

Corrigé du CNC 2010 : Physique II

1^{ère} Partie

Conduction électrique dans un milieu matériel

1.

1.1. Conductivité électrique d'un milieu matériel

1.1.1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, l'équation du mouvement du porteur de charge dans le milieu matériel s'écrit :

$$m \vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_a + \vec{F}_r \quad : \quad m \vec{a} = q \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{r}$$

$$: \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{r}$$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E}}$$

1.1.2.

1.1.2.1 L'étude en régime sinusoïdal trouve sa justification dans le théorème de FOURIER qui énonce que tout champ quelconque périodique peut être développé en une somme de composantes sinusoïdales. L'action d'un milieu sur le champ total est la somme des actions de ce milieu sur chaque composante sinusoïdale.

1.1.2.2 Pour déterminer l'expression complexe de la vitesse \underline{v} du porteur de charge en régime sinusoïdal établi de pulsation ω , on utilise l'équation du mouvement suivante :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v} + m \omega_0^2 \vec{r} = q \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \int \vec{v} dt$$

soit alors :

$$m \frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \underline{v} + m \omega_0^2 \int \underline{v} dt = q \underline{E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) \equiv i\omega \exp(i\omega t) \\ \int \exp(i\omega t) dt \equiv \frac{1}{i\omega} \exp(i\omega t) \end{cases}$$

$$i\omega \underline{v} + \frac{\underline{v}}{\tau} - i \frac{\omega_0^2}{\omega} \underline{v} = \frac{q}{m} \underline{E} \quad : \quad \left[\frac{1}{\tau} + i \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \right] \underline{v} = \frac{q}{m} \underline{E}$$

d'où :

$$\boxed{\underline{v} = \frac{q/m}{\frac{1}{\tau} + i\omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)} \underline{E} = \frac{i \frac{\omega q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \underline{E}_0 \exp(i\omega t)}$$

1.1.3. Expression de la densité volumique de charges ρ associée aux porteurs mobiles en fonction de n et q :

$$\boxed{\rho = nq}$$

1.1.4. Expression de la densité de courant \vec{j} en fonction de n , q et \vec{v} :

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}}$$

1.1.5. Du résultat de la question 1.1.2..2, on peut déduire l'expression complexe de la densité de courant \vec{j} :

$$\vec{j} = \frac{nq^2/m}{\frac{1}{\tau} + i(\omega - \omega_0^2/\omega)} \vec{E} \quad : \quad \boxed{\vec{j} = \frac{nq^2\tau/m}{1 + i\omega\tau(1 - \omega_0^2/\omega^2)} \vec{E}}$$

1.1.6. La loi d'OHM locale s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

or, d'après 1.1.5. on a :

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau/m}{1 + i\omega\tau(\omega - \omega_0^2/\omega^2)} \vec{E}$$

soit :

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}}$$

avec :

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}}$$

1.2. Étude d'un milieu conducteur

1.2.1. On a $\omega_0 = 0$, l'expression de la conductivité électrique complexe du milieu conducteur devient :

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}}$$

1.2.2. La conductivité complexe précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} (1 - i\omega\tau) = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} - i \frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = \sigma_1 - i\sigma_2}$$

d'où :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

1.2.3.

1.2.3.1 Expression du nombre d'électrons de conduction par unité de volume n :

$$n = \frac{N}{V} \quad \text{avec} \quad N = n_{(\text{mol})} \mathcal{N}_A = \frac{m_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} \mathcal{N}_A$$

$$n = \frac{m_{\text{Cu}}}{V} \frac{\mathcal{N}_A}{M_{\text{Cu}}} \quad : \quad n = \rho_{\text{Cu}} \frac{\mathcal{N}_A}{M_{\text{Cu}}}$$

1.2.3.2 Valeur numérique de n :

$$n = 8,9 \times 10^3 \times \frac{6,02 \times 10^{23}}{63,5 \times 10^{-3}} \quad : \quad n = 8,4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

