Logarithmes

Exercice 1 Etablir, pour tout $x \geq 0$, l'encadrement : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 2 a) Montrer que, pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 3 Montrer que pour tout $a, b > 0$, on a $\frac{1}{2}\left(\ln a + \ln b\right) \leq \ln \frac{a+b}{2}$.

Exercice 4 Soit $0 < a \leq b$. On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Etudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq \left(\ln 2\right)^2$.

Exercice 5 Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier $n > 0$ est $E\left(\log_{10} n\right)+1$.

Puissances et exponentielles

Exercice 6 Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x}\ln x^{1/x}$.

Exercice 7 Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

a) $(a^b)^c = a^{bc}$ b) $a^b a^c = a^{bc}$ c) $a^{2b} = (a^b)^2$

d) $(ab)^c = a^{c/2}b^{c/2}$ e) $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ f) $(a^b)^c = (a^c)^b$?

Exercice 8 Comparer $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{(x^x)}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^x)^x$.

Exercice 9 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x}$.

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e}+1$ b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ c) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$.

Fonctions trigonométriques

Exercice 12 Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sin x \leq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 13 Développer :

a) $\cos 3a$ b) $\tan(a+b+c)$.

Exercice 14 Calculant $\cos\frac{\pi}{8}$ en observant $2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 15 Simplifier $\frac{\cos p-\cos q}{\sin p+\sin q}$. En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{24}$.

Exercice 16 Linéariser :

a) $\cos^2 x$ b) $\cos x\sin^2 x$ c) $\cos^2 x\sin^2 x$

d) $\cos a\cos b$ e) $\cos a\cos b\cos c$.

Exercice 17 Ecrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ les expressions suivantes :

a) $\cos x+\sin x$ b) $\cos x-\sqrt{3}\sin x$.

Exercice 18 Pour $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $b\neq 0\quad[2\pi]$, calculer simultanément $\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$.

Exercice 19 Soit $x\neq 0\quad[2\pi]$.

a) Montrer que $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ en procédant par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

b) En exploitant les nombres complexes.

Exercice 20 Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x\in\mathbb{R}$.

a) $\cos(2x-\pi/3)=\sin(x+3\pi/4)$ b) $\cos^4 x+\sin^4 x=1$ c) $\sin x+\sin 3x=0$

d) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ e) $3\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{6}$ f) $2\sin x.\cos x+\sqrt{3}\cos 2x=0$.

Exercice 21 Résoudre l'équation $\tan x\tan 2x=1$.

Fonctions trigonométriques inverses

Exercice 22 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2\arccos x)$ b) $\cos(2\arcsin x)$ c) $\sin(2\arccos x)$

d) $\cos(2\arctan x)$ e) $\sin(2\arctan x)$ f) $\tan(2\arcsin x)$.

Exercice 23 Simplifier la fonction $x\mapsto\arccos(4x^3-3x)$ sur son intervalle de définition.

Exercice 24 Simplifier $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 25 Montrer que la courbe représentative de la fonction arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0,\pi/2)$.

Exercice 26 Déterminer $\lim_{x\to 0+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ à l'aide d'un changement de variable judicieux.

Exercice 27 Etudier les fonctions suivantes afin de les représenter :

a) $f : x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$,

b) $f : x \mapsto \arcsin(\sin x) + \dfrac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$,

c) $f : x \mapsto \arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$,

d) $f : x \mapsto \arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Exercice 28 Simplifier :

a) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$,

b) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$,

c) $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} + \arcsin\dfrac{16}{65}$

Exercice 29 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

a) $\arcsin x = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}$ b) $\arcsin \tan x = x$

c) $\arccos x = \arcsin 2x$ d) $\arctan x + \arctan x\sqrt{3} = \dfrac{7\pi}{12}$.

e) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \arctan x$ f) $\arcsin\dfrac{\tan x}{2} = x$

Exercice 30 On appelle argument principal d'un complexe z non nul, l'unique $\theta \in \left]-\pi,\pi\right]$ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ alors $\theta = 2\arctan\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ avec $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Exercice 31 Simplifier $\arctan a + \arctan b$ pour $a, b \geq 0$.

Exercice 32 Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.

Etudier la limite de la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\dfrac{1}{p^2+p+1}$.

Exercice 33 a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Justifier $\displaystyle 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$

d) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 34 Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{sh} x \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 35 Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Montrer que $\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\operatorname{th} x = \sin y$ et $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 36 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$.

Exercice 37 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en calculant $P_n(x)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Exercice 38 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$, observer $\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}$.

Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$.

Exercice 39 Soit a et α deux réels.

Résoudre le système d'inconnues x et y : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2a\operatorname{ch}\alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2a\operatorname{sh}\alpha \end{cases}$.

Fonctions hyperboliques inverses

Exercice 40 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$
b) $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$
c) $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$
d) $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$
e) $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$
f) $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x)$.

Exercice 41 Simplifier :

a) $\operatorname{argch}(2x^2-1)$
b) $\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$.

Exercice 42 Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\arctan(\operatorname{sh} x)\right| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$

Exercice 43 Résoudre l'équation $\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1$.

Exercice 44 Soit $G : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \operatorname{argsh}(\tan t)$.

Montrer que G est dérivable et que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $G'(t) = \operatorname{ch} G(t)$.

david Delaunay http://mpsiddl.free.fr