

CHAPITRE 3 : PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE DANS UN PLASMA - DISPERSION

Après le cas du vide, ce chapitre est consacré à l'étude de la propagation d'OPPM électromagnétiques dans un milieu (espace rempli de matière), particulièrement dans un plasma localement neutre, peu dense et sans interaction. La vitesse de propagation n'est plus égale alors à c (célérité de la lumière dans le vide) et dépend de la pulsation de l'onde. C'est le phénomène de dispersion.

1. Onde électromagnétique plane progressive monochromatique dans un plasma

1.1. Interaction entre une OPPM et un plasma

1.1.1. Description simplifiée du plasma

Dans un modèle simplifié, le plasma est un milieu matériel homogène et isotrope assimilable à un gaz ionisé globalement neutre. Le plasma est donc constitué d'ions positifs (cations), de charge $+e$ et de masse m_i , et d'électrons, de charge $-e$ et de masse m_e en composition égale. La densité numérique ou densité particulière commune aux ions et aux électrons, uniforme à l'équilibre est notée n_0 . On suppose le cas d'un plasma peu dense où la densité numérique est suffisamment faible pour que les interactions entre les charges électriques du plasma (interactions électrons-électrons et interactions électrons-cations) puissent être négligées (hypothèse de plasma dilué). Ainsi (contrairement au cas des conducteurs métalliques) les électrons libres ne subissent aucune force de frottement dans leur déplacement. Le plasma est dit sans interaction.

1.1.2. Description de l'onde électromagnétique

On considère la propagation dans un plasma d'une OPPM électromagnétique qu'on suppose transverse. Le champ électromagnétique de l'OPPM s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ et } \underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

avec $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{B}}_0$ tous deux orthogonaux à \vec{k} , l'onde étant transverse. ω , pulsation de l'émetteur de l'onde qui se propage et \vec{k} vecteur d'onde (direction et sens ceux de la propagation) sont connus (dès lors qu'on sait où se trouve l'émetteur) mais le module d'onde k n'est pas connu. Le but du calcul est justement de trouver l'expression de k .

1.1.3. Mouvements des charges du plasma

Sous l'action du champ électromagnétique, les particules chargées du plasma se mettent en mouvement. Du fait de leur masse très supérieure à celle des électrons, les ions sont supposés fixes. Seul le mouvement des

électrons est pris en compte. On considère le cas des électrons non relativistes c'est-à-dire que la vitesse des électrons est très inférieure à la célérité c de la lumière dans le vide.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron soumis à la force de Lorentz exercée par le champ électromagnétique de l'onde (on néglige la pesanteur) en un point M , à l'instant t s'écrit :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(M, t) - e\vec{v} \wedge \vec{B}(M, t) \quad \text{où } \vec{v}: \text{vitesse de l'électron}$$

Notons \tilde{E} l'ordre de grandeur du champ électrique et \tilde{B} l'ordre de grandeur du champ magnétique. Par analogie avec le cas de l'OPPM dans le vide pour laquelle $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$, on a $\tilde{B} \sim \frac{\tilde{E}}{c}$ or l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron \tilde{v} est tel que $\tilde{v} \ll c$, (électron non relativiste) d'où :

$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{\tilde{v}\tilde{B}}{\tilde{E}} \sim \frac{\tilde{v}}{c} \ll 1 \Rightarrow \|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$. Ainsi dans l'hypothèse où les électrons ne sont pas relativistes, la force magnétique peut être négligée devant la force électrique et on a abouti à l'équation différentielle suivante : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq -e\vec{E}(M, t)$. Pour le mouvement oscillant de l'électron sous l'action du champ de l'onde, la solution de cette équation est sinusoïdale de même pulsation que l'onde.

En notation complexe $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}}_0 \exp(i\omega t)$ avec $v = \text{Re}(\underline{\vec{v}})$.

