CHAPITRE 4

Circuit linéaire du 2nd ordre

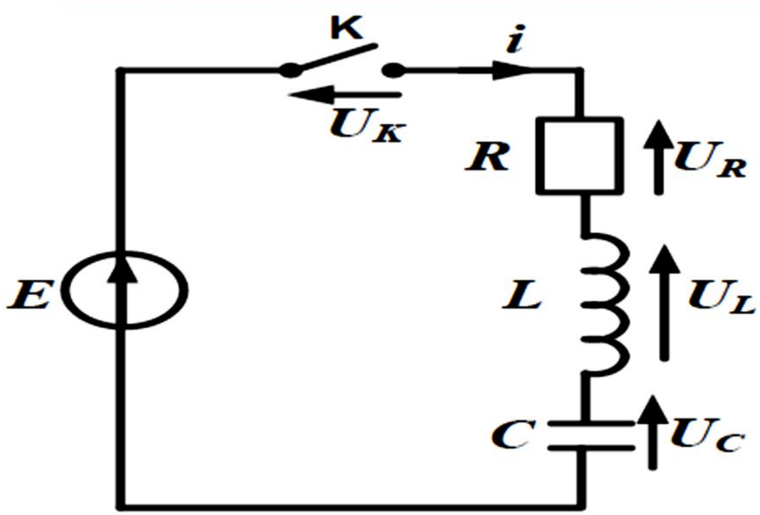
Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction

Ce chapitre concerne **l'étude de la réponse temporelle de systèmes d'ordre deux, qu'ils soient électriques ou mécaniques.** Nous étudierons essentiellement le circuit RLC série comme modèle de l'oscillateur amorti. Nous verrons en effet qu'une analogie électromécanique permet d'identifier formellement cet oscillateur amorti (du fait de l'existence d'une résistance dans le circuit) à l'oscillateur mécanique (masse relié à un ressort et astreinte à se déplacer suivant l'axe horizontal) amorti par frottement visqueux (c'est-à-dire que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse).

Circuit RLC série: régime forcé et régime libre

Régime forcé (1)



- un générateur de tension continue de $f.é.m$ est branché aux bornes du circuit RLC ;
- pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.

- Dans ce circuit i est l'intensité du courant, U_K la tension aux bornes de l'interrupteur, U_C la tension aux bornes du condensateur, U_L la tension aux bornes de l'inductance et U_R la tension aux bornes de la résistance. En convention récepteur on a :

$$U_R = Ri \quad U_L = L\frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt} \Rrightarrow U_R = RC\frac{dU_C}{dt} \quad \text{et} \quad U_L = LC\frac{d^2U_C}{dt^2}$$

Régime forcé (2)

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert :

$$\boldsymbol{i = 0; \quad U_R = U_C = U_L = 0; \quad U_K = E}$$

- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé : $U_K = 0$ (tension aux bornes d'un fil donc même potentiel). En appliquant la loi des mailles on a : $\boldsymbol{U_R + U_L + U_C = E}$

En remplaçant U_R , U_C et U_L par leur expression, **la tension U_C aux bornes d'un circuit *RLC* série soumis à l'échelon de tension *E* vérifie l'équation différentielle de second ordre**:

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E}}}$$

Régime forcé (3)

On pose :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \Longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 est **la pulsation propre du circuit**

$$\alpha = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

α est **le coefficient d'amortissement** (sans dimension)

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q **est le facteur de qualité** (sans dimension)

On définit aussi le facteur d'amortissement par :

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

Régime forcé (4)

L'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2}+2\alpha\omega_0\frac{dU_C}{dt}+\omega_0{}^2U_C=\frac{E}{LC}$$

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux solutions :

$$\text{Réponse complète : } u_C(t)=\begin{cases}\underbrace{\text{réponse du régime transitoire : } u_{C\,tr}(t)}_{\substack{\text{Partie temporaire du circuit}\\ \text{Maths} \Rightarrow \text{SGSSM}}}\\ +\\ \underbrace{\text{réponse du régime permanent : } E}_{\substack{\text{Partie permanente du circuit}\\ \text{Maths} \Rightarrow \text{SPASM}}}\end{cases}$$

☞ **Deux conditions initiales sur $U_C(t)$ sont nécessaires pour déterminer complètement la solution générale.**

Régime forcé (5)

La réponse du régime transitoire $U_{Ctr}(t)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre sans second membre,

$$\boldsymbol{\frac{d^2U_{Ctr}}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{dU_{Ctr}}{dt} + {\omega_0}^2U_{Ctr} = 0}$$

On cherche une solution de la forme e^{rt} que l'on réinjecte dans l'équation précédente. On arrive à l'équation caractéristique de la forme :

$$r^2 + 2\alpha\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$$

Régime forcé (6)

Il s'agit à présent d'une équation algébrique. Dans le cas général, r admet deux solutions r_1 et r_2 qui sont complexes ou réelles, ce qui donne:

$$\boldsymbol{U_{Ctr}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}}$$

Où $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$ sont des constantes (complexes conjuguées car $U_{Ctr}(t)$ doit être réelle) que l'on détermine à partir des conditions initiales du problème. La nature de l'évolution de $U_{Ctr}(t)$ va dépendre du facteur de qualité Q donc de l'amortissement du système. En effet selon la valeur de Q , la nature des racines r_1 et r_2 sera différente.

Régime forcé (7)

❑ Le régime apériodique : $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha > 1$ ou $Q < 1/2$

Le polynôme caractéristique admet **2 racines négatives** :

$$r_1 = -\alpha\omega_0 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

$$r_2 = -\alpha\omega_0 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est : $u_{Ctr} = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_{Ctr} + E \Longrightarrow U_C = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E$$

Régime forcé (8)

Application des conditions de continuité

La tension U_C aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans l'inductance sont continues. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sur la tension et l'intensité s'écrivent donc : $U_C(t = 0)$ et $i(t = 0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} i = C\dfrac{dU_C}{dt} \\ i(t = 0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dU_C}{dt}(t = 0) = 0$$

Les deux contions initiales permettant de trouver les constantes sont :

$$\boldsymbol{U_C(t = 0)\ \ et\ \ \frac{dU_C}{dt}(t = 0) = 0}$$

Régime forcé (9)

Il vient en appliquant ces conditions initiales:

$$U_C(t=0)=0 \Longrightarrow A_1+A_2+E=0$$

$$\frac{dU_C}{dt}(t=0)=0 \Longrightarrow r_1A_1+r_2A_2=0$$

Il vient donc :

$$A_1=\frac{r_2}{r_1-r_2}E \qquad \text{et} \quad A_2=-\frac{r_1}{r_1-r_2}E$$

La tension U_{Ctr} aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{Ctr}(t)=E\left(\frac{r_2}{r_1-r_2}e^{r_1t}-\frac{r_1}{r_1-r_2}e^{r_2t}\right)}}$$

Régime forcé (10)

$$u_{C\,tr}(t) = \underbrace{e^{-\beta t}\left(A_1 e^{-\Omega t} + A_2 e^{\Omega t}\right)}_{\text{termes purement exponentiels}}$$

La tension U_C aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\boxed{U_C(t) = E\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + 1\right)}$$

La tension u **tend vers sa valeur finale sans osciller**, ce qui justifie le nom donné à ce régime. Le régime apériodique s'observe pour de **faibles valeurs du facteur de qualité** c'est-à-dire pour une valeur élevée de la résistance (**amortissement trop fort**).

