

Physique Statistique

CHAPITRE 1

Introduction à la physique statistique

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Repères historiques (1)

La physique statistique est née au milieu du 19ème siècle de l'hypothèse atomique et de la volonté d'expliquer les « mystérieuses » lois de la thermodynamique dans ce cadre. Parmi les physiciens du 19ème siècle, très peu d'entre-eux croient en cette hypothèse (contrairement aux chimistes). Clausius, Maxwell et Boltzmann font partie des rares physiciens acquis à cette cause.

Voici quelques repères historiques :

❑ 1738 : Daniel Bernoulli (France) publie *Hydrodynamica*, ouvrage de mécanique des fluides dans lequel il explique l'origine de la pression des fluides à l'aide d'un modèle atomique.

1859 : J-C Maxwell (Ecosse) découvre la loi de distribution des vitesses d'un gaz.

Repères historiques (2)

1866 : Ludwig Boltzmann (Autriche) obtient sa thèse portant sur la théorie cinétique des gaz.

1872 : Boltzmann propose une interprétation statistique de l'irréversibilité et de l'atteinte de l'équilibre qui lui vaut de nombreuses critiques, notamment de la part de Ernst Mach (Autriche).

1900 : Max Planck utilise les travaux de Boltzmann pour résoudre le problème du corps noir. Il en profite pour définir deux constantes : k_B et h .

1905 : Travaux d'Einstein (Suisse, Prix Nobel 1921) autour du mouvement brownien et de son origine atomique.

Repères historiques (3)

1906 : Sa vision atomistique et probabiliste de la matière est très attaquée ce qui affecte fortement Boltzmann. Dépressif et en mauvaise santé, Boltzmann, alors en vacances à Trieste, finit par se suicider en 1906....

1908 : Deux années plus tard, la preuve de l'existence des atomes est établie par Jean Perrin (France) en 1908 grâce à l'étude du mouvement brownien. Il en déduit la valeur de la constante de Boltzmann

Introduction

Introduction (1)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les raisonnements de base de la physique statistique. Il va nous falloir définir les concepts fondamentaux de **micro-états** et de **macro-états** et introduire ce qu'on appelle la loi des grands nombres. En effet, **le domaine de la physique statistique est celui de systèmes constitués d'un très grand nombre de particules**, systèmes dont on veut décrire les propriétés thermodynamiques ou simplement l'évolution dynamique. **Il serait vain de penser appliquer les règles de la mécanique classique à chacune de ces particules**, dont le nombre atteint typiquement le nombre d'Avogadro.

Introduction (2)

Nous allons au contraire effectuer des prédictions statistiques sur le système et nous constaterons que ces prédictions se révèlent exactes, du fait du très grand nombre de particules constituant le système. Afin d'illustrer ces propos, nous nous proposons d'aborder la physique statistique sur un exemple introductif, celui de la détente de Joule-Gay Lussac.

Nous l'avons déjà rencontrée en MPSI dans le cadre de la thermodynamique classique : nous en avons fait une étude cinématique, en insistant sur l'irréversibilité de la détente. Il s'agit à présent de l'analyser d'un point de vue statistique.

Introduction (3)

La physique statistique est un des piliers de la physique moderne avec la mécanique quantique et la relativité. Son propos consiste à :

1. Expliquer le comportement macroscopique à partir des propriétés microscopiques, lesquelles sont régies par les lois de la mécanique quantique.
2. Atteindre cet objectif par une approche statistique. Les concepts d'irréversibilité, d'entropie, de température, de pression, de potentiel chimique etc. sont en effet des propriétés émergentes de nature statistique.
3. Donner un sens physique aux mystérieux principes de la thermodynamique.