L'équation différentielle conduit alors à : $m_e i\omega \underline{\vec{v}} \simeq -e\vec{E}(M, t) \Rightarrow \underline{\vec{v}} = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}(M, t)$

1.1.4. Densité de courant et densité de charge

➤ Densité volumique de courant – Conductivité complexe du plasma

Le déplacement des charges entraîne une densité volumique de courant dans le plasma :

$$\underline{\vec{j}}(M, t) = -n_0 e \underline{\vec{v}} \Rightarrow \underline{\vec{j}}(M, t) = -i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega} \vec{E}(M, t). \text{ Ainsi la densité volumique de courant créée par}$$

l'OPPM se propage de la même manière que l'OPPM, elle est donc elle-même une OPPM. La densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$ et le champ \vec{E} sont en quadrature. On définit alors la conductivité complexe du plasma

par la relation : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \vec{E} \Rightarrow \underline{\gamma} = -i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega}$. La conductivité du plasma est donc imaginaire pure. Ainsi :

$\langle \mathcal{P}_{v_{cédée}} \rangle = \langle \underline{\vec{j}} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\gamma}) |\vec{E}|^2 = 0$. La puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au plasma est nulle. Ce qui est en accord avec le modèle d'un plasma sans interaction. Le plasma est ainsi un milieu non absorbant.

Remarque :

Si on tient compte du mouvement des cations, on trouve un vecteur densité de courant :

$$\underline{\vec{j}} = -i \frac{n_0 e^2}{\omega} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \vec{E}. \text{ Or } m_i \gg m_e, \text{ l'expression obtenue en supposant les ions fixes est donc parfaitement valable.}$$

➤ Densité volumique de charge

En notation complexe, en supposant que le plasma est caractérisé par une permittivité diélectrique égale à celle du vide, l'équation de Maxwell-Gauss donne l'expression de la densité de charge :

$\rho(M, t) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \varepsilon_0 (-i\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0$, l'onde étant transverse. Le plasma reste donc localement neutre en présence de l'onde électromagnétique.

1.2. Relation de dispersion du plasma

1.2.1. Equation de propagation des champs dans le plasma

Equations de Maxwell en valeurs complexes dans le plasma en supposant qu'il est également caractérisé par une perméabilité magnétique égale à celle du vide :

$$\begin{aligned} (M.G.): \quad \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & (M.\phi): \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ (M.F.): \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (M.A.): \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2};$$

$$\text{or} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad \text{d'où} : \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

De même en appliquant $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B})$, (M.A.), (M.F.) et (M. ϕ), on trouve pour le champ magnétique :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{rot} \vec{J}.$$

1.2.2. Relation de dispersion

En remplaçant \vec{J} par sa valeur, l'équation de propagation pour le champ électrique en représentation complexe, donne : $-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e} \vec{E} \Rightarrow -k^2 \vec{E} = \left(\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}$. Comme le champ électrique n'est pas nul, on a nécessairement :

$$k^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e} \right) \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e \omega^2} \right)} : \text{Relation de dispersion du plasma.}$$

$$\text{On pose } \omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e} \Rightarrow \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}}. \text{ La relation de dispersion dans le plasma s'écrit}$$

alors ; $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)}$ où ω_p est appelé **pulsation plasma** et joue un rôle déterminant pour la propagation :

- Si $\omega > \omega_p$, $k^2 > 0$ donc k est réel : $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$; L'OPPM peut se propager dans le plasma. c'est le domaine de transparence du plasma.
- Si $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ donc k est un nombre complexe imaginaire pur. Il n'y a pas de propagation de l'OPPM. C'est le domaine réactif du plasma.

La pulsation plasma ω_p est donc une pulsation de coupure (pulsation de coupure du plasma), valeur minimale en dessous de laquelle l'onde ne peut pas se propager dans le plasma.

1.3. Vitesse de phase – Phénomène de dispersion

1.3.1. Vitesse de phase dans le plasma

La vitesse de phase, vitesse de propagation de la phase de l'OPPM est définie pour le plasma dans son domaine de transparence où le module d'onde est réel. Cette vitesse vaut : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