Régime forcé (11)

❑ **Le régime pseudopériodique : $\Delta < 0 \Rightarrow \alpha < 1$ ou $Q > 1/2$**

Le polynôme caractéristique admet **2 racines complexes conjuguées à partie réelle négative** :

En posant :

$$\Omega^2 = -\Delta' = -\omega_0{}^2(\alpha^2 - 1) \Rightarrow \Omega = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Ω est appelée la **pseudo-pulsation** dont la **pseudo-période** est :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{4Q^2}{4Q^2-1}}$$

Régime forcé (12)

Il vient :

$$\boldsymbol{r_1} = -\boldsymbol{\alpha\omega_0} - \boldsymbol{j\Omega} = -\boldsymbol{\omega_0}\left(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{j}\sqrt{1-\boldsymbol{\alpha}^2}\right) = -\frac{\boldsymbol{\omega_0}}{2\boldsymbol{Q}}\left(1 + \boldsymbol{j}\sqrt{4\boldsymbol{Q}^2 - 1}\right)$$

$$\boldsymbol{r_2} = -\boldsymbol{\alpha\omega_0} + \boldsymbol{j\Omega} = -\boldsymbol{\omega_0}\left(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{j}\sqrt{1-\boldsymbol{\alpha}^2}\right) = -\frac{\boldsymbol{\omega_0}}{2\boldsymbol{Q}}\left(1 - \boldsymbol{j}\sqrt{4\boldsymbol{Q}^2 - 1}\right)$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_{Ctr} = [A\,cos(\Omega t) + B\,sin(\Omega t)]e^{-\alpha\omega_0 t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_{Ctr} + E \Longrightarrow U_C = [A\,cos(\Omega t) + B\,sin(\Omega t)]\boldsymbol{e}^{-\alpha\omega_0 \boldsymbol{t}} + E$$

D'après les conditions initiales (comme dans le régime apériodique), on a :

$$U_C(t=0) = 0 \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

Régime forcé (13)

$$\frac{dU_C}{dt}(t=0)=0 \Rightarrow B\Omega-\alpha\omega_0 A=0 \ \Rightarrow B=\frac{\alpha\omega_0}{\Omega}E$$

La tension U_{Ctr} aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{Ctr}(t)=-Ee^{-\alpha\omega_0 t}\left[\cos(\Omega t)+\frac{\alpha\omega_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]}}$$

$$u_{Ctr}(t)=\underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{décroissante exponentielle de l'amplitude. (l'energie du système diminue)}}\underbrace{\left(A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\right)}_{\text{facteur oscillant à la pseudo-pulsation }\Omega}=Ce^{-\beta t}\cos(\Omega t+\varphi)$$

Régime forcé (14)

La tension U_C aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\boxed{U_C(t) = E\left\{1 - e^{-\alpha\omega_0 t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\alpha\omega_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]\right\}}$$

Le régime pseudopériodique s'observe pour **des valeurs élevées du facteur de qualité** donc pour des valeurs faibles de résistance (**amortissement faible**)

L'évolution de $U_C(t)$ donne lieu à des oscillations amorties. La durée caractéristique de la décroissance est donnée par :

$$\boxed{\tau = 2Q/\omega_0}$$

En régime pseudo-périodique, la pseudo-période T des oscillations amorties est constante mais diffère de la période propre.

Régime forcé (15)

❑ **Le régime critique : $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $Q = 1/2$**

C'est la situation intermédiaire entre les deux régimes précédents. Le polynôme caractéristique admet **une racine réelle double négative** :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_{Ctr} = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_{Ctr} + E \Longrightarrow U_C = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + E$$

D'après les conditions initiales (comme dans le régime apériodique), on a:

$$U_C(t = 0) = 0 \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

Régime forcé (16)

$$\frac{dU_C}{dt}(t=0)=0 \Rightarrow B-\omega_0 A=0 \Rightarrow B=-E\omega_0$$

La tension U_{Ctr} aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{Ctr}(t)=-E(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}}$$

$$u_{Ctr}(t)=(a+bt)e^{-\omega_0 t}$$

Régime forcé (17)

La tension U_C aux bornes du condensateur a pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = E[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}]}}$$

Le circuit atteint **le régime permanent sans osciller** car l'amortissement est devenu trop important. Il s'agit du cas où **l'équilibre (régime permanent) est atteint le plus rapidement**.

Quand $Q = 1/2$ alors $R = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, on parle de **résistance critique.**

Régime forcé (18)

On obtient l'intensité i du courant en dérivant la tension U_C aux bornes du condensateur obtenu dans chaque régime :

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$$

✓ <u>**Le régime apériodique**</u> **:** $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha > 1$ **ou** $Q < {}^{1}\!/_{2}$

$$\boxed{i(t) = C\frac{r_1 r_2 E}{r_1 - r_2}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right)}$$

Régime forcé (19)

✓ <u>Le régime critique</u> : $\Delta = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$ ou $\boldsymbol{Q} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}$

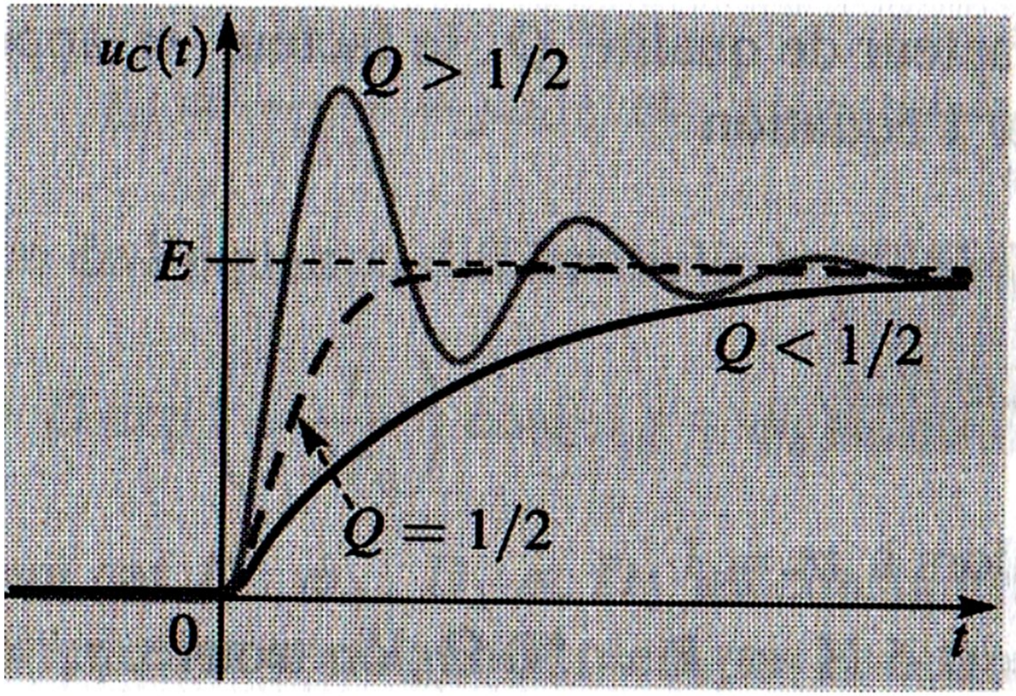
$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{i(t) = CE{\omega_0}^2 t e^{-\omega_0 t}}}}$$