Echelles microscopiques, mésoscopique, macroscopique

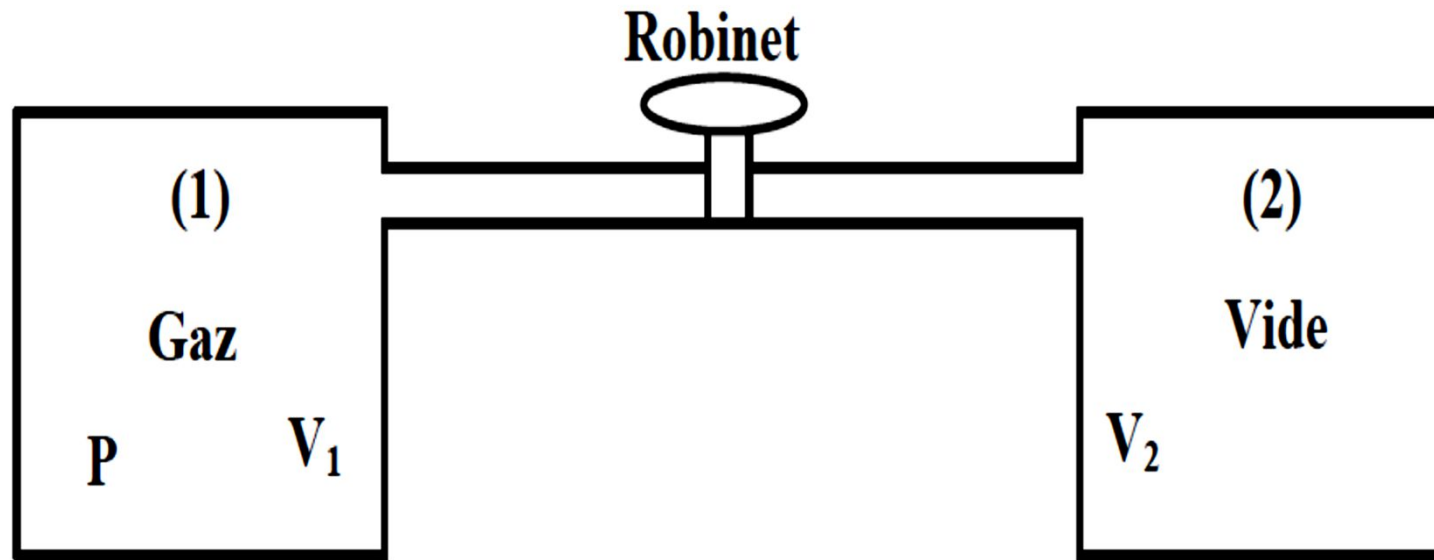
3 échelles d'étude

ECHELLE MOLECULAIRE	ECHELLE MESOSCOPIQUE	ECHELLE MACROSCOPIQUE
<p>C'est l'étude de la matière à l'échelle des atomes et des molécules. C'est le domaine de la physique statistique.</p> <p><i>Son ordre de grandeur est 10^{-10} m</i></p>	<p>C'est l'échelle intermédiaire telle qu'un petit volume dv, volume petit à l'échelle macroscopique, contient un grand nombre de molécules pour pouvoir définir localement des grandeurs continues dans l'espace. Ex : Masse volumique :</p> $\rho(M) = \frac{dm}{dv}.$ <p><i>Son échelle de grandeur est 10^{-6} m</i></p>	<p>C'est l'étude de la matière à l'échelle de l'observation humaine ; la matière apparaît comme continue. C'est le domaine d'étude de la thermodynamique classique.</p> <p><i>Son échelle de grandeur est 1 m</i></p>

La détente de Joule Gay- Lussac

La détente de Joule-Gay-Lussac (1)

Deux récipients notés (1) et (2) de volumes respectifs V_1 et V_2 sont reliés par un tube fin muni d'un robinet initialement fermé.



Les parois sont rigides et parfaitement calorifugées. Lorsqu'on ouvre le robinet, le gaz du récipient (1) s'écoule dans le récipient (2) : on parle de détente dans le vide. **L'évolution est irréversible.**

La détente de Joule-Gay-Lussac (2)

Considérons ainsi une boîte macroscopique munie de parois fixes et adiabatiques, contenant de l'argon, dans les conditions usuelles de température et de pression : $T = 273,15\text{ K}$, $p = 1\text{ atm}$, $V = 22,4\text{ L}$; le nombre de particules de gaz à l'intérieur de la boîte est ainsi égal au nombre d'Avogadro : $N = \mathcal{N}_A$. Notons N_G respectivement N_D le nombre de particules de gaz dans le compartiment de gauche respectivement de droite. A l'instant initial de l'expérience $N_G = N$ et $N_D = 0$. Nous retirons la paroi. Notre objectif est de prévoir ce que sera l'état d'équilibre final : on s'attend a priori à ce que celui-ci se caractérise par $N_G = N_D = N/2$. Tout le problème est de savoir si cette intuition est exacte ou non, et, dans le cas défavorable, quelle est l'erreur commise.

