

Auteurs : Jean-Baptiste Paire  
Jean-Marc Vince

### Partie I – Le modèle de Thomson

**I.A.** On calcule le champ électrique en un point M intérieur à la boule chargée volumiquement.

Tous les plans contenant OM sont de symétrie positive pour la distribution de charge donc pour le champ électrique : Le champ est donc radial. On a invariance pour toute rotation de centre O, le champ ne dépend donc (en norme) que de  $r = OM$ .

On applique le théorème de Gauss en choisissant une sphère de centre O et de rayon  $r (< R)$  comme surface de Gauss, soit :  $\oiint_{\text{Sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint_{\text{boule\_de\_rayon\_r}} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$  soit  $4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} r^3 \rho$ .

On en tire donc le champ intérieur :  $\vec{E}(r) = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$  avec  $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$

L'électron de charge  $q = -e$  ressent donc la force  $\vec{F} = -\frac{e\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \cdot \vec{e}_r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{OM} = -k \cdot \vec{OM}$

**I.B.** La force ressentie par l'électron est de type ressort avec une longueur à vide nulle, elle est donc de type "élastique".

**I.C.1.** On prend comme système {l'électron}, dans le référentiel lié au centre de l'atome (fixe, supposé galiléen). La seule force est la force calculée au IA1.

On applique le théorème du Moment Cinétique en O :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM} \wedge -k \cdot \vec{OM} = \vec{0}$ .

Le moment cinétique en O est donc une constante vectorielle. Sa direction est fixe. Or  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \cdot \vec{v}$ , le vecteur position est donc orthogonal à une direction fixe, il appartient donc au plan vectoriel perpendiculaire au vecteur moment cinétique. M appartient donc toujours au plan orthogonal à  $\vec{L}_O$ , passant par O, Le mouvement est donc plan.

**I.C.2.** Avec le même système, dans le même référentiel, on applique le Principe Fondamental de la

Dynamique :  $m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -k \cdot \vec{OM}$  en projections :  $\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \\ m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y \\ m \cdot \ddot{z} = -k \cdot z \end{cases}$  soit  $\ddot{u} + \omega_0^2 \cdot u = 0$  à résoudre 3

fois :  $u = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$

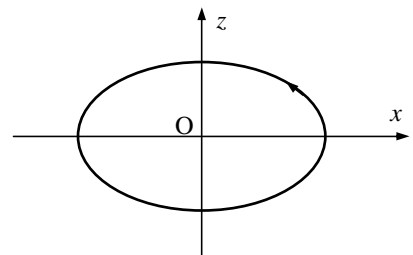
pour  $x$  :  $x(0) = r_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$  :  $x = r_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

pour  $y$  :  $y(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = v_0$  :  $y = 0$  (ce qui est compatible avec

**I.C.1.)**

pour  $z$  :  $z(0) = 0$  et  $\dot{z}(0) = v_0$  :  $z = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$

**I.C.3.** La trajectoire est une ellipse droite de centre O :

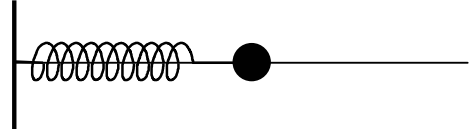


Pour la Terre autour du Soleil, on a également une ellipse, mais le centre de force (le Soleil) est placé au foyer de la trajectoire.

**I.C.4.** La pulsation du mouvement est  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$  donc la période  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_e}{k}}$ .

**I.C.5.** Avec  $a = 0,1 \text{ nm} = 1.10^{-10} \text{ m}$ , on a  $f_0 = 2,53.10^{15} \text{ Hz}$  et  $\lambda = c/f = 1,18.10^{-7} \text{ m} = 0,118 \mu\text{m}$ . Elle est dans le domaine des UltraViolets.

**I.C.6.** Le moment cinétique est nul (et reste nul au cours du mouvement). Le mouvement est donc rectiligne : on a un mouvement identique à celui d'un mobile relié à un ressort, astreint à un mouvement unidimensionnel par exemple : la bille est astreinte à se déplacer sur la tige sans frottements.



**I.D.1.** L'électron est astreint à rester "dans l'atome", soit  $OM < a \ll \lambda$ .

Soit un point A origine de l'espace.

