TD M3 : Approche énergétique de la mécanique

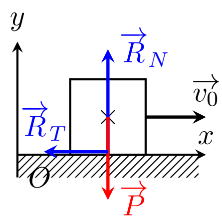
Questions de cours à savoir refaire

Théorème de l'énergie cinétique

Connaitre l'expression de l'énergie cinétique, la définition de la puissance d'une force, du travail élémentaire et du travail d'une force. Savoir si une force est motrice ou résistante ou ne travaille. Énoncer et utiliser le théorème de l'énergie cinétique, sous forme instantanée ou bilan.

1 Distance de freinage par frottements solides

On considère un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, qui glisse avec frottements sur un plan horizontal. Le mobile glisse, donc $R_T = \mu R_N$. Il est lancé avec une vitesse initiale horizontale de norme v_0.



1. À l'aide du PFD, donner l'expression de la réaction tangentielle en fonction de μ, m et g.
2. En déduire l'expression du travail de cette force entre l'origine O et le point d'arrêt A.
3. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme bilan et en déduire la distance d'arrêt ℓ en fonction de v_0, μ et g.
4. Faire l'application numérique pour une voiture se déplaçant à 90 km/h sur une route sèche $\mu = 0,6$ puis mouillée $\mu = 0,2$.

Théorème de l'énergie mécanique et énergies potentielles

Définir une force conservatif et l'énergie potentielle dont elle dérive. Énoncer et utiliser le théorème de l'énergie mécanique en présence ou non de forces non-conservatives, sous forme instantanée ou bilan. Connaitre les expressions des énergies potentielles usuelles : pesanteur, force de rappel élastique, interaction gravitationnelle. Exprimer la force à partir de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement unidimensionnel.

2 Vitesse en bas d'une pente de profil quelconque en l'absence de frottements

On considère un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, qui descend le long d'une pente de profil quelconque (pas forcément rectiligne). Il n'est soumis qu'au poids, part au repos d'un point initial A d'altitude z_A et arrive en un point final B d'altitude z_B tel que $z_A - z_B = h$.

Utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour trouver la vitesse v_B atteinte en bas de la pente.

3 Énergie d'un oscillateur harmonique horizontal

On considère un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, attaché à un ressort (k, ℓ_0) fixe en O et guidé sur un axe horizontal (Ox). On néglige les frottements, le poids est orthogonal au mouvement $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ et la réaction de la tige est normale.

1. Retrouver l'équation différentielle de l'OH à l'aide du théorème de l'énergie mécanique instantané.
2. Résoudre l'équation différentielle avec une longueur initiale $\ell_i \neq \ell_0$ et $v_0 = 0$ puis exprimer la vitesse $\dot{x}$.
3. Calculer puis tracer l'allure de $E_c(t)$ et $E_p(t)$. On précisera leur période. Que vaut $E_c(t) + E_p(t)$? Commenter.

Équilibres, stabilité, mouvement dans un puits de potentiel

Notion d'état libre et d'état lié. Condition d'équilibre et de stabilité par étude de l'énergie potentielle. Principe de l'approximation harmonique au fond d'un puits de potentiel.

4 Positions d'équilibre du pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m attachée au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ. L'accélération de pesanteur est verticale descendante $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{u_x}$.

1. Effectuer un bilan des forces et en déduire l'expression de l'E_p du point M en fonction de m, g, ℓ et θ.

2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle puis déterminer les positions d'équilibre θ_n et étudier leur stabilité.
3. Retrouver ces résultats par le calcul.

On se place dans l'approximation des petites oscillations $\theta \leqslant 20^\circ$. On donne $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

4. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par θ dans cette approximation. En déduire la période T du mouvement.

Exercices

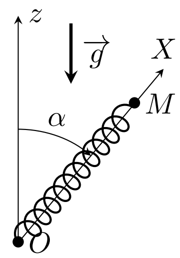
5 Saut à la perche (*)

Par conservation de l'énergie, évaluer la hauteur maximale à laquelle peut sauter un perchiste.