Interprétation statistique (1)

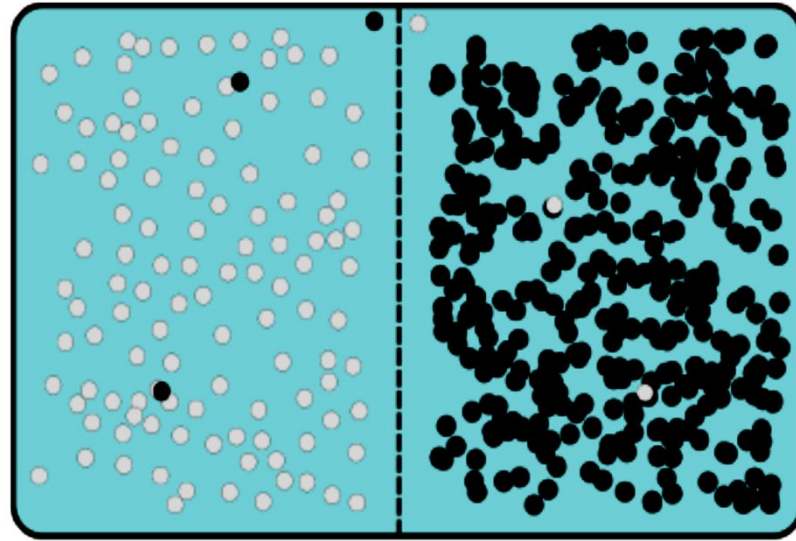
□ **Définition:** Un macro-état est un système macroscopique constitué de N particules (atomes, molécules..) décrit par des grandeurs macroscopiques : " N ", V , E , Q (charge), P (pression)...

On s'intéressera en particulier à :

- N : fait le lien entre microscopique et macroscopique
 - V : délimite le système
 - E : est une quantité conservée (pour un système isolé) et existe à la fois au niveau microscopique et macroscopique
- N, V et E définissent un macro-état.

Interprétation statistique (2)

Comme autre grandeur utile, on peut citer la densité du gaz qui peut être utile pour décrire un mélange. On peut faire une analogie avec un mélange sel poivre :



Analogie d'un gaz avec un mélange poivre et sel, quelques grains de sel dans le poivre et inversement changent le micro-état mais pas le macro-état

Interprétation statistique (3)

□ Définition: Un micro-état est un système microscopique de N particules décrit (en mécanique classique) par:

- $3N$ variables de position
- $3N$ variables d'impulsion
- $3N$ angles d'orientation.

A un macro-état correspond un nombre gigantesque de micro-états

Interprétation statistique (4)

Calculons le nombre de micro-états $\Omega(N_G)$ permettant de réaliser le macro-état N_G : il s'agit simplement du nombre de façons de tirer N_G particules de gaz parmi N , soit $C_N^{N_G}$. D'où

$$\Omega(N_G) = \frac{N!}{N_G! N_D!}$$

Posons $m = N_G - N_D$ on a

$$N_G = \frac{N + m}{2} \quad \text{et} \quad N_D = \frac{N - m}{2}$$

Le nombre de micro-états maintenant permettant de réaliser le macro-état m est :

$$\Omega(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N + m}{2}\right)! \left(\frac{N - m}{2}\right)!}$$

Interprétation statistique (5)

Sa probabilité de réalisation est, en supposant qu'il y a équiprobabilité de tous les micro-états accessibles au système $P_N(m) = \Omega(m)/2^N$

Au lieu d'étudier directement le nombre de micro-états $\Omega(m)$, nous en étudions le logarithme népérien. Pour cela utilisons **l'approximation de Stirling $\ln N! = N \ln N - N$** pour N assez grand. On a :

$$\begin{aligned}\ln \Omega(m) &= \ln N! - \ln \left(\frac{N+m}{2} \right)! - \ln \left(\frac{N-m}{2} \right)! \\ \ln \Omega(m) &= N \ln N - N - \left(\frac{N+m}{2} \right) \ln \left(\frac{N+m}{2} \right) + \left(\frac{N+m}{2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{N-m}{2} \right) \ln \left(\frac{N-m}{2} \right) + \left(\frac{N-m}{2} \right)\end{aligned}$$

Interprétation statistique (6)

$$\ln \Omega(m) = N \ln N - \frac{N}{2} \left[\left(1 + \frac{m}{N}\right) \left\{ \ln \left(\frac{N}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{m}{N}\right) \right\} + \left(1 - \frac{m}{N}\right) \left\{ \ln \left(\frac{N}{2}\right) + \ln \left(1 - \frac{m}{N}\right) \right\} \right]$$

$$\ln \Omega(m) = N \ln 2 - \frac{N}{2} \left[\left(1 + \frac{m}{N}\right) \ln \left(1 + \frac{m}{N}\right) + \left(1 - \frac{m}{N}\right) \ln \left(1 - \frac{m}{N}\right) \right]$$