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= E_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{AM}\right) = E_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_0 \cdot \vec{AM}\right) \\ &= E_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_0 \cdot \vec{AO} - \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_0 \cdot \vec{OM}\right) \approx E_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_0 \cdot \vec{AO}\right) \\ \text{car } \frac{1}{\lambda} \vec{u}_0 \cdot \vec{OM} &\leq \frac{1}{\lambda} OM \leq \frac{1}{\lambda} a \ll 1\end{aligned}$$

Le champ électrique ne dépend plus de  $M$  à l'échelle de l'atome, on peut le considérer comme uniforme. On applique le principe fondamental de la Dynamique à l'électron dans le référentiel (galiléen) lié au

$$\text{centre de l'atome (O = A) : } m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -k \cdot \vec{OM} - e \cdot \vec{E}(M) = -k \cdot \vec{OM} - e \cdot E_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \cos(\omega t)$$

**I.D.2.** La lumière visible correspond aux longueurs d'onde de l'intervalle  $[0,4 \mu\text{m} ; 0,75 \mu\text{m}]$ , soit aux pulsations de l'intervalle  $[2,5.10^{15} \text{ rad.s}^{-1} ; 4,7.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}]$

On avait trouvé (**IC5**)  $\omega_0 = 1,60.10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$  soit  $(\omega / \omega_0)_{\max} = 3,4$  c'est un peu juste, mais  $[(\omega / \omega_0)_{\max}]^2 = 11$  on pourra donc négliger  $\omega^2$  devant  $\omega_0^2 \dots$

**I.D.3.** On cherche la solution  $z(t)$  en régime établi, c'est donc la solution particulière de l'équation différentielle de la question **ID1**. Comme le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , on fait une recherche par méthode complexe :  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_0 \cdot \exp(i\omega t)$  :

Dans l'équation différentielle, on obtient :  $-m \cdot \omega^2 \cdot \underline{Z}_0 = -k \cdot \underline{Z}_0 - e \cdot E_0$  (après simplification par  $\exp(i\omega t)$ )

Soit  $\underline{Z}_0 = -\frac{e \cdot E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$ , en repassant en réels, on obtient :

$$z(t) = -\frac{e \cdot E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \cos(\omega t) \approx \frac{-e \cdot E_0}{m_e \cdot \omega_0^2} \cdot \cos(\omega t) .$$

**I.D.4.** L'atome est constitué d'une charge  $+e$  placée en O et d'une charge  $-e$  placée en M,

$$\text{soit } \vec{p} = -e \cdot \vec{OM} = \frac{e^2 \cdot E_0}{m_e \cdot \omega_0^2} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z .$$

**I.D.5.** La "zone de rayonnement" correspond à  $r \gg \lambda$ : la durée de propagation  $r/c$  est grande devant la période propre du dipôle, dans cette zone, l'onde électromagnétique est localement (quasi) plane.

**I.D.6.** Par définition on a :  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ , or dans la zone de rayonnement on peut considérer que l'onde est plane, avec les notations de l'énoncé, on peut donc écrire en complexes (les grandeurs soulignées sont complexes) :

$$\underline{\vec{B}} = \overrightarrow{rot} \underline{\vec{A}} = -i \cdot \vec{k} \wedge \underline{\vec{A}} = -i \cdot \vec{k} \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r} \cdot \vec{e}_z \quad \text{avec}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\frac{\omega}{c} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{en coordonnées sphériques. On en tire donc :}$$

$$\underline{\vec{B}} = i \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{avec } p \text{ une fonction sinusoïdale de } (t-r/c) \text{ de pulsation } \omega$$

soit  $\underline{\ddot{p}}(t-r/c) = i\omega \cdot \underline{\dot{p}}(t-r/c)$ .

$$\text{Donc } \underline{\vec{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot c} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{soit en réels : } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot c} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

Dans la zone de rayonnement, l'onde a localement la structure de l'onde plane soit  $\vec{E} = c \cdot \vec{B} \wedge \vec{e}_r$

$$\text{Ici on en tire } \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r} \cdot \vec{e}_\theta.$$

$$\text{I.D.7. On calcule le vecteur de Poynting : } \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 \cdot c} \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{[\ddot{p}(t-r/c)]^2}{r^2} \cdot \vec{e}_r.$$

La puissance rayonnée est le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon  $r$  centrée sur le dipôle soit :

$$P(t) = \oint_{\text{Sphère}} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mu_0}{16\pi^2 \cdot c} [\ddot{p}(t-r/c)]^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{\mu_0}{8\pi \cdot c} \cdot [\ddot{p}(t-r/c)]^2 \cdot \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta$$