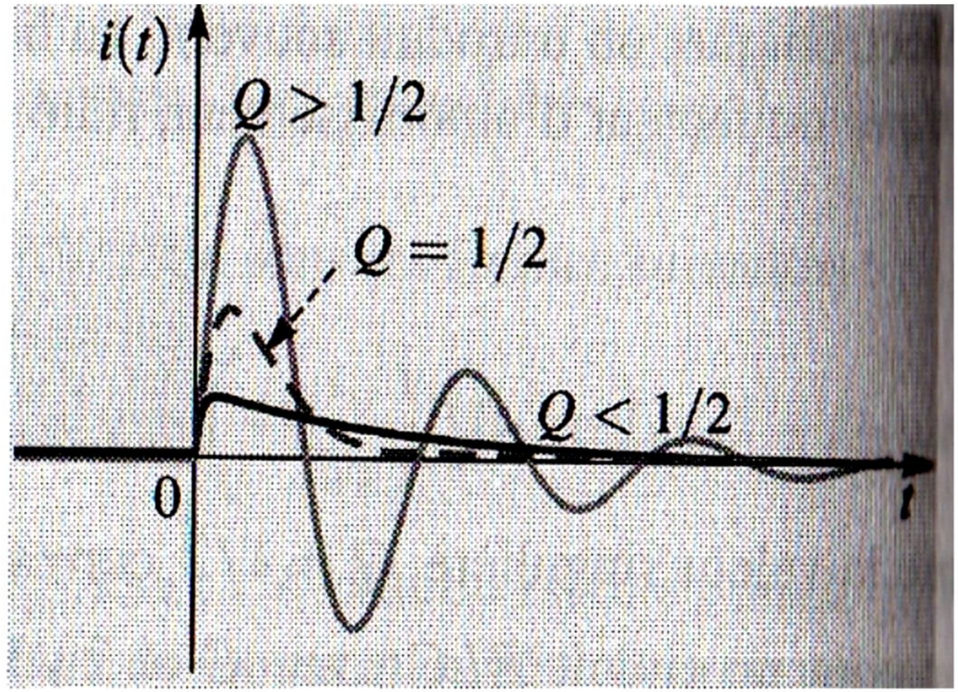
✓ <u>Le régime pseudo-périodique</u>:$\Delta < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} < 1$ **ou** $\boldsymbol{Q} > {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}$

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{i(t) = CE\frac{\Omega^2 + \alpha^2{\omega_0}^2}{\Omega} e^{-\alpha\omega_0 t}\, sin(\Omega t)}}}$$

Régime forcé (20)

