S'entraîner et approfondir

4.1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
2. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\dfrac{2\,\pi}{3}\right)$, $\quad\operatorname{Arccos}\left(-\cos\dfrac{2\,\pi}{3}\right)$, $\quad\operatorname{Arccos}(\cos 4\pi)$
3. $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$
4. $\cos(5\operatorname{Arctan} x)$, $\sin(4\operatorname{Arctan} x)$ et $\tan(6\operatorname{Arctan} x)$
5. $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$

4.2 Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 12 \\ \ln x - \ln y = \ln 2 \end{array}\right.$.

4.3 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$;
2. $2\sin 2x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)(\cos x - \sin x) = 2 + \sqrt{3}$;
3. $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

4.4 Courbes représentatives des fonctions définie par les relations suivantes :

1. $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
2. $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$;
3. $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$;
4. $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot$

4.5 Établir $\dfrac{\pi}{4} = 5\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\dfrac{3}{79}\cdot$

$\star$ **4.6** Que pensez vous de la relation $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan}\dfrac{x+y}{1-x\,y}$?

4.7 Résoudre les équations

1. $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$;
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.

4.8 Simplifier : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+k\,y)$ et $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k\,y)$.

⋆ **4.9** Étant donné a, b et c des paramètres réels, résoudre l'équation :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$$

4.10 Simplifier :

1. $\ln\sqrt{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$;
2. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+k\,y)$ et $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k\,y)$.

⋆ **4.11** Étant donné a, b et c des paramètres réels, résoudre l'équation :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$$

4.12 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ il existe un unique $y \in [0, \pi/2[$ tel que

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$$

Vérifier alors $\operatorname{sh} x = \tan y$ et $\tanh(\frac{x}{2}) = \tan(y/2)$.

Solution des exercices

4.1 1. La quantité donnée est définie par : $x^{u(x)} = e^{u(x)\,\ln x}$. Or :

- la définition de $\ln x$ exige $x > 0$;
- la définition de $\ln(\ln x)$ exige $\ln x > 0$ et donc $x > 1$; pour ces valeurs de x, la quantité $\ln x$ est différente de 0 et le quotient $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ est donc défini.

Par suite la quantité donnée est définie pour $x \in]1, +\infty[$, et alors :

$$x^{u(x)} = e^{u(x)\,\ln x} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x.$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \,]1, +\infty[\quad x^{u(x)} = \ln x.$$

2. On trouve : $\operatorname{Arccos}\Big(\cos\dfrac{2\pi}{3}\Big) = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\operatorname{Arccos}\Big(-\cos\dfrac{2\pi}{3}\Big) = \dfrac{\pi}{3}$ ainsi que :

$$\operatorname{Arccos}(\cos 4\pi) = 0.$$

3. Cette quantité est définie dès que :

- $\operatorname{Arcsin} x$ est défini c'est-à-dire pour $x \in [-1, 1]$,
- et que $\operatorname{Arcsin} x \neq \pm\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Elle est donc définie pour $x \in \,]-1, 1[$, et l'on a alors :

$$\forall x \in \,]-1, 1[\quad \tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot$$

4. • La fonction $x \mapsto \cos(5\operatorname{Arctan} x)$ est évidemment définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos 5u &= \operatorname{Re}(\cos u + i \sin u)^5 \\ &= \cos^5 u - 10\cos^3 u \sin^2 u + 5\cos u \sin^4 u \\ &= \cos^5 u\Big(1 - 10\tan^2 u + 5\tan^4 u\Big).\end{aligned}$$

En remplaçant u par $\operatorname{Arctan} x$, et en utilisant :

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{ainsi que} \quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(5\operatorname{Arctan} x) = \frac{1 - 10x^2 + 5x^4}{(1 + x^2)^{5/2}}\cdot$$