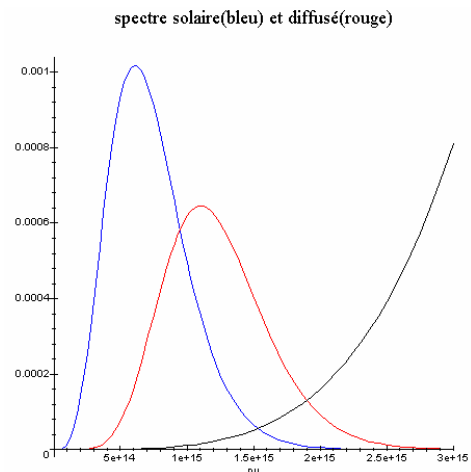
$$\text{Soit } P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi \cdot c} \cdot [\ddot{p}(t-r/c)]^2 \quad \text{avec } p(t) = -\frac{e^2 \cdot E_0}{m \cdot \omega_0^2} \cdot \cos(\omega t) \quad \text{soit } \ddot{p}(t) = \frac{e^2 \cdot E_0 \cdot \omega^2}{m \cdot \omega_0^2} \cdot \cos(\omega t) = -e \cdot \omega^2 \cdot z(t)$$

$$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi \cdot c} \cdot \frac{e^4 \cdot E_0^2 \cdot \omega^4}{m^2 \cdot \omega_0^4} \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{\mu_0}{6\pi \cdot c} \cdot e^2 \cdot \omega^4 \cdot z^2(t)$$

$$\text{en moyennant } \langle P(t) \rangle = \frac{\mu_0 \cdot e^2}{6\pi \cdot c} \cdot \omega^4 \cdot \langle z^2(t) \rangle = \frac{e^2}{6\pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} \cdot \omega^4 \cdot \langle z^2(t) \rangle$$

**I.D.8.** Une partie de la puissance de l'onde électromagnétique reçue de la part du Soleil sert à faire osciller les atomes de l'atmosphère. Ceux-ci réémettent une onde dans toutes les directions avec une puissance proportionnelle à  $E_0^2$  (donc à la puissance incidente) et à  $\omega^4$ . La puissance est donc maximale dans les petites longueurs d'onde donc dans le bleu. Si on tient compte de la courbe d'émission du Soleil, et si on la multiplie par  $\omega^4$ , on obtient une courbe de densité de puissance dont le maximum est dans le bleu (il faut en toute rigueur tenir compte aussi de la courbe de réponse de l'œil...) :

*Les courbes sont coefficientées pour être comparées....*



**I.D.9.** On applique une loi des mailles :  $E(t) = \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} = U \cdot \cos(\omega t)$ .

On a donc une équation différentielle similaire à celle de la question **ID1** avec comme correspondance  $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$  ;  $L \leftrightarrow m$  ;  $U \leftrightarrow -e \cdot E_0$  (force)

**I.D.10.** Le modèle de J.J.Thomson permet d'introduire de façon simple un électron "élastiquement" lié au noyau. Il permet une cohérence avec différentes observations usuelles comme le bleu de ciel. Ce modèle permet de plus une analogie électrocinétique facile à réaliser expérimentalement.

## *Partie II – Du Modèle de JJ Thomson à celui de Rutherford.*

**II.A.1.** Par définition,  $(m_a + m_b) \cdot \overrightarrow{OC} = m_a \cdot \overrightarrow{OA} + m_b \cdot \overrightarrow{OB}$ , d'où  $(m_a + m_b) \cdot \vec{v}_C = m_a \cdot \vec{v}_A + m_b \cdot \vec{v}_B$

On applique le Théorème de la Résultante Cinétique au système {A+B} dans le référentiel (R) supposé

galiléen :  $(m_a + m_b) \cdot \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  car le système est isolé. Le mouvement de C est donc rectiligne uniforme.

**II.A.2.** Le référentiel barycentrique R\* est un référentiel centré lié au barycentre du système et doté des axes d'un référentiel galiléen (ici fixes dans R supposé galiléen). Le référentiel barycentrique lié à {A+B} est galiléen.

**II.A.3.** En utilisant **II.A.1** dans R\*, on a :  $m_a \cdot \vec{v}_A^* + m_b \cdot \vec{v}_B^* = \vec{0}$ .

**II.A.4.** Avec la définition du barycentre :  $m_a \cdot \overrightarrow{CA} + m_b \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ , En utilisant une relation de Chasles :

$$(m_a + m_b) \cdot \overrightarrow{CA} = -m_b \cdot \overrightarrow{AB} \text{ soit } \vec{r}_a = -\frac{m_b}{m_a + m_b} \cdot \vec{r} \text{ et } \vec{r}_b = +\frac{m_a}{m_a + m_b} \cdot \vec{r}$$

**II.A.5.** Le problème avait initialement 6 variables : les 3 variables d'espace de A et B. dans le référentiel R\*, si on connaît les coordonnées de  $\vec{r}$ , soit 3 variables, on connaît celles de A et B.

**II.A.6.** On applique le Principe Fondamental de la Dynamique au système { B } dans le référentiel barycentrique R\* (galiléen), il n'est soumis qu'à l'action de A, soit  $\vec{F}_b$ .

