Convergence d'une suite numérique

Exercice 1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.

Exercice 2 Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 3 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 4 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 5 Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \max(u_n, v_n)$.

Exercice 6 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$.
Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 7 Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leq u_n, v_n \leq 1$ et $u_n v_n \to 1$.
Que dire de ces suites ?

Calculs de limites

Exercice 8 Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ b) $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

c) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$ d) $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

e) $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k$ f) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

Exercice 9 Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin \dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$ b) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$ c) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

Exercice 10 Déterminer par comparaison, la limite des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$ b) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ c) $u_n = \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

d) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^n}$ e) $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$ f) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

g) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2 + k^2}$ h) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ i) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$.

Exercice 11 Déterminer les limites de :

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. b) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

c) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k!$ d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Exercice 12 Comparer $\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$, $\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 13 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.

b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.

c) Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 14 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.

b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.

c) Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) Etablir que pour tout $p > 1$, $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \frac{1}{p} \le \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$. En déduire la limite de (S_n).

b) Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 16 Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$.

Montrer que $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2^n} \sin a$ et déterminer $\lim_{n\infty} P_n$.

Exercice 17 Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \binom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

b) Montrer par récurrence $S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1})$.

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.

d) En déduire $\lim S_n$ en fonction de p.

Suites monotones et bornées

Exercice 18 Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose $v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

a) Montrer que (v_n) est croissante.

b) Etablir que $v_{2n} \ge \frac{u_n + v_n}{2}$.

c) En déduire que $v_n \to \ell$.

Exercice 19 Soit (u_n) une suite réelle convergente. Etudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_n$.

Exercice 20 Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose $v_n = \sup_{p \geq n} u_n$ et $w_n = \inf_{p \geq n} u_n$.

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) possèdent chacune une limite dans $\mathbb{R}$ et comparer celles-ci.
En déduire que de toute suite réelle on peut extraire une suite convergente.

Exercice 21 Somme harmonique :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $\lim_{n\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 22 On pose $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.

a) Exprimer u_n à l'aide de factoriels.
b) Montrer que (u_n) converge.
c) Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge. Déterminer $\lim u_n$.

Suites adjacentes

Exercice 23 Soit $\theta \in \left]0, \pi/2\right[$, $u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$, $v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 24 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.
On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

Exercice 25 Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz.
Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 26 Irrationalité du nombre de Néper.

Soit $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$.

a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.
On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que $a_q < \mathrm{e} < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 27 Moyenne arithmético-géométrique.
a) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir : $2\sqrt{ab} \leq a + b$.
b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a, v_0 = b$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n}, v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq v_n$, $u_n\leq u_{n+1}$ et $v_{n+1}\leq v_n$.

c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

d) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a\in\mathbb{R}^+$.

e) Exprimer $M(\lambda a,\lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

Suites extraites

Exercice 28 On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 29 Soit (u_n) une suite complexe telle que $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 30 Justifier que la suite $(\cos n)$ diverge.

Exercice 31 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$, $0\leq u_{n+p}\leq\dfrac{n+p}{np}$. Montrer que $u_n\to 0$.

Comparaison de suites numériques

Exercice 32 Classer les suites, dont les termes généraux, sont les suivants par ordre de négligeabilité :

a) $\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2},\dfrac{\ln n}{n},\dfrac{\ln n}{n^2},\dfrac{1}{n\ln n}$ b) $n,n^2,n\ln n,\sqrt{n}\ln n,\dfrac{n^2}{\ln n}$.

Exercice 33 Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

a) $u_n=\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2}$ b) $u_n=\dfrac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1}$ c) $u_n=\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

d) $u_n=(n+3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$ e) $u_n=\dfrac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$ f) $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$

Exercice 34 Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

a) $u_n=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$ b) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$ c) $u_n=\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$

d) $u_n=\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ e) $u_n=\ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$ f) $u_n=1-\cos\dfrac{1}{n}$.

Exercice 35 Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n=n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$ b) $u_n=\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$ c) $u_n=\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 36 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=0!+1!+2!+\cdots+n!=\sum_{k=0}^{n}k!$. Montrer que $u_n\sim n!$.

Exercice 37 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Justifier que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Déterminer la limite de (S_n).

c) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.

d) Donner un équivalent simple de (S_n).

Exercice 38 Soit $(u_n),(v_n),(w_n),(t_n)$ des suites de réels strictement positifs tels que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Montrer que $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.

Exercice 39 Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

a) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.

b) Donner un équivalent simple de (u_n).

Etude de suites définies implicitement

Exercice 40 Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$. Etudier la limite de (x_n).

Exercice 41 Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

b) Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 42 Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.

b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 43 Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+}*$.

a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

a) Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Montrer que (x_n) converge.

c) Déterminer la limite de (x_n).

Expression du terme général d'une suite récurrente

Exercice 45 Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$

b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 46 Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 47 Soit (z_n) une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z}_n)$.

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 48 Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$.

a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

b) Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

c) Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 49 Soit $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$.

On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

a) Exprimer z_n sous forme d'un produit.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.

Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Exercice 50 Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$.

Exercice 51 Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

a) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

b) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

c) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 52 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :
$u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0$.

Etude de suites récurrentes

Exercice 53 Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

a) Déterminer la limite de (u_n).

b) Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 54 On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$.

a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Montrer que $u_n \leq n$ puis que $u_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$.

d) Donner un équivalent simple de (u_n).

e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 55 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Exercice 56 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 57 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 58 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

Exercice 59 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.

Exercice 60 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$.

Exercice 61 Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = a \in [-2,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$

a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-2,2]$.

b) Quelles sont les limites finies possibles pour (u_n) ?

c) Montrer que $(|u_n - 1|)$ converge puis que $\lim |u_n - 1| = 0$. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 62 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$ et (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2-u_n}$.

Montrer que (u_n) est bien définie et $|u_n| < 1$. Etudier la limite de (u_n).

Exercice 63 Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$u_0 = a > 0, u_1 = b > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2$.

A quelle condition (u_n) converge ?

Exercice 64 Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

a) Etudier la convergence de la suite (u_n).

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.

c) Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $\left| u_n - \sqrt{a} \right| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

On peut alors par des calculs élémentaires, déterminer une approximation de $\sqrt{a}$.
Cette méthode était exploitée par les Babyloniens 3000 ans avant notre ère.

Exercice 65 On considère l'équation $\ln x + x = 0$ d'inconnue $x > 0$.

a) Montrer que l'équation possède une unique solution α.

b) Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle (u_n) convergeant vers α.