Nombres de Catalan

On rappelle que si $0 \leq p \leq n$, le symbole $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Par convention on pose $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ est appelé *nombre de Catalan* d'indice n.

I. Généralités sur les nombres de Catalan

1. (a) Montrer que pour entier naturel n, on a l'égalité $C_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}\, C_n$. [S]
   (b) Donner les valeurs de C_n pour $0 \leq n \leq 7$. [S]
2. Prouver les relations suivantes :
   (a) $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$. [S]
   (b) $C_n = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n} = \dfrac{2}{n-1}\dbinom{2n-1}{n+1} = \dbinom{2n-1}{n} - \dbinom{2n-1}{n+1}$. [S]
   (c) Montrer que les C_n sont dans $\mathbb{N}$, que la suite (C_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = +\infty$. [S]
3. Dans cette question, on trouve l'ordre de grandeur de C_n quand n tend vers $+\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a : $4\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{3/2} \leq \dfrac{C_k}{C_{k-1}} \leq 4\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{3/2}$. [S]
   (b) En déduire $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq 3\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. [S]

II. Un premier problème de dénombrement

On va étudier un problème de dénombrement où interviennent les nombres de Catalan.

On considère des *chemins* joignant des points de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, et formés de *déplacements* successifs.

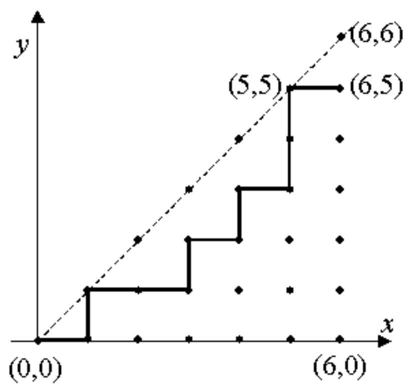
Les seuls déplacements autorisés à partir d'un point (n, m) sont :

– Le passage de (n, m) à $(n + 1, m)$ (vers la droite.)

– Le passage de (n, m) à $(n, m + 1)$ (vers le haut.)

On note $\Delta = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq m \leq n\}$ l'ensemble des points de $\mathbb{N}^2$ qui sont "sous" ou "sur" la diagonale $y = x$.

Voici par exemple un chemin de Δ, qui va de $(0, 0)$ à $(6, 5)$.



Remarque : pour tous entiers naturels a et b, et moyennant une translation de vecteur (a, b), il est évident qu'il y a autant de chemins d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité (n, m) qu'il y a de chemins d'origine (a, b) et d'extrémité $(a + n, b + m)$.

Pour tout (n, m) de Δ, on note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins d'origine $(0, 0)$, d'extrémité (n, m), et qui sont inclus dans Δ (donc qui ne "traversent" pas la diagonale.)

On note $\delta_n = \delta_{n,n}$ c'est-à-dire le nombre de chemins de Δ qui vont de $(0, 0)$ à (n, n).

1. (a) Indiquer rapidement la valeur des coefficients $\delta_{n,0}$, pour tout n de $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Justifier $\delta_n = \delta_{n,n-1}$ (si $n \geq 1$) et $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ (si $1 \leq m < n$.) [S]
   (c) En déduire la valeur des $\delta_{n,1}$ (pour $n \geq 1$) et des $\delta_{n,2}$ (pour $n \geq 2$.) [S]
   (d) Former le tableau triangulaire des $\delta_{n,m}$ pour $0 \leq m \leq n \leq 7$.
   Que remarque-t-on pour les valeurs diagonales δ_n, avec $0 \leq n \leq 7$? [S]

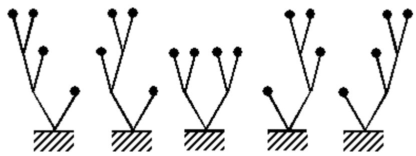
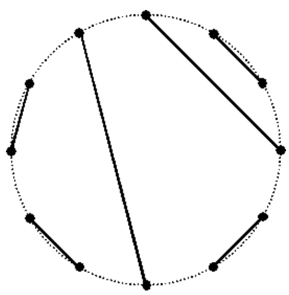
2. (a) Montrer que pour tout couple (n, m) de Δ, on a $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{n}$.
   Indication : Procéder par récurrence sur l'entier n ; pour chaque valeur de n on sera amené à vérifier l'égalité précédente pour $m = 1$, $m = 2$, etc., $m = n$. [S]
   (b) En déduire que le nombre de Catalan C_n est égal au nombre δ_n de chemins de Δ qui ont le point $(0, 0)$ pour origine et le point (n, n) pour extrémité. [S]

3. On se propose de retrouver le résultat de (II.2b) de façon purement combinatoire.
   (a) Soient m et n deux entiers naturels.
   Montrer que le nombre de chemins de $A(a, b)$ à $B(a+n, b+m)$ est $\dbinom{n+m}{m}$. [S]
   (b) Un chemin $\mathcal{P}$ de $(0, 0)$ à (n, n) est dit *excessif* s'il franchit $y = x$.
   Soit $\mathcal{E}_n$ le nombre de chemins excessifs de $(0, 0)$ à (n, n). Prouver $\delta_n = \dbinom{2n}{n} - \mathcal{E}_n$ [S]
   (c) Soit $\mathcal{P}$ un chemin excessif de $(0, 0)$ à (n, n).
   Soit $A(k, k + 1)$ le premier point de $\mathcal{P}$ situé strictement au-dessus de la diagonale.
   Au chemin $\mathcal{P}$ on associe alors le chemin $\mathcal{P}'$ défini de la manière suivante :
   – On conserve les $2k + 1$ premiers mouvements, qui amènent de $(0, 0)$ à $A(k, k + 1)$.
   – On inverse chacun des mouvements suivants de $\mathcal{P}$ (tout déplacement vers le haut est transformé en déplacement à droite, et vice-versa.)
   Montrer que le chemin $\mathcal{P}'$ mène du point $(0, 0)$ au point $(n - 1, n + 1)$. [S]
   (d) Montrer que la transformation $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'$ evoquée ci-dessus réalise une bijection de l'ensemble des chemins excessifs qui vont de $(0, 0)$ à (n, n) vers l'ensemble de tous les chemins qui vont de $(0, 0)$ à $(n-1, n+1)$. [S]
   (e) En déduire que C_n est bien le nombre des chemins de Δ qui vont de $(0, 0)$ à (n, n). [S]