Cette dernière relation nous permet de déterminer la valeur la plus probable de m , \tilde{m} définie par la relation

$$\left(\frac{\partial \ln \Omega(m)}{\partial m} \right)_{\tilde{m}} = 0$$

Interprétation statistique (7)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \ln \Omega(m)}{\partial m}\right)_{\tilde{m}} &= -\frac{N}{2} \left[\frac{1}{N} \ln \left(1 + \frac{\tilde{m}}{N} \right) + \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \ln \left(1 - \frac{\tilde{m}}{N} \right) - \frac{1}{N} \right] \\ \left(\frac{\partial \ln \Omega(m)}{\partial m}\right)_{\tilde{m}} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{N - \tilde{m}}{N + \tilde{m}} \right) \\ \left(\frac{\partial \ln \Omega(m)}{\partial m}\right)_{\tilde{m}} &= 0 \Leftrightarrow N - \tilde{m} = N + \tilde{m} \Leftrightarrow \tilde{m} = 0\end{aligned}$$

La valeur la plus probable de m est nulle, ce qui signifie que les valeurs les plus probables pour N_G et N_D sont précisément égales à $N/2$, ce que nous avons intuitivement prédit.

Nous pouvons alors approcher la distribution des micro-états $\Omega(m)$. Pour cela, on remarque que $(m/N) \ll 1$ pour effectuer les D.L:

Interprétation statistique (8)

$$\ln \left(1 \pm \frac{m}{N} \right) \approx \pm \frac{m}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{N} \right)^2$$

Donc

$$\ln \Omega(m) = N \ln 2 - \frac{N}{2} \left[\left(1 + \frac{m}{N} \right) \left(\frac{m}{N} - \frac{m^2}{2N^2} \right) + \left(1 - \frac{m}{N} \right) \left(-\frac{m}{N} - \frac{m^2}{2N^2} \right) \right]$$

$$\ln \Omega(m) = N \ln 2 - \frac{m^2}{2N^2}$$

Posons $\ln \Omega(0) = N \ln 2$, le nombre de micro-états nécessaires à la réalisation du macro-état m est :

$$\Omega(m) \approx \Omega(0) e^{-\frac{m^2}{2N^2}}$$

Interprétation statistique (9)

et sa probabilité de réalisation devient :

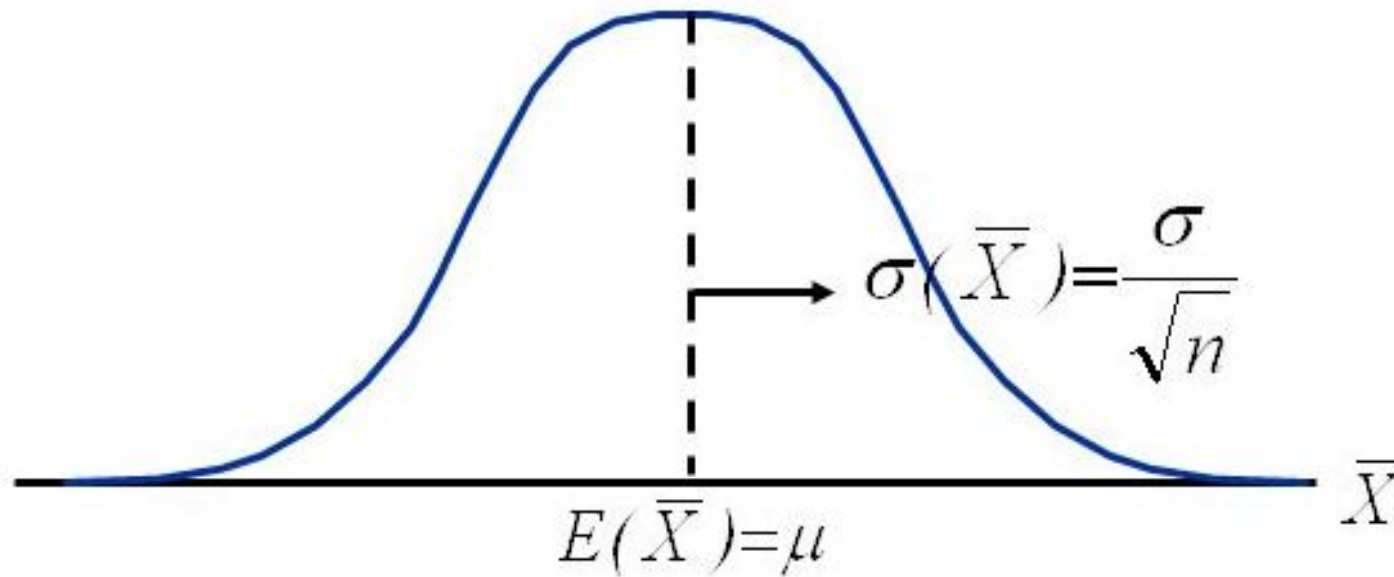
$$P_N(m) \approx \frac{\Omega(0)}{2^N} e^{-\frac{m^2}{2N^2}}$$