❑ Représentations graphiques

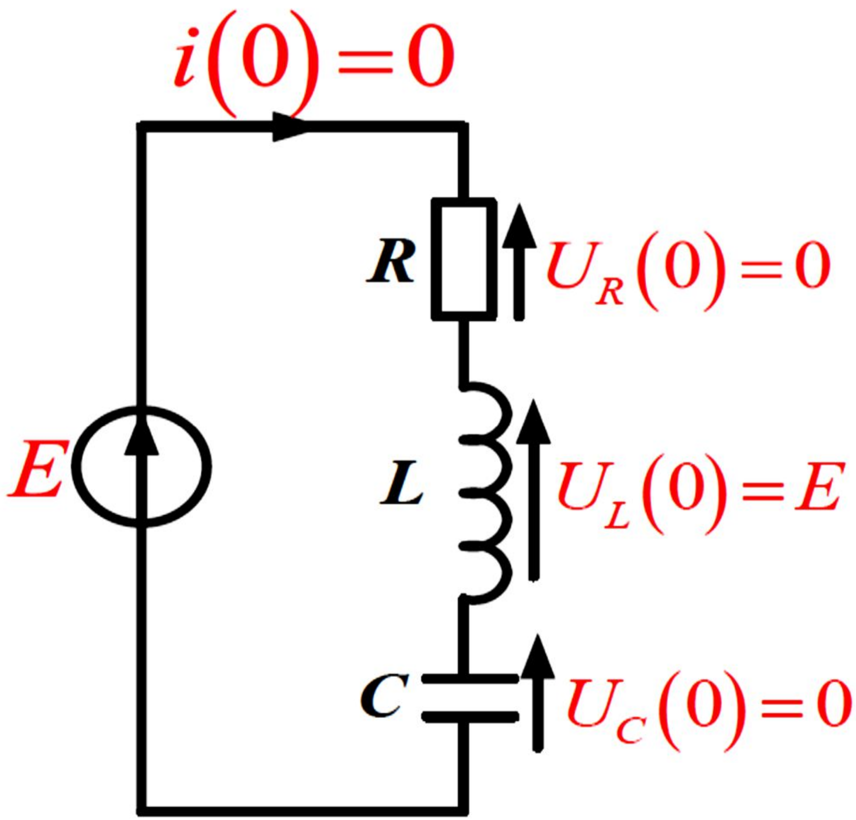


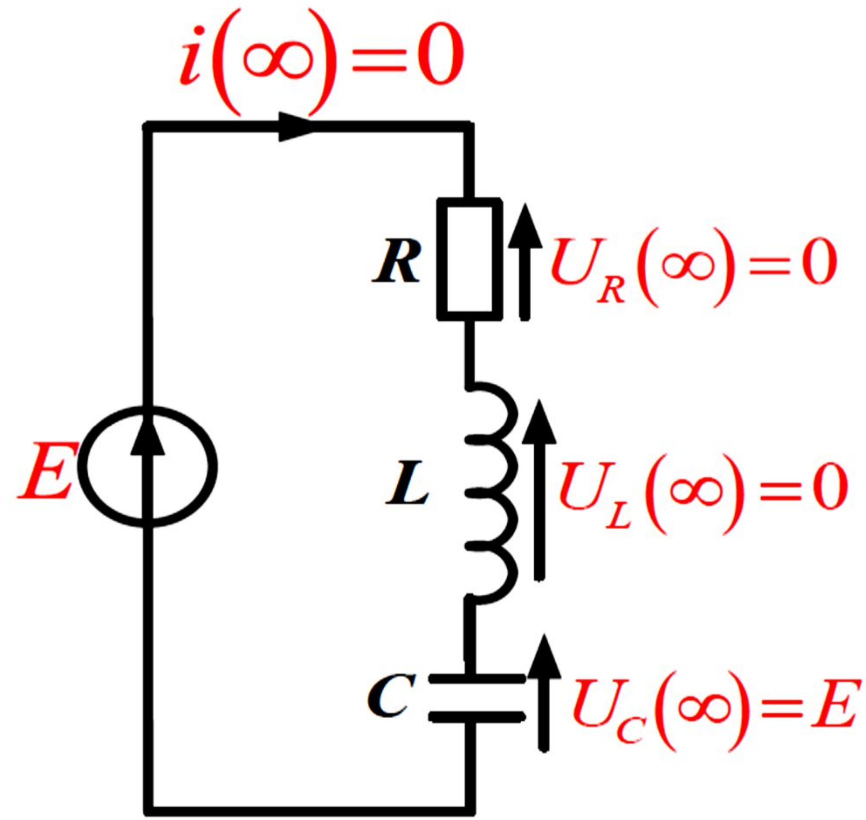


Quand $t \longrightarrow +\infty$, $U_C = E$ et $i = 0$, **C se comporte donc comme un interrupteur ouvert** et la bobine comme un fil sans résistance (bobine idéale).

Régime forcé (21)

- L'état du circuit quand $t = 0$ et quand $t \to \infty$ est ainsi représenté :





Régime forcé (22)

❑ Bilan énergétique

Lors de la charge du condensateur, on a :

$$E = U_R + U_L + U_C = Ri + L\frac{di}{dt} + U_C$$

Pour obtenir des puissances, on multiplie par i :

$$\boldsymbol{Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + CU_C\frac{dU_C}{dt} = Ri^2 + \frac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}}$$

- ✓ Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur

- ✓ Ri^2 est la puissance P_j positive reçue par la résistance et dissipée par effet joule dans R.

Régime forcé (23)

- ✓ $d(\frac{1}{2}Li^2)/dt$ est la puissance dE_{mag}/dt positive ou négative reçue par la bobine correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans l'inductance L sous forme magnétique.
- ✓ $d(\frac{1}{2}CU_C^2)/dt$ est la puissance $dE_{élec}/dt$ positive ou négative reçue par le condensateur correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique.

On conclut que la puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance *R* et sert à faire varier l'énergie dans la bobine et l'énergie du condensateur :

$$\boldsymbol{P_g = P_j + \frac{dE_{mag}}{dt} + \frac{dE_{élec}}{dt}}$$

Régime forcé (24)

- ✓ Soit W_g l'énergie électrique fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_g = \int_0^t Ei\,dt = CE\int_0^t \frac{dU_C}{dt}\,dt = CE[U_C(t) - U_C(0)] = CEU_C(t)$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, $U_C(\infty) = E$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_g = CE^2}}$

- ✓ Soit W_L l'énergie emmagasinée dans la bobine L entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_L = \int_0^t \frac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt}\,dt = \frac{1}{2}Li^2$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, $i(\infty) = 0$,il vient : $\boxed{\boldsymbol{W_L = 0}}$

Régime forcé (25)

- ✓ Soit W_C l'énergie emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_C = \int_0^t \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}dt = \frac{1}{2}CU_C^2$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, $U_C(\infty) = E$, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{W_C = \frac{1}{2}CE^2}}$$

$$W_g = W_J + W_L + W_C$$

Il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{W_J = W_g - W_L - W_C = CE^2 - 0 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2}}$$

Régime forcé (26)

On conclut finalement qu'au cours de la charge la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur. L'énergie magnétique, nulle au début de la charge est à nouveau nulle à la fin de la charge.

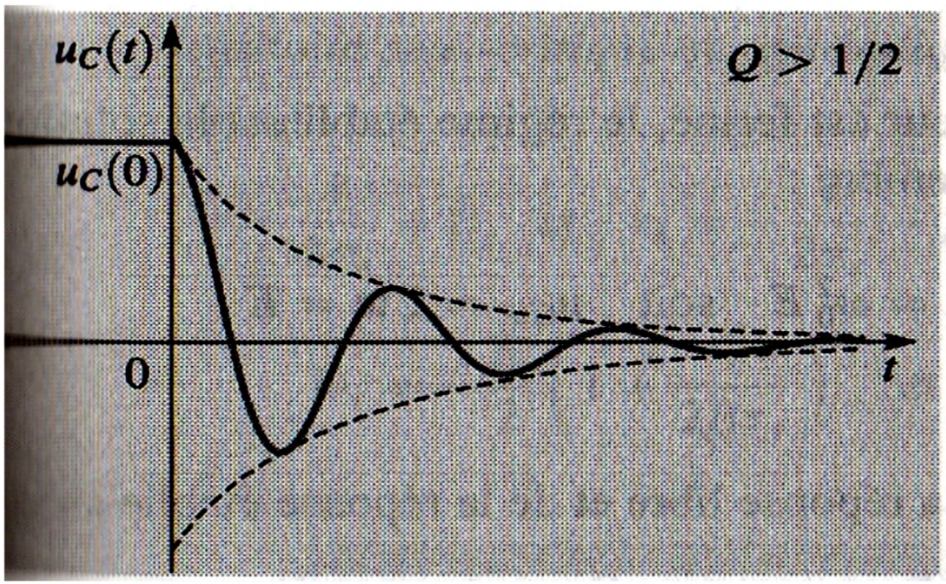
Régime forcé (27)

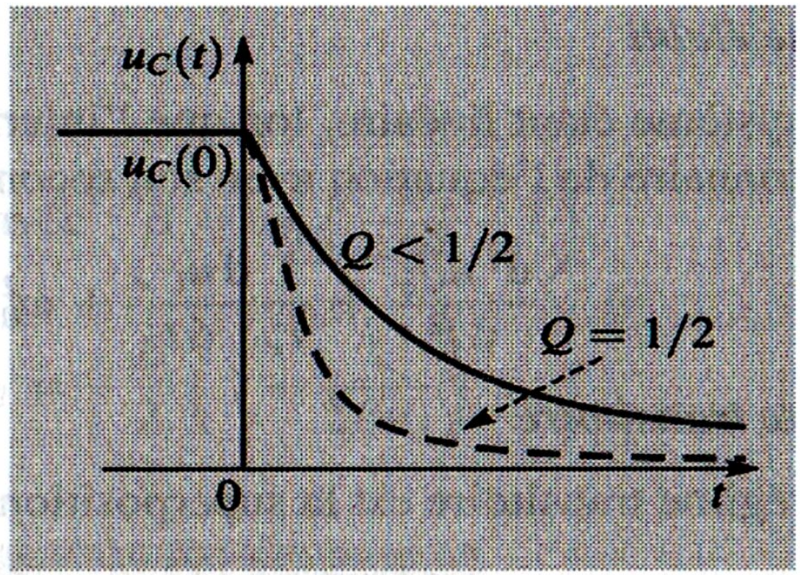
Lors de la réponse à un échelon, le circuit initialement dans l'état zéro ne contient pas d'énergie, le générateur fournit de l'énergie à tous les composants, le résistor en dissipe une partie.