4. On va maintenant établir une relation de récurrence vérifiée par les C_n.
   Soit $\mathcal{P}$ un chemin de Δ, d'origine $A(0, 0)$ et d'extrémité $B(n, n)$, avec $n \geq 1$.
   On sait qu'il y a exactement C_n façons de former $\mathcal{P}$.
   (a) On suppose que $\mathcal{P}$ ne rencontre la diagonale $y = x$ qu'en A et B.
   Montrer que le nombre de façons différentes de former le chemin $\mathcal{P}$ est C_{n-1}. [S]
   (b) On suppose que $\mathcal{P}$ rencontre $y = x$ en au moins un point autre que A et B.
   Soit k l'abscisse minimum (comprise entre 1 et $n - 1$) de ces points d'intersection.
   Pour chaque valeur de k, montrer qu'il y a $C_{k-1}\,C_{n-k}$ façons de former $\mathcal{P}$. [S]
   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$. [S]

III. Interprétations combinatoires des nombres de Catalan

Les nombres de Catalan apparaissent dans de très nombreux problèmes d'énumération.
Dans cette partie, où n est fixé, on se propose d'aborder certains de ces problèmes.
Dans les questions suivantes, montrer que le nombre évoqué est toujours égal à C_n.
On notera $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ etc. les ensembles énumérés aux questions 1., 2., 3. etc.
On notera également $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n).

1. Le nombre de suites $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ de $2n$ éléments de $\{-1,1\}$ telles que $\sum_{k=1}^{2n} x_k = 0$ et $\forall m \in \{1,\ldots,2n\}$, $\sum_{k=1}^{m} x_k \geq 0$. Donner les solutions si $n=3$. [S]
2. Le nombre de suites croissantes $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $y_k \leq k$ pour tout k.
   Donner les solutions quand $n=4$. [S]
3. Le nombre de suites strictement croissantes $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $z_k < 2k$ pour tout k (indication : $z_k = y_k + k - 1$). Donner les solutions si $n=4$. [S]
4. Le nombre de suites $d_1, d_2 \ldots, d_n$ de $\mathbb{N}$ telles que $d_{k+1} \leq d_k + 1$ pour tout k, et en supposant que d_1 est dans $\{0,1\}$ (indication : $d_k = k - y_k$). Donner les solutions quand $n=4$. [S]
5. Le nombre de façons d'écrire n paires de parenthèses pour que chaque parenthèse fermante corresponde à une parenthèse ouvrante. Par exemple, si $n=3$, il y a cinq possiblités : ((())), (()()), (())(), ()(()) et ()()(). [S]
6. Le nombre de "chaînes de montagnes" formées de n "montées" / et de n "descentes" \.
   La chaîne ne doit jamais descendre à une altitude inférieure à celle du point initial.
   On voit ici un exemple de chaîne avec $n=6$.
   
   [S]
7. Dans cette question, on considère des "arbres binaires enracinés".
   – A la base de l'arbre se trouve un noeud "racine".
   – Chaque noeud, s'il n'est pas une feuille, possède un rameau gauche et un rameau droit.
   On voit ici les arbres binaires enracinés à 4 feuilles.
   
   On demande de prouver que le nombre d'arbres binaires enracinés à $n+1$ feuilles est C_n.
   Indication : raisonner par récurrence forte et utiliser la question (II.4c) [S]
8. Soit E un ensemble muni d'un "produit" (celui de a par b est noté ab) non associatif.
   Une expression comme abc est donc dépourvue de sens tant qu'on ne choisit pas entre $(ab)c$ et $a(bc)$: on dira que les deux expressions précédentes sont les parenthésages de abc.
   Ainsi les parenthésages de $abcd$ sont : $((ab)c)d$, $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$, et $a(b(cd))$.
   On demande de montrer que le nombre de parenthésages de $a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ est C_n. [S]
9. Douze convives sont assis autour d'une table.
   De combien de manières ces douze personnes peuvent-elles échanger simultanément six poignées de mains sans que deux poignées différentes se croisent au-dessus de la table ?
   On voit ici l'une des $\cdots$ solutions au problème.
   
   [S]

Corrigé du problème

Généralités sur les nombres de Catalan

1. (a) Pour $n \geq 0$, $C_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_n$. [Q]

   (b) On remarque d'abord que $C_0 = \dfrac{0!}{0!\,1!} = 1$, $C_1 = \dfrac{2!}{1!\,2!} = 1$, $C_2 = \dfrac{4!}{2!\,3!} = 2$.

   Ensuite $C_3 = \dfrac{2 \cdot 5}{4} C_2 = 5$, puis $C_4 = \dfrac{2 \cdot 7}{5} C_3 = 14$, puis $C_5 = \dfrac{2 \cdot 9}{6} C_4 = 42$, etc.

   Utilisons plutôt Maple pour calculer les nombres de Catalan !