1.2.3.3 La conductivité du cuivre en régime statique est :

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m} \quad \text{avec} \quad q = -e \quad \text{et} \quad m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

soit donc :

$$\tau = \frac{m\sigma_0}{nq^2} = \frac{(9,1 \times 10^{-31}) (6 \times 10^7)}{(8,4 \times 10^{28}) (-1,6 \times 10^{-19})^2} \quad : \quad \tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s}$$

1.2.3.4 Le domaine de fréquences pour lequel $\omega\tau \ll 1$ est tel que :

$$2\pi f\tau \ll 1 \quad : \quad f \ll f_1 = \frac{1}{2\pi\tau} = 6,4 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

1.2.4. En supposant que la condition précédente ($\omega\tau \ll 1$) est vérifiée, on obtient les expressions approchées au premier ordre en $\omega\tau$ de σ_1 et de σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} \approx \sigma_0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \approx \sigma_0\omega\tau$$

1.2.5. Le vecteur densité de courant dans le milieu étudié s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = (\sigma_1 - i\sigma_2) \vec{E} = \sigma_0 (1 - i\omega\tau) \vec{E}$$

soit :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - i\sigma_0\tau\omega \vec{E} \quad \xrightarrow{\text{En notation réelle : } i\omega \equiv \frac{\partial}{\partial t}} \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - \sigma_0\tau \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - \sigma_0 \tau \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On en déduit donc l'expression de χ :

$$\chi = -\frac{\sigma_0 \tau}{\varepsilon_0}$$

1.2.6. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit dans le milieu conducteur comme suit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.2.7. Si l'on admet que le courant de conduction a la même expression qu'en basses fréquences, on écrit : $\vec{j}_c = \sigma_0 \vec{E}$. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit alors :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d)$$

avec

$$\vec{j}_d = (1 + \chi) \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

\vec{j}_d est la densité de courant de déplacement.

1.2.8. Le rapport de l'amplitude du courant de conduction à celle du courant de déplacement est donné par :

$$\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{|\vec{j}_c|}{|\vec{j}_d|} : \eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0 |\vec{E}|}{|1 + \chi| \varepsilon_0 \omega |\vec{E}|}$$

soit donc :

$$\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega |1 + \chi|}$$

1.2.9.

1.2.9..1 Le rapport η est égal à l'unité pour la fréquence ω_c telle que :

$$\eta = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega |1 + \chi|} = 1 \quad : \quad \varepsilon_0 \omega |1 + \chi| = \sigma_0$$

donc :

$$\omega = \omega_c = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 |1 + \chi|}$$

1.2.9..2

⊙ La fréquence f_c vaut pour le cuivre :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\sigma_0}{2\pi \varepsilon_0 |1 + \chi|} \quad \text{avec} \quad \chi = -\frac{\sigma_0 \tau}{\varepsilon_0}$$

$$f_c = \frac{\sigma_0}{2\pi |\varepsilon_0 - \sigma_0 \tau|} \quad : \quad \boxed{f_c = 6,4 \times 10^{12} \text{ Hz}}$$

⊙ Cette fréquence est située dans le domaine des infrarouge.

⊙ Dans le cas d'un rayonnement électromagnétique visible $f_{\text{visible}} \gg f_c$ et par suite $\eta \ll 1$: le cuivre se comporte comme un isolant (il réfléchit la lumière visible).

2^{ème} partie

Propagation d'ondes électromagnétiques dans le conducteur ohmique

2.1. Relation de dispersion dans un conducteur ohmique

2.1.1. D'après 1.2.1., la conductivité σ est égale à σ_0 si : $\omega \tau \ll 1$: $\boxed{f \ll f_1 = \frac{1}{2\pi\tau} = 6,4 \cdot 10^{12} \text{ Hz}}$

2.1.2. Pour un conducteur ohmique, l'équation de MA s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2.1.3. Équation de propagation :

on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad : \quad \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t}$$

soit :

$$-\Delta \vec{E} + \underbrace{\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E})}_{=0} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

:

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (1)$$

2.1.4. D'après le développement en série de FOURIER, le champ \vec{E} peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (monochromatiques) + l'équation de propagation (1) est linéaire. Donc, la solution générale peut s'écrire sous forme d'une superposition de solutions monochromatiques