On remarque que la distribution des micro-états recherchée est approximativement une gaussienne alors qu'a priori elle n'était que binomiale : on vient d'illustrer le **théorème de la limite centrale**. Cette gaussienne est centrée sur l'origine et a pour écart quadratique moyen $\sigma = \sqrt{N}$. Cette approximation n'est licite qu'à condition que N soit suffisamment grand, c'était la condition d'exploitation de l'approximation de Stirling. En pratique, il suffit que $N \geq 10^{-6} \mathcal{N}_A$ pour pouvoir exploiter l'approximation gaussienne.

Interprétation statistique (10)

Théorème de la limite centrale

La distribution d'échantillonnage de la variable \bar{X} tend à se rapprocher d'une loi normale d'autant plus que la taille de l'échantillon est grande.



Interprétation statistique (11)

De l'étude précédente, il résulte donc que $m = 0 \pm \sqrt{N}$ donc:

$$N_G = N_D = \frac{N}{2} \pm \frac{\sqrt{N}}{2}$$

L'amplitude relative des fluctuations de N_G et N_D autour de leur valeur la plus probable est:

$$\frac{\sqrt{N}/2}{N/2} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$
$$N = \mathcal{N}_A \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \approx 10^{-12}$$

L'amplitude des fluctuations de N_G et N_D est donc négligeable devant leur valeur finale.

Interprétation statistique (12)

Conclusions

□ à l'état d'équilibre d'état final, on a exactement

$$N_G = N_D = \frac{N}{2}$$

□ par la loi des grands nombres, les prévisions statistiques, que l'on aurait pu croire incertaines, s'avèrent être exactes.

Eléments de théorie de l'information

Entropie statistique (1)

Soit un ensemble discret d'événements e_ℓ , $\ell \in \{1 \dots N\}$. On note P_ℓ leur probabilité de réalisation, telle que

$$\sum_{\ell=1}^N P_\ell = 1$$

Pour nous, ces événements discrets correspondent à des micro-états \emptyset_ℓ accessibles au système étudié.

On définit **l'entropie statistique** (ou entropie d'information) d'un système par :

$$S = -k \sum_{\ell=1}^N P_\ell \ln P_\ell$$

Entropie statistique (2)

où k est une constante positive. On imposera toutefois que k soit la constante de Boltzmann k_B afin de pouvoir identifier les entropies thermodynamique et statistique.

Le principe fondamental de la théorie de l'information est qu'à l'équilibre, l'information d'un système doit être minimale, ce qui revient à dire que son entropie d'information ou information manquante doit être maximale. L'entropie d'information d'un système est maximale lorsque ses micro-états accessibles sont tous équiprobables (distribution micro-canonique d'un système isolé),

$$\forall \ell \in \{1 \dots N\}, P_\ell = \frac{1}{N} \Rightarrow \boxed{S_{max} = k_B \ln N}$$

Enoncé du postulat de l'équiprobabilité des micro-états

Dans un système isolé (système conservatif) en équilibre, tous les micro-états accessibles à ce système en équilibre sont équiprobables.

Si $\Omega(E)$ est le nombre de micro-états accessible à un système isolé en équilibre, la probabilité pour qu'il soit dans un micro-état donné est égale à : $1/\Omega(E)$.

*Si ce n'est pas le cas, le système est hors équilibre et il va évoluer de manière à satisfaire au postulat d'équiprobabilité. Si la seule information que nous ayons sur un système est son énergie E , avec éventuellement d'autres contraintes sur certains paramètres externes comme le volume ou le nombre de particules par exemple, il n'y a à priori aucune raison de favoriser un des micro-états plutôt qu'un autre. **En ce sens, ce premier postulat est l'hypothèse la plus raisonnable que l'on puisse formuler.***

Description d'un système macroscopique

Grandeurs fondamentales (1)

- ❑ La densité d'état $\rho(E)$: le nombre $dN(E)$ de micro-états d'énergie comprise entre E et $E + dE$ est donné par la relation : $dN(E) = \rho(E)dE$
- ❑ Le nombre $\emptyset(E)$ de micro-états d'énergie inférieure ou égale à E , permettant de calculer explicitement $\rho(E)$. En effet, on a

$$dN(E) = \emptyset(E + dE) - \emptyset(E) = \frac{d\emptyset}{dE} dE = \rho(E)dE$$

D'où:

$$\rho(E) = \frac{d\emptyset(E)}{dE}$$

Grandeurs fondamentales (2)

Remarques :

- ❖ **signification physique de dE** : dE est un intervalle énergétique à la fois très grand devant l'échelle microscopique et très petit devant l'échelle macroscopique, représentée par l'incertitude de mesure de l'énergie.
- ❖ de la nature d'un système macroscopique ; il y a deux façons de concevoir un système macroscopique : ou bien il s'agit d'un système contenant un très grand nombre de particules, ou bien il s'agit d'un système constitué d'un petit nombre de particules mais contenu dans une enveloppe de taille macroscopique.