À la fin, le condensateur est chargé, il contient donc de l'énergie, plus rien n'évolue, la bobine et le résistor ne sont plus parcourus par aucun courant puisque l'intensité s'est annulée et leur énergie est nulle.

Régime libre (1)

Si, à partir de ces nouvelles conditions initiales $U_C(0) = E$ et $i(0) = 0$; on débranche le générateur ($U_G = 0$) alors U_C évolue comme indiqué sur les figures ci-dessous en fonction de la valeur de qualité (en suivant exactement la même démarche que ce que l'on a fait jusqu'à présent)





Régime libre (2)

- **Condensateur initialement chargé, absence de générateur (décharge du condensateur)**

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}L\,i^2}_{\substack{\text{énergie de la bobine}\\ \text{à un instant } t}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\substack{\text{énergie du condensateur}\\ \text{à un instant } t}}\right] = \underbrace{-R\,i^2}_{\substack{\text{puissance dissipée}\\ \text{dans la résistance}\\ \text{(effet Joule)}}}$$

L'énergie stockée dans le condensateur et la bobine est entièrement dissipée à terme dans la résistance par effet Joule.

- **Condensateur initialement chargé, absence de générateur et absence de résistance.**

Si il n'y pas de résistance dans le circuit (R = 0) : $\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}L\,i^2}_{\substack{\text{énergie de la bobine}\\ \text{à un instant } t}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\substack{\text{énergie du condensateur}\\ \text{à un instant } t}}\right] = 0$.

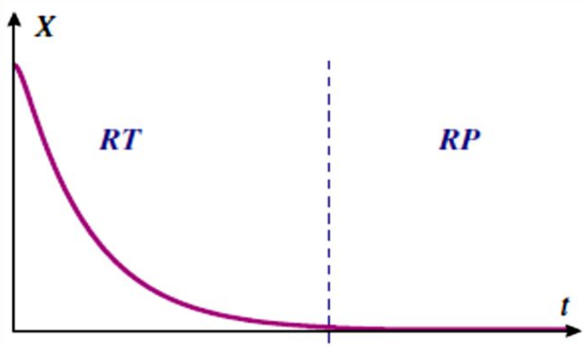
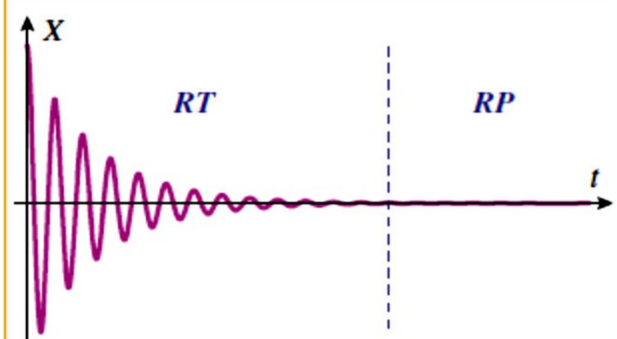
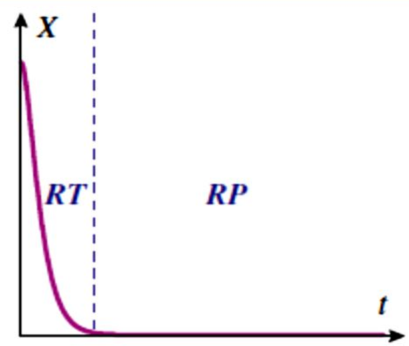
Il y a échange d'énergie permanent entre le condensateur et la bobine.

Régime libre (3)

Dans le régime libre, c'est le condensateur initialement chargé qui fournit une énergie au circuit, énergie qui finit par se dissiper totalement dans la résistance, à la fin plus rien n'évolue et le condensateur est déchargé. Il n'y a plus d'énergie dans le système.

Notons que si l'on est en présence du régime pseudopériodique, le condensateur et la bobine échangent en permanence de l'énergie tant que dure le régime transitoire tandis que la résistance en prélève une partie qu'elle dissipe sous forme de chaleur.

Récapitulatif

Régime	Apériodique	Pseudo-périodique	Critique
Amortissement	**Fort** $\Rightarrow \lambda > \omega_0$	**Faible** $\Rightarrow \lambda < \omega_0$	**Critique** $\Rightarrow \lambda = \omega_0$
Facteur qualité	**Petit** $\Rightarrow Q < ½$	**Grand** $\Rightarrow Q > ½$	**Critique** $\Rightarrow Q = ½$
Signe de Δ'	$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$	$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$	$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$
Solution de (EC)	$r_{1,2} = -\lambda \pm \omega_P$	$r_{1,2} = -\lambda \pm j\omega_P$	$r_{1,2} = r_0 = -\lambda$
Expression de ω_p	$\omega_P = \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$	$\omega_P = \sqrt{-\Delta'} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$	
Solutions de (ED)	$X(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{\omega_P t} + Be^{-\omega_P t})$ $X(t) = e^{-\lambda t}\left[A' ch(\omega_p t) + B' sh(\omega_p t)\right]$	$X(t) = e^{-\lambda t}(Ae^{j\omega_P t} + Be^{-j\omega_P t})$ $X(t) = e^{-\lambda t}\left[A' \cos(\omega_p t) + B' \sin(\omega_p t)\right]$	$X(t) = e^{-\lambda t}(At + B)$
Allure de la solution **RT = régime transitoire** **RP = régime permanent**			

N. B. : En physique, on note $j^2 = -1$ pour éviter la confusion avec l'intensité du courant.

Méthode

Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

Méthode : Déterminer graphiquement ω_0 et Q

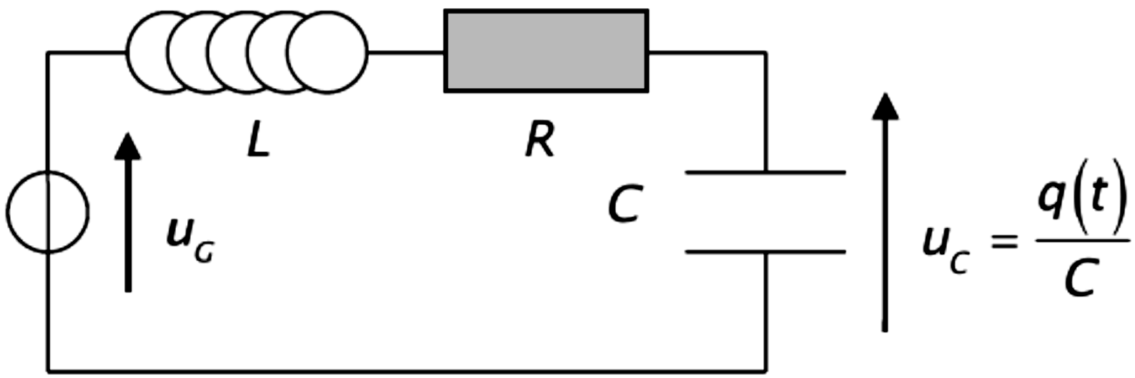
Quand sont fournies les courbes d'amplitude A_m et de phase φ en présence d'une résonance du type de la résonance en intensité d'un RLC série :