Soit  $m_b \cdot \frac{d\vec{v}_b^*}{dt} = \vec{F}_b = m_b \cdot \frac{d^2 \vec{r}_b}{dt^2} = \frac{m_a \cdot m_b}{m_a + m_b} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ . On est bien ramené à l'étude d'une particule

(fictive) M de masse  $\mu$  telle que  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$  soumise à  $\vec{F}_b$ .

**II.A.7.** Si  $m_a \ll m_b$ , alors avec **II.A.4.**  $\vec{r}_a \approx -\vec{r}$  et  $\|\vec{r}_b\| \ll \|\vec{r}\|$ . On peut donc considérer que  $B \approx C$  et  $M \approx A$ , de masse  $\mu \approx m_a$ .

**II.B.1.** On suppose une interaction entre un électron et la particule  $\alpha$ . Comme la masse de la particule  $\alpha$  est très grande devant celle de l'électron, on est ramené à l'approximation de la question **II.A.7**, on peut confondre la particule  $\alpha$  avec le barycentre du système { particule  $\alpha$  + électron }, celui est en mouvement rectiligne uniforme si on suppose le système isolé. Le mouvement de la particule  $\alpha$  est donc insensible à l'interaction avec les électrons.

**II.B.2.** En ce qui concerne l'interaction entre la particule  $\alpha$  et le noyau d'or, le système est inversé, la masse de l'atome d'or est très grande devant celle de la particule  $\alpha$ . Le barycentre est confondu avec le noyau d'or.

L'atome cible peut être considéré comme fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La déviation de la particule  $\alpha$  n'est due qu'à l'interaction (répulsive) avec le noyau d'or.

**II.B.3.a.** Le champ électrique créé par le noyau "de Thomson" a été calculé à la question **I.A.**

$$\text{A l'intérieur : } r < a : \vec{F} = \frac{2.e\rho.r}{3.\epsilon_0} \cdot \vec{e}_r = \frac{2.Z.e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{OM} \text{ avec } Z = 79$$

$$\text{A l'extérieur : } r > a : \vec{F} = \frac{2.Z.e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{OM}$$

$$\text{La norme maximale est obtenue pour } r = a \text{ soit } F_{\max} = \frac{2.Z.e^2}{4.\pi.\epsilon_0.a^2} = 3,64.10^{-6} \text{ N.}$$

**II.B.3.b.** On cherche un *majorant* de l'angle de déviation. On prend comme modèle une vitesse initiale colinéaire à  $Ox$  et une force constante colinéaire à  $Oy$  constante pour  $x \in [-a ; +a]$ , nulle en dehors.

On applique le principe fondamental à la particule de masse  $m$ , on projette et on intègre deux fois :

$$x = v_0.t - a \text{ et } y = \frac{1}{2}.F_{\max}.t^2/m \text{ en choisissant l'origine des dates pour } x = -a.$$

$$\text{L'angle de déviation est obtenu pour } x = +a \text{ soit } \tan\phi = v_y/v_x = F_{\max}.t/m.v_0 = 2.F_{\max}.a/m.v_0^2$$

$$\text{Une estimation d'un angle majorant la déviation exacte est } \phi \approx \frac{2.F_{\max}.a}{m.v_0^2} \approx 4,25.10^{-4} \text{ rad} \approx 0,0244^\circ$$

**II.B.3.c.** Avec 400 plans atomiques, la déviation maximale serait de  $400 \cdot 0,0244^\circ \approx 9,75^\circ$ . On est bien loin de la rétrodiffusion observée... Le modèle de Thomson ne valide pas les observations de l'expérience de Rutherford.

**II.C.1.** La force exercée par le noyau sur un électron est attractive en  $1/r^2$ , elle a donc la même forme que l'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles.

La correspondance électrostatique  $\leftrightarrow$  gravitation est la suivante :  $q_{\text{électron}} \leftrightarrow m_{\text{planète}}, q_{\text{noyau}} \leftrightarrow m_{\text{soleil}}$  et  $\epsilon_0 \leftrightarrow -1/4\pi G$  où  $G$  est la constante de gravitation universelle.

