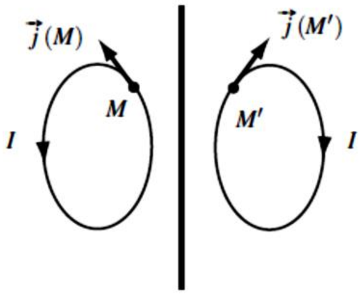
SYMETRIE ET INVARIANCE EN MAGNETOSTATIQUE

2. Symétries et invariances du champ magnétostatique

Une distribution de courant stationnaire crée en un point M de l'espace un champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ dont on peut étudier les propriétés de symétrie et d'invariance.

2.1. Symétries et invariances des distributions de courant

2.1.1. Symétrie plane



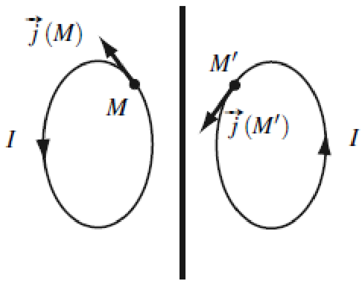
Soit un plan (π), la symétrie S_π par rapport à ce plan et $\vec{S}_\pi$ la symétrie Plan (π) vectorielle associée. Une distribution de courant D est symétrique par rapport au plan (π) si et seulement si : $\forall$ M $\in$ D, M' = S_π(M) $\in$ D et $\vec{j}(M') = \vec{S}_\pi(\vec{j}(M))$

Exemple : La distribution de courant D est symétrique par rapport au plan (xOy) $\Leftrightarrow$ $j_x(x,y,-z) = j_x(x,y,z)$, $j_y(x,y,-z) = j_y(x,y,z)$et $j_z(x,y,-z) = -j_z(x,y,z)$ pour tout point $M(x,y,z)$ et son symétrique $M'(x,y,-z)$ de D.

En tout point d'un plan de symétrie, le vecteur densité de courant $\vec{j}$ appartient à ce plan, les lignes de courant (lignes de champ de $\vec{j}$) sont tangentes à ce plan.

2.1.2. Antisymétrie plane

Soit un plan (π_a), la symétrie $S_{\pi a}$ par rapport à ce plan et $\vec{S}_{\pi a}$ la symétrie Plan (π_a)



vectorielle associée. Une distribution de courant D est antisymétrique par rapport au plan (π_a) si et seulement si : $\forall$ M $\in$ D, M' = $S_{\pi a}$(M) $\in$ D et $\vec{j}(M') = -\vec{S}_{\pi a}(\vec{j}(M))$

Exemple : La distribution de courant D est antisymétrique par rapport au plan (xOy) $\Leftrightarrow$ $j_x(x,y,-z) = -j_x(x,y,z)$, $j_y(x,y,-z) = -j_y(x,y,z)$et $j_z(x,y,-z) = j_z(x,y,z)$ pour tout point M(x,y,z) et son symétrique M'(x,y,-z) de D.

En tout point d'un plan d'antisymétrie, le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est orthogonal à ce plan, les lignes de courant sont donc perpendiculaire à ce plan.

2.1.3.Invariance par translation

Une distribution de courant D est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ si et seulement si :

$$\forall\, M \in D, M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M) \in D \text{ et } \vec{j}(M') = \vec{j}(M)$$

Exemple, la distribution de courant D est invariante par la translation de vecteur

$\vec{a} = a\vec{u}_x$ $(a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \vec{j}(x,y,z) = \vec{j}(x+a,y,z)$ $\forall$ $M(x,y,z)$ et $M'(x + a,y,z) \in$ D.

Si une distribution de charges est invariante par toute translation de vecteur parallèle à l'axe (Ox) alors le vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ ne dépend pas de x.

2.1.4. Invariance par rotation

Soit la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'angle θ_0 autour d'un axe Δ et $\vec{\mathcal{R}}_{\Delta,\theta_0}$ la rotation vectorielle associée.

Une distribution de courant D est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$, d'angle θ_0 et d'axe Δ si et seulement si :

$$\forall\, M \in D, M' = \mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}(M) \in D \text{ et } \vec{j}(M') = \vec{\mathcal{R}}_{\Delta,\theta_0}(\vec{j}(M))$$

La distribution de courant possède la symétrie de révolution d'axe Δ (axe de symétrie).