2.1.5. Projection de l'équation (1) sur \vec{u}_x :

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E(z,t)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} = 0$$

soit, en notation complexe :

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} - \mu_0 \sigma i \omega E(z) + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 E(z) = 0$$

d'où :

$$\boxed{\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + (\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma \omega) E(z) = 0} \quad (2)$$

2.1.6. Si on cherche les solutions sous la forme : $E(z) = \exp(i k z)$, alors :

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} = -k^2 E(z)$$

l'équation (2) donne (solution non triviale) :

$$\boxed{k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma \omega}$$

2.1.7.

2.1.7.1 On a $E(z) = E_1 \exp(i k z)$, d'où :

$$\vec{E}(z,t) = E_1 \exp[i(\omega t + k z)] \vec{u}_x$$

L'équation de M-F donne :

$$\frac{\partial \vec{B}(z,t)}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = -i k E_1 \exp[i(\omega t + k z)] \vec{u}_y$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\vec{B}(z,t) = -\frac{k}{\omega} E_1 \exp[i(\omega t + k z)] \vec{u}_y + \underbrace{\vec{cte}}_{\vec{0}}$$

:

$$\vec{B}(z,t) = -\frac{k}{\omega} E_1 \exp[i(\omega t + k z)] \vec{u}_y$$

soit :

$$\boxed{\vec{B}(z,t) = \frac{k}{\omega} \vec{E}_1(z,t) \wedge \vec{u}_z}$$

2.1.7.2 Non, car $\arg(k) \neq 0$

2.2.

2.2.1. On a : $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma \omega$

:

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$$

On fait un développement à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)^{1/2} \\ &\approx \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega \left(1 - i \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0 \omega} \right) \quad \text{car } \sigma \ll \varepsilon_0 \omega \\ &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega - i \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \\ &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega - i \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

soit :

$$k = k_0 - i \frac{1}{l_p}$$

avec :

$$l_p = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

2.2.2.

⊙ On a : $l_p = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{2 \varepsilon_0 c}{\sigma}$

d'où :

$$\frac{l_p}{\lambda} = \frac{2 \varepsilon_0 c}{\sigma} \frac{1}{\lambda} = \frac{2 \varepsilon_0 c}{\sigma} \frac{1}{\lambda \omega} = \frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma \pi} \quad (\lambda \omega = 2 \pi c)$$

puisque $\sigma \ll \varepsilon_0 \omega$, alors :

$$l_p \gg \lambda$$

⊙ Il y aura beaucoup de dissipation d'énergie dans ce type de conducteur car l'onde y sera atténuée ($\Im(k) \neq 0$) sur une distance de l'ordre de quelques $l_p \gg \lambda$.

2.2.3. On a :

$$E(z, t) = E_1 \exp[i(\omega t + k z)] + E_2 \exp[i(\omega t - k z)]$$

soit :

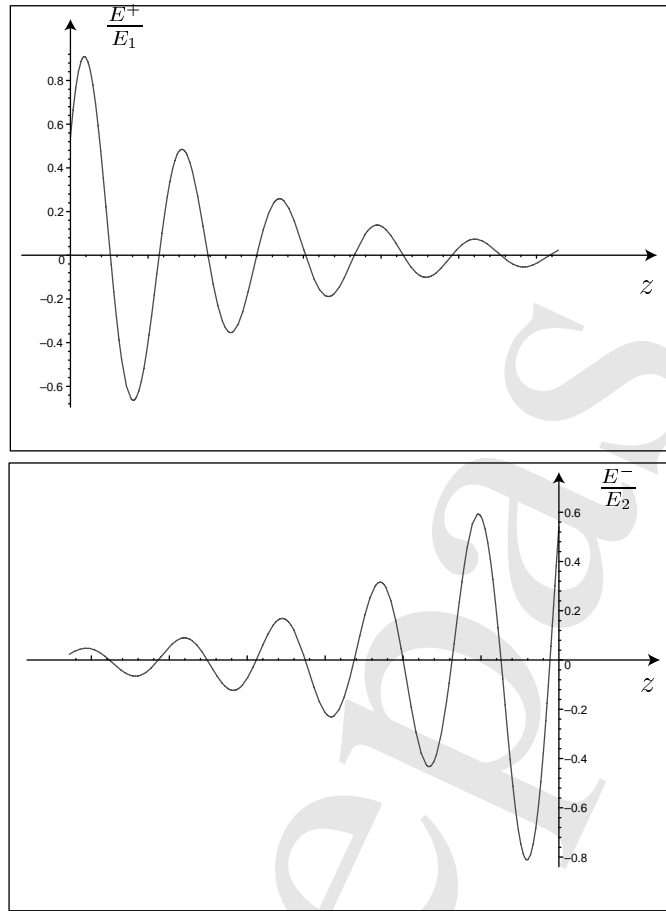
$$E(z, t) = E_1 \exp\left(\frac{z}{l_p}\right) \exp[i(\omega t + k_0 z)] + E_2 \exp\left(-\frac{z}{l_p}\right) \exp[i(\omega t - k_0 z)]$$