• La fonction $x \mapsto \sin(4\operatorname{Arctan} x)$ est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(4\operatorname{Arctan} x) = 2\sin(2\operatorname{Arctan} x)\cos(2\operatorname{Arctan} x)\ ;$$

en utilisant alors les formules donnant le sin et le cos en fonction de la tangente de l'arc moitié on obtient :

$$\sin(4\operatorname{Arctan} x) = 2\,\frac{2x}{1 + x^2}\,\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\cdot$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(4\operatorname{Arctan} x) = \frac{-4\,x\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot$$

- La quantité $\operatorname{Arctan} x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais $\tan(6\operatorname{Arctan} x)$ n'est définie que lorsque $6\operatorname{Arctan} x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou encore $\operatorname{Arctan} x \neq \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{6}\right]\cdot$
  Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[$ on a $\tan 6\theta = \frac{\sin 6\theta}{\cos 6\theta}$ et, en exprimant $\sin 6\theta$ et $\cos 6\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, pour tout réel $x \in \left]-\tan\frac{\pi}{12}, \tan\frac{\pi}{12}\right[$, on obtient :

$$\tan(6\operatorname{Arctan} x) = -2\,\frac{x\left(3-10\,x^2+3\,x^4\right)}{-1+15\,x^2-15\,x^4+x^6}\cdot$$

5. Cette expression est définie pour $x>0$ et alors :

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{\exp(\ln x)}{x} = 1.$$

4.2 L'ensemble de définition de ce système est $\left\{(x,y) \mid x>0 \text{ et } y>0\right\}$.

- Condition nécessaire : la seconde équation entraîne $x/y=2$.
  En reportant dans la première, on trouve $3\,y^2=12$ et donc $y=2$ (car $y>0$), on en déduit $x=4$.
- Réciproquement, le couple $(4,2)$ est évidemment solution.

4.3 1. L'ensemble de définition de cette équation $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.
Sur cet ensemble, elle est équivalente à : $|x|\,|x+1|=1$, soit encore a :

$$x\,(x+1)=1 \quad \text{ou} \quad x\,(x+1)=-1.$$

- La seconde équation n'a aucune racine réelle.
- La première équation a pour racines $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ qui sont bien dans l'ensemble de définition et qui sont donc les racines de l'équation donnée.

2. Comme pour tout x réel, on a :

$$\sin 2\,x = 2\,\sin x\,\cos x = -(\cos x - \sin x)^2 + 1,$$

le réel x est solution de l'équation donné si, et seulement si, le réel $u=(\cos x-\sin x)$ est solution de l'équation :

$$2\,u^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)u + \sqrt{3} = 0.$$

Comme cette dernière équation a pour racines $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, on en déduit que x est solution de l'équation donnée si, et seulement si :

$$\cos - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos - \sin x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot$$

Comme $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, la condition précédente s'écrit encore :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\,\pi}{6}\right)\cdot$$

En résolvant ces équations trigonométriques, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation donnée dans $[0, 2\pi]$ est :

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \right\}.$$

3. L'équation $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ est définie sur $[-1, 1]$ et, sur cet intervalle, l'application :

$$u : x \mapsto \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2}$$

est continue, strictement croissant (somme de deux fonctions strictement croissantes) ; elle réalise donc une bijection $[-1, 1]$ sur $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

Par suite, l'équation proposée possède une unique solution, qui est d'ailleurs positive puisque $u(0) = 0 < \frac{\pi}{4}$.

Supposons x solution (donc positive) de l'équation donnée. Alors, on a :

$$\sin\Big(\operatorname{Arcsin} \frac{x}{2}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arcsin} x\Big)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin \operatorname{Arcsin} x - \cos \operatorname{Arcsin} x\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \sqrt{1 - x^2}\big)$$

ou encore :

$$\sqrt{1 - x^2} = \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)x.$$

En élevant au carré on en déduit $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{2}}}$ et, comme $x \geqslant 0$ on a

$$x = \sqrt{\frac{2}{5 + 2\sqrt{2}}}\,.$$

Remarque : il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a, dès le début, prouvé que l'équation possédait une racine unique.