On peut le vérifier pour l'OPPM électromagnétique. En notation complexe le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0)) = \vec{E}_0 \exp\left(i\omega\left(t - \frac{k}{\omega} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0\right)\right)$$

où \vec{u} : vecteur unitaire de la direction de propagation qui tel que $\vec{k} = k\vec{u}$. La phase φ de l'onde est l'argument de l'exponentielle : $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0 = \omega t - k\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0 = \omega t - kl + \varphi_0$ où $l = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ est la coordonnée de M sur l'axe de la direction de propagation (O, \vec{u}). Si l'on suit au cours du temps un point M où la phase a une valeur constante, on a : $d\varphi = \omega dt - kdl = 0 \Rightarrow v_\varphi = \left(\frac{dl}{dt}\right)_{\varphi=cte} = \frac{\omega}{k}$. Ainsi M se déplace à la vitesse v_φ dans la direction et le sens de \vec{u} . v_φ est donc la vitesse de phase. D'autre part, l'exponentielle étant de la forme $f\left(t - \frac{k}{\omega} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}\right)$, il apparaît que l'OPPM se propage à la vitesse : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$. **La vitesse de phase v_φ est donc la vitesse de propagation d'une OPPM.** Dans le plasma, la vitesse de phase dans le

domaine de transparence est alors : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$.

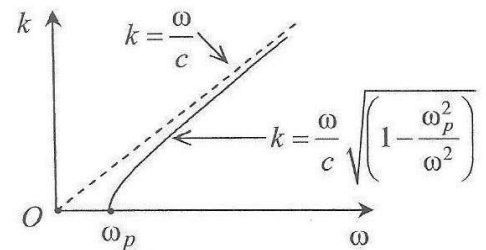
1.3.2. Phénomène de dispersion

Il y a dispersion dans un milieu quand la vitesse de phase dépend de la pulsation ω de l'OPPM. Dans le vide, la vitesse de phase d'une OPPM électromagnétique: $v_\varphi = c$ (car $k = \frac{\omega}{c}$) est indépendante de ω . il n'y a pas dispersion.

Dans le plasma pour $\omega > \omega_p$: $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} > c$. La vitesse de phase v_φ dépend de la pulsation ω .

Le plasma est donc un milieu dispersif. v_φ diminue lorsque ω augmente. On remarque aussi que v_φ est supérieure à c, ce qui est réellement impossible car d'après la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, il ne peut pas y avoir de vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. En fait v_φ est la vitesse d'une OPPM qui n'est pas un signal réel (les ondes réelles sont des superpositions d'OPPM). Il n'est donc pas surprenant que sa vitesse de propagation dépasse la vitesse de la lumière.

Pour $\omega \gg \omega_p$, $k \simeq \frac{\omega}{c}$ et $v_\varphi \simeq c$. Le plasma devient dispersif à très haute fréquence, ce qui est normal, ceci étant physiquement lié au fait que les variations du champ électrique sont alors trop rapides pour être suivies par les électrons. L'onde traverse le milieu sans interagir avec lui, elle se propage comme dans le vide.



Courbe de dispersion du plasma

1.3.3. Indice optique du plasma

Par définition, l'indice optique est : $n = \frac{c}{v_\varphi}$. Dans le plasma, $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

Contrairement aux indices des milieux transparents (cours d'optique), l'indice optique du plasma est inférieur à 1. Il dépend de la pulsation, parce qu'il y a dispersion.

1.4. Complément : étude des domaines du plasma

1.4.1. Etude du cas où $\omega > \omega_p$: domaine de transparence

a) Structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma

L'équation de Maxwell-Faraday donne : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{v_\phi} \vec{u} \wedge \vec{E}$

L'équation de Maxwell-Ampère conduit à : $\vec{E} = -\frac{c^2 \omega}{\omega^2 - \omega_p^2} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{k^2} \vec{k} \wedge \vec{B} = v_\phi \vec{B} \wedge \vec{u}$

Ces relations, analogues aux relations de structure pour l'OPP dans le vide, expriment la structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma, c étant remplacée par la vitesse de phase dans le plasma. Cependant, alors que les relations de structure sont valables pour toutes les OPP dans le vide, elles sont valables **uniquement pour les OPPM** dans le plasma.

b) Aspect énergétique

La valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} R_e(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} R_e\left(\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}\right)^*\right) = \frac{1}{2\mu_0} R_e\left(\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}^*}{\omega}\right)\right), \\ \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} R_e\left((\vec{E} \cdot \vec{E}^*)\vec{k} - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{k})}_{=0} \vec{E}^*\right) = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |\vec{E}|^2 \vec{k} \end{aligned}$$

La densité volumique d'énergie du champ électromagnétique est, en valeur moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} R_e\left(\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^*\right) = \frac{\varepsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 + \frac{k^2}{4\mu_0 \omega^2} |\vec{E}|^2, \Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)$$