   Il y a bien des façons de procéder. On peut par exemple utiliser la fonction `binomial` de Maple, ou la relation de récurrence obtenue à la question précédente.

   C'est cette dernière méthode qu'utilise La procédure `catalan`, munie de l'option `remember` pour que le calcul d'un même C_n ne soit effectué qu'une seule fois.

```
> catalan:=proc(n::nonnegint)
    option remember;
    if n=0 then 1 else
      2*(2*n-1)*catalan(n-1)/(n+1)
    fi
  end:
```

   Voici les 15 premiers nombres de Catalan :

```
> map(catalan,[$0..14]);
```

   $$[\,0, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440\,]$$ [Q]

2. (a) Ce sont des vérifications immédiates :

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = C_n$.

   Ensuite $\dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = C_n$ (pour $n \geq 1$.)

   Il en résulte, pour $n \geq 1$: $\dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1} = (n+1)C_n - nC_n = C_n$.

   Ce dernier résultat est valable si $n = 0$, avec la convention de l'énoncé. [Q]

   (b) $\dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n} = \dfrac{2}{n+1}\dfrac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \dfrac{2n}{n}\dfrac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = C_n$.

   Le résultat précédent est valable pour tout $n \geq 1$.

   $\dfrac{2}{n-1}\dbinom{2n-1}{n+1} = \dfrac{2}{n-1}\dfrac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} = 2\dfrac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = C_n$.

   Le résultat précédent est valable pour tout $n \geq 2$.

   On en déduit $\dbinom{2n-1}{n} - \dbinom{2n-1}{n+1} = \Big(\dfrac{n+1}{2} - \dfrac{n-1}{2}\Big)C_n = C_n$.

   Ce dernier résultat est valable pour tout $n \geq 1$. [Q]

(c) Le résultat de la question (2a) montre à l'évidence que les C_n sont des entiers, et leur définition initiale montre qu'ils sont strictement positifs.

Enfin, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{C_{n+1}}{C_n} - 1 = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} - 1 = \dfrac{3n}{n+2} > 0$ donc $C_{n+1} > C_n$.

La suite (C_n) est donc strictement croissante à partir de $n = 1$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $C_n \geq C_{n-1} + 1$ et (récurrence évidente) $C_n \geq C_2 + (n-2) = n$.

Il en découle $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = +\infty$ (mais la minoration utilisée ici est nettement améliorable, comme on va le voir à la question suivante.) [Q]

3. (a) On a $\dfrac{C_k}{C_{k-1}} = \dfrac{2(2k-1)}{k+1}$ pour tout $k \geq 1$.

Il s'agit donc de prouver $2\Bigl(\dfrac{k-1}{k}\Bigr)^{3/2} \leq \dfrac{2k-1}{k+1} \leq 2\Bigl(\dfrac{k}{k+1}\Bigr)^{3/2}$ pour tout $k \geq 1$.

Cet encadrement équivaut à $4\Bigl(\dfrac{k-1}{k}\Bigr)^{3} \leq \Bigl(\dfrac{2k-1}{k+1}\Bigr)^{2} \leq 4\Bigl(\dfrac{k}{k+1}\Bigr)^{3}$.

On trouve tout d'abord :

$$\Bigl(\frac{2k-1}{k+1}\Bigr)^2 - 4\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^3 = \frac{(2k-1)^2k^3 - 4(k-1)^3(k+1)^2}{k^3(k+1)^2} = \frac{9k^3-8k^2-4k+4}{k^3(k+1)^2}$$

Et pour $k \geq 1$, $k^3 \geq k^2 \Rightarrow 9k^3 - 8k^2 - 4k + 4 \geq k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 \geq 0$.

Ensuite $4\Bigl(\dfrac{k}{k+1}\Bigr)^3 - \Bigl(\dfrac{2k-1}{k+1}\Bigr)^2 = \dfrac{4k^3 - (2k-1)^2(k+1)}{(k+1)^3} = \dfrac{3k-1}{(k+1)^3} > 0$.

On a donc prouvé l'encadrement demandé. [Q]

(b) On multiplie les encadrements précédents, de $k = 2$ à $k = n$.

On trouve : $4^{n-1}\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^{3/2} \leq \prod_{k=2}^{n}\frac{C_k}{C_{k-1}} \leq 4^{n-1}\prod_{k=2}^{n}\Bigl(\frac{k}{k+1}\Bigr)^{3/2}$

Mais ces produits conduisent à des simplifications en chaîne.

Il reste $4^{n-1}\Bigl(\dfrac{1}{n}\Bigr)^{3/2} \leq \dfrac{C_n}{C_1} \leq 4^{n-1}\Bigl(\dfrac{2}{n+1}\Bigr)^{3/2}$ donc $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq \dfrac{4^{n-1}\sqrt{8}}{(n+1)^{3/2}}$.

Il suffit maintenant de majorer $\sqrt{8}$ par 3 et de minorer $n+1$ par n.

On obtient finalement : $\forall\, n \geq 2$, $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq 3\,\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

On remarque que l'encadrement est encore vrai si $n = 1$, bien qu'il n'est réellement d'intérêt que pour les “grandes” valeurs de n. Le résultat précédent montre en effet que l'ordre de grandeur de C_n quand $n \to +\infty$ est celui de $u_n = \dfrac{4^n}{n\sqrt{n}}$.

On a en effet prouvé qu'on a toujours $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{C_n}{u_n} \leq \dfrac{3}{4}$.

Par exemple, $\dfrac{4^{99}}{1000} \leq C_n \leq 3\,\dfrac{4^{99}}{1000}$, c'est-à-dire $0.4017\,\text{E}\,57 \leq C_{100} \leq 1.205\,\text{E}\,57$.

