Interrogation n° 3 (16 minutes)

Correction de l'exercice – (Calculs)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)(1+\mathrm{Arctan}^2(x))}\ \mathrm{d}x = \boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{Arctan}(x))} + C$ (de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$)
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Arcsin}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{1}{3}\mathrm{Arcsin}(x) + C}$ (de la forme $u'u^2$)
3. On fait une IPP pour faire partir le ln :
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\ \mathrm{d}x &= -\frac{\ln(x)}{x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}\\ &= -\frac{\ln(x)}{x+1} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\ \mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln(x)}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1) + C\\ &= \boxed{-\frac{\ln(x)}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1} + C}.\end{aligned}$$
Il n'y a ici pas besoin des valeurs absolues dans le ln, vu le domaine de définition de la fonction initiale.
4. On fait une décomposition en éléments simples, en utilisant les techniques usuelles (multiplication par $x-r$ puis évaluation en r) plutôt qu'une identification.
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)} &= \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\ \mathrm{d}x\\ &= -\ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|)\\ &= \boxed{\ln\frac{|x^2-1|}{x^2}}.\end{aligned}$$
5. On fait une double intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\ \mathrm{d}x &= x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\ \mathrm{d}x\\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\int\cos(x)\\ &= \boxed{x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C}.\end{aligned}$$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)(3-\cos^2(x))} = \int \frac{\sin(x)\ \mathrm{d}x}{(1-\cos^2(x))(3-\cos^2(x))}$.
On peut donc faire un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $y = \cos(x)$, soit $x = \mathrm{Arcsin}(y)$. Ainsi, en poursuivant avec une décompostion en éléments simples (obtenue selon la même technique que plus haut) :
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)(3-\cos^2(x))} &= -\int \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)(1+y)(\sqrt{3}-y)(\sqrt{3}+y)}\\ &= \int\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{1-y} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+y} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}-y} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}-y}\right)\ \mathrm{d}y\\ &= \boxed{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right| + C}\end{aligned}$$
7. On fait un changement de variable $x = \sin(y)$, soit $y = \mathrm{Arcsin}(x)$. Le domaine de valeurs de Arcsin impose alors $\cos(y) \geqslant 0$. Ainsi :
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\cos(y)}{|\cos^3(y)|}\ \mathrm{d}y\\ &= \int \frac{1}{\cos^2(y)}\ \mathrm{d}y\\ &= \tan(y) + C = \tan(\mathrm{Arcsin}(x)) + C = \frac{\sin(\mathrm{Arcsin}(x))}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))}\\ &= \boxed{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\end{aligned}$$

8. On se débarrasse d'abord du terme x^2 dans une division euclidienne, puis du terme en x dans une primitivation du type u'/u, et enfin, on se ramène à de l'arctangente par une mise sou forme canonique.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x &= 1 - \int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x \\
1 &= 1 - \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \boxed{1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Remarquez qu'on n'a pas besoin de valeurs absolues dans le logarithme, le trinôme du second degré ne prenant que des valeurs positives (calculez son discriminant)