Le record du monde est aujourd'hui détenu par Renaud Lavillenie avec un saut de 6,16m. Comment expliquer la hauteur effectivement atteinte ?

6 Tige inclinée avec un ressort (*)

On considère une tige fixe, dans un plan vertical (Oxz), faisant un angle α avec la verticale. Un anneau de masse m est astreint à se déplacer sans frottements le long de la tige. Il est de plus relié à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixe en O. On repèrera la position de l'anneau par la coordonnée $OM = X$ le long de la tige.



1. Quelles sont les forces conservatives appliqués à M ? Déterminer les expressions de leurs énergies potentielles en fonction de X et α.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TEM.
3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles. Étudier la fonction $E_p(X)$ dans le cas où $mg\cos\alpha < k\ell_0$ puis tracer son allure.
4. Discuter sur le graphique des mouvements possibles en prenant $X(t=0) = \ell_0$ et $v_X(t=0) = v_0$. Quelle valeur maximale peut prendre la vitesse v_0 pour que l'anneau n'atteigne pas O ?
5. Déterminer $v(X)$ (en fonction de la position) et $X(t)$ dans les conditions précédentes.

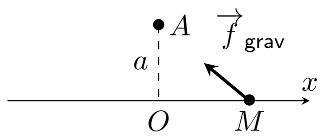
7 Énergie potentielle associée à la constante cosmologique (*)

En relativité générale, Albert EINSTEIN a introduit la constante cosmologique Λ que l'on peut interpréter comme une force agissant sur la matière qui s'exprime $\overrightarrow{F}_\Lambda = m\dfrac{\Lambda c^2}{3}\overrightarrow{OM}$, m étant la masse du corps ponctuel M subissant la force et c la célérité de la lumière. On supposera que l'origine répulsive de la force est en O, position du centre du Soleil de masse $M_S = 2,010^{30}$ kg.

1. Quelles sont les dimensions et l'unité S.I. de Λ et Λc^2 ?
2. En comparant avec l'interaction gravitationnelle, justifier le qualificatif “antigravitationnel”. Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à cette force. On prendra $E_p(r=0) = 0$.
3. À quelle distance r_e de O la force antigravitationnelle compense-t-elle la force gravitationnelle ? Calculer sa valeur sachant que la valeur estimée de Λ est d'environ 10^{-52} uSI.

8 Mouvement sur un axe dans un champ gravitationnel (**)

Une particule de masse m est assujettie à se déplacer sans frottement sur un axe (Ox). Elle est soumise à la réaction normale de l'axe et au champ gravitationnel créé par un point A de masse m_A situé à une distance a de l'axe (Ox). O est le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox). À l'instant $t = 0$, la particule se trouve en O et possède une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u}_x$, $v_0 > 0$.



1. Exprimer la longueur AM en fonction de x puis tracer l'allure du potentiel de l'interaction gravitationnelle en fonction de x.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique à l'aide des C.I. puis la placer sur le graphe d'énergie potentielle. Quels types de mouvements sont possibles ? Donner l'expression de la vitesse $v(x)$.

3. On souhaite étudier le mouvement lorsque la particule reste localisée au voisinage du point O. Mettre l'expression de l'énergie sous la forme $E_p = Ep0 + \frac{1}{2}k_{\text{éq}}x^2$. En déduire l'expression de la période T_0 du mouvement.
On rappelle que $(1+X)^\alpha \simeq 1 + \alpha X$ lorsque $X \ll 1$.