Particules libres enfermées dans une boîte macroscopique

Introduction

Il s'agit d'une application simple du paragraphe précédent. Nous plaçons une mole d'hélium de N particules libres dans une boîte parallélépipédique de côtés L_x , L_y et L_z , le tout dans les conditions standards. L'objectif principal est de déterminer l'expression de la densité d'état $\rho(E)$. Pour ce faire, nous allons d'abord étudier le cas où il n'y a qu'une particule dans la boîte, puis nous généraliserons à un nombre N quelconque.

Cas d'une seule particule de gaz (1)

Pour aboutir à l'expression de la densité d'état, il nous faut effectuer le traitement quantique d'une particule piégée à l'intérieur d'une boîte; Dans le cas d'un puits plat infini à une dimension nous avons trouvé

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(n \frac{\pi x}{L_x}\right) \quad E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m L_x^2}$$

A trois dimensions

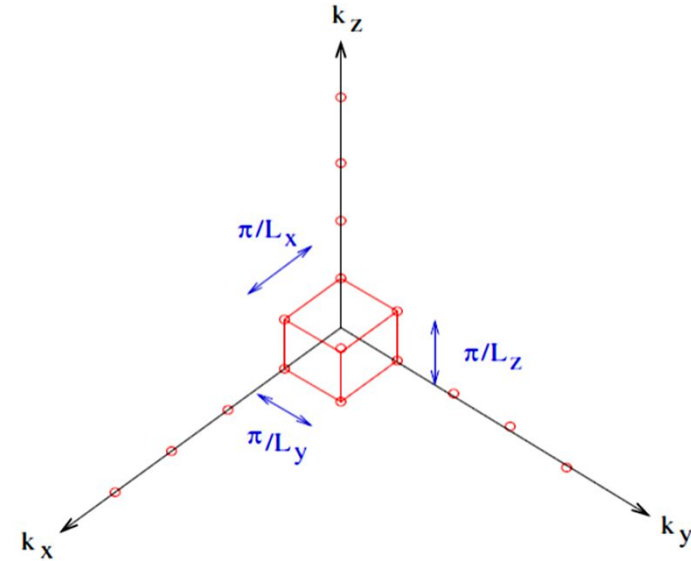
$$\varphi(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{V}} A \sin\left(n \frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(n \frac{\pi y}{L_y}\right) \sin\left(n \frac{\pi z}{L_z}\right)$$
$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)$$

Cas d'une seule particule de gaz (2)

$$V = L_x L_y L_z$$
$$k_x = n_x \frac{\pi}{L_x}, k_y = n_y \frac{\pi}{L_y}, k_z = n_z \frac{\pi}{L_z}$$
$$\Rightarrow E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

□ Calcul de $\emptyset(E)$

On se place dans l'espace des vecteurs d'onde :
les micro-états accessibles au système sont
représentés par les sommets des
parallélépipèdes élémentaires de côtés
 $\pi/L_x, \pi/L_y, \pi/L_z$



Cas d'une seule particule de gaz (3)

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Rightarrow (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \leq \frac{2mE}{\pi^2 \hbar^2}$$

ce qui laisse penser que les micro-états accessibles au système sont compris, dans l'espace des vecteurs d'onde, dans la sphère de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2mE/(\pi^2 \hbar^2)}$. Ainsi, les micro-états accessibles ne sont contenus que dans le huitième de cette sphère. le volume d'un parallélépipède élémentaire étant égal à π^3/V , il vient pour $\emptyset(E)$ (quotient du volume accessible dans l'espace des \vec{k} par le volume d'un parallélépipède élémentaire de cet espace):

$$\emptyset(E) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi \frac{(2mE)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3} \times \frac{V}{\pi^3}$$

Cas d'une seule particule de gaz (4)

$$\phi(E) = \frac{4\pi V}{3\hbar^3} (2mE)^{\frac{3}{2}}$$

□ Calcul de $\rho(E)$

$$\rho(E) = \frac{d\phi(E)}{dE} = 2 \frac{\pi V}{\hbar^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$$