En fait, on trouve avec Maple : $C_n \approx 0.8965\,\text{E}\,57$.

On pourrait vérifier (avec la formule de Stirling) que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{C_n}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.564$. [Q]

Un premier problème de dénombrement

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, il n'y a qu'un seul chemin d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(n,0)$ car on ne peut que se déplacer vers la droite. Donc $\delta_{n,0}=1$, pour tout n de $\mathbb{N}$. [Q]

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'avant-dernièr point d'un chemin de Δ de $(0,0)$ à (n,n) est le point $(n,n-1)$ car le dernier déplacement est nécessairement vertical. Dans Δ, il y a donc autant de chemins de $(0,0)$ à (n,n) que de $(0,0)$ à $(n,n-1)$.
Autrement dit on a l'égalité $\delta_n=\delta_{n,n-1}$ pour tout $n\geq 1$.

Soit $\mathcal{C}$ un chemin de Δ, de $(0,0)$ à (n,m), avec $1\leq m<n$: il y a $\delta_{n,m}$ possibilités.

Le point (n,m) étant situé strictement sous la diagonale $y=x$, il y a exactement deux cas, qui s'excluent mutuellement :

– Le dernier déplacement est vers la droite, donc l'avant-dernier point est $(n-1,m)$. Il y a alors $\delta_{n-1,m}$ possibilités, autant que de chemins de $(0,0)$ à $(n-1,m)$.
– Le dernier déplacement est vers le haut, donc l'avant-dernier point est $(n,m-1)$. Il y a alors $\delta_{n,m-1}$ possibilités, autant que de chemins de $(0,0)$ à $(n,m-1)$.

Autrement dit, si $1\leq m<n$, on a l'égalité $\delta_{n,m}=\delta_{n-1,m}+\delta_{n,m-1}$. [Q]

(c) D'après les deux questions précédentes, $\delta_{1,1}=\delta_{1,0}=1$.
Pour $n>1$, on trouve $\delta_{n,1}=\delta_{n-1,1}+\delta_{n,0}=\delta_{n-1,1}+1$.
La suite $(\delta_{n,1})_{n\geq 1}$ est donc arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.
Il en résulte $\delta_{n,1}=1+(n-1)=n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

D'après ce qui précède, $\delta_{2,2}=\delta_{2,1}=2$.
Pour $n>2$, on trouve $\delta_{n,2}=\delta_{n-1,2}+\delta_{n,1}=\delta_{n-1,2}+n$.
On en déduit $\delta_{n,2}=\delta_{2,2}+\sum\limits_{k=3}^{n}(\delta_{k,2}-\delta_{k-1,2})=2+\sum\limits_{k=3}^{n}k$.
On trouve $\delta_{n,2}=\dfrac{n(n+1)}{2}-1=\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$ (vrai aussi si $n=2$.) [Q]

(d) On va former le tableau triangulaire des $\delta_{n,m}$, avec $0\leq m\leq n\leq 7$, en plaçant naturellement chaque valeur $\delta_{n,m}$ au point de coordonnées (n,m).

Ce tableau est facile à construire à condition de le former colonne par colonne (de la gauche vers la droite), les coefficients d'une colonne donnée étant calculés de bas en haut.

On se sert bien sûr des égalités $\delta_{n,0}=1$ (ce sont les coefficients de la ligne inférieure) et du fait que chaque coefficient diagonal $\delta_{n,n}$ est égal $\delta_{n,n-1}$ situé immédiatement en-dessous de lui.

							429
						132	429
					42	132	297
				14	42	90	165
			5	14	28	48	75
		2	5	9	14	20	27
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1

Sinon, pour la plupart des coefficients, on se sert de $\delta_{n,m}=\delta_{n-1,m}+\delta_{n,m-1}$.

En particulier, pour former la dernière colonne, on écrit successivement :

$\delta_{7,0}=1,\quad \delta_{7,1}=6+1=7,\quad \delta_{7,2}=20+7=27,\quad \delta_{7,3}=48+27=75$, etc.

On remarque enfin que les coefficients diagonaux $\delta_{0,0}=1$, $\delta_{1,1}=1$, $\delta_{2,2}=2$, etc., $\delta_{7,7}=429$ sont égaux aux nombres de Catalan successifs C_0, C_1, C_2, etc., C_7. [Q]

2. (a) On va démontrer la formule $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{m}$ pour $0 \leq m \leq n$.

On considère qu'il s'agit d'une propriété de l'entier n, à vérifier pour $m \in \{0, \ldots, n\}$.

Au rang $n = 0$, elle est vraie car elle donne $\dfrac{1}{1}\dbinom{0}{0} = 1 = \delta_0$.

On la suppose vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 1$ fixé.

On suppose donc que pour $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a $\delta_{n-1,m} = \dfrac{n-m}{n}\dbinom{n+m-1}{m}$.

Il faut prouver (E_m) : $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{m}$ pour $m \in \{0, \ldots, n\}$.

L'entier n étant fixé, on considère (E_m) comme une propriété de m qu'on va démontrer par une récurrence finie de $m = 0$ à $m = n$.

Pour $m = 0$, pas de problème car on trouve $\dfrac{n+1}{n+1}\dbinom{n}{0} = 1 = \delta_{n,0}$.

On suppose donc que (E_m) est vraie au rang m, avec $m \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Si $m \leq n-2$, on a $\delta_{n,m+1} = \delta_{n-1,m+1} + \delta_{n,m}$.

Or l'hypothèse de récurrence sur n donne $\delta_{n-1,m+1} = \dfrac{n-m-1}{n}\dbinom{n+m}{m+1}$.

On sait que $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{m}$ (hypothèse sur m.).