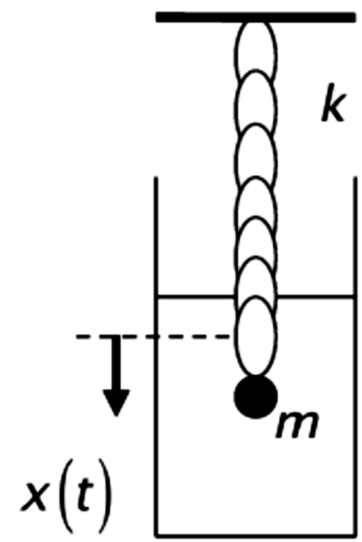
- Lire ω_0 :
  - sur la courbe de phase : $\varphi(\omega_0) = 0$;
  - ou sur la courbe d'amplitude : ω_0 est la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale
- Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$:
  - Lire la valeur maximale de l'amplitude $A_{m,\text{max}} = A_m(\omega_0)$;
  - Calculer $\dfrac{A_{m,\text{max}}}{\sqrt{2}}$;
  - Lire les abscisses ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles l'amplitude vaut $\dfrac{A_{m,\text{max}}}{\sqrt{2}}$;
  - En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.
- En déduire le facteur de qualité $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Analogie Électromagnétique

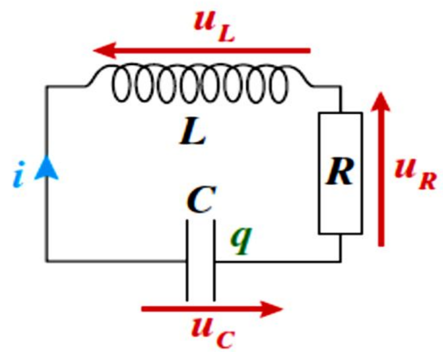
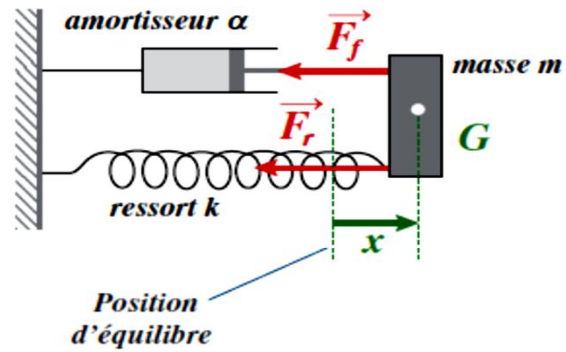
Analogie électromécanique (1)

Il y a analogie entre les deux systèmes (électrique et mécanique) s'ils sont régis par les mêmes équations différentielles et se comportent donc de la même façon





Analogie électromécanique (2)

SYSTÈME	Circuit RLC	Système masse-ressort-amortisseur
Schéma		
Conditions	ARQS	Référentiel galiléen
État initial	$q(t=0^-) = Q_0$ et $i(t=0^-) = 0$	$x(t=0^-) = X_0$ et $\dot{x}(t=0^-) = 0$
Loi	$u_L + u_R + u_C = 0$ (des mailles)	$m\vec{a} = \vec{F_f} + \vec{F_r}$ (de Newton)
Équation différentielle	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$ ou $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$	$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$ ou $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
ED forme 1 $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$	$\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
ED forme 2 $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Analogie électromécanique (3)

SYSTEME	ELECTRIQUE	MECANIQUE	ANALOGIE
Equation différentielle	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$	$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$	$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$
Grandeur oscillante	**La charge *q*** du condensateur tend vers 0, en oscillant si l'amortissement n'est pas trop fort	**L'élongation *x*** du ressort tend vers 0, en oscillant si l'amortissement n'est pas trop fort	X: $q \leftrightarrow x$
Dérivée	Les variations de la charge sont données par **l'intensité** : $i = \frac{dq}{dt}$	Les variations de l'élongation sont données par **la vitesse** : $v = \frac{dx}{dt}$	X: $i \leftrightarrow v$
Répugnance au changement	**La bobine** s'oppose aux variations du courant. Cette répugnance au changement est caractérisée par ***L***.	**L'inertie** s'oppose aux variations de la vitesse. Cette répugnance au changement est caractérisée par ***m***.	**bobine ⇔ inertie**
Mise en oscillation	Chargé en circuit ouvert, le **condensateur** est capable de mettre le système en oscillation lors de la fermeture du circuit. Il est caractérisé par sa capacité ***C***.	Déformé et maintenu, le **ressort** est capable de mettre le système en oscillation lorsqu'on le lâchera. Il est caractérisé par sa constante de raideur ***k***.	**condensateur ⇔ ressort**
Facteur d'amortissement	Le système s'amortit en raison de la présence du **résistor** caractérisé par sa résistance ***R***.	Le système s'amortit en raison de la présence du **frottement** caractérisé par le coefficient $\boldsymbol{\alpha}$.	**résistor ⇔ frottement**

Analogie électromécanique (4)

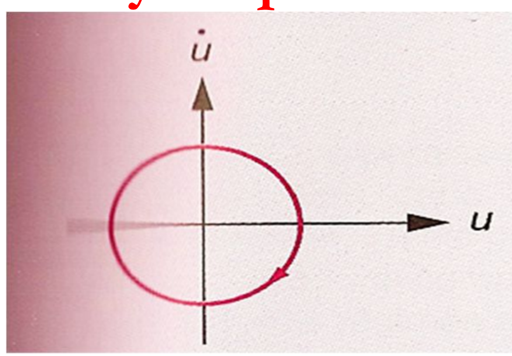
Stockage d'énergie	Le condensateur dispose à tout instant d'une **énergie électrique**. Cette énergie peut être stockée, si on bloque le condensateur dans cet en ouvrant le circuit et vaut : $\varepsilon_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	Le ressort dispose à tout instant d'une **énergie potentielle**. Cette énergie peut être stockée, si on bloque le ressort en immobilisant le système dans une position quelconque et vaut : $E_P = \frac{1}{2} k\, x^2$	$\varepsilon_E \leftrightarrow E_P$ et $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$
Energie en fonctionnement	Lorsque le courant circule, la bobine contient de **l'énergie magnétique**. Non stockable, cette énergie s'annule en l'absence de courant et vaut : $\varepsilon_E = \frac{1}{2} L i^2$	Lorsque le mobile se déplace, le solide contient de **l'énergie cinétique**. Non stockable, cette énergie s'annule en l'absence de mouvement et vaut : $E_C = \frac{1}{2} m\, v^2$	$\varepsilon_M \leftrightarrow E_C$ et $L \leftrightarrow m$
Energie dissipée	En cas d'amortissement, la **résistance** dissipe de l'énergie sous forme de chaleur (effet joule).	En cas d'amortissement, les frottements dissipent de l'énergie sous forme de chaleur.	$R \leftrightarrow \alpha$
Echanges énergétiques	Les oscillations traduisent un échange permanent entre ε_E et ε_M.	Les oscillations traduisent un échange permanent entre E_P et E_C.	$\varepsilon_M \rightleftarrows \varepsilon_E$ $\updownarrow$ $E_C \rightleftarrows E_P$
Energie susceptible d'être conservée	**L'énergie électromagnétique** ε_{em} reste constante si l'amortissement est nul et décroit sinon : $\varepsilon_{em} = \varepsilon_E + \varepsilon_M$	**L'énergie mécanique** E_m reste constante si l'amortissement est nul et décroit sinon : $E_m = E_P + E_C$	$\varepsilon_{em} \leftrightarrow E_m$