2.2.4.

⊙ Le champ réel est : $\Re(E(z, t))$, soit :

$$\Re[E(z, t)] = \underbrace{E_1 \exp\left(\frac{z}{l_p}\right) \cos[(\omega t + k_0 z)]}_{E^-} + \underbrace{E_2 \exp\left(-\frac{z}{l_p}\right) \cos[(\omega t - k_0 z)]}_{E^+}$$

- ⊙ E^- : OPPM dans le sens des z décroissants (onde évanéscente).
- ⊙ E^+ : OPPM dans le sens des z croissants (onde évanéscente).
- ⊙ Allures de E^+ et E^- à t fixé :



2.2.5.

⊙ L'amplitude de cette onde diminue lorsqu'elle se propage dans le conducteur (car $\Im(k) \neq 0$), donc il y a dissipation d'énergie.

⊙ L'énergie perdue par l'onde est cédée au conducteur. Elle est transformée ensuite en énergie thermique par effet JOULE (la puissance volumique moyenne cédée à la matière est : $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} |E_i|^2 \exp(-2z/l_p)$).

⊙ On a $l_p = \frac{2\varepsilon_0 c}{\sigma}$, donc, dans un mauvais conducteur où σ est petite, l_p est grande. Donc il y a beaucoup de dissipation (l'onde est absorbée par le milieu).

2.3.

2.3.1.

⊙ On a : $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma \omega \approx -i \mu_0 \sigma \omega$. ($\varepsilon_0 \omega \ll \sigma$)

soit :

$$k = \pm \sqrt{-i \mu_0 \sigma \omega} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega}$$

d'où :

$$k = \pm(1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} = \pm \frac{(1 - i)}{\delta}$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

⊙ δ est l'épaisseur de peau où profondeur de pénétration de l'onde.

2.3.2.

⊙ On a :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{2\sigma}}$$

puisque : $\varepsilon_0 \omega \ll \sigma$, alors :

$$\delta \ll \lambda$$

⊙ Pour un bon conducteur, l'onde est localisée au voisinage de la surface. Donc il y a peu de dissipation.

2.3.3.

⊙ Le champ complexe est :

$$E(z, t) = E_1 \exp[i(\omega t + kz)] + E_2 \exp[-i(\omega t + kz)]$$

soit :

$$E(z, t) = E_1 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\right] + E_2 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]$$

⊙ Le champ réel est :

$$\Re[E(z, t)] = \underbrace{E_1 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \cos\left[\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\right]}_{E^-} + \underbrace{E_2 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left[\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]}_{E^+}$$

⊙ On a : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$. Donc, en hautes fréquences ($\omega \uparrow$), δ devient faible et l'onde est localisée au voisinage de la surface du conducteur.

2.3.4.

⊙ Pour un bon conducteur, l'onde reste localisée au voisinage de la surface. Il y a peu de dissipation. Le bon conducteur n'absorbe pas l'onde.

⊙ Pour un mauvais conducteur l'onde pénètre à l'intérieur. Il y a alors trop de dissipation.