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned}
\delta_{n,m+1} &= \frac{n-m-1}{n}\binom{n+m}{m+1} + \frac{n-m+1}{n+1}\binom{n+m}{m} \\
&= \frac{n-m-1}{n}\,\frac{(n+m)!}{(m+1)!\,(n-1)!} + \frac{n-m+1}{n+1}\,\frac{(n+m)!}{m!\,n!} \\
&= \frac{(n+m)!}{m!\,n!}\left(\frac{n-m-1}{m+1} + \frac{n-m+1}{n+1}\right) = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}\left(\frac{n}{m+1} - \frac{m}{n+1}\right) \\
&= \frac{n-m}{n+1}\,\frac{(n+m+1)!}{(m+1)!\,n!} = \frac{n-m}{n+1}\binom{n+m+1}{m+1} \quad \text{ce qui prouve } (E_{m+1})
\end{aligned}$$

On a ainsi trouvé (avec notre valeur fixée de n) les valeurs de $\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \ldots, \delta_{n,n-1}$.

Il reste à vérifier la valeur de δ_n.

En utilisant la valeur obtenue pour $\delta_{n,n-1}$, on trouve $\delta_n = \delta_{n,n-1} = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n-1}$.

Or $\dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n-1} = \dfrac{2}{n+1}\,\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

C'est exactement la formule attendue pour $m = n$. Ceci termine le passage du rang $n-1$ au rang n, et achève la récurrence sur l'entier n.

Conclusion : pour tout couple (n, m) de Δ, on a $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{n}$. [Q]

(b) Ce qui précède donne notamment $\delta_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = C_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Autrement dit, pour tout entier naturel n, le nombre de Catalan C_n représente le nombre de chemins d'origine $(0, 0)$, d'extrémité (n, n), et qui sont inclus dans le réseau Δ (c'est-à-dire qui ne passent pas au-dessus de la diagonale $y = x$.) [Q]

3. (a) Un chemin de A à B est une liste de $n+m$ mouvements : n à droite, m vers le haut.

Il est déterminé par la position dans cette liste des m déplacements vers le haut.

Il y a donc $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$ façons différentes de former ce chemin. [Q]

(b) On sait qu'il y a $\binom{2n}{n}$ chemins de $(0,0)$ à (n,n), dont $\mathcal{E}_n$ sont excessifs.

Les autres sont les δ_n chemins qui vont de $(0,0)$ à (n,n) en restant dans Δ.

Autrement dit, on a l'égalité $\delta_n = \binom{2n}{n} - \mathcal{E}_n$. [Q]

(c) Le chemin excessif $\mathcal{P}$ passe effectivement une première fois "au-dessus" de $y=x$, et ce ne peut-être qu'en un point A de coordonnées $(k,k+1)$, avec $0 \le k \le n-1$.

Une fois arrivé en $A(k,k+1)$ (donc après $2k+1$ mouvements) il reste $2n-(2k+1)$ déplacements à effectuer dont $n-k$ vers la droite et $n-(k+1)$ vers le haut.

Le chemin $\mathcal{P}'$, à partir de A, effectue donc $n-k-1$ mouvements à droite et $n-k$ vers le haut : son point d'arrivée a pour coordonnées $\begin{cases} x = k+n-(k+1) = n-1 \\ y = k+1+n-k = n+1 \end{cases}$ [Q]

(d) Considérons les chemins $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ ci-dessus.

Symboliquement $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, où $\mathcal{P}_1$ est un chemin de $(0,0)$ à $A(k,k+1)$ (qui ne passe au-dessus de $y=x$ qu'à l'arrivée en A) et $\mathcal{P}_2$ est un chemin de A à (n,n).

Notons D (resp. H) un mouvement quelconque vers la droite (resp. vers le haut.)
Si M est un élément de $\{D,H\}$, notons $\overline{M}$ l'autre mouvement possible.

Ecrivons $\mathcal{P}_2 = (M_1, M_2, \ldots, M_{2n-2k})$ la succession de mouvements décrivant $\mathcal{P}_2$.

On a alors $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}'_2$ avec $\mathcal{P}'_2 = (\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_{2n-2k})$.

C'est aussi en $A(k,k+1)$ que $\mathcal{P}'$ passe pour la première fois au-dessus de $y=x$.

Si on applique à $\mathcal{P}'$ la même transformation que celle qui a conduit de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$, on obtient le chemin $\mathcal{P}_1 \cup (M_1, M_2, \ldots, M_{2n-2k})$ c'est-à-dire $\mathcal{P}$.

Remarquons enfin que tout chemin de $(0,0)$ à $(n-1, n+1)$ passe nécessairement une première fois au-dessus de la diagonale, et qu'on peut donc lui appliquer la transformation précédente, le transformant en un chemin excessif de $(0,0)$ à (n,n) (vérification en tout point analogue à la précédente.)

On dispose ainsi d'une application involutive (donc bijective) envoyant les $\mathcal{E}_n$ chemins excessifs de $(0,0)$ à (n,n) sur les différents chemins de $(0,0)$ à $(n-1,n+1)$. [Q]

(e) Il y a donc autant de chemins excessifs d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (n,n) que de chemins quelconques d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(n-1,n+1)$.

Mais on sait que ces derniers sont au nombre de $\binom{2n}{n+1}$ (cf question (3a).)