Exemple, la distribution de charges D est invariante par la rotation d'angle θ_0 autour de l'axe (Oz) si et seulement si $\forall$ M(r,θ,z) ∈ D, M′(r,θ+θ_0,z) ∈ D et $\vec{j}(r,\theta,z) = \vec{j}(r,\theta + \theta_0, z)$.

Si une distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) (symétrie de révolution d'axe (Oz)), alors $\vec{j}(M)$ ne dépend pas de θ.

2.2. Symétries et invariances du champ magnétostatique

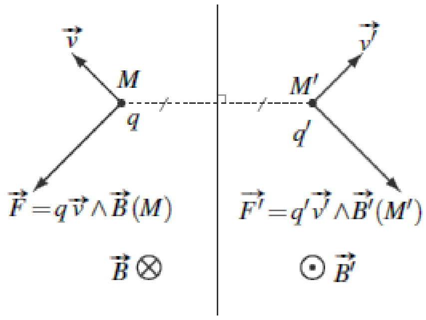
2.2.1. Transformation du champ magnétique par une symétrie plane

Comment le champ magnétique est transformé par une symétrie par rapport à un plan ?

Nous savons qu'une charge ponctuelle q en mouvement dans un champ magnétique $\vec{B}$ et animée d'une vitesse $\vec{v}$, subit en un point M la force de Lorentz : $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$

Considérons un plan de symétrie (π). Par la symétrie S_π par rapport à ce plan la charge q reste inchangée donc q'(image de q) = q au point $M' = S_\pi(M)$, animée d'une vitesse $\vec{v}' = \vec{S}_\pi(\vec{v})$, symétrique de $\vec{v}$ par rapport à (π) subit la force $\vec{f}' = \vec{S}_\pi(\vec{f})$, symétrique de $\vec{f}$ par rapport à (π).

Schéma pour q > 0



Plan (π)

On a alors (invariance des lois de l'électromagnétisme) :

$\vec{f}' = q\vec{v}' \wedge \vec{B}'(M')$ d'où : $\vec{S}_\pi(\vec{f}) = q\vec{S}_\pi(\vec{v}) \wedge \vec{B}'(M')$

Or un plan de symétrie est un plan miroir (change l'orientation de l'espace) donc :

$\forall\ \vec{A}$ et $\vec{B}$, $\vec{S}_\pi(\vec{A}) \wedge \vec{S}_\pi(\vec{B}) = -\vec{S}_\pi(\vec{A} \wedge B)$. Donc : $\vec{S}_\pi(\vec{f}) = q\vec{S}_\pi(\vec{v} \wedge \vec{B}(M)) = q\vec{S}_\pi(\vec{v}) \wedge \left(-\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))\right)$.

On déduit nécessairement : $\boxed{\vec{B}'(M') = -\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))}$

L'image par la symétrie plane d'un champ magnétique $\vec{B}$ est égale à l'opposé du symétrique de $\vec{B}$ par rapport au plan de symétrie.

De telle propriété caractérise les **pseudo-vecteurs** ou **vecteurs axiaux** : le champ magnétique est donc un pseudo-vecteur.

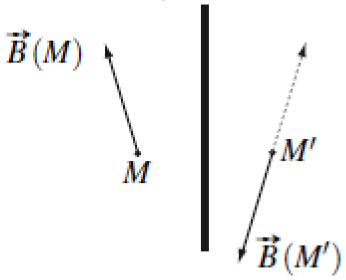
2.2.2. Champ d'une distribution de courant de symétrie plane

Soit une distribution de courant D symétrique par rapport à un plan (π), de vecteur densité de courant $\vec{j}$. Au point M' symétrique d'un point M par rapport à (π) ($M' = S_\pi(M)$), on a : $\vec{j}(M') = \vec{S}_\pi(\vec{j}(M))$

Soit $\vec{B}'(M')$ le champ créé en M' par cette distribution, on a alors : $\vec{B}'(M') = \vec{B}(M')$

Par conséquent, d'après la relation $\vec{B}'(M') = -\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))$, on déduit : $\boxed{\vec{B}(M') = -\vec{S}_\pi(\vec{B}(M))}$

Plan de symétrie (π)



Lorsqu'une distribution de courant admet un plan de symétrie, pour deux points symétriques M et M′, le champ magnétique en M′ est l'opposé du symétrique du champ magnétique en M.