4.4 1. • **Méthode de simplification directe**

Étant donné que $1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire ; donc on peut en restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$.

En posant $x = \tan t$ avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ou, ce qui est équivalent, $t = \operatorname{Arctan} x$ on obtient :

$$f(\tan t) = \operatorname{Arccos}(\cos 2\,t)\,.$$

Pour $x \geqslant 0$ on a alors $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc $2t \in \left]0, \pi\right[$; on en déduit $f(\tan t) = 2\,t$, ce qui entraîne :

$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x.$$

Par parité, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \operatorname{Arctan} |x|\,.$$

• **Méthode utilisant la dérivée**

Étant donné que $1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$ cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable pour $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \neq 1$ c'est-à-dire pour $x \neq 0$.

Elle est paire, et on peut donc en restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$.
Pour $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\,\frac{-4\,x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{|x|}\,\frac{2\,x}{1+x^2} = \frac{2\,x}{1+x^2}\cdot$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x) - 2\,\operatorname{Arctan} x$, est est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$; on en déduit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est nulle en 0, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = 2\,\operatorname{Arctan} x.$$

Par parité, on obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\,\operatorname{Arctan} |x|\,.$$

2. • La fonction est définie pour $\cos x \neq -1$ car alors $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geqslant 0$.
   • Elle est continue sur son ensemble de définition d'après les théorèmes généraux.
   • Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to(2k+1)\,\pi} f(x) = \lim_{u\to+\infty} \operatorname{Arctan} u = \frac{\pi}{2}$, et on peut donc la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f\big((2k+1)\,\pi\big) = \frac{\pi}{2}\cdot$
   • La fonction f est périodique de période $2\,\pi$ et paire ; on peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$.
   • Pour tout $x \not\equiv 0\ [\pi]$, on a :

$$f(\pi - x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\pi}{2} - f(x)$$

   car pour $u > 0$, on a $\operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan}\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}\cdot$
   Comme on peut vérifier directement que cette relation reste vraie pour les autres valeurs de x, on pourra donc limiter l'étude à $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis compléter le graphe par une symétrie par rapport au point $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

Méthode de simplification directe Pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \quad \text{car } \tan\frac{x}{2} \geqslant 0$$

Comme $\frac{x}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit $f(x) = \dfrac{x}{2}\cdot$

Méthode utilisant la dérivée D'après les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable en tout réel x tel que $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} > 0$ ou encore tel que $\cos x \neq 1$.

Elle est donc dérivable au moins sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\,\frac{2\,\sin x}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1}{2} \qquad \text{car } \sin x > 0. \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{x}{2}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}]$, elle y est constante. Par continuité, elle est constante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Avec $f(0) = 0$, on a :

$$\forall x \in [0,\tfrac{\pi}{2}] \quad f(x) = \tfrac{x}{2}\cdot$$

On complète alors le graphe à l'aide des symétries trouvées au début.

3. La fonction est définie sur :
$$D =]-\infty, -1-\sqrt{2}[\cup]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2}, +\infty[.$$
Sur chacun des intervalles précédents, la fonction est dérivable et :
$$\forall x \in D \quad f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\cdot$$
Sur chaque intervalle, la fonction $x \mapsto f(x) - 2 \operatorname{Arctan} x$ est donc constante et :
   - pour $x \in]-\infty, -1-\sqrt{2}[$, en utilisant la limite en $-\infty$, on trouve :
   $$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + \frac{5\pi}{4} \,;$$
   - pour $x \in]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[$, en utilisant la valeur en 0 on trouve :
   $$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{4} \,;$$
   - pour $x \in]-1+\sqrt{2}, +\infty[$, en utilisant la limite en $+\infty$, on trouve :
   $$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x - \frac{3\pi}{4}\cdot$$

4. Comme, pour x réel, on a :
$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$$
la fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$; de plus elle est dérivable en tout réel x vérifiant :
$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$$
c'est-à-dire pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Après simplifications, on trouve :