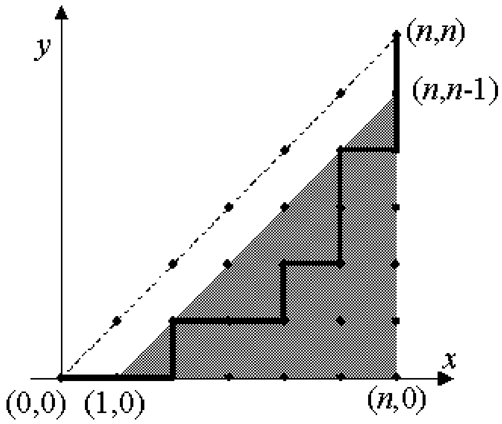
Ainsi $\delta_n = \binom{2n}{n} - \mathcal{E}_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ (cf question (3b).)

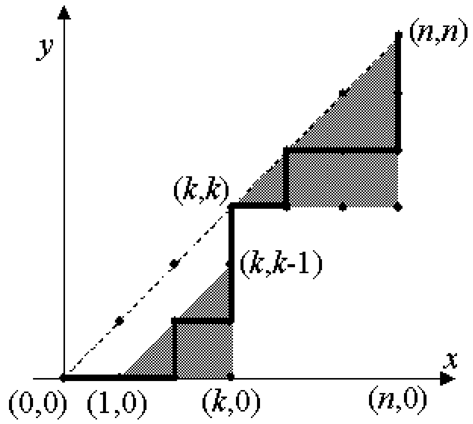
La question (I.2a) donne alors $\delta_n = C_n$.

On a ainsi prouvé directement (par des considérations uniquement combinatoires) que C_n est le nombre de chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n). [Q]

4. (a) Former un chemin $\mathcal{P}$ de $A = (0,0)$ à $B(n,n)$ qui ne rencontre $y = x$ qu'en A et B c'est en fait former un chemin de $(1,0)$ à $(n, n-1)$ contenu dans la zone triangulaire représentée ci-dessous en grisé (figure de gauche).

On sait qu'il y a C_{n-1} façons distinctes de former un tel chemin (c'est la remarque de l'énoncé : moyennant une translation de vecteur $(-1,0)$, tout revient en effet à former dans Δ un chemin d'extrémité $(0,0)$ et d'extrémité $(n-1, n-1)$.)





[Q]

(b) Pour illustrer les explications, on se reportera à la figure de droite ci-dessus.

Former un chemin $\mathcal{P}$ de $A = (0,0)$ à $B(n,n)$ qui rencontre $y = x$ en un premier point diagonal (k,k) autre que A et B, c'est :

– D'abord former un chemin de $(1,0)$ à $(k, k-1)$ dans la première zone triangulaire grisée. Pour cela, il y a C_{k-1} solutions distinctes.

– Une fois ce choix effectué, former un chemin de (k,k) à (n,n) dans la seconde zone triangulaire grisée. Pour cela, il y a C_{n-k} solutions distinctes.

Il y a donc $C_{k-1}C_{n-k}$ façons différentes de former un chemin $A = (0,0)$ à $B(n,n)$ qui rencontre $y = x$ en un premier point diagonal (k,k) autre que A et B. [Q]

(c) Avec ces notations, on obtient les C_n chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n) (dans le second cas, on fait varier k de 1 à $n-1$.)

Ce dénombrement permet d'écrire l'égalité $C_n = C_{n-1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_{k-1}C_{n-k}$.

Mais C_{n-1} correspond à $k = n$ dans la somme.

On peut donc écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$.

On peut bien sûr écrire, de manière complètement équivalente :

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = \sum\limits_{j+k=n} C_j C_k$. [Q]

III. Interprétations combinatoires des nombres de Catalan

1. On va établir une correspondance bijective entre les ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_0$.

   Il en découlera que le nombre de n-uplets répondant aux conditions est C_n.

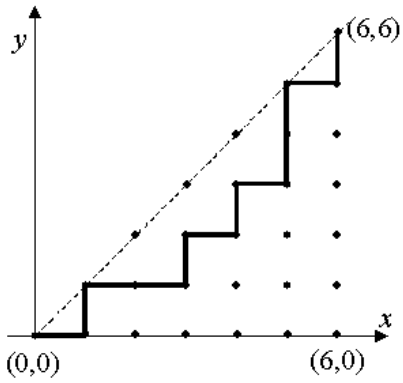
   Soit $\mathcal{P}$ un chemin de Δ de $(0,0)$ à (n,n), formé bien sûr de $2n$ mouvements successifs.

   Au chemin $\mathcal{P}$ on associe le $2n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ défini par $x_k = 1$ si mouvement n°k est vers la droite, et $x_k = 0$ sinon (c'est-à-dire s'il est vers le haut.)

   Voici par exemple un chemin qui va du point $(0,0)$ au point $(6,6)$, chemin auquel on associe le 14-uplet $(1,-1,1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1)$.

   Les sommes partielles $\sum_{k=1}^{m} x_k$ valent ici :

   $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 = 0$, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, $\sum_{k=1}^{14} x_k = 0$.



   Les inégalités $\sum_{k=1}^{m} x_k \geq 0$ expriment que $\mathcal{P}$ ne traverse pas $y = x$: cette m-ième somme partielle représente d'ailleurs le nombre de pas verticaux qui séparent $\mathcal{P}$ de la diagonale à l'issue du m-ième mouvement. Et c'est parce que le chemin $\mathcal{P}$ se termine au point diagonal (n,n) (à l'issue du $2n$-ième mouvement) que $\sum_{k=1}^{2n} x_k = 0$.

   Réciproquement, si $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ est dans $\mathcal{S}_1$, alors il provient (au sens précédent) d'un unique chemin $\mathcal{P}$ de Δ allant de $(0,0)$ à (n,n) : en effet chaque x_k exprime la direction d'un mouvement, la positivité des sommes partielles assure que $\mathcal{P}$ ne traverse pas $y = x$, et la nullité de la somme finale traduit que le point d'arrivée est (n,n) (il y a n déplacements vers la droite et n déplacements vers le haut.)