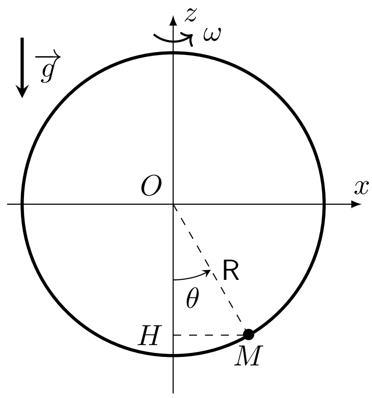
9 Toboggan (*)

Un adulte de masse $m = 70$kg descend d'un toboggan d'une hauteur $h = 5$m faisant un angle $\alpha = 45º$ avec le sol. La norme de la force de frottements $\overrightarrow{T}$ est donnée par $||\overrightarrow{R_T}|| = \mu||\overrightarrow{R_N}||$ où $\mu = 0,4$ est le coefficient de frottement et $\overrightarrow{R_N}$ est la réaction normale. On prendra $g = 9,8$m.s^{-2}

1. Calculer le travail de la force de frottement entre le haut et le bas du toboggan.
2. Déterminer la vitesse de la personne en bas du toboggan. La comparer à celle qu'il aurait s'il n'y avait pas de frottements.

10 Équilibre d'un anneau sur un cerceau en rotation (**)

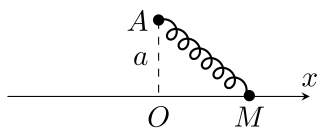
Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, coulisse sans frottement sur un cerceau contenu dans un plan vertical. Le cerceau est ensuite astreint à tourner autour d'un de ses diamètre, confondu avec l'axe (Oz) vertical, , avec une vitesse angulaire ω constante. Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ du cerceau, le point matériel subit une force d'inertie supplémentaire $\overrightarrow{f_{\text{ie}}} = m\omega^2 HM\,\overrightarrow{u_x}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (Oz).



1. Donner l'expression de $\overrightarrow{f_{\text{ie}}}$ en fonction de m, ω, R et θ et en déduire la forme de l'énergie potentielle dont elle dérive.
2. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de m, g, R et θ.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
4. Trouver les positions d'équilibre du point matériel M dans $\mathcal{R}$.
5. Discuter de la stabilité de ces équilibres en fonction de la vitesse de rotation ω.

11 Détermination de positions d'équilibre. Étude de leur stabilité. (***)

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. La masse m glisse sans frottement le long de l'axe Ox. Elle est attachée à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, fixé en A d'ordonnée a.



1. Exprimer $E_p(x)$, l'énergie potentielle de la masse m à une constante additive près.
2. En déduire les positions d'équilibre possibles. On distinguera les trois cas suivant : $a < \ell_0$, $a = \ell_0$ et $a > \ell_0$.
3. Étudier la stabilité des positions d'équilibre déterminées précédemment.
4. Déterminer la période des petites oscillations au voisinage des positions d'éq. stables pour $a < \ell_0$ puis $a > \ell_0$.
5. On se place dans le cas $a = \ell_0$. Établir l'équation des oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable. Montrer que l'on n'obtient plus d'oscillations harmoniques. On note T, la période des oscillations et x_0 leur amplitude. Établir une relation intégrale entre T et x_0.

12 Glissement d'une chaîne (***)

Un plan horizontal est prolongé par un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. L'origine O de l'axe (Ox), orienté le long du plan incliné, coïncide avec le sommet de l'angle.

L'objet considéré est une chaine de longueur L, de masse m et de densité linéique ρ constante ($m = L\rho$), pouvant glisser sans frottement sur le plan horizontal et sur le plan incliné. L'accélération de gravité $\overrightarrow{g}$ est verticale, orientée vers le bas et de norme $g = 9,8$m.s^{-2}. On désigne par x l'abscisse de l'extrémité A de la chaine sur le plan incliné. Celle-ci est lâchée au repos à $t = 0$ lorsque l'abscisse de A vaut $a > 0$ et $a < L$.

Calculer la vitesse de la chaine lorsque $x = L$, c'est à dire lorsque le dernier maillon quitte le plan horizontal. On montrera que l'énergie mécanique du système vaut $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \dfrac{mx}{L}g\dfrac{x}{2}\sin\alpha$ et on utilisera le fait que toutes les forces considérées sont conservatives pour en déduire une équation différentielle sur x.