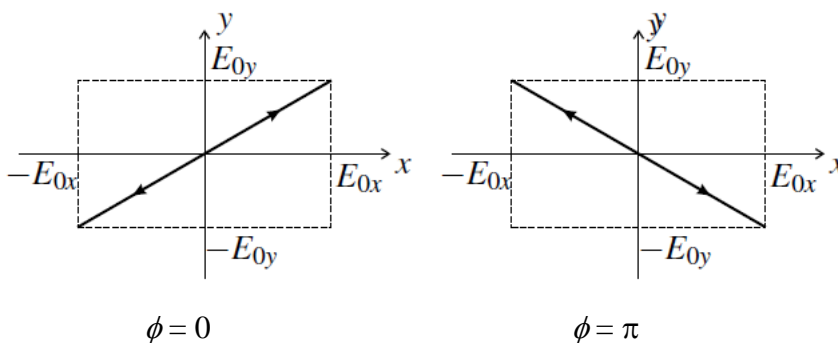
- $\phi = 0, \vec{E}(x, t) = (E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} \vec{u}_z) \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})$;
- $\phi = \pi, \vec{E}(x, t) = (E_{0y} \vec{u}_y - E_{0z} \vec{u}_z) \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})$

Dans ces deux cas, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ garde une direction fixe pendant la propagation. L'onde est dite polarisée rectilignement d'où la définition suivante :

Une onde électromagnétique a une polarisation rectiligne si, en tout point M, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ garde une direction fixe au cours du temps.

La direction du champ électrique est alors appelée **direction de polarisation**.

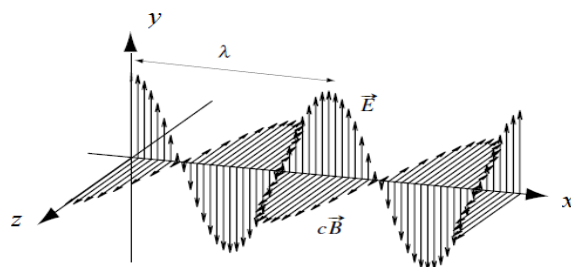
Si $\phi = 0$, les composantes E_y et E_z sont en phase et si $\phi = \pi$, ces composantes sont en opposition de phase.



Une OPPM est donc polarisée rectilignement si et seulement si ses composantes non nulles sont en phase ou en opposition de phase deux à deux.

Exemple

Le champ électromagnétique d'une OPPM dont les champs sont en phase en $x = 0$ et à $t = 0$, se propageant dans la direction et le sens du vecteur \vec{u}_x et polarisée rectilignement dans la direction du vecteur \vec{u}_y est :



$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

Ce champ représenté à $t = 0$ sur la figure ci-dessus montre bien la périodicité spatiale de période λ , la structure de l'onde avec le trièdre direct $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ et le fait que les deux champs sont en phase avec $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$.

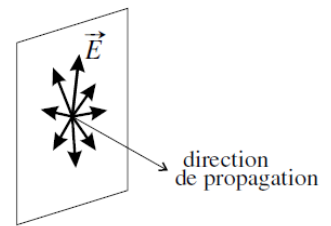
5. Polariseurs – Loi de Malus

5.1. Polarisation rectiligne de la lumière : Polariseur

5.1.1. La lumière naturelle

La lumière émise par la plupart des sources (Soleil, lampes spectrales, diode électroluminescente, ...) correspond à une superposition d'OPPM dont les champs électriques, transverses, sont déphasés de manière aléatoire : ces ondes superposées sont donc incohérentes.

L'extrémité du champ électrique résultant décrit dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (plan d'onde ou plan transverse) une trajectoire aléatoire, sans direction privilégiée. La lumière naturelle est donc non polarisée.



5.1.2. Le Polariseur

Un polariseur idéal est une lame qui, traversée par une lumière se propageant perpendiculairement à ses faces, transmet la totalité de l'énergie associée à un champ électrique parallèle à une direction particulière de son plan, appelée direction de transmission privilégiée dont le vecteur unitaire sera noté \vec{u}_p , et absorbe la totalité de l'énergie associée à un champ électrique perpendiculaire à cette direction.