Calculons $\phi(E)$ et $\rho(E)$ par l'approche classique. Pour cela définissons la notion de cellule élémentaire de l'espace des phases : il s'agit d'une cellule de dimensions $dx dp_x$ telle que deux points de l'espace des phases appartenant à cette cellule se rapportent au même micro-état. En d'autres termes, on définit un micro-état d'un système

Cas d'une seule particule de gaz (5)

classique comme une cellule élémentaire de l'espace des phases. Reste à préciser que la surface de cette cellule élémentaire est égale à \hbar afin que les calculs quantiques et classiques soient strictement équivalents. Le volume accessible dans l'espace des phases est :

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \iiint_{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 2mE} dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

La taille d'une cellule élémentaire est, d'après ce qui précède, \hbar^3 (3 dimensions) d'où:

$$\emptyset(E) = \frac{4\pi V}{3\hbar^3} (2mE)^{\frac{3}{2}} \quad \rho(E) = \frac{d\emptyset(E)}{dE} = 2 \frac{\pi V}{\hbar^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$$

Généralisation de N particules (6)

$$\phi(E) = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} - 1\right)} V^N \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}}$$

$$\rho(E) = \frac{d\phi(E)}{dE} = \frac{3N}{2} \frac{V^N}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} - 1\right)} \left(\frac{2m\pi}{\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}} E^{\left(\frac{3N}{2} - 1\right)}$$

Théorie ergodique

Enoncé du théorème

La théorie ou l'hypothèse ergodique est le deuxième postulat de la physique statistique. Les hypothèses de la théorie ergodique concernent la conservation de l'énergie, la moyenne temporelle et la moyenne d'ensembles.

L'hypothèse ergodique introduite par Gibbs est que les moyennes d'ensembles sont équivalentes aux moyennes temporelles: si on laisse suffisamment le temps au système.

$$\langle A \rangle = \bar{A} = \sum_{\ell} A_{\ell} P_{\ell}$$

Quelques distributions importantes

Distribution binomiale (1)

La distribution binomiale est très classique en physique statistique, par ses applications dans les phénomènes de marche au hasard. De façon très générale, nous considérons un événement quelconque dont la probabilité de réalisation est p et celle de non-réalisation q . Nous avons bien entendu $p + q = 1$. Nous effectuons N mesures de cet événement et cherchons la probabilité $P(n)$ d'obtenir n réalisations parmi N :

$$P(n) = C_N^n p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$\sum_{n=0}^N P(n) = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = (p + q)^N = 1$$

Distribution binomiale (2)

□ Valeur moyenne de la distribution

Soit n_r le nombre de réalisations et $n_{\bar{r}}$ son complémentaire ($n_r + n_{\bar{r}} = N$); calculons $\langle n_r \rangle$:

$$\langle n_r \rangle = \sum_{n_r=0}^N n_r C_N^{n_r} p^{n_r} q^{N-n_r}$$

L'astuce consiste à assimiler p et q à des variables indépendantes et continues, de sorte que

$$n_r p^{n_r} = p \frac{\partial p^{n_r}}{\partial p}$$

$$\Rightarrow \langle n_r \rangle = \sum_{n_r=0}^N C_N^{n_r} (n_r p^{n_r}) q^{N-n_r} = \sum_{n_r=0}^N C_N^{n_r} \left(p \frac{\partial p^{n_r}}{\partial p} \right) q^{N-n_r}$$

Distribution binomiale (3)

$$\langle n_r \rangle = p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n_r=0}^N C_N^{n_r} p^{n_r} q^{N-n_r} = p \frac{\partial}{\partial p} (p + q)^N = pN(p + q)^{N-1}$$

Finalement, le nombre moyen de réalisations de notre événement sur un total de N mesures est :

$$\langle n_r \rangle = Np$$

$$n_r + n_{\bar{r}} = N \Rightarrow \langle n_r \rangle + \langle n_{\bar{r}} \rangle = N \Rightarrow \langle n_{\bar{r}} \rangle = N - \langle n_r \rangle = N - Np$$

$$\langle n_{\bar{r}} \rangle = N(1 - p) = Nq$$

Distribution binomiale (4)

□ Variance de la distribution

La variance $\sigma_{n_r}^2$ de la distribution est définie par $\sigma_{n_r}^2 = \langle (n_r - \langle n_r \rangle)^2 \rangle$ soit

$$\sigma_{n_r}^2 = \langle n_r^2 \rangle - \langle n_r \rangle^2$$
$$\langle n_r^2 \rangle = \sum_{n_r=0}^N n_r^2 C_N^{n_r} p^{n_r} q^{N-n_r}$$