$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
$f'(x) = -\frac{4}{x^2+1}$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = \frac{4}{x^2+1}$	$f'(x) = 0$

Donc :
   - avec la limite en $-\infty$, on trouve $\forall x \in]-\infty, -1] \quad f(x) = -4 \operatorname{Arctan} x - \pi$;
   - avec la valeur en 0, on trouve $\forall x \in [-1, 0] \quad f(x) = 0$;
   - avec la valeur en 0, on trouve $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 4 \operatorname{Arctan} x$;
   - avec la limite en $+\infty$, on trouve $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = \pi$.

4.5 • Commençons par prouver $\tan\left(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}\right) = 1\cdot$

La formule de Moivre permet d'obtenir :
$$\tan 5t = \frac{\sin 5t}{\cos 5t} = \frac{5 \tan t - 10 \tan t^3 + \tan t^5}{1 - 10 \tan t^2 + 5 \tan t^4}$$
En remplaçant t par $\operatorname{Arctan}(1/7)$, on obtient $\tan(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}) = \frac{2879}{3353}\cdot$

On trouve de même $\tan(2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}) = \frac{237}{3116}$ et donc :
$$\tan\left(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}\right) = \frac{\frac{2879}{3353} + \frac{237}{3116}}{1 - \frac{2879}{3353}\frac{237}{3116}} = 1.$$

- Vérifions maintenant $0 < 5\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{7} + 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{3}{79} < \dfrac{3\,\pi}{4}\cdot$

  C'est une conséquence de :
$$0 \leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79} \leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7} \leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$
  et de :
$$0 \leqslant 5\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7} + 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{3}{79} \leqslant \frac{7\,\pi}{6} < \frac{3\,\pi}{4}\cdot$$

On en déduit alors l'égalité demandée.

4.6 Cette relation ne peut avoir de sens que si $x\,y \neq 1$.
Sous cette condition, on a $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y \neq \frac{\pi}{2}$ et :
$$\tan(\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y) = \frac{x+y}{1-x\,y}\cdot \qquad (a)$$

- Si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors :
$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y < \frac{\pi}{2}$$
  et cet encadrement ainsi que (a) montrent que l'égalité proposée est vraie.
- Si $x = 0$ ou $y = 0$ l'égalité proposée est évidemment vraie.
- Supposons $x \neq 0$ et, par exemple, $x > 0$.
  * si $y \leqslant 0$, alors les relations :
$$0 < \mathrm{Arctan}\,x < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arctan}\,y \leqslant 0$$
    entraînent :
$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y < \frac{\pi}{2}$$
    et (a) permet alors de conclure l'égalité proposée est vraie.
  * si $y > 0$, alors on a :
$$0 \leqslant \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y$$
    et la relation donnée est vraie si, et seulement si :
$$\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y < \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$
    soit encore :
$$\mathrm{Arctan}\,y < \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x. \qquad (b)$$
    Étant donné que la fonction $\tan$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et que :
$$0 \leqslant \mathrm{Arctan}\,y < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x < \frac{\pi}{2}$$
    la relation (b) est équivalente à :
$$y < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x\right) = \frac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}\,x)} = \frac{1}{x}\cdot$$

Pour $x > 0$, la relation donnée est donc vraie si, et seulement si, $x\,y < 1$.

- Supposons $x < 0$. La relation :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-x\,y}$$

est vraie si, et seulement si :

$$\operatorname{Arctan}(-x) + \operatorname{Arctan}(-y) = \operatorname{Arctan} \frac{(-x)+(-y)}{1-(-x)(-y)}$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$(-x)(-y) = x\,y < 1.$$

En conclusion la relation proposée est vraie si, et seulement si, $x\,y < 1$.

Si $x\,y > 1$, on peut prouver

- si $x > 0$ (et $y > 0$) alors $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \pi + \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-x\,y}$,
- si $x < 0$ (et $y < 0$) alors $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = -\pi + \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-x\,y}$.