La densité volumique moyenne d'énergie cinétique des électrons est :

$$\langle u_c \rangle = n_0 \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 \right\rangle. \quad \text{Or } \vec{v} = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E} \quad \text{d'où: } \langle u_c \rangle = \frac{n_0 e^2}{4 m_e \omega^2} |\vec{E}|^2 = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{4 \omega^2} |\vec{E}|^2$$

L'énergie volumique moyenne totale est donc (en utilisant la relation de dispersion) :

$$\langle u \rangle = \langle u_{em} \rangle + \langle u_c \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

La vitesse de propagation de l'énergie est définie par : $\vec{v}_e = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{c^2}{\omega} \vec{k}$

1.4.2. Etude du cas où $\omega < \omega_p$: domaine réactif

a) Onde évanescente

Le module d'onde est imaginaire pur donc de la forme $k = \pm i k''$ avec : $k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$

Si par exemple, l'onde est émise dans la direction et le sens du vecteur \vec{u}_x : $\vec{k} = k \vec{u}_x = \pm i k'' \vec{u}_x$

Le champ électrique de l'onde s'écrit alors : $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - (\pm i k'')x)) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \exp(\pm i k'' x)$

Le signe « + » ne convient pas car le champ électromagnétique serait divergeant à grande distance. Le signe « - » est seul physiquement acceptable d'où $\vec{k} = -i k'' \vec{u}_x$ et l'expression du champ électrique est :

$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \exp(-ik''x)$. Le champ électrique ne se propage plus (n'ayant pas de terme de la forme « $t - \frac{x}{v}$ »), son amplitude décroît exponentiellement. Ce champ est donc amorti sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{k''}$. Une telle onde est appelée onde évanescente.

b) Aspect énergétique

Vecteur de Poynting moyen : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{E}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}\left(\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}^*}{\omega}\right)\right) = \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re}\left(|\vec{E}|^2 \vec{k} - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{k})}_{=0} \vec{E}^*\right)$

$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re}\left(-i|\vec{E}|^2 k'' \vec{u}_x\right) = \vec{0}$. L'onde évanescente ne transporte pas d'énergie.

1.5. Cas de l'ionosphère : Fréquence de coupure et ordre de grandeur

1.5.1. L'ionosphère

L'**ionosphère** est la région la plus élevée de l'atmosphère, comprise entre 80 et 800 km d'altitude.

Elle est soumise au rayonnement solaire direct qui provoque l'ionisation d'une partie des molécules et la formation d'un plasma peu dense : le plasma ionosphérique.

On distingue trois couches dans l'ionosphère :

- entre 80 et 100 km la **couche D**, composée principalement de molécules de dioxygène et de diazote, partiellement ionisées,
- entre 100 et 150 km une zone de transition appelée **couche E**,
- au dessus de 150 km la **couche F** principalement composée d'oxygène atomique partiellement ionisé.

Le processus d'ionisation met en jeu des photons du domaine ultraviolet dans les couches E et F et des photons X (particules de haute énergie) dans la couche D.

La densité électronique n_0 au sein de l'ionosphère dépend fortement du flux solaire. Elle présente donc des variations diurnes (elle est plus grande le jour que la nuit), saisonnières et dépend de l'activité solaire.

1.5.2. Ordre de grandeur et fréquence de coupure dans l'ionosphère

Les ordres de grandeur des densités numériques commune aux ions et aux électrons sont :

- $n_0 \sim 10^9 \text{ m}^{-3}$ dans la couche D,
- $n_0 \sim 10^{10} \text{ m}^{-3}$ dans la couche E,
- $n_0 \sim 10^{11} \text{ à } 10^{12} \text{ m}^{-3}$ dans la couche F.

La communication avec un satellite situé au-delà de l'ionosphère et les télécommunications par satellite nécessitent de faire propager des ondes à travers l'ionosphère. Or seule une onde de pulsation supérieure à la pulsation ω_p peut se propager dans un plasma. D'autre part la pulsation plasma augmente avec la densité

électronique, puisque : $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}} = \frac{e}{\sqrt{m_e \epsilon_0}} \sqrt{n_0} = K \sqrt{n_0}$ où $K = \frac{e}{\sqrt{m_e \epsilon_0}} = 56,3 \text{ USI}$, c'est donc dans la

couche F qu'elle est la plus grande. Ainsi, la pulsation de coupure de l'ionosphère est $(\omega_p)_{\text{couche F}} \sim 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$

et sa fréquence de coupure : $f_{C,\text{ionosphère}} = (f_p)_{\text{couche F}} \sim \mathbf{10\text{MHz}}$ (à retenir).