Portrait de phase

Portrait de phase (1)

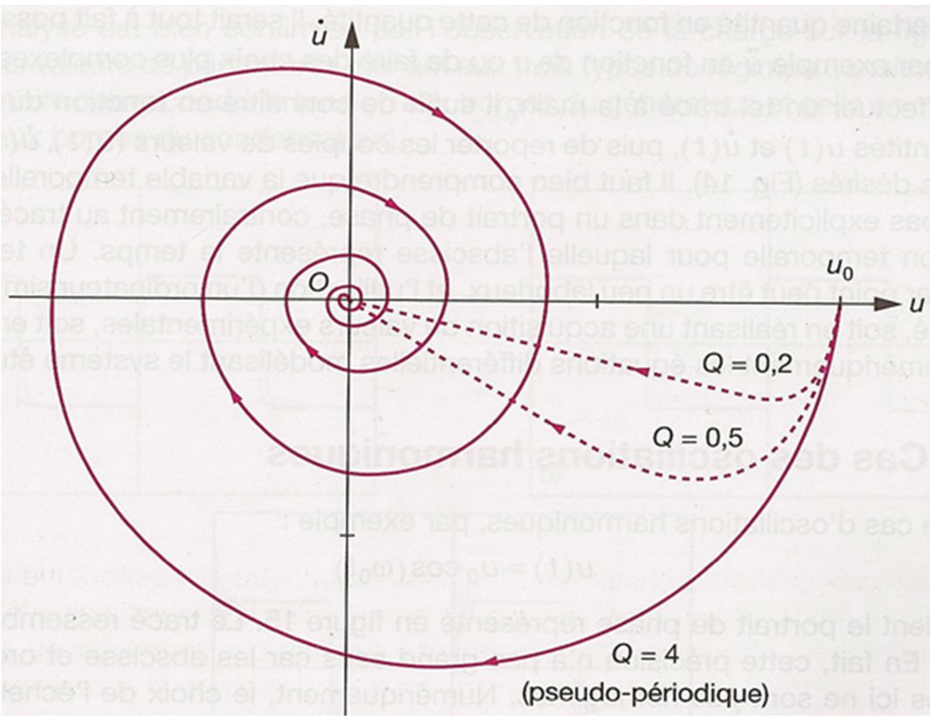
❑ Cas d'un oscillateur harmonique (pas de frottement et pas de dissipation d'énergie)

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, on obtient le portrait de phase de la figure suivante qui est dans le plan (**dit plan de phase**) une trajectoire fermée (**qui dans le cas général est une ellipse**). L'évolution de l'oscillateur harmonique sur le portrait de phase est **périodique**, à l'image de la trajectoire. La trajectoire n'atteint jamais le centre de l'ellipse qui est la position d'équilibre. **Cela signifie qu'il n'y a aucun frottement dans le système considéré, l'énergie est conservée, il n'y a pas de dissipation d'énergie** (système idéalisé).



Portrait de phase (2)

❑ Cas d'un oscillateur harmonique (présence de frottement et donc dissipation d'énergie)



Dans ce cas la situation est plus compliquée donc plus riche. Dans le cas d'un faible amortissement, $Q = 4$ de la figure ci après, l'évolution n'est plus périodique. A l'instant auquel le portrait de phase débute, $(\dot{u} = 0, u = u_0)$, cela correspond (pour un oscillateur mécanique) à une position initiale différente de la position d'équilibre et une vitesse initiale nulle. Ensuite l'oscillateur se met en mouvement.

Portrait de phase (3)

Cela se traduit par une trajectoire de phase qui s'enroule en amenant la mobile de plus en plus près de la situation d'équilibre $(\dot{u} = 0, u = 0)$. Cet enroulement signifie que le système se rapproche de la position d'équilibre en réalisant des oscillations d'amplitude décroissante car il y a des pertes d'énergie, il s'agit du régime pseudopériodique. Au bout d'un temps suffisamment long, le système atteint sa valeur d'équilibre $(\dot{u} = 0, u = 0)$. On se rend compte qu'il s'agit d'un équilibre stable. On parle **de centre attracteur**. Si le système est un peu écarté de sa position d'équilibre, il la rejoint en effectuant une spirale convergente autour. L'évolution temporelle des cas critiques et apériodique est nettement différente. Il n'y a pas d'enroulement. La valeur finale est en revanche inchangée, il s'agit toujours du point attracteur $(\dot{u} = 0, u = 0)$.

Portrait de phase (4)

La figure ci-dessous montre le portrait de phase d'un oscillateur harmonique et d'un oscillateur amorti (damped oscillator en anglais) en régime pseudo-périodique.

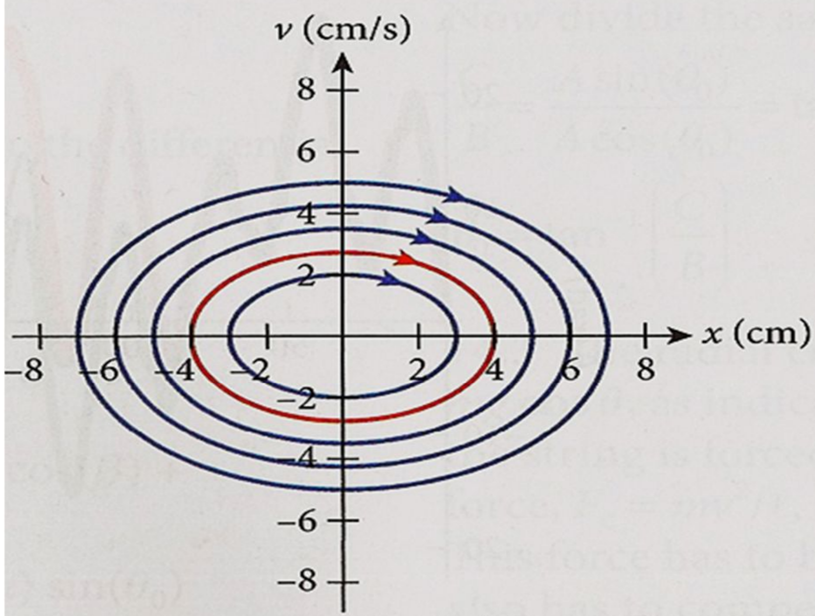


FIGURE 14.33 Velocity versus displacement for different amplitudes of simple harmonic motion.