   Conclusion : le nombre de $2n$-uplets répondant aux conditions imposées est C_n.

   Si $n = 3$ on trouve $\begin{cases} (1,1,1,-1,-1,-1) & (1,1,-1,1,-1,-1) & (1,1,-1,-1,1,-1) \\ (1,-1,1,1,-1,-1) & (1,-1,1,-1,1,-1) \end{cases}$ [Q]

2. Soit $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{S}_0$. A tout k de $\{1, \ldots, n-1\}$, on associe l'ordonnée maximum y_k des points de $\mathcal{P}$ d'abscisse k. Par exemple, au chemin ci-dessus $(n = 6)$, on associe $(1,1,2,3,5)$.

   Par nature, les y_k sont dans $\mathbb{N}$, les inégalités $y_k \leq k$ expriment que $\mathcal{P}$ ne traverse pas la diagonale, et la suite des y_k est croissante car $\mathcal{P}$ ne "redescend" jamais.

   Réciproquement une suite $y_1, \ldots, y_{n-1}$ de $\mathcal{S}_2$ vient d'un unique élément $\mathcal{P}$ de $\mathcal{S}_0$.

   En effet, en complétant logiquement les notations par $y_0 = 0$ et $y_n = n$, chaque valeur y_k fournit un point $A_k(k, y_k)$ du chemin, et on passe de A_k à A_{k+1} par un mouvement vers la droite suivi de $y_{k+1} - y_k$ mouvements vers le haut.

   On connait ainsi les $\sum_{k=0}^{n-1}(1 + y_{k+1} - y_k) = n + y_n - y_0 = 2n$ mouvements de $\mathcal{P}$.

   Il y a donc bijection entre les éléments de $\mathcal{S}_0$ et ceux de $\mathcal{S}_2$.

   Les suites recherchées sont donc au nombre de C_n.

   Pour $n = 4$, on trouve $C_4 = 14$ suites $\begin{cases} 0,0,0 & 0,0,1 & 0,0,2 & 0,0,3 & 0,1,1 \\ 0,1,2 & 0,1,3 & 0,2,2 & 0,2,3 & 1,1,1 \\ 1,1,2 & 1,1,3 & 1,2,2 & 1,2,3 \end{cases}$ [Q]

3. Soit $y_1, \ldots, y_{n-1}$ une suite de $\mathcal{S}_2$. Pour k de $\{1, \ldots, n-1\}$, posons $z_k = y_k + k - 1$.

   On définit ainsi une suite $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ d'entiers naturels.

   Elle est strictement croissante car $\forall\, k \in \{1, \ldots, n-2\},\ z_{k+1} - z_k = y_{k+1} - y_k + 1 \geq 1$.

   Enfin $\forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ y_k \leq k \Rightarrow z_k < 2k$. Ainsi la suite $z_1, \ldots, z_{n-1}$ est dans $\mathcal{S}_3$.

   Mais l'application qui à la suite (y) associe la suite (z) est bijective de $\mathcal{S}_2$ sur $\mathcal{S}_3$.

   En effet son application inverse associe à une suite (z) de $\mathcal{S}_3$ la suite (y) de $\mathcal{S}_2$ (vérification comme ci-dessus) définie par : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ y_k = z_k - k + 1$.

   Conclusion : l'ensemble $\mathcal{S}_3$ a même cardinal que l'ensemble $\mathcal{S}_2$, c'est-à-dire C_n.

   Pour $n = 4$, on trouve $C_4 = 14$ suites : $\left\{\begin{array}{lllll} 0,1,2 & 0,1,3 & 0,1,4 & 0,1,5 & 0,2,3 \\ 0,2,4 & 0,2,5 & 0,3,4 & 0,3,5 & 1,2,3 \\ 1,2,4 & 1,2,5 & 1,3,4 & 1,3,5 & \end{array}\right.$ [Q]

4. Soit $y_1, \ldots, y_{n-1}$ une suite de $\mathcal{S}_2$. Pour k de $\{1, \ldots, n-1\}$, posons $d_k = k - y_k$.

   On définit ainsi une suite $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ d'entiers naturels.

   On a $0 \leq y_1 \leq 1$ donc $d_1 = 1 - y_1$ est égal à 0 ou à 1.

   Enfin pour tout k de $\{1, \ldots, n-2\}$, on a $d_{k+1} - d_k = 1 - y_{k+1} + y_k \leq 1$.

   Ainsi la suite $d_1, \ldots, d_{n-1}$ est dans $\mathcal{S}_4$.

   Mais l'application qui à la suite (y) associe la suite (d) est bijective de $\mathcal{S}_2$ sur $\mathcal{S}_4$.

   En effet son application inverse associe à une suite (d) de $\mathcal{S}_4$ la suite (y) de $\mathcal{S}_2$ (vérification comme ci-dessus) définie par : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ y_k = k - d_k$.

   Conclusion : l'ensemble $\mathcal{S}_4$ a même cardinal que l'ensemble $\mathcal{S}_2$, c'est-à-dire C_n.

   Pour $n = 4$, on trouve $C_4 = 14$ suites $\left\{\begin{array}{lllll} 1,2,3 & 1,2,2 & 1,2,1 & 1,2,0 & 1,1,2 \\ 1,1,1 & 1,1,0 & 1,0,1 & 1,0,0 & 0,1,2 \\ 0,1,1 & 0,1,0 & 0,0,1 & 0,0,0 & \end{array}\right.$ [Q]

5. La réponse est assez évidente si on considère le chemin $\mathcal{P}$ d'origine $(0,0)$ obtenu en interprétant chaque parenthèse ouvrante comme un déplacement vers la droite, et chaque parenthèse fermante comme un déplacement vers le haut.