4.7 1. • Prouvons que l'équation possède une unique solution. La fonction :

$$u : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1)$$

est continue et strictement croissante (somme de trois applications strictement croissantes) et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty} u, \lim\limits_{+\infty} u[=]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
L'équation donnée possède donc une unique racine.
On peut même préciser que cette racine est positive car $u(0) = 0$.

• Déterminons cette racine. L'équation donnée s'écrit encore

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Soit x une solution de cette équation. On a :

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x < \pi$$

et comme 0 n'est évidemment pas solution, on peut appliquer la fonction tangente à chacun des membres, ce qui donne :

$$\tan\big(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)\big) = \tan(\pi/2 - \operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{x}$$

soit encore $\frac{2\,x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$ et donc $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Comme la racine cherchée est positive, on en déduit $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a prouvé que l'équation donnée possède une unique racine.

2. L'ensemble de définition de l'équation est évidemment $\mathbb{R}$.
   - Comme :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \leqslant \frac{\pi}{2},$$
   toute solution x de l'équation donnée doit vérifier :
   $$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2 \operatorname{Arctan} x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{ et donc } \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$
   - Réciproquement, soit $x \in [-1,1]$ et $t = \operatorname{Arctan} x$. Alors $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et :
   $$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right) &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\,\tan t}{1+\tan^2 t}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2t) \\ &= 2\,t \qquad\qquad \text{car } 2\,t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 2\,\operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution de l'équation est donc le segment $[-1,1]$.

4.8 Pour $y \neq 0$, on a :
$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^{n} \exp(x + k\,y) = \exp x \left(\sum_{k=0}^{n} \exp k\,y\right) = (\exp x)\left(\frac{1-\exp(n+1)y}{1-\exp y}\right) \\ &= \exp x\, \exp(\tfrac{n+1}{2} y)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right) = \exp\left(x + \tfrac{n+1}{2} y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right). \end{aligned}$$

En prenant les parties impaire et paire, on trouve :
$$S_n = \operatorname{sh}\left(x + \tfrac{n+1}{2} y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right) \quad \text{ et } \quad C_n = \operatorname{ch}\left(x + \tfrac{n+1}{2} y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right).$$

Pour $y = 0$, on a $S_n = 0$ et $C_n = n+1$.

4.9 Si $a = b = 0$, l'équation n'est guère intéressante. Supposons donc $(a,b) \neq (0,0)$.
En utilisant l'exponentielle, l'équation donnée est équivalente à :
$$(a+b)\,e^{2\,x} - 2\,c\,e^x + (a-b) = 0.$$

- Si $a+b = 0$, elle s'écrit :
$$-2\,c\,e^x + (a-b) = 0$$
et possède donc une racine (qui est alors unique) si, et seulement si, $c\,(a-b) > 0$.
- Si $a+b \neq 0$, il s'agit de discuter du nombre de racines positives de l'équation du second degré :
$$(a+b)\,u^2 - 2\,c\,u + (a-b) = 0. \qquad (a)$$
Pour cela on utilise :
  * le discriminant de cette équation qui est $\Delta = 4\,(c^2 + b^2 - a^2)$,
  * le produit de ses racines qui est du signe de $a^2 - b^2$,
  * la somme de ses racines qui est du signe de $c\,(a+b)$.

On en déduit :

* $*$ Si $c^2+b^2-a^2<0$ l'équation (a) ne possède aucune racine réelle ; il en est de même de l'équation donnée.
* $*$ Si $c^2+b^2-a^2>0$ l'équation (a) possède deux racines réelles ;
    * $\star$ si $a^2-b^2<0$, l'une de ces racines est strictement négative et l'autre est strictement positive ; par suite l'équation donnée possède une racine unique ;
    * $\star$ si $a^2-b^2>0$, les deux racines ont le même signe ;
      * si $c\,(a+b)>0$ leur somme est positive et les deux racines sont strictement positives ; par suite l'équation donnée possède deux racines ;
      * si $c\,(a+b)<0$ leur somme est négative et les deux racines sont strictement négatives ; par suite l'équation donnée ne possède aucune racine.
    * $\star$ si $a^2-b^2=0$ l'une des racines est nulle, et l'équation donnée possède une racine si, et seulement si, la somme $c\,(a+b)$ est strictement positive.