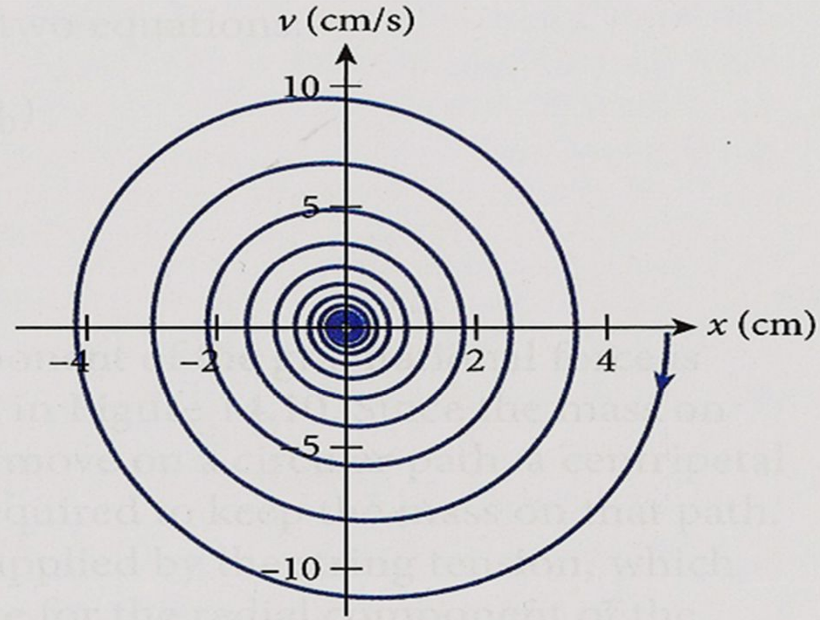
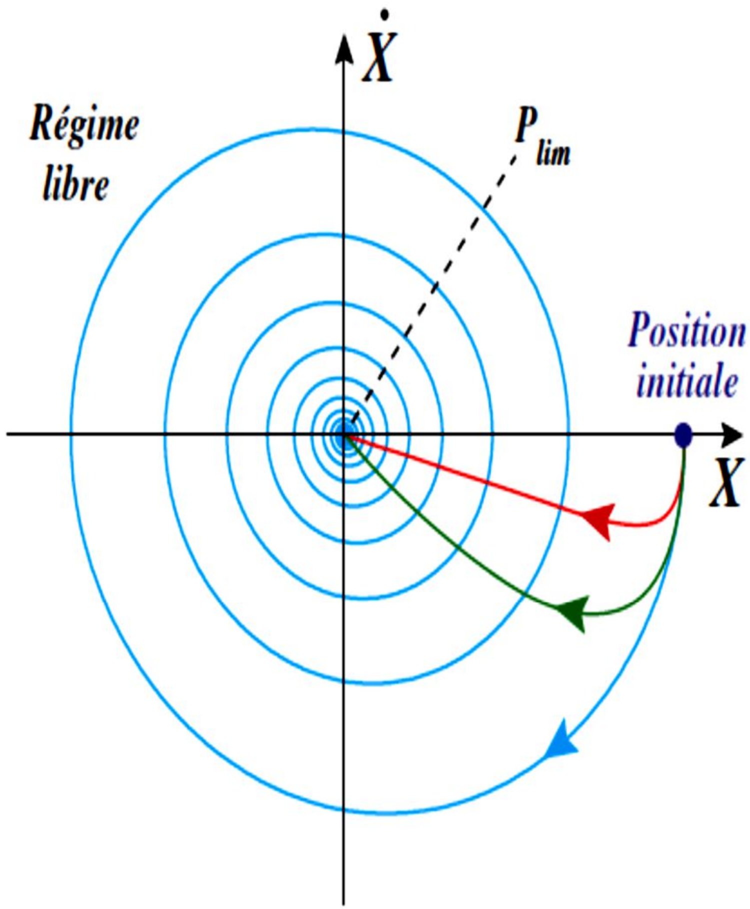
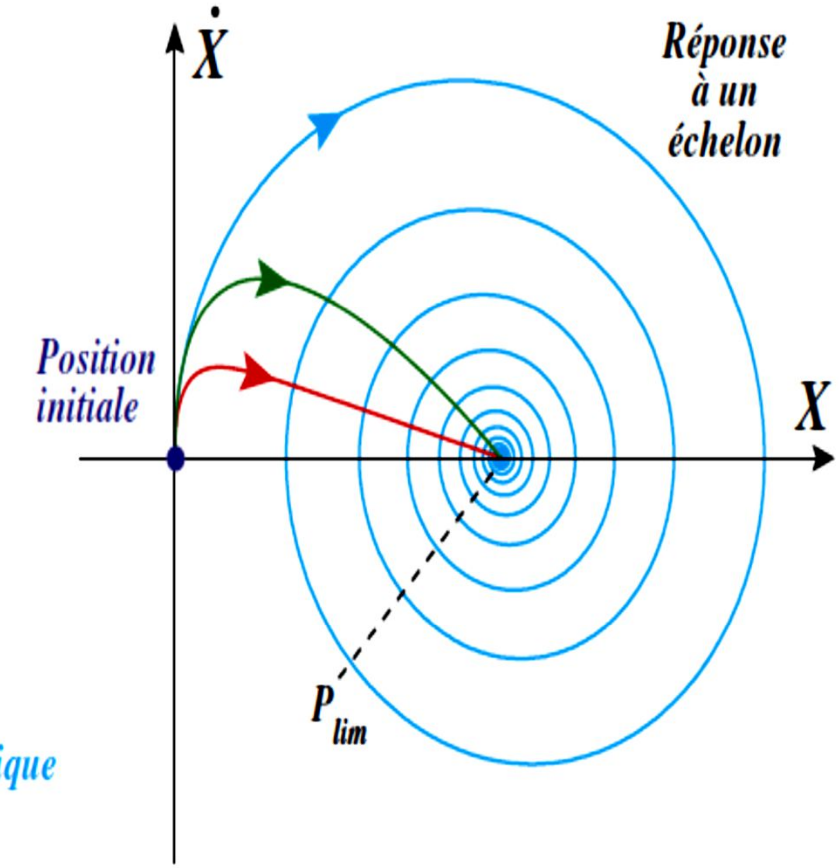


FIGURE 14.34 Velocity versus displacement for a damped oscillator.

Portrait de phase (5)





Pseudo-périodique
Apériodique
Critique