2.4. Réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur réel

2.4.1. L'onde considérée est une *OPPM*, on peut appliquer la relation de structure :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_i = \frac{E_i}{c} \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{e}_y$$

de même :

$$\vec{B}_r = -\frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_r = -\frac{E_r}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{e}_y$$

Donc :

$$\vec{B}_v = \frac{E_i}{c} \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{e}_y - \frac{E_r}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{e}_y$$

2.4.2. On utilise l'équation de MAXWELL – FARADAY :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} =: \vec{B}_t = - \int \text{rot} \vec{E} dt = ik E_t \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

Donc :

$$\vec{B}_t = \frac{k}{\omega} E_t \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

2.4.3. Les relations de passages en $z = 0$:

$$\vec{E}(0, t) - \vec{E}_v(0, t) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_t(0, t) - \vec{B}_v(0, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

ρ_s et \vec{j}_s sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant.

2.4.4. Sur l'interface entre le vide et le milieu conducteur :

- La composante tangentielle du champ électrique est continue : $\vec{E}_i(z = 0) + \vec{E}_r(z = 0) = \vec{E}_t(z = 0)$, ce qui donne :

$$E_i + E_r = E_t$$

- La composante tangentielle du champ magnétique est aussi continue car la densité surfacique de courant \vec{j}_s est nulle (ici la distribution est volumique). Donc, $\vec{B}_i(z = 0) + \vec{B}_r(z = 0) = \vec{B}_t(z = 0)$, ce qui donne :

$$\frac{E_i}{c} - \frac{E_r}{c} = \frac{k}{\omega} E_t$$

2.4.5. Les deux équations de continuité précédentes permettent de calculer E_t et E_r en fonction de E_i :

$$E_t = \frac{2}{1 + \frac{k}{k_0}} E_i$$

et

$$E_r = \frac{1 - \frac{k}{k_0}}{1 + \frac{k}{k_0}} E_i$$

2.4.6.

2.4.6.1 Dans un mauvais conducteur (d'après 2.2.1) on a : $k \simeq k_0 - \frac{i}{l_p} = \frac{k}{k_0} \simeq 1 - \frac{i}{k_0 l_p} =$

$$1 - \frac{i}{k_0} \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Donc :

$$E_t \simeq \frac{E_i}{1 - i \frac{\sigma}{4\omega\varepsilon_0}}$$

De même :

$$E_r = \frac{1 - \frac{k}{k_0}}{1 + \frac{k}{k_0}} E_i \simeq \frac{k_0 - (k_0 - \frac{i}{l_p})}{k_0 + (k_0 - \frac{i}{l_p})} E_i = \frac{\frac{i}{l_p}}{2k_0 - \frac{i}{l_p}} \simeq \frac{E_i}{\frac{2k_0 l_p}{i} - 1} = \frac{-E_i}{1 + 4 \frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

soit :

$$E_r = \frac{-E_i}{1 + 4 \frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

2.4.6.2

⊙ Puisque on est dans le cas du "mauvais" conducteur, alors $\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma} \gg 1$, donc :

$$E_t \simeq E_i$$

et

$$E_r \ll E_i$$

⊙ Le "mauvais" conducteur transmet presque intégralement l'onde incidente.

2.4.7. Cas du bon conducteur

2.4.7.1 Dans un bon conducteur on a (d'après 2.3.1) : $k \simeq \frac{1+i}{\delta}$, donc : $1 + \frac{k}{k_0} \simeq 1 + \frac{1+i}{k_0 \delta}$.