**II.C.2.** Le champ électrique créé dans tout l'espace par le noyau de charge  $Ze$  est  $\vec{E} = \frac{Z.e}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \cdot \vec{e}_r$  en

coordonnées sphériques. La force ressentie par la particule  $\alpha$  est donc  $\vec{F} = \frac{Z.e^2}{2.\pi.\epsilon_0.r^2} \cdot \vec{e}_r = -\vec{\text{grad}} W$  où

$W$  est l'énergie potentielle du système { noyau + particule  $\alpha$  }. On projette et on intègre soit

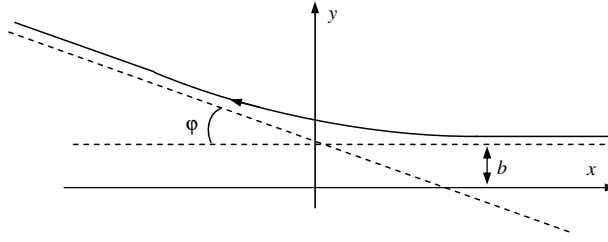
$$W = \frac{Z.e^2}{2.\pi.\epsilon_0.r} + C_{\text{ste}} \text{ avec l'origine des énergies à l'infini, on obtient } C_{\text{ste}} = 0, \text{ soit } K = \frac{Z.e^2}{2.\pi.\epsilon_0}.$$

**II.C.3.** On prend comme système { particule  $\alpha$  }, référentiel lié au noyau d'or supposé galiléen. La seule interaction tenue en compte est l'interaction électrostatique (newtonienne).

On applique le Théorème du Moment Cinétique :  $\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ , le moment cinétique

en  $O$  de la particule  $\alpha$  est donc un vecteur constant. Comme à la question **I.C.1.** le mouvement est plan.

**II.C.4.** La trajectoire est une conique, ici une branche d'hyperbole (la non enveloppante) car l'interaction est répulsive, le système { noyau d'or + particule  $\alpha$  } est non lié.



**II.C.5.**  $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + m_a \cdot K \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt}$  or  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$ , de plus on peut exprimer le moment cinétique  $\vec{L}$  en polaires dans le plan du mouvement soit  $\vec{L} = m_a \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_z$ , donc  $m_a \cdot \dot{\theta} = \frac{l}{r^2}$

On en tire donc  $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \wedge \vec{r} + K \cdot \frac{l}{r^2} \vec{e}_\theta = \frac{K \cdot l}{r^2} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z + K \cdot \frac{l}{r^2} \vec{e}_\theta = \vec{0}$ ,  $\vec{\mathcal{L}}$  est donc bien une constante du mouvement.

**II.C.6.** A l'instant initial, on a la particule  $\alpha$  très éloignée du noyau d'or, soit  $\vec{OM} = X \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y$  et  $\vec{v}_0 = -v_0 \cdot \vec{e}_x$ , on calcule le moment cinétique :  $\vec{L} = \vec{OM} \wedge -m_a v_0 \cdot \vec{e}_x = m_a b \cdot v_0 \cdot \vec{e}_z$ , on en tire donc  $\vec{\mathcal{L}} = -m_a \cdot v_0 \cdot \vec{e}_x \wedge m_a \cdot b \cdot v_0 \cdot \vec{e}_z + m_a \cdot K \cdot \vec{e}_x = m_a^2 b \cdot v_0^2 \cdot \vec{e}_y + m_a \cdot K \cdot \vec{e}_x$ .

A l'instant final, la particule  $\alpha$  est également très éloignée du noyau d'or mais elle a été déviée d'un angle  $\phi$  soit  $\vec{v} = v_0 \cdot (-\cos \phi \cdot \vec{e}_x + \sin \phi \cdot \vec{e}_y)$ , et  $\vec{e}_r = -\cos \phi \cdot \vec{e}_x + \sin \phi \cdot \vec{e}_y$ , on en tire donc la valeur de

$\vec{\mathcal{L}}$  soit :  $\vec{\mathcal{L}} = \vec{p} \wedge \vec{r} + m_a \cdot K \cdot \vec{e}_r = [m_a^2 b \cdot v_0^2 \cdot \sin \phi - m_a K \cdot \cos \phi] \cdot \vec{e}_x + [m_a^2 b \cdot v_0^2 \cdot \cos \phi + m_a K \cdot \sin \phi] \cdot \vec{e}_y$ . On a donc deux équations :

$$\text{sur } x : m_a^2 b \cdot v_0^2 \cdot \sin \phi - m_a K \cdot \cos \phi = m_a \cdot K \quad (1)$$

$$\text{sur } y : m_a^2 b \cdot v_0^2 \cdot \cos \phi + m_a K \cdot \sin \phi = m_a^2 b \cdot v_0^2 \quad (2)$$

On isole  $\sin \phi$  côté gauche :  $m_a^2 b \cdot v_0^2 \cdot \sin \phi = m_a \cdot K (1 + \cos \phi) \quad (1)$

$$m_a K \cdot \sin \phi = m_a^2 b \cdot v_0^2 (1 - \cos \phi) \quad (2)$$

et on fait le rapport membre à membre (1)/(2) avec  $\frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} = \frac{2 \cdot \cos^2(\phi/2)}{2 \cdot \sin^2(\phi/2)} = \frac{1}{\tan^2(\phi/2)} = \frac{m_a^2 b^2 \cdot v_0^4}{K^2}$

On en tire le résultat du texte :  $b = \frac{K}{m_a \cdot v_0^2} \cdot \frac{1}{\tan(\phi/2)}$

**II.C.7.a.**  $dn = J \cdot 2\pi \cdot b \cdot db$  : les particules passent dans un anneau de rayon  $b$  et d'épaisseur  $db$ .