2. Propagation d'un paquet d'onde

Le phénomène de dispersion existe dans tous les milieux de propagation hormis le vide. On étudie ici son influence sur les ondes réelles, qui ne sont pas des ondes monochromatiques mais des superpositions d'OPPM, dans le cas de la propagation dans un milieu dispersif (par exemple un plasma) dont la relation de dispersion $k(\omega)$ est supposée connue.

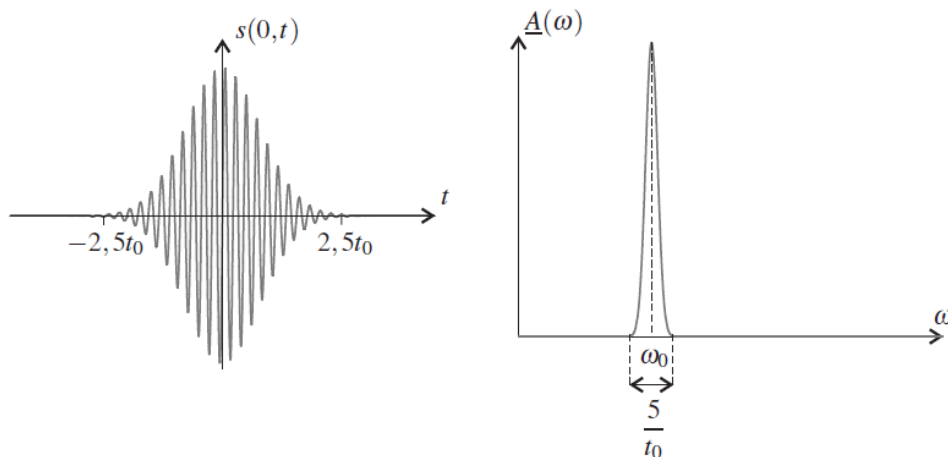
2.1. Paquet d'ondes

2.1.1. Le modèle du paquet d'ondes

Rappelons qu'un **paquet d'ondes** est la superposition d'un nombre fini ou infini d'OPPM de pulsations proches d'une pulsation moyenne ω_0 . L'écriture mathématique la plus générale d'un paquet d'ondes se propageant dans la direction et le sens de \vec{u}_x est : $s(x, t) = \text{Re} \left(\int_0^\infty \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)x)) d\omega \right)$ où $s(x, t)$ est une composante quelconque du champ électrique \vec{E} pour une onde électromagnétique et $\underline{A}(\omega)$, la fonction d'amplitude qui ne prend de valeur appréciable que si la pulsation est dans un intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} \right]$ avec $\delta\omega \ll \omega_0$. Le paquet d'ondes est un signal à durée limitée dans le temps, durée τ d'autant plus grande que la largeur $\delta\omega$ de l'intervalle de fréquence est petite. On montre en effet que : $\boxed{\delta\omega \times \tau \sim 1}$.

Exemple d'un paquet d'ondes gaussien

Un paquet d'ondes gaussien a une fonction d'amplitude $\underline{A}(\omega)$ de profil gaussien. La figure ci-dessous représente l'allure de $\underline{A}(\omega)$ et du signal en $x = 0$ d'un paquet d'ondes gaussien pour lequel ω_0 et t_0 sont telles que $\omega_0 t_0 \gg 1$, $s(0, t)$ a une durée d'environ $\tau = 5t_0$, de largeur $\delta\omega = \frac{10}{t_0} \ll \omega_0$ d'où $\delta\omega \times \tau = 2$.