L'astuce consiste à assimiler p et q à des variables indépendantes et continues, de sorte que

$$n_r^2 p^{n_r} = n_r p \frac{\partial p^{n_r}}{\partial p} = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 p^{n_r}$$
$$\Rightarrow \langle n_r^2 \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 \sum_{n_r=0}^N C_N^{n_r} p^{n_r} q^{N-n_r} = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 (p + q)^N$$

Distribution binomiale (5)

$$\Rightarrow \langle n_r^2 \rangle = p \frac{\partial}{\partial p} [Np(p+q)^{N-1}]$$

$$\langle n_r^2 \rangle = Np\{(p+q)^{N-1} + p(N-1)(p+q)^{N-2}\}$$

$$\langle n_r^2 \rangle = Np(1 + p(N-1)) = Np(Np + q) = \underbrace{N^2 p^2}_{\langle n_r \rangle^2} + Npq$$

$$\sigma_{n_r}^2 = \langle n_r^2 \rangle - \langle n_r \rangle^2 = Npq$$

L'amplitude relative des fluctuations de n_r autour de sa valeur de moyenne est alors :

$$\frac{\sigma_{n_r}}{\langle n_r \rangle} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Distribution de Poisson (1)

Il s'agit du cas limite de la distribution binomiale où $p \ll 1$ et $n_r \ll N$.

Dans ces conditions:

$$C_N^{n_r} = \frac{N(N-1) \dots (N-n_r+1)}{n_r!} \approx \frac{N^{n_r}}{n_r!}$$

$$\ln q^{N-n_r} = \ln(1-p)^{N-n_r} = \underbrace{(N-n_r)}_{\sim N} \underbrace{\ln(1-p)}_{\sim p} \approx -Np$$

$$\Rightarrow q^{N-n_r} \approx e^{-Np}$$

$$P(n_r) = C_N^{n_r} p^{n_r} q^{N-n_r} \approx \frac{N^{n_r}}{n_r!} p^{n_r} e^{-Np}$$

Posons $\lambda = Np$:

$$P(n_r) = \frac{\lambda^{n_r}}{n_r!} e^{-\lambda}$$

Distribution de Poisson (2)

Remarquons que cette distribution est bien normalisée à 1 :

$$\sum_{n=0}^N P(n_r) = e^{-\lambda} \sum_{n_r=0}^N \frac{\lambda^{n_r}}{n_r!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n_r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n_r}}{n_r!}}_{n_r \ll N} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

□ Valeur moyenne de la distribution

$$\langle n_r \rangle = e^{-\lambda} \sum_{n_r=0}^N n_r \frac{\lambda^{n_r}}{n_r!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n_r=1}^N \frac{\lambda^{n_r-1}}{(n_r-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$n_r \ll N \Rightarrow \boxed{\langle n_r \rangle = \lambda = Np}$$

La valeur moyenne de la distribution poissonnienne est donc égale à la valeur moyenne de la distribution binomiale.

Distribution de Poisson (3)

□ Variance de la distribution

$$\langle n_r^2 \rangle = e^{-\lambda} \sum_{n_r=0}^N n_r^2 \frac{\lambda^{n_r}}{n_r!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n_r=1}^N n_r \frac{\lambda^{n_r-1}}{(n_r-1)!}$$

$$\langle n_r^2 \rangle = \lambda e^{-\lambda} \left\{ \sum_{n_r=1}^N (n_r - 1) \frac{\lambda^{n_r-1}}{(n_r-1)!} + \sum_{n_r=1}^N \frac{\lambda^{n_r-1}}{(n_r-1)!} \right\}$$

$$\langle n_r^2 \rangle = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n_r=2}^N \frac{\lambda^{n_r-2}}{(n_r-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{n_r=1}^N \frac{\lambda^{n_r-1}}{(n_r-1)!}$$

$$\langle n_r^2 \rangle = \underbrace{\lambda^2}_{\langle n_r \rangle^2} + \lambda \quad \text{Car } n_r \ll N$$

Distribution de Poisson (4)

Finalement, la variance de la distribution de Poisson est :

$$\sigma_{n_r}^2 = \lambda = Np = \langle n_r \rangle$$

L'amplitude relative des fluctuations de n_r autour de sa valeur de moyenne est alors :

$$\frac{\sigma_{n_r}}{\langle n_r \rangle} = \frac{\sqrt{Np}}{Np} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Distribution Gaussienne

On définit la distribution gaussienne centrée sur \bar{x} et d'écart type σ la distribution suivante :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{dG(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = \bar{x}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{2\pi\sigma^2} = 1$$