Avec : $k_0 \delta = \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \ll 1$, donc :

$$E_t = 2E_i(1 + i + k_0 \delta)^{-1} k_0 \delta = \frac{2E_i}{1 + i} (1 + \frac{k_0 \delta}{1 + i}) k_0 \delta$$

À l'ordre le plus bas non nul en $k_0 \delta$:

$$E_t \simeq \frac{2k_0 \delta}{1 + i} E_i$$

De même, avec $\|\frac{k}{k_0}\| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \gg 1$, on aura :

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{k_0}{k} - 1}{\frac{k_0}{k} + 1} = (\frac{k_0}{k} - 1)(\frac{k_0}{k} + 1)^{-1} \simeq (\frac{k_0}{k} - 1)(1 - \frac{k_0}{k}) = -(1 - \frac{k_0}{k})^2$$

Un développement limité au premier ordre donne : $\frac{E_r}{E_i} = -1 + \frac{2k_0 \delta}{1+i} = -1 + (1+i)k_0 \delta$

Finalement :

$$E_r \simeq (-1 + (1+i)k_0 \delta) E_i$$

2.4.7.2

⊙ Puisque $k_0 \delta \ll 1$ alors :

$$\boxed{E_r \simeq -E_i} \text{ et } \boxed{E_t \ll E_i}$$

⊙ Le bon conducteur réfléchit presque totalement toute l'énergie électromagnétique de l'onde incidente.

2.4.8. Le "bon" conducteur réfléchit presque totalement toute l'énergie électromagnétique de l'onde incidente.

Le "mauvais" conducteur absorbe presque totalement toute l'énergie électromagnétique véhiculée par l'onde incidente.

3.

3^{ème} partie

Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

3.1. Dynamique d'un plasma libre

3.1.1. L'équation (5) de l'énoncé donne : $\frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = (1 + iw\tau)\vec{j}$, pour obtenir l'équation différentielle demandée, il suffit de remplacer $iw\vec{j}$ par $\frac{d\vec{j}}{dt}$. On obtient alors l'équation suivante :

$$\vec{j} + \tau \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

3.1.2. L'équation de conservation de la charge électrique s'écrit : $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Appliquons l'opérateur divergence à l'équation de la question 3.1.1 : $\text{div } \vec{j} + \tau \text{div } \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2\tau}{m} \text{div } \vec{E}$. En utilisant l'équation de MAXWELL – GAUSS et l'équation de conservation de la charge, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \rho = 0$$

Il est clair que : $w_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$

3.1.3. Pour les faibles densités n , l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit, avec A et B des constantes d'intégration : $\rho(t) = A + B \exp(-\frac{t}{\tau})$. Si $t \rightarrow \infty$, $\rho(t) \rightarrow A = \rho_0$.

La densité volumique de charge tend vers une valeur constante ρ_0 .

3.1.4. Dans ce cas : $\frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \ll w_p^2 \times \rho$, l'équation (6) devient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \rho = 0$$

Le plasma est alors siège d'oscillations dont la pulsation propre est : $w_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

3.2. Propagation d'ondes dans un plasma

3.2.1. Il suffit de remplacer $\frac{ne^2}{m}$ par $\varepsilon_0 w_p^2$ dans l'expression de \vec{j} :

$$\vec{j} = \frac{\varepsilon_0 w_p^2}{iw} \vec{E}$$

3.2.2.

3.2.2.1 On a : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ puisque $\text{div} \vec{E} = 0$.

Autrement :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 w_p^2}{w} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Donc :

$$\Delta \vec{E} - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 w_p^2}{w} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

3.2.2.2 On injecte \vec{E} dans cette équation, on obtient :

$$k^2 = \frac{w^2}{c^2} - \frac{w_p^2}{c^2}$$

3.2.3.

3.2.3.1 Pour $w < w_p$: $w^2 - w_p^2 = i^2(w_p^2 - w^2)$. Donc : $k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{w_p^2 - w^2} = : \exp(-ikz) = \exp(\pm \frac{i}{c} (\sqrt{w_p^2 - w^2})z)$.

Si $z > 0$, la valeur de k qui mène à une solution bornée est :

$$k = -\frac{i}{c} \sqrt{w_p^2 - w^2}$$

3.2.3.2 L'expression du champ électrique est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(iwt) \exp\left(-\frac{1}{c} (\sqrt{w_p^2 - w^2})z\right)$$

Cette onde est une onde évanescence. Le terme $\exp(-\frac{1}{c} (\sqrt{w_p^2 - w^2})z)$ est responsable de la non propagation de l'onde dans le plasma pour $w < w_p$. L'onde est complètement réfléchiée par le plasma.