**II.C.7.b.** On différencie le résultat de la question **II.C.6** pour obtenir  $db$  en fonction de  $d\phi$

$$db = \beta \cdot \frac{-(1 + \tan^2(\phi/2))}{\tan^2(\phi/2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot d\phi \text{ soit } b \cdot db = -\beta^2 \cdot \frac{1 + \tan^2(\phi/2)}{\tan^3(\phi/2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot d\phi$$

$$\text{Soit } \frac{dn}{J d\Omega} = \frac{2\pi b \cdot db}{2\pi \cdot \sin \phi \cdot d\phi} = -\frac{\beta^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\phi/2) \cdot \sin \phi \cdot \tan^2(\phi/2)} = -\frac{\beta^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^4(\phi/2)}.$$

Le modèle vérifie bien la loi expérimentale.

**II.C.7.d.** La trajectoire est une branche d'hyperbole, la force est newtonienne répulsive. La distance minimale d'approche est  $r_{\min} = c + a$  avec  $c$  la demi distance focale et  $a$  telle que  $E_{\text{méca}} = K/2a =$

$\frac{1}{2} m_a \cdot v_0^2$  ici. On a de plus  $c^2 = a^2 + b^2$  soit  $r_{\min} = \sqrt{\frac{K^2}{m_a^2 \cdot v_0^4} + b^2} + \frac{K}{m_a \cdot v_0^2}$ . La distance minimale

d'approche est obtenue pour  $b = 0$ .

$$r_m = \frac{2.K}{m_a \cdot v_0^2} = 4,2 \cdot 10^{-14} \text{ m} \quad (E_{\text{méca}} = 5,3 \text{ MeV} = 8,48 \cdot 10^{-13} \text{ J})$$

**II.C.7.e.** Plus la déviation est grande, plus le paramètre d'impact  $b$  est petit, plus la particule  $\alpha$  s'approche du noyau d'or. Si la loi de diffusion n'est plus valable pour des grands angles (ou des petits paramètres d'impact), donc pour des distances d'approche petites, cela signifie qu'il y a une autre interaction en prendre en compte, qui n'est plus négligeable pour  $r_m \rightarrow 0 \dots$  (interaction forte...).

Pour  $\phi_0 = 150^\circ$  (angle "frontière"), on a  $b_0 = \frac{K}{2.E_{\text{méca}}} \cdot \frac{1}{\tan(\phi_0/2)} = 5,75 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ , et  $r_{m0} = 4,3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ .

**II.C.7.f.** On considère que l'ordre de grandeurs du noyau est de l'ordre du *fermi* soit  $1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Il y a un facteur 40 entre  $r_{m0}$  et l'ordre de grandeur actuel pour le noyau. Le modèle pose problème pour les petites distances d'approche.

### Partie III – Modèle semi-quantique de Bohr

**III.A.1.** Système {électron}, le référentiel est lié au noyau fixe, suppose galiléen. La seule interaction est la force électrostatique. On applique le Principe Fondamentale de la Dynamique  $m_e \cdot \vec{a} = \vec{F}$ . La trajectoire est circulaire, on travaille en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire soit :  $\vec{a} = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{e}_r + R \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$ , comme la force est radiale, on en tire que la trajectoire est circulaire uniforme ( $\ddot{\theta} = 0$ ), en en projection sur le vecteur radial :  $-m_e \cdot R \cdot \dot{\theta}^2 = -m_e \cdot \frac{v^2}{R} = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}$

$$\text{d'où } v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot R}} \text{ et } T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot R^3}{e^2}}$$

**III.A.2.** La méthode est la même qu'à la question **II.C.2**, on a donc  $E_p = \frac{-e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$ , et  $E = E_C + E_p$ .

Dans le cas de la trajectoire circulaire (uniforme) de rayon  $R$  :  $E = \frac{-e^2}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}$ .