Paquet d'ondes gaussien pour $\omega_0 t_0 = 10\pi$

2.1.2. Étude de deux cas

a) Signal comportant deux fréquences voisines

On considère le cas d'un paquet d'ondes réduit à deux composantes sinusoïdales de pulsations :

$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}$ avec $\delta\omega \ll \omega_0$, et de même amplitude s_0 :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k(\omega_1)x) + s_0 \cos(\omega_2 t - k(\omega_2)x + \varphi)$$

Comme $\delta\omega$ est petit on peut écrire au premier ordre, en posant $k_0 = k(\omega_0)$:

$$k(\omega_1) = k_0 - \frac{\delta k}{2} \text{ et } k(\omega_2) = k_0 + \frac{\delta k}{2} \text{ avec } \delta k = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \delta \omega$$

$$s(x, t) = 2s_0 \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k(\omega_1) + k(\omega_2)}{2} x + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k(\omega_1) - k(\omega_2)}{2} x - \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$s(x, t) = 2s_0 \cos \left(\omega_0 t - k_0 x + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\delta \omega}{2} t - \frac{\delta k}{2} x - \frac{\varphi}{2} \right)$$

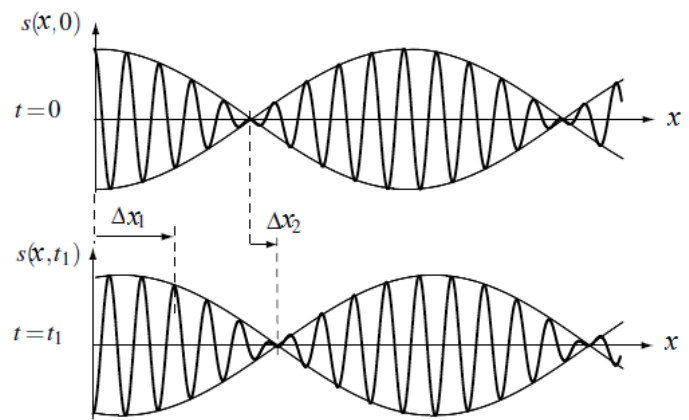
La pulsation ω_0 du premier terme est très supérieure à la pulsation $\frac{\delta \omega}{2}$ du second terme.

Les variations temporelles du premier terme sont donc beaucoup plus rapides que celles du second : le signal est constitué d'une sinusoïde de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, dont l'amplitude est modulée par une sinusoïde de période

$T_{mod} = \frac{4\pi}{\delta \omega}$ beaucoup plus grande. Sur la figure ci-dessous, la sinusoïde qui oscille lentement « enveloppe » la sinusoïde qui oscille rapidement.

Le premier terme est une onde plane progressive monochromatique de célérité $\frac{\omega_0}{k_0}$, qui n'est autre que la vitesse de phase v_φ pour la pulsation moyenne ω_0 . Le second terme est une onde plane progressive monochromatique de célérité :

$$\frac{\delta \omega}{\delta k} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = v_g(\omega_0)$$



Cette vitesse est la vitesse de groupe du paquet d'onde obtenu.

Ces deux vitesses peuvent être observées sur la figure où le signal est représenté aux instants $t = 0$ et $t = t_1 = \frac{5\pi}{\omega_0}$. Entre ces deux instants la crête qui est en $x = 0$ à $t = 0$ s'est déplacée de $\Delta x_1 = v_\varphi(\omega_0)t_1$, alors que le point d'annulation de l'enveloppe s'est déplacé de $\Delta x_2 = v_g(\omega_0)t_1$.

b) Cas de la propagation d'un paquet d'ondes gaussien

La propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans un milieu de propagation ayant la relation de dispersion :

$k(\omega) = \alpha \omega^2$ où α est une constante avec $\omega_0 = 250 \text{ rad.s}^{-1}$, $t_0 = 0,08 \text{ s}$ et $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ USI}$ est illustrée sur la figure de la page suivante aux instants successifs : $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$ et $t_3 = 3 \text{ s}$.

✓ Vitesse du paquet d'ondes

Le paquet d'ondes, localisé dans l'espace se déplace dans le sens positif le long de l'axe (Ox) avec une vitesse évaluée, en mesurant les positions x_1 , x_2 et x_3 du maximum du signal aux instants t_1 , t_2 et t_3 (ce maximum est en 0 à $t = 0$) :

$$v_{paquet} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = 124 \text{ m.s}^{-1}$$

La vitesse de phase pour la pulsation moyenne du paquet d'ondes ω_0 est :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} = \frac{1}{\alpha \omega_0} = 250 \text{ m.s}^{-1}$$

Elle ne correspond donc pas à la vitesse du paquet d'onde (étant deux fois plus grande).