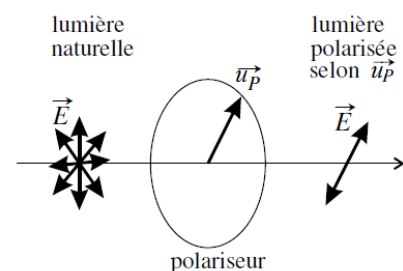
Remarque :

- ✓ La lumière le traverse perpendiculairement, le plan du polariseur est un plan transverse.
- ✓ Pour un polariseur réel, appelé aussi polaroïd, on a des pertes d'énergie, notamment dues à la réflexion sur la lame, même pour une onde polarisée rectilignement dans la direction \vec{u}_p . Alors qu'un polariseur idéal laisse passer 50% de l'énergie lumineuse d'une lumière naturelle un polaroïd réel en laisse passer seulement environ 40%.

5.1.3. Lumière polarisée rectilignement

La première utilisation du polariseur est la production de lumière polarisée. Dans ce cas il joue le rôle de « polariseur ».

Un polariseur transforme une lumière naturelle en lumière polarisée rectilignement suivant sa direction de transmission privilégiée \vec{u}_p .



5.2. Loi de Malus

La deuxième utilisation d'un polariseur est la reconnaissance d'une lumière polarisée rectilignement. Il joue alors le rôle d'analyseur.

Une onde lumineuse polarisée rectilignement, dont le champ électrique est perpendiculaire à la direction de transmission privilégiée d'un polariseur est totalement absorbée par le polariseur.

Cette propriété permet de reconnaître une onde lumineuse polarisée rectilignement. La loi de Malus est un résultat quantitatif, relatif à l'éclairement de l'onde lumineuse sortant d'un polariseur, pour un angle α

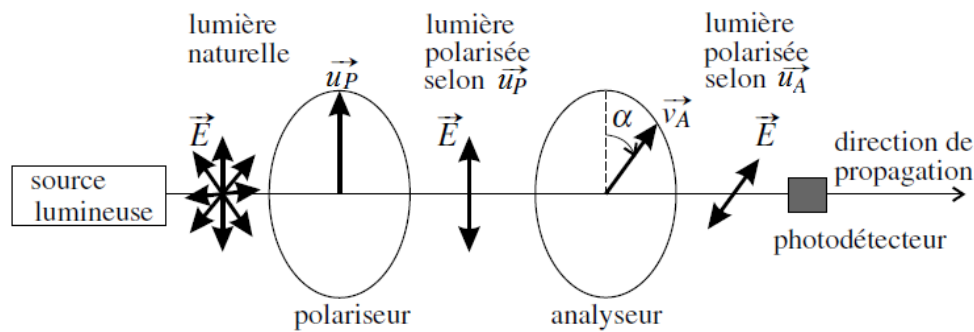
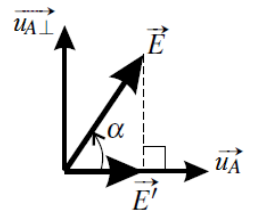
quelconque entre la direction de polarisation de la lumière et la direction de transmission privilégiée de ce polariseur. En effet l'éclairement est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Pour une valeur

quelconque de α , Le polariseur ne transmet que la projection \vec{E}' du champ électrique \vec{E} sur la direction de transmission noté ici \vec{u}_A pour spécifier le rôle d'analyseur joué par le

polariseur. La norme de \vec{E}' est : $\|\vec{E}'\| = \|\vec{E}\| \cos \alpha$. L'éclairement \mathcal{E} de l'onde lumineuse en un point M d'un écran d'observation perpendiculaire à la direction de propagation est :

$\mathcal{E}(M) = \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2(M, t) \rangle$. Il en résulte que les éclairements \mathcal{E} et \mathcal{E}' avant et après le polariseur sont liés

par la relation : **$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cos^2 \alpha$** *Loi de Malus*. La loi de Malus donne bien un éclairement nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Dispositif expérimental démontrant la loi de Malus.