4.10 1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}$ est définie et positive. De plus on a :

$$\ln\sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}=\ln\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}}=\ln e^{2x}=2\,x.$$

2. Pour $y\neq 0$, on a :

$$E_n=\sum_{k=0}^{n}\exp(x+k\,y)=\exp x\left(\sum_{k=0}^{n}\exp k\,y\right)=(\exp x)\left(\frac{1-\exp(n+1)y}{1-\exp y}\right)$$

$$=\exp x\,\exp(\tfrac{n+1}{2}y)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right)=\exp\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right).$$

En prenant les parties impaire et paire, on trouve :

$$S_n=\operatorname{sh}\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right)\quad\text{et}\quad C_n=\operatorname{ch}\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right).$$

Pour $y=0$, on a $S_n=0$ et $C_n=n+1$.

4.11 Si $a=b=0$, l'équation n'est guère intéressante. Supposons donc $(a,b)\neq(0,0)$.
En utilisant l'exponentielle, l'équation donnée est équivalente à :

$$(a+b)\,e^{2\,x}-2\,c\,e^x+(a-b)=0.$$

* Si $a+b=0$, elle s'écrit :
$$-2\,c\,e^x+(a-b)=0$$
et possède donc une racine (qui est alors unique) si, et seulement si, $c\,(a-b)>0$.
* Si $a+b\neq 0$, il s'agit de discuter du nombre de racines positives de l'équation du second degré :
$$(a+b)\,u^2-2\,c\,u+(a-b)=0. \qquad (a)$$
Pour cela on utilise :
    * $*$ le discriminant de cette équation qui est $\Delta=4\,(c^2+b^2-a^2)$,

- le produit de ses racines qui est du signe de $a^2 - b^2$,
- la somme de ses racines qui est du signe de $c\,(a+b)$.

On en déduit :

- Si $c^2 + b^2 - a^2 < 0$ l'équation (a) ne possède aucune racine réelle ; il en est de même de l'équation donnée.
- Si $c^2 + b^2 - a^2 > 0$ l'équation (a) possède deux racines réelles ;
  - si $a^2 - b^2 < 0$, l'une de ces racines est strictement négative et l'autre est strictement positive ; par suite l'équation donnée possède une racine unique ;
  - si $a^2 - b^2 > 0$, les deux racines ont le même signe ;
    * si $c\,(a+b) > 0$ leur somme est positive et les deux racines sont strictement positives ; par suite l'équation donnée possède deux racines ;
    * si $c\,(a+b) < 0$ leur somme est négative et les deux racines sont strictement négatives ; par suite l'équation donnée ne possède aucune racine.
  - si $a^2 - b^2 = 0$ l'une des racine est nulle, et l'équation donnée possède une racine si, et seulement si, la somme $c\,(a+b)$ est strictement positive.

4.12 • Comme $\operatorname{ch} x \geqslant 1$, on a $0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} \leqslant 1$;

par suite, il existe donc un unique $y \in [0, \pi/2[$ tel que $\cos y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\cdot$

• Comme $x \geqslant 0$, on a $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \sqrt{\tan^2 y}$.

Étant donné que $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan y \geqslant 0$ et donc $\sqrt{\tan^2 y} = \tan y$.

• On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{y}{2}\right) &= \frac{1-\cos y}{\sin y} = \frac{\frac{1}{\cos y} - 1}{\tan y} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - e^{-x}}\\ &= \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2}{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \tanh\frac{x}{2}\cdot\end{aligned}$$