La vitesse de groupe est :

$$v_g(\omega_0) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = \frac{1}{2\alpha\omega_0} = 125 \text{ m.s}^{-1}$$

La vitesse de groupe est donc la vitesse du paquet d'ondes.

✓ Etallement du paquet d'ondes

La figure montre que l'extension spatiale (l'enveloppe) du paquet d'ondes augmente au fur et à mesure qu'il se propage et que sa valeur maximale diminue. Ceci est dû au fait que la vitesse de groupe $v_g(\omega_0) = \frac{1}{2\alpha\omega_0}$ dépend de ω . Elle diminue avec ω donc

les ondes ayant les plus faibles pulsations se propagent le plus rapidement. Chaque composante monochromatique du paquet d'ondes se propageant avec sa propre vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \frac{1}{\alpha\omega}$.

2.2. Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

Les résultats des deux exemples précédents se généralise à un paquet d'ondes quelconque se propageant dans un milieu dispersif : Un paquet d'ondes se met sous la forme d'une onde moyenne se propageant à la vitesse de phase $v_g(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$ dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la vitesse de groupe

: $v_g(\omega_0) = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}}$. La vitesse de groupe dépendant elle aussi de la pulsation, le paquet

d'ondes se propage en se déformant. La vitesse de groupe, vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes, est la **vitesse de propagation de l'information**. La vitesse de groupe est donc obligatoirement inférieure à la célérité de la lumière dans le vide c afin de respecter la théorie de la relativité d'Einstein.

2.3. Retour sur la propagation dans un plasma

La relation de dispersion du plasma (paragraphe 1.2.2) : $k = \frac{1}{c} \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}$

La vitesse de phase est : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}}$

La vitesse de groupe est : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}} = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$

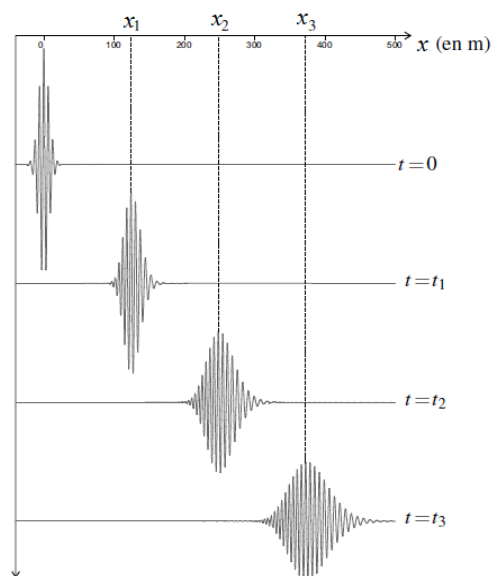
On a bien $v_g < c$ (domaine de propagation $\omega > \omega_p$).

Les vitesses de phase et de groupe sont liées par la relation : $v_g v_\phi = c^2$

Remarque :

Cette relation se retrouve en différenciant la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow 2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow \frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = c^2 \Leftrightarrow v_g v_\phi = c^2$$

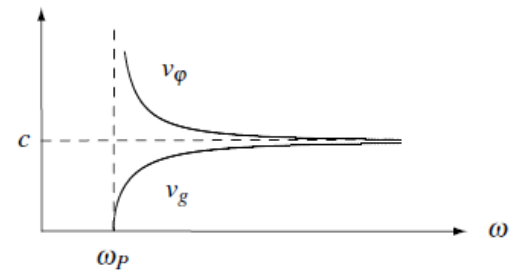


La courbe de v_g et v_ϕ en fonction de ω ci-contre montre que si $\omega \gg \omega_p$, $v_g \simeq v_\phi \simeq c$, l'onde se propage comme dans le vide car le champ électromagnétique varie trop rapidement pour provoquer des mouvements de charge dans le plasma (voir aussi paragraphe 1.3.2)

D'autre part, la vitesse de l'énergie dans le plasma est (paragraphe

$$1.4.1.b): v_e = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g$$

Dans le plasma, pour $\omega > \omega_p$, la vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de groupe.



Vitesse de phase et vitesse de groupe