**III.A.3.** On calcule le moment cinétique :  $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \cdot \vec{v} = m_e \cdot R \cdot v \cdot \vec{e}_z$  donc  $L = \sqrt{\frac{m_e \cdot e^2 \cdot R}{4\pi \cdot \epsilon_0}}$ . On en sort

$\frac{1}{R} = \frac{m_e \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2}$ . Dans l'énergie mécanique  $E = \frac{-e^2}{8\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{m_e \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2} = \frac{-m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot L^2}$  On a donc la formule

demandée avec  $Y = \frac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2}$ .

**III.A.4.**  $E_p - E_n = h \cdot \nu_{np} = h \cdot c / \lambda_{np}$  on aura donc  $1/\lambda_{np} = (E_p - E_n) / hc$

$\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{Y}{h \cdot c} \left[ \frac{1}{\hbar^2 \cdot n^2} - \frac{1}{\hbar^2 \cdot p^2} \right] = \frac{Y}{2\pi \cdot \hbar^3 \cdot c} \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right]$  On retrouve donc bien la loi de Balmer – Rydberg

avec  $R_H = \frac{Y}{2\pi \cdot \hbar^3 \cdot c} = \frac{m_e \cdot e^4}{4\pi \cdot (4\pi \cdot \epsilon_0)^2 \cdot \hbar^3 \cdot c} = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

**III.A.5.** Si on voulait tenir compte de la mobilité du noyau, il faudrait revenir à l'étude de la particule

fictive dans le référentiel barycentrique (question II.A.), on remplace  $m_e$  par  $\mu = \frac{m_e \cdot m_p}{m_e + m_p}$ . Comme la masse du proton est très grande devant celle de l'électron, on aura  $\mu \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right) = m_e + \Delta m$ . On

aura une correction relative  $\frac{\Delta R_H}{R_H} = \frac{\Delta m}{m_e} = -5.10^{-4}$  ce qui ne modifiera que le 4<sup>e</sup> chiffre significatif. Ici, toutes les données sont à 3 chiffres, cette correction est donc inutile à la précision de l'énoncé.

**III.A.6.** le modèle de Bohr est dit semi quantique car les niveaux d'énergie sont quantifiés mais l'approche reste classique (l'électron est localisé)..

**III.B.1.** On a un diviseur de tension entre le filament et la grille (on néglige l'intensité du courant de l'électrode collectrice) soit  $V_G = \frac{x}{R} \cdot V_0$ . les résistances réglables servent à faire varier  $V_G$  de 0 à  $V_0$  sans faire varier la résistance totale dans la branche du générateur de tension à vide  $V_0$ . Il suffit d'utiliser un rhéostat pour avoir une résistance variable entre le filament et la grille, et une résistance totale constante.

**III.B.2.** On étudie comme système {un électron} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que la seule force exercée sur l'électron est la force électrostatique  $\vec{F} = -e \cdot \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ . Cette force dérive donc d'une énergie potentielle  $E_p = -e \cdot V$  (à une constante près que l'on choisit nulle).

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'électron entre le filament et la grille :

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_G^2 - \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_F^2 = W_{F \rightarrow G} = E_p(F) - E_p(G) = e \cdot (V_G - V_F) \text{ avec } v_F = 0 \text{ et } V_F = 0.$$

On en tire donc :  $\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_G^2 = e \cdot V_G$  et  $v_G = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V_G}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot x \cdot V_0}{R \cdot m_e}}$ .

**III.B.3.** Avec le même raisonnement on en tire  $v_{EC} = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot (V_G - \mathcal{E})}{m_e}}$  la vitesse des électrons au niveau

de l'électrode collectrice est donc légèrement inférieure à la vitesse au niveau de la grille. Le potentiel diminuant de la grille à l'électrode, si un électron est arrêté entre les deux, il ne pourra pas aller jusqu'à l'électrode.

**III.B.4.** L'ampèremètre mesure l'intensité du courant entre l'électrode et le filament, donc le flux d'électrons atteignant l'électrode. Cette électrode "collecte" les électrons initialement émis par le filament (ayant l'énergie nécessaire), d'où son nom.

**III.B.5.a.** Pour  $0 \leq V_G \leq V_r$  on a une augmentation de l'intensité avec le potentiel électrique, ce qui est normal du fait que les électrons émis sont de plus en plus accélérés avec l'augmentation de  $V_G$  : leur vitesse augmente, donc le flux d'électrons atteignant l'électrode augmente.

**b.** Pour  $V_G = V_r$  il y a un arrêt de l'accroissement de l'intensité, donc il y a des électrons émis par le filament qui n'atteignent plus l'électrode. La seule solution est qu'ils soient arrêtés dans l'espace entre la grille et le filament : ils ont donc subi une collision inélastique avec un atome constituant la vapeur du gaz dans l'ampoule : cette collision prélève à l'électron une énergie égale à  $e \cdot V_r$ .