3.2.3.3 Le calcul numérique de la longueur d'onde correspondante à $f_p = \frac{w_p}{2\pi}$: $\lambda_p = \frac{c}{f_p}$ donne $\lambda_p \simeq 334m$.

C'est le domaine des ondes radio. Les ondes sont réfléchies par la couche ionosphérique, ce phénomène est appliqué pour les transmissions hertziennes.

3.2.4.

3.2.4.1 Si $w > w_p$ alors : $k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{w^2 - w_p^2}$.

Si $z > 0$, la valeur de k qui donne une solution progressive dans le sens des z croissants est :

$$k = +\frac{1}{c} \sqrt{w^2 - w_p^2}$$

3.2.4.2 L'expression du champ électrique est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i\left(\omega t - \frac{1}{c}(\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2})z\right)$$

Cette onde est une onde plane progressive monochromatique.

Sa vitesse de phase est :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

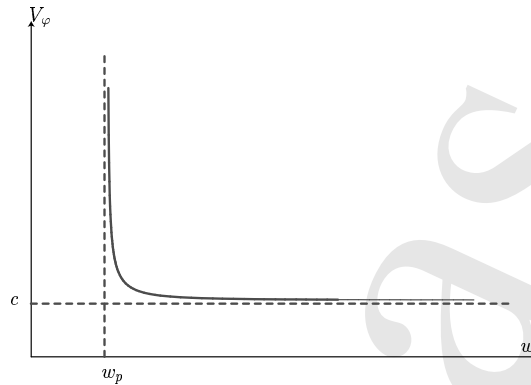


FIG. 1 –

Aux hautes fréquences, $v_\phi \rightarrow c$, la dispersion disparaît, les propriétés du plasma n'intervient plus, ses charges "ne répondent" plus aux excitations très rapides du champ électrique : le plasma devient "transparent".

3.3.

3.3.1. Le champ électrique de l'onde considérée s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 (\cos(\omega t - k_1 z) + \cos(\omega t - k_2 z)) \vec{e}_x = E_0 \left[\cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} - \frac{(k_1 + k_2)z}{2}\right) \times \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + \frac{(k_2 - k_1)z}{2}\right) \right] \vec{e}_x =$$

Avec $\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} = \frac{\delta\omega}{2}$ et $\frac{(k_2 - k_1)z}{2} = -\frac{\delta k}{2}$

Donc :

$$\vec{E} = E_0 \times \underbrace{\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}z\right)}_{\text{amplitude modulée}} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right) \vec{u}_x$$

L'amplitude modulée constitue une *OPPM* de pulsation $\omega_b = \frac{\delta\omega}{2}$.

3.3.2. La vitesse de propagation de l'onde haute fréquence est :

$$v_r = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$$

et

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

v_g est la vitesse de groupe.

Puisque il y a propagation, alors on est dans le cas où : $w_2 > w_1 > w_p$, alors :

$$k_1 = \frac{1}{c} \sqrt{w_1^2 - w_p^2} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{c} \sqrt{w_2^2 - w_p^2}$$

On peut remarquer que : $v_r \times v_g = \frac{w_2^2 - w_1^2}{k_2^2 - k_1^2} = c^2 \frac{w_2^2 - w_1^2}{w_2^2 - w_p^2 - (w_1^2 - w_p^2)} = c^2$

De plus :

$$w_1 + w_2 = 2w_1 + \delta w \simeq 2w_1$$

et

$$k_1 + k_2 = 2k_1 + \delta k \simeq 2k_1$$

Alors :

$$w_1 + w_2 = 2w_1 + \delta w \simeq 2w_1$$

et

$$k_1 + k_2 = 2k_1 + \delta k \simeq 2k_1$$

Alors :

$$v_r \simeq \frac{w_1}{k_1} = \frac{cw_1}{\sqrt{w_1^2 - w_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w_1^2}}}$$

On en déduit que :

$$v_g = \frac{c^2}{v_r} = c \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w_1^2}}$$

L'onde résultante se propage dans le plasma avec une vitesse de phase égale à v_r et son enveloppe se propage avec une vitesse égale à v_g .