Un plan de symétrie pour la distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique.

Donc

- Un plan de symétrie pour la distribution de courant :
  - ✓ laisse invariante la composante normale du champ magnétostatique au plan
  - ✓ transforme la composante parallèle au plan du champ magnétostatique en son opposé
- Si M appartient au plan de symétrie, il se confond avec son symétrique M' et la composante parallèle au plan est ainsi nulle. Le vecteur champ magnétostatique est donc orthogonal au plan de symétrie.

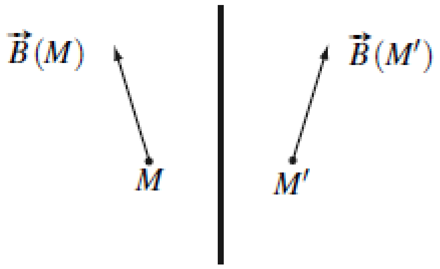
2.2.3. Champ d'une distribution de courant d'antisymétrie plane

Soit une distribution de courant D antisymétrique par rapport à un plan (π_a), de vecteur densité de courant $\vec{j}$.

Au point M' symétrique d'un point M par rapport à (π_a) ($M' = S_{\pi a}(M)$), on a : $\vec{j}(M') = -\vec{S}_{\pi a}(\vec{j}(M))$

Soit $\vec{B}'(M')$ le champ créé en M' par cette distribution, on a alors : $\vec{B}'(M') = -\vec{B}(M')$. Or la relation de transformation du champ magnétique reste valable, d'où : $\vec{B}'(M) = -\vec{S}_{\pi a}\left(\vec{B}(M)\right)$ donc:

$$\boxed{\vec{B}(M') = \vec{S}_{\pi a}\left(\vec{B}(M)\right)}$$



Plan d'antisymétrie (π_a)

Lorsqu'une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie, pour deux points symétriques M et M′, le champ magnétique en M′ est le symétrique du champ magnétique en M.

Un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant est un plan de symétrie pour le champ magnétostatique.

Donc

- Un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant :
  - ✓ laisse invariante la composante parallèle au plan du champ magnétostatique
  - ✓ transforme la composante normale du champ magnétostatique au plan en son opposé
  - Si M appartient au plan d'antisymétrie, il se confond avec son symétrique. La composante normale au plan est alors nulle et le vecteur champ magnétostatique est donc dans le plan d'antisymétrie.

2.2.4. Invariances du champ magnétostatique

a) Invariance par translation

Si une distribution de courant est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ alors pour tout point M et M' = $\mathcal{T}_{\vec{a}}$(M), $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$ (le vecteur champ magnétique restent inchangé).

Si la distribution de courant est invariante par toute translation suivant un axe (Oz) alors $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de z. $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{B}(M) = \vec{B}(x,y,z) = \vec{B}(x,y)}$

b) Invariance par rotation

Si une distribution de courant est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'axe Δ et d'angle θ_0 alors pour tout point M et M' = $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$(M), $\vec{B}(M') = \vec{R}_{\Delta,\theta_0}(\vec{B}(M))$, $\vec{R}_{\Delta,\theta_0}$ étant la rotation vectorielle associée à la rotation affine $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$.

Si la distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) alors, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) les composantes B_r, B_θ et B_z du vecteur champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ ne dépendent pas de l'angle de θ. $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{B}(M) = \vec{B}(r,\theta,z) = \vec{B}(r,z)}$

2.3. Récapitulatif

Le champ magnétostatique possède les propriétés de symétrie d'un pseudo-vecteur ou vecteur axial. En particulier :

- le champ magnétostatique engendré par une distribution de courant invariante par translation ou de révolution autour d'un axe possède les mêmes invariances que celle-ci.
- lorsqu'une distribution de courant possède un plan de symétrie, le champ magnétostatique est orthogonal à ce plan en chacun de ses points.
- lorsqu'une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie, le champ magnétostatique appartient à ce plan en chacun de ses points.

Quelques règles simples et utiles :

- Si le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est polloïdal (porté par $\vec{u}_r$ et/ou $\vec{u}_z$) alors $\vec{B}(M)$ est toroïdal (porté par $\vec{u}_\theta$).
- Si le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est toroïdal alors $\vec{B}(M)$ est polloïdal.