   Quand on a ouvert et fermé les n couples de parenthèses, $\mathcal{P}$ se termine en (n, n).

   Le fait qu'on ne puisse pas placer la k-ième parenthèse fermante avant la k-ième parenthèse ouvrante se traduit par l'impossibilité pour $\mathcal{P}$ de traverser $y = x$.

   La correspondance entre les éléments de $\mathcal{S}_5$ (les parenthésages) et ceux de $\mathcal{S}_0$ (les chemins) est évidemment bijective. Il en résulte $\operatorname{card} \mathcal{S}_5 = C_n$. [Q]

6. Il y a bien sûr autant de chaînes de montagnes que de parenthésages de $2n$ parenthèses au sens de la question précédente. Il suffit en effet de considérer une montée comme une parenthèse ouvrante et une descente comme une parenthèse fermante.

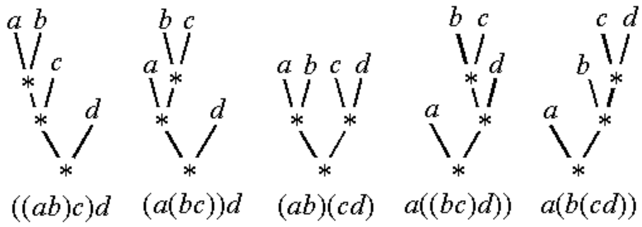
   Le fait que chaque parenthèse ouvrante doive correspondre à une parenthèse fermante se traduit ici par le fait que la chaîne de montagnes ne descend jamais à une altitude inférieure à celle du point initial.

   Conclusion : il y a C_n chaînes formées de n montées et de n descentes. [Q]

7. On va procéder par récurrence, et utiliser le résultat de la question (II.4.*c*.)
Notons A_n le nombre d'arbres à $n+1$ feuilles, et montrons que $A_n = C_n$ pour tout n.
La propriété est vraie si $n = 0$ car le seul arbre à une feuille se réduit à sa racine.
On se donne $n \geq 1$ et on suppose que $A_k = C_k$ pour tous les entiers k de $\{0, \ldots, n-1\}$.
Considérons un arbre $\mathcal{A}$ à $n+1$ feuilles. La racine n'est bien sûr pas une feuille, donc elle porte deux rameaux qui aboutissent chacun à un noeud. Celui de gauche est la racine d'un arbre binaire $\mathcal{A}_g$ de $k+1$ feuilles tandis que celui de droite est celle d'un arbre binaire $\mathcal{A}_d$ de $n-k$ feuilles, où k est un élément quelconque de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Si on fixe k, il y a A_k façons de former $\mathcal{A}_g$ et pour chacune A_{n-k-1} façons de former $\mathcal{A}_d$. Il y a donc $A_k A_{n-k-1}$ façons de former $\mathcal{A}$, avec cette valeur de k.
En faisant varier k, il y a donc $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{n-1-k}$ façons de former $\mathcal{A}$.
Mais notre hypothèse de récurrence forte donne l'égalité $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = C_n$.
Cela prouve la propriété au rang n et achève la récurrence. [Q]

8. Parenthéser $a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$ c'est former un arbre binaire dont les $n+1$ feuilles sont les éléments a_k et dont les noeuds (qui ne sont pas des feuilles) sont les différents produits.

Voici par exemple la représentation des $C_3 = 5$ parenthésages possibles du produit *abcd*.
Plus généralement, le nombre de façons de parenthéser un produit de $n+1$ termes est égal à C_n.



[Q]

9. Notons γ_n le nombre de solutions s'il y a $2n$ convives (le nombre de personnes présentes doit évidemment toujours être pair !) Par convention, on convient que $\gamma_0 = 1$.
Si $n = 1$, il n'y a qu'une seule poignée de mains possible (donc $\gamma_1 = C_1 = 1$), et pour $n = 2$, il y a visiblement deux solutions (donc $\gamma_2 = C_2 = 2$.)
Supposons qu'on ait $\gamma_k = c_k$, pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$. Montrons que $\gamma_{n+1} = c_{n+1}$.
Notons $c_1, c_2, \ldots, c_{2n+2}$ les $2n+2$ convives, en tournant dans le sens horaire.
Supposons que c_1 serre la main de c_m, avec $m \in \{2, \ldots, 2n+2\}$. Cela partage le reste des convives $c_2, \ldots, c_{m-1}$ d'une part, et $c_{m+1}, \ldots, c_{2n+2}$ d'autre part.
Ces ensembles doivent être de cardinal pair pour que les poignées de main soient possibles.
Le convive c_1 serre donne nécessairement la main à un certain c_{2k+2} avec $0 \leq k \leq n$.
Dans ces conditions, et en utilisant notre hypothèse de récurrence :
– Il y a $\gamma_k = C_k$ possibilités pour que les $2k$ convives $c_2, \ldots, c_{2k+1}$ puissent se saluer.
– Il y a $\gamma_{n-k} = C_{n-k}$ possibilités pour que $c_{2k+3}, \ldots, c_{2n+2}$ puissent se saluer.
Il y a donc $C_k C_{n-k}$ solutions si on suppose que c_1 salue c_{2k+2} (dans les cas limites $k = 0$ et $k = n$, ce résultat est correct compte tenu de $\gamma_0 = C_0 = 1$.)
Par sommation, le nombre total de solutions est donc égal à $\gamma_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$.
Cela prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
En particulier, pour douze convives, il y a $C_6 = 132$ solutions. [Q]