**c.** Dès que  $V_G > V_r - \mathcal{E}$ , les électrons ont de nouveau l'énergie suffisante pour atteindre l'électrode collectrice, même après un choc inélastique (à noter que la courbe est "arrondie" du fait



qu'expérimentalement les électrons ne sont pas émis avec une vitesse nulle, mais avec une vitesse *moyenne* nulle). Le phénomène se reproduit pour les multiples de  $V_r$  car les électrons peuvent subir plusieurs chocs inélastiques (la courbe ne revient jamais à  $I = 0$ , pour deux raisons : la distribution des vitesses des électrons à l'émission, et les probabilités de choc non égales à 1).

**III.B.6.** L'atome prend donc à l'électron l'énergie  $W_r = e.V_r$ .

**III.B.7.a.** Les atomes de mercure sont "excités" : leur nuage électronique n'est plus dans la configuration de plus basse énergie. (ils ne s'ionisent pas...l'énergie n'étant pas suffisante).

**b.** Cette expérience ne fait que confirmer qu'il existe *au moins* un niveau d'énergie quantifié dans le nuage électronique. Elle ne valide pas l'existence de niveaux d'énergie discontinus...

**IV.A.** L'atome de Bohr est constitué d'un électron tournant autour du proton, il s'agit donc d'un dipôle rayonnant. Celui-ci doit donc perdre son énergie mécanique par rayonnement ce qui a deux conséquences : tout d'abord une chute de l'électron sur le proton, donc une durée de vie finie pour l'atome d'hydrogène, et ensuite comme la fréquence de rotation de l'électron est une fonction du rayon de l'orbite, une variation continue de la fréquence du rayonnement émise par l'atome. Ces deux faits ne sont pas observés (heureusement pour le premier).

Le modèle de Bohr est donc faux, et l'électron ne doit pas être en mouvement dans le voisinage du proton sous peine de perdre son énergie par rayonnement.

**IV.B.1.** L'énergie d'un photon est  $E = h.v$ .  $[h]$  s'exprime donc en J.s. ( $\hbar$  aussi).

**IV.B.2.** On construit une *action* de dimensions énergie \* temps caractéristique du système étudié. Ici on peut caractériser le système par une énergie cinétique (rotation d'une aiguille) \* durée caractéristique (la seconde) :  $\frac{1}{2}J.\omega^2$  pour l'énergie cinétique de rotation d'une aiguille sur une montre : avec  $J$  de l'ordre de  $m.\ell^2$ , avec  $m \approx 1$  g et  $\ell \approx 1$  cm. soit  $\frac{1}{2} \cdot 1.10^{-7} \cdot (2\pi/60)^2 \approx 5.10^{-10}$  J ce qui nous fait une action d'ordre de grandeur  $10^{-10}$  J.s  $\gg \hbar$ . Les horlogers n'ont donc pas besoin de la mécanique quantique.

**IV.B.3.** L'action sera  $P/v^2$  soit  $10^3 / (10^6)^2 \approx 10^{-9}$  J.s  $\gg \hbar$ . L'antenne de radio ne relève donc pas non plus de la mécanique quantique.

**IV.B.4.** Pour le circuit oscillant, on calcule une énergie stockée, par exemple dans la bobine :

$$\frac{1}{2}L.i^2 \approx 5.10^{-11} \text{ J et une fréquence caractéristique } \omega = 2\pi.f = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ soit } f \approx 1,6.10^6 \text{ Hz}$$

Donc une action d'ordre de grandeur  $\frac{1}{2}L.i^2 / f \approx 3.10^{-17}$  J.s  $\gg \hbar$ . Ce circuit ne relève pas de la mécanique quantique.

**IV.B.5.** On calcule une fréquence caractéristique  $\nu = c / \lambda = 3.10^{15}$  Hz et donc une action d'ordre de grandeur  $E / \nu \approx 6.10^{-34}$  J.s de l'ordre de grandeur de  $\hbar$ . L'étude de l'atome d'hydrogène relève donc de la mécanique quantique. Le modèle semi-quantique de Bohr n'est donc pas valable.

**IV.B.6.** L'électron est délocalisé : il est présent dans tout l'espace avec une fonction de probabilité dépendant de sa position (du coup, les barycentres + et - peuvent être confondus : il n'y a plus de rayonnement dans l'état stable).

**IV.B.7.** Selon le phénomène à expliquer et sa précision expérimentale, on choisit un modèle  $\pm$  complexe pour le décrire. Du point de vue historique, l'élaboration d'un modèle et son évolution caractérisent l'avancée des connaissances de l'époque.